Methoden zur Lösungsverifikation und Einschließungsverfahren für gemischte Komplementaritätsprobleme

Zur Erlangung des akademischen Doktorgrades eines

Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Math. oec. Daniel Hammer
aus Hanau

Tag der mündlichen Prüfung:	31. Juli 2012
Referent:	Prof. Dr. Götz Alefeld
Korreferent:	Priv.-Doz. Dr. Uwe Schäfer

Danksagung

Meinen ausdrücklichen Dank möchte ich Herrn Prof. Dr. Götz Alefeld aussprechen, der das Dissertationsthema anregte, stets großes Interesse an der vorliegenden Arbeit zeigte und jederzeit gerne bereit war, deren Entstehungsprozess zu unterstützen.

Herrn Priv.-Doz. Dr. Uwe Schäfer danke ich für die Übernahme des Korreferats sowie für wertvolle Verbesserungsvorschläge.

Des Weiteren danke ich meiner Familie und meinen Freunden für den uneingeschränkten Rückhalt, welchen ich während der gesamten Promotionszeit erfahren durfte.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen 3

Einleitung 5

1 Variationsungleichungen 9

1.1 Definitionen und äquivalente Formulierungen 9

1.2 Lösbarkeitskriterien 25

2 Lösungsverifikation 29

2.1 Gemischte Komplementaritätsprobleme 29

2.2 Gemischte lineare Komplementaritätsprobleme 40

2.2.1 Intervalloperator Γ 40

2.2.2 Intervalloperator Θ 49

3 Einschließungsverfahren 59

3.1 Intervalloperator Γ 59

3.2 Intervalloperator Θ 63

4 Numerische Beispiele 71

4.1 Gemischte Komplementaritätsprobleme 71

4.2 Gemischte lineare Komplementaritätsprobleme 75

Zusammenfassung und Ausblick 81

Anhang: Intervallrechnung 83

Literaturverzeichnis 89

Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Menge der n-dimensionalen Vektoren
$\mathbb{R}^{m\times n}$	Menge der $m \times n$-Matrizen
$\mathbb{IR}$	Menge der reellen Intervalle
$\mathbb{IR}^n$	Menge der reellen Intervallvektoren
$\mathbb{IR}^{m\times n}$	Menge der $m \times n$-Intervallmatrizen
$M = (m_{ij})$	reelle Matrix
$m_{i(\cdot)}$	i-te Zeile von $M = (m_{ij})$
$\lvert M\rvert = (\lvert m_{ij}\rvert)$	Betrag von $M = (m_{ij})$
$M^+ = \frac{1}{2}(M + \lvert M\rvert)$	Positivteil der Matrix M
$M^- = \frac{1}{2}(M - \lvert M\rvert)$	Negativteil der Matrix M
$\operatorname{diag} M = (\delta_{ij} m_{ij})$	Diagonalteil von $M = (m_{ij})$
I	Einheitsmatrix
O	Nullmatrix
0	Nullvektor

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Methoden zur Lösungsverifikation und Einschließungsverfahren für *gemischte Komplementaritätsprobleme*. Gemischte Komplementaritätsprobleme sind dem Gebiet der mathematischen Optimierung zuzuordnen und besitzen diverse Anwendungen in Ingenieur- und Wirtschaftswissenschaften, siehe etwa [10].

Es existieren zahlreiche äquivalente Formulierungen für gemischte Komplementaritätsprobleme, vergleiche [8] und [9]. Insbesondere ist bekannt, dass sich eine Funktion bestimmen lässt, deren Nullstellen oder Fixpunkte genau den Lösungen des gemischten Komplementaritätsproblems entsprechen, siehe [8, 1.5.10 Example]. Um Lösungen von gemischten Komplementaritätsproblemen zu erhalten, werden deshalb häufig iterative Verfahren zur Nullstellen- oder Fixpunktbestimmung verwendet, die in der Regel eine mit Rundungsfehlern behaftete *Näherungslösung* liefern. Ein Instrument, mit dessen Hilfe die Qualität einer solchen Näherungslösung bewertet werden kann, ist die sogenannte *Lösungsverifikation*. Diese stellt computergestützte Methoden zur Verfügung, die auf der *Intervallrechnung* basieren und mit denen sich unter gewissen Voraussetzungen die Existenz einer Lösung in einem bestimmten Intervall garantieren oder ausschließen lässt. Ferner können *Einschließungsverfahren* dazu dienen, die Einschließung einer Lösung in einem Intervall zu verbessern.

Für Komplementaritätsprobleme sind Methoden zur Lösungsverifikation und Einschließungsverfahren bekannt.

In [4] wird ein Verfahren zur Lösungsverifikation für nichtlineare Komplementaritätsprobleme vorgestellt. Es beruht darauf, eine Funktion zu betrachten, deren Nullstellen genau durch die Lösungen des zugehörigen nichtlinearen Komplementaritätsproblems gegeben sind. Die Existenz einer Nullstelle von dieser Funktion in einem bestimmten Intervall ist dann äquivalent dazu, dass das Komplementaritätsproblem eine Lösung in diesem Intervall besitzt. Um diesen Existenznachweis zu erbringen, wird mit Hilfe einer Näherungslösung ein Testintervall konstruiert, in dem man die Nullstelle vermutet. Falls der Intervalloperator aus [4] das Testintervall in sich abbildet, liegt darin eine Nullstelle der Funktion.

Betrachtet man ein lineares Komplementaritätsproblem, bei dem die zugehörige Matrix einer speziellen Klasse von Matrizen zugeordnet werden kann, lässt sich ein Intervall, welches eine Lösung enthält, ohne Kenntnis einer Näherungslösung angeben. Für sogenannte *H-Matrizen* mit positiven Diagonalelementen wird dies in [2] bewiesen, indem ein Intervall konstruiert wird, das ein spezieller Intervalloperator in sich abbildet. Zudem wird in [2] ein iteratives Einschließungsverfahren vorgestellt, das gegen die Lösung des linearen Komplementaritätsproblems konvergiert, falls die zugehörige Matrix eine H-Matrix mit positiven

Diagonalelementen ist.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die Methode zur Lösungsverifikation aus [4] derart zu verallgemeinern, dass sie auf gemischte Komplementaritätsprobleme angewandt werden kann. Darüber hinaus soll untersucht werden, ob die Methoden zur Lösungsverifikation und die Einschließungsverfahren aus [2] auf gemischte lineare Komplementaritätsprobleme übertragen werden können und ob es weitere Matrix-Klassen gibt, für die eine erfolgreiche Lösungsverifikation möglich ist.

In Kapitel 1 definieren wir gemischte Komplementaritätsprobleme und zeigen, dass diese als spezielle *Variationsungleichungen* angesehen werden können. Außerdem stellen wir bereits existierende Verfahren vor, die es ermöglichen, Variationsungleichungen in gemischte Komplementaritätsprobleme oder unter gewissen Voraussetzungen sogar in lineare Komplementaritätsprobleme zu überführen. Zusätzlich geben wir bekannte Kriterien an, die gewährleisten, dass bestimmte Variationsungleichungen mit *Box-Restriktionen* eine eindeutige Lösung besitzen.

Methoden zur Lösungsverifikation für gemischte Komplementaritätsprobleme erarbeiten wir in Kapitel 2.
In Abschnitt 2.1 entwickeln wir eine Verallgemeinerung der Methode zur Lösungsverifikation aus [4], die für gemischte Komplementaritätsprobleme anwendbar ist.
Den Intervalloperator aus [2] erweitern wir in Abschnitt 2.2.1 so, dass er die Lösungsverifikation für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme ermöglicht. Wir zeigen zudem, wie sich ein Intervall berechnen lässt, welches eine Lösung des gemischten linearen Komplementaritätsproblems enthält, falls die zugehörige Matrix eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist und der zugehörige Vektor bestimmte Voraussetzungen erfüllt. Darüber hinaus geben wir eine weitere Klasse von Matrizen an, für die sich ein Intervall berechnen lässt, welches der Operator aus [2] in sich abbildet.
In Abschnitt 2.2.2 modifizieren wir ein Fixpunktproblem, welches eine äquivalente Formulierung für ein lineares Komplementaritätsproblem darstellt, derart, dass die Lösungen des modifizierten Problems ein spezielles gemischtes lineares Komplementaritätsproblem lösen. Diese Tatsache verwenden wir anschließend, um einen Intervalloperator zu definieren, der zur Lösungsverifikation für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme verwendet werden kann. Wir geben außerdem ein Kriterium an, welches sicherstellt, dass der Intervalloperator ein symmetrisches Intervall in sich abbildet, falls dieser zur Lösungsverifikation für lineare Komplementaritätsprobleme verwendet wird.

In Kapitel 3 beschäftigen wir uns mit Einschließungsverfahren für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme.
Hierbei zeigen wir in Abschnitt 3.1, dass das Einschließungsverfahren, welches mit Hilfe der Erweiterung des Intervalloperators aus Abschnitt 2.2.1 definiert wird, gegen ein *Punktintervall* konvergiert, falls die zum gemischten linearen Komplementaritätsproblem gehörende Matrix eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist. Überdies erbringen wir den Nachweis, dass die Konvergenz gegen ein Punktintervall nicht garantiert werden kann, falls

diese Matrix symmetrisch und positiv definit, aber keine H-Matrix ist.
Schließlich stellen wir in Abschnitt 3.2 mit Hilfe des Operators aus Abschnitt 2.2.2 ein neues Einschließungsverfahren vor und geben eine Bedingung an, die gewährleistet, dass das Verfahren gegen eine Lösung des zugehörigen gemischten Komplementaritätsproblems konvergiert. Des Weiteren zeigen wir, dass Matrizen existieren, welche diese Bedingung erfüllen, aber keine H-Matrizen mit positiven Diagonalelementen sind.

1 Variationsungleichungen

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels erläutern wir, dass ein *gemischtes Komplementaritätsproblem* als Spezialfall einer *Variationsungleichung mit Box-Restriktionen* angesehen werden kann, und stellen äquivalente Formulierungen für derartige Variationsungleichungen vor. Ferner geben wir an, wie sich eine Variationsungleichung mit Box-Restriktionen in ein gemischtes Komplementaritätsproblem und unter bestimmten Voraussetzungen in ein *lineares Komplementaritätsproblem* überführen lässt.

Der zweite Abschnitt dieses Kapitels widmet sich der Frage, unter welchen Voraussetzungen bestimmte Typen von Variationsungleichungen eine eindeutige Lösung besitzen.

1.1 Definitionen und äquivalente Formulierungen

Zunächst führen wir einige Schreibweisen ein. Sind $v, w \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})^n$, so definieren wir

$$v \leq w :\Longleftrightarrow v_i \leq w_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

sowie

$$v < w :\Longleftrightarrow v_i < w_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Für $l, u \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})^n$ mit $l < u$ wird die *Box* $[\![l, u]\!]$ definiert durch

$$[\![l, u]\!] := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{lll} l_i \leq x_i \leq u_i, & \text{falls} & l_i, u_i \in \mathbb{R} \\ l_i < x_i \leq u_i, & \text{falls} & l_i = -\infty, u_i \in \mathbb{R} \\ l_i \leq x_i < u_i, & \text{falls} & l_i \in \mathbb{R}, u_i = \infty \\ l_i < x_i < u_i, & \text{falls} & l_i = -\infty, u_i = \infty \end{array} \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Künftig setzen wir $l, u \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})^n$ sowie $l < u$ implizit voraus, wenn wir eine Box $[\![l, u]\!]$ betrachten.

Nun folgen Definitionen, die sich an [8, S. 2 ff.] orientieren.

Definition 1.1. Es seien $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : K \to \mathbb{R}^n$. Die Aufgabe, einen Vektor $x \in K$ zu bestimmen mit

$$(y - x)^T f(x) \geq 0 \quad \forall y \in K, \tag{1.1}$$

heißt dann

- *Variationsungleichung*,
- *Variationsungleichung mit Box-Restriktionen*, falls $K = [\![l,u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist
- *affine Variationsungleichung*, falls K ein Polyeder ist und $f(t) = Mt + q$ mit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q \in \mathbb{R}^n$,
- *affine Variationsungleichung mit Box-Restriktionen*, falls $K = [\![l,u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n$ ist und $f(t) = Mt + q$ mit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q \in \mathbb{R}^n$.

Jeder Vektor x, der (1.1) erfüllt, heißt *Lösung* der entsprechenden Variationsungleichung.

Um zu verdeutlichen, welche Daten bei den in Definition 1.1 eingeführten Problemstellungen vorgegeben sind, verwenden wir künftig die in folgender Tabelle angegebenen Schreibweisen. Dabei haben die Abkürzungen ihren Ursprung in den englischen Fachbegriffen *variational inequality* beziehungsweise *affine variational inequality*.

Aufgabenstellung	Schreibweise
Variationsungleichung	$\mathrm{VI}(K,f)$
Variationsungleichung mit Box-Restriktionen	$\mathrm{VI}([\![l,u]\!],f)$
affine Variationsungleichung	$\mathrm{AVI}(K,q,M)$
affine Variationsungleichung mit Box-Restriktionen	$\mathrm{AVI}([\![l,u]\!],q,M)$

Wir betrachten im Folgenden Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen und geben zunächst die äquivalente Formulierung einer derartigen Variationsungleichung aus [8, 1.5.10 Example] an.

Satz 1.2. *Es seien $[\![l,u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$ und $F : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch*

$$F_i(x) := \begin{cases} x_i - l_i, & \textit{falls} \quad x_i - f_i(x) \le l_i \\ f_i(x), & \textit{falls} \quad l_i < x_i - f_i(x) < u_i \\ x_i - u_i, & \textit{falls} \quad x_i - f_i(x) \ge u_i \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1,\dots,n\}. \tag{1.2}$$

Dann gilt: x ist genau dann Lösung von $\mathrm{VI}([\![l,u]\!],f)$, wenn $F(x) = 0$ ist.

Wir beweisen Satz 1.2, da in [8, 1.5.10 Example] kein Beweis angegeben ist.

Beweis von Satz 1.2. "$\Rightarrow$": Es sei $i \in \{1,\dots,n\}$ fest und x eine Lösung von $\mathrm{VI}([\![l,u]\!],f)$, das heißt, es gilt

$$(y-x)^T f(x) \ge 0 \quad \forall y \in [\![l,u]\!].$$

Zunächst zeigen wir folgende Implikationen:

$$x_i \ne l_i \Rightarrow f_i(x) \le 0 \tag{1.3}$$
$$x_i = l_i \Rightarrow f_i(x) \ge 0 \tag{1.4}$$
$$x_i \ne u_i \Rightarrow f_i(x) \ge 0 \tag{1.5}$$
$$x_i = u_i \Rightarrow f_i(x) \le 0 \tag{1.6}$$

Im Fall $x_i \neq l_i$ existiert ein $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}$ mit $l_i < \tilde{x}_i < x_i$, also ist

$$y = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in [\![l, u]\!]$$

und es gilt

$$0 \leq (y - x)^T f(x) = \underbrace{(\tilde{x}_i - x_i)}_{<0} f_i(x),$$

woraus $f_i(x) \leq 0$ folgt.
Ist $x_i = l_i$, so gibt es ein $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}$ mit $x_i < \tilde{x}_i < u_i$. Folglich ist

$$y = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \tilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)^T \in [\![l, u]\!]$$

sowie

$$0 \leq (y - x)^T f(x) = \underbrace{(\tilde{x}_i - x_i)}_{>0} f_i(x),$$

und damit erhält man $f_i(x) \geq 0$.
Die Aussagen (1.5) und (1.6) lassen sich analog beweisen.
Wir unterscheiden drei Fälle.

- Fall 1: $x_i - f_i(x) \leq l_i$
  Ist $x_i = l_i$, so erhält man $F_i(x) = x_i - l_i = 0$.
  Falls $x_i \neq l_i$ wäre, würde im Widerspruch zu (1.3)

  $$f_i(x) \geq x_i - l_i > 0$$

  folgen.

- Fall 2: $l_i < x_i - f_i(x) < u_i$
  Wenn $x_i = l_i$ oder $x_i = u_i$ wäre, würde sich unmittelbar ein Widerspruch zu (1.4) bzw. (1.6) ergeben.
  Ist $x_i \neq l_i$ und $x_i \neq u_i$, so folgt mit (1.3) und (1.5), dass sowohl $f_i(x) \leq 0$ als auch $f_i(x) \geq 0$ gelten muss. Also ist $0 = f_i(x) = F_i(x)$.

- Fall 3: $x_i - f_i(x) \geq u_i$
  Im Fall $x_i = u_i$ ergibt sich $F_i(x) = x_i - u_i = 0$.
  Wäre $x_i \neq u_i$, würde dies

  $$f_i(x) \leq x_i - u_i < 0$$

  implizieren, was (1.5) widerspricht.

Insgesamt ist also $F(x) = 0$.
"$\Leftarrow$": Es gelte $F(x) = 0$. Wir unterscheiden wieder drei Fälle für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$.

- Fall 1: $x_i - f_i(x) \leq l_i$
  Aus $0 = F_i(x) = x_i - l_i$ folgt $x_i = l_i$ und damit $f_i(x) \geq 0$, was
  $$(y_i - x_i)f_i(x) = (y_i - l_i)f_i(x) \geq 0 \quad \forall y \in [\![l, u]\!]$$
  zur Folge hat.
- Fall 2: $l_i < x_i - f_i(x) < u_i$
  Wegen $0 = F_i(x) = f_i(x)$ ist
  $$(y_i - x_i)f_i(x) = 0 \quad \forall y \in [\![l, u]\!].$$
- Fall 3: $x_i - f_i(x) \geq u_i$
  Aus $0 = F_i(x) = x_i - u_i$ folgt $x_i = u_i$ und damit $f_i(x) \leq 0$, was wiederum
  $$(y_i - x_i)f_i(x) = (y_i - u_i)f_i(x) \geq 0 \quad \forall y \in [\![l, u]\!]$$
  liefert.

Also ist für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$
$$(y_i - x_i)f_i(x) \geq 0 \quad \forall y \in [\![l, u]\!]$$
und somit
$$(y - x)^T f(x) \geq 0 \quad \forall y \in [\![l, u]\!].$$
□

Wir betrachten nun Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen, bei denen die Box $[\![l, u]\!]$ durch
$$l_i \in \{0, -\infty\} \quad \text{und} \quad u_i = \infty \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$
gegeben ist.

Für reelle Zahlen a, b beziehungsweise reelle Vektoren a, b bedeute $a \perp b$ künftig, dass das Produkt beziehungsweise Skalarprodukt von a und b Null ist.

Satz 1.3. *Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$, $u_i := \infty$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $f : [\![l, u]\!] \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt: x ist genau dann Lösung von $\mathrm{VI}([\![l, u]\!], f)$ wenn*
$$\begin{array}{rl} f_i(x) = 0, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \\ 0 \leq x_i \perp f_i(x) \geq 0, & \textit{falls} \quad l_i = 0 \end{array} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Die Bedingung $x_i - f_i(x) \geq u_i$ ist für kein $i \in \{1, \ldots, n\}$ erfüllt. Nach Satz 1.2 ist es demnach ausreichend für die Funktion $F : [\![l, u]\!] \to \mathbb{R}^n$ mit
$$F_i(x) := \begin{cases} x_i - l_i, & \text{falls} \quad x_i - f_i(x) \leq l_i \\ f_i(x), & \text{falls} \quad x_i - f_i(x) > l_i \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

zu zeigen, dass gilt:

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_i(x) = 0, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \\ 0 \leq x_i \perp f_i(x) \geq 0, & \text{falls} \quad l_i = 0 \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Es sei im Folgenden $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig.
"$\Rightarrow$":

- Fall 1: $l_i = -\infty$
  Da $x_i - f_i(x) > l_i$ gilt, ist $0 = F_i(x) = f_i(x)$.
- Fall 2: $l_i = 0$
  - Fall 2.1: $x_i - f_i(x) \leq 0$
    Es ist $0 = F_i(x) = x_i - l_i = x_i$ und damit folgt $f_i(x) \geq 0$.
  - Fall 2.2: $x_i - f_i(x) > 0$
    Es ist $0 = F_i(x) = f_i(x)$ und damit folgt $x_i > 0$.

  Insgesamt ist also $0 \leq x_i \perp f_i(x) \geq 0$.

"$\Leftarrow$":

- Fall 1: $l_i = -\infty$
  Da $x_i - f_i(x) > l_i$ gilt, ist $F_i(x) = f_i(x) = 0$.
- Fall 2: $l_i = 0$
  - Fall 2.1: $x_i = 0$
    Da $f_i(x) \geq 0$ gilt, ist $x_i - f_i(x) = -f_i(x) \leq 0$ und somit $F_i(x) = x_i - l_i = 0$.
  - Fall 2.2: $x_i > 0$
    Mit der Bedingung $x_i \perp f_i(x)$ erhält man $f_i(x) = 0$ und damit $x_i - f_i(x) = x_i > 0$, was schließlich $F_i(x) = f_i(x) = 0$ liefert.

$\square$

Definition 1.4. Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$, $u_i := \infty$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $f : [\![l, u]\!] \to \mathbb{R}^n$. Die Aufgabe, einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zu bestimmen, mit

$$\begin{matrix} f_i(x) = 0, & l_i = -\infty \\ 0 \leq x_i \perp f_i(x) \geq 0, & l_i = 0 \end{matrix} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\} \tag{1.7}$$

heißt dann

- *gemischtes Komplementaritätsproblem*,
- *gemischtes lineares Komplementaritätsproblem*, falls $f(t) = Mt + q$ ist mit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $q \in \mathbb{R}^n$.

Jeder Vektor x, der (1.7) erfüllt, heißt *Lösung* des entsprechenden gemischten Komplementaritätsproblems.

Auch für die in Definition 1.4 formulierten Problemstellungen benutzen wir abkürzende Schreibweisen, die die Abhängigkeit von den Eingangsdaten herausstellen sollen. Hierbei beruhen die Abkürzungen auf den englischen Begriffen *mixed complementarity problem* respektive *mixed linear complementarity problem*.

Aufgabenstellung	Schreibweise
gemischtes Komplementaritätsproblem	$\mathrm{MCP}(l, f)$
gemischtes lineares Komplementaritätsproblem	$\mathrm{MLCP}(l, q, M)$

Aus Satz 1.2, Satz 1.3 und der Definition von $\mathrm{MCP}(l, f)$ folgt unmittelbar

Korollar 1.5. *Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$, $u_i := \infty$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $f : [\![l, u]\!] \to \mathbb{R}^n$. Weiter sei $F : [\![l, u]\!] \to \mathbb{R}^n$ definiert durch*

$$F_i(x) := \begin{cases} x_i - l_i, & \text{falls } \; x_i - f_i(x) \leq l_i \\ f_i(x), & \text{falls } \; x_i - f_i(x) > l_i \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.8}$$

Dann gilt: x ist genau dann Lösung von $\mathrm{MCP}(l, f)$, wenn $F(x) = 0$ ist.

Gemischte Komplementaritätsprobleme sind also spezielle Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen, bei denen die Box $[\![l, u]\!]$ die Bedingung

$$l_i \in \{0, -\infty\} \quad \text{und} \quad u_i = \infty \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

erfüllt.

Wir werden zeigen, dass sich jede Variationsungleichung mit Box-Restriktionen in ein gemischtes Komplementaritätsproblem überführen lässt. Dazu verwenden wir

Lemma 1.6. *Es sei $K := [\![l, u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n$ und es gelte*

$$m := |\{i \mid i \in \{1, \ldots, n\},\ u_i < \infty\}| + |\{i \mid i \in \{1, \ldots, n\},\ l_i > -\infty\}| > 0, \tag{1.9}$$

wobei $|M|$ die Mächtigkeit einer Menge M angibt. Dann existiert eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ mit

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \tag{1.10}$$

derart, dass für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ und

$$J := \{i \mid i \in \{1, \ldots, m\},\ (Ay - b)_i = 0\}$$

die Vektoren

$$a_{i(\cdot)}^T, \ i \in J, \tag{1.11}$$

linear unabhängig sind. Dabei bezeichnet $a_{i(\cdot)}$ die i-te Zeile von A.

Beweis. Wir zeigen die Aussage zunächst für $m = 2n$. In diesem Fall ist $l_i, u_i \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wir definieren die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2n\times n}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^{2n}$ mittels

$$A := \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} u \\ -l \end{pmatrix},$$

wobei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet. Dann ist

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid l \leq x \leq u, \} = [\![l, u]\!].$$

Wegen

$$a_{1(\cdot)}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, a_{n(\cdot)}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, a_{n+1(\cdot)}^T = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, a_{2n(\cdot)}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix},$$

sind die Vektoren $a_{i(\cdot)}$, $i \in J$, linear unabhängig, falls für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ aus $i \in J$ folgt, dass $n + i \notin J$ ist. Diese Bedingung ist für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, denn es gilt

$$(Ay - b)_i = y_i - u_i \neq y_i - l_i = -(-y_i + l_i) = -(Ay - b)_{n+i} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Für beliebiges $m \in \{1, \dots, 2n - 1\}$ folgt die Aussage durch Streichen spezieller Zeilen von A und entsprechender Einträge von b. $\square$

Eine Variationsungleichung, bei der $K \neq \emptyset$ durch (1.10) gegeben ist, kann in ein gemischtes Komplementaritätsproblem überführt werden, siehe [8, Proposition 1.2.1]. Lemma 1.6 zeigt, dass sich Box-Restriktionen, für die (1.9) gilt, in der Form (1.10) schreiben lassen, wobei die Vektoren (1.11) linear unabhängig sind. Da wir [8, Proposition 1.2.1] lediglich auf Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen anwenden werden, setzen wir die lineare Unabhängigkeit der Vektoren (1.11) zusätzlich voraus. Dies motiviert

Satz 1.7. *Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, x \in \mathbb{R}^n$ und $a_{i(\cdot)}$ bezeichne die i-te Zeile von A. Die Vektoren*

$$a_{i(\cdot)}^T, \ i \in \{i \mid i \in \{1, \dots, m\}, \ (Ax - b)_i = 0\} \tag{1.12}$$

seien linear unabhängig. Weiter seien $f : K \to \mathbb{R}^n$ und $g : K \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n\times m}$ definiert durch

$$g_i(x, \lambda) := \begin{cases} (f(x) + A^T\lambda)_i, & \textit{falls} \quad i \in \{1, \dots, n\} \\ (b - Ax)_{i-n}, & \textit{falls} \quad i \in \{n + 1, \dots, n + m\} \end{cases}.$$

Außerdem sei

$$l_i := \begin{cases} -\infty, & \textit{falls} \quad i \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \textit{falls} \quad i \in \{n + 1, \dots, n + m\} \end{cases}.$$

Dann gilt: $x \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung von $\mathrm{VI}(K, f)$, wenn ein eindeutig bestimmter Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ existiert, für den $(x, \lambda)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ Lösung von MCP(l, g) ist.

Beweis. Wir verwenden den Beweis von [8, Proposition 1.2.1] und zeigen zudem, dass die lineare Unabhängigkeit der Vektoren (1.12) die Eindeutigkeit des Vektors λ gewährleistet.

Definitionsgemäß ist x genau dann Lösung von $\mathrm{VI}(K, f)$, wenn

$$(y-x)^T f(x) \geq 0 \quad \forall y \in K$$

gilt. Das ist wiederum genau dann der Fall, wenn x das Minimierungsproblem für die Variable y

$$\min_{y \in K} y^T f(x) \tag{1.13}$$

löst. Setzt man $F(y) := y^T f(x)$, so lässt sich (1.13) schreiben als

$$\min F(y) \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad Ay \leq b. \tag{1.14}$$

Mit den Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen, siehe beispielsweise [15, Korollar 4.2.6], folgt unter Berücksichtigung von $\operatorname{grad} F(y) = f(x)$, dass x das Minimierungsproblem (1.14) genau dann löst, wenn ein Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ existiert mit

$$\begin{gathered} f(x) + A^T \lambda = 0 \\ 0 \leq (b - Ax) \perp \lambda \geq 0 \end{gathered}$$

beziehungsweise

$$\begin{array}{rl} f_i(x) + (A^T\lambda)_i = 0, & \text{falls} \quad i \in \{1, \ldots, n\} \\ 0 \leq (b - Ax)_{i-n} \perp \lambda_{i-n} \geq 0, & \text{falls} \quad i \in \{n+1, \ldots, n+m\} \end{array},$$

das heißt, genau dann, wenn (x, λ) $\mathrm{MCP}(l, g)$ löst. Die lineare Unabhängigkeit der Vektoren (1.12) hat mit [5, Theorem 4.3.7] zur Folge, dass die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen einen eindeutigen Vektor λ liefern. □

Die Anwendung von [8, Proposition 1.2.1] auf eine affine Funktion f wird in [8, S. 10 f.] erläutert. In Analogie dazu wenden wir Satz 1.7 auf eine affine Funktion f an und erhalten

Korollar 1.8. *Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}, x \in \mathbb{R}^n$ und $a_{i(\cdot)}$ bezeichne die i-te Zeile von A. Die Vektoren*

$$a_{i(\cdot)}^T, \; i \in \{i \mid i \in \{1, \ldots, m\}, \; (Ax - b)_i = 0\} \tag{1.15}$$

seien linear unabhängig. Weiter seien $q \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie

$$\overline{M} := \begin{pmatrix} M & A^T \\ -A & O \end{pmatrix}, \quad \overline{q} := \begin{pmatrix} q \\ b \end{pmatrix}$$

und

$$\bar{l}_i := \begin{cases} -\infty, & \textit{falls} \quad i \in \{1, \ldots, n\} \\ 0, & \textit{falls} \quad i \in \{n+1, \ldots, n+m\} \end{cases}.$$

Dann gilt: x ist genau dann Lösung von $\mathrm{AVI}(K, q, M)$, wenn ein eindeutig bestimmter Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ existiert, für den $(x, \lambda)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ $\mathrm{MLCP}\left(\bar{l}, \overline{q}, \overline{M}\right)$ löst.

Beweis. Die Aussage folgt für $f(x) := Mx + q$ und

$$g(x,\lambda) := \overline{M}\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} + \overline{q} = \begin{pmatrix} f(x) + A^T\lambda \\ b - Ax \end{pmatrix}$$

aus Satz 1.7. $\square$

Beispiel 1.9. *Wir betrachten für*

$$l := \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -\infty \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{AVI}([\![l,u]\!], q, M)$*. Setzt man*

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} = [\![l,u]\!]$$

und die Vektoren

$$a_{i(\cdot)}^T, \ i \in \{i \mid i \in \{1,2,3\}, \ (Ax-b)_i = 0\}$$

sind für beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$ *linear unabhängig. Aus Korollar 1.8 folgt nun, dass* $x \in \mathbb{R}^3$ $\mathrm{AVI}([\![l,u]\!], q, M)$ *genau dann löst, wenn ein eindeutig bestimmter Vektor* $\lambda \in \mathbb{R}^3$ *existiert, für den* $(x,\lambda)^T \in \mathbb{R}^6$ *Lösung von* $\mathrm{MLCP}\left(\overline{l}, \overline{q}, \overline{M}\right)$ *ist mit*

$$\overline{l} := \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{q} := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Lemma 1.6 und Satz 1.7 folgt, dass sich jede Variationsungleichung mit Box-Restriktionen in ein gemischtes Komplementaritätsproblem transformieren lässt. Falls $u_i = \infty$ ist für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$, so ist dies sogar unter Erhaltung der Dimension n möglich. Dieses Resultat formulieren wir in

Satz 1.10. *Für alle* $i \in \{1,\ldots,n\}$ *seien* $l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $u_i := \infty$ *sowie*

$$\overline{l}_i := \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases} \quad \text{und} \quad z_i := \begin{cases} l_i \\ 0 \end{cases}, \quad \text{falls} \quad \begin{cases} l_i \in \mathbb{R} \\ l_i = -\infty \end{cases}.$$

Weiter seien $f : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$ *und* $g : [\![\bar{l},u]\!] \to \mathbb{R}^n$ *definiert durch*

$$g(y) := f(y+z).$$

Dann gilt: x *mit*

$$x_i := \begin{cases} y_i + l_i, & \text{falls} \quad l_i \in \mathbb{R} \\ y_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1,\dots,n\}$$

ist genau dann Lösung von $\mathrm{VI}([\![l,u]\!], f)$*, wenn* $y \in \mathbb{R}^n$ *Lösung von* $MCP\big(\bar{l}, g\big)$ *ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass für beliebiges $i \in \{1,\dots,n\}$ und

$$F_i(t) := \begin{cases} t_i - l_i, & \text{falls} \quad t_i - f_i(t) \le l_i \\ f_i(t), & \text{falls} \quad t_i - f_i(t) > l_i \end{cases}$$

respektive

$$G_i(s) := \begin{cases} s_i - \bar{l}_i, & \text{falls} \quad s_i - g_i(s) \le \bar{l}_i \\ g_i(s), & \text{falls} \quad s_i - g_i(s) > \bar{l}_i \end{cases}$$

$F_i(x) = G_i(y)$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus Satz 1.2 und Korollar 1.5.
Es sei also $i \in \{1,\dots,n\}$ beliebig. Wir unterscheiden mehrere Fälle und verwenden jeweils die Beziehung $y = x - z$, welche unmittelbar aus der Definition von x und z folgt.

- Fall 1: $l_i \in \mathbb{R}$
  Für $l_i \in \mathbb{R}$ ist $\bar{l}_i = 0$ und $z_i = l_i$.
  - Fall 1.1: $x_i - f_i(x) \le l_i$
    Wegen
    $$y_i - g_i(y) = y_i - f_i(y+z) = x_i - z_i - f_i(x) = x_i - f_i(x) - l_i \le 0 = \bar{l}_i$$
    folgt
    $$G_i(y) = y_i - \bar{l}_i = x_i - z_i = x_i - l_i = F_i(x).$$
  - Fall 1.2: $x_i - f_i(x) > l_i$
    Mit
    $$y_i - g_i(y) = x_i - f_i(x) - l_i > 0 = \bar{l}_i$$
    erhält man
    $$G_i(y) = g_i(y) = f_i(y+z) = f_i(x) = F_i(x).$$
- Fall 2: $l_i = -\infty$
  Für $l_i = -\infty$ ist $\bar{l}_i = -\infty$ und somit
  $$y_i - g_i(y) > \bar{l}_i,$$
  woraus
  $$G_i(y) = g_i(y) = f_i(y+z) = f_i(x) = F_i(x)$$
  folgt. $\square$

Für eine affine Funktion f folgt aus Satz 1.10 direkt

Korollar 1.11. *Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ seien $l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $u_i := \infty$ sowie*

$$\bar{l}_i := \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases} \quad \text{und} \quad z_i := \begin{cases} l_i \\ 0 \end{cases}, \quad \text{falls} \quad \begin{cases} l_i \in \mathbb{R} \\ l_i = -\infty \end{cases}.$$

Weiter seien $q \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\overline{q} := Mz + q$. Dann gilt: $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$x_i := \begin{cases} y_i + l_i, & l_i \in \mathbb{R} \\ y_i, & l_i = -\infty \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

ist genau dann Lösung von $\mathrm{AVI}([\![l, u]\!], q, M)$, wenn $y \in \mathbb{R}^n$ Lösung von $\mathrm{MLCP}\left(\bar{l}, \overline{q}, M\right)$ ist.

Beispiel 1.12. *Wir betrachten für $c \in \mathbb{R}$, gerades $n \in \mathbb{N}$ und $l, u \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})^n, q \in \mathbb{R}^n$ sowie $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit*

$$l := \begin{pmatrix} -\infty \\ c \\ \vdots \\ -\infty \\ c \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} \infty \\ \vdots \\ \infty \end{pmatrix}, \quad q := -\begin{pmatrix} 1 \\ c+1 \\ 2c+1 \\ \vdots \\ (n-1)c+1 \end{pmatrix}$$

und

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{AVI}([\![l, u]\!], q, M)$. *Mit Korollar 1.11 erhält man, dass*

$$x := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + c \\ y_3 \\ y_4 + c \\ \vdots \\ y_n + c \end{pmatrix}$$

genau dann Lösung von $\mathrm{AVI}([\![l, u]\!], q, M)$ ist, wenn y Lösung von $\mathrm{MLCP}\left(\bar{l}, \overline{q}, M\right)$ ist mit

$$\bar{l} := \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ \vdots \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{q} := M \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + q = \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1.13. *Wir untersuchen für*

$$l := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -\infty \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}, \quad q := \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad M := 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{AVI}([\![l, u]\!], q, M)$. *Mit Korollar 1.11 erhält man, dass*

$$x := \begin{pmatrix} y_1 - 1 \\ y_2 \\ y_3 + 2 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

genau dann Lösung von $\mathrm{AVI}([\![l, u]\!], q, M)$ *ist, wenn* y *Lösung von* $\mathrm{MLCP}\left(\bar{l}, \bar{q}, M\right)$ *ist mit*

$$\bar{l} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \bar{q} := M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + q = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten noch einen weiteren Spezialfall und zwar Variationsungleichungen mit den Box-Restriktionen $l_i = 0$ und $u_i = \infty$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich mit Hilfe von Satz 1.3

Korollar 1.14. *Es sei* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:* x *ist genau dann Lösung von* $\mathrm{VI}(\mathbb{R}^n_+, f)$, *wenn für alle* $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$0 \leq x_i \perp f_i(x) \geq 0$$

gilt.

Definition 1.15. Es sei $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$. Die Aufgabe, einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ zu bestimmen, mit

$$0 \leq x_i \perp f_i(x) \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \tag{1.16}$$

heißt dann

- *nichtlineares Komplementaritätsproblem*,
- *lineares Komplementaritätsproblem*, falls $f(t) = Mt + q$ ist mit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ q \in \mathbb{R}^n$.

Jeder Vektor x, der (1.16) erfüllt, heißt *Lösung* des entsprechenden Komplementaritätsproblems.

Es ist leicht einzusehen, dass (1.16) genau dann erfüllt ist, wenn

$$\min\{x_i, f_i(x)\} = 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

gilt.

Die folgenden abkürzenden Schreibweisen basieren auf den englischen Fachbegriffen *nonlinear complementarity problem* beziehungsweise *linear complementarity problem.*

Aufgabenstellung	Schreibweise
nichtlineares Komplementaritätsproblem	NCP(f)
lineares Komplementaritätsproblem	LCP(q, M)

Lineare Komplementaritätsprobleme werden in [7] und [22] ausführlich behandelt, eine Einführung in die Problemstellung stellt [25] dar.

Komplementaritätsprobleme sind Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen, bei denen die Box $[\![l, u]\!]$

$$l_i = 0 \quad \text{und} \quad u_i = \infty \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

genügt. Jede Variationsungleichung mit Box-Restriktionen lässt sich, wie wir bereits gesehen haben, in ein gemischtes Komplementaritätsproblem transformieren. Falls f affin ist, gibt es ferner Variationsungleichungen, die sich in lineare Komplementaritätsprobleme überführen lassen, was in [8, S. 11 f.] gezeigt wird. Wir halten dies fest in

Satz 1.16. *Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Die Vektoren*

$$a_{i(\cdot)}^T, \; i \in \{i \mid i \in \{1, \dots, m\}, \; (Ax - b)_i = 0\} \tag{1.17}$$

seien linear unabhängig. Weiter seien $q \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und

$$\overline{\overline{q}} := b + AM^{-1}q \quad \textit{sowie} \quad \overline{\overline{M}} := AM^{-1}A^T.$$

Dann gilt: x ist genau dann Lösung von $\mathrm{AVI}(K, q, M)$, wenn ein eindeutig bestimmter Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ existiert, der das lineare Komplementaritätsproblem

$$0 \le y_i \perp \left(\overline{\overline{M}}y + \overline{\overline{q}}\right)_i \ge 0 \quad \textit{für alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

löst und

$$x = -M^{-1}(A^T y + q)$$

erfüllt.

Beweis. Wir führen den Beweis, wie er in [8, S. 11 f.] skizziert wird. Korollar 1.8 besagt, dass x genau dann Lösung von $\mathrm{AVI}(K, q, M)$ ist, wenn ein eindeutig bestimmter Vektor $(x, y)^T \in \mathbb{R}^{n+m}$ existiert, der das gemischte lineare Komplementaritätsproblem

$$\begin{aligned} Mx + A^T y + q = 0 \\ 0 \le b - Ax \perp y \ge 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

löst. Da M regulär ist, lässt sich die erste Gleichung nach x auflösen und man erhält

$$x = -M^{-1}\left(A^T y + q\right).$$

Damit folgt

$$b - Ax = b + AM^{-1}\left(A^T y + q\right) = b + AM^{-1}q + AM^{-1}A^T y = \bar{\bar{q}} + \overline{\overline{M}} y,$$

das heißt, (1.18) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x &= -M^{-1}\left(A^T y + q\right) \\ 0 \le \bar{\bar{q}} &+ \overline{\overline{M}} y \perp y \ge 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

□

Beispiel 1.17. *Wir betrachten wie in Beispiel 1.9 für*

$$l := \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -\infty \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{AVI}([\![l,u]\!], q, M)$ *und definieren wie in Beispiel 1.9*

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} = [\![l,u]\!]$$

und die Vektoren

$$a_{i(\cdot)}^T, \ i \in \{i \mid i \in \{1,2,3\}, \ (Ax-b)_i = 0\}$$

sind für beliebiges $x \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Aus Satz 1.16 folgt nun, dass $x \in \mathbb{R}^3$ genau dann Lösung von $\mathrm{AVI}([\![l,u]\!], q, M)$ ist, wenn ein eindeutig bestimmter Vektor $y \in \mathbb{R}^3$ existiert, der für

$$\bar{\bar{q}} := b + AM^{-1}q = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und

$$\overline{\overline{M}} := AM^{-1}A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{LCP}\left(\bar{\bar{q}}, \overline{\overline{M}}\right)$ *löst und*

$$x = -M^{-1}(A^T y + q)$$

erfüllt.

Beispiel 1.18. *In Beispiel 1.13 wurde* $\mathrm{AVI}([\![l,u]\!],q,M)$ *mit*

$$l := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -\infty \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \end{pmatrix}, \quad q := \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad M := 2\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in ein gemischtes lineares Komplementaritätsproblem überführt. Nun transformieren wir dieselbe Variationsungleichung in ein lineares Komplementaritätsproblem. Für

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ist

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\} = [\![l,u]\!]$$

und die Vektoren

$$a_{i(\cdot)}^T,\ i \in \{i \mid i \in \{1,2,3\},\ (Ax-b)_i = 0\}$$

sind für beliebiges $x \in \mathbb{R}^4$ *linear unabhängig. Mit Satz 1.16 erhält man also, dass* x *genau dann Lösung von* $\mathrm{AVI}([\![l,u]\!],q,M)$ *ist, wenn ein eindeutig bestimmter Vektor* $y \in \mathbb{R}^3$ *existiert, der für*

$$\overline{\overline{q}} := b + AM^{-1}q = \begin{pmatrix} -6 \\ \frac{15}{2} \\ -7 \end{pmatrix}$$

und

$$\overline{\overline{M}} := AM^{-1}A^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{LCP}\,(\overline{\overline{q}}, \overline{\overline{M}})$ *löst und*

$$x = -M^{-1}(A^T y + q)$$

genügt.

Mit Lemma 1.6 und Satz 1.16 folgt also, dass sich jede affine Variationsungleichung mit Box-Restriktionen in ein lineares Komplementaritätsproblem transformieren lässt, falls die zugehörige Matrix regulär ist. In Abhängigkeit von der Zielsetzung kann es aber vorteilhaft sein, eine affine Variationsungleichung mit Hilfe von Korollar 1.11 in ein gemischtes lineares Komplementaritätsproblem umzuwandeln, auch wenn Satz 1.16 anwendbar ist. Dies werden wir in Abschnitt 2.2.2 genauer erläutern.

Im Folgenden wollen wir uns vorrangig mit zwei Spezialfällen einer Variationsungleichung mit Box-Restriktionen befassen und zwar mit gemischten Komplementaritätsproblemen respektive Komplementaritätsproblemen. Wir entwickeln für diese Problemklassen Methoden zur Lösungsverifikation und zur Lösungseinschließung.

Da sich jede Variationsungleichung mit Box-Restriktionen in ein gemischtes Komplementaritätsproblem und unter gewissen Voraussetzungen sogar in ein Komplementaritätsproblem überführen lässt, können einige der erarbeiteten Methoden auch zur Lösungsverifikation und zur Lösungseinschließung bei Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen in allgemeiner Form verwendet werden.

1.2 Lösbarkeitskriterien

Wir beschäftigen uns im weiteren Verlauf vorrangig mit Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen, die eine eindeutige Lösung besitzen und geben nun Kriterien an, welche die Existenz einer eindeutigen Lösung gewährleisten. Vorab formulieren wir dazu in Anlehnung an [8, Definition 3.5.8]

Definition 1.19. Es seien $[\![l,u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt f

- *P-Funktion auf* $[\![l,u]\!]$, wenn für alle $x, y \in [\![l,u]\!]$ mit $x \neq y$ gilt

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} (x_i - y_i)(f_i(x) - f_i(y)) > 0, \tag{1.20}$$

- *gleichmäßige P-Funktion auf* $[\![l,u]\!]$, wenn eine Konstante $\mu > 0$ existiert mit

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} (x_i - y_i)(f_i(x) - f_i(y)) \geq \mu \|x - y\|_2^2.$$

  für alle $x, y \in [\![l,u]\!]$. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm.

Addiert man zu einer P-Funktion eine Funktion, die gewissen Voraussetzungen genügt, so erhält man wiederum eine P-Funktion.

Satz 1.20 ([21, Theorem 3.3])**.** *Es seien* $[\![l,u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $f : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$ *eine P-Funktion. Die Funktion* $g : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$ *sei definiert durch streng monoton wachsende Funktionen*

$$g_i : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R} \quad \textit{für alle } i \in \{1,\dots,n\},$$

wobei g_i *ausschließlich von* x_i *abhänge. Dann ist* $h : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$*, definiert durch*

$$h(x) := f(x) + g(x),$$

eine P-Funktion.

[8, Proposition 3.5.10] liefert ein Kriterium, das die eindeutige Lösbarkeit einer Variationsungleichung mit Box-Restriktionen sichert.

Satz 1.21. *Es seien* $[\![l,u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $f : [\![l,u]\!] \to \mathbb{R}^n$ *eine gleichmäßige P-Funktion auf* $[\![l,u]\!]$*. Dann besitzt* $\mathrm{VI}([\![l,u]\!], f)$ *eine eindeutige Lösung.*

Für eine affine Funktion

$$f(x) = Mx + q \quad \text{mit} \quad q \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist (1.20) äquivalent zu

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} (x_i - y_i)(M(x - y))_i > 0.$$

Dies motiviert die [12, Definition 3.4] entnommene

Definition 1.22. Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und für beliebiges $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z \neq 0$ gelte

$$\max_{i\in\{1,\dots,n\}} z_i(Mz)_i > 0. \tag{1.21}$$

Dann heißt M *P-Matrix.*

Um eine zu (1.21) äquivalente Bedingung vorzustellen, erinnern wir an eine weitere Definition, vergleiche [7, S. 59].

Definition 1.23. Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $J \subset \{1,\dots,n\}$ und $M(J)$ die Matrix, die aus M durch Streichen der j-ten Zeile und der j-ten Spalte für alle $j \in J$ hervorgeht. Dann heißt die Determinante der Matrix $M(J)$

- *Hauptminor der Matrix M*,
- *führender Hauptminor der Matrix M*, falls $J = \emptyset$ oder $J = \{k, k+1, \dots, n\}$ ist für ein $k \in \{2,\dots,n\}$.

Die Aussage des nachstehenden Lemmas inklusive Beweis findet sich in [12, S. 385 f.].

Lemma 1.24. *Eine Matrix M ist genau dann eine P-Matrix, wenn alle Hauptminoren von M positiv sind.*

Falls $q \in \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine P-Matrix ist, erhält man mit [21, Lemma 3.12], dass

$$f(x) = Mx + q$$

eine gleichmäßige P-Funktion ist. Infolgedessen liefert Satz 1.21

Korollar 1.25. *Es seien $[\![l,u]\!] \subseteq \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine P-Matrix. Dann besitzt* $\mathrm{AVI}([\![l,u]\!], q, M)$ *eine eindeutige Lösung.*

Die Bedingung, dass M eine P-Matrix ist, ist hinreichend, aber nicht notwendig dafür, dass eine affine Variationsungleichung mit Box-Restriktionen eine eindeutige Lösung besitzt.

Beispiel 1.26. *Die Matrix*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ist eine P-Matrix, da sie ausschließlich positive Hauptminoren besitzt, und mit Korollar 1.25 folgt, dass $\mathrm{AVI}([\![l,u]\!], q, M)$ *aus Beispiel 1.9 und somit auch die affine Variationsungleichung* $\mathrm{MLCP}\left(\bar{l}, \overline{q}, \overline{M}\right)$ *aus selbigem Beispiel eine eindeutige Lösung besitzt. Die Matrix*

$$\overline{M} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist aber keine P-Matrix, was direkt aus Definition 1.23 und Lemma 1.24 folgt, da die Determinante von $\overline{M}(\{1, 2, \ldots, 5\})$ *Null ist.*

Im Falle eines linearen Komplementaritätsproblems ist die Bedingung, dass M eine P-Matrix ist, notwendig und hinreichend dafür, dass $\mathrm{LCP}(q, M)$ für alle $q \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung besitzt.

Satz 1.27 ([7, Theorem 3.3.7])**.** *Es sei* $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Dann gilt:* $\mathrm{LCP}(q, M)$ *besitzt genau dann eine eindeutige Lösung für alle* $q \in \mathbb{R}^n$*, wenn* M *eine P-Matrix ist.*

2 Lösungsverifikation

Zur Lösung von Variationsungleichungen mit Box-Restriktionen existieren zahlreiche Algorithmen, siehe beispielsweise [9, Chapter 10]. Algorithmen speziell zur Lösung von linearen Komplementaritätsproblemen findet man unter anderem in [22, Chapter 2, 4, 8, 9] und [7, Chapter 4, 5]. Dabei gibt es Algorithmen, die nach endlich vielen Schritten abbrechen, und sogenannte *iterative Verfahren*.

Iterative Verfahren werden so lange fortgesetzt, bis ein vorgegebenes Abbruchkriterium erfüllt ist, welches in der Regel so gewählt wird, dass die erhaltene *Näherungslösung* bestimmten Anforderungen bezüglich der Genauigkeit genügt. Durch die Existenz einer derartigen Näherungslösung ist aber nicht gesichert, dass tatsächlich eine Lösung existiert, siehe [3, Example 4.5]. Bei der Durchführung von Iterationsverfahren mit Hilfe eines Computerprogramms kommt erschwerend hinzu, dass die Näherungslösung meist mit Rundungsfehlern behaftet ist.

Gegenstand der sogenannten *Lösungsverifikation* sind Verfahren, mit denen sich unter gewissen Voraussetzungen die Existenz einer Lösung in einem bestimmten Intervall ausschließen beziehungsweise garantieren lässt. Die Realisierung von Verifikationsmethoden erfolgt mit geeigneter Software, welche die Methoden der *Intervallrechnung* umsetzt, und die Berücksichtigung von Rundungsfehlern ermöglicht. Eine kurze Einführung in die Konzepte der Intervallrechung sowie die Erläuterung der in dieser Arbeit benötigten Begriffe aus dem Gebiet der Intervallrechnung findet sich im Anhang.

2.1 Gemischte Komplementaritätsprobleme

Gemäß Korollar 1.5 sind die Lösungen eines gemischten Komplementaritätsproblems durch die Nullstellen der Funktion (1.8) gegeben. Aus diesem Grund konstruieren wir nun ein Verfahren, mit dem sich unter bestimmten Voraussetzungen nachweisen lässt, dass die Funktion (1.8) eine Nullstelle in einem Intervall $[x] \in \mathbb{IR}^n$ besitzt.

Dazu benötigen wir folgenden Satz, der sich nebst Beweis in [20, S. 612] findet. Den Beweis geben wir ebenfalls wieder, weil dieser grundlegend für unsere Vorgehensweise in diesem Kapitel ist. Im Folgenden bezeichne I die Einheitsmatrix.

Satz 2.1. *Es seien $[x] \in \mathbb{IR}^n, x \in [x]$ fest und für die Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiere $F'([x])$. Weiter seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und*

$$K(x, A, [x]) := x - AF(x) + \big(I - AF'([x])\big)\,([x] - x)\,.$$

Ist dann

$$K(x, A, [x]) \subseteq [x],$$

so besitzt F eine Nullstelle $\hat{x} \in [x]$. Besitzt F eine Nullstelle $\hat{x} \in [x]$, so ist $\hat{x} \in K(x, A, [x])$.

Beweis. Für die Funktion $p : [x] \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$p(y) := y - AF(y),$$

und festes $x \in [x]$ gilt

$$\begin{aligned} p(y) &= x - AF(x) + y - x - A(F(y) - F(x)) \\ &\in x - AF(x) + y - x - AF'([x])(y - x) \\ &= x - AF(x) + \big(I - AF'([x])\big)(y - x) \\ &\subseteq x - AF(x) + \big(I - AF'([x])\big)([x] - x) \\ &= K(x, A, [x]) \end{aligned}$$

für beliebiges $y \in [x]$. Ist $K(x, A, [x]) \subseteq [x]$, so folgt mit der Stetigkeit von p und dem Fixpunktsatz von Brouwer, siehe etwa [13, 228.1], dass p einen Fixpunkt $\hat{x} \in [x]$ besitzt, das heißt,

$$\hat{x} = p(\hat{x}) = \hat{x} - AF(\hat{x}).$$

Da A regulär ist, besitzt F also eine Nullstelle $\hat{x} \in [x]$.
Falls $\hat{x} \in [x]$ eine Nullstelle von F ist, so ist $\hat{x}$ Fixpunkt von p und damit folgt

$$\hat{x} = p(\hat{x}) \in K(x, A, [x]).$$

□

Eine direkte Folge aus der zweiten Aussage von Satz 2.1 ist, dass F keine Nullstelle $\hat{x} \in [x]$ besitzt, falls

$$K(x, A, [x]) \cap [x] = \emptyset$$

gilt. Den sogenannten *Krawczyk-Operator* $K(x, A, [x])$ findet man erstmals in [16, S. 199]. Für die Funktion (1.8) ist der Krawczyk-Operator

$$K(x, A, [x]) = x - AF(x) + \big(I - AF'([x])\big)([x] - x)$$

nicht anwendbar, da $F(x)$ im Allgemeinen nicht differenzierbar ist. Der Beweis von Satz 2.1 beruht darauf, dass für festes $x \in [x]$

$$F(x) - F(y) \in F'([x])(x - y) \quad \forall y \in [x]$$

erfüllt ist, was in [19, S. 48] gezeigt wird. Aus diesem Grund bestimmen wir nun eine Intervallmatrix $\delta F(x, [x])$ so, dass für festes $x \in [x]$

$$F(x) - F(y) \in \delta F(x, [x])(x - y) \quad \forall y \in [x] \tag{2.1}$$

gilt und modifizieren den Krawczyk-Operator, indem wir $F'([x])$ durch $\delta F(x,[x])$ ersetzen. Für den so erhaltenen Intervalloperator lässt sich dann ein zu Satz 2.1 analoger Satz beweisen, welcher auf die Funktion (1.8) anwendbar ist und somit zur Lösungsverifikation für gemischte Komplementaritätsprobleme dienen kann. Diese Vorgehensweise ist [4] entnommen, wo sie verwendet wird, um ein Verfahren zur Lösungsverifikation für nichtlineare Komplementaritätsprobleme zu entwickeln. Bevor wir die Intervallmatrix $\delta F(x,[x])$ bestimmen, führen wir den Begriff der *Steigung* analog zur Definition in [17, S. 608] ein.

Definition 2.2. Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und $[x] \in \mathbb{IR}^n$. Dann heißt eine Funktion

$$\delta f : [x] \times [x] \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit der Eigenschaft

$$f(x) - f(y) = \delta f(x,y)(x-y) \quad \forall x,y \in [x],$$

Steigung von f.

Bemerkung 2.3. Ist eine Steigung δf von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bekannt und wird $\mathrm{VI}([\![l,u]\!], f)$ mittels Satz 1.7 in $\mathrm{MCP}(l,g)$ überführt, so wird durch

$$\delta g(x,y) := \begin{pmatrix} \delta f(x,y) & A^T \\ -A & O \end{pmatrix}$$

eine Steigung von g definiert.

Um für die Funktion (1.8) eine Intervallmatrix $\delta F(x,[x])$ mit der Eigenschaft (2.1) zu konstruieren, bestimmen wir vorab eine Steigung $\delta F(x,y)$ von (1.8).

Satz 2.4. *Es sei $[x] \in \mathbb{IR}^n, \delta f$ eine Steigung von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und δf_i die i-te Zeile von δf. Für alle $i \in \{1,\dots,n\}$ seien $l_i \in \{0,-\infty\}$ und die i-te Zeile der Matrix $\delta F(x,y)$ definiert durch*

$\delta F_i(x,y)$	$y_i - f_i(y) \le l_i$	$y_i - f_i(y) > l_i$
$x_i - f_i(x) \le l_i$	e_i^T	$\alpha_i(x,y)\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T$
$x_i - f_i(x) > l_i$	$(1-\alpha_i(x,y))\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T$	$\delta f_i(x,y)$

(2.2)

mit

$$\alpha_i(x,y) := \frac{(y-f(y))_i}{(y-f(y))_i - (x-f(x))_i}.$$

Dann ist $\delta F(x,y)$ eine Steigung von $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$F_i(x) := \begin{cases} x_i - l_i, & \textit{falls} \quad x_i - f_i(x) \le l_i \\ f_i(x), & \textit{falls} \quad x_i - f_i(x) > l_i \end{cases} \qquad \textit{für alle } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Ist $l_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so reduziert sich Satz 2.4 auf [4, Lemma 2.1]. Der Beweis dieses Lemmas liefert den zweiten Teil des folgenden Beweises.

Beweis von Satz 2.4. Es seien $i \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig, $x \in [x]$ fest und $y \in [x]$ beliebig. Wir unterscheiden mehrere Fälle:

- Fall 1: $l_i = -\infty$
  Wegen $x_i - f_i(x) > l_i$ und $y_i - f_i(y) > l_i$ ist
  $$F_i(x) - F_i(y) = f_i(x) - f_i(y) = \delta f_i(x,y)(x-y) = \delta F_i(x,y)(x-y).$$
- Fall 2: $l_i = 0$
  - Fall 2.1: $x_i - f_i(x) \leq 0$ und $y_i - f_i(y) \leq 0$
    Es ist
    $$F_i(x) - F_i(y) = (x_i - l_i) - (y_i - l_i) = x_i - y_i = e_i^T(x-y) = \delta F_i(x,y)(x-y).$$
  - Fall 2.2: $x_i - f_i(x) \leq 0$ und $y_i - f_i(y) > 0$
    In diesem Fall erhält man
    $$0 < -(x_i - f_i(x)) + (y_i - f_i(y)) = f_i(x) - f_i(y) - x_i + y_i = \left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right)(x-y)$$
    und damit
    $$\begin{aligned} F_i(x) - F_i(y) &= (x_i - l_i) - f_i(y) \\ &= y_i - f_i(y) + x_i - y_i \\ &= \frac{(y_i - f_i(y)) \cdot (\delta f_i(x,y) - e_i^T)(x-y)}{(\delta f_i(x,y) - e_i^T)(x-y)} + e_i^T(x-y) \\ &= \left(\frac{y_i - f_i(y)}{-(x_i - f_i(x)) + y_i - f_i(y)} \left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y) \\ &= \left(\alpha_i \left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y) \\ &= \delta F_i(x,y)(x-y). \end{aligned}$$
  - Fall 2.3: $x_i - f_i(x) > 0$ und $y_i - f_i(y) \leq 0$
    Analog zu Fall 2.2 ergibt sich
    $$\begin{aligned} F_i(y) - F_i(x) &= \left(\frac{x_i - f_i(x)}{-(y_i - f_i(y)) + x_i - f_i(x)} \left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(y-x) \\ &= \left(\left(1 - \frac{(y - f(y))_i}{(y-f(y))_i - (x - f(x))_i}\right) \left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(y-x) \\ &= \left((1-\alpha_i)\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(y-x), \end{aligned}$$
    das heißt,
    $$F_i(x) - F_i(y) = \left((1-\alpha_i)\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y) = \delta F_i(x,y)(x-y).$$

  - Fall 2.4: $x_i - f_i(x) > 0$ und $y_i - f_i(y) > 0$
    Es gilt

$$F_i(x) - F_i(y) = f_i(x) - f_i(y) = \delta f_i(x,y)(x-y) = \delta F_i(x,y)(x-y).$$

□

Mittels (2.2) wird also eine Steigung δF der Funktion (1.8) definiert, das heißt, für festes $x \in [x]$ ist

$$F(x) - F(y) = \delta F(x,y)(x-y) \quad \forall y \in [x].$$

Im Folgenden bestimmen wir eine Intervallmatrix $\delta F(x,[x])$ derart, dass für festes $x \in [x]$ gilt

$$F(x) - F(y) \in \delta F(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x].$$

Dem Satz, der beschreibt, wie sich $\delta F(x,[x])$ konstruieren lässt, stellen wir ein Lemma voran.

Lemma 2.5. *Es seien $d \in \{0, -\infty\}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \le b \le c$. Dann ist genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$a < d, \;\; c \le d \tag{2.3}$$

$$a \ge d \tag{2.4}$$

$$a < d, \;\; b \le d, \;\; c > d \tag{2.5}$$

$$a < d, \;\; b > d \tag{2.6}$$

Beweis. Falls $d = -\infty$ ist, gilt $a, b, c > d$, das heißt, es ist ausschließlich (2.4) erfüllt. Wir setzen nun voraus, dass $d = 0$ ist, und betrachten alle Fälle, die auftreten können.

- Fall 1: $c \le 0$
  Aus $a \le b \le c$ folgt $a, b \le 0$ und somit gilt entweder (2.3) oder (2.4).
- Fall 2: $c > 0$
  - Fall 2.1: $a > 0$
    (2.3), (2.5) und (2.6) sind offensichtlich nicht erfüllt, es gilt aber (2.4).
  - Fall 2.2: $a \le 0$ und $b \le 0$
    Unter diesen Voraussetzungen ist lediglich (2.4) erfüllt, wenn $a = 0$ ist, und nur (2.5) für $a < 0$.
  - Fall 2.3: $a \le 0$ und $b > 0$
    In diesem Fall gilt entweder (2.4) oder (2.6).

□

Satz 2.6. *Es seien* $[x] \in \mathbb{IR}^n, \delta f$ *eine Steigung von* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *und* $\delta f_i(x, [x])$ *die* i*-te Zeile der intervallmäßigen Auswertung* $\delta f(x, [x])$*. Für alle* $i \in \{1, \dots, n\}$ *gelte*

$$\min_{y \in [x]} (y_i - f_i(y)) = \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) \quad \textit{sowie} \quad \max_{y \in [x]} (y_i - f_i(y)) = \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) \tag{2.7}$$

und die i*-te Zeile der Matrix* $\delta F(x, [x])$ *sei definiert durch* $\delta F_i(x, [x]) :=$

$$\begin{cases} \delta f_i(x, [x]), & \textit{falls} \;\; \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) \geq l_i \\ e_i^T, & \textit{falls} \;\; \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) < l_i, \;\; \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) \leq l_i \\ [0, \alpha_i(x, \hat{y}^i)](\delta f_i(x, [x]) - e_i^T) + e_i^T, & \textit{falls} \;\; \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) < l_i, \;\; \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) > l_i \\ & \textit{und} \;\; x_i - f_i(x) \leq l_i \\ [1 - \alpha_i(x, \check{y}^i), 1](\delta f_i(x, [x]) - e_i^T) + e_i^T, & \textit{falls} \;\; \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) < l_i, \;\; x_i - f_i(x) > l_i \end{cases}, \tag{2.8}$$

wobei $l_i \in \{0, -\infty\}$ *und*

$$\alpha_i(x, y) := \frac{(y - f(y))_i}{(y - f(y))_i - (x - f(x))_i}$$

sei. Dann gilt für $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, definiert durch*

$$F_i(x) := \begin{cases} x_i - l_i, & \textit{falls} \;\; x_i - f_i(x) \leq l_i \\ f_i(x), & \textit{falls} \;\; x_i - f_i(x) > l_i \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \dots, n\},$$

und festes $x \in [x]$

$$F(x) - F(y) \in \delta F(x, [x])(x - y) \quad \forall y \in [x].$$

Beweis. Es seien $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig und $x \in [x]$ fest. Zunächst folgt aus Lemma 2.5 für

$$a := \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i), \; b := x_i - f_i(x), \; c := \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) \quad \text{und} \quad d := l_i,$$

dass $\delta F(x, [x])$ wohldefiniert ist. Wir unterscheiden nun mehrere Fälle und verwenden jeweils

$$F_i(x) - F_i(y) = \delta F_i(x, y)(x - y),$$

wobei wir $\delta F_i(x, y)$ Satz 2.4 entnehmen.

- Fall 1: $l_i = -\infty$
  Es ist
  $$y_i - f_i(y) \geq \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) > l_i \quad \forall y \in [x],$$
  und insbesondere ist $x_i - f_i(x) > l_i$, das heißt,
  $$F_i(x) - F_i(y) = \delta f_i(x, y)(x - y) \in \delta f_i(x, [x])(x - y) = \delta F_i(x, [x])(x - y) \quad \forall y \in [x].$$

- Fall 2: $l_i = 0$
  Wir übertragen den Beweis von Theorem 3.1 aus [4] auf die hier verwendete Notation.

– Fall 2.1: $\check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) \geq 0$
Analog zu Fall 1 ergibt sich

$$y_i - f_i(y) \geq 0 \quad \forall y \in [x]$$

und insbesondere $x_i - f_i(x) \geq 0$.

∗ Fall 2.1.1: $x_i - f_i(x) = 0$ und $y_i - f_i(y) = 0$
Es ist

$$\begin{aligned} F_i(x) - F_i(y) &= e_i^T(x-y) = f_i(x) - f_i(y) \\ &= \delta f_i(x,y)(x-y) \in \delta f_i(x,[x])(x-y) \\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x]. \end{aligned}$$

∗ Fall 2.1.2: $x_i - f_i(x) > 0$ und $y_i - f_i(y) = 0$
Da in diesem Fall $\alpha_i(x,y) = 0$ ist, folgt

$$\begin{aligned} F_i(x) - F_i(y) &= \left((1-\alpha_i(x,y))\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y) \\ &= \delta f_i(x,y)(x-y) \in \delta f_i(x,[x])(x-y) \\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x]. \end{aligned}$$

∗ Fall 2.1.3: $x_i - f_i(x) = 0$ und $y_i - f_i(y) > 0$
Mit $\alpha_i(x,y) = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} F_i(x) - F_i(y) &= \left(\alpha_i(x,y)\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y) \\ &= \delta f_i(x,y)(x-y) \in \delta f_i(x,[x])(x-y) \\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x]. \end{aligned}$$

∗ Fall 2.1.4: $x_i - f_i(x) > 0$ und $y_i - f_i(y) > 0$
In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} F_i(x) - F_i(y) &= \delta f_i(x,y)(x-y) \in \delta f_i(x,[x])(x-y) \\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x]. \end{aligned}$$

Falls $\check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) \geq 0$ ist, gilt also stets

$$F_i(x) - F_i(y) \in \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x].$$

– Fall 2.2: $\check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) < 0$ und $\hat{y}^i_i - f_i(\hat{y}^i) \leq 0$
Es gilt

$$y_i - f_i(y) \leq \hat{y}^i_i - f_i(\hat{y}^i) \leq 0 \quad \forall y \in [x],$$

also ist $x_i - f_i(x) \leq 0$ und somit

$$F_i(x) - F_i(y) = e_i^T(x-y) = \delta F_i(x,[x])(x-y).$$

- Fall 2.3: $\check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) < 0$, $\hat{y}^i_i - f_i(\hat{y}^i) > 0$ und $x_i - f_i(x) \leq 0$
  * Fall 2.3.1: $y_i - f_i(y) \leq 0$
    Es ist
$$\begin{aligned}F_i(x) - F_i(y) &= e_i^T(x-y)\\ &\in \left([0, \alpha_i(x, \hat{y}^i)](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T\right)(x-y)\\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x].\end{aligned}$$
  * Fall 2.3.2: $y_i - f_i(y) > 0$
    Wegen
$$\begin{aligned}\alpha_i(x,y) &= \frac{(y-f(y))_i}{(y-f(y))_i - (x-f(x))_i} \leq \frac{(\hat{y}^i - f(\hat{y}^i))_i}{(\hat{y}^i - f(\hat{y}^i))_i - (x-f(x))_i}\\ &= \alpha_i(x, \hat{y}^i)\end{aligned}$$
    folgt in diesem Fall
$$\begin{aligned}F_i(x) - F_i(y) &= \left(\alpha_i(x,y)\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y)\\ &\in \left([0, \alpha_i(x,y)]\left(\delta f_i(x,[x]) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y)\\ &\in \left(\left[0, \alpha_i(x,\hat{y}^i)\right]\left(\delta f_i(x,[x]) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y)\\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x].\end{aligned}$$

  Insgesamt ist also
$$F_i(x) - F_i(y) \in \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x].$$

- Fall 2.4: $\check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) < 0$ und $x_i - f_i(x) > 0$
  * Fall 2.4.1: $y_i - f_i(y) \leq 0$
    Mit
$$\begin{aligned}1 - \alpha_i(x,y) &= \frac{-(x-f(x))_i}{(y-f(y))_i - (x-f(x))_i} \geq \frac{-(x-f(x))_i}{(\check{y}^i - f(\check{y}^i))_i - (x-f(x))_i}\\ &= 1 - \alpha_i(x, \check{y}^i)\end{aligned}$$
    ergibt sich
$$\begin{aligned}F_i(x) - F_i(y) &= \left((1-\alpha_i(x,y))\left(\delta f_i(x,y) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y)\\ &\in \left([1-\alpha_i(x,y), 1]\left(\delta f_i(x,[x]) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y)\\ &\in \left([1-\alpha_i(x,\check{y}^i), 1]\left(\delta f_i(x,[x]) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y)\\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x].\end{aligned}$$

* Fall 2.4.2: $y_i - f_i(y) > 0$
  Es gilt

$$\begin{aligned} F_i(x) - F_i(y) &= \delta f_i(x,y)(x-y) \\ &\in \left([1-\alpha_i(x,\check{y}^i),1]\left(\delta f_i(x,[x]) - e_i^T\right) + e_i^T\right)(x-y) \\ &= \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x]. \end{aligned}$$

Folglich erhält man insgesamt

$$F_i(x) - F_i(y) \in \delta F_i(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x].$$

□

In [4, Theorem 3.1] wird, gemäß der hier verwendeten Notation, $\delta F_i(x,[x]) :=$

$$\begin{cases} \delta f_i(x,[x]), & \text{falls} \quad \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) \geq 0 \\ e_i^T, & \text{falls} \quad \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) \leq 0 \\ [0,\alpha_i(x,\hat{y}^i)](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T, & \text{falls} \quad \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) > 0, \quad x_i - f_i(x) \leq 0 \\ [(1-\alpha_i(x,\check{y}^i)),1](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T, & \text{falls,} \quad \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) < 0, \quad x_i - f_i(x) > 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

gesetzt. Ändert man diese Definition ab zu

$$\begin{cases} \delta f_i(x,[x]), & \text{falls} \quad \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) \geq 0 \\ e_i^T, & \text{falls} \quad \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) < 0, \quad \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) \leq 0 \\ [0,\alpha_i(x,\hat{y}^i)](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T, & \text{falls} \quad \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) < 0, \quad \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) > 0 \\ & \text{und} \quad x_i - f_i(x) \leq 0 \\ [1-\alpha_i(x,\check{y}^i),1](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T, & \text{falls} \quad \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) < 0, \quad x_i - f_i(x) > 0 \end{cases},$$

so erweist sich [4, Theorem 3.1] als Spezialfall von Satz 2.6, der sich ergibt, falls $l_i = 0$ ist für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Diese Modifikation ist auch notwendig, um die Wohldefiniertheit von $\delta F_i(x,[x])$ zu gewährleisten, denn im Fall $x_i - f_i(x) = 0$, $\check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) = 0$ und $\hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) > 0$ ist $\delta F_i(x,[x])$ durch Definition (2.9) nicht eindeutig bestimmt, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 2.7. *Für festes $x \in [x] := [0,1]$ und $f(x) := \frac{1}{2}x,\ x \in [0,1]$ erhält man*

$$f(x) - f(y) = \frac{1}{2}(x-y) \quad \forall y \in [0,1],$$

das heißt, $\delta f = \frac{1}{2}$ ist eine Steigung von f mit intervallmäßiger Auswertung $\delta f(x,[0,1]) = \frac{1}{2}$. Weiter gilt

$$\min_{y\in[0,1]} (y - f(y)) = 0 - f(0) \quad \textit{sowie} \quad \max_{y\in[0,1]} (y - f(y)) = 1 - f(1),$$

das heißt, $\check{y} = 0$ und $\hat{y} = 1$. Wählt man $x := 0$, dann gilt sowohl

$$x - f(x) \leq 0, \ \hat{y} - f(\hat{y}) > 0$$

als auch

$$\check{y} - f(\check{y}) \geq 0$$

und es ist

$$[0, \alpha(x, \hat{y})](\delta f(x, [x]) - 1) + 1 = \left[0, \frac{\hat{y} - f(\hat{y})}{\hat{y} - f(\hat{y}) - x + f(x)}\right](\delta f(x, [x]) - 1) + 1$$
$$= [0, 1]\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 1 = \left[-\frac{1}{2}, 0\right] + 1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \neq \frac{1}{2} = \delta f(x, [x]).$$

Zur Anwendung von Satz 2.6 benötigt man Lösungen der Optimierungsprobleme in (2.7). Derartige Lösungen zu finden stellt im Allgemeinen ein nichttriviales Problem dar. Falls f affin ist, lassen sich die Lösungen jedoch explizit berechnen, siehe [3, S. 10]. Ist $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(x) = Mx + q$ mit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}, q \in \mathbb{R}^n$, so lauten die Lösungen der Optimierungsprobleme in (2.7)

$$\check{y}^i_j = \begin{cases} \overline{x}_j, & \text{falls} \quad \left(e_i - m^T_{i(\cdot)}\right)_j \leq 0 \\ \underline{x}_j, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

respektive

$$\hat{y}^i_j = \begin{cases} \overline{x}_j, & \text{falls} \quad \left(e_i - m^T_{i(\cdot)}\right)_j > 0 \\ \underline{x}_j, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\},$$

wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ den i-ten Einheitsvektor und $m_{i(\cdot)}$ die i-te Zeile von M bezeichnet. Unter der Voraussetzung, dass für die Optimierungsprobleme in (2.7) jeweils eine Lösung bekannt ist, lässt sich mit Hilfe von Satz 2.6 für die Funktion (1.8) also eine Intervallmatrix $\delta F(x, [x])$ mit der Eigenschaft

$$F(x) - F(y) \in \delta F(x, [x])(x - y) \quad \forall y \in [x]$$

bestimmen. Dies ermöglicht die Anwendung des folgenden Satzes für die Funktion (1.8).

Satz 2.8. *Es seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \delta F(x, [x]) \in \mathbb{IR}^{n \times n}, [x] \in \mathbb{IR}^n, x \in [x]$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulär. Weiter sei*

$$L(x, A, [x]) := x - AF(x) + (I - A\delta F(x, [x]))([x] - x) \tag{2.10}$$

und es gelte

$$F(x) - F(y) \in \delta F(x, [x])(x - y) \quad \forall y \in [x].$$

Ist dann

$$L(x, A, [x]) \subseteq [x], \tag{2.11}$$

so besitzt F eine Nullstelle $\hat{x} \in [x]$. Besitzt F eine Nullstelle $\hat{x} \in [x]$, so ist $\hat{x} \in L(x, A, [x])$.

Aus der zweiten Aussage von Satz 2.8 folgt wiederum unmittelbar, dass F im Fall

$$L(x, A, [x]) \cap [x] = \emptyset$$

keine Nullstelle in $[x]$ besitzt.

Der Beweis von Satz 2.8 wird analog zum Beweis von Satz 2.1 geführt und findet sich in [3, S. 4 f.], wo der Intervalloperator $L(x, A, [x])$ eingeführt und zur Lösungsverifikation für lineare Komplementaritätsprobleme verwendet wird. Die Anwendung von $L(x, A, [x])$ für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme illustrieren wir anhand zweier numerischer Beispiele in Abschnitt 4.1.

Da sich jede Variationsungleichung mit Box-Restriktionen in ein gemischtes Komplementaritätsproblem überführen lässt, eröffnet uns die Anwendung von Satz 2.8 in Kombination mit Korollar 1.5 eine Möglichkeit, den Existenznachweis für die Lösung einer Variationsungleichung mit Box-Restriktionen zu erbringen.

Bei der Anwendung von Satz 2.8 verwendet man einen Algorithmus, der eine Näherungslösung $x^\star$ bestimmt und konstruiert damit ein Intervall $[x]$, welches $x^\star$ enthält. Ist dann $L(x^\star, A, [x]) \subseteq [x]$, so ist die Existenz einer Lösung bewiesen. Wenn $L(x^\star, A, [x]) \cap [x] = \emptyset$ gilt, existiert keine Lösung im Intervall $[x]$. Andernfalls kann keine Aussage über die Existenz einer Lösung getroffen werden.

2.2 Gemischte lineare Komplementaritätsprobleme

In diesem Abschnitt konstruieren wir zwei Intervalloperatoren, die speziell auf die Lösungsverifikation von gemischten linearen Komplementaritätsproblemen ausgerichtet sind. Der Vorteil bei der Verwendung dieser Intervalloperatoren besteht darin, dass die Existenz einer Lösung in einem Intervall immer nachgewiesen werden kann, wenn die zum gemischten linearen Komplementaritätsproblem gehörende Matrix gewissen Anforderungen genügt. Insbesondere ist dann die Kenntnis einer Näherungslösung für die Lösungsverifikation nicht notwendig.

2.2.1 Intervalloperator Γ

Bevor wir den Intervalloperator Γ einführen, formulieren wir wie in ([2, S. 425])

Definition 2.9. Für $[x] := [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR}^n$ definieren wir die einstellige Operation

$$\max\{0, [x]\} := [\max\{0, \underline{x}\}, \max\{0, \overline{x}\}].$$

Satz 2.10. *Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $l_i \in \{0, -\infty\}$. Weiter seien $q \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[x] \in \mathbb{IR}^n$ und $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen sowie*

$$\Gamma_i([x], D) := \begin{cases} \left(\max\{0, -Dq + (I - DM)[x]\}\right)_i, & \textit{falls} \quad l_i = 0 \\ \left(-Dq + (I - DM)[x]\right)_i, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.12}$$

Ist dann

$$\Gamma([x], D) \subseteq [x], \tag{2.13}$$

so besitzt $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ *eine Lösung $x \in [x]$. Besitzt* $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ *eine Lösung $x \in [x]$, so ist $x \in \Gamma([x], D)$.*

Beweis. Für die Funktion $\gamma : [x] \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\gamma_i(y) := \begin{cases} [\max\{0, -Dq + (I - DM)\, y\}]_i, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ \left(-Dq + (I - DM)\, y\right)_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\},$$

erhält man aufgrund der Inklusionsmonotonie des Operators aus Definition 2.9

$$\gamma(y) \in \Gamma([x], D)$$

für beliebiges $y \in [x]$. Für $\Gamma([x], D) \subseteq [x]$ folgt aus der Stetigkeit von γ mit dem Fixpunktsatz von Brouwer, dass γ einen Fixpunkt $x \in [x]$ besitzt, das heißt, für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$
\begin{aligned}
x_i = \gamma_i(x) &= \begin{cases} [\max\{0, -Dq + (I - DM)x\}]_i\,, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ (-Dq + (I - DM)x)_i\,, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \\
\Leftrightarrow 0 &= \begin{cases} [\max\{-x, -Dq + (I - DM)x - x\}]_i\,, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ (-Dq + (I - DM)x - x)_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \\
\Leftrightarrow 0 &= \begin{cases} [\max\{-x, -(Dq + DMx)\}]_i\,, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ (-(Dq + DMx))_i\,, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \\
\Leftrightarrow 0 &= \begin{cases} [\min\{x, D(Mx + q)\}]_i\,, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ (D(Mx + q))_i\,, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \\
\Leftrightarrow 0 &= \begin{cases} [\min\{x, Mx + q\}]_i\,, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ (Mx + q)_i\,, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \quad \begin{matrix} 0 \le x_i \perp (Mx + q)_i \ge 0, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ (Mx + q)_i = 0, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{matrix}\,.
\end{aligned}
$$

Falls $x \in [x]$ $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ löst, so ist x Fixpunkt von γ und damit folgt

$$x = \gamma(x) \in \Gamma([x], D).$$

□

Ist

$$\Gamma([x], D) \cap [x] = \emptyset,$$

so folgt aus der zweiten Aussage von Satz 2.10, dass $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ keine Lösung in $[x]$ besitzt. Im Fall $l_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ stimmt Satz 2.10 mit [2, Corollary 2.2] überein.

Korollar 2.11. *Es seien $q \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R}^{n \times n}, [x] \in \mathbb{IR}^n$ und $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen sowie*

$$\Gamma([x], D) := \max\{0, -Dq + (I - DM)\,[x]\}\,. \tag{2.14}$$

Ist dann

$$\Gamma([x], D) \subseteq [x], \tag{2.15}$$

so besitzt $\mathrm{LCP}(q, M)$ *eine Lösung $x \in [x]$. Besitzt* $\mathrm{LCP}(q, M)$ *eine Lösung $x \in [x]$, so ist $x \in \Gamma([x], D)$.*

Bei der Anwendung von Korollar 2.11 in [2] wird für D die Inverse der Diagonalmatrix gewählt, deren Diagonalelemente mit denen von M übereinstimmen. In den vorgestellten Beispielen werden wir uns dieser Wahl von D anschließen und führen dazu vorab eine Schreibweise ein.

Definition 2.12. Für eine Matrix $A = (a_{ij})$ sei

$$\operatorname{diag} A := \left(a_{ij}^{\text{diag}}\right) := \begin{cases} a_{ij}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

Beispiel 2.13. *Für*

$$q := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $D := (\operatorname{diag} M)^{-1}$ *sowie*

$$[x] := \begin{pmatrix} [-5, 5] \\ [-8, 8] \\ [-6, 6] \end{pmatrix}$$

ist

$$-Dq + (I - DM)\,[x] = \begin{pmatrix} [-\frac{13}{3}, 5] \\ [-\frac{7}{2}, \frac{15}{2}] \\ [-7, 6] \end{pmatrix}.$$

- *Im Fall* $l := (-\infty, 0, 0)^T$ *erhält man*

  $$\Gamma([x], D) = \begin{pmatrix} [-\frac{13}{3}, 5] \\ [0, \frac{15}{2}] \\ [0, 6] \end{pmatrix} \subseteq [x]$$

  und mit Satz 2.10 folgt, dass $\text{MLCP}(l, q, M)$ *eine Lösung*

  $$x \in \begin{pmatrix} [-\frac{13}{3}, 5] \\ [0, \frac{15}{2}] \\ [0, 6] \end{pmatrix}$$

  besitzt.

- *Ist* $l := (0, 0, 0)^T$*, so gilt*

  $$\Gamma([x], D) = \begin{pmatrix} [0, 5] \\ [0, \frac{15}{2}] \\ [0, 6] \end{pmatrix} \subseteq [x],$$

  und mit Korollar 2.11 ergibt sich, dass für $\text{LCP}(q, M)$ *eine Lösung*

  $$x \in \begin{pmatrix} [0, 5] \\ [0, \frac{15}{2}] \\ [0, 6] \end{pmatrix}$$

  existiert.

In Beispiel 2.13 wurde das Intervall $[x]$ so gewählt, dass die Beziehung (2.13) in Satz 2.10 erfüllt ist. Wir diskutieren nun die Frage, wie man ein derartiges Intervall finden kann, und werden im weiteren Verlauf Kriterien für M und q angeben, die gewährleisten, dass sich ein Intervall $[x]$ bestimmen lässt, das (2.13) erfüllt. Zunächst führen wir einige Matrix-Klassen ein.

Definition 2.14 ([7, Definition 3.11.1])**.** Es sei $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und

$$m_{ij} \leq 0 \quad \text{für alle } (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2 \text{ mit } i \neq j.$$

Dann heißt M *Z-Matrix*.

Definition 2.15 ([11, S. 114 ff.])**.** Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Z-Matrix und $M^{-1} \geq O$. Dann heißt M *M-Matrix*.

In [7] werden M-Matrizen als *K-Matrizen* bezeichnet.

Definition 2.16 ([7, Definition 3.3.11])**.** Es sei $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und es existiere ein Vektor $0 < d \in \mathbb{R}^n$ mit

$$|m_{ii}|d_i > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{ij}|d_j \quad \text{für alle } i,j \in \{1,\dots,n\}. \tag{2.16}$$

Dann heißt M *H-Matrix*. Ist (2.16) für $d = (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, so heißt M *streng diagonaldominant*.

H-Matrizen lassen sich auch mit Hilfe von M-Matrizen charakterisieren, dazu verwendet man den Begriff der *Vergleichsmatrix*.

Definition 2.17 ([7, Definition 3.3.12])**.** Es sei $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann heißt die Matrix $\langle M\rangle = (\langle m\rangle_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\langle m\rangle_{ij} := \begin{cases} |m_{ij}|, & \text{falls} \quad i = j \\ -|m_{ij}|, & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{für alle } i,j \in \{1,\dots,n\}$$

Vergleichsmatrix von M.

Lemma 2.18 ([7, Remark 3.11.11])**.** *Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt: M ist genau dann eine H-Matrix, wenn $\langle M\rangle$ eine M-Matrix ist.*

Lemma 2.19. *Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine streng diagonaldominante Z-Matrix mit positiven Diagonalelementen. Dann ist M eine M-Matrix.*

Beweis. Setzt man $d := (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^n$, so ist (2.16) für eine streng diagonaldominante Matrix M erfüllt. Also ist M eine H-Matrix und mit Lemma 2.18 folgt, dass $\langle M\rangle$ eine M-Matrix ist. Da M laut Voraussetzung eine Z-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist, gilt $M = \langle M\rangle$ und somit ist M eine M-Matrix. □

Lemma 2.20. *Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine M-Matrix. Dann ist*

- *M eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen,*
- *M eine P-Matrix.*

Die Aussagen von Lemma 2.20 werden in [25, S. 71 f.] bewiesen. Nun sind wir in der Lage, ein erstes Kriterium für M und q zu formulieren, welches gewährleistet, dass sich ein Intervall $[x]$ angeben lässt, für das die Beziehung (2.13) in Satz 2.10 erfüllt ist. Vorab führen wir einige Schreibweisen ein und geben anschließend ein Lemma an, welches in [2, S. 427] in einer etwas allgemeineren Variante formuliert und bewiesen wird.

Definition 2.21. Für eine Matrix $A = (a_{ij})$ sei

$$A^+ := \left(a_{ij}^+\right) := \begin{cases} a_{ij}, & \text{falls} \quad a_{ij} > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad a_{ij} \leq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad A^- := \left(a_{ij}^-\right) := \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad a_{ij} > 0 \\ a_{ij}, & \text{falls} \quad a_{ij} \leq 0 \end{cases}.$$

Lemma 2.22. *Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $c \geq 0$. Dann ist*

$$\max\{0, [a,b]\} \subseteq [-c, c] \Leftrightarrow b \leq c.$$

Satz 2.23. *Es seien $q \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen, $D := (\operatorname{diag} M)^{-1}$ und für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei*

$$l_i \in \{0, -\infty\} \quad \textit{und} \quad q_i \leq 0, \; \textit{falls } l_i = -\infty \textit{ ist}$$

sowie $v := -(q^-)$. Des Weiteren sei $[x] \in \mathbb{IR}^n$ und $\Gamma([x], D)$ definiert durch

$$\Gamma_i([x], D) := \begin{cases} \left(\max\{0, -Dq + (I - DM)[x]\}\right)_i, & \textit{falls} \quad l_i = 0 \\ \left(-Dq + (I - DM)[x]\right)_i, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dann gilt für $d := \langle M \rangle^{-1} v$

$$\Gamma\left([-d,d], D\right) \subseteq [-d, d].$$

Beweis. Wir unterscheiden für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ zwei Fälle.

- Fall 1: $l_i = 0$
  Um die Beziehung
  $$\Gamma_i\left([-d,d], D\right) = \left[\max\{0, -Dq + (I - DM)[-d,d]\}\right]_i \subseteq [-d,d]_i$$
  nachzuweisen, ist es aufgrund von Lemma 2.22 ausreichend,
  $$\left(\overline{-Dq + (I - DM)[-d,d]}\right)_i \leq d_i$$

zu zeigen, wobei $\overline{x}$ die obere Schranke eines Intervalles $[x]$ bezeichnet. Da M eine H-Matrix ist, folgt mit Lemma 2.18, dass $\langle M\rangle$ eine M-Matrix und somit insbesondere eine Z-Matrix ist, was wiederum

$$|I - DM| = |I - D\langle M\rangle| = I - D\langle M\rangle$$

zur Folge hat, weil M ausschließlich positive Diagonalelemente besitzt

. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\left(\overline{-Dq + (I - DM)\,[-d, d]}\right)_i &= \left(\overline{-Dq + [-|I - DM|d, |I - DM|d]}\right)_i \\ &= \left(-Dq + (I - D\langle M\rangle)\,d\right)_i \\ &= \left(-Dq + d - D\langle M\rangle d\right)_i \\ &= \left(d - D(q + v)\right)_i \\ &\le d_i,\end{aligned}$$

weil D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen und $q_i + v_i \ge 0$ ist.

- Fall 2: $l_i = -\infty$
  In diesem Fall ist

$$\begin{aligned}\Gamma_i\left([-d, d]\,, D\right) &= \left(-Dq + (I - DM)\,[-d, d]\right)_i \\ &= \left(-Dq + [-\left(I - D\langle M\rangle\right) d, \left(I - D\langle M\rangle\right) d]\right)_i \\ &= \left(-Dq + [-d + D\langle M\rangle d, d - D\langle M\rangle d]\right)_i \\ &= \left(-Dq + [-d + Dv, d - Dv]\right)_i \\ &= [-d - D(q - v), d - D(q + v)]_i \\ &= [-d - D(q - v), d]_i \\ &\subseteq [-d, d]_i,\end{aligned}$$

da D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist und wegen $q_i \le 0$

$$q_i - v_i = 2q_i \le 0 \quad \text{bzw.} \quad q_i + v_i = 0$$

gilt.

$\square$

Im Fall $l_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ liefert Satz 2.23 die Aussage von ([2, Algorithm 3.1]), der die Grundlage für diesen Satz bildet.

Beispiel 2.24. *Wir betrachten wie in Beispiel 2.13*

$$q := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $D := (\operatorname{diag} M)^{-1}$. *Außerdem seien* $l_1, l_2 \in \{0, -\infty\}$ *und* $l_3 := 0$. *Wegen*

$$\langle M \rangle^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \geq O$$

folgt mit Lemma 2.18, dass M *eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist. Satz 2.23 garantiert nun, dass für*

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [x] := \left[-(\langle M \rangle)^{-1} v, (\langle M \rangle)^{-1} v\right] = \begin{pmatrix} [-5, 5] \\ [-\frac{23}{3}, \frac{23}{3}] \\ [-\frac{19}{3}, \frac{19}{3}] \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$\Gamma\left([x], D\right) \subseteq [x]$$

gilt.

Wie wir wissen, kann $\mathrm{AVI}([\![l, u]\!], q, M)$ unter der Bedingung, dass M regulär ist, in LCP $\left(\overline{\overline{q}}, \overline{\overline{M}}\right)$ überführt werden. Falls $\overline{\overline{M}}$ eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist, kann dann Satz 2.23 mit $l_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ angewendet werden, um ein Intervall zu finden, das (2.15) erfüllt und somit lässt sich zur Lösungsverifikation auf Korollar 2.11 zurückgreifen. Wir werden nun ein weiteres Kriterium für M formulieren, welches gewährleistet, dass sich ein Intervall angeben lässt, für das die Beziehung (2.15) erfüllt ist.

Satz 2.25. *Es seien* M *eine Matrix mit positiven Diagonalelementen,* $D := (\operatorname{diag} M)^{-1}$ *und die Matrix* $\operatorname{diag} M + M^-$ *sei eine M-Matrix. Außerdem sei*

$$d := \left(I - (I - DM)^+\right)^{-1} (-Dq)^+$$

sowie

$$\Gamma([x], D) := \max\left\{0, -Dq + (I - DM)\,[x]\right\}.$$

Dann ist $d \geq 0$ *und*

$$\Gamma([0, d], D) \subseteq [0, d]. \tag{2.17}$$

Beweis. Laut Voraussetzung ist die Matrix

$$\operatorname{diag} M - (\operatorname{diag} M - M)^+ = \operatorname{diag} M - (-M)^+ = \operatorname{diag} M + M^-$$

und somit auch

$$D \operatorname{diag} M - (D \operatorname{diag} M - DM)^+ = I - (I - DM)^+$$

eine M-Matrix und damit ergibt sich

$$d = \left(I - (I - DM)^+\right)^{-1} (-Dq)^+ \geq 0.$$

Des Weiteren folgt aus

$$\left(I-(I-DM)^{+}\right)d=(-Dq)^{+}\geq -Dq,$$

dass

$$\overline{-Dq+(I-DM)[0,d]}=-Dq+(I-DM)^{+}d\leq d$$

gilt. Dies ist nach Lemma 2.22 äquivalent zu

$$\max\{0,-Dq+(I-DM)[0,d]\}\subseteq[-d,d].$$

Da $\max\{0,[x]\}\geq 0$ für alle $[x]\in\mathbb{IR}$ ist, folgt schließlich

$$\Gamma([0,d],D)=\max\{0,-Dq+(I-DM)[0,d]\}\subseteq[0,d].$$

□

Aus numerischer Sicht ist es ratsam, d durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\left(I-(I-DM)^{+}\right)d=(-Dq)^{+}$$

zu bestimmen, weil die Berechnung der Inversen $\left(I-(I-DM)^{+}\right)^{-1}$ im Allgemeinen mit wesentlich höherem Rechenaufwand verbunden ist.

Satz 2.25 ist unter anderem anwendbar für eine Matrix M mit positiven Diagonalelementen, die außerdem streng diagonaldominant oder nichtnegativ ist, denn es ist leicht einzusehen, dass $\operatorname{diag} M+M^{-}$ dann eine streng diagonaldominante Z-Matrix mit positiven Diagonalelementen und wegen Lemma 2.19 eine M-Matrix ist. Für eine nichtnegative Matrix M mit positiven Diagonalelementen ist in Satz 2.25 $d=(-Dq)^{+}$, sodass $\mathrm{LCP}(q,M)$ gemäß Korollar 2.11 für beliebiges q eine Lösung im Intervall $[0,(-Dq)^{+}]$ besitzt.

Beispiel 2.26. *Wir betrachten erneut q, M und D aus Beispiel 2.13, das heißt,*

$$q:=\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix},\quad M:=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\quad \textit{und}\quad D:=(\operatorname{diag} M)^{-1}.$$

Da die Matrix

$$\operatorname{diag} M+M^{-}=\begin{pmatrix}3&0&-1\\0&2&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

eine streng diagonaldominante Z-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist, folgt mit Lemma 2.19 und Satz 2.25, dass für

$$d:=\left(I-(I-DM)^{+}\right)^{-1}(-Dq)^{+}=\begin{pmatrix}\frac{6}{5}&0&\frac{2}{5}\\0&1&0\\\frac{3}{5}&0&\frac{6}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4\\2\\0.2\end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$\Gamma([0,d],D) \subseteq [0,d]$$

gilt.

Satz 2.25 liefert in diesem Fall also ein Intervall $[x]$ mit geringerem *Durchmesser* und somit eine bessere Einschließung der Lösung von $\mathrm{LCP}(q,M)$ als Satz 2.23, siehe Beispiel 2.24.

Es existieren nichtnegative Matrizen mit positiven Diagonalelementen, die keine H-Matrizen sind. Für derartige Matrizen sind die Voraussetzungen von Satz 2.23 nicht erfüllt, Satz 2.25 hingegen ist anwendbar.

Beispiel 2.27. *Für*

$$q := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die Matrix

$$\operatorname{diag} M + M^- = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine M-Matrix und mit $D := (\operatorname{diag} M)^{-1}$ erhält man aus Satz 2.25

$$\Gamma([0,d],D) \subseteq [0,d]$$

für

$$d := \big(I - (I - DM)^+\big)^{-1} (-Dq)^+ = (-Dq)^+ = (0.5, 0.5, 1)^T.$$

Wegen

$$\langle M \rangle^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \not\geq O$$

und Lemma 2.18 ist M aber keine H-Matrix.

Aus [24, Theorem 2.1] folgt, dass $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine P-Matrix ist, falls M ausschließlich positive Diagonalelemente besitzt und $\operatorname{diag} M + M^-$ eine M-Matrix ist. Die Lösung von $\mathrm{LCP}(q,M)$, $q \in \mathbb{R}^n$ ist unter diesen Voraussetzungen im Intervall $[0,x]$ enthalten, wobei x die Lösung von $\mathrm{LCP}(q, \operatorname{diag} M + M^-)$ ist. Diese Einschließung der Lösung erhält man mit [24, Theorem 3.3].

2.2.2 Intervalloperator Θ

Der Beweis von Satz 2.10 beruht auf der Tatsache, dass sich ein gemischtes lineares Komplementaritätsproblem als Fixpunktproblem formulieren lässt. Wir betrachten nun ein Fixpunktproblem, welches eine äquivalente Formulierung eines linearen Komplementaritätsproblems darstellt und werden eine Verallgemeinerung davon zur Lösungsverifikation für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme nutzen. [6, Theorem 9] respektive [22, Theorem 9.1] und der zugehörige Beweis liefern im Wesentlichen die Aussage von

Satz 2.28. *Es seien $q, x \in \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $I + M$ regulär ist. Außerdem sei $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch*

$$\theta(x) := \big((I + M)^{-1}(I - M)\big)\, |x| - (I + M)^{-1}q. \tag{2.18}$$

Gilt dann $\theta(x) = x$, so ist $|x| + x$ Lösung von $\mathrm{LCP}(q, M)$. *Falls hingegen z Lösung von* $\mathrm{LCP}(q, M)$ *ist und y gegeben durch*

$$y_i := \frac{z_i - (Mz + q)_i}{2} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \dots, n\},$$

so ist y ein Fixpunkt von θ.

Wir betrachten nun eine Verallgemeinerung der Funktion (2.18), bei der die Existenz eines Fixpunktes die Lösbarkeit eines gemischten linearen Komplementaritätsproblems garantiert.

Satz 2.29. *Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $M, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass B und $A + BM$ regulär sind und $B^{-1}A$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch*

$$\tilde{x}_i := \begin{cases} |x_i|, & l_i = 0 \\ x_i, & l_i = -\infty \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Weiter sei $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ für $q \in \mathbb{R}^n$ definiert mittels

$$\theta(x, A, B) := \big((A + BM)^{-1}(A - BM)\big)\, \tilde{x} - (A + BM)^{-1}Bq. \tag{2.19}$$

Ist dann $\theta(y, A, B) = y$, so ist $z := \tilde{y} + y$ Lösung von $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$.

Beweis. Multipliziert man die Gleichung

$$y = \theta(y, A, B) = \big((A + BM)^{-1}(A - BM)\big)\, \tilde{y} - (A + BM)^{-1}Bq$$

mit $A + BM$ von links, so erhält man

$$(A + BM)y = (A - BM)\tilde{y} - Bq$$

und damit

$$B\left(M(\tilde{y}+y)+q\right)=A(\tilde{y}-y).$$

Wegen der Regularität von B folgt

$$M(\tilde{y}+y)+q=B^{-1}A(\tilde{y}-y),$$

also ist

$$(Mz+q)_i=(M(\tilde{y}+y)+q)_i=\left(B^{-1}A(\tilde{y}-y)\right)_i=\left(B^{-1}A\right)_{ii}(\tilde{y}_i-y_i). \tag{2.20}$$

Wir unterscheiden für beliebiges $i\in\{1,\ldots,n\}$ zwei Fälle.

- Fall 1: $l_i=0$
  Für $l_i=0$ ist
  $$z_i=\tilde{y}_i+y_i=|y_i|+y_i\geq 0.$$
  Aus (2.20) folgt
  $$z_i\,(Mz+q)_i=(\tilde{y}_i+y_i)\left(B^{-1}A\right)_{ii}(\tilde{y}_i-y_i)=\left(B^{-1}A\right)_{ii}\left(\tilde{y}_i{}^2-y_i^2\right)=0$$
  sowie
  $$(Mz+q)_i\geq 0,$$
  da $B^{-1}A$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen und $\tilde{y}-y\geq 0$ ist. Wir haben also gezeigt
  $$0\leq z_i\perp(Mz+q)_i\geq 0.$$

- Fall 2: $l_i=-\infty$
  Für $l_i=-\infty$ ist $\tilde{y}_i-y_i=0$, das heißt, mit (2.20) erhält man
  $$(Mz+q)_i=\left(B^{-1}A\right)_{ii}(\tilde{y}_i-y_i)=0.$$

Insgesamt ergibt sich, dass $z:=\tilde{y}+y$ Lösung von MLCP(l,q,M) ist. □

Ist $l_i=0$ für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$ und $A=B=I$, so liefert Satz 2.29 die erste Aussage von Satz 2.28. Die zweite Aussage von Satz 2.28 verallgemeinern wir derart, dass die Lösbarkeit eines speziellen gemischten linearen Komplementaritätsproblems die Existenz eines Fixpunktes der Funktion (2.19) mit $A=B=I$ garantiert.

Satz 2.30. *Es seien $l_i\in\{0,-\infty\}$ für alle $i\in\{1,\ldots,n\}$ sowie $q\in\mathbb{R}^n$ und $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $I+M$ regulär ist. Für beliebiges $x\in\mathbb{R}^n$ sei $\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$ gegeben durch*

$$\tilde{x}_i:=\begin{cases}|x_i|, & \text{falls}\quad l_i=0\\ x_i, & \text{falls}\quad l_i=-\infty\end{cases}\qquad \text{für alle } i\in\{1,\ldots,n\}.$$

Weiter sei $\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert mittels

$$\theta(x) := \left((I+M)^{-1}(I-M)\right)\tilde{x} - (I+M)^{-1}q. \tag{2.21}$$

Ist z Lösung von MLCP(l,q,M), *so ist y mit*

$$y_i := \frac{z_i - (Mz+q)_i}{2} \quad \textit{für alle } i \in \{1,\dots,n\} \tag{2.22}$$

ein Fixpunkt von θ.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass

$$\tilde{y} + y = z \tag{2.23}$$

ist, und unterscheiden hierzu für beliebiges $i \in \{1,\dots,n\}$ zwei Fälle.

- Fall 1: $l_i = -\infty$
  In diesem Fall ist $(Mz+q)_i = 0$, da z Lösung von MLCP(l,q,M) ist und

$$\tilde{y}_i + y_i = 2y_i = 2 \cdot \frac{z_i - (Mz+q)_i}{2} = z_i.$$

- Fall 2: $l_i = 0$
  Es gilt

$$(Mz+q)_i = 0, \quad \text{falls } l_i = 0 \text{ und } y_i > 0 \text{ ist,} \tag{2.24}$$

andernfalls wäre nämlich $(Mz+q)_i > 0$, was auf $z_i = 0$ führen würde, da z Lösung von MLCP(l,q,M) ist. Dies hätte aber

$$0 < 2y_i = z_i - (Mz+q)_i = -(Mz+q)_i < 0$$

zur Folge. Des Weiteren ist

$$z_i = 0, \quad \text{falls } l_i = 0 \text{ und } y_i \le 0 \text{ ist,} \tag{2.25}$$

denn da z Lösung von MLCP(l,q,M) ist, würde aus $z_i > 0$ folgen, dass $(Mz+q)_i = 0$ ist, was auf den Widerspruch

$$0 < z_i = z_i - (Mz+q)_i = 2y_i \le 0$$

führt. Mit (2.24) und (2.25) ergibt sich also

$$\tilde{y}_i + y_i = |y_i| + y_i = \begin{cases} 2y_i = 2 \cdot \frac{z_i - (Mz+q)_i}{2} = z_i, & \text{falls } l_i = 0,\ y_i > 0 \\ 0 = z_i, & \text{falls } l_i = 0,\ y_i \le 0 \end{cases}.$$

Nun folgt aus (2.23), (2.24) und (2.25)

$$\begin{aligned}
((I-M)\tilde{y}-(I+M)y-q)_i &= (\tilde{y}-y-(M(\tilde{y}+y)+q))_i = \tilde{y}_i - y_i - (Mz+q)_i \\
&= \begin{cases} |y_i| - y_i - 0, & \text{falls} \quad l_i = 0,\ y_i > 0 \\ |y_i| - y_i - (Mz+q)_i, & \text{falls} \quad l_i = 0,\ y_i \le 0 \\ y_i - y_i - 0, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad l_i = 0,\ y_i > 0 \\ -2 \cdot \frac{z_i-(Mz+q)_i}{2} - (Mz+q)_i, & \text{falls} \quad l_i = 0,\ y_i \le 0 \\ 0, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $i \in \{1,\dots,n\}$, also ist

$$(I-M)\tilde{y}-(I+M)y-q=0. \tag{2.26}$$

Multiplikation von (2.26) mit $(I+M)^{-1}$ von links liefert schließlich

$$\theta(y) = (I+M)^{-1}(I-M)\tilde{y}-(I+M)^{-1}q = y.$$

□

Es ist unser Ziel, einen Satz zu formulieren, der zur Lösungsverifikation für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme dienen kann und mit Hilfe von Satz 2.29 bewiesen wird. Dazu benötigen wir

Lemma 2.31. *Es seien $l_i \in \{0,-\infty\}$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ sei $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch*

$$\tilde{y}_i := \begin{cases} |y_i|, & \textit{falls} \quad l_i = 0 \\ y_i, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \textit{für alle } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Weiter sei $[x] \in \mathbb{IR}^n$ und $\Psi : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ definiert mittels

$$\Psi_i([x]) := \begin{cases} [\max\{0,\underline{x}_i\}, \max\{-\underline{x}_i,\overline{x}_i\}], & l_i = 0,\ \overline{x}_i \ge 0 \\ [-\overline{x}_i, -\underline{x}_i], & l_i = 0,\ \overline{x}_i < 0 \\ [x]_i, & l_i = -\infty \end{cases} \qquad \textit{für alle } i \in \{1,\dots,n\}.$$

Dann gilt: Aus $y_i \in [x]_i$ folgt $\tilde{y}_i \in \Psi_i([x])$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.

Beweis. Wir unterscheiden für beliebiges $i \in \{1,\dots,n\}$ drei Fälle.

- Fall 1: $l_i = 0$ und $\overline{x}_i \ge 0$

- Fall 1.1: $\underline{x}_i \geq 0$
  Für $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ folgt

$$\tilde{y}_i = |y_i| = y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i] = [\max\{0, \underline{x}_i\}, \max\{-\underline{x}_i, \overline{x}_i\}] = \Psi_i([x]).$$

- Fall 1.2: $\underline{x}_i < 0$
  Ist $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$, so erhält man einerseits

$$\tilde{y}_i = |y_i| \geq 0 = \max\{0, \underline{x}_i\}$$

und andererseits

$$\tilde{y}_i = |y_i| = \begin{cases} y_i \leq \overline{x}_i \leq \max\{-\underline{x}_i, \overline{x}_i\}, & \text{falls } y_i \geq 0 \\ -y_i \leq -\underline{x}_i \leq \max\{-\underline{x}_i, \overline{x}_i\}, & \text{falls } y_i < 0 \end{cases},$$

das heißt, $\tilde{y}_i \in [\max\{0, \underline{x}_i\}, \max\{-\underline{x}_i, \overline{x}_i\}] = \Psi_i([x])$.

- Fall 2: $l_i = 0$ und $\overline{x}_i < 0$
  Für $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ ist

$$\tilde{y}_i = |y_i| = -y_i \in [-\overline{x}_i, -\underline{x}_i] = \Psi_i([x]).$$

- Fall 3: $l_i = -\infty$
  Falls $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ ist, folgt

$$\tilde{y}_i = y_i \in [x]_i = \Psi_i([x]).$$

□

Satz 2.32. *Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sowie $q \in \mathbb{R}^n$ und $M, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass B und $A + BM$ regulär sind und $B^{-1}A$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Außerdem seien $[x] := [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR}^n$, $\Psi : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ definiert durch*

$$\Psi([x])_i := \begin{cases} [\max\{0, \underline{x}_i\}, \max\{-\underline{x}_i, \overline{x}_i\}]\,, & \textit{falls} \quad l_i = 0,\ \overline{x}_i \geq 0 \\ [-\overline{x}_i, -\underline{x}_i]\,, & \textit{falls} \quad l_i = 0,\ \overline{x}_i < 0 \\ [x]_i\,, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

und

$$\Theta([x], A, B) := \big((A + BM)^{-1}(A - BM)\big)\, \Psi([x]) - (A + BM)^{-1}Bq. \tag{2.27}$$

Ist dann

$$\Theta([x], A, B) \subseteq [x], \tag{2.28}$$

so besitzt $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ *eine Lösung z mit*

$$z_i \in \begin{cases} 2\left[0, \overline{\Theta([x], A, B)}\right]_i, & \textit{falls} \quad l_i = 0 \\ 2\,(\Theta([x], A, B))_i\,, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beweis. Für $y \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\tilde{y}_i := \begin{cases} |y_i|, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ y_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Mit Lemma 2.31 folgt aus $y \in [x]$, dass $\tilde{y} \in \Psi([x])$ ist. Für die Funktion $\theta : [x] \to \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$\theta(y, A, B) := \big((A + BM)^{-1}(A - BM)\big)\,\tilde{y} - (A + BM)^{-1}Bq,$$

erhält man demnach für beliebiges $y \in [x]$

$$\theta(y) \in \big((A + BM)^{-1}(A - BM)\big)\,\Psi([x]) - (A + BM)^{-1}Bq = \Theta([x], A, B).$$

Ist nun $\Theta([x], A, B) \subseteq [x]$, so folgt mit der Stetigkeit von θ aus dem Fixpunktsatz von Brouwer, dass θ einen Fixpunkt $y \in [x]$ besitzt. Insbesondere gilt

$$y = \theta(y) \in \Theta([x], A, B).$$

Mit Satz 2.29 ergibt sich schließlich, dass z mit

$$z_i = \tilde{y}_i + y_i \in \begin{cases} 2\left[0, \overline{\Theta([x], A, B)}\right]_i, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ 2\left(\Theta([x], A, B)\right)_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

MLCP(l, q, M) löst. □

Ist $l_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $[x] := [-x, x]$ für ein $x \in \mathbb{R}^n_+$, so folgt aus Satz 2.32

Korollar 2.33. *Es seien $q \in \mathbb{R}^n$ und $M, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass B und $A + BM$ regulär sind und $B^{-1}A$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist. Außerdem seien $x \in \mathbb{R}^n_+$, $[x] := [-x, x]$ und*

$$\Theta([x], A, B) := \big((A + BM)^{-1}(A - BM)\big)\,[0, x] - (A + BM)^{-1}Bq. \tag{2.29}$$

Ist dann

$$\Theta([x], A, B) \subseteq [x], \tag{2.30}$$

so besitzt LCP(q, M) *eine Lösung* $z \in 2\left[0, \overline{\Theta([x], A, B)}\right]$.

Beweis. Die Behauptung folgt für

$$l_i = 0 \quad \text{und} \quad \overline{x}_i \geq 0 \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

wegen

$$\Psi([x]) = [\max\{0, \underline{x}\}, \max\{-\underline{x}, \overline{x}\}] = [0, \overline{x}] = [0, x] \tag{2.31}$$

aus Satz 2.32. □

Beispiel 2.34. *Wir betrachten*

$$q := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $A := I$ und $B := (\operatorname{diag} M)^{-1}$ ist $\det(A + BM) = \frac{19}{3} \neq 0$, sodass $A + BM$ regulär ist. Außerdem ist B regulär und $B^{-1}A = \operatorname{diag} M$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen. Wir wählen

$$[x] := \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ [-5, 5] \\ [-8, 8] \end{pmatrix}.$$

- *Falls $l := (-\infty, 0, -\infty)^T$ ist, folgt*

$$\Theta([x], I, B) \subseteq \begin{pmatrix} [-2.9, 0.9] \\ [-1.5, 4.5] \\ [-1.5, 7.5] \end{pmatrix} \subseteq [x]$$

  und mit Satz 2.32 erhält man, dass für $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ eine Lösung

$$x \in \begin{pmatrix} [-5.8, 1.8] \\ [0, 9] \\ [-3, 15] \end{pmatrix}$$

  existiert.

- *Ist $l := (0, 0, 0)^T$, so gilt*

$$\Theta([x], I, B) \subseteq \begin{pmatrix} [-1.3, 0.9] \\ [0.6, 4.1] \\ [1.6, 7.5] \end{pmatrix} \subseteq [x].$$

  Aus Korollar 2.33 folgt, dass $\mathrm{LCP}(q, M)$ eine Lösung

$$x \in \begin{pmatrix} [0, 1.8] \\ [0, 8.2] \\ [0, 15] \end{pmatrix}$$

  besitzt.

In Beispiel 2.34 wurde das Interall $[x]$ so gewählt, dass die Beziehung (2.28) in Satz 2.32 beziehungsweise (2.30) in Korollar 2.33 erfüllt ist. Wir geben nun ein Kriterium für ein symmetrisches Intervall $[-x, x]$ an, welches gewährleistet, dass dieses Intervall der Bedingung (2.30) in Korollar 2.33 genügt.

Satz 2.35. *Es seien $q \in \mathbb{R}^n$ und $M, A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass $A + BM$ regulär ist. Außerdem seien $x \in \mathbb{R}^n_+$, $[x] := [-x, x]$ und*

$$\Theta([x], A, B) := \big((A+BM)^{-1}(A-BM)\big)\,[0,x] - (A+BM)^{-1}Bq. \tag{2.32}$$

Für

$$P := (A+BM)^{-1} \quad \textit{und} \quad Q := A - BM$$

gelte

$$\begin{pmatrix} -(PQ)^- - I \\ (PQ)^+ - I \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -PBq \\ PBq \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Dann ist

$$\Theta([x], A, B) \subseteq [x].$$

Beweis. Aus (2.33) folgt

$$-x \leq (PQ)^- x - PBq \quad \text{bzw.} \quad (PQ)^+ x - PBq \leq x,$$

was auf

$$[(PQ)^- x, (PQ)^+ x] - PBq \subseteq [-x, x]$$

führt. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \Theta([x], A, B) &= \big((A+BM)^{-1}(A-BM)\big)\,[0,x] - (A+BM)^{-1}Bq \\ &= (PQ)\,[0,x] - PBq = \big[(PQ)^- x, (PQ)^+ x\big] - PBq \\ &\subseteq [-x, x]. \end{aligned}$$

□

Bedingungen der Form (2.33) treten bei linearen Optimierungsproblemen auf und beschreiben dort die sogenannte *Menge der zulässigen Punkte*. Ein Verfahren zur Bestimmung eines zulässigen Punktes beziehungsweise zum Nachweis, dass kein derartiger Punkt existiert, ist die erste Phase des Simplex-Algorithmus, der zur Lösung linearer Optimierungsprobleme verwendet werden kann.

Beispiel 2.36. *Wir betrachten nochmals*

$$q := \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und setzen $A := I$ und $B := (\operatorname{diag} M)^{-1}$. Dann ist $A + BM$ regulär und für

$$P := (A+BM)^{-1} \quad \textit{bzw.} \quad Q := A - BM$$

ist

$$\begin{pmatrix} -(PQ)^- - I \\ (PQ)^+ - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1.5 \\ -2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -PBq \\ PBq \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 2.35 folgt, dass für

$$[x] := \begin{pmatrix} [-2,2] \\ [-4,4] \\ [-7,7] \end{pmatrix}$$

die Inklusion

$$\Theta([x], I, B) \subseteq [x]$$

gilt.

Für die Matrix M aus Beispiel 2.36 folgt wegen

$$\langle M \rangle^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \ngeq O$$

mit Lemma 2.18, dass M keine H-Matrix und Satz 2.23 somit nicht anwendbar ist.

3 Einschließungsverfahren

In Abschnitt 2.2 haben wir mit Hilfe der Intervalloperatoren Γ beziehungsweise Θ nachgewiesen, dass ein gemischtes lineares Komplementaritätsproblem eine Lösung in einem bestimmten Intervall besitzt. Nun widmen wir uns sogenannten *Einschließungsverfahren*, die dazu dienen, diese Einschließung der Lösung zu verbessern.

Ausgehend von einem Intervall $[x]^0$, das die Lösung enthält, definieren wir dazu eine Iterationsvorschrift, die eine Folge $[x]^k,\ k \in \mathbb{N}_0$, von Intervallen mit der Eigenschaft

$$[x]^k \subseteq [x]^{k+1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

liefert. Außerdem geben wir eine Bedingung an, welche die Konvergenz dieser Folge von Intervallen gegen ein *Punktintervall* und somit gegen die gesuchte Lösung garantiert. Dabei bezeichne $\rho(A)$ den Spektralradius der Matrix A.

3.1 Intervalloperator Γ

Wir werden den Intervalloperator Γ aus (2.12) nutzen, um ein Iterationsverfahren zu konstruieren, welches die Verbesserung der Einschließung einer Lösung eines gemischten Komplementaritätsproblems ermöglicht.

Satz 3.1. *Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ sowie $q \in \mathbb{R}^n, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen. Weiter seien*

$$\rho\left(|I - DM|\right) < 1 \tag{3.1}$$

und $\Gamma([x], D)$ definiert durch

$$\Gamma_i([x], D) := \begin{cases} \left[\max\left\{0, -Dq + (I - DM)\,[x]\right\}\right]_i, & \textit{falls} \quad l_i = 0 \\ \left(-Dq + (I - DM)\,[x]\right)_i, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \quad \textit{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Besitzt dann $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ eine Lösung $x \in [x]^0$, so konvergiert das Iterationsverfahren

$$[x]^{k+1} = [x]^k \cap \Gamma([x]^k, D), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.2}$$

gegen $[x, x]$.

Beweis. Es sei $x \in [x]^0$ eine Lösung von MLCP(l,q,M). Falls $x \in [x]^k$ für beliebiges, festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt, so folgt aus Satz 2.10, dass $x \in \Gamma([x]^k, D)$ ist und somit

$$x \in [x]^k \cap \Gamma([x]^k, D) = [x]^{k+1}.$$

Mit vollständiger Induktion ergibt sich demnach

$$x \in [x]^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.3}$$

Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} d\left([x]^{k+1}\right) &= d\left([x]^k \cap \Gamma([x]^k, D)\right) \le d\left(\Gamma([x]^k, D)\right) \le d\left(-Dq + (I - DM)\,[x]^k\right) \\ &= d\left((I - DM)\,[x]^k\right), \end{aligned}$$

was unter Verwendung von [1, S. 154, (19)] auf

$$d\left([x]^{k+1}\right) \le |I - DM|\, d\left([x]^k\right)$$

führt. Damit erhält man erneut mit vollständiger Induktion

$$d\left([x]^{k+1}\right) \le |I - DM|^{k+1} d\left([x]^0\right) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen (3.1) gilt

$$\lim_{k\to\infty} |I - DM|^{k+1} = O$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty} d\left([x]^{k+1}\right) = 0,$$

das heißt, $[x]^k$ strebt für $k \to \infty$ gegen ein Punktintervall und wegen (3.3) muss

$$\lim_{k\to\infty} \left([x]^{k+1}\right) = [x, x]$$

gelten. □

Die Aussage von [2, Theorem 2.2] erhält man aus Satz 3.1, falls $l_i = 0$ ist für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, M eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen und $D = (\operatorname{diag} M)^{-1}$ ist. Dann folgt nämlich

$$|I - DM| = |I - D\langle M\rangle| = I - D\langle M\rangle, \tag{3.4}$$

wobei $\langle M\rangle$ nach Lemma 2.18 eine M-Matrix ist. Mit [26, S. 43, Theorem 7.2] erhält man schließlich

$$\rho\left(|I - DM|\right) = \rho\left(I - D\langle M\rangle\right) < 1, \tag{3.5}$$

das heißt, Bedingung (3.1) ist erfüllt.

In Beispiel 1.13 respektive Beispiel 1.18 haben wir dieselbe affine Variationsungleichung betrachtet und in MLCP $\left(\bar{l}, \bar{q}, M\right)$ beziehungsweise LCP $\left(\bar{\bar{q}}, \overline{\overline{M}}\right)$ überführt. Es lässt sich zeigen, dass für $D = (\operatorname{diag} M)^{-1}$

$$\rho\left(|I - DM|\right) < 1$$

gilt, während für $D = (\operatorname{diag} \overline{\overline{M}})^{-1}$

$$\rho\left(|I - D\overline{\overline{M}}|\right) \geq 1$$

ist. Somit kann es von Vorteil sein, wenn eine affine Variationsungleichung lediglich in ein gemischtes lineares Komplementaritätsproblem überführt wird.

Die Bedingung (3.1) stellt eine starke Forderung dar und es ergibt sich die Frage, ob sie bei Matrizen erfüllt ist, die für praktische Anwendungen von Interesse sind, wie beispielsweise symmetrische positiv definite Matrizen. Es gibt symmetrische, positiv definite Matrizen, die außerdem H-Matrizen mit positiven Diagonalelementen sind, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 3.2. *Aus Beispiel 2.13 wissen wir bereits, dass die Matrix*

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist. Überdies ist M symmetrisch und positiv definit, denn die führenden Hauptminoren von M sind $3, 5$ *und* $\det M = 3$.

Für die Matrix M aus Beispiel 3.2 und $D = (\operatorname{diag} M)^{-1}$ gilt (3.4) beziehungsweise (3.5) und somit auch (3.1). Das heißt, die Anwendung von Satz 3.1 gewährleistet, dass das Iterationsverfahren (3.2) gegen ein Punktintervall konvergiert.

Wir werden nun zeigen, dass (3.1) nicht erfüllt sein kann, falls M symmetrisch und positiv definit, aber keine H-Matrix ist.

Lemma 3.3. *Es sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix, die keine H-Matrix ist, und D eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen. Dann ist*

$$\rho\left(|I - DM|\right) \geq 1.$$

Beweis. $\langle M \rangle$ ist offensichtlich eine symmetrische Z-Matrix. Falls $\langle M \rangle$ nur positive Eigenwerte besitzen würde, wäre $\langle M \rangle$ positiv definit und mit [11, Theorem 5.2] würde folgen, dass $\langle M \rangle$ eine M-Matrix und M somit eine H-Matrix ist. Demnach besitzt $\langle M \rangle$ einen nichtpositiven Eigenwert und gleiches gilt für $D\langle M \rangle$, was unmittelbar aus [14, Theorem 7.6.3] folgt, da D symmetrisch, positiv definit und M symmetrisch ist. Die Matrix $I - D\langle M \rangle$ besitzt demzufolge einen Eigenwert $\lambda \geq 1$, woraus sich unter Verwendung von [14, Theorem 8.1.18]

$$\rho\left(|I - DM|\right) = \rho\left(|I - D\langle M \rangle|\right) \geq \rho(I - D\langle M \rangle) \geq 1$$

ergibt. □

Beispiel 3.4. *Im Anschluss an Beispiel 2.27 wurde gezeigt, dass die Matrix*

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

keine H-Matrix ist. M ist aber symmetrisch und positiv definit, denn die führenden Hauptminoren von M sind $2, 3$ und $\det M = 1$. Mit Lemma 3.3 folgt somit, dass für jede Diagonalmatrix D mit positiven Diagonalelementen

$$\rho\left(|I - DM|\right) \geq 1$$

gilt.

Satz 3.1 ist also für die Matrix M aus Beispiel 3.4 nicht anwendbar. Wir zeigen nun, dass die Konvergenz des Iterationsverfahrens (3.2) gegen ein Punktintervall für diese Matrix im Allgemeinen auch nicht garantiert werden kann. Ist nämlich $l_i = 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ sowie

$$D = (\operatorname{diag} M)^{-1}, \quad q = (-1, -1, -1)^T \quad \text{und} \quad [x]^0 = ([0, 2], [0, 2], [0, 2])^T,$$

so erhält man für den Intervalloperator Γ aus Satz 3.1

$$\Gamma([x]^0, D) = ([0, 0.5], [0, 0.5], [0, 1])^T \subset [x]^0$$

und außerdem

$$\Gamma([x]^1, D) = ([0, 0.5], [0, 0.5], [0, 1])^T = [x]^1.$$

Die Tatsache, dass ein Intervall existiert, welches der Operator Γ aus Satz 3.1 echt in sich abbildet, ist also nicht ausreichend, um die Konvergenz des Iterationsverfahrens (3.2) gegen ein Punktintervall zu gewährleisten.

Im nächsten Kapitel führen wir einen Intervalloperator und ein Einschließungsverfahren ein, dessen Konvergenz gegen ein Punktintervall für bestimmte Matrizen nachgewiesen werden kann, die keine H-Matrizen mit positiven Diagonalelementen sind. Wir formulieren dazu ein Kriterium, das die Konvergenz des Einschließungsverfahrens gegen ein Punktintervall garantiert, und werden feststellen, dass symmetrische, positiv definite Matrizen einer zur Erfüllung dieses Kriteriums notwendigen Bedingung genügen.

3.2 Intervalloperator Θ

Unter Verwendung des Intervalloperators Θ aus (2.27) definieren wir ein weiteres Iterationsverfahren, das zur verbesserten Lösungseinschließung für gemischte Komplementaritätsprobleme dient. Dazu benötigen wir

Lemma 3.5. *Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Für beliebiges $y \in \mathbb{R}^n$ sei $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch*

$$\tilde{y}_i := \begin{cases} |y_i|, & \textit{falls} \quad l_i = 0 \\ y_i, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \textit{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Weiter seien $[x] := [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR}^n$, $\Phi : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ definiert mittels

$$\Phi_i([x]) := \begin{cases} 2\left[\underline{x}_i^+, \overline{x}_i^+\right], & \textit{falls} \quad l_i = 0 \\ 2\,[x]_i\,, & \textit{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \textit{für alle } i \in \{1, \dots, n\},$$

wobei $c^+ := \max\{0, c\}$ sei für $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Aus $y_i \in [x]_i = [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ folgt $\tilde{y}_i + y_i \in \Phi_i([x])$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle.

- Fall 1: $l_i = 0$ und $\overline{x}_i \geq 0$
  - Fall 1.1: $\underline{x}_i \geq 0$
    Falls $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ ist, folgt

$$\tilde{y}_i + y_i = |y_i| + y_i = 2y_i \in 2[\underline{x}_i, \overline{x}_i] = 2\left[\underline{x}_i^+, \overline{x}_i^+\right] = \Phi_i([x]).$$

  - Fall 1.2: $\underline{x}_i < 0$
    Ist $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ so erhält man

$$\tilde{y}_i + y_i = |y_i| + y_i = \begin{cases} 2y_i \in 2[0, \overline{x}_i] = 2\left[\underline{x}_i^+, \overline{x}_i^+\right], & \text{falls } y_i \geq 0 \\ 0 \in 2[0, \overline{x}_i] = 2\left[\underline{x}_i^+, \overline{x}_i^+\right], & \text{falls } y_i < 0 \end{cases},$$

    das heißt, $\tilde{y}_i + y_i \in 2\left[\underline{x}_i^+, \overline{x}_i^+\right] = \Phi_i([x])$.

- Fall 2: $l_i = 0$ und $\overline{x}_i < 0$
  Für $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ ist

$$\tilde{y}_i + y_i = |y_i| + y_i = 0 \in [0, 0] = 2\left[\underline{x}_i^+, \overline{x}_i^+\right] = \Phi_i([x]).$$

- Fall 3: $l_i = -\infty$
  Falls $y_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ ist, folgt

$$\tilde{y}_i + y_i = 2y_i \in 2[x]_i = \Phi_i([x]).$$

□

Satz 3.6. *Es seien $l_i \in \{0, -\infty\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, $q \in \mathbb{R}^n$ und $M, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, dass B und $A + BM$ regulär sind, $B^{-1}A$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen ist und*

$$\rho\left(\left|(A + BM)^{-1}(A - BM)\right|\right) < 1 \tag{3.6}$$

gilt. Für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$\tilde{x}_i := \begin{cases} |x_i|, & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ x_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Weiter seien $[x] \in \mathbb{IR}^n$, $\Psi : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ definiert mittels

$$\Psi_i([x]) := \begin{cases} [\max\{0, \underline{x}_i\}, \max\{-\underline{x}_i, \overline{x}_i\}], & \text{falls} \quad l_i = 0,\ \overline{x}_i \geq 0 \\ [-\overline{x}_i, -\underline{x}_i], & \text{falls} \quad l_i = 0,\ \overline{x}_i < 0 \\ [x]_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

und $\Phi : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^n$ mit

$$\Phi_i([x]) := \begin{cases} 2\left[\underline{x}_i^+, \overline{x}_i^+\right], & \text{falls} \quad l_i = 0 \\ 2\,[x]_i, & \text{falls} \quad l_i = -\infty \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Die Funktion

$$\theta(x, A, B) := \left((A + BM)^{-1}(A - BM)\right)\tilde{x} - (A + BM)^{-1}Bq$$

besitze einen Fixpunkt $y \in [x]^0$ und für

$$\Theta([x], A, B) := \left((A + BM)^{-1}(A - BM)\right)\Psi([x]) - (A + BM)^{-1}Bq \tag{3.7}$$

sei

$$[x]^{k+1} := [x]^k \cap \Theta\left([x]^k, A, B\right), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert das Iterationsverfahren

$$[z]^k := \Phi\left([x]^k\right), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.8}$$

gegen eine Lösung $z = [z, z]$ von MLCP(l, q, M).

Beweis. Es sei $y \in [x]^0$ ein Fixpunkt von θ. Wegen Satz 2.29 ist

$$z := \widetilde{y} + y$$

eine Lösung von MLCP(l, q, M). Wir zeigen zuerst

$$z \in [z]^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Dazu sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest. Falls $y \in [x]^k$ ist, folgt aus Lemma 2.31 $\widetilde{y} \in \Psi\left([x]^k\right)$ und damit

$$\begin{aligned} y = \theta(y, A, B) &= \left((A+BM)^{-1}(A-BM)\right)\widetilde{y} - (A+BM)^{-1}Bq \\ &\in \left((A+BM)^{-1}(A-BM)\right)\Psi([x]^k) - (A+BM)^{-1}Bq \\ &= \Theta([x]^k, A, B), \end{aligned}$$

das heißt,

$$y \in [x]^k \cap \Theta\left([x]^k, A, B\right) = [x]^{k+1}.$$

Mit vollständiger Induktion ergibt sich also

$$y \in [x]^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

und unter Berücksichtigung von Lemma 3.5 erhält man damit

$$z = \widetilde{y} + y \in \Phi\left([x]^k\right) = [z]^k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.9}$$

Nun zeigen wir, dass das Iterationsverfahren

$$[z]^k = \Phi\left([x]^k\right) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

gegen ein Punktintervall konvergiert. Es ist

$$\begin{aligned} d\Big([x]^{k+1}\Big) &= d\Big([x]^k \cap \Theta([x]^k, A, B)\Big) \le d\left(\Theta([x]^k, A, B)\right) \\ &= d\Big(\left((A+BM)^{-1}(A-BM)\right)\Psi([x]^k) - (A+BM)^{-1}Bq\Big) \\ &= d\Big(\left((A+BM)^{-1}(A-BM)\right)\Psi([x]^k)\Big), \end{aligned}$$

was unter Verwendung von [1, S. 154, (19)] auf

$$\begin{aligned} d\left([x]^{k+1}\right) &= \left|(A+BM)^{-1}(A-BM)\right| d\left(\Psi\left([x]^k\right)\right) \\ &\le \left|(A+BM)^{-1}(A-BM)\right| d\left([x]^k\right) \end{aligned}$$

führt. Damit erhält man wiederum mit vollständiger Induktion

$$d\left([x]^{k+1}\right) \le \left|(A+BM)^{-1}(A-BM)\right|^{k+1} d\left([x]^0\right) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen (3.6) gilt

$$\lim_{k\to\infty} \left|(A+BM)^{-1}(A-BM)\right|^{k+1} = O$$

und somit

$$\lim_{k\to\infty} d\left([x]^{k+1}\right) = 0,$$

das heißt, $[x]^k$ strebt für $k \to \infty$ gegen ein Punktintervall. Aus der Definition von $\Phi([x])$ folgt direkt, dass dann $\Phi([x]^k)$ und somit auch

$$[z]^k = \Phi\left([x]^k\right) \tag{3.10}$$

gegen ein Punktintervall konvergiert. Wegen (3.9) muss schließlich

$$\lim_{k\to\infty}\left([z]^k\right) = [y, y]$$

gelten, wobei z eine Lösung von MLCP(l, q, M) ist. □

In Beispiel 1.13 beziehungsweise Beispiel 1.18 wurde dieselbe affine Variationsungleichung untersucht und in MLCP $\left(\bar{l}, \bar{q}, M\right)$ beziehungsweise LCP $\left(\bar{\bar{q}}, \overline{\overline{M}}\right)$ transformiert. Für die zugehörigen Matrizen M respektive $\overline{\overline{M}}$ lässt sich zeigen, dass für $A = I$ und $B = (\operatorname{diag} M)^{-1}$

$$\rho\left(\left|(A + BM)^{-1}(A - BM)\right|\right) < 1$$

gilt, während

$$\rho\left(\left|(A + B\overline{\overline{M}})^{-1}(A - B\overline{\overline{M}})\right|\right) \geq 1$$

ist. Wenn die affine Variationsungleichung also lediglich in ein gemischtes lineares Komplementaritätsproblem überführt wird, dann ist (3.6) erfüllt und Satz 3.6 kann angewendet werden. Um Satz 3.6 nutzen zu können, benötigt man ein Intervall, das einen Fixpunkt von θ enthält, und es stellt sich die Frage, wie sich ein derartiges Intervall bestimmen lässt. Im Beweis von Satz 2.32 haben wir mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Brouwer gezeigt, dass die Bedingung

$$\Theta([x], A, B) \subseteq [x]$$

die Existenz eines Fixpunktes von θ im Intervall $[x]$ garantiert. Ist $[x] = [-x, x]$ und $l_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so ist (3.7) identisch mit (2.32), sodass Satz 2.35 verwendet werden kann, um ein Intervall $[x]^0$ zu finden, das

$$\Theta([x]^0, A, B) \subseteq [x]^0$$

genügt und somit einen Fixpunkt von θ enthält.

Wir wollen nun die in Satz 3.6 benötigte Voraussetzung (3.6) untersuchen. Im Spezialfall $A = I$ liefert das folgende Lemma ein Kriterium, welches gewährleistet, dass eine für (3.6) notwendige Bedingung erfüllt ist.

Lemma 3.7. *Es seien $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit positiven Diagonalelementen und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Dann ist*

$$\rho\left((I + BM)^{-1}(I - BM)\right) < 1. \tag{3.11}$$

Im Beweis orientieren wir uns am Beweis für den Spezialfall $B = I$ in [22, S. 363].

Beweis. Da M symmetrisch und positiv definit ist, folgt aus [14, Theorem 7.6.3], dass BM nur positive Eigenwerte besitzt, und somit ist $I + BM$ regulär. Damit erhält man für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} &\left((I + BM)^{-1}(I - BM)\right) x = \lambda x \\ &\Leftrightarrow (I - BM)x = \lambda(I + BM)x \\ &\Leftrightarrow (1 - \lambda)x = (1 + \lambda)BMx \\ &\Leftrightarrow BMx = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} x, \quad \lambda \neq -1. \end{aligned}$$

Folglich ist λ genau dann Eigenwert von

$$\left((I + BM)^{-1}(I - BM)\right),$$

wenn

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda \neq -1$$

Eigenwert von BM ist. Da alle Eigenwerte von BM aber positiv sind, ist

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} > 0,$$

woraus unmittelbar

$$|\lambda| < 1$$

und somit

$$\rho\left((I + BM)^{-1}(I - BM)\right) < 1$$

folgt. □

Beispiel 3.8. *Die Matrix*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{7}{5} & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch, positiv definit und mit Lemma 3.7 folgt für $B := (\operatorname{diag} M)^{-1}$

$$\rho\left((I + BM)^{-1}(I - BM)\right) < 1.$$

Da

$$\left|(I + BM)^{-1}(I - BM)\right| = \left| -\frac{1}{75} \begin{pmatrix} -17 & 42 & 16 \\ 30 & -30 & 60 \\ 4 & 21 & -17 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{75} \begin{pmatrix} 17 & 42 & 16 \\ 30 & 30 & 60 \\ 4 & 21 & 17 \end{pmatrix}$$

den Eigenwert

$$\lambda = \frac{55 + \sqrt{10105}}{150} > \frac{155}{150} > 1$$

besitzt, gilt jedoch

$$\rho\left(\left|(I + BM)^{-1}(I - BM)\right|\right) \geq 1.$$

Beispiel 3.8 zeigt, dass zur Gewährleistung von (3.6) die Voraussetzungen von Lemma 3.7 nicht hinreichend sind. Falls M aber zusätzlich eine Z-Matrix ist, so ist (3.6) für $A = I$ und $B = (\operatorname{diag} M)^{-1}$ erfüllt.

Lemma 3.9. *Es sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Z-Matrix. Weiter sei $B := (\operatorname{diag} M)^{-1}$. Dann ist*

$$\rho\left(\left|(I + BM)^{-1}(I - BM)\right|\right) < 1.$$

Beweis. Aufgrund von [11, Theorem 5.2] ist M eine M-Matrix, also ist

$$(BM)^{-1} = M^{-1} \operatorname{diag} M \geq O.$$

Da BM eine Z-Matrix ist, folgt somit, dass auch BM ein M-Matrix ist. $I + BM$ ist nach [11, Theorem 5.7] dann ebenfalls eine M-Matrix und somit gilt

$$(I + BM)^{-1} \geq O. \tag{3.12}$$

Weil M eine Z-Matrix und $B = (\operatorname{diag} M)^{-1}$ ist, ergibt sich

$$I - BM \geq O. \tag{3.13}$$

Mit (3.12) und (3.13) sowie Lemma 3.7 erhält man schließlich

$$\rho\left(\left|(I + BM)^{-1}(I - BM)\right|\right) = \rho\left((I + BM)^{-1}(I - BM)\right) < 1.$$

□

Beispiel 3.10. *Die führenden Hauptminoren von*

$$M := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sind 3, 5 *und* $\det M = 3$, *das heißt, M ist eine symmetrische, positiv definite Z-Matrix. Mit Lemma 3.9 und $B := (\operatorname{diag} M)^{-1}$ folgt, dass*

$$\rho\left(\left|(I + BM)^{-1}(I - BM)\right|\right) < 1$$

gilt.

Gemäß [11, Theorem 5.2] ist jede Matrix, welche die Voraussetzungen von Lemma 3.9 erfüllt, eine M-Matrix und wegen Lemma 2.20 eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen. Diese Voraussetzungen sind zwar hinreichend, aber nicht notwendig für die Gewährleistung von (3.6). Das folgende Beispiel illustriert, dass Matrizen existieren, die (3.6) erfüllen und keine H-Matrizen mit positiven Diagonalelementen sind.

Beispiel 3.11. *Die Matrix aus Beispiel 2.27*

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist keine H-Matrix. Da M aber symmetrisch und positiv definit ist, folgt aus Lemma 3.7 für $B := (\operatorname{diag} M)^{-1}$

$$\rho\Big((I+BM)^{-1}(I-BM)\Big) < 1.$$

Die Eigenwerte von

$$\left|(I+BM)^{-1}(I-BM)\right| = \left|-\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

sind gegeben durch

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{7-\sqrt{145}}{24} \quad \textit{und} \quad \lambda_3 = \frac{7+\sqrt{145}}{24},$$

also gilt

$$-\frac{1}{4} \le \frac{7-\sqrt{145}}{24} \le 0 \quad \textit{bzw.} \quad 0 \le \frac{7+\sqrt{145}}{24} \le \frac{5}{6}$$

und somit

$$\rho\Big(\left|(I+BM)^{-1}(I-BM)\right|\Big) < 1.$$

Das Iterationsverfahren (3.8) konvergiert für die Matrix aus Beispiel 3.11 also gegen ein Punktintervall, während die Konvergenz des Iterationsverfahrens (3.2) gegen ein Punktintervall für diese Matrix nicht garantiert werden kann, was im Anschluss an Beispiel 3.4 gezeigt wurde.

4 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel stellen wir numerische Beispiele vor. Die Berechnungen dazu wurden mit *Matlab* [18] unter Verwendung der Erweiterung *Intlab* [23] durchgeführt.

4.1 Gemischte Komplementaritätsprobleme

Bei der Implementierung des Operators

$$L(x, A, [x]) := x - AF(x) + (I - A\delta F(x, [x]))([x] - x)$$

aus Satz 2.8 unter Einsatz eines Computers muss berücksichtigt werden, dass dieser in der Regel mit einem Gleitkommasystem arbeitet und zur Speicherung einer Zahl nur ein endlicher Zahlenvorrat an Gleitkommazahlen zur Verfügung steht. Um verlässliche Ergebnisse zu erhalten, ist es daher notwendig, sämtliche Rechenschritte zur Berechnung von $L(x, A, [x])$ unter Verwendung der entsprechenden Intervalloperationen durchzuführen. Die Matlab-Erweiterung Intlab ist in [23] dokumentiert und stellt eine Intervallarithmetik zur Verfügung, mit der sich dies realisieren lässt. Dazu werden Gleitpunktintervalle bestimmt, welche die exakten Größen $x, [x]$ und A enthalten.

Bei der Berechnung von $F_i(x)$ tritt unter Umständen das Problem auf, dass die Abfrage, welcher der Fälle in (1.8) vorliegt, auf dem Computer kein Ergebnis liefert. Dann wird für beide Fälle ein Gleitpunktintervall berechnet, das den exakten Wert $F_i(x)$ enthält, deren Vereinigung bestimmt und die weitere Rechnung mit dem so entstandenen Gleitpunktintervall durchgeführt.

Analog kann bei der Berechnung von $\delta F_i(x, [x])$ das Problem auftreten, dass die Abfrage, welcher der Fälle in (2.8) gegeben ist, zu keinem Resultat führt. Dann wird wiederum für jeden Fall ein Gleitpunktintervall bestimmt, das $\delta F_i(x, [x])$ einschließt, und die Vereinigung aller dieser Gleitpunktintervalle gebildet. Diese Aufgabe erledigt Algorithmus 4.1, welcher den in [3, S. 13 f.] beschriebenen Algorithmus verallgemeinert für Intervallmatrizen, die durch (2.8) gegeben sind.

Zur Beschreibung des Algorithmus 4.1 führen wir einige Notationen ein. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ seien die Vektoren $\check{y}^i$ und $\hat{y}^i$ durch (2.7) gegeben. $[hx]^i, [h\check{y}]^i, [h\hat{y}]^i, [\check{s}]^i$ und $[\hat{s}]^i$ seien Gleitpunktintervalle mit

$$x_i - f_i(x) \in [hx]^i, \quad \check{y}_i^i - f_i(\check{y}^i) \in [h\check{y}]^i, \quad \hat{y}_i^i - f_i(\hat{y}^i) \in [h\hat{y}]^i$$

beziehungsweise

$$\frac{1}{1-\frac{\sup([hx]^i)}{\sup([h\hat{y}]^i)}} \in [\hat{s}]^i, \quad \frac{1}{1-\frac{\inf([hx]^i)}{\inf([h\check{y}]^i)}} \in [\check{s}]^i.$$

Dann ist

$$\hat{\alpha}_i(x,\hat{y}^i) := \sup\left([\hat{s}]^i\right) \geq \frac{1}{1-\frac{\sup([hx]^i)}{\sup([h\hat{y}]^i)}} \geq \frac{(\hat{y}^i - f(\hat{y}^i))_i}{(\hat{y}^i - f(\hat{y}^i))_i - (x-f(x))_i} = \alpha_i(x,\hat{y}^i),$$

falls

$$\sup([hx]^i) \leq 0 \quad \text{und} \quad \hat{y}^i_i - f_i(\hat{y}^i) > 0$$

gilt, und

$$\check{\alpha}_i(x,\check{y}^i) := \sup\left([\check{s}]^i\right) \geq \frac{1}{1-\frac{\inf([hx]^i)}{\inf([h\check{y}]^i)}} \geq \frac{(\check{y}^i - f(\check{y}^i))_i}{(\check{y}^i - f(\check{y}^i))_i - (x-f(x))_i} = \alpha_i(x,\check{y}^i),$$

wenn

$$\inf([hx]^i) > 0 \quad \text{und} \quad \check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) \leq 0$$

ist.

Algorithmus 4.1. *1. Ist* $\inf([h\check{y}]^i) \geq l_i$*, das heißt,* $\check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) \geq l_i$*, setze* $\delta F_i(x,[x]) := \delta f_i(x,[x])$*, andernfalls führe den nächsten Schritt aus.*

2. Ist $\sup([h\hat{y}]^i) \leq 0$*, das heißt,* $\hat{y}^i_i - f_i(\hat{y}^i) \leq 0$*, setze* $\delta F_i(x,[x]) := e_i^T$*, andernfalls führe den nächsten Schritt aus.*

3. Ist $\sup([hx]^i) \leq 0$*, das heißt,*

$$x_i - f_i(x) \leq 0 \quad \textit{sowie} \quad \hat{y}^i_i - f_i(\hat{y}^i) \leq 0 \textit{ oder } \hat{y}^i_i - f_i(\hat{y}^i) > 0,$$

setze

$$\begin{aligned}\delta F_i(x,[x]) &:= e_i^T \cup [0,\hat{\alpha}_i(x,\hat{y}^i)](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T \\ &= [0,\hat{\alpha}_i(x,\hat{y}^i)](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T,\end{aligned}$$

andernfalls führe den nächsten Schritt aus.

4. Ist $\inf([hx]^i) > 0$*, das heißt,*

$$x_i - f_i(x) > 0 \quad \textit{sowie} \quad \check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) \geq 0 \textit{ oder } \check{y}^i_i - f_i(\check{y}^i) < 0,$$

setze

$$\begin{aligned}\delta F_i(x,[x]) &:= \delta f_i(x,[x]) \cup [1-\check{\alpha}_i(x,\check{y}^i),1](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T \\ &= [1-\check{\alpha}_i(x,\check{y}^i),1](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T,\end{aligned}$$

andernfalls führe den nächsten Schritt aus.

5. Setze

$$\begin{aligned}\delta F_i(x,[x]) &:= e_i^T \cup \delta f_i(x,[x]) \cup [0, \hat{\alpha}_i(x,\hat{y}^i)](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T \\ &\quad \cup [1-\check{\alpha}_i(x,\check{y}^i),1](\delta f_i(x,[x]) - e_i^T) + e_i^T \\ &= \left[\min\{e_i^T, \delta f_i(x,[x])\}, \max\{e_i^T, \delta f_i(x,[x])\}\right].\end{aligned}$$

Der Intervalloperator $L(x,A,[x])$ aus Satz 2.8 wird in [3, S. 4 f.] zur Lösungsverifikation für lineare Komplementaritätsprobleme verwendet. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Für eine Funktion F, deren Nullstellen mit den Lösungen des linearen Komplementaritätsproblems übereinstimmen, wird eine Intervallmatrix $\delta F(x,[x])$ derart bestimmt, dass für festes $x \in [x]$

$$F(x) - F(y) \in \delta F(x,[x])(x-y) \quad \forall y \in [x]$$

gilt. Für A wird eine Gleitpunktnäherung der *Mittelpunktmatrix* von $(\delta F(x,[x]))^{-1}$ verwendet. Dabei erhält man die zu einer Intervallmatrix gehörige Mittelpunktmatrix, indem in jeder Komponente der Intervallmatrix das Intervall durch dessen Mittelpunkt ersetzt wird. Das Intervall $[x]$ wird, ausgehend von der bei diesen Testproblemen bekannten Lösung x des linearen Komplementaritätsproblems, folgendermaßen bestimmt, vgl. [3, S. 14]: Für $\alpha \in (-1,1), r > 0$ und alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ wird

$$x_i := x_i - r\alpha \quad \text{und} \quad [x]_i := x_i + [-r,r]$$

gesetzt, womit $x \in [x]$ gesichert ist. In Abhängigkeit von α und n wird dann ein möglichst großer Wert für r bestimmt derart, dass (2.11) gilt, wodurch die Existenz einer Lösung im Intervall $[x]$ nachgewiesen ist. Zur Lösungsverifikation für gemischte Komplementaritätsprobleme folgen wir dieser Vorgehensweise, indem wir Satz 2.8 auf die Funktion (1.8) anwenden.

Das folgende Beispiel ist motiviert durch [22, Example 4.1].

Beispiel 4.2. *Für gerades $n \in \mathbb{N}$, $l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n, q \in \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit*

$$l := \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ \vdots \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q := \begin{pmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

betrachten wir erneut $\mathrm{MLCP}(l,q,M)$ *aus Beispiel 1.12. Eine Lösung von* $\mathrm{MLCP}(l,q,M)$ *ist durch $x \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad \textit{und} \quad \begin{cases} x_{2i-1} = -1 \\ x_{2i} = 1 \end{cases} \textit{für alle } i \in \left\{2,\ldots,\frac{n}{2}\right\},$$

gegeben. Wählt man den Radius r gemäß folgender Tabelle, so gilt

$$L(x,A,[x]) \subseteq [x].$$

		n			
r		10	20	50	100
α	-0.75	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
	-0.5	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
	0	$6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$
	0.5	$1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
	0.75	$2 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$

Beispiel 4.3. *Für $n = 3k, k \in \mathbb{N}$, $l \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})^n$, $q \in \mathbb{R}^n$ und $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit*

$$l := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\infty \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix}, \quad q := \begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{\pi}{4} - 1 \\ \frac{\pi}{4} - 1 \\ \vdots \\ \pi \\ -\frac{\pi}{4} - 1 \\ \frac{\pi}{4} - 1 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$f_i(x) := (Mx + q)_i + \arctan x_i \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

betrachten wir $\mathrm{MCP}(l, f)$, dessen Lösung durch $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} x_{3i-2} &= 0 \\ x_{3i-1} &= 1 \\ x_{3i} &= -1 \end{aligned} \quad \text{für alle } i \in \left\{1, \dots, \frac{n}{3}\right\}$$

gegeben ist. Wählt man den Radius r gemäß folgender Tabelle, so ist (2.11) für die Funktion (1.8) erfüllt.

		n			
r		9	30	60	90
α	-0.75	$4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
	-0.5	$4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$
	0	$8 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
	0.5	$1 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
	0.75	$1 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$

4.2 Gemischte lineare Komplementaritätsprobleme

Beispiel 4.4. *Für*

$$q := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $l := (0, -\infty, 0)$ *folgt analog zu Beispiel 2.24, dass* M *eine H-Matrix ist und für*

$$[x] := \begin{pmatrix} [-5,5] \\ [-\frac{23}{3}, \frac{23}{3}] \\ [-\frac{19}{3}, \frac{19}{3}] \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$\Gamma\left([x], D\right) \subseteq [x]$$

gilt. Satz 2.10 garantiert somit die Existenz einer Lösung von $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ *in*

$$\Gamma\left([x], D\right) = \begin{pmatrix} [0,5] \\ [-\frac{11}{3}, \frac{23}{3}] \\ [0, \frac{23}{6}] \end{pmatrix} =: [x]^0$$

und da M *eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist, konvergiert das Iterationsverfahren (3.2) für* $D := (\operatorname{diag} M)^{-1}$ *gegen ein Punktintervall, wobei folgende Einschließungsintervalle auftreten:*

$$[x]^0 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000,\ 5.00000000000000] \\ [-3.66666666666667,\ 7.66666666666667] \\ [0.00000000000000,\ 3.83333333333334] \end{pmatrix}$$

$$[x]^1 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000,\ 4.16666666666667] \\ [1.99999999999998,\ 6.41666666666667] \\ [0.00000000000000,\ 3.83333333333334] \end{pmatrix}$$

$$[x]^2 = \begin{pmatrix} [0.99999999999999,\ 3.75000000000001] \\ [1.99999999999998,\ 6.00000000000001] \\ [0.00000000000000,\ 2.79166666666667] \end{pmatrix}$$

$$[x]^3 = \begin{pmatrix} [0.99999999999999,\ 3.26388888888890] \\ [2.49999999999999,\ 5.27083333333334] \\ [0.00000000000000,\ 2.37500000000001] \end{pmatrix}$$

$$[x]^4 = \begin{pmatrix} [1.16666666666666,\ 2.88194444444445] \\ [2.49999999999999,\ 4.81944444444446] \\ [0.00000000000000,\ 1.76736111111112] \end{pmatrix}$$

$$[x]^5 = \begin{pmatrix} [1.16666666666666, & 2.52893518518520] \\ [2.58333333333333, & 4.32465277777779] \\ [0.00000000000000, & 1.35069444444445] \end{pmatrix}$$

$$[x]^6 = \begin{pmatrix} [1.19444444444444, & 2.22511574074075] \\ [2.58333333333333, & 3.93981481481483] \\ [0.00000000000000, & 0.92679398148149] \end{pmatrix}$$

$$[x]^7 = \begin{pmatrix} [1.19444444444444, & 1.95553626543211] \\ [2.59722222222222, & 3.57595486111112] \\ [0.00000000000000, & 0.58246527777779] \end{pmatrix}$$

$$[x]^8 = \begin{pmatrix} [1.19907407407407, & 1.71947337962964] \\ [2.59722222222222, & 3.26900077160495] \\ [0.00000000000000, & 0.26574556327162] \end{pmatrix}$$

$$[x]^9 = \begin{pmatrix} [1.19907407407407, & 1.51158211162553] \\ [2.59953703703703, & 2.99260947145063] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[x]^{10} = \begin{pmatrix} [1.19984567901234, & 1.33086982381688] \\ [2.59953703703703, & 2.75579105581277] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[x]^{11} = \begin{pmatrix} [1.19984567901234, & 1.25193035193759] \\ [2.59992283950617, & 2.66543491190844] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[x]^{12} = \begin{pmatrix} [1.19997427983538, & 1.22181163730282] \\ [2.59992283950617, & 2.62596517596880] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[x]^{13} = \begin{pmatrix} [1.19997427983538, & 1.20865505865627] \\ [2.59998713991769, & 2.61090581865141] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[x]^{14} = \begin{pmatrix} [1.19999571330589, & 1.20363527288381] \\ [2.59998713991769, & 2.60432752932814] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

Die exakte Lösung von $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ *ist wegen*

$$M \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{13}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

durch $x = \left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 0\right)^T$ *gegeben.*

Beispiel 4.5. *Wir betrachten nochmals* $\mathrm{MLCP}(q, M)$ *mit*

$$q := \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und $l := (0, -\infty, 0)$. *Laut Beispiel 4.4 enthält das Intervall*

$$\Gamma([x], D) \begin{pmatrix} [0, 5] \\ [-\frac{11}{3}, \frac{23}{3}] \\ [0, \frac{23}{6}] \end{pmatrix}$$

eine Lösung dieses gemischten linearen Komplementaritätsproblems. Mit Satz 2.30 folgt, dass die Funktion $\theta(x, A, B)$ *aus Satz 3.6 für* $A = B = I$ *einen Fixpunkt im Intervall*

$$\frac{(I - M)\Gamma([x], D) - q}{2} = \begin{pmatrix} [-\frac{19}{3}, \frac{25}{4}] \\ [-\frac{11}{6}, \frac{33}{4}] \\ [-\frac{25}{4}, \frac{23}{6}] \end{pmatrix} =: [x]^0$$

besitzt. Die Eigenwerte von

$$\left|(I + M)^{-1}(I - M)\right| = \left|-\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

lauten

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \ \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{33}}{12} \quad \textit{und} \quad \lambda_3 = \frac{5 + \sqrt{33}}{12}.$$

Wegen

$$-\frac{1}{12} \le \frac{5 - \sqrt{33}}{12} \le 0 \quad \textit{sowie} \quad 0 \le \frac{5 + \sqrt{33}}{12} \le \frac{11}{12}$$

gilt

$$\rho\left(\left|(I + BM)^{-1}(I - BM)\right|\right) < 1.$$

Das heißt, das Iterationsverfahren (3.8) konvergiert gegen eine Lösung von $\mathrm{MLCP}(l, q, M)$ *und man erhält die Einschließungsintervalle*

$$[y]^0 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, \ 12.50000000000000] \\ [-3.66666666666667, \ 16.50000000000000] \\ [0.00000000000000, \ 7.66666666666667] \end{pmatrix}$$

$$[y]^5 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, \ 2.71528849451306] \\ [1.51625058942042, \ 3.95532728909468] \\ [0.00000000000000, \ 0.59710567772638] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{10} = \begin{pmatrix} [0.42520623585900, & 1.98300247628667] \\ [1.94989677769908, & 3.26274381667498] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{15} = \begin{pmatrix} [0.75183466699077, & 1.64833052697008] \\ [2.22222005878247, & 2.97803111818903] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{20} = \begin{pmatrix} [0.94203420777113, & 1.45795825407924] \\ [2.38251694974601, & 2.81747719792070] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{25} = \begin{pmatrix} [1.05154511095199, & 1.34845403540063] \\ [2.47484186320183, & 2.72515696839318] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{30} = \begin{pmatrix} [1.11456596926249, & 1.28543396824041] \\ [2.52797309086043, & 2.67202683128469] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{35} = \begin{pmatrix} [1.15083362018039, & 1.24916637703147] \\ [2.55854928298328, & 2.64145071283190] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{40} = \begin{pmatrix} [1.17170526035345, & 1.22829473952905] \\ [2.57614554445937, & 2.62385445538872] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{45} = \begin{pmatrix} [1.18371667155429, & 1.21628332844379] \\ [2.58627200889914, & 2.61372799109659] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{50} = \begin{pmatrix} [1.19062911378220, & 1.20937088621782] \\ [2.59209968385632, & 2.60790031614373] \\ [0.00000000000000, & 0.00000000000000] \end{pmatrix},$$

wobei die exakte Lösung $x = \left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}, 0\right)^T$ *ist, was in Beispiel 4.4 gezeigt wurde.*

Beispiel 4.6. *Für*

$$q := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad M := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt mit Beispiel 2.27, dass für

$$[x] := \begin{pmatrix} [0, \frac{1}{2}] \\ [0, \frac{1}{2}] \\ [0, 1] \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$\Gamma\left(\left[x\right], D\right) \subseteq \left[x\right]$$

erfüllt ist, und Korollar 2.11 sichert die Existenz einer Lösung von LCP(q, M) *in*

$$\Gamma\left(\left[x\right], D\right) = \begin{pmatrix} [0, \frac{1}{2}] \\ [0, \frac{1}{2}] \\ [0, 1] \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 2.28 erhält man, dass die Funktion $\theta(x, A, B)$ aus Satz 3.6 für $A = B = I$ einen Fixpunkt in

$$\frac{(I - M)\Gamma\left(\left[x\right], D\right) - q}{2} = \begin{pmatrix} [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ [0, \frac{1}{2}] \end{pmatrix} =: [x]^0$$

besitzt. Da die Eigenwerte von

$$\left|(I + M)^{-1}(I - M)\right| = \left| -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

durch

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{3} \quad \textit{und} \quad \lambda_3 = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$$

gegeben sind, gilt

$$\rho\left(\left|(I + M)^{-1}(I - M)\right|\right) < 1.$$

Die Konvergenz des Iterationsverfahrens (3.8) gegen eine Lösung von LCP(q, M) *ist demnach gesichert. Die Implementierung des Iterationsverfahrens liefert folgende Einschließungsintervalle:*

$$[y]^0 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000,\ 1.00000000000000] \\ [0.00000000000000,\ 1.00000000000000] \\ [0.00000000000000,\ 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^1 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000,\ 0.33333333333334] \\ [0.00000000000000,\ 0.33333333333334] \\ [0.00000000000000,\ 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^2 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000,\ 0.33333333333334] \\ [0.00000000000000,\ 0.33333333333334] \\ [0.44444444444444,\ 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^3 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000,\ 0.18518518518519] \\ [0.00000000000000,\ 0.18518518518519] \\ [0.59259259259258,\ 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^4 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.13580246913581] \\ [0.00000000000000, & 0.13580246913581] \\ [0.74074074074073, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^5 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.08641975308643] \\ [0.00000000000000, & 0.08641975308643] \\ [0.82304526748970, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^6 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.05898491083677] \\ [0.00000000000000, & 0.05898491083677] \\ [0.88340192043895, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^7 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.03886602652035] \\ [0.00000000000000, & 0.03886602652035] \\ [0.92181069958847, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^8 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.02606310013718] \\ [0.00000000000000, & 0.02606310013718] \\ [0.94802621551592, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^9 = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.01732459482803] \\ [0.00000000000000, & 0.01732459482803] \\ [0.96530000508052, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{10} = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.01156666497317] \\ [0.00000000000000, & 0.01156666497317] \\ [0.97688360514148, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{11} = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.00770546495284] \\ [0.00000000000000, & 0.00770546495284] \\ [0.98458342506505, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{12} = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.00513885831165] \\ [0.00000000000000, & 0.00513885831165] \\ [0.98972416505312, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

$$[y]^{13} = \begin{pmatrix} [0.00000000000000, & 0.00342527831563] \\ [0.00000000000000, & 0.00342527831563] \\ [0.99314881614327, & 1.00000000000000] \end{pmatrix}$$

Die exakte Lösung von $\mathrm{LCP}(q, M)$ ist $x = (0, 0, 1)^T$, denn es gilt

$$Mx + q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zusammenfassung und Ausblick

Die Methode zur Lösungsverifikation für nichtlineare Komplementaritätsprobleme aus [4] wurde in Satz 2.8 derart verallgemeinert, dass sie für gemischte Komplementaritätsprobleme verwendet werden kann. Da sich laut Satz 1.7 jede Variationsungleichung mit Box-Restriktionen in ein gemischtes Komplementaritätsproblem überführen lässt, sind wir mit Hilfe dieser Verallgemeinerung nun sogar in der Lage, den Existenznachweis für eine Lösung einer Variationsungleichung mit Box-Restriktionen zu erbringen.

Der Intervalloperator aus [2] wurde in Satz 2.10 so erweitert, dass er die Lösungsverifikation für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme ermöglicht. Überdies wurde in Satz 2.23 gezeigt, wie sich ein Intervall bestimmen lässt, welches eine Lösung des gemischten linearen Komplementaritätsproblems enthält, falls die zugehörige Matrix eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist und der zugehörige Vektor gewisse Voraussetzungen erfüllt. In Satz 2.25 wurde eine weitere Klasse von Matrizen angegeben, für die sich ein Intervall berechnen lässt, welches der Operator aus [2] in sich abbildet.

Zur Lösungsverifikation für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme wurde in Satz 2.32 ein neuer Intervalloperator konstruiert. Ferner wurde in Satz 2.35 mit Bedingung (2.33) ein Kriterium präsentiert, welches sicherstellt, dass der Intervalloperator ein symmetrisches Intervall in sich abbildet, falls dieser zur Lösungsverifikation für lineare Komplementaritätsprobleme verwendet wird. Durch Beispiel 2.36 wurde illustriert, dass Matrizen existieren, die Bedingung (2.33) genügen, aber die Voraussetzungen von Satz 2.23 nicht erfüllen.

Unter Verwendung der Erweiterung des Intervalloperators aus [2] wurde ein Einschließungsverfahren für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme präsentiert. Mit Hilfe von Satz 3.1 wurde gezeigt, dass dieses Einschließungsvefahren gegen ein Punktintervall konvergiert, falls die zugehörige Matrix eine H-Matrix mit positiven Diagonalelementen ist. Ist die Matrix hingegen symmetrisch und positiv definit, aber keine H-Matrix, so kann die Konvergenz gegen ein Punktintervall nicht garantiert werden, was in Lemma 3.3 nachgewiesen wurde.

In Abschnitt 3.2 wurde der Intervalloperator aus Abschnitt 2.2.2 verwendet, um ein Einschließungsverfahren für eine Lösung eines gemischten linearen Komplementaritätsproblems zu konstruieren. Dabei wurde mit Bedingung (3.6) in Satz 3.6 ein Kriterium angegeben, welches die Konvergenz des Einschließungsverfahrens gegen ein Punktintervall sicherstellt. Beispiel 3.11 zeigte schließlich, dass es Matrizen gibt, die Bedingung 3.6 erfüllen, aber keine H-Matrizen sind.

In dieser Arbeit wurden Methoden zur Lösungsverifikation und Einschließungsverfahren für gemischte Komplementaritätsprobleme präsentiert. Insbesondere wurden für gemischte lineare Komplementaritätsprobleme Kriterien erarbeitet, welche eine erfolgreiche Lösungsverifikation oder die Konvergenz eines Einschließungsverfahrens gegen eine Lösung garantieren. Es wäre wünschenswert, weitere derartige Bedingungen zu finden und somit für eine größere Anzahl von linearen gemischten Komplementaritätsproblemen die Existenz einer Lösung nachweisen beziehungsweise die Konvergenz eines Einschließungsverfahrens gegen eine Lösung gewährleisten zu können.

Anhang: Intervallrechnung

Intervalloperationen

Für $\underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}$ mit $\underline{a} \leq \overline{a}$ bezeichne im Folgenden

$$[a] := [\underline{a}, \overline{a}] := \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq a \leq \overline{a}\}$$

ein reelles Intervall und

$$\mathbb{IR} := \{[\underline{a}, \overline{a}] \mid \underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R} \text{ mit } \underline{a} \leq \overline{a}\}$$

die Menge aller reellen Intervalle. Gemäß [1, S. 2] geben wir folgende

Definition 4.7. Für $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ definieren wir die zweistelligen Operationen

- $[a] + [b] := [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$,
- $[a] - [b] := [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$,
- $[a] \cdot [b] := [\min S, \max S] \quad \text{mit } S := \{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}$,
- $[a]/[b] := [a] \cdot \left[\frac{1}{\overline{b}}, \frac{1}{\underline{b}}\right]$, falls $0 \notin [b]$.

Wir identifizieren künftig eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit dem *Punktintervall* $[x, x]$, sodass die eingeführten Operationen auch durchführbar sind, falls ein Operand eine reelle Zahl ist. Für $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ ist

$$\{a \circ b \mid a \in [a], b \in [b]\} = [a] \circ [b],$$

siehe [1, S. 2].

Des Weiteren folgt für $[a], [b], [c], [d] \in \mathbb{IR}$ und $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$ aus den Inklusionen

$$[a] \subseteq [b] \quad \text{und} \quad [c] \subseteq [d]$$

die sogenannte *Teilmengeneigenschaft*

$$[a] \circ [c] \subseteq [b] \circ [d].$$

Der Beweis dieser Aussage findet sich in [1, S. 7].

Im nachstehenden Satz geben wir einige der Rechenregeln für Intervalloperationen aus [1, S. 3 f., Satz 4] an.

Satz 4.8. *Es seien* $[a]$*,* $[b], [c] \in \mathbb{IR}$*. Dann*

- *gelten die Kommutativgesetze*

$$[a] + [b] = [b] + [a],$$
$$[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a],$$

- *gelten die Assoziativgesetze*

$$[a] + ([b] + [c]) = ([a] + [b]) + [c],$$
$$[a] \cdot ([b] \cdot [c]) = ([a] \cdot [b]) \cdot [c],$$

- *gilt das Subdistributivgesetz*

$$[a]([b] + [c]) \subseteq [a][b] + [a][c],$$

- *ist das neutrale Element bezüglich "+" respektive "·" gegeben durch*

$$[a] + 0 = [a]$$
$$[a] \cdot 1 = [a].$$

Neben den bisher aufgeführten Operationen sind für Intervalle auch einstellige Operationen gebräuchlich, siehe etwa [1, S. 3, Definition 3].

Definition 4.9. Für eine stetige einstellige Operation $\varphi : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein Intervall $[x] \subseteq D$ definieren wir

$$\varphi([x]) := \left[\min_{x \in [x]} \varphi(x), \max_{x \in [x]} \varphi(x) \right].$$

Intervallmatrixoperationen

Für zwei reelle Matrizen $\underline{A} = (\underline{a}_{ij}), \overline{A} = (\overline{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bedeute $\underline{A} \leq \overline{A}$, dass

$$\underline{a}_{ij} \leq \overline{a}_{ij} \quad \text{für alle } i \in \{1,\ldots,m\},\ j \in \{1,\ldots,n\},$$

ist. Des Weiteren bezeichne

$$([a]_{ij}) := [A] := [\underline{A}, \overline{A}] := \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} |\ \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\right\} \tag{4.1}$$

eine Intervallmatrix und

$$\mathbb{IR}^{m\times n} := \left\{[\underline{A}, \overline{A}] \mid \underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mit } \ \underline{A} \leq \overline{A}\right\}$$

die Menge aller Intervallmatrizen. Im Fall $n = 1$ wird duch (4.1) ein Intervallvektor definiert und $\mathbb{IR}^m := \mathbb{IR}^{m\times 1}$ bezeichne die Menge aller Intervallvektoren. Für Intervallmatrizen beziehungsweise Intervallvektoren definieren wir ebenfalls zweistellige Operationen und orientieren uns dabei an [1, S. 148 f., Definition 3].

Definition 4.10. Für $[A] \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ und $[d] \in \mathbb{IR}$ definieren wir die zweistelligen Operationen

- $[A] \pm [B] := ([a]_{ij} \pm [b]_{ij}) \quad$ für $[B] \in \mathbb{IR}^{m\times n}$,
- $[A] \cdot [B] := ([c]_{ij}) := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} [a]_{ik}[b]_{kj}\right) \quad$ für $[B] \in \mathbb{IR}^{n\times r}$,
- $[d] \cdot [A] := ([d][a]_{ij})$.

Falls ein Operand eine reelle Matrix M ist, identifiziert man diese sogenannte *Punktmatrix* wiederum mit der entsprechenden Intervallmatrix $[M, M]$.

Aus der Definition der Multiplikation von Intervallmatrizen folgt für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $d \in \mathbb{R}^n$ unmittelbar

$$A[-d, d] = [-|A|d, |A|d]\,,$$

was im Beweis von Satz 2.23 verwendet wird.

Für die Operationen aus Definition 4.10 gilt die *Einschließungseigenschaft*, siehe [1, S. 149]:

$$\{A \circ B|\ A \in [A], B \in [B]\} \subseteq [A] \circ [B]$$

für $\circ \in \{+, -, \cdot\}$.

[1, S. 152, Satz 5] besagt, dass für Intervallmatrizen $[A], [B], [C], [D]$ ebenfalls die Teilmengeneigenschaft gilt, das heißt, aus

$$[A] \subseteq [B] \quad \text{und} \quad [C] \subseteq [D]$$

folgt für $\circ \in \{+, -, \cdot\}$ die Inklusion

$$[A] \circ [C] \subseteq [B] \circ [D].$$

Wir entnehmen [1, S. 150 f., Satz 4] einige Rechenregeln für Intervallmatrizen und formulieren diese in

Satz 4.11. *Es seien $[A]$, $[B]$ und $[C]$ Intervallmatrizen derart, dass alle untenstehenden Verknüpfungen definiert sind. Dann*

- *gilt das Kommutativgesetz*

$$[A] + [B] = [B] + [A],$$

- *gilt das Assoziativgesetz*

$$[A] + ([B] + [C]) = ([A] + [B]) + [C],$$

- *gelten die Subdistributivgesetze*

$$\begin{aligned} ([A] + [B])[C] &\subseteq [A][C] + [B][C], \\ [C]([A] + [B]) &\subseteq [C][A] + [C][B], \end{aligned}$$

- *ist das neutrale Element bezüglich "+" respektive "·" gegeben durch*

$$\begin{aligned} [A] + O &= [A], \\ [A] \cdot I &= [A], \end{aligned}$$

wobei O die Nullmatrix und I die Einheitsmatrix bezeichnet.

Wie das Beispiel in [1, S. 151 f.] zeigt, gilt für die Multiplikation von Intervallmatrizen das Assoziativgesetz nicht. Daher darf bei der Definition des Intervalloperators

$$\Theta([x], A, B) := \big((A + BM)^{-1}(A - BM)\big)\, \Psi([x]) - (A + BM)^{-1}Bq$$

in Abschnitt 2.2.2 beziehungsweise 3.2 auf die Klammern um den Ausdruck

$$(A + BM)^{-1}(A - BM)$$

im Allgemeinen nicht verzichtet werden.

Ein weiterer wichtiger Begriff für die Intervallrechnung ist der des *Durchmessers*, welchen wir wie in [1, S. 20, Definition 3 beziehungsweise S. 152, Definition 6] definieren.

Definition 4.12. Es seien $[a] = [\underline{a}, \overline{a}] \in \mathbb{IR}$ und $[A] = ([a]_{ij}) \in \mathbb{IR}^{m \times n}$. Dann heißt

- $d([a]) := \overline{a} - \underline{a}$ *Durchmesser* von $[a]$,
- $d([A]) := (d([a]_{ij}))$ *Durchmessermatrix* respektive *Durchmesser* von $[A]$.

Abschließend definieren wir analog zu [1, S. 28 f.] für eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ den Begriff der *intervallmäßigen Auswertung*.

Definition 4.13. Es seien $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $[x] \subseteq D$ ein Intervall und $f(x)$ ein Funktionsausdruck, mit dem sich der Funktionswert von f für $x \in D$ berechnen lässt. Falls im Funktionsausdruck für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ jedes x_i durch $[x]_i$ und alle Operationen durch die entsprechenden Intervalloperationen gemäß Definition 4.7 und Definition 4.9 ersetzt werden, entstehe ein definierter Intervallausdruck $f([x])$. Dann heißt $f([x])$ *intervallmäßige Auswertung* von f.

Literaturverzeichnis

[1] Alefeld, Götz und Jürgen Herzberger: *Einführung in die Intervallrechnung*, Band 12 der Reihe *Informatik*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1974.

[2] Alefeld, Götz, Zhengyu Wang und Zuhe Shen: *Enclosing solutions of linear complementarity problems for H-matrices.* Reliab. Comput., 10(6):423–435, 2004.

[3] Alefeld, Götz, Xiaojun Chen und Florian A. Potra: *Numerical validation of solutions of linear complementarity problems.* Numer. Math., 83(1):1–23, 1999.

[4] Alefeld, Götz, Xiaojun Chen und Florian A. Potra: *Numerical validation of solutions of complementarity problems: the nonlinear case.* Numer. Math., 92(1):1–16, 2002.

[5] Bazaraa, Mokhtar S., Hanif D. Sherali und C. M. Shetty: *Nonlinear programming. Theory and algorithms.* Wiley, Hoboken, 3. Auflage, 2006.

[6] Bokhoven, Wilhelmus M. van: *Piecewise linear modelling and analysis.* Doktorarbeit, Eindhoven, 1981.

[7] Cottle, Richard W., Jong-Shi Pang und Richard E. Stone: *The linear complementarity problem.* Computer Science and Scientific Computing. Academic Press Inc., Boston, 1992.

[8] Facchinei, Francisco und Jong-Shi Pang: *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. Volume I.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2003.

[9] Facchinei, Francisco und Jong-Shi Pang: *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. Volume II.* Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] Ferris, Michael C. und Jong-Shi Pang: *Engineering and economic applications of complementarity problems.* SIAM Rev., 39(4):669–713, 1997.

[11] Fiedler, Miroslav: *Special matrices and their applications in numerical mathematics.* Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.

[12] Fiedler, Miroslav und Vlastimil Pták: *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors.* Czechoslovak Math. J., 12 (87):382–400, 1962.

[13] Heuser, Harro: *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.* Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 12. Auflage, 2002.

[14] Horn, Roger A. und Charles R. Johnson: *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[15] Jungnickel, Dieter: *Optimierungsmethoden. Eine Einführung.* Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin, 1999.

[16] Krawczyk, Rudolf: *Newton-Algorithmen zur Bestimmung von Nullstellen mit Fehlerschranken.* Computing (Arch. Elektron. Rechnen), 4:187–201, 1969.

[17] Krawczyk, Rudolf und Arnold Neumaier: *Interval slopes for rational functions and associated centered forms.* SIAM J. Numer. Anal., 22(3):604–616, 1985.

[18] MATLAB: *Version 7.10.0.499 (R2010a).* The MathWorks Inc., Natick, 2010.

[19] Moore, Ramon E.: *Interval analysis.* Prentice-Hall series in automatic computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.

[20] Moore, Ramon E.: *A test for existence of solutions to nonlinear systems.* SIAM J. Numer. Anal., 14(4):611–615, 1977.

[21] Moré, Jorge J. und Werner C. Rheinboldt: *On P- and S-functions and related classes of n-dimensional nonlinear mappings.* Linear Algebra and Appl., 6:45–68, 1973.

[22] Murty, Katta G.: *Linear complementarity, linear and nonlinear programming*, Band 3 der Reihe *Sigma Series in Applied Mathematics.* Heldermann Verlag, Berlin, 1988.

[23] Rump, Siegfried M.: *INTLAB - INTerval LABoratory.* In: Csendes, Tibor (Herausgeber): *Developments in Reliable Computing*, Seiten 77–104. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. `http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/`.

[24] Schäfer, Uwe: *A new subclass of P-matrices.* Linear Algebra and Appl., 393:353–364, 2004.

[25] Schäfer, Uwe: *Das lineare Komplementaritätsproblem. Eine Einführung.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[26] Young, David M.: *Iterative solution of large linear systems.* Academic Press, New York, 1971.