

Dynamische Kapazitätssteuerung in medizinischen Einrichtungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Wirtschaftswissenschaften
(Dr. rer. pol.)

von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
am Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
- Universität des Landes Baden-Württemberg und
nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft -

genehmigte

Dissertation

von Dipl. Math. Vanessa Lange
aus Hamburg

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Februar 2013
Referent: Prof. Dr. Karl-Heinz Waldmann
Korreferent: Prof. Dr. Hans Daduna

Karlsruhe, 2013

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der theoretischen Analyse zweier Wartesituationen, wie sie in medizinischen Einrichtungen vorkommen.

Aufgrund immer höherer Ausgaben für das Gesundheitswesen und des hierdurch bedingten Kostendrucks auf die Anbieter medizinischer Leistungen sehen sich die Betreiber medizinischer Einrichtungen immer mehr der Aufgabe gegenüber, ihre knappen Ressourcen möglichst effizient einzusetzen. Dies bedeutet zum einen, diese Ressourcen möglichst hoch auszulasten, aber zum anderen auch, die Ressourcen so zuzuteilen, dass damit möglichst hohe Einnahmen erwirtschaftet werden. Gleichzeitig sind die Ansprüche der Bevölkerung an die Qualität medizinischer Behandlungen und deren Verfügbarkeit gestiegen. Darüber hinaus sind die Einrichtungen verpflichtet, Notfälle stets zu behandeln. Als Konsequenz aus dem resultierenden Zielkonflikt zwischen effizienter Auslastung und qualitativ hochwertiger, schnell verfügbarer medizinischer Leistungen müssen die Betreiber dieser Einrichtungen neben den langfristigen, strategischen Entscheidungen, wie der Planung von Krankenhausbetten und der Anschaffung von medizinischen hochspezialisierten Geräten, auch kurzfristige, operative Entscheidungen über die Steuerung ihrer Ressourcenkapazität treffen. Neben der Terminplanung gehört hierzu insbesondere die dynamische Kapazitätssteuerung, bei der unter anderem Entscheidungen über die Aufnahme zusätzlicher Patienten, also die Ressourcenauslastung, sowie über die Behandlungsabfolge der Patienten, also die Ressourcenzuweisung, getroffen werden.

Während auf operativer Ebene vor allem die Terminplanung im Fokus wissenschaftlicher Untersuchungen steht, existieren nur wenige Veröffentlichungen, die sich mit der dynamischen Kapazitätssteuerung beschäftigen. Insbesondere dem Zusammenspiel zwischen dieser und der Terminplanung wurde kaum Aufmerksamkeit geschenkt.

In der vorliegenden Arbeit wird die dynamische Kapazitätssteuerung medizinischer Einrichtungen untersucht und die beiden Probleme der Ressourcenauslastung durch Aufnahmesteuerung und der Ressourcenzuweisung auf verschiedene Patienten betrachtet. Hierzu werden zwei Modelle als Markovsche Entscheidungsprozesse mit dynamischer Umwelt formuliert, welche unterschiedliche Situationen in medizinischen Einrichtungen abbilden. Im ersten Modell wird eine ambulante Gesundheitseinrichtung, die mit dem open-access Konzept arbeitet, betrachtet und Strategien zur optimalen Ressourcensteuerung durch Aufnahmekontrolle nicht angemeldeter Patienten entwickelt. Im zweiten Modell wird eine Einrichtung betrachtet, in der sowohl ambulante als auch stationäre Patienten behandelt werden. Ziel in diesem Modell ist die Entwicklung einer optimalen Strategie zur Ressourcenzuweisung. Theoretische Analysen ergeben unter bestimmten, nicht sehr restriktiven Annahmen für beide Modelle einfach strukturierte Politiken - zum einen eine sogenannte Control-Limit-Rule, zum anderen eine sogenannte monotone Switching-Curve -, mit denen der erwartete Gewinn der Einrichtung unter Berücksichtigung der Patientenzufriedenheit in Form von Wartezeiten maximiert werden kann. Weitere Analysen unter zu Hilfenahme verschiedener Annahmen ergeben weitere Strukturaussagen über die optimalen Politiken. In beiden Modellen wird zudem eine Untersuchung des Einflusses der Terminplanung auf die optimalen Politiken vorgenommen. Abschließend wird ein drittes Modell vorgestellt, dass die Situationen der ersten beiden Modelle vereint.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Hintergrund	1
1.2	Motivation	2
1.3	Problembeschreibung und Ziel dieser Arbeit	6
1.4	Gliederung	7
2	Literatur	11
2.1	Terminplanung im Gesundheitswesen	11
2.2	Open-Access Systeme im Gesundheitswesen	14
2.3	Dynamische Kapazitätssteuerung im Gesundheitswesen	16
2.4	Andere Anwendungsbereiche	19
2.5	Steuerung von Warteschlangen	22
3	Theoretische Grundlagen	27
3.1	Stochastische dynamische Entscheidungsprozesse	27
3.1.1	Markovsche Entscheidungsprozesse	28
3.1.2	Markovsche Entscheidungsprozesse mit dynamischer Umwelt	31
3.1.3	Semi-Markovsche Entscheidungsprozesse	33
3.2	Konvexität und Multimodularität	37
3.2.1	Konvexität	37
3.2.2	Multimodularität	39
4	Ressourcenauslastung in medizinischen Einrichtungen	45
4.1	Situationsbeschreibung	45
4.2	Modellierung als Markovscher Entscheidungsprozess	46
4.3	Strukturaussagen	48
4.4	Terminplan als Umwelt	60
4.5	Behandlungszeitverteilungen und Kostenfunktionen	64
4.6	Weitere Umweltzustände	73
5	Ressourcenzuweisung in medizinischen Einrichtungen	75
5.1	Situationsbeschreibung	75
5.2	Modellierung als Markovscher Entscheidungsprozess	76
5.3	Strukturaussagen	78
5.4	Terminplan als Umwelt	92
5.5	Ankunftsverteilungen und Kostenfunktionen	95
5.6	Weitere Umweltzustände	100
6	Schlussbetrachtung	103
6.1	Zusammenfassung	103

6.2	Ausblick	104
A	Integrierte dynamische Kapazitätssteuerung in medizinischen Einrichtungen	107
A.1	Situationsbeschreibung	107
A.2	Modellierung als Markovscher Entscheidungsprozess	107

Abbildungsverzeichnis

5.1	Schematische Darstellung der in den Sätzen 5.6 und 5.7 beschriebenen Entscheidungsregel für $K = 3$ und nicht vorhandenen Notfällen.	83
-----	--	----

1 Einleitung

1.1 Hintergrund

In den letzten Jahrzehnten sind die Ausgaben für das Gesundheitssystem in den meisten OECD-Ländern stark gestiegen. So nahmen die Gesundheitsausgaben dieser Länder in den Jahren 2000 bis 2009 im Schnitt um 4%, das Bruttoinlandsprodukt (BIP) jedoch nur um 1,6% zu. Während der Anteil der Gesundheitsausgaben am BIP 1990 noch 7,3% betrug, waren es im Jahr 2009 bereits 9,6%. In Deutschland lag der Anteil 2009 sogar bei 11,6%, womit es den USA (17,4%) sowie den Niederlanden und Frankreich (12% bzw. 11,8%) auf Platz 4 folgt.¹

Die Hauptgründe für diesen Anstieg liegen laut OECD (2003) vorwiegend in der Entwicklung und der Verbreitung neuer Medikamente und Technologien, wie z.B. der Computer- und Magnetresonanztomographie (CT bzw. MRT). So stiegen die Ausgaben für Medizintechnik im Zeitraum von 1995 bis 2002 in Deutschland jährlich um 4,2%.² Aber auch das rapide Wachstum der Anzahl chirurgischer Eingriffe führte zu steigenden Kosten, wobei das Angebot nicht mit der Nachfrage mithalten konnte und daher in vielen Ländern, wie z.B. Großbritannien, skandinavische Staaten und Spanien, erhebliche Wartezeiten für bestimmte Operationen bestehen.³ Ausschlaggebend für diese Entwicklung ist vor allem die gestiegene Lebenserwartung der Bevölkerung dieser Länder.

Ein großer Anteil der Ausgaben im deutschen Gesundheitssystem fällt im Bereich der Krankenhausbehandlungen an. So gaben die Gesetzlichen Krankenversicherungen im Jahr 2010 ca. 35% für diesen Bereich aus.⁴ Um den steigenden Ausgaben entgegenzuwirken, müssen daher vor allem in den Bereichen der stationären Versorgung und solchen Einrichtungen, in denen kostenintensive Geräte zum Einsatz kommen, Maßnahmen zur Kosteneinsparung getroffen werden.

Im stationären Sektor kann dies zum einen durch eine erhöhte Anzahl ambulanter Eingriffe und zum anderen durch eine Verringerung der Länge der Aufenthaltszeit (ALOS) in Krankenhäusern erreicht werden. Die Aufenthaltsdauer in Krankenhäusern wird oft als Maß der Effizienz herangezogen, da eine kürzere Dauer die Kosten der Behandlung reduziert. Der Aufenthalt sollte jedoch auch nicht zu kurz sein, da dies schädliche Auswirkungen auf die Gesundheit und die Genesung der Patienten haben kann. Auch kann dies zu höheren Wiedereinlieferungsquoten führen.⁵

Um die Länge der Aufenthaltszeit zu senken, wird in Deutschland seit dem 1. Januar 2004 die Vergütung für stationäre oder teilstationäre Aufnahmen nach dem Diagnostic Related Group (DRG) Fallpauschalensystem vorgenommen. Dies bedeutet, dass Krankenhäuser je nach Diagnose pauschalisierte Kosten erstattet bekommen, die weitestgehend unabhängig vom tatsächlichen Verlauf der Krankheit und der Genesung des Patienten sind. Identische Diagnosen werden also zu einem festen Preis abgerechnet, wobei allerdings Abschläge vorgenommen werden, wenn die Aufenthaltsdauer im Krankenhaus unter einer bestimmten Grenze (untere Grenzverweildauer) liegt, und geringe Zuschläge, falls die Aufenthaltsdauer eine bestimmte Grenze (obere Grenzverweildauer)

¹Siehe OECD (2011) S.150-151.

²Siehe Bundesministerium für Bildung und Forschung (2005) S.673.

³Siehe OECD (2003).

⁴Siehe Bundesministerium für Gesundheit (2005) Tabelle 9.6.

⁵Siehe OECD (2003).

übersteigt. Für die meisten Krankenhäuser ist es damit besonders wirtschaftlich, wenn die Dauer einer stationären Behandlung knapp oberhalb der unteren Grenze liegt. Hierbei ist zu beachten, dass bei Wiederaufnahme eines Patienten aufgrund derselben Fallpauschale die Aufenthalte zusammengefasst werden, weshalb ein Patient auch nicht zu früh entlassen werden sollte.⁶ Im Zuge dieser Neuregelung der Vergütung fiel die ALOS von durchschnittlich 10,1 Tagen im Jahr 1998 auf 8 Tage im Jahr 2009.⁷

Eine weitere Maßnahme zur Kosteneinsparung in Krankenhäusern ist die erhöhte Auslastung der Kapazitäten. Da die Medizintechnik in einigen Fällen als eigenständige Leistung abgegolten werden kann, besteht ein starker Anreiz, die ärztliche Leistungserbringung in diesem Bereich auszuweiten.⁸ Daher werden die medizinischen Diagnosegeräte in Krankenhäusern zunehmend auch ambulanten Patienten zur Verfügung gestellt, die sich nur für eine Untersuchung an diesen Geräten in das Krankenhaus begeben.

Auch in der ambulanten Gesundheitsfürsorge, gerade in Einrichtungen mit kostenintensiver Ausstattung, ist eine höhere Auslastung wichtig. Ambulante Behandlungen werden durch ein separates Finanzierungssystem abgedeckt, bei dem keine Fallpauschalen existieren. Hierbei ist die Gesamtvergütung eines Arztes durch eine bestimmte Leistungsgrenze beschränkt, die in Abhängigkeit der Anzahl der behandelten Patienten bzw. der Schwere ihrer Erkrankungen festgelegt wird. Die Gesamtvergütung aller Kassenärzte ist zusätzlich durch ein festes Gesamtbudget beschränkt.⁹

Durch eine steigende Anzahl ambulanter Ärzte und zunehmende Fallzahlen sowie kostenintensivere Behandlungen nimmt die Vergütung in diesem System für einen Patienten kontinuierlich ab.¹⁰ Da nun die Gesamtvergütung eines Arztes für einen einzelnen Patienten, vereinfacht gesehen, beschränkt ist, kann ein Arzt seinen Verdienst durch Ausdehnung seiner Leistungen bei gleichbleibender Patientenzahl nur geringfügig erhöhen und muss, um eine Finanzierung seiner Ausstattung zu gewährleisten, eine erhöhte Praxisauslastung anstreben.

Neben den steigenden Kosten für das Gesundheitswesen hat sich in den letzten Jahren der Anspruch der Bevölkerung auf eine qualitativ gute und schnell zugängliche medizinische Versorgung erhöht.¹¹

1.2 Motivation

Aufgrund der in Abschnitt 1.1 dargestellten Entwicklungen im Gesundheitswesen stehen medizinische Einrichtungen immer stärker unter dem Druck, ihr Kapazitätsmanagement zu verbessern und damit kostengünstig zu arbeiten und die medizinischen Ressourcen nicht nur effektiv, sondern auch effizient einzusetzen. Daher muss sowohl die Planung der Kapazitäten verbessert als auch die Abläufe in der Einrichtung effizienter gestaltet werden. Hierzu gehört eine verbesserte Auslastung und Zuteilung der Ressourcen. Um diese Ziele zu erreichen, gehen stationäre Einrichtungen immer mehr dazu über, ihre Ressourcen, wie z.B. CT- oder MRT-Geräte, auch ambulanten Patienten zur Verfügung zu stellen. Aber auch ambulante Einrichtungen suchen nach Wegen, ihre Auslastung zu erhöhen. Gleichzeitig müssen jedoch hohe Qualitätsstandards erhalten bzw. erreicht und kundenorientiert gearbeitet werden. Dabei wird als zentrales Kriterium für die Kundenzufriedenheit laut Perez et al. (2011) in der Regel die Wartezeit der Patienten verwendet, wobei zwischen direkter und

⁶Siehe Fallpauschalenvereinbarung 2012 (2011) §1 Absatz 1-3 sowie §2.

⁷Siehe Bundesministerium für Gesundheit (2005) Tabelle 11.4.

⁸Siehe Bundesministerium für Bildung und Forschung (2005) S.655.

⁹Siehe Hajen et al. (2008) 143ff.

¹⁰Siehe von der Schulenburg und Greiner (2007) 59f.

¹¹Siehe Hajen et al. (2008) S. 96.

indirekter Wartezeit unterschieden wird. Die direkte Wartezeit umfasst die Wartezeit eines Patienten zwischen der Ankunft in der medizinischen Einrichtung und dem Beginn seiner Behandlung. Als indirekte Wartezeit wird dagegen die Dauer zwischen der Behandlungsanfrage eines Patienten und dem Beginn seiner Behandlung bezeichnet. Angemerkt sei jedoch, dass Anbieter medizinischer Leistungen unabhängig von der Wartezeit ihrer regulären Patienten stets verpflichtet sind, Notfälle zu behandeln und ggf. Vorrang zu gewähren.

Nach Patrick und Puterman (2008) sind Methoden des Operations Researchs ein vielversprechendes Instrument zur Reduzierung von Kosten und zur Verbesserung des Zugangs zu Leistungen des Gesundheitssystems. Um das Gebiet der Planung und Kontrolle medizinischer Einrichtungen zu strukturieren, entwickelten Hans et al. (2012) einen theoretischen Rahmen, der drei Ebenen unterscheidet: Die strategische, die taktische sowie die operative Ebene.

Auf strategischer Ebene werden Entscheidungen getroffen, welche die Ziele unternehmenspolitischer Rahmenplanungen umsetzen sollen. Diese Entscheidungen sind langfristig ausgelegt, d.h., sie werden mindestens ein Jahr im Voraus getroffen und basieren im Allgemeinen auf aggregierten Informationen und Prognosen. In Hinblick auf das Kapazitätsmanagement medizinischer Einrichtungen gehören hierzu Entscheidungen über die Planung und Einrichtung von Operationssälen oder die Anschaffung hochpreisiger medizinischer Geräte.

Die taktische Ebene des Kapazitätsmanagements beinhaltet Entscheidungen über den Einsatz der zur Verfügung stehenden Ressourcen über einen mittelfristigen Planungshorizont, der von mehreren Wochen bis zu einigen Monaten reicht. Beispiele für solche Entscheidungen sind die Zuteilung der vorhandenen Ressourcen auf bestimmte Bereiche (z.B. die Zuweisung von Personal auf die verschiedenen Stationen) und deren Verwendung innerhalb dieser (z.B. Gestaltung des Terminplanes oder Gestaltung von Schichtplänen).

Auf der operativen Ebene werden kurzfristige Entscheidungen getroffen, die den Ablauf einer Gesundheitseinrichtung unmittelbar beeinflussen. Im Bereich des Kapazitätsmanagements bedeutet dies, die vorhandenen Ressourcen optimal auszulasten.

Die operative Ebene wird in zwei Bereiche unterteilt: die *offline*-Ebene und die *online*-Ebene. Auf der offline-Ebene werden Entscheidungen für einen bestimmten Zeitraum im Voraus getroffen. Hierzu gehören die Terminplanung von ambulanten Patienten oder Operationen sowie die Schichtplanung des Personals, wobei nicht wie auf der taktischen Ebene die Gestalt der Termin- bzw. Schichtpläne im Vordergrund steht, sondern die Zuteilung der Patienten bzw. des Personals auf die freien Termine bzw. die Schichten. Die online-Ebene verläuft dagegen in „Echtzeit“. Bei dieser werden die Ablaufprozesse in der Gesundheitseinrichtung überwacht und ggf. gesteuert. Hierzu gehören unter anderem die Koordinierung von Notfallpatienten und Patienten ohne Termin sowie die Reaktion auf unplanmäßige Ereignisse. Die konkreten Aufgaben der Entscheidungsträger umfassen damit die Aufnahme von Patienten, also die Ressourcenauslastung, sowie die Steuerung der Behandlungsabfolge der verschiedenen Patienten, also die Ressourcenzuweisung.¹²

Vor allem auf der operativen Ebene und hier besonders in den Bereichen der Terminplanung und der Steuerung der Ablaufprozesse besteht in vielen Einrichtungen noch ein hohes Verbesserungspotenzial.¹³ Diese beiden Steuerungsmöglichkeiten sind eng miteinander verwoben und beeinflussen sich gegenseitig. Durch die Terminplanung wird bestimmt, wann ein Patient welche Behandlung

¹²Einige Arbeiten unterscheiden die Terminplanung von der Steuerung der Ablaufprozesse auch durch die Begriffe „advance scheduling“ bzw. „allocation scheduling“, siehe z.B. Magerlein und Martin (1978).

¹³Dies liegt unter anderem daran, dass mathematisch fundierte Methoden zur Lösung des Problems von vielen Anbietern medizinischer Leistungen und dem verantwortlichen Personal als zu kompliziert abgelehnt werden. Bisweilen herrscht aber auch die Überzeugung, dass die praktische Erfahrung in diesen Bereichen mathematischen Methoden überlegen ist. Siehe z.B. Ayvaz und Huh (2010).

erhalten soll. Jedoch wird eine optimale Planung durch den sequentiellen Buchungsprozess, die zufälligen Patientenankünfte, Stornierungen, die Variabilität der Behandlungszeiten, unterschiedliche Dringlichkeiten sowie Patienten, die zu ihrem Termin nicht erscheinen (sogenannte *no-shows*) oder zu spät erscheinen, gestört.¹⁴ Darüber hinaus werden in Einrichtungen, in denen sowohl stationäre als auch ambulante Patienten behandelt werden, meist nur ambulanten Patienten Termine zugewiesen, nicht jedoch Patienten, die sich stationär in der Einrichtung befinden. Auch der Bedarf, der von Notfallpatienten generiert wird, entsteht zufällig. Durch all diese Einflussfaktoren können große Unsicherheiten in der geplanten Auslastung entstehen. Um die Auswirkungen möglichst gut handzuhaben, bietet sich die dynamische Kapazitätssteuerung an.

Sowohl in ambulanten Einrichtungen als auch solchen, die sowohl stationäre und ambulante Patienten behandeln, kann eine erhöhte Ressourcenauslastung dadurch erreicht werden, dass Patienten ohne Vergabe eines Termines noch am gleichen Tag, an dem sie eine Behandlung anfragen, behandelt werden. Dieses Konzept wird als *open-access* bezeichnet. Bei der Umsetzung dieses Konzeptes ist es gerade in Hinblick auf die direkten Wartezeiten, die auch für Patienten ohne Termin relevant sind, von großer Bedeutung, den Zufluss von Patienten über den Tag hinweg zu steuern.

In Einrichtungen, die sowohl ambulante als auch stationäre Patienten behandeln, ist in Hinblick auf die Wartezeiten der ambulanten und die Aufenthaltszeiten der stationären Patienten neben der Ressourcenauslastung die Ressourcenzuweisung auf die einzelnen Patientenklassen von großer Bedeutung. So sollte bei der Aufteilung der Ressourcen beachtet werden, dass die direkte Wartezeit ambulanter Patienten nicht zu hoch ausfällt, da dies zu Unzufriedenheit der Patienten führt, was wiederum ggf. mit einem Verlust zukünftiger Patienten verbunden ist. Andererseits kann eine verschobene bzw. zu spät erfolgte Behandlung stationärer Patienten zu einer verlängerten Aufenthaltszeit führen.

Im Folgenden gehen wir kurz näher auf die drei Bereiche Terminplanung ambulanter Patienten, Ressourcenauslastung durch *open-access* sowie die Ressourcenzuweisung auf verschiedene Patienten ein.

Terminplanung

Im Kontext des Gesundheitswesens gibt ein Terminplan an, wann die Behandlungen welcher Patienten beginnen sollen. Bei der Terminplanung wird demnach Patienten, die eine Behandlung benötigen, ein Zeitpunkt oder aber auch ein Zeitraum zugewiesen, zu dem bzw. innerhalb dessen diese Behandlung beginnen soll. Die Terminplanung verfolgt nach Liu et al. (2010) zwei Ziele: Zum einen soll den Patienten ein besserer Service geboten werden, da mit Hilfe der Terminplanung die direkte Wartezeit verkürzt werden kann. Zum anderen soll die medizinische Einrichtung vor einer hohen Fluktuation in der Auslastung geschützt werden. Durch eine geringe Fluktuation erhält die Einrichtung eine gewisse Planungssicherheit sowie eine gleichmäßige Auslastung und kann den Bedarf an Ressourcen, wie z.B. den Personalbedarf, besser abschätzen. Kaandorp und Koole (2007) merken zudem an, dass durch die Terminplanung die Leerlaufzeit der Ressourcen verkürzt werden soll. Um diese Ziele zu erreichen, wird in der Literatur meist eine Linearkombination aus direkter Wartezeit der Patienten, Leerzeit der Behandlungsressourcen sowie Anzahl der Überstunden als das durch die Terminplanung zu optimierende Leistungsmaß gewählt.¹⁵ Je nach Präferenzen der medizinischen Einrichtung werden dann die verschiedenen Größen unterschiedlich stark gewichtet. In einigen wenigen Arbeiten wird statt der direkten auch die indirekte Wartezeit bei der Optimierung

¹⁴Siehe Gupta und Wang (2012) S. 65.

¹⁵Siehe z.B. Cayirli und Veral (2003) S. 525

einbezogen.¹⁶

Bei der Gestaltung von Terminplänen müssen verschiedene Einflussfaktoren berücksichtigt werden. Nach Cayirli und Veral (2003) sind die wichtigsten Einflussfaktoren die Anzahl der zur Verfügung stehenden Behandlungsressourcen (z.B. Ärzte, CT-Geräte, etc.), die Anzahl der Dienstleistungen, die ein Patient benötigt, die Anzahl der Patienten, die in einer Behandlungsperiode (z.B. Tag) behandelt werden können, der Ankunftsprozess der Patienten, die Verteilung der Behandlungszeiten, die Reihenfolge, in der wartende Patienten behandelt werden, sowie die Möglichkeit zur Unterbrechung einer Behandlung. Sieht sich die medizinische Einrichtung mit verschiedenen Patientenklassen konfrontiert, so müssen auch diese berücksichtigt werden.

Nach der Gestaltung von Terminplänen und der Zuweisung von Patienten auf diesen ergibt sich der Terminplan dann meist als eine Unterteilung eines Tages in Abschnitte gleicher oder unterschiedlicher Länge, in denen jeweils eine bestimmte Anzahl von Patienten eingeplant sind.¹⁷

Open-Access

Die Idee des open-access Konzeptes besteht darin, Patienten die Möglichkeit zu geben, sich sowohl im Voraus zu einer Behandlung anzumelden, als auch ohne vorherige Anmeldung eine solche zu erhalten. Dieses Konzept wird seit den frühen 90er Jahren vermehrt in Einrichtungen eingesetzt, die ursprünglich nur nach Terminvergabe behandelt haben. Nach Virji (1990) erhalten mit diesem Konzept sozial schwächere Bevölkerungsgruppen einen besseren Zugang zu medizinischen Leistungen, da ein System, welches auf strikter Terminplanung beruht, diese Patienten benachteiligt. Murray und Tantau (2000) schlagen das open-access Konzept aber auch vor, um lange indirekte Wartezeiten zu vermeiden. Dabei ist dieses Konzept vorwiegend für ambulante Einrichtungen geeignet. Da die Anzahl der no-shows und der Stornierungen mit der indirekten Wartezeit steigt, kann eine Behandlungspolitik rein durch Terminvergabe zu einer unausgelasteten Einrichtung führen und damit zu einer Verschwendung von Ressourcen sowie Gewinneinbußen. So ergaben sich nach einer Studie von Gallucci et al. (2005) in einer psychiatrischen Ambulanz no-show- und Stornierungswahrscheinlichkeiten in Höhe von 0,12 bis 0,44 bei einer Terminvergabe von 0 bis 13 Tage vor dem eigentlichen Termin. Moore et al. (2001) beobachteten in einer allgemeinmedizinischen Praxis einen Anteil von no-shows und Stornierungen in Höhe von 31% und schätzte die dadurch entstandenen jährlichen Gewinneinbußen zwischen 3% und 14% ein. Ein weiterer Nachteil langer indirekter Wartezeiten liegt nach Murray und Berwick (2003) aber auch in einer möglichen Verschlechterung des Gesundheitszustandes der Patienten.

Um sowohl eine niedrigere Stornierungs- bzw. no-show-Rate als auch eine hohe Auslastung zu erreichen, wird beim open-access nur ein Teil der Ressourcen durch Terminvergabe belegt und die restlichen für die Nachfrage unangemeldeter Patienten reserviert. Murray und Tantau (2000) empfehlen z.B., nur ca. ein Drittel der Ressourcen im Voraus zu vergeben. Dies führt in der Regel zu geringeren indirekten Wartezeiten bei den Patienten mit Termin und damit zu einem niedrigeren Anteil von no-shows und Stornierungen. Gleichzeitig müssen aber auch für Patienten ohne Termin die direkten Wartezeiten berücksichtigt werden. Aus dem Ziel, sowohl niedrige direkte Wartezeiten als auch eine hohe Auslastung zu erreichen, ergibt sich neben der Terminplanung, die eine geeignete Anzahl freier Termine bereithält, eine besondere Bedeutung für die Aufnahmekontrolle der Patienten. Hier stellt die dynamische Kapazitätssteuerung Konzepte zur Lösung des Problems der Ressourcenauslastung bereit.

¹⁶Siehe Gupta und Denton (2008) S. 809.

¹⁷Das bedeutet, dass einigen Abschnitten auch keine Patienten zugewiesen sein können.

Ressourcenzuweisung

Die dynamische Ressourcenzuweisung ist vor allem in medizinischen Einrichtungen von großer Bedeutung, in denen verschiedene Patiententypen behandelt werden. In diesen Einrichtungen ist es oftmals sinnvoll, die Patienten abweichend von ihren Terminen zu behandeln. So treten in Einrichtungen, in denen sowohl stationäre als auch ambulante Patienten behandelt werden, Situationen auf, in denen die ambulanten Patienten trotz ihres Termins nicht oder erst später behandelt werden. Dies ist zumeist dadurch begründet, dass stationär aufgenommene Patienten hohe Kosten verursachen, sollten sie aufgrund einer verzögerten Behandlung länger in der Einrichtung verbleiben als vorgesehen, und, dass diese durch das Fallpauschalensystem nicht oder nur zum Teil erstattet werden. Die Entscheidungsträger müssen daher abwägen, ob eine Priorisierung stationärer Patienten eine längere direkte Wartezeit oder sogar die Nichtbehandlung eines ambulanten Patienten rechtfertigt oder ob das Risiko eingegangen werden soll, einen stationären Patienten länger in der Einrichtung zu behalten. Auch hier bietet die dynamische Kapazitätssteuerung Konzepte zur Lösung des Problems der Ressourcenzuweisung.

1.3 Problembeschreibung und Ziel dieser Arbeit

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der dynamischen Kapazitätssteuerung einer medizinischen Einrichtung über einen Tag hinweg. Dabei konzentrieren wir uns auf die online-Ebene des Kapazitätsmanagements und setzen voraus, dass die Terminplanung bereits abgeschlossen ist. Ziel unserer Arbeit ist es, Strategien zu ermitteln, die eine gewinnoptimale Auslastung bzw. eine gewinnoptimale Zuweisung von Behandlungsressourcen sicherstellen. Erstrebenswert sind hierbei vor allem einfach strukturierte, dynamische Entscheidungsregeln. Zur Untersuchung der beiden Probleme der Ressourcenauslastung und Ressourcensteuerung formulieren wir zwei Modelle, die entsprechende Situationen in medizinischen Einrichtungen abbilden.

Im ersten Modell untersuchen wir die Ressourcenauslastung durch Aufnahmesteuerung in einer ambulanten medizinischen Einrichtung, die mit dem open-access Konzept arbeitet. In einer solchen Einrichtung können sich Patienten sowohl im Voraus einen Termin zuweisen lassen als auch unangemeldet eine Behandlung nachfragen. Unter der Bedingung, dass angemeldete Patienten mit Termin sowie unangemeldete Patienten, die als Notfälle klassifiziert werden, bei Ankunft in der Einrichtung nicht abgelehnt werden dürfen, stehen die Entscheidungsträger dieser Einrichtung vor dem Problem zu entscheiden, ob ein nicht angemeldeter Patient, der nicht als Notfall klassifiziert wurde, abgelehnt oder in den Warteraum geführt werden soll und somit auf eine Behandlung wartet. Damit muss abgewogen werden zwischen der Annahme eines Patienten, um zusätzliche Gewinne zu realisieren, und der Ablehnung eines solchen, um die Kapazität zugunsten zukünftiger Patienten freizuhalten bzw. eventuelle Verluste durch Wartezeiten oder Überstunden zu vermeiden.

Im zweiten Modell betrachten wir die Ressourcenzuweisung auf mehrere Patientenklassen in einer medizinischen Einrichtung. Ambulante, stationäre und Notfallpatienten teilen sich dabei eine oder mehrere identische Ressourcen. Während Notfallpatienten stets priorisiert werden müssen, stellt sich für die Entscheidungsträger der Einrichtung die Frage, ob die verbliebenen Behandlungsressourcen ambulanten oder stationären Patienten zugewiesen werden sollten. Die Behandlungszeit ist dabei deterministisch und die Patientenklassen werden durch unterschiedliche Gewinne, die durch eine Behandlung generiert werden, Wartekosten pro Zeiteinheit und Strafkosten, die bei Nichtbehandlung am Ende des Behandlungstages realisiert werden, charakterisiert.

Die aus den beschriebenen Entscheidungssituationen resultierenden Optimierungsprobleme formulieren wir jeweils als Markovsche Entscheidungsprozesse mit dynamischer Umwelt. Dies ermög-

licht uns, zum einen zufällige Entwicklungen über den betrachteten Planungshorizont und zum anderen Abhängigkeiten von äußeren Faktoren zu berücksichtigen. Als zu optimierendes Leistungsmaß verwenden wir dabei jeweils den erwarteten Gesamtgewinn eines Tages, wobei sich dieser aus Gewinnen für aufgenommene Patienten bzw. abgeschlossenen Behandlungen, Kosten für die Wartezeiten der einzelnen Patienten sowie Kosten für Überstunden oder eine Nichtbehandlung am Tagesende zusammensetzt. Da für diese Entscheidungsprobleme in der Praxis einfach strukturierte Regeln leichter zu vermitteln und umzusetzen sind, konzentrieren wir uns bei der Analyse beider Modelle vor allem darauf, die Struktur optimaler Entscheidungsregeln zu untersuchen.

1.4 Gliederung

Diese Arbeit ist in folgender Weise aufgebaut:

Zunächst wird in Kapitel 2 die für unsere Arbeit relevante Literatur vorgestellt. Dabei konzentrieren wir uns insbesondere auf die Terminplanung, das open-access Konzept und die dynamische Kapazitätssteuerung im Gesundheitswesen. Zudem gehen wir kurz auf verwandte Problemstellungen aus den Bereichen der Warteschlangen, des Revenue Managements sowie der Produktionssysteme und der Lagerhaltung ein.

In Kapitel 3 führen wir die für diese Arbeit notwendigen theoretischen Grundlagen ein. Da wir die in Abschnitt 1.3 beschriebenen Probleme als Markovsche Entscheidungsprozesse mit endlichem Horizont und dynamischer Umwelt formulieren, führen wir diese in Abschnitt 3.1 zunächst ohne und dann mit dynamischer Umwelt ein. Für die Analyse der Modelle benötigen wir die Konzepte der Konkavität und Multimodularität, welche in Abschnitt 3.2 eingeführt werden. Hier werden zudem zwei zentrale und für die Arbeit äußerst wichtige Sätze formuliert und bewiesen.

Im darauffolgenden Kapitel widmen wir uns der Problemstellung der Ressourcenauslastung. Dazu wird in Abschnitt 4.1 die zugrunde liegende Situation beschrieben und diese in Abschnitt 4.2 als Markovscher Entscheidungsprozess formuliert. Anschließend wird das Modell in Abschnitt 4.3 auf Strukturaussagen untersucht. Als zentrales Ergebnis erhalten wir die Optimalität einer sogenannten Control-Limit-Rule, welche die optimale Anzahl der Patienten angibt, die zu jedem Zeitpunkt und in jedem Zustand aufgenommen werden sollen. Daraufhin werden Untersuchungen über die Abhängigkeit der optimalen Politiken von dem Zeitpunkt und dem Umweltzustand unternommen. In Abschnitt 4.4 gehen wir auf die Verflechtung von Terminplanung und Ressourcenauslastung ein. Hierzu wird dem Modell ein expliziter Terminplan zugrunde gelegt und geprüft, inwiefern die Control-Limit-Rule vom Terminplan abhängt. Abschließend werden in 4.5 spezielle Behandlungszeitverteilungen und Kostenfunktionen untersucht und in 4.6 einige Beispiele für die Umwelt vorgestellt.

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns mit der Ressourcenzuweisung auf verschiedene Patientenklassen. Die Vorgehensweise erfolgt hier analog zu Kapitel 4. Zunächst wird in 5.1 die Situation beschrieben und in 5.2 als Markovscher Entscheidungsprozess formuliert. Es folgen Strukturaussagen in 5.3 mit dem zentralen Resultat der Optimalität einer monotonen Switching-Curve für den Fall einer Behandlungseinheit. Für den Fall mehrerer Behandlungseinheiten können wir anschließend eine ähnliche Struktur ermitteln. In 5.4 erfolgt erneut eine Untersuchung der Verflechtung von Terminplanung und Ressourcenzuweisung. In Abschnitt 5.5 setzen wir uns wiederum mit verschiedenen Kostenfunktionen und Ankunftsverteilungen auseinander und in 5.6 präsentieren wir Beispiele für die Umwelt.

Kapitel 6 fasst unsere Ergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen der Modelle.

Abschließend findet sich im Anhang dieser Arbeit die Formulierung eines erweiterten Modells, welches die Probleme der Ressourcenauslastung und Ressourcenzuweisung simultan betrachtet. Auf eine nähere Untersuchung oder Strukturaussagen wird jedoch verzichtet.

2 Literatur

In diesem Kapitel stellen wir einen Überblick über die für unsere Modelle relevante Literatur vor. Hierbei versuchen wir, die aufgeführten Arbeiten verschiedenen Kategorien zuzuordnen. Gehört eine Arbeit zu mehreren dieser Kategorien, so erfolgt eine Einordnung der Veröffentlichung in Abhängigkeit ihres Einflusses auf unsere Arbeit. Auch wenn in unserer Arbeit die Terminplanung von ambulanten Patienten nicht betrachtet und ein gegebener Terminplan vorausgesetzt wird, so geben wir aufgrund der engen Verflechtung mit der dynamischen Kapazitätssteuerung dennoch einen kurzen Überblick über einige wichtige Arbeiten dieses Gebiets. Anschließend gehen wir auf zentrale Veröffentlichungen aus den Gebieten des open-access und der dynamischen Kapazitätssteuerung ein. Zuletzt stellen wir relevante Arbeiten verwandter Anwendungsgebiete sowie einige für uns grundlegende Veröffentlichungen aus dem Bereich der Steuerung von Warteschlangen vor. Bis auf den Abschnitt zur Terminplanung stellen wir dabei jeweils auch die Unterschiede zu den von uns betrachteten Modellen vor.

2.1 Terminplanung im Gesundheitswesen

Die Terminplanung von ambulanten Patienten ist der Forschungsbereich, der innerhalb der operativen Steuerung medizinischer Einrichtungen die größte Aufmerksamkeit erfährt. Umfangreiche Übersichten über die Literatur zur Terminplanung finden sich in Cayirli und Veral (2003), Mondschein und Weintraub (2003) und Gupta und Denton (2008). Mondschein und Weintraub (2003) bieten dabei einen allgemein gehaltenen Überblick, während sich Gupta und Denton (2008) mit der Terminplanung von OP-Sälen beschäftigen. Cayirli und Veral (2003) konzentrieren sich auf die Terminplanung von ambulanten Patienten.

Zu unterscheiden sind die statische und die dynamische Terminplanung. Bei der statischen Terminplanung wird der endgültige Terminplan bereits vor dem zu planenden Behandlungstag festgelegt, Änderungen nach Tagesbeginn werden nicht mehr berücksichtigt. Bei der dynamischen Terminplanung hingegen kann der vorhandene Terminplan während des Tages durch neue Termine ergänzt bzw. durch Terminverlegungen verändert werden. Wir betrachten hier nur die statische Terminplanung, da in unseren Modellen aus den Kapiteln 4 und 5 zwar Stornierungen und no-shows, jedoch keine Einplanung neuer Termine sowie Terminverlegungen zugelassen werden. Unabhängig von einer statischen oder dynamischen Betrachtungsweise, kann die Terminplanung hinsichtlich des Buchungsprozesses in die nicht-sequentielle Planung und die sequentielle Planung eingeteilt werden. Bei der nicht-sequentuellen Planung ist die Anzahl der Patienten, die an einem bestimmten Tag behandelt werden sollen, fest vorgegeben und es muss auf Grundlage dieser Zahl jedem dieser Patienten ein Termin zugewiesen werden. Bei der sequentiellen Planung hingegen erfolgen die Patientenankünfte einzeln über einen gewissen Buchungszeitraum hinweg. Für einen Patienten, der an einem bestimmten Tag behandelt werden möchte, muss dann entschieden werden, ob und wann ihm ein Termin zugewiesen wird, ohne Sicherheit darüber zu besitzen, wann und wieviele weitere Anfragen für diesen Tag eintreffen. Neben der Vergabe von Terminen gehört zur Terminplanung im weiteren Sinne auch die Festlegung der Anzahl innerhalb eines Tages zu behandelnden Patienten,

wobei auch hier wieder die statische von der dynamischen Planung unterschieden werden kann. Die Literatur zur statischen Terminplanung ist dabei deutlich umfangreicher als die zur dynamischen Terminplanung. Dabei liegt der Fokus generell auf zwei Methoden, die bei der Terminplanung angewendet werden. Bei der ersten wird die Leistungsfähigkeit vorgegebener Terminplanungsregeln - vorwiegend durch Simulation - beurteilt und verglichen. Bei der zweiten werden Algorithmen entwickelt, mit deren Hilfe möglichst gute Terminpläne bestimmt werden können.

Die ersten Arbeiten, die sich mit der statischen Terminplanung beschäftigten, sind Bailey (1952), Lindley (1952) sowie Welch und Bailey (1952).

In Welch und Bailey (1952) wurde die bekannte Bailey-Welch-Regel entwickelt. Bei dieser werden $N + 1$ an einem Tag zu behandelnde Patienten so über den Tag hinweg aufgeteilt, dass dieser in N gleich lange Teilabschnitte zerlegt wird. Im ersten Abschnitt werden dann zwei Patienten und in den übrigen Abschnitten genau ein Patient eingeplant. Mit dieser Vorgehensweise soll der Effekt von no-shows und Verspätungen ausgeglichen werden. Ho und Lau (1992) konnten in einer Simulationsstudie die Leistungsfähigkeit dieser Regel zeigen. In den von Ho und Lau (1992) untersuchten Situationen hat die Regel verglichen mit anderen Terminplanungsregeln zwar selten den besten Terminplan erzeugt, jedoch hat sie in den verschiedenen Situationen gleichbleibend gute Ergebnisse geliefert.

Die Arbeit von Cayirli et al. (2006) betrachtet die statische Terminplanung für den Fall zweier verschiedener Klassen ambulanter Patienten, die sich in der Länge ihrer Untersuchungszeiten unterscheiden. Zudem werden no-shows und Patienten, die ohne einen Termin in der Einrichtung eintreffen, berücksichtigt. Die Autoren führen eine Simulationsstudie durch, in der sie den Einfluss verschiedener Terminplanungsregeln, die die Behandlungszeitpunkte sowie die Anzahl der zu behandelnden Patienten festlegen, sowie den Einfluss von Sequenzierungsregeln, die die Reihenfolge, in der die beiden Patientenklassen behandelt werden sollen, festlegen, untersuchen. Cayirli et al. (2006) zeigen zum einen, dass die Bailey-Welch-Regel in den von ihnen untersuchten Situationen eine der besten Terminplanungsregeln ist, und zum anderen, dass die Sequenzierungsregel einen stärkeren Einfluss auf die Leistung des Systems hat. Darüber hinaus kommen sie zu dem Ergebnis, dass bei einer starken Gewichtung der Wartezeiten und einer geringen Gewichtung von ggf. notwendigen Überstunden Patienten mit längerer Behandlungszeit am Ende des Tages eingeplant werden sollten, während andersrum diese am Anfang des Tages eingeplant werden sollten. Bei einer ausgeglichenen Gewichtung ist stattdessen eine alternierende Sequenzierung zu bevorzugen. Die Arbeit von Cayirli et al. (2006) wird von Cayirli et al. (2008) erweitert, indem im Zuge der Sequenzierung auch die Zeit zwischen zwei Terminen angepasst wird.

Sickinger und Kolisch (2009) untersuchen mittels Simulation eine Erweiterung der Bailey-Welch-Regel zur Terminplanung ambulanter Patienten und berücksichtigen dabei auch die Nachfrage stationärer Patienten und Notfällen. LaGanga und Lawrence (2007) ermitteln auf Basis einer Simulationsstudie, inwiefern no-shows durch Überbuchungen kompensiert werden können. Sie können dabei zeigen, dass der Zugang zu medizinischen Leistungen und auch die Produktivität medizinischer Einrichtungen durch Überbuchung deutlich verbessert werden. Sie zeigen aber auch, dass die Überbuchung längere Wartezeiten und Überstunden zur Folge haben kann. Diesen Konflikt zwischen den positiven und negativen Effekten der Überbuchung versuchen LaGanga und Lawrence (2007) mit Hilfe von Nutzenfunktionen zu erfassen. Ihre Simulationsstudie verdeutlicht diesbezüglich, dass Überbuchung vor allem in Einrichtungen mit einer großen Patientenanzahl, hohen no-show Raten und geringer Variabilität in der Behandlungszeit sinnvoll ist.

Zu den Arbeiten, die sich mit der Bestimmung optimaler Terminpläne beschäftigen, gehört Kaandorp und Koole (2007). In dieser wird ein nicht-sequentieller Buchungsprozess und für die einzelnen Patienten exponentialverteilte Behandlungszeiten unterstellt. Es werden keine Verspätungen,

jedoch no-shows berücksichtigt. Kaandorp und Koole (2007) können zeigen, dass das zu optimierende Leistungsmaß ihres Optimierungsproblems eine multimodulare Funktion darstellt. Mit Hilfe von Ergebnissen aus Koole und van der Sluis (2003) stellen sie dann einen Local-Search Algorithmus vor, mit dem ein optimaler Terminplan bestimmt werden kann.

Weitere Arbeiten, die sich mit der Bestimmung optimaler Terminpläne befassen, sind z.B. Koeleman und Koole (2012) und den Boer et al. (2009). In diesen werden neben ambulanten Patienten weitere Patientenklassen berücksichtigt. Koeleman und Koole (2012) erweitern dabei die Arbeit von Kaandorp und Koole (2007), indem sie beliebige, aber unabhängig und identisch verteilte Behandlungszeiten zulassen und zusätzlich die Ankunft von Notfällen, die möglichst ohne Verzug behandelt werden sollten, berücksichtigen. Analog zu Kaandorp und Koole (2007) weisen die Autoren nach, dass das zugrunde liegende Leistungsmaß multimodular ist, und ermitteln einen optimalen Terminplan mittels eines Local-Search Algorithmus’.

In den Boer et al. (2009) wird hingegen ein analytischer Ansatz zur Bestimmung eines optimalen Terminplanes gewählt. In dieser Arbeit wird eine radiologische Abteilung eines Krankenhauses betrachtet, in der sowohl ambulante, stationäre als auch Notfallpatienten behandelt werden. Für die Behandlung dieser Patienten stehen c identische diagnostische Geräte zur Verfügung, wobei die Dauer einer Untersuchung genau eine Zeiteinheit umfasst. Ambulante Patienten treffen nun gemäß eines Terminplans ein, wobei eine konstante no-show Wahrscheinlichkeit angenommen wird, wohingegen Notfälle und stationäre Patienten zu zufälligen Zeitpunkten eine Untersuchung nachfragen. Liegen mehrere Anfragen vor, so besitzen Notfälle die höchste Priorität, während ambulante Patienten stationären vorgezogen werden. den Boer et al. (2009) können nun für das resultierende Optimierungsproblem zeigen, dass ein optimaler Terminplan existiert, der den ersten n Zeiteinheiten genau c ambulanten Patienten zuweist.

Muthuraman und Lawley (2008) entwickelten ein Modell zur sequentiellen Buchung von Patienten. Dabei unterstellen sie exponentialverteilte Behandlungszeiten sowie verschiedene Patientenklassen, die jeweils durch unterschiedliche no-show Wahrscheinlichkeiten charakterisiert werden. Ziel der Untersuchung ist es, den während eines Behandlungstages erzielten erwarteten Gesamtgewinn zu maximieren, der sich als Linearkombination der einzelnen Behandlungserlöse, der Wartekosten sowie der Aufwendungen für Überstunden ermitteln lässt. Unter Vernachlässigung der unterschiedlichen no-show-Wahrscheinlichkeiten schlagen Muthuraman und Lawley (2008) vor, ankommende Kunden solange in den Terminplan dieses Tages aufzunehmen, bis der erwartete Gewinn dieses Tages durch die Aufnahme eines zusätzlichen Patienten fallen würde. Ein angenommener Patient wird dabei immer genau dem Termin zugewiesen, der die größtmögliche Gewinnsteigerung verspricht. Da Muthuraman und Lawley (2008) zeigen können, dass die Zielfunktion unimodal ist, ist dabei sichergestellt, dass diese Stoppregel in Bezug auf den verwendeten Algorithmus optimal ist. Zeng et al. (2010) gelingt es zudem, zu zeigen, dass die in Muthuraman und Lawley (2008) zugrunde liegende Zielfunktion zwar unimodal, nicht jedoch multimodular ist. Dies bedeutet wiederum, dass innerhalb des korrespondierenden nicht-sequentiellen Problems bei Durchführung eines Local-Search Algorithmus’ nicht zwangsläufig ein optimaler Terminplan gefunden werden kann. Darüber hinaus entwickeln sie die Regel von Muthuraman und Lawley (2008) insofern weiter, dass die unterschiedlichen no-show Wahrscheinlichkeiten berücksichtigt werden und sie können zeigen, dass ihre Methode bessere Ergebnisse liefert. Weitere Erweiterungen bieten Chakraborty et al. (2010) und Lin et al. (2011), indem in Chakraborty et al. (2010) beliebige Behandlungszeiten zugelassen werden und Lin et al. (2011) das Problem als Markovschen Entscheidungsprozess formulieren und für große Zustandsräume das Problem mit Hilfe eines Approximate Dynamic Programming Ansatzes lösen. Ein ähnliches Problem betrachten auch Schütz und Kolisch (2010). In dieser Arbeit wird ebenfalls ein sequentieller Buchungsprozess unter Berücksichtigung verschiedener Patientenklassen

bzgl. eines Tages untersucht. Dabei werden die Patienten jedoch auf Basis einer fest vorgegebenen Terminplanungsregel eingeplant und es soll lediglich entschieden werden, ob die Anfrage eines Patienten einer bestimmten Klasse für den Tag angenommen oder abgelehnt werden soll.

Die Mehrzahl der Veröffentlichungen vernachlässigt bei der Terminplanung indirekte Wartezeiten, da nur die Terminplanung eines einzigen Tages betrachtet wird. Einige wenige Arbeiten beschäftigen sich jedoch mit dem Thema der indirekten Wartezeiten, da diese sowohl die Gesundheit der Patienten als auch die Patientenzufriedenheit maßgeblich beeinflussen können. Als ein Beispiel für ein solches Terminplanungsmodell ist Patrick et al. (2008) zu nennen. Dabei betrachten die Autoren ähnlich zu Schütz und Kolisch (2010) verschiedene Patientenklassen, die sich allerdings nicht durch ihre no-show Wahrscheinlichkeiten unterscheiden, sondern durch eine maximale indirekte Wartezeit, die nicht überschritten werden sollte. Über einen rollierenden Zeithorizont hinweg soll dann für zu Beginn jeden Tages eintreffende Behandlungsanfragen entschieden werden, ob und an welchen Tag diese eingeplant werden sollten. Die Anfragen können aber auch zunächst in einen Wartestatus zurückgestellt oder an andere medizinische Einrichtungen verwiesen werden. Wird ein Patient auf diese Weise umgeleitet oder muss er länger auf den Beginn seiner Untersuchung warten, als die maximale indirekte Wartezeit es erlauben würde, so entstehen zusätzliche Kosten. Mit dem Ziel, die diskontierten Gesamtkosten zu minimieren, formulieren Patrick et al. (2008) das resultierende Optimierungsproblem als Markovschen Entscheidungsprozess und greifen auf einen Approximate Dynamic Programming Ansatz zurück, um dieses zu lösen. Eine weitere Arbeit, die die indirekten Wartezeiten explizit berücksichtigt, ist z.B. Liu et al. (2010), die wir im Abschnitt über open-access-Systeme genauer vorstellen, da diese auch dieses Thema betreffen.

2.2 Open-Access Systeme im Gesundheitswesen

Das Konzept des open-access wurde in den frühen 90er Jahren zunehmend von medizinischen Einrichtungen eingeführt, die ihre Kapazitäten zuvor ausschließlich durch Terminvergabe gesteuert haben. Die Vorteile eines solchen Systems hinsichtlich des Zugangs zum Gesundheitswesen für sozial schwache Bevölkerungsschichten wurden bereits von Virji (1990) untersucht und dargelegt. Eine Untersuchung des Einflusses des open-access Konzeptes auf die Produktivität sowie Patienten- und Mitarbeiterzufriedenheit erfolgte in Herriott (1999). Eine der ersten Veröffentlichungen, die sich systematisch mit diesem Konzept in Bezug auf indirekte Wartezeit und Auslastung von medizinischen Einrichtungen auseinander gesetzt hat, ist Murray und Tantau (2000).

Mit der Einführung des open-access Konzeptes geht die Notwendigkeit einher, die Gestalt der Terminpläne und die Vergabepaxis von Terminen zu verändern. In diesem Sinne untersuchen Qu et al. (2007) mit Hilfe eines analytischen Ansatzes den optimalen Zeit- bzw. Ressourcenanteil, der für unangemeldete Patienten reserviert werden sollte. Ziel dieses Ansatzes ist es, die erwartete Anzahl behandelter Patienten zu maximieren. Die optimale Lösung wird dann einer Sensitivitätsanalyse hinsichtlich der Kapazitäten einer medizinischen Einrichtung, der no-show Raten und der Verteilung der Nachfrage unterzogen. Huarng (2003) untersuchen mittels einer Simulationsstudie, wie sich unterschiedlich hohe Anteile von Patienten ohne Termin auf die Leistung typischer Terminplanungsregeln auswirken. In Robinson und Chen (2003) wird die Leistung des open-access Konzeptes mit der Leistung traditioneller Terminplanungssysteme verglichen. Die Autoren kommen dabei zu dem Ergebnis, dass das Konzept des open-access zu bevorzugen ist, solange die no-show-Wahrscheinlichkeiten hinlänglich hoch sind und die Wartezeiten der Patienten mit ausreichendem Gewicht berücksichtigt werden. Liu et al. (2010) untersuchen ein Terminplanungsmodell mittels eines Markovschen Entscheidungsprozesses, bei dem unter Berücksichtigung von no-shows

und Stornierungen abgewogen wird, ob nach einer Behandlung nachfragende Patienten noch am gleichen oder an einem späteren Tag behandelt werden sollen. Die Autoren vergleichen dabei verschiedene Heuristiken und erhalten als Ergebnis, dass die Einführung eines open-access Systems nur dann sinnvoll ist, wenn die Patientennachfrage in der betroffenen medizinischen Einrichtungen nicht allzu hoch ist und zusätzlich auch Termine vergeben werden können.

Neben diesen Einflüssen existieren weitere Faktoren, die die Leistung eines open-access Systems beeinflussen und deren optimale Konfiguration entscheidend für den Erfolg eines solchen Systems ist. Um die Bedeutung dieser Faktoren zu untersuchen, führen Kopach et al. (2007) eine Simulationsstudie durch. Als relevante Einflussfaktoren identifizieren sie neben dem Anteil der Patienten, die ohne Termin behandelt werden, vor allem auch den Zeitraum über den Termine vergeben werden. Sie weisen nach, dass ein hoher Anteil an Patienten ohne Termin sowie ein kurzer Vergabezeitraum von Terminen die Leistung von open-access Systemen positiv beeinflussen. Ihre Ergebnisse verdeutlichen aber auch, dass eine vollständige Abkehr von der Terminplanung sowohl die Kontinuität in der medizinischen Versorgung als auch den Gewinn einer Einrichtung negativ beeinflusst. Zu einem ähnlichen Schluss kommt auch Patrick (2012), der in seiner Arbeit den Gewinn einer Einrichtung unter zwei verschiedenen Behandlungspolitiken mit Hilfe eines Markovschen Entscheidungsprozesses vergleicht. Bei der ersten Behandlungspolitik muss die Einrichtung allen Behandlungsanfragen noch am Tag ihres Eintreffens nachkommen, bei der zweiten Politik hat die medizinische Einrichtung die Wahl zwischen einer Behandlung noch am Tag des Eintreffens der Anfrage und dem Verschieben dieser auf einen späteren, jedoch nicht allzu weit in der Zukunft liegenden Tag.

Wie bereits erwähnt folgern Liu et al. (2010), dass open-access Systeme nur dann sinnvoll sind, wenn die Patientennachfrage in einer medizinischen Einrichtung nicht allzu hoch ist, d.h., wenn zwischen der Nachfrage nach medizinischen Leistungen und der verfügbaren Kapazität der medizinischen Einrichtung ein gewisses Gleichgewicht besteht. Um das Gleichgewicht, in dem Nachfrage und Kapazität zueinander stehen sollten, genauer zu untersuchen, formulieren Green und Savin (2008) ein Warteschlangenmodell. Mit Hilfe dieses Modells bestimmen sie die maximale Größe des Patientenstammes, die eine medizinische Einrichtung, die mit dem open-access Konzept arbeitet, bewältigen kann.

Abgrenzung zu dieser Arbeit

Nur wenige Arbeiten haben sich bisher mit dem Konzept des open-access beschäftigt. Diese haben vorwiegend der Frage Aufmerksamkeit geschenkt, wie die no-show- und Stornierungsraten beschaffen sein müssen bzw. welche Zeitanteile für unangemeldete Patienten reserviert werden sollten, um ein open-access System erfolgreich betreiben zu können. In unserer Arbeit liegt das Augenmerk hingegen auf der operativen Steuerung eines bereits implementierten Systems. In den Arbeiten, in denen gleichermaßen die Steuerung eines solchen Systems untersucht wird, wird im Allgemeinen unterstellt, dass alle Patienten am Tag ihres Eintreffens behandelt werden müssen. Lediglich Patrick (2012) und Liu et al. (2010) berücksichtigen die Möglichkeit, die Behandlung eines Patienten auf einen anderen Tag zu verschieben. In unserer Arbeit besteht nun anstelle des Aufnahmewangs bzw. der Möglichkeit der Behandlungsverschiebung eine Wahl, ob die ankommenden Patienten angenommen oder vollständig abgelehnt werden sollen. In der vorgestellten Literatur zur Steuerung von open-access Systemen wird darüber hinaus die Dynamik der Patientenankünfte über einen Tag hinweg vollständig ausgeblendet. Es wird stattdessen angenommen, dass die vollständige Nachfrage zu Beginn des Behandlungstages bekannt ist. Nach Lee und Yih (2010) erfolgen die Patientenankünfte jedoch über den Tag verteilt, wobei unterschiedliche Ankunftsdaten für die verschiedenen Tageszeiten zu berücksichtigen sind. Daher modellieren wir in unserem Modell insbesondere die

Dynamik der Patientenankünfte als Einflussgröße auf die Systemsteuerung. Zudem wird in der aufgeführten Literatur die direkte Wartezeit der Patienten vernachlässigt. Dies wird damit begründet, dass open-access Patienten bei kurzfristiger telefonischer Anfrage den nächsten freien Termin erhalten und von einer direkten Wartezeit erst nach Beginn dieses zugewiesenen Behandlungszeitpunkts gesprochen werden kann. Tatsächlich fragen open-access Patienten jedoch oftmals nicht vor ihrer Ankunft telefonisch an, sondern treffen unangemeldet in der Arztpraxis ein und warten dort auf den Beginn ihrer Behandlung. In diesen Fällen ist die direkte Wartezeit der Patienten auch in open-access Einrichtungen von Bedeutung, weshalb wir dieser in unserem Modell explizit Rechnung tragen. Zuletzt besteht das vorrangige Ziel unserer Arbeit im Gegensatz zu vielen anderen Veröffentlichungen darin, eine strukturierte optimale Entscheidungsvorschrift zu ermitteln, die wesentliche Zusammenhänge verständlich macht und somit leichter zu implementieren ist.

2.3 Dynamische Kapazitätssteuerung im Gesundheitswesen

Die dynamische Kapazitätssteuerung können wir für unsere Zwecke in die Problemstellung der Ressourcenzuweisung auf mehrere Patientenklassen sowie die Ressourcenauslastung durch Aufnahmesteuerung unterteilen. Selten finden sich jedoch Arbeiten, die sich ausschließlich mit einem dieser Probleme beschäftigen. Daher ist eine eindeutige Einteilung der Literatur zumeist nicht möglich, wobei wir dennoch versuchen, die nachfolgenden Arbeiten möglichst sinnvoll zuzuordnen.

Im Bereich der Aufnahmesteuerung sind vor allem die Arbeiten von Kolesar (1970) und Nunes et al. (2009) hervorzuheben. Kolesar (1970) formuliert einen Markovschen Entscheidungsprozess, um den Zugang in eine medizinische Einrichtung zu steuern. Die Aufnahmekontrolle erfolgt dabei in Abhängigkeit der Anzahl der aktuell in der Einrichtung vorhandenen Patienten. Dabei verändert sich diese durch einen stochastischen Ankunftsprozess nicht eingeplanter Patienten, die angenommen werden müssen, und einem stochastischen Abgangsprozess. Es soll dann entschieden werden, wieviele zusätzliche Patienten zum jeweiligen Entscheidungszeitpunkt planmäßig aufgenommen werden sollen. Ziel ist es unter anderem, die durchschnittliche Belegung unter Einhaltung einer maximalen Patientenanzahl zu maximieren. Kolesar (1970) erweitert dieses Modell zudem, indem nicht nur über die Aufnahme entschieden werden soll, sondern auch, wann ein Patient in die medizinische Einrichtung aufgenommen wird. Nunes et al. (2009) erweitern das Modell von Kolesar (1970) in verschiedener Hinsicht. Zum einen berücksichtigen sie bei der Aufnahmesteuerung nicht nur eine Patientenklasse, sondern unterteilen die ankommenden Patienten, indem sie ihnen verschiedene Fallpauschalen zuordnen. Wird ein Patient in einer dieser Fallpauschalen aufgenommen, durchläuft er eine bestimmte Sequenz von Behandlungsstationen, auch klinischer Pfad genannt, die durch eine Markov-Kette beschrieben wird. Die Belegung jeder Station ist dabei mit einem unterschiedlichen Verbrauch verschiedener Ressourcen verbunden. Wird nun zu einem Zeitpunkt mehr Kapazität einer Ressource benötigt, als vorhanden ist, so fallen Strafkosten an. In Abhängigkeit der Anzahl der Patienten, die sich im Krankenhaus an den einzelnen Behandlungsstationen aufhalten und den unterschiedlichen Fallpauschalen zugeordnet sind, soll dann entschieden werden, wieviele neue Patienten jeweils in die verschiedenen Fallpauschalen aufgenommen werden sollen. Nicht aufgenommene Patienten gehen der medizinischen Einrichtung dabei verloren. Dazu formulieren Nunes et al. (2009) einen Markovschen Entscheidungsprozess mit dem Ziel, sowohl die Ressourcenauslastung auf einem bestimmten Niveau zu halten als auch die Strafkosten durch Kapazitätsüberschreitungen zu minimieren. Nachteil dieser Formulierung ist eine hohe Lösungskomplexität aufgrund des großen Zustandsraums und das Fehlen von strukturierten Politiken. Gocgun und Ghate (2012) erweitern dieses Modell ohne Bezug auf das Gesundheitswesen und zeigen Lösungsmethoden für

dieses auf.

Im Bereich der dynamischen Ressourcenzuweisung auf verschiedene Patientenklassen existieren bisher nur wenige Arbeiten. Eine der ersten Arbeiten auf diesem Gebiet ist Green et al. (2006). Hier wird eine Situation betrachtet, in der sich ambulante, stationäre sowie Notfallpatienten eine radiologische Ressource mit deterministischer Bedienzeit teilen. Die Patientenklassen werden durch unterschiedliche Gewinne, die durch eine Behandlung generiert werden, Wartekosten pro Zeiteinheit und Strafkosten, die bei Nichtbehandlung am Ende des Behandlungstages realisiert werden, charakterisiert. Die Entscheidungsträger der Einrichtung müssen entscheiden, welcher Patiententyp als nächstes untersucht werden soll. Unter der Annahme bernoulliverteilter Ankünfte sowie linearer Warte- und Strafkosten können Green et al. (2006) für das entsprechende stochastische dynamische Optimierungsproblem zeigen, dass die optimale Entscheidungsregel eine monotone Switching-Curve darstellt. Als zu optimierendes Leistungsmaß wurde dabei der erwartete Gesamtgewinn eines Tages gewählt. Im zweiten Teil der Arbeit widmen sich die Autoren der Untersuchung heuristischer Zuweisungspolitiken und führen eine numerische Studie durch, in der sie insbesondere die Auswirkungen verschiedener Terminplanungsstrukturen auf die Ressourcenzuweisung untersuchen. Kolisch und Sickinger (2008) erweitern die Arbeit von Green et al. (2006) auf zwei Behandlungsressourcen und formulieren das zugrunde liegende Optimierungsproblem als Markovschen Entscheidungsprozess. Diesen verwenden sie, um verschiedene heuristische Entscheidungsvorschriften, wie z. B. die aus Green et al. (2006) bekannte Grenzwertregel, zu bewerten und zu vergleichen. Auf die Ermittlung von Strukturaussagen über die optimale Kontrollpolitik verzichten Kolisch und Sickinger (2008) vollständig. Gocgun et al. (2011) erweitern das beschriebene Problem um eine Patientenkategorie und untersuchen die Aufteilung medizinischer Ressourcen zwischen ambulanten Patienten ohne Termin, ambulanten Patienten, die kurzfristig zu einer Behandlung gerufen werden können, stationären Patienten und Notfallpatienten. Sie formulieren das Entscheidungsproblem erneut als Markovschen Entscheidungsprozess und zeigen für den Fall zweier Behandlungsressourcen numerisch, dass die optimale Entscheidungsregel für die verwendeten Werte eine ähnliche Form wie die einer monotonen Switching-Curve annimmt. Weiterhin schlagen die Autoren fünf Heuristiken vor und vergleichen verschiedene Leistungsmaße in einer numerischen Studie auf Basis von Krankenhausdaten mit der optimalen Vorgehensweise hinsichtlich des erwarteten Gesamtgewinns.

Neben der Ressourcenzuweisung und der Ressourcenauslastung durch Aufnahmekontrolle existieren weitere Problemstellungen, die starke Ähnlichkeiten zu diesen aufweisen, jedoch nicht eindeutig einem dieser Gebiete zugeordnet werden können. So wird z.B. in Gerchak et al. (1996) sowie Min und Yih (2010) eine medizinische Einrichtung betrachtet, in der unter Berücksichtigung von Wartezeiten der Patienten und möglichen Überstunden entschieden werden muss, wieviele Patienten behandelt werden sollen.

Gerchak et al. (1996) formuliert z.B. einen Markovschen Entscheidungsprozess über einen unendlichen Zeithorizont, um die Zuweisung von Behandlungsressourcen auf Patienten zu steuern. Dabei melden sich Patienten gemäß eines stochastischen Ankunftsprozesses in der Einrichtung an und verlassen das System erst nach ihrer Behandlung, deren Dauer zufällig ist. Es ist nun zu Beginn jeden Tages festzulegen, wieviele Patienten an diesem Tag behandelt werden sollen. Die Entscheidung hängt dabei von der Anzahl der aktuell wartenden Patienten ab und es ist zu berücksichtigen, dass möglicherweise Notfallpatienten eintreffen, die unbedingt behandelt werden müssen. Die Behandlung jedes Patienten erbringt dabei einen bestimmten Gewinn, eventuell anfallende Überstunden führen jedoch zu Strafkosten. Zudem ist zu berücksichtigen, dass für die nichtbehandelten Patienten Wartekosten entstehen. Für diesen Markovschen Entscheidungsprozess leiten die Autoren verschiedene Strukturaussagen her, wie z. B. eine Monotonie der optimalen Entscheidungsregel in der Anzahl der wartenden Patienten. Dabei handelt es sich jedoch nicht um eine Control-Limit

Rule. Zuletzt schlagen Gerchak et al. (1996) einen adaptierten Wertiterationsalgorithmus zur Lösung des Entscheidungsprozesses vor und illustrieren ihre Ergebnisse anhand eines numerischen Beispiels.

Min und Yih (2010) betrachten ein zu Gerchak et al. (1996) ähnliches Problem. Es wird die Zuweisung von OP-Slots auf beliebig viele Patientenklassen, die durch einen stochastischen Ankunftsprozess und eine zufällige Behandlungsdauer charakterisiert werden, mittels eines Markovschen Entscheidungsprozesses untersucht. Es muss zu jedem Zeitpunkt, meist zu Beginn eines Tages, in Abhängigkeit der aktuellen Anzahl der Patienten der einzelnen Klassen, die auf eine Operation warten, entschieden werden, wieviele Patienten welcher Klasse behandelt werden sollen. Ziel ist es bei dieser Entscheidung, die resultierenden Kosten zu minimieren. Dabei fallen für jeden Patienten, der nicht operiert wird, klassenabhängige Wartekosten an. Sollte die vorhandene OP-Kapazität überzogen werden, kommt es zudem zu Überziehungskosten. Für den resultierenden Markovschen Entscheidungsprozess zeigen Min und Yih (2010) verschiedene Strukturaussagen, wie z.B. Schranken für die zu wählenden Aktionen. Auf Basis dieser Ergebnisse wird ein modifizierter Wertiterationsalgorithmus entworfen, dessen Effizienz in einem numerischen Experiment untersucht wird. Eine generalisierte Variante der Problemstellung von Min und Yih (2010) findet sich bei Gocgun und Ghate (2010).

Abgrenzung zu dieser Arbeit

Das in Kapitel 4 vorgestellte Modell zur Ressourcenauslastung behandelt ein ähnliches Problem wie Kolesar (1970). Ein Unterschied zum Grundproblem von Kolesar (1970) besteht darin, dass in seinem Modell nichteing geplante Patienten aufgenommen werden müssen und entschieden werden soll, wieviele Patienten zusätzlich planmäßig aufgenommen werden sollen, während in unserem Modell die eing geplanten Patienten aufgenommen werden müssen und nichteing geplante abgelehnt werden können. Dies führt auch dazu, dass die möglichen Aktionen in unserem Modell davon abhängen, wieviele nichteing geplante Patienten eine Anfrage für eine Behandlung stellen. Im Modell von Kolesar (1970) dagegen können unbegrenzt viele Patienten planmäßig aufgenommen werden. Darüber hinaus besteht ein großer Unterschied in den Arbeiten darin, dass Kolesar (1970) nur das Modell für dieses Problem formuliert, nicht jedoch Lösungsansätze oder Strukturaussagen für dieses bietet. Das Modell von Nunes et al. (2009) unterscheidet sich insofern, dass es beliebig viele Patiententypen zulässt und den klinischen Pfad dieser bei der Entscheidungsfindung über die Aufnahme berücksichtigt. Dieses ist jedoch nur bei stationären Patienten sinnvoll. Das in Kapitel 4 untersuchte Problem bezieht sich jedoch auf ambulante Einrichtungen, so dass solche Pfade nicht berücksichtigt werden müssen. Stattdessen können wir die Struktur optimaler Politiken herleiten, was aufgrund der Komplexität des Modells von Nunes et al. (2009) dort nicht möglich ist.

Darüber hinaus besitzt das Modell aus Kapitel 4 verschiedene Analogien zu den Arbeiten von Gerchak et al. (1996) und Min und Yih (2010). In diesen Arbeiten ist es jedoch im Gegensatz zu unserer Modellierung nicht möglich, die Aufnahme eines ankommenden Patienten gänzlich abzulehnen. Es muss nur darüber entschieden werden, wieviele der Patienten in der nächsten Periode behandelt werden sollen. Die Entscheidungen werden zudem zumeist zu Beginn des Tages getroffen. Damit werden weder direkte Wartekosten noch Entscheidungen über den Tag hinweg berücksichtigt. Darüber hinaus legen die Arbeiten einen unendlichen Zeithorizont zugrunde und verzichten damit auf die Berücksichtigung von Strafkosten, die für die Nichtbehandlung eines Patienten anfallen.

Zusätzlich betrachten wir in Kapitel 4 eine dynamische Umwelt, in den genannten Arbeiten jedoch nicht.

Das Modell zur Ressourcenzuweisung auf unterschiedliche Patientenklassen, welches wir in Ka-

pitel 5 vorstellen, weist starke Verbindungen zu den Arbeiten von Green et al. (2006), Kolisch und Sickinger (2008) sowie Gocgun et al. (2011) auf. In der konkreten Ausgestaltung der Modellierung hebt sich dieses jedoch in verschiedener Hinsicht ab bzw. erweitert die genannten Arbeiten. Während in den aufgeführten Veröffentlichungen lineare Warte- und terminale Kosten unterstellt werden, verwenden wir die übergeordnete Klasse der multimodularen Funktionen. Darüber hinaus bilden Green et al. (2006) und Kolisch und Sickinger (2008) die Anzahl der Ankünfte der Notfall- und stationären Patienten durch eine Bernoulliverteilung ab, während Gocgun et al. (2011) sogar für die Ankünfte aller Patientenklassen eine Bernoulliverteilung unterstellt. Zusätzlich ist in Green et al. (2006) die Anzahl ambulanter Patienten, die in jeder Zeiteinheit eingeplant werden können, auf eins beschränkt. Gocgun et al. (2011) verzichtet sogar vollständig auf die Verwendung eines Terminplans. Im Gegensatz hierzu erlauben wir für die Modellierung der Ankünfte eine deutlich umfangreiche Klasse von Verteilungen und verwenden in Abschnitt 5.4 einen Terminplan, der analog zu Kolisch und Sickinger (2008) in jeder Zeiteinheit eine beliebige Anzahl eingeplanter Patienten zulässt. Obwohl wir mit diesen Annahmen einen deutlich allgemeineren Modellrahmen geschaffen haben, können wir dennoch analog zu Green et al. (2006) im Falle einer Behandlungseinheit eine monotone Switching-Curve nachweisen. Darüber hinaus können wir auch für beliebig viele Behandlungseinheiten eine strukturierte optimale Politik nachweisen, die auf eine monotone Switching-Curve zurückgeführt werden kann. Zwar haben Kolisch und Sickinger (2008) sowie Gocgun et al. (2011) das Modell von Green et al. (2006) bereits auf zwei Behandlungseinheiten erweitert, jedoch wurden für diesen Fall keine Strukturaussagen bzgl. der optimalen Politik bewiesen. Wir hingegen können nachweisen, dass sich die Struktur einer optimalen Politik für beliebig viele Ressourcen auf den Fall einer Ressource reduzieren lässt und damit nur dieser für die Untersuchung von Strukturaussagen und der Bestimmung optimaler Politiken interessant ist.

Neben den genannten Erweiterungen der vorhandenen Modellierungsansätze beziehen wir in unserem Modell eine dynamische Umwelt in den Entscheidungsprozess ein, mit deren Hilfe wir zufällige Einflüsse, wie z.B. variierende Ankunftsdaten oder eine variierende Anzahl von Behandlungsressourcen, abbilden und zusätzliche Strukturaussagen bzgl. dieser Einflüsse treffen können. Vor allem aber eröffnet uns der Umweltprozess die Möglichkeit, einen Terminplan explizit zu modellieren und den Einfluss eines solchen auf die Entscheidungsstruktur zu analysieren.

2.4 Andere Anwendungsbereiche

Die dynamische Kapazitätssteuerung spielt sowohl in Form der Ressourcenzuweisung als auch in Form der Ressourcenauslastung in verschiedenen Anwendungsgebieten außerhalb des Gesundheitswesens eine Rolle. Insbesondere die Abwägung zwischen der sofortigen Annahme eines neuen Kunden, um sofort zusätzliche Gewinne zu generieren, und der Ablehnung eines solchen, um die Kapazität zugunsten zukünftiger Gewinne bzw. Vermeidung zukünftiger Verluste freizuhalten, stellt eine zentrale Fragestellung vieler Untersuchungen dar, insbesondere im Bereich des Revenue Managements. Beispiele für spezifische Anwendungsbereiche dieser Problemstellung sind vor allem die Luftfahrtbranche, aber auch das Hotel- und Gastronomiegewerbe. In der Luftfahrt betrifft dies insbesondere die Frage, wieviele Sitze eines bestimmten Fluges für die verschiedenen Kundenklassen reserviert bzw. wieviele Anfragen einer Kundenklasse akzeptiert werden sollten, wobei die zukünftige Nachfrage für evtl. zahlungsbereitere Fluggäste nicht bekannt ist. Es muss also für jede Buchungsanfrage der verschiedenen Kundenklassen entschieden werden, ob diese angenommen oder abgelehnt wird. Littlewood (1972) entwickelte das erste Modell, das diese Fragestellung aufgreift. In diesem werden zwei Kundenklassen betrachtet. Belobaba (1989) und Brumelle und McGill

(1993) erweiterten das Modell auf mehrere Kundenklassen, wobei Belobaba (1989) eine Heuristik zur Lösung des Problems entwickelte und Brumelle und McGill (1993) optimale Politiken bei geordneten Ankünften herleiten konnten. Hervorzuheben sind aber vor allem die Arbeiten von Lee und Hersh (1993) sowie Lautenbacher und Stidham (1999), die das Kapazitätssteuerungsproblem als Markovsche Entscheidungsprozesse formulieren und die resultierenden Entscheidungsregeln hinsichtlich Strukturen untersuchen. Sie können dabei die Optimalität einer Control-Limit-Rule zeigen. Eine Erweiterung dieser Modelle liefern z.B. Subramanian et al. (1999), die berücksichtigen, dass Buchungen storniert werden können bzw. einige Kunden nicht zum Abflug erscheinen, und daher das Konzept der Überbuchung in ihre Überlegungen einbeziehen. Im Hotel- bzw. Gastronomiegewerbe stellt sich ebenfalls die Frage, ob ein Kunde, der ein Zimmer oder einen Tisch nachfragt, bei unbekannter zukünftiger Nachfrage akzeptiert werden sollte. Zu erwähnen sind in diesem Zusammenhang z.B. Bitran und Gilbert (1996) für das Hotel Revenue Management sowie Kimes (1999) und Bertsimas und Shioda (2003) für das Revenue Management im Gastronomiebereich. Weitere Beispiele für eine analoge Problemstellung finden sich bei Autovermietungen, wie z.B. in Geraghty und Johnson (1997) und Savin et al. (2005), der Vergabe von Anzeigen in Medien (wie z.B. in Araman und Popescu (2010)), bei Internet Providern (z.B. in Nair und Bapna (2001)) und bei der Annahme von Frachtcontainern (z.B. Lee et al. (2007)).

Neben dem Revenue Management ist die dynamische Kapazitätssteuerung auch in der Lagerhaltung sowie in der Produktionsplanung von großer Bedeutung. So betrachtet beispielsweise Ha (1997a) ein Produktionssystem mit zwei Produkten, die mit unterschiedlichen Ankunftsrate nachgefragt werden und bei Nachfrage einen unterschiedlich hohen Gewinn einbringen. Anfragen für jedes Produkt kommen dabei gemäß eines Poisson-Prozesses an und jeder Kunde fragt genau eine Einheit nach. Wird eine Nachfrage nicht befriedigt, so bleibt diese bestehen und es entstehen Wartekosten. Zudem fallen für einen Bestand der Produkte Lagerkosten an. In Abhängigkeit des jeweiligen Bestandes der beiden Produkte soll nun entschieden werden, ob bzw. welches Produkt produziert werden soll. Die Dauer der Produktion einer Einheit der jeweiligen Produkte ist dabei exponentialverteilt mit unterschiedlichen Parametern. Für den resultierenden Markovschen Entscheidungsprozess, der über einen unendlichen Zeithorizont betrachtet wird, weist Ha (1997a) unter anderem die Existenz einer optimalen Entscheidungsregel nach, die aus zwei monotonen Switching-Curves zusammengesetzt ist. Ein ähnliches Problem formuliert Ha (1997b). Hier wird anstelle zweier Produktklassen nur ein Produkt mit jedoch zwei Kundenklassen, die unterschiedliche Wartekosten bis zur Erfüllung ihrer Nachfrage verursachen, betrachtet. Das Produkt kann dabei auf Lager gehalten werden und nicht sofort befriedigte Nachfrage geht nicht verloren. Analog zu Ha (1997a) kommen die Ankünfte gemäß zweier Poisson-Prozesse an und die Dauer der Produktion einer Einheit ist exponentialverteilt. Es soll nun entschieden werden, ob produziert werden soll bzw. an welche Kundenklasse die Produkte verkauft werden soll. Auch hier resultiert für den zugehörigen Markovschen Entscheidungsprozess eine optimale Entscheidungsregel, die aus zwei monotonen Switching-Curves zusammengesetzt ist. Sowohl in Ha (1997a) als auch in Ha (1997b) sollen dabei die erwarteten diskontierten Gesamtkosten minimiert werden.

Zuletzt ist im Kontext der Lagerhaltung die Arbeit von Zhao et al. (2008) hervorzuheben. Zhao et al. (2008) betrachten zwei Produktions- bzw. Lagerhaltungsstandorte, an denen Nachfragen gemäß eines Poisson-Prozesses ankommen. Unter Berücksichtigung der aktuellen Lagerbestände, der Haltekosten für die Bestände und der Wartekosten, die bei nicht sofortiger Erfüllung der Nachfragen entstehen, soll dann entschieden werden, ob in den einzelnen Standorten produziert werden soll bzw. ob und durch welchen Standort eine Nachfrage erfüllt wird, wobei zusätzliche Logistikkosten auftreten, wenn die Nachfrage an einem Standort durch den anderen erfüllt wird. Für das resultierende Optimierungsproblem leiten Zhao et al. (2008) verschiedene Strukturen der optimalen

Entscheidungsregel ab und zeigen insbesondere, dass sowohl die optimale Produktionsentscheidung als auch die optimale Entscheidung über den Standort, von dem aus die Nachfrage erfüllt wird, durch eine monotone Switching-Curve bestimmt werden kann.

Abgrenzung zu dieser Arbeit

Die in dieser Arbeit untersuchten Modelle weisen Ähnlichkeiten zu den Optimierungsansätzen anderer Anwendungsgebiete auf. So wägt unser Modell zur Ressourcenauslastung in Kapitel 4 ähnlich zu vielen Modellen im Revenue Management ab, ob ein zusätzlicher Patient (bzw. im Kontext des Revenue Managements ein zusätzlicher Kunde) angenommen oder auf evtl. später ankommende Nachfrage gewartet werden sollte. Im Gegensatz zu der klassischen Problemstellung des Revenue Managements von Luftverkehrsgesellschaften, innerhalb derer die Kapazitäten erst am Ende des Planungshorizontes, mit dem Start des betrachteten Fluges, verfallen, können in unserem Modell in jeder Zeitperiode Kapazitäten ungenutzt bleiben und somit verfallen. Andererseits können die Kunden in unserem Modell bis zum Ende des Tages, unter Einbeziehung von Wartekosten, auf eine Behandlung warten. Sind daher nicht sofort genügend Kapazitäten frei um die Nachfrage zu bedienen, kann auf spätere freie Kapazitäten verwiesen werden. Dagegen wird die Nachfrage im klassischen Revenue Management entweder durch den Flug erfüllt oder nicht. Bei Annahme von Kunden kann es im Bereich der Luftfahrt wiederum zu no-shows kommen, während in unseren Modellen akzeptierte Patienten ihre Behandlung stets in Anspruch nehmen. Es sind no-shows nur für eingeplante Patienten mit Termin zu berücksichtigen. Zudem ist es in unserem Kontext möglich, die Anzahl der wartenden Patienten durch eine entsprechende Behandlung zu reduzieren. In welchem Maße dies möglich ist, hängt unter anderem von den Behandlungszeitverteilungen ab, die sich ggf. mit der Anzahl wartender Patienten verändern können. Eine Bedienzeitverteilung spielt in der Luftfahrt jedoch keine Rolle. Zuletzt besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen der Kapazitätssteuerung in der Luftfahrt und dem Gesundheitswesen darin, dass in der Luftfahrt die Auslastung eines Fluges über einen endlichen Horizont geplant wird, während im Gesundheitswesen trotz der jeweiligen Betrachtung eines einzelnen Behandlungstages in unseren Modellen implizit ein unendlicher Planungshorizont vorliegt, da Patienten, die keine Notfälle sind, auch für einen späteren Tag eingeplant werden können. Aufgrund der unterschiedlichen Rahmenbedingungen unterscheidet sich unser Modell aus Kapitel 4 von der Kapazitätssteuerung in der Luftfahrt also deutlich.

Größere Ähnlichkeiten bestehen hingegen zum Revenue Management im Gastronomie- und Hotelgewerbe. Hier ist es analog zu unserer Problemstellung üblich, dass die Kapazitäten über den gesamten Planungszeitraum abgebaut werden und die Anzahl vorhandener Kunden damit wiederum reduziert wird. Im Gegensatz zum Gesundheitswesen sind die Kunden jedoch im Hotelgewerbe fast gänzlich und im Gastronomiebereich nur in beschränktem Maße bereit, auf eine Erfüllung ihrer Nachfrage zu warten, denn Kunden fragen fast ausschließlich einen bestimmten Tag bzw. Termin an. Dadurch geht nicht bediente Nachfrage im Hotelgewerbe fast ganz und im Gastronomiebereich relativ schnell verloren. Im Gesundheitswesen sind stattdessen Wartezeiten und damit eine gewisse Bereitschaft zu diesen üblich und müssen entsprechend abgebildet werden.

Darüber hinaus wird bei der Kapazitätssteuerung im Revenue Managements - bis auf wenige Ausnahmen im Gastronomiekontext - kein Terminplan verwendet, während unser Modell die Ankünfte der Patienten auch über einen solchen reguliert.

Das in Kapitel 5 entwickelte Modell zur Ressourcenzuweisung lässt sich mit den Arbeiten aus den Bereichen der Produktionsplanung und Lagerhaltung vergleichen. So betrachten wir in unserem Modell analog zu Ha (1997b) verschiedene Kundenklassen und entscheiden, welche Klasse dabei priorisiert werden sollte, wobei in unserem Modell Notfälle stets vorrangig zu behandeln sind. Im

Gegensatz zu den Arbeiten von Ha (1997b) betrachten wir anstelle eines unendlichen jedoch einen endlichen Zeithorizont und beziehen terminale Strafkosten bei Nichtbedienung eines Patienten in unsere Überlegungen ein. Darüber hinaus muss in unserem Modell keine Produktionsentscheidung getroffen werden, da die zu verteilenden Ressourcen zu jeder Zeitperiode bedingungslos zur Verfügung stehen, gleichzeitig aber - im Gegensatz zu den Modellen von Ha - nicht auf einen späteren Zeitpunkt übertragen werden können. Andererseits bleiben die Patientennachfragen in unserem Modellen bis zum Ende des Planungshorizontes bestehen, wohingegen bei Ha (1997b) diese für eine der beiden Kundenklassen bei Nichtbedienung verfallen. Zudem wird in Ha (1997b) aufgrund der Modellierung als $M/M/1$ -System zu jedem Entscheidungszeitpunkt eine Entscheidung nur über eine Produkteinheit getroffen. In unserem Modell hingegen stehen zu jedem Zeitpunkt mehrere Behandlungseinheiten zur Verfügung. Es ist daher nicht nur darüber zu entscheiden, welcher Patient bedient werden soll, sondern auch darüber, wieviele Kunden der einzelnen Klassen zu jedem Zeitpunkt zu bedienen sind. Dementsprechend erhalten wir als optimale Lösung unseres Optimierungsproblems eine Politik, die eine komplexere Struktur als eine Switching-Curve aufweist. Ähnliche Unterschiede finden sich auch zum Modell von Zhao et al. (2008). Zuletzt können wir im Unterschied zu den Arbeiten von Ha (1997a), Ha (1997b) und Zhao et al. (2008) durch die Integration einer dynamischen Umwelt zufällige Einflussfaktoren einbinden und insbesondere dem Einfluss eingeplanter Ankünfte Rechnung tragen.

2.5 Steuerung von Warteschlangen

Die Literatur zur Steuerung von Warteschlangen ist sehr umfangreich, weshalb wir uns in diesem Abschnitt auf die Darstellung einiger für unsere Arbeit besonders relevanter Veröffentlichungen beschränken.

Dazu wenden wir uns zunächst der Literatur über die Zulassungskontrolle von Warteschlangen zu. Einen Überblick über verschiedene Modelle zur Zulassungskontrolle von Warteschlangen bzw. Netzwerken von Warteschlangen liefert Stidham (1985). Besonders relevant ist für uns die Arbeit von Stidham (1978). Hier wird die optimale Zulassungskontrolle in ein $GI/M/1$ -Wartesystem sowohl über einen unendlichen Zeithorizont als auch über einen Zeithorizont von n Ankünften untersucht. In dem System ankommende Kunden generieren einen zufälligen Gewinn sowie Wartekosten, die für die Zeit, die die Kunden im System verbringen, entstehen und deren Höhe von der Länge der Warteschlange abhängt. Für den Fall eines Zeithorizonts von n Ankünften werden zusätzlich terminale Kosten berücksichtigt, die für eventuell nicht bediente Kunden am Ende des Zeithorizonts realisiert werden. Die Ankünfte von Kunden erfolgen dabei zunächst einzeln. In einer Erweiterung des Modells werden auch Gruppenankünfte zufälliger Größe zugelassen. Es soll nun bei jeder Ankunft entschieden werden, ob ein ankommender Kunde angenommen oder abgelehnt werden soll, bzw. im Fall von Gruppenankünften, wieviele Kunden in das System aufgenommen werden sollen. Für das resultierende Optimierungsproblem kann Stidham (1978) unter der Annahme konvexer und nichtfallender Kostenfunktionen unter anderem zeigen, dass eine Politik in der Form einer Control-Limit-Rule existiert, die den erwarteten diskontierten Gesamtgewinn des Wartesystems maximiert. Die Ergebnisse von Stidham (1978) werden von Johansen (1977) auf $GI/M/c$ -Wartesysteme erweitert.

Helm und Waldmann (1984) erweitern das Modell von Johansen (1977) wiederum um einen dynamischen Umweltprozess, dessen Zustandsentwicklung zwischen den Kundenankünften durch einen Markov-Prozess beschrieben wird. Die Umwelt kann dabei sowohl den Ankunftsprozess als auch die Bedienzeiten sowie die Gewinn- und Kostenstrukturen beeinflussen. Zusätzlich können mit

Hilfe dieser Umwelt auch Spezialfälle wie verschiedene Kundenklassen, ein endlicher Zeithorizont, abhängige Zwischenankunftszeiten sowie nichtstationäre Ankunftsprozesse modelliert werden. Insbesondere werden in Helm und Waldmann (1984) auch zustandsabhängige Bedienraten zugelassen.

Eine der ersten Arbeiten, die sich mit der Zulassungssteuerung in Netzwerken von Warteschlangen beschäftigt, ist die von Davis (1977). Dieser betrachtet ein zweidimensionales Analogon des $GI/M/1$ -Wartesystems aus Stidham (1978) in Form zweier paralleler Bedienstationen, die jeweils über eine eigene Warteschlange verfügen. Ankommende Kunden generieren bei Eintritt in das System einen bestimmten Gewinn. Zudem entstehen für jede Warteschlange Wartekosten, deren Höhe von der aktuellen Kundenanzahl innerhalb der jeweiligen Warteschlange abhängt und die als konvex angenommen werden. Zu jedem Zeitpunkt soll nun darüber entschieden werden, ob ein ankommender Kunde aufgenommen und welcher Bedienstation er zugewiesen werden soll. Gruppenankünfte werden dabei nicht zugelassen. Das Ziel ist die Maximierung des erwarteten diskontierten Gesamtgewinns. Davis (1977) kann nun für das resultierende Optimierungsproblem zeigen, dass es im Falle identischer Wartekosten und Bedienraten an den beiden Warteschlangen optimal ist, einen ankommenden Kunden stets der Bedienstation mit der kürzeren Warteschlange zuzuweisen. Abdel-Gawad (1984) gelingt es darüber hinaus, im Falle nicht identischer Kosten und Bedienraten die Optimalität einer sogenannten monotonen Switching-Curve nachzuweisen. Zu den Modellen von Davis (1977) und Abdel-Gawad (1984) existieren zahlreiche Erweiterungen. Hier sei nur auf Hajek (1984) hingewiesen, der eine kombinierte Routing- und Prioritätssteuerung in einem Netzwerk von zwei Bedienstationen untersucht. Er kann sowohl im Fall eines endlichen als auch im Fall eines unendlichen Planungshorizontes mit Durchschnittskostenkriterium zeigen, dass eine optimale Politik existiert, die die Form einer Switching-Curve aufweist.

Im Bereich der Prioritätssteuerung von Warteschlangen bzw. Zuweisungssteuerung bei mehreren Kundenklassen ist als Ausgangspunkt für diverse weitere Arbeiten Harrison (1975) zu nennen. Dieser betrachtet über einen unendlichen Zeithorizont ein $M/GI/1$ -Wartesystem, an der Kunden verschiedener Kundenklassen ankommen. Die Kunden generieren in Folge ihrer Bedienung einen klassenabhängigen Gewinn. Zudem entstehen klassenabhängige Wartekosten für die auf eine Bedienung wartenden Kunden. Mit dem Ziel, den erwarteten diskontierten Gesamtgewinn zu maximieren, muss nun zu Beginn jeder neuen Bedienung entschieden werden, welcher Kundentyp priorisiert wird. Harrison (1975) zeigt für dieses Entscheidungsproblem die Optimalität einer Indexregel, d.h., dass die Kundenklassen in Abhängigkeit ihres bei Behandlung resultierenden Gewinns, der Wartekosten sowie der Bedienzeitverteilung in eine Reihenfolge gebracht werden können, die eine optimale Priorisierung ermöglicht. Hierbei können auch Kundentypen identifiziert werden, die niemals bedient werden sollten.

Die vorgestellten Arbeiten betrachten die Steuerung von Wartesystemen ausschließlich in stetiger Zeit. Für einen Einblick in die Steuerung von Wartesystemen in diskreter Zeit sei auf Sennott (1999) verwiesen.

Abgrenzung zu dieser Arbeit

Unser Modell zur Ressourcenauslastung, das wir in Kapitel 4 beschreiben, weist einige Verbindungen zu der Arbeit von Stidham (1978) auf. So kann unser Modell als Wartesystem in diskreter Zeit betrachtet werden, in dem ebenfalls Gruppenankünfte vorliegen. Analog zu Stidham (1978) soll darüber entschieden werden, wieviele Kunden in das System aufgenommen werden sollen. In Anlehnung an Helm und Waldmann (1984) modellieren wir erweiternd zudem einen dynamischen Umweltprozess, der das Systemverhalten beeinflusst. Ein Beispiel für eine solche Umwelt ist der Terminplan der Einrichtung. Zudem betrachten auch wir die Möglichkeit mehrerer Bedienstationen.

Für das resultierende Optimierungsproblem können wir analog zu den vorgestellten Veröffentlichungen die Optimalität einer Control-Limit-Rule beweisen. Hier ergänzen wir die Ergebnisse von Stidham (1978) und Johansen (1977), indem wir den Einfluss der Umwelt auf die Kontrollgrenzen der optimalen Politik untersuchen. Dabei bestimmen wir insbesondere den Einfluss des Terminplans der Einrichtung auf diese.

Unabhängig von den Unterschieden der zugrunde liegenden Problemstellungen sind die Arbeiten von Davis (1977), Abdel-Gawad (1984) sowie Hajek (1984) für uns aufgrund der resultierenden Strukturen der optimalen Politiken von großer Bedeutung. Analog zu diesen Arbeiten erhalten wir für unser Modell zur Ressourcenzuweisung, das wir in Kapitel 5 untersuchen, für den Fall nur einer Bedienstation eine monotone Switching-Curve als optimale Politik. Während in den dargestellten Arbeiten jedoch über die Zuweisung eines Kunden auf verschiedene Bedienstationen entschieden wird, soll in unserem Modell über die Zuweisung einer Bedienstation auf zwei verschiedene Kundenklassen entschieden werden. Das Problem von Harrison (1975) ist daher ein ähnliches Grundproblem. Da in dieser Arbeit jedoch keine terminalen Kosten berücksichtigt werden, kann hier, im Gegensatz zu unserem Problem, keine Indexregel als optimale Politik nachgewiesen werden. Erweiternd untersuchen wir das Problem der Zuweisung mehrerer Bedienstationen auf diese zwei Kundenklassen und können eine optimale Politik bestimmen, die eine ähnliche Struktur wie die einer monotonen Switching-Curve aufweist und auf eine solche zurückgeführt werden kann. Wie im Modell aus Kapitel 4 modellieren wir erweiternd zudem einen dynamischen Umweltprozess, der das Systemverhalten beeinflusst und untersuchen den Einfluss eines Terminplans auf die optimale Politik.

3 Theoretische Grundlagen

3.1 Stochastische dynamische Entscheidungsprozesse

Ein *dynamischer Entscheidungsprozess* ist ein System, welches einen gewissen Zeithorizont, auch Planungshorizont oder kurz Horizont genannt, aktiv ist und von einem Entscheidungsträger gesteuert werden kann, der damit dieses in gewissem Ausmaße in seiner zeitlichen Entwicklung und damit die vom System erbrachte Leistung beeinflussen kann. Die Aufgabe des Entscheidungsträgers besteht darin, eine Sequenz von Entscheidungen, den Aktionen, so zu wählen, dass die Leistung des Systems über den betrachteten Zeithorizont optimiert wird. Die Entscheidungen werden dabei sequentiell getroffen und oftmals muss vor allem abgewogen werden, ob die Entscheidung für eine sofortige „gute“ Leistung des Systems eine später evtl. dadurch bedingte „schlechtere“ Leistung rechtfertigt.

Bei *stochastischen dynamischen Entscheidungsprozessen* ist die Entwicklung des Systems nicht eindeutig festgelegt, sondern unterliegt zufälligen Einflüssen.

Um solche Systeme zu untersuchen, ist das Konzept der dynamischen Programmierung von zentraler Bedeutung.¹⁸ Mit diesem Konzept lassen sich diese sequentiellen Entscheidungsprobleme rekursiv lösen, d.h., es kann die optimale Leistung sowie die optimale Sequenz von Aktionen bestimmt werden.

Man unterscheidet verschiedene Varianten stochastischer dynamischer Entscheidungsprozesse. Wir beschränken uns auf die für uns relevanten Markovschen Entscheidungsprozesse in diskreter Zeit sowie die Semi-Markovschen Entscheidungsprozesse in stetiger Zeit, jeweils mit endlichem Planungshorizont.

Bei einem Markovschen Entscheidungsprozess in diskreter Zeit wird das System zu fest vorgegebenen, meist äquidistanten Zeitpunkten betrachtet, zu denen jeweils eine Aktion gewählt wird. Die zukünftige Entwicklung des Systems ist dabei nur vom gegenwärtigen Zustand und der in diesem Zustand gewählten Aktion abhängig, nicht aber von der Vorgeschichte des Prozesses.

Bei einem Semi-Markovschen Entscheidungsprozess in stetiger Zeit wird angenommen, dass sich das System kontinuierlich entwickelt und über die gesamte Zeit hinweg betrachtet wird. Die Aktionen werden dabei zu zufälligen Zeitpunkten getroffen, zu denen bestimmte Ereignisse stattfinden. Die zukünftige Entwicklung des Systems hängt bei diesen Prozessen sowohl vom beobachteten Zustand zum letzten Entscheidungszeitpunkt als auch von der Zeit, die seit dem letztem Entscheidungszeitpunkt vergangen ist, ab.

Darüber hinaus betrachten wir sowohl im Kontext der Markovschen als auch der Semi-Markovschen Entscheidungsprozesse solche, die zusätzlich von einer dynamischen Umwelt beeinflusst werden, welche nicht steuerbar ist. Solche Prozesse nennt man auch *Entscheidungsprozesse mit dynamischer Umwelt*.

¹⁸Vgl. Bellman (1957), eine allgemeine Grundlage findet man z.B. in Hinderer (1970).

3.1.1 Markovsche Entscheidungsprozesse

In diesem Abschnitt werden *Markovsche Entscheidungsprozesse (MEPs)* mit endlichem Planungshorizont in diskreter Zeit betrachtet.¹⁹ Bei Markovschen Entscheidungsprozessen handelt es sich um einen Spezialfall der stochastischen dynamischen Entscheidungsprozesse, für die angenommen wird, dass die zukünftige Entwicklung des Prozesses nur vom aktuellen Zustand, dem momentanen Zeitpunkt und der gerade gewählten Aktion abhängen, nicht jedoch von dessen Vorgeschichte vor diesem Zeitpunkt. Mit Hilfe dieser Annahme ist es möglich, Entscheidungsregeln zu entwickeln, die ebenfalls nur vom aktuellen Zustand und der Zeit abhängen und damit unabhängig von der Geschichte des Systems sind. Dieses ist der große Vorteil von Markov-Modellen. Im Mittelpunkt der Theorie Markovscher Entscheidungsprozesse steht die sogenannte Bellmansche Optimalitätsgleichung²⁰, durch die solche Entscheidungsprobleme mit dem Konzept der dynamischen Programmierung gelöst werden können.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel nur auf MEPs, die einen endlichen Planungshorizont besitzen und in diskreter Zeit verlaufen. Des Weiteren beschränken wir uns auf Prozesse mit einem diskreten Zustands- und Aktionenraum. Dieser Abschnitt stellt also nur einen Teil der Theorie Markovscher Entscheidungsprozesse dar.

Ein solcher MEP verläuft wie folgt: Wir betrachten den Prozess zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, N$. Zum Zeitpunkt n befindet sich der Prozess in einem Zustand s_n und es wird eine Entscheidung a_n aus einer Menge von möglichen Aktionen gewählt. Diese hängt vom momentanen Zustand s_n und vom Zeitpunkt n der Entscheidung ab.²¹ Durch die Wahl der Aktion wird ein Gewinn $r(s_n, a_n)$ generiert. Der Prozess wechselt zum nächsten Zeitpunkt $n + 1$ mit Wahrscheinlichkeit $p(s_n, a_n, s_{n+1})$ in den Zustand s_{n+1} , startet zum Zeitpunkt 0 in einem festen Startzustand und endet zum Zeitpunkt N , zu dem ein terminaler Gewinn $V_N(s_N)$ vereinnahmt wird. Eine Aktion wird zu diesem Zeitpunkt nicht mehr getroffen. Gewinne können dabei auf den Startzeitpunkt 0 diskontiert werden. Zusammenfassend kann man einen MEP also in der folgenden Definition beschreiben:

Definition 3.1 Ein *Markovscher Entscheidungsprozess mit endlichem Zeithorizont in diskreter Zeit (MEP)* wird beschrieben durch ein Tupel $(S, A, N, D, p, r, V_N, \alpha)$ mit:

- (1) dem *Zustandsraum* S , einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Zuständen;
- (2) dem *Aktionenraum* A , einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Aktionen;
- (3) dem *Planungshorizont* $N \in \mathbb{N}$;
- (4) der endlichen Menge $D(s)$ der im Zustand $s \in S$ möglichen Aktionen; weiter sei $D := \{(s, a) \in S \times A \mid a \in D(s)\}$;
- (5) der *Zähldichte* $p : D \times S \rightarrow [0, 1]$ der *Übergangswahrscheinlichkeiten*; $p(s, a, s')$ beschreibe dabei die Wahrscheinlichkeit, dass bei Wahl von Aktion $a \in D(s)$ in Zustand $s \in S$ im nächsten Schritt der Zustand $s' \in S$ angenommen wird;
- (6) der *einstufigen Gewinnfunktion* $r : D \rightarrow \mathbb{R}$; $r(s, a)$ beschreibe dabei den sofortigen Gewinn, wenn im Zustand $s \in S$ die Aktion $a \in D(s)$ gewählt wird;

¹⁹Ausführliche Einführungen Markovscher Entscheidungsprozesse können in Puterman (1994), White (1993), Bertsekas (1995a) oder Bertsekas (1995b) nachgelesen werden. Eine Übersicht über die verschiedenen Varianten Markovscher Entscheidungsprozesse findet sich in Feinberg und Shwartz (2002).

²⁰Vgl. Bellman (1957).

²¹Möglich ist im Allgemeinen auch, dass die Wahl der Aktionen vom gesamten Verlauf des Prozesses abhängt, jedoch können wir dies in unserem Fall von der Betrachtung ausschließen.

- (7) der *terminalen Gewinnfunktion* $V_N : S \rightarrow \mathbb{R}$; $V_N(s)$ beschreibe dabei den Gewinn zum Zeitpunkt N , wenn sich der Zustand am Ende des Planungshorizontes im Zustand $s \in S$ befindet;
- (8) dem *Diskontierungsfaktor* $\alpha > 0$; ein Gewinn r zum Zeitpunkt n wird mit dem Faktor α^n auf den Zeitpunkt 0 diskontiert.

Es werden nun Vorschriften benötigt, nach denen die Aktionen in den einzelnen Zuständen und zu den unterschiedlichen Zeitpunkten gewählt werden. Dazu führen wir den Begriff einer *Entscheidungsregel* und den einer *Politik* ein. Eine Entscheidungsregel gibt abhängig vom aktuellen Zustand des Prozesses die Aktion an, die zur Kontrolle des Systems gewählt werden soll. Eine Politik ist eine Sequenz von Entscheidungsregeln und gibt damit an, welche Entscheidungsregeln zu den einzelnen Zeitpunkten gewählt werden sollen.

Formal definieren wir Entscheidungsregeln und Politiken wie folgt:

Definition 3.2 (1) Eine (*deterministische Markovsche*) *Entscheidungsregel* ist eine Abbildung $f : S \rightarrow A$, die jedem Zustand $s \in S$ eine Aktion $a \in D(s)$ zuordnet. Wir bezeichnen mit $F := \{f : S \rightarrow A \mid f(s) \in D(s), s \in S\}$ die Menge aller (*deterministischen Markovschen*) *Entscheidungsregeln*.

(2) Eine (*deterministische Markovsche*) *Politik* ist eine Sequenz $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ von Entscheidungsregeln, durch die die zu wählende Entscheidungsregel f_n zum Zeitpunkt n bestimmt wird, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Wir bezeichnen mit $\Pi = F^N$ die Menge aller (*deterministischen Markovschen*) *Politiken*.

Mit diesen Vorbereitungen können wir den durch die gewählte Politik induzierten stochastischen Prozess beschreiben. Sei dazu $\Omega = \{S \times A\}^{N-1} \times S$ und $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω .²² Weiter seien S_n und A_n Zufallsvariablen, die den Zustand bzw. die Aktion zum Zeitpunkt n beschreiben. Da die Aktion im Zustand S_n zur Zeit n durch die gewählte Politik $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \in \Pi$ bestimmt wird, gilt $A_n = f_n(S_n)$. Sei weiter $Z_n = (S_0, A_0, \dots, S_n)$ die Zufallsvariable, die die Entwicklung des Systems bis zum Zeitpunkt n beschreibt und $z_n = (s_0, a_0, \dots, s_n)$ eine Realisierung dieser. Eine Politik $\pi \in \Pi$ induziert nun ein (bedingtes) Wahrscheinlichkeitsmaß P_π auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ durch

$$\begin{aligned} P_\pi(S_{n+1} = s_{n+1} \mid Z_n = z_n, A_n = a_n) &= P_\pi(S_{n+1} = s_{n+1} \mid S_n = s_n, A_n = a_n) \\ &= p(s_n, f_n(s_n), s_{n+1}). \end{aligned}$$

Da die Markov-Eigenschaft erfüllt ist, ist der induzierte stochastische Prozess damit eine Markov-Kette in diskreter Zeit. Die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Verlauf (s_0, a_0, \dots, s_n) der Markov-Kette bis zum Zeitpunkt n unter Politik π bei Start in s_0 lässt sich dann bestimmen durch

$$P_\pi((A_0, S_1, A_1, \dots, S_n) = (a_0, s_1, a_1, \dots, s_n) \mid S_0 = s_0) = p(s_0, f_0(s_0), s_1) \cdot \dots \cdot p(s_{n-1}, f_{n-1}(s_{n-1}), s_n).$$

Wir wollen nun die *Leistung* des Systems optimieren. Um die Leistung des Systems zu messen, haben wir in der Definition eines MEPs einstufige und terminale Gewinnfunktionen eingeführt, welche den Nutzen der Leistung für den Entscheidungsträger zu den jeweiligen Zeitpunkten widerspiegeln. Als Gesamtleistung des Systems betrachten wir den (ggf. *diskontierten*) *Gesamtgewinn* des MEPs.²³

²²Durch Wahl der Potenzmenge als σ -Algebra sind alle Abbildungen auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ messbar.

²³Im Folgenden sprechen wir kurz von Gesamtgewinn, unabhängig davon, ob dieser, im Fall $\alpha \neq 1$, diskontiert ist oder nicht (Fall $\alpha = 1$).

Definition 3.3 Der *Gesamtgewinn* des MEPs unter Verwendung von Politik $\pi \in \Pi$ sei definiert durch

$$R_\pi := \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n r(S_n, f_n(S_n)) + \alpha^N V_N(S_N).$$

R_π ist sowohl vom Verlauf des Prozesses als auch von der gewählten Politik $\pi \in \Pi$ abhängig und damit eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_\pi)$. Um den Gesamtgewinn unter den verschiedenen Politiken zu vergleichen, verwenden wir den *erwarteten Gesamtgewinn*. Dazu bezeichne E_π den Erwartungswert bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_π auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$:

$$\begin{aligned} E_\pi(R_\pi | S_0 = s_0) &= E_\pi \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n r(S_n, f_n(S_n)) + \alpha^N V_N(S_N) \middle| S_0 = s_0 \right) \\ &= \sum_{s_1 \in S} \cdots \sum_{s_N \in S} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n r(s_n, f_n(s_n)) + \alpha^N V_N(s_N) \right) \\ &\quad \cdot p(s_0, f_0(s_0), s_1) \cdot \dots \cdot p(s_{N-1}, f_{N-1}(s_{N-1}), s_N), \end{aligned}$$

sofern $E_\pi(R_\pi | S_0 = s_0)$ wohldefiniert ist.

Um die Wohldefiniertheit des erwarteten Gesamtgewinns sicherzustellen, treffen wir folgende zwei Voraussetzungen, welche in der gesamten Arbeit Gültigkeit haben werden:

Voraussetzung:

Es existiert eine Funktion $b : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ und eine Konstante $R \in \mathbb{R}$, so dass für alle $(s, a) \in D$ gilt:

(B1) $\frac{|r(s,a)|}{b(s)} \leq R < \infty$;

(B2) $\frac{|V_N(s)|}{b(s)} \leq R < \infty$.

Es sei dann $B_b := \{v : s \rightarrow \mathbb{R} \mid \|v\| := \sup_{s \in S} \frac{|v(s)|}{b(s)} < \infty\}$ die Menge der bzgl. der Funktion b beschränkten Funktionen auf S .

Gesucht ist nun eine Politik $\pi^* \in \Pi$, die den erwarteten Gesamtgewinn bei Start in $s_0 \in S$ maximiert. Dazu führen wir die folgende Definition ein:

Definition 3.4 Sei $V_\pi(s_0) := E_\pi(R_\pi | S_0 = s_0)$, $s_0 \in S$, $\pi \in \Pi$.

- (1) Eine Politik $\pi^* \in \Pi$ heißt *optimal*, falls

$$V_{\pi^*}(s) \geq V_\pi(s), \quad \forall \pi \in \Pi, \forall s \in S.$$

- (2) Die Funktion $V : S \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$V(s) := \sup_{\pi \in \Pi} V_\pi(s), \quad s \in S,$$

heißt *Wertfunktion* des MEPs.

Die Wertfunktion gibt also den optimalen erwarteten Gesamtgewinn in Abhängigkeit vom Startzustand an. Nach Puterman (1994) gilt folgender Satz.

Satz 3.5 Sind für einen MEP die Voraussetzungen (B1) und (B2) erfüllt, so ist die Wertfunktion V die (in der Menge B_b eindeutige) Lösung V_0 der sogenannten Optimalitätsgleichung

$$V_n(s) = \max_{a \in D(s)} \left\{ r(s, a) + \alpha \sum_{s' \in S} p(s, a, s') V_{n+1}(s') \right\}, \quad s \in S, \quad (3.1)$$

$n = 0, \dots, N - 1$. Jede Politik $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ mit $f_n(s) = a_n \in D(s)$, wobei a_n so gewählt ist, dass die rechte Seite der Gleichung maximiert wird, ist optimal.

Eine verkürzte Schreibweise der Wertfunktion ergibt sich mit der Definition folgender Abbildungen auf der Menge B_b auf sich selbst:

Definition 3.6 Es sei

(1) für alle $v \in B_b, s \in S$,

$$H_a v(s) := \alpha \sum_{s' \in S} p(s, a, s') v(s'), \quad a \in D(s),$$

(2) für alle $v \in B_b, s \in S$,

$$Uv(s) := \max_{a \in D(s)} \{r(s, a) + H_a v(s)\}.$$

Mit Hilfe dieser Definition kann die Optimalitätsgleichung (3.1) auch in der folgenden, kompakteren Form geschrieben werden:

$$V_n = UV_{n+1}. \quad (3.2)$$

3.1.2 Markovsche Entscheidungsprozesse mit dynamischer Umwelt

In diesem Abschnitt wird eine spezielle Klasse Markovscher Entscheidungsprozesse betrachtet, und zwar solche mit einer *dynamischen Umwelt*. Bei diesen nehmen wir an, dass zusätzlich zu einem Markovschen Entscheidungsprozess, wie er im vorherigen Abschnitt definiert wurde, ein zweiter, sogenannter Umweltprozess läuft. Dieser sei durch eine homogene Markov-Kette beschreibbar. Der Zustand i_n dieser Markov-Kette zum Zeitpunkt n beeinflusst die Übergangswahrscheinlichkeiten und die Gewinne des Markovschen Entscheidungsprozesses. Der Zustand des Umweltprozesses ist dabei für den Entscheidungsträger beobachtbar und die Übergangswahrscheinlichkeiten sind bekannt. Im Gegensatz dazu hat der Markovsche Entscheidungsprozess selbst keinen Einfluss auf den Umweltprozess und dieser kann vom Entscheidungsträger nicht kontrolliert werden.²⁴

Ein MEP mit dynamischer Umwelt verläuft nun wie folgt: Wir betrachten sowohl den zu kontrollierenden MEP als auch den Umweltprozess zu den Zeitpunkten $0, 1, \dots, N$. Zum Zeitpunkt n befindet sich der MEP in Zustand s_n , der Umweltprozess in Zustand i_n . Es wird nun eine Entscheidung a_n getroffen, welche von diesen beiden Zuständen abhängt. Bei Wahl der Aktion wird ein Gewinn $r_n(s_n, i_n, a_n)$ generiert. Der MEP wechselt zum nächsten Zeitpunkt $n + 1$ in den Zustand s_{n+1} mit Wahrscheinlichkeit $p(s_n, i_n, a_n, s_{n+1})$. Der Umweltprozess wechselt zum nächsten Zeitpunkt $n + 1$ in den Zustand i_{n+1} mit Wahrscheinlichkeit $q(i_n, i_{n+1})$, also sowohl unabhängig vom Zustand des MEPs als auch der gewählten Aktion. Sowohl der MEP als auch der Umweltprozess

²⁴Eine ausführliche Darstellung von Entscheidungsprozessen mit zufälligen Einflüssen findet sich in Waldmann (1981). Erweiterungen und Anwendungen finden sich in Waldmann (1983), Waldmann (1984), Helm und Waldmann (1984) und Hinderer und Waldmann (2001).

starten zum Zeitpunkt 0 in festen Zuständen oder gemäß voneinander unabhängiger Startverteilungen. Beide enden zum Zeitpunkt N , zu dem ein terminaler Gewinn $V_N(s_N, i_N)$ vereinnahmt wird. Zusammenfassend kann man einen MEP mit dynamischer Umwelt in der folgenden Definition beschreiben:

Definition 3.7 Ein *Markovscher Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt und endlichem Zeithorizont in diskreter Zeit* wird beschrieben durch ein Tupel $(S, I, A, N, D, p, q, r, V_N, \alpha)$ mit:

- (1) dem *Zustandsraum* S , einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Zuständen;
- (2) dem *Zustandsraum* I , einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Zuständen;
- (3) dem *Aktionenraum* A , einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge;
- (4) dem *Planungshorizont* $N \in \mathbb{N}$;
- (5) der endlichen Menge $D(s, i)$ der im Zustand $(s, i) \in S \times I$ möglichen Aktionen; weiter sei $D := \{(s, i, a) | (s, i) \in S \times I, a \in D(s, i)\}$.
- (6) den Dichten $p : D \times S \rightarrow [0, 1]$ der *Übergangswahrscheinlichkeiten des MEP* zum Zeitpunkt n ; $p(s_n, i_n, a_n, s_{n+1})$ beschreibe dabei die Wahrscheinlichkeit, dass bei Wahl von Aktion $a_n \in D(s_n, i_n)$ im (verallgemeinerten) Zustand (s_n, i_n) im nächsten Schritt der Zustand $s_{n+1} \in S$ angenommen wird;
- (7) der Dichte $q : I \times I \rightarrow [0, 1]$ der *Übergangswahrscheinlichkeiten des Umweltprozesses*; $q(i_n, i_{n+1})$ beschreibe dabei die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Umweltprozess im Zustand i_{n+1} befindet, wenn er sich eine Zeiteinheit zuvor im Zustand i_n befand;
- (8) der *einstufigen Gewinnfunktion* $r : D \rightarrow \mathbb{R}$; $r(s_n, i_n, a_n)$ beschreibe dabei den sofortigen Gewinn zum Zeitpunkt n , wenn sich der MEP im Zustand $s_n \in S$ und der Umweltprozess im Zustand $i_n \in I$ zur Zeit n befinden und Aktion $a_n \in D(s_n, i_n)$ gewählt wird, $n = 0, 1, \dots, N - 1$;
- (9) der *terminalen Gewinnfunktion* $V_N : S \times I \rightarrow \mathbb{R}$; $V_N(s_N, i_N)$ beschreibe dabei den Gewinn zum Zeitpunkt N , wenn sich der MEP am Ende des Planungshorizontes im Zustand $s_N \in S$ und der Umweltprozess im Zustand $i_N \in I$ befindet;
- (10) dem *Diskontierungsfaktor* $\alpha > 0$; ein Gewinn in Höhe von 1 zum Zeitpunkt n wird mit dem Faktor α^n auf den Zeitpunkt 0 diskontiert.

Definiert man $\tilde{S} := S \times I$ und $\tilde{p} : D_n \times \tilde{S} \rightarrow [0, 1]$ durch

$$\tilde{p}(\tilde{s}_n, a_n, \tilde{s}_{n+1}) := p(s_n, i_n, a_n, s_{n+1})q(i_n, i_{n+1}), \quad \tilde{s}_n = (s_n, i_n), \quad \tilde{s}_{n+1} = (s_{n+1}, i_{n+1}) \in \tilde{S},$$

so kann man einen MEP mit dynamischer Umwelt auf einen MEP wie in Abschnitt 3.1.1 definiert zurückführen.

3.1.3 Semi-Markovsche Entscheidungsprozesse

In diesem Abschnitt werden *Semi-Markovsche Entscheidungsprozesse (SMEPs)* mit endlichem Planungshorizont in stetiger Zeit betrachtet.²⁵ SMEPs in stetiger Zeit werden nicht zu diskreten Zeitpunkten beobachtet, sondern kontinuierlich. Die Entscheidungszeitpunkte sind dabei zufällig und die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Entscheidungszeitpunkten folgt einer beliebigen stetigen Verteilung. Die zukünftige Entwicklung des Prozesses hängt nur vom Zustand zum letzten Entscheidungszeitpunkt sowie der Zeit, die seit diesem Zeitpunkt vergangen ist, ab. Der Name Semi-Markovsche Entscheidungsprozesse lässt sich also darüber motivieren, dass die Vorgeschichte des Prozesses nur durch die Zeit, die seit der letzten Entscheidung vergangen ist, und dem Zustand zu diesem Zeitpunkt in die Weiterentwicklung des Systems einfließt. Da damit die zukünftige Entwicklung des Systems zum Zeitpunkt der Entscheidung nur vom momentanen Zustand abhängt, reicht es aus, den Prozess auch nur zu diesen Zeitpunkten zu betrachten. Die nachfolgenden Erläuterungen und Ergebnisse folgen Schellhaas (1980).

Ein SMEP verläuft wie folgt: Wir betrachten ein unter der Kontrolle eines Entscheidungsträgers stehendes System über einen gewissen, begrenzten Zeitraum, der zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ beginnt und zum Zeitpunkt $T \in [0, \infty)$ endet. Die Entscheidungen werden zu zufälligen Zeitpunkten $t_n \in [0, T)$ getroffen, die Anzahl der Entscheidungen in diesem Zeitraum ist ebenfalls zufällig. Zum Entscheidungszeitpunkt t_n befindet sich der Prozess in einem Zustand s_n und es wird eine Entscheidung a_n aus einer Menge von möglichen Aktionen gewählt. Diese hängt von s_n ab und t_n ab. Durch die Wahl der Aktion wird die Weiterentwicklung des Systems in der Art beeinflusst, dass sowohl der Zeitpunkt t_{n+1} der nächsten Entscheidung, als auch der Zustand s_{n+1} zu diesem von dieser Entscheidung abhängen. Des Weiteren wird ein Gewinn $g(s_n, a_n, s_{n+1}, t_{n+1} - t_n)$ generiert, der im Intervall $[t_n, t_{n+1})$ zustande kommt. Dabei kann auch $t_{n+1} > T$ gelten, jedoch wird die Beobachtung des Systems zum Zeitpunkt T abgebrochen und die Leistung des Systems nach T ist irrelevant. In diesem Fall wird im Intervall $[t_n, T)$ ein Gewinn $g(s_n, a_n, s_{n+1}, T - t_n)$ erzeugt. Bei Erreichen des Ende des Planungshorizontes, d.h., gilt $t_n \leq T < t_{n+1}$, wird zusätzlich ein terminaler Gewinn in Höhe von $h(s_n, a_n, s_{n+1}, T - t_n, t_{n+1} - t_n)$ vereinnahmt. Mit Erreichen des Zeitpunktes T wird die Beobachtung des Prozesses abgebrochen und es werden dementsprechend zum Zeitpunkt t_{n+1} und auch danach keine Entscheidungen mehr getroffen. Alle entstandenen Gewinne werden auf den Startzeitpunkt mit der Rate α diskontiert. Die Entwicklung der Systemzustände selbst, also der Übergang vom Zustand s_n zum Entscheidungszeitpunkt t_n in den Zustand s_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1} bei Wahl von Aktion a_n geschieht mit der Wahrscheinlichkeit $\kappa(s_n, a_n, s_{n+1}, t_{n+1} - t_n)$. Zusammenfassend kann man einen SMEP also in der folgenden Definition beschreiben:²⁶

Definition 3.8 Ein *Semi-Markovscher Entscheidungsprozess mit endlichem Zeithorizont in stetiger Zeit* wird beschrieben durch ein Tupel $(S, A, T, D, \kappa, g, h, \alpha)$ mit:

- (1) dem *Zustandsraum* S , einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Zuständen;
- (2) dem *Aktionsraum* A , einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge von Aktionen;
- (3) dem *Planungshorizont* $T \in \mathbb{R}_+$;

²⁵Behandelt wurden diese Prozesse unter anderem in Jewell (1963), Schellhaas (1980), Waldmann (1985) und Hinderer und Waldmann (1999). Eine Anwendung findet sich z.B. in Mamer (1986).

²⁶Im Folgenden bezeichnet $\mathcal{B}(M)$ stets die Borel- σ -Algebra von einer Menge M . Weiter setzen wir voraus, dass überall dort, wo erforderlich, die Messbarkeit erfüllt ist, wobei der betreffende Messraum aus dem Definitionsbereich versehen mit der Borel- σ -Algebra besteht.

- (4) der endlichen Menge $D(s)$ der im Zustand $s \in S$ möglichen Aktionen; weiter sei $D := \{(s, a), s \in S, a \in D(s)\}$;
- (5) dem Übergangsgesetz κ von D nach $S \times \mathbb{R}_+$; $\kappa(s, a, s', z)$ sei dabei gerade die Wahrscheinlichkeit eines Überganges von s nach s' innerhalb der nächsten z Zeiteinheiten bei Wahl von Aktion $a \in D(s)$;
- (6) der *Gewinnfunktion* $g : D \times S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$; $g(s_n, a_n, s_{n+1}, x)$ beschreibe dabei den Gewinn der entsteht, wenn im Zustand s_n die Aktion a_n gewählt wird, der nachfolgende Entscheidungszeitpunkt x Zeiteinheiten später eintritt und sich der Prozess dann im Zustand s_{n+1} befindet;
- (7) der *terminalen Gewinnfunktion* $h : D \times S \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$; $h(s_n, a_n, s_{n+1}, T - t, x)$ beschreibe dabei den Gewinn der entsteht, wenn im Zustand s_n die Aktion a_n gewählt wird, der nachfolgende Entscheidungszeitpunkt x Zeiteinheiten später eintritt, dieses jedoch genau $x - (T - t) \geq 0$ Zeiteinheiten nach dem Ende des Planungshorizontes T stattfindet.
- (8) der *Diskontierungsrate* $\alpha \in \mathbb{R}$; ein Gewinn in Höhe von 1 zum Zeitpunkt t hat damit zum Zeitpunkt 0 einen Wert von $e^{-\alpha t}$.

Wie auch bei den MEPs werden Vorschriften benötigt, nach denen die Aktionen in den einzelnen Zuständen und zu den unterschiedlichen Zeitpunkten gewählt werden sollen. Dazu können wir auch im Kontext der SMEPs die Begriffe *Entscheidungsregel* und *Politik* einführen. Auch hier kann gezeigt werden, dass stets eine *deterministische Markovsche Politik* existiert, die den Verlauf des Prozesses für den Entscheidungsträger optimal beeinflusst. Es kann sogar gezeigt werden, dass stets eine optimale *stationäre Politik* existiert und zwar in dem Sinne, dass die Entscheidungen nur vom aktuellen Zustand und der verbleibenden Zeit bis zum Ende des Planungshorizontes abhängt, nicht aber von der Anzahl der bisher getroffenen Entscheidungen.²⁷

Definition 3.9 (1) Eine (*deterministische Markovsche*) *Entscheidungsregel* ist eine Abbildung $f : S \times [0, T) \rightarrow A$, die jedem Zustand $s \in S$ zur Zeit $t \in [0, T)$ eine Aktion $a \in D(s)$ zuordnet. Wir bezeichnen mit $\tilde{F} := \{f : S \times [0, T) \rightarrow A \mid f(s, t) \in D(s), (s, t) \in S \times [0, T)\}$ die Menge aller Entscheidungsregeln.

- (2) Eine (*deterministische Markovsche*) *Politik* ist eine Sequenz $\pi = (f_0, f_1, \dots)$ von Entscheidungsregeln, durch die die zu wählende Entscheidungsregel f_n zum n -ten Entscheidungszeitpunkt bestimmt wird. Wir bezeichnen mit $\tilde{\Pi} := \tilde{F}^\infty$ die Menge aller (deterministischen Markovschen) Politiken.
- (3) Eine *stationäre Politik* ist eine deterministische Markovsche Politik π mit $\pi = (f, f, \dots)$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\Pi}^S$ die Menge aller stationären Politiken.²⁸

Mit diesen Vorbereitungen können wir den durch die gewählte Politik induzierten stochastischen Prozess beschreiben. Es genügt, sich auf die Betrachtung stationärer Politiken zu beschränken. Sei dazu $\Omega = \{S \times \mathbb{R} \times A\}^\infty$ und $\mathcal{B}(\Omega)$. Weiter seien S_n , A_n und T_n Zufallsvariablen, die den Zustand, die Aktion sowie den Zeitpunkt der n -ten Entscheidung beschreiben. Da die Aktion im Zustand S_n zur Zeit T_n durch die gewählte Politik $\pi = (f, f, \dots) \in \tilde{\Pi}^S$ bestimmt wird, gilt $A_n = f(S_n, T_n)$. Sei

²⁷Den Beweis findet man z.B. in Rieder (1976), Theorem 4.2.

²⁸Es sei darauf hingewiesen, dass auch bei stationären Politiken die Entscheidung basierend auf Zustand und Zeitpunkt der Entscheidung getroffen werden.

weiter $Z_n = (S_0, T_0, A_0, \dots, S_n, T_n)$ die Zufallsvariable, die die Entwicklung des Systems bis zum n -ten Entscheidungszeitpunkt beschreibt und $z_n = (s_0, t_0, a_0, \dots, s_n, t_n)$ eine Realisierung dieser. Eine Politik $\pi \in \tilde{\Pi}^S$ induziert nun ein (bedingtes) Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ durch

$$\begin{aligned} P_\pi(S_{n+1} = s_{n+1}, T_{n+1} - T_n \leq x | Z_n = z_n, A_n = a_n) \\ &= P_\pi(S_{n+1} = s_{n+1}, T_{n+1} - T_n \leq x | S_n = s_n, T_n = t_n, A_n = a_n) \\ &= \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \kappa(s_n, f(s_n, t_n), s_{n+1}, x), & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Analog zu Abschnitt 3.1.1 wird die Gesamtleistung des betrachteten Systems durch den (ggf. *diskontierten*) *Gesamtgewinn* des SMEPs gemessen.²⁹ Dazu haben wir sowohl die Gewinnfunktion g , die den Gewinn zu den Entscheidungszeitpunkten beschreibt, als auch die terminale Gewinnfunktion h eingeführt. Der Gesamtgewinn setzt sich also zusammen aus den sofortigen Gewinnen zu den einzelnen Entscheidungszeitpunkten vor dem Ende des Planungshorizontes T und dem terminalen Gewinn zum Zeitpunkt T selbst, der entsteht, sobald der nächste Entscheidungszeitpunkt nach T liegt.

Definition 3.10 Sei $\hat{r} : D \times S \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} \hat{r}(s, a, s', t, t+x) := & 1_{[0, T]}(t) \left[1_{[0, T]}(t+x) g(s, a, s', x) e^{-\alpha x} \right. \\ & \left. + 1_{(T, \infty)}(t+x) h(s, a, s', T-t, x) e^{-\alpha(T-t)} \right], \end{aligned}$$

falls $x \geq 0$ und $\hat{r}(s, a, s', t, t+x) := 0$ sonst. Weiter definieren wir die Funktion $r : D \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r(s, a, t) := \sum_{s' \in S} \int_0^\infty \kappa(s, a, s', dx) \hat{r}(s, a, s', t, t+x),$$

und bezeichnen $r(s, a, t)$ als den *erwarteten Gewinn* bei Wahl der Aktion $a \in D(s)$ in Zustand $s \in S$ zum Zeitpunkt $t \in [0, T)$. Der *Gesamtgewinn* des SMEPs unter der Verwendung von Politik $\pi \in \tilde{\Pi}^S$ sei dann definiert durch

$$R_\pi := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(T_n - T_0)} \hat{r}(S_n, f(S_n, T_n), S_{n+1}, T_n, T_{n+1}).$$

R_π ist vom Verlauf des Prozesses abhängig und damit eine Zufallsvariable. Wir verwenden den *erwarteten Gesamtgewinn*, um verschiedene Politiken zu vergleichen. Dazu nehmen wir an, dass ein fester Startzustand $s_0 \in S$ und die Startzeit $t_0 = 0$ gegeben ist und E_π den Erwartungswert bzgl. des Wahrscheinlichkeitsmaßes P_π auf $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ bezeichnet:

$$E_\pi(R_\pi | S_0 = s_0, T_0 = 0) = E_\pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha(T_n - t_0)} \hat{r}(S_n, f(S_n, T_n), S_{n+1}, T_n, T_{n+1}) \mid S_0 = s_0, T_0 = t_0 \right)$$

sofern $E_\pi(R_\pi | S_0 = s_0, T_0 = t_0)$ wohldefiniert ist.

Um die Wohldefiniertheit des erwarteten Gesamtgewinns sicherzustellen, treffen wir folgende Voraussetzungen, welche in der gesamten Arbeit Gültigkeit haben werden.³⁰

²⁹Im Folgenden sprechen wir kurz von Gesamtgewinn, unabhängig davon, ob dieser, im Fall $\alpha \neq 0$, diskontiert ist oder nicht (Fall $\alpha = 0$).

³⁰Den Beweis der Wohldefiniertheit findet man z.B. in Schellhaas (1980) unter Verwendung von Schäl (1975).

Voraussetzung:

Es existiert eine Funktion $b : S \rightarrow \mathbb{R}_+$, so dass für alle $(s, a) \in D$ gilt:

(BS1) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$\sum_{s' \in S} \int_0^T \kappa(s, a, s', dx) e^{-\alpha x} b(s') \leq c \cdot b(s);$$

(BS2) Es existiert ein $d \in \mathbb{R}_+$, so dass

$$|r(s, a, t)| \leq d \cdot b(s), \quad \forall t \in [0, T];$$

(BS3) Es existieren $\tau > 0$, $\delta < 1$, so dass

$$\sum_{s' \in S} \int_0^\tau \kappa(s, a, s', dx) e^{-\alpha x} b(s') \leq \delta \cdot b(s).$$

Gesucht ist nun eine Politik $\pi^* \in \tilde{\Pi}^S$, die den erwarteten Gesamtgewinn bei Start in Zustand $s_0 \in S_0$ zum Zeitpunkt $t_0 \in [0, T]$ maximiert. Dazu führen wir folgende Definition ein:

Definition 3.11 Sei $V_\pi(s_0, t_0) := E_\pi(R_\pi | S_0 = s_0, T_0 = t_0)$, $(s_0, t_0) \in S \times [0, T]$, $\pi \in \tilde{\Pi}^S$.

(1) Eine Politik $\pi^* \in \tilde{\Pi}^S$ heißt *optimal*, falls gilt:

$$V_{\pi^*}(s_0, t_0) \geq V_\pi(s_0, t_0), \quad \forall \pi \in \tilde{\Pi}^S.$$

(2) Die Funktion $V : S \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$V(s_0, t_0) := \sup_{\pi \in \tilde{\Pi}^S} V_\pi(s_0, t_0), \quad (s_0, t_0) \in S \times [0, T],$$

heißt *Wertfunktion* des SMEPs.

Anders als bei den MEPs lässt sich aufgrund des überabzählbaren Zustandsraumes die Wertfunktion nicht durch Rückwärtsinduktion berechnen. Jedoch ist sie ebenfalls Lösung einer Optimalitätsgleichung und man kann sie durch sukzessive Approximation annähern. Dazu führen wir zunächst die folgenden Definitionen ein.

Definition 3.12 Es sei $B_b := \{v : S \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ messbar mit } \sup_{(s,t) \in S \times [0,T]} |v(s,t)|/b(s) < \infty\}$ die Menge aller bzgl. der Gewichtsfunktion b beschränkten Funktionen auf $S \times [0, T]$. Dann sei für alle $v \in B_b$, $(s, t) \in S \times [0, T]$

$$Uv(s, t) := \max_{a \in D(s)} \{r(s, a, t) + \sum_{s' \in S} \int_0^{T-t} \kappa(s, a, s', dx) e^{-\alpha x} v(s', t+x)\}.$$

Nach Schellhaas (1980) folgt dann der folgende Satz.

Satz 3.13 Sind für einen SMEP die Voraussetzungen (BS1)-(BS3) erfüllt, so ist die Wertfunktion die (in der Menge B_b eindeutige) Lösung der Optimalitätsgleichung

$$V = UV.$$

Darüber hinaus gilt mit $v_0 \equiv 0$ und $v_n := Uv_{n-1}$

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

und es existiert eine optimale stationäre Politik.

Im Gegensatz zu den MEPs mit endlichem Horizont kann die Wertfunktion i.A. also nicht nach endlich vielen Iterationsschritten bestimmt werden.

3.2 Konvexität und Multimodularität

Wir befassen uns in diesem Abschnitt mit den Konzepten der Konvexität und Multimodularität von Funktionen. Um in den beiden Modellen, die wir in den Kapiteln 4 und 5 als Markovsche Entscheidungsprozesse formulieren und anschließend untersuchen, optimale Politiken zu erhalten, die eine gewisse Struktur aufweisen, müssen wir unter anderem Kostenfunktionen voraussetzen, die selbst gewisse Eigenschaften erfüllen. Das Modell, welches in Kapitel 4 untersucht wird, besitzt die Menge der natürlichen Zahlen als Zustandsraum, weswegen wir das Konzept der Konvexität auf dieser Menge zu Hilfe ziehen können. Das in Kapitel 5 untersuchte Modell besitzt jedoch einen mehrdimensionalen diskreten Zustandsraum, weswegen das Konzept der Konvexität nicht mehr ausreicht und wir hier die Multimodularität verwenden.

3.2.1 Konvexität

Definition 3.14 Sei $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, dann definieren wir $\Delta f(x)$ und $\Delta^2 f(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x) \quad \text{und} \quad \Delta^2 f(x) := \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x).$$

Für $f : \mathbb{N}_0 \times M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei M eine beliebige endliche oder abzählbar unendliche Menge ist, definieren wir für alle $(x, m) \in \mathbb{N}_0 \times M$

$$\Delta f(x, m) := f(x+1, m) - f(x, m) \quad \text{und} \quad \Delta^2 f(x, m) := \Delta(\Delta f(x, m)) = \Delta f(x+1, m) - \Delta f(x, m).$$

Definition 3.15 Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (1) *monoton steigend (monoton fallend)*, falls $\Delta f(x) \geq 0$ ($\Delta f(x) \leq 0$) für alle $x \in \mathbb{N}_0$;
- (2) *konvex (konkav)*, falls $\Delta^2 f(x) \geq 0$ ($\Delta^2 f(x) \leq 0$) für alle $x \in \mathbb{N}_0$.

Von äußerst großer Bedeutung ist der nächste Satz, der in der Untersuchung des ersten Modells zum Einsatz kommt und in Anlehnung an Lemma 1' aus Stidham (1978) formuliert und bewiesen ist.

Lemma 3.16 (Siehe Stidham (1978)) Seien $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$ sowie $b \in \mathbb{N}_0$ und seien $g, \tilde{g} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \max_{x \leq a \leq x+b} \{ar + h(a)\}, \quad x \in \mathbb{N}_0,$$

$$\tilde{g}(x) := g(x) - xr, \quad x \in \mathbb{N}_0, \quad x \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt:

- (1) Ist h konkav, so auch g .
- (2) Ist h fallend, so auch \tilde{g} .

Beweis: (Siehe Stidham (1978)) Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle:

1. Fall: $b = 0$

Es gilt $g(x) = xr + h(x)$ sowie $\tilde{g}(x) = h(x)$ und damit die Aussagen.

2. Fall: $b > 0$

Wir definieren die Funktion $\tilde{h} : \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{h}(x) := xr + h(x)$ und zeigen zunächst die erste Aussage. Daher nehmen wir an, dass h konkav ist. Dann ist auch \tilde{h} konkav und a^* sei die größte Maximalstelle von \tilde{h} . Damit ist \tilde{h} monoton steigend für $x \leq a^*$ und fallend für $x > a^*$. Zu zeigen ist nun, dass $\Delta^2 g(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dazu unterscheiden wir die folgenden Fälle:

- (1) $x + 2 + b \leq a^*$:

Da \tilde{h} monoton steigend für alle $x \leq a^*$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{x \leq a \leq x+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+b) \\ g(x+1) &= \max_{x+1 \leq a \leq x+1+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+1+b) \\ g(x+2) &= \max_{x+2 \leq a \leq x+2+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+2+b) \end{aligned}$$

und damit $\Delta^2 g(x) = \Delta^2 \tilde{h}(x+b) \leq 0$ aufgrund der Konkavität von \tilde{h} .

- (2) $a^* \leq x$:

Da \tilde{h} monoton fallend für alle $x > a^*$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{x \leq a \leq x+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x) \\ g(x+1) &= \max_{x+1 \leq a \leq x+1+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+1) \\ g(x+2) &= \max_{x+2 \leq a \leq x+2+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+2) \end{aligned}$$

und damit $\Delta^2 g(x) = \Delta^2 \tilde{h}(x) \leq 0$ aufgrund der Konkavität von \tilde{h} .

- (3) $a^* = x + 1$:

Da a^* Maximalstelle und \tilde{h} monoton fallend für alle $x > a^*$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{x \leq a \leq x+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+1) \\ g(x+1) &= \max_{x+1 \leq a \leq x+1+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+1) \\ g(x+2) &= \max_{x+2 \leq a \leq x+2+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+2) \end{aligned}$$

und damit $\Delta^2 g(x) = \Delta \tilde{h}(x+1) \leq 0$.

- (4) $a^* = x + 1 + b$:

Da a^* Maximalstelle und \tilde{h} monoton steigend für alle $x \leq a^*$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{x \leq a \leq x+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+b) \\ g(x+1) &= \max_{x+1 \leq a \leq x+1+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+1+b) \\ g(x+2) &= \max_{x+2 \leq a \leq x+2+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(x+1+b) \end{aligned}$$

und damit $\Delta^2 g(x) = -\Delta \tilde{h}(x+b) \leq 0$.

- (5) $a^* \in [x + 2, \dots, x + b]$:

Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \max_{x \leq a \leq x+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(a^*) \\ g(x+1) &= \max_{x+1 \leq a \leq x+1+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(a^*) \\ g(x+2) &= \max_{x+2 \leq a \leq x+2+b} \{ar + h(a)\} = \tilde{h}(a^*) \end{aligned}$$

und damit $\Delta^2 g(x) = 0$.³¹

Nun zeigen wir die zweite Aussage. Sei dazu h fallend und a^* sei eine Maximalstelle von \tilde{h} auf dem diskreten Intervall $\{x+1, \dots, x+1+b\}$. Wir unterscheiden nun die folgenden zwei Fälle:

(1) $a^* \leq x+b$:

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= g(x+1) - g(x) \\ &= \max_{x+1 \leq a \leq x+1+b} \{\tilde{h}(a)\} - \max_{x \leq a \leq x+b} \{\tilde{h}(a)\} \\ &= \tilde{h}(a^*) - \max\{\tilde{h}(x), \tilde{h}(a^*)\} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

(2) $a^* = x+1+b$:

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= g(x+1) - g(x) \\ &= \max_{x+1 \leq a \leq x+1+b} \{\tilde{h}(a)\} - \max_{x \leq a \leq x+b} \{\tilde{h}(a)\} \\ &= \tilde{h}(x+1+b) - \max_{x \leq a \leq x+b} \{\tilde{h}(a)\} \\ &\leq \tilde{h}(x+1+b) - \tilde{h}(x+b) \\ &= r + h(x+1+b) - h(x+b) \\ &\leq r \end{aligned}$$

und damit $\Delta \tilde{g}(x) = \Delta g(x) - r \leq 0$.

□

3.2.2 Multimodularität

Wir befassen uns nun mit dem Konzept der Multimodularität von Funktionen. Dieses wurde von Hajek (1985) für Funktionen auf \mathbb{Z}^m eingeführt. Wir beschränken uns hier auf die Multimodularität von Funktionen auf \mathbb{N}_0^n und orientieren uns dabei an Zhuang und Li (2010). Für eine ausführliche Untersuchung der Eigenschaften multimodularer Funktionen auf \mathbb{Z}^m , siehe z.B. Altman et al. (2000). Im Folgenden hat ein Element $x \in \mathbb{N}_0^n$ stets die Gestalt $x = (x_1, \dots, x_n)$. Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{N}_0^n$ schreiben wir $x \geq y$, falls $x_i \geq y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $x > y$, falls $x_i \geq y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, und $x_i > y_i$ für mindestens ein $i = 1, \dots, n$. Weiter bezeichne e_i den i -ten kanonischen Einheitsvektor des \mathbb{N}_0^n , $i = 1, \dots, n$. Wir führen zunächst folgende Definitionen ein, bevor wir die Multimodularität selbst einführen:

Definition 3.17 Sei $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann definieren wir für alle $x \in \mathbb{N}_0^n$

$$\Delta_i f(x) := f(x + e_i) - f(x), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

³¹Dieser Fall ist nur im Fall $b \geq 2$ relevant.

und

$$\Delta_{ij}f(x) := f(x + e_i) - f(x + e_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Für $\Delta_1f(x)$ schreiben wir kurz $\Delta f(x)$ und für $\Delta_i(\Delta_i f(x))$ schreiben wir kurz $\Delta_i^2 f(x)$.
Für Funktionen $f : \mathbb{N}_0^n \times M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei M eine beliebige endliche oder abzählbar unendliche Menge ist, definieren wir für alle $(x, m) \in \mathbb{N}_0 \times M$

$$\Delta_i f(x, m) := f(x + e_i, m) - f(x, m), \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

und

$$\Delta_{ij}f(x, m) := f(x + e_i, m) - f(x + e_j, m), \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Bemerkung 3.18 Es gilt $\Delta_{ij}f(x) = -\Delta_{ji}f(x)$.

Damit führen wir nun die Definition der Multimodularität auf \mathbb{N}_0^2 ein

Definition 3.19 Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *multimodular (im konkaven Sinn)*, falls

$$\Delta_1 \Delta_2 f(x) \leq 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \Delta_1 \Delta_1 f(x) &\leq \Delta_1 \Delta_2 f(x), \\ \Delta_2 \Delta_2 f(x) &\leq \Delta_1 \Delta_2 f(x). \end{aligned}$$

Definition 3.20 Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (1) *submodular*, falls $\Delta_1 \Delta_2 f(x) \leq 0$;
- (2) *subkonkav*, falls $\Delta_1 f(x + e_1) \leq \Delta_1 f(x + e_2)$ und $\Delta_2 f(x + e_2) \leq \Delta_2 f(x + e_1)$;
- (3) *komponentenweise konkav*, falls $\Delta_i^2 f(x) \leq 0$ für $i = 1, 2$;

für alle $x \in \mathbb{N}_0^2$.

Bemerkung 3.21 Drehen wir die Ungleichungen in Definition 3.19 bzw. 3.20 um, so erhält man die Definitionen von *Multimodularität im konvexen Sinn*, *Supermodularität*, *Superkonvexität* sowie *komponentenweise Konvexität*. Sprechen wir von Multimodularität, meinen wir jedoch stets Multimodularität im konkaven Sinne, da wir später nur dieses benötigen.

Satz 3.22 Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann multimodular, wenn f submodular und subkonkav ist. Darüber hinaus ist jede multimodulare Funktion komponentenweise konkav.

Beweis: Lemma 1 aus Zhuang und Li (2010). □

Lemma 3.23 Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann subkonkav, wenn gilt

$$\begin{aligned}\Delta_{21}f(x) &\leq \Delta_{21}f(x + e_1) \text{ und} \\ \Delta_{21}f(x) &\geq \Delta_{21}f(x + e_2)\end{aligned}$$

Beweis: Die Subkonkavität von f bedeutet, dass

$$\begin{aligned}f(x + 2e_1) - f(x + e_1) &\leq f(x + e_1 + e_2) - f(x + e_2) \text{ und} \\ f(x + 2e_2) - f(x + e_2) &\leq f(x + e_1 + e_2) - f(x + e_1).\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ist äquivalent zu

$$f(x + e_2) - f(x + e_1) \leq f(x_1 + e_1 + e_2) - f(x + 2e_1),$$

also $\Delta_{21}f(x) \leq \Delta_{21}f(x + e_1)$. Die zweite Ungleichung ist äquivalent zu

$$f(x + e_1) - f(x + e_2) \leq f(x_1 + e_1 + e_2) - f(x + 2e_2),$$

also $\Delta_{12}f(x) \leq \Delta_{12}f(x + e_2)$. Letzteres ist gemäß Bemerkung 3.18 äquivalent zu $\Delta_{21}f(x) \geq \Delta_{21}f(x + e_2)$. \square

Lemma 3.24 Sei $h : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$ multimodular, $c \in \mathbb{N}_0$ mit $c \leq \min\{x_1, x_2\}$ und $\tilde{A}^c := \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{N}_0^2 \mid a_1 + a_2 = c\}$. Dann ist auch die Funktion $g^c : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$g^c(x) := \max_{a \in \tilde{A}^c} \{ar^T + h(x - a)\},$$

mit $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ multimodular.

Beweis: Für $c = 0$ ist die Aussage offensichtlich. Für $c \geq 1$ erfolgt der Beweis durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $c = 1$

In diesem Fall muss nur gezeigt werden, dass $g^1(x) = \max\{r_1 + h(x_1 - 1, x_2), r_2 + h(x_1, x_2 - 1)\}$ multimodular ist. Siehe dazu Lemma 3 in Zhuang und Li (2010) oder Lemma 4.3 in Topkis (1978).

Induktionsschluss: $c \rightarrow c + 1$

Eine Aktion $a \in \tilde{A}^{c+1}$ hat die Gestalt $(c + 1 - i, i)$, $i = 0, 1, \dots, c + 1$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}g^{c+1}(x) &= \max_{a \in \tilde{A}^{c+1}} \{ar^T + h(x - a)\} \\ &= \max_{i=0,1,\dots,c+1} \{(c + 1 - i)r_1 + ir_2 + h(x_1 - (c + 1 - i), x_2 - i)\} \\ &= \max \left\{ \max_{i=0,1,\dots,c} \{(c + 1 - i)r_1 + ir_2 + h(x_1 - (c + 1 - i), x_2 - i)\}, \right. \\ &\quad \left. \max_{i=1,\dots,c+1} \{(c + 1 - i)r_1 + ir_2 + h(x_1 - (c + 1 - i), x_2 - i)\} \right\} \\ &= \max \left\{ r_1 + \max_{i=0,1,\dots,c} \{(c - i)r_1 + ir_2 + h(x_1 - 1 - (c - i), x_2 - i)\}, \right. \\ &\quad \left. r_2 + \max_{i=0,1,\dots,c} \{(c - i)r_1 + ir_2 + h(x_1 - (c - i), x_2 - 1 - i)\} \right\} \\ &= \max \left\{ r_1 + \max_{a \in \tilde{A}^c} \{ar^T + h(x_1 - 1 - a_1, x_2 - a_2)\}, \right. \\ &\quad \left. r_2 + \max_{a \in \tilde{A}^c} \{ar^T + h(x_1 - a_1, x_2 - 1 - a_2)\} \right\} \\ &= \max \{r_1 + g^c(x_1 - 1, x_2), r_2 + g^c(x_1, x_2 - 1)\}.\end{aligned}$$

Da g^c nach Induktionsannahme multimodular ist, ist zusammen mit dem Induktionsanfang auch g^{c+1} multimodular. \square

Wie am Anfang dieses Abschnittes geschrieben, werden wir nicht näher auf das Konzept der mehrdimensionalen Multimodularität eingehen. Wir werden jedoch das Konzept der 2-dimensionalen Multimodularität auf mehrdimensionale Funktionen übertragen und nennen diese *Multimodularität in i und j* . Es sei aber ausdrücklich drauf hingewiesen, dass dies nicht identisch mit der mehrdimensionalen Multimodularität ist.

Definition 3.25 Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *multimodular in i und j* , falls für alle $x \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\Delta_i \Delta_j f(x) \leq 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \Delta_i \Delta_i f(x) &\leq \Delta_i \Delta_j f(x), \\ \Delta_j \Delta_j f(x) &\leq \Delta_i \Delta_j f(x). \end{aligned}$$

Definition 3.26 Seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (1) *submodular in i und j* , falls $\Delta_i \Delta_j f(x) \leq 0$;
- (2) *subkonkav in i und j* , falls $\Delta_i f(x + e_i) \leq \Delta_i f(x + e_j)$ und $\Delta_j f(x + e_j) \leq \Delta_j f(x + e_i)$;
- (3) *konkav in Komponente i* , falls $\Delta_i^2 f(x) \leq 0$;

für alle $x \in \mathbb{N}_0^n$.

Bemerkung 3.27 Der Satz 3.22 und die Lemmata 3.23 sowie 3.24 können auch auf Funktionen $h : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$, die multimodular in i und j , $i, j = 1, \dots, n$ mit $i \neq j$, sind, verallgemeinert werden.

4 Ressourcenauslastung in medizinischen Einrichtungen

4.1 Situationsbeschreibung

In diesem Kapitel betrachten wir eine ambulante Einrichtung, die mit dem open-access Konzept arbeitet. Es soll den Patienten dieser Einrichtung daher sowohl die Möglichkeit gegeben werden, sich im Voraus zu einer Behandlung anzumelden, als auch, ohne vorherige Anmeldung eine solche zu erhalten. Unvorangemeldete Patienten kommen demnach zu beliebigen Zeitpunkten in der Einrichtung an und fragen eine Behandlung nach. Handelt es sich bei einem unangemeldeten Patienten um einen Notfall, so ist eine Behandlung am selben Tag und somit eine Aufnahme in den Warteraum unabdingbar. Jeder Notfall sowie auch jeder Patient mit Termin, der die Einrichtung betritt, muss folglich angenommen und in den Warteraum geführt werden. Unangemeldete Patienten, bei denen es aus medizinischer Sicht vertretbar ist, wenn diese nicht mehr am selben Tag behandelt werden, können hingegen in Abhängigkeit von der aktuellen Auslastung der Einrichtung sowohl angenommen als auch abgelehnt werden. Nach der Aufnahme in die Einrichtung warten alle Patienten im Warteraum auf ihre Behandlung und es entstehen für all diese Patienten Wartekosten. Werden Patienten bis zum Ende des Tages nicht behandelt, so entstehen zusätzlich terminale Kosten für Überstunden oder eine erhöhte Unzufriedenheit der Patienten, da diese trotz Wartens in der Praxis oder sogar trotz Termines keine Behandlung erhalten haben und an einem anderen Tag wiederkommen müssen. Die medizinische Einrichtung muss daher abwägen, ob ein Patient ohne Termin, der die Einrichtung betritt und eine Behandlung oder Untersuchung nachfragt, akzeptiert und in den Warteraum geführt werden soll, oder ob es besser ist, diesen abzulehnen, da die Wahrscheinlichkeit, dass dieser in adäquater Zeit oder sogar überhaupt noch am selben Tag diese Behandlung erhält, zu gering ist. Erschwerend bei der Entscheidungsfindung ist hierbei, dass diese Situation zufälligen Einflüssen unterliegt. So gilt es zu berücksichtigen, dass Patienten, die einen Termin erhalten haben, möglicherweise gar nicht oder unpünktlich erscheinen (was bedeuten kann, dass diese Patienten zu früh, aber auch zu spät in der Einrichtung eintreffen können). Auch die Anzahl der Patienten ohne Termin sowie die Dauer der Behandlungen einzelner Patienten unterliegen zufälligen Einflüssen und können daher nicht mit Sicherheit bestimmt werden.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Terminplanung bereits durchgeführt wurde. D.h., das Ankunftsverhalten der eingeplanten Patienten in der medizinischen Einrichtung ist für den betrachteten Tag bereits festgelegt und kann von der Einrichtung nicht mehr beeinflusst werden. Wir untersuchen daher nur die Frage, wieviele Patienten ohne Termin, die eine Behandlung anfragen, zu jedem Entscheidungszeitpunkt in der medizinischen Einrichtung aufgenommen werden sollen. Ziel dabei ist es, den erwarteten Gesamtgewinn dieser Einrichtung zu maximieren. Das resultierende Optimierungsproblem formulieren wir als einen Markovschen Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt in diskreter Zeit.

4.2 Modellierung als Markovscher Entscheidungsprozess

Wir betrachten einen Behandlungstag in einer medizinischen Einrichtung, in der drei Patiententypen behandelt werden: Patienten mit Termin, Notfälle, d.h. Patienten, die zwar keinen Termin besitzen, jedoch auf jeden Fall am selben Tag untersucht oder behandelt werden müssen, sowie Patienten, die keinen Termin besitzen, jedoch auch keine Notfälle sind. Der Tag ist in N Zeitabschnitte gleicher Länge unterteilt. Er beginnt zum Zeitpunkt 0 und endet zum Zeitpunkt N . Wir betrachten den Zustand der medizinischen Einrichtung zu Beginn jedes Intervalls, also zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, \dots, N - 1$, sowie am Ende des Tages zum Zeitpunkt N . Die Anzahl der Patienten mit Termin, die zwischen den Zeitpunkten $n - 1$ und n in der Einrichtung erscheinen, bezeichnen wir mit w_n . Die Anzahl der nicht eingeplanten Patienten, die keine Notfälle sind und zwischen den Zeitpunkten $n - 1$ und n ankommen, bezeichnen wir mit b_n und die Anzahl der Notfälle, die in diesem Zeitraum ankommen, mit e_n . Bei der Betrachtung des Zeitpunktes 0 seien w_0 , b_0 und e_0 die Anzahl Patienten der verschiedenen Typen, die bis zu diesem Zeitpunkte angekommen sind. Zusätzlich zu der Anzahl der angekommenen Patienten lässt sich zu diesen Zeitpunkten ein Umweltzustand beobachten.³² Diesen bezeichnen wir mit m_n . All diese Größen fassen wir im sogenannten erweiterten Umweltzustand $i_n = (m_n, w_n, e_n, b_n)$ zusammen. Ein Übergang vom erweiterten Umweltzustand i_n zum Zeitpunkt n in den erweiterten Umweltzustand i_{n+1} zum Zeitpunkt $n + 1$ erfolgt mit Wahrscheinlichkeit $q(i_n, i_{n+1})$. Es soll nun entschieden werden, wieviele der Patienten ohne Termin in den Warteraum der Einrichtung aufgenommen werden sollen. Alle anderen Patienten müssen aufgenommen werden. Die Menge der möglichen Aktionen hängt daher vom erweiterten Umweltzustand i_n ab und ist $D(i_n) := \{w_n + e_n, \dots, w_n + e_n + b_n\}$.

Nachdem Patienten in den Warteraum der Einrichtung aufgenommen worden sind, werden sie nicht mehr in ihrem Typus unterschieden. Die Anzahl der bereits wartenden Patienten, die sich zu Beginn eines Intervalls, also vor der Annahme neuer Patienten, in der Praxis befinden, bezeichnen wir daher mit x_n . Die Wahrscheinlichkeit, dass im anschließenden Intervall genau y Patienten untersucht und entlassen werden, wenn der erweiterte Umweltzustand i_n beobachtet wurde, x_n Patienten sich bereits in der Praxis befinden und a_n zusätzlich aufgenommen wurden, beträgt $p_{i_n}(x_n + a_n, x_n + a_n - y)$ und wir bezeichnen p_i als Behandlungszeitverteilung.

Für jeden Patienten, der in die Praxis aufgenommen wird, erhalten die Betreiber einen Gewinn, der sowohl vom erweiterten Umweltzustand i_n als auch vom Patiententyp abhängt. Er beträgt $r_{i_n}^w$ für eingeplante, $r_{i_n}^b$ für nicht eingeplante und $r_{i_n}^e$ für Notfallpatienten. Für Patienten, die bereits in der medizinischen Einrichtung aufgenommen wurden, entstehen pro Zeitintervall Wartekosten in Höhe von $c_{i_n}(x_n)$, welche abhängig sind von der Anzahl der wartenden Patienten x_n und dem erweiterten Umweltzustand i_n . Am Ende des Tages entstehen für jeden nicht behandelten Patienten Kosten, die sich sowohl aus Überstunden, die das Personal der Einrichtung evtl. leisten muss, als auch aus Strafkosten für nicht behandelte und nach Hause entlassene Patienten ergeben können. Diese Kosten haben in Abhängigkeit von der Anzahl der noch verbliebenen Patienten und dem erweiterten Umweltzustand eine Höhe von $V_N(x_N, i_N)$.

Das Ziel des Managements der medizinischen Einrichtung ist nun die Maximierung des erwarteten Gesamtgewinnes eines Tages. Das Problem kann als endlich-stufiger Markovscher Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt in diskreter Zeit formuliert werden mit den folgenden Größen:

- (1) Dem Planungshorizont N ;
- (2) dem Zustandsraum $X \times I$ mit $X := \mathbb{N}_0$ und $I = M \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und M einer endlichen

³²Vgl. Abschnitt 4.4 und 4.6 für Beispiele für solche Umweltzustände.

oder abzählbar unendlichen Menge;

- (3) dem Aktionenraum $A := \mathbb{N}_0$ und der Menge der im Zustand (x, i) zulässigen Aktionen $D(x, i) = D(i) := \{w + e, \dots, w + e + b\}$, wobei w, e und b endlich sind;
- (4) der Zähldichte $\hat{p} : X \times I \times A \times X \times I \rightarrow [0, 1]$, definiert durch $\hat{p}((x, i), a, (x', j)) := q(i, j)p_i(x + a, x')$;
- (5) der einstufigen Gewinnfunktion $r : X \times I \times A \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$r((x, i), a) := wr_i^w + er_i^e + (a - w - e)r_i^b - c_i(x + a),$$

mit $c_i : X \rightarrow \mathbb{R}$.

- (6) der terminalen Gewinnfunktion $V_N : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$.

Da sich der betrachtete Zeithorizont auf einen einzigen Tag beschränkt, verzichten wir auf eine Diskontierung.³³

Nach Satz 3.5 in Abschnitt 3.1.1 können der optimale erwartete Gesamtgewinn V_0 sowie die optimalen Aktionen zu den einzelnen Zeitpunkten bestimmt werden durch die Optimalitätsgleichung

$$\begin{aligned} V_n(x, i) &= \max_{a \in D(i)} \left\{ r((x, i), a) + \sum_{j \in I} \sum_{x' \in X} q(i, j) p_i(x + a, x') V_{n+1}(x', j) \right\} \\ &= \max_{a \in D(i)} \left\{ wr_i^w + er_i^e + (a - w - e)r_i^b - c_i(x + a) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p_i(x + a, x') V_{n+1}(x', j) \right\} \\ &= (r_i^w - r_i^b)w + (r_i^e - r_i^b)e \\ &\quad + \max_{a \in D(i)} \left\{ ar_i^b - c_i(x + a) + \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p_i(x + a, x') V_{n+1}(x', j) \right\}, \end{aligned}$$

$n = 0, 1, \dots, N - 1$. Wir definieren nun die folgenden Operatoren:

Definition 4.1 Es seien $HV_n : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ und $LV_n : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, N$, definiert durch

$$HV_n(a, i) := \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p_i(a, x') V_n(x', j), \quad (a, i) \in X \times I,$$

und

$$LV_n(a, i) := -c_i(a) + HV_n(a, i), \quad (a, i) \in X \times I.$$

³³Die Einbeziehung eines Diskontierungsfaktors würde jedoch keinen Einfluss auf die im Folgenden entwickelten Strukturaussagen haben.

Mit dieser Definition und $\tilde{D}(x, i) := \{x + w + e, \dots, x + w + e + b\}$ können wir die Optimalitätsgleichung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} V_n(x, i) &= (r_i^w - r_i^b)w + (r_i^e - r_i^b)e + \max_{a \in D(i)} \{ar_i^b - c_i(x + a) + HV_{n+1}(x + a, j)\} \\ &= (r_i^w - r_i^b)w + (r_i^e - r_i^b)e + \max_{a \in D(i)} \{ar_i^b + LV_{n+1}(x + a, i)\} \\ &= (r_i^w - r_i^b)w + (r_i^e - r_i^b)e - xr_i^b + \max_{a \in \tilde{D}(x, i)} \{ar_i^b + LV_{n+1}(a, i)\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ist $a^* \in \tilde{D}(x, i)$ mit $a^*r_i + LV_{n+1}(a^*, i) = \max_{a \in \tilde{D}(x, i)} \{ar_i + LV_{n+1}(a, i)\}$, so folgt $a^* - x \in D(i)$ und $a^* - x$ ist eine optimale Aktion. Mit Hilfe dieser Darstellung der Optimalitätsgleichung beginnen wir im nächsten Abschnitt die Untersuchung unseres Modells.

4.3 Strukturaussagen

Wir wollen uns nun der ersten und wichtigsten Strukturaussage zuwenden: Die Optimalität einer sogenannten Control-Limit-Rule. Bei solchen existieren sogenannte Kontrollgrenzen, die den Zustandsraum in verschiedene Mengen, innerhalb derer bestimmte Aktionen optimal sind, unterteilen. Optimale Entscheidungsregeln können durch diese Kontrollgrenzen zu den einzelnen Zeitpunkten und in den einzelnen erweiterten Umweltzuständen vollständig bestimmt werden. Solche Politiken sind einfach zu bestimmen und leicht anzuwenden: Ein Entscheidungsträger muss lediglich die Kontrollgrenzen kennen, um daraus eine optimale Aktion abzuleiten, was insbesondere im Gesundheitswesen, wo viele Mitarbeiter komplizierten Regeln oder auch computergestützten Entscheidungen skeptisch gegenüber stehen, sinnvoll ist. Da es sich hier um einen endlich-stufigen Markovschen Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt handelt, sind diese Grenzen vom erweiterten Umweltzustand und dem betrachteten Zeitpunkt abhängig.

Die Optimalität einer Control-Limit-Rule kann aber nicht ohne weitere Annahmen sichergestellt werden: Sowohl die terminalen Kosten als auch die Wartekosten müssen konkav und monoton fallend sein. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht sehr restriktiv und wird von vielen Kostenfunktionen erfüllt. Des Weiteren benötigen wir eine Behandlungszeitverteilung, unter der Konkavität und Monotonie erhalten bleiben. Eine kurze Übersicht über Kostenfunktionen und Behandlungszeitverteilungen, die diese und weitere Annahmen erfüllen, findet sich in Abschnitt 4.5. Wir formulieren die Annahmen nun formal:

Annahmen:

(A1.1) Für die Behandlungszeitverteilung p_i gilt für alle $i \in I$:

Für jede konkave und fallende Funktion $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $g_i : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$g_i(x) := \sum_{x' \in \mathbb{N}_0} p_i(x, x')h(x'), \quad x \in \mathbb{N}_0,$$

konkav und fallend.

(A1.2) Die Kostenfunktionen $-c_i$ und $V_N(\cdot, i)$ sind konkav und fallend für alle $i \in I$.

Mit Hilfe von Lemma 3.16 können wir nun zeigen, dass unter diesen Annahmen auch HV_n, LV_n sowie die Wertfunktion V_n selbst konkav und fallend in der Anzahl der wartenden Patienten für

alle betrachteten Zeitpunkte n sind. Hieraus folgt dann schließlich die Optimalität einer Control-Limit-Rule.

Satz 4.2 *Sind die Annahmen (A1.1) und (A1.2) erfüllt, so sind die Funktionen $HV_n(\cdot, i)$, $LV_n(\cdot, i)$ sowie $V_{n-1}(\cdot, i)$ fallend und konkav für alle $n = 1, \dots, N$ und $i \in I$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = N$

Nach (A1.2) ist $V_N(\cdot, i)$ fallend und konkav für alle $i \in I$. Mit (A1.1) ist dann

$$\sum_{x' \in X} p_i(\cdot, x') V_N(x', j), \quad j \in I,$$

fallend und konkav und damit auch $HV_N(\cdot, i)$ als Mischung von fallenden und konkaven Funktionen. $LV_N(\cdot, i)$ und $V_{N-1}(\cdot, i)$ sind dann aufgrund (A1.2) bzw. mit Lemma 3.16 konkav und fallend.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n - 1$

Der Induktionsschritt erfolgt auf die gleiche Art und Weise wie der Induktionsanfang. \square

Wir definieren nun die folgenden zwei Größen und zeigen anschließend, dass es sich hierbei um die bereits erwähnten Kontrollgrenzen sowie um obere Schranken für diese handelt.

Definition 4.3 Die Funktionen $z : I \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $t_n : I \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, seien definiert durch

$$z(i) := \inf\{a \in X \mid \Delta c_i(a) > r_i^b\}$$

sowie

$$t_n(i) := \inf\{a \in X \mid \Delta LV_{n+1}(a, i) < -r_i^b\}. \quad (4.2)$$

Wir nennen die $t_n(i)$ *Kontrollgrenzen (zur Zeit n in Umweltzustand i)*.

Satz 4.4 *Sind die Annahmen (A1.1) und (A1.2) erfüllt, so ist die Politik $\pi \in F^N$ definiert durch die Entscheidungsfunktionen*

$$f_n(x, i) = \begin{cases} \min\{w + e + b, t_n(i) - x\}, & x + w + e < t_n(i), \\ w + e, & x + w + e \geq t_n(i), \end{cases}$$

mit $i = (m, w, e, b)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, optimal. Darüber hinaus gilt $t_n(i) \leq z(i)$.

Beweis: Nach Abschnitt 3.1.1 wissen wir, dass, wenn a^* die rechte Seite von Gleichung (4.1) maximiert, $a^* - x$ eine optimale Aktion zur Zeit n im Zustand (x, i) ist. Da nach Satz 4.2 $LV_{n+1}(\cdot, i)$ konkav ist, ist auch $\tilde{h}_n(a, i) := ar_i^b + LV_{n+1}(a, i)$ konkav und $\Delta LV_{n+1}(a, i)$ monoton fallend. Damit folgt mit der Definition von $t_n(i)$

$$\begin{aligned} -r_i^b &> \Delta LV_{n+1}(t_n(i), i) \geq \Delta LV_{n+1}(a, i), \quad \forall a > t_n(i), \\ -r_i^b &\leq \Delta LV_{n+1}(t_n(i) - 1, i) \leq \Delta LV_{n+1}(a, i), \quad \forall a < t_n(i). \end{aligned}$$

$t_n(i)$ ist also die größte Maximalstelle dieser Funktion. $\tilde{h}_n(a, i)$ ist damit monoton steigend für $a \leq t_n(i)$ und fallend für $a > t_n(i)$. Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

- (1) $t_n(i) < x + w + e$:
In diesem Fall gilt

$$(x + w + e)r_i^b + LV_{n+1}(x + w + e, i) = \max_{a \in \tilde{D}(x, i)} \{ar_i^b + LV_{n+1}(a, i)\}$$

und $w + e$ ist eine optimale Aktion im Zustand $(x, i) \in X \times I$.

- (2) $x + w + e \leq t_n(i) \leq x + w + e + b$:

$$t_n(i)r_i^b + LV_{n+1}(t_n(i), i) = \max_{a \in \tilde{D}(x, i)} \{ar_i^b + LV_{n+1}(a, i)\}$$

und $t_n(i) - x$ ist eine optimale Aktion im Zustand $(x, i) \in X \times I$.

- (3) $t_n(i) > x + w + e + b$:
In diesem Fall gilt

$$(x + w + e + b)r_i^b + LV_{n+1}(x + w + e + b, i) = \max_{a \in \tilde{D}(x, i)} \{ar_i^b + LV_{n+1}(a, i)\}$$

und $w + e + b$ ist eine optimale Aktion im Zustand $(x, i) \in X \times I$.

Damit folgt, dass die Politik $\pi \in F^N$, definiert durch die Entscheidungsfunktionen

$$\begin{aligned} f_n(x, i) &:= \begin{cases} w + e, & x + w + e > t_n(i), \\ t_n(i) - x, & x + w + e + b \geq t_n(i) \geq x + w + e, \\ w + e + b, & x + w + e + b < t_n(i), \end{cases} \\ &= \begin{cases} w + e, & x + w + e > t_n(i), \\ \min\{t_n(i) - x, w + e + b\}, & x + w + e \leq t_n(i), \end{cases} \end{aligned}$$

optimal ist.

Wir zeigen nun, dass $z(i)$ eine obere Schranke für $t_n(i)$ ist. Da $HV_{n+1}(\cdot, i)$ monoton fallend ist, gilt

$$\Delta LV_{n+1}(a, i) = -\Delta c_i(a) + \Delta HV_{n+1}(a, i) \leq -\Delta c_i(a)$$

und daher für alle $a \geq z(i)$

$$\Delta LV_{n+1}(a, i) \leq -\Delta c_i(a) < -r_i^b.$$

□

Wir haben also gezeigt, dass durch die Kontrollgrenzen $t_n(i)$ eine optimale Politik vollständig bestimmt wird und daher nur die Bestimmung dieser notwendig ist, um eine optimale Politik zu erhalten. Weiterhin haben wir mit $z(i)$ eine Schranke für die Kontrollgrenzen ermittelt. Im Folgenden wollen wir untersuchen, ob die Bestimmung dieser Grenzen vereinfacht werden kann und welche Konsequenzen sich daraus für die Wertfunktionen V_n ergeben. Um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen, sind jedoch weitere Annahmen notwendig, die wir an den jeweiligen Stellen einführen.

Zunächst konzentrieren wir uns auf Abhängigkeiten der Kontrollgrenzen vom Zeitpunkt. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Lemma und formulieren die nächsten benötigten Annahmen:

Lemma 4.5 Für alle $n = 1, \dots, N$, $a \in X$ und $i \in I$ gilt

$$HV_n(a, i) = \sum_{j \in I} q(i, j) \left[V_n(0, j) + \sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} p_i(a, l) \Delta V_n(x' - 1, j) \right].$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} HV_n(a, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p_i(a, x') V_n(x', j) \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \left[\sum_{l \geq x'} p_i(a, l) V_n(x', j) - \sum_{l \geq x'+1} p_i(a, l) V_n(x', j) \right] \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x'=0}^{\infty} \sum_{l \geq x'} p_i(a, l) V_n(x', j) - \sum_{x'=1}^{\infty} \sum_{l \geq x'} p_i(a, l) V_n(x' - 1, j) \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{l \geq 0} p_i(a, l) V_n(0, j) + \sum_{x'=1}^{\infty} \sum_{l \geq x'} p_i(a, l) [V_n(x', j) - V_n(x' - 1, j)] \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \left[V_n(0, j) + \sum_{x'=1}^{\infty} \sum_{l \geq x'} p_i(a, l) \Delta V_n(x' - 1, j) \right]. \end{aligned}$$

□

Annahmen:

(A1.3) Die Behandlungszeitverteilung $p_i(\cdot, \cdot)$ ist stochastisch monoton, d.h. für alle $i \in I$ gilt:

$$\sum_{x' \geq l} p_i(x, x') \leq \sum_{x' \geq l} p_i(x + 1, x'), \quad \forall x, l \in X.$$

(A1.4) Für die terminale Gewinnfunktion V_N gilt:

$$\Delta V_N(x, i) \leq \Delta V_{N-1}(x, i), \quad \forall (x, i) \in X \times I.$$

Diese Bedingung ist z.B. für $\Delta V_N \equiv -\kappa$ und $c_i \equiv 0$ unabhängig von der Behandlungszeitverteilung erfüllt.³⁴

(A1.4) hat die anschauliche Interpretation, dass ein zusätzlicher Patient im Warteraum zum Zeitpunkt N weniger Gewinn erbringt als ein zusätzlicher Patient im Warteraum zum Zeitpunkt $N - 1$. Unter diesen Annahmen kann nun eine Monotonie in der Zeit bewiesen werden:

Satz 4.6 Unter (A1.1)-(A1.4) gilt für alle $n = 1, \dots, N - 1$ und $i \in I$:

- (1) $t_n(i) \leq t_{n-1}(i)$;
- (2) $\Delta V_n(\cdot, i) \leq \Delta V_{n-1}(\cdot, i)$.

³⁴Für weitere Behandlungszeitverteilungen und Kostenfunktionen unter denen Annahmen (A1.3) und (A1.4) erfüllt ist, siehe Abschnitt 4.5.

Beweis: Sei $i = (m, w, e, b)$. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = N - 1$

Wir zeigen zunächst $t_{N-1}(i) \leq t_{N-2}(i)$. Mit Lemma 4.5 und den Annahmen (A1.3) sowie (A1.4) gilt

$$\begin{aligned} \Delta HV_N(a, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} (p_i(a+1, l) - p_i(a, l)) \Delta V_N(x' - 1, j) \right] \\ &\leq \sum_{j \in I} q(i, j) \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} (p_i(a+1, l) - p_i(a, l)) \Delta V_{N-1}(x' - 1, j) \right] \\ &= \Delta HV_{N-1}(a, i) \end{aligned}$$

und damit auch $\Delta LV_N(a, i) \leq \Delta LV_{N-1}(a, i)$. Aufgrund der Definition der $t_n(i)$ und da $\Delta LV_n(\cdot, i)$ monoton fallend für alle Zeitpunkte n ist, folgt dann $t_{N-1}(i) \leq t_{N-2}(i)$. Wir zeigen nun $\Delta V_{N-1}(x, i) \leq \Delta V_{N-2}(x, i)$. Sei dazu $x \in X$ und $\tilde{x} := x + w + e$.

1.Fall: $b = 0$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta V_{N-1}(x, i) &= -r_i^b + \max_{a \in \{\tilde{x}+1, \dots, \tilde{x}+1+b\}} \{ar_i^b + LV_N(a, i)\} - \max_{a \in \{\tilde{x}, \dots, \tilde{x}+b\}} \{ar_i^b + LV_N(a, i)\} \\ &= \Delta LV_N(\tilde{x}, i) \\ &\leq \Delta LV_{N-1}(\tilde{x}, i) \\ &= \Delta V_{N-2}(x, i). \end{aligned}$$

2.Fall: $b > 0$

Um die Behauptung zu zeigen, unterscheiden wir die folgenden sechs Fälle

(1) $\tilde{x} + b < t_{N-1}(i)$:

Damit gilt auch $\tilde{x} + b < t_{N-2}(i)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \Delta V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}(x+1, i) - V_{N-1}(x, i) \\ &= -(x+1)r_i^b + (\tilde{x}+1+b)r_i^b + xr_i^b - (\tilde{x}+b)r_i^b \\ &\quad + LV_N(\tilde{x}+1+b, i) - LV_N(\tilde{x}+b, i) \\ &= \Delta LV_N(\tilde{x}+b, i) \\ &\leq \Delta LV_{N-1}(\tilde{x}+b, i) \\ &= \Delta V_{N-2}(x, i). \end{aligned}$$

(2) $\tilde{x} < t_{N-1}(i) \leq \tilde{x} + b \leq t_{N-2}(i)$:

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} \Delta V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}(x+1, i) - V_{N-1}(x, i) \\ &= -(x+1)r_i^b + t_{N-1}(i)r_i^b + xr_i^b - t_{N-1}(i)r_i^b \\ &\quad + LV_N(t_{N-1}(i), i) - LV_N(t_{N-1}(i), i) \\ &= -r_i^b \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{N-2}(x, i) &= V_{N-2}(x+1, i) - V_{N-2}(x, i) \\
 &= -(x+1)r_i^b + \max_{a \in \tilde{D}(x+1, i)} \{ar_i^b + LV_{N-1}(a, i)\} \\
 &\quad + xr_i^b - (\tilde{x}+b)r_i^b - LV_{N-1}(\tilde{x}+b, i) \\
 &\geq -r_i^b + (\tilde{x}+b)r_i^b + LV_{N-1}(\tilde{x}+b, i) - (\tilde{x}+b)r_i^b - LV_{N-1}(\tilde{x}+b, i) \\
 &= -r_i^b.
 \end{aligned}$$

Es folgt daher insgesamt $\Delta V_{N-1}(x, i) \leq \Delta V_{N-2}(x, i)$.

- (3) $\tilde{x} < t_{N-1}(i) \leq t_{N-2}(i) < \tilde{x} + b$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{N-1}(x, i) &= -(x+1)r_i^b + t_{N-1}(i)r_i^b + xr_i^b - t_{N-1}(i)r_i^b \\
 &\quad + LV_N(t_{N-1}(i), i) - LV_N(t_{N-1}(i), i) \\
 &= -r_i^b
 \end{aligned}$$

und analog $\Delta V_{N-2}(x, i) = -r_i^b$ und damit $\Delta V_{N-1}(x, i) = \Delta V_{N-2}(x, i)$.

- (4) $t_{N-1}(i) \leq \tilde{x} < \tilde{x} + b < t_{N-2}(i)$:

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{N-1}(x, i) &= -(x+1)r_i^b + (\tilde{x}+1)r_i^b + xr_i^b - \tilde{x}r_i^b \\
 &\quad + LV_N(\tilde{x}+1, i) - LV_N(\tilde{x}, i) \\
 &= \Delta LV_N(\tilde{x}, i) \\
 &< -r_i^b
 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{N-2}(x, i) &= -(x+1)r_i^b + (\tilde{x}+1+b)r_i^b + xr_i^b - (\tilde{x}+b)r_i^b \\
 &\quad + LV_{N-1}(\tilde{x}+1+b, i) - LV_{N-1}(\tilde{x}+b, i) \\
 &= \Delta LV_{N-1}(\tilde{x}+b, i) \\
 &\geq -r_i^b.
 \end{aligned}$$

Es folgt daher insgesamt $\Delta V_{N-1}(x, i) < \Delta V_{N-2}(x, i)$.

- (5) $t_{N-1}(i) \leq \tilde{x} < t_{N-2}(i) \leq \tilde{x} + b$:

Wie im vorherigen Fall gilt $\Delta V_{N-1}(x, i) = \Delta LV_N(x, i) < -r_i^b$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{N-2}(x, i) &= -(x+1)r_i^b + t_{N-2}(i)r_i^b + xr_i^b - t_{N-2}(i)r_i^b \\
 &\quad + LV_{N-1}(t_{N-2}(i), i) - LV_{N-1}(t_{N-2}(i), i) \\
 &= -r_i^b
 \end{aligned}$$

und damit $\Delta V_{N-1}(x, i) < \Delta V_{N-2}(x, i)$.

(6) $t_{N-1}(i) \leq t_{N-2}(i) \leq \tilde{x}$:

Wie im vorherigen Fall gilt $\Delta V_{N-1}(x, i) = \Delta LV_N(x, i)$ und analog dazu $\Delta V_{N-2}(x, i) = \Delta LV_{N-1}(x, i)$, also $\Delta V_{N-1}(x, i) = \Delta LV_N(x, i) \leq \Delta LV_{N-1}(x, i) = \Delta V_{N-2}(x, i)$.

Induktionsschritt: $n + 1 \rightarrow n$

Der Beweis erfolgt mit den gleichen Argumenten wie im Induktionsanfang. \square

Es konnte gezeigt werden, dass bei gleichem erweiterten Umweltzustand die Kontrollgrenzen zu späteren Zeitpunkten niedriger sind als zu früheren. Dies ist intuitiv nachvollziehbar: Je näher das Ende des Tages rückt, desto weniger Patienten können von der medizinischen Einrichtung noch behandelt werden. Dementsprechend sollte die Aufnahme zusätzlicher Patienten geringer sein, um das Risiko zu vermeiden, (zu viele) Patienten nicht mehr behandeln zu können. Die Monotonie der Kontrollgrenzen in der Zeit bietet den Vorteil, dass die Berechnung der Kontrollgrenzen vereinfacht wird und die Politik den Entscheidungsträgern in der medizinischen Einrichtung leichter zu vermitteln ist. Es ist jedoch zu beachten, dass diese Monotonie nur bei gleichen erweiterten Umweltzuständen gilt. Liegt zu einem späteren Zeitpunkt ein anderer erweiterter Umweltzustand vor, so kann es auch zu einem späteren Zeitpunkt sinnvoll sein, mehr Patienten zusätzlich aufzunehmen. Dies ist z.B. der Fall, wenn die erweiterte Umwelt Einfluss auf die Behandlungszeitverteilung oder die Ankünfte von Patienten mit Termin oder Notfallpatienten hat.³⁵ Daher reduziert die Monotonie in der Zeit den Aufwand für die Bestimmung der Kontrollgrenzen nur in beschränktem Maße. Vor allem die Abhängigkeit von der Anzahl angekommener Patienten der einzelnen Typen, also (w, e, b) , macht die Bestimmung der Kontrollgrenzen sehr komplex. Daher untersuchen wir nun Abhängigkeiten der Kontrollgrenzen sowohl von den erweiterten Umweltzuständen als auch von den Umweltzuständen selbst. Auch hier werden weitere Annahmen benötigt. Zunächst führen wir die folgende Annahme ein:

Annahme:

(A1.5) $r_i^w, r_i^e, r_i^b, q(i, j), p_i, c_i$ sowie $V_N(\cdot, i)$ hängen von $i \in I$ nur über den Umweltzustand selbst ab, d.h., es gilt für $i = (m, w, e, b), j = (m', w', e', b')$:

$$\begin{aligned} q(i, j) &= q(m, j) \\ p_i(x, x') &= p_m(x, x'), \quad x, x' \in X \\ r_i^b &= r_m^b \\ r_i^e &= r_m^e \\ r_i^w &= r_m^w \\ c_i(x) &= c_m(x), \quad x \in X \\ V_N(x, i) &= V_N(x, m), \quad x \in X. \end{aligned}$$

Unter dieser Annahme können wir zeigen, dass die Kontrollgrenzen nur vom Umweltzustand selbst abhängen. Des Weiteren können wir noch Aussagen über die Abhängigkeit der Wertfunktion von der erweiterten Umwelt treffen.

³⁵Allerdings erhalten wir mit dem auf Seite 57 hergeleiteten Satz 4.9 mit Hilfe von weiteren Annahmen Aussagen über die Monotonie in der Zeit, wenn unterschiedliche Umweltzustände vorliegen. Siehe dazu Korollar 4.10 auf Seite 59.

Satz 4.7 Unter (A1.1), (A1.2) und (A1.5) gilt für alle $n = 0, 1, \dots, N - 1$ und $i = (m, w, e, b) \in I$

- (1) $t_n(i)$ hängt von i nur über m ab;
- (2) $V_n(\cdot, (m, w, e, b)) \leq V_n(\cdot, (m, w, e, b'))$ für $b \leq b'$;
- (3) Gilt $r_m^w = r_m^e$ so hängt $V_n(\cdot, i)$ von w und e nur über $w + e$ ab.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = N - 1$

Wir zeigen zunächst die erste Aussage. Es gilt

$$\begin{aligned} HV_N(a, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p_i(x, x') V_N(x', j) \\ &= \sum_{j \in I} q(m, j) \sum_{x' \in X} p_m(x, x') V_N(x', j) \end{aligned}$$

und damit hängt $HV_N(\cdot, i)$ von i nur über m ab. Mit $c_i(a) = c_m(a)$ gilt dies auch für $LV_N(\cdot, i)$ und wir setzen $HV_N(\cdot, m) := HV_N(\cdot, i)$ sowie $LV_N(\cdot, m) := LV_N(\cdot, i)$.

Da nun $t_{N-1}(i)$ ein Maximum der Funktion $ar_m^b + LV_N(a, m)$ ist, ist dies ebenfalls nur von m selbst abhängig und wir setzen $t_{N-1}(m) := t_{N-1}(i)$.

Nun wird die zweite Aussage gezeigt. Es muss nur

$$\max_{a \in \{x+w+e, \dots, x+w+e+b\}} \{ar_m^b + LV_N(a, m)\} \leq \max_{a \in \{x+w+e, \dots, x+w+e+b'\}} \{ar_m^b + LV_N(a, m)\}$$

gezeigt werden, was unmittelbar folgt, da $ar_m^b + LV_N(a, m)$ monoton steigend für $a \leq t_{N-1}(m)$ ist. Die dritte Aussage ist mit der zusätzlichen Bedingung $r_m^w = r_m^e$ sofort ersichtlich, wegen

$$\begin{aligned} V_{N-1}(x, i) &= (r_m^w - r_m^b)w + (r_m^e - r_m^b)e - xr_m^b + \max_{a \in \{x+w+e, \dots, x+w+e+b\}} \{ar_m^b + LV_N(a, m)\} \\ &= (r_m^w - r_m^b)(w + e) - xr_m^b + \max_{a \in \{x+w+e, \dots, x+w+e+b\}} \{ar_m^b + LV_N(a, m)\}. \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n + 1 \rightarrow n$

Der Beweis erfolgt mit den gleichen Argumenten wie im Induktionsanfang. \square

Die Aussage (2) ist intuitiv nachvollziehbar: Kommen mehr zusätzliche Patienten ohne Termin an, so hat die medizinische Praxis mehr Möglichkeiten zur Auswahl, eine bestimmte Anzahl von Patienten zusätzlich aufzunehmen. Das vergrößert auch die Wahrscheinlichkeit, dass eine bessere Aktion gewählt werden kann. Aussage (3) ist auch leicht nachvollziehbar: Notfallpatienten und Patienten mit Termin müssen in den Warteraum aufgenommen werden. Unterscheiden diese sich nicht in den Gewinnen, so ist es gleichgültig, wie sich die Anzahl der Patienten dieser beider Typen zusammensetzt. Auf den Gewinn der medizinischen Einrichtung hat dies keinen Einfluss.

Wir können nun mit Hilfe der nächsten Annahme eine Aussage über die Beziehung der Kontrollgrenzen hinsichtlich verschiedener Umweltzustände untereinander treffen.

Annahme:

(A1.6) Sei γ die maximale Anzahl an Patienten, die in einer Periode untersucht werden können.

Dann gilt für alle $(x, i) \in X \times I$:

$$\sum_{l=x+1}^{x+1+\gamma} \left(\sum_{x' \geq l+1} p_i(x+1+\gamma, x') - \sum_{x' \geq l} p_i(x+\gamma, x') \right) \geq 0.$$

Annahme (A1.6) hat die anschauliche Interpretation, dass sofern zu Beginn einer Zeiteinheit mindestens so viele Patienten anwesend sind, wie innerhalb einer Zeiteinheit maximal behandelt werden können (d.h. mindestens γ Patienten), durch die Erhöhung der Patientenzahl um 1 am Beginn der Zeiteinheit im Mittel die Anzahl der anwesenden Patienten am Ende dieser um mindestens 1 erhöht wird.

Satz 4.8 *Seien (A1.1)-(A1.3) sowie (A1.5) und (A1.6) erfüllt und sei $\gamma \in \mathbb{N}$ die maximale Anzahl an Patienten, die in einer Periode untersucht werden können. Ist zusätzlich $r_m^b = r^b$ unabhängig von m , so gilt $\max_{m \in M} \{t_{n-1}(m)\} \leq t_n(m) + \gamma$ für alle $m \in M$ und $n = 1, \dots, N - 1$, sofern $\max_{m \in M} \{t_{n-1}(m)\}$ existiert.*

Beweis: Seien $i = (m, w, e, b), j = (m', w', e', b') \in I$. Wegen (A1.5) sind die Größen $r_i^w, r_i^e, r_i^b, q(i, j), p_i, c_i$ und $t_n(i)$ unabhängig von (w, e, b) und wir schreiben $r_m^w, r_m^e, r_m^b, q(m, j), p_m, c_m$ sowie $t_n(m)$. Nach dem Beweis von Satz 4.7 sind zusätzlich $HV_n(\cdot, i), LV_n(\cdot, i)$ und $t_n(i)$ unabhängig von (w, e, b) und wir schreiben $HV_n(\cdot, m), LV_n(\cdot, m)$ bzw. $t_n(m)$. Weiter setzen wir $t_n^* := \max_{m \in M} \{t_{n-1}(m)\}$. Wegen (A1.6) gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{l=t_n^*+1}^{t_n^*+\gamma+1} \left(\sum_{x' \geq l} p_m(t_n^* + \gamma + 1, x') - p_m(t_n^* + \gamma, x') \right) \\ &= \sum_{l=t_n^*+1}^{t_n^*+\gamma+1} \left(\sum_{x' \geq l+1} p_m(t_n^* + \gamma + 1, x') - \sum_{x' \geq l} p_m(t_n^* + \gamma, x') \right) + 1 \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Für $x' \geq t_n^*$ gilt $x' + w' + e' \geq t_n(m)$ für alle $m \in M$ und damit

$$\Delta V_n(x', j) = \Delta LV_{n+1}(x' + w' + e', m').$$

Wegen $\Delta LV_n(a, m) < -r_m^b$ genau dann, wenn $a \geq t_{n-1}(m)$ ist die Aussage gezeigt, wenn $\Delta LV_n(t_n^* + \gamma) < -r_m^b$. Mit Lemma 4.5 erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta HV_n(t_n^* + \gamma, m) &= \sum_{j \in I} q(m, j) \sum_{l \geq 1} \sum_{x' \geq l} (p_m(t_n^* + \gamma + 1, x') - p_m(t_n^* + \gamma, x')) \Delta V_n(l - 1, j) \\ &= \sum_{j \in I} q(m, j) \sum_{l=t_n^*+1}^{t_n^*+\gamma+1} \sum_{x' \geq l} (p_m(t_n^* + \gamma + 1, x') - p_m(t_n^* + \gamma, x')) \Delta V_n(l - 1, j) \\ &= \sum_{j \in I} q(m, j) \sum_{l=t_n^*+1}^{t_n^*+\gamma+1} \sum_{x' \geq l} (p_m(t_n^* + \gamma + 1, x') - p_m(t_n^* + \gamma, x')) \Delta LV_n(l - 1 + w' + e', m') \\ &< - \sum_{l=t_n^*+1}^{t_n^*+\gamma+1} \sum_{x' \geq l} (p_m(t_n^* + \gamma + 1, x') - p_m(t_n^* + \gamma, x')) r_m^b. \\ &\leq -r_m^b. \end{aligned}$$

und daher auch $\Delta LV_n(t_n^* + \gamma, m) = -\Delta c(t_n^* + \gamma) + \Delta HV_n(t_n^* + \gamma, m) < -r_m^b$. \square

Wir konnten die Ermittlungskomplexität der Kontrollgrenzen durch Satz 4.8 deutlich reduzieren. Eine weitere Reduktion ist möglich, wenn kein Umweltzustand vorliegt. Dann sind die Kontrollgrenzen zusammen mit Annahme (A1.5) vollständig von der erweiterten Umwelt unabhängig.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass Annahme (A1.5) nicht erfüllt ist. Wir wollen dennoch Abhängigkeiten der Kontrollgrenzen von den Umweltzuständen untersuchen und konzentrieren uns dabei auf Monotonien. Dazu müssen wir eine Partialordnung auf der Menge I der erweiterten Umweltzustände einführen und benötigen zusätzlich einige Annahmen.

Annahme:

(A1.7) Auf der Menge M sei eine Partialordnung \leq_M definiert und \leq_I sei die Partialordnung auf I definiert durch

$$i \leq_I j \iff m \leq_M m' \text{ und } i = (m, w, e, b), j = (m', w, e, b).$$

Dann sei für $i \leq_I j$ und $x \in \mathbb{N}_0$ Folgendes erfüllt:

- (i) $\sum_{x' \geq l} \Delta p_i(x, x') \geq \sum_{x' \geq l} \Delta p_j(x, x')$, $l = 1, \dots, x + 1$;
- (ii) $\Delta c_i(x) \geq \Delta c_j(x)$;
- (iii) r_i und $q(i, \cdot)$ hängen von $i = (m, w, e, b)$ nur über (w, e, b) ab.

Die Annahme (A1.7)(i) hat zur Konsequenz, dass die erwartete Anzahl behandelter Patienten mit der Anzahl wartender Patienten umso stärker steigt, je größer der Umweltzustand ist. (A1.7)(ii) bedeutet, dass der Anstieg der Wartekosten durch einen zusätzlichen Patienten im Warteraum unter einem größeren Umweltzustand größer ist als unter einem kleineren. Wir können nun die oben erwähnte Monotonieaussage formulieren.

Satz 4.9 *Unter (A1.1)-(A1.3) sowie (A1.7) gilt für $n = 0, 1, \dots, N - 1$ und $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$:*

- (1) $t_n(i) \leq t_n(j)$;
- (2) $\Delta V_n(\cdot, i) \leq \Delta V_n(\cdot, j)$.

Beweis: Seien $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ und $a \in X$. Mit Lemma 4.5 erhalten wir mit (A1.7)(i) und $q(i, \cdot) = q(j, \cdot)$ ((A1.7)(iii))

$$\begin{aligned} \Delta HV_n(a, i) &= \sum_{k \in I} q(i, k) \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} (p_i(a + 1, l) - p_i(a, l)) \Delta V_n(x' - 1, k) \right] \\ &= \sum_{k \in I} q(i, k) \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p_i(a, l) \Delta V_n(x' - 1, k) \right] \\ &= \sum_{k \in I} q(j, k) \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p_i(a, l) \Delta V_n(x' - 1, k) \right] \\ &\leq \sum_{k \in I} q(j, k) \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p_j(a, l) \Delta V_n(x' - 1, k) \right] \\ &= \Delta HV_n(a, j) \end{aligned}$$

für alle $n = 1, \dots, N$ und mit (A1.7)(ii) gilt $\Delta LV_n(a, i) \leq \Delta LV_n(a, j)$. Mit der Definition von t_{n-1} folgt dann $t_{n-1}(i) \leq t_{n-1}(j)$.

Wir zeigen nun die zweite Aussage des Satzes. Wir unterscheiden dazu die folgenden Fälle:

1. Fall: $b = 0$

Es gilt

$$\Delta V_{n-1}(x, i) = \Delta LV_n(\tilde{x}, i) \leq \Delta LV_n(\tilde{x}, j) = \Delta V_{n-1}(x, j).$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.

2. Fall: $b > 0$

Um die Behauptung zu zeigen, unterscheiden wir die folgenden sechs Fälle

(1) $\tilde{x} + b < t_{n-1}(i)$:

Damit gilt auch $\tilde{x} + b < t_{n-1}(j)$ und es folgt

$$\begin{aligned} \Delta V_{n-1}(x, i) &= V_{n-1}(x+1, i) - V_{n-1}(x, i) \\ &= -(x+1)r_i^b + (\tilde{x}+1+b)r_i^b + xr_i^b - (\tilde{x}+b)r_i^b \\ &\quad + LV_n(\tilde{x}+1+b, i) - LV_n(\tilde{x}+b, i) \\ &= \Delta LV_n(\tilde{x}+b, i) \\ &\leq \Delta LV_n(\tilde{x}+b, j) \\ &= \Delta V_{n-1}(x, j). \end{aligned}$$

(2) $\tilde{x} < t_{n-1}(i) \leq \tilde{x} + b \leq t_{n-1}(j)$:

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned} \Delta V_{n-1}(x, i) &= V_{n-1}(x+1, i) - V_{n-1}(x, i) \\ &= -(x+1)r_i^b + t_{n-1}(i)r_i^b + LV_n(t_{n-1}(i), i) + xr_i^b - t_{n-1}(i)r_i^b - LV_n(t_{n-1}(i), i) \\ &= -r_i^b \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \Delta V_{n-1}(x, j) &= -(x+1)r_j^b + \max_{a \in \bar{D}(x+1, j)} \{ar_j^b + LV_n(a, j)\} + xr_j^b - (\tilde{x}+b)r_j^b - LV_n(\tilde{x}+b, j) \\ &\geq -r_j^b + (\tilde{x}+b)r_j^b + LV_n(\tilde{x}+b, j) - (\tilde{x}+b)r_j^b - LV_n(\tilde{x}+b, j) \\ &= -r_j^b. \end{aligned}$$

Es folgt daher wegen $r_i^b = r_j^b$ insgesamt

$$\Delta V_{n-1}(x, i) \leq \Delta V_{n-1}(x, j).$$

(3) $\tilde{x} < t_{n-1}(i) \leq t_{n-1}(j) < \tilde{x} + b$:

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta V_{n-1}(x, i) &= -(x+1)r_i^b + t_{n-1}(i)r_i^b + LV_n(t_{n-1}(i), i) + xr_i^b - t_{n-1}(i)r_i^b - LV_n(t_{n-1}(i), i) \\ &= -r_i^b \end{aligned}$$

sowie analog $\Delta V_{n-1}(x, j) = -r_j^b$ und wegen $r_i^b = r_j^b$ damit $\Delta V_{n-1}(x, i) = \Delta V_{n-1}(x, j)$.

(4) $t_{n-1}(i) \leq \tilde{x} < \tilde{x} + b < t_{n-1}(j)$:

Es gilt einerseits

$$\begin{aligned}\Delta V_{n-1}(x, i) &= -(x+1)r_i^b + (\tilde{x}+1)r_i^b + LV_n(\tilde{x}+1, i) + xr_i^b - \tilde{x}r_i^b - LV_n(\tilde{x}, i) \\ &= \Delta LV_n(\tilde{x}, i) \\ &< -r_i^b\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\Delta V_{n-1}(x, j) &= -(x+1)r_j^b + (\tilde{x}+1+b)r_j^b + xr_j^b - (\tilde{x}+b)r_j^b \\ &\quad + LV_n(\tilde{x}+1+b, j) - LV_n(\tilde{x}+b, j) \\ &= \Delta LV_n(\tilde{x}+b, j) \\ &\geq -r_j^b.\end{aligned}$$

Es folgt daher wegen $r_i^b = r_j^b$ insgesamt

$$\Delta V_{n-1}(x, j) > \Delta V_{n-1}(x, i).$$

(5) $t_{n-1}(i) \leq \tilde{x} < t_{n-1}(j) \leq \tilde{x} + b$:

Wie im vorherigen Fall gilt $\Delta V_{n-1}(x, i) = \Delta LV_n(x, i) < -r_i^b$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\Delta V_{n-1}(x, j) &= -(x+1)r_j^b + t_{n-1}(j)r_j^b + LV_n(t_{n-1}(j), j) + xr_j^b - t_{n-1}(j)r_j^b - LV_n(t_{n-1}, j) \\ &= -r_j^b\end{aligned}$$

und wegen $r_i^b = r_j^b$ damit $\Delta V_{n-1}(x, i) < \Delta V_{n-1}(x, j)$.

(6) $t_{n-1}(i) \leq t_{n-1}(j) \leq \tilde{x}$:

Wie im vorherigen Fall gilt $\Delta V_{n-1}(x, i) = \Delta LV_n(x, i)$ und analog dazu $\Delta V_{n-1}(x, j) = \Delta LV_n(x, j)$, also

$$\Delta V_{n-1}(x, i) = \Delta LV_{n-1}(x, i) \leq \Delta LV_{n-1}(x, j) = \Delta V_{n-1}(x, j).$$

□

Korollar 4.10 *Unter (A1.1)-(A1.4) sowie (A1.7) gilt für $n = 0, 1, \dots, N-1$ und $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$:*

(1) $t_n(i) \leq t_{n-1}(j)$;

(2) $\Delta V_n(\cdot, i) \leq \Delta V_{n-1}(\cdot, j)$.

Beweis: Folgt mit den Sätzen 4.6 und 4.9.

□

4.4 Terminplan als Umwelt

Im Grundmodell hatten wir die Abhängigkeit der Ankünfte der einzelnen Patientenklassen vom erweiterten Umweltzustand $i = (m, w, e, b)$ sehr allgemein gehalten. Insbesondere haben wir damit keinen expliziten Terminplan für die angemeldeten Patienten angegeben. In der Regel ist aber durch einen Terminplan genau festgelegt, zu welchem Zeitpunkt wieviele Patienten ankommen sollen. Wir wollen daher in diesem Abschnitt einen expliziten Terminplan zugrunde legen, indem wir einen solchen als Umweltzustand einführen.

Für den betrachteten Tag liege ein Terminplan $s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}) \in \mathbb{N}_0^N$ vor, wobei s_n die Anzahl der Patienten sei, die für das Zeitintervall $[n, n+1)$ eingeplant sind. Die Wahrscheinlichkeiten, dass eingeplante Patienten ankommen, seien unabhängig voneinander. Jeder eingeplante Patient erscheint mit Wahrscheinlichkeit q^w pünktlich zu seinem Termin und mit Wahrscheinlichkeit $1 - q^w$ überhaupt nicht.³⁶ Die Anzahl der tatsächlich erschienenen eingeplanten Patienten zur Zeit n ist damit binomialverteilt mit den Parametern s_n und q^w .

Darüber hinaus werden noch einige Vereinfachungen in diesem Modell vorgenommen. So nehmen wir an, dass die Ankünfte von Notfällen und Patienten ohne Termin unabhängig vom (erweiterten) Umweltzustand sind und bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass genau e' Notfälle und b' unangemeldete Patienten ankommen mit $q(e', b')$. Des Weiteren seien die einstufige Kostenfunktion c_i , die terminale Kostenfunktion $V_N(\cdot, i)$ und die Gewinne r_i^w, r_i^e und r_i^b unabhängig von i . Da zum Zeitpunkt n die zukünftige Entwicklung des Systems vom Terminplan nur noch von s_n, \dots, s_{N-1} abhängt, sei der Umweltzustand m zur Zeit n dann gegeben durch $m = (m_1, \dots, m_N) = (s_n, \dots, s_{N-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^N$ und es gelte $M = \mathbb{N}_0^N$.³⁷ Liegt zur Zeit n also ein Umweltzustand $m = (m_1, \dots, m_N)$ vor, so ist der Umweltzustand zum Zeitpunkt $n+1$ gerade $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_N) := (m_2, \dots, m_N, 0)$. Für die Übergangswahrscheinlichkeit $q(i, j)$ vom erweiterten Umweltzustand $i = (m, w, e, b)$ in den erweiterten Umweltzustand $j = (m', w', e', b')$ gilt damit

$$q(i, j) = \begin{cases} P(Y_{\tilde{m}_1, q^w} = w')q(e', b'), & \text{falls } m' = \tilde{m}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $Y_{\tilde{m}_1, q^w}$ eine binomial(\tilde{m}_1, q^w) verteilte Zufallsvariable sei. Zunächst halten wir fest, dass Annahme (A1.5) erfüllt ist und daher analog zum Beweis von Satz 4.7 für $a \in X$ und $i = (m, w, e, b) \in I$ für alle $n = 1, \dots, N$ gilt

$$\begin{aligned} HV_n(a, i) &= HV_n(a, m) \\ &= \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{\tilde{m}_1} P(Y_{\tilde{m}_1, q^w} = w') \sum_{x'=0}^{\infty} p(a, x') V_n(x', (\tilde{m}, w', e', b')) \\ &= \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') \sum_{x'=0}^{\infty} p(a, x') V_n(x', (\tilde{m}, w', e', b')) \end{aligned}$$

und

$$LV_n(a, i) = LV_n(a, m) = -c(a) + HV_n(a, m).$$

³⁶Das bedeutet, dass wir in diesem Modell weder Stornierungen noch Verspätungen betrachten. Siehe dazu Abschnitt 4.6.

³⁷Auf die gleiche Weise könnte man auch $m = (m_1, \dots, m_N) = (s_n, \dots, s_{N-1}, z, \dots, z)$ für beliebiges z setzen.

Zunächst wollen wir prüfen, welche Strukturaussagen sich aus dem allgemeinen Modell übertragen lassen. Bei geeigneter Wahl der Behandlungszeitverteilung und Kostenfunktionen sind auch in diesem Modell die Annahmen (A1.1)-(A1.2) erfüllt, so dass auch hier eine optimale Politik in der Gestalt einer Control-Limit-Rule existiert. Bei stärkerer Einschränkung der Behandlungszeitverteilungen und Kostenfunktionen sind auch (A1.3) und (A1.4) erfüllt, so dass die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von Satz 4.6, der eine Monotonie in der Zeit beweist, gegeben sind. Jedoch gilt die Aussage nur bei identischen (erweiterten) Umweltzuständen. Daher hat Satz 4.6 zunächst nur Aussagekraft bei solchen Terminplänen, bei denen zu jedem Zeitpunkt gleich viele Patienten eingeplant sind.³⁸ Der in diesem Abschnitt hergeleitete Satz 4.14 ermöglicht aber die Verwendung von Satz 4.6 auf weitere Terminpläne.³⁹

Weiterhin ist Annahme (A1.5) erfüllt. Damit lassen sich die Aussagen (1) und (2) von Satz 4.7 anwenden, d.h., die Kontrollgrenzen hängen nur vom Umweltzustand selbst ab. Für (A1.6) muss wieder eine geeignete Behandlungszeitverteilung gewählt werden. Unter dieser könnte dann Satz 4.8 angewendet werden.

Für die Untersuchung des Einflusses des Terminplanes auf die Kontrollgrenzen und die Wertfunktion wäre die Anwendbarkeit von Satz 4.9 wünschenswert, da dieser eine Monotonie im Umweltzustand beweist. Allerdings ist die hierfür notwendige Annahme (A1.7) nicht erfüllt, da die Übergangswahrscheinlichkeiten $q(m, \cdot)$ vom zugrunde liegenden Terminplan abhängen. (A1.7) hat jedoch die Unabhängigkeit dieser vom Umweltzustand m gefordert. Damit können wir den entsprechenden Satz nicht mehr anwenden.

Um dennoch Strukturaussagen in Abhängigkeit des Terminplanes zu erhalten, untersuchen wir nun, inwiefern sich die Kontrollgrenzen ändern, wenn wir eine Änderung an einer „Stelle“ des Terminplanes vornehmen, d.h., wenn statt des Terminplanes $s = (s_0, \dots, s_i, \dots, s_{N-1})$ der Terminplan $s = (s_0, \dots, \bar{s}_i, \dots, s_{N-1})$ zugrunde liegt. Hierzu untersuchen wir die Kontrollgrenzen zum Zeitpunkt n , wenn statt des Umweltzustandes m der Umweltzustand $m + e_k$ vorliegt, wobei e_k der k -te kanonische Einheitsvektor des \mathbb{N}_0^N sei. Zunächst können wir zeigen, dass $t_n(m)$, $HV_n(\cdot, m)$ und $LV_n(\cdot, m)$ unabhängig von m_1 sind:

Lemma 4.11 *Die Kontrollgrenzen t_n sowie HV_n und LV_n hängen von m nur über m_2, \dots, m_N ab. D.h., es gilt*

$$\begin{aligned} HV_n(a, m) &= HV_n(a, m + e_1), \\ LV_n(a, m) &= LV_n(a, m + e_1), \\ t_n(a, m) &= t_n(a, m + e_1). \end{aligned}$$

Wir erinnern uns, dass $\tilde{D}(x, (m, w, e, b)) = \{x + w + e, \dots, x + w + e + b\}$ gilt und damit $\tilde{D}(x, (m, w, e, b)) = \tilde{D}(x, (w, e, b))$ sowie $\tilde{D}(x, (w + 1, e, b)) = \tilde{D}(x + 1, (w, e, b))$. Es ergibt sich folgendes

Korollar 4.12 *Für V_n , $n = 0, 1, \dots, N - 1$, gilt für alle $x \in X$ und $i = (m, w, e, b) \in I$:*

- (1) $V_n(x, (m + e_1, w, e, b)) = V_n(x, (m, w, e, b))$;
- (2) $V_n(x, (m, w + 1, e, b)) = V_n(x + 1, (m, w, e, b)) + r^b$.

Beweis: Es gilt

³⁸In diesem Fall setzt man dann auch den Umweltzustand zum Zeitpunkt n als $(m_1, \dots, m_N) = (s_n, \dots, s_{N-1}, z, \dots, z)$, wobei z gerade die Anzahl eingeplanter Patienten zu den einzelnen Zeitpunkten sei.

³⁹Siehe Seite 64.

(1)

$$\begin{aligned}
 V_n(x, (m + e_1, w, e, b)) &= (r^w - r^b)w + (r^e - r^b)e - xr^b \\
 &\quad + \max_{a \in \tilde{D}(x, (w, e, b))} \{ar^b + LV_{n+1}(a, m + e_1)\} \\
 &= (r^w - r^b)w + (r^e - r^b)e - xr^b + \max_{a \in \tilde{D}(x, (w, e, b))} \{ar^b + LV_{n+1}(a, m)\} \\
 &= V_n(x, (m, w, e, b));
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 V_n(x, (m, w + 1, e, b)) &= (r^w - r^b)w + (r^e - r^b)e - xr^b + \max_{a \in \tilde{D}(x, (w+1, e, b))} \{ar^b + LV_{n+1}(a, m)\} \\
 &= (r^w - r^b)w + (r^e - r^b)e - xr^b + \max_{a \in \tilde{D}(x+1, (w, e, b))} \{ar^b + LV_{n+1}(a, m)\} \\
 &= (r^w - r^b)w + (r^e - r^b)e - (x + 1)r^b \\
 &\quad + \max_{a \in \tilde{D}(x+1, (w, e, b))} \{ar^b + LV_{n+1}(a, m)\} + r^b \\
 &= V_n(x + 1, (m, w, e, b)) + r^b. \quad \square
 \end{aligned}$$

Wir können nun untersuchen, in welchem Zusammenhang die Kontrollgrenzen $t_n(m)$ und $t_n(m + e_k)$, $k = 2, \dots, N - n$, stehen. Dazu benötigen wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma 4.13 Für $n = 1, \dots, N$, $a \in X$ und $m \in M$ gilt:

$$\begin{aligned}
 &\Delta HV_n(a, m + e_2) \\
 &= \Delta HV_n(a, m) \\
 &\quad + q^w \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta^2 V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w', e', b')) \right].
 \end{aligned}$$

Beweis: Sei $a \in X$ und $m \in M$. Dann gilt mit Lemma 4.5 und Korollar 4.12 für $n = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
 & \Delta HV_n(a, m + e_2) \\
 &= \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2+1} P(Y_{m_2+1, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x' - 1, (\tilde{m} + e_1, w', e', b')) \right] \\
 &= \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2+1} (q^w P(Y_{m_2, q^w} = w' - 1) + (1 - q^w) P(Y_{m_2, q^w} = w')) \\
 & \quad \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w', e', b')) \right] \\
 &= q^w \sum_{e', b'} q(e', b') \sum_{w'=1}^{m_2+1} P(Y_{m_2, q^w} = w' - 1) \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w', e', b')) \right] \\
 & \quad + (1 - q^w) \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w', e', b')) \right] \\
 &= q^w \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w' + 1, e', b')) \right] \\
 & \quad + (1 - q^w) \Delta HV_n(a, m) \\
 &= q^w \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x', (\tilde{m}, w', e', b')) \right] \\
 & \quad + (1 - q^w) \Delta HV_n(a, m) \\
 &= \Delta HV_n(a, m) \\
 & \quad + q^w \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta^2 V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w', e', b')) \right].
 \end{aligned}$$

Satz 4.14 *Unter (A1.1)-(A1.3) gilt für alle $n = 0, \dots, N - 1$, $m \in M$ und $k = 2, \dots, N - n$* □

(1) $t_n(m + e_k) \leq t_n(m)$;

(2) $\Delta V_n(\cdot, (m + e_k, w, e, b)) \leq \Delta V_n(\cdot, (m, w, e, b))$.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $k = 2$

Wir zeigen zunächst die erste Aussage. Wegen (A1.3) gilt $\sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \geq 0$. Daher folgt zusammen mit der Konkavität von $V_n(\cdot, i)$

$$q^w \sum_{e', b'} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta^2 V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w', e', b')) \right] \leq 0.$$

Somit gilt mit Lemma 4.13

$$\Delta HV_n(a, m + e_2) \leq \Delta HV_n(a, m).$$

Damit folgt auch $\Delta LV_n(a, m + e_2) \leq \Delta LV_n(a, m)$ und somit $t_n(m + e_2) \leq t_n(m)$.

Die zweite Aussage folgt analog den zweiten Teil des Beweises von Satz 4.9 mit $m + e_2$ und m statt i und j .

Induktionsschritt: $k \rightarrow k + 1$

Wir zeigen die erste Aussage, die zweite erfolgt analog zum Induktionsanfang. Nach Induktionsannahme gilt

$$\Delta V_n(a, (m + e_k, w, e, b)) \leq \Delta V_n(a, (m, w, e, b))$$

und daher zusammen mit (A1.3)

$$\begin{aligned} \Delta HV_n(a, m + e_{k+1}) &= \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2+1} P(Y_{m_2+1, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x' - 1, (\tilde{m} + e_k, w', e', b')) \right] \\ &\leq \sum_{e', b'=0}^{\infty} q(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2+1} P(Y_{m_2+1, q^w} = w') \left[\sum_{x' \geq 1} \sum_{l \geq x'} \Delta p(a, l) \Delta V_n(x' - 1, (\tilde{m}, w', e', b')) \right] \\ &= \Delta HV_n(a, m). \end{aligned}$$

Daraus folgt auch $\Delta LV_n(a, m + e_{k+1}) \leq \Delta LV_n(a, m)$ und somit $t_n(m + e_{k+1}) \leq t_n(m)$. \square

Obwohl also Annahme (A1.7) nicht erfüllt ist, konnten wir eine Monotonie der Kontrollgrenzen sowie ΔV_n im Umweltzustand zeigen. Der Satz kann daher als Äquivalent von Satz 4.9 angesehen werden. Mit Hilfe von Satz 4.6 erhalten wir noch die folgenden Korollare:

Korollar 4.15 *Unter (A1.1)-(A1.4) gilt für alle $n = 1, \dots, N - 1$, $m \in M$ und $k = 2, \dots, N - n$:*

- (1) $t_n(m + e_k) \leq t_{n-1}(m)$;
- (2) $\Delta V_n(\cdot, (m + e_k, w, e, b)) \leq \Delta V_{n-1}(\cdot, (m, w, e, b))$.

Korollar 4.16 *Seien (A1.1)-(A1.4) erfüllt und s ein Terminplan mit $s_n \leq s_{n+1}$ und m bzw. \tilde{m} die daraus resultierenden Umweltzustände zu den Zeitpunkten $n - 1$ bzw. n , $n = 1, \dots, N - 1$. Dann gilt*

- (1) $t_n(\tilde{m}) \leq t_{n-1}(m)$;
- (2) $\Delta V_n(\cdot, (\tilde{m}, w, e, b)) \leq \Delta V_n(\cdot, (m, w, e, b))$.

Beweis: Folgt mit Korollar 4.15 und $\tilde{m} := (m_2, \dots, m_N, z)$, $z := m_N$. \square

4.5 Behandlungszeitverteilungen und Kostenfunktionen

Zentral für unsere Strukturaussagen sind einige Annahmen an die Kostenfunktionen sowie an die Behandlungszeitverteilung. Von besonderer Bedeutung sind (A1.1) und (A1.2). Diese benötigen wir für die Optimalität einer Control-Limit-Rule und sollten daher immer erfüllt sein. Alle im

Folgenden betrachteten Kostenfunktionen erfüllen daher Annahme (A1.2). Ob eine Behandlungszeitverteilung Annahme (A1.1) erfüllt, ist jedoch nicht sofort ersichtlich und wir untersuchen daher zwei verschiedene Verteilungen, die geometrische und die exponentielle, auf die Erfüllung dieser. Um zusätzliche Strukturaussagen zu erhalten, forderten die Annahmen (A1.3) und (A1.6) jeweils eine weitere Eigenschaft der Behandlungszeitverteilung und Annahme (A1.4) weitere Eigenschaften der Kostenfunktionen und Behandlungszeitverteilungen. Auch in (A1.7) sind Anforderungen an die Behandlungszeitverteilung enthalten, die jedoch vom erweiterten Umweltzustand abhängen. Da dieser recht unterschiedlich sein kann, untersuchen wir die Erfüllung dieser Annahme nicht. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden $p_i \equiv p$ an.⁴⁰

Geometrische Behandlungszeitverteilung

Wir betrachten den Fall, dass in der medizinischen Einrichtung insgesamt $k \in \mathbb{N}$ Ärzte vorhanden sind. Diese können gleichzeitig Patienten behandeln und jeder (einzelne) Arzt benötigt eine geometrisch verteilte Zeit für eine Untersuchung bzw. Behandlung. Diese geometrische Behandlungszeitverteilung besitzt dabei für jeden Arzt den gleichen Parameter. Anschaulich bedeutet dies, dass jeder Arzt, sofern er einen Patienten behandelt, die Behandlung mit Wahrscheinlichkeit $\varrho \in [0, 1]$ nach genau einer Zeiteinheit abgeschlossen hat. Hat er die Behandlung nicht nach einer Zeiteinheit abgeschlossen (mit Wahrscheinlichkeit $1 - \varrho$), so benötigt er wieder mit Wahrscheinlichkeit ϱ genau eine weitere Zeiteinheit, mit Wahrscheinlichkeit $1 - \varrho$ hat er diese nach einer weiteren Zeiteinheit erneut nicht abgeschlossen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Behandlung in genau l Zeiteinheiten zu beenden, ist daher $\varrho(1 - \varrho)^{l-1}$, $l \in \mathbb{N}$. Sei nun x die Anzahl der wartenden Patienten. Dann ist die Anzahl der Patienten deren Untersuchung bis zum Ende der Zeiteinheit abgeschlossen ist binomialverteilt mit den Parameter ϱ und $\min\{x, k\}$, da ein Arzt einerseits nur einen Patienten gleichzeitig behandeln kann, aber ein Patient auch nur von maximal einem Arzt behandelt wird.

Sei nun $Y_{x,\varrho}$ eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $\min\{x, k\}$ und ϱ . Dann gilt $p(x, x') = P(Y_{x,\varrho} = x - x')$. Wir zeigen zunächst, dass für diese Behandlungszeitverteilung die Annahmen (A1.1) und (A1.3) sowie zusammen mit geeigneten Kostenfunktionen auch (A1.4) erfüllt sind.

Satz 4.17 *Die Behandlungszeitverteilung erfüllt Annahme (A1.1).*

Beweis: Sei $i \in I$, $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ konkav und fallend und $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} g(x) &:= \sum_{x'=0}^x P(Y_{x,\varrho} = x - x')h(x') \\ &= \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)h(x - l). \end{aligned}$$

Zu zeigen ist dann $\Delta g(x) \leq 0$ und $\Delta^2 g(x) \leq 0$. Wir müssen nun die folgenden Fälle unterscheiden:

(1) $x \geq k$:

Es gilt $Y_{x+1,\varrho} = Y_{x,\varrho} = Y_{k,\varrho}$ und damit $P(Y_{x,\varrho} = l) = 0$ für $l > k$. Es folgt

$$g(x) = \sum_{l=0}^k P(Y_{k,\varrho} = l)h(x - l)$$

⁴⁰Siehe Abschnitt 4.6 für zwei kurze Beispiele, in denen die Behandlungszeitverteilung von der Umwelt abhängt.

und g ist für $x \geq k$ monoton fallend und konkav als Mischung monoton fallender und konkaver Funktionen.

(2) $x \leq k - 2$:

Es gilt $Y_{x+1,\varrho} = Y_{x,\varrho} + Y_{1,\varrho}$ und es folgt mit $\Delta h(x - l) \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \Delta g(x) &= \sum_{l=0}^{x+1} P(Y_{x,\varrho} + Y_{1,\varrho} = l)h(x + 1 - l) - \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)h(x - l) \\
 &= \sum_{l=0}^x \varrho P(Y_{x,\varrho} + Y_{1,\varrho} = l + 1 | Y_{1,\varrho} = 1)h(x + 1 - l - 1) \\
 &\quad + \sum_{l=0}^x (1 - \varrho) P(Y_{x,\varrho} + Y_{1,\varrho} = l | Y_{1,\varrho} = 0)h(x + 1 - l) \\
 &\quad - \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)h(x - l) \\
 &= \varrho \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)h(x - l) - \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)h(x - l) \\
 &\quad + (1 - \varrho) \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)h(x + 1 - l) \\
 &= (1 - \varrho) \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)\Delta h(x - l) \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art und Weise erhalten wir mit $\Delta^2 h(x - l) \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 g(x) &= (1 - \varrho)^2 \sum_{l=0}^x P(Y_{x,\varrho} = l)\Delta^2 h(x - l) \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

(3) $x = k - 1$:

Analog zu (2) erhalten wir

$$\Delta g(k - 1) = (1 - \varrho) \sum_{l=0}^{k-1} P(Y_{k-1,\varrho} = l)\Delta h(k - 1 - l) \leq 0$$

und damit schließlich die Monotonie von g . Nach (1) gilt

$$\Delta g(k) = \sum_{l=0}^k P(Y_{k,\varrho} = l)\Delta h(k - l).$$

Damit folgt mit analogem Vorgehen wie in (2):

$$\begin{aligned}
 \Delta^2 g(x) &= \Delta g(k) - \Delta g(k-1) \\
 &= \sum_{l=0}^k P(Y_{k,\varrho} = l) \Delta h(k-l) - (1-\varrho) \sum_{l=0}^{k-1} P(Y_{k-1,\varrho} = l) \Delta h(k-1-l) \\
 &= \sum_{l=0}^k P(Y_{k,\varrho} = l) \Delta h(k-l) - \sum_{l=0}^{k-1} P(Y_{k-1,\varrho} = l) \Delta h(k-1-l) \\
 &\quad + \varrho \sum_{l=0}^{k-1} P(Y_{k-1,\varrho} = l) \Delta h(k-1-l) \\
 &= (1-\varrho) \sum_{l=0}^{k-1} P(Y_{k-1,\varrho} = l) \Delta^2 h(k-1-l) + \varrho \sum_{l=0}^{k-1} P(Y_{k-1,\varrho} = l) \Delta h(k-1-l) \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

und damit die Konkavität von g .

□

Da wir nun bewiesen haben, dass mit der geometrischen Behandlungszeitverteilung Annahme (A1.1) erfüllt ist, erhalten wir mit dieser zusammen mit allen Kostenfunktionen, die monoton fallend und konkav sind, eine Control-Limit-Rule als optimale Politik. Sollen jedoch weitere Strukturen vorhanden sein, wie z.B. die Monotonie in der Zeit, müssen auch weitere Annahmen erfüllt sein. Daher zeigen wir zunächst, dass die geometrische Behandlungszeitverteilung Annahme (A1.3) erfüllt.

Satz 4.18 *Die Behandlungszeitverteilung erfüllt die Annahme (A1.3).*

Beweis: Es ist

$$\sum_{x' \geq l} p(x, x') = \sum_{x' \geq l} P(Y_{x,\varrho} = x - x') = P(Y_{x,\varrho} \leq x - l).$$

Für $x \geq k$ ist wegen

$$P(Y_{x,\varrho} \leq x - l) = P(Y_{k,\varrho} \leq x - l) \leq P(Y_{k,\varrho} \leq x + 1 - l) = P(Y_{x+1,\varrho} \leq x + 1 - l)$$

(A1.3) sofort erfüllt. Für $x < k$ gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{x' \geq l} p(x+1, x') &= P(Y_{x+1,\varrho} \leq x+1-l) \\
 &= (1-\varrho)P(Y_{x,\varrho} \leq x+1-l) + \varrho P(Y_{x,\varrho} \leq x-l) \\
 &\geq (1-\varrho)P(Y_{x,\varrho} \leq x-l) + \varrho P(Y_{x,\varrho} \leq x-l) \\
 &= P(Y_{x,\varrho} \leq x-l) \\
 &= \sum_{x' \geq l} p(x, x').
 \end{aligned}$$

□

Für die Monotonie in der Zeit wird zusätzlich Annahme (A1.4) benötigt. In dieser spielen sowohl Kostenfunktionen als auch Behandlungszeitverteilungen eine Rolle. Es gibt Kostenfunktionen, die (A1.4) nur in Verbindung mit bestimmten Behandlungszeitverteilungen erfüllen und umgekehrt. Von besonderer Bedeutung sind lineare Kostenfunktionen. Nehmen wir für terminale und Wartekosten Linearität an, so ist (A1.4) bei geometrischer Behandlungszeitverteilung im Allgemeinen nicht erfüllt, es sei denn, die Wartekosten sind identisch Null. Die folgenden Kostenfunktionen erfüllen Annahme (A1.2) und wir können zeigen, dass diese zusammen mit einer geometrischen Behandlungszeitverteilung und unter einigen Nebenbedingungen auch (A1.4) erfüllen:

$$V_N(x, i) := -(\kappa^x - 1) \text{ und } c_i(x) := \kappa_c^x - 1, \quad (4.3)$$

mit $\kappa_c \in [1, \kappa]$.

Satz 4.19 *Es seien α_w, α_e und α_b die maximale Anzahl möglicher in einer Zeiteinheit neu angekommener Patienten der einzelnen Patiententypen und β die maximale Anzahl möglicher wartender Patienten. Gilt*

$$\kappa^x(1 - \kappa) \leq -r_i^b,$$

und

$$\kappa_c^{w+e+b} \left(\frac{\kappa_c}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + \left(\frac{\varrho + (1 - \varrho)\kappa}{\kappa} \right)^k \kappa^{w+e+b} \leq 1$$

für alle $w = 0, \dots, \alpha_w, e = 0, \dots, \alpha_e, b = 0, \dots, \alpha_b, x = 0, \dots, \beta$, so ist Annahme (A1.4) mit den in (4.3) definierten Kostenfunktionen erfüllt.

Beweis: Es sei $i = (m, w, e, b)$, $a, x \in X$ und $\tilde{x} = x + w + e$. Wir halten zunächst fest, dass

$$\Delta V_N(x, i) = \kappa^x(1 - \kappa).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} HV_N(a, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p(a, x') V_N(x', j) \\ &= - \sum_{x' \in X} P(Y_{a, \varrho} = a - x') (\kappa^{x'} - 1) \\ &= 1 - \sum_{x' \in X} P(Y_{a, \varrho} = a - x') \kappa^{x'}. \end{aligned}$$

Mit $\sum_{l=0}^a \binom{a}{l} \varrho^l (1 - \varrho)^{a-l} \kappa^{a-l} = (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^a$ folgt

$$HV_N(a, i) = \begin{cases} 1 - (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^a, & a < k, \\ 1 - (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^k, & a \geq k. \end{cases}$$

Damit folgt

$$LV_N(a, i) = \begin{cases} 2 - \kappa_c^a - (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^a, & a < k, \\ 2 - \kappa_c^a - (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^k, & a \geq k, \end{cases}$$

und somit

$$\Delta LV_N(a, i) = \begin{cases} \kappa_c^a(1 - \kappa_c) + (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^a(1 - (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)), & a < k, \\ \kappa_c^a(1 - \kappa_c) + (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^k \kappa^{a-k}(1 - \kappa), & a \geq k. \end{cases}$$

Wir berechnen nun $\Delta V_{N-1}(x, i)$ und zeigen $\Delta V_{N-1}(x, i) \geq \Delta V_N(x, i)$, Dazu unterscheiden wir die folgenden Fälle:

- (1) $\tilde{x} + 1 \leq t_{N-1}(i) \leq \tilde{x} + b$:

Es gilt $\Delta V_{N-1}(x, i) = -r_i^b$ und $\Delta V_N(x, i) \leq -r_i^b$.

- (2) $k \leq t_{N-1}(i) \leq \tilde{x}$ und $t_{N-1}(i) < k \leq \tilde{x}$:

Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta V_{N-1}(x, i) &= \Delta LV_N(\tilde{x}, i) \\ &= \kappa_c^{\tilde{x}}(1 - \kappa_c) + (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^k \kappa^{\tilde{x}-k}(1 - \kappa),\end{aligned}$$

d.h., die Annahme (A1.4) ist erfüllt, wenn

$$\kappa_c^{\tilde{x}}(1 - \kappa_c) + (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^k \kappa^{\tilde{x}-k}(1 - \kappa) \geq \kappa^x(1 - \kappa),$$

was äquivalent zu

$$\kappa_c^{w+e} \left(\frac{\kappa_c}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + \left(\frac{\varrho + (1 - \varrho)\kappa}{\kappa} \right)^k \kappa^{w+e} \leq 1$$

ist.

- (3) $t_{N-1}(i) \leq \tilde{x} < k$:

Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta V_{N-1}(x, i) &= \Delta LV_N(\tilde{x}, i) \\ &= \kappa_c^{\tilde{x}}(1 - \kappa_c) + (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^{\tilde{x}}(1 - (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)),\end{aligned}$$

d.h. die Annahme (A1.4) ist erfüllt, wenn

$$\kappa_c^{\tilde{x}}(1 - \kappa_c) + (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^{\tilde{x}}(1 - (\varrho + (1 - \varrho)\kappa)) \geq \kappa^x(1 - \kappa)$$

was äquivalent zu

$$\kappa_c^{w+e} \left(\frac{\kappa_c}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + (1 - \varrho)(\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^{w+e} \left(\frac{\varrho + (1 - \varrho)\kappa}{\kappa} \right)^x \leq 1$$

ist. Wegen $(1 - \varrho)(\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^{w+e} \leq \kappa^{w+e}$ ist die Aussage erfüllt.

- (4) $t_{N-1}(i) \geq \tilde{x} + b + 1 \geq k$:

Ähnlich wie im Fall (2) ist die Aussage erfüllt, wenn

$$\kappa_c^{w+e+b} \left(\frac{\kappa_c}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + \left(\frac{\varrho + (1 - \varrho)\kappa}{\kappa} \right)^k \kappa^{w+e+b} \leq 1.$$

- (5) $k > t_{N-1}(i) \geq \tilde{x} + b + 1$ und $t_{N-1}(i) > k \geq \tilde{x} + b + 1$:

Ähnlich wie im Fall (3) ist die Aussage erfüllt, wenn

$$\kappa_c^{w+e+b} \left(\frac{\kappa_c}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + (1 - \varrho)(\varrho + (1 - \varrho)\kappa)^{w+e+b} \left(\frac{\varrho + (1 - \varrho)\kappa}{\kappa} \right)^x \leq 1.$$

□

Satz 4.20 Die Behandlungszeitverteilung erfüllt Annahme (A1.6).

Beweis: Die maximale Anzahl Patienten, die in einer Zeiteinheit behandelt werden können, ist k . Wegen

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=x+1}^{x+1+k} \left(\sum_{x' \geq l+1} p(x+1+k, x') - \sum_{x' \geq l} p(x+k, x') \right) \\
&= \sum_{x'=x+1}^{x+1+k} \left(\sum_{x' \geq l+1} P(Y_{k,\varrho} = x+1+k-x') - \sum_{x' \geq l} P(Y_{k,\varrho} = x+k-x') \right) \\
&= \sum_{x'=x+1}^{x+1+k} \left(\sum_{x' \geq l} P(Y_{k,\varrho} = x+k-x') - \sum_{x' \geq l} P(Y_{k,\varrho} = x+k-x') \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $x \in X$ ist die Aussage daher gezeigt. \square

Exponentialverteilte Behandlungszeitverteilung

Wir betrachten - wie auch schon bei der geometrischen Behandlungszeitverteilung - den Fall, dass in der medizinischen Einrichtung insgesamt $k \in \mathbb{N}$ Ärzte vorhanden sind, die gleichzeitig Patienten behandeln. Jeder Arzt kann jedoch stets nur einen Patienten gleichzeitig behandeln. Die Behandlungszeit jedes Arztes sei nun exponentialverteilt mit Parameter λ . Hat der Arzt eine Behandlung abgeschlossen, so fängt er unmittelbar darauf mit der eines neuen, noch nicht in Behandlung befindlichen Patienten an, sofern ein solcher vorhanden ist. Ist kein solcher Patient vorhanden, so wartet der Arzt ab, bis mit dem Beginn der nächsten Zeiteinheit evtl. neue Patienten eintreffen. Sind zu diesem Zeitpunkt mehr freie Ärzte vorhanden als Patienten zur Verfügung stehen, so spielt es für unsere Betrachtungen keine Rolle, welche dieser Ärzte eine Behandlung beginnen und welche nicht, da wir von gleicher Behandlungszeitverteilung ausgehen. Die Verteilung der Anzahl behandelter Patienten in einer Zeiteinheit bei unendlich vielen Patienten im Warteraum folgt mit diesen Annahmen einer Poisson-Verteilung mit Parameter $k\lambda$. Bei begrenzter Anzahl wartender Patienten im Warteraum gilt daher Folgendes:

Sei $Y_{k\lambda}$ eine poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $k\lambda$ und x die Anzahl wartender Kunden im Warteraum, dann gilt $p(x, x') = P(Y_{k\lambda} = x - x')$, falls $x' > 0$, und $p(x, 0) = P(Y_{k\lambda} \geq x)$. Wie wir wissen, gilt

$$P(Y_{k\lambda} = x) = \frac{(k\lambda)^x}{x!} e^{-k\lambda}.$$

Wir können nun - wie auch bei der geometrischen Behandlungszeitverteilung - zeigen, dass für diese Behandlungszeitverteilung die Annahmen (A1.1) und (A1.3) sowie zusammen mit geeigneten Kostenfunktionen auch Annahme (A1.4) erfüllt sind.

Satz 4.21 Die Behandlungszeitverteilung erfüllt Annahme (A1.1).

Beweis: Sei $i \in I$ und $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ konkav und fallend und $g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\begin{aligned} g(x) &:= \sum_{x' \in X} p(x, x') h(x') \\ &= P(Y_{k\lambda} \geq x) h(0) + \sum_{x'=1}^x P(Y_{k\lambda} = x - x') h(x') \\ &= \sum_{l=x}^{\infty} P(Y_{k\lambda} = l) h(0) + \sum_{l=0}^{x-1} P(Y_{k\lambda} = l) h(x - l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(k\lambda)^l}{l!} e^{-k\lambda} h(\max\{0, x - l\}). \end{aligned}$$

g ist monoton fallend und konkav als Mischung monoton fallender und konkaver Funktionen. \square

Satz 4.22 Die Behandlungszeitverteilung erfüllt Annahme (A1.3).

Beweis: Für $l \geq 1$ gilt

$$\sum_{x' \geq l} p(x, x') = P(Y_{k\lambda} \leq x - l) \leq P(Y_{k\lambda} \leq x + 1 - l) = \sum_{x' \geq l} p(x + 1, x')$$

und für $l = 0$

$$\sum_{x' \geq 0} p(x, x') = \sum_{x' \geq 0} p(x + 1, x') = 1.$$

\square

Wir überprüfen nun (A1.4). Die Erfüllung dieser Annahme ist sowohl von der Behandlungszeitverteilung als auch von den Kostenfunktionen $V_N(\cdot, i)$ und c_i abhängig. Wir zeigen (A1.4) zunächst für die in (4.3) definierten Kostenfunktionen.

Satz 4.23 Es seien α_w, α_e und α_b die maximale Anzahl möglicher in einer Zeiteinheit neu angekommener Patienten der einzelnen Patiententypen und β die maximale Anzahl möglicher wartender Patienten. Gilt

$$\kappa^x (1 - \kappa) \leq -r_i^b,$$

und

$$\kappa_c^{w+e+b} \left(\frac{\kappa_c}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + \kappa^{w+e+b} \sum_{l=0}^{x+w+e+b} \frac{(k\lambda/\kappa)^l}{l!} e^{-k\lambda} \leq 1$$

für alle $w = 0, \dots, \alpha_w, e = 0, \dots, \alpha_e, b = 0, \dots, \alpha_b$ und $x = 0, \dots, \beta$, so ist Annahme (A1.4) mit den in (4.3) definierten Kostenfunktionen erfüllt.

Beweis: Es sei $i = (m, w, e, b)$, $a, x \in X$ und $\tilde{x} = x + w + e$. Aus dem Beweis von Satz 4.19 wissen wir, dass $\Delta V_N(x, i) = \kappa^x (1 - \kappa)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 HV_N(a, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p(a, x') V_N(x', j) \\
 &= \sum_{j \in I} q(i, j) \left[P(Y_{k\lambda} \geq a) V_N(0, j) + \sum_{x'=1}^a P(Y_{k\lambda} = a - x') V_N(x', j) \right] \\
 &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{l=0}^{a-1} P(Y_{k\lambda} = l) V_N(a - l, j) \\
 &= - \sum_{l=0}^{a-1} \frac{(k\lambda)^l}{l!} e^{-k\lambda} (\kappa^{a-l} - 1).
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$LV_N(a, i) = 1 - \kappa_c^a - \sum_{l=0}^{a-1} \frac{(k\lambda)^l}{l!} e^{-k\lambda} (\kappa^{a-l} - 1)$$

und somit

$$\Delta LV_N(a, i) = \kappa_c^a (1 - \kappa_c) + (1 - \kappa) \kappa^a \sum_{l=0}^a \frac{(k\lambda/\kappa)^l}{l!} e^{-k\lambda}.$$

Wir berechnen nun $\Delta V_{N-1}(x, i)$ und unterscheiden die folgenden Fälle:

- (1) $\tilde{x} + 1 \leq t_{N-1}(i) \leq \tilde{x} + b$:
Es gilt $\Delta V_{N-1}(x, i) = -r_i^b$ und $\Delta V_N(x, i) \leq -r_i^b$.
- (2) $t_{N-1}(i) \leq \tilde{x}$:
Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta V_{N-1}(x, i) &= \Delta LV_N(\tilde{x}, i) \\
 &= \kappa_c^{\tilde{x}} (1 - \kappa_c) + (1 - \kappa) \kappa^{\tilde{x}} \sum_{l=0}^{\tilde{x}} \frac{(k\lambda/\kappa)^l}{l!} e^{-k\lambda},
 \end{aligned}$$

d.h., die Annahme (A1.4) ist erfüllt, wenn

$$\kappa_c^{\tilde{x}} (1 - \kappa_c) + (1 - \kappa) \kappa^{\tilde{x}} \sum_{l=0}^{\tilde{x}} \frac{(k\lambda/\kappa)^l}{l!} e^{-k\lambda} \geq \kappa^x (1 - \kappa),$$

was äquivalent ist zu

$$\kappa_c^{w+e} \left(\frac{\kappa x}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + \kappa^{w+e} \sum_{l=0}^{x+w+e} \frac{(k\lambda/\kappa)^l}{l!} e^{-k\lambda} \leq 1.$$

- (3) $\tilde{x} + b + 1 \leq t_{N-1}(i)$:
Ähnlich wie im Fall (2) ist die Annahme erfüllt, wenn

$$\kappa_c^{w+e+b} \left(\frac{\kappa x}{\kappa} \right)^x \frac{1 - \kappa_c}{1 - \kappa} + \kappa^{w+e+b} \sum_{l=0}^{x+w+e+b} \frac{(k\lambda/\kappa)^l}{l!} e^{-k\lambda} \leq 1.$$

□

Da wir nun wissen, dass unter bestimmten Nebenbedingungen (A1.4) erfüllt ist, wissen wir auch, dass mit dieser Kostenfunktion und dieser Behandlungszeitverteilung die Kontrollgrenzen monoton fallend in der Zeit sind.

Da die maximale Anzahl Patienten, die in einer Zeiteinheit behandelt werden können, theoretisch bei unendlich liegen kann, ist es nicht sinnvoll, Satz 4.8 anzuwenden. Auch untersuchen wir die Erfüllung von Annahme (A1.6) nicht.

4.6 Weitere Umweltzustände

Wir wollen nun kurz weitere Beispiele für den Umweltzustand vorstellen. Wegen der großen Anzahl an Möglichkeiten und des großen Aufwandes, diese zu untersuchen, beschränken wir uns auf nur wenige Beispiele und beschreiben diese nur im Ansatz. Möglich sind natürlich auch Kombinationen der verschiedenen Umweltbeispiele.

Variierende Ankunfts wahrscheinlichkeiten ambulanter Patienten

Im Modell mit Terminplan im Abschnitt 4.4 war die Ankunfts wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen Patienten fest. Diese Wahrscheinlichkeiten können jedoch Schwankungen unterliegen. Nehmen wir an, dass diese z verschiedene Werte annehmen können, so würden wir für die Menge der Umweltzustände im Modell mit Terminplan $M = \{q_1^w, \dots, q_z^w\} \times \mathbb{N}_0^N$ erhalten.

Variierende Parameter der Behandlungszeitverteilung

In Abschnitt 4.5 haben wir zwei Behandlungszeitverteilungen vorgestellt und dabei jeweils angenommen, dass der Parameter der Verteilungen jeweils konstant ist. Der Parameter kann sich jedoch auch ändern und durch den Umweltprozess beschrieben werden. Für die in 4.5 vorgestellte geometrische sowie exponentielle Behandlungszeitverteilung bedeutet dies also, dass sich der Parameter ϱ bzw. λ ändert. Nehmen wir eine endliche Anzahl z möglicher Parameter an, so besteht für die geometrische Behandlungszeitverteilung die Menge der Umweltzustände somit aus $M = \{\varrho_1, \dots, \varrho_z\}$, für die exponentielle Behandlungszeitverteilung aus $M = \{\lambda_1, \dots, \lambda_z\}$. Annahme (A1.7) ist mit diesen Umweltmengen jedoch nicht erfüllt

Mehrere Ärzte, zeitabhängige Verfügbarkeit

Ähnlich dazu, dass sich der Parameter der Behandlungszeitverteilungen ändern kann, kann auch die Anzahl der Ärzte, die einer medizinischen Einrichtung zur Verfügung stehen, variieren. Vor allem durch Schichtpläne und Pausen steht in der Praxis nicht immer eine konstante Anzahl von Behandlern zur Verfügung. Der Umweltzustand m_n zur Zeit n kann daher z.B. die Anzahl von Ärzten beschreiben, die für das Intervall $[n, n + 1)$ zur Verfügung stehen. Die Menge der Umweltzustände wäre bei maximal k Ärzten daher $M = \{0, \dots, k\}$. Dies kann auch auf andere Behandlungszeitverteilungen als in Abschnitt 4.5 angewendet werden. Wie auch bei variierenden Parameter ist bei variierender Anzahl der zur Verfügung stehenden Ärzte Annahme (A1.7) nicht erfüllt.

Terminplan mit Stornierungen

Im Modell mit Terminplan sind Patienten entweder pünktlich zu ihrem Termin angekommen oder überhaupt nicht erschienen. Es ist aber möglich, dass Patienten ihren Termin im Verlaufe des Tages absagen. Diese Situation kann mit der gleichen Menge der Umweltzustände wie in Abschnitt 4.4

modelliert werden, also mit $M = \mathbb{N}_0^N$. Jedoch müssen die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Umweltzuständen angepasst werden. Dazu nehmen wir an, dass jeder zukünftig eingeplante Patient in jeder Zeiteinheit seinen Termin mit Wahrscheinlichkeit λ storniert. Liegt zu einem Zeitpunkt der Umweltzustand $m = (m_1, \dots, m_N)$ vor, so ist die Anzahl der Stornierungen für die einzelnen Zeitintervalle binomialverteilt mit den Parametern m_i und λ . Ein Übergang von m in den Umweltzustand $(m_2 - \kappa_2, \dots, m_N - \kappa_N, 0)$ geschieht mit Wahrscheinlichkeit

$$\prod_{i=2}^N P(Y_{m_i, \lambda} = \kappa_i),$$

wobei $Y_{m_i, \lambda}$ eine binomialverteilte Zufallsvariable sei mit den Parametern m_i und λ . Für die Übergangswahrscheinlichkeit vom erweiterten Umweltzustand $i = (m, w, e, b)$ in den erweiterten Umweltzustand $j = (m', w', e', b')$ ergibt sich daher

$$q(i, j) = \begin{cases} \prod_{i=2}^N P(Y_{m_i, \lambda} = \kappa_i) P(Y_{m_2 - \kappa_2, q^w} = w') q(e', b'), & \text{falls } m' = (m_2 - \kappa_2, \dots, m_N - \kappa_N, 0) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Stornierungswahrscheinlichkeiten können auch vom aktuellen Zeitpunkt abhängen und für die einzelnen Zeiteinheiten variieren. In diesem Fall muss zusätzlich noch die Zeit in den Umweltzustand aufgenommen werden.

Terminplan mit Verspätungen

Im Modell mit Terminplan haben wir keine Verspätungen betrachtet. Wir nehmen nun an, dass Patienten zu spät zu ihrem Termin ankommen können, maximal aber eine Zeiteinheit. D.h., Patienten kommen entweder pünktlich, eine Zeiteinheit später oder gar nicht in der medizinischen Einrichtung an. Ein Patient kommt nun mit Wahrscheinlichkeit q^w pünktlich zu seinem Termin. Die medizinische Einrichtung hat jedoch vorerst keine Information darüber, ob ein nicht erschienener Patient überhaupt nicht mehr oder eine Zeiteinheit später ankommt. Jeder zu seinem Termin nicht erschienene Patient kommt mit Wahrscheinlichkeit λ eine Zeiteinheit später an und mit Wahrscheinlichkeit $1 - \lambda$ überhaupt nicht mehr. Dann definieren wir die Menge der Umweltzustände durch $M = \mathbb{N}_0^{N+1}$ und ein Umweltzustand hat die Gestalt (m, v) , wobei $m = (m_1, \dots, m_N)$ wie in Abschnitt 4.4 die restlichen Termine des Tages beschreibe und v die Anzahl der im vorherigen Zeitabschnitt nicht erschienenen Patienten sei. Es ergibt sich damit als Übergangswahrscheinlichkeit vom erweiterten Umweltzustand $i = ((m, v), w, e, b)$ in den erweiterten Umweltzustand $j = ((m', v'), w', e', b')$

$$q(i, j) = \begin{cases} P(Y_{m_2, q^w} = \bar{w}) P(Y_{v, \lambda} = \bar{v}) q(e', b'), & \text{falls } m' = \tilde{m}, v' = m_2 - \bar{w} \text{ und } w' = \bar{w} + \bar{v}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $Y_{n,p}$ binomial(n, p)-verteilte Zufallsvariablen seien.

5 Ressourcenzuweisung in medizinischen Einrichtungen

5.1 Situationsbeschreibung

In diesem Kapitel betrachten wir eine medizinische Einrichtung, in der ambulante, stationäre und Notfallpatienten behandelt werden und die sich alle eine bestimmte medizinische Ressource teilen. Beispiele für solche Situationen sind radiologische Abteilungen in Krankenhäusern. Insbesondere zählen hierzu Untersuchungen mit Hilfe von CT- oder MRT-Geräten. Alle ambulanten Patienten sind für eine spezielle Untersuchung mit Hilfe dieser Ressource stets vorangemeldet. Die stationären Patienten, die sich in der medizinischen Einrichtung befinden, halten sich dort in der Regel mehrere Tage auf. Ob diese Patienten diese spezielle Ressource ebenfalls benötigen und zu welchen Zeitpunkten, ist im Allgemeinen ungewiss und somit nicht festgelegt. Die Nachfrage stationärer Patienten nach einer Untersuchung mittels dieser Ressource trifft daher meist unvorangemeldet ein. Zusätzlich treffen unvorangemeldet Notfallpatienten, die eine möglichst schnelle Untersuchung mit Hilfe dieser Ressource benötigen, in der Einrichtung ein. Werden ambulante Patienten nicht zu ihren Terminen untersucht und müssen stattdessen warten, so entstehen Wartekosten. Werden ambulante Patienten bis zum Ende des Tages nicht behandelt, so entstehen zusätzlich terminale Kosten für Überstunden bzw. eine erhöhte Unzufriedenheit der Patienten, da diese trotz Wartens und Termines keine Untersuchung erhalten haben und an einem anderen Tag wiederkommen müssen. Bei stationären Patienten treten in der Regel keine oder zumindest geringere Wartekosten auf, da sich diese bereits in der Einrichtung befinden. Werden stationäre Patienten jedoch bis zum Ende des Tages nicht untersucht, so entstehen meist höhere terminale Kosten als bei ambulanten Patienten, da dies den geplanten Aufenthalt des Patienten oftmals um einen Tag verlängert. Dies ist wiederum mit sehr hohen Kosten für die Belegung von Betten verbunden. Die medizinische Einrichtung muss daher abwägen, welcher Patiententyp zu den einzelnen Zeitpunkten, an denen neue Untersuchungen beginnen können, priorisiert behandelt werden soll. Erschwerend bei der Entscheidungsfindung ist dabei, dass diese Situation zufälligen Einflüssen unterliegt. So gilt es zu berücksichtigen, dass Patienten, die einen Termin erhalten haben, möglicherweise gar nicht oder unpünktlich erscheinen (was bedeuten kann, dass diese Patienten zu früh, oder zu spät in der Einrichtung eintreffen). Auch die Ankünfte stationärer und Notfallpatienten ist zufällig.

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die Terminplanung bereits durchgeführt wurde. D.h., das Ankunftsverhalten der eingeplanten ambulanten Patienten in der medizinischen Einrichtung ist für den betrachteten Tag bereits festgelegt und kann von der Einrichtung nicht mehr beeinflusst werden. Wir untersuchen daher nur die Frage, wieviele ambulante Patienten und wieviele stationäre Patienten in der nächsten Zeiteinheit untersucht werden sollen und welche Patienten daher warten müssen. Dabei hängt die Gesamtzahl der stationären und ambulanten Patienten, die behandelt werden können, von der Anzahl der Notfallpatienten in der Einrichtung ab, da diese stets Vorrang haben. Ziel der Untersuchung ist es, den erwarteten Gesamtgewinn der Einrichtung zu maximieren.

Das resultierende Optimierungsproblem formulieren wir als einen Markovschen Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt in diskreter Zeit.

5.2 Modellierung als Markovscher Entscheidungsprozess

Wir betrachten einen Behandlungstag in einer medizinischen Einrichtung, in der drei Patiententypen behandelt werden: ambulante Patienten, Notfälle und stationäre Patienten. Ambulante Patienten sind stets eingeplant, d.h., die Einrichtung ist über ihr Erscheinen informiert. Notfälle und stationäre Patienten sind nicht eingeplant und die Einrichtung hat keine Information darüber, ob und wann einzelne Patienten dieser Typen ankommen. Dabei müssen Notfälle möglichst schnell behandelt werden, wogegen die stationären Patienten aus medizinischer Sicht nicht sofort behandelt werden müssen und einen längeren Aufenthalt in der Einrichtung vor oder hinter sich haben. Der Tag ist in N Zeitabschnitte gleicher Länge unterteilt. Er beginnt zum Zeitpunkt 0 und endet zum Zeitpunkt N . Wir betrachten den Zustand der medizinischen Einrichtung zu Beginn jedes Intervalls, also zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, \dots, N-1$, sowie am Ende des Tages zum Zeitpunkt N . Die Anzahl der ambulanten Patienten, die sich zum Zeitpunkt n in der Einrichtung befinden, bezeichnen wir mit w_n . Die Anzahl stationärer Patienten, die sich zu diesem Zeitpunkt in der Einrichtung befinden und auf eine Untersuchung warten, bezeichnen wir mit b_n und die Anzahl wartender Notfälle mit e_n . Zusätzlich zu der Anzahl der wartenden Patienten lässt sich zu diesen Zeitpunkten ein Umweltzustand beobachten.⁴¹ Diesen bezeichnen wir mit i_n . Ein Übergang vom Umweltzustand i_n zur Zeit n in den Umweltzustand i_{n+1} zum Zeitpunkt $n+1$ erfolgt mit Wahrscheinlichkeit $q(i_n, i_{n+1})$. Es soll nun entschieden werden, wieviele Patienten welchen Typs in der nächsten Zeiteinheit behandelt werden sollen. Der Einrichtung stehen hierfür $K \geq 0$ Behandlungseinheiten zur Verfügung.

Der Zustand x_n zum Zeitpunkt n wird durch die Anzahl wartender Patienten der einzelnen Typen beschrieben, es ist also $x_n = (w_n, e_n, b_n)$. Sofern Patienten vorhanden sind, soll eine Behandlungseinheit auch genutzt werden. Notfallpatienten haben gegenüber ambulanten und stationären Patienten stets Vorrang. Eine Aktion $a = (a_w, a_e, a_b)$ zur Zeit n beschreibt, wieviele ambulante Patienten, wieviele Notfälle und wieviele stationäre Patienten zu diesem Zeitpunkt behandelt werden, nämlich a_w, a_e bzw. a_b . Die Menge der möglichen Aktionen ist daher $D^K(x_n) = \{a = (a_w, a_e, a_b) \in \mathbb{N}_0^3 \mid a_w \leq w_n, a_e = \min\{K, e_n\}, a_b \leq b_n, a_w + a_e + a_b = \min\{w_n + e_n + b_n, K\}\}$. Jede Behandlung eines Patienten dauert genau eine Zeiteinheit. Bis zum nächsten Entscheidungszeitpunkt können neue ambulante Patienten oder Notfälle in der medizinischen Einrichtung eintreffen bzw. stationäre Patienten eine Behandlung nachfragen. Die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $n+1$ Zustand x_{n+1} vorliegt, wenn zum Zeitpunkt n Zustand x_n vorlag und Aktion a gewählt wurde, beträgt gerade $p_i(x_n - a, x_{n+1})$ und wir bezeichnen p_i als die Ankunftsverteilung.

Für jeden Patienten, der behandelt wird, erhalten die Betreiber der medizinischen Einrichtung einen Gewinn, der sowohl vom Umweltzustand i_n als auch vom Patiententyp abhängt. Der Gewinn beträgt $r_{i_n}^w$ für ambulante, $r_{i_n}^b$ für stationäre und $r_{i_n}^e$ für Notfallpatienten. Für Patienten, die sich in der medizinischen Einrichtung befinden und auf eine Behandlung warten, entstehen pro Zeiteinheit Wartekosten in Höhe von $c_{i_n}(x_n)$, welche abhängig sind von der Anzahl wartender Patienten der einzelnen Typen und dem Umweltzustand i_n . Am Ende des Tages entstehen für jeden nicht behandelten Patienten Kosten, die sich sowohl aus Überstunden, die das Personal in der Einrichtung evtl. leisten muss, der Belegung von Krankenhausbetten durch stationäre und Notfallpatienten und aus Strafkosten für am Tagesende nach Hause entlassene ambulante Patienten ergeben können. Diese Kosten haben in Abhängigkeit von der Anzahl Patienten der einzelnen Typen und dem

⁴¹Vgl. Abschnitt 5.4 und 5.6 für Beispiele für solche Umweltzustände.

Umweltzustand eine Höhe von $V_N(x_N, i_N)$.

Das Ziel des Managements der medizinischen Einrichtung ist nun die Maximierung des erwarteten Gesamtgewinnes eines Tages. Das Problem kann abhängig von der Anzahl $K \geq 0$ der zur Verfügung stehenden Behandlungseinheiten als endlich-stufiger Markovscher Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt in diskreter Zeit formuliert werden mit den folgenden Größen:

- (1) Dem Planungshorizont N ;
- (2) dem Zustandsraum $X \times I$ mit $X = \mathbb{N}_0^3$ und I einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge;
- (3) dem Aktionenraum $A^K := \{a = (a^w, a^e, a^b) \in X \mid a^w + a^e + a^b \leq K\}$ und der Menge der im Zustand $(x, i) = ((w, e, b), i)$ zulässigen Aktionen $D^K(x, i) = D^K(x) := \{a \in A^K \mid a^w \leq w, a^e \leq \min\{K, e\}, a^b \leq b, a^w + a^e + a^b = \min\{K, w + e + b\}\}$;
- (4) der Zähldichte $\hat{p} : X \times I \times A \times X \times I \rightarrow [0, 1]$, definiert durch $\hat{p}((x, i), a, (x', j)) := q(i, j)p_i(x - a, x')$;
- (5) der einstufigen Gewinnfunktion $r : X \times I \times A \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$r((x, i), a) := ar_i^T - c_i(x - a),$$

mit $r_i = (r_i^w, r_i^e, r_i^b) \in \mathbb{R}^3$ und $c_i : X \rightarrow \mathbb{R}$;

- (6) der terminalen Gewinnfunktion $V_N : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$.

Da sich der betrachtete Zeithorizont auf einen einzigen Tag beschränkt, verzichten wir auf eine Diskontierung.⁴²

Nach Satz 3.5 in Abschnitt 3.1.1 können der optimale erwartete Gesamtgewinn V_0^K sowie die optimalen Aktionen zu den einzelnen Zeitpunkten bestimmt werden durch die Optimalitätsgleichung

$$V_n^K(x, i) = \max_{a \in D^K(x)} \left\{ r((x, i), a) + \sum_{j \in I} \sum_{x' \in X} q(i, j)p_i(x - a, x')V_{n+1}^K(x', j) \right\},$$

$n = 0, 1, \dots, N - 1$, wobei wir für V_N auch V_N^K schreiben. Wir definieren nun die folgenden Operatoren:

Definition 5.1 Es seien $HV_n^K : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ und $LV_n^K : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, N$, definiert durch

$$HV_n^K(a, i) := \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p_i(a, x')V_n^K(x', j), \quad (a, i) \in X \times I,$$

und

$$LV_n^K(a, i) := -c_i(a) + HV_n^K(a, i), \quad (a, i) \in X \times I.$$

Mit dieser Definition können wir die Optimalitätsgleichung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} V_n^K(x, i) &= \max_{a \in D^K(x)} \{ ar_i^T - c_i(x - a) + HV_{n+1}^K(x - a, i) \} \\ &= \max_{a \in D^K(x)} \{ ar_i^T + LV_{n+1}^K(x - a, i) \}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung der Optimalitätsgleichung beginnen wir im nächsten Abschnitt die Untersuchung unseres Modells.

⁴²Die Einbeziehung eines Diskontierungsfaktors würde jedoch keinen Einfluss auf die im Folgenden entwickelten Strukturaussagen haben.

5.3 Strukturaussagen

Wir wollen uns nun der ersten und wichtigsten Strukturaussage zuwenden: Die Optimalität einer sogenannten monotonen Switching-Curve. Bei solchen existieren sogenannte Kontrollgrenzen, die den Zustandsraum in verschiedene Mengen, innerhalb derer bestimmte Aktionen optimal sind, unterteilen. Optimale Entscheidungsregeln können durch diese Kontrollgrenzen zu den einzelnen Zeitpunkten und in den einzelnen Umweltzuständen vollständig bestimmt werden. Solche Politiken sind einfach zu bestimmen und leicht anzuwenden: Ein Entscheidungsträger muss lediglich die Kontrollgrenzen kennen, um daraus eine optimale Aktion abzuleiten, was insbesondere im Gesundheitswesen, wo viele Mitarbeiter komplizierten Regeln oder auch computergestützten Entscheidungen skeptisch gegenüber stehen, sinnvoll ist. Da es sich hier um einen endlich-stufigen Markovschen Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt handelt, sind diese Grenzen vom Umweltzustand und dem betrachteten Zeitpunkt abhängig.

Die Optimalität einer monotonen Switching-Curve kann aber nicht ohne weitere Annahmen sichergestellt werden: Sowohl die terminalen Kosten als auch die Wartekosten müssen multimodular in der Anzahl ambulanter und stationärer Patienten sein. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht sehr restriktiv und wird von vielen Kostenfunktionen erfüllt. Des Weiteren benötigen wir eine Ankunftsverteilung, unter der die Multimodularität erhalten bleibt. Eine kurze Übersicht über Kostenfunktionen, die die erwähnte und noch weitere Annahmen erfüllen, findet sich in Abschnitt 5.5. Wir formulieren die Annahmen nun formal:

Annahmen:

(A2.1) Für die Ankunftsverteilung p_i gilt für alle $i \in I$:

Für jede in 1 und 3 multimodulare Funktion $h : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch die Funktion $g_i : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$g_i(x) := \sum_{x' \in \mathbb{N}_0^3} p_i(x, x') h(x'), \quad x \in \mathbb{N}_0^3,$$

multimodular in 1 und 3.

(A2.2) Die Funktionen $-c_i$ und $V_N(\cdot, i)$ sind multimodular in 1 und 3 für alle $i \in I$.

Statt *Multimodularität in 1 und 3* bzw. *multimodular in 1 und 3* schreiben wir im Folgenden stets *Multimodularität* bzw. *multimodular* und meinen damit diese in den Komponenten 1 und 3.

Mit Hilfe von Lemma 3.24 können wir nun zeigen, dass unter diesen Annahmen auch HV_n^K , LV_n^K sowie die Wertfunktion V_n^K für jedes K selbst multimodular für alle betrachteten Zeitpunkte n sind. Hieraus folgt schließlich die Optimalität einer monotonen Switching-Curve.

Satz 5.2 *Sind die Annahmen (A2.1) und (A2.2) erfüllt, so sind die Funktionen $HV_n^K(\cdot, i)$, $LV_n^K(\cdot, i)$ sowie $V_{n-1}^K(\cdot, i)$ multimodular für alle $n = 1, \dots, N$ und $i \in I$.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = N$

Nach (A2.2) ist $V_N^K(\cdot, i)$ multimodular für alle $i \in I$. Mit (A2.1) ist dann

$$\sum_{x' \in X} p_i(\cdot, x') V_N^K(x', j), \quad j \in I,$$

multimodular und damit auch $HV_N^K(\cdot, i)$ als Mischung von multimodularen Funktionen. $LV_N(\cdot, i)$ ist dann aufgrund von (A2.2) multimodular.

Es bleibt zu zeigen, dass $V_{N-1}^K(\cdot, i)$ multimodular ist. Sei dazu $x = (w, e, b) \in X$. Für $e \geq K$ besteht die Menge aller zulässigen Aktionen nur aus einem einzigen Element, es gilt also $D_K(x) = \{(0, K, 0)\}$. Wegen

$$V_{N-1}^K(x, i) = cr_i^e + LV_N^K(x - (0, K, 0), i)$$

ist damit die Aussage bereits gezeigt. Für $e < K$ müssen zunächst alle e Notfallpatienten behandelt werden. Es verbleiben daher $K - e$ Behandlungseinheiten für die ambulanten und stationären Patienten. Es gilt dann

$$\begin{aligned} V_{N-1}^K(x, i) &= \max_{a \in D^K(w, e, b)} \{ar_i^T + LV_N^K((w, e, b) - a, i)\} \\ &= cr_i^e + \max_{a \in D^{K-e}(w, 0, b)} \{ar_i^T + LV_N^K((w, 0, b) - a, i)\}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.24 ist die Aussage dann gezeigt.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n - 1$

Der Induktionsschritt erfolgt auf die gleiche Art und Weise wie der Induktionsanfang. \square

Wir definieren nun die folgende Größe und zeigen in Satz 5.5, dass es sich hierbei um die bereits erwähnten Kontrollgrenzen für den Fall $K = 1$ handelt.

Definition 5.3 Die Funktionen $t_n : \mathbb{N}_0 \times I \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, seien definiert durch

$$t_n(w, i) := \inf\{b \in \mathbb{N} \mid \Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b - 1), i) < r_i^b - r_i^w\}, \quad w \geq 1,$$

und

$$t_n(0, i) := 1.$$

Wir nennen die $t_n(w, i)$ *Kontrollgrenzen*.

Lemma 5.4 Es gilt $t_n(w, i) \leq t_n(w + 1, i)$ für alle $w \in \mathbb{N}_0, i \in I$ und $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Beweis: Da $t_n(w, i) \geq 1$ für alle $w \in \mathbb{N}$ und $t_n(0, i) = 1$, gilt $t_n(1, i) \geq t_n(0, i)$. Es bleibt die Ungleichung für $w \geq 1$ zu zeigen. Da $LV_{n+1}^1(\cdot, i)$ multimodular ist, gilt mit Lemma 3.23

$$\Delta_{31}LV_{n+1}^1((w, 0, b - 1), i) \geq \Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b - 1), i), \quad \forall w, b \in \mathbb{N},$$

und damit folgt

$$\begin{aligned} t_n(w + 1, i) &= \inf\{b \in \mathbb{N} \mid \Delta_{31}LV_{n+1}^1((w, 0, b - 1), i) < r_i^b - r_i^w\} \\ &\geq \inf\{b \in \mathbb{N} \mid \Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b - 1), i) < r_i^b - r_i^w\} \\ &= t_n(w, i). \end{aligned}$$

\square

Wir untersuchen nun die Struktur einer optimalen Politik unseres Entscheidungsproblems abhängig von der Anzahl zur Verfügung stehender Behandlungseinheiten. Im Fall $K = 0$ ist keine Behandlungseinheit vorhanden und die Menge der zulässigen Aktionen besteht nur aus der Aktion $(0, 0, 0)$. Damit ist die Politik $\pi \in F^N$, definiert durch die Entscheidungsfunktionen $f_n^0(x, i) \equiv (0, 0, 0)$, optimal. Wir betrachten nun den Fall $K = 1$.

Satz 5.5 Sei $K = 1$ und $(x, i) \in X \times I$ mit $x = (w, e, b)$. Sind die Annahmen (A2.1) und (A2.2) erfüllt, so ist die Politik $\pi \in F^N$, definiert durch die Entscheidungsfunktionen

$$f_n^1(x, i) = \begin{cases} (0, 1, 0), & \text{falls } e > 0, \\ (0, 0, 1), & \text{falls } e = 0, b \geq t_n(w, i), \\ (1, 0, 0), & \text{falls } e = 0, w > 0, b < t_n(w, i), \\ (0, 0, 0), & \text{falls } e = 0, w = 0, b = 0, \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots, N - 1$, optimal.⁴³

Beweis: Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

(1) $e > 0$:

In diesem Fall ist mindestens ein Notfallpatient vorhanden und somit gilt $D^1(x) = \{(0, 1, 0)\}$.

(2) $e = 0$ und $b \geq t_n(w, i)$:

Da $t_n(w, i) \geq 1$ ist auch $b \geq 1$ und es folgt $(0, 0, 1) \in D^1(x)$. Für den Fall $w = 0$ ist somit alles gezeigt. Da eine Behandlungseinheit immer ausgelastet werden muss, sofern Patienten vorhanden sind, muss im Fall $w > 0$ nur gezeigt werden, dass Aktion $(0, 0, 1)$ der Aktion $(1, 0, 0)$ vorzuziehen ist. Nach der Definition von $t_n(w, i)$ gilt

$$\Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, t_n(w, i) - 1), i) < r_i^b - r_i^w.$$

Da $LV_{n+1}^1(\cdot, i)$ subkonkav ist, gilt wegen Lemma 3.23

$$\Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b - 1), i) \geq \Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b), i).$$

Daraus folgt

$$\Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b - 1), i) \leq \Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, t_n(w, i) - 1), i) < r_i^b - r_i^w$$

für alle $b \geq t_n(w, i)$. Es gilt also

$$r_i^w + LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b), i) < r_i^b + LV_{n+1}^1((w, 0, b - 1), i)$$

und damit

$$V_n^1(x, i) = \max_{a \in D_1(x)} \{ar_i^T + LV_{n+1}^1(x - a)\} = r_i^b + LV_{n+1}^1((w, 0, b - 1), i).$$

Somit ist $(0, 0, 1)$ optimal.

(3) $e = 0, w > 0$ und $b < t_n(w, i)$:

Da $w > 0$ gilt $(1, 0, 0) \in D^1(x)$. Für den Fall $b = 0$ ist somit alles gezeigt. Im Fall $b > 0$ muss nur gezeigt werden, dass Aktion $(1, 0, 0)$ der Aktion $(0, 0, 1)$ vorzuziehen ist. Mit $b < t_n(w, i)$ gilt nach der Definition von $t_n(w, i)$

$$\Delta_{31}LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b - 1), i) \geq r_i^b - r_i^w,$$

also

$$r_i^w + LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b), i) \geq r_i^b + LV_{n+1}^1((w, 0, b - 1), i),$$

⁴³Es sei darauf hingewiesen, dass der Fall $e = 0, w = 0$ und $b < t_n(0, i)$ dem Fall $e = w = b = 0$ entspricht.

und damit

$$V_n^1(x, i) = \max_{a \in D_1(x)} \{ar_i^T + LV_{n+1}^1(x - a)\} = r_i^w + LV_{n+1}^1((w - 1, 0, b), i).$$

Somit ist $(1, 0, 0)$ optimal.

(4) $e = 0, w = 0$ und $b = 0$:

In diesem Fall ist kein Patient vorhanden und somit gilt $D^1(x) = \{(0, 0, 0)\}$.

□

Wir haben also gezeigt, dass im Fall $K = 1$ durch die Kontrollgrenzen $t_n(w, i)$ eine optimale Politik vollständig bestimmt wird und daher nur die Bestimmung dieser notwendig ist, um eine optimale Politik zu erhalten. Wir untersuchen nun, ob sich ein solches Resultat auch für den Fall $K > 1$ erhalten lässt. Dazu formulieren wir zunächst folgenden Satz:

Satz 5.6 *Sei $K \geq 1$. Sind die Annahmen (A2.1) und (A2.2) erfüllt, so ist die Politik $\pi \in F^N$, definiert durch die Entscheidungsfunktionen*

$$f_n^K(x, i) := f_n^1(x, i) + f_n^{K-1}(x - f_n^1(x, i)),$$

optimal.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $K = 1$

Es gilt mit $f_n^0(x, i) = (0, 0, 0)$ für alle $(x, i) \in X \times I$:

$$\begin{aligned} f_n^1(x, i) &= f_n^1(x, i) + f_n^0(x - f_n^1(x, i), i) \\ &= f_n^1(x, i) + (0, 0, 0) \\ &= f_n^1(x, i). \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

Induktionsschluss: $K \rightarrow K + 1$

Wäre zum Zeitpunkt n im Zustand (x, i) nur eine Behandlungseinheit vorhanden, so würden wir die Aktion $f_n^1(x, i)$ wählen. Wir weisen daher der ersten Behandlungseinheit einen Patienten gemäß dieser Aktion zu. Wegen $f_n^1(x, i) \leq x$ gilt $x - f_n^1(x, i) \in X$ und die Anzahl der jetzt noch verbliebenen Patienten wird durch diesen Zustand beschrieben. Es sind dann noch $K - 1$ Behandlungseinheiten vorhanden. Nach Induktionsannahme ist $f_n^{K-1}(x - f_n^1(x, i))$ eine optimale Aktion im Zustand $x - f_n^1(x, i)$ bei $K - 1$ Behandlungseinheiten. □

Wir haben nun eine Möglichkeit gefunden optimale Entscheidungsregeln für alle $K > 1$ rekursiv zu bestimmen. Wünschenswert wäre jedoch eine explizite Darstellung mit Hilfe der Kontrollgrenzen. Wir können uns dabei auf den Fall $e = 0$ und $w + b > K$ beschränken, da für $e > K$ bzw. $e = 0$ und $w + b \leq K$ die Aktionen $(0, K, 0)$ bzw. $(w, 0, b)$ die einzig zulässigen sind und der Fall $0 < e \leq K$ sich auf den Fall $e = 0$ mit $K - e$ Behandlungseinheiten zurückführen lässt. Innerhalb des Falls $e = 0$ und $w + b > K$ können wir zusätzlich $b = 0$ sowie $w = 0$ ausschließen, da in diesen Fällen $(K, 0, 0)$ bzw. $(0, 0, K)$ die einzig zulässigen Aktionen sind. Wir erhalten folgenden Satz.

Satz 5.7 Sei $K > 1$ und $(x, i) \in X \times I$ mit $x = (w, 0, b)$ und $w + b \geq K$. Weiter sei $b_K := \min\{b, K\}$ und $w_K := \min\{w, K\}$. Dann gilt $(K - b_K + k, 0, b_K - k) \in D^K(x, i)$ für $k = 0, \dots, \min\{b_K, w_K + b_K - K\} - 1$ und

$$f_n^K(x, i) = \begin{cases} (K - b_K, 0, b_K), & \text{falls } b \geq t_n(w - K + b_K, i) + (b_K - 1), \\ \\ (K - b_K + k, 0, b_K - k), & \text{falls } t_n(w - K + b_K - k + 1, i) + (b_K - k) > b \\ & \text{und } b \geq t_n(w - K + b_K - k, i) + (b_K - k - 1), \\ & \text{für } k = 1, \dots, \min\{b_K, w_K + b_K - K\} - 1, \\ \\ (w_K, 0, K - w_K), & \text{falls } t_n(w - w_K + 1, i) + K - w_K > b. \end{cases}$$

Beweis: Wegen $w + b \geq K$ müssen allen K Behandlungseinheiten Patienten zugewiesen werden und es gilt $w_K \geq K - b_K$ und $b_K \geq K - w_K$. Da b stationäre Patienten vorhanden sind, müssen, damit alle K Behandlungseinheiten ausgelastet sind, mindestens $K - b_K$ Behandlungseinheiten mit ambulanten Patienten belegt werden, höchstens können aber w_K stationäre behandelt werden. Andererseits müssen mindestens $K - w_K$ Behandlungseinheiten mit stationären Patienten belegt werden, höchstens aber können ambulante b_K behandelt werden. Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle:

1.Fall: $b \geq t_n(w - K + b_K, i) + (b_K - 1)$:

Da mindestens $K - b_K$ ambulante Patienten behandelt werden müssen, weisen wir diesen eine Behandlungseinheit zu. Es verbleiben $w - K + b_K$ ambulante Patienten. Wir müssen nun zeigen, dass die restlichen b_K Behandlungseinheiten stationären Patienten zugewiesen werden, also Aktion $(K - b_K, 0, b_K)$ gewählt wird. Wir wissen, dass $b - b_K + 1 \geq t_n(w - K + b_K, i)$ gilt und damit $b - d \geq t_n(w - K + b_K, i)$ für $d = 0, 1, \dots, b_K - 1$. Damit folgt $f_n^1(x - (K - b_K, 0, d)) = (0, 0, 1)$ für alle $d = 0, \dots, b_K - 1$. Also ist $(K - b_K, 0, b_K)$ optimal.

2.Fall: $t_n(w - K + b_K - k + 1, i) + (b_K - k) > b \geq t_n(w - K + b_K - k, i) + (b_K - k - 1)$, $k = 1, \dots, \min\{b_K, w_K + b_K - K\} - 1$:

Wie im vorherigen Fall werden $K - b_K$ Behandlungseinheiten jeweils ein ambulanter Patient zugewiesen. Es verbleiben $w - K + b_K$ ambulante Patienten, b stationäre und b_K Behandlungseinheiten. $(K - b_K + k, 0, b_K - k)$ ist genau dann optimal, wenn nun die Behandlung von $k + 1$ oder mehr ambulanten Patienten sowie die Behandlung von $b_K - k + 1$ oder mehr stationären Patienten jeweils suboptimal ist.

- (1) Wir weisen k Behandlungseinheiten jeweils einen ambulanten Patienten zu. Wir befinden uns nun im Zustand $(w - K + b_K - k, 0, b)$. Zu zeigen bleibt, dass es nun optimal ist, allen verbliebenen $b_K - k$ Behandlungseinheiten einen stationären Patienten zuzuweisen. Wegen $b \geq t_n(w - K + b_K - k, i) + (b_K - k - 1)$, folgt $b - b_K + k + 1 \geq t_n(w - K + b_K - k, i)$ und damit $b - d \geq t_n(w - K + b_K - k, i)$ für $d = 0, \dots, b_K - k - 1$.
- (2) Wir weisen $b_K - k$ Behandlungseinheiten einen stationären Patienten zu. Wir befinden uns nun im Zustand $(w - K + b_K, 0, b - b_K + k)$. Zu zeigen bleibt, dass es nun optimal ist, allen verbliebenen k Behandlungseinheiten einen ambulanten Patienten zuzuweisen. Da $t_n(w, i)$ monoton steigend in w ist folgt wegen $t_n(w - K + b_K - k + 1, i) + (b_K - k) > b$ auch $t_n(w - K + b_K - d, i) > b - b_K + k$ für $d = 0, \dots, k - 1$.

3.Fall: $t_n(w - w_K + 1, i) + K - w_K > b$:

Da mindestens $K - w_K$ stationäre Patienten behandelt werden müssen, weisen wir diesen einem

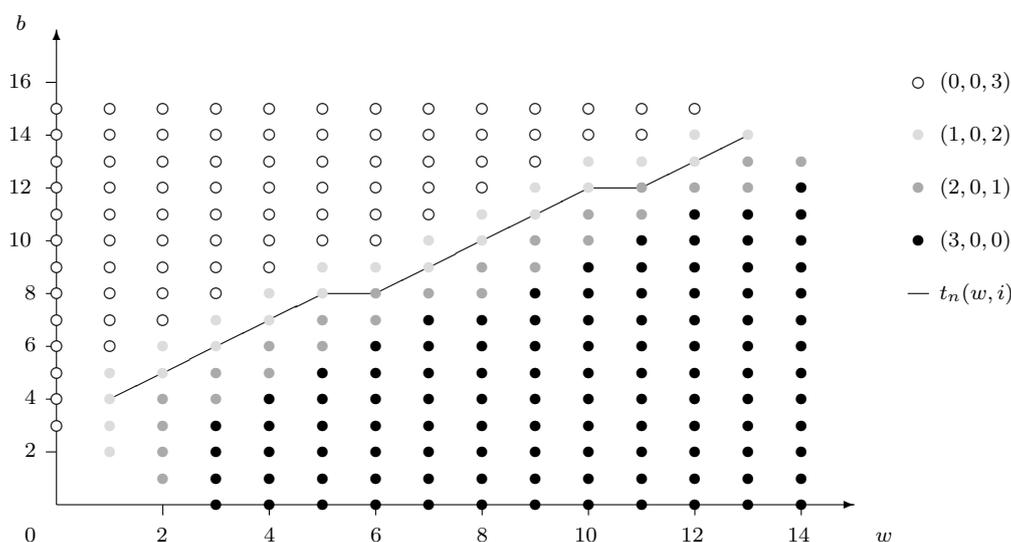


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung der in den Sätzen 5.6 und 5.7 beschriebenen Entscheidungsregel für $K = 3$ und nicht vorhandenen Notfällen.

Behandlungseinheiten zu. Es verbleiben $b - K + w_K$ stationäre Patienten. Wir müssen nun zeigen, dass die restlichen w_K Behandlungseinheiten ambulante Patienten behandeln, also Aktion $(w_K, 0, K - w_K)$ gewählt wird. Wir wissen, dass $t_n(w - w_K + 1, i) > b - K + w_K$ gilt und, da $t_n(w, i)$ monoton steigend in w ist, folgt $t_n(w - d + 1, i) > b - K + w_K$ für $d = 0, 1, \dots, w_K$. Damit folgt $f_n^1(x - (d, 0, K - w_K)) = (1, 0, 0)$ für alle $d = 0, 1, \dots, w_K$. Also ist $(w_K, 0, K - w_K)$ optimal. \square

Wir können also für jedes $K \in \mathbb{N}_0$ eine optimale Politik vollständig durch die Kontrollgrenzen bestimmen und explizit angeben. Die Kontrollgrenzen lassen sich dabei im Fall $K = 1$ berechnen. Für die weiteren Untersuchungen können wir uns daher auf diesen Fall beschränken und schreiben HV_n, LV_n und V_{n-1} statt HV_n^1, LV_n^1 sowie V_{n-1}^1 , $n = 1, \dots, N$.

Wir wollen nun untersuchen, ob die Bestimmung dieser Grenzen vereinfacht werden kann und welche Konsequenzen sich daraus für die Wertfunktionen V_n ergeben. Um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen, sind jedoch weitere Annahmen notwendig. Zunächst konzentrieren wir uns auf Abhängigkeiten der Kontrollgrenzen vom Zeitpunkt. Dazu benötigen wir die folgenden Annahmen:

Annahmen:

(A2.3) Für die Ankunftsverteilung p_i gilt für alle $i \in I$ und $x, x' \in X$:

$$p_i(x, x') = \tilde{p}_i(x' - x),$$

falls $x' - x \geq (0, 0, 0)$ und 0 sonst.

(A2.4) Für die terminale Gewinnfunktion V_N gilt:

$$\Delta_{31} V_N(x, i) \leq \Delta_{31} V_{N-1}(x, i), \quad \forall (x, i) \in X \times I.$$

Anschaulich bedeutet (A2.3), dass die Anzahl neu ankommender Patienten innerhalb einer Zeiteinheit unabhängig von der aktuellen Anzahl der auf eine Behandlung wartenden Patienten ist. (A2.4) hat die anschauliche Interpretation, dass ein zusätzlicher stationärer Patient im Vergleich zu einem zusätzlichen ambulanten Patienten zum Zeitpunkt N weniger Gewinn erbringt als zum Zeitpunkt $N - 1$.

Nun kann eine Monotonie in der Zeit bewiesen werden. Wir zeigen jedoch zunächst, dass Annahme (A2.1) aus Annahme (A2.3) folgt und formulieren das nachfolgende Lemma:

Satz 5.8 *Ist Annahme (A2.3) erfüllt, so auch (A2.1).*

Beweis: Sei $h : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}$ multimodular und $g : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_i(x) := \sum_{x' \in \mathbb{N}_0^3} p_i(x, x') h(x').$$

Dann folgt mit (A2.3)

$$\begin{aligned} g_i(x) &= \sum_{x' \in \mathbb{N}_0^3} p_i(x, x') h(x') \\ &= \sum_{x' \geq x} \tilde{p}_i(x' - x) h(x') \\ &= \sum_{(k, l, m) \in \mathbb{N}_0^3} \tilde{p}_i(k, l, m) h(x + (k, l, m)). \end{aligned}$$

g_i ist dann als Mischung von multimodularen Funktionen selbst multimodular. □

Lemma 5.9 *Ist (A2.3) erfüllt und $(x, i) \in X \times I$, so gilt*

$$\Delta_{31} H V_n(x, i) = \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') \Delta_{31} V_n(x + x', j)$$

für alle $n = 1, \dots, N$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{31} H V_n(x, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \Delta_{31} p(x, x') V_n(x', j) \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} (p_i(x + e_3, x') - p_i(x + e_1, x')) V_n(x', j) \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} (\tilde{p}_i(x' - x - e_3) - \tilde{p}_i(x' - x - e_1)) V_n(x', j) \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') (V_n(x + x' + e_3, j) - V_n(x + x' + e_1, j)) \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') \Delta_{31} V_n(x + x', j). \end{aligned}$$

□

Satz 5.10 Unter (A2.2)-(A2.4) gilt für alle $n = 1, \dots, N - 1$, $w \in \mathbb{N}_0$ und $i \in I$:

$$(1) \quad t_n(w, i) \leq t_{n-1}(w, i);$$

$$(2) \quad \Delta_{31}V_n(\cdot, i) \leq \Delta_{31}V_{n-1}(\cdot, i).$$

Beweis: Sei $(x, i) \in X \times I$ mit $x = (w, e, b)$. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = N - 1$

Wir zeigen zunächst $t_{N-1}(w, i) \leq t_{N-2}(w, i)$. Es folgt mit Lemma 5.9

$$\begin{aligned} \Delta_{31}HV_N(x, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') \Delta_{31}V_N(x + x', j) \\ &\leq \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') \Delta_{31}V_{N-1}(x + x', j) \\ &= \Delta_{31}HV_{N-1}(x, i) \end{aligned}$$

und damit auch $\Delta_{31}LV_N(x, i) \leq \Delta_{31}LV_{N-1}(x, i)$. Aufgrund der Definition der $t_n(w, i)$ folgt dann $t_{N-1}(w, i) \leq t_{N-2}(w, i)$. Wir zeigen nun $\Delta_{31}V_{N-1}(x, i) \leq \Delta_{31}V_{N-2}(x, i)$.

1. Fall: $e > 0$

Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\ &= r_i^e + LV_N((w, e - 1, b + 1), i) - r_i^e - LV_N((w + 1, e - 1, b), i) \\ &\leq r_i^e + LV_{N-1}((w, e - 1, b + 1), i) - r_i^e - LV_{N-1}((w + 1, e - 1, b), i) \\ &= \Delta_{31}V_{N-2}(x, i). \end{aligned}$$

2. Fall: $e = 0, w > 0$ und $b > 0$

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle

(1) $b + 1 \geq t_{N-1}(w, i)$ und $b \geq t_{N-2}(w + 1, i)$:

In diesem Fall gilt auch $b \geq t_{N-1}(w + 1, i)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, 0, b), i) \\ &= r_i^b + LV_N((w, 0, b), i) - r_i^b - LV_N((w + 1, 0, b - 1), i) \\ &\leq r_i^b + LV_{N-1}((w, 0, b), i) - r_i^b - LV_{N-1}((w + 1, 0, b - 1), i) \\ &= r_i^b + LV_{N-1}((w, 0, b), i) - V_{N-2}((w + 1, 0, b), i) \\ &\leq V_{N-2}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-2}((w + 1, 0, b), i) \\ &= \Delta_{31}V_{N-2}(x, i). \end{aligned}$$

(2) $b + 1 \geq t_{N-1}(w, i)$ und $b < t_{N-2}(w + 1, i)$:

Es folgt

$$\begin{aligned} \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, 0, b), i) \\ &= r_i^b + LV_N((w, 0, b), i) - V_{N-1}((w + 1, 0, b), i) \\ &\leq r_i^b - r_i^w \\ &= r_i^b + LV_{N-1}((w, 0, b), i) - r_i^w - LV_{N-1}((w, 0, b), i) \\ &\leq V_{N-2}((w, 0, b + 1), i) - r_i^w - LV_{N-1}((w, 0, b), i) \\ &= V_{N-2}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-2}((w + 1, 0, b), i) \\ &= \Delta_{31}V_{N-2}(x, i). \end{aligned}$$

(3) $b + 1 < t_{N-1}(w, i)$:

In diesem Fall gilt auch $b + 1 < t_{N-2}(w, i)$ sowie $b < t_{N-1}(w + 1, i) \leq t_{N-2}(w + 1, i)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, 0, b), i) \\
 &= r_i^w + LV_N((w - 1, 0, b + 1), i) - r_i^w - LV_N((w, 0, b), i) \\
 &\leq r_i^w + LV_{N-1}((w - 1, 0, b + 1), i) - r_i^w - LV_{N-1}((w, 0, b), i) \\
 &= V_{N-2}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-2}((w + 1, 0, b), i) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-2}(x, i).
 \end{aligned}$$

3.Fall: $e = 0, w = 0$ und $b \geq 0$:

Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle

(1) $b < t_{N-2}(1, i)$:

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((0, 0, b + 1), i) - V_{N-1}((1, 0, b), i) \\
 &= r_i^b + LV_N((0, 0, b), i) - V_{N-1}((1, 0, b), i) \\
 &\leq r_i^b - r_i^w \\
 &= r_i^b + LV_{N-1}((0, 0, b), i) - r^w - LV_{N-1}((0, 0, b), i) \\
 &= V_{N-2}((0, 0, b + 1), i) - V_{N-2}((1, 0, b), i) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-2}(x, i)
 \end{aligned}$$

(2) $b \geq t_{N-2}(1, i)$:

In diesem Fall gilt auch $b \geq t_{N-1}(1, i)$ und $b \geq 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((0, 0, b + 1), i) - V_{N-1}((1, 0, b), i) \\
 &= r_i^b + LV_N((0, 0, b), i) - r_i^b - LV_N((1, 0, b - 1), i) \\
 &\leq r_i^b + LV_{N-1}((0, 0, b), i) - r_i^b - LV_{N-1}((1, 0, b - 1), i) \\
 &= V_{N-2}((0, 0, b + 1), i) - V_{N-2}((1, 0, b), i) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-2}(x, i).
 \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n - 1$

Der Induktionsschritt erfolgt auf die gleiche Art und Weise wie der Induktionsanfang. \square

Wir haben also gezeigt, dass bei gleichem Umweltzustand und gleicher Anzahl wartender ambulanter Patienten die Kontrollgrenzen zu späteren Zeitpunkten niedriger sind als zu früheren. Dies ist intuitiv nachvollziehbar: Je näher das Ende des Tages rückt, desto geringer fallen die Wartezeiten ambulanter Patienten und desto mehr fallen die hohen Strafkosten für stationäre Patienten ins Gewicht. Die Monotonie der Kontrollgrenzen bietet den Vorteil, dass die Berechnung der Kontrollgrenzen vereinfacht wird und die Politik den Entscheidungsträgern in der medizinischen Einrichtung leichter zu vermitteln ist. Jedoch ist zu beachten, dass diese Monotonie nur bei gleichem Umweltzustand gilt. Liegt zu einem späteren Zeitpunkt ein anderer Umweltzustand vor, so kann es auch zu einem späteren Zeitpunkt sinnvoll sein, ambulanten Patienten den Vorzug zu gewähren. Dies

ist z.B. der Fall, wenn die Umwelt einen Einfluss auf die Ankünfte von Patienten hat.⁴⁴ Daher reduziert die Monotonie in der Zeit nur in beschränktem Maße den Aufwand für die Bestimmung der Kontrollgrenzen. Zwar haben wir in Satz 5.10 die Monotonie nur bei gleicher Anzahl wartender Patienten gezeigt, doch mit Lemma 5.4 lässt sich das Resultat verallgemeinern:

Korollar 5.11 *Unter (A2.2)-(A2.4) gilt für alle $n = 1, \dots, N - 1$, $(x, i) \in X \times I$ und $w \in \mathbb{N}_0$:*

- (1) $t_n(w, i) \leq t_{n-1}(w + 1, i)$;
- (2) $\Delta_{31}V_n(x, i) \leq \Delta_{31}V_{n-1}(x + e_1, i)$.

Wir können nun mit Hilfe der nächsten Annahme eine Aussage über die Beziehung der Kontrollgrenzen hinsichtlich verschiedener Umweltzustände untereinander treffen.

Annahme:

(A2.5) (A2.3) sei erfüllt und auf der Menge I sei eine Partialordnung \leq_I definiert. Sei weiter die Funktion $\varphi_i : \mathbb{N}_0^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$, definiert durch

$$\varphi_i(k, l, m) := \sum_{z \geq k} \tilde{p}_i(z, l, m), \quad k, l, m \in \mathbb{N}_0,$$

und $I(i) := \{j \in I \mid q(i, j) > 0\}$ die Menge der vom Umweltzustand i aus mit positiver Wahrscheinlichkeit in einem Schritt erreichbaren Umweltzustände. Dann sei für $i \leq_I j$, $(k, l, m) \in \mathbb{N}_0^3$ sowie $x \in X$ Folgendes erfüllt:

- (i) $\varphi_i(0, l, m) = \varphi_j(0, l, m)$ sowie $\varphi_i(k, l, m) \leq \varphi_j(k, l, m)$, $k \geq 1$;
- (ii) $\Delta_{31}c_i(x) \geq \Delta_{31}c_j(x)$;
- (iii) r_i^w, r_i^e sowie r_i^b sind unabhängig von i ;
- (iv) $q(i, r) \leq q(j, r)$ für alle $r \in I(j)$ und $r \leq_I \bar{r}$ für alle $r \in I(i) \setminus I(j)$ und $\bar{r} \in I(j)$;
- (v) $\Delta_{31}V_N(x, i) \leq \Delta_{31}V_N(x, j)$.

Anschaulich bedeutet (A2.5)(i) zum einen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau l Notfälle und m stationäre Patienten ankommen, unabhängig vom Umweltzustand ist und zum anderen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau l Notfälle, m stationäre und mindestens $k > 0$ ambulante Patienten ankommen, in einem kleineren Umweltzustand geringer ist. (A2.5)(ii) und (v) drücken aus, dass ein zusätzlicher stationärer Patient im Vergleich zu einem zusätzlichen ambulanten Patienten in Umweltzustand i höhere Wartekosten bzw. höhere terminale Kosten verursacht als in einem größeren Umweltzustand. (A2.5)(iv) hat die anschauliche Interpretation, dass ausgehend von einem kleineren Umweltzustand mit größerer Wahrscheinlichkeit in einem Schritt in einen kleineren gelangt wird als ausgehend von einem größeren Umweltzustand. Um nun eine Aussage über die Abhängigkeit der Kontrollgrenzen vom Umweltzustand treffen zu können, benötigen wir zunächst noch das folgende Lemma:

⁴⁴Allerdings erhalten wir mit dem auf Seite 88 hergeleiteten Satz 5.13 mit Hilfe der nächsten Annahme Aussagen über die Monotonie in der Zeit, wenn unterschiedliche Umweltzustände vorliegen. Siehe dazu Korollar 5.14 auf Seite 92.

Lemma 5.12 Sei $x \in X$, und $n = 0, 1, \dots, N$. Ist (A2.5)(iv) erfüllt und gilt zusätzlich

$$\Delta_{31}V_n(x, i) \leq \Delta_{31}V_n(x, j), \quad \forall i, j \in I \text{ mit } i \leq_I j,$$

so folgt

$$\sum_{r \in I} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r) \leq \sum_{r \in I} q(j, r) \Delta_{31}V_n(x, r).$$

Beweis: Seien $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$. Wegen $q(i, r) \leq q(j, r)$ für alle $r \in I(j)$ existieren $s_{ij}(r) \geq 0$ mit $q(i, r) + s_{ij}(r) = q(j, r)$ und

$$\sum_{r \in I(j)} s_{ij}(r) = \sum_{r \in I(i) \setminus I(j)} q(i, r).$$

Sei nun $\hat{r} \in I(j)$ so, dass $\Delta_{31}V_n(x, \hat{r}) \leq \Delta_{31}V_n(x, r)$ für alle $r \in I(j)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{r \in I} q(j, r) \Delta_{31}V_n(x, r) &= \sum_{r \in I(j)} q(j, r) \Delta_{31}V_n(x, r) \\ &= \sum_{r \in I(j)} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r) + \sum_{r \in I(j)} s_{ij}(r) \Delta_{31}V_n(x, r) \\ &\geq \sum_{r \in I(j)} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r) + \sum_{r \in I(j)} s_{ij}(r) \Delta_{31}V_n(x, \hat{r}) \\ &= \sum_{r \in I(j)} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r) + \sum_{r \in I(i) \setminus I(j)} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, \hat{r}) \\ &\geq \sum_{r \in I(j)} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r) + \sum_{r \in I(i) \setminus I(j)} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r) \\ &= \sum_{r \in I(i)} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r) \\ &= \sum_{r \in I} q(i, r) \Delta_{31}V_n(x, r). \end{aligned} \quad \square$$

Satz 5.13 Unter (A2.2) und (A2.5) gilt für alle $n = 0, 1, \dots, N - 1$, $w \in \mathbb{N}_0$ und $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$:

- (1) $t_n(w, i) \leq t_n(w, j)$;
- (2) $\Delta_{31}V_n(\cdot, i) \leq \Delta_{31}V_n(\cdot, j)$.

Beweis: Sei $(x, i) \in X \times I$ mit $x = (w, e, b)$. Der Beweis erfolgt durch Induktion:

Induktionsanfang: $n = N - 1$

Wir zeigen zunächst die erste Aussage. Mit den Lemmata 3.23, 5.9 und 5.12 sowie (A2.5) erhalten

wir

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{31}HV_N(x, i) \\
 &= \sum_{r \in I} q(i, r) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') \Delta_{31}V_N(x + x', r) \\
 &\leq \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') \Delta_{31}V_N(x + x', r) \\
 &= \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{(k, l, m) \in X} (\varphi_i(k, l, m) - \varphi_i(k + 1, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \\
 &= \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{(l, m) \geq (0, 0)} \left[\sum_{k \geq 0} (\varphi_i(k, l, m) - \varphi_j(k, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \geq 0} (\varphi_j(k, l, m) - \varphi_i(k + 1, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \right] \\
 &= \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{(l, m) \geq (0, 0)} \left[\sum_{k \geq 1} (\varphi_i(k, l, m) - \varphi_j(k, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \geq 0} (\varphi_j(k, l, m) - \varphi_i(k + 1, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \right] \\
 &\leq \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{(l, m) \geq (0, 0)} \left[\sum_{k \geq 1} (\varphi_i(k, l, m) - \varphi_j(k, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k - 1, l, m), r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \geq 0} (\varphi_j(k, l, m) - \varphi_i(k + 1, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \right] \\
 &= \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{(l, m) \geq (0, 0)} \left[\sum_{k \geq 0} (\varphi_i(k + 1, l, m) - \varphi_j(k + 1, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k \geq 0} (\varphi_j(k, l, m) - \varphi_i(k + 1, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \right] \\
 &= \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{(k, l, m) \in X} (\varphi_j(k, l, m) - \varphi_j(k + 1, l, m)) \Delta_{31}V_N(x + (k, l, m), r) \\
 &= \sum_{r \in I} q(j, r) \sum_{(k, l, m) \in X} \tilde{p}_j(x') \Delta_{31}V_N(x + x', r) \\
 &= \Delta_{31}HV_N(x, j).
 \end{aligned}$$

Mit (A2.5)(ii) folgt dann $\Delta_{31}LV_N(x, i) \leq \Delta_{31}LV_N(x, j)$ und somit $t_{N-1}(w, i) \leq t_{N-1}(w, j)$. Zu zeigen bleibt nun $\Delta_{31}V_{N-1}(x, i) \leq \Delta_{31}V_{N-1}(x, j)$. Wir unterscheiden dazu die folgenden Fälle:

1. Fall: $e > 0$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\
 &= r^e + LV_N((w, e - 1, b + 1), i) - r^e - LV_N((w + 1, e - 1, b), i) \\
 &\leq r^e + LV_N((w, e - 1, b + 1), j) - r^e - LV_N((w + 1, e - 1, b), j) \\
 &= V_{N-1}((w, e, b + 1), j) - V_{N-1}((w + 1, e, b), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

2. Fall: $e = 0, w > 0$ und $b > 0$

Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

- (1) $b + 1 \geq t_{N-1}(w, i)$ und $b < t_{N-1}(w + 1, j)$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\
 &= r^b + LV_N((w, e, b), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\
 &\leq r^b + LV_N((w, e, b), i) - r^w - LV_N((w, e, b), i) \\
 &= r^b + LV_N((w, e, b), j) - r^w - LV_N((w, e, b), j) \\
 &\leq V_{N-1}((w, e, b + 1), j) - r^w - LV_N((w, e, b), j) \\
 &= V_{N-1}((w, e, b + 1), j) - V_{N-1}((w + 1, e, b), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

- (2) $b + 1 \geq t_{N-1}(w, i)$ und $b \geq t_{N-1}(w + 1, j)$:

Damit gilt auch $b \geq t_{N-1}(w + 1, i)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\
 &= r^b + LV_N((w, e, b), i) - r^b - LV_N((w + 1, e, b - 1), i) \\
 &\leq r^b + LV_N((w, e, b), j) - r^b - LV_N((w + 1, e, b - 1), j) \\
 &= r^b + LV_N((w, e, b), j) - V_{N-1}((w + 1, e, b), j) \\
 &\leq V_{N-1}((w, e, b + 1), j) - V_{N-1}((w + 1, e, b), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

- (3) $b + 1 < t_{N-1}(w, i)$:

Damit gilt auch $b + 1 < t_{N-1}(w, j)$ und $b < t_{N-1}(w + 1, i) \leq t_{N-1}(w + 1, j)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\
 &= r^w + LV_N((w - 1, e, b + 1), i) - r^w - LV_N((w, e, b), i) \\
 &\leq r^w + LV_N((w - 1, e, b + 1), j) - r^w - LV_N((w, e, b), j) \\
 &= V_{N-1}((w, e, b + 1), j) - V_{N-1}((w + 1, e, b), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

3.Fall: $e = 0, w = 0$ und $b \geq 0$

Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle

(1) $b \geq t_{N-1}(1, j)$:

Damit gilt auch $b \geq t_{N-1}(1, i)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((0, 0, b+1), i) - V_{N-1}((1, 0, b), i) \\
 &= r^b + LV_N((0, 0, b), i) - r^b - LV_N((1, 0, b-1), i) \\
 &\leq r^b + LV_{N-1}((0, 0, b), j) - r^b - LV_{N-1}((1, 0, b-1), j) \\
 &= V_{N-1}((0, 0, b+1), j) - V_{N-1}((1, 0, b), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

(2) $b < t_{N-1}(1, j)$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((0, 0, b+1), i) - V_{N-1}((1, 0, b), i) \\
 &= r^b + LV_N((0, 0, b), i) - V_{N-1}((1, 0, b), i) \\
 &\leq r^b - r^w \\
 &= r^b + LV_N((0, 0, b), j) - r^w - LV_N((0, 0, b), j) \\
 &= V_{N-1}((0, 0, b+1), j) - V_{N-1}((1, 0, b), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

4.Fall: $e = 0, b = 0$ und $w \geq 1$:

Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle

(1) $1 = t_{N-1}(w, i)$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, 0, 1), i) - V_{N-1}((w+1, 0, 0), i) \\
 &= r^b - r^w \\
 &= r^b + LV_N((w, 0, 0), j) - r^w - LV_N((w, 0, 0), j) \\
 &\leq V_{N-1}((w, 0, 1), j) - r^w - LV_N((w, 0, 0), j) \\
 &= V_{N-1}((w, 0, 1), j) - V_{N-1}((w+1, 0, 0), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

(2) $1 < t_{N-1}(w, i)$:

Damit gilt auch $1 < t_{N-1}(w, j)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, 0, 1), i) - V_{N-1}((w+1, 0, 0), i) \\
 &= r^w + LV_N((w-1, 0, 1), i) - r^w - LV_N((w, 0, 0), i) \\
 &\leq r^w + LV_N((w-1, 0, 1), j) - r^w - LV_N((w, 0, 0), j) \\
 &= V_{N-1}((w, 0, 1), j) - V_{N-1}((w+1, 0, 0), j) \\
 &= \Delta_{31}V_{N-1}(x, j).
 \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n - 1$

Der Induktionsschritt erfolgt auf die gleiche Art und Weise wie der Induktionsanfang. □

Korollar 5.14 *Unter (A2.2), (A2.4) sowie (A2.5) gilt für alle $n = 0, 1, \dots, N - 1$, $w \in \mathbb{N}_0$ und $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$:*

$$(1) \quad t_n(w, i) \leq t_{n-1}(w, j);$$

$$(2) \quad \Delta_{31}V_n(\cdot, i) \leq \Delta_{31}V_{n-1}(\cdot, j).$$

Beweis: Folgt mit den Sätzen 5.10 sowie 5.13. □

Bemerkung 5.15 *Gilt $q(i, r) = q(j, r)$ für alle $i, j, r \in I$, so gelten die Aussagen von Satz 5.13 und Korollar 5.14 auch ohne Annahme (A2.5)(v).*

5.4 Terminplan als Umwelt

Im Grundmodell wurde die Anzahl der Ankünfte der einzelnen Patientenklassen durch p_i beschrieben und war damit abhängig vom Umweltzustand i . Da der Umweltzustand nicht weiter beschrieben wurde, ist dies sehr allgemein. Insbesondere haben wir damit keinen expliziten Terminplan für die ambulanten Patienten angegeben. In der Regel ist aber durch einen Terminplan festgelegt, zu welchem Zeitpunkt wieviele Patienten ankommen sollen. Wir wollen daher in diesem Abschnitt das Modell so gestalten, dass ein expliziter Terminplan zugrunde liegt, indem wir einen solchen als Umweltzustand einführen. Um die Notation aus Abschnitt 4.4 beizubehalten, schreiben wir im folgenden für den Umweltzustand m statt i .

Für den betrachteten Tag liege ein Terminplan $s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1}) \in \mathbb{N}_0^N$ vor, wobei s_n die Anzahl ambulanter Patienten bezeichne, die für das Zeitintervall $[n, n + 1)$ eingeplant sind. Die Wahrscheinlichkeiten, dass ambulante Patienten ankommen, seien unabhängig voneinander. Jeder ambulante Patient erscheint mit Wahrscheinlichkeit q^w pünktlich zu seinem Termin und mit Wahrscheinlichkeit $1 - q^w$ überhaupt nicht.⁴⁵ Die Anzahl der tatsächlich erschienenen ambulanten Patienten zum Zeitpunkt n ist damit binomialverteilt mit den Parametern s_n und q^w .

Darüber hinaus werden noch einige Vereinfachungen in diesem Modell vorgenommen. So nehmen wir an, dass die Ankünfte von Notfällen und stationären Patienten unabhängig vom Umweltzustand (also vom Terminplan), von der Anzahl angekommener ambulanter Patienten sowie unabhängig von der Anzahl der wartenden Patienten sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau e' Notfälle und b' stationäre Patienten ankommen, bezeichnen wir mit $p(e', b')$. Des Weiteren seien die einstufige Kostenfunktion c_m , die terminale Kostenfunktion $-V_N(\cdot, m)$ und die Gewinne r_m^w, r_m^e und r_m^b unabhängig von m . Da zum Zeitpunkt n die zukünftige Entwicklung des Systems vom Terminplan nur noch von s_n, \dots, s_{N-1} abhängt, sei der Umweltzustand m zum Zeitpunkt n dann gegeben durch $m = (m_1, \dots, m_N) = (s_n, \dots, s_{N-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^N$ und es gelte $I = \mathbb{N}_0^N$.⁴⁶ Liegt zur Zeit n also Umweltzustand $m = (m_1, \dots, m_N)$ vor, so ist der Umweltzustand zum Zeitpunkt $n + 1$

⁴⁵Das bedeutet, dass wir in diesem Modell weder Stornierungen noch Verspätungen betrachten. Siehe dazu Abschnitt 5.6.

⁴⁶Auf die gleiche Weise könnte man auch $m = (m_1, \dots, m_N) = (s_n, \dots, s_{N-1}, z, \dots, z)$ für beliebiges z setzen.

gerade $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_N) := (m_2, \dots, m_N, 0)$. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Umweltzustand m in einen Umweltzustand m' gilt damit

$$q(m, m') = \begin{cases} 1, & \text{falls } m' = \tilde{m}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_m(x, x')$ von einem Zustand $x = (w, e, b)$ in einen Zustand $x' = (w', e', b')$ gilt mit $\tilde{x} = (\tilde{w}, \tilde{e}, \tilde{b})$

$$p_m(x, x') = \begin{cases} P(Y_{\tilde{m}_1, q^w} = \tilde{w})p(\tilde{e}, \tilde{b}), & \text{falls } \tilde{x} = x' - x, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $Y_{\tilde{m}_1, q^w}$ eine binomial(\tilde{m}_1, q^w)-verteilte Zufallsvariable sei. Zunächst halten wir fest, dass die Annahme (A2.3) erfüllt ist, also $p_m(x, x') = \tilde{p}_m(x' - x)$ gilt. Für die Funktionen HV_n sowie LV_n gilt mit $x' = (w', e', b')$

$$\begin{aligned} HV_n(x, m) &= \sum_{e', b'=0}^{\infty} p(e', b') \sum_{w'=0}^{\tilde{m}_1} P(Y_{\tilde{m}_1, q^w} = w') V_n(x + x', \tilde{m}) \\ &= \sum_{e', b'=0}^{\infty} p(e', b') \sum_{w'=0}^{m_2} P(Y_{m_2, q^w} = w') V_n(x + x', \tilde{m}) \end{aligned}$$

und

$$LV_n(x, m) = -c(x) + HV_n(x, m).$$

Zunächst wollen wir prüfen, welche Strukturaussagen sich aus dem allgemeinen Modell übertragen lassen. Annahme (A2.1) ist erfüllt, da (A2.3) erfüllt ist. Bei geeigneter Wahl der Kostenfunktionen ist auch (A2.2) erfüllt, so dass auch hier eine optimale Politik in Gestalt einer monotonen Switching-Curve gefunden werden kann. Bei weiteren Einschränkungen an die Ankunftsverteilungen sowie die Kostenfunktionen ist auch (A2.4) erfüllt, so dass dann die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von Satz 5.10, der eine Monotonie in der Zeit beweist, erfüllt sind. Jedoch gilt die Aussage nur bei identischen Umweltzuständen. Daher hat Satz 5.10 zunächst nur Aussagekraft für Terminpläne, bei denen zu jedem Zeitpunkt gleich viele Patienten eingeplant sind.⁴⁷ Das in diesem Abschnitt hergeleitete Korollar 5.18 ermöglicht jedoch die Verwendung von Satz 5.10 auf weitere Terminpläne.⁴⁸

Es bleibt Annahme (A2.5) zu überprüfen. Die Gültigkeit dieser Annahme wäre wünschenswert, da damit eine Monotonie im Umweltzustand erfüllt ist. Damit kann wiederum untersucht werden, inwiefern sich die Kontrollgrenzen ändern, wenn wir eine Änderung an einer Stelle des Terminplans vornehmen, d.h., wenn statt des Terminplans $s = (s_0, \dots, s_i, \dots, s_{N-1})$ der Terminplan $s = (s_0, \dots, \bar{s}_i, \dots, s_{N-1})$ zugrunde liegt. Zunächst können wir zeigen, dass $t(\cdot, m)$, $HV_n(\cdot, m)$, $LV_n(\cdot, m)$ und $V_n(\cdot, m)$ unabhängig von m_1 sind.

⁴⁷In diesem Fall setzt man dann auch den Umweltzustand zur Zeit n als $(m_1, \dots, m_N) = (s_n, \dots, s_{N-1}, z, \dots, z)$, wobei z gerade die Anzahl eingeplanter Patienten zu den einzelnen Zeitpunkten sei.

⁴⁸Siehe Seite 95.

Lemma 5.16 Die Kontrollgrenzen t_n sowie HV_n und LV_n hängen von m nur über m_2, \dots, m_N ab. D.h. es gilt

$$\begin{aligned} HV_n(x, m) &= HV_n(x, m + e_1), \\ LV_n(x, m) &= LV_n(x, m + e_1), \\ V_n(x, m) &= V_n(x, m + e_1), \\ t_n(w, m) &= t_n(w, m + e_1). \end{aligned}$$

Um Satz 5.13 anwenden zu können, definieren wir zunächst eine Partialordnung auf I durch

$$m \geq m' :\Leftrightarrow_1 m_i \geq m'_i \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad m, m' \in I. \quad (5.2)$$

Nun zeigen wir, dass die für die Anwendung des Satzes 5.13 notwendige Bedingung (A2.5) erfüllt ist.

Lemma 5.17 Für das Modell mit Terminplan und der in (5.2) definierten Partialordnung ist Annahme (A2.5) erfüllt.

Beweis: (A2.3) ist nach Modellbeschreibung erfüllt. (A2.5) (ii), (iii) sowie (v) sind laut Modellbeschreibung erfüllt, da Wartekosten, terminale Kosten sowie Gewinne unabhängig vom Terminplan sind. Wir zeigen noch (i) und (iv). Seien dazu $m, m' \in I$ mit $m \geq m'$:

- (i) Es gilt $\varphi_m(\kappa, \lambda, \mu) = p(\lambda, \mu)P(Y_{m_2, q^w} \geq \kappa)$ und damit folgt sofort $\varphi_m(\kappa, \lambda, \mu) = \varphi_{m'}(\kappa, \lambda, \mu)$ für alle $\kappa \geq 0$ und solche m, m' für die $m_2 = m'_2$ gilt. Für m, m' mit $m_2 > m'_2$ reicht es, die Aussage für $m_2 = m'_2 + 1$ zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} P(Y_{m_2, q^w} \geq \kappa) &= P(Y_{m'_2, q^w} + Y_{1, q^w} \geq \kappa) \\ &= (1 - q^w)P(Y_{m'_2, q^w} \geq \kappa) + q^w P(Y_{m'_2, q^w} \geq \kappa - 1) \\ &\geq P(Y_{m'_2, q^w} \geq \kappa), \end{aligned}$$

wobei für $\kappa = 0$ die Gleichheit gilt. Damit ist die Aussage bewiesen.

- (iv) Für einen Umweltzustand m besteht die Menge der von diesem in einem Schritt erreichbaren Umweltzustände nur aus \tilde{m} . Damit gilt $q(m, r) = 1 \geq q(m', r)$ für $r \in I(m)$. Da $m_i \geq m'_i$ für alle $i = 1, \dots, N$ gilt auch $\tilde{m}_i \geq \tilde{m}'_i$ für alle $i = 1, \dots, N - 1$ und $\tilde{m}_N = \tilde{m}'_N = 0$. □

Korollar 5.18 Unter (A2.2) gilt für alle $n = 0, 1, \dots, N - 1$, $m \in M$ und $k = 2, \dots, N - n$

- (1) $t_n(w, m) \leq t_n(w, m + e_k)$;
- (2) $\Delta_{31}V_n(\cdot, m) \leq \Delta_{31}V_n(\cdot, m + e_k)$.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 5.13 und Lemma 5.17. □

Korollar 5.19 *Unter (A2.2) und (A2.4) gilt für alle $n = 0, 1, \dots, N - 1$, $m \in M$ und $k = 2, \dots, N - n$*

- (1) $t_n(w, m) \leq t_{n-1}(w, m + e_k)$;
- (2) $\Delta_{31}V_n(\cdot, m) \leq \Delta_{31}V_{n-1}(\cdot, m + e_k)$.

Beweis: Folgt mit Satz 5.10 und Korollar 5.18. □

Mit diesen beiden Korollaren folgt nun das folgende Korollar:

Korollar 5.20 *Seien (A2.2) und (A2.4) erfüllt und s ein Terminplan mit $s_n \geq s_{n+1}$ und m bzw. \tilde{m} die daraus resultierenden Umweltzustände zu den Zeitpunkten $n - 1$ bzw. n , $n = 1, \dots, N - 1$. Dann gilt*

- (1) $t_n(\tilde{m}) \leq t_{n-1}(m)$;
- (2) $\Delta_{31}V_n(\cdot, \tilde{m}) \leq \Delta_{31}V_n(\cdot, m)$.

5.5 Ankunftsverteilungen und Kostenfunktionen

Zentral für unsere Strukturaussagen sind einige Annahmen an die Kostenfunktionen sowie an die Ankunftsverteilung. Von besonderer Bedeutung sind (A2.1) und (A2.2). Diese benötigen wir für die Optimalität einer monotonen Switching-Curve und sollten daher immer erfüllt sein. Alle im Folgenden betrachteten Kostenfunktionen erfüllen daher Annahme (A2.2). Um zusätzliche Strukturaussagen zu erhalten, forderte (A2.3) die Unabhängigkeit der Ankünfte neuer Patienten von der momentanen Anzahl wartender Patienten. Ist dies erfüllt, so ist (A2.1) erfüllt. Annahme (A2.4) enthält Bedingungen an die Ankunftsverteilung und die Kostenfunktionen. Auch in (A2.5) sind Anforderungen an die Ankunftsverteilung enthalten, die jedoch vom Umweltzustand abhängen. Da dieser recht unterschiedlich sein kann, untersuchen wir die Erfüllung dieser Annahme nicht. Zur Vereinfachung nehmen wir im Folgenden r_i^b, r_i^e, r_i^b und p_i unabhängig von i an und schreiben r^w, r^e, r^b sowie p .⁴⁹

Lineare Kostenfunktionen

Im Folgenden nehmen wir einer besseren Übersicht wegen an, dass die terminalen Kosten, die Wartekosten sowie die Gewinne alle unabhängig von der Umwelt sind. Die Ergebnisse dieses Abschnittes können aber analog auf den Fall der Abhängigkeit erweitert werden. Des Weiteren nehmen wir an, dass (A2.3) erfüllt ist und dass die Kostenfunktionen wie folgt definiert sind:

$$V_N(x, i) := -x\pi^T \text{ und } c_i(x) := xc^T, \quad (5.3)$$

mit $\pi = (\pi_w, \pi_e, \pi_b)$, $c = (c_w, c_e, c_b) \in \mathbb{R}^3$. Wir zeigen zunächst, dass (A2.4) erfüllt ist, bevor wir eine weitere Aussage über die Kontrollgrenze herleiten.

Satz 5.21 *Unter (A2.3) ist Annahme (A2.4) mit den in (5.3) definierten Kostenfunktionen sowie den Nebenbedingungen $c_w \geq c_b$ und $r^b - r^w \geq \pi_w - \pi_b$ erfüllt.*

⁴⁹Neben Abschnitt 5.4 finden sich auch in Abschnitt 5.6 Beispiele, in denen die Ankunftsverteilung von der Umwelt abhängt.

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass $\Delta_{31}V_N(x, i) = \pi_w - \pi_b$ und $-\Delta_{31}c(x) = c_w - c_b$. Wir bestimmen nun $\Delta_{31}V_{N-1}(x, i)$. Mit Lemma 5.9 gilt

$$\begin{aligned}\Delta_{31}HV_N(x, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') \Delta_{31}V_N(x + x', j) \\ &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}_i(x') (\pi_w - \pi_b) \\ &= \pi_w - \pi_b.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\Delta_{31}LV_N(x, i) = c_w - c_b + \pi_w - \pi_b.$$

Da $\Delta_{31}LV_N(x, i)$ konstant ist, gilt $t_{N-1}(w, i) \equiv t_{N-1}(i)$ und $t_{N-1}(i)$ ist entweder 1 oder ∞ . Mit den Nebenbedingungen gilt nun $\Delta_{31}LV_N(x', i) \geq \Delta_{31}V_N(x, i)$ und $r^b - r^w \geq \Delta_{31}V_N(x, i)$ für alle $x, x' \in X$. Wir zeigen nun $\Delta V_{N-1}(x, i) \geq \Delta V_N(x, i)$. Dazu unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1.Fall: $e > 0$

Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\ &= r^e + LV_N((w, e - 1, b + 1), i) - r^e - LV_N((w + 1, e - 1, b), i) \\ &= \Delta_{31}LV_N((w, e - 1, b), i) \\ &\geq \Delta_{31}V_N(x, i).\end{aligned}$$

2.Fall: $e = 0, w \geq 0$ und $b \geq 0$

Wir müssen die folgenden zwei weiteren Fälle unterscheiden

(1) $b \geq t_{N-1}(i)$:

Unabhängig von der Anzahl wartender ambulanter Patienten ist es optimal, einen stationären zu behandeln. Weiter gilt $b \geq 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}\Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, 0, b), i) \\ &= r^b + LV_N((w, 0, b), i) - r^b - LV_N((w + 1, 0, b - 1), i) \\ &\geq \Delta_{31}V_N(x, i).\end{aligned}$$

(2) $b < t_{N-1}(i)$:

Unabhängig von der Anzahl wartender ambulanter Patienten ist es optimal, einen ambulanten zu behandeln. Es folgt

$$\begin{aligned}\Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, 0, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, 0, b), i) \\ &= V_{N-1}((w, 0, b + 1), i) - r^w - LV_N((w, 0, b), i) \\ &\geq r^b - r^w \\ &\geq \Delta_{31}V_N(x, i).\end{aligned}$$

□

Wir können nun noch eine weitere Aussage über die Werte treffen, die die Kontrollgrenzen annehmen können.

Satz 5.22 Unter (A2.3) gilt für alle $n = 0, 1, \dots, N - 1$ und $(w, i) \in \mathbb{N} \times I$

$$t_n(w, i) \leq N - n \quad \text{oder} \quad t_n(w, i) \equiv \infty.$$

Darüber hinaus existieren $\alpha_{n,i} \in \mathbb{R}^3$, $\beta_{n,i} \in \mathbb{R}$ sowie $h_{n,i} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $n = 0, 1, \dots, N - 1$ und $x = (w, e, b) \in X$ mit $b \geq N - n$ gilt

$$V_n(x, i) = x\alpha_{n,i}^T + \beta_{n,i} + h_{n,i}(e).$$

Beweis: Wir beweisen die Aussagen durch Induktion. Seien dazu $x = (w, e, b) \in X$ und $i \in I$.

Induktionsanfang: $n = N - 1$

Nach dem Beweis von Satz 5.21 ist $t_{N-1}(w, i)$ entweder 1 oder ∞ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} LV_N(x, i) &= -xc^T + \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}(x') V_N(x + x', j) \\ &= -x(c + \pi)^T - \sum_{x' \in X} \tilde{p}(x') x' \pi^T \\ &=: x\alpha_{N-1,i}^T + \beta_{N-1,i}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$V_{N-1}(x, i) = \begin{cases} r^e + (x - e_2)\alpha_{N-1,i}^T + \beta_{N-1,i}, & e > 0, \\ r^b + (x - e_3)\alpha_{N-1,i}^T + \beta_{N-1,i}, & b \geq 1 \text{ und } e = 0. \end{cases}$$

Mit

$$h_{N-1,i}(e) := 1_{\{0\}}(e) \left[r^b - e_3 \alpha_{N-1,i}^T \right] + 1_{\mathbb{N}}(e) \left[r^e - e_2 \alpha_{N-1,i}^T \right]$$

folgt dann für $b \geq 1$

$$V_{N-1}(x, i) = x\alpha_{N-1,i}^T + \beta_{N-1,i} + h_{N-1,i}(e).$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n - 1$

Wir wissen, dass für $b \geq N - n$ gilt

$$V_n(x, i) = x\alpha_{n,i}^T + \beta_{n,i} + h_{n,i}(e)$$

und erhalten somit auf ähnliche Weise wie im Induktionsanfang für $b \geq N - n$

$$LV_n(x, i) = x\alpha_{n-1,i}^T + \beta_{n-1,i} + \tilde{h}_{n-1,i}(e).$$

Damit ist $\Delta_{31} LV_n(x, i)$ konstant für $b \geq N - n$. Im Fall $\Delta_{31} LV_n(x, i) \geq r^b - r^w$ gilt damit $t_{n-1}(w, i) \equiv \infty$ für alle $w \in \mathbb{N}$ und im Fall $\Delta_{31} LV_n(x, i) < r^b - r^w$ gilt $t_{n-1}(w, i) \leq N - n + 1$. Weiter folgt ähnlich zum Induktionsanfang für $b \geq N - n + 1$

$$V_{n-1}(x, i) = x\alpha_{n-1,i}^T + \beta_{n-1,i} + h_{n-1,i}(e).$$

□

Exponentielle Kostenfunktion, poisson- bzw. binomialverteilte Ankünfte

Wir überprüfen nun eine ähnliche Kostenfunktion wie in Abschnitt 4.5. Dazu seien

$$V_N((w, e, b), i) := -(\pi_w)^w - (\pi_e)^e - (\pi_b)^b + 3 \text{ sowie } c(w, e, b) := (c_w)^w + (c_e)^e + (c_b)^b - 3 \quad (5.4)$$

mit $c_w \in [1, \pi_w)$, $c_e \in [1, \pi_e)$ und $c_b \in [1, \pi_b)$.⁵⁰ Im Gegensatz zum Fall linearer Kosten kann Annahme (A2.4) auch bei Erfüllung von (A2.3) nicht ohne genauere Beschreibung der Ankunftsverteilung und zusätzliche Annahme gezeigt werden. Wir betrachten daher für die einzelnen Patiententypen verschiedene Ankunftsverteilungen und nehmen an, dass diese unabhängig voneinander sind, sowie unabhängig von der Anzahl wartender Patienten. Damit ist dann (A2.3) erfüllt. Wie bereits im Abschnitt 5.4 dargestellt, ist es sinnvoll, für die ambulanten Patienten binomialverteilte Ankünfte anzunehmen. Für Notfallpatienten und stationäre Patienten nehmen wir poissonverteilte Ankünfte an. Es können allerdings nicht mehr stationäre Patienten eine Behandlung nachfragen als in der medizinischen Einrichtung vorhanden sind, so dass maximal B stationäre Patienten in einer Zeiteinheit eine Behandlung nachfragen können. Damit gilt für $x, x' \in X$

$$p(x, x') = P(Y_{m, \varrho_w} = w' - w)P(Y_{\lambda_e} = e' - e)P(\tilde{Y}_{\lambda_b} = b' - b),$$

mit $P(\tilde{Y}_{\lambda_b} = b) = P(Y_{\lambda_b} = b)$ für $0 \leq b \leq B - 1$ und $P(\tilde{Y}_{\lambda_b} = B) = P(Y_{\lambda_b} \geq B)$ und Null sonst. Y_{m, ϱ_w} sei dabei eine binomialverteilte und Y_{λ_e} bzw. Y_{λ_b} poissonverteilte Zufallsvariable mit m und ϱ_w und λ_e bzw. λ_b als Parameter. Wir können nun zeigen, dass die gewählte Kostenfunktion zusammen mit diesen Ankunftsverteilungen Annahme (A2.4) unter bestimmten Nebenbedingungen erfüllt.

Satz 5.23 *Es seien α_w und α_b die maximale Anzahl möglicher wartender ambulanter bzw. stationärer Patienten. Gilt*

$$r^b - r^w \geq \pi_w^w (\pi_w - 1) - \pi_b^b (\pi_b - 1)$$

und

$$\begin{aligned} c_w^w (c_w - 1) + (\pi_w - 1) \pi_w^w \left[(1 + \varrho (\pi_w - 1))^m - 1 \right] \\ \geq c_b^b (c_b - 1) + (\pi_b - 1) \pi_b^b \left[e^{\lambda_b (\pi_b - 1)} P(Y_{\lambda_b} \leq B - 1) + \pi_b^B P(Y_{\lambda_b} \geq B) - 1 \right] \end{aligned}$$

für alle $w = 0, \dots, \alpha_w$ und $b = 0, \dots, \alpha_b$, so ist Annahme (A2.4) mit den in (5.4) definierten Kostenfunktionen erfüllt.

Beweis: Es sei $(x, i) \in X \times I$ mit $x = (w, e, b)$. Wir halten zunächst fest, dass

$$\Delta_{31} V_N(x, i) = \pi_w^w (\pi_w - 1) - \pi_b^b (\pi_b - 1)$$

und

$$\Delta_{31} c_i(x) = c_b^b (c_b - 1) - c_w^w (c_w - 1).$$

⁵⁰Für eine kürzere Schreibweise verwenden wir anstelle von $(\pi_w)^w$, $(\pi_e)^e$, $(\pi_b)^b$ auch π_w^w , π_e^e , π_b^b .

Mit Lemma 5.9 gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}HV_N(x, i) &= \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} \tilde{p}(x') \Delta_{31}V_N(x', j) \\
 &= \sum_{w', e', b'=0}^{\infty} P(Y_{m, \varrho_w} = w') P(Y_{\lambda_e} = e') P(\tilde{Y}_{\lambda_w} = b') (\pi_w^{w+w'} (\pi_w - 1) - \pi_b^{b+b'} (\pi_b - 1)) \\
 &= \sum_{w'=0}^{\infty} P(Y_{m, \varrho_w} = w') \pi_w^{w+w'} (\pi_w - 1) - \sum_{b'=0}^{\infty} P(\tilde{Y}_{\lambda_b} = b') \pi_b^{b+b'} (\pi_b - 1) \\
 &= (\pi_w - 1) \pi_w^w \sum_{w'=0}^m \binom{m}{w'} \varrho_w^{w'} (1 - \varrho_w)^{m-w'} \pi_w^{w'} \\
 &\quad - (\pi_b - 1) \pi_b^b \sum_{b'=0}^{B-1} \frac{\lambda_b^{b'}}{b'!} e^{-\lambda_b} \pi_b^{b'} - (\pi_b - 1) \pi_b^b P(Y_{\lambda_b} \geq B) \pi_b^B \\
 &= (\pi_w - 1) \pi_w^w (1 + \varrho_w (\pi_w - 1))^m \\
 &\quad - (\pi_b - 1) \pi_b^b \left[e^{\lambda_b (\pi_b - 1)} P(Y_{\lambda_b} \leq B - 1) + \pi_b^B P(Y_{\lambda_b} \geq B) \right]
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}LV_N(x, i) &= c_w^w (c_w - 1) - c_b^b (c_b - 1) + (\pi_w - 1) \pi_w^w (1 + \varrho (\pi_w - 1))^m \\
 &\quad - (\pi_b - 1) \pi_b^b \left[e^{\lambda_b (\pi_b - 1)} P(Y_{\lambda_b} \leq B - 1) + \pi_b^B P(Y_{\lambda_b} \geq B) \right].
 \end{aligned}$$

Wir berechnen nun $\Delta_{31}V_{N-1}(x, i)$. Dazu unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1.Fall: $e > 0$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\
 &= \Delta_{31}LV_N((w, e - 1, b), i).
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist also gezeigt, wenn gilt

$$\begin{aligned}
 \pi_w^w (\pi_w - 1) - \pi_b^b (\pi_b - 1) &\leq c_w^w (c_w - 1) - c_b^b (c_b - 1) + (\pi_w - 1) \pi_w^w (1 + \varrho (\pi_w - 1))^m \\
 &\quad - (\pi_b - 1) \pi_b^b \left[e^{\lambda_b (\pi_b - 1)} P(Y_{\lambda_b} \leq B - 1) + \pi_b^B P(Y_{\lambda_b} \geq B) \right].
 \end{aligned}$$

2.Fall: $e = 0, w \geq 0$ und $b \geq 0$

Wir unterscheiden die folgenden weiteren Fälle

(1) $b \geq t_{N-1}(w + 1, i)$

Damit gilt auch $b + 1 \geq t_{N-1}(w, i)$ und $b \geq 1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
 \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\
 &= LV_N(w, e, b), i) - LV_N((w + 1, e, b - 1), i) \\
 &= \Delta_{31}LV_N((w, e, b - 1), i) \\
 &= c_w^w (c_w - 1) - c_b^{b-1} (c_b - 1) + (\pi_w - 1) \pi_w^w (1 + \varrho (\pi_w - 1))^m \\
 &\quad - (\pi_b - 1) \pi_b^{b-1} \left[e^{\lambda_b (\pi_b - 1)} P(Y_{\lambda_b} \leq B - 1) + \pi_b^B P(Y_{\lambda_b} \geq B) \right]
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist also gezeigt, wenn

$$\begin{aligned} \pi_w^w(\pi_w - 1) - \pi_b^b(\pi_b - 1) &\leq c_w^w(c_w - 1) - c_b^{b-1}(c_b - 1) + (\pi_w - 1)\pi_w^w(1 + \varrho(\pi_w - 1))^m \\ &\quad - (\pi_b - 1)\pi_b^{b-1}\left[e^{\lambda_b(\pi_b-1)}P(Y_{\lambda_b} \leq B - 1) + \pi_b^B P(Y_{\lambda_b} \geq B)\right]. \end{aligned}$$

(2) $b < t_{N-1}(w + 1, i)$ Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{31}V_{N-1}(x, i) &= V_{N-1}((w, e, b + 1), i) - V_{N-1}((w + 1, e, b), i) \\ &= V_{N-1}(w, e, b + 1), i) - r^w - LV_N((w, e, b), i) \\ &\geq r^b - r^w. \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist also gezeigt, wenn

$$r^b - r^w \geq \pi_w^w(\pi_w - 1) - \pi_b^b(\pi_b - 1).$$

□

5.6 Weitere Umweltzustände

Wir wollen nun kurz weitere Beispiele für den Umweltzustand vorstellen. Wegen der großen Anzahl an Möglichkeiten und des großen Aufwandes, diese zu untersuchen, beschränken wir uns auf nur wenige Beispiele und beschreiben diese nur im Ansatz. Möglich sind natürlich auch Kombinationen der verschiedenen Umweltbeispiele. Stornierungen im Modell mit Terminplan wie in Abschnitt 4.6 einzubeziehen ist in diesem Modell nicht über die Menge der Umweltzustände möglich. Stattdessen müsste der Zustandsraum sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten angepasst werden. Daher gehen wir hier nicht näher auf diese ein.

Variierende Parameter bei poissonverteilten Ankünften

In Abschnitt 5.5 haben wir die Poissonverteilung als Ankunftsverteilung sowohl für Notfälle als auch für stationäre Patienten vorgestellt und dabei angenommen, dass die Parameter für die einzelnen Patiententypen konstant sind. Es liegt jedoch nahe, dass die Ankunftsrate sowohl für Notfälle als auch stationäre Patienten über den Tag hinweg variieren bzw. von anderen Faktoren beeinflusst werden können. Dies können wir durch den Umweltprozess beschreiben.

Die Menge der Umweltzustände besteht dann aus $I = \{\lambda_{b,1}, \dots, \lambda_{b,z}\}$, falls wir ausschließlich bei stationären Patienten insgesamt z variierende Parameter zulassen und $I = \{\lambda_{e,1}, \dots, \lambda_{e,z}\}$, falls wir ausschließlich bei Notfällen insgesamt y variierende Parameter zulassen. Variieren die Parameter beider Verteilungen, so würden wir $I = \{\lambda_{b,1}, \dots, \lambda_{b,z}\} \times \{\lambda_{e,1}, \dots, \lambda_{e,y}\}$ erhalten. Annahme (A2.6) ist damit im Allgemeinen nicht erfüllt.

Variierende Ankunfts-wahrscheinlichkeiten ambulanter Patienten

Genau wie im Modell zur Ressourcenauslastung können wir auch hier variierende Ankunfts-wahrscheinlichkeiten im Modell mit Terminplan zulassen. Dieses geschieht auf die gleiche Weise wie in Abschnitt 4.6.

Zeitabhängige Verfügbarkeit der Behandlungseinheiten

In unserem Modell sind wir von $c \in \mathbb{N}_0$ Behandlungseinheiten ausgegangen, die der medizinischen Einrichtung zu Verfügung stehen. Auch in dem Fall, dass es sich hierbei um medizinische Diagnosegeräte handelt, können diese meist nur von speziell geschulten Personal behandelt werden. Durch Schichtpläne und Pausen unterliegt die Verfügbarkeit der Ressourcen daher zeitlichen Schwankungen. Als Menge der Umweltzustände können wir daher die Anzahl verfügbarer Behandlungseinheiten definieren und Umweltzustand i_n beschreibt die verfügbaren Einheiten im Intervall $[n, n + 1)$. Es würde sich damit $I = \{0, 1, \dots, c\}$ ergeben. Je nach gewählten Übergangswahrscheinlichkeiten kann Annahme (A2.6) dann erfüllt sein.

Terminplan mit Stornierungen

Genau wie im Modell zur Ressourcenauslastung können wir auch hier Stornierungen im Modell mit Terminplan zulassen. Dieses geschieht auf die gleiche Weise wie in Abschnitt 4.6.

6 Schlussbetrachtung

6.1 Zusammenfassung

In Anbetracht steigender Ausgaben im Gesundheitswesen und des damit einhergehenden Kostendrucks auf Anbieter medizinischer Einrichtungen hat die Bedeutung der optimalen Auslastung und dadurch bedingt die optimale Steuerung von Wartesituationen in medizinischen Einrichtungen stark zugenommen. In der vorliegenden Arbeit haben wir uns daher mit der theoretischen Analyse zweier Wartesituationen in Gesundheitseinrichtungen beschäftigt und die diesen Situationen zugrunde liegenden Optimierungsprobleme als Markovsche Entscheidungsprozesse formuliert. Bei der Ermittlung entsprechender Entscheidungsregeln für die Probleme ist zu beachten, dass die Entscheidungsträger medizinischer Einrichtungen komplizierten Regeln im Allgemeinen skeptisch gegenüberstehen. Bei der Analyse der beiden Situationen haben wir uns daher auf strukturelle Eigenschaften optimaler Politiken und deren Abhängigkeiten von äußeren Faktoren, wie z.B. der Terminplanung konzentriert. Hierdurch können wir einerseits einen Einblick in die Steuerungsmöglichkeiten gewähren sowie die Akzeptanz der ermittelten Entscheidungsregeln erhöhen.

In der ersten Wartesituation sollte für eine ambulante Gesundheitseinrichtung über die Aufnahme zusätzlicher nicht angemeldeter Patienten entschieden werden. Die Entscheidung erfolgte dabei in Abhängigkeit der Anzahl vorhandener Patienten, der Tageszeit und des Umweltzustandes. Zusätzlich wurden noch Patienten mit Termin sowie Notfälle berücksichtigt, die beide aufgenommen werden mussten. Unter der Annahme monoton fallender und konkaver Gewinnfunktionen sowie einer weiteren Annahme an die Übergangswahrscheinlichkeiten, konnten wir für die Entscheidung über die Aufnahme zusätzlicher Patienten die Optimalität einer Control-Limit-Rule beweisen.

Das zweite Modell widmete sich der optimalen Zuteilung von medizinischen Ressourcen auf stationäre und ambulante Patienten, wobei auch hier Notfallpatienten berücksichtigt wurden. Für den Fall nur einer Ressource konnten wir zeigen, dass unter der Annahme multimodularer Gewinnfunktionen sowie einer weiteren Annahme an die Übergangswahrscheinlichkeiten eine Politik in Form einer monotonen Switching-Curve optimal ist. Somit konnte die optimale Zuweisung der Ressource auf die Bestimmung der entsprechenden Kontrollgrenzen reduziert werden. Anschließend konnten wir nachweisen, dass mit Hilfe dieser Kontrollgrenzen auch Zuweisungspolitiken für den Fall von $K \geq 2$ Ressourcen vollständig bestimmt werden können.

In beiden Modellen erfolgte im Anschluss an die Bestimmung der Strukturen optimaler Politiken eine Analyse der Abhängigkeiten der Politiken und Wertfunktionen vom Entscheidungszeitpunkt sowie des Umweltzustandes. Dabei konnten wir in beiden Modellen unter bestimmten Annahmen an Übergangswahrscheinlichkeiten und Gewinnfunktionen eine Monotonie in der Zeit nachweisen. Gleichermäßen gelang es uns in beiden Modellen, eine Abhängigkeit der optimalen Politik vom Umweltzustand herzuleiten.

Da in beiden Modellen der Terminplan der eingeplanten Patienten eine wichtige Rolle spielt, haben wir einen solchen als Umweltprozess modelliert. Dies ermöglichte uns, den Einfluss der Terminplanung auf die dynamische Kapazitätssteuerung zu untersuchen. Dabei konnten wir insbesondere nachweisen, dass die Kontrollgrenzen der jeweiligen Entscheidungsfunktion monoton in der Anzahl

der zu den einzelnen Zeitpunkten eingeplanten Patienten verläuft.

Um das Verständnis für die bei der strukturellen Analyse getroffenen Annahmen zu erhöhen, haben wir in beiden Modellen konkrete Beispiele für Behandlungszeit- bzw. Ankunftsverteilung und Kostenfunktionen betrachtet, unter denen eine strukturierte Entscheidungsregel sichergestellt ist. Zum Schluss haben wir zur Veranschaulichung der Modellierungsmöglichkeiten, die uns der Umweltprozess bietet, weitere Beispiele für diesen vorgestellt.

6.2 Ausblick

Aus beiden Modellen ergeben sich zahlreiche weitere Fragestellungen, die verschiedene Forschungsbereiche betreffen.

Einer dieser Bereiche ist eine noch umfangreichere und detailliertere Untersuchung der Abhängigkeiten der Kontrollgrenzen vom zugrunde liegenden Terminplan. In beiden Modellen liegt die Vermutung nahe, dass unter der Annahme linearer Kosten sich die Kontrollgrenzen maximal um eins verschieben, wenn ein zusätzlicher Patient im Terminplan einplant wird. Numerische Berechnungen haben diese Vermutung unterstützt, so dass eine genauere Untersuchung lohnenswert erscheint. Im Modell zur Ressourcenzuweisung gilt dies auch für die Abhängigkeit der Kontrollgrenzen von der Anzahl wartender ambulanter Patienten: Auch hier haben sich in numerischen Studien bei linearen Kosten die Kontrollgrenzen um maximal eins verschoben, wenn sich die Anzahl wartender ambulanter Patienten um eins verändert. Eine weitere Vermutung über die Abhängigkeit der Kontrollgrenzen vom Terminplan im Modell zur Ressourcenzuweisung konnte in numerischen Untersuchungen ebenfalls nicht widerlegt werden: Die Kontrollgrenzen hängen vom Terminplan nur über die Anzahl der eingeplanten ambulanten Patienten ab, nicht aber davon, wann sie eingeplant sind. Ein solches Ergebnis würde die Berechnung optimaler Politiken stark vereinfachen. Bisher konnten allerdings all diese Vermutungen jedoch weder bewiesen noch widerlegt werden, so dass sich uns eine Untersuchung dieser als lohnenswert erscheint.

Ein zweiter Bereich betrifft die Behandlungszeitverteilung, insbesondere im Modell zur Ressourcenzuweisung. Die Annahme deterministischer Behandlungszeiten ist sehr restriktiv. Eine Formulierung des Modells als Semi-Markovsches Entscheidungsmodell mit beliebigen Behandlungszeiten und poissonverteilten Ankünften erscheint daher sinnvoll. Ein großer Nachteil dieser Modellierung besteht jedoch darin, dass entweder eine Beschränkung auf eine Behandlungseinheit oder auf exponentialverteilte Behandlungszeiten notwendig ist oder der Zustandsraum sehr groß werden kann. Auch im ersten Modell erscheint eine Formulierung des Modells als Semi-Markovscher Entscheidungsprozess sinnvoll, auch wenn wir hier ein wenig flexibler in der Wahl unserer Behandlungszeit waren.

Als nächstes liegt die Zusammenführung der beiden Modelle nahe, indem ein Modell entwickelt und untersucht wird, in dem, wie im Modell zur Ressourcenzuweisung, ambulante und stationäre Patienten sowie Notfälle vorhanden sind, ambulante Patienten aber sowohl mit als auch ohne Termin in der Einrichtung eintreffen. Eine Aktion würde nun nicht nur eine Entscheidung über den Typ des als nächsten zu behandelnden Patienten beinhalten, sondern auch eine Entscheidung über die Aufnahme von Patienten ohne Termin. Im Anhang dieser Arbeit findet sich bereits eine Formulierung solch eines integrierten Modells, jedoch haben wir dieses Modell bislang nicht auf Strukturaussagen untersucht.

Darüber hinaus sind weitere Variationen des Modells denkbar, wie z.B. die Verlängerung des Planungszeitraums oder, im Modell zur Ressourcenauslastung, die Erweiterung des Aktionenraumes um solche Aktionen, die nicht angemeldeten Patienten einen Termin in naher Zukunft zuweisen,

anstatt diese nur aufzunehmen oder abzulehnen.

Die Akzeptanz einfach strukturierter Entscheidungsregeln ist bei den Entscheidungsträgern in medizinischen Einrichtungen höher als die komplizierter Regeln. Eine Möglichkeit, die Akzeptanz weiter zu erhöhen, wäre daher die Verwendung stationärer Politiken. Das bedeutet, es wird nur eine Politik für den gesamten Tag, alternativ auch zwei Politiken, eine für den Vormittag, eine für den Nachmittag, entwickelt und verwendet. Da solche stationären Politiken aufgrund des endlichen Zeithorizontes naturgemäß schlechtere Ergebnisse liefern würden, wären Untersuchungen des Gewinnverlustes sinnvoll und ein Bereich für weitere Forschungen zu diesem Thema.

Ein wichtiger Forschungsbereich wurde in dieser Arbeit bisher komplett vernachlässigt: Die Gestaltung optimaler Terminpläne. Dieses ist ein sehr aktives Thema, welches in der Literatur eine große Aufmerksamkeit erhält. Im Kontext verschiedener Patientenklassen und der Berücksichtigung von Prioritätsregeln existieren bislang allerdings nur wenige Untersuchungen. Da der optimale Terminplan durch die angewendeten Prioritätsregeln beeinflusst wird, ist daher eine speziell auf unser Modell ausgelegte Untersuchung von Terminplänen sinnvoll. Insbesondere eine Untersuchung der Wertfunktion auf Unimodalität und Multimodularität in Bezug auf den Terminplan erscheint lohnenswert.

A Integrierte dynamische Kapazitätssteuerung in medizinischen Einrichtungen

A.1 Situationsbeschreibung

In diesem Kapitel betrachten wir ähnlich zu Kapitel 5 eine medizinische Einrichtung, in der ambulante, stationäre und Notfallpatienten untersucht werden, die alle eine bestimmte medizinische Ressource benötigen. Auch hier sind Beispiele für solche Situationen radiologische Untersuchungen in Krankenhäusern, insbesondere Untersuchungen mit Hilfe von CT- oder MRT-Geräten. Neben ambulanten Patienten, die für eine bestimmte Untersuchung mit Hilfe einer bestimmten beschränkten Ressource angemeldet sind, soll diesen auch die Möglichkeit gegeben werden, eine Untersuchung ohne vorherige Anmeldung zu erhalten. Die stationären Patienten, die sich in der medizinischen Einrichtung befinden, halten sich dort in der Regel mehrere Tage auf. Ob diese Patienten diese spezielle Ressource ebenfalls benötigen und zu welchen Zeitpunkten, ist ebenfalls wie in Kapitel 5 nicht festgelegt. Die Nachfrage stationärer Patienten nach einer solchen Untersuchung trifft daher meist unvorangemeldet ein und auch die nicht angemeldeten ambulanten Patienten treffen zu zufälligen Zeitpunkten in der Einrichtung ein. Ebenfalls wie in den Kapiteln 4 und 5 werden in der Einrichtung auch unvorangemeldete Notfallpatienten untersucht. Die medizinische Einrichtung sieht sich nun zwei Entscheidungen gegenüber: Zum einen, wieviele ambulante Patienten zu jedem Entscheidungszeitpunkt zusätzlich in den Warteraum der Einrichtung aufgenommen werden sollen und zum anderen, welcher Patiententyp - ambulant oder stationär - als nächstes behandelt werden soll. Werden Patienten nicht sofort nach ihrer Ankunft in der Einrichtung bzw. bis zum Ende des Tages nicht untersucht, so entstehen analog zu Kapitel 5 Warte- und terminale Kosten.

Wie auch in den Kapiteln 4 und 5 gehen wir davon aus, dass die Terminplanung bereits durchgeführt wurde. Wir untersuchen daher nur die Frage, wieviele ambulante Patienten ohne Termin zu jedem Entscheidungszeitpunkt in der medizinischen Einrichtung aufgenommen werden sollen und wieviele ambulante bzw. stationäre Patienten in der nächsten Zeiteinheit untersucht werden sollen, um den erwarteten Gesamtgewinn dieser Einrichtung zu maximieren. Da auch hier Notfallpatienten stets Vorrang haben, hängt die Gesamtzahl der stationären und ambulanten Patienten, die behandelt werden können, wieder von der Anzahl der Notfälle ab. Wir formulieren die Situation im nächsten Abschnitt als einen Markovschen Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt in diskreter Zeit.

A.2 Modellierung als Markovscher Entscheidungsprozess

Wir betrachten einen Behandlungstag in einer medizinischen Einrichtung, in der drei Patiententypen behandelt werden: ambulante Patienten, Notfälle und stationäre Patienten. Notfälle und

stationäre Patienten sind dabei nicht eingeplant und die Einrichtung hat keine Information darüber, ob und wann einzelne Patienten dieser Typen ankommen. Dabei müssen Notfälle möglichst schnell behandelt werden, wogegen stationäre Patienten aus medizinischer Sicht nicht sofort behandelt werden müssen und einen längeren Aufenthalt in der Einrichtung vor oder hinter sich haben. Ambulante Patienten werden zunächst in zwei Gruppen unterteilt: in angemeldete mit Termin und nicht angemeldete ohne Termin. Bei angemeldeten ambulanten Patienten ist die Einrichtung über ihr Erscheinen informiert, nicht angemeldete kommen zufällig an. Der Tag ist in N Zeitabschnitte gleicher Länge unterteilt. Er beginnt zum Zeitpunkt 0 und endet zum Zeitpunkt N . Wir betrachten den Zustand der medizinischen Einrichtung zu Beginn jedes Intervalls, also zu den Zeitpunkten $n = 0, 1, \dots, N - 1$, sowie am Ende des Tages zum Zeitpunkt N . Die Anzahl der ambulanten Patienten, die sich zum Zeitpunkt n in der Einrichtung befinden, bezeichnen wir mit w_n . Die Anzahl stationärer Patienten, die sich zu diesem Zeitpunkt in der Einrichtung befinden und auf eine Untersuchung warten, bezeichnen wir mit b_n und die Anzahl wartender Notfälle mit e_n . Die Anzahl ambulanter Patienten ohne Termin, die im Zeitintervall $[n - 1, n)$ in der Einrichtung ankommen und eine Behandlung nachfragen, bezeichnen wir mit v_n . Zusätzlich zu der Anzahl wartender Patienten lässt sich zu diesen Zeitpunkten ein Umweltzustand beobachten. Diesen bezeichnen wir mit m_n . Die Größen m_n und v_n fassen wir im sogenannten erweiterten Umweltzustand $i_n = (m_n, v_n)$ zusammen. Ein Übergang vom Umweltzustand i_n zur Zeit n in den Umweltzustand i_{n+1} zum Zeitpunkt $n + 1$ erfolgt mit Wahrscheinlichkeit $q(i_n, i_{n+1})$. Es soll nun entschieden werden, wieviele nicht angemeldete ambulante Patienten in den Warteraum der Einrichtung aufgenommen werden und wieviele Patienten welchen Typs in der nächsten Zeiteinheit behandelt werden. Ambulante Patienten mit Anmeldung müssen in den Warteraum aufgenommen werden. Zur Behandlung stehen der Einrichtung $K \geq 0$ Behandlungseinheiten zur Verfügung.

Nachdem ambulante Patienten in den Warteraum aufgenommen wurden, werden angemeldete und nicht angemeldete Patienten nicht mehr voneinander unterschieden. Der Zustand x_n zur Zeit n wird durch die Anzahl in der Einrichtung wartender Patienten der einzelnen Typen beschrieben, es ist also $x_n = (w_n, e_n, b_n)$. Sofern Patienten vorhanden sind, soll eine Behandlungseinheit auch genutzt werden. Notfallpatienten haben gegenüber ambulanten und stationären Patienten stets Vorrang. Eine Aktion $a = (a^1, a^2)$ zur Zeit n beschreibt zum einen durch a^1 die Anzahl aufgenommener ambulanter Patienten ohne Termin und zum anderen durch $a^2 = (a_w, a_e, a_b)$ wieviele ambulante Patienten, wieviele Notfälle und wieviele stationäre Patienten zu diesem Zeitpunkt behandelt werden. Die Menge der möglichen Aktionen hängt für a^1 daher vom erweiterten Umweltzustand i_n ab und ist $D(i_n) := \{0, \dots, v_n\}$. Für a^2 hängt die Aktion der Menge der möglichen Aktionen von der ersten Aktion ab und ist $D^K(w_n + a^1, e_n, b_n) := \{a = (a_w, a_e, a_b) \in \mathbb{N}_0^3 \mid a_w \leq w + a^1, a_e = \min\{K, e\}, a_b \leq b, a_w + a_e + a_b = \min\{w + a^1 + e + b, K\}\}$. Jede Behandlung eines Patienten dauert genau eine Zeiteinheit und es können bis zum nächsten Entscheidungszeitpunkt neue ambulante Patienten mit und ohne Termin oder Notfälle in der medizinischen Einrichtung eintreffen bzw. stationäre Patienten eine Behandlung nachfragen. Sei nun e_k der k -te kanonische Einheitsvektor des \mathbb{N}_0^3 , dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $n + 1$ Zustand x_{n+1} vorliegt, wenn zum Zeitpunkt n Zustand x_n vorlag und Aktion (a^1, a^2) gewählt wurde, gerade $p_i(x_n + a^1 e_1 - a^2)$ und wir bezeichnen p_i als Ankunftsverteilung.

Für jeden Patienten, der behandelt wird, erhalten die Betreiber der medizinischen Einrichtung einen Gewinn, der sowohl vom Umweltzustand i_n als auch vom Patiententyp abhängt. Die Höhe beträgt $r_{i_n}^w$ für ambulante, $r_{i_n}^b$ für stationäre und $r_{i_n}^e$ für Notfallpatienten. Für Patienten, die sich in der medizinischen Einrichtung befinden und auf eine Behandlung warten, entstehen pro Zeiteinheit Wartekosten in Höhe von $c_{i_n}(x_n)$, welche abhängig sind von der Anzahl wartender Patienten der einzelnen Typen und dem Umweltzustand i_n . Am Ende des Tages entstehen für die nicht be-

handelten Patienten Kosten, die sich aus Überstunden, die das Personal in der Einrichtung evtl. leisten muss, der Belegung von Krankenhausbetten durch stationäre und Notfallpatienten und aus Strafkosten für am Tagesende unbehandelt nach Hause entlassene ambulante Patienten ergeben können. Diese Kosten haben in Abhängigkeit von der Anzahl Patienten der einzelnen Typen und dem Umweltzustand eine Höhe von $V_N(x_N, i_N)$.

Das Ziel des Managements der medizinischen Einrichtung ist nun die Maximierung des erwarteten Gesamtgewinnes eines Tages. Das Problem kann abhängig von der Anzahl $K \geq 0$ der zur Verfügung stehenden Behandlungseinheiten als endlich-stufiger Markovscher Entscheidungsprozess mit dynamischer Umwelt in diskreter Zeit formuliert werden mit den folgenden Größen:

- (1) Dem Planungshorizont N ;
- (2) dem Zustandsraum $X \times I$ mit $X := \mathbb{N}_0^3$ und $I = M \times \mathbb{N}_0$ und M einer endlichen oder abzählbar unendlichen Menge;
- (3) dem Aktionenraum $A^K = A_1 \times A_2^K$ mit $A_1 := \mathbb{N}_0$ und $A_2^K := \{a^2 = (a_w, a_e, a_b) \in \mathbb{N}_0^3 \mid a_w + a_e + a_b \leq K\}$ und der Menge der im Zustand $(x, i) = ((w, e, b), (m, v))$ zulässigen Aktionen $D^K(x, i) := \{a = (a^1, a^2) \mid a^1 \in D_1(i), a^2 \in D_2^K(x + a^1 e_1)\}$ wobei $D_1(i) := \{0, \dots, v\}$ und $D_2^K(x + a^1 e_1) := \{a^2 = (a_w, a_e, a_b) \in A_2^K \mid a_w \leq w + a^1, a_e = \min\{K, e\}, a_b \leq b, a_w + a_e + a_b = \min\{K, w + a^1 + e + b\}\}$;
- (4) der Zähldichte $\hat{p} : X \times I \times A \times X \times I \rightarrow [0, 1]$, definiert durch $\hat{p}((x, i), a, (x', j)) := q(i, j)p_i(x + a^1 e_1 - a^2, x')$;
- (5) der einstufigen Gewinnfunktion $r : X \times I \times A \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$r((x, i), a) := a^2 r_i^T - c_i(x + a^1 e_1 - a^2),$$

mit $r_i = (r_i^w, r_i^e, r_i^b) \in \mathbb{R}^3$ und $c_i : X \rightarrow \mathbb{R}$;

- (6) der terminalen Gewinnfunktion $V_N : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$.

Da sich der betrachtete Zeithorizont auf einen einzigen Tag beschränkt, verzichten wir auf eine Diskontierung.⁵¹

Nach Satz 3.5 in Abschnitt 3.1.1 können der optimale erwartete Gesamtgewinn V_0^K für die medizinische Einrichtung sowie die optimalen Aktionen zu den einzelnen Zeitpunkten bestimmt werden durch die Optimalitätsgleichung

$$V_n^K(x, i) = \max_{a \in D^K(x, i)} \left\{ r((x, i), a) + \sum_{j \in I} \sum_{x' \in X} q(i, j) p_i(x + a^1 e_1 - a^2, x') V_{n+1}^K(x', j) \right\},$$

$n = 0, 1, \dots, N-1$, wobei wir für V_N auch V_N^K schreiben. Wir definieren nun die folgenden Operatoren:

Definition A.1 Es seien $HV_n^K : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$ und $LV_n^K : X \times I \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, N$ definiert durch

$$HV_n^K(a, i) := \sum_{j \in I} q(i, j) \sum_{x' \in X} p_i(a, x') V_n^K(x', j), \quad (a, i) \in X \times I,$$

und

$$LV_n^K(a, i) := -c_i(a) + HV_n^K(a, i), \quad (a, i) \in X \times I.$$

⁵¹Die Einbeziehung eines Diskontierungsfaktors würde jedoch keinen Einfluss auf die im Folgenden entwickelten Strukturaussagen haben.

Mit dieser Definition können wir die Optimalitätsgleichung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} V_n^K(x, i) &= \max_{a \in D^K(x, i)} \{a^2 r_i^T - c_i(x + a^1 e_1 - a^2) + HV_{n+1}^K(x + a^1 e_1 - a^2, i)\} \\ &= \max_{a \in D^K(x, i)} \{a^2 r_i^T + LV_{n+1}^K(x + a^1 e_1 - a^2)\}. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- ABDEL-GAWAD, E. F. (1984). *Optimal control of arrivals and routing in a network of queues*. Ph.D. thesis, North Carolina State University.
- ALTMAN, E., B. GAUJAL und A. HORDIJK (2000). Multimodularity, Convexity and Optimization. *Mathematics of Operations Research*, **25**(2), 324–347.
- ARAMAN, V. F. und I. POPESCU (2010). Media Revenue Management with Audience Uncertainty: Balancing Upfront and Spot Market Sales. *Manufacturing and Service Operations Management*, **12**(2), 190–212.
- AYVAZ, N. und W. T. HUH (2010). Allocation of hospital capacity to multiple types of patients. *Journal of Revenue and Pricing Management*, **9**(5), 386–398.
- BAILEY, N. T. J. (1952). A Study of Queues and Appointment Systems in Hospital Out-Patient Departments, with Special Reference to Waiting-times. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **14**(2), 185–199.
- BELLMAN, R. E. (1957). *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, 1st edn..
- BELOBABA, P. P. (1989). Application of a Probabilistic Decision Model to Airline Seat Inventory Control. *Operations Research*, **37**(2), 183–197.
- BERTSEKAS, D. P. (1995a). *Dynamic Programming and Optimal Control: Volume 1*. Athena Scientific, Belmont, 1st edn..
- BERTSEKAS, D. P. (1995b). *Dynamic Programming and Optimal Control: Volume 2*. Athena Scientific, Belmont, 1st edn..
- BERTSIMAS, D. und R. SHIODA (2003). Restaurant Revenue Management. *Operations Research*, **51**(3), 472–486.
- BITRAN, G. R. und S. M. GILBERT (1996). Managing Hotel Reservations with Uncertain Arrivals. *Operations Research*, **44**(1), 35–49.
- DEN BOER, A. V., G. M. KOOLE, R. D. VAN DER MEI und B. ZWART (2009). Capacity management for a diagnostic medical facility. *submitted*. [Http://www.math.vu.nl/~koole/articles/2009report5/art.pdf](http://www.math.vu.nl/~koole/articles/2009report5/art.pdf).
- BRUMELLE, S. L. und J. I. MCGILL (1993). Airline Seat Allocation with Multiple Nested Fare Classes. *Operations Research*, **41**(1), 127–137.
- BUNDESMINISTERIUM FÜR BILDUNG UND FORSCHUNG (2005). Studie zur Situation der Medizintechnik in Deutschland im internationalen Vergleich. <http://www.gesundheitsforschung-bmbf.de/de/921.php>, Stand 23.05.2012. Berlin.

- BUNDESMINISTERIUM FÜR GESUNDHEIT (2005). Daten des Gesundheitswesens 2011. http://www.bmg.bund.de/fileadmin/dateien/Publikationen/Ministerium/Broschueren/Broschuere_Daten_Gesundheit_2011_Internet_110818.pdf, Stand 23.05.2012. Berlin.
- CAYIRLI, T. und E. VERAL (2003). Outpatient scheduling in health care: A review of literature. *Production and Operations Management*, **12**(4), 519–549.
- CAYIRLI, T., E. VERAL und H. ROSEN (2006). Designing appointment scheduling systems for ambulatory care. *Health Care Management Science*, **9**(1), 47–58.
- CAYIRLI, T., E. VERAL und H. ROSEN (2008). Assesment of patient classification in appointment system design. *Production and Operations Management*, **17**(3), 338–353.
- CHAKRABORTY, S., K. MUTHURAMAN und M. LAWLEY (2010). Sequential Clinical Scheduling with Patien No-shows and General Service Time Distributions. *IIE Transactions*, **42**(5), 354–366.
- DAVIS, E. (1977). *Optimal control of arrivals to a two-server queueing system with seperate queues*. Ph.D. thesis, North Carolina State University.
- FALLPAUSCHALENVEREINBARUNG 2012 (2011). Vereinbarung zum Fallpauschalensystem für Krankenhäuser für das Jahr 2012 (Fallpauschalenvereinbarung 2012 - FPV 2012) zwischen dem GKV-Spitzenverband, Berlin, und dem Verband der privaten Krankenversicherung, Köln, gemeinsam und einheitlich sowie der Deutschen Krankenhausgesellschaft, Berlin. http://www.gkv-spitzenverband.de/verband.de/upload/FPV_2012_2011_11_25_18151.pdf, Stand 23.05.2012. Berlin.
- FEINBERG, E. A. und A. SHWARTZ (2002). *Handbook of Markov Decision Processes*. Kluwer Academic Publisher, Norwell, 1st edn..
- GALLUCCI, G., W. SWARTZ und F. HACKERMAN (2005). Brief Reports: Impact of the Wait for an Inital Appointment on the Rate of Kept Appointments at a Mental Health Center. *Psychiatric Services*, **56**(3), 344–346.
- GERAGHTY, M. K. und E. JOHNSON (1997). Revenue Management Saves National Car Rental. *Interfaces*, **27**(1), 107–127.
- GERCHAK, Y., D. GUPTA und M. HENIG (1996). Reservation Planning for Elective Surgery under Uncertain Demand for Emergency Surgery. *Management Science*, **42**(3), 321–334.
- GOCGUN, Y., B. W. BRESNAHAN, A. GHATE und M. L. GUNN (2011). A Markov decision process approach to multi-category patient scheduling in a diagnostic facility. *Artificial Intelligence in Medicine*, **53**(2), 73–81.
- GOCGUN, Y. und A. GHATE (2010). A Lagrangian approach to Dynamic Resource Allocation. In *Proceedings of the Winter Simulation Conference (WSC)*, pp. 3330–3340. Baltimore.
- GOCGUN, Y. und A. GHATE (2012). Lagrangian relaxation and constraint generation for allocation and advanced scheduling. *Computers and Operations Research*, **39**(10), 2323–2336.
- GREEN, L. V. und S. SAVIN (2008). Reducing Delays for Medical Appointments: A Queueing Approach. *Operations Research*, **56**(6), 1526–1538.

- GREEN, L. V., S. V. SAVIN und B. WANG (2006). Managing Patient Service in a Diagnostic Medical Facility. *Operations Research*, **54**(1), 11–25.
- GUPTA, D. und B. DENTON (2008). Appointment Scheduling in health care: Challenges and opportunities. *IIE Transactions*, **40**(9), 800–819.
- GUPTA, D. und W.-Y. WANG (2012). Patient Appointment in Ambulatory Care. In HALL, R. (ed.), *Handbook of Healthcare System Scheduling*, vol. 168 of *International Series in Operations Research and Management Science*, pp. 65–104. Springer.
- HA, A. Y. (1997a). Optimal Dynamic Scheduling Policy for a Make-to-Stock Production System. *Operations Research*, **45**(1), 42–53.
- HA, A. Y. (1997b). Stock-rationing policy for a make-to-stock production system with two priority classes and backordering. *Naval Research Logistics*, **44**(5), 457–472.
- HAJEK, B. (1984). Optimal Control of Two Interacting Service Stations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29**(6), 491–499.
- HAJEK, B. (1985). Extremal Splittings of Point Processes. *Mathematics of Operations Research*, **10**(4), 543–556.
- HAJEN, L., H. PAETOW und H. SCHUMACHER (2008). *Gesundheitsökonomie*. Kohlhammer Krankenhaus, Stuttgart, 4th edn..
- HANS, E. W., M. VAN HOUDENHOVEN und P. J. H. HULSHOF (2012). A Framework for Healthcare Planning and Control. In HALL, R. (ed.), *Handbook of Healthcare System Scheduling*, vol. 168 of *International Series in Operations Research and Management Science*, pp. 303–320. Springer.
- HARRISON, M. J. (1975). Dynamic Scheduling of a Multiclass Queue: Discount Optimality. *Operations Research*, **23**(2), 270–282.
- HELM, W. E. und K.-H. WALDMANN (1984). Optimal control of arrivals to multiserver queues in a random environment. *Journal of Applied Probability*, **21**(3), 602–615.
- HERRIOTT, S. (1999). Reducing Delays and Waiting Times With Open-Office Scheduling. *Family Practice Management*, **6**(4), 38–43.
- HINDERER, K. (1970). *Foundations of non-stationary dynamic programming with discrete time parameter*, *Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Science*. Springer.
- HINDERER, K. und K.-H. WALDMANN (1999). Approximate Solution of Markov Renewal Programs with Finite Time Horizon. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **37**(2), 502–520.
- HINDERER, K. und K.-H. WALDMANN (2001). Cash management in a randomly varying environment. *European Journal of Operational Research*, **130**(3), 468–485.
- HO, C.-J. und H.-S. LAU (1992). Minimizing total cost in scheduling outpatient appointments. *Management Science*, **38**(12), 1750–1764.
- HUANG, F. (2003). The Impact of Walk-In Ratio on Outpatient Department. In *2003 International Conference on Technology and Management*. Taipei.

- JEWELL, W. S. (1963). Markov-Renewal Programming. I: Formulation, Finite Return Models. *Operations Research*, **11**(6), 938–948.
- JOHANSEN, S. G. (1977). Controlled arrivals in queueing systems with state-dependent exponential service times. Tech. Rep., Department of Operations Research, Aarhus Universitet.
- KAANDORP, G. C. und G. KOOLE (2007). Optimal outpatient appointment scheduling. *Health Care Management Science*, **10**(3), 217–229.
- KIMES, S. E. (1999). Implementing Restaurant Revenue Management. *Cornell Hospitality Quarterly*, **40**(3), 16–21.
- KOELEMAN, P. M. und G. M. KOOLE (2012). Optimal outpatient appointment scheduling with emergency arrivals and general service times. *IIE Transactions on Healthcare Systems Engineering*, **2**(1), 14–30.
- KOLESAR, P. (1970). A Markovian Model for Hospital Admission Scheduling. *Management Science*, **16**(6), 384–396.
- KOLISCH, R. und S. SICKINGER (2008). Providing radiology health care services to stochastic demand of different customer classes. *OR Spectrum*, **30**(2), 375–395.
- KOOLE, G. und E. VAN DER SLUIS (2003). Optimal Shift Scheduling with a Global Service Level Constraint. *IIE Transactions*, **35**(11), 1049–1055.
- KOPACH, R., P.-C. DELAURENTIS, M. LAWLEY, K. MUTHURAMAN, L. OZSEN, R. RARDIN, H. WAN, P. INTREVADO, X. QU und D. WILLIS (2007). Effects of clinical characteristics on successful open access scheduling. *Health Care Management Science*, **10**(2), 111–124.
- LAGANGA, L. R. und S. R. LAWRENCE (2007). Clinic Overbooking to Improve Patient Access and Increase Provider Productivity. *Decision Sciences*, **38**(2), 251–276.
- LAUTENBACHER, C. J. und S. STIDHAM (1999). The Underlying Markov Decision Process in the Single-Leg Airline Yield-Management Problem. *Transportation Science*, **33**(2), 136–146.
- LEE, L., E. CHEW und M. SIM (2007). A heuristic to solve a sea cargo revenue management problem. *OR Spectrum*, **29**(1), 123–136.
- LEE, S. und Y. YIH (2010). Analysis of an Open Access Scheduling System in Outpatient Clinics: A Simulation Study. *Simulation*, **86**(8-9), 503–518.
- LEE, T. C. und M. HERSH (1993). A Model for Dynamic Airline Seat Inventory Control with Multiple Seat Bookings. *Transportation Science*, **27**(3), 252–285.
- LIN, J., K. MUTHURAMAN und M. LAWLEY (2011). Optimal and approximate algorithms for sequential clinical scheduling with no-shows. *IIE Transactions on Healthcare Systems Engineering*, **1**(1), 20–36.
- LINDLEY, D. V. (1952). The theory of queues with a single server. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **48**(2), 277–289.
- LITTLEWOOD, K. (1972). Forecasting and Control of Passenger Bookings. In *AGIFORS Proceedings*, vol. 12, pp. 95–117.

- LIU, N., S. ZIYA und V. G. KULKARNI (2010). Dynamic Scheduling of Outpatient Appointments Under Patient No-Shows and Cancellations. *Manufacturing and Service Operations Management*, **12**(2), 347–364.
- MAGERLEIN, J. M. und J. B. MARTIN (1978). Surgical demand scheduling: a review. *Health Services Research*, **13**(4), 418–433.
- MAMER, J. W. (1986). Successive approximation for finite horizon, semi-Markov decision processes with application to asset liquidation. *Operations Research*, **34**(4), 638–644.
- MIN, D. und Y. YIH (2010). An elective surgery scheduling problem considering patient priority. *Computers and Operations Research*, **37**(6), 1091–1099.
- MONDSCHHEIN, S. V. und G. Y. WEINTRAUB (2003). Appointment policies in service operations: A critical analysis of the economic framework. *Production and Operations Management*, **12**(2), 266–286.
- MOORE, C. G., P. WILSON-WITHERSPOON und J. C. PROBST (2001). Time and Money: Effects of No-Shows at a Family Practice Residency Clinic. *Family Medicine*, **33**(7), 522–527.
- MURRAY, M. und D. M. BERWICK (2003). Advanced Access: Reducing Waiting and Delays in Primary Care. *The Journal of the American Medical Association*, **289**(8), 1035–1040.
- MURRAY, M. und C. TANTAU (2000). Same-Day Appointments: Exploding the Access Paradigm. *Family Practice Management*, **7**(8), 45–50.
- MUTHURAMAN, K. und M. LAWLEY (2008). A stochastic overbooking model for outpatient clinical scheduling with no-shows. *IIE Transactions*, **40**(9), 820–837.
- NAIR, S. K. und R. BAPNA (2001). An Application of Yield Management for Internet Service Providers. *Naval Research Logistics*, **48**(5), 348–362.
- NUNES, L. G. N., S. V. DE CARVALHO und R. DE CASSIA MENESES RODRIGUES (2009). Markov decision process applied to the control of hospital elective admissions. *Artificial Intelligence in Medicine*, **47**(2), 159–171.
- OECD (2003). OECD Länder kämpfen mit steigenden Gesundheitsausgaben. http://www.oecd.org/document/6/0,3746,fr_21571361_44315115_16662342_1_1_1_1,00.html, Stand 24.05.2012. Paris.
- OECD (2011). Health at a Glance 2011. <http://www.oecd.org/dataoecd/6/28/49105858.pdf>, Stand 24.05.2012. Paris.
- PATRICK, J. (2012). A Markov decision model for determining optimal outpatient scheduling. *Health Care Management Science*, **15**(2), 91–102.
- PATRICK, J. und M. L. PUTERMAN (2008). Reducing Wait Times through Operations Research: Optimizing the Use of Surge Capacity. *Healthcare Policy*, **3**(3), 75–88.
- PATRICK, J., M. L. PUTERMAN und M. QUEYRANNE (2008). Dynamic Multipriority Patient Scheduling for a Diagnostic Resource. *Operations Research*, **56**(6), 1507–1525.

- PEREZ, E., L. NTAIMO, W. E. WILHELM, C. R. BAILEY und P. MCCORMACK (2011). Patient and resource scheduling of multi-step medical procedures in nuclear medicine. *IIE Transactions on Healthcare Systems Engineering*, **1**(3), 168–184.
- PUTERMAN, M. L. (1994). *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. Wiley, New York, 1st edn..
- QU, X., R. L. RARDIN, J. A. S. WILLIAMS und D. R. WILLIS (2007). Matching daily health-care provider capacity to demand in advanced access scheduling systems. *European Journal of Operational Research*, **183**(2), 812–826.
- RIEDER, U. (1976). On Dynamic Programming with Unbounded Reward Functions. *Report, Institut für Mathematische Stochastik, University of Hamburg*.
- ROBINSON, L. W. und R. R. CHEN (2003). Scheduling doctor’s appointments: optimal and empirically-based heuristic policies. *IIE Transactions*, **35**(3), 295–307.
- SAVIN, S. V., M. A. COHEN, N. GANS und Z. KATALAN (2005). Capacity Management in Rental Businesses with Two Customer Bases. *Operations Research*, **53**(4), 617–631.
- SCHÄL, M. (1975). Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal. *Probability Theory and Related Fields*, **32**(3), 179–196.
- SCHELLHAAS, H. (1980). Markov renewal decision processes with finite horizon. *OR Spectrum*, **2**(1), 33–40.
- VON DER SCHULENBURG, J.-M. und W. GREINER (2007). *Gesundheitsökonomik*. Neue ökonomische Grundrisse. Mohr-Siebeck, Tübingen, 2nd edn..
- SCHÜTZ, H.-J. und R. KOLISCH (2010). Capacity allocation for demand for different customer-product-combinations with cancellation, no-shows, and overbooking when there is a sequential delivery of service. Working paper, Technische Universität München, http://129.187.106.231/webdata/publikationen/SchuetzKolisch_10_CA.pdf.
- SENNOTT, L. I. (1999). *Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems*. John Wiley & Sons, New York.
- SICKINGER, S. und R. KOLISCH (2009). The performance of a generalized Bailey-Welch rule for outpatient appointment scheduling under inpatient and emergency demand. *Health Care Management Science*, **12**(4), 408–419.
- STIDHAM, S. (1978). Socially and Individually Optimal Control of Arrivals to a GI/M/1 Queue. *Management Science*, **24**(15), 1598–1610.
- STIDHAM, S. (1985). Optimal Control of Admission to a Queueing System. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**(8), 705–713.
- SUBRAMANIAN, J., S. STIDHAM und C. J. LAUTENBACHER (1999). Airline Yield Management with Overbooking, Cancellations, and No-Shows. *Transportation Science*, **33**(2), 147–167.
- TOPKIS, D. M. (1978). Minimizing a Submodular Function on a Lattice. *Operations Research*, **26**(2), 305–321.

- VIRJI, A. (1990). A study of patients attending without appointments in an urban general practice. *British Medical Journal*, **301**(1), 22–26.
- WALDMANN, K.-H. (1981). *Über dynamische Optimierungsprobleme bei stochastisch variierenden Umwelteinflüssen*. Ph.D. thesis, Technische Hochschule Darmstadt.
- WALDMANN, K.-H. (1983). Optimal replacement under additive damage in randomly varying environments. *Naval Research Logistics Quarterly*, **30**(3), 377–386.
- WALDMANN, K.-H. (1984). Inventory control in randomly varying environments. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **44**(3), 657–666.
- WALDMANN, K.-H. (1985). On Bounds for Dynamic Programs. *Mathematics of Operations Research*, **10**(2), 220–232.
- WELCH, J. D. und N. T. J. BAILEY (1952). Appointment Systems in Hospital Outpatient Departments. *The Lancet*, **259**(6718), 1105–1108.
- WHITE, D. J. (1993). *Markov Decision Processes*. Wiley, Chichester, 1st edn..
- ZENG, B., A. TURKCAN, J. LIN und M. LAWLEY (2010). Clinic scheduling models with over-booking for patients with heterogeneous no-show probabilities. *Annals of Operations Research*, **178**(1), 121–144.
- ZHAO, H., J. K. RYAN und V. DESHPANDE (2008). Optimal Dynamic Production and Inventory Transshipment Policies for a Two-Location Make-to-Stock System. *Operations Research*, **56**(2), 400–410.
- ZHUANG, W. und M. Z. F. LI (2010). A new method of proving structural properties for certain class of stochastic dynamic control problems. *Operations Research Letters*, **38**(5), 462–467.