

# Grundzustände, Verzweigungen und singuläre Lösungen nichtlinearer Schrödingersysteme

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Mathematik des

Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

Dissertation

von

Rainer Mandel

Referent: Prof. Dr. Wolfgang Reichel

1. Korreferent: Prof. Dr. Michael Plum

2. Korreferent: Prof. Dr. Thomas Bartsch

Datum des Kolloquiums: 23.01.2013

Dezember 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>II. Grundzustände und Verzweigungen</b>	<b>9</b>
<b>1. Einleitung</b>	<b>11</b>
<b>2. Verzweigungsergebnisse</b>	<b>23</b>
2.1. Verzweigung von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ . . . . .	30
2.2. Verzweigung von $\mathcal{T}_3$ . . . . .	39
2.3. Verzweigung von $\mathcal{T}_4$ und $\mathcal{T}_5$ . . . . .	47
2.4. Verzweigung von $\mathcal{T}_6$ . . . . .	49
2.5. Fortsetzungen von Lösungen der Familien $\mathcal{T}_3$ und $\mathcal{T}_5$ . . . . .	51
<b>3. Grundzustände und positive Lösungen</b>	<b>53</b>
3.1. Minimierung über $\mathcal{N}_b$ . . . . .	53
3.2. Minimierung über $\mathcal{M}_b$ . . . . .	68
3.2.1. Der Fall $q > 2$ . . . . .	73
3.2.2. Der Fall $q = 2$ . . . . .	78
3.3. Minimierung über $\mathcal{M}_b^*$ . . . . .	87
3.3.1. Der Fall $n \geq 2$ . . . . .	90
3.3.2. Der Fall $n = 1$ . . . . .	95
3.4. Eindeutigkeitsresultate . . . . .	104
<b>4. Appendix</b>	<b>111</b>
A. Ergänzende Resultate zu Kapitel 2 . . . . .	111
A.1. Die Beweise der Propositionen 2.0.1, 2.0.2 und 2.3.1 . . . . .	111
A.2. Bestimmung der Eigenpaare im Fall $n = 1$ . . . . .	113
A.3. Eigenschaften des Raumes $E_\sigma$ . . . . .	116
A.4. Eine Verschärfung des Satzes von Crandall-Rabinowitz . . . . .	119
A.5. Weiteres zur lokalen Verzweigung von $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$ . . . . .	126
B. Ergänzende Resultate zu Kapitel 3 . . . . .	132
C. Weitere Ergebnisse . . . . .	134

<b>III. Singuläre Lösungen nichtlinearer Schrödingergleichungen und -systeme</b>	<b>151</b>
<b>5. Einleitung</b>	<b>153</b>
<b>6. Existenz singulärer Lösungen</b>	<b>165</b>
1. Existenz einer singulären Lösung in spektralen Lücken . . . . .	165
2. Existenz zweier singulärer Lösungen . . . . .	168
3. Existenz singulärer Lösungen nichtlinearer Schrödingersysteme . . . . .	179
<b>7. Appendix</b>	<b>193</b>
D. Beweis der Propositionen 5.1, 5.2 und 5.6 . . . . .	193
E. Beweis von Proposition 5.4 . . . . .	200
F. Eigenschaften der konstruierten Lösungen . . . . .	205



Teil I.  
Einleitung

In der vorliegenden Dissertation untersuchen wir nichtlineare Schrödingersysteme der Form

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v \end{aligned} \quad (0.1)$$

für Parameter  $\omega > 0, b \in \mathbb{R}$  und Exponenten  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Im ersten Teil dieser Arbeit beweisen wir die Existenz von Lösungen endlicher Energie, d.h. wir finden schwache Lösungen  $(u, v)$  des obigen Systems mit  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ . Es ist bekannt, dass solche Lösungen zweifach stetig differenzierbar sind und eine exponentielle Abfallrate besitzen. Zunächst wenden wir Resultate der lokalen und globalen Verzweigungstheorie auf drei verschiedene einparametrische Lösungsscharen  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$  von (0.1) an und weisen für jede dieser Lösungsscharen die Existenz unendlich vieler Verzweigungsstellen nach, an denen unbeschränkte zusammenhängende Mengen von radialsymmetrischen Lösungen  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$  entspringen. Die Lösungsscharen  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$  sind hierbei gegeben durch

$$\mathcal{T}_1 = \{(u_0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{T}_2 = \{(0, v_0, b) : b \in \mathbb{R}\},$$

wobei  $u_0$  bzw.  $v_0$  die positiven Lösungen des zugehörigen skalaren Problems

$$-\Delta u + u = u^{2q-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad -\Delta v + \omega^2 v = v^{2q-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

bezeichnet. In unserer Analyse zu der im Fall  $\omega = 1$  existierenden Lösungsschar

$$\mathcal{T}_3 = \left\{ \left( (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}} u_0, (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}} u_0, b \right) : b > -1 \right\}$$

verallgemeinern wir ein für  $q = 2$  aufgestelltes Verzweigungsergebnis von Bartsch, Dancer und Wang [6] auf den Fall  $q \geq 2$ . Insbesondere zeigen wir, dass jede in  $\mathcal{C}_j$  liegende Lösung  $(u, v, b)$  die charakterisierende Eigenschaft besitzt, dass  $u - v$  genau  $j$  nodale Gebiete besitzt. Darüberhinaus beweisen wir das Nichtauftreten von Verzweigung von weiteren einparametrischen Lösungsscharen  $\mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$ . Zum Abschluss des ersten Kapitels untersuchen wir im Fall  $q = 2, b = 1$  die Lösungen des Systems (0.1) der Form  $(u_\alpha, v_\alpha) = (\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0)$  für  $\alpha \in [0, 2\pi)$ .

Im zweiten Kapitel des ersten Teils gewinnen wir Lösungen endlicher Energie von (0.1) mit variationellen Methoden. Wir betrachten drei verschiedene Varianten von Nehari-Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{N}_b, \mathcal{M}_b$  und  $\mathcal{M}_b^*$ , um positive Lösungen von (0.1) durch Minimierung über diese Mengen zu erhalten. Es gilt die Inklusion  $\mathcal{M}_b^* \subset \mathcal{M}_b \subset \mathcal{N}_b$ , wobei  $\mathcal{N}_b$  alle nichttrivialen Lösungen endlicher Energie des Systems (0.1) enthält. Minimierer des Funktionals  $I|_{\mathcal{N}_b}$  bezeichnen wir als Grundzustände – es handelt sich um diejenigen Lösungen von (0.1) mit minimaler "Energie" unter allen nichttrivialen Lösungen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels untersuchen wir dieses Minimierungsproblem genauer und verbessern bestehende Kriterien zur Existenz von sogenannten Vektorgrundzuständen, d.h. Grundzuständen  $(u, v)$  mit  $u \neq 0$  und  $v \neq 0$ . Da uns die Minimierung über  $\mathcal{N}_b$  nur für Kopplungsparameter  $b > b(\omega, q, n) \geq 0$  Vektorgrundzustände liefert, untersuchen wir im zweiten Kapitel das Minimierungsproblem  $\inf_{\mathcal{M}_b} I$  für (quantifizierbar) kleine positive

Kopplungsparameter  $b$ . Für solche  $b$  können wir die Existenz von Minimierern beweisen und erhalten die Existenz von positiven Lösungen. Der Nachweis von Lösungen "minimaler Energie" im Fall  $b < 0$  erfordert die Betrachtung der Menge

$$\mathcal{M}_b^* = \{(u, v) \in \mathcal{M}_b : (u, v) \text{ ist radialsymmetrisch}\},$$

um bessere Kompaktheitseigenschaften der radialsymmetrischen Funktionen in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  nutzen zu können. Im Fall  $n \geq 2$  weisen wir die Existenz von Minimierern des Problems  $\inf I|_{\mathcal{M}_b^*}$  nach. Darüberhinaus zeigen wir, dass das Produkt der beiden Komponenten  $u_b, v_b$  dieser Minimierer für  $b \rightarrow -\infty$  bis auf Auswahl einer Teilfolge in  $L^q(\mathbb{R}^n)$  gegen 0 konvergiert und  $(u_b, v_b)$  gegen eine Lösung eines "Problems der besten Aufteilung" konvergiert. Ferner zeigen wir, dass im Fall  $n = 1$  kein solches Ergebnis gelten kann.

Im zweiten Teil dieser Arbeit beweisen wir die Existenz von Lösungen unendlicher Energie des Systems (0.1) im Fall  $n \geq 3$  und  $p > \frac{n}{n-2}$ . Hierzu betrachten wir die größere Klasse der distributionellen Lösungen von (0.1). Von einer gegebenen distributionellen Näherungslösung  $w_0$  mit einer Punktsingularität ausgehend bestimmen wir eine glattere Korrekturfunktion  $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , so dass die Funktion  $W := w_0 + v$  eine singuläre distributionelle Lösung des nichtlinearen Schrödingersystems mit exponentieller Abfallrate ist. Es kommen Fixpunktmethoden und variationelle Methoden zum Einsatz. Zunächst betrachten wir den skalaren Fall und stellen die Argumente für den Nachweis von singulären distributionellen Lösungen der nichtlinearen Schrödingergleichung

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

bereit. Verhalten sich die Funktionen  $V$  und  $\Gamma$  in der Nähe eines Punktes  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  gutartig, so können wir eine distributionelle Lösung dieser Gleichung mit einer einzigen Singularität an der Stelle  $x_0$  für Exponenten  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  nachweisen. Die Zahl  $\varepsilon > 0$  ist hierbei eine hinreichend klein gewählte Zahl. Im Modellfall  $V \equiv \Gamma \equiv 1$  ist unser Resultat für die Raumdimensionen  $n = 3, 4, 5$  anwendbar. Anschließend verallgemeinern wir die Resultate des skalaren Falls auf nichtlineare Schrödingersysteme der Art

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p_1-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{p_1-1}u|v|^{p_2} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p_2-1}v + \Gamma_4(x)|u|^{p_3}|v|^{p_4-1}v & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 1, \quad p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = p, \end{cases} \quad (0.2)$$

wobei wir sowohl den variationellen Fall  $p_1 = p_4 = \frac{p-1}{2}, p_2 = p_3 = \frac{p+1}{2}$  als auch den nichtvariationellen Fall behandeln. Für  $n = 3$  erhalten wir die Existenz zweier verschiedener singulärer distributionellen Lösungen des variationellen Systems mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach und des Mountain Pass Theorems. Ausgangspunkt für die Ergebnisse dieses Kapitels sind die Resultate der gemeinsam mit W. Reichel verfassten Arbeit "Distributional solutions of the stationary nonlinear Schrödinger equation: singularities, regularity and exponential decay" [54].



Teil II.

# Grundzustände und Verzweigungen



# 1. Einleitung

Im ersten Teil dieser Arbeit betrachten wir das semilineare elliptische Schrödingersystem

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v \end{aligned} \quad (1.1)$$

für Exponenten  $q$  mit  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und Parametern  $\omega > 0, b \in \mathbb{R}$ . Angesichts der variationellen Struktur von (1.1) ist es natürlich, die Existenz nichttrivialer Lösungen dieses Systems mit variationellen Methoden zu beweisen. Es sind daher nichttriviale kritische Punkte des zugehörigen Euler-Funktional  $I : H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  zu finden, das für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  durch die Vorschrift

$$I(u, v) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2) - \frac{1}{2q}(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q)$$

gegeben ist. Hierbei sind die Normen  $\|\cdot\|, \|\cdot\|_\omega$  auf  $H^1(\mathbb{R}^n)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \|u\| &:= \sqrt{\langle u, u \rangle} & \text{für } \langle u, \phi \rangle &:= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \phi + u \phi \, dx \quad (\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)), \\ \|v\|_\omega &:= \sqrt{\langle v, v \rangle_\omega} & \text{für } \langle v, \psi \rangle_\omega &:= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla \psi + \omega^2 v \psi \, dx \quad (\psi \in H^1(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

Ferner bezeichnet  $\|\cdot\|_r := \|\cdot\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}$  für  $r \in [1, \infty]$  stets die übliche Norm auf  $L^r(\mathbb{R}^n)$ , so dass  $I$  aufgrund der Sobolev-Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  wohldefiniert ist. Der Parameter  $\omega$  wird an keiner Stelle dieser Arbeit als Exponent eines Lebesgueraumes  $L^r(\mathbb{R}^n)$  ( $r \geq 1$ ) auftreten, so dass die Norm  $\|\cdot\|_\omega$  stets wie in der obigen Gleichung verstehen ist. Ferner schreiben wir  $\langle (u, v), (\phi, \psi) \rangle := \langle u, \phi \rangle + \langle v, \psi \rangle$  für  $u, v, \phi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ .

Zahlreiche Autoren konnten die Existenz schwacher Lösungen  $(u, v)$  von (1.1) mit  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  beweisen. Wir bezeichnen solche Lösungen im Folgenden als Lösungen endlicher Energie. Von besonderer physikalischer Bedeutung sind die sogenannten Grundzustände von (1.1). Hierbei handelt es sich um nichttriviale Lösungen  $(u, v)$  von (1.1) mit der geringsten Energie  $I(u, v)$  unter allen nichttrivialen Lösungen endlicher Energie. Eine präzise Definition des Begriffs und einen Hinweis auf alternative Definitionen liefern wir zu Beginn von Kapitel 3. Die Existenz eines Grundzustands des Schrödingersystems (1.1) wurde für  $b > 0$  von Maia, Montefusco und Pellacci in [51] bewiesen und es ist eine spannende mathematische Frage, für welche Parameterwerte von  $\omega, b > 0$  ein Grundzustand  $(u, v)$  positiv ist, d.h.  $u > 0, v > 0$  in  $\mathbb{R}^n$  erfüllt. Dieser Frage werden wir in Kapitel 3

nachgehen und darüberhinaus die Existenz weiterer positiver Lösungen zeigen, die im Allgemeinen keine Grundzustände gemäß der hier gewählten Definition sind. In Kapitel 2 untersuchen wir verschiedene Familien positiver Lösungen von (1.1) auf Verzweigung.

Physikalische Motivation von (1.1) im Fall  $q = 2$

Im physikalisch bedeutendsten Fall  $q = 2$  lautet die obige Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= u^3 + buv^2 && \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= v^3 + bu^2v && \text{in } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Seit den 1970er Jahren wird dieses System zur Beschreibung interagierender optischer Wellen verwendet, siehe etwa [53], [57]. Wir folgen der Darstellung von Dohnal und Uecker [29], um das Auftreten dieser Gleichung bei der Beschreibung der Wellenausbreitung in photonischen Kristallen zu motivieren, siehe auch [70] für eine ähnliche Herleitung. Unter einem photonischen Kristall versteht man eine periodische Anordnung von Materialien verschiedener Brechungsindizes. In gewissen photonischen Kristallen kann die Existenz sogenannter stationärer optischer Solitonen nachgewiesen werden. Ein solches Soliton wird durch eine stehende Welle  $E : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  der Form  $E(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$  und eine hinreichend glatte exponentiell fallende Funktion  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  modelliert, so dass  $E$  die kubische nichtlineare Schrödingergleichung

$$i\partial_t E = -\Delta E + V(x)E + |E|^2 E \quad \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

erfüllt. Die Gleichung (1.3) wird auch Gross-Pitaevski-Gleichung genannt. Das periodische Potential  $V$  trägt hierbei die Information über die Anordnung des photonischen Kristalls. Der Materialeffekt wird idealisiert durch den Term  $|E|^2 E$  modelliert. Setzen wir in (1.3) den Ansatz  $E(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$  ein, so erhalten wir die folgende Gleichung für die zu bestimmende Funktion  $\phi$ :

$$-\Delta \phi + (V(x) - \omega)\phi = |\phi|^2 \phi \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Es bietet sich an, Lösungen von (1.4) in  $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  zu suchen.

Das Auftreten stationärer Solitonen ist nur für gewisse von der periodischen Struktur des Kristalls abhängige Frequenzen  $\omega \in \mathbb{R}$  möglich, was wir im Folgenden begründen wollen. Der Einfachheit zuliebe nehmen wir an, dass  $V$  bezüglich jeder der Variablen  $x_1, \dots, x_n$   $2\pi$ -periodisch ist. Sei  $L$  die eindeutige<sup>1</sup> selbstadjungierte Realisierung von  $-\Delta + V(x)$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  mit Spektrum  $\sigma(L)$ . Aufgrund der Periodizität des Potentials sind qualitative Aussagen über  $\sigma(L)$  möglich. Aus Satz 6.5.1. und dem Beweis von Lemma 6.5.2 in [31]

---

<sup>1</sup>Aufgrund der Periodizität von  $V$  erfüllen in der Praxis relevante Potentiale die Bedingung  $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . In diesem Fall ist der in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  definierte symmetrische Operator  $-\Delta + V(x) : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  nach Satz X.29 in [69] wesentlich selbstadjungiert, so dass  $L$  als die Abschließung dieses Operators zu wählen ist.

folgt die Existenz abzählbar vieler nichtleerer abgeschlossener Intervalle (sogenannter "Bänder")  $A_1 = [\alpha_1, \beta_1], A_2 = [\alpha_2, \beta_2], \dots$  mit

$$\sigma(L) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \quad \text{und} \quad \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_j \rightarrow +\infty. \quad (1.5)$$

Das Spektrum des Operators weist eine sogenannte Bandstruktur auf, siehe Abbildung 1.1. Insbesondere gilt nach Satz 6.10.1 in [31]  $\sigma_{ess}(L) = \sigma(L)$  sowie  $\sigma_d(L) = \emptyset$ , wobei  $\sigma_d(L)$  das diskrete Spektrum<sup>2</sup> und  $\sigma_{ess}(L) := \sigma(L) \setminus \sigma_d(L)$  das wesentliche Spektrum von  $L$  bezeichnet. Eine nichttriviale exponentiell fallende Lösung  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  der Gleichung (1.4) erfüllt  $(L - \omega)\phi = |\phi|^2\phi$  und damit  $(L - |\phi|^2)\phi = \omega\phi$ . Es folgt  $\omega \in \sigma_d(L - \phi^2)$  und die Invarianz des wesentlichen Spektrums unter relativkompakten Störungen (vgl. [86], Satz 9.9) liefert

$$\omega \notin \sigma_{ess}(L - |\phi|^2) = \sigma_{ess}(L) = \sigma(L).$$

Daher können Solitonen nur in den durch die Bandstruktur (1.5) gegebenen Bandlücken  $(-\infty, \alpha_1), (\beta_1, \alpha_2), \dots$  auftreten. In der physikalischen Literatur spricht man von Bandlücken-Solitonen<sup>3</sup>. Die experimentelle Beobachtung von Bandlückensolitonen und speziell von Solitonen kleiner Amplituden nahe der Bandränder wird beispielsweise in [55] berichtet. Wir wollen die von Dohnal und Uecker vorgeschlagene Modellierung solcher Solitonen kleiner Amplitude nahe der Bandränder mit Hilfe der Gleichung (1.2) in einem zweidimensionalen Beispiel vorstellen. Eine Beschreibung von Bandlückensolitonen in der Nähe von  $\min \sigma(L)$  mit Hilfe von Verzweigungstheorie findet sich bei Stuart, vgl. Satz 7.2 in [75]. Weitere Existenzresultate von Solitonen in spektralen Lücken von Schrödinger-Operatoren mit periodischen Potentialen sind in Pankovs Arbeit [63] zu finden.

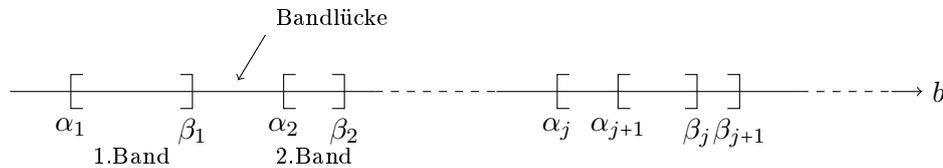


Abbildung 1.1.: Bandstruktur

Die Motivation des von Dohnal und Uecker in [29] verfolgten Ansatzes erfordert mehr Informationen über die Intervalle  $A_m$  in (1.5). Nach Satz 6.5.1. in [31] sind Intervalle  $A_1, A_2, \dots$  abgeschlossen und gegeben durch

$$A_m = \bigcup_{k \in \mathbb{B}} \omega_m(k) \quad (m \in \mathbb{N}),$$

wobei  $\mathbb{B} := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$  die Brillouin-Zone ist und  $\omega_m(k)$  für  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{B}$  den  $m$ -ten Eigenwert des Eigenwertproblems

$$L\phi = \omega\phi, \quad \phi(2\pi, x_2) = e^{2\pi i k_1} \phi(0, x_2), \quad \phi(x_1, 2\pi) = e^{2\pi i k_2} \phi(x_1, 0)$$

<sup>2</sup>Die Menge  $\sigma_d(L)$  besteht aus allen isolierten Elementen von  $\sigma(L)$ , die Eigenwerte endlicher Vielfachheit sind. Es handelt sich um eine Teilmenge des Punktspektrums  $\sigma_p(L)$ .

<sup>3</sup>engl.: band gap solitons

bezeichnet. Die zugehörigen Eigenfunktionen  $\varphi_m(k; \cdot)$  für  $m \in \mathbb{N}$  werden Bloch-Funktionen oder Bloch-Moden genannt. Eine Anwendung des Min-Max-Prinzips auf das Eigenwertproblem für die Funktionen  $p_m(k; x) := e^{-ikx} \varphi_m(k; x)$ , vgl. (2.3) in [29], liefert die Stetigkeit der Funktionen  $\omega_m(\cdot)$ , so dass die folgende Charakterisierung der Bandränder gilt

$$A_m = [\alpha_m, \beta_m] \quad \text{für } \alpha_m = \min_{k \in \mathbb{B}} \omega_m(k), \quad \beta_m = \max_{k \in \mathbb{B}} \omega_m(k). \quad (1.6)$$

Aus technischen Gründen nehmen wir an, dass die Funktionen  $\omega_m(\cdot)$  und  $p_m(\cdot; x)$  zweifach stetig differenzierbar sind. Sei nun  $\omega_* \in \partial\sigma(L)$  gegeben, d.h.  $\omega_* = \alpha_m$  oder  $\omega_* = \beta_m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten den Fall  $\omega_* = \omega_m(k^{(1)}) = \omega_m(k^{(2)})$  für  $k^{(1)}, k^{(2)} \in \mathbb{B}$ , d.h. nach (1.6) wird das Minimum bzw. das Maximum der  $m$ -ten Bandfunktion  $\omega_m(\cdot)$  an zwei Stellen in der Brillouin-Zone angenommen. In diesem Fall lautet der Ansatz von Dohnal und Uecker zur Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung (1.4) im Fall  $\omega = \omega_* + \sigma\varepsilon^2$  für  $\sigma \in \{\pm 1\}$  wie folgt:

$$\phi(x) = \varepsilon \phi_1^\varepsilon(x) + \varepsilon^2 \phi_2^\varepsilon(x) + \varepsilon^3 \phi_3(x) + O(\varepsilon^4) \quad (1.7)$$

für

$$\phi_1^\varepsilon(x) = A_1(\varepsilon x)v_1(x) + A_2(\varepsilon x)v_2(x), \quad v_j(x) := \varphi_m(k^{(j)}; x) \quad (j = 1, 2).$$

Die Funktionen  $v_1, v_2$  werden Resonanten (bei  $\omega_*$ ) genannt. Der Faktor  $\varepsilon$  vor  $\phi_1^\varepsilon$  modelliert die Kleinheit der Amplitude des Solitons und die zu bestimmenden glatten Funktionen  $A_1, A_2$  sind exponentiell fallende Kopplungskoeffizienten. Für die Herleitung der Differentialgleichungen für  $A_1, A_2$  wird die Multiple-Skalen-Methoden<sup>4</sup> verwendet. Hierbei wird der Ansatz (1.7) in die zu lösende Gleichung nichtlineare Schrödingergleichung (1.4) eingesetzt und die Funktionen  $\phi_1^\varepsilon, \phi_2^\varepsilon$  werden so gewählt, dass die Terme der Ordnung  $O(\varepsilon), O(\varepsilon^2)$  verschwinden. Durch Nullsetzen des Terms der Ordnung  $O(\varepsilon^3)$  ergeben sich die sogenannten Gekoppelte-Moden-Gleichungen, die sich durch Reskalierung in das System (1.2) transformieren lassen. Auf die mathematische Rechtfertigung dieser Methode gehen wir später ein.

Wir folgen nun skizzenhaft der in [29] beschriebenen Herleitung der Gleichung (1.2). Für die Beweise der folgenden Aussagen verweisen wir auf die Originalarbeit. Die aus dem Ansatz (1.7) und der nichtlinearen Schrödinger-Gleichung (1.4) resultierende Gleichung zur Ordnung  $O(\varepsilon)$  ist aufgrund des Ansatzes für  $\phi_1^\varepsilon$  und  $\omega_* = \omega_m(k^{(1)}) = \omega_m(k^{(2)})$  erfüllt. In [29] finden die Autoren eine Funktion  $\phi_2^\varepsilon$ , so dass darüberhinaus der Taylor-Koeffizient zur Ordnung  $O(\varepsilon^2)$  verschwindet. Schließlich ist  $\phi_3$  so zu wählen, dass die Approximation besser als  $O(\varepsilon^3)$  ist. Durch Nullsetzen des entsprechenden Koeffizienten ergibt sich eine lineare Differentialgleichung der Form  $(-\Delta + V(x) - \omega_*)\phi_3 = F(A_1, A_2)$ . Eine formale Anwendung der Fredholmschen Alternative im Raum  $L^2([-2\pi, 2\pi]^2)$  zeigt, dass eine solche Funktion  $\phi_3$  genau dann existiert, wenn  $F(A_1, A_2)$  orthogonal zum Unterraum  $\ker(-\Delta + V(x) - \omega_*) = \text{span}\{v_1, v_2\}$  ist. Hierbei werden diverse Symmetrie-Eigenschaften

---

<sup>4</sup>engl.: method of multiple scales

der Bloch-Funktionen  $v_1, v_2$  verwendet. Dohnal und Uecker erhalten die sogenannten Gekoppelte-Moden-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\sigma A_1 - \alpha_1 \partial_{xx} A_1 - \alpha_2 \partial_{yy} A_1 &= \gamma_1 |A_1|^2 A_1 + \gamma_2 (2|A_2|^2 A_1 + A_2^2 \bar{A}_1) \\ -\sigma A_2 - \alpha_2 \partial_{xx} A_1 - \alpha_1 \partial_{yy} A_2 &= \gamma_1 |A_2|^2 A_2 + \gamma_2 (2|A_1|^2 A_2 + A_1^2 \bar{A}_2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

als hinreichende Bedingung für  $F(A_1, A_2) \perp \text{span}\{v_1, v_2\}$ , wobei  $\gamma_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2$  aus Integraltermen der Funktionen  $v_1, v_2$  gewonnen werden, vgl. Gleichung (3.4) in [29]. In numerischen Beispielen finden die Autoren  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  und  $\sigma < 0$ , so dass (1.8) ein semi-lineares System elliptischer Differentialgleichung ist. Nach Reskalierung finden wir, dass die Gekoppelte-Moden-Gleichungen äquivalent zu (1.2) sind.

Unter zusätzlichen Annahmen können Dohnal und Uecker die obige Herleitung rechtfertigen. Liegt das periodische Potential in  $V \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^2)$  für ein  $s > 1$  und besitzt die Gleichung (1.8) eine nichtdegenerierte reversible Lösung  $A_1, A_2 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , dann existiert nach Korollar 4.11 in [29] eine Lösung  $\phi_\varepsilon \in H^s(\mathbb{R}^2)$  der ursprünglichen Gleichung (1.4) für  $\omega = \omega_* + \sigma\varepsilon^2$ , die der Abschätzung

$$\|\phi_\varepsilon - \phi_\varepsilon^1\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} \leq C\varepsilon^{3/5}$$

für eine von  $\varepsilon$  unabhängige positive Zahl  $C > 0$  genügt. Die Nichtdegeneriertheit und Reversibilität einer Lösung ist im Allgemeinen theoretisch kaum überprüfbar, sodass diese Eigenschaften für jede numerische Lösung einzeln nachzuweisen sind. Die komplizierte Definition einer reversiblen Lösung ist Definition 4.8 in [29] zu entnehmen.

Der Vollständigkeit der Darstellung zuliebe folgt eine Auflistung einiger in der physikalischen Literatur diskutierter expliziter Lösungen des Systems (1.2).

#### Explizite Lösungen von (1.1) im Fall $n = 1$

Das Interesse an einem besseren Verständnis des Schrödingersystems (1.1) hat viele Physiker dazu motiviert, explizite Lösungen von (1.1) zu finden. Nahezu alle in physikalischen Publikationen auftretenden Lösungen wurden für das eindimensionale Schrödingersystem gefunden. Die einzigen dem Autor bekannten Resultate über explizite Lösungen im höherdimensionalen Fall  $n = 2$  stammen aus [90]. Für  $n \geq 3$  sind dem Autor keine Resultate in dieser Richtung bekannt. Die für unsere Zwecke wichtigste Klasse von Lösungen sind die positiven Lösungen von (1.1). Beispiele hierfür liefern die Lösungen

$$\begin{aligned} (u_1(x), v_1(x)) &:= \sqrt{2}(1+b)^{-\frac{1}{2}}(\text{sech}(x), \text{sech}(x)), \\ (u_2(x), v_2(x)) &:= \sqrt{2}(\cos(\theta)\text{sech}(x), \sin(\theta)\text{sech}(x)) \end{aligned}$$

für  $\omega = 1, b > -1$  bzw.  $\omega = b = 1$ . Hierbei ist  $\theta \in \mathbb{R}$  ein Parameter und  $\text{sech} = \frac{1}{\cosh}$ . In [92] (2.15), (2.16) sind die folgenden für  $x_0 \neq 0$  nicht radialsymmetrischen Lösungen für

$\omega = 1, b = 3$  zu finden:

$$\begin{aligned} u_3(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{sech}(x - x_0) + \operatorname{sech}(x + x_0) \right), \\ v_3(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \operatorname{sech}(x - x_0) - \operatorname{sech}(x + x_0) \right), \end{aligned}$$

Von Interesse sind die Lösungen  $(u_4, v_4)$  aus (3.17) in [79] für  $\omega > 0, b = 1$

$$\begin{aligned} u_4(x) &:= \frac{2\sqrt{2}e^{x-x_0} \left( 1 + \frac{1-\omega}{1+\omega} e^{2\omega(x-x_1)} \right)}{1 + e^{2(x-x_0)} + e^{2\omega(x-x_1)} + \frac{(1-\omega)^2}{(1+\omega)^2} e^{2(x-x_0+\omega(x-x_1))}}, \\ v_4(x) &:= \frac{2\sqrt{2}\omega e^{\omega(x-x_1)} \left( 1 - \frac{1-\omega}{1+\omega} e^{2(x-x_0)} \right)}{1 + e^{2(x-x_0)} + e^{2\omega(x-x_1)} + \frac{(1-\omega)^2}{(1+\omega)^2} e^{2(x-x_0+\omega(x-x_1))}}, \end{aligned}$$

wobei  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  reelle Parameter sind. Die Funktion  $u_4$  besitzt im Fall  $\omega > 1$  genau eine Nullstelle, wohingegen  $v_4$  positiv ist. Die Lösung  $(u_4, v_4)$  ist endlicher Energie und erfüllt  $\int_{\mathbb{R}} u_4 v_4 dx = 0$ ; wir kommen beim Beweis von Lemma C.15 auf diese Lösung zurück. Lösungen für  $\omega > 1, b = 1$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$  mit ähnlichen Eigenschaften findet sich in [1] (11):

$$\begin{aligned} u_5(x) &:= \frac{\sqrt{2(\omega^2 - 1)} \sinh(\omega(x - x_0))}{\omega \cosh(\omega(x - x_0)) \cosh(x) - \sinh(\omega(x - x_0)) \sinh(x)}, \\ v_5(x) &:= \frac{\omega \sqrt{2(\omega^2 - 1)} \cosh(x)}{\omega \cosh(\omega(x - x_0)) \cosh(x) - \sinh(\omega(x - x_0)) \sinh(x)}. \end{aligned}$$

Darüberhinaus existieren periodische Lösungen von (1.1) (unendlicher Energie), die aus den Jacobischen elliptischen Funktionen  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}$  aufgebaut werden. Eine Familie solcher Lösungen für  $b = 1, \omega \geq 1$  ist gegeben durch  $k \in [0, 1], ka^2 = \omega^2 - 1$

$$(u_6(x), v_6(x)) := \left( \sqrt{a^2 + 2 - \omega^2} \operatorname{sn}(ax, k), \sqrt{\omega^2 + a^2} \operatorname{cn}(ax, k) \right)$$

siehe [44] (33),(34). Eine weitere Lösung dieser Art für  $b = \omega = 1$  ist gegeben durch

$$(u_7(x), v_7(x)) := (c \operatorname{cn}(ax, k), d \operatorname{cn}(ax, k)),$$

wobei die Parameter  $a, b, c, d$  durch die drei Nebenbedingungen  $c^2 + d^2 \geq 2, a^2(2k^2 - 1)^2 = 1$  und  $2k^2(c^2 + d^2 - 1) = c^2 + d^2$  miteinander verbunden sind, siehe [44] (25),(26). Die Lösungen  $(u_6, v_6), (u_7, v_7)$  sehen qualitativ wie  $(\sin, \cos)$  aus. Eine andere Art von periodischen Lösung für  $b = 1$  und  $1 \leq \omega^2 \leq 4$  ist durch

$$\begin{aligned} u_8(x) &:= \sqrt{\frac{2}{5}(4\omega^2 - 1)} \operatorname{dn}(ax, k) \operatorname{sn}(ax, k), \\ v_8(x) &:= \sqrt{\frac{2}{5}(4\omega^2 - 1)} \operatorname{dn}(ax, k) \operatorname{cn}(ax, k) \end{aligned}$$

und  $k^2(4\omega^2 - 1) = 5(\omega^2 - 1)$ ,  $15a^2 = 4\omega^2 - 1$  gegeben, siehe [32] (5),(6). Diese Lösung unterscheidet sich dahingehend von  $(u_6, v_6)$ ,  $(u_7, v_7)$ , dass  $u_8$  ein positives lokales Minimum und ein negatives lokales Maximum pro Periodizitätsintervall aufweist. Die Lösung für  $b = 1, \omega^2 \geq 4$  aus (37,38) in [44] ähnelt ebenfalls  $(\sin, \cos)$ , doch die zweite Komponente ist für geeignete Parameterwerte positiv:

$$(u_9(x), v_9(x)) := (ca^2k^2 \operatorname{cn}(ax, k) \operatorname{sn}(ax, k), ca^2 \operatorname{dn}(ax, k)^2 + d).$$

Hierbei erfüllen die Parameter  $c, a, k, d$  das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} k^2 \left( \sqrt{\frac{5}{3}(\omega^4 - 1) + 2\omega^2 - 3} \right) &= 2\sqrt{\frac{5}{3}(\omega^4 - 1)}, & c^2 &= \frac{18}{\omega^2 - 1} \\ 10a^2 &= \sqrt{\frac{5}{3}(\omega^4 - 1) + 2\omega^2 - 3}, & 50d^2(\omega^2 - 1) &= (4 - \omega^2)^2. \end{aligned}$$

Wegen  $\operatorname{cn}(\cdot, 1) = \operatorname{dn}(\cdot, 1) = \operatorname{sech}$  handelt es sich um Fortsetzungen der durch  $(u_8, v_8)$  gegebenen Lösungen in den Parameterbereich  $\omega^2 \geq 4$ . Weitere explizite Lösungen sind in Gleichung (3),(4) in [19] sowie in [66] zu finden.

### Bekannte Lösungen und Lösungsmethoden

Wir wollen an dieser Stelle die wichtigsten bekannten Resultate über Lösungen endlicher Energie des Schrödingersystems (1.1) auflisten. Eine detaillierte Darstellung dieser Ergebnisse liefern wir in den jeweiligen Kapiteln.

Wir betrachten zunächst semitriviale Lösungen von (1.1), wobei wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf Lösungen der Form  $(u, 0)$  mit  $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$  beschränken. Diese genügen der Differentialgleichung

$$-\Delta u + u = |u|^{2q-2}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{1.9}$$

für  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Nehari bewies in [58] die Existenz einer positiven Lösung von (1.9) im Fall  $n = 3, 1 < q \leq \frac{5}{2}$ ; die Existenz Fall  $n \in \mathbb{N}, 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  konnte von Strauss, Berestycki, Lions in [73],[10] gezeigt werden. Die Eindeutigkeit dieser positiven Lösung geht im Fall  $q = 2$  auf Coffman [20] und im allgemeinen Fall auf Kwong [45] zurück. In [73], [11] bewiesen Strauss, Berestycki, Lions mit Ljusternik-Schnirelman-Theorie die Existenz unendlich vieler Lösungen von (1.9) für  $n \geq 3$ . Die Existenz radialsymmetrischer Lösungen mit beliebig vorgegebenem nodalen Muster wurde mit variationellen Methoden von Bartsch und Willem in [9] für Raumdimensionen  $n \geq 2$  bewiesen. Im Fall  $n = 4$  oder  $n \geq 6$  existieren darüberhinaus unendlich viele nichtradsymmetrische Lösungen, wie Bartsch und Willem in [8] zeigen konnten.

Die Ergebnisse zu vollständig nichttrivialen Lösungen von (1.1) sind bedeutend jünger und fallen zumeist in die Jahre 2005 - 2010. In [3] konnten Ambrosetti, Colorado für

$q = 2, n \in \{2, 3\}$  unter Verwendung des Mountain Pass Theorems in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  bzw. durch Minimierung des Funktionals  $I$  über der Nehari-Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{N}_b := \{(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) : (u, v) \neq (0, 0), \langle I'(u, v), (u, v) \rangle = 0\}$$

die Existenz positiver Lösungen sowohl für hinreichend kleine positive als auch für hinreichend große positive Werte der Kopplungskonstanten  $b$  zeigen. Ähnliche auch im Fall  $n = 1, q = 2$  gültige Resultate zeigten de Figueiredo und Lopes in [26]. Maia, Montefusco, Pellacci bewiesen in der Arbeit [51] die Existenz positiver Lösungen für große  $b$  und alle Exponenten  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Einen verwandten Zugang wählten Sirakov [72] und Lin, Wei [48],[49]. Sie fanden positive Lösungen von (1.1) für  $q = 2$  und kleine positive Kopplungskonstanten durch Minimierung des Funktionals  $I$  über der Menge

$$\mathcal{M}_b := \{(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) : u, v \neq 0, \langle I'(u, v), (u, 0) \rangle = \langle I'(u, v), (0, v) \rangle = 0\}.$$

Darüberhinaus wurde in [72] die Menge

$$\mathcal{M}_b^* := \{(u, v) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) : u, v \neq 0, \langle I'(u, v), (u, 0) \rangle = \langle I'(u, v), (0, v) \rangle = 0\}.$$

betrachtet, um die Existenz positiver Lösungen für negative Kopplungsparameter  $b$  zu zeigen. Wei und Yao konnten im Fall  $\omega = 1, q = 2$  für bestimmte Werte von  $b$  die Eindeutigkeit der positiven Lösung von (1.1) beweisen, siehe [85]. Unbeschränkte zusammenhängende Mengen positiver Lösungen für  $b \geq 0$  konnten von Bartsch, Wang und Wei nachgewiesen werden, vgl. [7]. Lösungen mit vorgegebener nodaler Charakterisierung fanden Maia, Montefusco, Pellacci in [52] für  $n = 2, 3$  und hinreichend große Kopplungskonstanten  $b$ . Die Existenz unendlich vieler disjunkter zusammenhängender Familien von positiven radialsymmetrischen Lösungen für  $b < 0$  konnte mit globaler Verzweigungstheorie in [6] bewiesen werden.

Lösungen mit anderen Symmetrien wurden von Wei und Weth im Fall  $n \in \{2, 3\}, q = 2$  nachgewiesen, siehe [82]. Ein weiteres Resultat in diese Richtung für  $n = 3$  und kleine positive Werte von  $b$  findet sich in [37]. Verwandte Resultate in beschränkten Gebieten und für nichtlineare Schrödingersysteme mit mehr als zwei Gleichungen finden sich unter anderem in [48],[49],[60],[65],[83],[84].

### *Ein Ausblick*

Im ersten Kapitel untersuchen wir verschiedene einparametrische Lösungsscharen des Schrödingersystems (1.1) auf lokale und globale Verzweigung. Diese Lösungsfamilien bestehen aus Funktionen der Form  $(su_0, tv_0, b)$  mit  $s, t \geq 0$ , wobei  $u_0$  die nach dem Resultat von Kwong (vgl. Satz 1.1) eindeutige positive Lösung endlicher Energie des skalaren Problems  $-\Delta u + u = u^{2q-1}$  auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet. Um von der Nichtdegeneriertheit dieser Lösung zu profitieren, betrachten wir das Verzweigungsproblem im Hilbertraum  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ , wobei  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$  den Unterraum der radialsymmetrischen Funktionen bezeichnet. Dies wird uns erlauben, die lokalen und globalen Verzweigungsergebnisse von Crandall-Rabinowitz [24] und Rabinowitz [68] anzuwenden. Unter anderem erhalten wir im Fall

$q = 2$  aus der Verzweigungsanalyse zur Lösungsfamilie  $\mathcal{T}_1 = \{(u_0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  die Existenz abzählbar unendlich vieler Verzweigungsstellen  $b_{1,\omega} < b_{2,\omega} < \dots < b_{j,\omega} \rightarrow \infty$  mit abzweigenden Ästen  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$ , so dass die Lösungen aus  $\mathcal{C}_j$  eine von  $j$  abhängige nodale Charakterisierung besitzen. Darüberhinaus finden wir eine Verallgemeinerung eines Resultats von Bartsch, Dancer und Wang [6] zur Verzweigung von der Lösungsfamilie  $\mathcal{T}_3 = \{(u_b, v_b, b) : b > -1\}$  mit  $u_b = v_b = (1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}} u_0$ .

Im zweiten Kapitel verfolgen wir das Ziel, mit Hilfe von variationellen Methoden die Existenz bislang unentdeckter positiver Lösungen von (1.1) zu beweisen. Jede dieser Lösungen wird sich als radialsymmetrisch erweisen, was im Fall  $q \geq 2, b \geq 0$  intrinsisch ist und auf Symmetrie- und Monotonieresultate von Busca, Sirakov und Ikoma zurückzuführen ist, vgl. [16], [40] oder Satz C.10 in Appendix C. In den anderen Fällen wird die Radialsymmetrie der Lösung der Konstruktionsmethode geschuldet sein. Eine Methode zum Nachweis der Existenz positiver Lösungen ist die Minimierung des Funktionals  $I$  über der Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{N}_b$ . Die Existenz eines Minimierers von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  und damit eines Grundzustands wurde von Maia, Montefusco, Pellacci in [51] bewiesen. Wir beweisen in Abschnitt 3.1 zum Teil optimale Bedingungen an  $b, \omega$  für die Existenz eines positiven Grundzustands. Unsere Methode wird uns die Existenz positiver Grundzustände für  $b > b(\omega, q, n)$  und eine geeignet definierte Zahl  $b(\omega, q, n) \geq 0$  liefern, wohingegen wir für  $b < b(\omega, q, n)$  die Nichtexistenz solcher Grundzustände beweisen. Darüberhinaus untersuchen wir in Abschnitt 3.2 bzw. Abschnitt 3.3 das Minimierungsproblem für  $I|_{\mathcal{M}_b}$  bzw.  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$ , um verbesserte Kriterien für die Existenz positiver Lösungen im Fall kleiner positiver bzw. negativer Kopplungsparameter  $b$  zu erhalten. Schließlich verallgemeinern wir in Abschnitt 3.4 die Eindeigkeitsresultate von Wei und Yao [85] auf den Fall  $q \neq 2$ .

### Notation und Konventionen

Im Folgenden bezeichnet  $n \in \mathbb{N}$  stets die Raumdimension. Wir betrachten stets den Fall Sobolev-subkritischer Exponenten  $q$  mit  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ , was dadurch gerechtfertigt ist, dass im Fall  $n \geq 3, q \geq \frac{n}{n-2}$  nur die triviale Lösung physikalisch ist. Einen Beweis dieser Tatsache liefern wir in Satz C.1. Es ist zu bemerken, dass der Exponent  $\frac{n}{(n-2)_+}$  nicht als Gidas-Spruck-Exponent sondern als Transformation des Sobolevexponenten  $2^* = \frac{2n}{(n-2)_+}$  zu verstehen ist. Im Folgenden bezeichnen wir eine Funktion  $(u, v)$  oder auch  $(u, v, b)$  als Lösung von (1.1), wenn  $(u, v)$  in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  liegt und eine schwache Lösung von (1.1) ist. Da wir Lösungen mit Hilfe von variationellen Methoden im Hilbertraum  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  gewinnen wollen, werden wir nur über fast überall bestehende Eigenschaften von Lösungen sprechen können. Zur besseren Lesbarkeit verzichten wir jedoch auf das Attribut "fast überall". Ferner sind Aussagen wie  $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$  stets dahingehend zu interpretieren, dass die Funktion  $w$  fast überall einer Funktion aus  $C^2(\mathbb{R}^n)$  gleicht. Für eine möglicherweise unbeschränkte Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  bezeichnet  $C_B^k(\Omega)$  die Menge der auf  $\Omega$   $k$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen, deren partielle Ableitung

der Ordnung kleiner oder gleich  $k$  beschränkt sind, d.h.

$$C_B^k(\Omega) := \{w \in C^k(\Omega) : D^\beta w \text{ ist beschränkt für } |\beta| \leq k\}, \quad C_B(\Omega) := C_B^0(\Omega).$$

Die für  $w \in C_B^k(\Omega)$  erklärte Abbildung

$$\|w\|_{C_B^k(\Omega)} := \sum_{|\beta| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\beta w(x)|.$$

definiert eine Norm auf  $C_B^k(\Omega)$ . Für  $k \in \mathbb{N}_0$  und beschränkte Mengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gilt daher  $C^k(\bar{\Omega}) = C_B^k(\Omega)$ . Die Menge  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  bestehe aus denjenigen Elementen  $w \in C_B^k(\Omega)$ , deren  $k$ -te partielle Ableitungen  $\alpha$ -Hölderstetig in  $\Omega$  sind. Die Abbildung

$$\|w\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} := \|w\|_{C_B^k(\Omega)} + \sum_{|\beta|=k} \sup_{x,y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|D^\beta w(x) - D^\beta w(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

definiert eine Norm auf  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Mit  $\rightharpoonup$  bezeichnen wir die schwache Konvergenz und mit  $\rightarrow$  die Konvergenz in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  bzw.  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , sofern kein anderer Konvergenzbegriff explizit erwähnt wird. Ferner bezeichnen wir Teilfolgen einer gegebenen Folge wie die Folge selbst. Eine Funktion  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  nennen wir im Folgenden nichtnegativ bzw. positiv, wenn  $u, v \geq 0$  bzw.  $u, v > 0$  in  $\mathbb{R}^n$  gilt. Wir nennen ferner eine Lösung trivial im Fall  $u = v = 0$  und semitrivial im Fall  $u = 0, v \neq 0$  oder  $v = 0, u \neq 0$ , sonst vollständig nichttrivial. Sie heißt radialsymmetrisch im Fall  $u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$ , wobei der abgeschlossene Unterraum  $H_r^1(\mathbb{R}^n)$  von  $H^1(\mathbb{R}^n)$  durch

$$H_r^1(\mathbb{R}^n) = \{w \in H^1(\mathbb{R}^n) : w(x) = \hat{w}(|x|) \text{ für eine messbare Funktion } \hat{w} : [0, \infty) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}\}$$

definiert ist. Ist  $w \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  eine gegebene Funktion, so bezeichnen wir stets mit  $\hat{w}$  sein radiales Profil, d.h. es gilt  $w(x) = \hat{w}(|x|)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ferner gilt in diesem Fall

$$\|w\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 = \omega_n \int_0^\infty r^{n-1} (\hat{w}(r)^2 + \hat{w}'(r)^2) dr,$$

wobei  $\omega_n$  den  $(n-1)$ -dimensionalen Hausdorff-Inhalt der in  $\mathbb{R}^n$  eingebetteten Einheitskugel bezeichnet. Der auf nichtnegative Funktionen  $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$  wirkende Operator  $*$  :  $H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet die Schwarzsymmetrisierung<sup>5</sup> von  $w$ , die durch

$$w^*(0) := \text{ess sup}_{\mathbb{R}^n} w, \quad w^*(x) := \inf\{t > 0 : \text{vol}(\{w > t\}) < \omega_n |x|^n\}.$$

definiert ist. Wir verwenden die in Proposition C.8 zusammengefassten Kompaktheitseigenschaften der radialsymmetrischen bzw. radial monoton fallenden Funktionen. Insbesondere nutzen wir die Kompaktheit der Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  im Fall  $n \geq 2$  und  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Wir sagen, dass eine Funktion  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  bis auf Translation radialsymmetrisch ist, wenn ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  existiert, so dass die Funktion  $(u(x_0 + \cdot), v(x_0 + \cdot))$  radialsymmetrisch ist.

<sup>5</sup>engl.: spherical rearrangement, Schwarz symmetrization

Wir schließen dieses Kapitel mit einigen Informationen über den Grundzustand der zugehörigen skalaren Gleichung  $-\Delta u + u = u^{2q-1}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Die Existenz einer positiven Lösung minimaler Energie wird mit Walter Strauss in Verbindung gebracht (vgl. Satz 1.29 in [89]). Die Eindeutigkeit dieser Lösung geht im allgemeinen Fall auf Kwong [45] zurück. Der Fall  $q = 2$  wurde zuvor von Coffman [20] untersucht.

**Satz 1.1.** *Es gibt genau eine nichtnegative nichttriviale Lösung von*

$$-\Delta u + u = u^{2q-1} \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^n). \quad (1.10)$$

*Diese Lösung ist glatt, positiv, radialsymmetrisch und radial exponentiell fallend.*

Wir bezeichnen diese Lösung im Folgenden mit  $u_0$ . Reskalierung der Gleichung liefert, dass die Funktion

$$v_0(x) = \omega^{\frac{1}{q-1}} u_0(\omega x) \quad (1.11)$$

die einzige positive Lösung endlicher Energie der Gleichung  $-\Delta v + \omega^2 v = v^{2q-1}$  in  $\mathbb{R}^n$  ist. In Lemma 1.2 stellen wir weitere Eigenschaften der Funktionen  $u_0, v_0$  bereit. Wir werden diese Eigenschaften sowie die an dieser Stelle eingeführten Bezeichnungen sehr häufig verwenden. Für einen Beweis verweisen wir auf das Ende von Appendix C.

**Lemma 1.2.**

(i) *Für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  gilt*

$$\frac{\|u\|}{\|u\|_{2q}} \geq \frac{\|u_0\|}{\|u_0\|_{2q}}, \quad \frac{\|v\|_\omega}{\|v\|_{2q}} \geq \frac{\|v_0\|_\omega}{\|v_0\|_{2q}} \quad (1.12)$$

*und Gleichheit genau dann wenn  $u(\cdot + x_0) \in \text{span}\{u_0\}$  bzw.  $v(\cdot + y_0) \in \text{span}\{v_0\}$  für ein  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Ferner gilt*

$$\frac{\|v_0\|_\omega}{\|v_0\|_{2q}} = \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2q}} \hat{c}_0 \quad \text{für } \hat{c}_0 := \frac{\|u_0\|}{\|u_0\|_{2q}}.$$

(ii) *Es gilt  $\|u_0\|^2 = \|u_0\|_{2q}^{2q}$  sowie  $\|\nabla u_0\|_2^2 = \frac{n(q-1)}{2q} \|u_0\|^2$ ,  $\|u_0\|_2^2 = \frac{2q-n(q-1)}{2q} \|u_0\|^2$ .*

(iii) *Es ist  $\|v_0\|_\omega^2 = \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \|u_0\|^2$  und  $I(0, v_0) = \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} I(0, u_0) > I(u_0, 0)$  im Fall  $\omega > 1$ . Ferner ist*

$$c_0 := I(u_0, 0) = \frac{q-1}{2q} \|u_0\|^2 = \frac{q-1}{2q} \hat{c}_0^{\frac{2q}{q-1}}. \quad (1.13)$$

(iv) *Es gilt*

$$\ker_{H^1(\mathbb{R}^n)} (-\Delta + 1 - (2q-1)u_0^{2q-2}) = \text{span}\{\partial_1 u_0, \dots, \partial_n u_0\},$$

*d.h.  $u_0$  ist nichtdegenerierte Lösung von (1.10).*

(v) Sei  $L_\omega : H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n)$  für  $\omega > 0$  gegeben durch  $L_\omega u := (-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0^{2q-2}u)$ . Dann ist  $L_\omega \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ -symmetrisch und kompakt. Es existiert eine Orthonormalbasis bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  aus glatten Eigenfunktionen  $(\varphi_{j,\omega})_{j \in \mathbb{N}_0}$  mit  $\varphi_{j,\omega}(0) > 0$  zu Eigenwerten  $(b_{j,\omega}^{-1})_{j \in \mathbb{N}_0}$ . Die Funktion  $\hat{\varphi}_{j,\omega}$  hat genau  $j$  einfache Nullstellen<sup>6</sup> in  $\mathbb{R}_{>0}$ . Es gilt  $b_{0,\omega} < b_{1,\omega} < \dots < b_{j,\omega} \rightarrow +\infty$  für  $j \rightarrow \infty$  und die Funktionen  $b_{j,\cdot}$  sind für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  streng monoton wachsend mit  $b_{0,1} = 1$  und  $b_{1,1} > 2q - 1$ .

Wir verwenden die aus Lemma 1.2 resultierende Eigenschaft, dass alle Lösungen  $(b, \phi)$  von  $-\Delta \phi + \omega^2 \phi = b u_0^{2q-2} \phi$  mit  $\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  durch die Eigenpaare  $(b_{j,\omega}, \varphi_{j,\omega})$  gegeben ist. Insbesondere gilt

$$-\Delta \varphi_{j,\omega} + \omega^2 \varphi_{j,\omega} = b_{j,\omega} u_0^{2q-2} \varphi_{j,\omega} \quad (j \in \mathbb{N}_0). \quad (1.14)$$

**Bemerkung 1.3.**

a) Im Fall  $n = 1$  sind die skalaren Grundzustände  $u_0, v_0$  gegeben durch

$$u_0(x) = (\sqrt{q} \operatorname{sech}((q-1)x))^{\frac{1}{q-1}}, \quad v_0(x) = (\sqrt{q}\omega \operatorname{sech}((q-1)\omega x))^{\frac{1}{q-1}}, \quad (1.15)$$

wobei  $\operatorname{sech}$  durch  $\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$  definiert ist. Im Fall  $q = 2$  sind diese Formeln in (2.4),(2.5) [91] zu finden.

b) Wegen  $v_0(x) = \omega^{\frac{1}{q-1}} u_0(\omega x)$  sind die Eigenwerte und die zugehörigen bezüglich  $\|\cdot\|$  normierten Eigenfunktionen des Problems  $-\Delta \phi + \phi = b v_0^{2q-2} \phi$  durch die Funktionen  $(b_{j,1/\omega}, \omega^{\frac{2-n}{2}} \varphi_{j,1/\omega}(\omega \cdot))$  gegeben.

---

<sup>6</sup>Wir erinnern daran, dass  $\hat{\varphi}_{j,\omega}$  durch  $\varphi_{j,\omega}(x) = \hat{\varphi}_{j,\omega}(|x|)$  gegeben ist.

## 2. Verzweigungsergebnisse

In diesem Kapitel untersuchen wir Verzweigungen von einparametrischen Lösungsscharen des Systems

$$\begin{aligned} -\Delta u + \omega u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v, \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

$$\omega > 0, b \in \mathbb{R}, \quad 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}, \quad u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n).$$

Als Kandidaten für solche Lösungsscharen bieten sich Familien von Lösungen der Form  $(s_b u_0, t_b v_0, b)$  für  $s_b, t_b \in \mathbb{R}$  an, wobei wir uns auf den Fall  $s_b, t_b \geq 0$  beschränken können, da mit  $(u, v)$  auch  $(\pm u, \pm v)$  eine Lösung von (2.0.1) ist. Ein Beispiel für eine solche Familie ist im Fall  $\omega = 1$  durch

$$\{(s_b u_0, t_b v_0, b) : b > -1\} \quad \text{und} \quad s_b = t_b = (1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}}$$

gegeben. Für  $q = 2$  wiesen Bartsch, Dancer und Wang in [6] globale Verzweigung von abzählbar unendlich vielen Verzweigungspunkten auf dieser Lösungskurve nach. Unser Ziel ist es, die dort verwendeten Techniken auf weitere Lösungsfamilien der oben beschriebenen Form anzuwenden. In Abschnitt 2.1 zeigen wir beispielsweise, dass unendlich viele Verzweigungspunkte auf der Lösungskurve  $\{(u_0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  existieren, an denen unbeschränkte zusammenhängende Mengen von Lösungen  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$  abzweigen. Wir bezeichnen solche zusammenhängenden Mengen von Lösungen als Lösungskontinua. Als eine wichtige Eigenschaft der zu  $\mathcal{C}_j$  gehörenden Lösungen  $(u, v, b)$  erweist sich ihre von  $j$  abhängige nodale Charakterisierung, d.h. die Anzahl und Art der Nullstellen ihrer Komponentenfunktionen  $u, v$ . Beispielsweise können wir nachweisen, dass die ersten Komponentenfunktionen der bei  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$  verzweigenden Lösungen aus  $\mathcal{C}_j$  in der Nähe des Verzweigungspunkts positiv sind und die zweiten Komponentenfunktionen genau  $j$  Nullstellen besitzen.

In Proposition 2.0.2 bestimmen wir alle Lösungen von (2.0.1) der Form  $(s u_0, t v_0, b)$  für  $s, t \geq 0$ . Hierzu benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

**Proposition 2.0.1.** *Es gelte entweder  $1 < q < 2, b \in (0, q - 1)$  oder  $q > 2, b \in (q - 1, \infty)$ . Dann existiert genau eine Lösung  $k = k_b \in (0, 1)$  der Gleichung*

$$1 + b k^q - b k^{q-2} - k^{2q-2} = 0 \quad (k \in (0, 1)). \quad (2.0.2)$$

*Im Fall  $1 < q < 2$  gilt  $\lim_{b \rightarrow 0^+} k_b = 0, \lim_{b \rightarrow (q-1)^-} k_b = 1$ , im Fall  $q > 2$  gilt  $\lim_{b \rightarrow (q-1)^+} k_b = 1$ . Im Fall  $1 < q < 2, b \notin (0, q - 1)$  oder  $q > 2, b \notin (q - 1, \infty)$  existiert keine Lösung von (2.0.2).*

Der Beweis der Propositionen 2.0.1 und 2.0.2 sind Appendix A zu entnehmen.

**Proposition 2.0.2.** *Alle Lösungen  $(u, v, b)$  von (2.0.1) der Form*

$$(u, v, b) = (su_0, tv_0, b) \quad \text{für } s, t \geq 0, (s, t) \neq (0, 0)$$

*sind im Fall  $\omega \neq 1$  gegeben durch*

$$(1) \quad \mathcal{T}_1 := \{(u_0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

$$(2) \quad \mathcal{T}_2 := \{(0, v_0, b) : b \in \mathbb{R}\}$$

*und im Fall  $\omega = 1$  gegeben durch die Familien  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_6$  mit*

$$(3) \quad \mathcal{T}_3 := \left\{ \left( (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}} u_0, (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}} u_0, b \right) : b > -1 \right\}$$

$$(4) \quad \mathcal{T}_4 := \left\{ (\mu_b u_0, \mu_b k_b u_0, b) : 0 < b < q-1 \right\} \cup \left\{ (\mu_b k_b u_0, \mu_b u_0, b) : 0 < b < q-1 \right\} \quad (1 < q < 2)$$

$$(5) \quad \mathcal{T}_5 := \left\{ (\mu_b u_0, \mu_b k_b u_0, b) : b > q-1 \right\} \cup \left\{ (\mu_b k_b u_0, \mu_b u_0, b) : b > q-1 \right\} \quad (q > 2)$$

$$(6) \quad \mathcal{T}_6 := \left\{ (\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0, 1) : 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right\} \quad (q = 2, b = 1)$$

*In (4), (5) gilt hierbei  $\mu_b = (1 + bk_b^q)^{-\frac{1}{2q-2}}$  für  $k_b$  wie in Proposition 2.0.1.*

Das folgende Bild skizziert im Fall  $\omega = 1$  die Familien  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_6$  anhand ihrer "Energie", d.h. für jede Lösung  $(u, v, b) \in \mathcal{T}_1 \cup \dots \cup \mathcal{T}_6$  wird auf der vertikalen Achse  $I(u, v, b)$  aufgetragen. Die Familien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  sind daher in Abbildung 2.1 ununterscheidbar und die Familie  $\mathcal{T}_6$  wird im mittleren Bild durch einen einzigen Punkt dargestellt. Im Fall  $q = 2$  sind die Lösungen der Familien  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_6$  bei  $b = 1$  miteinander verbunden.

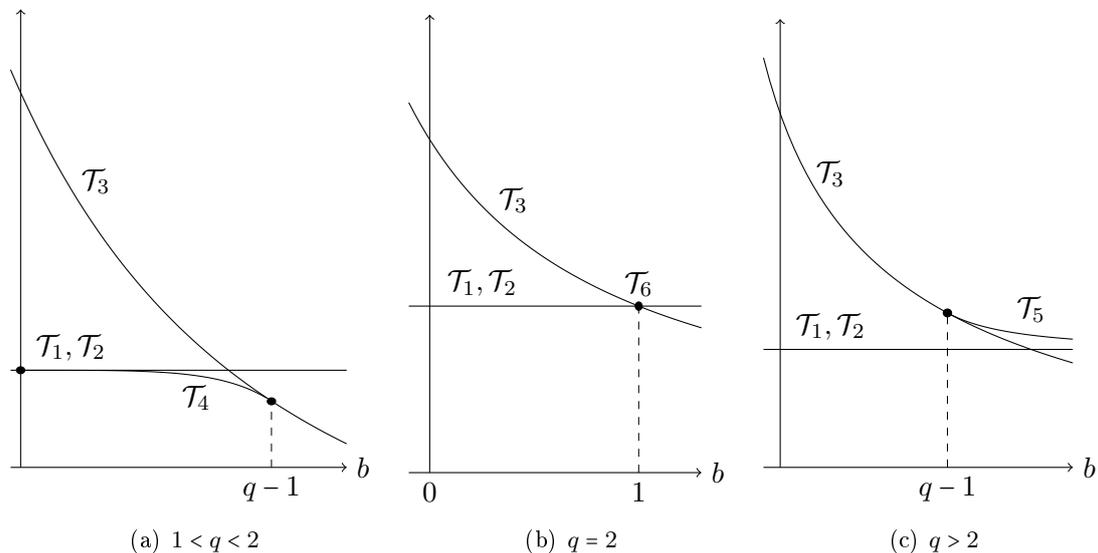


Abbildung 2.1.:  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_6$  für  $\omega = 1$

Die Lösungsschar  $\{(0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  wurde in die Liste aus Proposition 2.0.2 nicht aufgenommen, da von der trivialen Lösung keine Lösungen verzweigen. Dies folgt aus den Ungleichungen von Hölder und Sobolev, denn es gilt für jede nichttriviale Lösung  $(u, v, b)$  von (2.0.1)

$$\begin{aligned} \|u\|^2 + \|v\|_\omega^2 &= \|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q \\ &\leq \|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b_+\|u\|_{2q}^q\|v\|_{2q}^q \\ &\leq C(1 + b_+)(\|u\|^{2q} + \|v\|_\omega^{2q}) \\ &\leq C(1 + b_+)(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2)^q \end{aligned}$$

und damit  $\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2 \geq c > 0$ . Beim Nachweis lokaler Verzweigung von den Lösungsfamilien  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$  kommt der Satz von Crandall-Rabinowitz [24] in der Version von Satz I.5.1. in [42] zum Einsatz.

**Satz 2.0.3** (Crandall-Rabinowitz). *Seien  $X, Z$  Banachräume, sei  $U \subset X$  offene Umgebung von  $0$  und sei  $I \subset \mathbb{R}$  offene Umgebung von  $\lambda_0$ . Ferner gelte  $F \in C^2(U \times I, Z)$ ,  $F(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in I$  sowie*

$$\dim(\ker(F_x(0, \lambda_0))) = \text{codim}(\text{ran}(F_x(0, \lambda_0))) = 1$$

mit

$$\ker(F_x(0, \lambda_0)) = \text{span}\{\phi\}, \quad F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi] \notin \text{ran}(F_x(0, \lambda_0)).$$

Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  und eine stetig differenzierbare Kurve  $(\hat{x}, \hat{\lambda}) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \times I$  mit  $\hat{\lambda}(0) = \lambda_0, \hat{x}(0) = 0, \hat{x}'(0) = \phi, \hat{x}(s) \neq 0$  für  $0 < |s| < \varepsilon$  und

$$F(\hat{x}(s), \hat{\lambda}(s)) = 0 \quad \text{für } |s| < \varepsilon.$$

Ferner gilt:

- (i) *Es existiert eine Umgebung  $\tilde{U} \times \tilde{I} \subset U \times I$  von  $(0, \lambda_0)$ , so dass alle in  $\tilde{U} \times \tilde{I}$  liegenden nichttrivialen Lösungen von  $F(x, \lambda) = 0$  dieser Form sind.*
- (ii) *Für  $\phi' \in \text{ran}(F_x(0, \lambda_0))^\perp$  mit  $\|\phi'\|_{Z'} = 1$  gilt<sup>1</sup>*

$$\hat{\lambda}'(0) = -\frac{1}{2} \frac{\langle F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi], \phi' \rangle}{\langle F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi], \phi' \rangle}. \quad (2.0.3)$$

- (iii) *Im Fall  $F \in C^3(U \times I, Z)$  und  $\hat{\lambda}'(0) = 0$  gilt*

$$\hat{\lambda}''(0) = -\frac{1}{3} \frac{\langle F_{xxx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi, \phi] - 3F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \zeta], \phi' \rangle}{\langle F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi], \phi' \rangle}, \quad (2.0.4)$$

$$\zeta = ((Id - Q)F_x(0, \lambda_0)|_{\text{ran}(Id - P)})^{-1}(Id - Q)F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi]$$

für  $\phi'$  wie in (ii), für einen stetigen Projektor  $P : X \rightarrow \ker(F_x(0, \lambda_0))$  und  $Qz = \langle z, \phi' \rangle \phi^*$  für  $z \in Z$ , wobei  $\phi^* \in Z$  mit  $\langle \phi^*, \phi' \rangle = 1$ .

<sup>1</sup>Hier bezeichnet  $\text{ran}(F_x(0, \lambda_0))^\perp$  den Annihilator des Unterraums  $\text{ran}(F_x(0, \lambda_0))$  in  $Z$ . Jedes Element  $\phi' \in Z'$  erfüllt  $\ker(\phi') = \text{ran}(F_x(0, \lambda_0))$ . Ist  $Z$  ein Hilbertraum, so ist der Annihilator eines Unterraums zum orthogonalen Komplement desselben isomorph, sodass die Notation konsistent ist.

**Bemerkung 2.0.4.** Ist  $X = Z$  ein Hilbertraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und ist der lineare Operator  $F_x(0, \lambda_0)$  symmetrisch, dann können wir im obigen Satz  $Q$  als die Orthogonalprojektion auf  $\ker(F_x(0, \lambda_0)) = \text{span}\{\phi\}$  wählen. Im Fall  $\|\phi\| = 1$  gilt daher  $Qx = \langle x, \phi \rangle \phi$  für  $x \in X$  und wir erhalten unter den Glattheitsvoraussetzungen des obigen Satzes die Formeln

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}'(0) &= -\frac{1}{2} \frac{\langle F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi], \phi \rangle}{\langle F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi], \phi \rangle}, \\ \hat{\lambda}''(0) &= -\frac{1}{3} \frac{\langle F_{xxx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi, \phi] - 3F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \zeta], \phi \rangle}{\langle F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi], \phi \rangle} \quad (\text{falls } \hat{\lambda}'(0) = 0).\end{aligned}$$

Die Verzweigungsformeln (2.0.3), (2.0.4) sowie  $\hat{x}'(0) = \phi$  ergeben sich aus (I.6.3), (I.6.11) und (I.5.17) in [42]. Hierbei wird wie üblich  $F_{x\lambda}(x, \lambda)[\cdot]$  als stetige lineare Abbildung von  $X$  nach  $Z$  aufgefasst. Wir verwenden Satz 2.0.3 sowie eine in Appendix A präsentierte Verschärfung dieses Resultats, um lokale Verzweigung von  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$  in Form einer stetig differenzierbaren Kurve nachzuweisen. Die Analyse der Familien  $\mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5, \mathcal{T}_6$  zeigt, dass von diesen Kurven keine Lösungen bzw. nur explizit bekannte Lösungen abzweigen. Um globale Verzweigung von  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$  nachweisen zu können, nutzen wir den Satz über globale Verzweigung von Rabinowitz, vgl. Satz 1.3 in [68]. Zur Formulierung dieses Satzes verwenden wir den Begriff des Leray-Schauder-Indexes  $\text{ind}(Id - K, 0) \in \{-1, 1\}$ , wobei  $Id: X \rightarrow X$  die Identitätsabbildung und  $K: X \rightarrow X$  kompakt ist. Die Leray-Schauder-Formel zur Berechnung dieser Zahl ist nach Gleichung (II.2.11) in [42] gegeben durch

$$\text{ind}(Id - K, 0) = (-1)^{m_1 + \dots + m_k}, \quad (2.0.5)$$

wobei  $m_1, \dots, m_k$  die algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte  $\mu_1, \dots, \mu_k$  von  $K$  mit  $\mu_1, \dots, \mu_k > 1$  bezeichnet. Wir verwenden den Satz von Rabinowitz in der Version aus Satz II.3.3 in [42].

**Satz 2.0.5** (Rabinowitz). *Sei  $X$  ein Banachraum,  $F \in C(X \times \mathbb{R}, X)$ ,  $F(x, \lambda) = x + f(x, \lambda)$  für eine kompakte Abbildung  $f: X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  mit  $F(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und sei  $F_x(0, \cdot)$  stetig. Sei  $\mathcal{S}$  der Abschluss der nichttrivialen Lösungen von  $F(x, \lambda) = 0$  in  $X \times \mathbb{R}$ . Wechselt  $\text{ind}(F_x(0, \lambda), 0)$  an der Stelle  $\lambda = \lambda_0$  das Vorzeichen, so gilt  $(0, \lambda_0) \in \mathcal{S}$ . Bezeichnet  $\mathcal{C}$  die maximale Zusammenhangskomponente von  $(0, \lambda_0)$  in  $\mathcal{S}$ , so ist*

- (i)  $\mathcal{C}$  unbeschränkt oder
- (ii)  $\mathcal{C}$  enthält einen Punkt  $(0, \lambda_1)$  mit  $\lambda_0 \neq \lambda_1$ .

**Bemerkung 2.0.6.**

- a) Der Nachweis globaler Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  mit Hilfe von Satz 2.0.5 ist problematisch, da die Funktion  $\tilde{F}(u, v, b) := F(u_b + u, v_b + v, b)$  nur für  $b > -1$  definiert ist und damit nicht den formalen Voraussetzungen des Satzes genügt. Ein Blick in den

Beweis von Satz II.3.3 in [42] zeigt hingegen, dass unter entsprechend modifizierten Voraussetzungen globale Verzweigung von beliebigen stetig parametrisierten Lösungsscharen  $(x_\lambda)_{\lambda \in (\underline{\lambda}, \bar{\lambda})}$  nachgewiesen werden kann. Wir skizzieren kurz, wie die neuen Voraussetzungen lauten und welche Änderungen im Beweis von Satz II.3.3 vorzunehmen sind: Wir setzen erneut  $F \in C(X \times \mathbb{R}, X)$  sowie  $F(x, \lambda) = x + f(x, \lambda)$  für eine kompakte Abbildung  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  voraus. Ferner sei  $\Lambda := (\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$  ein nicht-leeres offenes Intervall und  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine von  $\lambda$  stetig abhängige Schar von Lösungen mit der Eigenschaft

$$\lim_{\lambda \rightarrow \underline{\lambda}} \|(x_\lambda, \lambda)\| = \lim_{\lambda \rightarrow \bar{\lambda}} \|(x_\lambda, \lambda)\| = +\infty.$$

Statt " $F(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ " fordern wir daher " $F(x_\lambda, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in \Lambda$  und die Voraussetzung " $F_x(0, \cdot)$  stetig" wird durch die Forderung nach der Stetigkeit der Abbildung  $\lambda \mapsto F_x(x_\lambda, \lambda)$  auf  $\Lambda$  ersetzt. Aus  $(0, \lambda_0)$  wird ferner  $(x_{\lambda_0}, \lambda_0)$  mit  $\lambda_0 \in \Lambda$ . Die Menge  $\mathcal{S}$  wird in diesem Fall definiert durch

$$\mathcal{S} = \overline{\{(x, \lambda) \in X \times \Lambda : F(x, \lambda) = 0, x \neq x_\lambda\}}.$$

Der Argumentation des Satzes II.3.3 in [42] ist dann mit textuellen Änderungen auf diesen Fall zu übertragen. Die Unbeschränktheit der betrachteten Lösungsschar  $(x_\lambda, \lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  wird hierbei dafür benötigt, die Aussage  $F(x, \lambda) \neq 0$  auf  $\partial W$  auf Seite 206 oben zu gewährleisten, wobei die Mengen  $V$  und  $W := U \setminus \bar{V}$  offen und beschränkt sind. Um das Scheitern der Rabinowitz-Alternative für beschränkte Lösungsscharen nachzuweisen, betrachten wir das folgende Beispiel:  $\Lambda = (-1, 1)$ ,  $x_\lambda \equiv 0$  und  $F(x, \lambda) := \lambda(4 - \lambda^2)x - x^2 = 0$ . Die maximale bei  $\lambda = 0$  verzweigende Zusammenhangskomponente in  $\mathcal{S}$  ist durch

$$\mathcal{C} = \{(\lambda(4 - \lambda^2), \lambda) : 0 < |\lambda| \leq 2\} \cup \{0\} \times ([-2, -1] \cup [1, 2])$$

gegeben. Wegen  $2, -2 \notin \Lambda$  gilt weder (i) noch (ii).

- b) Beim Nachweis lokaler Verzweigung von nichttrivialen Lösungsscharen  $(x_\lambda)$  wie in a) mit Hilfe von Satz 2.0.3 ist statt  $F_{x\lambda}(x_\lambda, \lambda)[\phi] \neq 0$  die Bedingung

$$0 \neq \partial_\lambda(F_x(x_\lambda, \lambda)) = F_{xx}(x_\lambda, \lambda)[\partial_\lambda(x_\lambda), \cdot] + F_{x\lambda}(x_\lambda, \lambda)$$

zu fordern, wobei  $F_{xx}(x_\lambda, \lambda)$  als Fréchet-Ableitung existieren muss. Dies muss bei der Verzweigungsanalyse zu  $\mathcal{T}_3$  berücksichtigt werden. Die Existenz der erwähnten Fréchet-Ableitung wird durch Proposition A.6 garantiert.

- c) Im Fall  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$  liefert analytische Bifurkationstheorie wie in [15] stärkere Resultate als die oben genannten. Zum Beispiel besitzen in diesem Fall die nach Crandall-Rabinowitz lokal existierenden abzweigenden Lösungen globale Fortsetzungen als stetige Kurven. Die Existenz einer geschlossenen Schleife von Lösungen wie  $\mathcal{T}_6$  ist in diesem Kontext typisch, vgl. Satz 9.1.1 in [15].

Im Fall  $n \geq 2$  sei die Funktion  $F : H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  durch

$$F(u, v, b) = \begin{pmatrix} u - (-\Delta + 1)^{-1}(|u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q) \\ v - (-\Delta + \omega^2)^{-1}(|v|^{2q-2}v + b|v|^{q-2}v|u|^q) \end{pmatrix} \quad (2.0.6)$$

gegeben. Aus zweierlei Gründen ist der Funktionenraum  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  dem Raum  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  vorzuziehen. Zum einen erfüllt  $F$  aufgrund der Kompaktheit der Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  für  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  die Kompaktheitsvoraussetzung aus Satz 2.0.5. Zum anderen ist in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  jede nichttriviale Lösung  $(u, v, b)$  Verzweigungspunkt, denn es gilt  $(u(\cdot - te_1), v(\cdot - te_1), b) \rightarrow (u, v, b)$  für  $t \rightarrow 0$ . Jedes nichttriviale Verzweigungsergebnis in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  müsste daher zusätzlich sicherstellen, dass die Verzweigung nicht dieser Art ist.

Im Fall  $n = 1$  ist  $H_r^1(\mathbb{R}) \times H_r^1(\mathbb{R})$  als Definitionsgebiet der Funktion  $F$  im Hinblick auf den globalen Verzweigungssatz von Rabinowitz ungeeignet, da  $F$  sich nicht als kompakte Störung der Identität schreiben lässt. Wir untersuchen daher  $F$  im Fall  $n = 1$  auf einem Funktionenraum, in dem diese Voraussetzung erfüllt ist. Wir betrachten den Hilbertraum  $(E_\sigma, \langle \cdot, \cdot \rangle_{E_\sigma})$ , der für  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in (0, 1) \times (0, 1)$  durch

$$E_\sigma := E_{\sigma_1, 1} \times E_{\sigma_2, \omega}, \quad \langle (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle_{E_\sigma} := \langle u, \tilde{u} \rangle_{E_{\sigma_1, 1}} + \langle v, \tilde{v} \rangle_{E_{\sigma_2, \omega}}. \quad (2.0.7)$$

gegeben ist. Hierbei gelte

$$E_{\sigma_1, 1} := \{u \in H_r^1(\mathbb{R}) : \langle u, u \rangle_{E_{\sigma_1, 1}} < \infty\}, \quad E_{\sigma_2, \omega} := \{v \in H_r^1(\mathbb{R}) : \langle v, v \rangle_{E_{\sigma_2, \omega}} < \infty\}$$

für

$$\langle u, \tilde{u} \rangle_{E_{\sigma_1, 1}} := \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} (u' \tilde{u}' + u \tilde{u}) dx, \quad \langle v, \tilde{v} \rangle_{E_{\sigma_2, \omega}} := \int_0^\infty e^{2\sigma_2 \omega x} (v' \tilde{v}' + \omega^2 v \tilde{v}) dx.$$

Die Parameter  $\sigma_1, \sigma_2$  sind in Abhängigkeit von  $\omega$  und  $q$  so wählbar, dass die Abbildung  $F : E_\sigma \times \mathbb{R} \rightarrow E_\sigma$  wohldefiniert und eine kompakte Störung der Identität ist. Einen Beweis dieser Aussage liefern wir in Appendix A, siehe Lemma A.4 (iii).

Grundlage für die folgenden Untersuchungen sind die spektralen Eigenschaften des kompakten und bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  symmetrischen Operators

$$L_\omega : H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto (-\Delta + \omega^2)^{-1} (u_0^{2q-2} u).$$

Die Eigenfunktionen  $(\varphi_{j, \omega})_{j \in \mathbb{N}_0}$  des Operators  $L_\omega$  bilden eine Orthonormalbasis des Hilbertraums  $H_r^1(\mathbb{R}^n)$  und für die zugehörigen Eigenwerte  $(b_{j, \omega}^{-1})_{j \in \mathbb{N}_0}$  gilt  $b_{0, \omega} < b_{1, \omega} < \dots$  mit  $b_{j, \omega} \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ . Im Fall  $\omega = 1$  verwenden wir die kürzere Schreibweise  $b_j := b_{j, 1}$ ,  $\varphi_j := \varphi_{j, 1}$ . Für weitere Eigenschaften der Eigenpaare verweisen wir auf Lemma 1.2 (v). Ferner benötigen wir die Formeln für die ersten Fréchet-Ableitungen der Funktion  $F$  bezüglich  $x = (u, v)$  und  $b$ . Im Fall  $q \geq 2$  ist  $F = (F^1, F^2)$  stetig differenzierbar und für  $u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $b \in \mathbb{R}$  sowie  $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  gelten die folgenden Formeln:

$$F_x^1(u, v, b)[\phi] = \phi_1 - (-\Delta + 1)^{-1} \left( (2q - 1)|u|^{2q-2}\phi_1 + b(q - 1)|u|^{q-2}|v|^q\phi_1 + bq|u|^{q-2}|v|^{q-2}uv\phi_2 \right), \quad (2.0.8)$$

$$F_x^2(u, v, b)[\phi] = \phi_2 - (-\Delta + \omega^2)^{-1} \left( (2q - 1)|v|^{2q-2}\phi_2 + b(q - 1)|v|^{q-2}|u|^q\phi_2 + bq|v|^{q-2}|u|^{q-2}vu\phi_1 \right), \quad (2.0.9)$$

$$F_{xb}^1(u, v, b)[\phi] = -(-\Delta + 1)^{-1} \left( (q - 1)|u|^{q-2}|v|^q\phi_1 + q|u|^{q-2}|v|^{q-2}uv\phi_2 \right), \quad (2.0.10)$$

$$F_{xb}^2(u, v, b)[\phi] = -(-\Delta + \omega^2)^{-1} \left( (q - 1)|v|^{q-2}|u|^q\phi_2 + q|v|^{q-2}|u|^{q-2}vu\phi_1 \right). \quad (2.0.11)$$

## 2.1. Verzweigung von $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$

In diesem Abschnitt weisen wir für  $q = 2$  globale Verzweigung von den Lösungsfamilien  $\mathcal{T}_1 = \{(u_0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  und  $\mathcal{T}_2 = \{(0, v_0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  nach. Zunächst klären wir, warum eine Einschränkung auf den Fall  $q = 2$  sinnvoll ist.

**Lemma 2.1.1.** *Im Fall  $q > 2$  tritt keine Verzweigung von  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  auf.*

**Beweis:**

Aus den Formeln (2.0.8), (2.0.9) folgt  $\ker(F_x(u_0, 0, b)) = \ker(F_x(0, v_0, b)) = \{0\}$  für alle  $b \in \mathbb{R}$  und damit die Behauptung nach dem Satz über implizit definierte Funktionen.  $\square$

Im Fall  $1 < q < 2$  ist  $F$  nicht stetig differenzierbar, sodass eine Argumentation wie im Beweis von Lemma 2.1.1 nicht möglich ist. Für Lösungen  $(u, v, b)$  von (2.0.1) mit  $b \leq 0$  gilt aufgrund der Sobolev-Einbettung die Ungleichung

$$\|u\|^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q \leq C\|u\|^{2q}, \quad \|v\|_\omega^2 = \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q \leq C\|v\|_\omega^{2q}.$$

Insbesondere erhalten wir  $\|u\| \geq c > 0$  im Fall  $u \neq 0$  und  $\|v\|_\omega \geq c > 0$  im Fall  $v \neq 0$ , sodass Verzweigung von  $(u_0, 0, b)$  bzw.  $(0, v_0, b)$  für negative  $b$  nicht auftreten kann. Aus demselben Grund ist "Verzweigung nach links" für  $b = 0$  ausgeschlossen, wohingegen die Existenz der Lösungsfamilie  $\mathcal{T}_4$  aus Proposition 2.0.2 eine "Verzweigung nach rechts" belegt, vgl. Abbildung 2.1(a). Unsere einzige den Fall  $1 < q < 2, b > 0$  betreffende Aussage ist die folgende. Wäre  $(u_0, 0, b)$  ein Verzweigungspunkt mit  $b > 0$  (analog für  $(0, v_0, b)$ ), so gäbe es eine Folge  $(u_k, v_k, b_k)$  von nichttrivialen Lösungen mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u_0, 0, b)$  und jede solche Folge würde  $\tilde{v}_k := v_k\|v_k\|_\omega^{-1} \rightarrow 0$  erfüllen, denn aus  $\|v_k\|_\omega^2 = \|v_k\|_{2q}^{2q} + b_k\|u_k v_k\|_q^q$  folgt für  $k \rightarrow \infty$

$$o(1) = \|v_k\|_\omega^{2-q} = \|\tilde{v}_k\|_{2q}^q \|v_k\|_{2q}^q + b_k\|u_k \tilde{v}_k\|_q^q = o(1) + b\|u_0 \tilde{v}_k\|_q^q.$$

Dem Autor ist unklar, ob ein solches Szenario möglich ist.

Sei im Folgenden  $q = 2$ . Verzweigungen von  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  wurden nach Wissensstand des Autors bislang nur in einer Arbeit von Bartsch, Wang und Wei untersucht, vgl. Satz 1.1 in [7]. Die Autoren zeigen mit Hilfe eines Verzweigungssatzes von Alexander und Antman [2] die Existenz zusammenhängender Mengen  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  nichtnegativer nichttrivialer Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} -\Delta u + \lambda_1 u &= \mu_1 u^3 + \beta uv^2, \\ -\Delta v + \lambda_2 v &= \mu_2 v^3 + \beta vu^2, \\ \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \beta &> 0, \quad n \in \{1, 2, 3\}, \quad u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Die Mengen  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  haben Überdeckungsdimension größer oder gleich 5 und enthalten sämtliche semitriviale Lösungen zu den Parameterwerten  $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 > 0$ . Darüberhinaus zeigen die Autoren, dass  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  für alle festen Parameter  $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$  den

Parameterbereich  $0 \leq \beta < \min\{\mu_1\beta_0(\lambda_2/\lambda_1), \mu_2\beta_0(\lambda_1/\lambda_2)\}$  überdeckt, wobei an den Stellen  $\beta = \mu_1\beta_0(\lambda_2/\lambda_1)$  bzw.  $\beta = \mu_2\beta_0(\lambda_1/\lambda_2)$  positive Lösungen von den semitrivialen Lösungen  $(U_1, 0), (0, U_2)$  mit  $-\Delta U_1 + \lambda_1 U_1 = \mu_1 U_1^3$  und  $-\Delta U_2 + \lambda_2 U_2 = \mu_2 U_2^3$  verzweigen. Unser globales Verzweigungsergebnis aus Satz 2.1.6 kann mit diesem Ergebnis insofern in Zusammenhang gebracht werden, dass die bei  $b = b_{0,\omega} = \beta_0(\omega^2)$  von  $\mathcal{T}_1$  und bei  $b = b_{0,1/\omega} = \beta_0(\omega^{-2})$  von  $\mathcal{T}_2$  verzweigenden positiven Lösungen als Teilmenge einer höherdimensionalen Fläche von positiven Lösungen aufgefasst werden können.

Da die Verzweigungen von der Lösungsschar  $\mathcal{T}_2$  in Satz 2.1.8 mittels einer einfachen Transformation aus den Verzweigungen von  $\mathcal{T}_1$  gewonnen werden können, betrachten wir im Folgenden nur  $\mathcal{T}_1$ . Wir untersuchen  $\mathcal{T}_1$  zunächst auf lokale Verzweigung und überprüfen daher die Voraussetzungen von Satz 2.0.3. Wir zeigen, dass an den Stellen  $b = b_{j,\omega}$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) lokale Verzweigung in Form einer stetig differenzierbaren Kurve auftritt und dass die abzweigenden Lösungen das eingangs beschriebene von  $j$  abhängige nodale Muster besitzen. Für die Definition der Zahlen  $b_{j,\omega}$  verweisen wir auf Lemma 1.2 (v). Dieses Muster ausnutzend können wir mit der Alternative des Satzes von Rabinowitz (Satz 2.0.5) die Unbeschränktheit der bei  $b = b_{j,\omega}$  abzweigenden Lösungskontinua  $\mathcal{C}_j$  beweisen. Anders als bei üblichen Anwendungen des Satzes können wir die Alternative (ii) und damit die Rückkehr von  $\mathcal{C}_j$  zu  $\mathcal{T}_1$  an einer Stelle  $b \neq b_{j,\omega}$  im Allgemeinen nicht ausschließen und müssen die Unbeschränktheit dieser Mengen daher über einen Umweg herleiten. Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \dots$  die entsprechenden von  $\mathcal{T}_2$  verzweigenden Lösungskontinua, so werden die Aussagen der Sätze 2.1.6 und 2.1.8 durch die folgende Abbildung veranschaulicht.

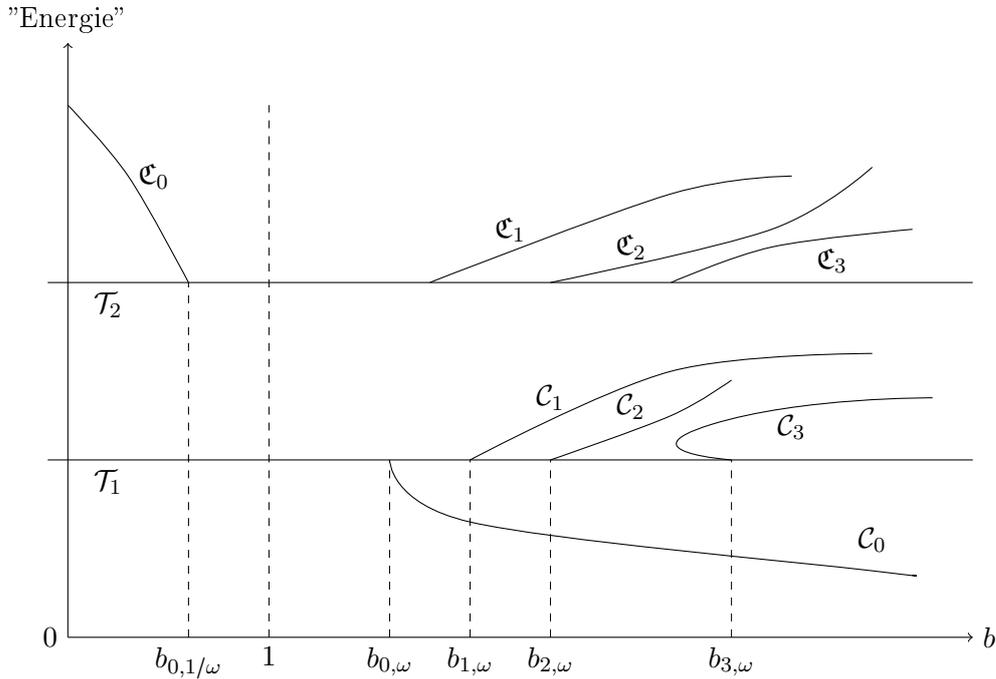


Abbildung 2.2.: Verzweigungen von  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  für  $\omega > 1$

Die Fälle  $n = 1$  und  $n \in \{2, 3\}$  sind im Folgenden zu unterscheiden; wir betrachten zunächst den Fall  $n \geq 2$ . Im Hinblick auf den Satz von Crandall-Rabinowitz bestimmen wir zunächst  $F_x$  und  $F_{xb}$  in den Elementen von  $\mathcal{T}_1$ . Für  $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  gilt aufgrund der Formeln (2.0.8)-(2.0.11)

$$F_x^1(u_0, 0, b)[\phi] = \phi_1 - (-\Delta + 1)^{-1}(3u_0^2\phi_1), \quad (2.1.1)$$

$$F_x^2(u_0, 0, b)[\phi] = \phi_2 - (-\Delta + \omega^2)^{-1}(bu_0^2\phi_2) \quad (2.1.2)$$

sowie

$$F_{xb}^1(u_0, 0, b)[\phi] = 0, \quad F_{xb}^2(u_0, 0, b)[\phi] = -(-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0^2\phi_2). \quad (2.1.3)$$

In der folgenden Proposition zeigen wir, dass alle potentiellen Verzweigungspunkte durch  $b_{0,\omega}, b_{1,\omega}, \dots$  gegeben sind.

**Proposition 2.1.2.** *Sei  $n \in \{2, 3\}, q = 2$ . Für  $b \in \mathbb{R}$  ist  $\ker(F_x(u_0, 0, b))$  genau dann nichttrivial wenn  $b = b_{j,\omega}$  für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ . Ferner gilt*

$$\ker(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}, \quad \text{ran}(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}^\perp.$$

**Beweis:**

Für  $b \in \mathbb{R}$  und  $(\phi_1, \phi_2) \in \ker(F_x(u_0, 0, b))$  gilt

$$-\Delta\phi_1 + \phi_1 = 3u_0^2\phi_1, \quad -\Delta\phi_2 + \omega^2\phi_2 = bu_0^2\phi_2.$$

Nach Lemma 1.2 (v) gilt  $b_0 = 1 < 3 < b_1$  und somit  $\phi_1 = 0$ . Ferner ist  $\phi_2 \neq 0$  genau dann möglich wenn  $b = b_{j,\omega}$  für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ . In diesem Fall erhalten wir  $\phi_2 \in \text{span}\{\varphi_{j,\omega}\}$  und damit  $\ker(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}$ . Da  $F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})$  symmetrisch ist, folgt  $\text{ran}(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}^\perp$ .  $\square$

Um die Anwendbarkeit des Satzes von Crandall-Rabinowitz zu prüfen, genügt es, die Bedingung  $F_{xb}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega})] \notin \text{ran}(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega}))$  nachzuprüfen. Diese ist wegen

$$\begin{aligned} \langle F_{xb}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega})], (0, \varphi_{j,\omega}) \rangle &= \langle -(-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0^2\varphi_{j,\omega}), \varphi_{j,\omega} \rangle_\omega \\ &= -\|u_0\varphi_{j,\omega}\|_2^2 < 0 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

erfüllt und wir erhalten für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  lokale Verzweigung von  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$  in Form einer stetig differenzierbaren Kurve  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  mit  $(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s)) = (u_0, 0) + s(0, \varphi_{j,\omega}) + o(s)$  für  $s \rightarrow 0$ . Da  $\hat{\varphi}_{j,\omega}$  genau  $j$  einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$  besitzt<sup>2</sup>, ist die Vermutung naheliegend, dass die bei  $b = b_{j,\omega}$  abzweigenden Lösungen in  $S_{j,+} \cup S_{j,-}$  liegen, wobei  $S_{j,\pm}$  definiert ist durch

$$S_{j,\pm} = \{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1),} \\ u > 0, \pm v(0) > 0, \hat{v} \text{ hat genau } j \text{ einfache Nullstellen in } \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Wegen  $\bar{v}_j(s)s^{-1} \rightarrow \varphi_{j,\omega}$  für  $s \rightarrow 0$  liefert Proposition 2.1.3 die nodale Charakterisierung der abzweigenden Lösungen in einer Umgebung des Verzweigungspunkts  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$ .

<sup>2</sup>Für  $w \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet  $\hat{w} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion mit  $w(x) = \hat{w}(|x|)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.1.3.** *Sei  $n \in \{2, 3\}$ ,  $q = 2$  und  $j \in \mathbb{N}_0$ . Ist  $(u_k, v_k, b_k)$  eine Folge von Lösungen von (2.0.1) mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u_0, 0, b_{j,\omega})$  und ist  $(\pm s_k)$  positive Nullfolge mit  $v_k s_k^{-1} \rightarrow \varphi_{j,\omega}$ , dann gilt  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,\pm}$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Beweis:**

Sei  $\tilde{v}_k := v_k s_k^{-1}$ . Wie in Satz C.4 erhalten wir aus der schwachen Differentialungleichung

$$-\Delta|\tilde{v}_k| + \omega^2|\tilde{v}_k| \leq |\tilde{v}_k|(v_k^2 + |b_k|u_k^2) \leq C|\tilde{v}_k|(v_k^2 + u_k^2) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

und der Beschränktheit der Folgen  $(u_k), (v_k), (\tilde{v}_k)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n)$  eine Abschätzung der Form  $\|\tilde{v}_k\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und ein  $\alpha > 0$ . Aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt  $\tilde{v}_k \rightarrow \varphi_{j,\omega}$  in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ . Wegen  $\varphi_{j,\omega}(0) > 0$  erhalten wir  $\tilde{v}_k(0) > 0$  und damit  $v_k(0) > 0$  für fast alle  $k$ . Um zu zeigen, dass  $\hat{v}_k$  genau  $j$  einfache Nullstellen besitzt, genügt es wegen  $\tilde{v}_k \rightarrow \varphi_{j,\omega}$  in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  zu zeigen, dass alle Nullstellen von  $\tilde{v}_k$  bzw.  $v_k$  in einem festen Kompaktum enthalten sind<sup>3</sup>.

Sei daher  $\xi_k \in (0, \infty)$  eine Nullstelle von  $\hat{v}_k$ . Dann wird ein positives Maximum oder ein negatives Minimum von  $\hat{v}_k$  in  $\zeta_k \in (\xi_k, \infty)$  angenommen. Aus  $\hat{v}_k'(\zeta_k) = 0$  und der Differentialgleichung (2.0.1) folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{\hat{v}_k''(\zeta_k)}{\hat{v}_k(\zeta_k)} \\ &= \frac{\hat{v}_k(\zeta_k)^3 + b_k \hat{v}_k(\zeta_k) \hat{u}_k(\zeta_k)^2 - \omega^2 \hat{v}_k(\zeta_k)}{\hat{v}_k(\zeta_k)} \\ &\leq \max\{1, b_k\}(\hat{u}_k(\zeta_k)^2 + \hat{v}_k(\zeta_k)^2) - \omega^2. \end{aligned}$$

Wegen  $b_k \rightarrow b_{j,\omega}$ , erhalten wir  $\hat{u}_k(\zeta_k)^2 + \hat{v}_k(\zeta_k)^2 \geq c > 0$ . Andererseits existiert nach dem Radial Lemma 1 aus [73] ein  $C > 0$  mit  $|\hat{u}_k(r)| + |\hat{v}_k(r)| \leq Cr^{\frac{1-n}{2}}$  für alle  $r \geq 0$ . Folglich ist  $(\zeta_k)$  und damit  $(\xi_k)$  durch eine von der gewählten Folge unabhängige Zahl nach oben beschränkt. Es folgt  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,\pm}$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Proposition 2.1.3 nutzen wir im Beweis von Satz 2.1.6, um die nodale Charakterisierung der bei  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$  abzweigenden Lösungen zu beweisen. Als nächstes wenden wir uns der Frage zu, ob das nodale Muster entlang der abzweigenden Lösungskontinua (d.h. "global") erhalten bleibt. In Proposition 2.1.4 zeigen wir sinngemäß, dass dies genau so lange der Fall ist, wie keine semitriviale Lösungen der Form  $(0, v)$  auftreten. In Anlehnung an die Notation von Satz 2.0.5 definieren wir die Mengen  $\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}}_j$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \overline{\{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1), } (u, v) \neq (u_0, 0)\}}, \\ \tilde{\mathcal{S}}_j &= \mathcal{S} \setminus \{(0, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : v \neq 0, -\Delta v + \omega^2 v = v^3 \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ &\quad \hat{v} \text{ hat genau } j \text{ einfache Nullstellen in } \mathbb{R}_{>0}\}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Nullstellen  $\xi_k$  von  $v_k$  können nicht "gegeneinander konvergieren", da in diesem Fall die Grenzfunktion  $\hat{\varphi}_{j,\omega}$  eine doppelte Nullstelle hätte und nach Picard-Lindelöf trivial wäre.

Aus dieser Definition ergibt sich  $S_{j,\pm} \subset \tilde{\mathcal{S}}_j \subset \mathcal{S}$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ .

**Proposition 2.1.4.** *Sei  $n \in \{2, 3\}$ ,  $q = 2$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$  ist die Menge  $S_{j,\pm}$  offen und abgeschlossen in  $\tilde{\mathcal{S}}_j \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$ .*

**Beweis:**

Wir betrachten nur  $S_{j,+}$  und zeigen zunächst, dass  $S_{j,+}$  offen in  $\tilde{\mathcal{S}}_j \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$  ist. Annahme: Es gibt ein  $(u, v, b) \in S_{j,+}$  und eine Folge  $(u_k, v_k, b_k)$  in  $\tilde{\mathcal{S}}_j \setminus S_{j,+}$  mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$ . Nach Lemma C.9 gilt  $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$  in  $C_B^2(\mathbb{R}^n)$ . Aus  $v(0) > 0$  folgt  $v_k(0) > 0$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ . Ferner erhalten wir wie in Proposition 2.1.3, dass die Nullstellen von  $(u_k), (v_k)$  in einem festen Kompaktum liegen, so dass für hinreichend große  $k$  auch  $u_k > 0$  gilt und  $\hat{v}_k$  genau  $j$  einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$  besitzt. Wir erhalten  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,+}$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ , Widerspruch.

Wir zeigen nun, dass  $S_{j,+}$  abgeschlossen in  $\tilde{\mathcal{S}}_j \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$  ist. Sei  $(u_k, v_k, b_k)$  ein Folge in  $S_{j,+}$  mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b) \in \tilde{\mathcal{S}}_j \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$ . Wieder sind die Nullstellenfolgen von  $(u_k), (v_k)$  beschränkt. Aus Lemma C.9 folgt erneut  $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$  in  $C_B^2(\mathbb{R}^n)$ , insbesondere gilt zudem  $u \geq 0$  und  $v$  ist entweder trivial oder es gilt  $v \neq 0$  und  $\hat{v}$  hat genau  $j$  einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$ . Per Definition der Menge  $\tilde{\mathcal{S}}_j$  gilt  $u \neq 0$  und es folgt  $u > 0$ . Im Fall  $v = 0$  wäre nach dem Eindeutigkeitsresultat von Kwong (Satz 1.1)  $(u, v) = (u_0, 0)$  und somit  $b \in \{b_{0,\omega}, b_{1,\omega}, \dots\}$ . Wegen  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,+}$  und  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  ergäbe sich  $b = b_{j,\omega}$  aus Proposition 2.1.3 und damit  $(u, v, b) = (u_0, 0, b_{j,\omega})$ , Widerspruch. Daher gilt  $v \neq 0$  und  $\hat{v}$  hat genau  $j$  einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$ . Es folgt  $(u, v, b) \in S_{j,+}$ , was zu zeigen war.  $\square$

Proposition 2.1.5 zeigt, dass die Index-Bedingung des Satzes von Rabinowitz erfüllt ist.

**Proposition 2.1.5.** *Sei  $n \in \{2, 3\}$ ,  $q = 2$  und  $b \notin \{b_{0,\omega}, b_{1,\omega}, \dots\}$ . Dann gilt*

$$\text{ind}(F_x(u_0, 0, b), 0) = (-1)^{1+\beta} \quad \text{wobei } \beta = \#\{j \in \mathbb{N}_0 : b_{j,\omega} < b\}.$$

**Beweis:**

Wir verwenden die Indexformel (2.0.5) und bestimmen die Eigenwerte der kompakten Abbildung  $Id - F_x(u_0, 0, b) : H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ . Für  $\lambda \neq 0$  und  $\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  gilt  $(Id - F_x(u_0, 0, b))(\phi) = \lambda\phi$  genau dann wenn

$$-\Delta\phi_1 + \phi_1 = \frac{3}{\lambda}u_0^2\phi_1, \quad -\Delta\phi_2 + \omega^2\phi_2 = \frac{b}{\lambda}u_0^2\phi_2,$$

vgl. (2.1.1),(2.1.2). Daher ist das Spektrum von  $Id - F_x(u_0, 0, b)$  gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma(Id - F_x(u_0, 0, b)) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{3}{\lambda} \in \{b_0, b_1, \dots\} \text{ oder } \frac{b}{\lambda} \in \{b_{0,\omega}, b_{1,\omega}, \dots\} \right\} \\ &= \left\{ \frac{3}{b_j} : j \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ \frac{b}{b_{j,\omega}} : j \in \mathbb{N}_0 \right\}. \end{aligned}$$

Aus  $b_0 = 1 < 3 < b_1$  und der Indexformel (2.0.5) folgt

$$\begin{aligned} \text{ind}(F_x(u_0, 0, b), 0) &= (-1)^{\#\{\lambda \in \sigma(Id - F_x(u_0, 0, b)) : \lambda > 1\}} \\ &= (-1)^{\#\{j \in \mathbb{N}_0 : b_j < 3\} + \#\{j \in \mathbb{N}_0 : b_{j,\omega} < b\}} \\ &= (-1)^{1+\beta}. \end{aligned}$$

□

Wir kommen schließlich zum zentralen Resultat dieses Abschnitts. Mit dem Satz von Rabinowitz finden wir für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  unbeschränkte bei  $b = b_{j,\omega}$  von  $\mathcal{T}_1$  abzweigende Lösungskontinua  $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{S}$ . Mit Hilfe von A-Priori-Abschätzungen für positive Lösungen von (2.0.1) aus Satz C.13 können wir darüberhinaus im Fall  $\omega > 1$  zeigen, dass die Kontinua positiver bzw. negativer Lösungen  $\mathcal{C}_{0,\pm}$  bezüglich des Parameters  $b$  unbeschränkt sind. Für Teilmengen  $\mathcal{C}$  von  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  verwenden wir die Bezeichnung

$$\text{pr}(\mathcal{C}) := \{b \in \mathbb{R} : (u, v, b) \in \mathcal{C}\}.$$

**Satz 2.1.6.** *Sei  $n \in \{2, 3\}$ ,  $q = 2$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$  existieren zusammenhängende Mengen  $\mathcal{C}_{j,+}, \mathcal{C}_{j,-} \subset \mathcal{S} \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Es existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $C^\infty$ -Funktionen  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  mit  $U \cap \mathcal{S} \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\} = (U \cap \mathcal{C}_{j,+}) \cup (U \cap \mathcal{C}_{j,-})$  und*

$$U \cap \mathcal{C}_{j,\pm} = \{(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) : 0 < \pm s < \varepsilon\}.$$

*Ferner gilt*

$$(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) = (u_0, 0, b_{j,\omega}) + s(0, \varphi_{j,\omega}, 0) + o(s) \quad (s \rightarrow 0) \quad (2.1.5)$$

*sowie  $(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) \in S_{j,\pm}$  für  $0 < \pm s < \varepsilon$ .*

- (ii)  $\mathcal{C}_j := \mathcal{C}_{j,-} \cup \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\} \cup \mathcal{C}_{j,+}$  *ist maximale Zusammenhangskomponente in  $\mathcal{S}$ .*  
(iii)  $\mathcal{C}_{j,-} = \{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (u, -v, b) \in \mathcal{C}_{j,+}\}$ ,  $\text{pr}(\mathcal{C}_{0,+}) = \text{pr}(\mathcal{C}_{0,-})$ .  
(iv) *Die Mengen  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  sind unbeschränkt.*

*Im Fall  $\omega \neq 1$  gilt darüberhinaus  $\mathcal{C}_{0,\pm} \subset S_{0,\pm}$ . Im Fall  $\omega > 1$  gilt  $(b_{0,\omega}, \infty) \subset \text{pr}(\mathcal{C}_{0,\pm}) \subset (1, \infty)$ , im Fall  $0 < \omega < 1$  gilt  $[0, b_{0,1/\omega}) \subset \text{pr}(\mathcal{C}_{0,\pm}) \subset (-\infty, 1)$ .*

**Beweis:**

Wir weisen zunächst lokale Verzweigung mit Satz 2.0.3 nach. Aus Proposition 2.1.2 folgt  $\ker(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}$  sowie  $\text{ran}(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}^\perp$ . Ferner gilt wegen (2.1.4)

$$\langle F_{xb}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega})], (0, \varphi_{j,\omega}) \rangle = -\|u_0 \varphi_{j,\omega}\|_2^2 < 0.$$

Nach dem Satz von Crandall-Rabinowitz existiert eine Umgebung  $U$  von  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$  und ein  $\varepsilon > 0$  sowie  $C^\infty$ -Funktionen  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  mit der Eigenschaft (2.1.5) und

$$U \cap \mathcal{S} = \{(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) : |s| < \varepsilon\}.$$

Der Beweis von  $\bar{b}'_j(0) = 0$  ist im Appendix zu diesem Kapitel zu finden. Wegen Proposition 2.1.3 und (2.1.5) ist hierbei  $\varepsilon > 0$  so klein wählbar, dass  $(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) \in S_{j,\pm}$  für  $0 < \pm s < \varepsilon$  gilt. Sei

$$\mathcal{C}_{j,\pm,loc} := \{(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) : 0 < \pm s < \varepsilon\}.$$

Bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  die in  $\mathcal{S} \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$  maximale Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{C}_{j,\pm,loc}$ , so ergibt sich (i) und (ii). Da die Nullstellenmenge von  $F$  invariant unter der Transformation  $(u, v) \mapsto (u, -v)$  ist und  $(u, v) \in S_{j,+}$  äquivalent zu  $(u, -v) \in S_{j,-}$  ist, erhalten wir (iii).

Wir zeigen nun, dass die Mengen  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  unbeschränkt sind. Hierzu betrachten wir eine Teilmenge von  $\mathcal{C}_{j,\pm}$ , in der die durch  $S_{j,\pm}$  gegebene nodale Charakterisierung gilt. Sei  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm}$  die in  $\tilde{\mathcal{S}}_j \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$  maximale Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{C}_{j,\pm,loc}$ . Wegen  $\mathcal{S}_j \subset \mathcal{S}$  gilt  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm} \subset \mathcal{C}_{j,\pm}$  und  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm}$  ist nichtleer, denn  $\mathcal{C}_{j,\pm,loc} \subset \mathcal{C}_{j,\pm}$ . Nach Proposition 2.1.4 gilt in  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm}$  dieselbe nodale Charakterisierung der Lösungen wie in der Nähe des Verzweigungspunktes, d.h. es gilt

$$\tilde{\mathcal{C}}_{j,+} = S_{j,+} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{j,+}, \quad \tilde{\mathcal{C}}_{j,-} = S_{j,-} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{j,-}. \quad (2.1.6)$$

Die Unbeschränktheit von  $\mathcal{C}_j$  ergibt sich nun auf zwei mögliche Arten.

*1. Fall:*  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,+} = \mathcal{C}_{j,+}$ . In diesem Fall folgt aus (2.1.6)  $\mathcal{C}_{j,+} = \tilde{\mathcal{C}}_{j,+} = S_{j,+} \cap \tilde{\mathcal{C}}_{j,+}$  und entsprechend für  $\mathcal{C}_{j,-}$ . Insbesondere ist  $(u_0, 0, b) \notin \mathcal{C}_j = \mathcal{C}_{j,+} \cup \mathcal{C}_{j,-} \cup \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$  für alle  $b \neq b_{j,\omega}$ . Nach Rabinowitz folgt die Unbeschränktheit von  $\mathcal{C}_j$ .

*2. Fall:*  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm} \neq \mathcal{C}_{j,\pm}$ . Wie in Proposition 2.1.4 folgt, dass  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm}$  offen in  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  ist. Da  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm}$  zudem nichtleer ist, kann  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,\pm}$  nicht abgeschlossen in  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  sein. Daher existiert eine Folge  $(u_k, v_k, b_k)$  in  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,+}$  mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b) \in \mathcal{C}_{j,+} \setminus \tilde{\mathcal{C}}_{j,+}$ . Da  $\tilde{\mathcal{C}}_j$  per Konstruktion maximale Zusammenhangskomponente in  $\tilde{\mathcal{S}}_j$  ist, folgt  $u = 0, v \neq 0$  und  $\hat{v}$  hat genau  $j$  einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$ , denn sonst wäre  $\tilde{\mathcal{C}}_{j,+} \cup \{(u, v, b)\}$  eine größere Zusammenhangskomponente in  $\tilde{\mathcal{S}}_j$ . Wir erhalten  $(0, v, b) \in \mathcal{C}_{j,+}$  und somit

$$\{(0, v, \tilde{b}) : \tilde{b} \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{C}_{j,+}$$

und wir erhalten die Unbeschränktheit von  $\mathcal{C}_{j,+}$  und damit (iv).

Wir kommen zum Beweis der Eigenschaften von  $\mathcal{C}_{0,\pm}$ . Im Fall  $\omega > 1$  gilt  $b_{0,\omega} > b_{0,1} = 1$ , vgl. Lemma 1.2 (v). Ferner existieren nach Lemma C.15 keine positiven Lösungen von (2.0.1) für  $b = 1$ . Da  $\mathcal{C}_{0,\pm}$  zusammenhängend ist, folgt  $\text{pr}(\mathcal{C}_{0,\pm}) \subset (1, \infty)$ . Der oben beschriebene 2. Fall kann nicht eintreten, denn dann gäbe es eine gegen  $(0, v, b)$  konvergente Folge

von positiven Lösungen. Nach dem Eindeutigkeitsresultat von Kwong wäre  $v = v_0$  und damit  $b = b_{0,1/\omega}$ . Wegen  $b_{0,1/\omega} < 1$  und  $\text{pr}(\mathcal{C}_{0,\pm}) \subset (1, \infty)$  ist dies aber unmöglich, da  $\mathcal{C}_{0,\pm}$  zusammenhängend ist. Es folgt  $\mathcal{C}_{0,\pm} \subset S_{0,\pm}$ . Ferner liefern die A-Priori-Abschätzungen aus Satz C.13, dass die Unbeschränktheit von  $\mathcal{C}_{0,\pm}$  nur aus der Unbeschränktheit der  $b$ -Komponente resultieren kann, d.h. es gilt  $\text{pr}(\mathcal{C}_{0,\pm}) \supset (b_{0,\omega}, \infty)$ . Die analogen Argumente für den Fall  $0 < \omega < 1$  liefern schließlich (iv).  $\square$

**Bemerkung 2.1.7.** Es bleibt im Fall  $j \geq 1$  ungeklärt, ob im obigen Beweis der erste Fall oder der zweite Fall eintritt. Im ersten Fall wären alle Lösungen in  $\mathcal{C}_{j,+}, \mathcal{C}_{j,-}$  vollständig nichttrivial und die nodale Charakterisierung wäre in der Menge  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  gegeben. Insbesondere wären die Mengen  $\mathcal{C}_{j,+}, \mathcal{C}_{j,-}$  disjunkt. Im zweiten Fall gäbe es eine Lösung  $v$  von  $-\Delta v + \omega^2 v = v^3$  mit  $v(0) > 0$  und genau  $j$  Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$  sowie ein  $b \in \mathbb{R}$  mit  $(0, v, b) \in \mathcal{C}_{j,+}$ . Aufgrund der zahlreichen weiteren möglichen Verzweigungen von  $\{(0, v, b) : b \in \mathbb{R}\}$  können wir in diesem Fall nicht auf die Disjunktheit von  $\mathcal{C}_{j,+}, \mathcal{C}_{j,-}$  schließen.

Für die Verzweigung von  $\mathcal{T}_2$  erhalten wir durch eine einfache Transformation ein analoges Resultat. Beschreibt  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j)$  die aus  $\mathcal{T}_1$  an der Stelle  $b_{j,1/\omega}$  verzweigende Lösungen des Systems (2.0.1) zum Parameter  $\frac{1}{\omega}$ , dann ist  $(\omega \bar{v}_j(\omega \cdot), \omega \bar{u}_j(\omega \cdot), \bar{b}_j)$  die entsprechende aus  $\mathcal{T}_2$  an der Stelle  $b_{j,1/\omega}$  verzweigende Kurve von Lösungen des Systems (2.0.1) zum Parameter  $\omega$ . Eine Übertragung der Ergebnisse aus Satz 2.1.6 liefert daher ein analoges Resultat. Die Mengen  $\mathfrak{S}, S_{j,\pm}$  in diese Kontext gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \overline{\{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1), } (u, v) \neq (0, v_0)\}}, \\ S_{j,\pm} &= \{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1),} \\ &\quad v > 0, \pm u(0) > 0, \hat{u} \text{ hat genau } j \text{ einfache Nullstellen in } \mathbb{R}_{>0}\}. \end{aligned}$$

**Satz 2.1.8.** Sei  $n \in \{2, 3\}, q = 2, \omega > 0$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$  existieren zusammenhängende Mengen  $\mathfrak{C}_{j,+}, \mathfrak{C}_{j,-} \subset \mathfrak{S} \setminus \{(0, v_0, b_{j,1/\omega})\}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Es existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $(0, v_0, b_{j,1/\omega})$ , ein  $\varepsilon > 0$  und  $C^\infty$ -Funktionen  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  mit  $U \cap \mathfrak{S} \setminus \{(0, v_0, b_{j,1/\omega})\} = (U \cap \mathfrak{C}_{j,+}) \cup (U \cap \mathfrak{C}_{j,-})$  und

$$U \cap \mathfrak{C}_{j,\pm} = \{(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) : 0 < \pm s < \varepsilon\}.$$

Ferner gilt

$$(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) = (0, v_0, b_{j,1/\omega}) + s(\omega \varphi_{j,1/\omega}(\omega \cdot), 0, 0) + o(s) \quad (s \rightarrow 0)$$

sowie  $(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) \in S_{j,\pm}$  für  $0 < \pm s < \varepsilon$ .

- (ii)  $\mathfrak{C}_j := \mathfrak{C}_{j,-} \cup \{(0, v_0, b_{j,1/\omega})\} \cup \mathfrak{C}_{j,+}$  ist maximale Zusammenhangskomponente in  $\mathfrak{S}$ .  
(iii)  $\mathfrak{C}_{j,-} = \{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (-u, v, b) \in \mathfrak{C}_{j,+}\}$ ,  $\text{pr}(\mathfrak{C}_{j,+}) = \text{pr}(\mathfrak{C}_{j,-})$ .  
(iv) Die Mengen  $\mathfrak{C}_{j,\pm}$  sind unbeschränkt.

Im Fall  $\omega \neq 1$  gilt ferner  $\mathfrak{C}_{0,\pm} \subset S_{0,\pm}$ . Im Fall  $\omega > 1$  gilt  $[0, b_{0,1/\omega}) \subset \text{pr}(\mathfrak{C}_{0,\pm}) \subset (-\infty, 1)$ , im Fall  $0 < \omega < 1$  gilt  $(b_{0,1/\omega}, \infty) \subset \text{pr}(\mathfrak{C}_{0,\pm}) \subset (1, \infty)$ .

Wir kommen schließlich zur Diskussion des Falls  $n = 1$ . Sei  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in (0, 1) \times (0, 1)$  beliebig und sei  $F : E_\sigma \times \mathbb{R} \rightarrow E_\sigma$  erneut gegeben durch (2.0.6). Wir legen kurz dar, warum dieselbe Argumentation wie für  $n \in \{2, 3\}$  das zu den obigen Sätzen analoge Verzweigungsergebnis liefert. Wegen  $(0, \varphi_{j,\omega}) \in E_\sigma$  erhalten wir wie in Proposition 2.1.2  $\ker(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}$  und  $\text{ran}(F_x(u_0, 0, b)) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}^\perp$ , wobei  $b_{j,\omega}$  nach Lemma A.3 durch

$$b_{j,\omega} = \frac{(\omega + 2j)(\omega + 1 + 2j)}{2} \quad \text{für } \omega > 0, j \in \mathbb{N}_0$$

gegeben ist. Aus (2.1.4) folgt, dass die Bedingungen des Satzes von Crandall-Rabinowitz erfüllt sind. Wir erhalten lokale Verzweigung von  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$  in Form einer stetig differenzierbaren Kurve. Ferner besitzen die abzweigenden Lösungen ebenfalls das durch  $S_{j,\pm}$  beschriebene nodale Muster. Im Beweis der zu Proposition 2.1.3 analogen Aussage wird das Radial Lemma 1 durch Lemma A.4 (ii) ersetzt. Das lokale Verzweigungsergebnis ist daher dasselbe wie im Fall  $n \in \{2, 3\}$ . Der Beweis von Proposition 2.1.4 gilt wörtlich im Fall  $n = 1$ , wobei die Mengen  $\mathcal{S}, \mathcal{S}_j, S_{j,\pm}$  in diesem Fall durch

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \overline{\{(u, v, b) \in E_\sigma \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1), } (u, v) \neq (u_0, 0)\}}, \\ \tilde{\mathcal{S}}_j &= \mathcal{S} \setminus \{(0, v, b) \in E_\sigma \times \mathbb{R} : v \neq 0, -\Delta v + \omega^2 v = v^3 \text{ in } \mathbb{R}^n, \\ &\quad \hat{v} \text{ hat genau } j \text{ einfache Nullstellen in } \mathbb{R}_{>0}\}, \\ S_{j,\pm} &= \{(u, v, b) \in E_\sigma \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1),} \\ &\quad u > 0, \pm v(0) > 0, \hat{v} \text{ hat genau } j \text{ einfache Nullstellen in } \mathbb{R}_{>0}\} \end{aligned}$$

definiert sind. Wie in Proposition 2.1.5 folgt, dass der bezüglich  $E_\sigma$  gebildete Leray-Schauder-Index  $\text{ind}(F_x(u_0, 0, b))$  bei  $b = b_{j,\omega}$  das Vorzeichen wechselt. Da  $F$  in  $E_\sigma$  für alle  $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1)$  nach Lemma A.4 (iii) eine kompakte Störung der Identität ist, erhalten wir dasselbe globale Verzweigungsergebnis für  $\mathcal{T}_1$  wie in Satz 2.1.6. Es folgt mit den entsprechenden Änderungen für  $\mathcal{T}_2$ :

**Satz 2.1.9.** *Sei  $n = 1, q = 2, \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  für  $0 < \sigma_1, \sigma_2 < 1$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}_0$  existieren zusammenhängende Mengen  $\mathcal{C}_{j,+}, \mathcal{C}_{j,-} \subset \mathcal{S} \setminus \{(u_0, 0, b_{j,\omega})\}$  bzw.  $\mathfrak{C}_{j,+}, \mathfrak{C}_{j,-} \subset \mathfrak{S} \setminus \{(0, v_0, b_{j,1/\omega})\}$  mit den Eigenschaften (i)-(iv) aus Satz 2.1.6 bzw. 2.1.8.*

## 2.2. Verzweigung von $\mathcal{T}_3$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Lösungsschar  $\mathcal{T}_3$  auf Verzweigung. Im Folgenden gelte daher  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und  $\omega = 1$ . Die zu  $\mathcal{T}_3$  gehörenden Lösungen  $(u_b, v_b, b)$  sind gegeben durch

$$(u_b, v_b) := (1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0) \quad (b > -1).$$

Wie im letzten Abschnitt ist unser Ziel, die Sätze von Crandall-Rabinowitz (Satz 2.0.3) und Rabinowitz (Satz 2.0.5) anzuwenden, um globale Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  nachzuweisen. Da für  $2 < q < 3$  die in (2.0.6) definierte Funktion  $F$  nicht zweifach stetig differenzierbar ist, verwenden wir in diesem Fall eine verschärfte Version des Satzes von Crandall-Rabinowitz. Eine Formulierung dieses Resultats ist in Appendix A zu finden, siehe Satz A.7.

Im Fall  $n \in \{2, 3\}, q = 2$  wurde Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  von Bartsch, Dancer und Wang in [6] untersucht. In Satz 2.3 zeigen die Autoren unter anderem, dass unendlich viele Stellen  $b = b_j^* \in (-1, 0)$  mit  $b_j^* \rightarrow -1$  ( $j \rightarrow \infty$ ) existieren, an denen unbeschränkte und paarweise disjunkte Lösungskontinua  $\mathcal{C}_j$  von  $\mathcal{T}_3$  abzweigen. Ferner wird gezeigt, dass alle zu  $\mathcal{C}_j$  gehörenden Lösungen eine von  $j$  abhängige nodale Charakterisierung besitzen: Für alle  $(u, v, b) \in \mathcal{C}_j$  gilt  $u, v > 0$  und  $\hat{u} - \hat{v}$  hat genau  $j$  verschiedene einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$ . Den Ideen der genannten Arbeit folgend, verallgemeinern wir dieses Resultat in zweierlei Hinsicht. Zum einen beweisen wir in Satz 2.2.6 ein entsprechendes Resultat für  $n \geq 2$  und alle Exponenten  $q$  mit  $2 \leq q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Zum anderen weisen wir globale Verzweigung im Fall  $n = 1, q \geq 2$  nach, indem wir wie in Abschnitt 2.1 die Gleichung  $F(u, v, b) = 0$  im Hilbertraum  $E_\sigma$  betrachten. Im Fall  $n = 1, q = 2$  ergibt sich hierbei die bemerkenswerte Aussage, dass die bei  $b = b_j^*$  abzweigenden Lösungskontinua  $\mathcal{C}_j$  bezüglich der  $b$ -Komponente beschränkt sind. Dies resultiert aus einem Nichtexistenzresultat für vollständig nichttriviale Lösungen endlicher Energie im Fall  $n = 1, q = 2, b < -1$ , siehe Satz 3.3.10.

Der Argumentation des letzten Abschnitts folgend überprüfen wir zunächst die Voraussetzungen des Satzes von Crandall-Rabinowitz, um das Auftreten lokaler Verzweigung an Stellen  $b = b_j^*$  ( $j \in \mathbb{N}_0$ ) in Form einer stetig differenzierbaren Kurve nachzuweisen. Anschließend zeigen wir, dass die bei  $b_j^*$  ( $j \geq 1$ ) abzweigenden Lösungskontinua  $\mathcal{C}_j$  das von Bartsch, Dancer und Wang gefundene von  $j$  abhängige nodale Muster besitzen und zusätzlich im Parameterbereich  $\{b < 0\}$  bleiben. In Proposition 2.2.5 zeigen wir, dass  $\text{ind}(F_x(u_b, v_b, b))$  an allen Stellen  $b = b_j^*$  das Vorzeichen wechselt. Schließlich erhalten wir in Satz 2.2.6 globale Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  mit Hilfe des Satzes von Rabinowitz bzw. dessen Modifikation gemäß Bemerkung 2.0.6. Die folgende Abbildung stellt schematisch die Verzweigungen von  $\mathcal{T}_3$  dar. Obgleich nicht vollständig geklärt ist, ob die Behauptung  $\text{pr}(\mathcal{C}_j) \supset (-\infty, b_j^*)$  aus Satz 2.3 in [6] stimmt, haben wir entschieden, die verzweigenden Äste  $\mathcal{C}_j$  wie in Abbildung 1 in [6] darzustellen.

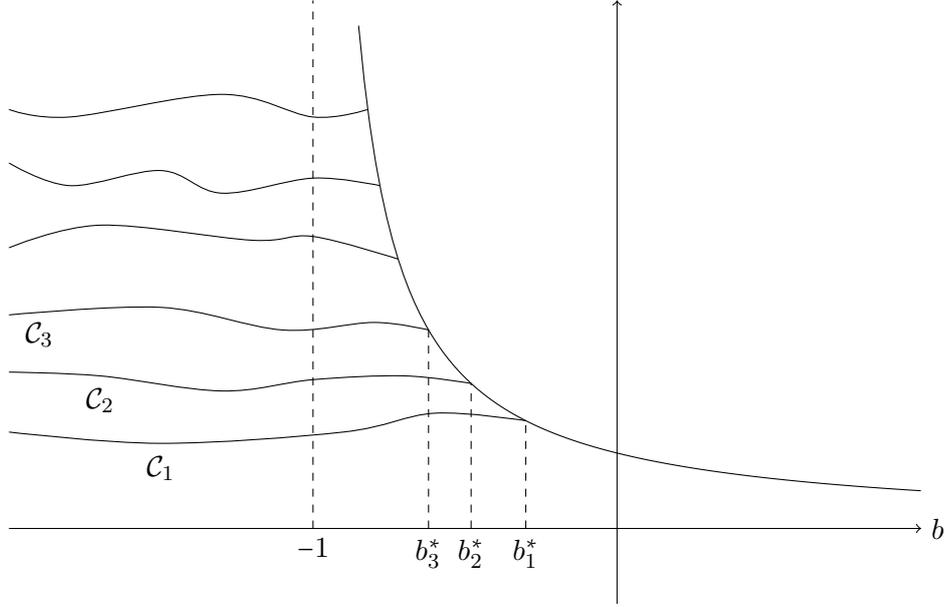


Abbildung 2.3.: Verzweigungen von  $\mathcal{T}_3$

Wir beginnen mit dem Fall  $n \geq 2$  und untersuchen zunächst die Linearisierung von  $F$  in den Elementen von  $\mathcal{T}_3$ . Für  $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  und  $b > -1$  gilt

$$F_x^1(u_b, v_b, b)[\phi] = \phi_1 - (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_0^{2q-2} \left( \frac{2q-1+b(q-1)}{1+b} \phi_1 + \frac{bq}{1+b} \phi_2 \right) \right), \quad (2.2.1)$$

$$F_x^2(u_b, v_b, b)[\phi] = \phi_2 - (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_0^{2q-2} \left( \frac{2q-1+b(q-1)}{1+b} \phi_2 + \frac{bq}{1+b} \phi_1 \right) \right) \quad (2.2.2)$$

sowie

$$F_{xb}^1(u_b, v_b, b)[\phi] = -(-\Delta + 1)^{-1} \left( u_0^{2q-2} \left( \frac{q-1}{1+b} \phi_1 + \frac{q}{1+b} \phi_2 \right) \right), \quad (2.2.3)$$

$$F_{xb}^2(u_b, v_b, b)[\phi] = -(-\Delta + 1)^{-1} \left( u_0^{2q-2} \left( \frac{q-1}{1+b} \phi_2 + \frac{q}{1+b} \phi_1 \right) \right), \quad (2.2.4)$$

vgl. (2.0.8)-(2.0.11). Die Formeln für  $F_x^1(u_b, v_b, b)$  und  $F_x^2(u_b, v_b, b)$  zeigen, dass die Abbildung  $b \mapsto F_x(u_b, v_b, b)$  stetig ist, sodass diese Voraussetzung von Satz 2.0.5 erfüllt ist, siehe hierzu Bemerkung 2.0.6. Für  $j \in \mathbb{N}_0$  sei  $b_j^*$  definiert durch

$$\frac{2q-1-b_j^*}{1+b_j^*} = b_j \quad \text{bzw.} \quad b_j^* = \frac{2q-1-b_j}{1+b_j}. \quad (2.2.5)$$

Da  $(b_j)$  streng monoton gegen unendlich wächst, ist die Folge  $(b_j^*)$  streng monoton fallend und konvergiert für  $j \rightarrow \infty$  gegen  $-1$ . Ferner gilt  $b_0^* = q-1$  wegen  $b_0 = 1$  und  $b_1^* < 0$  wegen  $b_1 > 2q-1$ , vgl. Lemma 1.2 (v). Die Motivation für diese Definition von  $b_j^*$  liefert die folgende Proposition.

**Proposition 2.2.1.** *Sei  $n \geq 2, q \geq 2$ . Für  $b \in \mathbb{R}$  ist  $\ker(F_x(u_b, v_b, b))$  genau dann nicht-trivial wenn  $b = b_j^*$  für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ . Im Fall  $b = b_j^*$  gilt*

$$\ker(F_x(u_b, v_b, b)) = \text{span}\{(\varphi_j, -\varphi_j)\}, \quad \text{ran}(F_x(u_b, v_b, b)) = \text{span}\{(\varphi_j, -\varphi_j)\}^\perp.$$

**Beweis:**

Da  $F_x(u_b, v_b, b)$  symmetrisch ist, genügt es, die Darstellung von  $\ker(F_x(u_b, v_b, b))$  zu beweisen. Sei  $(\phi_1, \phi_2) \in \ker(F_x(u_b, v_b, b))$ . Dann liefern die Formeln für  $F_x(u_b, v_b, b)$  aus (2.2.1), (2.2.2)

$$(-\Delta + 1)(\phi_1 + \phi_2) + (\phi_1 + \phi_2) = (2q - 1)u_0^{2q-2}(\phi_1 + \phi_2).$$

Aus  $b_0 = 1 < 2q - 1 < b_1$  folgt  $\phi_1 + \phi_2 = 0$ . Einsetzen von  $\phi_2 = -\phi_1$  in (2.2.1) liefert

$$-\Delta\phi_1 + \phi_1 = \frac{2q - 1 - b}{1 + b}u_0^{2q-2}\phi_1.$$

Da  $\frac{2q-1-b}{1+b} = b_j$  äquivalent zu  $b = b_j^*$  ist, erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Daher sind alle potentiellen Verzweigungspunkte auf  $\mathcal{T}_3$  durch  $b_0^*, b_1^*, b_2^*, \dots$  gegeben. Es bleibt gemäß Bemerkung 2.0.6 b) die Bedingung

$$(F_{xb}(u_b, v_b, b) + F_{xx}(u_b, v_b, b)[\partial_b(u_b, v_b, \cdot)])(\varphi_j, -\varphi_j) \notin \text{ran}(F_x(u_b, v_b, b))$$

für  $b = b_j^*$  zu überprüfen. Dies wird nach Proposition 2.2.1 aufgrund der Formeln für  $F_{xx}(u_b, v_b, b)$  von Seite 130 gewährleistet durch

$$\begin{aligned} & \langle (F_{xb}(u_b, v_b, b) + F_{xx}(u_b, v_b, b)[\partial_b(u_b, v_b, \cdot)])(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j) \rangle \\ &= \frac{2}{1+b} \langle (-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-2}\varphi_j), \varphi_j \rangle + \frac{2(2q-1-b)}{(1+b)^2} \langle (-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-2}\varphi_j), \varphi_j \rangle \\ &= \frac{4q}{(1+b)^2} \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-2}\varphi_j^2 dx > 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Wir erhalten aus Satz 2.0.3 lokale Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  an den Stellen  $b_0^*, b_1^*, \dots$ . In Satz A.7 stellen wir das entsprechende Resultat für den Fall  $2 < q < 3$  bereit. Zur Kennzeichnung der in [6] gefundenen nodalen Charakterisierung der an der Stelle  $b = b_j^*$  abzweigenden Lösungen definieren wir die folgenden Mengen:

$$S_{j,\pm} = \left\{ (u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1), } u, v > 0, \right. \\ \left. \pm(u - v)(0) > 0 \text{ und } \hat{u} - \hat{v} \text{ hat genau } j \text{ einfache Nullstellen in } \mathbb{R}_{>0} \right\}.$$

Die folgende Proposition liefert uns im Beweis von Satz 2.2.6, dass die sich in einer Umgebung des Verzweigungspunkts  $(u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*)$  befindenden Lösungen in  $S_{j,\pm}$  liegen.

**Proposition 2.2.2.** *Sei  $n \geq 2, q \geq 2, b = b_j^*$  für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ . Sei  $(u_k, v_k, b_k)$  Folge von Lösungen von (2.0.1) mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u_b, v_b, b)$ . Ist  $(\pm s_k)$  eine positive Nullfolge mit  $(u_k - v_k)(2s_k)^{-1} \rightarrow \varphi_j$ , dann gilt  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,\pm}$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$ .*

**Beweis:**

Wie im Beweis von Proposition 2.1.3 genügt es zu zeigen, dass alle Nullstellen von  $\hat{u}_k - \hat{v}_k$  in einem von  $k$  unabhängigen kompakten Intervall  $I \subset [0, \infty)$  enthalten sind. Ist  $\xi_k > 0$  eine Nullstelle von  $\hat{u}_k - \hat{v}_k$  und  $\zeta_k \in (\xi_k, \infty)$  Stelle eines positiven Maximums oder eines negativen Minimums von  $\hat{u}_k - \hat{v}_k$ , so gilt  $(\hat{u}_k - \hat{v}_k)'(\zeta_k) = 0$  und damit

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\frac{(\hat{u}_k - \hat{v}_k)''(\zeta_k)}{(\hat{u}_k - \hat{v}_k)(\zeta_k)} \\ &= \frac{\hat{u}_k(\zeta_k)^{2q-1} - \hat{v}_k(\zeta_k)^{2q-1}}{\hat{u}_k(\zeta_k) - \hat{v}_k(\zeta_k)} - b_k \hat{u}_k(\zeta_k)^{q-1} \hat{v}_k(\zeta_k)^{q-1} - 1 \\ &\leq C(\hat{u}_k(\zeta_k) + \hat{v}_k(\zeta_k))^{2q-2} - 1 \end{aligned}$$

für eine von  $k$  unabhängige Zahl  $C > 0$ . Da  $(u_k, v_k)$  als konvergente Folge beschränkt in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  ist, existiert eine positive Zahl  $C > 0$  mit  $\hat{u}_k(r) + \hat{v}_k(r) \leq Cr^{\frac{1-n}{2}}$  für  $r \geq 0$ , vgl. Radial Lemma 1 in [73]. Insbesondere ist die Folge  $(\zeta_k)$  und damit  $(\xi_k)$  durch eine von  $(\zeta_k), (\xi_k)$  unabhängige positive Zahl nach oben beschränkt und es folgt die Behauptung.  $\square$

In Anlehnung an die Formulierung des globalen Verzweigungssatzes von Rabinowitz aus Satz 2.0.5 definieren wir die Menge  $\mathcal{S}$  wie folgt:

$$\mathcal{S} = \overline{\{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1), } (u, v) \neq (u_b, v_b)\}}$$

Wir wollen zeigen, dass die von  $\mathcal{T}_3$  an der Stelle  $b = b_j^*$  abzweigenden Lösungen für  $j \geq 1$  im Parameterbereich  $\{b < 0\}$  bleiben und global das durch  $S_{j,\pm}$  beschriebene nodale Muster aufweisen. Hierzu benötigen wir das folgende Resultat:

**Proposition 2.2.3.** *Sei  $n \geq 2, q \geq 2, j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\{(u, v, b) \in S_{j,\pm} : b < 0\}$  offen und abgeschlossen in  $\mathcal{S} \setminus \{(u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*)\}$ .*

**Beweis:**

Wir zeigen nur die Abgeschlossenheit der Menge  $\{(u, v, b) \in S_{j,+} : b < 0\}$ , da sich die Offenheit wie in Proposition 2.1.4 beweisen lässt. Sei  $(u_k, v_k, b_k)$  Folge in  $S_{j,+}$  mit  $b_k < 0$  und  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  für  $(u, v, b) \in \mathcal{S} \setminus \{(u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*)\}$ . Die Sobolev-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \|u_k\|^2 &= \|u_k\|_{2q}^{2q} + b_k \|u_k v_k\|_q^q \leq \|u_k\|_{2q}^{2q} \leq C \|u_k\|^{2q}, \\ \|v_k\|^2 &= \|v_k\|_{2q}^{2q} + b_k \|u_k v_k\|_q^q \leq \|v_k\|_{2q}^{2q} \leq C \|v_k\|^{2q} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

und damit  $\|u_k\|, \|v_k\| \geq c > 0$ . Aus  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,+}$  für alle  $k$  erhalten wir  $u, v \geq 0$  und das Minimumprinzip (vgl. Lemma C.6) liefert  $u, v > 0$ . Ferner gilt  $b < 0$ , denn sonst wäre  $b = 0$  und damit  $(u, v) = (u_0, u_0)$  nach Satz 1.1. Die lokal eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (2.0.1) in einer Umgebung der nichtdegenerierten Lösung  $(u_0, u_0)$  hätte

$(u_k, v_k, b_k) = (u_{b_k}, v_{b_k}, b_k) \in \mathcal{T}_3$  für fast alle  $k$  zur Folge. Insbesondere wäre  $u_k = v_k$  im Widerspruch zu  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,+}$ . Es gilt daher  $u, v > 0$  und  $b < 0$ .

Wir zeigen  $u(0) > v(0)$ . Sonst wäre  $u(0) = v(0)$  und ergäbe sich  $\hat{u} = \hat{v}$  und damit  $u = v$  aus der eindeutigen Lösbarkeit des entsprechenden Anfangswertproblems auf  $[0, \infty)$  für  $\hat{u}, \hat{v}$ . Daher wäre  $w := u = v$  eine positive Lösung von

$$-\Delta w + w = (1 + b)w^{2q-1}, \quad w \in H_r^1(\mathbb{R}^n).$$

Aus  $\|w\|^2 = (1 + b)\|w\|_{2q}^{2q}$  ergäbe sich  $-1 < b < 0$  und somit  $(u, v) = (u_b, v_b)$  nach Satz 1.1. Wegen  $(u_k, v_k, b_k) \in S_{j,+}$  und  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u_b, v_b, b)$  müsste nach Proposition 2.2.2  $b = b_j^*$  und damit  $(u_b, v_b) = (u_{b_j^*}, v_{b_j^*})$  gelten, was im Widerspruch zu  $(u, v, b) \neq (u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*)$  steht. Wie in Proposition 2.2.2 erhalten wir zudem, dass  $\hat{u} - \hat{v}$  genau  $j$  einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}_{>0}$  besitzt. Es folgt  $(u, v, b) \in S_{j,\pm}$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Bemerkung 2.2.4.** Die Betrachtung der Menge  $\{(u, v, b) \in S_{j,+} : b < 0\}$  statt  $S_{j,\pm}$  ist durch zwei Gedanken motiviert. Zum einen liefert uns das obige Resultat später, dass die von  $b_j^*$  ( $j \geq 1$ ) abzweigenden Lösungskontinua  $\mathcal{C}_j$  im Parameterbereich  $\{b < 0\}$  bleiben. Zum anderen wird durch die wegen  $b_k < 0$  gültige Abschätzung (2.2.7) die Konvergenz gegen semitriviale Elemente verhindert. Die Existenz der Menge  $\mathcal{T}_6$  belegt, dass dies im Fall  $q = 2$  ohne die Einschränkung an  $b$  nicht verhindert werden kann, da an der Stelle  $b = 1$  positive Lösungen  $(\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0, 1)$  aus  $\mathcal{T}_6 \cap S_{0,+}$  für  $\alpha \rightarrow 0^+$  gegen  $(u_0, 0, 1) \notin S_{0,+}$  konvergieren. Im Fall  $q > 2$  hingegen ist die stärkere Aussage richtig, da  $b_k \|u_k v_k\|_q^q$  gegen  $C \|u_k\|^q \|v_k\|^q$  abgeschätzt werden kann und dies nach kurzer Rechnung wegen  $q > 2$  die Abschätzung  $\|u_k\|, \|v_k\| \geq c > 0$  liefert.

Wir überprüfen schließlich die Index-Bedingung aus dem Satz von Rabinowitz.

**Proposition 2.2.5.** *Sei  $n \geq 2$  und  $b \notin \{b_0^*, b_1^*, \dots\}$  und  $b > -1$ . Dann gilt*

$$\text{ind}(F_x(u_b, v_b, b), 0) = (-1)^{1+\beta} \quad \text{wobei } \beta = \#\{j \in \mathbb{N}_0 : b_j^* > b\}.$$

**Beweis:**

In Anbetracht der Indexformel (2.0.5) bestimmen wir die Eigenwerte der kompakten Abbildung  $Id - F_x(u_b, v_b, b)$ . Es gilt  $(Id - F_x(u_b, v_b, v))\phi = \lambda\phi$  für  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau dann wenn

$$\begin{aligned} -\Delta(\phi_1 + \phi_2) + (\phi_1 + \phi_2) &= \frac{2q-1}{\lambda} u_0^{2q-2} (\phi_1 + \phi_2), \\ -\Delta(\phi_1 - \phi_2) + (\phi_1 - \phi_2) &= \frac{2q-1-b}{(1+b)\lambda} u_0^{2q-2} (\phi_1 - \phi_2). \end{aligned}$$

Daher ist das Spektrum von  $Id - F_x(u_b, v_b, b)$  gegeben durch

$$\sigma(Id - F_x(u_b, v_b, b)) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \frac{2q-1}{\lambda} \in \{b_0, b_1, \dots\} \text{ oder } \frac{2q-1-b}{(1+b)\lambda} \in \{b_0, b_1, \dots\} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{2q-1}{b_j} : j \in \mathbb{N}_0 \right\} \cup \left\{ \frac{2q-1-b}{b_j(1+b)} : j \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Es folgt wegen  $b_0 = 1 < 2q-1 < b_1$  aus der Indexformel

$$\begin{aligned} \text{ind}(F_x(u_b, v_b, b), 0) &= (-1)^{\#\{\lambda \in \sigma(\text{Id} - F_x(u_b, v_b, b)) : \lambda > 1\}} \\ &= (-1)^{1 + \#\{j \in \mathbb{N}_0 : \frac{2q-1-b}{(1+b)b_j} > 1\}} \\ &= (-1)^{1 + \#\{j \in \mathbb{N}_0 : \frac{2q-1-b_j}{1+b_j} > b\}} \\ &= (-1)^{1+\beta}. \end{aligned}$$

□

Im folgenden Satz nutzen wir die obigen Ergebnisse und wenden den Satz von Crandall-Rabinowitz (Satz 2.0.3) sowie den Satz von Rabinowitz (Satz 2.0.5) an, um die Existenz abzählbar unendlich vieler disjunkter von  $\mathcal{T}_3$  verzweigender Äste von Lösungen nachzuweisen. Wir gehen analog zum Beweis von Satz 2.1.6 vor. Zunächst weisen wir lokale Verzweigung bei  $b = b_j^*$  nach und zeigen, dass die bei  $b = b_j^*$  ( $j \geq 1$ ) abzweigenden Lösungen in  $S_{j,\pm} \cap \{b < 0\}$  liegen. Mit Proposition 2.2.3 zeigen wir, dass alle Elemente des entsprechenden Lösungskontinuums  $\mathcal{C}_j$  dieses nodale Muster besitzen und damit insbesondere eine Rückkehr zu  $\mathcal{T}_3$  an einer Stelle  $b \neq b_j^*$  ausgeschlossen ist. Der Satz von Rabinowitz liefert die Unbeschränktheit der Menge  $\mathcal{C}_j$ .

**Satz 2.2.6.** *Sei  $n \geq 2$ ,  $2 \leq q < \frac{n}{(n-2)_+}$ ,  $\omega = 1$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  existieren zusammenhängende Mengen  $\mathcal{C}_{j,\pm} \subset \mathcal{S}_{j,\pm}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Es existiert eine Umgebung  $U$  von  $(u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*)$ ,  $\varepsilon > 0$  und stetig differenzierbare Funktionen  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  mit  $U \cap \mathcal{S} \setminus \{(u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*)\} = (U \cap \mathcal{C}_{j,+}) \cup (U \cap \mathcal{C}_{j,-})$  und*

$$U \cap \mathcal{C}_{j,\pm} = \{(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) : 0 < \pm s < \varepsilon\}.$$

*Ferner gilt*

$$(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) = (u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*) + s(\varphi_j, -\varphi_j, 0) + o(s) \quad (s \rightarrow 0). \quad (2.2.8)$$

- (ii)  $\mathcal{C}_j := \mathcal{C}_{j,-} \cup \{(u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*)\} \cup \mathcal{C}_{j,+}$  *ist maximale Zusammenhangskomponente in  $\mathcal{S}$ .*  
(iii)  $\mathcal{C}_{j,-} = \{(u, v, b) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} : (v, u, b) \in \mathcal{C}_{j,+}\}$ ,  $\text{pr}(\mathcal{C}_{j,+}) = \text{pr}(\mathcal{C}_{j,-})$ .  
(iv) *Die Mengen  $\mathcal{C}_j$  sind unbeschränkt und paarweise disjunkt mit  $\text{pr}(\mathcal{C}_{j,\pm}) \subset \mathbb{R}_{<0}$ .*

**Beweis:**

Sei  $j \in \mathbb{N}$  und  $b := b_j^*$ . Nach Proposition 2.2.1 ist  $\ker(F_x(u_b, v_b, b)) = \text{span}\{(\varphi_j, -\varphi_j)\}$  und  $\text{ran}(F_x(u_b, v_b, b)) = \text{span}\{(\varphi_j, -\varphi_j)\}^\perp$ . Aus (2.2.6) folgt

$$\langle F_{xb}(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j)], (\varphi_j, -\varphi_j) \rangle = \frac{2}{1+b} \|u_0 \varphi_j\|_2^2 > 0,$$

sodass die Voraussetzungen der verschärften Version des Satzes von Crandall-Rabinowitz aus Satz A.7 wegen  $q \geq 2$  erfüllt sind. Daher existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $(u_b, v_b, b)$ ,  $\varepsilon > 0$  und stetig differenzierbare Funktionen  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$  mit der Eigenschaft (2.2.8) sowie

$$U \cap \mathcal{S} = \{(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) : |s| < \varepsilon\}.$$

Den Beweis von  $\bar{b}'_j(0) = 0$  in (2.2.8) liefern wir im Appendix zu diesem Abschnitt. Aus  $\bar{u}_j(s) - \bar{v}_j(s) = 2s\varphi_j + o(s)$  für  $s \rightarrow 0$  folgt mit Proposition 2.2.2 die Aussage  $(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) \in \mathcal{S}_{j,\pm}$  für  $0 < \pm s < \varepsilon$  nach eventueller Verkleinerung von  $\varepsilon > 0$ . Ebenso gilt  $\bar{b}_j(s) < 0$  für  $|s| < \varepsilon$  und hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ , denn  $\bar{b}_j(0) = b_j^* < 0$ . Wir erhalten

$$\mathcal{C}_{j,\pm,loc} := \{(\bar{u}_j(s), \bar{v}_j(s), \bar{b}_j(s)) : 0 < \pm s < \varepsilon\} \subset \mathcal{S}_{j,\pm} \cap \{b < 0\}.$$

Sei nun  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  die maximale Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{C}_{j,\pm,loc}$  in  $\mathcal{S} \setminus \{(u_b, v_b, b)\}$ . Mit diesen Bezeichnungen ergeben sich (i) und (ii). Die Invarianz der Lösungsmenge von (2.0.1) unter der Transformation  $(u, v) \mapsto (v, u)$  und die Äquivalenz der Aussagen  $(u, v) \in \mathcal{S}_{j,+}$  und  $(v, u) \in \mathcal{S}_{j,-}$  liefert (iii). Aus Proposition 2.2.3 folgt

$$\mathcal{C}_{j,\pm} = \mathcal{S}_{j,\pm} \cap \mathcal{C}_{j,\pm} \subset H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_{<0},$$

insbesondere  $\text{pr}(\mathcal{C}_{j,\pm}) \subset \mathbb{R}_{<0}$ . Aufgrund dieser nodalen Charakterisierung ist eine Rückkehr von  $\mathcal{C}_{j,\pm}$  zu  $\mathcal{T}_3$  an einer anderen Stelle als  $b_j^*$  unmöglich, d.h. es gilt  $(u_b, v_b, b) \notin \mathcal{C}_j$  für alle  $b \neq b_j^*$ . Aus dem Satz von Rabinowitz folgt die Unbeschränktheit der Mengen  $\mathcal{C}_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$ . Wegen  $\mathcal{C}_{j,\pm} \subset \mathcal{S}_{j,\pm}$  sind die Mengen  $\mathcal{C}_j$  disjunkt und wir erhalten (iv).  $\square$

### Bemerkung 2.2.7.

- (a) Im obigen Satz wurde die Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  an der Stelle  $b_0^* = q - 1$  nicht betrachtet. Im Fall  $q > 2$  gilt  $\mathcal{C}_{0,+} = \mathcal{T}_5$ , vgl. Lemma 2.3.2. Im Fall  $q = 2$  ist  $\mathcal{T}_3$  an der Stelle  $b = b_0^* = 1$  mit  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_6$  verbunden. Insbesondere enthält  $\mathcal{C}_{0,+}$  alle weiteren von  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  verzweigenden Lösungen. Dies zeigt, dass im Fall  $q = 2$  das bei  $b_0^* = 1$  abzweigende Lösungskontinuum keine globale nodale Charakterisierung besitzt.
- (b) Der Beweis von Satz 2.3 in [6] liefert darüberhinaus, dass für alle  $j \in \mathbb{N}$  und alle kompakten Mengen  $B \subset \mathbb{R}$  eine positive Zahl  $C_j > 0$  existiert, so dass die Ungleichung  $u(x) + v(x) \leq C_j$  für alle  $(u, v, b) \in \mathcal{S}_{j,+} \cup \mathcal{S}_{j,-}$  mit  $b \in B$  gilt. Es ist unklar, ob hieraus A-priori-Schranken für Lösungen aus  $\mathcal{S}_{j,+} \cup \mathcal{S}_{j,-}$  im zugrundeliegenden Hilbertraum  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  resultieren. Daher ist nach Wissensstand des Autors ungeklärt, ob die in [6] formulierte Aussage  $\text{pr}(\mathcal{C}_{j,\pm}) \supset (-\infty, b_j^*)$  richtig ist.

Im Fall  $n \geq 2, 1 < q < 2$  ist die nodale Charakterisierung der von  $\mathcal{T}_3$  abzweigenden Lösungen unklar, da wir die durch den Satz von Crandall-Rabinowitz gestützten Voraussetzungen von Proposition 2.2.2 nicht verifizieren können. Mit dem Satz von Rabinowitz<sup>4</sup> erhalten wir immerhin das folgende Resultat.

<sup>4</sup>Die Glattheitsvoraussetzungen des Satzes von Rabinowitz sind bedeutend weniger restriktiv als die Voraussetzungen des Satzes von Crandall-Rabinowitz.

**Satz 2.2.8.** *Sei  $n \geq 2, 1 < q < 2$ . Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  existieren nichtleere zusammenhängende Mengen  $\mathcal{C}_j \subset \mathcal{S}$  mit  $(u_{b_j^*}, v_{b_j^*}, b_j^*) \in \mathcal{C}_j$ ,  $u, v > 0$  für alle  $(u, v) \in \mathcal{C}_j$ . Ferner gilt  $(u, v) \in \mathcal{C}_j$  genau dann wenn  $(v, u) \in \mathcal{C}_j$  und  $\mathcal{C}_j$  erfüllt die Alternative (i) oder (ii) aus Satz 2.0.5.*

Wie im Abschnitt zuvor gelten die obigen Resultate sinngemäß für  $n = 1$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \overline{\{(u, v, b) \in E_\sigma \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1), } (u, v) \neq (u_b, v_b)\}}, \\ \mathcal{S}_{j,\pm} &= \{(u, v, b) \in E_\sigma \times \mathbb{R} : (u, v, b) \text{ ist Lösung von (2.0.1), } u > 0, v > 0, \\ &\quad \pm (u - v)(0) > 0 \text{ und } \hat{u} - \hat{v} \text{ hat genau } j \text{ einfache Nullstellen in } \mathbb{R}_{>0}\} \end{aligned}$$

und  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  so gewählt ist, dass  $Id - F$  kompakt ist, vgl. Proposition 4.8. Im Fall  $n = 1, q \in (1, 2]$  liefert das Nichtexistenzresultat aus Satz 3.3.10, dass alle vollständig nichttrivialen Lösungen und insbesondere alle Lösungen aus  $\mathcal{C}_j$  im Parameterbereich  $\{-1 \leq b < 0\}$  liegen müssen. Ferner sind im Fall  $n = 1$  die Eigenwerte  $b_j$  und damit auch  $b_j^*$  bekannt. Aus (2.2.5) und Lemma A.3 folgt

$$b_j^* = -1 + \frac{q^2}{q + j(q^2 - 1) + 2j^2(q - 1)^2} \quad (j \in \mathbb{N}_0).$$

Wir erhalten das folgende Resultat.

**Satz 2.2.9.** *Sei  $n = 1, \omega = 1, \sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  mit  $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1)$  und*

$$q\sigma_1 + (q - 2)\omega\sigma_2 > 0, \quad (q - 2)\sigma_1 + q\omega\sigma_2 > 0.$$

*Für jedes  $j \in \mathbb{N}$  existieren zusammenhängende Mengen  $\mathcal{C}_{j,\pm} \subset \mathcal{S}_{j,\pm}$  mit den Eigenschaften (i)-(iv) in Satz 2.2.6 bzw. Satz 2.2.8. Im Fall  $q \in (1, 2]$  gilt zudem  $\mathcal{C}_{j,\pm} \subset E_\sigma \times [-1, 0)$ .*

### 2.3. Verzweigung von $\mathcal{T}_4$ und $\mathcal{T}_5$

In diesem Abschnitt weisen wir nach, dass von den Lösungsfamilien  $\mathcal{T}_4$  und  $\mathcal{T}_5$  keine Lösungen abzweigen. Da die durch (2.0.6) gegebene Funktion  $F$  im Fall  $1 < q < 2$  auf keiner nichtleeren offenen Menge stetig differenzierbar ist<sup>5</sup>, können wir diese Aussage nur im Fall  $q > 2$  und damit nur für  $\mathcal{T}_5$  mit Hilfe des Satzes über implizit definierte Funktionen beweisen. Im Fall  $1 < q < 2$  schließen wir Verzweigung von  $\mathcal{T}_4$  direkt aus, d.h. wir zeigen, dass keine gegen  $(0,0)$  konvergente Folge  $(u_k, v_k)$  mit  $F(u_b + u_k, v_b + v_k, b) = 0$  existiert. Wir betrachten im Folgenden die Lösungen  $(u_b, v_b, b)$  aus  $\mathcal{T}_4$  bzw.  $\mathcal{T}_5$  der Form

$$(u_b, v_b) := (\mu_b u_0, \mu_b k_b u_0)$$

für  $0 < b < q - 1$  im Fall  $1 < q < 2$  und  $b > q - 1$  im Fall  $q > 2$ . Vollkommen analoge Aussagen ergeben sich für die Lösungen  $(\mu_b k_b u_0, \mu_b u_0)$ . Die Zahlen  $\mu_b > 0$  und  $k_b \in (0, 1)$  seien hierbei wie in den Propositionen 2.0.1 und 2.0.2 gegeben.

Wie oben erwähnt, ist  $F$  im Fall  $q > 2$  stetig differenzierbar. Im Fall  $1 < q < 2$  ist  $F$  zwar in keiner offeneren Menge differenzierbar, doch die Fréchet-Ableitung in  $(u_b, v_b, b)$  existiert. Wir beweisen hierzu analoge Resultate in den Propositionen A.5 und A.6. Die Formeln für die Fréchet-Ableitung in  $(u_b, v_b, v)$  lauten

$$\begin{aligned} F_x^1(u_b, v_b, b)[\phi] &= \phi_1 - (-\Delta + 1)^{-1} \left( (2q - 1)u_b^{2q-2} \phi_1 + b(q - 1)u_b^{q-2} v_b^q \phi_1 + bqu_b^{q-1} v_b^{q-1} \phi_2 \right) \\ &= \phi_1 - \mu_b^{2q-2} (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_0^{2q-2} \left( (2q - 1 + b(q - 1)k_b^q) \phi_1 + bqk_b^{q-1} \phi_2 \right) \right), \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{aligned} F_x^2(u_b, v_b, b)[\phi] &= \phi_2 - (-\Delta + 1)^{-1} \left( (2q - 1)v_b^{2q-2} \phi_2 + b(q - 1)v_b^{q-2} u_b^q \phi_2 + bqu_b^{q-1} v_b^{q-1} \phi_1 \right) \\ &= \phi_2 - \mu_b^{2q-2} (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_0^{2q-2} \left( ((2q - 1)k_b^{2q-2} + b(q - 1)k_b^{q-2}) \phi_2 + bqk_b^{q-1} \phi_1 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Für die Zahlen  $\mu_b$  und  $k_b$  gelten nach Proposition 2.0.1 die folgenden Gleichungen:

$$\mu_b = (1 + bk_b^q)^{-\frac{1}{2q-2}} \quad \text{sowie} \quad 1 + bk_b^q - bk_b^{q-2} - k_b^{2q-2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad b = \frac{1 - k_b^{2q-2}}{k_b^{q-2} - k_b^q}. \quad (2.3.3)$$

Der Beweis der folgenden Abschätzungen sind in Appendix A zu finden.

**Proposition 2.3.1.** *Für alle  $k \in (0, 1)$  gilt die Ungleichung*

$$\begin{aligned} q - 1 &< \frac{q - 1 - qk^2 + qk^{2q-2} - (q - 1)k^{2q}}{1 - k^{2q}} < 1 && \text{falls } 1 < q < 2, \\ 1 &< \frac{q - 1 - qk^2 + qk^{2q-2} - (q - 1)k^{2q}}{1 - k^{2q}} < q - 1 && \text{falls } q > 2. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Eine entsprechende Argumentation findet sich im Beweis von Proposition A.5.

**Lemma 2.3.2.** *Es tritt keine Verzweigung von  $\mathcal{T}_4$  und  $\mathcal{T}_5$  auf.*

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst, dass  $\ker(F_x(u_b, v_b, b))$  sowohl im Fall  $1 < q < 2$  als auch im Fall  $q > 2$  trivial ist. Sei  $(\phi_1, \phi_2) \in \ker(F_x(u_b, v_b, b))$ . Dann gilt nach

$$\begin{aligned}
(-\Delta + 1)(\phi_1 + k_b \phi_2) &= \mu_b^{2q-2} u_0^{2q-2} \left( (2q-1 + b(q-1)k_b^q) \phi_1 + bqk_b^{q-1} \phi_2 \right. \\
&\quad \left. + k_b \cdot \left( ((2q-1)k_b^{2q-2} + b(q-1)k_b^{q-2}) \phi_2 + bqk_b^{q-1} \phi_1 \right) \right) \\
&= (2q-1) \mu_b^{2q-2} u_0^{2q-2} \left( (1 + bk_b^q) \phi_1 + k_b \cdot (k_b^{2q-2} + bk_b^{q-2}) \phi_2 \right) \\
&\stackrel{(2.3.3)}{=} (2q-1) u_0^{2q-2} \left( \phi_1 + k_b \cdot \frac{k_b^{2q-2} + bk_b^{q-2}}{1 + bk_b^q} \phi_2 \right) \\
&\stackrel{(2.3.3)}{=} (2q-1) u_0^{2q-2} (\phi_1 + k_b \phi_2).
\end{aligned}$$

Aus  $b_0 = 1 < 2q-1 < b_1$  folgt  $\phi_1 + k_b \phi_2 = 0$  und damit  $\phi_2 = -k_b^{-1} \phi_1$ . Einsetzen in (2.3.1) und Substitution des Parameters  $b$  mit Hilfe von (2.3.3) liefert

$$\begin{aligned}
-\Delta \phi_1 + \phi_1 &= \mu_b^{2q-2} \left( 2q-1 + b(q-1)k_b^q - bqk_b^{q-2} \right) u_0^{2q-2} \phi_1 \\
&= \frac{2q-1 + b(q-1)k_b^q - bqk_b^{q-2}}{1 + bk_b^q} u_0^{2q-2} \phi_1 \\
&\stackrel{(2.3.3)}{=} \underbrace{\frac{q-1 - qk_b^2 + qk_b^{2q-2} - (q-1)k_b^{2q}}{1 - k_b^{2q}}}_{=:g(k_b)} u_0^{2q-2} \phi_1.
\end{aligned}$$

Im Fall  $q > 2$  liefert Proposition 2.3.1 die Ungleichung  $1 < g(k_b) < q-1$ . Insbesondere gilt  $b_0 = 1 < g(k_b) < 2q-1 < b_1$  und es folgt  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Im Fall  $1 < q < 2$  folgt  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  aus  $g(k_b) < 1 = b_0$ . Wir erhalten  $\ker(F_x(u_b, v_b, b)) = \{(0, 0)\}$ . Insbesondere kann im Fall  $q > 2$  nach dem Satz über implizit definierte Funktionen keine Verzweigung von  $\mathcal{T}_5$  auftreten.

Wir betrachten nun  $\mathcal{T}_4$ , sei daher  $1 < q < 2$  und sei  $L_b := F_x(u_b, v_b, b)$ . Nach obigem ist  $L_b$  stetig invertierbar. Die Gleichung  $F(u_b + u, v_b + v, b) = 0$  ist wegen  $F(u_b, v_b, b) = 0$  äquivalent zu  $L_b[(u, v)] = G_b(u, v)$  für

$$G_b(u, v) := F(u_b + u, v_b + v, b) - F(u_b, v_b, b) - F_x(u_b, v_b, b)[(u, v)]$$

Wegen  $v_b = k_b u_b$  erhalten wir für  $\tilde{u}, \tilde{v}$  mit  $u = u_b \tilde{u}$ ,  $v = v_b \tilde{v}$

$$\begin{aligned}
G_b^1(u, v) &= -(-\Delta + 1)^{-1} \left( |u_b + u|^{2q-2} (u_b + u) + b |u_b + u|^{q-2} (u_b + u) |v_b + v|^q \right. \\
&\quad \left. - u_b^{2q-1} - b u_b^{q-1} v_b^q - (2q-1) u_b^{2q-2} u - b(q-1) u_b^{q-2} v_b^q u - b q u_b^{q-1} v_b^{q-1} v \right), \\
&= -(-\Delta + 1)^{-1} \left( u_b^{2q-1} \left( h^1(\tilde{u}, \tilde{v}) - h^1(0, 0) - \nabla h^1(0, 0)(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$G_b^2(u, v) = -(-\Delta + 1)^{-1} \left( v_b^{2q-1} \left( h^2(\tilde{u}, \tilde{v}) - h^2(0, 0) - \nabla h^2(0, 0)(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \right),$$

wobei die Funktionen  $h^1, h^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} h^1(s, t) &:= |1 + s|^{2q-2}(1 + s) + b|1 + s|^{q-2}(1 + s)|k_b + t|^q, \\ h^2(s, t) &:= |1 + t|^{2q-2}(1 + t) + b|1 + t|^{q-2}(1 + t)|k_b^{-1} + s|^q. \end{aligned}$$

Sei

$$\begin{aligned} \tilde{h}^1(s, t) &:= h^1(s, t) - h^1(0, 0) - \nabla h^1(0, 0)(s, t), \\ \tilde{h}^2(s, t) &:= h^2(s, t) - h^2(0, 0) - \nabla h^2(0, 0)(s, t). \end{aligned}$$

Aus der bezüglich  $b$  lokal gleichmäßigen Abschätzung

$$\begin{aligned} |\tilde{h}^1(s, t)| + |\tilde{h}^2(s, t)| &\leq C(s^2 + t^2) \\ &\leq C(s^2 + t^2 + |s|^{2q-1} + |t|^{2q-1}) && \left( |s| + |t| < \frac{1}{2} \right) \\ |\tilde{h}^1(s, t)| + |\tilde{h}^2(s, t)| &\leq C(1 + |s| + |t|)^{2q-1} + 1 + |s| + |t| \\ &\leq C(1 + |s| + |t|)^{2q-1} \\ &\leq C(|s| + |t|)^{2q-1} \\ &\leq C(s^2 + t^2 + |s|^{2q-1} + |t|^{2q-1}) && \left( |s| + |t| \geq \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

erhalten wir  $G_b(u, v) = o(\|(u, v)\|)$ , denn  $2q - 1 > 1$ . Insbesondere ist  $F(u_b + u, v_b + v, b) = 0$  äquivalent zu

$$(u, v) = L_b^{-1} G_b(u, v) = o(\|(u, v)\|)$$

und es folgt, dass keine Verzweigung von  $\mathcal{T}_4$  auftreten kann.  $\square$

## 2.4. Verzweigung von $\mathcal{T}_6$

Für  $q = 2, \omega = 1$  und  $b = 1$  sind die Lösungen der Familie  $\mathcal{T}_6$  gegeben durch

$$(u_\alpha, v_\alpha) := (\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0) \quad (\alpha \in [0, 2\pi)).$$

Wir zeigen mit Hilfe eines Satzes von Crandall-Rabinowitz<sup>6</sup>, dass Verzweigung von dieser Lösungsfamilie nur an den Stellen  $\alpha = \frac{j\pi}{4}$  für  $j \in \{0, \dots, 7\}$  auftritt. Die an diesen 8 Stellen abzweigenden Lösungsfamilien bestehen aus den Lösungen  $(u, v, b)$  mit  $(|u|, |v|, b) \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$ , siehe Abbildung 2.4.

<sup>6</sup>Es handelt sich nicht um Satz 2.0.3, sondern um Satz I.4.1 in [42]. Die originale Version des Satzes ist in Satz 3.2 in [25] zu finden.

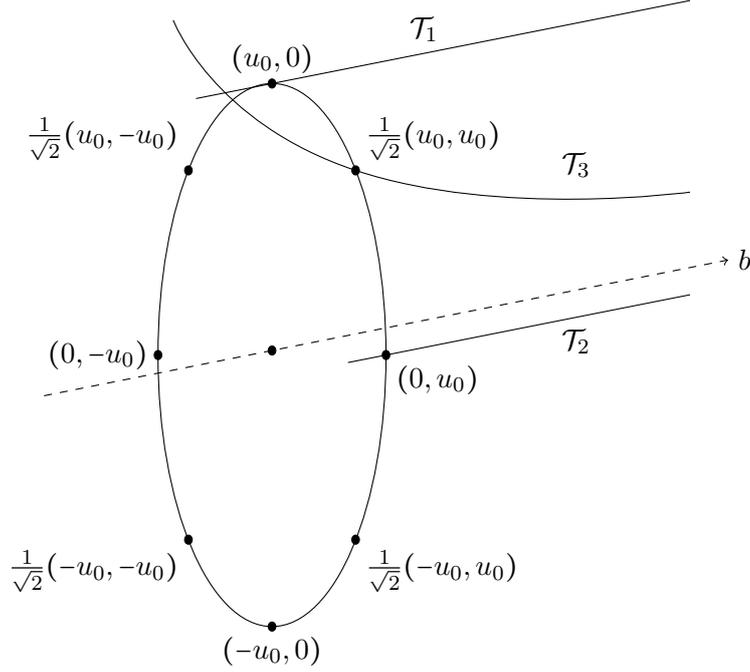


Abbildung 2.4.: Verzweigung von  $\mathcal{T}_6$

Um das Nichtauftreten von Verzweigung an den anderen Stellen nachzuweisen, ist nach Satz I.4.1 in [42] ist zu zeigen, dass für  $\alpha \notin \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \dots\}$  die Bedingung  $F_b(u_\alpha, v_\alpha, 1) \notin \text{ran}(F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1))$  erfüllt ist. Daher untersuchen wir in der folgenden Proposition  $F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1)$  genauer.

**Proposition 2.4.1.** *Für alle  $\alpha \in [0, 2\pi)$  gilt*

$$\begin{aligned} \ker(F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1)) &= \text{span}\{(\sin(\alpha)u_0, -\cos(\alpha)u_0)\}, \\ \text{ran}(F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1)) &= \text{span}\{(\sin(\alpha)u_0, -\cos(\alpha)u_0)\}^\perp. \end{aligned}$$

**Beweis:**

Da  $F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1)$  symmetrisch ist, genügt es die Darstellung für  $\ker(F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1))$  zu beweisen. Es gilt für  $\phi \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  gemäß der Formeln für  $F_x$  aus (2.0.8), (2.0.9)

$$\begin{aligned} F_x^1(u_\alpha, v_\alpha, 1)[\phi] &= \phi_1 - (-\Delta + 1)^{-1} \left( (1 + 2\cos^2(\alpha))u_0^2\phi_1 + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)u_0^2\phi_2 \right), \\ F_x^2(u_\alpha, v_\alpha, 1)[\phi] &= \phi_2 - (-\Delta + 1)^{-1} \left( (1 + 2\sin^2(\alpha))u_0^2\phi_2 + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)u_0^2\phi_1 \right). \end{aligned}$$

Für  $(\phi_1, \phi_2) \in \ker(F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1))$  gilt daher

$$\begin{aligned} -\Delta\phi_1 + \phi_1 &= (1 + 2\cos^2(\alpha))u_0^2\phi_1 + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)u_0^2\phi_2, \\ -\Delta\phi_2 + \phi_2 &= (1 + 2\sin^2(\alpha))u_0^2\phi_2 + 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)u_0^2\phi_1. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Aus  $b_0 = 1 < 3 < b_1$  und

$$(-\Delta + 1)(\cos(\alpha)\phi_1 + \sin(\alpha)\phi_2) = 3u_0^2(\cos(\alpha)\phi_1 + \sin(\alpha)\phi_2)$$

erhalten wir  $\cos(\alpha)\phi_1 + \sin(\alpha)\phi_2 = 0$ . Folglich existiert eine Funktion  $\phi_0 \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\phi = (\sin(\alpha)\phi_0, -\cos(\alpha)\phi_0)$ . Einsetzen in (2.4.1) liefert

$$(-\Delta + 1)(\sin(\alpha)\phi_0) = u_0^2(\sin(\alpha)\phi_0), \quad (-\Delta + 1)(\cos(\alpha)\phi_0) = u_0^2(\cos(\alpha)\phi_0).$$

Da  $u_0$  bis auf skalare Vielfache die einzige Eigenfunktion zum Eigenwert 1 ist, erhalten wir  $\phi_0 \in \text{span}\{u_0\}$  und es folgt  $\phi \in \text{span}\{(\sin(\alpha)u_0, -\cos(\alpha)u_0)\}$ , was zu zeigen war.  $\square$

Wir erhalten das folgende Resultat.

**Satz 2.4.2.** *Sei  $\alpha \in [0, 2\pi)$  mit  $\alpha \neq \frac{j\pi}{4}$  für alle  $j \in \{0, \dots, 7\}$ . Dann existiert eine Umgebung  $U$  von  $(u_\alpha, v_\alpha, 1)$ , so dass alle in  $U$  liegenden Lösungen von (2.0.1) zu  $\mathcal{T}_6$  gehören.*

**Beweis:**

Es gilt für  $\alpha \in [0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} F_b(u_\alpha, v_\alpha, 1) &= -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot \left( \sin(\alpha)(-\Delta + 1)^{-1}(u_0^3), \cos(\alpha)(-\Delta + 1)^{-1}(u_0^3) \right) \\ &= -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot (\sin(\alpha)u_0, \cos(\alpha)u_0) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} &\langle F_b(u_\alpha, v_\alpha, b), (\sin(\alpha)u_0, -\cos(\alpha)u_0) \rangle \\ &= -\sin(\alpha)\cos(\alpha) \cdot \langle (\sin(\alpha)u_0, \cos(\alpha)u_0), (\sin(\alpha)u_0, -\cos(\alpha)u_0) \rangle \\ &= -\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\sin(\alpha)^2 - \cos(\alpha)^2)\|u_0\|^2. \end{aligned}$$

Aus Proposition 2.4.1 erhalten wir, dass  $F_b(u_\alpha, v_\alpha, 1) \in \text{ran}(F_x(u_\alpha, v_\alpha, 1))$  genau dann der Fall ist, wenn  $\alpha$  die Gleichung  $\sin(\alpha)\cos(\alpha)(\sin(\alpha)^2 - \cos(\alpha)^2) = 0$  erfüllt. Dies ist per Voraussetzung ausgeschlossen und wir erhalten aus Satz I.4.1 in [42] die Behauptung.  $\square$

## 2.5. Fortsetzungen von Lösungen der Familien $\mathcal{T}_3$ und $\mathcal{T}_5$

Wir betrachten nun die Gleichung (2.0.1) für feste  $b \in \mathbb{R}$  in Abhängigkeit vom Parameter  $\omega$ . Wir nutzen die Nichtdegeneriertheit von  $u_0$ , um verschiedene zu den Familien  $\mathcal{T}_3$  und  $\mathcal{T}_5$  gehörende Lösungen in den Parameterbereich  $\{\omega \neq 1\}$  fortzusetzen. Da hierbei der Satz über implizit definierte Funktionen zum Einsatz kommt, ist die durch

$$G(u, v, \omega) := \begin{pmatrix} u - (-\Delta + 1)^{-1}(|u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q) \\ v - (-\Delta + \omega^2)^{-1}(|v|^{2q-2}v + b|v|^{q-2}v|u|^q) \end{pmatrix}$$

definierte Funktion  $G : H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  auf stetige Differenzierbarkeit zu überprüfen. Im Fall  $q \geq 2$  ist  $G$  stetig differenzierbar<sup>7</sup>, im Fall  $1 < q < 2$  hingegen nicht. Es bleibt daher ungeklärt, ob im Fall  $1 < q < 2$  Fortsetzungen der Lösungen aus  $\mathcal{T}_4$  in den Parameterbereich  $\{\omega \neq 1\}$  existieren.

**Satz 2.5.1.**

- (i) Sei  $2 \leq q < \frac{n}{(n-2)_+}$  sowie  $(u_b, v_b, b) \in \mathcal{T}_3$  mit  $b \notin \{b_0^*, b_1^*, \dots\}$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  und eine Umgebung  $U \subset H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  von  $(u_b, v_b)$ , so dass Gleichung (2.0.1) für  $\omega \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  genau eine Lösung in  $U$  besitzt.
- (ii) Sei  $q > 2$  sowie  $(u_b, v_b, b) \in \mathcal{T}_5$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  und eine Umgebung  $U \subset H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  von  $(u_b, v_b)$ , so dass Gleichung (2.0.1) für  $\omega \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  genau eine Lösung in  $U$  besitzt.

**Beweis:**

Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen ist  $\ker(G_x(u_b, v_b, 1)) = \{(0, 0)\}$  zu zeigen. Daher folgt (i) aus Proposition 2.2.1 und (ii) aus dem ersten Teil des Beweises von Lemma 2.3.2. □

Insbesondere existiert nach Satz 2.5.1 für Exponenten  $2 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und alle  $b > q - 1$  eine von  $b$  und  $q$  abhängige positive Zahl  $\varepsilon$ , so dass für  $\omega \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$  mindestens drei positive Lösungen des Schrödingersystems (2.0.1) existieren. Es handelt sich um Fortsetzungen der Lösungen  $(1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  aus  $\mathcal{T}_3$  bzw.  $(\mu_b u_0, \mu_b k_b u_0)$  und  $(\mu_b k_b u_0, \mu_b u_0)$  aus  $\mathcal{T}_5$ . Die positiven Zahlen  $\mu_b, k_b$  sind hierbei wie in den Proposition 2.0.1, 2.0.2 definiert.

---

<sup>7</sup>Die Differenzierbarkeit bezüglich  $\omega$  folgt aus der Analytizität der Resolventenabbildung, siehe Satz VI.1.3 (b) in [88].

## 3. Grundzustände und positive Lösungen

### 3.1. Minimierung über $\mathcal{N}_b$

In diesem Abschnitt beweisen wir hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz vollständig nichttrivialer Grundzustände des nichtlinearen Schrödingersystems

$$\begin{aligned} -\Delta u + \omega u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$\omega \geq 1, b \in \mathbb{R}, \quad 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Das Wort Grundzustand bezeichnet eine nichttriviale Lösung von (3.1.1) mit kleinster Energie unter allen nichttrivialen Lösungen. In Proposition 3.1.2 zeigen wir, dass Grundzustände durch Minimierung des Funktionals

$$I(u, v) = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2) - \frac{1}{2q}(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q) \quad (3.1.2)$$

über der Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{N}_b$  gewonnen werden können. Wir betrachten daher im Folgenden das Minimierungsproblem

$$c_b = \inf_{\mathcal{N}_b} I. \quad (3.1.3)$$

Wir verwenden in diesem Abschnitt die folgende Sprechweise.

**Definition 3.1.1.** *Eine nichttriviale Lösung  $(u, v)$  von (3.1.1) heißt Grundzustand, wenn für alle nichttrivialen Lösungen  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  von (3.1.1) die Ungleichung  $I(u, v) \leq I(\tilde{u}, \tilde{v})$  gilt. Im Fall  $u = 0, v \neq 0$  oder  $v = 0, u \neq 0$  heißt  $(u, v)$  skalarer Grundzustand, im Fall  $u, v \neq 0$  heißt  $(u, v)$  Vektorgrundzustand.*

Da  $(u, v)$  genau dann eine Lösung von (3.1.1) zum Parameter  $\frac{1}{\omega}$  ist, wenn die Funktion  $(\omega^{\frac{1}{q-1}}v(\omega \cdot), \omega^{\frac{1}{q-1}}u(\omega \cdot))$  eine Lösung von (3.1.1) zum Parameter  $\omega$  ist, beschränken wir uns in diesem Kapitel auf die Untersuchung des Fall  $\omega \geq 1$ . Die Existenz eines Minimierers des Funktionals  $I|_{\mathcal{N}_b}$  konnten Maia, Montefusco, Pellacci in [51], Satz 2.3 unter Verwendung des Ekelandschen Variationsprinzips und des Konzentrations-Kompaktheitsprinzips für  $b \geq 0$  beweisen. In Satz 3.1.6 präsentieren wir einen alternativen Beweis dieses Resultats,

der auch den Fall  $b < 0$  abdeckt. Anschließend untersuchen wir, für welche Parameterwerte von  $b, \omega, q, n$  der gefundene Minimierer vollständig nichttrivial und damit ein Vektorgrundzustand ist. Unser Resultat ist das folgende: Es existiert eine Zahl  $b(\omega, q, n) \geq 0$  mit der Eigenschaft, dass für  $b > b(\omega, q, n)$  nur Vektorgrundzustände existieren, wohingegen für  $b < b(\omega, q, n)$  nur semitriviale Grundzustände existieren. Die Zahl  $b(\omega, q, n)$  besitzt eine variationelle Charakterisierung und ist damit analytisch approximierbar. Durch Abschätzungen dieser Zahl nach unten bzw. oben gewinnen wir explizite notwendige bzw. hinreichende Bedingungen für die Existenz eines Vektorgrundzustands und können dabei bestehende Resultate signifikant verbessern. Wie in [51] wird sich zeigen, dass die gewonnenen Resultate für  $\omega = 1$  optimal sind. Einen Vergleich unserer Resultate zu bekannten hinreichenden bzw. notwendigen Bedingungen für die Existenz von Vektorgrundzuständen ziehen wir am Ende dieses Abschnitts.

Wir beginnen mit dem Nachweis der Behauptung, dass Minimierer des Funktionals  $I$  über  $\mathcal{N}_b$  Grundzustände sind. Die Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{N}_b$  ist wegen  $(u_0, 0) \in \mathcal{N}_b$  nichtleer und sie ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{N}_b = \{(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) : (u, v) \neq (0, 0), \|u\|^2 + \|v\|_\omega^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q\}.$$

**Proposition 3.1.2.** *Jeder Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  ist ein Grundzustand von (3.1.1).*

**Beweis:**

Sei  $H(u, v) := \|u\|^2 + \|v\|_\omega^2 - \|u\|_{2q}^{2q} - \|v\|_{2q}^{2q} - 2b\|uv\|_q^q$  und sei  $(u, v) \in \mathcal{N}_b$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$ . Wegen

$$\begin{aligned} H'(u, v)[(u, v)] &= 2(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2) - 2q(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q) \\ &= (2 - 2q)(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2) < 0 \end{aligned}$$

existiert nach der Lagrangeschen Multiplikatorenregel (Satz 26.1 in [27]) ein  $L \in \mathbb{R}$  mit  $I'(u, v) + L \cdot H'(u, v) = 0$ . Wegen  $H(u, v) = I'(u, v)[(u, v)] = 0$  erhalten wir

$$0 = L \cdot H'(u, v)[(u, v)] = L \cdot (2 - 2q)(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2).$$

Es folgt  $L = 0$  und damit  $I'(u, v) = 0$ , d.h.  $(u, v)$  ist kritischer Punkt von  $I$  und damit Lösung von (3.1.1). Ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  eine weitere nichttriviale Lösung von (3.1.1), so gilt  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{N}_b$  und damit

$$I(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq \min_{\mathcal{N}_b} I = I(u, v).$$

Folglich ist  $(u, v)$  Grundzustand von (3.1.1). □

Es folgt der Beweis der Existenz von Grundzuständen. Die Kernidee besteht darin, die Minimierung über  $\mathcal{N}_b$  in ein äquivalentes freies Minimierungsproblem zu überführen und

Schwarz-Symmetrisierung zu nutzen. Für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $(u, v) \neq (0, 0)$  definieren wir die Faserabbildung<sup>1</sup>  $\beta_{u,v} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\beta_{u,v}(r) := I(ru, rv) = \frac{r^2}{2}(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2) - \frac{r^{2q}}{2q}(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q) \quad (3.1.4)$$

Eine Skalierung von  $(u, v)$  auf  $\mathcal{N}_b$  wird durch  $(u, v) \mapsto (ru, rv)$  realisiert, wenn  $r > 0$  ein kritischer Punkt von  $\beta_{u,v}$  ist. Für die Existenz solcher kritischen Punkte muss die Gültigkeit der Bedingung

$$\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q > 0 \quad (3.1.5)$$

gefordert werden. Wir erhalten durch eine Kurvendiskussion der Abbildung  $\beta_{u,v}$ :

**Proposition 3.1.3.** *Sei  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $(u, v) \neq (0, 0)$ . Für  $r > 0$  gilt  $(ru, rv) \in \mathcal{N}_b$  genau dann wenn (3.1.5) gilt und  $r$  kritischer Punkt von  $\beta_{u,v}$  ist. In diesem Fall ist  $r$  Stelle eines strengen globalen Maximums und eindeutig gegeben durch  $r = r(u, v)$  für*

$$r(u, v)^{2q-2} = \frac{\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2}{\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q}. \quad (3.1.6)$$

Wegen

$$I(r(u, v)u, r(u, v)v) = \frac{q-1}{2q} \left( \frac{(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad (3.1.7)$$

ist es naheliegend, das durch (3.1.8) definierte Funktional  $J$  zu untersuchen:

$$J(u, v) := \frac{(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q}. \quad (3.1.8)$$

**Proposition 3.1.4.** *Es gilt*

$$c_b = \inf \left\{ \frac{q-1}{2q} J(u, v)^{\frac{1}{q-1}} : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), (u, v) \text{ erfüllt (3.1.5)} \right\}. \quad (3.1.9)$$

*Erfüllt  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  die Bedingung (3.1.5) und ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  ein Minimierer von  $J$ , so ist die Funktion  $(u, v) := (r(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}, r(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v})$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$ .*

**Beweis:**

Aus Proposition 3.1.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} c_b &= \inf \{ I(u, v) : (u, v) \in \mathcal{N}_b \} \\ &= \inf \{ I(r(u, v)u, r(u, v)v) : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), (u, v) \text{ erfüllt (3.1.5)} \} \\ &= \inf \left\{ \frac{q-1}{2q} J(u, v)^{\frac{1}{q-1}} : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), (u, v) \text{ erfüllt (3.1.5)} \right\}. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den Minimierern folgt ebenfalls aus Proposition 3.1.3.  $\square$

<sup>1</sup>Da  $\beta_{u,v}$  gerade ist, genügt es die Faserabbildung für nichtnegative Argumente zu betrachten.

**Bemerkung 3.1.5.** Proposition 3.1.4 liefert eine Min-Max-Charakterisierung des Wertes  $c_b$ . In Lemma 3.2 in [51] wird gezeigt, dass  $c_b$  dem Mountain-Pass-Niveau des Funktionals  $I$  gleicht. Eine Anwendung des Mountain-Pass-Theorems scheitert jedoch am Nachweis der Palais-Smale-Bedingung, da die gängigen Argumente die Gültigkeit der Palais-Smale-Bedingung lediglich für  $n \geq 2$  und nur in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  garantieren.

Eine wichtige Eigenschaft des Funktionals  $J$  besteht darin, dass für alle  $b \geq 0$  und alle  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $(u, v) \neq 0$  die Ungleichung  $J(|u|^*, |v|^*) \leq J(u, v)$  gilt, wobei  $w^* \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  die Schwarz-Symmetrisierung einer nichtnegativen Funktion  $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet. Insbesondere können in diesem Fall ohne Beschränkung der Allgemeinheit Schwarz-symmetrische minimierende Folgen von  $J$  betrachtet werden. Der hieraus resultierende Kompaktheitsgewinn, vgl. Proposition C.8, liefert die Existenz eines Minimierers von  $J$  im Fall  $b > 0$ . Für  $b \leq 0$  beweisen wir direkt, dass jeder Grundzustand semitrivial sein muss.

**Satz 3.1.6.** *Sei  $b \in \mathbb{R}$ . Der Wert  $c_b$  wird in einem nichtnegativen radialsymmetrischen und radial fallenden Grundzustand von (3.1.1) angenommen. Jeder Grundzustand von (3.1.1) erfüllt bis auf Translation eine der Bedingungen*

$$(i) |u| > 0, |v| > 0 \quad \text{oder} \quad (ii) |u| = u_0, v = 0 \quad \text{oder} \quad (iii) \omega = 1, u = 0, |v| = u_0. \quad (3.1.10)$$

**Beweis:**

Wir betrachten zunächst den Fall  $b \leq 0$ . Für alle  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $(u, v) \neq (0, 0)$  gelten nach Lemma 1.2 (i) die Ungleichungen

$$\|u\| \geq \hat{c}_0 \|u\|_{2q}, \quad \|v\|_\omega \geq \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2q}} \hat{c}_0 \|v\|_{2q}.$$

Wegen  $b \|uv\|_q^q \leq 0$  und  $\omega \geq 1$  folgt insbesondere  $\|v\|_\omega \geq \hat{c}_0 \|v\|_{2q}$  sowie

$$J(u, v) \geq \frac{(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q}} \geq \hat{c}_0^{2q} \frac{(\|u\|_{2q}^2 + \|v\|_{2q}^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q}} \geq \hat{c}_0^{2q} = J(u_0, 0).$$

Der Gleichheitsfall tritt nach Lemma 1.2 (i) nur im Fall  $u \in \text{span}\{u_0(x_0 + \cdot)\}, v = 0$  oder  $\omega = 1, u = 0, v \in \text{span}\{u_0(y_0 + \cdot)\}$  für  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$  ein. Daher sind die Minimierer von  $J$  bis auf Translation skalare Vielfache von  $(u_0, 0)$  oder im Fall  $\omega = 1$  skalare Vielfache von  $(0, u_0)$ . Daher sind nach Proposition 3.1.4 die Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  der Form  $(\pm u_0, 0)$  oder  $(0, \pm u_0)$  im Fall  $\omega = 1$ . Wir erhalten die Alternative (ii) oder (iii) und damit die Aussage des Satzes für den Fall  $b \leq 0$ .

Sei nun  $b > 0$ . Sei  $(u_j, v_j)$  eine Schwarz-symmetrische minimierende Folge von  $J$  mit  $\|u_j\|_{2q}^{2q} + \|v_j\|_{2q}^{2q} + 2b \|u_j v_j\|_q^q = 1$ . Dann ist die Folge  $(u_j, v_j)$  beschränkt in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ , vgl. (3.1.8). Daher existiert eine Funktion  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  und eine mit  $(u_j, v_j)$  bezeichnete Teilfolge mit  $(u_j, v_j) \rightharpoonup (\tilde{u}, \tilde{v})$  und  $(u_j, v_j) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$  in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n) \times L^{2q}(\mathbb{R}^n)$

sowie punktweise, vgl. Lemma C.9. Die Funktion  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  ist radialsymmetrisch, radial fallend, nichttrivial wegen  $\|\tilde{u}\|_{2q}^{2q} + \|\tilde{v}\|_{2q}^{2q} + 2b\|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q = 1$  und es gilt

$$J(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} J(u_j, v_j) = \inf \{J(u, v) : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), (u, v) \text{ erfüllt (3.1.5)}\}.$$

Insbesondere ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  ein Minimierer von  $J$ . Nach Proposition 3.1.4 ist die Funktion  $(u, v) := (r(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}, r(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v})$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  und aufgrund der entsprechenden Eigenschaften von  $\tilde{u}, \tilde{v}$  radialsymmetrisch und radial fallend. Nach Proposition 3.1.2 ist  $(u, v)$  ein Grundzustand von (3.1.1).

Ist nun  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathcal{N}_b$  ein beliebiger Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$ , so auch  $(|\tilde{u}|, |\tilde{v}|)$ . Insbesondere ist  $(|\tilde{u}|, |\tilde{v}|)$  nichtnegative nichttriviale Lösung von (3.1.1). Nach dem Minimumprinzip (Lemma C.6) ist  $(|\tilde{u}|, |\tilde{v}|)$  positiv oder semitrivial. Im ersten Fall erhalten wir (i), im zweiten Fall folgt aus dem Eindeutigkeitsresultat von Kwong  $|\tilde{u}| = u_0, v = 0$  oder  $|\tilde{v}| = v_0, u = 0$  bis auf Translation, siehe Satz 1.1. Letzteres ist hingegen nur im Fall  $I(0, v_0) = \min_{\mathcal{N}_b} I \leq I(u_0, 0)$  und damit nur für  $\omega = 1$  möglich. Es folgt die Behauptung.  $\square$

### Bemerkung 3.1.7.

- (a) Der erste Teil des obigen Beweises zeigt, dass jeder Vektorgrundzustand  $(u, v)$  die Ungleichung  $b\|uv\|_q^q > 0$  erfüllen muss. Insbesondere kann für  $b \leq 0$  kein Vektorgrundzustand existieren und es gilt  $c_0 = \inf_{\mathcal{N}_0} I = I(u_0, 0)$ , sodass die Definition  $c_0 := I(u_0, 0)$  aus (1.13) zur Definition des Wertes  $c_b$  in (3.1.3) konsistent ist.
- (b) Aus der Alternative des obigen Satzes folgt, dass jeder Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  ein festes Vorzeichen hat. Es genügt daher, Minimierer  $(u, v)$  mit  $u \geq 0, v \geq 0$  und  $(u, v) = (u_0, 0)$  oder  $(u, v) = (0, u_0), \omega = 1$  oder  $u > 0, v > 0$  zu betrachten.
- (c) Eine interessante Frage ist, ob im Fall  $b > 0$  jeder positive Vektorgrundzustand bis auf Verschiebung radialsymmetrisch und radial fallend ist. Die Antwort lautet "Ja". Im Fall  $q \geq 2$  folgt dies aus den Symmetrieresultaten von Busca, Sirakov und Ikoma, siehe Satz C.10. Für Exponenten  $1 < q < 2$  liefert der genannte Satz keine Aussage, obgleich dies am Ende des Beweises von Satz 2.3 in [51] behauptet wird. Ein korrektes Argument liefert Satz 1.1 in [14]. Ist  $(u, v)$  ein Minimierer von  $J$ , dann auch  $(|u|^*, |v|^*)$  und es folgt  $\|u^*\| = \|u\|, \|v^*\|_\omega = \|v\|_\omega$ . Folglich ist die Funktion  $(u^*, v^*)$  eine glatte radialsymmetrische radial fallende Lösung von (3.1.1). Daher sind die Mengen

$$\{x : \nabla u^*(x) = 0, 0 < u^*(x) < \text{esssup } u\}, \quad \{x : \nabla v^*(x) = 0, 0 < v^*(x) < \text{esssup } v\}$$

Nullmengen<sup>2</sup> und aus Satz 1.1 in [14] folgt  $u = u^*, v = v^*$  bis auf Translation.

<sup>2</sup>Wäre etwa die erste Menge keine Nullmenge, dann gäbe es aufgrund der Regularität des Lebesgue-Maßes eine nichtleere offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\nabla u^*(x) = 0$  und  $0 < u^*(x) < \text{esssup } u$  für  $x \in \Omega$ . Folglich wäre  $u^*$  konstant größer als 0 in  $\Omega$ . Wegen  $-\Delta u^* + u^* = u^{*2q-1} + bu^{*q-1}v^{*q}$  wäre damit auch  $v^*$  konstant in  $\Omega$ . Die lokal eindeutige Lösbarkeit der entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichung (Satz von Picard-Lindelöf) hätte zur Folge, dass  $u^*, v^*$  in  $\mathbb{R}^n$  konstant sind mit  $u^* > 0$ . Dies steht im Widerspruch zu  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ .

Da wir an positiven Lösungen von (3.1.1) interessiert sind, stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen an  $b$  und  $\omega$  in Satz 3.1.6 die Alternative (i) zutrifft. Aus Bemerkung 3.1.7 (a) folgt, dass hierfür  $b > 0$  notwendig ist. Aus der Alternative in Satz 3.1.6 folgt, dass ein Vektorgrundzustand von (3.1.1) genau dann existiert, wenn eine Funktion  $(u, v) \in \mathcal{N}_b$  mit  $u, v \neq 0$  und  $I(u, v) \leq I(u_0, 0)$  existiert. Nach Proposition 3.1.4 und Bemerkung 3.1.7 (a) ist dies genau dann der Fall wenn  $b > 0$  ist und eine Funktion  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $uv \neq 0$  und

$$J(u, v) \leq J(u_0, 0) = \hat{c}_0^{2q} \quad (3.1.11)$$

existiert. Aus elementaren Umformungen folgt anhand der Definition von  $J$  aus (3.1.8), dass dies genau dann der Fall ist, wenn  $uv \neq 0$  ist und die folgende Ungleichung gilt:

$$b \geq K_\omega(u, v) \quad \text{für} \quad K_\omega(u, v) := \frac{\hat{c}_0^{-2q}(\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2)^q - \|u\|_{2q}^{2q} - \|v\|_{2q}^{2q}}{2\|uv\|_q^q} \quad (3.1.12)$$

Sei daher

$$b(\omega, q, n) := \inf \{K_\omega(u, v) : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), uv \neq 0\}. \quad (3.1.13)$$

Wir erhalten das folgende Kriterium:

**Satz 3.1.8.**

- (i) Im Fall  $b < b(\omega, q, n)$  gilt  $c_b = c_0$  und es existiert kein Vektorgrundzustand von (3.1.1).
- (ii) Im Fall  $b = b(\omega, q, n)$  gilt  $c_b = c_0$ . Existiert ein Vektorgrundzustand von (3.1.1), so ist dieser Minimierer des Funktionals  $K_\omega$ .
- (iii) Im Fall  $b > b(\omega, q, n)$  gilt  $c_b < c_0$  und es existiert ein Vektorgrundzustand von (3.1.1).

**Beweis:**

Wir nutzen, dass für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $uv \neq 0$  die Ungleichungen  $K_\omega(u, v) < b$  und  $J(u, v) < J(u_0, 0)$  äquivalent sind. Analoges gilt für ">" oder "=" statt "<".

Im Fall  $b < b(\omega, q, n)$  gilt für alle  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $uv \neq 0$  die Ungleichung  $K_\omega(u, v) > b$  und damit  $J(u, v) > J(u_0, 0)$ . Folglich muss nach Proposition 3.1.4 der nichtnegative Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  der Form  $(u_0, 0)$  oder  $(0, u_0)$  im Fall  $\omega = 1$  sein. Insbesondere gilt  $c_b = I(u_0, 0) = c_0$  und wir erhalten (i).

Im Fall  $b > b(\omega, q, n)$  existieren Funktionen  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $uv \neq 0$  und  $K_\omega(u, v) < b$ , insbesondere gilt  $u, v \neq 0$  und  $J(u, v) < J(u_0, 0)$ . Folglich ist nach Proposition 3.1.4 kein Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  der Form  $(u_0, 0)$  oder  $(0, u_0)$ . Daher gilt die Alternative (i) in Satz 3.1.6 und es folgt die Existenz eines Vektorgrundzustands von (3.1.1). Es folgt (iii).

In Lemma 3.1.10 (i) zeigen wir  $c_b = c_0$  für  $b = b(\omega, q, n)$ . Ist  $(u, v)$  ein Vektorgrundzustand, dann gilt  $J(u, v) = J(u_0, 0)$  und damit  $K_\omega(u, v) = b = b(\omega, q, n)$ , d.h.  $(u, v)$  ist Minimierer von  $K_\omega$ . Wir erhalten (ii).  $\square$

**Bemerkung 3.1.9.** Ein Blick auf die Formel für  $b(\omega, q, n)$  aus (3.1.13) zeigt, dass  $b(\cdot, q, n)$  monoton wachsend ist. Insbesondere gelten für größer werdende  $\omega$  immer restriktivere hinreichende und notwendige Bedingungen für die Existenz eines Vektorgrundzustands. Dies konnte bisher nur anhand expliziter Kriterien vermutet werden.

Wir zeigen in Lemma 3.1.10, dass die Funktion  $b \mapsto c_b$  qualitativ durch die folgende Abbildung beschrieben wird.

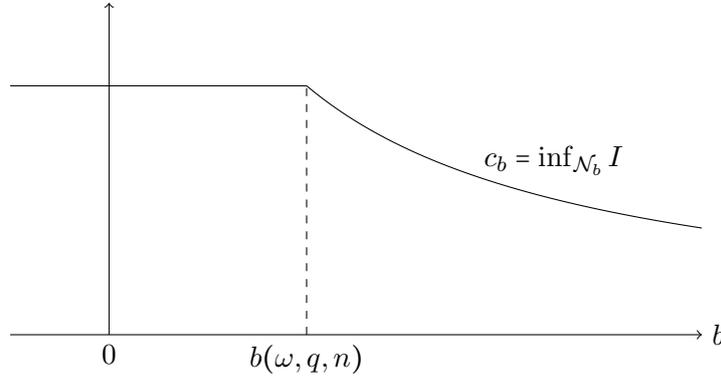


Abbildung 3.1.:  $c_b$

**Lemma 3.1.10.** *Es gilt:*

- (i)  $c_b = c_0$  für  $b \in (-\infty, b(\omega, q, n)]$ ,
- (ii)  $b \mapsto c_b$  ist auf  $[b(\omega, q, n), \infty)$  streng monoton fallend mit  $c_b \leq \left(\frac{1+\omega^2}{2(1+b)}\right)^{\frac{1}{q-1}} c_0$ .
- (iii)  $b \mapsto c_b$  ist Lipschitzstetig.

**Beweis:**

Wir beginnen mit dem Beweis von (ii). Aus der variationellen Charakterisierung von  $c_b$  aus (3.1.9) und der Formel für  $J$  aus (3.1.8) folgt die Monotonie der Abbildung  $b \mapsto c_b$ . Da  $c_b$  nach Satz 3.1.8 für alle  $b > b(\omega, q, n)$  in einer vollständig nichttrivialen Funktion angenommen wird, liegt auf  $[b(\omega, q, n), \infty)$  strenge Monotonie vor. Die Abschätzung aus (ii) erhalten wir aus  $\|u_0\|_\omega^2 \leq \omega^2 \|u_0\|^2$  und

$$c_b \leq \frac{q-1}{2q} J(u_0, u_0)^{\frac{1}{q-1}} = \frac{q-1}{2q} \left( \frac{(\|u_0\|^2 + \|u_0\|_\omega^2)^q}{(2+2b)\|u_0\|_{2q}^{2q}} \right)^{\frac{1}{q-1}} \leq \left( \frac{1+\omega^2}{2(1+b)} \right)^{\frac{1}{q-1}} c_0.$$

Wir zeigen nun (iii). Sei  $b_2 \geq b_1$  und sei  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  ein Minimierer von  $J_{b_2}$ . Dann gilt  $c_{b_1} \geq c_{b_2}$

$$c_{b_1} \leq \frac{q-1}{2q} J_{b_1}(\tilde{u}, \tilde{v})^{\frac{1}{q-1}}, \quad c_{b_2} = \frac{q-1}{2q} J_{b_2}(\tilde{u}, \tilde{v})^{\frac{1}{q-1}},$$

wobei  $J_{b_1}, J_{b_2}$  das in (3.1.8) definierte Funktional für  $b = b_j, j = 1, 2$  bezeichnet. Es folgt

$$c_{b_1}^{q-1} - c_{b_2}^{q-1} = \left( \left( \frac{c_{b_1}}{c_{b_2}} \right)^{q-1} - 1 \right) c_{b_2}^{q-1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left( \frac{J_{b_1}(\tilde{u}, \tilde{v})}{J_{b_2}(\tilde{u}, \tilde{v})} - 1 \right) c_{b_2}^{q-1} \\
&\leq \left( \frac{\|\tilde{u}\|_{2q}^{2q} + \|\tilde{v}\|_{2q}^{2q} + 2b_2 \|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q}{\|\tilde{u}\|_{2q}^{2q} + \|\tilde{v}\|_{2q}^{2q} + 2b_1 \|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q} - 1 \right) c_{b_2}^{q-1} \\
&= \frac{2(b_2 - b_1) \|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q}{\|\tilde{u}\|_{2q}^{2q} + \|\tilde{v}\|_{2q}^{2q} + 2b_1 \|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q} c_{b_2}^{q-1} \\
&\leq \frac{b_2 - b_1}{1 + b_1} c_{b_2}^{q-1}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten mit dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
\frac{|c_{b_1} - c_{b_2}|}{|b_1 - b_2|} &\leq \frac{c_{b_2}^{q-1}}{1 + b_1} \cdot \frac{c_{b_1} - c_{b_2}}{c_{b_1}^{q-1} - c_{b_2}^{q-1}} \leq \frac{c_{b_2}^{q-1}}{1 + b_1} \cdot \frac{c_{b_1}^{2-q}}{q-1}, & \text{falls } 1 < q \leq 2, \\
\frac{|c_{b_1} - c_{b_2}|}{|b_1 - b_2|} &\leq \frac{c_{b_2}^{q-1}}{1 + b_1} \cdot \frac{c_{b_1} - c_{b_2}}{c_{b_1}^{q-1} - c_{b_2}^{q-1}} \leq \frac{c_{b_2}^{q-1}}{1 + b_1} \cdot \frac{c_{b_1}^{2-q}}{q-1}, & \text{falls } q \geq 2.
\end{aligned}$$

Der letzte Term lässt sich jeweils wegen  $c_{b_1}, c_{b_2} \leq c_0$  und  $b_1 \geq 0$  durch  $\frac{c_0}{q-1}$  nach oben abschätzen. Nach Satz 3.1.8 (i) gilt  $c_b = c_0$  auf  $(-\infty, b(\omega, q, n))$  und die (Lipschitz-)Stetigkeit der Funktion  $b \mapsto c_b$  liefert (i).  $\square$

Bevor wir den allgemeinen Fall  $\omega \geq 1$  untersuchen, betrachten wir in Lemma 3.1.11 das Minimierungsproblem über  $\mathcal{N}_b$  für  $\omega = 1$ . In diesem Fall können wir die Werte  $c_b$  und  $b(1, q, n)$  explizit angeben und alle Minimierer von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  bestimmen. Da alle semitrivialen Minimierer nach der Alternative von Satz 3.1.6 bekannt sind, geben wir in Lemma 3.1.11 nur die positiven Vektorgrundzustände der Gleichung (3.1.1) für  $b > b(1, q, n)$  bzw.  $b \geq b(1, q, n)$  an. Die Formel  $b(1, q, n) = 2^{q-1} - 1$  für  $q \geq 2$  ist bekannt<sup>3</sup>, siehe Korollar 2.6 in [51]. Die Aussage  $b(1, q, n) = 0$  für  $q \in (1, 2)$  ist neu. Die Zahl  $k_b \in (0, 1)$  und  $\mu_b = (1 + bk_b^q)^{-\frac{1}{2q-2}}$  sei wie in Proposition 2.0.1 definiert.

**Lemma 3.1.11.** *Sei  $\omega = 1$ .*

(i) *Im Fall  $1 < q < 2$  gilt  $b(1, q, n) = 0$ ,  $c_b = c_0$  für  $b \leq 0$  sowie*

$$c_b = (1 + k_b^2)(1 + bk_b^q)^{-\frac{1}{q-1}} \quad (0 < b < q - 1), \quad c_b = 2(1 + b)^{-\frac{1}{q-1}} \quad (b \geq q - 1).$$

*Alle positiven Vektorgrundzustände lauten  $(\mu_b k_b u_0, \mu_b u_0)$  und  $(\mu_b u_0, \mu_b k_b u_0)$  für  $0 < b < q - 1$  sowie  $(1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  für  $b \geq q - 1$  bis auf Translation.*

(ii) *Im Fall  $q = 2$  gilt  $b(1, q, n) = 1$ ,  $c_b = c_0$  für  $b \leq 1$  sowie  $c_b = 2(1 + b)^{-\frac{1}{q-1}}$  für  $b > 1$  bis auf Translation. Alle positiven Vektorgrundzustände lauten  $(\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0)$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) für  $b = 1$  und  $(1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  für  $b > 1$ .*

<sup>3</sup>Maia, Montefusco und Pellacci zeigen, dass im Fall  $\omega = 1, q \geq 2$  genau dann ein Vektorgrundzustand existiert, wenn  $b \geq 2^{q-1} - 1$  gilt. Die Zahl  $b(\omega, q, n)$  bzw.  $b(1, q, n)$  wurde vom Autor eingeführt und konnte daher nicht von Maia, Montefusco und Pellacci berechnet werden.

(iii) Im Fall  $q > 2$  gilt  $b(1, q, n) = 2^{q-1} - 1$ ,  $c_b = c_0$  für  $b \leq 2^{q-1} - 1$  sowie  $c_b = 2(1+b)^{-\frac{1}{q-1}}$  für  $b > 2^{q-1} - 1$ . Alle positiven Vektorgrundzustände lauten  $(1+b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  für  $b \geq 2^{q-1} - 1$  bis auf Translation.

**Beweis:**

Nach Bemerkung 3.1.7 (a) genügt es, den Fall  $b > 0$  zu betrachten. Für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  sei  $k_{u,v} := \|v\|_{2q} \|u\|_{2q}^{-1}$ . Nach Lemma 1.2 (i) gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
J(u, v) &= \frac{(\|u\|^2 + \|v\|^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q} \\
&\geq \frac{(\hat{c}_0^2 \|u\|_{2q}^2 + \hat{c}_0^2 \|v\|_{2q}^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q} \\
&= \frac{(1 + k_{u,v}^2)^q}{1 + k_{u,v}^{2q} + 2bk_{u,v}^q} \hat{c}_0^{2q} \\
&\geq \inf_{k>0} \frac{(1 + k^2)^q}{1 + k^{2q} + 2bk^q} \hat{c}_0^{2q} \\
&= \inf_{k>0} J(u_0, ku_0) \\
&\geq \inf J.
\end{aligned}$$

Daher ist  $(u, v)$  genau dann Minimierer von  $J$ , wenn in jeder der obigen Ungleichungen Gleichheit gilt. Aus der Gleichheit in der ersten Ungleichung folgt nach Lemma 1.2 (i)  $u, v \in \text{span}\{u_0\}$  bis auf Translation. Gleichheit in der zweiten Ungleichung verlangt, dass  $k_{u,v} > 0$  ein Minimierer der Funktion

$$f(k) := \frac{(1 + k^2)^q}{1 + k^{2q} + 2bk^q} \quad (k > 0)$$

ist. Eine Kurvendiskussion der Funktion  $f$  zeigt im Fall  $1 < q < 2, 0 < b < q - 1$ , dass das Minimum genau bei  $k_b$  und  $k_b^{-1}$  angenommen wird. Im Fall  $1 < q < 2, b \geq q - 1$  lautet der einzige Minimierer 1. Im Fall  $q \geq 2$  existiert nur für  $b \geq 2^{q-1} - 1$  ein Minimum von  $f$  über  $k$  und der Minimierer lautet 1 im Fall  $q > 2$  oder  $q = 2, b > 1$ . Im Fall  $q = 2, b = 1$  ist jede positive Zahl Minimierer von  $f$ . Reskalierung dieser Minimierer von  $J$  liefert mit Proposition 3.1.4 die Minimierer  $(u_b, v_b)$  von  $I|_{\mathcal{N}_b}$  und die Werte  $c_b$  ergeben sich durch Auswertung von  $c_b = I(u_b, v_b)$ .  $\square$

Wir wenden uns nun dem Fall  $\omega \geq 1$  zu. Zur Verbesserung der bestehenden notwendigen Kriterien für die Existenz eines Vektorgrundzustands schätzen wir  $b(\omega, q, n)$  in Proposition 3.1.12 nach unten ab.

**Proposition 3.1.12.** *Es gilt*

$$b(\omega, q, n) \geq \inf_{s>0} \frac{(1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q}} s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q}. \quad (3.1.14)$$

*Insbesondere:*

(i) Im Fall  $1 < q < 2$  gilt  $b(\omega, q, n) \geq 0$ .

(ii) Im Fall  $q \geq 2$  gilt  $b(\omega, q, n) \geq \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} (2^{q-1} - 1)$ .

**Beweis:**

Sei  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $uv \neq 0$ , sei  $s := \|v\|_{2q} \|u\|_{2q}^{-1}$ . Aus den Ungleichungen

$$\|u\| \geq \hat{c}_0 \|u\|_{2q}, \quad \|v\|_\omega \geq \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2q}} \hat{c}_0 \|v\|_{2q},$$

vgl. Lemma 1.2 (i), folgt

$$\begin{aligned} K_\omega(u, v) &= \frac{\hat{c}_0^{-2q} (\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2)^q - \|u\|_{2q}^{2q} - \|v\|_{2q}^{2q}}{2 \|uv\|_q^q} \\ &\geq \frac{(\|u\|_{2q}^2 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q}} \|v\|_{2q}^2)^q - \|u\|_{2q}^{2q} - \|v\|_{2q}^{2q}}{2 \|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q} \\ &= \frac{(1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q}} s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

und damit (3.1.14). Im Fall  $1 < q < 2$  folgt (i) aus

$$\inf_{s>0} \frac{(1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q}} s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q}} s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q} = 0.$$

Sei nun  $q \geq 2$  und sei  $\hat{\omega} := \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2q}}$ . Dann gilt wegen  $\hat{\omega} \geq 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \inf_{s>0} \frac{(1 + \hat{\omega}^2 s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q} &\geq \hat{\omega}^q \inf_{s>0} \frac{(1 + (\hat{\omega}s)^2)^q - 1 - (\hat{\omega}s)^{2q}}{2(\hat{\omega}s)^q} \\ &= \hat{\omega}^q \inf_{t>0} \frac{(1 + t^2)^q - 1 - t^{2q}}{2t^q} \\ &= \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} (2^{q-1} - 1). \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

□

**Bemerkung 3.1.13.** Im Fall  $q = 2$  ist die durch (ii) gegebene Schranke identisch mit (3.1.14), denn

$$\inf_{s>0} \frac{(1 + \omega^{\frac{4-n}{2}} s^2)^2 - 1 - s^4}{2s^2} = \inf_{s>0} \left( \omega^{\frac{4-n}{2}} + \frac{1}{2} \omega^{4-n} s^2 \right) = \omega^{\frac{4-n}{2}}.$$

Im Fall  $q > 2$  liefert (ii) dieselbe Asymptotik für  $\omega \rightarrow \infty$  wie (3.1.14), denn aus  $\hat{\omega} \geq 1$  folgt

$$\inf_{s>0} \frac{(1 + \hat{\omega}^2 s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q} = \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} \inf_{t>0} \frac{(1 + t^2)^q - 1 - \hat{\omega}^{-2q} t^{2q}}{2t^q}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} \inf_{t \geq 1} \frac{(1+t^2)^q - 1 - \hat{\omega}^{-2q} t^{2q}}{2t^q} \\
&\leq \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} \inf_{t \geq 1} \frac{(1+t^2)^q - 1}{2t^q} \\
&= \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} \left(2^{q-1} - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Zur Verbesserung der hinreichenden Kriterien für die Existenz eines Vektorgrundzustands schätzen wir die Zahl  $b(\omega, q, n)$  nach oben ab. Hierzu verwenden wir in der Definition von  $b(\omega, q, n)$ , siehe (3.1.13), die Testfunktionen  $(u_0(k \cdot), \alpha u_0(k \beta \cdot))$  für  $\alpha > 0, \beta \geq 1$  und ein optimal gewähltes  $k > 0$ . Darüberhinaus erhalten wir im Fall  $q = 2$  die Ungleichung  $b(\omega, 2, n) \leq b_{0,\omega}$ , wobei  $b_{0,\omega}^{-1}$  gemäß Lemma 1.2 (v) der größte Eigenwert des kompakten Operators  $(-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0^2 \cdot)$  ist. Es gilt daher

$$b_{0,\omega} = \min \left\{ \frac{\|\phi\|_\omega^2}{\|u_0 \phi\|_2^2} : \phi \in H^1(\mathbb{R}^n), \phi \neq 0 \right\}. \quad (3.1.17)$$

Wir kommen später auf die besondere Bedeutung dieser oberen Schranke zurück.

**Proposition 3.1.14.**

- (i) Im Fall  $1 < q < 2$  gilt  $b(\omega, q, n) \leq 0$ .
- (ii) Im Fall  $q = 2$  gilt  $b(\omega, 2, n) \leq b_{0,\omega}$  und insbesondere  $b(\omega, 2, n) \leq \frac{4-n}{4}\omega^2 + \frac{n}{4}$  für  $n = 1, 2$  und  $n = 3, \omega \leq \sqrt{5}$ . Im Fall  $n = 3, \omega^2 > 5$  gilt darüberhinaus

$$\begin{aligned}
b(\omega, 2, n) \leq & \frac{\omega(1 + \omega^2 - \sqrt{1 + 3\omega^2})^{\frac{1}{2}} (-1 + 3\omega^2 - \sqrt{1 + 3\omega^2})^{\frac{3}{2}}}{4\omega^2(-1 + \omega^2 - \sqrt{1 + 3\omega^2})} \\
& + \frac{-5\omega^4 - \omega^2 - 2 + 2(\omega^2 - 1)\sqrt{1 + 3\omega^2}}{4\omega^2(-1 + \omega^2 - \sqrt{1 + 3\omega^2})}.
\end{aligned}$$

- (iii) Im Fall  $q > 2$  gilt

$$\begin{aligned}
b(\omega, q, n) &\leq \left(2^{q-1} - \frac{1}{2}\right) \omega^{\frac{q+2}{2}} - \frac{1}{2} \omega^{-\frac{q}{2}} & (n = 1), \\
b(\omega, q, n) &\leq (1 + \omega^2)^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} 2^{\frac{n(q-1)-2}{2}} - 1 & (n = 2, 3).
\end{aligned}$$

**Beweis:**

Wir beweisen zunächst die erste Schranke in (ii) für  $q = 2$ . Für alle  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\phi \neq 0$  gilt wegen  $\|u_0\|^2 = \|u_0\|^4 \|u_0\|_4^{-4} = \hat{c}_0^4$  die Ungleichung

$$\begin{aligned}
b(\omega, 2, n) &\leq \inf_{\alpha > 0} K_\omega(u_0, \alpha \phi) \\
&= \inf_{\alpha > 0} \frac{\hat{c}_0^{-4} (\|u_0\|^2 + \alpha^2 \|\phi\|_\omega^2)^2 - \|u_0\|_4^4 - \alpha^4 \|\phi\|_4^4}{2\alpha^2 \|u_0 \phi\|_2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \inf_{\alpha > 0} \frac{2\hat{c}_0^{-4} \|u_0\|^2 \|\phi\|_\omega^2 \cdot \alpha^2 + \alpha^4 (\hat{c}_0^{-4} \|\phi\|_\omega^4 - \|\phi\|_4^4)}{2\alpha^2 \|u_0 \phi\|_2^2} \\
&= \frac{\|\phi\|_\omega^2}{\|u_0 \phi\|_2^2}.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt aus (3.1.17) die Abschätzung  $b(\omega, 2, n) \leq b_{0,\omega}$ . Eine explizite obere Schranke für  $b_{0,\omega}$  erhalten wir aus (3.1.17)

$$b(\omega, 2, n) \leq b_{0,\omega} \leq \frac{\|u_0\|_\omega^2}{\|u_0\|_4^4} = \frac{4-n}{4} \omega^2 + \frac{n}{4}. \quad (3.1.18)$$

Hierbei haben wir  $\|u_0\|_2^2 = \frac{4-n}{4} \|u_0\|^2$ ,  $\|\nabla u_0\|_2^2 = \frac{n}{4} \|u_0\|^2$  verwendet, siehe Lemma 1.2 (ii).

Zur Herleitung der anderen Schranken sei  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $uv \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned}
b(\omega, q, n) &\leq \inf_{k > 0} K_\omega(u(k\cdot), v(k\cdot)) \\
&= \inf_{k > 0} \frac{\hat{c}_0^{-2q} \left( k^{-n} (\|u\|_2^2 + \omega^2 \|v\|_2^2) + k^{2-n} (\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2) \right)^q - k^{-n} \|u\|_{2q}^{2q} - k^{-n} \|v\|_{2q}^{2q}}{k^{-n} \|uv\|_q^q} \\
&= \inf_{k > 0} \frac{k^{n(1-q)} \hat{c}_0^{-2q} (\|u\|_2^2 + \omega^2 \|v\|_2^2 + k^2 (\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2))^q - \|u\|_{2q}^{2q} - \|v\|_{2q}^{2q}}{2 \|uv\|_q^q}
\end{aligned}$$

Das Minimum bezüglich  $k$  wird in

$$k_{max} = \left( \frac{\|u\|_2^2 + \omega^2 \|v\|_2^2}{\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2} \cdot \frac{n(q-1)}{2q - n(q-1)} \right)^{1/2}$$

angenommen. Einsetzen von  $k_{max}$  liefert

$$b(\omega, q, n) \leq \frac{C_{n,q} \hat{c}_0^{-2q} (\|u\|_2^2 + \omega^2 \|v\|_2^2)^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} (\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2)^{\frac{n(q-1)}{2}} - \|u\|_{2q}^{2q} - \|v\|_{2q}^{2q}}{2 \|uv\|_q^q}$$

für

$$C_{n,q} := \left( \frac{2q}{2q - n(q-1)} \right)^q \left( \frac{n(q-1)}{2q - n(q-1)} \right)^{\frac{n(1-q)}{2}} = \frac{\|u_0\|^{2q}}{\|u_0\|_2^{2q-n(q-1)} \|\nabla u_0\|_2^{n(q-1)}},$$

vgl. Lemma 1.2 (ii). Sei nun  $\alpha > 0, \beta \geq 1$  und  $(u, v) := (u_0, \alpha u_0(\beta \cdot))$ . Durch Einsetzen dieser Testfunktion in die obige Abschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned}
b(\omega, q, n) &\leq \frac{\hat{c}_0^{-2q} \|u_0\|^{2q} (1 + \omega^2 \alpha^2 \beta^{-n})^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} (1 + \alpha^2 \beta^{2-n})^{\frac{n(q-1)}{2}} - \|u_0\|_{2q}^{2q} - \alpha^{2q} \beta^{-n} \|u_0\|_{2q}^{2q}}{2\alpha^q \|u_0 u_0(\beta \cdot)\|_q^q} \\
&= \inf_{\alpha > 0, \beta \geq 1} \frac{(1 + \omega^2 \alpha^2 \beta^{-n})^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} (1 + \alpha^2 \beta^{2-n})^{\frac{n(q-1)}{2}} - 1 - \alpha^{2q} \beta^{-n}}{2\alpha^q} \cdot \frac{\|u_0\|_{2q}^{2q}}{\|u_0 u_0(\beta \cdot)\|_q^q}
\end{aligned}$$

$$\leq \inf_{\alpha>0, \beta \geq 1} \frac{(1 + \omega^2 \alpha^2 \beta^{-n})^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} (1 + \alpha^2 \beta^{2-n})^{\frac{n(q-1)}{2}} - 1 - \alpha^{2q} \beta^{-n}}{2\alpha^q \beta^{-n}}, \quad (3.1.19)$$

wobei sich die letzte Ungleichung aus der folgenden Abschätzung ergibt<sup>4</sup>:

$$\|u_0 u_0(\beta \cdot)\|_q^q \geq \|u_0(\beta \cdot) u_0(\beta \cdot)\|_q^q = \beta^{-n} \|u_0\|_{2q}^{2q}.$$

Die verbliebenen Abschätzungen aus (i)-(iii) resultieren aus der Wahl spezieller Werte für  $\alpha > 0, \beta \geq 1$  in (3.1.19). Im Fall  $1 < q < 2$  folgt (i) aus der Wahl  $\beta = 1$  und  $\alpha \rightarrow 0$ , denn

$$b(\omega, q, n) \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 + \omega^2 \alpha^2)^{\frac{2q-n(q-1)}{2}} (1 + \alpha^2)^{\frac{n(q-1)}{2}} - 1 - \alpha^{2q}}{2\alpha^q} = 0.$$

Im Fall  $q = 2$  wählen wir  $\beta = 1$ . Minimierung der oberen Schranke in (3.1.19) liefert im Fall  $n = 1, 2$  oder  $n = 3, 1 \leq \omega^2 \leq 5$  den optimalen Wert für  $\alpha \rightarrow 0$  und wir erhalten die oberen Schranken aus (3.1.18). Im Fall  $n = 3, \omega^2 > 5$  wird das Minimum in  $\alpha = \frac{1}{2\omega} \sqrt{-2 + 2\omega^2 - 2\sqrt{1 + 3\omega^2}}$  angenommen und Einsetzen dieses Werts liefert die Schranke aus (ii). Im Fall  $q > 2, n = 1$  erhalten wir die genannten Schranken für  $\alpha = \omega^{-1/2}$ ,  $\beta = \omega$  und im Fall  $q > 2, n = 2, 3$  liefert die Wahl  $\alpha = \beta = 1$  die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.1.15.** Die Parameter  $\alpha, \beta$  wurden im Beweis des obigen Satzes so gewählt, dass asymptotisch die beste Größenordnung für die obere Schranke für  $b(\omega, q, n)$  erzielt wird. Hätten wir im Fall  $q > 2, n = 1$  beispielsweise  $\alpha = \beta = 1$  gewählt, so hätte sich die Abschätzung  $b(\omega, q, 1) = O(\omega^{q+1})$  ergeben. Unsere Wahl liefert hingegen das bessere Resultat  $b(\omega, q, 1) = O(\omega^{\frac{q+2}{2}})$ .

**Satz 3.1.16.** Sei  $n \in \mathbb{N}, 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und  $\omega \geq 1$ , sei  $b(\omega, q, n)$  gegeben durch (3.1.13).

- (i) Im Fall  $1 < q < 2$  existiert genau dann ein Vektorgrundzustand von (3.1.1) wenn  $b > 0$ .
- (ii) Im Fall  $q = 2$  existiert für  $b > b(\omega, 2, n)$  ein Vektorgrundzustand von (3.1.1). Für  $b < b(\omega, 2, n)$  existiert kein Vektorgrundzustand von (3.1.1).
- (iii) Im Fall  $q > 2$  existiert ein Vektorgrundzustand von (3.1.1) genau wenn  $b \geq b(\omega, q, n)$ .

Für  $b(\omega, q, n)$  gelten die Abschätzungen der Propositionen 3.1.12 und 3.1.14.

**Beweis:**

Aus den Propositionen 3.1.12 und 3.1.14 folgt  $b(\omega, q, n) = 0$  im Fall  $1 < q < 2$ . Ferner existiert für  $b = 0$  nach Bemerkung 3.1.7 (a) kein Vektorgrundzustand und wir erhalten Aussage (i) aus Satz 3.1.8. Teil (ii) folgt unmittelbar aus Satz 3.1.8. Im Fall

<sup>4</sup>Die Funktion  $u_0$  ist radialsymmetrisch und radial fallend. Insbesondere gilt  $u_0 \geq u_0(\beta \cdot)$  für  $\beta \geq 1$ .

$q > 2$  ist gemäß Satz 3.1.8 lediglich zu überprüfen, dass  $K_\omega$  einen Minimierer besitzt. Sei  $(u_m, v_m)$  eine Schwarz-symmetrische minimierende Folge von  $K_\omega$  mit  $u_m, v_m \geq 0$  und  $\|u_m\|_{2q}^{2q} + \|v_m\|_{2q}^{2q} = 1$ , sei  $s_m := \|v_m\|_{2q}\|u_m\|_{2q}^{-1}$ . Aus  $\omega^2 \geq 1$  und (3.1.15) folgt

$$b(\omega, q, n) + o(1) = K_\omega(u_m, v_m) \geq \frac{(1 + s_m^2)^q - 1 - s_m^{2q}}{2s_m^q}.$$

Wegen  $q > 2$  gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 + s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(1 + s^2)^q - 1 - s^{2q}}{2s^q} = +\infty,$$

sodass eine von  $m$  unabhängige positive Zahl  $C$  mit  $C^{-1} \leq s_m \leq C$  existiert. Es folgt

$$1 = \|u_m\|_{2q}^{2q} + \|v_m\|_{2q}^{2q} \leq (C^{2q} + 1) \min\{\|u_m\|_{2q}^{2q}, \|v_m\|_{2q}^{2q}\}. \quad (3.1.20)$$

Die Folge  $(u_m, v_m)$  ist beschränkt in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  wegen

$$\begin{aligned} b(\omega, q, n) + o(1) &= K_\omega(u_m, v_m) \\ &= \frac{(\|u_m\|^2 + \|v_m\|_\omega^2)^q - \|u_m\|_{2q}^{2q} - \|v_m\|_{2q}^{2q}}{2\|u_m v_m\|_q^q} \\ &\geq \frac{(\|u_m\|^2 + \|v_m\|_\omega^2)^q - \|u_m\|_{2q}^{2q} - \|v_m\|_{2q}^{2q}}{\|u_m\|_{2q}^{2q} + \|v_m\|_{2q}^{2q}} \\ &= (\|u_m\|^2 + \|v_m\|_\omega^2)^q - 1. \end{aligned}$$

Da  $(u_m, v_m)$  Schwarz-symmetrisch ist, konvergiert eine geeignete Teilfolge schwach, in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n) \times L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  und punktweise fast überall gegen eine Funktion  $(u, v)$  mit  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  und  $u, v \neq 0$ , vgl. Proposition C.8. Es folgt

$$K_\omega(u, v) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} K_\omega(u_m, v_m) = b(\omega, q, n).$$

Daher ist  $(u, v)$  Minimierer von  $K_\omega$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

Wir kommen nun zur Einordnung der Resultate aus Satz 3.1.16. Im Fall  $1 < q < 2$  ist unser Resultat optimal. Insbesondere verbessern wir das bisher einzige (hinreichende) Kriterium für die Existenz eines Vektorgrundzustands aus Satz 2.3 in [51] signifikant. Im Fall  $q > 2, n = 1$  stellt unsere obere Schranke für  $b(\omega, q, n)$  aus Proposition 3.1.14 wegen  $\frac{q+2}{2} < q + 1$  eine qualitative Verbesserung zu den Ergebnissen von Maia, Montefusco und Pellacci dar, denn die genannten Autoren bewiesen in [51] (für alle  $q \in (1, \frac{n}{(n-2)_+})$ ) die Abschätzung

$$b(\omega, q, n) \leq \left( \frac{2q + n(q-1) + (2q - n(q-1))\omega^{-2}}{2q} \right)^q \omega^{2q - n(q-1)}.$$

Des weiteren folgt aus Proposition 3.1.12, dass  $b(\cdot, q, n)$  auch im Fall  $q > 2$  durch eine bezüglich  $\omega$  koerzive Funktion nach unten beschränkt ist. Das bislang einzige Resultat in diese Richtung aus Satz 2.5 in [51] lautet  $b(\omega, q, n) \geq 2^{q-1} - 1$  für  $q > 2$ .

Wir kommen nun zur Diskussion des Falls  $q = 2$ . Die Existenz eines Minimierers des Funktionals  $I$  über  $\mathcal{N}_b$  zeigten Maia, Montefusco und Pellacci in [51], Satz 2.8 unter der Bedingung  $b \geq \frac{4-n}{4}\omega^2 + \frac{n}{4}$ . Ambrosetti und Colorado zeigten die Existenz eines Grundzustands mit Hilfe des Mountain-Pass-Theorems in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  für Raumdimensionen  $n = 2, 3$  und für Parameter  $b > b_{0,\omega}$ , vgl. Satz 2 in [3]. De Figueiredo und Lopes erhielten in Satz 1.4 [26] die Existenz einer positiven Lösung für  $b > b_{0,\omega} = \frac{\omega(\omega+1)}{2}$  im Fall  $n = 1$ . Ob es sich bei dieser Lösung um einen Vektorgrundzustand handelt, geht es aus der Darstellung nicht hervor. Vergleichen wir diese Ergebnisse mit unseren, so ist zu erkennen, dass im Fall  $n = 1, 2$  keine signifikant besseren Ergebnisse erzielt werden konnten. Es ist nicht ausgeschlossen, dass dies auf  $b(\omega, 2, n) = b_{0,\omega}$  zurückzuführen ist und Vektorgrundzustände an der Stelle  $b = b_{0,\omega}$  von der Lösungsschar  $\mathcal{T}_1 = \{(u_0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  verzweigen. Im Fall  $n = 3$  ist die Situation ein wenig anders. Einerseits folgt aus Proposition 3.1.14 (ii) die Abschätzung  $b(\omega, q, n) = O(\omega)$ . Andererseits gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} b_{0,\omega} &= \min \left\{ \frac{\|\phi\|_\omega^2}{\|u_0\phi\|_2^2} : \phi \in H^1(\mathbb{R}^n), \phi \neq 0 \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\phi|^2 dx + \omega^2 \int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} u_0^2 \phi^2 dx} : \phi \in H^1(\mathbb{R}^n), \phi \neq 0 \right\} \\ &\geq \omega^2 \min \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^n} u_0^2 \phi^2 dx} : \phi \in H^1(\mathbb{R}^n), \phi \neq 0 \right\} \\ &\geq \omega^2 \min \left\{ \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 dx}{\|u_0\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}^n} \phi^2 dx} : \phi \in H^1(\mathbb{R}^n), \phi \neq 0 \right\} \\ &= \frac{1}{\|u_0\|_\infty^2} \cdot \omega^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass für  $n = 3$  und große  $\omega > 0$  die Ungleichung  $b(\omega, q, 3) < b_{0,\omega}$  gilt. Insbesondere existieren Vektorgrundzustände für Kopplungsparameter  $b$  vor der ersten Verzweigungsstelle  $b_{0,\omega}$ . Es wäre interessant zu wissen, ob diese Vektorgrundzustände dennoch mit den semitrivialen Lösungen topologisch verbunden sind.

## 3.2. Minimierung über $\mathcal{M}_b$

Das Existenzresultat aus Satz 3.1.8 wirft die Frage auf, ob für  $b < b(\omega, q, n)$  positive Lösungen des Systems (3.1.1) existieren. Im Fall  $q = 2$  gewannen Lin/Wei [48],[49] und Sirakov [72] positive Lösungen von (3.1.1) für kleine positive Werte von  $b$  durch Minimierung des Funktionals  $I$  über  $\mathcal{M}_b$ , wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b = \{ & (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) : u, v \neq 0, \\ & \|u\|^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q, \quad \|v\|_\omega^2 = \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q \}. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Diese Menge enthält alle vollständig nichttrivialen Lösungen von (3.1.1) und erfüllt  $\mathcal{M}_b \subset \mathcal{N}_b$ . Insbesondere gilt

$$\kappa_b \geq c_b \quad (b \in \mathbb{R}), \quad \text{für } \kappa_b := \inf_{\mathcal{M}_b} I, \quad c_b = \inf_{\mathcal{N}_b} I. \quad (3.2.2)$$

Wir analysieren das Minimierungsproblem (3.2.2) für alle Exponenten  $q \in (1, \frac{n}{(n-2)_+})$ , wobei sich das Problem für  $1 < q < 2$  als trivial erweisen wird. Im Fall  $q > 2$  zeigen wir, dass für alle  $b \in [0, q-1)$  ein positiver Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  und damit eine positive Lösung von (3.1.1) existiert. Es handelt sich um ein gänzlich neues Resultat. Im Fall  $q = 2$  erhalten wir für  $b \in [0, 1)$  genau im Fall  $b < b_{0,1/\omega}$  einen positiven Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$ . Darüberhinaus zeigen wir, dass die positiven Minimierer für  $b \rightarrow b_{0,1/\omega}^-$  gegen die semitriviale Lösung  $(0, v_0)$  konvergieren und damit an der Stelle  $b_{0,1/\omega}$  Verzweigung von der Lösungsschar  $\mathcal{T}_2 = \{(0, v_0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  in die negative  $b$ -Richtung auftritt. Dies steht in Einklang mit den Resultaten aus Satz 2.1.8. Die in diesem Abschnitt gewonnenen Lösungen sind keine Vektorgrundzustände und insbesondere nicht die Lösungen aus Abschnitt 3.1. Dies ergibt sich aus den Ungleichungen  $q-1 < 2^{q-1} - 1 = b(1, q, n) \leq b(\omega, q, n)$  im Fall  $q > 2$  und  $b_{0,1/\omega} < 1 = b(1, 2, n) \leq b(\omega, 2, n)$  im Fall  $q = 2, \omega > 1$ .

Wir zeigen zunächst, dass im Fall  $b < 0$  kein Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  existiert. Im Fall  $q = 2$  ist dieses Resultat Satz 1 in [48] zu entnehmen. Die wesentliche Beobachtung ist, dass minimierende Folgen  $(u_k, v_k)$  wegen  $b < 0$  eine Verkleinerung und nicht wie im Fall  $b > 0$  eine Vergrößerung des Terms  $\|u_k v_k\|_q^q$  anstreben. Eine solche Verkleinerung kann durch das "Auseinanderzerren" der Komponenten realisiert werden. Wir zeigen, dass eine Folge  $(u_k, v_k)$  mit  $(u_k, v_k) \approx (u_0(\cdot + ke_1), v_0(\cdot - ke_1))$  minimierend ist.

**Lemma 3.2.1.** *Sei  $b < 0$ . Dann gilt  $\kappa_b = (1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}})c_0$  und  $\kappa_b$  wird nicht angenommen.*

**Beweis:**

Sei  $b < 0$ . Für  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  gilt

$$\|u\|^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q \leq \|u\|_{2q}^{2q}, \quad \|v\|_\omega^2 = \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q \leq \|v\|_{2q}^{2q}.$$

Es folgt aus Lemma 1.2 (i)

$$I(u, v) = \frac{q-1}{2q} (\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2)$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{q-1}{2q} \left( \|u\|^2 \cdot \left( \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2q}} \right)^{\frac{1}{q-1}} + \|v\|_\omega^2 \cdot \left( \frac{\|v\|_\omega^2}{\|v\|_{2q}} \right)^{\frac{1}{q-1}} \right) \\
&= \frac{q-1}{2q} \left( \left( \frac{\|u\|}{\|u\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} + \left( \frac{\|v\|_\omega}{\|v\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} \right) \\
&\geq \frac{q-1}{2q} \left( 1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \right) \hat{c}_0^{\frac{2q}{q-1}} \\
&= \left( 1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \right) c_0.
\end{aligned}$$

Der Gleichheitsfall tritt genau dann ein, wenn  $uv \equiv 0$  gilt und  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$  existieren mit  $u(\cdot + x_0) \in \text{span}\{u_0\}, v(\cdot + y_0) \in \text{span}\{v_0\}$ . Da dies unmöglich ist, erhalten wir

$$I(u, v) > \left( 1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \right) c_0 \quad \text{für alle } (u, v) \in \mathcal{M}_b.$$

Es genügt, die Ungleichung  $\kappa_b \leq \left( 1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \right) c_0$  zu zeigen. Sei  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\text{supp}(\chi) \subset B_1, \chi|_{B_{1/2}} \equiv 1$ , sei  $\tilde{u}_k(x) := u_0(x)\chi(\frac{x}{k}), \tilde{v}_k(x) := v_0(x)\chi(\frac{x}{k})$  und

$$\begin{aligned}
u_k(x) &:= \left( \frac{\|\tilde{u}_k\|}{\|\tilde{u}_k\|_{2q}} \right)^{\frac{1}{q-1}} \cdot \tilde{u}_k(x + ke_1), \\
v_k(x) &:= \left( \frac{\|\tilde{v}_k\|_\omega}{\|\tilde{v}_k\|_{2q}} \right)^{\frac{1}{q-1}} \cdot \tilde{v}_k(x - ke_1).
\end{aligned}$$

Dann gilt  $\text{supp}(u_k) \subset B_k(-ke_1), \text{supp}(v_k) \subset B_k(ke_1)$  und insbesondere  $u_k v_k \equiv 0$ . Ferner zeigt eine kurze Rechnung  $(u_k, v_k) \in \mathcal{M}_b$ . Es folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
\kappa_b &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} I(u_k, v_k) \\
&= \frac{q-1}{2q} \lim_{k \rightarrow \infty} (\|u_k\|^2 + \|v_k\|_\omega^2) \\
&= \frac{q-1}{2q} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{\|\tilde{u}_k\|}{\|\tilde{u}_k\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} + \left( \frac{\|\tilde{v}_k\|_\omega}{\|\tilde{v}_k\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} \right) \\
&= \frac{q-1}{2q} \left( \left( \frac{\|u_0\|}{\|u_0\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} + \left( \frac{\|v_0\|_\omega}{\|v_0\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} \right) \\
&= \frac{q-1}{2q} \left( 1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \right) \hat{c}_0^{\frac{2q}{q-1}} \\
&= \left( 1 + \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \right) c_0,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Die von  $b$  unabhängige Konstruktion<sup>5</sup> der Folge  $(u_k, v_k)$  beweist darüberhinaus, dass die Menge  $\mathcal{M}_b$  für kein  $b \in \mathbb{R}$  leer ist. In Anbetracht des obigen Lemmas können wir uns im Folgenden auf die Untersuchung des Falls  $b \geq 0$  beschränken, um vollständig nichttriviale Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$$\omega \geq 1, b \in \mathbb{R}, \quad 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

zu gewinnen. Das folgende Lemma besagt, dass auch für große Werte von  $b$  keine "neuen" Lösungen von (3.2.3) durch Minimierung über  $\mathcal{M}_b$  gewonnen werden können. Für  $b > b(\omega, q, n)$  existiert nach den Resultaten des letzten Abschnitts ein Vektorgrundzustand von (3.2.3) und damit ein natürlicher Kandidat für den Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$ , vgl. Satz 3.1.8.

**Lemma 3.2.2.** *Sei  $b > b(\omega, q, n)$ . Dann gilt  $\kappa_b = c_b$  und  $\kappa_b$  wird genau in den Vektorgrundzuständen von (3.2.3) angenommen.*

**Beweis:**

Nach Satz 3.1.8 existiert für  $b > b(\omega, q, n)$  ein Vektorgrundzustand  $(u, v)$  von (3.2.3). Insbesondere ist  $(u, v)$  vollständig nichttriviale Lösung von (3.2.3) mit  $I(u, v) = c_b$ . Es folgt  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  und aus (3.2.2) folgt

$$c_b \leq \kappa_b \leq I(u, v) = c_b.$$

Daher ist  $(u, v)$  Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  und wir erhalten die Behauptung. Ferner ist jeder Minimierer  $(u, v)$  von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  vollständig nichttrivial und, wie wir in Lemma 3.2.3 zeigen, eine Lösung von (3.2.3). Aus  $c_b = \kappa_b$  (siehe oben) und  $I(u, v) = \kappa_b$  folgt  $I(u, v) = c_b$ , d.h.  $(u, v)$  ist Vektorgrundzustand.  $\square$

Aus den beiden obigen Lemmata folgt, dass im Fall  $1 < q < 2$  wegen  $b(\omega, q, n) = 0$  nur im Fall  $b = 0$  eine Chance besteht, durch Minimierung von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  neue Lösungen zu erhalten. Eine kurze Rechnung zeigt, dass in diesem Fall der positive Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  die bereits bekannte Lösung  $(u_0, v_0)$  ist. Wir betrachten daher im Folgenden stets den Fall  $q \geq 2$ . Als nächstes zeigen wir, dass für  $b \in [0, q-1)$  die durch  $\mathcal{M}_b$  gegebene Nebenbedingung natürlich<sup>6</sup> ist bzw. dass Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  kritische Punkte von  $I$  sind. Das entsprechende Resultat für  $q = 2$  ist Proposition 1.1 in [72] zu entnehmen.

<sup>5</sup>Da die nichttrivialen Funktionen  $u_k, v_k$  disjunkte Träger besitzen und  $\|u_k\|^2 = \|u_k\|_{2q}^{2q}, \|v\|_\omega^2 = \|v_k\|_{2q}^{2q}$  gilt, erhalten wir  $(u_k, v_k) \in \mathcal{M}_b$  für alle  $b \in \mathbb{R}$ .

<sup>6</sup>Später zeigen wir ohne es explizit zu erwähnen, dass im Fall  $0 \leq b < q-1$  die Menge  $\mathcal{M}_b$  über der offenen Menge  $(H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}) \times (H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\})$  glatt parametrisiert werden kann, d.h. dass  $\mathcal{M}_b$  eine  $C^\infty$ -Hilbertmannigfaltigkeit ist. Ein kritischer Punkt  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  erfüllt dann per Definition  $I'(u, v) + L_1 H'_1(u, v) + L_2 H'_2(u, v) = 0$  für reelle Zahlen  $L_1, L_2$  und  $H_1, H_2$  wie im Beweis von Lemma 3.2.3. Die durch  $H_1, H_2$  gegebene Nebenbedingung heißt natürlich, wenn aus dieser Gleichung  $I'(u, v) = 0$  folgt.

**Lemma 3.2.3.** *Sei  $q \geq 2$  und  $0 \leq b < q - 1$ . Dann ist jeder Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  eine Lösung von (3.2.3).*

**Beweis:**

Sei  $H_1(u, v) := \|u\|^2 - \|u\|_{2q}^{2q} - b\|uv\|_q^q$  und  $H_2(u, v) := \|v\|_\omega^2 - \|v\|_{2q}^{2q} - b\|uv\|_q^q$ . Für  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  gilt wegen  $b(q-2) \geq 0$

$$H_1'(u, v)[u, 0] = 2\|u\|^2 - 2q\|u\|_{2q}^{2q} - qb\|uv\|_q^q = -2(q-1)\|u\|_{2q}^{2q} - (q-2)b\|uv\|_q^q < 0,$$

$$H_2'(u, v)[0, v] = 2\|v\|_\omega^2 - 2q\|v\|_{2q}^{2q} - qb\|uv\|_q^q = -2(q-1)\|v\|_{2q}^{2q} - (q-2)b\|uv\|_q^q < 0$$

und damit  $\text{ran}(H_1'(u, v), H_2'(u, v)) = \mathbb{R}^2$ . Nach der Lagrangeschen Multiplikatorenregel, vgl. Satz 26.1 in [27], existieren  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$  mit

$$I'(u, v) + L_1 H_1'(u, v) + L_2 H_2'(u, v) = 0.$$

Wegen  $I'(u, v)[(u, 0)] = H_1(u, v) = 0$  und  $I'(u, v)[(0, v)] = H_2(u, v) = 0$  erhalten wir wegen  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  durch Testen mit  $(u, 0)$  bzw.  $(0, v)$  die folgenden Gleichungen:

$$0 = \left( (2-2q)\|u\|_{2q}^{2q} + (2-q)b\|uv\|_q^q \right) L_1 - qb\|uv\|_q^q L_2,$$

$$0 = \left( (2-2q)\|v\|_{2q}^{2q} + (2-q)b\|uv\|_q^q \right) L_2 - qb\|uv\|_q^q L_1.$$

Wir nehmen nun  $(L_1, L_2) \neq (0, 0)$  an. Dann verschwindet die Determinante dieses linearen Gleichungssystems und es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \left( (2-2q)\|u\|_{2q}^{2q} + (2-q)b\|uv\|_q^q \right) \cdot \left( (2-2q)\|v\|_{2q}^{2q} + (2-q)b\|uv\|_q^q \right) - (qb\|uv\|_q^q)^2 \\ &= 4(1-q) \left( (b\|uv\|_q^q)^2 - \frac{q-2}{2} b\|uv\|_q^q (\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q}) - (q-1)\|u\|_{2q}^{2q}\|v\|_{2q}^{2q} \right). \end{aligned}$$

Auflösen der quadratischen Gleichung liefert wegen  $b > 0$

$$4b\|uv\|_q^q = (q-2)(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q}) + \sqrt{(q-2)^2(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q})^2 + 16(q-1)\|u\|_{2q}^{2q}\|v\|_{2q}^{2q}}$$

Wegen  $\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} \geq 2\|u\|_{2q}^q\|v\|_{2q}^q$  ist die rechte Seite nach unten durch  $4(q-1)\|u\|_{2q}^q\|v\|_{2q}^q$  beschränkt. Aus  $b < q - 1$  und der Hölderschen Ungleichung ergibt sich ein Widerspruch. Also gilt  $L_1 = L_2 = 0$ , was zu zeigen war.  $\square$

Wie im Abschnitt zuvor nutzen wir eine Faserabbildung, um das Minimierungsproblem über  $\mathcal{M}_b$  in eine angenehmere Form zu bringen. Für  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  sei  $\hat{\beta}_{u,v} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\hat{\beta}_{u,v}(s, t) := I(su, tv) = \frac{1}{2}(s^2\|u\|^2 + t^2\|v\|_\omega^2) - \frac{1}{2q}(s^{2q}\|u\|_{2q}^{2q} + t^{2q}\|v\|_{2q}^{2q} + 2s^q t^q b\|uv\|_q^q) \quad (3.2.4)$$

Aus

$$\begin{aligned} \partial_s \hat{\beta}_{u,v}(s, t) &= s^{-1}(\|su\|^2 - \|su\|_{2q}^{2q} - b\|(su)(tv)\|_q^q), \\ \partial_t \hat{\beta}_{u,v}(s, t) &= t^{-1}(\|tv\|_\omega^2 - \|tv\|_{2q}^{2q} - b\|(su)(tv)\|_q^q) \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

erhalten wir die folgende Proposition.

**Proposition 3.2.4.** *Sei  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$ . Für  $s, t > 0$  gilt  $(su, tv) \in \mathcal{M}_b$  genau dann wenn  $(s, t)$  kritischer Punkt von  $\hat{\beta}_{u,v}$  ist.*

Die Diskussion der Eigenschaften der Faserabbildung  $\hat{\beta}_{u,v}$  erfordert eine separate Untersuchung der Fälle  $q = 2$  und  $q > 2$ . Bevor wir mit der Analyse des Falls  $q > 2$  fortfahren, untersuchen wir im folgenden Lemma den elementar behandelbaren Fall  $\omega = 1$ . Wie in Lemma 3.1.11 bestimmen wir alle positiven Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  und die zugehörigen Energieniveaus.

**Lemma 3.2.5.** *Sei  $q \geq 2, \omega = 1$ . Dann gilt*

$$\kappa_b = 2c_0 \quad (b < 0), \quad \kappa_b = 2(1+b)^{-\frac{1}{q-1}}c_0 \quad (b \geq 0).$$

*Alle positiven Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  sind für  $q > 2, b \geq 0$  oder  $q = 2, b \neq 1, b \geq 0$  durch  $(1+b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$ , im Fall  $q = 2, b = 1$  durch  $(\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0)$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) gegeben.*

**Beweis:**

Im Fall  $b < 0$  folgt  $\kappa_b = 2c_0$  sowie die Nichtexistenz von Minimierern aus Lemma 3.2.1. Für  $b \geq 0$  sei nun  $(u_b, v_b) := (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  und sei  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$ . Daher gilt

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \leq \|u_b\|^2 + \|v_b\|^2 = 2(1+b)^{-\frac{1}{q-1}}\|u_0\|^2 = 2(1+b)^{-\frac{1}{q-1}}\hat{c}_0^{\frac{2q}{q-1}}.$$

Aus  $\|u\|^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q$  und  $\|v\|^2 = \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q$  sowie der Hölder-Ungleichung folgt für  $r := \|v\|_{2q}\|u\|_{2q}^{-1} > 0$

$$\begin{aligned} \hat{c}_0^2(\|u\|_{2q}^2 + \|v\|_{2q}^2) &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 \\ &\leq (\|u\|^2 + \|v\|^2) \left( \hat{c}_0^{-2} \min \left\{ \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2q}^2}, \frac{\|v\|^2}{\|v\|_{2q}^2} \right\} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &\leq 2\hat{c}_0^2(1+b)^{-\frac{1}{q-1}} \left( \min \left\{ \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2q}^2}, \frac{\|v\|^2}{\|v\|_{2q}^2} \right\} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &\leq 2\hat{c}_0^2(1+b)^{-\frac{1}{q-1}} \left( \min \{ \|u\|_{2q}^{2q-2} + b\|u\|_{2q}^{q-2}\|v\|_{2q}^q, \|v\|_{2q}^{2q-2} + b\|v\|_{2q}^{q-2}\|u\|_{2q}^q \} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= 2\hat{c}_0^2(1+b)^{-\frac{1}{q-1}} (\|u\|_{2q}^2 + \|v\|_{2q}^2) \cdot \left( \frac{\min\{1 + br^q, r^{2q-2} + br^{q-2}\}}{(1+r^2)^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &\leq \hat{c}_0^2(\|u\|_{2q}^2 + \|v\|_{2q}^2), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Abschätzung die Ungleichung

$$\frac{\min\{1 + br^q, r^{2q-2} + br^{q-2}\}}{(1+r^2)^{q-1}} \leq \frac{1+b}{2^{q-1}} \quad (b > 0, r > 0)$$

verwendet haben. Für einen Beweis dieser Ungleichung siehe Proposition B.1 in Appendix B. Folglich gilt in jeder der obigen Ungleichungen Gleichheit und die genannte

Proposition liefert  $r = 1$  im Fall  $q > 2, b \geq 0$  oder  $q = 2, b \neq 1, b \geq 0$ . Darüberhinaus ist aufgrund der Gleichheit in der ersten Ungleichung nach Lemma 1.2 (i) sowohl  $u$  als auch  $v$  skalares Vielfache von  $u_0$ . Mit  $\|u\|^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q$  und  $\|v\|^2 = \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q$  erhalten wir  $(u, v) = (1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  im Fall  $q > 2, b \geq 0$  oder  $q = 2, b \neq 1, b \geq 0$  bzw.  $(u, v) = (\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0)$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) im Fall  $q = 2, b = 1$ . Es folgt die Behauptung.  $\square$

Es ist zu beachten, dass die Werte von  $c_b$  und  $\kappa_b$  sowie die entsprechenden positiven Minimierer für  $b \geq b(1, q, n) = 2^{q-1} - 1$  übereinstimmen, siehe Lemma 3.1.11. Dies bestätigt Lemma 3.2.2. Wir sehen später, dass die obigen Resultate zumindest im Fall  $q = 2$  nur bedingt auf den Fall  $\omega > 1$  übertragbar sind. Lemma 3.2.5 könnte beispielsweise dazu verleiten, die Existenz von Minimierern des Funktional  $I|_{\mathcal{M}_b}$  für alle  $b > 0$  zu vermuten. Dies ist im Fall  $q = 2$  falsch, wie wir in Satz 3.2.12 (ii) zeigen.

### 3.2.1. Der Fall $q > 2$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass für Parameterwerte  $q > 2, 0 \leq b < q - 1$  ein positiver Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  existiert. Die Bedeutung des Schwellenwerts  $q - 1$  besteht darin, dass für  $0 \leq b < q - 1$  und eine vollständig nichttriviale Funktion  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  die Faserabbildung  $\hat{\beta}_{u,v}$  genau einen kritischen Punkt besitzt und dieser einem globalen Maximum entspricht. Die Projizierung einer Funktion  $(u, v)$  auf  $\mathcal{M}_b$  durch Maximierung der Faserabbildung ist daher naheliegend und die hieraus resultierende Min-Max-Charakterisierung von  $\kappa_b = \inf_{\mathcal{M}_b} I$  erweist sich als günstig.

Im Fall  $b \geq q - 1$  hängt die Anzahl der kritischen Punkte der Faserabbildung  $\beta_{u,v}$  im Allgemeinen von  $u, v$  ab und es können degenerierte kritische Punkte von  $\beta_{u,v}$  auftreten. Um dies zu belegen, betrachten wir den einfachsten Fall  $\omega = 1$  und  $u = v$ . Da die Darstellung der auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  definierten Funktion  $\beta_{u,u}$  schwierig ist, betrachten wir statt  $\beta_{u,u}(s, t) = I(su, tu)$  die Abbildung<sup>7</sup>  $f_u(\alpha) := \max_{r>0} I(ru, \alpha ru)$ , d.h.

$$f_u(\alpha) = \frac{q-1}{2q} J(u, \alpha u)^{\frac{1}{q-1}} = \frac{q-1}{2q} \left( \frac{(1+\alpha^2)^q}{1+\alpha^{2q}+2b\alpha^q} \right)^{\frac{1}{q-1}} \left( \frac{\|u\|}{\|u\|_{2q}} \right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Wir erhalten qualitativ das in Abbildung 3.2 illustrierte Ergebnis: Für  $b \leq q - 1$  nimmt  $f_b$  im Punkt  $\alpha = 1$  das eindeutige strenge globale Maximum an. Sobald  $b$  den Wert  $q - 1$  passiert, degeneriert das globale Maximum zu zwei globalen Maxima und einem lokalen Minimum. Für  $b > 2^{q-1} - 1$  ist das lokale Minimum von  $f_u$  ein globales Minimum.

---

<sup>7</sup>Die Abbildung  $\alpha \mapsto (r(u, \alpha u), r(u, \alpha u)\alpha)$  für  $r(u, v)^{2q-2} = \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{2q}^{2q}} \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^{2q}+2b\alpha^q}$  ist eine Bijektion zwischen den kritischen Punkten von  $f_u$  und den kritischen Punkten von  $\beta_{u,u}$ .

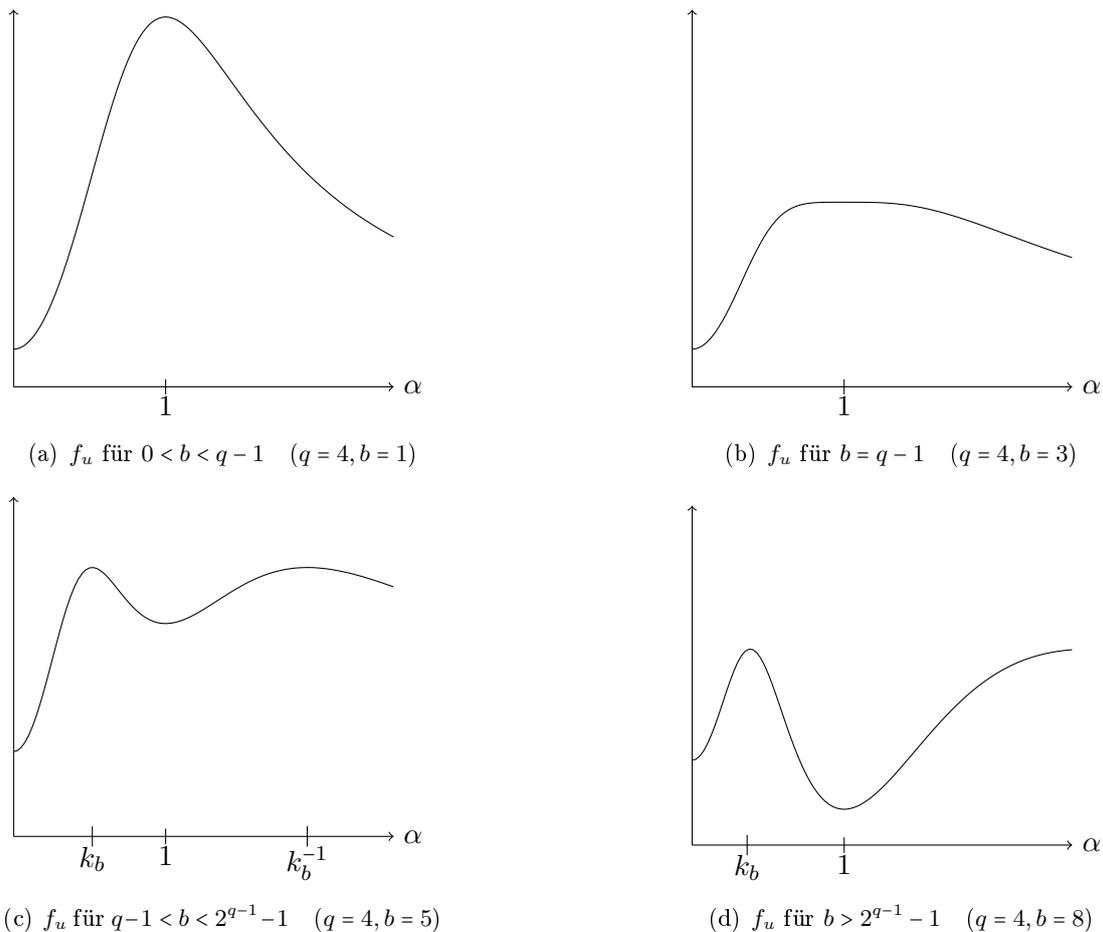


Abbildung 3.2.: Graphen der Funktionen  $f_u$  für verschiedene  $b > 0$

**Proposition 3.2.6.** *Sei  $q > 2, 0 < b < q-1$  und  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$ . Dann besitzt  $\hat{\beta}_{u,v}$  genau einen kritischen Punkt  $(s, t) = (s(u, v), t(u, v))$ , der in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  angenommen wird. Es handelt sich um ein strenges globales Maximum.*

**Beweis:**

Sei  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  und

$$\bar{\beta}(s, t) := \hat{\beta}_{u,v}(\sqrt{s}, \sqrt{t}) = \frac{1}{2}(s\|u\|^2 + t\|v\|_{\omega}^2) - \frac{1}{2q}(s^q\|u\|_{2q}^{2q} + t^q\|v\|_{2q}^{2q} + 2s^{\frac{q}{2}}t^{\frac{q}{2}}b\|uv\|_q^q).$$

Dann ist  $-\bar{\beta}$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  und koerziv. Insbesondere besitzt  $\bar{\beta}$  ein globales Maximum über  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ , das in  $(\bar{s}, \bar{t})$  angenommen wird. Wegen  $\partial_s \bar{\beta}(0, \bar{t}) > 0$  gilt  $\bar{s} > 0$  und aus  $\partial_t \bar{\beta}(\bar{s}, 0) > 0$  folgt  $\bar{t} > 0$ . Dasselbe Argument zeigt, dass alle kritischen Punkte von  $\bar{\beta}$  in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  liegen müssen. Die Funktion  $\bar{\beta}$  ist zweifach stetig differenzierbar in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  und erfüllt für  $s, t > 0$

$$\partial_{ss} \bar{\beta}(s, t) = -\frac{q-1}{2}s^{q-2}\|u\|_{2q}^{2q} - \frac{b(q-2)}{4}t^{\frac{q}{2}}s^{\frac{q-4}{2}}\|uv\|_q^q,$$

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\bar{\beta}(s, t) &= -\frac{q-1}{2}t^{q-2}\|v\|_{2q}^{2q} - \frac{b(q-2)}{4}s^{\frac{q}{2}}t^{\frac{q-4}{2}}\|uv\|_q^q, \\ \partial_{st}\bar{\beta}(s, t) &= -\frac{q}{4}(st)^{\frac{q-2}{2}}b\|uv\|_q^q.\end{aligned}$$

Aus  $b(q-2) \geq 0$  folgt  $\partial_{ss}\bar{\beta}(s, t), \partial_{tt}\bar{\beta}(s, t) < 0$  sowie

$$\begin{aligned}4 \det(D^2\bar{\beta}(s, t)) &= 4 \cdot \left( \partial_{ss}\bar{\beta}(s, t) \cdot \partial_{tt}\bar{\beta}(s, t) - (\partial_{st}\bar{\beta}(s, t))^2 \right) \\ &= -(q-1)(st)^{q-2} \left( (b\|uv\|_q^q)^2 - \frac{q-2}{2} \left( \left( \frac{t}{s} \right)^{\frac{q}{2}} \|v\|_{2q}^{2q} + \left( \frac{s}{t} \right)^{\frac{q}{2}} \|u\|_{2q}^{2q} \right) b\|uv\|_q^q - (q-1)\|u\|_{2q}^{2q}\|v\|_{2q}^{2q} \right) \\ &\geq -(q-1)(st)^{q-2} \left( (b\|uv\|_q^q)^2 - (q-2)\|u\|_{2q}^q\|v\|_{2q}^q b\|uv\|_q^q - (q-1)\|u\|_{2q}^{2q}\|v\|_{2q}^{2q} \right) \\ &= -(q-1)(st)^{q-2} (b\|uv\|_q^q - (q-1)\|u\|_{2q}^q\|v\|_{2q}^q) (b\|uv\|_q^q + \|u\|_{2q}^q\|v\|_{2q}^q) \\ &> 0,\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus  $b < q-1$  und der Hölder-Ungleichung folgt. Folglich ist die Hesse-Matrix von  $\bar{\beta}$  in jedem Punkt  $(s, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  negativ definit. Daher ist das globale Maximum der einzige kritische Punkt, denn ist  $(\tilde{s}, \tilde{t})$  ein weiterer kritischer Punkt, so gilt für einen Punkt  $(\xi, \eta)$  zwischen  $(s, t)$  und  $(\tilde{s}, \tilde{t})$  die Gleichung

$$0 = (s - \tilde{s}, t - \tilde{t}) \cdot (\nabla\beta_{u,v}(s, t) - \nabla\beta_{u,v}(\tilde{s}, \tilde{t})) = (s - \tilde{s}, t - \tilde{t}) D^2\beta_{u,v}(\xi, \eta) (s - \tilde{s}, t - \tilde{t})$$

und die negative Definitheit der Matrix  $D^2\beta_{u,v}(\xi, \eta)$  liefert  $s = \tilde{s}, t = \tilde{t}$ . Es folgt die Behauptung.  $\square$

Für Parameterwerte  $b \in [0, q-1)$  erfolgt daher die Skalierung auf  $\mathcal{M}_b$  einer Funktion  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  durch Maximierung der Faserabbildung  $\hat{\beta}_{u,v}$ . Daher betrachten wir fortan

$$\begin{aligned}\max_{s,t>0} I(su, tv) &= \max_{\alpha>0} \max_{r>0} I(ru, r\alpha v) \\ &= \max_{\alpha>0} I(r(u, \alpha v)u, r(u, \alpha v)\alpha v) \\ &= \frac{q-1}{2q} \max_{\alpha>0} J(u, \alpha v)^{\frac{1}{q-1}},\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

wobei  $r$  und  $J$  die in (3.1.6) und (3.1.8) definierten Funktionen bezeichnet. Sei daher

$$\hat{J}(u, v) := \max_{\alpha>0} J(u, \alpha v).\tag{3.2.7}$$

Aus der Existenz und Eindeutigkeit des kritischen Punktes der Faserabbildung nach Proposition 3.2.6 ergibt sich die folgende variationelle Charakterisierung von  $\kappa_b = \inf_{\mathcal{M}_b} I$ :

**Proposition 3.2.7.** *Sei  $q > 2, 0 \leq b < q-1$ . Dann gilt*

$$\kappa_b = \inf \left\{ \frac{q-1}{2q} \hat{J}(u, v)^{\frac{1}{q-1}} : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), u, v \neq 0 \right\}.$$

Ist  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  ein Minimierer von  $\hat{J}$  mit  $\tilde{u}, \tilde{v} \neq 0$ , so ist  $(s(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}, t(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v})$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$ .

Aus dieser Proposition folgt unmittelbar:

**Proposition 3.2.8.** *Die Funktion  $b \mapsto \kappa_b$  ist auf  $[0, q-1)$  monoton fallend und Lipschitz-stetig. Ferner gilt  $\kappa_b \geq \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} c_0$  für  $b \in [0, q-1)$ .*

**Beweis:**

Die Monotonie der Abbildung  $b \mapsto \kappa_b$  folgt unmittelbar aus Proposition 3.2.7 und der Definition von  $\hat{J}$  in (3.2.7). Wir beweisen die Lipschitz-Stetigkeit. Für alle  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  und alle  $\alpha > 0$  gilt wegen  $b \geq 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} 2\alpha^q \|uv\|_q^q &\leq \frac{1}{b+1} \cdot (2\alpha^q \|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q + 2b\alpha^q \|uv\|_q^q) \\ &\leq \frac{1}{b+1} (\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\alpha^q \|uv\|_q^q). \end{aligned}$$

Für alle  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  folgt daher

$$\begin{aligned} \frac{b+1}{b+1+\varepsilon} J(u, \alpha v) &= \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{b+1}} \cdot \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2\alpha^q b \|uv\|_q^q} \\ &= \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2\alpha^q b \|uv\|_q^q + \frac{\varepsilon}{b+1} (\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2\alpha^q b \|uv\|_q^q)} \\ &\leq \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2\alpha^q (b+\varepsilon) \|uv\|_q^q} \\ &\leq J(u, \alpha v). \end{aligned}$$

Da dies für alle  $\alpha > 0$  und alle  $u, v \neq 0$  gilt, erhalten wir aus der variationellen Charakterisierung von  $\kappa_b$  aus Proposition 3.2.7 die Ungleichung

$$\left(\frac{b+1}{b+1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q-1}} \kappa_b \leq \kappa_{b+\varepsilon} \leq \kappa_b \quad \text{für } 0 \leq b < b+\varepsilon < q-1.$$

Eine kurze Rechnung liefert wegen  $b \geq 0$  und  $\kappa_b \leq \kappa_0$  die Ungleichung

$$|\kappa_{b+\varepsilon} - \kappa_b| \leq \frac{\kappa_b}{(q-1)(b+1)} \cdot \varepsilon \leq \frac{\kappa_0}{q-1} \varepsilon$$

und damit die Lipschitz-Stetigkeit. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \hat{J}(u, v) &= \max_{\alpha > 0} J(u, \alpha v) \\ &> \max \left\{ \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} J(u, \alpha v), \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J(u, \alpha v) \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{\|u\|_{2q}^{2q}}{\|u\|_{2q}^{2q}}, \frac{\|v\|_\omega^{2q}}{\|v\|_{2q}^{2q}} \right\} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

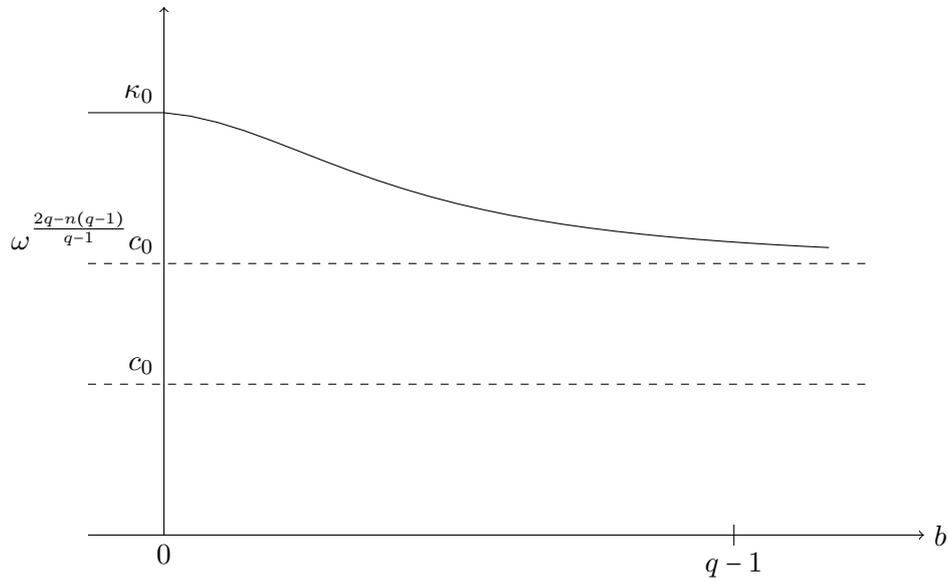
und wir erhalten mit Lemma 1.2 (i) die Abschätzung

$$\hat{J}(u, v) > \max \{ \hat{c}_0^{2q}, \omega^{2q-n(q-1)} \hat{c}_0^{2q} \} = \omega^{2q-n(q-1)} \hat{c}_0^{2q}.$$

Es folgt aus Proposition 3.2.7

$$\begin{aligned} \kappa_b &= \inf \left\{ \frac{q-1}{2q} \hat{J}(u, v)^{\frac{1}{q-1}} : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), u, v \neq 0 \right\} \\ &\geq \frac{q-1}{2q} \left( \omega^{2q-n(q-1)} \hat{c}_0^{2q} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} c_0. \end{aligned}$$

□



Wir kommen zum zentralen Resultat dieses Abschnitts. Wir beweisen für  $b \in [0, q-1)$  die Existenz eines positiven Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b}$ . Hierfür nutzen wir die variationelle Charakterisierung von  $\kappa_b$  aus Proposition 3.2.7 und zeigen, dass das Funktional  $\hat{J}$  einen nichtnegativen vollständig nichttrivialen Minimierer besitzt. Wegen  $\hat{J}(|u|^*, |v|^*) \leq \hat{J}(u, v)$   $\hat{J}(\lambda u, \mu v) = \hat{J}(u, v)$  für alle  $\lambda, \mu \neq 0$  und alle nichttrivialen Funktionen  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  dürfen wir Schwarz-symmetrische minimierende Folgen  $(u_j, v_j)$  für  $\hat{J}$  mit der Eigenschaft  $\|u_j\|_{2q} = \|v_j\|_{2q} = 1$  wählen.

**Satz 3.2.9.** *Sei  $q > 2, 0 \leq b < q-1$ . Dann gilt  $\kappa_b > \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} c_0$  und  $\kappa_b$  wird in einer positiven Lösung  $(u, v)$  von (3.2.3) angenommen.*

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst, dass ein nichtnegativer Minimierer  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  von  $\hat{J}$  mit  $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0, \tilde{u}, \tilde{v} \neq 0$

existiert. Sei  $(u_j, v_j)$  eine Schwarz-symmetrische minimierende Folge zu  $\hat{J}$ , die ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\|u_j\|_{2q} = \|v_j\|_{2q} = 1$  erfülle. Dann ist  $(u_j, v_j)$  wegen (3.2.8) beschränkt in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ . Daher existiert ein  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  und eine Teilfolge von  $(u_j, v_j)$  mit  $(u_j, v_j) \rightharpoonup (\tilde{u}, \tilde{v})$ ,  $(u_j, v_j) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$  in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n) \times L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  sowie  $(u_j, v_j) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$  fast überall. Insbesondere gilt  $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$  und  $\|\tilde{u}\|_{2q} = \|\tilde{v}\|_{2q} = 1$ . Für jedes  $\tilde{\alpha} > 0$  gilt daher die Ungleichung

$$\inf \hat{J} = \lim_{j \rightarrow \infty} \max_{\alpha > 0} J(u_j, \alpha v_j) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} J(u_j, \tilde{\alpha} v_j) \geq J(\tilde{u}, \tilde{\alpha} \tilde{v}).$$

Da  $\tilde{\alpha} > 0$  beliebig war, erhalten wir

$$\inf \hat{J} \geq \max_{\alpha > 0} J(\tilde{u}, \alpha \tilde{v}) = \hat{J}(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Folglich ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  ein Minimierer von  $\hat{J}$  mit  $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$  und  $\tilde{u}, \tilde{v} \neq 0$ . Nach Proposition 3.2.7 ist  $(u, v) := (s(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}, t(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v})$  Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  und nach Lemma 3.2.3 ist  $(u, v)$  Lösung von (3.2.3). Aus Lemma C.6 folgt  $u > 0, v > 0$  und wir erhalten die Behauptung.  $\square$

### 3.2.2. Der Fall $q = 2$

Im Fall  $q = 2$  ist das System (3.2.3) gegeben durch

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= u^3 + buv^2, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= v^3 + bu^2v, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\omega \geq 1, b \in \mathbb{R}, n \in \{1, 2, 3\}, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Nach Satz 2 in Sirakovs Arbeit [72] ist bekannt, dass die Bedingung  $0 \leq b < b_{Sir}(\omega)$  für

$$b_{Sir}(\omega) := \frac{2}{\omega^{\frac{4-n}{2}} + \omega^{\frac{n-4}{4}} + \sqrt{\omega^{4-n} + \omega^{n-4} + 2 - 4\omega^{-\frac{n}{2}}}} \quad (\omega > 1)$$

hinreichend für die Existenz eines Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  ist. In Satz 3.2.12 verbessern wir dieses Resultat und zeigen, dass für  $b \in [0, 1)$  genau dann ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  existiert, wenn  $b < b_{0,1/\omega}$  gilt. Hierbei bezeichnet  $b_{0,1/\omega}^{-1}$  den größten Eigenwert des kompakten Operators  $(-\Delta + 1)^{-1}(v_0^2 \cdot)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n)$ , vgl. Lemma 1.3. Darüberhinaus zeigen wir, dass die positiven Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  für  $b \rightarrow b_{0,1/\omega}^-$  gegen  $(0, v_0)$  konvergieren und damit an der Stelle  $b_{0,1/\omega}$  Verzweigung in die negative  $b$ -Richtung von der Lösungsschar  $\mathcal{T}_2 = \{(0, v_0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  auftritt.

Im Fall  $n = 1$  ist  $b_{0,1/\omega}$  explizit bekannt. Aus Lemma A.3 folgt  $b_{0,1/\omega} = \frac{\omega+1}{2\omega^2}$  und ein Vergleich mit Sirakovs Kriterium ist möglich, siehe Abbildung 3.3. Es zeigt sich, dass die

durch  $b_{Sir}$  gegebene Näherung sehr präzise ist. Im Fall  $n = 3$  ist hingegen ein qualitativer Unterschied zwischen den beiden Kurven zu erkennen, da in diesem Fall  $b_{0,1/\omega}$  für  $\omega \rightarrow \infty$  gegen eine positive Zahl konvergiert, wohingegen  $b_{Sir}(\omega)$  gegen 0 konvergiert. Eine Begründung hierfür liefern die aus dem Birman-Schwinger-Prinzip abgeleiteten Schranken für die Anzahl von negativen Eigenwerten  $E$  eines Schrödingeroperators  $-\Delta + V(x)$  mit Rollnik-Potential<sup>8</sup>  $V$ . Die Eigenwertgleichung  $-\Delta\phi + \phi = b_{0,1/\omega}v_0^2\phi$  in  $\mathbb{R}^3$  ist äquivalent zu  $(-\Delta + V)\psi = E\psi$  für  $V(x) = -b_{0,1/\omega}u_0(x)^2$  und  $E = -\omega^{-2}$ . Wegen  $V \in L^{3/2}(\mathbb{R}^n)$  ist  $V$  ein Rollnik-Potential und die Anzahl  $N_E(V)$  der Eigenwerte von  $-\Delta + V$  kleiner oder gleich  $E$  kann durch die Ungleichung

$$N_E(V) \leq \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(V(x))_-(V(y))_-}{|x-y|^2} e^{-2\sqrt{-E}|x-y|} dx dy,$$

nach oben abgeschätzt werden, siehe Seite 6 in [39]. Da für die Existenz eines Eigenwerts  $N_E(V) \geq 1$  gefordert werden muss, erhalten wir durch Einsetzen der Parameter

$$b_{0,1/\omega} \geq 4\pi \left( \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{u_0(x)^2 u_0(y)^2}{|x-y|^2} e^{-\frac{2}{\omega}|x-y|} dx dy \right)^{-1/2} \quad (n=3),$$

insbesondere  $\liminf_{\omega \rightarrow \infty} b_{0,1/\omega} > 0$ .

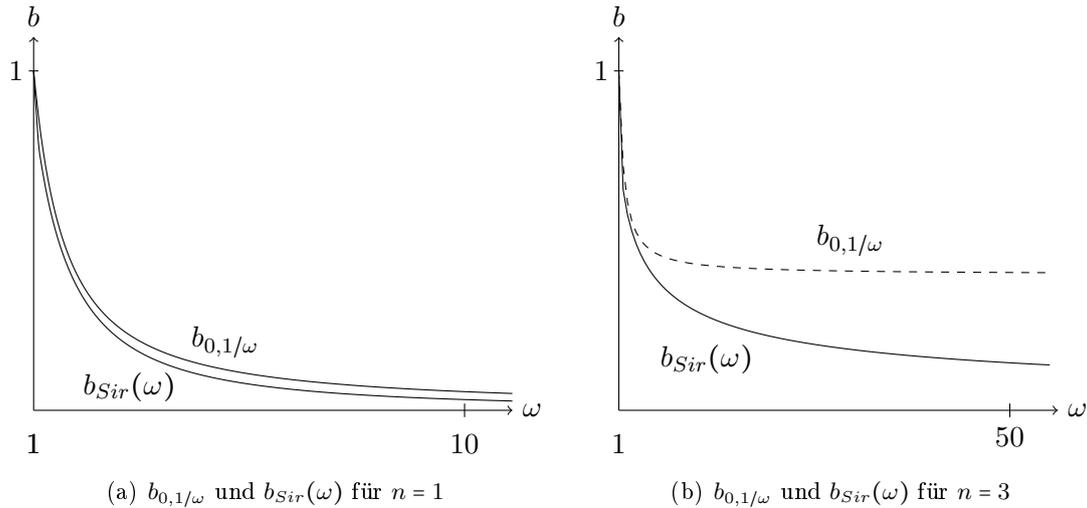


Abbildung 3.3.: Vergleich zwischen  $b_{Sir}(\omega)$  und  $b_{0,1/\omega}$

Analog zum Fall  $2 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  nutzen wir zunächst Proposition 3.2.4 um das Minimierungsproblem auf  $\mathcal{M}_b$  in ein angenehmeres Minimierungsproblem zu transformieren. Die Skalierung von vollständig nichttrivialen Funktionen  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathcal{M}_b$  erfolgt für  $0 \leq b < 1$  erneut durch Maximierung der in (3.2.4) definierten Faserabbildung

<sup>8</sup>Eine Funktion  $V$  heißt Rollnik-Potential und wir schreiben  $V \in R$  im Fall  $\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|V(x)||V(y)|}{|x-y|^2} dx dy < \infty$ , siehe [69], Seite 170. Die Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichung liefert  $L^{3/2}(\mathbb{R}^3) \subset R$ .

$\hat{\beta}_{u,v}$ . Im Gegensatz zum Fall  $q > 2$  sind die qualitativen Eigenschaften der Faserabbildung  $\hat{\beta}_{u,v}$  jedoch von  $u, v$  abhängig. Im Fall  $0 < b < 1$  können genau zwei Fälle eintreten. Entweder ist  $\hat{\beta}_{u,v}$  streng monoton oder die Funktion einen eindeutigen kritischen Punkt, der einem strengen globalen Maximum entspricht. Insbesondere sind nur gewisse Funktionen  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  auf  $\mathcal{M}_b$  skalierbar. Dies ist dafür verantwortlich, dass wir später nur für  $0 \leq b < b_{0,1/\omega}$  und nicht für  $b_{0,1/\omega} \leq b < 1$  die Existenz eines Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  nachweisen können. Wir beschränken uns im Folgenden auf den Fall  $\omega > 1$ .

**Proposition 3.2.10.** *Sei  $q = 2, 0 \leq b < 1$  und  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$ . Dann hat  $\hat{\beta}_{u,v}$  genau dann einen kritischen Punkt in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  wenn gilt*

$$\frac{b\|uv\|_2^2}{\|u\|_4^2\|v\|_4^2} < \min \left\{ \frac{\|u\|^2\|v\|_4^2}{\|u\|_4^2\|v\|_\omega^2}, \frac{\|u\|_4^2\|v\|_\omega^2}{\|u\|^2\|v\|_4^2} \right\}. \quad (3.2.10)$$

In diesem Fall handelt es sich um ein strenges globales Maximum und der Maximierer  $(s, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$  ist gegeben durch  $(s, t) = (s(u, v), t(u, v))$  für

$$s(u, v)^2 := \frac{\|v\|_4^4\|u\|^2 - b\|uv\|_2^2\|v\|_\omega^2}{\|u\|_4^4\|v\|_4^4 - b^2\|uv\|_2^4}, \quad t(u, v)^2 := \frac{\|u\|_4^4\|v\|_\omega^2 - b\|uv\|_2^2\|u\|^2}{\|u\|_4^4\|v\|_4^4 - b^2\|uv\|_2^4}. \quad (3.2.11)$$

**Beweis:**

Nach (3.2.5) existiert genau dann ein kritischer Punkt von  $\hat{\beta}_{u,v}$  in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ , wenn eine nichttriviale Lösung  $(s, t)$  der Gleichung

$$\|u\|^2 = s^2\|u\|_4^4 + t^2b\|uv\|_2^2, \quad \|v\|_\omega^2 = t^2\|v\|_4^4 + s^2b\|uv\|_2^2 \quad (3.2.12)$$

existiert. Die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems in  $(s^2, t^2)$  ist wegen  $b\|uv\|_2^2 \leq b\|u\|_4^2\|v\|_4^2 < \|u\|_4^2\|v\|_4^2$  erfüllt und die Lösung  $(s(u, v)^2, t(u, v)^2)$  ist (formal) durch (3.2.11) gegeben. Aufgrund der Forderung  $s^2, t^2 > 0$  ist diese Lösungen nur im Fall (3.2.10) zulässig. Eine Auswertung der Hesse-Matrix von  $(s, t) \mapsto \hat{\beta}_{u,v}(\sqrt{s}, \sqrt{t})$  zeigt, dass  $(s(u, v), t(u, v))$  einem strengen globalen Maximierer entspricht.  $\square$

Bezeichnet  $J$  das in (3.1.8) definierte Funktional, so erhalten wir wie in (3.2.6) die folgende Gleichung für alle Funktionen  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ , die der Bedingung (3.2.10) genügen:

$$I(s(u, v)u, t(u, v)v) = \frac{1}{4} \max_{\alpha > 0} J(u, \alpha v) = \frac{1}{4} \max_{\alpha > 0} \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2\|v\|_\omega^2)^2}{\|u\|_4^4 + \alpha^4\|v\|_4^4 + 2\alpha^2b\|uv\|_2^2}.$$

Es erweist sich als hilfreich, ein entsprechendes Funktional für alle Funktionen  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  zu definieren. Wir betrachten das Funktional

$$\hat{J}(u, v) := \sup_{\alpha > 0} J(u, \alpha v). \quad (3.2.13)$$

Bevor wir in Satz 3.2.12 die optimalen Bedingungen für die Existenz eines Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  beweisen können, benötigen einige Hilfsresultate. In Proposition 3.2.11 bezeichnet die Zahl  $b_{0,1/\omega}^{-1}$  wie in Lemma 1.2 (v) den größten Eigenwert des kompakten Operators  $(-\Delta + 1)^{-1}(v_0^2 \cdot)$  mit der variationellen Charakterisierung

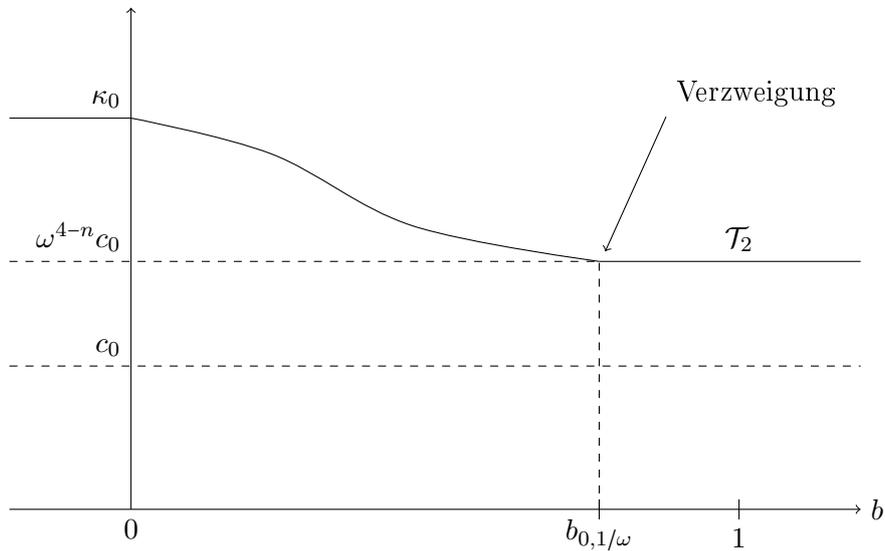
$$b_{0,1/\omega} = \min \left\{ \frac{\|\phi\|^2}{\|\phi v_0\|_2^2} : \phi \in H^1(\mathbb{R}^n), \phi \neq 0 \right\}. \quad (3.2.14)$$

Die zugehörige Eigenfunktion  $\varphi$  mit den Eigenschaften  $\varphi(0) > 0$  und  $\|\varphi\| = 1$  lautet  $\varphi = \omega^{\frac{n-2}{2}} \varphi_{0,1/\omega}$ , vgl. Bemerkung 1.3. Bei  $b_{0,1/\omega}$  handelt es sich nach Satz 2.1.8 um die erste Verzweigungsstelle von  $\mathcal{T}_2 = \{(0, v_0, b) : b \in \mathbb{R}\}$ .

**Proposition 3.2.11.** *Sei  $q = 2, \omega > 1$ .*

- (i) *Für  $b \in [0, 1)$  und alle  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  gilt  $I(u, v) > \omega^{4-n} c_0$ .*
- (ii) *Für  $b \in [0, 1)$  gilt  $\kappa_b = \inf \left\{ \frac{1}{4} \hat{J}(u, v) : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), u, v \neq 0 \right\}$ .*
- (iii) *Die Funktion  $b \mapsto \kappa_b$  ist monoton fallend und Lipschitz-stetig auf  $[0, 1)$ .*
- (iv) *Für  $b \in \mathbb{R}$  gilt  $(0, v_0) \in \overline{\mathcal{M}_b}$  genau dann wenn  $b \geq b_{0,1/\omega}$ .*
- (v) *Sei  $b \in [0, b_{0,1/\omega})$ . Ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  vollständig nichttriviale nichtnegativer Minimierer von  $\hat{J}$ , dann erfüllt  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  die Bedingung (3.2.10).*

Es folgt der Beweis des zu Beginn formulierten Kriteriums für die Existenz eines Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b}$ . Die folgende Abbildung illustriert die Aussagen von Satz 3.2.12.



**Satz 3.2.12.** Sei  $q = 2, \omega > 1$ .

- (i) Im Fall  $0 \leq b < b_{0,1/\omega}$  gilt  $\kappa_b > \omega^{4-n}c_0$  und  $\kappa_b$  wird in einer positiven Lösung von (3.2.3) angenommen.
- (ii) Im Fall  $b_{0,1/\omega} \leq b < 1$  gilt  $\kappa_b = \omega^{4-n}c_0$  und  $\kappa_b$  wird nicht angenommen.
- (iii) Für jede Folge  $(b_j)$  mit  $b_j \rightarrow b_{0,1/\omega}^-$  und jede Folge von positiven Minimierern von  $I|_{\mathcal{M}_{b_j}}$  gilt  $(u_j, v_j) \rightarrow (0, v_0)$  und  $\frac{u_j}{\|u_j\|} \rightarrow \varphi$ .

**Beweis:**

Es gelte zunächst  $0 \leq b < b_{0,1/\omega}$ . Wie im Beweis von Satz 3.2.9 folgt, dass  $4\kappa_b = \inf \hat{J}$  in einer Funktion  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  mit  $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$  und  $\tilde{u}, \tilde{v} \neq 0$  angenommen wird. Nach Proposition 3.2.11 (v) erfüllt  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  die Bedingung (3.2.10) und Proposition 3.2.10 liefert die Existenz eines nichtnegativen Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b}$ . Dieser ist nach Lemma 3.2.3 Lösung von (3.2.3) und positiv nach Lemma C.6.

Im Fall  $b_{0,1/\omega} \leq b < 1$  gilt nach Proposition 3.2.11 (iv)  $(0, v_0) \in \overline{\mathcal{M}_b}$ . Da  $I$  stetig ist, erhalten wir  $\kappa_b \leq I(0, v_0) = \omega^{4-n}c_0$ , vgl. Lemma 1.2 (iii). Nach Proposition 3.2.11 (i) gilt zudem  $I(u, v) > \omega^{4-n}c_0$  für alle  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$ , sodass  $\kappa_b$  nicht angenommen wird. Es folgt (ii).

Wir kommen zum Beweis von (iii). Es genügt zu zeigen, dass jede Folge  $(u_j, v_j, b_j)$  der geforderten Art eine Teilfolge besitzt, die gegen  $(u_0, 0, b_{0,1/\omega})$  konvergiert. Sei daher  $(b_j)$  eine Folge mit  $b_j \rightarrow b_{0,1/\omega}$  und seien  $(u_j, v_j, b_j)$  positive Lösungen von (3.2.3) mit  $I(u_j, v_j) = \kappa_{b_j}$ . Dann ist  $(u_j, v_j)$  nach Satz C.10 radialsymmetrisch und radial fallend. Die Folge  $(u_j, v_j)$  ist beschränkt und besitzt eine schwach konvergente Teilfolge, die wir wieder mit  $(u_j, v_j)$  bezeichnen. Nach Lemma C.9 gilt  $(u_j, v_j) \rightarrow (u, v)$  in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$  für eine Lösung  $(u, v, b)$  von (3.2.3) mit der Eigenschaft

$$I(u, v) = \lim_{j \rightarrow \infty} I(u_j, v_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \kappa_{b_j} = \omega^{4-n}c_0.$$

Insbesondere gilt  $(u, v) \neq (0, 0)$  und  $(u, v) \notin \mathcal{M}_b$  nach Proposition 3.2.11 (i). Daher ist  $(u, v)$  semitriviale nichtnegative Lösung von (3.2.3) und es folgt  $(u, v) = (0, v_0)$  aus dem Eindeutigkeitsresultat von Kwong, siehe Satz 1.1.

Sei nun  $\phi_j := \frac{u_j}{\|u_j\|}$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Wie oben genügt es zu zeigen, dass  $(\phi_j)$  eine Teilfolge mit  $\phi_j \rightarrow \varphi$  besitzt. Die Folgenglieder  $\phi_j$  sind radialsymmetrisch und radial fallend und die Folge  $(\phi_j)$  ist beschränkt in  $H^1(\mathbb{R}^n)$ . Daher existiert eine schwach konvergente Teilfolge  $(\phi_j)$  mit Grenzwert  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ , für die zusätzlich  $\phi_j \rightarrow \phi$  in  $L^4(\mathbb{R}^n)$  gilt, vgl. Proposition C.8. Aus  $\|u_j\|^2 = \|u_j\|_4^4 + b_j \|u_j v_j\|_2^2$  und  $(u_j, v_j) \rightarrow (0, v_0)$  folgt zudem

$$1 = \frac{\|u_j\|_4^4 + b_j \|u_j v_j\|_2^2}{\|u_j\|^2} = \|\phi_j\|_4^2 \|u_j\|_4^2 + b_j \|\phi_j v_j\|_2^2 = b_{0,1/\omega} \|\phi v_0\|_2^2 + o(1) \quad (j \rightarrow \infty). \quad (3.2.15)$$

Insbesondere erhalten wir  $\phi \neq 0$ . Mit  $\|\phi_j\| = 1$ ,  $\phi_j \rightharpoonup \phi$  und  $\phi_j \rightarrow \phi$  in  $L^4(\mathbb{R}^n)$  folgt aus

der variationellen Charakterisierung (3.2.14) von  $b_{0,1/\omega}$  die Ungleichung

$$b_{0,1/\omega} \stackrel{(3.2.14)}{\leq} \frac{\|\phi\|^2}{\|\phi v_0\|_2^2} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_j\|^2}{\|\phi_j v_0\|_2^2} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_j\|^2}{\|\phi_j v_0\|_2^2} = \frac{1}{\|\phi v_0\|_2^2} \stackrel{(3.2.15)}{=} b_{0,1/\omega}.$$

Insbesondere erhalten wir  $\|\phi_j\| \rightarrow \|\phi\|$  und damit  $\phi_j \rightarrow \phi$ ,  $\|\phi\| = 1$ . Ferner folgt aus  $b_{0,1/\omega} = \frac{\|\phi\|^2}{\|\phi v_0\|_2^2}$ , dass  $\phi$  die durch  $\|\phi\| = 1$  und  $\phi(0) > 0$  eindeutig bestimmte erste Eigenfunktion des Operators  $(-\Delta + 1)^{-1}(v_0^2 \cdot)$  ist, d.h. es gilt  $\phi = \varphi$ , was zu zeigen war.  $\square$

Wir kommen zur Einordnung unserer Resultate, wobei wir uns auf die Diskussion des Falls  $q = 2$  beschränken. Satz 3.2.12 löst das Minimierungsproblem  $\inf_{\mathcal{M}_b} I$  für alle Parameter  $b \in [0, 1)$ . Wir wissen nun, dass für die Existenz eines Minimierers die Bedingung  $b < b_{0,1/\omega}$  hinreichend und notwendig ist. Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt erwähnt verbessern wir insbesondere Sirakovs Resultate. Die Existenz positiver Lösungen für  $0 \leq b < b_{0,1/\omega}$  ist hingegen nicht neu. Ambrosetti und Colorado zeigten mit Hilfe des Mountain Pass-Theorems im Raum  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ , dass im Fall  $n = 2, 3$  positive Lösungen von (3.2.3) existieren, vgl. Satz 1 in [3]. Es ist zu erwarten, dass diese Lösungen den in Satz 3.2.12 für  $0 \leq b < b_{0,1/\omega}$  gewonnen Minimierern der Funktionale  $I|_{\mathcal{M}_b}$  entsprechen. De Figueiredo und Lopes beweisen darüberhinaus in [26], Satz 1.4 das entsprechende Resultat im Fall  $n = 1$  durch ein Approximationsargument. Der Erkenntnisgewinn durch Satz 3.2.12 besteht daher aus drei Aspekten: Zum einen liefert unsere Vorgehensweise einen einheitlichen Existenzbeweis. Zum zweiten können wir zeigen, dass für  $b \in [b_{0,1/\omega}, 1)$  keine Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  existieren. Ein solches Resultat existierte bislang nicht. Zum dritten ist die entstandene Verbindung zwischen Minimierung über  $\mathcal{M}_b$  und Verzweigung von der Lösungsschar  $\mathcal{T}_2 = \{(0, v_0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  an der Stelle  $b = b_{0,1/\omega}$  zu nennen.

Schließlich beweisen wir Proposition 3.2.11. Hierzu verwenden wir, dass wegen  $q = 2$  der Funktionalwert  $\hat{J}(u, v) = \max_{\alpha > 0} J(u, \alpha v)$  explizit bestimmt werden kann. Für Funktionen  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  gilt

$$\hat{J}(u, v) = f\left(\frac{\|u\|^2}{\|u\|_4^2}, \frac{\|v\|_\omega^2}{\|v\|_4^2}, \frac{b\|uv\|_2^2}{\|u\|_4^2\|v\|_4^2}\right)$$

für

$$f(x, y, z) := \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - 2zxy}{1 - z^2} & , z < \min\{\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\}, \\ \max\{x^2, y^2\} & , z \geq \min\{\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\}. \end{cases} \quad (3.2.16)$$

Die Fallunterscheidung  $z < \min\{\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\}$  bzw.  $z \geq \min\{\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\}$  in der Definition reflektiert die unterschiedlichen Werte von  $\hat{J}(u, v)$  für Funktionen  $(u, v)$ , die der Bedingung (3.2.10) genügen bzw. nicht genügen. Im zweiten Fall zeigt eine Kurvendiskussion, dass die Ab-

bildung  $\alpha \mapsto J(u, \alpha v)$  monoton ist und es folgt

$$\hat{J}(u, v) = \max \left\{ \frac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4}, \frac{\|v\|_\omega^4}{\|v\|_4^4} \right\} \quad \text{falls } (u, v) \text{ Bedingung (3.2.10) nicht erf\u00fcllt.} \quad (3.2.17)$$

Im anderen Fall ist die Funktion  $\alpha \mapsto J(u, \alpha v)$  streng monoton wachsend auf  $(0, \alpha_{max})$ , streng monoton fallend auf  $(\alpha_{max}, \infty)$  und nimmt ihr globales Maximum in

$$\alpha_{max} = \frac{t(u, v)}{s(u, v)} = \sqrt{\frac{\|u\|_4^4 \|v\|_\omega^2 - b \|uv\|_2^2 \|u\|^2}{\|v\|_4^4 \|u\|^2 - b \|uv\|_2^2 \|v\|_\omega^2}}$$

an. Es gilt

$$\hat{J}(u, v) = \frac{\frac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4} + \frac{\|v\|_\omega^4}{\|v\|_4^4} - 2 \frac{b \|uv\|_2^2}{\|u\|_4^2 \|v\|_4^2} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_4^2} \frac{\|v\|_\omega^2}{\|v\|_4^2}}{1 - \left( \frac{b \|uv\|_2^2}{\|u\|_4^2 \|v\|_4^2} \right)^2} \quad \text{falls } (u, v) \text{ Bedingung (3.2.10) erf\u00fcllt.}$$

### Beweis von Proposition 3.2.11

Wir beweisen zun\u00e4chst (i). F\u00fcr  $0 \leq b < 1$  und alle  $(u, v) \in \mathcal{M}_b$  ist die Bedingung (3.2.10) erf\u00fcllt. Nach den obigen Vorbemerkungen gilt  $\max_{\alpha > 0} J(u, \alpha v) > \lim_{\alpha \rightarrow \infty} J(u, \alpha v)$  und es folgt

$$I(u, v) = \frac{1}{4} \hat{J}(u, v) = \frac{1}{4} \max_{\alpha > 0} J(u, \alpha v) > \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{4} J(u, \alpha v) = \frac{1}{4} \frac{\|v\|_\omega^4}{\|v\|_4^4} \geq \frac{1}{4} \frac{\|v_0\|_\omega^4}{\|v_0\|_4^4} = \omega^{4-n} c_0,$$

wobei in den letzten beiden (Un-)gleichungen Lemma 1.2 (i) und (iii) verwendet wurde. Es folgt (i).

Wir kommen zum Beweis von (ii). Es gilt

$$\begin{aligned} \kappa_b &= \inf \{ I(u, v) : (u, v) \in \mathcal{M}_b \} \\ &= \inf \{ I(s(u, v)u, t(u, v)v) : (u, v) \in \mathcal{M}_b \} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{4} \hat{J}(u, v) : (u, v) \in \mathcal{M}_b \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \frac{1}{4} \hat{J}(u, v) : u, v \in H^1(\mathbb{R}^n), u, v \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Zum Beweis von "≤" sei  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$ . Erf\u00fcllt  $(u, v)$  die Bedingung (3.2.10), dann gilt nach Proposition 3.2.10  $(s(u, v)u, t(u, v)v) \in \mathcal{M}_b$  und somit

$$\kappa_b \leq I(s(u, v)u, t(u, v)v) = \frac{1}{4} \hat{J}(u, v).$$

Erfüllt  $(u, v)$  die Bedingung (3.2.10) nicht, dann existiert aufgrund der Stetigkeit der Translation in  $L^4(\mathbb{R}^n)$  eine Folge  $(z_j)$  in  $\mathbb{R}^n$ , so dass  $(u_j, v) := (u(\cdot - z_j), v)$  die Bedingung (3.2.10) erfüllt und die Gleichung

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{b \|u_j v\|_2^2}{\|u\|_4^2 \|v\|_4^2} = \min \left\{ \frac{\|u\|^2 \|v\|_4^2}{\|u\|_4^2 \|v\|_\omega^2}, \frac{\|u\|_4^2 \|v\|_\omega^2}{\|u\|^2 \|v\|_4^2} \right\} \quad (3.2.18)$$

gilt. Für alle  $j$  gilt dann  $(s(u_j, v)u_j, t(u_j, v)v) \in \mathcal{M}_b$  und der Grenzübergang  $j \rightarrow \infty$  liefert mit Hilfe der Formeln aus (3.2.11)

$$\begin{aligned} t(u_j, v) &\rightarrow 0 \text{ und } s(u_j, v) \rightarrow \frac{\|u\|}{\|u\|_4^2}, & \text{falls } \frac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4} > \frac{\|v\|_\omega^4}{\|v\|_4^4}, \\ s(u_j, v) &\rightarrow 0 \text{ und } t(u_j, v) \rightarrow \frac{\|v\|_\omega}{\|v\|_4^2}, & \text{falls } \frac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4} < \frac{\|v\|_\omega^4}{\|v\|_4^4}. \end{aligned}$$

Hierbei ist der Fall  $\frac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4} = \frac{\|v\|_\omega^4}{\|v\|_4^4}$  wegen  $b < 1$  und (3.2.18) ausgeschlossen. Wir erhalten wegen  $\|u_j\|^2 = \|u\|^2$

$$\begin{aligned} \kappa_b &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} I(s(u_j, v)u_j, t(u_j, v)v) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (s(u_j, v)^2 \|u_j\|^2 + t(u_j, v) \|v\|_\omega^2) \\ &= \max \left\{ \frac{\|u\|^4}{\|u\|_4^4}, \frac{\|v\|_\omega^4}{\|v\|_4^4} \right\} \\ &= \hat{J}(u, v), \end{aligned}$$

vgl. (3.2.17). Es folgt (ii). Der Beweis der Monotonie und der Lipschitzstetigkeit folgt aus (ii) wie im Fall  $q > 2$ , siehe Proposition 3.2.8.

Es folgt der Beweis von Aussage (iv). Sei  $b \geq b_{0,1/\omega}$  und sei  $\varphi := \varphi_{0,1/\omega}$ . Aufgrund der Charakterisierung von  $b_{0,1/\omega}$  aus (3.2.14) und der Stetigkeit der Translation in  $L^4(\mathbb{R}^n)$  existiert eine Folge  $(z_j)$  in  $\mathbb{R}^n$ , so dass für  $u_j = \varphi(\cdot - z_j)$  das folgende gilt:

$$\frac{\|u_j\|^2}{\|u_j v_0\|_4^2} > b \quad \text{für } j \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{\|u_j\|^2}{\|u_j v_0\|_4^2} \rightarrow b \quad \text{für } j \rightarrow \infty. \quad (3.2.19)$$

Aus der Hölder-Ungleichung, (3.2.14) und  $\|v_0\| < \|v_0\|_\omega$  ergibt sich die Ungleichung

$$\frac{\|u_j\|^2}{\|u_j\|_4^2} = \frac{\|\varphi\|^2 \|v_0\|_4^2}{\|\varphi\|_4^2 \|v_0\|_4^2} \leq \frac{\|\varphi\|^2 \|v_0\|_4^2}{\|\varphi v_0\|_2^2} \leq \frac{\|v_0\|^2 \|v_0\|_4^2}{\|v_0\|_4^4} < \frac{\|v_0\|_\omega^2}{\|v_0\|_4^2}. \quad (3.2.20)$$

Wir erhalten

$$\frac{b \|u_j v_0\|_2^2}{\|u_j\|_4^2 \|v_0\|_4^2} \stackrel{(3.2.19)}{<} \frac{\|u_j\|^2}{\|u_j\|_4^2 \|v_0\|_4^2} = \frac{\|u_j\|^2 \|v_0\|_4^2}{\|u_j\|_4^2 \|v_0\|_\omega^2} \stackrel{(3.2.20)}{\leq} \min \left\{ \frac{\|u_j\|^2 \|v_0\|_4^2}{\|u_j\|_4^2 \|v_0\|_\omega^2}, \frac{\|u_j\|_4^2 \|v_0\|_\omega^2}{\|u_j\|^2 \|v_0\|_4^2} \right\}.$$

Daher erfüllt  $(u_j, v_0)$  die Bedingung (3.2.10) und es folgt  $(s(u_j, v_0)u_j, t(u_j, v_0)v_0) \in \mathcal{M}_b$  nach Proposition 3.2.10. Aus den Formeln für  $s(u_j, v_0), t(u_j, v_0)$  sowie (3.2.19) ergibt sich  $s(u_j, v_0) \rightarrow 0$  sowie  $t(u_j, v_0) \rightarrow 1$  und damit  $(s(u_j, v_0)u_j, t(u_j, v_0)v_0) \rightarrow (0, v_0)$ . Es folgt  $(0, v_0) \in \overline{\mathcal{M}_b}$ .

Sei nun  $(0, v_0) \in \overline{\mathcal{M}_b}$  und  $(u_j, v_j)$  Folge in  $\mathcal{M}_b$  mit  $(u_j, v_j) \rightarrow (0, v_0)$ . Dann ist die durch  $\phi_j := u_j \|u_j\|_4^{-1}$  gegebene Folge beschränkt in  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , denn

$$\|\phi_j\|^2 = \frac{\|u_j\|_4^4 + b\|u_j v_j\|_2^2}{\|u_j\|_4^2} = \|u_j\|_4^2 + b\|\phi_j v_j\|_2^2 \leq b\|\phi_j\|_4^2 \|v_j\|_4^2 + o(1) = b\|v_0\|_4^2 + o(1) \quad (j \rightarrow \infty)$$

Eine Teilfolge  $(\phi_j)$  konvergiert daher schwach gegen eine Funktion  $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ . Wegen  $\phi_j \rightharpoonup \phi$  und  $(u_j, v_j) \rightarrow (0, v_0)$  folgt

$$\|\phi_j\|^2 = \|u_j\|_4^2 + b\|\phi_j v_j\|_2^2 = b\|\phi_j v_0\|_2^2 + o(1) = b\|\phi v_0\|_2^2 + o(1) \quad (j \rightarrow \infty). \quad (3.2.21)$$

Nach Sobolevs Einbettungssatz gilt zudem  $\|\phi_j\| = \|u_j\| \|u_j\|_4^{-1} \geq c$  für eine positive Zahl  $c$ , insbesondere folgt aus (3.2.21)  $\phi \neq 0$ . Wir erhalten

$$b \stackrel{(3.2.21)}{=} \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\phi_j\|^2}{\|\phi v_0\|_2^2} \geq \frac{\|\phi\|^2}{\|\phi v_0\|_2^2} \stackrel{(3.2.14)}{\geq} b_{0,1/\omega}.$$

Schließlich beweisen wir Aussage (v). Sei  $b \in [0, b_{0,1/\omega})$  und  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  vollständig nichttriviale Minimierer von  $\hat{J}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$ . Wir nehmen an, dass  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  die Bedingung (3.2.10) nicht erfüllt. Dann gilt  $\frac{\|\tilde{v}\|_\omega}{\|\tilde{v}\|_4} \neq \frac{\|\tilde{u}\|}{\|\tilde{u}\|_4}$ , denn sonst gälte nach der Höder-Ungleichung

$$b \geq \frac{b\|\tilde{u}\tilde{v}\|_2^2}{\|\tilde{u}\|_4^2 \|\tilde{v}\|_4^2} \geq \min \left\{ \frac{\|\tilde{u}\|^2 \|\tilde{v}\|_4^2}{\|\tilde{u}\|_4^2 \|\tilde{v}\|_\omega^2}, \frac{\|\tilde{u}\|_4^2 \|\tilde{v}\|_\omega^2}{\|\tilde{u}\|^2 \|\tilde{v}\|_4^2} \right\} = 1 > b_{0,1/\omega},$$

was per Voraussetzung unmöglich ist. Aus der Differenzierbarkeit der in (3.2.16) definierten Funktion  $f$  (siehe Proposition B.2) in Punkten  $(x, y, z)$  mit  $x \neq y$  und  $z \in [0, 1)$  folgt, dass  $\hat{J}$  differenzierbar in  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  ist. Aus den Formeln für die Ableitungen von  $f$  erhalten wir im Fall  $\frac{\|\tilde{v}\|_\omega}{\|\tilde{v}\|_4} > \frac{\|\tilde{u}\|}{\|\tilde{u}\|_4}$  aus der Euler-Lagrange-Gleichung  $\hat{J}'(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0$ , dass  $\tilde{v}$  ein kritischer Punkt des Funktionals  $w \mapsto \frac{\|w\|_\omega^2}{\|w\|_4^2}$  ist. Folglich existiert ein  $\lambda > 0$ , so dass  $v := \lambda \tilde{v}$  eine nichtnegative nichttriviale Lösung der Gleichung  $-\Delta v + \omega^2 v = v^3$  in  $\mathbb{R}^n$  ist. Aus dem Eindeutigkeitsresultat von Kwong (Satz 1.1) folgt  $v = v_0$  und damit  $\tilde{v} \in \text{span}\{v_0\}$ . Es folgt

$$b = \frac{b\|\tilde{u}v_0\|_2^2}{\|\tilde{u}\|_4^2 \|v_0\|_4^2} \cdot \frac{\|\tilde{u}\|_4^2 \|v_0\|_4^2}{\|\tilde{u}v_0\|_2^2} \geq \frac{\|\tilde{u}\|^2 \|v_0\|_4^2}{\|\tilde{u}\|_4^2 \|v_0\|_\omega^2} \cdot \frac{\|\tilde{u}\|_4^2 \|v_0\|_4^2}{\|\tilde{u}v_0\|_2^2} = \frac{\|\tilde{u}\|^2}{\|\tilde{u}v_0\|_2^2} \geq b_{0,1/\omega}$$

im Widerspruch zu  $b < b_{0,1/\omega}$ . Im Fall  $\frac{\|\tilde{u}\|}{\|\tilde{u}\|_4} > \frac{\|\tilde{v}\|_\omega}{\|\tilde{v}\|_4}$  liefern analoge Argumente  $\tilde{u} \in \text{span}\{u_0\}$  und damit

$$\frac{\|\tilde{v}\|_\omega}{\|\tilde{v}\|_4} < \frac{\|\tilde{u}\|}{\|\tilde{u}\|_4} = \frac{\|u_0\|}{\|u_0\|_4}$$

im Widerspruch zu Lemma 1.2 (i).  $\square$

### 3.3. Minimierung über $\mathcal{M}_b^*$

In diesem Abschnitt untersuchen wir, unter welchen Bedingungen positive Lösungen von (1.1) für Parameterwerte  $b < 0$  existieren. Im Fall  $\omega = 1$  liefert die Lösungsschar  $\mathcal{T}_3$  aus Proposition 2.0.2 Beispiele für solche Lösungen. Aus der Nichtdegeneriertheit der Lösung  $(u_0, v_0, 0)$ , siehe Lemma 1.2 (iii), und dem Satz über implizit definierte Funktionen folgt darüberhinaus, dass auch im Fall  $\omega > 1$  für betragsmäßig kleine negative Werte von  $b$  positive radialsymmetrische Lösungen von (1.1) existieren. Sirakovs in [72] gewähltem Ansatz folgend zeigen wir, dass sich positive Lösungen für  $b \leq 0$  durch Minimierung über die Teilmenge der radialsymmetrischen Funktionen aus  $\mathcal{M}_b$  gewinnen lassen. Wir betrachten daher für  $b \leq 0$  das Minimierungsproblem

$$\kappa_b^* := \inf_{\mathcal{M}_b^*} I, \quad \mathcal{M}_b^* := \{(u, v) \in \mathcal{M}_b : (u, v) \text{ ist radialsymmetrisch}\}, \quad (3.3.1)$$

um die Existenz positiver Lösungen des Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\ -\Delta v + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$\omega \geq 1, b < 0, \quad 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}, \quad u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n).$$

zu beweisen. Im Fall  $n \geq 2, q = 2$  zeigte Sirakov für alle  $b < 0$  die Existenz eines Minimierers über  $\mathcal{M}_b^*$ , vgl. Satz 2 (i) in [72]<sup>9</sup>. Der Beweis des Satzes ist hierbei nicht auf den Fall  $n = 1$  übertragbar, da die Kompaktheit der Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^4(\mathbb{R}^n)$  verwendet wird. Zunächst verallgemeinern wir Sirakovs Resultat auf den Fall  $q \neq 2$  und erhalten in Satz 3.3.5 für  $n \geq 2, 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und für alle  $b < 0$  nichtnegative vollständig nichttriviale Lösungen von (3.3.2). Anschließend zeigen wir in Satz 3.3.7, dass die Minimierer für  $b \rightarrow -\infty$  bis auf Auswahl einer Teilfolge konvergieren und die vollständig nichttriviale Grenzfunktion ein Minimierungsproblem löst, das in der Literatur als "Problem der optimalen Aufteilung"<sup>10</sup> bezeichnet wird. Ferner zeigt sich, dass jede dieser konvergenten Teilfolgen  $(u_b, v_b)$  die Eigenschaft  $bu_bv_b \rightarrow 0$  in  $L^q(\mathbb{R}^n)$  für  $b \rightarrow -\infty$  besitzt. Dies ist dahingehend zu deuten, dass sich für zunehmend negative Kopplungskonstanten  $b$  die Komponenten  $u_b, v_b$  vermeiden und für  $b \rightarrow -\infty$  gegen vollständig nichttriviale Funktionen  $\bar{u}, \bar{v}$  mit disjunkten Trägern konvergieren, die eine "optimale Aufteilung" bei optimaler Energie  $\kappa_{-\infty}^*$  modellieren. Für eine physikalische Interpretation des entstehenden variationellen Problems sei auf die Arbeit von Conti, Terracini, Verzini [23] und die darin enthaltenen Referenzen verwiesen. In glatt berandeten beschränkten Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bei homogenen Dirichlet-Randdaten wurde für  $q = 2$  ein solches asymptotisches Verhalten der Minimierer von Wei, Weth und Noris, Tavares, Terracini, Verzini nachgewiesen, vgl. Abschnitt 4 in [84] bzw. Satz 1.2 in [61]. Unsere Resultate liefern die Analoga zu den Ergebnissen der genannten

<sup>9</sup>Die Formulierung in [72] ist nicht vollständig, da nicht auf die unabdingbare Forderung  $n \geq 2$  hingewiesen wird.

<sup>10</sup>engl.: optimal partition problem

Autoren für  $\Omega = \mathbb{R}^n$  und für alle Exponenten  $q \in (1, \frac{n}{(n-2)_+})$ . Der qualitative Verlauf der Funktion  $b \mapsto \kappa_b^*$  ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.

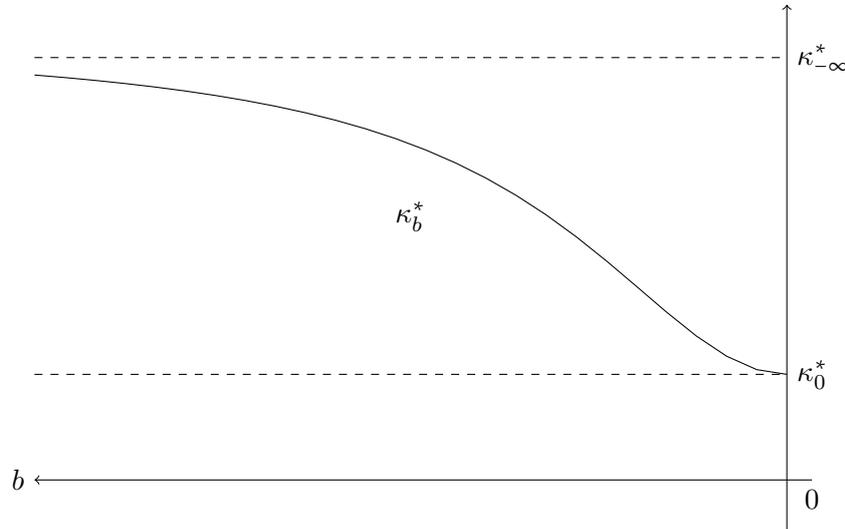
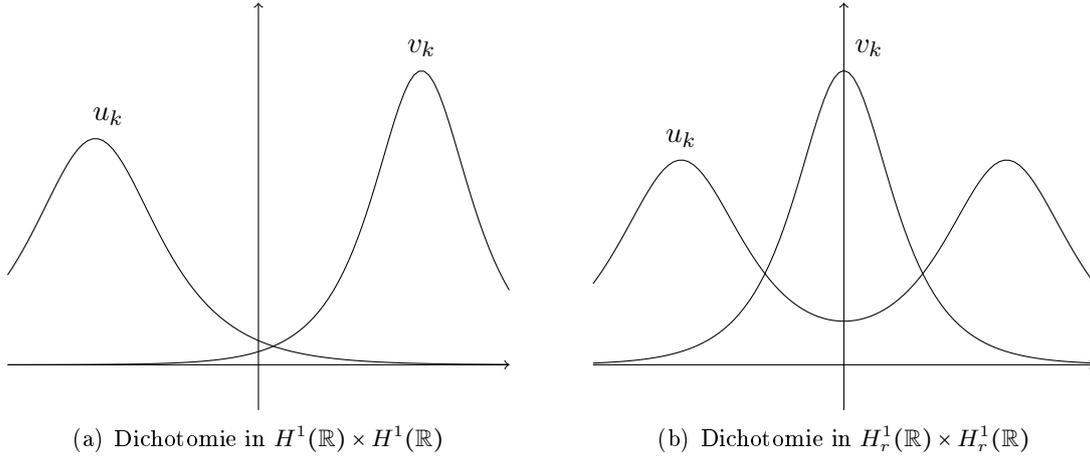


Abbildung 3.4.:  $\kappa_b^*$

Es stellt sich die Frage, inwieweit das oben erwähnte Existenzresultat an die Kompaktheit der Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  für  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und damit an die Bedingung  $n \geq 2$  gebunden ist. In Satz 3.3.10 beweisen wir, dass für  $n = 1, q \in (1, 2]$  und betragsmäßig große negative Werte von  $b$  keine vollständig nichttrivialen Lösungen von (3.3.2) existieren. Die oben beschriebenen Resultate für  $n \geq 2$  sind daher zumindest für  $q \in (1, 2]$  nicht auf den Fall  $n = 1$  übertragbar, d.h. die Nichtkompaktheit der Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R})$  ist spürbar. Andererseits beweisen wir, dass für betragsmäßig kleine negative Werte von  $b$  ein Minimierer des Funktionals  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  und damit eine radialsymmetrische vollständig nichttriviale Lösung existiert. Dieses Resultat ist Lemma 3.2.1 gegenüberzustellen, wo bewiesen wurde, dass  $I|_{\mathcal{M}_b}$  für negative  $b$  keinen Minimierer besitzt. Eine Erklärung für die besseren Kompaktheitseigenschaften der radialsymmetrischen Funktionen im Fall  $n = 1$  liefert der Beweis von Lemma 3.2.1. Um die Nichtexistenz eines Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b}$  im Fall  $b < 0$  zu zeigen, wurde dort eine minimierende Folge  $(u_k, v_k)$  mit  $(u_k, v_k) \approx (u_0(\cdot + ke_1), v_0(\cdot - ke_1))$  gewählt. Eine solche Konstruktion ist in  $\mathcal{M}_b$  möglich, nicht jedoch in  $\mathcal{M}_b^*$ , da die angegebene Folge nicht radialsymmetrisch ist. Eine entsprechende Folge  $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)$  in  $\mathcal{M}_b^*$  müsste, salopp formuliert, auf beiden Seiten der 0 eine Energieportion ins Unendliche tragen. Sie hätte die Gestalt  $(u_k, v_k) \approx (u_0(\cdot - ke_1) + u_0(\cdot + ke_1), v_0)$ , vgl. Abbildung 3.5(a), 3.5(b). In anderen Worten: Dichotomie ist in  $H_r^1(\mathbb{R}) \times H_r^1(\mathbb{R})$  erst bei höheren Energieniveaus möglich, da sich Energieportionen auf beiden Seiten der reellen Achse voneinander entfernen müssen.



Im Folgenden gelte stets  $n \in \mathbb{N}, 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und  $\omega \geq 1$ . Wir benötigen das folgende Hilfsresultat.

**Proposition 3.3.1.** *Sei  $b \leq 0$ . Dann existiert eine positive Zahl  $c$  mit  $\|u\|_{2q}, \|v\|_{2q} \geq c$  für alle  $(u, v) \in \mathcal{M}_b^*$ .*

**Beweis:**

Für  $(u, v) \in \mathcal{M}_b^*$  gilt wegen  $b \leq 0$  nach der Sobolevschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q \leq \|u\|_{2q}^{2q} \leq C\|u\|^{2q}, \\ \|v\|_\omega^2 &= \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q \leq \|v\|_{2q}^{2q} \leq C\|v\|_\omega^{2q}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt wegen  $u, v \neq 0$  die Ungleichung  $\|u\|, \|v\|_\omega \geq c$  für eine von  $u, v$  unabhängige Zahl  $c > 0$ . Die Behauptung folgt aus  $\|u\|_{2q}^{2q} \geq \|u\|^2 \geq c^2$  und  $\|v\|_{2q}^{2q} \geq \|v\|_\omega^2 \geq c^2$ .  $\square$

Mit den Methoden aus Lemma 3.3.2 zeigen wir, dass Minimierer des Funktionals  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  Lösungen des Schrödingersystems (3.3.2) sind.

**Lemma 3.3.2.** *Sei  $b \leq 0$ . Dann ist jeder Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  eine Lösung von (3.3.2).*

**Beweis:**

Sei  $H_1(u, v) := \|u\|^2 - \|u\|_{2q}^{2q} - b\|uv\|_q^q$  und  $H_2(u, v) := \|v\|_\omega^2 - \|v\|_{2q}^{2q} - b\|uv\|_q^q$  und sei  $(u, v) \in \mathcal{M}_b^*$  ein Minimierer des Funktionals  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$ . Im Fall  $q \leq 2$  folgt  $H_1'(u, v)[u, 0] < 0$  und  $H_2'(u, v)[0, v] < 0$  wie in Lemma 3.2.3. Im Fall  $q > 2$  folgt diese Aussage aus

$$\begin{aligned} H_1'(u, v)[u, 0] &= 2\|u\|^2 - 2q\|u\|_{2q}^{2q} - qb\|uv\|_q^q = (2 - q)\|u\|^2 - q\|u\|_{2q}^{2q} < 0, \\ H_2'(u, v)[0, v] &= 2\|v\|_\omega^2 - 2q\|v\|_{2q}^{2q} - qb\|uv\|_q^q = (2 - q)\|v\|_\omega^2 - q\|v\|_{2q}^{2q} < 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten  $\text{ran}(H_1'(u, v), H_2'(u, v)) = \mathbb{R}^2$ . Nach der Lagrangeschen Multiplikatorenregel, vgl. Satz 26.1 in [27], existieren  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$  mit

$$I'(u, v) + L_1 H_1'(u, v) + L_2 H_2'(u, v) = 0$$

und analog zu Lemma 3.2.3 erhalten wir aus der Annahme  $L_1, L_2 \neq 0$  wegen  $b < 0$

$$4b\|uv\|_q^q = (q-2)(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q}) - \sqrt{(q-2)^2(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q})^2 + 16(q-1)\|u\|_{2q}^{2q}\|v\|_{2q}^{2q}}.$$

Nun seien  $A, B > 0$  gegeben durch  $\|u\|_{2q}^{2q} = A \cdot |b|\|uv\|_q^q$ ,  $\|v\|_{2q}^{2q} = B \cdot |b|\|uv\|_q^q$ . Wegen

$$\|u\|_{2q}^{2q} - |b|\|uv\|_q^q = \|u\|^2 > 0, \quad \|v\|_{2q}^{2q} - |b|\|uv\|_q^q = \|v\|_\omega^2 > 0. \quad (3.3.3)$$

gilt  $A, B > 1$ . Wir erhalten

$$-4 = (q-2)(A+B) - \sqrt{(q-2)^2(A+B)^2 + 16(q-1)AB}.$$

Auflösen dieser Gleichung nach  $B$  liefert wegen  $A > 1$

$$B = \frac{2 + (q-2)A}{2(q-1)A - (q-2)} < 1,$$

Widerspruch. Also gilt  $L_1 = L_2 = 0$  und wir erhalten, dass  $(u, v)$  kritischer Punkt des Funktionals  $I : H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ist. Aus Palais' Prinzip der symmetrischen Kritikalität (vgl. Satz 1.28 in [89]) folgt  $I'(u, v) = 0$  und damit die Behauptung.  $\square$

### 3.3.1. Der Fall $n \geq 2$

Analog zu Proposition 3.2.4 erfolgt die Skalierung einer vollständig nichttrivialen Funktion  $(u, v) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathcal{M}_b^*$  durch Auswertung der Faserabbildung  $\hat{\beta}_{u,v}$  in ihren kritischen Punkten. Die folgende Proposition zeigt, dass im Fall

$$\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q + b\|uv\|_q^q > 0 \quad (3.3.4)$$

die Abbildung  $\hat{\beta}_{u,v}$  genau einen kritischen Punkt besitzt und dieser einem strengen globalen Maximum von  $\hat{\beta}_{u,v}$  entspricht. Die Bedingung (3.3.4) ist in dem Sinne natürlich, dass jedes Element von  $\mathcal{M}_b^*$  und insbesondere jede vollständig nichttriviale Lösung  $(u, v)$  von (3.3.2) sie erfüllt, denn

$$\|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q = \|u\|^2 > 0 \quad \text{und} \quad \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q = \|v\|_\omega^2 > 0.$$

**Proposition 3.3.3.** *Sei  $b \leq 0$  und  $(u, v) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  erfülle (3.3.4). Dann besitzt  $\hat{\beta}_{u,v}$  genau einen kritischen Punkt  $(s, t) = (s(u, v), t(u, v))$  in  $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ . Es handelt sich um ein strenges globales Maximum.*

**Beweis:**

Sei  $(u, v) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q + b\|uv\|_q^q > 0$ . Für  $s, t \geq 0$  sei

$$\bar{\beta}(s, t) := \hat{\beta}_{u,v}(s^{\frac{1}{2q}}, t^{\frac{1}{2q}}) = \frac{1}{2}(s^{\frac{1}{q}}\|u\|^2 + t^{\frac{1}{q}}\|v\|_\omega^2) - \frac{1}{2q}(s\|u\|_{2q}^{2q} + t\|v\|_{2q}^{2q} + 2b\sqrt{st}\|uv\|_q^q).$$

Sei  $\delta > 0$  gegeben durch  $(1 - \delta)\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q + b\|uv\|_q^q = 0$ . Dann gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} s\|u\|_{2q}^{2q} + t\|v\|_{2q}^{2q} + 2b\sqrt{st}\|uv\|_q^q &= \delta\|u\|_{2q}^{2q}s + \delta\|v\|_{2q}^{2q}t + (1 - \delta)(\|u\|_{2q}^{2q}s + \|v\|_{2q}^{2q}t) + 2b\sqrt{st}\|uv\|_q^q \\ &\geq \delta\|u\|_{2q}^{2q}s + \delta\|v\|_{2q}^{2q}t + 2\sqrt{st}((1 - \delta)\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q + b\|uv\|_q^q) \\ &= \delta\|u\|_{2q}^{2q}s + \delta\|v\|_{2q}^{2q}t. \end{aligned}$$

Folglich ist  $-\bar{\beta}$  koerziv und wie in Proposition 3.2.6 folgt die Existenz eines globalen Maximums von  $\bar{\beta}$  über  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Sei  $(\bar{s}, \bar{t}) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  ein zugehöriger Maximierer. Wegen  $b < 0$  gilt  $\bar{\beta}_s(\bar{s}, \bar{t}) > 0$  sowie  $\bar{\beta}_t(\bar{s}, \bar{t}) > 0$  für hinreichende kleine positive  $s, t$ . Daher ist  $\bar{s} = 0$  ebenso wie  $\bar{t} = 0$  unmöglich und es folgt  $\bar{s}, \bar{t} > 0$ . Für den Beweis der Eindeutigkeit des kritischen Punkts genügt es wie in Proposition 3.2.6 zu zeigen, dass die Hesse-Matrix von  $\bar{\beta}$  in  $\mathbb{R}_{> 0} \times \mathbb{R}_{> 0}$  negativ definit ist. Es gelten die Formeln

$$\begin{aligned} \partial_{ss}\bar{\beta}(s, t) &= \frac{1 - q}{2q^2} s^{\frac{1-2q}{q}} \|u\|^2 + \frac{b}{4q} s^{-\frac{3}{2}} t^{\frac{1}{2}} \|uv\|_q^q, \\ \partial_{tt}\bar{\beta}(s, t) &= \frac{1 - q}{2q^2} t^{\frac{1-2q}{q}} \|v\|_{\omega}^2 + \frac{b}{4q} s^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{2}} \|uv\|_q^q, \\ \partial_{st}\bar{\beta}(s, t) &= -\frac{b}{4q} (st)^{-\frac{1}{2}} \|uv\|_q^q. \end{aligned}$$

Es folgt  $\partial_{ss}\bar{\beta}(s, t), \partial_{tt}\bar{\beta}(s, t) < 0$  sowie

$$\begin{aligned} \det(D^2\bar{\beta}(s, t)) &= \partial_{ss}\bar{\beta}(s, t) \cdot \partial_{tt}\bar{\beta}(s, t) - (\partial_{st}\bar{\beta}(s, t))^2 \\ &= \left(\frac{1 - q}{2q^2}\right)^2 (st)^{\frac{1-2q}{q}} \|u\|^2 \|v\|_{\omega}^2 + \frac{b(1 - q)}{8q^3 (st)^{\frac{3}{2}}} (\|u\|^2 s^{\frac{1}{q}} + \|v\|_{\omega}^2 t^{\frac{1}{q}}) \|uv\|_q^q > 0. \end{aligned}$$

Daher ist  $D^2\bar{\beta}(s, t)$  für alle  $(s, t) \in \mathbb{R}_{> 0} \times \mathbb{R}_{> 0}$  negativ definit, was zu zeigen war.  $\square$

Die variationelle Charakterisierung von  $\kappa_b^*$  lässt sich wie in Proposition 3.2.7 beweisen. Das Funktional  $\hat{J}$  sei wieder durch die Formel (3.2.7) gegeben, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \hat{J}(u, v) &= \frac{q - 1}{2q} \max_{\alpha > 0} J(u, \alpha v)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \frac{q - 1}{2q} \max_{\alpha > 0} \left( \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_{\omega}^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\alpha^q \|uv\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q-1}}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Die positiven Zahlen  $s(u, v), t(u, v)$  seien wie in Proposition 3.3.3 definiert.

**Proposition 3.3.4.** *Sei  $b \leq 0$ . Dann gilt*

$$\kappa_b^* = \inf \left\{ \frac{q - 1}{2q} \hat{J}(u, v)^{\frac{1}{q-1}} : u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n), (u, v) \text{ erfüllt (3.3.4)} \right\} \quad (3.3.6)$$

und ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  mit der Eigenschaft (3.3.4) ein Minimierer von  $\hat{J}$ , so ist  $(s(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{u}, t(\tilde{u}, \tilde{v})\tilde{v})$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$ .

**Satz 3.3.5.** *Sei  $n \geq 2, b \leq 0$ . Dann wird  $\kappa_b^*$  in einer vollständig nichttrivialen nichtnegativen Lösung  $(u, v)$  von (3.3.2) angenommen. Im Fall  $q \geq 2$  gilt  $u, v > 0$  in  $\mathbb{R}^n$ , im Fall  $1 < q < 2$  gilt  $u + v > 0$  in  $\mathbb{R}^n$ .*

**Beweis:**

Gemäß Proposition 3.3.4 zeigen wir, dass  $\hat{J}$  einen vollständig nichttrivialen nichtnegativen Minimierer besitzt. Sei  $(u_j, v_j)$  minimierende Folge zu  $\hat{J}$ , die ohne Beschränkung der Allgemeinheit nichtnegativ sei und  $\|u_j\|_{2q} = \|v_j\|_{2q} = 1$  erfülle. Dann ist  $(u_j, v_j)$  wegen (3.2.8) beschränkt in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ . Es existiert eine wieder mit  $(u_j, v_j)$  bezeichnete Teilfolge sowie eine Funktion  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $(u_j, v_j) \rightharpoonup (\tilde{u}, \tilde{v})$  und  $(u_j, v_j) \rightarrow (\tilde{u}, \tilde{v})$  in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n) \times L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  sowie fast überall. Insbesondere gilt  $\|\tilde{u}\|_{2q} = \|\tilde{v}\|_{2q} = 1$  und  $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$ . Dann gilt

$$\|\tilde{u}\|_{2q}^q \|\tilde{v}\|_{2q}^q + b \|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q = 1 + b \|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q > 0,$$

denn sonst wäre  $\lim_{j \rightarrow \infty} b \|u_j v_j\|_q^q = b \|\tilde{u}\tilde{v}\|_q^q = -1$  und es ergäbe sich

$$\hat{J}(u_j, v_j) \geq J(u_j, v_j) = \frac{(\|u_j\|^2 + \|v_j\|_\omega^2)^q}{\|u_j\|_{2q}^{2q} + \|v_j\|_{2q}^{2q} + 2b \|u_j v_j\|_q^q} = \frac{(\|u_j\|^2 + \|v_j\|_\omega^2)^q}{2 + 2b \|u_j v_j\|_q^q} \rightarrow +\infty.$$

Folglich ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  nichtnegativer vollständig nichttrivialer Minimierer von  $\hat{J}$  mit der Eigenschaft (3.3.4) und aus Proposition 3.3.4 folgt die Existenz eines Minimierers  $(u, v)$  von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$ . Dieser ist nach Lemma 3.3.2 eine Lösung von (3.3.2). Aus Proposition C.6 folgt  $u, v > 0$  im Fall  $q \geq 2$  sowie  $u + v > 0$  im Fall  $1 < q < 2$ .  $\square$

Wir kommen zur Definition des Grenzproblems für  $b \rightarrow -\infty$ . Sei

$$\kappa_{-\infty}^* := \inf \left\{ \frac{q-1}{2q} \bar{J}(u, v)^{\frac{1}{q-1}} : u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n), u, v \neq 0, uv \equiv 0 \right\} \quad (3.3.7)$$

für<sup>11</sup>

$$\bar{J}(u, v) := \max_{\alpha > 0} \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q}} = \left( \left( \frac{\|u\|}{\|u\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} + \left( \frac{\|v\|_\omega}{\|v\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} \right)^{q-1}. \quad (3.3.8)$$

Es handelt sich bei (3.3.7) um ein Problem der optimalen Aufteilung, das unter anderem in [21],[22],[23],[78] in beschränkten Gebieten  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  untersucht wurde.

**Lemma 3.3.6.** *Sei  $n \geq 2$ . Dann wird  $\kappa_{-\infty}^*$  in einer Funktion  $(\bar{u}, \bar{v}) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\bar{u}, \bar{v} \geq 0, \bar{u}\bar{v} = 0, \bar{u}, \bar{v} \neq 0$  sowie*

$$-\Delta \bar{u} + \bar{u} = \bar{u}^{2q-1} \quad \text{in } \{\bar{u} > 0\}, \quad -\Delta \bar{v} + \omega^2 \bar{v} = \bar{v}^{2q-1} \quad \text{in } \{\bar{v} > 0\} \quad (3.3.9)$$

*angenommen. Ist  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  eine weitere Lösung des Minimierungsproblems (3.3.7), so besitzt  $(|\tilde{u}|, |\tilde{v}|)$  die genannten Eigenschaften.*

<sup>11</sup>Das zweite Gleichheitszeichen in (3.3.8) ergibt sich durch explizite Bestimmung des Maximums. Dieses wird bei  $\alpha = \left( \frac{\|v\|_\omega \|u\|_{2q}^q}{\|u\| \|v\|_{2q}^q} \right)^{\frac{1}{q-1}}$  angenommen.

**Beweis:**

Die Existenz eines Minimierers  $(\bar{u}, \bar{v}) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  des Minimierungsproblems (3.3.7) mit  $\bar{u}, \bar{v} \geq 0, \bar{u}\bar{v} = 0, \bar{u}, \bar{v} \neq 0$  folgt wie in Satz 3.3.5 mit Hilfe der kompakten Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R}^n)$ . Nach eventueller Reskalierung des Minimierers gilt  $\|\bar{u}\|^2 = \|\bar{u}\|_{2q}^{2q}$  und  $\|\bar{v}\|_\omega^2 = \|\bar{v}\|_{2q}^{2q}$ . Wegen  $\bar{u}, \bar{v} \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  sei zudem ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\bar{u}, \bar{v}$  stetig auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Daher sind die Mengen  $\{\bar{u} > 0\}, \{\bar{v} > 0\}$  offen und es folgt (3.3.9) aus der Darstellung (3.3.8).  $\square$

Im folgenden Satz stellen wir unter anderem den Zusammenhang zwischen dem Minimierungsproblem (3.3.7) und der Folge der durch Satz 3.3.5 gegebenen Lösungen von (3.3.2) für  $b \rightarrow -\infty$  her. Insbesondere rechtfertigen wir die durch Abbildung 3.4 gegebene qualitative Beschreibung der Funktion  $b \mapsto \kappa_b^*$ . Anhand der Charakterisierungen von  $\kappa_b^*$  und  $\kappa_{-\infty}^*$  aus (3.3.6) und (3.3.7) ergibt sich durch Betrachtung der speziellen Testfunktionen  $(u, v) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $uv \equiv 0$  die Ungleichung

$$\kappa_b^* \leq \kappa_{-\infty}^* \quad (b \leq 0). \quad (3.3.10)$$

**Satz 3.3.7.** *Sei  $n \geq 2$ .*

- (i) *Die Funktion  $b \mapsto \kappa_b^*$  ist stetig und monoton fallend auf  $(-\infty, 0]$ .*
- (ii) *Für  $b \rightarrow 0^-$  gilt  $\kappa_b^* \rightarrow \kappa_0$  und jede Folge von nichtnegativen Minimierern des Funktionals  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  konvergiert gegen  $(u_0, v_0)$ .*
- (iii) *Für  $b \rightarrow -\infty$  gilt  $\kappa_b^* \rightarrow \kappa_{-\infty}^*$  und jede Folge von Minimierern des Funktionals  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  besitzt eine Teilfolge  $(u_b, v_b)$  mit  $|b|^{1/q} u_b v_b \rightarrow 0$  in  $L^q(\mathbb{R}^n)$ , die gegen einen Minimierer  $(\bar{u}, \bar{v})$  des Problems (3.3.7) konvergiert.*

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst (i). Die Formel für  $\hat{J}$  aus (3.3.5) und (3.3.6) liefern die Monotonie der Abbildung  $b \mapsto \kappa_b^*$  auf  $(-\infty, 0]$ . Sei nun  $b \leq 0$  beliebig und sei  $(u, v)$  ein Minimierer von  $\hat{J} = \hat{J}_b$  mit  $\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q > |b| \|uv\|_q^q$ . Für alle hinreichend kleinen  $\varepsilon \geq 0$  gilt dann  $\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q > |b - \varepsilon| \|uv\|_q^q$  und nach Proposition 3.3.3 existiert ein eindeutig definiertes strenges globales Maximum  $\alpha_\varepsilon(u, v) > 0$  der Abbildung  $\alpha \mapsto J_{b-\varepsilon}(u, \alpha v)$ . Aus der Eindeutigkeit des kritischen Punkts folgt  $\alpha_\varepsilon(u, v) \rightarrow \alpha_0(u, v)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und damit

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \kappa_{b-\varepsilon}^* &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{q-1}{2q} \left( \frac{(\|u\|^2 + \alpha_\varepsilon(u, v)^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha_\varepsilon(u, v)^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2(b-\varepsilon)\alpha_\varepsilon(u, v)^q \|uv\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \frac{q-1}{2q} \left( \frac{(\|u\|^2 + \alpha_0(u, v)^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha_0(u, v)^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\alpha_0(u, v)^q \|uv\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \frac{q-1}{2q} \max_{\alpha > 0} \left( \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\alpha^q \|uv\|_q^q} \right)^{\frac{1}{q-1}} \\ &= \kappa_b^*. \end{aligned}$$

Aus  $\kappa_b^* \leq \kappa_{b-\varepsilon}^*$  für alle  $\varepsilon > 0$  folgt die Stetigkeit der Abbildung.

Zum Beweis von (ii) sei  $(b_j)$  eine beliebige Folge mit  $b_j \rightarrow 0^-$  und sei  $(u_j, v_j, b_j)$  eine Folge von nichtnegativen Lösungen von (3.3.2) mit  $I(u_j, v_j) = \kappa_{b_j}^*$ . Da  $(b_j)$  beliebig ist, genügt es zu zeigen, dass eine Teilfolge von  $(u_j, v_j)$  gegen  $(u_0, v_0)$  konvergiert. Die Folge  $(u_j, v_j)$  ist beschränkt in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  und es existiert ein  $(u, v) \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  sowie eine Teilfolge von  $(u_j, v_j)$  mit  $(u_j, v_j) \rightharpoonup (u, v)$ . Aus Lemma C.9 erhalten wir  $(u_j, v_j, b_j) \rightarrow (u, v, 0)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  für eine nichtnegative Lösung  $(u, v, 0)$  von (3.3.2). Nach Proposition 3.3.1 ist  $(u, v)$  vollständig nichttrivial und das Eindeutigkeitsresultat von Kwong (Satz 1.1) liefert  $(u, v) = (u_0, v_0)$ , was zu zeigen war.

Wir kommen zum Beweis von (iii). Sei  $(b_j)$  eine Folge mit  $b_j \rightarrow -\infty$  und sei  $(u_j, v_j, b_j)$  eine Folge von nichtnegativen Lösungen von (3.3.2) mit  $I(u_j, v_j) = \kappa_{b_j}^*$ . Dann ist  $(u_j, v_j)$  wegen (3.3.10) in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  beschränkt, so dass eine Teilfolge von  $(u_j, v_j)$  schwach in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ , in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n) \times L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  und fast überall gegen eine Funktion  $(\bar{u}, \bar{v})$  aus  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  konvergiert. Nach Proposition 3.3.1 gilt  $\bar{u}, \bar{v} \neq 0$ . Aus  $(u_j, v_j) \in \mathcal{M}_{b_j}^*$  und  $b_j < 0$  erhalten wir zudem

$$\|u_j\|^2 = \|u_j\|_{2q}^{2q} + b_j \|u_j v_j\|_q^q \leq \|u_j\|_{2q}^{2q}, \quad \|v_j\|_\omega^2 = \|v_j\|_{2q}^{2q} + b_j \|u_j v_j\|_q^q \leq \|v_j\|_{2q}^{2q}$$

und somit

$$\|\bar{u}\|^2 \leq \|\bar{u}\|_{2q}^{2q}, \quad \|\bar{v}\|_\omega^2 \leq \|\bar{v}\|_{2q}^{2q}. \quad (3.3.11)$$

Ferner gilt  $\bar{u}\bar{v} \equiv 0$ , denn Sobolevs Einbettungssatz und die Beschränktheit der Folge  $(u_j, v_j)$  liefern

$$\|\bar{u}\bar{v}\|_q^q = \lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j v_j\|_q^q = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|u_j\|_{2q}^{2q} - \|u_j\|^2}{|b_j|} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{C}{|b_j|} = 0.$$

Zudem erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{q-1}{2q} (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|_\omega^2) &\leq \frac{q-1}{2q} \liminf_{j \rightarrow \infty} (\|u_j\|^2 + \|v_j\|_\omega^2) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \kappa_{b_j}^* \\ &\stackrel{(3.3.10)}{\leq} \kappa_{-\infty}^* \\ &\stackrel{(3.3.7), (3.3.8)}{\leq} \frac{q-1}{2q} \left( \left( \frac{\|\bar{u}\|}{\|\bar{u}\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} + \left( \frac{\|\bar{v}\|_\omega}{\|\bar{v}\|_{2q}} \right)^{\frac{2q}{q-1}} \right) \\ &\stackrel{(3.3.11)}{\leq} \frac{q-1}{2q} (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|_\omega^2). \end{aligned}$$

Es folgt  $\|\bar{u}\|^2 = \|\bar{u}\|_{2q}^{2q}$ ,  $\|\bar{v}\|_\omega^2 = \|\bar{v}\|_{2q}^{2q}$  sowie  $\kappa_{b_j}^* \rightarrow \kappa_{-\infty}^*$ ,  $(u_j, v_j) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  für  $b \rightarrow -\infty$ . Schließlich erhalten wir die Behauptung aus

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |b_j| \|u_j v_j\|_q^q = \limsup_{j \rightarrow \infty} \|u_j\|_{2q}^{2q} - \|u_j\|^2 = \|\bar{u}\|_{2q}^{2q} - \|\bar{u}\|^2 = 0.$$

□

**Bemerkung 3.3.8.**

- (a) Aus (ii) und der Nichtdegeneriertheit der Lösung  $(u_0, v_0, 0)$  folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ , dass die Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  für  $b$  nahe bei 0 eindeutig bestimmt sind. Insbesondere sind für  $\omega = 1$  und betragsmäßig kleine Kopplungsparameter  $b$  die Minimierer durch  $(1+b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  gegeben. Im Gegensatz zum Fall  $b \geq 0$  ist im Allgemeinen offen, wie die Minimierer im Fall  $\omega = 1$  lauten.
- (b) In (iii) ist zumindest im Fall  $\omega = 1$  ohne weitere Voraussetzung nicht die Konvergenz der gesamten Folge zu erwarten. Ist  $(u_b, v_b)$  ein nichtnegativer Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$ , so auch  $(v_b, u_b)$ . Nach Satz 3.3.7 (iii) existiert eine positive Folge  $(b_j)$  mit  $b_j \rightarrow +\infty$  und  $(u_{b_j}, v_{b_j}) \rightarrow (\bar{u}, \bar{v})$  für  $\bar{u}, \bar{v} \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\bar{u}\bar{v} \equiv 0$  und  $\bar{u}, \bar{v} \not\equiv 0$ . Insbesondere gilt  $\bar{u} \neq \bar{v}$  und damit  $(\bar{u}, \bar{v}) \neq (\bar{v}, \bar{u})$ . Die Folge

$$(\tilde{u}_j, \tilde{v}_j) = (u_{b_j}, v_{b_j}) \quad \text{falls } j \text{ ungerade}, \quad (\tilde{u}_j, \tilde{v}_j) = (v_{b_j}, u_{b_j}) \quad \text{falls } j \text{ gerade}$$

ist daher eine divergente Folge von Minimierern des Funktionals  $I$  über  $\mathcal{M}_{b_j}^*$ . Wäre im Fall  $\omega > 1$  der Minimierer  $(\bar{u}, \bar{v})$  von (3.3.7) eindeutig, so würde jede Folge von Minimierern gegen  $(\bar{u}, \bar{v})$  konvergieren.

**3.3.2. Der Fall  $n = 1$**

Schließlich untersuchen wir Lösungen des Systems (3.3.2) für  $n = 1$ . In Satz 3.3.10 zeigen wir, dass zumindest im Fall  $1 < q \leq 2$  unter gewissen Bedingungen an  $b < 0$  und  $\omega$  keine vollständig nichttrivialen Lösungen von (3.3.2) existieren. Es handelt sich in Anbetracht von Satz 3.3.5 um ein eindimensionales Phänomen und ist auf die Nichtkompaktheit der Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R})$  zurückzuführen. Im Beweis dieses Satzes benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

**Proposition 3.3.9.** *Sei  $n = 1$ . Jede Lösung  $(u, v, b)$  von (3.3.2) erfüllt*

$$-u'^2 - v'^2 + u^2 + \omega^2 v^2 - \frac{1}{q}(|u|^{2q} + |v|^{2q} + 2b|u|^q|v|^q) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}. \quad (3.3.12)$$

**Beweis:**

Die Ableitung der linken Seite in (3.3.12) verschwindet für jede Lösung der Differentialgleichung (3.3.2). Daher existiert eine reelle Zahl  $\alpha$  mit

$$-u'^2 - v'^2 + u^2 + \omega^2 v^2 - \frac{1}{q}(|u|^{2q} + |v|^{2q} + 2b|u|^q|v|^q) = \alpha \quad \text{in } \mathbb{R}.$$

Im Fall  $\alpha \neq 0$  existiert ein  $\delta > 0$  mit  $\max\{u'^2 + v'^2, u^2 + v^2\} \geq \delta$  in  $\mathbb{R}$ . Andererseits liefern die ersten beiden Schritte des Beweises von Satz C.12 (i) bzw. (ii), dass die Terme

$u(r), v(r), u'(r), v'(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen 0 streben<sup>12</sup>, Widerspruch. Daher gilt  $\alpha = 0$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 3.3.10.** *Sei  $n = 1, 1 < q \leq 2$  und es gelte*

$$\begin{aligned} & -bqz^{q+2} + (\omega^2 - (q-1)\omega)z^{2q} - qz^2 + b(2-q)(\omega^2 + \omega)z^q \\ & -q\omega^3z^{2q-2} - (\omega^2(q-1) - \omega) - bq\omega^3z^{q-2} > 0 \quad \text{für alle } z > 0. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

*Dann existiert keine vollständig nichttriviale Lösung von (3.3.2). Insbesondere existiert für  $q = 2, b < -\frac{\omega^2+1}{2\omega}$  sowie für  $q \in (1, 2), \omega = 1, b < -1$  keine vollständig nichttriviale Lösung von (3.3.2).*

**Beweis:**

Wir nehmen an, es gäbe eine vollständig nichttriviale Lösung  $(u, v) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$  von (3.3.2)<sup>13</sup>. Da die Funktionen  $(-u, v), (u, -v), (-u, -v)$  ebenfalls Lösungen von (3.3.2) sind, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das maximale offene Intervall  $A \subset \{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0, v(x) > 0\}$  mit  $0 \in A$  nicht leer ist. Wir zeigen weiter unten, dass jeder kritische Punkt der Funktion  $u^\omega v$  in  $A$  ein strenger lokaler Minimierer ist. Haben wir dies gezeigt, so folgt die Behauptung aus folgender Argumentation.

*1. Fall: Es existiert kein kritischer Punkt von  $u^\omega v$  in  $A$ .*

Dann ist  $u^\omega v$  auf  $A$  streng monoton. Folglich ist  $A$  ein unbeschränktes Intervall und  $(u^\omega v)(x)$  konvergiert für  $|x| \rightarrow \infty$  nicht gegen 0. Daher gilt  $u, v \notin H^1(\mathbb{R})$ , Widerspruch.

*2. Fall: Es existiert ein kritischer Punkt  $x_0 \in A$  von  $u^\omega v$ .*

Dann ist  $x_0$  Stelle eines strengen lokalen Minimums. Jeder weitere kritische Punkt von  $u^\omega v$  entspräche ebenfalls einem strengen lokalen Minimum, was unmöglich ist. Folglich ist  $u^\omega v$  auf  $(x_0, \infty) \cap A$  streng monoton wachsend und auf  $(-\infty, x_0) \cap A$  streng monoton fallend. Insbesondere ist  $A = \mathbb{R}$  und  $(u^\omega v)(x)$  konvergiert für  $|x| \rightarrow \infty$  nicht gegen 0. Es folgt  $u, v \notin H^1(\mathbb{R})$ , Widerspruch.

Wir kommen zum Beweis der Behauptung, dass jeder kritische Punkt von  $u^\omega v$  in  $A$  unter Voraussetzung (3.3.13) einem strengen lokalen Minimum entspricht. Sei  $x$  ein kritischer Punkt von  $u^\omega v$  mit  $u(x), v(x) > 0$ . Dann gilt

$$\omega u'(x)v(x) = -u(x)v'(x) \quad (3.3.14)$$

und somit nach kurzer Rechnung

$$u'(x)v'(x) = -\omega u(x)v(x) \cdot \frac{u'(x)^2 + v'(x)^2}{u(x)^2 + \omega^2 v(x)^2}. \quad (3.3.15)$$

<sup>12</sup>Da  $n = 1$  ist, muss die Radialsymmetrie der Lösungen hierfür nicht vorausgesetzt werden.

<sup>13</sup>Wir zeigen die stärkere Aussage, dass keine  $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$ -Lösung des Problems existiert. Wir müssen daher nicht voraussetzen, dass die Lösung radialsymmetrisch ist.

Aus Proposition 3.3.9 folgt zudem

$$-u'^2 - v'^2 + u^2 + \omega^2 v^2 - \frac{1}{q}(u^{2q} + v^{2q} + 2bu^q v^q) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}. \quad (3.3.16)$$

Im Punkt  $x$  gilt daher

$$\begin{aligned} (u^\omega v)'' &= \omega(\omega - 1)u^{\omega-2}u'^2 v + \omega u'' u^{\omega-1} v + 2\omega u' u^{\omega-1} v' + u^\omega v'' \\ &= u^{\omega-1} \left( \omega \frac{u'}{u} \cdot (\omega - 1)u' v + \omega u'' v + 2\omega u' v' + uv'' \right) \\ &\stackrel{(3.3.14)}{=} u^{\omega-1} \left( -(\omega - 1)u' v' + \omega u'' v + 2\omega u' v' + uv'' \right) \\ &= u^{\omega-1} \left( (\omega + 1)u' v' + \omega u'' v + uv'' \right) \\ &\stackrel{(3.3.15)}{=} \stackrel{(3.3.2)}{=} u^{\omega-1} \left( -\omega(\omega + 1)uv \cdot \frac{u'^2 + v'^2}{u^2 + \omega^2 v^2} \right. \\ &\quad \left. + \omega uv(1 - u^{2q-2} - bu^{q-2}v^q) + uv(\omega^2 - v^{2q-2} - bv^{q-2}u^q) \right) \\ &\stackrel{(3.3.16)}{=} u^\omega v \left( -\omega(\omega + 1) \cdot \left( 1 - \frac{u^{2q} + v^{2q} + 2bu^q v^q}{q(u^2 + \omega^2 v^2)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \omega - \omega u^{2q-2} - b\omega u^{q-2}v^q + \omega^2 - v^{2q-2} - bv^{q-2}u^q \right) \\ &= \frac{u^\omega v}{q(u^2 + \omega^2 v^2)} \cdot \left( \omega(\omega + 1)(u^{2q} + v^{2q} + 2bu^q v^q) \right. \\ &\quad \left. - q(u^2 + \omega^2 v^2)(\omega u^{2q-2} + b\omega u^{q-2}v^q + v^{2q-2} + bv^{q-2}u^q) \right) \\ &= \frac{u^\omega v}{q(u^2 + \omega^2 v^2)} \cdot \left( -bqu^{q+2}v^{q-2} + (\omega^2 - (q-1)\omega)u^{2q} - qu^2v^{2q-2} \right. \\ &\quad \left. + b(2-q)(\omega^2 + \omega)u^q v^q - q\omega^3 u^{2q-2}v^2 - (\omega^2(q-1) - \omega)v^{2q} - bq\omega^3 u^{q-2}v^{q+2} \right). \end{aligned}$$

Aus (3.3.13) für  $z = \frac{u(x)}{v(x)}$  erhalten wir  $(u^\omega v)''(x) > 0$ , d.h.  $x$  ist Stelle eines strengen lokalen Minimums, was zu zeigen war.

Wir betrachten den Fall  $q = 2$ . Die Bedingung (3.3.13) ist in diesem Fall äquivalent zu

$$(\omega^2 - \omega - 2b)z^4 - 2(\omega^3 + 1)z^2 + (\omega - \omega^2 - 2b\omega^3) > 0 \quad \text{für alle } z > 0.$$

Diese Aussage ist genau dann richtig, wenn die folgenden drei Ungleichungen gelten:

$$\omega^2 - \omega - 2b > 0, \quad \omega - \omega^2 - 2b\omega^3 > 0, \quad (\omega^2 - \omega - 2b)(\omega - \omega^2 - 2b\omega^3) - (\omega^3 + 1)^2 > 0.$$

Auflösen nach  $b$  liefert nach kurzer Rechnung die Bedingung

$$b < -\frac{\omega^2 + 1}{2\omega}.$$

Im Fall  $1 < q < 2, \omega = 1, b < -1$  erhalten wir für alle  $z > 0$

$$\begin{aligned}
& -bqz^{q+2} + (2-q)z^{2q} - qz^2 + 2b(2-q)z^q - qz^{2q-2} - (q-2) - bqz^{q-2} \\
& = (-b) \cdot (qz^{q+2} - 2(2-q)z^q + qz^{q-2}) + (2-q)z^{2q} - qz^2 - qz^{2q-2} - (q-2) \\
& \geq 1 \cdot (qz^{q+2} - 2(2-q)z^q + qz^{q-2}) + (2-q)z^{2q} - qz^2 - qz^{2q-2} - (q-2) \\
& > (2-q)(z^q - 1)^2 + q(z^2 - z^{q-2})(z^q - 1) \\
& \geq 0
\end{aligned}$$

und es folgt die Nichtexistenz positiver Lösungen für Parameterwerte  $b < -1$ .  $\square$

**Bemerkung 3.3.11.** Im Beweis von Satz 3.3.10 wird die Voraussetzung  $1 < q \leq 2$  nicht benötigt. Dennoch haben wir den Fall  $q > 2$  ausgeschlossen, da in diesem Fall die Bedingung (3.3.13) für kleine positive  $z$  wegen  $\omega \geq 1 > \frac{1}{q-1}$  niemals erfüllt ist. Beispielsweise erhalten wir mit Hilfe von Satz 3.3.10 die Nichtexistenz von Lösungen für  $\omega = 2$  in den Fällen

$$q = 2, \omega = 2 : b < -1.25, \quad q = 1.5, \omega = 2 : b < -1.18, \quad q = 1.01, \omega = 2 : b < -1.58$$

Wir zeigen nun, dass für betragsmäßig kleine negative Parameterwerte  $b$  auch im Fall  $n = 1$  ein Minimierer des Funktionals  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  existiert. Hierzu konstruieren wir eine geeignete minimierende Folge  $(u_R, v_R)$ , deren Konvergenz für  $b$  hinreichend nahe bei 0 gewährleistet ist. Die Idee ist,  $(u_R, v_R)$  als vollständig nichttriviale radialsymmetrische Lösung des zu (3.3.2) analogen Dirichlet-Problems auf dem Intervall  $B_R = (-R, R)$  zu definieren. Für  $R > 0$  sei

$$H_{0,r}^1(B_R) := \{u \in H_0^1(B_R) : u \text{ ist radialsymmetrisch}\}.$$

Alle Lösungen  $(u, v) \in H_{0,r}^1(B_R) \times H_{0,r}^1(B_R)$  des Randwertproblems

$$\begin{aligned}
-u'' + u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q & \text{in } B_R, \\
-v'' + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|v|^{q-2}v|u|^q & \text{in } B_R, \\
\omega &\geq 1, \quad q > 1, \quad u, v \in H_{0,r}^1(B_R)
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

erfüllen die Gleichungen

$$\int_{B_R} |u'|^2 + u^2 dx = \int_{B_R} |u|^{2q} + b|u|^q |v|^q dx, \tag{3.3.18}$$

$$\int_{B_R} |v'|^2 + \omega^2 v^2 dx = \int_{B_R} |v|^{2q} + b|u|^q |v|^q dx. \tag{3.3.19}$$

In Anlehnung an (3.3.1) definieren wir

$$\mathcal{M}_b^*(R) := \{(u, v) \in H_{0,r}^1(B_R) \times H_{0,r}^1(B_R) : u, v \neq 0, (u, v) \text{ erfüllt (3.3.18), (3.3.19)}\}.$$

Wie zuvor folgt mit  $\hat{J}$  wie in (3.3.5)

$$\kappa_b^*(R) := \inf_{\mathcal{M}_b^*(R)} I = \inf \left\{ \frac{q-1}{2q} \hat{J}(u, v)^{\frac{1}{q-1}} : u, v \in H_{0,r}^1(B_R), (3.3.4) \text{ gilt} \right\}. \quad (3.3.20)$$

Mit dieser Charakterisierung für  $\kappa_b^*(R)$  erhalten wir das folgende Resultat:

**Proposition 3.3.12.** *Sei  $n = 1, b \leq 0$ . Dann wird  $\kappa_b^*(R)$  in einer nichtnegativen vollständig nichttrivialen Lösung  $(u_R, v_R)$  von (3.3.17) angenommen. Ferner gilt  $\kappa_b^*(R) \rightarrow \kappa_b^*$  für  $R \rightarrow \infty$ .*

**Beweis:**

Die Existenz eines Minimierers von  $I$  über  $\mathcal{M}_b^*(R)$  für  $R > 0$  folgt wie im Beweis von Satz 3.3.5 aus der variationellen Charakterisierung von  $\kappa_b^*(R)$  in (3.3.20) und der Kompaktheit der Einbettung  $H_{0,r}^1(B_R) \rightarrow L^{2q}(B_R)$ . Wegen  $\mathcal{M}_b^*(R_1) \subset \mathcal{M}_b^*(R_2) \subset \mathcal{M}_b^*$  für  $0 < R_1 < R_2 < \infty$  durch triviale Fortsetzung gilt die Ungleichung

$$\kappa_b^*(R_1) \geq \kappa_b^*(R_2) \geq \kappa_b^*. \quad (3.3.21)$$

Sei nun  $\chi$  eine glatte Abschneidefunktion mit  $\chi(x) = 1$  für  $|x| \leq \frac{1}{2}$  und  $\chi(x) = 0$  für  $|x| \geq 1$ , sei  $\chi_R(x) := \chi(R^{-1}x)$  für  $R > 0$ . Für alle  $u, v \in H_r^1(\mathbb{R})$  gilt  $u\chi_R, v\chi_R \in H_{0,r}^1(B_R)$ . Erfüllt  $(u, v)$  zudem die Bedingung (3.3.4), dann gilt dies auch für  $(u\chi_R, v\chi_R)$  für hinreichend große  $R > 0$  und es folgt

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \kappa_b^*(R) \leq \frac{q-1}{2q} \limsup_{R \rightarrow \infty} \hat{J}(u\chi_R, v\chi_R)^{\frac{1}{q-1}} = \frac{q-1}{2q} \hat{J}(u, v)^{\frac{1}{q-1}}.$$

Dies gilt für alle  $u, v \in H_r^1(\mathbb{R})$  mit  $\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q + b \|uv\|_q^q > 0$  und die variationelle Charakterisierung von  $\kappa_b^*$  aus (3.3.6) liefert

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \kappa_b^*(R) \leq \kappa_b^*. \quad (3.3.22)$$

Aus (3.3.21) und (3.3.22) folgt schließlich  $\kappa_b^*(R) \rightarrow \kappa_b^*$  für  $R \rightarrow \infty$ .  $\square$

Wir kommen zum Existenzresultat im Fall  $n = 1$  für betragsmäßig kleine negative Kopp­lungsparameter  $b$ . Um die Existenz eines Minimierers von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  nachzuweisen, untersuchen wir das Verhalten der Lösungen  $(u_k, v_k) := (u_{R_k}, v_{R_k})$  aus Proposition 3.3.12 für  $R_k \rightarrow \infty$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Um die Konvergenz der minimierenden Folge  $(u_k, v_k)$  gegen ein nicht-triviales Element  $(u, v)$  aus  $H_r^1(\mathbb{R}) \times H_r^1(\mathbb{R})$  zu beweisen, gehen wir vom Gegenteil aus und nehmen zunächst  $u = 0$  an. Wir zeigen, dass dann  $v_k \rightarrow v_0$  gilt und dass eine Folge  $(x_k)$  mit  $x_k \rightarrow +\infty$  existiert, so dass die Folgen  $u_k(\cdot + x_k)$  und  $u_k(\cdot - x_k)$  jeweils eine Energieportion größer oder gleich  $I(u_0, 0)$  nach unendlich tragen. Wir folgern hieraus, dass die gesamte Folge eine Mindestenergie von

$$I(0, v_0) + 2I(u_0, 0) = (2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0$$

besitzen muss, was wir durch die Bedingung (3.3.23) im folgenden Satz ausschließen können.

**Satz 3.3.13.** *Sei  $n = 1$  und für  $b \leq 0$  gelte*

$$\kappa_b^* < (2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0. \quad (3.3.23)$$

*Dann wird  $\kappa_b^*$  in einer nichtnegativen vollständig nichttrivialen Lösung  $(u, v)$  von (3.3.2) angenommen. Im Fall  $q \geq 2$  gilt  $u, v > 0$ , im Fall  $1 < q < 2$  gilt  $u + v > 0$ .*

**Beweis:**

Sei  $(R_k)$  eine positive Folge mit  $R_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  sei  $(u_k, v_k)$  eine nichtnegative vollständig nichttriviale Lösung von (3.3.17) mit  $I(u_k, v_k) = \kappa_b^*(R_k)$ , vgl. Proposition 3.3.12. Die trivialen Fortsetzungen auf  $\mathbb{R}$  dieser Funktionen bezeichnen wir ebenfalls mit  $(u_k, v_k)$ . Wegen  $(u_k, v_k) \in \mathcal{M}_b^*$  und  $I(u_k, v_k) \rightarrow \kappa_b^*$  für  $k \rightarrow \infty$  handelt es sich um eine minimierende Folge von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$ . Wie in Proposition 3.3.9 folgt

$$-u_k'' - v_k'' + u_k^2 + \omega^2 v_k^2 - \frac{1}{q}(u_k^{2q} + v_k^{2q} + 2bu_k^q v_k^q) = \alpha_k \quad \text{in } (-R_k, R_k) \quad (3.3.24)$$

für ein  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ . Aus  $u_k(R_k) = v_k(R_k) = 0$  folgt  $\alpha_k \leq 0$ . Die Folge  $(u_k, v_k)$  ist beschränkt in  $H_r^1(\mathbb{R}) \times H_r^1(\mathbb{R})$ , so dass eine Teilfolge  $(u_k, v_k)$  und eine Funktion  $(u, v) \in H_r^1(\mathbb{R}) \times H_r^1(\mathbb{R})$  mit  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$  existieren. Wegen  $R_k \rightarrow \infty$  ist  $(u, v)$  nichtnegative Lösung von (3.3.2) mit  $I(u, v) \leq \kappa_b^*$ . Es bleibt  $u, v \neq 0$  zu zeigen.

Wir nehmen  $u = 0$  an. Da  $u_k, v_k$  radialsymmetrisch sind, gilt  $u_k'(0) = v_k'(0) = 0$ . Ferner folgt aus (3.3.24) wegen  $b < 0$  die Abschätzung

$$0 \geq \alpha_k \geq u_k(0)^2(q - u_k(0)^{2q-2}) + v_k(0)^2(q\omega^2 - v_k(0)^{2q-2}).$$

Wegen  $u_k(0) \rightarrow u(0) = 0$  erhalten wir  $v_k(0) \geq (q\omega^2)^{\frac{1}{2q-2}}$  für fast alle  $k$  und damit  $v(0) > 0$ . Daher ist  $(u, v) = (0, v)$  Lösung von (3.3.2) mit  $v(0) > 0$  und  $v \geq 0$ . Satz 1.1 liefert  $v = v_0$  und wir erhalten

$$(u_k, v_k) \rightarrow (0, v_0), \quad (u_k, v_k) \rightarrow (0, v_0) \text{ in } C_{loc}^2(\mathbb{R}). \quad (3.3.25)$$

Sei nun  $x_k \in [0, R_k)$  gegeben mit

$$\max_{[-R_k, R_k]} u_k = u_k(x_k) = u_k(-x_k) > 0.$$

Wegen  $b < 0$  folgt aus der Differentialgleichung (3.3.17)

$$0 \leq -\frac{u_k''(x_k)}{u_k(x_k)} = \frac{u_k(x_k)^{2q-1} + bu_k(x_k)^{q-1}v_k(x_k)^q - u_k(x_k)}{u_k(x_k)} \leq u_k(x_k)^{2q-2} - 1$$

und somit

$$u_k(x_k) = u_k(-x_k) \geq 1. \quad (3.3.26)$$

Aus (3.3.25) und (3.3.26) folgt  $x_k \rightarrow +\infty$ . Seien nun  $(\tilde{u}_k^+, \tilde{v}_k^+), (\tilde{u}_k^-, \tilde{v}_k^-) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$  gegeben durch

$$(\tilde{u}_k^+, \tilde{v}_k^+) := (u_k(\cdot + x_k), v_k(\cdot + x_k)), \quad (\tilde{u}_k^-, \tilde{v}_k^-) := (u_k(\cdot - x_k), v_k(\cdot - x_k)).$$

Da die Folgen  $(\tilde{u}_k^+, \tilde{v}_k^+), (\tilde{u}_k^-, \tilde{v}_k^-)$  beschränkt in  $H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$  sind, existieren wieder mit  $(\tilde{u}_k^+, \tilde{v}_k^+), (\tilde{u}_k^-, \tilde{v}_k^-)$  bezeichnete Teilfolgen, die schwach und aufgrund der Kompaktheit der Einbettung  $H^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_{loc}(\mathbb{R})$  auch lokal gleichmäßig gegen nichtnegative Funktionen  $(\tilde{u}^+, \tilde{v}^+), (\tilde{u}^-, \tilde{v}^-) \in H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$  konvergieren. Wegen (3.3.26) gilt  $\tilde{u}^+(0), \tilde{u}^-(0) > 0$ . Sei nun  $a := \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k - x_k) \in [0, \infty]$ . Dann gilt  $\tilde{u}^+ = \tilde{v}^+ = 0$  auf  $(a, \infty)$  und  $(\tilde{u}^+, \tilde{v}^+)$  ist eine  $H_0^1(-\infty, a)$ -Lösung des zu (3.3.2) analogen Randwertproblems mit  $\tilde{u}^+ \neq 0$ . Entsprechend folgt  $\tilde{u}^- = \tilde{v}^- = 0$  auf  $(-\infty, -a)$  und  $(\tilde{u}^-, \tilde{v}^-)$  ist eine nichttriviale  $H_0^1(-a, \infty)$ -Lösung des zu (3.3.2) analogen Randwertproblems mit  $\tilde{u}^- \neq 0$ . Insbesondere liefert Testen mit  $(\tilde{u}^\pm, \tilde{v}^\pm)$  die Aussage  $(\tilde{u}^\pm, \tilde{v}^\pm) \in \mathcal{N}_b$ . Es folgt wegen Satz 3.1.8 (i)

$$\frac{q-1}{2q} (\|\tilde{u}^\pm\|_\omega^2 + \|\tilde{v}^\pm\|_\omega^2) = I(\tilde{u}^\pm, \tilde{v}^\pm) \geq \min_{\mathcal{N}_b} I = c_b = c_0. \quad (3.3.27)$$

Sei nun  $\chi$  eine glatte Abschneidefunktion mit  $\chi(x) = 1$  für  $|x| \leq 1$  und  $\chi(x) = 0$  für  $|x| \geq 2$ , sei  $\chi_R(x) := \chi(R^{-1}x)$  für  $R > 0$ . Für ein hinreichend groß gewähltes  $k_0(R) \in \mathbb{N}$  und  $k \geq k_0(R)$  gilt  $x_k > 2R$ . Insbesondere sind die Mengen  $\text{supp}(\chi_R), \text{supp}(\chi_R(\cdot - x_k)), \text{supp}(\chi_R(\cdot + x_k))$  in diesem Fall paarweise disjunkt und es folgt

$$\begin{aligned} & \| (u_k, v_k) \|^2 \\ & \geq \| (u_k \chi_R, v_k \chi_R) \|^2 + \| (u_k \chi_R(\cdot - x_k), v_k \chi_R(\cdot - x_k)) \|^2 + \| (u_k \chi_R(\cdot + x_k), v_k \chi_R(\cdot + x_k)) \|^2 \\ & = \| (u_k \chi_R, v_k \chi_R) \|^2 + \| (\tilde{u}_k^+ \chi_R, \tilde{v}_k^+ \chi_R) \|^2 + \| (\tilde{u}_k^-, \tilde{v}_k^- \chi_R) \|^2 \quad (k \geq k_0(R)). \end{aligned}$$

Aus  $(u_k, v_k) \rightharpoonup (0, v_0), (\tilde{u}_k^+, \tilde{v}_k^+) \rightharpoonup (\tilde{u}^+, \tilde{v}^+)$  und  $(\tilde{u}_k^-, \tilde{v}_k^-) \rightharpoonup (\tilde{u}^-, \tilde{v}^-)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \| (u_k, v_k) \|^2 & \geq \| (0, v_0 \chi_R) \|^2 + \| (\tilde{u}^+ \chi_R, \tilde{v}^+ \chi_R) \|^2 + \| (\tilde{u}^- \chi_R, \tilde{v}^- \chi_R) \|^2 \\ & = \| v_0 \chi_R \|_\omega^2 + \| (\tilde{u}^+ \chi_R, \tilde{v}^+ \chi_R) \|^2 + \| (\tilde{u}^- \chi_R, \tilde{v}^- \chi_R) \|^2. \end{aligned}$$

Da diese Ungleichung für alle  $R > 0$  gilt, ergibt sich die Ungleichung

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \| (u_k, v_k) \|^2 \geq \| v_0 \|_\omega^2 + \| (\tilde{u}^+, \tilde{v}^+) \|^2 + \| (\tilde{u}^-, \tilde{v}^-) \|^2$$

und es folgt mit der Abschätzung aus (3.3.27)

$$\begin{aligned} \kappa_b^* & = \lim_{k \rightarrow \infty} \kappa_b^*(R_k) \\ & = \frac{q-1}{2q} \lim_{k \rightarrow \infty} \| (u_k, v_k) \|^2 \\ & \geq \frac{q-1}{2q} \left( \| v_0 \|_\omega^2 + \| (\tilde{u}^+, \tilde{v}^+) \|^2 + \| (\tilde{u}^-, \tilde{v}^-) \|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\geq (2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0,$$

was per Voraussetzung des Satzes unmöglich ist. Daher war die Annahme falsch und es gilt  $u \neq 0$ . Analog ergibt sich aus der Annahme  $v = 0$  wegen  $\omega \geq 1$  die Ungleichung<sup>14</sup>

$$\kappa_b^* \geq (1 + 2\omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0 \geq (2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0,$$

die ebenfalls zum Widerspruch führt. Es folgt  $u, v \neq 0, u, v \geq 0$  und die Behauptung folgt aus Lemma C.6.  $\square$

Eine Wiederholung des Arguments aus Satz 3.3.7 (i) liefert<sup>15</sup>, dass die Abbildung  $b \mapsto \kappa_b^*$  stetig und monoton ist. Insbesondere folgt aus  $\kappa_0^* = (1 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0$  und Satz 3.3.13, dass für alle  $\omega \geq 1$  ein  $b(\omega) < 0$  derart existiert, dass für  $b \in (b(\omega), 0)$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}_b^*}$  existiert. Mit der variationellen Charakterisierung von  $\kappa_b^*$  aus (3.3.6) lässt sich darüberhinaus ein praktisch überprüfbares hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Minimierers gewinnen. Nach (3.3.6) gilt  $\kappa_b^* < (2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0$  genau dann, wenn Funktionen  $u, v \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $u, v \neq 0$  und  $\|u\|_{2q}^q \|v\|_{2q}^q > |b| \|uv\|_q^q$  existieren, so dass die Ungleichung

$$\max_{\alpha > 0} \frac{(\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_\omega^2)^q}{\|u\|_{2q}^{2q} + \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\alpha^q \|uv\|_q^q} < \left( \frac{2q}{q-1} \cdot (2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})c_0 \right)^{q-1} = (2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})^{q-1} \hat{c}_0^{2q}$$

gilt, vgl. (1.13). Umordnen der Terme liefert die äquivalente hinreichende Bedingung

$$b > \max_{\alpha > 0} \frac{(2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})^{1-q} \hat{c}_0^{-2q} (\|u\|^2 + \alpha^2 \|v\|_\omega^2)^q - \|u\|_{2q}^{2q} - \alpha^{2q} \|v\|_{2q}^{2q}}{2\alpha^q \|uv\|_q^q}. \quad (3.3.28)$$

Wählen wir in (3.3.28)  $u = u_0, v = u_0(\omega \cdot)$ , so erhalten wir das folgende Resultat:

**Korollar 3.3.14.** *Sei  $n = 1$  und es gelte*

$$0 \geq b > \max_{\alpha > 0} \frac{(2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})^{1-q} (1 + \alpha^2 \omega)^q - 1 - \alpha^{2q} \omega^{-1}}{2\alpha^q \omega^{-1/2}}. \quad (3.3.29)$$

Dann wird  $\kappa_b^*$  in einer nichtnegativen vollständig nichttrivialen Lösung  $(u, v)$  von (3.3.2) angenommen. Insbesondere existiert im Fall  $q = 2$  eine positive Lösung von (3.3.2) für

$$0 \geq b > -\frac{1}{\omega^{3/2} + \sqrt{2(1 + \omega^3)}} \quad (q = 2).$$

Im Fall  $q \geq 2$  gilt  $u, v > 0$ , im Fall  $1 < q < 2$  gilt  $u + v > 0$ .

<sup>14</sup>In diesem Fall werden zwei Energieportionen der Mindestgröße  $2I(0, v_0)$  nach unendlich getragen, denn aus  $(\tilde{u}^\pm, \tilde{v}^\pm) \in \mathcal{N}_b$  und  $\tilde{v} \neq 0$  gilt wegen  $b \leq 0$  die zu (3.3.27) analoge Abschätzung  $\frac{q-1}{2q} (\|\tilde{u}^\pm\|^2 + \|\tilde{v}^\pm\|^2) \geq I(0, v_0)$ .

<sup>15</sup>Bei der Herleitung der Stetigkeit ist, salopp formuliert, statt eines Minimierers von  $\hat{J}$  eine Funktion  $(u, v)$  zu wählen, für die  $\hat{J}(u, v)$  hinreichend den Wert  $\kappa_b^*$  bis auf ein vorgegebenes  $\varepsilon > 0$  approximiert. Ausgehend von dieser Funktion ist die Stetigkeit mit Hilfe der Funktionen  $\alpha_\varepsilon$  wie im Beweis von Satz 3.3.7 (i) nachzuweisen.

**Beweis:**

Wählen wir  $u = u_0, v = u_0(\omega \cdot)$  in (3.3.28), so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha > 0} \frac{(2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})^{1-q} \hat{c}_0^{-2q} (\|u_0\|^2 + \alpha^2 \|u_0(\omega \cdot)\|_\omega^2)^q - \|u_0\|_{2q}^{2q} - \alpha^{2q} \|u_0(\omega \cdot)\|_{2q}^{2q}}{2\alpha^q \|u_0 u_0(\omega \cdot)\|_q^q} \\ &= \sup_{\alpha > 0} \frac{(2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})^{1-q} (1 + \alpha^2 \omega)^q - 1 - \alpha^{2q} \omega^{-1}}{2\alpha^q} \cdot \frac{\|u_0\|_{2q}^{2q}}{\|u_0 u_0(\omega \cdot)\|_q^q}. \end{aligned}$$

Das Maximum der Zählerfunktion ist  $2^{1-q} - 1 < 0$  und wird in  $\alpha = 2^{-1/2} \omega^{\frac{1}{q-1}}$  angenommen, d.h. der Wert der rechten Seite ist für alle  $\alpha > 0$  negativ. Wir erhalten aus der Ungleichung  $\|u_0 u_0(\omega \cdot)\|_q^q \leq \|u_0\|_{2q}^q \|u_0(\omega \cdot)\|_{2q}^q = \omega^{-1/2} \|u_0\|_{2q}^{2q}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha > 0} \frac{(2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})^{1-q} \hat{c}_0^{-2q} (\|u_0\|^2 + \alpha^2 \|u_0(\omega \cdot)\|_\omega^2)^q - \|u_0\|_{2q}^{2q} - \alpha^{2q} \|u_0(\omega \cdot)\|_{2q}^{2q}}{2\alpha^q \|u_0 u_0(\omega \cdot)\|_q^q} \\ & \leq \sup_{\alpha > 0} \frac{(2 + \omega^{\frac{q+1}{q-1}})^{1-q} (1 + \alpha^2 \omega)^q - 1 - \alpha^{2q} \omega^{-1}}{2\alpha^q \omega^{-1/2}}. \end{aligned}$$

Ist daher die Bedingung (3.3.29) erfüllt, so folgt aus Satz 3.3.13 die Existenz eines nichtnegativen vollständig nichttrivialen Minimierers, dessen Positivitätseigenschaften aus Lemma C.6 folgen.

Im Fall  $q = 2$  erhalten wir durch explizite Berechnung

$$\max_{\alpha > 0} \frac{(2 + \omega^3)^{-1} (1 + \alpha^2 \omega)^2 - 1 - \alpha^4 \omega^{-1}}{2\alpha^2 \omega^{-1/2}} = \frac{\omega^{3/2} - \sqrt{2(1 + \omega^3)}}{2 + \omega^3} = -\frac{1}{\omega^{3/2} + \sqrt{2(1 + \omega^3)}},$$

wobei das Maximum im Punkt  $\alpha = \left(\frac{(1+\omega^3)\omega}{2}\right)^{1/4}$  angenommen wird.  $\square$

**Bemerkung 3.3.15.** Ist man an optimalen Existenz-Schranken interessiert, so legt der Beweis von Satz 3.3.13 nahe, für ein hinreichend großes  $R > 0$  zunächst positive Lösungen  $(u_R, v_R)$  wie in Proposition 3.3.12 numerisch zu bestimmen und diese als Testfunktion  $(u, v)$  in (3.3.28) zu verwenden.

### 3.4. Eindeutigkeitsresultate

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen die positiven Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q && \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v && \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für Parameterwerte  $b > 0$  und  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  eindeutig bestimmt sind. Im Fall  $q \geq 2$  sind positive Lösungen dieser Gleichung nach Satz C.10 radialsymmetrisch und radial fallend. Obgleich ein entsprechendes Resultat für  $1 < q < 2$  nur zu vermuten ist, beschränken wir uns im Folgenden auf die Untersuchung des zugehörigen Systems gewöhnlicher Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u'' - \frac{n-1}{r}u' + u &= u^{2q-1} + bu^{q-1}v^q && \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ -v'' - \frac{n-1}{r}v' + v &= v^{2q-1} + bv^{q-1}u^q && \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ u'(0) = v'(0) &= 0, \quad u, v > 0, \quad u(r), v(r) \rightarrow 0 && (r \rightarrow \infty). \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Eine positive Lösung von (3.4.1) ist gegeben durch

$$(u_b, v_b) = (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}}(\hat{u}_0, \hat{u}_0), \tag{3.4.2}$$

wobei  $u_0$  die Lösung aus Satz 1.1 bezeichnet und  $u_0(x) = \hat{u}_0(|x|)$  gilt. Um die Eindeutigkeit der positiven Lösung von (3.4.1) zu beweisen, genügt es daher,  $u = v$  zu zeigen und im Anschluss das Eindeutigkeitsresultat von Kwong aus Satz 1.1 anzuwenden. Dieser Idee folgend fanden Wei und Yao in [85] Bedingungen an  $b$ , die die eindeutige Lösbarkeit des Problems (3.4.1) im Fall  $q = 2$  garantieren. Sie zeigten weiterhin (stets für  $q = 2$ ), dass in den Fällen  $b > 1$  oder  $n = 1, 0 < b < 1$  die einzige positive Lösung durch  $(u_b, v_b)$  gegeben ist. Ferner zeigten sie in Satz 1.2 [85], dass im Fall  $b = 1$  alle positiven Lösungen durch  $(\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0)$  für  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  gegeben sind. Darüberhinaus ist bekannt, dass die positive Lösung von (3.4.1) auch im Fall  $n = 2, 3$  und  $0 < b < b_0(n)$  eindeutig ist, wobei  $b_0(n)$  eine hinreichend kleine ausschließlich von  $n$  abhängige Zahl ist, vgl. Satz 1.1 in [40]. Es ist ein offenes Problem, ob im Fall  $n = 2, 3$  und  $b_0(n) \leq b < 1$  eine Eindeutigkeitsaussage möglich ist.

Unser Ziel ist es, die beschriebenen Ergebnisse von Wei und Yao auf den Fall  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  zu verallgemeinern. Hierzu untersuchen wir Systeme der Form

$$\begin{aligned} -u'' - \frac{n-1}{r}u' &= f(r, u, v) && \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ -v'' - \frac{n-1}{r}v' &= f(r, v, u) && \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ u'(0) = v'(0) &= 0, \quad u, v > 0, \quad u(r), v(r) \rightarrow 0 && (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

und finden in den Sätzen 3.4.1 und 3.4.3 Bedingungen an die Nichlinearität  $f$ , die hinreichend dafür sind, dass jede Lösung  $(u, v)$  von (3.4.1)  $u = v$  erfüllt. In Korollar 3.4.5 wenden wir dieses Ergebnis auf das ursprüngliche Problem (3.4.1) an. Die Funktion  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{> 0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist in diesem Fall gegeben durch

$$f(r, z_1, z_2) = -z_1 + z_1^{2q-1} + bz_1^{q-1}z_2^q \quad (r, z_1, z_2 > 0). \quad (3.4.4)$$

In Anbetracht der Lösungsfamilien  $\mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$  aus Proposition 2.0.2 ist die Eindeutigkeit der positiven Lösung im Fall  $1 < q < 2$  nur für  $b \geq q-1$  und im Fall  $q > 2$  nur für  $0 < b \leq q-1$  zu erwarten. Wir zeigen für  $n = 1$ , dass in genau diesen Fällen die positive Lösung eindeutig und damit durch (3.4.2) gegeben ist. Wie Wei und Yao müssen wir uns im Fall  $n \geq 2$  mit einem suboptimalen Eindeutigkeitsresultat begnügen. Wir beweisen zunächst eine Verallgemeinerung von Satz 1.3 (b) in [85] auf das System (3.4.3).

**Satz 3.4.1.** *Sei  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{> 0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig und sei  $(u, v)$  eine Lösung von (3.4.3). Die Funktion  $f$  erfülle die folgenden Bedingungen:*

(i) *Es existieren positive Zahlen  $p_2 > p_1 > 0$  und  $C > 0$  mit*

$$|f(r, z_1, z_2)| \leq C(|z_1|^{p_1} + |z_2|^{p_1} + |z_1|^{p_2} + |z_2|^{p_2}) \quad \text{für alle } r, z_1, z_2 > 0.$$

(ii) *Es existieren positive Zahlen  $m, r_0, \varepsilon > 0$ , so dass die folgenden Ungleichungen für alle  $r > r_0$  und alle  $z_1, z_2 \in (0, \varepsilon)$  gelten:*

$$\frac{f(r, z_1, z_2) - f(r, z_2, z_1)}{z_1 - z_2} \leq -m, \quad \frac{f(r, z_1, z_2) + f(r, z_2, z_1)}{z_1 + z_2} \leq -m.$$

(iii)  *$f(r, z_1, z_2)z_2 < f(r, z_2, z_1)z_1$  für alle  $z_1 > z_2 > 0$  und alle  $r > 0$ .*

Dann gilt  $u = v$  und es existiert eine positive Zahl  $c$  mit

$$u(r) + |u'(r)| \leq ce^{-\sqrt{mr}} \quad (r > 0).$$

**Beweis:**

Sei  $(u, v)$  eine Lösung von (3.4.3), sei  $w_1 := u - v, w_2 := u + v$ . Wir nehmen  $u \neq v$  an, so dass  $w_1 \neq 0$  gilt. Die Funktionen  $w_1, w_2$  erfüllen die Differentialgleichungen

$$-w_1'' - \frac{n-1}{r}w_1 + c_1(r)w_1 = 0, \quad -w_2'' - \frac{n-1}{r}w_2 + c_2(r)w_2 = 0 \quad (3.4.5)$$

für

$$c_1(r) := -\frac{f(r, u(r), v(r)) - f(r, v(r), u(r))}{u(r) - v(r)},$$

$$c_2(r) := -\frac{f(r, u(r), v(r)) + f(r, v(r), u(r))}{u(r) + v(r)}.$$

Wegen  $u(r), v(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  folgt aus (ii) für ein hinreichend groß gewähltes  $r_1$  die Ungleichung

$$c_1(r), c_2(r) \geq m \quad \text{für } r \geq r_1. \quad (3.4.6)$$

Wie in Satz C.12 folgt, dass  $w_1, w_2$  ein festes Vorzeichen aus  $[r_1, \infty)$  haben. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $w_1 \geq 0$  auf  $[r_1, \infty)$  an. Ferner existiert ein  $c > 0$

$$(u+v)(r) + |(u'+v')(r)| \leq ce^{-\sqrt{mr}}, \quad (u-v)(r) + |(u'-v')(r)| \leq ce^{-\sqrt{mr}} \quad (r \geq 0).$$

Insbesondere erhalten wir

$$u(r) + v(r) + |u'(r)| + |v'(r)| \leq ce^{-\sqrt{mr}} \quad (r > 0). \quad (3.4.7)$$

Aus (3.4.3) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \left( r^{n-1}(u'v - v'u) \right)' dr \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} \left( \left( u'' + \frac{n-1}{r}u' \right) v - \left( v'' + \frac{n-1}{r}v' \right) u \right) dr \\ &= \int_0^\infty r^{n-1} (-f(r, u, v)v + f(r, v, u)u) dr. \end{aligned}$$

Die auftretenden Integrale sind wegen (3.4.7) und (i) wohldefiniert. Voraussetzung (iii) liefert die Existenz einer Stelle  $r_* > 0$  mit  $u(r_*) = v(r_*)$ , d.h.  $w_1(r_*) = 0$ . Wegen (3.4.5), (3.4.6) besitzt  $w_1$  auf  $[r_1, \infty)$  weder positive lokale Maxima noch negative lokale Minima. Folglich ist  $w_1$  monoton auf  $[r_1, \infty)$  und die Nullstelle  $r_*$  erfüllt wegen  $w_1 \neq 0$  und  $w_1(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  die Ungleichung  $r_* < r_1$ . Die letzte Nullstelle  $r^*$  von  $w_1$  erfüllt aus demselben Grund die Ungleichung  $r_* \leq r^* < r_1$ . Da  $f$  lokal Lipschitz-stetig ist, folgt aus  $w_1 \neq 0$  und dem Satz von Picard-Lindelöf  $w_1'(r^*) \neq 0$ . Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $w_1'(r^*) > 0$  an. Dann gilt  $u(r) - v(r) = w_1(r) > 0$  für alle  $r > r^*$  sowie

$$\begin{aligned} 0 &> -(r^*)^{n-1}u(r^*)w_1'(r^*) \\ &= -(r^*)^{n-1}(u'(r^*)v(r^*) - v'(r^*)u(r^*)) \\ &= \int_{r^*}^\infty \left( r^{n-1}(u'v - v'u) \right)' dr \\ &= \int_{r^*}^\infty r^{n-1} \left( \left( u'' + \frac{n-1}{r}u' \right) v - \left( v'' + \frac{n-1}{r}v' \right) u \right) dr \\ &= \int_{r^*}^\infty r^{n-1} (-f(r, u, v)v + f(r, v, u)u) dr \\ &> 0, \end{aligned}$$

Widerspruch. Die letzte Ungleichung folgt hierbei aus (iii) und  $u > v$  auf  $(r^*, \infty)$ . Daher gilt  $w_1 = 0$  und somit  $u = v$ , was zu zeigen war.  $\square$

**Bemerkung 3.4.2.**

- (a) Wenden wir Satz 3.4.1 auf Gleichung (3.4.1) an, so ist die durch (3.4.4) gegebene Funktion  $f$  auf die Eigenschaften (i)-(iii) zu überprüfen. Wir zeigen in Korollar 3.4.5, dass Satz 3.4.1 die Eindeutigkeit der positiven Lösung von (3.4.1) in den Fällen  $1 < q < 2, b \geq q - 1$  und  $q = 2, b > 1$  liefert.
- (b) Im Allgemeinen stellt sich im Anschluss an Satz 3.4.1 die Frage, unter welchen zusätzlichen Bedingungen das zugehörige skalare Problem

$$\begin{aligned} -u'' - \frac{n-1}{r}u' &= g(r, u) \quad \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ u'(0) &= 0, \quad u > 0, \quad u(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

für  $g(r, u) := f(r, u, u)$  eindeutig lösbar ist. Im autonomen Fall sind hinreichende Bedingungen für die Eindeutigkeit der positiven Lösung von (3.4.8) beispielsweise in [64] zu finden, siehe auch [41] und die darin enthaltenen Referenzen.

- (c) Wir betrachten nun den Fall  $f(r, z_1^*, z_2^*)z_2^* = f(r, z_2^*, z_1^*)z_1^*$  für ein  $(z_1^*, z_2^*) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  mit  $z_1^* > z_2^*$ . Im Allgemeinen kann in diesem Fall keine Eindeutigkeit der positiven Lösung von (3.4.3) erwartet werden, wie das folgende Beispiel zeigt. Die Nichtlinearität  $f$  sei der Form  $f(r, u, v) = -V(r)u + \tilde{f}(r, u, v)$  und erfülle die folgenden Bedingungen:

- (i) Es existiert ein  $p > 0$  mit  $\tilde{f}(r, tu, tv) = t^p \tilde{f}(r, u, v)$  für alle  $t > 0$ .
- (ii) Es existiert eine Lösung  $w_0$  von (3.4.8) für  $g(r, u) = f(r, u, u)$ .
- (iii) Es existiert eine Lösung  $w_1$  von (3.4.8) für  $g(r, u) = \frac{1}{z_1^*} f(r, z_1^* u, z_2^* u)$ .

Unter diesen Bedingungen existieren mindestens drei verschiedene positive Lösungen von (3.4.3), nämlich  $(w_0, w_0)$ ,  $(z_1^* w_1, z_2^* w_1)$  und  $(z_2^* w_1, z_1^* w_1)$ . Die Funktion  $f$  aus (3.4.4) genügt diesen Voraussetzungen und bei den drei verschiedenen positiven Lösungen handelt es sich für  $1 < q < 2, b < q - 1$  um die Elemente der Lösungsscharen  $\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4$  und im Fall  $q > 2, b > q - 1$  um die Elemente von  $\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_5$ , siehe Proposition 2.0.2.

- (d) Ma und Zhao beweisen in [50], Satz 2 die Existenz einer positiven Lösung  $(u, v)$  des nichtlinearen Schrödingersystems

$$\begin{aligned} -u'' - \frac{n-1}{r}u' + u &= \mu_1 u^{2q-1} + \beta_1 u^{q-1} v^q \quad \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ -v'' - \frac{n-1}{r}v' + v &= \mu_2 v^{2q-1} + \beta_2 u^q v^{q-1} \quad \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ u'(0) = v'(0) &= 0, \quad u, v > 0, \quad u(r), v(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

für Parameterwerte  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und  $\mu_1, \mu_2 \leq 0, \beta_1, \beta_2 > 0, \mu_1 \beta_1^{q-1} = \mu_2 \beta_2^{q-1}$  sowie  $\beta_1^{\frac{q-2}{2}} \mu_1 + \beta_2^{\frac{q}{2}} > 0, \beta_2^{\frac{q-2}{2}} \mu_2 + \beta_1^{\frac{q}{2}} > 0$ . Darüberhinaus zeigen die Autoren, dass die Lösung von (3.4.9) eindeutig bestimmt ist und die Gleichung

$$u = \left( \mu_2 + \frac{\beta_2^{\frac{q}{2}}}{\beta_1^{\frac{q-2}{2}}} \right)^{\frac{1}{2q-2}} \left( \mu_1 + \frac{\beta_2^{\frac{q}{2}}}{\beta_1^{\frac{q-2}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2q-2}} v \quad (3.4.10)$$

erfüllt. Dieses Eindeutigkeitsresultat folgt aus Satz 3.4.1, denn die positive Funktion  $(\tilde{u}, \tilde{v}) = (|\mu_1|^{\frac{1}{2q-2}}u, |\mu_2|^{\frac{1}{2q-2}}v)$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -\tilde{u}'' - \frac{n-1}{r}\tilde{u}' + \tilde{u} &= -\tilde{u}^{2q-1} + \beta\tilde{u}^{q-1}\tilde{v}^q & \text{in } \mathbb{R}_{>0}, \\ -\tilde{v}'' - \frac{n-1}{r}\tilde{v}' + \tilde{v} &= -\tilde{v}^{2q-1} + \beta\tilde{u}^q\tilde{v}^{q-1} & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \end{aligned}$$

für  $\beta = \beta_1|\mu_1|^{-\frac{q-2}{2q-2}}|\mu_2|^{\frac{q}{2q-2}} = \beta_2|\mu_1|^{-\frac{q}{2q-2}}|\mu_2|^{-\frac{q-2}{2q-2}}$ . Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Voraussetzungen (i),(ii),(iii) erfüllt sind. Aus Satz 3.4.1 folgt  $\tilde{u} = \tilde{v}$ , was wegen  $\mu_1\beta_1^{q-1} = \mu_2\beta_2^{q-1}$  äquivalent zu (3.4.10) ist. Daher ist das Eindeutigkeitsresultat von Ma und Zhao aus Satz 3.4.1 herleitbar.

Im folgenden Satz finden wir unter zusätzlichen Bedingungen ein Eindeutigkeitsresultat für Nichtlinearitäten  $f$  mit der zu (iii) komplementären Eigenschaft

$$f(r, z_1, z_2)z_2 > f(r, z_2, z_1)z_1 \quad \text{für } z_1 > z_2 > 0$$

unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $(u, v)$  monoton fallend ist. In der Untersuchung von Gleichung (3.4.1) liefert dieses Resultat in Korollar 3.4.5 die Eindeutigkeit der positiven Lösung für  $n = 1, q = 2, 0 < b < 1$  sowie  $n = 1, q > 2, 0 < b \leq q - 1$ .

**Satz 3.4.3.** *Sei  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{> 0}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lokal Lipschitz-stetig und sei  $(u, v)$  eine monoton fallende Lösung von (3.4.3). Neben (i),(ii) aus Satz 3.4.1 erfülle  $f$  die folgenden Bedingungen:*

(iii)  $f(r, z_1, z_2) = g(r, z_1) + h(r, z_1, z_2)z_2$  für  $r, z_1, z_2 > 0$  und Funktionen  $g \in C^1(\mathbb{R}_{> 0}^2, \mathbb{R})$ ,  $h \in C(\mathbb{R}_{> 0}^3, \mathbb{R})$  mit  $h(r, z_1, z_2) = h(r, z_2, z_1) > 0$  für  $r, z_1, z_2 > 0$  und

$$rg_r(r, z) + (2n - 2)g(r, z) \leq 0 \quad (r, z > 0), \quad (3.4.11)$$

(iv)  $f(r, z_1, z_2)z_2 > f(r, z_2, z_1)z_1$  für alle  $z_1 > z_2 > 0$  und alle  $r > 0$ .

Dann gilt  $u = v$  und es existiert eine positive Zahl  $c$  mit

$$u(r) + |u'(r)| \leq ce^{-\sqrt{mr}} \quad \text{für alle } r > 0.$$

### Beweis:

Wie in Satz 3.4.1 erhalten wir den exponentiellen Abfall der Funktionen  $u, v, u', v'$  aus (3.4.7). Aus der Annahme  $u - v \neq 0$  ergibt sich ebenfalls wie in Satz 3.4.1 die Existenz der letzten Nullstelle  $r^* > 0$  von  $u - v$  mit  $(u - v)'(r^*) \neq 0$  und wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $u - v > 0$  auf  $(r^*, \infty)$  und damit  $(u - v)'(r^*) > 0$  an. Sei  $G(r, z) := \int_1^z g(r, s) ds$ . Die Differentialgleichung (3.4.3) liefert

$$\frac{d}{dr} \left( r^{2n-2} \left( -\frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{2}v'^2 - G(r, u) + G(r, v) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= r^{2n-2} \left( u' \left( -u'' - \frac{n-1}{r} u' - g(r, u) \right) - v' \left( -v'' - \frac{n-1}{r} v' - g(r, v) \right) \right) \\
&\quad + r^{2n-1} \left( (2n-2)(-G(r, u) + G(r, v)) + r(-G_r(r, u) + G_r(r, v)) \right) \\
&= r^{2n-2} h(r, u, v)(vu' - uv') - r^{2n-1} \int_{v(r)}^{u(r)} (2n-2)g(r, s) + r g_r(r, s) ds.
\end{aligned}$$

Aus (3.4.11) folgt für  $r > r^*$  wegen  $u(r) > v(r)$

$$\frac{d}{dr} \left( r^{2n-2} \left( -\frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} v'^2 - G(r, u) + G(r, v) \right) \right) \geq r^{2n-2} h(r, u, v)(vu' - uv').$$

Aus  $(u-v)'(r^*) > 0$ ,  $u'(r^*), v'(r^*) \leq 0$  und  $u(r^*) = v(r^*)$  erhalten wir durch Integration dieser Ungleichung über  $(r^*, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\int_{r^*}^{\infty} r^{2n-2} h(r, u, v)(vu' - uv') dr \\
&\leq r^{*2n-2} \left( \frac{1}{2} u'(r^*)^2 - \frac{1}{2} v'(r^*)^2 + G(r^*, u(r^*)) - G(r^*, v(r^*)) \right) \\
&= \frac{1}{2} r^{*2n-2} (u'(r^*) - v'(r^*))(u'(r^*) + v'(r^*)) \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Folglich existiert eine Stelle  $r_1 \in (r^*, \infty)$  mit  $(vu' - uv')(r_1) = 0$ , denn sonst hätte  $vu' - uv'$  auf  $(r^*, \infty)$  dasselbe Vorzeichen wie  $(vu' - uv')(r^*) = u(r^*)(u' - v')(r^*) > 0$ , d.h.  $vu' - uv'$  wäre positiv auf  $(r^*, \infty)$ . Dies ist wegen  $h(r, u, v) > 0$  und (3.4.12) unmöglich. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{r_1}^{\infty} \left( r^{n-1} (uv' - vu') \right)' dr \\
&= \int_{r_1}^{\infty} r^{n-1} \left( u \left( v'' + \frac{n-1}{r} v' \right) - v \left( u'' + \frac{n-1}{r} u' \right) \right) dr \\
&= \int_{r_1}^{\infty} r^{n-1} (-uf(r, v, u) + vf(r, u, v)) dr.
\end{aligned}$$

Wegen Voraussetzung (iv) existiert eine weitere Stelle  $r_2 \in (r_1, \infty)$  mit  $u(r_2) = v(r_2)$  im Widerspruch zu  $u - v > 0$  auf  $(r_1, \infty) \subset (r^*, \infty)$ . Es folgt  $u = v$ , was zu zeigen war.  $\square$

#### Bemerkung 3.4.4.

- Verzichten wir in Satz 3.4.3 auf Voraussetzung (iii), so ist die Existenz einer Stelle  $r_1 > r^*$  mit  $(vu' - uv')(r_1) = 0$  unklar. In diesem Fall erhalten wir die folgende Alternative: Entweder gilt  $u = v$  oder es gibt eine Stelle  $r^* > 0$  mit  $u(r^*) = v(r^*)$  und  $\frac{u}{v}$  ist streng monoton auf  $(r^*, \infty)$ .
- Die Bedingung (3.4.11) ist im Fall  $n \geq 2$  unangenehm restriktiv und es wäre von großem Interesse, diese Voraussetzung abschwächen zu können.

- c) Zu den Voraussetzungen von Satz 3.4.3 gehört die Monotonie der Funktionen  $u, v$ . Auf der Moving-Plane-Methode basierende Resultate zur Radialsymmetrie positiver Lösungen wie in [16] liefern stets die Monotonie der entsprechenden Funktionen bezüglich der radialen Variable, so dass Satz 3.4.3 in diesen Fällen anwendbar ist. Es ist zu beachten, dass der Satz auch unter der schwächeren Annahme  $(u+v)' \leq 0$  richtig bleibt, da die Monotonie nur für die letzte Abschätzung in (3.4.12) benötigt wird.

Nun wenden wir die obigen Sätze auf die Differentialgleichung (3.4.1) an und verallgemeinern die Resultate von Wei und Yao.

**Korollar 3.4.5.**

- (i) Sei  $n = 1$  und  $1 < q < 2, b \geq q - 1$  oder  $q = 2, b \neq 1, b \geq 0$  oder  $q > 2, 0 \leq b \leq q - 1$ . Dann ist  $(u_b, v_b)$  die einzige positive Lösung von (3.4.1).
- (ii) Sei  $n \geq 2$  und  $1 < q < 2, b \geq q - 1$  oder  $q = 2, b > 1$ . Dann ist  $(u_b, v_b)$  die einzige positive Lösung von (3.4.1).

**Beweis:**

Sei  $f(r, z_1, z_2) = -z_1 + z_1^{2q-1} + bz_1^{q-1}z_2^q$  für  $r, z_1, z_2 > 0$  gegeben wie in (3.4.4). Die Funktion  $f$  erfüllt die Voraussetzung (ii) aus Satz 3.4.1, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(r, z_1, z_2) - f(r, z_2, z_1) &= -z_1 + z_1^{2q-1} + bz_1^{q-1}z_2^q + z_2 - z_2^{2q-1} - bz_2^{q-1}z_1^q \\ &= (z_1 - z_2) \cdot \left( -1 + \frac{z_1^{2q-1} - z_2^{2q-1}}{z_1 - z_2} - bz_1^{q-1}z_2^{q-1} \right) \\ f(r, z_1, z_2) + f(r, z_2, z_1) &= -z_1 + z_1^{2q-1} + bz_1^{q-1}z_2^q - z_2 + z_2^{2q-1} + bz_2^{q-1}z_1^q \\ &= (z_1 + z_2) \cdot \left( -1 + \frac{z_1^{2q-1} + z_2^{2q-1}}{z_1 + z_2} + bz_1^{q-1}z_2^{q-1} \right). \end{aligned}$$

Nun sei  $z_1 > z_2 > 0$  und  $k := \frac{z_2}{z_1} \in (0, 1)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f(r, z_1, z_2)z_2 - f(r, z_2, z_1)z_1 &= z_1z_2(z_1^{2q-2} + bz_1^{q-2}z_2^q - z_2^{2q-2} - bz_2^{q-2}z_1^q) \\ &= z_1^{2q}k \underbrace{(1 + bk^q - k^{2q-2} - bk^{q-2})}_{=:\psi(k)}. \end{aligned}$$

Im Fall  $q = 2, b > 1$  gilt  $\psi(k) < 0$  für alle  $k > 0$ , für  $1 < q < 2, b \geq q - 1$  folgt dies aus Proposition 2.0.1. Nach Satz 3.4.1 erhalten wir in diesen Fällen  $u = v$  und damit  $(u, v) = (u_b, v_b)$  und es folgt (i). Wieder nach Proposition 2.0.1 gilt  $\psi(k) > 0$  in den Fällen  $q = 2, b < 1$  und  $q > 2, b \leq q - 1$ . Im Fall  $b > 0$  und  $n = 1$  genügt die in (3.4.4) definierte Funktion  $f$  den Voraussetzungen von Satz 3.4.3. Da in diesem Fall alle positiven Lösungen von (3.4.1) nach Satz C.10 monoton fallend sind, folgt erneut  $(u, v) = (u_b, v_b)$ , was zu zeigen war.  $\square$

## 4. Appendix

### A. Ergänzende Resultate zu Kapitel 2

#### A.1. Die Beweise der Propositionen 2.0.1, 2.0.2 und 2.3.1

**Proposition A.1.** Für  $q > 1, q \neq 2$  gilt

$$1 - \frac{q}{q-2}k^2 + \frac{q}{q-2}k^{2q-2} - k^{2q} > 0 \quad \text{für } k \in (0, 1)$$

**Beweis:**

Es gilt für  $k \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{q}{q-2}k^2 + \frac{q}{q-2}k^{2q-2} - k^{2q} \\ &= \int_k^1 \left( \frac{2q}{q-2}s - \frac{2q(q-1)}{q-2}s^{2q-3} + 2qs^{2q-1} \right) ds \\ &= \frac{2q}{q-2} \int_k^1 s(1 - (q-1)s^{2q-4} + (q-2)s^{2q-2}) ds \\ &= \frac{2q}{q-2} \int_k^1 s \int_s^1 (q-1)(2q-4)t^{2q-5} - (2q-2)(q-2)t^{2q-3} dt ds \\ &= 4q(q-1) \int_k^1 s \int_s^1 t^{2q-5}(1-t^2) dt ds > 0. \end{aligned}$$

□

#### Beweis von Proposition 2.0.1

Sei  $q > 1, q \neq 2$  und sei die Funktion  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(k) := \frac{1 - k^{2q-2}}{k^{q-2} - k^q} \quad (k \in (0, 1))$$

Dann gilt für alle  $k \in (0, 1)$  nach Proposition A.1

$$(2-q)f'(k) = \frac{(2-q)^2 k^{1-q}}{(1-k^2)^2} \left( 1 - \frac{q}{q-2}k^2 + \frac{q}{q-2}k^{2q-2} - k^{2q} \right) > 0.$$

Im Fall  $1 < q < 2$  ist die Funktion  $f$  daher streng monoton wachsend auf  $(0, 1)$ . Wegen  $f(0^+) = 0, f(1^-) = q - 1$  ist  $f : (0, 1) \rightarrow (0, q - 1)$  bijektiv. Insbesondere ist die Gleichung  $f(k) = b$  für  $k \in (0, 1)$  genau dann lösbar wenn  $0 < b < q - 1$ . In diesem Fall ist die Lösung  $k_b$  dieser Gleichung aufgrund der strengen Monotonie von  $f$  eindeutig bestimmt und die Abbildung  $b \mapsto k_b$  ist auf  $(0, q - 1)$  streng monoton wachsend mit

$$\lim_{b \rightarrow 0} k_b = 0, \quad \lim_{b \rightarrow q-1} k_b = 1, \quad (1 < q < 2).$$

Im Fall  $q > 2$  ist  $f$  streng monoton fallend auf  $(0, 1)$  und wegen  $f(0^+) = \infty, f(1^-) = q - 1$  ist  $f : (0, 1) \rightarrow (q - 1, \infty)$  bijektiv. Wir erhalten die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung  $k_b \in (0, 1)$  von  $f(k) = b$  genau für  $b > q - 1$  sowie

$$\lim_{b \rightarrow q-1} k_b = 1, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} k_b = 0, \quad (q > 2).$$

□

### Beweis von Proposition 2.0.2

Sei zunächst  $\omega \neq 1$ . Eine kurze Rechnung zeigt, dass in diesem Fall jede Lösung von (2.0.1) der Form  $(su_0, tv_0, b)$  die Bedingung  $s = 0$  oder  $t = 0$  erfüllen muss. Es ergeben sich die Lösungsfamilien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$ .

Sei nun  $\omega = 1$  und sei  $(su_0, tu_0, b)$  für  $s, t \geq 0$  eine Lösung von (2.0.1). Für  $t = 0$  bzw.  $s = 0$  erhalten wir erneut die semitrivialen Lösungen aus  $\mathcal{T}_1$  bzw.  $\mathcal{T}_2$ , es gelte daher  $s, t > 0$ . Dann erfüllt  $(s, t)$  die Gleichungen

$$s = s^{2q-1} + bs^{q-1}t^q, \quad t = t^{2q-1} + bt^{q-1}s^q.$$

Definieren wir  $k := st^{-1} > 0$  und dividieren wir diese Gleichungen durch  $s$  bzw. durch  $t$ , so erhalten wir  $1 = t^{2q-2}(k^{2q-2} + bk^{q-2}) = t^{2q-2}(1 + bk^q)$ . Daher ist  $k$  eine positive Lösung der Gleichung (2.0.2), d.h. es gilt

$$1 + bk^q - bk^{q-2} - k^{2q-2} = 0. \quad (4.1)$$

Die Lösung  $k = 1$  liefert  $b > -1$  und  $s = t = (1 + b)^{-\frac{1}{2q-2}}$ ; wir erhalten die Lösungen der Schar  $\mathcal{T}_3$ . Da mit  $k$  auch  $k^{-1}$  Lösung von (4.1) ist, erhalten wir aus Proposition 2.0.1 im Fall  $1 < q < 2, b \in (0, q - 1)$  bzw.  $q > 2, b \in (q - 1)$  die Lösungen  $k_b, k_b^{-1}$  und damit die Lösungsscharen  $\mathcal{T}_4$  bzw.  $\mathcal{T}_5$ . In den Fällen  $1 < q < 2, b \notin (0, q - 1)$  bzw.  $q > 2, b \notin (q - 1, \infty)$  existieren nach Proposition 2.0.1 keine Lösungen von (4.1). Im Fall  $q = 2$  existieren Lösungen  $k \neq 1$  von (4.1) nur für  $b = 1$  und es ergeben sich die Lösungen aus  $\mathcal{T}_6$ . □

### Beweis von Proposition 2.3.1

Für  $q > 1$  sei die Funktion  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$g(k) := \frac{q - 1 - qk^2 + qk^{2q-2} - (q - 1)k^{2q}}{1 - k^{2q}}.$$

Dann ist  $g(k) < q - 1$  äquivalent zu  $k^{2q-2} < k^2$  und damit zu  $q > 2$ . Ferner ist  $g(k) < 1$  äquivalent zu

$$(q-2) - qk^2 + qk^{2q-2} - (q-2)k^{2q} < 0$$

und damit nach Proposition A.1 äquivalent zu  $1 < q < 2$ . Es folgt die Behauptung.  $\square$

## A.2. Bestimmung der Eigenpaare im Fall $n = 1$

In diesem Abschnitt bestimmen wir im Fall  $n = 1$  die Lösungen des Eigenwertproblems

$$-\phi'' + \omega^2 \phi = bu_0^{2q-2} \phi \quad \text{in } \mathbb{R}, \quad \phi \in H_r^1(\mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

wobei  $u_0$  die nach Satz 1.1 eindeutige positive Lösung der Gleichung  $-u'' + u = u^{2q-1}$  in  $\mathbb{R}$  bezeichnet. Sie ist gegeben durch

$$u_0(x) = \left( \sqrt{q} \operatorname{sech}((q-1)x) \right)^{\frac{1}{q-1}} \quad (n = 1),$$

vgl. (1.15). In Proposition A.2 bestimmen wir zunächst sämtliche  $H^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ -Eigenpaare  $(\phi, \mu)$  des Eigenwertproblems  $-\phi''(x) + \kappa^2 \phi(x) = \mu \operatorname{sech}(px)^2 \phi(x)$  für gegebene Parameter  $\kappa, p > 0$ . Durch Aussonderung der radialsymmetrischen Eigenfunktionen und entsprechende Wahl der Parameter  $\kappa, p > 0$  erhalten wir in Lemma A.3 alle Eigenpaare des Problems (4.2). Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind nicht neu; die Eigenwerte des Problems (4.2) sind beispielsweise in Gleichung (2.15), (2.16) in [91] zu finden, siehe auch Lemma 5.1 in [26]. Für den Beweis wird auf ein Buch von Landau und Lifshitz [46] verwiesen, das dem Autor lange Zeit nicht zur Verfügung stand. Aus diesem Grund geben wir hier einen neuen ausführlicheren Beweis. Das Symbol  ${}_2F_1$  bezeichnet in der folgenden Proposition die hypergeometrische Funktion. Die Gegenbauerpolynome  $C_m^\alpha$  von Grad  $m \in \mathbb{N}_0$  sind für  $\alpha > -\frac{1}{2}$  definiert durch

$$C_m^\alpha(z) = \frac{(2\alpha + m - 1)!}{(2\alpha - 1)! m!} {}_2F_1 \left( -m, 2\alpha + m; \alpha + \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2} \right), \quad (4.3)$$

siehe etwa (6.3.5) und (6.4.9) in [4].

**Proposition A.2.** *Seien  $\kappa, p > 0$ . Alle Lösungen des Eigenwertproblems*

$$-\phi''(x) + \kappa^2 \phi(x) = \mu \operatorname{sech}(px)^2 \phi(x) \quad \text{in } \mathbb{R}, \quad \phi \in H^1(\mathbb{R}), \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

*sind gegeben durch  $\mu = \mu_m, \phi \in \operatorname{span}\{\phi_m\}$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$  mit*

$$\mu_m = (\kappa + pm)(\kappa + p(m+1)), \quad \phi_m(x) = \operatorname{sech}(pt)^{\frac{\kappa}{p}} C_m^{\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{p}}(\tanh(px)).$$

*Die Funktion  $\phi_m$  hat genau  $m$  reelle einfache Nullstellen in  $\mathbb{R}$  und ist ungerade für ungerades  $m$  und gerade für gerades  $m$ . Für alle  $m \in \mathbb{N}$  liegt zwischen zwei Nullstellen von  $\phi_m$  genau eine Nullstelle von  $\phi_{m+1}$ .*

**Beweis:**

Sei  $(u, \mu)$  eine Lösung des Eigenwertproblems (4.4). Die Transformation  $v(x) = e^{\kappa x} u(x)$  liefert  $-v''(x) + 2\kappa v'(x) = \mu \operatorname{sech}(px)^2 v(x)$  auf  $\mathbb{R}$  und für  $w(x) = v(\frac{1}{2p} \log(\frac{1-x}{x}))$  gilt

$$x(x-1)w''(x) + (2x-1-\kappa p^{-1})w'(x) - \mu p^{-2}w(x) = 0 \quad \text{auf } (0,1)$$

Dies ist eine hypergeometrische Differentialgleichung der Form

$$0 = x(x-1)w''(x) + ((a+b+1)x-c)w'(x) + abw(x) \quad \text{auf } (0,1) \quad (4.5)$$

für die Parameter

$$a = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu p^{-2}}}{2}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\mu p^{-2}}}{2}, \quad c = 1 + \kappa p^{-1}, \quad (4.6)$$

wobei  $c$  eindeutig und  $a, b$  bis auf Vertauschung eindeutig bestimmt sind.

*1. Fall:*  $c \notin \mathbb{N}$ . Die zwei linear unabhängigen Lösungen von (4.5) sind gegeben durch  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  und  $x^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; x)$ , vgl. S.81 in [4]. Die zwei linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung aus (4.4) lauten daher

$$\begin{aligned} u_1(x) &= e^{-\kappa x} {}_2F_1(a, b; c; (1 + e^{2px})^{-1}), \\ u_2(x) &= (e^{px} + e^{-px})^{\frac{\kappa}{p}} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; (1 + e^{2px})^{-1}) \end{aligned}$$

mit  $a, b, c$  wie in (4.6). Es folgt

$$u(x) = \alpha u_1(x) + \beta u_2(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (4.7)$$

für Koeffizienten  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wegen

$$(2-c) - (a+1-c) - (b+1-c) = c - a - b = \kappa p^{-1} > 0$$

gilt  $u_2(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ , denn aus Satz Satz 2.1.2 in [4] folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c; 2-c; (1 + e^{2px})^{-1}) = 1.$$

Ferner gilt  $u_1(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  und die Bedingung  $u \in H^1(\mathbb{R})$  liefert daher  $\beta = 0$  in (4.7), d.h.  $u = \alpha u_1$ . Aus  $u \in H^1(\mathbb{R})$ ,  $u \neq 0$  ergibt sich daher die notwendige Bedingung

$$0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} {}_2F_1(a, b; c; (1 + e^{2px})^{-1}).$$

Aus Satz 2.2.2 in [4] folgt, dass dies genau im Fall  $c - a \in -\mathbb{N}_0$  oder  $c - b \in -\mathbb{N}_0$  gilt. Letzteres ist wegen  $c > b$  unmöglich und wir erhalten  $c - a = -m$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ . Mit den Formeln aus (4.6) ergibt sich

$$\frac{1}{2} + \kappa p^{-1} - \frac{\sqrt{1 + 4\mu p^{-2}}}{2} = -m \quad \text{bzw.} \quad \mu = \mu_m = (\kappa + pm)(\kappa + p(m+1))$$

und wir erhalten

$$a = \kappa p^{-1} + m + 1, \quad b = -\kappa p^{-1} - m, \quad c = 1 + \kappa p^{-1}, \quad \mu = \mu_m \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

Aus  ${}_2F_1(a, b; c; x) = (1-x)^{c-a-b} {}_2F_1(c-b, c-a; c; x)$  und (4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x) &= \alpha u_1(x) \\ &= \alpha e^{-\kappa x} {}_2F_1(\kappa p^{-1} + m + 1, -\kappa p^{-1} - m; 1 + \kappa p^{-1}; (1 + e^{2px})^{-1}) \\ &= \alpha e^{-\kappa x} \left( \frac{e^{2px}}{1 + e^{2px}} \right)^{\frac{\kappa}{p}} {}_2F_1(1 + 2\kappa p^{-1} + m, -m; 1 + \kappa p^{-1}; (1 + e^{2px})^{-1}) \\ &= \tilde{\alpha} \operatorname{sech}(px)^{\frac{\kappa}{p}} C_m^{\frac{1}{2} + \frac{\kappa}{p}}(\tanh(px)) \end{aligned}$$

für eine Zahl  $\tilde{\alpha} > 0$ . Es folgt  $u \in \operatorname{span}\{\phi_m\}$  und damit die Behauptung im Fall  $c \notin \mathbb{N}$ .

*2. Fall:*  $c \in \mathbb{N}$ . Die beiden linear unabhängigen Lösungen auf  $(0, 1)$  von (4.5) sind für  $b \notin -\mathbb{N}$  nach (2.3.18) in [4] gegeben durch  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  und

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(a, b; c; x) \log(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{k! (c)_k} \left( \psi(a+k) + \psi(b+k) - \psi(1+k) - \psi(c+k) \right) x^k \\ &\quad + (c-1)! \sum_{k=1}^{c-1} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(c-k-1)!} \frac{\Gamma(a-k)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(b-k)}{\Gamma(b)} x^{-k}, \end{aligned}$$

wobei  $(a)_k, (b)_k, (c)_k$  Pochhammer-Symbole bezeichnen und  $\psi(z) := \Gamma'(z)\Gamma(z)^{-1}$  die Digamma-Funktion ist. Im Fall  $b \in -\mathbb{N}$  ist die zweite Lösung durch (2.3.20) in [4] gegeben. Eine kurze Rechnung zeigt, dass wie im Fall  $c \in \mathbb{N}$  die sich hieraus ergebende zweite linear unabhängige Lösung  $u_2$  die Eigenschaft  $u_2(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$  besitzt. Wie zuvor folgt  $u \in \operatorname{span}\{\phi_m\}$  und  $\mu = \mu_m$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .

Aufgrund der Rekursionsgleichung der Gegenbauer-Polynome

$$C_m^\alpha(x) = \frac{2(m+\alpha-1)}{m} C_{m-1}^\alpha(x)x - \frac{m+2\alpha-2}{m} C_{m-2}^\alpha(x), \quad C_0^\alpha(x) = 1, \quad C_1^\alpha(x) = 2\alpha x,$$

vgl. (6.4.16) in [4], ist  $C_m^\alpha$  für gerade  $m$  eine gerade Funktion und für ungerade  $m$  eine ungerade Funktion. Da  $\tanh$  eine ungerade und  $\operatorname{sech}$  eine gerade Funktion ist, erhalten wir die entsprechende Aussage für  $\phi_m$ . Ferner besitzt  $C_m^\alpha$  genau  $m$  reelle einfache Nullstellen auf  $(-1, 1)$  und zwischen je zwei Nullstellen von  $C_m^\alpha$  liegt eine Nullstelle von  $C_{m+1}^\alpha$ , siehe S.253 in [4].  $\square$

Wir kommen zur Anwendung der obigen Proposition auf das Eigenwertproblem (4.2).

**Lemma A.3.** *Sei  $n = 1, \omega > 0$ . Alle Lösungen des Eigenwertproblems*

$$-\phi'' + \omega^2 \phi = bu_0^{2q-2} \phi \quad \text{in } \mathbb{R}, \quad \phi \in H_r^1(\mathbb{R}), \quad b \in \mathbb{R}$$

*sind gegeben durch  $b = b_{j,\omega}, \phi \in \text{span}\{\varphi_{j,\omega}\}$  für ein  $j \in \mathbb{N}_0$ , wobei*

$$b_{j,\omega} = \frac{(\omega + 2j(q-1))(\omega + (2j+1)(q-1))}{q},$$

$$\varphi_{j,\omega}(x) = c \operatorname{sech}((q-1)x)^{\frac{\omega}{q-1}} C_{2j}^{\frac{1}{2} + \frac{\omega}{q-1}}(\tanh((q-1)x)),$$

*und  $c > 0$  so gewählt ist, dass  $\|\varphi_{j,\omega}\| = 1$  gilt. Die Funktion  $\varphi_{j,\omega}$  hat genau  $j$  reelle einfache Nullstellen im Intervall  $\mathbb{R}_{>0}$  und zwischen zwei Nullstellen von  $\varphi_{j,\omega}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  liegt genau eine Nullstelle von  $\varphi_{j+1,\omega}$ .*

**Beweis:**

Es gilt  $u_0(x)^{2q-2} = q \operatorname{sech}((q-1)x)^2$  für  $x \in \mathbb{R}$ . Nach Proposition A.2 sind alle  $H^1(\mathbb{R})$ -Eigenwerte durch  $bq = (\omega + m(q-1))(\omega + (m+1)(q-1))$  ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) gegeben. Für ungerades  $m$  ist die zugehörige Eigenfunktion ungerade, für gerades  $m$  ist die Eigenfunktion gerade und damit radialsymmetrisch. Die Eigenwerte des Eigenwertproblems (4.2) sind daher durch  $bq = (\omega + 2j(q-1))(\omega + (2j+1)(q-1))$  für  $j \in \mathbb{N}_0$  gegeben. Die zugehörigen Eigenfunktionen und deren Eigenschaften ergeben sich aus Proposition A.2.  $\square$

### A.3. Eigenschaften des Raumes $E_\sigma$

Wir zeigen, dass im Fall  $n = 1$  die Funktion

$$F : E_\sigma \times \mathbb{R} \rightarrow E_\sigma \quad (u, v, b) \mapsto \begin{pmatrix} u - (-\Delta + 1)^{-1}(|u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q) \\ v - (-\Delta + \omega^2)^{-1}(|v|^{2q-2}v + b|v|^{q-2}v|u|^q) \end{pmatrix}$$

den "Kompaktheitsvoraussetzungen" des globalen Verzweigungssatzes von Rabinowitz genügt, d.h. dass  $I - F : E_\sigma \times \mathbb{R} \rightarrow E_\sigma$  wohldefiniert und kompakt ist. Der Raum  $E_\sigma$  mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_\sigma}$  ist hierbei wie in (2.0.7) definiert. Wir verwenden, dass für  $\kappa > 0$  der Operator  $(-\Delta + \kappa^2)^{-1}$  durch

$$((-\Delta + \kappa^2)^{-1}f)(x) = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\kappa|x-y|} f(y) dy = \int_0^\infty \Gamma(\kappa x, \kappa y) f(y) dy$$

für  $\Gamma(x, y) = \frac{1}{2}(e^{-|x-y|} + e^{-|x+y|})$  gegeben ist.

**Lemma A.4.** *Sei  $n = 1, \omega > 0, q > 1$  und sei  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  mit  $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, 1)$  und*

$$q\sigma_1 + (q-2)\omega\sigma_2 > 0, \quad (q-2)\sigma_1 + q\omega\sigma_2 > 0. \quad (4.8)$$

(i)  $E_\sigma$  ist Hilbertraum und  $C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}) \times C_{0,r}^\infty(\mathbb{R})$  ist ein dichter Unterraum<sup>1</sup>.

(ii) Für alle  $(u, v) \in E_\sigma$  gilt

$$|u(r)| \leq \|(u, v)\|_{E_\sigma} e^{-\sigma_1 r}, \quad |v(r)| \leq \|(u, v)\|_{E_\sigma} e^{-\sigma_2 \omega r} \quad (r \geq 0).$$

(iii) Die Abbildung  $Id - F$  ist kompakt.

**Beweis:**

(i) Dies folgt aus Satz 2.5 in [43].

(ii) Für  $u \in C_{0,r}^\infty(\mathbb{R})$  gilt die Ungleichung

$$u(r)^2 \leq 2 \int_r^\infty |uu'| dx \leq e^{-2\sigma_1 r} \int_r^\infty e^{2\sigma_1 x} (u'^2 + u^2) dx \leq \|(u, v)\|_{E_\sigma}^2 e^{-2\sigma_1 r}.$$

Analog folgt  $v(r)^2 \leq \|(u, v)\|_{E_\sigma}^2 e^{-2\sigma_2 \omega r}$ . Aus einem Dichtheitsargument folgt die Ungleichung für alle  $(u, v) \in E_\sigma$ .

(iii) Für den Nachweis der Kompaktheit beweisen wir zunächst eine nützliche Abschätzung. Für  $u \in C_{0,r}^\infty(\mathbb{R})$  und  $r \geq 0$  gilt wegen  $u'(0) = 0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} (u^2 + u'^2) dx &= \int_0^\infty (e^{2\sigma_1 x} uu')' - 2\sigma_1 e^{2\sigma_1 x} uu' + e^{2\sigma_1 x} u(-u'' + u) dx \\ &= -2\sigma_1 \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} uu' dx + \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} u(-u'' + u) dx \\ &\leq \sigma_1 \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} (u^2 + u'^2) dx + \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} u(-u'' + u) dx \end{aligned}$$

Eine entsprechende Ungleichung für  $v$  und ein Dichtheitsargument liefert für alle  $(u, v) \in E_\sigma$  die Abschätzung

$$\|(u, v)\|_{E_\sigma}^2 \leq \frac{1}{1 - \sigma_1} \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} u(-u'' + u) dx + \frac{1}{1 - \sigma_2} \int_0^\infty e^{2\sigma_2 \omega x} v(-v'' + \omega^2 v) dx.$$

Hieraus folgt für alle  $(f, g) \in E_\sigma$

$$\begin{aligned} &\left\| \left( (-\Delta + 1)^{-1} f, (-\Delta + \omega^2)^{-1} g \right) \right\|_{E_\sigma}^2 \\ &\leq \frac{1}{1 - \sigma_1} \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} \left( (-\Delta + 1)^{-1} f \right)(x) f(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{1 - \sigma_2} \int_0^\infty e^{2\sigma_2 \omega x} \left( (-\Delta + \omega^2)^{-1} g \right)(x) g(x) dx \\ &= \frac{1}{1 - \sigma_1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} \Gamma(x, y) f(x) f(y) dx dy \\ &\quad + \frac{\omega}{1 - \sigma_2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2\sigma_2 \omega x} \Gamma(\omega x, \omega y) g(x) g(y) dx dy. \end{aligned} \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>  $C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}) = \{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) : \phi(x) = \phi(-x)\}$

Wir kommen nun zum Beweis der Kompaktheit.

Sei  $(u_m, v_m)$  beschränkte Folge in  $E_\sigma$ . Dann gilt nach Übergang zu einer Teilfolge  $(u_m, v_m) \rightarrow (u, v) \in E_\sigma$  und damit  $u_m \rightarrow u, v_m \rightarrow v$  punktweise. Sei nun

$$\begin{aligned} f_m &:= |u_m|^{2q-2}u_m + b|u_m|^{q-2}u_m|v_m|^q, & f &:= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\ g_m &:= |v_m|^{2q-2}v_m + b|v_m|^{q-2}v_m|u_m|^q, & g &:= |v|^{2q-2}v + b|v|^{q-2}v|u|^q. \end{aligned}$$

Dann gilt  $f_m \rightarrow f, g_m \rightarrow g$  punktweise und aus (ii) folgt

$$\begin{aligned} |f_m| + |f| &\leq (1 + |b|)(|u_m|^{2q-1} + |u_m|^{q-1}|v_m|^q + |u|^{2q-1} + |u|^{q-1}|v|^q) \\ &\leq C(e^{-(2q-1)\sigma_1 x} + e^{-((q-1)\sigma_1 + q\omega\sigma_2)x}), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} |g_m| + |g| &\leq (1 + |b|)(|v_m|^{2q-1} + |v_m|^{q-1}|u_m|^q + |v|^{2q-1} + |v|^{q-1}|u|^q) \\ &\leq C(e^{-(2q-1)\omega\sigma_2 x} + e^{-((q-1)\omega\sigma_2 + q\sigma_1)x}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Insbesondere gilt  $(f_m - f, g_m - g) \in E_\sigma$  wegen (4.8). Die Abschätzung (4.9) liefert

$$\begin{aligned} &\|(Id - F)(u_m, v_m) - (Id - F)(u, v)\|_{E_\sigma}^2 \\ &= \left\| \left( (-\Delta + 1)^{-1}(f_m - f), (-\Delta + \omega^2)^{-1}(g_m - g) \right) \right\|_{E_\sigma}^2 \\ &\leq \frac{1}{1 - \sigma_1} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2\sigma_1 x} \Gamma(x, y) |f_m(x) - f(x)| |f_m(y) - f(y)| dx dy \\ &\quad + \frac{\omega}{1 - \sigma_2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{2\sigma_2 \omega x} \Gamma(\omega x, \omega y) |g_m(x) - g(x)| |g_m(y) - g(y)| dx dy \end{aligned}$$

Aus den Ungleichungen

$$e^{2\sigma_1 x} \Gamma(x, y) \leq e^{\sigma_1 x} e^{\sigma_1 y}, \quad e^{2\sigma_2 \omega x} \Gamma(\omega x, \omega y) \leq e^{\sigma_2 \omega_2 x} e^{\sigma_2 \omega_2 y}.$$

sowie (4.10),(4.11) erhalten wir die folgenden Abschätzungen für  $x, y \geq 0$

$$\begin{aligned} &e^{2\sigma_1 x} \Gamma(x, y) |f_m(x) - f(x)| |f_m(y) - f(y)| \\ &\leq C(e^{-(2q-2)\sigma_1 x} + e^{-((q-2)\sigma_1 + q\omega\sigma_2)x}) (e^{-(2q-2)\sigma_1 y} + e^{-((q-2)\sigma_1 + q\omega\sigma_2)y}), \\ &e^{2\sigma_2 \omega x} \Gamma(\omega x, \omega y) |g_m(x) - g(x)| |g_m(y) - g(y)| \\ &\leq C(e^{-(2q-2)\sigma_2 \omega x} + e^{-((q-2)\omega\sigma_2 + q\sigma_1)x}) (e^{-(2q-2)\sigma_2 \omega y} + e^{-((q-2)\omega\sigma_2 + q\sigma_1)y}). \end{aligned}$$

Per Wahl von  $\sigma_1, \sigma_2$  in (4.8) ist diese Majorante integrierbar und es folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\|(Id - F)(u_m, v_m) - (Id - F)(u, v)\|_{E_\sigma} \rightarrow 0.$$

Wir erhalten die Kompaktheit von  $Id - F$ .

□

#### A.4. Eine Verschärfung des Satzes von Crandall-Rabinowitz

In diesem Abschnitt beweisen wir den Satz von Crandall-Rabinowitz unter abgeschwächten Voraussetzungen. Um die Existenz einer stetig differenzierbaren Kurve von Lösungen zu zeigen, wird üblicherweise verlangt<sup>2</sup>, dass die Funktion  $F$ , in unserem Fall

$$F(u, v, b) = \begin{pmatrix} u - (-\Delta + 1)^{-1}(|u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q) \\ v - (-\Delta + \omega^2)^{-1}(|v|^{2q-2}v + b|v|^{q-2}v|u|^q) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

zweifach stetig differenzierbar in einer offenen Umgebung des potentiellen Verzweigungspunkts ist. Dies stellt beim Nachweis lokaler Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  ein Problem dar, da im Fall  $1 < q < 2$  oder  $2 < q < 3$  die durch (4.12) gegebene Funktion  $F$  diese Voraussetzung nicht erfüllt. Einen Beweis dieser Behauptung liefern wir in Proposition A.5. Der Beweis des Satzes von Crandall-Rabinowitz basiert auf einer klassischen Lyapunov-Schmidt-Reduktion und damit auf einer Anwendung des Satzes über implizit definierte Funktionen. Die einfache stetige Differenzierbarkeit  $F$  ist daher eine fundamentale Voraussetzung, die wir auch in der in diesem Abschnitt präsentierten verschärften Form des Satzes benötigen. Unser Ziel ist zu zeigen, dass die Forderung nach zweifacher stetiger Differenzierbarkeit in einer offenen Umgebung des potentiellen Verzweigungspunkts hingegen durch eine schwächere Differenzierbarkeitsbedingung ersetzbar ist. Die folgende Proposition zeigt, dass eine Modifikation des Satzes von Crandall-Rabinowitz bei der Verzweigungsanalyse zu  $\mathcal{T}_3$  für Exponenten  $q$  mit  $1 < q < 2$  oder  $2 < q < 3$  unumgänglich ist.

**Proposition A.5.** *Im Fall  $1 < q < 2$  oder  $2 < q < 3$  ist  $F$  in keiner nichtleeren offenen Teilmenge von  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  zweifach Gâteaux-differenzierbar.*

**Beweis:**

Sei  $W \subset H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  eine nichtleere offene Menge. Da die radialsymmetrischen Testfunktionen dicht in  $H_r^1(\mathbb{R}^n)$  liegen, existiert ein  $(u, v, b) \in W$  und eine Kugel  $B \subset \mathbb{R}^n$  mit

$$u \equiv 0 \text{ auf } B^c, \quad v \not\equiv 0 \text{ auf } B^c, \quad b \neq 0.$$

Sei nun  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  eine nichtnegative Testfunktion mit  $\text{supp}(\chi) \subset B^c$  und  $\chi v \not\equiv 0$ . Wir zeigen, dass  $F_x^1$  in  $(u, v, b)$  nicht Gâteaux-differenzierbar in Richtung  $(\chi, 0, 0)$  ist. Da die Funktion  $(u, v) \mapsto F_x^1(u, v, b) - b(q-1)h(u, v)$  für  $h(u, v)[\phi] := (-\Delta + 1)^{-1}(|u|^{q-2}|v|^q\phi_1)$  wegen der Formeln (2.0.8), (2.0.9) Fréchet-differenzierbar ist, genügt es zu zeigen, dass  $h$  nicht Gâteaux-differenzierbar in Richtung  $(\chi, 0)$  ist. In der Tat folgt aus  $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(\chi) = \emptyset$  für  $t \neq 0$  die Gleichung  $|u + t\chi|^{q-2} = |u|^{q-2} + |t|^{q-2}\chi^{q-2}$  und somit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{h(u + t\chi, v) - h(u, v)}{t} \right\| &= |t|^{-1} \sup_{\phi_1, \phi_2 \in H_r^1(\mathbb{R}^n), \|(\phi_1, \phi_2)\|=1} \|h(u + t\chi, v)[\phi] - h(u, v)[\phi]\| \\ &= |t|^{-1} \sup_{\phi_1 \in H_r^1(\mathbb{R}^n), \|\phi_1\|=1} \|(-\Delta + 1)^{-1}(|u + t\chi|^{q-2}|v|^q\phi_1 - |u|^{q-2}|v|^q\phi_1)\| \end{aligned}$$

<sup>2</sup>vgl. Satz 1.3 in [24], Satz 1.3.3 in [17] oder Satz I.5.1. in [42]

$$\begin{aligned}
&= |t|^{q-3} \sup_{\phi_1 \in H_r^1(\mathbb{R}^n), \|\phi_1\|=1} \|(-\Delta + 1)^{-1}(\chi^{q-2}|v|^q\phi_1)\| \\
&\geq |t|^{q-3} \|(-\Delta + 1)^{-1}(\chi^{q-1}|v|^q)\| \cdot \|\chi\|^{-1}.
\end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{t \rightarrow 0} |t|^{q-3} = +\infty$  ist  $h$  nicht Gâteaux-differenzierbar.  $\square$

Daher ist der klassische Satz von Crandall-Rabinowitz beim Nachweis der lokalen Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  für Exponenten  $q \in (2, 3)$  nicht anwendbar. Wir ersetzen die Voraussetzung  $F \in C^2(U \times I, Z)$  in Satz 2.0.3 durch die folgende Bedingung:

(V) Es gilt  $F \in C^1(U \times I, Z)$ , die Abbildungen  $F_{x\lambda}(0, \cdot) = F_{\lambda x}(0, \cdot)$  und  $F_{xx}(0, \cdot)$  mögen existieren und seien stetig in  $I$  und es gelte für alle kompakten Teilmengen  $I_0 \subset I$

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda \in I_0} \|F_x(x, \lambda)[\cdot] - F_x(0, \lambda)[\cdot] - F_{xx}(0, \lambda)[x, \cdot]\| &= o(\|x\|), \\
\sup_{\lambda \in I_0} \|F_\lambda(x, \lambda) - F_{\lambda x}(0, \lambda)[x]\| &= o(\|x\|).
\end{aligned}$$

Die Voraussetzung (V) ist erfüllt, wenn  $F$  der Form  $F(x, \lambda) = \sum_{j=1}^m F_j(x)\Lambda_j(\lambda)$  ist, wobei für alle  $j \in \{1, \dots, m\}$  die Funktionen  $\Lambda_j, F_j$  stetig differenzierbar auf  $I$  bzw. auf  $U$  sind und  $F_j$  zweifach differenzierbar im Punkt 0 ist. Die bei der lokalen Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  zu untersuchende Funktion  $\tilde{F}(u, v, b) := F(u_b + u, v_b + v, b)$  ist dieser Form. Hierbei bezeichnen  $(u_b, v_b)$  die Lösungen der Familie  $\mathcal{T}_3$ , d.h.  $u_b = v_b = (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}}u_0$  für  $b > -1$ . Der Satz von Crandall-Rabinowitz ist daher in seiner verschärften Form anwendbar, wenn wir zeigen können, dass  $F$  zweifach differenzierbar in  $(u_b, v_b, b)$  ist. In Proposition A.6 zeigen wir, dass dies für  $2 < q < 3$  der Falls ist.

**Proposition A.6.** *Sei  $2 < q < 3$ . Dann ist  $F$  zweifach differenzierbar in  $(u_b, v_b, b)$ .*

**Beweis:**

Wir zeigen nur die entsprechende Aussage für die erste Komponente  $F^1$  von  $F = (F^1, F^2)$ . In Anbetracht der stetigen Differenzierbarkeit von  $F^1$  und der Formeln für  $F_x^1$  aus (2.0.8) genügt es zu zeigen, dass die Abbildung  $h(u, v)[\phi] := (-\Delta + 1)^{-1}(|u|^{q-2}|v|^q\phi_1)$  differenzierbar in  $(u_b, v_b)$  ist. Für  $\phi, \psi \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  zeigen wir daher die Ungleichung

$$|h(u_b + \psi_1, v_b + \psi_2)[\phi] - h(u_b, v_b)[\phi]| \leq C\|\phi\|o(\|\psi\|).$$

Seien hierzu  $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$  gegeben durch  $\psi_1 = u_b\tilde{\psi}_1, \psi_2 = v_b\tilde{\psi}_2$ . Wegen  $u_b = v_b$  genügt es, die Ungleichung

$$\left\| (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_b^{2q-2} \phi_1 \left( |1 + \tilde{\psi}_1|^{q-2} |1 + \tilde{\psi}_2|^q - 1 - (q-2)\tilde{\psi}_1 - q\tilde{\psi}_2 \right) \right) \right\| \leq C\|\phi\|o(\|\psi\|)$$

zu zeigen. Wegen  $2 < q < 3$  gilt die folgende Ungleichung für  $s, t \in \mathbb{R}$

$$\left| |1 + s|^{q-2} |1 + t|^q - 1 - (q-2)s - qt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| |1 + s|^{q-2} (|1 + t|^q - 1 - qt) + (1 + qt) (|1 + s|^{q-2} - 1 - (q-2)s) + q(q-2)st \right| \\
&\leq C(1 + |s|)^{q-2} (|t|^2 + |t|^q) + C(1 + |t|) (s^2 1_{\{|s| \leq \frac{1}{2}\}} + |s| 1_{\{|s| \geq \frac{1}{2}\}}) + C|s||t| \\
&\leq C(t^2 + |t|^q + |s|^{q-2}t^2 + |s|^{q-2}|t|^q) + C(s^2 + |t||s|) + C(s^2 + t^2) \\
&\leq C(s^2 + t^2 + |s|^{2q-2} + |t|^{2q-2}).
\end{aligned}$$

Wegen  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  existiert ein  $p \in [\frac{2n}{n+2}, 2] \cap (\frac{2}{2q-1}, \frac{2n}{(n-2)_+(2q-1)})$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
&\left\| (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_b^{2q-2} \phi_1 \left( |1 + \tilde{\psi}_1|^{q-2} |1 + \tilde{\psi}_2|^q - 1 - (q-2)\tilde{\psi}_1 - q\tilde{\psi}_2 \right) \right) \right\| \\
&\leq C \left\| (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_b^{2q-2} \phi_1 \left( \tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2 + |\tilde{\psi}_1|^{2q-2} + |\tilde{\psi}_2|^{2q-2} \right) \right) \right\| \\
&\leq C \left\| u_b^{2q-2} \phi_1 \left( \tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2 + |\tilde{\psi}_1|^{2q-2} + |\tilde{\psi}_2|^{2q-2} \right) \right\|_p \\
&\leq C \left\| \phi_1 \left( u_b^{2q-4} \psi_1^2 + u_b^{2q-4} \psi_2^2 + |\psi_1|^{2q-2} + |\psi_2|^{2q-2} \right) \right\|_p.
\end{aligned}$$

Aus der Hölder-Ungleichung  $\|w_1 w_2\|_p \leq \|w_1\|_{(2q-1)p} \|w_2\|_{\frac{(2q-1)p}{2q-2}}$  folgt

$$\begin{aligned}
&\left\| \phi_1 \left( u_b^{2q-4} \psi_1^2 + u_b^{2q-4} \psi_2^2 + |\psi_1|^{2q-2} + |\psi_2|^{2q-2} \right) \right\|_p \\
&\leq C \|\phi_1\|_{(2q-1)p} \left( \|u_b^{2q-4} \psi_1^2\|_{\frac{(2q-1)p}{2q-2}} + \|u_b^{2q-4} \psi_2^2\|_{\frac{(2q-1)p}{2q-2}} + \|\psi_1\|_{\frac{(2q-1)p}{2q-2}}^{2q-2} + \|\psi_2\|_{\frac{(2q-1)p}{2q-2}}^{2q-2} \right) \\
&\leq C \|\phi_1\|_{(2q-1)p} \left( \|u_b\|_{(2q-1)p}^{2q-4} (\|\psi_1\|_{(2q-1)p}^2 + \|\psi_2\|_{(2q-1)p}^2) + \|\psi_1\|_{(2q-1)p}^{2q-2} + \|\psi_2\|_{(2q-1)p}^{2q-2} \right).
\end{aligned}$$

Wegen  $2 < (2q-1)p < \frac{2n}{(n-2)_+}$  ist die Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{(2q-1)p}(\mathbb{R}^n)$  stetig und wir erhalten aus den beiden obigen Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&\left\| (-\Delta + 1)^{-1} \left( u_b^{2q-2} \phi_1 \left( |1 + \tilde{\psi}_1|^{q-2} |1 + \tilde{\psi}_2|^q - 1 - (q-2)\tilde{\psi}_1 - q\tilde{\psi}_2 \right) \right) \right\| \\
&\leq C \|\phi_1\| (\|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2 + \|\psi_1\|^{2q-2} + \|\psi_2\|^{2q-2}) \\
&\leq \|\phi\| o(\|\psi\|),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.  $\square$

Wir kommen schließlich zum Beweis des Crandall-Rabinowitz unter abgeschwächten Voraussetzungen.

**Satz A.7.** *Der Satz von Crandall-Rabinowitz (Satz 2.0.3) gilt bis auf Aussage (iii) unter der schwächeren Voraussetzung (V) statt  $F \in C^2(U \times I, Z)$ . Gilt  $F \in C^2(U \times I, Z)$  und ist  $F$  in  $(0, \lambda_0)$  dreifach differenzierbar, so gilt im Falle  $\hat{\lambda}'(0) = 0$  die Formel (2.0.4).*

**Beweis:**

Wir beginnen mit einer Lyapunov-Schmidt-Reduktion und definieren hierzu die Unterräume  $X_1 \subset X, Z_1 \subset Z$  durch

$$X_1 := \ker(F_x(0, \lambda_0)) = \text{span}\{\phi\}, \quad Z_1 := \text{ran}(F_x(0, \lambda_0)).$$

Seien  $X_2 \subset X, Z_2 \subset Z$  Unterräume mit  $X = X_1 \oplus X_2, Z = Z_1 \oplus Z_2$  und sei  $Q : Z \rightarrow Z_2$  ein stetiger Projektor. Für  $s \in \mathbb{R}, x_2 \in X_2, \lambda \in \mathbb{R}$  mit  $s\phi + x_2 \in U, \lambda \in I$  gilt  $F(s\phi + x_2, \lambda) = 0$  genau dann, wenn die Gleichungen

$$QF(s\phi + x_2, \lambda) = 0, \quad (I - Q)F(s\phi + x_2, \lambda) = 0$$

erfüllt sind. Da  $(I - Q)F_x(0, \lambda_0)|_{X_2} : X_2 \rightarrow Z_1$  stetig und per Definition von  $X_2$  invertierbar ist, liefert der Satz über implizit definierte Funktionen eine offene Umgebung  $W \subset \mathbb{R} \times I$  von  $(0, \lambda_0)$  und eine eindeutig bestimmte stetig differenzierbare Funktion  $w : W \rightarrow X_2$  mit der Eigenschaft

$$(I - Q)F(s\phi + w(s, \lambda), \lambda) = 0 \quad \text{für } (s, \lambda) \in W. \quad (4.13)$$

Es bleibt daher eine stetig differenzierbare Kurve  $\hat{\lambda} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow I$  so zu bestimmen, dass  $QF(s\phi + w(s, \hat{\lambda}(s)), \hat{\lambda}(s)) = 0$  für  $|s| < \varepsilon$  gilt. Seien  $g, h : W \rightarrow Z_2$  gegeben durch

$$h(s, \lambda) := \begin{cases} \frac{g(s, \lambda)}{s} & , s \neq 0 \\ g_s(0, \lambda) & , s = 0 \end{cases} \quad \text{für } g(s, \lambda) := QF(s\phi + w(s, \lambda), \lambda)$$

Wir zeigen im ersten bis dritten Schritt, dass  $h$  stetig differenzierbar in  $W$  ist und  $h_\lambda(0, \lambda_0) = QF_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi]$  gilt. Aus der Voraussetzung  $F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi] \notin \text{ran}(F_x(0, \lambda_0))$  folgt dann  $h_\lambda(0, \lambda_0) \neq 0$  und wir erhalten im vierten Schritt die Existenz einer stetig differenzierbaren Kurve  $\hat{\lambda}$  mit  $h(s, \hat{\lambda}(s)) = 0$  für  $|s| < \varepsilon$  und damit die zentrale Behauptung des Satzes. Im fünften Schritt beweisen wir die Verzweigungsformeln (2.0.3), (2.0.4).

Wir schreiben im Folgenden  $F_{x_1}(x, \lambda) : X_1 \rightarrow Z, F_{x_2}(x, \lambda) : X_2 \rightarrow Z$  für die Fréchet-Ableitungen bezüglich  $X_1$  und  $X_2$ . Entsprechend sind  $F_{xx_1}(0, \lambda), F_{xx_2}(0, \lambda)$  zu interpretieren. Im Folgenden verwenden wir Abschätzungen der Form  $f(s, \lambda) = o(s)$ , wobei dies stets im Sinne  $\sup_{\lambda \in I_0} f(s, \lambda) = o(s)$  zu verstehen ist, wobei  $I_0 \subset I$  eine beliebige aber feste kompakte Teilmenge von  $I$  bezeichnet. Wegen  $w \in C^1(W)$  gilt  $w(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda \in I$  sowie  $s\phi + w(s, \lambda) = s(\phi + w_s(0, \lambda)) + o(s)$  für  $s \rightarrow 0$ . Insbesondere verwenden wir  $f(s, \lambda) = o(s\phi + w(s, \lambda)) \Rightarrow f(s, \lambda) = o(s)$  für  $s \rightarrow 0$ .

1. Schritt: Eigenschaften von  $w$ . Wir zeigen zunächst die Existenz und Stetigkeit der Funktionen  $w_{ss}(0, \cdot), w_{s\lambda}(0, \cdot) = w_{\lambda s}(0, \cdot)$  sowie

$$w_s(0, \lambda_0) = 0, \quad w(0, \lambda) = w_\lambda(0, \lambda) = 0. \quad (4.14)$$

Ferner zeigen wir für kompakte Mengen  $I_0 \subset I$  die in  $\lambda \in I_0$  gleichmäßige Abschätzung

$$w_s(s, \lambda) = w_s(0, \lambda) + sw_{ss}(0, \lambda) + o(s), \quad w_\lambda(s, \lambda) = sw_{s\lambda}(0, \lambda) + o(s). \quad (4.15)$$

Sei  $L(s, \lambda) := (I - Q)F_{x_2}(s\phi + w(s, \lambda), \lambda)$  für  $(s, \lambda) \in W$ . Da  $L(0, \lambda_0)$  invertierbar ist, ist auch  $L(s, \lambda)$  für  $(s, \lambda)$  in einer kleinen Umgebung von  $(0, \lambda_0)$  und damit in  $W$  nach eventueller Verkleinerung der Menge invertierbar. Aus Voraussetzung (V) folgt

$$L(s, \lambda) = L(0, \lambda) + s \cdot L_s(0, \lambda) + o(s) \quad \text{für } L_s(0, \lambda)[\cdot] = (I - Q)F_{xx_2}(0, \lambda)[\phi + w_s(0, \lambda), \cdot]$$

Ferner erhalten wir

$$\begin{aligned}
& L(s, \lambda)^{-1} - L(0, \lambda)^{-1} + s \cdot L(0, \lambda)^{-1} L_s(0, \lambda) L(0, \lambda)^{-1} \\
&= L(s, \lambda)^{-1} \left( I - L(s, \lambda) L(0, \lambda)^{-1} + s \cdot L(s, \lambda) L(0, \lambda)^{-1} L_s(0, \lambda) L(0, \lambda)^{-1} \right) \\
&= L(s, \lambda)^{-1} \left( I - (L(0, \lambda) + s L_s(0, \lambda)) L(0, \lambda)^{-1} + s \cdot L_s(0, \lambda) L(0, \lambda)^{-1} + o(s) \right) \\
&= o(s).
\end{aligned}$$

Differenzieren der Gleichung (4.13) liefert

$$\begin{aligned}
w_s(s, \lambda) &= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) F_x(s\phi + w(s, \lambda), \lambda) [\phi], \\
w_\lambda(s, \lambda) &= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) F_\lambda(s\phi + w(s, \lambda), \lambda).
\end{aligned}$$

Wegen  $\phi \in \ker(F_x(0, \lambda_0))$  erhalten wir  $w_s(0, \lambda_0) = 0$  und aus  $F(0, \lambda) = F_\lambda(0, \lambda) = 0$  folgt  $w(0, \lambda) = w_\lambda(0, \lambda) = 0$ . Wir erhalten (4.14). Aus der asymptotischen Entwicklung für  $L(s, \lambda), L(s, \lambda)^{-1}$  für  $s \rightarrow 0$  sowie Voraussetzung (V) erhalten wir

$$\begin{aligned}
w_s(s, \lambda) &= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) F_{x_1}(s\phi + w(s, \lambda), \lambda) [\phi] \\
&= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) \left( F_{x_1}(0, \lambda) [\phi] + F_{xx_1}(0, \lambda) [s\phi + w(s, \lambda), \phi] + o(s) \right) \\
&= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) \left( F_{x_1}(0, \lambda) [\phi] + s F_{xx_1}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda), \phi] + o(s) \right) \\
&= -L(0, \lambda)^{-1} (I - Q) \left( F_{x_1}(0, \lambda) [\phi] + s F_{xx_1}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda), \phi] \right) \\
&\quad + s L(0, \lambda)^{-1} L_s(0, \lambda) L(0, \lambda)^{-1} (I - Q) F_x(0, \lambda) [\phi] + o(s).
\end{aligned}$$

Ebenso folgt

$$\begin{aligned}
w_\lambda(s, \lambda) &= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) F_\lambda(s\phi + w(s, \lambda), \lambda) \\
&= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) \left( F_{x\lambda}(0, \lambda) [s\phi + w(s, \lambda)] + o(s) \right) \\
&= -L(s, \lambda)^{-1} (I - Q) \left( s F_{x\lambda}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda)] + o(s) \right) \\
&= -s \cdot L(0, \lambda)^{-1} (I - Q) F_{x\lambda}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda)] + o(s)
\end{aligned}$$

und wir erhalten (4.15). Insbesondere ergeben sich die Formeln

$$\begin{aligned}
w_{ss}(0, \lambda) &= -L(0, \lambda)^{-1} (I - Q) F_{xx_1}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda), \phi] \\
&\quad + L(0, \lambda)^{-1} L_s(0, \lambda) L(0, \lambda)^{-1} (I - Q) F_{x_1}(0, \lambda) [\phi], \\
w_{s\lambda}(0, \lambda) &= -L(0, \lambda)^{-1} (I - Q) F_{x\lambda}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda)].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

2. Schritt: Eigenschaften von  $g$ . Aus der Definition von  $g$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
g_s(s, \lambda) &= Q F_x(s\phi + w(s, \lambda), \lambda) [\phi + w_s(s, \lambda)] \\
g_\lambda(s, \lambda) &= Q F_x(s\phi + w(s, \lambda)) [w_\lambda(s, \lambda)] + Q F_\lambda(s\phi + w(s, \lambda)) \\
g_{ss}(0, \lambda) &= Q F_{xx}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda), \phi + w_s(0, \lambda)] + Q F_x(0, \lambda) [w_{ss}(0, \lambda)], \\
g_{s\lambda}(0, \lambda) &= Q F_{x\lambda}(0, \lambda) [\phi + w_s(0, \lambda)] + Q F_x(0, \lambda) [w_{s\lambda}(0, \lambda)].
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Insbesondere gilt wegen  $F_x(0, \lambda_0)[w_{ss}(0, \lambda_0)], F_x(0, \lambda_0)[w_{s\lambda}(0, \lambda_0)] \in \text{ran}(F_x(0, \lambda_0))$

$$g_{ss}(0, \lambda_0) = QF_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi], \quad g_{s\lambda}(0, \lambda_0) = QF_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi]. \quad (4.18)$$

Es folgt aus Voraussetzung (V) und (4.15)

$$\begin{aligned} g_s(s, \lambda) &= QF_x(0, \lambda)[\phi + w_s(s, \lambda)] + QF_{xx}(0, \lambda)[s\phi + w(s, \lambda), \phi + w_s(s, \lambda)] + o(s) \\ &= QF_x(0, \lambda)[\phi + w_s(0, \lambda) + sw_{ss}(0, \lambda) + o(s)] \\ &\quad + QF_{xx}(0, \lambda)[s\phi + sw_s(0, \lambda) + o(s), \phi + w_s(0, \lambda) + o(1)] + o(s) \\ &= QF_x(0, \lambda)[\phi + w_s(0, \lambda)] \\ &\quad + s \cdot \left( QF_x(0, \lambda)[w_{ss}(0, \lambda)] + QF_{xx}(0, \lambda)[\phi + w_s(0, \lambda), \phi + w_s(0, \lambda)] \right) + o(s) \\ &= g_s(0, \lambda) + sg_{ss}(0, \lambda) + o(s). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ferner gilt wegen  $w(0, \lambda) = w_\lambda(0, \lambda) = 0$  und Voraussetzung (V)

$$\begin{aligned} g_\lambda(s, \lambda) &= QF_x(s\phi + w(s, \lambda), \lambda)[w_\lambda(s, \lambda)] + QF_\lambda(s\phi + w(s, \lambda), \lambda) \\ &= QF_x(0, \lambda)[w_\lambda(s, \lambda)] + QF_{xx}(0, \lambda)[s\phi + w(s, \lambda), w_\lambda(s, \lambda)] + o(s) \\ &\quad + QF_{x\lambda}(0, \lambda)[s\phi + w(s, \lambda)] + o(s) \\ &= s \cdot \left( QF_x(0, \lambda)[w_{s\lambda}(0, \lambda)] + QF_{x\lambda}(0, \lambda)[\phi + w_s(0, \lambda)] \right) + o(s) \\ &= g_\lambda(s, \lambda) - sg_{s\lambda}(0, \lambda) = o(s). \end{aligned} \quad (4.20)$$

3. Schritt:  $h \in C^1(W)$ . Es gilt

$$h_s(0, \lambda) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s, \lambda) - sg(0, \lambda)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_s(s, \lambda) - g(0, \lambda)}{2s} = \frac{1}{2}g_{ss}(0, \lambda) \quad (4.21)$$

und wir erhalten aus (4.19)-(4.20)

$$\begin{aligned} h_s(s, \lambda) - h_s(0, \lambda) &= -\frac{1}{s^2}g(s, \lambda) + \frac{1}{s}g_s(s, \lambda) - \frac{1}{2}g_{ss}(0, \lambda) \\ &= -\frac{1}{s^2} \left( g(0, \lambda) + sg_s(0, \lambda) + \frac{s^2}{2}g_{ss}(0, \lambda) + o(s^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{s} \left( g_s(0, \lambda) + sg_{ss}(0, \lambda) + o(s) \right) - \frac{1}{2}g_{ss}(0, \lambda) \\ &= o(1), \\ h_\lambda(s, \lambda) - h_\lambda(0, \lambda) &= \frac{1}{s} \left( g_\lambda(s, \lambda) - sg_{s\lambda}(0, \lambda) \right) = o(1). \end{aligned}$$

Aufgrund der Formeln für  $w_{ss}(0, \lambda), g_{ss}(0, \lambda)$  ist die Abbildung  $h_s(0, \cdot) = \frac{1}{2}g_{ss}(0, \cdot)$  nach Voraussetzung (V) stetig. Dasselbe gilt für  $h_\lambda(0, \cdot) = g_{s\lambda}(0, \cdot)$ . Aus der soeben gezeigten bezüglich  $\lambda$  gleichmäßigen Konvergenz  $h_s(s, \lambda) \rightarrow h_s(0, \lambda)$  und  $h_\lambda(s, \lambda) \rightarrow h_\lambda(0, \lambda)$  sind die partiellen Ableitungen von  $h$  stetig. Es folgt  $h \in C^1(W)$ .

4.Schritt: Folgerungen. Wegen (4.18) gilt

$$h_\lambda(0, \lambda_0) = g_{s\lambda}(0, \lambda_0) = QF_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi] \neq 0. \quad (4.22)$$

Da  $h$  stetig differenzierbar ist, folgt aus dem Satz über implizit definierte Funktionen die Existenz einer Kurve  $\hat{\lambda} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow I$  mit der Eigenschaft  $h(s, \hat{\lambda}(s)) = 0$  für  $|s| < \varepsilon$ . Es ergeben sich die Aussagen des Satzes von Crandall-Rabinowitz (Satz 2.0.3) mit Ausnahme der Verzweigungsformeln aus (ii) und (iii).

5.Schritt: Beweis der Verzweigungsformeln. Sei  $\phi' \in \text{ran}(F_x(0, \lambda_0))^+$  mit  $\|\phi'\|_{Z'} = 1$  und sei  $Q : Z \rightarrow Z_2$  gegeben durch  $Qz = \langle z, \phi' \rangle \phi^*$  mit  $\phi^* \in Z_2, \|\phi^*\| = 1$  und  $\langle \phi^*, \phi' \rangle = 1$ . Aus (4.21) und (4.18) folgt

$$h_s(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}g_{ss}(0, \lambda_0) = \frac{1}{2}QF_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi]. \quad (4.23)$$

Sei  $\pi : Z_2 \rightarrow \mathbb{R}, \lambda\phi^* \mapsto \lambda$  der kanonische Isomorphismus zwischen den eindimensionalen Räumen  $Z_2$  und  $\mathbb{R}$ . Mit (4.22), (4.23) und  $h(s, \hat{\lambda}(s)) = 0$  für  $|s| < \varepsilon$  erhalten wir (ii):

$$\hat{\lambda}'(0) = -\frac{\pi(h_s(0, \lambda_0))}{\pi(h_\lambda(0, \lambda_0))} = -\frac{1}{2} \frac{\pi(QF_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi])}{\pi(QF_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi])} = -\frac{1}{2} \frac{\langle F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi], \phi' \rangle}{\langle F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi], \phi' \rangle}.$$

Zum Beweis von (iii) sei  $F \in C^2(U \times I, Z)$  und sei  $F$  dreifach in  $(0, \lambda_0)$  differenzierbar. Dann gilt  $w, g \in C^2(W)$  und die dritten Ableitungen  $w_{sss}(0, \lambda_0), g_{sss}(0, \lambda_0)$  existieren. Für  $|s| < \varepsilon$  erhalten wir

$$g_{ss}(s, \lambda) = QF_{xx}(s\phi + w(s, \lambda), \lambda)[\phi + w_s(s, \lambda), \phi + w_s(s, \lambda)] \\ + QF_x(s\phi + w(s, \lambda), \lambda)[w_{ss}(s, \lambda)]$$

und somit wegen  $w_s(0, \lambda_0) = 0$  und  $QF_x(0, \lambda_0) \equiv 0$

$$g_{sss}(0, \lambda_0) = QF_{xxx}(0, \lambda_0)[\phi + w_s(0, \lambda_0), \phi + w_s(0, \lambda_0), \phi + w_s(0, \lambda_0)] \\ + 3QF_{xx}(0, \lambda_0)[\phi + w_s(0, \lambda_0), w_{ss}(0, \lambda_0)] + QF_x(0, \lambda_0)[w_{sss}(0, \lambda_0)] \\ = QF_{xxx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi, \phi] + 3QF_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, w_{ss}(0, \lambda_0)]$$

Eine kurze Rechnung wie in (4.21) zeigt  $h_{ss}(0, \lambda_0) = \frac{1}{3}g_{sss}(0, \lambda_0)$  und wir erhalten wie zuvor

$$\hat{\lambda}''(0) = -\frac{\pi(h_{ss}(0, \lambda_0))}{\pi(h_\lambda(0, \lambda_0))} + \hat{\lambda}'(0) \cdot \frac{\pi(h_{\lambda\lambda}(0, \lambda_0))}{\pi(h_\lambda(0, \lambda_0))}$$

Im Fall  $\hat{\lambda}'(0) = 0$  folgt (iii) aus

$$\hat{\lambda}''(0) = -\frac{\pi(h_{ss}(0, \lambda_0))}{\pi(h_\lambda(0, \lambda_0))} \\ = -\frac{1}{3} \frac{\pi(g_{sss}(0, \lambda_0))}{\pi(g_{s\lambda}(0, \lambda_0))}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3} \frac{\pi(QF_{xxx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi, \phi] + 3QF_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, w_{ss}(0, \lambda_0)])}{\pi(QF_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi])} \\
&= -\frac{1}{3} \frac{\langle F_{xxx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi, \phi] - 3F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \zeta], \phi' \rangle}{\langle F_{x\lambda}(0, \lambda_0)[\phi], \phi' \rangle}
\end{aligned}$$

für  $\zeta = -w_{ss}(0, \lambda_0)$ . Wegen  $w_s(0, \lambda_0) = 0$  und der Formel für  $w_{ss}(0, \lambda_0)$  aus (4.16) gilt

$$\zeta = ((I - Q)F_x(0, \lambda_0)|_{X_2})^{-1}(I - Q)F_{xx}(0, \lambda_0)[\phi, \phi].$$

Es folgt die Behauptung.  $\square$

### A.5. Weiteres zur lokalen Verzweigung von $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die in den Sätzen 2.1.6, 2.1.8, 2.1.9, 2.2.6, 2.2.9 nachgewiesenen lokalen Verzweigungen von den Lösungsscharen  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3$  genauer. Die an den jeweiligen Verzweigungsstellen abzweigenden Lösungen sind in den genannten Sätzen lokal durch stetig differenzierbare Kurven  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  gegeben. Unser erstes Ziel ist es, für jede dieser Kurven die Aussage  $\bar{b}'_j(0) = 0$  zu beweisen. Anschließend leiten wir Formeln für  $\bar{b}''_j(0)$  her. Grundlage für die anstehenden Berechnungen sind die Formeln für die Fréchet-Ableitungen von  $F$  in den Verzweigungsstellen. Die Funktion  $F : H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  ist hierbei erneut gegeben durch

$$F(u, v, b) = \begin{pmatrix} u - (-\Delta + 1)^{-1}(|u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q) \\ v - (-\Delta + \omega^2)^{-1}(|v|^{2q-2}v + b|v|^{q-2}v|u|^q) \end{pmatrix}.$$

Im Fall  $q \geq 2$  ist  $F$  stetig differenzierbar und  $F_x, F_{xb}$  sind durch die Formeln (2.0.8)-(2.0.11) gegeben. Im Fall  $q = 2$  oder  $q \geq 3$  sind die zweiten Ableitungen gegeben durch

$$\begin{aligned}
F_{xx}^1(u, v, b)[\phi, \psi] &= -(-\Delta + 1)^{-1} \left( (2q-1)(2q-2)|u|^{2q-4}u\phi_1\psi_1 \right. \\
&\quad + b(q-1)(q-2)|u|^{q-4}u|v|^q\phi_1\psi_1 + bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}v\phi_1\psi_2 \\
&\quad \left. + bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}v\phi_2\psi_1 + bq(q-1)|u|^{q-2}u|v|^{q-2}\phi_2\psi_2 \right), \\
F_{xx}^2(u, v, b)[\phi, \psi] &= -(-\Delta + \omega^2)^{-1} \left( (2q-1)(2q-2)|v|^{2q-4}v\phi_2\psi_2 \right. \\
&\quad + b(q-1)(q-2)|v|^{q-4}v|u|^q\phi_2\psi_2 + bq(q-1)|v|^{q-2}|u|^{q-2}u\phi_2\psi_1 \\
&\quad \left. + bq(q-1)|v|^{q-2}|u|^{q-2}u\phi_1\psi_2 + bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}v\phi_1\psi_1 \right)
\end{aligned}$$

für  $\phi, \psi, \zeta \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ . Im Fall  $q = 2, q = 3$  oder  $q \geq 4$  ist  $F$  dreifach stetig differenzierbar und die dritten Ableitungen lauten

$$F_{xxx}^1(u, v, b)[\phi, \psi, \zeta] = -(q-1)(-\Delta + 1)^{-1} \left( 2(2q-1)(2q-3)|u|^{2q-4}\phi_1\psi_1\zeta_1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + b(q-2)(q-3)|u|^{q-4}|v|^q\phi_1\psi_1\zeta_1 + bq(q-2)|u|^{q-4}|v|^{q-2}uv\phi_1\psi_1\zeta_2 \\
& + bq(q-2)|u|^{q-4}|v|^{q-2}uv\phi_1\psi_2\zeta_1 + bq(q-1)|u|^{q-4}|v|^{q-2}\phi_1\psi_2\zeta_2 \\
& + bq(q-2)|u|^{q-2}|v|^{q-2}uv\phi_2\psi_1\zeta_1 + bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}\phi_2\psi_1\zeta_2 \\
& + bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}\phi_2\psi_2\zeta_1 + bq(q-2)|u|^{q-2}|v|^{q-4}uv\phi_2\psi_2\zeta_2), \\
F_{xxx}^2(u, v, b)[\phi, \psi, \zeta] & = -(q-1)(-\Delta + \omega^2)^{-1} \left( 2(2q-1)(2q-3)|v|^{2q-4}\phi_2\psi_2\zeta_2 \right. \\
& + b(q-2)(q-3)|v|^{q-4}|u|^q\phi_2\psi_2\zeta_2 + bq(q-2)|v|^{q-4}|u|^{q-2}uv\phi_2\psi_2\zeta_1 \\
& + bq(q-2)|v|^{q-4}|u|^{q-2}uv\phi_2\psi_1\zeta_2 + bq(q-1)|v|^{q-2}|u|^{q-2}\phi_2\psi_1\zeta_1 \\
& + bq(q-2)|u|^{q-2}|v|^{q-4}uv\phi_1\psi_2\zeta_2 + bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}\phi_1\psi_2\zeta_1 \\
& \left. + bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}\phi_1\psi_1\zeta_2 + bq(q-2)|v|^{q-2}|u|^{q-4}uv\phi_1\psi_1\zeta_1 \right).
\end{aligned}$$

Hierbei sind im Fall  $q = 2$  die Terme der Form  $(q-2) \cdot \dots$  als 0 und  $(\dots)^{q-2}$  als 1 zu interpretieren. Dasselbe gilt für Terme der Form  $(q-3) \cdot \dots$  und  $(\dots)^{q-3}$  im Fall  $q = 3$ .

### Lokale Verzweigung von $\mathcal{T}_1$

Lokale Verzweigung von  $\mathcal{T}_1 = \{(u_0, 0, b) : b \in \mathbb{R}\}$  wurde für  $q = 2$  in den Sätzen 2.1.6 und 2.1.9 nachgewiesen. Daher sind die obigen Formeln für  $F_x, F_{xx}, F_{xxx}$  gerechtfertigt. Zur Beschreibung der an der Stelle  $b = b_{j,\omega}$  abzweigenden Lösungen durch die Kurve  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j)$  sind die Ableitungen von  $F$  im Punkt  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$  auszuwerten. Die Formeln für  $F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})$  und  $F_{xb}(u_0, 0, b_{j,\omega})$  sind (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) zu entnehmen. Ferner gilt für  $b \in \mathbb{R}$  und  $\phi, \psi, \zeta \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
F_{xx}^1(u_0, 0, b)[\phi, \psi] & = -(-\Delta + 1)^{-1}(6u_0\phi_1\psi_1 + 2bu_0\phi_2\psi_2) \\
F_{xx}^2(u_0, 0, b)[\phi, \psi] & = -(-\Delta + \omega^2)^{-1}(2bu_0\phi_2\psi_1 + 2bu_0\phi_1\psi_2) \\
F_{xxx}^1(u_0, 0, b)[\phi, \psi, \zeta] & = -(-\Delta + 1)^{-1}(6\phi_1\psi_1\zeta_1 + 2b\phi_1\psi_2\zeta_2 + 2b\phi_2\psi_1\zeta_2 + 2b\phi_2\psi_2\zeta_1) \\
F_{xxx}^2(u_0, 0, b)[\phi, \psi, \zeta] & = -(-\Delta + \omega^2)^{-1}(6\phi_2\psi_2\zeta_2 + 2b\phi_2\psi_1\zeta_1 + 2b\phi_1\psi_2\zeta_1 + 2b\phi_1\psi_1\zeta_2).
\end{aligned}$$

Aus  $F_{xx}^2(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega}), (0, \varphi_{j,\omega})] = 0$  und der Formel für  $\bar{b}'_j(0)$  aus (2.0.3) folgt

$$\bar{b}'_j(0) = -\frac{1}{2} \frac{\langle F_{xx}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega}), (0, \varphi_{j,\omega})], (0, \varphi_{j,\omega}) \rangle}{\langle F_{xb}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega})], (0, \varphi_{j,\omega}) \rangle} = 0.$$

Wir berechnen nun  $\bar{b}''_j(0)$  mit Hilfe der Formel (2.0.4). Hierzu sei  $Q$  die Orthogonalprojektion auf  $\ker(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})) = \text{span}\{(0, \varphi_{j,\omega})\}$ , d.h. wegen  $\|\varphi_{j,\omega}\|_\omega = 1$

$$Q : H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \ker(F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})), \quad (u, v) \mapsto (0, \langle v, \varphi_{j,\omega} \rangle_\omega \varphi_{j,\omega}).$$

Da die Funktion  $(u, v) := ((-\Delta + 1 - 3u_0^2)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}^2), 0)$  die einzige auf  $(0, \varphi_{j,\omega})$  orthogonal stehende Lösung der Gleichung  $(I - Q)F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})[(u, v)] = ((-\Delta + 1)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}^2), 0)$  ist,

erhalten wir die folgende Formel für die Funktion  $\zeta$  aus (2.0.4):

$$\begin{aligned}
\zeta &:= \left( (I - Q)F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})|_{\{(0, \varphi_{j,\omega})\}^\perp} \right)^{-1} (I - Q)F_{xx}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega}), (0, \varphi_{j,\omega})] \\
&= \left( (I - Q)F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})|_{\{(0, \varphi_{j,\omega})\}^\perp} \right)^{-1} (-2b_{j,\omega}(I - Q)((-\Delta + 1)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}^2), 0)) \\
&= -2b_{j,\omega} \left( (I - Q)F_x(u_0, 0, b_{j,\omega})|_{\{(0, \varphi_{j,\omega})\}^\perp} \right)^{-1} ((-\Delta + 1)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}^2), 0) \\
&= -2b_{j,\omega} ((-\Delta + 1 - 3u_0^2)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}^2), 0).
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von  $\bar{b}_j''(0)$  brauchen wir ferner

$$\begin{aligned}
F_{xxx}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega}), (0, \varphi_{j,\omega}), (0, \varphi_{j,\omega})] &= -6(0, (-\Delta + \omega^2)^{-1}(\varphi_{j,\omega}^3)) \\
F_{xx}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega}), \zeta] &= -2b_{j,\omega}(0, (-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}\zeta_1))
\end{aligned}$$

Wir erhalten aus (2.1.4)

$$\begin{aligned}
\bar{b}_j''(0) &= -\frac{1}{3} \frac{\langle -6(-\Delta + \omega^2)^{-1}(\varphi_{j,\omega}^3) - 3 \cdot (-2)b_{j,\omega}(-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}\zeta_1), \varphi_{j,\omega} \rangle_\omega}{\langle F_{xb}(u_0, 0, b_{j,\omega})[(0, \varphi_{j,\omega})], (0, \varphi_{j,\omega}) \rangle} \\
&= -\frac{2}{\|u_0\varphi_{j,\omega}\|_2^2} \left( \langle (-\Delta + \omega^2)^{-1}(\varphi_{j,\omega}^3) - b_{j,\omega}(-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}\zeta_1), \varphi_{j,\omega} \rangle_\omega \right) \\
&= -\frac{2}{\|u_0\varphi_{j,\omega}\|_2^2} \left( \|\varphi_{j,\omega}\|_4^4 - b_{j,\omega} \int_{\mathbb{R}^n} u_0\varphi_{j,\omega}^2\zeta_1 dx \right) \\
&= -\frac{2}{\|u_0\varphi_{j,\omega}\|_2^2} \left( \|\varphi_{j,\omega}\|_4^4 + 2b_{j,\omega}^2 \int_{\mathbb{R}^n} u_0\varphi_{j,\omega}^2(-\Delta + 1 - 3u_0^2)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}^2) dx \right). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine alternative Darstellung dieser Formel, wenn wir die Funktion  $v := (-\Delta + 1 - 3u_0^2)^{-1}(u_0\varphi_{j,\omega}^2)$  als Fourierreihe bezüglich der Orthonormalbasis  $(\varphi_k)$  schreiben. Aus  $-\Delta\varphi_k + \varphi_k = b_k u_0^2 \varphi_k$  folgt nach kurzer Rechnung

$$\langle v, \varphi_k \rangle = b_k \int_{\mathbb{R}^n} u_0^2 \varphi_k v dx \quad \text{sowie} \quad \langle v, \varphi_k \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \varphi_{j,\omega}^2 \varphi_k dx + 3 \int_{\mathbb{R}^n} u_0^2 \varphi_k v dx$$

und damit

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \langle v, \varphi_k \rangle \varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{b_k - 3} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \varphi_{j,\omega}^2 \varphi_k dx \right) \varphi_k.$$

Wir erhalten

$$\bar{b}_j''(0) = -\frac{2}{\|u_0\varphi_{j,\omega}\|_2^2} \left( \|\varphi_{j,\omega}\|_4^4 + 2b_{j,\omega}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{b_k - 3} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \varphi_{j,\omega}^2 \varphi_k dx \right)^2 \right). \quad (4.25)$$

**Bemerkung A.8.**

- a) Im Fall  $\omega = 1, j = 0$  ist die in  $b_{0,1} = b_0 = 1$  von  $\mathcal{T}_3$  abzweigende Kurve durch

$$\mathcal{T}_6 = \{(\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0, 1) : 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$$

gegeben. Daher gilt  $\bar{b}_0''(0) = 0$ . Die Formel (4.24) bestätigt dies wegen  $\varphi_{0,1} = u_0$  und  $(-\Delta + 1 - 3u_0^2)^{-1}(u_0^3) = -\frac{1}{2}u_0$ .

- b) Die Formel (4.25) ist zumindest im Fall  $n = 1$  einer naiven numerischen Approximation zugänglich. Da  $b_{j,\omega}, \varphi_{j,\omega}, b_k, \varphi_k$  bekannt sind, siehe Lemma A.3, erhält man unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \|\varphi_{j,\omega}\|_4^4 &\approx 2 \int_0^{10} \varphi_{j,\omega}^4 dx, & \|u_0\varphi_{j,\omega}\|_2^2 &\approx 2 \int_0^{10} u_0^2 \varphi_{j,\omega}^2 dx, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{b_k - 3} \left( \int_{\mathbb{R}} u_0 \varphi_{j,\omega}^2 \varphi_k dx \right)^2 &\approx \sum_{k=0}^{10} \frac{b_k}{b_k - 3} \left( 2 \int_0^{10} u_0 \varphi_{j,\omega}^2 \varphi_k dx \right)^2 \end{aligned}$$

eine Näherung für  $\bar{b}_j''(0)$ . Im Fall  $n = 1, \omega = 1$  deuten die Näherungswerte darauf hin, dass die Verzweigungen von  $(u_0, 0, b_{j,\omega})$  für  $j \geq 1$  nach links verlaufen. Es ist ferner zu beobachten, dass eine wachsende Funktion  $j : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$  existiert, so dass die Verzweigungen zu  $j = 0, 1, 2, \dots, j(\omega) \in \mathbb{N}_0$  nach rechts verlaufen und für  $j = j(\omega) + 1, j(\omega) + 2, \dots$  Verzweigung nach links auftritt. Im Fall  $\omega = 10$  beispielsweise deuten die Werte auf  $j(10) = 9$  hin. Die Summation über eine größere Menge von Eigenfunktionen liefert dasselbe Resultat.

- c) Aus den obigen Formeln lassen sich die entsprechenden Formeln für die Verzweigungen von  $\mathcal{T}_2$  herleiten. Beschreibt  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{b}_j)$  die von  $\mathcal{T}_1$  an der Stelle  $b_{j,1/\omega}$  abzweigende Kurve von Lösungen zum Parameter  $\frac{1}{\omega}$ , dann ist  $(\omega\bar{v}_j(\omega), \omega\bar{u}_j(\omega), \bar{b}_j)$  die von  $\mathcal{T}_2$  abzweigende Kurve zum Parameter  $\omega$ . Wir erhalten daher in diesem Fall  $\bar{b}_j'(0) = 0$  und

$$\bar{b}_j''(0) = -\frac{2}{\|u_0\varphi_{j,1/\omega}\|_2^2} \left( \|\varphi_{j,1/\omega}\|_4^4 + 2b_{j,1/\omega}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{b_k - 3} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u_0 \varphi_{j,1/\omega}^2 \varphi_k dx \right)^2 \right).$$

Lokale Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$

Wir kommen zur Untersuchung der lokalen Verzweigungen von  $\mathcal{T}_3 = \{(u_b, v_b, b) : b > -1\}$ , wobei  $(u_b, v_b)$  durch  $(u_b, v_b) := (1+b)^{-\frac{1}{2q-2}}(u_0, u_0)$  gegeben sind. Wie in Satz 2.2.6 und Satz 2.2.9 setzen wir  $q \geq 2$  voraus, so dass die Formeln für  $F_{xx}(u_b, v_b, b)$  nach Proposition A.6 gerechtfertigt sind. Zur Bestimmung von  $\bar{b}_j''(0)$  muss die Abbildung  $F_{xxx}(u_b, v_b, b)$  im Verzweigungspunkt  $b = b_j^*$  definiert sein, sodass wir hierfür  $q = 2$  oder  $q \geq 3$  voraussetzen müssen, vgl. Proposition A.6. Für Exponenten  $2 < q < 3$  ist die Formel für  $\bar{b}_j''(0)$  nicht gerechtfertigt und daher formal zu verstehen. Wie in der Untersuchung von  $\mathcal{T}_1$  zeigen

wir  $\bar{b}'_j(0) = 0$  und bestimmen  $\bar{b}''_j(0)$ . Die Abbildungen  $F_x(u_b, v_b, b)$  und  $F_{xb}(u_b, v_b, b)$  sind durch die Formeln (2.2.1)-(2.2.4) gegeben. Für  $\phi, \psi, \zeta \in H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\begin{aligned} F_{xx}^1(u_b, v_b, b)[\phi, \psi] &= -(q-1)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}}(-\Delta+1)^{-1} \left( u_0^{2q-3} \left( (2(2q-1) + b(q-2))\phi_1\psi_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + bq\phi_1\psi_2 + bq\phi_2\psi_1 + bq\phi_2\psi_2 \right) \right), \\ F_{xx}^2(u_b, v_b, b)[\phi, \psi] &= -(q-1)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}}(-\Delta+1)^{-1} \left( u_0^{2q-3} \left( (2(2q-1) + b(q-2))\phi_2\psi_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + bq\phi_2\psi_1 + bq\phi_1\psi_2 + bq\phi_1\psi_1 \right) \right) \end{aligned}$$

und im Fall  $q = 2$  oder  $q \geq 3$

$$\begin{aligned} F_{xxx}^1(u_b, v_b, b)[\phi, \psi, \zeta] &= -(q-1)(1+b)^{-\frac{q-2}{q-1}}(-\Delta+1)^{-1} \left( u_0^{2q-4} \left( (2(2q-1)(2q-3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b(q-2)(q-3) \right) \phi_1\psi_1\zeta_1 + bq(q-2)\phi_1\psi_1\zeta_2 + bq(q-2)\phi_1\psi_2\zeta_1 \right. \\ &\quad \left. + bq(q-1)\phi_1\psi_2\zeta_2 + bq(q-2)\phi_2\psi_1\zeta_1 + bq(q-1)\phi_2\psi_1\zeta_2 \right. \\ &\quad \left. + bq(q-1)\phi_2\psi_2\zeta_1 + bq(q-2)\phi_2\psi_2\zeta_2 \right), \\ F_{xxx}^2(u_b, v_b, b)[\phi, \psi, \zeta] &= -(q-1)(1+b)^{-\frac{q-2}{q-1}}(-\Delta+1)^{-1} \left( u_0^{2q-4} \left( (2(2q-1)(2q-3) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + b(q-2)(q-3) \right) \phi_2\psi_2\zeta_2 + bq(q-2)\phi_2\psi_2\zeta_1 + bq(q-2)\phi_2\psi_1\zeta_2 \right. \\ &\quad \left. + bq(q-1)\phi_2\psi_1\zeta_1 + bq(q-2)\phi_1\psi_2\zeta_2 + bq(q-1)\phi_1\psi_2\zeta_1 \right. \\ &\quad \left. + bq(q-1)\phi_1\psi_1\zeta_2 + bq(q-2)\phi_1\psi_1\zeta_1 \right). \end{aligned}$$

Wir kommen zur Berechnung von  $\bar{b}'_j(0), \bar{b}''_j(0)$  für  $j \in \mathbb{N}_0$ , sei stets  $b := b_j^*$ . Aus

$$F_{xx}^1(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)] = F_{xx}^2(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)]$$

und der Verzweigungsformel (2.0.3) folgt

$$\bar{b}'_j(0) = -\frac{1}{2} \frac{\langle F_{xx}(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)], (\varphi_j, -\varphi_j) \rangle}{\langle (F_{xb}(u_b, v_b, b) + F_{xx}(u_b, v_b, b)[\partial_b(u_b, v_b, \cdot)])[(\varphi_j, -\varphi_j)], (\varphi_j, -\varphi_j) \rangle} = 0. \quad (4.26)$$

Für die Berechnung von  $\bar{b}''_j(0)$  sei  $q = 2$  oder  $q \geq 3$ , so dass  $F_{xxx}(u_b, v_b, b)$  existiert. Sei ferner

$$Q : H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \ker(F_x(u_b, v_b, b)), \quad (u, v) \mapsto \frac{\langle u - v, \varphi_j \rangle}{2} (\varphi_j, -\varphi_j)$$

die Orthogonalprojektion auf  $\ker(F_x(u_b, v_b, b))$ . Aus den Formeln

$$\begin{aligned} F_{xx}^1(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)] &= -2(q-1)(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}}(-\Delta+1)^{-1} (u_0^{2q-3} \varphi_j^2), \\ F_{xx}^2(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)] &= -2(q-1)(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}}(-\Delta+1)^{-1} (u_0^{2q-3} \varphi_j^2) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\zeta &:= \left( (I - Q)F_x(u_b, v_b, b)|_{\{(\varphi_j, -\varphi_j)\}^\perp} \right)^{-1} (I - Q)F_{xx}(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)] \\ &= -2(q-1)(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}} \\ &\quad \left( (I - Q)F_x(u_b, v_b, b)|_{\{(\varphi_j, -\varphi_j)\}^\perp} \right)^{-1} \left( (-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j^2), (-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j^2) \right)\end{aligned}$$

Mit einer ähnlichen Rechnung wie im Fall von  $\mathcal{T}_1$  erhalten wir

$$\zeta_1 = \zeta_2 = -2(q-1)(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}}(-\Delta + 1 - (2q-1)u_0^{2q-2})^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j^2)$$

und somit

$$\begin{aligned}F_{xxx}^1(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)] &= -2(q-1)((2q-1)(2q-3) + 3b)(1+b)^{-\frac{q-2}{q-1}}(-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j^3) \\ F_{xxx}^2(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j), (\varphi_j, -\varphi_j)] &= 2(q-1)((2q-1)(2q-3) + 3b)(1+b)^{-\frac{q-2}{q-1}}(-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j^3) \\ F_{xx}^1(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), \zeta] &= -2(q-1)(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}}(-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j\zeta_1) \\ F_{xx}^2(u_b, v_b, b)[(\varphi_j, -\varphi_j), \zeta] &= 2(q-1)(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}}(-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j\zeta_1)\end{aligned}$$

Sei nun

$$\gamma := \langle (F_{xb}(u_b, v_b, b) + F_{xx}(u_b, v_b, b)[\partial_b(u_b, v_b), \cdot])[(\varphi_j, -\varphi_j)], (\varphi_j, -\varphi_j) \rangle.$$

Aus der Verzweigungsformel (2.0.4) erhalten wir für  $q = 2$  oder  $q \geq 3$

$$\begin{aligned}\bar{b}_j''(0) &= -\frac{1}{3\gamma} \left( 2 \cdot (-2)(q-1)((2q-1)(2q-3) + 3b)(1+b)^{-\frac{q-2}{q-1}} \langle (-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-4}\varphi_j^3), \varphi_j \rangle \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot 2 \cdot (-2)(q-1)(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{2q-3}{2q-2}} \langle (-\Delta + 1)^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j\zeta_1), \varphi_j \rangle \right) \\ &= \frac{4(q-1)(1+b)^{-\frac{q-2}{q-1}}}{3\gamma} \left( ((2q-1)(2q-3) + 3b) \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-4}\varphi_j^4 dx \right. \\ &\quad \left. - 3(2q-1-b)(1+b)^{-\frac{1}{2q-2}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-3}\varphi_j^2\zeta_1 dx \right) \\ &= \frac{4(q-1)(1+b)^{-\frac{q-2}{q-1}}}{3\gamma} \left( ((2q-1)(2q-3) + 3b) \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-4}\varphi_j^4 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(q-1)(2q-1-b)^2}{1+b} \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-3}\varphi_j^2(-\Delta + 1 - (2q-1)u_0^{2q-2})^{-1}(u_0^{2q-3}\varphi_j^2) dx \right).\end{aligned}$$

Aus  $b = b_j^*$  und  $\gamma = \frac{4q}{(1+b)^2} \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-2} \varphi_j^2 dx$ , siehe (2.2.6), folgt

$$\begin{aligned} \bar{b}_j''(0) &= \frac{(q-1)(1+b_j^*)^{\frac{q}{q-1}}}{3q \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-2} \varphi_j^2 dx} \left( ((2q-1)(2q-3) + 3b_j^*) \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-4} \varphi_j^4 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(q-1)(2q-1-b_j^*)^2}{1+b_j^*} \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-3} \varphi_j^2 (-\Delta + 1 - (2q-1)u_0^{2q-2})^{-1} (u_0^{2q-3} \varphi_j^2) dx \right). \end{aligned}$$

Wie zuvor ergibt sich die alternative Darstellung

$$\begin{aligned} \bar{b}_j''(0) &= \frac{(q-1)(1+b_j^*)^{\frac{q}{q-1}}}{3q \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-2} \varphi_j^2 dx} \left( ((2q-1)(2q-3) + 3b_j^*) \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-4} \varphi_j^4 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(q-1)(2q-1-b_j^*)^2}{1+b_j^*} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{b_k - 2q + 1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-3} \varphi_j^2 \varphi_k dx \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

**Bemerkung A.9.** Im Fall  $j = 0$  gilt  $b_0^* = q - 1$  sowie  $\varphi_0 = u_0$ . Ferner zeigt eine kurze Rechnung  $(-\Delta + 1 - (2q-1)u_0^{2q-2})^{-1}(u_0^{2q-1}) = -\frac{1}{2q-2}u_0$ . Wir erhalten daher

$$\bar{b}_0''(0) = \frac{4}{3} q^{\frac{q}{q-1}} (q-1)(q-2).$$

Dies liefert (im Fall  $1 < q < 2$  bzw.  $2 < q < 3$  formal) das richtige Ergebnis, da für Exponenten  $1 < q < 2$  die Existenz der Lösungsfamilie  $\mathcal{T}_4$  "Verzweigung nach links" und für  $q > 2$  die Lösungsfamilie  $\mathcal{T}_5$  "Verzweigung nach rechts" belegt. Im Fall  $q = 2$  ist die Verzweigung von  $\mathcal{T}_3$  durch die Lösungen aus  $\mathcal{T}_6 = \{(\cos(\alpha)u_0, \sin(\alpha)u_0, 1) : 0 \leq \alpha < 2\pi\}$  gegeben und es gilt in Übereinstimmung mit der obigen Formel  $\bar{b}_0''(0) = 0$ . Auch in diesem Fall sind numerische Auswertungen der Formel (4.27) im Fall  $n = 1$  möglich. Da die Berechnung der Terme aus (4.27) mit Maple viel Rechenzeit benötigt ist, stützen wir unsere Vermutungen auf wenige Daten. Es hat den Anschein, als würden im Fall  $1 < q < 2$  der erste Zweig nach links ( $\bar{b}_0''(0) < 0$ ) und der  $j$ -te Zweig für kleine  $j \geq 1$  nach rechts verzweigen. Im Fall  $q > 2$  sind die Verhältnisse genau umgekehrt. Im Fall  $q = 2$  ist  $\bar{b}_j''(0) > 0$  zu beobachten.

## B. Ergänzende Resultate zu Kapitel 3

**Proposition B.1.** Sei  $q \geq 2, b \geq 0$  und sei  $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$h(r) := \frac{\min\{1 + br^q, r^{2q-2} + br^{q-2}\}}{(1+b)(1+r^2)^{q-1}} \quad (r \geq 0).$$

Dann gilt  $h(r) \leq 2^{1-q}$  für alle  $r \geq 0$  und alle Maximierer sind im Fall  $q > 2$  oder  $q = 2, b \neq 1$  durch  $r = 1$  und im Fall  $q = 2, b = 1$  durch  $r \geq 0$  gegeben.

**Beweis:**

Sei zunächst  $q = 2$ . Dann gilt

$$h(r) = \frac{\min\{1 + br^2, b + r^2\}}{(b+1)(1+r^2)} \leq \frac{\frac{1}{2}(1 + br^2 + b + r^2)}{(b+1)(1+r^2)} = \frac{1}{2}$$

und Gleichheit genau dann im Fall  $1 + br^2 = b + r^2$ , was wiederum äquivalent zu  $b \neq 1, r = 1$  oder  $b = 1, r \geq 0$  ist. Es folgt die Behauptung für  $q = 2$ .

Sei nun  $q > 2$ . Wir zeigen die Ungleichung  $h(r) \leq 2^{1-q}$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit für  $0 < r < 1$ , denn sonst betrachte  $\frac{1}{r}$ . Die Ungleichung  $h(r) \leq 2^{1-q}$  ist äquivalent zu der Bedingung

$$\begin{aligned} b((1+r^2)^{q-1} - 2^{q-1}r^{q-2}) &> 2^{q-1}r^{2q-2} - (1+r^2)^{q-1} && \text{oder} \\ b((1+r^2)^{q-1} - 2^{q-1}r^q) &> 2^{q-1} - (1+r^2)^{q-1} \end{aligned}$$

Wegen  $r \in (0, 1)$  ist die rechte Seite der ersten Ungleichung negativ, die linke und rechte Seite in der ersten Ungleichung sind positiv. Daher ist hierzu die Bedingung

$$\begin{aligned} b &< \frac{(1+r^2)^{q-1} - 2^{q-1}r^{2q-2}}{(2^{q-1}r^{q-2} - (1+r^2)^{q-1})_+} =: \alpha(r) && \text{oder} \\ b &> \frac{2^{q-1} - (1+r^2)^{q-1}}{(1+r^2)^{q-1} - 2^{q-1}r^q} =: \beta(r) \end{aligned}$$

äquivalent. Es ist daher  $\alpha(r) > \beta(r)$  für alle  $r \in (0, 1)$  zu zeigen. Eine kurze Rechnung zeigt, dass dies äquivalent ist zu  $g(r) > 2^{q-1}$  für

$$g(r) := \frac{(1+r^2)^{q-1}(1+r^{q-2})}{r^{q-2}(1+r^q)}.$$

Die Funktion  $g$  ist streng monoton fallend auf  $(0, 1)$ , denn nach Proposition A.1 gilt

$$g'(r) = \frac{(2-q)r^3(1+r^2)^{q-1}}{(r^{q-2}(1+r^q))^2} \cdot \left(1 - \frac{q}{q-2}r^2 + \frac{q}{q-2}r^{2q-2} - r^{2q}\right) < 0$$

Insbesondere gilt  $g(r) > g(1) = 2^{q-1}$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition B.2.** *Sei die Funktion  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 1)$  gegeben durch (3.2.16). Dann ist  $f$  differenzierbar in allen Punkten  $(x_0, y_0, z_0)$  mit  $x_0 \neq y_0$ . In diesem Fall gilt*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \begin{cases} (0, 2y_0, 0) & , \text{falls } x_0 < y_0, z_0 = \frac{x_0}{y_0} \\ (2x_0, 0, 0) & , \text{falls } x_0 > y_0, z_0 = \frac{y_0}{x_0} \end{cases}$$

**Beweis:**

Wir betrachten nur den ersten Fall, sei also  $z_0 = \frac{y_0}{x_0} < 1$ . Dann gilt  $f(x_0, y_0, z_0) = x_0^2$ . Für  $(x, y, z)$  mit  $z \geq \min\{\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\}$  ist die Abschätzung

$$|f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) - 2x_0(x - x_0)| = O(|x - x_0|^2)$$

offensichtlich. Für  $(x, y, z)$  in einer kleinen Umgebung von  $(x_0, y_0, z_0)$  und  $z < \frac{y}{x}$  gilt

$$\begin{aligned} & |f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) - 2x_0(x - x_0)| \\ &= \left| x^2 + \frac{(y - zx)^2}{1 - z^2} - x_0^2 - 2x_0(x - x_0) \right| \\ &= (x - x_0)^2 + \frac{1}{1 - z^2} (y - zx - y_0 + z_0 x_0)^2 \\ &\leq (x - x_0)^2 + \frac{1}{1 - z^2} (|y - y_0| + |x||z - z_0| + |z_0||x - x_0|)^2 \\ &\leq (x - x_0)^2 + \frac{(1 + |x| + |z_0|)^2}{1 - z^2} (|y - y_0| + |z - z_0| + |x - x_0|)^2 \\ &\leq C \left( 1 + \frac{(1 + |x| + |z_0|)^2}{1 - z^2} \right) (|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2) \\ &= O(|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2) \end{aligned}$$

für  $(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ . Dies war zu zeigen.  $\square$

## C. Weitere Ergebnisse

In diesem Abschnitt beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften von Lösungen des Systems (1.1). Zur Motivation der Bedingung  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  beweisen wir in Satz C.1, dass im Fall  $n \geq 3, q \geq \frac{n}{n-2}$  keine lokal beschränkten Lösungen endlicher Energie existieren. Der Beweis basiert auf der Pohožaev-Identität und geht in der hier präsentierten Fassung auf Berestycki und Lions zurück, vgl. Proposition 1 in [10]. Unser Beweis ist eine Anpassung der dort verwendeten Argumente.

**Satz C.1.** *Sei  $n \geq 3, q \geq \frac{n}{n-2}$  und sei  $(u, v)$  eine Lösung von (1.1) mit  $u, v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2q}(\mathbb{R}^n)$ . Dann gilt  $u = v = 0$ .*

**Beweis:**

Wegen  $u, v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$  und Satz 8.22 in [35] sind die Funktionen  $u, v$  lokal Hölder-stetig. Aus Satz 6.13. in [35] erhalten wir  $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Sei nun

$$F(u, v) := -\frac{1}{2}(u^2 + \omega^2 v^2) + \frac{1}{2q}(|u|^{2q} + |v|^{2q} + 2b|u|^q|v|^q).$$

Aus der Differentialgleichung (1.1) folgt  $(-\Delta u, -\Delta v) = \nabla F(u, v)$  und damit

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} \left( x(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - 2(x\nabla u)\nabla u - 2(x\nabla v)\nabla v - 2xF(u, v) \right) \\
&= n(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) + 2xD^2u\nabla u + 2xD^2v\nabla v \\
&\quad - 2(|\nabla u|^2 + \Delta u(x\nabla u) + xD^2u\nabla u) \\
&\quad - 2(|\nabla v|^2 + \Delta v(x\nabla v) + xD^2v\nabla v) \\
&\quad - 2(nF(u, v) + \nabla F(u, v) \cdot (x\nabla u, x\nabla v)) \\
&= (n-2)(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - 2nF(u, v).
\end{aligned}$$

Der Satz von Gauß liefert für alle  $R > 0$

$$\int_{B_R} (n-2)(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) - 2nF(u, v) \, dx = R \int_{\partial B_R} G(u, v) \, d\sigma. \quad (4.1)$$

für

$$G(u, v) = |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 - 2|\partial_\nu u|^2 - 2|\partial_\nu v|^2 - 2F(u, v).$$

Wegen  $u, v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  ist die Abbildung  $R \mapsto \int_{\partial B_R} G(u, v) \, d\sigma$  nach dem Satz von Fubini und dem Transformationssatz über  $[0, \infty)$  integrierbar. Daher existiert eine Folge  $(R_k)$  mit  $R_k \rightarrow \infty$  und  $R_k \int_{\partial B_{R_k}} G(u, v) \, d\sigma \rightarrow 0$ . Aus (4.1) folgt

$$(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) \, dx = 2n \int_{\mathbb{R}^n} F(u, v) \, dx$$

und somit

$$(n-2)(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2) + n(\|u\|_2^2 + \omega^2\|v\|_2^2) = \frac{n}{q}(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q). \quad (4.2)$$

Testen der Differentialgleichung (1.1) mit  $(u, v)$  liefert andererseits

$$\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \|u\|_2^2 + \omega^2\|v\|_2^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q. \quad (4.3)$$

Aus (4.2), (4.3) folgt

$$\|u\|_2^2 + \omega^2\|v\|_2^2 = \frac{n-q(n-2)}{2q}(\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q). \quad (4.4)$$

Im Fall  $\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q \leq 0$  folgt  $u = v = 0$  aus (4.3). Im Fall  $\|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q \geq 0$  ist die rechte Seite in (4.4) wegen  $n \geq 3, q(n-2) \geq n$  kleiner oder gleich 0 und wir erhalten ebenfalls  $u = v = 0$ .  $\square$

Von nun an betrachten wir Lösungen von (1.1) im subkritischen Fall  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Da wir uns auf den Fall  $\omega \geq 1$  beschränken können, lautet das zu untersuchende System

$$\begin{aligned}
-\Delta u + \omega^2 u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \\
-\Delta v + \omega^2 v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v, \\
b \in \mathbb{R}, \omega \geq 1, \quad 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}, \quad u, v \in H^1(\mathbb{R}^n).
\end{aligned} \quad (4.5)$$

In Satz C.4 und Korollar C.5 klären wir die Regularität von Lösungen dieses Systems mit Hilfe klassischer Resultate der Regularitätstheorie elliptischer Differentialgleichungen. Mit den Ergebnissen von deGiorgi/Nash/Moser aus den 1960er Jahren für Unterlösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen der Form  $-\Delta w + c(x)w = 0$  zeigen wir die globale Beschränktheit und Hölderstetigkeit von Lösungen des Systems (4.5). Schauderabschätzungen liefern die  $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ -Regularität dieser Lösungen. Eine Lösung  $(u, v)$  von (4.5) erfüllt die Differentialgleichungen  $-\Delta u + c_1(x)u = 0$  und  $-\Delta v + c_2(x)v = 0$  für

$$c_1(x) := |u(x)|^{2q-2} + b|u(x)|^{q-2}|v(x)|^q, \quad c_2(x) := |v(x)|^{2q-2} + b|u(x)|^q|v(x)|^{q-2}. \quad (4.6)$$

Im Fall  $q \geq 2$  gilt  $c_1, c_2 \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  für alle  $p \in (\frac{n}{2}, \frac{n}{(n-2)_+(q-1)})$  und es folgt  $u, v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$  aus Satz 4.1 in [36]. Um auch den Fall  $1 < q < 2$  abzudecken, verfolgen wir im Beweis von Satz C.4 eine andere Argumentation. Die Betrachtung der Funktion  $|u| + |v|$  erweist sich in diesem Fall als hilfreich. Wir nutzen Katos Ungleichung, vgl. Satz X.27 in [69].

**Proposition C.2** (Katos Ungleichung). *Sei  $w \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  und es gelte  $\Delta w \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  im distributionellen Sinne. Dann gilt  $\Delta|w| \geq \text{sign}(w)\Delta w$  im distributionellen Sinne<sup>3</sup>.*

**Bemerkung C.3.** Im Fall  $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$  folgt Katos Ungleichung aus dem Satz von Gauß und  $\partial_\nu w \leq 0$  auf dem Rand der Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n : w(x) > 0\}$  sowie  $\partial_\nu w \geq 0$  auf dem Rand der Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n : w(x) < 0\}$ , wobei  $\partial_\nu$  jeweils das äußere Normalenfeld bezeichnet.

**Satz C.4.** *Sei  $b_0 > 0$  und  $E > 0$ . Es existieren nur von  $n, q, b_0, E$  abhängige Zahlen  $\alpha \in (0, 1)$  und  $C > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Ist  $(u, v, b)$  eine Lösung von (4.5) mit  $b \leq b_0$  und  $\|u\| + \|v\|_\omega \leq E$ , dann gilt  $u, v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  sowie*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C. \quad (4.7)$$

**Beweis:**

Da  $(u, v)$  schwache Lösung von (4.5) ist, gilt  $u, v, \Delta u, \Delta v \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ . Aus Katos Ungleichung erhalten wir die folgende distributionelle Differentialungleichung

$$-\Delta|u| + |u| \leq \text{sign}(u)(-\Delta u + u) = |u|^{2q-1} + b|u|^{q-1}|v|^q \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Analog ergibt sich

$$-\Delta|v| + |v| \leq -\Delta|v| + \omega^2|v| \leq |v|^{2q-1} + b|v|^{q-1}|u|^q \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} -\Delta(|u| + |v|) + (|u| + |v|) &\leq (|u|^{2q-1} + b|u|^{q-1}|v|^q) + (|v|^{2q-1} + b|v|^{q-1}|u|^q) \\ &= (|u| + |v|) \left( \frac{|u|^{2q-1} + |v|^{2q-1}}{|u| + |v|} + b|u|^{q-1}|v|^{q-1} \right) \\ &\leq C(|u| + |v|)(1 + b_0)(|u|^{2q-2} + |v|^{2q-2}), \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Für Distributionen  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ist  $S \geq T$  per Definition äquivalent zu  $S(\phi) \geq T(\phi)$  für alle  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  mit  $\phi \geq 0$ . Hierbei bezeichnet  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  den Raum der Testfunktionen.

wobei die positive Zahl  $C$  nur von  $q$  abhängt. Die Funktion  $w := |u| + |v| \in H^1(\mathbb{R}^n)$  erfüllt daher im schwachen Sinne

$$-\Delta w + c(x)w \leq 0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \quad \text{für} \quad c(x) = 1 - C(1 + b_0)(|u(x)|^{2q-2} + |v(x)|^{2q-2}).$$

Wähle nun  $p \in (\frac{n}{2}, \frac{n}{(n-2)_+(q-1)})$  in Abhängigkeit von  $n, q$ . Aus Sobolevs Einbettungssatz folgt für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  die Abschätzung  $\|c\|_{L^p(B_1(x_0))} \leq C(n, q, b_0, E)$ . Hieraus folgt mit Satz 4.1 in [36]  $w \in L^\infty(B_{1/2}(x_0))$  mitsamt der Abschätzung  $\|w\|_{L^\infty(B_{1/2}(x_0))} \leq C(n, q, b_0, E)$ . Da die rechte Seite von  $x_0$  unabhängig ist, erhalten wir aus der Ungleichung  $|u|, |v| \leq w$  die globale Abschätzung

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q, b_0, E).$$

Nach Satz 8.24 in [35] existieren nur von  $n, q, b_0, E$  abhängige Zahlen  $\alpha \in (0, 1)$  und  $C > 0$ , so dass für alle  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  die Funktionen  $u, v$  in  $C^{0,\alpha}(\overline{B_1(x_0)})$  liegen und die Abschätzung  $\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1(x_0)})} + \|v\|_{C^{0,\alpha}(\overline{B_1(x_0)})} \leq C$  erfüllen. Da auch hier die rechte Seite von  $x_0$  unabhängig ist, erhalten wir

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, q, b_0, E).$$

Schauder-Abschätzungen aus Satz 6.2 in [35] liefern schließlich (4.7).  $\square$

**Korollar C.5.** *Sei  $(u, v)$  eine Lösung von (4.5). Dann gilt  $u, v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  für ein  $\alpha \in (0, 1)$ . Im Fall  $u, v > 0$  oder  $q \in \mathbb{N}$  gilt  $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .*

**Beweis:**

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Satz C.4. Im Fall  $u, v > 0$  oder  $q \in \mathbb{N}$  liefert Satz 6.17. in [35] darüberhinaus  $u, v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , da die beiden rechten Seiten in (4.5) in diesem Fall glatte Funktionen von  $u, v$  sind.  $\square$

**Lemma C.6.**

- (i) *Sei  $1 < q < 2, b \geq 0$  oder  $q \geq 2, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist jede nichtnegative vollständig nichttriviale Lösung von (4.5) positiv.*
- (ii) *Sei  $1 < q < 2, b < 0$ . Dann erfüllt jede nichtnegative nichttriviale Lösung  $(u, v)$  von (4.5) die Ungleichung  $u + v > 0$  in  $\mathbb{R}^n$ .*

**Beweis:**

Sei  $(u, v, b)$  Lösung von (4.5). Nach Satz C.4 gilt  $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Im Fall  $b \geq 0$  erhalten wir

$$-\Delta u + u = u^{2q-1} + bu^{q-1}v^q \geq 0, \quad -\Delta v + \omega^2 v = v^{2q-1} + bu^q v^{q-1} \geq 0$$

und die Positivität von  $(u, v)$  folgt aus dem starken Minimumprinzip für nichtnegative Funktionen. Im Fall  $q \geq 2$  sei  $c_1, c_2$  wie in (4.6) definiert. Die Funktionen  $c_1, c_2$  sind dann beschränkt und es gilt  $-\Delta u + c_1(x)u = 0$  sowie  $-\Delta v + c_2(x)v = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Es folgt erneut

$u, v > 0$  aus dem Minimumprinzip. Im Fall  $1 < q < 2$  erfüllt eine nichtnegative Lösung von (4.5) auf  $\mathbb{R}^n$  die Differentialungleichung

$$\begin{aligned} -\Delta(u+v) + \omega^2(u+v) &\geq (-\Delta u + u) + (-\Delta v + \omega^2 v) \\ &= (u^{2q-1} + bu^{q-1}v^q) + (v^{2q-1} + bv^{q-1}u^q) \\ &\geq bu^{q-1}v^{q-1}(u+v). \end{aligned}$$

Für die beschränkte Funktion  $c(x) = \omega^2 - bu(x)^{q-1}v(x)^{q-1}$  gilt  $-\Delta(u+v) + c(x)(u+v) \geq 0$  auf  $\mathbb{R}^n$  und es folgt erneut  $u+v > 0$  in  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Aus Satz C.4 und dem Satz von Arzelà-Ascoli resultieren Konvergenzeigenschaften beschränkter Folgen von Lösungen.

**Lemma C.7.**

- (i) Sei  $(u_k, v_k, b_k)$  eine in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  beschränkte Folge von Lösungen. Dann konvergiert eine Teilfolge von  $(u_k, v_k, b_k)$  in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  gegen eine Lösung von (4.5).
- (ii) Es gelte  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ . Dann gilt  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$  in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  und  $(u, v, b)$  ist eine Lösung von (4.5).

**Beweis:**

Sei  $(u_k, v_k, b_k)$  eine in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  beschränkte Folge von Lösungen. Sei  $(u_k, v_k, b_k)$  eine Teilfolge mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ , es gelte  $b_k \rightarrow b$ . Dann ist die Familie  $\{(u_k, v_k, \nabla u_k, \nabla v_k, D^2 u_k, D^2 v_k) : k \in \mathbb{N}\}$  nach Satz C.4 gleichgradig stetig und aus dem Satz von Arzelà-Ascoli folgt  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ . Wir erhalten (i).

Nun gelte  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  in  $H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$  für Lösungen  $(u_k, v_k, b_k)$ . Nach (i) besitzt jede Teilfolge von  $(u_k, v_k)$  eine Teilfolge, die in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  gegen eine Funktion  $(\tilde{u}, \tilde{v}, b)$  konvergiert. Insbesondere konvergiert diese Teilfolge in  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  gegen  $(u, v)$  und  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , so dass  $(u, v) = (\tilde{u}, \tilde{v})$  folgt. Wir erhalten  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$  in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  und damit (ii).  $\square$

Nun kommen wir zu einer Reihe von Resultaten über radialsymmetrische Lösungen von (4.5). Wir beginnen mit einer Verschärfung von Lemma C.7. Hierzu benötigen wir die Kompaktheitseigenschaften radialsymmetrischer Funktionen.

**Proposition C.8.**

- (i) Sei  $n \geq 2, 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$ . Dann ist die Einbettung  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  kompakt.
- (ii) Sei  $n \geq 1, 1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  und sei  $(w_j)$  eine in  $H_r^1(\mathbb{R}^n)$  beschränkte Folge von radial monoton fallenden Funktionen. Dann existiert eine Funktion  $w \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  und eine Teilfolge  $(w_j)$  mit  $w_j \rightarrow w$  und  $w_j \rightarrow w$  in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n)$ .

**Beweis:**

Behauptung (i) ist in Willems Buch zu finden, vgl. Korollar 1.26 in [89]. Die Kompaktheitseigenschaften radial monoton fallender Funktionen sind mit den Argumenten auf Seite 326 in [10] zu beweisen<sup>4</sup>.  $\square$

**Lemma C.9.**

- (i) Sei  $(u_k, v_k, b_k)$  eine Folge von radialsymmetrischen radial fallenden Lösungen von (4.5) mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ . Dann gilt  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  und in  $C_B^2(\mathbb{R}^n) \times C_B^2(\mathbb{R}^n)$ .
- (ii) Sei  $n \geq 2$  und sei  $(u_k, v_k, b_k)$  eine Folge von radialsymmetrischen Lösungen von (4.5) mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ . Dann gilt  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  und in  $C_B^2(\mathbb{R}^n) \times C_B^2(\mathbb{R}^n)$ .

In beiden Fällen ist  $(u, v, b)$  eine Lösung von (4.5).

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst, dass die Folgen in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  konvergieren. Die Funktion  $(u, v, b)$  ist wegen  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  eine Lösung von (4.5). Insbesondere gilt

$$\|u\|^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q, \quad \|v\|_\omega^2 = \|v\|_{2q}^{2q} + b\|uv\|_q^q. \quad (4.8)$$

Sei nun  $(u_k, v_k, b_k)$  eine Folge wie in (ii). Nach Proposition C.8 (i) gilt  $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$  in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n)$ . Aus (4.8) folgt damit  $\|u_k\| \rightarrow \|u\|$  und  $\|v_k\|_\omega \rightarrow \|v\|_\omega$  für  $k \rightarrow \infty$ . Zusammen mit  $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$  folgt  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$  in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$ . Im Fall  $n = 1$  erhalten wir  $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$  in  $L^{2q}(\mathbb{R}^n)$  für radialsymmetrische radial fallende aus Proposition C.8 (ii) und dasselbe Argument wie oben liefert  $(u_k, v_k) \rightarrow (u, v)$ .

Wir kommen zur Konvergenz in  $C_B^2(\mathbb{R}^n) \times C_B^2(\mathbb{R}^n)$ . Aus Lemma C.7 (ii) erhalten wir  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  in  $C^2(\overline{B_1(0)})$ . Ferner gilt für  $|x| \geq 1$

$$\begin{aligned} |u_k(x) - u(x)|^2 &= |\hat{u}_k(|x|)^2 - \hat{u}(|x|)^2| \\ &\leq 2 \int_{|x|}^\infty |\hat{u}_k \hat{u}'_k - \hat{u} \hat{u}'| ds \\ &\leq 2 \int_1^\infty s^{n-1} (|\hat{u}_k| |\hat{u}'_k - \hat{u}'| + |\hat{u}'| |\hat{u} - \hat{u}_k|) ds \\ &\leq 2 \cdot \left( \int_1^\infty s^{n-1} |\hat{u}_k|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_1^\infty s^{n-1} |\hat{u}'_k - \hat{u}'|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\quad + 2 \cdot \left( \int_1^\infty s^{n-1} |\hat{u}'|^2 ds \right)^{1/2} \left( \int_1^\infty s^{n-1} |\hat{u} - \hat{u}_k|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq C (\|u_k\| \|u_k - u\| + \|u\| \|u - u_k\|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und wir erhalten  $u_k \rightarrow u$  in  $C_B(\mathbb{R}^n)$ . Analog folgt  $v_k \rightarrow v$  in  $C_B(\mathbb{R}^n)$ . Sei nun

$$f_k(y) := |u_k|^{2q-2} u_k + b_k |u_k|^{q-2} u_k |v_k|^q, \quad g_k(y) := |v_k|^{2q-2} v_k + b_k |u_k|^q |v_k|^{q-2} v_k,$$

<sup>4</sup>Man nutzt eine gleichgradige Abfallrate und Strauss' "Compactness Lemma".

$$f(y) := |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q, \quad g(y) := |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v$$

und bezeichne  $G_1, G_{\omega^2}$  die Greensche Funktion von  $-\Delta + 1$  bzw.  $-\Delta + \omega^2$  auf  $\mathbb{R}^n$ , siehe (3.2) in [54]. Nach Proposition 16 in [54] gelten die Darstellungsformeln

$$\begin{aligned} \nabla u_k(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G_1(x-y) f_k(y) dy, & \nabla v_k(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G_{\omega^2}(x-y) g_k(y) dy, \\ \nabla u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G_1(x-y) f(y) dy, & \nabla v(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G_{\omega^2}(x-y) g(y) dy. \end{aligned}$$

Aus  $|\nabla G_1|, |\nabla G_{\omega^2}| \in L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $f_k \rightarrow f, g_k \rightarrow g$  in  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  folgt  $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$  in  $C_B^1(\mathbb{R}^n)$ . Aus der Differentialgleichung folgt schließlich  $u_k \rightarrow u, v_k \rightarrow v$  in  $C_B^2(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

Es folgen die Resultate von Busca, Sirakov [16] und Ikoma [40] zu Symmetrieeigenschaften positiver Lösungen von (4.5).

**Satz C.10** (Busca, Sirakov, Ikoma). *Sei  $q \geq 2, b \geq 0$  und sei  $(u, v)$  positive Lösung von (4.5). Dann existiert ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $(u, v)$  radialsymmetrisch und radial fallend um  $x_0$  sind.*

**Beweis:**

Im Fall  $n \geq 2$  folgt die Radialsymmetrie und Monotonie der positiven Lösungen von (4.5) aus Satz 1 in [16], im Fall  $n = 1$  aus Satz 4.1 in [40].  $\square$

Die Resultate von Busca, Sirakov und Ikoma lassen sich nicht auf den Fall  $1 < q < 2$  anwenden, da in diesem Fall die Bedingung (H4) bei Busca, Sirakov und  $(f_3)$  bei Ikoma nicht erfüllt ist.

In Satz C.12 bestimmen wir die Abfallraten radialsymmetrischer Lösungen von (4.5) mit Hilfe eines Resultats von Gidas, Ni, Nirenberg. Eine Anpassung von Proposition 4.2 (i) in [33] auf den radialsymmetrischen Kontext ist in der folgenden Proposition zusammengefasst. Hier bezeichne  $I_\alpha$  die entsprechende modifizierte Besselfunktion erster Art. Wir schreiben  $w(x) = \hat{w}(|x|)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  und eine radialsymmetrische Funktion  $w$ .

**Proposition C.11** (Gidas, Ni, Nirenberg). *Sei  $\kappa > 0$ , sei  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  stetig und es gebe ein  $\alpha > 1$  mit  $f(r) = O(e^{-\alpha\kappa r})$  für  $r \rightarrow \infty$ . Dann ist  $w = (-\Delta + \kappa^2)^{-1} f(|\cdot|)$  radialsymmetrisch und es gilt*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{w}(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^{\kappa r} = \int_0^\infty \gamma_{n,\kappa}(r) f(r) dr \quad \text{für } \gamma_{n,\kappa}(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa}} r^{\frac{n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(\kappa r).$$

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst, dass es genügt, die Behauptung für  $\kappa = 1$  zu beweisen. Im Fall  $-\Delta w + \kappa^2 w = f(|\cdot|)$  in  $\mathbb{R}^n$  erfüllt  $\tilde{w}(x) := w(\kappa^{-1}x)$  die Differentialgleichung  $-\Delta \tilde{w} + \tilde{w} = \tilde{f}(|\cdot|)$  für  $\tilde{f}(r) = \kappa^{-2} f(\kappa^{-1}r)$ . Gilt daher das Resultat für  $\kappa = 1$ , so folgt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{w}(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^r = \int_0^\infty \gamma_{n,1}(r) \tilde{f}(r) dr.$$

Reskalierung dieser Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{w}(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^{\kappa r} &= \kappa^{\frac{1-n}{2}} \cdot \int_0^\infty \gamma_{n,1}(s) \cdot \kappa^{-2} f(\kappa^{-1}s) ds \\ &= \int_0^\infty \kappa^{-\frac{1+n}{2}} \gamma_{n,1}(\kappa s) f(s) ds \\ &= \int_0^\infty \gamma_{n,\kappa}(s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Sei daher im Folgenden  $\kappa = 1$ .

Nach Proposition 4.2 (i) in [33] gilt<sup>5</sup> für eine Folge  $(x^m)$  in  $\mathbb{R}^n$  mit  $|x^m| \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w(|x^m|) |x^m|^{\frac{n-1}{2}} e^{|x^m|} = \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(|y|) e^{\xi \cdot y} dy \quad \text{falls } \frac{x^m}{|x^m|} \rightarrow \xi. \quad (4.9)$$

Für  $k \in \mathbb{N}$ ,  $r > 0$  sei  $B_r^k := \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < r\}$ . Wegen  $|\xi| = 1$  folgt aus dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(|y|) e^{\xi \cdot y} dy &= \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \int_{\partial B_1^n} e^{\xi \cdot rz} d\sigma(z) dr \\ &= \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \int_{\partial B_1^n} e^{rz_1} d\sigma(z) dr \\ &= \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \int_{B_1^n} \operatorname{div}(e^{rz_1} z) dz dr \\ &= \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \int_{B_1^n} e^{rz_1} (n + rz_1) dz dr \\ &= \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \int_{-1}^1 e^{rz_1} (n + rz_1) \operatorname{vol}(B_{(1-z_1^2)^{1/2}}^{n-1}) dz_1 dr \\ &= \operatorname{vol}(B_1^{n-1}) \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \int_{-1}^1 e^{rz_1} (n + rz_1) (1 - z_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dz_1 dr \\ &= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r \sin(\phi)} (n + r \sin(\phi)) \cos(\phi)^n d\phi dr. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Sei daher

$$h_n(r) := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r \sin(\phi)} (n + r \sin(\phi)) \cos(\phi)^n d\phi.$$

Die Funktion  $h_n$  ist glatt auf  $[0, \infty)$  und erfüllt  $h_n(0) = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$  sowie

$$\begin{aligned} &-h_n''(r) - \frac{n-1}{r} h_n'(r) + h_n(r) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r \sin(\phi)} \cos(\phi)^n \cdot \left( -(n+2+r \sin(\phi)) \sin(\phi)^2 \right. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Die Formel (4.13) in [33] ist nicht korrekt. Die rechte Seite in (4.13) muss mit dem Faktor  $(2\pi)^{-n/2}$  multipliziert werden, wie sich anhand der Beispiele  $u(r) = \operatorname{sech}(r) r^{\frac{n-1}{2}}$  und  $f(r) := -u''(r) - \frac{n-1}{r} u'(r) + u(r)$  mit Hilfe eines Rechners nachvollziehen lässt.

$$\begin{aligned}
& - \frac{n-1}{r} (n+1 + r \sin(\phi)) \sin(\phi) + (n + r \sin(\phi)) \Big) d\phi \\
= & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{r \sin(\phi)} \cos(\phi)^n \cdot \left( n + \left( r + \frac{1-n^2}{r} \right) \sin(\phi) - (2n+1) \sin(\phi)^2 - r \sin(\phi)^3 \right) d\phi \\
= & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d}{d\phi} \left( e^{r \sin(\phi)} \cos(\phi)^{n+1} \left( \sin(\phi) + \frac{n-1}{r} \right) \right) d\phi \\
= & 0.
\end{aligned}$$

Aus der eindeutigen Lösbarkeit des entsprechenden Anfangswertproblems folgt

$$h_n(r) = 2^{n/2} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) r^{\frac{2-n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(r) \quad (r > 0). \quad (4.11)$$

Definieren wir für  $\xi \in \mathbb{R}^n$  mit  $|\xi| = 1$  die Folge  $x^m := m\xi$ , so folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{w}(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^r &= \lim_{m \rightarrow \infty} w(|x^m|) |x^m|^{\frac{n-1}{2}} e^{|x^m|} \\
&\stackrel{(4.9)}{=} \frac{1}{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(|y|) e^{\xi \cdot y} dy \\
&\stackrel{(4.10)}{=} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2})} \int_0^\infty f(r) r^{n-1} h_n(r) dr \\
&\stackrel{(4.11)}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty f(r) r^{\frac{n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(r) dr \\
&= \int_0^\infty \gamma_{n,1}(r) f(r) dr.
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe des obigen vorbereitenden Resultats bestimmen wir nun die Abfallraten von radialsymmetrischen Lösungen des Systems (4.5). Zur Vereinfachung der Notation im Beweis des Satzes heißt eine Abbildung  $P: \mathbb{R}_{>0}^k \rightarrow \mathbb{R}$  verallgemeinertes Polynom des Homogenitätsgrades  $p \in \mathbb{R}$ , falls eine endliche Indexmenge  $I \subset \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{R}^k : s_1 + \dots + s_k = p\}$  und Koeffizienten  $a_s \in \mathbb{R}$  für  $s = (s_1, \dots, s_k) \in I$  existieren mit

$$P(z) = \sum_{s \in I} a_s z_1^{s_1} \cdot \dots \cdot z_k^{s_k} \quad (z_1, \dots, z_k > 0).$$

**Satz C.12.**

(i) Sei  $q \geq 2$  und sei  $(u, v)$  eine radialsymmetrische Lösung von (4.5). Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{u}^{(k)}(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^r = (-1)^k \sigma_1, \quad (4.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{v}^{(k)}(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^{\omega r} = (-\omega)^k \sigma_2 \quad (4.13)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $\sigma_1, \sigma_2$  (für  $\gamma_{n,1}, \gamma_{n,\omega}$  wie in Proposition C.11) gegeben sind durch

$$\sigma_1 = \int_0^\infty \gamma_{n,1}(s) (|\hat{u}|^{2q-2} \hat{u} + b |\hat{u}|^{q-2} \hat{u} |\hat{v}|^q) ds,$$

$$\sigma_2 = \int_0^\infty \gamma_{n,\omega}(s)(|\hat{v}|^{2q-2}\hat{v} + b|\hat{u}|^q|\hat{v}|^{q-2}\hat{v}) ds.$$

(ii) Sei  $1 < q < 2$  und sei  $(u, v)$  eine radialsymmetrische Lösung von (4.5), so dass  $\hat{u}, \hat{v}$  nur endlich viele Nullstellen besitzt.

(a) Im Fall  $1 \leq \omega < \frac{q}{2-q}$  gilt (4.12), (4.13) für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

(b) Im Fall  $\omega \geq \frac{q}{2-q}$  gilt (4.12) für  $k = 0, 1, 2, 3$  sowie  $|\hat{v}^{(k)}(r)| = O(e^{-\alpha r})$  für alle  $\alpha < \frac{q}{2-q}$  und  $k = 0, 1, 2$ .

**Beweis:**

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $u, v \neq 0$  an. Nach Korollar C.5 gilt  $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$  und aus  $u = \hat{u}(|\cdot|), v = \hat{v}(|\cdot|)$  folgt  $\hat{u}, \hat{v} \in C^2([0, \infty))$ . Aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt  $\hat{u}(r), \hat{v}(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ , denn aus der Dichtheit der  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen in  $H_r^1(\mathbb{R}^n)$  folgt  $w(r)^2 = -\int_r^\infty w(s)w'(s) ds$  für alle  $w \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$  und damit

$$\hat{u}(r)^2 + \hat{v}(r)^2 \leq 2r^{1-n} \int_r^\infty s^{n-1} (|\hat{u}(s)||\hat{u}'(s)| + |\hat{v}(s)||\hat{v}'(s)|) ds \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty).$$

Im Folgenden seien die Funktionen  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} f(r) &:= |\hat{u}(r)|^{2q-2}\hat{u}(r) + b|\hat{u}(r)|^{q-2}\hat{u}(r)|\hat{v}(r)|^q, \\ g(r) &:= |\hat{v}(r)|^{2q-2}\hat{v}(r) + b|\hat{u}(r)|^q|\hat{v}(r)|^{q-2}\hat{v}(r). \end{aligned}$$

Zum Beweis von (i) betrachten wir zunächst den Fall  $q \geq 2$  und beweisen im ersten Schritt, dass die Funktionen  $u, v$  exponentiell abfallen. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass  $f$  bzw.  $g$  die Voraussetzungen von Proposition C.11 genügt, so dass die Formeln (4.12), (4.13) für  $k = 0$  aus Proposition C.11 folgen. Ausnutzen der Differentialgleichung liefert die Formel für  $k = 1$ . Im dritten Schritt beweisen wir die Formel induktiv für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  durch Differentiation der Differentialgleichung. Schließlich behandeln wir den Fall  $1 < q < 2$  mit ähnlichen Methoden.

Beweis von (i)

1. Schritt ( $q \geq 2$ ): Für alle  $\alpha < 1$  gilt  $|u(r)| = O(e^{-\alpha r}), |v(r)| = O(e^{-\alpha \omega r})$  für  $r \rightarrow \infty$ .

Sei  $\alpha < 1$ . Wegen  $\hat{u}(r), \hat{v}(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  und  $q \geq 2$  existiert ein  $r_1 > 0$  mit

$$\frac{f(r)}{\hat{u}(r)} < 1 - \alpha^2, \quad \frac{g(r)}{\hat{v}(r)} < \omega^2(1 - \alpha^2) \quad (r \geq r_1).$$

Aus der Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \pm \left( -\hat{u}'' - \frac{n-1}{r}\hat{u}' + \alpha^2\hat{u} \right) &\leq 0 \quad \text{auf } [r_1, \infty) \cap \{\pm u > 0\}, \\ \pm \left( -\hat{v}'' - \frac{n-1}{r}\hat{v}' + \alpha^2\omega^2\hat{v} \right) &\leq 0 \quad \text{auf } [r_1, \infty) \cap \{\pm v > 0\}. \end{aligned}$$

Insbesondere besitzt weder  $\hat{u}$  noch  $\hat{v}$  ein positives lokales Maximum oder ein negatives lokales Minimum auf  $[r_1, \infty)$ , d.h. beide Funktionen sind monoton auf  $[r_1, \infty)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $\hat{u}, \hat{v} > 0$  auf  $[r_1, \infty)$ , so dass beide Funktionen monoton fallend gegen 0 konvergieren. Es folgt  $\hat{u}' \leq 0$  auf  $[r_1, \infty)$  und somit

$$(-\hat{u}'^2 + \alpha^2 \hat{u}^2)' = 2\hat{u}'(-\hat{u}'' + \alpha^2 \hat{u}) \geq \frac{2(n-1)}{r} \hat{u}'^2 \geq 0 \quad \text{auf } [r_1, \infty).$$

Also ist  $-\hat{u}'^2 + \alpha^2 \hat{u}^2$  monoton wachsend gegen 0 und es folgt  $-\hat{u}'^2 + \alpha^2 \hat{u}^2 \leq 0$  auf  $[r_1, \infty)$ . Aus  $-\hat{u}' + \alpha \hat{u} > -\hat{u}' \geq 0$  erhalten wir  $\hat{u}' + \alpha \hat{u} \leq 0$  und damit  $(e^{\alpha r} \hat{u})' \leq 0$  auf  $[r_1, \infty)$ . Insbesondere folgt

$$|\hat{u}(r)| = O(e^{-\alpha r}) \quad (r \rightarrow \infty).$$

Analog ergibt sich  $|v(r)| = O(e^{-\alpha \omega r})$  für  $r \rightarrow \infty$ .

*2. Schritt ( $q \geq 2$ ): Beweis der Formeln (4.12), (4.13) für  $k = 0, 1$ .*

Für alle  $\alpha < 1$  gilt nach dem ersten Schritt

$$|f(r)| = O(e^{-\alpha(2q-1)r}), \quad |g(r)| = O(e^{-\alpha((q-1)\omega+q)r}) \quad (r \rightarrow \infty). \quad (4.14)$$

Wegen  $q \geq 2$  und insbesondere  $2q-1 > 1, (q-1)\omega+q > \omega$  existiert ein  $\alpha < 1$  mit

$$\alpha(2q-1) > 1, \quad \alpha((q-1)\omega+q) > \omega. \quad (4.15)$$

Wegen (4.14) sind die Voraussetzungen von Proposition C.11 erfüllt und die Formeln (4.12), (4.13) gelten für  $k = 0$ . Aus

$$\begin{aligned} r^{n-1} \hat{u}'(r) &= \int_r^\infty (-s^{n-1} \hat{u}')' ds = \int_r^\infty s^{n-1} (f(s) - \hat{u}(s)) ds, \\ r^{n-1} \hat{v}'(r) &= \int_r^\infty (-s^{n-1} \hat{v}')' ds = \int_r^\infty s^{n-1} (g(s) - \omega^2 \hat{v}(s)) ds \end{aligned} \quad (4.16)$$

und den soeben bewiesenen exakten Abfallraten von  $u, v$  aus (4.12), (4.13) folgt nach einmaliger Anwendung der Regel von de l'Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{u}'(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^r &= \lim_{r \rightarrow \infty} e^r r^{\frac{1-n}{2}} \int_r^\infty s^{n-1} (f(s) - \hat{u}(s)) ds = -\sigma_1, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \hat{v}'(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^{\omega r} &= \lim_{r \rightarrow \infty} e^{\omega r} r^{\frac{1-n}{2}} \int_r^\infty s^{n-1} (g(s) - \omega^2 \hat{v}(s)) ds = -\omega \sigma_2, \end{aligned}$$

d.h. (4.12), (4.13) gilt auch für  $k = 1$ .

*3. Schritt ( $q \geq 2$ ): Beweis der Formeln (4.12), (4.13) für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

Da  $(\hat{u}, \hat{v})$  auf  $(r_1, \infty)$  positiv ist, gilt  $\hat{u}, \hat{v} \in C^\infty(r_1, \infty)$  nach Korollar C.5. Induktiv folgt auf  $(r_1, \infty)$  durch Differentiation der Differentialgleichung

$$\hat{u}^{(k+2)} = \hat{u}^{(k)} + l_k \left( \frac{\hat{u}'}{r^{k+1}}, \dots, \frac{\hat{u}^{(k+1)}}{r} \right) + p_k(J_k \hat{u}) + \sum_{j=1}^{m_k} q_{kj} (J_k \hat{u}) r_{kj} (J_k \hat{v})$$

$$\hat{v}^{(k+2)} = \omega^2 \hat{v}^{(k)} + l_k \left( \frac{\hat{v}'}{r^{k+1}}, \dots, \frac{\hat{v}^{(k+1)}}{r} \right) + p_k(J_k \hat{v}) + \sum_{j=1}^{m_k} q_{kj}(J_k \hat{v}) r_{kj}(J_k \hat{u})$$

für eine natürliche Zahl  $m_k$  und verallgemeinerte Polynome  $l_k, p_k, q_{kj}, r_{kj}$  der Homogenitätsgrade  $1, 2q-1, q-1, q$ , wobei  $J_k \hat{w}(r) := (\hat{w}(r), \dots, \hat{w}^{(k)}(r))$  für  $\hat{w} \in C^\infty(r_1, \infty)$ . Sind die exakten Abfallraten für  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{u}', \hat{v}', \dots, \hat{u}^{(k+1)}, \hat{v}^{(k+1)}$  aus (4.12), (4.13) bekannt, so erhalten wir aus der Homogenität der Funktionen  $l_k, p_k, q_{kj}, r_{kj}$  nach kurzer Rechnung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\hat{u}^{(k+2)}(r)}{\hat{u}^{(k)}(r)} = 1, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\hat{v}^{(k+2)}(r)}{\hat{v}^{(k)}(r)} = \omega^2. \quad (4.17)$$

Daher gelten die Formeln (4.12), (4.13) für alle  $k \in \mathbb{N}$  und der Beweis von (i) ist vollständig.

### Beweis von (ii)

Sei nun  $1 < q < 2$ . Da die Funktionen  $\hat{u}, \hat{v}$  per Voraussetzung nur endlich viele Nullstellen besitzen, gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\hat{u}, \hat{v} > 0$  auf  $(r_0, \infty)$ .

*1. Schritt ( $1 < q < 2$ ):* Für alle  $\alpha < 1$  gilt  $|\hat{u}(r)|, |\hat{v}(r)| = O(e^{-\alpha r})$  für  $r \rightarrow \infty$ . Sei  $\alpha < 1$ . Wegen  $\hat{u}(r), \hat{v}(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  existiert ein  $r_1 > r_0$  mit

$$\frac{\hat{u}^{2q-1} + \hat{v}^{2q-1}}{\hat{u} + \hat{v}} + b \hat{u}^{q-1} \hat{v}^{q-1} \leq 1 - \alpha^2 \quad \text{auf } [r_1, \infty).$$

Wegen  $\hat{v} \leq \omega^2 \hat{u}$  erhalten wir auf  $[r_1, \infty)$  die Differentialungleichung (4.5)

$$-(\hat{u} + \hat{v})'' - \frac{n-1}{r} (\hat{u} + \hat{v})' + \alpha^2 (\hat{u} + \hat{v}) \leq 0 \quad \text{auf } [r_1, \infty).$$

Die Argumentation wie im 1. Schritt für  $q \geq 2$  liefert  $(\hat{u} + \hat{v})(r) = O(e^{-\alpha r})$  und damit

$$\hat{u}(r), \hat{v}(r) = O(e^{-\alpha r}) \quad (r \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } \alpha < 1. \quad (4.18)$$

### *2. Schritt ( $1 < q < 2$ ): Bessere Abfallrate von $v$ durch Bootstrap-Verfahren*

Sei  $\omega_0 \in (0, 1)$ . Dann gilt  $\omega_0 \leq \omega, \omega_0 < \frac{q}{2-q}$  und (4.18) liefert  $\hat{v}(r) = O(e^{-\omega_0 r})$ . Ist  $\omega_j$  mit  $\omega_j \leq \omega$  und  $\omega_j < \frac{q}{2-q}$  sowie  $|\hat{v}(r)| = O(e^{-\omega_j r})$  gegeben, wähle  $\omega_{j+1} := \min\{\omega, \frac{q}{2}\omega_j + \frac{q}{2}\} \geq \omega_j$ . Aus  $\omega_{j+1} \leq \omega$  folgt

$$|v| \leq (-\Delta + \omega^2)^{-1} |g(|\cdot|)| \leq (-\Delta + \omega_{j+1}^2)^{-1} |g(|\cdot|)|.$$

Aus  $g(r) = O(e^{-((q-1)\omega_j + \alpha q)r})$  für alle  $\alpha < 1$  und der Ungleichung  $(q-1)\omega_j + q > \omega_{j+1}$  folgt mit Proposition C.11  $\hat{v}(r) = O(e^{-\omega_{j+1} r})$ . Induktiv folgt  $\hat{v}(r) = O(e^{-\omega_j r})$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

Im Fall  $\omega \geq \frac{q}{2-q}$  konvergiert  $(\omega_j)$  streng monoton wachsend gegen  $\frac{q}{2-q}$  und es ergibt sich

$$\hat{v}(r) = O(e^{-\alpha r}) \quad (r \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } \alpha < \frac{q}{2-q}. \quad (4.19)$$

Im Fall  $1 \leq \omega < \frac{q}{2-q}$  existiert ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $\omega_j = \omega$  und wir erhalten  $\hat{v}(r) = O(e^{-\omega r})$ . Aus  $g(r) = O(e^{-(\omega(q-1)+q\alpha)r})$  für alle  $\alpha < 1$  und  $\omega(q-1) + q > \omega$  folgt mit Proposition C.11

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \hat{v}(r) r^{\frac{n-1}{2}} e^{\omega r} = \sigma_2. \quad (4.20)$$

*3. Schritt ( $1 < q < 2$ ): Abfallraten der Ableitungen von  $\hat{u}, \hat{v}$*

Im Fall  $\omega \geq \frac{q}{2-q}$  folgt aus (4.16) und der Differentialgleichung

$$|\hat{v}(r)|, |\hat{v}'(r)|, |\hat{v}''(r)| = O(e^{-\alpha r}) \quad (r \rightarrow \infty) \quad \text{für alle } \alpha < \frac{q}{2-q}.$$

Insbesondere ergibt sich aus der Definition von  $f$  die Abschätzung  $f(r) = O(e^{-\alpha r})$  für ein  $\alpha > 1$  und die exakten Abfallraten für  $\hat{u}, \hat{u}', \hat{u}''$  ergeben sich wie im 2. Schritt für  $q \geq 2$ . Ferner gilt

$$\hat{u}^{(3)} = \hat{u}' - (n-1)\left(\frac{\hat{u}''}{r} - \frac{\hat{u}'}{r^2}\right) - (2q-1)\hat{u}^{2q-2}\hat{u}' - b(q-1)\hat{u}^{q-2}\hat{v}^q\hat{u}' - bq\hat{u}^{q-1}\hat{v}^{q-1}\hat{v}'$$

und aus (4.19) und den exakten Abfallraten für  $\hat{u}, \hat{u}'$  folgt<sup>6</sup> (4.12) für  $k = 3$ .

Im Fall  $1 \leq \omega < \frac{q}{2-q}$  gilt (4.20) und insbesondere (4.14). Wegen  $(q-1)\omega + q > \omega$  existiert ein  $\alpha < 1$  mit der Eigenschaft (4.15). Der Beweis von (4.12), (4.13) für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  erfolgt induktiv wie im zweiten und dritten Schritt des Falls  $q \geq 2$ . Dies beweist (ii).  $\square$

Für positive radial fallende Lösungen von (4.5) in einem Parameterbereich der Form  $[0, b_0]$  für  $b_0 > 0$  finden wir eine universelle exponentielle Abfallrate, aus der sich A-priori-Schranken in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  ergeben. Aus Satz C.4 folgen dann A-priori-Schranken in  $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n) \times C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$  für ein geeignetes  $\alpha > 0$ . Der Beweis ist eine geringfügige Modifikation der Argumente Ikomas, siehe Abschnitt 2 in [40].

**Satz C.13.** *Sei  $q \geq 2$  und  $b_0 > 0$ . Dann existieren nur von  $n, \omega, q, b_0$  abhängige Zahlen  $\alpha \in (0, 1), c, C > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Für alle positiven radialsymmetrischen Lösungen  $(u, v, b)$  von (4.5) mit  $b \in [0, b_0]$  gelten die Ungleichungen*

$$u(x), v(x) \leq C e^{-c|x|} \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \|u\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)} + \|u\| + \|v\|_\omega < C \quad (4.21)$$

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst, dass eine nur von  $n, q, \omega, b_0$  abhängige Zahl  $C > 0$  existiert, so dass für alle positiven Lösungen von (4.5) die Abschätzung

$$u(x) + v(x) \leq C \quad (x \in \mathbb{R}^n) \quad (4.22)$$

<sup>6</sup>Für  $k = 4, 5, \dots$  können wir keine Aussage treffen, da der "zu  $b|u|^{q-2}u|v|^q$  gehörende" Term der rechten Seite mit einer Abschätzung der Form  $|v(r)| = O(e^{-\alpha r})$  nicht zu kontrollieren ist: Ein bei der Berechnung von  $u^{(4)}$  auftretender Term ist  $bq(q-1)|u|^{q-2}|v|^{q-2}v'^2$ , dessen asymptotisches Verhalten wegen  $1 < q < 2$  und einer fehlenden unteren Schranke für  $|v|$  a priori unklar ist. Aus demselben Grund erhalten wir keine zusätzliche Information über  $v^{(k)}$  für  $k = 3, 4, \dots$

gilt. Wegen  $b \geq 0$  ist nach Satz C.10 jede positive radialsymmetrische Lösung radial monoton fallend. Nach den klassischen Blow-Up-Argumenten von Gidas und Spruck (vgl. [34], siehe auch [6]) genügt es zu zeigen, dass für  $b \in [0, b_0]$  keine nichtnegative nichttriviale beschränkte radialsymmetrische Lösung des Systems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= |u|^{2q-2}u + b|u|^{q-2}u|v|^q & \text{in } \mathbb{R}^n \\ -\Delta v &= |v|^{2q-2}v + b|u|^q|v|^{q-2}v & \text{in } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

für  $1 < q < \frac{n}{(n-2)_+}$  existiert. Dieses Resultat ist dem Liouville-Satz Proposition 5 (i) in [67] zu entnehmen.

Sei daher  $C_0$  eine nur von  $n, \omega, q, b_0$  abhängige positive Zahl mit

$$\hat{u}(r) + \hat{v}(r) \leq C_0 \quad (r \geq 0) \quad (4.23)$$

für alle positiven radialsymmetrischen Lösungen  $(u, v, b)$  von (4.5) mit  $b \in [0, b_0]$ . Wir zeigen zunächst, dass die erste Abschätzung in (4.21) für geeignete von der positiven Lösung unabhängige Zahlen  $c, C > 0$  gilt. Hierzu nehmen wir an, es gäbe eine Folge  $(u_k, v_k, b_k)$  positiver Lösungen und eine Folge  $(r_k)$  positiver Zahlen mit

$$\hat{u}_k(r_k) + \hat{v}_k(r_k) \geq ke^{-r_k/k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

Nach Satz 8.24 in [35] ist die Folge  $(u_k, v_k)$  wegen (4.23) gleichgradig stetig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli existiert eine Teilfolge mit  $(u_k, v_k, b_k) \rightarrow (u, v, b)$  in  $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times C_{loc}^2(\mathbb{R}^n) \times [0, b_0]$ . Wir zeigen, dass  $\hat{u}, \hat{v}$  monoton fallend gegen 0 konvergiert.

Da  $(\hat{u}_k, \hat{v}_k)$  fallend ist, gilt dies ebenso für  $(\hat{u}, \hat{v})$ , so dass nichtnegative Zahlen  $u_\infty, v_\infty$  mit  $(\hat{u}(r), \hat{v}(r)) \rightarrow (u_\infty, v_\infty)$  für  $r \rightarrow \infty$  existieren. Insbesondere gilt  $\hat{u}'(r), \hat{v}'(r) \rightarrow 0$ . Aufgrund der Differentialgleichung konvergiert auch  $\hat{u}''(r), \hat{v}''(r)$  und dieser Grenzwert kann nur 0 sein. Daher erfüllen  $u_\infty, v_\infty$  die Gleichungen

$$u_\infty = u_\infty^{2q-1} + bu_\infty^{q-1}v_\infty^q, \quad \omega^2 v_\infty = v_\infty^{2q-1} + bv_\infty^{q-1}u_\infty^q. \quad (4.25)$$

Sei nun

$$\begin{aligned} E_k(r) &:= \hat{u}'_k(r)^2 + \hat{v}'_k(r)^2 - \hat{u}_k(r)^2 - \omega^2 \hat{v}_k(r)^2 + \frac{1}{q} \left( \hat{u}_k(r)^{2q} + \hat{v}_k(r)^{2q} + 2b_k \hat{u}_k(r)^q \hat{v}_k(r)^q \right), \\ E(r) &:= \hat{u}'(r)^2 + \hat{v}'(r)^2 - \hat{u}(r)^2 - \omega^2 \hat{v}(r)^2 + \frac{1}{q} \left( \hat{u}(r)^{2q} + \hat{v}(r)^{2q} + 2b \hat{u}(r)^q \hat{v}(r)^q \right). \end{aligned}$$

Aus der Differentialgleichung (4.5) folgt

$$E'_k(r) = -\frac{2(n-1)}{r} (\hat{u}'_k(r)^2 + \hat{v}'_k(r)^2) \leq 0$$

und damit die Monotonie der Funktion  $E_k$ . Aus  $\hat{u}_k(r), \hat{v}_k(r), \hat{u}'_k(r), \hat{v}'_k(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  nach Satz C.12 folgt  $E_k(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  und insbesondere  $E_k(r) \geq 0$  für alle  $r \geq 0$ .

Wegen  $E_k \rightarrow E$  punktweise für  $k \rightarrow \infty$  gilt  $E \geq 0$ . Aus  $\hat{u}'(r), \hat{v}'(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  und (4.25) folgt zudem

$$0 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} E(r) = -(u_\infty^2 + \omega^2 v_\infty^2) + \frac{1}{q}(u_\infty^{2q} + v_\infty^{2q} + 2bu_\infty^q v_\infty^q) = \frac{1-q}{q}(u_\infty^2 + \omega^2 v_\infty^2).$$

Es folgt  $u_\infty = v_\infty = 0$  und damit

$$\hat{u}(r), \hat{v}(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty). \quad (4.26)$$

Wähle nun  $\varepsilon \in (0, 1)$  so klein, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{z_1^{2q-1} + z_2^{2q-1}}{z_1 + z_2} + b_0 z_1^{q-1} z_2^{q-1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } z_1, z_2 \in (0, \varepsilon). \quad (4.27)$$

Wegen (4.26) existiert ein  $r_0$  mit  $\hat{u}(r) + \hat{v}(r) \leq \frac{\varepsilon}{2}$  für  $r \geq r_0$ . Da  $(\hat{u}_k, \hat{v}_k)$  punktweise gegen  $(\hat{u}, \hat{v})$  konvergiert, existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\hat{u}_k(r_0) + \hat{v}_k(r_0) \leq \varepsilon$  für  $k \geq k_0$ . Da die Funktionen  $\hat{u}_k, \hat{v}_k$  monoton fallend sind, folgt  $0 < \hat{u}_k(r) + \hat{v}_k(r) \leq \varepsilon$  für alle  $r \geq r_0, k \geq k_0$  und aus  $\hat{v}_k \leq \omega^2 \hat{v}_k$ , der Differentialgleichung (4.5) sowie (4.27) erhalten wir

$$-(\hat{u}_k + \hat{v}_k)''(r) - \frac{n-1}{r}(\hat{u}_k + \hat{v}_k)'(r) + \frac{1}{2}(\hat{u}_k + \hat{v}_k)(r) \leq 0 \quad \text{für } k \geq k_0, r \geq r_0. \quad (4.28)$$

Sei nun  $R > r_0, k \geq k_0$  beliebig. Für  $w_R(r) := e^{-\frac{1}{2}(r-r_0)} + e^{-\frac{1}{2}(R-r)}$  erhalten wir

$$(\hat{u}_k + \hat{v}_k)(r_0) \leq \varepsilon \leq 1 < w_R(r_0), \quad (\hat{u}_k + \hat{v}_k)(R) \leq \varepsilon \leq 1 < w_R(R).$$

Wegen  $\hat{u}'_k + \hat{v}'_k \leq 0$  und (4.28) ist  $w_R - \hat{u}_k - \hat{v}_k$  Oberlösung des linearen Randwertproblems

$$-z'' + \frac{1}{2}z = 0, \quad z(r_0) = z(R) = 0.$$

Aus dem Vergleichsprinzip für lineare elliptische Randwertprobleme (vgl. Satz XVIII in [80]) folgt  $\hat{u}_k + \hat{v}_k \leq w_R$  auf  $[r_0, R]$ . Für  $R \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$(\hat{u}_k + \hat{v}_k)(r) \leq e^{-\frac{1}{2}(r-r_0)} \quad \text{für alle } k \geq k_0, r \geq r_0$$

und (4.23) liefert

$$(\hat{u}_k + \hat{v}_k)(r) \leq C e^{-\frac{1}{2}r} \quad \text{für alle } k \geq k_0, r \geq 0$$

im Widerspruch zu (4.24). Es folgt die erste Abschätzung in (4.21).

Insbesondere erfüllen alle positiven Lösungen  $(u, v, b)$  von (4.5) mit  $b \in [0, b_0]$  die Abschätzung

$$\|u\|^2 + \|v\|_\omega^2 = \|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b\|uv\|_q^q \leq \|u\|_{2q}^{2q} + \|v\|_{2q}^{2q} + 2b_0\|uv\|_q^q \leq C(n, q, \omega, b_0).$$

Aus Satz C.4 folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung C.14.** Der zu Beginn des Beweises verwendete Liouville-Satz von Quittner und Souplet liefert A-priori-Schranken in  $L^\infty(\mathbb{R}^n) \times L^\infty(\mathbb{R}^n)$  nicht nur für positive Lösungen  $(u, v, b)$  mit  $b \in [0, b_0]$ , sondern auch für positive Lösungen  $(u, v, b)$  mit  $b \in [-1 + \varepsilon, b_0]$  und  $\varepsilon > 0$ , wie eine Überprüfung der Bedingung (2.4) in [67] zeigt. Vor diesem Hintergrund ist die Frage natürlich, ob A-priori-Schranken in  $H_r^1(\mathbb{R}^n) \times H_r^1(\mathbb{R}^n)$  für  $b \in [-1 + \varepsilon, b_0]$  gelten. Im obigen Beweis benötigen wir die Voraussetzung  $b \geq 0$ , um die radiale Monotonie der Lösung  $(u, v)$  zu gewährleisten, sodass eine Folge  $(r_k)$  mit  $r_k \rightarrow \infty$  und

$$\hat{u}''(r_k), \hat{v}''(r_k), \hat{u}'(r_k), \hat{v}'(r_k) \rightarrow 0, \quad (\hat{u}(r_k), \hat{v}(r_k)) \rightarrow (u_\infty, v_\infty), \quad u_\infty, v_\infty \geq 0 \quad (4.29)$$

existiert. Schwächere hinreichende Bedingungen für die Existenz einer solchen Folge  $(r_k)$  sind denkbar, etwa die Beschränktheit aller Stellen lokaler Maxima von  $\hat{u}$  und  $\hat{v}$ .

Eine Folgerung aus Satz C.13 ist das folgende Nichtexistenzresultat für positive Lösungen von (4.5) im Fall  $q = 2, \omega > 1$ .

**Lemma C.15.** *Sei  $q = 2, \omega > 1$ . Dann existiert eine Zahl  $\delta = \delta(\omega, n) > 0$ , so dass im Fall  $|b - 1| < \delta$  keine positive Lösung  $(u, v, b)$  von (4.5) existiert.*

**Beweis:**

Nach Satz C.13 existiert ein  $\delta_0 > 0$ , so dass für alle positive radialsymmetrischen Lösungen  $(u, v, b)$  mit  $b \in [0, 2]$  die Abschätzung  $|v(x)^2 - u(x)^2| \leq \delta_0^{-1}$  auf  $\mathbb{R}^n$  gilt. Setze dann  $\delta := \min\{1, \delta_0(\omega^2 - 1)\} > 0$ .

Wir nehmen an, es gäbe eine positive Lösung  $(u, v, b)$  von (4.5) mit  $|b - 1| < \delta$ . Wegen  $\delta \leq 1$  gilt  $b \geq 0$ , insbesondere ist  $(u, v)$  nach Satz C.10 radialsymmetrisch. Es folgt  $|v(x)^2 - u(x)^2| \leq \delta_0^{-1}$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Testen der Differentialgleichung mit  $(v, u)$  liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v + uv \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} uv(u^2 + bv^2) \, dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v + \omega^2 uv \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} uv(v^2 + bu^2) \, dx \end{aligned}$$

und wir erhalten durch Subtraktion der Gleichungen

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} uv \left( (\omega^2 - 1) + (b - 1)(v^2 - u^2) \right) dx.$$

Wegen  $uv > 0$  in  $\mathbb{R}^n$  und

$$|b - 1||v^2 - u^2| \leq |b - 1|\delta_0^{-1} < \delta\delta_0^{-1} \leq \omega^2 - 1$$

ist der Integrand der rechten Seite positiv, Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung C.16.** Lemma C.15 ist zumindest im Fall  $n = 1$  für Lösungen mit einem Vorzeichenwechsel falsch. Für  $\omega > 1$  und  $b = 1$  sind explizite Lösungen  $(u, v)$  von (4.5) gegeben durch

$$u(x) := \frac{2\sqrt{2}e^x(1 + \frac{1-\omega}{1+\omega}e^{2\omega x})}{1 + e^{2x} + e^{2\omega x} + \frac{(1-\omega)^2}{(1+\omega)^2}e^{2(\omega+1)x}}, \quad v(x) := \frac{2\sqrt{2}\omega e^{\omega x}(1 - \frac{1-\omega}{1+\omega}e^{2x})}{1 + e^{2x} + e^{2\omega x} + \frac{(1-\omega)^2}{(1+\omega)^2}e^{2(\omega+1)x}}.$$

Die Funktion  $u$  besitzt genau eine Nullstelle, wohingegen  $v$  positiv ist.

Wir schließen Appendix C mit dem Beweis von Lemma 1.2:

Das Minimierungsproblem

$$\inf \left\{ \frac{\|u\|}{\|u\|_{2q}} : u \in H^1(\mathbb{R}^n), u \neq 0 \right\}$$

besitzt einen Schwarz-symmetrischen nichttrivialen Minimierer  $\tilde{u}$ . Ein skalares Vielfache von  $\tilde{u}$  ist eine radialsymmetrische Lösung von  $-\Delta u + u = |u|^{2q-2}u$  und aus dem Eindeutigkeitsresultat von Kwong (Satz 1.1) folgt  $\tilde{u} \in \text{span}\{u_0\}$ . Insbesondere gilt (1.12). Ferner ist jeder Minimierer der Form  $\lambda u_0$  für ein  $\lambda \neq 0$ , denn ist  $\tilde{u}$  ein weiterer Minimierer, so auch  $|\tilde{u}|$  und das obige Argument liefert  $|\tilde{u}| = \lambda u_0$  für ein  $\lambda > 0$ . Da  $u_0$  nullstellenfrei ist, erhalten wir  $\tilde{u} = \pm \lambda u_0$ . Schließlich erhalten wir (i) aus

$$\frac{\|v_0\|_\omega}{\|v_0\|_{2q}} = \frac{\|u_0(\omega \cdot)\|_\omega}{\|u_0(\omega \cdot)\|_{2q}} = \frac{(\omega^{2-n}\|u_0\|^2)^{\frac{1}{2}}}{(\omega^{-n}\|u_0\|_{2q}^{2q})^{\frac{1}{2q}}} = \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{2q}} \hat{c}_0.$$

Da  $u_0$  eine Lösung von (1.10) ist, liefert Testen mit  $u_0$  die Gleichung

$$\|\nabla u_0\|_2^2 + \|u_0\|_2^2 = \|u_0\|^2 = \|u_0\|_{2q}^{2q}. \quad (4.30)$$

Ferner erfüllt  $u_0$  die Pohozaev-Identität aus (4.14) in [51], d.h. es gilt

$$\frac{n-2}{2} \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{n}{2} \|u_0\|_2^2 = \frac{n}{2q} \|u_0\|_{2q}^{2q}. \quad (4.31)$$

Aus (4.30),(4.31) ergeben sich die Gleichungen aus (ii) durch elementare Umformungen. Wegen (1.11) gilt

$$\|v_0\|_\omega^2 = \omega^{\frac{2}{q-1}} \|u_0(\omega \cdot)\|_\omega^2 = \omega^{\frac{2}{q-1}} \cdot \omega^{2-n} \|u_0\|^2 = \omega^{\frac{2q-n(q-1)}{q-1}} \|u_0\|^2.$$

Insbesondere folgt für  $\omega > 1$  und  $q < \frac{n}{(n-2)_+}$  die Ungleichung

$$I(0, v_0) = \frac{q-1}{2q} \|v_0\|_\omega^2 > \frac{q-1}{2q} \|u_0\|^2 = I(u_0, 0).$$

Aussage (iv) ist Lemma 4.1 in [81] oder alternativ Lemma 4.2 in [59] zu entnehmen. In (v) folgt die Symmetrie des Operators  $L_\omega$  bezüglich des Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  aus

$$\langle (-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0^{2q-2}\phi), \psi \rangle_\omega = \int_{\mathbb{R}^n} u_0^{2q-2}\phi\psi \, dx = \langle \phi, (-\Delta + \omega^2)^{-1}(u_0^{2q-2}\psi) \rangle_\omega$$

für alle  $\phi, \psi \in H_r^1(\mathbb{R}^n)$ . Die Kompaktheit von  $L_\omega$  folgt aus  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $u_0(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Nach dem Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren folgt die Existenz einer Orthonormalbasis bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$  aus Eigenfunktionen, wobei die Folge der Eigenwerte  $(b_{j,\omega}^{-1})_{j \in \mathbb{N}_0}$  monoton gegen 0 konvergiert. Die Einfachheit der Eigenwerte ergibt sich aus der eindeutigen Lösbarkeit des zugehörigen Anfangswertproblems. Die nodale Charakterisierung der Eigenfunktionen  $\varphi_{j,\omega}$  folgt aus Satz 14.10 in [87]. Die strenge Monotonie der Funktionen  $b_j$ , für  $j \in \mathbb{N}_0$  ergibt sich aus dem Min-Max-Prinzip von Courant-Fischer. Aus Lemma 4.1 in [81] erhalten wir zudem  $b_{0,1} = 1$  und  $b_{1,1} > 2q - 1$ .  $\square$

Teil III.

Singuläre Lösungen nichtlinearer  
Schrödingergleichungen  
und -systeme



## 5. Einleitung

In diesem Kapitel konstruieren wir singuläre distributionelle Lösungen der nichtlinearen Schrödingergleichung

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (5.1)$$

unter geeigneten Voraussetzungen an die Funktionen  $V, \Gamma$ . Es ist bekannt, dass schwache Lösungen  $u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  von (5.1) im Fall  $V, \Gamma \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$  lokal beschränkt sind und daher keine Singularitäten besitzen. Wir zeigen, dass für  $n \geq 3$  und  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  unbeschränkte distributionelle Lösungen von (5.1) existieren, wenn  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein gewählt wird. Sämtliche dem Autor bekannten Existenzresultate zu unbeschränkten Lösungen nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme behandeln den Fall eines beschränkten Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Pacard bewies in [62] die Existenz unbeschränkter distributioneller Lösungen des Randwertproblems

$$-\Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (5.2)$$

für ein glatt berandetes Gebiet  $\Omega$  und Exponenten  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  für ein hinreichend klein gewähltes  $\varepsilon > 0$ . Hierbei sind die Randbedingungen im klassischen Sinn zu verstehen, da die konstruierte Lösung stetig in der Nähe des Randes von  $\Omega$  ist. Der Beweis basiert auf dem Gedanken, zu einer bekannten singulären Näherungslösung  $u_0$  eine glattere Korrekturfunktion  $u$  mit variationellen Methoden so zu bestimmen, dass die Funktion  $U := u_0 + u$  eine nichttriviale distributionelle Lösung des Problems ist. Später konnten Mazzeo und Pacard dieses Existenzresultat auf Exponenten  $p \in [\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$  erweitern, siehe [56]. Andere Arten singulärer Lösungen konnten del Pino, Musso, Pacard in [28] nachweisen. Sie zeigten, dass für glatt berandete Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und Exponenten  $p \in (\frac{n+1}{n-1}, \frac{n+1}{n-1} + \varepsilon)$  unbeschränkte sehr schwache Lösungen von (5.2) mit singulärem Verhalten auf dem Rand von  $\Omega$  existieren. Unter einer sehr schwachen Lösung  $u$  ist hierbei in erster Näherung eine distributionelle Lösung mit  $|u|^p \text{dist}(x, \partial\Omega) \in L^1(\Omega)$  zu verstehen. Horák, McKenna und Reichel verallgemeinerten dieses Resultat in [38] auf Gebiete mit einer konischen Ecke. In Abhängigkeit vom Öffnungswinkel des Kegels konnte ein Wert  $\gamma \in [0, 1]$  bestimmt werden, so dass für Exponenten  $p \in (\frac{n+\gamma}{n-2+\gamma}, \frac{n-2+\gamma}{n-\gamma} + \varepsilon)$  eine sehr schwache Lösung von (5.2) existiert. Im Fall eines degenerierten Kegels ohne Spitze gilt  $\gamma = 1$ , so dass es sich um eine Verallgemeinerung des Resultats von del Pino, Musso, Pacard handelt. Weitere Resultate zur Existenz singulärer Lösungen semilinearer elliptischer Randwertprobleme sind in [5] oder [12] zu finden.

In der Untersuchung der Gleichung (5.1) verwenden wir die Methode von Mazzeo und Pacard, d.h. wir gehen von einer singulären Näherungslösung  $u_0$  aus und bestimmen eine glattere Korrekturfunktion  $u$  mit der Eigenschaft, dass die Funktion  $U := u_0 + u$  eine nichttriviale distributionelle Lösung des Problems ist. Hierzu definieren wir zunächst einen Hilbertraum  $H$ , der alle Kandidaten für die Korrekturfunktion  $u$  enthält. Um die Existenz einer solchen Lösung mit Fixpunktargumenten und variationellen Techniken beweisen zu können, wählen wir einen zum Schrödingeroperator  $-\Delta + V(x)$  passenden stetig eingebetteten Unterraum  $H$  von  $H^1(\mathbb{R}^n)$ . Anschließend konstruieren wir für  $p > \frac{n}{n-2}$  eine positive singuläre Näherungslösung  $u_0 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit der Eigenschaft

$$u_0(x) = c_{n,p}|x|^{-\frac{2}{p-1}} \quad (0 < |x| \leq \rho), \quad c_{n,p} = \left( \frac{2}{p-1} \left( n - 2 - \frac{2}{p-1} \right) \right)^{\frac{1}{p-1}}$$

für eine positive Zahl  $\rho$ . Die Zahl  $c_{n,p}$  ist so gewählt, dass  $-\Delta u_0(x) = u_0(x)^p$  für  $0 < |x| < \rho$  gilt. Wir setzen  $u_0$  derart auf  $\{|x| > \rho\}$  fort, dass  $u_0(x)$  exponentiell für  $|x| \rightarrow \infty$  gegen 0 fällt und eine Differentialgleichung der Form  $-\Delta u_0(x) + \omega^2 u_0(x) = u_0(x)^p$  für  $|x| > \rho$  erfüllt. Unsere weiter unten definierten Bedingungen  $(A_1), (A_2)$  an das Verhalten der Funktionen  $V, \Gamma$  garantieren, dass  $u_0$  als Näherungslösung des Problems (5.1) betrachtet werden kann. Mit Hilfe dieser singulären Näherungslösung  $u_0$  können wir das variationelle Problem für die Korrekturfunktion  $u \in H$  bestimmen und es anschließend unter geeigneten Voraussetzungen zunächst mit Fixpunktmethoden und anschließend mit variationellen Methoden lösen. Es kommen der Banachsche Fixpunktsatz und das Mountain-Pass-Theorem zum Einsatz. Im Modellfall  $V \equiv \Gamma \equiv 1$  erhalten wir auf diese Weise für  $n = 3, 4, 5$  und  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  zwei verschiedene singuläre distributionelle Lösungen der Form  $U = u_0 + u$  mit  $u \in H$ , wobei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein gewählt ist. Die Unterscheidung der Lösungen bzw. der Korrekturfunktionen gelingt dadurch, dass der Banachsche Fixpunktsatz eine bezüglich der Norm in  $H$  kleine Störung  $u \in H$  liefert, wohingegen das Mountain-Pass-Theorem eine Korrekturfunktion  $u \in H$  "auf Passhöhe" produziert. Anschließend behandeln wir mit denselben Methoden nichtlineare Schrödingersysteme. Wir verallgemeinern das in Zusammenarbeit mit Reichel eingereichte Ergebnis aus [54] in folgender Hinsicht:

- (i) Die später in  $(A_1), (A_2)$  zusammengefassten Bedingungen an  $V, \Gamma$  sind weniger restriktiv als die in [54] geforderten Bedingungen  $(H_1), (H_2)$ . Insbesondere erhalten wir in Satz 6.3 die Existenz singulärer Lösungen der nichtlinearen Schrödingergleichung  $-\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u$  in  $\mathbb{R}^n$  für  $n = 3, 4, 5$  und lokal beschränkte Potentiale  $V$  mit  $V(x) \rightarrow +\infty$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ).
- (ii) Eine wichtige Voraussetzung in [54] war die Positivität des Spektrums des Schrödingeroperators  $-\Delta + V(x)$ . Mit Fixpunktmethoden können wir die Existenz einer singulären Lösung von (5.1) in einer beliebigen spektralen Lücke zeigen.
- (iii) Für Schrödingeroperatoren mit positivem Spektrum beweisen wir in Satz 6.7 die Existenz zweier verschiedener singulärer Lösungen von (5.1) mit Hilfe des Mountain Pass Theorems.

- (iv) Eine Verallgemeinerung des Zugangs auf variationelle und nichtvariationelle nicht-lineare Schrödingersysteme wird vorgestellt.

Aus unseren Existenzresultaten ergeben sich zwei überraschende Konsequenzen, die den Unterschied zwischen unbeschränkten distributionellen Lösungen von (5.1) auf der einen Seite und Lösungen endlicher Energie auf der anderen Seite verdeutlichen. Zum einen erhalten wir im Fall  $n = 3, 4, 5$  die Existenz einer nichttrivialen distributionellen Lösung der Gleichung  $-\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u$  in  $\mathbb{R}^n$  für Potentiale  $V$  mit  $V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{ess\,inf}_{\mathbb{R}^n} V > 0$  und  $\partial_1 V < 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Ein Beispiel für ein solches Potential ist gegeben durch  $V(x) = \pi + \arctan(x_1)$ . Dieses Existenzresultat ist insofern erstaunlich, dass keine  $H^1(\mathbb{R}^n)$ -Lösungen dieser Gleichung existieren. In der Tat liegt jede solche Lösung  $u$  in  $H^2(\mathbb{R}^n)$  und Testen der Differentialgleichung mit  $\partial_1 u$  ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla u \nabla (\partial_1 u) + V u \partial_1 u - |u|^{p-1} u \partial_1 u \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_1 \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} |u|^{p+1} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} V \partial_1 (|u|^2) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_1 V) |u|^2 dx \end{aligned}$$

und damit  $u \equiv 0$  wegen  $\partial_1 V < 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . Der Autor dankt Professor Kazunaga Tanaka für die Erwähnung dieses Nichtexistenzresultats. Eine zweite überraschende Tatsache betrifft Symmetrieeigenschaften positiver distributioneller Lösungen. Es ist bekannt, dass positive Lösungen endlicher Energie der Gleichung

$$-\Delta u + V_0(|x|)u = \Gamma_0(|x|)u^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (5.3)$$

radialsymmetrisch sind, sofern die Funktionen  $V_0, \Gamma_0$  auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  positiv und stetig sind und  $V_0$  monoton wächst sowie  $\Gamma_0$  monoton fällt, vgl. Satz 1 in [47]. Wir betrachten nun den Fall  $n = 3, 4, 5$  und  $\Gamma_0 \equiv 1$  auf einem Intervall  $(R - \varepsilon, R + \varepsilon)$ , vgl. Abbildung 5.1. Dann erfüllen die Funktionen  $V_0(|\cdot + Re_1|), \Gamma_0(|\cdot + Re_1|)$  die Bedingungen von Satz 6.3 und wir erhalten die Existenz einer positiven auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  glatten Lösung  $w$  der Gleichung  $-\Delta w + V_0(|\cdot + Re_1|)w = \Gamma_0(|\cdot + Re_1|)|w|^{p-1}w$  in  $\mathbb{R}^n$  mit einer Punktsingularität bei  $x = 0$ . Da die Funktion  $u := w(\cdot - Re_1)$  genau eine Punktsingularität bei  $Re_1$  besitzt, handelt es sich um eine positive und nicht radialsymmetrische Lösung der Gleichung (5.3). Dies zeigt, dass die Symmetriresultate von Gidas, Ni und Nirenberg [33] für klassische Lösungen keine Entsprechung für distributionelle Lösungen besitzen.

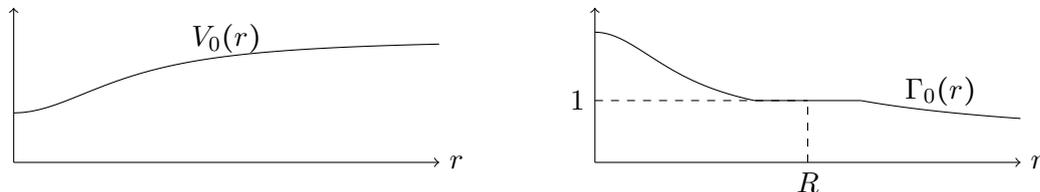


Abbildung 5.1.: Beispiele für  $V_0, \Gamma_0$

Wir beginnen mit der Konstruktion des Hilbertraums  $H$ . Die im Folgenden erwähnten Definitionen und Sätze entstammen dem Buch von Dunford und Schwartz [30]. Die später in  $(A_1)$  zusammengefassten Bedingungen an das Potential  $V$  garantieren, dass der in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  definierte symmetrische Operator  $-\Delta + V(x) : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  wesentlich selbstadjungiert ist. Daher existiert eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung dieses Operators, die wir mit  $L : D(L) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen. Die Abbildung  $L$  ist eine stetige lineare Abbildung zwischen den Hilberträumen  $(D(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_{D(L)})$  und  $(L^2(\mathbb{R}^n), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ , wobei das Skalarprodukt in  $D(L)$  durch

$$\langle u, v \rangle_{D(L)} := \langle Lu, Lv \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \langle u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (u, v \in D(L))$$

definiert ist. Nach Satz XII.6 in [30] ist dem selbstadjungierten Operator  $L$  ein eindeutiges auf den Borelmengen  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  definiertes Spektralmaß  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow P(L^2(\mathbb{R}^n))$  zugeordnet, so dass für die durch  $E_\lambda := E(-\infty, \lambda]$  definierte Spektralschar  $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  gilt

$$D(L) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

$$\langle u, v \rangle_{D(L)} = \int_{\mathbb{R}} (\lambda^2 + 1) d\langle E_\lambda u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad (u, v \in D(L)).$$

Hierbei bezeichnet  $P(L^2(\mathbb{R}^n))$  den Raum der Orthogonalprojektion von  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Der für die Variationsrechnung geeignete Raum ist dann durch den Definitionsbereich des nach Satz XII.9 selbstadjungierten Operators  $|L|^{1/2}$  gegeben, d.h.  $H := D(|L|^{1/2})$ . Diese in XII.5 definierte Menge erfüllt nach Satz XII.6

$$H = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}. \quad (5.4)$$

Im Fall  $0 \notin \sigma(L)$  definiert

$$\langle u, v \rangle_H := \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\langle E_\lambda u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \|u\|_H := \sqrt{\langle u, u \rangle_H} \quad (u, v \in H) \quad (5.5)$$

wegen  $\|u\|_H \geq \text{dist}(0, \sigma(L)) \cdot \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  ein Skalarprodukt bzw. eine Norm in  $H$ . Wegen  $\|u\|_H = \||L|^{1/2}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  nach Satz XII.6 und der Abgeschlossenheit des selbstadjungierten Operators  $|L|^{1/2}$  folgt mit dem Satz von abgeschlossenen Graphen, dass  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ein Hilbertraum ist. Er wird in der Literatur auch Formdomäne von  $L$  genannt, vgl. Abschnitt 3 in [76].

Wir kommen zur Zusammenfassung der Eigenschaften des Hilbertraums  $H$ . Gemäß der obigen Darstellung setzen wir voraus, dass das Potential  $V$  die auf 157 definierten Bedingungen  $(A_1), (A_3)$  erfüllt. Sei dann das Potential  $\tilde{V}$  gegeben durch  $\tilde{V}(x) := V(x)_+ + 1$  und  $H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n)$  bezeichne die Vervollständigung von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H_{\tilde{V}}^1}$  mit

$$\|u\|_{H_{\tilde{V}}^1} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n)}} \quad \text{für} \quad \langle u, v \rangle_{H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v + \tilde{V}(x)uv \, dx.$$

Der Beweis von Proposition 5.1 ist in Appendix C zu finden.

**Proposition 5.1.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_3)$ . Dann ist der in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  definierte symmetrische Operator  $-\Delta + V(x) : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  wesentlich selbstadjungiert. Für den durch (5.4), (5.5) gegebenen Hilbertraum  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  gilt:*

(i)  $H = H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n) \subset H^1(\mathbb{R}^n)$  und es existiert eine positive Zahl  $C$  mit

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_H, \quad \|u\|_H \leq C\|u\|_{H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \|u\|_{H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_H \quad (u \in H)$$

(ii) Für alle  $u, v \in H$  gilt

$$\langle (P^+ - P^-)u, v \rangle_H = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v + V(x)uv \, dx$$

Hierbei sind die Orthogonalprojektionen  $P^+, P^- : H \rightarrow H$  durch  $P^+ := E(0, \infty)$  und  $P^- := E(-\infty, 0]$  definiert, wobei  $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow P(L^2(\mathbb{R}^n))$  das eindeutige Spektralmaß der selbstadjungierten Abschließung  $L$  von  $-\Delta + V(x)$  bezeichnet.

Wir verwenden die folgenden Annahmen an  $V$  und  $\Gamma$ , mit deren Hilfe wir die von der Näherungslösung  $u_0$  abhängigen Integralterme des Fixpunktoperators bzw. des Euler-Funktional in der Nähe der Singularität von  $u_0$  bei  $x = 0$  kontrollieren und die Existenz einer singulären Lösung von (5.1) beweisen können:

(A<sub>1</sub>) Es existieren  $C, \gamma > 0$  und  $\alpha > \frac{n-6}{2}$  mit

$$|V(x)| \leq C|x|^\alpha \quad (|x| \leq 1), \quad -C \leq V(x) \leq Ce^{\gamma|x|} \quad (|x| \geq 1).$$

(A<sub>2</sub>) Es existieren  $C, \gamma > 0$  und  $\beta > \frac{n-2}{2}$  mit

$$|\Gamma(x) - 1| \leq C|x|^\beta \quad (|x| \leq 1), \quad |\Gamma(x)| \leq Ce^{\gamma|x|} \quad (|x| \geq 1),$$

(A<sub>3</sub>)  $0 \notin \sigma(L)$ .

(A<sub>4</sub>) Es existiert ein  $C > 0$  und  $\delta < \frac{1}{2}$  mit  $|\Gamma(x)| \leq C(1 + V_+(x))^\delta$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Für den Nachweis einer singulären Lösung von (5.1) mit dem Mountain Pass Theorem benötigen wir die folgenden Annahmen:

(A'<sub>3</sub>)  $\sigma(L) \subset (0, \infty)$ .

(A'<sub>4</sub>) Es existiert ein  $C > 0$  und ein  $\delta < \frac{1}{2}$  mit

$$|\Gamma(x)| \leq C(1 + V_+(x))^\delta \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Gamma(x)|(1 + V_+(x))^{-\delta} = 0.$$

(A'<sub>5</sub>)  $\Gamma \geq 0$ .

Die Bedingungen  $(A_4)$  bzw.  $(A'_4)$  garantieren, dass für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  und  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein eine stetige bzw. kompakte Einbettung  $H \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  existiert. Hierbei ist der Banachraum  $(L_{\Gamma}^q(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L_{\Gamma}^q(\mathbb{R}^n)})$  für  $q \in [1, \infty)$  definiert durch

$$L_{\Gamma}^q(\mathbb{R}^n) := \{u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L_{\Gamma}^q(\mathbb{R}^n)} < \infty\}, \quad \|u\|_{L_{\Gamma}^q(\mathbb{R}^n)}^q := \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma| |u|^q dx < \infty$$

Die Kompaktheit der genannten Einbettung benötigen wir beim Nachweis der Palais-Smale-Bedingung für  $I_p$ . Der Beweis der folgenden Proposition ist in Appendix C zu finden.

**Proposition 5.2.**

- (i) Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4)$ . Dann existieren  $\varepsilon, C > 0$  so, dass für alle  $p \in [\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon]$  die Einbettung  $H \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  stetig ist und für alle  $u \in H$  die Ungleichung  $\|u\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_H$  gilt.
- (ii) Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_2), (A_3), (A'_4)$ . Dann ist die durch (i) gegebene Einbettung  $H \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  kompakt.

Die Abbildung

$$\iota : H \rightarrow H', \quad g \mapsto \langle g, \cdot \rangle_H$$

bezeichne im Folgenden den durch den Rieszischen Darstellungssatz vermittelten isometrischen Isomorphismus von  $H$  in seinen Dualraum  $H'$ . Es gilt  $\|\iota\| := \|\iota\|_{H \rightarrow H'} = 1$ . Aus Gründen der Darstellung behandeln wir die beiden Räume als unterschiedliche Objekte. Der Begriff der distributionellen Lösung ist wie folgt definiert.

**Definition 5.3.** Es gelte  $(A_1), (A_2)$ . Eine Funktion  $u \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$  heißt *distributionelle Lösung* von (5.1), falls  $Vu \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta\phi + V(x)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u|^{p-1} u \phi dx$$

für alle  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  gilt.

Wir kommen zur Konstruktion der Näherungslösung  $u_0$ . Dabei verwenden die folgende Bezeichnungen für die Normalenableitung einer Funktion  $u$  auf  $\partial B_\rho$ , wann immer diese existiert

$$\partial_\nu^\pm u(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(x) - u(x \pm t\nu(x))}{t}, \quad \nu(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Die aufwändige Konstruktion von  $u_0$  und damit der Beweis der folgenden Proposition ist in Appendix D zu finden.

**Proposition 5.4.** Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_2)$ . Dann existieren  $\omega > 1, \rho, C > 0$ , so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$  eine positive radialsymmetrische Funktion  $u_0 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  mit den folgenden Eigenschaften existiert:

(i)  $u_0 \in C^\infty(B_\rho \setminus \{0\})$  ist gegeben durch

$$u_0(x) = c_{n,p} |x|^{-\frac{2}{p-1}} \quad (|x| < \rho), \quad c_{n,p} = \left( \frac{2}{p-1} \left( n-2 - \frac{2}{p-1} \right) \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (5.6)$$

Insbesondere ist  $u_0$  klassische Lösung von  $-\Delta u = u^p$  in  $B_\rho \setminus \{0\}$  und distributionelle Lösung auf  $B_\rho$ .

- (ii)  $u_0 \in C^2(\overline{B_\rho^c})$  ist klassische Lösung von  $-\Delta u + \omega^2 u = u^p$  in  $\overline{B_\rho^c}$ .  
 (iii)  $u_0$  ist stetig in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und  $u_0$  ist von beiden Seiten stetig differenzierbar auf  $\partial B_\rho$  fortsetzbar. Zudem gilt  $u_0 \in H^1(B_\delta^c)$  für alle  $\delta > 0$ .  
 (iv)  $\lim_{x \rightarrow 0} u_0(x) = +\infty$ .  
 (v) Für alle  $x \in \partial B_\rho$  gilt  $|\partial_\nu^+ u_0(x) - \partial_\nu^- u_0(x)| \leq C c_{n,p}$ .  
 (vi) Es gilt die Abschätzung

$$u_0(x) \leq \begin{cases} C c_{n,p} |x|^{-\frac{2}{p-1}} & \text{für } x \in B_\rho, \\ C c_{n,p} e^{-|x|} & \text{für } x \in B_\rho^c. \end{cases}$$

Insbesondere  $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^n)$  für alle  $q \in [1, \frac{n(p-1)}{2})$ .

Ferner gilt für  $0 < |x| \leq \rho$

$$(vii) \quad |\Gamma(x) - 1| u_0(x)^p \leq C c_{n,p}^p |x|^{\beta-n}, \quad (viii) \quad |V(x)| u_0(x) \leq C c_{n,p} |x|^{\alpha-n+2}$$

sowie für  $|x| \geq \rho$

$$(ix) \quad |\Gamma(x)| u_0(x)^p \leq C c_{n,p}^p e^{-|x|}, \quad (x) \quad |\Gamma(x)| u_0(x)^{p-1} \leq C c_{n,p}^{p-1} e^{-|x|}, \\ (xi) \quad |V(x)| u_0(x) \leq C c_{n,p} e^{-|x|}.$$

Zudem gilt für alle  $u, v \in H$

$$(xii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x) - 1| u_0^p |u| dx \leq C c_{n,p}^p \|u\|_H, \quad (xiii) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |V(x)| u_0 |u| dx \leq C c_{n,p} \|u\|_H, \\ (xiv) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x)| u_0^{p-1} |u| |v| dx \leq C c_{n,p}^{p-1} \|u\|_H \|v\|_H.$$

Wir bestimmen nun die Gleichung für die Korrekturfunktion  $u \in H$  so, dass die durch  $U = u_0 + u$  gegebene Funktion eine distributionelle Lösung  $U$  von (5.1) auf  $\mathbb{R}^n$  und eine schwache Lösung auf  $B_\delta^c$  für alle  $\delta > 0$  ist. Wir gehen daher von folgender Gleichung für Testfunktionen  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  aus:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla U \nabla \phi + V(x) U \phi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |U|^{p-1} U \phi dx. \quad (5.7)$$

Wegen  $\phi \equiv 0$  in einer Umgebung von 0 folgt aus Proposition 5.4 (i) und (ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_0 \nabla \phi + V(x) u_0 \phi dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_0^p \phi dx + \oint_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0) \phi d\sigma$$

$$+ \int_{B_\rho} V(x)u_0\phi \, dx + \int_{B_\rho^c} (V(x) - \omega^2)u_0\phi \, dx. \quad (5.8)$$

Durch Subtraktion der Gleichung (5.8) von (5.7) erhalten wir für  $u = U - u_0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \phi + V(x)u\phi \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma(x)|u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p \right) \phi \, dx \\ &\quad - \int_{B_\rho} V(x)u_0\phi \, dx - \int_{B_\rho^c} (V(x) - \omega^2)u_0\phi \, dx \\ &\quad - \oint_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0) \phi \, d\sigma. \end{aligned}$$

Mit Proposition 5.1 (ii) erhalten wir die Gleichung

$$\langle (P^+ - P^-)u, \phi \rangle_H = F_p(u)[\phi] + T_p[\phi] \quad (5.9)$$

für

$$F_p(u)[\phi] = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma(x)|u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p \right) \phi \, dx, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} T_p[\phi] &= - \int_{B_\rho^c} (V(x) - \omega^2)u_0\phi \, dx - \int_{B_\rho} V(x)u_0\phi \, dx \\ &\quad - \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0) \phi \, d\sigma. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Unser Ziel ist es von nun an, die Existenz einer Funktion  $u \in H$  zu beweisen, die der Gleichung (5.9) für alle  $\phi \in H$  und insbesondere für alle  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  genügt.

### Bemerkung 5.5.

- a) Im Fall  $\Gamma \geq 0$  zeigen wir, dass eine positive singuläre distributionelle Lösung von (5.1) existiert. Zu diesem Zweck betrachten wir statt (5.1) die Gleichung

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)u_+^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (5.12)$$

Das Funktional  $F_p$  ist in diesem Fall dahingehend zu modifizieren, dass der Term  $|u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u)$  im Integranden durch  $(u_0 + u)_+^p$  ersetzt wird. Wir verwenden in den Sätzen 6.3 und 6.9 ohne Beweis, dass für diese Nichtlinearität dieselben Abschätzungen gelten und vollkommen analog die Existenz einer distributionellen Lösung von (5.12) mit Fixpunktmethoden bzw. variationellen Methoden gezeigt werden kann.

- b) Mit einer Näherungslösung der Form  $u_0(\cdot - x_1) + \dots + u_0(\cdot - x_k)$  lässt sich die Existenz einer singulären Lösung von (5.1) mit genau  $k$  Punktsingularitäten an  $k$  paarweise verschiedenen Punkten  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$  beweisen. Hierzu ist zu verlangen, dass für alle  $j = 1, \dots, k$  die Funktionen  $V(\cdot - x_j), \Gamma(\cdot - x_j)$  den Voraussetzungen  $(A_1), (A_2)$  genügen.

Die Fixpunktformulierung von (5.9)

Die Gleichung (5.9) für die Korrekturfunktion lässt sich folgendermaßen als Gleichung in  $H'$  schreiben

$$\iota(P^+ - P^-)u = F_p(u) + T_p.$$

Verwenden wir die Invertierbarkeit der Operatoren  $\iota : H \rightarrow H'$  und  $P^+ - P^- : H \rightarrow H$ , so erhalten wir wegen  $(P^+ - P^-)^{-1} = P^+ - P^-$  die folgende Fixpunktgleichung

$$u = \mathcal{A}_p(u), \quad \text{wobei } \mathcal{A}_p(u) := (P^+ - P^-)\iota^{-1}(F_p(u) + T_p). \quad (5.13)$$

In Abschnitt 1 ist unser Ziel, den Fixpunktsatz von Banach auf diese Gleichung anzuwenden. Hierzu ist zunächst  $F_p(u), T_p \in H'$  zu überprüfen. Aus Abschätzungen der Terme  $\|F_p(u)\|_{H'}, \|T_p\|_{H'}$  und  $\|F_p(u) - F_p(v)\|_{H'}$  für  $u, v \in H$  folgt, dass für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  und  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein der Operator  $\mathcal{A}_p : B \rightarrow B$  eine Kontraktion auf einer hinreichend kleinen um 0 zentrierten abgeschlossenen Kugel  $B$  ist. Wir erhalten in Satz 6.3 die Existenz eines Fixpunkts und damit einer singulären distributionellen Lösung von (5.1) unter den Voraussetzungen  $(A_1) - (A_4)$ .

Die variationelle Formulierung von (5.9)

Anschließend beweisen wir mit variationellen Methoden die Existenz einer zweiten singulären distributionellen Lösung von (5.1). Hierbei setzen wir  $\sigma(L) \subset (0, \infty)$  voraus, um die zweite Lösung mit Hilfe des Mountain-Pass-Theorems zu gewinnen. Eine Anwendung des Linking-Theorems (vgl. Satz 6.10 in [89]) im allgemeinen Fall  $0 \notin \sigma(L)$  gelang nicht. Wir zeigen, dass das durch

$$I_p(u) := \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - T_p[u] - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma(x)(|u + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1}) - (p+1)u_0^p u \right) dx. \quad (5.14)$$

definierte Funktional  $I_p : H \rightarrow \mathbb{R}$  ein zu (5.9) gehörendes Euler-Funktional ist. Es ist zu bemerken, dass der Term  $\Gamma(x)u_0^{p+1}$  keinen Effekt auf die Euler-Lagrange-Gleichung von  $I_p$  hat und nur eingefügt wird, um die bei  $x = 0$  durch die Näherungslösung  $u_0$  erzeugte Singularität im Integranden zu korrigieren. Zunächst ist  $I_p$  auf Wohldefiniertheit und stetige Fréchet-Differenzierbarkeit zu überprüfen, wobei zu beachten ist, dass wegen  $u_0(x) \sim |x|^{-\frac{2}{p-1}}$  bei  $x = 0$  im Allgemeinen keiner der drei Summanden im oben stehenden Integral für sich allein integrierbar ist. Anschließend weisen wir die Mountain-Pass-Geometrie und die Gültigkeit der Palais-Smale-Bedingung für  $I_p$  im Fall  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  für ein kleines  $\varepsilon > 0$  nach. Hierbei machen wir von den stärkeren Voraussetzungen  $(A'_3), (A'_4), (A'_5)$  (siehe Seite 157) und insbesondere von der Kompaktheit der Einbettung  $H \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  Gebrauch. Schließlich zeigen wir in Satz 6.7 für solche Exponenten  $p$  die Existenz eines kritischen Punkts von  $I_p$  und damit einer weiteren singulären Lösung von (5.1) mit Hilfe des Mountain-Pass-Theorems.

Singuläre Lösungen nichtlinearer Schrödingersysteme

Schließlich beweisen wir zu den soeben beschriebenen Ergebnissen analoge Resultate für nichtlineare Schrödingersysteme. Für Raumdimensionen  $n = 3$  oder  $n = 4$  beweisen wir die Existenz singulärer distributioneller Lösungen des Systems

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{p_1-1}u|v|^{p_2} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_4(x)|u|^{p_3}|v|^{p_4-1}v & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & (|x| \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (5.15)$$

mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Hierbei setzen wir

$$p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 1 \quad \text{mit } p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = p \quad \text{und } p \in \left( \frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon \right)$$

für ein hinreichend klein gewähltes  $\varepsilon > 0$  voraus. Die Einschränkung an die Raumdimension ergibt sich daraus, dass eine Zahl  $p \approx \frac{n}{n-2}$  nur für  $n = 3$  oder  $n = 4$  als Summe zweier Zahlen größer oder gleich 1 geschrieben werden kann. Wie im skalaren Fall verlangen wir unter anderem, dass 0 in einer spektralen Lücke der zu  $V_1, V_2$  gehörenden selbstadjungierten Schrödinger-Operatoren  $L_1, L_2$  liegt. Die Existenz dieser Operatoren ergibt sich wie im skalaren Fall aus den Bedingungen an  $V_1, V_2$ . Insbesondere beweisen wir im Fall  $n = 3$  die Existenz einer Lösung im "variationellen" Fall  $p_1 = p_4 = \frac{p-1}{2}, p_2 = p_3 = \frac{p+1}{2}, \Gamma_3 = \Gamma_4$  unter der Voraussetzung  $0 \notin \sigma(L_1), 0 \notin \sigma(L_2)$ . Die verwendeten Voraussetzungen  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$  lauten

$(B_1)$  Es existieren  $C, \gamma > 0$  und  $\alpha > \frac{n-6}{2}$  mit

$$|V_j(x)| \leq C|x|^\alpha \quad (|x| \leq 1), \quad -C \leq V_j(x) \leq Ce^{\gamma|x|} \quad (|x| \geq 1), \quad (j = 1, 2).$$

$(B_2)$  Es existieren  $C, \gamma > 0$  und  $\beta > \frac{n-2}{2}$  mit

$$|\Gamma_j(x) - 1| \leq C|x|^\beta \quad (|x| \leq 1), \quad |\Gamma_j(x)| \leq Ce^{\gamma|x|} \quad (|x| \geq 1), \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

$(B_3)$   $0 \notin \sigma(L_1), 0 \notin \sigma(L_2)$ .

$(B_4)$  Es existiert ein  $C > 0$  und ein  $\delta < 1$  mit

$$\begin{aligned} |\Gamma_i(x)| &\leq C(1 + V_1(x)_+)^{\delta} & (x \in \mathbb{R}^n, i = 1, 3, 4), \\ |\Gamma_j(x)| &\leq C(1 + V_2(x)_+)^{\delta} & (x \in \mathbb{R}^n, j = 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Unter der stärkeren Voraussetzung  $\sigma(L_1), \sigma(L_2) \subset (0, \infty)$  beweisen wir im oben angesprochenen variationellen Fall die Existenz einer singulären distributionellen Lösung des Systems (5.15) für alle Raumdimensionen  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  und  $p \in \left( \frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon \right)$  für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ . Der kritische Punkt des Euler-Funktional zur Bestimmung der Korrekturfunktion ist in diesem Fall ein lokaler Minimierer auf einer kleinen um 0

zentrierten Kugel. Im Fall  $n = 3$  handelt es sich aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des Banachschen Fixpunktsatzes um dieselbe Lösung wie die oben beschriebene Lösung, im Fall  $n \geq 4$  handelt es sich um eine neue Lösung. Das System lautet in diesem Fall

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p-3}{2}}|v|^{\frac{p+1}{2}} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p+1}{2}}|v|^{\frac{p-3}{2}} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & (|x| \rightarrow \infty). \end{cases}$$

Wir verwenden die Voraussetzungen  $(B_1), (B_2), (B'_3), (B'_4), (B'_5)$  für

$(B'_3)$   $\sigma(L_1), \sigma(L_2) \subset (0, \infty)$ ,

$(B'_4)$  Es existiert ein  $C > 0$  und ein  $\delta < \frac{1}{2}$  mit

$$|\Gamma_i(x)| \leq C(1 + V_1(x)_+)^{\delta} \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Gamma_i(x)|(1 + V_1(x)_+)^{-\delta} = 0 \quad (i = 1, 3),$$

$$|\Gamma_j(x)| \leq C(1 + V_2(x)_+)^{\delta} \quad (x \in \mathbb{R}^n), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Gamma_j(x)|(1 + V_2(x)_+)^{-\delta} = 0 \quad (j = 2, 3).$$

$(B'_5)$   $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \geq 0$ .

Da die meisten Abschätzungen wie im skalaren Fall bewiesen werden können, konzentrieren wir uns auf die Darstellung der neuen Aspekte. Vor allem beweisen wir die Abschätzungen der auftretenden Kopplungsterme.

### Konventionen

Im Folgenden gilt stets  $n \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 3$ . In den Abschnitten 1 und 2 bezeichnet  $u_0$  die Näherungslösung aus Proposition 5.4 für entsprechende Parameter  $\omega > 1, \rho > 0$  und  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ist der durch (5.4), (5.5) gegebene Hilbertraum mit den Eigenschaften aus Proposition 5.1. Die Menge  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$  bezeichnet die offene Kugel mit Radius  $r$ . Wir nehmen stets an, dass  $\varepsilon > 0$  mindestens so klein gewählt ist, dass die Einbettungssätze aus Proposition 5.2 für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2} + \varepsilon)$  gelten. Die Buchstaben  $c, C$  bezeichnen positive Zahlen, die sich im Allgemeinen von Zeile zu Zeile ändern und unabhängig von  $p$  sind.

In den Beweisen der folgenden drei Abschnitte verwenden wir häufig die in Proposition 5.6 zusammengefassten Ungleichungen, deren Beweis in Appendix C gegeben wird.

**Proposition 5.6.** *Sei  $n \geq 3$ . Dann existiert ein  $C > 0$  so, dass für alle  $\kappa \in [0, 1]$  und alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2}), p_1, p_2 \geq 1, p_1 + p_2 = p$  und  $s, t, \tilde{s}, \tilde{t} \in \mathbb{R}$  die folgenden Ungleichungen gelten:*

- (i)  $||1 + t|^{p-1}(1 + t) - 1| \leq C(|t| + |t|^p),$
- (ii)  $||1 + t|^{p+1} - 1 - (p + 1)t| \leq C(t^2 + |t|^{p+1}),$
- (iii)  $||1 + t|^{p-1}(1 + t) - |1 + s|^{p-1}(1 + s)| \leq C(1 + |s|^{p-1} + |t|^{p-1})|s - t|,$
- (iv)  $||1 + t|^{p-1}(1 + t) - |1 + s|^{p-1}(1 + s) - p(t - s)| \leq C(|s|^\kappa + |t|^\kappa + |t|^{p-1} + |s|^{p-1})|t - s|,$

$$\begin{aligned}
(v) \quad & \frac{\alpha}{p+1}|t+1|^{p+1} - t(t+1)|t+1|^{p-1} - (\alpha-1)t - \frac{\alpha}{p+1} \leq Ct^2 \quad (\alpha = \frac{2n-3}{2n-2}), \\
(vi) \quad & \left| |1+s|^{p-1}(1+s)|1+t|^{p-1} - |1+\tilde{s}|^{p-1}(1+\tilde{s})|1+\tilde{t}|^{p-1} \right| \leq C(|s|+|t|+|s|^p+|t|^p), \\
(vii) \quad & \left| |1+t|^{\frac{p+1}{2}}|1+s|^{\frac{p+1}{2}} - 1 - \frac{p+1}{2}(s+t) \right| \leq C(s^2+t^2+|s|^{p+1}+|t|^{p+1}), \\
(viii) \quad & \left| |1+s|^{p-1}(1+s)|1+t|^{p-1} - |1+\tilde{s}|^{p-1}(1+\tilde{s})|1+\tilde{t}|^{p-1} \right| \\
& \leq C(1+|s|^{p-1}+|\tilde{s}|^{p-1}+|t|^{p-1}+|\tilde{t}|^{p-1})(|s-\tilde{s}|+|t-\tilde{t}|), \\
(ix) \quad & \text{Falls } p < 3: \quad \left| |1+s|^{\frac{p-3}{2}}(1+s)|1+t|^{\frac{p+1}{2}} - |1+\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}}(1+\tilde{s})|1+\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}} \right| \\
& \leq C\left( (1+|s|^{p-1}+|\tilde{s}|^{p-1}+|t|^{p-1}+|\tilde{t}|^{p-1})|t-\tilde{t}| + (1+|s|^{\frac{p+1}{2}}+|\tilde{s}|^{\frac{p+1}{2}}+|t|^{\frac{p+1}{2}}+|\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}}) \cdot |s-\tilde{s}|^{\frac{p-1}{2}} \right), \\
& \text{Falls } p \geq 3: \quad \left| |1+s|^{\frac{p-3}{2}}(1+s)|1+t|^{\frac{p+1}{2}} - |1+\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}}(1+\tilde{s})|1+\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}} \right| \\
& \leq C(1+|s|^{p-1}+|\tilde{s}|^{p-1}+|t|^{p-1}+|\tilde{t}|^{p-1})(|t-\tilde{t}|+|s-\tilde{s}|), \\
(x) \quad & \text{Falls } p \geq 3: \quad \left| |1+s|^{\frac{p-3}{2}}(1+s)|1+t|^{\frac{p+1}{2}} - |1+\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}}(1+\tilde{s})|1+\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}} - \frac{p+1}{2}(s-\tilde{s}) - \frac{p-1}{2}(t-\tilde{t}) \right| \\
& \leq C\left( |s|^{\frac{p-3}{2}}+|\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}}+|t|^{\frac{p-3}{2}}+|\tilde{t}|^{\frac{p-3}{2}}+|s|^{p-1}+|\tilde{s}|^{p-1}+|t|^{p-1}+|\tilde{t}|^{p-1} \right) \cdot (|s-\tilde{s}|+|t-\tilde{t}|).
\end{aligned}$$

## 6. Existenz singulärer Lösungen

### 1. Existenz einer singulären Lösung in spektralen Lücken

In diesem Abschnitt weisen wir die Existenz einer singulären distributionellen Lösung von (5.1) mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes nach. Hierzu zeigen wir im Hinblick auf (5.13), dass eine hinreichend kleine um 0 zentrierte abgeschlossene Kugel  $B \subset H$  existiert, so dass der durch

$$\mathcal{A}_p(u) = (P^+ - P^-) \iota^{-1}(F_p(u) + T_p) \quad (u \in H)$$

definierte Operator  $\mathcal{A}_p : B \rightarrow B$  eine Kontraktion ist. In den folgenden zwei Propositionen beweisen wir die hierfür nötigen Abschätzungen mit Hilfe von Proposition 5.4.

**Proposition 6.1.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $F_p(u) \in H'$  für alle  $u \in H$  und alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$ . Ferner existieren von  $p$  unabhängige Zahlen  $C_1, C_2 > 0$ , so dass die folgenden Abschätzungen für  $u, v \in H$  gelten:*

1.  $\|F_p(u)\|_{H'} \leq C_1(c_{n,p}^p + c_{n,p}^{p-1}\|u\|_H + \|u\|_H^p)$
2.  $\|F_p(u) - F_p(v)\|_{H'} \leq C_2(c_{n,p}^{p-1} + \|u\|_H^{p-1} + \|v\|_H^{p-1})\|u - v\|_H$

**Beweis:**

Es gilt für  $u \in H$

$$\begin{aligned} \|F_p(u)\|_{H'} &= \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma(x)|u + u_0|^{p-1}(u + u_0) - u_0^p)\phi \, dx \right| \\ &\leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x) - 1|u_0^p|\phi| \, dx \\ &\quad + C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} |\Gamma(x)|\left||u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p\right|\phi| \, dx \\ &\quad + C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} |\Gamma(x)|\left||u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p\right|\phi| \, dx \end{aligned} \quad (6.1)$$

Aus Proposition 5.4 (xii) folgt

$$\sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x) - 1|u_0^p|\phi| \, dx \leq Cc_{n,p}^p. \quad (6.2)$$

Mit der Ungleichung

$$\left| |1+t|^{p-1}(1+t) - 1 \right| \leq c(|t| + |t|^p) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

aus Proposition 5.6 (i) folgt für  $t = \frac{u}{u_0}$  mit Proposition 5.4 (xiv)

$$\begin{aligned} & \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} |\Gamma(x)| \left| |u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p \right| |\phi| dx \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} |\Gamma(x)| (u_0^{p-1}|u| + |u|^p) |\phi| dx \\ & \leq C \left( c_{n,p}^{p-1} \|u\|_H + \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \|u\|_{L_\Gamma^{p+1}(B_\rho)}^p \|\phi\|_{L_\Gamma^{p+1}(B_\rho)} \right) \\ & \leq C(c_{n,p}^{p-1} \|u\|_H + \|u\|_H^p). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Ebenso folgt mit Proposition 5.4 (ix) die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} |\Gamma(x)| \left| |u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p \right| |\phi| dx \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} |\Gamma(x)| (u_0^p + |u|^p) |\phi| dx \\ & \leq C c_{n,p}^p \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} e^{-|x|} |\phi| dx + C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \|u\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p \|\phi\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq C(c_{n,p}^p + \|u\|_H^p). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Aus den Ungleichungen (6.1)-(6.4) erhalten wir die Abschätzung für  $\|F_p(u)\|_{H'}$ . Nun nutzen wir die Ungleichung

$$\left| |1+t|^{p-1}(1+t) - |1+s|^{p-1}(1+s) \right| \leq C(1 + |s|^{p-1} + |t|^{p-1})|s-t| \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

aus Proposition 5.6 (iii). Für  $t = \frac{u}{u_0}$ ,  $s = \frac{v}{u_0}$  erhalten wir mit Proposition 5.4 (xiv)

$$\begin{aligned} \|F_p(u) - F_p(v)\|_{H'} & \leq \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x)| \left| |u + u_0|^{p-1}(u + u_0) - |v + u_0|^{p-1}(v + u_0) \right| |\phi| dx \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x)| (u_0^{p-1} + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}) |u - v| |\phi| dx \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x)| u_0^{p-1} |u - v| |\phi| dx \\ & \quad + C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} (\|u\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} + \|v\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-1}) \|u - v\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \|\phi\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq C(c_{n,p}^{p-1} + \|u\|_H^{p-1} + \|v\|_H^{p-1}) \|u - v\|_H \end{aligned}$$

für  $u, v \in H$ . Es folgt die Behauptung.  $\square$

**Proposition 6.2.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $T_p \in H'$  für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$ . Darüberhinaus existiert eine von  $p$  unabhängige positive Zahl  $C_3$  mit*

$$\|T_p\|_{H'} \leq C_3 c_{n,p}.$$

**Beweis:**

Aus der Definition von  $T_p$  in (5.11) folgt

$$\begin{aligned} \|T_p\|_{H'} &\leq \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} |V(x) - \omega^2|u_0|\phi| dx + \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} |V(x)|u_0|\phi| dx \\ &\quad + \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\partial B_\rho} |\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0| |\phi| d\sigma \end{aligned} \quad (6.5)$$

Aus Proposition 5.4 (vi) und (xi) erhalten wir

$$\sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} |V(x) - \omega^2|u_0|\phi| dx \leq C c_{n,p} \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} e^{-|x|} |\phi| dx \leq C c_{n,p}. \quad (6.6)$$

Aus Proposition 5.4 (xiii) folgt

$$\sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} |V(x)|u_0|\phi| dx \leq C c_{n,p}. \quad (6.7)$$

Mit dem Spursatz und Proposition 5.4 (v) und erhalten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\partial B_\rho} |\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0| |\phi| d\sigma &\leq C c_{n,p} \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\partial B_\rho} |\phi| d\sigma \\ &\leq C c_{n,p} \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \|\phi\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C c_{n,p}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Aus den Ungleichungen (6.5)-(6.8) folgt die Abschätzung für  $T_p$ .  $\square$

Wir wenden nun den Banachschen Fixpunktsatz auf das Fixpunktproblem (5.13) an.

**Satz 6.3.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_2), (A_3), (A_4)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  so, dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  eine distributionelle Lösung  $U$  der Gleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- (i)  $\text{esssup}_{B_\delta} U = +\infty$  und  $U \in L_{loc}^q(B_\delta)$  für alle  $q \in [1, \frac{n(p-1)}{2})$  und alle  $\delta > 0$ .
- (ii) Für alle  $\delta > 0$  ist  $U \in H^1(B_\delta^c)$  eine schwache Lösung von (5.1) auf  $B_\delta^c$ .
- (iii) Im Fall  $\inf \sigma_{\text{ess}}(L) \geq \Sigma > 0, \Gamma_+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  existiert für alle  $\mu \in (0, \sqrt{\Sigma})$  ein  $C_\mu > 0$  mit  $|U(x)| \leq C_\mu e^{-\mu|x|}$  für alle  $|x| \geq 1$ .

(iv) Im Fall  $\sigma(L) \subset (0, \infty)$ ,  $\Gamma \geq 0$  kann  $U$  positiv gewählt werden.

(v)  $U - u_0 \in H$  und  $\|U - u_0\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}}$ .

**Beweis:**

Es gilt  $\|P^+ - P^-\|_{H \rightarrow H} = 1$  sowie  $\|\iota\|_{H \rightarrow H'} = 1$ . Mit der Definition von  $\mathcal{A}_p$  aus (5.13) und den Abschätzungen der Propositionen 6.1 und 6.2 erhalten wir für  $u \in H$

$$\|\mathcal{A}_p(u)\|_{H'} \leq \|F_p(u) + T_p\|_{H'} \leq C_1(c_{n,p}^p + c_{n,p}^{p-1}\|u\|_H + \|u\|_H^p) + C_3c_{n,p}$$

Aus Proposition 6.1 folgt darüberhinaus für  $u, v \in H$

$$\|\mathcal{A}_p(u) - \mathcal{A}_p(v)\|_H = \|F_p(u) - F_p(v)\|_{H'} \leq C_2(c_{n,p}^{p-1} + \|u\|_H^{p-1} + \|v\|_H^{p-1})\|u - v\|_H.$$

Sei nun  $r_{n,p} := \sqrt{c_{n,p}}$ . Wegen  $c_{n,p} \rightarrow 0$  für  $p \rightarrow \frac{n}{n-2}$  existiert ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  die Ungleichungen

$$C_1(c_{n,p}^p + c_{n,p}^{p-1}r_{n,p} + r_{n,p}^p) + C_3c_{n,p} \leq r_{n,p}, \quad C_2(c_{n,p}^{p-1} + 2r_{n,p}^{p-1}) < 1$$

gelten. Für  $B := \{u \in H : \|u\|_H \leq r_{n,p}\}$  ist dann  $\mathcal{A}_p : B \rightarrow B$  eine Kontraktion und besitzt nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen Fixpunkt  $u \in B$ . In Appendix E zeigen wir, dass dann  $U := u + u_0$  distributionelle Lösung von (5.1) ist und die Eigenschaften (i)-(iv) besitzt. Wegen  $\|U - u_0\|_H = \|u\|_H \leq r_{n,p} = \sqrt{c_{n,p}}$  erfüllt  $U$  auch die Eigenschaft (v) und der Beweis ist erbracht.  $\square$

## 2. Existenz zweier singulärer Lösungen

Um die Existenz einer zweiten unbeschränkten distributionellen Lösung mit Hilfe des Mountain-Pass-Theorems zu beweisen, benötigen wir die Voraussetzungen  $(A_1), (A_2), (A'_3), (A'_4), (A'_5)$ . Aus  $(A'_3), (A'_5)$  erhalten wir in Proposition 6.4 die Mountain-Pass-Geometrie des in (5.14) definierten Funktionals

$$I_p(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - T_p[u] - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma(x)(|u + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1}) - (p+1)u_0^p u) dx. \quad (6.1)$$

Aus Voraussetzung  $(A'_4)$  folgt wegen Proposition 5.2 (ii) die Kompaktheit der Einbettung  $H \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ . Diese ist maßgeblich für den Nachweis der Palais-Smale-Bedingung für  $I_p$  in Proposition 6.6. Die Existenz eines kritischen Punkts von  $I_p$  und damit einer singulären distributionellen Lösung von (5.1) folgt schließlich in Satz 6.7 aus dem Mountain-Pass-Theorem. Wir kommen zur Definition der Mountain-Pass-Geometrie.

**Definition 6.1** (Mountain-Pass-Geometrie). *Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Raum. Ein Funktional  $I \in C(X, \mathbb{R})$  besitzt die Mountain-Pass-Geometrie, falls  $r > 0$  und  $e \in X$  mit  $r \in (0, \|e\|_X)$  existieren, so dass gilt*

$$\inf\{I(u) : \|u\|_X = r\} > I(0) \geq I(e).$$

Der Wert

$$m := \inf_{\gamma \in P} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)), \quad P := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

heißt *Mountain-Pass-Niveau*.

Es folgt das Mountain-Pass-Theorem in der Version von Satz 2.10 in [89]. Wir sagen, dass  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  die Palais-Smale-Bedingung erfüllt, wenn jede Palais-Smale-Folge eine in  $X$  konvergente Teilfolge besitzt. Eine Folge  $(u_m)$  in  $X$  heißt hierbei Palais-Smale-Folge von  $I$ , falls die Folge  $(I(u_m))$  in  $\mathbb{R}$  beschränkt ist und  $I'(u_m)$  in  $X'$  gegen 0 konvergiert.

**Satz 6.2** (Mountain Pass Theorem). *Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein Banachraum und  $I \in C^1(X, \mathbb{R})$  besitze die Mountain-Pass-Geometrie. Erfüllt  $I$  die Palais-Smale-Bedingung, dann ist das Mountain-Pass-Niveau  $m$  von  $I$  ein kritischer Wert von  $I$ , d.h. es existiert ein  $u \in X$  mit  $I(u) = m$  und  $I'(u) = 0$ .*

Wir wenden uns nun der Gleichung (5.1) zu. Zunächst zeigen wir, dass das durch (6.1) gegebene Funktional  $I_p : H \rightarrow \mathbb{R}$  wohldefiniert und stetig differenzierbar ist und ferner die "richtige" Euler-Lagrange-Gleichung liefert.

**Proposition 6.3.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(A_1), (A_2), (A'_3), (A'_4), (A'_5)$ . Dann ist das Funktional  $I_p$  für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$  wohldefiniert und stetig Fréchet-differenzierbar mit*

$$I'_p(u) = \nu u - F_p(u) - T_p. \quad (6.2)$$

**Beweis:**

Wir klären zunächst die Wohldefiniertheit von  $I_p$ . Wegen Proposition 6.2 genügt es, das in (6.1) auftretende Integral abzuschätzen. Es folgt aus Proposition 5.4 (xii)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \left| \Gamma(x) (|u + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1}) - (p+1)u_0^p u \right| dx \\ & \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x) - 1| u_0^p |u| dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left| |u + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1} - (p+1)u_0^p u \right| dx \\ & \leq C c_{n,p}^p \|u\|_H + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left| |u + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1} - (p+1)u_0^p u \right| dx. \end{aligned}$$

Es gilt nach Proposition 5.6 (ii) die Ungleichung

$$\left| |1 + t|^{p+1} - 1 - (p+1)t \right| \leq C(t^2 + |t|^{p+1}) \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (6.3)$$

Zusammen mit Proposition 5.4 (xiv) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left| |u + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1} - (p+1)u_0^p u \right| dx & \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) (u_0^{p-1} u^2 + |u|^{p+1}) dx \\ & \leq C (c_{n,p}^{p-1} \|u\|_H^2 + \|u\|_{L_T^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}) \end{aligned}$$

$$\leq C(c_{n,p}^{p-1} \|u\|_H^2 + \|u\|_H^{p+1})$$

und damit die Wohldefiniertheit von  $I_p$ . Die Fréchet-Differenzierbarkeit von  $I_p$  und die Formel (6.2) für die Fréchet-Ableitung erhalten wir ebenfalls aus (6.3) und Proposition 5.4 (xiv), denn

$$\begin{aligned} & \left| I_p(u + \phi) - I_p(u) - (\nu u - F_p(u) - T_p)[\phi] \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \|\phi\|_H^2 + \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left| |u + \phi + u_0|^{p+1} - |u + u_0|^{p+1} - (p+1)|u + u_0|^{p-1}(u + u_0)\phi \right| dx \\ & \leq \frac{1}{2} \|\phi\|_H^2 + C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left( |u + u_0|^{p-1} \phi^2 + |\phi|^{p+1} \right) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \|\phi\|_H^2 + C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left( |u|^{p-1} \phi^2 + u_0^{p-1} \phi^2 + |\phi|^{p+1} \right) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \|\phi\|_H^2 + C \left( \|u\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \|\phi\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^2 + c_{n,p}^{p-1} \|\phi\|_H^2 + \|\phi\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1} \right) \\ & \leq \frac{1}{2} \|\phi\|_H^2 + C \left( \|u\|_H^{p-1} \|\phi\|_H^2 + c_{n,p}^{p-1} \|\phi\|_H^2 + \|\phi\|_H^{p+1} \right) \\ & = O(\|\phi\|_H^2). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der durch (6.2) gegebenen Fréchet-Ableitung folgt aus den Propositionen 6.1 und 6.2.  $\square$

Nach obiger Proposition wissen wir, dass  $I_p$  die Glattheitsvoraussetzungen des Mountain-Pass-Theorems erfüllt. Darüberhinaus ist  $u \in H$  nach (6.2) genau dann ein kritischer Punkt von  $I_p$  wenn  $u$  ein Fixpunkt des Operators  $\mathcal{A}_p$  ist, denn wegen  $\sigma(L) \subset (0, \infty)$  gilt  $P^+ - P^- = \text{id}$ , vgl. (5.13). In Appendix E zeigen wir, dass in diesem Fall  $U := u_0 + u$  eine singuläre distributionelle Lösung von (5.1) mit den Eigenschaften (i)-(iv) aus Satz 6.3 ist. Daher erfüllt ein kritischer Punkt von  $I_p$  die "richtige" Euler-Lagrange-Gleichung. Wir kommen zum Nachweis der Mountain-Pass-Geometrie für  $I_p$ .

**Proposition 6.4.** *Es gelte  $n \geq 3$  und  $(A_1), (A_2), (A'_3), (A'_4), (A'_5)$ . Dann existieren  $\varepsilon, \tilde{m} > 0$ , so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  das Funktional  $I_p$  die Mountain-Pass-Geometrie besitzt und das Mountain-Pass-Niveau  $m_p$  die Ungleichung  $m_p \geq \tilde{m}$  erfüllt.*

**Beweis:**

Zunächst zeigen wir gemäß Definition 6.1, dass ein  $e \in H$  mit  $I_p(e) \leq I_p(0)$  existiert. Wegen Voraussetzung<sup>1</sup>  $(A'_5)$  existiert ein  $\tilde{e} \in H$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |\tilde{e}|^{p+1} dx > c > 0$  für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$ . Seien  $e, \tilde{u}_0$  definiert durch  $e = t\tilde{e}, \tilde{u}_0 = \frac{1}{t}u_0$  für ein zu wählendes  $t \in \mathbb{R}$ . Es folgt

$$I_p(e) = O(t^2) - \frac{t^{p+1}}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma(x) (|\tilde{e} + \tilde{u}_0|^{p+1} - \tilde{u}_0^{p+1}) - (p+1)\tilde{u}_0^p \tilde{e}) dx \quad (6.4)$$

<sup>1</sup>An dieser Stelle verwenden wir lediglich  $\Gamma^+ \neq 0$ . Die stärkere Forderung  $\Gamma \geq 0$  aus  $(A'_5)$  benötigen wir erst später beim Nachweis der Beschränktheit einer geeigneten Palais-Smale-Folge in Proposition 6.6.

Nach Proposition 5.6 (ii) gilt die Ungleichung

$$\left| |1 + s|^{p+1} - 1 - (p+1)s \right| \leq C(s^2 + |s|^{p+1}) \quad (s \in \mathbb{R}). \quad (6.5)$$

Somit erhalten wir für  $t \geq 1$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \Gamma(x)(|\tilde{e} + \tilde{u}_0|^{p+1} - \tilde{u}_0^{p+1}) - (p+1)\tilde{u}_0^p \tilde{e} \right| \\ & \leq (p+1) \left| \Gamma(x) - 1 \right| \tilde{u}_0^p |\tilde{e}| + \Gamma(x) \left| |\tilde{e} + \tilde{u}_0|^{p+1} - \tilde{u}_0^{p+1} - (p+1)\tilde{u}_0^p \tilde{e} \right| \\ & \leq C \left( |\Gamma(x) - 1| \tilde{u}_0^p |\tilde{e}| + \Gamma(x) \tilde{u}_0^{p-1} \tilde{e}^2 + \Gamma(x) |\tilde{e}|^{p+1} \right) \\ & \leq C \left( |\Gamma(x) - 1| u_0^p |\tilde{e}| + \Gamma(x) u_0^{p-1} \tilde{e}^2 + \Gamma(x) |\tilde{e}|^{p+1} \right), \end{aligned}$$

denn  $\tilde{u}_0 = t^{-1}u_0 \leq u_0$ . Aus Proposition 5.4 (xii) und (xiv) folgt, dass diese Majorante integrierbar ist. Wegen  $\tilde{u}_0(x) = t^{-1}u_0(x) \rightarrow 0$  liefert der Satz von der dominierten Konvergenz

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma(x) \left( |\tilde{e} + \frac{u_0}{t}|^{p+1} - \left( \frac{u_0}{t} \right)^{p+1} \right) - (p+1) \left( \frac{u_0}{t} \right)^p \tilde{e} \right) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |\tilde{e}|^{p+1} dx > 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Wegen (6.4) gilt für ein hinreichend groß gewähltes von  $p$  abhängiges  $t > 0$  die Ungleichung

$$I_p(e) = I_p(t\tilde{e}) \leq 0 = I_p(0).$$

Hierbei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $t \geq 1$  annehmen, so dass die Ungleichung  $\|e\|_H \geq \|\tilde{e}\|_H$  gilt. Diese untere Schranke für  $\|e\|_H$  ist unabhängig von  $p$ , da  $\tilde{e}$  unabhängig von  $p$  gewählt wurde.

Wir kommen zum Nachweis der "Berge" in der Mountain-Pass-Geometrie. Sei  $u \in H$ . Mit der Ungleichung (6.5) und Proposition 5.6 (xii) und (xiv) folgt

$$\begin{aligned} I_p(u) & \geq \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - \|T_p\|_{H'} \|u\|_H - \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x) - 1| u_0^p |u| dx \\ & \quad - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left| |u + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1} - (p+1)u_0^p u \right| dx \\ & \geq \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|u\|_H - C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) (u_0^{p-1} |u|^2 + |u|^{p+1}) dx \\ & \geq \frac{1}{2} \|u\|_H^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|u\|_H - C(c_{n,p}^{p-1} \|u\|_H^2 + \|u\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}) \\ & \geq \left( \frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1} \right) \|u\|_H^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|u\|_H - C \|u\|_H^{p+1}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

wobei wir die Abschätzung für  $\|T_p\|_{H'}$  aus Proposition 6.2 verwendet haben. Seien nun  $r, \tilde{m} > 0$  definiert durch

$$r := \min \left\{ \frac{\|\tilde{e}\|_H}{2}, \min \left\{ \left( \frac{1}{16C} \right)^{\frac{1}{q-1}} : \frac{n}{n-2} \leq q \leq \frac{n+2}{n-2} \right\} \right\}, \quad \tilde{m} := \frac{1}{8} r^2.$$

Wähle nun  $\varepsilon > 0$  so klein, dass für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  die Ungleichungen

$$\frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1} \geq \frac{1}{4}, \quad c_{n,p} + c_{n,p}^p \leq \frac{r}{16C}$$

gelten. Wir erhalten für  $u \in H$  mit  $\|u\|_H = r$  die Abschätzung  $0 < r < \|\tilde{e}\|_H \leq \|e\|_H$  sowie

$$I_p(u) \geq r^2 \left( \frac{1}{4} - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p)r^{-1} - Cr^{p-1} \right) \geq r^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right) = \tilde{m}.$$

Es folgt die Behauptung.  $\square$

Für den Nachweis der Palais-Smale-Bedingung benötigen wir die Aussage, dass der schwache Grenzwert einer beschränkten Palais-Smale-Folge ein kritischer Punkt von  $I_p$  ist. Dies wird durch die folgende Proposition gewährleistet.

**Proposition 6.5.** *Es gelte  $n \geq 3$  und  $(A_1), (A_2), (A'_3), (A'_4), (A'_5)$ . Für Folgen  $(u_m)$  mit  $u_m \rightharpoonup u$  in  $H$  gilt  $I'_p(u_m) \rightharpoonup^* I'_p(u)$  in  $H'$ .*

**Beweis:**

Es gelte  $u_m \rightharpoonup u$  in  $H$  und sei  $M := \sup_{m \in \mathbb{N}} \|u_m\|_H < \infty$ . Ferner sei  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $K := \text{supp}(\phi)$ . Aus der Formel für  $I'_p$  aus (6.2) folgt für  $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} I'_p(u_m)[\phi] - I'_p(u)[\phi] &= \langle u_m - u, \phi \rangle_H - T_p[u_m - u] \\ &\quad - \int_K \Gamma(x) \left( |u_m + u_0|^{p-1}(u_m + u_0) - |u + u_0|^{p-1}(u + u_0) \right) \phi \, dx \\ &= o(1) - \int_K \Gamma(x) \left( |u_m + u_0|^{p-1}(u_m + u_0) - |u + u_0|^{p-1}(u + u_0) \right) \phi \, dx \end{aligned}$$

Die Folge  $(u_m)$  ist in  $H$  und damit auch in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  beschränkt, vgl. Proposition 5.1 (i). Aus der kompakten Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p+1}(K)$  folgt aus dem Satz von Riesz-Fischer (vgl. Lemma A.1 in [89]) die Existenz einer Funktion  $w \in L^{p+1}(K)$  mit  $|u_m|, |u| \leq w$ . Mit der Ungleichung

$$\left| |1+t|^{p-1}(1+t) - |1+s|^{p-1}(1+s) \right| \leq C(1+|t|^{p-1}+|s|^{p-1})|t-s| \leq C(|s|+|t|+|t|^p+|s|^p) \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

ergibt sich für  $t = \frac{u_m}{u_0}, s = \frac{u}{u_0}$  die folgende Abschätzung auf  $K$

$$\begin{aligned} &\Gamma(x) \left| |u_m + u_0|^{p-1}(u_m + u_0) - |u + u_0|^{p-1}(u + u_0) \right| |\phi| \\ &\leq C \|\phi\|_{L^\infty(K)} \|\Gamma\|_{L^\infty(K)} \left( |u_m|^p + |u|^p + u_0^{p-1}|u_m| + u_0^{p-1}|u| \right) \\ &\leq C(w^p + u_0^{p-1}w) \\ &\leq C(1 + w^{p+1} + u_0^{p-1}w). \end{aligned}$$

Wegen  $u_0(x)^{p-1} \sim |x|^{-2}$  auf  $K$  und  $-\frac{2(p+1)}{p} + n > 0$  gilt  $u_0^{p-1} \in L^{\frac{p+1}{p}}(K)$ , sodass es sich wegen  $w \in L^{p+1}(K)$  um eine integrierbare Majorante handelt. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt für  $m \rightarrow \infty$

$$\int_K \Gamma(x) \left( |u_m + u_0|^{p-1} (u_m + u_0) - |u + u_0|^{p-1} (u + u_0) \right) \phi \, dx \rightarrow 0$$

und damit

$$I'_p(u_m)[\phi] \rightarrow I'_p(u)[\phi] \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (6.7)$$

Ferner ist  $(I'_p(u_m))$  beschränkt, denn aus der Formel für  $I'_p$  in (6.2), aus den Propositionen 6.1 und 6.2 und  $\|u_m\|_H \leq M$  für  $m \in \mathbb{N}$  folgt

$$\begin{aligned} \|I'_p(u_m)\|_{H'} &= \|\iota u_m\|_{H'} + \|F_p(u_m)\|_{H'} + \|T_p\|_{H'} \\ &\leq M + C_1(c_{n,p}^p + c_{n,p}^{p-1}M + M^p) + C_3 c_{n,p}. \end{aligned}$$

Da  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $H$  liegt, erhalten wir somit aus (6.7) für  $m \rightarrow \infty$

$$I'_p(u_m)[\phi] \rightarrow I'_p(u)[\phi] \quad \forall \phi \in H,$$

was zu zeigen war. □

Es folgt der Nachweis der Palais-Smale-Bedingung, wofür wir zum ersten Mal die gesamte Kraft der Voraussetzungen  $(A'_4), (A'_5)$  einbringen. Insbesondere verwenden wir die durch Proposition 5.2 (ii) gewährleistete Kompaktheit der Einbettung  $H \rightarrow L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ .

**Proposition 6.6.** *Es gelte  $n \geq 3$  und  $(A_1), (A_2), (A'_3), (A'_4), (A'_5)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  das Funktional  $I_p$  die Palais-Smale-Bedingung erfüllt.*

**Beweis:**

Sei  $(u_m)$  eine Palais-Smale-Folge von  $I_p$ , d.h. die Folge  $(I_p(u_m))$  sei beschränkt es gelte

$$I'_p(u_m) = \iota u_m - F_p(u_m) - T_p \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Es ist zu zeigen, dass ein  $\varepsilon > 0$  existiert, so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  die von  $p$  abhängige Folge  $(u_m)$  eine in  $H$  konvergente Teilfolge besitzt.

*1. Schritt: Beschränktheit von  $(u_m)$ .*

Sei  $\alpha = \frac{2n-3}{n-2}$ . Dann gilt  $2 < \alpha < \frac{2(n-1)}{n-2} < p+1$  für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$  sowie

$$\begin{aligned} &\alpha I_p(u_m) - I'_p(u_m)[u_m] \\ &= \alpha \cdot \left( \frac{1}{2} \|u_m\|_H^2 - T_p[u_m] - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma(x) (|u_m + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1}) - (p+1) u_0^p u_m \right) dx \right) \\ &\quad - \left( \|u_m\|_H^2 - T_p[u_m] - \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma(x) |u_m + u_0|^{p-1} (u_m + u_0) - u_0^p \right) u_m \, dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha-2}{2} \|u_m\|_H^2 - (\alpha-1)T_p[u_m] + \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma(x)-1)u_0^p u_m dx - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \cdot \left(\frac{\alpha}{p+1}|u_m+u_0|^{p+1}\right. \\
&\quad \left.- |u_m+u_0|^{p-1}(u_m+u_0)u_m - (\alpha-1)u_0^p u_m - \frac{\alpha}{p+1}u_0^{p+1}\right) dx.
\end{aligned}$$

Wir nutzen die Ungleichung

$$\frac{\alpha}{p+1}|t+1|^{p+1} - (t+1)|t+1|^{p-1}t - (\alpha-1)t - \frac{\alpha}{p+1} \leq Ct^2 \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (6.8)$$

aus Proposition 5.6 (v). Wegen  $(A'_5)$  gilt  $\Gamma \geq 0$ . Verwenden wir (6.8) für  $t = \frac{u_m}{u_0}$ , so erhalten wir aus Proposition 5.4 (xii) und (xiv) sowie Proposition 6.2

$$\begin{aligned}
&\alpha I_p(u_m) - I'_p(u_m)[u_m] \\
&\geq \frac{\alpha-2}{2} \|u_m\|_H^2 - (\alpha-1)T_p[u_m] + \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma(x)-1)u_0^p u_m dx - C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)u_0^{p-1}u_m^2 dx \\
&\geq \frac{\alpha-2}{2} \|u_m\|_H^2 - C \left( \|T_p\|_{H'} \|u_m\|_H + \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x)-1|u_0^p |u_m| dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)u_0^{p-1}u_m^2 dx \right) \\
&\geq \frac{\alpha-2}{2} \|u_m\|_H^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^{p-1} + c_{n,p}^p)(\|u_m\|_H + \|u_m\|_H^2).
\end{aligned}$$

Wegen  $c_{n,p} \rightarrow 0$  für  $p \rightarrow \frac{n}{n-2}$  existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$C(c_{n,p} + c_{n,p}^{p-1} + c_{n,p}^p) \leq \frac{\alpha-2}{4}$$

für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$ . Da die Folgen  $(I_p(u_m))$  und  $(I'_p(u_m))$  in  $\mathbb{R}$  bzw.  $H'$  beschränkt sind, erhalten wir die Beschränktheit der Folge  $(u_m)$  für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  aus einer Ungleichung der Form

$$C(\|u_m\|_H + 1) \geq \|u_m\|_H^2.$$

Da  $(u_m)$  in  $H$  und damit auch in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  beschränkt ist, existiert ein  $u \in H$  und eine Teilfolge von  $(u_m)$ , wieder  $(u_m)$  genannt, mit

$$u_m \rightharpoonup u \text{ in } H, \quad u_m \rightarrow u \text{ in } L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) \text{ für } 1 \leq q < \frac{2n}{n-2}, \quad u_m \rightarrow u \text{ in } L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n).$$

Hierbei wurde die Kompaktheit der Einbettung  $H \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  verwendet, siehe Proposition 5.2 (ii). Wegen  $u_m \rightharpoonup u$  und  $I'_p(u_m) \rightarrow 0$  folgt  $I'_p(u) = 0$  aus Proposition 6.5. Wegen  $T_p[u_m] \rightarrow T_p[u]$  für  $m \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
o(1) &= I'_p(u_m) - I'_p(u) \\
&= (\iota(u_m - u) - G_p(u_m - u)) - (F_p(u_m) - F_p(u) - G_p(u_m - u)), \quad (6.9)
\end{aligned}$$

wobei  $G_p(v)$  für  $v \in H$  definiert ist durch

$$G_p(v)[\phi] := p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)u_0^{p-1}v\phi dx \quad (\phi \in H). \quad (6.10)$$

Nach Proposition 5.4 (xiv) gilt  $G_p(v) \in H'$  für alle  $v \in H$  sowie

$$\|G_p(v)\|_{H'} \leq C c_{n,p}^{p-1} \|v\|_H. \quad (6.11)$$

2. Schritt:  $F_p(u_m) - F_p(u) - G_p(u_m - u) \rightarrow 0$  in  $H'$ .

Per Definition von  $F_p, G_p$ , vgl. (5.10), (6.10), gilt

$$\begin{aligned} & \|F_p(u_m) - F_p(u) - G_p(u_m - u)\|_{H'} \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left| |u_0 + u_m|^{p-1}(u_0 + u_m) - |u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - p u_0^{p-1}(u_m - u) \right| |\phi| dx. \end{aligned}$$

Sei nun  $\kappa = \frac{1}{n-2} \in (0, 1]$ . Wir schätzen den Integranden auf  $B_\rho$  bzw.  $B_\rho^c$  mit Hilfe der folgenden Ungleichungen für  $s, t \in \mathbb{R}$  ab, vgl. Proposition 5.6 (iv):

$$\begin{aligned} & \left| |1 + t|^{p-1}(1 + t) - |1 + s|^{p-1}(1 + s) - p(t - s) \right| \leq C(|t|^{p-1} + |s|^{p-1} + |s|^\kappa + |t|^\kappa)|t - s|, \\ & \left| |1 + t|^{p-1}(1 + t) - |1 + s|^{p-1}(1 + s) - p(t - s) \right| \leq C(1 + |t|^{p-1} + |s|^{p-1})|t - s|. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Wir erhalten wegen  $\Gamma \in L^\infty(B_\rho)$

$$\begin{aligned} & \|F_p(u_m) - F_p(u) - G_p(u_m - u)\|_{H'} \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} \Gamma(x) (|u_m|^{p-1} + |u|^{p-1} + u_0^{p-1-\kappa}|u_m|^\kappa + u_0^{p-1-\kappa}|u|^\kappa) |u_m - u| |\phi| dx \\ & \quad + C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} \Gamma(x) (|u_m|^{p-1} + |u|^{p-1} + u_0^{p-1}) |u_m - u| |\phi| dx \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} u_0^{p-1-\kappa} (|u_m|^\kappa + |u|^\kappa) |u_m - u| |\phi| dx \\ & \quad + C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) (|u_m|^{p-1} + |u|^{p-1}) |u_m - u| |\phi| dx \\ & \quad + C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} \Gamma(x) u_0^{p-1} |u_m - u| |\phi| dx. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Nach Proposition 5.4 (vi) lässt sich der dritte Summand folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} \Gamma(x) u_0^{p-1} |u_m - u| |\phi| dx & \leq C c_{n,p}^{p-1} \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho^c} e^{-|x|} |u_m - u| |\phi| dx \\ & \leq C c_{n,p}^{p-1} \|e^{-|x|}(u_m - u)\|_{L^2(B_\rho^c)} \\ & \leq C c_{n,p}^{p-1} \|u_m - u\|_{L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\ & = o(1). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die Konvergenz des zweiten Summanden gegen 0 folgt aus  $\|u_m\|_H, \|u\|_H \leq M$  und

$$\sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) (|u_m|^{p-1} + |u|^{p-1}) |u_m - u| |\phi| dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left( \|u_m\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} + \|u\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \right) \|u_m - u\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \cdot \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \|\phi\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \left( \|u_m\|_H^{p-1} + \|u\|_H^{p-1} \right) \|u_m - u\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq 2CM^{p-1} \|u_m - u\|_{L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\
&= o(1).
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Wir kommen zur Abschätzung des ersten Summanden in (6.13). Wegen

$$p - 1 - \kappa > \frac{n}{n-2} - 1 - \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n-2} > 0$$

und Proposition 5.4 (vi) gilt die Abschätzung

$$u_0(x)^{p-1-\kappa} \leq C c_{n,p}^{p-1-\kappa} |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1}} \leq C |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1}} \quad (|x| \leq \rho).$$

Das Integral des ersten Summanden schätzen wir mit Hilfe der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung zu den Exponenten  $s_1, s_2, s_3, s_4 > 1$  mit

$$s_4 = \frac{2n}{n-2}, \quad s_3 = p+1, \quad s_2 = \frac{2n}{(n-2)\kappa}, \quad s_1 = \left(1 - \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3} - \frac{1}{s_4}\right)^{-1}$$

ab. Aus der Beschränktheit von  $(u_m)$  und Sobolevs Einbettungssatz folgt

$$\begin{aligned}
&\sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} u_0^{p-1-\kappa} (|u_m|^\kappa + |u|^\kappa) |u_m - u| |\phi| dx \\
&\leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1}} (|u_m|^\kappa + |u|^\kappa) |u_m - u| |\phi| dx \\
&\leq C \| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} \left( \| |u_m|^\kappa \|_{L^{s_2}(B_\rho)} + \| |u|^\kappa \|_{L^{s_2}(B_\rho)} \right) \|u_m - u\|_{L^{s_3}(B_\rho)} \\
&\leq C \| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} \left( \|u_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^\kappa + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^\kappa \right) \|u_m - u\|_{L^{s_3}(B_\rho)} \\
&\leq C \| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} \|u_m - u\|_{L^{s_3}(B_\rho)}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Für  $p \rightarrow \frac{n}{n-2}$  gilt  $-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1} \rightarrow -1$  sowie  $s_1 \rightarrow \frac{2n(n-1)}{2n-1}$ . Wegen

$$(-1) \cdot \frac{2n(n-1)}{2n-1} + n = \frac{n}{2n-1} > 0$$

existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit

$$\| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} < \infty \quad \text{für } p \in \left( \frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon \right).$$

Aus (6.16) und  $u_m \rightarrow u$  in  $L^{p+1}(B_\rho)$  folgt daher

$$\sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} u_0^{p-1-\kappa} (|u_m|^\kappa + |u|^\kappa) |u_m - u| |\phi| dx = o(1). \tag{6.17}$$

Die Abschätzungen (6.13)-(6.17) liefern schließlich

$$F_p(u_m) - F_p(u) - G_p(u_m - u) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty). \quad (6.18)$$

3.Schritt:  $u_m \rightarrow u$  in  $H$ .

Aus (6.9) und (6.18) folgt

$$\iota(u_m - u) - G_p(u_m - u) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Wegen (6.11) gilt

$$\begin{aligned} o(1) &= \|\iota(u_m - u) - G_p(u_m - u)\|_{H'} \\ &\geq \|u_m - u\|_H - \|G_p(u_m - u)\|_{H'} \\ &\geq (1 - Cc_{n,p}^{p-1})\|u_m - u\|_H. \end{aligned}$$

Wählen wir  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, so erhalten wir  $u_m \rightarrow u$  in  $H$ , was zu zeigen war.  $\square$

In den obigen Propositionen haben wir nachgewiesen, dass die Voraussetzungen des Mountain-Pass-Theorems erfüllt sind. Wir erhalten daher einen kritischen Punkt zum Mountain-Pass-Niveau  $m_p$  mit  $m_p \geq \tilde{m} > 0$  für eine von  $p$  unabhängige positive Zahl  $\tilde{m}$ . Es ist zu zeigen, dass die in Satz 6.3 gewonnene Lösung eine solche Ungleichung nicht erfüllen kann, sodass die Existenz zweier verschiedener Lösungen gezeigt ist.

**Satz 6.7.** *Es gelte  $n \geq 3$  und  $(A_1), (A_2), (A'_3), (A'_4), (A'_5)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  so, dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  zwei verschiedene distributionelle Lösungen von*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

mit den Eigenschaften (i)-(iv) aus Satz 6.3 existieren.

**Beweis:**

Nach den Propositionen 6.4 und 6.6 existiert ein  $\varepsilon_1 > 0$ , so dass für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon_1)$  das Funktional  $I_p$  die Mountain-Pass-Geometrie besitzt und die Palais-Smale-Bedingung erfüllt. Nach dem Mountain-Pass-Theorem (Satz 6.2) besitzt  $I_p$  einen kritischen Punkt  $u \in H$  mit  $I_p(u) = m_p$ . Nach Proposition 6.4 existiert eine positive Zahl  $\tilde{m}$  mit  $I_p(u) = m_p \geq \tilde{m} > 0$  für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon_1)$ . Insbesondere ist  $U_1 := u_0 + u$  singuläre distributionelle Lösung von (5.1) (siehe Appendix E) mit  $U_1 - u_0 \in H$  und

$$I_p(U_1 - u_0) = m_p \geq \tilde{m}. \quad (6.19)$$

Andererseits ergibt sich wie in (6.6) für alle  $v \in H$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} I_p(v) &= \frac{1}{2}\|v\|_H^2 - T_p[v] - (p+1) \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma(x) - 1)u_0^p v \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) \left( |v + u_0|^{p+1} - u_0^{p+1} - (p+1)u_0^p v \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\frac{1}{2} + C c_{n,p}^{p-1}\right) \|v\|_H^2 + C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|v\|_H + C \|v\|_H^{p+1} \\
&\leq C(\|v\|_H^2 + \|v\|_H + \|v\|_H^{p+1})
\end{aligned}$$

Daher existiert eine von  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon_1)$  unabhängige Zahl  $r > 0$  mit  $I_p(u) \leq \frac{\tilde{m}}{2}$  für  $\|u\|_H \leq r$ . Nach Satz 6.3 existiert ein  $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1)$ , so dass die Gleichung (5.1) für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon_2)$  eine distributionelle Lösung  $U_2$  mit  $U_2 - u_0 \in H$  und  $\|U_2 - u_0\|_H \leq r$  besitzt. Insbesondere gilt per Definition von  $r$

$$I_p(U_2 - u_0) \leq \frac{\tilde{m}}{2}. \quad (6.20)$$

Für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon_2)$  existieren daher distributionelle Lösungen  $U_1, U_2$  von (5.1), die den Ungleichungen (6.19) bzw. (6.20) genügen. Insbesondere gilt  $U_1 \neq U_2$  und die Existenz zweier distributioneller Lösungen von (5.1) ist gezeigt. Der Beweis der Eigenschaften (i)-(iv) von  $U_1, U_2$  sind Appendix E zu entnehmen.  $\square$

### Bemerkung 6.8.

- a) Eine Kernforderung in Satz 6.7 an das Funktional  $I_p$  ist die Gültigkeit der Palais-Smale-Bedingung, die hier im Wesentlichen durch  $(A'_4)$  bzw. durch die Kompaktheit der Einbettung  $H \rightarrow L^{p+1}_\Gamma(\mathbb{R}^n)$  gewährleistet wird. Im Spezialfall  $\Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist gemäß  $(A'_4)$  die Bedingung  $V(x) \rightarrow \infty$  für  $|x| \rightarrow \infty$  hinreichend. Im Fall  $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ist  $(A'_4)$  für Funktionen  $\Gamma$  mit  $\Gamma(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  erfüllt. Stärkere Kompaktheitskriterien sind Satz 2 in [18] zu entnehmen.
- b) Eine interessante Frage ist, ob die Existenz zweier singulärer distributioneller Lösungen auch bei Verwendung der schwächeren Bedingung  $(A_3)$  statt  $(A'_3)$  gezeigt werden kann. Statt des Mountain-Pass-Theorems würde das Linking-Theorem zum Einsatz kommen. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, die Existenz einer beschränkten Palais-Smale-Folge zum "Linking-Niveau" zu zeigen.

Schließlich diskutieren wir den radialsymmetrischen Fall. Wir nehmen daher an, dass messbare Funktionen  $V_0, \Gamma_0 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $V(x) = V_0(|x|), \Gamma(x) = \Gamma_0(|x|)$  existieren. In diesem Fall ist statt  $L^2(\mathbb{R}^n)$  der Raum

$$L_r^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : u \text{ ist radialsymmetrisch}\}$$

als "Hintegrund-Hilbertraum" zu wählen. Den analog zu  $H$  konstruierten Hilbertraum radialsymmetrischer Funktionen bezeichnen wir mit  $H_r$ . Wie in Proposition 5.1 (i) folgt  $H_r = H_{\tilde{V},r}^1(\mathbb{R}^n)$ , wobei  $H_{\tilde{V},r}^1(\mathbb{R}^n)$  die Vervollständigung der radialsymmetrischen Testfunktionen bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{H_{\tilde{V}}^1}$  bezeichnet. Aus dieser Wahl des Hilbertraums ergeben sich bessere Existenzresultate, da die Kompaktheit der Einbettung  $H_r \rightarrow L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  unter bedeutend weniger restriktiven Bedingungen gegeben ist. Dies lässt sich anhand des Modellfalls  $V \equiv 1, \Gamma \equiv 1$  veranschaulichen. In diesem Fall gilt  $H = H^1(\mathbb{R}^n), H_r = H_r^1(\mathbb{R}^n)$

und  $L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n) = L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ , sodass die Einbettung  $H_r \rightarrow L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$  und die Einbettung  $H \rightarrow L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  für kein  $p \in (1, \frac{n+2}{n-2})$  kompakt ist. Satz 1 in [77] liefert hinreichende Bedingungen für die Kompaktheit der Einbettung  $H_{\tilde{V},r}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_\Gamma^q(\mathbb{R}^n)$  in Abhängigkeit des asymptotischen Verhaltens der Funktionen  $V_0, \Gamma_0$  bei 0 und  $\infty$ . Die Autoren nehmen an, dass reelle Zahlen  $a, a_0, b, b_0$  mit der Eigenschaft

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{V}_0(r)}{r^{a_0}} > 0, \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\tilde{V}_0(r)}{r^a} > 0, \quad \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma_0(r)}{r^{b_0}} > 0, \quad \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_0(r)}{r^b} > 0.$$

existieren. In unserem Fall müssen wegen  $(A_1), (A_2)$  und  $\tilde{V}_0(r) = V_0(r)_+ + 1$  die Parameter  $a_0, b_0$  gemäß  $a_0 \geq \min\{\alpha, 0\}, b_0 \geq 0$  gewählt werden. Wegen  $\Gamma_0(r) \rightarrow 1$  für  $r \rightarrow 0$  ist jedes  $b_0 \geq 0$  wählbar, sodass wir  $b_0 = 0$  setzen, um die besten Einbettungseigenschaften mit dem angesprochenen Satz zu erhalten. Nach einigen Rechnungen erhalten wir mit Hilfe von Satz 1 in [77] eine stetige und kompakte Einbettung  $H_r \rightarrow L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  in den Fällen

$$a \leq -2 \leq b \leq -1 \quad \text{oder} \quad -2 < a \leq b \leq \frac{2n-2-a}{2n-4}.$$

### 3. Existenz singulärer Lösungen nichtlinearer Schrödingersysteme

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Existenzresultate des letzten Abschnitts auf den Fall eines nichtlinearen Schrödingersystems der Form

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{p_1-1}u|v|^{p_2} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_4(x)|u|^{p_3}|v|^{p_4-1}v & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & (|x| \rightarrow \infty), \\ p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 1, \quad p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = p. \end{cases} \quad (6.1)$$

Im Fall  $n = 3$  oder  $n = 4$  beweisen wir für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  und hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  die Existenz einer singulären distributionellen Lösungen  $(U, V)$  von (6.1) der Form  $(U, V) = (u_0, v_0) + (u, v)$ , wobei erneut  $(u_0, v_0)$  eine geeignete Näherungslösung ist und  $(u, v)$  in einem Hilbertraum  $H$  zu suchen ist. Die natürliche Wahl für  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ist durch

$$H := H_1 \times H_2, \quad \langle (u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \rangle_H := \langle u, \tilde{u} \rangle_{H_1} + \langle v, \tilde{v} \rangle_{H_2},$$

gegeben, wobei  $H_1, H_2$  die jeweilige Formdomäne des zu  $-\Delta + V_1$  bzw.  $-\Delta + V_2$  gehörenden selbstadjungierten Schrödinger-Operators  $L_1$  bzw.  $L_2$  bezeichnet. Die Voraussetzung  $p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 1$  benötigen wir, um die Kontraktionseigenschaft des Fixpunktoperators nachzuweisen. Es ist zu beachten, dass (6.1) nicht notwendig variationell ist. Als distributionelle Lösung von (6.1) muss  $(U, V)$  den Bedingungen  $U, V \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $V_1 U, V_2 V \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta \phi + V_1(x)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{p_1-1}u|v|^{p_2} \right) \phi dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(-\Delta\psi + V_2(x)\psi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_4(x)|u|^{p_3}|v|^{p_4-1}v)\psi dx$$

für alle  $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  genügen. Wie im skalaren Fall folgt unter den Voraussetzungen  $(B_1) - (B_4)$  (siehe Seite 162), dass die Existenz der selbstadjungierten Operatoren  $L_1, L_2$  und der stetigen Einbettungen  $H_1 \rightarrow L_{\Gamma_i}^{p+1}(\mathbb{R}^n), H_2 \rightarrow L_{\Gamma_j}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  für  $i = 1, 3, 4$  und  $j = 2, 3, 4$  gewährleistet ist. Ferner existiert unter den genannten Bedingung die Näherungslösung  $w_0$  aus Proposition 5.4, wobei die Abschätzungen (xii)-(xiv) für Elemente aus  $H'_1, H'_2$  und  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, V_1, V_2$  statt  $\Gamma, V$  gelten. Wir konzentrieren uns in der folgenden Darstellung auf die wichtigsten neuen Aspekte im Vergleich zum skalaren Fall.

Wir beginnen mit der Herleitung der Gleichung für die Korrekturfunktion  $(u, v) \in H$ . Als Näherungslösung wählen wir  $(u_0, v_0) = 2^{-\frac{1}{p-1}}(w_0, w_0)$ . So gilt für  $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u_0 \nabla \phi + V_1(x)u_0\phi) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_0^p + u_0^{p_1}v_0^{p_2})\phi dx + \int_{B_\rho} V_1(x)u_0\phi dx \\ &\quad + \int_{B_\rho^c} (V_1(x) - \omega^2)u_0\phi dx + \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0)\phi d\sigma, \\ \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla v_0 \nabla \psi + V_2(x)v_0\psi) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (v_0^p + u_0^{p_3}v_0^{p_4})\psi dx + \int_{B_\rho} V_2(x)v_0\psi dx \\ &\quad + \int_{B_\rho^c} (V_2(x) - \omega^2)v_0\psi dx + \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ v_0 - \partial_\nu^- v_0)\psi d\sigma. \end{aligned}$$

Aus der zu erfüllenden Gleichung für  $(U, V)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla U \nabla \phi + V_1(x)U\phi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_1(x)|U|^{p-1}U + \Gamma_3(x)|U|^{p_1-1}U|V|^{p_2})\phi dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla V \nabla \psi + V_2(x)V\psi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_2(x)|V|^{p-1}V + \Gamma_4(x)|U|^{p_3}|V|^{p_4-1}V)\psi dx \end{aligned}$$

ergeben sich die folgenden Gleichungen für  $(u, v)$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \phi + V_1(x)u\phi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_1(x)|u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p)\phi dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_3(x)|u + u_0|^{p_1-1}(u + u_0)|v + v_0|^{p_2} - u_0^{p_1}v_0^{p_2})\phi dx \\ &\quad - \int_{B_\rho} V_1(x)u_0\phi dx - \int_{B_\rho^c} (V_1(x) - \omega^2)u_0\phi dx \\ &\quad - \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0)\phi d\sigma, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla \psi + V_2(x)v\psi dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_2(x)|v_0 + v|^{p-1}(v_0 + v) - v_0^p)\psi dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_4(x)|v + v_0|^{p_3-1}(v + v_0)|u + u_0|^{p_4} - v_0^{p_3}u_0^{p_4})\psi dx \\ &\quad - \int_{B_\rho} V_2(x)v_0\psi dx - \int_{B_\rho^c} (V_2(x) - \omega^2)v_0\psi dx \\ &\quad - \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ v_0 - \partial_\nu^- v_0)\psi d\sigma. \end{aligned}$$

Die zu (5.13) analoge Fixpunktgleichung lautet daher

$$(u, v) = \mathcal{A}_p(u, v),$$

wobei der Fixpunktoperator  $\mathcal{A}_p(u, v) = (\mathcal{A}_p^1(u, v), \mathcal{A}_p^2(u, v))$  durch

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_p^1(u, v) &:= (P_1^+ - P_1^-)\iota_1^{-1}(F_p^1(u) + F_p^3(u, v) + T_p^1), \\ \mathcal{A}_p^2(u, v) &:= (P_2^+ - P_2^-)\iota_2^{-1}(F_p^2(v) + F_p^4(u, v) + T_p^2)\end{aligned}$$

definiert ist. Hierbei bezeichnen  $P_1^+, P_1^- : H_1 \rightarrow H_1$  bzw.  $P_2^+, P_2^- : H_2 \rightarrow H_2$  die zu  $P^+, P^-$  analogen Orthogonalprojektionen und  $\iota_1 : H_1 \rightarrow H'_1, \iota_2 : H_2 \rightarrow H'_2$  ist wie im skalaren Fall die jeweilige duale Abbildung. Die Funktionale  $F_p^1, F_p^2, F_p^3, F_p^4, T_p^1, T_p^2$  sind für  $(\phi, \psi) \in H$  gegeben durch

$$\begin{aligned}F_p^1(u)[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_1(x)|u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p)\phi \, dx, \\ F_p^2(v)[\psi] &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_2(x)|v_0 + v|^{p-1}(v_0 + v) - v_0^p)\psi \, dx, \\ F_p^3(u, v)[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_3(x)|u + u_0|^{p_1-1}(u + u_0)|v + v_0|^{p_2} - u_0^{p_1}v_0^{p_2})\phi \, dx, \\ F_p^4(u, v)[\psi] &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma_4(x)|u + u_0|^{p_3}|v + v_0|^{p_4-1}(v + v_0) - u_0^{p_3}v_0^{p_4})\psi \, dx, \\ T_p^1[\phi] &= - \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0)\phi \, d\sigma - \int_{B_\rho} V_1(x)u_0\phi \, dx - \int_{B_\rho^\varepsilon} (V_1(x) - \omega^2)u_0\phi \, dx, \\ T_p^2[\psi] &= - \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ v_0 - \partial_\nu^- v_0)\psi \, d\sigma - \int_{B_\rho} V_2(x)v_0\psi \, dx - \int_{B_\rho^\varepsilon} (V_2(x) - \omega^2)v_0\psi \, dx.\end{aligned}$$

Setzen wir  $P^+ := (P_1^+, P_2^+)$ ,  $P^- := (P_1^-, P_2^-)$ ,  $\iota := (\iota_1, \iota_2)$ ,  $T_p := (T_p^1, T_p^2)$  und schließlich  $F_p(u, v) := (F_p^1(u) + F_p^3(u, v), F_p^2(v) + F_p^4(u, v))$ , so lautet die Fixpunktgleichung

$$(u, v) = \mathcal{A}_p(u, v), \quad \text{wobei } \mathcal{A}_p(u, v) = (P^+ - P^-)\iota^{-1}(F_p(u, v) + T_p). \quad (6.2)$$

Es folgen die Abschätzungen für  $F_p(u, v)$ .

**Proposition 6.1.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $F_p(u, v) \in H'$  für alle  $(u, v) \in H$  und alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$ . Darüberhinaus existieren von  $p$  unabhängige Zahlen  $C_1, C_2 > 0$ , so dass die folgenden Abschätzungen für  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H$  gelten:*

1.  $\|F_p(u, v)\|_{H'} \leq C_1 \left( c_{n,p}^p + c_{n,p}^{p-1} \|(u, v)\|_H + \|(u, v)\|_H^p \right)$
2.  $\|F_p(u, v) - F_p(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{H'} \leq C_2 \left( c_{n,p}^{p-1} + \|(u, v)\|_H^{p-1} + \|(\tilde{u}, \tilde{v})\|_H^{p-1} \right) \|(u - \tilde{u}, v - \tilde{v})\|_H$

**Beweis:**

Es sind die Terme  $\|F_p^1(u)\|_{H'_1}, \|F_p^3(u, v)\|_{H'_1}, \|F_p^2(v)\|_{H'_2}, \|F_p^4(u, v)\|_{H'_2}$  abzuschätzen. Die Behandlung der Terme  $\|F_p^1(u)\|_{H'_1}, \|F_p^2(v)\|_{H'_2}$  ist dieselbe wie im skalaren Fall und wir überspringen den Beweis. Ferner verlaufen die Abschätzungen von  $\|F_p^3(u, v)\|_{H'_1}$  und

$\|F_p^4(u, v)\|_{H_2'}$  analog, sodass wir uns darauf beschränken, nur die Abschätzung für  $\|F_p^3(u, v)\|_{H_1'}$  zu zeigen. Hierzu nutzen wir zunächst die Ungleichungen (vi) aus Proposition 5.6: Für  $s, \tilde{s}, t, \tilde{t} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}$  gilt

$$\left| |1 + s|^{p_1-1}(1 + s)|1 + t|^{p_2} - 1 \right| \leq C(|s| + |t| + |s|^p + |t|^p)$$

Es folgt wegen  $p_1 + p_2 = p$  und  $u_0 = v_0$  analog zu den Abschätzungen im skalaren Fall

$$\begin{aligned} \|F_p^3(u, v)\|_{H_1'} &\leq C \sup_{\|\phi\|_{H_1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_3(x)| |u + u_0|^{p_1-1} (u + u_0) |v + v_0|^{p_2} - u_0^{p_1} v_0^{p_2} |\phi| dx \\ &\leq C \sup_{\|\phi\|_{H_1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_3(x) - 1| |u_0^p| |\phi| dx \\ &\quad + C \sup_{\|\phi\|_{H_1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left| |u + u_0|^{p_1-1} (u + u_0) |v + v_0|^{p_2} - u_0^{p_1} v_0^{p_2} \right| |\phi| dx \\ &\leq C c_{n,p}^p + C \sup_{\|\phi\|_{H_1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left( u_0^{p_1-1} |u| + u_0^{p_1-1} |v| + |u|^p + |v|^p \right) |\phi| dx \\ &\leq C c_{n,p}^p + C \left( c_{n,p}^{p-1} (\|u\|_{H_1} + \|v\|_{H_2}) + \|u\|_{H_1}^p + \|v\|_{H_2}^p \right) \\ &\leq C \left( c_{n,p}^p + c_{n,p}^{p-1} \|(u, v)\|_H + \|(u, v)\|_H^p \right). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Abschätzung (xiv) aus Proposition 5.4 sowie die Stetigkeit der Einbettungen  $H_1 \rightarrow L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ ,  $H_2 \rightarrow L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  verwendet, vgl. Proposition 5.2 (i). Zum Nachweis von (ii) nutzen wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\left| |1 + s|^{p_1-1}(1 + s)|1 + t|^{p_2} - |1 + \tilde{s}|^{p_1-1}(1 + \tilde{s})|1 + \tilde{t}|^{p_2} \right| \\ &\leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1})(|s - \tilde{s}| + |t - \tilde{t}|) \end{aligned}$$

für  $s, \tilde{s}, t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ . Wir erhalten wir für  $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in H$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\|F_p^3(u, v) - F_p^3(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{H_1'} \\ &\leq C \sup_{\|\phi\|_{H_1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left( |u + u_0|^{p_1-1} (u + u_0) |v + v_0|^{p_2} \right. \\ &\quad \left. - |\tilde{u} + u_0|^{p_1-1} (\tilde{u} + u_0) |\tilde{v} + v_0|^{p_2} \right) |\phi| dx \\ &\leq C \sup_{\|\phi\|_{H_1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left( u_0^{p_1-1} + |u|^{p-1} + |\tilde{u}|^{p-1} + |v|^{p-1} + |\tilde{v}|^{p-1} \right) (|u - \tilde{u}| + |v - \tilde{v}|) |\phi| dx \\ &\leq C \left( c_{n,p}^{p-1} + \|u\|_{H_1}^{p-1} + \|v\|_{H_2}^{p-1} + \|\tilde{u}\|_{H_1}^{p-1} + \|\tilde{v}\|_{H_2}^{p-1} \right) (\|u - \tilde{u}\|_{H_1} + \|v - \tilde{v}\|_{H_2}) \\ &\leq C \left( c_{n,p}^{p-1} + \|(u, v)\|_H^{p-1} + \|(\tilde{u}, \tilde{v})\|_H^{p-1} \right) \|(u - \tilde{u}, v - \tilde{v})\|_H. \end{aligned}$$

□

Der Beweis der Abschätzungen für  $T_p$  erfolgt vollkommen analog zu Proposition 6.2.

**Proposition 6.2.** Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  mit  $T_p \in H'$  für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$ . Darüberhinaus existiert eine von  $p$  unabhängige positive Zahl  $C_3$  mit

$$\|T_p\|_{H'} \leq C_3 c_{n,p}.$$

Wie im skalaren Fall folgt die Existenz einer singulären distributionellen Lösung von (6.1) aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

**Satz 6.3.** Sei  $n = 3$  oder  $n = 4$  und es gelte  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  so, dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  eine distributionelle Lösung  $(U, V)$  der Gleichung

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{p_1-1}u|v|^{p_2} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_4(x)|u|^{p_3}|v|^{p_4-1}v & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & (|x| \rightarrow \infty), \\ p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 1, \quad p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = p. \end{array} \right.$$

mit den folgenden Eigenschaften existiert:

- (i)  $\text{ess sup}_{B_\delta} U = \text{ess sup}_{B_\delta} V = +\infty$  sowie  $U, V \in L_{loc}^q(B_\delta)$  für alle  $q \in [1, \frac{n(p-1)}{2})$ ,  $\delta > 0$ .
- (ii) Für alle  $\delta > 0$  ist  $(U, V) \in H^1(B_\delta^c) \times H^1(B_\delta^c)$  schwache Lösung von (5.1) auf  $B_\delta^c$ .
- (iii) Im Fall  $\inf \sigma_{ess}(L_1), \inf \sigma_{ess}(L_2) \geq \Sigma > 0$  und  $(\Gamma_j)_+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  für  $j = 1, \dots, 4$  existiert für alle  $\mu \in (0, \sqrt{\Sigma})$  ein  $C_\mu > 0$  mit  $|U(x)|, |V(x)| \leq C_\mu e^{-\mu|x|}$  für  $|x| \geq 1$ .
- (iv) Im Fall  $\sigma(L_1), \sigma(L_2) \subset (0, \infty)$  und  $\Gamma_j \geq 0$  für  $j = 1, \dots, 4$  können  $U, V$  positiv gewählt werden.
- (v)  $(U - u_0, V - v_0) \in H$  und  $\|(U - u_0, V - v_0)\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}}$ .

Nun wenden wir uns dem variationellen Fall  $p_1 = p_4 = \frac{p-1}{2}, p_2 = p_3 = \frac{p+1}{2}$  und  $\Gamma_3 = \Gamma_4$  in (6.1) zu. In diesem Fall lautet das System

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p-3}{2}}|u|v|^{\frac{p+1}{2}} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p+1}{2}}|v|^{\frac{p-3}{2}}v & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & (|x| \rightarrow \infty). \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Wir setzen zunächst  $(B_1), (B_2), (B'_3), (B_4)$  und anschließend für den Existenzbeweis einer zweiten singulären distributionellen Lösung im Fall  $n = 3$   $(B_1), (B_2), (B'_3), (B'_4), (B'_5)$  voraus. Insbesondere gilt im Folgenden  $\sigma(L_1), \sigma(L_2) \subset (0, \infty)$ . Satz 6.3 liefert wegen der Einschränkung  $p_1, p_2, p_3, p_4 \geq 1$  nur im Fall  $n = 3$  die Existenz einer singulären distributionellen Lösung. Wir zeigen, dass die Ausnutzung der variationellen Struktur für alle  $n \geq 3$  singuläre Lösungen existieren und im Fall  $n = 3$  zwei verschiedene singuläre Lösungen von (6.3) existieren. Die eine Korrekturfunktion aus  $H$  wird einem lokalen Minimierer des Euler-Funktional  $I_p$ , die andere einem Mountain-Pass-Sattelpunkt von  $I_p$  entsprechen. Hierbei ist das Funktional  $I_p : H \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$I_p(u, v) = I_p^1(u) + I_p^2(v) - J_p(u, v)$$

für Funktionale  $I_p^1 : H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I_p^2 : H_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J_p : H \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} I_p^1(u) &= \frac{1}{2} \|u\|_{H_1}^2 - T_p^1[u] - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma_1(x) (|u+u_0|^{p+1} - u_0^{p+1}) - (p+1)u_0^p u \right) dx \\ I_p^2(v) &= \frac{1}{2} \|v\|_{H_2}^2 - T_p^2[v] - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma_2(x) (|v+v_0|^{p+1} - v_0^{p+1}) - (p+1)v_0^p v \right) dx \\ J_p(u, v) &= \frac{2}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma_3(x) (|u+u_0|^{\frac{p+1}{2}} |v+v_0|^{\frac{p+1}{2}} - u_0^{\frac{p+1}{2}} v_0^{\frac{p+1}{2}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{p+1}{2} (u_0^{\frac{p-1}{2}} v_0^{\frac{p+1}{2}} u + u_0^{\frac{p+1}{2}} v_0^{\frac{p-1}{2}} v) \right) dx \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit und stetige Differenzierbarkeit von  $I_p^1, I_p^2$  folgt wie im skalaren Fall. Die Wohldefiniertheit des Funktionals  $J_p$  folgt wegen  $u_0 = v_0$  aus der Ungleichung

$$\left| |1+t|^{\frac{p+1}{2}} |1+s|^{\frac{p+1}{2}} - 1 - \frac{p+1}{2}(s+t) \right| \leq C(s^2 + t^2 + |s|^{p+1} + |t|^{p+1}) \quad (6.4)$$

für  $s, t \in \mathbb{R}$ , vgl Proposition 5.6 (vii). Wir beginnen mit der Existenz eines lokalen Minimierers von  $I_p$ .

**Proposition 6.4.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$ . Dann existiert eine positive Zahl  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $(u, v) \in H$  mit  $\sqrt{c_{n,p}} \leq \|(u, v)\|_H \leq 2\sqrt{c_{n,p}}$  und alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  die Ungleichung  $I_p(u, v) \geq \frac{1}{4}c_{n,p}$  gilt.*

**Beweis:**

Für  $(u, v) \in H$  folgen wie in (6.6) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} I_p^1(u) &\geq \left( \frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1} \right) \|u\|_{H_1}^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|u\|_{H_1} - C \|u\|_{H_1}^{p+1}, \\ I_p^2(v) &\geq \left( \frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1} \right) \|v\|_{H_2}^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|v\|_{H_2} - C \|v\|_{H_2}^{p+1}, \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir aus (6.4) die Ungleichung

$$\begin{aligned} J_p(u, v) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_3(x) - 1| u_0^p |u+v| dx \\ &\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left( |u+u_0|^{\frac{p+1}{2}} |v+v_0|^{\frac{p+1}{2}} - u_0^{p+1} - \frac{p+1}{2} u_0^p (u+v) \right) dx \\ &\leq C c_{n,p}^p (\|u\|_{H_1} + \|v\|_{H_2}) + C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left( u_0^{p-1} u^2 + u_0^{p-1} v^2 + |u|^{p+1} + |v|^{p+1} \right) dx \\ &\leq C c_{n,p}^p \|(u, v)\|_H + C (c_{n,p}^{p-1} \|u\|_{H_1}^2 + c_{n,p}^{p-1} \|v\|_{H_2}^2 + \|u\|_{H_1}^{p+1} + \|v\|_{H_2}^{p+1}) \\ &\leq C (c_{n,p}^p \|(u, v)\|_H + c_{n,p}^{p-1} \|(u, v)\|_H^2 + \|(u, v)\|_H^{p+1}) \end{aligned}$$

Es folgt aus  $I_p(u, v) = I_p^1(u) + I_p^2(v) - J_p(u, v)$  die Abschätzung

$$I_p(u, v) \geq \left( \frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1} \right) \|(u, v)\|_H^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|(u, v)\|_H - C \|(u, v)\|_H^{p+1}. \quad (6.5)$$

Für ein hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  und  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1} - 2C (\sqrt{c_{n,p}} + c_{n,p}^{\frac{2p-1}{2}}) - 2^{p+1} C c_{n,p}^{\frac{p-1}{2}} \geq \frac{1}{4} > 0.$$

Für  $(u, v) \in H$  mit  $\sqrt{c_{n,p}} \leq \|(u, v)\|_H \leq 2\sqrt{c_{n,p}}$  folgt mit (6.5) die Abschätzung

$$\begin{aligned} I_p(u, v) &\geq \left(\frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1}\right) \cdot c_{n,p} - C (c_{n,p} + c_{n,p}^p) \cdot \sqrt{c_{n,p}} - C \cdot c_{n,p}^{\frac{p+1}{2}} \\ &= c_{n,p} \cdot \left(\frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1} - 2C (\sqrt{c_{n,p}} + c_{n,p}^{\frac{2p-1}{2}}) - 2^{p+1} C c_{n,p}^{\frac{p-1}{2}}\right) \\ &\geq \frac{1}{4} c_{n,p}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Nun suchen wir einen lokalen Minimierer von  $I_p$  in  $\{(u, v) \in H : \|(u, v)\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}}\}$ . Wir verwenden dazu Ekelands Prinzip, siehe Satz 5.1 in [74].

**Satz 6.5** (Ekelands Prinzip). *Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und sei  $I : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  unterhalbstetig, nach unten beschränkt und  $\neq \infty$ . Dann existiert für jedes  $\eta, \delta > 0$  und jedes  $u \in M$  mit  $I(u) \leq \inf_M I + \eta$  ein Element  $w \in M$ , welches Minimierer des Funktionals*

$$I^w(z) := I(z) + \frac{\eta}{\delta} d(w, z)$$

ist. Ferner gilt  $I(w) \leq I(u)$  und  $d(w, u) \leq \delta$ .

Das Ekelandsche Prinzip garantiert die Existenz einer geeigneten minimierenden Palais-Smale-Folge, deren schwacher Grenzwert der natürliche Kandidat für den lokalen Minimierer ist. Im Unterschied zum skalaren Fall können wir nur für  $p \geq 3$  und damit wegen  $p \approx \frac{n}{n-2}$  nur im Fall  $n = 3$  mit der Methode aus Appendix E den exponentiellen Abfall der distributionellen Lösungen  $(U, V)$  beweisen.

**Satz 6.6.** *Sei  $n \geq 3$  und es gelte  $(B_1), (B_2), (B'_3), (B_4)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$  so, dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  eine distributionelle Lösung  $(U, V)$  der Gleichung*

$$\begin{cases} -\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p-1}{2}}|v|^{\frac{p+1}{2}} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p+1}{2}}|v|^{\frac{p-1}{2}} & \text{in } \mathbb{R}^n, \\ u(x), v(x) \rightarrow 0 & (|x| \rightarrow \infty). \end{cases}$$

mit den Eigenschaften (i), (ii), (iv), (v) aus Satz 6.3 existiert. Im Fall  $n = 3$  besitzt  $(U, V)$  auch Eigenschaft (iii).

**Beweis:**

Wir zeigen für ein hinreichend klein gewähltes  $\varepsilon > 0$  und alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  die Existenz eines lokalen Minimierers  $(u, v) \in H$  von  $I_p$  über  $B_p := \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in H : \|(\tilde{u}, \tilde{v})\|_H \leq 2\sqrt{c_{n,p}}\}$  mit der Eigenschaft  $\|(u, v)\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}}$ . Ist dies gezeigt, so ist  $(u, v)$  kritischer Punkt von  $I_p$  und  $(U, V) := (u_0 + u, v_0 + v)$  ist die gesuchte Lösung mit der Eigenschaft (v). Die Eigenschaften (i)-(iv) ergeben sich aus den Resultaten in Appendix E.

*1. Schritt: Existenz einer schwach konvergenten Palais-Smale-Folge.*

Wir betrachten das Minimierungsproblem

$$\inf_{B_p} I_p.$$

Sei  $(\eta_m)$  eine positive Nullfolge und wähle  $(\tilde{u}_m, \tilde{v}_m) \in B_p$  mit der Eigenschaft

$$I_p(\tilde{u}_m, \tilde{v}_m) \leq \inf_{B_p} I_p + \eta_m^2.$$

Aus Ekelands Prinzip mit  $\eta = \eta_m^2, \delta = \eta_m$  erhalten wir eine Folge  $(u_m, v_m)$  in  $B_p$  mit

$$I_p(u_m, v_m) \leq I_p(z_1, z_2) + \eta_m \|(z_1 - u_m, z_2 - v_m)\|_H \quad \text{für alle } (z_1, z_2) \in B_p.$$

Daher ist  $(u_m, v_m)$  ebenfalls eine minimierende Folge für  $I_p|_{B_p}$ . Wegen  $0 \in B_p$  und  $I_p(0) = 0 < \frac{1}{4}\sqrt{c_{n,p}}$  folgt die Ungleichung  $\|(u_m, v_m)\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}} < 2\sqrt{c_{n,p}}$  für große  $m$  aus Proposition 6.4. Für alle  $(z_1, z_2) \in B_p$  erhalten wir

$$\begin{aligned} I_p(z_1, z_2) &= I_p(u_m, v_m) + I'_p(u_m, v_m)[(z_1 - u_m, z_2 - v_m)] + o(\|(z_1 - u_m, z_2 - v_m)\|_H) \\ &\leq I_p(z_1, z_2) + I'_p(u_m, v_m)[(z_1 - u_m, z_2 - v_m)] + \eta_m \|(z_1 - u_m, z_2 - v_m)\|_H \\ &\quad + o(\|(z_1 - u_m, z_2 - v_m)\|_H) \end{aligned}$$

Setzen wir  $(z_1, z_2) = (u_m, v_m) + t(h_1, h_2)$  mit  $\|(h_1, h_2)\|_H = 1$ , so erhalten wir für  $t \rightarrow 0$

$$\|I'_p(u_m, v_m)\|_{H'} \leq \eta_m \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty,$$

d.h.  $(u_m, v_m)$  ist eine minimierende Palais-Smale-Folge von  $I_p|_{B_p}$  mit  $\|(u_m, v_m)\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}}$ . Insbesondere existiert eine schwach konvergente Teilfolge, wieder  $(u_m, v_m)$  genannt, mit  $(u_m, v_m) \rightharpoonup (u, v), (u_m, v_m) \rightarrow (u, v)$  punktweise fast überall und

$$\|(u, v)\|_H \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|(u_m, v_m)\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}}.$$

*2. Schritt: Der schwache Grenzwert  $(u, v)$  ist kritischer Punkt.*

Wegen  $(u_m, v_m) \rightharpoonup (u, v)$  gilt  $F_p^1(u_m) \rightharpoonup^* F_p^1(u)$  in  $H'_1$  und  $F_p^2(v_m) \rightharpoonup^* F_p^2(v)$  in  $H'_2$ , vgl. Proposition 6.5. Es genügt daher,  $F_p^3(u_m, v_m) \rightharpoonup^* F_p^3(u, v)$  in  $H'_1$  zu beweisen, denn in diesem Fall folgt für alle  $(\phi, \psi) \in H$

$$\langle (u, v), (\phi, \psi) \rangle_H = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle (u_m, v_m), (\phi, \psi) \rangle_H$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m \rightarrow \infty} I'_p(u_m, v_m)[\phi, \psi] + F_p(u_m, v_m)[\phi, \psi] + T_p[\phi, \psi] \\
&= F_p(u, v)[\phi, \psi] + T_p[\phi, \psi],
\end{aligned}$$

d.h.  $I'_p(u, v) = 0$ . Sei daher  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $K := \text{supp}(\phi)$ . Wegen  $\Gamma_3$ ,  $\phi \in L^\infty(K)$  gilt

$$\begin{aligned}
&|F_p^3(u_m, v_m)[\phi] - F_p^3(u, v)[\phi]| \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left| |u_m + u_0|^{\frac{p-3}{2}} (u_m + u_0) |v_m + u_0|^{\frac{p+1}{2}} - |u + u_0|^{\frac{p-3}{2}} (u + u_0) |v + u_0|^{\frac{p+1}{2}} \right| |\phi| dx \\
&\leq C \int_K \left| |u_m + u_0|^{\frac{p-3}{2}} (u_m + u_0) |v_m + u_0|^{\frac{p+1}{2}} - |u + u_0|^{\frac{p-3}{2}} (u + u_0) |v + u_0|^{\frac{p+1}{2}} \right| dx
\end{aligned}$$

Zur weiteren Abschätzung dieses Terms betrachten wir zunächst den Fall  $p \geq 3$ . Ungleichung (ix) aus Proposition 5.6 liefert in diesem Fall

$$\begin{aligned}
&\left| |1 + s|^{\frac{p-3}{2}} (1 + s) |1 + t|^{\frac{p+1}{2}} - |1 + \tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} (1 + \tilde{s}) |1 + \tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}} \right| \\
&\leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1})(|t - \tilde{t}| + |s - \tilde{s}|)
\end{aligned}$$

für  $s, \tilde{s}, t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ . Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
&|F_p^3(u_m, v_m)[\phi] - F_p^3(u, v)[\phi]| \\
&\leq C \int_K (u_0^{p-1} + |u_m|^{p-1} + |u|^{p-1} + |v_m|^{p-1} + |v|^{p-1})(|u_m - u| + |v_m - v|) dx
\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit der Einbettungen  $H_1 \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $H_2 \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$  und der Kompaktheit der Einbettung  $H^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^{p+1}(K)$  folgt  $u_m \rightarrow u, v_m \rightarrow v$  in  $L^{p+1}(K)$ . Nach dem Satz von Riesz-Fischer existiert eine Funktion  $w \in L^{p+1}(K)$  mit  $|u_m|, |u|, |v_m|, |v| \leq w$ . Daher ist ein positives Vielfache der Funktion  $u_0^{p-1}w + w^p$  eine Majorante des obigen Integranden und diese Majorante ist wegen  $u_0(x)^{p-1} \sim |x|^{-2} \in L^{\frac{p+1}{p}}(K)$  für  $p \approx \frac{n}{n-2}$  integrierbar. Wir erhalten daher  $F_p^3(u_m, v_m)[\phi] \rightarrow F_p^3(u, v)[\phi]$  im Fall  $p \geq 3$  aus dem Satz von der dominierten Konvergenz.

Im Fall  $p < 3$  folgt aus Proposition 5.6 (ix)

$$\begin{aligned}
&\left| |1 + s|^{\frac{p-3}{2}} (1 + s) |1 + t|^{\frac{p+1}{2}} - |1 + \tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} (1 + \tilde{s}) |1 + \tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}} \right| \\
&\leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1})|t - \tilde{t}| \\
&\quad + C(1 + |s|^{\frac{p+1}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p+1}{2}} + |t|^{\frac{p+1}{2}} + |\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}}) \cdot |s - \tilde{s}|^{\frac{p-1}{2}}
\end{aligned}$$

für  $s, \tilde{s}, t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ . Wählen wir  $w$  wie oben, so erhalten wir als Majorante ein positives Vielfache der Funktion  $u_0^{\frac{p+1}{2}} w^{\frac{p-1}{2}} + u_0^{p-1} w + w^p$ . Für  $p \approx \frac{n}{n-2}$  ist diese Majorante integrierbar, denn

$$\|u_0^{\frac{p+1}{2}} w^{\frac{p-1}{2}}\|_{L^1(K)} \leq C \| |x|^{-\frac{p+1}{p-1}} w^{\frac{p-1}{2}} \|_{L^1(K)} \leq C \| |x|^{-\frac{p+1}{p-1} \cdot \frac{2(p+1)}{p+3}} \|_{L^1(K)}^{\frac{p+3}{2(p+1)}} \|w\|_{L^{p+1}(K)}^{\frac{p-1}{2}}$$

und

$$-\frac{p+1}{p-1} \cdot \frac{2(p+1)}{p+3} + n \approx \frac{n-2}{2n-3} > 0 \quad \text{für } p \in \left(\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon\right).$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt  $F_p^3(u_m, v_m)[\phi] \rightarrow F_p^3(u, v)[\phi]$ , was zu zeigen war.  $\square$

Wir kommen zum Nachweis einer zweiten singulären Lösung mit Hilfe des Mountain-Pass-Theorems unter den Voraussetzungen  $(B_1), (B_2), (B'_3), (B'_4), (B'_5)$ . Darüberhinaus verlangen wir  $n = 3$ , da wir die nur für  $p > 3$  gültige Ungleichung (x) aus Proposition 5.6 verwenden. Wir beginnen mit dem Nachweis der Mountain-Pass-Geometrie.

**Proposition 6.7.** *Es gelte  $n \geq 3$  und  $(B_1), (B_2), (B'_3), (B'_4), (B'_5)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon, \tilde{m} > 0$ , so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  das Funktional  $I_p$  die Mountain-Pass-Geometrie besitzt und das Mountain-Pass-Niveau  $m_p$  die Ungleichung  $m_p \geq \tilde{m}$  erfüllt.*

**Beweis:**

Die Existenz einer Funktion  $e \in H$  mit  $I_p(e) \leq I_p(0)$  kann wie im skalaren Fall gezeigt werden. Mit Hilfe der Ungleichung (6.5) erhalten wir

$$I_p(u, v) \geq \left(\frac{1}{2} - C c_{n,p}^{p-1}\right) \|(u, v)\|_H^2 - C(c_{n,p} + c_{n,p}^p) \|(u, v)\|_H - C \|(u, v)\|_H^{p+1}$$

für alle  $(u, v) \in H$ . Wie in Proposition 6.4 ergibt sich für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  und  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein die Mountain-Pass-Geometrie des Funktionals  $I_p$ .  $\square$

Wir kommen zum Nachweis der Palais-Smale-Bedingung im Fall  $n = 3$ .

**Proposition 6.8.** *Es gelte  $n = 3$  und  $(B_1), (B_2), (B'_3), (B'_4), (B'_5)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  das Funktional  $I_p$  die Palais-Smale-Bedingung erfüllt.*

**Beweis:**

Sei  $(u_m, v_m)$  eine Palais-Smale-Folge von  $I_p$ . Die Beschränktheit von  $(u_m, v_m)$  folgt wie im skalaren Fall, sodass eine Teilfolge  $(u_m, v_m)$  mit

$$\begin{aligned} (u_m, v_m) &\rightharpoonup (u, v) \quad \text{in } H \\ (u_m, v_m) &\rightarrow (u, v) \quad \text{in } L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) \times L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } 1 \leq q < \frac{2n}{n-2}, \\ u_m &\rightarrow u \quad \text{in } L_{\Gamma_1}^{p+1}(\mathbb{R}^n), L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n), \\ v_m &\rightarrow v \quad \text{in } L_{\Gamma_2}^{p+1}(\mathbb{R}^n), L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

existiert. Aus  $I_p'(u_m, v_m) \rightarrow 0$  und  $(u_m, v_m) \rightarrow (u, v)$  folgt  $I_p'(u, v) = 0$  wie im zweiten Schritt des Beweises von Satz 6.6. Damit gilt für  $m \rightarrow \infty$

$$o(1) = I_p'(u_m, v_m) - I_p'(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= (\iota(u_m - u, v_m - v) - G_p(u_m - u, v_m - v)) \\
&\quad - (F_p(u_m, v_m) - F_p(u, v) - G_p(u_m - u, v_m - v)), \tag{6.6}
\end{aligned}$$

wobei  $G_p(z_1, z_2) = (G_p^1(z_1, z_2), G_p^2(z_1, z_2)) \in H'$  für  $(z_1, z_2) \in H$  definiert ist durch

$$\begin{aligned}
G_p^1(z_1, z_2)[\phi] &:= p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x) u_0^{p-1} z_1 \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1} \left( \frac{p-1}{2} z_1 + \frac{p+1}{2} z_2 \right) \phi \, dx, \\
G_p^2(z_1, z_2)[\psi] &:= p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_2(x) v_0^{p-1} z_2 \psi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1} \left( \frac{p+1}{2} z_1 + \frac{p-1}{2} z_2 \right) \psi \, dx.
\end{aligned}$$

für  $\phi \in H_1, \psi \in H_2$ . Hierbei ist zu beachten, dass die Terme

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1} z_1 \phi \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1} z_2 \psi \, dx$$

wegen der stetigen Einbettungen  $H_1, H_2 \rightarrow L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  und  $H_1, H_2 \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$  Funktionale aus  $H'_1$  bzw.  $H'_2$  definieren<sup>2</sup>. Ferner ergibt sich wie in (6.11) die Abschätzung

$$\|G_p(z_1, z_2)\|_{H'} \leq C c_{n,p}^{p-1} \|(z_1, z_2)\|_H. \tag{6.7}$$

Nun ist  $F_p(u_m, v_m) - F_p(u, v) - G_p(u_m - u, v_m - v) \rightarrow 0$  in  $H'$  zu zeigen. Wegen  $\Gamma_3 = \Gamma_4$  und  $p_1 = p_2, p_3 = p_4$  gilt  $F_p^3(u, v) = F_p^4(v, u)$ , sodass wir uns darauf beschränken, die für den Kopplungsterm  $F_p^3$  relevanten Abschätzungen zu zeigen. Für  $\phi \in H_1$  gilt

$$\begin{aligned}
&\left| F_p^3(u_m, v_m)[\phi] - F_p^3(u, v)[\phi] - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1} \left( \frac{p-1}{2} (u_m - u) + \frac{p+1}{2} (v_m - v) \right) \phi \, dx \right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) \left| |u_m + u_0|^{\frac{p-3}{2}} (u_m + u_0) |v_m + v_0|^{\frac{p+1}{2}} - |u + u_0|^{\frac{p-3}{2}} (u + u_0) |v + v_0|^{\frac{p+1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - u_0^{p-1} \left( \frac{p-1}{2} (u_m - u) + \frac{p+1}{2} (v_m - v) \right) \right| |\phi| \, dx,
\end{aligned}$$

Die wegen  $p > \frac{n}{n-2} = 3$  gültige Ungleichung (x) aus Proposition 5.6 lautet

$$\begin{aligned}
&\left| |1 + s|^{\frac{p-3}{2}} (1 + s) |1 + t|^{\frac{p+1}{2}} - |1 + \tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} (1 + \tilde{s}) |1 + \tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}} - \frac{p+1}{2} (s - \tilde{s}) - \frac{p-1}{2} (t - \tilde{t}) \right| \\
&\leq C \left( |s|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} + |t|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{t}|^{\frac{p-3}{2}} + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1} \right) \cdot (|s - \tilde{s}| + |t - \tilde{t}|)
\end{aligned}$$

für  $s, \tilde{s}, t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ . Wir setzen  $\kappa_p = \frac{p-3}{2} > 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned}
&\left| F_p^3(u_m, v_m)[\phi] - F_p^3(u, v)[\phi] - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1} \left( \frac{p-1}{2} (u_m - u) + \frac{p+1}{2} (v_m - v) \right) \phi \, dx \right| \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1-\kappa_p} (|u_m|^{\kappa_p} + |u|^{\kappa_p} + |v_m|^{\kappa_p} + |v|^{\kappa_p}) (|u_m - u| + |v_m - v|) |\phi| \, dx \\
&\quad + C \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) (|u_m|^{p-1} + |u|^{p-1} + |v_m|^{p-1} + |v|^{p-1}) (|u_m - u| + |v_m - v|) |\phi| \, dx \tag{6.8}
\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Hierzu ist der Beweis der Abschätzung (xiv) aus Proposition 5.4 mit Hilfe der angegebenen Einbettungen neu aufzuschreiben.

Die Kompaktheit der Einbettungen  $H_1 \rightarrow L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n), H_2 \rightarrow L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  liefert  $u_m \rightarrow u, v_m \rightarrow v$  in  $L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  und damit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x)(|u_m|^{p-1} + |u|^{p-1} + |v_m|^{p-1} + |v|^{p-1})(|u_m - u| + |v_m - v|)|\phi| dx = o(1)\|\phi\|_{H_1}.$$

Wir schätzen nun das erste Integral in (6.8) über  $B_\rho^c$  ab. Aus Proposition 5.4 (vi) und (ix) folgt  $\Gamma_3 u_0^{p+1} \in L^1(B_\rho^c)$ . Aus der Beschränktheit der Folge  $(u_m, v_m)$  in  $H$  und der Hölder-Ungleichung zu den Exponenten  $\frac{p+1}{p-1-\kappa_p}, \frac{p+1}{\kappa_p}, p+1, p+1$  erhalten wir daher die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_{B_\rho^c} \Gamma_3(x) u_0^{p-1-\kappa_p} (|u_m|^{\kappa_p} + |u|^{\kappa_p} + |v_m|^{\kappa_p} + |v|^{\kappa_p})(|u_m - u| + |v_m - v|)|\phi| dx \\ & \leq C \|u_0^{p-1-\kappa_p}\|_{L_{\Gamma_3}^{\frac{p+1}{p-1-\kappa_p}}(B_\rho^c)} \cdot \\ & \quad \left( \| |u_m|^{\kappa_p} \|_{L_{\Gamma_3}^{\frac{p+1}{\kappa_p}}(\mathbb{R}^n)} + \| |u|^{\kappa_p} \|_{L_{\Gamma_3}^{\frac{p+1}{\kappa_p}}(\mathbb{R}^n)} + \| |v_m|^{\kappa_p} \|_{L_{\Gamma_3}^{\frac{p+1}{\kappa_p}}(\mathbb{R}^n)} + \| |v|^{\kappa_p} \|_{L_{\Gamma_3}^{\frac{p+1}{\kappa_p}}(\mathbb{R}^n)} \right) \\ & \quad \left( \|u_m - u\|_{L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} + \|u_m - u\|_{L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \right) \|\phi\|_{L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq C \left( \|u_m - u\|_{L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} + \|u_m - u\|_{L_{\Gamma_3}^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \right) \|\phi\|_{H_1} \\ & = o(1)\|\phi\|_{H_1} \end{aligned}$$

Es folgt die Abschätzung des Integrals über  $B_\rho$ . Wegen  $(B_2)$  gilt  $\Gamma_3 \in L^\infty(B_\rho)$  und wir erhalten die folgende Abschätzung

$$\Gamma_3(x) u_0(x)^{p-1-\kappa_p} \leq C C_{n,p}^{p-1-\kappa_p} |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} \leq C |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} \quad (|x| \leq \rho),$$

vgl. Proposition 5.4 (vi). Wegen  $3 < p < 5$  gilt  $\frac{12(p-1)}{-p^2+10p-17} < 6$ . Wähle daher  $q_p$  im Intervall  $(\frac{12(p-1)}{-p^2+10p-17}, 6)$  so groß, dass die durch

$$s_4 = \frac{2n}{n-2} = 6, \quad s_3 = q_p, \quad s_2 = \frac{2n}{(n-2)\kappa_p} = \frac{6}{\kappa_p}, \quad s_1 = \left(1 - \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_3} - \frac{1}{s_4}\right)^{-1}.$$

definierten Zahlen größer als 1 sind. Aus der verallgemeinerten Hölder-Ungleichung zu diesen Exponenten erhalten wir mit der Beschränktheit von  $(u_m), (v_m)$  und Sobolevs Einbettungssatz

$$\begin{aligned} & \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} u_0^{p-1-\kappa_p} (|u_m|^{\kappa_p} + |u|^{\kappa_p} + |v_m|^{\kappa_p} + |v|^{\kappa_p})(|u_m - u| + |v_m - v|)|\phi| dx \\ & \leq C \sup_{\|\phi\|_{H=1}} \int_{B_\rho} |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} (|u_m|^{\kappa_p} + |u|^{\kappa_p} + |v_m|^{\kappa_p} + |v|^{\kappa_p})(|u_m - u| + |v_m - v|)|\phi| dx \\ & \leq C \| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} \left( \| |u_m|^{\kappa_p} + |u|^{\kappa_p} + |v_m|^{\kappa_p} + |v|^{\kappa_p} \|_{L^{s_2}(B_\rho)} \right) \\ & \quad \left( \|u_m - u\|_{L^{s_3}(B_\rho)} + \|v_m - v\|_{L^{s_3}(B_\rho)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} \left( \|u_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{\kappa_p} + \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{\kappa_p} + \|v_m\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{\kappa_p} + \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{\kappa_p} \right) \\
&\quad \left( \|u_m - u\|_{L^{s_3}(B_\rho)} + \|v_m - v\|_{L^{s_3}(B_\rho)} \right) \\
&\leq C \| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} \left( \|u_m - u\|_{L^{s_3}(B_\rho)} + \|v_m - v\|_{L^{s_3}(B_\rho)} \right) \\
&= C \| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} \left( \|u_m - u\|_{L^{q_p}(B_\rho)} + \|v_m - v\|_{L^{q_p}(B_\rho)} \right). \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Eine Rechnung liefert wegen  $n = 3$

$$\| |x|^{-\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1}} \|_{L^{s_1}(B_\rho)} < \infty \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{2(p-1-\kappa_p)}{p-1} \cdot s_1 + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad q_p > \frac{12(p-1)}{-p^2 + 10p - 17},$$

was per Definition von  $q_p$  erfüllt ist. Ferner gilt  $1 \leq q_p < 6 = \frac{2n}{n-2}$  und somit  $u_m \rightarrow u, v_m \rightarrow v$  in  $L^{q_p}(B_\rho)$ . Aus (6.9) folgt für  $m \rightarrow \infty$

$$\sup_{\|\phi\|_H=1} \int_{B_\rho} u_0^{p-1-\kappa_p} (|u_m|^{\kappa_p} + |u|^{\kappa_p} + |v_m|^{\kappa_p} + |v|^{\kappa_p}) (|u_m - u| + |v_m - v|) |\phi| dx \rightarrow 0. \tag{6.10}$$

Wir erhalten schließlich für  $m \rightarrow \infty$

$$\sup_{\|\phi\|_{H_1}=1} \left| F_p^3(u_m, v_m)[\phi] - F_p^3(u, v)[\phi] - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_3(x) u_0^{p-1} \left( \frac{p-1}{2}(u_m - u) + \frac{p+1}{2}(v_m - v) \right) \phi dx \right| \rightarrow 0$$

Die analoge Abschätzung für die zweite Komponente liefert

$$F_p(u_m, v_m) - F_p(u, v) - G_p(u_m - u, v_m - v) \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Wie im dritten Schritt des Beweises von Proposition 6.4 folgt  $(u_m, v_m) \rightarrow (u, v)$  in  $H$ .  $\square$

Wir erhalten ein zu Satz 6.7 analoges Existenzresultat.

**Satz 6.9.** *Sei  $n = 3$  und es gelte  $(B_1), (B_2), (B'_3), (B'_4), (B'_5)$ . Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  eine distributionelle Lösung  $(U, V)$  von*

$$\begin{aligned}
-\Delta u + V_1(x)u &= \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p-1}{2}}|u|^{\frac{p+1}{2}} \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \\
-\Delta v + V_2(x)v &= \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \Gamma_3(x)|u|^{\frac{p+1}{2}}|v|^{\frac{p-1}{2}}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

mit den Eigenschaften (i)-(v) aus Satz 6.3.

**Bemerkung 6.10.** Wir halten eine Übertragung des in Satz 6.3 erhaltenen Existenzresultats auf Schrödingersysteme der Form

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u + \sum_{i=1}^k \Gamma_{1i}(x)|u|^{p_i-1}|u|v^{q_i} \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \\
-\Delta v + V_2(x)v = \Gamma_2(x)|v|^{p-1}v + \sum_{i=1}^k \Gamma_{2i}(x)|u|^{r_i}|v|^{s_i-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \\
u(x), v(x) \rightarrow 0 \quad (|x| \rightarrow \infty), \\
p_i, q_i, r_i, s_i \geq 1, \quad p_i + q_i = r_i + s_i = p \quad (i = 1, \dots, k).
\end{array} \right.$$

für unproblematisch. Entsprechendes gilt für den variationellen Fall und die Sätze 6.6 und 6.9. Auch die Behandlung von Systemen mit mehr als zwei unbekannt Funktionen ist denkbar.

Wir schließen mit einer Auflistung der offenen Probleme:

- (i) Unsere Methode liefert die Existenz einer singulären distributionellen Lösung der jeweiligen nichtlinearen Schrödingergleichung für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  und ein hinreichend klein gewähltes  $\varepsilon > 0$ . Die Existenz singulärer Lösungen für  $p = \frac{n}{n-2}$  oder  $p > \frac{n}{n-2} + \varepsilon_0$  für ein fest vorgegebenes  $\varepsilon_0$  bleibt hingegen ungeklärt.
- (ii) Eine weitere Frage ist, ob die mit dem Banachschen Fixpunktsatz gewonnene Korrekturfunktion  $u \in H$  mit  $\|u\|_H \leq \sqrt{c_{n,p}}$  auch im allgemeinen Fall  $0 \notin \sigma(L)$  mit variationellen Methoden bestimmt werden kann. Im Fall  $\sigma(L) \subset (0, \infty)$  entspricht der kritische Punkt einem lokalen Minimierer des Euler-Funktional. Es stellt sich die Frage, welche variationelle Charakterisierung die mit Fixpunktmethoden gewonnene Lösung im Fall  $0 \notin \sigma(L)$  besitzt und ob in diesem Fall auch singuläre Lösungen für Raumdimensionen  $n \geq 4$  nachgewiesen werden können.
- (iii) Es bleibt unklar, ob die Bedingung  $n = 3$  für den Nachweis zweier distributioneller Lösungen des Systems (6.3) intrinsisch ist oder ob sie der Beweismethode geschuldet ist.
- (iv) Im Fall  $0 \notin \sigma(L)$  konnte die Existenz einer Korrekturfunktion  $u \in H$  auf "Linking-Niveau" nicht gezeigt werden. Würde eine beschränkte Palais-Smale-Folge  $(u_m)$  zu diesem Niveau existieren, so ergäbe sich aus der Argumentation aus Abschnitt 6.5 in Willems Buch [89] die Existenz einer singulären Lösung. Das Problem besteht darin, dass der Term  $I_p(u_m) - \frac{1}{2}I'_p(u_m)[u_m]$  nicht wie in Gleichung (6.8) auf Seite 105 in [89] abgeschätzt werden kann.

## 7. Appendix

### D. Beweis der Propositionen 5.1, 5.2 und 5.6

Wir beginnen mit dem Beweis von Proposition 5.1.

#### Beweis von Proposition 5.1

Wir zeigen zunächst, dass der symmetrische Operator  $-\Delta + V : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  wesentlich selbstadjungiert ist. Aus der Voraussetzung  $(A_1)$  folgt  $V_+ \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$  und  $V_- \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $p = 2$  im Fall  $n = 3$ , für ein  $p > 2$  im Fall  $n = 4$  und für  $p = \frac{n}{2}$  im Fall  $n \geq 5$ . Nach Satz X.29 in [69] ist dies hinreichend für die wesentliche Selbstadjungiertheit des symmetrischen Operators  $-\Delta + V : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Insbesondere liegt  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  dicht in  $(D(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_{D(L)})$ , wenn  $L$  die selbstadjungierte Abschließung des Operators  $-\Delta + V : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  bezeichnet. Wir setzen  $0 \notin \sigma(L)$  voraus. Bezeichnet  $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  eine zugehörige Spektralschar, dann gilt nach Satz 6 (a) in [30]

$$D(L) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 d\langle E_\lambda u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

$$D(|L|^{1/2}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\langle E_\lambda u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

Insbesondere  $H = D(|L|^{1/2}) \subset D(|L|)$  mit

$$\|u\|_{D(|L|^{1/2})}^2 = \int_{\mathbb{R}} 1 + |\lambda| d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2 \int_{\mathbb{R}} 1 + |\lambda|^2 d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 2\|u\|_{D(L)}^2.$$

Da  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  in  $(D(L), \langle \cdot, \cdot \rangle_{D(L)})$  dicht liegt, liegt  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  auch dicht in  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ . Daher genügt es für den Beweis von (i) die Ungleichungen

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_H, \quad \|u\|_H \leq C\|u\|_{H_V^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \|u\|_{H_V^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_H$$

für alle  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  zu beweisen.

Sei  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Nach Voraussetzung  $(A_1)$  existiert ein Exponent  $\mu > 1$  mit  $V_- \in L^{\frac{\mu n}{2}}(B_1)$ . Sei  $\delta > 0$  mit  $\delta \cdot C_S^2 \| |V_-|^\mu \|_{L^{\frac{n}{2}}(B_1)} \leq \frac{1}{2}$ , wobei  $C_S$  die Sobolev-Konstante bezeichne. Nach Voraussetzung  $(A_1)$  existiert ein  $C_\delta > 0$  mit

$$|V_-| \leq \delta |V_-|^\mu + C_\delta \quad \text{auf } B_1, \quad |V_-| \leq C_\delta \quad \text{auf } B_1^c.$$

Wählen wir  $m \geq C_\delta + 1$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|u\|_H^2 &= \langle |L|^{1/2}u, |L|^{1/2}u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \langle |L|u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\geq m^{-1} (\langle |L|u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + m \langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \\
&\geq m^{-1} (\langle Lu, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + m \langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \\
&= m^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + (V(x) + m)u^2 dx \\
&\geq m^{-1} \int_{B_1^c} |\nabla u|^2 + (V(x)_+ + m - C_\delta)u^2 dx \\
&\quad + m^{-1} \int_{B_1} |\nabla u|^2 + (V(x)_+ + m - C_\delta)u^2 - \delta |V_-|^\mu u^2 dx \\
&\geq m^{-1} \int_{B_1^c} |\nabla u|^2 + (V(x)_+ + 1)u^2 dx \\
&\quad + m^{-1} \left( \int_{B_1} |\nabla u|^2 + (V(x)_+ + 1)u^2 dx - \delta \| |V_-|^\mu \|_{L^{\frac{n}{2}}(B_1)} \cdot \|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2 \right) \\
&\geq m^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + (V(x)_+ + 1)u^2 dx - \delta C_S^2 \| |V_-|^\mu \|_{L^{\frac{n}{2}}(B_1)} \cdot \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \\
&\geq m^{-1} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + (V(x)_+ + 1)u^2 dx - \frac{1}{2} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \\
&\geq \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + (V(x)_+ + 1)u^2 dx \\
&= \frac{1}{2m} \|u\|_{H_V^1(\mathbb{R}^n)}^2
\end{aligned} \tag{7.1}$$

Darüberhinaus liefert diese Ungleichungskette

$$\frac{1}{m} (\langle Lu, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + m \langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \geq \frac{1}{2m} \|u\|_{H_V^1(\mathbb{R}^n)}^2 \geq \frac{1}{2m} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

und damit

$$\langle Lu, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \left( \frac{1}{2} - m \right) \langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

Es folgt  $\sigma(L) \subset [-m, \infty)$ . Somit folgt

$$\begin{aligned}
\|u\|_H^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda| d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\sigma(L)} |\lambda| d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\sigma(L)} \lambda d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} - 2 \int_{\sigma(L) \cap (-m, 0)} \lambda d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \langle Lu, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2m \int_{\sigma(L) \cap (-m, 0)} 1 d\langle E_\lambda u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx + 2m \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \\
&\leq (2m + 1) \cdot \|u\|_{H_V^1(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Ferner gilt

$$\|u\|_{H_{\hat{V}}^1(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + (V_+(x) + 1)u^2 dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 + u^2 dx = \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2. \quad (7.3)$$

Aus den Ungleichungen (7.1),(7.3),(7.2) folgt (i).

Für den Beweis von (ii) sei  $P^- := E_0, P^+ := 1 - E_0$ . Mit den Rechenregeln für Spektralscharen folgt für  $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \langle (P^+ - P^-)u, v \rangle_H &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\langle E_\lambda(P^+ - P^-)u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\langle E_\lambda(1 - 2E_0)u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda| d\langle (E_\lambda - 2E_{\min\{\lambda, 0\}})u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{(-\infty, 0]} -\lambda d\langle -E_\lambda u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{(0, \infty)} \lambda d\langle (E_\lambda - 2E_0)u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_\lambda u, v \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u + V(x)u)v dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla v + V(x)uv dx. \end{aligned}$$

Aus der Dichtheit von  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  in  $H$  folgt (ii). □

Wir kommen zum Beweis der Einbettungen  $H \rightarrow L_{\hat{\Gamma}}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  für  $p \approx \frac{n}{n-2}$  aus Proposition 5.2. Dabei verwenden wir das folgende Resultat von Bonheure und van Schaftingen.

**Satz D.1** ([13], Satz 4). *Seien  $\hat{\Gamma} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  und  $\hat{V} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{> 0}$  messbar, sei*

$$W(x) := \hat{\Gamma}(x)\hat{V}(x)^{\frac{-2n+q(n-2)}{4}}.$$

- (i) *Falls  $W \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}$ , dann ist die Einbettung  $H_{\hat{V}}^1 \rightarrow L_{\hat{\Gamma}}^q(\mathbb{R}^n)$  stetig.*
- (ii) *Ist zusätzlich  $\hat{\Gamma} \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $2 < q < \frac{2n}{n-2}$  und ist  $\text{vol}(\{x \in \mathbb{R}^n : W(x) > \varepsilon\})$  für alle  $\varepsilon > 0$  endlich, dann ist die Einbettung  $H_{\hat{V}}^1 \rightarrow L_{\hat{\Gamma}}^q(\mathbb{R}^n)$  kompakt.*

Wir wenden dieses Resultat auf  $\hat{\Gamma} = \Gamma$  und  $\hat{V} = \tilde{V} = V_+ + 1$  an.

Beweis von Proposition 5.2

Sei  $W(x) := \Gamma(x)\tilde{V}(x)^{\frac{-2n+(p+1)(n-2)}{4}}$  für  $p \geq \frac{n}{n-2}$ . Nach Proposition 5.1 (i) genügt es die Existenz einer stetigen bzw. kompakten Einbettung  $H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  zu zeigen. Wegen Voraussetzung  $(A_3)$  existiert ein  $\delta < \frac{1}{2}$  mit  $|\Gamma(x)| \leq \tilde{V}(x)^\delta$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wähle  $0 < \varepsilon < \frac{2-4\delta}{n-2}$ , so dass für alle  $p \in [\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon]$  die Ungleichung

$$4\delta - 2n + (p+1)(n-2) \leq 0 \quad (7.4)$$

gilt. Aus  $\tilde{V} \geq 1$  und  $|\Gamma(x)| \leq \tilde{V}(x)^\delta$  folgt wegen (7.4)

$$|W(x)| = |\Gamma(x)|\tilde{V}(x)^{\frac{-2n+(p+1)(n-2)}{4}} \leq C\tilde{V}(x)^{\frac{4\delta-2n+(p+1)(n-2)}{4}} \leq C \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Nach Satz D.1 (i) ist die Einbettung  $H_{\tilde{V}}^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $p \in [\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon]$  stetig. Es folgt (i). Gilt zusätzlich die Voraussetzung  $(A'_3)$ , so erhalten wir die Kompaktheit dieser Einbettung für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  aus  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(x) = 0$  und Satz D.1 (ii).  $\square$

**Bemerkung D.2.** Eine alternative Referenz für kompakte Einbettungen zwischen gewichteten Sobolevräumen ist [18]. In Satz 2 beweist Chiappinelli, dass die Bedingung

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{B_1(x)} W(y) dy = 0$$

an die im obigen Beweis definierte Funktion  $W$  ebenfalls hinreichend für die Existenz und Kompaktheit Einbettung  $H_{\tilde{V}}^1 \rightarrow L_{\Gamma}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  und  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  ist.

Beweis von Proposition 5.6

Seien  $n \geq 3$  und  $\kappa \in [0, 1]$ . Ferner seien  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$  und  $p_1, p_2 \geq 1$  mit  $p_1 + p_2 = p$ . Wir nutzen die Ungleichung

$$(1+x)^q \leq C_q(1+x^q) \quad (x \geq 0) \quad \text{für } C_q = \max\{2^{q-1}, 1\}.$$

- (i) Die Abschätzung folgt aus (iii) für  $s = 0$ .
- (ii) Für  $f_2(t) := |1+t|^{p+1} - 1 - (p+1)t$  gilt nach dem Satz von Taylor für ein  $\xi$  zwischen 0 und  $t$

$$\begin{aligned} |f_2(t)| &= |f_2(t) - f_2(0) - f_2'(0)t| \\ &= \frac{1}{2}|f_2''(\xi)|t^2 \\ &\leq (p+1)p(1+|t|)^{p-1}|t|^2 \\ &\leq (p+1)p2C_{p-1}(t^2 + |t|^{p+1}). \end{aligned}$$

(iii) Sei  $f_3(t) := |1 + t|^{p-1}(1 + t)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |f_3(t) - f_3(s)| &\leq \int_0^1 |f_3'(s + r(t-s))| dr \cdot |t-s| \\ &\leq p(1 + |s| + |t|)^{p-1}|t-s| \\ &\leq pC_{p-1}(1 + (|s| + |t|)^{p-1})|t-s| \\ &\leq pC_{p-1}^2(1 + |s|^{p-1} + |t|^{p-1})|t-s| \end{aligned}$$

und es folgt (iii) aus  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$ .

(iv) Sei  $f_4(t) := |1 + t|^{p-1}(1 + t) - 1 - pt$ , sei  $A_p := p(p-1)2^{p-2}$  und  $B_p := p(3^{p-1} + 2^{p-1})$ . Wir erhalten  $|f_4''(t)| \leq A_p$  für  $|t| \leq \frac{1}{2}$  und damit

$$|f_4'(t)| \leq A_p|t| \leq A_p|t|^\beta \quad (|t| \leq \frac{1}{2}).$$

Für  $|t| \geq \frac{1}{2}$  erhalten wir hingegen die Ungleichung

$$|f_4'(t)| \leq p(1 + |t|)^{p-1} + p \leq p \cdot (3|t|)^{p-1} + p \cdot (2|t|)^{p-1} = B_p|t|^{p-1} \quad (|t| \geq \frac{1}{2}).$$

Insgesamt erhalten wir für  $D_p := A_p + B_p$

$$|f_4'(t)| \leq D_p(|t|^\kappa + |t|^{p-1}) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |f_4(t) - f_4(s)| &\leq \int_0^1 |f_4'(s + r(t-s))| dr \cdot |t-s| \\ &\leq D_p \int_0^1 (|s + r(t-s)|^\kappa + |s + r(t-s)|^{p-1}) dr \cdot |t-s| \\ &\leq D_p((|s| + |t|)^\kappa + (|s| + |t|)^{p-1})|t-s| \\ &\leq D_p(|s|^\kappa + |t|^\kappa + C_{p-1}(|s|^{p-1} + |t|^{p-1}))|t-s| \\ &\leq D_p C_{p-1}(|s|^\kappa + |t|^\kappa + |s|^{p-1} + |t|^{p-1})|t-s|. \end{aligned}$$

(v) Sei  $\alpha = \frac{2n-3}{n-2}$  und

$$f_5(t) := \frac{\alpha}{p+1}|t+1|^{p+1} - t(t+1)|t+1|^{p-1} - (\alpha-1)t - \frac{\alpha}{p+1}$$

Seien  $A, B > 0$  positive von  $p$  unabhängige Zahlen mit

$$A \geq \max \{f_5(s) : |s| \geq \frac{1}{2}\}, \quad B \geq \max \{f_5''(s) : |s| \leq \frac{1}{2}\}$$

Damit folgt (v) aus

$$f_5(t) \leq A1_{\{|t| \geq \frac{1}{2}\}} + \frac{1}{2}Bt^21_{\{|t| \leq \frac{1}{2}\}} \leq 4(A+B)t^2.$$

- (vi) Folgt aus (viii) für  $\tilde{s} = \tilde{t} = 0$ .
- (vii) Sei  $f_7(s, t) := |1 + s|^{\frac{p+1}{2}} |1 + t|^{\frac{p+1}{2}} - 1 - \frac{p+1}{2}(s + t)$  und sei  $h(t) = |1 + t|^{\frac{p+1}{2}} - 1 - \frac{p+1}{2}t$ .  
Nach dem Satz von Taylor folgt wie in (ii)

$$|h(t)| \leq C(t^2 1_{\{|t| \leq \frac{1}{2}\}} + |t|^{\frac{p+1}{2}} 1_{\{|t| \geq \frac{1}{2}\}})$$

und damit

$$\begin{aligned} |f_7(s, t)| &= \left| \left( h(s) + 1 + \frac{p+1}{2}s \right) \left( h(t) + 1 + \frac{p+1}{2}t \right) - 1 - \frac{p+1}{2}(s + t) \right| \\ &= \left| h(s)h(t) + h(s) + h(t) + \frac{p+1}{2}(th(s) + sh(t)) + \left( \frac{p+1}{2} \right)^2 st \right| \\ &\leq C(s^2 + t^2 + |s|^{p+1} + |t|^{p+1}). \end{aligned}$$

Es folgt (vii).

- (viii) Für  $f_8(s, t) := |1 + s|^{p_1-1} |1 + s| |1 + t|^{p_2} - 1$  gilt wegen  $p_1, p_2 \geq 1$  und  $p_1 + p_2 = p$  für fast fast alle  $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\nabla f_8(s, t)| &\leq C \left( (1 + |s|^{p_1-1})(1 + |t|^{p_2}) + (1 + |s|^{p_1})(1 + |t|^{p_2-1}) \right) \\ &\leq C(1 + |s|^{p-1} + |t|^{p-1}) \end{aligned}$$

Es folgt (viii) aus

$$\begin{aligned} |f_8(s, t) - f_8(\tilde{s}, \tilde{t})| &\leq \int_0^1 |\nabla f_8(\tilde{s} + r(s - \tilde{s}), t + r(\tilde{t} - t))| dr \cdot |(s - \tilde{s}, t - \tilde{t})| \\ &\leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1})(|s - \tilde{s}| + |t - \tilde{t}|) \end{aligned}$$

- (ix) Sei  $h_1(t) := |1 + t|^{\frac{p+1}{2}}$  und  $h_2(s) := |1 + s|^{\frac{p-3}{2}} (1 + s)$ . Es gelten die Ungleichungen<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} |h_1(t) - h_1(\tilde{t})| &\leq C(1 + |t|^{\frac{p-1}{2}} + |\tilde{t}|^{\frac{p-1}{2}})|t - \tilde{t}|, \\ |h_2(s) - h_2(\tilde{s})| &\leq C \begin{cases} (1 + |s|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}})|s - \tilde{s}| & (p \geq 3), \\ |s - \tilde{s}|^{\frac{p-1}{2}} & (p < 3). \end{cases} \end{aligned}$$

Sei nun

$$f_9(s, t) := |1 + s|^{\frac{p-3}{2}} (1 + s) |1 + t|^{\frac{p+1}{2}}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |f_9(s, t) - f_9(\tilde{s}, \tilde{t})| &= \left| h_2(s)h_1(t) - h_2(\tilde{s})h_1(\tilde{t}) \right| \\ &\leq |h_1(t) - h_1(\tilde{t})| |h_2(s)| + |h_1(\tilde{t})| |h_2(s) - h_2(\tilde{s})| \\ &\leq C(1 + |t|^{\frac{p-1}{2}} + |\tilde{t}|^{\frac{p-1}{2}})(1 + |s|^{\frac{p-1}{2}})|t - \tilde{t}| \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Die Ungleichung für  $p < 3$  ist äquivalent zur Aussage, dass die Funktion  $x \mapsto x^\alpha$  für  $0 < \alpha < 1$  global  $\alpha$ -Hölderstetig ist.

$$\begin{aligned}
& + C(1 + |\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}}) |h_2(s) - h_2(\tilde{s})| \\
& \leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1}) |t - \tilde{t}| \\
& + C(1 + |\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}}) |h_2(s) - h_2(\tilde{s})|
\end{aligned}$$

Im Fall  $p \geq 3$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
|f_9(s, t) - f_9(\tilde{s}, \tilde{t})| & \leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1}) |t - \tilde{t}| \\
& + C(1 + |\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}}) (1 + |s|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}}) |s - \tilde{s}| \\
& \leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1}) (|t - \tilde{t}| + |s - \tilde{s}|)
\end{aligned}$$

Im Fall  $p < 3$  gilt

$$\begin{aligned}
|f_9(s, t) - f_9(\tilde{s}, \tilde{t})| & \leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1}) |t - \tilde{t}| \\
& + C(1 + |\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}}) \cdot |s - \tilde{s}|^{\frac{p-1}{2}} \\
& \leq C(1 + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1}) |t - \tilde{t}| \\
& + C(1 + |s|^{\frac{p+1}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p+1}{2}} + |t|^{\frac{p+1}{2}} + |\tilde{t}|^{\frac{p+1}{2}}) \cdot |s - \tilde{s}|^{\frac{p-1}{2}}
\end{aligned}$$

(x) Es gelte  $p \geq 3$ . Wegen  $p < \frac{n+2}{n-2}$  und  $n \geq 3$  gilt  $p \leq 5$ . Sei

$$h_1(s) := |1 + s|^{\frac{p-3}{2}} (1 + s), \quad h_2(t) := |1 + t|^{\frac{p+1}{2}}$$

und

$$\begin{aligned}
f_{10}(s, t) & := |1 + s|^{\frac{p-3}{2}} (1 + s) |1 + t|^{\frac{p+1}{2}} - \frac{p-1}{2} s - \frac{p+1}{2} t \\
& = h_1(s) h_2(t) - h_1'(0) h_2(0) s - h_1(0) h_2'(0) t.
\end{aligned}$$

Es ist die Differenz  $|f_{10}(s, t) - f_{10}(\tilde{s}, \tilde{t})|$  für  $s, \tilde{s}, t, \tilde{t} \in \mathbb{R}$  abzuschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
& |f_{10}(s, t) - f_{10}(\tilde{s}, \tilde{t})| \\
& = \left| h_1(s) h_2(t) - h_1(\tilde{s}) h_2(\tilde{t}) - h_1'(0) h_2(0) (s - \tilde{s}) - h_1(0) h_2'(0) (t - \tilde{t}) \right| \\
& \leq \left| (h_1(s) - h_1(\tilde{s})) h_2(t) - h_1'(0) h_2(0) (s - \tilde{s}) \right| \\
& + \left| h_1(\tilde{s}) (h_2(t) - h_2(\tilde{t})) - h_1(0) h_2'(0) (t - \tilde{t}) \right|
\end{aligned}$$

Wir schätzen die beiden Summanden separat ab. Zum einen gilt

$$\begin{aligned}
& \left| (h_1(s) - h_1(\tilde{s})) h_2(t) - h_1'(0) h_2(0) (s - \tilde{s}) \right| \\
& = \left| \int_0^1 h_1'(\tilde{s} + r(s - \tilde{s})) h_2(t) dr - h_1'(0) h_2(0) \right| \cdot |s - \tilde{s}| \\
& \leq \left( \int_0^1 |h_1'(\tilde{s} + r(s - \tilde{s})) - h_1'(0)| dr \cdot |h_2(t)| + |h_1'(0)| |h_2(t) - h_2(0)| \right) \cdot |s - \tilde{s}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{p \geq 3}{\leq} C \left( |h_2(t)| \left( (1 + |s| + |\tilde{s}|)^{\frac{p-3}{2}} - 1 \right) + |t| + |t|^{\frac{p+1}{2}} \right) |s - \tilde{s}| \\
&\stackrel{3 \leq p \leq 5}{\leq} C \left( (1 + |t|^{\frac{p+1}{2}}) (|s| + |\tilde{s}|)^{\frac{p-3}{2}} + |t| + |t|^{\frac{p+1}{2}} \right) |s - \tilde{s}| \\
&\leq C \left( |s|^{\frac{p-3}{2}} + |s|^{\frac{p-3}{2}} |t|^{\frac{p+1}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} |t|^{\frac{p+1}{2}} + |t| + |t|^{\frac{p+1}{2}} \right) |s - \tilde{s}| \\
&\stackrel{3 \leq p \leq 5}{\leq} C \left( |s|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} + |t|^{\frac{p-3}{2}} + |s|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} + |t|^{p-1} \right) |s - \tilde{s}|
\end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| h_1(\tilde{s})(h_2(t) - h_2(\tilde{t})) - h_1(0)h_2'(0)(t - \tilde{t}) \right| \\
&= \left| \int_0^1 h_2'(\tilde{t} + r(t - \tilde{t})) h_1(\tilde{s}) dr - h_1(0)h_2'(0) \right| \cdot |t - \tilde{t}| \\
&\leq \left( \int_0^1 |h_2'(\tilde{t} + r(t - \tilde{t})) - h_2'(0)| dr \cdot |h_1(\tilde{s})| + |h_2'(0)| |h_1(\tilde{s}) - h_1(0)| \right) \cdot |t - \tilde{t}| \\
&\leq C \left( |h_1(\tilde{s})| \left( (1 + |t| + |\tilde{t}|)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right) + |\tilde{s}| + |\tilde{s}|^{\frac{p-1}{2}} \right) |t - \tilde{t}| \\
&\leq C \left( (1 + |\tilde{s}|^{\frac{p-1}{2}}) \cdot (|t| + |\tilde{t}| + |t|^{\frac{p-1}{2}} + |\tilde{t}|^{\frac{p-1}{2}}) + |\tilde{s}| + |\tilde{s}|^{\frac{p+1}{2}} \right) |t - \tilde{t}| \\
&\stackrel{p \geq 3}{\leq} C \left( |t| + |\tilde{t}| + |\tilde{s}| + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} \right) |t - \tilde{t}| \\
&\stackrel{3 \leq p \leq 5}{\leq} C \left( |t|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{t}|^{\frac{p-3}{2}} + |\tilde{s}|^{\frac{p-3}{2}} + |t|^{p-1} + |\tilde{t}|^{p-1} + |\tilde{s}|^{p-1} \right) |t - \tilde{t}|
\end{aligned}$$

□

## E. Beweis von Proposition 5.4

Wir verwenden das folgende Lemma.

**Lemma E.1.** *Sei  $\rho > 0$  und  $0 < c_0 < 1$ . Dann existiert für alle  $p > 1$  eine positive Lösung  $z \in C^\infty([\rho, \infty))$  mit*

$$-z'' - \frac{n-1}{r} z' + z = z^p \quad \text{in } (\rho, \infty), \quad z(\rho) = c_0,$$

sowie

$$0 < \underline{z}(r) \leq z(r) \leq \bar{z}(r) \quad \text{für alle } r \geq \rho$$

für

$$\underline{z}(r) = \kappa r^{\frac{2-n}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(r), \quad \bar{z}(r) = c_0 e^{-\sqrt{1-c_0^{p-1}}(r-\rho)}.$$

Hierbei bezeichnet  $K_{\frac{n-2}{2}}$  die modifizierte Besselfunktion zweiter Art und  $\kappa > 0$  ist so gewählt, dass  $\underline{z}(\rho) = c_0$  gilt.

**Beweis:**

Sei zunächst  $R > \rho$  beliebig. Mit der Methode der Unter- und Oberlösungen (vgl. [80], §26) finden wir eine Lösung  $z_R$  des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -z_R'' - \frac{n-1}{r}z_R' + z_R &= z_R^p \quad \text{in } (\rho, R), \\ z_R(\rho) &= c_0, \quad z_R(R) = \underline{z}(R). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Hierbei ist die konstante Funktion  $c_0$  wegen  $c_0 \geq c_0^p$  und  $c_0 \geq \underline{z}(R)$  als Oberlösung und  $\underline{z}$  wegen  $\underline{z}(\rho) = c_0$  und

$$-\underline{z}''(r) - \frac{n-1}{r}\underline{z}'(r) + \underline{z}(r) = 0 \quad \text{in } (\rho, R)$$

als Unterlösung für (7.1) wählbar. Zusätzlich erhalten wir

$$0 < \underline{z}(r) \leq z_R(r) \leq c_0 < 1 \quad \text{für } r \in (\rho, R). \quad (7.2)$$

Wir zeigen, dass  $z_R$  monoton fallend ist. Die Funktion  $z_R$  besitzt keine lokalen Maxima in  $(\rho, R)$ , denn im Falle  $z_R'(r^*) = 0$  gilt  $z_R(r^*) < 1$  aufgrund von (7.2) und damit  $z_R''(r^*) = z_R(r^*)(1 - z_R(r^*)^{p-1}) > 0$  wegen (7.1). Wäre  $z_R$  nicht monoton fallend, so gäbe es  $r_1, r_2 \in [\rho, R]$  mit  $r_1 < r_2$  und  $z_R(r_1) < z_R(r_2)$ . Da  $z_R$  kein inneres Maximum besitzt, würde  $z_R(r_2) \leq z_R(R)$  folgen und damit  $z_R(r_1) < z_R(r_2) \leq z_R(R) = \underline{z}(R) < \underline{z}(r_1)$  im Widerspruch zu (7.2), d.h.  $z_R$  ist monoton fallend. Insbesondere gilt  $z_R' \leq 0$  und aus (7.1) folgt wegen  $z_R < 1$  die Ungleichung  $z_R'' > 0$  auf  $(\rho, R)$  und damit

$$0 \geq z_R'(r) \geq z_R'(\rho) \geq \underline{z}'(\rho) \quad \text{für alle } r \in [\rho, R]. \quad (7.3)$$

Aus (7.1)-(7.3) folgt, dass für alle  $R_0 > \rho$  die Familien  $(z_R)_{R>R_0}$ ,  $(z_R'')_{R>R_0}$  gleichgradig beschränkt sind. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli existiert eine Teilfolge  $(z_{R_j})$  mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} R_j = \infty$  und  $z_{R_j} \rightarrow z \in C_{loc}^1([\rho, \infty))$ , insbesondere folgt aus (7.2)  $0 < \underline{z} \leq z \leq c_0 < 1$ . Unter Verwendung von

$$z_R(r) = c_0 + \frac{\rho}{2-n} \left( \left( \frac{\rho}{r} \right)^{n-2} - 1 \right) z_R'(\rho) + \int_{\rho}^r \int_{\rho}^s \left( \frac{t}{s} \right)^{n-1} [z_R(t) - z_R(t)^p] dt ds$$

erhalten wir, dass  $z$  in  $C^\infty([\rho, \infty))$  liegt und das Anfangswertproblem

$$-z'' - \frac{n-1}{r}z' + z = z^p \quad \text{in } (\rho, \infty), \quad z(\rho) = c_0 \quad (7.4)$$

löst. Es bleibt  $z \leq \bar{z}$  zu zeigen.

Wir beweisen zunächst  $z(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ . Aus der punktweisen Konvergenz  $z_R(r) \rightarrow z(r)$  für alle  $r \geq \rho$  und der Monotonie der Funktionen  $z_R$  folgt, dass  $z(r)$  für  $r \rightarrow \infty$  monoton gegen einen Wert  $z_\infty \in [0, c_0) \subset [0, 1)$  fällt. Testen wir die Differentialgleichung (7.4) mit Funktionen  $\phi_k(r) := \phi(r-k)$  für  $k > 0$  und  $\phi \in C_0^\infty(\rho, \infty)$ , so folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\rho}^{\infty} z(r) \left( -\phi_k''(r) - \frac{n-1}{r}\phi_k'(r) + \phi_k(r) - z(r)^{p-1}\phi_k(r) \right) dr$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\rho}^{\infty} z(r+k) \left( -\phi''(r) - \frac{n-1}{r+k} \phi'(r) + \phi(r) - z(r+k)^{p-1} \phi(r) \right) dr \\
&= \int_{\rho}^{\infty} z_{\infty} \left( -\phi''(r) + \phi(r) - z_{\infty}^{p-1} \phi(r) \right) dr \\
&= z_{\infty} (1 - z_{\infty}^{p-1}) \int_{\rho}^{\infty} \phi(r) dr.
\end{aligned}$$

Da dies für alle Testfunktionen  $\phi$  gilt, erhalten wir  $z_{\infty} = 0$ . Aus  $\bar{z}''(r) = (1 - c_0^{p-1})\bar{z}(r)$ ,  $0 < z \leq c_0$  und  $z' \leq 0$  folgt

$$\begin{aligned}
(z - \bar{z})''(r) &= -\frac{n-1}{r} z'(r) + z(r)(1 - z(r)^{p-1}) - (1 - c_0^{p-1})\bar{z}(r) \\
&\geq (1 - c_0^{p-1})(z - \bar{z})(r) \quad \text{für alle } r \geq \rho.
\end{aligned}$$

Daher hat  $z - \bar{z}$  keine inneren positiven lokalen Maxima und es folgt

$$(z - \bar{z})(r) \leq \max\{0, (z - \bar{z})(\rho), (z - \bar{z})(\infty)\} = 0 \quad \text{für alle } r \geq \rho,$$

was zu zeigen war. □

#### Beweis von Proposition 5.4:

Per Voraussetzung gelten die Bedingungen  $(A_1), (A_2), (A_3)$ . Insbesondere existiert ein  $\gamma > 0$ , so dass für alle  $\rho > 0$  die Abschätzung

$$|V(x)| + |\Gamma(x)| \leq C_{\rho} e^{\gamma|x|} \quad (|x| \geq \rho) \quad (7.5)$$

gilt. Wir nutzen diese Ungleichung im weiteren Verlauf nur für die in Gleichung (7.7) definierte Zahl  $\rho > 0$ .

#### *1. Schritt: Definition von $\omega, \rho$ und $u_0$*

Für  $\gamma$  wie in (7.5) wählen wir  $\omega$  gemäß

$$\omega > n(\gamma + 1). \quad (7.6)$$

Definiere dann  $\rho > 0$  durch

$$\rho := \max \left\{ c_{n,q}^{\frac{q-1}{2}} : \frac{n}{n-2} \leq q \leq \frac{n+2}{n-2} \right\} \cdot \left( 1 - \frac{n^2(\gamma+1)^2}{\omega^2} \right)^{-1/2}, \quad (7.7)$$

wobei die Zahl  $c_{n,q}$  durch (5.6) definiert ist. Zur Definition einer Näherungslösung der Gleichung (5.1) sei nun  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n+2}{n-2})$  fest. Wir setzen  $c_0(p) := c_{n,p} \rho^{-\frac{2}{p-1}}$ . Wegen (7.7) gilt  $0 < c_0(p) < 1$  sowie per Definition von  $\rho$

$$\tilde{\omega} \geq n(\gamma + 1) \quad \text{für} \quad \tilde{\omega} := \omega \sqrt{1 - c_0(p)^{p-1}}. \quad (7.8)$$

Sei nun  $z$  die durch Lemma E.1 gegebene Funktion und

$$u_0(x) := \omega^{\frac{2}{p-1}} \tilde{u}_0(\omega x) \quad \text{für} \quad \tilde{u}_0(x) := \begin{cases} c_{n,p} |x|^{-\frac{2}{p-1}} & , |x| < \rho \\ z(|x|) & , |x| \geq \rho \end{cases}. \quad (7.9)$$

*2. Schritt: Nachweis der Eigenschaften (i)-(vi)*

Die Funktion  $u_0$  ist per Konstruktion radialsymmetrisch und positiv aufgrund der Positivität von  $z$ . Eine kurze Rechnung zeigt, dass es sich um eine distributionelle Lösung der Gleichung  $-\Delta u_0 = u_0^p$  auf  $B_\rho$  handelt. Die hierfür nötigen Argumente sind Gleichung (7.2) in zu entnehmen. Ferner erfüllt die Funktion  $\tilde{u}_0$  die Differentialgleichungen aus (ii) und (iii) für  $\omega = 1$ , so dass  $u_0$  die Differentialgleichungen aus (ii) und (iii) für das in (7.6) gewählte  $\omega$  erfüllt. Die Aussage (iv) folgt unmittelbar aus der Definition von  $u_0$ . Für die Funktion  $z$  aus Lemma E.1 gilt wegen  $\underline{z}(\rho) = z(\rho) = \bar{z}(\rho)$  und  $\underline{z} < z < \bar{z}$  auf  $(\rho, \infty)$  die Ungleichung

$$|z'(\rho)| \leq \max\{|\underline{z}'(\rho)|, |\bar{z}'(\rho)|\} \leq C c_0(\rho) \leq C c_{n,p}.$$

Es folgt

$$|\partial_\nu^+ \tilde{u}_0(x) - \partial_\nu^- \tilde{u}_0(x)| \leq |\partial_\nu^+ \tilde{u}_0(x)| + |\partial_\nu^- \tilde{u}_0(x)| \leq C c_{n,p} \rho^{-\frac{p+1}{p-1}} + |z'(\rho)| \leq C c_{n,p}.$$

Aus  $u_0(x) = \omega^{\frac{2}{p-1}} \tilde{u}_0(\omega x)$  folgt die entsprechende Abschätzung für  $u_0$  und wir erhalten (v). Für die Abschätzung (vi) verwenden wir erneut die Einschließung für  $z$  aus Lemma E.1. Für  $|x| \geq \rho$  erhalten wir aus (7.8) die Abschätzung

$$u_0(x) \leq C z(\omega|x|) \leq C c_{n,p} e^{-\sqrt{1-c_0(p)} \omega|x|} \leq C c_{n,p} e^{-\tilde{\omega}|x|} \quad (|x| \geq \rho), \quad (7.10)$$

insbesondere gilt wegen  $\tilde{\omega} \geq 1$

$$u_0(x) \leq C c_{n,p} e^{-|x|} \quad (|x| \geq \rho). \quad (7.11)$$

*3. Schritt: Nachweis der Abschätzungen (vii)-(xi)*

Sei zunächst  $0 < |x| \leq \rho$ . Für  $p > \frac{n}{n-2}$  folgt aus  $(A_2)$

$$|\Gamma(x) - 1| u_0(x)^p \leq C |x|^\beta \cdot c_{n,p}^p |x|^{-\frac{2p}{p-1}} \leq C c_{n,p}^p |x|^{\beta-n}$$

und wir erhalten (vii). Ebenso folgt (viii) aus

$$|V(x)| u_0(x) \leq C |x|^\alpha \cdot c_{n,p} |x|^{-\frac{2}{p-1}} \leq C c_{n,p} |x|^{\alpha-n+2}.$$

Sei nun  $|x| \geq \rho$ . Wegen  $p > \frac{n}{n-2}$  gilt  $p-1 > \frac{2}{n-2}$ . Aus  $\gamma - \frac{2}{n-2} \tilde{\omega} \leq -1$  sowie (7.5) und (7.10) folgt

$$|\Gamma(x)| u_0(x)^{p-1} \leq C c_{n,p}^{p-1} e^{\gamma|x|} e^{-(p-1)\tilde{\omega}|x|} \leq C c_{n,p}^{p-1} e^{(\gamma - \frac{2}{n-2} \tilde{\omega})|x|} \leq C c_{n,p}^{p-1} e^{-|x|}$$

und wir erhalten (x). Mit (x) und (7.11) folgt (ix) aus

$$|\Gamma(x)|u_0(x)^p \leq u_0(x) \cdot C c_{n,p}^{p-1} e^{-|x|} \leq C c_{n,p} e^{-|x|} \cdot c_{n,p}^{p-1} e^{-|x|} \leq C c_{n,p}^p e^{-|x|}.$$

Die Abschätzung (xi) folgt aus (7.5), (7.10) und  $-\tilde{\omega} + \gamma \leq -1$ , denn

$$|V(x)|u_0(x) \leq C e^{\gamma|x|} \cdot c_{n,p} e^{-\tilde{\omega}|x|} \leq C c_{n,p} e^{-|x|}.$$

*4. Schritt: Nachweis der Abschätzungen (xii)-(xiv)*

Wir verwenden die Stetigkeit der Einbettungen  $H \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$  nach Proposition 5.2. Aus (7.11) sowie den Abschätzungen (vii) und (ix) aus Proposition 5.4 folgt

$$|\Gamma(x) - 1|u_0(x)^p \leq C c_{n,p}^p (|x|^{\beta-n} 1_{B_\rho} + e^{-|x|}) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Hardys Ungleichung liefert wegen  $\beta > \frac{n-2}{2}$  für  $u \in H$  die Abschätzung (xii):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma(x) - 1|u_0^p |u| dx &\leq C c_{n,p}^p \left( \int_{B_\rho} |x|^{\beta-n+1} \frac{|u|}{|x|} dx + \int_{B_\rho^c} e^{-|x|} |u| dx \right) \\ &\leq C c_{n,p}^p \left( \| |x|^{\beta-n+1} \|_{L^2(B_\rho)} \left\| \frac{u}{|x|} \right\|_{L^2(B_\rho)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq C c_{n,p}^p \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C c_{n,p}^p \|u\|_H. \end{aligned}$$

Aus (viii) und (xi) folgt

$$|V(x)|u_0(x) \leq C c_{n,p} (|x|^{\alpha-n+2} 1_{B_\rho} + e^{-|x|}) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Wegen  $\alpha > \frac{6-n}{2}$  erhalten wir (xiii) aus Hardy's Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |V(x)|u_0 |u| dx &\leq C c_{n,p} \left( \int_{B_\rho} |x|^{\alpha-n+1} \frac{|u|}{|x|} dx + \int_{B_\rho^c} e^{-|x|} |u| dx \right) \\ &\leq C c_{n,p} \left( \| |x|^{\alpha-n+1} \|_{L^2(B_\rho)} \left\| \frac{u}{|x|} \right\|_{L^2(B_\rho)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq C c_{n,p}^p \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C c_{n,p}^p \|u\|_H. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (xiv) nutzen wir

$$|\Gamma(x)|u_0(x)^{p-1} \leq C c_{n,p}^{p-1} (\|\Gamma\|_{L^\infty(B_\rho)} |x|^{-2} 1_{B_\rho} + e^{-|x|}) \leq C c_{n,p}^{p-1} (|x|^{-2} 1_{B_\rho} + 1) \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Es folgt für  $u, v \in H$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) u_0^{p-1} |u| |v| dx &\leq C c_{n,p}^{p-1} \left( \int_{B_\rho} \frac{|u|}{|x|} \frac{|v|}{|x|} dx + \int_{B_\rho^c} |u| |v| dx \right) \\ &\leq C c_{n,p}^{p-1} \left( \left\| \frac{u}{|x|} \right\|_{L^2(B_\rho)} \left\| \frac{v}{|x|} \right\|_{L^2(B_\rho)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq C c_{n,p}^{p-1} \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C c_{n,p}^{p-1} \|u\|_H \|v\|_H. \end{aligned}$$

Der Beweis ist vollständig. □

## F. Eigenschaften der konstruierten Lösungen

In diesem Abschnitt klären wir die Eigenschaften der in den Sätzen 6.3 und 6.7 gefundenen Lösungen. In beiden Sätzen ist die konstruierte Funktion  $U$  der Form  $U = u_0 + u$  für ein  $u \in H$ , wobei  $u_0$  die durch Proposition 5.4 gegebene Näherungslösung ist. Die Funktion  $u$  erfüllt hierbei eine der äquivalenten Bedingungen  $I_p'(u) = 0$  oder  $u = \mathcal{A}_p(u)$ , d.h. es gilt

$$0 = \iota(P^+ - P^-)u - F_p(u) - T_p \quad (7.1)$$

Distributionelle Lösungseigenschaft und  $U(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$

Nach Proposition 5.4 (i) gilt für alle  $0 < \delta < \rho$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta} |u_0(x)| dx &= O(\delta^{-\frac{2}{p-1}+n}), & \int_{B_\delta} |u_0(x)|^p dx &= O(\delta^{-\frac{2p}{p-1}+n}), \\ \oint_{\partial B_\delta} |u_0(x)| dx &= O(\delta^{-\frac{2}{p-1}+n-1}), & \oint_{\partial B_\delta} |\partial_\nu^\pm u_0(x)| dx &= O(\delta^{-\frac{p+1}{p-1}+n-1}). \end{aligned}$$

Jedes dieser Integrale konvergiert für  $\delta \rightarrow 0$  gegen 0, denn  $p > \frac{n}{n-2} > \frac{n+1}{n-1} > \frac{n+2}{n}$ . Für  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  folgt aus Proposition 5.4 (i)

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho} u_0(-\Delta\phi) dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B_\rho \setminus B_\delta} u_0(-\Delta\phi) dx \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B_\rho \setminus B_\delta} (-\Delta u_0)\phi dx - \oint_{\partial B_\rho} (u_0 \partial_\nu^+ \phi - \phi \partial_\nu^+ u_0) d\sigma \\ &= \int_{B_\rho} u_0^p \phi dx - \oint_{\partial B_\rho} (u_0 \partial_\nu^+ \phi - \phi \partial_\nu^+ u_0) d\sigma. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Ferner folgt aus Proposition 5.4 (ii)

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho^c} u_0(-\Delta\phi) dx &= \int_{B_\rho^c} (-\Delta u_0)\phi dx + \oint_{\partial B_\rho} (u_0 \partial_\nu^- \phi - \phi \partial_\nu^- u_0) d\sigma \\ &= \int_{B_\rho^c} (u_0^p - \omega^2 u_0)\phi dx + \oint_{\partial B_\rho} (u_0 \partial_\nu^- \phi - \phi \partial_\nu^- u_0) d\sigma. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Da  $\phi$  glatt ist, gilt  $\partial_\nu^- \phi = \partial_\nu^+ \phi$  auf  $\partial B_\rho$ . Wegen Proposition 5.4 (viii) und (xi) gilt  $V u_0 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ . Aufsummieren der Gleichungen (7.2) und (7.3) liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(-\Delta\phi + V(x)\phi) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u_0^p \phi dx + \int_{B_\rho^c} (V(x) - \omega^2)u_0 \phi dx \\ &\quad + \int_{B_\rho} V(x)u_0 \phi dx + \oint_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0)\phi d\sigma. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Aus (7.1) folgt für alle  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H$

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta\phi + V(x)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla \phi + V(x)\phi dx$$

$$\begin{aligned}
&= (\iota(P^+ - P^-)u)[\phi] \\
&= F_p(u)[\phi] + T_p[\phi] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma(x)|u_0 + u|^{p-1}(u_0 + u) - u_0^p \right) \phi \, dx - \int_{B_\rho} V(x)u_0 \phi \, dx \\
&\quad - \int_{B_\rho^c} (V(x) - \omega^2)u_0 \phi \, dx - \int_{\partial B_\rho} (\partial_\nu^+ u_0 - \partial_\nu^- u_0) \phi \, d\sigma. \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Wegen  $U = u + u_0$  erhalten wir durch Aufsummieren der Gleichungen (7.4) und (7.5)

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(-\Delta\phi + V(x)\phi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)|U|^{p-1}U\phi \, dx \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (7.6)$$

Daher ist  $U$  distributionelle Lösung von (5.1). Für einen Beweis von  $U(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  verweisen wir auf den Beweis von (iii) bzw. (7.12)<sup>2</sup>.

Beweis von (i): Unbeschränktheit und Integrierbarkeit

Wir nehmen an, es gäbe  $\delta, C_\delta > 0$  mit  $U \leq C_\delta < \infty$  auf  $B_\delta$ . Wähle dann  $\delta' \in (0, \delta)$  mit  $u_0(x) \geq 2C_\delta$  auf  $B_{\delta'}$ , was aufgrund der Unbeschränktheit von  $u_0$  möglich ist, vgl. Proposition 5.4 (iv). Es folgt  $u = U - u_0 \leq -\frac{u_0}{2} < 0$  auf  $B_{\delta'}$  und damit

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(B_{\delta'})} \geq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}(B_{\delta'})} = +\infty$$

im Widerspruch zu  $u \in H \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ . Es folgt  $\text{ess sup}_{B_\delta} U = +\infty$  für alle  $\delta > 0$ . Ferner gilt  $u_0 \in L^q(\mathbb{R}^n)$  für alle  $q \in [1, \frac{n(p-1)}{2})$  nach Proposition 5.4 (vi) sowie  $u \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$  für alle  $q \in [1, \frac{n(p-1)}{2})$  wegen  $u \in H \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ .

Beweis von (ii): Schwache Lösungseigenschaft auf  $B_\delta^c$  für  $\delta > 0$

Es gilt  $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  sowie  $0 \leq u_0(x) \leq C c_{n,p} e^{-|x|}$  für  $|x| \geq 1$ . Aus  $u \in H \subset H^1(\mathbb{R}^n)$  folgt daher  $U = u_0 + u \in H^1(B_\delta^c)$  für alle  $\delta > 0$ . Aus (7.6) folgt für ein beliebiges  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  durch partielle Integration

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla U \nabla \phi + V(x)U\phi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)|U|^{p-1}U\phi \, dx,$$

was zu zeigen war.

Beweis von (iii): Exponentieller Abfall

Zunächst definieren wir die Kato-Klasse  $K_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $n \geq 3$  sei  $h_n(x, y) = |x - y|^{2-n}$ , ferner sei  $h_2(x, y) = -\log|x - y|$  und  $h_1(x, y) = 1$ . Eine messbare Funktion  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

<sup>2</sup>Die Voraussetzung  $\Gamma^+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  aus (iii) wird für den Nachweis der Behauptung  $U(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$  nicht benötigt.

ist Element von  $K_n$  im Fall

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\{|x-y| \leq \rho\}} h_n(x, y) |W(y)| dy = 0, \quad n \geq 2,$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\{|x-y| \leq 1\}} |W(y)| dy < \infty, \quad n = 1.$$

Eine Norm auf  $K_n$  ist nach [71], S.453, (A15) gegeben durch

$$\|W\|_{K_n} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\{|x-y| \leq 1\}} h_n(x-y) |W(y)| dy.$$

Für Teilmengen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $K_n(\Omega)$  die Menge aller messbaren Funktionen  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $W1_\Omega$  in  $K_n$  liegt. Die Abbildung  $\|W\|_{K_n(\Omega)} := \|W1_\Omega\|_{K_n}$  definiert eine Seminorm auf  $K_n(\Omega)$  und für jedes  $q \in (\frac{n}{2}, \infty]$  existiert eine positive Zahl  $C_q$  mit

$$\|W\|_{K_n(\Omega)} \leq C_q \sup_{y \in \Omega} \|W\|_{L^q(B_1(y))} \quad (q > \frac{n}{2}), \quad (7.7)$$

vgl. (A21) in [71].

**Proposition F.1.** *Sei  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R$  für ein  $R \geq 0$  sowie  $W_+ \in K_{n,loc}(\Omega), W_- \in K_n(\Omega)$ . Ferner gelte im distributionellen Sinne  $-\Delta u + Wu = 0$  in  $\Omega$  für eine Funktion  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  mit  $Wu \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Dann ist  $u$  bis auf Abänderung auf einer Nullmenge stetig in  $\Omega$ . Gilt zusätzlich  $u \in L^q(\Omega)$  für ein  $q \in [1, \infty)$ , dann gilt  $u(x) \rightarrow 0$  as  $|x| \rightarrow \infty$ .*

**Beweis:**

Die Stetigkeit von  $u$  folgt aus [71], Satz C.1.1. Zudem erhalten wir aus [71], Satz C.1.2. für fast alle  $x \in \Omega$  mit  $\text{dist}(x, \partial\Omega) > 1$  die folgende Ungleichung:

$$|u(x)| \leq C(\|W_-\|_{K_n(B_1(x))}) \int_{B_1(x)} |u(y)| dy \leq C(\|W_-\|_{K_n(\Omega)}) \int_{B_1(x)} |u(y)| dy. \quad (7.8)$$

Aus  $u \in L^q(\Omega)$  folgt  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{B_1(x)} |u(y)|^q dy = 0$  und aus der Hölderschen Ungleichung folgt  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{B_1(x)} |u(y)| dy = 0$ . Die Behauptung folgt aus der Abschätzung (7.8).  $\square$

**Proposition F.2.** *Sei  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R$  für ein  $R \geq 0$  sowie  $W_+ \in K_{n,loc}(\Omega), W_- \in K_n(\Omega)$ . Ferner sei  $\Sigma := \inf \sigma_{ess}(-\Delta + W) > 0$  und  $u \in H^1_{loc}(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  für ein  $q \in [2, \frac{2n}{(n-2)_+})$  sei schwache Lösung von  $-\Delta u + Wu = 0$  in  $\Omega$ . Dann existiert für alle  $\mu \in (0, \sqrt{\Sigma})$  eine Zahl  $C_\mu > 0$  mit*

$$|u(x)| \leq C_\mu e^{-\mu|x|} \quad \text{für alle } x \in \Omega \text{ mit } \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1.$$

**Beweis:**

Wir zeigen zunächst  $ue^{\mu|x|} \in L^2(\Omega)$  für alle  $\mu \in (0, \sqrt{\Sigma})$ . Sei daher  $\mu \in (0, \sqrt{\Sigma})$  beliebig, wähle  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit  $\chi|_{B_1} \equiv 0$  und  $\chi|_{B_2^c} \equiv 1$ , sei  $\chi_s(x) = \chi(s^{-1}x)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $s > 0$ . Für  $R_2 > R_1 > R$  sei die Testfunktion  $\chi_{R_1, R_2}$  gegeben durch

$$\chi_{R_1, R_2} := \chi_{R_1} \cdot (1 - \chi_{R_2}),$$

so dass  $\text{supp}(\chi_{R_1, R_2}) \subset \overline{B_{2R_2}} \setminus B_{R_1}$  sowie  $\chi_{R_1, R_2} \equiv \chi_{R_1}$  auf  $\overline{B_{R_2}}$  gilt. Für  $\sigma > 0$  definieren wir

$$\phi = \xi^2 u, \quad \text{wobei} \quad \xi(x) = \chi_{R_1, R_2}(x) e^{\frac{\mu|x|}{1+\sigma|x|}}.$$

Wegen  $\text{supp}(\chi_{R_1, R_2}) \subset \overline{B_{2R_2}} \setminus B_{R_1}$  gilt  $\phi \in H_0^1(\Omega)$  und

$$0 = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi + W(x) u \phi \, dx = \int_{\Omega} |\nabla(\xi u)|^2 + W(x) |\xi u|^2 - |\nabla \xi|^2 |u|^2 \, dx.$$

Für ein beliebiges aber festes  $\kappa \in (0, \frac{1}{2}(\Sigma - \mu^2))$  erhalten wir aus

$$|\nabla \xi| \leq e^{\frac{\mu|x|}{1+\sigma|x|}} (|\nabla \chi_{R_1, R_2}| + \mu |\chi_{R_1, R_2}|)$$

die Ungleichung

$$|\nabla \xi|^2 \leq (\mu^2 + \kappa) |\chi_{R_1, R_2}|^2 e^{\frac{2\mu|x|}{1+\sigma|x|}} + (1 + \mu^2 \kappa^{-1}) |\nabla \chi_{R_1, R_2}|^2 e^{\frac{2\mu|x|}{1+\sigma|x|}}.$$

Somit

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Omega} |\nabla(\xi u)|^2 + W(x) |\xi u|^2 \, dx \\ &\quad - (\mu^2 + \kappa) \int_{\Omega} |\chi_{R_1, R_2}|^2 |u|^2 e^{\frac{2\mu|x|}{1+\sigma|x|}} \, dx \\ &\quad - (1 + \mu^2 \kappa^{-1}) \int_{\Omega} |\nabla \chi_{R_1, R_2}|^2 |u|^2 e^{\frac{2\mu|x|}{1+\sigma|x|}} \, dx. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Wegen  $\Sigma = \inf \sigma_{ess}(-\Delta + W)$  folgt aus dem Satz von Persson (siehe [71], S.508) für alle hinreichend groß gewählten  $R_1 > 0$  und alle  $R_2 > R_1, \sigma > 0$  die Ungleichung

$$\int_{\Omega} |\nabla(\xi u)|^2 + W |\xi u|^2 \, dx \geq (\Sigma - \kappa) \int_{\Omega} |\xi u|^2 \, dx = (\Sigma - \kappa) \int_{\Omega} |\chi_{R_1, R_2}|^2 |u|^2 e^{\frac{2\mu|x|}{1+\sigma|x|}} \, dx.$$

Zusammen mit (7.9) folgt

$$\int_{\Omega} |\chi_{R_1, R_2}|^2 |u|^2 e^{\frac{2\mu|x|}{1+\sigma|x|}} \, dx \leq \frac{1 + \mu^2 \kappa^{-1}}{\Sigma - \mu^2 - 2\kappa} \int_{\Omega} |\nabla \chi_{R_1, R_2}|^2 |u|^2 e^{\frac{2\mu|x|}{1+\sigma|x|}} \, dx. \quad (7.10)$$

Für  $R_2 \rightarrow \infty$  konvergiert die linke Seite in (7.10) nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. Für  $q = 2$ , d.h. im Fall  $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  konvergiert die rechte Seite in (7.10) nach dem Satz von der dominierten Konvergenz, im Fall  $2 < q < \frac{2n}{(n-2)_+}$  konvergiert die rechte Seite wegen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (|\nabla \chi_{R_1, R_2}|^2 - |\nabla \chi_{R_1}|^2)^{\frac{q}{q-2}} \, dx &= \int_{\{R_2 \leq |x| \leq 2R_2\}} |\nabla \chi_{R_2}|^{\frac{2q}{q-2}} \, dx \\ &\leq C \|\nabla \chi\|_{\infty} \cdot R_2^{n - \frac{2q}{q-2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } R_2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daher gilt die Abschätzung (7.10) für  $\chi_{R_1}$  statt  $\chi_{R_1, R_2}$ . Für  $\sigma \rightarrow 0$  erhalten wir aus dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\int_{\Omega} |\chi_{R_1}|^2 |u|^2 e^{2\mu|x|} \, dx \leq \frac{1 + \mu^2 \kappa^{-1}}{\Sigma - \mu^2 - 2\kappa} \int_{\Omega} |\nabla \chi_{R_1}|^2 |u|^2 e^{2\mu|x|} \, dx < \infty.$$

Die rechte Seite ist hierbei endlich, da  $\nabla\chi_{R_1}$  einen kompakten Träger hat. Es folgt  $\chi_{R_1}ue^{\mu|x|} \in L^2(\Omega)$  und damit  $ue^{\mu|x|} \in L^2(\Omega)$ .

Wir kommen nun zum Beweis der punktweisen Abschätzung. Aus (7.8) folgt

$$\|u\|_{L^\infty(B_1(z))} \leq C(\|W_-\|_{K_n(\Omega)})\|u\|_{L^2(B_2(z))}.$$

für alle  $z \in \mathbb{R}^n$  mit  $\text{dist}(B_1(z), \partial\Omega) \geq 1$ , insbesondere wegen  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_R$  für alle  $z \in \mathbb{R}^n$  mit  $|z| \geq R+2$ . Wir erhalten für solche  $z$

$$\begin{aligned} \|ue^{\mu|z|}\|_{L^\infty(B_1(z))} &\leq \|u\|_{L^\infty(B_1(z))}\|e^{\mu|z|}\|_{L^\infty(B_1(z))} \\ &\leq C\|u\|_{L^2(B_2(z))}e^{\mu(|z|+1)} \\ &\leq C\|ue^{\mu|z|}\|_{L^2(B_2(z))}e^{-\mu(|z|-2)}e^{\mu(|z|+1)} \\ &\leq Ce^{3\mu}\|ue^{\mu|z|}\|_{L^2(\Omega)} =: \tilde{C}_\mu. \end{aligned}$$

Somit  $|u(x)| \leq \tilde{C}_\mu e^{-\mu|x|}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $|x| \geq R+2$ . Nach Proposition F.1 ist  $u$  außerhalb jeder Umgebung von  $\partial\Omega$  wesentlich beschränkt, so dass für ein  $C_\mu > 0$  folgt

$$|u(x)| \leq C_\mu e^{-\mu|x|} \text{ für alle } x \in \Omega \text{ mit } \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1.$$

□

Wir kommen zum Beweis von (iii). Sei daher  $U = u_0 + u$  eine distributionelle Lösung von (5.1) mit  $u \in H$  und  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$ , d.h. es gilt  $-\Delta U + V(x)U = \Gamma(x)|U|^{p-1}U$  auf  $\mathbb{R}^n$  im distributionellen Sinne. Insbesondere gilt im distributionellen Sinne

$$-\Delta U + W(x)U = 0 \quad \text{auf } \Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_2 \quad \text{für } W(x) := V(x) - \Gamma(x)|U(x)|^{p-1}1_\Omega(x).$$

Weiter unten zeigen wir für  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein

$$W_+ \in K_{n,loc}(\Omega), \quad W_- \in K_n(\Omega), \quad \text{für } p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon). \quad (7.11)$$

Eine Anwendung der Proposition F.1 liefert die Stetigkeit von  $U$  auf  $\Omega$  sowie

$$U(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty. \quad (7.12)$$

Aufgrund der Voraussetzung  $\Gamma_+ \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  folgt  $\Gamma(x)_+|U(x)|^{p-1} \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Mit dem Satz von Persson folgt<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \inf \sigma_{ess}(-\Delta + W) &= \inf \sigma_{ess}(-\Delta + V + \Gamma_-|U|^{p-1} - \Gamma_+|U|^{p-1}) \\ &= \inf \sigma_{ess}(-\Delta + V + \Gamma_-|U|^{p-1}) \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Sowohl die zweite Gleichung als auch die darauffolgende Ungleichung ergeben sich aus der Formel (C35) in [71] für das Infimum des wesentlichen Spektrums.

$$\begin{aligned} &\geq \inf \sigma_{ess}(-\Delta + V) \\ &\geq \Sigma. \end{aligned}$$

Proposition F.2 liefert daher für  $s = \frac{2n}{(n-2)(p-1)}$  und  $q = 2$  die Abschätzung  $|U(x)| \leq C'_\mu e^{-\mu|x|}$  für  $|x| \geq 3$  und alle  $\mu < \sqrt{\Sigma}$ . Die entsprechende Abschätzung für  $U(x)$  und  $1 \leq |x| \leq 3$  folgt aus elliptischer Regularitätstheorie, siehe Eigenschaft (ii).

Es bleibt, die Aussage (7.11) zu zeigen. Wir zeigen zunächst  $W_+ \in K_{n,loc}(\Omega)$ . Nach Voraussetzung  $(A_4)$  existiert ein  $\delta < \frac{1}{2}$  mit  $|\Gamma(x)| \leq (1 + V_+(x))^\delta$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Wähle nun  $\varepsilon > 0$  so klein, dass  $\frac{n}{n-2} + \varepsilon < \frac{n+2-4\delta}{n-2}$  gilt, d.h.  $\varepsilon < \frac{2-4\delta}{n-2}$ . Für  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  existiert dann ein  $q$  mit

$$\frac{2(p+1)}{n+2-p(n-2)} < q < \frac{p+1}{2\delta}.$$

Wegen  $\frac{2\delta q}{p+1} < 1$  folgt

$$\begin{aligned} W &\leq V_+ + |\Gamma||U|^{p-1} \\ &= V_+ + |\Gamma|^{\frac{2}{p+1}} \cdot (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{p-1}{p+1}} \\ &\leq C(V_+ + |\Gamma|^{\frac{2q}{p+1}} + (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}) \\ &\leq C(V_+ + (V_+ + 1)^{\frac{2\delta q}{p+1}} + (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}) \\ &\leq C(V_+ + 1 + (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}) \end{aligned}$$

Es gilt  $\Gamma u_0^{p+1} \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_1)$  wegen Proposition 5.4 (vi) und (ix). Aus  $u \in H \subset L_\Gamma^{p+1}(\mathbb{R}^n)$  folgt zudem  $\Gamma|u|^{p+1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Wir erhalten  $\Gamma|U|^{p+1} = \Gamma|u_0 + u|^{p+1} \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus B_1)$ . Per Wahl von  $q$  gilt  $\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1} < \frac{2}{n}$  und (7.7) liefert  $(|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}} \in K_n(\mathbb{R}^n \setminus B_2) = K_n(\Omega)$ . Wir erhalten aus Voraussetzung  $(A_1)$  und (7.7) die Aussage  $V_+ \in K_{n,loc}(\Omega)$  und die obige Abschätzung liefert  $W_+ \in K_{n,loc}(\Omega)$ .

Zum Beweis von  $W_- \in K_n(\Omega)$  seien nun  $\delta, q$  wie oben gewählt. Wir nutzen die Abschätzung  $(1+x)^{\frac{2\delta q}{p+1}} \leq \varepsilon x + C_\varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} W &\geq V_+ - V_- - |\Gamma||U|^{p-1} \\ &\geq V_+ - V_- - C(|\Gamma|^{\frac{2q}{p+1}} + (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}) \\ &\geq V_+ - V_- - C((1 + V_+)^{\frac{2\delta q}{p+1}} + (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}) \\ &\geq V_+ - V_- - C(\varepsilon V_+ + C_\varepsilon + (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}) \\ &\geq (1 - C\varepsilon)V_+ - V_- - CC_\varepsilon - C(|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}} \end{aligned}$$

Wählen wir  $\varepsilon < \frac{1}{C}$ , so folgt aus  $V_- \in L^\infty(\Omega)$

$$W_- \leq C + (|\Gamma||U|^{p+1})^{\frac{q}{q-1} \cdot \frac{p-1}{p+1}}$$

und damit erneut  $W_- \in K_n(\mathbb{R}^n)$ .

Beweis von (iv): Positivität im Fall  $\sigma(L) \subset (0, \infty)$  und  $\Gamma \geq 0$

Sei  $\sigma(L) \subset (0, \infty)$  und es gelte  $\Gamma \geq 0$ . Nach Bemerkung 5.5 existiert neben der Lösung  $U$  auch eine distributionelle Lösung  $\hat{U}$  der Gleichung

$$-\Delta w + V(x)w = \Gamma(x)w_+^p \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

mit  $\hat{U} = u_0 + \hat{u}$  und den Eigenschaften (i)-(iii). Es gilt daher

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{U}(-\Delta\phi + V(x)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)\hat{U}_+^p \phi dx \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Wie im Beweis von (ii) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\nabla\hat{U}\nabla\phi + V(x)\phi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)\hat{U}_+^p \phi dx \quad \text{für alle } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Es ist zu zeigen, dass  $\hat{U}$  positiv ist.

Sei daher  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \geq 0$  beliebig, sei  $K := \text{supp}(\psi)$ . Ferner sei  $w \in H$  die eindeutige schwache Lösung von  $-\Delta w + V(x)w = \psi$ , die zugleich Minimierer des Funktionals  $L[z] := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla z|^2 + V(x)z^2 - 2\psi z dx$  über  $H$  ist. Wegen  $\psi \geq 0$  gilt  $w \geq 0$ , denn mit  $w$  ist auch  $|w|$  der eindeutige Minimierer von  $L$ . Die Funktion  $w$  ist schwache Lösung der Differentialgleichung  $-\Delta w = f$  für  $f = \psi - Vw$ .

Wir betrachten zunächst den Fall  $n = 3, 4, 5$ . Aus  $(B_1)$  folgt  $V \in L_{loc}^{\frac{2n}{6-n}}(\mathbb{R}^n)$ . Aus  $w \in H$  und  $H \subset H^1(\mathbb{R}^n) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\mathbb{R}^n)$  folgt  $f \in L_{loc}^{n/2}(\mathbb{R}^n)$  und Caldéron-Zygmund-Abschätzungen (vgl. Kapitel 9 in [35]) liefern  $w \in W_{loc}^{2,n/2}(\mathbb{R}^n)$ . Sobolevs Einbettungssatz gibt  $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$  für alle  $q \in [1, \frac{2n}{6-n})$ . Damit  $w \in W_{loc}^{2,q}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $q \in [1, \frac{2n}{6-n})$  wieder durch Caldéron-Zygmund-Abschätzungen. Insbesondere ist  $w$  wegen  $\frac{2n}{6-n} > \frac{n}{2}$  fast überall identisch mit einer lokal gleichmäßig stetigen Funktion und erfüllt  $-\Delta w + Vw = \psi$  punktweise in  $\mathbb{R}^n$ . Im Fall  $n \geq 6$  folgt aus  $(B_1)$  die Beschränktheit des Potentials und die soeben gezeigten Glattheitseigenschaften von  $w$  lassen sich analog beweisen.

Wegen  $p > \frac{n}{n-2}$  existiert ein  $s \in (\frac{n(p-1)}{n(p-1)-2}, \frac{2n}{(6-n)_+})$ . Wegen (i) gilt  $\hat{U} \in L^q(K)$  für alle  $q \in [1, \frac{n(p-1)}{2})$ , insbesondere  $\hat{U} \in L^{\frac{s}{s-1}}(K)$ . Sei nun  $(\phi_k)$  eine Folge nichtnegativer  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ -Funktionen, die auf  $K$  gleichmäßig und in  $W^{2,s}(K)$  gegen  $w$  konvergiert. Dann gilt  $\hat{U}V \in L^1(K)$  und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{U}(x)\psi(x) dx &= \int_K \hat{U}(x)(-\Delta w + V(x)w) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_K \hat{U}(x)(-\Delta\phi_k + V(x)\phi_k) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_K \Gamma(x) \hat{U}(x)_+^p \phi_k(x) dx \\
&= \int_K \Gamma(x) \hat{U}(x)_+^p w(x) dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Da  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\psi \geq 0$  beliebig gewählt war, erhalten wir  $\hat{U} \geq 0$  fast überall. Ferner gilt im schwachen Sinne  $-\Delta \hat{U} + V(x)\hat{U} \geq 0$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , also  $\hat{U} > 0$  fast überall nach dem starken Minimumprinzip.  $\square$

**Bemerkung F.3.** Im Systemfall können wir das exponentielle Abklingverhalten der konstruierten singulären Lösung nicht für alle diskutierten Systeme beweisen. Insbesondere benötigen wir in Satz 6.6 die Voraussetzung  $n = 3$ , damit die Exponenten  $p \in (\frac{n}{n-2}, \frac{n}{n-2} + \varepsilon)$  größer als 3 sind. Das Schrödingersystem (6.3) lässt sich in der Form  $-\Delta U + W_1(x)U = 0$  und  $-\Delta V + W_2(x)V = 0$  schreiben, wobei die Potentiale  $W_1, W_2$  wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
W_1(x) &:= V_1(x) - \Gamma_1(x)|U(x)|^{p-1} - \Gamma_3(x)|U(x)|^{\frac{p-3}{2}}|V(x)|^{\frac{p+1}{2}}, \\
W_2(x) &:= V_2(x) - \Gamma_2(x)|V(x)|^{p-1} - \Gamma_3(x)|U(x)|^{\frac{p+1}{2}}|V(x)|^{\frac{p-3}{2}}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung  $n \geq 3$  erhalten wir daher wie im Beweis von (iii) die Aussagen  $\sigma_{ess}(-\Delta + W_j(x)) = \sigma_{ess}(-\Delta + V_j(x))$  für  $j = 1, 2$  und damit das exponentielle Abfallverhalten. Eine Verallgemeinerung dieses Arguments auf den Fall  $n \geq 4$  ist derzeit unklar.

# Literaturverzeichnis

- [1] N. N. Akhmediev, A. V. Buryak, J. M. Soto-Crespo, and D. R. Andersen. Phase-locked stationary soliton states in birefringent nonlinear optical fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 12(3):434–439, 1995.
- [2] J. C. Alexander and S. S. Antman. Global and local behavior of bifurcating multidimensional continua of solutions for multiparameter nonlinear eigenvalue problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 76(4):339–354, 1981.
- [3] A. Ambrosetti and E. Colorado. Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 342(7):453–458, 2006.
- [4] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special functions*. Encyclopedia of mathematics and its applications ; 71. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1. publ. edition, 1999.
- [5] P. Aviles. On isolated singularities in some nonlinear partial differential equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 32(5):773–791, 1983.
- [6] T. Bartsch, N. Dancer, and Z.-Q. Wang. A Liouville theorem, a-priori bounds, and bifurcating branches of positive solutions for a nonlinear elliptic system. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 37(3-4):345–361, 2010.
- [7] T. Bartsch, Z.-Q. Wang, and J. Wei. Bound states for a coupled Schrödinger system. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2(2):353–367, 2007.
- [8] T. Bartsch and M. Willem. Infinitely many nonradial solutions of a Euclidean scalar field equation. *J. Funct. Anal.*, 117(2):447–460, 1993.
- [9] T. Bartsch and M. Willem. Infinitely many radial solutions of a semilinear elliptic problem on  $\mathbb{R}^N$ . *Arch. Rational Mech. Anal.*, 124(3):261–276, 1993.
- [10] H. Berestycki and P.-L. Lions. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 82(4):313–345, 1983.

- [11] H. Berestycki and P.-L. Lions. Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 82(4):347–375, 1983.
- [12] M.-F. Bidaut-Véron, A. C. Ponce, and L. Véron. Boundary singularities of positive solutions of some nonlinear elliptic equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(2):83–88, 2007.
- [13] D. Bonheure and J. Van Schaftingen. Groundstates for the nonlinear Schrödinger equation with potential vanishing at infinity. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 189(2):273–301, 2010.
- [14] J. E. Brothers and W. P. Ziemer. Minimal rearrangements of Sobolev functions. *J. Reine Angew. Math.*, 384:153–179, 1988.
- [15] B. Buffoni and J. Toland. *Analytic theory of global bifurcation*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.
- [16] J. Busca and B. Sirakov. Symmetry results for semilinear elliptic systems in the whole space. *J. Differential Equations*, 163(1):41–56, 2000.
- [17] K.-C. Chang. *Methods in nonlinear analysis*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [18] R. Chiappinelli. Compact embeddings of some weighted Sobolev spaces on  $\mathbb{R}^N$ . *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 117(2):333–338, 1995.
- [19] D. N. Christodoulides. Black and white vector solitons in weakly birefringent optical fibers. *Physics Letters A*, 132(8-9):451–452, 1988.
- [20] C. V. Coffman. Uniqueness of the ground state solution for  $\Delta u - u + u^3 = 0$  and a variational characterization of other solutions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 46:81–95, 1972.
- [21] M. Conti and V. Felli. Minimal coexistence configurations for multispecies systems. *Nonlinear Anal.*, 71(7-8):3163–3175, 2009.
- [22] M. Conti and V. Felli. Global minimizers of coexistence for competing species. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 83(3):606–618, 2011.
- [23] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini. A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana Univ. Math. J.*, 54(3):779–815, 2005.
- [24] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. *J. Functional Analysis*, 8:321–340, 1971.

- [25] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz. Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 52:161–180, 1973.
- [26] D. G. de Figueiredo and O. Lopes. Solitary waves for some nonlinear Schrödinger systems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 25(1):149–161, 2008.
- [27] K. Deimling. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [28] M. del Pino, M. Musso, and F. Pacard. Boundary singularities for weak solutions of semilinear elliptic problems. *J. Funct. Anal.*, 253(1):241–272, 2007.
- [29] T. Dohnal and H. Uecker. Coupled mode equations and gap solitons for the 2D Gross-Pitaevskii equation with a non-separable periodic potential. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 238:860–879, 2009.
- [30] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Part II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988.
- [31] M. S. P. Eastham. *The spectral theory of periodic differential equations*. Texts in mathematics. Scottish Acad. Pr., Edinburgh [u.a.], 1973.
- [32] M. Florjanczyk and R. Tremblay. Periodic and solitary waves in bimodal optical fibres. *Physics Letters A*, 141(1-2):34–36, 1989.
- [33] B. Gidas, W. M. Ni, and L. Nirenberg. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^n$ . In *Mathematical analysis and applications, Part A*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 369–402. Academic Press, New York, 1981.
- [34] B. Gidas and J. Spruck. A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 6(8):883–901, 1981.
- [35] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer, Berlin ; Heidelberg [u.a.], repr. of the 1998 ed. edition, 2001.
- [36] Q. Han and F. Lin. *Elliptic partial differential equations*, volume 1 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, second edition, 2011.
- [37] N. Hirano and N. Shioji. Multiple existence of solutions for coupled nonlinear Schrödinger equations. *Nonlinear Anal.*, 68(12):3845–3859, 2008.
- [38] J. Horák, P. J. McKenna, and W. Reichel. Very weak solutions with boundary singularities for semilinear elliptic Dirichlet problems in domains with conical corners. *J. Math. Anal. Appl.*, 352(1):496–514, 2009.

- [39] D. Hundertmark. Some bound state problems in quantum mechanics. In *Spectral theory and mathematical physics: a Festschrift in honor of Barry Simon's 60th birthday*, volume 76 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 463–496. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [40] N. Ikoma. Uniqueness of positive solutions for a nonlinear elliptic system. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 16(5):555–567, 2009.
- [41] J. Jang. Uniqueness of positive radial solutions of  $\Delta u + f(u) = 0$  in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ . *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 73(7):2189 – 2198, 2010.
- [42] Hansjörg Kielhöfer. *Bifurcation theory*, volume 156 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2012.
- [43] T. Kilpeläinen. Weighted Sobolev spaces and capacity. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 19(1):95–113, 1994.
- [44] N. A. Kostov, R. Dandoloff, V. S. Gerdjikov, and G. G. Grahovski. The Manakov system as two moving interacting curves. In *Topics in contemporary differential geometry, complex analysis and mathematical physics*, pages 168–178. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
- [45] M. K. Kwong. Uniqueness of positive solutions of  $\Delta u - u + u^p = 0$  in  $\mathbb{R}^n$ . *Arch. Rational Mech. Anal.*, 105(3):243–266, 1989.
- [46] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum mechanics: non-relativistic theory. Course of Theoretical Physics, Vol. 3*. Addison-Wesley Series in Advanced Physics. Pergamon Press Ltd., London-Paris, 1958. (Translated from the Russian by J. B. Sykes and J. S. Bell).
- [47] C. Li. Monotonicity and symmetry of solutions of fully nonlinear elliptic equations on unbounded domains. *Comm. Partial Differential Equations*, 16(4-5):585–615, 1991.
- [48] T.-C. Lin and J. Wei. Ground state of  $N$  coupled nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \leq 3$ . *Comm. Math. Phys.*, 255(3):629–653, 2005.
- [49] T.-C. Lin and J. Wei. Erratum: “Ground state of  $N$  coupled nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \leq 3$ ” [Comm. Math. Phys. 255 (2005), no. 3, 629–653; mr2135447]. *Comm. Math. Phys.*, 277(2):573–576, 2008.
- [50] L. Ma and L. Zhao. Uniqueness of ground states of some coupled nonlinear Schrödinger systems and their application. *J. Differential Equations*, 245(9):2551–2565, 2008.

- [51] L. A. Maia, E. Montefusco, and B. Pellacci. Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system. *J. Differential Equations*, 229(2):743–767, 2006.
- [52] L. A. Maia, E. Montefusco, and B. Pellacci. Infinitely many nodal solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system. *Commun. Contemp. Math.*, 10(5):651–669, 2008.
- [53] S. V. Manakov. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 38, 1974.
- [54] R. Mandel and W. Reichel. Distributional solutions of the stationary nonlinear Schrödinger equation: singularities, regularity and exponential decay. *ArXiv e-prints*, October 2011.
- [55] D. Mandelik, R. Morandotti, J. S. Aitchison, and Y. Silberberg. Gap solitons in waveguide arrays. *Phys. Rev. Lett.*, 92:093904, 2004.
- [56] R. Mazzeo and F. Pacard. A construction of singular solutions for a semilinear elliptic equation using asymptotic analysis. *J. Differential Geom.*, 44(2):331–370, 1996.
- [57] C. Menyuk. Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 23(2):174 – 176, 1987.
- [58] Z. Nehari. On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 62:117–135, 1963.
- [59] W.-M. Ni and I. Takagi. Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem. *Duke Math. J.*, 70(2):247–281, 1993.
- [60] B. Noris and M. Ramos. Existence and bounds of positive solutions for a nonlinear Schrödinger system. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138(5):1681–1692, 2010.
- [61] B. Noris, H. Tavares, S. Terracini, and G. Verzini. Uniform Hölder bounds for nonlinear Schrödinger systems with strong competition. *Comm. Pure Appl. Math.*, 63(3):267–302, 2010.
- [62] F. Pacard. Existence de solutions faibles positives de  $-\Delta u = u^\alpha$  dans des ouverts bornés de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 315(7):793–798, 1992.
- [63] A. Pankov. Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals. *Milan J. Math.*, 73:259–287, 2005.

- [64] L. A. Peletier and J. Serrin. Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in  $\mathbb{R}^n$ . *Arch. Rational Mech. Anal.*, 81(2):181–197, 1983.
- [65] A. Pomponio. Ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction. *J. Math. Phys.*, 51(9):093513, 2010.
- [66] A.V. Porubov and D.F. Parker. Some general periodic solutions to coupled nonlinear schrödinger equations. *Wave Motion*, 29(2):97–109, 1999.
- [67] P. Quittner and P. Souplet. Optimal Liouville-type theorems for noncooperative elliptic Schrödinger systems and applications. *Comm. Math. Phys.*, 311(1):1–19, 2012.
- [68] P. H. Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. *J. Functional Analysis*, 7:487–513, 1971.
- [69] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975.
- [70] Z. Shi and J. Yang. Solitary waves bifurcated from bloch-band edges in two-dimensional periodic media. *Phys. Rev. E*, 75:056602, 2007.
- [71] B. Simon. Schrödinger semigroups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(3):447–526, 1982.
- [72] B. Sirakov. Least energy solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in  $\mathbb{R}^n$ . *Comm. Math. Phys.*, 271(1):199–221, 2007.
- [73] W. A. Strauss. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 55(2):149–162, 1977.
- [74] M. Struwe. *Variational methods*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2008.
- [75] C. A. Stuart. Bifurcation into spectral gaps. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, (suppl.):59, 1995.
- [76] C. A. Stuart. Spectrum of a self-adjoint operator and Palais-Smale conditions. *J. London Math. Soc. (2)*, 61(2):581–592, 2000.

- [77] J. Su, Z.-Q. Wang, and M. Willem. Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potentials. *Commun. Contemp. Math.*, 9(4):571–583, 2007.
- [78] H. Tavares and S. Terracini. Sign-changing solutions of competition-diffusion elliptic systems and optimal partition problems. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 29(2):279–300, 2012.
- [79] M. V. Tratnik and J. E. Sipe. Bound solitary waves in a birefringent optical fiber. *Phys. Rev. A*, 38:2011–2017, 1988.
- [80] W. Walter. *Ordinary differential equations*, volume 182 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998. (Translated from the sixth German (1996) edition by Russell Thompson).
- [81] J. Wei. On the construction of single-peaked solutions to a singularly perturbed semilinear Dirichlet problem. *J. Differential Equations*, 129(2):315–333, 1996.
- [82] J. Wei and T. Weth. Nonradial symmetric bound states for a system of coupled Schrödinger equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 18(3):279–293, 2007.
- [83] J. Wei and T. Weth. Asymptotic behaviour of solutions of planar elliptic systems with strong competition. *Nonlinearity*, 21(2):305–317, 2008.
- [84] J. Wei and T. Weth. Radial solutions and phase separation in a system of two coupled Schrödinger equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 190(1):83–106, 2008.
- [85] J. Wei and W. Yao. Uniqueness of positive solutions to some coupled nonlinear Schrödinger equations. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 11(3):1003–1011, 2012.
- [86] J. Weidmann. *Linear operators in Hilbert spaces*, volume 68 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980. (Translated from the German by Joseph Szücs).
- [87] J. Weidmann. *Spectral theory of ordinary differential operators*, volume 1258 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [88] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin, extended edition, 2000.
- [89] M. Willem. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
- [90] X. Xu. Quadratic-argument approach to nonlinear Schrödinger equation and coupled ones. *Acta Appl. Math.*, 110(2):749–769, 2010.

- [91] J. Yang. Classification of the solitary waves in coupled nonlinear Schrödinger equations. *Phys. D*, 108(1-2):92–112, 1997.
- [92] J. Yang and D. J. Benney. Some properties of nonlinear wave systems. *Stud. Appl. Math*, pages 111–139, 1996.

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Personen bedanken, die mich bei der Anfertigung meiner Dissertation unterstützt haben. An erster Stelle ist Herr Prof. Dr. Wolfgang Reichel zu nennen. Die Betreuung meiner Doktorarbeit empfand ich als hervorragend. Viele inspirierende Gespräche in den letzten vier Jahre haben mir geholfen, neue mathematische Gedanken zu entwickeln und bereits gezeigte Resultate besser zu strukturieren. Herr Prof. Dr. Reichel war stets, auch zu später Stunde, bereit, mir bei der Lösung diverser mathematischen Probleme zu helfen. Ich bin für diese großartige Zusammenarbeit sehr dankbar.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Michael Plum für die Übernahme der Rolle des ersten Korreferenten dieser Arbeit. Die Wahl der Analysis als Schwerpunkt meines Studiums, meiner Diplomarbeit und meiner Dissertation ist in maßgeblicher Weise von meinen positiven Eindrücken der Vorlesungen Analysis I-III und "Boundary and Eigenvalue problems" der akademischen Jahre 2003-2005 geprägt, die Herr Prof. Dr. Plum als Dozent leitete. Ich danke für interessante Gespräche und neue Impulse während der Anfertigung dieser Arbeit. Darüberhinaus danke ich Prof. Dr. Thomas Bartsch für die Übernahme der Aufgabe des Korreferenten dieser Dissertation. Das Thema Verzweigung bei Schrödingersystemen rückte durch Herrn Prof. Dr. Bartschs Vortrag im Karlsruher PDE-Seminar in den Fokus meines Interesses und ich bin dankbar dafür, die Gelegenheit bekommen zu haben, meine Ideen zu diesem Thema während eines Besuchs in Gießen besprechen zu können. Für die Ermöglichung eines Aufenthalts in Besançon und eine herzliche Betreuung danke ich Prof. Dr. Louis Jeanjean und Prof. Dr. Kazunaga Tanaka. Dr. Tómas Dohnal danke ich für Hilfestellungen bei der Anfertigung meiner Einleitung.

Ganz besonderer Dank gilt meiner Familie, die mich in meiner Arbeit stets unterstützt hat. Zahllos sind die Wochenenden, an denen meine Mutter und meine Schwiegereltern bereitwillig die Betreuung unseres Sohnes Thomas übernommen haben, damit sich seine Eltern dem Studium bzw. der Promotion widmen konnten. Schließlich danke ich meiner Ehefrau Linda Mandel für die seelische und moralische Unterstützung der letzten Jahre und für vieles mehr.

## Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der ausgewiesenen Hilfsmittel angefertigt habe. Sämtliche Stellen der Arbeit, die im Wortlaut oder dem Sinn nach anderen gedruckten oder im Internet veröffentlichten Werken entnommen sind, habe ich durch genaue Quellenangaben kenntlich gemacht.

Rainer Mandel  
Karlsruhe, 26. März 2013