

# Teichmüller-Geodätische im Schottkyraum

Zur Erlangung des akademischen  
Grades eines

DOKTORS DER  
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik des  
Karlsruher Instituts für Technologie  
genehmigte

DISSERTATION

von

Diego De Filippi

aus Como (Italien)

Tag der mündlichen Prüfung: 14. März 2013  
Referent: Prof. Dr. Frank Herrlich  
Korreferentin: JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2 Teichmüller-Geodätische</b>	<b>7</b>
2.1 Riemannsche Flächen, Modulraum und Teichmüllerraum . . . . .	7
2.2 Holomorphe quadratische Differentiale . . . . .	8
2.3 Quasikonforme Abbildungen und die Sätze von Teichmüller . . . . .	10
2.4 Teichmüller-Deformationen . . . . .	12
2.5 Die komplexe Struktur des Teichmüllerraums . . . . .	13
2.6 Teichmüller-Geodätische . . . . .	14
2.7 Teichmüller-Kurven und projektive Veech-Gruppen . . . . .	17
<b>3 Schottkyräume</b>	<b>21</b>
3.1 Schottkygruppen . . . . .	21
3.2 Der Schottkyraum und dessen komplexe Struktur . . . . .	26
3.3 Grober und feiner Modulraum . . . . .	29
3.4 Zusammenhang zwischen Teichmüller- und Schottkyraum . . . . .	31
3.5 Teichmüller-Geodätische im Schottkyraum . . . . .	36
<b>4 Origamis</b>	<b>39</b>
4.1 Eine kurze Zusammenfassung über Origamis . . . . .	39
4.2 Horizontales Schottky-Schnittsystem (HSS) . . . . .	42
4.3 Die Gruppe $\text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ für ein vorgegebenes $\alpha$ . . . . .	46
<b>5 Halbtranslationsflächen</b>	<b>55</b>
5.1 Für geeignetes $\alpha$ gilt $\text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \neq \{\text{id}\}$ . . . . .	55
5.2 Differentialformen . . . . .	56
5.3 Čech-Kohomologie . . . . .	58
5.4 Für Translationsflächen ist $\text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ zyklisch . . . . .	62
5.5 Das Bild von $\Delta$ im Schottkyraum . . . . .	66
<b>6 Algorithmus, um ein HSS zu finden</b>	<b>67</b>
6.1 Der Algorithmus . . . . .	70
6.2 Zwei Beispiele zum Algorithmus . . . . .	76
<b>7 Beispiele</b>	<b>83</b>
7.1 L-Origamis . . . . .	83
7.2 X-Origamis . . . . .	85

7.3	$\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ für ein Schottkyschnittsystem in Richtung $(1, 1)$ . . . . .	88
7.4	Beispiel für eine Halbtranslationsfläche . . . . .	90
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>97</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Der Teichmüllerraum  $\mathcal{T}_g$  klassifiziert markierte Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ . Es gibt viele Möglichkeiten, diesen zu definieren, z.B. mithilfe quasikonformer Selbstabbildungen oder durch hyperbolische Strukturen auf einer Fläche  $X$ . Man kann ihn auch definieren, indem man als Markierung der jeweiligen Riemannschen Fläche  $X$  ein symplektisches Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$  oder einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus  $f : X_{\text{ref}} \rightarrow X$  wählt, wobei  $X_{\text{ref}}$  eine fest gewählte Fläche desselben Geschlechts sei. Man interessiert sich für den Teichmüllerraum u.a., weil durch sein Studium der Modulraum  $\mathcal{M}_g$ , der die Isomorphieklassen von (nicht markierten) Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  klassifiziert, besser verstanden werden kann, denn  $\mathcal{M}_g$  erhält man als Quotientenraum von  $\mathcal{T}_g$  nach der Operation der Abbildungsklassengruppe  $\text{Mod}_g$ . Einen Zugang zum Teichmüllerraum erhält man, wenn man Teichmüller-Geodätische betrachtet. Das sind holomorphe, isometrische Einbettungen der oberen komplexen Halbebene  $\mathbb{H}$  (bzw. der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$ ) nach  $\mathcal{T}_g$  (bzgl. der Teichmüllermetrik in  $\mathcal{T}_g$  und der hyperbolischen Metrik in  $\mathbb{H}$ ). Davon gibt es zu jedem Punkt in  $\mathcal{T}_g$  und zu jeder komplexen Richtung eine. In Kapitel 2 wird erläutert, wie man solche Einbettungen erhält. Eng damit verbunden ist der Begriff der Halbtranslationsfläche, also einer Fläche mit einer flachen Struktur (d.h. bei der die Kartenwechsel lokal von der Form  $z \mapsto \pm z + c$  mit konstantem  $c \in \mathbb{C}$  sind). So eine Struktur erhält man auf jeder kompakten Riemannschen Fläche aus einem holomorphen quadratischen Differential  $q$ . Man kann sie dann durch affine Abbildungen auf den Karten variieren und damit den Punkt im Teichmüllerraum verändern und erhält somit genau die Punkte in  $\mathcal{T}_g$ , die zusammen eine Teichmüller-Geodätische  $\Delta_q$  ergeben. Zudem kann man die Selbstabbildungen der Fläche betrachten, die bzgl. der von  $q$  erhaltenen flachen Struktur lokal affine Abbildungen sind, und bekommt somit eine Gruppe  $\text{Aff}^+(X, q)$ , die zum Stabilisator von  $\Delta_q$  in  $\text{Mod}_g$  isomorph ist. Die Projektion von  $\text{Aff}^+(X, q)$  nach  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist als projektive Veech-Gruppe  $\bar{\Gamma}(X, q)$  bekannt. Genau dann, wenn  $\bar{\Gamma}(X, q)$  ein Gitter ist, ist das Bild von  $\Delta_q$  in  $\mathcal{M}_g$  eine algebraische Kurve. Die Teichmüller-Geodätischen, für die das gilt, sind Gegenstand von besonderem Interesse. Man nennt deren Bilder in  $\mathcal{M}_g$  Teichmüller-Kurven.

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Bilder von solchen Teichmüller-Geodätischen im Schottkyraum  $\mathcal{S}_g$ . Letzteren kann man als Zwischenüberlagerung zwischen  $\mathcal{T}_g$  und  $\mathcal{M}_g$  beschreiben. Er klassifiziert Paare, die aus einer Riemannschen Fläche und einer Schottky-Überlagerung davon bestehen. Schottky-Überlagerungen sind minimale planare Überlagerungen, ihre Decktransformationsgruppe

ist frei vom Rang  $g$ . Die am Anfang von Kapitel 3 angeführten und bewiesenen Eigenschaften von Schottkygruppen und des Schottkyraums sind zwar bereits bekannt (eine Referenz für Schottkygruppen und die allgemeineren kleinschen Gruppen ist z.B. [Mas88]), allerdings sind sie hier wegen des besseren Verständnisses für unsere Zwecke formuliert und neu bewiesen. Daraufhin wird erläutert, dass  $\mathcal{S}_g$  eine (nicht normale) Zwischenüberlagerung zwischen  $\mathcal{T}_g$  und  $\mathcal{M}_g$  ist. Man erhält eine Abbildung  $s_\alpha : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{S}_g$ , die nicht kanonisch ist, da sie von einem Homomorphismus  $\alpha : \pi_g \rightarrow F_g$  abhängt, wobei  $\pi_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \rangle$  die abstrakte Fundamentalgruppe und  $F_g$  die freie Gruppe vom Rang  $g$  sei. Die Abbildung  $s_\alpha$  ist die Quotientenabbildung nach

$$\text{Mod}_g(\alpha) = \{ \varphi \in \text{Mod}_g \mid \alpha \circ \tilde{\varphi} \equiv \alpha \text{ mod Inn}(F_g), \text{ mit } \tilde{\varphi} \in \text{Aut}^+(\pi_g) : [\tilde{\varphi}] = \varphi \in \text{Out}^+(\pi_g) \},$$

einer Untergruppe von  $\text{Mod}_g$ , wobei die obige Definition verwendet, dass  $\text{Mod}_g \cong \text{Out}^+(\pi_g)$  ist. Wenn der Schnitt von  $\text{Aff}^+(X, q)$  und  $\text{Mod}_g(\alpha)$  trivial ist, so ist die zugehörige Teichmüller-Geodätische  $\Delta_q$  isomorph zu ihrem Bild unter  $s_\alpha$  in  $\mathcal{S}_g$ , also eine analytische Kreisscheibe. Wenn aber für eine Halbtranslationsfläche  $X$  die Gruppe  $\bar{\Gamma}(X, q)$  ein Gitter ist, wenn also die entsprechende Teichmüller-Geodätische zu einer Teichmüller-Kurve führt, dann existiert nach einem Resultat von Herrlich und Schmithüsen ([HS07, Prop. 5.21]) ein  $\alpha$ , für das  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \neq \{\text{id}\}$ . In [HS07] wird dieses Resultat über eine Kompaktifizierung von  $\mathcal{M}_g$ ,  $\mathcal{T}_g$  und  $\mathcal{S}_g$  bewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird diese Aussage auf den Fall verallgemeinert, dass  $\bar{\Gamma}(X, q)$  ein parabolisches Element enthält, und ein konstruktiver Beweis dazu vorgelegt. Zudem wird gezeigt, dass es für jedes parabolische Element  $\tau \in \text{Aff}^+(X, q)$  ein  $\alpha$  gibt, so dass  $\langle \tau^n \rangle \leq \text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Für den Fall, dass  $(X, q)$  eine Translationsfläche ist (d.h. mit Kartenwechsel von der Form  $z \mapsto z + c$ ), wurde außerdem gezeigt, dass  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  außer der Identität nur parabolische Elemente enthalten kann und somit zyklisch ist (Korollar 5.3). Für  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \neq \{\text{id}\}$  ergibt sich damit, dass das Bild von  $\Delta_q$  unter  $s_\alpha$  birational äquivalent zu  $\mathbb{H} / \langle \tau \rangle$  ist für ein parabolisches Element  $\tau$ .

Diese Aussagen werden zunächst für Origamis bewiesen (Kapitel 4), da hier vieles direkter angegeben werden kann und, zumindest die Aussage, dass  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  nur parabolische Elemente enthalten kann, elementar bewiesen werden kann. Eine Hauptzutat, um ein  $\alpha$  zu finden mit  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \neq \{\text{id}\}$  ist Satz 4.3, wonach es in jedem Origami  $O$  vom Geschlecht  $g$  ein nicht separierendes System von  $g$  einfach geschlossenen Kurven gibt, die alle horizontal verlaufen, d.h. für beliebiges  $\varepsilon > 0$  frei homotop zu Kurven sind, die in einer  $\varepsilon$ -Umgebung der horizontalen Seiten der Quadrate von  $O$  liegen. Dann gibt nämlich es ein symplektisches Erzeugendensystem  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  der Fundamentalgruppe des Origamis, so dass  $a_1, \dots, a_g$  frei homotop zu den horizontalen Kurven sind. Wenn man dann  $\alpha$  so wählt, dass der von  $a_1, \dots, a_g$  erzeugte Normalteiler gerade  $\text{Kern}(\alpha)$  ist, dann liegt das Element aus  $\text{Aff}^+(O)$ , das durch den multiplen Dehntwist an allen horizontalen Zylindern gegeben ist, auch in  $\text{Mod}_g(\alpha)$ . Dieses Ergebnis lässt sich auf parabolische Elemente mit beliebiger Eigenrichtung und letztendlich auch auf beliebige Halbtranslationsflächen übertragen. Da der Beweis der Existenz eines wie oben beschriebenen Systems von horizontalen Kurven konstruktiv ist, kann er (zum Teil) verwendet werden, um einen Algorithmus zu konstruieren, der ein solches Kurvensystem liefert (Kapitel 6).

Der Beweis, dass  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  nur parabolische Elemente enthalten kann, wenn  $(X, q)$  eine

Translationsfläche ist, benützt im Wesentlichen, dass die Matrix  $M_\varphi$ , welche die Operation eines Elements  $\varphi \in \text{Mod}_g(\alpha)$  auf  $H_1(X, \mathbb{Z})$  beschreibt, von der Form  $\begin{pmatrix} I_g & A \\ 0_g & I_g \end{pmatrix}$  ist (Lemma 3.1) und dass die Eigenwerte der Matrix eines Elementes  $f \in \text{Aff}^+(X, q)$  auch Eigenwerte von  $M_f$  sind (Satz 5.7). Für Origamis ist ein elementarer Beweis davon angegeben, für Translationsflächen im Allgemeinen benötigt man mehr Vorarbeit (Kapitel 5). Dass diese Aussage über die Eigenwerte für Halbtranslationsflächen nicht gilt, sieht man am letzten Beispiel von Kapitel 7. Für Halbtranslationsflächen ist also noch zu klären, ob  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  auch nicht-zyklisch sein kann. Um nach solchen Gruppen zu suchen, sollte man nach (mindestens) zwei parabolischen Elementen mit unterschiedlicher Eigenrichtung suchen, so dass beide für ein  $\alpha$  in  $\text{Aff}^+(X, q) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  liegen. Dafür bietet es sich an, nach parabolischen Elementen  $f$  zu suchen, die trivial auf der Homologie operieren (solche gibt es nicht für Translationsflächen), denn diese erfüllen für alle  $\alpha$  die notwendige Bedingung, um in  $\text{Mod}_g(\alpha)$  zu liegen, dass die Matrix  $M_f$  von der oben angegebenen Form ist. Wie im letzten Beispiel von Kapitel 7 ist es eher zu erwarten, dass dieses Element für mehrere  $\alpha$  in  $\text{Mod}_g(\alpha)$  liegt, und es ist damit eher wahrscheinlich, ein weiteres Element zu finden, dass das Gewünschte leistet.

**Danksagungen** An dieser Stelle möchte ich noch die Gelegenheit nutzen, um allen zu danken, die mich während dieser Arbeit unterstützt haben. Als erstes gilt mein Dank Prof. Dr. Frank Herrlich dafür, dass er mir überhaupt ermöglicht hat, diese Arbeit zu schreiben, indem er sie betreut hat, dass er mein Interesse für das Thema geweckt hat und stets für Fragen und für Diskussionen zur Verfügung stand. Als nächstes möchte ich auch JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen dafür danken, dass sie als Koreferentin diese Arbeit mitbetreut hat und ebenfalls unzählige Male ein offenes Ohr für Fragen hatte. Außerdem danke ich PD Dr. Stefan Kühnlein, dafür, dass ich ihm in letzter Minute noch die Kapitel 2 und 3 zur Korrektur in die Hand drücken durfte. Für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre und den interessanten Diskussionen danke ich den Mitgliedern (auch den ehemaligen) unserer Kaffeegrunde, insbesondere Thomas Willging und Jochen Schröder für das Korrekturlesen einiger Teile, die Eingang in die Arbeit finden durften, André Kappes, Florian Nisbach, Karsten Kremer, Oliver Bauer, Johannes Riesterer, Ute Luhm, Myriam Finster und Joachim Breitner für das Diskutieren oder (v.a. in der Anfangsphase) das Erklären von Fragen im Zusammenhang mit der Dissertation. Den letzten beiden danke ich auch für die Hilfe bei LaTeX-Problemen. Danke auch an Tobias Columbus für das Korrekturlesen der englischen Version dieser Arbeit. Außerdem möchte ich noch meiner Frau Daniela Küster für die moralische Unterstützung während dieser Arbeit und meiner Familie für die Unterstützung während meines Studiums danken. Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei der Landesgraduiertenförderung bedanken, dass sie meine Arbeit an dieser Dissertation in den ersten zwei Jahren mit einem Stipendium unterstützt hat. So, hoffentlich habe ich jetzt niemanden vergessen.



# Kapitel 2

## Teichmüller-Geodätische

Dieses Kapitel dient der Erläuterung der für diese Arbeit grundlegenden Begriffe. Es werden Teichmüller-Geodätische, Teichmüller-Kurven und Veech-Gruppen eingeführt, sowie die dafür notwendigen Werkzeuge, wie holomorphe quadratische Differentiale und quasikonforme Abbildungen. Größtenteils orientiere ich mich hier an [HS07, §2].

### 2.1 Riemannsche Flächen, Modulraum und Teichmüllerraum

**Definition 2.1** (a) Gegeben sei eine Fläche  $X$ . Eine Überdeckung  $\mathfrak{U}$  durch Karten  $U_i$  mit Kartenabbildungen  $z_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **komplexer Atlas**, wenn für alle  $(U_i, z_i), (U_j, z_j)$  die Abbildung

$$z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \rightarrow z_j(U_i \cap U_j)$$

holomorph ist.

(b) Zwei Atlanten bezeichnen wir als biholomorph äquivalent, falls deren Vereinigung wieder ein komplexer Atlas ist. Eine Äquivalenzklasse biholomorph äquivalenter Atlanten nennt man **komplexe Struktur**. Eine komplexe Struktur enthält einen eindeutig bestimmten maximalen Atlas.

(c) Eine Fläche  $X$  zusammen mit einer komplexen Struktur  $\Sigma$  nennt man **Riemannsche Fläche**. Die komplexe Struktur wird in der Notation meistens unterdrückt. Das **Geschlecht** einer Riemannschen Fläche  $(X, \Sigma)$  sei das aus der Klassifikation von Flächen bekannte Geschlecht von  $X$  (siehe [Kin93, § 4.5]).

**Definition 2.2** Man kann Definition 2.1 abändern, indem man von den Kartenwechselabbildungen verlangt, dass sie für jede Zusammenhangskomponente eines Durchschnitts  $U_i \cap U_j$  von einer der folgenden Formen sind (für ein  $c \in \mathbb{C}$ ):

$$(a) \quad z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \rightarrow z_j(U_i \cap U_j) \quad (b) \quad z_j \circ z_i^{-1} : z_i(U_i \cap U_j) \rightarrow z_j(U_i \cap U_j)$$
$$z \mapsto \pm z + c \qquad \qquad \qquad z \mapsto z + c$$

Die davon erzeugte Struktur heißt dann im Fall (a) **flache Struktur** und eine Fläche  $X$  mit

flacher Struktur heißt *Halbtranslationsfläche*. Da die Kartenwechsel hier insbesondere auch biholomorph sind, induziert eine flache Struktur stets eine komplexe Struktur. Im Fall (b) reden wir dann entsprechend von einer *Translationsstruktur* bzw. einer *Translationsfläche*. Auch hier induziert eine Translationsstruktur stets eine flache Struktur.

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich kompakte Riemannsche Flächen (ggf. mit endlich vielen Punktierungen).

**Definition 2.3** (a) Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen Riemannschen Flächen heißt *holomorph*, wenn für alle  $p \in X$  die Abbildung  $f$  holomorph auf den Karten ist. Letzteres bedeutet, dass für Kartenumgebungen  $(U, z)$  von  $p$  und  $(V, w)$  von  $f(p)$  aus dem maximalen Atlas von  $X$  bzw.  $Y$  mit  $f(U) \subseteq V$  die Funktion  $w \circ f \circ z^{-1}$  holomorph auf  $z(U)$  ist. Analog dazu ist der Begriff *biholomorph* definiert.

- (b) Zwei Riemannsche Flächen  $X$  und  $Y$  heißen *isomorph*, wenn eine biholomorphe Abbildung  $h : X \rightarrow Y$  existiert.
- (c) Die Isomorphieklassen von kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht  $g$  bilden den so genannten *Modulraum* für Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ , den wir mit  $\mathcal{M}_g$  bezeichnen werden. Für die Isomorphieklasse von  $X$  schreiben wir  $[X]$ .

**Definition 2.4** Gegeben sei eine kompakte Riemannsche Fläche  $X_{\text{ref}}$  vom Geschlecht  $g$ .

- (a) Das Paar  $(X, f)$  bestehend aus einer Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  und einem orientierungserhaltenden Homöomorphismus  $f : X_{\text{ref}} \rightarrow X$ , der in höchstens endlich vielen Punkten nicht glatt ist, heißt *markierte Riemannsche Fläche*.
- (b) Auf den markierten Flächen sei folgende Äquivalenzrelation definiert:

$$(X, f) \sim (Y, h) :\Leftrightarrow h \circ f^{-1} \text{ ist homotop zu einer biholomorphen Abbildung } k : X \rightarrow Y.$$

$$\begin{array}{ccc} & X_{\text{ref}} & \\ f \swarrow & & \searrow h \\ X & \xrightarrow{k \sim h \circ f^{-1}} & Y \end{array}$$

- (c) Die Äquivalenzklassen  $[X, f] := (X, f) / \sim$  bilden die Punkte des sog. *Teichmüllerraums*.

Teichmüller-Deformationen sind eine weitere Möglichkeit um den Teichmüllerraum zu erhalten. Dazu führen wir zunächst noch holomorphe quadratische Differentiale (siehe dazu auch [Str84, § 4]) und quasikonforme Abbildungen ein.

## 2.2 Holomorphe quadratische Differentiale

**Definition 2.5** Gegeben sei eine Riemannsche Fläche  $X$  mit komplexer Struktur  $\Sigma$  und sei  $\mathfrak{A}$  der maximale Atlas in  $\Sigma$ . Ein *holomorphes quadratisches Differential*  $q$  auf  $X$  ist gegeben durch eine

Familie

$$\{(\varphi_i(z_i)dz_i^2)_{i \in I} \mid (U_i, h_i) \in \mathfrak{A}, \varphi_i : h_i(U_i) \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph}, \\ \forall i, j \in I : \varphi_j(z_j) = \varphi_i(z_i) \left(\frac{dz_i}{dz_j}\right)^2 \text{ f\"ur } h_i^{-1}(z_i) = h_j^{-1}(z_j)\}$$

Wir bezeichnen den  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der holomorphen quadratischen Differentiale auf  $X$  mit  $Q(X)$ .

**Bemerkung 2.1** Die Nullstellen eines quadratischen holomorphen Differentials  $q$ , also die Punkte  $P \in X$  mit  $\varphi_i(h_i(P)) = 0$ , sind wohldefiniert, weil sie nicht von der gewählten Karte abhängen. Das liegt daran, dass die Kartenwechsel biholomorph sind und wir deshalb  $\frac{dz_i}{dz_j} \neq 0$  haben. Im Allgemeinen gilt aber  $\varphi_i(h_i(P)) \neq \varphi_j(h_j(P))$  für  $P \in U_i \cap U_j \subseteq X$ .

Sei nun  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$ ,  $q \neq 0$  ein holomorphes quadratisches Differential auf  $X$  und

$$X^* := X - \{P \in X \mid P \text{ ist Nullstelle von } q\}.$$

**Bemerkung 2.2** Auf  $X^*$  ist folgendermaßen eine flache Struktur  $\mu$  gegeben: Sei  $U \subseteq X^*$  eine einfach zusammenhängende Karte aus dem maximalen Atlas von  $X$  mit Kartenabbildung  $h$  und sei  $z_0 \in h(U)$  beliebig. Dann lässt sich durch die auf  $U$  definierte Abbildung

$$P \mapsto \int_{z_0}^z \sqrt{\varphi(\xi)} d\xi; \quad z := h(P)$$

eine neue Karte aus dem maximalen Atlas von  $X$  angeben. Da die Umgebung  $U$  einfach zusammenhängend ist, ist das Integral unabhängig vom gewählten Weg von  $z_0$  nach  $z$  in  $U$ . Die so erhaltenen Karten bilden eine flache Struktur auf  $X^*$ . Die Funktion  $\sqrt{\varphi(z)}$  existiert auf ganz  $U$ , da  $\varphi$  hier keine Nullstellen hat und da  $U$  einfach zusammenhängend ist. Sie ist aber mehrdeutig, da sie nur bis auf das Vorzeichen wohldefiniert ist. Man muss also für die obige Karte einen Zweig der Funktion wählen.

**Beweis** Seien  $(U_\nu, h_\nu)$  und  $(U_\eta, h_\eta)$  zwei einfach zusammenhängende Kartenumgebungen von  $P$  mit den dazugehörigen Kartenabbildungen. Ferner sei  $z_\nu := h_\nu(P)$  und  $z_\eta := h_\eta(P)$ . Sei außerdem  $P_0 \in U_\nu \cap U_\eta$  ein fest gewählter Punkt und  $z_{\nu_0} := h_\nu(P_0)$  sowie  $z_{\eta_0} = h_\eta(P_0)$  und sei  $h_{\nu\eta} := h_\nu \circ h_\eta^{-1}$ . Dann gilt:

$$\int_{z_{\nu_0}}^{z_\nu} \sqrt{\varphi_\nu(\xi)} d\xi = \int_{z_{\nu_0}}^{z_\nu} \sqrt{\varphi_\eta(h_{\nu\eta}(\xi))} \frac{dh_{\nu\eta}(\xi)}{d\xi} d\xi = \int_{z_{\eta_0}}^{z_\eta} \sqrt{\varphi_\eta(\xi)} d\xi$$

Mit der Tatsache, dass  $P_0$  beliebig ist und dass  $\sqrt{\varphi(z)}$  nur bis auf das Vorzeichen wohldefiniert ist, folgt, dass diese Karten eine flache Struktur ergeben. □

Die von  $q$  induzierte flache Struktur gibt uns eine euklidische Metrik auf  $X^*$ . Wir definieren  $\|q\|$  als den Flächeninhalt von  $X$  bezüglich dieser von  $q$  induzierten Metrik. Aus dem Beweis der obigen Bemerkung sieht man, dass  $\|r \cdot q\| = |r| \cdot \|q\|$  für  $r \in \mathbb{R}$  und  $q \in Q(X)$ .

## 2.3 Quasikonforme Abbildungen und die Sätze von Teichmüller

Dieses Kapitel orientiert sich hauptsächlich an [FM12]. Weitere Quellen, die eine gute Einführung in das Thema bieten, sind [Ahl06] sowie [IT92].

**Definition 2.6** Gegeben seien offene  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  und ein orientierungserhaltender Homöomorphismus  $f : U \rightarrow V$ , der bis auf endlich viele Punkte reell differenzierbar ist. Für einen Punkt  $p \in U$ , in dem  $f$  reell differenzierbar ist, sei

$$K_f(p) := \frac{|f_z(p)| + |f_{\bar{z}}(p)|}{|f_z(p)| - |f_{\bar{z}}(p)|} = \frac{1 + \frac{|f_{\bar{z}}(p)|}{|f_z(p)|}}{1 - \frac{|f_{\bar{z}}(p)|}{|f_z(p)|}}$$

die **komplexe Dilatation** von  $f$  im Punkt  $p$ .

Die komplexe Dilatation gibt gewissermaßen an, wie sehr  $f$  davon entfernt ist, im Punkt  $p$  konform zu sein. Für  $K_f(p) = 1$  ist  $f$  in  $p$  konform. Da  $f$  orientierungserhaltend ist, gilt

$$\text{jac}(f)_p = |f_z(p)|^2 - |f_{\bar{z}}(p)|^2 > 0,$$

also  $\frac{|f_{\bar{z}}(p)|}{|f_z(p)|} < 1$  und somit  $K_f(p) \geq 1$ .

Man kann die komplexe Dilatation  $K_f(p)$  auch folgendermaßen verdeutlichen: Die Abbildung auf den Tangentialräumen

$$df_p : T_p U \rightarrow T_p V$$

bildet den Einheitskreis auf eine Ellipse ab.  $K_f(p)$  gibt dann das Verhältnis der Hauptachse zur Nebenachse dieser Ellipse an.

**Definition 2.7** Für  $U, V \subseteq \mathbb{C}$  sei  $f : U \rightarrow V$  wie oben gegeben. Die **komplexe Dilatation von  $f$**  ist definiert als

$$K(f) := \sup_{p \in U} K_f(p).$$

Wenn diese endlich ist, dann heißt  $f$  **quasikonform**.

Da die Kartenwechselabbildungen auf Riemannschen Flächen biholomorph sind, kann man analog zum Fall in der komplexen Ebene die komplexe Dilatation einer Abbildung zwischen Riemannschen Flächen definieren als komplexe Dilatation der entsprechenden Abbildung auf den Karten. Diese Definition ist sinnvoll, da die Kartenwechselabbildungen biholomorph sind und deshalb die komplexe Dilatation einer Abbildung zwischen Riemannschen Flächen unabhängig von der gewählten Karte ist (siehe auch [FM12, Prop. 11.3]).

Teichmüller hat gezeigt, dass es in jeder Äquivalenzklasse von Markierungen einer Riemannschen Flächen eine in höchstens endlich vielen Punkten nicht differenzierbare Abbildung mit minimaler komplexer Dilatation gibt, und dass diese eindeutig bestimmt ist.

**Definition 2.8** Seien  $X$  und  $Y$  zwei kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ . Eine **Teichmüller-Abbildung**  $f : X \rightarrow Y$  ist ein Homöomorphismus, so dass es holomorphe quadratische Differentiale  $q_X$  auf  $X$  und  $q_Y$  auf  $Y$  und ein  $K \geq 1$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $f$  bildet die Nullstellen von  $q_X$  auf die Nullstellen von  $q_Y$  ab,
- außerhalb der Nullstellen von  $q_X$  hat  $f$  lokal die Form

$$f(z) = f(x + iy) = \sqrt{K} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot iy$$

bzgl. geeigneter Karten aus den von  $q_X$  und  $q_Y$  herkommenden flachen Strukturen.

Dabei hängt  $K$  nicht von der gewählten Karte ab.

**Bemerkung 2.3** Für eine Teichmüllerabbildung  $f : x + iy \rightarrow \sqrt{K} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot iy$  gilt  $K_f = K$ .

**Beweis** Es gilt

$$f(z) = \frac{1}{2}\sqrt{K} \cdot (z + \bar{z}) + \frac{1}{2\sqrt{K}} \cdot (z - \bar{z})$$

und somit

$$f_z(z) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) \quad \text{und} \quad f_{\bar{z}}(z) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\sqrt{K}} \right).$$

Die komplexe Dilatation ist in jedem Punkt gleich und es gilt

$$K_f = \frac{\left( \sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) + \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\sqrt{K}} \right)}{\left( \sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K}} \right) - \left( \sqrt{K} - \frac{1}{\sqrt{K}} \right)} = K. \quad \square$$

**Satz 2.1 (Teichmüllers Existenzsatz)** Seien  $X$  und  $Y$  zwei kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g \geq 1$  und  $h : X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus. Dann existiert in der Homotopieklasse von  $h$  eine Teichmüller-Abbildung  $f : X \rightarrow Y$ .

**Beweis** Siehe [FM12, Thm. 11.8]. □

**Satz 2.2 (Teichmüllers Eindeutigkeitsatz)** Seien  $X$  und  $Y$  zwei kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g \geq 1$ ,  $f : X \rightarrow Y$  eine Teichmüller-Abbildung und  $h$  eine zu  $f$  homotope quasikonforme Abbildung. Dann gilt

$$K_h \geq K_f.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $f \circ h^{-1}$  konform ist. Für  $g \geq 2$  bedeutet letzteres, dass  $f = h$  gilt.

**Beweis** Siehe [FM12, Thm. 11.9]. □

Nach diesen beiden Sätzen von Teichmüller entspricht jedem Punkt  $[X, h] \in \mathcal{T}_g$  eine eindeutig bestimmte markierte Riemannsche Fläche  $(X, f)$  mit  $(X, f) \sim (X, h)$ , wobei  $f : X_{\text{ref}} \rightarrow X$  eine Teichmüller-Abbildung ist. Dadurch lässt sich auf  $\mathcal{T}_g$  folgende Metrik definieren:

**Definition 2.9** Gegeben seien zwei Punkte  $x, y \in \mathcal{T}_g$ , repräsentiert durch die Vertreter  $(X, f_1)$  und  $(X, f_2)$ , wobei  $f_1$  und  $f_2$  die Teichmüller-Abbildungen seien. Weiterhin sei  $f$  die zu  $f_2 \circ f_1^{-1}$  homotope Teichmüllerabbildung (nach den Sätzen 2.1 und 2.2 existiert  $f$  und ist eindeutig). Wir definieren die **Teichmüller-Metrik** durch

$$d_T(x, y) := \log K_f.$$

Durch  $d_T$  ist auch tatsächlich eine Metrik gegeben, denn für quasikonforme Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  gilt  $K_{g \circ f} \leq K_g \cdot K_f$  (deshalb gilt die Dreiecksungleichung),  $K_f = K_{f^{-1}}$  (deshalb ist  $d_T$  symmetrisch) und  $K_{\text{id}} = 1$ , siehe dazu [FM12, Prop. 11.3].

## 2.4 Teichmüller-Deformationen

Die flache Struktur, die man auf einer Riemannschen Fläche  $X$  mithilfe eines quadratischen holomorphen Differentials  $q$  bekommt, kann verändert werden, indem man die Kartenabbildungen mit folgender Abbildung verknüpft:

$$\vartheta_K : x + iy \mapsto \sqrt{K} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot iy, \quad K > 1 \quad (2.1)$$

Dadurch bekommt man auf der (topologischen) Fläche  $X$  eine neue flache Struktur, die im Allgemeinen auch eine neue komplexe Struktur induziert. Die neue Riemannsche Fläche, also die (topologische) Fläche  $X$  mit dieser neuen komplexen Struktur, bezeichnen wir mit  $X_K$  bzw. mit  $X_{K,q}$ , falls das holomorphe quadratische Differential  $q$ , von dem die flache Struktur herrührt, betont werden soll.

**Definition 2.10** Wir erhalten (mit  $X_{\text{ref}} := X$ ) eine markierte Riemannsche Fläche  $(X_K, f_K)$ , wobei

$$f_K : X \xrightarrow{\text{id}} X_{K,q}$$

die Abbildung sei, die topologisch die Identität ist (und somit auf den Karten der Abbildung  $\vartheta_K$  entspricht). Wir nennen  $(X_K, f_K)$  **Teichmüller-Deformation** von  $X$  bzgl.  $q$  mit Dilatation  $K$ .

$f_K$  ist auch die Teichmüller-Abbildung und es gilt

$$d_T([X, \text{id}], [X_K, f_K]) = \log K.$$

**Bemerkung 2.4** Gegeben seien die holomorphen quadratischen Differentiale  $q$  und ein reelles Vielfaches  $rq$  davon für  $r > 0$ , sowie ein  $K > 1$ . Dann gilt für die entsprechenden Punkte im Teichmüllerraum  $[X_{K,q}, f_K] = [X_{K,rq}, f_K]$ . Deshalb reicht es, folgende Menge zu betrachten:

$$\Sigma_X := \{q \in Q(X) \mid \|q\| = 1\}$$

**Satz 2.3** Gegeben sei eine Riemannsche Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$ . Jeder Punkt in  $\mathcal{T}_g$  kann in eindeutiger Weise als Teichmüller-Deformation von  $X$  erhalten werden.

Wir haben somit folgende Bijektion:

$$\Sigma_X \times (1, \infty) \cup \{0\} \xrightarrow{1:1} \mathcal{T}_g.$$

**Beweis** Sei  $[Y, f] \in \mathcal{T}_g$ . Nach Satz 2.1 ist ohne Einschränkung  $f : X \rightarrow Y$  die Teichmüller-Abbildung. Seien  $q_X \in \Sigma_X$  und  $q_Y \in \Sigma_Y$  die entsprechenden (normierten) holomorphen quadratischen Differentiale auf  $X$  und  $Y$  und sei  $(X_K, f_K)$  die Teichmüller-Deformation von  $X$  bzgl.  $q_X$  mit Dilatation  $K := K_f$ . Dann entsprechen  $f_K$  und  $f$  auf den Karten der Abbildung  $\vartheta_K$ , d.h.  $f_K \circ f^{-1}$  ist die Identität und somit biholomorph. Damit ist  $(Y, f) \sim (X_K, f_K)$ , also  $[Y, f] = [X_K, f_K]$ .

Seien nun die zwei Darstellungen  $[X_{K,q}, f_K] = [X_{K,\bar{q}}, t_K]$  gegeben. Dann gibt es eine zur Identität homotope Abbildung  $h : X_{K,\bar{q}} \rightarrow X_{K,q}$ , so dass  $h \circ t_K \circ f_K^{-1}$  biholomorph ist.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f_K \swarrow & & \searrow t_K \\ X_{K,q} & \xrightarrow{t_K \circ f_K^{-1}} & X_{K,\bar{q}} \end{array}$$

Da  $X_{K,q}$  und  $X_{K,\bar{q}}$  die gleiche topologische Fläche sind, ist  $t_K$  auch eine quasikonforme Abbildung von  $X$  nach  $X_{K,q}$  und  $h \in Q(X_{K,q})$ . Da  $t_K$  und  $f_K$  topologisch die Identität sind, gilt damit nach Satz 2.2, dass  $h \circ t_K = f_K$ , und somit schließlich, dass  $h = \text{id}$  und  $f_K = t_K$ .  $\square$

## 2.5 Die komplexe Struktur des Teichmüllerraums

Auf dem Teichmüllerraum lässt sich eine komplexe Struktur definieren. Eine Möglichkeit, diese zu konstruieren, ist, dass man die komplexe Struktur des Schottkyraums, der in Kapitel 3 eingeführt wird, in den Teichmüllerraum hochzieht über die Abbildung  $s_\alpha$  (siehe Satz 3.8), denn dieser ist nach Satz 3.8b die universelle Überlagerung des Schottkyraums. Da die Vergissabbildung vom Schottkyraum in den Modulraum analytisch ist (Satz 3.5), ist die Verknüpfung davon mit  $s_\alpha$  (also die der Quotientenabbildung nach der Abbildungsklassengruppe  $\text{Mod}_g$ , die weiter unten definiert wird) ebenfalls analytisch. Eine andere, klassische Möglichkeit, die komplexe Struktur auf  $\mathcal{T}_g$  zu konstruieren, wurde ausführlich in [Nag88] beschrieben. Hier soll die Konstruktion nur kurz skizziert werden.

Einer markierten Riemannschen Fläche  $(X, f)$  kann ein so genanntes **Beltrami-Differential** durch  $\mu_f(z) := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$  zugeordnet werden (Genaueres dazu in [Nag88, 1.3.1]). Das Beltrami-Differential  $\mu_f$  ist ein Element im Banach-Raum  $L^\infty_{(-1,1)}$  der  $(-1, 1)$ -Formen auf  $X$  mit Norm  $\|\mu_f\|_\infty < 1$ . Seien nun  $B(X)$  der offene Einheitsball in  $L^\infty_{(-1,1)}$  und

$$M(X) := \{(X, f) \mid X \text{ Riemannsche Fläche, } f : X_{\text{ref}} \rightarrow X \text{ quasikonform}\} / \sim$$

mit  $(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2) :\Leftrightarrow f_1 \circ f_2^{-1}$  konform. Dann ist die Abbildung

$$M(X) \rightarrow B(X), \quad (X, f) \mapsto \mu_f$$

bijektiv [Nag88, 2.1.4]. Da es eine natürliche Projektion  $M(X) \rightarrow \mathcal{T}_g$  gibt, haben wir dadurch eine Projektion  $\Phi : B(X) \rightarrow \mathcal{T}_g$ . Man kann zeigen, dass auf  $\mathcal{T}_g$  eine Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit existiert, so dass  $\Phi$  zu einer holomorphen Abbildung wird [Nag88, 3.1].

## 2.6 Teichmüller-Geodätische

**Definition 2.11** Sei  $q$  ein holomorphes quadratisches Differential auf  $X$ . Dann lässt sich folgende Abbildung definieren:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \infty) &\rightarrow \mathcal{T}_g \\ t &\mapsto [X_K, f_K] \text{ mit } K = e^t \end{aligned}$$

Das Bild von  $\gamma$  in  $\mathcal{T}_g$  heißt **geodätischer Strahl bzgl.  $q$** .

$\gamma$  ist eine isometrische Einbettung bzgl. der Teichmüller-Metrik auf  $\mathcal{T}_g$ .

**Definition 2.12** Sei  $g \geq 2$ . Eine **Teichmüller-Geodätische**  $\Delta_t$  ist das Bild einer holomorphen isometrischen Einbettung

$$\iota : \mathbb{D} \hookrightarrow \mathcal{T}_g.$$

Dabei sei  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  und darauf die Poincaré-Metrik gegeben.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, so eine Einbettung zu beschreiben, zwei davon seien hier erläutert:

### Erste Möglichkeit: Als Menge geodätischer Strahlen

$$\begin{aligned} \iota_1 : \mathbb{D} &\rightarrow \mathcal{T}_g \\ z &\mapsto (X_{K, e^{-i\varphi} \cdot q}, f_K) \text{ mit } z = \frac{K-1}{K+1} \cdot e^{i\varphi}, K \in [1, \infty), \varphi \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Für jedes  $\varphi$  erhält man einen geodätischen Strahl.

### Zweite Möglichkeit: Durch affine Deformationen

Dazu verknüpft man die Kartenabbildungen der flachen Struktur  $\mu$  mit einer affinen Abbildung  $B$  (identifiziere dafür  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$ ) und erhält eine neue flache Struktur  $\mu_B$ . D.h.  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert auf den flachen Strukturen von  $X^*$ , also  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  operiert auf  $\mathbb{R}^2$  durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und in  $\mathbb{C}$  heißt das

$$(x + iy) \mapsto (ax + by) + i(cx + dy).$$

Wir schreiben dafür  $B \circ (X, \mu) := (X, \mu_B)$ . Sei  $X_{\text{ref}}$  die Riemannsche Fläche mit der von der flachen Struktur  $\mu$  induzierten komplexen Struktur, dann haben wir durch

$$(X, \mu) \xrightarrow{\text{id}} (X, \mu_B)$$

eine markierte Riemannsche Fläche, die folgenden Punkt im Teichmüllerraum definiert:

$$P_B := [(X, \mu_B), \text{id}].$$

Im folgenden Satz werden einige Eigenschaften der Operation von  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  auf den flachen Strukturen zusammengefasst:

**Satz 2.4** (a)  $B_1 \circ (B_2 \circ (X, \mu)) = (X, \mu_{B_1 B_2})$  für  $B_1, B_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ .

(b)  $B \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  lässt den Punkt im Teichmüllerraum genau dann fix, wenn  $B \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ .

(c) Für  $B = \begin{pmatrix} \sqrt{K} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{K}} \end{pmatrix}$  erhält man die Teichmüller-Deformation  $\vartheta_K$  aus (2.1).

(d) Folgende Abbildung ist injektiv:

$$\tilde{\iota}_2 : \text{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{T}_g, \quad \text{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot B \mapsto P_B$$

(e) Die Abbildung

$$\hat{\iota}_2 : \text{SO}_2(\mathbb{R}) \backslash \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}, \quad \text{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot A \mapsto -\overline{A^{-1}(i)}$$

ist bijektiv. Dabei ist mit  $A(z)$  die Operation durch Möbiustransformationen gemeint.

(f) Die dazu inverse Abbildung  $\hat{\iota}_2^{-1}$  wird induziert von:

$$\mathbb{H} \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R}), \quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{\text{Im}(t)}} \begin{pmatrix} 1 & \text{Re}(t) \\ 0 & \text{Im}(t) \end{pmatrix}$$

**Beweis** (a) und (c) sind klar.

(b) Seien  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  und  $B \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ , also  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  mit  $a^2 + b^2 = 1$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Dann gilt  $Bz = (ax + by) + i(-bx + ay) = (a - ib)z$ . Also operiert  $B$  holomorph auf  $\mathbb{C}$  und es folgt  $P_B = P_I$ .

Sei dagegen  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  beliebig und sei  $P_B = P_I$ :

In diesem Fall ist die Abbildung

$$x + iy \mapsto (ax + by) + i(cx + dy) = a \frac{z + \bar{z}}{2} - ib \frac{z - \bar{z}}{2} + ic \frac{z + \bar{z}}{2} + d \frac{z - \bar{z}}{2}$$

holomorph. Das heißt, dass deren partielle Ableitung nach  $\bar{z}$  die Nullabbildung ist, also

$$\frac{\bar{z}}{2}(a-d) + i\frac{\bar{z}}{2}(b+c) = 0.$$

Es folgt  $a = d$  und  $b = -c$  und damit  $B \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ .

(d) Seien  $A, B \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $P_A = P_B$ . Mit a) und b) folgt, dass  $BA^{-1} \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$  und damit  $B \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \cdot A$ .

(e) Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$A \in \text{Stab}(i) \Leftrightarrow \frac{ai+b}{ci+d} = i \Leftrightarrow (a=d \wedge b=-c) \Leftrightarrow A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$$

Mit  $\text{SO}_2(\mathbb{R}) = \text{Stab}(i)$  folgen die Wohldefiniertheit der Abbildung, sowie die Injektivität.

Da  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  transitiv auf  $\mathbb{H}$  operiert, ist die Zuordnung  $A \mapsto A(i)$  auch surjektiv.

Das Invertieren von  $A$ , die komplexe Konjugation und die Multiplikation mit  $-1$  erhalten erst später ihren Sinn, sie ändern nichts an der Bijektivität der Abbildung.

(f) Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ . Es gilt  $-\overline{A^{-1}(i)} = -\frac{\overline{di-b}}{-ci+a} = \frac{1}{a^2+c^2}(ab+cd+i) := t$  und

$$\frac{1}{\sqrt{\text{Im}(t)}} \begin{pmatrix} 1 & \text{Re}(t) \\ 0 & \text{Im}(t) \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+c^2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{ab+cd}{a^2+c^2} \\ 0 & \frac{1}{a^2+c^2} \end{pmatrix} := \tilde{A} \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} A\tilde{A}^{-1} &= \sqrt{a^2+c^2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2+c^2} & -\frac{ab+cd}{a^2+c^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{a^2+c^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+c^2} & -a\frac{ab+cd}{a^2+c^2} + b \\ \frac{c}{a^2+c^2} & -c\frac{ab+cd}{a^2+c^2} + d \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{a^2+c^2} \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+c^2} & \frac{-acd+bc^2}{a^2+c^2} \\ \frac{c}{a^2+c^2} & \frac{-cab+da^2}{a^2+c^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}} \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}). \quad \square \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Abbildung  $\iota_2 := \tilde{\iota}_2 \circ \hat{\iota}_2^{-1}$  oder anders ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \iota_2 : \mathbb{H} &\rightarrow \mathcal{T}_g \\ t &\mapsto P_{A_t} \end{aligned}$$

wobei  $A_t$  so gewählt ist, dass  $-\overline{A_t^{-1}(i)} = t$ .

**Satz 2.5**  $\iota_1$  und  $\iota_2$  sind Teichmüller-Einbettungen und definieren dieselbe Teichmüller-Geodätische:

$$\Delta_q := \Delta_{\iota_1} = \iota_1(\mathbb{D}) = \Delta_{\iota_2} = \iota_2(\mathbb{H})$$

**Beweis** Es gilt  $\iota_2 = \iota_1 \circ f$ , wobei  $f(z) := \frac{i-z}{i+z}$   $\mathbb{H}$  auf  $\mathbb{D}$  abbildet ([HS07, Prop. 2.12]). Nach [HS07, Prop. 2.11] ist  $\iota_2$  (und damit auch  $\iota_1$ ) ist eine Isometrie (bzgl. Teichmüllermetrik und hyperbolischer Metrik) und nach [HS07, Cor. 2.15] ist  $\iota_1$  (und damit auch  $\iota_2$ ) holomorph. Die Behauptung folgt.  $\square$

## 2.7 Teichmüller-Kurven und projektive Veech-Gruppen

**Definition 2.13** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche,  $q$  ein holomorphes quadratisches Differential auf  $X$  und  $\Delta_q$  die davon herrührende Teichmüller-Geodätische. Wenn das Bild  $C_q$  von  $\Delta_q$  unter der natürlichen Projektion  $\mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{M}_g, [X, f] \mapsto [X]$  eine algebraische Kurve ist, nennt man  $C_q$  eine **Teichmüller-Kurve** und  $(X, q)$  eine **Veech-Fläche**.

Um eine Aussage darüber zu treffen, wann  $(X, q)$  zu einer Teichmüller-Kurve führt, führen wir erst den Begriff der projektiven Veech-Gruppe ein:

Es sei das Paar  $(X, q)$  gegeben, wobei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  ist und  $q$  ein holomorphes quadratisches Differential darauf, und seien  $\mu$  die dazugehörige flache Struktur sowie  $\text{Aff}^+(X, \mu)$  die Gruppe der orientierungserhaltenden Abbildungen, die bezüglich der flachen Struktur  $\mu$  affin sind, also auf den Karten die folgende Form haben:

$$z \mapsto A \cdot z + t \quad \text{für } A \in \text{SL}_2(\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{C}$$

Da wir eine flache Struktur haben, ist  $A$  kartenunabhängig bis auf das Vorzeichen. Somit erhält man folgenden Gruppenhomomorphismus:

$$D : \text{Aff}^+(X, \mu) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto [A]$$

**Definition 2.14**  $\bar{\Gamma}(X, \mu) := D(\text{Aff}^+(X, \mu))$  nennt man die **projektive Veech-Gruppe** von  $(X, \mu)$ .

Falls  $\mu$  eine Translationsstruktur ist, haben wir sogar einen Gruppenhomomorphismus:

$$\text{der} : \text{Aff}^+(X, \mu) \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto A$$

Deshalb definieren wir (für später, ab Kapitel 4) auch gleich die Veech-Gruppe.

**Definition 2.15** Sei  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche. Dann nennt man  $\Gamma(X, \mu) := \text{der}(\text{Aff}^+(X, \mu))$  die **Veech-Gruppe** von  $(X, \mu)$ .

Wir wollen nun untersuchen, wie die projektive Veech-Gruppe auf einer Teichmüller-Geodätischen operiert. Dazu führen wir zunächst die Abbildungsklassengruppe ein.

**Definition 2.16** Gegeben sei eine kompakte, orientierbare Fläche  $S$  vom Geschlecht  $g$ . Sei  $\text{Homeo}^+(S)$  die Gruppe der orientierungserhaltenden Homöomorphismen  $S \rightarrow S$  und  $\text{Homeo}^0(S)$  bezeichne die Untergruppe der Homöomorphismen, die isotop zur Identität sind. Dann definieren wir die **Abbildungsklassengruppe**

$$\text{Mod}_g := \text{Mod}(S) := \text{Homeo}^+(S) / \text{Homeo}^0(S).$$

- Bemerkung 2.5** (a) Für die Definition von  $\text{Mod}_g$  kann man anstatt  $\text{Homeo}^+(S)$  und  $\text{Homeo}^0(S)$  auch die Gruppe der orientierungserhaltenden Diffeomorphismen  $\text{Diffeo}^+(S)$  und die Untergruppe der zur Identität isotopen Diffeomorphismen  $\text{Diffeo}^0(S)$  nehmen [FM12, §2.1].
- (b) Die Abbildungsklassengruppe kann man auch für nicht kompakte und/oder berandete Flächen definieren [FM12, §2.1].
- (c)  $\text{Aff}^+(X, \mu)$  ist eine Untergruppe von  $\text{Homeo}^+(X)$ .

Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Die Gruppe  $\text{Homeo}^+(X)$  operiert auf  $\mathcal{T}_g$  (für dessen Punkte wir  $X$  als Referenzfläche nehmen) durch

$$\begin{aligned} \text{Homeo}^+(X) \times \mathcal{T}_g &\rightarrow \mathcal{T}_g \\ (\varphi, [Y, f]) &\mapsto [Y, f \circ \varphi^{-1}]. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen  $[Y, f \circ \varphi^{-1}]$  durch  $\rho_\varphi([Y, f])$ .

Damit operiert auch  $\text{Aff}^+(X, \mu)$ , als Untergruppe von  $\text{Homeo}^+(X)$ , auf  $\mathcal{T}_g$ .

Da  $\text{Homeo}^0(X)$  trivial auf  $\mathcal{T}_g$  operiert, ist dadurch eine Operation von  $\text{Mod}_g$  auf  $\mathcal{T}_g$  induziert. Die Quotientenabbildung nach dieser Aktion ist genau die natürliche Projektion  $\mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$ .

**Satz 2.6**  $\text{Aff}^+(X, \mu)$  stabilisiert  $\Delta_q$  und operiert darauf durch:

$$\varphi \in \text{Aff}^+(X, \mu), B \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \implies \rho_\varphi(P_B) = P_{BA^{-1}}$$

mit  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  Urbild von  $D(\varphi) = [A]$ .

**Beweis**

$$\begin{array}{ccccc} (X, \mu) & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & (X, \mu) & \xrightarrow{\text{id}} & (X, \mu_B) \\ & & & \searrow \text{id} & \uparrow \\ & & & & (X, \mu_{BA^{-1}}) \end{array}$$

Die Abbildung  $(X, \mu_{BA^{-1}}) \rightarrow (X, \mu_B)$  im Diagramm ist eine affine Abbildung als Komposition affiner Abbildungen. Weiterhin gilt:  $D(BA^{-1}(BA^{-1})^{-1}) = I$  und damit ist die Abbildung holomorph, d.h.  $[(X, \mu_{BA^{-1}}), \text{id}] = [(X, \mu_B), \text{id} \circ \varphi^{-1}]$ . Nach Definition gilt aber

$$\rho_\varphi([(X, \mu_B), \text{id}]) = [(X, \mu_B), \text{id} \circ \varphi^{-1}]$$

und somit folgt die Behauptung  $\rho_\varphi([(X, \mu_B), \text{id}]) = [(X, \mu_{BA^{-1}}), \text{id}]$ . □

**Bemerkung 2.6** Es gilt sogar  $\text{Aff}^+(X, \mu) \cong \text{Stab}(\Delta_q) := \text{Stab}_{\text{Mod}_g}(\Delta_q)$ .

**Beweis** Siehe [EG97, Thm 1, Lemma 5.2]. □

**Satz 2.7** Es gilt

$$\bar{\Gamma}(X, \mu) \cong \text{Stab}(\Delta_q) / \text{Stab}_{\text{pw}}(\Delta_q),$$

wobei  $\text{Stab}_{\text{pw}}(\Delta_q) := \{\varphi \in \text{Mod}_g : \varphi|_{\Delta_q} = \text{id}_{\Delta_q}\}$ .

**Beweis** Sei

$$\pi : \text{Stab}(\Delta_q) \rightarrow \text{Stab}(\Delta_q) / \text{Stab}_{\text{pw}}(\Delta_q)$$

die Quotientenabbildung. Nach dem Beweis von Satz 2.6 hängt die Aktion von  $\varphi \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  auf  $\mathcal{T}_g$  nur von  $[A]$  ab und somit faktorisiert  $\pi \circ \rho$  über  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$ . Sei  $\bar{\rho}$  der von  $\rho$  induzierte Homomorphismus, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Aff}^+(X, \mu) & \xrightarrow{\rho} & \text{Stab}(\Delta_q) \\ D \downarrow & & \downarrow \pi \\ \bar{\Gamma}(X, \mu) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \text{Stab}(\Delta_q) / \text{Stab}_{\text{pw}}(\Delta_q) \end{array}$$

Nach Bem. 2.6 ist  $\rho$  ein Isomorphismus. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\bar{\rho}$  injektiv ist. Sei dazu  $\varphi \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  mit  $\bar{\rho}(D(\varphi)) = \text{id}|_{\Delta_q}$  und  $A \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  ein Urbild von  $[A] := D(\varphi)$ . Dann gilt insbesondere  $\bar{\rho}_\varphi(P_I) = P_I = P_{A^{-1}}$  und somit, nach Satz 2.4b,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}), \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a^2 + b^2 = 1$$

Sei nun  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$  mit  $\pm 1 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ . Nach Voraussetzung gilt  $\bar{\rho}_\varphi(P_B) = P_B = P_{BA^{-1}}$ . Damit ist die affine Transformation  $f$ , die von  $B$  herkommt, also

$$f : z \mapsto \lambda \text{Re}(z) + i \frac{1}{\lambda} \text{Im}(z)$$

biholomorph äquivalent zur affinen Transformation  $g$ , die von  $BA^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\frac{b}{\lambda} & \frac{a}{\lambda} \end{pmatrix}$  herkommt, also zu

$$g : z \mapsto \lambda a \text{Re}(z) + \lambda b \text{Im}(z) + i \left( \frac{a}{\lambda} \text{Im}(z) - \frac{b}{\lambda} \text{Re}(z) \right).$$

Es ist zu zeigen, dass  $A = \pm I$ .

Wir haben:

$$\begin{aligned} g \circ f^{-1} : z &\mapsto a \text{Re}(z) + \lambda^2 b \text{Im}(z) + i \left( a \text{Im}(z) - \frac{b}{\lambda^2} \text{Re}(z) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ a(z + \bar{z}) - i \lambda^2 b(z - \bar{z}) + a(z - \bar{z}) - i \frac{b}{\lambda^2} (z + \bar{z}) \right] \end{aligned}$$

und, da  $g \circ f^{-1}$  holomorph ist,

$$0 = (g \circ f^{-1})_{\bar{z}} = \frac{1}{2}ib \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

Da  $\lambda \neq \pm 1$ , folgt  $b = 0$  und damit  $A = \pm I$ . □

Wir vergleichen nun die Aktion von  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  auf  $\Delta_q$  mit der Aktion von  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  auf  $\mathbb{H}$ :

**Satz 2.8** Sei  $A \in \bar{\Gamma}(X, \mu) \leq \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ . Dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{t \mapsto -\bar{t}} & \mathbb{H} & \xrightarrow{\iota} & \Delta_q \\ \downarrow A & & \downarrow RAR^{-1} & & \downarrow \rho_A \\ \mathbb{H} & \xrightarrow{t \mapsto -\bar{t}} & \mathbb{H} & \xrightarrow{\iota} & \Delta_q \end{array}$$

wobei  $R = R^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (oder  $z \mapsto -\bar{z}$ ).

**Beweis** Sei  $t \in \mathbb{H}$ ,  $B \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$  mit  $-\overline{B^{-1}(i)} = -\bar{t}$ . Dann gilt  $\iota(-\bar{t}) = P_B$ .

$$\begin{array}{ccccc} t & \xrightarrow{t \mapsto -\bar{t}} & -\bar{t} & \xrightarrow{\iota} & P_B \\ \downarrow A & & \downarrow RAR^{-1} & & \downarrow \rho_A \\ A(t) & \xrightarrow{t \mapsto -\bar{t}} & -\overline{A(t)} & \xrightarrow{\dots} & P_{BA^{-1}} \end{array}$$

Zu zeigen ist, dass der punktierte Pfeil im Diagramm der Abbildung  $\iota$  entspricht. Es ist also zu zeigen, dass  $-\overline{(BA^{-1})^{-1}(i)} = -\overline{A(t)}$  gilt. Wir haben:

$$-\overline{(BA^{-1})^{-1}(i)} = -\overline{AB^{-1}(i)} = -A(\overline{B^{-1}(i)}) = -A(\bar{t}) = -\overline{A(t)} \quad \square$$

Kehren wir nun zurück zu der Frage, wann unter der Projektion  $\text{pr} : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  das Bild einer Teichmüller-Geodätischen  $\Delta_q$  eine algebraische Kurve ist:

**Satz 2.9**  $\text{pr}(\Delta_q)$  ist genau dann eine algebraische Kurve, wenn die zugehörige projektive Veech-Gruppe in  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ein Gitter ist (also eine Fuchssche Gruppe mit endlichem Kovolumen).

**Beweis** Siehe auch [McM03, Cor 3.3].

Nach Satz 2.8 faktorisiert die Abbildung  $\text{pr} \circ \iota : \mathbb{H} \rightarrow \text{pr}(\Delta_q) \subseteq \mathcal{M}_g$  über den Quotienten nach

$$\bar{\Gamma}^*(X, \mu) := R\bar{\Gamma}(X, \mu)R^{-1},$$

da  $\rho(\text{Aff}^+(X, \mu)) \cong \text{Stab}(\Delta_q) \leq \text{Mod}_g$  ( $\text{Mod}_g$  operiert auf den Fasern von  $\mathcal{T}_g$ ).

$\mathbb{H}/\bar{\Gamma}^*(X, \mu)$  ist genau dann eine Fläche endlichen Typs und somit eine algebraische Kurve, wenn  $\bar{\Gamma}^*(X, \mu)$  und damit auch  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  ein Gitter in  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist.

Da die Abbildung  $\mathbb{H}/\bar{\Gamma}^*(X, \mu) \rightarrow \mathcal{M}_g$  birational auf dem Bild ist [McM03, §2], ist  $\text{pr}(\Delta_q)$  auch genau dann eine algebraische Kurve, wenn  $\mathbb{H}/\bar{\Gamma}^*(X, \mu)$  eine ist. □

# Kapitel 3

## Schottkyräume

### 3.1 Schottkygruppen

**Definition 3.1** Eine Gruppe  $\Gamma \leq \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  von Möbiustransformationen heißt **Schottky-Gruppe**, wenn es ein  $g \geq 1$  sowie disjunkte, einfach zusammenhängende Gebiete  $D_1, D'_1, \dots, D_g, D'_g$  gibt, die durch ebenfalls disjunkte Jordan-Kurven  $C_i := \partial D_i, C'_i := \partial D'_i$  berandet sind, sowie Erzeuger  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  von  $\Gamma$  mit  $\gamma_i(C_i) = C'_i$  und  $\gamma_i(D_i) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D'_i}$ . Solche Erzeuger bilden eine so genannte **Schottky-Basis**.

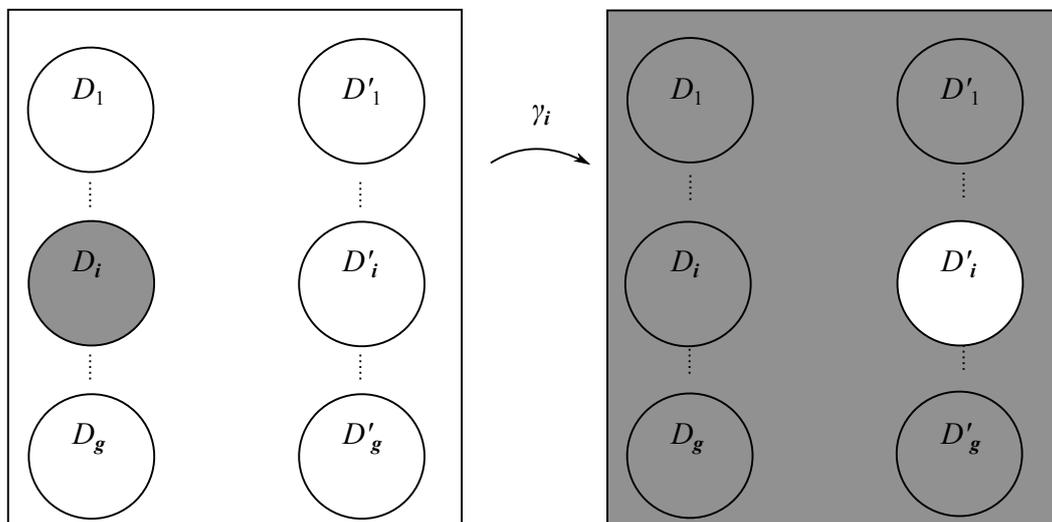


Abbildung 3.1.1: Abbildungsverhalten von Erzeugern einer Schottky-Gruppe

**Satz 3.1** Sei  $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$  eine Schottkybasis einer Schottkygruppe  $\Gamma$  und  $D_i, D'_i, C_i, C'_i$  seien für  $i \in \{1, \dots, g\}$  wie oben definiert und fest gewählt. Sei zudem  $A := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{i=1}^g \overline{D_i \cup D'_i}$ . Dann gilt:

- (a)  $\gamma_i$  ist loxodromisch.
- (b)  $\gamma_i$  hat seinen anziehenden Fixpunkt in  $D'_i$  und seinen abstoßenden Fixpunkt in  $D_i$ .

- (c)  $\Gamma$  ist frei in den Erzeugern  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ .
- (d)  $\Gamma$  ist kleinsch.
- (e)  $\bar{A}$  ist ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$ .

**Beweis** Sei  $A_i := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus (\overline{D_i \cup D'_i})$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$ .

- (a) Angenommen  $\gamma_i$  ist parabolisch: Dann kann angenommen werden, dass  $\gamma_i : z \mapsto z + 1$ .

Wir zeigen zunächst, dass  $\gamma_i(\bar{A}_i) \cap \bar{A}_i = C'_i$  und folgern dann  $\infty \notin \bar{A}_i$ :

Wir haben  $\gamma_i(A_i) \cap A_i = \emptyset$ , da  $A_i \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D_i}$  und somit

$$\gamma_i(A_i) \subset \gamma_i(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D_i}) = D'_i \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus A_i$$

Außerdem gilt  $\gamma_i(\partial A_i) \cap \partial A_i = C'_i$ , denn wegen  $\partial A_i = C_i \cup C'_i$  und mit  $\gamma_i(C_i) = C'_i$  gilt  $C'_i \subseteq \gamma_i(\partial A_i) \cap \partial A_i$ . Außerdem haben wir wegen  $C'_i \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D_i}$

$$\gamma_i(C'_i) \subset \gamma_i(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D_i}) = D'_i \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \partial A_i.$$

Deshalb gilt auch  $\gamma_i(\partial A_i) \cap \partial A_i \subseteq C'_i$ . Also ist  $\gamma_i(\bar{A}_i) \cap \bar{A}_i = C'_i$ .

Wäre  $\infty \in \bar{A}_i$ , dann müsste also  $\infty \in C'_i$  und  $\infty \in C_i$  gelten, im Widerspruch zu  $C_i \cap C'_i = \emptyset$ . Also  $\infty \in D_i \cup D'_i$ . Sei  $\infty \in D'_i$ . Dann ist  $D_i$  beschränkt. Es gibt also ein  $z_0 \in \overline{D_i}$ , sodass

$$\operatorname{Re} z_0 \leq \operatorname{Re} z \quad \forall z \in D_i$$

und somit ist  $z_0 \notin \gamma_i(D_i)$ . Andererseits gilt  $\overline{D_i} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D'_i} = \gamma_i(D_i)$ . Widerspruch.

Wenn  $\infty \in D_i$ , dann ist  $D'_i$  beschränkt und es gibt ein  $z_0 \in \overline{D'_i}$ , sodass

$$\operatorname{Re} z_0 \geq \operatorname{Re} z \quad \forall z \in \overline{D'_i}$$

und somit ist  $z_0 \notin \gamma_i^{-1}(\overline{D'_i})$ . Andererseits gilt  $\overline{D'_i} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus D_i = \gamma_i^{-1}(\overline{D'_i})$ . Widerspruch.

Angenommen  $\gamma_i$  ist elliptisch: Dann kann angenommen werden, dass  $\gamma_i : z \mapsto e^{i\theta} z$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma_i(D_i) &= \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D'_i} \Leftrightarrow \\ \gamma_i(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus D_i) &= \overline{D'_i} \Rightarrow \\ \gamma_i(\bar{A}) &\subset \overline{D'_i} \text{ und } \gamma_i^n(\bar{A}) \subset \overline{D'_i} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sei aber andererseits  $z_0 \in A$  und  $U(z_0) \subseteq A$  eine offene Umgebung von  $z_0$ . Es existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\gamma_i^N(z_0) = e^{iN\theta} \cdot z_0 \in U(z_0) \Rightarrow \gamma_i^N(z_0) \notin \overline{D'_i}$ . Widerspruch.

Also ist  $\gamma_i$  loxodromisch.

- (b) Ohne Einschränkung sei  $\gamma_i : z \mapsto k \cdot z$ ,  $|k| > 1$ . Dann ist  $\infty$  der anziehende und 0 der abstoßende Fixpunkt.  $\gamma_i(A_i) \cap A_i = \emptyset = \gamma_i(C_i) \cap C_i$  und somit  $0, \infty \notin \bar{A}_i$ . Da  $\gamma_i^n(D'_i) \subset D'_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$  und da  $\gamma_i^n(z) \rightarrow \infty$  für  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ , kann  $D'_i$  nicht beschränkt sein, also  $\infty \in D'_i$ .

Angenommen,  $0 \in D'_i$ . Da  $D'_i$  offen ist, ist dann auch  $B_\varepsilon(0) \subseteq D'_i$  für ein  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $\gamma_i^n(B_\varepsilon(0)) = B_{\varepsilon \cdot |\gamma_i|^n}(0) \subseteq D'_i \forall n \in \mathbb{N}$ . Also  $D'_i \supseteq \mathbb{C}$ . Widerspruch! Also gilt  $0 \in D_i$ .

(c) Gegeben sei die freie Gruppe  $F_g = \langle \bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_g \rangle$  und  $\Psi : F_g \rightarrow \Gamma$  der Homomorphismus, der durch  $\bar{\gamma}_i \mapsto \gamma_i$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$  bestimmt ist. Wir wollen zeigen, dass  $\Psi$  injektiv ist.

Sei  $\bar{\gamma} \in F_g \setminus \{1\}$  als reduziertes Wort gegeben, also von der Form  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_{i_1}^{j_1} \cdots \bar{\gamma}_{i_n}^{j_n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, g\}$  und  $j_1, \dots, j_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  sowie  $i_k \neq i_{k+1}$  für  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Sei  $\gamma = \Psi(\bar{\gamma})$ . Wir müssen  $\gamma \neq \text{id}$  zeigen. Es gilt

$$\gamma_i(A) \subset \gamma_i(A_i) \subset \gamma_i(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D_i}) = D'_i \quad \text{sowie} \quad \gamma_i(D'_i) \subset \gamma_i(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D_i}) = D'_i$$

und analog dazu  $\gamma_i^{-1}(A) \subset \gamma_i^{-1}(A_i) \subset D_i$  sowie  $\gamma_i^{-1}(D_i) \subset D_i$ . Somit folgt:

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \gamma_{i_1}^{j_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_n}^{j_n}(A) \\ &\subset \gamma_{i_1}^{j_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_{n-1}}^{j_{n-1}}(D_{i_n} \cup D'_{i_n}) \\ &\subset \gamma_{i_1}^{j_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_{n-1}}^{j_{n-1}}(A_{i_{n-1}}) \\ &\subset \gamma_{i_1}^{j_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_{n-2}}^{j_{n-2}}(D_{i_{n-1}} \cup D'_{i_{n-1}}) \subset \dots \subset (D_{i_1} \cup D'_{i_1}) \end{aligned}$$

Also gilt  $\gamma(A) \cap A = \emptyset$  und daraus folgt  $\gamma \neq \text{id}$ .

(d) Aus dem Beweis zu Punkt c) folgt, dass kein Punkt aus  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(A)$  ein Limespunkt sein kann und somit, dass  $\Gamma$  kleinsch ist. Es gilt sogar, dass kein Punkt aus  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{A})$  ein Limespunkt sein kann. Denn sei  $z \in \partial\gamma(A)$  für ein  $\gamma \in \Gamma$ . Dann gilt  $z \in \gamma(C_i)$  bzw.  $z \in \gamma(C'_i)$ , und somit hat  $z$  eine offene Umgebung, die  $\gamma(A)$ ,  $\partial\gamma(A)$  und  $\gamma \circ \gamma_i^{-1}(A)$  bzw.  $\gamma \circ \gamma_i(A)$ , schneidet und in deren Vereinigung liegt. Dort kann aber kein weiterer Punkt aus der Bahn von  $z$  liegen.

(e) Dass  $\gamma(A) \cap A = \emptyset \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ , wissen wir bereits. Es bleibt zu zeigen, dass  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{A})$  der ganze Diskontinuitätsbereich ist. Anders ausgedrückt:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{A}) = \Lambda := \{\text{Limespunkte von } \Gamma\}.$$

Aufgrund des Beweises von Punkt d) bleibt nur noch die Inklusion " $\subseteq$ " zu zeigen:

Sei ohne Einschränkung  $\infty \in A$  und  $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\overline{A})$ . Dann gilt Folgendes (wobei an Stelle der  $D'_i$  auch  $D_i$  stehen können, dann ist  $\gamma_i$  durch  $\gamma_i^{-1}$  zu ersetzen):

$$\begin{aligned} z \notin \overline{A} &\Rightarrow z \in D'_{i_1} \text{ für ein } i_1 \in \{1, \dots, g\} \\ z \notin \gamma_{i_1}(\overline{A}) &\Rightarrow z \in \gamma_{i_1}(D'_{i_2}) \subset D'_{i_1} \text{ für ein } i_2 \in \{1, \dots, g\} \\ z \notin \gamma_{i_1} \circ \gamma_{i_2}(\overline{A}) &\Rightarrow z \in \gamma_{i_1} \circ \gamma_{i_2}(D'_{i_3}) \subset \gamma_{i_1}(D'_{i_2}) \subset D'_{i_1} \text{ für ein } i_3 \in \{1, \dots, g\}, \text{ usw.} \end{aligned}$$

Für eine Folge  $(\gamma_{i_j}^{e_j})_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $i_j \in \{1, \dots, g\}$  und  $e_j \in \{-1, 1\}$  erhalten wir somit eine Folge von Gebieten

$$G_n := \gamma_{i_1}^{e_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_n}^{e_n}(D'_{i_{n+1}}) \text{ für } e_{n+1} = 1$$

bzw.  $G_n := \gamma_{i_1}^{e_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_n}^{e_n}(D_{i_{n+1}})$  für  $e_{n+1} = -1$

mit  $G_{n+1} \subset G_n$  und  $z \in G_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  und wir erhalten (als Randkurven der Gebiete  $G_n$ ) eine Folge von Jordankurven

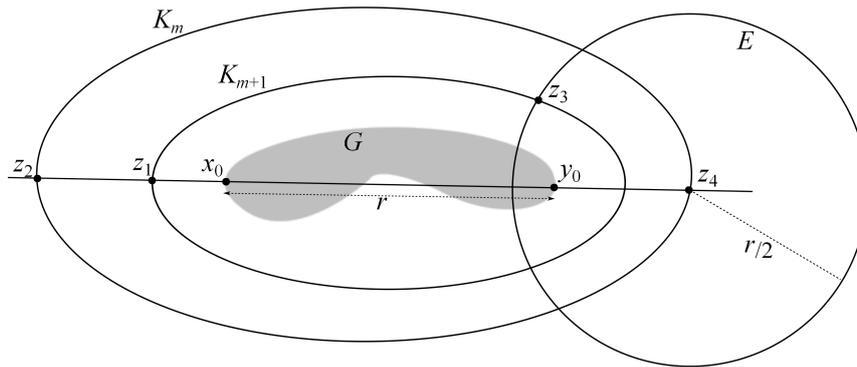
$K_n := \gamma_{i_1}^{e_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_n}^{e_n}(C'_{i_{n+1}})$  für  $e_{n+1} = 1$

bzw.  $K_n := \gamma_{i_1}^{e_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_n}^{e_n}(C_{i_{n+1}})$  für  $e_{n+1} = -1$ ;  $e_i \in \{\pm 1\}$ .

Sei  $G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$ . Wir wollen zeigen, dass  $G = \{z\}$  und dass somit  $z \in \Lambda$ .  
 $G$  ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Es existiert also

$$r := \max\{|x - y| : x, y \in G\}.$$

Angenommen  $r \neq 0$ :



Seien  $x_0, y_0 \in G$  mit  $|x_0 - y_0| = r$ . Dann existieren für jedes  $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$  zwei benachbarte Folgenglieder  $K_m$  und  $K_{m+1}$ , sowie Punkte  $z_1, z_2$  auf der Halbgeraden  $x_0 y_0^-$  und  $z_4$  auf der Halbgeraden  $y_0 x_0^-$  mit  $z_1 \in K_{m+1}$  und  $z_2, z_4 \in K_m$  mit folgenden Eigenschaften:

$$|z_1 - z_2| \leq \varepsilon, \quad r \leq |z_1 - z_4| \leq r + \varepsilon$$

Des Weiteren sei die Kreisscheibe  $E := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_4| \leq \frac{r}{2}\}$  gegeben. Da  $y_0 \in E$  und  $x_0 \notin E$  schneiden sich  $\partial E$  und  $K_{m+1}$ . Es gibt also ein  $z_3 \in K_{m+1}$  mit

$$|z_3 - z_4| = \frac{r}{2}.$$

Daraus ergibt sich

$$|z_1 - z_3| \geq |z_1 - z_4| - |z_3 - z_4| \geq r - \frac{r}{2}$$

und somit

$$|z_2 - z_3| \geq |z_1 - z_3| - |z_1 - z_2| \geq \frac{r}{2} - \varepsilon.$$

Insgesamt folgt:

$$|DV(z_1, z_2, z_3, z_4)| = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4|}{|z_2 - z_3| \cdot |z_1 - z_4|} \leq \frac{\varepsilon \cdot \frac{r}{2}}{(\frac{r}{2} - \varepsilon) \cdot r} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad (3.1)$$

Sei nun  $\gamma := (\gamma_{i_1}^{e_1} \circ \dots \circ \gamma_{i_m}^{e_m})^{-1}$ . Dann ist einerseits

$$|DV(z_1, z_2, z_3, z_4)| = |DV(\gamma(z_1), \gamma(z_2), \gamma(z_3), \gamma(z_4))|,$$

da  $\gamma$  eine Möbiustransformation ist und somit das Doppelverhältnis invariant lässt. Andererseits haben wir  $\infty \in A$  angenommen, und somit gilt

$$0 < \inf\{|w_i - w_j| : w_i \in B_i \neq B_j \ni w_j; B_i \in \{C_i, C'_i\}, B_j \in \{C_j, C'_j\}\} < \sup\{\dots\} < \infty.$$

Wir haben also:

$$d := \inf\{|DV(w_1, w_2, w_3, w_4)| : w_1, w_3 \in B_i \neq B_j \ni w_2, w_4; \} > 0$$

Da  $\gamma(K_{m+1}) = C_{i_{m+2}}$  oder  $\gamma(K_{m+1}) = C'_{i_{m+2}}$  und  $\gamma(K_m)$  eine dazu disjunkte Komponente von  $\partial A$  ist (entweder  $C'_{i_{m+1}}$  oder  $C_{i_{m+1}}$ ), gilt somit

$$|DV(\gamma(z_1), \gamma(z_2), \gamma(z_3), \gamma(z_4))| \geq d,$$

ein Widerspruch zu (3.1). Somit ist  $r = 0$  und  $z$  ist der einzige Punkt in  $G$ . Also ist  $z \in \Lambda$ .  $\square$

**Bemerkung 3.1** Satz 3.1 c) ist ein Spezialfall des sog. Ping-Pong-Lemmas, siehe z.B. [FM12, Lemma 3.15].

**Bemerkung 3.2** Sei  $\Omega := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{A})$  der Diskontinuitätsbereich von  $\Gamma$ . Dann ist  $X = \Omega/\Gamma$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ .

**Beweis** Der Fundamentalbereich  $\bar{A}$  von  $\Gamma$  ist der Abschluss eines  $2g$ -fach zusammenhängenden Gebietes in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ . Die Randkurven  $C_i$  und  $C'_i$  werden durch  $\Gamma$  miteinander identifiziert. Damit ist  $X$  topologisch eine Sphäre mit  $g$  Henkeln. Da die Gruppe  $\Gamma$  diskontinuierlich durch Möbiustransformationen auf  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  operiert, erbt  $X$  die komplexe Struktur von  $\Omega$ .  $\square$

**Definition 3.2** Die Quotienten-Abbildung  $\Omega \xrightarrow{\Gamma} X$  heißt **Schottky-Überlagerung**.

**Satz 3.2** Jede kompakte Riemannsche Fläche  $X$  mit  $g \geq 1$  hat eine solche Schottky-Überlagerung.

Die folgende Beweisskizze dieses klassischen Resultats ist aus [HS07, Prop. 5.2].

**Beweis** Wähle disjunkte, einfach geschlossene Kurven  $c_1, \dots, c_g$  in  $X$  so, dass  $A := X \setminus \bigcup_{i=1}^g c_i$  zusammenhängend ist.  $A$  ist konform äquivalent zu einem Gebiet in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  [AS60, IV, 19F-G], das

von  $2g$  geschlossenen Kurven berandet ist. Für  $i \in \{1, \dots, g\}$  seien  $C_i$  und  $C'_i$  die Randkurven, die durch das Zerschneiden an  $c_i$  entstehen. Sei nun  $F_g$  die freie Gruppe mit den Erzeugern  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ . Für jedes reduzierte Wort  $w \in F_g$  nehmen wir eine Kopie  $A_w$  von  $A$ . Nun kleben wir die Kopien folgendermaßen aneinander: Für  $w = w'\gamma_i$  verkleben wir  $C_i$  auf  $A_{w'}$  mit  $C'_i$  auf  $A_w$ . Wir erhalten ein Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , auf dem  $F_g$  operiert. Diese Aktion überträgt sich auf ganz  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , d.h.  $F_g$  operiert durch Möbiustransformationen, siehe dazu [AS60, IV, 19F].  $\square$

## 3.2 Der Schottkyraum und dessen komplexe Struktur

**Definition 3.3** Sei  $\tilde{\mathcal{S}}_g$  die Menge aller  $(\gamma_1, \dots, \gamma_g) \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})^g$ , die eine Schottky-Gruppe  $\Gamma$  erzeugen und eine Schottky-Basis bilden. Betrachte die Äquivalenzklassen unter simultaner Konjugation:

$$\mathcal{S}_g := \{(\gamma_1, \dots, \gamma_g)\} / \sim$$

$\mathcal{S}_g$  heißt der *Schottkyraum* für Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ .

Sei  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_g$  und seien  $\Gamma(s)$ ,  $\Omega(s)$  und  $X(s) := \Omega(s)/\Gamma(s)$  die dazugehörige Schottky-Gruppe, Diskontinuitätsbereich und Riemannsche Fläche. Dies führt zu einer alternativen Definition des Schottkyraums:

**Definition 3.4** Man nehme die Paare  $(X, \sigma)$ , so dass

- i)  $\sigma : F_g \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  ein injektiver Homomorphismus ist,
- ii)  $\Gamma := \sigma(F_g)$  eine Schottky-Gruppe ist,
- iii)  $\Omega(\Gamma)/\Gamma \cong X$ .

Dann sei  $\mathcal{S}_g := \{(X, \sigma)\} / \sim$  mit

$$(X, \sigma) \sim (X', \sigma') \Leftrightarrow \exists A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) : \sigma'(\gamma) = A\sigma(\gamma)A^{-1} \quad \forall \gamma \in F_g.$$

$X$  und  $X'$  sind isomorph, d.h. die *Vergiss-Abbildung*

$$\begin{aligned} \mu : \quad \mathcal{S}_g &\rightarrow \mathcal{M}_g \\ [(X, \sigma)] &\mapsto [X] \end{aligned}$$

ist wohldefiniert.

**Definition 3.5** Sei  $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  loxodromisch. Das bedeutet, dass  $\gamma$  zu einer Möbiustransformation der Form  $z \mapsto \lambda \cdot z$  mit  $0 < |\lambda| < 1$  konjugiert ist. Dann nennt man  $\lambda$  den *Multiplikator* von  $\gamma$ . Dieser ist wohldefiniert.

**Satz 3.3** (a) Die Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_g &\hookrightarrow (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))^{3g} \\ (\gamma_1, \dots, \gamma_g) &\mapsto (z_1, w_1, \lambda_1, \dots, z_g, w_g, \lambda_g)\end{aligned}$$

ist eine offene Einbettung. Dabei seien  $z_i$  der anziehende Fixpunkt,  $w_i$  der abstoßende Fixpunkt und  $\lambda_i$  der Multiplikator von  $\gamma_i$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$ .

(b)  $\mathcal{S}_1$  ist eine punktierte Kreisscheibe.

(c) Für  $g \geq 2$  ist  $\mathcal{S}_g$  homöomorph zu einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}^{3g-3}$ .

**Beweis** (a) Die Injektivität folgt daraus, dass eine Möbiustransformation durch den anziehenden Fixpunkt, den abstoßenden Fixpunkt und den Multiplikator eindeutig bestimmt ist.

Es bleibt noch zu zeigen, dass das Bild offen ist:

Das Tripel  $(z_i, w_i, \lambda_i)$  sei für einen der Erzeuger

$$\gamma_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i} \quad \text{mit} \quad a_i d_i - b_i c_i = 1,$$

vorgegeben. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $z_i, w_i \neq \infty$  und dass  $c_i \in \mathbb{H}$ , da wir dies durch Konjugation erreichen können. Dadurch ist dann auch  $(a_i, b_i, c_i, d_i) \in \mathbb{C}^4$  eindeutig. Wegen Satz 3.1a gilt zudem  $z_i \neq w_i$ . Es gilt also

$$(z_i, w_i, \lambda_i) \in E := \{(z, w, \lambda) : z, w \in \mathbb{C}, z \neq w, \lambda \in \mathbb{D} \setminus \{0\}\} \quad (\text{offen in } \mathbb{C}^3).$$

Für die Fixpunkte  $v_1$  und  $v_2$  von  $\gamma_i$  gilt

$$v_1 = \frac{(a_i - d_i) + \sqrt{(a_i + d_i)^2 - 4}}{2c_i} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{(a_i - d_i) - \sqrt{(a_i + d_i)^2 - 4}}{2c_i}.$$

Einer davon ist  $z_i$ , der andere  $w_i$ . Für den Multiplikator  $\lambda_i$  von  $\gamma_i$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} + \sqrt{\lambda_i} &= a_i + d_i \\ \Rightarrow \lambda_i - \sqrt{\lambda_i} \cdot (a_i + d_i) + 1 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_i &= \left( \frac{a_i + d_i}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_i + d_i}{2}\right)^2 - 1} \right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\lambda_i} = \left( \frac{a_i + d_i}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_i + d_i}{2}\right)^2 - 1} \right)^2 \quad \text{oder umgekehrt.}\end{aligned}$$

$\lambda_i$  ist dabei der Wert, dessen Betrag kleiner als 1 ist. Die Terme unter der Wurzel sind nicht Null, da  $|\lambda_i| \neq 1$ .

Seien nun

$$r_i := z_i + w_i, \quad s_i := z_i \cdot w_i, \quad t_i := \lambda_i + \frac{1}{\lambda_i}.$$

Die Werte  $r_i, s_i, t_i$  sind durch  $z_i, w_i, \lambda_i$  eindeutig bestimmt. Es ergibt sich

$$\begin{cases} \frac{a_i - d_i}{c_i} & = r_i \\ \frac{(a_i - d_i)^2 - (a_i + d_i)^2 + 4}{4c_i^2} & = s_i \\ (a_i + d_i)^2 - 2 & = t_i \end{cases}$$

Daraus folgt

$$a_i = \frac{1}{2} \left( r_i \sqrt{\frac{t_i - 2}{r_i^2 - 4s_i}} + \sqrt{t_i + 2} \right), \quad c_i = \sqrt{\frac{t_i - 2}{r_i^2 - 4s_i}}, \quad d_i = \frac{1}{2} \left( -r_i \sqrt{\frac{t_i - 2}{r_i^2 - 4s_i}} + \sqrt{t_i + 2} \right).$$

Aufgrund der beiden Wurzelterme ist  $(a_i, c_i, d_i)$  noch nicht eindeutig bestimmt. Die Wahl von  $\sqrt{\frac{t_i - 2}{r_i^2 - 4s_i}}$  ist aber durch  $c_i \in \mathbb{H}$  vorgegeben und die Wahl von  $\sqrt{t_i + 2}$  entspricht der Wahl zwischen  $\gamma_i$  und  $\gamma_i^{-1}$ , also der Wahl, welcher der Fixpunkte anziehend und welcher abstoßend sein soll, und ist somit durch  $z_i$  und  $w_i$  vorgegeben. Wegen  $c_i \neq 0$  ist  $b_i$  auch vorgegeben durch  $a_i d_i - b_i c_i = 1$ . Wegen  $\lambda_i \neq \pm 1$  ist  $t_i \pm 2 \neq 0$ . Außerdem gilt:

$$r_i^2 - 4s_i = (v_1 + v_2)^2 - 4v_1 v_2 = (v_1 - v_2)^2 \neq 0$$

Somit gibt es offene  $U \subset E$  und  $V \subset \mathbb{C} \times \mathbb{H} \times \mathbb{C}$  mit  $(z_i, w_i, \lambda_i) \in U$  und  $(a_i, c_i, d_i) \in V$ , so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f: U & \rightarrow V \\ (z, w, \lambda) & \mapsto \left( \frac{1}{2} \left( r \sqrt{\frac{t-2}{r^2-4s}} + \sqrt{t+2} \right), \sqrt{\frac{t-2}{r^2-4s}}, \frac{1}{2} \left( -r \sqrt{\frac{t-2}{r^2-4s}} + \sqrt{t+2} \right) \right) \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig ist und für die  $f(z_i, w_i, \lambda_i) = (a_i, c_i, d_i)$ . Dabei seien  $r, s, t$  analog zu  $r_i, s_i, t_i$  definiert.

Seien nun  $D_i$  und  $D'_i$  wie in der Definition von Schottky-Gruppen, d.h.  $\gamma_i(D_i) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D'_i}$ .

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_i: \mathbb{C} \times \mathbb{H} \times \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (a, c, d, x) & \mapsto \frac{ax + \frac{ad-1}{c}}{cx+d} \end{aligned}$$

ist ebenfalls stetig und deshalb ist auch  $\hat{f} := \hat{\gamma}_i \circ (f \times \text{id})$  stetig auf  $U \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  und es gibt für alle  $\delta > 0$  ein  $\varepsilon := \varepsilon(z_i, w_i, \lambda_i, x) > 0$ , so dass

$$|(z_i, w_i, \lambda_i, x) - (z'_i, w'_i, \lambda'_i, x')| < \varepsilon \Rightarrow |\hat{f}(z_i, w_i, \lambda_i, x) - \hat{f}(z'_i, w'_i, \lambda'_i, x')| < \delta.$$

Mit der Kompaktheit von  $\overline{D_i}$  folgt daraus, dass es für alle  $\delta > 0$  ein  $\varepsilon := \varepsilon(z_i, w_i, \lambda_i, D_i) > 0$  gibt, so dass

$$|(z_i, w_i, \lambda_i) - (z'_i, w'_i, \lambda'_i)| < \varepsilon \Rightarrow \hat{f}(z'_i, w'_i, \lambda'_i, \overline{D_i}) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{D''_i}, \quad (3.2)$$

wobei  $D''_i$  ein Gebiet ist, für das gilt:

$$z' \in D''_i \Rightarrow d(z', D'_i) < \delta.$$

Da  $\overline{D_1}, \overline{D'_1}, \dots, \overline{D_g}, \overline{D'_g}$  paarweise disjunkt sind, sind auch  $\overline{D_1}, \overline{D'_1}, \dots, \overline{D_i}, \overline{D''_i}, \dots, \overline{D_g}, \overline{D'_g}$  paarweise disjunkt, sofern  $\delta$  klein genug ist. Das bedeutet, dass auch  $(\gamma_1, \dots, \gamma'_i, \dots, \gamma_g)$  mit

$$\gamma'_i : z \mapsto \frac{a'z + \frac{a'd'-1}{c'}}{c'z + d'} \quad \text{für } (a', b', c') := f(z'_i, w'_i, \lambda'_i), \quad z'_i, w'_i, \lambda'_i \text{ wie in (3.2)}$$

eine Schottky-Basis ist. Daraus folgt die Behauptung.

- (b) Jede Äquivalenzklasse enthält genau eine Möbiustransformation der Form  $z \mapsto \lambda \cdot z$  mit  $\lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < 1$ .
- (c) In der Äquivalenzklasse von  $s \in \tilde{\mathcal{S}}_g$  liegt genau ein Element, für das  $\gamma_1$  bei 0 seinen anziehenden und bei  $\infty$  den abstoßenden Fixpunkt und  $\gamma_2$  seinen anziehenden Fixpunkt bei 1 hat. Da  $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$  eine Schottky-Basis ist, haben  $\gamma_2, \dots, \gamma_g$  auch keinen Fixpunkt bei  $\infty$ .  $\square$

### 3.3 Grober und feiner Modulraum

**Definition 3.6** Gegeben seien zwei analytische Räume  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{B}$  sowie eine eigentliche, analytische Abbildung

$$\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}.$$

Dann heißt  $\mathcal{H}$  eine **Familie von Riemannschen Flächen** vom Geschlecht  $g$  über  $\mathcal{B}$  (ab jetzt nur noch als ‘‘Familie‘‘ bezeichnet), wenn für alle  $b \in \mathcal{B}$  die Faser  $\pi^{-1}(b)$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  ist.

**Definition 3.7**  $\mathcal{F}_g$  heißt **feiner Modulraum** für Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Es existiert eine Bijektion

$$\mathcal{F}_g \xrightarrow{\sim} \{\text{Isomorphieklassen von kompakten Riemannschen Flächen vom Geschlecht } g\},$$

die wir gleich benützen, um  $\mathcal{F}_g$  mit der Menge dieser Isomorphieklassen zu identifizieren.

- (b) Es existiert eine Familie  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}_g$  (die dann **universelle Familie** heißt), so dass für jede Familie  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$  die Abbildung  $s : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}_g, b \mapsto [\pi^{-1}(b)]$  analytisch ist und so, dass  $\mathcal{H} \cong \mathcal{U} \times_{\mathcal{F}_g} \mathcal{B}$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} \times_{\mathcal{F}_g} \mathcal{B} \cong \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{s} & \mathcal{F}_g \end{array}$$

**Definition 3.8**  $\mathcal{G}_g$  heißt *grober Modulraum* für Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Wie oben.
- (b) Für jede Familie  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{B}$  ist die Abbildung  $s : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{G}_g, b \mapsto [\pi^{-1}(b)]$  analytisch.
- (c) Für jedes  $\mathcal{G}'_g$ , das auch a) und b) erfüllt, gibt es eine analytische Abbildung,  $\Psi : \mathcal{G}_g \rightarrow \mathcal{G}'_g$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{H} & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{B} & \\
 s' \swarrow & & \searrow s \\
 \mathcal{G}'_g & \xleftarrow{\Psi} & \mathcal{G}_g
 \end{array}$$

**Satz 3.4**  $\mathcal{M}_g$  ist ein grober Modulraum für Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$  und  $\mathcal{T}_g$  ist ein feiner Modulraum für markierte Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$ .

**Beweis** Siehe [HM98, 2A, 2C]. □

Die nächsten zwei Sätze, sowie die Definition folgen [HS07, Prop. 5.6, Def. 5.7, Thm. 5.8].

**Satz 3.5** Die Vergiss-Abbildung  $\mu : \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{M}_g$  ist analytisch und surjektiv.

**Beweis** Die Surjektivität folgt daraus, dass jede kompakte Riemannsche Fläche eine Schottky-Überlagerung hat. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass  $\mu$  analytisch ist. Da  $\mathcal{M}_g$  ein grober Modulraum für Riemannsche Flächen ist, reicht es, eine Familie  $\pi : \mathcal{C}_g \rightarrow \mathcal{S}_g$  von Riemannschen Flächen über  $\mathcal{S}_g$  zu finden, die  $\mu$  im folgenden Sinne induziert:  $\mu(s)$  ist die Äquivalenzklasse der Riemannschen Fläche  $\mathcal{C}_g := \pi^{-1}(s) \subset \mathcal{C}_g$ .

Dazu sei zunächst

$$\Omega_g := \{(s, z) \in \mathcal{S}_g \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : z \in \Omega(s)\}.$$

Das ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, auf der  $F_g$  durch  $\varphi(s, z) := (s, \sigma(\varphi)(z))$  holomorph operiert (also trivial auf der ersten Komponente). Dabei sei  $\varphi \in F_g, s = (X, \sigma) \in \mathcal{S}_g$  mit  $\sigma : F_g \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  als den eindeutig bestimmten injektiven Homomorphismus wie im Beweis von Satz 3.3c, und  $z$  sei aus dem zu  $s$  gehörenden Diskontinuitätsbereich  $\Omega(s)$ .

Für ein festes  $s \in \mathcal{S}_g$  identifizieren wir  $\Omega(s)$  mit  $\{s\} \times \Omega(s) \subset \Omega_g$ . Dann ist  $\mathcal{C}_g := \Omega(s)/F_g$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Da  $F_g$  trivial auf der ersten Komponente von  $\Omega_g$  operiert, faktorisiert die Projektion auf die erste Komponente  $\hat{\pi}_1 : \Omega_g \rightarrow \mathcal{S}_g$  über den Quotientenraum  $\mathcal{C}_g := \Omega_g/F_g$ . Die induzierte Abbildung  $\pi : \mathcal{C}_g \rightarrow \mathcal{S}_g$  ist die gesuchte Familie. □

**Definition 3.9** (a) Sei  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{S}$  eine analytische Abbildung zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten und  $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/\mathcal{S})$  eine eigentlich diskontinuierliche Untergruppe. Dann heißt die Quotientenabbildung  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma = \mathcal{C}$  eine *Schottky-Überlagerung*, wenn die induzierte Abbildung

$\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  eine Familie von Riemannschen Flächen ist und wenn die Einschränkung der Quotientenabbildung  $U_s \rightarrow C_s$  für jedes  $s \in \mathcal{S}$  eine Schottky-Überlagerung ist.

- (b) Eine Schottky-Überlagerung  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma$  mit einer Äquivalenzklasse von Isomorphismen  $\sigma : F_g \rightarrow \Gamma$  heißt **Schottky-Struktur** auf  $\mathcal{U}$ . Dabei werden  $\sigma$  und  $\sigma'$  als äquivalent betrachtet, wenn sie sich nur durch einen inneren Automorphismus von  $F_g$  unterscheiden.

**Satz 3.6**  $\mathcal{S}_g$  ist ein feiner Modulraum für Riemannsche Flächen vom Geschlecht  $g$  mit Schottky-Struktur.

**Beweis** (Skizze) Sei  $\mathcal{C}/\mathcal{S}$  eine Familie von Riemannschen Flächen und  $(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/\Gamma = \mathcal{C}, \sigma : F_g \xrightarrow{\sim} \Gamma)$  eine Schottky-Struktur auf  $\mathcal{C}$ . Dann existiert eine Abbildung  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}_g$ , die einen Punkt  $x$  auf die Äquivalenzklasse der Schottky-Überlagerung  $U_x \rightarrow C_x$  abbildet.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{U} & \longrightarrow & \Omega_g \\
 \downarrow / \Gamma & & \downarrow / F_g \\
 \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}_g \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{f} & \mathcal{S}_g \\
 & & \downarrow \mu \\
 & & \mathcal{M}_g
 \end{array}$$

Außerdem gilt:  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_g \times_{\mathcal{S}_g} \mathcal{S}$  und  $\mathcal{U} = \Omega_g \times_{\mathcal{C}_g} \mathcal{C} = \Omega_g \times_{\mathcal{S}_g} \mathcal{S}$ .

Es ist noch zu zeigen, dass  $f$  analytisch ist. Siehe dazu [HS07, Thm. 5.8] und [GH88, §3]. □

### 3.4 Zusammenhang zwischen Teichmüller- und Schottkyraum

Wir konstruieren nun eine Familie von Riemannschen Flächen über  $\mathcal{T}_g$ . Dazu nehmen wir die folgende alternative Definition des Teichmüllerraums:

**Definition 3.10** Für  $g \geq 2$  sei die (abstrakte) Fundamentalgruppe einer Fläche vom Geschlecht  $g$  gegeben durch

$$\pi_g := \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right\rangle.$$

Weiter sei  $\tilde{\mathcal{T}}_g$  die Menge der Paare  $(X, \tau)$ , wobei

- $\tau : \pi_g \hookrightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ein injektiver Gruppenhomomorphismus,
- $\tau(\pi_g)$  eine kokompakte Fuchssche Gruppe
- und  $X$  die Riemannsche Fläche  $\mathbb{H}/\tau(\pi_g)$  sei.

Auf  $\tilde{\mathcal{T}}_g$  definieren wir die Äquivalenzrelation

$$(X, \tau) \sim (X', \tau') :\Leftrightarrow \exists \gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) : c_\gamma \circ \tau = \tau',$$

wobei  $c_\gamma$  die Konjugation mit  $\gamma$  bezeichne:

$$\begin{aligned} c_\gamma : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto \gamma A \gamma^{-1} \end{aligned}$$

Dann definieren wir  $\mathcal{T}_g := \tilde{\mathcal{T}}_g / \sim$ .

**Bemerkung 3.3** In jeder Äquivalenzklasse  $(\tilde{X}, \tilde{\tau}) / \sim$  finden wir genau einen Vertreter  $(X, \tau)$ , so dass  $\tau(b_1)$  als anziehenden Fixpunkt 0 und als abstoßenden Fixpunkt  $\infty$  hat und dass  $\tau(b_2)$  als anziehenden Fixpunkt 1 hat. Im Folgenden werden wir  $\mathcal{T}_g$  mit einem solchen Vertretersystem identifizieren.

Diese Definition von  $\mathcal{T}_g$  ist äquivalent zur Definition 2.4. Das sieht man durch den Umweg über eine weitere Definition, bei der als Markierungen Standarderzeugendensysteme der Fundamentalgruppe bis auf isotope Verschiebung des Basispunktes genommen werden (das Standarderzeugendensystem wird somit insbesondere nur bis auf inneren Automorphismus betrachtet). Dabei definieren zwei markierte Flächen den gleichen Punkt, wenn es zwischen ihnen eine biholomorphe Abbildung gibt, die die Markierungen aufeinander abbildet, siehe [IT92, § 1.3]. Der so definierte Teichmüllerraum sei zur Unterscheidung mit  $\mathcal{T}'_g$  bezeichnet. Wir zeigen  $\mathcal{T}'_g = \mathcal{T}_g$ .

Sei  $[(X, \Sigma)] \in \mathcal{T}'_g$ , wobei  $\Sigma$  ein Standarderzeugendensystem von  $\pi_1(X)$  sei. Da wir  $g \geq 2$  voraussetzen, lässt sich  $X$  nach dem Uniformisierungssatz schreiben als  $\mathbb{H}/\Gamma$  für eine zu  $\pi_g$  isomorphe Fuchsische Gruppe  $\Gamma$ , die durch  $X$  bis auf Konjugation in  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$  eindeutig festgelegt ist. Der Wahl von  $\Sigma$  bis auf Äquivalenz entspricht die Wahl eines Erzeugendensystems der Decktransformationsgruppe  $\Gamma$  bis auf einen inneren Automorphismus, also der Wahl eines  $\tau : \pi_g \xrightarrow{\sim} \Gamma$  bis auf Konjugation. Das bedeutet, dass es eine Bijektion zwischen der Menge der Punkte  $[(X, \Sigma)] \in \mathcal{T}'_g$  und der Menge der Punkte  $[(X, \tau)] \in \mathcal{T}_g$  gibt. Für die Bijektion zwischen  $\mathcal{T}'_g$  und  $\mathcal{T}_g$  aus Definition 2.4 sei auf [IT92, Thm. 1.4] verwiesen. Eine wichtige Zutat hierfür ist der Satz von Dehn-Nielsen-Baer, der für uns auch unabhängig davon Relevanz haben wird.

**Satz 3.7 (Dehn-Nielsen-Baer)**

Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  und  $p \in X$ . Dann ist folgende Abbildung ein Isomorphismus:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}_g &\rightarrow \mathrm{Out}^+(\pi_1(X, p)) \\ [f] &\mapsto [f_*], \quad f \in \mathrm{Homeo}^+(X) \end{aligned}$$

**Beweis** Siehe [FM12, Thm. 8.1]. □

Nun operiert  $\pi_g$  auf  $\mathcal{T}_g \times \mathbb{H}$  vermöge

$$\gamma \cdot ((X, \tau), z) := ((X, \tau), \tau(\gamma)(z)), \quad \text{für } \gamma \in \pi_g.$$

Wir definieren:

$$\mathcal{C}_{g,0} := \mathcal{T}_g \times \mathbb{H} / \pi_g$$

Somit ist  $\mathcal{C}_{g,0} \rightarrow \mathcal{T}_g$  eine Familie von Riemannschen Flächen über  $\mathcal{T}_g$  und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\theta : \pi_g \rightarrow \text{Aut}((\mathcal{T}_g \times \mathbb{H}) / \mathcal{C}_{g,0}).$$

Dessen Einschränkung auf die Faser  $\{(X, \tau)\} \times \mathbb{H}$  ist genau der Isomorphismus

$$\theta_{(X,\tau)} := \tau : \pi_g \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}/X).$$

Wir erhalten somit eine so genannte **Teichmüller-Struktur** über  $\mathcal{T}_g$ :

$$\mathcal{T}_g \times \mathbb{H} \xrightarrow{/\pi_g} \mathcal{C}_{g,0} \longrightarrow \mathcal{T}_g$$

Wir versehen nun diese Familie von Riemannschen Flächen mit einer Schottky-Struktur:

Zunächst konstruieren wir für jeden Punkt  $(X, \tau) \in \mathcal{T}_g$  einen Punkt in  $\mathcal{S}_g$ :

Wir haben also  $X = \mathbb{H}/\tau(\pi_g)$  und einen aufgrund der Normierungsbedingung aus Bem. 3.3 festen Isomorphismus  $\tau : \pi_g \rightarrow \text{Deck}(\mathbb{H}/X)$  und können somit die Elemente aus dem Bild von  $\tau$  auch in bis auf einen inneren Automorphismus eindeutiger Weise als Elemente in  $\pi_1(X)$  auffassen. Das liefert uns ein Standarderzeugendensystem der Fundamentalgruppe

$$\pi_1(X) = \left\langle \tau(a_1), \tau(b_1), \dots, \tau(a_g), \tau(b_g) \mid \prod_{i=1}^g [\tau(a_i), \tau(b_i)] \right\rangle.$$

Wie in Satz 3.2 liefern die  $\tau(a_1), \dots, \tau(a_g)$  eine Schottky-Überlagerung mit einem Diskontinuitätsbereich  $\Omega_\tau$  und einer Schottkygruppe  $\Gamma_\tau(X) \leq \text{PSL}_2(\mathbb{C})$  mit Schottky-Basis (bis auf Konjugation). Sei nun  $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$  ein fest gewähltes freies Erzeugendensystem von  $F_g$  und sei  $\sigma_{\alpha,\tau} : F_g \xrightarrow{\sim} \Gamma_\tau(X)$  der Isomorphismus, der  $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$  auf die Schottky-Basis  $(\sigma_{\alpha,\tau}(\gamma_1), \dots, \sigma_{\alpha,\tau}(\gamma_g))$  abbildet. Diese sei so normiert, dass  $\sigma_{\alpha,\tau}(\gamma_1)$  bei 0 seinen anziehenden und bei  $\infty$  den abstoßenden Fixpunkt und  $\sigma_{\alpha,\tau}(\gamma_2)$  seinen anziehenden Fixpunkt bei 1 hat. Sie liefert uns den Punkt  $(X, \sigma_{\alpha,\tau}) \in \mathcal{S}_g$ .

Nun wollen wir auf einer Familie von Riemannschen Flächen eine Schottky-Überlagerung mit Schottky-Struktur  $\sigma_\alpha$  konstruieren, derart dass die Einschränkung von  $\sigma_\alpha$  auf den Fasern jeweils wieder das  $\sigma_{\alpha,\tau}$  von oben liefert. Dazu sei der folgende Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha : \pi_g &\rightarrow F_g \\ a_i &\mapsto 1, b_i \mapsto \gamma_i \end{aligned}$$

gegeben, dessen Kern wir mit  $N_\alpha$  bezeichnen. Dann ist  $(\mathcal{T}_g \times \mathbb{H}) / N_\alpha \rightarrow \mathcal{C}_{g,0}$  eine Schottky-Überlagerung und die universelle Teichmüller-Struktur  $\theta$  induziert eine Schottky-Struktur

$$\sigma_\alpha : \underbrace{\pi_g / N_\alpha}_{\cong F_g} \xrightarrow{\sim} \text{Aut}(((\mathcal{T}_g \times \mathbb{H}) / N_\alpha) / \mathcal{C}_{g,0})$$

auf  $\mathcal{C}_{g,0}$ . Die Restriktion auf die Faser über  $(X, \tau)$  ist dann

$$\sigma_{\alpha,(X,\tau)} : \pi_g/N_\alpha \xrightarrow{\sim} \text{Aut}((\mathbb{H}/\tau(N_\alpha))/X)$$

Wir können nun den Isomorphismus

$$\tilde{\sigma}_{\alpha,\tau} : \text{Aut}((\mathbb{H}/\tau(N_\alpha))/X) \rightarrow \Gamma_\tau(X)$$

so wählen, dass  $\sigma_{\alpha,\tau} = \tilde{\sigma}_{\alpha,\tau} \circ \sigma_{\alpha,(X,\tau)}$ .

Da  $\mathcal{S}_g$  ein feiner Modulraum ist, ist die folgende Abbildung analytisch:

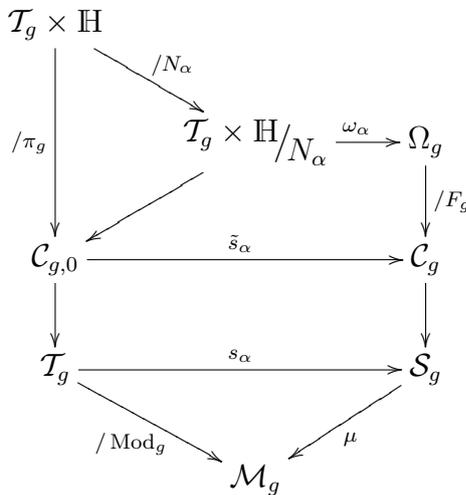
$$s_\alpha : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{S}_g \\ (X, \tau) \mapsto (X, \sigma_{\alpha,\tau})$$

**Satz 3.8** (a)  $s_\alpha$  ist die Quotientenabbildung für folgende Untergruppe von  $\text{Mod}_g$ :

$$\text{Mod}_g(\alpha) = \{ \varphi \in \text{Mod}_g \mid \alpha \circ \tilde{\varphi} \equiv \alpha \text{ mod } \text{Inn}(F_g), \text{ mit } \tilde{\varphi} \in \text{Aut}^+(\pi_g) : [\tilde{\varphi}] = \varphi \in \text{Out}^+(\pi_g) \}$$

(b)  $s_\alpha : \mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{S}_g$  ist die universelle Überlagerung des Schottkyraums.

(c)  $s_\alpha$  lässt sich zu Abbildungen  $\tilde{s}_\alpha$  und  $\omega_\alpha$  liften, sodass das folgende Diagramm kommutiert:



**Beweis** (a)  $\text{Mod}_g(\alpha)$  ist wohldefiniert: Seien  $\tilde{\varphi}_1$  und  $\tilde{\varphi}_2$  Repräsentanten von  $\varphi \in \text{Out}^+(\pi_g)$ , d.h.

$$\tilde{\varphi}_1 = \gamma \tilde{\varphi}_2 \gamma^{-1} \text{ für ein } \gamma \in \pi_g$$

Dann gilt:

$$\alpha \circ \tilde{\varphi}_1 = \alpha \circ (\gamma \tilde{\varphi}_2 \gamma^{-1}) \stackrel{\alpha \text{ Hom.}}{=} \alpha(\gamma)(\alpha \circ \tilde{\varphi}_2)\alpha(\gamma)^{-1}$$

also:  $\alpha \circ \tilde{\varphi}_1 \equiv \alpha \circ \tilde{\varphi}_2 \text{ mod } \text{Inn}(\pi_g)$ , d.h.  $\text{Mod}_g(\alpha)$  ist wohldefiniert.

Um nun die eigentliche Aussage zu beweisen, betrachten wir zunächst, wie  $\text{Mod}_g \cong \text{Out}^+(\pi_g)$  auf  $\mathcal{T}_g$  operiert. Sei  $\varphi \in \text{Out}^+(\pi_g)$  und  $(X, \tau) \in \mathcal{T}_g$ . Dann gilt:

$$\varphi \cdot (X, \tau) := (X, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}),$$

wobei  $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}^+(\pi_g)$  der Vertreter von  $\varphi$  sei, für den  $\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  die Normierungsbedingung aus der Definition 3.10 von  $\mathcal{T}_g$  erfüllt.

Zu zeigen:  $s_\alpha((X, \tau)) = s_\alpha(\varphi \cdot (X, \tau)) \Leftrightarrow \varphi \in \text{Mod}_g(\alpha)$ .

Dabei ist  $s_\alpha((X, \tau)) = (X, \sigma_{\alpha, \tau})$  und  $s_\alpha(\varphi \cdot (X, \tau)) = (X, \sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}})$ .

Damit haben wir:

$$s_\alpha((X, \tau)) = s_\alpha(\varphi \cdot (X, \tau)) \Leftrightarrow (X, \sigma_{\alpha, \tau}) \sim (X, \sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}) \Leftrightarrow \sigma_{\alpha, \tau} = \sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}.$$

“ $\Rightarrow$ “: Aus den obigen Überlegungen erhalten wir insbesondere, dass die Bilder von  $\sigma_{\alpha, \tau}$  und  $\sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}$  gleich sind, also  $\Gamma_\tau(X) = \Gamma_{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}(X)$ . Zu vorgegebenen  $\tau$  und  $\alpha$  (sowie dem dadurch definierten  $\sigma_{\alpha, \tau}$ ) definieren wir jetzt noch  $\beta_\tau : \text{Aut}(\mathbb{H}/X) \rightarrow \Gamma_\tau(X)$  als den Homomorphismus, der das folgende Diagramm kommutieren lässt:

$$\begin{array}{ccc} \pi_g & \xrightarrow{\tau} & \text{Aut}(\mathbb{H}/X) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta_\tau \\ F_g & \xrightarrow{\sigma_{\alpha, \tau}} & \Gamma_\tau(X) \end{array}$$

Wir betrachten nun folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_g & \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} & \pi_g \\ & \swarrow \tau & \downarrow \alpha & \swarrow \tilde{\alpha} & \downarrow \tau \\ \text{Aut}(\mathbb{H}/X) & & \pi_g/N_\alpha & & \text{Aut}(\mathbb{H}/X) \\ \beta_\tau \downarrow & \swarrow \sigma_{\alpha, \tau} & \downarrow \sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}} & \downarrow \beta_{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}} & \\ \Gamma_\tau(X) & \xrightarrow{\text{id}} & & \Gamma_{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}(X) & \end{array}$$

Ohne den gepunkteten Pfeil kommutiert das Diagramm, denn die Teildiagramme oben links und oben rechts kommutieren nach Definition von  $\beta_\tau$  und  $\beta_{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}$ . Das untere Teildiagramm kommutiert nach Voraussetzung. Aufgrund der Normierungsbedingungen für  $\tau$ ,  $\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ ,  $\sigma_{\alpha, \tau}$  und  $\sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}$  und wegen  $\Gamma_\tau(X) = \Gamma_{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}(X)$  gilt außerdem  $\beta_\tau = \beta_{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}$ .

Wir definieren nun

$$\tilde{\alpha} := \sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}^{-1} \circ \beta_{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}} \circ \tau$$

und es folgt  $\tilde{\alpha} \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \alpha$  (das Diagramm kommutiert also auch mit dem gepunkteten Pfeil). Außerdem gilt

$$\alpha = \sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}^{-1} \circ \text{id} \circ \beta_\tau \circ \tau = \tilde{\alpha}.$$

Damit folgt insgesamt  $\alpha \circ \tilde{\varphi} = \alpha$ .

“ $\Leftarrow$ “ Es gelte  $\varphi \in \text{Mod}_g(\alpha)$ .

Für  $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}^+(\pi_g) : [\tilde{\varphi}] = \varphi$  gilt also  $\alpha \circ \tilde{\varphi} \equiv \alpha \pmod{\text{Inn}(F_g)}$ .

Wir können O.E.  $\tilde{\varphi}$  so wählen, dass  $\alpha \circ \tilde{\varphi} = \alpha$ . Durch  $\tau$  bekommen wir das Schottky-Schnittsystem  $(\tau(a_1), \dots, \tau(a_g))$  auf  $X$ , und wie in Satz 3.2 erhalten wir einen Fundamentalebenebereich  $\overline{A^\tau} \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  der Schottkygruppe  $\Gamma_\tau(X)$ , die mit der freien Gruppe  $F_g = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$  identifiziert wird. Wie in Satz 3.2 operiert  $F_g$  durch Möbiustransformationen auf den Diskontinuitätsbereich  $\Omega$ , indem  $\gamma_i$  eine Kopie  $\overline{A_w^\tau}$  von  $\overline{A^\tau}$  auf  $\overline{A_{\gamma_i w}^\tau}$  schickt (ebenso liefert  $\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  einen Fundamentalebenebereich  $\overline{A^{\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}}}$ ). Die (abstrakte) Fundamentalgruppe  $\pi_g$  operiert somit ebenfalls auf  $\Omega$  via  $\delta \cdot \overline{A_w^\tau} = \overline{A_{\alpha(\delta)w}^\tau}$ . Weil nach Voraussetzung  $\alpha \circ \tilde{\varphi}^{-1} = \alpha$  gilt, ist die Operation von  $\pi_g$  auf  $\Omega$ , die von  $\tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  herkommt, also  $\delta \cdot \overline{A_w^\tau} = \overline{A_{\alpha \circ \tilde{\varphi}^{-1}(\delta)w}^\tau}$ , dieselbe. Das bedeutet aber  $\sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}} \circ \alpha = \sigma_{\alpha, \tau} \circ \alpha$  und damit  $\sigma_{\alpha, \tau \circ \tilde{\varphi}^{-1}} = \sigma_{\alpha, \tau}$ .

- (b) Das folgt daraus, dass  $\mathcal{T}_g$  einfach zusammenhängend ist und dass  $\text{Mod}_g(\alpha)$  torsionsfrei ist, wie wir später in Satz 3.10 sehen werden. Damit ist dann  $s_\alpha$  unverzweigt. Ein davon unabhängiger Beweis findet sich in [Hej75, Thm. A und Rem. 5.1].
- (c) Da  $\mathcal{T}_g \times \mathbb{H}/N_\alpha \rightarrow \mathcal{C}_{g,0}$  eine Schottky-Überlagerung ist und da  $\mathcal{S}_g$  ein feiner Modulraum ist, gilt:  $\mathcal{C}_{g,0} = \mathcal{T}_g \times_{\mathcal{S}_g} \mathcal{C}_g$  und  $\tilde{s}_\alpha$  ist die Projektion auf  $\mathcal{C}_g$ . Analog dazu erhält man auch  $\omega_\alpha$ .  $\square$

### 3.5 Teichmüller-Geodätische im Schottkyraum

Betrachtet werden nun Teichmüller-Geodätische, deren Bild in  $\mathcal{M}_g$  eine algebraische Kurve ist. Von Interesse ist dann deren Bild im Schottkyraum. Ein wichtiger Ausgangspunkt dafür ist Satz 3.9.

**Definition 3.11** Ein surjektiver Homomorphismus  $\alpha : \pi_g \rightarrow F_g$  heißt **symplektisch**, wenn es ein Standarderzeugendensystem  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  von  $\pi_g$  gibt mit  $\alpha(a_i) = 1$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$ .

(Mit  $\alpha(b_i) =: \gamma_i$  ist dann  $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$  ein Erzeugendensystem der freien Gruppe  $F_g$ .)

**Bemerkung 3.4** (a) Es ist äquivalent,  $\alpha(b_i) = 1$  zu fordern.

- (b) Sei  $M \subseteq \{1, \dots, g\}$ . Dann ist  $\alpha$  auch dann symplektisch, wenn man stattdessen  $\alpha(a_j) = 1$  für  $j \in M$  und  $\alpha(b_k) = 1$  für  $k \notin M$  fordert.

**Beweis** (b) Sei  $\hat{a}_j := a_j, \hat{b}_j := b_j, \hat{a}_k := b_k^{-1}, \hat{b}_k := b_k a_k$  für  $j \in M$  und  $k \notin M$ . Dies ist auch ein Standarderzeugendensystem und es gilt  $\alpha(\hat{a}_i) = 1$  für alle  $i \in \{1, \dots, g\}$ .

- (a) Das folgt aus (b).  $\square$

#### Satz 3.9 (Herrlich-Smithüsen)

Sei  $\iota : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{T}_g$  eine Teichmüller-Einbettung, so dass die zugehörige projektive Veech-Gruppe  $\bar{\Gamma}_\iota$  ein Gitter in  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist, und sei  $\Delta := \iota(\mathbb{H})$ . Dann existiert ein symplektischer Homomorphismus  $\alpha : \pi_g \rightarrow F_g$ , so dass

$$\text{Stab}(\Delta) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \neq \{1\}$$

**Beweis** Siehe [HS07, Prop. 5.21]. Ein konstruktiver Beweis einer allgemeineren Aussage wird in Kapitel 4 für Origamis und in Kapitel 5 für Halbtranslationsflächen im Allgemeinen erfolgen.  $\square$

Daraus folgt, dass der Schnitt unendlich ist, da  $\text{Mod}_g(\alpha)$  torsionsfrei ist, siehe Satz 3.10.

Die Einschränkung von  $s_\alpha$  auf  $\Delta$  faktorisiert folgendermaßen:

$$\Delta \rightarrow \Delta / \text{Stab}(\Delta) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \rightarrow \text{Bild}(\Delta) \subset \mathcal{S}_g$$

und somit kann  $s_\alpha(\Delta) \subseteq \mathcal{S}_g$  nicht isomorph zu einer Kreisscheibe sein.

Mit Bem. 2.6 folgt

$$\text{Stab}(\Delta) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \cong \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha),$$

wenn  $\Delta$  die Teichmüller-Geodätische ist, die wie in Kapitel 2 von der Halbtranslationsfläche  $X$  herkommt.

**Definition 3.12** Da ein Element  $\varphi \in \text{Mod}_g$  nach dem Satz von Dehn-Nielsen auch als äußerer Automorphismus der Fundamentalgruppe  $\pi_g := \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$  aufgefasst werden kann, definiert  $\varphi$  einen Automorphismus der abelsch gemachten Fundamentalgruppe

$$\pi_g^{ab} := \pi_g / [\pi_g, \pi_g] \cong H_1(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g},$$

also eine Matrix in  $\mathbb{Z}^{2g \times 2g}$ :

$$M_\varphi := \begin{pmatrix} \#_{a_1}(\varphi(a_1)) & \dots & \#_{a_1}(\varphi(a_g)) & \#_{a_1}(\varphi(b_1)) & \dots & \#_{a_1}(\varphi(b_g)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \#_{a_g}(\varphi(a_1)) & \dots & \#_{a_g}(\varphi(a_g)) & \#_{a_g}(\varphi(b_1)) & \dots & \#_{a_g}(\varphi(b_g)) \\ \#_{b_1}(\varphi(a_1)) & \dots & \#_{b_1}(\varphi(a_g)) & \#_{b_1}(\varphi(b_1)) & \dots & \#_{b_1}(\varphi(b_g)) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \#_{b_g}(\varphi(a_1)) & \dots & \#_{b_g}(\varphi(a_g)) & \#_{b_g}(\varphi(b_1)) & \dots & \#_{b_g}(\varphi(b_g)) \end{pmatrix}$$

Hierbei bezeichne  $\#_{a_i}(\varphi(a_j))$  die Summe der Exponenten von  $a_i$  im Wort  $\varphi(a_j)$ . Dabei ist letzteres zwar nur bis auf Konjugation und modulo  $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i]$  wohldefiniert,  $\#_{a_i}(\varphi(a_j))$  dadurch aber trotzdem noch eindeutig bestimmt. Analog dazu lautet diese Definition, wenn  $b_i$ 's anstelle der  $a_i$ 's stehen.

**Lemma 3.1** Sei  $\alpha : \pi_g \rightarrow F_g$  der symplektische Homomorphismus mit  $\alpha(a_i) = 1$  und  $\alpha(b_i) = \gamma_i$ ,  $i \in \{1, \dots, g\}$  und  $\varphi \in \text{Mod}_g(\alpha)$ . Dann gilt für  $i, j \in \{1, \dots, g\}$ :

(a)  $\#_{b_i}(\varphi(b_j)) = \delta_{ij}$ .

(b)  $\#_{b_i}(\varphi(a_j)) = 0$ .

(c)  $\#_{a_j}(\varphi(a_i)) = \delta_{ij}$ .

(d)  $M_\varphi = \begin{pmatrix} I_g & A \\ O_g & I_g \end{pmatrix}$ . Dabei seien  $I_g, O_g, A \in \mathbb{Z}^{g \times g}$ , wobei  $I_g$  die Einheitsmatrix und  $O_g$  die Nullmatrix sei. Insbesondere hat  $M_\varphi$  den  $2g$ -fachen Eigenwert 1 und es gilt  $\det(M_\varphi) = 1$ .

**Beweis** (a)  $\delta_{ij} = \#_{\gamma_i}(\alpha(b_j)) \stackrel{\varphi \in \text{Mod}_g(\alpha)}{=} \#_{\gamma_i}(\alpha \circ \varphi(b_j)) \stackrel{\text{Def von } \alpha}{=} \#_{b_i}(\varphi(b_j)).$

(b)  $0 = \#_{\gamma_i}(\alpha(a_j)) = \#_{\gamma_i}(\alpha \circ \varphi(a_j)) = \#_{b_i}(\varphi(a_j)).$

(c) Für  $x, y \in \pi_g$  bezeichne  $\hat{i}(x, y)$  die algebraische Schnittzahl von  $x$  und  $y$ . Diese bleibt unter Isotopie und unter einem Homöomorphismus invariant. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \hat{i}(a_i, b_j) \\ &= \hat{i}(\varphi(a_i), \varphi(b_j)) \\ &= \sum_{k=1}^g \#_{a_k}(\varphi(a_i)) \cdot \underbrace{\#_{b_k}(\varphi(b_j))}_{=\delta_{kj}} + \underbrace{\#_{b_k}(\varphi(a_i))}_{=0} \cdot \#_{a_k}(\varphi(b_j)) \\ &= \#_{a_j}(\varphi(a_i)). \end{aligned}$$

(d) Das ist nur eine Zusammenfassung von a)-c) in Matrixschreibweise. □

**Satz 3.10** Die Gruppe  $\text{Mod}_g(\alpha)$  ist torsionsfrei.

**Beweis** Sei  $\varphi \in \text{Mod}_g(\alpha) \setminus \{\text{id}\}$  gegeben und sei  $\varphi^n = \text{id}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt auch  $M_\varphi^n = I_{2g}$ .

Da aber  $M_\varphi = \begin{pmatrix} I_g & A \\ O_g & I_g \end{pmatrix}$ , gilt  $M_\varphi^n := \begin{pmatrix} I_g & nA \\ O_g & I_g \end{pmatrix}$ . Somit kann  $M_\varphi$  nur die Einheitsmatrix sein.

Damit operiert  $\varphi$  trivial auf der Homologie. Aber die Untergruppe von  $\text{Mod}_g$ , deren Elemente trivial auf der Homologie operieren (die so genannte ‘‘Torelligruppe’’), ist torsionsfrei [FM12, Thm. 6.12].

Also ist  $\varphi = \text{id}$  und damit ist  $\text{Mod}_g(\alpha)$  torsionsfrei. □

# Kapitel 4

## Origamis

Als Nächstes sollen Möglichkeiten erarbeitet werden, um die Gruppen  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  für Origamis zu bestimmen. Zunächst seien dafür einige Dinge über Origamis eingeführt, die wir im weiteren Verlauf benötigen werden. Die folgende Zusammenfassung ist [Sch05] entlehnt, wo auch die entsprechenden Ausführungen bzw. Beweise zu finden sind.

### 4.1 Eine kurze Zusammenfassung über Origamis

**Definition 4.1** Ein *Origami* ist durch eine endliche Anzahl von euklidischen Einheitsquadraten gegeben, die nach folgenden Regeln verklebt werden:

- i) Jede rechte Seite eines Quadrats wird durch eine Translation mit einer linken Seite verklebt;
- ii) Jede obere Seite wird durch eine Translation mit einer unteren Seite verklebt;
- iii) Die dadurch erhaltene geschlossene Fläche  $X$  ist zusammenhängend.

**Bemerkung 4.1** (a) Das einfachste Beispiel eines Origamis ist ein Einheitsquadrat, bei dem die obere und die untere sowie die rechte und die linke Kante jeweils durch eine Translation identifiziert werden, also ein Torus, den wir mit  $E$  bezeichnen wollen. Dabei sei der Punkt, der von den Ecken des Quadrats herkommt, mit  $\infty$  bezeichnet.

(b) Sei  $O$  ein Origami und  $X$  die dadurch definierte Fläche. Dann überlagert  $X$  den Torus  $E$ , indem die Bilder der Einheitsquadrate in  $X$  auf den Torus  $E$  abgebildet werden. Diese Überlagerung  $p : X \rightarrow E$  ist endlich und höchstens über dem Punkt  $\infty$  verzweigt.

(c) Ein Origami  $O$  lässt sich auch durch die unverzweigte Überlagerung  $p : X^* \rightarrow E^*$  definieren, wobei  $E^* := E \setminus \{\infty\}$  und  $X^* := X \setminus p^{-1}(\infty)$ . Die Punkte aus  $X \setminus X^*$  heißen **Ecken** von  $O$ .

(d) Die Fläche  $X^*$  hat somit eine Struktur als Translationsfläche, die von der entsprechenden Struktur auf dem Torus herkommt. Die Translationsstruktur definiert auf  $X$  eine komplexe Struktur. Damit wird  $X$  eine Riemannsche Fläche. Wir gehen im Folgenden standardmäßig von der

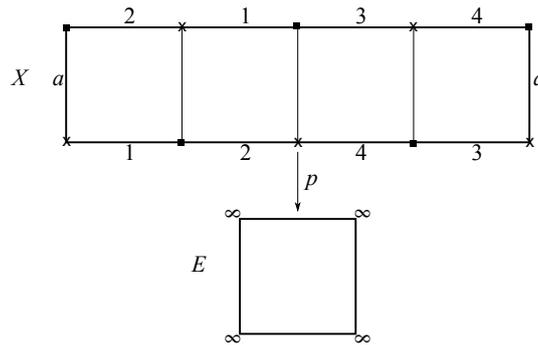
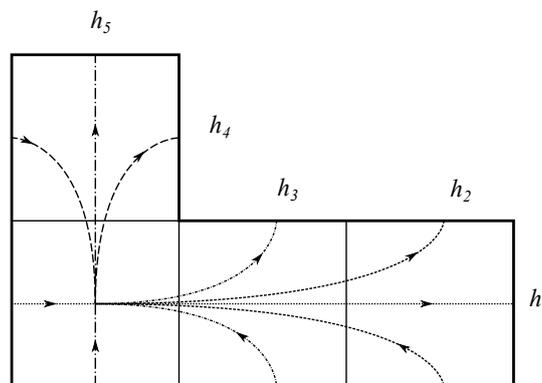


Abbildung 4.1.1: Origami als unverzweigte Überlagerung  
(Seiten mit gleicher Bezifferung werden identifiziert.)

Translationsstruktur auf  $E$  aus, die vom Gitter  $\Lambda_I := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$  herkommt, d.h.  $E := \mathbb{C} / \Lambda_I$ .

- (e) Die Fundamentalgruppe von  $E^*$  ist isomorph zu  $F_2$ . Ein Isomorphismus ist dadurch gegeben, dass man die Homotopieklassen des einfach geschlossenen horizontalen Weges und des einfach geschlossenen vertikalen Weges, mit Anfangs- und Endpunkt im Mittelpunkt des Quadrates, auf freie Erzeuger  $x$  und  $y$  schickt. Im Folgenden wählen wir immer diesen Isomorphismus.



$$h_1 = x^3, h_2 = x^2yx^{-2}, h_3 = xyx^{-1}, h_4 = yxy^{-1}, h_5 = y^2$$

Abbildung 4.1.2: Gegenüberliegende Seiten werden identifiziert

- (f) Die Fundamentalgruppe von  $X^*$  ist isomorph zu einer Untergruppe von  $F_2$  von endlichem Index, da  $\pi_1(X^*) \cong \text{Deck}(\mathbb{H} / X^*) \leq \text{Deck}(\mathbb{H} / E^*) \cong F_2$ .  
Man kann sich  $\pi_1(X^*)$  auch folgendermaßen vorstellen: Man schneidet das punktierte Origami entlang von Seiten der Quadrate auf, bis man eine einfach zusammenhängende Fläche erhält, und wählt als Basispunkt  $x_0$  der Fundamentalgruppe den Mittelpunkt eines der Quadrate. Für jede Seite  $i$ , an der man aufgeschnitten hat, gibt es (bis auf Inverse) ein eindeutig bestimmtes Element  $h_i \in F_2$ , das zu einem einfach geschlossenen Weg  $X^*$  gehört, der im Basispunkt startet und die aufgeschnittene Seite einmal schneidet. Die von den  $h_i$ 's erzeugte Untergruppe  $H$  von  $F_2$  ist isomorph zu  $\pi_1(X^*, x_0)$ , sie ist von der Wahl des Basispunktes abhängig, eine andere

Wahl führt zu einer Konjugation in  $F_2$ . Es besteht also eine Bijektion zwischen Origamis und Konjugationsklassen von Untergruppen von  $F_2$  mit endlichem Index.

Für die weiteren Ausführungen über Origamis brauchen wir zunächst noch folgenden Satz.

**Satz 4.1** (a) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\beta} : \text{Aut } F_2 &\longrightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}) \\ \varphi &\longmapsto \begin{pmatrix} \#_x(\varphi(x)) & \#_x(\varphi(y)) \\ \#_y(\varphi(x)) & \#_y(\varphi(y)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein surjektiver Homomorphismus, dessen Kern  $\text{Inn}(F_2)$  ist. Dabei sei  $(x, y)$  ein fest gewähltes Paar von freien Erzeugern und  $\#_x(\varphi(y))$  sei die Summe der Exponenten von  $x$ , die im Wort  $\varphi(y)$  vorkommen (analog seien  $\#_x(\varphi(x))$ ,  $\#_y(\varphi(x))$  und  $\#_y(\varphi(y))$  definiert).

(b) Gegeben sei  $\varphi \in \text{Aut } F_2$ ,  $A := \hat{\beta}(\varphi)$ , sowie der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \text{proj} : F_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ W(x, y) &\longmapsto (\#_x(W(x, y)), \#_y(W(x, y))) \end{aligned}$$

Dann ist folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \xrightarrow{\varphi} & F_2 \\ \text{proj} \downarrow & & \downarrow \text{proj} \\ \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{z \mapsto Az} & \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

**Beweis** (a) Homomorphismus: Seien  $\phi$  und  $\varphi \in \text{Aut } F_2$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}(\phi \circ \varphi) &= \begin{pmatrix} \#_x(\phi \circ \varphi(x)) & \#_x(\phi \circ \varphi(y)) \\ \#_y(\phi \circ \varphi(x)) & \#_y(\phi \circ \varphi(y)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \#_x(\phi(x))\#_x(\varphi(x)) + \#_x(\phi(y))\#_y(\varphi(x)) & \#_x(\phi(x))\#_x(\varphi(y)) + \#_x(\phi(y))\#_y(\varphi(y)) \\ \#_y(\phi(x))\#_x(\varphi(x)) + \#_y(\phi(y))\#_y(\varphi(x)) & \#_y(\phi(x))\#_x(\varphi(y)) + \#_y(\phi(y))\#_y(\varphi(y)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \#_x(\phi(x)) & \#_x(\phi(y)) \\ \#_y(\phi(x)) & \#_y(\phi(y)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \#_x(\varphi(x)) & \#_x(\varphi(y)) \\ \#_y(\varphi(x)) & \#_y(\varphi(y)) \end{pmatrix} = \hat{\beta}(\phi) \cdot \hat{\beta}(\varphi) \end{aligned}$$

Da  $\hat{\beta}(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \text{Aut } F_2$  invertierbar sein muss, gilt  $\text{Bild}(\hat{\beta}) \subseteq \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

surjektiv:  $\text{GL}_2(\mathbb{Z})$  wird den Bildern der Automorphismen  $(x \mapsto y, y \mapsto x)$ ,  $(x \mapsto y^{-1}, y \mapsto xy)$

und  $(x \mapsto y^{-1}, y \mapsto x)$  erzeugt, also von  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$\text{Inn}(F_2) = \text{Kern } \hat{\beta}$ :

“ $\supseteq$ ”: Siehe [Cha60]. Die Inklusion “ $\subseteq$ ” ist klar.

(b) Klar. □

**Satz 4.2** Die Veech-Gruppe  $\Gamma(O)$  eines Origamis ist gegeben durch:

$$\hat{\beta}(\text{Stab}_{\text{Aut}^+ F_2}(H)) \quad \text{mit} \quad \text{Stab}_{\text{Aut}^+ F_2}(H) := \{\gamma \in \text{Aut}^+ F_2 : \gamma(H) = H\},$$

wobei  $H$  eine wie in Bem. 4.1(f) zu  $O$  assoziierte Untergruppe von  $F_2$  sei.

**Beweis** Siehe [Sch05, Thm. 1]. □

Beachte:  $\hat{\beta}(\text{Stab}_{\text{Aut}^+ F_2}(H))$  hängt nur von der Konjugationsklasse von  $H$  ab, denn sei  $H' = aHa^{-1}$  und  $\gamma \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+ F_2}(H)$ . Dann gilt

$$(c_{a\gamma(a)^{-1}} \circ \gamma)(H') = a\gamma(a)^{-1}\gamma(H')\gamma(a)a^{-1} = a\gamma(a^{-1}H'a)a^{-1} = a\gamma(H)a^{-1} = aHa^{-1} = H'.$$

Dabei bezeichne  $c_h \in \text{Inn } F_2$  die Konjugation mit  $h \in F_2$ .

## 4.2 Horizontales Schottky-Schnittsystem (HSS)

**Definition 4.2** Gegeben sei die freie Gruppe  $F_2$  mit einem fest gewählten Erzeugerpaar  $(x, y)$ .

(a)  $w \in F_2$  heißt **horizontal**, wenn es die folgende Form hat:

$$w = \prod_{i=0}^n x^{c_i} y x^{d_i} y^{-1} \quad \text{oder} \quad w = \prod_{i=0}^n x^{c_i} y^{-1} x^{d_i} y, \quad \text{für } c_i, d_i \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

(b) Ein Wort, das zu einem horizontalen Wort konjugiert ist, heißt **konjugiert horizontal**.

**Bemerkung 4.2** Gegeben sei ein Automorphismus  $\varphi$  von  $F_2$ , der bestimmt ist durch  $\varphi(x) = x$  und  $\varphi(y) = x^k y$  für ein  $k \geq 0$ , und sei  $w$  ein konjugiert horizontales Wort. Dann ist auch  $\varphi(w)$  konjugiert horizontal.

**Definition und Bemerkung 4.1** Sei  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  ein Origami und  $x_0 \in X^*$ . Da man die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X^*, x_0)$  mit einer Untergruppe von  $F_2$  identifizieren kann, kann man bei Elementen von  $\pi_1(X^*, x_0)$  von horizontal bzw. konjugiert horizontal sprechen. Letzteres ist unabhängig von der Wahl von  $x_0$ , da für  $x'_0 \in X^*$  die Fundamentalgruppen  $\pi_1(X^*, x_0)$  und  $\pi_1(X^*, x'_0)$  zueinander konjugiert sind in  $F_2$ .

Elemente aus  $\pi_1(X, x_0)$  heißen **(konjugiert) horizontal**, wenn sie einen (konjugiert) horizontalen Lift in  $\pi_1(X^*, x_0)$  haben. Dasselbe gilt für freie Homotopieklassen von Wegen in  $X^*$  bzw.  $X$ . Für freie Homotopieklassen bedeutet “horizontal” dasselbe wie “(konjugiert) horizontal”

Der Kern der Abbildung  $\pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  wird von Wegen um die Punktierungen erzeugt, diese sind konjugiert horizontal.

**Definition 4.3** Ein Schottky-Schnittsystem auf einem Origami, das nur aus horizontalen freien Homotopieklassen von Wegen besteht, nennen wir **horizontales Schottky-Schnittsystem (HSS)**.

**Satz 4.3** In einem Origami gibt es immer ein HSS.

**Beweis** Gegeben sei ein Origami  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  und  $g$  sei dessen Geschlecht. Seien  $Z_1, \dots, Z_m$  die horizontalen Zylinder, aus denen  $O$  besteht (in Zukunft seien alle Zylinder, von denen die Rede ist, horizontale Zylinder, sofern nicht ausdrücklich anders gefordert), und sei  $c_1, \dots, c_n$  ein System von einfach geschlossenen horizontalen Kurven auf  $X$ , die paarweise disjunkt sind und insgesamt nicht separierend sind, d.h.  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  sei zusammenhängend. Wir beweisen mittels Induktion über  $n$ , dass so ein System für jedes  $n \leq g$  existiert.

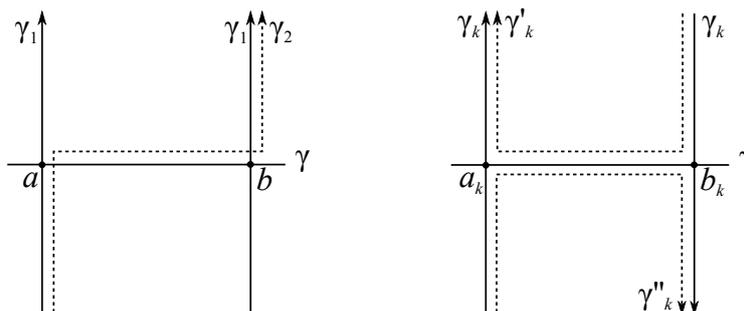
Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen. Sei  $n < g$  und es existiere ein System  $c_1, \dots, c_n$ , das die obigen Bedingungen erfüllt. Es gibt zwei Möglichkeiten:

Fall 1: Es gibt einen horizontalen Weg  $\gamma'$  um einen Zylinder, der in der Fläche  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  liegt und diese nicht separiert. Dann sei  $c_{n+1} := \gamma'$  und wir sind fertig.

Fall 2: Jeder der horizontalen Wege um die Zylinder (der nicht in  $\{c_1, \dots, c_n\}$  liegt) separiert  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$ :

Wir konstruieren eine endliche Folge  $(\gamma_i)$  von Kurven, die  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  nicht separieren, so dass die Anzahl der Schnittpunkte mit den horizontalen Wegen um die Zylinder immer kleiner wird:

$X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  ist homöomorph zur Fläche  $S_{g-n}^{2n}$ . Da  $g - n \geq 1$ , gibt es somit in  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  eine einfach geschlossene Kurve  $\gamma_1$ , die nicht separierend ist. Damit ist  $X \setminus (\gamma_1 \cup \bigcup_{i=1}^n c_i)$  zusammenhängend und  $\gamma_1$  ist zu jedem  $c_i$  disjunkt. Wenn  $\gamma_1$  horizontal ist, sind wir fertig, ansonsten gibt es in einer Wortdarstellung von  $\gamma_1$  ein Teilwort der Form  $yx^a y$  oder  $y^{-1}x^a y^{-1}$  ( $a \in \mathbb{Z}$ ). Das heißt für den Weg  $\gamma_1$ , dass er von unten in einen Zylinder  $Z$  hereinkommt und diesen oben wieder verlässt (oder umgekehrt). Sei  $\gamma$  der Weg, der horizontal um den Zylinder  $Z$  geht. Angenommen  $|\gamma_1 \cap \gamma| = 1$ . Dann ist  $\gamma_1 \setminus \gamma$  ein Weg von der einen Seite von  $\gamma$  zur anderen, d.h.  $\gamma$  separiert  $X \setminus \bigcup_{i=1}^n c_i$  nicht, im Widerspruch zur Voraussetzung von Fall 2. Also gilt  $|\gamma_1 \cap \gamma| \geq 2$ .



Schritt 1: Seien  $a$  und  $b$  zwei bezüglich  $\gamma$  aufeinander folgende Schnittpunkte von  $\gamma_1$  und  $\gamma$  mit gleicher Orientierung (falls solche Punkte nicht existieren, gehe gleich zu Schritt 2 über). Sei dann  $\gamma_2$  die Kurve, die man erhält, indem man das Stück von  $\gamma_1$  zwischen  $a$  und  $b$  durch das Stück von  $\gamma$  zwischen  $a$  und  $b$  ersetzt (siehe obige Abbildung links). Diese Kurve separiert die Fläche  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  nicht, da das ersetzte Stück von  $\gamma_1$  ein Weg von der einen Seite von  $\gamma_2$  zur anderen Seite ist. Wenn  $\gamma_2$  und  $\gamma$  zwei bzgl.  $\gamma$  aufeinander folgende Schnittpunkte mit gleicher Orientierung haben, konstruiert man auf gleiche Weise eine Kurve  $\gamma_3$  usw., bis man ein  $\gamma_k$  erhält, so dass es zwei solche Schnittpunkte nicht gibt. Dies geschieht nach endlich vielen Schritten, da  $|\gamma_{i+1} \cap \gamma| \leq |\gamma_i \cap \gamma| - 1$ .

**Schritt 2:** Wenn  $|\gamma_k \cap \gamma| \neq 0$ , dann gibt es zwei bezüglich  $\gamma$  direkt aufeinander folgende Schnittpunkte  $a_k$  und  $b_k$  mit entgegengesetzter Orientierung. Dann bilde folgendermaßen zwei Kurven  $\gamma'_k$  und  $\gamma''_k$ : Sei  $\gamma'_k$  die Kurve, die bei  $a_k$  startet, bis  $b_k$  entlang  $\gamma_k$  verläuft und dann entlang  $\gamma$  von  $b_k$  nach  $a_k$  verläuft. Sei dann  $\gamma''_k$  die Kurve, die in  $b_k$  startet, entlang  $\gamma_k$  bis  $a_k$  verläuft und dann entlang  $\gamma$  von  $a_k$  nach  $b_k$  verläuft. Dabei seien die Teilwege, die  $\gamma$  mit  $\gamma'_k$  und mit  $\gamma''_k$  gemeinsam hat, identisch und so gewählt, dass sich darauf außer  $a_k$  und  $b_k$  keine weiteren Schnittpunkte mit  $\gamma_k$  befinden (siehe obige Abbildung rechts).

Die Kurven  $\gamma'_k$  und  $\gamma''_k$  können nicht beide separierend auf  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  sein, denn dann könnte man die Fläche, die von  $\gamma'_k$  umrandet wird, mit der Fläche, die von  $\gamma''_k$  umrandet wird, am gemeinsamen Randstück auf  $\gamma$  verkleben und erhielte eine Fläche, die von  $\gamma_k$  umrandet wäre, und damit wäre auch  $\gamma_k$  separierend. Definiere dann  $\gamma_{k+1}$  als eine der beiden Kurven  $\gamma'_k$  und  $\gamma''_k$ , die  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  nicht separiert.

Wir wiederholen Schritt 1 und Schritt 2, bis wir ein  $\gamma_r$  erhalten, das zu  $\gamma$  disjunkt ist. Dann wenden wir nach und nach Schritt 1 und 2 auf die Schnittpunkte mit den horizontalen Wegen um die anderen Zylinder an und erhalten am Ende einen horizontalen Weg  $\gamma_s$ , der  $X \setminus (\bigcup_{i=1}^n c_i)$  nicht separiert.

Sei dann  $c_{n+1} := \gamma_s$  und wir sind fertig.  $\square$

**Bemerkung 4.3** In einem Origami gibt es immer ein HSS mit mindestens einer Kurve, die ein horizontaler Schnitt an einem Zylinder ist. Diese hat somit, nach geeigneter Wahl des Basispunktes, die Form  $x^m$ , wobei  $m$  die Länge des betreffenden Zylinders ist.

**Beweis** Der horizontale Schnitt  $c_1$  um einen beliebigen Zylinder  $Z$  ist nicht separierend. Denn ein Weg, der von einem Quadrat in  $Z$  aus (im Punkt  $x_0$ ) startet und in  $y$ -Richtung verläuft, kommt nach endlich vielen  $y$ -Schritten wieder in  $x_0$  an (es existiert ein  $t \in \mathbb{N}$  mit  $y^t \in \pi_1(X^*, x_0)$ , da die Fundamentalgruppe  $\pi_1(X^*, x_0)$  endlichen Index in  $F_2$  hat). Spätestens dann tritt dieser Weg wieder von unten in  $Z$  ein. Damit liegen die obere und die untere Hälfte von  $Z$  in der selben Wegzusammenhangskomponente von  $X \setminus c_1$ . (Dies ist äquivalent dazu, dass der Schnittgraph einer stabilen Kurve, die als Randpunkt einer Origamikurve vorkommt, brückenfrei ist, siehe [Mai05, Lemma 2]. Es gilt auch die Umkehrung des hier zitierten Lemmas, siehe [Mai05, Satz 2].) Damit kann  $c_1$  als erste Kurve für die Konstruktion eines HSS wie im Beweis zu Satz 4.3 genommen werden.  $\square$

**Korollar 4.1** In der Fundamentalgruppe eines Origamis gibt es immer ein Standarderzeugendensystem  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ , so dass die Homotopieklassen  $a_1, \dots, a_g$  konjugiert horizontal sind. (Ein Schottky-Schnittsystem lässt sich immer zu einem Standarderzeugendensystem ergänzen, wie aus der Flächenklassifikation folgt, siehe [Kin93, § 4.5].)

Jede Untergruppe  $H \leq F_2$  von endlichem Index ist isomorph zur Fundamentalgruppe eines punktierten Origamis und die Fundamentalgruppe des entsprechenden nicht punktierten Origamis erhält man, indem man nach dem Normalteiler faktorisiert, der von der Menge  $R$  der Wege um die Punktierungen erzeugt wird. Somit lässt sich dieses Ergebnis auch rein algebraisch formulieren:

**Korollar 4.2** Sei  $(x, y)$  eine fest gewählte Basis der freien Gruppe  $F_2$ , sei  $H \leq F_2$  eine Untergruppe von endlichem Index und sei

$$\overline{H} := H / \langle\langle R \rangle\rangle, \quad \text{wobei } R := \{w \in H \mid w = \tilde{w}(xyx^{-1}y^{-1})^n \tilde{w}^{-1}, \tilde{w} \in F_2, n \in \mathbb{N}\}$$

Dann gibt es  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \in \overline{H}$ , so dass  $a_1, \dots, a_g$  konjugiert horizontale Vertreter in  $H$  haben und

$$\overline{H} = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle.$$

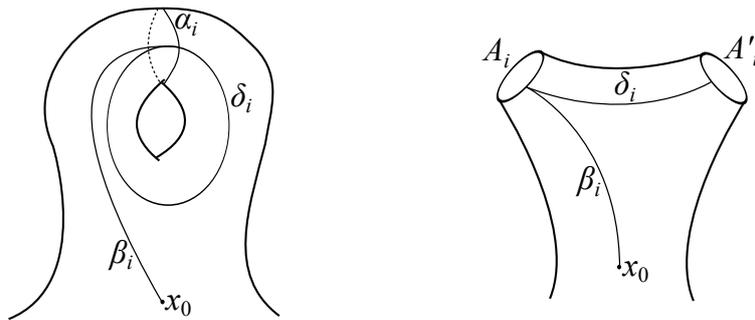
**Satz 4.4** Sei  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  ein Origami und  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  sei ein Standarderzeugendensystem von  $\pi_1(X, x_0)$ , so dass  $a_1, \dots, a_g$  konjugiert horizontal sind. Zusätzlich sei  $\gamma := \beta x^{\ell(Z)} \beta^{-1}$  ein Weg, wobei

- $Z$  ein horizontaler Zylinder der Länge  $\ell(Z)$  und
- $\beta$  ein Weg mit Anfangspunkt  $x_0$  und Endpunkt in  $Z$  sei.

Dann liegt  $[\gamma]$  im von  $a_1, \dots, a_g$  erzeugten Normalteiler.

**Beweis** Wir nennen im Folgenden eine Homotopie, die den Basispunkt  $x_0$  fix lässt,  $x_0$ -Homotopie (entsprechend reden wir dann von  $x_0$ -Homotopieklasse), um diese deutlicher von der freien Homotopie zu unterscheiden.

Seien ein Zylinder  $Z$  gegeben und sei  $\gamma'$  der horizontale Weg um  $Z$ , so dass also  $x^{\ell(Z)}$  das Bild von  $\gamma'$  auf  $E^*$  ist. Seien außerdem  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  paarweise disjunkte Vertreter der freien Homotopieklassen  $a_1, \dots, a_g$ . Dann gilt  $\forall i \in \{1, \dots, g\} : i(\gamma', \alpha_i) = 0$ , dabei bezeichne  $i(\cdot, \cdot)$  die geometrische Schnittzahl zwischen zwei Kurven. Wir können also  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  so wählen, dass sie zu  $\gamma'$  disjunkt sind. Da  $\widehat{X} := \overline{X \setminus \bigcup_{i=1}^g \alpha_i}$  zusammenhängend ist, gibt es auch einen Weg  $\beta$  vom Basispunkt  $x_0$  der Fundamentalgruppe nach  $\gamma'$ , der die  $\alpha_i$  nicht schneidet. Sei  $\gamma := \beta \gamma' \beta^{-1}$ . Es gilt  $[\gamma] \in \pi_1(\widehat{X}, x_0)$ . Aber  $\pi_1(\widehat{X}, x_0)$  wird von den  $x_0$ -Homotopieklassen der Randkurven um die  $2g$  Randkomponenten von  $\widehat{X}$  erzeugt. In  $X$  liegen diese Randkurven aber in den Homotopieklassen  $a_1, \dots, a_g$  oder in solchen, die dazu konjugiert sind.



Denn: Seien  $A_1, \dots, A_g, A'_1, \dots, A'_g$  die Randkurven von  $\widehat{X}$ , wobei für  $i \in \{1, \dots, g\}$   $A_i, A'_i$  jeweils die

Kurven seien, die durch Aufschneiden entlang von  $\alpha_i$  entstehen. Sei  $\beta_i$  ein Weg von  $x_0$  nach  $\alpha_i$ , der so gewählt ist, dass  $\alpha'_i := \beta_i \alpha_i \beta_i^-$  ein Vertreter der  $x_0$ -Homotopieklasse  $a_i$  ist (wir nehmen O.E. an, dass  $\beta_1, \dots, \beta_g$  auch in  $\widehat{X}$  zusammenhängend sind). Für  $i \in \{1, \dots, g\}$  ist  $\beta_i$  nach dem Aufschneiden O.E. eine Kurve von  $x_0$  nach  $A_i$ , d.h. in  $\widehat{X}$  liegt  $\alpha'_i$  in der  $x_0$ -Homotopieklasse der Kurve um  $A_i$ . Seien nun für  $A_i$  und  $A'_i$  Kurven  $\delta_i$  gegeben, die jeweils den Endpunkt von  $\beta_i$  auf  $A_i$  mit dem entsprechenden Punkt auf  $A'_i$  verbinden (und ansonsten keine der bisher definierten Kurven schneiden); auf  $X$  ist  $\delta_i$  eine geschlossene Kurve und somit gilt das auch für  $\alpha''_i := \beta_i \delta_i \alpha_i \delta_i^- \beta_i^-$ . Für deren  $x_0$ -Homotopieklassen in  $X$  gilt dann:

$$[\alpha''_i] = \underbrace{[\beta_i \delta_i \beta_i^-]}_{:=d_i \in \pi_1(X, x_0)} \underbrace{[\beta_i \alpha_i \beta_i^-]}_{=a_i} \underbrace{[\beta_i \delta_i^- \beta_i^-]}_{:=d_i^{-1} \in \pi_1(X, x_0)},$$

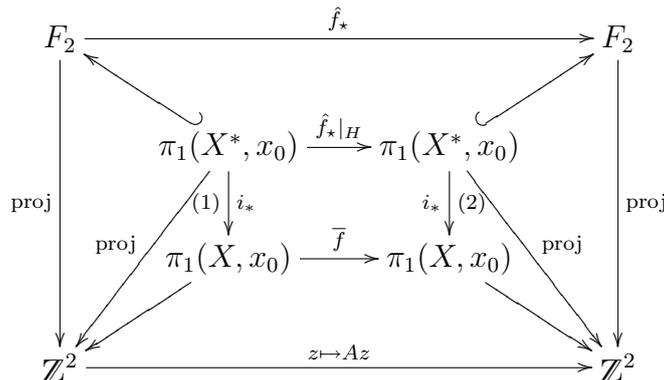
d.h.  $[\alpha''_i]$  ist zu  $a_i$  konjugiert. Nach dem Aufschneiden entlang  $\alpha_i$  ist  $\alpha''_i$  eine Kurve um  $A'_i$ . Damit wird  $\pi_1(\widehat{X}, x_0)$  von den  $x_0$ -Homotopieklassen von  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_g, \alpha''_1, \dots, \alpha''_g$  erzeugt. Vor dem Aufschneiden entsprechen diese aber  $a_1, \dots, a_g, d_1 a_1 d_1^{-1}, \dots, d_g a_g d_g^{-1}$ . Damit gilt  $\gamma \in \langle\langle a_1, \dots, a_g \rangle\rangle$ . Dasselbe gilt für jeden anderen Weg  $\hat{\gamma} := \hat{\beta} x^{\ell(Z)} \hat{\beta}^-$ , der die Voraussetzung erfüllt, da  $[\hat{\gamma}]$  und  $[\gamma]$  in  $\pi_1(X, x_0)$  konjugiert sind.  $\square$

Auch dieser Satz lässt sich rein algebraisch formulieren:

**Korollar 4.3** Seien  $H \leq F_2, R$  und  $\overline{H} = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$  wie oben gegeben. Dann liegen alle  $\overline{w x^n w^{-1}}$ , die in  $\overline{H}$  liegen, auch im normalen Erzeugnis von  $a_1, \dots, a_g$ .

### 4.3 Die Gruppe $\text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ für ein vorgegebenes $\alpha$

**Satz 4.5** Sei  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  ein Origami,  $x_0 \in X^*$  der Basispunkt der Fundamentalgruppe und  $H \cong \pi_1(X^*, x_0) \cong \text{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$  die dazu assoziierte Untergruppe von  $F_2$ . Des Weiteren seien  $f \in \text{Aff}^+(X)$  und  $\bar{f} \in \text{Aut}^+(\pi_1(X, x_0))$  ein Vertreter des von  $f$  induzierten äußeren Automorphismus von  $\pi_1(X, x_0)$  und  $i_* : \pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  sei der Homomorphismus, der von der Inklusion  $i : X^* \hookrightarrow X$  induziert wird. Dann gibt es einen Lift  $\hat{f}_* : F_2 \rightarrow F_2$  von  $f$ , sodass das folgende Diagramm für  $A := \hat{\beta}(\hat{f}_*)$  kommutiert:



**Beweis** Es gilt  $F_2 \cong \text{Deck}(\mathbb{H}/E^*)$ , wobei  $E^*$  der einfach punktierte Torus sei. Genauer:

$$F_2 = \{h \in \text{Aff}^+(\mathbb{H}) \mid \text{der}(h) = I\}$$

Der Homomorphismus “der” wurde in Abschnitt 2.7 definiert. Mit dieser Interpretation von  $F_2$  kann man folgenden Homomorphismus definieren, der nach [Sch05, Prop 3.5] ein Isomorphismus ist:

$$\begin{aligned} \star : \text{Aff}^+(\mathbb{H}) &\rightarrow \text{Aut}^+(F_2) \\ h &\mapsto (h_\star : \sigma \mapsto h \circ \sigma \circ h^{-1}) \end{aligned}$$

Nach [Sch05, Prop 3.3] kann man jedes  $f \in \text{Aff}^+(X^*)$  zu einem  $\hat{f} \in \text{Aff}^+(\mathbb{H})$  liften.

Es gilt  $\text{der}(f) = \text{der}(\hat{f})$  und nach dem Beweis von [Sch05, Prop 3.5] gilt  $\text{der}(\hat{f}) = \hat{\beta}(\hat{f}_\star) = A$ . Damit kommutiert das äußere Diagramm nach Satz 4.1b.

Um zu zeigen, dass das mittlere Diagramm kommutiert, muss gezeigt werden, dass die Einschränkung von  $\hat{f}_\star : F_2 \rightarrow F_2$  auf die Untergruppe  $H \cong \pi_1(X^*, x_0)$  von der Einschränkung  $f : X^* \rightarrow X^*$  induziert wird. Dazu soll zunächst erklärt werden, wie  $f$  einen Automorphismus von  $\pi_1(X^*, x_0)$  induziert, dann, wie Elemente von  $\pi_1(X^*, x_0)$  als Decktransformationen aufgefasst werden. Damit können wir dann  $\hat{f}_\star$  mit dem von  $f$  induzierten Automorphismus vergleichen, indem wir  $\hat{f}_\star|_H$ , wegen  $H \cong \text{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$ , als Automorphismus von  $\text{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$  auffassen.

Zunächst wählen wir einen Lift  $\tilde{x}_0 \in \mathbb{H}$  von  $x_0$  sowie einen Weg  $\tilde{s} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$  mit Anfangspunkt  $\tilde{s}(0) = \tilde{x}_0$  und Endpunkt  $\tilde{s}(1) = \hat{f}(\tilde{x}_0)$ . Sei  $p : \mathbb{H} \rightarrow X^*$  die Überlagerungsabbildung. Dann ist  $s := p \circ \tilde{s}$  ein Weg von  $x_0$  nach  $f(x_0)$ . Die Abbildung  $f$  induziert folgendermaßen ein  $f_\star \in \text{Aut}^+(\pi_1(X^*, x_0))$ : Sei  $a : [0, 1] \rightarrow X^*$  ein geschlossener Weg in  $X^*$  mit  $a(0) = a(1) = x_0$  und  $[a] \in \pi_1(X^*, x_0)$  die Homotopieklasse von  $a$ . Dann ist  $f_\star([a]) := [s \cdot (f \circ a) \cdot s^-]$ . (Normalerweise ist die Definition von  $f_\star$  nur bis auf einen inneren Automorphismus kanonisch und hängt von der Wahl des Weges zwischen  $x_0$  und  $f(x_0)$  ab, hier ist  $s$  aber bis auf Homotopie durch den Lift  $\hat{f}$  und die Wahl von  $\tilde{x}_0$  bestimmt.)

Zudem identifizieren wir  $\pi_1(X^*, x_0)$  mit  $\text{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$  auf folgende Weise: Seien  $a$  und  $[a] \in \pi_1(X^*, x_0)$  wie oben,  $\tilde{a}$  der Lift von  $a$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  und  $h_a$  die Decktransformation, die  $\tilde{x}_0$  auf den Endpunkt von  $\tilde{a}$  abbildet. Dann ordnen wir  $[a] \in \pi_1(X^*, x_0)$  die Decktransformation  $h_a$  zu. Das ist wohldefiniert, da homotope Wege zu homotopen Wegen geliftet werden, außerdem ist die Existenz von  $h_a$  dadurch garantiert, dass die Überlagerung  $\mathbb{H}/X^*$  galoissch ist.

Sei nun  $a$  wie oben gegeben. Wir fassen  $\hat{f}_\star|_H$ , als Automorphismus von  $\text{Deck}(\mathbb{H}/X^*)$  auf. Es ist zu zeigen, dass  $\hat{f}_\star(h_a) = h_{s \cdot (f \circ a) \cdot s^-}$ .

Seien dazu weiterhin  $\tilde{a}$  wie oben gegeben und sei  $\tilde{y}_0$  der Endpunkt von  $\tilde{a}$ . Die Decktransformation  $\hat{f}_\star(h_a) = \hat{f} \circ h_a \circ \hat{f}^{-1}$  ist die, welche  $\hat{f}(\tilde{x}_0)$  auf  $\hat{f}(\tilde{y}_0)$  abbildet. Um die Decktransformation  $h_{s \cdot (f \circ a) \cdot s^-}$  zu verstehen, müssen wir den Lift des Weges  $s \cdot (f \circ a) \cdot s^-$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  betrachten. Der erste Teil ist genau der Lift  $\tilde{s}$  von  $s$ , der zweite Teil ist genau der Lift  $\hat{f} \circ \tilde{a}$  von  $f \circ a$ , der in  $\hat{f}(\tilde{x}_0)$  beginnt und in  $\hat{f}(\tilde{y}_0)$  endet, der dritte Teil ist der Lift  $\hat{s}^-$  von  $s^-$ , der in  $\hat{f}(\tilde{y}_0)$  beginnt. Dessen Endpunkt sei  $\tilde{z}_0$ . Damit ist  $h_{s \cdot (f \circ a) \cdot s^-}$  die Decktransformation, die  $\tilde{x}_0$  auf  $\tilde{z}_0$  abbildet. Das ist aber die Decktransformation, die  $\tilde{s}$  auf  $\hat{s}$  abbildet, da sie den Anfangspunkt  $\tilde{x}_0$  von  $\tilde{s}$  auf den Anfangspunkt  $\tilde{z}_0$  von  $\hat{s}$  abbildet.

Damit bildet sie aber auch den Endpunkt von  $\tilde{s}$  auf den Endpunkt von  $\hat{s}$  ab, also  $\hat{f}(\tilde{x}_0)$  auf  $\hat{f}(\tilde{y}_0)$ , und ist damit die Decktransformation  $\hat{f}_*(h_a)$ . Deshalb kommutiert das mittlere Diagramm.

Die Diagramme (1) und (2): Seien  $h_1, \dots, h_d$  freie Erzeuger von  $H \cong \pi_1(X^*, x_0)$  und  $r_1, \dots, r_l \in H$  die Homotopieklassen von einfach geschlossenen Wegen (mit einer fest gewählten Orientierung) um die Punktierungen  $X \setminus X^*$ . Dann ist

$$\pi_1(X, x_0) = \langle h_1, \dots, h_d \mid r_1, \dots, r_l \rangle.$$

Die Relation  $r_i$  ist in  $F_2$  zu  $(xyx^{-1}y^{-1})^{v_i}$  konjugiert, wobei  $v_i$  für  $i \in \{1, \dots, l\}$  die Verzweigungsordnung von  $p$  in der entsprechenden Punktierung ist. Es gilt somit:

$$\text{proj}(r_i) = (0, 0)^T \quad i \in \{1, \dots, l\}$$

Somit faktorisiert der Homomorphismus  $\text{proj} : \pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}^2$  über  $\pi_1(X, x_0)$  und die Diagramme (1) und (2) sind kommutativ. Wir bezeichnen den entsprechenden (wohldefinierten) Homomorphismus  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}^2$  auch mit  $\text{proj}$ .

Weil der Homomorphismus  $\pi_1(X^*, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  surjektiv ist, kommutiert auch das untere Viereck. Für den Rest ist nichts mehr zu zeigen.  $\square$

**Satz 4.6** Sei  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  ein Origami und  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  ein Standarderzeugendensystem von  $\pi_1(X, x_0)$ ,  $\alpha$  ein symplektischer Homomorphismus mit  $\alpha(a_i) = 1$  und  $\alpha(b_i) = \gamma_i$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$  und sei  $f \in \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ . Dann gilt:

- (a)  $\text{der}(f) \neq \pm I$ , d.h.  $f$  ist weder eine Translation noch eine Involution,
- (b)  $\text{der}(f) \cdot \text{proj}(a_i) = \text{proj}(a_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,
- (c)  $\text{der}(f) \cdot \text{proj}(b_i) = \text{proj}(b_i) + \sum_{j=1}^g h_{ij} \cdot \text{proj}(a_j)$ ,  $i \in \{1, \dots, g\}$ ,  $h_{ij} \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis** (a) Eine Translation eines Origamis entspricht einer Permutation der Quadrate, die die Verklebungen respektiert. Insbesondere haben Translationen somit endliche Ordnung. Dasselbe gilt für Involutionen, da sie von der Form  $z \mapsto -z + b$  sind und quadriert wieder eine Translation ergeben. Aber  $\text{Mod}_g(\alpha)$  und damit auch  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  ist nach Satz 3.10 torsionsfrei.

- (b) Weil das untere Viereck im Diagramm von Satz 4.5 kommutiert, ergibt sich

$$\text{der}(f) \cdot \text{proj}(a_i) = \text{proj}(f_*(a_i)).$$

Wegen Lemma 3.12 b) und c) ist das aber gerade  $\text{proj}(a_i)$ .

- (c) Kern  $\alpha$  ist die normale Untergruppe, die von  $a_1, \dots, a_g$  erzeugt wird. Also wird  $\text{proj}(\text{Kern } \alpha)$  von  $\text{proj}(a_1), \dots, \text{proj}(a_g)$  erzeugt. Da  $f \in \text{Mod}_g(\alpha)$ , gilt  $f_*(\text{Kern } \alpha) = \text{Kern } \alpha$  sowie  $f_*(b_i) \equiv b_i \pmod{\text{Kern } \alpha}$ . Erneut ergibt sich aus dem Kommutieren des oben genannten Diagramms:  $\text{der}(f) \cdot \text{proj}(b_i) = \text{proj}(f_*(b_i))$ . Die Behauptung folgt dann aus

$$\text{der}(f) \cdot \text{proj}(b_i) \equiv \text{proj}(b_i) \pmod{\text{proj}(\text{Kern } \alpha)}. \quad \square$$

**Lemma 4.1** Für einen Körper  $\mathbb{K}$  und  $n \geq 2$  seien bijektive lineare Abbildungen  $\phi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  und  $\hat{\phi} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ , sowie eine surjektive lineare Abbildung  $p : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^2$  gegeben. Weiterhin sei  $\phi$  diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \mathbb{K}^n \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{K}^2 \end{array}$$

kommutiere. Dann sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  auch Eigenwerte von  $\hat{\phi}$ .

**Beweis** Seien  $v_1$  und  $v_2$  linear unabhängige Eigenvektoren zu den Eigenwerten  $\lambda_1$  bzw.  $\lambda_2$  und  $B := \{v_1, v_2\}$  die daraus bestehende Basis von  $\mathbb{K}^2$  und seien  $w_1, w_2 \in \mathbb{K}^n$  Urbilder von  $v_1$  und  $v_2$  unter  $p$ . Außerdem sei  $\{w_3, \dots, w_n\}$  eine Basis von  $\text{Kern}(p)$ . Diese lässt sich durch  $w_1$  und  $w_2$  zu einer Basis  $B'$  von  $\mathbb{K}^n$  ergänzen, denn

$$\sum_{i=1}^n a_i w_i = 0 \Rightarrow p\left(\sum_{i=1}^n a_i w_i\right) = 0 \Rightarrow a_1 p(w_1) + a_2 p(w_2) = 0 \Rightarrow a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$$

Da aber  $\{w_3, \dots, w_n\}$  eine Basis von  $\text{Kern}(p)$  ist, folgt auch

$$a_3 = \dots = a_n = 0.$$

Da  $\hat{\phi}$  bijektiv ist und das Diagramm kommutiert, gilt  $\hat{\phi}(\text{Kern}(p)) = \text{Kern}(p)$ . Aus der Kommutativität des Diagramms folgt außerdem

$$\hat{\phi}(w_i) \in \lambda_i w_i + \text{Kern}(p) \text{ für } i \in \{1, 2\}.$$

Damit hat die Abbildungsmatrix zu  $\hat{\phi}$  bezüglich der Basis  $B'$  die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & \cdots & & * \\ \vdots & & & & \vdots \\ * & & \cdots & & * \end{pmatrix}$$

und diese Matrix hat die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ . □

**Satz 4.7** Sei  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  ein Origami und  $f \in \text{Aff}^+(X)$ , so dass  $A := \text{der}(f)$  hyperbolisch ist, und sei  $M_f \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$  die Abbildungsmatrix zur von  $f$  induzierten Abbildung auf  $H_1(X, \mathbb{Z})$  (siehe Definition 3.12). Dann sind die beiden Eigenwerte von  $A$  auch Eigenwerte von  $M_f$ , als Matrix in  $\mathbb{R}^{2g \times 2g}$  aufgefasst.



wobei wir ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass  $b, c > 0$ . Aber

$$BCB^{-1}C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+bc)^2 - bc & -b^2c \\ bc^2 & 1-bc \end{bmatrix}$$

hat Spur  $(1+bc)^2 - bc + 1 - bc = 1 + (bc)^2 > 2$  und ist somit hyperbolisch und das kann nicht sein. Also ist  $\bar{\Gamma}$  abelsch und somit isomorph zu  $\mathbb{Z}$  oder trivial, da eine Fuchssche Gruppe genau dann abelsch ist, wenn sie zyklisch ist (siehe [Kat92, Thm. 2.3.6]).

Auch  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$  oder trivial, da der Gruppenhomomorphismus

$$/\{\pm I\} \circ \text{der} |_{\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)}: \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \rightarrow \bar{\Gamma}$$

injektiv ist. Das liegt daran, dass im Kern davon außer der Identität höchstens noch Translationen und Involutionen enthalten sein könnten. Diese gibt es aber nach Satz 4.6a in  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  nicht, also ist der Kern trivial.  $\square$

**Bemerkung 4.4** Bei der Aussage in Satz 4.7 handelt es sich um eine für Translationsflächen bereits bekannte Tatsache. Für diesen allgemeineren Fall ist der Beweis allerdings etwas komplizierter und wird weiter unten in Satz 5.7 ausgeführt. Dieser neue Beweis für den Fall der Origamis ist dagegen besonders einfach, deshalb wurde der Fall gesondert betrachtet.

**Satz 4.9** Sei  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  ein Origami und  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  ein Standarderzeugendensystem von  $\pi_1(X, x_0)$ , so dass  $a_1, \dots, a_g$  konjugiert horizontal sind, und sei  $\alpha : \pi_1(X, x_0) \rightarrow F_g = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$  der von  $\alpha(a_i) \mapsto 1$  und  $\alpha(b_i) \mapsto \gamma_i$  induzierte symplektische Homomorphismus. Dann gilt

$$\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \cong \mathbb{Z}.$$

**Beweis** Seien  $Z_1, \dots, Z_r$  die horizontalen Zylinder von  $O$  und sei  $m := \text{kgV}(\ell(Z_1), \dots, \ell(Z_r))$ .

Dann ist  $A := \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(O)$  und es existiert ein  $f \in \text{Aff}^+(X)$  mit  $\text{der}(f) = A$ .

Sei  $\hat{f}_*$  der Automorphismus mit  $\hat{f}_*(x) = x$  und  $\hat{f}_*(y) = x^m y$ . Dieser ist ein Lift von  $f$  nach  $F_2$  wie im Satz 4.5. Gegeben sei  $w \in \pi_1(X^*, x_0)$  als reduziertes Wort in  $x$  und  $y$ . Wir bezeichnen mit  $\bar{w} \in \pi_1(X, x_0)$  die Äquivalenzklasse von  $w$  und nehmen ohne Einschränkung an, dass ein  $y$  in  $w$  auftaucht und  $\bar{w}$  also die Form  $w = w_1 y^\varepsilon w_2$  mit  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  hat.

Wir zeigen  $\alpha(\hat{f}_*(w)) = \alpha(w_1 y^\varepsilon \hat{f}_*(w_2))$  durch Induktion über die (absolute) Anzahl  $n$  der im Teilwort  $w_1$  auftauchenden  $y$  (d.h. sowohl  $y$  als auch  $y^{-1}$  sollen hier  $+1$  zählen).

Sei  $n = 0$ , dann ist  $w_1$  von der Form  $x^k$ . Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\varepsilon = 1$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_*(w) &= \hat{f}_*(x^k) \hat{f}_*(y) \hat{f}_*(w_2) \\ &= x^k x^m y \hat{f}_*(w_2) \\ &= x^m x^k y \hat{f}_*(w_2) \end{aligned}$$

Nach Satz 4.4 ist  $\overline{x^m} \in \text{Kern}(\alpha)$ . Damit gilt

$$\alpha(\overline{\hat{f}_*(w)}) = \alpha(\overline{x^m \cdot x^k y \hat{f}_*(w_2)}) = \alpha(\overline{x^k y \hat{f}_*(w_2)}).$$

Nun sei  $\varepsilon = -1$ :

$$\begin{aligned} \hat{f}_*(w) &= \hat{f}_*(x^k) \hat{f}_*(y^{-1}) \hat{f}_*(w_2) \\ &= x^k y^{-1} x^{-m} \hat{f}_*(w_2) \\ &= x^k y^{-1} x^{-m} y x^{-k} x^k y^{-1} \hat{f}_*(w_2) \end{aligned}$$

Auch hier gilt nach Satz 4.4  $\overline{x^k y^{-1} x^{-m} y x^{-k}} \in \text{Kern}(\alpha)$  und somit  $\alpha(\overline{\hat{f}_*(w)}) = \alpha(\overline{x^k y^{-1} \hat{f}_*(w_2)})$ .

Wir führen jetzt den Induktionsschritt von  $n$  nach  $n+1$ .

Sei also  $n+1$  die Anzahl der in  $w_1$  auftauchenden  $y$ . Dann können wir  $w_1$  schreiben als  $w_1 = \tilde{w}_1 y^\delta x^k$  mit  $\delta \in \{-1, 1\}$  und nach Induktionsvoraussetzung gilt  $\alpha(\overline{\hat{f}_*(w)}) = \alpha(\overline{\tilde{w}_1 y^\delta \hat{f}_*(x^k y^\varepsilon w_2)})$ .

Wir betrachten wieder zunächst den Fall, dass  $\varepsilon = 1$ :

$$\begin{aligned} \alpha(\overline{\hat{f}_*(w)}) &= \alpha(\overline{\tilde{w}_1 y^\delta \hat{f}_*(x^k y w_2)}) \\ &= \alpha(\overline{\tilde{w}_1 y^\delta x^k x^m y \hat{f}_*(w_2)}) \\ &= \alpha(\overline{(\tilde{w}_1 y^\delta x^k) x^m (\tilde{w}_1 y^\delta x^k)^{-1} (\tilde{w}_1 y^\delta x^k) y \hat{f}_*(w_2)}) \\ &= \alpha(\underbrace{\overline{(\tilde{w}_1 y^\delta x^k) x^m (\tilde{w}_1 y^\delta x^k)^{-1}}}_{\in \text{Kern}(\alpha)} \cdot \overline{\tilde{w}_1 y^\delta x^k y \hat{f}_*(w_2)}) \\ &= \alpha(\overline{\tilde{w}_1 y^\delta x^k y \hat{f}_*(w_2)}) \\ &= \alpha(\overline{w_1 y \hat{f}_*(w_2)}). \end{aligned}$$

Nun sei  $\varepsilon = -1$ :

$$\begin{aligned} \alpha(\overline{\hat{f}_*(w)}) &= \alpha(\overline{\tilde{w}_1 y^\delta \hat{f}_*(x^k y^{-1} w_2)}) \\ &= \alpha(\overline{\tilde{w}_1 y^\delta x^k y^{-1} x^{-m} \hat{f}_*(w_2)}) \\ &= \alpha(\overline{(\tilde{w}_1 y^\delta x^k y^{-1}) x^{-m} (\tilde{w}_1 y^\delta x^k y^{-1})^{-1} \cdot \tilde{w}_1 y^\delta x^k y^{-1} \hat{f}_*(w_2)}) \\ &= \alpha(\overline{w_1 y^{-1} \hat{f}_*(w_2)}). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung  $\alpha(\overline{\hat{f}_*(w)}) = \alpha(\overline{w_1 y^\varepsilon \hat{f}_*(w_2)})$  und da wir  $w_2$  auch als Teilwort nach dem letzten  $y^{\pm 1}$  wählen können, also  $w_2 = x^r$  mit  $r \in \mathbb{Z}$ , folgt somit auch  $\alpha(\overline{\hat{f}_*(w)}) = \alpha(\overline{w})$ .

Da das Diagramm aus Satz 4.5 kommutiert, haben wir  $\alpha \circ f_*(\overline{w}) = \alpha(\overline{w})$  und damit  $f \in \text{Mod}_g(\alpha)$ .

Also gilt  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \neq \{1\}$  und mit Satz 4.8 folgt  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Korollar 4.4** Die Aussagen der Sätze 4.3, 4.4 und 4.9 gelten analog auch für vertikale Schottky-Schnittsysteme (die man analog zu den horizontalen definiert).  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  wird dann von einem Element der Form  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  erzeugt.

**Satz 4.10** Sei  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  ein Origami vom Geschlecht  $g$  und  $v = (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ . Dann existiert ein symplektischer Homomorphismus  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_g$  und ein  $f \in \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ ,  $f \neq \text{id}$ , so dass  $A := \text{der}(f)$  parabolisch ist und Eigenvektor  $v$  hat.

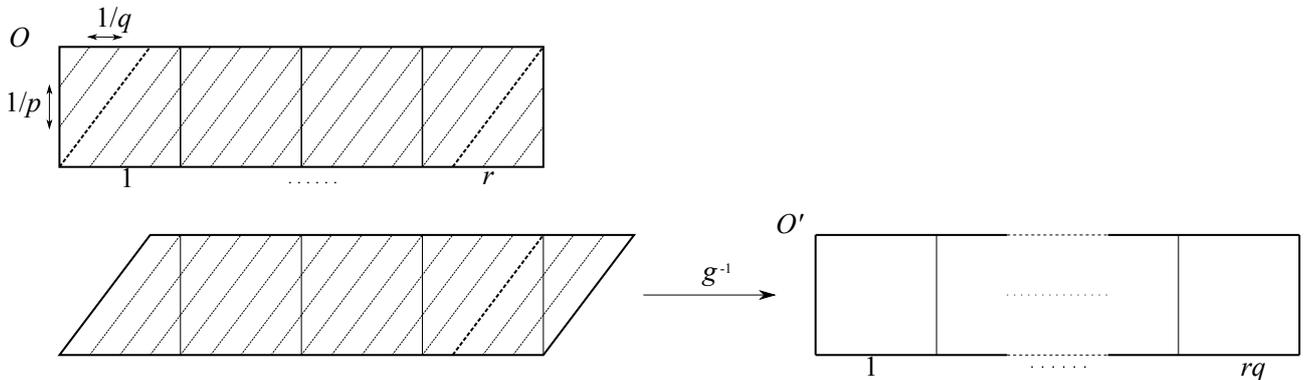
**Beweis** Wenn ein solches  $f$  existiert, ist  $A$  parabolisch, nach Satz 4.8.

Sei  $v = (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ . Ohne Einschränkung seien  $p$  und  $q$  so gewählt, dass  $\text{ggT}(p, q) = 1$  und  $q \geq 0$ . Für  $q = 0$  oder  $p = 0$  ist die Aussage schon im Satz 4.9 bzw. Korollar 4.4 bewiesen worden. Wir können also annehmen, dass  $q > 0$  und  $p \neq 0$  ist.

Sei nun  $G$  die Menge der Geraden in  $\mathbb{C}$  mit Steigung  $\frac{q}{p}$ , die das Gitter  $\Lambda_I := \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$  schneiden. Jedes Einheitsquadrat mit Ecken in den Gitterpunkten wird so von  $G$  geschnitten, dass dessen horizontale Seite in  $q$  und dessen vertikale Seite in  $|p|$  gleich große Segmente aufgeteilt werden. Dasselbe passiert mit den Quadraten  $Q_1, \dots, Q_d$  von  $O$ , wenn wir  $p^{-1}(h(G))$  betrachten, wobei  $p : X \rightarrow E$  die verzweigte Überlagerung aus Bem. 4.1b sei und  $h : \mathbb{C} \rightarrow E$  die Überlagerung von Translationsflächen sei mit  $h(\Lambda_I) = \infty$ .

$$\mathbb{C} \xrightarrow{h} E \xleftarrow{p} X$$

Ein horizontaler Zylinder, der aus  $m$  Quadraten besteht, wird von  $p^{-1}(h(G))$  in  $mq$  Parallelogramme aufgeteilt. Damit erhalten wir eine neue Aufteilung der Translationsfläche  $X$  in  $dq$  Parallelogramme mit Seitenlängen  $\frac{1}{q}$  und  $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}$  und Höhe 1, bei denen jeweils eine untere Kante mit einer oberen und eine rechte mit einer linken Kante identifiziert wird. Die Seite mit Länge  $\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{q}$  ist parallel zum Eigenvektor  $v$ .



Sei nun  $O'$  das Origami, das aus  $dq$  Quadraten besteht, die so verklebt werden, wie die Parallelogramme in  $O$ . Die durch  $O'$  definierte Translationsfläche nennen wir  $X'$ . Wir betrachten die affine Abbildung

$$g : X' \longrightarrow X$$

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & \frac{p}{q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z,$$

die die Einheitsquadrate aus  $O'$  auf die Parallelogramme aus  $O$  abbildet. Nach Korollar 4.4 gibt es ein

Standarderzeugendensystem  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  von  $\pi_1(X', x_0)$ , so dass  $a_1, \dots, a_g$  konjugiert vertikal sind, sowie einen symplektischen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha' : \pi_1(X', x_0) &\longrightarrow F_g = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle \\ a_i &\mapsto 1, \quad b_i \mapsto \gamma_i \end{aligned}$$

und ein  $f'$  mit  $\langle f' \rangle = \text{Aff}^+(X') \cap \text{Mod}_g(\alpha')$  und  $\text{der}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  für ein  $c \neq 0$ .

Mit  $\alpha := \alpha' \circ g_*^{-1}$  kommutieren im folgenden Diagramm das obere und untere, sowie das äußere Teildiagramm. Da  $f' \in \text{Mod}_g(\alpha')$ , kommutiert, bis auf einen inneren Automorphismus von  $F_g$ , auch das linke Teildiagramm. Damit kommutiert aber auch das rechte Teildiagramm bis auf einen inneren Automorphismus von  $F_g$ , also ist  $g \circ f' \circ g^{-1} \in \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ . Da das Diagramm symmetrisch in  $X$  und  $X'$  ist, folgt auch  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha) = \langle g \circ f' \circ g^{-1} \rangle$ .

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X') & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X) \\ & \searrow \alpha' & \swarrow \alpha \\ & F_g & \\ & \swarrow \alpha' & \searrow \alpha \\ \pi_1(X') & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X) \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \text{der}(g \circ f' \circ g^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \text{der}(g) \cdot \text{der}(f') \cdot \text{der}(g^{-1}) \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{q} & \frac{p}{q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + pc & -\frac{p^2c}{q} \\ cq & -cp + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit erfüllt  $f := g \circ f' \circ g^{-1}$  die Behauptung. □

**Bemerkung 4.5** Aus dem Beweis von Satz 4.10 folgt insbesondere, dass es in der Veech-Gruppe eines Origamis zu jeder Richtung  $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$  ein parabolisches Element  $A$  gibt mit entsprechendem Eigenvektor. Dies ist allerdings bereits bekannt und folgt schon daraus, dass  $\Gamma(O)$  endlichen Index in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  hat.

# Kapitel 5

## Halbtranslationsflächen

Die im Kapitel 4 gemachten Aussagen über horizontale Schottky-Schnittsysteme (insbes. die Sätze 4.3 und 4.4) lassen sich auch für Flächen mit flacher Struktur, also Halbtranslationsflächen (Definition 2.2) beweisen. Dasselbe gilt für die Aussage, dass es immer einen symplektischen Homomorphismus  $\alpha$  gibt, so dass die Gruppe  $\text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  nicht trivial ist, wenn  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  ein parabolisches Element enthält und insbes. wenn  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  ein Gitter ist. Für Translationsflächen lässt sich dann auch noch zeigen, dass die besagte Gruppe isomorph zu  $\mathbb{Z}$  ist (entsprechend Satz 4.9 für Origamis). Zunächst soll dazu das Konzept des HSS auf Halbtranslationsflächen übertragen werden und dann Differentialformen und Čech-Kohomologie, die für die Beweise später benötigt werden, eingeführt werden.

### 5.1 Für geeignetes $\alpha$ gilt $\text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \neq \{\text{id}\}$

**Definition 5.1** Sei  $q$  ein holomorphes quadratisches Differential auf einer Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 2$  und  $\mu$  die davon induzierte flache Struktur auf  $X^* = X \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$  (siehe Bem. 2.2).

- (a) Eine maximale reelle Kurve in  $X^*$ , die durch die Kartenabbildungen von  $\mu$  lokal auf horizontale Segmente (bzw. Segmente in Richtung  $v \in \mathbb{R}^2$ ) abgebildet wird, nennen wir **horizontale Trajektorie** (bzw. **Trajektorie in Richtung  $v$** ).
- (b) Eine **kritische Trajektorie** ist eine, die in  $X \setminus X^*$  endet, andernfalls sprechen wir von **regulären Trajektorien**.
- (c) Wenn alle regulären Trajektorien in einer Richtung  $v \in \mathbb{R}^2$  geschlossen sind, bezeichnen wir diese Richtung als **Strebel-Richtung**.

**Satz 5.1** Seien  $q$  und  $X$  wie oben gegeben und die horizontale Richtung von  $q$  sei eine Strebel-Richtung. Dann lässt sich  $(X, \mu)$  als Verklebung von Rechtecken mit horizontalen Seiten in Strebel-Richtung realisieren. Diese Rechtecke bilden eine Zerlegung von  $X$  in horizontale Zylinder.

**Beweis** Siehe [HS07, §4.1.1]. □

**Definition 5.2** Gegeben sei eine Riemannsche Fläche  $X$  mit flacher Struktur  $\mu$ , die als Verklebung von Rechtecken realisiert ist. Ein bzgl. dieser Verklebung *horizontaler Weg* ist ein geschlossener Weg  $c$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $\varepsilon > 0$  ein zu  $c$  homotoper Weg  $c_\varepsilon$  existiert, der in einer  $\varepsilon$ -Umgebung der horizontalen Seiten der Rechtecke liegt. Alle anderen Definitionen rund um den Begriff “horizontal”, wie “konjugiert horizontal”, “(konjugiert) horizontal als Element in  $\pi_1(X)$ ” und “HSS” können nun analog zum Origami-Fall definiert werden.

**Bemerkung 5.1** Sei  $(X, \mu)$  eine Halbtranslationsfläche, die als Verklebung von Rechtecken realisiert ist. Die Elemente aus  $\pi_1(X)$  haben als Vertreter Kurven, die die Zylinderränder rechtwinklig schneiden, nicht durch kritische Punkte gehen und in den Zylindern aus vertikalen und horizontalen Segmenten bestehen.

**Satz 5.2** Gegeben sei eine Halbtranslationsfläche  $(X, \mu)$  vom Geschlecht  $g$ , deren projektive Veech-Gruppe  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  ein parabolisches Element  $A$  enthält, und sei  $f \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  mit  $A = D(f)$ . Dann existiert ein symplektischer Homomorphismus  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_g$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$f^n \in \text{Mod}_g(\alpha) \cap \text{Aff}^+(X, \mu)$$

**Beweis** Nach [Vee89, Prop. 2.4] ist die Eigenrichtung von  $A$  eine Strebel-Richtung (sei  $v$  ein Vektor mit dieser Richtung). Damit ist  $(X, \mu)$  als Verklebung von Rechtecken realisierbar, bei denen zwei Seiten parallel zu  $v$  sind. O.E. seien diese Seiten horizontal, d.h. o.E. gelte  $v = (1, 0)^\top$ . Wie in Satz 4.3 folgt, dass es bzgl. der gegebenen Realisierung von  $X$  als Verklebung ein HSS gibt. Sei dann  $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$  ein Standarderzeugendensystem der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X)$ , sodass  $a_1, \dots, a_g$  konjugiert horizontal sind, und sei  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_g = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$  definiert durch  $\alpha(a_i) = 1$  und  $\alpha(b_i) = \gamma_i$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$ . Wie in Satz 4.4 folgt auch, dass ein Element in  $\pi_1(X)$ , das frei homotop zum horizontalen Schnitt durch einen Zylinder ist, im von  $a_1, \dots, a_g$  erzeugten Normalteiler liegt, denn in den Beweisen zu diesen Sätzen wurde nur die flache Struktur von Origamis verwendet. Eine Potenz  $f^n$  (für ein  $n \in \mathbb{N}$ ) von  $f$  ist ein multipler Dehntwist an den Zylindermitten. Mit Bem. 5.1 sieht man damit leicht, dass  $f^n$  auf der Fundamentalgruppe derart operiert, dass einem Element in  $\pi_1(X)$  Elemente hinzugefügt werden, die aus horizontalen Wegen durch die Zylinder bestehen und somit im Kern von  $\alpha$  liegen. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Korollar 5.1** Die Aussage aus dem Satz gilt insbesondere dann, wenn die projektive Veech-Gruppe  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  ein Gitter in  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist.

**Beweis** Wenn die projektive Veech-Gruppe  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  ein Gitter ist, gibt es in  $\text{Aff}^+(X, \mu)$  immer ein Element  $f$ , so dass  $A := \text{der}(f)$  parabolisch ist, siehe die Bemerkung nach [Vee89, Prop. 2.10].  $\square$

## 5.2 Differentialformen

Um nun den Satz 4.7 für Translationsflächen im allgemeinen zu beweisen, braucht man einige Sätze über Kohomologie auf kompakten Riemannschen Flächen, die hier ohne Beweis zitiert werden

sollen. Sie finden sich alle in [For77]. Daraus entnommen sind auch die Definitionen und Sätze in diesem sowie in Absatz 5.3, die hier für unsere Zwecke passend zusammengefasst sind.

Sei  $a$  ein Punkt auf einer Riemannschen Fläche  $X$ ,  $\mathcal{E}$  sei die Garbe der reell differenzierbaren komplexwertigen Funktionen auf  $X$ . Wir bezeichnen mit  $\mathcal{E}_a$  den Halm von  $\mathcal{E}$  im Punkt  $a$ .  $\mathcal{E}_a$  besteht also aus den differenzierbaren Funktionskeimen in  $a$ . Seien nun  $\mathfrak{m}_a \subset \mathcal{E}_a$  das maximale Ideal der Funktionskeime, die in  $a$  verschwinden, und  $\mathfrak{m}_a^2 \subset \mathfrak{m}_a$  das Ideal der Funktionskeime, die in  $a$  mindestens mit Ordnung 2 verschwinden. Der **Kotangentenraum** von  $X$  im Punkt  $a$  ist definiert als

$$T_a^{(1)} := \mathfrak{m}_a / \mathfrak{m}_a^2.$$

Für eine offene (Karten-)Umgebung  $U$  von  $a$  und  $f \in \mathcal{E}(U)$  ist das Differential  $d_a f \in T_a^{(1)}$  definiert als

$$d_a f := (f - f(a)) \pmod{\mathfrak{m}_a^2}.$$

Man kann zeigen [For77, 9.4], dass

$$d_a f = \frac{\partial f}{\partial x}(a) d_a x + \frac{\partial f}{\partial y}(a) d_a y = \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}$$

und somit  $\{d_a x, d_a y\}$  und  $\{d_a z, d_a \bar{z}\}$  jeweils eine Basis von  $T_a^{(1)}$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum bilden.

Da auf einer Riemannschen Fläche die Kartenwechsel biholomorph sind, hängen die Untervektorräume  $T_a^{(1,0)} := \mathbb{C} d_a z$  und  $T_a^{(0,1)} := \mathbb{C} d_a \bar{z}$  nicht von der gewählten Kartenumgebung ab. Wir sprechen dann von Differentialformen vom Typ  $(1,0)$  bzw.  $(0,1)$ . Nach Definition haben wir

$$T_a^{(1)} = T_a^{(1,0)} \oplus T_a^{(0,1)}.$$

**Definition 5.3** (a) Eine **Differentialform 1. Ordnung** (im Folgenden nur noch ‘‘Differentialform’’) auf einer Riemannschen Fläche  $X$  ist eine Abbildung

$$\omega : X \rightarrow \bigcup_{a \in X} T_a^{(1)}$$

mit  $\omega(a) \in T_a^{(1)}$  für alle  $a \in X$ .

(b) Für  $f \in \mathcal{E}(X)$  definiert man die Differentialformen  $df, d'f, d''f$  durch:

$$(df)(a) := d_a f; \quad (d'f)(a) := d'_a f := \frac{\partial f}{\partial z}(a) d_a z; \quad (d''f)(a) := d''_a f := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) d_a \bar{z}$$

(c) Eine Differentialform  $\omega$  heißt **differenzierbar** bzw. **holomorph**, wenn sie sich bzgl. jeder Karte  $(U, z)$  darstellen lässt als

$$\omega = f dz + g d\bar{z} \quad \text{in } U \text{ mit } f, g \in \mathcal{E}(U)$$

bzw.

$$\omega = fdz \quad \text{in } U \text{ mit } f \in \mathcal{O}(U),$$

wobei  $\mathcal{O}$  die Garbe der holomorphen Funktionen sei.

- (d) Sei  $U \subseteq X$  offen. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{E}^{(1)}(U)$  den  $\mathcal{E}(U)$ -Modul der differenzierbaren Differentialformen auf  $U$ , mit  $\mathcal{E}^{(1,0)}(U)$  und  $\mathcal{E}^{(0,1)}(U)$  die Untermoduln vom Typ  $(1,0)$  bzw.  $(0,1)$  und mit  $\Omega(U)$  den  $\mathcal{O}(U)$ -Modul der holomorphen Differentialformen auf  $U$ .

Die dadurch definierten Garben von Moduln auf  $X$  bezeichnen wir entsprechend mit

$$\mathcal{E}^{(1)}, \quad \mathcal{E}^{(1,0)}, \quad \mathcal{E}^{(0,1)} \quad \text{und} \quad \Omega.$$

- (e) Für  $U \subseteq X$  sei  $\omega = fdz + gd\bar{z} \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$  gegeben mit  $f, g \in \mathcal{E}(U)$ . Wir definieren die Differentialform  $\bar{\omega} := \bar{f}d\bar{z} + \bar{g}dz \in \mathcal{E}^{(1)}(U)$  sowie

$$\bar{\Omega}(U) := \{\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(U) \mid \bar{\omega} \in \Omega(U)\}.$$

Die dadurch definierte Garbe sei  $\bar{\Omega}$ . Differentialformen in  $\bar{\Omega}(U)$  heißen *antiholomorph*.

**Definition 5.4** Seien  $X$  und  $Y$  zwei Riemannsche Flächen und  $f : X \rightarrow Y$  eine differenzierbare Abbildung und  $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ . Für eine lokale Darstellung  $\omega = gdz + hd\bar{z}$  ist der **Pullback** von  $\omega$  bzgl.  $f$  in  $\mathcal{E}^{(1)}(X)$  gegeben durch

$$f^*\omega := (g \circ f)d(z \circ f) + (h \circ f)d(\bar{z} \circ f).$$

Diese lokalen Darstellungen lassen sich auf  $X$  verkleben, so dass sie eine Differentialform auf  $X$  definieren. Siehe hierzu [For77, 9.17].

## 5.3 Čech-Kohomologie

**Definition 5.5** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen darauf.

- (a) Für eine Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  definieren wir für  $q \in \mathbb{N}_0$  die  $q$ -te **Kokettengruppe** von  $\mathcal{F}$  bzgl.  $\mathfrak{U}$  als

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}).$$

Die Elemente daraus heißen  $q$ -**Koketten**. Die Addition in  $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  erfolgt komponentenweise.

- (b) Die **Korand-Operatoren**

$$\delta : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \quad \text{und} \quad \delta : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

seien die Homomorphismen, die für  $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  und  $(f_{ij})_{i,j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  definiert sind durch

$$\delta((f_i)_{i \in I}) = (g_{ij})_{i,j \in I} \text{ mit } g_{ij} := f_j|_{U_i \cap U_j} - f_i|_{U_i \cap U_j} \text{ bzw.}$$

$$\delta((f_{ij})_{i,j \in I}) = (g_{ijk})_{i,j,k \in I} \text{ mit } g_{ijk} := f_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} - f_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} + f_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}.$$

*Bemerkung:*  $\delta \circ \delta : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  ist der Nullhomomorphismus.

(c) Die Gruppe der **1-Kozyklen** ist definiert als

$$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{Kern}(C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$$

und die Gruppe der **1-Koränder** ist definiert als

$$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{Bild}(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})).$$

(d) Die **1. Kohomologiegruppe** von  $\mathcal{F}$  bzgl.  $\mathfrak{U}$  ist definiert als

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})/B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Die Faktorgruppe kann man bilden, da Koränder insbesondere auch Kozyklen sind.

Man kann nun zu immer feineren Überdeckungen von  $X$  übergehen. Dabei heißt  $\mathfrak{B}$  eine **feinere Überdeckung** als  $\mathfrak{U}$  (schreibe  $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{U}$ ), wenn jede offene Menge aus  $\mathfrak{B}$  in einer offenen Menge aus  $\mathfrak{U}$  enthalten ist. Wenn wir jetzt für jedes  $V \in \mathfrak{B}$  ein  $U \in \mathfrak{U}$  wählen (\*) mit  $V \subseteq U$ , wird durch die entsprechenden Einschränkungshomomorphismen der Garbe  $\mathcal{F}$  ein Homomorphismus

$$t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{B}, \mathcal{F})$$

induziert. Man kann zeigen, dass  $t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}$  injektiv [For77, 12.4] und unabhängig von der Wahl (\*) [For77, 12.3] ist. Außerdem gilt für  $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{B}' \leq \mathfrak{U}$ :

$$t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{B}} \circ t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}} = t_{\mathfrak{B}'}^{\mathfrak{U}}.$$

Auf der disjunkten Vereinigung

$$\widetilde{H}^1(X, \mathcal{F}) := \coprod_{\mathfrak{U} \text{ offene Überd. von } X} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

ist somit eine Äquivalenzrelation  $\sim$  gegeben, die für  $\chi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \xi \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$  vermöge

$$\chi \sim \xi \Leftrightarrow \exists \mathfrak{B} \text{ mit } \mathfrak{B} \leq \mathfrak{U}, \mathfrak{B} \leq \mathfrak{U}' : t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}}(\chi) = t_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{U}'}(\xi)$$

definiert ist.

**Definition 5.6** Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Garbe  $\mathcal{F}$  darauf. Die **1. Kohomologiegruppe** von  $X$  bzgl.  $\mathcal{F}$  ist gegeben durch

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \widetilde{H}^1(X, \mathcal{F}) / \sim = \varinjlim H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Analog zur 1. Kohomologiegruppe kann man auch die  $n$ -te Kohomologiegruppe für  $n \in \mathbb{N}_0$  definieren. Von Interesse für uns ist noch die 0. Kohomologiegruppe:

**Definition 5.7** Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Garbe  $\mathcal{F}$  darauf. Für eine Überdeckung  $\mathfrak{U}$  seien

$$Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \text{Kern}(C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$$

$$B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := 0$$

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Man kann leicht zeigen, dass unabhängig von der gewählten Überdeckung  $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$  [For77, 12.10]. Sei deshalb

$$H^0(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$$

als die **0. Kohomologiegruppe** von  $X$  bzgl.  $\mathcal{F}$  definiert.

**Bemerkung 5.2** Ist die Garbe  $\mathcal{F}$  eine Garbe von Vektorräumen, so sind  $H^1(X, \mathcal{F})$  und  $H^0(X, \mathcal{F})$  ebenfalls Vektorräume.

Mit den hier definierten Objekten lassen sich nun die Sätze zitieren, die im Folgenden gebraucht werden.

**Satz 5.3** Sei  $X$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche. Dann gilt

$$H^1(X, \mathbb{Z}) = H^1(X, \mathbb{C}) = 0$$

$\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{C}$  seien dabei die Garben der lokal konstanten Funktionen nach  $\mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{C}$ .

**Beweis** Siehe [For77, 12.7]. □

**Satz 5.4 (Leray)**

Sei  $X$  ein topologischer Raum mit der Garbe  $\mathcal{F}$  und  $\mathfrak{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$  mit  $H^1(U, \mathcal{F}) = 0$  für alle  $U \in \mathfrak{U}$ . Dann gilt:

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

Die Überdeckung  $\mathfrak{U}$  heißt dann **Leray-Überdeckung**.

**Beweis** Siehe [For77, 12.8]. □

**Definition und Bemerkung 5.1** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  Garben auf  $X$ .

(a) Ein Garben-Homomorphismus  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  ist eine Familie von Homomorphismen

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U), U \subseteq X \text{ offen,}$$

die mit den Beschränkungsabbildungen verträglich ist, d.h. das folgende Diagramm ist für alle offenen Mengen mit  $V \subseteq U$  kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

(b)  $\alpha$  induziert für jedes  $x \in X$  einen Homomorphismus der Halme  $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ .

(c) Eine Sequenz  $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$  von Garben-Homomorphismen heißt **exakt**, wenn

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$$

für jedes  $x \in X$  exakt ist.

Ein Garben-Homomorphismus  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induziert Homomorphismen der Kohomologiegruppen (siehe auch [For77, 15.10])

$$\begin{aligned} \alpha^0 &: H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G}) \text{ und} \\ \alpha^1 &: H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}). \end{aligned}$$

$\alpha^0$  ist definiert als der Homomorphismus  $\alpha_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  und  $\alpha^1$  erhält man so:

Sei  $\mathfrak{U}$  eine Überdeckung von  $X$ . Dann erhält man einen Homomorphismus

$$\alpha_{\mathfrak{U}} : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{G}),$$

indem man einer Kokette  $(f_{ij})$  die Kokette  $(\alpha(f_{ij}))$  zuordnet. Dieser induziert einen Homomorphismus der Kohomologien bzgl.  $\mathfrak{U}$  und dieser induziert wiederum den Homomorphismus

$$\alpha^1 : H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}).$$

**Satz 5.5** Sei  $X$  ein topologischer Raum mit den Garben  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  und Garben-Homomorphismen  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  und  $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , wobei die Garbensequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$$

exakt sei. Dann ist die davon induzierte Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^1} H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^1} H^1(X, \mathcal{H})$$

auch exakt.

**Bemerkung** Der sog. verbindende Homomorphismus  $\delta^*$  ist in [For77, 15.11] definiert. Für unsere Zwecke reicht es zu wissen, dass es solch einen Homomorphismus gibt.

**Beweis** Siehe [For77, 15.12]. □

Für das Weitere müssen wir zunächst den Begriff der harmonischen Differentialformen einführen. Eine Möglichkeit ist die folgende (siehe auch [For77, 19.2] und [For77, 19.3]):

### Definition 5.8

- (a)  $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$  heißt **harmonisch**, wenn  $\omega = \omega_1 + \omega_2$  mit  $\omega_1 \in \Omega(X)$  und  $\omega_2 \in \bar{\Omega}(X)$ .
- (b) Den Vektorraum der harmonischen Differentialformen bezeichnen wir mit  $\text{Harm}^1(X)$ .

**Bemerkung 5.3**  $\text{Harm}^1(X)$  ist ein  $2g$ -dimensionaler Vektorraum über  $\mathbb{C}$  und es gilt

$$\text{Harm}^1(X) = \Omega(X) \oplus \bar{\Omega}(X).$$

**Beweis** Das folgt aus [For77, 19.6 und 19.11]. □

### Satz 5.6 (de Rahm und Hodge)

Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Es gilt

$$\text{Harm}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C}).$$

$H^1(X, \mathbb{C})$  ist somit als Vektorraum isomorph zu  $\mathbb{C}^{2g}$ .

**Beweis** Siehe [For77, 19.14]. □

## 5.4 Für Translationsflächen ist $\text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ zyklisch

**Lemma 5.1** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  mit den Garben  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{C}$  und sei  $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}$  der von der natürlichen Einbettung herkommende Garben-Homomorphismus. Die davon induzierte Abbildung  $\iota^1 : H^1(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C})$  ist injektiv und ein Erzeugendensystem von  $H^1(X, \mathbb{Z})$  wird unter  $\iota^1$  auf eine Basis von  $H^1(X, \mathbb{C})$  abgebildet.

**Beweis** Sei  $\mathbb{C}^*$  die Garbe der lokal konstanten Funktionen nach  $\mathbb{C}^*$  und  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  der von  $z \mapsto e^{2\pi iz}$  herkommende Garben-Homomorphismus. Wir haben dann die folgende exakte Sequenz von Garben:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow 0$$

Diese induziert nach Satz 5.5 eine lange exakte Sequenz von Gruppen:

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota^0} H^0(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp^0} H^0(X, \mathbb{C}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota^1} H^1(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\exp^1} H^1(X, \mathbb{C}^*)$$

$H^0(X, \mathbb{Z})$ ,  $H^0(X, \mathbb{C})$  und  $H^0(X, \mathbb{C}^*)$  sind die Gruppen der konstanten Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{C}^*$  mit der Addition in  $\mathbb{Z}$  und in  $\mathbb{C}$  bzw. der Multiplikation in  $\mathbb{C}^*$  als Verknüpfung. Also sind sie jeweils in kanonischer Weise zu den Gruppen  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{C}^*$  isomorph und  $\iota^0 = \iota$  bzw.  $\exp^0 = \exp$ . Damit ist  $\exp^0$  surjektiv und somit ist, wegen der Exaktheit der Sequenz,  $\delta^*$  die Nullabbildung und  $\iota^1$  injektiv.

Sei nun ohne Einschränkung  $g \geq 1$ . Wir können mit einfach zusammenhängenden Karten eine endliche Überdeckung  $\mathfrak{U}$  von  $X$  konstruieren mit der Eigenschaft, dass (\*) je zwei Elemente aus  $\mathfrak{U}$  zusammenhängenden (und möglicherweise leeren) Schnitt haben:

Auf  $X$  gibt es eine von der universellen Überlagerung induzierte Metrik. Sei  $\ell(X)$  die Länge einer kürzesten geschlossenen Geodätischen auf  $X$ . Für jedes  $p \in X$  sei

$$U_p := B_{\frac{1}{4}\ell(X)}(p) := \{x \in X \mid d(x, p) < \frac{1}{4}\ell(X)\}.$$

Die Überdeckung  $\{U_p \mid p \in X\}$  von  $X$  erfüllt die Bedingung (\*). Da  $X$  kompakt ist, reichen endlich viele dieser Umgebungen  $U_1, \dots, U_n$ , um  $X$  zu überdecken. Sei

$$\mathfrak{U} := \{U_i \mid i = 1, \dots, n\}.$$

$\mathfrak{U}$  ist eine Leray-Überdeckung, da  $U_1, \dots, U_n$  einfach zusammenhängend sind und somit nach Satz 5.3

$$H^1(U_i, \mathbb{C}) = H^1(U_i, \mathbb{Z}) = 0, \quad \forall U_i \in \mathfrak{U}.$$

Nach dem Satz von Leray (5.4) gilt somit

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) \cong H^1(X, \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong H^1(X, \mathbb{Z}),$$

wobei die Isomorphismen kanonisch sind.

Wegen der Bedingung (\*) sind die lokalkonstanten Abbildungen von  $U_i \cap U_j$  nach  $\mathbb{C}$  bzw. nach  $\mathbb{Z}$  auch global konstant. Deshalb kann man die Kokettengruppen  $C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \leq C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$  mit  $\mathbb{Z}^{n^2}$  und  $\mathbb{C}^{n^2} := (c_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$  identifizieren.  $C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Der Untervektorraum der Kozyklen  $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$  besteht aus den Koketten, die die Kozykelrelationen erfüllen, also

$$\forall i, j, k : U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset : c_{jk} - c_{ik} + c_{ij} = 0.$$

Damit ist  $Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$  der Lösungsraum eines LGS mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  und wird somit von Elementen aus  $C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cap Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) = Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$  erzeugt.

Die Einbettung  $C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \hookrightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$  induziert eine Abbildung  $\iota_{\mathfrak{U}}^1 : H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$ , die wiederum die Einbettung  $\iota^1$  induziert. Wegen  $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) \cong H^1(X, \mathbb{Z})$  ist auch  $\iota_{\mathfrak{U}}^1$  injektiv. Nach Defi-

dition von  $\iota_{\mathfrak{U}}^1$  kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) & \hookrightarrow & Z^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{U}}^1} & H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C}) \end{array}$$

Deswegen hat auch  $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{C})$  die Einbettung eines Erzeugendensystems von  $H^1(\mathfrak{U}, \mathbb{Z})$  als Basis. Weil  $\iota^1$  von  $\iota_{\mathfrak{U}}^1$  induziert wird, gilt Entsprechendes auch für  $H^1(X, \mathbb{Z})$  und  $H^1(X, \mathbb{C})$ .  $\square$

**Lemma 5.2** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$ . Dann ist die Gruppe  $H^1(X, \mathbb{Z})$  isomorph zu  $\mathbb{Z}^{2g}$ . Anders ausgedrückt:  $H^1(X, \mathbb{Z}) \cong \pi_1^{ab}(X)$ .

**Beweis** Dies folgt direkt aus Lemma 5.1 und Satz 5.6.  $\square$

**Satz 5.7** Sei  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche und  $f \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  mit  $A := \text{der}(f)$ . Dann sind die Eigenwerte von  $A$  auch Eigenwerte von  $M_f$ .

**Beweis** Nach Lemma 5.1 und Lemma 5.2 kann man  $M_f \in \text{Aut}(\pi_1^{ab}(X))$  eindeutig fortsetzen zu einer (bijektiven) linearen Abbildung

$$M_f : H^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}).$$

Nach dem Satz von de-Rahm und Hodge gilt  $H^1(X, \mathbb{C}) \cong \Omega(X) \oplus \overline{\Omega}(X)$ . Die Differentiale, die auf den Karten die Form  $dz$  haben, lassen sich aufgrund der Translationsstruktur verkleben, so dass man von einem Differential  $\omega := dz$  auf  $X$  sprechen kann. Dasselbe gilt für  $\overline{\omega} := d\bar{z}$ . Es gilt  $\omega \in \Omega(X)$  und  $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}(X)$ . Also sind  $\omega$  und  $\overline{\omega}$  linear unabhängig und spannen einen 2-dimensionalen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $[\omega, \overline{\omega}] \subseteq H^1(X, \mathbb{C})$  auf. Wir zeigen, dass  $M_f$  diesen Vektorraum auf sich abbildet und dass  $M_f|_{[\omega, \overline{\omega}]}$  die selben Eigenwerte wie  $A$  hat. Diese sind somit auch Eigenwerte von  $M_f$ .

Um  $M_f|_{[\omega, \overline{\omega}]} \in \text{SL}_2(\mathbb{C})$  zu bekommen, müssen wir  $f^*(dz)$  und  $f^*(d\bar{z})$  betrachten mit

$$\begin{aligned} f : (X, \mu) &\rightarrow (X, \mu) \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ \gamma x + \delta y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei  $z = x + iy$ . Mit  $2x = z + \bar{z}$  und  $2y = -i(z - \bar{z})$  kann man  $f$  auch folgendermaßen schreiben:

$$z \mapsto \frac{1}{2}[\alpha(z + \bar{z}) - i\beta(z - \bar{z}) + i\gamma(z + \bar{z}) + \delta(z - \bar{z})]$$

Damit gilt:

$$f^*(dz) = d(f(z)) = \frac{1}{2}[(\alpha - i\beta + i\gamma + \delta)dz + (\alpha + i\beta + i\gamma - \delta)d\bar{z}]$$

$$f^*(d\bar{z}) = d(\overline{f(z)}) = \frac{1}{2}[(\alpha - i\beta - i\gamma - \delta)dz + (\alpha + i\beta - i\gamma + \delta)d\bar{z}]$$

Wir haben also:

$$M_f|_{[\omega, \bar{\omega}]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha - i\beta + i\gamma + \delta & \alpha + i\beta + i\gamma - \delta \\ \alpha - i\beta - i\gamma - \delta & \alpha + i\beta - i\gamma + \delta \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von  $M_f|_{[\omega, \bar{\omega}]}$  ist dasselbe wie das von  $A$ , denn

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} [(\alpha + \delta - i(\beta - \gamma) - 2x)(\alpha + \delta + i(\beta - \gamma) - 2x) - (\alpha - \delta + i(\beta + \gamma))(\alpha - \delta - i(\beta + \gamma))] \\ &= \alpha\delta - \beta\gamma - (\alpha + \delta)x + x^2 = 1 - (\alpha + \delta)x + x^2. \end{aligned}$$

Also haben  $A$  und  $M_f|_{[\omega, \bar{\omega}]}$  die selben Eigenwerte.  $\square$

**Korollar 5.2** Seien  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche und  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_g$  ein symplektischer Homomorphismus und  $f \in \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ . Dann ist  $\text{der}(f)$  nicht hyperbolisch.

**Beweis** Das folgt direkt aus Satz 5.7 und Lemma 3.1 d.  $\square$

**Korollar 5.3** Wenn  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  nicht trivial ist, gilt  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \cong \mathbb{Z}$ .

**Korollar 5.4** Sei  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche, deren Veech-Gruppe ein Gitter ist, und sei  $f \in \text{Aff}^+(X, \mu)$ . Dann gibt es genau dann einen symplektischen Homomorphismus  $\alpha$ , so dass

$$f^n \in \text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N},$$

wenn die Matrix  $M_f$  nur Einheitswurzeln als Eigenwerte hat und  $\text{der}(f)$  nicht elliptisch ist.

**Beweis** Sei  $f \in \text{Aff}^+(X)$  gegeben, so dass  $\text{der}(f)$  nicht elliptisch ist und so dass  $M_f$  nur Einheitswurzeln als Eigenwerte habe. Zwei dieser Eigenwerte,  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , sind nach Satz 5.7 auch Eigenwerte von  $\text{der}(f)$ . Da  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  Einheitswurzeln sind, gilt  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$  und da  $\text{der}(f)$  nicht elliptisch ist, sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reell und sind somit entweder  $-1$  oder  $1$ . Dann hat  $\text{der}(f^2)$  nur den Eigenwert  $1$  und ist damit parabolisch (oder die Einheitsmatrix). Nach Satz 5.2 erfüllt  $f$  die Behauptung.

Seien nun  $f \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  und ein symplektischer Homomorphismus  $\alpha$  gegeben, so dass

$$f^n \in \text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}.$$

Da  $\Gamma(X, \mu)$  ein Gitter ist, haben elliptische Elemente aus  $\Gamma(X, \mu)$  endliche Ordnung und können somit nicht in  $\text{Mod}_g(\alpha)$  enthalten sein, da diese Gruppe nach Satz 3.10 torsionsfrei ist. Aus  $f^n \in \text{Mod}_g(\alpha)$  folgt nach Lemma 3.1, dass  $(M_f)^n = M_{f^n}$  nur den Eigenwert  $1$  hat. Für die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_{2g}$  von  $M_f$  gilt damit  $\lambda_1^n = \dots = \lambda_{2g}^n = 1$ . Damit sind die Eigenwerte von  $M_f$  Einheitswurzeln.  $\square$

Das folgende Korollar gibt eine wohlbekanntete Tatsache wieder, siehe z.B. [Bau09, Lemma 2.3.17].

**Korollar 5.5** Seien  $(X, \mu)$  eine Translationsfläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  und  $f \in \text{Aff}^+(X)$  mit  $f \neq \text{id}$ . Dann liegt  $f$  nicht in der Torelli-Gruppe (operiert also nicht trivial auf der Homologie).

**Beweis** Sei  $f$  in der Torelli-Gruppe. Dann gilt insbesondere  $M_f|_{[\omega, \bar{\omega}]} = I$ , mit den entsprechenden Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 5.7. Aus dem Beweis von Satz 5.7 folgt aber auch, dass  $M_f|_{[\omega, \bar{\omega}]}$  und  $\text{der}(f)$  dasselbe charakteristische Polynom haben. Damit folgt aber  $\text{der}(f) = I$ , also ist  $f$  eine Translation. Nach dem  $84(g-1)$ -Theorem (siehe [FM12, Thm. 7.4]) haben Translationen aber endliche Ordnung. Da die Torelli-Gruppe torsionsfrei ist ([FM12, Thm. 6.12]), ergibt sich ein Widerspruch.  $\square$

## 5.5 Das Bild von $\Delta$ im Schottkyraum

Sei  $(X, q) = (X, \mu)$  Halbtranslationsfläche und sei  $\Delta_q$  die zum quadratischen holomorphen Differential  $q$  gehörige Teichmüller-Geodätische. Als Fazit kann man festhalten, dass es für jedes parabolische Element  $\tilde{\tau} \in \text{Aff}^+(X, \mu)$  einen symplektischen Homomorphismus  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_g$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$\mathbb{Z} \cong \langle \tilde{\tau}^n \rangle \leq \text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \cong \text{Stab}(\Delta_q) \cap \text{Mod}_g(\alpha).$$

Falls  $X$  insbesondere eine Translationsfläche ist, gilt sogar

$$\langle \tilde{\tau}^n \rangle \cong \text{Aff}^+(X, \mu) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \cong \text{Stab}(\Delta_q) \cap \text{Mod}_g(\alpha).$$

Die Abbildung  $\text{pr} \circ \iota : \mathbb{H} \rightarrow \text{pr}(\Delta_q) =: C \subseteq \mathcal{M}_g$  faktorisiert nach Satz 2.8 (wie bereits im Beweis von Satz 2.9 angemerkt) durch  $\bar{\Gamma}^*(X, \mu) = R\bar{\Gamma}(X, \mu)R^{-1}$ . Mit den obigen Anmerkungen erhalten wir somit das folgende kommutative Diagramm (wobei  $C$  eine algebraische Kurve ist, falls  $\bar{\Gamma}(X, \mu)$  ein Gitter in  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  ist):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{t \mapsto -\bar{t}} & \mathbb{H} & \xrightarrow{\iota} & \Delta_q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow s_\alpha \\ \mathbb{H}/\langle \tau \rangle & \xrightarrow{\text{antihol.}} & \mathbb{H}/\langle \tau \rangle^* & \xrightarrow{\text{bihol.}} & s_\alpha(\Delta_q) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}/\bar{\Gamma}(X, \mu) & \xrightarrow{\text{antihol.}} & \mathbb{H}/\bar{\Gamma}^*(X, \mu) & \xrightarrow{\text{birat.}} & C \end{array}$$

**Zusammenfassung:**

Für Translationsflächen ist  $s_\alpha(\Delta_q)$  biholomorph zu  $\mathbb{H}$  oder zu  $\mathbb{H}/\langle \tau \rangle$  für  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

# Kapitel 6

## Algorithmus, um ein HSS zu finden

**Definition 6.1** Gegeben sei eine kompakte, orientierbare Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  und darauf eine endliche Menge  $\mathcal{M}$  von einfach geschlossenen, paarweise disjunkten Kurven. Eine Teilmenge  $\mathcal{M}'$  von  $\mathcal{M}$ , so dass

- $X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{M}'} C$  zusammenhängend ist und
- $X \setminus (D \cup \bigcup_{C \in \mathcal{M}'} C)$  nicht zusammenhängend ist für alle  $D \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}'$ ,

heißt *maximales nicht separierendes System* in  $\mathcal{M}$ .

**Satz 6.1** Seien  $X$  und  $\mathcal{M}$  wie oben gegeben sowie  $\mathcal{M}'$  und  $\mathcal{M}''$  zwei in  $\mathcal{M}$  maximale nicht separierende Systeme. Dann gilt  $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}''|$ .

**Beweis** Sei  $\Upsilon := \Upsilon(\mathcal{M})$  der folgendermaßen definierte Graph:

- $E(\Upsilon) :=$  Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus \bigcup_{C \in \mathcal{M}} C$ ,
- Seien  $e_1, e_2 \in E(\Upsilon)$ . Für alle  $L \in \mathcal{M}$ , so dass  $e_1 \cup L \cup e_2$  zusammenhängend ist, füge eine geometrische Kante zwischen  $e_1$  und  $e_2$  hinzu.

Sei  $n := |E(\Upsilon)|$  und  $m := |K(\Upsilon)| = |\mathcal{M}|$ .

Die Fläche  $X$  an einem in  $\mathcal{M}$  maximalen nicht separierenden System aufzuschneiden entspricht dem Entfernen von so vielen Kanten aus  $\Upsilon$ , dass der übrig bleibende Graph  $\Upsilon'$  zusammenhängend ist und dass  $\forall k \in K(\Upsilon')$  der Graph  $\Upsilon' \setminus k$  nicht zusammenhängend ist.  $\Upsilon'$  ist also ein aufspannender Teilbaum. Dieser hat aber  $n - 1$  Kanten. Die Anzahl der entfernten Kanten ist somit  $m - (n - 1)$  und diese entspricht  $|\mathcal{M}'| = |\mathcal{M}''|$ .  $\square$

**Bemerkung 6.1** Die Forderung, dass  $\mathcal{M}$  endlich sein soll, kann auch weggelassen werden, da sie keine echte Einschränkung ist. Denn es kann höchstens  $3g - 3$  paarweise disjunkte, nicht isotope Kurven geben (Hosenzerlegung). In einem in  $\mathcal{M}$  maximalen nicht separierendem System können keine zwei Kurven enthalten sein, die isotop zueinander sind, und eine Kurve kann durch eine, die dazu isotop ist, ersetzt werden.

Der Algorithmus, um ein HSS zu finden, der weiter unten formal angegeben ist, soll hier zunächst anhand eines Beispiel veranschaulicht werden.

Zunächst soll das Origami  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  an möglichst vielen horizontalen Zylindern aufgeschnitten werden, so dass die entstehende Fläche noch zusammenhängend ist. Wir suchen also ein maximales nicht separierendes System in  $\mathcal{M}$ , wobei  $\mathcal{M}$  die Menge aller horizontalen Schnitte durch die Zylinder sei. Dass die Anzahl der Zylinder, die auf diese Weise aufgeschnitten werden können, nicht von deren Wahl abhängt, folgt aus Satz 6.1. In der Abbildung 6.0.1 ist der horizontale Schnitt an  $Z_1$ , also  $K_1$ , ein Beispiel für ein solches maximales System.

Nachdem man so ein maximales System hat, führt man den folgenden Schritt durch, um jeweils eine weitere nicht-separierende horizontale Kurve (wie  $K_2$  in der Abbildung 6.0.1) hinzu zu bekommen, bis man  $g$  solcher Kurven hat.

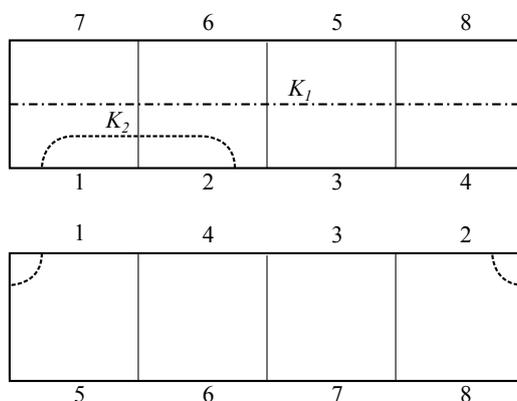


Abbildung 6.0.1: Verlauf der Kurven in den Zylindern

Dieser Schritt (der in Abbildung 6.0.1 bereits einmal durchgeführt wurde, um  $K_2$  zu erhalten) geht folgendermaßen: Wir schneiden  $X$  an den bereits gegebenen  $n$  Kurven auf (Abbildung 6.0.2) und kontrahieren jede der  $2n$  Randkurven, die wir dadurch erhalten, zu einem Punkt (Abbildung 6.0.3a, hier sind die Punkte die von  $K_1$  und  $K_2$  herkommen mit  $k'_1, k''_1, k'_2$  und  $k''_2$  bezeichnet). Damit haben wir eine geschlossene Fläche  $X'$  vom Geschlecht  $g - n$ . Dort finden wir dann eine weitere nicht separierende Kurve, wenn wir die Polygone aus Abbildung 6.0.3 zu einem Polygon verkleben und uns dann dort ein Paar von zu identifizierenden Seiten suchen, das ein anderes solches Paar trennt, und die Mittelpunkte dieser Seiten durch eine Gerade verbinden.

Wenn man dann den Verlauf dieser Gerade durch den Schritt, in dem die Polygone verklebt wurden, zurückverfolgt, können wir die Kurve in unserem Origami einzeichnen (siehe Abbildung 6.0.4). Dass diese auch horizontal ist, folgt weiter unten aus Lemma 6.1.

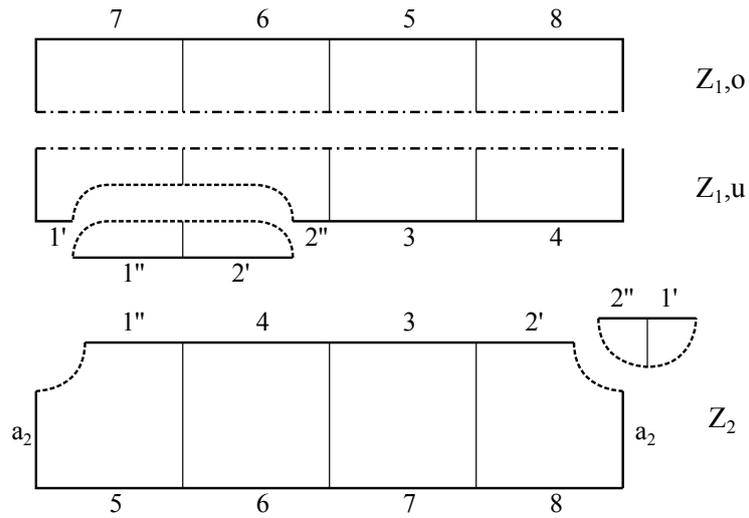


Abbildung 6.0.2: Aufgeschnittenes Origami

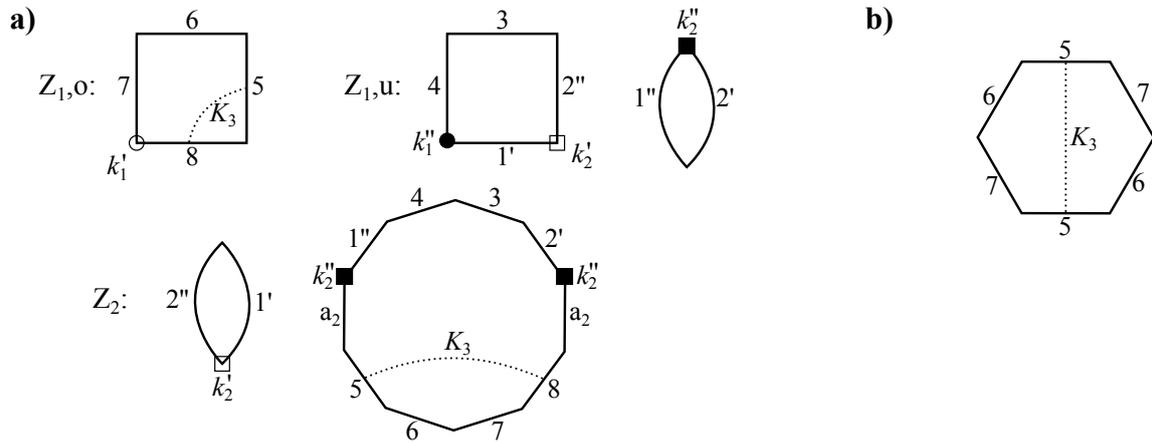


Abbildung 6.0.3: Die Fläche  $X'$

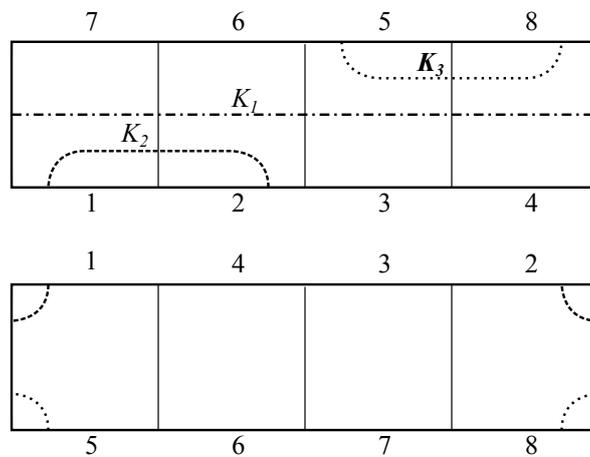


Abbildung 6.0.4: Die neue Kurve  $K_3$  in der Fläche  $X$

## 6.1 Der Algorithmus

Im Folgenden sei ein Origami  $O = (p : X^* \rightarrow E^*)$  gegeben als Menge  $Q := \{1, \dots, d\}$  von Quadraten zusammen mit 2 Permutationen  $p_1, p_2 \in \mathfrak{S}_d$ , so dass  $\langle p_1, p_2 \rangle$  transitiv auf  $Q$  operiert. Dabei sei

$$\begin{array}{ll} p_1 : Q & \rightarrow Q, \\ x & \mapsto \text{rechter Nachbar von } x \end{array} \qquad \begin{array}{ll} p_2 : Q & \rightarrow Q \\ x & \mapsto \text{oberer Nachbar von } x \end{array}$$

Die horizontalen Zylinder von  $O$  sind die Bahnen von  $p_1$ , die Ecken von  $O$  sind die Bahnen von  $p_2 p_1 p_2^{-1} p_1^{-1}$ . Dabei identifizieren wir ein Quadrat mit dessen unterer linken Ecke und die Schreibweise sei hier die Abbildungsschreibweise, also  $p_1 p_2(x) = p_1(p_2(x))$ . Die Menge der horizontalen Kanten ist ebenfalls  $Q$ , wenn wir jeweils ein Quadrat mit seiner unteren Kante identifizieren. Das Geschlecht von  $X$  ist dann  $g = \frac{d - \# \text{Ecken}}{2} + 1$ .

### Schritt 1: Finde ein maximales System von horizontalen Schnitten an Zylindern

Zunächst brauchen wir ein maximales nicht separierendes System in der Menge  $\mathcal{M}$  der horizontalen Schnitte durch alle Zylinder. Dazu definieren wir folgendermaßen einen Graphen  $\Upsilon_O$ :

- $E(\Upsilon_O)$ : Für jeden horizontalen Zylinder  $Z_i$  seien zwei Ecken,  $z_i^o$  und  $z_i^u$ , gegeben.
- $K(\Upsilon_O)$ :  $z_i^o$  und  $z_j^u$  seien genau dann durch eine Kante verbunden, wenn  $p_2(Z_i) \cap Z_j \neq \emptyset$ .

Die Zusammenhangskomponenten von  $\Upsilon_O$  entsprechen den Zusammenhangskomponenten des durch alle horizontalen Zylinder aufgeschnittenen Origamis. Wir fügen nun nacheinander Brücken ein, die jeweils für ein  $i$  die Ecken  $z_i^o$  und  $z_i^u$  verbinden *und* die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Graphen um 1 verringern, bis der Graph zusammenhängend ist.

Das Einfügen einer Brücke, die  $z_i^o$  mit  $z_i^u$  verbindet, entspricht dem Wiederverkleben der aufgeschnittenen Fläche am horizontalen Schnitt durch  $Z_i$ . Somit bilden die horizontalen Schnitte an den Zylindern, für die *keine* Brücke eingefügt wurden, ein maximales nicht separierendes System in  $\mathcal{M}$ . Falls die Anzahl dieser Schnitte  $g$  ist, sind wir fertig; falls sie kleiner ist, gehe zu Schritt 2 über.

### Schritt 2: Ergänze ein System von horizontalen Schnitten durch eine horizontale Kurve zu einem nicht separierenden System von Kurven

Zunächst wollen wir hier die Polygone, aus denen  $X'$  besteht (siehe Abbildung 6.0.3a), in geeigneter Weise durch zyklische Listen (also Listen, in denen die Reihenfolge der Einträge nur bis auf zyklische Permutation gegeben ist) darstellen, welche die Reihenfolge der Kanten im mathematisch positiven Sinne wiedergeben.

Dazu definieren wir erst einmal für jeden Zylinder  $Z = \{p_1(x), \dots, p_1^n(x) = x\}$  zwei zyklische Listen

$$L(Z, u) := [p_1(x), \dots, p_1^n(x)] \quad \text{und} \quad L(Z, o) := [p_2 p_1^n(x), \dots, p_2 p_1(x)].$$

Diese entsprechen den unteren Kanten des Zylinders von links nach rechts bzw. den oberen Kanten von rechts nach links. Falls  $Z$  im ersten Schritt aufgeschnitten wurde, entsprechen diese Listen zwei

Polygone von  $X'$ ; falls  $Z$  nicht aufgeschnitten wurde, sei  $a_Z$  ein weiteres Listenelement und wir definieren zusätzlich die zyklische Liste

$$L(Z) := [a_Z, L(Z, u), a_Z, L(Z, o)] = [a_Z, p_1(x), \dots, p_1^n(x), a_Z, p_2 p_1^n(x), \dots, p_2 p_1(x)].$$

$L(Z)$  entspricht einem der Polygone von  $X'$ , wobei  $a_Z$  zu einer vertikalen Kante gehört (siehe dazu den Zylinder  $Z_2$  in Abbildung 6.0.2 bzw. das entsprechende Polygon in Abbildung 6.0.3a).

Seien nun  $\mathcal{Z} := \{Z_1, \dots, Z_b\}$  die Menge der horizontalen Zylinder von  $O$ ,  $\overline{\mathcal{Z}} := \{Z_1, \dots, Z_a\} \subseteq \mathcal{Z}$  die Teilmenge der in Schritt 1 aufgeschnittenen Zylinder und  $\mathcal{Z}' := \{Z_{a+1}, \dots, Z_b\} \subseteq \mathcal{Z}$  die Teilmenge der in Schritt 1 nicht aufgeschnittenen Zylinder. Wir definieren drei Mengen von Listen:

$$\mathcal{L}_u := \{L(Z_1, u), \dots, L(Z_b, u)\} \text{ und } \mathcal{L}_o := \{L(Z_1, o), \dots, L(Z_b, o)\}$$

sowie

$$\mathcal{L} := \{L(Z_1, u), \dots, L(Z_a, u), L(Z_1, o), \dots, L(Z_a, o), L(Z_{a+1}), \dots, L(Z_b)\}$$

$\mathcal{L}$  entspricht einer Darstellung von  $X'$  durch mehrere zu verklebende Polygone, wie in Abbildung 6.0.3a. Wir definieren außerdem folgende Partitionen von  $\mathcal{L}_u$  und  $\mathcal{L}_o$ :

$$\mathcal{L}_u = \mathcal{L}_{Z_1, u} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{Z_b, u} \text{ mit } \mathcal{L}_{Z_i, u} := \{L(Z_i, u)\} \text{ f\"ur } i = 1, \dots, b$$

$$\mathcal{L}_o = \mathcal{L}_{Z_1, o} \cup \dots \cup \mathcal{L}_{Z_b, o} \text{ mit } \mathcal{L}_{Z_i, o} := \{L(Z_i, o)\} \text{ f\"ur } i = 1, \dots, b$$

In diesem Schritt sind die Mengen  $\mathcal{L}_{Z_i, u}$  und  $\mathcal{L}_{Z_i, o}$  noch einelementig, in den nächsten Schritten soll dort gesammelt werden, was aus der oberen und was aus der unteren Hälfte des jeweiligen Zylinders herausgeschnitten wird (siehe Abbildung 6.0.2). Im Allgemeinen sind  $\mathcal{L}_u$  und  $\mathcal{L}_o$  *keine* Teilmengen von  $\mathcal{L}$ , da wir uns auch für die nicht aufgeschnittenen Zylinder merken, was zur "oberen Hälfte" gehört, also in  $\mathcal{L}_o$  liegt, und was zur "unteren Hälfte" gehört, also in  $\mathcal{L}_u$  liegt.

So wie in Abbildung 6.0.3 von a) nach b) die vielen Polygone zu einem zusammengefügt werden, verbinden wir nun die Listen aus  $\mathcal{L}$  zu einer einzigen Liste. Dies geschieht nach und nach (z.B., indem wir immer die erste Liste mit der nächstmöglichen Liste verbinden) auf folgende Weise:

Zwei Listen  $L$  und  $M$ , die ein gemeinsames Element  $x$  haben, werden an  $x$  verbunden, indem  $x$  in  $L$  ersetzt wird durch die Liste  $M \setminus x$ , beginnend beim Element nach  $x$  und zyklisch weiter bis zum Element vor  $x$ . Wenn also

$$L = [a_1, \dots, a_n, x, b_1, \dots, b_m] \text{ und } M = [c_1, \dots, c_p, x, d_1, \dots, d_q]$$

an  $x$  verbunden werden, erhält man die Liste

$$L' = [a_1, \dots, a_n, d_1, \dots, d_q, c_1, \dots, c_p, b_1, \dots, b_m]$$

Zusätzlich eliminieren wir zwei gleiche Elemente, wenn sie in einer Liste zyklisch direkt aufeinander folgen. Wenn alles zu einer Liste  $P$  verbunden ist, wählen wir darin ein Paar  $(\alpha, \alpha)$ , das ein anderes

Paar  $(\beta, \beta)$  trennt:

$$P = [\alpha, \dots, \beta, \dots, \alpha, \dots, \beta, \dots]$$

Im Polygon, das  $P$  darstellt, entspricht das Paar  $(\alpha, \alpha)$  der geschlossenen Kurve  $K$ , welche die Kante  $\alpha$  schneidet. Da  $(\alpha, \alpha)$  das Paar  $(\beta, \beta)$  trennt, ist die Kurve  $K$  auch separierend. Dass es ein solches Paar  $(\alpha, \alpha)$  gibt, das ein weiteres Paar  $(\beta, \beta)$  trennt, kann man folgendermaßen sehen: Angenommen, es gibt kein solches Paar. Sei dann  $(\alpha, \alpha)$  ein beliebiges Paar in  $P$ . Ein solches Paar gibt es, da die Fläche  $X'$  Geschlecht  $g \geq 1$  hat und  $P$  deshalb nicht leer ist. Dieses kann kein Paar von direkt aufeinander folgenden Elementen sein, da solche Paare bereits eliminiert wurden. Deshalb liegt ein Element  $\beta$  dazwischen. Das andere  $\beta$  muss aber laut Annahme auch auf der gleichen Seite zwischen dem Paar  $(\alpha, \alpha)$  liegen. Zwischen dem Paar  $(\beta, \beta)$  – auf der anderen Seite als das Paar  $(\alpha, \alpha)$  – liegt wieder ein Paar  $(\gamma, \gamma)$ . Somit finden wir eine endliche Folge von Paaren, die immer näher aneinander rücken, bis zu einem Paar von direkt aufeinander folgenden Paaren. Ein solches darf es aber nicht mehr geben und wir erhalten einen Widerspruch.

Um  $K$  im Origami zu rekonstruieren, merken wir uns das Paar  $(\alpha, \alpha)$  und verfolgen es zurück durch die Schritte, in denen die Listen aus  $\mathcal{L}$  verbunden wurden. Wenn durch das Rückgängigmachen einer Verbindung an  $x$  das Paar wieder getrennt wird, ersetzen wir  $(\alpha, \alpha)$  durch die Paare  $(\alpha, x)$  und  $(x, \alpha)$ , verfahren genauso, wenn diese getrennt werden, usw. und merken uns jeweils, in welcher Teilliste die Paare vorkommen. Am Ende haben wir eine Kette von Paaren

$$(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}), (\alpha_{r-1}, \alpha_r), \quad (6.1)$$

die in dieser Reihenfolge den Stücken entsprechen, aus denen  $K$  zusammengesetzt ist.

Genauer: Ein Paar  $(\alpha_s, \alpha_{s+1})$  liegt in einer Liste aus  $L' \in \mathcal{L}$ . Damit gilt einer der beiden Fälle:

- 1)  $L' = L(Z, o) \in \mathcal{L}$  oder  $L' = L(Z, u) \in \mathcal{L}$  für ein  $Z \in \overline{\mathcal{Z}}$ .
- 2)  $L' = L(Z) = [a_Z, L(Z, u), a_Z, L(Z, o)]$  für ein  $Z \in \mathcal{Z}'$ .

Wenn Fall 1 gilt, definieren wir  $L := L'$ . Wenn Fall 2 gilt, ist  $(\alpha_s, \alpha_{s+1})$  entweder komplett im Teil  $L(Z, u)$  oder komplett im Teil  $L(Z, o)$  enthalten, wie unten aus Lemma 6.1 folgt. Dann definieren wir  $L := L(Z, u)$  bzw.  $L := L(Z, o)$ , je nachdem wo  $(\alpha_s, \alpha_{s+1})$  liegt.

Wir wollen nun die neue Kurve  $K$  angeben durch einen Startpunkt  $q$  und ein Wort  $w$  in  $x$  und  $y$ , das den Verlauf der Kurve angibt. Wir wählen  $q := \alpha_0$ , falls  $\alpha_0 \in L \in \mathcal{L}_u$  und  $q := p_2^{-1}(\alpha_0)$ , falls  $\alpha_0 \in L \in \mathcal{L}_o$ .

- Wenn  $L \in \mathcal{L}_u$ , sei  $t_s \in \mathbb{Z}$  eine Zahl kleinsten Betrages mit  $p_1^{t_s}(\alpha_s) = \alpha_{s+1}$ . Dann sei das entsprechende Stück vom Weg  $w_s := x^{t_s}y^{-1}$ .
- Wenn  $L \in \mathcal{L}_o$ , sei  $t_s \in \mathbb{Z}$  eine Zahl kleinsten Betrages mit  $p_1^{t_s}p_2^{-1}(\alpha_s) = p_2^{-1}(\alpha_{s+1})$ . Dann sei das entsprechende Stück vom Weg  $w_s := x^{t_s}y$ .

Die neue Kurve im Schottky-Schnittsystem lautet:

$$K := (q, w), \text{ mit } w := w_0 \cdots w_{r-1}$$

$K$  ist bereits horizontal (siehe unten Lemma 6.1). Wenn wir damit insgesamt  $g$  Kurven haben, ist das HSS damit vervollständigt und wir sind fertig. Ansonsten gehe zu Schritt 3 über.

**Schritt 3: Ergänze ein System von  $n < g$  horizontalen Kurven durch eine weitere horizontale Kurve zu einem nicht separierenden System von Kurven**

Durch das Aufschneiden des Origamis an den bereits vorhandenen Kurven können in diesem Schritt erstmals Stücke aus den oberen und unteren Hälften der horizontalen Zylinder herausgeschnitten werden. Die Polygone, aus denen dann  $X'$  besteht, kommen somit nicht mehr nur von halben oder ganzen Zylindern, sondern auch von Stücken, die aus solchen herausgeschnitten werden, wie in Abbildung 6.0.3a das Polygon mit den Kanten  $1''$  und  $2'$  aus  $(Z_1, u)$  bzw. das Polygon mit den Kanten  $1'$  und  $2''$  aus  $Z_2$ . Falls die neue Kurve, die in diesem Schritt konstruiert wird, durch ein Polygon dieser Art geht, kann es im Origami nur in eine Richtung vom Eintritt in den horizontalen Zylinder zu dessen Austritt verlaufen, da sie sonst eine bereits vorhandene Kurve schneidet. Diese Stücke können wir deshalb nicht mehr als *zyklische* Listen notieren. Die anderen Polygone, die von den Teilen herrühren, die übrig bleiben, wenn ein Stück wie eben beschrieben herausgeschnitten wird, können wie zuvor als zyklische Listen notiert werden (z.B. im Abbildung 6.0.3a die restlichen Polygone).

Anders ausgedrückt: Wenn ein Origami entlang der horizontalen Seiten aufgeschnitten wird, erhalten wir zweifach zusammenhängende berandete Flächen, die den horizontalen Zylindern entsprechen. Wenn wir daraus Stücke herausschneiden entlang von Bögen, deren Anfangs- und Endpunkt auf dem Rand liegt, erhalten wir einfach zusammenhängende Teile ( $\rightarrow$  nicht zyklische Listen) und zweifach zusammenhängende Teile ( $\rightarrow$  zyklische Listen). Das ist der Grund, weshalb das Vorgehen in Schritt 2, in dem die erste horizontale Kurve, die kein horizontaler Schnitt ist, konstruiert wurde, nicht für die Konstruktion der noch fehlenden horizontalen Kurven übernommen werden kann. Hier muss man vorgehen, wie im Folgenden beschrieben wird.

Wir nehmen die Listen aus der Menge  $\mathcal{L}$  aus dem vorherigen Schritt und ändern sie mithilfe der Kette von Paaren  $(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}), (\alpha_{r-1}, \alpha_r)$ , indem wir jede Liste, in der ein Paar  $(\alpha_s, \alpha_{s+1})$  vorkommt, nach folgenden Regeln ersetzen: Sei  $(\alpha_s, \alpha_{s+1}) \in L$ :

- Wenn  $L \in \mathcal{L}_{Z,u}$  und  $t(s) > 0$ : Ersetze in  $\mathcal{L}_{Z,u}$  und in  $\mathcal{L}$  die Liste

$$L = [a_1, \dots, a_n, \alpha_s, b_1, \dots, b_m, \alpha_{s+1}, c_1, \dots, c_p]$$

durch die Listen

$$L_0 := [a_1, \dots, a_n, \alpha'_s, \alpha''_{s+1}, c_1, \dots, c_p] \quad \text{und} \quad L_1 := [\alpha''_s, b_1, \dots, b_m, \alpha'_{s+1}],$$

wobei  $L_1$  nicht zyklisch und  $L_0$  genau dann zyklisch sein soll, wenn  $L$  zyklisch ist.

Wenn  $t(s) < 0$  verfare genauso mit vertauschten Rollen von  $\alpha_s$  und  $\alpha_{s+1}$ .

- Wenn  $L \in \mathcal{L}_{Z,o}$  und  $t(s) < 0$ : Ersetze in  $\mathcal{L}_{Z,o}$  und in  $\mathcal{L}$  die Liste

$$L = [a_1, \dots, a_n, \alpha_s, b_1, \dots, b_m, \alpha_{s+1}, c_1, \dots, c_p]$$

durch die Listen

$$L_0 := [a_1, \dots, a_n, \alpha''_s, \alpha'_{s+1}, c_1, \dots, c_p] \text{ und } L_1 := [\alpha'_s, b_1, \dots, b_m, \alpha''_{s+1}],$$

wobei  $L_1$  nicht zyklisch und  $L_0$  genau dann zyklisch sein soll, wenn  $L$  zyklisch ist.

Wenn  $t(s) > 0$  verfähre genauso mit vertauschten Rollen von  $\alpha_s$  und  $\alpha_{s+1}$ .

Wenn  $L = L(Z) = [a_Z, L(Z, u), a_Z, L(Z, o)] \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_o)$ , liegt das Paar  $(\alpha_s, \alpha_{s+1})$  in  $L(Z, u)$  oder in  $L(Z, o)$ , was, wie bereits erwähnt, aus Lemma 6.1 folgt: Ändere dann die Liste  $L(Z, u)$  bzw.  $L(Z, o)$  wie oben und definiere in  $\mathcal{L}$  die Liste  $L(Z)$  neu durch  $L(Z) := [a_Z, L_0, a_Z, L(Z, o)]$  oder  $L(Z) := [a_Z, L(Z, u), a_Z, L_0]$ , je nachdem, ob das Paar  $(\alpha_s, \alpha_{s+1})$  vorher in  $L(Z, u)$  oder in  $L(Z, o)$  war, und füge den Mengen  $\mathcal{L}$  sowie  $\mathcal{L}_{Z,u} \subseteq \mathcal{L}_u$  bzw.  $\mathcal{L}_{Z,o} \subseteq \mathcal{L}_o$  die Liste  $L_1$  hinzu.

Genau wie im Schritt 2 werden nun die Listen aus  $\mathcal{L}$  zu einer Liste verbunden und genauso erhalten wir eine Kette von Paaren

$$(\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_1, \alpha_2), \dots, (\alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}), (\alpha_{r-1}, \alpha_r). \quad (6.2)$$

Als Startpunkt  $q$  für die neue Kurve  $K$  wählen wir  $\alpha_0$ , falls  $\alpha_0 \in L \in \mathcal{L}_u$  und  $p_2^{-1}(\alpha_0)$ , falls  $\alpha_0 \in L \in \mathcal{L}_o$ . Genau wie im Schritt 2 erhalten wir die Teilkurven  $w_s$ , wenn das Paar  $(\alpha_s, \alpha_{s+1})$  in einer zyklischen Liste liegt. Wenn das nicht der Fall ist, gehen wir folgendermaßen vor:

- Wenn  $L \in \mathcal{L}_{Z,u}$  und  $\alpha_s$  vor  $\alpha_{s+1}$  steht, sei  $t(s) \in \mathbb{N}$  minimal mit  $p_1^{t(s)}(\alpha_s) = \alpha_{s+1}$ . Dann sei das entsprechende Stück vom Weg  $w_s := x^{t(s)}y^{-1}$ .
- Wenn  $L \in \mathcal{L}_{Z,u}$  und  $\alpha_{s+1}$  vor  $\alpha_s$  steht, sei  $t(s) \in \mathbb{N}$  minimal mit  $p_1^{t(s)}(\alpha_{s+1}) = \alpha_s$ . Dann sei das entsprechende Stück vom Weg  $w_s := x^{-t(s)}y^{-1}$ .
- Wenn  $L \in \mathcal{L}_{Z,o}$  und  $\alpha_s$  vor  $\alpha_{s+1}$  steht, sei  $t(s) \in \mathbb{N}$  minimal mit  $p_1^{t(s)}p_2^{-1}(\alpha_{s+1}) = p_2^{-1}(\alpha_s)$ . Dann sei das entsprechende Stück vom Weg  $w_s := x^{-t(s)}y$ .
- Wenn  $L \in \mathcal{L}_{Z,o}$  und  $\alpha_{s+1}$  vor  $\alpha_s$  steht, sei  $t(s) \in \mathbb{N}$  minimal mit  $p_1^{t(s)}p_2^{-1}(\alpha_s) = p_2^{-1}(\alpha_{s+1})$ . Dann sei das entsprechende Stück vom Weg  $w_s := x^{t(s)}y$ .

Die neue Kurve im Schottky-Schnittsystem lautet:

$$K := (q, w), \text{ mit } w := w_0 \cdots w_{r-1}$$

Wieder folgt aus dem folgenden Lemma, dass  $K$  horizontal ist.

Wiederhole Schritt 3, bis  $g$  Kurven gegeben sind.

**Lemma 6.1** Die Kurven, die aus den Schritten 2 und 3 hervorgehen, sind horizontal.

**Beweis** Sei  $K$  eine solche Kurve. Wir nehmen an, dass  $K$  nicht horizontal ist. Dann gibt es einen Zylinder  $Z$ , der von  $K$  vertikal durchquert wird (d.h. unten hinein und oben heraus oder umgekehrt).  $Z$  kann von  $K$  nicht nur einmal durchquert werden, da wir vorausgesetzt haben, dass wir die Fläche

$X$  bereits an einem maximalen System in der Menge  $\mathcal{M}$  der horizontalen Schnitte an allen Zylindermitten aufgeschnitten haben und dass der horizontale Schnitt an  $Z$  nicht in diesem maximalen System liegt. Wenn wir  $X$  also zusätzlich an  $Z$  horizontal schneiden, separieren wir die Fläche. Würde aber  $K$  den Zylinder  $Z$  nur einmal schneiden, so gäbe es einen Weg von der einen Seite von  $Z$  zur anderen und das kann nicht sein. Also muss  $Z$  mehr als einmal vertikal von  $K$  durchquert werden.

Die Kurve  $K$  wurde aber folgendermaßen konstruiert: Sei  $P$  die Liste, die man erhält, wenn man alle Listen aus  $\mathcal{L}$  zu einer verbunden hat. Dort findet man, wie oben erläutert, ein Paar von Seiten  $(\alpha, \alpha)$  das ein anderes Paar trennt. Wenn man die Verbindungsschritte der Listen, wie oben im Algorithmus angegeben, zurückverfolgt, erhalten wir eine Kette von Paaren wie in (6.1) und (6.2), die der neuen Kurve  $K$  entspricht. Diese schneidet die Polygone, die zu den Listen aus  $\mathcal{L}$  gehören, jeweils höchstens ein Mal, denn das Paar  $(\alpha, \alpha)$  entspricht der Verbindungsstrecke zwischen den beiden Seiten  $\alpha$  im Polygon, das  $P$  entspricht. Diese Verbindungsstrecke trennt sich nur dann in zwei Teile auf, wenn  $P$  derart in zwei Listen aufgeteilt wird, dass die beiden  $\alpha$  getrennt werden. D.h. eine Liste mit einem "ausgezeichneten" Paar wird in zwei Listen mit jeweils einem solchen Paar aufgeteilt. Dasselbe gilt für weitere Paare der Form  $(\alpha_s, \alpha_{s+\nu})$ . Bei diesem Algorithmus besteht also keine Möglichkeit, dass beim Rückgängigmachen der Schritte in einem Polygon ein neues Kurvenstück hinzukommt (bzw. in einer Liste ein neues Paar hinzukommt). Es gibt aber nur eine Liste in  $\mathcal{L}$ , die die Ober- und Unterseite von  $Z$  verbindet, nämlich  $L(Z)$ . Damit kann auch das zu  $L(Z)$  gehörige Polygon höchstens einmal von  $K$  geschnitten werden, ein Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 6.2** Das letzte Lemma bedeutet nicht, dass ein Schnittsystem von horizontalen Kurven nicht auch durch nicht-horizontale Kurven zu einem Schottky-Schnittsystem erweitert werden kann, wie die Abbildung 6.1.1 zeigt.

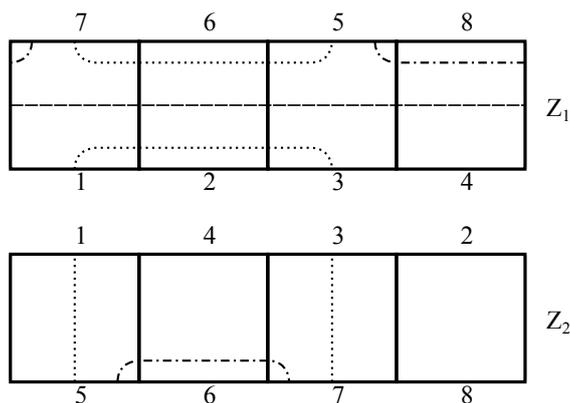


Abbildung 6.1.1: Ein nicht-horizontales Schottky-Schnittsystem

## 6.2 Zwei Beispiele zum Algorithmus

### Die Wollmilchsau

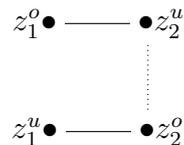
Die Wollmilchsau (beschrieben in [HS08]) ist das Origami aus Abbildung 6.0.1-6.0.4. Es ist gegeben durch  $Q = \{1, \dots, 8\}$  und

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- **Zylinder:**  $Z_1 = \{1, 2, 3, 4\}; Z_2 = \{5, 6, 7, 8\}$
- **Ecken:** Bahnen von  $p_2 p_1 p_2^{-1} p_1^{-1} : \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 7\}, \{6, 8\}$
- **Geschlecht:**  $g = \frac{d - \#Ecken}{2} + 1 = \frac{8-4}{2} + 1 = 3$

#### Schritt 1:

Erstelle Graphen:



Verbinde  $z_2^o$  mit  $z_2^u$ , um den Graphen zusammenhängend zu machen.

#### Schritt 2:

Menge der Zylinder, durch die horizontal geschnitten wird:  $\overline{\mathcal{Z}} = \{Z_1\}$

Menge der Zylinder, durch die nicht horizontal geschnitten wird:  $\mathcal{Z}' = \{Z_2\}$

Die Kurve  $K_1$  sei definiert als der horizontale Schnitt an  $Z_1$ .

Listen in  $\mathcal{L}_u$ :

$$L(Z_1, u) = [1, 2, 3, 4]$$

$$L(Z_2, u) = [5, 6, 7, 8]$$

Listen in  $\mathcal{L}_o$ :

$$L(Z_1, o) = [8, 5, 6, 7]$$

$$L(Z_2, o) = [2, 3, 4, 1]$$

Listen in  $\mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_o)$ :

$$L(Z_2) = [a_2, 5, 6, 7, 8, a_2, 2, 3, 4, 1]$$

Damit haben wir:

$$\mathcal{L} = \{L(Z_1, u), L(Z_1, o), L(Z_2)\}$$

und verbinden alles zu einer Liste (jeweils an den fett gedruckten Einträgen) wie in der linken Spalte der Tabelle unten. Wenn alles zu einer Liste verbunden ist, nehmen wir ein Paar, das ein anderes Paar trennt (z.B. das Paar (1,1), welches z.B. das Paar (3,3) trennt) und verfolgen, wie es durch das Rückgängigmachen der Verklebungsschritte wieder getrennt wird (siehe rechte Spalte in der Tabelle).

verbinde Listen ↓	$L(Z_1, u) = [1, \mathbf{2}, 3, 4]$	$(1, 2)(2, 1)$	↑ neue Kurve
	$L(Z_1, o) = [8, 5, 6, 7]$		
	$L(Z_2) = [a_2, 5, 6, 7, 8, a_2, \mathbf{2}, 3, 4, 1]$		
	$[1, 3, 4, 1, a_2, 5, 6, 7, \mathbf{8}, a_2, 3, 4]$	$(1, 1)$	
	$[\mathbf{8}, 5, 6, 7]$		
	$[1, 3, 4, 1, a_2, 5, 6, 7, 5, 6, 7, a_2, 3, 4]$	$(1, 1)$	

$(1, 2)$  ist in  $L(Z_1, u)$ . Die Zahl  $t_0$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_0}(1) = 2$  erfüllt, ist  $t_0 = 1$ . Also ist  $w_0 = xy^{-1}$ .

$(2, 1)$  ist in  $L(Z_2)$  im Teil  $L(Z_2, o)$ . Die Zahl  $t_1$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_1}p_2^{-1}(2) = p_2^{-1}(1)$  erfüllt, ist  $t_1 = 1$ . Also ist  $w_1 = xy$ .

Die neue Kurve lautet somit:

$$K_2 := (1, w_0w_1) = (1, xy^{-1}xy)$$

Dies entspricht bis jetzt der Situation, die in Abbildung 6.0.1 dargestellt ist.

### Schritt 3:

Die neuen Mengen von Listen lauten nun (zyklische Listen in eckigen, nicht zyklische in runden Klammern):

Listen in $\mathcal{L}_u$	Listen in $\mathcal{L}_o$
$L(Z_1, u) = [1', 2'', 3, 4]$	$L(Z_1, o) = [8, 5, 6, 7]$
$L_1(Z_1, u) = (1'', 2')$	$L(Z_2, o) = [2', 3, 4, 1'']$
$L(Z_2, u) = [5, 6, 7, 8]$	$L_1(Z_2, o) = (1', 2'')$

Listen in  $\mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_o)$ :

$$L(Z_2) = [a_2, 5, 6, 7, 8, a_2, 2', 3, 4, 1'']$$

Damit haben wir:

$$\mathcal{L} = \{L(Z_1, u), L_1(Z_1, u), L(Z_1, o), L_1(Z_2, o), L(Z_2)\}$$

und verbinden alles zu einer Liste:

$L(Z_1, u) = [1', \mathbf{2}'', 3, 4]$ $L_1(Z_1, u) = (1'', 2')$ $L(Z_1, o) = [8, 5, 6, 7]$ $L_1(Z_2, o) = (1', \mathbf{2}'')$ $L(Z_2) = [a_2, 5, 6, 7, 8, a_2, 2', 3, 4, 1'']$	(5, 8)(8, 5)
$[3, 4]$ $(1'', 2')$ $[8, 5, 6, 7]$ $[a_2, 5, 6, 7, 8, a_2, 2', \mathbf{3}, 4, 1'']$	(5, 8)(8, 5)
$[1'', a_2, 5, 6, 7, 8, a_2, 2']$ $(1'', 2')$ $[8, 5, 6, 7]$	(5, 8)(8, 5)
$[5, 6, 7, \mathbf{8}]$ $[\mathbf{8}, 5, 6, 7]$	(5, 8)(8, 5)
$[5, 6, 7, 5, 6, 7]$	(5, 5)

$(5, 8)$  ist in  $L(Z_2)$  im Teil  $L(Z_2, u)$ . Die Zahl  $t_0$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_0}(5) = 8$  erfüllt, ist  $t_0 = -1$ .

Also ist  $w_0 = x^{-1}y^{-1}$ .

$(8, 5)$  ist in  $L(Z_1, o)$ . Die Zahl  $t_1$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_1}p_2^{-1}(8) = p_2^{-1}(5)$  erfüllt, ist  $t_1 = -1$ .

Also ist  $w_1 = x^{-1}y$ .

Die neue Kurve lautet:

$$K_3 := (5, w_0w_1) = (5, x^{-1}y^{-1}x^{-1}y)$$

### Ein weiteres Beispiel

Gegeben sei das Origami, das definiert ist durch  $Q = \{1, \dots, 14\}$  sowie

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

und

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 14 & 11 & 9 & 8 & 10 & 12 & 5 & 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Wir wollen dieses Origami mit  $O_{14}$  bezeichnen.

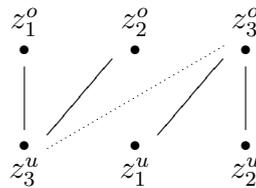
**Zylinder:**  $Z_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $Z_2 = \{5, 6, 7\}$ ;  $Z_3 = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

**Ecken:** Bahnen von  $p_2 p_1 p_2^{-1} p_1^{-1} : \{1\}, \{2\}, \{3, 6\}, \{4\}, \{5\}, \{7\}, \{8, 11, 12, 9, 10, 13\}, \{14\}$

**Geschlecht:**  $g = \frac{d - \#Ecken}{2} + 1 = \frac{14 - 8}{2} + 1 = 4$ .

#### Schritt 1:

Erstelle Graphen:



Verbinde  $z_3^o$  mit  $z_3^u$ , um den Graphen zusammenhängend zu machen.

#### Schritt 2:

Menge der Zylinder, durch die horizontal geschnitten wird:  $\bar{\mathcal{Z}} = \{Z_1, Z_2\}$

Menge der Zylinder, durch die nicht horizontal geschnitten wird:  $\mathcal{Z}' = \{Z_3\}$

Die Kurven  $K_1$  und  $K_2$  seien definiert als die horizontalen Schnitte an  $Z_1$  und  $Z_2$ .

Listen in  $\mathcal{L}_u$ :

$$L(Z_1, u) = [1, 2, 3, 4]$$

$$L(Z_2, u) = [5, 6, 7]$$

$$L(Z_3, u) = [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]$$

Listen in  $\mathcal{L}_o$ :

$$L(Z_1, o) = [9, 11, 14, 13]$$

$$L(Z_2, o) = [12, 10, 8]$$

$$L(Z_3, o) = [7, 6, 2, 1, 4, 3, 5]$$

Listen in  $\mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_o)$ :

$$L(Z_3) = [a_3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, a_3, 7, 6, 2, 1, 4, 3, 5]$$

Damit haben wir:

$$\mathcal{L} = \{L(Z_1, u), L(Z_2, u), L(Z_1, o), L(Z_2, o), L(Z_3)\}$$

und verbinden alles zu einer Liste (jeweils an den fett gedruckten Einträgen):

$L(Z_1, u) = [1, \mathbf{2}, 3, 4]$ $L(Z_2, u) = [5, 6, 7]$ $L(Z_1, o) = [9, 11, 14, 13]$ $L(Z_2, o) = [12, 10, 8]$ $L(Z_3) = [a_3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, a_3, 7, 6, \mathbf{2}, 1, 4, 3, 5]$	$(8, 12)(12, 8)$
$[\mathbf{5}, a_3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, a_3, 7, 6]$ $[\mathbf{5}, 6, 7]$ $[9, 11, 14, 13]$ $[12, 10, 8]$	$(8, 12)(12, 8)$
$[8, \mathbf{9}, 10, 11, 12, 13, 14]$ $[\mathbf{9}, 11, 14, 13]$ $[12, 10, 8]$	$(8, 12)(12, 8)$
$[8, 11, 14, 13, 10, 11, \mathbf{12}, 13, 14]$ $[\mathbf{12}, 10, 8]$	$(8, 12)(12, 8)$
$[8, 11, 14, 13, 10, 11, 10, 8, 13, 14]$	$(8, 8)$

$(8, 12)$  ist in  $L(Z_3)$  im Teil  $L(Z_3, u)$ . Die Zahl  $t_0$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_0}(8) = 12$  erfüllt, ist  $t_0 = -3$ . Also ist  $w_0 = x^{-3}y^{-1}$ .

$(12, 8)$  ist in  $L(Z_2, o)$ . Die Zahl  $t_1$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_1}p_2^{-1}(12) = p_2^{-1}(8)$  erfüllt, ist  $t_1 = 1$ . Also ist  $w_1 = xy$ .

Die neue Kurve lautet somit:

$$K_3 := (8, w_0w_1) = (8, x^{-3}y^{-1}xy)$$

### Schritt 3:

Die neuen Mengen von Listen lauten nun (zyklische Listen in eckigen, nicht zyklische in runden Klammern):

Listen in $\mathcal{L}_u$	Listen in $\mathcal{L}_o$
$L(Z_1, u) = [1, 2, 3, 4]$	$L(Z_1, o) = [9, 11, 14, 13]$
$L(Z_2, u) = [5, 6, 7]$	$L_0(Z_2, o) = [12', 10, 8'']$
$L_0(Z_3, u) = [8'', 9, 10, 11, 12']$	$L_1(Z_2, o) = (8', 12'')$
$L_1(Z_3, u) = (12'', 13, 14, 8')$	$L(Z_3, o) = [7, 6, 2, 1, 4, 3, 5]$

Listen in  $\mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}_u \cup \mathcal{L}_o)$ :

$$L(Z_3) = [a_3, 8'', 9, 10, 11, 12', a_3, 7, 6, 2, 1, 4, 3, 5]$$

Damit haben wir:

$$\mathcal{L} = \{L(Z_1, u), L(Z_2, u), L_1(Z_3, u), L(Z_1, o), L_0(Z_2, o), L_1(Z_2, o), L(Z_3)\}$$

und verbinden alles zu einer Liste:

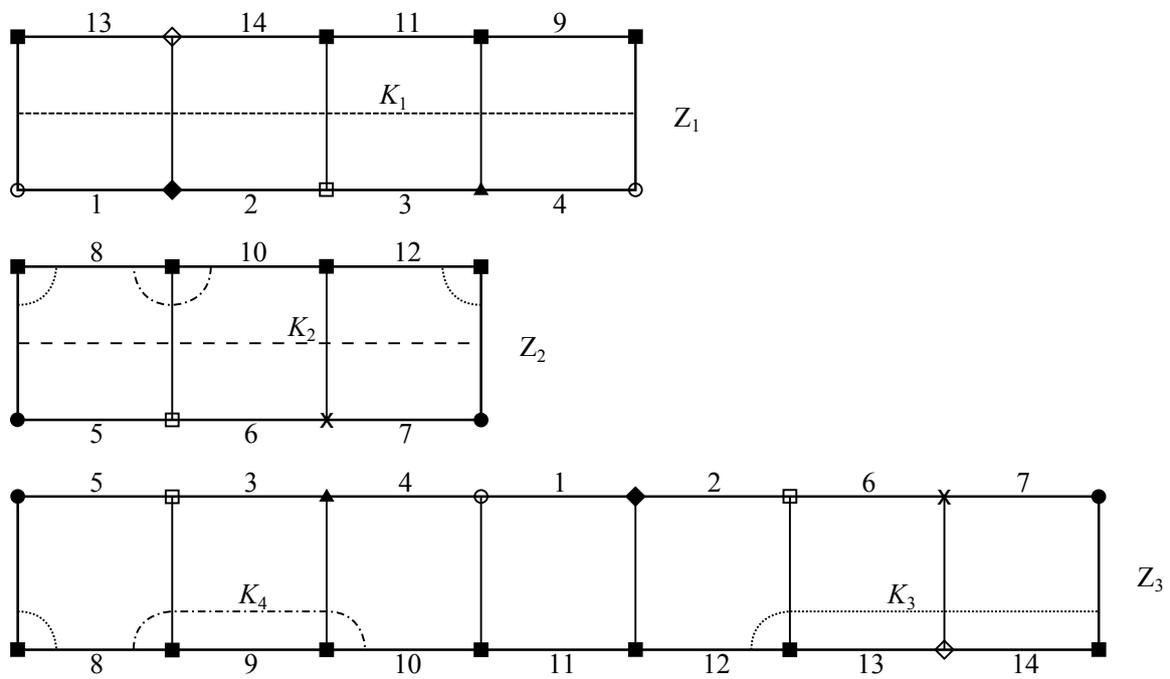
$L(Z_1, u) = [1, \mathbf{2}, 3, 4]$ $L(Z_2, u) = [5, 6, 7]$ $L_1(Z_3, u) = (12'', 13, 14, 8')$ $L(Z_1, o) = [9, 11, 14, 13]$ $L_0(Z_2, o) = [12', 10, 8'']$ $L_1(Z_2, o) = (8', 12'')$ $L(Z_3) = [a_3, 8'', 9, 10, 11, 12', a_3, 7, 6, \mathbf{2}, 1, 4, 3, 5]$	$(8'', 10)(10, 8'')$	$[8'', 11, 8', 12'', \mathbf{10}, 11, 12']$ $[12', \mathbf{10}, 8'']$ $(8', 12'')$	$(8'', 10)(10, 8'')$
$[\mathbf{5}, a_3, 8'', 9, 10, 11, 12', a_3, 7, 6]$ $[\mathbf{5}, 6, 7]$ $(12'', 13, 14, 8')$ $[9, 11, 14, 13]$ $[12', 10, 8'']$ $(8', 12'')$	$(8'', 10)(10, 8'')$	$[8'', 11, \mathbf{8}', 12'', 8'', 12', 11, 12']$ $(\mathbf{8}', 12'')$	$(8'', 8'')$
$[8'', \mathbf{9}, 10, 11, 12']$ $(12'', 13, 14, 8')$ $[\mathbf{9}, 11, 14, 13]$ $[12', 10, 8'']$ $(8', 12'')$	$(8'', 10)(10, 8'')$	$[8'', 11, 8'', 12', 11, 12']$	$(8'', 8'')$
$[8'', 11, 14, \mathbf{13}, 10, 11, 12']$ $(12'', \mathbf{13}, 14, 8')$ $[12', 10, 8'']$ $(8', 12'')$	$(8'', 10)(10, 8'')$		

$(8'', 10)$  ist in  $L(Z_3)$  im Teil  $L(Z_3, u)$ . Die Zahl  $t_0$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_0}(8) = 10$  erfüllt, ist  $t_0 = 2$ . Also ist  $w_0 = x^2y^{-1}$ .

$(10, 8'')$  ist in  $L(Z_2, o)$ . Die Zahl  $t_1$  kleinsten Betrages, die  $p_1^{t_1}p_2^{-1}(10) = p_2^{-1}(8)$  erfüllt, ist  $t_1 = -1$ . Also ist  $w_1 = x^{-1}y$ .

Die neue Kurve lautet:

$$K_4 := (8, x^2y^{-1}x^{-1}y)$$

Abbildung 6.2.1: Das Origami  $O_{14}$  mit dem HSS  $\{K_1, \dots, K_4\}$

# Kapitel 7

## Beispiele

### 7.1 L-Origamis

**Definition 7.1** Für  $m, n \geq 2$  sei  $L(m, n)$  das Origami, das aus  $m + n - 1$  Quadraten besteht und durch folgende Permutationen definiert ist:

$$p_1 = (1, \dots, m) \quad p_2 = (1, m + 1, \dots, m + n - 1)$$

Die Origamis  $L(m, n)$  bezeichnet man auch als **L-Origamis**.

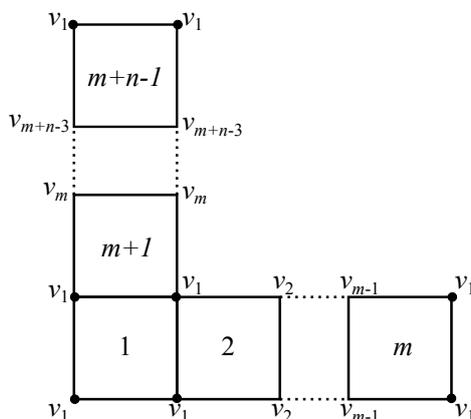


Abbildung 7.1.1: Gegenüberliegende Seiten werden identifiziert

Ein L-Origami  $L(m, n)$  hat stets Geschlecht  $g = 2$  und den Verzweigungspunkt  $v_1$  der Ordnung 3. In den Punktierungen  $v_2, \dots, v_{m+n-3}$  gibt es keine Verzweigung.

Die zu  $L(m, n)$  gehörige Untergruppe von  $F_2$  ist  $H := \langle h_1, \dots, h_{m+n} \rangle$ , wobei

$$h_1 = x^m, \quad h_i = \begin{cases} x^{m-(i-1)} y x^{-m+i-1}, & 2 \leq i \leq m \\ y^{i-m} x y^{m-i}, & m + 1 \leq i \leq m + n - 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad h_{m+n} = y^n$$

Die Wege um die Punktierungen sind  $r_1 = (x^{-1} y^{-1} x y)^3 = h_1^{-1} h_2^{-1} h_1 h_{m+1}^{-1} h_m h_{m+n}^{-1} h_{m+n-1} h_{m+n}$  und

$$r_i = \begin{cases} h_i h_{i+1}^{-1}, & 2 \leq i \leq m - 1 \\ h_{i+1} h_{i+2}^{-1}, & m \leq i \leq m + n - 3. \end{cases}$$

Sei  $X$  die zu  $L(m, n)$  gehörige Fläche und  $X^*$  die Fläche des punktierten Origamis. Wir haben:

$$\pi_1(X^*) = H \quad \text{und} \quad \pi_1(X) = \langle H \mid R \rangle \quad \text{mit} \quad R := \langle \langle r_1, \dots, r_{m+n-3} \rangle \rangle$$

Ein HSS ist gegeben durch die horizontalen Schnitte am horizontalen Zylinder der Länge  $m$  und einem horizontalen Zylinder der Länge 1. Ein Standarderzeugendensystem  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$ , so dass  $a_1$  und  $a_2$  konjugiert horizontal sind, ist folgendes:

$$a_1 = \overline{x^{-m}} \quad a_2 = \overline{yxy^{-1}} \quad b_1 = \overline{xyx^{-1}} \quad b_2 = \overline{yx^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y^{-n}}$$

oder

$$a_1 = \overline{h_1^{-1}} \quad a_2 = \overline{h_{m+1}} \quad b_1 = \overline{h_m} \quad b_2 = \overline{h_{m+1}^{-1}h_m h_{m+n}^{-1}}$$

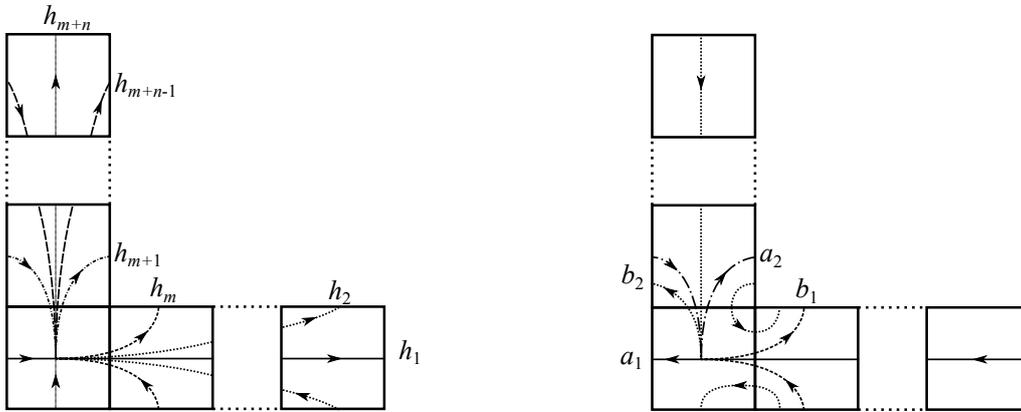


Abbildung 7.1.2: Die Erzeugendensysteme von  $\pi_1(X^*) = H$  (links) und von  $\pi_1(X)$  (rechts)

In  $\text{Aff}^+(X)$  haben wir das Element

$$f : z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z,$$

das sich zu dem Element  $\hat{f}_\star \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(F_2)}(H)$  mit

$$\begin{aligned} \hat{f}_\star : F_2 &\rightarrow F_2 \\ x &\mapsto x, y \mapsto x^m y \end{aligned}$$

liften lässt. Wir erhalten

$$\hat{f}_\star(h_1) = x^m, \quad \hat{f}_\star(h_{m+n}) = (x^m y)^n$$

und

$$\hat{f}_\star(h_i) = \begin{cases} x^{m-(i-1)} x^m y x^{-m+i-1}, & 2 \leq i \leq m \\ (x^m y)^{i-m} x (x^m y)^{m-i}, & m+1 \leq i \leq m+n-1. \end{cases}$$

Das heißt:

$$\hat{f}_\star(h_1) = h_1, \quad \hat{f}_\star(h_{m+n}) = h_1 (\prod_{k=m+1}^{m+n-1} h_k^m) h_{m+n}$$

und

$$\hat{f}_\star(h_i) = \begin{cases} h_1 h_i, & 2 \leq i \leq m \\ h_1 (\prod_{k=m+1}^{i-1} h_k^m) h_i (\prod_{k=m+1}^{i-1} h_k^m)^{-1} h_1^{-1}, & m+1 \leq i \leq m+n-1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$f_*(a_1) = \overline{\hat{f}_*(h_1^{-1})} = \overline{h_1^{-1}} = a_1$$

$$\begin{aligned} f_*(a_2) &= \overline{\hat{f}_*(h_{m+1})} \\ &= \overline{h_1(\prod_{k=m+1}^m h_k^m)h_{m+1}(\prod_{k=m+1}^m h_k^m)^{-1}h_1^{-1}} \\ &= \overline{h_1h_{m+1}h_1^{-1}} \\ &= a_1^{-1}a_2a_1 \end{aligned}$$

$$f_*(b_1) = \overline{\hat{f}_*(h_m)} = \overline{h_1h_m} = a_1^{-1}b_1$$

$$\begin{aligned} f_*(b_2) &= \overline{\hat{f}_*(h_{m+1}^{-1}h_mh_{m+n}^{-1})} \\ &= \overline{h_1h_{m+1}^{-1}h_1^{-1} \cdot h_1h_m \cdot (h_1(\prod_{k=m+1}^{m+n-1} h_k^m)h_{m+n})^{-1}} \\ &= \overline{h_1h_{m+1}^{-1}h_mh_{m+n}^{-1}(\prod_{k=m+1}^{m+n-1} h_k^m)^{-1}h_1^{-1}} \\ &= \overline{h_1h_{m+1}^{-1}h_mh_{m+n}^{-1}h_{m+1}^{(1-n)m}h_1^{-1}} \quad (\text{wegen } r_m, \dots, r_{m+n-3}) \\ &= \overline{a_1^{-1}a_2^{-1}b_1b_1^{-1}a_2b_2a_2^{(1-n)m}a_1} \quad (\text{wegen } \overline{h_{m+n}} = b_2^{-1}a_2^{-1}b_1) \\ &= a_1^{-1}b_2a_2^{(1-n)m}a_1 \end{aligned}$$

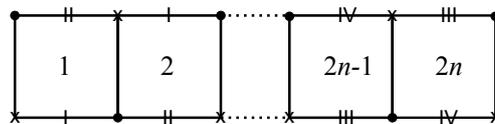
und damit erhalten wir schließlich für den symplektischen Homomorphismus  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_g$  mit  $\alpha(a_i) = 1, \alpha(b_i) = \gamma_i$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$ :

$$\begin{aligned} \alpha \circ f_*(a_1) &= \alpha(a_1) = 1 \\ \alpha \circ f_*(a_2) &= \alpha(a_1^{-1}a_2a_1) = 1 \\ \alpha \circ f_*(b_1) &= \alpha(a_1^{-1}b_1) = \gamma_1 \\ \alpha \circ f_*(b_2) &= \alpha(a_1^{-1}b_2a_2^{(1-n)m}a_1) = \gamma_2. \end{aligned}$$

## 7.2 X-Origamis

**Definition 7.2** Für  $n \geq 1$  sei  $O(n)$  das Origami, das aus  $2n$  Quadraten besteht und durch folgende Permutationen definiert ist:

$$p_1 = (1, \dots, n) \quad p_2 = (1, 2)(3, 4)\dots(2n - 1, 2n)$$



Die Origamis  $O(n)$  bezeichnet man auch als **X-Origamis**. Sie wurden zuerst in [Sch05, §4.5] definiert und deren Veech-Gruppe wurde in [Sch05, §5.2] angegeben.

Das Origami  $O(n)$  hat stets Geschlecht  $g = n$  und 2 Verzweigungspunkte der Ordnung  $n$ . Die zu  $O(n)$  gehörige Untergruppe von  $F_2$  ist  $H := \langle h_1, \dots, h_{2n+1} \rangle$ , wobei

$$h_{2i-1} = x^{2i-2}yx^{1-2i}, \quad h_{2i} = x^{2i-1}yx^{2-2i}, \quad \text{für } 1 \leq i \leq n \quad \text{und} \quad h_{2n+1} = x^{2n}$$

Die Wege um die Punktierungen sind

$$r_1 = (x^{-1}y^{-1}xy)^n = h_{2n+1}^{-1} \prod_{k=1}^n h_{2(n-k)+1}^{-1} h_{2(n-k)+2} \quad \text{und} \quad r_2 = (yx^{-1}y^{-1}x)^n = h_1 \prod_{k=1}^n h_{2k}^{-1} h_{2k+1}$$

Wir haben:

$$\pi_1(X^*) = H \quad \text{und} \quad \pi_1(X) = \langle H \mid R \rangle \quad \text{mit} \quad R := \langle\langle r_1, r_2 \rangle\rangle$$

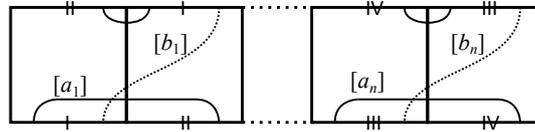


Abbildung 7.2.1: Horizontales Schottky-Schnittsystem  $[a_i]$ , zu symplektischem System ergänzt

Ein HSS ist gegeben durch die Kurven

$$K_i = (2i - 1, xy^{-1}xy) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Wenn wir die Kurven

$$K'_i = (2i - 1, xy)$$

hinzunehmen, wird daraus ein symplektisches System. Damit bekommen wir ein Standarderzeugendensystem von  $\pi_1(X)$  mit Basispunkt in Quadrat 1 der folgenden Form:

$$a_i = \overline{v_i xy^{-1}xy v_i^{-1}} \quad b_i = \overline{v_i xy v_i^{-1}}$$

oder

$$a_i = \overline{w_i h_{2i-1}^{-1} h_{2i} w_i^{-1}} \quad b_i = \overline{w_i h_{2i} w_i^{-1}}$$

für geeignete  $v_1, \dots, v_n \in F_2$ ,  $w_1, \dots, w_n \in H$  und  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

In  $\text{Aff}^+(X)$  haben wir das Element

$$f : z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z,$$

das sich zu dem Element  $\hat{f}_\star \in \text{Stab}_{\text{Aut}^+(F_2)}(H)$  mit

$$\begin{aligned} \hat{f}_\star : F_2 &\rightarrow F_2 \\ x &\mapsto x, \quad y \mapsto x^{2n}y \end{aligned}$$

liften lässt. Wir erhalten

$$\hat{f}_\star(h_i) = h_{2n+1} h_i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, 2n\} \quad \text{und} \quad \hat{f}_\star(h_{2n+1}) = h_{2n+1}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 f_*(a_i) &= \overline{\hat{f}_*(w_i h_{2i-1}^{-1} h_{2i} w_i^{-1})} = \\
 &= \overline{\hat{f}_*(w_i) \cdot h_{2i-1}^{-1} h_{2i} \cdot \hat{f}_*(w_i^{-1})} \\
 &= \underbrace{\overline{\hat{f}_*(w_i) w_i^{-1}}}_{:= c_i \in \pi_1(X)} \cdot \overline{w_i h_{2i-1}^{-1} h_{2i} w_i^{-1}} \cdot \overline{w_i \hat{f}_*(w_i^{-1})} \\
 &= c_i a_i c_i^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_*(b_i) &= \overline{\hat{f}_*(w_i h_{2i} w_i^{-1})} \\
 &= \overline{\hat{f}_*(w_i) h_{2n+1} h_{2i} \hat{f}_*(w_i^{-1})} \\
 &= \overline{\hat{f}_*(w_i) h_{2n+1} w_i^{-1} w_i h_{2i} w_i^{-1} w_i \hat{f}_*(w_i^{-1})} \\
 &= \overline{\hat{f}_*(w_i) h_{2n+1} w_i^{-1}} \cdot \overline{b_i \cdot w_i \hat{f}_*(w_i^{-1})}
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir schließlich für den symplektischen Homomorphismus  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_g$  mit  $\alpha(a_i) = 1, \alpha(b_i) = \gamma_i$  für  $i \in \{1, \dots, g\}$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha \circ f_*(a_i) &= \alpha(c_i a_i c_i^{-1}) = 1 \\
 \alpha \circ f_*(b_i) &= \alpha(\overline{\hat{f}_*(w_i) h_{2n+1} w_i^{-1}} \cdot \overline{b_i \cdot w_i \hat{f}_*(w_i^{-1})}) \quad (\overline{h_{2n+1}} \in \text{Kern}(\alpha) \text{ nach Satz 4.4}) \\
 &= \alpha(\overline{\hat{f}_*(w_i) w_i^{-1}}) \cdot \gamma_i \cdot \alpha(\overline{w_i \hat{f}_*(w_i^{-1})}) \\
 &= \gamma_i
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen  $\overline{w_i \hat{f}_*(w_i^{-1})} \in \text{Kern}(\alpha)$ , was aus dem Beweis von Satz 4.9 folgt.

### 7.3 $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ für ein Schottkyschnittsystem in Richtung $(1, 1)$

Es seien das Origami  $L(2, 2)$  und der Vektor  $v = (1, 1) \in \mathbb{Z}^2$  gegeben. Wir wollen ein parabolisches Element  $A \in \Gamma(L(2, 2))$  angeben, das  $v$  als Eigenvektor hat, sowie einen symplektischen Homomorphismus  $\alpha : \pi_1(X) \rightarrow F_2 = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ , sodass für einen Lift  $f \in \text{Aff}^+(X)$  von  $A$  die Gruppe  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha) \cong \mathbb{Z}$ . Dabei sei  $X$  die zu diesem Origami gehörende Fläche.

Zunächst bestimmen wir ein Standarderzeugendensystem  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$  der Fundamentalgruppe mit  $\alpha(a_i) = 1$  und  $\alpha(b_i) = \gamma_i$  für  $i \in \{1, 2\}$ :

Analog zur Konstruktion im Beweis des Satzes 4.10 erhalten wir aus  $L(2, 2)$  durch die Scherung

$$g^{-1} : X \longrightarrow X'$$

$$z \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z,$$

ein neues Origami  $L(2, 2)'$ , wie in Abbildung 7.3.1 oben rechts. Darin finden wir ein Standarderzeugendensystem  $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ , sodass  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  konjugiert vertikal sind (siehe auch Abbildung 7.3.1 unten rechts):

$$\alpha_1 = \overline{y^{-3}}, \quad \alpha_2 = \overline{yx^{-1}y^{-1}xy}, \quad \beta_1 = \overline{yx^{-1}y^{-1}}, \quad \beta_2 = \overline{y^{-1}x^{-1}y^{-1}x}$$

Sei  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$  dessen Urbild (Abbildung 7.3.1 unten links). Wir haben

$$a_1 = \overline{(xy)^{-3}}, \quad a_2 = \overline{xyx^{-1}y^{-1}xy}, \quad b_1 = \overline{xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}}, \quad b_2 = \overline{y^{-1}x^{-2}y^{-1}}$$

Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.10 haben wir außerdem  $\text{der}(f') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  und somit

$$A = \text{der}(g) \text{der}(f') \text{der}(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Einen Lift  $\hat{f}_*$  von  $f$  nach  $\text{Aut}^+(F_2)$ , der die zum punktierten Origami gehörende Untergruppe  $H \leq F_2$  auf sich abbildet, erhält man durch den Algorithmus in [Sch05, § 4.1] und anschließender Konjugation mit  $x$ :

$$\hat{f}_* : F_2 \rightarrow F_2$$

$$x \mapsto (xy)^3x, \quad y \mapsto (yx)^{-2}x^{-1}.$$

Ein freies Erzeugendensystem von  $H$  lautet:

$$h_1 = x^2; \quad h_2 = y; \quad h_3 = x^{-1}yxy^{-1}x; \quad h_4 = x^{-1}y^2x$$

Wir erhalten durch das gleiche Vorgehen wie in Abschnitt 7.1:

$$f_*(a_1) = a_1; \quad f_*(b_1) = b_1a_1; \quad f_*(a_2) = a_2; \quad f_*(b_2) = b_2;$$

und damit gilt  $\alpha \circ f_* = \alpha$ .

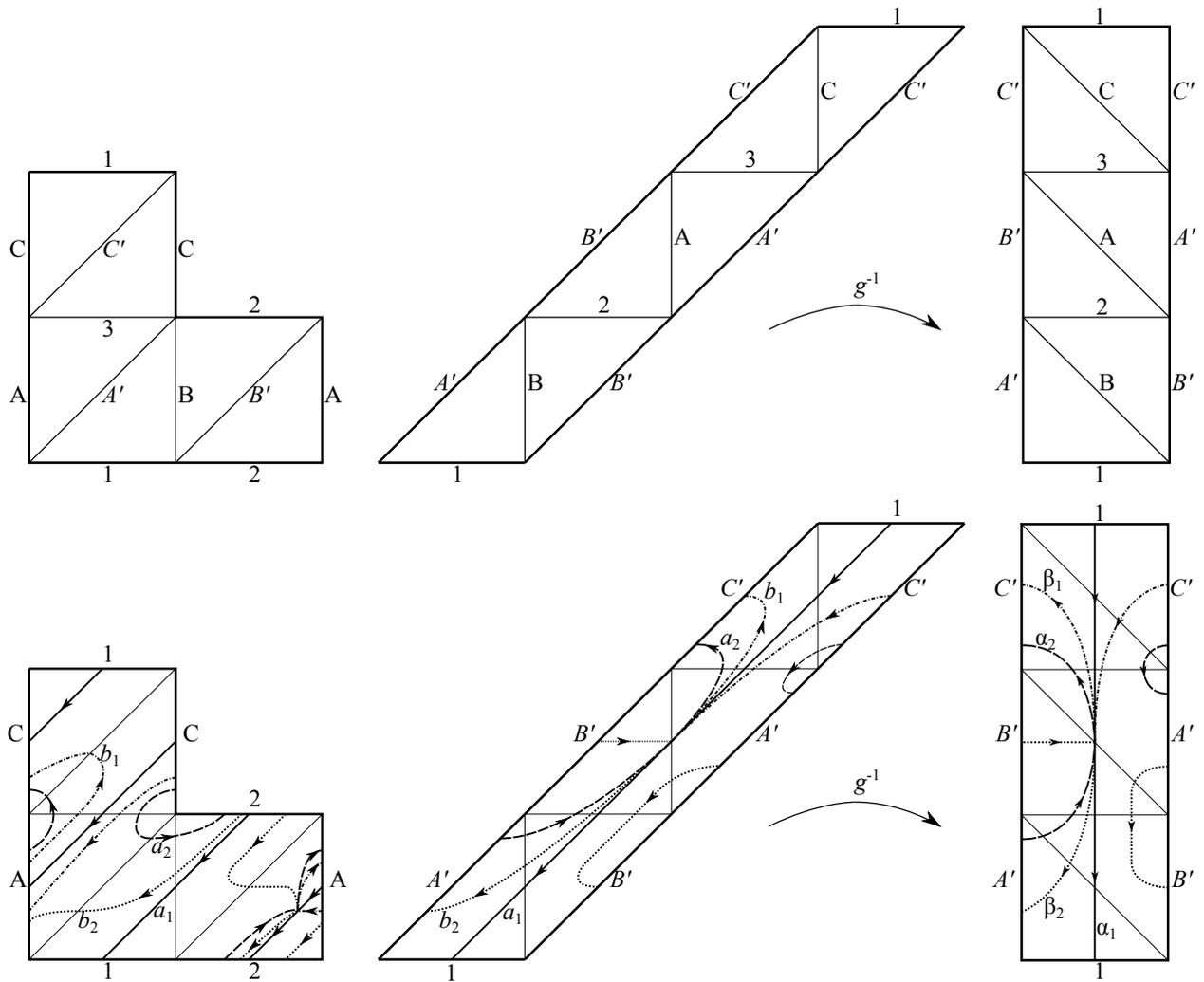


Abbildung 7.3.1: Ein geeignetes Standarderzeugendensystem der Fundamentalgruppe von  $L(2, 2)$

### 7.4 Beispiel für eine Halbtranslationsfläche

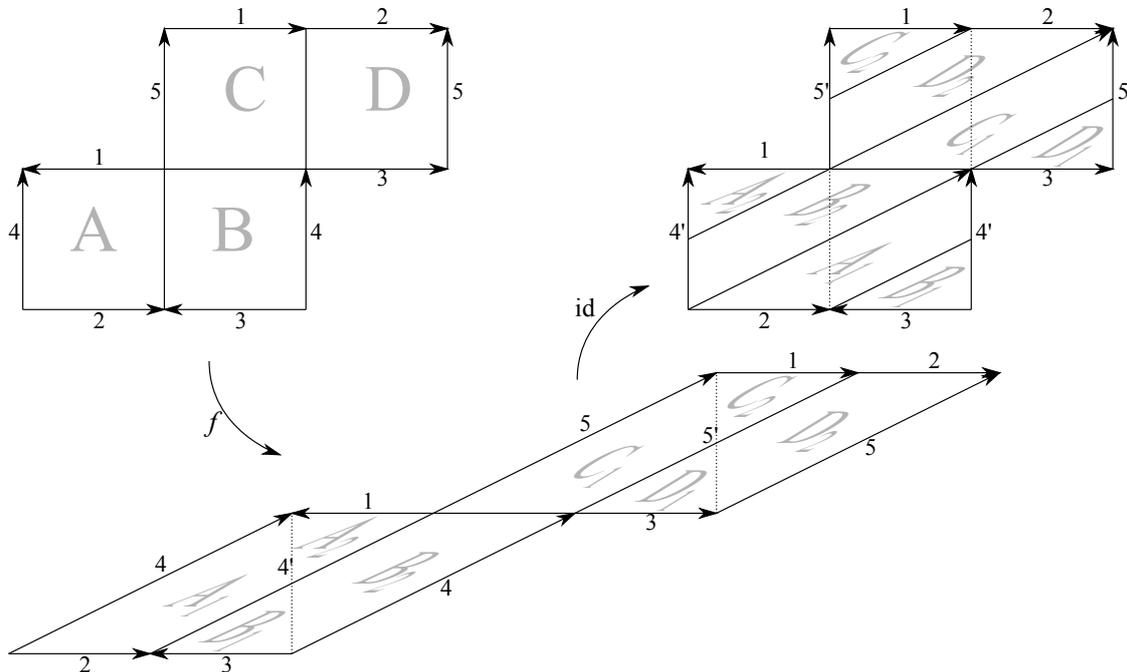


Abbildung 7.4.1: Das affine Element  $f$

Wir betrachten die Halbtranslationsfläche  $X$ , die oben links in Abbildung 7.4.1 und (um  $90^\circ$  gedreht) in 7.4.3 gegeben ist. In Abbildung 7.4.1 ist gezeigt, wie das Element  $f \in \text{Aff}^+(X)$ , das lokal durch

$$f : z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$$

gegeben ist, auf  $X$  operiert und in Abbildung 7.4.3 ist gezeigt, wie das Element  $g \in \text{Aff}^+(X)$ , das lokal durch

$$g : z \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$$

gegeben ist, auf  $X$  operiert. In Abbildung 7.4.5 ist ein symplektisches Erzeugendensystem  $(a_1, b_1, a_2, b_2)$  angegeben. Wir werden zeigen, dass das Element  $g$  trivial auf der Homologie operiert, und drei symplektische Homomorphismen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  angeben, so dass  $g \in \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_i)$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Außerdem werden wir einen weiteren symplektischen Homomorphismus  $\alpha_4$  angeben, so dass  $f \in \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_4)$  liegt, und wir werden zeigen, dass die Eigenwerte von  $D(f \circ g)$  keine Eigenwerte von  $M_{f \circ g} = M_f$  sind. (Da wir uns auf einer Halbtranslationsfläche befinden, sind nur  $D(f), D(g), D(f \circ g) \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  wohldefiniert, aber die Eigenwerte von deren Urbildern in  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  sind bis auf Vorzeichen unabhängig von der Wahl des Urbildes und deshalb kann man auch bei Elementen aus  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  von Eigenwerten bis auf Vorzeichen sprechen.) Damit haben wir hier Beispiele für Elemente in Gruppen der Form  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$ , sowie Beispiele, die belegen, dass sowohl Satz 5.7, als auch Korollar 5.5 entsprechend für Halbtranslationsflächen *nicht* gelten.

In Abbildung 7.4.2 ist ein Erzeugendensystem  $h_1, \dots, h_5$  der Fundamentalgruppe der punktierten Fläche  $X^*$  gegeben und in Abbildung 7.4.4 ist mit  $k_1, \dots, k_5$  ein weiteres solches Erzeugendensystem gegeben. Die Wege um die beiden Punktierungen sind gegeben durch

$$r_1 = h_1 h_4^{-1} h_5 h_1^{-1} h_2, \quad \text{und} \quad r_2 = h_2^{-1} h_3 h_5^{-1} h_3^{-1} h_4$$

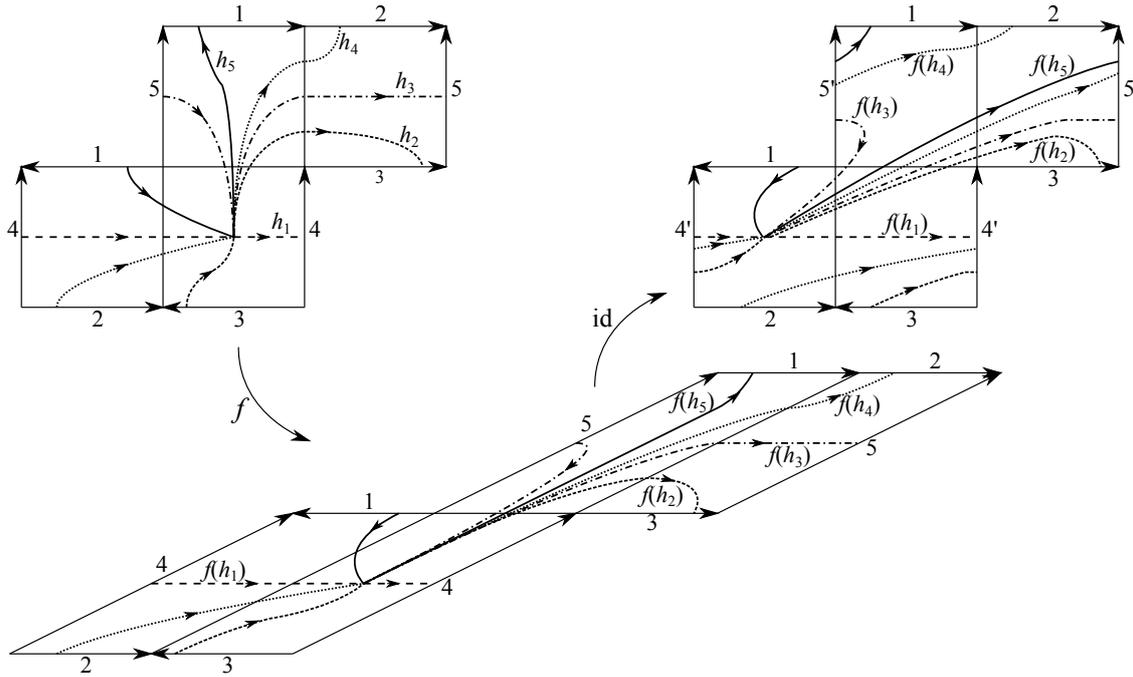


Abbildung 7.4.2: Die Operation von  $f$  auf  $\pi_1(X^*) = \langle h_1, \dots, h_5 \rangle$

oder, in den Erzeugern  $k_1, \dots, k_5$  ausgedrückt, durch

$$r'_1 = k_1 k_2^{-1} k_1^{-1} k_2 k_3, \quad \text{und} \quad r'_2 = k_5^{-1} k_4 k_5 k_4^{-1} k_3.$$

$\pi_1(X)$  erhält man aus  $\pi_1(X^*)$ , indem man den von den Wegen um die Punktierungen erzeugten Normalteiler heraus faktorisiert. Die Elemente  $a_1, a_2, b_1, b_2$  aus Abbildung 7.4.5 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_1 &= \overline{k_5^{-1} k_1^{-1}} = \overline{h_1^{-1}} \\ a_2 &= \overline{k_2 k_4} = \overline{h_3} \\ b_1 &= \overline{k_2 k_3} = \overline{h_2} \\ b_2 &= \overline{k_5^{-1}} = \overline{h_5^{-1}} \end{aligned}$$

Umgekehrt können wir auch  $\overline{k_1}, \dots, \overline{k_5}, \overline{h_1}, \dots, \overline{h_5}$  durch  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} \overline{h_1} &= a_1^{-1} & \overline{k_1} &= a_1^{-1} \overline{k_5^{-1}} = a_1^{-1} b_2 \\ \overline{h_2} &= b_1 & \overline{k_2} &\stackrel{r'_1}{=} \overline{k_1^{-1} k_2 k_3 k_1} = \overline{k_1^{-1} b_1 k_1} = b_2^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1} b_2 \\ \overline{h_3} &= a_2 & \overline{k_3} &= k_2^{-1} b_1 = b_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 b_1 \\ \overline{h_4} &\stackrel{r_1}{=} \overline{h_5 h_1^{-1} h_2 h_1} = \overline{b_2^{-1} a_1 b_1 a_1^{-1}} & \overline{k_4} &= k_2^{-1} a_2 = b_2^{-1} a_1 b_1^{-1} a_1^{-1} b_2 a_2 \\ \overline{h_5} &= b_2^{-1} & \overline{k_5} &= b_2^{-1} \end{aligned}$$

In Abbildung 7.4.2 ist gezeigt, wie  $f$  auf  $h_1, \dots, h_5$  operiert und in Abbildung 7.4.4, wie  $g$  auf  $k_1, \dots, k_5$  operiert:

$$\begin{aligned} f_*(h_1) &= h_1 & g_*(k_1) &= k_1 \\ f_*(h_2) &= h_2 h_1 & g_*(k_2) &= k_2 \\ f_*(h_3) &= h_3 & g_*(k_3) &= k_3 \\ f_*(h_4) &= h_3 h_4 h_1 & g_*(k_4) &= k_3 k_4 k_3^{-1} \\ f_*(h_5) &= h_3 h_5 & g_*(k_5) &= k_3 k_5 k_3^{-1} \end{aligned}$$

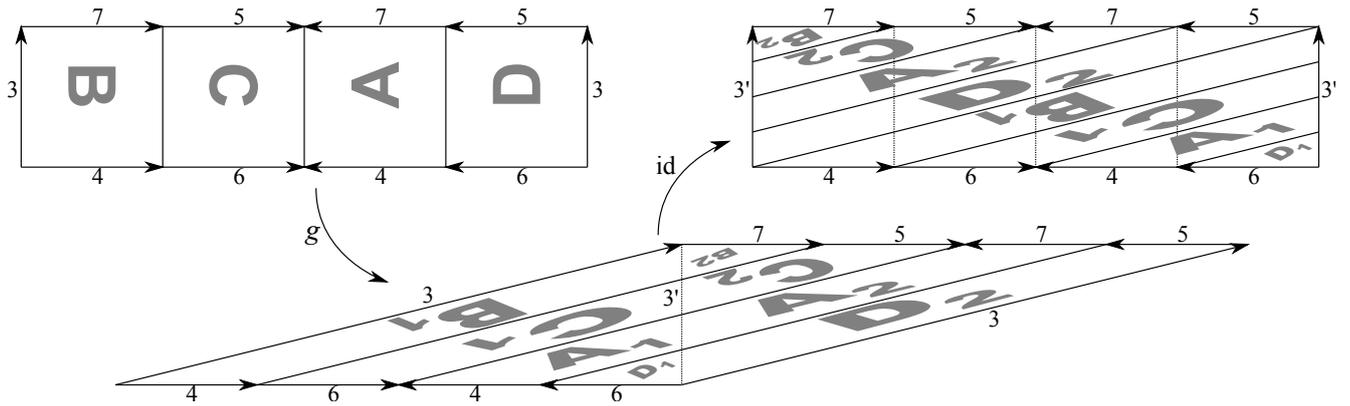


Abbildung 7.4.3: Das affine Element  $g$

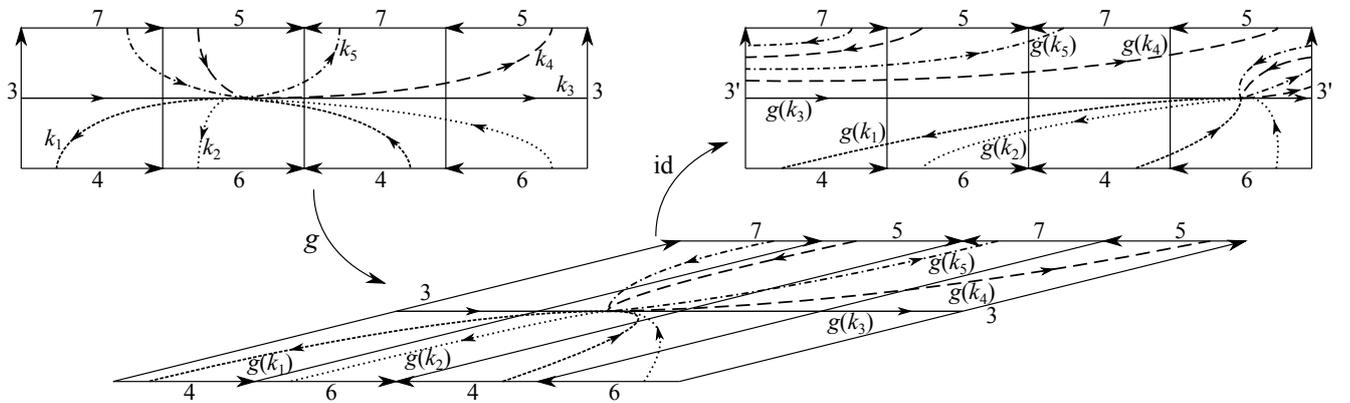


Abbildung 7.4.4: Die Operation von  $g$  auf  $\pi_1(X^*) = \langle k_1, \dots, k_5 \rangle$

Damit kann man sehen

$$\begin{aligned}
 g_*(a_1) &= g_*(\overline{k_5^{-1}k_1^{-1}}) \\
 &= \overline{k_3k_5^{-1}k_3^{-1}} \cdot \overline{k_1^{-1}} \\
 &= (b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1)b_2(b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2)(b_2^{-1}a_1) \\
 &= b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1b_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1 \\
 g_*(a_2) &= g_*(\overline{k_2k_4}) \\
 &= \overline{k_2} \cdot \overline{k_3k_4k_3^{-1}} \\
 &= (b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2)(b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1)(b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2a_2)(b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2) \\
 &= b_1b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2a_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2 \\
 g_*(b_1) &= g_*(\overline{k_2k_3}) = \overline{k_2k_3} = b_1 \\
 g_*(b_2) &= g_*(\overline{k_5^{-1}}) = \overline{k_3k_5^{-1}k_3^{-1}} = (b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1)b_2(b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\alpha_2 \circ g_*(a_1) &= \alpha_2(b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1b_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1) = \gamma_1 \\
\alpha_2 \circ g_*(a_2) &= \alpha_2(b_1b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2a_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2) = 1 \\
\alpha_2 \circ g_*(b_1) &= \alpha_2(b_1) = 1 \\
\alpha_2 \circ g_*(b_2) &= \alpha_2(b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1b_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2) = \gamma_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_3 \circ g_*(a_1) &= \alpha_3(b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1b_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1) = 1 \\
\alpha_3 \circ g_*(a_2) &= \alpha_3(b_1b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2a_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2) = \gamma_1 \\
\alpha_3 \circ g_*(b_1) &= \alpha_3(b_1) = \gamma_2 \\
\alpha_3 \circ g_*(b_2) &= \alpha_3(b_2^{-1}a_1b_1^{-1}a_1^{-1}b_2b_1b_2b_1^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_2) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_4 \circ f_*(a_1) &= \alpha_4(a_1) = 1 \\
\alpha_4 \circ f_*(a_2) &= \alpha_4(a_2) = 1 \\
\alpha_4 \circ f_*(b_1) &= \alpha_4(b_1a_1^{-1}) = \gamma_1 \\
\alpha_4 \circ f_*(b_2) &= \alpha_4(b_2a_2^{-1}) = \gamma_2
\end{aligned}$$

Damit liegt  $g$  in  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_1)$ ,  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_2)$ ,  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_3)$  und  $f$  liegt in  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_4)$ .

Leider ist  $g \notin \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_4)$  und  $f \notin \text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_2(\alpha_i)$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Allerdings kann man bei Halbtranslationsflächen nicht ausschließen, dass zwei parabolische Elemente mit verschiedenen Eigenrichtungen in einer solchen Gruppe liegen, die dann in einem solchen Fall auch nicht zyklisch wäre.

Sei nun eine Halbtranslationsfläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  mit einem symplektischen Erzeugendensystem  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  von  $\pi_1(X)$  gegeben und sei  $\alpha$  der symplektische Homomorphismus, der durch  $\alpha(a_i) = 1$  und  $\alpha(b_i) = \gamma_i$  gegeben ist. Damit ein Element  $\varphi \in \text{Out}^+(\pi_1(X))$  in  $\text{Mod}_g(\alpha)$  liegt, müssen in den ersten  $g$  Spalten der Matrix  $M_\varphi$ , also in den Spalten, die zu Elementen aus  $\text{Kern}(\alpha)$  gehören, Einheitsvektoren stehen (Lemma 3.1 d).

Elemente, die trivial auf der Homologie operieren, sind deshalb auch gute Kandidaten für Elemente, die in einem  $\text{Aff}^+(X) \cap \text{Mod}_g(\alpha)$  liegen, weil sie diese notwendige Bedingung für alle symplektischen Homomorphismen  $\alpha$  erfüllen.

# Vokabeln

- $q$ -Koketten, 58
- $q$ -te Kokettengruppe, 58
- (konjugiert) horizontal, 42
- 0. Kohomologiegruppe, 60
- 1-Koränder, 59
- 1-Kozyklen, 59
- 1. Kohomologiegruppe, 59, 60
  
- Abbildungsklassengruppe, 17
- antiholomorph, 58
  
- Beltrami-Differential, 13
- biholomorph, 8
  
- Differentialform 1. Ordnung, 57
- differenzierbar, 57
  
- Ecken, 39
- exakt, 61
  
- Familie von Riemannschen Flächen, 29
- feiner Modulraum, 29
- feinere Überdeckung, 59
- flache Struktur, 7
  
- geodätischer Strahl bzgl.  $q$ , 14
- Geschlecht, 7
- grober Modulraum, 30
  
- Halbtranslationsfläche, 8
- harmonisch, 62
- holomorph, 8, 57
- holomorphes quadratisches Differential, 8
- horizontal, 42
- horizontale Trajektorie, 55
- horizontaler Weg, 56
- horizontales Schottky-Schnittsystem (HSS), 42
  
- isomorph, 8
  
- komplexe Dilatation, 10
- komplexe Dilatation von  $f$ , 10
- komplexe Struktur, 7
  
- komplexer Atlas, 7
- konjugiert horizontal, 42
- Korand-Operatoren, 58
- Kotangentenraum, 57
- kritische Trajektorie, 55
  
- $L(m, n)$ , 83
- L-Origamis, 83
- Leray-Überdeckung, 60
  
- markierte Riemannsche Fläche, 8
- maximales nicht separierendes System, 67
- Modulraum, 8
- Multiplikator, 26
  
- $O(n)$ , 85
- Origami, 39
  
- projektive Veech-Gruppe, 17
- Pullback, 58
  
- quasikonform, 10
  
- regulären Trajektorien, 55
- Riemannsche Fläche, 7
  
- Schottky-Basis, 21
- Schottky-Gruppe, 21
- Schottky-Struktur, 31
- Schottky-Überlagerung, 25, 30
- Schottkyraum, 26
- Strebel-Richtung, 55
- symplektisch, 36
  
- Teichmüller-Abbildung, 11
- Teichmüller-Deformation, 12
- Teichmüller-Geodätische, 14
- Teichmüller-Kurve, 17
- Teichmüller-Metrik, 12
- Teichmüller-Struktur, 33
- Teichmüllerraum, 8
- Trajektorie in Richtung  $v$ , 55
- Translationsfläche, 8

Translationsstruktur, 8

universelle Familie, 29

Veech-Fläche, 17

Veech-Gruppe, 17

Vergiss-Abbildung, 26

X-Origamis, 85

# Literaturverzeichnis

- [Ahl06] L. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings: Second Edition*, University Lecture Series, vol. 38, American Mathematical Society, 2006.
- [AS60] L. Ahlfors and L. Sario, *Riemann surfaces*, Princeton University Press, 1960.
- [Bau09] O. Bauer, *Familie von Jacobivarietäten über Origamikurven*, Doktorarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2009.
- [Cha60] B. Chang, *The automorphism group of the free group with two generators*, Michigan Mathematical Journal **7** (1960), no. 1, 79–81.
- [EG97] C. Earle and F. Gardiner, *Teichmüller disks and Veech's F-structures*, American Mathematical Society. Contemporary Mathematics **201** (1997), 165–189.
- [FM12] B. Farb and D. Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, Princeton University Press, 2012.
- [For77] O. Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer, 1977.
- [GH88] L. Gerritzen and F. Herrlich, *The extended Schottky space*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **389** (1988), 190–208.
- [Hej75] D.H. Hejhal, *On Schottky and Teichmüller Spaces*, Advances in Mathematics **15** (1975), 133–156.
- [HM98] J. Harris and I. Morrison, *Moduli of Curves*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 187, Springer, 1998.
- [HS07] F. Herrlich and G. Schmithüsen, *On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller and in Schottky space*, Handbook of Teichmüller Theory **I** (2007), 293–349.
- [HS08] ———, *An extraordinary origami curve*, Mathematische Nachrichten **281** (2008), no. 2, 219–237.
- [IT92] Y. Iwayoshi and M. Taniguchi, *An Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer Verlag, 1992.
- [Kat92] S. Katok, *Fuchsian Groups*, Chicago Lectures in Mathematics, The University of Chicago Press, 1992.
- [Kin93] L.C. Kinsey, *Topology of Surfaces*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1993.

- [Mai05] M. Maier, *Schnittgraphen von stabilen Kurven, die als Randpunkte von Origamikurven vorkommen*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2005.
- [Mas88] B. Maskit, *Kleinian Groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 287, Springer Verlag, 1988.
- [McM03] C. McMullen, *Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces*, Journal of the American Mathematical Society **16** (2003), no. 4, 857–885.
- [Nag88] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, A Wiley-Interscience Publication, 1988.
- [Sch05] G. Schmithüsen, *Veech groups of origamis*, Doktorarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2005.
- [Str84] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Randgebiete. 3. Folge, vol. 5, Springer Verlag, 1984.
- [Vee89] W. A. Veech, *Teichmüller curves in moduli spaces, Eisenstein series and an application to triangular billiards*, Inventiones Mathematicae **97** (1989), no. 3, 553–583.

# LEBENS LAUF

Diego De Filippi

geboren am 01. Dezember 1978  
in Como, Italien

September 1984 – Juni 1986	Besuch der Grundschule (1. und 2. Klasse) in Menaggio (Como - Italien)
September 1986 – Juli 1996	Besuch der Europäischen Schule Karlsruhe (italienische Abteilung)
07. Juli 1996	Abitur
August 1997 – August 1998	Zivildienst am Reha-Krankenhaus in Karlsbad-Langensteinbach
Oktober 1996 – Mai 2005	Studium der Mathematik, Germanistik und Physik (Physik nur bis zur Zwischenprüfung) an der Universität Karlsruhe (TH)
Sommersemester 2004	Wissenschaftliche Arbeit in Germanistik
November 2004	I Staatexamen in Germanistik
Mai 2005	I Staatexamen in Mathematik
September 2005 – Juli 2007	Referendariat am Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung in Esslingen
Juli 2007	II Staatsexamen
Wintersemester 2007	Beginn der Dissertation
November 2007 – Oktober 2009	Stipendium der Landesgraduiertenförderung BW
November 2009 – März 2013	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am KIT
14. März 2013	Abschluss der Promotion