

Modellierung von Unsicherheiten und Zustandsschätzung mit Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten

Modeling of Uncertainties and State Estimation with Sets of Probability Densities

Benjamin Noack, Vesa Klumpp, Daniel Lyons, Uwe D. Hanebeck, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Zusammenfassung Die systematische Behandlung von Unsicherheiten stellt eine wesentliche Herausforderung in der Informationsfusion dar. Einerseits müssen geeignete Darstellungsformen für die Unsicherheiten bestimmt werden und andererseits darauf aufbauend effiziente Schätzverfahren hergeleitet werden. Im Allgemeinen wird zwischen stochastischen und mengenbasierten Unsicherheitsbeschreibungen unterschieden. Dieser Beitrag stellt ein Verfahren zur Zustandsschätzung vor, welches simultan stochastische und mengenbasierte Fehlergrößen berücksichtigen kann, indem unsichere Größen nicht mehr durch eine einzelne Wahrscheinlichkeitsdichte, sondern durch eine Menge von Dichten repräsentiert werden. Besonderes Augenmerk liegt hier auf den Vorteilen und Anwen-

dungsmöglichkeiten dieser Unsicherheitsbeschreibung. ▶▶▶ **Summary** Treating uncertainties properly is a difficult but necessary task in data fusion applications. In order to meet this challenge, appropriate uncertainty models are required and efficient state estimation techniques need to be derived. The most common approaches are to model uncertain quantities as random variables or as bounded sets. This paper presents a state estimation framework that allows for a simultaneous treatment of stochastic and unknown but bounded uncertainties. This is achieved by characterizing an uncertain quantity by a set of probability densities. Finally, promising applications of the derived concept are described.

Schlagwörter Bayes'sche Zustandsschätzung, Kalman-Filter, Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten, Credal Sets, Imprecise Probabilities, Beschreibung von Unsicherheiten ▶▶▶ **Keywords** Bayesian estimation, Kalman filtering, sets of densities, credal sets, imprecise probabilities, uncertainty modeling

1 Einleitung

Ein zentrales Einsatzgebiet verteilter Sensorsysteme ist die Überwachung und Vermessung weiträumiger Phänomene, z. B. zur Bestimmung von Schadstoffverteilungen im Grundwasser, zur Überwachung seismischer Aktivitäten oder zur Messung von Temperaturverteilungen. Aus einer Vielzahl von Messungen, welche im Allgemeinen fehlerbehaftet sind, soll sich schließlich ein Gesamtbild des Phänomens ergeben. Eine wesentliche Herausforderung dabei stellt die Entwicklung effizienter Methoden zur Informationsfusion unter Berücksichtigung auftretender Unsicherheiten dar. Diese Problemstellung

gewinnt insbesondere bei großen Sensornetzwerken dadurch an Bedeutung, dass vor allem miniaturisierte und zugleich kostengünstige Sensortechnik zum Einsatz kommen soll. Eine weitverbreitete Herangehensweise ist die stochastische Modellierung unsicherer Größen. Hierfür kommen im Allgemeinen rekursive Bayes'sche Schätzverfahren, wie das Kalman-Filter [1] oder Partikel-Filtermethoden [2], zum Einsatz. Allerdings stützen sich diese Verfahren auf die Voraussetzung, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Fehlergrößen bekannt sind. Entsprechend muss erfüllt sein, dass das Verhalten der Fehlergrößen überhaupt einer Wahrschein-

lichkeitsverteilung folgt. Werden hier falsche Annahmen getroffen, sind inkonsistente Schätzergebnisse zu erwarten. Eine andere Art der Unsicherheitsbeschreibung ist die Verwendung von Mengen, durch welche Fehlereinflüsse abgeschätzt werden [4; 5]. Sie eignet sich daher für die Betrachtung amplitudenbegrenzter Fehler. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht in der Bestimmung sicherer Fehlergrenzen. Die Behandlung von Ausreißern gestaltet sich dadurch jedoch als schwierig. Ein rein stochastisches oder rein mengentheoretisches Schätzverfahren kann nur dann tatsächlich konsistente Schätzergebnisse gewährleisten, wenn auch ein rein stochastisches bzw. ein mengentheoretisches Unsicherheitsmodell verfügbar ist, jedoch gestaltet es sich in realen Anwendungsszenarien häufig als schwierig, sich auf genau eine Unsicherheitsbeschreibung zu beschränken.

In diesem Beitrag wird zunächst ein Schätzverfahren zur simultanen Berücksichtigung stochastischer und mengenbasierter Unsicherheiten vorgestellt. Ein solches Verfahren ermöglicht eine differenzierte, systematische Modellierung von Fehlereinflüssen. Das wesentliche Ziel dieses Beitrags ist es, die Vorteile und Anwendungsmöglichkeiten, die durch den Einsatz solcher Verfahren entstehen, zu beschreiben. Es werden Fälle aufgezeigt, in denen Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten besondere Vorteile bieten, wie bei der Abschätzung von Linearisierungsfehlern oder der Verarbeitung komplizierter Wahrscheinlichkeitsdichten.

Dieser Beitrag stellt eine überarbeitete Fassung des Tagungsbeitrags [3] dar.

2 Allgemeines Schätzverfahren

Methoden zur Überwachung und Vermessung räumlich verteilter dynamischer Phänomene – wie sie z. B. in [6] vorgestellt werden – nutzen physikalisches Hintergrundwissen über die räumliche und zeitliche Entwicklung, um einerseits das Phänomen auch an Nichtmesspunkten zu charakterisieren sowie andererseits den aktuellen Zustand zum nächsten Messzeitpunkt zu präzisieren. Prädierte Zustandsinformationen können dann mit Messungen fusioniert werden. Im Allgemeinen lässt sich die Zustandsentwicklung durch ein System partieller Differenzialgleichungen beschreiben. Dieses kann dann durch eine Orts- und Zeitdiskretisierung in ein generatives Systemmodell

$$\underline{\mathbf{x}}_{k+1} = \underline{\mathbf{a}}_k(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{w}}_k, \underline{\mathbf{d}}_k) \quad (1)$$

überführt werden, wobei vektorielle Größen unterstrichen sind und Zufallsgrößen durch Fettdruck gekennzeichnet werden. Die Funktion $\underline{\mathbf{a}}_k$ bildet den Zustand $\underline{\mathbf{x}}_k$ zum Zeitpunkt k auf den Folgezustand $\underline{\mathbf{x}}_{k+1}$ ab. Stochastische Unsicherheiten werden hierbei in der Zufallsgröße $\underline{\mathbf{w}}_k$ zusammengefasst, welche durch die Wahrscheinlichkeitsdichte f_k^w charakterisiert ist. Systematische Unsicherheiten werden durch den unbekannt, aber begrenzten Fehlerterm $\underline{\mathbf{d}}_k \in \mathcal{D}_k \subset \mathbb{R}^n$ in die Abbildung einbezogen, d. h. \mathcal{D}_k ist eine beschränkte Menge.

Der Vektor $\underline{\mathbf{u}}_k$ bezeichnet die konkrete Eingangs- bzw. Stellgröße. Entsprechend werden in dem Messmodell

$$\underline{\hat{\mathbf{y}}}_k = \underline{\mathbf{h}}_k(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{v}}_k, \underline{\mathbf{e}}_k) \quad (2)$$

jedes einzelnen Sensors stochastische Störeinflüsse durch $\underline{\mathbf{v}}_k$ und unbekannt, aber begrenzte Fehlergrößen durch $\underline{\mathbf{e}}_k \in \mathcal{E}_k \subset \mathbb{R}^n$ notiert. $\underline{\hat{\mathbf{y}}}_k$ ist dann der konkrete Messwert.

Stochastische und mengenbasierte Fehlerbeschreibungen sollen nun simultan in einem Verfahren zur Schätzung des Systemzustands $\underline{\mathbf{x}}_k$ berücksichtigt werden. Ein Verfahren, das zufällige Mengen zur kombinierten Behandlung beider Fehlerarten verwendet, ist das SSI-Filter (*Statistical and Set-theoretic Information Filter* [7]). Die Fusion zweier zufälliger Mengen entspricht bei diesem Verfahren der Berechnung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung über die möglichen Schnittmengen, d. h., durch die Schnittbildung werden nur solche Elemente berücksichtigt, welche mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in beiden zufälligen Mengen gleichzeitig enthalten sind [8]. Da in diesem Beitrag die mengenbasierten Größen $\underline{\mathbf{d}}_k \in \mathcal{D}_k$ und $\underline{\mathbf{e}}_k \in \mathcal{E}_k$ dazu verwendet werden, um Unwissen über Fehlereinflüsse darzustellen, kann hier nicht garantiert werden, dass das Fusionsergebnis im Schnitt der Fehlergrenzen liegt. Für diese Situation lässt sich mit Hilfe einer Verallgemeinerung klassischer Wahrscheinlichkeitstheorie das im folgenden Abschnitt beschriebene Verfahren entwickeln.

2.1 Zustandsschätzung mit Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten

Die Beziehung des aktuellen Zustands zum Folgezustand, gegeben durch das Systemmodell (1), lässt sich auch probabilistisch durch die Transitionsdichte

$$f_k^T(\underline{\mathbf{x}}_{k+1} | \underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{d}}_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\underline{\mathbf{x}}_{k+1} - \underline{\mathbf{a}}_k(\underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{w}}_k, \underline{\mathbf{d}}_k)) f_k^w(\underline{\mathbf{w}}_k) d\underline{\mathbf{w}}_k$$

beschreiben, wobei δ die n -dimensionale Dirac-Delta-Distribution bezeichnet. Aufgrund des unbekannt, aber begrenzten Parameters $\underline{\mathbf{d}}_k \in \mathcal{D}_k$ kann der Zustandsübergang nicht durch eine eindeutige Transitionsdichte charakterisiert werden. Vielmehr parametrisiert $\underline{\mathbf{d}}_k$ eine Menge

$$\mathcal{F}_k^T = \{f_k^T(\underline{\mathbf{x}}_{k+1} | \underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{d}}_k) \mid \underline{\mathbf{d}}_k \in \mathcal{D}_k\}$$

möglicher Transitionsdichten. Jedes Element dieser Menge kann offensichtlich die „richtige“ Transitionsdichte darstellen. Folglich wird das Chapman-Kolmogorow-Integral

$$f_{k+1}^P(\underline{\mathbf{x}}_{k+1}) = \int_{\mathbb{R}^n} f_k^T(\underline{\mathbf{x}}_{k+1} | \underline{\mathbf{x}}_k, \underline{\mathbf{u}}_k, \underline{\mathbf{d}}_k) f_k^c(\underline{\mathbf{x}}_k) d\underline{\mathbf{x}}_k$$

zur Berechnung der prädierten Wahrscheinlichkeitsdichte von $\underline{\mathbf{x}}_{k+1}$ für jedes Element in \mathcal{F}_k^T ausgewertet bzw., falls die geschätzte Dichte f_k^c ebenfalls nicht eindeutig,

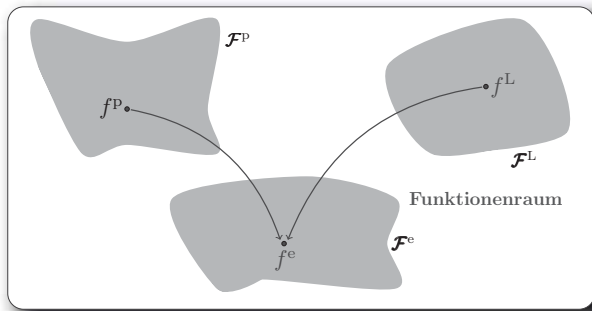


Bild 1 Elementweise Verarbeitung der Dichten.

sondern nur durch die Zugehörigkeit zu einer Menge \mathcal{F}_k^e charakterisiert ist, elementweise für jedes $f_k^e \in \mathcal{F}_k^e$ und $f_k^T \in \mathcal{F}_k^T$ berechnet. Dadurch ergibt sich eine Menge präzidierter Dichten \mathcal{F}_{k+1}^p für den Zustand \underline{x}_{k+1} .

Entsprechend führt die Bestimmung der Likelihood

$$f(\underline{y}_k | \underline{x}_k, \underline{e}_k) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\underline{y}_k - \underline{h}_k(\underline{x}_k, \underline{v}_k, \underline{e}_k)) f_k^v(\underline{v}_k) d\underline{v}_k,$$

die sich aus der Messgleichung (2) ergibt, aufgrund des unbekanntem, begrenzten Fehlers \underline{e}_k zu einer Menge

$$\mathcal{F}_k^L = \{f(\underline{y}_k | \cdot, \underline{e}_k) \mid \underline{e}_k \in \mathcal{E}_k\}$$

möglicher Likelihoods. Der Bayes'sche Filterschritt wird dann elementweise für die Menge \mathcal{F}_k^p präzidierter bzw. priorer Dichten und die Menge \mathcal{F}_k^L der Likelihoods durchgeführt und ergibt die Menge

$$\mathcal{F}_k^e = \left\{ f_k^e \mid f_k^e(\underline{x}_k) = \frac{f_k^p(\underline{x}_k) \cdot f_k^L(\underline{x}_k)}{\int_{\Omega} f_k^p(\underline{x}) \cdot f_k^L(\underline{x}) d\underline{x}} \right. \\ \left. \text{für alle } \underline{x}_k \in \Omega, f_k^L \in \mathcal{F}_k^L, f_k^p \in \mathcal{F}_k^p \right\}$$

geschätzter Wahrscheinlichkeitsdichten für den Zustand \underline{x}_k , wie in Bild 1 veranschaulicht.

Insgesamt beruht dieses Verfahren auf einem allgemeineren Verständnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Die Charakterisierung der stochastischen Größe \underline{x}_k wird nicht mehr als eindeutig angenommen, sondern durch eine Menge von Wahrscheinlichkeitsdichten beschrieben.

2.2 Konvexität und Intervallwahrscheinlichkeit

Eine konvexe, abgeschlossene Menge von Wahrscheinlichkeitsverteilungen bzw. -dichten, welche eine Zufallsgröße charakterisiert, heißt *Credal State* [9; 10]. In der Theorie der Intervallwahrscheinlichkeit [11] werden diese Mengen auch *Struktur* genannt. Die Funktionenmengen im vorigen Abschnitt sind zwar im Allgemeinen nicht konvex, sie beschreiben jedoch die gleichen Intervalle von Wahrscheinlichkeiten für jedes Ereignis wie ihr konvexer Abschluss. Das bedeutet, eine solche Menge \mathcal{F} von Wahrscheinlichkeitsdichten, auch *Vorstruktur* oder *erzeugende Menge* genannt, und ihr konvexer Abschluss

$\mathcal{C} = \text{clos}\{\text{conv}\{\mathcal{F}\}\}$ ergeben die gleiche Wahrscheinlichkeitsbewertung. In [12] wird gezeigt, dass es ausreicht, die erzeugenden Mengen im Prädiktions- und Filterschritt zu verarbeiten. Die gesuchte Intervallwahrscheinlichkeit erhält man dann aus dem konvexen Abschluss des Ergebnisses. Dieses Vorgehen ist vor allem dann von Vorteil, wenn sich die erzeugenden Mengen leichter darstellen und verarbeiten lassen als die zugehörigen Strukturen. Genauere Untersuchungen zu Schätzverfahren mit Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten und zur Konvexität sind in [12] dargelegt.

3 Kalman-Filter für ellipsoide Mengen

Ein weitbekanntes Bayes'sches Schätzverfahren ist das Kalman-Filter [1], welches lineare System- und Messmodelle betrachtet. Im Falle von Normalverteilungen kann die Zustandsschätzung dann eindeutig durch Erwartungswert $\hat{\underline{x}} \in \mathbb{R}^n$ und Kovarianzmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beschrieben werden. Um unbekannte, aber begrenzte Unsicherheiten einzubeziehen, wird das lineare Systemmodell

$$\underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_k + \mathbf{B}_k (\underline{u}_k + \underline{w}_k + \underline{d}_k)$$

um die Fehlergröße \underline{d}_k und das Messmodell

$$\underline{y}_k = \mathbf{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k + \underline{e}_k$$

um \underline{e}_k erweitert. Zusätzlich wird angenommen, dass die stochastischen Größen \underline{w}_k und \underline{v}_k unabhängig von den Fehlergrößen \underline{d}_k und \underline{e}_k sind. Folglich beeinflussen die mengenbasierten Fehler nur den Schätzwert, nicht aber die Berechnung der Kovarianzmatrix. Als eine besonders geeignete Darstellungsform dieser Fehlergrößen erweisen sich ellipsoide Mengen. Jede Größe kann dann durch eine Menge

$$\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}, \mathbf{X}) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\underline{x} - \hat{\underline{c}})^T \mathbf{X}^{-1} (\underline{x} - \hat{\underline{c}}) \leq 1\}$$

mit Mittelpunkt $\hat{\underline{c}}$ und nichtnegativ definiter Matrix \mathbf{X} repräsentiert werden, d. h. $\underline{d}_k \in \mathcal{E}(\underline{0}, \mathbf{U}_k)$ und $\underline{e}_k \in \mathcal{E}(\underline{0}, \mathbf{Y}_k)$. Ebenso wird der Zustand durch ein Ellipsoid $\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}, \mathbf{X}_k)$ beschrieben. Durch diese Mengendarstellung gestaltet es sich einfach, affine Transformationen

$$\mathbf{A}\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}, \mathbf{X}) + \underline{b} = \mathcal{E}(\mathbf{A}\hat{\underline{c}} + \underline{b}, \mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A}^T) \tag{3}$$

zu berechnen. Die Berechnung einer Minkowski-Summe, der elementweisen Addition zweier Ellipsoide, ergibt im Allgemeinen kein Ellipsoid mehr. Allerdings lässt sich durch

$$\mathcal{E}(\hat{\underline{c}}_1, \mathbf{X}_1) \oplus \mathcal{E}(\hat{\underline{c}}_2, \mathbf{X}_2) \subseteq \mathcal{E}(\hat{\underline{c}}_1 + \hat{\underline{c}}_2, \mathbf{X}(p))$$

mit

$$\mathbf{X}(p) = (1 + p^{-1})\mathbf{X}_1 + (1 + p)\mathbf{X}_2, \quad p > 0 \tag{4}$$

leicht eine äußere Approximation in Form eines Ellipsoids berechnen. Der Parameter p kann so bestimmt

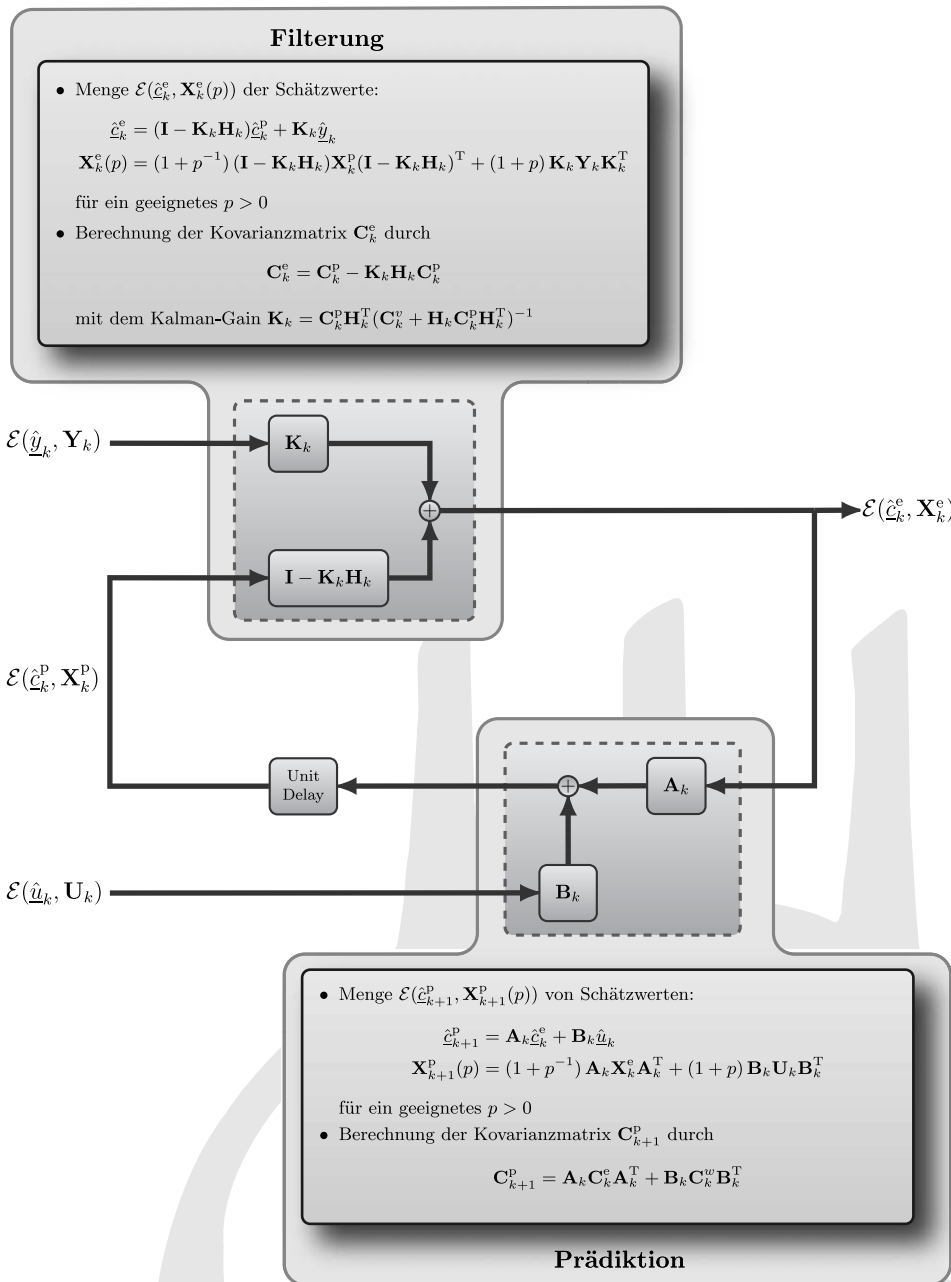


Bild 2 Schema des Kalman-Filters für ellipsoide Mengen von Erwartungswerten.

werden, dass das Volumen oder die Länge der Halbachsen der äußeren Approximation minimal ist [5]. Mittels der Gleichungen (3) und (4) lässt sich nun ein verallgemeinertes Kalman-Filter für ellipsoide Mengen herleiten. Die resultierenden Berechnungsschritte sind in Bild 2 zusammengefasst. Die genaue Herleitung des Verfahrens wird in [13] beschrieben. Offensichtlich lassen sich die Mittelpunkte $\underline{\hat{z}}_k^p$ und $\underline{\hat{z}}_k^e$ im Prädiktions- bzw. Filterschritt durch die bekannten Berechnungsvorschriften bestimmen. Der Unterschied dieses neuen Verfahrens zum Standard-Kalman-Filter besteht in der zusätzlichen Berechnung der Matrizen \mathbf{X}_k^p bzw. \mathbf{X}_k^e . Schließlich wird der unbekannte, aber amplitudenbegrenzte Fehlereinfluss

also durch \mathbf{X}_k^p bzw. \mathbf{X}_k^e und die stochastische Unsicherheit durch \mathbf{C}_k^p bzw. \mathbf{C}_k^e charakterisiert.

Die Menge von Erwartungswerten $\mathcal{E}(\underline{\hat{z}}_k^p, \mathbf{X}_k^p)$ bzw. $\mathcal{E}(\underline{\hat{z}}_k^e, \mathbf{X}_k^e)$ mit der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_k^p bzw. \mathbf{C}_k^e beschreibt eine Menge von verschobenen Gaußdichten. Es handelt sich also um ein Schätzverfahren mit Mengen von Dichten, wie in Abschnitt 2 dargelegt.

4 Systematische Beschreibung von Unsicherheiten

Mit Hilfe der vorgestellten Verallgemeinerung rein stochastischer Schätzverfahren ist es möglich, Störeinflüsse bei der Systemmodellierung differenzierter zu betrachten.

Unsicherheiten, deren Statistik unbekannt ist oder die sich gar nicht stochastisch charakterisieren lassen, können nun systematisch berücksichtigt werden. In diesem Abschnitt sei ein Überblick über Situationen gegeben, in denen sich eine Unterscheidung zwischen stochastischen und mengenbasierten Fehlern als sinnvoll erweist.

4.1 Berücksichtigung von systematischen Fehlern

Systematische Fehler beschreiben Störungen und Unsicherheiten, die nicht durch wiederholte Beobachtung im Mittel verschwinden. Beispiele für solche Fehler sind Fehler im Sensor, wie fehlerhafte Kalibrierung, Defekte, Fehler des Agenten, wie falsches Ablesen der Messinstrumente, Fehlinterpretation der Ergebnisse, unbekannte Störungen oder unvollständiges A-priori-Wissen. Diese Fehlereinflüsse lassen sich nicht durch mehrmaliges Messen eliminieren und bleiben somit als Abweichung im Schätzergebnis bestehen. Es handelt sich also um unbekannte, aber im Allgemeinen begrenzte Störeinflüsse, daher bieten sich Mengen zur Beschreibung dieser Fehler an.

Bei Verwendung rein stochastischer Modelle wird jedoch häufig versucht, einen solchen Fehler mitzuschätzen. Zum einen bedeutet dies, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den systematischen Fehler angenommen werden muss, und zum anderen führt dies oft zu einem erheblich höheren Rechenaufwand, da z. B. lineare Modelle nichtlinear werden können. Naheliegender ist es daher, im System- und Messmodell zwischen stochastischen und systematischen Fehlertermen zu unterscheiden. Mit den in den vorigen Abschnitten beschriebenen Schätzverfahren können beide Fehlerarten nun simultan behandelt werden.

4.2 Abschätzung von Linearisierungsfehlern

Bei nichtlinearen System- und Messabbildungen wird häufig das Erweiterte Kalman-Filter (EKF) eingesetzt. Hierbei werden das System- und Messmodell um den präzidierten bzw. geschätzten Zustand linearisiert. Das EKF verwendet eine Taylorreihen-Entwicklung

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{a}_k(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \\ &= \underline{a}_k(\hat{\underline{x}}_k^e) + \left. \frac{\partial \underline{a}_k}{\partial \underline{x}_k} \right|_{\underline{x}_k = \hat{\underline{x}}_k^e} (\underline{x}_k - \hat{\underline{x}}_k^e) + R(\underline{x}_k) + \underline{w}_k \end{aligned}$$

der Abbildungen, wobei das Restglied $R(\underline{x}_k)$, der grau markierte Bereich in Bild 3, vernachlässigt wird. Deshalb kann das EKF bei starken Nichtlinearitäten schlechte bzw. inkonsistente Ergebnisse liefern [14]. In der Regel führt dies zu einem Bias der Schätzungen, d. h. zu einem systematischen Fehler.

Um diesen Linearisierungsfehler zu berücksichtigen, kann eine systematische Abschätzung des Restgliedterms

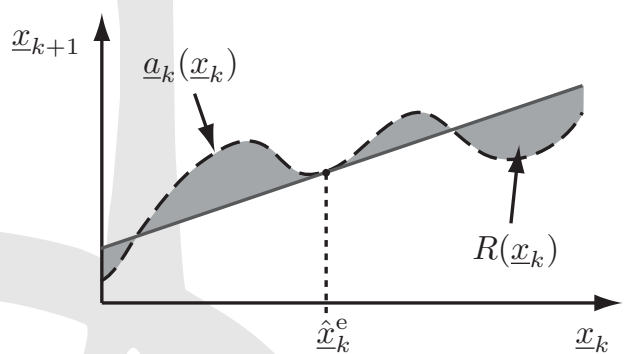


Bild 3 Taylorreihen-Approximation erster Ordnung am Schätzwert $\hat{\underline{x}}_k^e$.

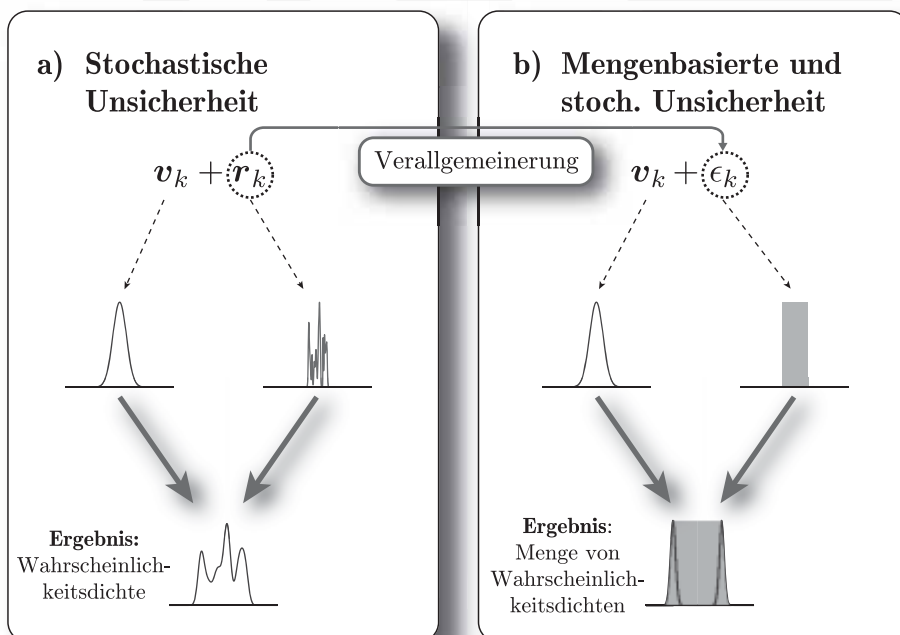


Bild 4 (a) Störung ist als Addition zweier Zufallsvariablen gegeben. (b) Störung ist durch eine Kombination einer Zufallsvariable und einer Menge gegeben.

article is protected by German copyright law. You may copy and distribute this article for your personal use only. Other use is only allowed with written permission by the copyright holder.

vorgenommen werden [15]. Betrachtet man einen Konfidenzbereich der Schätzung, z. B. die 3σ -Grenze, so lässt sich das Restglied über dieser Menge abschätzen. Dadurch lässt sich der Term $R(\underline{x}_k)$ als amplitudenbegrenzter Fehler auffassen und kann durch eine Menge beschrieben werden. Zur Zustandsschätzung kann nun das Kalman-Filter für ellipsoidale Mengen aus Abschnitt 3 verwendet werden.

4.3 Approximation komplizierter Wahrscheinlichkeitsdichten

Ein häufiges Problem beim Einsatz eines allgemeinen Bayes'schen Schätzers besteht in dem steigenden Aufwand für die Darstellung und Berechnung der Dichten. Dieser Aufwand kann durch verschiedene Approximationen, wie z. B. Linearisierung oder eine Reduktion der Anzahl der Komponenten von Gaußmischdichten, begrenzt werden.

Anstatt durch eine Approximation Fehler einzuführen, erlaubt die Verwendung von Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten eine konservative Abschätzung komplizierter Dichten. Unter der Annahme, dass sich die stochastische Unsicherheit additiv z. B. in einen normalverteilten Term \underline{v}_k und einen beliebig verteilten, aber amplitudenbegrenzten Störterm \underline{r}_k aufteilen lässt, kann \underline{r}_k durch eine mengenbasierte Unsicherheit $\epsilon_k \in \mathcal{E}$ verallgemeinert werden. Bild 4 verdeutlicht diese Vereinfachung. Die komplizierte Wahrscheinlichkeitsdichte in Teilabbildung (a) setzt sich aus einer normalverteilten und einer amplitudenbegrenzten Zufallsvariablen zusammen. In Teilabbildung (b) wird der amplitudenbegrenzte Anteil durch eine Menge verallgemeinert, sodass sich schließlich eine Menge von verschobenen einfachen Gaußdichten ergibt. Durch diese Vorgehensweise werden Approximationsfehler vermieden. Der einzige Informationsverlust besteht in der Verteilung des Fehlers \underline{r}_k innerhalb der Amplitudengrenzen.

5 Schlussfolgerung

In diesem Beitrag wurde ein Schätzverfahren für Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten vorgestellt. Neben der allgemeinen Verarbeitung von Mengen von Dichten wurde ein Filter beschrieben, welches effizient ellipsoide Mengen von Schätzwerten verarbeitet. Da die Formeln hierfür sehr einfach sind, ist die Verwendung dieses Schätzers direkt möglich.

Die Verarbeitung von Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten ermöglicht nun verschiedene Ansätze, die mit rein stochastischen Schätzern nur mit großem Aufwand möglich sind. Mengen von Dichten erlauben die Beschreibung sowie die Unterscheidung von stochastischer und systematischer Unsicherheit durch die Kombination von Wahrscheinlichkeitsdichten und Mengen zu Mengen von Dichten. Komplizierte Dichten lassen sich mit dem vorgestellten Ansatz durch Mengen „einfacher“ Dichten darstellen und verarbeiten. Der Verarbeitungsaufwand kann hierbei durch entsprechende

Abschätzungen des systematischen Fehlers wesentlich geringer sein. Weiterhin ermöglichen Mengen von Dichten eine einfache Berücksichtigung von Linearisierungsfehlern, wie sie in manchen stochastischen Schätzern, wie dem EKF, auftreten. Dadurch lässt sich die entstandene Modellabweichung durch eine Menge abschätzen und man erhält eine Menge von Normalverteilungen, welche den Linearisierungsfehler berücksichtigt und die exakte Schätzung beinhaltet. Insgesamt erlaubt dieses Verfahren eine systematische Behandlung stochastischer und mengenbasierter Unsicherheiten, kann so den stochastischen Teil der Zustandsschätzung wesentlich vereinfachen und die Robustheit des Schätzers erhöhen.

Literatur

- [1] R. E. Kalman, „A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems“, *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, S. 35–45, 1960.
- [2] A. Doucet, Ed., *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, ser. Statistics for Engineering and Information Science, New York: Springer, 2001.
- [3] B. Noack, V. Klumpp, D. Lyons und U. D. Hanebeck, „Systematische Beschreibung von Unsicherheiten in der Informationsfusion mit Mengen von Wahrscheinlichkeitsdichten“, in *Verteilte Messsysteme*, KIT Scientific Publishing, S. 167–178, Feb. 2010.
- [4] F. C. Schweppe, *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice-Hall, 1973.
- [5] A. Kurzhanski und I. Vályi, *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*, Birkhäuser, 1997.
- [6] D. Brunn, F. Sawo und U. D. Hanebeck, „Modellbasierte Vermessung verteilter Phänomene und Generierung optimaler Messsequenzen“, *tm – Technisches Messen*, Oldenbourg Verlag, Vol. 73, Mär. 2007.
- [7] U. D. Hanebeck, J. Horn und G. Schmidt, „On Combining Statistical and Set Theoretic Estimation“, *Automatica*, Vol. 35, S. 1101–1109, Jun. 1999.
- [8] A. Bernardini und F. Tonon, *Bounding Uncertainty in Civil Engineering*, Berlin: Springer, 2010.
- [9] I. Levi, *The Enterprise of Knowledge*, MIT Press, 1983.
- [10] D. R. Morrell und W. C. Stirling, „Set-Valued Filtering and Smoothing“, *IEEE Transactions on systems, man and cybernetics*, Vol. 21, S. 184–193, Jan. 1991.
- [11] K. Wechselberger, *Elementare Grundbegriffe einer allgemeineren Wahrscheinlichkeitsrechnung I*, Heidelberg: Physica-Verlag, 2001.
- [12] B. Noack, V. Klumpp, D. Brunn und U. D. Hanebeck, „Nonlinear Bayesian Estimation with Convex Sets of Probability Densities“, in *Proceedings of the 11th International Conference on Information Fusion (Fusion 2008)*, Cologne, Germany, Jul. 2008.
- [13] B. Noack, V. Klumpp und U. D. Hanebeck, „State Estimation with Sets of Densities considering Stochastic and Systematic Errors“, in *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion (Fusion 2009)*, Seattle, Washington, Jul. 2009.
- [14] D. F. Bizup und D. E. Brown, „The Over-Extended Kalman Filter – don't use it!“ in *Proceedings of the Sixth International Conference of Information Fusion.*, Vol. 1, S. 40–46, 2003.
- [15] B. Noack, V. Klumpp, N. Petkov und U. D. Hanebeck, „Bounding Linearization Errors with Sets of Densities in Approximate Kalman Filtering“, in *Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion (Fusion 2010)*, Edinburgh, United Kingdom, Jul. 2010.

Manuskripteingang: 8. Juni 2010, zur Veröffentlichung angenommen: 31. August 2010

Dipl.-Inform. Benjamin Noack ist seit März 2009 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Anthropomatik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Hauptarbeitsgebiete: Nichtlineare System- und Schätztheorie, Intervallwahrscheinlichkeit, Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen, dezentrale Informationsverarbeitung.

Adresse: Lehrstuhl für intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS), Institut für Anthropomatik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Adenauerring 2, D-76131 Karlsruhe, Germany, Tel.: +49-721-608-4024, E-Mail: noack@kit.edu

Dipl.-Inform. Vesa Klumpp ist seit Juli 2006 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Anthropomatik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Hauptarbeitsgebiete: Nichtlineare System- und Schätztheorie, Intervallwahrscheinlichkeit, Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Adresse: Lehrstuhl für intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS), Institut für Anthropomatik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Adenauerring 2, D-76131 Karlsruhe, Germany, Tel.: +49-721-608-5469, E-Mail: klumpp@kit.edu

Dipl.-Math. Daniel Lyons ist seit April 2009 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Anthropomatik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Hauptarbeitsgebiete: Nichtlineare System- und Schätztheorie, nichtlineare modell-prädiktive Regelung, Sensoreinsatzplanung.

Adresse: Lehrstuhl für intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS), Institut für Anthropomatik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Adenauerring 2, D-76131 Karlsruhe, Germany, Tel.: +49-721-608-6988, E-Mail: lyons@kit.edu

Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck ist Leiter des Lehrstuhls für „Intelligente Sensor-Aktor-Systeme“ (ISAS) am Institut für Anthropomatik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Hauptarbeitsgebiete: Nichtlineare System- und Schätztheorie, Methoden für Sensor-Aktor-Netzwerke, Telepräsenzsysteme, Robotik, Medizintechnik, persönliche assistive Systeme.

Adresse: Lehrstuhl für intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS), Institut für Anthropomatik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Adenauerring 2, D-76131 Karlsruhe, Germany, Tel.: +49-721-608-3909, E-Mail: uwe.hanebeck@ieee.org



Das Standardwerk für jeden Informatiker



Thomas H. Cormen u. a.
Algorithmen - Eine Einführung
 3., verbesserte Auflage August 2010 | 1335 S. | gebunden |
 € 69,80
 ISBN 978-3-486-59002-9

Dieses Buch bietet eine umfassende Einführung in das moderne Studium von Computeralgorithmen. Es stellt viele Algorithmen vor, behandelt sie mit beachtlicher Tiefe und macht zudem deren Entwurf und deren Analyse allen Leserschichten zugänglich. Jedes Kapitel stellt einen Algorithmus, eine Entwurfstechnik und ein Anwendungsgebiet oder ein verwandtes Thema vor. Algorithmen bekommen eine markante, in der Regel englische Bezeichnung zugeordnet und werden in Pseudocode beschrieben. Am Ende jedes Abschnitts und Kapitels finden sich Übungen und Problemstellungen, die helfen, den eigenen Lernfortschritt zu überprüfen. Durch die klare Struktur und die verständlichen Erklärungen ist der Cormen ein Standardwerk für jeden Informatiker.

Übersetzt wurde die Neuauflage von Prof. Dr. Paul Molitor, Professor für Technische Informatik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Er gewährleistet auch für die deutsche Ausgabe die wissenschaftliche Qualität des Originals.

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:
 Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333, verkauf@oldenbourg.de
www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de

Oldenbourg

article is protected by German copyright law. You may copy and distribute this article for your personal use only. Other use is only allowed with written permission by the copyright holder.