

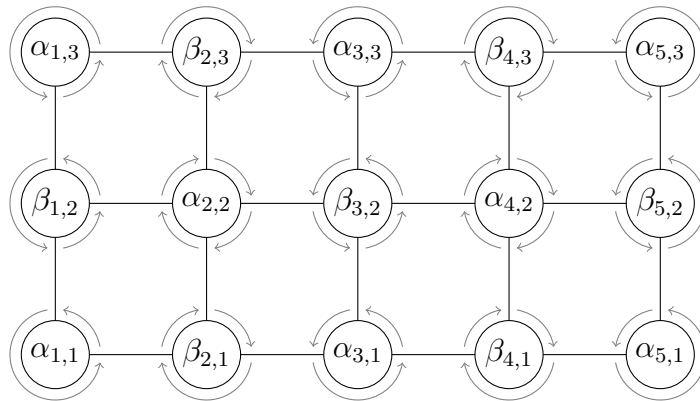
Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Mathematik
Institut für Algebra und Geometrie

Diplomarbeit

Dreiecksgruppen, die als Veechgruppen auftreten

Anja Randecker

8. April 2011 (Stand: 4. Juni 2013)



Betreuer:

JProf. Dr. Gabriela Weitze-Schmithüsen

Prof. Dr. Frank Herrlich

Vorwort

Veechgruppen wurden erstmals 1989 von Veech in [Vee] im Zusammenhang mit Billards und Teichmüllerkreisscheiben beschrieben. Das Interessante an Veechgruppen ist, dass sie schon ausreichen, um zu bestimmen, ob die Projektion einer Teichmüllerkreisscheibe in den Modulraum eine algebraische Kurve ist. Ist das der Fall, liefert die Veechgruppe sogar noch mehr Informationen über diese sogenannte Teichmüllerkurve.

Es lag für Veech dann nahe, zu fragen, welche Untergruppen von $SL(2, \mathbb{R})$ überhaupt als Veechgruppen auftreten können, und es stellte sich heraus, dass diese Frage nicht einfach zu beantworten ist. Einige häufig auf diese Eigenschaft untersuchten Untergruppen von $S^*L(2, \mathbb{R})$ sind solche, deren Projektionen in $PS^*L(2, \mathbb{R})$ Dreiecksgruppen sind. Eine Dreiecksgruppe $\Delta(l, m, n)$ lässt sich realisieren als die Gruppe, die von Spiegelungen an den Seiten eines hyperbolischen Dreiecks mit den Innenwinkeln $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ und $\frac{\pi}{n}$ erzeugt wird. Eine Präsentation einer solchen Dreiecksgruppe ist

$$\Delta(l, m, n) = \langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^l = (ac)^m = (bc)^n = e \rangle.$$

Für $l = m = \infty$ hat schon Veech gezeigt, dass es Veechgruppen gibt, deren Projektionen die orientierungserhaltenden Teile von Dreiecksgruppen $\Delta(n, \infty, \infty)$ sind. Ob es aber für jede Dreiecksgruppe eine solche Veechgruppe gibt, ist bisher noch nicht abschließend geklärt. Wir wollen in der vorliegenden Arbeit für einige spezielle Dreiecksgruppen zeigen, dass sie als projektive erweiterte Veechgruppen realisiert werden können.

Das besprochene Resultat wurde zuerst von Bouw und Möller in [BM] bewiesen, wir werden uns jedoch beim Beweis am Artikel „Grid graphs and lattice surfaces“ von W. Patrick Hooper (siehe [Hoo]) orientieren. Hooper arbeitet anschaulich mit der Konstruktion der Flächen durch Gittergraphen und erhält die Translationsflächen als Verklebung von endlich vielen Polygonen. Als Spezialfall umfassen diese auch die viel untersuchten Doppel- n -Ecke, die schon Veech betrachtet hat, um das erwähnte Ergebnis zu Dreiecksgruppen zu erhalten.

Die vorliegende Arbeit ist in folgende sieben Kapitel gegliedert:

Zuerst werden wir in Kapitel 1 einige Grundlagen zu Translationsflächen und Veechgruppen wiederholen. Da wir später mit projektiven Veechgruppen und ihren Fundamentalbereichen arbeiten werden, gibt es auch einige Fakten zu elliptischen und parabolischen Elementen in $PSL(2, \mathbb{R})$ und dem Zusammenhang zu den Ecken eines Fundamentalbereichs.

In Kapitel 2 werden Orbifaltigkeiten eingeführt und einige allgemeine Ergebnisse dazu vorgestellt. Damit werden wir eine Methode erarbeiten, mit der man in günstigen Fällen überprüfen kann, ob eine Untergruppe einer Veechgruppe schon die ganze Veechgruppe ist. Explizit werden wir dieses Ergebnis in Satz 1 formulieren. Als wichtiges

Hilfsmittel stellt sich dabei eine Version des Satzes von Riemann-Hurwitz heraus, in der der Zusammenhang der Eulerzahlen von überlagernden Orbifaltigkeiten unabhängig von Verzweigung linear ist.

Die Translationsfläche, deren Veechgruppe wir mit dieser Methode erhalten wollen, wird in Kapitel 3 eingeführt. Dazu werden wir zuerst Thurstons Konstruktion erläutern, mit der man aus einem Bändergraphen eine Translationsfläche erhält. Wir werden auch feststellen, dass einige Eigenschaften der Fläche schon durch den Graphen festgelegt sind. In Kapitel 4 wird zusätzlich eine andere Translationsfläche betrachtet, die wir durch Scherung der Fläche aus Kapitel 3 erhalten. Diese hat eine sehr schöne Darstellung als Verklebung von halbregelmäßigen $2n$ -Ecken und umfasst als Spezialfall die Doppel- n -Ecke. Durch diese Beschreibung finden wir dann über Symmetriebetrachtungen einige Elemente der Veechgruppe.

Das eigentliche Resultat werden wir in Kapitel 5 erarbeiten. Dazu werden wir Satz 1 aus Kapitel 2 nutzen, um zu zeigen, dass die von uns gefundenen Elemente der Translationsflächen aus Kapitel 3 bzw. Kapitel 4 schon die ganze Veechgruppe erzeugen. Es wird weiter erläutert, dass deren Projektionen in den meisten Fällen Dreiecksgruppen sind. Das Ergebnis ist dann in Satz 2 festgehalten.

In Kapitel 6 werden Grundlagen zur Teichmüllertheorie erklärt, insbesondere die schon angesprochenen Zusammenhänge zwischen Veechgruppen, Teichmüllerkreisscheiben und Teichmüllerkurven.

Diese Theorie werden wir dann nutzen, um in Kapitel 7 mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 5 für einige der Translationsflächen aus Kapitel 3 bzw. Kapitel 4 die Stabilisatoren der zugehörigen Teichmüllerkreisscheiben berechnen. Das Ergebnis findet sich in Satz 3.

Damit man beim Nachvollziehen oder Nachrechnen nicht immer nach der Definition der häufig vorkommenden Matrizen suchen muss, ist eine Liste mit diesen Matrizen im Anhang aufgeführt. Außerdem sind im Anhang die wichtigsten Definitionen im Definitionsverzeichnis aufgeführt.

An dieser Stelle möchte ich ganz herzlich Gabi Weitze-Schmithüsen für die tolle und intensive Betreuung danken. Sie hat sich immer sehr viel Zeit für mich genommen und an meiner Arbeit echtes Interesse gezeigt. In unseren vielen Gesprächen hat sie nicht nur gleichermaßen große und kleine Fragen meinerseits beantwortet, sondern mir auch viele Gebiete erst nahe gebracht, die es lohnen, noch viele weitere Fragen zu stellen.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	6
1.1 Translationsflächen	6
1.2 Elliptische und parabolische Elemente einer Veechgruppe	11
2 Orbifaltigkeiten und Veechgruppen	17
2.1 Orbifaltigkeiten	17
2.2 Anwendung auf Veechgruppen	26
3 Die Translationsfläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$	30
3.1 Bipartite Bändergraphen	30
3.2 Der Gittergraph $\mathcal{G}_{m,n}$	32
4 Die Translationsfläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$	36
4.1 Eine neue Zerlegung von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$	36
4.2 Eigenschaften der Fläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$	38
4.3 Das Geschlecht von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$	43
4.4 Die orthogonale Gruppe von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$	45
5 Die Veechgruppe $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$	47
5.1 Ein Vorschlag für die Veechgruppe $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$	47
5.2 Der Fundamentalbereich von $\Gamma_{m,n}$	51
5.3 $\Gamma_{m,n}$ ist die Veechgruppe	57
6 Ein wenig Teichmüllertheorie	61
6.1 Modulräume und Teichmüllerräume	61
6.2 Teichmüllerkreisscheiben und Teichmüllerkurven	63
7 Beispiele für Stabilisatoren von Teichmüllerkreisscheiben	65
7.1 Erzeuger von $\pi_1(Y_{m,n}^*)$ für n ungerade	65
7.2 Der Fall n ungerade und $m \neq n$	66
7.3 Der Fall m ungerade und $m \neq n$	69
7.4 Die restlichen Fälle	71
7.5 Zusammenfassung der Beispiele	72
Übersicht über die verwendeten Matrizen	75
Definitionenverzeichnis	77

Abbildungsverzeichnis

1	L-Origami $P(2, 2)$	8
2	Orbifaltigkeit mit einementigem singulären Ort (Tropfen)	19
3	Zellzerlegung des Tropfens	21
4	Abbildung zwischen zwei Orbifaltigkeiten, die keine Überlagerung ist	22
5	Beispiel für einen bipartiten Graphen	30
6	Beispiel für einen Bändergraphen mit Kennzeichnung von \mathbf{e} und \mathbf{n}	31
7	Beispiel für eine durch einen Bändergraphen festgelegte Translationsfläche	31
8	Gittergraph $\mathcal{G}_{6,4}$	33
9	Gittergraph $\mathcal{G}_{4,3}$ und Translationsfläche $(X_{4,3}, \omega_{4,3})$	34
10	$Q(2)$ für die Fläche $(X_{5,4}, \omega_{5,4})$	37
11	Zerlegung in $2n$ -Ecke für die Flächen $(Y_{4,5}, \eta_{4,5})$ und $(Y_{6,4}, \eta_{6,4})$	42
12	Zylinderzerlegung der Fläche $(Y_{4,5}, \eta_{4,5})$	43
13	Fundamentalebereich von $\langle AB, BC \rangle$	53
14	Fundamentalebereich von $\langle AB, BCAC, CABC \rangle$	54
15	Fundamentalebereich von $\langle AE, CE \rangle$	55
16	Fundamentalebereich von $\langle AE, ECAC \rangle$	56
17	Verklebtes Polygon für $(Y_{4,5}^*, \eta_{4,5})$	65

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Translationsflächen

Die Objekte, mit denen wir uns in dieser Arbeit beschäftigen werden, sind Translationsflächen und ihre Veechgruppen. Translationsflächen sind spezielle Riemannsche Flächen, bei denen die Kartenwechselabbildungen lokal Translationen sein sollen. Zunächst gilt es also, diese Begriffe zu klären.

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit)

Eine (*n*-dimensionale) *Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorffraum M , der eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und in dem jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.

Definition 1.2 (Riemannsche Fläche)

Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

- (i) Ein *komplexer Atlas* ist ein System von Homöomorphismen (komplexe Karten) $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i, i \in I$, wobei die U_i offene Teilmengen von M und V_i offene Teilmengen von \mathbb{C} sind. Dabei soll $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ gelten und für je zwei komplexe Karten $\varphi_i, i = 1, 2$, soll die Kartenwechselabbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ biholomorph sein.
- (ii) Eine *komplexe Struktur* auf M ist die Äquivalenzklasse eines komplexen Atlases, wobei zwei Atlanten äquivalent sein sollen, wenn es auch zwischen den Karten der beiden Atlanten biholomorphe Kartenwechselabbildungen gibt.
- (iii) Eine *Riemannsche Fläche* ist eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einer komplexen Struktur.

Riemannsche Flächen sind ein recht allgemeines Konzept, das aber spezialisiert werden kann, indem für die Kartenwechselabbildungen nicht nur gefordert wird, dass sie biholomorph sind, sondern dass sie zum Beispiel zusätzlich auch linear oder wie hier Translationen sind.

Definition 1.3 (Translationsfläche)

Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

- (i) Ein *Translationsatlas* ist ein System von Homöomorphismen (Translationskarten) $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i, i \in I$, wobei die U_i offene Teilmengen von M und V_i offene Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind. Dabei soll $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ gelten und für je zwei Translationskarten $\varphi_i, i = 1, 2$, soll die Kartenwechselabbildung $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ lokal eine Translation auf \mathbb{R}^2 sein.
- (ii) Eine *Translationsstruktur* auf M ist die Äquivalenzklasse eines Translationsatlases, wobei zwei Atlanten äquivalent sein sollen, wenn es auch zwischen den Karten der beiden Atlanten Kartenwechselabbildungen gibt, die lokal Translationen sind.
- (iii) Eine *Translationsfläche* ist eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Translationsstruktur.

Stellvertretend für eine Translationsstruktur kann der zugehörige maximale Translationsatlas ν auf M betrachtet werden. Die Translationsfläche wird dann mit (M, ν) bezeichnet.

Da Translationen insbesondere biholomorph sind, kann eine Translationsfläche via der Identifizierung $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, (x, y)^\top \mapsto x + iy$ als Riemannsche Fläche aufgefasst werden.

Wir erhalten Translationsflächen beispielsweise dadurch, dass wir endlich viele Polygone in der Ebene an ihren Seiten miteinander verkleben. Eine Verklebung zweier Seiten ist dabei eine Translation, die diese Seiten miteinander identifiziert. Die beiden Seiten müssen dazu die gleiche Länge haben und in der Ebene parallel sein.

Durch diese Konstruktion erhalten wir eine große Klasse von Translationsflächen. Insbesondere können wir alle Translationsflächen, die wir in dieser Arbeit betrachten, als Verklebung von Polygonen darstellen. Für unsere Zwecke genügt es also, wenn wir manche Konzepte nur mit Hilfe der Polygone beschreiben.

Bei der Verklebung solcher Polygone kann es passieren, dass es für eine Ecke e keine Translationskarte (U, φ) mit $e \in U$ gibt, so dass die Kartenwechselabbildungen Translationen sind. Das ist genau dann der Fall, wenn der Winkel um die Ecke e in der Translationsfläche ein echtes Vielfaches von 2π ist. Solche Ecken e werden wir als Punkte der Translationsfläche *Singularitäten* nennen. Ist $2\pi m$ dabei der Winkel um die Singularität, so heißt m die *Vielfachheit* dieser Singularität.

Das kann aber nur endlich oft vorkommen, da wir nur endlich viele Polygone verkleben. Die Menge der Singularitäten ist also endlich.

Beispiel 1.4 (Das L-Origami $P(2,2)$). Wir betrachten drei Quadrate, die wir zu einer Translationsfläche machen, indem wir die in Abbildung 1 mit gleichen Buchstaben bezeichneten Kanten verkleben. Durch die Verklebung werden alle Ecken der drei Quadrate identifiziert, so dass wir hier genau eine Singularität mit Vielfachheit 3 haben.

Diese Translationsfläche wird auch als L-Origami mit den Seitenlängen 2 und 2 bezeichnet. *Origamis* sind spezielle Translationsflächen, bei denen ausschließlich Einheitsquadrate verklebt werden dürfen.

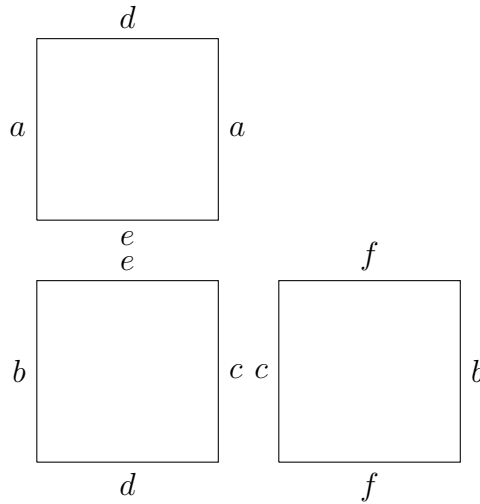


Abbildung 1: L-Origami $P(2, 2)$

Genau genommen besteht eine Translationsfläche dann aus den verklebten Polygonen ohne die Singularitäten. Wir werden jedoch im Folgenden die Singularitäten als Teil der Fläche ansehen, wobei der Translationsatlas nur außerhalb der Singularitäten definiert ist.

Bemerkung 1.5. Durch die Darstellung einer Translationsfläche (X, ν) als Verklebung von Polygonen bekommen wir eine Metrik auf (X, ν) , die von der euklidischen Metrik der Ebene induziert wird. Insbesondere kann diese Metrik in die Singularitäten fortgesetzt werden.

Die Polygone, die durch Verklebung eine Translationsfläche definieren, können durch Elemente von $GL(2, \mathbb{R})$ so transformiert werden, dass die Verklebungen erhalten bleiben. Hat die entsprechende Matrix die Determinante ± 1 , so ist die Transformation volumenerhaltend, das heißt, die topologische Fläche, die durch das Verkleben der transformierten Polygone entsteht, hat den selben Flächeninhalt. Die Translationsstruktur dagegen wird verändert.

Die Menge der Matrizen in $GL(2, \mathbb{R})$ mit Determinante ± 1 nennen wir dabei $S^*L(2, \mathbb{R})$. Allgemeiner gilt die folgende Bemerkung:

Bemerkung 1.6. Ist (X, ν) eine Translationsfläche, so kann die Translationsstruktur ν durch eine Matrix $B \in S^*L(2, \mathbb{R})$ wie folgt transformiert werden: Ist $\varphi: U \rightarrow V$ eine Translationskarte in ν , so sei $B \cdot \varphi: U \rightarrow B \cdot V, z \mapsto B \cdot \varphi(z)$ die entsprechende Translationskarte in $B \cdot \nu$. Dann ist $(X, B \cdot \nu)$ ebenfalls eine Translationsfläche.

Um nun verschiedene Translationsflächen oder auch eine Fläche mit verschiedenen Translationsstrukturen in Zusammenhang bringen zu können, wollen wir als nächstes Abbildungen zwischen Translationsflächen betrachten. Interessant sind natürlich besonders solche Abbildungen, die die Translationsstrukturen erhalten.

Definition 1.7 (Translationsgruppe und affine Gruppe)

Sei $f: (X, \nu) \rightarrow (Y, \omega)$ eine stetige Abbildung zwischen zwei Translationsflächen.

- (i) f heißt *Translation*, wenn es für je zwei Karten $(U, \varphi) \in \nu$, $(V, \psi) \in \omega$ mit $f(U) \subseteq V$ und jeden Punkt $P \in U$ eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von P gibt, so dass für jedes $z \in \varphi(W) \subseteq \mathbb{C}$ gilt: $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z + t$ für ein $t \in \mathbb{C}$.
- (ii) Die bijektiven Translationen einer Translationsfläche (X, ν) bilden die *Translationsgruppe* $\text{Trans}(X, \nu)$ von (X, ν) .
- (iii) f heißt *affin*, wenn es für je zwei Karten $(U, \varphi) \in \nu$, $(V, \psi) \in \omega$ mit $f(U) \subseteq V$ und einen Punkt $P \in \varphi(U)$ eine offene Umgebung $W \subseteq \varphi(U)$ von P gibt, so dass für jedes $z \in W \subseteq \mathbb{C}$ gilt: $(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = A \cdot z + t$ für ein $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und ein $t \in \mathbb{C}$, wobei wie oben \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifiziert wird.
- (iv) Die *affine Gruppe* $\text{Aff}^+(X, \nu)$ einer Translationsfläche (X, ν) ist definiert durch $\text{Aff}^+(X, \nu) := \{f: X \rightarrow X : f \text{ ist orientierungserhaltender Homöomorphismus und affin bezüglich } \nu\}$.

Definition 1.8 (Ableitung)

- (i) Ist $f: (X, \nu) \rightarrow (Y, \omega)$ eine affine Abbildung, so ist die Matrix A für alle Karten gleich, da die Kartenwechselabbildungen lokal Translationen sind. Die Matrix A wird dann *Ableitung* (engl. derivation) von f genannt.
- (ii) Der Gruppenhomomorphismus $\text{der}: \text{Aff}^+(X, \nu) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, der jedem affinen orientierungserhaltenden Homöomorphismus seine Ableitung zuordnet, heißt *Ableitungsabbildung*.

Bemerkung 1.9. Eine stetige Abbildung ist genau dann eine Translation, wenn sie affin ist und ihre Ableitung die Identität ist. Insbesondere ist also $\text{Trans}(X, \nu) \subseteq \text{Aff}^+(X, \nu)$.

Beispiel 1.10 (Ableitung der Identität). Sei (X, ν) eine Translationsfläche, $B \in S^*L(2, \mathbb{R})$ und $(X, B \cdot \nu)$ wie in Bemerkung 1.6. Wir wollen nun überprüfen, ob die Abbildung $\text{id}: (X, \nu) \rightarrow (X, B \cdot \nu)$ affin ist.

Seien $(U, \varphi) \in \mu$, $(V, B \cdot \psi) \in B \cdot \nu$ zwei Karten mit $U \subseteq V$. Nach Definition gibt es ein $t \in \mathbb{R}^2$ mit $(\psi \circ \varphi^{-1})(z) = z + t$ für alle $z \in \varphi(U)$. Es gilt also

$$(B \cdot \psi \circ \varphi^{-1})(z) = B \cdot (z + t) = B \cdot z + B \cdot t \quad \text{für jedes } z \in \varphi(U).$$

Damit ist die Abbildung $\text{id}: (X, \nu) \rightarrow (X, B \cdot \nu)$ affin mit Ableitung B .

Definition 1.11 (Veechgruppe)

Das Bild der Ableitungsabbildung in $SL(2, \mathbb{R})$ heißt *Veech-Gruppe* von (X, ν) und wird mit $SL(X, \nu)$ oder $\Gamma(X, \nu)$ bezeichnet.

Wir werden manchmal auch eine Erweiterung der Veechgruppe betrachten. Dabei wird der Gruppenhomomorphismus $\text{der}: \text{Aff}^+(X, \nu) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ auf die Gruppe aller affinen Homöomorphismen $\text{Aff}(X, \nu)$ fortgesetzt. Solche affinen Homöomorphismen, die die Orientierung umkehren, haben eine Ableitung mit Determinante -1 . Das Bild dieser neuen Abbildung $\text{der}^\pm: \text{Aff}(X, \nu) \rightarrow S^*L(2, \mathbb{R})$ heißt *erweiterte Veechgruppe* von (X, ν) und wird mit $GL(X, \nu)$ oder $\Gamma^\pm(X, \nu)$ bezeichnet.

Eine andere Verallgemeinerung der Veechgruppe erhalten wir durch die Markierung von Punkten, die von den affinen Homöomorphismen festgehalten werden sollen. Diese zusätzliche Forderung wird dadurch motiviert, dass ein affiner Homöomorphismus Singularitäten wieder auf Singularitäten abbildet. Können wir also die Translationsfläche durch verklebte Polygone darstellen, so werden in den meisten Fällen die Ecken der Polygone wieder auf Ecken abgebildet.

Ist eine Ecke eines Polygons aber keine Singularität, so muss sie nicht zwangsläufig wieder auf eine Ecke abgebildet werden. Wenn das jedoch für die Betrachtung hilfreich wäre, so können wir alle Ecken, die keine Singularitäten sind, markieren und nur affine Homöomorphismen zulassen, die Markierungen erhalten. Daraus erhalten wir die *markierte Veechgruppe*. Um den Unterschied zu verdeutlichen, wollen wir im nächsten Beispiel die Veechgruppe eines Torus, eines markierten Torus und eines doppelt markierten Torus betrachten.

Beispiel 1.12 (Veechgruppen von Tori). Zu jedem Torus T gibt es bekanntermaßen ein Element $B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ und ein zugehöriges Gitter $\Lambda_B := (a + ic)\mathbb{Z} + (b + id)\mathbb{Z}$, so dass T zu \mathbb{C}/Λ_B biholomorph äquivalent ist.

Eine Translationsstruktur ν auf T können wir dann entweder von \mathbb{C} erben oder wir stellen uns T vor als ein Parallelogramm, das durch die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ aufgespannt wird und bei dem jeweils gegenüberliegende Seiten verklebt werden.

Jedes Element der affinen Gruppe von (T, ν) kommt von einem affinen Homöomorphismus von \mathbb{C} her, so dass wir nur untersuchen müssen, welche davon auch schon in $\text{Aff}^+(T, \nu)$ sind. Dazu muss ein solches Element das Gitter Λ_B erhalten. Für einen affinen Homöomorphismus von \mathbb{C} mit Ableitung A muss es also für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ auch $n', m' \in \mathbb{Z}$ geben mit

$$A \cdot \left(n \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) = n' \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + m' \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

damit der affine Homöomorphismus in $\text{Aff}^+(T, \nu)$ ist. Das ist äquivalent zu

$$AB \cdot \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} n' \\ m' \end{pmatrix}$$

und damit zu $B^{-1}AB \in SL(2, \mathbb{Z})$. Daraus wiederum folgt

$$SL(T, \nu) = B \cdot SL(2, \mathbb{Z}) \cdot B^{-1}.$$

Jedes Element in $SL(T, \nu)$ hält einen Punkt (beispielsweise den Eckpunkt des Parallelogramms) fest, so dass die markierte Veechgruppe eines (einfach) markierten Torus ebenfalls $B \cdot SL(2, \mathbb{Z}) \cdot B$ ist.

Markieren wir aber zum Beispiel die beiden Punkte $(0, 0)^\top$ und $(\frac{b}{2}, \frac{d}{2})^\top$, so ist die markierte Veechgruppe eine echte Untergruppe der Veechgruppe: Mit der Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}$$

ist die markierte Veechgruppe $B \cdot \Gamma \cdot B^{-1}$. Die Rechnung dazu wollen wir hier nicht ausführen, können das Ergebnis aber in allgemeinerer Form in Satz 1 in [Smo] nachlesen.

Bei der Berechnung der Veechgruppen der Translationsflächen, um die es in dieser Arbeit geht, wird später folgende Bemerkung verwendet, die die Veechgruppen einer Mannigfaltigkeit mit verschiedenen Translationsstrukturen in Zusammenhang bringt.

Bemerkung 1.13. Sei (X, ν) eine Translationsfläche, $B \in SL(2, \mathbb{R})$ und $(X, B \cdot \nu)$ wieder wie in Bemerkung 1.6 beschrieben. Dann ist $SL(X, B \cdot \nu) = B \cdot SL(X, \nu) \cdot B^{-1}$.

Beweis. Sei $A \in SL(X, \nu)$, das heißt, es gibt einen orientierungserhaltenden Homöomorphismus $f: X \rightarrow X$, so dass für je zwei Karten $(U, \varphi), (V, \psi) \in \nu$ mit $f(U) \subseteq V$ gilt: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = A \cdot z + t$ für ein $t \in \mathbb{C}$.

Dann sind $(U, B \cdot \varphi), (V, B \cdot \psi) \in B \cdot \nu$ zwei Karten mit

$$\begin{aligned} (B \cdot \psi \circ f \circ (B \cdot \varphi)^{-1})(z) &= (B \cdot \psi \circ f)(\varphi^{-1}(B^{-1} \cdot z)) \\ &= B \cdot (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(B^{-1} \cdot z) = B \cdot (A B^{-1} \cdot z + t) = B A B^{-1} \cdot z + B \cdot t. \end{aligned}$$

Also ist $\text{der}(f) = B A B^{-1} \in SL(X, B \cdot \nu)$ und es gilt $B \cdot SL(X, \nu) \cdot B^{-1} \subseteq SL(X, B \cdot \nu)$. Analog gilt $B^{-1} \cdot SL(X, B \cdot \nu) \cdot B \subseteq SL(X, B^{-1} B \cdot \nu)$ und daraus folgt die Behauptung. \square

1.2 Elliptische und parabolische Elemente einer Veechgruppe

Da jede Veechgruppe eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ ist, operiert sie durch Möbiustransformationen auf der oberen Halbebene \mathbb{H} . Diese Operation hat eine nützliche Eigenschaft, die für viele Aussagen in diesem Abschnitt Voraussetzung ist.

Definition 1.14 (Eigentlich diskontinuierliche Operation)

Sei Γ eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X durch Homöomorphismen operiert.

Dann heißt diese Operation *eigentlich diskontinuierlich*, wenn es für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ gibt, so dass $\gamma \cdot K \cap K \neq \emptyset$.

Definition 1.15 (Fuchssche Gruppe)

Eine Untergruppe von $PSL(2, \mathbb{R})$ heißt *Fuchssche Gruppe*, wenn ihre Operation auf der oberen Halbebene \mathbb{H} eigentlich diskontinuierlich ist.

Es liegt im Kontext von Operationen auf der oberen Halbebene nahe, sich von einer Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ nur das Bild der Projektion nach $PSL(2, \mathbb{R})$ anzuschauen. Da eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ durch ihr Bild in $PSL(2, \mathbb{R})$ und die Aussage, ob $-I$ in dieser Untergruppe liegt, schon eindeutig bestimmt ist, verlieren wir auch nicht viele Informationen, wenn wir zum Bild in $PSL(2, \mathbb{R})$ übergehen.

Insbesondere wollen wir im Folgenden die *projektive Veechgruppe* $PSL(X, \nu)$ als Bild der Veechgruppe in $PSL(2, \mathbb{R})$ und die *projektive erweiterte Veechgruppe* $PGL(X, \nu)$ als Bild der erweiterten Veechgruppe $GL(X, \nu)$ in $PS^*L(2, \mathbb{R})$ betrachten.

Bemerkung 1.16. Jede projektive Veechgruppe ist eine Fuchssche Gruppe.

Beweis. Wir können in Proposition 2.7 in [Vee] nachlesen, dass eine projektive Veechgruppe eine diskrete Untergruppe von $PSL(2, \mathbb{R})$ ist. Nach Satz 2.2.6 in [Kat] ist Diskretheit für Untergruppen von $PSL(2, \mathbb{R})$ äquivalent dazu, dass diese Gruppe eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H} operiert. \square

Die Elemente einer projektiven Veechgruppe können wir wie alle Elemente von $PSL(2, \mathbb{R})$ ihrer Spur nach in drei Typen einteilen. Generell wird als *Spur* einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Term $a + d$ bezeichnet. Da dies für ein Element $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ nicht wohldefiniert ist, werden wir in diesem Kontext $|a + d|$ als Spur von $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$ bezeichnen.

Definition 1.17 (Elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente)

Sei $T \in PSL(2, \mathbb{R})$.

- (i) T heißt elliptisch, wenn die Spur von T kleiner als 2 ist.
- (ii) T heißt parabolisch, wenn die Spur von T gleich 2 ist.
- (iii) T heißt hyperbolisch, wenn die Spur von T größer als 2 ist.

Ist T Element einer projektiven Veechgruppe $PSL(X, \nu)$, so heißt der zugehörige Homöomorphismus auf (X, ν) ebenfalls elliptisch, parabolisch oder Pseudo-Anosov, im Fall, dass T hyperbolisch ist.

Da wir später bestimmte Untergruppen verwenden, die von elliptischen oder parabolischen Elementen erzeugt sind, wollen wir diesen noch einen Namen geben. Dazu ist es gut zu wissen, dass für eine Gruppe, die von einem elliptischen bzw. parabolischen Element erzeugt wird, alle Erzeuger elliptisch bzw. parabolisch sind. Das lässt sich zum Beispiel über die gleich folgenden Überlegungen zum Zusammenhang von elliptischen Elementen und Streckungen bzw. parabolischen Elementen und Translationen zeigen.

Definition 1.18 (Elliptisch-zyklisch und parabolisch-zyklisch)

Sei U eine zyklische Untergruppe von $PSL(2, \mathbb{R})$.

- (i) U heißt elliptisch-zyklisch, wenn sie von einem elliptischen Element erzeugt wird.
- (ii) U heißt parabolisch-zyklisch, wenn sie von einem parabolischen Element erzeugt wird.

Lassen wir nun ein Element $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\} \in PSL(2, \mathbb{R})$ als Möbiustransformation auf \mathbb{H} operieren, so erfüllt ein Fixpunkt z von T die Gleichung $z = \frac{az+b}{cz+d}$, also gilt

$$z = \frac{-d + a \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4cb}}{2c} = \frac{a-d}{2c} \pm \frac{1}{2c} \sqrt{(a+d)^2 - 4}.$$

Die Operation eines elliptischen Elements hat also zwei zueinander komplex konjugierte Fixpunkte in \mathbb{C} , von denen genau einer in \mathbb{H} liegt. Zu einem parabolischen Element gibt es einen Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und zu einem hyperbolischen zwei Fixpunkte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Außerdem lässt sich zeigen, dass elliptische Elemente zu Drehmatrizen konjugiert sind, parabolische zu Translationsmatrizen und hyperbolische zu Streckungsmatrizen (siehe Abschnitt 2.3.3 in [IT]). Die Fixpunkte von Drehungen und Translationen lassen sich in einem Fundamentalbereich einer Fuchsschen Gruppe einfach ablesen, so dass es sich lohnt, diesen Gedanken noch weiter zu verfolgen und einige Überlegungen aus [Kat] zu verwenden. Diese benötigen aber noch zusätzliche Eigenschaften eines Fundamentalbereichs, die beispielsweise ein Dirichletbereich schon hat.

Definition 1.19 (Dirichletbereich)

Für eine Fuchssche Gruppe Γ und einen Punkt $p \in \mathbb{H}$, dessen Stabilisator unter der Operation von Γ trivial ist, definieren wir den *in p zentrierten Dirichletbereich* durch

$$D_p(\Gamma) := \{z \in \mathbb{H} : \rho(z, p) \leq \rho(z, \gamma \cdot p) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma\},$$

wobei ρ der hyperbolische Abstand ist.

Ein Dirichletbereich von Γ ist insbesondere ein zusammenhängender Fundamentalbereich, der durch Geodätische und Abschnitte der reellen Achse begrenzt wird (siehe Satz 3.2.2 und Abschnitt 3.5 in [Kat]).

Den Schnitt von zwei solchen begrenzenden Geodätischen wollen wir im Folgenden *Ecke* eines Dirichletbereichs nennen, auch wenn er in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegt. Allerdings wollen wir diese Eckenmenge noch etwas erweitern, wie im Beweis der nächsten Proposition ausgeführt wird. *Äquivalent* sollen zwei Ecken heißen, wenn sie in derselben Γ -Bahn liegen.

Proposition 1.20 (Ecken und elliptisch-zyklische Untergruppen)

Ist Γ eine Fuchssche Gruppe, so entsprechen die Äquivalenzklassen der Ecken eines Dirichletbereichs von Γ , die in \mathbb{H} liegen, genau den Konjugationsklassen von maximalen elliptisch-zyklischen Untergruppen von Γ .

Beweis. Nach Satz 3.5.2 in [Kat] entsprechen die Äquivalenzklassen der Fixpunkte von elliptischen Elementen genau den Konjugationsklassen von nichttrivialen maximalen endlichen zyklischen Untergruppen. Diese werden aber von elliptischen Elementen erzeugt, da nur elliptische Elemente eine endliche Ordnung haben.

Fixpunkte von elliptischen Elementen sind entweder Ecken des Dirichletbereichs oder liegen auf einer Kante davon. Im zweiten Fall hat das zugehörige maximale elliptische Element die Ordnung 2 und vertauscht die beiden Abschnitte, in die der Fixpunkt die

Kante teilt. Wir wollen dann den Fixpunkt auch als Ecke bezeichnen und die Kante als Vereinigung von zwei Kanten auffassen.

Eine Ecke des Dirichletbereichs ist außerdem genau dann Fixpunkt eines elliptischen Elements, wenn sie in \mathbb{H} liegt. \square

Vertreter solcher Konjugationsklassen von maximalen elliptisch-zyklischen Untergruppen können wir finden, indem wir die orthogonale Untergruppe der zu untersuchenden Gruppe betrachten. Diese ist für eine Gruppe $\Gamma \leq GL(2, \mathbb{R})$ definiert als $\Gamma \cap O(2, \mathbb{R})$, wobei $O(2, \mathbb{R})$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist, das heißt, die Gruppe der Matrizen, die zu ihrer Transponierten invers sind. Eine Untergruppe von $PSL(2, \mathbb{R})$ müssen wir analog dazu mit dem Bild der Projektion von $SO(2, \mathbb{R})$ in $PSL(2, \mathbb{R})$ schneiden, um die orthogonale Untergruppe zu erhalten.

Im Fall von projektiven Veechgruppen können wir also das Bild der orthogonalen Untergruppe $SO(X, \nu) = SL(X, \nu) \cap SO(2, \mathbb{R})$ in $PSL(2, \mathbb{R})$ betrachten. Das Bild eines Elements aus $SO(X, \nu)$ von maximaler Ordnung oder eines dazu konjugierten Elements ist ein elliptisches Element und erzeugt eine maximale zyklische Untergruppe.

Festzustellen, ob zwei maximale elliptisch-zyklische Untergruppen zueinander konjugiert sind, ist nicht immer einfach. Wir werden jedoch später ausnutzen können, dass zwei maximale elliptische Elemente, deren Ordnung verschieden ist, keine zueinander konjugierten zyklischen Untergruppen erzeugen können.

Eine ähnliche Überlegung wie in Proposition 1.20 können wir auch für parabolische Elemente durchführen, allerdings nur unter zusätzlichen Voraussetzungen. Wir werden daher zunächst Gitter betrachten und später zu projektiven Veechgruppen, die Gitter sind, übergehen.

Definition 1.21 (Gitter)

Eine Fuchssche Gruppe Γ heißt *Gitter* (in $SL(2, \mathbb{R})$), wenn der hyperbolische Flächeninhalt von \mathbb{H}/Γ endlich ist.

Ist eine Gruppe Γ ein Gitter, so ist insbesondere keine Seite eines Fundamentalbereichs von Γ in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Für eine Ecke des Fundamentalbereichs, die in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ liegt, nennen wir den entsprechenden Punkt in der Kompaktifizierung von \mathbb{H}/Γ *Spitze*.

Proposition 1.22 (Spitzen und parabolisch-zyklische Untergruppen)

Ist Γ ein Gitter, so entsprechen die Spitzen eines Dirichletbereichs von Γ genau den Konjugationsklassen von maximalen parabolisch-zyklischen Untergruppen von Γ .

Beweis. Korollar 4.2.6 in [Kat] besagt, dass für eine kokompakte Fuchssche Gruppe Γ , für die \mathbb{H}/Γ endlichen hyperbolischen Flächeninhalt hat, die Äquivalenzklassen der Ecken bei ∞ genau den Konjugationsklassen von maximalen parabolischen Untergruppen von Γ entsprechen. Weiter zeigt Korollar 4.2.7 in [Kat], dass dies auch für nicht kokompakte Gitter gilt, da es dann keine Spitzen und keine parabolischen Elemente gibt. \square

Eine weitere Entsprechung, die wir später verwenden werden, gibt es zwischen parabolischen Elementen der projektiven Veechgruppe $PSL(X, \nu)$ und Zylinderzerlegungen von (X, ν) . Wir wollen daher erst noch etwas über Zylinderzerlegungen lernen.

Definition 1.23 (Sattelverbindung)

Eine *Sattelverbindung* auf einer Translationsfläche (X, ν) ist eine Geodätische, die zwei Singularitäten verbindet und auf deren Inneren keine Singularitäten liegen.

Wählen wir eine Richtung auf der Translationsfläche aus und finden genügend und geeignete Sattelverbindungen in diese Richtung, so kann es sein, dass wir die Translationsfläche dadurch geschickt in Zylinder zerlegen können.

Definition 1.24 (Zylinder und Zylinderzerlegung)

Sei (X, ν) eine Translationsfläche.

- (i) Ein *Zylinder* in (X, ν) ist eine abgeschlossene Teilmenge von X , die zu einem euklidischen Zylinder der Form $\mathbb{R}/k\mathbb{Z} \times [0, a]$ isometrisch ist. Dabei sind $a, k \in \mathbb{R}^+$ und wir nennen k den *Umfang* und a die *Höhe* des Zylinders.
- (ii) Der *Modulus* m eines Zylinders ist das Verhältnis von Umfang zu Höhe, also $m = \frac{k}{a}$.
- (iii) Die *Richtung* eines Zylinders wird durch die Richtung des Bildes von $\mathbb{R}/k\mathbb{Z} \times b$ mit $b \in [0, a]$ definiert.
- (iv) Eine *Zylinderzerlegung* ist eine endliche Menge von Zylindern, so dass die Vereinigung der Zylinder X überdeckt und das Innere von zwei Zylindern jeweils disjunkt ist. Dabei hat jeder Zylinder die gleiche Richtung und wir nennen das die *Richtung der Zylinderzerlegung*.

Zylinderzerlegungen sind schon deshalb im Zusammenhang mit Veechgruppen interessant, weil sie von affinen Homöomorphismen respektiert werden: Affine Abbildungen bilden Singularitäten auf Singularitäten ab, genauso Geodätische auf Geodätische. Als Geodätische zwischen zwei Singularitäten werden also auch Sattelverbindungen wieder auf Sattelverbindungen abgebildet. Da ein Zylinder entweder durch die Vereinigung von Sattelverbindungen oder durch geschlossene Geodätische begrenzt wird und das Innere eines Zylinders aus geschlossenen Geodätischen mit der gleichen Richtung besteht, werden auch Zylinder auf Zylinder abgebildet. Eine Zylinderzerlegung bleibt also unter einem affinen Homöomorphismus erhalten.

Proposition 1.25 (Zylinderzerlegungen und parabolische Elemente)

Sei (X, ν) eine Translationsfläche mit projektiver Veechgruppe $PSL(X, \nu)$.

- (i) Zu jeder Zylinderzerlegung mit kommensurablen Moduli auf (X, ν) gibt es ein parabolisches Element in $PSL(X, \nu)$.
- (ii) Hat (X, ν) Singularitäten, so gibt es zu jedem parabolischen Element in $PSL(X, \nu)$ eine Zylinderzerlegung auf (X, ν) .

Beweis. Sei \mathcal{Z} eine Zylinderzerlegung, bei der die Moduli kommensurabel sind, das heißt, die Moduli sind ganzzahlige Vielfache einer gemeinsamen reellen Zahl. Dann gibt es nach Lemma 3.9 in [Vor] in der projektiven Veechgruppe ein parabolisches Element, das in $PSL(2, \mathbb{R})$ zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ konjugiert ist, wobei α das kleinste gemeinsame Vielfache der

Moduli ist. Dieses Element verdreht jeden Zylinder (eventuell mehrmals) in sich und lässt die begrenzenden Sattelverbindungen und begrenzenden geschlossenen Geodätischen punktweise fest. Die Operation eines solchen parabolischen Elements heißt auch *multipler Dehn-Twist*. Das Element, mit dem $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ konjugiert wird, bildet dabei die Richtung der Zylinderzerlegung \mathcal{Z} auf die vertikale Richtung ab.

Andererseits hat jedes parabolische Element eine Eigenrichtung. Nach Lemma 3.8 in [Vor] gibt es unter der Voraussetzung von Singularitäten in diese Eigenrichtung eine Zylinderzerlegung, deren Moduli wieder kommensurabel sind. Eine Potenz des parabolischen Elements ist dann ebenfalls ein multipler Dehn-Twist auf den Zylindern. \square

Da die beschriebenen Zuordnungen im Allgemeinen nicht injektiv sind, wollen wir uns noch eine hinreichende Bedingung erarbeiten, wann wir zu zwei Zylinderzerlegungen zwei parabolische Elemente erhalten, die in maximalen parabolisch-zyklischen Untergruppen liegen, die nicht zueinander konjugiert sind.

Dazu betrachten wir nur noch *maximale Zylinderzerlegungen*, also solche Zerlegungen, bei denen für keine zwei Zylinder die Vereinigung wieder ein Zylinder ist.

Bemerkung 1.26. Sei (X, ν) eine Translationsfläche mit Singularitäten. Können zwei maximale Zylinderzerlegungen, bei denen die Moduli jeweils kommensurabel sind, nicht durch ein Element der affinen Gruppe aufeinander abgebildet werden, so sind die zugehörigen maximalen parabolisch-zyklischen Untergruppen nicht konjugiert.

Beweis. Seien $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ zwei maximale Zylinderzerlegungen und die zugehörigen maximalen parabolisch-zyklischen Untergruppen U_1, U_2 konjugiert. Dann gibt es ein Element S in der projektiven Veechgruppe mit $S \cdot U_1 \cdot S^{-1} = U_2$.

Dabei wird die Eigenrichtung der Elemente von U_1 unter S auf die Eigenrichtung der Elemente von U_2 abgebildet, also wird auch die Richtung von \mathcal{Z}_1 auf die Richtung von \mathcal{Z}_2 abgebildet. Wie wir schon festgestellt haben, ist das Bild einer Zylinderzerlegung unter einem affinen Homöomorphismus wieder eine Zylinderzerlegung, also wird \mathcal{Z}_1 unter S auf \mathcal{Z}_2 abgebildet. \square

Kapitel 2

Orbifaltigkeiten und Veechgruppen

Wir wollen in diesem Kapitel eine Methode erarbeiten, mit der wir in Abschnitt 5.3 überprüfen können, ob eine Untergruppe der Veechgruppe schon die ganze Veechgruppe ist. Dazu wenden wir eine Überlegung an, die ursprünglich von Thurston stammt. Thurston definiert in [Thu] Orbifaltigkeiten (engl. orbifolds) und Überlagerungen von Orbifaltigkeiten.

2.1 Orbifaltigkeiten

Definition 2.1 (Orbifaltigkeit)

Eine (n -dimensionale) *Orbifaltigkeit* O besteht aus einem zugrunde liegenden Hausdorff-Raum X_O und einer Überdeckung durch offene Mengen U_i .

Dabei ist $\mathcal{U} := \{U_i\}$ abgeschlossen unter endlichen Schnitten und zu jedem $U \in \mathcal{U}$ gehört eine endliche Gruppe Γ_U , eine effektive Operation von Γ_U durch Homöomorphismen auf einer offenen Teilmenge U' von \mathbb{R}^n und ein Homöomorphismus $\varphi_U: U \rightarrow U'/\Gamma_U$.

Gibt es zwei Mengen $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \subseteq V$, so soll es auch einen injektiven Homomorphismus $f_{UV}: \Gamma_U \rightarrow \Gamma_V$ und eine Einbettung $\varphi_{UV}: U' \rightarrow V'$ geben, so dass φ_{UV} äquivariant bezüglich f_{UV} ist und zu φ_U und φ_V passt, das heißt, es soll gelten:

$$\begin{aligned}\varphi_{UV}(\gamma \cdot x) &= f_{UV}(\gamma) \cdot \varphi_{UV}(x) \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma_U \text{ und } x \in U', \\ \Gamma_V \cdot \varphi_{UV}(x) &= (\varphi_V \circ \varphi_U^{-1})(\Gamma_U \cdot x) \quad \text{für alle } x \in U'.\end{aligned}$$

Die Abbildungen f_{UV} und φ_{UV} sind durch die letzte Bedingung der Definition eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation bzw. Konjugation mit demselben $\gamma \in \Gamma_V$. Damit gibt es für $U \subseteq V \subseteq W$ ein $\gamma \in \Gamma_W$ mit $\gamma\varphi_{UW} = \varphi_{VW} \circ \varphi_{UV}$ und $\gamma f_{UW}\gamma^{-1} = f_{VW} \circ f_{UV}$.

Bemerkung 2.2. Der zugrunde liegende Raum einer Orbifaltigkeit ist lokal wegzusammenhängend.

Beweis. Sei $x \in X_O$. Eine Umgebungsbasis von x kann so gewählt werden, dass jedes Element der Umgebungsbasis als Teilmenge in einem Element $U \in \mathcal{U}$ enthalten ist. Jedes $U \in \mathcal{U}$ ist aber isomorph zu einem lokal wegzusammenhängenden U'/Γ_U und damit ist auch eine Teilmenge von U wegzusammenhängend, wenn sie klein genug gewählt ist. \square

Sind $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \subseteq V$, so kann nach der Definition von Orbifaltigkeiten die offene Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ via φ_{UV} als Teilmenge von $V' \subseteq \mathbb{R}^n$ aufgefasst werden. Wir können also $\Gamma_V \cdot \varphi_{UV}(U')$ in V' betrachten. Dass es dabei Sinn macht, von der Bahn von $\varphi_{UV}(U')$ unter Γ_V zu sprechen, weil für $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_V$ die entsprechenden offenen Mengen $\gamma_1 \cdot \varphi_{UV}(U')$ und $\gamma_2 \cdot \varphi_{UV}(U')$ entweder disjunkt oder gleich sind, klärt das folgende Lemma.

Lemma 2.3. Seien $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \subseteq V$. Dann ist jeder Homöomorphismus $\gamma \in \Gamma_V$ mit $\varphi_{UV}(U') \cap \gamma \cdot \varphi_{UV}(U') \neq \emptyset$ in $f_{UV}(\Gamma_U)$ enthalten und es gilt $\varphi_{UV}(U') = \gamma \cdot \varphi_{UV}(U')$.

Beweis. Seien U, V wie oben, $\varphi_U: U \rightarrow U'/\Gamma_U$, $\varphi_V: V \rightarrow V'/\Gamma_V$ wie in der Definition von Orbifaltigkeit und wie im Diagramm verdeutlicht.

$$\begin{array}{ccccccc}
 U' & \longrightarrow & U'/\Gamma_U & \xleftarrow{\varphi_U} & U & \subseteq & V & \xrightarrow{\varphi_V} & V'/\Gamma_V & \longleftarrow & V' \\
 & & & & & & & & & & \searrow \varphi_{UV} \\
 & & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Sei $\gamma \in \Gamma_V$ so, dass $\varphi_{UV}(U') \cap \gamma \cdot \varphi_{UV}(U') \neq \emptyset$ gilt. Ist dann a ein Punkt in $\varphi_{UV}(U')$ mit $\gamma \cdot a \in \varphi_{UV}(U')$, dann ist $\varphi_V^{-1}(\Gamma_V \cdot a) = \varphi_V^{-1}(\Gamma_V \cdot \gamma \cdot a)$ in U . Deshalb gibt es ein $\gamma' \in \Gamma_U$ mit $\gamma' \cdot \varphi_U^{-1}(\gamma \cdot a) = \varphi_U^{-1}(a)$ und anwenden von φ_{UV} auf die Gleichung ergibt $f_{UV}(\gamma')\gamma \cdot a = a$. Da es nur endlich viele Möglichkeiten für die Wahl von γ' gibt, ist jedes $a \in \varphi_{UV}(U') \cap \gamma \cdot \varphi_{UV}(U')$ Fixpunkt eines von endlich vielen Homöomorphismen von endlicher Ordnung.

M. H. A. Newman hat gezeigt, dass ein nichttrivialer Homöomorphismus einer Mannigfaltigkeit mit endlicher Ordnung eine Fixpunktmenge hat, die nirgends dicht ist (siehe Satz 10.4.4 in [Dav]). Da $\varphi_{UV}(U') \cap \gamma \cdot \varphi_{UV}(U')$ offen ist, gibt es unendlich viele a wie oben, also auch mindestens ein $a' \in \varphi_{UV}(U') \cap \gamma^{-1} \cdot \varphi_{UV}(U')$ und ein zugehöriges $\gamma' \in \Gamma_U$, so dass der Homöomorphismus $f_{UV}(\gamma')\gamma$ trivial ist. Also ist γ selbst schon in $f_{UV}(\Gamma_U)$ und $\varphi_{UV}(U') = \gamma \cdot \varphi_{UV}(U')$. \square

Bemerkung 2.4. Jedem Punkt $x \in X_O$ kann eindeutig (bis auf Isomorphie) eine Gruppe Γ_x zugeordnet werden.

Beweis. Wähle dazu eine Umgebung $U \in \mathcal{U}$ von x , betrachte die Bahn eines Urbildes x' von $\varphi_U(x)$ in $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ unter dem entsprechenden Γ_U und wähle als $\Gamma_x \leq \Gamma_U$ den Stabilisator von x' . Für verschiedene Urbilder von x sind die Stabilisatoren in Γ_U konjugiert, also insbesondere isomorph.

Ist $V \in \mathcal{U}$ eine weitere Umgebung von x , dann ist der Stabilisator von $x'_V \in V'$ ebenfalls isomorph zu Γ_x von oben: Dazu kann wegen der Abgeschlossenheit von \mathcal{U} bezüglich Schnitten $U \subseteq V$ vorausgesetzt werden. Wegen des vorhergehenden Lemmas kann dann kein Element aus $\Gamma_V \setminus f_{UV}(\Gamma_U)$ im Stabilisator von x'_V sein. Ist aber $\gamma \in \Gamma_U$ ein Stabilisator von x' , so ist $f_{UV}(\gamma)$ wegen der Äquivarianz von φ_{UV} bezüglich f_{UV} im Stabilisator von x'_V enthalten. \square

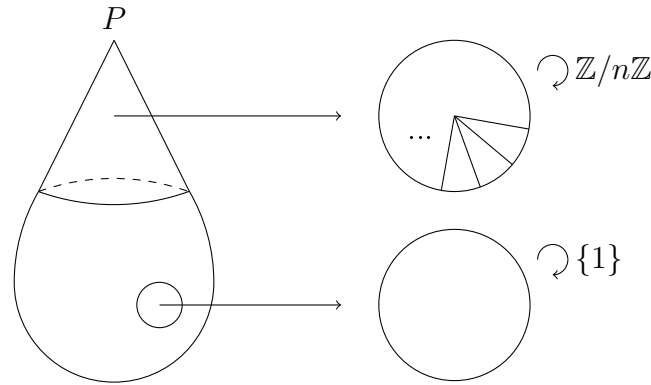


Abbildung 2: Orbifaltigkeit mit einelementigem singulären Ort (Tropfen)

Definition 2.5 (Singularitäten und singulärer Ort)

Ein Punkt $x \in X_O$ heißt *Singularität* von O , wenn die zugehörige Gruppe Γ_x nicht trivial ist.

Der *singuläre Ort* einer Orbifaltigkeit O besteht aus allen Singularitäten von O .

Die bekanntesten Beispiele für Orbifaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten, bei denen der singuläre Ort leer ist, und Mannigfaltigkeiten mit einer Gruppenaktion, wie im nächsten Abschnitt beschrieben. Daher soll hier erst einmal ein Beispiel gegeben werden, das nicht so augenfällig ist.

Beispiel 2.6 (Tropfen). Wir betrachten die Sphäre S^2 mit einem ausgezeichneten Punkt P wie in Abbildung 2. Dann wählen wir eine Umgebung U von P und $\varphi_U: U \rightarrow U'/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ mit einem geeigneten $U' \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ darauf durch Drehungen um den Punkt $\varphi_U(P)$ operiert.

Jetzt definieren wir auf S^2 eine Orbifaltigkeitsstruktur, indem $U \in \mathcal{U}$ sein soll und alle weiteren Elemente von \mathcal{U} offene Mengen in S^2 sein sollen, die den ausgezeichneten Punkt P nicht enthalten und die homöomorph zu Teilmengen des \mathbb{R}^2 sind. Der singuläre Ort dieser Orbifaltigkeit besteht also nur aus P .

Der Tropfen (engl. teardrop) ist das Standard-Beispiel für *schlechte Orbifaltigkeiten*, die nicht von einer Mannigfaltigkeit überlagert werden (siehe Definition 2.12).

Für Orbifaltigkeiten kann jetzt die Eulercharakteristik, die wir von Zellkomplexen kennen, etwas verallgemeinert werden. Dafür muss der zugrunde liegende Raum X_O der Orbifaltigkeit O eine Aufteilung in endlich viele offene Zellen haben, so dass jedem x , das in einer bestimmten Zelle liegt, jeweils die gleiche Gruppe Γ als Γ_x zugeordnet wird. Dabei wollen wir von einer etwas unüblicheren Definition von Zellzerlegung ausgehen.

Definition 2.7 (Zellzerlegung)

Sei X ein Hausdorff-Raum.

- (i) Eine *offene k-Zelle* in X ist eine Teilmenge von X , die zur offenen Einheitskugel $B^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < 1\}$ homöomorph ist. k heißt dabei die Dimension der Zelle.

- (ii) Eine *endliche offene Zellzerlegung* von X ist eine Zerlegung von X in endlich viele offene disjunkte Zellen $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$, wobei gilt:

Zu jeder k -Zelle $c_i \subseteq X$ existiert eine charakteristische Abbildung $f_i: B^k \rightarrow X$, so dass B^k homöomorph auf c_i abgebildet wird. Kann f_i auf einen Punkt s auf dem Rand von B^k stetig zu f_i^* fortgesetzt werden, so soll $f_i^*(s)$ in einer Zelle mit einer Dimension kleiner k liegen.

- (iii) Ist O eine Orbifaltigkeit mit zugrundeliegendem Raum X_O , dann heißt eine endliche offene Zellzerlegung von X_O *Orbifaltigkeits-Zellzerlegung* von O , wenn es für jede Zelle c eine Gruppe Γ_c gibt, so dass jedem $x \in c$ als zugehörige Gruppe Γ_c zugeordnet werden kann.

Durch die Formulierung in (ii) fordern wir, dass der relative Rand einer offenen Zelle aus Zellen von niedrigerer Dimension besteht, falls der relative Rand im Raum X enthalten ist. So soll der relative Rand von Kanten aus Punkten bestehen, soweit er in X enthalten ist. In anderen Definitionen von Zellzerlegung müssen die Abbildungen f_i auf den Rand fortsetzbar sein, was uns hier aber unnötig einschränkt.

Bemerkung 2.8. Eine offene Zelle der Dimension 0 ist ein Punkt, da die Norm des einzigen Elements von \mathbb{R}^0 kleiner als 1 ist.

Definition 2.9 (Eulerzahl)

Sei O eine Orbifaltigkeit mit einer Orbifaltigkeits-Zellzerlegung. Dann bezeichnen wir mit

$$\chi(O) := \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)} \frac{1}{|\Gamma_c|}$$

die *Eulerzahl* von O .

Um zu zeigen, dass diese Definition nicht von der Zellzerlegung abhängt, kann zu einer gemeinsamen Verfeinerung von zwei Zellzerlegungen übergegangen werden. Dabei ändert sich die Eulerzahl nicht, da die Terme $|\Gamma_c|$ innerhalb einer Zelle konstant sind.

Zu beachten ist, dass diese Definition der Definition der bekannteren Eulercharakteristik sehr ähnelt, aber sich in der Gewichtung der Zellen durch die inverse Ordnung der Gruppe Γ_c unterscheidet. Insbesondere muss die Eulercharakteristik ganzzahlig sein, die Eulerzahl nicht! Ist aber der singuläre Ort einer Orbifaltigkeit leer, stimmen Eulercharakteristik und Eulerzahl überein.

Beispiel 2.10 (Eulerzahl des Tropfens). Eine Orbifaltigkeits-Zellzerlegung des Tropfens aus Beispiel 2.6 kann wie in Abbildung 3 aus einer nulldimensionalen Zelle in P , einer offenen eindimensionalen Zelle, deren Randpunkte beide in P liegen, und zwei offenen zweidimensionalen Zellen bestehen.

Da der singuläre Ort nur aus P besteht und die zugehörige Gruppe die Ordnung n hat, ist die Eulerzahl des Tropfens

$$(-1)^0 \cdot \frac{1}{n} + (-1)^1 \cdot \frac{1}{1} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{1} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{n}.$$

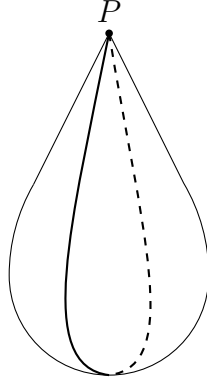


Abbildung 3: Zellzerlegung des Tropfens

Bemerkung 2.11. Seien O_1, O_2 zwei disjunkte Orbifaltigkeiten (das heißt, X_{O_1} und X_{O_2} sind disjunkt), für die die Eulerzahl definiert ist. Dann gilt

$$\chi(O_1 \cup O_2) = \chi(O_1) + \chi(O_2).$$

Beweis. Die Vereinigung der Zellzerlegungen von X_{O_1} und X_{O_2} ist eine Zellzerlegung von $X_{O_1 \cup O_2} = X_{O_1} \cup X_{O_2}$. \square

Als nächstes kann gezeigt werden, dass die Eulerzahl einer Überlagerung von O eng mit der Eulerzahl von O zusammenhängt. Eine Überlagerung von Orbifaltigkeiten ist hierbei folgendermaßen definiert:

Definition 2.12 (Überlagerung von Orbifaltigkeiten)

Seien O, \tilde{O} zwei Orbifaltigkeiten und $\pi: X_{\tilde{O}} \rightarrow X_O$ eine stetige Projektion der zugrunde liegenden Räume. Dann ist \tilde{O} eine *überlagernde Orbifaltigkeit* von O , wenn es für jedes $x \in X_O$ eine Umgebung $\mathcal{U} \ni U_x \cong U'/\Gamma_{U_x}$ für ein offenes $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt, so dass sich jede Zusammenhangskomponente U_i des Urbildes von U_x unter π schreiben lässt als $U_i \cong U'/\Gamma_{U_i}$, wobei jedes Γ_{U_i} eine Untergruppe von Γ_{U_x} ist. Dabei sollen die Homöomorphismen die Projektionen respektieren, das heißt, es soll gelten $\varphi_{U_x} \circ \pi = p_{U_i U_x} \circ \varphi_{U_i}$ mit den Bezeichnungen von Definition 2.1 und $p_{U_i U_x}(\Gamma_{U_i} \cdot x) = \Gamma_{U_x} \cdot x$.

Die Abbildung π nennen wir *Orbifaltigkeits-Überlagerung* und bezeichnen sie auch mit $\pi: \tilde{O} \rightarrow O$.

Da nicht offensichtlich ist, dass der letzte Satz in der Definition eine echte Bedingung beinhaltet, soll ein Beispiel das verdeutlichen:

Beispiel 2.13. Wir betrachten zwei Orbifaltigkeiten $O = \tilde{O}$, die je aus einer offenen Kreisscheibe $X_{\tilde{O}} = X_O$ um den Nullpunkt in \mathbb{R}^2 bestehen und deren singulärer Ort leer ist. Weiter sei $\pi: X_{\tilde{O}} \rightarrow X_O$ eine Projektion, die durch $z \mapsto z^3$ gegeben ist. Dann gibt es für jedes $z \in X_O$ eine Umgebung U_z wie in der obigen Definition gefordert.

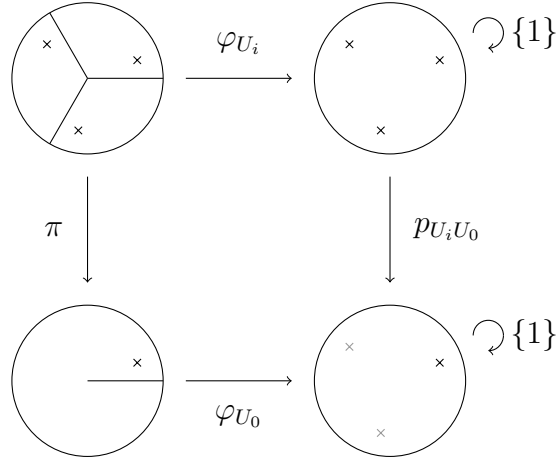


Abbildung 4: Abbildung zwischen zwei Orbifaltigkeiten, die keine Überlagerung ist

Für eine solche Umgebung U_0 um den Nullpunkt gilt allerdings mit den obigen Bezeichnungen eben nicht $\varphi_{U_0} \circ \pi = p_{U_i U_0} \circ \varphi_{U_i}$. Denn wird ein Urbild eines Punktes $x \in U_0 \setminus \{0\}$ durch $p_{U_i U_0} \circ \varphi_{U_i}$ auf $\varphi_{U_0}(x)$ abgebildet, so ist dies für die anderen beiden Urbilder von x nicht mehr möglich (siehe Abbildung 4). Also ist π keine Orbifaltigkeits-Überlagerung, obwohl π eine Überlagerung (im Sinne von Mannigfaltigkeiten) der zugrundeliegenden Räume ist.

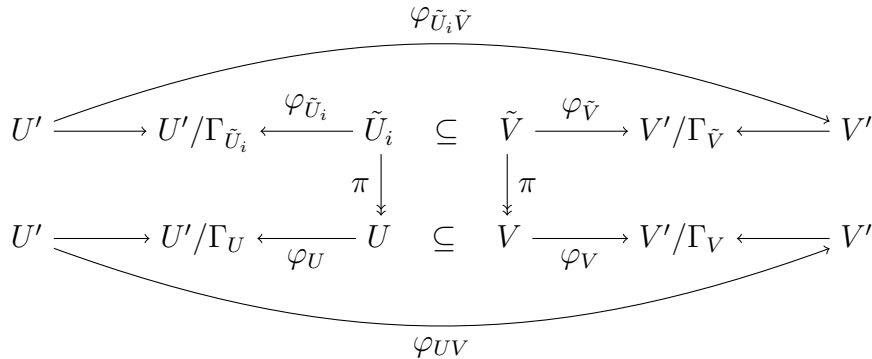
Proposition 2.14 (Invarianz von Gruppenindizes bei Überlagerungen)

Sei $\pi: \tilde{O} \rightarrow O$ eine Orbifaltigkeits-Überlagerung, $x \in X_O$ mit einer zusammenhängenden Umgebung $U \in \mathcal{U}$ wie in der Definition der Überlagerung und $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ die Komponenten des Urbilds von U in $X_{\tilde{O}}$. Dann ist

$$k_x := \sum_{i=1}^n [\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}_i}]$$

unabhängig von U .

Beweis. Da \mathcal{U} abgeschlossen bezüglich Schnitten ist, genügt es zu zeigen, dass die Zahl k_x gleich ist für zwei zusammenhängende $U, V \in \mathcal{U}$ mit $x \in U \subseteq V$ und beide wie in der Definition der Überlagerung und wie im Diagramm verdeutlicht.



Lemma 2.3 besagt, dass jeder Homöomorphismus $\gamma \in \Gamma_V$ mit $\varphi_{UV}(U') \cap \gamma \cdot \varphi_{UV}(U') \neq \emptyset$ schon in $f_{UV}(\Gamma_U)$ ist und dann $\varphi_{UV}(U') = \gamma \varphi_{UV}(U')$ gilt. Wir wollen unter der Γ_V -Bahn von $\varphi_{UV}(U')$ in V' die disjunkten offenen Mengen $\gamma \varphi_{UV}(U') \subseteq V'$ mit $\gamma \in \Gamma_V$ verstehen. Dann hat die Bahn von $\varphi_{UV}(U')$ genau $[\Gamma_V : f_{UV}(\Gamma_U)]$ Elemente.

Sei \tilde{V} eine Zusammenhangskomponente des Urbilds von V unter π und $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_m$ die Zusammenhangskomponenten des Urbilds von U mit $\tilde{U}_i \subseteq \tilde{V}$, $i = 1, \dots, m$. Dann hat ebenfalls nach Lemma 2.3 die $\Gamma_{\tilde{V}}$ -Bahn eines $\varphi_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(U')$ in V' genau $[\Gamma_{\tilde{V}} : f_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(\Gamma_{\tilde{U}_i})]$ Elemente. Zwei verschiedene $\varphi_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(U')$ werden unter der Operation von $\Gamma_{\tilde{V}}$ nicht miteinander identifiziert, sonst wären die \tilde{U}_i in \tilde{V} schon gleich.

Also entspricht jedes Element aus der Bahn eines $\varphi_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(U')$ genau einem Element aus der Bahn von $\varphi_{UV}(U')$ und es ergibt sich

$$\sum_{i=1}^m [\Gamma_{\tilde{V}} : f_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(\Gamma_{\tilde{U}_i})] = [\Gamma_V : f_{UV}(\Gamma_U)]$$

und damit

$$\begin{aligned} [\Gamma_V : \Gamma_{\tilde{V}}] &= \sum_{i=1}^m [\Gamma_{\tilde{V}} : f_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(\Gamma_{\tilde{U}_i})] \cdot \frac{[\Gamma_V : \Gamma_{\tilde{V}}]}{[\Gamma_V : f_{UV}(\Gamma_U)]} = \sum_{i=1}^m \frac{[\Gamma_V : f_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(\Gamma_{\tilde{U}_i})]}{[\Gamma_V : f_{UV}(\Gamma_U)]} \\ &= \sum_{i=1}^m [f_{UV}(\Gamma_U) : f_{\tilde{U}_i \tilde{V}}(\Gamma_{\tilde{U}_i})] = \sum_{i=1}^m [\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}_i}]. \end{aligned}$$

Da jede Zusammenhangskomponente $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n$ des Urbilds von U in einer Zusammenhangskomponente $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_l$ des Urbilds von V liegt, ergibt sich weiter

$$\sum_{j=1}^l [\Gamma_V : \Gamma_{\tilde{V}_j}] = \sum_{i=1}^n [\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}_i}]. \quad \square$$

Bemerkung 2.15. Ist X_O zusammenhängend, dann ist $k := k_x$ auch unabhängig von der Wahl von x .

Beweis. Seien $x, y \in X_O$. Da X_O nach Bemerkung 2.2 lokal wegzusammenhängend ist, ist ein zusammenhängender Raum X_O schon wegzusammenhängend. Wir wählen also einen Weg von x nach y und für jeden Punkt z darauf eine Umgebung U_z wie in der Definition der Überlagerung. Das ist eine offene Überdeckung des kompakten Weges, also gibt es eine endliche Teilüberdeckung. Wählen wir darin eine Folge von Punkten $x := x_0, x_1, \dots, x_n := y$, so dass x_{i+1} in der Umgebung U_{x_i} von x_i liegt, dann sind die Gruppenindizes jeweils gleich und damit ist k unabhängig von x . \square

Definition 2.16 (Grad der Überlagerung)

Für ein zusammenhängendes X_O heißt die Zahl k *Grad der Überlagerung*.

Lemma 2.17. Es gilt auch

$$k = \sum_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} [\Gamma_x : \Gamma_{\tilde{x}}]$$

für jedes $x \in X_O$ und $\Gamma_x, \Gamma_{\tilde{x}}$ wie in Bemerkung 2.4.

Beweis. Sei $x \in X_O$ und $U \in \mathcal{U}$ wie in der Definition der Überlagerung. Dann ist Γ_x ohne Einschränkung der Stabilisator eines Urbildes x' von $\varphi_U(x)$ in $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ unter der Operation von Γ_U .

Wähle eine Zusammenhangskomponente \tilde{U} des Urbilds von U unter π . $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ seien die Urbilder von x , die in \tilde{U} liegen. Dann ist $\Gamma_{\tilde{x}_i}$ ohne Einschränkung der Stabilisator eines Urbildes \tilde{x}'_i von $\varphi_{\tilde{U}}(\tilde{x}_i)$ in $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ unter der Operation von $\Gamma_{\tilde{U}}$.

Zwei verschiedene \tilde{x}'_i liegen nicht in der gleichen $\Gamma_{\tilde{U}}$ -Bahn, sonst wären die entsprechenden \tilde{x}_i in \tilde{U} schon gleich. Da jedes Element aus der Bahn eines \tilde{x}'_i also einem Element aus der Bahn von x' entspricht und umgekehrt, folgt die Identität

$$[\Gamma_U : \Gamma_x] = |\Gamma_U \cdot x'| = \sum_{i=1}^n |\Gamma_{\tilde{U}} \cdot \tilde{x}'_i| = \sum_{i=1}^n [\Gamma_{\tilde{U}} : \Gamma_{\tilde{x}_i}]$$

und damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\Gamma_x : \Gamma_{\tilde{x}_i}] &= \frac{[\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}}]}{[\Gamma_U : \Gamma_x]} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{[\Gamma_U : \Gamma_x] \cdot [\Gamma_x : \Gamma_{\tilde{x}_i}]}{[\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}}]} = \frac{[\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}}]}{[\Gamma_U : \Gamma_x]} \cdot \sum_{i=1}^n [\Gamma_{\tilde{U}} : \Gamma_{\tilde{x}_i}] \\ &= \frac{[\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}}]}{[\Gamma_U : \Gamma_x]} \cdot [\Gamma_U : \Gamma_x] = [\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}}]. \end{aligned}$$

Durch Summation über alle Zusammenhangskomponenten des Urbilds von U folgt die Behauptung. \square

Hat eine Überlagerung den Grad 1, so gibt es für jedes $x \in X_O$ und jedes $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$ wie in der Definition der Überlagerung nur ein $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}$ mit $\pi(\tilde{U}) = U$ und es gilt $[\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}}] = 1$. Dann ist π invertierbar und $\pi^{-1} : O \rightarrow \tilde{O}$ ebenfalls eine Orbifaltigkeits-Überlagerung.

Die beiden Orbifaltigkeiten sind also isomorph, das heißt, die zugrundeliegenden Flächen sind homöomorph und die Orbifaltigkeitsstrukturen entsprechen sich. Das wollen wir später ausnutzen, um Isomorphie von Orbifaltigkeiten zu zeigen, wobei die folgende Proposition eine wichtige Rolle spielen wird.

Proposition 2.18 (Eulerzahlen bei einer Orbifaltigkeits-Überlagerung)

Ist $\pi : \tilde{O} \rightarrow O$ eine Orbifaltigkeits-Überlagerung vom Grad k und hat O eine Orbifaltigkeits-Zellzerlegung, so gilt

$$\chi(\tilde{O}) = k \cdot \chi(O).$$

Beweis. Zunächst benötigen wir auch für \tilde{O} eine Orbifaltigkeits-Zellzerlegung, damit wir die Eulerzahl von \tilde{O} berechnen können. Diese erhalten wir als Urbild der Orbifaltigkeits-Zellzerlegung $\{c\}$ von O , wie im Folgenden erläutert wird:

Sei c eine Zelle von X_O , $x \in c$ und U eine Umgebung von x wie in der Definition der Überlagerung. Wähle eine Komponente \tilde{U} des Urbilds von U unter π . Wir betrachten jetzt das Urbild von c in \tilde{U} und nennen es \tilde{c} . Sei y ein weiterer Punkt in $c \cap U$ und $\Gamma_x, \Gamma_y \leq \Gamma_U$ die zugehörigen Gruppen zu x, y . Da x und y in derselben Zelle und demselben U liegen, gilt $\Gamma_x = \Gamma_y$.

Seien weiter $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ die Urbilder von x in \tilde{c} ; $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ die Urbilder von y in \tilde{c} . Für jedes dieser \tilde{x}_i können wir die zugehörige Gruppe $\Gamma_{\tilde{x}_i} \leq \Gamma_{\tilde{U}}$ bestimmen über $\Gamma_{\tilde{x}_i} = \Gamma_{\tilde{U}} \cap \Gamma_x$, ebenso für $\Gamma_{\tilde{y}_j}$. Damit folgt $\Gamma_{\tilde{x}_i} = \Gamma_{\tilde{y}_j}$ für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.

Aus dem Beweis von Lemma 2.17 folgt

$$\sum_{i=1}^m [\Gamma_x : \Gamma_{\tilde{x}_i}] = [\Gamma_U : \Gamma_{\tilde{U}}] = \sum_{j=1}^n [\Gamma_y : \Gamma_{\tilde{y}_j}]$$

und mit der Gleichheit der jeweiligen Stabilisatoren schon $n = m$. Jeder Punkt in $c \cap U$ hat also genau n Urbilder.

Nun wählen wir eine offene zusammenhängende Umgebung $V \subseteq U$, die x enthält und die so klein ist, dass jede Komponente des Urbilds von V nur ein Urbild von x enthält. Dann hat wegen der Stetigkeit von π auch jeder Punkt $y \in c \cap V$ mindestens ein Urbild in jeder Komponente des Urbilds von V . Da aber die Anzahl der Urbilder von x und y in \tilde{U} gleich ist, gibt es in jeder Komponente des Urbilds von V genau ein Urbild von x und ein Urbild von y . Also ist jede Einschränkung von π auf den Schnitt von \tilde{c} mit einer Komponente des Urbilds von V ein Homöomorphismus.

Wenn wir diese Überlegung für jeden Punkt $x \in c$ machen und ausnutzen, dass c zusammenhängend und kontrahierbar ist, folgt, dass das Urbild von c in Komponenten zerfällt, so dass jede Komponente homöomorph zu c und damit selbst eine Zelle ist. Dabei wird auch die Bedingung nicht verletzt, dass Randpunkte (sofern sie existieren) in Zellen niedrigerer Dimension enthalten sind. Weiter ist auch die Stabilisatorbedingung erfüllt, das heißt, die zugehörigen Gruppen aller Punkte in einer Zelle sind gleich, so dass das Urbild von $\{c\}$ tatsächlich eine Orbifaltigkeits-Zellzerlegung $\{\tilde{c}\}$ ist.

Wir wählen jetzt für jede Zelle c einen Punkt $x_c \in c$. Dann ist $\Gamma_c = \Gamma_{x_c}$ und es entspricht nach Konstruktion der Zellzerlegung $\{\tilde{c}\}$ jedes Urbild eines Punktes x_c einem Punkt in genau einer Zelle in $\{\tilde{c}\}$.

Für jeden Punkt $x \in X_O$ gilt nach Lemma 2.17 die Beziehung

$$k = \sum_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)} \frac{|\Gamma_x|}{|\Gamma_{\tilde{x}}|}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} k \cdot \chi(O) &= \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)} \cdot k \cdot \frac{1}{|\Gamma_{x_c}|} = \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)} \sum_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x_c)} \frac{|\Gamma_{x_c}|}{|\Gamma_{\tilde{x}}|} \frac{1}{|\Gamma_{x_c}|} \\ &= \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)} \sum_{\tilde{x} \in \pi^{-1}(x_c)} \frac{1}{|\Gamma_{\tilde{x}}|} = \sum_{\tilde{c} \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(\tilde{c})} \frac{1}{|\Gamma_{\tilde{c}}|} = \chi(\tilde{O}). \quad \square \end{aligned}$$

Die vorhergehende Proposition ist eine Orbifaltigkeits-Version der Formel von Riemann-Hurwitz (siehe Satz 17.14 in [For]). Der entscheidende Vorteil dieser Version ist, dass die Überlagerung nicht unverzweigt sein muss, damit der Zusammenhang linear ist. Insbesondere ist es nicht notwendig, zwischen dem zu unterscheiden, was bei Mannigfaltigkeiten kritische Werte und unkritische Werte (siehe 4.23 in [For]) genannt wird.

2.2 Anwendung auf Veechgruppen

Die Theorie aus dem vorhergehenden Abschnitt soll jetzt so weitergeführt werden, dass wir später für eine Untergruppe einer Veechgruppe überprüfen können, ob sie schon die ganze Veechgruppe ist. Dabei wird benutzt, dass projektive Veechgruppen nach Bemerkung 1.16 eigentlich diskontinuierlich auf der oberen Halbebene \mathbb{H} durch Möbiustransformationen operieren. Ist dann U eine Untergruppe der projektiven Veechgruppe V , so operiert auch U eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H} . Aus diesem Grund gehören \mathbb{H}/V bzw. \mathbb{H}/U in eine große Klasse von Beispielen für Orbifaltigkeiten, die wir in der nächsten Proposition kennenlernen wollen.

Proposition 2.19 (Mannigfaltigkeiten und Orbifaltigkeiten)

Operiert eine Gruppe Γ eigentlich diskontinuierlich auf einer Mannigfaltigkeit M , so kann M/Γ als Orbifaltigkeit aufgefasst werden.

Beweis. Für jedes $x \in M/\Gamma$ wählen wir ein $x' \in M$, das durch die Operation von Γ auf x projiziert wird. Sei $\Gamma_x \leq \Gamma$ der Stabilisator von x' . Γ_x ist endlich, da die Operation eigentlich diskontinuierlich ist.

Weiter wählen wir eine offene Umgebung $U' \subseteq M$ von x' , die unter der Operation von Γ_x invariant ist und so, dass $U' \cap \gamma \cdot U' = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_x$ gilt. Sei U die Umgebung von x , auf die U' unter der Operation von Γ projiziert wird. Dann ist U' isomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n und die Abbildung $\varphi_U: U \rightarrow U'/\Gamma_x$ ist ein Homöomorphismus. Dann nehmen wir U zu \mathcal{U} hinzu.

Da \mathcal{U} noch nicht abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist, nehmen wir iterativ auch alle Schnitte hinzu: Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und $U := U_1 \cap U_2$. Dann gibt es ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $\gamma \cdot U'_1 \cap U'_2 =: U' \neq \emptyset$ ist und $\Gamma_U := \gamma \cdot \Gamma_{U_1} \cdot \gamma^{-1} \cap \Gamma_{U_2}$ auf U' operiert, so dass $U \cong U'/\Gamma_U$ gilt. Dann nehmen wir auch U zu \mathcal{U} hinzu.

Ebenso gibt es für $U, V \in \mathcal{U}$ mit $U \subseteq V$ ein $\gamma \in \Gamma$, so dass $\gamma \cdot U' \subseteq V'$ und $\gamma \cdot \Gamma_U \cdot \gamma^{-1} \subseteq \Gamma_V$ gilt. Die geforderten Abbildungen können also definiert werden als

$$f_{UV}: \Gamma_U \rightarrow \Gamma_V, \gamma_U \mapsto \gamma \cdot \gamma_U \cdot \gamma^{-1} \quad \text{und} \quad \varphi_{UV}: U' \rightarrow V', u \mapsto \gamma \cdot u. \quad \square$$

Proposition 2.20 (Mannigfaltigkeiten und Orbifaltigkeits-Überlagerungen)

Ist M eine Mannigfaltigkeit, Γ eine Gruppe, die auf M eigentlich diskontinuierlich operiert, und Γ' eine Untergruppe von Γ , so ist die kanonische Projektion $\pi: M/\Gamma' \rightarrow M/\Gamma$ eine Orbifaltigkeits-Überlagerung.

Beweis. Seien $x \in M/\Gamma$, \tilde{x} ein Urbild von x unter π sowie Γ_x und $\Gamma_{\tilde{x}}$ die jeweiligen Stabilisatoren wie im letzten Beweis. Sei weiter $x' \in M$, so dass x' unter der Operation von Γ auf x und unter der Operation von Γ' auf \tilde{x} projiziert wird. Wir wählen außerdem eine Umgebung U' von x' wie im letzten Beweis.

Dann ist U'/Γ_x isomorph zu einer Umgebung von x und $U'/\Gamma_{\tilde{x}}$ ist isomorph zu einer Umgebung von \tilde{x} , so dass die erstere das Bild der letzteren unter π ist. Dabei respektieren die Homöomorphismen auch die Projektionen. Außerdem ist wie gefordert $\Gamma_{\tilde{x}}$ eine Untergruppe von Γ_x , da beide Gruppen Stabilisatoren von x' in Γ' bzw. Γ sind. \square

Für U und V wie vorher können $M := \mathbb{H}/U$ und $N := \mathbb{H}/V$ also als Orbifaltigkeiten O_M bzw. O_N aufgefasst werden und $\pi: O_M \rightarrow O_N$ ist eine Orbifaltigkeits-Überlagerung. Am Beweis von Proposition 2.19 können wir auch sehen, dass der singuläre Ort von O_M bzw. O_N genau aus den Fixpunkten unter U bzw. V besteht.

Um zu überprüfen, ob schon $U = V$ gilt, werden wir zeigen, dass der Grad der Überlagerung gleich 1 ist. Dazu werden die Eulerzahlen von O_M und von O_N verglichen.

Ist M bzw. N punktiert, so kann M bzw. N trotzdem eine endliche offene Zellzerlegung haben. Die charakteristischen Abbildungen sind zwar nicht immer auf den Rand fortsetzbar, das wurde aber auch in der Definition explizit nicht verlangt.

Bemerkung 2.21. Werden aus dem zugrundeliegenden Raum X_O einer Orbifaltigkeit O die Punkte $\{x_1, \dots, x_n\}$ herausgenommen, so kann auf dem n -fach punktierten Raum X_{O_n} wieder eine Orbifaltigkeitsstruktur O_n definiert werden.

Dazu nehmen wir aus \mathcal{U} die Elemente heraus, die einen der Punkte x_1, \dots, x_n enthalten, und ersetzen sie durch geeignete kleinere Teilmengen, so dass die Elemente der entstandenen Menge \mathcal{U}_n den Raum X_{O_n} überdecken.

Hatte O eine endliche offene Zellzerlegung wie in der Definition der Eulerzahl, so hat auch O_n eine solche: Wir verfeinern die Zellzerlegung von O , so dass die Punkte x_1, \dots, x_n nulldimensionale Zellen sind. Nehmen wir diese aus der Zellzerlegung heraus, erhalten wir eine entsprechende Zellzerlegung von O_n . Dann gilt

$$\chi(O_n) = \chi(O) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\Gamma_{x_i}|},$$

wobei Γ_{x_i} die zugehörige Gruppe zu x_i in O ist.

Auch die Eulercharakteristik lässt sich für punktierte Räume definieren, indem ebenfalls offene Zellzerlegungen statt Zellzerlegungen zur Definition verwendet werden.

Definition 2.22 (Punktierte Eulercharakteristik)

Sei M ein topologischer Raum mit einer endlichen offenen Zellzerlegung. Dann bezeichnen wir mit

$$\chi(M) := \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)}$$

die *punktierte Eulercharakteristik* von M .

Für die Eulercharakteristik gilt analog zur vorherigen Bemerkung der Zusammenhang $\chi(M) = \chi(M^\bullet) - n$, wenn M ein n -fach punktierter Raum mit der Kompaktifizierung M^\bullet ist.

Proposition 2.23 (Formel für die Eulerzahl)

Sei O_X eine Orbifaltigkeit mit einem zugrunde liegenden Raum X , so dass die Menge S_X der Orbifaltigkeits-Singularitäten von O und Punktierungen von X endlich ist. Für eine Orbifaltigkeits-Singularität $\sigma \in S_X$ sei Γ_σ die Gruppe, die zu σ gehört, und für eine Punktierung $\sigma \in S_X$ sei $|\Gamma_\sigma|$ unendlich und $\frac{1}{|\Gamma_\sigma|} = 0$.

Ist die Eulerzahl $\chi(O_X)$ definiert und bezeichnen wir mit $\chi(X^\bullet)$ die Eulercharakteristik der Kompaktifizierung von X , dann gilt

$$\chi(O_X) = \chi(X^\bullet) + \sum_{\sigma \in S_X} \left(\frac{1}{|\Gamma_\sigma|} - 1 \right).$$

Beweis. Wir wählen die offene Zellzerlegung von O_X durch Verfeinerung so, dass die Singularitäten von O_X jeweils nulldimensionale Zellen sind. Dann gelten die Gleichungen

$$\chi(O_X) = \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)} \frac{1}{|\Gamma_c|} \quad \text{und} \quad \chi(X) = \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)}$$

für die Eulerzahl von O_X und die (punktierte) Eulercharakteristik von X . Daraus folgt

$$\chi(O_X) - \chi(X) = \sum_{c \text{ Zelle}} (-1)^{\dim(c)} \left(\frac{1}{|\Gamma_c|} - 1 \right) = \sum_{\substack{\sigma \text{ Singularität} \\ \text{von } O_X}} \left(\frac{1}{|\Gamma_\sigma|} - 1 \right).$$

Bezeichnen wir mit n die Anzahl der Punktierungen von X , so gilt

$$\begin{aligned} \chi(O_X) &= \chi(X) + \sum_{\substack{\sigma \text{ Singularität} \\ \text{von } O_X}} \left(\frac{1}{|\Gamma_\sigma|} - 1 \right) \\ &= \chi(X^\bullet) - n + \sum_{\substack{\sigma \text{ Singularität} \\ \text{von } O_X}} \left(\frac{1}{|\Gamma_\sigma|} - 1 \right) \\ &= \chi(M^\bullet) + \sum_{\sigma \in S_X} \left(\frac{1}{|\Gamma_\sigma|} - 1 \right). \quad \square \end{aligned}$$

Ist Γ eine Fuchssche Gruppe, die ein Gitter ist, dann erfüllt \mathbb{H}/Γ als Orbifaltigkeit alle Voraussetzungen an O_X und X . Das können wir sehen, indem wir einen Fundamentalbereich von Γ wählen, der nur endlich viele Kanten hat. Insbesondere können wir die oben bewiesene Formel also in der Situation anwenden, dass Γ eine projektive Veechgruppe ist, die ein Gitter ist.

Insgesamt haben wir uns damit in diesem Abschnitt den folgenden Satz erarbeitet.

Satz 1 (Eulerzahlen und projektive Veechgruppen)

Sei (X, ν) eine Translationsfläche, V die projektive Veechgruppe davon und U eine Untergruppe von V , die ein Gitter ist. Sei $M := \mathbb{H}/U$, $N := \mathbb{H}/V$ und M^\bullet bzw. N^\bullet die Kompaktifizierung von M bzw. N . Weiter sei S_M bzw. S_N eine Menge von elliptischen und parabolischen Elementen in U bzw. V , so dass die von diesen Elementen erzeugten Untergruppen ein Vertretersystem der Konjugationsklassen maximaler elliptisch-zyklischer und parabolisch-zyklischer Untergruppen von U bzw. V sind. Dann gilt:

$$U = V \iff \chi(O_M) = \chi(O_N) \iff \chi(M^\bullet) + \sum_{\sigma \in S_M} \left(\frac{1}{|\sigma|} - 1 \right) = \chi(N^\bullet) + \sum_{\sigma \in S_N} \left(\frac{1}{|\sigma|} - 1 \right)$$

Beweis. Die erste Äquivalenz erhalten wir aus Proposition 2.18 und der Überlegung, dass die Orbifaltigkeiten O_M und O_N isomorph sind, wenn es eine Orbifaltigkeits-Überlagerung $\pi: O_M \rightarrow O_N$ vom Grad 1 gibt.

Die zweite Äquivalenz folgt aus Proposition 2.23 und den Ergebnissen aus Abschnitt 1.2. Diese können wir auch auf V anwenden, da V ebenfalls ein Gitter ist, wenn U ein Gitter ist. Die Punktierungen von M bzw. N sind die Spitzen, die nach Proposition 1.22 den Konjugationsklassen von maximalen parabolisch-zyklischen Elementen entsprechen, deren Ordnung immer unendlich ist. Der singuläre Ort von M bzw. N besteht genau aus den Fixpunkten von Elementen von U bzw. V , die in dem gewählten Fundamentalbereich liegen, also aus den Ecken, die nicht zu Spitzen gehören. Damit entspricht nach Proposition 1.20 jede Singularität einer Konjugationsklasse von maximalen elliptisch-zyklischen Untergruppen. Ein Vertreter dieser Gruppen ist die jeweils zur Singularität gehörende Fixgruppe, daher stimmen auch hier die Ordnungen überein. \square

Kapitel 3

Die Translationsfläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$

3.1 Bipartite Bändergraphen

Ein endlicher zusammenhängender Graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ mit Eckenmenge \mathcal{V} und Kantenmenge \mathcal{E} heißt *bipartiter Graph*, wenn seine Eckenmenge so in zwei disjunkte Mengen \mathcal{A}, \mathcal{B} zerlegt werden kann, dass jede Kante eine Ecke aus \mathcal{A} mit einer aus \mathcal{B} verbindet. Das können wir auch durch Abbildungen $\alpha: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$ und $\beta: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ beschreiben.

Damit ein bipartiter Graph ein *bipartiter Bändergraph* wird, müssen wir zusätzlich zwei Abbildungen $\mathbf{e}, \mathbf{n}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ angeben, so dass \mathbf{e} jeder Kante e eine weitere Kante $\mathbf{e}(e)$ zuordnet, wobei e und $\mathbf{e}(e)$ zu einer gemeinsamen Ecke aus \mathcal{A} inzident sein sollen. Dabei soll \mathbf{e} auf den Kanten, die zu einem $v \in \mathcal{A}$ inzident sind, zyklisch sein. Analoges gilt für \mathbf{n} und die Ecken aus \mathcal{B} .

Ein Beispiel für einen bipartiten Graphen ist der Graph in Abbildung 5.

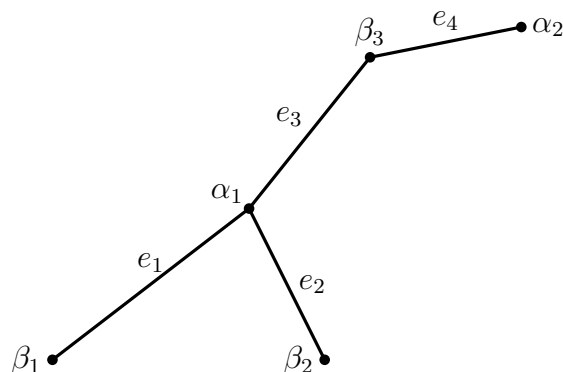


Abbildung 5: Beispiel für einen bipartiten Graphen

Dabei seien $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ und $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, α und β sind durch diese Zerlegung von \mathcal{V} und den Graphen schon festgelegt. Es fehlen also noch \mathbf{e} und \mathbf{n} , um aus dem Graphen einen bipartiten Bändergraphen zu machen.

Diese seien

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(e_1) &= e_2, & \mathbf{e}(e_2) &= e_3, & \mathbf{e}(e_3) &= e_1, & \mathbf{e}(e_4) &= e_4, \\ \mathbf{n}(e_1) &= e_1, & \mathbf{n}(e_2) &= e_2, & \mathbf{n}(e_3) &= e_4, & \mathbf{n}(e_4) &= e_3. \end{aligned}$$

Für größere Beispiele empfiehlt es sich der Übersichtlichkeit halber, die Abbildungen ϵ und \mathfrak{n} nicht explizit anzugeben, sondern durch Pfeile um die entsprechenden Ecken des Graphens anzudeuten. Die Abbildungen können dabei nicht verwechselt werden, da \mathcal{A} und \mathcal{B} die Eckenmenge \mathcal{V} partitionieren. Im vorigen Beispielfall sieht das wie in Abbildung 6 aus.

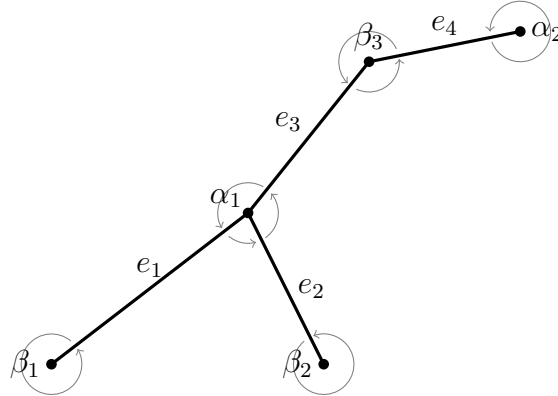


Abbildung 6: Beispiel für einen Bändergraphen mit Kennzeichnung von ϵ und \mathfrak{n}

Wird zu einem bipartiten Bändergraphen zusätzlich eine Funktion $w: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vorgegeben, so können wir dadurch auf folgende Weise eine Translationsfläche definieren: Jede Kante e entspricht einem Rechteck $R(e)$ mit der Breite $w(\beta(e))$ und der Höhe $w(\alpha(e))$. Die Rechtecke werden entsprechend der Abbildung ϵ nach rechts (Osten, engl. east) und entsprechend der Abbildung \mathfrak{n} nach oben (Norden, engl. north) verklebt.

Setzen wir für unser Beispiel noch $w(e) = 1$ für alle $e \in \mathcal{E}$ voraus, so erhalten wir auf diese Weise aus dem bipartiten Bändergraphen die Translationsfläche in Abbildung 7.

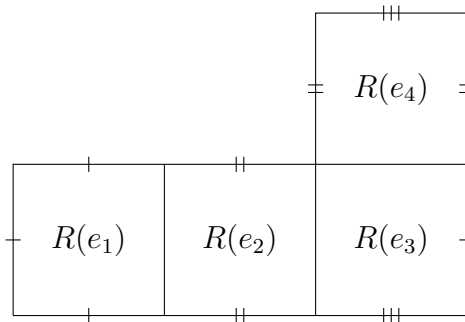


Abbildung 7: Beispiel für eine durch einen Bändergraphen festgelegte Translationsfläche

An dieser Stelle können wir schon einige Beobachtungen festhalten: Da es für jede Ecke aus \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} mit n inzidenten Kanten einen Zykel von Länge n in ϵ bzw. \mathfrak{n} gibt und der Graph zusammenhängend ist, ist auch die Translationsfläche zusammenhängend. Es ergibt sich sogar sofort eine Zylinderzerlegung, die aus dem Graphen ablesbar ist, da durch jede Ecke aus \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} ein horizontaler bzw. vertikaler Zylinder festgelegt wird.

Auch der Modulus m eines solchen Zylinders lässt sich schon aus allen gegebenen Daten ablesen. Ist v die Ecke, durch die der Zylinder festgelegt wird, so gilt

$$m = \sum_{\overline{vx} \in \mathcal{E}} \frac{w(x)}{w(v)}.$$

Interessant für die folgenden Überlegungen sind solche Funktionen w , bei denen jeder Zylinder den gleichen Modulus $\lambda \in \mathbb{R}$ hat, bei denen also

$$\sum_{\overline{vx} \in \mathcal{E}} w(x) = \lambda w(v)$$

für alle $v \in \mathcal{V}$ gilt. Solche Funktionen heißen *Eigenfunktionen* von \mathcal{G} mit dem *Eigenwert* λ .

3.2 Der Gittergraph $\mathcal{G}_{m,n}$

Ein spezielles Beispiel für einen solchen bipartiten Bändergraphen wollen wir hier verwenden, um die zu untersuchenden Translationsflächen zu erhalten. Dazu seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2, mn \geq 6$ gegeben und

$$\mathcal{V} := \{v_{i,j} : 1 \leq i < m, 1 \leq j < n\}, \quad \mathcal{E} := \{\overline{v_{i,j}v_{k,l}} : (i-k)^2 + (j-l)^2 = 1\}.$$

Die Ecken unterteilen wir in \mathcal{A} und \mathcal{B} durch $\mathcal{A} := \{v_{i,j} \in \mathcal{V} : i+j \text{ ist gerade}\}$ und $\mathcal{B} := \{v_{i,j} \in \mathcal{V} : i+j \text{ ist ungerade}\}$.

Zusätzlich wählen wir für ϵ zyklische Permutationen um die \mathcal{A} -Ecken und für \mathbf{n} solche um die \mathcal{B} -Ecken und zwar im Uhrzeigersinn für $v_{i,j}$, wenn i gerade ist, ansonsten gegen den Uhrzeigersinn.

Definition 3.1 (Der Gittergraph $\mathcal{G}_{m,n}$)

Den durch $\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \epsilon$ und \mathbf{n} definierten Graphen, der nur von m und n abhängt, nennen wir Gittergraphen und bezeichnen ihn mit $\mathcal{G}_{m,n}$.

Seinen Namen erhält der Gittergraph $\mathcal{G}_{m,n}$, da er sich wie in Abbildung 8 veranschaulichen lässt als ein Gitter im Sinne einer Teilmenge von \mathbb{Z}^2 .

Um durch diesen Gittergraphen eine Translationsfläche zu definieren, wählen wir als Funktion w für die Höhe bzw. Breite der Rechtecke $w(v_{i,j}) = \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n}$.

Bemerkung 3.2. $w(v_{i,j}) = \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n}$ ist eine Eigenfunktion von $\mathcal{G}_{m,n}$ mit dem Eigenwert $\lambda := 2 \cos \frac{\pi}{m} + 2 \cos \frac{\pi}{n}$.

Beweis. Für alle $1 \leq i < m, 1 \leq j < n$ muss gelten

$$\sum_{\substack{1 \leq k < m; 1 \leq l < n \\ (i-k)^2 + (j-l)^2 = 1}} \sin \frac{k\pi}{m} \sin \frac{l\pi}{n} = \lambda \cdot \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n}.$$

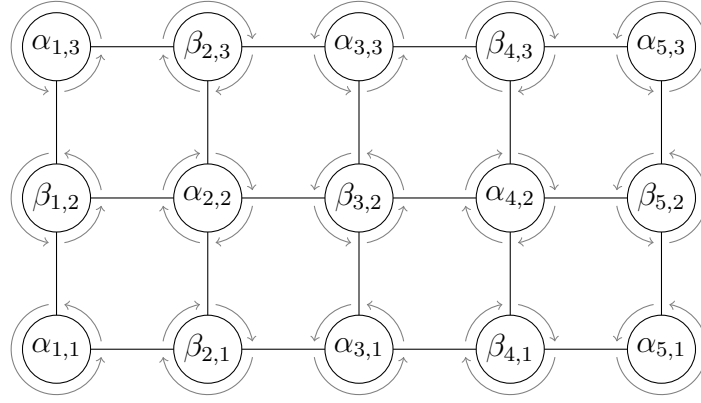


Abbildung 8: Gittergraph $\mathcal{G}_{6,4}$

Da $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$ gilt, müssen wir keine Fallunterscheidung für die „äußeren Ecken“ machen und mit

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{0 \leq k < m; 0 \leq l \leq n \\ (i-k)^2 + (j-l)^2 = 1}} \sin \frac{k\pi}{m} \sin \frac{l\pi}{n} \\
&= \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(j-1)\pi}{n} + \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(j+1)\pi}{n} + \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n} + \sin \frac{(i+1)\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n} \\
&= \sin \frac{i\pi}{m} \cdot \left(\sin \frac{(j-1)\pi}{n} + \sin \frac{(j+1)\pi}{n} \right) + \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \left(\sin \frac{(i-1)\pi}{m} + \sin \frac{(i+1)\pi}{m} \right) \\
&= \sin \frac{i\pi}{m} \cdot \left(2 \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n} \right) + \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \left(2 \sin \frac{i\pi}{m} \cdot \cos \frac{\pi}{m} \right) \\
&= \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \left(2 \cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{\pi}{m} \right) \\
&= \lambda \cdot \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n}
\end{aligned}$$

folgt die Behauptung. □

Definition 3.3 (Die Translationsfläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$)

Die Translationsfläche, die durch den Gittergraphen $\mathcal{G}_{m,n}$ und die Abbildung w festgelegt wird und damit nur von m und n abhängt, nennen wir $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$.

Die Beschreibung der Translationsfläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ über Gittergraphen wird sich für uns noch als sehr hilfreich herausstellen. Einen ersten Vorgeschmack gibt die nächste Bemerkung und der Beweis des darauffolgenden Lemmas.

Bemerkung 3.4. Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, erhalten wir durch die Beschreibung über einen bipartiten Bändergraphen für die Translationsfläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ eine horizontale und eine vertikale Zylinderzerlegung. Da w eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert λ ist, hat jeder Zylinder dieser Zerlegungen den Modulus $\lambda = 2 \cos \frac{\pi}{m} + 2 \cos \frac{\pi}{n}$.

Lemma 3.5. Es gibt einen affinen Homöomorphismus

$$\rho: (X_{m,n}, \omega_{m,n}) \rightarrow (X_{n,m}, \omega_{n,m}) \text{ mit } \text{der}(\rho) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: E.$$

Insbesondere gilt im Fall $m = n$, dass E ein Element der Veechgruppe von $(X_{m,m}, \omega_{m,m})$ ist.

Beweis. Wenn wir auf die einzelnen Rechtecke, in die die Fläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ zerlegt werden kann, die Operation der Matrix E anwenden, so werden diese an einer vertikalen Achse gespiegelt. Es ändert sich also nichts an der Größe der einzelnen Rechtecke und deren Verklebung nach oben oder unten, aber die Verklebung nach rechts und links wird vertauscht.

Bezogen auf den Gittergraphen $\mathcal{G}_{m,n}$ bedeutet das, dass die Pfeile um die \mathcal{A} -Ecken umgedreht werden. Der dabei entstehende Graph \mathcal{G} ist ebenfalls ein Gittergraph, aber die Pfeile um $v_{i,j}$ sind genau dann im Uhrzeigersinn, wenn j ungerade ist. Der Graph \mathcal{G} kann also via $v_{i,j} \mapsto v_{j,i}$ auf $\mathcal{G}_{n,m}$ abgebildet werden und induziert dieselbe Translationsfläche $(X_{n,m}, \omega_{n,m})$ wie $\mathcal{G}_{n,m}$. \square

Aus technischen Gründen werden wir in Abschnitt 4.1 einen leicht veränderten Gittergraphen betrachten, der hier auch noch vorgestellt werden soll.

Bemerkung 3.6 (Gittergraph $\mathcal{G}'_{m,n}$). Alternativ können wir auch den Gittergraph $\mathcal{G}'_{m,n} = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ betrachten mit

$$\mathcal{V}' := \{v_{i,j} : 0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n\}, \quad \mathcal{E}' := \{\overline{v_{i,j}v_{k,l}} : (i-k)^2 + (j-l)^2 = 1\}.$$

\mathcal{A} und \mathcal{B} seien wie bei $\mathcal{G}_{m,n}$ definiert, \mathbf{e}' und \mathbf{n}' sollen Fortsetzungen von \mathbf{e} und \mathbf{n} auf \mathcal{V}' sein und w' soll eine Fortsetzung von w auf \mathcal{V}' sein.

Die entstehende Translationsfläche ist die gleiche wie die von $\mathcal{G}_{m,n}$, da $w(v') = 0$ für $v' \in \mathcal{V}' \setminus \mathcal{V}$ gilt. Also induziert $\mathcal{G}'_{m,n}$ ebenfalls $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch ein konkretes Beispiel für einen Gittergraphen und die zugehörige Translationsfläche betrachten.

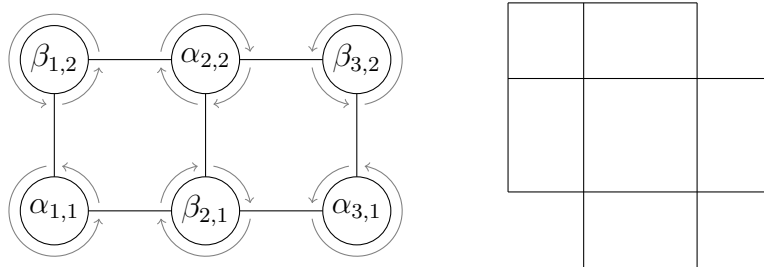


Abbildung 9: Gittergraph $\mathcal{G}_{4,3}$ und Translationsfläche $(X_{4,3}, \omega_{4,3})$

Beispiel 3.7 ($\mathcal{G}_{4,3}$ und $(X_{4,3}, \omega_{4,3})$). In Abbildung 9 ist sowohl der Gittergraph $\mathcal{G}_{4,3}$ als auch die entstandene Translationsfläche $(X_{4,3}, \omega_{4,3})$ dargestellt. Die in der Abbildung gegenüberliegenden Seiten der Fläche werden jeweils verklebt.

Für die Höhe und Breite der Rechtecke benötigen wir die Rechnungen

$$w(\alpha_{1,1}) = w(\alpha_{3,1}) = w(\beta_{1,2}) = w(\beta_{3,2}) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$$

und

$$w(\alpha_{2,2}) = w(\beta_{2,1}) = \sin \frac{2\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{6}.$$

Auch die drei horizontalen und drei vertikalen Zylinder sind in Abbildung 9 ablesbar, zum einen an den Ecken des Gittergraphen, zum anderen an der Darstellung der Translationsfläche. Die Moduli dieser Zylinder sind jeweils $2 \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{2} + 1$.

Kapitel 4

Die Translationsfläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$

Um Elemente der Veechgruppe zu finden, wird in diesem Kapitel die Translationsfläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ auf eine andere Art in Polygone zerlegt und anschließend geschert. In der erhaltenen neuen Translationsfläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ lassen sich durch Symmetriebetrachtungen einige Elemente von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ finden, die dann schon ausreichen werden, um die Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ zu bestimmen.

4.1 Eine neue Zerlegung von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$

Direkt aus der Konstruktion von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ erhalten wir eine Zerlegung der Fläche in Rechtecke. Wir werden jetzt eine weitere Zerlegung, nämlich in $2n$ -Ecke, betrachten. Diese $2n$ -Ecke können dann so transformiert werden, dass daraus halbregelmäßige $2n$ -Ecke entstehen, deren Symmetrien leicht zu finden sind. Zuerst soll am Gittergraphen motiviert werden, wie wir diese $2n$ -Ecke erhalten, bevor wir dann die Zerlegung formal beschreiben.

Wir fassen im Gittergraphen die Kanten jeweils spaltenweise zusammen. Dazu sollen übereinanderliegende horizontale Kanten zusammengefasst werden, die vertikalen Kanten werden dann auf die beiden Spalten rechts und links davon verteilt. Dies geschieht nach dem Muster, dass die entsprechenden Rechtecke in $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ diagonal von links unten nach rechts oben geteilt werden. Dann kleben wir das obere linke Dreieck an die Rechtecke, die westlich und nördlich davon liegen und das untere rechte Dreieck an die, die östlich und südlich davon liegen.

Diese Zerlegung besteht jetzt aus m Einzelteilen, für jede der $m-2$ Spalten eines und für die Restdreiecke, die von den vertikalen Kanten außen herkommen, jeweils eines. Dabei sind die ersteren $2n$ -Ecke und die letzteren n -Ecke, wie wir in Abschnitt 4.2 noch sehen werden.

Um die versprochenen halbregelmäßigen $2n$ -Ecke zu erhalten, scheren wir die Zerlegung anschließend entlang einer horizontalen Achse.

Wir können eine weitere ähnliche Zerlegung auch erhalten, indem wir die Kanten im Gittergraphen nicht spaltenweise, sondern zeilenweise zusammenfassen. Damit wir die formalen Ausführungen nicht für beide Zerlegungen machen müssen, werden wir in Abschnitt 5.1 einen Trick anwenden und die Abbildung ρ aus Lemma 3.5 benutzen, um die zweite Zerlegung aus der ersten zu erhalten.

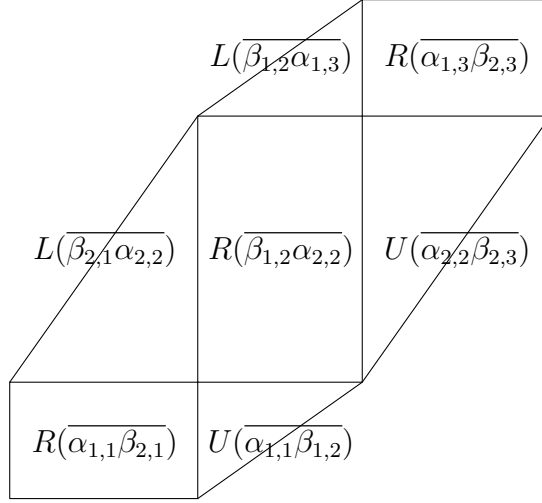


Abbildung 10: $Q(2)$ für die Fläche $(X_{5,4}, \omega_{5,4})$

Formale Beschreibung der Zerlegung

Im Folgenden bezeichnen wir mit $R(e)$ das Rechteck, das zu einer Kante $e \in \mathcal{E}$ gehört, mit $d(e)$ seine positive Diagonale (also die Diagonale, die von links unten nach rechts oben geht) und mit $L(e)$ und $U(e)$ das untere (engl. lower) und das obere (engl. upper) Dreieck, in die die Diagonale $d(e)$ das Rechteck $R(e)$ teilt.

Aus technischen Gründen werden wir außerdem statt des Gittergraphen $\mathcal{G}_{m,n}$ den Gittergraphen $\mathcal{G}'_{m,n} = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$ aus Bemerkung 3.6 betrachten. Dabei können Rechtecke $R(e)$ auftreten, die zu einer Kante oder einem Punkt degeneriert sind. In diesem Fall gilt $R(e) = d(e) = L(e) = U(e)$.

Wir bezeichnen die i -te Spalte von horizontalen Kanten in $\mathcal{G}'_{m,n}$ mit

$$H_i := \{\overline{v_{i-1,k}v_{i,k}} \in \mathcal{E}' : 0 \leq k \leq n\} \quad \text{für } i = 1, \dots, m.$$

Für jedes solche H_i können wir jetzt ein Polygon $Q(i) \subseteq (X_{m,n}, \omega_{m,n})$ definieren durch

$$Q(i) = \bigcup_{e \in H_i} R(e) \cup L(\mathbf{n}'(e)) \cup L(\mathbf{e}'^{-1}(e)) \cup U(\mathbf{n}'^{-1}(e)) \cup U(\mathbf{e}'(e)).$$

Jedes dieser $Q(i)$ ist tatsächlich ein Polygon, welches wir in Abschnitt 4.2 genauer beschreiben werden. Insbesondere ist jedes $Q(i)$ zusammenhängend und im Inneren eines $Q(i)$ gibt es keine Singularitäten, da im Inneren höchstens Ecken der nichtdegenerierten Rechtecke $R(e)$ liegen, an denen genau vier Rechtecke (oder Teile davon) verklebt werden.

Beispiel 4.1. Für die Fläche $(X_{5,4}, \omega_{5,4})$ ist in Abbildung 10 das zweite Polygon $Q(2)$ abgebildet.

Dabei sind die Rechtecke bzw. Dreiecke, die zu den Kanten $\overline{\beta_{1,0}\alpha_{2,0}}$, $\overline{\beta_{1,4}\alpha_{2,4}}$, $\overline{\beta_{1,0}\alpha_{1,1}}$, $\overline{\alpha_{2,0}\beta_{2,1}}$, $\overline{\alpha_{1,3}\beta_{1,4}}$ und $\overline{\beta_{2,3}\alpha_{2,4}}$ gehören, nicht gekennzeichnet, da sie degeneriert sind. Die

beiden erstgenannten Rechtecke bestehen nur aus einem Punkt, die anderen vier nur aus einer Kante.

Proposition 4.2 (Polygone $Q(i)$ als Parkettierung)

Die $Q(i)$, $i = 1, \dots, m$, bilden eine Parkettierung von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $R(e) \subseteq \bigcup_{i=1}^m Q(i)$ für jedes $e \in \mathcal{E}'$ gilt und die $Q(i)$ disjunkt bis auf die Kanten sind.

Sei $e \in \mathcal{E}'$ eine horizontale Kante. Dann ist e in einem H_i enthalten und damit ist $R(e)$ nach Definition im entsprechenden $Q(i)$ enthalten. Jedes $e' \in \mathcal{E}'$ mit $e \in \{\mathbf{n}'(e'), \mathbf{e}'^{-1}(e'), \mathbf{n}'^{-1}(e'), \mathbf{e}'(e')\}$ ist eine vertikale Kante und deshalb in keinem H_i enthalten. Damit sind Punkte aus dem Inneren von $R(e)$ auch in keinem weiteren $Q(i)$ enthalten.

Sei $e \in \mathcal{E}'$ eine vertikale Kante, also $e = \overline{v_{i,j}v_{i,j+1}}$ mit $0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n-1$. Dann ist

$$e = \mathbf{n}'(\overline{v_{i-1,j}v_{i,j}}) = \mathbf{e}'(\overline{v_{i,j+1}v_{i+1,j+1}}) \quad \text{oder} \quad e = \mathbf{n}'(\overline{v_{i-1,j+1}v_{i,j+1}}) = \mathbf{e}'(\overline{v_{i,j}v_{i+1,j}})$$

$$\text{oder} \quad e = \mathbf{n}'(\overline{v_{i,j+1}v_{i+1,j+1}}) = \mathbf{e}'(\overline{v_{i-1,j}v_{i,j}}) \quad \text{oder} \quad e = \mathbf{n}'(\overline{v_{i,j}v_{i+1,j}}) = \mathbf{e}'(\overline{v_{i-1,j+1}v_{i,j+1}}),$$

abhängig von der Parität von i und der Parität von $i+j$. In den ersten beiden Fällen gilt $L(e) \subseteq Q(i)$ und $U(e) \subseteq Q(i+1)$, in den letzten beiden Fällen ist $L(e) \subseteq Q(i+1)$ und $U(e) \subseteq Q(i)$, also insgesamt

$$R(e) = L(e) \cup U(e) \subseteq \bigcup_{i=1}^m Q(i).$$

Außerdem sind Punkte aus dem Inneren von $L(e)$ bzw. $U(e)$ in keinem weiteren $Q(i)$ enthalten, da für e_1, e_2 mit $\mathbf{n}'(e_1) = \mathbf{e}'^{-1}(e_2)$ oder $\mathbf{e}'(e_1) = \mathbf{n}'^{-1}(e_2)$ gilt, dass e_1 und e_2 im selben H_i liegen.

Da die $R(e)$ eine Parkettierung von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ bilden, bilden damit auch die $Q(i)$ eine solche Parkettierung. □

4.2 Eigenschaften der Fläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$

Sei in diesem Abschnitt

$$M := \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{n} & -\cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ der Kosekans und $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ der Kotangens des Winkels α . Weiter werden wir im Folgenden auch noch den Sekans $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ eines Winkels α verwenden.

Definition 4.3 (Die Translationsfläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$)

Definiere $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ durch $(Y_{m,n}, \eta_{m,n}) := (X_{m,n}, M \cdot \omega_{m,n})$ wie in Bemerkung 1.6.

Es gibt also nach Konstruktion einen affinen Homöomorphismus

$$\mu: (X_{m,n}, \omega_{m,n}) \rightarrow (Y_{m,n}, \eta_{m,n}) \text{ mit } \text{der}(\mu) = M =: D(\mu).$$

$(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ist dann die Verklebung der Polygone $M(Q(i))$, $i = 1, \dots, m$. Von diesen werden wir zunächst zeigen, dass sie tatsächlich $2n$ -Ecke oder n -Ecke sind. Die n -Ecke wollen wir jedoch als degenerierte $2n$ -Ecke auffassen, bei denen jede zweite Kante die Länge 0 hat. Außerdem zeigen wir, dass diese $2n$ -Ecke halbregelmäßig sind, was wir hier noch definieren wollen.

Definition 4.4 (Halbregelmäßiges $2n$ -Eck)

Ein *halbregelmäßiges $2n$ -Eck* ist ein Polygon mit $2n$ Ecken, das einen Umkreis hat und in dem die Summe zweier nebeneinanderliegender Mittelpunktswinkel immer $\frac{2\pi}{n}$ ergibt.

Das bedeutet, dass es zwei verschiedene Größen von Mittelpunktswinkeln gibt und diese abwechselnd auftreten. Daher hat dieses $2n$ -Eck auch zwei verschiedene Seitenlängen, die abwechselnd auftreten. Verbinden wir also jede zweite Ecke in einem halbregelmäßigen $2n$ -Eck, so erhalten wir ein regelmäßiges n -Eck.

Wir können ein halbregelmäßiges $2n$ -Eck P_n auch durch seine Kantenvektoren u_0, \dots, u_{2n-1} beschreiben, die Sehnen des Umkreises sind. Geben wir a und b als Seitenlängen vor, dann ist $P_n = P_n(a, b)$ schon eindeutig bestimmt und es gilt

$$u_j = \begin{cases} a \left(\cos \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ gerade,} \\ b \left(\cos \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Kante u_0 ist dabei die untere Kante, die restlichen Kanten sind im mathematisch positiven Sinn durchnummeriert.

Dabei lassen wir $a = b$, $a = 0$ und $b = 0$ zu, aber nicht $a = b = 0$. Ein regelmäßiges n -Eck mit Seitenlänge a kann also beschrieben werden durch $P_n(a, 0)$, $P_n(0, a)$ oder durch $P_{n/2}(a, a)$, wenn n gerade ist.

Proposition 4.5 ($M(Q(i))$ ist halbregelmäßiges $2n$ -Eck)

Seien $Q(i)$, $i = 1, \dots, m$, und M wie oben. Dann ist jedes $M(Q(i))$ ein halbregelmäßiges $2n$ -Eck (eventuell degeneriert).

Genauer: $M(Q(i)) =: P(i)$ mit

$$P(i) = \begin{cases} P_n \left(\sin \frac{(i-1)\pi}{m}, \sin \frac{i\pi}{m} \right), & \text{für } n \text{ gerade, } i \text{ ungerade,} \\ P_n \left(\sin \frac{i\pi}{m}, \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \right), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis. Betrachte ein $Q(i)$ mit i gerade, $i \notin \{1, m\}$. Dann gilt $\bigcup_{e \in H_i} R(e) \subseteq Q(i)$. Wie in Abbildung 10 zu sehen ist, bilden die nichtdegenerierten Rechtecke eine Kette, die von links unten nach rechts oben geht. Nach Norden und Westen wird jeweils eine untere Rechteckshälfte angeklebt, nach Osten und Süden jeweils eine obere. Dadurch bilden die entsprechenden Diagonalen die Kanten von $Q(i)$.

Für jedes nichtdegenerierte Rechteck $R(e)$ mit $e \in \tilde{H}_i := H_i \setminus \{\overline{v_{i-1,0}v_{i,0}}, \overline{v_{i-1,n+1}v_{i,n+1}}\}$ kommen vier Diagonalen hinzu (im Norden, Osten, Süden und Westen). Dabei wird jedoch jede Diagonale doppelt gezählt bis auf die, die zu den degenerierten Rechtecken gehören. Insgesamt sind es also

$$4 \cdot |\tilde{H}_i| - (2 \cdot |\tilde{H}_i| - \frac{4}{2}) = 4(n-1) - 2(n-1) + 2 = 2n$$

solcher Diagonalen, damit ist $Q(i)$ ein $2n$ -Eck.

Wir bezeichnen die Kanten von $Q(i)$ mit u_0, \dots, u_{2n-1} im mathematisch positiven Sinn und beginnen mit u_0 bei der Diagonalen von $R(\overline{\alpha_{i,0}\beta_{i,1}})$. Damit lassen sich die Diagonalen folgendermaßen beschreiben:

$$u_j = \begin{cases} d(\overline{\alpha_{i,j}\beta_{i,j+1}}), & \text{für } j \text{ gerade, } j < n \\ d(\overline{\alpha_{i-1,j}\beta_{i-1,j+1}}), & \text{für } j \text{ ungerade, } j < n \\ -d(\overline{\beta_{i,2n-1-j}\alpha_{i,2n-j}}), & \text{für } j \text{ gerade, } j \geq n \\ -d(\overline{\beta_{i-1,2n-1-j}\alpha_{i-1,2n-j}}), & \text{für } j \text{ ungerade, } j \geq n \end{cases}$$

Erinnern wir uns daran, dass die \mathcal{A} -Ecken die Höhe und die \mathcal{B} -Ecken die Breite der Rechtecke beschreiben und dass $w(v_{k,l}) = \sin \frac{k\pi}{m} \sin \frac{l\pi}{n}$ gilt, so können wir $Q(i)$ auch beschreiben durch

$$u_j = \begin{cases} \left(\sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ gerade, } j < n \\ \left(\sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ ungerade, } j < n \\ - \left(\sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(2n-1-j)\pi}{n}, \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(2n-j)\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ gerade, } j \geq n \\ - \left(\sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{(2n-1-j)\pi}{n}, \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{(2n-j)\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ ungerade, } j \geq n \end{cases}$$

bzw. zusammenfassend durch

$$u_j = \begin{cases} \sin \frac{i\pi}{m} \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ gerade,} \\ \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Eine letzte Berechnung liefert dann

$$\begin{aligned} M \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right) &= \left(\csc \frac{\pi}{n} \sin \frac{(j+1)\pi}{n} - \cot \frac{\pi}{n} \sin \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} \left(\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{j\pi}{n} + \sin \frac{j\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) - \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} \sin \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right) = \left(\cos \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$M \cdot u_j = \begin{cases} \sin \frac{i\pi}{m} \left(\cos \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ gerade,} \\ \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \left(\cos \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Der Fall eines $Q(i)$ mit i ungerade, $i \notin \{1, m\}$ ist ähnlich. Dann bilden die nichtdegenerierten Rechtecke $R(e)$ mit $e \in H_i$ eine Kette, die von rechts oben nach links unten geht. Nach Norden und Westen wird wieder jeweils eine untere Rechteckshälfte angeklebt, nach Osten und Süden jeweils eine obere. Dadurch bilden die entsprechenden Diagonalen die Kanten von $Q(i)$ und auch hier ist $Q(i)$ ein $2n$ -Eck.

Beginnen wir diesmal mit u_n bei der Diagonalen von $R(\overline{\alpha_{i-1,0}\beta_{i-1,1}})$, so lassen sich die Diagonalen als Kanten (wieder im mathematisch positiven Sinn durchnummeriert) von $Q(i)$ folgendermaßen beschreiben:

$$u_j = \begin{cases} d(\overline{\beta_{i-1,n-j-1}\alpha_{i-1,n-j}}), & \text{für } n-j \text{ gerade, } j < n \\ d(\overline{\beta_{i,n-j-1}\alpha_{i,n-j}}), & \text{für } n-j \text{ ungerade, } j < n \\ -d(\overline{\alpha_{i-1,j-n}\beta_{i-1,j-n+1}}), & \text{für } j-n \text{ gerade, } j \geq n \\ -d(\overline{\alpha_{i,j-n}\beta_{i,j-n+1}}), & \text{für } j-n \text{ ungerade, } j \geq n \end{cases}$$

Wie oben lässt sich diese Beschreibung umformen zu

$$u_j = \begin{cases} \left(\sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{(n-j-1)\pi}{n}, \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{(n-j)\pi}{n} \right), & \text{für } n-j \text{ gerade, } j < n \\ \left(\sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(n-j-1)\pi}{n}, \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(n-j)\pi}{n} \right), & \text{für } n-j \text{ ungerade, } j < n \\ - \left(\sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{(j-n+1)\pi}{n}, \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \sin \frac{(j-n)\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ gerade, } j \geq n \\ - \left(\sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(j-n+1)\pi}{n}, \sin \frac{i\pi}{m} \sin \frac{(j-n)\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ ungerade, } j \geq n \end{cases}$$

und dann unter Verwendung von Phasenverschiebungen zu

$$u_j = \begin{cases} \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } n-j \text{ gerade, } j < n, \\ \sin \frac{i\pi}{m} \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } n-j \text{ ungerade, } j < n, \\ - \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \left(- \sin \frac{(j+1)\pi}{n}, - \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ gerade, } j \geq n, \\ - \sin \frac{i\pi}{m} \left(- \sin \frac{(j+1)\pi}{n}, - \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ ungerade, } j \geq n. \end{cases}$$

Dadurch ergibt sich

$$u_j = \begin{cases} \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ gerade,} \\ \sin \frac{i\pi}{m} \left(\sin \frac{(j+1)\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Mit derselben Berechnung wie oben folgt dann

$$M \cdot u_j = \begin{cases} \sin \frac{(i-1)\pi}{m} \left(\cos \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ gerade,} \\ \sin \frac{i\pi}{m} \left(\cos \frac{j\pi}{n}, \sin \frac{j\pi}{n} \right), & \text{für } j-n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Abhängig von der Parität von n ist jetzt $M(Q(i)) = P_n(\sin \frac{(i-1)\pi}{m}, \sin \frac{i\pi}{m})$ für n gerade und $M(Q(i)) = P_n(\sin \frac{i\pi}{m}, \sin \frac{(i-1)\pi}{m})$ für n ungerade.

Ist $i \in \{1, m\}$, so lässt sich der Beweis bis auf das Zählen der Diagonalen genauso durchführen. Da in diesen beiden Fällen die Hälfte der Diagonalen jeweils zu einem Punkt degeneriert ist, sind $Q(1)$ und $Q(m)$ keine echten $2n$ -Ecke, sondern n -Ecke. \square

Wir wissen jetzt, dass $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ aus den Polygonen $P(1), \dots, P(m)$ besteht. Wichtig für die Translationsstruktur ist aber auch, wie diese $2n$ -Ecke verklebt werden. Diese Information können wir direkt von den Verklebungen der $2n$ -Ecke $Q(1), \dots, Q(m)$, die die Fläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ bilden, übertragen. Im Beweis der letzten Proposition ist durch Vergleich der expliziten Beschreibung von u_j in $Q(i)$ als Diagonale mit der von $u_{j\pm n}$ in $Q(i+1)$ bzw. $Q(i-1)$ folgende Verklebevorschrift nachzulesen:

- i gerade, j gerade: u_j in $Q(i)$ wird mit $u_{j\pm n}$ in $Q(i+1)$ verklebt
- i gerade, j ungerade: u_j in $Q(i)$ wird mit $u_{j\pm n}$ in $Q(i-1)$ verklebt
- i ungerade, $n-j$ gerade: u_j in $Q(i)$ wird mit $u_{j\pm n}$ in $Q(i-1)$ verklebt
- i ungerade, $n-j$ ungerade: u_j in $Q(i)$ wird mit $u_{j\pm n}$ in $Q(i+1)$ verklebt

Die Verklebungen können also dadurch angegeben werden, dass für gerades i die Kante u_j in $Q(i)$ mit der gegenüberliegenden Kante von $Q(i+1)$ für gerades j und von $Q(i-1)$ für ungerades j verklebt wird. Insbesondere gilt damit auch:

Bemerkung 4.6. Die Verklebungen der $2n$ -Ecke $P(i)$, $i = 1, \dots, m$, in $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ sind so, dass für gerades i die Kante v_j in $P(i)$ mit der gegenüberliegenden Kante $v_{j\pm n}$ von $P(i+1)$ für gerades j und von $P(i-1)$ für ungerades j verklebt wird.

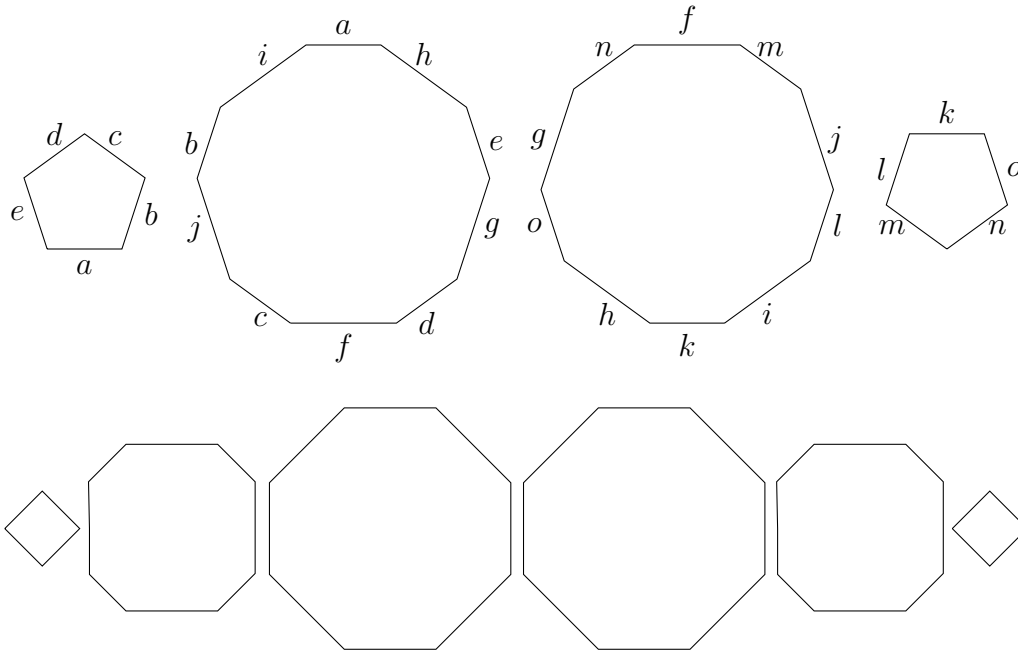


Abbildung 11: Zerlegung in $2n$ -Ecke für die Flächen $(Y_{4,5}, \eta_{4,5})$ und $(Y_{6,4}, \eta_{6,4})$

Beispiel 4.7. In Abbildung 11 sind zwei Beispiele für solche $2n$ -Ecke zu sehen. Die erste Grafik zeigt die Fläche $(Y_{4,5}, \eta_{4,5})$, wobei zwei Kanten, die mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet sind, verklebt werden sollen. In der zweiten Grafik ist $(Y_{6,4}, \eta_{6,4})$ ohne explizite Angabe der Verklebungen zu sehen. Die Kante v_0 ist dabei immer unten und die Kanten werden abwechselnd mit der gegenüberliegenden Kante im nächsten $2n$ -Eck und der gegenüberliegenden Kante im vorigen $2n$ -Eck verklebt.

Bemerkung 4.8 (Doppel- n -Ecke). Als Spezialfall der Fläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ für $m = 2$ erhalten wir die Doppel- n -Ecke, die in [Vee] eingeführt worden sind. Seit dieser ersten Erwähnung wurden sie häufig besprochen, zum Beispiel in Kapitel 4 in [Vor] und in [Fre].

Wir können noch eine weitere Eigenschaft der Fläche $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ ausnutzen, um mehr über die Fläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ zu erfahren, denn der affine Homöomorphismus μ erhält die Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit bleibt die Eigenrichtung eines horizontalen Zylinders von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ unter μ erhalten, auch wenn der Umfang des Zylinders um den Faktor $\csc \frac{\pi}{n}$ verändert wird. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ unter μ auf $\begin{pmatrix} -\cot \frac{\pi}{n} \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet wird, bleibt die Höhe des Zylinders erhalten. Die Fläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ hat also ebenfalls eine horizontale Zylinderzerlegung. Da der Modulus der Zylinder von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ nach Bemerkung 3.4 jeweils $2 \cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{\pi}{m}$ ist, hat jeder Zylinder der horizontalen Zylinderzerlegung von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ den Modulus $\csc \frac{\pi}{n} \cdot (2 \cos \frac{\pi}{n} + 2 \cos \frac{\pi}{m})$. Für das Beispiel $(Y_{4,5}, \eta_{4,5})$ von oben ist die horizontale Zylinderzerlegung in Abbildung 12 graphisch verdeutlicht.

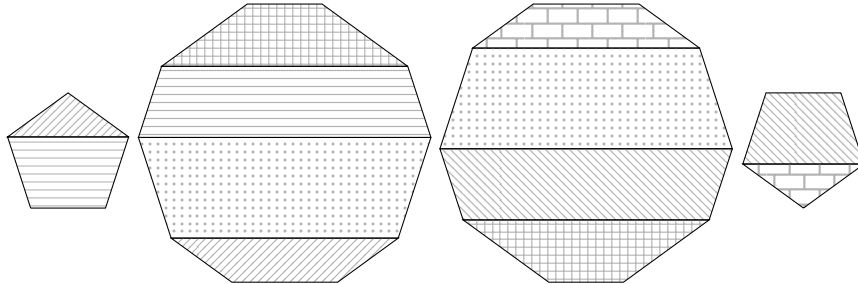


Abbildung 12: Zylinderzerlegung der Fläche $(Y_{4,5}, \eta_{4,5})$

4.3 Das Geschlecht von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$

Bemerkung 4.9. Der Innenwinkel eines regelmäßigen n -Ecks beträgt $\frac{n-2}{n}\pi$, der Innenwinkel eines halbregelmäßigen $2n$ -Ecks beträgt $\frac{n-1}{n}\pi$.

Beweis. Ein n -Eck hat die Innenwinkelsumme $(n-2)\pi$, also misst jeder Innenwinkel $\frac{n-2}{n}\pi$.

Mit Definition 4.4 und dem Mittelpunktswinkelsatz können wir zeigen, dass auch die Innenwinkel eines halbregelmäßigen $2n$ -Ecks immer gleich groß sind und daher $\frac{2n-2}{2n}\pi$ betragen. \square

Betrachte eine Ecke des n -Ecks $P(1)$. Der Winkel um diese Ecke in $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ soll jetzt bestimmt werden. Dabei ist zu beachten, dass diese Ecke auch eine Ecke von $P(2)$ ist, damit auch eine Ecke von $P(3)$ und in insgesamt $m - 1$ Schritten schließlich auch eine Ecke von $P(m)$. Nach nochmals $m - 1$ Schritten sind wir wieder bei einer Ecke in $P(1)$, allerdings nicht unbedingt bei derselben, mit der wir angefangen haben. Werden die Innenwinkel um diese Ecken in $P(1), \dots, P(m-1), P(m), P(m-1), \dots, P(2)$ zusammengezählt, ergibt sich mit Bemerkung 4.9

$$\frac{n-2}{n}\pi + 2(m-2) \cdot \frac{n-1}{n}\pi + \frac{n-2}{n}\pi = (2(m-2)(n-1) + 2(n-2)) \cdot \frac{\pi}{n} = (2mn - 2m - 2n) \frac{\pi}{n}.$$

Wir bezeichnen zwei Ecken der Polygone $P(1), \dots, P(m)$ als *äquivalent*, wenn sie in $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ miteinander identifiziert werden. Sind also a der n Ecken in $P(1)$ zu unserer gewählten Startecke äquivalent, so beträgt der gesamte Winkel um diese Ecke in $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$

$$a(2mn - 2m - 2n) \frac{\pi}{n} = -2a\pi + am(n-1) \frac{2\pi}{n}.$$

Da dies ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein muss, gilt $n \mid am$ und damit muss a ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{n}{\text{ggT}(m,n)}$ sein.

Mit dieser Überlegung lassen sich die Singularitäten von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ bestimmen.

Proposition 4.10 (Singularitäten auf $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$)

In $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ gibt es $\text{ggT}(m, n)$ Äquivalenzklassen von Ecken der Polygone $P(1), \dots, P(m)$. Der Winkel um eine solche Ecke beträgt $\frac{mn-m-n}{\text{ggT}(m,n)} \cdot 2\pi$.

Beweis. Die kleinste natürliche Zahl a , für die der Ausdruck $a(2mn - 2m - 2n) \frac{\pi}{n}$ ein Vielfaches von 2π ist, ist $\frac{n}{\text{ggT}(m,n)}$. Also gibt es nach Definition von a zu einer festen Ecke in $P(1)$ genau $\frac{n}{\text{ggT}(m,n)}$ Ecken in $P(1)$, die zu ihr äquivalent sind. Da jede Ecke in einem $P(i)$, $i = 2, \dots, m$, zu einer Ecke in $P(1)$ äquivalent ist, werden die Ecken aller $2n$ -Ecke zu insgesamt $n \cdot \frac{\text{ggT}(m,n)}{n} = \text{ggT}(m, n)$ Punkten auf $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ identifiziert. Es gibt also $\text{ggT}(m, n)$ Äquivalenzklassen von Ecken.

Weiter ist der Winkel um eine solche Ecke $\frac{n}{\text{ggT}(m,n)}(2mn - 2m - 2n) \frac{\pi}{n} = \frac{mn-m-n}{\text{ggT}(m,n)} \cdot 2\pi$. \square

Proposition 4.11 (Geschlecht von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$)

Das Geschlecht von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ist $\frac{mn-m-n-\text{ggT}(m,n)}{2} + 1$.

Beweis. Die Polygone $P(1), \dots, P(m)$, in die $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ zerlegt werden kann, haben zusammen m Flächen, $(m-1) \cdot n$ Äquivalenzklassen von Kanten und $\text{ggT}(m, n)$ Äquivalenzklassen von Ecken. Also ist die Eulercharakteristik von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$

$$\text{ggT}(m, n) - (m-1) \cdot n + m = m + n + \text{ggT}(m, n) - mn.$$

Damit ist das Geschlecht $1 - \frac{m+n+\text{ggT}(m,n)-mn}{2} = \frac{mn-m-n-\text{ggT}(m,n)}{2} + 1$. \square

Korollar 4.12. Wenn $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ kein Torus ist, ist jede Ecke eines $2n$ -Ecks $P(i)$ eine Singularität in $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$.

Beweis. Eine Ecke ist genau dann regulär, wenn der Winkel um sie 2π beträgt. Es muss also wegen Proposition 4.10 gelten $\frac{mn-m-n}{\text{ggT}(m,n)} = 1$ bzw. $mn - m - n = \text{ggT}(m, n)$. Das ist nach Proposition 4.11 genau dann der Fall, wenn die Eulercharakteristik 0 ist und damit $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ein Torus ist. \square

Bemerkung 4.13. $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ist genau dann ein Torus, wenn

$$(m, n) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}$$

gilt, da dies die einzigen Paare (m, n) sind, die die Gleichung $mn - m - n = \text{ggT}(m, n)$ erfüllen.

4.4 Die orthogonale Gruppe von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$

Wie wir in Abschnitt 1.2 gesehen haben, hängen die parabolischen Elemente der Veechgruppe mit der orthogonalen Gruppe zusammen. Daher wollen wir in diesem Abschnitt eine Spiegelung und eine Drehspiegelung untersuchen, die in den meisten Fällen die orthogonale Gruppe erzeugen.

Wir definieren zunächst die Matrizen

$$E := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y_n := \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & -\cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

Außerdem betrachten wir noch die Matrix

$$Y_n E Y_n = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi}{n} & \sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}.$$

Fassen wir diese Matrizen als Bewegungen der Ebene auf, so operiert E als Spiegelung an der y -Achse, Y_n als Hintereinanderausführung einer Spiegelung an der x -Achse und einer Drehung um $-\frac{\pi}{n}$ (mathematisch positiv) und $Y_n E Y_n$ als Hintereinanderausführung einer Spiegelung an der y -Achse und einer Drehung um $-\frac{2\pi}{n}$.

Es ergibt sich damit, dass E und $Y_n E Y_n$ bis auf Translation die halbregelmäßigen $2n$ -Ecke erhalten. Ist n ungerade, so erhält auch Y_n die $2n$ -Ecke. Ist dagegen n gerade und m ungerade, so gilt $Y_n(P(i)) = P(m+1-i)$ bis auf Translation. Bei der Operation von E und von $Y_n E Y_n$ werden gegenüberliegende Kanten der $2n$ -Ecke wieder auf gegenüberliegende Kanten abgebildet, so dass die Verklebungen erhalten bleiben. Ist n ungerade, gilt dies auch für die Operation von Y_n . Ist dagegen n gerade und m ungerade, so wird eine Kante v_j in $P(i)$, die mit $v_{j\pm n}$ in $P(i \pm 1)$ verklebt ist, auf $v_{j\pm n-1}$ in $P(m+1-i)$ abgebildet und mit v_{j-1} in $P(m+1-i \mp 1)$ verklebt. Also bleiben auch in diesem Fall die Verklebungen erhalten.

Da E und Y_n die Metrik erhalten, die wie in Bemerkung 1.5 beschrieben von der euklidischen Metrik induziert wird, sind E und $Y_n E Y_n$ Elemente der orthogonalen Untergruppe von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$. Auch Y_n ist in dieser orthogonalen Untergruppe, wenn m und n nicht beide gerade sind. Damit haben wir sogar schon Erzeuger der orthogonalen Untergruppe gefunden, wie die nächste Proposition zeigt.

Proposition 4.14 (Orthogonale Untergruppen von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$)

Ist $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ kein Torus und sind m und n nicht beide gerade, so ist $\langle E, Y_n \rangle$ die orthogonale Untergruppe von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$.

Ist $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ kein Torus und sind m und n beide gerade, so ist $\langle E, Y_n E Y_n \rangle$ die orthogonale Untergruppe von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$.

Beweis. Wir müssen noch zeigen, dass keine weitere Matrizen in der orthogonalen Untergruppe von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ liegen können.

Ein Element aus dieser orthogonalen Untergruppe erhält die Längen und Singularitäten, also muss sie die kürzesten Sattelverbindungen von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ permutieren.

Ist $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ kein Torus, so ist nach Korollar 4.12 jede Ecke eines $2n$ -Ecks eine Singularität und damit sind alle Kanten der $2n$ -Ecke Sattelverbindungen. Die kürzesten Sattelverbindungen sind die Kanten der n -Ecke $P(1)$ und $P(m)$. Alle Möglichkeiten, diese Kanten bis auf Translationen zu permutieren, werden von Drehungen um mindestens $\frac{\pi}{n}$ bzw. $\frac{2\pi}{n}$ und Spiegelungen an einer vertikalen Achse erzeugt und sind dadurch schon Elemente von $\langle E, Y_n E Y_n \rangle$ bzw. $\langle E, Y_n \rangle$. \square

Korollar 4.15. Ist $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ kein Torus, so ist die von der Projektion von EY_n bzw. $EY_n E Y_n$ in $PSL(2, \mathbb{R})$ erzeugte Untergruppe eine maximale elliptisch-zyklische Untergruppe von $PSL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ der Ordnung n bzw. $\frac{n}{2}$.

Beweis. E und Y_n sind beide orientierungsumkehrend, daher gilt $E, Y_n \notin SL(2, \mathbb{R})$ und $EY_n \in SL(2, \mathbb{R})$. Aus Proposition 4.14 folgt weiter, dass EY_n bzw. $EY_n E Y_n$ auch in $SL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ enthalten ist und eine maximale zyklische Untergruppe von $SL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ erzeugt.

Die Ordnung von EY_n ist $2n$ und es gilt $(EY_n)^n = -I$. Daher ist n die Ordnung des Bildes von EY_n in $PSL(2, \mathbb{R})$. \square

Kapitel 5

Die Veechgruppe $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$

5.1 Ein Vorschlag für die Veechgruppe $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$

Wir werden jetzt unsere Überlegungen zur Fläche $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ gleich doppelt ausnutzen, um Elemente der Veechgruppe $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ zu finden. Zum einen gibt es nach Definition von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ den affinen Homöomorphismus μ mit Ableitung $D(\mu)$. Zum anderen können wir durch Verknüpfung der Abbildungen ρ aus Lemma 3.5 und

$$\mu': (X_{n,m}, \omega_{n,m}) \rightarrow (Y_{n,m}, \eta_{n,m}) \text{ mit } \text{der}(\mu') = \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: D(\mu')$$

einen weiteren affinen Homöomorphismus

$$\nu := \mu' \circ \rho: (X_{m,n}, \omega_{m,n}) \rightarrow (Y_{n,m}, \eta_{n,m})$$

finden mit Ableitung

$$\begin{aligned} D(\nu) &:= \text{der}(\nu) = \text{der}(\mu') \cdot \text{der}(\rho) = D(\mu') \cdot E \\ &= \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei im Folgenden $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ kein Torus. Unter Ausnutzung von Bemerkung 1.13 können wir dann die in Proposition 4.14 beschriebenen Elemente der erweiterten Veechgruppen $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ bzw. $GL(Y_{n,m}, \eta_{n,m})$ zu Elementen der erweiterten Veechgruppe $GL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ machen. Wir haben folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} &D(\nu)^{-1} \cdot E \cdot D(\nu) \\ &= \begin{pmatrix} -1/\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m}/\csc \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{m} & -\cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{m} & \cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{m} \cdot \csc \frac{\pi}{m} & -\sin \frac{\pi}{m} \cdot \cot \frac{\pi}{m} - \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D(\mu)^{-1} \cdot E \cdot D(\mu) \\
&= \begin{pmatrix} 1/\csc \frac{\pi}{n} & \cot \frac{\pi}{n}/\csc \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{n} & -\cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\csc \frac{\pi}{n} & \cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{n} \cdot \csc \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cot \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D(\mu)^{-1} \cdot Y_n \cdot D(\mu) \\
&= \begin{pmatrix} 1/\csc \frac{\pi}{n} & \cot \frac{\pi}{n}/\csc \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & -\cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{n} & -\cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} \cdot \csc \frac{\pi}{n} & -\cos \frac{\pi}{n} \cdot \cot \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} \cdot \csc \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cot \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{m} & \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cot \frac{\pi}{m} & -(\cos \frac{\pi}{m})^2/\sin \frac{\pi}{m} - \sin \frac{\pi}{m} \\ -1 & \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{m} \cdot \cot \frac{\pi}{m} - \cos \frac{\pi}{m} & -(\cos \frac{\pi}{m})^2 - (\sin \frac{\pi}{m})^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =: C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -I \cdot D(\nu)^{-1} \cdot Y_m \cdot D(\nu) \\
&= - \begin{pmatrix} -1/\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m}/\csc \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{m} & -\sin \frac{\pi}{m} \\ -\sin \frac{\pi}{m} & -\cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{m} & \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{m} \cdot \csc \frac{\pi}{m} & -\cos \frac{\pi}{m} \cdot \cot \frac{\pi}{m} - \sin \frac{\pi}{m} \\ \sin \frac{\pi}{m} \cdot \csc \frac{\pi}{m} & \sin \frac{\pi}{m} \cdot \cot \frac{\pi}{m} - \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin \frac{\pi}{m} & \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cot \frac{\pi}{m} & -(\cos \frac{\pi}{m})^2/\sin \frac{\pi}{m} - \sin \frac{\pi}{m} \\ 1 & \cos \frac{\pi}{m} - \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{m} \cdot \cot \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{m} & -(\cos \frac{\pi}{m})^2 - (\sin \frac{\pi}{m})^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D(\nu)^{-1} \cdot Y_m E Y_m \cdot D(\nu) \\
&= (D(\nu)^{-1} \cdot Y_m \cdot D(\nu)^{-1}) \cdot (D(\nu) \cdot E \cdot D(\nu)^{-1}) \cdot (D(\nu) \cdot Y_m \cdot D(\nu)) = CAC
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\mu)^{-1} \cdot Y_n E Y_n \cdot D(\mu) \\ = (D(\mu)^{-1} \cdot Y_n \cdot D(\mu)^{-1}) \cdot (D(\mu) \cdot E \cdot D(\mu)^{-1}) \cdot (D(\mu) \cdot Y_n \cdot D(\mu)) = CBC \end{aligned}$$

Wir wollen an dieser Stelle festhalten, dass die eben definierten Matrizen A, B und C ebenso wie die Matrix E Ordnung 2 haben. Dadurch haben auch CAC und CBC Ordnung 2.

Mit den Ergebnissen aus Proposition 4.14 und Lemma 3.5 finden wir nun Untergruppen $\Gamma'_{m,n}$ der erweiterten Veechgruppen $GL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$:

- $m \neq n$, m, n nicht beide gerade: $\Gamma'_{m,n} = \langle A, B, C \rangle$
- $m \neq n$, m, n beide gerade: $\Gamma'_{m,n} = \langle A, B, CAC, CBC \rangle$
- $m = n$, m nicht gerade: $\Gamma'_{m,m} = \langle A, C, E \rangle$
- $m = n$, m gerade: $\Gamma'_{m,m} = \langle A, CAC, E \rangle$

Wir bezeichnen mit $\Gamma_{m,n}$ den orientierungserhaltenden Teil der oben beschriebenen Gruppen $\Gamma'_{m,n}$.

Proposition 5.1 (Die Gruppen $\Gamma_{m,n}$)

Es gilt:

- $m \neq n$, m, n nicht beide gerade: $\Gamma_{m,n} = \langle AB, BC \rangle$
- $m \neq n$, m, n beide gerade: $\Gamma_{m,n} = \langle AB, BCAC, CABC \rangle$
- $m = n$, m nicht gerade: $\Gamma_{m,m} = \langle AE, CE \rangle$
- $m = n$, m gerade: $\Gamma_{m,m} = \langle AE, ECAC \rangle$

Beweis. Die Matrizen A, B, C und E haben alle die Determinante -1 , sind also orientierungsumkehrend. Damit besteht der orientierungserhaltende Teil der Gruppen $\Gamma'_{m,n}$ jeweils aus Produkten der Erzeuger von $\Gamma'_{m,n}$ mit einer geraden Anzahl von Faktoren. Die Gruppen $\Gamma_{m,n}$ werden also durch alle Produkte von je zwei Erzeugern von $\Gamma'_{m,n}$ erzeugt. Da alle Erzeuger von Ordnung 2 sind, gilt für zwei Erzeuger X, Y schon $XY = (YX)^{-1}$, also ist die Reihenfolge der Faktoren für die Erzeuger von $\Gamma_{m,n}$ irrelevant.

Weiter gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} AC = AB \cdot BC = AE \cdot (CE)^{-1}, \quad ACAC = AB \cdot BCAC = AE \cdot ECAC, \\ BCBC = BCAC \cdot CABC \quad \text{und} \quad ACBC = AB \cdot BCAC \cdot CABC. \quad \square \end{aligned}$$

Dass $\Gamma_{m,n}$ nicht nur eine Untergruppe von $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ ist, sondern sogar schon Gleichheit gilt, werden wir in Abschnitt 5.3 mit den Überlegungen aus Abschnitt 2.2 beweisen.

Davor wollen wir jedoch noch den hier ausgeschlossenen Spezialfall, dass $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ein Torus ist, behandeln.

Lemma 5.2. Ist $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ein Torus, dann ist $\Gamma_{m,n}$ die markierte Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$.

Beweis. Aus Bemerkung 4.13 wissen wir, dass wir nur die Fälle $(m, n) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}$ untersuchen müssen.

Ist $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ein Torus, dann ist auch $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ ein Torus und wir kennen die Veechgruppe $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ schon aus Beispiel 1.12. Insbesondere gilt: Ist der (markierte) Torus durch Verkleben eines Rechtecks von gleicher Höhe wie Breite entstanden, dann ist seine Veechgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$. Analog zu Lemma 8.10 in [Art] gilt

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ist der Torus durch Verkleben von zwei gleich großen Rechtecken der Breite x und Höhe y , die horizontal verklebt sind, entstanden und sehen wir die Ecken beider Rechtecke als Markierungen an, dann ist nach Satz 1 in [Smo] die markierte Veechgruppe

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \cdot \Gamma \cdot \begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & (2y)^{-1} \end{pmatrix} \text{ mit } \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \pmod{2} \right\}.$$

Da Γ eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{Z})$ ist, gilt analog zu den obigen Überlegungen

$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir berechnen jetzt für jeden der oben aufgeführten Fälle $\Gamma_{m,n}$ und die markierte Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ und vergleichen die beiden Gruppen miteinander.

Für $(m, n) = (2, 3)$ besteht die Zerlegung von $(X_{2,3}, \omega_{2,3})$ aus einem Rechteck mit der Breite $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und der Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die (markierte) Veechgruppe ist also $SL(2, \mathbb{Z})$.

Weiter ist

$$\Gamma_{2,3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq SL(2, \mathbb{Z})$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\Gamma_{2,3} = SL(2, \mathbb{Z}) = SL(X_{2,3}, \omega_{2,3})$.

Für $(m, n) = (2, 4)$ besteht die Zerlegung aus zwei Rechtecken mit jeweils der Breite 1 und der Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, so dass sich ein Rechteck mit der Breite 1 und der Höhe $\sqrt{2}$ ergibt. Der entstandene Torus hat allerdings zwei Markierungen, also ist die markierte Veechgruppe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \Gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Weiter ist

$$\Gamma_{2,4} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \Gamma_{2,4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \Gamma$$

sehen wir durch Invertieren des ersten und dritten Erzeugers, dass $\Gamma_{2,4}$ die markierte Veechgruppe von $(X_{2,4}, \omega_{2,4})$ ist.

Für $(m, n) = (3, 2)$ besteht die Zerlegung wieder aus einem Rechteck mit der Breite $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ und der Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Die (markierte) Veechgruppe ist also $SL(2, \mathbb{Z})$.

Weiter ist

$$\Gamma_{3,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq SL(2, \mathbb{Z})$$

und mit der Rechnung oben und

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass $\Gamma_{3,2} = SL(2, \mathbb{Z}) = SL(X_{3,2}, \omega_{3,2})$ gilt.

Für $(m, n) = (3, 3)$ besteht die Zerlegung aus vier Rechtecken mit jeweils der Breite $\frac{3}{4}$ und der Höhe $\frac{3}{4}$, so dass sich ein Rechteck mit der Breite $\frac{3}{2}$ und der Höhe $\frac{3}{2}$ ergibt. Der Torus hat zwar vier Markierungen, allerdings entspricht die Veechgruppe der des Torus von Breite $\frac{3}{4}$ und Höhe $\frac{3}{4}$ mit einer Markierung. Deshalb ist die (markierte) Veechgruppe trotzdem wieder $SL(2, \mathbb{Z})$.

Weiter ist

$$\Gamma_{3,3} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq SL(2, \mathbb{Z})$$

und mit Invertieren des zweiten Erzeugers können wir analog zum Fall $(m, n) = (3, 2)$ folgern, dass $\Gamma_{3,3} = SL(2, \mathbb{Z}) = SL(X_{3,3}, \omega_{3,3})$ gilt.

Für $(m, n) = (4, 2)$ besteht die Zerlegung aus zwei Rechtecken mit jeweils der Breite 1 und der Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, so dass sich ein Rechteck mit der Breite 1 und der Höhe $\sqrt{2}$ ergibt.

Wie im Fall $(m, n) = (2, 4)$ ist die markierte Veechgruppe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \Gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Weiter ist

$$\Gamma_{4,2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und wieder analog zum Fall $(m, n) = (2, 4)$ ist $\Gamma_{4,2}$ die markierte Veechgruppe von $(X_{2,4}, \omega_{2,4})$. \square

5.2 Der Fundamentalbereich von $\Gamma_{m,n}$

Wir werden in diesem Abschnitt die Vorbereitungen treffen, um Satz 1 anwenden zu können. Daher werden wir eigentlich die projektiven Untergruppen $\Gamma'_{m,n} \cap PS^*L(2, \mathbb{R})$

bzw. $\Gamma_{m,n} \cap PSL(2, \mathbb{R})$ von $\Gamma'_{m,n}$ bzw. $\Gamma_{m,n}$ betrachten. Da aber die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ trivial als Möbiustransformation operiert, werden wir die zu untersuchenden Gruppen im Folgenden trotzdem mit $\Gamma'_{m,n}$ und $\Gamma_{m,n}$ bezeichnen.

Um Singularitäten und Punktierungen von $\mathbb{H}/\Gamma_{m,n}$ zu finden, werden wir in diesem Abschnitt die Fundamentalbereiche der Operation von $\Gamma_{m,n}$ berechnen. Dazu werden wir eine Methode verwenden, die im Kapitel 4.4 von [Kat] genauer ausgeführt ist.

Definition 5.3 (Hyperbolische Spiegelung)

Eine *hyperbolische Spiegelung* an einer hyperbolischen Geraden g ist eine hyperbolische Isometrie, deren Fixpunkte genau die Punkte auf g sind.

Proposition 5.4 (Fundamentalbereiche von Dreiecksgruppen)

Sei Δ ein hyperbolisches Dreieck mit den Seiten M_1, M_2, M_3 und den Innenwinkeln $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$ mit $m_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $i = 1, 2, 3$. Sei weiter R_i die hyperbolische Spiegelung an der hyperbolischen Geraden, die M_i enthält, $i = 1, 2, 3$, und $\Gamma' := \langle R_1, R_2, R_3 \rangle$.

Dann ist Δ ein Fundamentalbereich von Γ' und $\Delta \cup R_1(\Delta)$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma := \Gamma' \cap PSL(2, \mathbb{R})$.

Diese Aussage wird in [Kat] durch folgende Überlegungen bewiesen:

Die Familie $\{\gamma(\Delta) : \gamma \in \Gamma'\}$ bildet eine Parkettierung von \mathbb{H} , also ist Δ ein Fundamentalbereich für Γ' . Es ist $\Gamma \cup R_1 \cdot \Gamma = \Gamma'$. Aus Satz 3.1.2 in [Kat] folgt dann, dass $\Delta \cup R_1(\Delta)$ ein Fundamentalbereich von Γ ist.

Analog lässt sich die Proposition auch für ein allgemeines n -Eck statt einem Dreieck zeigen, falls die Familie $\{\gamma(\Delta) : \gamma \in \Gamma'\}$ tatsächlich eine Parkettierung bildet. Das ist für n -Ecke aber im Allgemeinen nicht so.

Definition 5.5 (Dreiecksgruppe)

Die Gruppe Γ' in der vorigen Proposition wird wegen ihrer geometrischen Interpretation *Dreiecksgruppe* genannt und mit $\Delta(m_1, m_2, m_3)$ bezeichnet. Der orientierungserhaltende Teil Γ wird häufig auch mit $\Delta^+(m_1, m_2, m_3)$ bezeichnet.

Die Gruppen $\Gamma'_{m,n}$ aus dem vorigen Abschnitt sind eng verwandt mit Dreiecksgruppen, da die Matrizen A, B, C und E als Spiegelungen auf der oberen Halbebene operieren, wie die nächste Proposition genauer ausführt.

Dabei verwenden wir wie in [Kat] die Bezeichnung $PS^*L(2, \mathbb{R})$ für $S^*L(2, \mathbb{R})/\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$, wobei $S^*L(2, \mathbb{R})$ die Untergruppe der Matrizen mit Determinante ± 1 in $GL(2, \mathbb{R})$ ist.

$PS^*L(2, \mathbb{R})$ ist nach Satz 1.3.1 in [Kat] isomorph zur Gruppe der Isometrien auf der oberen Halbebene \mathbb{H} und ein Element $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PS^*L(2, \mathbb{R})$ operiert auf \mathbb{H} entweder orientierungserhaltend durch die Möbiustransformation $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ (für $\det(M) = 1$) oder orientierungsumkehrend durch $M(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ (für $\det(M) = -1$).

Proposition 5.6 (A, B, C, E operieren als Spiegelungen auf \mathbb{H})

Als Elemente von $PS^*L(2, \mathbb{R})$ operieren die Matrizen folgendermaßen auf \mathbb{H} :

- A ist die Spiegelung an der euklidischen Halbgeraden $-\cos \frac{\pi}{m} + i\hat{\mathbb{R}}^+$
- B ist die Spiegelung an der euklidischen Halbgeraden $\cos \frac{\pi}{n} + i\hat{\mathbb{R}}^+$
- C ist die Spiegelung am euklidischen Halbkreis um 0 mit Radius 1
- E ist die Spiegelung an der euklidischen Halbgeraden $i\hat{\mathbb{R}}^+$
- CAC ist die Spiegelung am euklidischen Halbkreis um $-\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{m}$ mit Radius $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{m}$
- CBC ist die Spiegelung am euklidischen Halbkreis um $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{n}$ mit Radius $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{n}$

Dabei ist $\hat{\mathbb{R}}^+ := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\} \cup \{\infty\}$.

Beweis. Die Determinante von A, B, C, E und damit auch von CAC und CBC ist jeweils -1 , also sind die Operationen orientierungsumkehrend.

Für $z \in \mathbb{H}$ ist $A(z) = -\bar{z} - 2 \cos \frac{\pi}{m}$, $B(z) = -\bar{z} + 2 \cos \frac{\pi}{n}$, $C(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ und $E(z) = -\bar{z}$. Als Fixpunkte erhalten wir dann jeweils eine hyperbolische Fixpunktgerade, woraus die ersten vier Aussagen folgen.

$CAC = CAC^{-1}$ ist eine Spiegelung am Bild der Spiegelungsachse von A unter C . Dieses Bild enthält

$$\frac{1}{-\cos \frac{\pi}{m} + i \cdot 0} = -\sec \frac{\pi}{m} \quad \text{und} \quad \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{m} + i \cdot \infty} = 0$$

und ist eine hyperbolische Gerade, also in diesem Fall ein euklidischer Halbkreis um $-\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{m}$ durch 0.

Analoges gilt für CBC und das Bild der Spiegelungsachse von B unter C . □

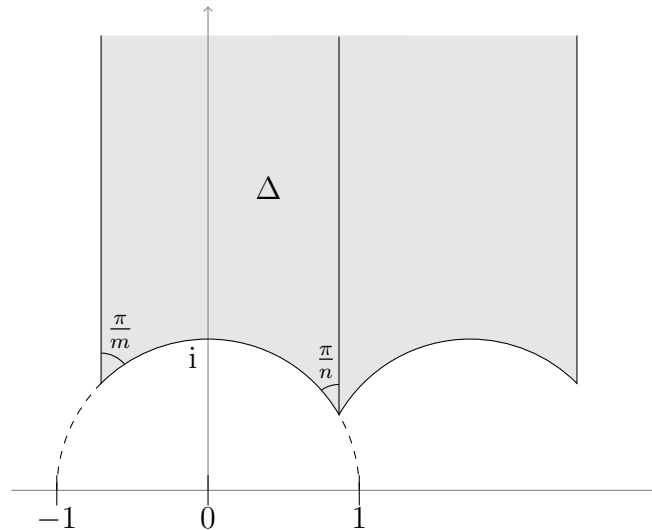


Abbildung 13: Fundamentalbereich von $\langle AB, BC \rangle$

Proposition 5.7 (Fundamentalbereich von $\langle AB, BC \rangle$)

Das hyperbolische Viereck mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$, $\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$ und $2 \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ ist ein Fundamentalbereich der Gruppe $\langle AB, BC \rangle$.

Beweis. Betrachte zunächst das hyperbolische Dreieck Δ mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ und $\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$. Zwei der Seiten des Dreiecks sind euklidische Halbgeraden, die dritte Seite ist Teil des euklidischen Halbkreises um 0 mit Radius 1. Die Innenwinkel bei $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ bzw. $\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$ betragen $\frac{\pi}{m}$ bzw. $\frac{\pi}{n}$. A , B und C sind die Spiegelungen an den Seiten des Dreiecks, also ist Δ nach Proposition 5.4 ein Fundamentalbereich von $\langle A, B, C \rangle$. Damit ist also auch $\Delta \cup B(\Delta)$ ein Fundamentalbereich von $\langle A, B, C \rangle \cap PSL(2, \mathbb{R}) = \langle AB, BC \rangle$. \square

Bemerkung 5.8. In Abbildung 13 werden durch AB die beiden euklidischen Halbgeraden identifiziert und durch BC die beiden euklidischen Kreisbögen. Also hat $\mathbb{H} / \langle AB, BC \rangle$ Geschlecht 0 und eine Spitze.

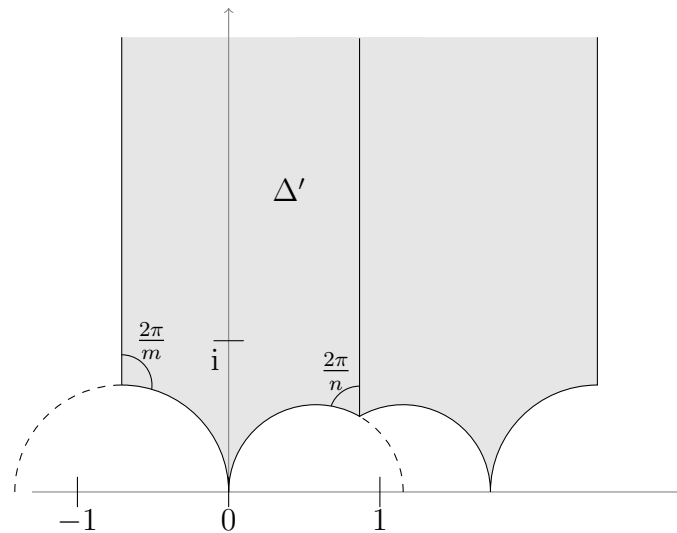


Abbildung 14: Fundamentalbereich von $\langle AB, BCAC, CAB \rangle$

Proposition 5.9 (Fundamentalbereich von $\langle AB, BCAC, CAB \rangle$)

Das hyperbolische Fünfeck mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$, 0 , $\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$, $2 \cos \frac{\pi}{n}$ und $2 \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ ist ein Fundamentalbereich der Gruppe $\langle AB, BCAC, CAB \rangle$.

Beweis. Betrachte zunächst das hyperbolische Viereck Δ' mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$, 0 und $\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$. Zwei der Seiten des Vierecks sind euklidische Halbgeraden, die dritte Seite ist Teil des euklidischen Halbkreises um $-\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{m}$ mit Radius $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{m}$ und die vierte Seite ist Teil des euklidischen Halbkreises um $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{n}$ mit Radius $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{n}$. Die Innenwinkel bei $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ bzw. $\cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n}$ betragen $\frac{2\pi}{m}$ bzw. $\frac{2\pi}{n}$. A , B , CAC und CBC sind also die Spiegelungen an den Seiten des Vierecks.

Ist Δ das hyperbolische Dreieck aus Proposition 5.7, so gilt $\Delta' = \Delta \cup C(\Delta)$, denn die Spiegelungssachse von A wird unter der Operation von C auf die Spiegelungssachse von CAC abgebildet, ebenso die von B auf die von CBC . Da auch

$$\langle A, B, C \rangle = \langle A, B, CAC, CBC \rangle \cup C \cdot \langle A, B, CAC, CBC \rangle$$

gilt, folgt wieder mit Satz 3.1.2 aus [Kat], dass das hyperbolische Viereck Δ' ein Fundamentalbereich von $\langle A, B, CAC, CBC \rangle$ ist.

Damit ist $\Delta' \cup B(\Delta')$ analog zu Proposition 5.4 ein Fundamentalbereich von

$$PSL(2, \mathbb{R}) \cap \langle A, B, CAC, CBC \rangle = \langle AB, BCAC, CAB \rangle. \quad \square$$

Bemerkung 5.10. In Abbildung 14 werden durch AB die beiden euklidischen Halbgeraden identifiziert, durch $BCAC$ die beiden äußeren euklidischen Kreisbögen und durch $BCBC = BCAC \cdot CAB$ die übrigen beiden euklidischen Kreisbögen. Also hat $\mathbb{H} / \langle AB, BCAC, CAB \rangle$ Geschlecht 0 und zwei Spitzen.

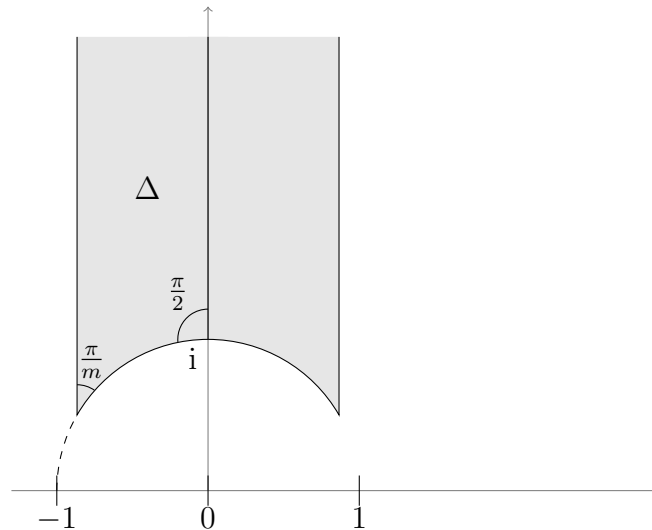


Abbildung 15: Fundamentalbereich von $\langle AE, CE \rangle$

Proposition 5.11 (Fundamentalbereich von $\langle AE, CE \rangle$)

Das hyperbolische Viereck mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$, i und $\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ ist ein Fundamentalbereich der Gruppe $\langle AE, CE \rangle$.

Beweis. Betrachte zunächst das hyperbolische Dreieck Δ mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ und i . Zwei der Seiten des Dreiecks sind euklidische Halbgeraden, die dritte Seite ist Teil des euklidischen Halbkreises um 0 mit Radius 1. Die Innenwinkel bei $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ bzw. i betragen $\frac{\pi}{m}$ bzw. $\frac{\pi}{2}$.

A , C und E sind die Spiegelungen an den Seiten des Dreiecks, also ist Δ nach Proposition 5.4 ein Fundamentalbereich von $\langle A, C, E \rangle$. Damit ist also auch $\Delta \cup E(\Delta)$ ein Fundamentalbereich von $\langle A, C, E \rangle \cap PSL(2, \mathbb{R}) = \langle AE, CE \rangle$. \square

Bemerkung 5.12. In Abbildung 15 werden durch AE die beiden euklidischen Halbgeraden identifiziert und durch CE die beiden euklidischen Kreisbögen. Also hat $\mathbb{H}/\langle AE, CE \rangle$ Geschlecht 0 und eine Spitze.

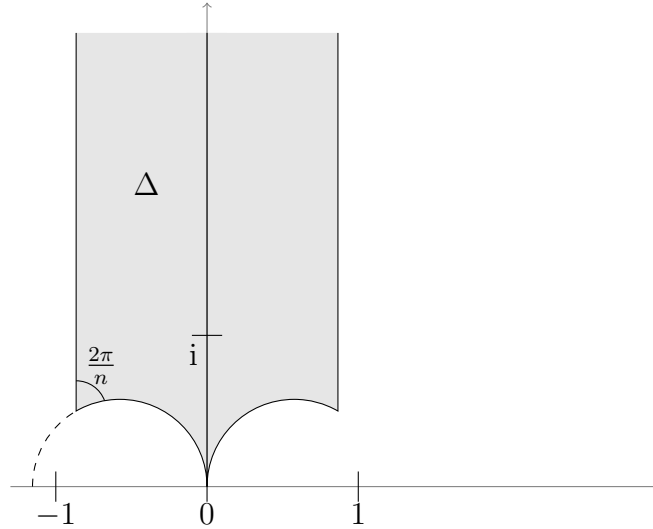


Abbildung 16: Fundamentalbereich von $\langle AE, ECAC \rangle$

Proposition 5.13 (Fundamentalbereich von $\langle AE, ECAC \rangle$)

Das hyperbolische Viereck mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$, 0 und $\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ ist ein Fundamentalbereich der Gruppe $\langle AE, ECAC \rangle$.

Beweis. Betrachte zunächst das hyperbolische Dreieck Δ mit den Ecken ∞ , $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ und 0 . Zwei der Seiten des Dreiecks sind euklidische Halbgeraden, die dritte Seite ist Teil des euklidischen Halbkreises um $-\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{m}$ mit Radius $\frac{1}{2} \sec \frac{\pi}{m}$. Die Innenwinkel bei $-\cos \frac{\pi}{m} + i \sin \frac{\pi}{m}$ bzw. 0 betragen $\frac{2\pi}{m}$ bzw. 0 .

A , E und CAC sind die Spiegelungen an den Seiten des Dreiecks, also ist Δ nach Proposition 5.4 ein Fundamentalbereich von $\langle A, E, CAC \rangle$. Damit ist also auch $\Delta \cup E(\Delta)$ ein Fundamentalbereich von $\langle A, E, CAC \rangle \cap PSL(2, \mathbb{R}) = \langle AE, ECAC \rangle$. \square

Bemerkung 5.14. In Abbildung 16 werden durch AE die beiden euklidischen Halbgeraden identifiziert und durch $ECAC$ die beiden euklidischen Kreisbögen. Also hat $\mathbb{H}/\langle AE, ECAC \rangle$ Geschlecht 0 und zwei Spitzen.

Damit wir im nächsten Abschnitt die Überlegungen aus Abschnitt 1.2 anwenden können, müssen wir uns noch davon überzeugen, dass die Fundamentalbereiche auch Dirichletbereiche sind. Dazu wählen wir einen Punkt p auf der Spiegelungsachse von B bzw. E , der im Inneren des Fundamentalbereichs liegt. Um den in p zentrierten Dirichletbereich zu erhalten, können wir eine Methode benutzen, die in Abschnitt 3.2 in [Kat] beschrieben wird: Für jedes Element $\gamma \in \Gamma_{m,n}$ betrachten wir die Punkte, die gleich weit von p und

$\gamma \cdot p$ entfernt sind. Diese Punktmenge ist eine Geodätische L_γ und definiert dadurch zwei Halbebenen, von denen wir diejenige H_γ nennen wollen, die p enthält. Der Schnitt über alle H_γ ist gerade der in p zentrierte Dirichletbereich.

Da für Spiegelungen die Geodätische L_γ die jeweilige Spiegelungsachse ist, erhalten wir auf diese Weise gerade die oben beschriebenen Fundamentalbereiche, die damit auch Dirichletbereiche sind.

Bemerkung 5.15. Aus den Überlegungen zu den Fundamentalbereichen können wir jetzt auch folgern, wann die Bilder der Gruppen $\Gamma'_{m,n} \subseteq S^*L(2, \mathbb{R})$ in $PS^*L(2, \mathbb{R})$ Dreiecksgruppen sind:

- $m \neq n$, m, n nicht beide gerade: Die Projektion von $\Gamma'_{m,n} = \langle A, B, C \rangle$ ist die Dreiecksgruppe $\Delta(m, n, \infty)$.
- $m \neq n$, m, n beide gerade: Die Projektion von $\Gamma'_{m,n} = \langle A, B, CAC, CBC \rangle$ ist eine Untergruppe von $\langle A, B, C \rangle$ vom Index 2.
- $m = n$, m nicht gerade: Die Projektion von $\Gamma'_{m,m} = \langle A, C, E \rangle$ ist die Dreiecksgruppe $\Delta(2, m, \infty)$.
- $m = n$, m gerade: Die Projektion von $\Gamma'_{m,m} = \langle A, CAC, E \rangle$ ist die Dreiecksgruppe $\Delta(\frac{m}{2}, \infty, \infty)$.

5.3 $\Gamma_{m,n}$ ist die Veechgruppe

Wir wollen jetzt die Überlegungen zur Überprüfung von Veechgruppen aus Abschnitt 2.2 anwenden. Dabei sei weiterhin $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ kein Torus.

Es sei $M := \mathbb{H}/\Gamma_{m,n}$ und $N := \mathbb{H}/SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$. Wir wissen schon, dass es eine Orbifaltigkeits-Überlagerung $\pi: O_M \rightarrow O_N$ gibt, und wollen zeigen, dass diese den Grad 1 hat. Dazu wird wegen Proposition 2.18 nur noch $\chi(O_M) \geq \chi(O_N)$ benötigt, da $\chi(O_N)$ und $\chi(O_M)$ negativ sind, wie wir im Folgenden sehen werden.

Um Satz 1 anwenden zu können, müssen wir noch wissen, dass $\Gamma_{m,n}$ ein Gitter ist. Das können wir jedoch aus den Überlegungen zu den Fundamentalbereichen schließen.

Außerdem wissen wir aus Bemerkung 5.8, Bemerkung 5.10, Bemerkung 5.12 und Bemerkung 5.14, dass M eine (punktierte) Sphäre ist. Nach der Formel von Riemann-Hurwitz (siehe Satz 17.14 in [For]) muss damit auch N eine (punktierte) Sphäre sein, da N von M überlagert wird. Die Kompaktifizierungen M^\bullet und N^\bullet haben also Eulercharakteristik 2.

Damit lässt sich die Formel für die Eulerzahl aus Proposition 2.23 wahlweise umformen zu

$$\chi(O_M) = 2 + \sum_{\sigma \in S_M} \left(\frac{1}{|\Gamma_\sigma|} - 1 \right),$$

wobei S_M die Menge der Spitzen und Ecken des Fundamentalbereichs ist, oder zu

$$\chi(O_M) = 2 + \sum_{\sigma \in S_M} \left(\frac{1}{|\sigma|} - 1 \right),$$

wobei S_M eine Menge von elliptischen und parabolischen Elementen ist, so dass die von den Elementen aus S_M erzeugten Untergruppen ein Vertretersystem der Konjugationsklassen von maximalen elliptisch-zyklischen und parabolisch-zyklischen Untergruppen sind. Dabei bietet sich die erste Variante für die Bestimmung der Eulerzahl von M an, da wir aus den Fundamentalbereichen direkt die Spitzen und die Ecken ablesen können. Beträgt dabei an einer Ecke σ der Innenwinkel $\frac{2\pi}{a}$, so ist a die Ordnung der zugehörigen Gruppe Γ_σ . Mit Innenwinkel ist dabei der gesamte Winkel um die zu σ äquivalenten Ecken auf dem Rand des Fundamentalbereichs gemeint.

Aus Proposition 5.7, Proposition 5.9, Proposition 5.11, Proposition 5.13 und den jeweils nachfolgenden Bemerkungen können wir also folgern:

- $m \neq n$, m, n nicht beide gerade: $\chi(O_M) = 2 + (\frac{1}{m} - 1) + (\frac{1}{n} - 1) + (0 - 1) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1$
- $m \neq n$, m, n beide gerade: $\chi(O_M) = 2 + (\frac{2}{m} - 1) + (\frac{2}{n} - 1) + (0 - 1) + (0 - 1) = \frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 2$
- $m = n$, m nicht gerade: $\chi(O_M) = 2 + (\frac{1}{m} - 1) + (\frac{1}{2} - 1) + (0 - 1) = \frac{1}{m} - \frac{1}{2}$
- $m = n$, m gerade: $\chi(O_M) = 2 + (\frac{2}{m} - 1) + (0 - 1) + (0 - 1) = \frac{2}{m} - 1$

Insbesondere gilt $\chi(O_M) < 0$.

Jetzt fehlt noch eine Abschätzung für die Eulerzahl von O_N . Dabei gilt, dass der Ausdruck für die Eulerzahl von O_N kleiner wird, wenn mehr Singularitäten und Punktierungen bzw. Erzeuger von nicht-konjugierten maximalen elliptisch-zyklischen und parabolisch-zyklischen Untergruppen dazugezählt werden. Wird nur eine Teilmenge von S_M betrachtet, so ist dies eine Abschätzung der Eulerzahl nach oben.

Wenn es eine Zylinderzerlegung von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ gibt, existiert nach Proposition 1.25 auch ein parabolisches Element, das entlang dieser Zylinderzerlegung schert. Die Ordnung eines parabolischen Elements ist immer unendlich, daher brauchen wir nicht unbedingt das parabolische Element finden, das die zugehörige maximale parabolisch-zyklische Untergruppe erzeugt, sondern nur ein Element daraus.

Da $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ eine horizontale und eine vertikale Zylinderzerlegung hat, gibt es also zwei maximale parabolisch-zyklische Untergruppen der projektiven Veechgruppe, die aber konjugiert sein können. Sind wir jedoch im Fall, dass m und n beide gerade sind, so sind $m - 1$ und $n - 1$ beide ungerade und daher ist die Anzahl der Ecken in $\mathcal{G}_{m,n}$ ungerade. Da jede Ecke genau einem (horizontalen oder vertikalen) Zylinder entspricht, kann es nicht gleich viele horizontale wie vertikale Zylinder geben. Da die Zylinderzerlegungen aber schon maximal sind, kann es folglich kein Element in der Veechgruppe geben, das horizontale auf vertikale Zylinder abbildet. Nach Bemerkung 1.26 sind damit im

Fall, dass m und n beide gerade sind, die zugehörigen maximalen parabolisch-zyklischen Untergruppen nicht zueinander konjugiert.

Wenden wir uns nun den maximalen elliptisch-zyklischen Untergruppen zu:

Für den Fall $m = n$ gibt es ein elliptisches Element in $PSL(X_{m,m}, \omega_{m,m})$ der Ordnung 2, nämlich das Bild von EC in $PSL(X_{m,m}, \omega_{m,m})$. Das ist zwar nicht unbedingt maximal, liegt aber in einer maximalen elliptisch-zyklischen Untergruppe. Deren Ordnung wird dann von 2 geteilt.

Mit den orthogonalen Untergruppen von $GL(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$, die wir in Proposition 4.14 beschrieben haben, haben wir noch mehr geeignete elliptische Elemente gefunden, die sogar maximale Untergruppen erzeugen (siehe Korollar 4.15). Durch Konjugation mit $D(\nu)$ bzw. $D(\mu)$ können wir EY_n bzw. $EY_n EY_n$ und EY_m bzw. $EY_m EY_m$ als Elemente der Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ auffassen. Dabei wird die Maximalitätseigenschaft nicht verletzt und wir erhalten insgesamt:

- $m \neq n$, m, n nicht beide gerade: Es gibt eine maximale elliptisch-zyklische Untergruppe von Ordnung m und eine von Ordnung n .
- $m \neq n$, m, n beide gerade: Es gibt eine maximale elliptisch-zyklische Untergruppe von Ordnung $m/2$ und eine von Ordnung $n/2$.
- $m = n$, m nicht gerade: Es gibt eine maximale elliptisch-zyklische Untergruppe von Ordnung m und eine, deren Ordnung von 2 geteilt wird.
- $m = n$, m gerade: Es gibt eine maximale elliptisch-zyklische Untergruppe von Ordnung $m/2$.

In allen Fällen, in denen wir zwei maximale elliptisch-zyklische Untergruppen aufgelistet haben, sind diese auch nicht zueinander konjugiert, da ihre Ordnungen verschieden sind.

Damit können wir jetzt die Eulerzahl von O_N abschätzen:

- $m \neq n$, m, n nicht beide gerade: $\chi(O_N) \leq 2 + (\frac{1}{m} - 1) + (\frac{1}{n} - 1) + (0 - 1)$
- $m \neq n$, m, n beide gerade: $\chi(O_N) \leq 2 + (\frac{2}{m} - 1) + (\frac{2}{n} - 1) + (0 - 1) + (0 - 1)$
- $m = n$, m nicht gerade: $\chi(O_N) \leq 2 + (\frac{1}{m} - 1) + (\frac{1}{2} - 1) + (0 - 1)$
- $m = n$, m gerade: $\chi(O_N) \leq 2 + (\frac{2}{m} - 1) + (0 - 1) + (0 - 1)$

Insgesamt ergibt sich also für jeden der vier Fälle $\chi(O_N) \leq \chi(O_M)$ und damit $N = M$. Damit ist die Projektion von $\Gamma_{m,n}$ in $PSL(2, \mathbb{R})$ die projektive Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$. Da aber $(AC)^m = -I$ in jedem $\Gamma_{m,n} \leq SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ enthalten ist, ist $-I$ auch jeweils in $SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ enthalten und die beiden Gruppen sind gleich.

In diesem Abschnitt hatten wir zwar vorausgesetzt, dass $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ kein Torus ist, aber da wir den Spezialfall des Torus schon in Lemma 5.2 abgehandelt haben, können wir Folgendes zusammenfassen:

Satz 2 (Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$)

Ist $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ kein Torus, so ist die Gruppe $\Gamma_{m,n}$, die in Proposition 5.1 beschrieben wird, die Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$.

Ist $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ ein Torus, so ist $\Gamma_{m,n}$ die markierte Veechgruppe von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$.

Korollar 5.16. Die Fläche $\mathbb{H}/SL(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ hat Geschlecht 0 und eine Spitze, wenn m und n nicht beide gerade sind oder $(m, n) \in \{(2, 4), (4, 2)\}$ gilt, und zwei Spitzen, wenn m und n beide gerade sind und $(m, n) \notin \{(2, 4), (4, 2)\}$ gilt.

Beweis. Wegen Satz 2 können wir die Behauptung aus Bemerkung 5.8, Bemerkung 5.10, Bemerkung 5.12 und Bemerkung 5.14 folgern, wenn $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ kein Torus ist.

Für die Tori gilt, dass die Veechgruppe in jedem der Fälle $(m, n) \in \{(2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 2)\}$ konjugiert zu $SL(2, \mathbb{Z})$ ist. Dass $\mathbb{H}/SL(2, \mathbb{Z})$ von Geschlecht 0 ist und genau eine Spitze hat, können wir zum Beispiel am Fundamentalbereich aus Proposition 5.11 für den Fall $(m, n) = (3, 3)$ ablesen. \square

Korollar 5.17 (Dreiecksgruppen als Veechgruppen). Für $m, n \geq 2$ und m, n nicht beide gerade kommt der orientierungserhaltende Teil der Dreiecksgruppe $\Delta(m, n, \infty)$ als projektive Veechgruppe vor. Für $m \geq 2$ kommt auch der orientierungserhaltende Teil der Dreiecksgruppe $\Delta(m, \infty, \infty)$ als projektive Veechgruppe vor.

W. Patrick Hooper hat in Satz 2 in [Hoo] zusätzlich gezeigt, dass für $m, n \geq 2$ beide gerade und zusätzlich $\frac{m}{\text{ggT}(m,n)}, \frac{n}{\text{ggT}(m,n)}$ beide ungerade oder $\text{ggT}(m, n) = 2$ der orientierungserhaltende Teil der Dreiecksgruppe $\Delta(m, n, \infty)$ nicht als projektive Veechgruppe realisiert werden kann. In allen hier und in Korollar 5.17 nicht aufgeführten Fällen, ist es dagegen noch nicht bekannt, ob die orientierungserhaltenden Teile der entsprechenden Dreiecksgruppen als projektive Veechgruppen vorkommen.

Kapitel 6

Ein wenig Teichmüllertheorie

Die erste Definition von Veechgruppen erfolgte durch Veech in [Vee], motiviert durch Überlegungen aus der Teichmüllertheorie. Wir wollen hier daher in aller Kürze einige für uns wichtige Definitionen und Aussagen aus der Teichmüllertheorie zusammenstellen. Wer sich darüber genauer informieren will, hat mit [IT] einen guten Ausgangspunkt. Wir werden hier jedoch eher auf [Nag] verweisen, da der für uns interessante Fall von Flächen mit Punktierungen dort ausführlicher besprochen wird.

6.1 Modulräume und Teichmüllerräume

Definition 6.1 (Modulraum und Teichmüllerraum)

Sei R eine kompakte topologische Fläche vom Geschlecht g mit n Punktierungen.

- (i) $M_{g,n} := \{S : S \text{ ist kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht } g \text{ mit } n \text{ Punktierungen}\} / \sim$ heißt *Modulraum* (von R), wobei zwei Flächen äquivalent sein sollen, wenn es zwischen ihnen eine biholomorphe Abbildung gibt, die die Punktierungen respektiert.
- (ii) Betrachte Paare (S, f) , wobei S eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit n Punktierungen ist und $f: R \rightarrow S$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus, genannt *Markierung*, der die Punktierungen respektiert. Dann ist der *Teichmüllerraum* $T_{g,n} := T(R)$ von R definiert als die Menge der Äquivalenzklassen $[S, f]$ von solchen Paaren, wobei zwei Paare $(S, f), (S', f')$ äquivalent sein sollen, wenn $f' \circ f^{-1}: S \rightarrow S'$ homotop zu einer biholomorphen Abbildung $h: S \rightarrow S'$ ist.

Der Modulraum ist also ein Klassifikationsraum für die Riemannschen Flächen vom Geschlecht g mit n Punktierungen. Der Teichmüllerraum enthält dagegen noch zusätzliche Daten über die Flächen, die klassifiziert werden. Berücksichtigen wir diese zusätzlichen Informationen nicht mehr, erhalten wir wieder den entsprechenden Punkt im zugehörigen Modulraum.

Die zugehörige Abbildung $T_{g,n} \rightarrow M_{g,n}$ gibt Anlass zur Definition einer Gruppe, mit der wir diese Abbildung genauer beschreiben können.

Definition 6.2 (Abbildungsklassengruppe)

Sei R eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit n Punktierungen.

Wir bezeichnen die Gruppe der orientierungserhaltenden Homöomorphismen von R , die die Punktierungen erhalten, mit $\text{Homöo}^+(R)$ und die Untergruppe der Homöomorphismen, die homotop zur Identität sind, mit $\text{Homöo}_0^+(R)$.

$\text{Mod}(R) = \text{Homöo}^+(R)/\text{Homöo}_0^+(R)$ heißt *Abbildungsklassengruppe* von R .

Die Abbildungsklasse operiert auf dem Teichmüllerraum durch die folgende Vorschrift: Sei $[h] \in \text{Mod}(R)$, h ein Vertreter von $[h]$ und $[S, f] \in T(R)$, (S, f) ein Vertreter von $[S, f]$. Dann definiert $[h] \cdot [S, f] = [S, f \circ h^{-1}]$ eine eigentlich diskontinuierliche Operation auf dem Teichmüllerraum (siehe Abschnitt 2.7.3 in [Nag]).

Dies entspricht aber gerade dem „Vergessen“ der Markierung, also ist

$$M_{g,n} \cong T_{g,n}/\text{Mod}(R).$$

Wir können den Teichmüllerraum auch mit Eigenschaften ausstatten, die von der Operation von $\text{Mod}(R)$ erhalten werden.

Zum einen trägt der Teichmüllerraum die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit und die Abbildungsklassengruppe operiert darauf durch Biholomorphismen (siehe Appendix 5 in [Nag]).

Zum anderen können wir auf dem Teichmüllerraum eine Metrik definieren. Dafür gibt es sehr verschiedene Möglichkeiten, eine wichtige davon ist die Teichmüllermetrik aus Abschnitt 5.1.3 in [IT]. Bezüglich dieser Metrik ist die Operation der Abbildungsklassengruppe isometrisch auf dem Teichmüllerraum (siehe Abschnitt 2.3.4 in [Nag]).

Da die obige Definition der Abbildungsklassengruppe für konkrete Berechnungen aber eher unhandlich ist, wollen wir zunächst noch einen Zusammenhang zu den Automorphismen der Fundamentalgruppe der jeweiligen Fläche kennenlernen.

Definition 6.3 (Innere und äußere Automorphismen)

Sei G eine Gruppe, $\text{Aut}(G)$ die Automorphismengruppe darauf.

- (i) Es seien $\text{Inn}(G)$ die Konjugationen mit Elementen aus G . $\text{Inn}(G)$ heißt Untergruppe der *inneren Automorphismen* und ist ein Normalteiler in $\text{Aut}(G)$.
- (ii) Mit $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ bezeichnen wir die *äußeren Automorphismen* von G .

Die äußeren Automorphismen sind also Automorphismen einer Gruppe, die nur bis auf Konjugation definiert sind.

Proposition 6.4 (Eine Version des Satzes von Dehn-Nielsen-Baer)

Sei R eine hyperbolische Fläche vom Geschlecht g mit n Punktierungen.

Ist $\text{Mod}^\pm(R)$ die erweiterte Abbildungsklassengruppe, die auch die Homotopieklassen von orientierungsumkehrenden Homöomorphismen umfasst, und $\text{Out}^(\pi_1(R))$ die Untergruppe von $\text{Out}(\pi_1(R))$, die alle Elemente enthält, die die Menge der Konjugationsklassen von Schleifen um Punktierungen herum respektieren, dann gilt*

$$\text{Mod}^\pm(R) \cong \text{Out}^*(\pi_1(R)).$$

Beweis. Siehe Satz 8.8 in [FM]. □

6.2 Teichmüllerkreisscheiben und Teichmüllerkurven

Sei (X, ν) nun eine Translationsfläche, X dabei eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit n Punktierungen. Dabei werden wir in diesem und dem folgenden Abschnitt die Singularitäten der Translationsfläche als Punktierungen wählen. Der zugehörige Translationsatlas ist dann auf ganz $X^* := X \setminus \{S : S \text{ Singularität von } (X, \nu)\}$ definiert und wir werden die Translationsfläche, die wir im Folgenden betrachten, mit (X^*, ν) bezeichnen.

Unsere Ergebnisse aus den ersten Kapiteln können wir jedoch weiter verwenden, da die Veechgruppe $SL(X, \nu)$ von den affinen Homöomorphismen herkommt, die auf X^* definiert sind.

Wir haben uns in Bemerkung 1.6 überlegt, dass wir für jedes $B \in SL(2, \mathbb{R})$ eine neue Translationsfläche $X_B^* := (X^*, B \cdot \nu)$ erhalten. Für jedes solche Element B können wir also ein Element im Teichmüllerraum $T_{g,n}$ von X^* definieren, als Markierung werden wir dabei jeweils $\text{id}: X^* \rightarrow X_B^*$ wählen. Damit bekommen wir zunächst eine Abbildung $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow T_{g,n}$. Interessanter ist jedoch die Abbildung, die in der folgenden Proposition beschrieben wird.

Proposition 6.5 (Isometrische Einbettung von \mathbb{H} in $T_{g,n}$)

Für jede Translationsfläche (X^, ν) , wobei X^* eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g mit n Punktierungen ist, gibt es eine holomorphe Einbettung $\iota: \mathbb{H} \rightarrow T_{g,n}$. Diese ist isometrisch bezüglich der Poincaré-Metrik bzw. der Teichmüllermetrik.*

Beweis. Eine Abbildung $SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow T_{g,n}$ haben wir gerade schon beschrieben. Diese Abbildung faktorisiert über $SO(2, \mathbb{R})$, da für zwei Matrizen $B, B' \in SL(2, \mathbb{R})$ die Abbildung $\text{id}: X_B^* \rightarrow X_{B'}^*$ genau dann homotop zu einer biholomorphen Abbildung ist, wenn $B' \cdot B^{-1} \in SO(2, \mathbb{R})$ ist.

Da $SL(2, \mathbb{R})$ auf \mathbb{H} transitiv operiert, also insbesondere i in der einzigen Bahn liegt und der Stabilisator von i $SO(2, \mathbb{R})$ ist, gilt $\mathbb{H} \cong SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$. Das liefert uns die gewünschte Einbettung $\iota: \mathbb{H} \rightarrow T_{g,n}$.

Holomorphie und Isometrie werden beispielsweise im Beweis von Proposition 2.11 in [HS] gezeigt. □

Definition 6.6 (Teichmüllerkreisscheibe)

Das Bild einer solchen Einbettung ι wird *Teichmüllerkreisscheibe* genannt und mit Δ bezeichnet.

Die Metriken, die in Proposition 6.5 genannt wurden, sind bisher unterschiedlich gut verstanden. Für die Poincaré-Metrik gibt es viele einfach zugängliche Aussagen und Modelle, während die Teichmüllermetrik umfangreichere Methoden für ihr Verständnis erfordert.

Teichmüllerkreisscheiben sind also auch deshalb interessant, weil sie uns helfen können, die Teichmüllermetrik über den Umweg der Poincaré-Metrik zu verstehen.

Auf ähnliche Art und Weise können wir auch versuchen, mehr über die Geometrie des Modulraums zu erfahren. Dazu betrachten wir das Bild einer Teichmüllerkreisscheibe Δ unter der Aktion der Abbildungsklassengruppe und projizieren dadurch Δ in den Modulraum. In einem Fall, den wir in den ersten Abschnitten schon häufiger betrachtet haben, ist das Bild sogar eine Kurve.

Proposition 6.7 (Gitter induzieren Teichmüllerkurven)

Sei (X^, ν) eine Translationsfläche mit einer Veechgruppe, die ein Gitter ist. Dann ist das Bild der Projektion der zugehörigen Teichmüllerkreisscheibe in den Modulraum eine algebraische Kurve und wird Teichmüllerkurve genannt.*

Beweis. Siehe beispielsweise Korollar 3.3 in [McM]. □

Es gilt sogar die Äquivalenz, dass das Bild der Projektion genau dann eine Teichmüllerkurve ist, wenn die Veechgruppe ein Gitter ist.

Da die Veechgruppen, die zu den von uns betrachteten Translationsflächen gehören, alle Gitter sind, können wir hier schon eine Aussage über die zugehörigen Teichmüllerkurven machen.

Proposition 6.8 (Geschlecht der Teichmüllerkurven zu $(X_{m,n}^*, \omega_{m,n})$)

Das Geschlecht der Teichmüllerkurven, die zu $(X_{m,n}^, \omega_{m,n})$ gehören, ist 0.*

Beweis. Die Teichmüllerkurven sind jeweils birational äquivalent zu $\mathbb{H}/SL(X_{m,n}^*, \omega_{m,n})$ (siehe Abschnitt 2 in [McM]). Wie wir in Korollar 5.16 festgehalten haben, ist das Geschlecht der Flächen $\mathbb{H}/SL(X_{m,n}^*, \omega_{m,n})$ aber in jedem Fall 0. □

Um die vorigen Propositionen zu beweisen, wird ein schöner Zusammenhang zwischen der Veechgruppe und den Teichmüllerkreisscheiben ausgenutzt. Denn die affine Gruppe, von der die Veechgruppe herkommt, kann als Untergruppe der Abbildungsklassengruppe aufgefasst werden und operiert sogar auf der zugehörigen Teichmüllerkreisscheibe Δ . Das Interessante daran ist die folgende Aussage:

Proposition 6.9 (Stabilisator von Δ in $\text{Mod}(X^*, \nu)$)

Der Stabilisator von Δ in $\text{Mod}(X^, \nu)$ ist das Bild der affinen Gruppe von (X, ν) in $\text{Mod}(X^*, \nu)$.*

Beweis. Siehe Satz 1 in [EG]. □

Es kann also nützlich sein, die affine Gruppe als Untergruppe der Abbildungsklassengruppe aufzufassen. Wir werden deshalb im nächsten Kapitel für die Translationsflächen $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$ bzw. $(Y_{n,m}^*, \eta_{n,m})$ die Operation der Veechgruppe auf der Fundamentalgruppe betrachten, um so die Elemente der affinen Gruppe als Elemente von $\text{Out}^*(\pi_1(Y_{m,n}^*))$ bzw. $\text{Out}^*(\pi_1(Y_{n,m}^*))$ auffassen zu können.

Kapitel 7

Beispiele für Stabilisatoren von Teichmüllerkreisscheiben

7.1 Erzeuger von $\pi_1(Y_{m,n}^*)$ für n ungerade

Im ganzen Kapitel sei wieder der Fall, dass $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ ein Torus ist, ausgeschlossen. Zusätzlich sei in diesem Abschnitt n ungerade.

Wir wollen jetzt die $2n$ -Ecke, aus denen $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n}^*)$ besteht, so miteinander verkleben, dass aus den m Polygonen ein einziges Polygon in der Ebene entsteht. Dazu wird die Kante v_{n-1} im Polygon $P(i)$ mit der Kante v_{2n-1} im Polygon $P(i+1)$ verklebt für $i = 1, \dots, m-1$. Dadurch entsteht ein Polygon, das bei Verkleben der restlichen Kanten wieder $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n}^*)$ ergibt.

Für das Beispiel $(Y_{4,5}^*, \eta_{4,5}^*)$ ist das entstandene Polygon in Abbildung 17 dargestellt.

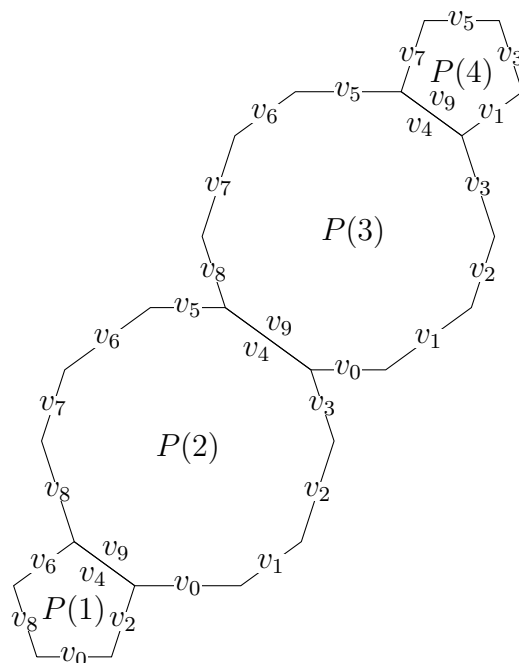


Abbildung 17: Verklebtes Polygon für $(Y_{4,5}^*, \eta_{4,5}^*)$

Wir legen nun einen Punkt $*$ in $P(1)$ fest, der nahe zum Mittelpunkt der Kante v_0 liegt, so dass sein Bild unter den Operationen, die später beschrieben werden, wieder in $P(1)$ liegen wird. Der Weg, der von $*$ über die Kante v_j in $P(i)$ und über die Kante $v_{j\pm n}$ in $P(i+1)$ zurück zu $*$ führt, heiße $A_{i,j}$ für j gerade und $j \neq n-1$. Jeder dieser Wege $A_{i,j}$ ist ein Element der Fundamentalgruppe von $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$ und die Menge

$$\mathcal{A} = \{A_{i,j} : i = 1, \dots, m-1, j \text{ gerade}, j \neq n-1\}$$

erzeugt diese Fundamentalgruppe. Es gilt sogar noch mehr:

Proposition 7.1 (Fundamentalgruppe von $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$)

Die Fundamentalgruppe von $(Y_{m,n}^, \eta_{m,n})$ ist eine freie Gruppe vom Rang $(m-1)(n-1)$. Insbesondere ist \mathcal{A} eine Basis der Fundamentalgruppe.*

Beweis. Das Geschlecht von $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$ ist nach Proposition 4.11 $\frac{mn-m-n-\text{ggT}(m,n)}{2} + 1$ und die Anzahl der Singularitäten ist nach Proposition 4.10 $\text{ggT}(m,n)$. In Satz 8.7 in [tDi] können wir nachlesen, dass die Fundamentalgruppe dann eine freie Gruppe vom Rang $2 \cdot (\frac{mn-m-n-\text{ggT}(m,n)}{2} + 1) + \text{ggT}(m,n) - 1 = (m-1)(n-1)$ ist.

An der Definition von \mathcal{A} können wir ablesen, dass es $m-1$ Möglichkeiten für die Wahl von i und $n-1$ Möglichkeiten für die Wahl von j gibt. Die Anzahl der $A_{i,j}$ ist also $(m-1)(n-1)$, womit \mathcal{A} ein minimales Erzeugendensystem ist. \square

Manchmal werden wir aus technischen Gründen auch einen Weg $A_{i,n-1}$ erwähnen. Dieser ist zwar nicht in \mathcal{A} enthalten und ist nullhomotop, aber er wird uns die Notation vereinfachen.

Wir können damit zum Beispiel den Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$ auch darstellen als

$$A_{i,j} = A_{1,n-1} \cdot \dots \cdot A_{i-1,n-1} \cdot A_{i,j} \cdot A_{i-1,n-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,n-1}^{-1},$$

um uns klar zu machen, dass der Weg $A_{i,j}$ nicht nur über die zwei explizit genannten Kanten verläuft, sondern auch über $2(i-1)$ der verklebten Kanten.

Die Verknüpfung in der Fundamentalgruppe wollen wir dabei wie in [For] immer von links nach rechts lesen.

7.2 Der Fall n ungerade und $m \neq n$

Wir wollen nun für den Fall n ungerade und $m \neq n$ die affine Gruppe als Untergruppe der Abbildungsklassengruppe auffassen. Dazu schauen wir uns die Operationen der Erzeuger der Veechgruppe auf den Wegen aus \mathcal{A} an.

Erzeuger der Veechgruppe von $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$

Mit Hilfe von Bemerkung 1.13 und dem affinen Homöomorphismus

$$\mu: (X_{m,n}, \omega_{m,n}) \rightarrow (Y_{m,n}, \eta_{m,n})$$

aus Abschnitt 4.2 kann aus der Veechgruppe $\Gamma_{m,n}$ von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ die Veechgruppe von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ berechnet werden.

Nach Proposition 5.1 ist im hier betrachteten Fall $\Gamma_{m,n} = \langle AB, BC \rangle$ und folglich sind $D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}$ und $D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}$ Erzeuger von $SL(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$.

Die Drehung

$$\begin{aligned} D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1} &= (D(\mu) \cdot B \cdot D(\mu)^{-1})(D(\mu) \cdot C \cdot D(\mu)^{-1}) = E \cdot Y_n \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & -\cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & -\cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der affine Homöomorphismus, von dem $D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}$ herkommt, ist also eine Drehung um $\frac{(n+1)\pi}{n}$ (im mathematisch positiven Sinn). Auf die $2n$ -Ecke bezogen bedeutet das, dass der Mittelpunkt jeweils Fixpunkt ist und eine Kante v_j auf die Kante $v_{j\pm n+1}$ abgebildet wird.

Betrachten wir jetzt einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$. $A_{i,j}$ geht von $*$ über die Kanten

- v_{n-1} in $P(1)$, v_{2n-1} in $P(2)$,
- v_{n-1} in $P(2)$, v_{2n-1} in $P(3)$,
- \dots ,
- v_{n-1} in $P(i-1)$, v_{2n-1} in $P(i)$,
- v_j in $P(i)$, $v_{j\pm n}$ in $P(i+1)$,
- v_{2n-1} in $P(i+1)$, v_{n-1} in $P(i)$,
- \dots ,
- v_{2n-1} in $P(2)$ und v_{n-1} in $P(1)$

zurück zu $*$.

Wenden wir darauf einen affinen Homöomorphismus mit Ableitung $D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}$ an, geht der entstandene Weg über die Kanten

- v_0 in $P(1)$, v_n in $P(2)$, (entspricht $A_{1,0}$)
- v_0 in $P(2)$, v_n in $P(3)$, (entspricht $A_{2,0}$)
- \dots ,
- v_0 in $P(i-1)$, v_n in $P(i)$, (entspricht $A_{i-1,0}$)
- $v_{j\pm n+1}$ in $P(i)$, v_{j+1} in $P(i+1)$, (entspricht $A_{i,j\pm n+1}$)
- v_n in $P(i+1)$, v_0 in $P(i)$, (entspricht $A_{i,0}^{-1}$)
- \dots ,
- v_n in $P(2)$ und v_0 in $P(1)$ (entspricht $A_{1,0}^{-1}$).

Wir wissen jetzt also:

Lemma 7.2. Für den zu $D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}$ gehörenden affinen Homöomorphismus und einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A_{i,j} \mapsto A_{1,0} \cdot A_{2,0} \cdot \dots \cdot A_{i-1,0} \cdot A_{i,j\pm n+1} \cdot A_{i,0}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,0}^{-1}$$

Die Scherung

$$\begin{aligned}
& D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1} \\
&= (D(\mu) \cdot A \cdot D(\mu)^{-1})(D(\mu) \cdot B \cdot D(\mu)^{-1}) = D(\mu) \cdot A \cdot D(\mu)^{-1} \cdot E \\
&= \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{n} & -\cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\csc \frac{\pi}{n} & \cot \frac{\pi}{n}/\csc \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\csc \frac{\pi}{n} & -2 \cos \frac{\pi}{m} \cdot \csc \frac{\pi}{n} - \cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\csc \frac{\pi}{n} & \cot \frac{\pi}{n}/\csc \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\cot \frac{\pi}{n} - 2 \cos \frac{\pi}{m} \cdot \csc \frac{\pi}{n} - \cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \csc \frac{\pi}{n} (\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wie wir in Abschnitt 4.2 beschrieben haben, gibt es eine horizontale Zylinderzerlegung von $(Y_{m,n}, \eta_{m,n})$ und damit auch von $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n}^*)$. Der Modulus der Zylinder ist jeweils $2 \csc \frac{\pi}{n} \cdot (\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m})$. Da die Eigenrichtung der durch $D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}$ beschriebenen Scherung gerade $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist, ist die Operation ein multipler Dehn-Twist, der jeden horizontalen Zylinder einmal in sich verdreht.

Wir betrachten wieder einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$. Durch Definition von $j' := \min\{j, 2n - j\}$ können wir mit $v_{j'}$ die Kante benennen, die im selben Zylinder wie v_j und in $P(i)$ rechts liegt. Wenden wir einen affinen Homöomorphismus mit Ableitung $D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}$ auf den Weg $A_{i,j}$ an, so geht der entstandene Weg über die Kanten

- v_{2n-2} in $P(1)$, v_{n-2} in $P(2)$ und v_{n+2} in $P(2)$, v_2 in $P(1)$,
- v_{2n-4} in $P(1)$, v_{n-4} in $P(2)$ und v_{n+4} in $P(2)$, v_4 in $P(1)$,
- \dots ,
- v_{n+1} in $P(1)$, v_1 in $P(2)$,
- v_{2n-2} in $P(2)$, v_{n-2} in $P(3)$ und v_{n+2} in $P(3)$, v_2 in $P(2)$,
- v_{2n-3} in $P(2)$, v_{n-3} in $P(1)$ und v_{n+3} in $P(1)$, v_3 in $P(2)$,
- \dots ,
- v_{n+2} in $P(i-1)$, v_2 in $P(i-2)$ und v_{2n-2} in $P(i-2)$, v_{n-2} in $P(i-1)$,
- v_{n+1} in $P(i-1)$, v_1 in $P(i)$,
- \dots ,
- $v_{2n-(j'-1)}$ in $P(i)$, $v_{n-j'+1}$ in $P(i-1)$ und $v_{j'+n-1}$ in $P(i-1)$, $v_{j'-1}$ in $P(i)$,
- v_j in $P(i)$, $v_{j \pm n}$ in $P(i+1)$,
- $v_{n-j'-1}$ in $P(i+1)$, $v_{2n-j'-1}$ in $P(i+2)$ und $v_{j'+1}$ in $P(i+2)$, $v_{j'+n+1}$ in $P(i+1)$,
- \dots ,
- v_2 in $P(1)$, v_{n+2} in $P(2)$ und v_{n-2} in $P(2)$, v_{2n-2} in $P(1)$.

Wir wissen jetzt also:

Lemma 7.3. Für den zu $D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}$ gehörenden affinen Homöomorphismus und einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}
A_{i,j} \mapsto & A_{1,2n-2} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{i-1,j'+n-1} \cdot A_{i,j} \cdot A_{i+1,n-j'-1} \cdot A_{i+1,j'+n+1}^{-1} \cdot \dots \\
& \cdot A_{1,n+3}^{-1} \cdot A_{1,n-3} \cdot A_{2,2} \cdot A_{2,2n-2}^{-1} \cdot A_{1,n+1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,2} \cdot A_{1,2n-2}^{-1}
\end{aligned}$$

7.3 Der Fall m ungerade und $m \neq n$

Zu untersuchen wäre jetzt der Fall, dass n gerade ist. Ist dann jedoch auch m gerade, wäre die Veechgruppe von $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$ eine andere als die im letzten Abschnitt untersuchte. Daher werden wir vorerst zusätzlich voraussetzen, dass m und n nicht beide gerade sind. Der Fall, dass n gerade ist, wird unter dieser zusätzlichen Voraussetzung dann schon vom Fall, dass m ungerade ist, abgedeckt.

Wir können dann statt der Fläche $(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$ die Fläche $(Y_{n,m}^*, \eta_{n,m})$ betrachten und unter Verwendung des affinen Homöomorphismus

$$\nu: (X_{m,n}, \omega_{m,n}) \rightarrow (Y_{n,m}, \eta_{n,m})$$

aus Abschnitt 5.1 ähnliche Überlegungen wie im letzten Abschnitt machen. Insbesondere können wir wieder das Polygon und die Menge \mathcal{A} aus Abschnitt 7.1 verwenden.

Die Veechgruppe von $(Y_{n,m}, \eta_{n,m})$

Wieder mit Bemerkung 1.13 kann aus der Veechgruppe $\Gamma_{m,n} = \langle AB, BC \rangle = \langle AB, AC \rangle$ von $(X_{m,n}, \omega_{m,n})$ die Veechgruppe von $(Y_{n,m}, \eta_{n,m})$ berechnet werden. Es sind also $D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1}$ und $D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}$ Erzeuger von $SL(Y_{n,m}^*, \eta_{n,m})$.

Die Drehung

$$\begin{aligned} D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1} &= (D(\nu) \cdot A \cdot D(\nu)^{-1})(D(\nu) \cdot C \cdot D(\nu)^{-1}) = E \cdot -Y_m \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{m} & \sin \frac{\pi}{m} \\ \sin \frac{\pi}{m} & \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{m} & -\sin \frac{\pi}{m} \\ \sin \frac{\pi}{m} & \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der affine Homöomorphismus, von dem $D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}$ herkommt, ist also eine Drehung um $\frac{\pi}{m}$. Auf die $2m$ -Ecke bezogen wird das $2m$ -Eck $P(i)$ so um seinen Mittelpunkt gedreht, dass die Kante v_j auf die Kante v_{j+1} abgebildet wird, und anschließend auf das $2m$ -Eck $P(n+1-i)$ verschoben (siehe Abschnitt 4.4 zur Operation von Y_m).

Betrachten wir jetzt einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$. $A_{i,j}$ geht wie im vorigen Fall von $*$ über die Kanten

- v_{m-1} in $P(1)$, v_{2m-1} in $P(2)$,
- v_{m-1} in $P(2)$, v_{2m-1} in $P(3)$,
- \dots ,
- v_{m-1} in $P(i-1)$, v_{2m-1} in $P(i)$,
- v_j in $P(i)$, $v_{j \pm m}$ in $P(i+1)$,
- v_{2m-1} in $P(i+1)$, v_{m-1} in $P(i)$,
- \dots ,
- v_{2m-1} in $P(2)$ und v_{m-1} in $P(1)$

zurück zu $*$.

Wenden wir darauf einen affinen Homöomorphismus mit Ableitung $D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}$ an, geht der entstandene Weg über die Kanten

- v_m in $P(n)$, v_0 in $P(n-1)$, (entspricht $A_{n-1,0}^{-1}$)
- v_m in $P(n-1)$, v_0 in $P(n-2)$, (entspricht $A_{n-2,0}^{-1}$)
- \dots ,
- v_m in $P(n-(i-2))$, v_0 in $P(n-(i-1))$, (entspricht $A_{n-(i-1),0}^{-1}$)
- v_{j+1} in $P(n-(i-1))$, $v_{j\pm m+1}$ in $P(n-i)$, (entspricht $A_{n-i,j\pm m+1}^{-1}$)
- v_0 in $P(n-i)$, v_m in $P(n-(i-1))$, (entspricht $A_{n-i,0}$)
- \dots ,
- v_0 in $P(n-1)$ und v_m in $P(n)$ (entspricht $A_{n-1,0}$).

Wir wissen jetzt also:

Lemma 7.4. Für den zu $D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}$ gehörenden affinen Homöomorphismus und einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A_{i,j} \mapsto A_{n-1,0}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{n-(i-1),0}^{-1} \cdot A_{n-i,j\pm m+1} \cdot A_{n-i,0} \cdot \dots \cdot A_{n-1,0}$$

Die Scherung

$$\begin{aligned} & D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1} \\ &= (D(\nu) \cdot A \cdot D(\nu)^{-1})(D(\nu) \cdot B \cdot D(\nu)^{-1}) = E \cdot D(\nu) \cdot B \cdot D(\nu)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m}/\csc \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{m} & \cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\csc \frac{\pi}{m} & \cot \frac{\pi}{m}/\csc \frac{\pi}{m} + 2 \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cot \frac{\pi}{m} + 2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot \csc \frac{\pi}{m} + \cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \csc \frac{\pi}{m} (\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hier brauchen wir wieder die horizontale Zylinderzerlegung von $(Y_{n,m}^*, \eta_{n,m})$ aus Abschnitt 4.2. Analog zur Scherung im vorigen Fall ist die Scherung, die durch $D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1}$ definiert wird, ein multipler Dehn-Twist auf den horizontalen Zylindern, aber in die entgegengesetzte Richtung wie im vorigen Fall.

Wir betrachten wieder einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$ und setzen $j' := \min\{j, 2m-j\}$. Wenden wir einen affinen Homöomorphismus mit Ableitung $D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1}$ auf den Weg $A_{i,j}$ an, so geht der entstandene Weg über die Kanten

- v_2 in $P(1)$, v_{m+2} in $P(2)$ und v_{m-2} in $P(2)$, v_{2m-2} in $P(1)$,
- v_4 in $P(1)$, v_{m+4} in $P(2)$ und v_{m-4} in $P(2)$, v_{2m-4} in $P(1)$,
- \dots ,

- v_{m-3} in $P(1)$, v_{2m-3} in $P(2)$ und v_3 in $P(2)$, v_{m+3} in $P(1)$,
- v_1 in $P(2)$, v_{m+1} in $P(1)$,
- v_2 in $P(2)$, v_{m+2} in $P(3)$ und v_{m-2} in $P(3)$, v_{2m-2} in $P(2)$,
- v_3 in $P(2)$, v_{m+3} in $P(1)$ und v_{m-3} in $P(1)$, v_{2m-3} in $P(2)$,
- \dots ,
- v_1 in $P(i)$, v_{m+1} in $P(i-1)$,
- \dots ,
- $v_{2m-j'+1}$ in $P(i)$, $v_{m-j'+1}$ in $P(i-1)$ und $v_{j'-m-1}$ in $P(i-1)$, $v_{j'-1}$ in $P(i)$,
- v_j in $P(i)$, $v_{j\pm m}$ in $P(i+1)$,
- $v_{j'+m+1}$ in $P(i+1)$, $v_{j'+1}$ in $P(i+2)$ und $v_{2m-j'-1}$ in $P(i+2)$, $v_{m-j'-1}$ in $P(i+1)$,
- \dots ,
- v_{2m-2} in $P(1)$, v_{m-2} in $P(2)$ und v_{m+2} in $P(2)$, v_2 in $P(1)$.

Wir wissen jetzt also:

Lemma 7.5. Für den zu $D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}$ gehörenden affinen Homöomorphismus und einen Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$ gilt:

$$A_{i,j} \mapsto A_{1,2} \cdot A_{1,2m-2}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{i-1,j'-m-1} \cdot A_{i,j} \cdot A_{i+1,j'+m+1} \cdot A_{i+1,m-j'-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,2m-3}^{-1} \cdot A_{1,m+3} \cdot A_{2,2m-2} \cdot A_{2,2}^{-1} \cdot A_{1,m+1} \cdot \dots \cdot A_{1,2m-2} \cdot A_{1,2}^{-1}$$

7.4 Die restlichen Fälle

Zu untersuchen bleiben die Fälle, in denen m und n gerade sind oder in denen $m = n$ gilt. Da wir in diesen Fällen die entsprechenden Operationen auf den Erzeugern der Fundamentalgruppe nicht nur durch Drehungen und Dehn-Twists beschreiben können, wollen wir diese hier nicht so ausführlich besprechen wie in den letzten beiden Abschnitten, sondern nur kurz auf die Erzeuger der Veechgruppen eingehen. Dabei wollen wir auch auf eine ausführliche Rechnung verzichten.

Wir wollen zuerst den Fall, dass m und n gerade sind, untersuchen. Hier müssten wir uns für eine ausführliche Beschreibung wie in den anderen Fällen zunächst eine Verklebung der $2n$ -Ecke analog zu Abschnitt 7.1 definieren und neue Erzeuger der Fundamentalgruppe finden, da die Kante v_{n-1} in $P(i)$ nur für ungerades i mit v_{2n-1} in $P(i+1)$ verklebt wird, ansonsten mit v_{2n-1} in $P(i-1)$.

Gilt zusätzlich $m \neq n$, dann können wir AB , $BCAC$ und $CABC$ als Erzeuger der Veechgruppe $SL(X_{m,n}^*, \omega_{m,n})$ wählen. Konjugieren wir diese mit $D(\mu)$, um Erzeuger von $SL(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n})$ zu bekommen, so erhalten wir mit $D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}$ ein Element, das wir schon im ersten Fall in Abschnitt 7.2 behandelt haben, mit

$$\begin{aligned} D(\mu) \cdot BCAC \cdot D(\mu)^{-1} &= E \cdot Y_n \cdot (D(\mu) \cdot A \cdot D(\mu)^{-1}) \cdot Y_n \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cos \frac{\pi}{m} \cdot \cos \frac{\pi}{n} - 1 & -2 \cot \frac{\pi}{n} (\cos \frac{\pi}{m} \cdot \cos \frac{\pi}{n} + 1) \\ -2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{m} & -2 \cos \frac{\pi}{m} \cdot \cos \frac{\pi}{n} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Hintereinanderausführung einer Drehung, einer Scherung und wieder einer Drehung und mit

$$\begin{aligned} D(\mu) \cdot CABC \cdot D(\mu)^{-1} &= Y_n \cdot (D(\mu) \cdot A \cdot D(\mu)^{-1}) \cdot E \cdot Y_n \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cos \frac{\pi}{n} \cdot (\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) + 1 & 2(\csc \frac{\pi}{n} - \sin \frac{\pi}{n})(\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) \\ -2 \sin \frac{\pi}{n} (\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) & -2 \cos \frac{\pi}{n} (\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ebenfalls die Hintereinanderausführung von Drehung, Scherung und Drehung.

Ist $m = n$, so sind beispielsweise AE und $ECAC$ Erzeuger von $SL(X_{m,m}^*, \omega_{m,m}^*)$. Der entsprechende erste Erzeuger von $SL(Y_{m,m}^*, \eta_{m,m})$ ist dann

$$\begin{aligned} D(\mu) \cdot AE \cdot D(\mu)^{-1} &= (D(\mu) \cdot A \cdot D(\mu)^{-1})(D(\mu) \cdot E \cdot D(\mu)^{-1}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was einem halben multiplen Dehn-Twist auf den horizontalen Zylindern mit Modulus $2 \csc \frac{\pi}{m} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{m}$ entspricht. Dabei werden allerdings zusätzlich manche Zylinder vertauscht. Der zweite Erzeuger

$$\begin{aligned} D(\mu) \cdot ECAC \cdot D(\mu)^{-1} &= (D(\mu) \cdot E \cdot D(\mu)^{-1}) \cdot Y_n \cdot (D(\mu) \cdot A \cdot D(\mu)^{-1}) \cdot Y_n \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{m} & -\sin \frac{2\pi}{m} + 2 \cot \frac{\pi}{m} \\ -2 \sin \frac{2\pi}{m} & -\cos \frac{2\pi}{m} - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entspricht der Hintereinanderausführung einer Drehung, einer Scherung, einer Drehung und nochmals einer Scherung.

Im Fall, dass $m = n$ ungerade gilt, können wir die Veechgruppe $SL(X_{m,m}^*, \omega_{m,m})$ zum Beispiel erzeugen durch AC und AE . Hier bietet es sich wieder an, diese Erzeuger mit $D(\nu)$ und nicht mit $D(\mu)$ zu konjugieren, um Erzeuger von $SL(Y_{m,m}^*, \eta_{m,m})$ zu erhalten. Dann wissen wir nämlich aus dem Fall, dass m ungerade ist und $m \neq n$ gilt, wie der zu $D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}$ gehörige affine Homöomorphismus die Wege $A_{i,j}$ abbildet. Für den zweiten Erzeuger

$$\begin{aligned} D(\nu) \cdot AE \cdot D(\nu)^{-1} &= E \cdot (D(\nu) \cdot E \cdot D(\nu)^{-1}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gelten analoge Überlegungen wie oben für $D(\mu) \cdot AE \cdot D(\mu)^{-1}$, das heißt, er entspricht einem halben multiplen Dehn-Twist auf den horizontalen Zylindern, wobei allerdings noch Vertauschungen der Zylinder auftreten.

7.5 Zusammenfassung der Beispiele

Insgesamt folgt aus Lemma 7.2, Lemma 7.3, Lemma 7.4 und Lemma 7.5:

Satz 3 (Operation der Veechgruppe auf der Fundamentalgruppe)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ nicht beide gerade und $m \neq n$.

Ist n ungerade, so gilt

$$SL(Y_{m,n}^*, \eta_{m,n}) = \langle D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}, D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1} \rangle.$$

Ist m ungerade, so gilt

$$SL(Y_{n,m}^*, \eta_{n,m}) = \langle D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}, D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1} \rangle.$$

Die zugehörigen affinen Homöomorphismen operieren als Elemente von $\text{Out}^*(\pi_1(Y_{m,n}^*))$ bzw. $\text{Out}^*(\pi_1(Y_{n,m}^*))$ folgendermaßen auf einem Weg $A_{i,j} \in \mathcal{A}$:

$$\text{für } D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto A_{1,0} \cdot A_{2,0} \cdot \dots \cdot A_{i-1,0} \cdot A_{i,j \pm n+1} \cdot A_{i,0}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,0}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{für } D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto & A_{1,2n-2} \cdot A_{1,2}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{i-1,j'+n-1} \cdot A_{i,j} \cdot A_{i+1,n-j'-1} \\ & \cdot A_{i+1,j'+n+1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,n+3}^{-1} \cdot A_{1,n-3} \cdot A_{2,2} \cdot A_{2,2n-2}^{-1} \\ & \cdot A_{1,n+1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,2} \cdot A_{1,2n-2}^{-1} \end{aligned}$$

$$\text{für } D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto A_{n-1,0}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{n-(i-1),0}^{-1} \cdot A_{n-i,j \pm m+1} \cdot A_{n-i,0} \cdot \dots \cdot A_{n-1,0}$$

$$\begin{aligned} \text{für } D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto & A_{1,2} \cdot A_{1,2m-2}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{i-1,j'-m-1} \cdot A_{i,j} \cdot A_{i+1,j'+m+1} \\ & \cdot A_{i+1,m-j'-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{1,2m-3}^{-1} \cdot A_{1,m+3} \cdot A_{2,2m-2} \cdot A_{2,2}^{-1} \\ & \cdot A_{1,m+1} \cdot \dots \cdot A_{1,2m-2} \cdot A_{1,2}^{-1} \end{aligned}$$

Da die Fundamentalgruppe eine freie Gruppe vom Rang $(m-1)(n-1)$ ist, erhalten wir durch Abelisierung eine freie abelsche Gruppe, die isomorph zu $\mathbb{Z}^{(m-1)(n-1)}$ ist. Wir können also von den beschriebenen Elementen in $\text{Out}(\pi_1(Y_{m,n}^*))$ bzw. $\text{Out}(\pi_1(Y_{n,m}^*))$ auch die Bilder unter der Projektion nach $GL((m-1)(n-1), \mathbb{Z})$ betrachten.

Korollar 7.6. Für die Bilder der in Satz 3 aufgeführten Elemente von $\text{Out}^*(\pi_1(Y_{m,n}^*))$ bzw. $\text{Out}^*(\pi_1(Y_{n,m}^*))$ unter der Projektion nach $GL((m-1)(n-1), \mathbb{Z})$ gilt:

$$\text{für } D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto A_{i,j \pm n+1} \cdot A_{i,0}^{-1}$$

$$\text{für } D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto A_{i,j} \cdot A_{i+1,n-j'-1} \cdot A_{i+1,j'+n+1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{i-1,j'+n-1}^{-1}$$

$$\text{für } D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto A_{n-i,j \pm m+1} \cdot A_{n-i,0}$$

$$\text{für } D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1}: A_{i,j} \mapsto A_{i,j} \cdot A_{i+1,j'+m+1} \cdot A_{i+1,m-j'-1}^{-1} \cdot \dots \cdot A_{i-1,m-j'+1}^{-1}$$

Elemente von $GL((m-1)(n-1), \mathbb{Z})$ werden üblicherweise als $(m-1) \times (n-1)$ -Matrizen dargestellt. Das wollen wir abschließend noch für ein Beispiel machen.

Beispiel 7.7. Sei $m = 4, n = 5$ und $(Y_{4,5}^*, \eta_{4,5})$ die Fläche, die wir betrachten. Die Elemente von \mathcal{A} wollen wir in folgender Reihenfolge auflisten: $A_{1,0}, A_{1,2}, A_{1,6}, A_{1,8}, A_{2,0}, A_{2,2}, A_{2,6}, A_{2,8}, A_{3,0}, A_{3,2}, A_{3,6}, A_{3,8}$. Dann ist das zu $D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1}$ gehörende Element in

$GL(12, \mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das zu $D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1}$ gehörende Element in $GL(12, \mathbb{Z})$ ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Übersicht über die verwendeten Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \cos \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \cos \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_m = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{m} & -\sin \frac{\pi}{m} \\ -\sin \frac{\pi}{m} & -\cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}$$

$$D(\mu) = \begin{pmatrix} \csc \frac{\pi}{n} & -\cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\csc \frac{\pi}{n} & \cot \frac{\pi}{n}/\csc \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\nu) = \begin{pmatrix} -\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/\csc \frac{\pi}{m} & -\cot \frac{\pi}{m}/\csc \frac{\pi}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CAC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 \cos \frac{\pi}{m} & -1 \end{pmatrix}$$

$$CBC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 \cos \frac{\pi}{n} & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y_m E Y_m = \begin{pmatrix} -\cos \frac{2\pi}{m} & \sin \frac{2\pi}{m} \\ \sin \frac{2\pi}{m} & \cos \frac{2\pi}{m} \end{pmatrix}$$

$$D(\mu) \cdot BC \cdot D(\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\pi}{n} & \sin \frac{\pi}{n} \\ -\sin \frac{\pi}{n} & -\cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$$

$$D(\mu) \cdot AB \cdot D(\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \csc \frac{\pi}{n} (\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\nu) \cdot AC \cdot D(\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{m} & -\sin \frac{\pi}{m} \\ \sin \frac{\pi}{m} & \cos \frac{\pi}{m} \end{pmatrix}$$

$$D(\nu) \cdot AB \cdot D(\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \csc \frac{\pi}{m} (\cos \frac{\pi}{m} + \cos \frac{\pi}{n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definitionenverzeichnis

- Abbildungsklassengruppe, 61
- äußerer Automorphismus, 62
- affine Abbildung, 9
 - Ableitung, 9
- affine Gruppe, 9

- Dehn-Twist, 16
- Dirichletbereich, 13
 - Ecke, 13
 - Spitze, 14
- Dreiecksgruppe, 52

- eigentlich diskontinuierlich, 11
- elliptisch-zyklische Untergruppe, 12
- elliptisches Element, 12
- Eulercharakteristik
 - punktierte, 27
- Eulerzahl, 20

- Fuchssche Gruppe, 11

- Gitter, 14
- Graph
 - Bänder-, 30
 - bipartiter, 30
 - Eigenfunktion, 32
 - Gitter-, 32

- halbregelmäßiges n -Eck, 39
- hyperbolisches Element, 12

- Mannigfaltigkeit, 6
- Modulraum, 61

- Orbifaltigkeit, 17
 - singulärer Ort, 19
 - Singularität, 19
 - Überlagerung, 21

- Grad, 23
- orthogonale Untergruppe, 14

- parabolisch-zyklische Untergruppe, 12
- parabolisches Element, 12

- Riemannsche Fläche, 6

- Sattelverbindung, 15
- $S^*L(2, \mathbb{R})$, 8
- Spiegelung
 - hyperbolische, 52

- Teichmüllerkreisscheibe, 63
- Teichmüllerkurve, 64
- Teichmüllermetrik, 62
- Teichmüllerraum, 61
- Translation, 9
- Translationsfläche, 6
 - Singularität, 7

- Veechgruppe, 9
 - erweiterte, 10
 - markierte, 10
 - projektive, 12

- Zelle, 19
- Zellzerlegung, 19
 - Orbifaltigkeits-, 20
- Zylinder, 15
 - Modulus, 15

Literaturverzeichnis

- [Art] Artin, Michael: *Algebra*. Birkhäuser, Basel 1998.
- [BM] Bouw, Irene I. und Möller, Martin: *Teichmüller curves, triangle groups, and Lyapunov exponents*. In: *Annals of Mathematics* **172**, 1 (2010), Seiten 139–185.
- [Dav] Davis, Michael W.: *The Geometry and Topology of Coxeter Groups*. Princeton University Press, Princeton 2008.
- [EG] Earle, Clifford J. und Gardiner, Frederick P.: *Teichmüller disks and Veech's \mathcal{F} -Structures*. In: *Extremal Riemann surfaces*, Contemporary Mathematics **201** (1997), Seiten 165–189.
- [FM] Farb, Benson und Margalit, Dan: *A primer on mapping class groups*. Preprint, Version 5.0 vom 4. Januar 2011. Online abrufbar unter <http://www.math.uchicago.edu/~margalit/mcg/mcgv50.pdf>.
- [For] Forster, Otto: *Riemannsche Flächen*. Springer-Verlag, Berlin 1977.
- [Fre] Freidinger, Myriam: *Stabilisatorgruppen in $\text{Aut}(F_z)$ und Veechgruppen von Überlagerungen*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH) 2008.
- [Hoo] Hooper, W. Patrick: *Grid graphs and lattice surfaces*. Preprint, 2009. Online abrufbar unter <http://de.arxiv.org/abs/0811.0799v2>.
- [HS] Herrlich, Frank und Schmithüsen, Gabriela: *On the boundary of Teichmüller disks in Teichmüller space and in Schottky space*. In: *Handbook of Teichmüller theory*, Papadopoulos, Athanase (Hrsg). European Mathematical Society, Zürich 2007. Seiten 293–349.
- [IT] Imayoshi, Yoichi und Taniguchi, Masahiko: *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer, Tokyo 1992.
- [Kat] Katok, Svetlana: *Fuchsian Groups*. University of Chicago Press, Chicago 1992.
- [McM] McMullen, Curtis T.: *Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces*. In: *Journal of the American Mathematical Society* **16**, 4 (2003), Seiten 857–885.
- [Nag] Nag, Subhashis: *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. Wiley, New York 1988.

- [Smo] Schmoll, Martin: *On the asymptotic quadratic growth rate of saddle connections and periodic orbits on marked flat tori*. In: *Geometric And Functional Analysis* **12**, 3 (2002), Seiten 622–649.
- [Thu] Thurston, William P.: *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. Lecture Notes, Princeton University 1978–1981. Online abrufbar unter <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [tDi] tom Dieck, Tammo: *Topologie*. De Gruyter, Berlin 2000 (2., völlig neu bearb. und erw. Auflage).
- [Vee] Veech, William A.: *Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards*. In: *Inventiones Mathematicae* **97**, 3 (1989), Seiten 553–583.
- [Vor] Vorobets, Yaroslav B.: *Planar structures and billiards in rational polygons: the Veech alternative*. In: *Russian Mathematical Surveys* **51**, 5 (1996), Seiten 779–817.