

# Grenzflächenprobleme bei der nichtlinearen Schrödingergleichung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik des  
Karlsruher Institutes für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

HANS-JÜRGEN FREISINGER

aus Graben-Neudorf

Tag der mündlichen Prüfung:

26. Juni 2013

Referent:

Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Korreferenten:

Prof. Dr. Dirk Hundertmark

Prof. Dr. Michael Plum

16. Juli 2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>Danksagung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1 Das Grenzflächenproblem für die nichtlineare Schrödingergleichung . . . . .	3
1.2 Grundzustände und bekannte Resultate . . . . .	4
1.3 Eigene Resultate: Duale Grundzustände . . . . .	8
1.4 Die nichtlineare Schrödingergleichung als physikalisches Modell . . . . .	13
1.5 Notationen . . . . .	16
<b>2 Duale Grundzustände indefiniter Grenzflächenprobleme</b>	<b>19</b>
2.1 Der Schrödingeroperator $L = -\Delta + V$ . . . . .	20
2.2 Das duale Problem . . . . .	22
2.3 Duale Grundzustände & Nehari-Mannigfaltigkeit . . . . .	26
2.4 Das Lemma von Pierre Louis Lions . . . . .	33
2.5 Existenz dualer Grundzustände bei periodischen Koeffizienten . . . . .	35
2.6 Die Nehari-Mannigfaltigkeit im Grenzflächenfall . . . . .	38
2.7 Existenz dualer Grundzustände im Grenzflächenfall . . . . .	43
2.8 Praktische Existenzkriterien . . . . .	57
2.9 Kontrastierende Koeffizienten . . . . .	61
<b>3 Duale Grundzustände in einer Dimension</b>	<b>69</b>
3.1 Blochmoden und die lineare Schrödingergleichung . . . . .	69
3.2 Ein allgemeines Existenzresultat für den Grenzflächenfall . . . . .	73
3.3 Stückweise konstante Koeffizienten . . . . .	78
<b>A (Echte) Grundzustände des Grenzflächenproblems</b>	<b>97</b>
A.1 Die verallgemeinerte Nehari-Mannigfaltigkeit . . . . .	97
A.2 Einschub: Der Satz über implizit definierte Funktionen . . . . .	101
A.3 Ein Projektionsproblem . . . . .	103
A.4 Palais-Smale Folgen in $\mathcal{M}$ . . . . .	111
A.5 Das abstrakte Existenzkriterium . . . . .	116
<b>Lebenslauf</b>	<b>127</b>
<b>Eidesstattliche Erklärung</b>	<b>129</b>



# Danksagung

Von ganzem Herzen möchte ich mich bei allen bedanken, die mich im Laufe der vergangenen drei Jahre bei der Anfertigung dieser Doktorarbeit unterstützt haben. Zunächst ist hier natürlich mein Betreuer, Herr Prof. Dr. Wolfgang Reichel, zu nennen, der während dieser Jahre viel Zeit aufgewendet hat um mich geduldig zu beraten, zu fördern und, wo es nötig war, auch herauszufordern hat. Von den Gesprächen mit ihm, von seinem Einsatz und von seinen Impulsen habe ich sehr profitiert. Ebenso danke Herrn Prof. Dr. Dirk Hundertmark und Herrn Prof. Dr. Michael Plum für Ihre Unterstützung und Begleitung sowie für die freundliche Übernahme des Korreferates.

Der Deutschen Forschungsgesellschaft DFG danke ich für die großzügige Finanzierung meiner Promotionszeit im Rahmen des Graduiertenkollegs 1294 „Analysis, Simulation und Design nanotechnologischer Prozesse“ am Karlsruher Institut für Technologie. Dank gilt auch all denen, die für die Organisation des Graduiertenkollegs verantwortlich zeichnen, stellvertretend seien hier Frau Prof. Dr. Marlis Hochbruck und Herr Prof. Dr. Willy Dörfler genannt.

Ein besonderer Dank geht auch nach Spanien, wo ich auf Empfehlung von Prof. Reichel von Ende August bis Ende September 2013 drei Monate an der Universität von Granada verbracht habe. Mein dortigen Gastgeber, Herr Prof. Dr. David Ruiz, hat sich von den Grenzflächenproblemen für die nichtlineare Schrödingergleichung inspirieren lassen und mit mir weitere Aspekte dieses Themas erarbeitet. Es war eine sehr schöne und interessante Zeit, an die ich gern zurückdenke, und für die ich David Ruiz sehr dankbar bin. Ich bedaure es sehr, dass die in der Zusammenarbeit mit David Ruiz gewonnenen Ergebnisse wegen der am Ende doch sehr knappen Zeit keine Aufnahme mehr in diese Arbeit finden konnten. Für die Finanzierung dieses Auslandsaufenthaltes während der ersten zwei Monate danke ich dem Karlsruhe House of Young Scientists (KHYS), für die Finanzierung des dritten Monats dem Institut für Analysis an der Universität Granada, insbesondere David Ruiz und David Arcoya.

Weiterhin danke ich Herrn Dipl.-Math. Marc Teschner, der die in seiner Diplomarbeit erzielten numerischen Resultate über eindimensionale Grenzflächenprobleme mit stückweise konstanten Koeffizienten für Kapitel 3.3 dieser Arbeit zur Verfügung gestellt hat.

An meiner Heimatuniversität in Karlsruhe habe ich mich sehr wohl gefühlt. Dazu hat das gute Klima unter den Doktoranden am Graduiertenkolleg wie auch innerhalb der Arbeitsgruppe für nichtlineare partielle Differenzialgleichungen beigetragen. Für alle fachlichen und nichtfachlichen Gespräche, alle moralische Unterstützung und alles Aushalten meiner mal besseren, mal schlechteren Launen danke ich insbesondere Dagmar Roth, Bernhard Barth, Stefan Findeisen, Dominik Müller, Tomislav Pažur, Kai Sandfort, Philipp Schmalkoke und Anton Verbitsky. Ganz besonderer Dank geht an meinen Zimmerkollegen Hannes Gerner und an Rainer Mandel für viele fruchtbare Diskussionen und an Dr. Tomáš Dohnal, der mich in vielen Fragen zu Grenzflächenproblemen kompetent beraten hat.

Danken möchte ich auch allen Freunden und Bekannten. Namentlich möchte ich hier nur Lina Hoscislawski und Marco Schrumpf nennen, denn dass sie mir gerade in den letzten Monaten immer wieder Abwechslung und Ablenkung verschafft haben, kann ich nicht hoch genug einschätzen. Aber auch allen anderen, die mich in welcher Art und Weise auch immer unterstützt und an mich gedacht haben, sage ich ganz herzlich „Danke!“.

Vor allem aber gilt mein Dank meiner Familie und insbesondere meinen Eltern. Sie haben mich in den Wochen vor der Abgabe dieser Arbeit nur selten und meistens nicht in der allerbesten Stimmung erlebt. Ohne den Rückhalt und die Fürsorge, die Sie mir nun seit dreißig Jahren zu geben nicht müde werde, wäre nichts möglich gewesen – auch nicht diese Arbeit – und kein Dankeschön wird dem je gerecht werden.

Graben-Neudorf, im Juni 2013.

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Das Grenzflächenproblem für die nichtlineare Schrödingergleichung

Diese Dissertation befasst sich mit der zeitunabhängigen nichtlinearen Schrödingergleichung (NLS)

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

deren Koeffizienten  $V, \Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  durch

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ V_2(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n \end{cases} \quad \text{und} \quad \Gamma(x) = \begin{cases} \Gamma_1(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \Gamma_2(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n \end{cases} \quad (1.2)$$

gegeben sind. Dabei ist

$$\mathbb{R}_\pm^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \gtrless 0\}$$

und die Funktionen  $V_i, \Gamma_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  sind 1-periodisch in jeder Koordinatenrichtung  $x_1, \dots, x_n$  für  $i = 1, 2$ . Die zugehörigen Schrödingeroperatoren auf  $H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  bezeichnen wir mit

$$L := -\Delta + V(x) \quad \text{und} \quad L_i = -\Delta + V_i(x) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Die zeitabhängige nichtlineare Schrödingergleichung

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\Delta \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) - \Gamma(x)|\psi(x, t)|^{p-1}\psi(x, t) \quad \text{für } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad (1.3)$$

hat in der Physik große Bedeutung bei der Beschreibung der Lichtausbreitung in photonischen Kristallen, einerseits als Reduktion der Maxwell-Gleichungen für monochromatische Wellen, andererseits als asymptotisches Modell für Einhüllendenfunktionen von Wellenpaketen mit nur langsam variierender Amplitude. Im Kontext von Bose-Einstein Kondensaten beschreibt (1.3) den Zustand eines Kondensats mit Hilfe der Wellenfunktion  $\psi$  eines Bosonteilchens. Dabei ist  $n = 1$  und (1.3) wird meist als *Gross-Pitaevski-Gleichung* bezeichnet. Auf den physikalischen Hintergrund im Kontext der nichtlinearen Optik – insbesondere photonischer Kristalle – gehen wir in Abschnitt 1.4 etwas genauer ein.

Mit dem zeitharmonischen Ansatz  $\psi(x, t) = e^{-i\omega t}u(x)$  erhält man aus (1.3) die zeitunabhängige Gleichung

$$-\Delta u + (V(x) - \omega)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

mit einem Frequenzparameter  $\omega \in \mathbb{R}$ . In (1.1) betrachten wir dann das Potenzial  $\tilde{V}(x) = V(x) - \omega$ .

Die Wahl der Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$  gemäß (1.2) modelliert nun einen Wellenleiter, der aus zwei verschiedenen periodischen Medien, etwa photonischen Kristallen, entlang einer Grenzfläche zusammengesetzt ist. Wir sprechen deshalb von einem „Grenzflächenproblem“ und sagen, (1.1) sei eine Gleichung vom „Grenzflächentyp“.

Die Arbeit widmet sich nun der Frage nach der Existenz lokalisierter Wellen, sogenannter „Solitonen“ in einem solchen Wellenleiter. Mathematisch gesprochen suchen wir Lösungen von  $u$  von (1.1) mit  $u(x) \rightarrow 0$  für  $|x| \rightarrow \infty$ . Diese Frage wird erstmals in der Arbeit [DP08] von Tomáš Dohnal und Dmitry Pelinovski diskutiert. Unter anderem zeigen Sie in einer Dimension, dass solche Lösungen nur existieren können, wenn  $\omega$  in einer Lücke des Spektrums  $\sigma(L)$  liegt. Deshalb spricht man auch von „Lückensolitonen“, in der englischsprachigen Literatur von „Gap Solitons“ oder speziell bei Grenzflächenproblemen auch von „Surface Gap Solitons“.

An (1.1) stellen wir in dieser Arbeit die folgenden Voraussetzungen:

**Voraussetzungen.**

(H1)  $\text{ess inf}_{x \in \mathbb{R}^n} \Gamma(x) > 0$ ,

(H2)  $0 \notin \sigma(L)$ ,

(H3)  $1 < p < \frac{n+2}{(n-2)_+}$ .

Nach (H2) liegt 0 in einer Lücke des Spektrums von  $L$ . Bisher wurden Grenzflächenprobleme nur für positiv definite Schrödingeroperatoren untersucht, also unter der schärferen Voraussetzung  $0 < \min \sigma(L)$ . Die Erweiterung von Arbeiten für den positiv definiten Fall auf indefinite Grenzflächenprobleme war Kernaufgabe dieser Dissertation. Für die rechte Seite von (1.1) fordern wir gleichwohl in (H1) Positivität. Die Voraussetzung (H3) benötigen wir, um (1.1) mit den Methoden der Variationsrechnung untersuchen zu können.

## 1.2 Grundzustände und bekannte Resultate

Unter der Voraussetzung (H3) ist für ein beliebiges beschränktes Potenzial  $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  die nicht-lineare Schrödingergleichung der Form (1.1) eine partielle Differenzialgleichung von variationeller Form. Ihre schwachen Lösungen im Raum  $H^1(\mathbb{R}^n)$  entsprechen den kritischen Punkten des  $C^1$ -Funktionals

$$I : H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) \, dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)|u|^{p+1} \, dx.$$

**Definition 1.2.1 (Grundzustände).** Es sei  $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  ein beliebiges Potenzial.

- (a) Eine schwache Lösung  $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$  von (1.1) heißt gebundener Zustand.  
 (b) Eine schwache Lösung  $u^* \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$  von (1.1) heißt Grundzustand von (1.1), wenn

$$c := I(u^*) = \min\{I(u) : u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \text{ mit } I'(u) = 0\}.$$

Jeder gebundene Zustand von (1.1) besitzt nach [Sim82, Theorem C.3.4] eine exponentielle Lokalisierung:

**Satz 1.2.2.** Unter den Voraussetzungen (H2) und (H3) sei  $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$  ein gebundener Zustand der nichtlinearen Schrödingergleichung (1.1). Dann existiert  $\alpha_0 > 0$  und für jedes  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  eine Konstante  $C_\alpha > 0$  mit

$$|u(x)| \leq C_\alpha e^{-\alpha|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Untersuchung des Grenzflächenproblems für (1.1) mit Koeffizienten der Form (1.2) baut nun auf Resultaten über die zugehörigen nichtlinearen Schrödingergleichungen

$$-\Delta u + V_i(x)u = \Gamma_i(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

mit den periodischen Koeffizienten  $V_i$  und  $\Gamma_i$  auf. Über diese Gleichung sind in den vergangenen zwei Jahrzehnten zahlreiche Veröffentlichungen erschienen:

Im Falle eines positiv definiten Schrödinger-Operators, also für  $0 < \min \sigma(L_i)$ , sind hier die Arbeiten [Rab91] von Paul H. Rabinowitz sowie [CZR92] von Vitorio Coti-Zelati und Paul H. Rabinowitz zu nennen. Als wichtigste Hilfsmittel verwenden beide Arbeiten das *Mountain-Pass*-Theorem und das *Concentration-Compactness*-Lemma von Pierre Louis Lions, siehe [Lio84, Lemma I.1]. Dieses Lemma wird auch in allen weiteren Arbeiten über (1.4) benutzt und wird in dieser Dissertation ebenfalls eine wichtige Rolle spielen, siehe Kapitel 2.4.

Die ersten Arbeiten, die sich mit (1.4) im indefiniten Fall befassen sind [AL92a, AL92b] von Stanley Alama und Yanyan Li sowie [Jea94] von Louis Jeanjean. Sie verwenden dabei einen dualen Zugang, der auch in dieser Arbeit verfolgt werden soll und auf den wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen werden. Direkte Zugänge finden sich dann in den Arbeiten [TW96] von Christophe Troestler und Michel Willem sowie in [KS98] von Wojciech Kryszewski und Andrzej Szulkin mit Hilfe des *Linking*-Theorems. Die Existenz von Grundzuständen wird im indefiniten periodischen Fall zuerst von Alexander Pankov in [Pan05] sowie darauf aufbauend auch von Andrzej Szulkin und Tobias Weth in [SW09] bewiesen:

**Satz 1.2.3 (A. Pankov, 2005 / A. Szulkin, T. Weth, 2009).** Unter den Voraussetzungen (H1) bis (H3) besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung (1.4) mit periodischen Koeffizienten  $V_i, \Gamma_i \in L^\infty$  einen Grundzustand  $u_i^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ .

Wir wollen nun einige kurze Erläuterungen zu diesem Satz geben. Da 0 nach Voraussetzung (H2) in einer spektralen Lücke der Operatoren  $L$  und  $L_i$  liegt, existieren Zerlegungen

$$H^1(\mathbb{R}^n) = H^+ \oplus H^- = H_1^+ \oplus H_1^- = H_2^+ \oplus H_2^- \quad (1.5)$$

von  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , sodass  $L$  bzw.  $L_i$  positiv definit sind auf  $H^+$  bzw.  $H_i^+$  und negativ definit auf  $H^-$  bzw.  $H_i^-$ . Schwache Lösungen von (1.4) im Raum  $H^1(\mathbb{R}^n)$  entsprechen nun den kritischen Punkten des

$C^1$ -Funktional

$$I_i : H^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + V_i(x)u^2) \, dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_i(x)|u|^{p+1} \, dx.$$

In Satz 1.2.3 erhält man den Grundzustand  $u_i^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$  nun als Lösung des Variationsproblems

$$c_i := \min\{I_i(u) : u \in \mathcal{M}_i\} \quad (1.6)$$

auf der sogenannten „verallgemeinerten Nehari-Mannigfaltigkeit“

$$\mathcal{M}_i := \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} : I_i'(u)u = 0 \text{ und } I_i'(u)\varphi = 0 \text{ für alle } \varphi \in H_i^-\}.$$

Lösungen von (1.6) nennt man auch *starke Grundzustände*. Auf  $\mathcal{M}_i$  ist das indefinite Funktional  $I_i$  dann positiv, also insbesondere nach unten beschränkt. Die Eigenschaften von  $\mathcal{M}_i$  wurden in den Arbeiten [SW09, SW10] von Andrzej Szulkin und Tobias Weth eingehend untersucht. Sie zeigen, dass  $\mathcal{M}_i$  homöomorph ist zur Einheitssphäre im Raum  $H_i^+$ .

Es liegt nahe diesen Ansatz auch im Grenzflächenfall zu verfolgen. Im Falle eines positiv definiten Schrödingeroperators  $L = -\Delta + V(x)$  mit  $\min \sigma(L) > 0$  für ein Grenzflächenproblem mit Koeffizienten gemäß (1.2) konnten Tomáš Dohnal, Michael Plum und Wolfgang Reichel in [DPR11] auf diese Weise das folgende abstrakte Existenzkriterium für starke duale Grundzustände von (1.1) bewiesen, siehe [DPR11, Theorem 2]:

**Satz 1.2.4 (T. Dohnal, M. Plum, W. Reichel, 2011).** *Unter den Voraussetzungen (H1) und (H3) gelte  $0 < \min \sigma(L)$ . Ist dann*

$$c < \min\{c_1, c_2\},$$

*so besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung (1.1) einen starken Grundzustand  $u^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ .*

Im positiv definiten Fall ist nun  $H_i^+ = H^1(\mathbb{R}^n)$  und die verallgemeinerte Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_i$  entspricht der klassischen Nehari-Mannigfaltigkeit

$$M_i := \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} : I_i'(u)u = 0\}.$$

$M_i$  ist dann homöomorph zur Einheitssphäre in  $H^1(\mathbb{R}^n)$ , d.h. jede Funktion  $u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$  lässt sich durch Skalieren auf  $M_i$  abbilden. Dies wird in den Beweisen von [DPR11] nun wesentlich benutzt um aus dem abstrakten Kriterium von Satz 1.2.4 das folgende praktisch verifizierbare Kriterium zu entwickeln, siehe [DPR11, Theorem 4], nach dem die Existenz starker Grundzustände nur noch von den Potenzialen  $V_1$  und  $V_2$  abhängt:

**Satz 1.2.5 (T. Dohnal, M. Plum, W. Reichel, 2011).** *Unter den Voraussetzungen (H1) und (H3) gelte  $0 < \min \sigma(L)$ . Dann ist jede der folgenden Bedingungen (i) und (ii) hinreichend für die Existenz eines starken Grundzustandes von (1.1):*

$$(i) \quad m_1 \leq m_2 \text{ und } \sup_{\mathbb{R}^n} (V_2 - V_1) < 0.$$

$$(ii) \quad m_2 \leq m_1 \text{ und } \sup_{\mathbb{R}^n} (V_1 - V_2) < 0.$$

Mit Hilfe von Satz 1.2.5 wird in [DPR11] dann in verschiedenen Modellen für Grenzflächenprobleme die Existenz von Grundzuständen nachgewiesen: so zeigen Sie die Existenz starker dualer

Grundzustände, wenn die Koeffizienten von (1.4) der Skalierungsbedingung

$$V_1(x) = k^2 V_2(kx) \quad \text{und} \quad \Gamma_1(x) = m^2 \Gamma_2(kx)$$

und die Skalierungsparameter  $k, m \in \mathbb{N}$  der Bedingung

$$k^{\frac{n+2-p(n-2)}{p-1}} \leq m^{\frac{4}{p-1}}$$

genügen, siehe [DPR11, Theorem 5]. Ein weiteres Existenzresultat wird für den Fall eines zwischen den Koeffizienten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  bestehenden großen Kontrastes gegeben, siehe [DPR11, Theorem 6]:

**Satz 1.2.6 (T. Dohnal, M. Plum, W. Reichel, 2011).** *Unter den Voraussetzungen (H1) und (H3) sei  $0 < \min \sigma(L)$ . Dann gilt*

- (i) *Ist  $\sup_{\mathbb{R}^n} (V_2 - V_1) < 0$ , so existiert  $\beta_0 = \beta_0(c_2)$ , sodass (1.1) einen starken dualen Grundzustand besitzt, wenn  $\Gamma_1(x) \geq \beta_0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .*
- (ii) *Ist  $\sup_{\mathbb{R}^n} (V_1 - V_2) < 0$ , so existiert  $\beta_0 = \beta_0(c_1)$ , sodass (1.1) einen starken dualen Grundzustand besitzt, wenn  $\Gamma_2(x) \geq \beta_0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

Danach beschäftigt sich [DPR11] mit dem eindimensionalen Fall. Die Autoren ersetzen hier die punktweise Bedingung von Satz 1.2.5 durch eine Integralbedingung. Dafür verwenden sie die Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  von  $L_i$ , zwei speziell gewählte linear unabhängige Lösungen der homogenen linearen Schrödingergleichung  $L_i u = 0$ , siehe [DPR11, Theorem 7]:

**Satz 1.2.7.** *Unter den Annahmen (H1) und (H3) sei  $0 < \min \sigma(L)$ . Dann ist jede der folgenden Bedingungen (i) und (ii) hinreichend für die Existenz eines starken dualen Grundzustandes der eindimensionalen nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-u'' + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

- (i) *Es gilt  $m_1 \leq m_2$  sowie*

$$\int_{-1}^0 (V_2(x) - V_1(x)) u_{-}^{(1)}(x)^2 dx < 0. \quad (1.8)$$

- (ii) *Es gilt  $m_2 \leq m_1$  sowie*

$$\int_0^1 (V_1(x) - V_2(x)) u_{+}^{(2)}(x)^2 dx < 0. \quad (1.9)$$

*Gilt sowohl (1.8) als auch (1.9), so folgt die Existenz eines starken dualen Grundzustandes von (1.7) auch ohne Kenntnis über  $m_1$  und  $m_2$ .*

Die Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  lassen sich für gewisse Potenziale  $V_1$  und  $V_2$  explizit berechnen bis auf die Lösung einer transzendenten Gleichung. Dies ermöglichte die Verifikation der Ungleichungen in Satz 1.2.7 in der Arbeit [DNPPR] von Tomáš Dohnal, Kaori Nagatou-Plum, Michael Plum und Wolfgang Reichel in verschiedenen Modellen für eindimensionale Grenzflächenprobleme. Mit Hilfe des Kriteriums von Satz 1.2.7 konnte in diesen Modellen somit die Existenz von Grundzuständen nachgewiesen werden.

### 1.3 Eigene Resultate: Duale Grundzustände

Diese Dissertation folgt im Wesentlichen dem Aufbau von [DPR11]. Die Indefinitheit des Schrödingeroperators  $L$  erforderte allerdings die Einführung eines neuen Lösungsbegriffes, um ein Analogon zu Satz 1.2.5 zu erhalten, den *dualen Grundzustand*. Dafür folgen wir einem von Stanley Alama und Yanyan Li in [AL92a, AL92b] und von Louis Jeanjean in [Jea94] vorgeschlagenen Zugang und überführen (1.1) folgendermaßen in eine *duale Gleichung*:

Wir betrachten den Operator

$$K : L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p+1}(\mathbb{R}^n), \quad v \mapsto \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L^{-1} \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v$$

auf dem Raum  $L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ , wobei  $\frac{1}{q+1} + \frac{1}{p+1} = 1$ , und suchen Lösungen  $v \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$  der Gleichung

$$Kv = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (1.10)$$

Jeder nichttrivialen Lösung  $v \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$  von (1.10) entspricht dann eine nichttriviale Lösung

$$u = \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v|^{q-1}v \in H^2(\mathbb{R}^n) \quad (1.11)$$

von (1.1), vgl. Satz 2.2.3. Lösungen der dualen Gleichung (1.10) entsprechen dann den kritischen Punkten des  $C^1$ -Funktional  $J : L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$  mit

$$J(v) = \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} vKv dx.$$

Da  $q+1 < 2$ , ist im Gegensatz zum Funktional  $I$  nun der positive Anteil  $\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} dx$  bestimmend für das Verhalten von  $J$  nahe der 0, sodass sich die Variationsmethoden aus dem positiv definiten Fall auf  $J$  anwenden lassen. Auf diese Weise haben wir also die durch Voraussetzung (H2) bestehende Indefinitheit des Problems umgangen. Die Positivität des Koeffizienten  $\Gamma$  gemäß (H3) wird dabei wesentlich benutzt. Insbesondere ist nun das Funktional  $J$  auf der klassischen Nehari-Mannigfaltigkeit

$$N := \{v \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} : J'(v)v = 0\}$$

positiv und damit nach unten beschränkt. Eine Lösung  $v^* \in L^{q+1} \setminus \{0\}$  des Variationsproblems

$$m := J(v^*) = \min\{J(v) : v \in N\} \quad (1.12)$$

heißt dann *starker Grundzustand* von (1.10). Die zugehörige Lösung

$$u^* = \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v^*|^{q-1}v^* \in H^2 \setminus \{0\}$$

von (1.1) nennen wir einen *starken dualen Grundzustand*. Jeder starke duale Grundzustand ist ein nichttrivialer gebundener Zustand von (1.1). Analog erklärt man starke duale Grundzustände für die Gleichungen (1.4) mit periodischen Koeffizienten: man betrachtet für die zu (1.4) dualen Probleme

$$K_i v = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (1.13)$$

mit den Operatoren  $K_i := \Gamma_i(x)L_i^{-1}\Gamma_i(x)$  die Variationsprobleme

$$m_i := \min\{J_i(v) : v \in N_i\} \quad (1.14)$$

für die Funktionale

$$J_i : L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} vKv dx$$

auf den Nehari-Mannigfaltigkeiten

$$N_i := \{v \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} : J_i'(v)v = 0\}.$$

für  $i = 1, 2$ .

In Kapitel 2.3 untersuchen wir für ein beliebiges beschränktes Potenzial  $V$  das Variationsproblem (1.12) auf der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$  und zeigen in Proposition 2.3.12 dann die Existenz einer sogenannten *Palais-Smale-Folge* für  $J$ , d.h. einer Folge  $(v_k)$ , für die

$$J(v_k) \rightarrow m \quad \text{und} \quad J'(v_k) \rightarrow 0 \quad (1.15)$$

gilt. Hierfür verwenden wir ähnliche Argumente wie in der Arbeit [Jea94] von Louis Jeanjean, die allerdings nur den Fall eines asymptotisch konstanten Koeffizienten  $\Gamma$  behandelt. Dann untersuchen wir in Kapitel 2.5 die periodischen Probleme (1.4) bzw. (1.13) und zeigen mit Hilfe des Concentration-Compactness-Lemmas von Pierre Louis Lions, dass die gefundene Palais-Smale-Folge  $(v_k)$  in der Nehari-Mannigfaltigkeit schwach in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  gegen eine nichttriviale Lösung von (1.13) konvergiert. Für die Probleme (1.4) ist damit die Existenz starker dualer Grundzustände in jedem Fall gesichert, siehe Satz 2.5.3.

Danach betrachten wir in den Abschnitten 2.6 und 2.7 den Grenzflächenfall. Unser erstes Hauptresultat ist dann das folgende Analogon zu Satz 1.2.4:

**Satz 1.3.1.** *Ist  $m < \{m_1, m_2\}$ , so besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

*unter den Annahmen (H1) bis (H3) einen starken dualen Grundzustand  $u^* \in H^2(\mathbb{R}^n)$ .*

Für die Energieniveaus  $m$ ,  $m_1$  und  $m_2$  der starken Grundzustände von (1.10) und (1.13) gilt dabei stets  $m \leq \{m_1, m_2\}$ , siehe Proposition 2.6.5. Die Forderung der scharfen Ungleichung in Satz 1.3.1 benötigt man, um sicherzustellen, dass die Palais-Smale-Folge  $(v_k)$  in der Nehari-Mannigfaltigkeit für das Grenzflächenproblem nicht gegen die Nulllösung konvergiert, siehe Proposition 2.7.3. Bei den Betrachtungen sind Argumente aus [DPR11] hilfreich, müssen aber auf die nun zugrunde liegende Banachraumsituation angepasst werden.

Die im Existenzkriterium von Satz 1.3.1 auftretenden Größen  $m$ ,  $m_1$  und  $m_2$  sind in aller Regel nicht bekannt. Deshalb gilt es nun aus Satz 1.3.1 ein praktisch verifizierbares Kriterium analog zu Satz 1.2.5 aus der Arbeit [DPR11] von Tomáš Dohnal, Michael Plum und Wolfgang Reichel zu gewinnen. Dies leisten in Kapitel 2.8 dann der folgende Satz, in dem nun der Abstand  $\alpha_-$  der 0 vom negativen Spektrum des Operators  $L$  auftritt:

**Satz 1.3.2.** *Unter den Voraussetzungen (H1) bis (H3) ist jede der folgenden Bedingungen (i) und (ii) hinreichend für die Existenz eines starken dualen Grundzustandes von (1.1):*

(i) *Es gilt  $m_1 \leq m_2$  sowie*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( V_2(x) - V_1(x) + \frac{(V_2(x) - V_1(x))^2}{\alpha_-} \right) < 0. \quad (1.16)$$

(ii) *Es gilt  $m_2 \leq m_1$  sowie*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( V_1(x) - V_2(x) + \frac{(V_1(x) - V_2(x))^2}{\alpha_-} \right) < 0. \quad (1.17)$$

*Gilt sowohl die Ungleichung (1.16) als auch (1.17) so folgt die Existenz eines starken dualen Grundzustandes auch Kenntnis über  $m_1$  und  $m_2$ .*

Der Satz 1.2.5 aus dem positiv definiten Fall in [DPR11] folgt hieraus als Spezialfall im Grenzwert  $\alpha_- \rightarrow \infty$ , siehe Korollar 2.8.2. Durch die in Satz 1.3.2 auftretenden Korrekturterme

$$\frac{(V_2(x) - V_1(x))^2}{\alpha_-} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(V_1(x) - V_2(x))^2}{\alpha_-}$$

stellen wir allerdings eine stärkere Bedingung an  $V_1$  und  $V_2$  als im positiv definiten Fall. Man beachte ferner, dass dieses Existenzkriterium wie auch dasjenige von Satz 1.3.2 unabhängig ist von den Koeffizienten  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ . Mit Hilfe dieses Korollars betrachten wir zum Abschluss des Kapitels über duale Grundzustände in Abschnitt 2.9 dann als Beispiel das Grenzflächenproblem

$$-\Delta u + \tilde{V}(x)u = \tilde{\Gamma}(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (1.18)$$

mit den Koeffizienten

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} V(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ V(x) - \delta(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\Gamma}(x) = \begin{cases} \Gamma(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \mu\Gamma(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n, \end{cases} \quad (1.19)$$

wobei  $V, \Gamma, \delta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  periodische Funktionen,  $\delta$  eine positive Störung und  $\mu > 0$  ein Skalierungsfaktor sind. Mit Hilfe von Satz 1.3.2 können wir dann explizite Schranken an  $\mu$  und  $\delta$  angeben, für die (1.18) einen starken dualen Grundzustand besitzt. Wir benötigen hierfür eine hinreichende Kleinheit der Störung  $\delta$  und einen großen Kontrast zwischen  $\Gamma$  und  $\mu\Gamma$ . So fügt sich dieses Beispiel in die Reihe der in [DPR11] gegebenen Beispiele ein. Durch den zu fordernden großen Kontrast in  $\Gamma$  kann man den folgenden Satz 1.3.3 als ein Analogon zu Satz 1.2.6 ansehen:

**Satz 1.3.3.** *Die Funktionen  $V, \Gamma, \delta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  seien periodisch sowie  $0 \notin \sigma(-\Delta + \tilde{V}(x))$  und  $\text{ess inf}_{\mathbb{R}^n} \Gamma > 0$ . Die Konstanten  $\varepsilon_0$  und  $C$  seien gegeben durch*

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ \frac{1}{2} \|L^{-1}\|^{-1}, \frac{1}{4\kappa} \left( \frac{m}{\kappa} \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \left( 1 + 2^{\frac{1+q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{-\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^{-2} \right\},$$

$$C := 2^{\frac{3-q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \left( \frac{m}{\kappa} \right)^{\frac{2}{q+1}} \left( 1 + 2^{\frac{1+q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \right)^{\frac{2}{q+1}} \kappa \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2.$$

Ferner sei  $\gamma := \frac{2}{(p+1)(1-q)}$ . Ist dann  $\mu \in (0, 1)$  und gilt

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \delta(x) > 0, \quad \text{sowie} \quad \|\delta\|_\infty < \min \left\{ \varepsilon_0, \frac{\alpha^-}{2}, \frac{(1 - \mu^{\gamma(q+1)})m}{C} \right\},$$

so besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung (1.18) einen starken dualen Grundzustand.

In Kapitel 3 untersuchen wir dann (1.1) in einer Raumdimension. Mit Hilfe der Blochmoden  $u_\pm^{(i)}$  von  $L_i$  beweisen wir in Analogie zu Satz 1.2.7 den folgenden Satz:

**Satz 1.3.4.** *Unter den Voraussetzungen (H1) bis (H3) seien die Blochmoden  $u_\pm^{(i)}$  des Schrödingeroperators  $L_i$ . Dann ist jede der folgenden Bedingungen (i) und (ii) hinreichend für die Existenz eines starken dualen Grundzustandes der eindimensionalen nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-u'' + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad (1.20)$$

vom Grenzflächentyp:

(i) Es gilt  $m_1 \leq m_2$  sowie

$$\mathcal{I}_1 := \int_{-1}^0 \left( V_2(x) - V_1(x) + \frac{(V_2(x) - V_1(x))^2}{\alpha_-} \right) u_-^{(1)}(x)^2 dx < 0 \quad (1.21)$$

(ii) Es gilt  $m_2 \leq m_1$  sowie

$$\mathcal{I}_2 := \int_0^1 \left( V_1(x) - V_2(x) + \frac{(V_1(x) - V_2(x))^2}{\alpha_-} \right) u_+^{(2)}(x)^2 dx < 0. \quad (1.22)$$

Ist sowohl die Ungleichung (1.21) wie auch die Ungleichung (1.22) erfüllt, so folgt die Existenz eines starken dualen Grundzustandes von (1.1) auch ohne Kenntnis über  $m_1$  und  $m_2$ .

Wiederum ergeben sich also die Korrekturterme

$$\frac{(V_2(x) - V_1(x))^2}{\alpha_-} \quad \text{bzw.} \quad \frac{(V_1(x) - V_2(x))^2}{\alpha_-}$$

im Vergleich zum positiv definiten Fall von Satz 1.2.7 und wir erhalten ein verschärftes Kriterium für den indefiniten Fall.

Abschließend stellen wir in Kapitel 3.3 die Ergebnisse der in der Betreuung von Wolfgang Reichel und Hans-Jürgen Freisinger entstandenen Diplomarbeit „Beispiele für Interface-Modelle bei der 1-dimensionalen linearen und nichtlinearen Schrödingergleichung“ von Marc Teschner vor, in der mit Hilfe von Satz 1.3.4 die Existenz starker dualer Grundzustände der eindimensionalen Gleichung (1.20) mit den stückweise konstanten Potenzialen

$$V_1(x) = \begin{cases} a_1, & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ b_1, & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad V_2(x) = \begin{cases} a_2, & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ b_2, & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

für reelle Parameter  $a_i < b_i$  untersucht wird. Dieses Beispiel wurde in der Arbeit [DNPPR] von Tomáš Dohnal, Kaori Nagatou-Plum, Michael Plum und Wolfgang Reichel vorgeschlagen und für

den positiv definiten Fall untersucht. Wie oben bereits erwähnt, lassen sich die Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  bis auf die Lösung einer transzendenten Gleichung explizit berechnen. Mit Hilfe von MATLAB- und INTLAB-Programmen wurden dann die in (1.21) und (1.22) auftretenden Integrale in Abhängigkeit von den Parameterwerten  $a_1, a_2, b_1$  und  $b_2$  berechnet und so explizit die Existenz starker dualer Grundzustände von (1.20) für geeignete Parameterwerte nachgewiesen. Die Berechnungen zeigen im Vergleich mit den Resultaten aus [DNPPR] allerdings auch, dass die Existenzkriterien für den indefiniten Fall restriktiver sind als im positiv definiten Fall. Eine Abschwächung dieser Kriterien sollte also das Ziel künftiger Forschungsarbeit zu diesem Thema sein.

Nun noch einige Worte über den direkten Zugang zum Grenzflächenproblem für (1.1): mit den Methoden aus [Pan05] und [DPR11] war es auch möglich ein Existenzkriterium für (echte) Grundzustände zu zeigen durch Minimierung des Funktionals  $I$  auf der verallgemeinerten Nehari-Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\} : I'(u)u = 0 \text{ und } I'(u)\varphi = 0 \text{ für alle } \varphi \in H^-\},$$

wobei wir die Zerlegung  $H^1(\mathbb{R}^n) = H^+ \oplus H^-$  gemäß (1.5) verwenden. Dieses Kriterium entwickeln wir im Anhang dieser Arbeit, siehe Satz A.5.1. Es gilt:

**Satz 1.3.5.** *Unter den Voraussetzungen (H1) bis (H3) gelte  $c < \min\{c_1, c_2\}$ . Dann besitzt (1.1) einen (echten) Grundzustand.*

Die Entwicklung eines praktisch verifizierbaren Kriteriums hieraus hat sich jedoch als zu schwierig erwiesen, weil die verallgemeinerte Nehari-Mannigfaltigkeit nun – im Gegensatz zum positiv definiten Fall – nicht mehr homöomorph ist zur Einheitskugel in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  sondern nur noch zur Einheitskugel im positiven Spektralhalbraum  $H^+$ , siehe [SW09, SW10].

Mit Hilfe einer Variante des Satzes über implizit definierte Funktionen, siehe Satz A.2.1, konnte für die verschobenen Grundzustände  $u_i^*(\cdot - te_1)$  der Probleme (1.4) mit periodischen Koeffizienten zwar eine „Projektion“  $p_i$  auf  $\mathcal{M}$  gefunden werden, siehe Abschnitt A.3, doch lieferten die Rechnungen keine hinreichend guten Abschätzungen für den Projektionsfehler  $\|p_i - u_i^*(\cdot - te_1)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$ .

So stehen am Ende dieser Dissertation die folgenden drei Fragen als möglicher Gegenstand weiterer Forschungsarbeit zur variationellen Behandlung von Grenzflächenproblemen bei der nichtlinearen Schrödingergleichung:

- Kann für die Suche nach Grundzuständen von (1.1) aus dem abstrakten Kriterium von Satz 1.3.5 ein in Beispielen verifizierbares Kriterium ähnlich den Sätzen 1.2.5 und 1.3.2 entwickelt werden?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dualen Grundzuständen und echten Grundzuständen von (1.1)? Gibt es Bedingungen, unter denen ein dualer Grundzustand von (1.1) ein echter Grundzustand ist?
- Lassen sich die Existenzkriterien für duale Grundzustände der Sätze 1.3.2 und 1.3.4 abschwächen?

## 1.4 Die nichtlineare Schrödingergleichung als physikalisches Modell

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Motivation für das Auftreten der nichtlinearen Schrödingergleichung als physikalisches Modell. Dabei konzentrieren wir uns auf die nichtlineare Optik und den Kontext photonischer Kristalle.

Photonische Kristalle sind ein viel untersuchter und diskutierter Gegenstand der aktuellen Forschung im Bereich der nichtlinearen Optik. Man versteht darunter Strukturen, die durch im Raum periodische Anordnung sog. „dielektrischer Medien“ mit unterschiedlichen Brechungsindizes entstehen und als Leiter optischer Signale, etwa Lichtwellen wie beispielsweise Laserstrahlen, dienen. Durch ihre spezielle Struktur und die – oftmals „nichtlineare“ – Interaktion des Kristalls und der durchgeleiteten Welle ergeben sich hierbei interessante physikalische Effekte und mathematische Fragestellungen.

Es ist nicht Aufgabe dieser theoretischen mathematischen Arbeit, die physikalische Natur dieser Fragen zu diskutieren. Wir wollen lediglich einen Überblick über die für uns wichtigen Grundlagen dieses weitläufigen Forschungsgebietes geben. Im Mittelpunkt steht dabei die Frage nach dem Auftreten der nichtlinearen Schrödingergleichung im Kontext photonischer Kristalle. Die wichtigste Referenz für die folgenden Ausführungen ist das Buch [MN04].

Das mathematische Modell für die Ausbreitung von Lichtwellen in dielektrischen Medien – z. B. photonischen Kristallen – sind die Maxwell-Gleichungen. Wir betrachten sie hier in ihrer differenziellen Form:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Induktionsgesetz),} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} && \text{(Durchflutungsgesetz),} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho && \text{(Coulomb'sches Gesetz),} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(Gauß'sches Gesetz für Magnetfelder).}\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet

$$\begin{aligned}\mathbf{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{das elektrische Feld,} \\ \mathbf{D} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{die elektrische Verschiebung,} \\ \mathbf{B} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{das magnetische Feld,} \\ \mathbf{H} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{die magnetische Induktion,} \\ \mathbf{j} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{den elektrischen Strom,} \\ \rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} && \text{die elektrische Ladungsdichte.}\end{aligned}$$

Nach dem Durchflutungsgesetz und dem Coulomb'schen Gesetz erzeugt jede Ladungsänderung einen elektrischen Strom, denn es gilt die *Stetigkeitsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \cdot \mathbf{j} = -\nabla \cdot \mathbf{j}.$$

Weiterhin wird der Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und elektrischer Verschiebung einerseits sowie zwischen magnetischem Feld und magnetischer Verschiebung andererseits durch die sogenannten *konstituierenden Gleichungen*

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

beschrieben. Dabei sind  $\varepsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}$  die *Dielektrizitätszahl*,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{As/Vm}$  die *Permeabilitätszahl* sowie  $\varepsilon_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  der *Dielektrizitätstensor* und  $\mu_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  der *Permeabilitätstensor*.

Die Vektorfelder  $\mathbf{P} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbf{M} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  heißen *Polarisierung* bzw. *Magnetisierung*. Mit ihnen – bzw. mit den Tensoren  $\varepsilon_r$  und  $\mu_r$  – lassen sich nun die geometrischen Strukturen und die optischen Eigenschaften eines dielektrischen Mediums modellieren. Im Allgemeinen werden die Funktionen  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{M}$  allerdings mathematisch äusserst kompliziert zu handhaben sein, sodass wir die folgenden vereinfachenden Annahmen stellen:

- In dem als Lichtwellenleiter betrachteten Dielektrikum gebe es weder freien Ladungen noch freie Ströme. Es gelte also

$$\rho \equiv 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{j} \equiv \mathbf{0}.$$

- Der betrachtete Wellenleiter sei nicht magnetisch, d.h. es gelte  $\mu_r \equiv 1$ .
- Das Dielektrikum sei zentrosymmetrisch und isotrop. In diesem Fall ist  $\varepsilon_r$  ein Skalar.

Aus den Maxwell-Gleichungen folgt nun

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

mit der *Vakuumllichtgeschwindigkeit*  $c := (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{m/s}$ . Die zeitlichen und räumlichen Ableitungen von  $\mathbf{E}$  in (1.23) beschreiben die Ausbreitung des elektrischen Feldes  $\mathbf{E}$  in dem betrachteten Medium; der Term  $\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$  beschreibt dagegen die durch  $\mathbf{E}$  angeregte „Antwort“ des Dielektrikums auf  $\mathbf{E}$ .

Wir wollen nun einige Ansätze für die Polarisation  $\mathbf{P}$  unseres photonischen Kristalls diskutieren

1. Antwortet ein isotroper Wellenleiter *unmittelbar* auf ein durchgeleitetes elektrisches Feld  $\mathbf{E}$ , so gilt

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}.$$

Dabei ist  $\chi$  eine skalare Konstante und heißt *elektrische Suszeptibilität*. In diesem Fall ist  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$  und damit  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) = \Delta \mathbf{E}$ . Aus (1.23) erhalten wir somit die Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

wobei  $n := \sqrt{1 + \chi}$  der *Brechungsindex* des Wellenleiters ist.

2. Im Allgemeinen wird ein Wellenleiter erst *mit zeitlicher Verzögerung* auf ein durchgeleitetes Feld  $\mathbf{E}$  antworten. In diesem Fall ist die elektrische Suszeptibilität  $\chi$  eine Funktion der Zeit,

wobei  $\chi(t) = 0$  für  $t < 0$ , und man setzt

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 \chi \star \mathbf{E}(\cdot, \mathbf{x})(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau) \mathbf{E}(s, \mathbf{x}) \, ds.$$

Durch Fouriertransformation in der Zeit  $t$  erhält man daraus

$$\widehat{\mathbf{P}}(\omega, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 \hat{\chi}(\omega) \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x})$$

und aus den konstituierenden Gleichungen weiter

$$\widehat{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 (1 + \hat{\chi}(\omega)) \widehat{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{x}). \quad (1.24)$$

Wir hatten angenommen, dass  $\rho \equiv 0$ . Das Coulomb'sche Gesetz liefert uns somit die Divergenzfreiheit von  $\mathbf{D}$  und damit auch von  $\widehat{\mathbf{D}}$ . Nach (1.24) ist dann auch  $\widehat{\mathbf{E}}$  divergenzfrei und aus (1.23) erhalten wir für  $\widehat{\mathbf{E}}$  die Helmholtzgleichung

$$\Delta \widehat{\mathbf{E}} - \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \widehat{\mathbf{E}} = 0.$$

Der Brechungsindex  $n = \sqrt{1 + \hat{\chi}(\omega)}$  ist nun eine Funktion der Frequenz  $\omega$  ist.

3. In den beiden vorangegangenen Beispielen bestand zwischen dem elektrischen Feld  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$  und der Polarisierung  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  stets ein linearer Zusammenhang. In einem solchen Fall sprechen wir von einem „linearen“ Wellenleiter. Nun betrachten wir einen „nichtlinearen“ Wellenleiter. Zu den linearen Polarisierungseffekten  $\mathbf{P}_1(\mathbf{E})$  kommen dann nichtlineare Reaktionen  $\mathbf{P}_{\text{nl}}(\mathbf{E})$ , sodass

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}) = \mathbf{P}_1(\mathbf{E}) + \mathbf{P}_{\text{nl}}(\mathbf{E}).$$

Bevor wir allerdings Ansätze für  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_{\text{nl}}$  machen, vereinfachen wir noch das betrachtete elektrische Feld  $\mathbf{E}$ : im letzten Beispiel hatten wir eine Differenzialgleichung für die zeitliche Fouriertransformierte  $\widehat{\mathbf{E}}$  gewonnen. Analog dazu machen wir nun den *zeitharmonischen Ansatz*

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = e^{i\omega t} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) + e^{-i\omega t} \overline{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{x}) \quad (1.25)$$

mit einer Funktion  $\boldsymbol{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ . Für die Polarisierungsterme  $\mathbf{P}_1$  und  $\mathbf{P}_{\text{nl}}$  betrachten wir ferner Funktionen  $\chi^{(1)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\chi^{(3)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und setzen

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{E}, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}) = e^{i\omega t} \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) + e^{-i\omega t} \varepsilon_0 \chi^{(1)}(\mathbf{x}) \overline{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{x}) \quad (1.26)$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{nl}}(\mathbf{E}, \mathbf{x}) &= \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\mathbf{x}) |\mathbf{E}(\mathbf{x})|^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ &= \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\mathbf{x}) \left( e^{3i\omega t} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x})^3 + e^{-3i\omega t} \overline{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{x})^3 + 3e^{-i\omega t} |\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x})|^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) + 3e^{i\omega t} |\overline{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{x})|^2 \overline{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{x}) \right). \end{aligned}$$

In  $\mathbf{P}_{\text{nl}}(\mathbf{E}, \mathbf{x})$  vernachlässigen wir nun die sogenannten „höheren Harmonischen“  $\boldsymbol{\mathcal{E}}^3$  und  $\overline{\boldsymbol{\mathcal{E}}}^3$ ,

treffen also die vereinfachende Annahme, dass

$$P_{\text{nl}}(\mathbf{E}, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 \chi^{(3)}(\mathbf{x}) \left( 3e^{-i\omega t} |\mathcal{E}(\mathbf{x})|^2 \mathcal{E}(\mathbf{x}) + 3e^{i\omega t} |\overline{\mathcal{E}}(\mathbf{x})|^2 \overline{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) \right). \quad (1.27)$$

Insbesondere ist dann  $P_{\text{nl}}(\mathbf{E}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ . Die Ansätze (1.25), (1.26) und (1.27) setzen wir nun in die Differenzialgleichung (1.23) ein. Auf diese Weise erhalten wir zwei entkoppelte Differenzialgleichungen, nämlich

$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \chi^{(1)}(\mathbf{x}) + 3\chi^{(3)}(\mathbf{x}) |\mathcal{E}|^2 \right) \mathcal{E} \quad (1.28)$$

und dieselbe Gleichung für  $\overline{\mathcal{E}}$  statt  $\mathcal{E}$ . Aufgrund der Isotropie des betrachteten Wellenleiters können wir nun annehmen, dass die Polarisierungseffekte  $\chi^{(1)}$  und  $\chi^{(3)}$  nicht von der Ausbreitungsrichtung von  $\mathcal{E}$  abhängen. Es gelte also  $\chi^{(1)}(\mathbf{x}) = \chi^{(1)}(x_1, x_2)$  und  $\chi^{(3)}(\mathbf{x}) = \chi^{(3)}(x_1, x_2)$  sowie

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

mit einer Funktion  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $\nabla \times \nabla \times \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}$  und aus (1.28) erhalten wir für  $u$  die nichtlineare Schrödingergleichung

$$-\Delta u - \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \chi^{(1)}(x_1, x_2) \right) u = \frac{3\omega^2}{c^2} \chi^{(3)}(x_1, x_2) |u|^2 u.$$

Man beachte jedoch, dass das so entstehende mathematische Modell durch die Vernachlässigung der höheren Harmonischen von  $P_{\text{nl}}$  in (1.27) nur asymptotischen Charakter besitzt.

## 1.5 Notationen

Abschließend klären wir die wichtigsten in dieser Arbeit vorkommenden Schreibweisen:

### Funktionalanalysis

Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume. Normkonvergenz in  $X$  bezeichnen wir mit „ $\rightarrow$ “ und schwache Konvergenz mit „ $\rightharpoonup$ “.  $B_r(x_0)$  ist die offene Kugel um  $x_0 \in X$  mit Radius  $r > 0$ . Mit  $\mathcal{L}(X, Y)$  bezeichnen wir den Raum aller stetigen linearen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  und mit  $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  den Dualraum von  $X$ . Ferner sei  $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$  und  $I \in \mathcal{L}(X)$  die identische Abbildung auf  $X$ . Den Kern eines Operators  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  bezeichnen wir mit Kern  $A$ , seinen Bildraum mit Bild  $A$  oder manchmal auch mit  $A(X)$ .

Für einen dicht definierten linearen Operator  $A : D(A) \rightarrow X$  mit Definitionsbereich  $D(A) \subset X$  auf einem Banachraum  $X$ , heißt die Menge

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \}$$

die *Resolventenmenge* von  $A$ . Dabei schreiben wir kurz  $A - \lambda := A - \lambda I$ . Das Komplement der Resolventenmenge

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

heißt Spektrum von  $A$  und wird gemäß

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_{\text{ess}}(A) \cup \sigma_{\text{res}}(A)$$

in die drei disjunkten Teilmengen

$$\begin{aligned} \sigma_p(A) &:= \{\lambda : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}, \\ \sigma_{\text{ess}}(A) &:= \{\lambda : A - \lambda \text{ ist injektiv, Bild } (A - \lambda) \neq X \text{ und } \overline{\text{Bild } (\lambda - A)} = X\}, \\ \sigma_{\text{res}}(A) &:= \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_{\text{ess}}(A)) \end{aligned}$$

zerlegt.  $\sigma_p(A)$  heißt *Punktspektrum*,  $\sigma_{\text{ess}}(A)$  *wesentliches* oder *stetiges Spektrum* und  $\sigma_{\text{res}}(A)$  *Residualspektrum* von  $A$ . Ist  $X$  ein Hilbertraum und  $A$  selbstadjungiert, so gilt  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$  und  $\sigma_{\text{res}}(A) = \emptyset$ , siehe [HS96, Theorem 5.5].

Ist  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $X$  und  $f : \Omega \rightarrow Y$ , so bezeichnet wir die Gâteaux-Ableitung von  $f$  mit  $df$  und die Fréchet-Ableitung mit  $f'$ . Den Raum aller  $n$ -mal stetig differenzierbaren Abbildungen von  $\Omega$  nach  $Y$  bezeichnen wir mit  $C^n(\Omega, Y)$ .

## Funktionenräume

Die Raumdimension bezeichnen wir mit  $n \in \mathbb{N}$ . In dieser Dissertation bewegen wir uns meist in den Lebesgueräumen  $L^p(\Omega)$  und in den Sobolevräumen  $W^{k,p}(\Omega)$  der Integrierbarkeitsstufe  $p \in [1, \infty]$  und der Differenzierbarkeitsordnung  $k \in \mathbb{N}$  über einer offenen Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit in der üblichen Weise definierten Normen  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  und  $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ . Den Hilbertraumfall kennzeichnen wir durch  $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ . Ist  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , so schreiben wir meist kurz  $L^p := L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $W^{k,p} := W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  und  $H^k := H^k(\mathbb{R}^n)$  sowie für die entsprechenden Normen  $\|\cdot\|_s := \|\cdot\|_{L^s}$  bzw.  $\|\cdot\|_{k,s} := \|\cdot\|_{W^{k,s}}$ . Mit

$$p^* := \frac{np}{(n-p)_+} = \begin{cases} \frac{np}{n-p}, & \text{für } n > p, \\ \infty, & \text{für } n \leq p \end{cases}$$

bezeichnen wir den Sobolev-kritischen Exponenten zu  $p \in [1, \infty)$ . Ferner schreiben wir häufig  $p^{**} := (p^*)^*$  und  $p^\# := p^* - 1$ .

## Landau-Symbole

Die Landau-Symbole  $o$  und  $\mathcal{O}$  verwenden wir in der üblichen Schreibweise. Dafür seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume,  $M$  eine nichtleere Teilmenge von  $X$  sowie  $f : M \rightarrow Y$  und  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Ist  $x_0$  ein Häufungspunkt von  $M$ , so schreiben wir  $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Für  $M \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$  und  $X = \mathbb{R}$  ist hierdurch auch die Schreibweise  $f(x) = o(g(x))$  für  $x \rightarrow \infty$  erklärt, wenn wir  $x_0 = \infty$  zulassen.

- Ist  $x_0 \neq \infty$  ein Häufungspunkt von  $D$ , so schreiben wir  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  für  $x \rightarrow x_0$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass

$$\|f(x)\| \leq C|g(x)| \quad \text{für alle } x \in B_\varepsilon(x_0).$$

Ist  $M$  unbeschränkt, so schreiben wir  $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$  für  $x \rightarrow \infty$ , wenn ein  $\gamma \in \mathbb{R}$  existiert, sodass

$$\|f(x)\| \leq C|g(x)| \quad \text{für alle } x \in M \text{ mit } \|x\| \geq \gamma.$$

## Kapitel 2

# Duale Grundzustände indefiniter Grenzflächenprobleme

In diesem Kapitel untersuchen wir die Existenz dualer Grundzustände der nichtlinearen Schrödingergleichung.

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

vom Grenzflächentyp. Dabei sind die Koeffizienten  $V, \Gamma \in L^\infty$  gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ V_2(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n \end{cases} \quad \text{und} \quad \Gamma(x) = \begin{cases} \Gamma_1(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \Gamma_2(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n \end{cases} \quad (2.2)$$

und  $\mathbb{R}_\pm^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \gtrless 0\}$ . Ferner sind die Funktionen  $V_i, \Gamma_i \in L^\infty$  1-periodisch in jeder Koordinatenrichtung  $x_1, \dots, x_n$  für  $i = 1, 2$ . Den zugehörigen Schrödingeroperator auf  $H^2 \subset L^2$  bezeichnen wir mit

$$L := -\Delta + V(x).$$

Für unsere Betrachtungen treffen wir die folgenden Voraussetzungen:

### Voraussetzungen.

$$(H1) \quad \text{ess inf}_{x \in \mathbb{R}^n} \Gamma(x) > 0,$$

$$(H2) \quad 0 \notin \sigma(L),$$

$$(H3) \quad 1 < p < 2^\# := \frac{n+2}{(n-2)_+}.$$

Für  $i = 1, 2$  betrachten wir zudem die nichtlinearen Schrödingergleichungen

$$-\Delta u + V_i(x)u = \Gamma_i(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

mit den periodischen Koeffizienten  $V_i$  und  $\Gamma_i$  und die entsprechenden Schrödingeroperatoren

$$L_i = -\Delta + V_i(x)$$

ebenfalls auf  $H^2 \subset L^2$ .

## 2.1 Der Schrödingeroperator $L = -\Delta + V$

Bevor wir mit der Diskussion von (2.1) beginnen, wollen wir einige Eigenschaften des Schrödingeroperators  $L = -\Delta + V(x)$  zusammenstellen. Dabei sei  $V$  zunächst ein beliebiges Potenzial in  $L^\infty$  und es gelte stets die Voraussetzung (H2), also

$$0 \notin \sigma(L).$$

Wir beginnen mit einigen Überlegungen zum Definitionsbereich von  $L$ :

**Proposition 2.1.1.** *Es sei  $s \in (1, \infty)$ . Dann besitzt  $L : W^{2,s} \rightarrow L^s$  eine stetige Inverse.*

Der Vollständigkeit halber wiederholen wir den in [DPR11, Lemma A.1] Beweis von Proposition 2.1.1. Er benutzt den folgenden Satz von Rainer Hempel und Jürgen Voigt aus [HV86]:

**Satz 2.1.2 (R. Hempel, J. Voigt, 1986).** *Für  $s \in [1, \infty]$  und  $V \in L^\infty$  bezeichne  $L^{(s)}$  die Realisierung des Schrödinger-Operators  $-\Delta + V(x)$  auf  $L^s$ . Dann ist*

$$\sigma(L^{(s)}) = \sigma(L^{(2)}).$$

In [HV86] wird dieser Satz nur unter der Voraussetzung  $\text{ess inf}_{\mathbb{R}^n} V > 0$  bewiesen. Ist nun  $V \in L^\infty$  beliebig und  $a := \text{ess inf}_{\mathbb{R}^n} V$ , so gilt jedoch  $\sigma(L + |a|) = \sigma(L) + |a|$  und wir können Satz 2.1.2 auf  $L + |a|$  anwenden. Somit gilt dieser Satz für alle  $V \in L^\infty$ .

**BEWEIS VON PROPOSITION 2.1.1:** Nach der Voraussetzung (H2) und Satz 2.1.2 ist  $L^{-1}$  ein stetiger Endomorphismus von  $L^s$ . Insbesondere gilt

$$\|u\|_s \leq \|Lu\|_s \quad \text{für alle } u \in L^{-1}(L^s) = D(L).$$

Wir zeigen nun, dass  $D(L) = L^{-1}(L^s) \subset W^{2,s}$ : dafür sei  $u = L^{-1}v \in L^{-1}(L^s)$  mit  $v \in L^s$ . Dann gilt  $Lu, Vu \in L^s$  und damit auch  $\Delta u \in L^s$ . Ferner erfüllt  $u$  die Differenzialgleichung

$$-\Delta u + u = (1 - V(x))u + Lu \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Ist nun  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Greensche Funktion des Operators  $-\Delta + 1$ , so folgt

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) [(1 - V(y))u(y) + Lu(y)] dy \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

In [Eva02, §4.3.1(b)] oder in [AH96, §1.2.5] finden sich explizite Formeln für  $G$ . Aus [AH96, Theorem 1.2.3] erhalten wir nun  $u \in W^{2,s}$  und

$$\|u\|_{2,s} \leq C (\|1 - V\|_\infty \|u\|_s + \|Lu\|_s) \leq C' \|Lu\|_s$$

mit Konstanten  $C, C' > 0$  und damit  $u \in W^{2,s}$ . Also ist  $D(L) = L^{-1}(L^s) \subset W^{2,s}$ . Die umgekehrte Inklusion gilt trivialerweise und wir haben somit insgesamt  $D(L) = L^{-1}(L^s) = W^{2,s}$  bewiesen. Daraus folgt dann die Behauptung. ■

Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz gilt nun

$$W^{2,s} \subset W^{1,\sigma} \subset L^\tau \quad \text{für alle } \sigma \in [s, s^*] \text{ und alle } \tau \in [s, s^{**}] \quad (2.4)$$

und es ist  $t \in [s, s^{**}]$  genau dann, wenn  $0 \leq \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \leq \frac{2}{n}$ . Aus (2.4) und Proposition 2.1.1 folgt dann unmittelbar:

**Proposition 2.1.3.** Für  $s, t \in (1, \infty)$  gelte  $0 \leq \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \leq \frac{2}{n}$ . Dann gilt:

(a)  $L^{-1} \in \mathcal{L}(L^s, L^t)$ .

(b) Für  $\frac{1}{s} - \frac{1}{t} < \frac{2}{n}$  ist der Operator  $L^{-1}$  lokal kompakt, d.h. der Operator

$$L_B : L^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^t(B), \quad v \mapsto \mathbb{1}_B L^{-1}v$$

ist kompakt für jede beschränkte Menge  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

**BEWEIS:** Teil (a) folgt unmittelbar aus den Überlegungen vor Proposition 2.1.3. Teil (b) folgt dann wiederum sofort aus Teil (a), weil der Einbettungsoperator  $W^{2,s}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^s(B)$  nach dem Satz von Rellich-Kondrachov kompakt ist. ■

Nun zeigen wir Symmetrie und Selbstadjungiertheit von  $L$ :

**Lemma 2.1.4.**

(a) Sind  $s \in (1, \infty)$ ,  $u_1, u_2 \in W^{2,s}$  sowie  $v_1, v_2 \in L^s$  so gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_1 L u_2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (L u_1) u_2 \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^n} v_1 L^{-1} v_2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (L^{-1} v_1) v_2 \, dx.$$

(b) Auf  $H^2$  ist  $L$  selbstadjungiert bezüglich des  $L^2$ -Skalarproduktes.

**BEWEIS:** Zu (a). Da  $V \in L^\infty$ , ist  $a := \text{ess inf}_{\mathbb{R}^n} V > -\infty$  und damit  $\tilde{V}(x) := V(x) + |a| \geq 0$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Nach [HS96, Corollary 13.8] ist dann der Schrödingeroperator  $\tilde{L} := -\Delta + \tilde{V}(x)$  wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty$ . Für alle  $\varphi, \psi \in C_0^\infty$  gilt also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi L \psi \, dx + |a| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \psi \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \tilde{L} \psi \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{L} \varphi) \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (L \varphi) \psi \, dx + |a| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \psi \, dx. \end{aligned}$$

Da  $C_0^\infty$  dicht in  $W^{2,s}$  liegt folgt daraus zunächst die behauptete Symmetrieeigenschaft von  $L$  auf  $W^{2,s}$ . Setzen wir nun  $u_i := L^{-1}v_i$  für  $i = 1, 2$ , so folgt mit Hilfe von Proposition 2.1.1 auch die entsprechende Symmetrieeigenschaft von  $L^{-1}$  auf  $L^s$ .

Zu (b). Wie in [HS96, Corollary 13.8] zeigt man, dass  $D(L^*) = H^2 = D(L)$ . Daraus folgt dann die Selbstadjungiertheit, weil  $L$  nach Teil (a) symmetrisch ist. ■

Nach Lemma 2.1.4 ist das Spektrum  $\sigma(L) \subset \mathbb{R}$  und nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren, siehe [Rud91, Theorem 13.30], besitzt  $L$  die folgende Spektraldarstellung:

**Satz 2.1.5.** *Es existiert eine eindeutig bestimmte Spektralzerlegung  $E : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H^1)$  auf den Borelmengen  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ , sodass  $L$  die Spektraldarstellung*

$$f(L) = \int_{\sigma(L)} f(\lambda) dE(\lambda) \quad (2.5)$$

für jede messbare und beschränkte Funktion  $f : \sigma(L) \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt.

Ist das Potenzial  $V$  eine periodische Funktionen, so gilt, besitzt  $\sigma(L)$  die bekannte Bandstruktur, siehe [Eas73, Kapitel 6.5 und Theorem 6.10.2]:

**Satz 2.1.6.** *Das Potenzial  $V \in L^\infty$  sei periodisch. Dann gilt*

- (a)  $L$  besitzt nur stetiges Spektrum, d.h.  $\sigma(L) = \sigma_{\text{ess}}(L)$ .
- (b) Es existieren monoton wachsende Folgen  $(\lambda_k)$  und  $(\mu_k)$  in  $\mathbb{R}$  mit  $\lambda_k \leq \mu_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\lambda_k, \mu_k \rightarrow \infty$ , sodass

$$\sigma(L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k, \quad \text{wobei} \quad S_k := [\lambda_k, \mu_k].$$

Ebenso gilt für die Resolventenmenge von  $L$ :

$$\rho(L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,$$

wobei  $R_1 := (-\infty, \lambda_1)$  und  $R_k := (\mu_{k-1}, \lambda_k)$  für  $k \geq 2$ .

**Definition 2.1.7.** *In Satz 2.1.6 heißen die Intervalle  $S_k$  die Spektralbänder von  $L$  und die Intervalle  $R_k$  die Spektrallücken. Speziell nennt man  $R_1$  die semi-infinite Lücke von  $L$  und  $R_k$  für  $k \geq 2$  die endlichen Lücken des Spektrums von  $L$ .*

## 2.2 Das duale Problem

In diesem Abschnitt sei  $V \in L^\infty$  zunächst ein beliebiges beschränktes Potenzial. Periodizität oder Grenzflächenstruktur gemäß (2.2) setzen wir zunächst nicht voraus. Es sei  $2^{-\#} := (2^\#)^{-1}$  und

$$q := \frac{1}{p} \in (2^{-\#}, 1).$$

Dann ist  $q + 1$  der zu  $p + 1$  duale Exponent, d.h. es gilt  $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1$ . Wegen  $p \in (1, 2^\#)$  ist ferner

$$0 < \frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1} = \frac{p-1}{p+1} < \frac{2}{n}$$

und aus Proposition 2.1.3 erhalten wir unmittelbar die folgende

**Proposition 2.2.1.**  $L^{-1} \in \mathcal{L}(L^{q+1}, L^{p+1})$ .

Nach Wahl der Exponenten  $p$  und  $q$  sind die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, s \mapsto |s|^{p-1}s \quad \text{und} \quad f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \mapsto |t|^{q-1}t \quad (2.6)$$

zueinander invers. Aus Proposition 2.2.1 erhalten wir ferner:

**Definition & Bemerkung 2.2.2.** Der Operator  $K \in \mathcal{L}(L^{q+1}, L^{p+1})$  mit

$$Kv = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L^{-1} \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v \quad (2.7)$$

heißt Birmann-Schwinger Kern, siehe [Sim82]. Nach Lemma 2.1.4 ist  $K$  ein symmetrischer Operator in dem Sinne, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} vKw \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} wKv \, dx \quad \text{für alle } v, w \in L^{q+1}.$$

Mit Hilfe des Operators  $K$  betrachten wir nun die Gleichung

$$Kv = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.8)$$

und suchen nichttriviale Lösungen von (2.8) im Raum  $L^{q+1}$ . Im Sinne des folgenden Satzes nennen wir (2.8) die zu (2.1) *duale Gleichung*. Dieser Satz ist der Arbeit [AL92a] von Stanley Alama und Yanyan Li entnommen, siehe [AL92a, Theorem 2.1]. Weil er die Grundlage aller weiteren Betrachtungen in diesem Kapitel ist, wollen wir hier auch seinen Beweis ausführen und zwar mit einem im Vergleich zu [AL92a] leicht vereinfachten Argument:

**Satz 2.2.3.** Genau dann besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung (2.1) eine Lösung  $u \in H^2 \setminus \{0\}$ , wenn die zugehörige duale Gleichung (2.8) eine Lösung  $v \in L^{q+1} \setminus \{0\}$  besitzt. In diesem Fall ist

$$v = \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}} |u|^{p-1}u \quad \text{bzw.} \quad u = \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v|^{q-1}v. \quad (2.9)$$

**BEWEIS:** Wir schreiben  $f(s) = |s|^{p-1}s$  sowie  $f^{-1}(t) = |t|^{q-1}t$ .

„ $\implies$ “: Ist  $u \in H^2 \setminus \{0\}$  eine Lösung von (2.1) und

$$v := \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}} |u|^{p-1}u \stackrel{(A1)}{=} f(\Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u).$$

so folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz zunächst  $u \in L^{p+1} \setminus \{0\}$  und  $v \in L^{q+1} \setminus \{0\}$ . Ferner gilt

$$|v|^{q-1}v = f^{-1}(v) = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u \quad (2.10)$$

und damit

$$Kv = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}} |u|^{p-1}u \right] = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L^{-1}[Lu] = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u = |v|^{q-1}v,$$

d.h.  $v$  ist eine Lösung von (2.8).

„ $\impliedby$ “: Nun sei  $v \in L^{q+1} \setminus \{0\}$  eine Lösung von (2.8) und

$$u := \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v|^{q-1}v = f^{-1}(\Gamma(x)^{-\frac{p}{p+1}} v). \quad (2.11)$$

Dann ist

$$u = \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} K v = L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v \right] \quad (2.12)$$

und somit

$$\Gamma(x)|u|^{p-1}u = \Gamma(x)f(u) \stackrel{(2.11)}{=} \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}v \stackrel{(2.12)}{=} Lu,$$

d.h.  $u \in W^{2,q+1}$  ist eine starke Lösung von (2.1). Es bleibt zu zeigen, dass  $u \in H^2$ . Nach Proposition 2.1.1 genügt es dafür  $v \in L^2$  zu beweisen. Zunächst ist  $v \in L^{s_0}$  mit  $s_0 := q + 1$ . Aus (2.8) folgt weiter

$$L^{-1}[\Gamma(x)^{1/(p+1)}v] = \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}}|v|^{q-1}v \in W^{2,s_0} \subset L^{s_0^{**}}$$

und somit  $v \in L^{s_1}$  für  $s_1 = \frac{nq s_0}{(n-2s_0)_+}$ . Durch Iterieren folgt hieraus  $v \in L^{s_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , wobei die Folge  $(s_k)$  iterativ gegeben ist durch  $s_0 := q + 1$  und

$$s_{k+1} = \begin{cases} \frac{nq s_k}{n - 2s_k}, & \text{für } s_k < \frac{n}{2}, \\ 2, & \text{für } s_k \geq 2. \end{cases}$$

Durch vollständige Induktion zeigt man nun, dass  $(s_k)$  monoton wachsend ist: der Induktionsanfang  $s_0 \leq s_1$  gilt wegen  $q > 2^{-\#}$ , den Induktionsschritt erhält man dann unmittelbar aus der Definition von  $s_{k+1}$ . Wäre nun  $s_k < 2$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so wäre die Folge  $(s_k)$  konvergent mit Grenzwert  $\bar{s} \leq 2$  und es gälte

$$\bar{s}(n - 2\bar{s}) = nq\bar{s}.$$

Da  $(s_k)$  monoton wächst ist  $\bar{s} > 0$  und somit

$$\bar{s} = \frac{n}{2}(1 - q) < \frac{n}{2}(1 - 2^{-\#}) = \frac{2n}{n+2} = 2^{-\#} + 1 < q + 1 = s_0,$$

ein Widerspruch! Also ist  $s_k = 2$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  und somit  $v \in L^2$ . ■

Die Lösungen von (2.8) in  $L^{q+1}$  entsprechen den kritischen Punkten des Funktionals

$$J : L^{q+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} v K v dx.$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen technischen Hilfssätzen:

**Lemma 2.2.4.** Für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(a) \quad ||a + b|^{p-1}(a + b) - |a|^{p-1}a| \leq p2^{p-1} (|a|^{p-1} + |b|^{p-1}) |b|,$$

$$(b) \quad ||a|^{q-1}a - |b|^{q-1}b| \leq 2|a - b|^q,$$

$$(c) \quad |a + b|^{q+1} - |a|^{q+1} \geq (q + 1)|a|^{q-1}ab.$$

BEWEIS: Zu (a). Da  $p > 1$ , erhalten wir aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für alle  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \left| |a+b|^{p-1}(a+b) - |a|^{p-1}a \right| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} |a+tb|^{p-1}(a+tb) dt \right| \leq p \left( \int_0^1 |a+tb|^{p-1} dt \right) |b| \\ &\leq p2^{p-1} (|a|^{p-1} + |b|^{p-1}) |b|. \end{aligned}$$

Zu (b). Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. Schritt: Zunächst sei  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto t^q$ . Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt dann für alle  $s, t > 0$

$$h(s+t) - h(s) - h(t) = \int_0^s (h'(\sigma+t) - h'(\sigma)) d\sigma = \int_0^s \int_\sigma^{\sigma+t} h''(\tau) d\tau d\sigma < 0.$$

Daraus erhalten wir nun

$$|a+b|^q - |a|^q \leq |b|^q \quad \text{für alle } a, b > 0.$$

2. Schritt: Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Für  $a = 0$  oder  $b = 0$  ist die behauptete Ungleichung trivial. Es gelte nun zunächst  $ab > 0$ . Aus dem 1. Schritt erhalten wir dann

$$\left| |a|^{q-1}a - |b|^{q-1}b \right| \leq \left| |a|^q - |b|^q \right| \leq |a - b|^q.$$

Ist dagegen  $ab < 0$ , etwa  $a < 0 < b$ , so folgt

$$\frac{\left| |a|^{q-1}a - |b|^{q-1}b \right|}{|a-b|^q} = \frac{|a|^q + b^q}{(b-a)^q} \leq \frac{2 \max\{|a|, b\}^q}{(b-a)^q} \leq \frac{2(b+|a|)^q}{(b-a)^q} \stackrel{|a|=-a}{=} 2.$$

Den Fall  $b < 0 < a$  erledigt man analog.

Zu (c). Diese Aussage folgt aus der Konvexität der Abbildung  $t \mapsto |t|^{q+1}$ . ■

Für das folgende Lemma vergleiche man auch [RR04, Theorem 10.58]:

**Lemma 2.2.5.**

(a) Der Nemitsky-Operator  $f : L^{p+1} \rightarrow L^{q+1}$ ,  $u \mapsto |u|^{p-1}u$  ist stetig und Lipschitz-stetig auf beschränkten Teilmengen von  $L^{p+1}$ .

(b) Die Nemitsky-Operator  $g : L^{q+1} \rightarrow L^{p+1}$ ,  $v \mapsto |v|^{q-1}v$  ist  $q$ -Hölder-stetig.

BEWEIS: Zu (a). Es seien  $u, v \in L^{p+1}$ . Offensichtlich ist dann  $f(u) \in L^{(p+1)/p} = L^{q+1}$  und mit Hilfe von Lemma 2.2.4 (a) sowie der Hölderschen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_{q+1} &= \sup_{\|\varphi\|_{p+1}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (|u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v) \varphi dx \right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{p+1}=1} p2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} (|u-v|^{p-1} + |v|^{p-1}) |u-v| |\varphi| dx \\ &\leq p2^{p-1} \left( \|u-v\|_{p+1}^{p-1} + \|v\|_{p+1}^{p-1} \right) \|u-v\|_{p+1} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Zu (b). Nach Lemma 2.2.4 (b) und der Hölderschen Ungleichung gilt für alle  $v, w \in L^{q+1}$ :

$$\begin{aligned} \|g(v) - g(w)\|_{p+1} &= \sup_{\|\psi\|_{q+1}=1} \int_{\mathbb{R}^n} (|v|^{q-1}v - |w|^{q-1}w) \psi \, dx \leq \sup_{\|\psi\|_{q+1}=1} 2 \int_{\mathbb{R}^n} |v - w|^q |\psi| \, dx \\ &\leq 2 \|v - w\|_{q+1}^q. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Bemerkung 2.2.6.** Aus Lemma 2.2.5 (b) folgt nun wie in [Wil96, Lemma 3.10, Lemma 6.12] die stetige Fréchet-Differenzierbarkeit des Funktionals  $J$  auf  $L^{q+1}$ . Die Fréchet-Ableitung von  $J$  ist dabei gegeben durch

$$J'(v)\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} (|v|^{q-1}v\varphi - \varphi K v) \, dx \quad \text{für alle } v, \varphi \in L^{q+1}.$$

Da  $(L^{q+1})^* \cong L^{p+1}$ , können wir diese Gleichung gemäß

$$J'(v) = |v|^{q-1}v - K v \quad \text{für alle } v \in L^{q+1} \quad (2.13)$$

auch als Gleichung in  $L^{p+1}$  auffassen.

## 2.3 Duale Grundzustände und die Nehari-Mannigfaltigkeit

Nun beginnen wir mit der Untersuchung des Variationsproblems für duale Grundzustände:

**Definition 2.3.1 (Duale Grundzustände).**

- (a) Jede Lösung  $v \in L^{q+1}$  der dualen Gleichung (2.8) heißt ein gebundener Zustand von (2.8).  
 (b) Jede Lösung  $v^* \in L^{q+1} \setminus \{0\}$  des Variationsproblems

$$J(v^*) = \min\{J(v) : v \in L^{q+1} \setminus \{0\} \text{ ist kritischer Punkt von } J\},$$

heißt Grundzustand von (2.8). In diesem Fall heißt

$$u^* = \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v^*|^{q-1} v^* \in H^2 \setminus \{0\}$$

ein dualer Grundzustand von (2.1).

- (c) Ist  $v^* \in L^{q+1} \setminus \{0\}$  eine Lösung des Variationsproblems

$$m := J(v^*) = \min\{J(v) : v \in N\} \quad (2.14)$$

auf der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$ , so heißt  $v^*$  ein starker Grundzustand von (2.8). In diesem Fall heißt

$$u^* = \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v^*|^{q-1} v^* \in H^2 \setminus \{0\}$$

ein starker dualer Grundzustand von (2.1).

Zu dieser Definition nun zwei kurze Kommentare:

**Bemerkung 2.3.2.**

- (a) Die Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$  enthält alle nichttrivialen gebundenen Zustände von (2.8). Insbesondere ist jeder starke Grundzustand von (2.8) auch ein Grundzustand.
- (b) Jeder (starke) duale Grundzustand von (2.1) ist ein nichttrivialer gebundener Zustand von (2.1). Ob oder unter welchen Bedingungen ein (starker) dualer Grundzustand auch ein (starker) Grundzustand von (2.1) ist, wissen wir bislang nicht.

Wir nehmen zunächst an, dass  $N \neq \emptyset$ . Diese Voraussetzung werden wir in den nachfolgenden Abschnitten im Detail nachrechnen, wenn wir von den Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$  zunächst Periodizität und später dann Grenzflächenstruktur (2.2) fordern. In diesem Abschnitt lassen wir wie im vorangegangenen auch für  $V$  und  $\Gamma$  zunächst beliebige Funktionen in  $L^\infty$  zu.

Die Betrachtungen für (2.14) finden sich in ähnlicher Form auch in der Arbeit [Jea94] von Louis Jeanjean, deren Resultate allerdings die von uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachteten Fälle eines periodischen Koeffizienten  $\Gamma$  und eines Koeffizienten  $\Gamma$  mit Grenzflächenstruktur gemäß (2.2) nicht abdecken.

**Definition & Bemerkung 2.3.3.** Das Funktional  $g \in C^1(L^{q+1}, \mathbb{R})$  sei gegeben durch

$$g : L^{q+1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto J'(v)v.$$

Dann ist  $N = \{v \in L^{q+1} \setminus \{0\} : g(v) = 0\}$ , und weil  $q < 1$ , gilt ferner

$$g'(v)v = (q-1)\|v\|_{q+1}^{q+1} < 0 \quad \text{für alle } v \in N.$$

Den Zusammenhang zwischen dem Variationsproblem (2.14) und der Suche nach Lösungen von (2.1) stellt nun die folgende Proposition her:

**Proposition 2.3.4.** Jede Lösung  $v_0 \in N$  des Variationsproblems (2.14), ist eine Lösung von (2.8).

**BEWEIS:** Nach Bemerkung 2.3.3 ist  $g'(v_0)$  surjektiv und mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange, siehe Satz A.4.3, finden wir somit einen Lagrange-Multiplikator  $\lambda \in \mathbb{R}$ , sodass  $J'(v_0) = \lambda g'(v_0)$ . Insbesondere gilt

$$0 = J'(v_0)v_0 = \lambda g'(v_0)v_0.$$

Da  $g'(v_0)v_0 < 0$  nach Bemerkung 2.3.3, folgt hieraus  $\lambda = 0$  und somit  $J'(v_0) = 0$ . ■

**Bemerkung 2.3.5.** Im Sinne von Proposition 2.3.4 sagt man, die Nehari-Mannigfaltigkeit sei eine „natürliche Nebenbedingungsmenge“ zur Minimierung von  $J$ .

Das folgende Lemma stellt nun einige „Standard-Abschätzungen“ im Zusammenhang mit der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$  zusammen, insbesondere die gleichmäßige Beschränktheit des Funktionals  $J(v)$  und der Normen  $\|v\|_{q+1}$  nach unten. Die Aussagen folgen großteils aus der Identität

$$J'(v) = \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \|v\|_{q+1}^{q+1} = \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} vKv \, dx \quad \text{für alle } v \in N.$$

**Lemma 2.3.6.** Es existieren  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , so dass für alle  $v \in N$  gilt:

$$(a) \quad \|v\|_{q+1} \geq \varepsilon_1, \quad (b) \quad J(v) \geq \varepsilon_2, \quad (c) \quad \|v\|_{q+1} = \left( \frac{2(q+1)J(v)}{1-q} \right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

BEWEIS: Da  $v \in N$  erhalten wir

$$\|v\|_{q+1}^{q+1} = \int_{\mathbb{R}^n} vKv \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v \right] L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v \right] \, dx.$$

Mit Proposition 2.2.1 folgt daraus

$$\|v\|_{q+1}^{q+1} \leq \|L^{-1}\| \|\Gamma\|_{\infty}^{\frac{2}{p+1}} \|v\|_{q+1}^2,$$

woraus sich wegen  $q+1 < 2$  mit  $\varepsilon_1 := \left( \|L^{-1}\| \|\Gamma\|_{\infty}^{\frac{2}{p+1}} \right)^{\frac{1}{q-1}}$  zunächst die Behauptung von Teil (a) ergibt. Wie bereits erwähnt, gilt ferner

$$J(v) = \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \|v\|_{q+1}^{q+1} \quad (2.15)$$

und Auflösen nach  $\|v\|_{q+1}$  liefert uns (c). Schließlich erhalten wir aus (2.15) und Teil (a):

$$J(v) \geq \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \varepsilon_1^{q+1} =: \varepsilon_2$$

■

Das nächste Lemma beschäftigt sich mit der Geometrie der Nehari-Mannigfaltigkeit:

**Lemma 2.3.7.** *Es sei  $v \in N$  und*

$$T_v := T_v N := \text{Kern } g'(v) = \left\{ \varphi \in L^{q+1} : (q+1) \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q-1} v \varphi \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} \varphi K v \, dx \right\}.$$

der Tangentialraum an  $N$  im Punkt  $v$ . Ferner sei  $S_v := \text{span}\{v\}$ . Dann gilt

$$L^{q+1} = T_v \oplus S_v.$$

BEWEIS: Als Element der Nehari-Mannigfaltigkeit ist  $v \neq 0$  und nach dem Homomorphiesatz für Vektorräume, siehe [Heu06, Satz 37.2], gilt  $\mathbb{R} \cong L^{q+1} / \text{Kern } g'(v)$ . Also ist  $\text{codim } T_v = 1$  für alle  $v \in N$ . Nach Bemerkung 2.3.3 ist ferner

$$g'(v)v = (q-1)\|v\|_{q+1}^{q+1} < 0$$

und damit  $v \notin \text{Kern } g'(v)$ . Daraus folgt die Behauptung. ■

**Definition 2.3.8.** *Ist  $f \in C^1(L^{q+1}, \mathbb{R})$  und  $v \in N$ , so schreiben wir*

$$\partial_T f(v) := f'(v)|_{T_v} \quad \text{und} \quad \partial_S f(v) := f'(v)|_{S_v}$$

für die partiellen Fréchet-Ableitungen von  $f$  in Richtung  $T_v$  bzw.  $S_v$ .

Damit können wir nun eine lokale Parametrisierung von  $N$  angeben:

**Lemma 2.3.9.** *Für jeden Punkt  $v_0 \in N$  existieren eine offene Umgebung  $U \subset T_{v_0}$  von 0 und ein Funktional  $\tau \in C^1(U, \mathbb{R})$  mit folgenden Eigenschaften:*

$$(i) \quad \tau(0) = 1,$$

$$(ii) \quad g(\tau(w)v_0 + w) = 0 \text{ für alle } w \in U,$$

$$(iii) \quad \tau'(0) = 0.$$

Insbesondere ist  $N$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit.

BEWEIS: Wir schreiben kurz  $T := T_{v_0}$  und  $S := S_{v_0}$ . Nach Bemerkung 2.3.3 ist  $\partial_S g(v_0) \neq 0$  und die Existenz einer Abbildung  $\tau \in C^1(U, \mathbb{R})$  mit den Eigenschaften (i) und (ii) folgt aus dem Satz über implizit definierte Funktionen, siehe [AE08, Theorem 8.2]. Insbesondere parametrisiert die Abbildung  $\Phi_{v_0} \in C^1(U, N)$  mit

$$\Phi_{v_0}(w) = \tau(w)v_0 + w$$

eine auf  $N$  gelegene Umgebung von  $v_0$ , d.h.  $\Phi_{v_0}$  ist eine lokale Karte von  $N$ . Da  $v_0 \in N$  beliebig gewählt ist, folgt daraus, dass  $N$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit ist.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\tau'(0) = 0$ . Aus (i) folgt zunächst

$$(\tau'(0)z)v_0 = -\partial_S g(v_0)^{-1} \partial_T g(v_0)z \quad \text{für alle } z \in T. \quad (2.16)$$

Nun betrachten wir die durch

$$Az := (\tau'(0)z)v_0 + z \quad \text{für alle } z \in T$$

gegebene lineare Abbildung  $A : T \rightarrow L^{q+1}$ . Es gilt:

$$g'(v_0)Az = g'(v_0) [(\tau'(0)z)v_0 + z] \stackrel{(2.16)}{=} -\partial_S g(v_0) \partial_S g(v_0)^{-1} \partial_T g(v_0)z + \partial_T g(v_0)z = 0$$

für alle  $z \in T$ , d.h.  $A(T) \subset T$ . Wäre nun  $\tau'(0)z_0 \neq 0$  für ein  $z_0 \in T$ , so wäre  $(\tau'(0)z_0)v_0 + z_0 \in T$  und damit  $(\tau'(0)z_0)v_0 \in T \cap S = \{0\}$ . Aus  $\tau'(0)z_0 \neq 0$  folgte also notwendig  $v_0 = 0$ , im Widerspruch zur Definition von  $N$ . ■

**Lemma 2.3.10.** Sind  $\varepsilon > 0$  und  $v_0 \in N$  mit

$$J(v_0) \leq J(v) + \varepsilon \|v_0 - v\|_{q+1} \quad \text{für alle } v \in N, \quad (2.17)$$

so gilt  $\|\partial_T J(v_0)\| \leq \varepsilon$ .

BEWEIS: Wir verwenden weiterhin die Bezeichnungen des Beweises von Lemma 2.3.9. Für

$$v = \tau(w)v_0 + w \in N$$

mit beliebigem  $w \in U$  erhalten wir dann durch Taylorentwicklung

$$v - v_0 = (\tau(w) - \tau(0))v_0 + w = [\tau'(0)w]v_0 + w + o(\|w\|_{q+1}) = w + o(\|w\|_{q+1}) \quad (2.18)$$

für  $\|w\|_{q+1} \rightarrow 0$ . Damit folgt

$$\begin{aligned}
 J(v) &= J(v_0) + J'(v_0)(v - v_0) + o(\|v - v_0\|_{q+1}) \\
 &\stackrel{(2.18)}{=} J(v_0) + \partial_T J(v_0)w + o(\|w\|_{q+1}) \\
 &\stackrel{(2.17)}{\leq} J(v) + \varepsilon\|v - v_0\|_{q+1} + \partial_T J(v_0)w + o(\|w\|_{q+1}) \\
 &\stackrel{(2.18)}{=} J(v) + \varepsilon\|w\|_{q+1} + \partial_T J(v_0)w + o(\|w\|_{q+1}),
 \end{aligned}$$

und somit

$$-\partial_T J(v_0)w \leq \varepsilon\|w\|_{q+1} + o(\|w\|_{q+1})$$

für  $\|w\|_{q+1} \rightarrow 0$ ,  $w \in U$ . Ist nun  $w_0 \in T$  so gilt  $\pm tw_0 \in U$  für hinreichend kleine  $t > 0$  und wir erhalten

$$-t\partial_T J(v_0)w_0 \leq t\varepsilon\|w_0\|_{q+1} + o(t).$$

sowie

$$t\partial_T J(v_0)w_0 = -\partial_T J(v_0)[-tw_0] \leq t\varepsilon\|w_0\|_{q+1} + o(t).$$

Insgesamt gilt also  $|\partial_T J(v_0)w_0| \leq \varepsilon\|w_0\|_{q+1}$  und damit die Behauptung.  $\blacksquare$

Bevor wir die nächste Proposition und damit das Hauptresultat dieses Abschnitts beweisen können, müssen wir noch die folgende Bemerkung einsehen:

**Bemerkung 2.3.11.** *Es seien  $X, Y$  normierte Räume sowie  $U, V$  Unterräume von  $X$  mit  $X = U \oplus V$ . Für  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  seien  $A_U := A|_U \in \mathcal{L}(U, Y)$  und  $A_V := A|_V \in \mathcal{L}(V, Y)$ . Gibt es dann eine Konstante  $\sigma \geq 1$  mit*

$$\|u\| + \|v\| \leq \sigma\|u + v\| \quad \text{für alle } u \in U \text{ und alle } v \in V, \quad (2.19)$$

so folgt

$$\|A\| \leq \sigma \max\{\|A_U\|, \|A_V\|\}.$$

**BEWEIS:** Man beachte: Ist (2.19) mit einer Konstanten  $\sigma > 0$  erfüllt, so folgt aus der Dreiecksungleichung automatisch  $\sigma \geq 1$ . Für  $x = u + v \in X$  mit  $u \in U$  und  $v \in V$  erhalten wir mit Hilfe von (2.19) nun

$$\|Ax\| = \|A_U u + A_V v\| \leq \max\{\|A_U\|, \|A_V\|\} (\|u\| + \|v\|) \leq \sigma \max\{\|A_U\|, \|A_V\|\} \|x\|.$$

und damit die Behauptung.  $\blacksquare$

**Proposition 2.3.12.** *Ist  $m := \inf\{J(v) : v \in N\}$ , so existiert eine Folge  $(v_k)$  in  $N$  mit*

$$J(v_k) \rightarrow m \quad \text{und} \quad J'(v_k) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Zum Beweis von Proposition 2.3.12 verwenden wir das Variationsprinzip von Ekeland, siehe [Zei95, Abschnitt 2.15, Theorem 2.H]:

**Satz 2.3.13 (Variationsprinzip von Ekeland).** *Es sei  $X$  ein Banachraum,  $M \neq \emptyset$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  und  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ein unterhalbstetiges und nach unten beschränktes Funktional. Dann gibt es für alle  $\varepsilon, \delta > 0$  und zu jedem  $v_0 \in M$  mit*

$$f(v_0) \leq \inf_{v \in M} f(v) + \varepsilon$$

ein  $v_1 \in M$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad f(v_1) < f(v_0) + \varepsilon \delta^{-1} \|v_1 - v\| \text{ für alle } v \in M \setminus \{v_1\},$$

$$(ii) \quad \|v_1 - v_0\| \leq \delta,$$

$$(iii) \quad f(v_1) \leq f(v_0).$$

Den BEWEIS VON PROPOSITION 2.3.12 führen wir nun in drei Schritten:

1. *Schritt:* Nach Lemma 2.3.6 ist  $J$  auf  $N$  nach unten beschränkt. Ferner ist  $J$  stetig. Die Voraussetzungen des Variationsprinzips von Ekeland sind also erfüllt. Sind nun Folgen  $(w_k)$  in  $N$  und  $(\varepsilon_k)$  in  $(0, \infty)$  gegeben mit  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  und  $J(w_k) \leq m + \varepsilon_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so existiert demnach eine Folge  $(v_k)$  in  $N$  mit

$$J(v_k) \leq J(v) + \varepsilon_k \|v_k - v\|_{q+1} \quad \text{für alle } v \in N \text{ und alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.20)$$

Wir schreiben kurz  $T_k := T_{v_k}N$  und  $S_k := \text{span}\{v_k\}$ . Nach Lemma 2.3.7 ist dann  $L^{q+1} = T_k \oplus S_k$ . Analog zu Definition 2.3.8 bezeichnen wir mit  $\partial_{T_k}$  bzw.  $\partial_{S_k}$  die partiellen Fréchet-Ableitungen in Richtung  $T_k$  bzw.  $S_k$ . Aus (2.20) und Lemma 2.3.10 folgt dann  $\|\partial_{T_k} J(v_k)\| \leq \varepsilon_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\|\partial_{T_k} J(v_k)\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

2. *Schritt:* Wir zeigen nun, dass auch  $\|\partial_{S_k} J(v_k)\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nach Bemerkung 2.3.3 ist  $g'(v_k)(S_k) = \mathbb{R}$ . Also finden wir eine Folge  $(\lambda_k)$  in  $\mathbb{R}$  mit

$$\partial_{S_k} J(v_k) = -\lambda_k \partial_{S_k} g(v_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.21)$$

Da  $J'(v_k)v_k = 0$  erhalten wir weiter

$$\partial_{T_k} J(v_k)v_k = \lambda_k \partial_{S_k} g(v_k)v_k = \lambda_k (q-1) \|v_k\|_{q+1}^{q+1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.22)$$

Nun ist  $(v_k)$  nach (iii) in Satz 2.3.13 eine minimierende Folge in  $N$  für  $J$  und nach den Teilaussagen (a) und (c) von Lemma 2.3.6 somit nach unten und oben beschränkt. Mit Hilfe des ersten Schrittes liefert (2.22) also

$$|\lambda_k| = \frac{|\partial_{T_k} J(v_k)v_k|}{(1-q) \|v_k\|_{q+1}^{q+1}} \leq \frac{\|\partial_{T_k} J(v_k)\|}{(1-q) \|v_k\|_{q+1}^q} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Nach Bemerkung 2.3.3 ist die Folge  $(\partial_{S_k} g(v_k))$  beschränkt. (2.21) und (2.23) liefern dann schließlich  $\|\partial_{S_k} J(v_k)\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

3. *Schritt:* Es seien  $v \in N$  und  $w \in T_v$ . Die Behauptung von Proposition 2.3.12 folgt nun aus den ersten beiden Schritten und der Bemerkung 2.3.11, wenn wir zeigen können, dass eine von  $v$  und  $w$  unabhängige Konstante  $\sigma \geq 1$  existiert, so dass

$$(\|v\|_{q+1} + \|w\|_{q+1})^{q+1} \leq \sigma \|v + w\|_{q+1}^{q+1}. \quad (2.24)$$

Hierfür genügt es

$$\|v\|_{q+1}^{q+1} + \|w\|_{q+1}^{q+1} \leq \sigma \|v + w\|_{q+1}^{q+1} \quad (2.25)$$

zu beweisen. Wir tun dies durch Widerspruch und nehmen an, dass (2.25) nicht gilt. Dann finden wir zu jedem  $k \in \mathbb{N}$  ein  $v_k \in N$  und ein  $w_k \in T_{v_k}$  mit

$$\|v_k\|_{q+1}^{q+1} + \|w_k\|_{q+1}^{q+1} > k\|v_k + w_k\|_{q+1}^{q+1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

Nach Lemma 2.3.6 gilt  $0 < \varepsilon_1 \leq \|v_k\|_{q+1} \leq C$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit einer Konstanten  $C > 0$ . Wir nehmen für einen Widerspruchsbeweis nun weiter an, dass auch die Folge  $(w_k)$  beschränkt sei. Nach (2.26) erhielten wir dann  $z_k := v_k + w_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Da  $w_k \in T_{v_k} = \text{Kern } g'(v_k)$  wäre ferner

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathbb{R}^n} w_k K v_k \, dx &= (q+1) \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q-1} v_k w_k \, dx \\ &= -(q+1) \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q+1} \, dx + (q+1) \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q-1} v_k z_k \, dx \\ &\stackrel{v_k \in N}{=} -(q+1) \int_{\mathbb{R}^n} v_k K v_k \, dx + (q+1) \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q-1} v_k z_k \, dx \end{aligned}$$

und damit

$$2 \int_{\mathbb{R}^n} (v_k + w_k) K v_k \, dx = (1-q) \int_{\mathbb{R}^n} v_k K v_k \, dx + (q+1) \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q-1} v_k z_k \, dx$$

oder

$$(1-q) \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q+1} \, dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} z_k K v_k \, dx - (q+1) \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q-1} v_k z_k \, dx.$$

Aus der Hölderschen Ungleichung und der Stetigkeit von  $K$  gemäß Bemerkung 2.2.2 folgte also

$$(1-q) \|v_k\|_{q+1}^{q+1} \leq 2 \|K\| \|z_k\|_{q+1} \|v_k\|_{q+1} + (q+1) \|v_k\|_{q+1}^q \|z_k\|_{q+1}$$

und somit nach Lemma 2.3.6:

$$(1-q) \|v_k\|_{q+1}^q \leq (2 \|K\| + \varepsilon_1^{q-1}) \|z_k\|_{q+1} \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Das aber ist ein Widerspruch zur Definition der Nehari-Mannigfaltigkeit! Die Folge  $(w_k)$  kann demnach nicht beschränkt sein. Entlang einer Teilfolge von  $(w_k)$  gilt also  $\|w_k\|_{q+1} \rightarrow \infty$ . Andererseits erhalten wir mit Hilfe von Lemma 2.2.4(c):

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(2.26)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \left( 1 + \frac{\|v_k\|_{q+1}^{q+1}}{\|w_k\|_{q+1}^{q+1}} \right) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{w_k}{\|w_k\|_{q+1}} + \frac{v_k}{\|w_k\|_{q+1}} \right|^{q+1} \, dx \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{|w_k|^{q+1}}{\|w_k\|_{q+1}^{q+1}} + (q+1) \frac{|w_k|^{q-1} w_k v_k}{\|w_k\|_{q+1}^{q+1}} \right) \, dx \\ &= 1 + (q+1) \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_k|^{q-1} w_k v_k}{\|w_k\|_{q+1}^{q+1}} \, dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

denn nach der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|w_k|^{q-1} w_k v_k}{\|w_k\|_{q+1}^{q+1}} dx \right| \leq \frac{\|v_k\|_{q+1}}{\|w_k\|_{q+1}^{q+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Wir haben also einen Widerspruch zu unserer Annahme (2.26) und damit

$$\|v\|_{q+1}^{q+1} + \|w\|_{q+1}^{q+1} \leq \sigma \|v + w\|_{q+1}^{q+1} \quad \text{für alle } v \in N \text{ und alle } w \in T_v$$

bewiesen, so dass die ersten beiden Schritte zusammen mit Bemerkung 2.3.11 uns nun die Behauptung von Proposition 2.3.12 liefern. ■

**Bemerkung 2.3.14.** Die im 2. Schritt des Beweises von Proposition 2.3.12 verwendete Folge  $(\lambda_k)$  in  $\mathbb{R}$ , kann man nach Gleichung (2.21) als eine Folge von approximativen Lagrange-Multiplikatoren bezeichnen.

Die Folge  $(v_k)$  ist beschränkt nach Lemma 2.3.6, d.h. entlang einer Teilfolge konvergiert  $(v_k)$  schwach gegen eine Lösung  $v_0 \in L^{q+1}$  von (2.8). Die Schwierigkeit besteht nun darin, zu zeigen, dass  $v_0$  eine nichttriviale Lösung von (2.8) ist, d.h. dass  $v_0 \neq 0$ . Wir werden das in den folgenden Abschnitten mit Hilfe von *Concentration-Compactness* Argumenten tun, zunächst im Falle periodischer Koeffizienten  $V, \Gamma$ , danach im Falle von Koeffizienten mit Grenzflächenstruktur gemäß (2.2).

## 2.4 Das Lemma von Pierre Louis Lions

Als weiteres Hilfsmittel benutzen wir nun das „*Concentration-Compactness*“ Lemma von Pierre Louis Lions, vgl. [Lio84, Lemma I.1] in Banachraumversion. Den Beweis führen wir aufbauend auf einer Darstellung von Michel Willem [Wil96, Lemma 1.21]:

**Lemma 2.4.1 (P. L. Lions, 1984).** Es sei  $(u_k)$  eine beschränkte Folge in  $W^{2,s}(\mathbb{R}^n)$  für  $s \in (1, \infty)$  und es gebe einen Radius  $r > 0$ , sodass

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} |u_k|^s dx = 0. \quad (2.27)$$

Dann gilt  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^t$  für alle  $t \in (s, s^{**})$ .

**BEWEIS:** Nach dem Einbettungssatz von Sobolev ist  $u_k \in L^t$  für alle  $t \in [s, s^{**}]$  und es gilt

$$\|u_k\|_{L^t(B_r(y))} \leq \|u_k\|_{L^s(B_r(y))}^{1-\vartheta} \|u_k\|_{L^{s^{**}}(B_r(y))}^{\vartheta}, \quad \text{wobei} \quad \frac{1-\vartheta}{s} + \frac{\vartheta}{s^{**}} = \frac{1}{t}$$

für alle  $\vartheta \in (0, 1)$  und alle  $y \in \mathbb{R}^n$ . Für beliebiges  $t \in (s, s^{**})$  können wir nun  $\vartheta = \frac{s}{t}$  wählen und erhalten dann mit Hilfe der Sobolevschen Ungleichung

$$\|u_k\|_{L^t(B_r(y))}^t \leq C^t \|u_k\|_{L^s(B_r(y))}^{(1-\vartheta)t} \|u_k\|_{W^{2,s}(B_r(y))}^s.$$

Jetzt überdecken wir  $\mathbb{R}^n$  mit Kugeln vom Radius  $r$ , sodass jeder Punkt in  $\mathbb{R}^n$  in höchstens  $n + 1$  dieser Kugeln enthalten ist. Dann folgt

$$\|u_k\|_t^t \leq (n+1)C^t \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left( \int_{B_r(y)} |u_k|^s dx \right)^{\frac{(1-\theta)t}{s}} \|u_k\|_{2,s}$$

und die Beschränktheit von  $(u_k)$  in  $W^{2,s}$  sowie (2.27) liefern uns schließlich  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^t$  für alle  $t \in (s, s^{**})$ . ■

Damit beweisen wir nun eine Konzentrationseigenschaft für Folgen in der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$ :

**Proposition 2.4.2.** *Ist  $(v_k)$  eine Folge in  $N$  und*

$$u_k := L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v_k \right] \in W^{2,q+1}, \quad (2.28)$$

so gilt für alle  $r > 0$  und alle  $s \in [q+1, (q+1)^{**})$ :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} |u_k|^s dx > 0.$$

**BEWEIS:** Nach Lemma 2.3.6 (c) ist  $(v_k)$  beschränkt in  $L^{q+1}$ . Aus Proposition 2.1.3 folgt somit auch die Beschränktheit der Folge  $(u_k)$  in  $W^{2,q+1}$  und damit – nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz – in  $L^s$  für alle  $s \in [q+1, (q+1)^{**}]$ . Wäre nun die Aussage von Proposition 2.4.2 falsch, so gäbe es  $r_0 > 0$  und  $s_0 \in [q+1, (q+1)^{**})$  mit

$$0 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{r_0}(y)} |u_k|^{s_0} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_{r_0}(y)} |u_k|^{s_0} dx$$

und die Beschränktheit von  $(u_k)$  sowie das *Concentration-Compactness* Lemma 2.4.1 von Pierre Louis Lions lieferten dann  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^s(\mathbb{R}^n)$  für alle  $s \in (q+1, (q+1)^{**})$ . Andererseits gilt wegen  $v_k \in N$  aber

$$\|v_k\|_{q+1}^{q+1} \leq \int_{\mathbb{R}^n} v_k K v_k dx \leq \|\Gamma\|_{\infty}^{\frac{1}{p+1}} \|v_k\|_{q+1} \|u_k\|_{p+1}$$

und damit  $\|v_k\|_{q+1}^q \leq \|\Gamma\|_{\infty}^{p/(p+1)} \|u_k\|_{p+1}^p \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , im Widerspruch zu  $v_k \in N$ . ■

Im Existenzbeweis für duale Grundzustände des Grenzflächenproblems werden wir auch die folgende modifizierte Varianten von Proposition 2.4.2 benutzen:

**Proposition 2.4.3.** *Für  $a > 0$  sei  $S_a = (-a, a) \times \mathbb{R}^{n-1}$  der Streifen in  $\mathbb{R}^n$  um die Hyperebene  $x_1 = 0$  mit Weite  $2a$ . Weiter seien  $r \in (0, a)$ ,  $s_0 \in (1, \infty)$  sowie  $(u_k)$  eine beschränkte Folge in  $W^{2,s_0}(S_{2a})$  mit*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_{2a}} \int_{B_r(y)} |u_k|^{s_0} dx = 0.$$

Dann gilt  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^s(S_a)$  für alle  $s \in (s_0, s_0^{**})$ .

BEWEIS: Es sei  $s \in (s_0, s_0^{**})$ . Wie im Beweis von Lemma 2.4.1 erhalten wir dann

$$\int_{B_r(y)} |u_k|^s dx \leq c^s \|u_k\|_{L^{s_0}(B_r(y))}^{(1-\vartheta)s} \|u_k\|_{W^{2,s_0}(B_r(y))}^{s_0}$$

wobei  $\vartheta = \frac{s_0}{s}$  und  $c > 0$  die Sobolev-Konstante ist, und wählen wiederum eine Überdeckung  $\mathcal{B} = \{B_i : i \in I\}$  von  $\mathbb{R}^n$ , wobei jedes  $B_i$  eine Kugel vom Radius  $r$  ist und jeder Punkt in  $\mathbb{R}^n$  in höchstens  $n+1$  Kugeln  $B_i$  enthalten ist. Setzen wir nun  $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B} : B = B_r(y) \text{ mit } y \in S_a\}$ , so ist  $\mathcal{B}'$  eine Überdeckung von  $S_a$  und jeder Punkt in  $S_a$  liegt in höchstens  $n+1$  Kugeln aus  $\mathcal{B}'$ . Da  $r < a$ , ist ferner  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \subset S_{2a}$  und damit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_a} |u_k|^s dx \leq (n+1)c^s \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_{2a}} \|u_k\|_{L^{s_0}(B_r(y))}^{(1-\vartheta)s} \|u_k\|_{W^{2,s_0}(S_{2a})}^{s_0} = 0.$$

Da  $s \in (s_0, s_0^{**})$  beliebig gewählt war, folgt hieraus  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^s(S_a)$  für alle  $s \in (s_0, s_0^{**})$ . ■

## 2.5 Existenz dualer Grundzustände bei periodischen Koeffizienten

In diesem Abschnitt nehmen wir nun an, dass die Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$  von (2.1) in jeder Koordinatenrichtung  $x_1, \dots, x_n$  1-periodisch seien. Wir beweisen den folgenden Satz:

**Bemerkung 2.5.1.** Für  $a \in \mathbb{Z}^n$  und  $v \in L^{q+1}$  sei  $\tau_a v(x) = v(x-a)$ . Dann gilt:

$$(a) \quad J(\tau_a v) = J(v) \text{ und } J'(\tau_a v) = J'(v).$$

$$(b) \quad \tau_a L^{-1} = L^{-1} \tau_a.$$

BEWEIS: (a) ist unmittelbar klar. Für (b) wählen wir  $v \in L^{q+1}$  und  $u \in W^{2,q+1}$  mit  $u = L^{-1}v$ . Dann ist zunächst  $\tau_a L^{-1}v(x) = u(x-a) = \tau_a u$ . Andererseits gilt

$$-\Delta u(x-a) + V(x)u(x-a) = -\Delta u(x-a) + V(x-a)u(x-a) = v(x-a),$$

d.h.  $L(\tau_a u) = \tau_a v$  und damit  $\tau_a L^{-1}v = \tau_a u = L^{-1} \tau_a v$ . ■

Bevor wir das Variationsproblem (2.14) untersuchen, sollten wir folgendes sicherstellen:

**Bemerkung 2.5.2.**  $N \neq \emptyset$ .

BEWEIS: Nach Satz 1.2.3 besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung (2.1) mit periodischen Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$  einen (echten) Grundzustand  $u^* \in H^1 \setminus \{0\}$ . Dann ist

$$v^* = \Gamma(x)^{p/(p+1)} |u^*|^{p-1} u^* \in L^{q+1} \setminus \{0\}$$

nach Satz 2.2.3 eine Lösung der dualen Gleichung (2.8), d.h.  $J'(v^*) = 0$ . Insbesondere liegt  $v^*$  in der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$ . ■

Nun können wir also mit dem Beweis der Existenz auch dualer Grundzustände von (2.1) beginnen. Dafür untersuchen wir das Konvergenzverhalten der in Proposition 2.3.12 gefundenen Folge  $(v_k)$

in  $N$  mit  $J(v_k) \rightarrow m$  und  $J'(v_k) \rightarrow 0$  und zeigen, dass  $(v_k)$  schwach gegen eine Lösung von (2.8) konvergiert. Argumente aus [AL92b] sind dabei hilfreich. Wir setzen

$$u_k := L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v_k \right] \in W^{2,q+1}.$$

Nach Voraussetzung (A3) ist  $p+1 \in (q+1, (q+1)^{**})$  und nach Proposition 2.4.2 existieren  $\rho, \delta > 0$  sowie eine Folge  $(y_k)$  in  $\mathbb{R}^n$ , sodass

$$\int_{B_\rho(y_k)} |u_k|^{p+1} dx \geq \delta \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad (2.29)$$

entlang einer Teilfolge von  $(u_k)$ . Nun sei  $(a^{(k)})$  eine Folge von Punkten in  $\mathbb{Z}^n$ , sodass die Folge  $(y^{(k)} - a^{(k)})$  beschränkt ist, und

$$r > \rho + \sup_{k \in \mathbb{N}} |(y^{(k)} - a^{(k)})|.$$

Dann gilt

$$\int_{B_r(a^{(k)})} |u_k|^{p+1} \geq \delta \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Jetzt betrachten wir die Funktionen  $\tilde{v}_k := v_k(\cdot + a^{(k)})$  und  $\tilde{u}_k := u_k := L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v_k \right] \in W^{2,q+1}$ .

Nach Bemerkung 2.5.1(b) gilt dann

$$\tilde{u}_k = L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{1/(p+1)} (\tau_{-a_k} v_k) \right] = \tau_{-a_k} L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{1/(p+1)} v_k \right] = \tau_{-a_k} u_k = u_k(\cdot + a_k)$$

und nach (2.29) somit

$$\int_B |\tilde{u}_k|^{p+1} dx \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}, \quad (2.30)$$

wobei wir  $B := B_r(0)$  gesetzt haben. Nun ist  $(\tilde{v}_k)$  eine Folge in  $N$  und somit beschränkt. Entlang einer weiteren Teilfolge  $(\tilde{v}_k)$  können wir also annehmen, dass

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k &\rightharpoonup v_0 \text{ in } L^{q+1}, \\ \tilde{u}_k &\rightharpoonup u_0 \text{ in } W^{2,q+1}, \\ \tilde{u}_k &\rightharpoonup u_0 \text{ in } L^s \text{ für alle } s \in [q+1, (q+1)^{**}], \\ \tilde{u}_k &\rightarrow u_0 \text{ in } L_{\text{loc}}^s \text{ für alle } s \in [q+1, (q+1)^{**}) \end{aligned}$$

für Funktionen  $v_0 \in L^{q+1}$  und  $u_0 \in W^{2,q+1}$ . Da  $L^{-1}$  stetig ist, folgt

$$u_0 = L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{1/(p+1)} v_0 \right].$$

Ferner folgt insbesondere  $u_k \rightarrow u_0$  in  $L^2(B)$  und nach (2.30) somit  $u_0 \neq 0$  und  $v_0 \neq 0$ . Nach (2.13) gilt ferner

$$J'(\tilde{v}_k) = |\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k - K \tilde{v}_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad (2.31)$$

in  $(L^{q+1})^* \cong L^{p+1}$  und damit

$$|\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k \rightharpoonup K v_0 = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u_0 \text{ in } L^{p+1}.$$

Als nächstes zeigen wir, dass

$$|\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k \rightarrow \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}u_0 \quad \text{in } L_{\text{loc}}^{p+1}. \quad (2.32)$$

entlang einer Teilfolge von  $(\tilde{v}_k)$ . Dafür sei  $S_m := \overline{B_m(0)}$  die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius  $m \in \mathbb{N}$  und  $\delta > 0$ . Nach Proposition 2.1.3(b) ist  $K$  lokal kompakt, d.h. wir finden  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\|K\tilde{v}_k - K\tilde{v}_j\|_{L^{p+1}(S_m)} \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } j, k \geq k_0.$$

Weil  $J'(\tilde{v}_k) \rightarrow 0$  in  $L^{p+1}$ , können wir  $k_0$  so wählen, dass auch

$$\|J'(\tilde{v}_k) - J'(\tilde{v}_j)\|_{L^{p+1}(S_m)} \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } j, k \geq k_0.$$

Nach (2.31) ist dann

$$\int_{S_m} \left( |\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k\varphi - |\tilde{v}_j|^{q-1}\tilde{v}_j\varphi \right) dx = \int_{S_m} (J'(\tilde{v}_k) - J'(\tilde{v}_j)) \varphi dx + \int_{S_m} \varphi K(\tilde{v}_k - \tilde{v}_j) dx$$

für alle  $\varphi \in L^{q+1}(S_m)$  und damit

$$\begin{aligned} \left\| |\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k - |\tilde{v}_j|^{q-1}\tilde{v}_j \right\|_{L^{p+1}(S_m)} &= \sup \left\{ \left| \int_{S_m} \left( |\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k\varphi - |\tilde{v}_j|^{q-1}\tilde{v}_j\varphi \right) dx \right| : \|\varphi\|_{L^{q+1}(S_m)} = 1 \right\} \\ &\leq \|J'(\tilde{v}_k) - J'(\tilde{v}_j)\|_{p+1} + \|K\tilde{v}_k - K\tilde{v}_j\|_{L^{p+1}(S_m)} \leq \delta \end{aligned}$$

für alle  $j, k \geq k_0$ , d.h.  $|\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k \rightarrow \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}u_0$  in  $L^{p+1}(S_m)$ . Schöpfen wir nun  $\mathbb{R}^n$  aus durch die Folge  $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , so liefert ein Diagonalfolgenargument  $|\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k \rightarrow \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}u_0$  in  $L_{\text{loc}}^{p+1}$  und damit – unter erneuter Auswahl einer Teilfolge – insbesondere fast überall auf  $\mathbb{R}^n$ . Mit  $f(s) = |s|^{p-1}s$  erhalten wir also auch

$$\tilde{v}_k(x) = f(|\tilde{v}_k(x)|^{q-1}\tilde{v}_k(x)) \rightarrow \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}}|u_0(x)|^{p-1}u_0(x) =: w_0(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir zeigen nun, dass  $v_0 = w_0$ . Dazu sei  $S$  eine beliebige kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Da  $\tilde{v}_k \in L^{q+1}(S)$  liefern (2.32) und [Wil96, Lemma A.1] die Existenz einer Funktion  $h \in L^{(q+1)/q}(S) = L^{p+1}(S)$  mit  $|\tilde{v}_k(x)|^q \leq h(x)$  für fast alle  $x \in S$ . Dann gilt aber auch  $|\tilde{v}_k(x)| \leq h(x)^{1/q}$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $h^{1/q} \in L^{q+1}(S)$ . Für alle  $\varphi \in L^{p+1}(S)$  ist damit  $|h^{1/q}\varphi| \in L^1(S)$  und aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S \tilde{v}_k \varphi dx = \int_S w_0 \varphi dx \quad \text{für alle } \varphi \in L^{p+1}(S).$$

Nun gilt aber  $\tilde{v}_k \rightharpoonup v_0$  in  $L^{q+1}$ , woraus notwendig  $v_0|_S = w_0$  folgt für jede kompakte Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Also ist

$$v_0 = \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}}|u_0|^{p-1}u_0 \quad \text{bzw.} \quad |v_0|^{q-1}v_0 = \Gamma(x)^{1/(p+1)}u_0$$

und es gilt insbesondere  $|\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k \rightarrow |v_0|^{q-1}v_0$  in  $L_{\text{loc}}^{p+1}$ .

Nun sei  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  und  $S := \text{supp } \varphi$ . Mit der Hölderschen Ungleichung erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |J'(\tilde{v}_k)\varphi - J'(v_0)\varphi| &= \left| \int_S (|\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k - |v_0|^{q-1}v_0) \varphi \, dx - \int_S \varphi K(\tilde{v}_k - v_0) \, dx \right| \\ &\leq \left( \left\| |\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k - |v_0|^{q-1}v_0 \right\|_{L^{p+1}(S)} + \|\tilde{K}v_k - Kv_0\|_{L^{p+1}(S)} \right) \|\varphi\|_{L^{q+1}(S)}. \end{aligned}$$

Da  $\tilde{K}v_k \rightarrow Kv_0$  in  $L^{p+1}(S)$  nach Proposition 2.1.3(b) sowie  $\left\| |\tilde{v}_k|^{q-1}\tilde{v}_k - |v_0|^{q-1}v_0 \right\|_{L^{p+1}(S)} \rightarrow 0$  nach (2.32) folgt daraus

$$J'(v_0)\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} J'(\tilde{v}_k)\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty,$$

d.h.  $J'(v_0) = 0$ . Also ist  $v_0$  eine Lösung von (2.8), d.h.  $v_0 \in N$ . Da  $\tilde{v}_k \rightarrow v_0$  fast überall in  $\mathbb{R}^n$ , erhalten wir mit dem Lemma von Fatou schließlich

$$m = \lim_{k \rightarrow \infty} J(\tilde{v}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}_k(x)|^{q+1} \, dx \geq \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |v_0(x)|^{q+1} \, dx = J(v_0).$$

Also ist  $v_0$  ein Minimierer von  $J$  auf  $N$  und somit ein starker Grundzustand von (2.8). Insgesamt haben wir den folgenden Satz bewiesen:

**Satz 2.5.3.** *Sind  $V, \Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  periodisch in jeder Raumvariablen  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) und gelten die Voraussetzungen (H1)-(H3), so besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

einen starken dualen Grundzustand  $u^* \in H^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ .

## 2.6 Die Nehari-Mannigfaltigkeit im Grenzflächenfall

Nun untersuchen wir den Grenzflächenfall. Die Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$  in der nichtlinearen Schrödingergleichung (2.1) seien also gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ V_2(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n, \end{cases} \quad \text{und} \quad \Gamma(x) = \begin{cases} \Gamma_1(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \Gamma_2(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n. \end{cases}$$

mit 1-periodischen Funktionen  $V_i, \Gamma_i \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Die entsprechenden Schrödingeroperatoren bezeichnen wir wieder mit  $L$  und  $L_i$ . Nach der Voraussetzung (H2) gilt  $0 \notin \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$ . Nach Satz 2.5.3 besitzt (2.3) somit für  $i = 1, 2$  einen starken dualen Grundzustand

$$u_i^* = \Gamma_i(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v_i^*|^{q-1} v_i^* \in H^2 \setminus \{0\},$$

wobei  $v_i^* \in L^{q+1} \setminus \{0\}$  ein starker Grundzustand der zugehörigen dualen Gleichung

$$K_i v = |v|^{q-1} v \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2.33}$$

mit den Birmann-Schwinger Kernen

$$K_i = \Gamma_i(x)^{\frac{1}{p+1}} L_i^{-1} \Gamma_i(x)^{\frac{1}{p+1}}$$

ist.  $v_i^*$  minimiert das Euler-Funktional  $J_i \in C^1(L^{q+1}, \mathbb{R}^n)$  mit

$$J_i(v) = \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} v K_i v dx$$

auf der Nehari-Mannigfaltigkeit

$$N_i := \{v \in L^{q+1} \setminus \{0\} : J_i'(v)v = 0\},$$

d.h. es gilt

$$m_i := J_i(v_i^*) = \min\{J_i(v) : v \in N_i\}. \quad (2.34)$$

Denselben variationellen Ansatz wollen wir nun verfolgen um die Existenz von Grundzuständen auch im Grenzflächenfall (2.1) nachzuweisen. Dafür betrachten wir den Birmann-Schwinger Kern

$$K = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L^{-1} \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}$$

auf  $L^{q+1}$  und untersuchen die zu (2.1) duale Gleichung

$$Kv = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.35)$$

für Funktionen  $v \in L^{q+1}$ . Ihre Lösungen entsprechen den kritischen Punkten des Eulerfunktionals  $J \in C^1(L^{q+1}, \mathbb{R}^n)$  mit

$$J(v) = \frac{1}{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} v K v dx$$

und starke Grundzustände von (2.35) entsprechen den Lösungen des Variationsproblems

$$m := \inf\{J(v) : v \in N\}, \quad \text{wobei} \quad N := \{v \in L^{q+1} \setminus \{0\} : J'(v)v = 0\}. \quad (2.36)$$

Die erste Aufgabe ist es nun nachzuweisen, dass  $N \neq \emptyset$ . Dies erfordert mehr Aufwand als im Fall rein periodischer Koeffizienten, aber die hier zu führenden Rechnungen werden sich auch später noch als nützlich erweisen.

Einer Idee von David Arcoya, Silvia Cingolani und José Luis Gámez aus [ACG99] folgend werden wir  $u_1^*$  und  $v_1^*$  nun weit nach rechts und damit weg von der Grenzfläche  $x_1 = 0$  verschieben:

**Definition & Bemerkung 2.6.1.** Es sei der Einheitsvektor  $e_1 := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Wir betrachten die Folgen  $(u_t)_{t \in \mathbb{N}}$  in  $H^1$  und  $(v_t)_{t \in \mathbb{N}}$  in  $L^{q+1}$  mit

$$u_t(x) := u_1^*(x - te_1) \quad \text{und} \quad v_t(x) := v_1^*(x - te_1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } t \in \mathbb{N}.$$

Nach Satz 2.2.3 gilt dann

$$v_t = \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t \quad \text{und} \quad v_t = \Gamma_1(x)^{-\frac{1}{p+1}} L_1 u_t$$

sowie

$$u_t = \Gamma_1(x)^{-\frac{1}{p+1}} |v_t|^{q-1} v_t \quad \text{und} \quad u_t = L_1^{-1} \left[ \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} v_t \right]$$

für alle  $t \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 2.6.2.** *Es existieren  $\alpha_0 > 0$  und zu jedem  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  eine Konstante  $C_\alpha > 0$ , sodass für alle  $t \in \mathbb{N}$  die folgenden Abschätzungen gelten:*

$$(a) \quad |u_t(x)| \leq C_\alpha e^{-\alpha t} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_-^n,$$

$$(b) \quad \|u_t\|_{L^r(\mathbb{R}_-^n)} \leq C_\alpha e^{-\alpha t} \text{ für alle } r \geq 1.$$

**BEWEIS:** Zu (a). Nach Satz 1.2.2 existieren  $\alpha_0 > 0$  und zu jedem  $\alpha \in (0, \alpha_0)$  eine Konstante  $C_\alpha > 0$  mit

$$|u_1^*(x)| \leq C_\alpha e^{-\alpha|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

und bekanntermaßen gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n |x_k| \leq |x| = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Somit erhalten wir für alle  $t \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}_-^n$ :

$$\begin{aligned} |u_t(x)| &= |u_1^*(x - te_1)| \leq C_\alpha \exp \left( -\alpha|x_1 - t| - \alpha \sum_{k=2}^n |x_k| \right) \\ &= C_\alpha \exp \left( -\alpha \underbrace{\sum_{k=2}^n |x_k|}_{\leq 1} \right) e^{-\alpha t + \alpha x_1} \\ &\leq C_\alpha e^{-t\alpha}. \end{aligned}$$

Zu (b). Wie in Teil (a) ergibt sich nun für alle  $r \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \|u_t\|_{L^r(\mathbb{R}_-^n)}^r &= \int_{\mathbb{R}_-^n} |u_1^*(x - te_1)|^r dx \leq C_\alpha^r \int_{\mathbb{R}_-^n} e^{-r\alpha|x-te_1|} dx \\ &\leq C_\alpha^r \int_{\mathbb{R}_-^n} \exp \left\{ -r\alpha \left( |x_1 - t| + \sum_{k=2}^n |x_k| \right) \right\} d(x_1, \dots, x_n) \\ &= C_\alpha^r \left( \int_{-\infty}^0 e^{-r\alpha(t-x_1)} dx_1 \right) \left( \prod_{k=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\alpha|x_k|} dx_k \right) \\ &= 2^{n-1} C_\alpha^r \left( \int_{-\infty}^0 e^{-r\alpha(t-x_1)} dx_1 \right) \left( \prod_{k=2}^n \int_0^{\infty} e^{-r\alpha x_k} dx_k \right) = \frac{2^{n-1} C_\alpha^r}{r^n \alpha^n} e^{-r\alpha t}. \end{aligned}$$

■

**Lemma 2.6.3.** *Ist  $g_t \in W^{2,q+1}$  gegeben durch*

$$g_t := \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \left( \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} \right) |u_t|^{p-1} u_t - (V(x) - V_1(x)) u_t, \quad (2.37)$$

so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_t(K - K_1)v_t \, dx &= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \left( \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} \right) |u_t|^{p+1} \, dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} (V(x) - V_1(x))u_t^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_t L^{-1}g_t \, dx. \end{aligned} \quad (2.38)$$

für alle  $t \in \mathbb{N}$  und damit insbesondere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} v_t(K - K_1)v_t \, dx = 0. \quad (2.39)$$

BEWEIS: Nach Bemerkung 2.6.1 ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_t(K - K_1)v_t \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t \left( \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v_t \right] - \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} u_t \right) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t \left( L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v_t \right] - \left[ \frac{\Gamma_1(x)}{\Gamma(x)} \right]^{\frac{1}{p+1}} u_t \right) \, dx. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Wir setzen nun

$$\delta V(x) := V_2(x) - V_1(x) \quad \text{sowie} \quad \delta_{p+1}\Gamma(x) := \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (2.41)$$

Der besseren Übersichtlichkeit halber werden wir bei den folgenden Rechnungen das Argument von  $\Gamma$  und  $V$  auslassen. Die Funktionen  $z_t, h_t \in W^{2,q+1}$  seien gegeben durch

$$z_t := L^{-1} \left[ \Gamma^{\frac{1}{p+1}} v_t \right] \quad \text{und} \quad h_t := z_t - u_t. \quad (2.42)$$

Nach Bemerkung 2.6.1 gilt dann

$$Lz_t = \Gamma^{\frac{1}{p+1}} v_t = \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \Gamma^{\frac{1}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t \quad (2.43)$$

und damit

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \Gamma^{\frac{1}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t &= Lu_t + Lh_t = L_1 u_t + Lh_t + (V - V_1)u_t \\ &= \Gamma_1 |u_t|^{p-1} u_t + (V - V_1)u_t + Lh_t, \end{aligned}$$

d.h.,

$$Lh_t = \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \left( \Gamma^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_1^{\frac{1}{p+1}} \right) |u_t|^{p-1} u_t - (V - V_1)u_t = g_t.$$

Aus (2.40) erhalten wir also weiter

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_t(K - K_1)v_t \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \Gamma^{\frac{1}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t \left[ \left( 1 - \left( \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{p+1}} \right) u_t + h_t \right] \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma |u_t|^{p+1} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \Gamma^{\frac{1}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t L^{-1}g_t \, dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Definition von  $g_t$  und der Symmetrie von  $L^{-1}$ , siehe Lemma 2.1.4, folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} v_t(K - K_1)v_t \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma |u_t|^{p+1} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_t L^{-1} \left[ \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \Gamma^{\frac{1}{p+1}} |u_t|^{p-1} u_t \right] \, dx \\
&\stackrel{(2.43)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma |u_t|^{p+1} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_t z_t \, dx \\
&\stackrel{(2.42)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma |u_t|^{p+1} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_t u_t \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_t h_t \, dx \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma |u_t|^{p+1} \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \delta V u_t^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_t L^{-1} g_t \, dx.
\end{aligned}$$

Damit ist (2.38) bewiesen. Nach Lemma 2.6.2 finden wir ferner Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  mit

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma(x) |u_t|^{p+1} \, dx \right| \leq c_1 \|u_t\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1} = \mathcal{O}e^{-(p+1)\alpha t} \quad (2.44)$$

sowie

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) u_t^2 \, dx \right| = \mathcal{O}(e^{-2\alpha t}) \quad (2.45)$$

für  $t \rightarrow \infty$ . Aufgrund der Stetigkeit von  $L^{-1}$ , siehe Proposition 2.1.3(a), gilt schließlich

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g_t L^{-1} g_t \, dx \right| \leq \|g_t\|_{L^{q+1}(\mathbb{R}^n)} \|L^{-1} g_t\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}$$

und aus der Definition von  $g_t$  sowie Lemma 2.6.2 erhalten wir ferner  $\|g_t\|_{L^{q+1}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(e^{\alpha t})$  für  $t \rightarrow \infty$ . Da  $g_t \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}_+^n$  folgt somit insbesondere die Beschränktheit der Folge  $(g_t)_{t \in \mathbb{N}}$  in  $L^{q+1}$  und aus der Stetigkeit von  $L^{-1}$  somit auch die Beschränktheit der Folge  $(L^{-1}g_t)_{t \in \mathbb{N}}$  in  $L^{p+1}$ . Die Aussage von Lemma 2.6.3 ist somit vollständig bewiesen. ■

Damit können wir die Funktionen  $v_t$  für hinreichend große  $t \in \mathbb{N}$  auf die Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$  projizieren:

**Proposition 2.6.4.** *Es existieren  $t_0 \in \mathbb{N}$  und  $s_t > 0$ , sodass  $s_t v_t \in N$  für alle  $t \geq t_0$ . Insbesondere ist damit  $N \neq \emptyset$ .*

**BEWEIS:** Für alle  $t \in \mathbb{N}$  ist  $v_t \in N_1$  und damit

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_t K v_t \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} v_t K_1 v_t \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t \, dx = \|v_t\|_{q+1}^{q+1} + \int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t \, dx.$$

Da  $\|v_t\|_{q+1} > 0$ , existiert nach Lemma 2.6.3 somit  $t_0 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_t K v_t \, dx > 0 \quad \text{für alle } t \geq t_0.$$

Für alle  $t \geq t_0$  können wir somit  $s_t$  als die positive Lösung der Gleichung

$$s_t^{q-1} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} v_t K v_t \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |v_t|^{q+1} \, dx} \quad (2.46)$$

wählen. ■

Aus den obigen Rechnungen können wir noch eine weitere wichtige Beobachtung über die minimalen Energieniveaus  $m, m_1, m_2$  der Variationsprobleme (2.36) und (2.34) festhalten:

**Proposition 2.6.5.** *Es gilt stets  $m \leq \min\{m_1, m_2\}$ .*

**BEWEIS:** Ist  $s_t$  die positive Lösung von (2.46), so liefert (2.39) nun  $s_t \rightarrow 1$  für  $t \rightarrow \infty$ . Da  $s_t v_t \in N$ , gilt ferner

$$m \leq J(s_t v_t) = s_t^{q+1} \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |v_t|^{q+1} dx = s_t^{q+1} J_1(v_t) = s_t^{q+1} J_1(v_1^*) = s_t^{q+1} m_1, \quad (2.47)$$

wobei wir die Periodizität der Koeffizienten  $V_1$  und  $\Gamma_1$  verwendet haben. Im Grenzwert  $t \rightarrow \infty$  ergibt sich aus (2.47) somit  $m \leq m_1$ .

Setzt man statt  $v_t = v_1^*(\cdot - te_1)$  nun  $v_t := v_2^*(\cdot - te_1)$ , wobei  $v_2^*$  ein starker Grundzustand der dualen Gleichung (2.33) mit Birman-Schwinger Kern  $K_2$  ist, so liefern die Rechnungen im Beweis von Lemma 2.6.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} v_t(K - K_2)v_t dx = 0,$$

wenn man überall die Indizes 1 und 2 vertauscht und die Integrale über  $\mathbb{R}_-^n$  durch Integrale über  $\mathbb{R}_+^n$  ersetzt. Wie in (2.47) folgt dann  $m \leq s_t^{q+1} m_2$  und  $s_t \rightarrow 1$  für  $t \rightarrow \infty$  und damit auch  $m \leq m_2$ . ■

## 2.7 Existenz dualer Grundzustände im Grenzflächenfall

Mit Proposition 2.6.4 können wir uns nun an die Untersuchung des Variationsproblems (2.36) machen. Unser Hauptresultat ist das folgende Existenzkriterium für duale Grundzustände.

**Satz 2.7.1.** *Ist  $m < \{m_1, m_2\}$ , so besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \text{ in } \mathbb{R}^n$$

*unter den Annahmen (H1) bis (H3) einen starken dualen Grundzustand  $u^* \in H^2(\mathbb{R}^n)$ .*

Dieser Satz wurde in der Arbeit [DPR11] bereits im positiv definiten Fall  $0 < \min \sigma(L)$  als Existenzkriterium für starke Grundzustände von (2.1) bewiesen, siehe Satz 1.2.4. Wir werden nun den Argumenten dieser Arbeit folgen um das Kriterium auch im indefiniten Fall und für starke duale Grundzustände zu zeigen.

Dabei untersuchen wir wieder die in Proposition 2.3.12 gefundene Folge  $(v_k)$  in der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$  mit  $J(v_k) \rightarrow m$  und  $J'(v_k) \rightarrow 0$ .  $(v_k)$  ist beschränkt nach Lemma 2.3.6, d.h. entlang einer Teilfolge konvergiert  $(v_k)$  schwach gegen eine Lösung  $v_0$  von (2.35).

Nach Proposition 2.6.5 gilt stets  $m \leq \min\{m_1, m_2\}$ . Die Bedingung  $m < \min\{m_1, m_2\}$  benötigen wir, um sicherzustellen, dass  $v_0 \neq 0$ . Dies erfordert verglichen mit dem Fall periodischer Koeffizienten

einiges an technischem Mehraufwand. Zunächst setzen wir wieder

$$u_k := L^{-1} \left[ \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} v_k \right] \in W^{2,q+1}.$$

Nach Proposition 2.4.2 gilt dann

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} |u_k|^s dx > 0 \quad \text{für alle } r > 0 \text{ und alle } s \in [q+1, (q+1)^{**}). \quad (2.48)$$

Für  $\delta > 0$  sei  $\chi_\delta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit

$$\chi_\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \geq \delta, \\ 0, & \text{wenn } t \leq 0. \end{cases}$$

Dann gilt  $|\chi'_\delta(t)| \leq C_\delta$  und  $|\chi''_\delta(t)| \leq C_\delta$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit einer Konstanten  $C_\delta > 0$ . Mit  $\chi_\delta$  erklären wir nun die Abschneidefunktionen  $\chi_\delta^\pm \in C^\infty$  durch

$$\chi_\delta^\pm(x_1, \dots, x_n) := \chi_\delta(\pm x_1).$$

Man beachte, dass  $\text{supp } \chi_\delta^\pm = \mathbb{R}_\pm^n$  und  $\text{supp } \nabla \chi_\delta^\pm \subset S_\delta$ , wobei

$$S_\delta := (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{n-1}$$

der Streifen in  $\mathbb{R}^n$  um die Hyperebene  $x_1 = 0$  mit Weite  $2\delta$  ist.

**Lemma 2.7.2.** Die Funktionen  $u_k^\pm$  und  $v_k^\pm$  seien gegeben durch

$$u_k^\pm := u_k \chi_\delta^\pm, \quad \text{sowie} \quad v_k^\pm := \Gamma(x)^{-\frac{1}{p+1}} L u_k^\pm$$

und es sei

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{W^{2,q+1}(S_\delta)} = 0. \quad (2.49)$$

Dann gelten für  $k \rightarrow \infty$  die folgenden Asymptotiken:

$$(a) \quad u_k = u_k^+ + u_k^- + R_k, \text{ wobei } \|R_k\|_{p+1} \rightarrow 0, \\ v_k = v_k^+ + v_k^- + r_k, \text{ wobei } \|r_k\|_{q+1} \rightarrow 0,$$

$$(b) \quad J(v_k) = J_1(v_k^+) + J_2(v_k^-) + o(1),$$

$$(c) \quad J'(v_k) = J'_1(v_k^+) + J'_2(v_k^-) + o(1).$$

In (c) ist die Konvergenz dabei im Sinne von  $(L^{q+1})^* = L^{p+1}$  zu verstehen ist.

**BEWEIS:** Zunächst ist  $\text{supp } u_k^\pm \subset \mathbb{R}_\pm^n$  und damit  $V_1(x)u_k^+ = V(x)u_k^+$  sowie  $V_2(x)u_k^- = V(x)u_k^-$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Also gilt

$$v_k^+ = \Gamma_1(x)^{-\frac{1}{p+1}} L_1 u_k^+, \quad \text{bzw.} \quad v_k^- = \Gamma_2(x)^{-\frac{1}{p+1}} L_2 u_k^-.$$

Zu (a): Es ist  $u_k = u_k^+ + u_k^- + R_k$ , wobei  $R_k = u_k(1 - \chi_\delta^+ - \chi_\delta^-)$ . Da  $\text{supp } R_k \subset S_\delta$ , liefert (2.49)

$\|R_k\|_{p+1} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Weiter gilt:

$$\begin{aligned} Lu_k &= -\Delta u_k + V_1(x)u_k \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n} + V_2(x)u_k \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^n} \\ &= -\Delta u_k + V_1(x)u_k^+ + V_2(x)u_k^- + V_1(x)(u_k - u_k^+) \mathbb{1}_{\{x_1 \in (0, \delta)\}} + V_2(x)(u_k - u_k^-) \mathbb{1}_{\{x_1 \in (-\delta, 0)\}} \\ &= L_1 u_k^+ + L_2 u_k^- + \tilde{r}_k, \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{r}_k = -\Delta(u_k - u_k^+ - u_k^-) + V_1(x)(u_k - u_k^+) \mathbb{1}_{\{x_1 \in (0, \delta)\}} + V_2(x)(u_k - u_k^-) \mathbb{1}_{\{x_1 \in (-\delta, 0)\}}. \quad (2.50)$$

Weiter ist  $\Delta u_k^\pm = (\Delta u_k) \chi_\delta^\pm + 2\nabla u_k \cdot \nabla \chi_\delta^\pm + u_k (\Delta \chi_\delta^\pm)$  und somit

$$\Delta(u_k - u_k^+ - u_k^-) = (1 - \chi_\delta^+ - \chi_\delta^-) \Delta u_k - 2\nabla u_k \cdot \nabla (\chi_\delta^+ + \chi_\delta^-) - u_k (\Delta \chi_\delta^\pm).$$

Aus der Beschränktheit der Ableitungen von  $\chi_\delta$  folgt dann

$$\begin{aligned} \|\Delta(u_k - u_k^+ - u_k^-)\|_{L^{q+1}(S_\delta)} &\leq \|\Delta u_k\|_{L^{q+1}(S_\delta)} + C_\delta \left( \|\nabla u_k\|_{L^{q+1}(S_\delta)} + \|u_k\|_{L^{q+1}(S_\delta)} \right) \\ &\leq \max\{1, C_\delta\} \|u_k\|_{W^{2,q+1}(S_\delta)} \end{aligned}$$

für  $k \rightarrow \infty$ , sodass (2.49) und (2.50) schließlich  $\tilde{r}_k \rightarrow 0$  in  $L^{q+1}$  liefern. Die Aussage für  $v_k$  erhalten wir nun mit  $r_k := \Gamma(x)^{-1/(p+1)} \tilde{r}_k$ .

Zu (b): Wie in Lemma 2.2.4 (a) zeigt man, dass

$$\left| |a+b|^{q+1} - |a|^{q+1} \right| \leq (q+1) 2^q (|a|^q + |b|^q) |b| \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Da die Träger von  $v_k^+$  und  $v_k^-$  disjunkt sind, erhalten wir daraus mit Hilfe von Teil (a)

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q+1} dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} |v_k^+|^{q+1} dx - \int_{\mathbb{R}_-^n} |v_k^-|^{q+1} dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| |v_k^+ + v_k^- + r_k|^{q+1} - |v_k^+ + v_k^-|^{q+1} \right| dx \\ &\leq (q+1) 2^q \int_{\mathbb{R}^n} (|v_k^+ + v_k^-|^q + |r_k|^q) |r_k| dx \\ &\leq (q+1) 2^q \left( \|v_k^+ + v_k^-\|_{q+1}^q + \|r_k\|_{q+1}^q \right) \|r_k\|_{q+1}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Höldersche Ungleichung verwendet haben. Weil die Folgen  $(v_k)$  und damit auch  $(v_k^+ + v_k^-)$  in  $L^{q+1}$  beschränkt sind und  $\|r_k\|_{q+1} \rightarrow 0$ , folgt für  $k \rightarrow \infty$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v_k|^{q+1} dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} |v_k^+|^{q+1} dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} |v_k^-|^{q+1} dx + o(1).$$

Aus der Konstruktion der Folge  $(u_k)$  und Teil (a) erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_k K v_k \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u_k L u_k \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_k^+ L_1 u_k^+ \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_k^- L_2 u_k^- \, dx + \int_{S_\delta} R_k (L u_k + L u_k^+ + L u_k^-) \, dx. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \|L u_k^\pm\|_{L^{q+1}(S_\delta)} &\leq \|(\Delta u_k) \chi_\delta^\pm + 2 \nabla u_k \cdot \nabla \chi_\delta^\pm + u_k (\Delta \chi_\delta^\pm) - V(x) u_k \chi_\delta^\pm\|_{L^{q+1}(S_\delta)} \\ &\leq C \|u_k\|_{W^{2,q+1}(S_\delta)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

mit einer nur von  $\delta$  abhängenden Konstante  $C > 0$  und nach Teil (a) ferner  $R_k \rightarrow 0$  in  $L^{p+1}(S_\delta)$ . Wir erhalten also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{S_\delta} R_k (L u_k + L u_k^+ + L u_k^-) \, dx = 0$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_k K v_k \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u_k^+ L_1 u_k^+ \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u_k^- L_2 u_k^- \, dx + o(1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v_k^+ K_1 v_k^+ \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} v_k^- K_2 v_k^- \, dx + o(1) \end{aligned}$$

sodass Teil (b) bewiesen ist.

Zu (c): Nach Lemma 2.2.4 (b) gilt

$$\left| |a+b|^{q-1}(a+b) - |a|^{q-1}a \right| \leq 2|b|^q \quad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}.$$

Ist nun  $\varphi \in L^{q+1}$ , so erhalten wir mit Hilfe von Teil (a), der Disjunktheit der Träger von  $v_k^+$  und  $v_k^-$  und der Hölderschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} (|v_k|^{q-1} v_k - |v_k^+|^{q-1} v_k^+ - |v_k^-|^{q-1} v_k^-) \varphi \, dx \right| \\ &\leq \left\| |v_k|^{q-1} v_k - |v_k^+ + v_k^-|^{q-1} (v_k^+ + v_k^-) \right\|_{p+1} \|\varphi\|_{q+1} \\ &\leq 2 \|r_k^q\|_{p+1} \|\varphi\|_{q+1} \\ &= 2 \|r_k\|_{q+1}^q \|\varphi\|_{q+1}. \end{aligned}$$

Da  $r_k \rightarrow 0$  in  $L^{q+1}$  bedeutet dies

$$|v_k|^{q-1} v_k = |v_k^+|^{q-1} v_k^+ + |v_k^-|^{q-1} v_k^- + o(1) \quad \text{in } L^{p+1}$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Schließlich liefern uns wiederum die Konstruktion von  $u_k$  und Teil (a):

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi K v_k \, dx = \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} u_k^+ \, dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} \varphi \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} u_k^- \, dx + \int_{S_\delta} \varphi \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} R_k \, dx$$

und somit

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi K v_k \, dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi K_1 v_k^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}_-^n} \varphi K_2 v_k^- \, dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u_k \, dx - \int_{\mathbb{R}_+^n} \varphi \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} u_k^+ \, dx - \int_{\mathbb{R}_-^n} \varphi \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} u_k^- \, dx \right| \\
&= \left| \int_{S_\delta} \varphi \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} R_k \, dx \right| \\
&\leq \|\Gamma\|_\infty^{\frac{1}{p+1}} \|\varphi\|_{L^{q+1}(S_\delta)} \|R_k\|_{L^{p+1}(S_\delta)},
\end{aligned}$$

und da  $\|R_k\|_{L^{p+1}(S_\delta)} \rightarrow 0$  nach Teil (a) folgt somit die Behauptung von Teil (c).  $\blacksquare$

Die Aussage der nächsten Proposition ist nun die zentrale Beobachtung für den Beweis des Existenzkriteriums von Satz 2.7.1:

**Proposition 2.7.3.** *Ist  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{W^{2,q+1}(S_\delta)} = 0$ , so gilt  $m \geq \min\{m_1, m_2\}$ .*

BEWEIS: Weil  $q+1 < p+1 < (q+1)^{**}$ , finden wir nach Proposition 2.4.2 eine Teilfolge von  $(u_k)$ , eine Folge  $(y^{(k)})$  von Punkten in  $\mathbb{R}^n$  sowie  $\varepsilon, \rho > 0$ , sodass

$$\int_{B_\rho(y^{(k)})} |u_k|^{p+1} \, dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wählen wir weiterhin Punkte  $a^{(k)} \in \mathbb{Z}^n$  und einen Radius  $r$ , sodass die Folge  $(a^{(k)} - y^{(k)})$  beschränkt ist und

$$r > \rho + \sup_{k \in \mathbb{N}} |a^{(k)} - y^{(k)}|,$$

so erhalten wir daraus

$$\int_{B_r(a^{(k)})} |u_k|^{p+1} \, dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.51)$$

Wir schreiben  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$  und unterscheiden die folgenden drei Fälle:

*Fall 1:* Die Folge  $(a_1^{(k)})$  ist beschränkt.

*Fall 2:* Längs einer Teilfolge gilt  $a_1^{(k)} \rightarrow +\infty$ .

*Fall 3:* Längs einer Teilfolge gilt  $a_1^{(k)} \rightarrow -\infty$ .

*Zu Fall 1:* Ist die Folge  $(a_1^{(k)})$  beschränkt, so betrachten wir die Vektoren  $\tilde{a}^{(k)} = (0, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{Z}^n$  und setzen  $\tilde{v}_k := v_k(\cdot + \tilde{a}^{(k)})$  sowie  $\tilde{u}_k := L^{-1}[\Gamma(x)^{1/(p+1)} \tilde{v}_k]$ . Wir zeigen, dass die Folge  $(\tilde{v}_k)$  schwach in  $L^{q+1}$  gegen eine Lösung von (2.35) konvergiert. Die Argumentation verläuft dabei analog zum periodischen Fall. Da wir auf die Argumente in Fall 2 jedoch zurückgreifen werden, führen wir sie zur besseren Nachvollziehbarkeit des gesamten Beweises gleichwohl noch einmal aus.

Wie in Bemerkung 2.5.1 erhalten wir aus der Periodizität der Koeffizienten  $V, \Gamma$  in den Variablen  $x_2, \dots, x_n$  dann  $\tilde{u}_k = u_k(\cdot + \tilde{a}^{(k)})$ . Weiterhin finden wir wegen (2.51) und der Beschränktheit der

Folge  $(a_1^{(k)})$  einen Radius  $R > 0$  mit

$$\int_B |\tilde{u}_k|^{p+1} dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \quad (2.52)$$

wobei  $B := B_R(0)$ . Wiederum aus der Periodizität von  $V$  und  $\Gamma$  in  $x_2, \dots, x_n$  folgt, dass  $(\tilde{v}_k)$  eine Folge in der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$  ist mit  $J(\tilde{v}_k) \rightarrow m$  und  $J'(\tilde{v}_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Insbesondere ist  $(\tilde{v}_k)$  somit beschränkt in  $L^{q+1}$  und wir finden Funktionen  $v_0 \in L^{q+1}$  sowie  $u_0 \in W^{2,q+1}$ , sodass entlang einer weiteren Teilfolge von  $(\tilde{v}_k)$  gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k &\rightharpoonup v_0 \text{ in } L^{q+1}, \\ \tilde{u}_k &\rightharpoonup u_0 \text{ in } W^{2,q+1}, \\ \tilde{u}_k &\rightharpoonup u_0 \text{ in } L^s \text{ für alle } s \in [q+1, (q+1)^{**}], \\ \tilde{u}_k &\rightharpoonup u_0 \text{ in } L_{\text{loc}}^s \text{ für alle } s \in [q+1, (q+1)^{**}]. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit von  $L^{-1}$  liefert uns dann  $u_0 = L^{-1} [\Gamma(x)^{1/(p+1)} v_0]$ , und da insbesondere  $\tilde{u}_k \rightarrow u_0$  in  $L^{p+1}(B)$ , ist  $u_0 \neq 0$  nach (2.52). Damit ist auch  $v_0 \neq 0$ . In  $L^{p+1} = (L^{q+1})^*$  gilt nun

$$J'(\tilde{v}_k) = |\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k - K\tilde{v}_k, \quad (2.53)$$

und damit ferner

$$|\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k \rightharpoonup K v_0 = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u_0 \text{ in } L^{p+1}.$$

Als nächstes zeigen wir, dass

$$|\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k \rightarrow \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u_0 \text{ in } L_{\text{loc}}^{p+1} \quad (2.54)$$

längs einer Teilfolge von  $(\tilde{v}_k)$ . Dafür sei  $S_m := \overline{B_m(0)}$  die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius  $m \in \mathbb{N}$  und  $\delta > 0$ . Nach Proposition 2.1.3(b) ist  $K$  lokal kompakt, d.h. wir finden  $k_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\|K\tilde{v}_k - K\tilde{v}_j\|_{L^{p+1}(S_m)} \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } j, k \geq k_0.$$

Weil  $J'(\tilde{v}_k) \rightarrow 0$  in  $L^{p+1}$ , können wir  $k_0$  so wählen, dass auch

$$\|J'(\tilde{v}_k) - J'(\tilde{v}_j)\|_{L^{p+1}(S_m)} \leq \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } j, k \geq k_0.$$

Nach (2.53) ist dann

$$\int_{S_m} (|\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k \varphi - |\tilde{v}_j|^{q-1} \tilde{v}_j \varphi) dx = \int_{S_m} (J'(\tilde{v}_k) - J'(\tilde{v}_j)) \varphi dx + \int_{S_m} \varphi K(\tilde{v}_k - \tilde{v}_j) dx$$

für alle  $\varphi \in L^{q+1}(S_m)$  und damit

$$\begin{aligned} \left\| |\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k - |\tilde{v}_j|^{q-1} \tilde{v}_j \right\|_{L^{p+1}(S_m)} &= \sup \left\{ \left| \int_{S_m} (|\tilde{v}_k|^{q-1} \tilde{v}_k \varphi - |\tilde{v}_j|^{q-1} \tilde{v}_j \varphi) dx \right| : \|\varphi\|_{L^{q+1}(S_m)} = 1 \right\} \\ &\leq \|J'(\tilde{v}_k) - J'(\tilde{v}_j)\|_{L^{p+1}(S_m)} + \|K\tilde{v}_k - K\tilde{v}_j\|_{L^{p+1}(S_m)} \leq \delta \end{aligned}$$

für alle  $j, k \geq k_0$ , d.h.  $|\tilde{\sigma}_k|^{q-1}\tilde{\sigma}_k \rightarrow \Gamma(x)^{1/(p+1)}u_0$  in  $L^{p+1}(S_m)$ . Schöpfen wir nun  $\mathbb{R}^n$  aus durch die Folge  $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , so liefert ein Diagonalfolgenargument schließlich (2.54). Insbesondere gilt entlang einer weiteren Teilfolge dann

$$|\tilde{\sigma}_k(x)|^{q-1}\tilde{\sigma}_k(x) \rightarrow \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}u_0(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n \quad (2.55)$$

und mit  $f(s) = |s|^{p-1}s$  erhalten wir daraus

$$\tilde{v}_k(x) = f(|\tilde{\sigma}_k(x)|^{q-1}\tilde{\sigma}_k(x)) \rightarrow \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}}|u_0(x)|^{p-1}u_0(x) =: w_0(x) \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir zeigen nun, dass  $v_0 = w_0$ . Dazu sei  $S$  eine beliebige kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Nach (2.54) und [Wil96, Lemma A.1] existiert eine Funktion  $h \in L^{(q+1)/q}(S) = L^{p+1}(S)$  mit  $|\tilde{\sigma}_k(x)|^q \leq h(x)$  für fast alle  $x \in S$ . Dann gilt aber auch  $|\tilde{\sigma}_k(x)| \leq h(x)^{1/q}$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $h^{1/q} \in L^{q+1}(S)$ . Für alle  $\varphi \in L^{p+1}(S)$  ist damit  $|h^{1/q}\varphi| \in L^1(S)$  und aus dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S \tilde{v}_k \varphi \, dx = \int_S w_0 \varphi \, dx \quad \text{für alle } \varphi \in L^{p+1}(S).$$

Nun gilt aber  $\tilde{v}_k \rightarrow v_0$  in  $L^{q+1}$ , woraus notwendig  $v_0|_S = w_0$  folgt für jede kompakte Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Also ist

$$v_0 = \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}}|u_0|^{p-1}u_0 \quad \text{bzw.} \quad |v_0|^{q-1}v_0 = \Gamma(x)^{1/(p+1)}u_0$$

und es gilt insbesondere  $|\tilde{\sigma}_k|^{q-1}\tilde{\sigma}_k \rightarrow |v_0|^{q-1}v_0$  in  $L_{\text{loc}}^{p+1}$ . Ist nun  $\varphi \in C_0^\infty$  und  $S := \text{supp } \varphi$ , so erhalten wir mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |J'(\tilde{v}_k)\varphi - J'(v_0)\varphi| &= \left| \int_S \left( |\tilde{\sigma}_k|^{q-1}\tilde{\sigma}_k - |v_0|^{q-1}v_0 \right) \varphi \, dx - \int_S \varphi K(\tilde{v}_k - v_0) \, dx \right| \\ &\leq \left( \left\| |\tilde{\sigma}_k|^{q-1}\tilde{\sigma}_k - |v_0|^{q-1}v_0 \right\|_{L^{p+1}(S)} + \|K\tilde{v}_k - Kv_0\|_{L^{p+1}(S)} \right) \|\varphi\|_{L^{q+1}(S)}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Da  $Kv_k \rightarrow Kv_0$  in  $L^{p+1}(S)$  nach Proposition 2.1.3(b) und  $|\tilde{\sigma}_k|^{q-1}\tilde{\sigma}_k \rightarrow |v_0|^{q-1}v_0$  in  $L_{\text{loc}}^{p+1}$ , folgt hieraus

$$J'(v_0)\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} J'(\tilde{v}_k)\varphi = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

d.h.  $J'(v_0) = 0$  und  $v_0$  ist eine Lösung von

$$Kv = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Nach Satz 2.2.3 ist dann aber  $u_0 \in W^{2,q+1}$  eine starke Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung (2.1) mit Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$ . Nach Voraussetzung gilt nun  $\tilde{u}_k \rightarrow 0$  in  $W^{2,q+1}(S_\delta)$  für  $k \rightarrow \infty$  und damit  $u_0 \equiv 0$  auf  $S_\delta$ . Aus dem Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit (vgl. dafür [ABG81] oder [SS80]) folgt somit  $u_0 \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^n$  und damit ein Widerspruch zu (2.52). Das beweist, dass Fall 1 nicht auftreten, d.h.  $(a_1^{(k)})$  nicht beschränkt sein kann.

Zu Fall 2: Es gelte  $a_1^{(k)} \rightarrow +\infty$ . Wie in Lemma 2.7.2 setzen wir

$$u_k^\pm := u_k \chi_\delta^\pm, \quad v_k^+ := \Gamma_1(x)^{-\frac{1}{p+1}} L_1 u_k^+, \quad v_k^- := \Gamma_2(x)^{-\frac{1}{p+1}} L_2 u_k^-.$$

Nach Lemma 2.7.2 (a) und (2.51) gilt dann

$$\int_{B_r(a^{(k)})} |u_k^+|^{p+1} dx + \int_{B_r(a^{(k)})} |u_k^-|^{p+1} dx + o(1) \geq \varepsilon$$

für  $k \rightarrow \infty$  und damit

$$\int_{B_r(a^{(k)})} |u_k^+|^{p+1} dx \geq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{oder} \quad \int_{B_r(a^{(k)})} |u_k^-|^{p+1} dx \geq \frac{\varepsilon}{3}$$

für hinreichend große  $k \in \mathbb{N}$ . Weiter seien

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k^\pm &:= u_k^\pm(\cdot + a^{(k)}), \\ \tilde{v}_k^+ &:= v_k^+(\cdot + a^{(k)}) = \Gamma_1(x)^{-\frac{1}{p+1}} L_1 \tilde{u}_k^+, \\ \tilde{v}_k^- &:= v_k^-(\cdot + a^{(k)}) = \Gamma_2(x)^{-\frac{1}{p+1}} L_2 \tilde{u}_k^-. \end{aligned}$$

Mit  $B := B_r(0)$  erhalten wir dann

$$\int_B |\tilde{u}_k^+|^{p+1} dx \geq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{oder} \quad \int_B |\tilde{u}_k^-|^{p+1} dx \geq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da  $a_1^{(k)} \rightarrow +\infty$ , ist  $B + a^{(k)} \subset \mathbb{R}_+^n$  für hinreichend große  $k \in \mathbb{N}$  und damit

$$\int_B |\tilde{u}_k^-|^{p+1} dx = \int_{B+a^{(k)}} |u_k^-|^{p+1} dx = 0.$$

In unserem Fall folgt also

$$\int_B |\tilde{u}_k^+|^{p+1} dx \geq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}. \quad (2.57)$$

Weil die Folgen  $(v_k)$  und damit auch  $(\tilde{v}_k)$  und  $(\tilde{v}_k^+)$  in  $L^{q+1}$  beschränkt sind, können wir entlang einer Teilfolge annehmen, dass

$$\begin{aligned} \tilde{v}_k^+ &\rightharpoonup v_0 && \text{in } L^{q+1}, \\ \tilde{u}_k^+ &\rightharpoonup u_0 && \text{in } W^{2,q+1}, \\ \tilde{u}_k^+ &\rightarrow u_0 && \text{in } L_{\text{loc}}^s \text{ für alle } s \in [q+1, (q+1)^{**}), \\ \tilde{u}_k^+(x) &\rightarrow u_0(x) && \text{fast überall in } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

wobei  $v_0 \in L^{q+1}$  und  $u_0 = L_1^{-1} [\Gamma_1(x)^{1/(p+1)} v_0] \in W^{2,q+1}$ . Nun gilt insbesondere  $\tilde{u}_k^+ \rightarrow u_0$  in  $L^{p+1}(B)$  und nach (2.57) somit  $u_0 \neq 0$ . Also ist auch  $v_0 \neq 0$ . Wenn wir nun zeigen können, dass

$$J_1'(\tilde{v}_k^+) \rightarrow 0 \quad \text{in } L_{\text{loc}}^{p+1} \quad (2.58)$$

für  $k \rightarrow \infty$ , so folgt mit denselben Argumenten wie in Fall 1

$$\begin{aligned} |\tilde{v}_k^+|^{q-1} v_k^+ &\rightharpoonup |v_0|^{q-1} v_0 = \Gamma_1(x)^{1/(p+1)} u_0 \text{ in } L^{p+1}, \\ |\tilde{v}_k^+|^{q-1} v_k^+ &\rightarrow |v_0|^{q-1} v_0 = \Gamma_1(x)^{1/(p+1)} u_0 \text{ in } L_{\text{loc}}^{p+1}. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (2.58) sei  $S$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und  $\varphi \in L^{q+1}(S)$ . Wir betrachten zunächst  $J_2'(\tilde{v}_k^-)$ . Da  $\text{supp } v_k^- \subset \mathbb{R}_-^n$  und  $a_1^{(k)} \rightarrow \infty$ , gilt  $\text{supp } v_k^- \cap (S + a^{(k)}) = \emptyset$  für  $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$  und somit

$$\int_S |\tilde{v}_k^-|^{q-1} \tilde{v}_k^- \varphi \, dx = \int_{S+a^{(k)}} |v_k^-(y)|^{q-1} v_k^-(y) \varphi(y - a^{(k)}) \, dy = 0 \quad (2.59)$$

für  $k \geq k_0$ . Weil auch  $\text{supp } u_k^- \subset \mathbb{R}_-^n$  liefert dasselbe Argument zusammen mit Bemerkung 2.5.1(b) auch

$$\begin{aligned} \int_S \varphi K \tilde{v}_k^- \, dx &= \int_S \varphi K_2 v_k^-(\cdot + a^{(k)}) \, dx \\ &= \int_{S+a^{(k)}} \varphi(y - a^{(k)}) \Gamma_2(y)^{\frac{1}{p+1}} L_2^{-1} \left[ \Gamma_2(y)^{\frac{1}{p+1}} v_k^-(y) \right] \, dy \\ &= \int_{S+a^{(k)}} \varphi(y - a^{(k)}) \Gamma_2(y)^{\frac{1}{p+1}} u_k^-(y) \, dy = 0. \end{aligned} \quad (2.60)$$

(2.59) und (2.60) liefern zusammen

$$J_2'(\tilde{v}_k^-) \varphi = 0 \text{ für alle } k \geq k_0. \quad (2.61)$$

Ist nun  $(\varphi_k)$  eine beschränkte Folge in  $L^{q+1}(\mathbb{R}^n)$ , so gilt nach Lemma 2.7.2(c):

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} J'(v_k) \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (J_1'(v_k^+) \varphi_k + J_2'(v_k^-) \varphi_k) \quad (2.62)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} (J_1'(\tilde{v}_k^+) \varphi_k(\cdot + a^{(k)}) + J_2'(v_k^-) \varphi_k(\cdot + a^{(k)})). \quad (2.63)$$

Insbesondere erhalten wir für

$$\varphi_k(x) := \begin{cases} \varphi(x - a^{(k)}), & \text{für } x \in S + a^{(k)}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

aus (2.63) dann

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} J'(v_k) \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (J_1'(\tilde{v}_k^+) \varphi + J_2'(\tilde{v}_k^-) \varphi). \quad (2.64)$$

Für  $k \rightarrow \infty$  gilt also:

$$\begin{aligned} |J_1'(\tilde{v}_k^+) \varphi| &\stackrel{(2.64)}{=} |J'(v_k) \varphi_k - J_2'(\tilde{v}_k^-) \varphi_k| + o(1) \\ &\stackrel{(2.61)}{=} |J'(v_k) \varphi_k| + o(1) \\ &\leq \|J'(v_k)\|_{p+1} \|\varphi\|_{L^{q+1}(S)} + o(1). \end{aligned}$$

Da  $J'(v_k) \rightarrow 0$  in  $L^{p+1}$  erhalten wir daraus  $J_1'(\tilde{v}_k^+) \rightarrow 0$  in  $L^{p+1}(S)$ . (2.58) ist somit bewiesen. Wie in

Fall 1 erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |\tilde{v}_k^+|^{q-1}\tilde{v}_k^+ &\rightharpoonup |v_0|^{q-1}v_0 = \Gamma_1(x)^{1/(p+1)}u_0 \text{ in } L^{p+1} && \text{ sowie} \\ |\tilde{v}_k^+|^{q-1}\tilde{v}_k^+ &\rightarrow |v_0|^{q-1}v_0 = \Gamma_1(x)^{1/(p+1)}u_0 \text{ in } L_{\text{loc}}^{p+1}, \end{aligned}$$

woraus wie in (2.56) dann  $J_1'(\tilde{v}_k^+)\varphi \rightarrow J_1'(v_0)\varphi$  für  $k \rightarrow \infty$  folgt. Insgesamt ist somit  $J_1'(v_0) = 0$ , d.h.  $v_0$  ist eine nichttriviale Lösung von

$$K_1 v = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

und liegt insbesondere in der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N_1$ . Setzen wir in (2.62) nun  $\varphi_k = v_k$  ein, so erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} (J_1'(v_k^+)v_k + J_2'(v_k^-)v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (J_1'(v_k^+)v_k^+ + J_2'(v_k^-)v_k^-) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (J_1'(\tilde{v}_k^+)\tilde{v}_k^+ + J_2'(\tilde{v}_k^-)\tilde{v}_k^-). \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.7.2(b) und erhalten wir somit

$$\begin{aligned} m &= \liminf_{k \rightarrow \infty} (J_1(\tilde{v}_k^+) + J_2(\tilde{v}_k^-)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( J_1(\tilde{v}_k^+) + J_2(\tilde{v}_k^-) - \frac{1}{2} [J_1'(\tilde{v}_k^+)\tilde{v}_k^+ + J_2'(\tilde{v}_k^-)\tilde{v}_k^-] \right) \\ &= \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}_k^+|^{q+1} dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}_k^-|^{q+1} dx \right). \end{aligned}$$

Schließlich liefert das Lemma von Fatou:

$$m \geq \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |v_0|^{q+1} dx \stackrel{v_0 \in N_1}{=} J_1(v_0) = m_1.$$

Zu Fall 3: Verglichen mit Fall 2 müssen wir nun die Rollen von  $u_k^+$  und  $u_k^-$  vertauschen, d.h. statt (2.57) gilt nunmehr

$$\int_B |\tilde{u}_k^-|^{p+1} dx \geq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für fast alle } k \in \mathbb{N}.$$

Mit denselben Argumenten und Rechnungen wie in Fall 2 erhalten wir dann  $m \geq m_2$ .  $\blacksquare$

Zum Beweis der nächsten Proposition 2.7.7 werden uns nun die Lemmata 2.7.5 und 2.7.6 führen. Zuvor bringen wir noch eine kurze Bemerkung über die Elemente des Dualraumes  $W^{-1,s} = (W^{1,s'})^*$ :

**Bemerkung 2.7.4.** Es seien  $s, s' \in (1, \infty)$  so gewählt, dass  $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ , sowie  $f \in L^s$  und  $g \in (L^s)^n$ . Wir setzen dann

$$(f + \nabla \cdot g)[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^n} (f\varphi - g \cdot \nabla \varphi) dx \quad \text{für alle } \varphi \in W^{1,s'}.$$

Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung sieht man, dass auf diese Weise durch  $f + \nabla \cdot g$  ein Funktional im Raum  $W^{-1,s}$  erklärt wird mit

$$\|f + \nabla \cdot g\|_{-1,s} \leq (\|f\|_s + \|g\|_s).$$

Für das nächste Lemma benötigen wir nun den Zusammenhang zwischen den Sobolev-Räumen

$W^{m,s}$  für  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$  und  $s \in (1, \infty)$  und den Besselpotentialräumen

$$L^{\alpha,s} := \{u \in L^s : \mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} \mathcal{F}u \in L^s\}$$

für  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $s \in (1, \infty)$ . Dabei ist  $\mathcal{F}$  die Fouriertransformation auf dem Raum  $\mathcal{S}'$  der temperierten Distributionen. Auf  $L^{\alpha,s}$  wird durch

$$\|u\|_{L^{\alpha,s}} := \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2} \mathcal{F}u\|_s$$

eine Norm erklärt. Nach [Ste86, Chapter V.3, Theorem 3] sowie [AF08, 7.63] ist  $L^{m,s} = W^{m,s}$  für  $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$  und  $s \in (1, \infty)$  und die entsprechenden Normen  $\|\cdot\|_{L^{m,s}}$  bzw.  $\|\cdot\|_{m,s}$  sind äquivalent, d.h. mit einer Konstanten  $\gamma > 0$  gilt

$$\gamma^{-1}\|u\|_{L^{m,s}} \leq \|u\|_{m,s} \leq \gamma\|u\|_{L^{m,s}} \quad (2.65)$$

**Lemma 2.7.5.** *Der Operator  $(I - \Delta)^{-1} : W^{-1,s} \rightarrow W^{1,s}$  ist stetig für alle  $s \in (1, \infty)$ . Insbesondere gilt*

$$\|u\|_{1,s} \leq c(\|\Delta u\|_{-1,s} + \|u\|_s) \quad \text{für alle } u \in W^{1,s}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ .

**BEWEIS:** Es sei  $u \in W^{1,s} = L^{1,s}$ . Dann sind  $u, \Delta u \in W^{-1,s} = L^{-1,s}$  und es gilt:

$$\begin{aligned} \|\Delta u - u\|_{L^{-1,s}} &= \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{-1/2} \mathcal{F}(-\Delta u + u)\|_s \\ &= \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{-1/2}(1 + |\xi|^2) \mathcal{F}u\|_s \\ &= \|\mathcal{F}^{-1}(1 + |\xi|^2)^{1/2} \mathcal{F}u\|_s \\ &= \|u\|_{L^{1,s}} \end{aligned}$$

und nach (2.65) somit

$$\|\Delta u - u\|_{-1,s} \geq \gamma^{-1}\|\Delta u - u\|_{L^{-1,s}} = \gamma^{-1}\|u\|_{L^{1,s}} \geq \gamma^{-2}\|u\|_{1,s}.$$

Daraus folgt die Stetigkeit von  $(I - \Delta)^{-1} : W^{-1,s} \rightarrow W^{1,s}$  und ferner

$$\|u\|_{1,s} \leq \gamma^2(\|\Delta u\|_{-1,s} + \|u\|_{-1,s}).$$

Nach Bemerkung 2.7.4 ist  $\|u\|_{-1,s} \leq \|u\|_s$  und wir erhalten die Behauptung. ■

Damit zeigen wir nun das letzte Hilfsresultat für Proposition 2.7.7:

**Lemma 2.7.6.** *Sind  $s \in (1, \infty)$  und  $\delta > 0$ , so gilt*

$$\|u\|_{W^{2,s}(S_\delta)} \leq C \left( \|\Delta u\|_{L^s(S_{3\delta})} + \|u\|_{L^s(S_{3\delta})} \right) \quad \text{für alle } u \in W^{2,s}$$

mit einer Konstanten  $C = C(\delta) > 0$ .

**BEWEIS:** Es sei  $u \in W^{2,s}$  und  $-\Delta u + u =: f$  in  $\mathbb{R}^n$  mit einer Funktion  $f \in L^s$ . Den Buchstaben  $C$  verwenden wir als ein Symbol für – möglicherweise verschiedene – von  $u$  unabhängige positive

Konstanten. Ferner sei  $\chi_1 \in C_0^\infty$  eine Abschneidefunktion mit

$$\chi_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } |x| < 2\delta, \\ 0, & \text{für } |x| > 3\delta, \end{cases} \quad \text{und} \quad |\nabla\chi_1(x)| \leq C$$

sowie  $u_1 := u\chi_1$ . Dann gilt

$$-\Delta u_1 + u_1 = (-\Delta u)\chi_1 - (\Delta\chi_1)u - 2\nabla u \cdot \nabla\chi_1 + u\chi_1 = f\chi_1 - u(\Delta\chi_1) - 2\nabla \cdot (u\nabla\chi_1).$$

Mit Lemma 2.7.5 und Bemerkung 2.7.4 folgt daraus

$$\|u\|_{W^{1,s}(S_{2\delta})} \leq C\|u_1\|_{1,s} \leq C\left(\|f\|_{L^s(S_{3\delta})} + \|u\|_{L^s(S_{3\delta})}\right) \leq C\left(\|\Delta u\|_{L^s(S_{3\delta})} + \|u\|_{L^s(S_{3\delta})}\right). \quad (2.66)$$

Ist nun  $\chi_2 \in C_0^\infty$  eine weitere Abschneidefunktion mit

$$\chi_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } |x| < \delta, \\ 0, & \text{für } |x| > 2\delta, \end{cases} \quad \text{und} \quad |\nabla\chi_2(x)| \leq C$$

sowie  $u_2 := u\chi_2$ , so erhalten wir wie oben

$$-\Delta u_2 + u_2 = (-\Delta u + u)\chi_2 - (\Delta\chi_2)u - 2\nabla u \cdot \nabla\chi_2$$

und nach (2.66) damit

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{2,s}(S_\delta)} &\leq C\|u_2\|_{2,s} \leq C\left(\|\Delta u\|_{L^s(S_{2\delta})} + \|u\|_{L^s(S_{2\delta})} + \|\nabla u\|_{L^s(S_{2\delta})}\right) \\ &\leq C\left(\|\Delta u\|_{L^s(S_{2\delta})} + \|u\|_{W^{1,s}(S_{2\delta})}\right) \\ &\leq C\left(\|\Delta u\|_{L^s(S_{3\delta})} + \|u\|_{L^s(S_{3\delta})}\right). \end{aligned}$$

■

Das letzte Zwischenresultat auf dem Weg zu Satz 2.7.1 ist nun die seit längerem angekündigte

**Proposition 2.7.7.** *Ist  $\delta > 0$ ,  $s \in [q+1, (q+1)^{**})$  und  $m < \min\{m_1, m_2\}$ , so gilt*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_{3\delta}} \int_{B_\rho(y)} |u_k|^s dx > 0 \quad \text{für alle } \rho > 0.$$

**BEWEIS:** Wir zeigen die Kontraposition von Proposition 2.7.7: dafür seien  $s_0 \in [q+1, (q+1)^{**})$ ,  $\delta \geq 0$  und  $\rho \in (0, 3\delta)$  gegeben, sodass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_{3\delta}} \int_{B_\rho(y)} |u_k|^{s_0} dx = 0$$

entlang einer Teilfolge von  $(u_k)$ . Das modifizierte *Concentration-Compactness-Lemma* von Pierre Louis Lions in der Version von Proposition 2.4.3 liefert dann

$$u_k \rightarrow 0 \text{ in } L^s(S_{3\delta}) \quad \text{für alle } s \in (q+1, (q+1)^{**}).$$

Unser Ziel ist es nun einzusehen, dass auch  $u_k \rightarrow 0$  in  $W^{2,q+1}(S_\delta)$ . Aus Proposition 2.7.3 folgt dann  $m \geq \{m_1, m_2\}$ .

Zunächst sei  $\psi_k \in W^{2,q+1}$  die Lösung von

$$L\psi_k = Lu_k - \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} \left[ v_k - \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}} |u_k|^{p-1}u_k \right] \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (2.67)$$

Da  $J'(v_k) \rightarrow 0$  in  $L^{p+1}$ , erhalten wir

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|J'(v_k)\|_{p+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| |v_k|^{q-1}v_k - Kv_k \right\|_{p+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| |v_k|^{q-1}v_k - \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} u_k \right\|_{p+1}.$$

Nach Lemma 2.2.5 (a) ist der Nemitsky-Operator  $f : L^{p+1} \rightarrow L^{q+1}$ ,  $f(u) = |u|^{p-1}u$  Lipschitzstetig auf beschränkten Teilmengen von  $L^{p+1}$ . Aufgrund der Beschränktheit der Folgen  $(v_k)$  und  $(u_k)$  finden wir somit eine Konstante  $c > 0$  mit

$$\begin{aligned} \left\| v_k - \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}} |u_k|^{p-1}u_k \right\|_{q+1} &= \left\| f(|v_k|^{q-1}v_k) - f(\Gamma(x)^{1/(p+1)}u_k) \right\|_{q+1} \\ &\leq c \left\| |v_k|^{q-1}v_k - \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}u_k \right\|_{p+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

und (2.67) liefert uns  $\psi_k \rightarrow 0$  in  $W^{2,q+1}$ .

Weiter sei  $\varphi_k \in W^{2,q+1}$  die Lösung von

$$L\varphi_k = \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (2.69)$$

Da die Folge  $(u_k)$  in  $L^s$  beschränkt ist für  $s \in [q+1, (q+1)^{**}]$ , ist die Folge  $(\varphi_k)$  beschränkt in  $W^{2,s}$  für alle  $s \in [q_1, q_3]$ , wobei  $q_1 := \max\{q(q+1), 1\} < q+1$  und  $q_3 := q(q+1)^{**}$ . Da  $q > 2^{-\#}$  ist, gilt  $q_3 > q+1 > 1$ . Wählen wir nun  $q_2 \in (q+1, q_3)$ , so gilt

$$\|\varphi_k\|_{L^{q+1}(S_{3\delta})} \leq \|\varphi_k\|_{L^{q_1}(S_{3\delta})}^\vartheta \|\varphi_k\|_{L^{q_2}(S_{3\delta})}^{1-\vartheta}, \quad \text{mit} \quad \vartheta = \frac{q_1}{q+1} \cdot \frac{q_2 - (q+1)}{q_2 - q_1} \in (0, 1). \quad (2.70)$$

Da  $\varphi_k = u_k - \psi_k$ , gilt  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $L^s(S_{3\delta})$  für alle  $s \in (q+1, (q+1)^{**})$  und damit insbesondere in  $L^{q_2}(S_{3\delta})$ . Nach (2.70) folgt dann aber  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $L^{q+1}(S_{3\delta})$  und damit aber auch

$$u_k = \varphi_k + \psi_k \rightarrow 0 \quad \text{in } L^{q+1}(S_{3\delta}).$$

Weiterhin ist  $Lu_k = \Gamma(x)^{1/(p+1)}v_k$  und damit

$$\Delta u_k = V(x)u_k - \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}v_k = V(x)u_k - \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k - \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} \left[ v_k - \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}} |u_k|^{p-1}u_k \right].$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} &\|\Delta u_k\|_{L^{q+1}(S_{3\delta})} \\ &\leq \|V\|_\infty \|u_k\|_{L^{q+1}(S_{3\delta})} + \|\Gamma\|_\infty \|u_k^p\|_{L^{q+1}(S_{3\delta})} + \|\Gamma\|_\infty^{\frac{1}{p+1}} \left\| v_k - \Gamma(x)^{\frac{p}{p+1}} |u_k|^{p-1}u_k \right\|_{L^{q+1}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Nun gilt  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^s(S_{3\delta})$  für alle  $s \in [q+1, (q+1)^{**})$ . Da  $p < 2^\#$ , gilt  $p(q+1) < (q+1)^{**}$  und damit auch  $u_k^p \rightarrow 0$  in  $L^{q+1}(S_{3\delta})$ . Mit Hilfe von (2.68) erhalten wir nun insgesamt  $\Delta u_k \rightarrow 0$  in  $L^{q+1}(S_{3\delta})$  und mit Lemma 2.7.6 folgt dann  $u_k \rightarrow 0$  in  $W^{2,q+1}(S_\delta)$ . Proposition 2.7.3 liefert uns schließlich  $m \geq \min\{m_1, m_2\}$ , was den Beweis von Proposition 2.7.7 beendet. ■

BEWEIS VON SATZ 2.7.1: Es sei  $\delta > 0$ . Nach Voraussetzung gilt  $m < \min\{m_1, m_2\}$ . Nach Proposition 2.7.7 finden wir  $\varepsilon > 0$ , sodass

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_{3\delta}} \int_{B_\rho(y)} |u_k|^{p+1} dx > \varepsilon \quad \text{für alle } \rho > 0$$

Wir finden also einen Radius  $\rho > 0$  und eine Folge  $(y^{(k)})$  in  $S_{3\delta}$ , sodass

$$\int_{B_\rho(y^{(k)})} |u_k|^{p+1} dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

entlang einer Teilfolge von  $(u_k)$ . Jetzt wählen wir Punkte  $a^{(k)} = (0, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{Z}^n$ , sodass die Folge  $(y^{(k)} - a^{(k)})$  beschränkt ist, und einen Radius

$$r > \rho + \sup_{k \in \mathbb{N}} |y^{(k)} - a^{(k)}|.$$

Dann gilt

$$\int_{B_r(a^{(k)})} |u_k|^{p+1} dx \geq \varepsilon$$

und für  $\tilde{u}_k := u_k(\cdot + a^{(k)})$  erhalten wir

$$\int_B |\tilde{u}_k|^{p+1} dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \quad (2.71)$$

mit  $B := B_r(0)$ . Weiter setzen wir  $\tilde{v}_k = \Gamma(x)^{-1/(p+1)} L\tilde{u}_k$ . Mit denselben Argumenten wie bei der Betrachtung von Fall 1 im Beweis von Proposition 2.7.3 liefert die Periodizität unserer Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$  in den Variablen  $x_2, \dots, x_n$  nun die schwache Konvergenz einer Teilfolge von  $(\tilde{u}_k)$  gegen eine Funktion  $u_0 \in W^{2,q+1}$  und die schwache und fast überall punktweise Konvergenz der entsprechenden Teilfolge von  $(\tilde{v}_k)$  gegen eine Funktion  $v_0 \in L^{q+1}$ , wobei  $u_0 = \Gamma(x)^{-1/(p+1)} |v_0|^{q-1} v_0$ . Da insbesondere  $\tilde{u}_k \rightarrow u_0$  in  $L^{p+1}(B)$ , sind  $u_0, v_0 \neq 0$  nach (2.71) und  $v_0$  ist eine nichttriviale Lösung von

$$Kv = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere liegt  $v_0$  somit in der Nehari-Mannigfaltigkeit  $N$  und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{k \rightarrow \infty} J(v_k) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( J(v_k) - \frac{1}{2} J'(v_k) v_k \right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( J(\tilde{v}_k) - \frac{1}{2} J'(\tilde{v}_k) \tilde{v}_k \right) \\
&= \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{v}_k|^{q+1} dx \\
&\stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |v_0|^{q+1} dx \stackrel{v_0 \in N}{=} J(v_0) \geq m.
\end{aligned}$$

Also ist  $J(v_0) = m$  und Satz 2.7.1 damit bewiesen. ■

## 2.8 Praktische Existenzkriterien

Das Resultat von Satz 2.7.1 ist ein abstraktes Kriterium für die Existenz von Grundzuständen. Die Schwierigkeit der Überprüfung des Kriteriums liegt darin, dass man die auftretenden Größen  $m, m_1, m_2$  in aller Regel nicht kennt. Also gilt es, daraus ein praktisch verifizierbares Kriterium zu entwickeln, das die Bedingung  $m < \min\{m_1, m_2\}$  sicherstellt.

Die folgende Proposition ist nun ein erster Schritt in diese Richtung. Sie ist das Analogon zu [DPR11, Theorem 4] aus der Arbeit von Tomáš Dohnal, Michael Plum und Wolfgang Reichel über den positiv definiten Fall. Wir erinnern dafür noch einmal daran, dass wir mit  $(-\alpha_-, \alpha_+)$  für  $\alpha_{\pm} > 0$  das maximale die 0 umfassende und in  $\rho(L)$  enthaltene Intervall bezeichnet hatten.

**Proposition 2.8.1.** *Es sei  $u_i^* \in H^2(\mathbb{R}^n)$  ein starker dualer Grundzustand der nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V_i(x)u = \Gamma_i(x)|u|^{p-1}u \text{ auf } \mathbb{R}^n \quad (2.72)$$

*mit periodischen Koeffizienten. Dann ist jede der folgenden Bedingungen (i) und (ii) hinreichend für die Existenz eines starken dualen Grundzustandes der nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \text{ auf } \mathbb{R}^n$$

*vom Grenzflächen-Typ:*

(i) *Es gilt  $m_1 \leq m_2$  sowie für hinreichend große  $t \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}
0 &> \int_{\mathbb{R}^n} (V_2(x) - V_1(x))(\alpha_- + V_2(x) - V_1(x))u_1^*(x - te_1)^2 dx \\
&\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha_- + V_2(x) - V_1(x))\Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \left( \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} \right) |u_1^*(x - te_1)|^{p+1} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x)^{\frac{2p}{p+1}} \left( \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} \right)^2 |u_1^*(x - te_1)|^{2p} dx.
\end{aligned} \quad (2.73)$$

(ii) Es gilt  $m_2 \leq m_1$  sowie für hinreichend große  $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
0 &> \int_{\mathbb{R}_+^n} (V_1(x) - V_2(x))(\alpha_- + V_1(x) - V_2(x))u_2^*(x + te_1)^2 dx \\
&\quad - 2 \int_{\mathbb{R}_+^n} (\alpha_- + V_1(x) - V_2(x))\Gamma_2(x)^{\frac{p}{p+1}} \left( \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} \right) |u_2^*(x + te_1)|^{p+1} dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma_2(x)^{\frac{2p}{p+1}} \left( \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} \right)^2 |u_2^*(x + te_1)|^{2p} dx. \tag{2.74}
\end{aligned}$$

BEWEIS: Der Beweis verläuft für die beiden Bedingungen (i) und (ii) jeweils analog. Wir behandeln deshalb nur die Bedingung (i). Im Folgenden gelte also

$$m_1 \leq m_2.$$

$v_1^* \in L^{q+1}$  sei der zu  $u_1^*$  gehörende starke Grundzustand der dualen Gleichung (2.33) mit Birmann-Schwinger-Kern  $K_1$  und  $v_t := v_1^*(\cdot - te_1)$  sowie  $u_t := u_1^*(\cdot - te_1)$ . Gemäß Proposition 2.6.4 können wir dann  $t_0 \in \mathbb{N}$  und  $s_t > 0$  so wählen, dass  $s_t v_t \in N$  für alle  $t \geq t_0$ . Nach (2.47) gilt dann

$$J(s_t v_t) = s_t^{q+1} m_1.$$

Die Behauptung von Proposition 2.8.1 folgt also, wenn wir zeigen können, dass  $s_t < 1$  für hinreichend großes  $t \in \mathbb{N}$ . Da  $v_t \in N_1$  und  $s_t v_t \in N$  gilt nun

$$\begin{aligned}
s_t^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v_t|^{q+1} dx &= s_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} v_t K v_t dx \\
&= s_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} v_t K_1 v_t dx + s_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t dx \\
&= s_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} |v_t|^{q+1} dx + s_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t dx
\end{aligned}$$

und damit

$$\left( s_t^2 - s_t^{q+1} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |v_t|^{q+1} dx + s_t^2 \int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t dx = 0 \tag{2.75}$$

Wäre nun  $s_t \geq 1$ , so folgte  $s_t^2 - s_t^{q+1} \geq 0$ , da  $q + 1 < 2$ . Notwendigerweise wäre dann

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t dx \leq 0.$$

Wenn wir also umgekehrt aus (2.73) folgern können, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t dx > 0 \quad \text{für hinreichend große } t \in \mathbb{N}, \tag{2.76}$$

so liefert (2.75) uns  $s_t < 1$  und damit die Behauptung von Proposition 2.8.1. Mit der in (2.37) erklärten Funktion  $g_t$  gilt nach Lemma 2.6.3 nun

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_t (K - K_1) v_t dx = 2 \int_{\mathbb{R}_-^n} \Gamma_1^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma |u_t|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}_-^n} \delta V u_t^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} g_t L^{-1} g_t dx,$$

wobei  $\delta V$  und  $\delta_{p+1}\Gamma$  wieder gemäß (2.41) erklärt sind. Eine hinreichende Bedingung für (2.76) ist also zunächst die Ungleichung

$$\int_{\mathbb{R}_-^n} \left[ \delta V(x) u_t^2 - 2\Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma(x) |u_t|^{p+1} \right] dx < \int_{\mathbb{R}^n} g_t L^{-1} g_t dx \quad (2.77)$$

für hinreichend große  $t \in \mathbb{N}$ . Wir „bearbeiten“ die rechte Seite von (2.77) noch etwas weiter. Dazu verwenden wir die Spektraldarstellung

$$L^{-1} = \int_{\sigma(L)} \frac{1}{\lambda} dE(\lambda)$$

von  $L^{-1}$  gemäß (2.5). Ferner bezeichne im Folgenden  $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$  das Skalarprodukt in  $L^2$ . Dann gilt für alle  $g \in L^2$ :

$$\begin{aligned} \langle g, L^{-1} g \rangle_2 &= \int_{\sigma(L)} \frac{1}{\lambda} \langle g, dE(\lambda) g \rangle_2 = \int_{\sigma(L)} \frac{1}{\lambda} \underbrace{\langle dE(\lambda) g, dE(\lambda) g \rangle_2}_{\geq 0} \\ &\geq \int_{-\infty}^{-\alpha_-} \frac{1}{\lambda} \langle dE(\lambda) g, dE(\lambda) g \rangle_2 \geq -\frac{1}{\alpha_-} \int_{-\infty}^{-\alpha_-} \langle dE(\lambda) g, dE(\lambda) g \rangle_2 \\ &\geq -\frac{1}{\alpha_-} \int_{\sigma(L)} \langle dE(\lambda) g, g \rangle_2 = -\frac{\|g\|_2}{\alpha_-}. \end{aligned}$$

Hinreichend für (2.77) ist somit

$$\int_{\mathbb{R}_-^n} \left[ \delta V(x) u_t^2 - 2\Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma(x) |u_t|^{p+1} \right] dx < -\frac{1}{\alpha_-} \int_{\mathbb{R}_-^n} g_t^2 dx. \quad (2.78)$$

Nun ist

$$g_t^2 = \Gamma_1(x)^{\frac{2p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma(x)^2 |u_t|^{2p} - 2\Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma(x) \delta V(x) |u_t|^{p+1} + \delta V(x)^2 u_t^2,$$

sodass (2.78) die Form

$$\begin{aligned} 0 &> \int_{\mathbb{R}_-^n} \left( \alpha_- \delta V(x) u_t^2 + \delta V(x)^2 u_t^2 \right) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}_-^n} 2(\alpha_- + \delta V(x)) \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma(x) |u_t|^{p+1} dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} \Gamma_1(x)^{\frac{2p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma(x)^2 |u_t|^{2p} dx \end{aligned}$$

hat. Daraus erhalten wir nun (2.73).

Die Aussage von Proposition 2.8.1 ist damit unter der Bedingung (i) bewiesen. Um sie auch unter der Bedingung (ii) zu zeigen, vertausche man in den vorangegangenen Betrachtungen die Rollen von  $V_1, V_2$  bzw.  $\Gamma_1, \Gamma_2$  und  $K_1, K_2$ . Zudem setze man  $u_t := u_2^*(\cdot + te_1)$  bzw.  $v_t := v^*(\cdot + te_1)$ , wobei

$$v_2^* := \Gamma_2(x)^{\frac{p}{p+1}} |u_2^*|^{p-1} u_2^*$$

und nehme überall dort, wo bislang über  $\mathbb{R}_-^n$  integriert wurde, das Integral nun über  $\mathbb{R}_+^n$ . ■

Im Beweis von Proposition 2.8.1 beachte man, dass die „schwächste“ dort hergeleitete Bedingung für die Existenz eines schwachen dualen Grundzustandes die Ungleichung (2.77) ist. Aus ihr ergibt sich im Falle eines positiv definiten Schrödingeroperators das bereits in der Arbeit von Tomáš Dohnal, Wolfgang Reichel und Michael Plum für starke Grundzustände bewiesene Resultat aus Satz 1.2.5 oder [DPR11, Theorem 4]:

**Korollar 2.8.2.** *Unter den Voraussetzungen (A1) und (A3) sei  $0 < \min \sigma(L)$ . Dann gilt:*

(a) *Ist  $m_1 \leq m_2$  und  $\sup_{\mathbb{R}^n_-} (V_1 - V_2) < 0$ , so besitzt (2.1) einen starken dualen Grundzustand.*

(b) *Ist  $m_2 \leq m_1$  und  $\sup_{\mathbb{R}^n_+} (V_2 - V_1) < 0$ , so besitzt (2.1) einen starken dualen Grundzustand.*

BEWEIS: Wir führen den Beweis nur für Teil (a) des Korollars aus. Für Teil (b) vertausche man die Rollen von  $V_1, V_2$  bzw.  $\Gamma_1, \Gamma_2$  und integriere entsprechend über  $\mathbb{R}^n_+$  statt  $\mathbb{R}^n_-$ . Gilt  $0 < \min \sigma(L)$ , so sind die Operatoren  $L$  und  $L^{-1}$  positiv definit, d.h.

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_t L^{-1} g_t \, dx \geq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}.$$

Hinreichend für (2.77) ist somit

$$\int_{\mathbb{R}^n_-} u_t^2 \left[ \delta V(x) - 2\Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma(x) |u_t|^{p-1} \right] \, dx < 0 \quad (2.79)$$

für hinreichend große  $t \in \mathbb{N}$ . Nach Lemma 2.6.2(a) gilt für  $t \rightarrow \infty$  nun  $|u_t(x)| \rightarrow 0$  gleichmäßig in  $x \in \mathbb{R}^n_-$ . Ist also  $\sup_{\mathbb{R}^n_-} (V_2 - V_1) < 0$ , so folgt für hinreichend große  $t$  somit

$$\delta V(x) - 2\Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma(x) |u_t(x)|^{p-1} < 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n_-$$

und damit (2.79). ■

Für die Anwendung von Proposition 2.8.1 ist nun die Kenntnis der dualen Grundzustände  $u_1^*$  und  $u_2^*$  nicht erforderlich.

**Satz 2.8.3.** *Jede der folgenden Bedingungen (i) und (ii) ist hinreichend für die Existenz eines starken dualen Grundzustandes der nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

vom Grenzflächentyp:

(i) *Es gilt  $m_1 \leq m_2$  sowie*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (V_2(x) - V_1(x))(\alpha_- + V_2(x) - V_1(x)) < 0. \quad (2.80)$$

(ii) *Es gilt  $m_2 \leq m_1$  sowie*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} (V_1(x) - V_2(x))(\alpha_- + V_1(x) - V_2(x)) < 0. \quad (2.81)$$

BEWEIS: Auch diesen Satz beweisen wir nur unter der Bedingung (i), denn unter der Bedingung (ii) kann man ganz analog argumentieren. Wie im Beweis von Korollar 2.8.2 sieht man, dass das Integral in (2.73) für große  $t \in \mathbb{N}$  negativ wird, wenn

$$\begin{aligned} \delta V(x)(\alpha_- + \delta V(x)) - 2(\alpha_- + \delta V(x))\Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1}\Gamma(x)|u_t(x)|^{p-1} \\ + \Gamma_1(x)^{\frac{2p}{p+1}} \delta\Gamma(x)^2 |u_t(x)|^{2p-2} < 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Dies folgt jedoch aus (2.80), weil  $|u_t(x)| \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gleichmässig in  $x \in \mathbb{R}^n$  nach Lemma 2.6.2(a). ■

**Bemerkung 2.8.4.**

- (a) Das Existenzkriterium von Satz 2.8.3 ist unabhängig von den Funktionen  $\Gamma, \Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ .  
 (b) Mit  $\delta V(x) = V_2(x) - V_1(x)$  sind die Ungleichungen (2.80) bzw. (2.81) in Satz 2.8.3 äquivalent zu

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( \delta V(x) + \frac{\delta V(x)^2}{\alpha_-} \right) < 0 \quad \text{bzw.} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left( -\delta V(x) + \frac{\delta V(x)^2}{\alpha_-} \right) < 0$$

Im Vergleich zum positiv definiten Fall in Korollar 2.8.2 steht unter dem Supremum also noch der Korrekturterm

$$\frac{\delta V(x)^2}{\alpha_-}.$$

Das für den indefiniten Fall gewonnene Existenzkriterium ist dadurch schwieriger zu erfüllen als im positiv definiten Fall von Korollar 2.8.2.

Im Existenzkriterium von Satz 2.8.3 tauchen immer noch die Energieniveaus  $m_1$  und  $m_2$  der Grundzustände des dualen Problems auf. Auf ihre Kenntnis können wir verzichten, wenn wir zeigen können, dass in Satz 2.8.3 beide Ungleichungen (2.80) sowie (2.81) erfüllt sind:

**Korollar 2.8.5.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.8.3 seien sowohl die Ungleichung (2.80) wie auch die Ungleichung (2.81) für hinreichend große  $t \in \mathbb{N}$  erfüllt. Dann existiert ein starker dualer Grundzustand der nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

## 2.9 Kontrastierende Koeffizienten

Das Existenzkriterium von Satz 2.8.3 wollen wir in diesem Abschnitt auf die nichtlineare Schrödingergleichung

$$-\Delta u + \tilde{V}(x)u = \tilde{\Gamma}(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{2.82}$$

anwenden, deren Koeffizienten  $\tilde{V}, \tilde{\Gamma} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} V(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ V(x) - \delta(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\Gamma}(x) = \begin{cases} \Gamma(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \mu\Gamma(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n \end{cases} \tag{2.83}$$

gegeben seien. Dabei seien  $V, \Gamma \in L^\infty$  mit  $\text{ess inf } \Gamma > 0$ ,  $\delta \in L^\infty$  eine positive Störung und  $\mu > 0$  ein Skalierungsfaktor. Unser Ziel ist es, explizite Schranken für  $\mu$  und  $\delta$  zu bestimmen, für die (2.82) einen starken dualen Grundzustand besitzt. Wir werden sehen, dass wir dafür die Störung  $\delta$  in den Potenzialen klein wählen müssen, während wir zwischen den  $\Gamma$  und  $\mu\Gamma$  durch Wahl von  $\mu$  einen großen Kontrast zu erzeugen ist. Somit werden wir am Ende in Satz 2.9.7 ein vergleichbares Resultat zu Satz 1.2.7 bzw. [DPR11, Theorem 6] erhalten.

Die zugehörigen Schrödingeroperatoren bezeichnen wir nun mit

$$\tilde{L}_\delta := -\Delta + \tilde{V}(x), \quad L := -\Delta + V(x), \quad \text{und} \quad L_\delta := L - \delta(x).$$

Wir nehmen an, dass

$$0 \notin \sigma(\tilde{L}_\delta) \supset \sigma(L) \cup \sigma(L_\delta) \quad (2.84)$$

und bezeichnen mit  $(-\tilde{\alpha}_\delta^-, \tilde{\alpha}_\delta^+) \subset \rho(\tilde{L}_\delta)$ ,  $(-\alpha^-, \alpha^+) \subset \rho(L)$  und  $(-\alpha_\delta^-, \alpha_\delta^+) \subset \rho(L_\delta)$  das maximale in der Resolventenmenge des jeweiligen Schrödingeroperators enthaltene Intervall, das die 0 enthält.  $\rho(L_\delta)$  und damit auch  $\sigma(L_\delta)$  hängen dann in folgendem Sinn stetig von der Störung  $\delta$  ab:

**Lemma 2.9.1.** *Ist  $0 < \|\delta\|_\infty < \min\{\alpha^-, \alpha^+\}$ , so gilt  $(-\alpha^- + \|\delta\|_\infty, \alpha^+ - \|\delta\|_\infty) \subset \rho(L_\delta)$ .*

**BEWEIS:** Es sei  $\lambda \in (-\alpha^- + \|\delta\|_\infty, \alpha^+ - \|\delta\|_\infty)$ . Dann gilt:

$$L_\delta - \lambda = (L - \lambda)(I - (L - \lambda)^{-1}\delta(x)). \quad (2.85)$$

Nach [RS10, Theorem VII.17] ist  $\|(L - \lambda)^{-1}\| \leq \text{dist}(\lambda, \sigma(L))^{-1}$  und damit

$$\|(L - \lambda)^{-1}\delta(x)\| \leq \|(L - \lambda)^{-1}\| \|\delta\|_\infty \leq \frac{\|\delta\|_\infty}{\text{dist}(\lambda, \sigma(L))} < 1,$$

denn nach unserer Wahl von  $\|\delta\|_\infty$  ist  $\text{dist}(\lambda, \sigma(L)) > \|\delta\|_\infty$ . Aus dem Satz von der Neumannschen Reihe, vgl. [Heu06, 12.4], und (2.85) folgt nun die stetige Invertierbarkeit von  $L_\delta - \lambda$  und damit  $\lambda \in \rho(L_\delta)$ . ■

Nach (2.84) existieren die Inversen  $L^{-1}$  und  $L_\delta^{-1}$ . Auch  $L_\delta^{-1}$  hängt stetig von  $\|\delta\|_\infty$  ab:

**Lemma 2.9.2.** *Ist  $\|\delta\|_\infty < \|L^{-1}\|^{-1}$ , so gilt  $\|L^{-1} - L_\delta^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty}{1 - \|L^{-1}\| \|\delta\|_\infty}$ .*

**BEWEIS:** Für  $A_\delta := L^{-1}(L - L_\delta) = L^{-1}\delta(x)$  erhalten wir

$$\|A_\delta\| \leq \|L^{-1}\delta(x)\| \leq \|L^{-1}\| \|\delta\|_\infty < 1, \quad (2.86)$$

wobei wir  $\delta$  zunächst als Multiplikationsoperator auf  $L^{q+1}$  und dann als Funktion in  $L^\infty$  aufgefasst haben. Ferner ist

$$L_\delta = L - (L - L_\delta) = L(I - L^{-1}(L - L_\delta)) = L(I - A_\delta).$$

Nach (2.86) und dem Satz von der Neumannschen Reihe ist  $I - A_\delta$  stetig invertierbar und wir erhalten

$$L_\delta^{-1} = (I - A_\delta)^{-1}L^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_\delta^n L^{-1} = L^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_\delta^n L^{-1}$$

und somit

$$\|L^{-1} - L_\delta^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A_\delta\|^n \|L^{-1}\| \leq \frac{\|A_\delta\| \|L^{-1}\|}{1 - \|A_\delta\|} \stackrel{(2.86)}{\leq} \frac{\|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty}{1 - \|L^{-1}\| \|\delta\|_\infty}.$$

■

Dieselben Rechnungen liefern die folgende Verschärfung von Lemma 2.9.2:

**Korollar 2.9.3.** *In der Situation von Lemma 2.9.2 gelte  $\|\delta\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|L^{-1}\|^{-1}$ . Dann folgt*

$$\|L^{-1} - L_\delta^{-1}\| \leq 2 \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty. \quad (2.87)$$

Von nun an seien  $V$ ,  $\Gamma$  und  $\delta$  periodisch. Unser Ziel ist es, explizite Schranken für  $\|\delta\|_\infty$  und  $\sigma$  anzugeben, unter denen das Existenzkriterium von Satz 2.8.3 die Existenz starker Grundzustände von (2.82) sicherstellt. Mit den Birman-Schwinger-Kernen

$$K = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L^{-1} \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} \quad \text{und} \quad K_\delta = \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}} L_\delta^{-1} \Gamma(x)^{\frac{1}{p+1}}$$

betrachten wir zu den nichtlinearen Schrödingergleichungen

$$Lu = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{bzw.} \quad L_\delta u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

mit den periodischen Koeffizienten  $V$  bzw.  $V - \delta$  und  $\Gamma$  die dualen Gleichungen

$$Kv = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.88)$$

sowie

$$K_\delta v = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (2.89)$$

Die jeweiligen Eulerfunktionale zu (2.88) bzw. (2.89) bezeichnen wir mit  $J$  bzw.  $J_\delta$ , die zugehörigen Nehari-Mannigfaltigkeiten mit  $N$  bzw.  $N_\delta$ . Die Energieniveaus für Grundzustände von (2.88) und (2.89) sind dann gegeben durch

$$m := \inf\{J(v) : v \in N\} \quad \text{und} \quad m_\delta := \inf\{J_\delta(v) : v \in N_\delta\}.$$

Nach Satz 2.5.3 besitzen (2.88) und (2.89) starke Grundzustände  $v \in N$  bzw.  $v_\delta \in N_\delta$ . Schließlich sei  $\kappa := \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2}$ . Dann ist

$$\frac{m}{\kappa} = \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} dx = \int_{\mathbb{R}^n} vKv dx \quad \text{und} \quad \frac{m_\delta}{\kappa} = \int_{\mathbb{R}^n} |v_\delta|^{q+1} dx = \int_{\mathbb{R}^n} v_\delta K_\delta v_\delta dx. \quad (2.90)$$

Auch für  $m_\delta$  ergibt sich nun eine stetige Abhängigkeit von  $\|\delta\|_\infty$ :

**Lemma 2.9.4.** *Gegeben seien die folgenden Konstanten:*

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ \frac{1}{2} \|L^{-1}\|^{-1}, \frac{1}{4\kappa} \left( \frac{m}{\kappa} \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \left( 1 + 2^{\frac{1+q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{-\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^{-2} \right\}, \quad (2.91)$$

$$C := 2^{\frac{3-q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \left( \frac{m}{\kappa} \right)^{\frac{2}{q+1}} \left( 1 + 2^{\frac{1+q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \right)^{\frac{2}{q+1}} \kappa \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2. \quad (2.92)$$

Ist dann  $\|\delta\|_\infty \leq \varepsilon_0$ , so folgt  $|m - m_\delta| \leq C\|\delta\|_\infty$ .

Für den Beweis von Lemma 2.9.4 benötigen wir die folgende Bemerkung:

**Bemerkung 2.9.5.** Sind  $a, b > 0$  und  $s, t > 1$  mit  $s - t = 1$ , so gilt

$$\frac{a^t}{(a - bt)^s} \leq a + 2^t sbx \quad \text{für alle } x \in [0, \frac{a}{2b}].$$

BEWEIS: Aus dem Mittelwertsatz erhalten wir für die Funktion

$$f : [0, \frac{a}{2b}] \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto \frac{a^t}{(a - bx)^s}$$

zunächst die Gleichung  $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$  für alle  $x \in [0, \frac{a}{2b}]$  mit einer Zwischenstelle  $\xi \in (0, x)$  und somit die Abschätzung

$$\frac{a^t}{(a - bx)^s} = f(x) = f(0) + f'(\xi)x = a + \frac{va^t b}{(a - b\xi)^{s+1}}x \leq a + 2^t sbx,$$

da  $\xi \leq \frac{a}{2b}$ . ■

BEWEIS VON LEMMA 2.9.4: Es sei  $\|\delta\|_\infty \leq \varepsilon_0$ . Aus Korollar 2.9.3 und der Stetigkeit von  $K - K_\delta$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} vK_\delta v \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} vKv \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} v(K_\delta - K)v \, dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} vKv \, dx - \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L_\delta^{-1} - L^{-1}\| \|v\|_{q+1}^2 \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} vKv \, dx - 2\|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|v\|_{q+1}^2 \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty \end{aligned}$$

und mit (2.90) somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} vK_\delta v \, dx = \frac{m}{\kappa} - 2 \left(\frac{m}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty. \quad (2.93)$$

Also können wir  $s_\delta$  wählen als positive Lösung von

$$s_\delta^{q-1} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} vK_\delta v \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} \, dx}.$$

Dann ist  $s_\delta v \in N_\delta$  und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\kappa \|v_\delta\|_{q+1}^{q+1} &\stackrel{(2.90)}{=} m_\delta \leq J_\delta(s_\delta v) = \kappa s_\delta^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} \, dx \\
&= \kappa \left( \frac{\int_{\mathbb{R}^n} v K_\delta v \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} \, dx} \right)^{\frac{q+1}{q-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} \, dx \\
&= \kappa \frac{(\int_{\mathbb{R}^n} |v|^{q+1} \, dx)^{\frac{2}{1-q}}}{(\int_{\mathbb{R}^n} v K_\delta v \, dx)^{\frac{q+1}{1-q}}} \\
&\stackrel{(2.93)}{\leq} \kappa \frac{\left(\frac{m}{\kappa}\right)^{\frac{2}{1-q}}}{\left(\frac{m}{\kappa} - 2 \left(\frac{m}{\kappa}\right)^{2/(q+1)} \|\Gamma\|_\infty^{2/(p+1)} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty\right)^{\frac{q+1}{1-q}}}. \tag{2.94}
\end{aligned}$$

Zur weiteren Abschätzung von (2.94) verwenden wir nun Bemerkung 2.9.5 mit

$$a = \frac{m}{\kappa} \quad \text{und} \quad b = 2 \left(\frac{m}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2$$

sowie  $\mu = \frac{2}{1-q}$ ,  $\nu = \frac{q+1}{1-q}$  und  $t = \|\delta\|_\infty$ . Nach (2.91) ist dann  $\|\delta\|_\infty = t \leq \frac{a}{2b}$ . Wir erhalten also:

$$\kappa \|v_\delta\|_{q+1}^{q+1} = m_\delta \leq m + 2 \frac{3-q}{1-q} \frac{q+1}{1-q} \left(\frac{m}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \kappa \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty \tag{2.95}$$

$$\stackrel{(2.91)}{\leq} m \left(1 + 2 \frac{1+q}{1-q} \frac{q+1}{1-q}\right) =: M. \tag{2.96}$$

Wie bei (2.93) erhalten wir aus der Stetigkeit von  $K - K_\delta$  und Korollar 2.9.3 weiterhin

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} v_\delta K v_\delta \, dx &\geq \int_{\mathbb{R}^n} v_\delta K_\delta v_\delta \, dx - \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1} - L_\delta^{-1}\| \|v_\delta\|_{q+1}^2 \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} v_\delta K_\delta v_\delta \, dx - 2 \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|v_\delta\|_{q+1}^2 \|\delta\|_\infty \\
&\stackrel{(2.90)}{=} \frac{m_\delta}{\kappa} - 2 \left(\frac{m_\delta}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty. \tag{2.97}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.96) folgt daraus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} v_\delta K v_\delta \, dx &= \frac{m_\delta}{\kappa} \left(1 - 2 \left(\frac{m_\delta}{\kappa}\right)^{\frac{1-q}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty\right) \\
&\stackrel{(2.96)}{\geq} \frac{m_\delta}{\kappa} \left(1 - 2 \left(\frac{M}{\kappa}\right)^{\frac{1-q}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty\right) \\
&= \frac{m_\delta}{\kappa} \left(1 - 2 \left(\frac{m}{\kappa}\right)^{\frac{1-q}{q+1}} \left(1 + 2 \frac{1+q}{1-q} \frac{q+1}{\kappa(1-q)}\right)^{\frac{1-q}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty\right) \stackrel{(2.91)}{>} 0.
\end{aligned}$$

Somit können wir  $r_\delta$  als die positive Lösung von

$$r_\delta^{q-1} = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} v_\delta K v_\delta \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} |v_\delta|^{q+1} \, dx}$$

wählen und erhalten dann wie in (2.94):

$$\begin{aligned} m &\leq J(r_\delta v_\delta) = \kappa r_\delta^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} |v_\delta|^{q+1} \, dx \\ &\leq \kappa \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_\delta|^{q+1} \, dx\right)^{\frac{2}{1-q}}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} v_\delta K v_\delta \, dx\right)^{\frac{q+1}{1-q}}} \\ &\stackrel{(2.97)}{\leq} \kappa \frac{\left(\frac{m_\delta}{\kappa}\right)^{\frac{2}{1-q}}}{\left(\frac{m_\delta}{\kappa} - 2 \left(\frac{m_\delta}{\kappa}\right)^{2/q+1} \|\Gamma\|_\infty^{2/(p+1)} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty\right)^{\frac{q+1}{1-q}}}. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir wieder Bemerkung 2.9.5, dieses Mal mit

$$a = \frac{m_\delta}{\kappa}, \quad \text{und} \quad b = 2 \left(\frac{m_\delta}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2.$$

Nach (2.91) gilt wiederum  $t = \|\delta\|_\infty \leq \frac{a}{2b}$  und es folgt

$$\begin{aligned} m &\leq m_\delta + 2^{\frac{3-q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \left(\frac{m_\delta}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \kappa \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty \\ &\stackrel{(2.96)}{\leq} m_\delta + 2^{\frac{3-q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \left(\frac{M}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \kappa \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Aus den Ungleichungen (2.95) und (2.98) erhalten wir nun zusammen

$$|m - m_\delta| \leq 2^{\frac{3-q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \left(\frac{\max\{m, M\}}{\kappa}\right)^{\frac{2}{q+1}} \kappa \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2 \|\delta\|_\infty.$$

Nach (2.96) ist nun  $\max\{m, M\} = M$  und die Behauptung von Lemma 2.9.4 folgt.  $\blacksquare$

Bisher haben wir die Auswirkungen der Störung des Potentials auf die nichtlineare Schrödinger-Gleichung

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.99)$$

studiert. Als nächstes untersuchen wir nun, welche Folgen die Einführung des Skalierungsparameters  $\mu$  auf der rechten Seite von (2.99) hat. Dafür betrachten wir die dualen Gleichungen

$$Kv = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.100)$$

sowie

$$K^\mu v = |v|^{q-1}v \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad (2.101)$$

wobei  $K = \Gamma(x)^{1/(p+1)} L^{-1} \Gamma(x)^{1/(p+1)}$  und  $K^\mu = \mu^{2/(p+1)} K$ . Die zu (2.100) und (2.101) gehörenden Eulerfunktionale bezeichnen wir mit  $J$  bzw.  $J^\mu$ , die entsprechenden Nehari-Mannigfaltigkeiten mit

$N$  bzw.  $N^\mu$  und die jeweiligen Grundzustandsniveaus mit  $m$  bzw.  $m^\mu$ .

**Lemma 2.9.6.** Es sei  $v \in L^{q+1}$ ,  $\gamma := \frac{2}{(p+1)(1-q)}$  und  $v^\mu \in L^{q+1}$  gegeben durch

$$v^\mu(x) = \mu^{-\gamma} v(x).$$

Dann gilt:

(a)  $v$  ist genau dann eine Lösung von (2.100), wenn  $v^\mu$  eine Lösung von (2.101) ist. In diesem Fall gilt

$$J^\mu(v^\mu) = \mu^{-(q+1)\gamma} J(v).$$

(b)  $v$  ist genau dann ein starker Grundzustand von (2.100), wenn  $v^\mu$  ein starker Grundzustand von (2.101) ist. Insbesondere gilt

$$m^\mu = \mu^{-(q+1)\gamma} m.$$

**BEWEIS:** Zu (a). Ist  $v$  eine Lösung von (2.100), so erhalten wir:

$$\begin{aligned} K^\mu v^\mu &= K^\mu(\mu^{-\gamma} v) = \mu^{-\gamma} \mu^{\frac{2}{p+1}} K v = \mu^{-\gamma + \frac{2}{p+1}} |v|^{q-1} v = \mu^{-\gamma + \frac{2}{p+1} + q\gamma} |\mu^{-\gamma} v|^{q-1} \mu^{-\gamma} v \\ &= |v^\mu|^{q-1} v^\mu. \end{aligned}$$

Also ist  $v^\mu$  eine Lösung von (2.101). Insbesondere ist  $v^\mu \in N^\mu$  und damit

$$J^\mu(v^\mu) = \left( \frac{1}{q+1} - \frac{1}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |v^\mu|^{q+1} dx = \mu^{-(q+1)\gamma} J(v).$$

Zu (b). Nun sei  $v$  ein starker Grundzustand von (2.100). Nach Teil (a) ist  $v^\mu$  dann eine Lösung von (2.101) und damit  $v^\mu \in N^\mu$ . Wäre  $v^\mu$  kein starker Grundzustand von (2.101), so fänden wir  $w^\mu \in N^\mu$  mit  $J^\mu(w^\mu) < J^\mu(v^\mu)$ . Wie in Teil (a) erhielten wir dann, dass  $w := \mu^\gamma w^\mu$  eine Lösung von (2.100) wäre und damit

$$J(w) = \mu^{\gamma(q+1)} J^\mu(w^\mu) < \mu^{\gamma(q+1)} J^\mu(v^\mu) = J(v).$$

Also wäre  $v$  kein starker Grundzustand von (2.101), ein Widerspruch! Somit ist  $v^\mu$  ein starker Grundzustand von (2.101). Aus Teil (a) ergibt sich nun ferner der behauptete Zusammenhang zwischen  $m$  und  $m^\mu$ . ■

Als Ergebnis dieses Abschnitts folgt nun der folgende Satz:

**Satz 2.9.7.** Die Funktionen  $V, \Gamma, \delta \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  seien periodisch. Es gelte (2.84) sowie  $\text{ess inf}_{\mathbb{R}^n} \Gamma > 0$ . Die Konstanten  $\varepsilon_0$  und  $C$  seien gemäß Lemma 2.9.4 gegeben durch

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &:= \min \left\{ \frac{1}{2} \|L^{-1}\|^{-1}, \frac{1}{4\kappa} \left( \frac{m}{\kappa} \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \left( 1 + 2^{\frac{1+q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \|\Gamma\|_\infty^{-\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^{-2} \right\}, \\ C &:= 2^{\frac{3-q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \left( \frac{m}{\kappa} \right)^{\frac{2}{q+1}} \left( 1 + 2^{\frac{1+q}{1-q}} \frac{q+1}{1-q} \right)^{\frac{2}{q+1}} \kappa \|\Gamma\|_\infty^{\frac{2}{p+1}} \|L^{-1}\|^2. \end{aligned}$$

Ferner sei  $\gamma := \frac{2}{(p+1)(1-q)}$ . Ist dann  $\mu \in (0, 1)$  und gilt

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \delta(x) > 0, \quad \text{sowie} \quad \|\delta\|_\infty < \min \left\{ \varepsilon_0, \frac{\alpha^-}{2}, \frac{(1 - \mu^{\gamma(q+1)})m}{C} \right\}, \quad (2.102)$$

so besitzt die nichtlineare Schrödingergleichung (2.82) einen starken dualen Grundzustand.

**BEWEIS:** Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. Schritt: Die Funktion  $\tilde{\delta} \in L^\infty$  sei gegeben durch

$$\tilde{\delta}(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}_+^n, \\ \delta(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}_-^n. \end{cases}$$

Dann ist  $\tilde{L}_\delta = -\Delta + \tilde{V}(x) = L - \tilde{\delta}(x)$ . Auf  $\tilde{L}_\delta$  wenden wir nun Lemma 2.9.1 an und erhalten  $(-\frac{\alpha^-}{2}, 0) \in \rho(\tilde{L}_\delta)$ . Insbesondere ist  $\tilde{\alpha}_\delta^- > \frac{\alpha^-}{2} > \|\delta\|_\infty$  und damit  $\tilde{\alpha}_\delta^- - \delta(x) > 0$ . Da  $\inf \delta > 0$  folgt hieraus

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ -\delta(x)(\tilde{\alpha}_\delta^- - \delta(x)) \} < 0. \quad (2.103)$$

2. Schritt: Mit  $m_\delta^\mu$  bezeichnen wir nun das Energieniveau dualer Grundzustände der nichtlinearen Schrödingergleichung

$$L_\delta = \mu\Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

mit den periodischen Koeffizienten  $V - \delta$  und  $\mu\Gamma$ . Nach Satz 2.8.3 und (2.103) bleibt zu zeigen, dass  $m \leq m_\delta^\mu$ . Nach Lemma 2.9.6 (b) ist

$$m - m_\delta^\mu = m - m^\mu + m^\mu - m_\delta^\mu = (1 - \mu^{-\gamma(q+1)})m + \mu^{-\gamma(q+1)}(m - m_\delta).$$

Nach Lemma 2.9.4 ist somit

$$m - m_\delta^\mu \leq (1 - \mu^{-\gamma(q+1)})m + \mu^{-\gamma(q+1)}|m - m_\delta| \leq (1 - \mu^{-\gamma(q+1)})m + \mu^{-\gamma(q+1)}C\|\delta\|_\infty.$$

Nach (2.102) gilt nun  $\mu^{-\gamma(q+1)}C\|\delta\|_\infty < (\mu^{-\gamma(q+1)} - 1)m$ . Daraus folgt schließlich  $m \leq m_\delta^\mu$ . ■

## Kapitel 3

# Duale Grundzustände in einer Dimension

In diesem Kapitel wollen wir die bislang gewonnenen Ergebnisse auf die nichtlineare Schrödinger-Gleichung in einer Dimension

$$-u'' + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad (3.1)$$

anwenden und in [DPR11] gewonnene Ergebnisse für starke Grundzustände eindimensionaler Grenzflächenprobleme mit positiv definiten Schrödingeroperatoren auf unsere im vorangegangenen Kapitel entwickelte Theorie starker dualer Grundzustände bei indefiniten Schrödingeroperatoren verallgemeinern.

Im eindimensionalen Fall lässt sich das Existenzkriterium von Satz 2.8.1 mit Hilfe der Blochmoden des Schrödingeroperators  $-\Delta + V(x)$  weiter vereinfachen. Dazu benötigen wir zunächst einige Kenntnis über die lineare Schrödinger-Gleichung in einer Dimension.

### 3.1 Blochmoden und die lineare Schrödinger-Gleichung

Es sei  $V \in L^\infty(\mathbb{R})$  ein 1-periodisches Potential,

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

der zugehörige Schrödingeroperator auf  $H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$  und es gelte

$$0 \notin \sigma(L).$$

Nach [Eas73, Theorem 1.1.2] gilt dann:

**Satz & Definition 3.1.1 (Blochmoden).**

(a) Die homogene lineare Schrödinger-Gleichung

$$-u'' + V(x)u = 0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad (3.2)$$

besitzt zwei linear unabhängige Lösungen  $u_+$  und  $u_-$  von der Form

$$u_{\pm}(x) = \mathbf{p}_{\pm}(x)e^{\mp \kappa x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Dabei ist  $\kappa > 0$  und die Funktionen  $\mathbf{p}_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind 1-periodisch und beschränkt mit  $\|\mathbf{p}_{\pm}\|_{\infty} = 1$ .

(b) Die Funktionen  $u_{\pm}$  heißen die Blochmoden von  $L$ .

(c) Die Wronski-Determinante

$$\omega := \det \begin{pmatrix} u_+ & u_- \\ u'_+ & u'_- \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

der Blochmoden von  $L$  ist eine von 0 verschiedene Konstante.

Im Folgenden untersuchen wir nun die inhomogene lineare Schrödingergleichung

$$\begin{cases} -u'' + V(x)u = f(x) & \text{auf } \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Dabei genüge die messbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Abschätzung

$$|f(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

mit einer Konstanten  $\varepsilon > 0$ . Den Buchstaben  $C$  verwenden wir in diesem Abschnitt stets als ein Symbol für (möglicherweise unterschiedliche) positive und von  $x \in \mathbb{R}$  unabhängige Konstanten.

**Lemma 3.1.2.** Die Inhomogenität  $f$  genüge der Abschätzung (3.6) für ein  $\varepsilon > 0$ . Ferner sei  $u$  eine Lösung der linearen inhomogenen Schrödingergleichung (3.5). Dann gilt:

(a)  $u$  besitzt die Darstellung

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \left( \int_{-\infty}^x u_-(s)f(s) ds \right) u_+(x) + \frac{1}{\omega} \left( \int_x^{\infty} u_+(s)f(s) ds \right) u_-(x). \quad (3.7)$$

(b) Ist  $0 < \nu < \min\{\varepsilon, \kappa\}$ , so existiert eine Konstante  $C_{\nu} > 0$  mit

$$|u(x)| \leq C_{\nu} e^{-\nu|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

(c) Ist  $\varepsilon \neq \kappa$ , so gilt (3.8) mit  $\nu = \min\{\varepsilon, \kappa\}$ .

Dem Beweis von Lemma 3.1.2 schicken wir eine kurze Bemerkung voraus:

**Bemerkung 3.1.3.** Genügt eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Abschätzung

$$|f(x)| \leq |x|e^{-a_0|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

für ein  $a_0 > 0$ , so gibt es zu jedem  $a \in (0, a_0)$  eine Konstante  $C_a > 0$ , sodass

$$|f(x)| \leq C_a e^{-a|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS VON LEMMA 3.1.2:

Zu (a). Die behauptete Darstellungsformel (3.7) für  $u$  ergibt sich aus der Formel von der Variation der Konstanten, vgl. dafür [Wal00, §19, VII.]. Man beachte hierfür, dass die Integrale in (3.7) existieren; z. B. erhalten wir für  $a < x < 0$ :

$$\left| \int_a^x u_-(s) f(s) ds \right| \leq C \int_a^x e^{(\kappa+\varepsilon)s} ds = \frac{C}{\kappa+\varepsilon} \left( e^{(\kappa+\varepsilon)x} - e^{(\kappa+\varepsilon)a} \right) \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} \frac{C}{\kappa+\varepsilon} e^{(\kappa+\varepsilon)x}. \quad (3.9)$$

Die Existenz des anderen Integrals zeigt man analog.

Zu (b) und (c). Der Beweis der Abschätzung (3.8) ist nun eine längere Fallunterscheidung:

Fall 1.1:  $\varepsilon > \kappa$  und  $x < 0$ . Dann ist zunächst

$$\left| \left( \int_{-\infty}^x u_-(s) f(s) ds \right) u_+(x) \right| \leq C e^{-\kappa x} \int_{-\infty}^x e^{(\varepsilon+\kappa)s} ds = \frac{C}{\varepsilon+\kappa} e^{\varepsilon x} \stackrel{x < 0}{<} \frac{C}{\varepsilon+\kappa} e^{\kappa x}.$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| &\leq C e^{\kappa x} \int_x^0 e^{(\varepsilon-\kappa)s} ds + C e^{\kappa x} \int_0^{\infty} e^{-(\varepsilon+\kappa)s} ds \\ &= e^{\kappa x} \left( \frac{C}{\varepsilon-\kappa} + \frac{C}{\varepsilon+\kappa} \right) - \underbrace{\frac{C}{\varepsilon-\kappa} e^{\varepsilon x}}_{>0} < \frac{2C\varepsilon}{\varepsilon^2 - \kappa^2} e^{\kappa x}. \end{aligned}$$

Fall 1.2:  $\varepsilon > \kappa$  und  $x > 0$ . Dann gilt für den ersten Summanden

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_{-\infty}^x u_-(s) f(s) ds \right) u_+(x) \right| &\leq C e^{-\kappa x} \int_{-\infty}^0 e^{(\kappa+\varepsilon)s} ds + C e^{-\kappa x} \int_0^x e^{(\kappa-\varepsilon)s} ds \\ &= \left( \frac{C}{\varepsilon+\kappa} + \frac{C}{\varepsilon-\kappa} \right) e^{-\kappa x} - \underbrace{\frac{C}{\varepsilon-\kappa} e^{-\varepsilon x}}_{>0} < \frac{2C\varepsilon}{\varepsilon^2 - \kappa^2} e^{-\kappa x} \end{aligned}$$

und für den zweiten Summanden ergibt sich

$$\left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| \leq C e^{\kappa x} \int_x^{\infty} e^{-(\varepsilon+\kappa)s} ds = \frac{C}{\varepsilon+\kappa} e^{-\varepsilon x} \stackrel{x > 0}{<} \frac{C}{\varepsilon+\kappa} e^{-\kappa x}$$

Fall 2.1:  $\kappa > \varepsilon$  und  $x < 0$ . Wie in Fall 1.1 erhalten wir nun

$$\left| \left( \int_{-\infty}^x u_-(s) f(s) ds \right) u_+(x) \right| \leq \frac{C}{\kappa+\varepsilon} e^{\varepsilon x}$$

sowie

$$\left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| \leq \frac{C}{\kappa-\varepsilon} e^{\varepsilon x} - \underbrace{\frac{2C\varepsilon}{\kappa^2 - \varepsilon^2} e^{\kappa x}}_{>0} < \frac{C}{\kappa-\varepsilon} e^{\varepsilon x}.$$

Fall 2.2:  $\kappa > \varepsilon$  und  $x > 0$ . Mit den Rechnungen aus Fall 1.2 folgt

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_{-\infty}^x u_-(s) f(s) ds \right) u_+(x) \right| &\leq \left( \frac{C}{\kappa + \varepsilon} - \frac{C}{\kappa - \varepsilon} \right) e^{-\kappa x} + \frac{C}{\kappa - \varepsilon} e^{-\varepsilon x} \\ &= - \underbrace{\frac{2C\varepsilon}{\kappa^2 - \varepsilon^2}}_{>0} e^{-\kappa x} + \frac{C}{\kappa - \varepsilon} e^{-\varepsilon x} < \frac{C}{\kappa - \varepsilon} e^{-\varepsilon x}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden hatten wir in Fall 1.2 schon gezeigt, dass

$$\left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon + \kappa} e^{-\varepsilon x}.$$

Fall 3.1:  $\varepsilon = \kappa$  und  $x < 0$ . Nun sei  $v \in (0, \kappa)$ . Wiederum folgt zunächst wie in Fall 1.1

$$\left| \left( \int_{-\infty}^x u_-(s) f(s) ds \right) u_+(x) \right| \leq \frac{C}{\kappa + \varepsilon} e^{-\kappa|x|} \leq \frac{C}{\kappa + \varepsilon} e^{-v|x|}$$

Weiterhin gilt nun

$$\begin{aligned} \left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| &\leq C e^{\kappa x} \int_x^0 e^0 dx + C e^{\kappa x} \int_0^{\infty} e^{-2\kappa s} ds \\ &= C|x| e^{-\kappa|x|} + \frac{C}{2\kappa} e^{-\kappa|x|} \end{aligned}$$

und nach Bemerkung 3.1.3 finden wir eine Konstante  $C_\nu > 0$ , sodass

$$C|x| e^{-\kappa|x|} \leq C_\nu e^{-v|x|}$$

und erhalten somit

$$\left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| \leq \left( C_\nu + \frac{C}{2\kappa} \right) e^{-v|x|}.$$

Fall 3.2:  $\varepsilon = \kappa$ ,  $x > 0$ . Nun erhalten wir

$$\left| \left( \int_{-\infty}^x u_-(s) f(s) ds \right) u_+(x) \right| \leq C e^{-\kappa x} \int_{-\infty}^0 e^{2\kappa s} ds + C e^{-\kappa x} \int_0^x e^0 dx = \frac{C}{2\kappa} e^{-\kappa x} + C x e^{-\kappa x}.$$

Für  $v \in (0, \kappa)$  erhalten wir nun wie in Fall 3.1 mit Hilfe von Bemerkung 3.1.3 eine Konstante  $C_\nu > 0$ , sodass

$$\left| \left( \int_{-\infty}^x u_-(s) f(s) ds \right) u_+(x) \right| \leq \left( \frac{C}{2\kappa} + C_\nu \right) e^{-v x}.$$

Wie in Fall 1.2 gilt schließlich

$$\left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| \leq \frac{C}{2\kappa} e^{-\kappa x} \leq \frac{C}{2\kappa} e^{-v x}$$

und Lemma 3.1.2 ist vollständig bewiesen. ■

Die asymptotische Darstellung (3.10) in der nun folgenden Proposition für die Lösung der inhomogenen linearen Schrödingergleichung (3.5) findet sich im positiv definiten Fall bereits in der Arbeit von Tomáš Dohnal, Michael Plum und Wolfgang Reichel, siehe [DPR11, Lemma 17]:

**Proposition 3.1.4.** *Ist  $\varepsilon > \kappa$  und  $u$  eine Lösung der inhomogenen linearen Schrödingergleichung (3.5), so gilt*

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \left( \int_{-\infty}^{\infty} u_{\mp}(s) f(s) ds \right) u_{\pm}(x) + \mathcal{O}(e^{\mp \varepsilon x}) \quad \text{für } x \rightarrow \pm \infty. \quad (3.10)$$

**BEWEIS:** Wir beweisen nur die Aussage für  $x \rightarrow +\infty$ . Für  $x \rightarrow -\infty$  argumentiert man analog. Da  $\varepsilon > \kappa$ , erhalten wir zunächst für  $b > 0$ :

$$\left| \int_0^b u_-(s) f(s) ds \right| \leq C \int_0^b e^{-(\varepsilon-\kappa)s} ds = -\frac{C}{\varepsilon-\kappa} e^{-(\varepsilon-\kappa)b} + \frac{C}{\varepsilon-\kappa} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \frac{C}{\varepsilon-\kappa}.$$

Zusammen mit (3.9) folgt somit die Existenz des Integrals auf der rechten Seite von (3.10). Ohne Einschränkung sei nun  $x > 0$ . Mit  $\|p_-\|_{\infty} = 1$  folgt dann

$$\left| \left( \int_x^{\infty} u_+(s) f(s) ds \right) u_-(x) \right| \leq C e^{\kappa x} \int_x^{\infty} e^{-(\varepsilon+\kappa)s} ds = \frac{C}{\varepsilon+\kappa} e^{-\varepsilon x}$$

und wir erhalten die Behauptung aus der Lösungsformel (3.7). ■

## 3.2 Ein allgemeines Existenzresultat für den Grenzflächenfall

Wir kehren nun zur nichtlinearen Schrödingergleichung

$$-u'' + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

vom Grenzflächentyp zurück, deren Koeffizienten  $V, \Gamma \in L^{\infty}(\mathbb{R})$  nun wieder gemäß (2.2) gegeben seien. Den zugehörigen Schrödingeroperator

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

vom Grenzflächentyp und die zu den periodischen Potenzialen  $V_1$  und  $V_2$  gehörenden Operatoren

$$L_i := -\frac{d^2}{dx^2} + V_i(x),$$

betrachten wir auf  $H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ . Mit  $m$  bezeichnen wir das Energieniveau starker dualer Grundzustände von (3.1), mit  $m_i$  das Energieniveau starker dualer Grundzustände der entsprechenden nichtlinearen Schrödingergleichung mit den periodischen Koeffizienten  $V_i$  und  $\Gamma_i$  für  $i = 1, 2$ . Es gelten die Voraussetzungen (H1) bis (H3). Man beachte, dass in einer Raumdimension durch (H3) keine obere Schranke für den Exponenten  $p$  in (3.1) gefordert wird, d.h. wir lassen  $p \in (1, \infty)$  zu.

Mit  $(-\alpha_-, \alpha_+)$  bezeichnen wir wieder das maximale in  $\rho(L)$  enthaltene Intervall, das die 0 umfasst. Wir betrachten zunächst den Fall

$$m_1 \leq m_2.$$

Die Bloch-Moden  $u_{\pm}$  des Operators  $L_1$  schreiben wir gemäß (3.3) in der Form

$$u_{\pm}(x) = p_{\pm}(x)e^{\mp\kappa x},$$

mit  $\kappa > 0$  und 1-periodischen, beschränkten Funktionen  $p_{\pm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $\|p_{\pm}\|_{\infty} = 1$  normiert seien. Mit  $\omega \neq 0$  bezeichnen wir wie in (3.4) die zu den Bloch-Moden  $u_{\pm}$  gehörende Wronski-Determinante.

Die folgenden beiden Lemmata sind nun die Analoga zu den Lemmata 18 und 19 aus [DPR11].

**Lemma 3.2.1.** *Unter den Annahmen (A1)-(A3) sei  $u \in H^1(\mathbb{R})$  eine Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung mit periodischen Koeffizienten*

$$\begin{cases} -u'' + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u & \text{auf } \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Weiterhin setzen wir

$$d_{\pm}(u) := \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(s)|u|^{p-1}uu_{\mp} ds.$$

Dann existiert  $\delta > \kappa$  mit

$$u(x) = d_{\pm}(u)u_{\pm}(x) + \mathcal{O}(e^{\mp\delta x}) \quad \text{für } x \rightarrow \pm\infty.$$

BEWEIS: Nach Satz 1.2.2 existiert  $\alpha > 0$ , sodass

$$|u(x)| \leq Ce^{-\alpha|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun  $f(x) := \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u$ , so löst  $u$  die inhomogene lineare Schrödingergleichung

$$\begin{cases} -u'' + V_1(x)u = f(x) & \text{auf } \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases}$$

Ferner gilt  $|f(x)| \leq Ce^{-p\alpha|x|}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wir unterscheiden die folgenden drei Fälle:

*Fall 1:*  $p\alpha > \kappa$ . Aus Lemma 3.1.2(c) erhalten wir dann  $|u(x)| \leq Ce^{-\kappa|x|}$  und somit ferner  $|f(x)| \leq Ce^{-p\kappa|x|}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Da  $p > 1$ , ist  $p\kappa > \kappa$  und Proposition 3.1.4 liefert

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_1(s)|u|^{p-1}uu_- ds \right) u_+(x) + \mathcal{O}(e^{-p\kappa x}) \quad \text{für } x \rightarrow +\infty.$$

Die Behauptung folgt also mit  $\delta = p\kappa$ .

*Fall 2:*  $p\alpha = \kappa$ . Wir wählen  $\nu_0 \in (\frac{\kappa}{p^2}, \frac{\kappa}{p})$ . Insbesondere gilt also  $\nu_0 < \kappa$  und aus Lemma 3.1.2(c) folgt  $|u(x)| \leq Ce^{-\nu_0|x|}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Weiter erhalten wir somit  $|f(x)| \leq Ce^{-p\nu_0|x|}$ , und weil  $p\nu_0 < \kappa$  ist, liefert Lemma 3.1.2(c) dann  $|u(x)| \leq Ce^{-p\nu_0|x|}$ . Dann ist aber

$$|f(x)| \leq Ce^{-p^2\nu_0|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

und  $p^2\nu_0 > \kappa$  nach Wahl von  $\nu_0$ , sodass wir nun wie im ersten Fall mit Hilfe von Proposition 3.1.4 mit  $\delta = p^2\nu_0$  die Behauptung erhalten.

Fall 3:  $p\alpha < \kappa$ . Nun verwenden wir ein „Bootstrap“-Verfahren: nach Lemma 3.1.2(c) gilt zunächst  $|u(x)| \leq Ce^{-p\alpha|x|}$  und für  $f$  erhalten wir somit  $|f(x)| \leq Ce^{-p^2\alpha|x|}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Ist nun  $p^2\alpha > \kappa$ , so folgt die Behauptung wie in Fall 1. Für  $p^2\alpha = \kappa$  folgt sie wie in Fall 2.

Ist dagegen  $p^2\alpha < \kappa$ , so liefert Lemma 3.1.2(c) nun  $|u(x)| \leq Ce^{-p^2\alpha|x|}$  und für  $f$  dann  $|f(x)| \leq Ce^{-p^3\alpha|x|}$ . Durch Iteration finden wir für  $j \in \mathbb{N}$  also die Abschätzung

$$|f(x)| \leq Ce^{-p^j\alpha|x|} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

solange  $p^{j-1}\alpha < \kappa$ . Da  $p > 1$ , gilt  $p^j \rightarrow \infty$  für  $j \rightarrow \infty$ . Wir setzen  $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N} : p^j\alpha \geq \kappa\}$  und  $p_0 := p^{j_0}$ . Für  $p_0\alpha > \kappa$  folgt die Behauptung wie in Fall 1. Ist dagegen  $p_0\alpha = \kappa$ , so folgt die Behauptung wie in Fall 2 mit  $\nu_0 \in (\frac{\kappa}{p_0^2}, \frac{\kappa}{p_0})$ . ■

**Lemma 3.2.2.** *Es sei  $u$  eine Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-u'' + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

mit periodischen Koeffizienten. Ferner sei  $r \in [2, \infty)$ ,  $t \in \mathbb{N}$  und  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare, beschränkte, 1-periodische Funktion. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^0 h(x)|u(x-t)|^r dx = e^{-r\kappa t} \left( \frac{|d_-(u)|^r}{1 - e^{-r\kappa}} \int_{-1}^0 h(x)|p_-(x)|^r e^{r\kappa x} dx + o(1) \right) \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

BEWEIS: Für alle  $x \leq 0$  und  $t \rightarrow \infty$  gilt nach Lemma 3.2.1

$$u(x-t) = d_-(u)u_-(x-t) + \mathcal{O}(e^{\delta(x-t)})$$

mit  $\delta > \kappa$ . Da  $r \geq 2$ , liefert uns eine Taylorentwicklung für alle  $a \in \mathbb{R}$  ferner die Asymptotik

$$|a+b|^r = |a|^r + r|a|^{r-2}ab(1 + o(1)) \quad \text{für } b \rightarrow 0.$$

Wir erhalten also

$$|u(x-t)|^r = \left| d_-(u)u_-(x-t) + \mathcal{O}(e^{\delta(x-t)}) \right|^r = |d_-(u)u_-(x-t)|^r + E(x-t),$$

für alle  $x \leq 0$  und alle  $t \in \mathbb{N}$ . Dabei gilt

$$E(x-t) = \mathcal{O}(e^{\delta_1(x-t)}) \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

mit  $\delta_1 = (r-1)\kappa + \delta = r\kappa + \delta_0$ , wobei wir  $\delta_0 := \delta - \kappa > 0$  gesetzt haben. Nun ist

$$\int_{-\infty}^0 h(x)|u(x-t)|^r dx = |d_-(u)|^r \int_{-\infty}^0 h(x-t)|u_-(x-t)|^r dx + \int_{-\infty}^0 h(x-t)E(x-t) dx \quad (3.12)$$

Wir betrachten die beiden Integrale auf der rechten Seite von (3.12) getrennt. Zunächst gilt

$$\int_{-\infty}^0 h(x-t)E(x-t) dx \leq C\|h\|_\infty \int_{-\infty}^0 e^{\delta_1(x-t)} dx = \frac{C\|h\|_\infty}{\delta_1} e^{-(r\kappa + \delta_0)t}.$$

Weiterhin erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^0 h(x-t)|u_-(x-t)|^r dx &= \int_{-\infty}^0 h(x)|p_-(x-t)|^r e^{r\kappa(x-t)} dx \\
&= e^{-r\kappa t} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-m-1}^{-m} h(x)|p_-(x)|^r e^{r\kappa x} dx \\
&\stackrel{y=x+m}{=} e^{-r\kappa t} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-r\kappa m} \int_{-1}^0 h(y)|p_-(y)|^r e^{r\kappa y} dy \\
&= \frac{e^{-r\kappa t}}{1-e^{-r\kappa}} \int_{-1}^0 h(y)|p_-(y)|^r e^{r\kappa y} dy
\end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\int_{-\infty}^0 h(x)|u(x-t)|^r dx = e^{-r\kappa t} \left( \frac{|d_-(u)|^r}{1-e^{-r\kappa}} \int_{-1}^0 h(x)|p_-(x)|^r e^{r\kappa x} dx + \mathcal{O}(e^{-\delta_0 t}) \right)$$

für  $t \rightarrow \infty$ . ■

Mit Hilfe von Lemma 3.2.2 können wir das Existenzkriterium von Satz 2.8.1 für starke duale Grundzustände von (3.1) im eindimensionalen Fall nun wesentlich vereinfachen:

**Satz 3.2.3.** *Unter den Voraussetzungen (H1) bis (H3) seien die Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  des Schrödingeroperators  $L_i$ . Dann ist jede der folgenden Bedingungen (i) und (ii) hinreichend für die Existenz eines starken dualen Grundzustandes  $u \in H^1(\mathbb{R})$  der eindimensionalen nichtlinearen Schrödingergleichung*

$$-u'' + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \text{ auf } \mathbb{R}$$

vom Grenzflächentyp:

(i) Es gilt  $m_1 \leq m_2$  sowie

$$\int_{-1}^0 (V_2(x) - V_1(x)) (\alpha_- + V_2(x) - V_1(x)) u_-^{(1)}(x)^2 dx < 0. \quad (3.13)$$

(ii) Es gilt  $m_2 \leq m_1$  sowie

$$\int_0^1 (V_1(x) - V_2(x)) (\alpha_- + V_1(x) - V_2(x)) u_+^{(2)}(x)^2 dx < 0. \quad (3.14)$$

**BEWEIS:** Zunächst zu (i): Es sei  $u_1^*$  ein starker dualer Grundzustand von

$$-u'' + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u \text{ auf } \mathbb{R}$$

und  $d_- := d_-(u_1^*)$ . Ferner schreiben wir kurz

$$\delta V(x) := V_2(x) - V_1(x) \quad \text{sowie} \quad \delta_{p+1}\Gamma(x) := \Gamma_2(x)^{\frac{1}{p+1}} - \Gamma_1(x)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Nach Lemma 3.2.2 ergeben sich die in unserem Existenzkriterium (2.73) von Satz 2.8.1 auftretenden Integrale für  $t \rightarrow \infty$  dann zu

$$\begin{aligned} a_t &:= \int_{-\infty}^0 \delta V(x) (\alpha_- + \delta V(x)) u_1^*(x-t)^2 dx \\ &= e^{-2\kappa t} \left( \frac{d_-^2}{1 - e^{-2\kappa}} \int_{-1}^0 (\alpha_- + \delta V(x)) \delta V(x) u_-^{(1)}(x)^2 dx + o(1) \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} b_t &:= \int_{-\infty}^0 (\alpha_- + \delta V(x)) \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma(x) |u(x-t)|^{p+1} dx \\ &= e^{-(p+1)\kappa t} \left( \frac{|d_-|^{p+1}}{1 - e^{-(p+1)\kappa}} \int_{-1}^0 (\alpha_- + \delta V(x)) \Gamma_1(x)^{\frac{p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma(x) |u_-^{(1)}(x)|^{p+1} dx + o(1) \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} c_t &:= \int_{-\infty}^0 \Gamma_1(x)^{\frac{2p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma(x)^2 |u(x-t)|^{2p} dx \\ &= e^{-2p\kappa t} \left( \frac{d_-^{2p}}{1 - e^{-2p\kappa}} \int_{-1}^0 \Gamma_1(x)^{\frac{2p}{p+1}} \delta_{p+1} \Gamma(x)^2 |u_-^{(1)}(x)|^{2p} dx + o(1) \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

und ein starker dualer Grundzustand existiert, wenn

$$a_t - 2b_t + c_t < 0, \quad (3.18)$$

für hinreichend großes  $t \in \mathbb{N}$  gilt. Nach (3.15), (3.16) und (3.17) sind  $(a_t)$ ,  $(b_t)$  und  $(c_t)$  Nullfolgen, wobei  $(a_t)$  „am langsamsten“, d.h. mit der kleinsten Potenz von  $e$ , gegen Null konvergiert. Hinreichend für (3.13) ist nach Satz 2.8.1(i) also  $a_t < 0$  für hinreichend großes  $t$  und damit

$$\int_{-1}^0 \delta V(x) (\alpha_- + \delta V(x)) u_-^{(1)}(x)^2 dx < 0.$$

Für (ii) kann man nun analog argumentieren, wenn man in der Definition von  $\delta V$  bzw.  $\delta_{p+1}\Gamma$  die Indizes 1 und 2 vertauscht und die Blochmode  $u_+^{(2)}$  an Stelle von  $u_-^{(1)}$  betrachtet. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.8.1(ii). ■

**Bemerkung 3.2.4.** Mit  $\delta V(x) = V_2(x) - V_1(x)$  ist (3.13) äquivalent zu

$$\int_{-1}^0 \alpha_- \left( \delta V(x) + \frac{\delta V(x)^2}{\alpha_-} \right) u_-^{(1)}(x)^2 dx < 0.$$

Durch den Störterm  $\delta V(x)/\alpha_-$  erhalten wir also wiederum eine im Vergleich zu Satz 1.2.7 aus [DPR11] schwieriger zu erfüllende Existenzbedingung.

Zwar tauchen in Satz 3.2.3 wieder die kritischen Energieniveaus  $m_1$  und  $m_2$  auf, wie in Korollar 2.8.5 ist ihre Kenntnis aber nicht vonnöten, wenn wir sicherstellen können, dass beide Ungleichungen (3.13) und (3.14) erfüllt sind:

**Korollar 3.2.5.** Unter den Voraussetzungen (A1) bis (A3) gelte

$$\int_{-1}^0 (V_2(x) - V_1(x)) (\alpha_- + V_2(x) - V_1(x)) u_-^{(1)}(x)^2 dx < 0$$

und

$$\int_0^1 (V_1(x) - V_2(x)) (\alpha_- + V_1(x) - V_2(x)) u_+^{(2)}(x)^2 dx < 0.$$

Dann besitzt die eindimensionale nichtlineare Schrödingergleichung

$$-u'' + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

vom Grenzflächentyp einen starken dualen Grundzustand  $u \in H^1(\mathbb{R})$ .

**Bemerkung 3.2.6.** Man beachte wiederum, dass die Existenzkriterien von Satz 3.2.3 und Korollar 3.2.5 unabhängig von den Funktionen  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$ .

### 3.3 Stückweise konstante Koeffizienten

Das Existenzkriterium von Korollar 3.2.5 für starke duale Grundzustände eines Grenzflächenproblems für die eindimensionale nichtlineare Schrödingergleichung wollen wir nun auf eine Situation anwenden, in der die Potentiale  $V_1$  und  $V_2$  stückweise konstante Funktionen sind.  $V_1, V_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seien also gegeben durch

$$V_i(x) = \begin{cases} a_i, & \text{für } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ b_i, & \text{für } \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

und entsprechende periodische Fortsetzung auf ganz  $\mathbb{R}$  mit reellen Parametern  $a_i < b_i$ . Wir betrachten die nichtlineare Schrödingergleichung

$$-u'' + (V(x) - \lambda)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{auf } \mathbb{R} \quad (3.19)$$

vom Grenzflächen-Typ, deren Koeffizienten  $V, \Gamma$  gegeben seien durch

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x), & \text{für } x > 0, \\ V_2(x), & \text{für } x < 0, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma(x) = \begin{cases} \Gamma_1(x), & \text{für } x > 0, \\ \Gamma_2(x), & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

$\Gamma_1, \Gamma_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  seien dabei wieder beliebige, wesentlich positive und 1-periodische Funktionen. Ferner seien

$$\lambda \notin \sigma\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \quad (3.20)$$

ein spektraler Parameter sowie

$$\alpha_\lambda := \min\{\alpha > 0 : \lambda - \alpha \in \sigma(L)\} > 0$$

der „nach links gemessene“ Abstand von  $\lambda$  zu  $\sigma(L)$ . Die zugehörigen Schrödingeroperatoren bezeichnen wir wie üblich mit

$$L := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad \text{bzw.} \quad L_i := -\frac{d^2}{dx^2} + V_i(x) \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Mit  $u_\pm^{(i)}$  bezeichnen wir wieder die Blochmoden für den Schrödingeroperator  $L_i - \lambda$  gemäß Satz 3.1.1, d.h. es gelte

$$u_\pm^{(i)}(x) = p_\pm^{(i)}(x)e^{\mp \kappa_i x},$$

mit 1-periodischen Funktionen  $p_{\pm}^{(i)} \in L^{\infty}$ , die auf  $\|p_{\pm}^{(i)}\|_{\infty} = 1$  normiert seien, und  $\kappa_i > 0$ . Dass  $p_{\pm}^{(i)}$  und  $\kappa_i$  vom Parameterwert  $\lambda$  abhängen, bringen wir durch unsere Notation vorerst nicht explizit zum Ausdruck.

Wir wollen in Abhängigkeit von  $a_i$  und  $b_i$  untersuchen, wann das eindimensionale Existenzkriterium aus Korollar 3.2.5 für duale Grundzustände der nichtlinearen Schrödingergleichung (3.19) erfüllt ist, d.h. wann die in Korollar 3.2.5 auftretenden Integrale

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1(a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda) := \int_{-1}^0 (V_2(x) - V_1(x)) (\alpha_{\lambda} + V_2(x) - V_1(x)) u_{-}^{(1)}(x)^2 dx$$

bzw.

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2(a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda) := \int_0^1 (V_1(x) - V_2(x)) (\alpha_{\lambda} + V_1(x) - V_2(x)) u_{+}^{(2)}(x)^2 dx$$

gleichzeitig negativ sind und so die Existenz starker dualer Grundzustände von (3.19) sichern, wenn  $\lambda$  in einer echten Spektrallücke von  $L$  liegt.

Dieses Beispiel eines Grenzflächenproblems mit stückweise konstanten Koeffizienten wurde von Tomáš Dohnal, Kaori Nagatou-Plum, Michael Plum und Wolfgang Reichel in [DNPPR] vorgeschlagen und für Parameterwerte von  $\lambda$  in der semi-infiniten Lücke von  $L$  untersucht.

Um  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$  berechnen zu können, müssen nun wir einerseits die Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  bestimmen. Andererseits müssen wir auch das Spektrum  $\sigma(L)$  berechnen um sicherzustellen, dass  $\lambda \notin \sigma(L)$ , und um den Abstand  $\alpha_{-}$  zu bestimmen. Dabei gehen wir in den folgenden vier Schritten vor:

- **1. Schritt:** Berechnung der Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$ .
- **2. Schritt:** Berechnung des stetigen Spektrums  $\sigma_{\text{ess}}(L)$ .
- **3. Schritt:** Untersuchung des Punktspektrums  $\sigma_p(L)$ .
- **4. Schritt:** Berechnung der Integrale  $\mathcal{I}_1$  und  $\mathcal{I}_2$ .

Der rechentechnische Aufwand in jedem dieser Schritte ist hoch. Deshalb wollen wir hier auf die Darstellung von Details verzichten und das Vorgehen nur skizzieren sowie die entsprechenden Ergebnisse angeben.

Alle hier dargestellten Untersuchungen und Rechnungen wurden von Herrn

Dipl.-Math. Marc Teschner

aus Bremen im Rahmen seiner in der Betreuung von Prof. Dr. Wolfgang Reichel und Hans-Jürgen Freisinger entstandenen Diplomarbeit mit dem Titel

„Beispiele für Interface-Modelle bei der 1-dimensionalen linearen und nichtlinearen Schrödingergleichung“

durchgeführt. Auch die Abbildungen sind dieser Arbeit entnommen und wurden dort mit Hilfe entsprechender MATLAB- und INTLAB-Programme erstellt.

### 1. Schritt – Berechnung der Blochmoden $u_{\pm}^{(i)}$

Die Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  ergeben sich als stückweise Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} -u_i'' + (a_i - \lambda)u_i &= 0 & \text{in } (0, \tfrac{1}{2}), \\ -u_i'' + (b_i - \lambda)u_i &= 0 & \text{in } (\tfrac{1}{2}, 1). \end{aligned}$$

mit konstanten Koeffizienten und lassen sich mit den bekannten Lösungsmethoden für gewöhnliche Differenzialgleichungen berechnen. Dabei sind fünf Fälle zu unterscheiden, von denen Fall 1 bereits in [DNPPR] behandelt wurde. Bis auf skalare Vielfache ergeben sich die Blochmoden dann wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{in Fall 1 } (\lambda < a_i) \quad u_{\pm}^{(i)}(x) &= \begin{cases} \zeta_{i1}^{\pm} \exp(x\sqrt{a_i - \lambda}) + \zeta_{i2}^{\pm} \exp(-x\sqrt{a_i - \lambda}), & \text{für } 0 < x < \tfrac{1}{2}, \\ \zeta_{i3}^{\pm} \exp(x\sqrt{b_i - \lambda}) + \zeta_{i4}^{\pm} \exp(-x\sqrt{b_i - \lambda}), & \text{für } \tfrac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \\ \text{in Fall 2 } (a_i = \lambda) \quad u_{\pm}^{(i)}(x) &= \begin{cases} \zeta_{i1}^{\pm} x + \zeta_{i2}^{\pm}, & \text{für } 0 < x < \tfrac{1}{2}, \\ \zeta_{i3}^{\pm} \exp(x\sqrt{b_i - \lambda}) + \zeta_{i4}^{\pm} \exp(-x\sqrt{b_i - \lambda}), & \text{für } \tfrac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \\ \text{in Fall 3 } (a_i < \lambda < b_i) \quad u_{\pm}^{(i)}(x) &= \begin{cases} \zeta_{i1}^{\pm} \cos(x\sqrt{\lambda - a_i}) + \zeta_{i2}^{\pm} \sin(x\sqrt{\lambda - a_i}), & \text{für } 0 < x < \tfrac{1}{2}, \\ \zeta_{i3}^{\pm} \exp(x\sqrt{b_i - \lambda}) + \zeta_{i4}^{\pm} \exp(-x\sqrt{b_i - \lambda}), & \text{für } \tfrac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \\ \text{in Fall 4 } (b_i = \lambda) \quad u_{\pm}^{(i)}(x) &= \begin{cases} \zeta_{i1}^{\pm} \cos(x\sqrt{\lambda - a_i}) + \zeta_{i2}^{\pm} \sin(x\sqrt{\lambda - a_i}), & \text{für } 0 \leq x < \tfrac{1}{2}, \\ \zeta_{i3}^{\pm} x + \zeta_{i4}^{\pm}, & \text{für } \tfrac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases} \\ \text{in Fall 5 } (b_i < \lambda) \quad u_{\pm}^{(i)}(x) &= \begin{cases} \zeta_{i1}^{\pm} \cos(x\sqrt{\lambda - a_i}) + \zeta_{i2}^{\pm} \sin(x\sqrt{\lambda - a_i}), & \text{für } 0 < x < \tfrac{1}{2}, \\ \zeta_{i3}^{\pm} \cos(x\sqrt{\lambda - b_i}) + \zeta_{i4}^{\pm} \sin(x\sqrt{\lambda - b_i}), & \text{für } \tfrac{1}{2} < x < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $\zeta_{ij}^{\pm}$  für  $i = 1, 2$  und  $j = 1, 2, 3, 4$  so zu bestimmen sind, dass die Funktionen  $u_{\pm}^{(i)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar sind, d.h. dass die  $C^1$ -Bedingungen

$$u_{\pm}^{(i)}(\tfrac{1}{2}-) = u_{\pm}^{(i)}(\tfrac{1}{2}+) \quad \text{und} \quad \frac{du_{\pm}^{(i)}}{dx}(\tfrac{1}{2}-) = \frac{du_{\pm}^{(i)}}{dx}(\tfrac{1}{2}+) \quad \text{sowie} \quad (3.21)$$

$$u_{\pm}^{(i)}(1-) = e^{\mp \kappa_i} u_{\pm}^{(i)}(0+) \quad \text{und} \quad \frac{du_{\pm}^{(i)}}{dx}(1-) = e^{\mp \kappa_i} \frac{du_{\pm}^{(i)}}{dx}(0+) \quad (3.22)$$

erfüllt sind. Wir skizzieren das Vorgehen exemplarisch für den (aufwändigsten) Fall 3, d.h. es gelte

$$a_i < \lambda < b_i.$$

Dann liefern uns die  $C^1$ -Bedingungen (3.21) (3.22) für den Vektor  $\zeta_i^{\pm} = (\zeta_{i1}^{\pm}, \zeta_{i2}^{\pm}, \zeta_{i3}^{\pm}, \zeta_{i4}^{\pm})^{\top}$  das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}_i(\kappa_i) \zeta_i^{\pm} = \mathbf{0}, \quad (3.23)$$

wobei wir mit  $\mathbf{A}_i(\kappa_i)$  die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-a_i}) & \sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-a_i}) & -e^{\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} & -e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-b_i}} \\ -\sqrt{\lambda-a_i}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-a_i}) & \sqrt{\lambda-a_i}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda-a_i}) & -\sqrt{b_i-\lambda}e^{\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} & \sqrt{b_i-\lambda}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} \\ -e^{\mp\kappa_i} & 0 & e^{\sqrt{b_i-\lambda}} & e^{-\sqrt{b_i-\lambda}} \\ 0 & -\sqrt{\lambda-a_i}e^{\mp\kappa_i} & \sqrt{b_i-\lambda}e^{\sqrt{b_i-\lambda}} & -\sqrt{b_i-\lambda}e^{-\sqrt{b_i-\lambda}} \end{pmatrix}$$

bezeichnen. Das Gleichungssystem (3.23) besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung  $\zeta_i^\pm \neq \mathbf{0}$ , wenn  $\det \mathbf{A}_i(\kappa_i) = 0$ . Diese Bedingung wiederum ist genau dann erfüllt, wenn

$$\cosh(\kappa_i) = \cos \frac{\sqrt{\lambda-a_i}}{2} \cosh \frac{\sqrt{b_i-\lambda}}{2} + \frac{C_i}{2} \sin \frac{\sqrt{\lambda-a_i}}{2} \sinh \frac{\sqrt{b_i-\lambda}}{2},$$

wobei

$$C_i := \sqrt{\frac{\lambda-a_i}{b_i-\lambda}} - \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{\lambda-a_i}}.$$

Für  $a_i < \lambda < b_i$  ergeben sich dann die Koeffizienten  $\zeta_{i1}^\pm, \dots, \zeta_{i4}^\pm$  bis auf ein reelles Vielfaches zu

$$\begin{aligned} \zeta_{i4}^\pm &= -e^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} + e^{\pm\kappa_i + \sqrt{b_i-\lambda}} \left( \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{\lambda-a_i}} \sin \frac{\sqrt{\lambda-a_i}}{2} + \cos \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2} \right), \\ \zeta_{i3}^\pm &= e^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} - e^{\pm\kappa_i - \sqrt{b_i-\lambda}} \left( -\sqrt{\frac{b_i-\lambda}{\lambda-a_i}} \sin \frac{\sqrt{\lambda-a_i}}{2} + \cos \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2} \right), \\ \zeta_{i2}^\pm &= -\sqrt{\frac{b_i-\lambda}{\lambda-a_i}} e^{\pm\kappa_i - \sqrt{b_i-\lambda}} \zeta_{i4}^\pm + \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{\lambda-a_i}} e^{\pm\kappa_i + \sqrt{b_i-\lambda}} \zeta_{i3}^\pm, \\ \zeta_{i1}^\pm &= e^{\pm\kappa_i - \sqrt{b_i-\lambda}} \zeta_{i4}^\pm + e^{\pm\kappa_i + \sqrt{b_i-\lambda}} \zeta_{i3}^\pm. \end{aligned}$$

**In Fall 1** ( $\lambda < a_i$ ) liefern ähnliche Rechnungen zunächst

$$\cosh(\kappa_i) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a_i-\lambda}{b_i-\lambda}} + \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{a_i-\lambda}} \right) \sinh \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2} \sinh \frac{\sqrt{b_i-\lambda}}{2} + \cosh \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2} \cosh \frac{\sqrt{b_i-\lambda}}{2}.$$

und dann

$$\begin{aligned} \zeta_{i4}^\pm &= -e^{\pm\kappa_i + \sqrt{b_i-\lambda}} + e^{\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} \cosh \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2} - \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{a_i-\lambda}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} \sinh \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2}, \\ \zeta_{i3}^\pm &= e^{\pm\kappa_i - \sqrt{b_i-\lambda}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} \cosh \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2} - \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{a_i-\lambda}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_i-\lambda}} \sinh \frac{\sqrt{a_i-\lambda}}{2}, \\ \zeta_{i2}^\pm &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{a_i-\lambda}} + 1 \right) e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{b_i-\lambda} - \sqrt{a_i-\lambda})} \zeta_{i4}^\pm - \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{b_i-\lambda}{a_i-\lambda}} - 1 \right) e^{\frac{1}{2}(\sqrt{b_i-\lambda} - \sqrt{a_i-\lambda})} \zeta_{i3}^\pm, \\ \zeta_{i1}^\pm &= e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{b_i-\lambda} - \sqrt{a_i-\lambda})} \zeta_{i4}^\pm + e^{\frac{1}{2}(\sqrt{b_i-\lambda} - \sqrt{a_i-\lambda})} \zeta_{i3}^\pm - e^{-\sqrt{a_i-\lambda}} \zeta_{i2}^\pm. \end{aligned}$$

**In Fall 2** ( $\lambda = a_i$ ) folgt zunächst

$$\cosh(\kappa_i) = \cosh\left(-\frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2}\right) + \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{4} \sinh\left(-\frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2}\right).$$

und damit

$$\begin{aligned}\zeta_{i4}^{\pm} &= e^{\pm\kappa_i + \sqrt{b_i - \lambda}} - e^{\frac{1}{2}\sqrt{b_i - a_i}}, \\ \zeta_{i3}^{\pm} &= e^{\pm\kappa_i - \sqrt{b_i - a_i}} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{b_i - a_i}}, \\ \zeta_{i2}^{\pm} &= 2e^{\pm 2\kappa_i} - e^{\pm\kappa_i - \frac{1}{2}\sqrt{b_i - a_i}} - e^{\pm\kappa_i + \frac{1}{2}\sqrt{b_i - a_i}}, \\ \zeta_{i1}^{\pm} &= \sqrt{b_i - \lambda} \left( e^{\pm\kappa_i - \frac{1}{2}\sqrt{b_i - a_i}} - e^{\pm\kappa_i + \frac{1}{2}\sqrt{b_i - a_i}} \right).\end{aligned}$$

**In Fall 4** ( $\lambda = b_i$ ) erhalten wir zunächst

$$\cosh(\kappa_i) = -\frac{1}{4}\sqrt{\lambda - a_i} \sin \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2} + \cos \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2},$$

und damit

$$\begin{aligned}\zeta_{i4}^{\pm} &= -\frac{1}{2} + e^{\pm\kappa_i} \cos \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2} + \frac{e^{\pm\kappa_i}}{\sqrt{b_i - a_i}} \sin \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2}, \\ \zeta_{i3}^{\pm} &= 1 - e^{\pm\kappa_i} \cos \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2}, \\ \zeta_{i2}^{\pm} &= \frac{e^{\pm\kappa_i}}{\sqrt{b_i - a_i}} \zeta_{i3}^{\pm}, \\ \zeta_{i1}^{\pm} &= e^{\pm\kappa_i} \zeta_{i4}^{\pm} + e^{\pm\kappa_i} \zeta_{i3}^{\pm}.\end{aligned}$$

**In Fall 5** ( $b_i < \lambda$ ) erhalten wir schließlich

$$\cosh(\kappa_i) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\lambda - a_i}{\lambda - b_i}} + \sqrt{\frac{\lambda - b_i}{\lambda - a_i}} \right) \sin \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \sin \frac{\sqrt{\lambda - b_i}}{2} + 2 \cos \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \cos \frac{\sqrt{\lambda - b_i}}{2}.$$

und somit

$$\begin{aligned}\zeta_{i4}^{\pm} &= -\cos \frac{\sqrt{\lambda - b_i}}{2} + e^{\pm\kappa_i} \left( \cos \sqrt{\lambda - b_i} \cos \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} - \sqrt{\frac{\lambda - b_i}{\lambda - a_i}} \sin \sqrt{\lambda - b_i} \sin \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \right), \\ \zeta_{i3}^{\pm} &= -\sin \frac{\sqrt{\lambda - b_i}}{2} - e^{\pm\kappa_i} \left( \sin \sqrt{\lambda - b_i} \cos \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} - \sqrt{\frac{\lambda - b_i}{\lambda - a_i}} \cos \sqrt{\lambda - b_i} \sin \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \right), \\ \zeta_{i2}^{\pm} &= e^{\pm\kappa_i} \sqrt{\frac{\lambda - b_i}{\lambda - a_i}} \cos \sqrt{\lambda - b_i} \zeta_{i4}^{\pm} - e^{\pm\kappa_i} \sqrt{\frac{\lambda - b_i}{\lambda - a_i}} \sin \sqrt{\lambda - b_i} \zeta_{i3}^{\pm}, \\ \zeta_{i1}^{\pm} &= e^{\pm\kappa_i} \sin \sqrt{\lambda - b_i} \zeta_{i4}^{\pm} + e^{\pm\kappa_i} \cos \sqrt{\lambda - b_i} \zeta_{i3}^{\pm}.\end{aligned}$$

## 2. Schritt – Bestimmung des stetigen Spektrums $\sigma_{\text{ess}}(L)$

Wir haben im Verlauf dieser Arbeit bereits mehrfach erwähnt, dass für einen Schrödingeroperator vom Grenzflächentyp stets

$$\sigma(L) \supset \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$$

gilt. Im Eindimensionalen gilt ein stärkeres Resultat:

**Proposition 3.3.1.**  $\sigma(L) = \sigma_{\text{ess}}(L_1) \cup \sigma_{\text{ess}}(L_2) \cup \sigma_p(L)$ .

BEWEIS: Nach [Eas73, Theorem 5.3.1] besitzen die Schrödingeroperatoren  $L_i$  mit periodischen Koeffizienten nur stetiges Spektrum, d.h.  $\sigma(L_i) = \sigma_{\text{ess}}(L_i)$ . Dieses Spektrum besitzt die bekannte Bandstruktur. Nach [Kor05] gilt ferner  $\sigma_{\text{ess}}(L) = \sigma_{\text{ess}}(L_1) \cup \sigma_{\text{ess}}(L_2)$ . In den Bandlücken von  $\sigma_{\text{ess}}(L)$  können nun nach [DPR09] Eigenwerte – so genannte „Lückeneigenwerte“ – auftreten, d.h. im Gegensatz zum rein periodischen Fall ist also  $\sigma_p(L) \neq \emptyset$  möglich. ■

Auf das Phänomen der Lückeneigenwerte gehen wir im nächsten Schritt genauer ein, wenn wir das Punktspektrum von  $L$  bestimmen. Zunächst beschäftigen wir uns aber mit der Berechnung des stetigen Spektrums von  $L$ , d.h. mit der Berechnung der Spektralbänder der Operatoren  $L_1$  und  $L_2$  mit periodischen Koeffizienten. Hierfür verwenden wir das folgende Resultat, vgl. [Eas73, § 1.2]:

**Proposition 3.3.2.** *Es sei  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein beschränktes und 1-periodisches Potential und  $\psi_{1,\lambda}, \psi_{2,\lambda}$  seien Lösungen der Eigenwertgleichung*

$$-\psi'' + W(x)\psi = \lambda\psi \quad (3.24)$$

mit den Anfangswerten

$$\psi_{1,\lambda}(0) = 1, \quad \psi'_{1,\lambda}(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \psi_{2,\lambda}(0) = 0, \quad \psi'_{2,\lambda}(0) = 1.$$

Ferner sei die sogenannte „Diskriminantenfunktion“  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$D(\lambda) = \psi_{1,\lambda}(1) + \psi'_{2,\lambda}(1)$$

Dann ist  $\lambda \in \sigma(-\frac{d^2}{dx^2} + W(x))$  genau für  $|D(\lambda)| \leq 2$ .

Mit  $D_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnen wir nun die zum Potential  $W = V_i$  gehörende die Diskriminantenfunktion. Eine längere Rechnung liefert dann

$$D_i(\lambda) = 2 \cosh \frac{\sqrt{a_i - \lambda}}{2} \cosh \frac{\sqrt{b_i - \lambda}}{2} + \left( \sqrt{\frac{b_i - \lambda}{a_i - \lambda}} + \sqrt{\frac{a_i - \lambda}{b_i - \lambda}} \right) \sinh \frac{\sqrt{a_i - \lambda}}{2} \sinh \frac{\sqrt{b_i - \lambda}}{2}$$

für  $\lambda < a_i$ ,

$$D_i(\lambda) = 2 \cos \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \cosh \frac{\sqrt{b_i - \lambda}}{2} + \left( \sqrt{\frac{b_i - \lambda}{\lambda - a_i}} - \sqrt{\frac{\lambda - a_i}{b_i - \lambda}} \right) \sin \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \sinh \frac{\sqrt{b_i - \lambda}}{2}$$

für  $\lambda \in (a_i, b_i)$  und

$$D_i(\lambda) = 2 \cos \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \cos \frac{\sqrt{\lambda - b_i}}{2} - \left( \sqrt{\frac{\lambda - b_i}{\lambda - a_i}} + \sqrt{\frac{\lambda - a_i}{\lambda - b_i}} \right) \sin \frac{\sqrt{\lambda - a_i}}{2} \sin \frac{\sqrt{\lambda - b_i}}{2}$$

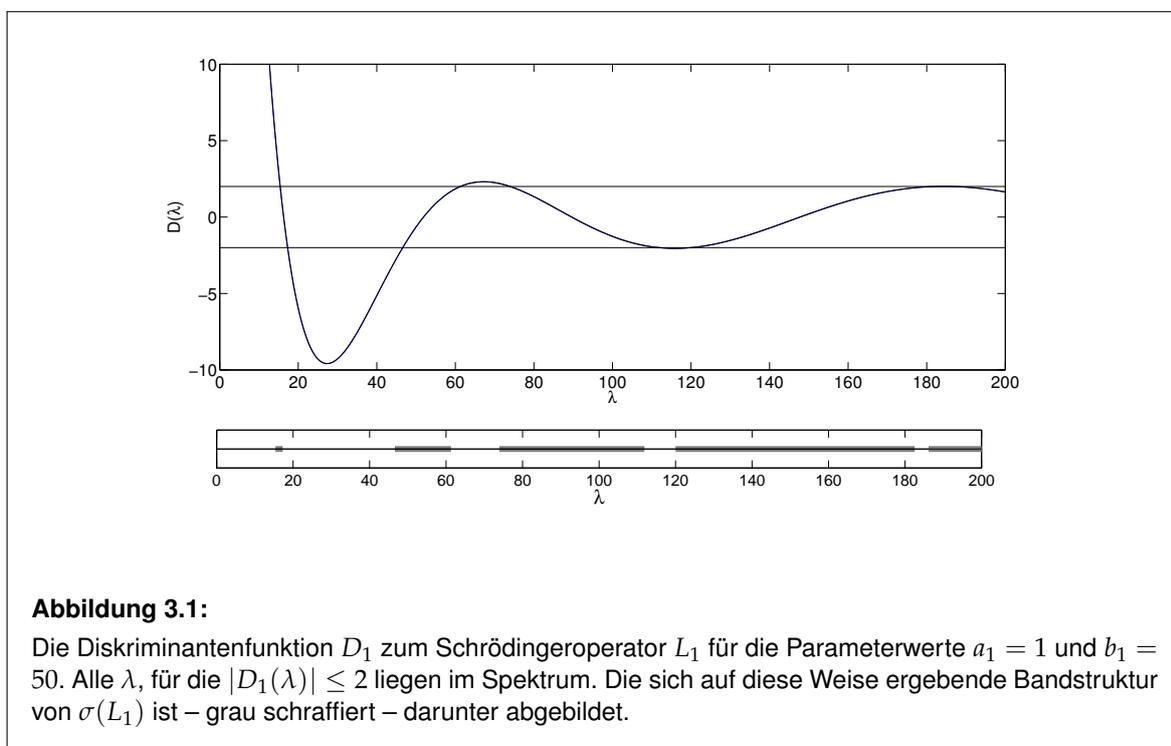
für  $\lambda > b_i$ . Ferner gilt

$$D_i(a_i) = 2 \cosh \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2} - \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2} \sinh \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2}$$

sowie

$$D_i(b_i) = 2 \cos \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2} - \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2} \sin \frac{\sqrt{b_i - a_i}}{2},$$

sodass  $D_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion ist. In Abbildung 3.1 ist ihr Graph für beispielhaften Parameterwerte  $a_1 = 1$  und  $b_1 = 50$  dargestellt.



**Abbildung 3.1:**

Die Diskriminantenfunktion  $D_1$  zum Schrödingeroperator  $L_1$  für die Parameterwerte  $a_1 = 1$  und  $b_1 = 50$ . Alle  $\lambda$ , für die  $|D_1(\lambda)| \leq 2$  liegen im Spektrum. Die sich auf diese Weise ergebende Bandstruktur von  $\sigma(L_1)$  ist – grau schraffiert – darunter abgebildet.

### 3. Schritt – Bestimmung des diskreten Spektrums $\sigma_p(L)$

Wir haben bisher die Abhängigkeit der Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  der Schrödingeroperatoren  $L_i - \lambda$  vom spektralen Parameter  $\lambda$  in unseren Notationen ignoriert. Wenn wir nun die Existenz von Eigenwerten des Schrödingeroperators  $L$  untersuchen, so ist es notwendig, diese Abhängigkeit zu beachten. Deshalb schreiben wir im Folgenden

$$u_{\pm}^{(i)}(x) = u_{\pm}^{(i)}(x, \lambda) = \mathbf{p}_{\pm}^{(i)}(x, \lambda) e^{\mp \kappa_i(\lambda)x}$$

für die Blochmoden von  $L_i - \lambda$ . Die folgenden Darstellungen halten sich an die Arbeit [DPR09] von Tomáš Dohnal, Michael Plum und Wolfgang Reichel, in der das Auftreten von Lückeneigenwerten erstmals diskutiert wurde.

Hierbei ist zu beachten, dass die Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  nur bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt sind. Die Eigenwertgleichung  $Lu = \lambda u$  besitzt somit genau dann ein Lösungspaar  $(u, \lambda)$  mit  $u \neq 0$ , wenn reelle Zahlen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  existieren, sodass sich die Funktionen  $\gamma_1 u_+^{(1)}(\cdot, \lambda)$  und  $\gamma_2 u_-^{(2)}(\cdot, \lambda)$  an der Stelle  $x = 0$  zu einer stetig differenzierbaren Funktion  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zusammensetzen lassen, d.h. wenn die  $C^1$ -Bedingung

$$\gamma_1 u_+^{(1)}(0, \lambda) = \gamma_2 u_-^{(2)}(0, \lambda) \quad \text{und} \quad \gamma_1 \frac{du_+^{(1)}}{dx}(0, \lambda) = \gamma_2 \frac{du_-^{(2)}}{dx}(0, \lambda) \quad (3.25)$$

für ein  $\lambda$  erfüllt ist.

Für  $\lambda \in \sigma(L_i)$  ist nun  $\kappa_i(\lambda) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , vgl. [Eas73] und somit  $|u_{\pm}^{(i)}(x)| = |\mathfrak{p}_{\pm}^{(i)}(x)|$ . Setzen wir also eine Funktion  $u(\cdot, \lambda)$  gemäß (3.25) aus  $\gamma_1 u_+^{(1)}(\cdot, \lambda)$  und  $\gamma_2 u_-^{(2)}(\cdot, \lambda)$  zusammen, so kann die sich daraus ergebende Funktion  $u(\cdot, \lambda)$  nur dann eine bei  $+\infty$  und  $-\infty$  (exponentiell) abfallende, und damit integrierbare, Funktion sein, wenn  $\lambda \in \rho(L_1) \cap \rho(L_2) =: \rho$ . Eigenwerte von  $L$  können somit nur in den Lücken des Spektrums von  $L$  auftreten. Deshalb spricht man von sogenannten „Lückeneigenwerten“.

Wir betrachten für  $i = 1, 2$  nun die Quotientenfunktion  $R_{\pm}^{(i)} : \rho \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$R_{\pm}^{(i)}(\lambda) := u_{\pm}^{(i)}(0, \lambda)^{-1} \frac{du_{\pm}^{(i)}}{d\lambda}(0, \lambda)$$

und die Differenzenfunktion  $G : \rho \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$G(\lambda) := R_-^{(2)}(\lambda) - R_+^{(1)}(\lambda).$$

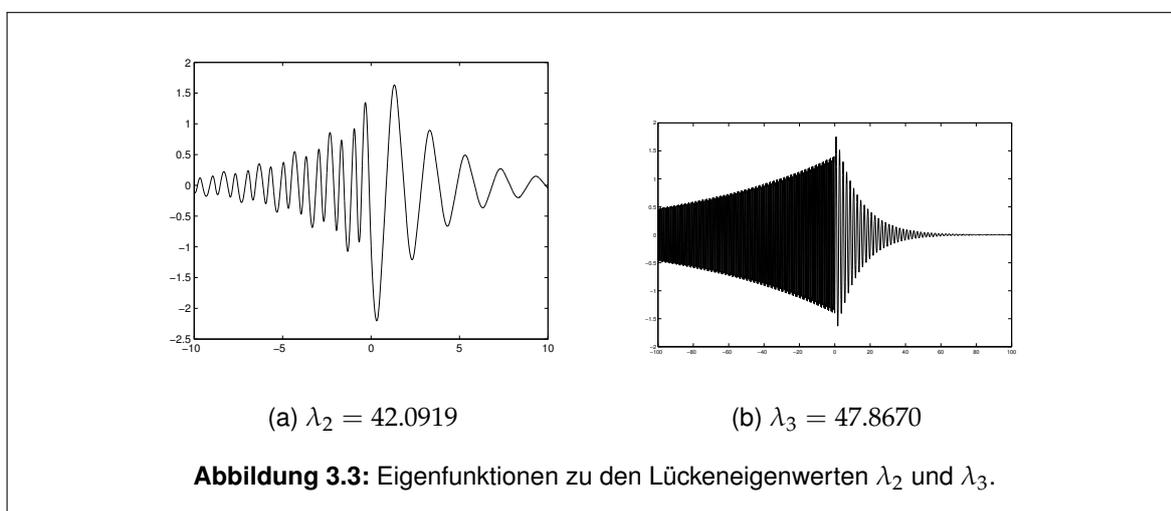
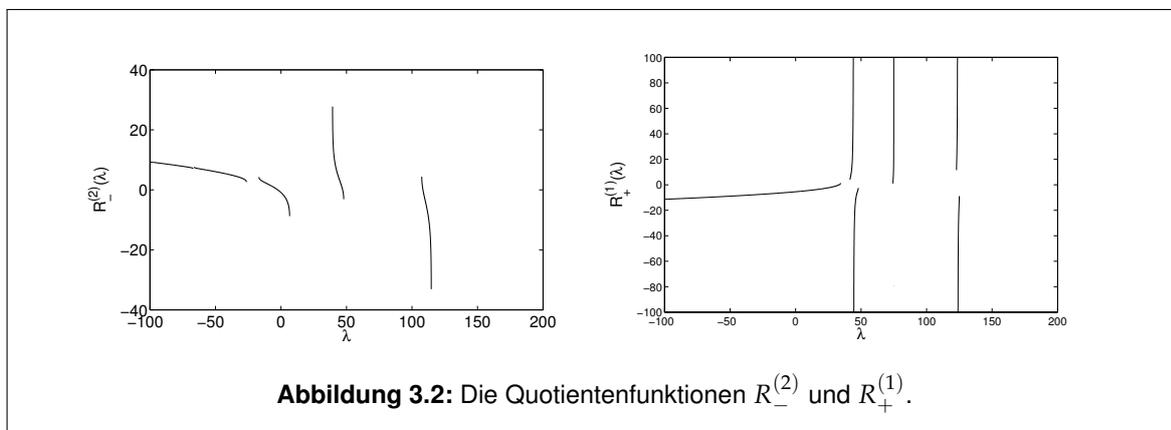
**Proposition 3.3.3.** *Genau dann ist  $\lambda \in \rho(L_1) \cap \rho(L_2)$  ein Lückeneigenwert von  $L$ , wenn  $G(\lambda) = 0$ .*

Diese Proposition ergibt sich unmittelbar aus den obigen Überlegungen. Durch eingehendere Untersuchungen der Quotienten- und Differenzenfunktionen erhält man nun auch quantitative Aussagen über das Vorkommen von Lückeneigenwerten. Darauf einzugehen ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Für nähere Details verweisen wir auf [DPR09].

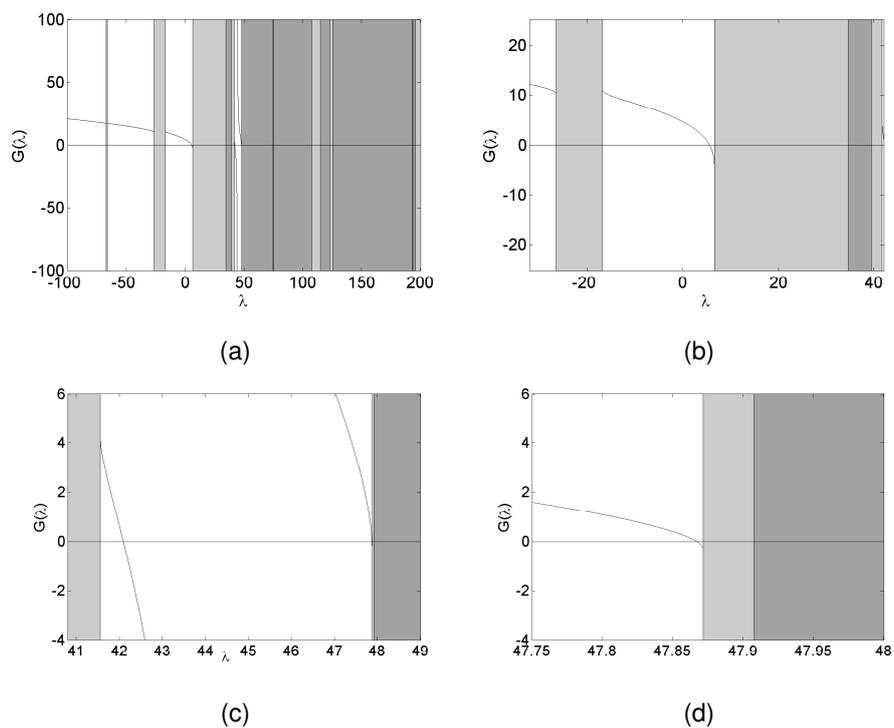
In unserem Fall stückweise konstanter Koeffizienten berechnen sich die Quotientenfunktionen  $R_+^{(1)}$  und  $R_-^{(2)}$  mit Hilfe der Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  zu

$$R_+^{(1)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a_1 - \lambda} (\xi_{11}^+ - \xi_{12}^+)}{\xi_{11}^+ + \xi_{12}^+}, & \text{für } \lambda < a_1, \\ \frac{\xi_{11}^+}{\xi_{12}^+}, & \text{für } \lambda = a_1, \\ \frac{\sqrt{\lambda - a_1} \xi_{12}^+}{\xi_{11}^+}, & \text{für } \lambda > a_1, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad R_-^{(2)}(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a_2 - \lambda} (\xi_{21}^+ - \xi_{22}^+)}{\xi_{21}^+ + \xi_{22}^+}, & \text{für } \lambda < a_2, \\ \frac{\xi_{21}^-}{\xi_{22}^-}, & \text{für } \lambda = a_2, \\ \frac{\sqrt{\lambda - a_1} \xi_{22}^-}{\xi_{21}^-}, & \text{für } \lambda > a_2. \end{cases}$$

Ihre Graphen sind zu den Parameterwerten  $a_1 = 30$ ,  $b_1 = 40$ ,  $a_2 = -84.25$  und  $b_2 = -13.25$  in Abbildung 3.2 dargestellt.



Die Abbildung 3.4 zeigt dann die zugehörige Differenzfunktion  $G$  bei dieser Parameterwahl. Es ergeben sich die Lückeneigenwerte  $\lambda_1 = 5.6056$ ,  $\lambda_2 = 42.0919$  und  $\lambda_3 = 47.8670$ . Die Eigenfunktionen zu  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Man beachte die starke Oszillation der Eigenfunktion zu  $\lambda_3$  auf der linken Seite der Grenzfläche  $x = 0$ .



**Abbildung 3.4:**

(a) Die Differenzfunktion  $G(\lambda)$  für  $\lambda \in (-100, 200)$ . Dabei ist  $\sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$  hellgrau und  $\sigma(L_1) \cap \sigma(L_2)$  dunkelgrau schraffiert. (b)-(d) Vergrößerungen in Bereichen, in den Lückeneigenwerte vorliegen.

#### 4. Schritt – Die Integrale $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$

Mit Hilfe der im ersten Schritt berechneten Blochmoden  $u_{\pm}^{(i)}$  können wir nun die Integrale

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_1(a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda) := \int_{-1}^0 (V_2(x) - V_1(x)) (\alpha_{\lambda} + V_2(x) - V_1(x)) u_{-}^{(1)}(x)^2 dx$$

und

$$\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_2(a_1, a_2, b_1, b_2) := \int_0^1 (V_1(x) - V_2(x)) (\alpha_{\lambda} + V_1(x) - V_2(x)) u_{+}^{(2)}(x)^2 dx$$

in den einzelnen Fällen bestimmen.

**In Fall 1** ergibt sich für  $\lambda < a_1$  das Integral  $\mathcal{I}_1$  zu

$$\begin{aligned} e^{2\kappa_1} \mathcal{I}_1 &= \frac{(a_2 - a_1)(\alpha_{\lambda} + a_2 - a_1)}{4\alpha_{\lambda}\sqrt{\lambda - a_1}} \left[ (\xi_{11}^{-})^2 \left( e^{\sqrt{a_1 - \lambda}} - 1 \right) + 2\sqrt{a_1 - \lambda} \xi_{11}^{-} \xi_{12}^{-} \right. \\ &\quad \left. + (\xi_{12}^{-})^2 \left( 1 - e^{-\sqrt{a_1 - \lambda}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{(b_2 - b_1)(\alpha_{\lambda} + b_2 - b_1)}{4\alpha_{\lambda}\sqrt{\lambda - b_1}} \left[ (\xi_{13}^{-})^2 e^{\sqrt{b_1 - \lambda}} \left( e^{\sqrt{b_1 - \lambda}} - 1 \right) + 2\sqrt{b_1 - \lambda} \xi_{13}^{-} \xi_{14}^{-} \right. \\ &\quad \left. + (\xi_{14}^{-})^2 e^{-\sqrt{b_1 - \lambda}} \left( 1 - e^{-\sqrt{b_1 - \lambda}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Im Fall  $\lambda < a_2$  erhalten wir ferner

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_2 &= \frac{(a_1 - a_2)(\alpha_{\lambda} + a_1 - a_2)}{4\alpha_{\lambda}\sqrt{\lambda - a_2}} \left[ (\xi_{21}^{+})^2 \left( e^{\sqrt{a_2 - \lambda}} - 1 \right) + 2\sqrt{a_2 - \lambda} \xi_{21}^{+} \xi_{22}^{+} \right. \\ &\quad \left. + (\xi_{22}^{+})^2 \left( 1 - e^{-\sqrt{a_2 - \lambda}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{(b_1 - b_2)(\alpha_{\lambda} + b_1 - b_2)}{4\alpha_{\lambda}\sqrt{\lambda - b_2}} \left[ (\xi_{23}^{+})^2 e^{\sqrt{b_2 - \lambda}} \left( e^{\sqrt{b_2 - \lambda}} - 1 \right) + 2\sqrt{b_2 - \lambda} \xi_{23}^{+} \xi_{24}^{+} \right. \\ &\quad \left. + (\xi_{24}^{+})^2 e^{-\sqrt{b_2 - \lambda}} \left( 1 - e^{-\sqrt{b_2 - \lambda}} \right) \right]. \end{aligned}$$

**In Fall 2** erhalten wir für  $\lambda = a_1$  dann

$$\begin{aligned} e^{2\kappa_1} \mathcal{I}_1 &= \frac{(a_2 - a_1)(\alpha_{\lambda} + a_2 - a_1)}{\alpha_{\lambda}} \left[ \frac{1}{24} (\xi_{11}^{-})^2 + \frac{1}{4} \xi_{11}^{-} \xi_{12}^{-} + \frac{1}{2} (\xi_{12}^{-})^2 \right] \\ &\quad + \frac{(b_2 - b_1)(\alpha_{\lambda} + b_2 - b_1)}{2\alpha_{\lambda}\sqrt{b_1 - \lambda}} \left[ (\xi_{13}^{-})^2 e^{\sqrt{b_1 - \lambda}} \left( e^{\sqrt{b_1 - \lambda}} - 1 \right) + 2\sqrt{b_1 - \lambda} \xi_{13}^{-} \xi_{14}^{-} \right. \\ &\quad \left. + (\xi_{14}^{-})^2 e^{-\sqrt{b_1 - \lambda}} \left( 1 - e^{-\sqrt{b_1 - \lambda}} \right) \right] \end{aligned}$$

und im Fall  $\lambda = a_2$  weiterhin

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = & \frac{(a_1 - a_2)(\alpha_\lambda + a_1 - a_2)}{\alpha_\lambda} \left[ \frac{1}{24}(\xi_{21}^+)^2 + \frac{1}{4}\xi_{21}^+\xi_{22}^+ + \frac{1}{2}(\xi_{22}^+)^2 \right] \\ & + \frac{(b_1 - b_2)(\alpha_\lambda + b_1 - b_2)}{2\alpha_\lambda\sqrt{b_2 - \lambda}} \left[ (\xi_{23}^+)^2 e^{\sqrt{b_2 - \lambda}} (e^{\sqrt{b_2 - \lambda}} - 1) + 2\sqrt{b_2 - \lambda} \xi_{23}^+\xi_{24}^+ \right. \\ & \left. + (\xi_{24}^+)^2 e^{-\sqrt{b_2 - \lambda}} (1 - e^{-\sqrt{b_2 - \lambda}}) \right]. \end{aligned}$$

**In Fall 3** folgt für  $a_1 < \lambda < b_1$ :

$$\begin{aligned} e^{2\kappa_1} \mathcal{J}_1 = & \frac{(a_2 - a_1)(\alpha_\lambda + a_2 - a_1)}{4\alpha_\lambda\sqrt{\lambda - a_1}} \left[ (\xi_{11}^-)^2 (\sqrt{\lambda - a_1} + \sin \sqrt{\lambda - a_1}) + 2\xi_{11}^-\xi_{12}^- (1 - \cos \sqrt{\lambda - a_1}) \right. \\ & \left. + (\xi_{12}^-)^2 (\sqrt{\lambda - a_1} - \sin \sqrt{\lambda - a_1}) \right] \\ & + \frac{(b_2 - b_1)(\alpha_\lambda + b_2 - b_1)}{4\alpha_\lambda\sqrt{\lambda - b_1}} \left[ (\xi_{13}^-)^2 e^{\sqrt{b_1 - \lambda}} (e^{\sqrt{b_1 - \lambda}} - 1) + 2\sqrt{b_1 - \lambda} \xi_{13}^-\xi_{14}^- \right. \\ & \left. + (\xi_{14}^-)^2 e^{-\sqrt{b_1 - \lambda}} (1 - e^{-\sqrt{b_1 - \lambda}}) \right]. \end{aligned}$$

Für  $a_2 < \lambda < b_2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = & \frac{(a_1 - a_2)(\alpha_\lambda + a_1 - a_2)}{4\alpha_\lambda\sqrt{\lambda - a_2}} \left[ (\xi_{21}^-)^2 (\sqrt{\lambda - a_2} + \sin \sqrt{\lambda - a_2}) + 2\xi_{21}^-\xi_{22}^- (1 - \cos \sqrt{\lambda - a_2}) \right. \\ & \left. + (\xi_{22}^-)^2 (\sqrt{\lambda - a_2} - \sin \sqrt{\lambda - a_2}) \right] \\ & + \frac{(b_1 - b_2)(\alpha_\lambda + b_1 - b_2)}{4\alpha_\lambda\sqrt{\lambda - b_2}} \left[ (\xi_{23}^-)^2 e^{\sqrt{b_2 - \lambda}} (e^{\sqrt{b_2 - \lambda}} - 1) + 2\sqrt{b_2 - \lambda} \xi_{23}^-\xi_{24}^- \right. \\ & \left. + (\xi_{24}^-)^2 e^{-\sqrt{b_2 - \lambda}} (1 - e^{-\sqrt{b_2 - \lambda}}) \right]. \end{aligned}$$

**In Fall 4** ist für  $\lambda = b_1$  zunächst

$$\begin{aligned} e^{2\kappa_1} \mathcal{J}_1 = & \frac{(a_2 - a_1)(\alpha_\lambda + a_2 - a_1)}{4\alpha_\lambda\sqrt{\lambda - a_1}} \left[ (\xi_{11}^-)^2 (\sqrt{\lambda - a_1} + \sin \sqrt{\lambda - a_1}) + 2\xi_{11}^-\xi_{12}^- (1 - \cos \sqrt{\lambda - a_1}) \right. \\ & \left. + (\xi_{12}^-)^2 (\sqrt{\lambda - a_1} - \sin \sqrt{\lambda - a_1}) \right] \\ & + \frac{(b_2 - b_1)(\alpha_\lambda + b_2 - b_1)}{\alpha_\lambda} \left[ \frac{7}{24}(\xi_{13}^-)^2 + \frac{3}{4}\xi_{13}^-\xi_{14}^- + \frac{1}{2}(\xi_{14}^-)^2 \right] \end{aligned}$$

und im Fall  $\lambda = b_2$  ferner

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = & \frac{(a_1 - a_2)(\alpha_\lambda + a_1 - a_2)}{4\alpha_\lambda \sqrt{\lambda - a_2}} \left[ (\xi_{21}^+)^2 \left( \sqrt{\lambda - a_2} + \sin \sqrt{\lambda - a_2} \right) + 2\xi_{21}^+ \xi_{22}^+ \left( 1 - \cos \sqrt{\lambda - a_2} \right) \right. \\ & \left. + (\xi_{22}^+)^2 \left( \sqrt{\lambda - a_2} - \sin \sqrt{\lambda - a_2} \right) \right] \\ & + \frac{(b_2 - b_1)(\alpha_\lambda + b_2 - b_1)}{\alpha_\lambda} \left[ \frac{7}{24} (\xi_{23}^+)^2 + \frac{3}{4} \xi_{23}^+ \xi_{24}^+ + \frac{1}{2} (\xi_{24}^+)^2 \right]. \end{aligned}$$

In Fall 5 schließlich ist für  $b_1 < \lambda$  das Integral  $\mathcal{J}_1$  gegeben durch

$$\begin{aligned} e^{\kappa_1} \mathcal{J}_1 = & \frac{(a_2 - a_1)(\alpha_\lambda + a_2 - a_1)}{4\alpha_\lambda \sqrt{\lambda - a_1}} \left[ (\xi_{11}^-)^2 \left( \sqrt{\lambda - a_1} + \sin \sqrt{\lambda - a_1} \right) \right. \\ & \left. + 2\xi_{11}^- \xi_{12}^- \left( 1 - \cos \sqrt{\lambda - a_1} \right) + (\xi_{12}^-)^2 \left( \sqrt{\lambda - a_1} - \sin \sqrt{\lambda - a_1} \right) \right] \\ & + \frac{(b_2 - b_1)(\alpha_\lambda + b_2 - b_1)}{4\alpha_\lambda \sqrt{\lambda - b_1}} \left[ (\xi_{13}^-)^2 \left( \sqrt{\lambda - b_1} + \sin \left( 2\sqrt{\lambda - b_1} \right) - \sin \sqrt{\lambda - b_1} \right) \right. \\ & \left. + 2\xi_{13}^- \xi_{14}^- \left( \cos \sqrt{\lambda - b_1} - \cos \left( 2\sqrt{\lambda - b_1} \right) \right) \right. \\ & \left. + (\xi_{14}^-)^2 \left( \sqrt{\lambda - b_1} - \sin \left( 2\sqrt{\lambda - b_1} \right) + \sin \sqrt{\lambda - b_1} \right) \right] \end{aligned}$$

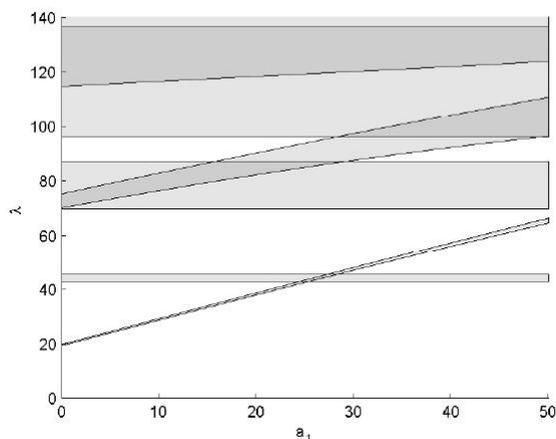
und für  $\mathcal{J}_2$  erhalten wir im Fall  $b_2 < \lambda$  dann

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = & \frac{(a_1 - a_2)(\alpha_\lambda + a_1 - a_2)}{4\alpha_\lambda \sqrt{\lambda - a_2}} \left[ (\xi_{21}^+)^2 \left( \sqrt{\lambda - a_2} + \sin \sqrt{\lambda - a_2} \right) \right. \\ & \left. + 2\xi_{21}^+ \xi_{22}^+ \left( 1 - \cos \sqrt{\lambda - a_2} \right) + (\xi_{22}^+)^2 \left( \sqrt{\lambda - a_2} - \sin \sqrt{\lambda - a_2} \right) \right] \\ & + \frac{(b_1 - b_2)(\alpha_\lambda + b_1 - b_2)}{4\alpha_\lambda \sqrt{\lambda - b_2}} \left[ (\xi_{23}^+)^2 \left( \sqrt{\lambda - b_2} + \sin \left( 2\sqrt{\lambda - b_2} \right) - \sin \sqrt{\lambda - b_2} \right) \right. \\ & \left. + 2\xi_{23}^+ \xi_{24}^+ \left( \cos \sqrt{\lambda - b_2} - \cos \left( 2\sqrt{\lambda - b_2} \right) \right) \right. \\ & \left. + (\xi_{24}^+)^2 \left( \sqrt{\lambda - b_2} - \sin \left( 2\sqrt{\lambda - b_2} \right) + \sin \sqrt{\lambda - b_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Nun gilt es zu untersuchen, ob Parameterwerte  $a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda$  existieren, sodass gleichzeitig  $\mathcal{J}(a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda) < 0$  und  $\mathcal{J}_2(a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda) < 0$  sind und das Existenzkriterium von Korollar 3.2.5 die Existenz starker dualer Grundzustände von (3.19) sichert.

In den numerischen Berechnungen von Marc Teschner wurden hierfür nun die Parameter  $a_2, b_1$  und  $b_2$  fest gewählt und nur noch  $a_1$  und  $\lambda$  variiert. Dann gilt es zunächst das Spektrum  $\sigma(L) = \sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$  in Abhängigkeit von  $a_1$  zu berechnen. Dies ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Spektralbänder des (nicht von  $a_1$  abhängenden) Operators  $L_2$  liegen dann parallel zur  $a_1$ -Achse, während die Spektralbänder von  $L_1$  nun geneigt verlaufen.

Auf den folgenden Seiten stellen wir nun die Ergebnisse der Berechnungen von Marc Teschner

**Abbildung 3.5:**

Die Spektren von  $L_1$  und  $L_2$  für  $a_2 = 30$ ,  $b_2 = 70$ ,  $b_1 = 100$ ,  $a_1 \in [0, 50]$  sowie  $\lambda \in [0, 140]$ . Wiederum ist  $\sigma(L_1) \cup \sigma(L_2)$  hellgrau und  $\sigma(L_1) \cap \sigma(L_2)$  dunkelgrau schraffiert.

zusammen. Dabei galt anfangs die Parameterwahl

$$a_2 = 5, \quad b_1 = 21, \quad b_2 = 20.$$

Die Berechnungen wurden dann herkömmlich mit MATLAB (Abbildung 3.6) und zusätzlich ergebnisverifiziert, d.h. unter Verwendung von Intervallarithmetik, mit INTLAB (Abbildungen 3.7 und 3.8) durchgeführt. Tatsächlich konnten so Bereiche in der ersten echten spektralen Lücke von  $L$  gefunden werden, in denen sowohl  $\mathcal{S}_1$  als auch  $\mathcal{S}_2$  negativ sind, in denen also die Existenz starker dualer Grundzustände gesichert ist.

Weil aber diese Bereiche gleichwohl recht klein ausfallen, wurde danach die Frage untersucht, wie sich diese Bereiche verändern, wenn man nun die Parameter  $b_1$  und  $b_2$  weiter variiert und die Differenz  $|b_1 - b_2|$  schrittweise vergrößert. Es hat sich dabei gezeigt, dass die Bereiche, in denen die Berechnungen mit INTLAB die Existenz von starken dualen Grundzuständen in der ersten echten spektralen Lücke garantieren können, mit wachsender Differenz von  $|b_1 - b_2|$  abnehmen und schließlich ganz verschwinden (Abbildung 3.9).

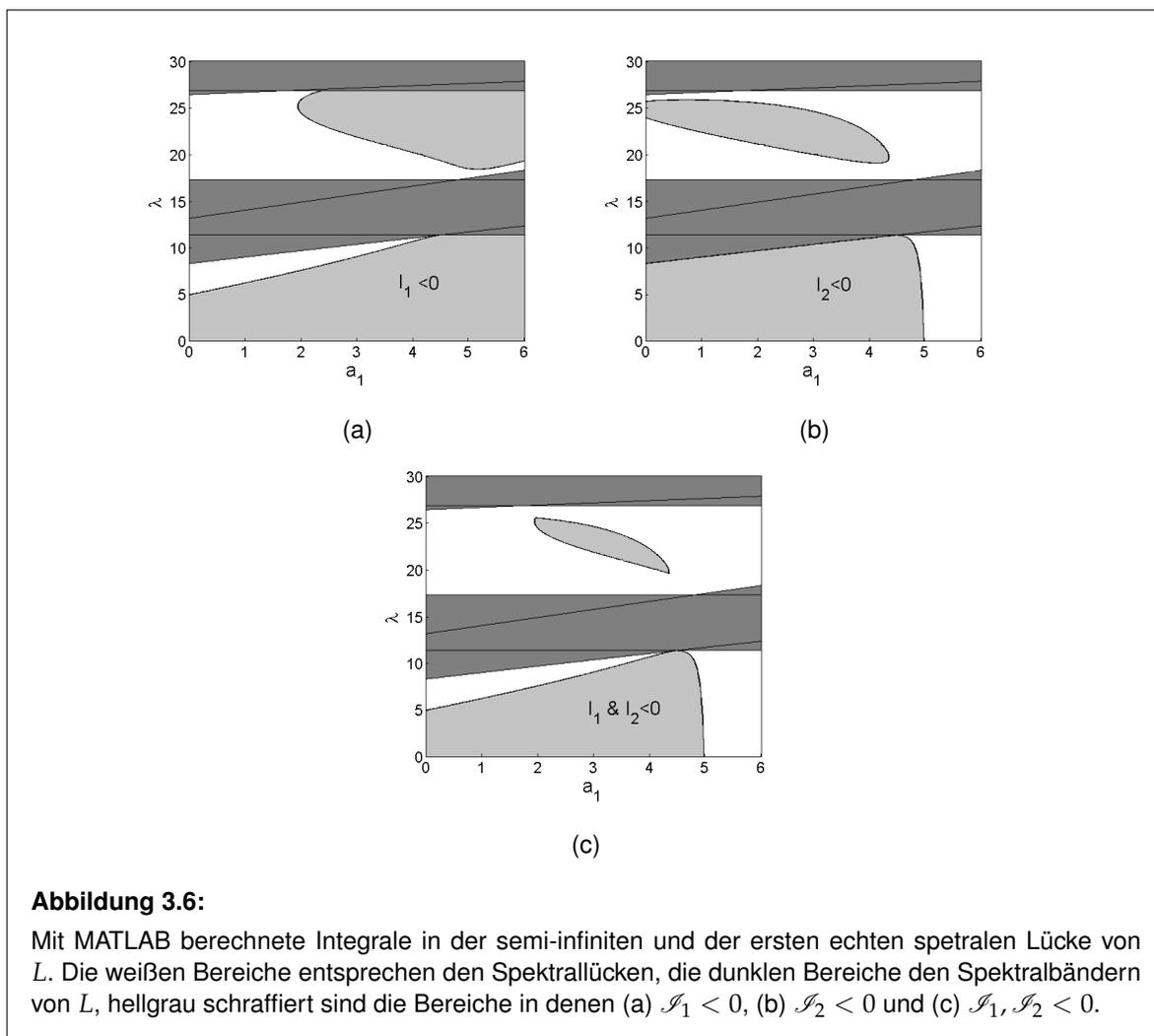
Vergleicht man nun diese Ergebnisse mit den Resultaten für den positiv definiten Fall aus [DNPPR], so erkennt man, dass die Bedingung  $\mathcal{S}_1 < 0$  und  $\mathcal{S}_2 < 0$  des Existenzkriteriums von Korollar 3.2.5 für starke duale Grundzustände im indefiniten Fall durch die Korrekturterme

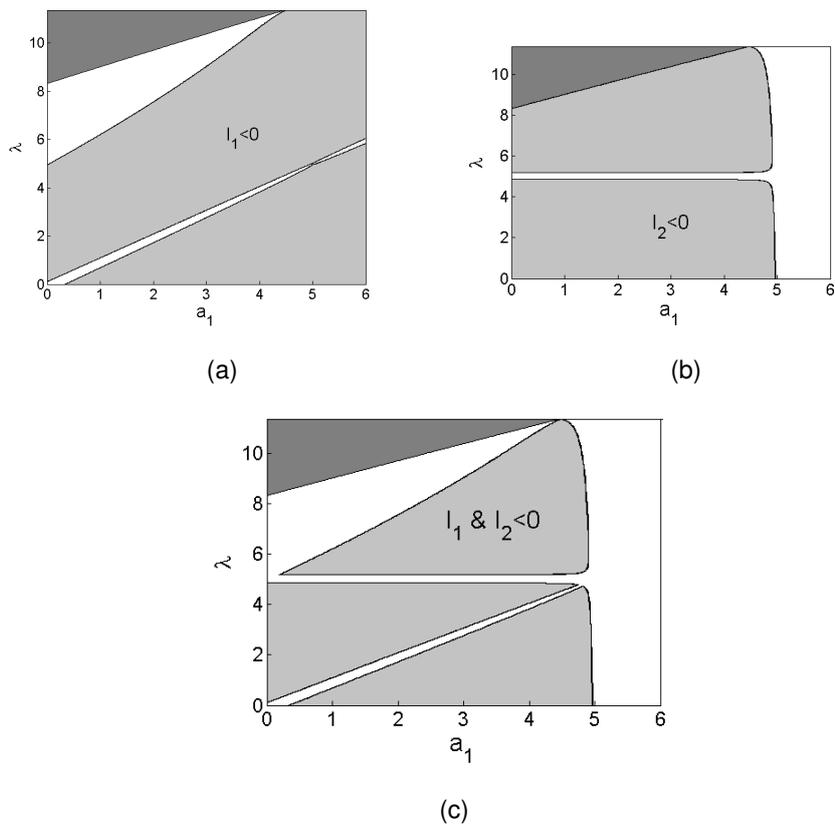
$$\frac{V_2(x) - V_1(x)}{\alpha_-} \quad \text{und} \quad \frac{V_1(x) - V_2(x)}{\alpha_-}$$

gemäß Bemerkung 3.2.4 doch sehr scharf ist und eine Abschwächung des Kriteriums somit wünschenswert wäre.

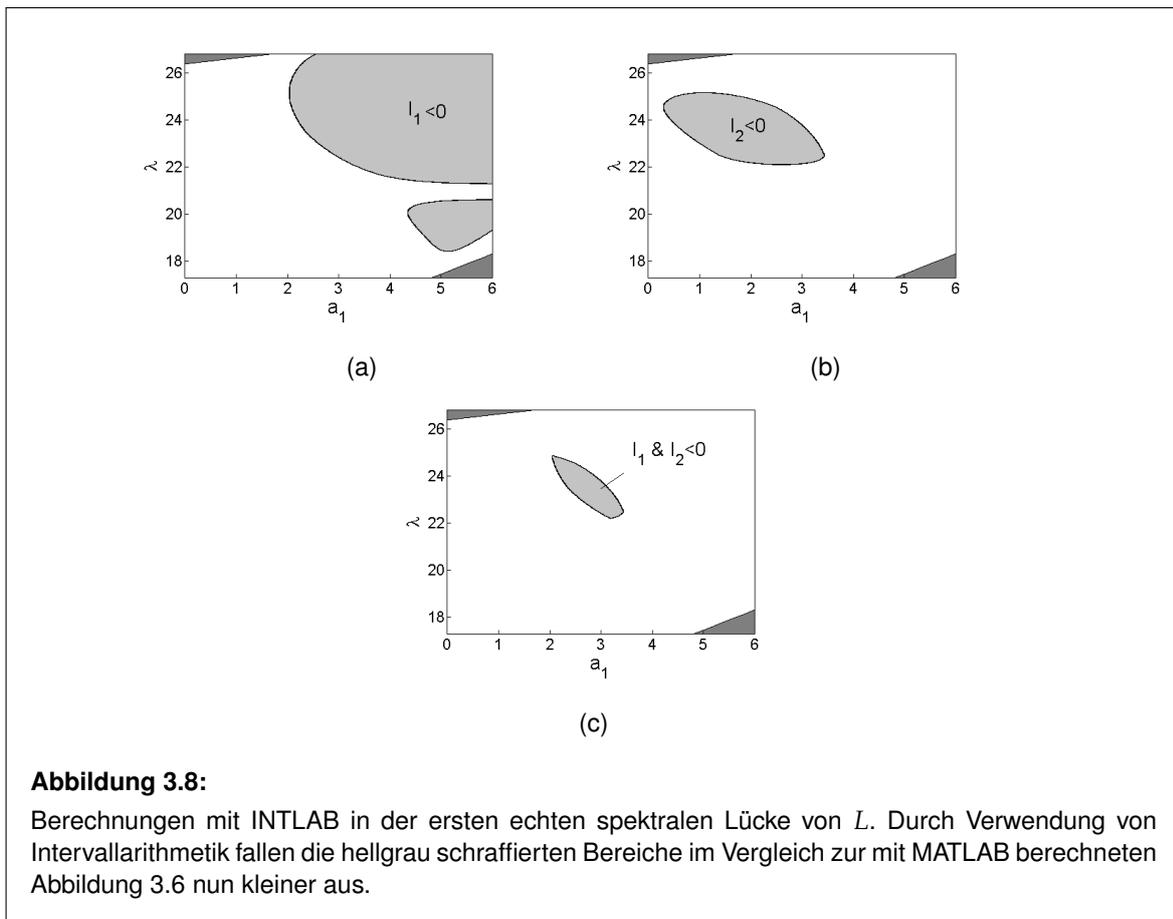
Abschließend wurde untersucht, wie sich eine Erhöhung der Differenz  $|a_i - b_i|$  auf die Ergebnisse

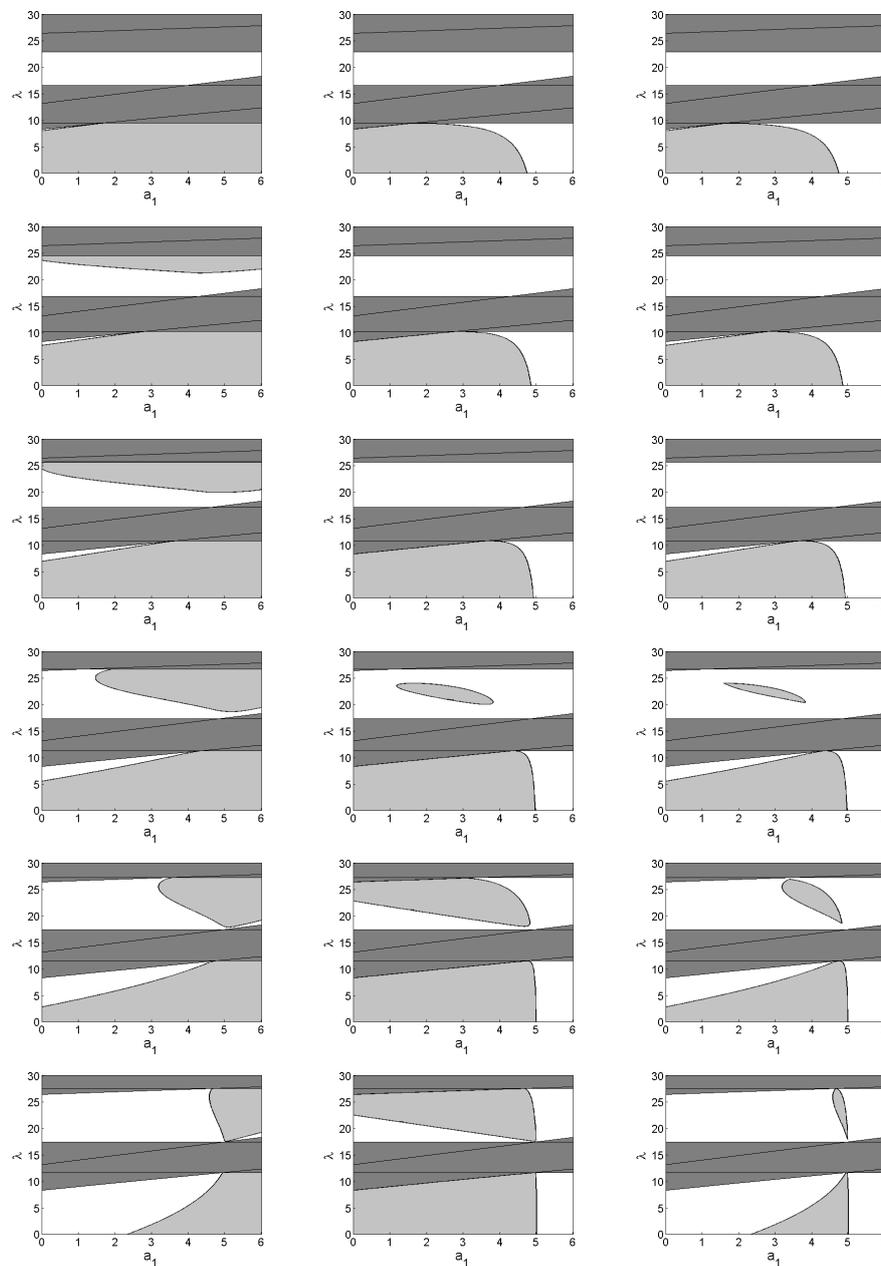
auswirkt, vgl. Abbildung 3.10. Hier lieferten die Berechnungen mit MATLAB sogar die Existenz von starken dualen Grundzuständen in der zweiten Spektrallücke von  $L$ . Auf eine Verifizierung der Ergebnisse mit INTLAB wurde wegen des hohen Rechenaufwandes hier jedoch verzichtet, d.h. – ebenso wie für die in Abbildung 3.9 dargestellten Resultate – kann die Existenz eines starken Grundzustandes in den entsprechenden Bereichen durch die numerischen Berechnungen nicht als gesichert gelten!





**Abbildung 3.7:** Berechnungen mit INTLAB für die semiinfiniten Lücke.



**Abbildung 3.9:**

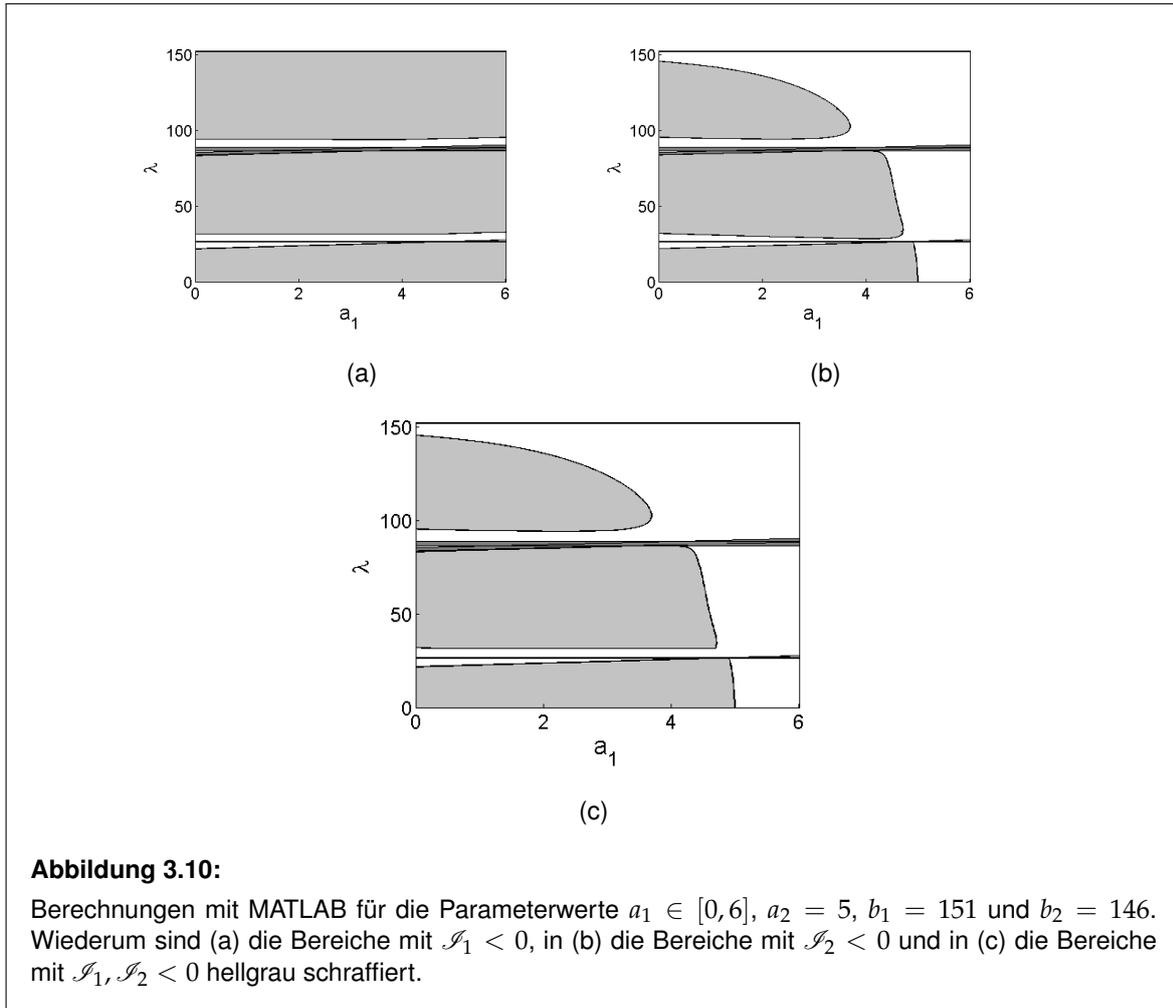
Linke Spalte: Bereiche für  $\mathcal{I}_1 < 0$ . Mittlere Spalte: Bereiche für  $\mathcal{I}_2 < 0$ .

Rechte Spalte: Bereiche für  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 < 0$ .

Zeile 1:  $b_2 = 15$ . Zeile 2:  $b_2 = 17$ . Zeile 3:  $b_2 = 18.5$ . Zeile 4:  $b_2 = 19.75$ . Zeile 5:  $b_2 = 20.5$ . Zeile 6:  $b_2 = 20.9$ .

Weitere Parameter:  $a_2 = 5$ ,  $b_2 = 21$ ,  $a_1 \in [0, 6]$ ,  $\lambda \in [0, 30]$ .

Berechnungen mit MATLAB.



## Anhang A

# (Echte) Grundzustände des Grenzflächenproblems

Im Anhang wollen wir nun das Problem der Suche nach echten Grundzuständen der nichtlinearen Schrödingergleichung

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

im Grenzflächenfall diskutieren und zeigen, wie man unter den Voraussetzungen (H1) bis (H3) ein zu Satz 2.7.1 analoges Existenzkriterium auch für Grundzustände erhält.

### A.1 Die verallgemeinerte Nehari-Mannigfaltigkeit

Wir betrachten den Schrödingeroperator

$$L = -\Delta + V(x)$$

zum Grenzflächenpotenzial  $V$  sowie die Operatoren

$$L_i = -\Delta + V_i(x) \quad \text{für } i = 1, 2$$

mit den periodischen Potenzialen  $V_i$  auf  $H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  betrachten. Grundzustände von (A.1) suchen wir in  $H := H^1(\mathbb{R}^n)$ .  $L$  und  $L_i$  besitzen nach Satz 2.1.5 die Spektraldarstellungen

$$f(L) = \int_{\sigma} f(\lambda) dE(\lambda) \quad \text{bzw.} \quad f(L_i) = \int_{\sigma_i} f(\lambda) dE_i(\lambda),$$

für jede messbare und beschränkte Funktion  $f : \sigma(L) \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $f : \sigma(L_i) \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir setzen

$$\sigma^{\pm} := \{\lambda \in \sigma(L) : \lambda \geq 0\} \quad \text{sowie} \quad \sigma_i^{\pm} := \{\lambda \in \sigma(L_i) : \lambda \geq 0\}$$

und erklären die Operatoren

$$P^\pm := \mathbb{1}_{\sigma^\pm}(L) = \int_{\sigma^\pm} E(d\lambda) \quad \text{ sowie } \quad P_i^\pm := \mathbb{1}_{\sigma_i^\pm}(L_i) = \int_{\sigma_i^\pm} E_i(d\lambda),$$

Schließlich betrachten wir die Räume

$$H^\pm := P^\pm(H) \quad \text{ bzw. } \quad H_i^\pm := P_i^\pm(H).$$

Dann erhalten wir unmittelbar die folgende

**Proposition A.1.1.**

(a) Es gilt

$$H := H^1(\mathbb{R}^n) = H^+ \oplus H^- = H_1^+ \oplus H_1^- = H_2^+ \oplus H_2^-.$$

Insbesondere sind die Operatoren  $P^\pm$  und  $P_i^\pm$  Orthogonalprojektionen.

(b)  $L$  ist positiv definit auf  $H^+$  und negativ definit auf  $H^-$ ;  $L_i$  ist positiv definit auf  $H_i^+$  und negativ definit auf  $H_i^-$ .

(c) Es existieren Skalarprodukte  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bzw.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$  auf  $H$ , so dass die zugehörigen Normen  $\| \cdot \| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  bzw.  $\| \cdot \|_i := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_i}$  äquivalent zur Standardnorm  $\| \cdot \|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$  sind. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \pm \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) \, dx \quad \text{für alle } u \in H^\pm \quad \text{bzw.} \\ \|u\|_i^2 &= \pm \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^2 + V_i(x)u^2) \, dx \quad \text{für alle } u \in H_i^\pm. \end{aligned}$$

**Definition A.1.2.** Für  $u \in H$  schreiben wir kurz  $u^\pm := P^\pm u$  (wohlgemerkt für  $P^\pm$ , nicht für  $P_i^\pm$ !).

Schwache Lösungen  $u \in H$  der nichtlinearen Schrödingergleichungen

$$L_i u = \Gamma_i(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{A.2}$$

mit den periodischen Koeffizienten  $V_i$  und  $\Gamma_i$  entsprechen den kritischen Punkten der Funktionale  $I_i \in C^2(H, \mathbb{R})$  mit

$$\begin{aligned} I_i(u) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V_i(x)u^2) - \frac{1}{p+1} \Gamma_i(x)|u|^{p+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|P_i^+ u\|_i^2 - \|P_i^- u\|_i^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_i(x)|u|^{p+1} dx \quad \text{für alle } u \in H. \end{aligned}$$

Analog entsprechen Lösungen der nichtlinearen Schrödingergleichung (A.1) vom Grenzflächen-Typ den kritischen Punkten des Funktionals  $I \in C^2(H, \mathbb{R})$  mit

$$\begin{aligned} I(u) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) - \frac{1}{p+1} \Gamma(x)|u|^{p+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|u^+\|^2 - \|u^-\|^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)|u|^{p+1} dx \quad \text{für alle } u \in H. \end{aligned}$$

Die Ableitungen von  $I$  erhalten wir mit den üblichen Rechnungen zu

$$\begin{aligned} I'(u)\varphi &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla u \cdot \nabla \varphi + V(x)u\varphi - \Gamma(x)|u|^{p-1}u\varphi \right) dx \\ &= \langle u^+, \varphi \rangle - \langle u^-, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)|u|^{p-1}u\varphi dx \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

für alle  $u, \varphi \in H$  sowie

$$I''(u)[\psi, \varphi] = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + V(x)\psi\varphi - p\Gamma(x)|u|^{p-1}\psi\varphi \right) dx$$

für alle  $u, \varphi, \psi \in H$ . Für  $I_i$  ergeben sich die analogen Formeln. Nach dem auf Alexander Pankov zurückgehenden Satz 1.2.3 implizieren die Voraussetzungen (H1) bis (H3) die Existenz eines Grundzustandes  $u_i^*$  der nichtlinearen Schrödingergleichung (A.2) mit den periodischen Koeffizienten  $V_i$  und  $\Gamma_i$ .  $u_i^*$  löst das Variationsproblem

$$c_i := \min\{I_i(u) : u \in \mathcal{M}_i\} \quad (\text{A.4})$$

auf der verallgemeinerten Nehari-Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M}_i := \{u \in H \setminus \{0\} : I'_i(u)u = 0 \text{ und } I'_i(u)\varphi = 0 \text{ für alle } \varphi \in H_i^-\} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Wir betrachten für das Grenzflächenproblem nun die verallgemeinerte Nehari-Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M} := \{u \in H \setminus \{0\} : I'(u)u = 0 \text{ und } I'(u)\varphi = 0 \text{ für alle } \varphi \in H^-\}.$$

und das Variationsproblem

$$c := \min\{I(u) : u \in \mathcal{M}\}. \quad (\text{A.5})$$

Auf den Zusammenhang zwischen den Variationsproblem (A.5) und der Suche nach Grundzuständen von (A.1) gehen wir im späteren Verlauf dieses Anhangs ein. Als nächstes zeigen wir einige wichtige Abschätzungen für das Funktional  $I$  auf der verallgemeinerten Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , die sich in [Pan05] bereits im rein periodischen Fall für  $I_i$  und  $\mathcal{M}_i$  finden.

**Lemma A.1.3.** *Es existieren  $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$ , sodass*

$$\eta_1 \leq \|u\| \leq \eta_2 I(u)^{\frac{p}{p+1}} \quad \text{und} \quad I(u) \geq \eta_3 \quad \text{für alle } u \in \mathcal{M}.$$

*Dieselbe Aussage gilt auch für die Funktionale  $I_1$  und  $I_2$  an der Stelle von  $I$ .*

**BEWEIS:** Der in [Pan05] von Alexander Pankov gegebene Beweis verwendet keinerlei Periodizitätseigenschaften. Wir wollen ihn der Vollständigkeit halber wiederholen. Für alle  $u \in \mathcal{M}$  ist

$$I(u) = I(u) - \frac{1}{2}I'(u)u = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)|u|^{p+1} dx \geq \kappa \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1}, \quad (\text{A.6})$$

wobei  $\kappa := \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \text{ess inf}_{x \in \mathbb{R}^n} \Gamma(x) > 0$ . Insbesondere,  $I \geq 0$  auf  $\mathcal{M}$ . Weiterhin gilt

$$0 = I'(u)u^\pm = \langle u^+, u^\pm \rangle - \langle u^-, u^\pm \rangle - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x)|u|^{p-1}uu^\pm dx$$

und damit

$$\begin{aligned} \|u^\pm\|^2 &\leq \|\Gamma\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p |u^\pm| \, dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p \|u^\pm\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p \|u^\pm\|, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

wobei wir im letzten Schritt den Sobolev'schen Einbettungssatz verwendet haben, aus dem sich auch die Konstante  $C > 0$  ergibt. (A.7) liefert nun

$$\|u^\pm\| \leq \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p \stackrel{(\text{A.6})}{\leq} C \|\Gamma\|_{L^\infty} \left( \frac{I(u)}{\kappa} \right)^{\frac{p}{p+1}}$$

und mit  $r := \frac{p+1}{p}$  und  $\eta_2 := 2\kappa^{-1/r} C \|\Gamma\|_{L^\infty}$  erhalten wir

$$\|u\| \leq \|u^+\| + \|u^-\| \leq \eta_2 I(u)^{1/r}. \quad (\text{A.8})$$

Aus (A.7) und dem Sobolev'schen Einbettungssatz folgt ferner

$$\|u^\pm\|^2 \leq C' \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u\|^p \|u^\pm\|$$

mit einer Konstanten  $C' > 0$  und damit

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2 \leq C' \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u\|^p (\|u^+\| + \|u^-\|) \leq 2C' \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u\|^{p+1}.$$

Also ist

$$\|u\| \geq (2C' \|\Gamma\|_{L^\infty})^{1-p} =: \eta_1. \quad (\text{A.9})$$

und aus (A.8) folgt schließlich

$$I(u) \geq \eta_2^{-r} \|u\|^r \stackrel{(\text{A.9})}{\geq} \eta_2^{-r} \eta_1^r =: \eta_3$$

und damit die Behauptung. ■

Für Untersuchung des Variationsproblems (A.5) ist nun zuerst sicherzustellen, dass  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ . Ähnlich dem Vorgehen in Kapitel 2.6 werden wir dazu einen Grundzustand  $u_1^*$  der nichtlinearen Schrödingergleichung mit den periodischen Koeffizienten  $V_1$  und  $\Gamma_1$  einer Idee aus [ACG99] folgend weit von Grenzfläche  $x_1 = 0$  weg nach rechts verschieben, d.h. wir betrachten die Folge  $u_k := u_1^*(\cdot - ke_1)$  und wollen diese für große Werte von  $k \in \mathbb{N}$  auf die verallgemeinerte Nehari-Mannigfaltigkeit abbilden.

Dafür ist eine einfache Skalierung  $s_k u_k$  wie im Falle der klassischen Nehari-Mannigfaltigkeit in Kapitel 2.6 nicht mehr ausreichend, weil auf diese Weise die Bedingung  $I'(s_k u_k) \varphi = 0$  für alle  $\varphi \in H^-$  nicht erfüllt werden kann.

Wir benötigen stattdessen eine spezielle Form des lokalen Umkehrsatzes in Banachräumen, die wir im folgenden Abschnitt beweisen wollen.

## A.2 Einschub: Der Satz über implizit definierte Funktionen

In diesem Abschnitt seien  $X, Y$  und  $Z$  Banachräume. Wir beweisen den Satz über implizit definierte Funktionen in der folgenden Fassung:

**Satz A.2.1 (Satz über implizit definierte Funktionen).** Für  $(x_0, y_0) \in X \times Y$  und  $r > 0$  sei  $B := B_r(x_0, y_0)$  und  $f : B \rightarrow Z$  eine stetige Abbildung. Ferner existieren die partiellen Fréchet-Ableitungen  $\partial_X f$  und  $\partial_Y f$  von  $f$  bezüglich  $X$  und  $Y$  und es gelte:

(i)  $\partial_X f(x_0, y_0)$  ist bijektiv.

(ii) Es existieren Konstanten  $C_1, \alpha, \beta > 0$ , sodass

$$\|\partial_X f(x_0, y_0) - \partial_X f(x, y)\| \leq C_1 \left( \|x_0 - x\|^\alpha + \|y_0 - y\|^\beta \right) \quad \text{für alle } (x, y) \in B.$$

(iii) Es gelte  $\|\partial_Y f(x, y)\| \leq C_2$  für alle  $(x, y) \in B$  mit einer Konstanten  $C_2 > 0$ .

(iv)  $f(x_0, y_0) = 0$ .

Weiter seien  $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \|\partial_X f(x_0, y_0)^{-1}\|^{-1}$  und  $\delta, \rho > 0$  gegeben mit

$$\delta + \rho \leq r, \quad \delta^\alpha + \rho^\beta \leq \frac{\varepsilon}{C_1}, \quad \text{sowie} \quad \rho \leq \frac{\varepsilon \delta}{C_2}. \quad (\text{A.10})$$

Dann existiert eine stetige Abbildung  $\xi : B_\rho(y_0) \rightarrow B_\delta(x_0)$  mit

$$\xi(y_0) = x_0 \quad \text{und} \quad f(\xi(y), y) = 0 \quad \text{für alle } y \in B_\rho(y_0).$$

Diese Abbildung  $\xi$  ist in  $B_\delta(x_0) \times B_\rho(y_0)$  eindeutig bestimmt.

**BEWEIS:** Die stetige Invertierbarkeit von  $A := \partial_X f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Z)$  folgt aus (i) und dem Satz von der stetigen Inversen, siehe [Heu06, Nr. 39.4]. Da  $\rho + \delta \leq r$ , ist  $B_\delta(x_0) \times B_\rho(y_0) \subset B$ . Für festes  $y \in \overline{B_\rho(y_0)}$  betrachten wir nun die Abbildung

$$T_y : \overline{B_\delta(x_0)} \rightarrow X, \quad T_y(x) = x - A^{-1}f(x, y).$$

$T_y$  ist Fréchet-differenzierbar mit  $T_y'(x) = I - A^{-1}\partial_X f(x, y)$  und es gilt

$$\begin{aligned} \|T_y'(x)\| &= \|I - A^{-1}\partial_X f(x, y)\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|\partial_X f(x_0, y_0) - \partial_X f(x, y)\| \\ &\leq \frac{C_1}{2\varepsilon} \left( \|x - x_0\|^\alpha + \|y - y_0\|^\beta \right) \leq \frac{C_1}{2\varepsilon} (\delta^\alpha + \rho^\beta) \stackrel{(\text{A.10})}{\leq} 12 \end{aligned}$$

für alle  $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$ . Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir dann für alle  $x_1, x_2 \in \overline{B_\delta(x_0)}$ :

$$\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\| \int_0^1 \|T_y'(x_1 + t(x_2 - x_1))\| dt \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|. \quad (\text{A.11})$$

Also ist  $T_y$  eine Kontraktion. Mit  $f(x_0, y_0) = 0$  folgt weiterhin

$$\begin{aligned} T_y(x_0) - x_0 &= -A^{-1}f(x_0, y) = A^{-1}[f(x_0, y_0) - f(x_0, y)] \\ &= \int_0^1 A^{-1}\partial_Y f(x_0, y_0 + t(y_0 - y))(y_0 - y) dt \end{aligned}$$

und aus der dritten Bedingung an  $\rho$  und  $\delta$  in (A.10) erhalten wir

$$\|T_y(x_0) - x_0\| \leq \|A^{-1}\| \sup_{z \in \overline{B_\rho(y_0)}} \|\partial_Y f(x_0, z)\| \|y_0 - y\| \leq \frac{C_2}{2\varepsilon} \rho \leq \frac{\delta}{2}.$$

Für alle  $x \in \overline{B_\delta(x_0)}$  gilt dann (A.10):

$$\|T_y(x) - x_0\| \leq \|T_y(x) - T_y(x_0)\| + \|T_y(x_0) - x_0\| \leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Also ist  $T_y$  eine Selbstabbildung von  $\overline{B_\delta(x_0)}$  für jedes  $y \in \overline{B_\rho(y_0)}$  und aus dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes  $\xi = \xi(y) \in \overline{B_\delta(x_0)}$  von  $T_y$  für jedes  $y \in \overline{B_\rho(y_0)}$ , d.h.

$$f(\xi(y), y) = 0 \quad \text{für alle } y \in \overline{B_\rho(y_0)}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung  $\xi : \overline{B_\rho(y_0)} \rightarrow \overline{B_\delta(x_0)}$ ,  $y \mapsto \xi(y)$  stetig ist. Dazu seien  $y_1, y_2 \in \overline{B_\rho(y_0)}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\xi(y_1) - \xi(y_2)\| &= \|T_{y_1}(\xi(y_1)) - T_{y_2}(\xi(y_2))\| \\ &\leq \|T_{y_1}(\xi(y_1)) - T_{y_1}(\xi(y_2))\| + \|T_{y_1}(\xi(y_2)) - T_{y_2}(\xi(y_2))\| \\ &\stackrel{(A.11)}{\leq} \frac{1}{2}\|\xi(y_1) - \xi(y_2)\| + \|T_{y_1}(\xi(y_2)) - T_{y_2}(\xi(y_2))\| \end{aligned}$$

und aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\xi(y_1) - \xi(y_2)\| &\leq 2\|T_{y_1}(\xi(y_2)) - T_{y_2}(\xi(y_2))\| \leq 2\|A^{-1}\| \|f(\xi(y_2), y_2) - f(\xi(y_2), y_1)\| \\ &\leq 2\|A^{-1}\| \|y_2 - y_1\| \int_0^1 \|\partial_Y f(\xi(y_2), y_1 + t(y_2 - y_1))\| dt \\ &\leq 2C_2\|A^{-1}\| \|y_2 - y_1\|, \end{aligned}$$

was die Stetigkeit von  $\xi$  beweist. ■

Aus dem Satz über implizit definierte Funktionen in der Version von Satz A.2.1 ergibt sich nun ohne Mühe die folgende Version des lokalen Umkehrsatzes:

**Korollar A.2.2 (Lokaler Umkehrsatz).** Für  $x_0 \in X$  und  $r > 0$  sei  $B := B_r(x_0)$ . Die Abbildung  $f \in C(B, Z)$  sei Gâteaux-differenzierbar mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Die Gâteaux-Ableitung  $df(x_0)$  sei bijektiv.
- (ii) Es existieren Konstanten  $C, \alpha > 0$ , sodass

$$\|df(x_0) - df(x)\| \leq C\|x_0 - x\|^\alpha \quad \text{für alle } x \in B.$$

(iii)  $y_0 = f(x_0)$ .

Ferner seien  $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \|df(x_0)^{-1}\|^{-1}$  und  $\rho, \delta > 0$  gegeben mit

$$\delta + \rho \leq r, \quad \delta^\alpha + \rho \leq \frac{\varepsilon}{C}, \quad \text{sowie} \quad \rho \leq \varepsilon\delta. \quad (\text{A.12})$$

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung  $\zeta : B_\rho(y_0) \rightarrow B_\delta(x_0)$  mit

$$f(\zeta(y)) = y \quad \text{für alle } y \in B_\rho(y_0).$$

BEWEIS: Man wende Satz A.2.1 auf die Funktion  $\varphi : B \times Y \rightarrow Y$ ,  $(x, y) \mapsto f(x) - y$  an. ■

### A.3 Ein Projektionsproblem

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Bemerkungen zu Notationen, die wir im Folgenden verwenden werden:

**Bemerkung & Definition A.3.1.** Es sei  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein beliebiger Hilbertraum,  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $X$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional und  $x_0 \in \Omega$ .

(a) Besitzt  $f$  in  $x_0$  eine Gâteaux-Ableitung  $df(x_0) \in X^*$ , so gibt es nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz genau ein  $\hat{x}_0 \in X$ , sodass

$$df(x_0)y = \langle \hat{x}_0, y \rangle \quad \text{für alle } y \in X.$$

Wir schreiben dann  $\hat{x}_0 =: \nabla f(x_0)$  und nennen  $\nabla f(x_0)$  den Gradienten von  $f$  in  $x_0$ .

(b) Besitzt  $f$  in  $x_0$  eine zweite Gâteaux-Ableitung  $d^2f(x_0) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , so existiert nach dem Satz von Lax-Milgram ein eindeutig bestimmter Operator  $A_0 \in \mathcal{L}(X)$  mit

$$d^2f(x_0)(x, y) = \langle A_0x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Wir bezeichnen  $A_0 =: \nabla^2 f(x_0)$  als den zweiten Gradienten von  $f$  in  $x_0$ . Nach [Zei95, Chapter 4] ist  $\nabla^2 f(x_0)$  symmetrisch.

**Bemerkung A.3.2.** Für alle  $u \in \mathcal{M}$  ist  $u^+ \neq 0$ .

BEWEIS: Angenommen es wäre  $u^+ = 0$  für  $u \in \mathcal{M}$ . Da  $I'(u)u = 0$ , folgte dann aus (A.3)

$$\|u^-\|^2 = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u|^{p+1} dx < 0,$$

ein Widerspruch! ■

Die verallgemeinerte Nehari-Mannigfaltigkeit können wir nun als Nullstellenmenge einer  $C^1$ -Abbildung darstellen. Dafür betrachten wir die Abbildung  $G : H \setminus H^- \rightarrow H$  mit

$$G(u) = \langle \nabla I(u), u^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^2} + \nabla I(u)^- \quad \text{für alle } u \in H \setminus H^-. \quad (\text{A.13})$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
G(u) = 0 &\iff \langle \nabla I(u), u^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^2} = \nabla I(u)^- \in H^+ \cap H^- = \{0\} \\
&\iff \langle \nabla I(u), u^+ \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \nabla I(u)^- = 0 \\
&\iff \langle \nabla I(u), u \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \nabla I(u), \varphi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in H^- \\
&\iff u \in \mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Ferner ist  $G \in C^1(H \setminus H^-, H)$  und es gilt

$$\begin{aligned}
G'(u)\varphi &= \langle \nabla^2 I(u)\varphi, u^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^2} + \langle \nabla I(u), \varphi^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^2} + \langle \nabla I(u), u^+ \rangle \frac{\varphi^+}{\|u^+\|^2} \\
&\quad - 2\langle u^+, \varphi^+ \rangle \langle \nabla I(u), u^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^4} + (\nabla^2 I(u)\varphi)^-.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

für alle  $u \in H \setminus H^-$  und alle  $\varphi \in H$ .

Es sei nun  $u_1^* \in \mathcal{M}_1$  ein Grundzustand der nichtlinearen Schrödingergleichung

$$-\Delta u + V_1(x)u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

mit den periodischen Koeffizienten  $V_1$  und  $\Gamma_1$  und

$$u_k := u_1^*(\cdot - ke_1) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann ist  $u_k \in \mathcal{M}_1$  für alle  $t \in \mathbb{N}$ . Ziel dieses Abschnitts ist es,  $u_k$  in geeigneter Weise auf  $\mathcal{M}$  zu projizieren.

**Bemerkung A.3.3.** Nach Satz 1.2.2 existiert  $\alpha > 0$ , sodass wir wie in Lemma 2.6.2 die Abschätzung

$$\|u_k\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha e^{-\alpha k} \quad \text{für alle } r \geq 1 \text{ und alle } k \in \mathbb{N} \tag{A.15}$$

mit einer Konstanten  $C_\alpha > 0$  erhalten.

Das folgende Lemma besagt nun, dass die Funktionen  $u_k$  für große  $k \in \mathbb{N}$  nahe an  $\mathcal{M}$  liegen:

**Lemma A.3.4.**  $G(u_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Bevor wir mit dem Beweis von Lemma A.3.4 beginnen klären wir noch einige Schreibweisen, die im folgenden Kontext immer wieder auftauchen werden.

**Notation.**

- (a) Ist  $X$  ein abgeschlossener Unterraum von  $H$ , so bezeichnen wir mit  $P_X \in \mathcal{L}(H)$  die Orthogonalprojektion von  $H$  auf  $X$ .
- (b) Wir schreiben  $\delta V(x) = V(x) - V_1(x)$  und  $\delta \Gamma(x) = \Gamma(x) - \Gamma_1(x)$ .
- (c) Schließlich setzen wir  $X_k := \text{span}\{u_k\}$ .

**BEWEIS VON LEMMA A.3.4:** Aus (A.13) erhalten wir

$$G(u_k) = P_{X_k} \nabla I(u_k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und da  $\|P_{X_k}\| = 1$ , genügt es somit zu zeigen, dass  $\nabla I(u_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\nabla I(u_k)\| &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla u_k \cdot \nabla \varphi + V(x)u_k\varphi - \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k\varphi \right) dx \right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla u_k \cdot \nabla \varphi + V_1(x)u_k\varphi - \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k\varphi \right) dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} \delta V(x)u_k\varphi dx \right| \\ &\stackrel{u_k \in \mathcal{M}_1}{=} \sup_{\|\varphi\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \Gamma_1(x)|u_k|^{p-1}u_k\varphi - \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k\varphi \right) dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} \delta V(x)u_k\varphi dx \right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}_-^n} \delta \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k\varphi dx + \int_{\mathbb{R}_-^n} \delta V(x)u_k\varphi dx \right|. \end{aligned}$$

Mit den Ungleichungen von Hölder und Sobolev folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|\nabla I(u_k)\| &\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \left( \|\delta \Gamma\|_\infty \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}_-^n)}^p \|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}_-^n)} + \|\delta V\|_\infty \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}_-^n)} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_-^n)} \right) \\ &\leq C \left( \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}_-^n)}^p + \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}_-^n)} \right) \\ &\stackrel{(A.15)}{=} \mathcal{O}(e^{-\alpha k}) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. ■

Unser Ziel ist es nun, den lokalen Umkehrsatz in der Version von Korollar A.2.2 auf  $G$  in der Stelle  $u_k$  anzuwenden. Dafür sind seine Voraussetzungen (i) und (ii) zu prüfen. Dafür benötigen wir noch das folgende Lemma:

**Lemma A.3.5.** *Zu jedem  $\delta > 0$ , existiert  $k_\delta \in \mathbb{N}$ , sodass  $\|u_k^+\| \geq \delta$  für alle  $k \geq k_\delta$ .*

BEWEIS: Andernfalls finden wir eine Teilfolge von  $(u_k)$ , entlang derer  $u_k^+ \rightarrow 0$  in  $H$  und damit

$$\|u_k\|^2 = \|u_k^+\|^2 + \|u_k^-\|^2 = - \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla u_k^-|^2 + V(x)(u_k^-)^2 \right) dx + o(1)$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Da  $u_k = u_k^+ + u_k^- = u_k^- + o(1)$ , erhalten wir für  $k \rightarrow \infty$  weiterhin

$$\begin{aligned} \|u_k\|^2 &= - \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2 \right) dx + o(1) \\ &\stackrel{u_k \in \mathcal{M}_1}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x)|u_k|^{p+1} dx - \int_{\mathbb{R}_-^n} \delta V(x)u_k^2 dx + o(1) \\ &\stackrel{(A.15)}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x)|u_k|^{p+1} dx + o(1) \\ &\leq - \operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^n} \Gamma \|u_k\|_{L^{p+1}}^{p+1} + o(1) = - \operatorname{ess\,inf}_{\mathbb{R}^n} \Gamma \|u_1^*\|_{L^{p+1}}^{p+1} + o(1). \end{aligned}$$

Für große  $k \in \mathbb{N}$  wäre somit  $\|u_k\|^2 < 0$ , ein Widerspruch! ■

Als erstes zeigen wir in der folgenden Proposition die Invertierbarkeit der partiellen Fréchet-Ableitung  $\partial_{X_k} G(u_k)$ :

**Proposition A.3.6.** *Es existieren eine von  $k \in \mathbb{N}$  unabhängige Konstante  $a > 0$  und  $k_1 \in \mathbb{N}$ , sodass*

$$(a) \quad \langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle \leq -a \|\varphi\|^2 \text{ für alle } \varphi \in X_k,$$

$$(b) \quad \partial_{X_k} G(u_k)^{-1} \in \mathcal{L}(X_k) \text{ und } \|\partial_{X_k} G(u_k)^{-1}\| \leq a^{-1}$$

für alle  $k \geq k_1$ .

BEWEIS: Die Aussage von Teil (b) folgt unmittelbar aus Teil (a) und dem Satz von Lax-Milgram, siehe [Alt12, Satz 4.2]. Zum Beweis von Teil (a) sei nun  $k \in \mathbb{N}$  fest. Dann gilt:

$$\partial_{X_k} G(u_k) = [P_{X_k} \nabla I(u_k)]' \stackrel{(A.14)}{=} P_{X_k} \nabla^2 I(u_k). \quad (\text{A.16})$$

Weiter sei  $\varphi = \mu u_k + \psi \in X_k$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\psi \in H^-$ . Aus (A.16) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle &= \langle \nabla^2 I(u_k) \varphi, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla \varphi|^2 + V(x) \varphi^2 - p \Gamma(x) |u_k|^{p-1} \varphi^2 \right) dx \\ &= \mu^2 K_1 + 2\mu K_2 + K_3, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla u_k|^2 + V(x) u_k^2 - p \Gamma(x) |u_k|^{p+1} \right) dx, \\ K_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla u_k \cdot \nabla \psi + V(x) u_k \psi - p \Gamma(x) |u_k|^{p-1} u_k \psi \right) dx, \\ K_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla \psi|^2 + V(x) \psi^2 - p \Gamma(x) |u_k|^{p-1} \psi^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Wir betrachten diese Integrale getrennt. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla u_k|^2 + V_1(x) u_k^2 \right) dx - p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x) |u_k|^{p+1} dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) u_k^2 dx - p \int_{\mathbb{R}^n} \delta \Gamma(x) |u_k|^{p+1} dx \\ &\stackrel{u_k \in \mathcal{M}_1}{=} (1-p) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x) |u_k|^{p+1} dx + \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) u_k^2 dx - p \int_{\mathbb{R}^n} \delta \Gamma(x) |u_k|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla u_k \cdot \nabla \psi + V_1(x) u_k \psi \right) dx - p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x) |u_k|^{p-1} u_k \psi dx, \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) u_k \psi dx - p \int_{\mathbb{R}^n} \delta \Gamma(x) |u_k|^{p-1} u_k \psi dx \\ &\stackrel{u_k \in \mathcal{M}_1}{=} (1-p) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x) |u_k|^{p-1} u_k \psi dx + \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) u_k \psi dx - p \int_{\mathbb{R}^n} \delta \Gamma(x) |u_k|^{p-1} u_k \psi dx \end{aligned}$$

und schließlich, weil  $\psi \in H^-$ ,

$$K_3 = -\|\psi\|^2 - p \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u_k|^{p-1} \psi^2 dx.$$

Man beachte im Folgenden, dass

$$(p-1)\Gamma_1(x) + p\delta\Gamma(x) = (p-1)\Gamma(x) + \delta\Gamma(x).$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} A_k &:= [(p-1)\Gamma(x) + \delta\Gamma(x)] |u_k|^{p+1}, \\ B_k &:= p\Gamma(x) |u_k|^{p-1}, \\ C_k &:= [(p-1)\Gamma(x) + \delta\Gamma(x)] |u_k|^{p-1} u_k. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle = -\|\psi\|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} (\mu^2 A_k + 2\mu\psi C_k + \psi^2 B_k) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) (\mu^2 u_k^2 + 2\mu u_k \psi) dx.$$

Für die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^n : u_k(x) = 0\}$  schreiben wir kurz  $\{u_k \neq 0\}$  und analog  $\{B_k \neq 0\}$ . Da  $\{u_k \neq 0\} = \{B_k \neq 0\}$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\mu^2 A_k + 2\mu\psi C_k + \psi^2 B_k) dx &= \int_{\{u_k \neq 0\}} (\mu^2 A_k + 2\mu\psi C_k + \psi^2 B_k) dx \\ &= \int_{\{u_k \neq 0\}} \mu^2 \left( A_k - \frac{C_k^2}{B_k} \right) dx + \underbrace{\int_{\{u_k \neq 0\}} \left( \sqrt{B_k} \psi + \frac{C_k \mu}{\sqrt{B_k}} \right)^2 dx}_{\geq 0} \\ &\geq \int_{\{u_k \neq 0\}} \mu^2 \left( A_k - \frac{C_k^2}{B_k} \right) dx. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} A_k - \frac{C_k^2}{B_k} &= [(p-1)\Gamma(x) + \delta\Gamma(x)] |u_k|^{p+1} \frac{\Gamma(x) - \delta\Gamma(x)}{p\Gamma(x)} \\ &= \frac{p-1}{p} \Gamma_1(x) |u_k|^{p+1} + \delta\Gamma(x) \frac{\Gamma_1(x)}{p\Gamma(x)} |u_k|^{p+1} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (\mu^2 A_k + 2\mu\psi C_k + \psi^2 B_k) dx \\ &\geq \mu^2 \frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_1(x) |u_k|^{p+1} dx + \frac{\mu^2}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \delta\Gamma(x) \frac{\Gamma_1(x)}{\Gamma(x)} |u_k|^{p+1} dx \\ &\stackrel{u_k \in \mathcal{M}_1}{\geq} \mu^2 \frac{p-1}{p} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right)^{-1} I_1(u_k) + \frac{\mu^2}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \delta\Gamma(x) \frac{\Gamma_1(x)}{\Gamma(x)} |u_k|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Schließlich folgt daraus mit der Konstante  $\eta_3 > 0$  aus Lemma A.1.3:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (\mu^2 A_k + 2\mu\psi C_k + \psi^2 B_k) \, dx \\ & \geq 2\mu^2 \frac{p+1}{p} \eta_3 + \frac{\mu^2}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \delta\Gamma(x) \frac{\Gamma_1(x)}{\Gamma(x)} |u_k|^{p+1} \, dx. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle & \leq -\|\psi\|^2 - 2\mu^2 \frac{p+1}{p} \eta_3 \\ & \quad - \frac{\mu^2}{p} \int_{\mathbb{R}^n} \delta\Gamma(x) \frac{\Gamma_1(x)}{\Gamma(x)} |u_k|^{p+1} \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) (\mu^2 u_k^2 + 2\mu u_k \psi) \, dx \\ & \leq -\|\psi\|^2 - 2\eta_3 \frac{p+1}{p} \frac{\|\mu u_k\|^2}{1 + \|u_k\|^2} + \varepsilon_k + \delta_k(\psi), \end{aligned}$$

wobei wir

$$\varepsilon_k = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \delta V(x) \mu^2 u_k^2 - \mu^2 \delta\Gamma(x) \frac{\Gamma_1(x)}{p\Gamma(x)} |u_k|^{p+1} \right) \, dx$$

und

$$\delta_k(\psi) = 2\mu \int_{\mathbb{R}^n} \delta V(x) u_k \psi \, dx$$

gesetzt haben. Wir erhalten somit

$$\langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle \leq -\tilde{a} \|\varphi\|^2 + \varepsilon_k + \delta_k(\psi) \quad (\text{A.17})$$

mit

$$\tilde{a} := \min \left\{ 1, \frac{2\eta_3(p+1)}{p(1 + \|u_1^*\|^2)} \right\}.$$

Ferner gilt

$$\varepsilon_k \leq \mu^2 a_k \quad \text{mit} \quad a_k = C \left( \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p+1} + \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \right) \stackrel{(\text{A.15})}{=} \mathcal{O}(e^{-2\alpha k})$$

und einer Konstanten  $C > 0$ , in die nur  $\text{ess inf}_{\mathbb{R}^n} \Gamma$ ,  $\|\Gamma\|_\infty$ ,  $\|\delta V\|_\infty$  und  $p$  eingehen, sowie

$$|\delta_k(\psi)| \leq |\mu| \|\psi\| b_k \quad \text{mit} \quad b_k = \|\delta V\|_\infty \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(e^{-\alpha k}).$$

Aus (A.17) folgt dann:

$$\begin{aligned} \langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle & \leq -\tilde{a} \|\varphi\|^2 + \mu^2 a_k + |\mu| \|\psi\| b_k \\ & \leq -\tilde{a} \|\varphi\|^2 + \left( a_k + \frac{b_k^2}{2} \right) \mu^2 + \frac{b_k^2}{2} \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Nach Lemma A.3.5 existiert zu  $\delta_0 > 0$  nun ein  $k_1 \in \mathbb{N}$ , sodass  $\|u_k^+\|^2 \geq \delta_0$  für alle  $k \geq k_1$ . Damit ergibt sich

$$\langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle \leq -\tilde{a} \|\varphi\|^2 + \left( a_k + \frac{b_k^2}{2} \right) \frac{\|\mu u_k^+\|^2}{\delta_0} + \frac{b_k^2}{2} \|\psi\|^2 \quad \text{für alle } k \geq k_1.$$

Da  $a_k, b_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , können wir  $k_1$  ferner so wählen, dass

$$\frac{1}{\delta_0} \left( a_k + \frac{b_k^2}{2} \right) \leq \frac{\tilde{a}}{4} \quad \text{und} \quad b_k^2 \leq \frac{\tilde{a}}{4} \quad \text{für alle } k \geq k_1,$$

und erhalten somit

$$\langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle \leq -\frac{\tilde{a}}{2} \|\varphi\|^2$$

für alle  $k \geq k_1$ . ■

Als nächstes müssen wir nun zeigen, dass  $G'$  einer lokalen Hölderbedingung genügt. Wir betrachten zunächst  $I'$  und  $I''$ :

**Lemma A.3.7.** *Es seien  $u \in H$  und  $r > 0$ . Dann existieren Konstanten  $L, M, \alpha > 0$ , die nur von  $V, \Gamma, \|u\|$  und  $r$  abhängen, sodass*

- (a)  $\|I'(u) - I'(w)\| \leq L\|u - w\|$ ,
- (b)  $\|I''(u) - I''(w)\| \leq M\|u - w\|^\alpha$

für alle  $w \in B_r(u)$ .

**BEWEIS:** Zu (a). Da  $I \in C^2(H, \mathbb{R})$  kann  $L := \sup_{w \in B_r(u)} \|I''(w)\|$  gewählt werden. Mit Hilfe der Ungleichungen von Hölder und Sobolev erhält man für alle  $w \in B_r(u)$ :

$$\begin{aligned} \|I''(w)\| &= \sup_{\|\varphi\|=\|\psi\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( \nabla \psi \cdot \nabla \varphi + V(x) \varphi \psi - p \Gamma(x) |w|^{p-1} \varphi \psi \right) dx \right| \\ &\leq 1 + \|V\|_\infty + C \|\Gamma\|_\infty \|w\|^{p-1} \\ &\leq 1 + \|V\|_\infty + 2^{p-1} C \|\Gamma\|_\infty \left( r^{p-1} + \|u\|^{p-1} \right). \end{aligned}$$

$L$  hängt also nur von  $V, \Gamma, \|u\|$  und  $r$  ab.

Zu (b). Es sei  $w \in B_r(u)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|I''(u) - I''(w)\| &= \sup_{\|\varphi\|=\|\psi\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} p \Gamma(x) \left( |u|^{p-1} - |w|^{p-1} \right) \varphi \psi dx \right| \\ &= p \|\Gamma\|_\infty \sup_{\|\varphi\|=\|\psi\|=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( |u|^{p-1} - |w|^{p-1} \right) \varphi \psi dx \right|. \end{aligned}$$

Im Folgenden seien  $\varphi, \psi \in H$  mit  $\|\psi\| = \|\varphi\| = 1$ . Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall:  $p \in (1, 2]$ . Bekanntlich gilt  $|x^{p-1} - y^{p-1}| \leq |x - y|^{p-1}$  für alle  $x, y \geq 0$ . Damit erhalten wir

für alle  $u, w \in H$ :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left| (|u|^{p-1} - |w|^{p-1}) \varphi \psi \right| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| |u| - |w| \right|^{p-1} |\varphi \psi| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u - w|^{p-1} |\varphi \psi| dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|u - w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-1} \|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\stackrel{\text{Sobolev}}{\leq} C \|u - w\|^{p-1}.
\end{aligned}$$

2. Fall:  $p \in (2, 2^\#)$ . Nun folgt für  $u \in H$  und  $w \in B_r(u)$  mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \left| (|u|^{p-1} - |w|^{p-1}) \varphi \psi \right| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \left( \int_0^1 \frac{d}{dt} |w + t(u-w)|^{p-1} dt \right) \varphi \psi \right| dx \\
&\leq (p-1) \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |w + t(u-w)|^{p-2} |u-w| |\varphi| |\psi| dt dx \\
&\stackrel{\text{Tonelli}}{=} (p-1) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |w + t(u-w)|^{p-2} |u-w| |\varphi| |\psi| dx dt \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (p-1) \int_0^1 \|w + t(u-w)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-2} \|u-w\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} dt \\
&\stackrel{\text{Sobolev}}{\leq} C(p-1) \left( \int_0^1 \|w + t(u-w)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^{p-2} dt \right) \|u-w\|. \tag{A.18}
\end{aligned}$$

Ferner gilt für alle  $t \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned}
\|w + t(u-w)\|^{p-2} &\leq 2^{p-2} \left( \|w\|^{p-2} + \|u-w\|^{p-2} \right) \leq C_p \left( 2\|u-w\|^{p-2} + \|u\|^{p-2} \right) \\
&\leq C_p \left( 2r^{p-2} + \|u\|^{p-2} \right). \tag{A.19}
\end{aligned}$$

(A.18) und (A.19) liefern dann zusammen die Behauptung. ■

Jetzt zeigen wir die lokale Bedingung für  $G'$ :

**Proposition A.3.8.** *Es existieren Konstanten  $C, r, \alpha > 0$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass*

$$\|G'(u_k) - G'(u)\| \leq C \|u_k - u\|^\alpha \quad \text{für alle } u \in B_r(u_k) \text{ und alle } k \geq k_0.$$

BEWEIS: Nach (A.14) gilt für alle  $\varphi \in H$ :

$$\begin{aligned}
G'(u)\varphi &= \langle \nabla^2 I(u)\varphi, u^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^2} + \langle \nabla I(u), \varphi^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^2} + \langle \nabla I(u), u^+ \rangle \frac{\varphi^+}{\|u^+\|^2} \\
&\quad - 2\langle u^+, \varphi^+ \rangle \langle \nabla I(u), u^+ \rangle \frac{u^+}{\|u^+\|^4} + (\nabla^2 I(u)\varphi)^-.
\end{aligned}$$

Es sei  $\delta > 0$ . Nach Lemma A.3.5 finden wir dann  $k_\delta \in \mathbb{N}$ , sodass  $\|u_k^+\| > \delta$  für alle  $k \geq k_\delta$ . Wir wählen nun  $r \in (0, \delta)$ . Dann gilt für alle  $u \in B_r(u_k)$

$$r > \|u_k - u\| \geq \|u_k^+ - u^+\| \geq \|u_k^+\| - \|u^+\|$$

und damit

$$\|u^+\| > \|u_k^+\| - r > \delta - r > 0 \quad \text{für alle } k \geq k_\delta. \quad (\text{A.20})$$

Daraus folgt nun die Lipschitz-Stetigkeit von  $u \mapsto \frac{u^+}{\|u^+\|^s}$  auf  $B_r(u_k)$  für  $s \in \{2, 4\}$ . Die Lipschitz-Stetigkeit von  $\nabla I$  und die Hölder-Stetigkeit von  $\nabla^2 I$  auf  $B_r(u_k)$  folgen aus Lemma A.3.7. Insbesondere hängen die jeweiligen Lipschitz-Konstanten nur von  $r$  und  $\|u_k\|$  ab. Die Behauptung von Proposition A.3.8 folgt nun, weil  $r$  nur von  $\delta$  aber nicht von  $k$  abhängt und  $\|u_k\| = \|u_1^*\|$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . ■

### „Lösung“ des Projektionsproblems

Wir wählen  $a > 0$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$  gemäß Proposition A.3.6 sowie  $C, r, \alpha > 0$  und  $k_1 \in \mathbb{N}$  gemäß Proposition A.3.8 und setzen  $K_0 := \max\{k_0, k_1\}$ . Dann sind alle Voraussetzungen des lokalen Umkehrsatzes in der Version von Korollar A.2.2 für  $G$  an der Stelle  $u_k$  erfüllt. Wir finden also  $\rho, \delta > 0$  mit

$$\delta + \rho \leq r, \quad \delta^\alpha + \rho \leq \frac{a}{2C}, \quad \text{sowie} \quad \rho \leq \delta a \quad (\text{A.21})$$

und für alle  $k \geq K_0$  eine stetige Abbildung  $\zeta_k : B_\rho(G(u_k)) \rightarrow B_\delta(u_k)$  mit

$$G(\zeta_k(w)) = w \quad \text{für alle } w \in B_\rho(G(u_k)). \quad (\text{A.22})$$

Man beachte, dass aus (A.21) und der  $k$ -Unabhängigkeit der Konstanten  $C, a, r$  und  $\alpha$  auch die  $k$ -Unabhängigkeit der Radien  $\rho$  und  $\delta$  folgt. Die Kugeln  $B_\rho(G(u_k))$  werden für  $k \rightarrow \infty$  also nicht beliebig klein, und da  $G(u_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  nach Lemma A.3.4, können wir  $0 \in B_\delta(G(u_k))$  für  $k \geq K_1$  erreichen, wobei  $K_1 \in \mathbb{N}$  mit  $K_1 \geq K_0$ . Dann setzen wir

$$\mathfrak{p}_k := \zeta_k(0) \quad \text{für alle } k \geq K_1. \quad (\text{A.23})$$

Beachte, dass  $\mathfrak{p}_k \in B_\delta(u_k)$ . Aus (A.22) folgt ferner

$$G(\mathfrak{p}_k) = G(\zeta_k(0)) = 0, \quad (\text{A.24})$$

d.h.  $\mathfrak{p}_k \in \mathcal{M}$ .  $\mathfrak{p}_k$  ist somit die gesuchte „Projektion“ von  $u_k$  auf  $\mathcal{M}$ .

## A.4 Palais-Smale Folgen in $\mathcal{M}$

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, dass  $\mathcal{M} \neq \emptyset$ . Wir können also mit der Untersuchung des Variationsproblems (A.5) beginnen. Zunächst notieren wir den folgenden Spezialfall von Proposition A.3.6:

**Lemma A.4.1.** *Ist  $(u_k)$  eine beliebige beschränkte Folge in  $\mathcal{M}$  und  $X_k := \text{span}\{u_k\} + H^-$ , so existiert eine von  $k \in \mathbb{N}$  unabhängige Konstante  $a > 0$  und  $k_1 \in \mathbb{N}$ , sodass*

$$(a) \quad \langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle \leq -a \|\varphi\|^2 \quad \text{für alle } \varphi \in X_k,$$

$$(b) \partial_{X_k} G(u_k)^{-1} \in \mathcal{L}(X_k) \text{ und } \|\partial_{X_k} G(u_k)^{-1}\| \leq a^{-1}$$

für alle  $k \geq k_1$ .

**BEWEIS:** In Proposition A.3.6 galt  $G(u_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Nun gilt sogar  $G(u_k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Im Beweis von Proposition A.3.6 vereinfachen sich die Argumente dadurch, wie wir im Folgenden skizzieren:

Für festes  $k \in \mathbb{N}$  sei  $\varphi = \mu u_k + \psi$  mit  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\psi \in H^-$ . Da  $u_k$  nun in der Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  liegt, ergeben sich die Integrale  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  im Beweis von Proposition A.3.6 zu

$$\begin{aligned} K_1 &= (1-p) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u_k|^{p+1} dx, \\ K_2 &= (1-p) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u_k|^{p-1} u_k \psi dx, \\ K_3 &= -\|\psi\|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u_k|^{p-1} \psi^2 dx \end{aligned}$$

und mit  $A_k := (p-1)\Gamma(x)|u_k|^{p+1}$ ,  $B_k := p\Gamma(x)|u_k|^{p-1}$  und  $C_k := (p-1)\Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k$  erhält man

$$\langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle = -\|\psi\|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \left( \mu^2 A_k + 2\mu \psi C_k + \psi^2 B_k \right) dx \leq -\|\psi\|^2 - 2\mu^2 \frac{p+1}{p} \eta_3,$$

mit der Konstanten  $\eta_3$  aus Lemma A.1.3. Nach Lemma A.3.5 finden wir ferner zu  $\delta_0 > 0$  eine Zahl  $k_1 \in \mathbb{N}$ , sodass  $\|u_k^+\|^2 \geq \delta_0$  für alle  $k \geq k_1$ . Daraus folgt dann

$$\langle \partial_{X_k} G(u_k) \varphi, \varphi \rangle \leq -\|\psi\|^2 - 2 \frac{p+1}{p} \frac{\|\mu u_k^+\|^2}{\delta_0} \leq -\min \left\{ 1, \frac{2\eta_3(p+1)}{p\delta_0} \right\} \|\varphi\|^2$$

und Lemma A.4.1 ist gezeigt. ■

Mit Hilfe dieses Lemmas zeigen wir nun zunächst die folgende wichtige Proposition, die uns den Zusammenhang zwischen (A.5) und der Suche nach Grundzuständen von (A.1) liefert:

**Proposition A.4.2.** *Jede Lösung  $u_0 \in H \setminus \{0\}$  des Variationsproblems (A.5) ist ein Grundzustand der nichtlinearen Schrödingergleichung (A.1) vom Grenzflächentyp.*

Der Beweis dieser Proposition benutzt die folgende Version der Multiplikatorenregel von Lagrange in Banachräumen, vgl. [Dei85, Theorem 26.1]:

**Satz A.4.3.** *Es seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $x_0 \in X$ ,  $r > 0$  und  $B := B_r(x_0)$ . Ferner betrachten wir die Abbildungen  $f \in C^1(B, \mathbb{R})$  sowie  $\Phi \in C^1(B, Y)$  mit den folgenden Eigenschaften*

- (i)  $\Phi(x_0) = 0$ .
- (ii) Bild  $\Phi'(x_0)$  ist abgeschlossen.
- (iii)  $f(x_0) = \min\{f(x) : x \in B_\rho(x_0) \text{ and } \Phi(x_0) = 0\}$ .

Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $y^* \in Y^*$ , sodass  $(\lambda, y^*) \neq (0, 0)$  und

$$\lambda f'(x_0) + \Phi'(x_0)^* y^* = 0. \tag{A.25}$$

Ferner gilt: ist  $\Phi'(x_0)$  surjektiv, so ist  $\lambda \neq 0$ .

BEWEIS VON PROPOSITION A.4.2: Es sei  $u_0 \in \mathcal{M}$  ein Minimierer von  $I|_{\mathcal{M}}$ . Weiter setzen wir  $X := \text{span}\{u_0\} + H^-$ . Wir schreiben  $X^*$  bzw.  $H^*$  für die topologischen Dualräume von  $X$  bzw.  $H$  sowie  $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  für das Skalarprodukt in  $H^*$ . Weil  $\mathcal{M}$  alle kritischen Punkte von  $I$  enthält, genügt es zu zeigen, dass  $I'(u_0) = 0$ . Nun ist Bild  $G'(u_0)|_X = X$  abgeschlossen und nach der Lagrange'schen Multiplikatorenregel in der Fassung von Satz A.4.3 existiert ein Lagrange-Multiplikator  $v^* \in X^*$  mit

$$I'(u_0) + G'(u_0)^*v^* = 0 \quad \text{in } X^*. \quad (\text{A.26})$$

Da  $u_0 \in \mathcal{M}$  und  $v^* \in X^*$ , ist  $\langle I'(u_0), v^* \rangle_* = 0$ . Bezeichnen wir nun mit  $v \in H$  das Urbild von  $v^*$  unter dem Fréchet-Riesz-Isomorphismus  $H \rightarrow H^*$ , so erhalten wir aus (A.26) und Lemma A.4.1:

$$0 = \langle G'(u_0)v^*, v^* \rangle_* = \langle G'(u_0)v, v \rangle \leq -a\|v\|^2.$$

D.h. aber  $\|v^*\|_* = \|v\| = 0$  und die Behauptung folgt aus (A.26). ■

Unser Ziel ist nun der Nachweis der Existenz einer Palais-Smale Folge für  $I$  zum Niveau  $c$  in der verallgemeinerten Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Dafür zeigen wir zunächst, dass  $\mathcal{M}$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit ist:

**Lemma A.4.4.** Für  $u_0 \in \mathcal{M}$  seien  $X := \text{span}\{u_0\} + H^-$  und  $Y := X^\perp$ . Ferner seien  $x_0 \in X$  und  $y_0 \in Y$  so gewählt, dass  $u_0 = x_0 + y_0$ . Dann gilt

(a) Es gibt eine Umgebung  $U \subset Y$  von  $y_0$  und eine Abbildung  $x \in C^1(U, X)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $x(y_0) = x_0$ .
- (ii)  $G(x(y) + y) = 0$  für alle  $y \in U$ .
- (iii)  $x'(y_0)y = -\partial_X G(u_0)^{-1} \partial_Y G(u_0)y$  für alle  $y \in Y$ .

Insbesondere ist  $\mathcal{M}$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit.

(b) Ist die lineare Abbildung  $A : Y \rightarrow H$  gegeben durch

$$Ay = x'(y_0)y + y,$$

so gilt für den Tangentialraum  $T_{u_0}\mathcal{M}$  an  $\mathcal{M}$  im Punkt  $u_0$ :

$$T_{u_0}\mathcal{M} = \text{Kern } G'(u_0) = \text{Bild } A.$$

BEWEIS: Zu (a). Nach Lemma A.4.1 ist  $\partial_X G(u_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$  und die Existenz der Abbildung  $x \in C^1(U, X)$  mit den Eigenschaften (i) bis (iii) folgt aus dem Satz über implizit definierte Funktionen. Durch

$$\Phi(y) = x(y) + y \quad \text{für alle } y \in U$$

wird eine lokale Karte  $\Phi \in C^1(U, \mathcal{M})$  der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  für eine Umgebung des Punktes  $u_0$  definiert. Da  $u_0 \in \mathcal{M}$  beliebig gewählt ist, ist  $\mathcal{M}$  eine  $C^1$ -Mannigfaltigkeit.

Zu (b). Für alle  $y \in Y$  gilt nach Teil (a):

$$G'(u_0)Ay = \partial_X G'(u_0)x'(y_0)y + \partial_Y G(u_0)y = -\partial_Y G(u_0)y + \partial_Y G(u_0)y = 0,$$

d.h. Bild  $A \subset \text{Kern } G'(u_0) = T_{u_0}\mathcal{M}$ . Ferner ist  $A$  injektiv, da

$$Ay = 0 \implies x'(y_0)y = -y \in X \cap Y = \{0\} \implies y = 0.$$

Als nächstes zeigen wir, dass  $A$  den Raum  $Y$  auf den Tangentialraum  $T_{u_0}\mathcal{M}$  abbildet. Dafür sei  $u = u_x + u_y \in T_{u_0}\mathcal{M}$  mit  $u_x \in X$  und  $u_y \in Y$ . Da

$$0 = G'(u_0)u = \partial_X G(u_0)u_x + \partial_Y G(u_0)u_y,$$

erhalten wir dann

$$u_x = \left( -\partial_X G(u_0)^{-1} \partial_Y G(u_0) \right) u_y = x'(y_0)u_y$$

und somit

$$u = u_x + u_y = x'(y_0)u_y + u_y = Au_y.$$

Also ist  $A : Y \rightarrow T_{u_0}\mathcal{M}$  bijektiv und damit Teil (b) damit bewiesen.  $\blacksquare$

Nun zeigen wir das folgende Analogon zu Lemma 2.3.10:

**Lemma A.4.5.** *Es seien  $\varepsilon > 0$  und  $u_0 \in \mathcal{M}$  gegeben, sodass*

$$I(u_0) \leq I(u) + \varepsilon \|u - u_0\| \quad \text{für alle } u \in \mathcal{M}. \quad (\text{A.27})$$

Ferner betrachten wir die Zerlegung

$$\nabla I(u_0) = s + t \quad \text{mit } s \in (T_{u_0}\mathcal{M})^\perp \text{ und } t \in T_{u_0}\mathcal{M}.$$

Dann ist  $\|t\| \leq \varepsilon$ .

**BEWEIS:** Wie in Lemma A.4.4 zerlegen wir  $u_0 = x_0 + y_0$  in  $x_0 \in X := \text{span}\{u_0\} + H^-$  und  $y_0 \in Y := X^\perp$ . Ferner betrachten wir die Abbildung  $x \in C^1(U, X)$  aus Lemma A.4.4 (a) und den Punkt

$$u = x(y) + y \in \mathcal{M}$$

für beliebiges  $y \in U$ . Für  $y \rightarrow y_0$  gilt dann:

$$\begin{aligned} u - u_0 &= x(y) - x_0 + y - y_0 \\ &= x'(y_0)(y - y_0) + y - y_0 + o(y - y_0) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$= A(y - y_0) + o(y - y_0). \quad (\text{A.29})$$

Weiterhin erhalten wir aus dem Satz von Taylor:

$$\begin{aligned} I(u) &= I(u_0) + \langle \nabla I(u_0), u - u_0 \rangle + o(u - u_0) \\ &\stackrel{(\text{A.28})}{=} I(u_0) + \langle \nabla I(u_0), A(y - y_0) + o(y - y_0) \rangle + o(y - y_0) \\ &\stackrel{(\text{A.27})}{\leq} I(u) + \varepsilon \|u - u_0\| + \langle \nabla I(u_0), A(y - y_0) \rangle + o(y - y_0) \quad \text{für } y \rightarrow y_0. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich für  $y \rightarrow y_0$  also

$$\langle \nabla I(u_0), A(y_0 - y) \rangle \leq \varepsilon \|u - u_0\| + o(y - y_0) \stackrel{(\text{A.28})}{=} \varepsilon \|A(y - y_0)\| + o(y - y_0).$$

Für  $y = y_0 \pm tz$  mit  $z \in Y$ ,  $\|z\| = 1$  und  $t > 0$  gilt nun für  $t \rightarrow 0$ :

$$\pm t \langle \nabla I(u_0), Az \rangle \leq \varepsilon \|A(tz)\| + o(t).$$

Im Grenzwert  $t \rightarrow 0$  folgt somit

$$|\langle \nabla I(u_0), Az \rangle| \leq \varepsilon \|Az\| \quad \text{für alle } z \in Y \text{ mit } \|z\| = 1,$$

sodass wir insgesamt

$$|\langle \nabla I(u_0), Ay \rangle| \leq \varepsilon \|Ay\| \quad \text{für alle } y \in Y$$

erhalten. Nach Lemma A.4.4 (b) gilt nun  $\text{Bild } A = T_{u_0}\mathcal{M}$  und die Behauptung folgt.  $\blacksquare$

Damit zeigen wir nun die Existenz der gewünschten Palais-Smale-Folge in  $\mathcal{M}$ :

**Proposition A.4.6.** *Es existiert eine Folge  $(u_k)$  in  $\mathcal{M}$  mit  $I(u_k) \rightarrow c$  und  $I'(u_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .*

**BEWEIS:** Nach (A.6) ist  $c = \inf_{\mathcal{M}} I > 0$ . Nun sei  $(\varepsilon_k)$  eine Folge in  $(0, \infty)$  mit  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und  $(v_k)$  eine Folge in  $\mathcal{M}$  mit  $I(v_k) \leq c + \varepsilon_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Aus dem Variationsprinzip von Ekeland, siehe Satz 2.3.13, erhalten wir dann eine Folge  $(u_k)$  in  $\mathcal{M}$ , mit

$$I(u_k) \leq I(w) + \varepsilon_k \|u_k - w\| \quad \text{für alle } w \in \mathcal{M} \text{ und alle } k \in \mathbb{N}.$$

Die Voraussetzung (A.27) von Lemma A.4.5 ist erfüllt. Zerlegen wir also  $\nabla I(u_k) = s_k + t_k$  in  $s_k \in (T_{u_k}\mathcal{M})^\perp$  und  $t_k \in T_{u_k}\mathcal{M}$ , so folgt  $\|t_k\| \leq \varepsilon_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit  $t_k \rightarrow 0$  as  $k \rightarrow \infty$ .

Für beliebiges, aber festes  $k \in \mathbb{N}$  schreiben wir  $X_k := \text{span}\{u_k\} + H^-$ . Nach (A.4.1) ist  $\text{Bild } G'(u_k)|_{X_k} = X_k$  abgeschlossen und aus der Charakterisierung von Operatoren mit abgeschlossenem Bild, siehe [Bré05, Théorème II.18], erhalten wir  $\text{Bild } G'(u_k)|_{X_k}^* = \text{Kern } G'(u_k)^\perp$ . Nach (A.16) ist nun  $G'(u_k)|_{X_k} = P_{X_k} \nabla^2 I(u_k)$ . Nach Bemerkung A.3.1 ist  $\nabla^2 I(u_k)$  symmetrisch. Für  $P_{X_k}$  gilt dies ebenfalls, denn  $P_{X_k}$  ist eine Orthogonalprojektion. Also ist  $G'(u_k)|_{X_k}$  ein symmetrischer Operator und es gilt

$$\text{Bild } G'(u_k)|_{X_k} = [\text{Kern } G'(u_k)]^\perp = (T_{u_k}\mathcal{M})^\perp.$$

Dann existiert aber  $h_k \in X_k$  mit  $G'(u_k)h_k = -s_k$ . Insgesamt finden wir auf diese Weise eine Folge  $(h_k)$  in  $H$  mit

$$\nabla I(u_k) + G'(u_k)h_k = t_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.30})$$

Da  $t_k = o(1)$ , liefert (A.30):

$$o(\|h_k\|) = \langle \nabla I(u_k), h_k \rangle + \langle G'(u_k)h_k, h_k \rangle \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Da  $u_k \in \mathcal{M}$  und  $h_k \in X_k$ , ist  $\langle \nabla I(u_k), h_k \rangle = 0$  und wir erhalten aus Lemma A.4.1

$$o(\|h_k\|) = \langle \partial_{X_k} G(u_k)h_k, h_k \rangle \leq -a \|h_k\|^2 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

wobei  $a > 0$  nicht von  $k$  abhängt. D.h. aber  $\|h_k\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Ferner gilt

$$G'(u_k)h_k = \nabla^2 I(u_k)P_{X_k}h_k = \nabla^2 I(u_k)h_k. \quad (\text{A.31})$$

und somit

$$\|G'(u_k)h_k\| \leq \|\nabla^2 I(u_k)\| \|h_k\| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Aus (A.30) folgt somit  $\nabla I(u_k) \rightarrow 0$ . Nach dem Variationsprinzip von Ekeland gilt ferner  $I(u_k) \leq I(v_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und damit  $I(u_k) \rightarrow m$  as  $k \rightarrow \infty$ , d.h.  $(u_k)$  ist eine Palais-Smale-Folge für  $I$  auf

dem Niveau  $c$ . ■

Die im Beweis von Proposition A.4.6 gefundene Folge  $(h_k)$  in  $H$  kann man im Sinne von (A.30) wieder eine Folge *approximierter Lagrange-Multiplikatoren* nennen. Proposition A.4.6 ist das Analogon zu Proposition 2.3.12 aus dem Abschnitt über duale Grundzustände. Man beachte ferner, dass wir bislang nur die Beschränktheit der Koeffizienten  $V$  und  $\Gamma$  verwendet haben.

## A.5 Das abstrakte Existenzkriterium

Ziel ist nun der Beweis des folgenden Satzes:

**Satz A.5.1.** *Unter den Voraussetzungen (A1) bis (A3) gelte  $c < \min\{c_1, c_2\}$ . Dann besitzt die nicht-lineare Schrödingergleichung*

$$-\Delta u + V(x)u = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

*einen Grundzustand  $u^* \in H^1(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ .*

Wie schon für den Beweis des Existenzkriteriums im dualen Fall benötigen wir auch hier mehrere Zwischenresultate. Für  $\delta > 0$  betrachten wir zunächst wieder eine Abschneidefunktion  $\chi_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  mit

$$\chi_\delta(t) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } t \geq \delta, \\ 0, & \text{wenn } t \leq 0, \end{cases} \quad \text{und} \quad |\chi'_\delta(t)| \leq C \quad (t \in \mathbb{R}).$$

und erklären damit die Abschneidefunktion  $\chi_\delta^\pm \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  durch

$$\chi_\delta^\pm(x) = \chi_\delta^\pm(x_1, \dots, x_n) := \chi_\delta(\pm x_1) \quad \text{für alle } x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist  $\text{supp } \chi_\delta^\pm = \mathbb{R}_\pm^n$  und  $\text{supp } \nabla \chi_\delta^\pm \subset S_\delta$ , wobei  $S_\delta := (-\delta, \delta) \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  wieder den Streifen um 0 in  $\mathbb{R}^n$  mit Weite  $2\delta$  bezeichnet. Dann gilt das Analogon zu Lemma 2.7.2:

**Lemma A.5.2.** *Es sei  $(u_k)$  eine beliebige beschränkte Folge in  $H$  mit  $\|u_k\|_{H^1(S_\delta)} \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ . Setzen wir dann*

$$u_k^{(1)} := u_k \chi_\delta^+ \quad \text{und} \quad u_k^{(2)} := u_k \chi_\delta^-,$$

so gelten für  $k \rightarrow \infty$  die folgenden Asymptotiken:

$$(a) \quad \|u_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k^{(1)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_k^{(2)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + o(1),$$

$$(b) \quad \|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \|u_k^{(1)}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|u_k^{(2)}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + o(1),$$

$$(c) \quad I(u_k) = I_1(u_k^{(1)}) + I_2(u_k^{(2)}) + o(1),$$

$$(d) \quad I'(u_k) = I'_1(u_k^{(1)}) + I'_2(u_k^{(2)}) + o(1).$$

In Teil (d) ist die Konvergenz dabei im Sinne von  $H^{-1}(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)^*$  zu verstehen.

BEWEIS: Im Verlauf dieses Beweises verwenden wir  $C$  stets als Symbol für (möglicherweise verschiedene) positive Konstanten, die nicht von  $k$  abhängen.

Zu (a). Diese Asymptotik folgt aus

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( u_k^2 - (u_k^{(1)})^2 - (u_k^{(2)})^2 \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} u_k^2 \left[ 1 - (\chi_\delta^+)^2 - (\chi_\delta^-)^2 \right] dx \leq \|u_k\|_{L^2(S_\delta)}^2 \rightarrow 0,$$

wenn wir beachten, dass  $\text{supp}[1 - (\chi_\delta^+)^2 - (\chi_\delta^-)^2] \subset S_\delta$ .

Zu (b). Es gilt

$$\begin{aligned} |\nabla u_k^{(1)}|^2 &= u_k^2 |\nabla \chi_\delta^+|^2 + 2u_k \chi_\delta^+ \nabla \chi_\delta^+ \nabla u_k + |\chi_\delta^+|^2 |\nabla u_k|^2, \\ |\nabla u_k^{(2)}|^2 &= u_k^2 |\nabla \chi_\delta^-|^2 + 2u_k \chi_\delta^- \nabla \chi_\delta^- \nabla u_k + |\chi_\delta^-|^2 |\nabla u_k|^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left( |\nabla u_k|^2 - |\nabla u_k^{(1)}|^2 - |\nabla u_k^{(2)}|^2 \right) dx \right| \\ &\leq \int_{S_\delta} |\nabla u_k|^2 \left( 1 - |\chi_\delta^+|^2 - |\chi_\delta^-|^2 \right) dx + \int_{S_\delta} u_k^2 \left( |\nabla \chi_\delta^+|^2 + |\nabla \chi_\delta^-|^2 \right) dx \\ &\quad + \left| \int_{S_\delta} 2u_k \nabla u_k \cdot (\chi_\delta^+ \nabla \chi_\delta^+ + \chi_\delta^- \nabla \chi_\delta^-) dx \right|. \end{aligned}$$

Da  $u_k \rightarrow 0$  in  $H^1(S_\delta)$  folgt die Behauptung nun mit Hilfe von Teil (a) und der Hölderschen Ungleichung.

Zu (c). Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u_k|^{p+1} dx = \int_{\mathbb{R}_-^n} \Gamma_1(x) |u_k^{(1)}|^{p+1} dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} \Gamma_2(x) |u_k^{(2)}|^{p+1} dx + I_k,$$

wobei

$$I_k = \int_{S_\delta} \Gamma(x) \left( |u_k|^{p+1} - |u_k^{(1)}|^{p+1} - |u_k^{(2)}|^{p+1} \right) dx$$

und

$$|I_k| \leq \int_{S_\delta} \Gamma(x) \left| |u_k|^{p+1} - |u_k^{(1)}|^{p+1} - |u_k^{(2)}|^{p+1} \right| dx \leq C \|u_k\|_{L^{p+1}(S_\delta)}^{p+1} \leq C \|u_k\|_{H^1(S_\delta)}^{p+1} \rightarrow 0$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Ebenso erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(x) u_k^2 dx = \int_{\mathbb{R}_-^n} V_2(x) (u_k^{(2)})^2 dx + \int_{\mathbb{R}_+^n} V_1(x) (u_k^{(1)})^2 dx + o(1) \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

Zu (d). Für beliebiges  $\varphi \in H$  gilt

$$\begin{aligned}
& |I'(u_k)\varphi - I'_1(u_k^{(1)})\varphi - I'_2(u_k^{(2)})\varphi| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left[ (1 - \chi_\delta^+ - \chi_\delta^-) \nabla u_k \cdot \nabla \varphi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - u_k \nabla(\chi_\delta^+ + \chi_\delta^-) \cdot \nabla \varphi + (1 - \chi_\delta^+ - \chi_\delta^-) V(x) u_k \varphi \right] dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^n} (1 - (\chi_\delta^+)^p - (\chi_\delta^-)^p) \Gamma(x) |u_k|^{p-1} u_k \varphi dx \right| \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\nabla u_k\|_{L^2(S_\delta)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(S_\delta)} + C \|u_k\|_{L^2(S_\delta)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(S_\delta)} \\
&\quad + \|V\|_{L^\infty} \|u_k\|_{L^2(S_\delta)} \|\varphi\|_{L^2(S_\delta)} + \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u_k^p\|_{L^{p+1}(S_\delta)} \|\varphi\|_{L^{p+1}(S_\delta)} \\
&\leq (1 + C + \|V\|_\infty) \|u_k\|_{H^1(S_\delta)} \|\varphi\| + C_S \|\Gamma\|_\infty \|u_k\|_{H^1(S_\delta)}^p \|\varphi\| \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

mit der Sobolev-Konstante  $C_S > 0$ . ■

Es sei nun  $(u_k)$  die Palais-Smale Folge für  $I$  zum Niveau  $m$  in der verallgemeinerten Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  gemäß Proposition A.4.6. Nach Lemma A.1.3 ist  $(u_k)$  beschränkt in  $H$ , sodass wir entlang einer Teilfolge annehmen können, dass  $u_k \rightharpoonup u_0$  mit einer Funktion  $u_0 \in H$ , die dann eine schwache Lösung von (A.1) ist. Wir werden im Folgenden zeigen, dass wir wieder die Bedingung  $m < \{c_1, c_2\}$  benötigen, um auszuschließen, dass  $u_0 = 0$ . Der technische Aufwand hierfür verläuft nun in weiten Teilen analog zum Beweis des abstrakten Existenzkriteriums von Satz 2.7.1 für duale Grundzustände, sodass wir die Argumente an der einen oder anderen Stelle etwas abkürzen werden.

**Proposition A.5.3.**  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} u_k^2 dx > 0$  für alle  $r > 0$ .

BEWEIS: Wir nehmen an, Proposition A.5.3 wäre falsch. Entlang einer Teilfolge von  $(u_k)$  ist dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{B_r(y)} u_k^2 dx = 0$$

und aus dem *Concentration-Compactness* Lemma 2.4.1 nach Pierre Louis Lions erhalten wir  $u_k \rightarrow 0$  in  $L^p$  für jedes  $p \in (2, 2^*)$ . Da  $I'(u_k) \rightarrow 0$ , finden wir Nullfolgen  $(\delta_k^\pm)$  in  $(0, \infty)$  mit

$$\delta_k^\pm \|u_k^\pm\| \geq |I'(u_k)u_k^\pm| \geq \|u_k^\pm\|^2 - \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u_k|^{p-1} u_k u_k^\pm dx \right|$$

und damit

$$\|u_k^\pm\|^2 \leq \delta_k^\pm \|u_k^\pm\| + \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p \|u_k^\pm\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Der Einbettungssatz von Sobolev liefert dann

$$\|u_k^\pm\|^2 \leq \delta_k^\pm \|u_k^\pm\| + C \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p \|u_k^\pm\|$$

mit einer Konstanten  $C > 0$ . Mit  $\delta_k := \max\{\delta_k^+, \delta_k^-\}$  erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \|u_k\|^2 &= \|u_k^+\|^2 + \|u_k^-\|^2 \\ &\leq \delta_k \|u_k\| + C \|\Gamma\|_\infty \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p (\|u_k^+\| + \|u_k^-\|) \\ &\leq \delta_k \|u_k\| + 2C \|\Gamma\|_\infty \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p \|u_k\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich

$$\|u_k\|^2 \leq \delta \|u_k\| + 2C \|\Gamma\|_\infty \|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)}^p. \quad (\text{A.32})$$

Nach Lemma A.1.3 ist  $(u_k)$  in  $H$  beschränkt. Ferner gilt  $\delta_k \rightarrow 0$  und  $\|u_k\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ . Nach (A.32) folgt damit auch  $\|u_k\| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , im Widerspruch zu Lemma A.1.3. ■

Nun zeigen wir das Analogon zu Proposition 2.7.3:

**Proposition A.5.4.** *Gilt  $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|u_k\|_{H^1(S_\delta)} = 0$ , so ist  $c \geq \min\{c_1, c_2\}$ .*

**BEWEIS:** Der Beweis verläuft vollständig analog zu Proposition 2.7.3. Deshalb lassen wir hier die technischen Details aus und wiederholen die Argumente nur skizzenhaft noch einmal.

Nach Lemma A.5.3 finden wir  $\varepsilon, \rho > 0$ , eine Teilfolge von  $(u_k)$  und eine Folge  $(y^{(k)})$  in  $\mathbb{R}^n$ , sodass

$$\int_{B_\rho(y^{(k)})} u_k^2 dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.33})$$

Wählen wir dann eine Folge  $(a^{(k)})$  in  $\mathbb{Z}^n$ , für die  $(a^{(k)} - y^{(k)})$  beschränkt ist, sowie einen Radius

$$r > \rho + \sup_{k \in \mathbb{N}} |a^{(k)} - y^{(k)}|,$$

so folgt daraus

$$\int_{B_r(a^{(k)})} u_k^2 dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \quad (\text{A.34})$$

Wir schreiben  $a^{(k)} = (a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$  und unterscheiden wieder die folgenden drei Fälle:

*Fall 1:* Die Folge  $(a_1^{(k)})$  ist beschränkt.

*Fall 2:* Längs einer Teilfolge gilt  $a_1^{(k)} \rightarrow +\infty$ .

*Fall 3:* Längs einer Teilfolge gilt  $a_1^{(k)} \rightarrow -\infty$ .

*Zu Fall 1.* Wir setzen  $\tilde{a}^{(k)} = (0, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{Z}^n$  sowie  $\tilde{u}_k := u_k(\cdot + \tilde{a}^{(k)})$ . Wegen der Periodizität von  $V$  und  $\Gamma$  in  $x_2, \dots, x_n$  ist  $(\tilde{u}_k)$  dann wieder eine Palais-Smale Folge für  $I$  auf dem Niveau  $m$  in der verallgemeinerten Nehari-Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Insbesondere ist  $(\tilde{u}_k)$  beschränkt und es gilt  $\tilde{u}_k \rightharpoonup u_0$  in  $H$  sowie  $\tilde{u}_k \rightarrow u_0$  in  $L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^n)$  für eine Funktion  $u_0 \in H$ . Nach (A.33) folgt dann  $u_0 \neq 0$ . Ist nun  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  eine beliebige Testfunktion und  $\varphi_k := \varphi(\cdot - \tilde{a}^{(k)})$ , so folgt

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} I'(u_k) \varphi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} I'(\tilde{u}_k) \varphi = I'(u_0) \varphi,$$

d.h.  $u_0$  ist eine Lösung von

$$Lu = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Da  $\tilde{u}_k \rightarrow 0$  in  $H^1(S_\delta)$  liefert das Prinzip von der eindeutigen Fortsetzbarkeit nun  $u_0 \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}^n$  und damit einen Widerspruch. Fall 1 kann somit nicht auftreten.

Zu Fall 2. Nun setzt man  $u_k^{(1)} := u_k \chi_\delta^+$  sowie  $\tilde{u}_k^{(1)} := u_k^{(1)}(\cdot - a^{(k)})$  und zeigt mit Hilfe von Lemma A.5.2, dass die Folge  $(\tilde{u}_k^{(1)})$  dann in  $H$  schwach gegen eine nichttriviale schwache Lösung von

$$L_1 u = \Gamma_1(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

konvergiert. Insbesondere ist dann  $c \geq c_1$ .

Zu Fall 3. Hier betrachtet man statt  $u_k^{(1)}$  und  $\tilde{u}_k^{(1)}$  die Funktionen  $u_k^{(2)} := u_k \chi_\delta^-$  sowie  $\tilde{u}_k^{(2)} := u_k^{(2)}(\cdot - a^{(k)})$ . Mit denselben Argumenten wie in Fall 2 folgt dann, dass die Folge  $(\tilde{u}_k^{(2)})$  schwach in  $H$  gegen eine nichttriviale schwache Lösung von

$$L_2 u = \Gamma_2(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

konvergiert, und erhält daraus  $c \geq c_2$ . ■

**Proposition A.5.5.** *Unter der Voraussetzung  $c < \min\{c_1, c_2\}$  sei  $\delta > 0$ . Dann gilt:*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_{2\delta}} \int_{B_\rho(y)} u_k^2 dx > 0 \quad \text{für alle } \rho \in (0, 2\delta).$$

**BEWEIS:** Wie bei Proposition 2.7.7 zeigen wir auch hier die Kontraposition und nehmen an, dass  $\delta > 0$  und  $\rho \in (0, 2\delta)$  existieren, sodass

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_{2\delta}} \int_{B_\rho(y)} u_k^2 dx$$

längs einer Teilfolge von  $(u_k)$ . Nach Lemma 2.4.3 (b), gilt dann

$$u_k \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty \text{ in } L^s(S_{2\delta}) \quad \text{für alle } s \in (2, 2^*). \quad (\text{A.35})$$

Nun gilt  $J'(u_k) \rightarrow 0$  in  $H^{-1}$ . Ist dann  $\psi_k$  die Lösung von

$$L\psi_k = J'(u_k) \quad \text{in } \mathbb{R}^n,$$

so folgt  $\psi_k \rightarrow 0$  in  $H^1$ . Setzen wir weiter  $\varphi_k := u_k - \psi_k \in H^1$ , so erhalten wir

$$L\varphi_k = Lu_k - L\psi_k = \Gamma(x)|u_k|^{p-1}u_k \quad \text{in } \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.36})$$

Aus (A.35) folgt für  $k \rightarrow \infty$  ferner

$$u_k, \psi_k, \varphi_k \rightarrow 0 \quad \text{in } L^s(S_{2\delta}) \quad \text{für alle } s \in (2, 2^*). \quad (\text{A.37})$$

Wählen wir nun den Exponenten

$$q \in \left[ \max\left\{1, \frac{2}{p}\right\}, \frac{2^*}{p} \right) =: A.$$

so folgt aus Proposition 2.1.1 und dem Sobolev'schen Einbettungssatz:

$$\|\varphi_k\|_{W^{2,q}(\mathbb{R}^n)} \leq \|L^{-1}\| \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u_k^p\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \stackrel{\text{Sobolev}}{\leq} C_S \|L^{-1}\| \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^p. \quad (\text{A.38})$$

Die Beschränktheit von  $u_k$  in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  liefert also die Beschränktheit von  $(\varphi_k)$  in  $W^{2,q}(\mathbb{R}^n)$  für alle  $q \in A$ . Da  $p \in (1, 2^\#)$ , ist  $A \cap (\frac{2n}{n+2}, 2) \neq \emptyset$ . Im Folgenden seien nun die Exponenten  $r, r', s, s' > 1$  stets so gewählt, dass

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1, \quad r, s \in (2, 2^*) \quad \text{und} \quad r', s' \in A \cap \left(\frac{2n}{n+2}, 2\right). \quad (\text{A.39})$$

Dann gilt zunächst

$$\int_{S_{2\delta}} \varphi_k^2 \, dx \leq \|\varphi_k\|_{L^r(S_{2\delta})} \|\varphi_k\|_{L^{r'}(S_{2\delta})} \leq \|\varphi_k\|_{L^r(S_{2\delta})} \|\varphi_k\|_{W^{2,r'}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\varphi_k\|_{L^r(S_{2\delta})} \rightarrow 0 \quad (\text{A.40})$$

für  $k \rightarrow \infty$ , da  $\|\varphi_k\|_{L^r(S_{2\delta})} \rightarrow 0$  nach (A.37) und  $(\varphi_k)$  in  $W^{2,r'}(\mathbb{R}^n)$  beschränkt ist.

Nun sei  $\zeta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit

$$\zeta(t) = \begin{cases} 1, & \text{für } |t| \leq \delta, \\ 0, & \text{für } |t| \geq 2\delta, \end{cases} \quad \text{und} \quad |\zeta'(t)| \leq C \quad (t \in \mathbb{R})$$

und  $\zeta_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  gegeben durch  $\zeta_1(x_1, \dots, x_n) = \zeta(x_1)$ . Wir testen die Gleichung (A.36) mit den Funktionen  $\varphi_k^{\zeta_1} := \varphi_k \zeta_1 \in H$ . Das liefert dann

$$\begin{aligned} \int_{S_\delta} |\nabla \varphi_k|^2 \, dx &\leq \int_{S_{2\delta}} |\nabla \varphi_k|^2 \zeta \, dx \\ &= \int_{S_{2\delta}} \left( \Gamma(x) |u_k|^{p-1} u_k \varphi_k \zeta - \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \zeta' - V(x) \varphi_k^2 \zeta \right) \, dx \\ &\leq \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u_k^p\|_{L^{r'}(S_{2\delta})} \|\varphi_k\|_{L^r(S_{2\delta})} + \|\zeta'\|_{L^\infty} \|\varphi_k\|_{L^s(S_{2\delta})} \left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} \right\|_{L^{s'}(S_{2\delta})} \\ &\quad + \|V\|_{L^\infty} \|\varphi_k\|_{L^2(S_{2\delta})}^2 \\ &\leq C \|\Gamma\|_{L^\infty} \|u_k\|_{H^1(S_{2\delta})}^p \|\varphi_k\|_{L^r(S_{2\delta})} + \|\zeta'\|_{L^\infty} \|\varphi_k\|_{L^s(S_{2\delta})} \|\varphi_k\|_{W^{1,s'}(S_{2\delta})} \\ &\quad + \|V\|_{L^\infty} \|\varphi_k\|_{L^2(S_{2\delta})}^2. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Für die letzte Abschätzung des ersten Summanden haben wir dabei benutzt, dass  $r' \in A$  und somit  $\|u_k^p\|_{L^{r'}(S_\delta)} \leq C \|u_k\|_{H^1(S_\delta)}^p$  mit einer Konstanten  $C > 0$ , die sich aus dem Sobolev'schen Einbettungssatz ergibt. Die Wahl unserer Exponenten liefert uns für  $k \rightarrow \infty$  nun

$$\|u_k\|_{H^1(S_{2\delta})}^p \|\varphi_k\|_{L^r(S_{2\delta})} \rightarrow 0,$$

denn  $(u_k)$  ist in  $H^1(\mathbb{R}^n)$  beschränkt und  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $L^r(S_{2\delta})$  nach (A.37), da  $r \in (2, 2^*)$ . Weiter folgt

$$\|\varphi_k\|_{L^s(S_{2\delta})} \|\varphi_k\|_{W^{1,s'}(S_{2\delta})} \rightarrow 0,$$

denn  $(\varphi_k)$  ist in  $W^{1,s'}(S_{2\delta})$  beschränkt, siehe (A.38), und  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $L^s(S_{2\delta})$ , da  $s \in (2, 2^*)$ . Nach (A.40) gilt schließlich  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $L^2(S_{2\delta})$  und wir erhalten aus (A.41) nun insgesamt  $\varphi_k \rightarrow 0$  in  $H^1(S_{2\delta})$ . Weiter oben hatten wir bereits gesehen, dass  $\psi_k \rightarrow 0$  in  $H^1(S_{2\delta})$ . Damit folgt nun insgesamt auch

$$u_k = \varphi_k + \psi_k \rightarrow 0 \quad \text{in } H^1(S_\delta)$$

und mit Proposition A.5.4 somit  $c \geq \min\{c_1, c_2\}$ . Damit ist Lemma A.5.5 bewiesen. ■

**BEWEIS VON SATZ A.5.1:** Es sei  $\delta > 0$ . Da  $c < \min\{c_1, c_2\}$  finden wir nach Proposition A.5.5 nun  $\varepsilon, \rho > 0$  und eine Folge  $(y^{(k)})$  in  $S_{2\delta}$ , sodass entlang einer Teilfolge von  $(u_k)$  gilt

$$\int_{B_\rho(y^{(k)})} u_k^2 \, dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Wie im Beweis von Satz 2.7.1 wählen wir nun Vektoren  $a^{(k)} = (0, a_2^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}) \in \mathbb{Z}^n$ , sodass die Folge  $(y^{(k)} - a^{(k)})$  beschränkt ist, und einen Radius

$$r > \rho + \sup_{k \in \mathbb{N}} |y^{(k)} - a^{(k)}|.$$

Dann gilt

$$\int_{B_r(a^{(k)})} |u_k|^{p+1} \, dx \geq \varepsilon$$

und für  $\tilde{u}_k := u_k(\cdot + a^{(k)})$  erhalten wir

$$\int_B |\tilde{u}_k|^{p+1} \, dx \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \tag{A.42}$$

mit  $B = B_r(0)$ . Dieselben Argumente wie im Beweis von Satz 2.7.1 liefern, dass eine Teilfolge von  $(\tilde{u}_k)$  nun schwach gegen eine Lösung  $u_0 \in H^1 \setminus \{0\}$  von

$$Lu = \Gamma(x)|u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

konvergiert. Insbesondere ist  $u_0 \in \mathcal{M}$  und es gilt:

$$\begin{aligned} c &= \lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( J(u_k) - \frac{1}{2} J'(u_k) u_k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( J(\tilde{u}_k) - \frac{1}{2} J'(\tilde{u}_k) \tilde{u}_k \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |\tilde{u}_k|^{p+1} \, dx. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Fatou folgt dann

$$c \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x) |u_0|^{p+1} \, dx = J(u_0) \geq c.$$

Also ist  $J(u_0) = c$  und Satz A.5.1 ist bewiesen. ■

# Literaturverzeichnis

- [ABG81] AMREIN, W. O. ; BERTHIER, A.-M. ; GEORGESCU, V.:  $L^p$ -inequalities for the Laplacian and unique continuation. In: *Ann. Inst. Fourier* 31 (1981), S. 153–168
- [ACG99] ARCOYA, D. ; CINGOLANI, S. ; GÁMEZ, J. L.: Asymmetric modes in symmetric nonlinear optical waveguides. In: *SIAM J. Math. Anal.* 30 (1999), S. 1391–1400
- [AE08] AMANN, H. ; ESCHER, J.: *Analysis II*. Basel : Birkhäuser, 2008 (SpringerLink : Bücher)
- [AF08] ADAMS, R. A. ; FOURNIER, J. E.: *Sobolev spaces*. Boston : Academic Press, 2008 (Pure and applied mathematics ; 140)
- [AH96] ADAMS, D. R. ; HEDBERG, L. I.: *Function spaces and potential theory*. Berlin : Springer, 1996 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen ; 314)
- [AL92a] ALAMA, S. ; LI, Y.: Existence of Solutions for Semilinear Elliptic Equations with Indefinite Linear Part. In: *J. Diff. Eq.* 96 (1992), S. 89–115
- [AL92b] ALAMA, S. ; LI, Y.: On "Multibump" Bound States for Certain Semilinear Elliptic Equations. In: *Ind. Univ. Math. J.* 41 (1992), Nr. 4, S. 983–1026
- [Alt12] ALT, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis : Eine anwendungsorientierte Einführung*. 6. Aufl. 2012. Springer Berlin Heidelberg, 2012
- [Bré05] BRÉZIS, Haïm: *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Nouvelle présentation. Paris : Dunod, 2005 (Mathématiques appliquées pour la maîtrise). – ISBN 2–10–049336–1 ; 978–2–10–049336–4
- [CZR92] COTI ZELATI, Vittorio ; RABINOWITZ, Paul H.: Homoclinic Type Solutions for a Semilinear Elliptic PDE on. In: *Comm. P. Appl. Math.* XLV (1992), S. 1217–1269
- [Dei85] DEIMLING, K.: *Nonlinear functional analysis*. Berlin : Springer, 1985
- [DNPPR] DOHNAL, T. ; NAGATOU-PLUM, K. ; PLUM, M. ; REICHEL, W.: Interfaces supporting surface gap soliton ground states in the 1D nonlinear Schrödinger equation. In: *arXiv:1202.3588v2*
- [DP08] DOHNAL, Tomáš ; PELINOVSKY, Dmitry: Surface Gap Solitons at a Nonlinearity Interface. In: *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 7 (2008), Nr. 2, S. 249–264
- [DPR09] DOHNAL, T. ; PLUM, M. ; REICHEL, W.: Localized modes of the linear periodic Schrödinger operator with a nonlocal perturbation. In: *SIAM J. Math. Anal.* 41 (2009), S. 1967–1993

- [DPR11] DOHNAL, T. ; PLUM, M. ; REICHEL, W.: Surface gap soliton ground states for the nonlinear Schrödinger equation. In: *Comm. Math. Phys.* 308 (2011), Nr. 2, S. 511–542
- [Eas73] EASTHAM, M. S. P.: *The Spectral theory of periodic differential equations*. Edinburgh [u.a.] : Scottish Acad.Pr., 1973 (Texts in mathematics)
- [Eva02] EVANS, L. C.: *Partial differential equations*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2002 (Graduate studies in mathematics ; 19)
- [Heu06] HEUSER, H.: *Funktionalanalysis : Theorie und Anwendung*. Wiesbaden : Teubner, 2006 (Mathematische Leitfäden)
- [HS96] HISLOP, P. D. ; SIGAL, M. I.: *Introduction to spectral theory : with applications to Schrödinger operators*. New York : Springer, 1996 (Applied mathematical sciences ; 113)
- [HV86] HEMPEL, R. ; VOIGT, J.: The Spectrum of a Schrödinger Operator in  $L_p(\mathbb{R}^{\nu})$  is  $p$ -Independent. In: *Commun. Math. Phys.* 104 (1986), S. 243–250
- [Jea94] JEANJEAN, L.: Solutions in spectral gaps for nonlinear equations of Schrödinger type. In: *J. Differ. Equat.* 112 (1994), S. 53–80
- [Kor05] KOROTYAEV, E.: Schrödinger operator with a junction of two 1-dimensional periodic potentials. (English summary). In: *Asymptot. Anal.* 45 (2005), Nr. 1-2, S. 73?97
- [KS98] KRYSZEWSKI, W. ; SZULKIN, A.: Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation. In: *Adv. Diff. Equat.* 3 (1998), S. 441–472
- [Lio84] LIONS, P. L.: The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, II. In: *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non. Lin.* 1 (1984), S. 223–283
- [MN04] MOLONEY, J. ; NEWELL, A. C.: *Nonlinear optics*. Boulder, Colo. [u.a.] : Westview, 2004 (The advanced book program)
- [Pan05] PANKOV, A.: Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals. In: *Milan j. math.* 73 (2005), S. 259–287
- [Rab91] RABINOWITZ, Paul H.: A note on a semilinear elliptic problem on  $\mathbb{R}^n$ . In: *Nonlinear Analysis. A tribute in honour of Giovanni Prodi, Hrsg. A. Ambrosetti und A. Mariano, Quaderni Scuola Normale Superiore, Pisa* (1991), S. 307–318
- [RR04] RENARDY, M. ; ROGERS, R. C.: *An introduction to partial differential equations*. 2. ed. New York : Springer, 2004 (Texts in applied mathematics ; 13)
- [RS10] REED, M. ; SIMON, B.: *Methods of modern mathematical physics*. Bd. 1: Functional analysis. San Diego, Calif. [u.a.] : Academic Press, 2010
- [Rud91] RUDIN, W.: *Functional analysis*. 2. ed. New York [u.a.] : McGraw-Hill, 1991 (International series in pure and applied mathematics)
- [Sim82] SIMON, B.: Schrödinger Semigroups. In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* 7 (1982), S. 447–526
- [SS80] SCHECHTER, M. ; SIMON, B.: Unique continuation for Schrödinger operators with unbounded potentials. In: *J. Math. Anal. Appl.* 77 (1980), S. 482–492

- [Ste86] STEIN, E. M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton, NJ : Princeton Univ. Press, 1986 (Princeton mathematical series ; 30)
- [SW09] SZULKIN, A. ; WETH, T.: Ground state solutions for some indefinite variational problems. In: *J. Funct. Anal.* 257 (2009), S. 3802–3822
- [SW10] SZULKIN, A. ; WETH, T.: The Method of Nehari Manifold. (2010), S. 597–632
- [TW96] TROESTLER, C. ; WILLEM, M.: Nontrivial solutions of a semilinear Schrödinger equation. In: *Commun. Part. Differ. Equat.* 21 (1996), S. 1431–1449
- [Wal00] WALTER, W.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen : eine Einführung*. Berlin : Springer, 2000 (Springer-Lehrbuch)
- [Wil96] WILLEM, M.: *Minimax theorems*. Boston [u.a.] : Birkhäuser, 1996 (Progress in nonlinear differential equations and their applications ; 24)
- [Zei95] ZEIDLER, E. (Hrsg.): *Applied mathematical sciences ; 109*. Bd. 2: Main principles and their applications: *Applied functional analysis*. New York : Springer, 1995



# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name Hans-Jürgen Freisinger  
Geburtsdatum 25. Februar 1983  
Geburtsort Karlsruhe

## Schulbildung

1989 – 1993 Adolf-Kußmaul-Grundschule, Graben-Neudorf  
1993 – 2002 Schönborn-Gymnasium, Bruchsal

## Grundwehrdienst

09/2002 – 06/2003 Grundwehrdienst bei 6./Feldjägerbataillon 750, Stetten am kalten Markt und Verteidigungsbezirkskommando 52, Karlsruhe und Mannheim

## Studium

10/2003 Beginn des Mathematikstudiums an der Universität Karlsruhe, später  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
9/2005 Vordiplom in Mathematik  
2/2010 Diplom in Mathematik

## Promotion

3/2010 – 3/2013 Stipendiat, ab 10/2010 wissenschaftlicher Mitarbeiter des Graduiertenkollegs 1294 *Analysis, Simulation und Design nanotechnologischer Prozesse* der DFG  
seit 3/2013 wissenschaftlicher Mitarbeit am Institut für Analysis des KIT

## Auslandsaufenthalt

9/2012 – 11/2012 Forschungsaufenthalt an der Universidad de Granada (Spanien) im Rahmen der Dissertation



# Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides Statt, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen, die im Wortlaut oder dem Sinn nach schriftlich oder im Internet veröffentlichten Quellen entnommen sind, habe ich durch genaue Quellenangabe gekennzeichnet.

Graben-Neudorf, den 28. Mai 2013

Hans-Jürgen Freisinger.