

KIT SCIENTIFIC REPORTS 7652

Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik 2013,1

# **Untersuchungen zur planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem**

Melanie Müßle  
Bernhard Heck  
Kurt Seitz  
Thomas Grombein



Melanie Müßle, Bernhard Heck, Kurt Seitz, Thomas Grombein

**Untersuchungen zur planaren Approximation  
im Geodätischen Randwertproblem**

**Karlsruhe Institute of Technology**  
**KIT SCIENTIFIC REPORTS 7652**

**Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik 2013,1**  
Karlsruher Institut für Technologie

---

Eine Übersicht über alle bisher in dieser Schriftenreihe erschienenen Bände finden Sie am Ende des Buchs.

# Untersuchungen zur planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem

Melanie Müble  
Bernhard Heck  
Kurt Seitz  
Thomas Grombein

**Impressum**



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark of Karlsruhe  
Institute of Technology. Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding the cover – is licensed under the  
Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 DE License  
(CC BY-SA 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>*



*The cover page is licensed under the Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 3.0 DE License (CC BY-ND 3.0 DE):  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/de/>*

Print on Demand 2013

ISSN 1612-9733

ISSN 1869-9669

ISBN 978-3-7315-0095-7

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Schwerefeld der Erde</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Randwertprobleme</b>	<b>5</b>
3.1	Das fixe Geodätische Randwertproblem . . . . .	6
3.2	Ansatz nach Brovar . . . . .	6
3.3	Planare Approximation . . . . .	8
3.4	Molodenskii-Shrinking . . . . .	9
3.5	Übersicht über die weiteren Arbeiten . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Datengrundlage</b>	<b>13</b>
4.1	Topographische Höhen . . . . .	15
4.2	Schwerestörungen . . . . .	17
4.3	Geländeneigung . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Numerische Untersuchungen zur planaren Approximation</b>	<b>27</b>
5.1	Numerische Integration . . . . .	27
5.2	Voruntersuchungen . . . . .	28
5.2.1	Genauigkeit der numerischen Integration . . . . .	28
5.2.2	RTM-Fläche . . . . .	30
5.3	Planare Approximation der Randbedingung . . . . .	34
5.4	Auswirkung auf das Störpotential . . . . .	37
5.5	Planare Approximation des Störpotentials . . . . .	41
5.6	Weitere Untersuchungen . . . . .	44
5.6.1	Wahl der regionalen Untersuchungsgebiete . . . . .	44
5.6.2	Einfluss der Geländeneigung auf die Quasigeoidberechnung . . . . .	45
5.7	Rechenzeit und Parallelisierung . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Terme höherer Ordnung</b>	<b>48</b>
6.1	Planare Approximation der Randbedingung . . . . .	48
6.1.1	Reihenentwicklung der Korrekturterme . . . . .	49
6.1.2	Numerische Untersuchungen . . . . .	50
6.2	Planare Approximation des Störpotentials . . . . .	52

6.2.1	Reihenentwicklung der Korrekturterme . . . . .	53
6.2.2	Numerische Untersuchungen . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>56</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>58</b>
	<b>Anhang</b>	<b>61</b>
<b>A</b>	<b>Weitere graphische Ergebnisse</b>	<b>61</b>

# 1 Einleitung

Eine genaue Kenntnis des Erdschwerefeldes ist für viele Anwendungen erstrebenswert. Eine aktuelle Thematik ist die Festlegung eines globalen vertikalen Datums. Das Schwerfeld bildet die Grundlage für physikalisch definierte Höhensysteme. Wird die Höhenbezugsfläche, insbesondere das Geoid, global zum Beispiel aus Satellitenbeobachtungen bestimmt, so geschieht dies unabhängig von nationalen Datumsdefinitionen. Ein solches zentimetergenaues Geoid kann als Referenzfläche für die Umrechnung zwischen verschiedenen Höhen Bezugssystemen über Kontinente und Ozeane hinweg dienen. Gerade für die Beschreibung des Meeresspiegels zum Beispiel im Zusammenhang mit dem Klimawandel ist eine globale Höhenbezugsfläche von großer Bedeutung. Aktuelle Satellitenmissionen wie GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) oder GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) liefern Schwerfelddaten für diese Zwecke.

Zur Berechnung von hochgenauen globalen und regionalen (Quasi-)Geoidmodellen werden im Allgemeinen auch terrestrische Schweredaten hinzugezogen. In der Vergangenheit wurden dafür meist Schwereanomalien verwendet. Diese sind jedoch vom jeweiligen Höhen Bezugssystem abhängig und führen somit zu systematischen Fehlereinflüssen (HECK, 1990). Kommen stattdessen Schwerstörungen zum Einsatz, so entfällt diese Datumsabhängigkeit. Zur Berechnung der Schwerstörungen muss lediglich die ellipsoidische Höhe des Messpunktes bekannt sein, welche heutzutage mithilfe von GNSS (Global Navigation Satellite System) bestimmt werden kann.

Langfristiges Ziel für die Geodäsie ist die Ablösung zeit- und kostenintensiver Nivellements durch das sog. GNSS-Levelling. Die dazu benötigte Höhenbezugsfläche muss millimetergenau bekannt sein.

Doch selbst wenn sich die Datenlage immer weiter verbessert, ist die Genauigkeit des (Quasi-)Geoids immer auch vom Berechnungsansatz und den dabei notwendigen Approximationen und Vereinfachungen abhängig. Gegenstand dieser Arbeit ist das Geodätische Randwertproblem. In diesem Zusammenhang wurden in der Vergangenheit zahlreiche Approximationen eingeführt. Sie werden in der "klassischen" Literatur der Physikalischen Geodäsie, allen voran HEISKANEN UND MORITZ (1967) bzw. MORITZ (1980), beschrieben, welche im Allgemeinen auch heute noch die Grundlage für die Schwerfeldbestimmung liefert. Damals wurde Dezimetergenauigkeit angestrebt. Heutiges Ziel ist das Zentimeter- oder sogar Millimeter-Geoid. Die eingeführten Näherungen müssen also hinterfragt werden. Ist eine Vernachlässigung dieser Fehlereinflüsse angesichts der gestiegenen Genauigkeitsansprüche auch heute noch gerechtfertigt?

Sowohl zur Linearisierung (siehe z. B. HECK, 1989, HECK UND SEITZ, 1993) als auch zur sphärischen Approximation und damit vernachlässigten ellipsoidischen Effekten (u. a. JEKELI, 1981, SEITZ, 1997) wurden in den letzten Jahrzehnten zahlreiche Arbeiten publiziert. Eine weitere eingeführte Vereinfachung ist die sog. planare Approximation (MORITZ, 1980). Diese wurde bisher noch nicht näher untersucht. Das ist somit das Hauptziel dieser Arbeit. Diese ist so aufgebaut, dass in einem einführenden Kapitel zunächst die wichtigsten Grundlagen zum Schwerfeld der Erde zusammengestellt sind. Darauf aufbauend werden in Kapitel 3 die theoretischen Grundlagen und das Ziel der planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem ausführlich erläutert. Den Hauptteil der vorliegenden Arbeit bilden die globalen und regionalen numerischen sowie analytischen Untersuchungen, anhand derer der Einfluss dieser Approximation auf die Schwerfeldmodellierung bestimmt werden soll. Zum Schluss erfolgt eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse.

## 2 Das Schwerfeld der Erde

Alle Körper fallen gleich schnell (im Vakuum) sagte schon Galileo Galilei, aber an jedem Ort der Erde unterschiedlich. Die Schwerebeschleunigung eines Körpers auf der Erde setzt sich im Wesentlichen aus der Gravitations- und der Zentrifugalbeschleunigung zusammen, wobei erstere durch die Massenanziehung und letztere durch die Rotation der Erde hervorgerufen wird. Größe und Richtung der Schwerebeschleunigung können an jedem Ort im Raum durch einen Vektor beschrieben werden. Das Schwerfeld hat die Eigenschaft, dass es konservativ ist, d. h. die Arbeit, die verrichtet wird, um von A nach B zu kommen, ist unabhängig vom zurückgelegten Weg. Ein solches Vektorfeld besitzt ein Potential (siehe z. B. SIGL, 1989), also eine skalare Funktion, die dieses Feld eindeutig beschreibt: das Schwerpotential  $W$ . Es gilt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{g}(x, y, z) = \text{grad } W(x, y, z) = \left( \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right)^\top . \quad (1)$$

Der Verlauf einer skalaren Funktion im Raum kann zum Beispiel durch ihre Niveaulächen veranschaulicht werden. Flächen konstanten Schwerpotentials werden auch als Äquipotentialflächen bezeichnet. Eine herausragende Äquipotentialfläche ist das sog. Geoid. Der Begriff geht zurück auf LISTING (1873) und benennt die Niveauläche  $W = W_0$ , die mit dem mittleren Meeresspiegel zusammenfällt und unter den Kontinenten gedanklich fortgesetzt werden kann. Sie spielt vor allem als Höhenbezugsfläche eine wichtige Rolle und lag lange Zeit im Fokus der Physikalischen Geodäsie. Der Schwerevektor  $\vec{g}$  steht in jedem Punkt einer Äquipotentialfläche senkrecht auf dieser. Seine Größe gibt Aufschluss darüber, wie schnell sich das Schwerpotential in der entsprechenden Richtung ändert. Die zweiten Ableitungen des Schwerpotentials, die sog. Schweregradienten, beschreiben die Krümmungen der Niveaulächen (SIGL, 1989).

Das Schwerpotential der Erde setzt sich zusammen aus dem Gravitationspotential  $V$  und dem Zentrifugalpotential  $Z$ :

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + Z(x, y, z) . \quad (2)$$

Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz ziehen sich Massen gegenseitig an. Das Gravitationspotential eines ausgedehnten Körpers  $\Omega$  folgt aus der Integration über sämtliche Massenelemente (TORGE, 2003)

$$V(x, y, z) = G \iiint_{\Omega} \frac{dm}{\ell} = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho d\Omega}{\ell} . \quad (3)$$

Dabei bezeichnet  $G$  die Newton'sche Gravitationskonstante,  $\rho$  die Dichtefunktion und  $\ell$  den Abstand vom Aufpunkt  $(x, y, z)$  zum entsprechenden Massenpunkt  $(x', y', z')$ . Das Gravitationspotential ist regulär im Unendlichen, d. h. es verschwindet für  $\ell \rightarrow \infty$ . Im massefreien Außenraum der Erde stellt das Gravitationspotential eine harmonische Funktion dar, da die Laplace'sche Differentialgleichung erfüllt wird (siehe z. B. SIGL, 1989):

$$\Delta V(x, y, z) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 . \quad (4)$$

Der Anteil des Zentrifugalpotentials am Schwerpotential ist auf der Erdoberfläche nur gering, nimmt aber mit zunehmender Entfernung zur Rotationsachse zu. Es gilt (HEISKANEN UND MORITZ, 1967)

$$Z(x, y, z) = \frac{1}{2} \omega^2 p^2 = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) , \quad (5)$$

wobei  $\omega$  die aktuelle Winkelgeschwindigkeit der Erde ist und  $p$  der senkrechte Abstand zur Rotationsachse.  $Z$  ist keine harmonische Funktion:

$$\Delta Z(x, y, z) = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 2\omega^2 \quad . \quad (6)$$

Die Lage der Rotationsachse sowie die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation können sehr genau zum Beispiel durch Messungen mit Radioteleskopen bestimmt werden. Um das Gravitationspotential der Erde nach Gleichung (3) zu berechnen, ist eine genaue Kenntnis der Dichteverteilung im Erdinneren notwendig. Darüber lassen sich jedoch nur eingeschränkt Aussagen machen, so dass auf andere Wege zurückgegriffen werden muss.

Vor allem die Potentialtheorie spielt hier eine wichtige Rolle. STOKES (1849) stellte den Zusammenhang her zwischen gemessenen Schwerewerten und der physikalischen Figur der Erde, dem Geoid. Er zeigte zudem, dass die Bestimmung dieser Fläche ausreicht, um das Schwerfeld im Außenraum eindeutig beschreiben zu können. Die Green'sche Darstellungsformel besagt, dass eine in einem begrenzten Gebiet harmonische Funktion eindeutig berechenbar ist aus Funktionswerten und Werten der Normalenableitung auf der Randfläche (SIGL, 1989). Diese und weitere Sätze der Potentialtheorie bilden die Grundlage für die sog. Geodätische Randwertaufgabe (siehe Kapitel 3).

Das Schwerfeld der Erde unterliegt zeitlichen Variationen, die zum Beispiel durch Massenverlagerungen und Schwankungen der Rotationsachse sowie der Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation hervorgerufen werden. In der klassischen Physikalischen Geodäsie wird das Schwerfeld als stationär angenommen (MORITZ, 1980). Geodynamische Effekte, insbesondere aufgrund der Gezeitenwirkung, können als Korrekturen direkt an die gemessenen Funktionale des Schwerpotentials angebracht werden. Da der Außenraum der Erde als massefrei angenommen wird, müssen die Messwerte zudem um die Wirkung der Atmosphärenmassen korrigiert werden. Die wichtigsten Messverfahren und die jeweils gemessenen Funktionale sind:

- Satellitenaltimetrie: (Quasi-)Geoidhöhen  $\zeta(\varphi, \lambda) = N(\varphi, \lambda)$  auf dem Meer  
Die (Quasi-)Geoidhöhen werden in der Einheit  $m$  angegeben und beziehen sich auf ein Referenzellipsoid.
- Gravimetrie: Betrag des Schwerevektors  $g(x, y, z) = |\text{grad } W(x, y, z)|$   
Schwerewerte werden in der SI-Einheit  $\frac{m}{s^2}$  angegeben. In dieser Arbeit wird die gebräuchlichere Bezeichnung  $1 \text{ mgal} = 10^{-5} \frac{m}{s^2}$  verwendet.
- Nivellement + Schweremessungen: Geopotentielle Koten  $C(\varphi, \lambda) = W_0 - W(x, y, z)$   
Die SI-Einheit für das Potential bzw. Potentialunterschiede lautet:  $\frac{m^2}{s^2}$
- (Satelliten-)Gradiometrie: Marussi-Tensor der zweiten Ableitungen des Schwerpotentials  
$$M(x, y, z) = \begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix}$$
  
Schweregradienten haben die SI-Einheit  $\frac{1}{s^2}$ . Ebenfalls gebräuchlich ist  $1 \text{ Eötvös} = 10^{-9} \frac{1}{s^2}$ .

Im Rahmen der Schwerfeldbestimmung ist es üblich, mit sog. Störgrößen zu arbeiten. Dazu wird ein sog. Normalschwerfeld eingeführt, welches das Schwerpotential der Erde in genäherter Form darstellt. Gebräuchlich ist zum Beispiel ein Normalschwerfeld vom Typ SOMIGLIANA-PIZZETTI (siehe z. B. TORGE, 2003), also ein Rotationsellipsoid, dessen Oberfläche auch gleichzeitig eine Niveaufläche bildet.

Das Schwerpotential  $W$  der Erde wird somit aufgeteilt in das Normalschwerpotential  $U$ , welches streng berechnet werden kann und das relativ kleine, aber unbekanntes Störpotential  $T$ :

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z) \quad . \quad (7)$$

Da die Rotationsgeschwindigkeit der Erde sehr genau bekannt ist und somit der Anteil des Zentrifugalpotentials am Schwere- und Normalschwerepotential als jeweils gleich groß angenommen werden kann, gilt für das Störpotential  $T$

$$\Delta T(x, y, z) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

im gesamten massefreien Außenraum der Erdoberfläche. Das Störpotential ist dort eine harmonische Funktion, da die Laplace-Gleichung erfüllt wird. Des Weiteren gilt  $T \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

Ausgehend vom eingeführten Normalschwerefeld ergibt sich die sog. Normalschwere. Sie ist definiert als der Betrag des Gradienten des Normalschwerepotentials

$$\gamma(x, y, z) = |\text{grad } U(x, y, z)| \quad (9)$$

und kann für ein Niveauellipsoid streng berechnet werden (siehe z. B. TORGE, 2003). Analog zum Schwerepotential lassen sich auch Schwerewerte  $g$  zerlegen in den Hauptanteil, den die Normalschwere  $\gamma$  bildet und den relativ kleinen Anteil der Schwerestörung  $\delta g$ :

$$g(x, y, z) = \gamma(x, y, z) + \delta g(x, y, z) \quad . \quad (10)$$

Der Übergang auf die erläuterten Störgrößen erleichtert die Schwerefeldbestimmung maßgeblich. Werden solch kleine Größen verwendet, sind vielfache Vereinfachungen in den entsprechenden Formeln zulässig.

Anstelle der Funktion  $W$  muss nun nur noch das Störpotential  $T$  bestimmt werden, um das Schwerefeld der Erde vollständig beschreiben zu können.

### 3 Randwertprobleme

Die Hauptaufgabe der Physikalischen Geodäsie ist die Bestimmung der Figur der Erde und des äußeren Schwerefeldes (TORGE, 2003). Dies lässt sich mathematisch als sog. äußeres Randwertproblem formulieren. Dabei geht es allgemein darum, eine Funktion  $T$ , von welcher Funktionswerte oder andere Funktionale auf einer geschlossenen Randfläche  $S$  gegeben sind, im gesamten Außenraum dieser Randfläche zu bestimmen (siehe z. B. SIGL, 1989). Beim Geodätischen Randwertproblem (GRWP) ist die Funktion  $T$  das Störpotential der Erde. In der Potentialtheorie lassen sich verschiedene Randwertprobleme unterscheiden, je nachdem auf welcher Art von Randwerten sie beruhen. Bei der Lösung mithilfe von Integralformeln kann immer nur eine einzige Art von Randwerten verarbeitet werden. In der Regel dienen Schweremessungen als Eingangsgrößen, aus denen sich die entsprechenden Randwerte ableiten lassen. In diesem Fall wird auch vom gravimetrischen Randwertproblem gesprochen. Daneben gibt es Randwertprobleme, die unterschiedliche Randwerte in verschiedenen Teilbereichen der Randfläche zulassen. Herausragend ist das Altimetrie-Gravimetrie-Problem (HOLOTA, 1983a, 1983b). Dies ist allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Für die Wahl der Randfläche im Geodätischen Randwertproblem gibt es zwei grundlegende Theorien: Nach STOKES (1849) wird diese durch eine Äquipotentialfläche repräsentiert, also insbesondere dem Geoid. Der Vorteil des Geoids als Randfläche ist zum einen die konkrete physikalische Interpretierbarkeit als auch die mathematisch einfachere Berechnung einer Niveaufläche. Dennoch sind mit dem Geoid auch einige Nachteile verbunden. Da es von der Meeresoberfläche abgesehen größtenteils innerhalb der Erdmassen verläuft, können dort nicht direkt Randwerte gemessen werden. Stattdessen ist eine analytische Fortsetzung der auf oder außerhalb der Erdoberfläche gegebenen Messwerte auf das Geoid notwendig. Dies erfordert eine genaue Kenntnis des Dichteverlaufs im Erdinneren und ist somit nicht hypothesenfrei. Es ist jedoch zu erwarten, dass in Zukunft zumindest regional immer bessere Dichtemodelle der oberen Erdkruste vorliegen, so dass das Geoid durchaus auch zur hochgenauen Schwerefeldbestimmung in Betracht gezogen werden kann (VANÍČEK ET AL., 2012).

Einen Quantensprung in der Genauigkeit ermöglichte die Theorie von Molodenskii (siehe MOLODENSKII ET AL., 1962), die auch heutzutage die Grundlage für die Bestimmung des äußeren Schwerefeldes bildet. Als Randfläche wird hier die Erdoberfläche selbst gewählt, so dass im Wesentlichen keine Reduktion der Messwerte nötig ist. Auf Dichtehypothesen kann prinzipiell vollständig verzichtet werden. Damit einher geht jedoch eine mathematisch wesentlich kompliziertere Handhabung der unregelmäßig geformten Randfläche. In der Praxis sind aus diesem Grund weiterhin Reduktionen der Messwerte im Einsatz, um die raue Randfläche zu glätten. Die Theorie von Molodenskii führt nicht auf das Geoid, sondern das sog. Quasigeoid, welches auf dem Meer mit dem Geoid identisch ist, aber sonst um wenige Meter davon abweichen kann, also insbesondere auch keine Äquipotentialfläche darstellt. Es spielt als Bezugsfläche für die sog. Normalhöhen eine wichtige Rolle.

Je nachdem, was neben der Funktion  $T$  als Unbekannte in die Berechnungen eingeht, können verschiedene Formulierungen des Geodätischen Randwertproblems unterschieden werden. Als wichtigste Beispiele sind das skalar freie sowie das fixe Geodätische Randwertproblem zu nennen. Beim skalar freien Randwertproblem wird neben dem Störpotential die ellipsoidische Höhe der Randfläche, also der Erdoberfläche, gesucht. Bei vollständig bekannter Geometrie der Randfläche liegt ein sog. fixes Randwertproblem vor. Dabei ist das Störpotential  $T$  der Erde die einzige zu berechnende Unbekannte. Angesichts des heutzutage standardmäßigen Einsatzes Globaler Satellitenpositionierungssysteme (GNSS) und zahlreicher hochaufgelöster digitaler Geländemodelle zum Beispiel aus Satellitenmessungen wird dieses Randwertproblem zunehmend aktuell. In MORITZ ET AL. (2000) wird auch der Name "GPS-Randwertproblem" dafür vorgeschlagen.

### 3.1 Das fixe Geodätische Randwertproblem

Die Untersuchungen in dieser Arbeit werden am Beispiel des fixen Geodätischen Randwertproblems durchgeführt, welches im Folgenden behandelt wird. Sie können jedoch auf andere Formulierungen des gravimetrischen Randwertproblems übertragen werden (siehe Abschnitt 7).

Viele Gravimetriemesskampagnen werden von GNSS-Messungen begleitet, so dass die dreidimensionale Position der Schweremesspunkte auf der Erdoberfläche bekannt ist. Auf Grundlage dieser Information lassen sich aus den Schweremessungen die Schwerestörungen ableiten, die als Randwerte in das fixe Geodätische Randwertproblem eingehen. Daraus ergibt sich die Randbedingung, welche mithilfe der in Kapitel 2 eingeführten Näherungsgrößen unter Anwendung der binomischen Reihe (29) linearisiert werden kann (siehe z. B. HECK, 1989):

$$\begin{aligned}
\delta g &:= g_P - \gamma_P = g - \gamma = |\text{grad } W| - |\text{grad } U| = |\text{grad } U + \text{grad } T| - |\text{grad } U| \\
&= |\vec{\gamma} + \text{grad } T| - \gamma = \sqrt{\gamma^2 + 2 \langle \vec{\gamma}, \text{grad } T \rangle + |\text{grad } T|^2} - \gamma \\
&= \gamma \sqrt{1 + \frac{2}{\gamma} \langle \vec{\gamma}, \text{grad } T \rangle + \frac{1}{\gamma^2} |\text{grad } T|^2} - \gamma := \gamma \sqrt{1 + a} - \gamma \\
&= \gamma \left[ 1 + \frac{1}{\gamma} \langle \vec{\gamma}, \text{grad } T \rangle + \frac{1}{2\gamma^2} |\text{grad } T|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} a^n \right] - \gamma \\
&\approx \gamma \left[ 1 + \frac{1}{\gamma} \langle \vec{\gamma}, \text{grad } T \rangle \right] - \gamma = \langle \vec{\gamma}, \text{grad } T \rangle \quad .
\end{aligned} \tag{11}$$

Die somit erhaltene lineare Randbedingung stellt einen Zusammenhang zwischen den auf der Erdoberfläche ermittelten Schwerestörungen  $\delta g$  und dem gesuchten Störpotential  $T$  her. Mit der skalaren Schwerestörung wird die Differenz zwischen dem Betrag  $g$  des aktuellen Schwerevektors und dem Betrag  $\gamma$  des Normalschwerevektors im selben Punkt  $P(x, y, z)$  bezeichnet. In linearer Näherung wird nur die Projektion des Vektors der Schwerestörung auf die Richtung des Normalschwerevektors  $\vec{\gamma}$  betrachtet. Es wird somit angenommen, dass der Schwere- und der Normalschwerevektor an jedem Ort der Erdoberfläche in die gleiche Richtung zeigen. Die Lotabweichung wird vernachlässigt.

Zur Lösung dieser linearisierten Randwertaufgabe sind weitere Approximationen gebräuchlich (siehe z. B. MORITZ, 1980). Wird davon ausgegangen, dass der (Normal-)Schwerevektor in radialer Richtung verläuft, so ergibt sich die sphärische Approximation. Die lineare Randbedingung in sphärischer Approximation lautet

$$|\text{grad } T| \approx -\frac{\partial T}{\partial r} = \delta g \quad , \tag{12}$$

wobei zur Berechnung des Gradienten auf sphärische Koordinaten übergegangen wird. Es handelt sich um ein schiefachsiges Randwertproblem, da der Normalenvektor zur Randfläche (Erdoberfläche) im Allgemeinen nicht in radialer Richtung verläuft, sondern um den Winkel der Geländeneigung davon abweicht.

Um das Geodätische Randwertproblem im Ortsbereich zu lösen, wird die Randbedingung üblicherweise in eine Integralgleichung umgeformt. Dazu gibt es verschiedene Vorgehensweisen, zum Beispiel von MOLODENSKII ET AL. (1962) oder BROVAR (1964).

### 3.2 Ansatz nach Brovar

In dieser Arbeit wird nur der Ansatz von Brovar behandelt, da dieser auf deutlich kompaktere Formeln führt als Molodenskiis Ansatz. Analog zu HECK (2011) wird in diesem Kapitel die

Herleitung für das fixe Geodätische Randwertproblem dargestellt:

Brovar beschreibt das Störpotential durch ein sog. verallgemeinertes Flächenschichtpotential

$$T = \iint_S \lambda \cdot E(r, \psi, r') dS \quad (13)$$

mit der verallgemeinerten Flächendichte  $\lambda$  und der Erdoberfläche  $S$  als Integrationsgebiet.

Zur Definition der harmonischen Kernfunktion  $E$  wird im Falle des fixen Randwertproblems die verallgemeinerte Hotine-Funktion eingeführt, bei der weder Aufpunkt  $(r, \varphi, \lambda)$  noch Quellpunkt  $(r'\varphi', \lambda')$  auf eine Kugeloberfläche beschränkt sind. Sie lautet (siehe z. B. HECK, 2011):

$$H(r, \psi, r') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{r'^n}{r^{n+1}} \cdot P_n(\cos \psi) = \frac{2}{\ell} - \frac{1}{r'} \ln \frac{\ell + r' - r \cos \psi}{r(1 - \cos \psi)} \quad (14)$$

mit

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi} \\ \cos \psi &= \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda' - \lambda) \quad . \end{aligned}$$

Für  $r = r' = R = \text{const.}$  würde sich gerade die Hotinefunktion  $H(\psi)$  (HOTINE, 1969) skaliert mit dem Faktor  $\frac{1}{R}$  ergeben:

$$H(r = R, \psi, r' = R) = \frac{1}{R} H(\psi) = \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} - \ln \left( 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right) \right] \quad (15)$$

Die Kernfunktion  $E$  ist nun so definiert, dass gilt

$$E = \frac{1}{4\pi} H(r, \psi, r') \quad (16)$$

Da  $E$  nach Gleichung (14) durch eine Summe von Legendrepolyomen ausgedrückt werden kann, ist ersichtlich, dass es sich um eine harmonische Funktion handelt. Damit ist auch das dadurch dargestellte Störpotential harmonisch im Außenraum der Erdoberfläche  $S$ .

In sphärischer Approximation gilt (siehe z. B. HECK, 2011)

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = - \iint_S \lambda \frac{\partial E}{\partial r} dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda \frac{\partial H(r, \psi, r')}{\partial r} dS = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \lambda \frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} dS \quad (17)$$

Unter Berücksichtigung der Unstetigkeit der Ableitung des verallgemeinerten Flächenschichtpotentials auf der Randfläche selbst ergibt sich für eine Annäherung vom Außenraum die Randbedingung

$$\lambda \cos \beta - \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} \lambda dS = \delta g \quad (18)$$

Der Winkel  $\beta$  entspricht der Geländeneigung (siehe Abschnitt 4.3). Der Übergang von der Randfläche  $S$  als Integrationsgebiet auf die Einheitskugel wird durch

$$dS = r'^2 \sec \beta d\sigma$$

vollzogen. Zur Vereinfachung der Formeln wird weiterhin die Hilfsfunktion

$$\mu = \lambda \sec \beta$$

eingeführt. Somit ergibt sich die endgültige Darstellung der Randbedingung in sphärischer Approximation zu (HECK, 2011)

$$\mu \cos^2 \beta - \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} r'^2 \mu d\sigma = \delta g \quad . \quad (19)$$

Es handelt sich hier um eine lineare Integralgleichung 2. Art für die unbekannte Funktion  $\mu$ . Eine numerische Lösung lässt sich zum Beispiel iterativ berechnen:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \delta g \sec^2 \beta \\ \mu_{i+1} &= \sec^2 \beta \left[ \delta g + \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} r'^2 \mu_i d\sigma \right] \quad , \quad i = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Die Iteration wird in HECK (2011) für die planare Randbedingung (22) vorgeschlagen, lässt sich aber ebensogut auf die sphärische Gleichung (19) übertragen. Das Prinzip ist in Gleichung (20) dargestellt.

### 3.3 Planare Approximation

Eine andere Möglichkeit zur Lösung der Randbedingung ist das sog. Molodenskii-Shrinking (MOLODENSKII ET AL., 1962). Dabei handelt es sich um eine Reihenentwicklung nach einem kleinen "Störparameter"  $k$ . Das Molodenskii-Shrinking wird ausführlich in Kapitel 3.4 erläutert. Der Vorteil dieser Methode ist, dass sich ein analytischer Ausdruck für die Funktion  $\mu$  ergibt. Die Voraussetzung für das Molodenskii-Shrinking ist allerdings die sog. planare Approximation (siehe z. B. MORITZ, 1980). Der Integralkern vereinfacht sich hiermit zu (MORITZ, 1980)

$$\frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} r'^2 = 2 \frac{h' - h}{\ell^3} R^2 + \delta_{BC} \quad , \quad (21)$$

wobei für den Approximationsfehler die Bezeichnung  $\delta_{BC}$  eingeführt wird (englisch: boundary condition (BC) = Randbedingung). Es werden sämtliche Terme der Größenordnung  $\frac{h}{R}$  bzw.  $\frac{h'}{R}$  vernachlässigt. Damit wird innerhalb der Formeln  $R \rightarrow \infty$  und somit  $\frac{h}{R} \rightarrow 0$  gesetzt, was einer formalen Vereinfachung entspricht. Die planare Approximation ist nicht mit der Verwendung einer ebenen Rand- oder Referenzfläche zu verwechseln. Die eingehenden Größen beziehen sich weiterhin auf die ursprüngliche Randfläche, nämlich die Erdoberfläche.

Damit ergibt sich die planare Randbedingung für das fixe Geodätische Randwertproblem (HECK, 2011)

$$\mu \cos^2 \beta - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h' - h}{\ell^3} \mu d\sigma = \delta g \quad , \quad (22)$$

auf welche das Molodenskii-Shrinking angewendet werden kann.

Mit der durch Lösen der Randbedingung berechneten Funktion  $\mu$  lässt sich schließlich das Störpotential direkt berechnen (siehe z. B. HECK, 2011):

$$T = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} H(r, \psi, r') r'^2 \mu d\sigma \quad . \quad (23)$$

Alternativ kann auch auf diese Gleichung die planare Approximation und das Molodenskii-Shrinking angewendet werden. Dadurch ergibt sich der Beitrag jedes einzelnen Reihengliedes der Funktion  $\mu$  auf das Störpotential separat. Für den Integralkern gilt in diesem Fall

$$H(r, \psi, r') \cdot r'^2 = \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \Delta H \right] \cdot R^2 = \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} \right] \cdot R^2 + \delta_T \quad . \quad (24)$$

Analog zur Vorgehensweise in MORITZ (1980) für das skalar freie GRWP wird im Falle des fixen GRWPs die verallgemeinerte Hotine-Funktion (14) ausgedrückt durch die Hotine-Funktion auf der Kugeloberfläche (15) und einem Zusatzterm  $\Delta H$ , der die Differenz der beiden Funktionen approximiert (siehe z. B. HECK, 2011). Zur Berechnung des Zusatzterms wird für beide Funktionen nur der dominierende Anteil beachtet. Der Summand mit dem natürlichen Logarithmus wird jeweils vernachlässigt. Des Weiteren nicht beachtet wird der Unterschied zwischen der Multiplikation mit dem Faktor  $r'^2$  im ursprünglichen Integralkern und  $R^2$  in der planaren Formel. Dies ist im Rahmen der planaren Approximation mit der Annahme, dass  $R \rightarrow \infty$  gilt, vereinbar. Der Approximationsfehler wird mit  $\delta_T$  bezeichnet.

Die planare Gleichung für das Störpotential lautet somit

$$T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} \right] \mu d\sigma \quad . \quad (25)$$

Der Hauptgrund für die planare Approximation der Integralkerne ist es, das Molodenskii-Shrinking zu ermöglichen. Dieser Form der Reihenentwicklung im Randwertproblem nach Molodenskii ist das folgende Kapitel gewidmet.

### 3.4 Molodenskii-Shrinking

Gerade in früheren Zeiten wurde angestrebt, nicht nur eine numerische Lösung zum Beispiel für das (Quasi-)Geoid, sondern auch einen analytischen Ausdruck dafür zu erhalten. Die planare Approximation gilt als Voraussetzung für das sog. Molodenskii-Shrinking (MOLODENSKII ET AL., 1962). Darunter versteht man eine spezielle Reihenentwicklung sämtlicher in der Randbedingung (22) und der Gleichung des Störpotentials (25) enthaltener Größen nach einem Parameter  $k$ , was auf eine analytische Lösung für beide Gleichungen führt. Dieser Parameter  $k$  mit  $0 \leq k \leq 1$  dient zur Skalierung der Topographie für Berechnungen auf einer unregelmäßig geformten Randfläche:

$$r = R + k \cdot h \quad \text{und} \quad r' = R + k \cdot h' \quad . \quad (26)$$

Im Falle einer glatten Randfläche wie dem Geoid gibt es Reihenentwicklungen zum Beispiel nach dem Parameter der zweiten numerischen Exzentrizität  $e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$ , welche - ausgehend von einer sphärischen Lösung - in den weiteren Schritten sukzessive die Elliptizität der Erde berücksichtigen (siehe z. B. MOLODENSKII ET AL., 1962). Das Molodenskii-Shrinking beruht auf einem ähnlichen Prinzip. Ausgangspunkt ist wiederum die Kugel. In den weiteren Schritten kommt nicht die Elliptizität der Erde ins Spiel, sondern die Abweichung der rauen, unregelmäßig geformten Erdoberfläche, welche die Randfläche bildet, von der Kugel. Hintergrund ist die Vermutung von POINCARÉ (1904), nach der sich, vereinfacht gesagt, jede geschlossene, einfach zusammenhängende Fläche im dreidimensionalen Raum zu einer Kugeloberfläche deformieren lässt. Für  $k = 0$  verschwindet die Topographie und sämtliche Berechnungen werden direkt auf der Kugeloberfläche durchgeführt. Für  $k = 1$  bleibt die Randfläche unverändert. Sinn und Zweck dieser Methode ist es, Reihenentwicklungen zu erhalten, welche im Anfangsschritt die sphärischen Formeln enthalten und diese sukzessive um weitere Terme zur Anpassung an

die Topographie zu erweitern. Der Name "Molodenskii-Shrinking" (englisch: shrinking = das Schrumpfen, Stauchen) beschreibt das Grundprinzip anschaulich.

Alle in der Randbedingung bzw. der Gleichung für das Störpotential auftretenden Größen müssen nach  $k$  entwickelt werden: Für die räumliche Distanz zwischen zwei Punkten gilt (MOLODENSKII ET AL., 1962):

$$\ell^2 = \ell_0^2 \cdot \left[ 1 + k \cdot \frac{h+h'}{R} + k^2 \cdot \frac{hh'}{R^2} \right] + k^2 \cdot (h' - h)^2 \quad (27)$$

mit dem Abstand zweier auf der Kugeloberfläche gelegener Punkte

$$\ell_0 = 2R \sin \frac{\psi}{2} \quad .$$

Die Vernachlässigung sämtlicher Terme der Größenordnung  $O\left(\frac{h}{R}\right)$  im Rahmen der planaren Approximation vereinfacht obigen Ausdruck auf (MOLODENSKII ET AL., 1962)

$$\ell^2 \approx \ell_0^2 + k^2 \cdot (h' - h)^2 = \ell_0^2 \cdot \left[ 1 + k^2 \cdot \left( \frac{h' - h}{\ell_0} \right)^2 \right] := \ell_0^2 \cdot [1 + k^2 \eta^2] \quad . \quad (28)$$

Mithilfe der binomische Reihe (BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 1011)

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = 1 + rx + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \dots \quad \text{für} \quad \begin{cases} |x| \leq 1, r > 0 \\ |x| < 1, r < 0 \end{cases} \quad (29)$$

kann sowohl  $\ell$  als auch  $\frac{1}{\ell}$  bzw.  $\frac{1}{\ell^3}$ , wie es in der Randbedingung (22) vorkommt, entwickelt werden. Für die ebenfalls in der Randbedingung enthaltene Geländeneigung gilt die Beziehung

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} \quad . \quad (30)$$

Die Steigung  $\tan \beta$  in einem Punkt ist gleich dem Grenzwert von  $\eta = \frac{h'-h}{\ell_0}$  für  $\ell_0 \rightarrow 0$ , so dass auch die Geländeneigung mit dem Parameter  $k$  in Beziehung gesetzt (MOLODENSKII ET AL., 1962)

$$\frac{1}{1 + k^2 \tan^2 \beta} = \frac{1}{1 - (-1) \cdot k^2 \tan^2 \beta} \quad (31)$$

und mithilfe der geometrischen Reihe (BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 18)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{für} \quad |x| < 1 \quad (32)$$

unter der Bedingung  $\tan \beta < 1$ , d. h.  $\beta < 45^\circ$  entwickelt werden kann.

Das Molodenskii-Shrinking bezeichnet nur die methodische Vorgehensweise der Reihenentwicklung mithilfe des Parameters  $k$ . Sie ist nicht an einen bestimmten Ansatz zur Lösung der Geodätischen Randwertaufgabe gekoppelt. Abwandlungen dieser Reihenentwicklung wie sie von MOLODENSKII ET AL. (1962) eingeführt wurde, wurden zum Beispiel von BROVAR (1964) auf den in Abschnitt 3.2 vorgestellten Ansatz und gleichzeitig aber unabhängig voneinander von MARYCH (1969) bzw. MORITZ (1969) auf die Lösung der Geodätischen Randwertaufgabe durch analytische Fortsetzung angewendet. Im Folgenden wird die Vorgehensweise für den Ansatz nach Brovar vorgestellt. Es kann jedoch gezeigt werden, dass die Reihenentwicklungen der drei erwähnten Ansätze äquivalent sind (siehe MORITZ, 1980).

Die planare Randbedingung (22) des fixen Geodätischen Randwertproblems kann mit

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \mu_n \quad (33)$$

sowie den Reihenentwicklungen von  $\frac{1}{\ell^3}$  und (31) umgeschrieben werden zu

$$\begin{aligned} \delta g = & [\mu_0 + k\mu_1 + k^2\mu_2 + \dots] [1 - k^2 \tan^2 \beta + k^4 \tan^4 \beta - + \dots] \\ & - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{k\eta}{\ell_0^2} [\mu_0 + k\mu_1 + k^2\mu_2 + \dots] \left[ 1 - \frac{3}{2} k^2 \eta^2 + \frac{15}{8} k^4 \eta^4 - + \dots \right] d\sigma \quad . \end{aligned} \quad (34)$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen von Termen gleicher Potenz von  $k$  ergibt

$$\begin{aligned} 0 = & [\mu_0 - \delta g] + k \left[ \mu_1 - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\eta}{\ell_0^2} \mu_0 d\sigma \right] \\ & + k^2 \left[ \mu_2 - \mu_0 \tan^2 \beta - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\eta}{\ell_0^2} \mu_1 d\sigma \right] + \dots \quad . \end{aligned} \quad (35)$$

Für  $k = 1$  wird die ursprüngliche Topographie beibehalten. Eine sukzessive Lösung der Randbedingung ergibt sich aus der Tatsache, dass (35) genau dann erfüllt ist, wenn die Klammerausdrücke jeweils gleich null sind.

Daraus folgt (siehe z. B. auch HECK, 2011)

$$\begin{aligned} \mu_0 & = \delta g \\ \mu_1 & = \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\eta}{\ell_0^2} \mu_0 d\sigma \\ \mu_2 & = \mu_0 \tan^2 \beta + \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\eta}{\ell_0^2} \mu_1 d\sigma \\ & \vdots \end{aligned} \quad (36)$$

und

$$\mu = \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots \quad . \quad (37)$$

Das Störpotential lässt sich entweder direkt durch Einsetzen von  $\mu$  in Gleichung (23) berechnen oder kann konsistent zur Vorgehensweise bei der Randbedingung ebenfalls in eine Reihe entwickelt werden. Dies hat den Vorteil, dass zu jedem Approximationsschritt  $\mu_i$  der entsprechende Anteil  $T_i$  angegeben werden kann.

Die planare Gleichung des Störpotentials (25) lautet in Reihendarstellung

$$T = \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{R} H(\psi) - \frac{k^2 \eta^2}{\ell_0} + \frac{3}{4} \frac{k^4 \eta^4}{\ell_0} - + \dots \right] [\mu_0 + k\mu_1 + k^2\mu_2 + \dots] d\sigma \quad . \quad (38)$$

Daraus folgt schließlich (siehe z. B. auch HECK, 2011)

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_0 H(\psi) d\sigma \\
 T_1 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_1 H(\psi) d\sigma \\
 T_2 &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \mu_2 H(\psi) d\sigma - \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{\eta^2}{\ell_0} \mu_0 d\sigma \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{39}$$

und

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots \quad . \tag{40}$$

Obwohl sämtliche Gleichungen im Geodätischen Randwertproblem genauso gut auch numerisch ausgewertet werden können, ist die Reihenentwicklung auch heute noch der Standardfall. Vorteil ist, dass die einfache sphärische Stokes- bzw. Hotinefunktion im Integralkern steht. Die Konvergenz der Reihe ist für  $k = 1$  jedoch nicht bewiesen (siehe auch MORITZ, 1980). In der Praxis wird oft höchstens der lineare Fall angewendet, also die Terme nullter und erster Ordnung. Es stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, weitere Reihenglieder hinzuzunehmen, um die Genauigkeit zu steigern, wenn andererseits in sämtlichen Termen Fehler durch die planare Approximation und damit vernachlässigte Terme in Kauf genommen werden.

### 3.5 Übersicht über die weiteren Arbeiten

Die Genauigkeit der planaren Approximation wird in der Literatur mit  $\frac{h}{R} \leq \frac{8000 \text{ m}}{6371 \text{ km}} = 0.1\%$  abgeschätzt (MORITZ, 1980). Diese Annahme beinhaltet einen maximalen Fehler von rund 0.5 mgal in den Randwerten und etwa 10 cm in den (Quasi-)Geoidhöhen. Da heutzutage ein zentimeter- oder sogar millimetergenaues (Quasi-)Geoid angestrebt wird, ist es sinnvoll, die genaue Größenordnung dieses Fehlereinflusses zu kennen und ihn gegebenenfalls zu korrigieren. Die theoretischen Grundlagen und das Ziel dieser Approximation wurden in den vergangenen Abschnitten erläutert. Hauptziel dieser Arbeit ist es, sämtliche Effekte der planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem näher zu betrachten. Zu diesem Zweck werden umfangreiche numerische Untersuchungen am Beispiel des fixen Geodätischen Randwertproblems vorgenommen. Sowohl die planare Approximation der Randbedingung als auch des Störpotentials und die Auswirkung sämtlicher Fehler auf die berechneten Randwerte bzw. die Quasigeoidhöhen werden betrachtet. Um herauszufinden, inwiefern die Ergebnisse von der Auflösung der Daten abhängen, werden sowohl globale Untersuchungen als auch regionale Untersuchungen mit verfeinerter Auflösung durchgeführt.

In einem weiteren Schritt werden analytische Betrachtungen der vernachlässigten Terme höherer Ordnung angestellt und mögliche Korrekturterme hergeleitet. Es wird gezeigt, dass sich auf diese Korrekturterme ebenfalls das Molodenskii-Shrinking anwenden lässt und die entsprechenden Formeln hergeleitet. Numerische Untersuchungen zum Validieren dieser Korrekturterme vervollständigen das Kapitel.

In einem abschließenden Kapitel werden die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick auf weitere interessante Fragestellungen gegeben.

## 4 Datengrundlage

Ziel dieser Arbeit ist es, die Auswirkung der planaren Approximation auf die (Quasi-)Geoidberechnung zu untersuchen. Dazu werden verschiedene numerische Untersuchungen durchgeführt. Gegenstand dieser Untersuchungen sind die für das fixe Geodätische Randwertproblem relevanten Formeln: Die Randbedingung (19) sowie die Gleichung für das Störpotential (23). Zur Auswertung der Integralgleichungen werden folgende Daten benötigt:

- Topographische Höhen  $h$  in Form von Digitalen Geländemodellen (DGMs)
- Schwerestörungen  $\delta g$  auf einem regelmäßigen Datengitter
- Geländeneigungen  $\beta$  ebenfalls auf einem regelmäßigen Datengitter

Theoretisch müssen sämtliche Eingangsgrößen in kontinuierlicher Form auf der Erdoberfläche vorliegen. Zur praktischen Auswertung der Integralformeln wird das Integrationsgebiet durch ein regelmäßiges Gitter aus Flächenelementen diskretisiert, deren Einzelbeiträge aufsummiert werden.

Vor allem geht es um den Vergleich der einander entsprechenden sphärischen und planaren Integralkerne. Dafür ist es zweckmäßig das Untersuchungsszenario so einfach wie möglich zu gestalten. Als Referenzfläche für sämtliche Berechnungen dient eine mittlere Erdkugel. Die topographischen Höhen werden direkt auf diese Kugel aufgesetzt. Die Quasigeoidundulation wird somit vernachlässigt und die topographische Höhe  $H$  mit der ellipsoidischen Höhe  $h$  gleichgesetzt. Folgende Konstanten werden verwendet:

- $R = 6378136.3$  m                      Radius der Erdkugel  $\hat{=}$  Äquatorradius der Erde
- $G = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$                       Newton'sche Gravitationskonstante (TORGE, 2003)
- $GM = 3.986004415 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$                       Geozentrische Gravitationskonstante
- $\rho = 2670 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$                       Mittlere Dichte der oberen Erdkruste.

### Globale Untersuchungen

Um einen Überblick über die Größenordnung der Approximationsfehler zu bekommen werden zunächst globale numerische Untersuchungen vorgenommen. Das Integrationsgebiet erstreckt sich hierbei über die gesamte Erde. Es stellt sich die Frage, wie stark die Ergebnisse von der gewählten Auflösung des Gitters abhängen. Deshalb erfolgen die globalen Berechnungen mit verschiedenen Rasterweiten:

- $5' \times 5'$              $\leftrightarrow$     9331200 Flächenelemente
- $15' \times 15'$          $\leftrightarrow$     1036800 Flächenelemente
- $60' \times 60'$          $\leftrightarrow$     64800 Flächenelemente.

Die Aufpunkte liegen bei allen Auflösungsstufen auf einem identischen  $5'$ -Gitter vor. Damit lassen sich die Ergebnisse der verschiedenen Rasterweiten direkt vergleichen.

## Regionale Untersuchungen

In einem weiteren Schritt werden regionale numerische Untersuchungen in zwei ausgewählten Gebieten durchgeführt (Abbildung 1).

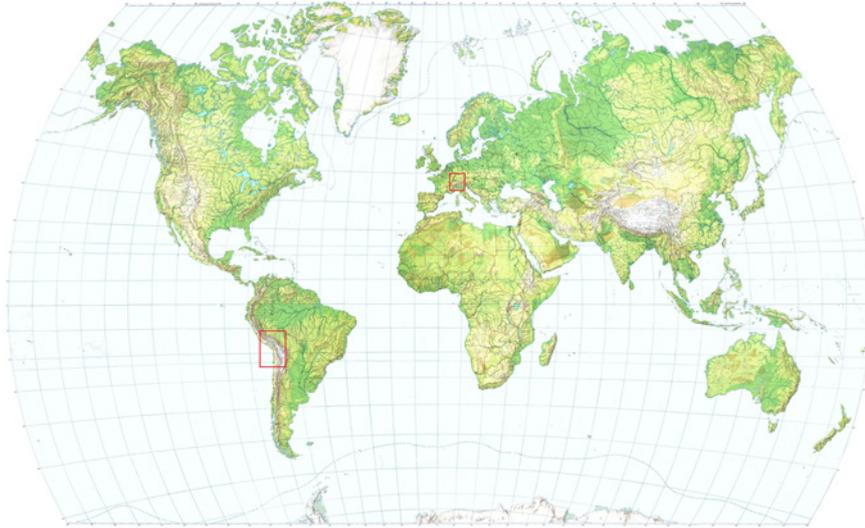


Abbildung 1: regionale Untersuchungsgebiete

Das erste Gebiet umfasst einen Teil Mitteleuropas. Es erstreckt sich vom Oberrheingraben im Norden bis über die Alpen im Süden. Das zweite Gebiet liegt in den Anden in Südamerika und soll als Extrembeispiel dienen. Für die regionalen Untersuchungen werden Daten unterschiedlicher Auflösung kombiniert. Es erfolgt eine Unterteilung in den sog. Nahbereich, welcher um mindestens ein Grad über das Gebiet der Aufpunkte hinausreicht und den Fernbereich, welcher die restliche Erdoberfläche umfasst. Die Unterteilung ist in Abbildung 2 für das Gebiet in den Anden schematisch dargestellt.

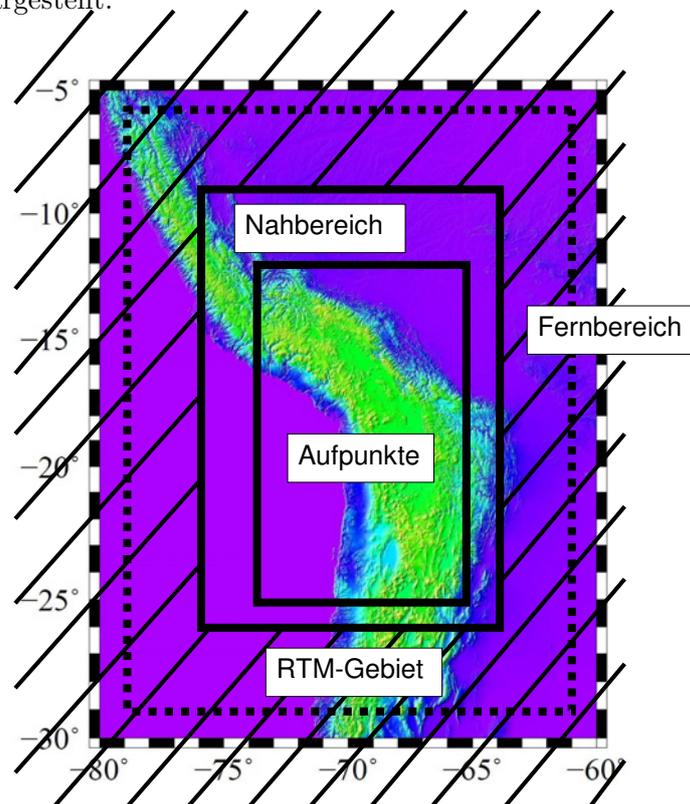


Abbildung 2: Unterteilung des Berechnungsgebietes "Anden"

Es wird angenommen, dass die Massen im näheren Umfeld der Aufpunkte den größten Einfluss auf die Integralwerte haben. Im Nahbereich wird deshalb mit hochaufgelösten Daten gerechnet. Der Fernbereich dagegen kann mit einer größeren Auflösung modelliert werden. Folgende Auflösungen werden verwendet:

- Nahbereich:  $30'' \times 30''$
- Fernbereich:  $5' \times 5'$  .

Die Aufpunkte liegen innerhalb des jeweiligen regionalen Gebiets auf einem Gitter von  $30'' \times 30''$ . Zum visuellen Vergleich wird den hochaufgelösten Daten auch immer der entsprechende Ausschnitt aus der globalen  $5' \times 5'$ -Lösung gegenübergestellt.

## 4.1 Topographische Höhen

### Globale Untersuchungen

Zur Auswertung der Integralgleichungen sind topographische Höhen auf einem regelmäßigen globalen Raster erforderlich. In dieser Arbeit wird das DTM2006.0 (PAVLIS ET AL., 2007) verwendet, welches in einer Auflösung von  $5' \times 5'$  vorliegt. Die Höhenwerte des Gitters repräsentieren die mittlere Geländehöhe in einem jeweils  $5' \times 5'$  großen Flächenelement. Auf dem Meer gelegene Punkte haben eine Höhe von null Metern. Für die niedrigeren Auflösungsstufen werden aus dem vorliegenden DGM Blockmittelwerte berechnet. Beispielsweise entsteht die Auflösung von  $15' \times 15'$  durch Mittelbildung von Blöcken aus jeweils  $3 \times 3$  Höhenwerten.

Innerhalb des Textes sind die Daten und Ergebnisse für die Auflösung von  $5'$  dargestellt. Für die restlichen Auflösungsstufen wird auf den Anhang verwiesen.

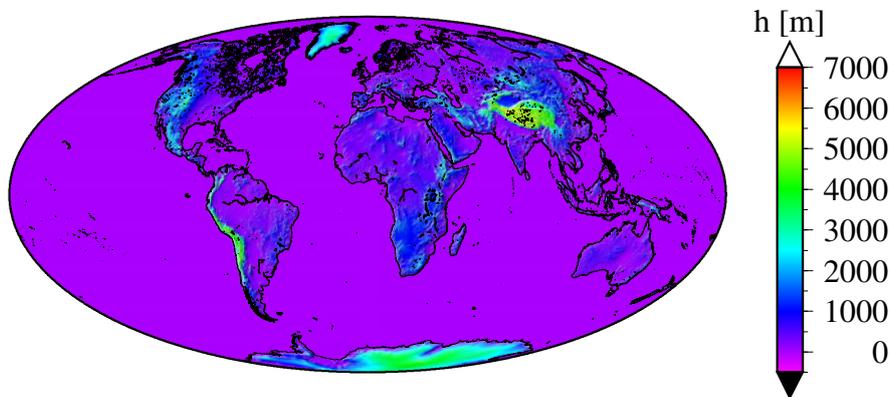


Abbildung 3: Topographie:  $5' \times 5'$

Zur graphischen Darstellung kommt das Programm GMT zum Einsatz (siehe: THE GENERIC MAPPING TOOLS - Version 4.5.7 - Technical Reference and Cookbook). Mithilfe dieser Software wird zwischen den auf einem regelmäßigen Gitter vorliegenden Daten zweidimensional interpoliert. Es wird die standardmäßig eingestellte bi-kubische Interpolation verwendet.

Sämtliche Daten werden statistisch ausgewertet. Für die Topographie bei einer Auflösung von  $5' \times 5'$  ergeben sich die folgenden Kenngrößen:

Mittelwert	378 m		
Standardabweichung	854 m		
Maximum	6794 m	bei	$\varphi = 27^\circ 57' 30''$ , $\lambda = 86^\circ 57' 30''$
Minimum	-413 m	bei	$\varphi = 31^\circ 32' 30''$ , $\lambda = 35^\circ 27' 30''$
Betragsminimum	0 m	bei	$\varphi = 89^\circ 57' 30''$ , $\lambda = 0^\circ 2' 30''$

## Regionale Untersuchungen

Für die regionalen numerischen Untersuchungen werden Daten unterschiedlicher Auflösung kombiniert. Zur Modellierung des Fernbereichs dienen die mit einer Auflösung von  $5' \times 5'$  vorliegenden Höhenwerte des DTM2006.0 wie oben beschrieben. Im Nahbereich kommen hochaufgelöste Geländemodelle zum Einsatz. Zu diesem Zweck wird das SRTM3 genutzt, welches im Rahmen der Shuttle Radar Topography Mission (FARR ET AL., 2007) erstellt wurde. Die absolute vertikale Höhengenaugigkeit wird in der genannten Publikation mit  $\pm 16$  m angegeben. Die SRTM3-Höhen liegen mit einer Auflösung von  $3'' \times 3''$  zwischen  $60^\circ$  Nord und  $56^\circ$  Süd vor. Sie werden vom CGIAR Consortium for Spatial Information zur Verfügung gestellt. Die Daten der aktuellen Version SRTM3 Version 4.1 können unter folgendem Link heruntergeladen werden: <http://srtm.csi.cgiar.org>. Die Geländehöhen werden durch Berechnen von Blockmittelwerten auf  $30'' \times 30''$  geglättet.

Im Text werden die Daten und Ergebnisse für das Testgebiet in den Anden graphisch dargestellt. Die Graphiken des Gebietes in Mitteleuropa befinden sich im Anhang.

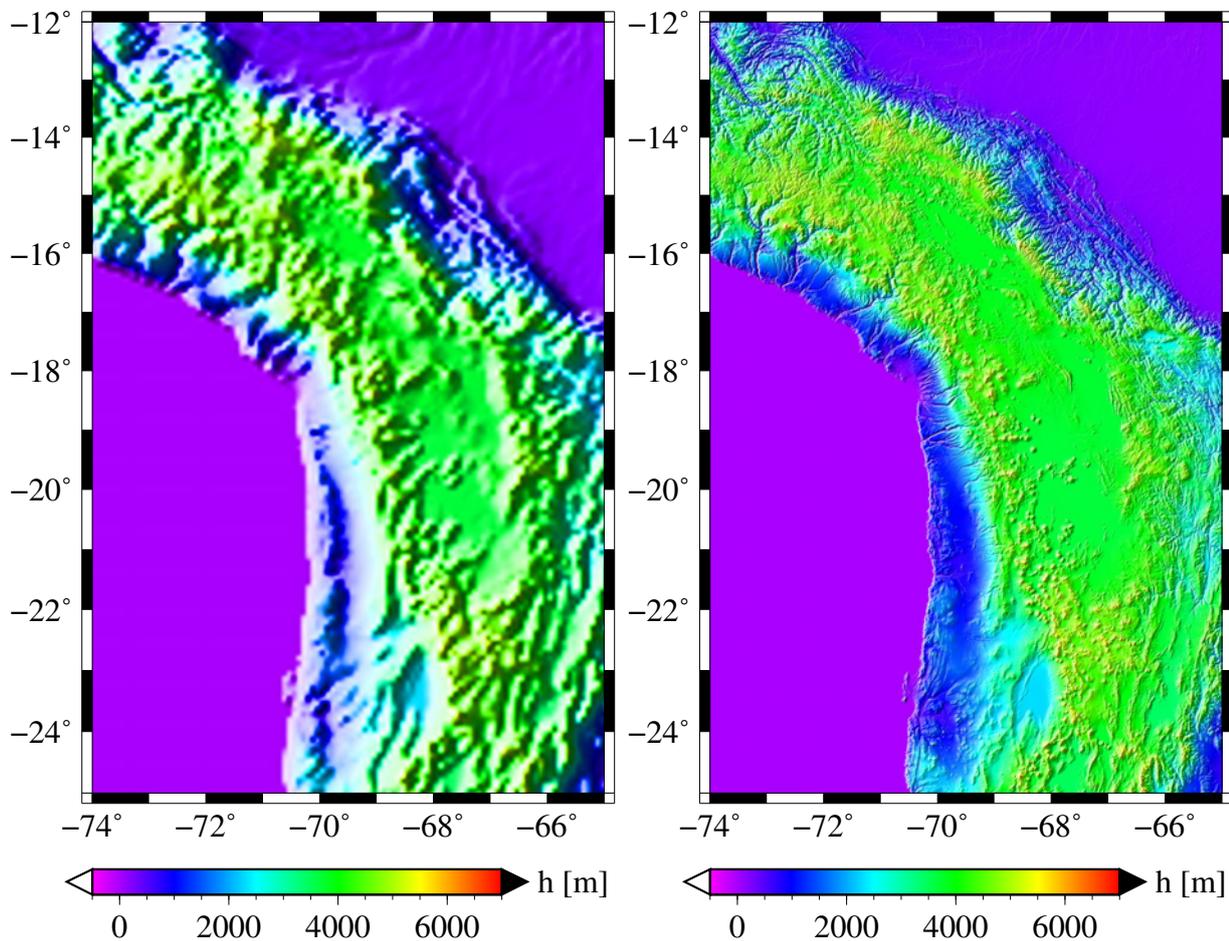


Abbildung 4: Topographie: a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$

Mittelwert	1979 m
Standardabweichung	1810 m
Maximum	5653 m
Minimum	0 m
Betragsminimum	0 m

Mittelwert	1980 m
Standardabweichung	1819 m
Maximum	6569 m
Minimum	-8 m
Betragsminimum	0 m

## 4.2 Schwerestörungen

Als Randwerte für das fixe Geodätische Randwertproblem dienen Schwerestörungen. Damit wird nach Gleichung (11) die Differenz zwischen dem aktuellen Schwerewert in einem Punkt und einem Normalschwerewert im selben Punkt bezeichnet:

$$\delta g(x, y, z) = g(x, y, z) - \gamma(x, y, z) \quad . \quad (41)$$

Schwerestörungen geben ebenso wie Schwereanomalien Aufschluss über die Verteilung der Massen im Erdinneren. Positive Werte deuten auf einen Massentüberschuss, negative Werte auf ein Massendefizit im Untergrund hin.

## Globale Untersuchungen

Die numerischen Untersuchungen werden mit synthetisch generierten Daten durchgeführt. Sowohl das Störpotential als auch die nach Gleichung (12) funktional davon abhängigen Schwerestörungen sind außerhalb der Erdmassen harmonische Funktionen. Jede harmonische Funktion lässt sich nach Kugelfunktionen entwickeln (siehe z. B. HEISKANEN UND MORITZ, 1967). Die Schwerestörungen können somit näherungsweise mithilfe eines Geopotentialmodells berechnet werden. Dabei wird das Gravitationspotential spektral in seine einzelnen Frequenzanteile zerlegt, wobei die Koeffizienten des Geopotentialmodells die Amplituden der entsprechenden Frequenzen repräsentieren. In dieser Arbeit kommt das Earth Gravitational Model EGM2008 (PAVLIS ET AL., 2008) zum Einsatz. Dabei handelt es sich um ein Potentialmodell, welches von der U.S. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) im Jahre 2008 veröffentlicht wurde. Das EGM2008 enthält die vollständig normierten Koeffizienten  $\bar{C}_{nm}$  und  $\bar{S}_{nm}$  des Gravitationspotentials bis zum Entwicklungsgrad  $N_{max} = 2160$ . Die Koeffizienten wurden durch harmonische Analyse aus terrestrischen und satellitengestützten Schweremessungen sowie Altimeterdaten berechnet und öffentlich zur Verfügung gestellt.

Das Gravitationspotential der Erde kann mithilfe dieser Koeffizienten durch eine harmonische Synthese berechnet werden (HEISKANEN UND MORITZ, 1967):

$$V(r, \varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \right] \quad , \quad (42)$$

wobei die große Halbachse der Erde  $a$  mit dem Radius  $R$  der mittleren Erdkugel gleichgesetzt wird, worauf sämtliche Berechnungen in dieser Arbeit bezogen sind. Mit  $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$  werden die vollständig normierten zugeordneten Legendre'schen Funktionen erster Art bezeichnet. Die Koeffizienten ersten Grades verschwinden, wenn der Ursprung des Bezugskordinatensystems mit dem Massenmittelpunkt der Erde übereinstimmt. Dies ist der Standardfall. Im EGM2008 sind keine Koeffizienten ersten Grades enthalten.

Der gravitative Anteil des Normalschweropotentials eines Niveauellipsoids, welches als Normalschwerefeld dient, kann ebenfalls durch eine Kugelfunktionsentwicklung dargestellt werden, wobei hier nur Koeffizienten  $\bar{C}_{n0, \text{Ref}}$  mit geradem  $n$  auftreten. Alle anderen Koeffizienten verschwinden aufgrund der Rotations- sowie Äquatorsymmetrie. Somit lässt sich auch das Störpotential durch eine Kugelfunktionsentwicklung modellieren:

$$\begin{aligned} T(r, \varphi, \lambda) &= V(r, \varphi, \lambda) + Z(r, \varphi) - U(r, \varphi) \quad (43) \\ &= \frac{GM}{r} \sum_{n=2}^{N_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n ((\bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm, \text{Ref}}) \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \end{aligned}$$

Die Masse des Niveauellipsoids wird der Erdmasse gleichgesetzt. Das Zentrifugalpotential fällt heraus (siehe Abschnitt 2). Aus dem Störpotential kann durch Ableiten die Schwerestörung in sphärischer Approximation berechnet werden:

$$\delta g \approx -\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{N_{max}} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n ((\bar{C}_{nm} - \bar{C}_{nm,Ref}) \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \cdot \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (44)$$

Eine exakte Berechnung nach Gleichung (11) ist mithilfe des Potentialmodells ebenfalls möglich. Der Gradient von  $V$  lautet in sphärischen Koordinaten (BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 648)

$$\text{grad } V = V_r \vec{e}_r + \frac{1}{r \cos \varphi} V_\lambda \vec{e}_\lambda + \frac{1}{r} V_\varphi \vec{e}_\varphi \quad . \quad (45)$$

Dazu muss der Gradient des Zentrifugalpotentials addiert, der Betrag berechnet und die Normalschwere subtrahiert werden. Die Ableitungen des Potentials nach sphärischen Koordinaten lassen sich mithilfe des Potentialmodells exakt berechnen. In dieser Arbeit wird davon kein Gebrauch gemacht, sondern mit den sphärisch genäherten Schwerestörungen gerechnet. Auf die durchgeführten Untersuchungen hat dies keinen Einfluss.

Ebenfalls von der NGA wird das Fortran-Programm **harmonic\_synth** zur Verfügung gestellt (siehe auch PAVLIS ET AL., 2008), mit dem die Synthese während dieser Arbeit durchgeführt wird. Das Programm sowie die Koeffizienten des EGM2008 finden sich unter dem im Literaturverzeichnis angegebenen Link zum Herunterladen. Mit **harmonic\_synth** werden für jene Punkte, die die Höhe  $h = 0$  m haben, Blockmittelwerte gerechnet. Für alle anderen Punkte wird jeweils im Mittelpunkt des entsprechenden Flächenelements ein Wert für  $\delta g$  bestimmt. Es wird angenommen, dass dieser Wert das Flächenelement hinreichend repräsentiert. Als Bezugsfläche für sämtliche Berechnungen dient eine Kugel mit dem Radius  $R$ .

Analog zu den topographischen Höhen wird die Synthese von  $\delta g$  für die globalen Berechnungen nur mit der Auflösung von  $5'$  durchgeführt. Die größeren Auflösungen werden auch hier durch das Bilden von Blockmittelwerten erzeugt. Ihre Darstellung befindet sich im Anhang.

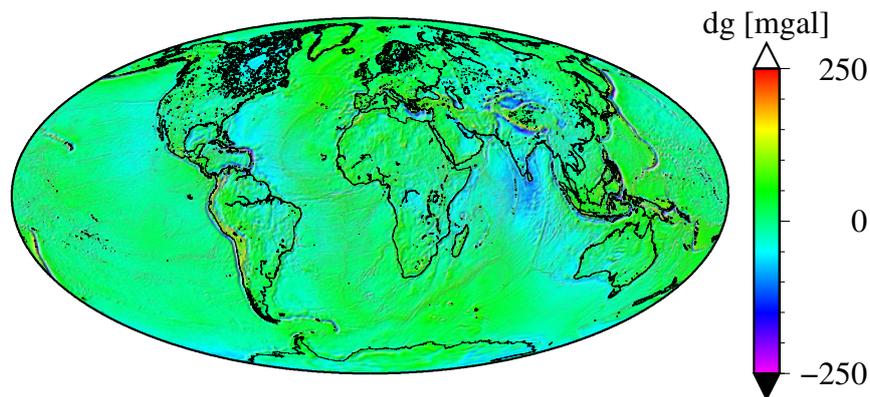


Abbildung 5: Schwerestörung:  $5' \times 5'$

Mittelwert	-0.747 mgal		
Standardabweichung	32.2 mgal		
Maximum	654.1 mgal	bei $\varphi = 10^\circ 42' 30''$	, $\lambda = -73^\circ 42' 30''$
Minimum	-367.0 mgal	bei $\varphi = 19^\circ 17' 30''$	, $\lambda = -66^\circ 27' 30''$
Betragsminimum	$-2.0 \cdot 10^{-5}$ mgal	bei $\varphi = 64^\circ 67' 30''$	, $\lambda = 42^\circ 37' 30''$

## Regionale Untersuchungen

Globale Potentialmodelle beschreiben vor allem den langwelligen Anteil der Schwerestörung. Das EGM2008 ist eine Darstellung des Gravitationspotentials bis zum Entwicklungsgrad  $N_{max} = 2160$ . Dies entspricht einer maximalen räumlichen Auflösung von  $\frac{20000 \text{ km}}{N} \approx 9 \text{ km}$  am Äquator. Somit sind in den hier berechneten Schwerestörungen keine hochfrequenten Anteile enthalten. Da die regionalen numerischen Untersuchungen mit einer Auflösung von  $30'' \times 30''$  durchgeführt werden, müssen die Schwerestörungen um den entsprechenden kurzwelligen Anteil verfeinert werden (vgl. z. B. HIRT ET AL., 2010). Der Einfluss der kurzwelligen Topographie auf die Schwerestörung lässt sich durch das sog. Residual Terrain Modelling (RTM) berechnen (FORSEBERG, 1984). Dabei wird von einem hochfrequenten DGM der langwellige Anteil, also eine geglättete Geländeﬂäche, die sog. RTM-Fläche, abgezogen. Als Ergebnis werden residuale Höhen erhalten, die sowohl positiv als auch negativ sein können (siehe Abbildung 6).

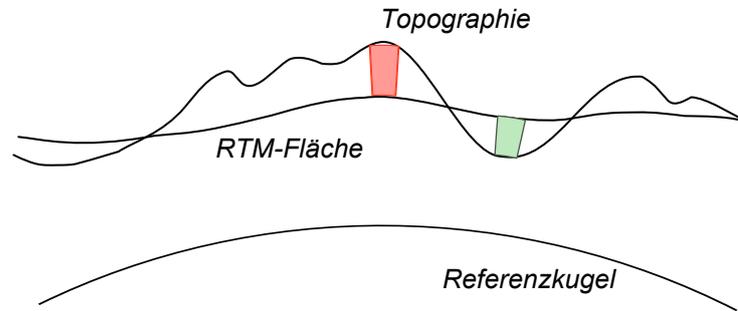


Abbildung 6: Prinzip des Residual Terrain Modelling

Es wird angenommen, dass die Schwerewirkung der geglätteten RTM-Fläche genau dem langwelligen Anteil der Schwerestörung  $\delta g_{EGM2008}$  entspricht, welcher durch die harmonische Synthese des EGM2008 bestimmt wird. Die Schwerewirkung der noch nicht berücksichtigten residualen Geländemassen  $\delta g_{RTM}$  kann auf Grundlage einer Massenmodellierung im Ortsbereich und Lösen des Newton-Integrals für die Gravitationsbeschleunigung berechnet werden. Der Einfluss der oberhalb der RTM-Fläche gelegenen Massen (rot) auf die Schwere muss dazu addiert werden, während die unterhalb gelegenen Massen (grün) gedanklich abgetragen werden. Wenn die Höhenwerte der Topographie sowie der RTM-Fläche auf einem regelmäßigen Gitter zur Verfügung stehen, lässt sich das residuale Gelände durch ein Raster von regelmäßig geformten Körpern diskretisieren. Die Höhe eines solchen Volumenkörpers entspricht dann gerade der residualen Höhe des entsprechenden Flächenelements. Liegen die Höhenwerte auf einem Gitter aus geographischen Koordinaten vor, bietet sich eine Diskretisierung durch sogenannte Tesseroiden an (ANDERSON, 1976), da diese die sphärische Form der Erde berücksichtigen. Ein Tesseroid ist ein Volumenkörper, welcher an den Seiten durch jeweils zwei Flächen  $B = const.$  und  $L = const.$  begrenzt wird (vgl. HECK UND SEITZ, 2007). Dabei sind  $B$  und  $L$  die geographische Breite und Länge. Die Deck- sowie die Grundfläche sind Flächen mit konstanter ellipsoidischer Höhe  $H$ . In dieser Arbeit wird nur der sphärische Fall betrachtet. Hierbei werden die Tesseroiden durch geozentrisch sphärische Koordinaten  $\varphi, \lambda$  horizontal begrenzt. Deck- und Grundfläche der Tesseroiden werden durch Flächen mit konstantem Radius  $r$  gebildet (siehe Abbildung 7). Die Schwerewirkung eines solchen Tesseroids ergibt sich durch das Newton-Integral in geozentrisch sphärischen Koordinaten zu (HECK UND SEITZ, 2007)

$$\delta g = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(r - r' \cos \psi) r'^2 \cos \varphi' dr' d\varphi' d\lambda'}{\ell^3} . \quad (46)$$

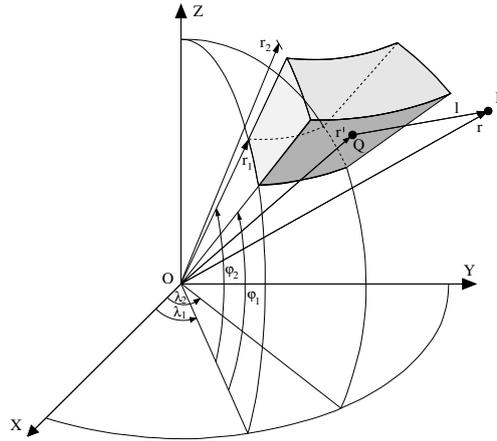


Abbildung 7: Modell eines Tesseroids (KUHN, 2000)

Da dieses Integral nicht vollständig analytisch gelöst werden kann, muss auf Näherungsverfahren der numerischen Integration zurückgegriffen werden. In dieser Arbeit wird eine Taylorreihenentwicklung des Integranden mit anschließender gliedweiser Integration angewendet (siehe HECK UND SEITZ, 2007). Es hat sich gezeigt, dass bei der Auswertung der Tesseroidformeln für einen nahe gelegenen Aufpunkt numerische Probleme auftreten (MÜSSLE, 2011). Deshalb werden die Massen im unmittelbaren Nahbereich des jeweiligen Aufpunkts durch Quader diskretisiert. Die Schwerewirkung eines Quaders lässt sich analytisch berechnen. Die Formeln finden sich z. B. in HECK UND SEITZ (2007). Die sphärische Distanz, bis zu welcher Quader zur Modellierung zum Einsatz kommen, wird analog zu MÜSSLE (2011) festgelegt:

$$\psi_{\text{Quader}} = \begin{cases} 6 \cdot 30'' \cdot \frac{\Delta r}{R \cdot 30'' / \rho''} & \text{für } \Delta r > R \cdot \frac{30''}{\rho''} \\ 6 \cdot 30'' & \text{sonst} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \text{(Ausdehnung des unmittel-} \\ \text{baren Nahbereichs)} \end{array} \quad (47)$$

wobei  $\Delta r$  die Höhe des entsprechenden Körpers bezeichnet, also mit dem Betrag der residualen Höhe gleichzusetzen ist. Für das Testgebiet in Südamerika sind im Flachland etwa 110 - 115 Quader verwendet worden, im Hochgebirge bis zu 149. In Europa sind es rund 160 im Flachland und bis zu 187 in den Alpen.

Zur Berechnung der Schwerewirkung des gesamten residualen Geländes wird der Einzelbeitrag sämtlicher Massenkörper aufsummiert. Das Integrationsgebiet zur Berechnung der RTM-Effekte wird so gewählt, dass es in allen vier Himmelsrichtungen um drei Grad über den rechteckigen Integrationsbereich der regionalen Berechnungen hinausragt (siehe auch Abbildung 2). Der Einfluss der residualen Topographie nimmt mit zunehmendem Abstand ab, so dass die außerhalb liegenden Massen vernachlässigt werden können. In HIRT ET AL. (2010) wird ein Integrationsradius von mindestens 200 km um den jeweiligen Aufpunkt empfohlen. Dies wird beim gewählten Integrationsgebiet für die RTM-Berechnung sowohl in Europa als auch in den Anden stets erreicht. Bei  $50^\circ$  N beispielsweise beträgt der Integrationsradius bei drei Grad Überhang mindestens 214 km. Abbildung 8 zeigt, dass bei einem Integrationsradius von drei Grad in den Anden Beiträge zum RTM-Effekt im Bereich von 0.01 mgal vernachlässigt werden. In Gebieten mit weniger stark ausgeprägter Topographie ist der Einfluss der vernachlässigten Massen deutlich geringer.

Die gesamte Schwerestörung ergibt sich schließlich als Summe aus lang- und kurzweiligem Anteil:

$$\delta g = \delta g_{\text{EGM2008}} + \delta g_{\text{RTM}} \quad . \quad (48)$$

Dabei wird sowohl die Synthese als auch die RTM-Berechnung in den Topographiepunkten ausgewertet. Diese können wie in Abbildung 6 ersichtlich auch innerhalb der Massen gelegen sein. Allerdings spielt das in diesem Fall keine Rolle, da keine analytische Fortsetzung der Schwerestörung auf die RTM-Fläche nötig ist.

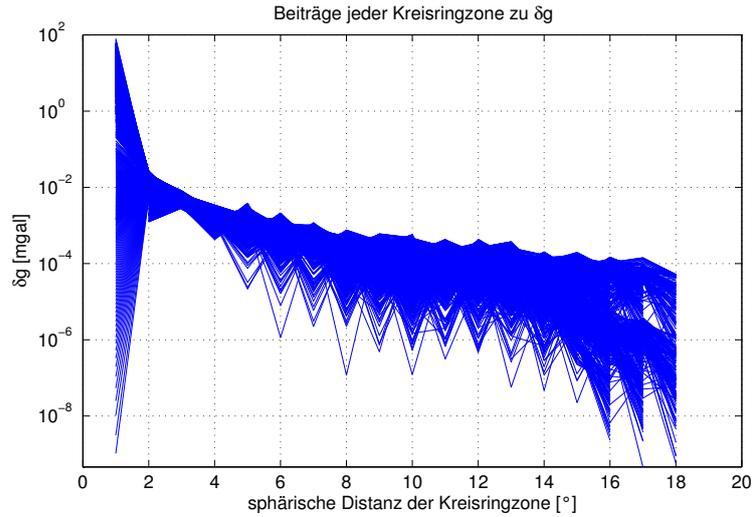


Abbildung 8: RTM-Effekt  $\delta g_{RTM}$  in den Anden in Abhängigkeit der sphärischen Distanz

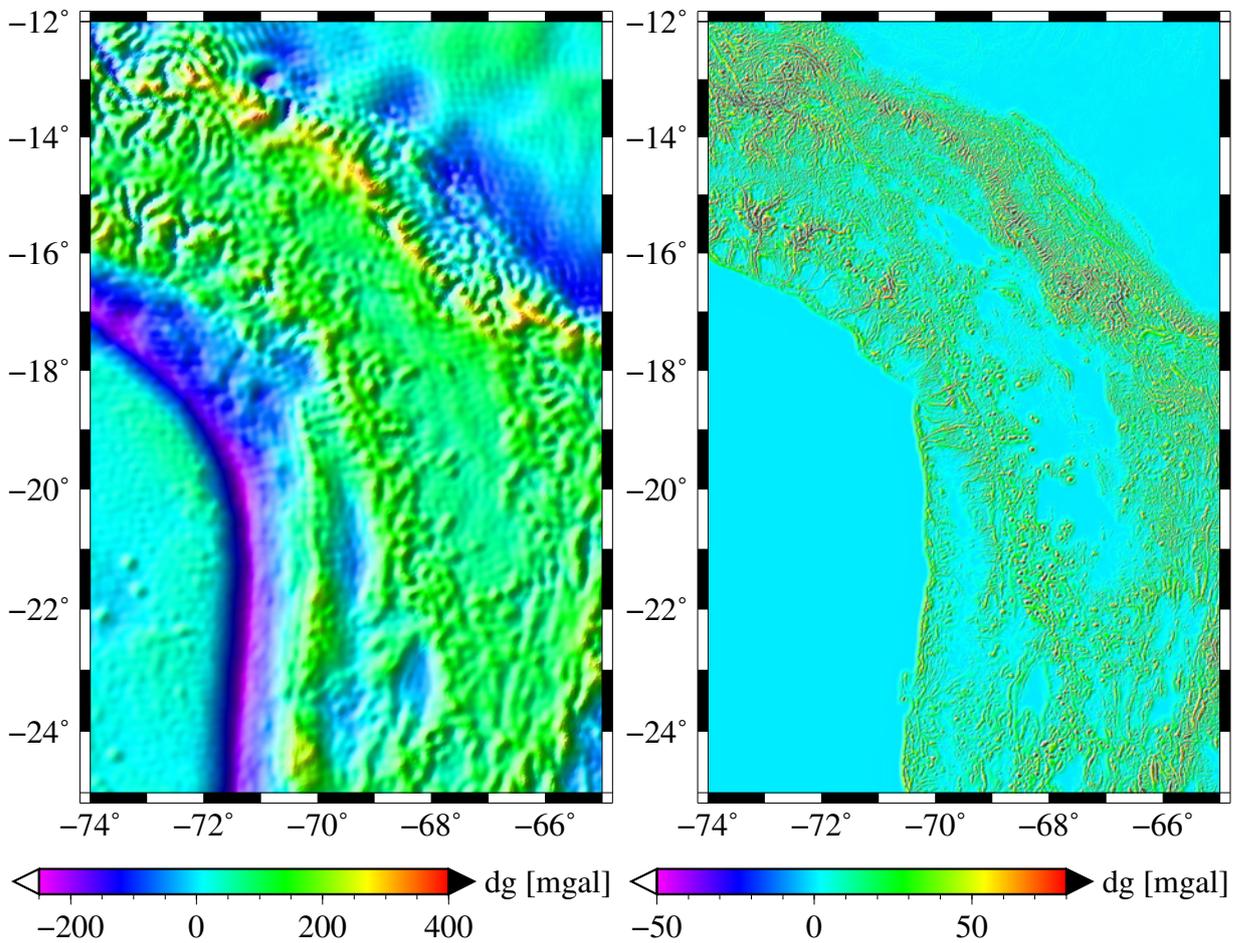


Abbildung 9: a) lang- und b) kurzwelliger Anteil der Schwerestörung:  $30'' \times 30''$

langwellige Schwerestörung  $\delta g_{EGM2008}$

Mittelwert	49.8 mgal
Standardabw.	86.9 mgal
Maximum	349.3 mgal
Minimum	-225.5 mgal

kurzwellige Schwerestörung  $\delta g_{RTM}$

Mittelwert	8.1 mgal
Standardabw.	13.4 mgal
Maximum	145.0 mgal
Minimum	-35.6 mgal

In Abbildung 9 a) und b) werden der lang- und der kurzwellige Anteil der Schwerestörung für das Gebiet in den Anden graphisch gegenübergestellt. Der größte Anteil der Schwerestörung wird durch die langwelligen Massen hervorgerufen und ist in  $\delta g_{\text{EGM2008}}$  enthalten. Am auffälligsten ist die stark Nord-Süd ausgerichtete negative Struktur parallel zur südamerikanischen Westküste. Die negative Schwerestörung lässt auf ein unterirdisches Massendefizit im Bereich der Subduktionszone schließen. Die ozeanische Platte schiebt sich in diesem Gebiet unter die kontinentale Platte, so dass die Grenze zum Erdmantel, welcher eine größere Dichte besitzt als die Lithosphärenplatten, hier wohl deutlich tiefer verläuft als sonst. Im kurzwelligen Anteil der Schwerestörung ist diese Struktur überhaupt nicht vorhanden. Die RTM-Effekte sind sichtbar mit der oberirdischen Topographie korreliert. Zudem sind sie deutlich kleiner als der langwellige Anteil. Im Flachland sowie auf dem Meer liegen sie nahezu bei null.

Vor allem am östlichen Rand der Anden treten extrem große positive Schwerestörungen auf. Sie weisen auf einen Massenüberschuss hin, der eventuell mit großen Gesteinsdichten begründet werden kann. Allerdings werden an die Schwerestörungen keine topographischen und isostatischen Reduktionen angebracht, so dass sich diese nur bedingt geophysikalisch interpretieren lassen.

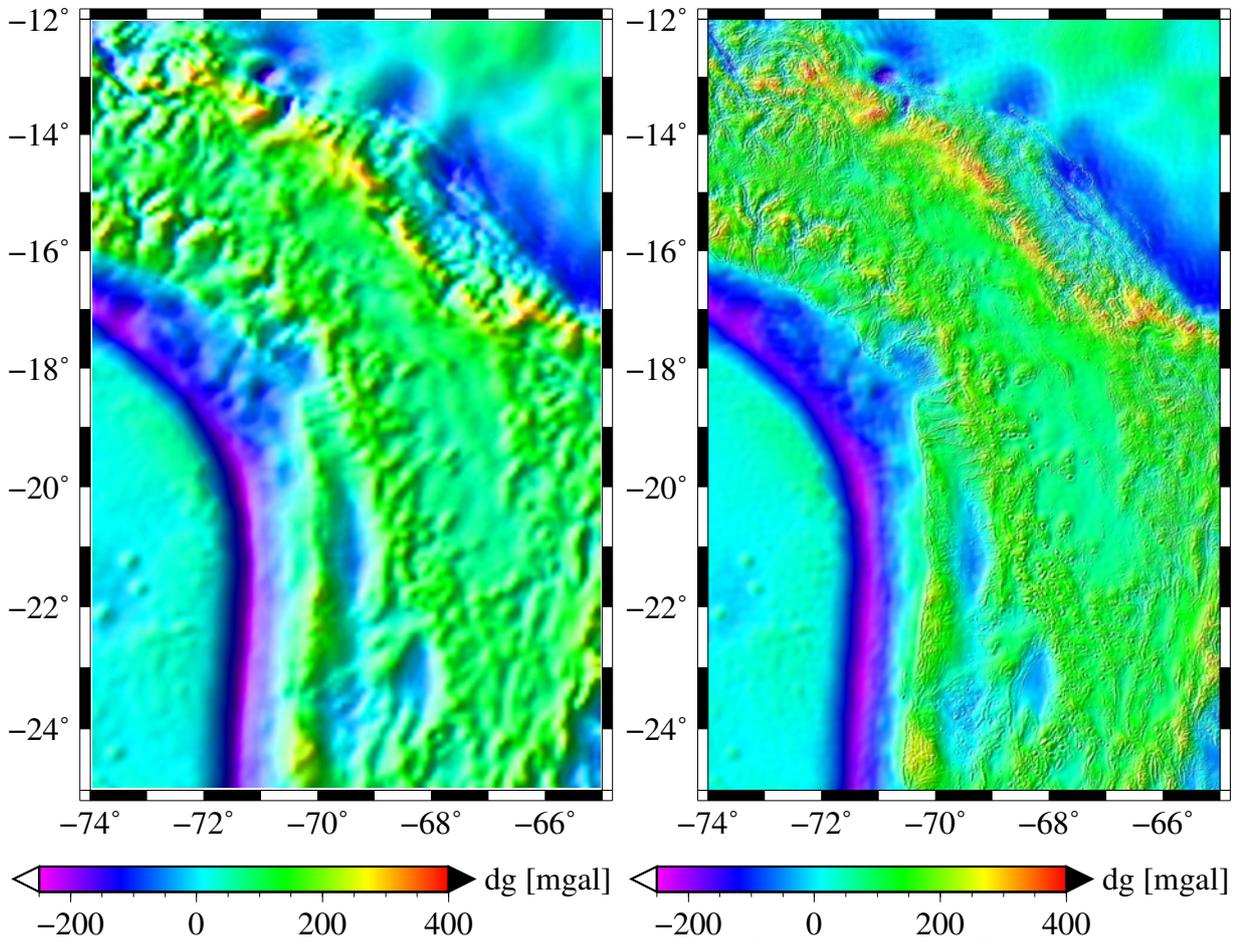


Abbildung 10: Schwerestörung: a) 5' x 5' bzw. b) 30'' x 30''

Mittelwert	49.8 mgal	Mittelwert	57.9 mgal
Standardabweichung	86.8 mgal	Standardabweichung	92.5 mgal
Maximum	337.4 mgal	Maximum	398.6 mgal
Minimum	-221.4 mgal	Minimum	-225.5 mgal

In Abbildung 10 b) ist die Summe aus kurz- und langwelligem Anteil der Schwerestörung für das Testgebiet in den Anden dargestellt. Es ist eine deutliche Verfeinerung gegenüber  $\delta g_{\text{EGM2008}}$  aus Abbildung 9 a) zu erkennen. Die Kombination mit der RTM-Berechnung ist eine gute Möglichkeit die Daten eines globalen Geopotentialmodells regional zu verbessern, wenn keine gravimetrischen Messdaten vorhanden sind (siehe auch HIRT ET AL., 2010).

### 4.3 Geländeneigung

Zur Lösung des fixen Randwertproblems wird die Geländeneigung  $\beta$  auf der Randfläche benötigt. In sphärischer Approximation gilt:

$$\beta = \angle(\vec{n}, \vec{e}_r) \quad (49)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \text{Normalenvektor zur Randfläche} \\ \vec{e}_r &= \text{Einheitsvektor in radialer Richtung.} \end{aligned}$$

Es werden zwei verschiedene Verfahren zur Berechnung von  $\beta$  implementiert und verglichen. Als Datengrundlage dienen digitale Geländemodelle in verschiedenen Auflösungen wie in Abschnitt 4.1 beschrieben. Aus den rasterweise vorliegenden Höhendaten wird jeweils die Neigung in Nord-Süd- sowie in Ost-West-Richtung berechnet. Daraus ergibt sich die gesuchte Geländeneigung durch folgenden Zusammenhang:

$$\tan^2 \beta = s^2 = \sqrt{s_{\text{N-S}}^2 + s_{\text{O-W}}^2} \quad (50)$$

Die Geländeneigungen werden für jede Auflösung sowohl global als auch regional aus dem entsprechenden Höhengitter berechnet. Es werden keine Blockmittelwerte gebildet.

#### Koordinatendifferenzen

Am einfachsten lassen sich die Neigungen aus den Nord-Süd- und Ost-West-Gradienten bilden. Für jeden Punkt  $P(i, j)$  des Berechnungsgitters gilt

$$\begin{aligned} s_{\text{N-S}}(i, j) &= \frac{h(i-1, j) - h(i+1, j)}{2\Delta x} \\ s_{\text{O-W}}(i, j) &= \frac{h(i, j+1) - h(i, j-1)}{2\Delta y} \quad , \end{aligned} \quad (51)$$

wobei  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Rasterauflösungen in Nord-Süd- und Ost-West-Richtung sind.

Diese Vorgehensweise ist formal äquivalent mit einem Polynomansatz. Wird durch jeweils drei Punkte des Rasters in beiden Koordinatenrichtungen je ein Polynom zweiten Grades interpoliert und die erste Ableitung im mittleren Punkt berechnet, so ergeben sich dieselben Formeln.

#### Fouriertransformation

Für die Fouriertransformierte der Ableitung einer Funktion  $f(t)$  gilt (siehe z. B. BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 726)

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{f(t)\} \quad (52)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} & \text{ Fouriertransformierte von } f(t) \\ \omega &= 2\pi f \\ f & \text{ Frequenz} \quad . \end{aligned}$$

Dies lässt sich ausnutzen, um die Geländeneigungen aus einem diskreten Höhengitter zu berechnen. Nach LI ET AL. (1995) gilt:

$$\begin{aligned} s_{\text{N-S}}(x) &= \frac{\partial h}{\partial x} = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi i k_x \mathcal{F}\{h(x)\}\} \\ s_{\text{O-W}}(y) &= \frac{\partial h}{\partial y} = \mathcal{F}^{-1}\{2\pi i k_y \mathcal{F}\{h(y)\}\} \end{aligned} \quad (53)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{f(\omega)\} & \text{ Inverse Fouriertransformierte von } f(\omega) \\ k_x, k_y & \text{ Wellenzahlen in x- bzw. y-Richtung} \\ k_x &= n \cdot \Delta k_x = n \cdot \frac{1}{N_x \cdot \Delta x} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ k_y &= n \cdot \Delta k_y = n \cdot \frac{1}{N_y \cdot \Delta y} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ N_x, N_y & \text{ Anzahl der Elemente in x- bzw. y-Richtung} \quad . \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Gradienten des DGMs zeilen- bzw. spaltenweise. Die Auswertung von Gleichung (50) in jedem Gitterpunkt führt schließlich auf die gesuchte Geländeneigung.

Die Berechnung der Fouriertransformation wird mit dem Programm MATLAB Version 7.11.0 durchgeführt (siehe [www.mathworks.de/products/matlab/](http://www.mathworks.de/products/matlab/)).

## Vergleich

Auf der folgenden Seite wird die berechnete Geländeneigung beider Verfahren für eine Auflösung von  $5' \times 5'$  gegenübergestellt. Obwohl punktwise auch größere Differenzen auftreten, stimmen beide Verfahren tendenziell überein. In den Gebirgen sowie am Übergang vom Land zum Meer sind wie erwartet große Neigungen sichtbar. Bei der Berechnung im Frequenzraum liegt eine größere Spannweite der Werte vor. In den Abbildungen ist ersichtlich, dass dieses Verfahren meist größere Neigungen liefert als die Koordinatendifferenzen. Auch in Gebieten ohne Topographie (Ozeane) ist die im Frequenzraum berechnete Geländeneigung nicht exakt null. Die Abbildungen 14 und 15 zeigen die Geländeneigungen der regionalen Untersuchungen in den Anden. Je feiner die Auflösung des DGMs, desto größere Geländeneigungen werden erreicht. Auch hier liefert die Fourieranalyse größere Neigungen als die Gradientenmethode. Im Hinblick auf das Molodenskii-Shrinking, bei dem  $\beta < 45^\circ$  gefordert ist, ist das Verfahren der Koordinatendifferenzen zu bevorzugen, da es insgesamt deutlich kleinere Werte liefert, was zu einer schnelleren Konvergenz führt. Doch auch bei diesem Verfahren werden regional größere Neigungen als  $45^\circ$  erreicht, so dass für die Anwendung des Molodenskii-Shrinkings eine Glättung der Randfläche sinnvoll ist. Allerdings kommt die Geländeneigung dort erst in den Termen zweiter Ordnung ins Spiel. Alles in allem erzeugen beide Berechnungsmethoden sinnvolle Ergebnisse. Der Einfluss der Geländeneigung auf das Geodätische Randwertproblem wird in Kapitel 5.6.2 näher erläutert.

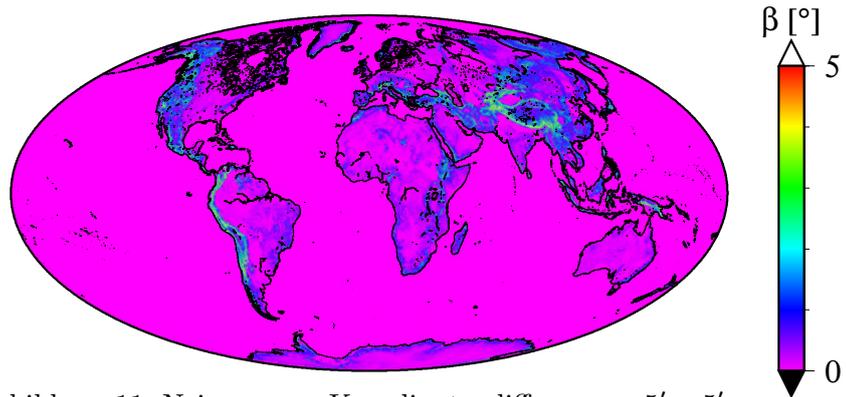


Abbildung 11: Neigung aus Koordinatendifferenzen: 5' x 5'

Mittelwert	0.2 Grad		
Standardabweichung	0.5 Grad		
Maximum	24.1 Grad	bei $\varphi = -85^\circ 2' 30''$	, $\lambda = -171^\circ 7' 30''$
Minimum	0.0 Grad	bei $\varphi = 89^\circ 52' 30''$	, $\lambda = 0^\circ 7' 30''$

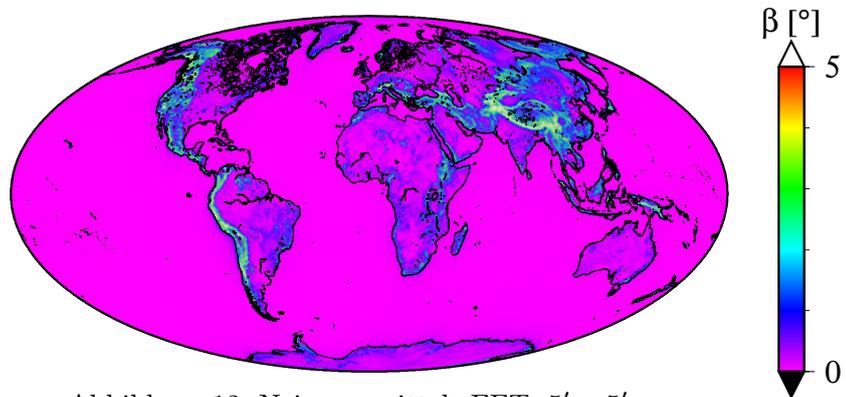


Abbildung 12: Neigung mittels FFT: 5' x 5'

Mittelwert	0.3 Grad		
Standardabweichung	0.9 Grad		
Maximum	39.4 Grad	bei $\varphi = 82^\circ 47' 30''$	, $\lambda = -36^\circ 42' 30''$
Minimum	$8.8 \cdot 10^{-5}$ Grad	bei $\varphi = 24^\circ 27' 30''$	, $\lambda = -78^\circ 12' 30''$

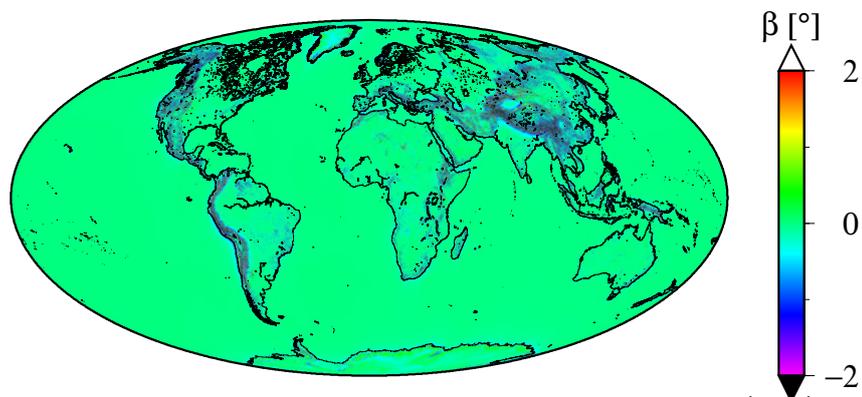


Abbildung 13: Differenz der Neigungen  $\beta_{\text{Koordinatendifferenzen}} - \beta_{\text{FFT}}$ : 5' x 5'

Mittelwert	-0.1 Grad		
Standardabweichung	0.7 Grad		
Maximum	18.0 Grad	bei $\varphi = -85^\circ 57' 30''$	, $\lambda = -135^\circ 17' 30''$
Minimum	-37.9 Grad	bei $\varphi = 82^\circ 47' 30''$	, $\lambda = -36^\circ 42' 30''$
Betragsminimum	$4.0 \cdot 10^{-8}$ Grad	bei $\varphi = 60^\circ 52' 30''$	, $\lambda = -107^\circ 37' 30''$

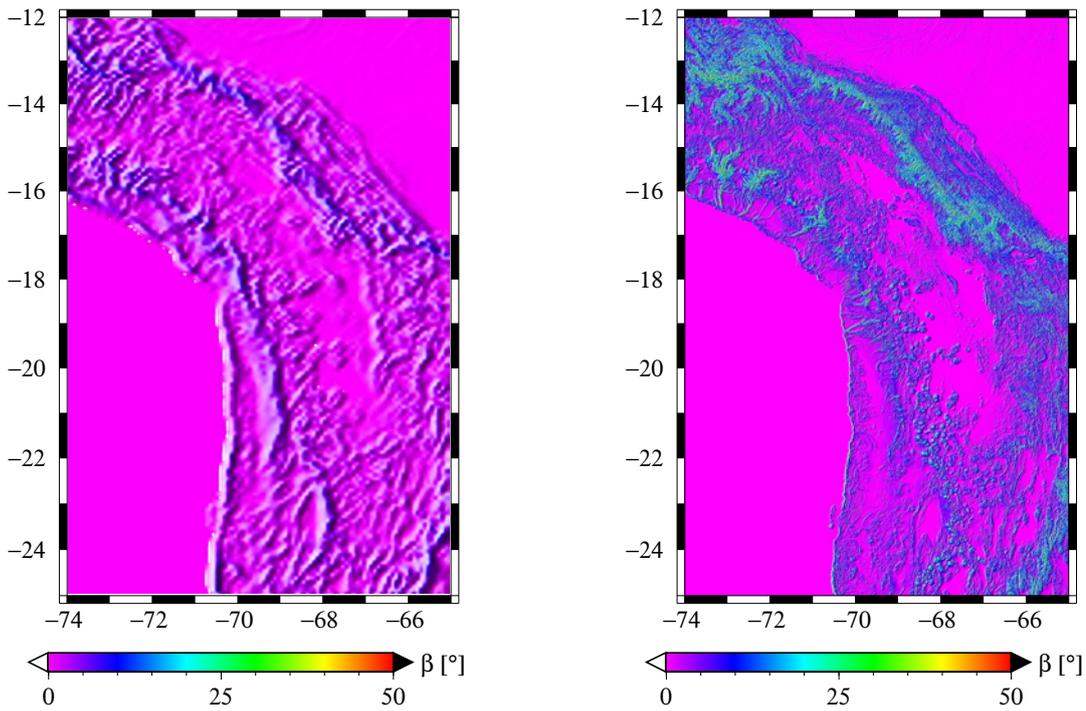


Abbildung 14: Neigung aus Koordinatendifferenzen: a) 5' x 5' bzw. b) 30'' x 30''

Mittelwert	1.1 Grad
Standardabweichung	1.4 Grad
Maximum	9.0 Grad
Minimum	0.0 Grad

Mittelwert	3.6 Grad
Standardabweichung	5.2 Grad
Maximum	49.1 Grad
Minimum	0.0 Grad

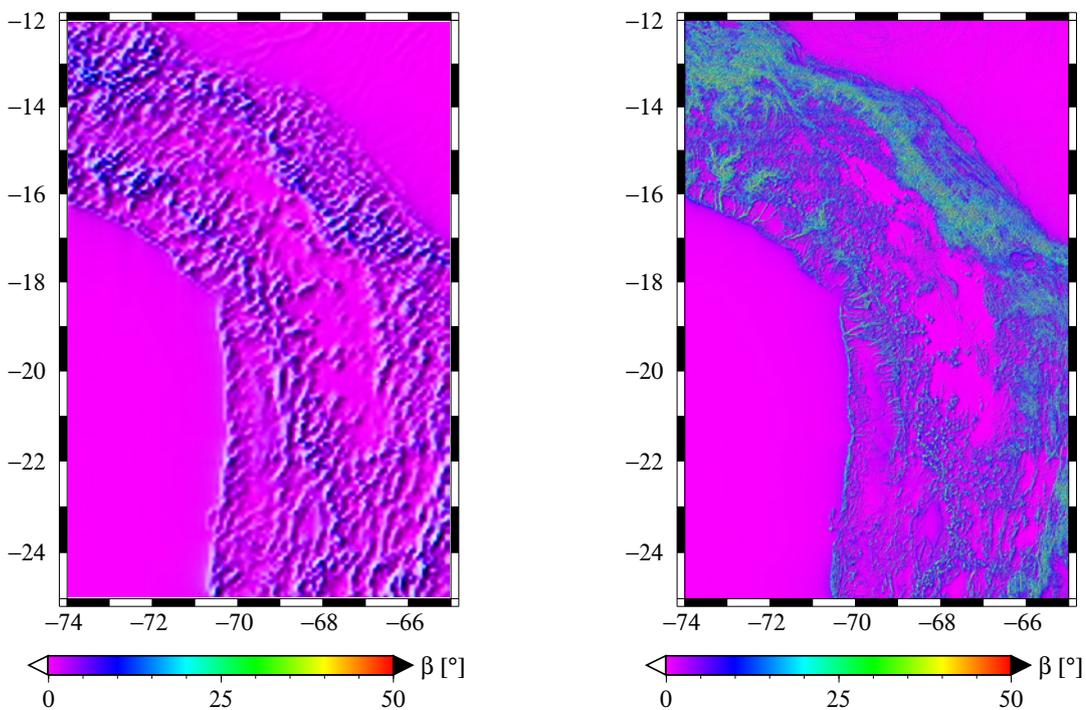


Abbildung 15: Neigung mittels FFT: a) 5' x 5' bzw. b) 30'' x 30''

Mittelwert	1.7 Grad
Standardabweichung	1.9 Grad
Maximum	17.0 Grad
Minimum	$8.2 \cdot 10^{-3}$ Grad

Mittelwert	4.6 Grad
Standardabweichung	6.6 Grad
Maximum	57.2 Grad
Minimum	$4.9 \cdot 10^{-4}$ Grad

## 5 Numerische Untersuchungen zur planaren Approximation

Hauptaufgabe dieser Arbeit ist es, den Einfluss der planaren Approximation auf die Lösung des fixen Geodätischen Randwertproblems nach Brovar (siehe Abschnitt 3.2) zu untersuchen. Dabei lassen sich drei verschiedene Einflüsse unterscheiden:

- a) Auswirkung der planaren Approximation der Randbedingung auf  $\delta g$  bzw.  $\mu$
- b) Auswirkung von a) auf das Störpotential
- c) Auswirkung der planaren Approximation des Störpotentials

Um die genannten Einflüsse abzuschätzen werden numerische Untersuchungen durchgeführt.

### 5.1 Numerische Integration

Zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist es notwendig, Integrale der Physikalischen Geodäsie numerisch zu lösen. Als Verfahren der numerischen Integration kommt die Gauß-Legendre-Quadratur zum Einsatz. Im eindimensionalen Fall wird das Integral über die Funktion  $f(x)$  approximiert durch die Summe über die gewichteten Funktionswerte an speziellen Stützstellen (siehe z. B. BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 894):

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k) \quad (54)$$

mit

- $n$  Grad der Quadratur
- $\omega_k$  Gewicht der  $k$ -ten Stützstelle .

Diese Stützstellen sind nicht äquidistant über das Integrationsintervall verteilt wie bei den meisten anderen Integrationsverfahren, sondern liegen genau in den Nullstellen der entsprechenden Legendrepolynome. Es werden genau  $n + 1$  Stützstellen verwendet, nämlich die Nullstellen des Legendrepolynoms vom Grad  $n + 1$ . Der Grad  $n$  der Quadratur gibt zudem die Approximationsgüte an. Die Gauß-Legendre-Quadratur vom Grad  $n$  erlaubt es, Polynome vom Grad  $2n + 1$  exakt zu integrieren (siehe z. B. BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 894).

Die Legendrepolynome sind im Intervall  $[-1, 1]$  definiert. Um eine Funktion  $f(x)$  über dem beliebigen Intervall  $[a, b]$  zu integrieren, müssen die Nullstellen  $x_k \in [-1, 1]$  der Legendrepolynome in dieses Intervall transformiert werden. Es gilt (BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 895)

$$t_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_k \quad (55)$$

mit  $t_k \in [a, b]$ . Für das Differential folgt daraus

$$dt = \frac{b-a}{2} dx \quad (56)$$

Somit gilt für die Integration über ein beliebiges Intervall  $[a, b]$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x\right) \frac{b-a}{2} dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=0}^n \omega_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x_k\right) \quad (57)$$

Die Nullstellen der Legendrepolynome bis zum Grad 16 und die entsprechenden Gewichte sind z. B. in LOWAN ET AL. (1942) tabelliert. Dabei sind auch die Korrekturen in LOWAN ET AL. (1943) zu beachten.

Dieses Verfahren kann auf beliebige Dimensionen erweitert werden, indem die Quadratur für jede Dimension getrennt durchgeführt wird. Bei den zu untersuchenden Integralen handelt es sich ausschließlich um zweidimensionale Flächenintegrale. Die Zahl der Stützstellen erhöht sich damit auf  $(n + 1)^2$ . Für die Integration gilt

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x) g(y) dx dy \approx \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^n \omega_k f(x_k) \omega_\ell g(y_\ell) \quad , \quad (58)$$

wobei wieder analog zum eindimensionalen Fall eine Intervalltransformation durchgeführt werden kann. Auf die Darstellung der entstehenden Formeln wird hier verzichtet.

## 5.2 Voruntersuchungen

### 5.2.1 Genauigkeit der numerischen Integration

Die Genauigkeit der numerischen Integration mit der Gauß-Legendre-Quadratur steigt mit zunehmendem Grad  $n$ . Da auch die Zahl der auszuwertenden Stützstellen und somit die Rechenzeit zunimmt, werden Untersuchungen durchgeführt, um mit minimalem Rechenaufwand optimale Ergebnisse zu erhalten. Zu diesem Zweck werden zwei repräsentative Testgebiete festgelegt. Das Testgebiet für die globalen Untersuchungen besteht aus 600 Aufpunkten im Himalaya, jenes für die regionalen Berechnungen besteht aus 1200 Aufpunkten in den Anden. Wie in Abbildung 16 ersichtlich ist, erstrecken sich die Aufpunkte (blau) jeweils vom Hochgebirge bis zum Meer.

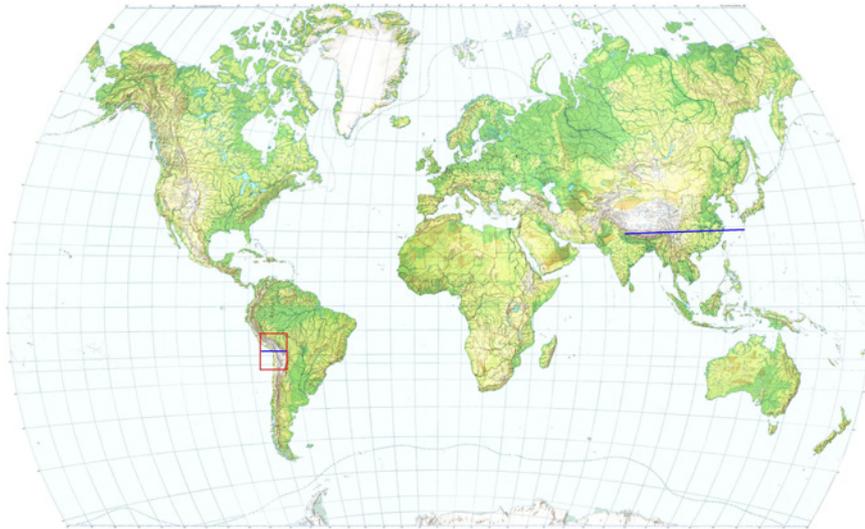


Abbildung 16: Testgebiet

Für jeden der festgelegten Aufpunkte werden die zu untersuchenden Integrale mit zunehmendem Grad  $n = 0, 2, 4, \dots$  numerisch ausgewertet. Es werden nur Berechnungen mit geradem  $n$  durchgeführt, da hier jeweils ein Quellpunkt in der Mitte der Flächenelemente liegt. Die Randfläche wird dabei in Kreisringzonen mit einer Breite von einem Grad unterteilt, deren Beiträge getrennt betrachtet werden. Die Differenz jeweils zweier Ergebnisse mit aufeinanderfolgendem  $n$  wird graphisch über der sphärischen Distanz  $\psi$  aufgetragen und auf Konvergenz untersucht. In Abbildung 17 sind die Berechnungen für  $\epsilon_{\delta g}$  (siehe Abschnitt 5.3) bei einer Rasterauflösung von  $15'$  dargestellt. Aus den Graphiken geht hervor, dass die Ergebnisse der numerischen Integration mit zunehmendem Grad  $n$  konvergieren. Die Differenzen zwischen  $n = 0$  und  $n = 2$  beispielsweise sind größer als die Differenzen zwischen  $n = 2$  und  $n = 4$ , usw. Die größten Unterschiede liegen im Nahbereich des jeweiligen Aufpunkts. Daher müssen die Flächenelemente hier am feinsten unterteilt werden.

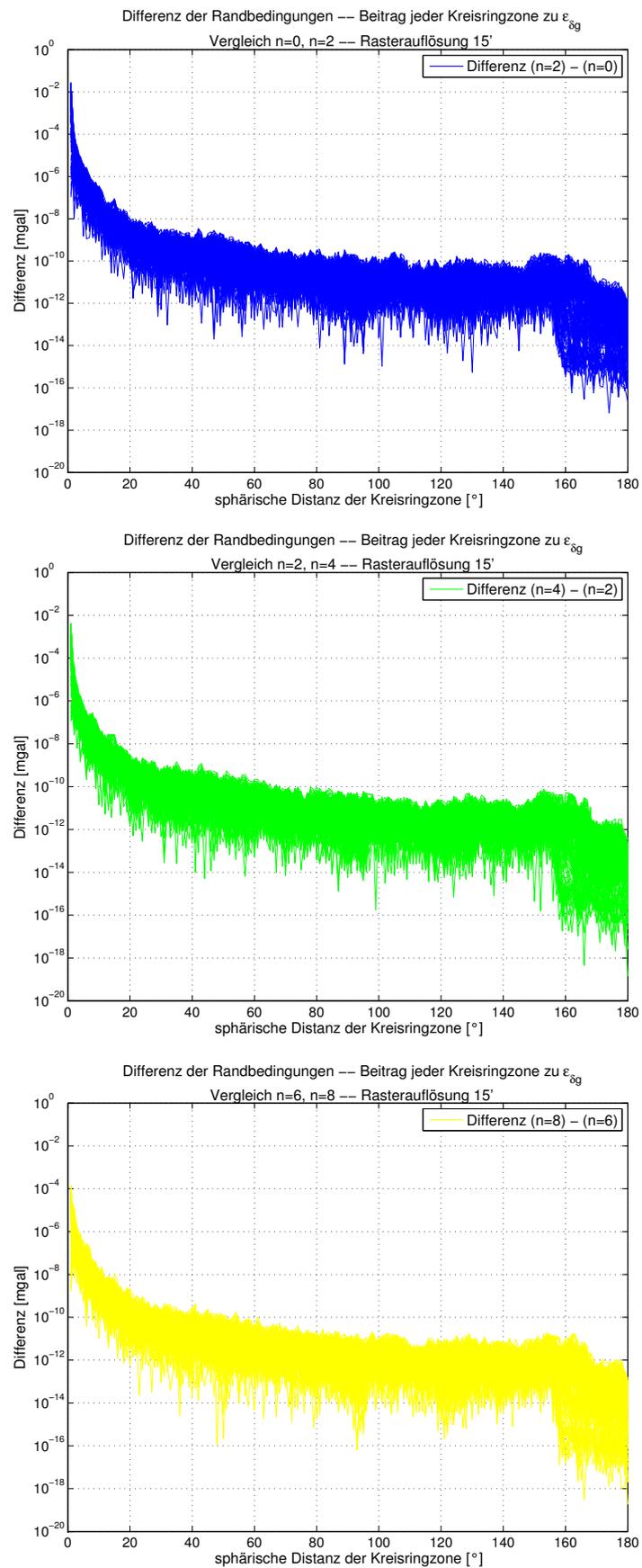


Abbildung 17: Vergleich der Beiträge zu  $\epsilon_{\delta g}$  für aufeinanderfolgenden Grad  $n$  und in Abhängigkeit von der sphärischen Distanz der Quellpunkte

Anhand der Graphiken wird entschieden, bis zu welchem Grad  $n$  die Gauß-Legendre-Quadratur in Abhängigkeit der sphärischen Distanz  $\psi$  durchgeführt wird und welche Genauigkeit mindestens zu erwarten ist. Die Ergebnisse der Genauigkeitsuntersuchungen für sämtliche in dieser Arbeit auszuwertenden Integrale sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt. Die Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$  und  $\epsilon_{\zeta}$  werden in den Abschnitten 5.4 und 5.5 erläutert. Alle Genauigkeitsangaben beziehen sich auf die beschriebenen Testgebiete. Es sind die Werte, die in den Gebieten mindestens erreicht, aber größtenteils sogar weit unterschritten werden.

Grad  $n$  der Gauß-Legendre-Quadratur in Abhängigkeit von der sphärischen Distanz  $\psi$ :

Tabelle 1: Randbedingung

Rasterweite	30''			5'		
$\psi$ [°]	< 5	$5 \leq \psi < 20$	$\geq 20$	< 5	$5 \leq \psi < 20$	$\geq 20$
$n$	4	2	0	6	2	0
Genauigkeit $\delta g$ [mgal]	$10^{-3}$	$10^{-6}$		$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Genauigkeit $\epsilon_{\delta g}$ [mgal]	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$		$10^{-6}$	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-9}$

Rasterweite	15'			60'		
$\psi$ [°]	< 5	$5 \leq \psi < 20$	$\geq 20$	< 10	$10 \leq \psi < 20$	$\geq 20$
$n$	6	2	0	8	4	0
Genauigkeit $\delta g$ [mgal]	$10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^0$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
Genauigkeit $\epsilon_{\delta g}$ [mgal]	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-7}$

Tabelle 2: Störpotential

Rasterweite	30''			5'		
$\psi$ [°]	< 5	$5 \leq \psi < 20$	$\geq 20$	< 5	$5 \leq \psi < 20$	$\geq 20$
$n$	4	2	0	4	2	0
Genauigkeit $\zeta$ [m]	$10^{-4}$	$10^{-4}$		$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
Genauigkeit $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ [m]	$10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$		$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$
Genauigkeit $\epsilon_{\zeta}$ [m]	$5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-7}$		$10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$

Rasterweite	15'			60'		
$\psi$ [°]	< 10	$10 \leq \psi < 20$	$\geq 20$	< 10	$10 \leq \psi < 20$	$\geq 20$
$n$	6	2	0	8	4	0
Genauigkeit $\zeta$ [m]	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$	$10^{-1}$
Genauigkeit $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ [m]	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$10^{-6}$	$10^{-6}$
Genauigkeit $\epsilon_{\zeta}$ [m]	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$10^{-4}$

Die in den Tabellen angegebenen Genauigkeiten beziehen sich jeweils auf eine Kreisringzone von einem Grad Ausdehnung. Die schlechtest mögliche Gesamtgenauigkeit ergibt sich als Summe über alle 180 Kreisringzonen. Je größer das Flächenelement, desto mehr Stützstellen (bis  $n = 8$  bzw. 81 Stützstellen) sind vor allem im Nahbereich nötig, um eine ausreichende Genauigkeit zu gewährleisten. Im Fernbereich ist die Punktmassenapproximation, d. h.  $n = 0$ , ausreichend.

### 5.2.2 RTM-Fläche

Das Prinzip des Residual Terrain Modelling (RTM) wird ausführlich in Kapitel 4.2 (Abschnitt: Regionale Untersuchungen) geschildert. Wie in Kapitel 4.1 (Abschnitt: Regionale Untersuchungen) beschrieben, wird für die kurzweilige Topographie das auf  $30'' \times 30''$  geglättete SRTM3-DGM

benutzt. Die langwellige RTM-Fläche ergibt sich durch Herausfiltern hochfrequenter Anteile aus demselben Datensatz. Es werden verschiedene Filterverfahren implementiert und miteinander verglichen:

- **Mittelwertfilter:** Jeder Gitterpunkt erhält den Mittelwert aller innerhalb eines quadratischen Fensters um diesen Punkt gelegenen Rasterwerte.
- **Kreisfilter:** Zur Mittelbildung werden nur die Rasterwerte innerhalb eines isotropen Abstands zum jeweiligen Gitterpunkt hinzugezogen.
- **Gaußfilter:** Es wird das gewichtete Mittel aller Rasterwerte innerhalb eines quadratischen Fensters um den jeweiligen Gitterpunkt berechnet. Die Gewichte sind die Funktionswerte der zweidimensionalen Gaußfunktion, deren Maximum jeweils im zentralen Gitterpunkt gelegen ist:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (59)$$

Die Standardabweichung  $\sigma$  wird halb so groß wie die Kante des quadratischen Fensters gewählt.

Die RTM-Fläche soll so gewählt werden, dass sie im Idealfall genau den langwelligen Anteil der Schwerestörung hervorruft, welcher durch die harmonische Synthese des EGM2008 bis  $N = 2160$  berechnet wird. Es wird daher zum Filtern der  $30'' \times 30''$ -Höhen eine Fenstergröße von  $21 \times 21$  gewählt. Das ergibt eine Glättung der Daten auf ungefähr  $10' \times 10'$ . In Abbildung 18 sind die drei vorgestellten Filter im Frequenzraum visualisiert. Um bei einheitlicher Skalierung einen sinnvollen Vergleich zu gewährleisten, wird auf eine logarithmische Darstellung verzichtet.

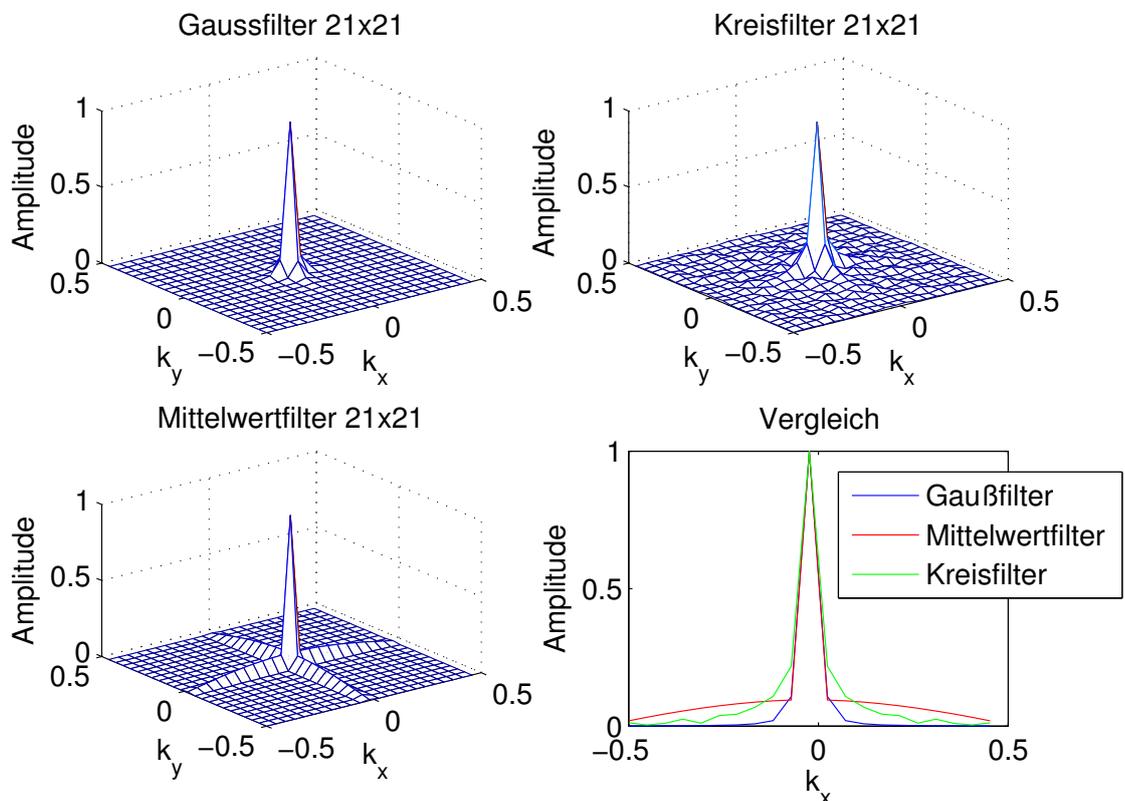


Abbildung 18: Filtermasken im Frequenzraum

Der Gaußfilter kommt einem idealen Tiefpassfilter am nächsten. Die Gaußfunktion hat die Eigenschaft, dass ihre Fouriertransformierte ebenfalls eine Gaußfunktion ist (siehe z. B. BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 1071). Sie hat also im Frequenzraum einen glatten, von der Mitte an monoton abfallenden Verlauf. Hohe Frequenzen werden nahezu vollständig herausgefiltert. Der Kreisfilter fällt nicht ganz so schnell ab und verläuft sichtbar "unruhiger". Es ist jedoch keine Richtungsabhängigkeit erkennbar. Der Mittelwertfilter dagegen weist deutliche systematische Effekte in Richtung der beiden Koordinatenachsen auf. Durch die quadratische, nicht isotrope Form der Filtermaske werden hohe Frequenzen in den beiden Achsrichtungen nicht so gut herausgefiltert.

In Abbildung 19 findet ein Vergleich der ursprünglichen Höhen sowie der gefilterten RTM-Höhen für das Testgebiet in Europa im Frequenzraum statt. Die Frequenzen werden jeweils mithilfe einer zweidimensionalen Fouriertransformation berechnet und graphisch dargestellt. Im langwelligen

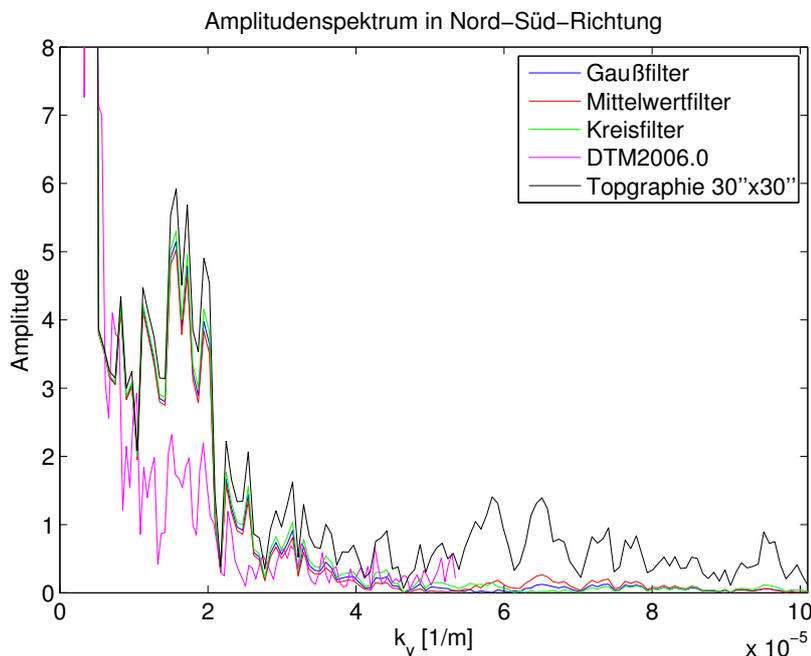


Abbildung 19: Amplitudenspektrum der Höhen in Nord-Süd-Richtung

Bereich, also für Wellenzahlen  $k_y \rightarrow 0 \frac{1}{m}$ , stimmen die in Abbildung 19 dargestellten Höhen gut überein. Die Topographie mit 30''-Auflösung sowie die gefilterten RTM-Flächen sind in diesem Frequenzband nahezu identisch. Ab  $k_y \approx 5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{m}$  wird die Auswirkung der Filterung sichtbar. Die Amplituden der gefilterten Höhen liegen ab dieser "Grenzfrequenz" nahezu bei null, während die Topographie auch höherfrequente Anteile enthält. Die genannte "Grenzfrequenz" ist einer räumlichen Auflösung von etwa 20 km äquivalent. Ein Vergleich der Frequenzen der gefilterten Daten mit dem in Kapitel 4.1 vorgestellten DTM2006.0 mit 5'-Auflösung zeigt, dass diese in der Nähe der "Grenzfrequenz" einigermaßen gut übereinstimmen. Das DTM2006.0 in verschiedenen Auflösungen diente als Grundlage für die Berechnung der harmonischen Koeffizienten des EGM2008 (siehe auch PAVLIS ET AL., 2007). Das vorliegende DTM2006.0 mit einer Auflösung von  $5' \times 5'$  scheint jedoch auch höherfrequente Anteile der Topographie zu enthalten, da es vermutlich aus einer höher aufgelösten Version abgeleitet wurde. Zwischen den mit den drei Filterverfahren gefilterten Höhen der RTM-Fläche sind im Frequenzraum nur geringe Unterschiede erkennbar. Während Kreis- und Gaußfilter recht gut übereinstimmen, sind beim Mittelwertfilter leicht größere Schwankungen im hochfrequenten Bereich zu sehen. Wie oben angedeutet lässt der Mittelwertfilter in Richtung der Koordinatenachsen etwas mehr höherfrequente Anteile durch.

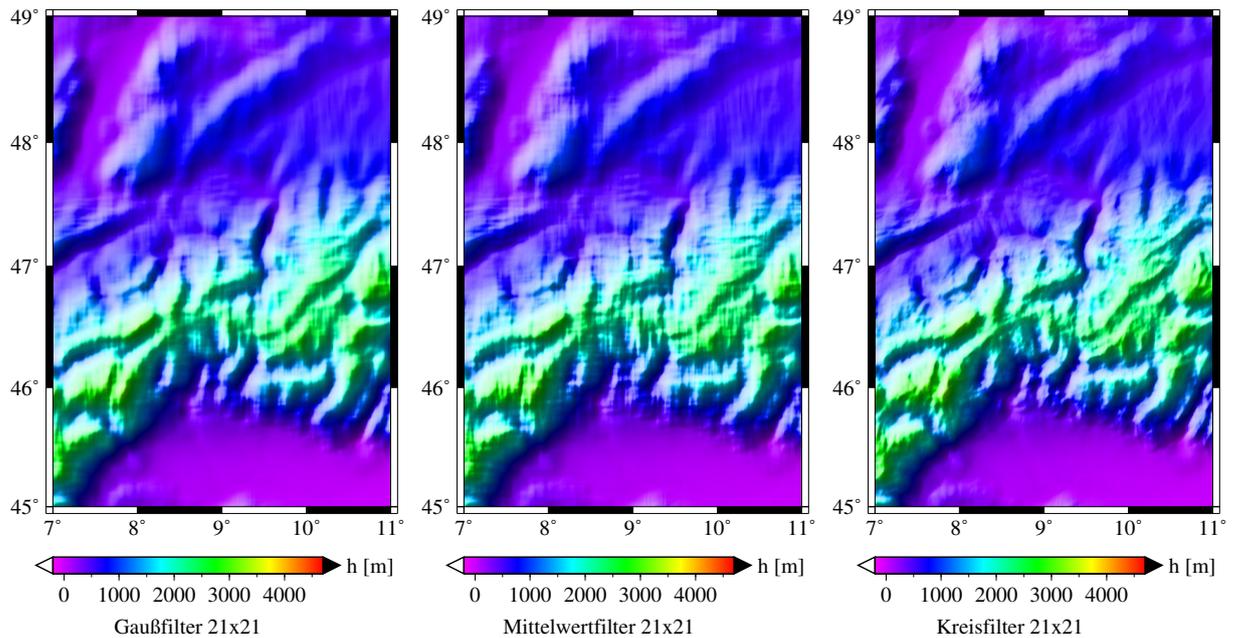


Abbildung 20: RTM-Flächen

Im Ortsraum sind beim Mittelwertfilter vor allem im Gebirge senkrechte und waagrechte Texturen zu erkennen. Die mit dem Gaußfilter geglättete RTM-Fläche zeigt einen "weicheren" Verlauf. Die mit dem Kreisfilter gefilterte RTM-Fläche ist nicht ganz so glatt. Die Höhen ähneln aber nach Tabelle 3 eher denen des Gaußfilters als denen des Mittelwertfilters. Das ist durch die den beiden Filtermasken gemeinsame isotrope Form zu erklären.

Tabelle 3: Differenzen zwischen den RTM-Höhen

<u>Gaußfilter - Kreisfilter</u>		<u>Gaußfilter - Mittelwertfilter</u>		<u>Kreisfilter - Mittelwertfilter</u>	
Mittelwert	0.008 m	Mittelwert	-0.006 m	Mittelwert	-0.014 m
Standardabw.	11 m	Standardabw.	10 m	Standardabw.	20 m
Maximum	126 m	Maximum	106 m	Maximum	220 m
Minimum	-122 m	Minimum	-102 m	Minimum	-209 m

Tabelle 4: Differenzen zwischen den RTM-Effekten

<u>Gaußfilter - Kreisfilter</u>		<u>Gaußfilter - Mittelwertfilter</u>		<u>Kreisfilter - Mittelwertfilter</u>	
Mittelwert	0.2 mgal	Mittelwert	-0.5 mgal	Mittelwert	-0.8 mgal
Standardabw.	1.6 mgal	Standardabw.	1.4 mgal	Standardabw.	2.9 mgal
Maximum	13.4 mgal	Maximum	9.1 mgal	Maximum	19.9 mgal
Minimum	-11.7 mgal	Minimum	-9.8 mgal	Minimum	-21.7 mgal

Die berechneten RTM-Effekte ändern sich um wenige Milligal bei einer Variation der zugrundegelegten RTM-Fläche. In dieser Arbeit findet die Auswertung immer auf der Topographie statt. Die Berechnungspunkte sind also unabhängig von der RTM-Fläche.

Für die folgenden regionalen numerischen Untersuchungen wird die mit dem Gaußfilter geglättete RTM-Fläche verwendet. Auf die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen hat die Wahl der Filtermethode allerdings keinen signifikanten Einfluss.

### 5.3 Planare Approximation der Randbedingung

Wie in Kapitel 3.3 beschrieben, wurde die planare Approximation eingeführt, um möglichst einfache Integralkerne zu erhalten. Sie ermöglicht zudem das von Molodenskii entwickelte Molodenskii-Shrinking, eine Reihenentwicklung, welche auf analytische Ausdrücke für die Funktion  $\mu$  und das daraus berechnete Störpotential  $T$  führt (siehe Kapitel 3.4). Zunächst wird die planare Approximation der Randbedingung betrachtet. Dazu wird die Differenz der sphärischen (19) und der planaren Randbedingung (22) gebildet. Damit lässt sich gerade der Einfluss der planaren Approximation auf  $\delta g$  im ersten Iterationsschritt berechnen. Dies ist äquivalent zur Integration über den in Gleichung (21) eingeführten Approximationsfehler  $\delta_{BC}$  des Integralkerns. Der Fehler in der berechneten Schwerestörung wird mit  $\epsilon_{\delta g}$  bezeichnet.

$$\epsilon_{\delta g} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} r'^2 \mu_0 d\sigma - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h' - h}{\ell^3} \mu_0 d\sigma = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta_{BC} \mu_0 d\sigma \quad (60)$$

Der Wert  $\mu_0$  berechnet sich nach Gleichung (20). Die Höhe eines Flächenelementes wird als konstant angenommen und entspricht der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Höhe. Für das Flächenelement, welches den Aufpunkt enthält, hat der Zähler der beiden Integralkerne in Gleichung (60) jeweils den Wert null. Nähert sich der Quellpunkt immer mehr dem Aufpunkt an, so gilt auch für die Strecke zwischen den beiden Punkten:  $\ell \rightarrow 0$ . Die Singularität der obigen Integrale ist von der Ordnung  $\frac{1}{\ell^2}$ . Es handelt sich somit um stark singuläre Integrale (siehe z. B. KLEES, 1992). Da der Zähler allerdings exakt null beträgt, wird in diesem Fall angenommen, dass der gesamte Integralkern null ergibt. Das Flächenelement des Aufpunkts hat somit keinen Einfluss auf den Wert der Funktion  $\mu$  in diesem Punkt. Allgemein haben nur jene Bereiche einen Einfluss, für die ein Höhenunterschied zum Aufpunkt vorliegt.

#### Globale Untersuchungen

Das Integral in Gleichung (60) wird für die drei gewählten Auflösungen 5', 15' und 60' ausgewertet und die Ergebnisse  $\epsilon_{\delta g}$  graphisch veranschaulicht. Die Graphiken der beiden letztgenannten Auflösungen befinden sich im Anhang. Auf der folgenden Seite sind die Ergebnisse für 5' dargestellt. In den Abbildungen ist zu erkennen, dass die Auswirkung der planaren Approximation der Randbedingung auf die Schwerestörung sichtbar mit der Topographie korreliert ist. Größere Gebirge kommen deutlich zum Vorschein. Dies ist zu erwarten, da die vernachlässigten Terme nach Abschnitt 3.3 von der Größenordnung  $\frac{h}{R}$  sind. Ein Vergleich mit den entsprechenden Graphiken im Anhang zeigt, dass mit zunehmender Auflösung die Standardabweichung sowie die Spannweite der Werte leicht zunehmen. Je feiner die Auflösung, desto mehr detaillierte Strukturen werden sichtbar. Im Vergleich zur Auflösung von 60' sind bei 5' auch "kleinere" Gebirge in Südostasien, Afrika und die Alpen orange (positiv) bzw. lila (negativ) eingefärbt. Im Gebirge treten sowohl positive als auch negative Approximationsfehler auf. Die Farbskala ist so festgelegt, dass erst Abweichungen von mehr als 0.001 mgal hervortreten. Ansonsten wird nur das Vorzeichen unterschiedlich dargestellt. Alles in allem liegen die Abweichungen zwar in der Messgenauigkeit eines Gravimeters, spielen aber trotzdem keine große Rolle. Selbst im Hochgebirge bei der feinsten global untersuchten Auflösung bleibt der Approximationsfehler der Schwerestörung unter einem Milligal. Die angegebenen Maxima bei 5' und 15' Auflösung liegen in der Antarktis. In den Graphiken ist davon jedoch nichts zu erkennen. Großflächig werden die größten Werte im Himalaja und den Anden erreicht. Das zeigt auch die berechnete Lage der Extremwerte bei der Auflösung von 60'. Der Vergleich von Abbildung 21 und 22 zeigt keine nennenswerten Unterschiede. Die statistischen Kenngrößen sind in der gleichen Größenordnung. Daraus lässt sich schließen, dass die Berechnungsweise der Geländeneigung die Auswirkung der planaren Approximation auf die Randbedingung kaum beeinflusst.

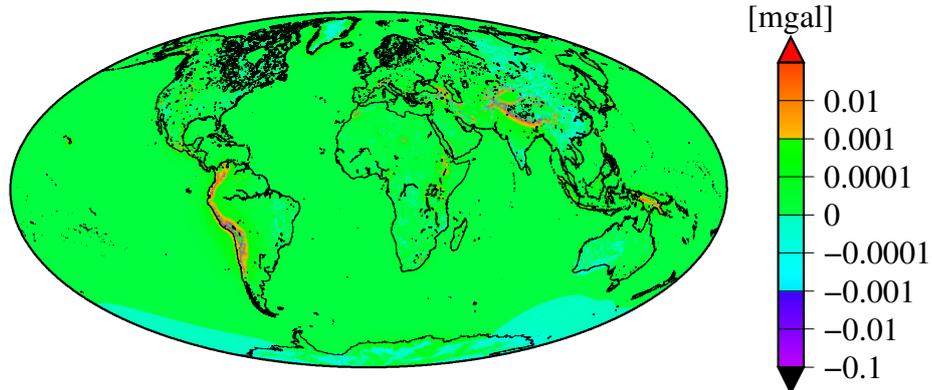


Abbildung 21: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ :  $5' \times 5'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0000 mgal		
Standardabweichung	0.0008 mgal		
Maximum	0.0784 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 47' 30''$	, $\lambda = 86^\circ 42' 30''$
Minimum	-0.0755 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 86^\circ 57' 30''$
Betragsminimum	$-2.3 \cdot 10^{-12}$ mgal	bei $\varphi = -50^\circ 2' 30''$	, $\lambda = 197^\circ 7' 30''$

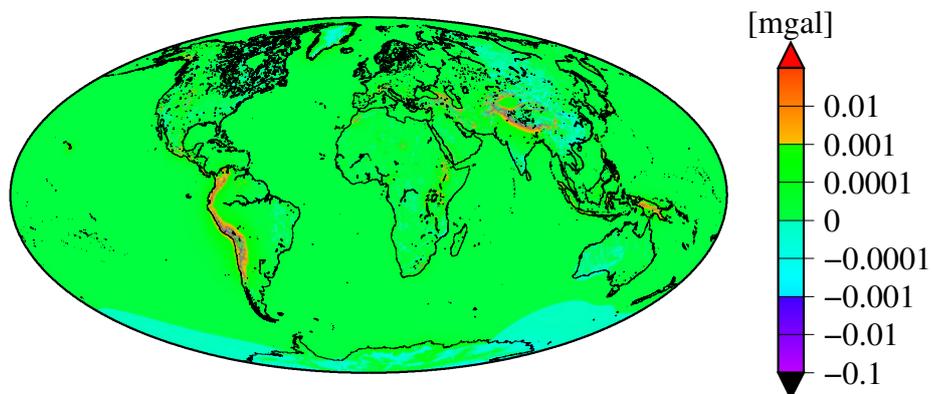


Abbildung 22: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ :  $5' \times 5'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0000 mgal		
Standardabweichung	0.0008 mgal		
Maximum	0.0801 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 47' 30''$	, $\lambda = 86^\circ 42' 30''$
Minimum	-0.0760 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 86^\circ 57' 30''$
Betragsminimum	$3.4 \cdot 10^{-12}$ mgal	bei $\varphi = -48^\circ 52' 30''$	, $\lambda = 190^\circ 7' 30''$

### Regionale Untersuchungen

In Abbildung 23 ist der Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$  für das Gebiet in den Anden dargestellt. Auf der linken Seite ist der gewählte Ausschnitt aus den globalen Berechnungen mit einer Auflösung von  $5' \times 5'$  abgebildet und auf der rechten Seite das Ergebnis der regionalen Berechnungen. Die Größenordnung des Approximationsfehlers nimmt mit zunehmender Auflösung deutlich zu. Des Weiteren zeigen sich bei den höher aufgelösten Daten auch wesentlich detailliertere Strukturen der Topographie. Von der Tendenz her sind die Ergebnisse jedoch vergleichbar. Am nordöstlichen Rand der Anden, wo gleichzeitig große Höhen und große Schwerestörungen auftreten (siehe z. B. Abbildung 10), ist der Fehler am größten. Allerdings sind die Schwerestörungen in diesem Gebiet ausschließlich positiv, während der Approximationsfehler positive und negative Werte annimmt. Das Vorzeichen wird nach Gleichung (60) auch vom Höhenunterschied zwischen Aufpunkt und Quellpunkt beeinflusst. Eine große Schwerestörung alleine bedingt zudem noch keine größeren Approximationsfehler. An der Westküste Südamerikas mit stark negativer Schwerestörung (siehe Abbildung 10) ist  $\epsilon_{\delta g}$  nahezu bei null. Nur die Kombination von stark ausgeprägter Topographie, betragsmäßig großen Schwerestörungen und im Gebirge sowieso vorhandener steiler Geländeneigungen führt zu großen Fehlern.

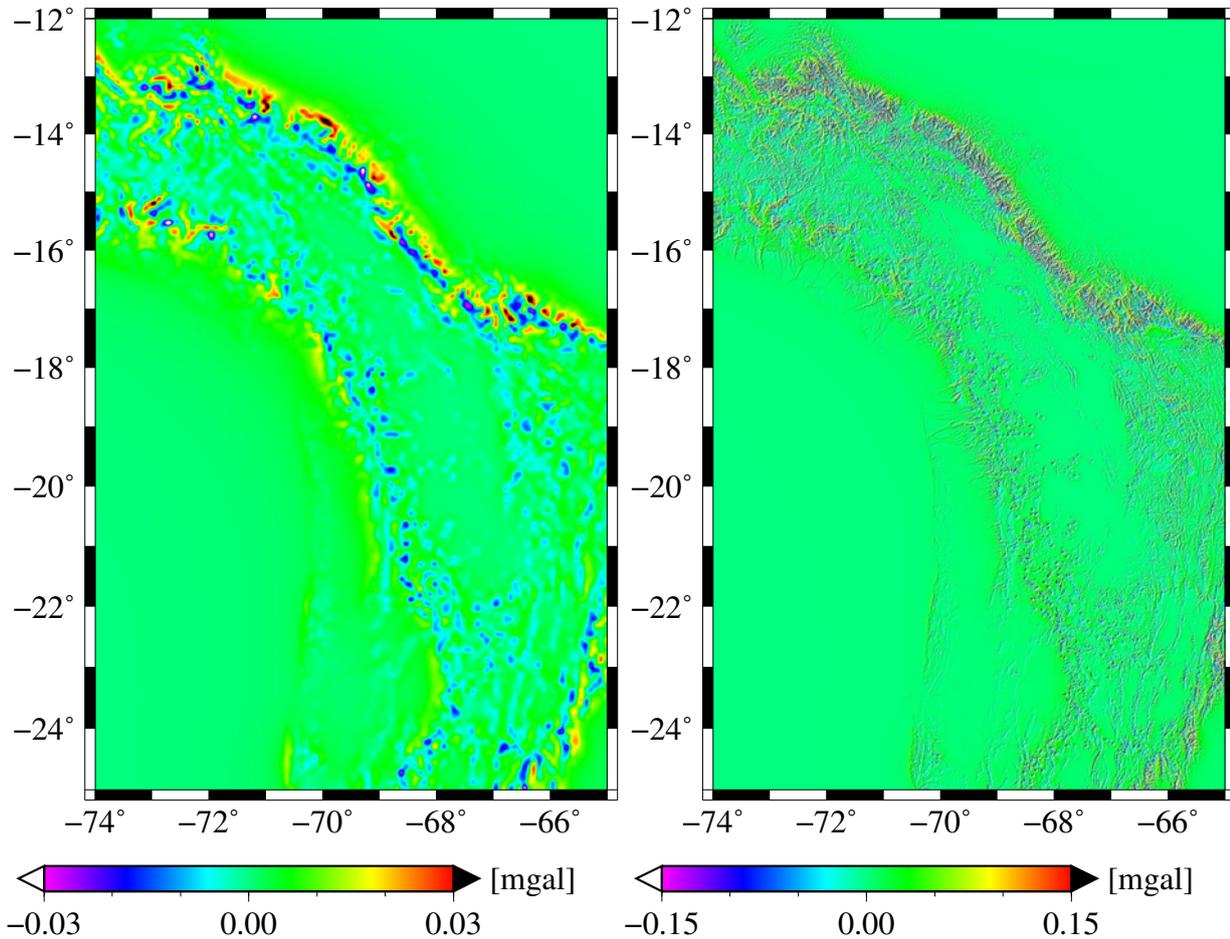


Abbildung 23: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$

Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0018 mgal	Mittelwert	0.0034 mgal
Standardabweichung	0.0051 mgal	Standardabweichung	0.0204 mgal
Maximum	0.0425 mgal	Maximum	0.3078 mgal
Minimum	-0.0435 mgal	Minimum	-0.4599 mgal
Betragsminimum	$-1.2 \cdot 10^{-6}$ mgal	Betragsminimum	$-5.9 \cdot 10^{-9}$ mgal

Allerdings bleibt der Fehler in der Schwerestörung auch in diesem Extrembeispiel unter einem Milligal. Es ist zu vermuten, dass eine weitere Verfeinerung der Auflösung noch etwas größere Abweichungen hervorruft. Alles in allem spielt die planare Approximation der Randbedingung jedoch keine entscheidende Rolle. Terrestrische Schweremessdaten mit hoher Genauigkeit sind nicht flächendeckend verfügbar. In schwer zugänglichen Gebieten wie zum Beispiel großen Wäldern oder Hochgebirgen, also dort wo der Approximationsfehler am größten ist, sind oft nur wenige hochgenaue Messdaten und meist nur entlang von Straßen vorhanden. In solchen Gegenden wird oft auf Schweredaten aus grob aufgelösten Satellitenbeobachtungen oder der Fluggravimetrie zurückgegriffen. Beide Verfahren erreichen eine maximale Genauigkeit von rund 1 mgal. Das ist ungefähr die Größenordnung, die der Approximationsfehler im Hochgebirge annehmen kann, so dass dieser normalerweise zu vernachlässigen ist. Zudem zeigen die Untersuchungen in Abschnitt 5.2.2, dass zum Beispiel die Wahl der RTM-Fläche einen größeren Effekt auf  $\delta g$  ausübt als die planare Approximation des Integralkerns.

## 5.4 Auswirkung auf das Störpotential

In einem weiteren Schritt wird die Auswirkung des in Abschnitt 5.3 beschriebenen Approximationsfehlers auf das Störpotential untersucht. Da ein metrischer Wert besser vorstellbar ist als das Störpotential selbst, wird gemäß dem Term von Bruns (siehe z. B. TORGE, 2003)

$$\zeta = \frac{T}{\bar{\gamma}} \quad (61)$$

die Auswirkung auf die Höhenanomalie  $\zeta$  berechnet. Für den Skalierungsfaktor wird eigentlich der Normalschwerewert an der Erdoberfläche verwendet, in dieser Arbeit wird jedoch näherungsweise ein mittlerer Normalschwerewert von  $\bar{\gamma} = 9.80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  eingesetzt (siehe z. B. MORITZ UND YURKINA, 2000). Damit lässt sich abschätzen, wie groß der Einfluss der planaren Approximation der Randbedingung auf das Quasigeoid ist. Der metrische Approximationsfehler wird im Folgenden mit  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$  bezeichnet, da es sich um die Auswirkung des Fehlers der Schwerestörung auf die Höhenanomalie handelt. Er berechnet sich mithilfe von Gleichung (23) zu

$$\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})} = \frac{1}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma} H(r, \psi, r') r'^2 \epsilon_{\delta g} \sec^2 \beta \, d\sigma \quad . \quad (62)$$

Auch wenn der Unterschied in diesem Fall nur von zweiter Ordnung ist, wird hier der sphärische Integralkern verwendet. Der Effekt der planaren Approximation im Integralkern für das Störpotential wird in Kapitel 5.5 untersucht. Damit lassen sich die beiden Fehleranteile getrennt voneinander betrachten.

### Singularität des Integralkerns

Stimmen Aufpunkt und Quellpunkt überein, wird der Integralkern des Störpotentials singulär. In diesem Fall wird analog zur Vorgehensweise in HEISKANEN UND MORITZ (1967) ein Wert für den Beitrag des gesamten Flächenelements hergeleitet:

Das Flächenelement des Aufpunkts wird durch einen flächengleichen Kreis auf der Kugel ersetzt, über den integriert wird. Der Kreis kann in Polarkoordinaten beschrieben werden, wobei der Aufpunkt den Ursprung dieses Polarkoordinatensystems darstellt. Die Kernfunktion  $H(R, \psi, R)$  wird analog zur Stokesfunktion in HEISKANEN UND MORITZ (1967) im Nahbereich approximiert durch den sie dominierenden Term

$$\frac{2}{\ell} = \frac{2}{\ell_0} = \frac{2}{2R \sin \frac{\psi}{2}} \approx \frac{2}{2R \frac{\psi}{2}} = \frac{2}{R\psi} \quad . \quad (63)$$

Somit folgt für den Beitrag des Flächenelements des Aufpunkts zum Integralwert

$$T_0 = \frac{R^2}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{\psi_0} H(R, \psi, R) \mu \sin \psi \, d\psi \, d\alpha \approx R \int_{\psi=0}^{\psi_0} \mu \, d\psi \, d\alpha = \mu R \psi_0 \quad . \quad (64)$$

Wird der sphärische durch einen ebenen Kreis ersetzt, ergibt sich

$$T_0 \approx \mu R \psi_0 \approx \mu s_0 \quad , \quad (65)$$

wobei  $s_0$  der Radius dieses Kreises ist. Der Radius wird so gewählt, dass die Fläche des Kreises genau der Fläche des Flächenelements, in welchem der Aufpunkt liegt, entspricht. Es gilt also

$$\begin{aligned} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \int_{s=0}^{s_0} s \, ds \, d\alpha &= R^2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi \, d\varphi \, d\lambda \\ \pi s_0^2 &= R^2 \Delta\lambda \cdot (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \\ &= R^2 \Delta\lambda \cdot 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \\ &\approx R^2 \Delta\lambda \cdot \cos \varphi_{\text{Aufpunkt}} \Delta\varphi \end{aligned} \quad (66)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \\ \Delta\lambda &= \lambda_2 - \lambda_1 \quad . \end{aligned}$$

Mit Gleichung (66) folgt für den Beitrag des Flächenelements des Aufpunkts zum Störpotential

$$T_0 \approx \mu s_0 \approx \mu \cdot R \sqrt{\frac{\cos \varphi_{\text{Aufpunkt}} \Delta\varphi \Delta\lambda}{\pi}} \quad . \quad (67)$$

Der Beitrag zum Integral in Gleichung (62) lautet analog

$$\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g}), 0} = \frac{R}{\bar{\gamma}} \epsilon_{\delta g} \sec^2 \beta \sqrt{\frac{\cos \varphi_{\text{Aufpunkt}} \Delta\varphi \Delta\lambda}{\pi}} \quad . \quad (68)$$

## Globale Untersuchungen

Abbildung 27 und 28 zeigen den Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$  für die globalen Berechnungen mit einer Auflösung von  $5' \times 5'$ . Die unterschiedlichen Geländeneigungen haben keine signifikante Auswirkung auf die in dieser Arbeit untersuchten Integrale. Sie werden nur der Vollständigkeit halber abgebildet. Der Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$  ist praktisch immer positiv. Die Auswirkung des Approximationsfehlers  $\epsilon_{\delta g}$  auf das berechnete Quasigeoid ist äußerst gering und nur im Hochgebirge erkennbar. Maximalwerte von 2 bis 3 mm werden in den Anden erreicht.

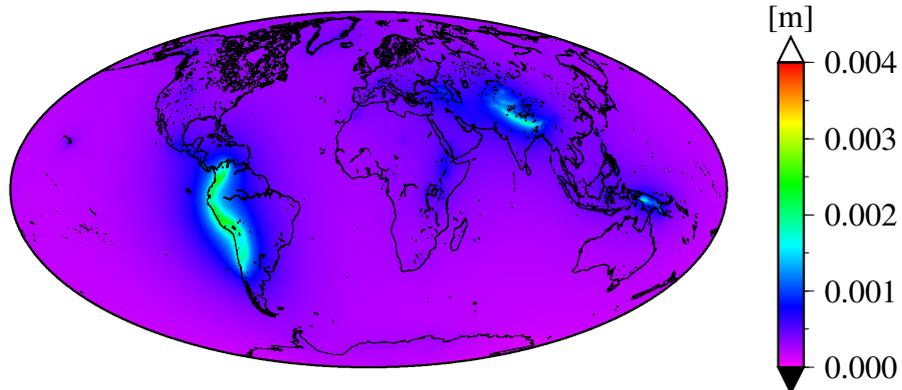


Abbildung 24: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ :  $5' \times 5'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0003 m		
Standardabweichung	0.0002 m		
Maximum	0.0027 m	bei $\varphi = -9^\circ 7' 30''$	, $\lambda = -77^\circ 47' 30''$
Minimum	-0.0001 m	bei $\varphi = -89^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 5^\circ 47' 30''$
Betragsminimum	$1.5 \cdot 10^{-6}$ m	bei $\varphi = -89^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 4^\circ 17' 30''$

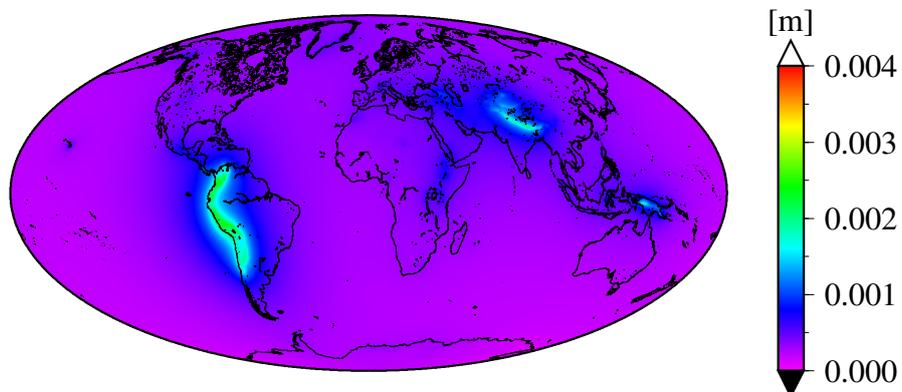


Abbildung 25: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ :  $5' \times 5'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0003 m		
Standardabweichung	0.0002 m		
Maximum	0.0027 m	bei $\varphi = -9^\circ 7' 30''$	, $\lambda = -77^\circ 47' 30''$
Minimum	-0.0001 m	bei $\varphi = -89^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 5^\circ 47' 30''$
Betragsminimum	$-4.2 \cdot 10^{-7}$ m	bei $\varphi = -89^\circ 57' 30''$	, $\lambda = -2^\circ 12' 30''$

### Regionale Untersuchungen

Auch im Hochgebirge bleibt der Effekt auf die berechneten Quasigeoidhöhen sehr klein. Obwohl sich der Approximationsfehler mit verfeinerter Auflösung noch etwas vergrößert, werden nicht mehr als wenige Millimeter erreicht. Die Maxima sind räumlich mit den Maxima der Schwerestörungen korreliert und am nordöstlichen Rand der Anden gelegen. Wie schon in Kapitel 5.3 angedeutet, kann gesagt werden, dass die planare Approximation der Randbedingung keine entscheidende Rolle im Rahmen der Quasigeoidberechnung spielt. Der Fehler in der berechneten Schwerestörung ist so gering, dass die Auswirkung auf das Quasigeoid vollkommen vernachlässigt werden kann. Zwar können einzelne Schwerestörungen auch größere Abweichungen beinhalten, doch fällt das bei der Integration über die gesamte Erde oder zumindest ein größeres Gebiet kaum ins Gewicht. Auch im Falle eines Millimeter-Geoids gibt es gerade im Hochgebirge andere Fehlereinflüsse, die eine vergleichbare Rolle spielen dürften, wie zum Beispiel die Lotabweichung. Das ausgewählte Gebiet in den Anden stellt zudem ein Extrembeispiel dar. In kleineren Hochgebirgen wie zum Beispiel den Alpen ist der Effekt noch wesentlich geringer. Die im Anhang befindlichen Ergebnisse des Testgebietes in Europa zeigen, dass maximal 2 mm erreicht werden.

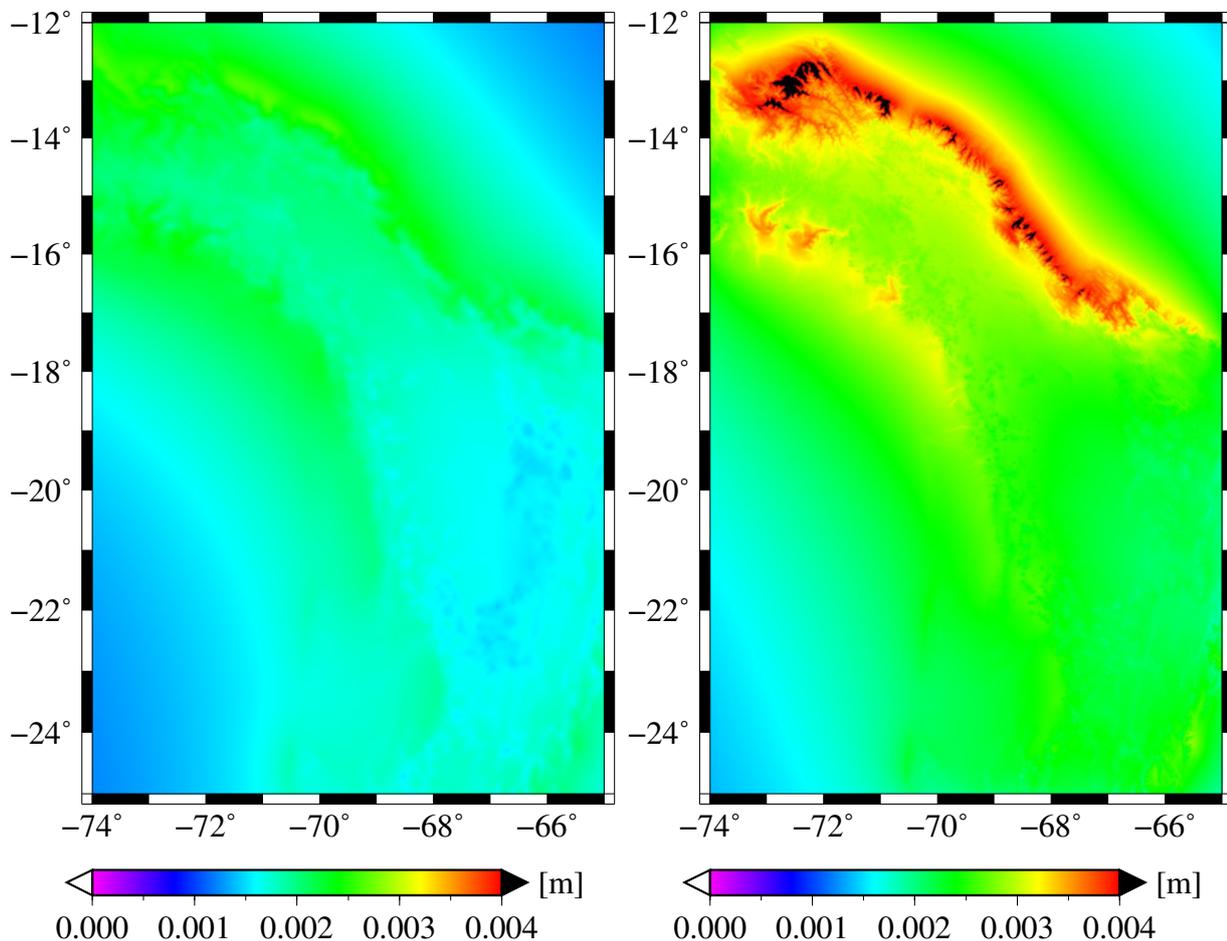


Abbildung 26: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0018 m	Mittelwert	0.0025 m
Standardabweichung	0.0003 m	Standardabweichung	0.0005 m
Maximum	0.0027 m	Maximum	0.0044 m
Minimum	-0.0012 m	Minimum	0.0014 m

## 5.5 Planare Approximation des Störpotentials

Unabhängig von den in den vorigen Abschnitten beschriebenen Untersuchungen soll der Einfluss der planaren Approximation im Integralkern des Störpotentials abgeschätzt werden. Auch hier wird direkt die Auswirkung auf die Höhenanomalie gemäß Gleichung (61) berechnet. Analog zu Abschnitt 5.3 wird die Differenz des sphärischen und des planaren Integralkerns gebildet und numerisch ausgewertet. Aus den Gleichungen (23) und (25) folgt

$$\epsilon_{\zeta} = \frac{1}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma} H(r, \psi, r') r'^2 \mu_0 d\sigma - \frac{R^2}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} \right] \mu_0 d\sigma = \frac{1}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma} \delta_T \mu_0 d\sigma \quad , \quad (69)$$

wobei für den hier entstehenden Approximationsfehler die Bezeichnung  $\epsilon_{\zeta}$  eingeführt wird. Für  $\mu_0$  wird der Startwert des Iterationsverfahrens aus Gleichung (20) eingesetzt. Mit  $\delta_T$  werden die vernachlässigten Terme höherer Ordnung im Integralkern bezeichnet (siehe Kapitel 6.2). Der Beitrag des Flächenelementes des Aufpunkts wird gemäß Abschnitt 5.4 berechnet.

### Globale Untersuchungen

Die Ergebnisse der globalen Berechnungen mit einer Auflösung von  $5' \times 5'$  sind auf der folgenden Seite dargestellt. Die Variation der Geländeneigungen wirkt sich auf den Approximationsfehler nicht sichtbar aus. Der direkte Effekt der planaren Approximation im Integralkern des Störpotentials liegt in einer anderen Größenordnung als die bisher untersuchten Effekte. Fast überall erreicht der Approximationsfehler Zentimeterniveau. Selbst im Flachland sowie auf dem Ozean ist der Fehler mit einigen Millimetern größer als die Maxima des in Abschnitt 5.4 geschilderten indirekten Effekts. Neben der Antarktis und Grönland werden die betragsmäßig größten Werte vor allem im Hochgebirge angenommen. Negative Werte treten in der Antarktis sowie im Himalaya und an der Südspitze Indiens auf. Grund dafür sind die dort großflächig vorhandenen negativen Schwerestörungen in Verbindung mit größeren Höhen. Ansonsten werden vorwiegend positive Werte angenommen. Maxima von fast 7.5 cm liegen in den Anden vor. Angesichts des angestrebten Zentimeter-Geoids sollte dieser Fehler im Rahmen der hochgenauen Schwerefeldbestimmung nicht komplett vernachlässigt werden.

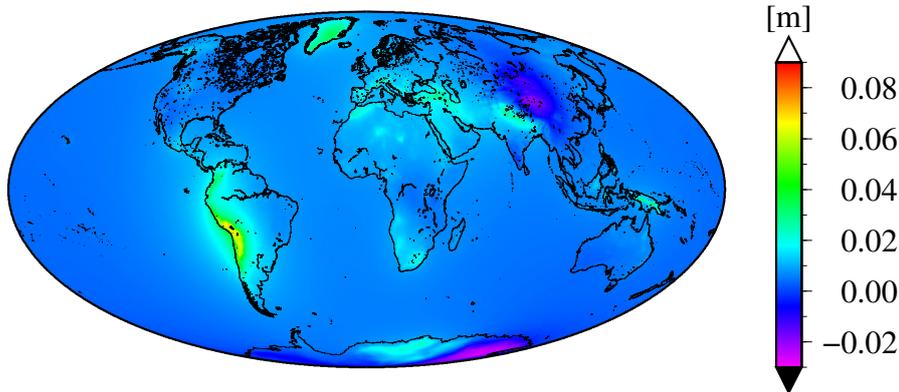


Abbildung 27: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta: 5' \times 5'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0060 m		
Standardabweichung	0.0062 m		
Maximum	0.0736 m	bei $\varphi = -14^\circ 42' 30''$	, $\lambda = -69^\circ 42' 30''$
Minimum	-0.0270 m	bei $\varphi = 39^\circ 17' 30''$	, $\lambda = 93^\circ 42' 30''$
Betragsminimum	$-4.5 \cdot 10^{-9}$ m	bei $\varphi = 56^\circ 42' 30''$	, $\lambda = 112^\circ 17' 30''$

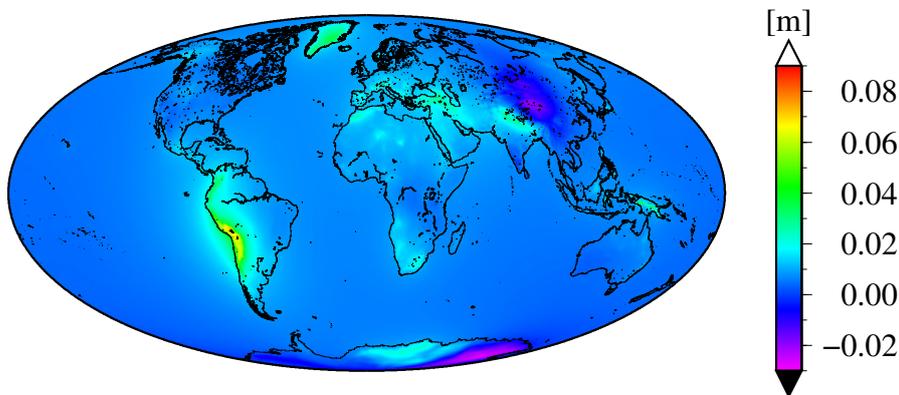


Abbildung 28: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta: 5' \times 5'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0061 m		
Standardabweichung	0.0062 m		
Maximum	0.0738 m	bei $\varphi = -14^\circ 42' 30''$	, $\lambda = -69^\circ 12' 30''$
Minimum	-0.0269 m	bei $\varphi = 39^\circ 17' 30''$	, $\lambda = 93^\circ 42' 30''$
Betragsminimum	$7.5 \cdot 10^{-9}$ m	bei $\varphi = -83^\circ 17' 30''$	, $\lambda = 64^\circ 12' 30''$

### Regionale Untersuchungen

Wie schon erläutert treten in den Anden globale Maximalwerte auf. Nicht nur am nordöstlichen Rand der Anden, wo besonders große Schwerstörungen vorliegen, sondern im gesamten Andenhochland werden größere Werte angenommen. Gegenüber der Auflösung von  $5' \times 5'$  steigt der Approximationsfehler bei den hochauflösenden Berechnungen sogar noch etwas an, so dass fast 9.5 cm erreicht werden. Zwar dienen die Anden wiederum als Extrembeispiel, jedoch zeigen die regionalen Berechnungen im Testgebiet in Europa, dass der Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$  auch im Flachland über einen Zentimeter groß wird (siehe Anhang). In den Alpen werden immerhin bis zu 2.5 cm erreicht. Auch wenn die Ergebnisse in Europa dieser Tendenz widersprechen, ist zu vermuten, dass bei noch feinerer Auflösung im Rahmen der regionalen Schwerfeldmodellierung im Allgemeinen noch etwas größere Werte erreicht werden.

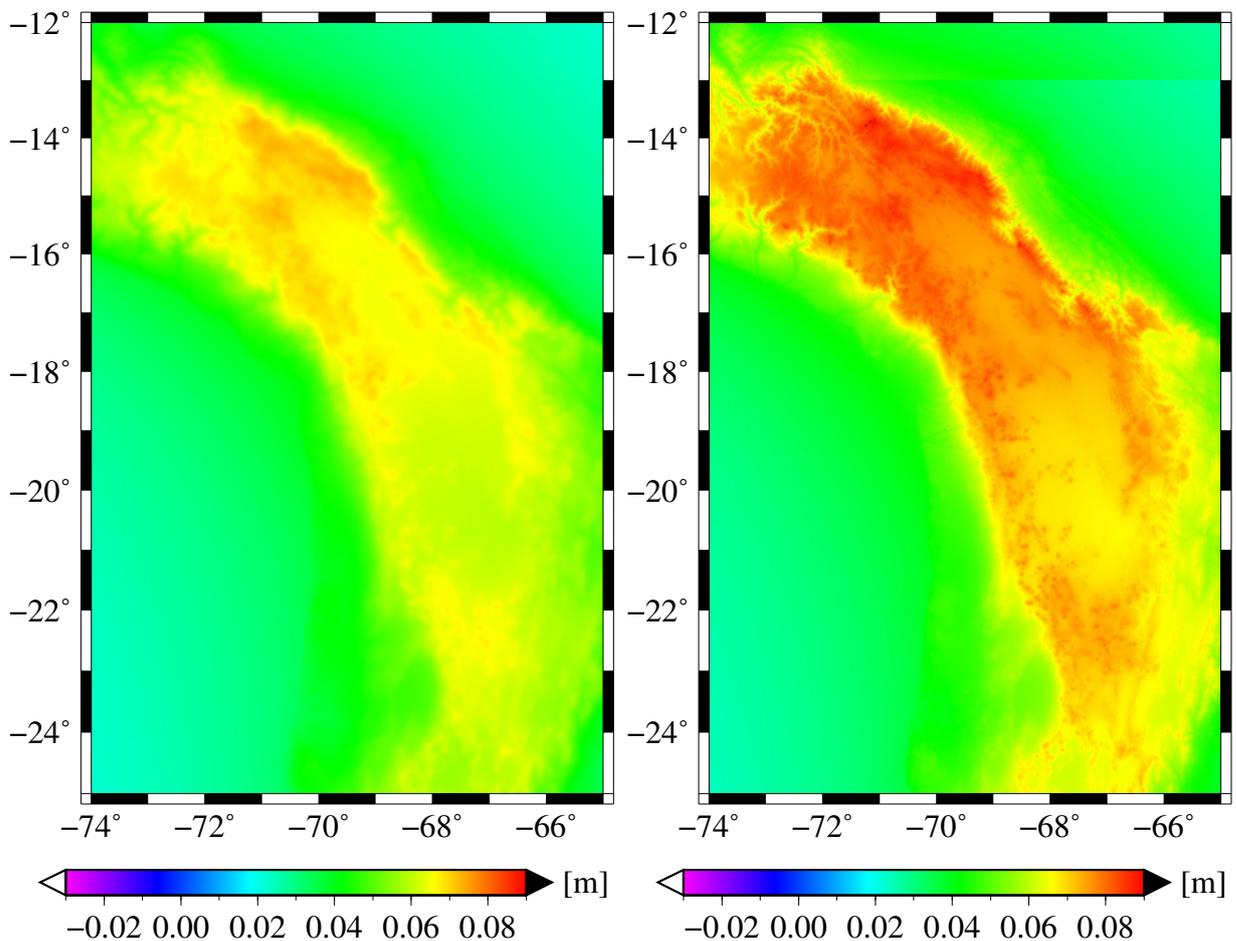


Abbildung 29: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0462 m	Mittelwert	0.0526 m
Standardabweichung	0.0150 m	Standardabweichung	0.0177 m
Maximum	0.0736 m	Maximum	0.0918 m
Minimum	0.0225 m	Minimum	0.0243 m

## 5.6 Weitere Untersuchungen

### 5.6.1 Wahl der regionalen Untersuchungsgebiete

Im Rahmen dieser Arbeit wurden regionale numerische Untersuchungen mit hochauflösenden Daten in zwei ausgewählten Gebieten vorgenommen. Das eine Gebiet ist in Mitteleuropa gelegen. Es wurde vor allem deshalb ausgewählt, um Aussagen über das Flachland bzw. weniger extreme Gebirgsregionen machen zu können. Das andere Gebiet umfasst einen Teil der Anden in Südamerika. Wie schon in Kapitel 4 (Abschnitt: Regionale Untersuchungen) angedeutet, soll es als Extrembeispiel dienen. Es stellt sich die Frage, warum gerade dieses Gebiet ausgewählt wurde und nicht der noch deutlich höhere Himalaya. Grundlage für die Entscheidung bilden die globalen Berechnungen zum Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$  mit einer Auflösung von  $5' \times 5'$ . Von allen in dieser Arbeit untersuchten Effekten ist die planare Approximation im Integralkern des Störpotentials der größte. In Abbildung 30 a) und b) sind die Schwerestörungen und der Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$  mit einer Auflösung von  $5' \times 5'$  für das Gebiet des Himalaya dargestellt.

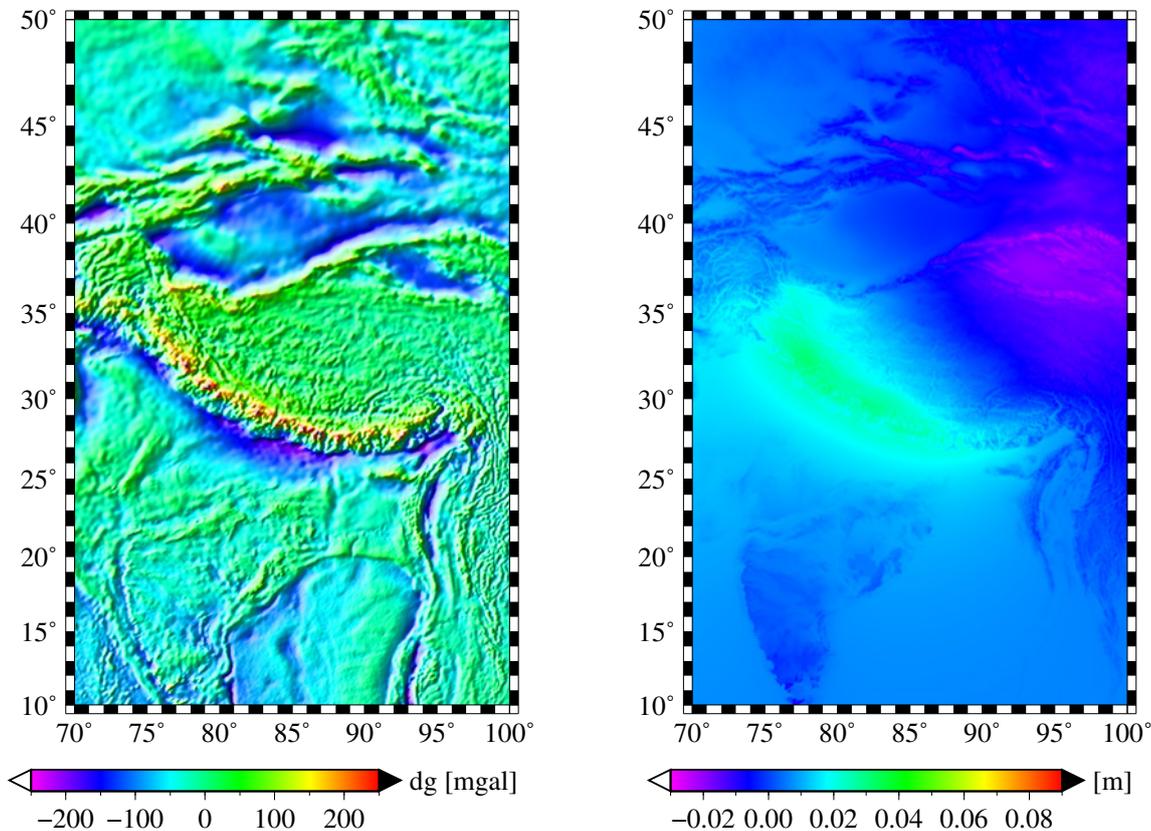


Abbildung 30: a) Schwerestörung  $\delta g$  bzw. b) Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$ :  $5' \times 5'$

Mittelwert	-28.6 mgal	Mittelwert	0.0042 m
Standardabweichung	54.6 mgal	Standardabweichung	0.0094 m
Maximum	298.9 mgal	Maximum	0.0324 m
Minimum	-211.8 mgal	Minimum	-0.0270 m

Der Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$  liegt im Bereich von  $\pm 3$  cm und ist somit betragsmäßig deutlich kleiner als in den Anden. Ursache dafür sind die wesentlich kleineren Schwerestörungen, die etwa im Bereich von  $\pm 250$  mgal liegen, während in den Anden Maximalwerte von bis zu 400 mgal auftreten (siehe Abbildung 10). Da dies auch global zu den Extremwerten gehört und gleichzeitig noch große Höhen vorliegen, nimmt der Approximationsfehler in den Anden größere Werte an als anderswo auf der Erde.

### 5.6.2 Einfluss der Geländeneigung auf die Quasigeoidberechnung

Die Geländeneigung tritt sowohl in der Randbedingung als auch in der Gleichung für das Störpotential auf. Zunächst wird der direkte Effekt auf die berechneten Schwerestörungen untersucht. In Abbildung 31 ist die Differenz zwischen den Schwerestörungen  $\delta g_1$  nach einmaliger Iteration der Randbedingung (19) und den Ausgangswerten  $\delta g$  dargestellt. Das Prinzip der Iteration ist in Gleichung (20) angegeben. Es gilt  $\delta g_i = \mu_i \cdot \cos^2 \beta$ . Die Geländeneigung wird aus Koordinatendifferenzen abgeleitet (siehe Kapitel 4.3). Die Iteration der Randbedingung wirkt sich hauptsächlich im Gebirge und dort zumeist positiv auf die Schwerestörungen aus. Im Flachland oder auf dem Meer liegt die Änderung deutlich unter einem Milligal, so dass hier eine mehrmalige Iteration nicht zwingend erforderlich ist. Ein Vergleich mit den Ergebnissen, die mithilfe der Geländeneigung aus der Fouriertransformation erhalten werden, findet in Abbildung 32 statt. Dort ist die Differenz der Schwerestörungen beider Verfahren nach dem ersten Iterationsschritt graphisch dargestellt. Die Berechnungsweise der Geländeneigung hat nur relativ geringen Einfluss auf die iterativ berechneten Schwerestörungen. Abgesehen von wenigen Ausnahmen liegt die Differenz beider Verfahren selbst im Gebirge meist im Bereich von  $\pm 0.02$  mgal. Im direkten Umfeld des Südpols liegen einige "Ausreißer" mit extrem großer Schwereänderung vor. Diese werden bei der Berechnung der statistischen Kenngrößen nicht berücksichtigt.

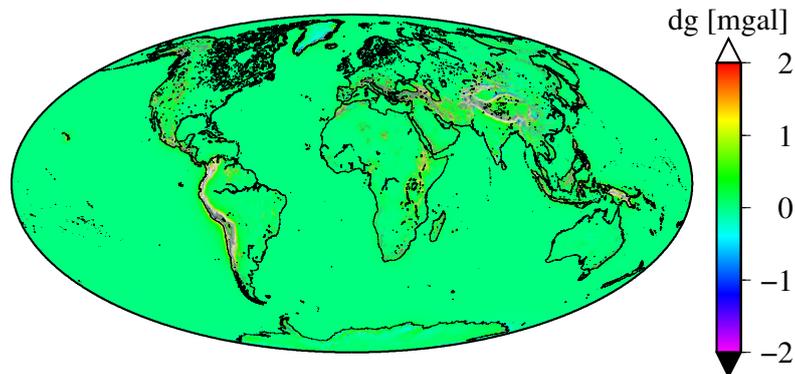


Abbildung 31: Differenz der Schwerestörungen  $\delta g_1 - \delta g$ :  $5' \times 5'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0530 mgal		
Standardabweichung	0.9246 mgal		
Maximum	59.2381 mgal	bei $\varphi = -89^\circ 52' 30''$	, $\lambda = 15^\circ 37' 30''$
Minimum	-89.9385 mgal	bei $\varphi = 19^\circ 27' 30''$	, $\lambda = -155^\circ 37' 30''$
Betragsminimum	$6.6 \cdot 10^{-11}$ mgal	bei $\varphi = -48^\circ 47' 30''$	, $\lambda = -167^\circ 37' 30''$

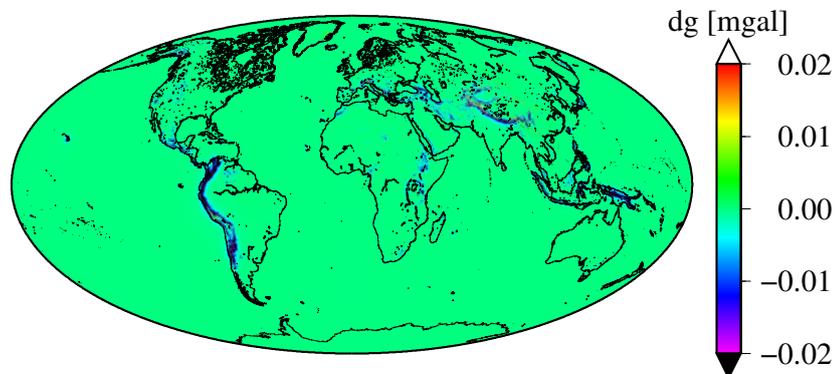


Abbildung 32: Differenz der Schwerestörungen  $\delta g_{\text{Koordinatendifferenzen}, 1} - \delta g_{\text{FFT}, 1}$ :  $5' \times 5'$

Mittelwert	-0.0004 mgal		
Standardabweichung	0.0083 mgal		
Maximum	3.0026 mgal	bei $\varphi = 82^\circ 47' 30''$	, $\lambda = -36^\circ 37' 30''$
Minimum	-2.3144 mgal	bei $\varphi = 60^\circ 17' 30''$	, $\lambda = -141^\circ 2' 30''$
Betragsminimum	$-1.7 \cdot 10^{-11}$ mgal	bei $\varphi = -68^\circ 12' 30''$	, $\lambda = 90^\circ 42' 30''$

Der indirekte Effekt der Differenz der beiden Schwerestörungen  $\delta g_{\text{Koordinatendifferenzen},1} - \delta g_{\text{FFT},1}$  auf das Störpotential bzw. die Höhenanomalie wird als vernachlässigbar angenommen und in dieser Arbeit nicht weiter behandelt. Statt dessen wird die direkte Auswirkung der unterschiedlichen Geländeneigungen in der Gleichung des Störpotentials untersucht. Abbildung 33 zeigt die Höhenanomalie  $\zeta_0$  nach dem Schritt nullter Ordnung. Sie entsteht durch Einsetzen des Startwerts  $\mu_0$  aus Gleichung (20) in Gleichung (23) und Division durch  $\bar{\gamma}$  gemäß dem Term von Bruns (61). Dargestellt ist das Ergebnis, welches sich mithilfe der Geländeneigung aus Koordinatendifferenzen ergibt. Zum anderen Verfahren sind keine sichtbaren Unterschiede erkennbar. Deshalb ist in Abbildung 34 zusätzlich die Differenz der Höhenanomalien aus den beiden Berechnungsverfahren visualisiert. Vor allem im Hochgebirge sind signifikante Unterschiede vorhanden. Die Differenzen sind systematisch negativ, da die Fouriertransformation in der Regel größere Neigungen erzeugt als die Gradientenmethode. Somit sind auch die berechneten Quasigeoidhöhen im Allgemeinen größer. Die maximale Differenz beträgt rund 0.5 m, wobei meist nur wenige Zentimeter erreicht werden. Alles in allem ist der Einfluss der Geländeneigung auf das Quasigeoid wesentlich größer als die Auswirkung der planaren Approximation. Allerdings kommt die Geländeneigung bei der Reihenentwicklung mithilfe des Molodenskii-Shrinkings erst in den Termen zweiter Ordnung ins Spiel, so dass in diesem Fall der Einfluss geringer ist. Analog zur planaren Approximation spielt vor allem der direkte Effekt bei der Berechnung des Störpotentials eine Rolle.

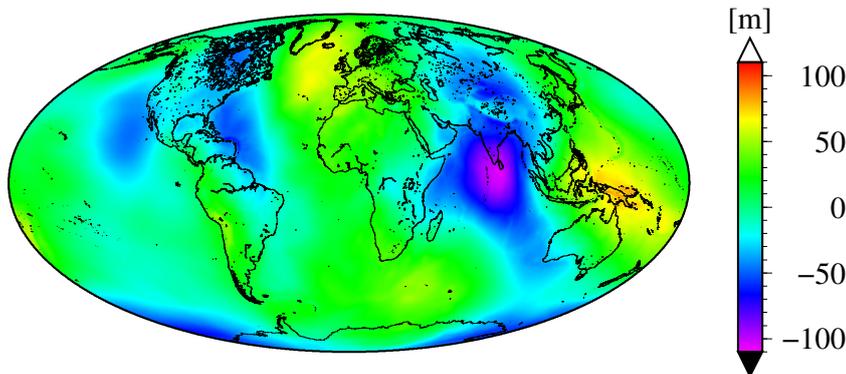


Abbildung 33: Höhenanomalie  $\zeta_0: 5' \times 5'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	-1.2 m		
Standardabweichung	29.0 m		
Maximum	85.4 m	bei $\varphi = -8^\circ 17' 30''$	, $\lambda = 147^\circ 22' 30''$
Minimum	-106.7 m	bei $\varphi = 4^\circ 37' 30''$	, $\lambda = 78^\circ 47' 30''$
Betragsminimum	$2.2 \cdot 10^{-7}$ m	bei $\varphi = 8^\circ 52' 30''$	, $\lambda = 19^\circ 42' 30''$

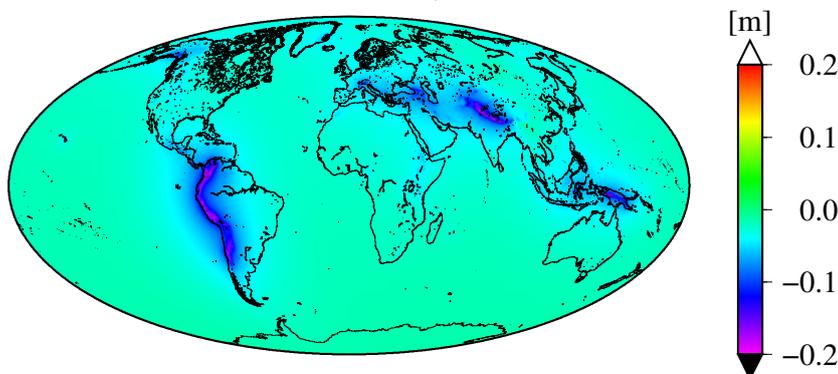


Abbildung 34: Differenz der Höhenanomalien  $\zeta_{\text{Koordinatendifferenzen},0} - \zeta_{\text{FFT},0}: 5' \times 5'$

Mittelwert	-0.0279 m		
Standardabweichung	0.0150 m		
Maximum	0.0165 m	bei $\varphi = -89^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 4^\circ 47' 30''$
Minimum	-0.4980 m	bei $\varphi = 10^\circ 47' 30''$	, $\lambda = -73^\circ 37' 30''$
Betragsminimum	$-2.7 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = 27^\circ 12' 30''$	, $\lambda = 98^\circ 7' 30''$

## 5.7 Rechenzeit und Parallelisierung

Die numerische Auswertung der in dieser Arbeit untersuchten Integralgleichungen erfordert eine hohe Anzahl von Funktionsaufrufen. Die Rechenzeit hängt dabei insbesondere von der Zahl der Schleifendurchgänge sowie der Komplexität des jeweils zu berechnenden Integralkerns ab. Für die Zahl der Schleifendurchgänge gilt

$$\begin{aligned} n_{\text{Schleifendurchgänge}} &= n_{\text{Aufpunkte}} \cdot n_{\text{Quellpunkte}} \\ &= n_{\text{Aufpunkte}} \cdot n_{\text{Flächenelemente}} \cdot n_{\text{Integrationsstützstellen}} \end{aligned}$$

Bei den globalen Berechnungen mit der Auflösung von  $5' \times 5'$  und den in Tabelle 1 bzw. 2 angegebenen Integrationsstützstellen sind somit bis zu rund

$$9331200 \cdot [9049830 + 263616 \cdot (2 + 1)^2 + 17754 \cdot (6 + 1)^2] \approx 114\,702\,096\,384\,000 \approx 1.15 \cdot 10^{14}$$

Schleifendurchgänge notwendig. Dies ist bei den in dieser Arbeit behandelten Berechnungen der Maximalfall. Aber auch die regionalen Untersuchungen mit hochaufgelösten Daten sind äußerst rechenzeitintensiv. Da die Auswertung der Funktionsaufrufe für jeden Schleifendurchgang unabhängig vonstatten geht, sind die Berechnungen ideal für eine Parallelisierung geeignet. Dies ermöglicht eine effiziente Berechnung auf einem Parallelrechner. Für solche Zwecke stellt das Steinbuch Centre for Computing (SCC) des Karlsruher Institut für Technologie (KIT) den Parallelrechner HP XC3000 (HC3) zur Verfügung. Er besteht aus einer Vielzahl an Knoten mit jeweils acht Prozessoren, unterschiedlich großem Arbeitsspeicher sowie lokalem Plattenspeicher. Die genauen Spezifikationen und weitere Informationen sind im aktuellen User Guide nachzulesen (Link: <http://www.scc.kit.edu/scc/docs/HP-XC/ug/ug3k.pdf>). 356 dieser Knoten stehen als Berechnungsknoten zur Verfügung. Darauf lassen sich bis zu  $356 \cdot 8 = 2848$  Prozesse parallel ablaufen. Der Nutzer kann allerdings nicht direkt auf diese Berechnungsknoten zugreifen. Stattdessen müssen die Ressourcen durch Absenden eines Jobs angefordert werden. Dabei muss die maximale Rechenzeit sowie der erforderliche Speicher und die Anzahl der gewünschten Prozesse angegeben werden. Sämtliche abgeschickte Jobs werden je nach Priorität in die Warteschlange einsortiert und sobald die entsprechenden Ressourcen zur Verfügung stehen, gestartet.

Es ist eine Anpassung der Programmroutinen für die Parallelisierung erforderlich. Programme können mithilfe der Message Passing Interface (MPI)-Schnittstelle parallelisiert werden. Darunter versteht man eine Bibliothek von Funktionen, die den Austausch von Daten zwischen den einzelnen Prozessen regelt. Informationen zum MPI-Standard finden sich z. B. unter folgendem Link: <http://www.mpi-forum.org/>. Entsprechende Funktionsbibliotheken stehen für viele Programmiersprachen zur Verfügung. In dieser Arbeit werden sämtliche Programme in der Programmiersprache Fortran verfasst. Die Programmcodes werden so modifiziert, dass die auszuwertenden Schleifendurchgänge durch Einbinden der entsprechenden MPI-Funktionen gleichmäßig auf die einzelnen Prozessoren verteilt werden. Das bewirkt eine enorme Zeitersparnis gegenüber einer sequentiellen Abarbeitung auf einem einzelnen Prozessor. Die gewünschte Anzahl an Prozessoren kann dabei flexibel variiert werden. Sie ist nicht im Quellcode festgelegt, sondern wird beim Absenden eines Jobs angegeben. Eine Parallelisierung ist für alle Programme mit einer großen Anzahl voneinander unabhängig auswertbarer Programmteile empfehlenswert.

## 6 Terme höherer Ordnung

Im vorhergehenden Kapitel wurde der Effekt der planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem numerisch untersucht. Diese Vereinfachung der Integralkerne beinhaltet, dass sämtliche Terme der Ordnung  $O\left(\frac{h}{R}\right)$  vernachlässigt werden. Die planaren Gleichungen werden als Approximation 0. Ordnung der sphärischen Integrale angesehen. Um die dabei begangenen Approximationsfehler korrigieren zu können, wird in diesem Kapitel zunächst eine analytische Betrachtung der vernachlässigten Terme vorgenommen. Es werden Korrekturterme für den kompletten Approximationsfehler hergeleitet. Diese werden geeignet umgeformt, sodass sich eine Reihenentwicklung nach Art des Molodenskii-Shrinkings darauf anwenden lässt. In einem weiteren Schritt wird der Schwerpunkt auf die Terme 1. Ordnung gelegt. Sie hinterlassen einen Approximationsfehler der Ordnung  $O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)$ . Es werden Formeln für das Molodenskii-Shrinking mit den Termen 1. Ordnung abgeleitet. Der in diesem Kapitel aufgezeigte Weg erlaubt es, diese Herleitungen auf beliebige höhere Ordnungen zu übertragen. Zu guter Letzt werden numerische Untersuchungen durchgeführt, um die mithilfe der Korrekturterme 1. Ordnung erreichte Verbesserung zu demonstrieren.

### 6.1 Planare Approximation der Randbedingung

In Gleichung (21) wird für die vernachlässigten Terme des Integralkerns der Randbedingung die Bezeichnung  $\delta_{BC}$  eingeführt. Sie sind von der Ordnung  $O\left(\frac{h}{R}\right)$ . Ein analytischer Ausdruck für den Gesamtfehler ergibt sich aus der Differenz des sphärischen (19) und des planaren Integralkerns (22)

$$\delta_{BC} = \frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} r'^2 - 2 \frac{h' - h}{\ell^3} R^2 \quad (70a)$$

$$= \frac{h' - h}{\ell^3} \cdot \frac{4Rh'^2 + hh'^2 + 5R^2h' + 2Rhh' - R^2h + h'^3}{r} \quad (70b)$$

$$= R \frac{h' - h}{\ell^3} \cdot (5h' - h) + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right) := \delta_{BC}^{(1)} + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right) \quad (70c)$$

Dieser Ausdruck lässt sich unterteilen in den Hauptanteil  $\delta_{BC}^{(1)}$  sowie weitere Terme der Größenordnung  $O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)$ , wie in Gleichung (70c) geschehen. Auf diese Weise kann das sphärische Integral schrittweise angenähert werden. Beispielsweise wird durch zusätzliches Addieren von  $\delta_{BC}^{(2)}$  die Fehlerordnung  $O\left(\frac{h^3}{R^3}\right)$  erreicht, usw.

Analog zu Gleichung (60) kann mit

$$\epsilon_{\delta g}^{(j)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta_{BC}^{(j)} \mu^{(j)} d\sigma \quad (71)$$

der Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$  beliebig genau approximiert werden

$$\epsilon_{\delta g} = \epsilon_{\delta g}^{(1)} + \epsilon_{\delta g}^{(2)} + \dots + \epsilon_{\delta g}^{(J)} + O\left(\frac{h^{J+1}}{R^{J+1}}\right) \quad (72)$$

Die ursprüngliche planare Randbedingung (22) wird als Approximation 0. Ordnung des sphärischen Integrals (19) betrachtet. Für die damit erhaltenen Randwerte wird in diesem Kapitel

deshalb die Notation  $\mu^{(0)}$  eingeführt. Durch Hinzunahme von  $\epsilon_{\delta g}^{(1)}$  zur planaren Randbedingung (22) ergibt sich für diese ein erweiterter Ausdruck

$$\mu^{(1)} \cos^2 \beta - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h' - h}{\ell^3} \mu^{(1)} d\sigma - \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{h' - h}{\ell^3} \cdot (5h' - h) \mu^{(1)} d\sigma = \delta g \quad . \quad (73)$$

Als Lösung der erweiterten Randbedingung (73) wird  $\mu^{(1)}$  erhalten.

Die Genauigkeit dieser Approximation kann mit  $\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{8000^2 \text{ m}^2}{6371^2 \text{ km}^2} \approx 0.0002\%$  abgeschätzt werden, was eine Verbesserung der ursprünglichen Gleichung um den Faktor  $\frac{R}{h} \geq 800$  bedeutet.

Prinzipiell lässt sich dieses Vorgehen beliebig fortsetzen. Aufgrund der geringen Größe des Approximationsfehlers  $\epsilon_{\delta g}$  ist dies jedoch nicht von praktischer Notwendigkeit.

### 6.1.1 Reihenentwicklung der Korrekturterme

Auf die erweiterte Randbedingung (73) lässt sich ebenfalls das Molodenskii-Shrinking anwenden. Da Terme der Ordnung  $O\left(\frac{h}{R}\right)$  hinzukommen, muss auch die räumliche Distanz entsprechend erweitert werden. Aus Gleichung (27) folgt

$$\ell^{2(1)} = \ell_0^2 \cdot \left[ 1 + k \cdot \frac{h + h'}{R} + k^2 \cdot \left( \frac{h' - h}{\ell_0} \right)^2 \right] \quad . \quad (74)$$

Die Reihenentwicklung wird analog zu Kapitel 3.4 durchgeführt. Die Randbedingung lautet nun

$$\begin{aligned} \delta g^{(1)} &= \left[ \mu_0^{(1)} + k\mu_1 + k^2\mu_2^{(1)} + \dots \right] \left[ 1 - k^2 \tan^2 \beta + k^4 \tan^4 \beta - + \dots \right] \quad (75) \\ &\quad - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{k\eta}{\ell_0^2} \left[ \mu_0^{(1)} + k\mu_1^{(1)} + k^2\mu_2^{(1)} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{3}{2} k \frac{h + h'}{R} - \frac{3}{2} k^2 \eta^2 + - \dots \right] d\sigma \\ &\quad - \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{k^2 \eta (5h' - h)}{\ell_0^2} \left[ \mu_0^{(1)} + k\mu_1^{(1)} + \dots \right] \left[ 1 - \frac{3}{2} k \frac{h + h'}{R} - \frac{3}{2} k^2 \eta^2 + - \dots \right] d\sigma \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Reihe für den Korrekturterm  $\epsilon_{\delta g}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{\delta g, 0}^{(1)} &= 0 \\ \epsilon_{\delta g, 1}^{(1)} &= 0 \\ \epsilon_{\delta g, 2}^{(1)} &= \frac{R}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{\eta}{\ell_0^2} (2h - h') \mu_0^{(1)} d\sigma \quad (76) \\ &\vdots \\ \epsilon_{\delta g}^{(1)} &= \epsilon_{\delta g, 0}^{(1)} + \epsilon_{\delta g, 1}^{(1)} + \epsilon_{\delta g, 2}^{(1)} + \dots \end{aligned}$$

Mithilfe der in diesem Kapitel eingeführten Schreibweise gilt

$$\mu_i^{(J)} = \mu_i^{(0)} + \sum_{j=1}^J \epsilon_{\delta g, i}^{(j)} \quad , \quad (77)$$

wobei  $\mu_i^{(0)}$  die Lösung der ursprünglichen Brovar-Reihe (36) aus Abschnitt 3.4 darstellt. Die lineare Lösung bleibt bei der um eine Stufe erweiterten Randbedingung unverändert. Erst ab dem Term zweiter Ordnung kommen weitere Summanden hinzu. Der Einfluss dieser zusätzlichen Terme ist somit ebenfalls nur von zweiter Ordnung. Die Lösungsreihe der erweiterten Randbedingung (73) ergibt sich nach Gleichung (77) durch Addition der Korrekturterme zur ursprünglichen Brovar-Reihe:

$$\begin{aligned}\mu_0^{(1)} &= \mu_0^{(0)} + \epsilon_{\delta g, 0}^{(1)} \\ \mu_1^{(1)} &= \mu_1^{(0)} + \epsilon_{\delta g, 1}^{(1)} \\ \mu_2^{(1)} &= \mu_2^{(0)} + \epsilon_{\delta g, 2}^{(1)} \\ &\vdots\end{aligned}\tag{78}$$

und

$$\mu^{(1)} = \mu_0^{(1)} + \mu_1^{(1)} + \mu_2^{(1)} + \dots \quad .\tag{79}$$

Diese Reihe entspricht durch Hinzunahme von Korrekturtermen  $\epsilon_{\delta g, i}^{(1)}$  einer Approximation 1. Ordnung der sphärischen Randbedingung.

### 6.1.2 Numerische Untersuchungen

Auf der folgenden Seite ist der in der erweiterten Randbedingung (73) verbleibende Restfehler  $\epsilon_{\delta g} - \epsilon_{\delta g}^{(1)}$  graphisch dargestellt:

$$\epsilon_{\delta g} - \epsilon_{\delta g}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{r'^2 - r^2}{r \ell^3} r'^2 \mu_0 d\sigma - \frac{R^2}{2\pi} \iint_{\sigma} \frac{h' - h}{\ell^3} \mu_0 d\sigma - \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \frac{h' - h}{\ell^3} \cdot (5h' - h) \mu_0 d\sigma \quad ,\tag{80}$$

wobei  $\mu_0$  wieder Gleichung (20) entstammt. Entsprechend der vorgenommenen Abschätzung sind sämtliche statistische Kenngrößen etwa um den Faktor 800 kleiner als beim ursprünglichen Gesamtfehler  $\epsilon_{\delta g}$ . War der Fehler schon vorher praktisch vernachlässigbar, so ist er es jetzt in jedem Fall. Die Extremwerte liegen mit  $\pm 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  unterhalb der Messgenauigkeit eines Gravimeters. Auch in den Anden werden kaum größere Werte erreicht (siehe Abbildung 36).

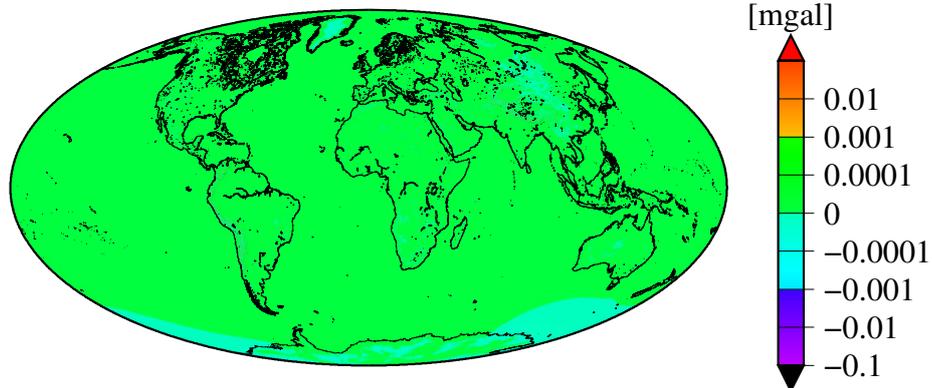


Abbildung 35: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g} - \epsilon_{\delta g}^{(1)}$ :  $5' \times 5'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	$1.5 \cdot 10^{-8}$ mgal		
Standardabweichung	$9.3 \cdot 10^{-7}$ mgal		
Maximum	0.0001 mgal	bei $\varphi = -89^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 136^\circ 37' 30''$
Minimum	-0.0001 mgal	bei $\varphi = -89^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 73^\circ 22' 30''$
Betragsminimum	$2.5 \cdot 10^{-15}$ mgal	bei $\varphi = -50^\circ 42' 30''$	, $\lambda = 166^\circ 37' 30''$

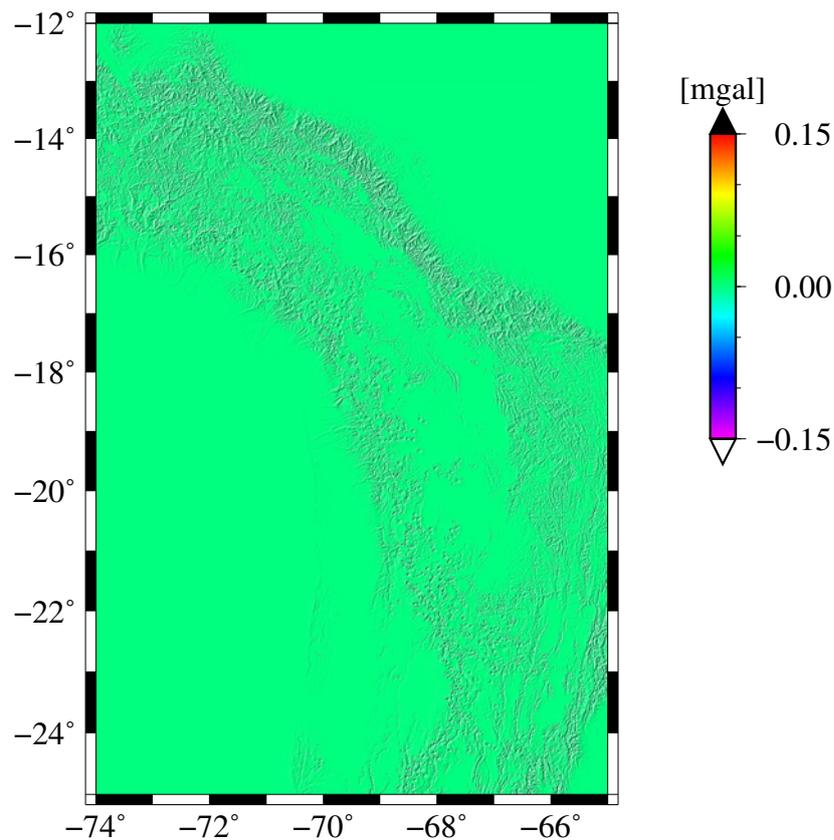


Abbildung 36: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g} - \epsilon_{\delta g}^{(1)}$ :  $30'' \times 30''$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	$1.6 \cdot 10^{-6}$ mgal		
Standardabweichung	$6.7 \cdot 10^{-6}$ mgal		
Maximum	0.0001 mgal	bei $\varphi = -13^\circ 41' 45''$	, $\lambda = -71^\circ 8' 15''$
Minimum	-0.0002 mgal	bei $\varphi = -13^\circ 47' 15''$	, $\lambda = -71^\circ 13' 45''$
Betragsminimum	$3.0 \cdot 10^{-12}$ mgal	bei $\varphi = -22^\circ 46' 15''$	, $\lambda = -68^\circ 25' 45''$

## 6.2 Planare Approximation des Störpotentials

Auch für das Störpotential wird der im Rahmen der planaren Approximation vernachlässigte Anteil näher betrachtet. Nach Gleichung (24) tragen die nicht berücksichtigten Terme des entsprechenden Integralkerns die Bezeichnung  $\delta_T$ . Es gilt

$$\delta_T = H(r, \psi, r') \cdot r'^2 - \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} \right] \cdot R^2 \quad (81a)$$

$$= \frac{4Rh'}{\ell} + \frac{2h'^2}{\ell} - r' \cdot \ln \frac{\ell + r' - r \cos \psi}{r(1 - \cos \psi)} + R \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] \quad (81b)$$

$$= \frac{4Rh'}{\ell} + \frac{2h'^2}{\ell} + r' \cdot \ln \left[ 1 + \frac{h}{R} \right] - r' \cdot \ln \left[ 1 + \frac{\ell + h' - h \cos \psi}{R(1 - \cos \psi)} \right] + R \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] \quad (81c)$$

$$= \frac{4Rh'}{\ell} + \frac{2h'^2}{\ell} + r' \cdot \ln \left[ 1 + \frac{h}{R} \right] - h' \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] - r' \cdot \ln \left[ 1 + \frac{\ell - \ell_0 + h' - h \cos \psi}{\ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)} \right], \quad (81d)$$

wobei in Gleichung (81d) die Beziehung

$$\ln [x + y] = \ln \left[ x \left( 1 + \frac{y}{x} \right) \right] = \ln x + \ln \left[ 1 + \frac{y}{x} \right] \quad (82)$$

zusammen mit weiteren Umformungen angewendet wird.

Unter Ausnutzung von (BRONSTEIN ET AL., 1999, S. 1013)

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - + \dots \quad \text{für } -1 < x \leq 1 \quad (83)$$

bis zum ersten Summenglied lassen sich alle Terme aus Gleichung (81d) auf einen gemeinsamen Hauptnenner bringen:

$$\delta_T \approx \frac{4R^2 h' \ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) + 2Rh'^2 \ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) + (R + h') \cdot h \ell \ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)}{R \ell \ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)} + \frac{-2R^2 h' \ell \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) - (R + h') \cdot R \ell (\ell - \ell_0 + h' - h \cos \psi)}{R \ell \ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)}. \quad (84)$$

Dieser Schritt ist nur das Mittel zum Zweck, entscheiden zu können, welche Terme den Haupteinfluss auf  $\delta_T$  haben. Werden alle Terme der Größenordnung  $O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)$  vernachlässigt, ergibt sich daraus

$$\delta_T^{(1)} = \frac{4Rh'}{\ell} - h' \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] - R \cdot \ln \left[ 1 + \frac{\ell - \ell_0 + h' - h \cos \psi}{\ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)} \right] + O\left(\frac{h^2}{R^2}\right). \quad (85)$$

Analog zu Kapitel 6.1 folgt mit

$$\epsilon_T^{(j)} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \delta_T^{(j)} \mu^{(j)} d\sigma \quad (86)$$

die erweiterte Gleichung zur Berechnung des Störpotentials:

$$\begin{aligned}
T^{(1)} &= \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} \right] \mu^{(1)} d\sigma + \epsilon_T^{(1)} \\
&= \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} \right] \mu^{(1)} d\sigma \\
&\quad + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left( \frac{4h'}{\ell} - \frac{h'}{R} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] - \ln \left[ 1 + \frac{\ell - \ell_0 + h' - h \cos \psi}{\ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)} \right] \right) \mu^{(1)} d\sigma .
\end{aligned} \tag{87}$$

### 6.2.1 Reihenentwicklung der Korrekturterme

Auf die erweiterte Gleichung des Störpotentials (87) lässt sich das Molodenskii-Shrinking anwenden. Mit der Reihendarstellung (83), unter der Voraussetzung, dass das Argument des natürlichen Logarithmus den Wert 2 nicht übersteigt, und Gleichung (74) folgt die erweiterte Reihenentwicklung des Störpotentials

$$\begin{aligned}
T^{(1)} &= \frac{R^2}{4\pi} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{R} H(\psi) - k \frac{h+h'}{R \cdot \ell_0} - k^2 \frac{\eta^2}{\ell_0} + \dots \right] \left[ \mu_0^{(1)} + k\mu_1^{(1)} + k^2\mu_2^{(1)} + \dots \right] d\sigma \\
&\quad + \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{4kh'}{\ell_0} \left[ 1 - \frac{1}{2} k^2 \eta^2 + \dots \right] - \frac{kh'}{R} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\frac{1}{2} k^2 \eta^2 \ell_0 + k(h' - h \cos \psi)}{\ell_0(1 + \sin \frac{\psi}{2})} + \frac{(h' - h \cos \psi)^2}{2\ell_0^2(1 + \sin \frac{\psi}{2})^2} \right\} \left[ \mu_0^{(1)} + k\mu_1^{(1)} + k^2\mu_2^{(1)} + \dots \right] d\sigma .
\end{aligned} \tag{88}$$

Dies führt auf folgende Korrekturterme für die ursprüngliche Brovar-Reihe des Störpotentials (39):

$$\begin{aligned}
\epsilon_{T,0}^{(1)} &= 0 \\
\epsilon_{T,1}^{(1)} &= \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{3h' - h}{\ell_0} - \frac{h'}{R} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] - \frac{h' - h \cos \psi}{\ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)} \right\} \mu_0^{(1)} d\sigma \\
\epsilon_{T,2}^{(1)} &= -\frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{h+h'}{\ell_0} + \frac{h' - h \cos \psi}{\ell_0(1 + \sin \frac{\psi}{2})} \right\} \mu_1^{(1)} d\sigma - \frac{R}{8\pi} \iint_{\sigma} \left\{ \frac{\eta^2}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} + \frac{(h' - h \cos \psi)^2}{\ell_0^2(1 + \sin \frac{\psi}{2})^2} \right\} \mu_0^{(1)} d\sigma \\
&\vdots \\
\epsilon_T^{(1)} &= \epsilon_{T,0}^{(1)} + \epsilon_{T,1}^{(1)} + \epsilon_{T,2}^{(1)} + \dots
\end{aligned} \tag{89}$$

Im Gegensatz zur Randbedingung kommen beim Störpotential schon zum Reihenglied erster Ordnung weitere Korrekturterme zur Brovar-Reihe hinzu. Diese haben somit einen deutlich

größeren Einfluss auf die Lösung. Die erweiterte Brovar-Reihe für das Störpotential lautet

$$\begin{aligned}
 T_0^{(1)} &= T_0^{(0)} + \epsilon_{T,0}^{(1)} \\
 T_1^{(1)} &= T_1^{(0)} + \epsilon_{T,1}^{(1)} \\
 T_2^{(1)} &= T_2^{(0)} + \epsilon_{T,2}^{(1)} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{90}$$

und

$$T^{(1)} = T_0^{(1)} + T_1^{(1)} + T_2^{(1)} + \dots \quad . \tag{91}$$

Die Terme  $T_i^{(0)}$  entsprechen den Reihengliedern der ursprünglichen Brovar-Reihe (39). Sie stellen eine Approximation 0. Ordnung an die sphärische Gleichung dar. Im nachfolgenden Approximationsschritt  $T_i^{(1)}$  findet eine Erweiterung um sphärische Terme höherer Ordnung statt, so dass ein Restfehler der Größenordnung  $O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)$  verbleibt.

### 6.2.2 Numerische Untersuchungen

Der in Gleichung (87) verbleibende Restfehler  $\epsilon_\zeta - \epsilon_\zeta^{(1)}$  ergibt sich aus der Differenz des sphärischen Integrals (23) und der erweiterten planaren Gleichung (87). Mithilfe des Terms von Bruns (61) wird die Auswirkung auf die Höhenanomalie berechnet

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\zeta - \epsilon_\zeta^{(1)} &= \frac{1}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma} H(r, \psi, r') r'^2 \mu_0 d\sigma - \frac{R^2}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma} \left[ \frac{1}{R} H(\psi) + \frac{2}{\ell} - \frac{2}{\ell_0} \right] \mu_0 d\sigma \\
 &\quad - \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma} \left( \frac{4h'}{\ell} - \frac{h'}{R} \cdot \ln \left[ 1 + \frac{1}{\sin \frac{\psi}{2}} \right] - \ln \left[ 1 + \frac{\ell - \ell_0 + h' - h \cos \psi}{\ell_0 \left( 1 + \sin \frac{\psi}{2} \right)} \right] \right) \mu_0 d\sigma \quad .
 \end{aligned} \tag{92}$$

Der Approximationsfehler wird numerisch ausgewertet und ist in den Abbildungen 37 und 38 graphisch dargestellt. Er ist deutlich kleiner als im ursprünglichen planaren Integral (25) (siehe Kapitel 5.5). Zwar ist nicht überall eine Verbesserung um den Faktor 800 vorhanden, doch betragen die berechneten Maximalwerte auch in den Anden nicht mehr als wenige Millimeter. Damit einher geht allerdings eine deutlich kompliziertere Integralgleichung. Ob die erreichte Verbesserung diesen Mehraufwand rechtfertigt, muss vom Einzelfall abhängig gemacht werden. Im Hinblick auf ein "Zentimeter-Quasigeoid" ist es ratsam zur hochgenauen Schwerefeldmodellierung jeden Fehlereinfluss im Zentimeterbereich zu berücksichtigen. Neben der angestrebten Genauigkeit der Höhenbezugsfläche sollte jedoch auch die Qualität der Eingangsdaten sowie die Lage des Berechnungsgebietes (Hochgebirge/Flachland) ausschlaggebend sein.

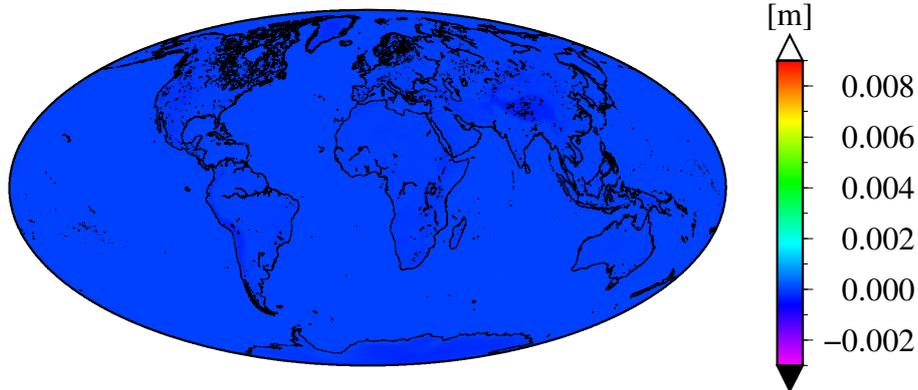


Abbildung 37: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta - \epsilon_\zeta^{(1)}$ :  $5' \times 5'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	$-2.2 \cdot 10^{-5}$ m		
Standardabweichung	$5.3 \cdot 10^{-5}$ m		
Maximum	$2.8 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = 31^\circ 32' 30''$	, $\lambda = 35^\circ 27' 30''$
Minimum	-0.0004 m	bei $\varphi = 27^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 86^\circ 57' 30''$
Betragsminimum	$1.4 \cdot 10^{-12}$ m	bei $\varphi = -76^\circ 7' 30''$	, $\lambda = 163^\circ 12' 30''$

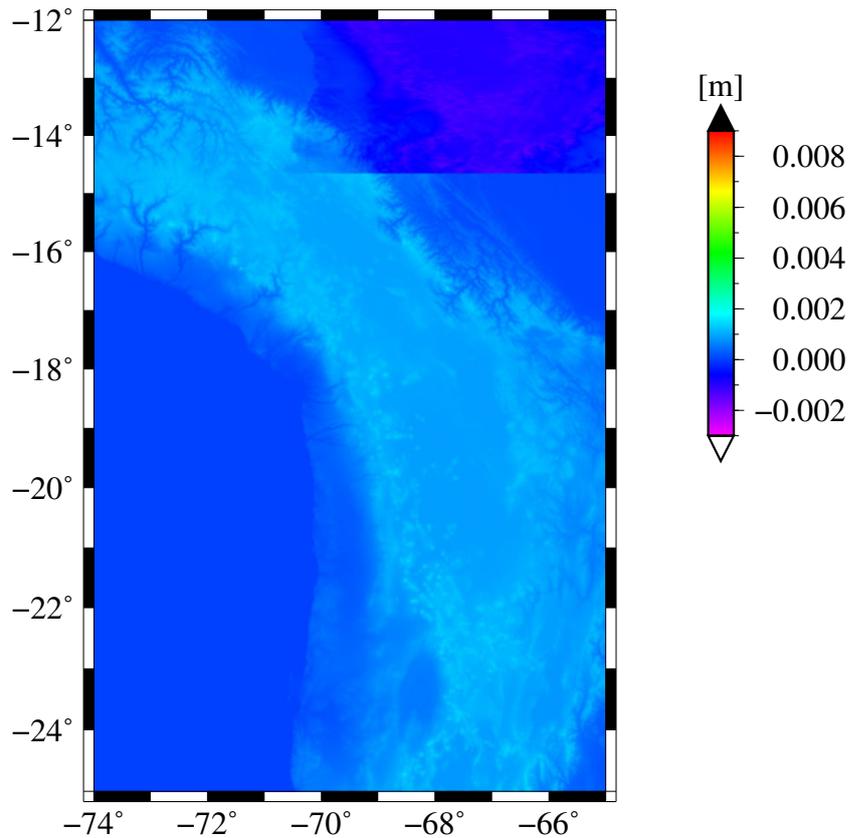


Abbildung 38: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta - \epsilon_\zeta^{(1)}$ :  $30'' \times 30''$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0004 m		
Standardabweichung	0.0006 m		
Maximum	0.0016 m	bei $\varphi = -24^\circ 43' 15''$	, $\lambda = -68^\circ 32' 15''$
Minimum	-0.0015 m	bei $\varphi = -14^\circ 18' 45''$	, $\lambda = -66^\circ 23' 15''$
Betragsminimum	$-3.2 \cdot 10^{-8}$ m	bei $\varphi = -12^\circ 8' 15''$	, $\lambda = -70^\circ 12' 45''$

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der Vergangenheit (vor allem HEISKANEN UND MORITZ, 1967 sowie MORITZ, 1980) wurden zahlreiche Approximationen eingeführt, um eine möglichst einfache und kompakte analytische Darstellung der Integralgleichungen zur Berechnung des (Quasi-)Geoids zu erhalten. Mit zunehmender Rechnerleistung und der Vielzahl an numerischen Methoden ist dieses Ziel heute generell zu hinterfragen. In dieser Arbeit geht es darum, die von MORITZ (1980) mit dem Begriff planare Approximation bezeichnete Vereinfachung näher zu untersuchen. Dabei werden in den entsprechenden Integralkernen sämtliche Terme der Größenordnung  $O\left(\frac{h}{R}\right)$  vernachlässigt. Dies bedeutet jedoch nur, dass innerhalb der Formeln  $R \rightarrow \infty$  und somit  $\frac{h}{R} \rightarrow 0$  gesetzt wird und hat nichts mit einer ebenen Darstellung der Erdoberfläche zu tun! Betroffen von dieser Vereinfachung ist zum einen die Randbedingung und zum anderen die Gleichung für das Störpotential. Der jeweilige Approximationsfehler wird in der Literatur mit  $\frac{h}{R} \leq \frac{8000 \text{ m}}{6371 \text{ km}} = 0.1\%$  abgeschätzt. Im Rahmen dieser Arbeit werden numerische Untersuchungen angestellt, um den Fehler besser quantifizieren zu können.

Es können drei verschiedene Auswirkungen der planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem unterschieden werden:

1. Die planare Approximation im Integralkern der Randbedingung und der Effekt auf die berechnete Schwerestörung
2. Die Auswirkung des obigen Fehlers auf das Quasigeoid
3. Die planare Approximation im Integralkern des Störpotentials

Die durchgeführten Berechnungen zeigen, dass 1. und 2. nahezu vernachlässigbar sind. Der Fehler in den berechneten Schwerestörungen ist so gering, dass der indirekte Effekt auf das Störpotential praktisch keine Rolle spielt. Selbst im Hochgebirge sind nur Abweichungen von wenigen Millimetern in den berechneten Quasigeoidhöhen zu erwarten. Der unter Punkt 3 dargestellte Approximationsfehler erreicht dagegen einige Zentimeter. Die regionalen Untersuchungen in Europa zeigen, dass auch im Flachland Werte von über einem Zentimeter angenommen werden. Mit Blick auf das angestrebte Zentimeter-Geoid ist dieser Effekt nicht komplett vernachlässigbar, spielt aber nur bei hochgenauen Berechnungen eine Rolle. Die numerischen Ergebnisse bestätigen die in Kapitel 3.5 abgeschätzten Maximalwerte von ca. 0.5 mgal für die Randwerte und 10 cm für die Höhenanomalie. Ausschlaggebend für die Größe des Approximationsfehlers ist jedoch nicht allein der Faktor  $\frac{h}{R}$ , sondern vor allem auch die Größe der Randwerte am entsprechenden Ort.

Sämtliche Untersuchungen wurden am Beispiel des fixen Geodätischen Randwertproblems durchgeführt. Die Abschätzungen lassen sich auch auf das skalar freie Geodätische Randwertproblem übertragen. Einziger Unterschied in der Randbedingung sind die eingeführten Randwerte. Die Formeln sind identisch. Die beim skalar freien GRWP verwendeten Schwereanomalien liegen etwa in der gleichen Größenordnung wie die Schwerestörungen. Die Ergebnisse für die Randbedingung sind nahezu 1:1 übertragbar. Im Störpotential liegt mit der Stokes-Funktion eine andere Kernfunktion vor als die Hotine-Funktion im Falle des fixen GRWPs. Im Nahbereich, welcher den Haupteinfluss auf die Berechnungswerte hat, zeigen beide Funktionen jedoch einen ähnlichen Verlauf. Insgesamt ist anzunehmen, dass in beiden Formulierungen des Geodätischen Randwertproblems ähnliche Effekte durch die planare Approximation hervorgerufen werden.

Für die regionalen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wurden hochaufgelöste Daten im Nahbereich mit niedriger aufgelösten Daten im Fernbereich kombiniert. Eine weitere Möglichkeit ist es, modifizierte Kernfunktionen in den entsprechenden Integralen zu verwenden (siehe z.

B. FEATHERSTONE, 2013). Es stellt sich heraus, dass der Effekt der planaren Approximation mit Verfeinerung der Auflösung im Allgemeinen größer wird. Daher wäre es interessant, die Auswirkung auf die regionale Schwerefeldmodellierung mit noch höher aufgelösten Daten zu untersuchen. Ebenfalls weiterer Untersuchungen bedarf es in Bezug auf die Wahl der RTM-Fläche. Im Rahmen dieser Arbeit wird die RTM-Fläche durch Herausfiltern hoher Frequenzen aus einem hochauflösenden DGM gewonnen. Stattdessen könnte zum Beispiel auch ein globales synthetisch generiertes Höhenmodell verwendet werden.

Neben den numerischen Untersuchungen wird eine analytische Betrachtung der vernachlässigten Terme vorgenommen. Die planare Approximation war bisher Voraussetzung für das von MOLODENSKII ET AL. (1962) entwickelte sog. Molodenskii-shrinking; eine Reihenentwicklung, die auf analytische Ausdrücke für die Randbedingung und das Störpotential führt. Motivation dafür ist es, in nullter Näherung die einfachen sphärischen Formeln verwenden zu können und diese schrittweise um weitere Terme zur Berücksichtigung der Topographie zu erweitern. Das Verfahren lässt sich auf die verschiedensten Ansätze zur Lösung der Geodätischen Randwertaufgabe anwenden. Gegenstand dieser Arbeit ist das fixe Geodätische Randwertproblem nach dem Ansatz von Brovar. In der in dieser Arbeit eingeführten Notation werden die ursprünglichen planaren Gleichungen als Approximation 0. Ordnung der sphärischen Integrale angesehen. Es werden Formeln für die vernachlässigten Terme höherer Ordnung in der Randbedingung und der Gleichung für das Störpotential hergeleitet. Der jeweilige komplette Approximationsfehler wird geeignet umgeformt, sodass sich das Molodenskii-shrinking darauf anwenden lässt. In einem weiteren Schritt wird insbesondere die Approximation 1. Ordnung betrachtet, bei der ein deutlich verringerter Restfehler der Größenordnung  $O\left(\frac{h^2}{R^2}\right)$  verbleibt. Die Genauigkeit dieser Approximation kann mit  $\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{8000^2 \text{ m}^2}{6371^2 \text{ km}^2} \approx 0.0002\%$  abgeschätzt werden, was eine enorme Verbesserung der ursprünglichen planaren Gleichungen zur Folge hat. Die durchgeführten numerischen Untersuchungen demonstrieren den Genauigkeitsgewinn. Es werden Formeln für das Molodenskii-shrinking mit den Termen 1. Ordnung abgeleitet. Sie stellen Korrekturterme für die ursprüngliche Brovar-Reihe dar. Der in dieser Arbeit aufgezeigte Weg erlaubt es, diese Herleitungen auf beliebige höhere Ordnungen zu übertragen.

Im Rahmen der numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit findet ein Vergleich der sphärischen und planaren Integrale statt. Die zusätzliche Auswirkung des Molodenskii-shrinkings auf die schon planar approximierten Gleichungen wird nicht näher betrachtet. Obwohl die Reihenentwicklung mithilfe des Molodenskii-shrinkings, egal auf welchen Ansatz angewendet, eine Art "de facto - Standard" darstellt, stellt sich die Frage, ob das überhaupt noch zeitgemäß ist und höchsten Genauigkeitsansprüchen genügt. In HECK (2011) wird eine iterative Lösung der planaren Randbedingung vorgeschlagen. Empfehlenswerter ist eine Lösung der sphärischen Randbedingung auf eben diesem Wege und direktes Einsetzen in das sphärische Integral des Störpotentials. Damit wäre die planare Approximation komplett vernachlässigbar. Zu berücksichtigen sind in diesem Fall hauptsächlich noch die Fehlereinflüsse wegen der Elliptizität der Erde. Ein numerischer Vergleich dieses iterativen Verfahrens mit der Brovar-Reihe auch unter Einbeziehung der vorgestellten Korrekturterme höherer Ordnung wäre sehr interessant.

## Literaturverzeichnis

- Anderson E. G. (1976): The effect of topography on solutions of Stokes's problem. UNISURV Report S14, University of New South Wales, Kensington, Australia
- Bronstein I. N., Semendjajew K. A., Musiol G., Mühlig H. (1999): Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 4. überarbeitete und erweiterte Auflage, Frankfurt am Main, Thun
- Brovar V. V. (1964): On the solutions of Molodensky's boundary value problem, Bulletin Géodésique 72
- Farr T. G., Rosen P. A., Caro E., Crippen R., Duren R., Hensley S., Kobrick M., Paller M., Rodriguez E., Roth L., Seal D., Shaffer S., Shimada J., Umland J., Werner M., Oskin M., Burbank D., Alsdorf D. (2007): The Shuttle Radar Topography Mission. Reviews of Geophysics, vol. 45, RG2004, doi:10.1029/2005RG000183  
Link für die SRTM3-Daten: <http://srtm.csi.cgiar.org> (Stand: April 2013)
- Featherstone W. E. (2013): Deterministic, stochastic, hybrid and band-limited modifications of Hotine's integral. Journal of Geodesy 87: S. 487-500, DOI 10.1007/s00190-013-0612-9
- Forsberg R. (1984): A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Report Nr. 355, Department of Geodetic Science and Survey, Ohio State University
- Heck B. (1989): On the non-linear geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface. Bulletin Géodésique 63, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg
- Heck B. (1990): An evaluation of some systematic error sources affecting terrestrial gravity anomalies. Bulletin Géodésique 64, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg
- Heck B., Seitz K. (1993): Effects of non-linearity in the geodetic boundary value problems. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe A, Nr. 109, München
- Heck B., Seitz K. (2007): A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. Journal of Geodesy 81: S. 121-136, DOI: 10.1007/s00190-006-0094-0, 2007
- Heck B. (2011): A Brovar-type solution of the fixed geodetic boundary-value problem. Studia Geophysica et Geodaetica, Vol. 55, S. 441-454
- Heiskanen W. A., Moritz H. (1967): Physical Geodesy , Freeman, San Francisco
- Hirt C., Featherstone W. E., Marti U. (2010): Combining EGM2008 and SRTM/DTM2006.0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data, Journal of Geodesy 84: S. 557-567, DOI 10.1007/s00190-010-0395-1
- Holota P. (1983a): The altimetry-gravimetry boundary value problem. I: Linearization, Friedrich's inequality. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, Vol. 42
- Holota P. (1983b): The altimetry-gravimetry boundary value problem. II: Weak solution, V-ellipticity. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, Vol. 42
- Hotine M. (1969): Mathematical Geodesy. U.S. Department of Commerce, Washington D.C., United States of America

- Jekeli C. (1981): The downward continuation to the Earth's surface of truncated spherical and ellipsoidal harmonic series of the gravity and height anomalies. Report Nr. 323, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio
- Klees R. (1992): Lösung des fixen geodätischen Randwertproblems mit Hilfe der Randelementmethode. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Nr. 382, München
- Kuhn M. (2000): Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen. Dissertation an der Universität Karlsruhe (TH), DGK Reihe C, Nr. 520, München
- Li Y. C., Sideris M. G., Schwarz K. (1995): A numerical investigation on height anomaly prediction in mountainous areas. Bulletin Géodésique 69, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg
- Listing J. B. (1873): Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Größe der Erde. Nachrichten von der Königlich-Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen, Nr. 3, S. 33-98, Göttingen
- Lowan A. N., Davids N., Levenson A. (1942): Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 48, number 10
- Lowan A. N., Davids N., Levenson A. (1943): Errata to "Table of the zeros of the Legendre polynomials of order 1-16 and the weight coefficients for Gauss' mechanical quadrature formula". Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 49, number 12
- Marych M. I. (1969): On the second approximation of M. S. Molodensky for the disturbing potential. Geodezija, Kartografija i Aerofotosyemka, 10, S. 17-27
- Molodenskii M. S., Eremeev V. F., Yurkina M. I. (1962): Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth. Translation from Russian (1960), Jerusalem, Israel Program for Scientific Translation.
- Moritz H. (1969): Nonlinear solutions of the geodetic boundary-value problem. Report Nr. 126, Department of Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio
- Moritz H. (1980): Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe
- Moritz H., Yurkina M. I. (2000): M. S. Molodensky In Memoriam. Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 88, Graz
- Müßle M. (2011): Untersuchungen zur numerischen Stabilität der Tesseroidformeln. Studienarbeit am Geodätischen Institut des KIT. Unveröffentlicht.
- Pavlis N.K., Factor J.K., Holmes S.A. (2007): Terrain-related gravimetric quantities computed for the next EGM. In: Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service vol. 18. Harita Dergisi, Istanbul, S. 318-323
- Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., Factor J. K. (2008): An earth gravitational model to degree 2160: EGM2008. the 2008 General Assembly of the European Geosciences Union, Wien, S. 13-18.
- Poincaré H. (1904): Cinquième complément à l'analysis situs. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 18, S. 45-110, 1904. Reprinted in Œuvres de Henri Poincaré, Tome VI., S. 486/498, Gauthier-Villars, Paris, 1953
- Seitz K. (1997): Ellipsoidische und topographische Effekte im geodätischen Randwertproblem. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Nr. 483, München

- Sigl, R. (1989): Einführung in die Potentialtheorie, 2. überarbeitete Auflage, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe
- Stokes G. G. (1849): On the variation of gravity on the surface of the Earth. Trans. Cambridge Phil. Society, 8, S. 672-695
- Torge W. (2003): Geodäsie, 2. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, Walter de Gruyter Verlag, Berlin, New York
- Vaníček P., Kingdon R., Santos M. (2012): Geoid versus quasigeoid: a case of physics versus geometry. Contributions to Geophysics and Geodesy, Vol. 42/1, S. 101-118

## Verwendete Software

HARMONIC\_SYNTH:

Link: [http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/first\\_release.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/first_release.html)

MATLAB: Version 7.6.0 (R2008a) und 7.11.0 (R2010b), User's Guide,

Link: <http://www.mathworks.de/products/matlab/>

THE GENERIC MAPPING TOOLS (GMT): Version 4.5.7, Technical Reference and Cookbook,

Link: <http://gmt.soest.hawaii.edu/>

## Anhang

### A Weitere graphische Ergebnisse

#### Topographische Höhen

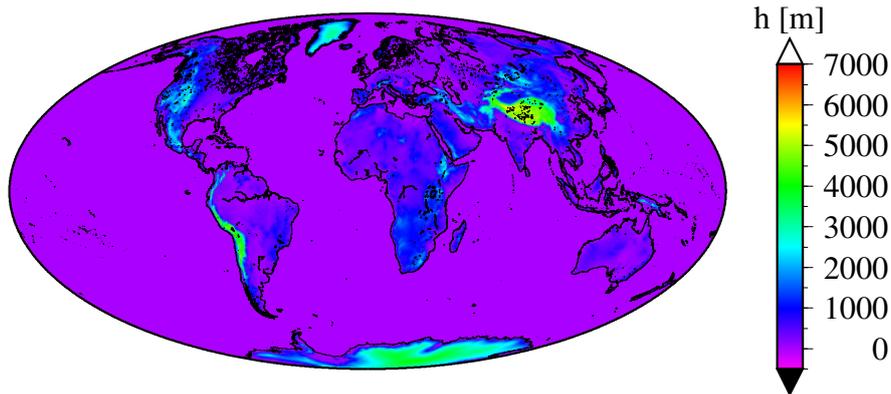


Abbildung A.1: Topographie: 15' × 15'

Mittelwert	378 m		
Standardabweichung	852 m		
Maximum	6158 m	bei $\varphi = 35^\circ 22' 30''$	, $\lambda = 81^\circ 7' 30''$
Minimum	-181 m	bei $\varphi = 31^\circ 7' 30''$	, $\lambda = 35^\circ 22' 30''$
Betragsminimum	0 m	bei $\varphi = 89^\circ 52' 30''$	, $\lambda = 0^\circ 7' 30''$

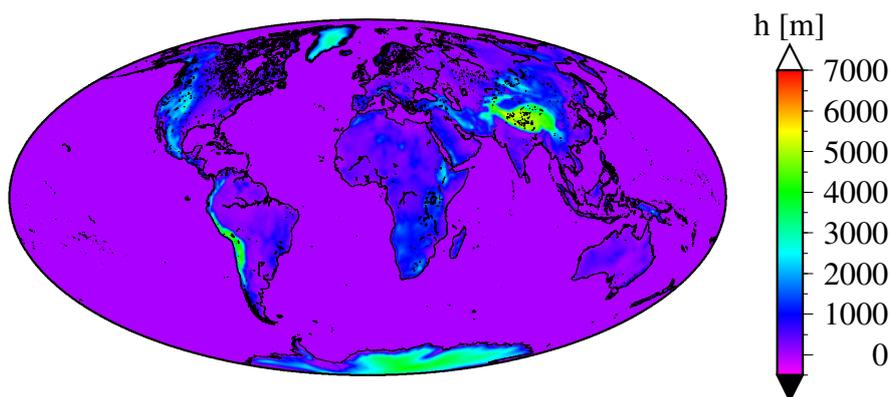


Abbildung A.2: Topographie: 60' × 60'

Mittelwert	378 m		
Standardabweichung	845 m		
Maximum	5409 m	bei $\varphi = 35^\circ 30' 0''$	, $\lambda = 79^\circ 30' 0''$
Minimum	-45 m	bei $\varphi = 29^\circ 30' 0''$	, $\lambda = 27^\circ 30' 0''$
Betragsminimum	0 m	bei $\varphi = 89^\circ 30' 0''$	, $\lambda = 0^\circ 30' 0''$

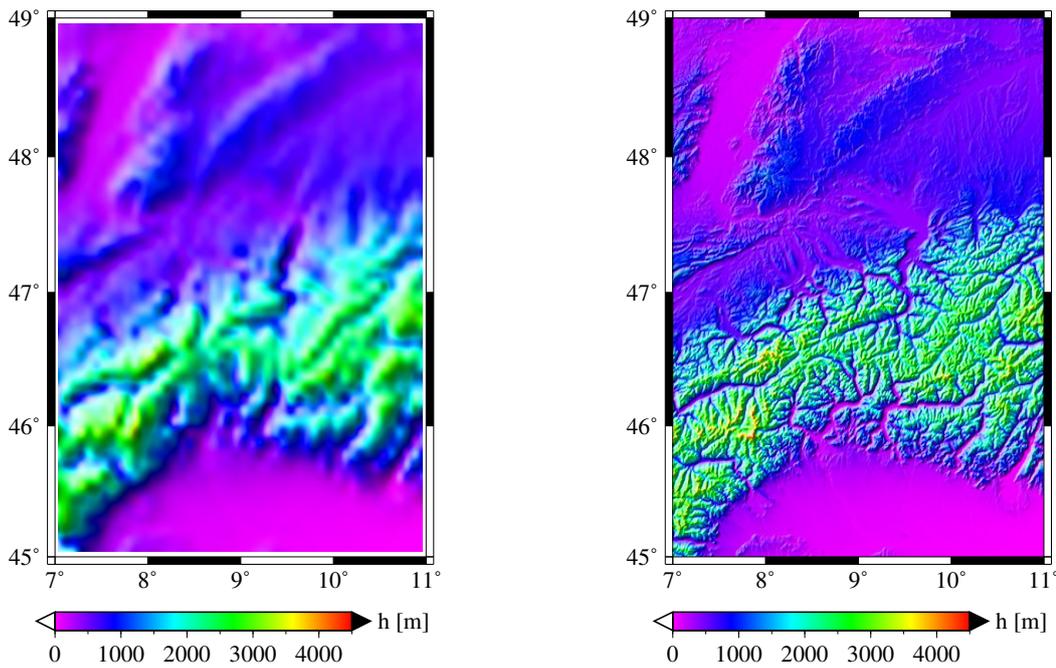


Abbildung A.3: Topographie: a) 5' x 5' bzw. b) 30'' x 30''

Mittelwert	932 m
Standardabweichung	746 m
Maximum	3344 m
Minimum	14 m

Mittelwert	932 m
Standardabweichung	787 m
Maximum	4380 m
Minimum	12 m

**Schwerestörungen**

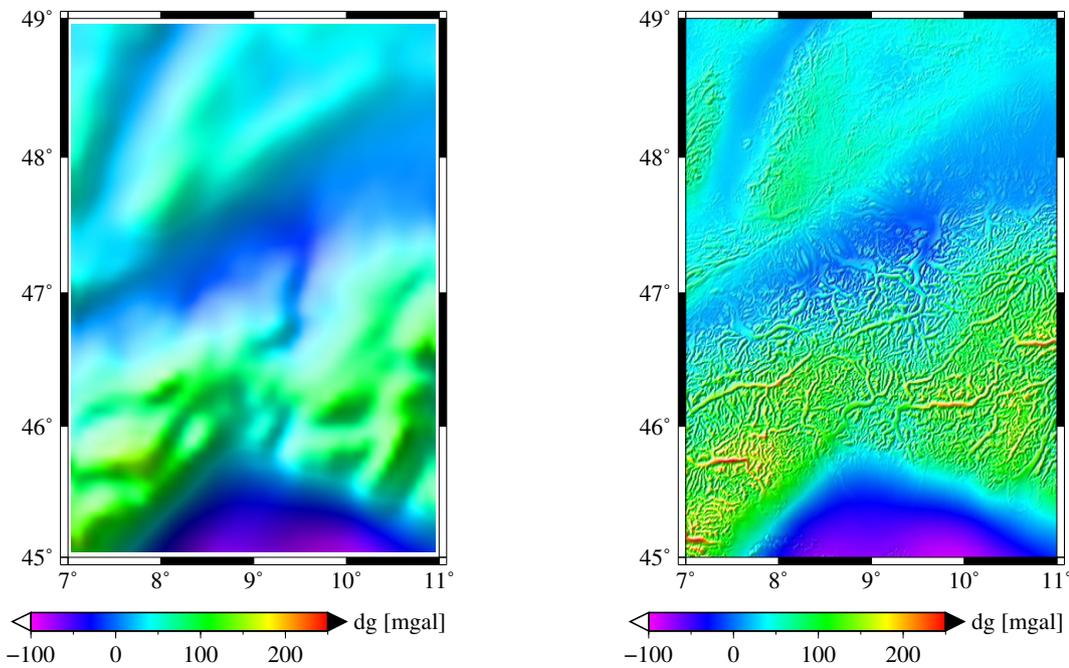
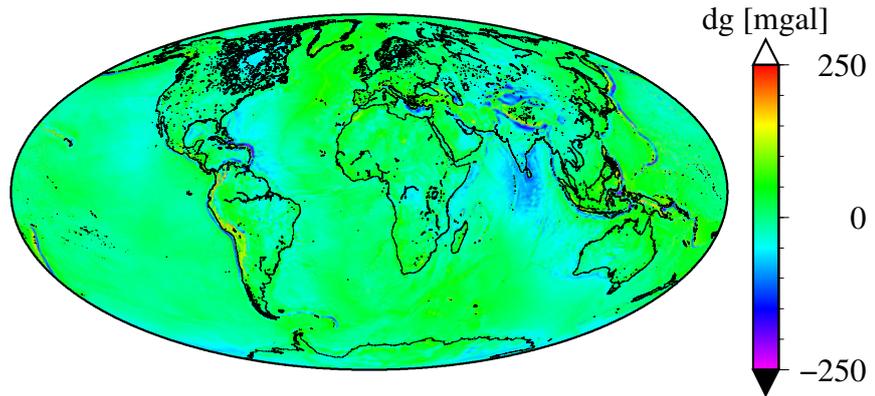


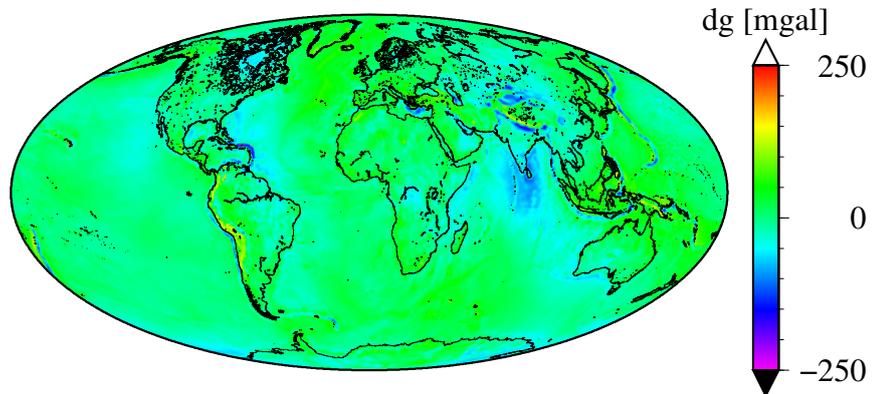
Abbildung A.4: Schwerestörung: a) 5' x 5' bzw. b) 30'' x 30''

Mittelwert	39.0 mgal
Standardabweichung	39.1 mgal
Maximum	146.9 mgal
Minimum	-83.2 mgal

Mittelwert	51.2 mgal
Standardabweichung	48.4 mgal
Maximum	243.8 mgal
Minimum	-86.3 mgal

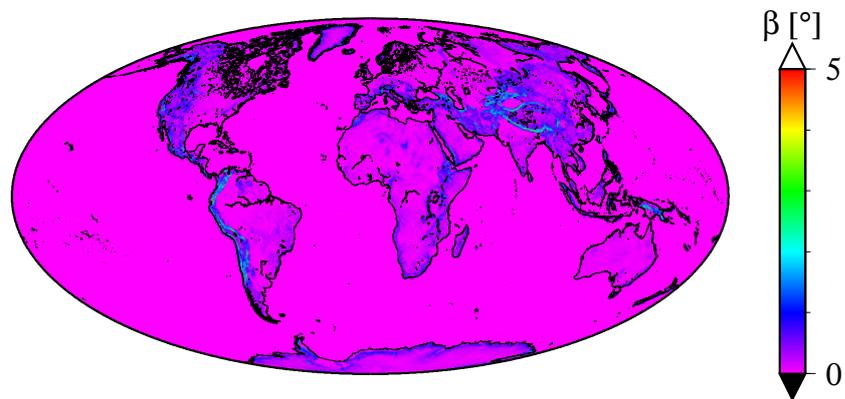
Abbildung A.5: Schwerestörung:  $15' \times 15'$ 

Mittelwert	-0.747 mgal		
Standardabweichung	31.6 mgal		
Maximum	526.9 mgal	bei $\varphi = 19^\circ 22' 30''$	, $\lambda = -155^\circ 37' 30''$
Minimum	-355.2 mgal	bei $\varphi = 19^\circ 22' 30''$	, $\lambda = -66^\circ 22' 30''$
Betragsminimum	$-6.0 \cdot 10^{-5}$ mgal	bei $\varphi = 4^\circ 22' 30''$	, $\lambda = 223^\circ 22' 30''$

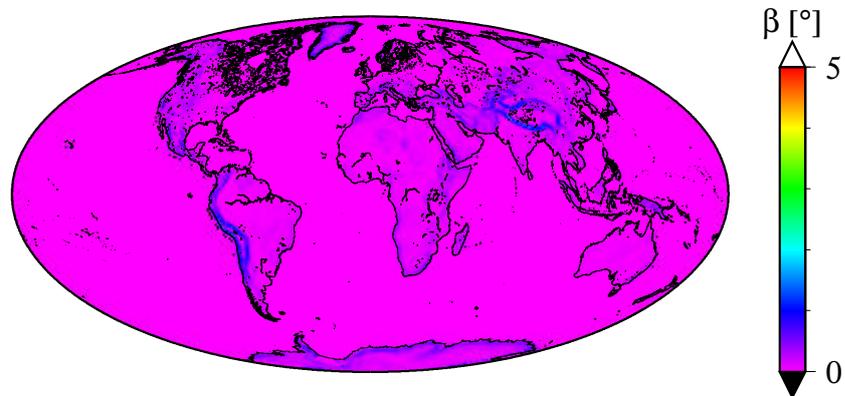
Abbildung A.6: Schwerestörung:  $60' \times 60'$ 

Mittelwert	-0.747 mgal		
Standardabweichung	28.6 mgal		
Maximum	336.2 mgal	bei $\varphi = 19^\circ 30' 0''$	, $\lambda = -155^\circ 30' 0''$
Minimum	-227.6 mgal	bei $\varphi = 19^\circ 30' 0''$	, $\lambda = -66^\circ 30' 0''$
Betragsminimum	$-3.0 \cdot 10^{-5}$ mgal	bei $\varphi = -65^\circ 30' 0''$	, $\lambda = 77^\circ 30' 0''$

## Geländeneigung

Abbildung A.7: Neigung aus Koordinatendifferenzen:  $15' \times 15'$ 

Mittelwert	0.1 Grad	
Standardabweichung	0.2 Grad	
Maximum	10.1 Grad	bei $\varphi = -83^\circ 52' 30''$ , $\lambda = 168^\circ 52' 30''$
Minimum	0.0 Grad	bei $\varphi = 89^\circ 52' 30''$ , $\lambda = 0^\circ 7' 30''$

Abbildung A.8: Neigung aus Koordinatendifferenzen:  $60' \times 60'$ 

Mittelwert	0.1 Grad	
Standardabweichung	0.1 Grad	
Maximum	3.1 Grad	bei $\varphi = -84^\circ 30' 0''$ , $\lambda = 176^\circ 30' 0''$
Minimum	0.0 Grad	bei $\varphi = 89^\circ 30' 0''$ , $\lambda = 0^\circ 30' 0''$

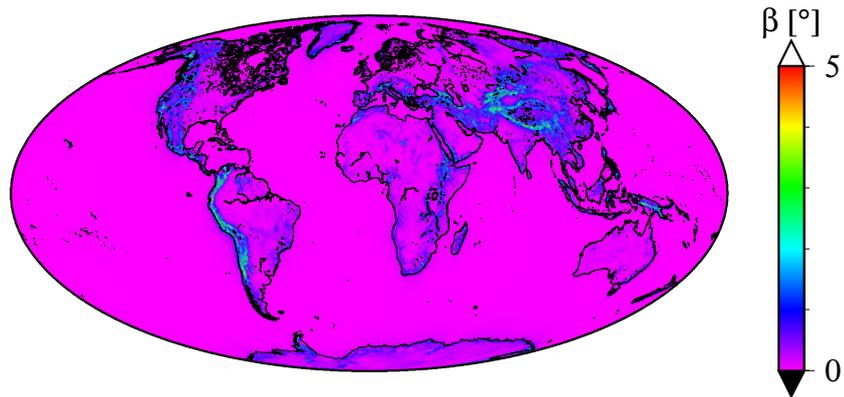


Abbildung A.9: Neigung mittels FFT: 15' x 15'

Mittelwert	0.2 Grad		
Standardabweichung	0.4 Grad		
Maximum	14.2 Grad	bei $\varphi = -84^\circ 37' 30''$	, $\lambda = 171^\circ 52' 30''$
Minimum	$1.3 \cdot 10^{-4}$ Grad	bei $\varphi = 23^\circ 52' 30''$	, $\lambda = 31^\circ 22' 30''$

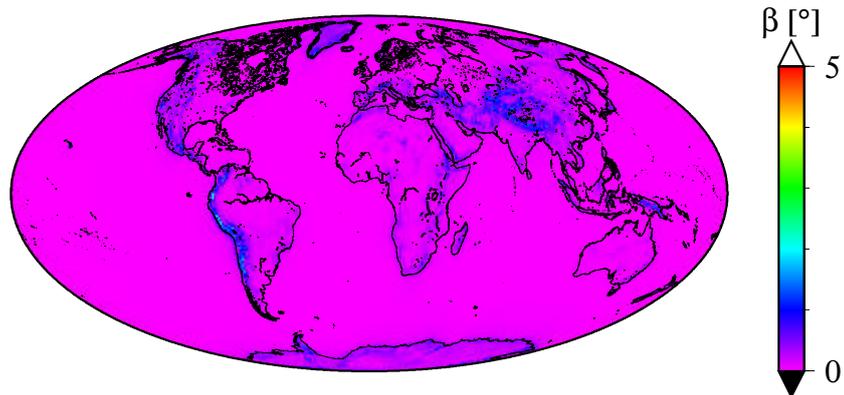


Abbildung A.10: Neigung mittels FFT: 60' x 60'

Mittelwert	0.1 Grad		
Standardabweichung	0.2 Grad		
Maximum	3.8 Grad	bei $\varphi = -84^\circ 30' 0''$	, $\lambda = 175^\circ 30' 0''$
Minimum	$5.8 \cdot 10^{-4}$ Grad	bei $\varphi = -11^\circ 30' 0''$	, $\lambda = 154^\circ 30' 0''$

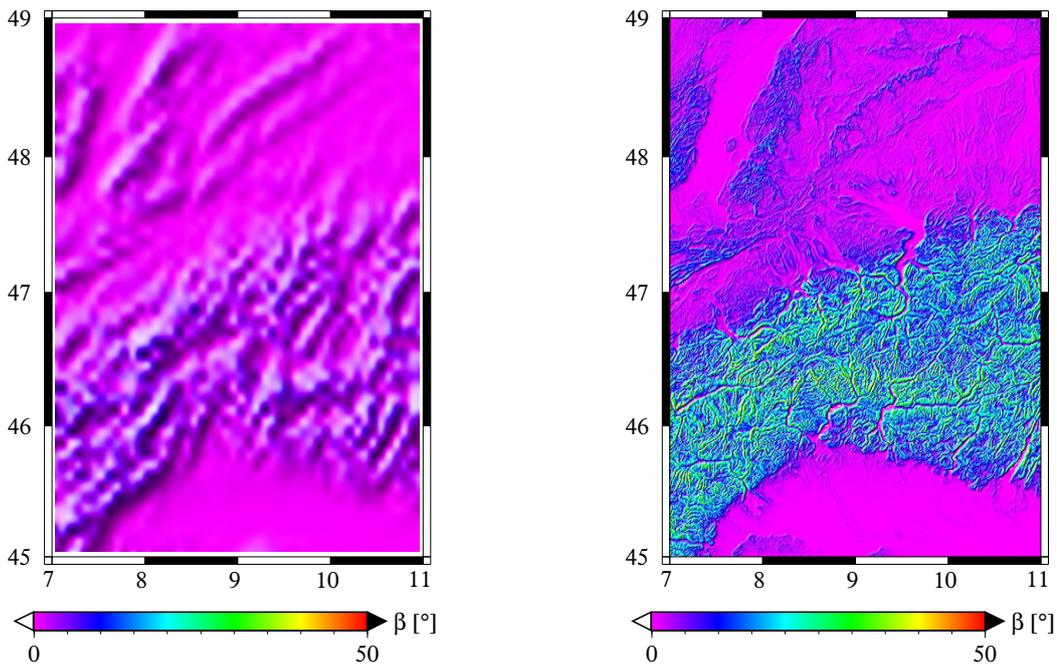


Abbildung A.11: Neigung aus Koordinatendifferenzen: a) 5' x 5' bzw. b) 30'' x 30''

Mittelwert	1.4 Grad
Standardabweichung	1.4 Grad
Maximum	7.3 Grad
Minimum	$7.7 \cdot 10^{-3}$ Grad

Mittelwert	7.5 Grad
Standardabweichung	8.4 Grad
Maximum	48.3 Grad
Minimum	0.0 Grad

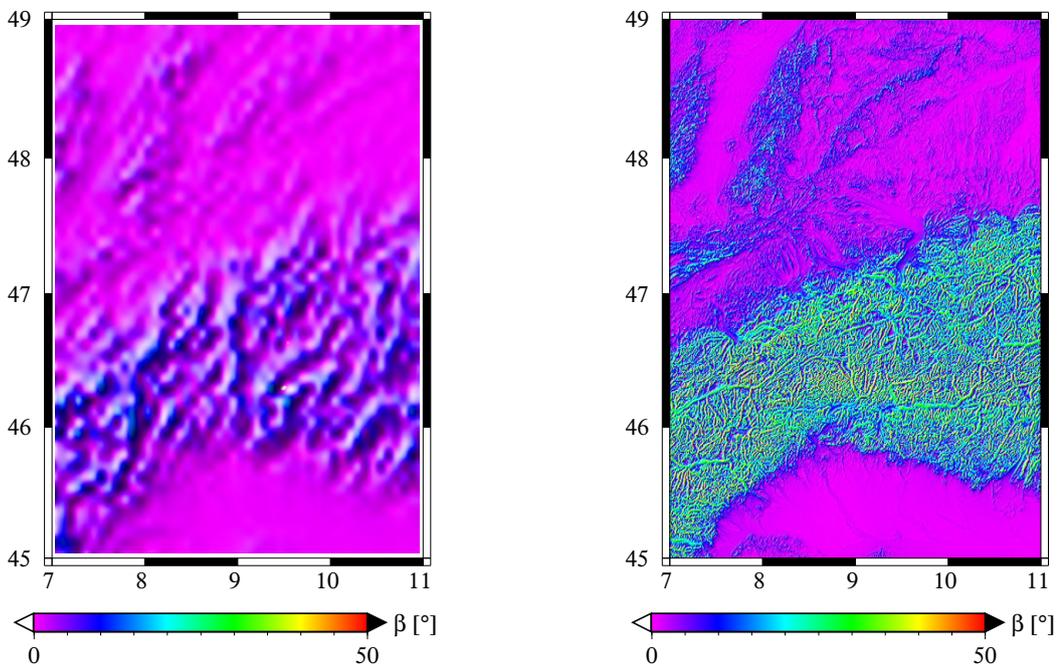


Abbildung A.12: Neigung mittels FFT: a) 5' x 5' bzw. b) 30'' x 30''

Mittelwert	2.3 Grad
Standardabweichung	2.5 Grad
Maximum	14.8 Grad
Minimum	$2.1 \cdot 10^{-2}$ Grad

Mittelwert	9.2 Grad
Standardabweichung	10.2 Grad
Maximum	59.9 Grad
Minimum	$1.8 \cdot 10^{-3}$ Grad

## Planare Approximation der Randbedingung

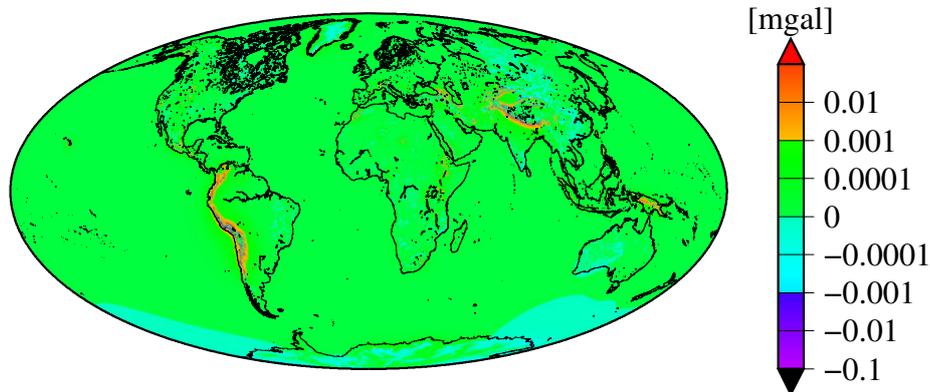


Abbildung A.13: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ :  $15' \times 15'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	$3.8 \cdot 10^{-5}$ mgal		
Standardabweichung	0.0006 mgal		
Maximum	0.0782 mgal	bei $\varphi = 11^\circ 2' 30''$	, $\lambda = -73^\circ 37' 30''$
Minimum	-0.0388 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 47' 30''$	, $\lambda = 86^\circ 47' 30''$
Betragsminimum	$-4.7 \cdot 10^{-12}$ mgal	bei $\varphi = -31^\circ 42' 30''$	, $\lambda = 114^\circ 2' 30''$

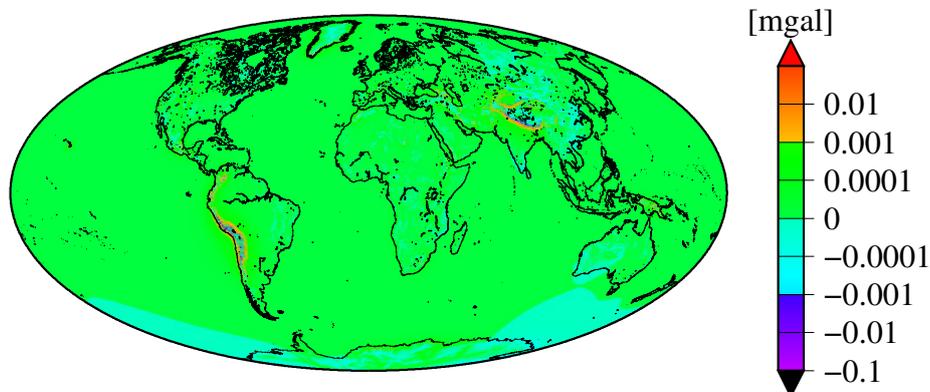


Abbildung A.14: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ :  $60' \times 60'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	$2.6 \cdot 10^{-5}$ mgal		
Standardabweichung	0.0004 mgal		
Maximum	0.0557 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 85^\circ 57' 30''$
Minimum	-0.0152 mgal	bei $\varphi = 30^\circ 2' 30''$	, $\lambda = 82^\circ 2' 30''$
Betragsminimum	$1.2 \cdot 10^{-12}$ mgal	bei $\varphi = -45^\circ 47' 30''$	, $\lambda = 150^\circ 7' 30''$

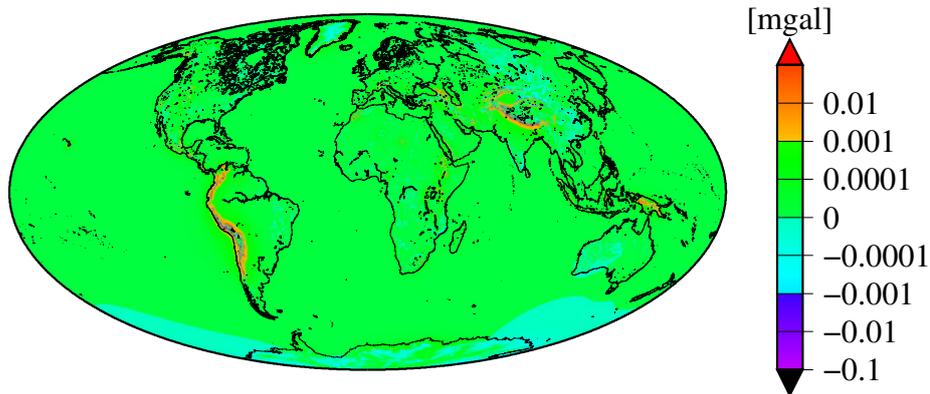


Abbildung A.15: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ :  $15' \times 15'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	$3.8 \cdot 10^{-5}$ mgal		
Standardabweichung	0.0006 mgal		
Maximum	0.0798 mgal	bei $\varphi = 11^\circ 2' 30''$	, $\lambda = -73^\circ 37' 30''$
Minimum	-0.0388 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 47' 30''$	, $\lambda = 86^\circ 47' 30''$
Betragsminimum	$-3.2 \cdot 10^{-12}$ mgal	bei $\varphi = -60^\circ 27' 30''$	, $\lambda = 103^\circ 42' 30''$

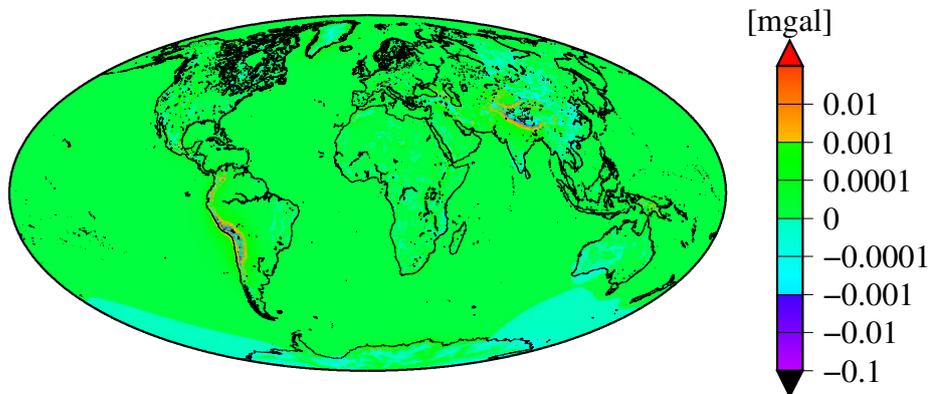


Abbildung A.16: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ :  $60' \times 60'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	$2.6 \cdot 10^{-5}$ mgal		
Standardabweichung	0.0004 mgal		
Maximum	0.0557 mgal	bei $\varphi = 27^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 85^\circ 57' 30''$
Minimum	-0.0152 mgal	bei $\varphi = 30^\circ 2' 30''$	, $\lambda = 82^\circ 2' 30''$
Betragsminimum	$-8.1 \cdot 10^{-13}$ mgal	bei $\varphi = 67^\circ 47' 30''$	, $\lambda = -136^\circ 37' 30''$

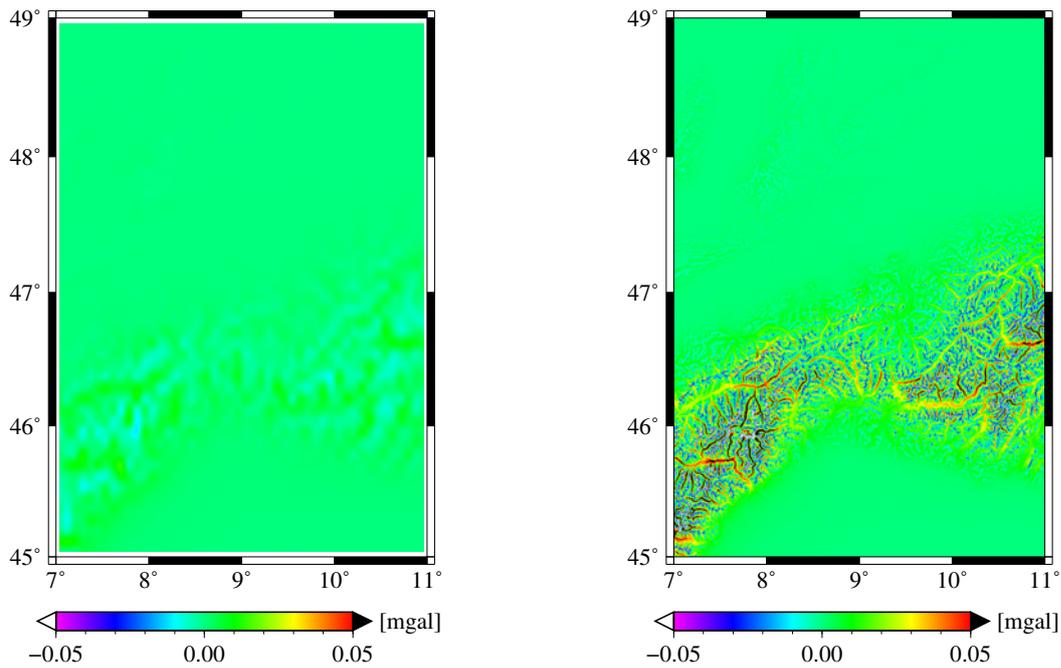


Abbildung A.17: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0006 mgal
Standardabweichung	0.0019 mgal
Maximum	0.0130 mgal
Minimum	-0.0113 mgal

Mittelwert	0.0033 mgal
Standardabweichung	0.0126 mgal
Maximum	0.1056 mgal
Minimum	-0.1917 mgal

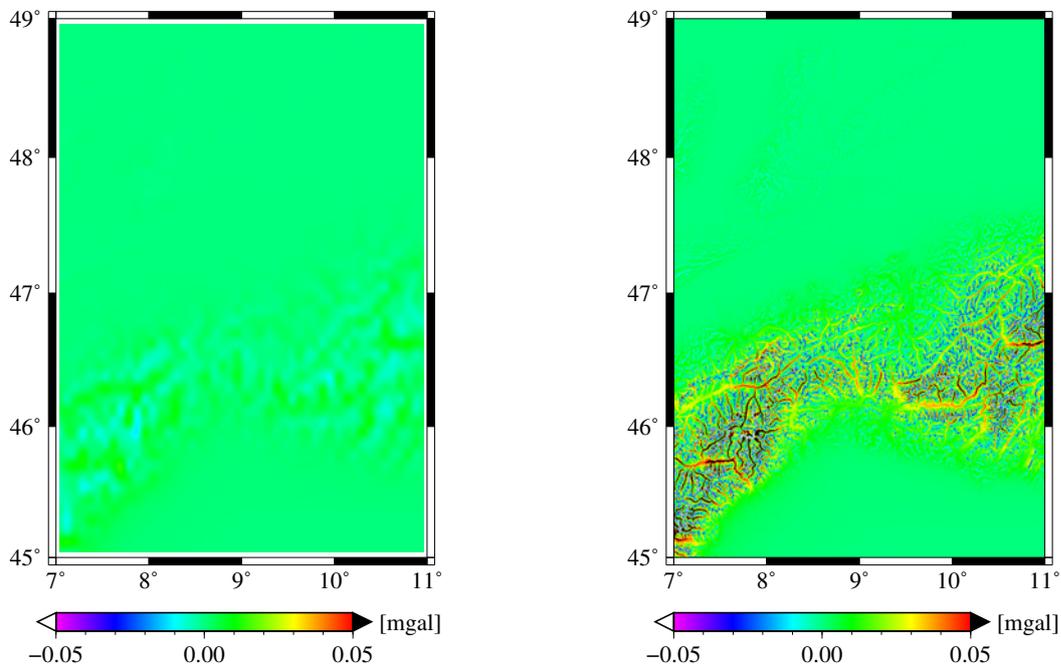


Abbildung A.18: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0006 mgal
Standardabweichung	0.0019 mgal
Maximum	0.0132 mgal
Minimum	-0.0113 mgal

Mittelwert	0.0040 mgal
Standardabweichung	0.0132 mgal
Maximum	0.1143 mgal
Minimum	-0.2147 mgal

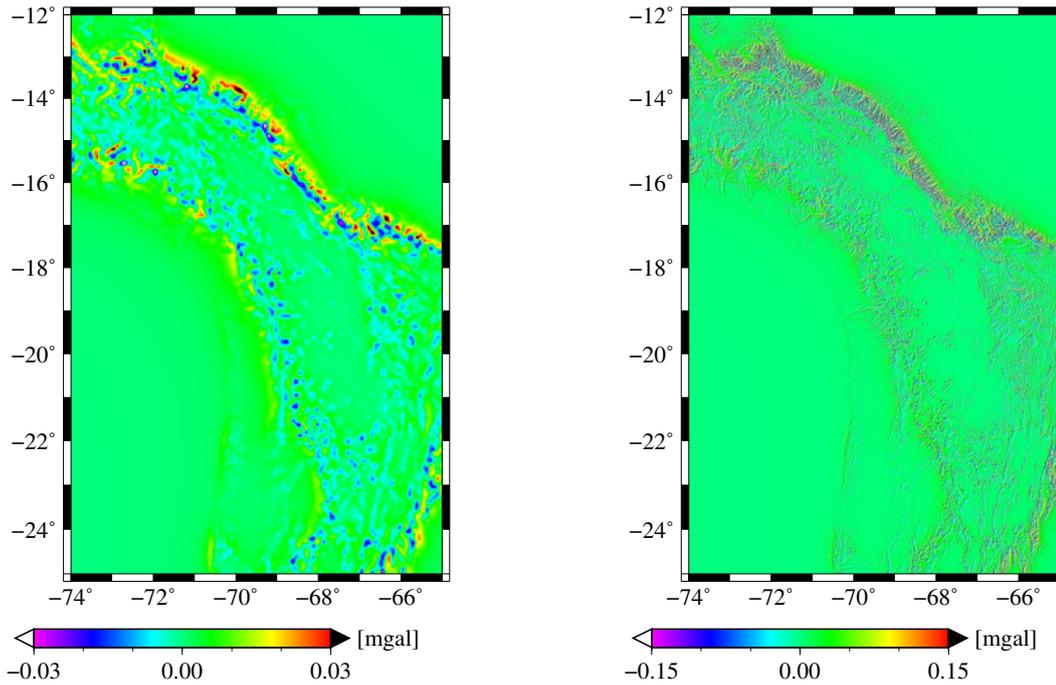


Abbildung A.19: Approximationsfehler  $\epsilon_{\delta g}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0018 mgal
Standardabweichung	0.0052 mgal
Maximum	0.0431 mgal
Minimum	-0.0436 mgal

Mittelwert	0.0037 mgal
Standardabweichung	0.0206 mgal
Maximum	0.3092 mgal
Minimum	-0.4995 mgal

**Auswirkung auf das Störpotential**

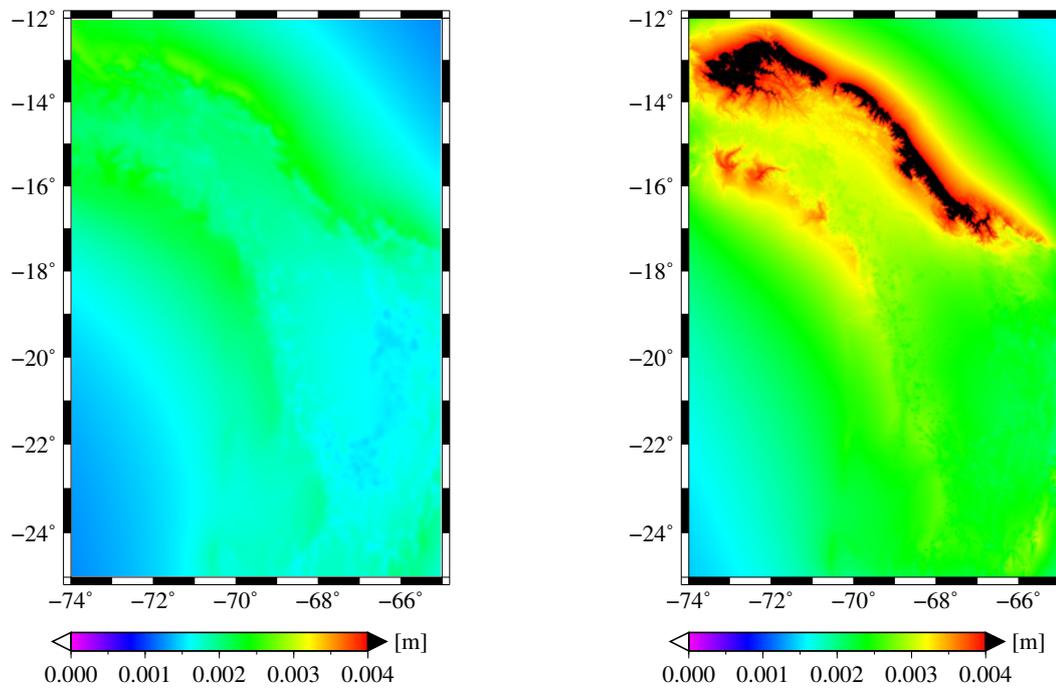


Abbildung A.20: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0018 m
Standardabweichung	0.0003 m
Maximum	0.0027 m
Minimum	0.0012 m

Mittelwert	0.0026 m
Standardabweichung	0.0006 m
Maximum	0.0050 m
Minimum	0.0014 m

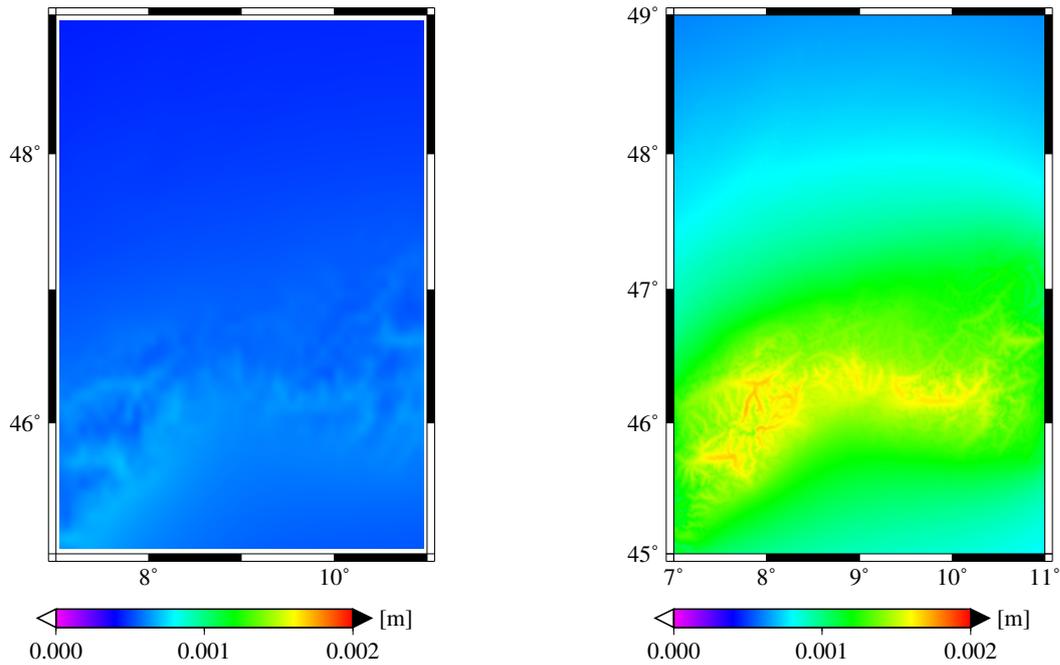


Abbildung A.21: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0005 m
Standardabweichung	0.0001 m
Maximum	0.0007 m
Minimum	0.0004 m

Mittelwert	0.0010 m
Standardabweichung	0.0003 m
Maximum	0.0017 m
Minimum	0.0006 m

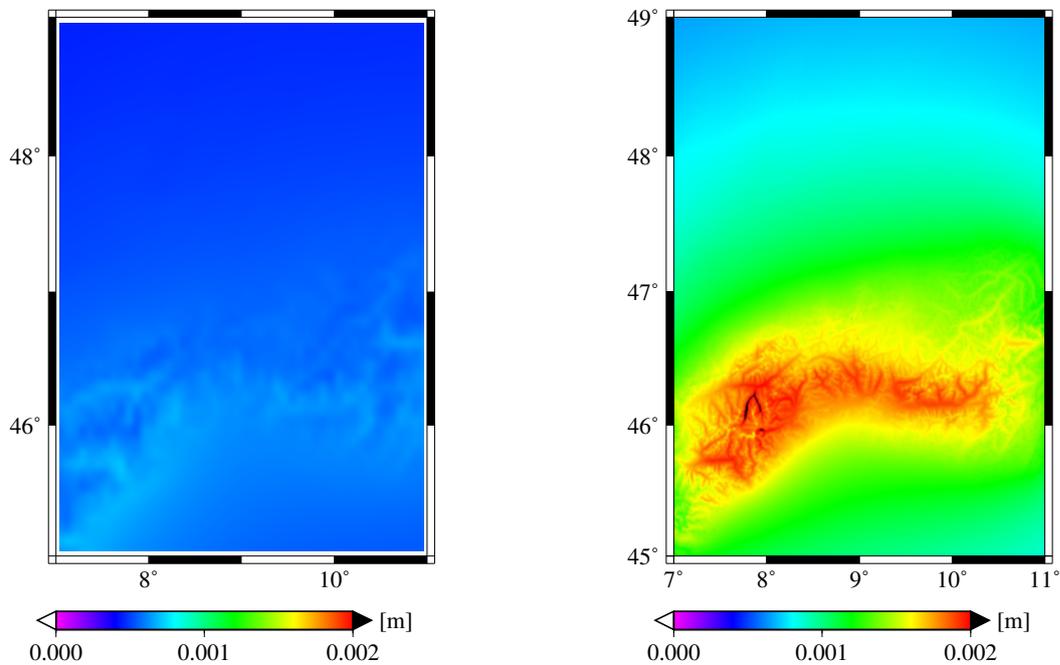


Abbildung A.22: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0005 m
Standardabweichung	0.0001 m
Maximum	0.0007 m
Minimum	0.0004 m

Mittelwert	0.0012 m
Standardabweichung	0.0004 m
Maximum	0.0021 m
Minimum	0.0007 m

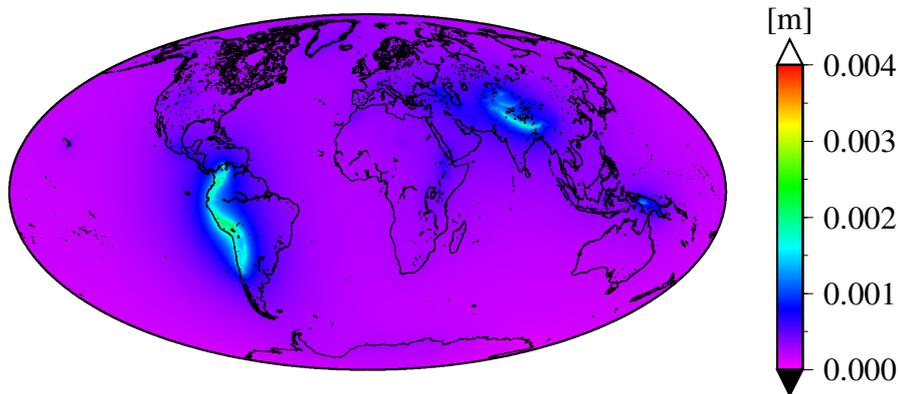


Abbildung A.23: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ :  $15' \times 15'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0003 m		
Standardabweichung	0.0002 m		
Maximum	0.0026 m	bei $\varphi = -13^\circ 17' 30''$	, $\lambda = -70^\circ 57' 30''$
Minimum	$2.3 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = -71^\circ 12' 30''$	, $\lambda = 162^\circ 32' 30''$
Betragsminimum	$2.3 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = -71^\circ 12' 30''$	, $\lambda = 162^\circ 32' 30''$

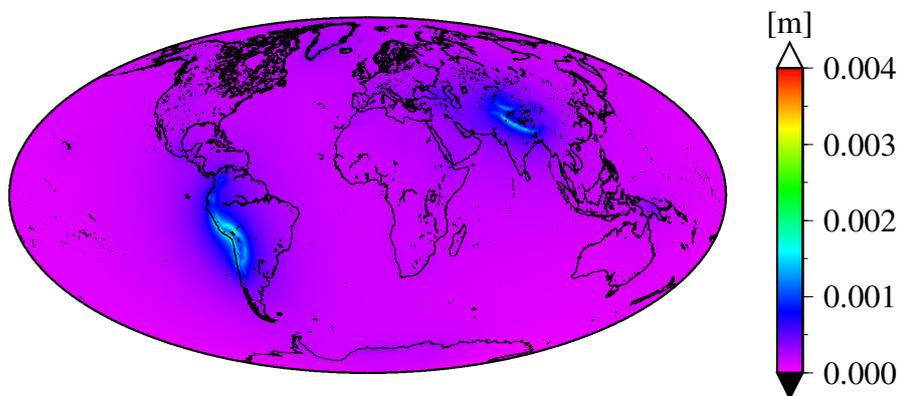


Abbildung A.24: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ :  $60' \times 60'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0002 m		
Standardabweichung	0.0001 m		
Maximum	0.0019 m	bei $\varphi = -13^\circ 22' 30''$	, $\lambda = -69^\circ 57' 30''$
Minimum	$-1.1 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = -75^\circ 47' 30''$	, $\lambda = 162^\circ 2' 30''$
Betragsminimum	$-1.1 \cdot 10^{-9}$ m	bei $\varphi = -71^\circ 7' 30''$	, $\lambda = 162^\circ 42' 30''$

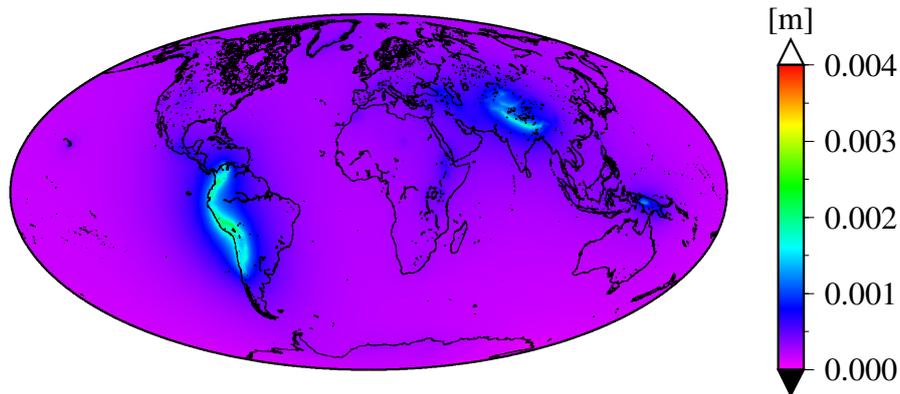


Abbildung A.25: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ :  $15' \times 15'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0003 m		
Standardabweichung	0.0002 m		
Maximum	0.0026 m	bei $\varphi = -13^\circ 17' 30''$	, $\lambda = -70^\circ 57' 30''$
Minimum	$2.4 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = -71^\circ 12' 30''$	, $\lambda = 162^\circ 32' 30''$
Betragsminimum	$2.4 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = -71^\circ 12' 30''$	, $\lambda = 162^\circ 32' 30''$

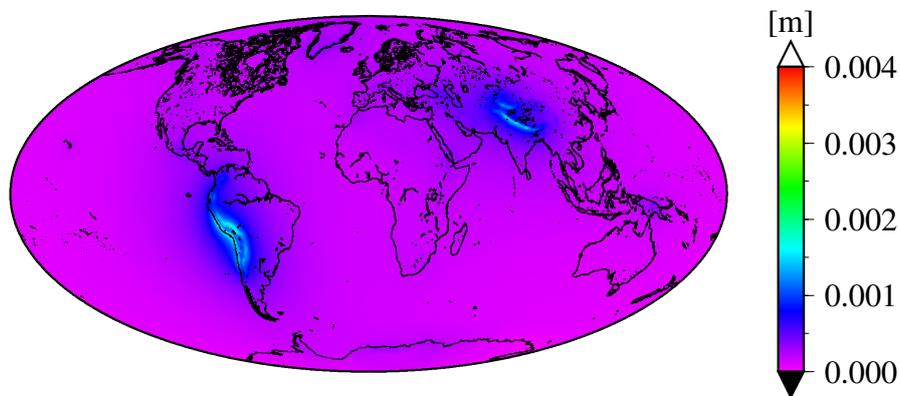


Abbildung A.26: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta(\epsilon_{\delta g})}$ :  $60' \times 60'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0002 m		
Standardabweichung	0.0001 m		
Maximum	0.0019 m	bei $\varphi = -13^\circ 22' 30''$	, $\lambda = -69^\circ 57' 30''$
Minimum	$-1.1 \cdot 10^{-5}$ m	bei $\varphi = -75^\circ 47' 30''$	, $\lambda = 162^\circ 2' 30''$
Betragsminimum	$-5.1 \cdot 10^{-9}$ m	bei $\varphi = -71^\circ 22' 30''$	, $\lambda = 161^\circ 2' 30''$

## Planare Approximation des Störpotentials

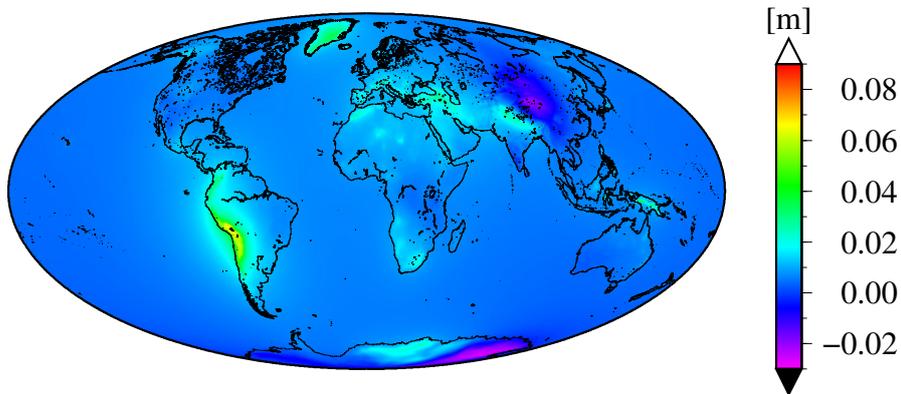


Abbildung A.27: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$ :  $15' \times 15'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0058 m		
Standardabweichung	0.0061 m		
Maximum	0.0696 m	bei $\varphi = -15^\circ 17' 30''$	, $\lambda = -70^\circ 47' 30''$
Minimum	-0.0267 m	bei $\varphi = -76^\circ 42' 30''$	, $\lambda = 145^\circ 42' 30''$
Betragsminimum	$6.5 \cdot 10^{-9}$ m	bei $\varphi = 50^\circ 42' 30''$	, $\lambda = 83^\circ 22' 30''$

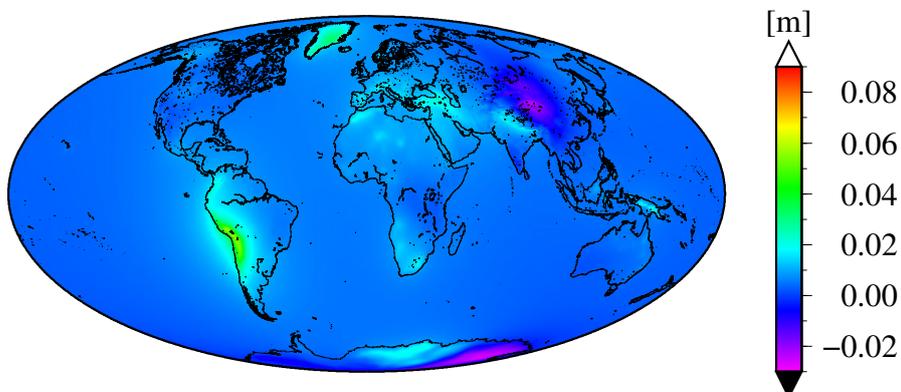


Abbildung A.28: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$ :  $60' \times 60'$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0045 m		
Standardabweichung	0.0058 m		
Maximum	0.0597 m	bei $\varphi = -15^\circ 2' 30''$	, $\lambda = -70^\circ 2' 30''$
Minimum	-0.0270 m	bei $\varphi = -76^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 144^\circ 57' 30''$
Betragsminimum	$-1.8 \cdot 10^{-8}$ m	bei $\varphi = -73^\circ 17' 30''$	, $\lambda = -161^\circ 27' 30''$

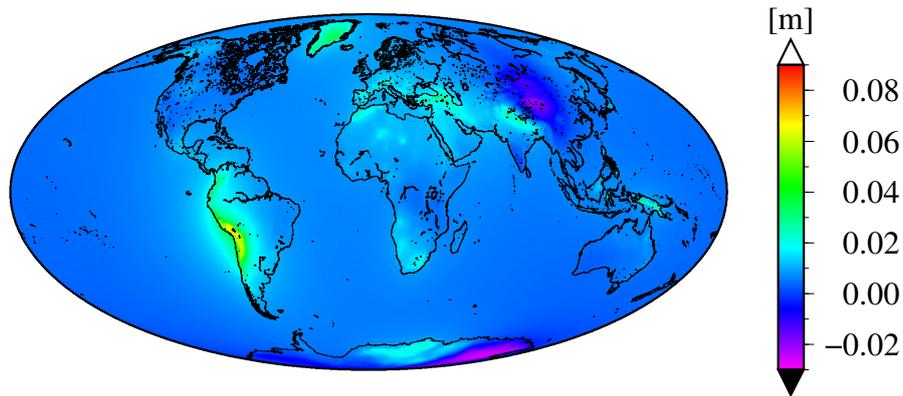


Abbildung A.29: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta}$ :  $15' \times 15'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0058 m		
Standardabweichung	0.0061 m		
Maximum	0.0696 m	bei $\varphi = -15^\circ 17' 30''$	, $\lambda = -70^\circ 47' 30''$
Minimum	-0.0267 m	bei $\varphi = -76^\circ 42' 30''$	, $\lambda = 145^\circ 42' 30''$
Betragsminimum	$3.9 \cdot 10^{-9}$ m	bei $\varphi = -67^\circ 32' 30''$	, $\lambda = 171^\circ 2' 30''$

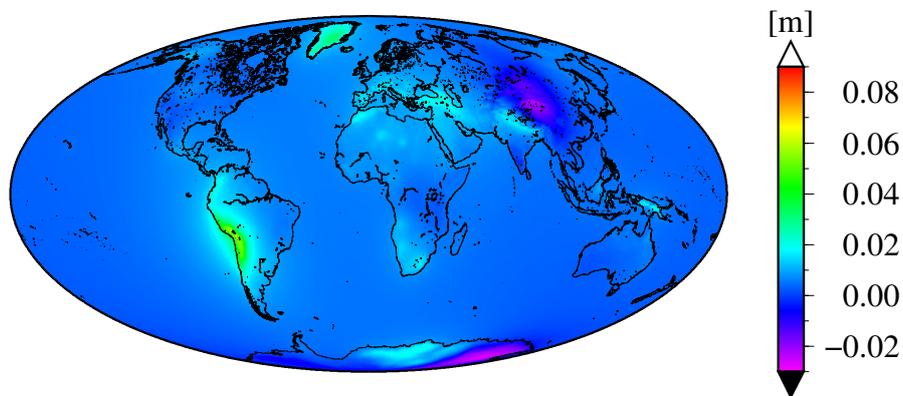


Abbildung A.30: Approximationsfehler  $\epsilon_{\zeta}$ :  $60' \times 60'$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0045 m		
Standardabweichung	0.0058 m		
Maximum	0.0598 m	bei $\varphi = -15^\circ 2' 30''$	, $\lambda = -70^\circ 2' 30''$
Minimum	-0.0270 m	bei $\varphi = -76^\circ 57' 30''$	, $\lambda = 144^\circ 57' 30''$
Betragsminimum	$1.4 \cdot 10^{-9}$ m	bei $\varphi = -74^\circ 37' 30''$	, $\lambda = -151^\circ 7' 30''$

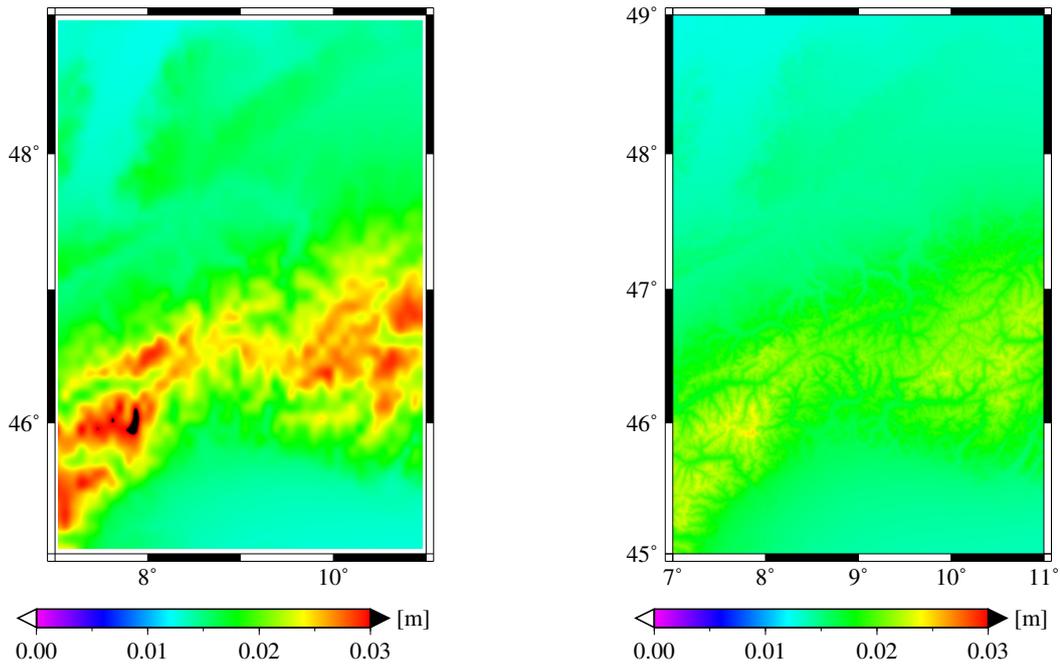


Abbildung A.31: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung aus Koordinatendifferenzen

Mittelwert	0.0177 m
Standardabweichung	0.0043 m
Maximum	0.0311 m
Minimum	0.0124 m

Mittelwert	0.0162 m
Standardabweichung	0.0026 m
Maximum	0.0251 m
Minimum	0.0125 m

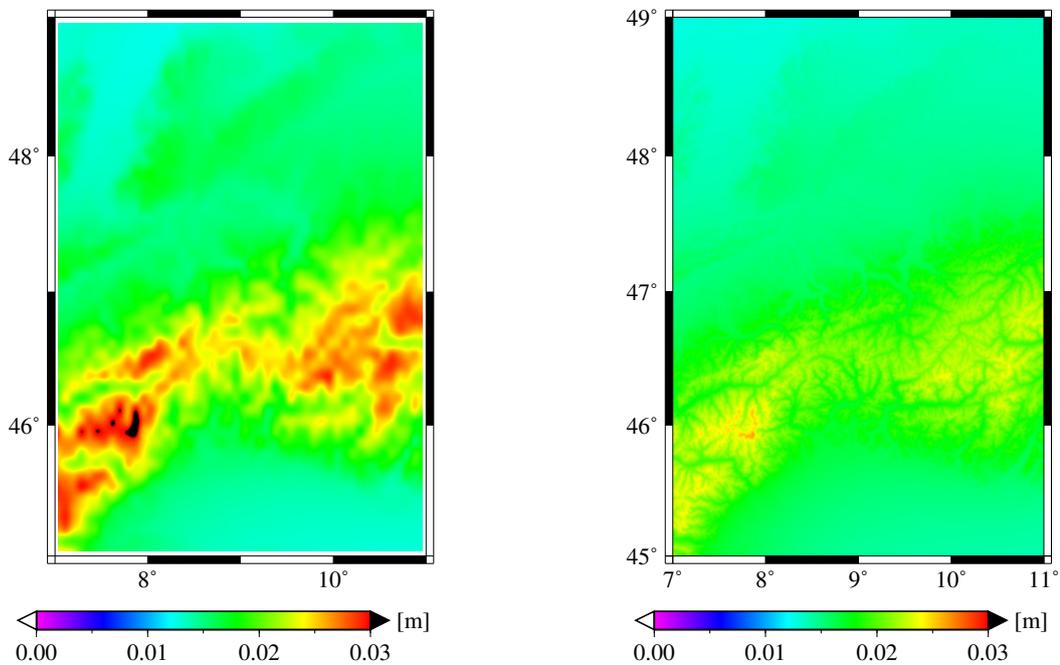


Abbildung A.32: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0178 m
Standardabweichung	0.0043 m
Maximum	0.0312 m
Minimum	0.0124 m

Mittelwert	0.0166 m
Standardabweichung	0.0028 m
Maximum	0.0264 m
Minimum	0.0126 m

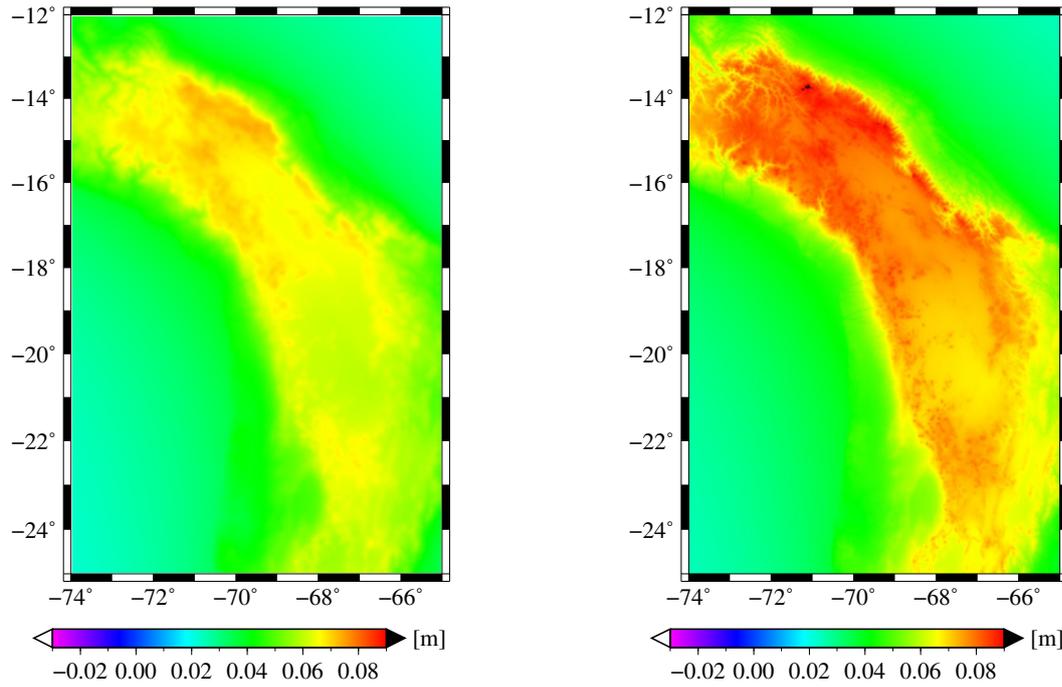


Abbildung A.33: Approximationsfehler  $\epsilon_\zeta$ : a)  $5' \times 5'$  bzw. b)  $30'' \times 30''$   
Neigung mittels FFT

Mittelwert	0.0464 m
Standardabweichung	0.0151 m
Maximum	0.0738 m
Minimum	0.0225 m

Mittelwert	0.0533 m
Standardabweichung	0.0183 m
Maximum	0.0944 m
Minimum	0.0246 m



## Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik (ISSN 1612-9733)

---

Die Bände sind unter [www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu) als PDF frei verfügbar oder als Druckausgabe bestellbar.

- Band 2013,1** Müßle, Melanie; Heck, Bernhard; Seitz, Kurt; Grombein, Thomas  
**Untersuchungen zur planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem (KIT, Karlsruhe, Germany).** 2013  
KIT Scientific Reports ; 7652
- Band 2012,1** Mayer, Michael; Krueger, Claudia P.; Heck, Bernhard (Hrsg.)  
**Highly Precise Positioning and Height Determination using GPS. Results of a PROBRAL project by Universidade Federal do Paraná (UFPR, Curitiba, Brazil) and Karlsruhe Institut für Technologie (KIT, Karlsruhe, Germany).** 2012  
KIT Scientific Reports ; 7604
- Band 2010,3** Geodätisches Institut (Hrsg.)  
**Vernetzt und ausgeglichen : Festschrift zur Verabschiedung von Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h. Günter Schmitt.** 2010  
ISBN 978-3-86644-576-5
- Band 2010,2** Fuhrmann, Thomas; Knöpfler, Andreas; Mayer, Michael; Luo, Xiaoguang; Heck, Bernhard  
**Zur GNSS-basierten Bestimmung des atmosphärischen Wasserdampfgehalts mittels Precise Point Positioning.** 2010  
KIT Scientific Reports ; 7561  
ISBN 978-3-86644-539-0
- Band 2010,1** Grombein, Thomas; Seitz, Kurt; Heck, Bernhard  
**Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satellitengradiometriemission GOCE.** 2010  
KIT Scientific Reports ; 7547  
ISBN 978-3-86644-510-9
- Band 2009,2** Heck, Bernhard; Mayer, Michael (Hrsg.)  
**Geodätische Woche 2009 : 22.-24. September 2009, Messe Karlsruhe, Rheinstetten im Rahmen der INTERGEO – Kongress und Fachmesse für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement. Abstracts.** 2009  
ISBN 978-3-86644-411-9
- Band 2009,1** Eschelbach, Cornelia  
**Refraktionskorrekturbestimmung durch Modellierung des Impuls- und Wärmeflusses in der Rauigkeitsschicht.** 2009  
ISBN 978-3-86644-307-5

## Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik (ISSN 1612-9733)

---

- Band 2007,6** Bähr, Hermann; Altamimi, Zuheir; Heck, Bernhard  
**Variance Component Estimation for Combination of Terrestrial Reference Frames.** 2007  
ISBN 978-3-86644-206-1
- Band 2007,5** Nuckelt, André  
**Dreidimensionale Plattenkinematik.** 2007  
ISBN 978-3-86644-152-1
- Band 2007,4** Derenbach, Heinrich; Illner, Michael; Schmitt, Günter;  
Vetter, Martin; Vielsack, Siegfried  
**Ausgleichsrechnung – Theorie und aktuelle Anwendungen aus der Vermessungspraxis.** 2007  
ISBN 978-3-86644-124-8
- Band 2007,3** Mürle, Michael  
**Aufbau eines Wertermittlungsinformationssystems.** 2007  
ISBN 978-3-86644-116-3
- Band 2007,2** Luo, Xiaoguang; Mayer, Michael; Heck, Bernhard  
**Bestimmung von hochauflösenden Wasserdampffeldern unter Berücksichtigung von GNSS-Doppeldifferenzresiduen.** 2007  
ISBN 978-3-86644-115-6
- Band 2007,1** Knöpfler, Andreas; Mayer, Michael; Nuckelt, André;  
Heck, Bernhard; Schmitt, Günter  
**Untersuchungen zum Einfluss von Antennenkalibrierwerten auf die Prozessierung regionaler GPS-Netze.** 2007  
ISBN 978-3-86644-110-1
- Band 2005,1** Kupferer, Stephan  
**Anwendung der Total-Least-Squares-Technik bei geodätischen Problemstellungen.** 2005  
ISBN 3-937300-67-8
- Band 2004,1** Schmidt, Ulrich Marcus  
**Objektorientierte Modellierung zur geodätischen Deformationsanalyse.** 2004  
ISBN 3-937300-06-6
- Band 2003,1** Koenig, Daniel; Seitz, Kurt  
**Numerische Integration von Satellitenbahnen unter Berücksichtigung der Anisotropie des Gravitationsfeldes der Erde.** 2003  
ISBN 3-937300-00-7





Im Rahmen des Geodätischen Randwertproblems zur Bestimmung des Erdschwerefeldes sind zahlreiche Approximationen notwendig, um eine analytische Lösung zu erhalten. Neben der Linearisierung und der sphärischen Approximation wurde im Falle einer nicht-sphärischen Randfläche die sog. planare Approximation eingeführt (u. a. Moritz, 1980). Dabei werden innerhalb der analytischen Ausdrücke sämtliche Terme der Größenordnung  $h/R$  ( $h$  topographische Höhe,  $R$  mittlerer Erdradius) vernachlässigt. Der maximale relative Fehler wird in der Literatur grob mit 0.1 % abgeschätzt. Das entspricht Maximalwerten von rund 0.5 mgal in den Randwerten und etwa 10 cm in den Quasigeoidhöhen.

Da heutzutage viele Anwendungen eine zentimeter- oder millimetergenaue Höhenbezugsfläche (Quasigeoid) erfordern, ist es sinnvoll die genaue Größenordnung sämtlicher Fehler zu kennen. Ist eine Vernachlässigung der beschriebenen Fehlereinflüsse im Rahmen der hochgenauen Quasigeoidmodellierung auch heute noch gerechtfertigt?

Anhand umfangreicher numerischer Untersuchungen wird in dieser Arbeit erstmals die genaue Größenordnung des Einflusses der planaren Approximation sowohl auf die globale als auch die regionale Quasigeoidbestimmung untersucht. Es wird u. a. gezeigt, inwieweit die Ergebnisse von der Auflösung des zugrunde liegenden Datensatzes abhängen. Zudem wird erstmals eine analytische Darstellung der vernachlässigten Terme höherer Ordnung angegeben. Davon ausgehend erfolgt die Herleitung von Korrekturformeln für die „planaren“ Gleichungen. Es zeigt sich, dass für praktische Anwendungen mit hoher Genauigkeitsforderung Terme der Größenordnung  $h^2/R^2$  vernachlässigt werden können. Numerische Untersuchungen bestätigen den deutlichen Genauigkeitsgewinn dieser erweiterten Ausdrücke.

ISSN 1612-9733  
ISSN 1869-9669  
ISBN 978-3-0095-7

