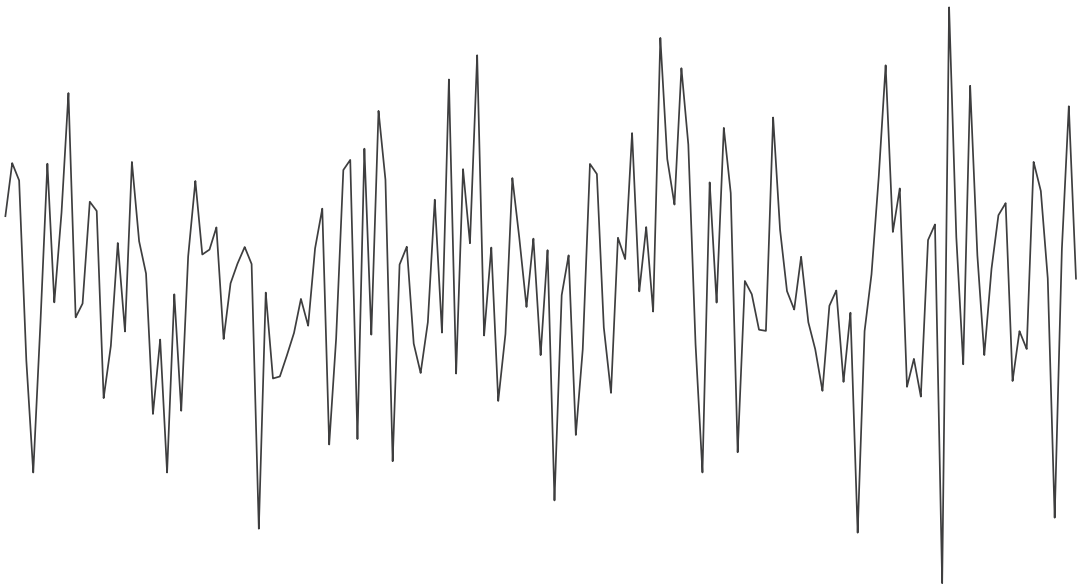


NICOLE GAUS

Zur Ermittlung eines stochastischen
Reibwerts und dessen Einfluss auf
reibungserregte Schwingungen



Nicole Gaus

**Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und
dessen Einfluss auf reibungserregte Schwingungen**

Karlsruher Institut für Technologie
Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik

Band 23

Eine Übersicht über alle bisher in dieser Schriftenreihe
erschienene Bände finden Sie am Ende des Buchs.

Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und dessen Einfluss auf reibungserregte Schwingungen

von
Nicole Gaus

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Fakultät für Maschinenbau
Tag der mündlichen Prüfung: 6. Juni 2013

Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
KIT Scientific Publishing
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark of Karlsruhe
Institute of Technology. Reprint using the book cover is not allowed.

www.ksp.kit.edu



*This document – excluding the cover – is licensed under the
Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 DE License
(CC BY-SA 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>*



*The cover page is licensed under the Creative Commons
Attribution-No Derivatives 3.0 DE License (CC BY-ND 3.0 DE):
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/de/>*

Print on Demand 2013

ISSN 1614-3914

ISBN 978-3-7315-0118-3

Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und dessen Einfluss auf reibungserregte Schwingungen

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der
Fakultät für Maschinenbau
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Ing. Nicole Gaus
aus Offenburg

Tag der mündlichen Prüfung:
Hauptreferent:
Korreferent:

06. Juni 2013
Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe
Prof. Dr.-Ing. habil. Kai Willner

Kurzfassung

Diese Arbeit untersucht die technisch relevante Frage nach dem Auftreten reibungsinduzierter Schwingungen. Dies wird anhand des klassischen Reibschwingers durchgeführt, wobei der Reibwert stochastisch modelliert wird.

Viele natürlich vorkommende Oberflächen sind zufällig verteilt und damit auch ihr Reibwert. Zur korrekten Beschreibung müssen die stochastischen Eigenschaften berücksichtigt werden. Dazu wird eine Kontaktanalyse an optisch vermessenen Oberflächendaten durchgeführt. Mithilfe des *Greenwood-Williamson* Modells wird die Kontaktfläche und die Kontaktnormalkraft bestimmt und mit dem *Bowden-Tabor* Ansatz daraus die Reibkraft berechnet.

Da der vermessene Oberflächenanteil nur einem Ausschnitt aus dem tatsächlichen Bauteil entspricht, wird die Oberfläche stochastisch vervielfältigt. Dazu wird eine Fouriertransformation der Oberflächendaten durchgeführt. Die Amplituden der Transformatierten bleiben erhalten, die Phasen werden durch passende Zufallszahlen ersetzt. Durch Rücktransformation ergeben sich stochastisch ähnliche Oberflächen. Die durchgeführte statistische Auswertung der stochastisch ähnlichen Oberflächen führt zu einer Aussage über Mittelwert, Standardabweichung und Spektrum des Reibwerts. Somit sind alle Parameter bekannt, um den Reibwert als stochastischen Prozess zu modellieren, welcher die Oberflächenbeschaffenheit berücksichtigt. Diese Kontaktanalyse wird an zwei Beispielen durchgeführt.

Anschließend wird der Einfluss des stochastischen Reibwerts auf reibungsinduzierte Schwingungen anhand des klassischen Reibschwingers untersucht. Die Kontaktanalyse erzeugt einen bandbreitenbeschränkten Prozess. Um zu untersuchen, wie groß die Abweichung zu weißem Rauschen ist, werden immer drei Simulationen verglichen: deterministisch, mit weißem Rauschen und mit dem Reibwert aus der Kontaktanalyse. Die Intensität des weißen Rauschens berechnet sich aus der Varianz des Reibwerts aus der Kontaktanalyse. So wird auch beim weißen Rauschen die Oberflächenbeschaffenheit der Kontaktpartner berücksichtigt.

Für den rein selbsterregten Fall ist die wohl interessanteste Abhängigkeit die der Dämpfung, da bei großen Dämpfungsmaßen der *Stick-Slip* Zyklus nicht mehr existiert. Es existiert ein maximales Dämpfungsmaß, bei dem sicher kein Grenzzyklus mehr vorliegt. Dieses kann aber von deterministischer zu stochastischer Simulation verschieden sein. Daher muss das Dämpfungsmaß für beide Fälle berechnet werden und nur der größere Wert der beiden gibt Sicherheit, dass kein Grenzzyklus mehr besteht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Simulationen mit stochastischem Reibwert in Grenzfällen, bei denen sich die Lösungscharakteristik ändert, zusätzliche Informationen liefert. Vor allem bei großen Normalkräften, die eine große Varianz der Reibkraft verursachen, kann sich das Phasenportrait erheblich ändern.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Technische Mechanik, Bereich Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe danke ich für die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit, sowie die damit verbundene Übernahme des Hauptreferats. Er hatte die Idee zum Thema dieser Arbeit und unterstützte mich die gesamte Zeit durch weitere Impulse. Den Herren Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann und Prof. Dr.-Ing. Alexander Fidlin danke ich für die offene und angenehme Stimmung am Institut und das kontinuierliche Interesse an meiner Arbeit.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Kai Willner danke ich für die Übernahme des Korreferats. Von seinem umfassenden Wissen auf den Gebiet der Kontaktmechanik konnte ich vielfach profitieren und die zur Verfügung gestellten Oberflächendaten haben die Arbeit erheblich bereichert. Für die Übernahme des Vorsitzes des Promotionsausschusses danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Peter Gratzfeld vom Lehrstuhl für Bahnsystemtechnik des KIT.

Den Herren Prof. Dr.-Ing. Jens Wittenburg, Prof. Dr.-Ing. Jörg Wauer und Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig möchte ich ebenfalls für das Interesse an meiner Forschung danken. Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wauer danke ich besonders für die Durchsicht der Schrift und Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig für die fachliche Unterstützung im Bereich stochastische Differentialgleichungen und für eine spannende gemeinsame Konferenzwoche in Hangzhou, China.

Allen Mitarbeitern des Bereichs Dynamik/Mechatronik danke ich für die tollen Jahre. Aus vielen interessanten Gesprächen, sowohl den wissenschaftlichen als auch den nicht wissenschaftlichen konnte ich oft neue Erkenntnisse gewinnen. Besonderer Dank gilt den "Chicks" Heike Vogt, Karolina Bach, Claudia Bellanger und außerdem meinem Zimmerkollegen Dominik Kern. Wir hatten immer viel Spaß zusammen und sie haben mich auch in den schwierigen Phasen immer wieder aufzumuntern gewusst. Außerdem gebührt Herrn Dr.-Ing. Hartmut Hetzler großer Dank. Er hat immer Zeit gefunden für fachliche Gespräche, welche oft neue richtungswisende Ideen hervorbrachten.

Ein großer Dank gebührt meiner Familie, die mich immer unterstützt und gefördert hat. Ohne euch wäre ich nicht die, die ich bin. Außerdem meinem lieben Frank, der immer an meiner Seite ist und mich beruhigt. Ohne dich wäre das Leben nur halb so schön.

Karlsruhe, den 28. Januar 2014
Dipl.-Ing. Nicole Gaus

"Das, wobei unsere Berechnungen versagen,
nennen wir Zufall."

Albert Einstein

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Stand der Forschung	2
1.2.1 Ursachen für Reibung	2
1.2.2 Berechnung der realen Kontaktfläche	3
1.2.3 Reibungserregte Schwingungen	5
1.3 Thema und Aufbau der Arbeit	7
2 Grundlagen	11
2.1 Stochastik	11
2.1.1 Zufallsvariablen	12
2.1.2 Stochastische Prozesse	14
2.1.3 Statistik	15
2.1.4 Stochastische Differentialgleichungen	16
2.2 Fourieranalyse	18
2.3 Spektrale Darstellung	21
2.4 Kontaktmechanik	21
2.4.1 Hertz Modell	22
2.4.2 Greenwood-Williamson Modell	25
2.4.3 Bowden-Tabor Modell	27
3 Kontaktsimulation	29
3.1 Grundlagen	29
3.1.1 Oberflächenanalyse	29
3.1.2 Rekonstruktion der Oberfläche durch Spektraldarstellung	30
3.1.3 Kontaktanalyse	32
3.1.4 Statistische Kontaktanalyse	34
3.2 Beispiel Bremsbelag	37
3.2.1 Oberflächenanalyse	37
3.2.2 Kontaktanalyse	40
3.2.3 Rekonstruktion der Oberfläche durch Spektraldarstellung	43
3.2.4 Statistische Kontaktanalyse	44
3.2.5 Übergang zur Makroebene	48
3.3 Beispiel Metallblech	52
3.3.1 Oberflächenanalyse	52
3.3.2 Kontaktanalyse	54

3.3.3	Statistische Kontaktanalyse	56
3.3.4	Übergang zur Makroebene	57
3.4	Zusammenfassung Kontaktsimulation	59
4	Reibungserregte Schwingungen	61
4.1	Grundlagen	61
4.1.1	Deterministischer Reibschwinger	61
4.1.2	Stochastischer Reibschwinger mit weiß verrauschtem Reibwert	69
4.1.3	Stochastischer Reibschwinger mit Reibwert aus Kontaktanalyse	73
4.2	Reibungserregte Schwingungen in der Bremse	77
4.2.1	Einfluss der Normalkraft	78
4.2.2	Einfluss der Dämpfung	82
4.2.3	Einfluss der Anregung	89
4.3	Reibungserregte Schwingungen beim Metallblech	102
4.3.1	Einfluss der Normalkraft	102
4.3.2	Einfluss der Dämpfung	108
4.3.3	Einfluss der Anregung	113
4.4	Zusammenfassung reibungserregte Schwingungen	122
5	Zusammenfassung und Ausblick	123
	Abbildungsverzeichnis	127
	Tabellenverzeichnis	130
	Literaturverzeichnis	132

Symbolverzeichnis

Symbole

$\bar{\beta}$	Mittlerer Asperitenradius	[–]
$\bar{\mu}$	Reibwertprozess mittelwertfrei und mit Standardabweichung Eins	[–]
β	Asperitenradius	[–]
Δf_x	Inkrement der Wegfrequenz in x -Richtung	$[\frac{1}{m}]$
Δf_y	Inkrement der Wegfrequenz in y -Richtung	$[\frac{1}{m}]$
ℓ_{corr}	Korrelationslänge	[m]
ℓ_{Fl}	Länge einer Realisierung = Länge der Originaloberfläche	[m]
η	Frequenzverhältnis	[–]
γ	Plastizitätsindex	[–]
γ_0	dimensionslose Geschwindigkeit	[–]
$\hat{\mu}$	Reibwertprozess mittelwertfrei	[–]
$\hat{\mu}_w$	Rauschanteil des Reibwerts bei weißem Rauschen	[–]
$\hat{\mu}_{SD}$	Rauschprozess des Reibwerts aus Spektraler Darstellung	[–]
κ	Krümmung eines Asperiten	[–]
Λ	Lyapunov Exponent, stochastisch	[–]
λ	Lyapunov Exponent, deterministisch	[–]
μ	Reibwert	[–]
$\mu_D(v_{rel})$	deterministischer, geschwindigkeitsabhängiger Anteil des Reibwerts bei weißem Rauschprozess	[–]
$\mu_m(v_{rel})$	deterministischer, geschwindigkeits- und druckabhängiger Anteil des Reibwerts aus der Kontaktanalyse	[–]
ν	Querkontraktionszahl	[–]

ω_0	Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems	$\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$
σ_μ	Standardabweichung des Reibwerts	$[-]$
σ_S	Standardabweichung der Asperitenhöhen	$[\text{m}]$
$\sigma_{(\cdot)}$	Standardabweichung (\cdot)	$[-]$
σ_ζ	Intensität des Prozesses $\zeta(x_{rel}, \xi)$	$[-]$
τ	dimensionslose Zeit	$[-]$
τ_{max}	maximale Scherspannung	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
ξ	gleichverteilte Zufallszahl	$[-]$
$\zeta(x_{rel}, \xi)$	weißer Rauschprozess des Reibwerts	$[-]$
a, b, c	Fitparameter für Nichtlinearen Least-Square Schätzer	$[-]$
A_c	Kontaktfläche	$[\text{m}^2]$
a_y	Verschiebung der Realisierung zur Berechnung des Spektrums und der Autokorrelationsfunktion	$[\text{m}]$
A_{nom}	nomielle Fläche der gemessenen Oberfläche	$[\text{mm}^2]$
c	Federkonstante	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$
D	<i>Lehr'sches</i> Dämpfungsmaß	$[-]$
d	Verformung der Asperiten	$[\text{m}]$
d_k	Dämpferkonstante	$\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}}\right]$
D_{max}^d	maximales Dämpfungsmaß bei der sich noch ein Grenzyklus einstellt: deterministisch	$[-]$
D_{max}^s	maximales Dämpfungsmaß bei der sich noch ein Grenzyklus einstellt: stochastisch	$[-]$
$dW\tau$	Inkrement des Wiener Prozesses	$[-]$
E	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
$E[(\cdot)]$	Erwartungswert von (\cdot)	$[-]$
$E[\mu]$	Mittelwert des Reibwerts	$[-]$
E^*	relativer Elastizitätsmodul zweier Materialien	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$

F_R	Reibkraft	[N]
f_t	Zeitfrequenz	$\left[\frac{1}{s}\right]$
f_x	Wegfrequenz in x -Richtung	$\left[\frac{1}{m}\right]$
f_y	Wegfrequenz in y -Richtung	$\left[\frac{1}{m}\right]$
H	Härte des Materials	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
L	Bezugslänge	[m]
m	Masse	[kg]
M_{diff}	Differenz der Anzahl der <i>Gleit-Haft</i> Wechsel: deterministisch - stochastisch	[-]
M_d	Anzahl der <i>Gleit-Haft</i> Wechsel: deterministisch	[-]
M_{quot}	Quotient der Anzahl der <i>Gleit-Haft</i> Wechsel: deterministisch - stochastisch	[-]
M_s	Anzahl der <i>Gleit-Haft</i> Wechsel: stochastisch	[-]
N	Normalkraft	[N]
n	dimensionsloser Normalkraftparameter	[-]
p	Druck	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
Q	Äußere Kraftanregungsamplitude	[N]
q	dimensionsloser Kraftparameter der äußeren Anregungsamplitude	[-]
R_k	standardnormalverteilte Zufallszahl	[-]
R_p	Fließspannung des Materials	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}$	Autokorrelation des mittelwertfreien, standardnormalverteilten Reibwerts	[-]
$S_{\hat{\mu}\hat{\mu}}$	Leistungsdichtespektrum des mittelwertfreien Reibwerts	[-]
t	Zeit	[s]
u	Verschiebung	[m]
v_0	Bandgeschwindigkeit des Reibschwingers	$\left[\frac{m}{s}\right]$
v_{rel}	Relative Geschwindigkeit zwischen Masse und Band	$\left[\frac{m}{s}\right]$

W	Abstand der stochastischen Position X_{gh} der Referenztrajektorie zur Vergleichstrajektorie in der Poincaré Abbildung zur Berechnung des Lyapunov Exponenten	[–]
w	Abstand der deterministischen Position X_{gh} der Referenztrajektorie zur Vergleichstrajektorie in der Poincaré Abbildung zur Berechnung des Lyapunov Exponenten	[–]
x	dimensionslose Wegkoordinate des Reibschwingers	[–]
x_1, x_2	Zustandsvariablen von der dimensionslosen Wegkoordinate x	[–]
x_s, y_s	Koordinaten eines Asperiten	[m]
y	physikalische Wegkoordinate des Reibschwingers	[–]
Z	normierte Fouriertransformierte von z	[m]
z	Höhe der Oberfläche	[m]
Z^*	unnormierte Fouriertransformierte von z	[m]
Z_ϕ	Matrix der Phasen der Fouriertransformierten von z	[–]
Z_ξ	Matrix mit gleichverteilten Zufallszahlen	[–]
z_s	Höhe eines Asperiten	[m]

1 Einleitung

1.1 Motivation

Reibung ist in unserem alltäglichen Leben allgegenwärtig. Ohne Reibung könnten wir uns weder laufend noch auf Rädern fortbewegen oder Gegenstände greifen. In vielen Maschinenelementen, wie Gleitlagern, Getrieben, Zylindern, uvm. wird versucht die Reibung zu minimieren, da sie zu erheblichen Verlusten, zum Beispiel durch Wärmeentwicklung oder Abrieb, führt.

In anderen Maschinenkomponenten wird hingegen gezielt Reibung genutzt, z.B. Keilriementriebe, Reibkupplungen oder Bremsen. Auch beim Klemmen, Schrauben oder Knoten ist Reibung nötig, um die Funktion zu erfüllen.

Dynamische Analysen solcher Systeme müssen reibungserregte Schwingungen in Betracht ziehen, die durch Reibung zwischen Kontaktpartnern entstehen können. Reibungserregte Schwingungen gehören zur Kategorie der selbsterregten Schwingungen, die sich dadurch auszeichnen, dass die Schwingungen ohne äußere Anregung entstehen. Die Anregung erfolgt durch eine innere Energiequelle, und die Frequenz und Amplitude sind abhängig von den Systemparametern. Selbsterregte Schwingungen treten im Alltag z.B. beim Quietschen von Kreide auf einer Tafel oder Knarren von Türscharnieren auf. Während diese Phänomene primär störend sind, können sie in der Ingenieurspraxis z.B. beim Rattern von Werkzeugmaschinen zu Qualitätseinbußen, beim Quietschen von Schienenfahrzeugen zu erhöhter Lärmbelastung und beim Bremsenquietschen zu Unwohlsein des Fahrers bis hin zu Sicherheitsproblemen führen. Besonders die sogenannten *Stick-Slip* Schwingungen, bei denen ständig zwischen *Haften* und *Gleiten* hin und her geschaltet wird, verursachen erhöhten Verschleiß der Kontaktpartner.

Reibpaarungen lassen sich in zwei große Kategorien einteilen. Zum einen gibt es geschmierte Kontakte, bei denen die Schmierung den größten Einfluss auf den Reibwert hat. Diese Kategorie ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Die zweite Kategorie beschreibt trockene Reibpaarungen. Bei trockener Reibung spielen Materialpaarung, Oberflächenbeschaffenheit, äußere Belastung u.v.m. eine große Rolle. Abhängig von diesen Parametern ergibt sich die Kontaktfläche, welche meist die ausschlaggebende Größe darstellt. In Kontakt stehende raue Oberflächen berühren sich im Normalfall nur an den Rauigkeitsspitzen. Diese sind stochastisch verteilt und daraus resultiert eine stochastische Schwankung des Reibwerts, wenn sich zwei in Kontakt stehende Oberflächen relativ zueinander bewegen.

Das Berücksichtigen des stochastischen Anteils des Reibwerts führt zu zuverlässigeren Aussagen in den kritischen Gebieten, in denen sich die Lösungscharakteristik ändert. Die

Simulation von reibungserregten Schwingungen erleichtert die Vorhersage während der Entwicklungsphase dynamischer Systeme mit Reibung. Es kann abgeschätzt werden, ob *Stick-Slip* Schwingungen auftreten werden und durch welche Parameteränderungen sie verhindert werden können.

1.2 Stand der Forschung

1.2.1 Ursachen für Reibung

Die ersten aufgezeichneten Untersuchungen zu Reibung gehen vermutlich auf LEONARDO DA VINCI (1452-1519) zurück. Er untersuchte unter anderem systematisch den Zusammenhang zwischen Masse und Reibwiderstand sowie scheinbarer Kontaktfläche und Reibwiderstand und erkannte bereits die ersten beiden Reibgesetze, die heute mit AMONTONS und COULOMB in Verbindung gebracht werden:

- Die Reibung ist unabhängig von der nominellen Fläche der Körper
- Die Reibung ist proportional zur Normallast

LEONARDO DA VINCI notierte einen Reibwert unabhängig von der Materialpaarung von $\mu = 1/4$, was für die von ihm untersuchten Materialien ein sehr realistischer Wert ist. AMONTONS veröffentlichte im Jahr 1699 vergleichbare Ergebnisse mit einem Reibwert von $\mu = 1/3$. In dieser Zeit entstanden die ersten Vorstellungen zu rauen Oberflächen, COULOMB beschrieb 1785 ein Oberflächenmodell mit Verzahnungen, welche ineinander greifen und deren Widerstand überwunden werden muss. Damit erklärte er auch die zwei Zustände Haften und Gleiten. Außerdem veröffentlichte er Überlegungen zum Einfluss verschiedener Materialien, Rauigkeit der Oberfläche, Kontaktfläche, Normallast und Temperatur. Ausführliche Beschreibungen dieser Untersuchungen sind in [72], [6], [20] und [40] zu finden. In dieser Zeit wurde als drittes Reibgesetz festgehalten:

- Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit

Dieses Gesetz wurde jedoch später als nicht allgemeingültig widerlegt. Bei vielen Reibsituationen ist der Reibwert eine Funktion der Relativgeschwindigkeit der in Kontakt stehenden Körper [33], [61], [73].

In moderneren Untersuchungen wurden weitere Einflussparameter gefunden, allen voran die Schmierung. Aber auch bei trockenen Paarungen hängt die Reibung von mikroskopischer Oberflächenbeschaffenheit, lokaler Kontakttemperatur, Steifigkeiten der Paarung, elastischer oder plastischer Verformung der Asperiten, Kontaktfläche u.v.m. ab, [72], [9], [54], [84].

BOWDEN und TABOR führten in [10] ausführliche Untersuchungen zur Reibung unter anderem von Metallen durch und beschrieben die Mechanismen auf Basis der Ergebnisse. Diese Mechanismen haben sich weitgehend bestätigt. Es wird bereits beschrieben, dass

Kontakt nur an den Asperiten rauer Oberfläche auftritt und die tatsächliche Kontaktfläche ein Vielfaches kleiner als die nominelle Fläche ist. BOWDEN und TABOR argumentieren daraufhin, dass an den Rauigkeitsspitzen hohe Kontaktdrücke entstehen, welche zu plastischer Verformung führen. Außerdem wird beschrieben, dass bereits bei relativ niedrigen Geschwindigkeiten an den Kontaktstellen hohe Temperaturen auftreten, sogenannte "Hot-Spots", welche zum lokalen Erweichen oder Schmelzen des Materials und damit zum Verschweißen von Metallbrücken führen können. Als Mechanismus der trockenen, metallischen Reibung werden in [10] zwei Ursachen herausgehoben: die Furchenbildung und das Abscheren der Metallbrücken. Die Furchenbildung spielt vor allem eine Rolle, wenn ein harter Gipfel durch eine weiche Oberfläche pflügt. Das Abscheren ist der dominante Anteil, wenn zwei gleiche Materialien in Kontakt stehen oder das härtere Material weniger rau ist. Bei beiden Mechanismen ist die Kontaktfläche ein entscheidender Faktor für die Größe der Reibkraft. Mit dieser Theorie kann auch die Annahme AMONTONS bestätigt werden, dass die Reibkraft von der nominellen Fläche unabhängig aber direkt proportional zur Normallast ist. Mit der Annahme der plastischen Verformung kann die Kontaktfläche A_c durch $A_c = N/R_p$ angenähert werden, wobei N die Normallast und R_p die Fließspannung des Materials beschreiben. Wenn davon ausgegangen wird, dass der Scheranteil der dominante ist, berechnet sich die Reibkraft R mit $R = A_c \tau_{max}$ wobei τ_{max} die tangential zur Fläche wirkende Spannung ist, welche benötigt wird, um die Verbindung abzuscheren. Werden diese beiden Zusammenhänge eingesetzt, ergibt sich die Reibkraft zu

$$R = \frac{N \tau_{max}}{R_p}. \quad (1.1)$$

τ_{max} und R_p sind vom Material abhängig, und so ist die Reibkraft direkt proportional zur Normallast N . Dies gilt nur, wenn plastische Verformung vorliegt, da nur dann die Kontaktfläche $A_c = N/R_p$ ist. Dies ist im Allgemeinen nur bei der initialen Belastung der Fall. Anschließendes Belasten führt zu einer elastischen Verformung der Rauigkeiten. Auch bei elastischer Verformung kann jedoch ein proportionaler Zusammenhang zwischen Kontaktfläche A_c und Normallast N bestimmt werden.

1.2.2 Berechnung der realen Kontaktfläche

Es gibt viele Ansätze zur Berechnung der realen Kontaktfläche bei elastischem Kontakt. Als Pionierarbeit gilt die Arbeit von HERTZ [35], in welcher der Zusammenhang zwischen Kontaktfläche und Anpresskraft einer Kugel auf einer flachen Oberfläche aufgestellt wurde. Dieser Zusammenhang wurde mithilfe der *Boussinesq* Lösungen für den Halbraum aufgestellt. JOHNSON zeigt in [48] ausführlich die Rechnung für die Verformung, welche eine Kugel auf einer elastischen Oberfläche hervorruft. Für die Kontaktfläche einer Kugel auf einer Fläche gilt der Zusammenhang von $A \propto N^{2/3}$. Dies widerspricht den experimentellen Beobachtungen, dass die Reibkraft, von der angenommen wird, dass sie direkt proportional zur Kontaktfläche ist, linear mit der Normalkraft wächst.

ARCHARD und GREENWOOD & WILLIAMSON lieferten dazu in [3] und [31] die ersten Erklärungen. ARCHARD argumentierte, dass Oberflächen nie wirklich glatt sind, sondern Rauigkeiten auf verschiedenen Skalen besitzen. Diese modelliert er durch halbkugelförmige

Asperiten, auf denen wieder halbkugelförmige Asperiten mit kleineren Radien sitzen und so weiter. Dies ist eines der ersten fraktalen Modelle. Es wird gezeigt, dass der Exponent von Skala zu Skala sich der Eins nähert. Schon bei drei Asperitenebenen mit verschiedenen Radien ($R_3 \ll R_2 \ll R_1$) berechnet ARCHARD einen Zusammenhang von $A \propto N^{\frac{44}{45}}$.

GREENWOOD und WILLIAMSON argumentieren ebenso, dass eine Oberfläche nie ideal glatt ist, aber modellieren diese stochastisch. Sie besteht aus vielen Asperiten mit kugelförmiger Spitze von gleichem Radius, welche aber unterschiedliche Höhen haben. Bei *Gauß*'scher Verteilung dieser Höhen ergibt sich ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen Kontaktfläche und -kraft. Dieses Modell geht davon aus, dass die Asperiten so weit auseinander liegen, dass sie nicht interagieren. Das ermöglicht eine Berechnung des *Hertz*'schen Kontakts an jedem einzelnen Asperiten und die Gesamtfläche und -kraft berechnet sich aus der Summe dieser. BUSH und GIBSON erweiterten das *Greenwood-Williamson* Modell in [14] um elliptische Asperiten mit verteilten Halbachsen. CIAVARELLA veröffentlichte 2008 zusammen mit GREENWOOD und PAGGI [16] einen Vorschlag, wie die Interaktion der Asperiten im *Greenwood-Williamson* Modell berücksichtigt werden kann. All diese Modelle bestätigen bereits die experimentellen Beobachtungen, dass die Kontaktfläche proportional zur Normalkraft ist. Die verwendeten Oberflächen haben stochastisch *Gauß* verteilte Asperiten. Dies ist eine theoretische Annahme und bezieht sich nicht auf reale Oberflächen.

Das Ziel der Autoren ist es mit immer realistischeren Oberflächenmodellen den experimentellen Ergebnissen ein Stück näher zu kommen. Der nächste Schritt ist die Modellierung der Rauigkeiten durch Fraktale. Eines davon ist das *Weierstrassprofil*. Dieses besteht aus überlagerten, selbstaffinen Sinus-Wellen. MAJUMDAR und BHUSHAN zeigen in [62] für elastisch-plastischen Kontakt rauher Oberflächen den Zusammenhang zwischen Normallast und Kontaktfläche $N \propto A^{(3-D)/2}$, wobei D die fraktale Dimension ist, welche nach Messungen zwischen 1 und 2 liegt. CIAVARELLA ET AL. zeigen in [15], dass es eine Untergrenze der räumlichen Auflösung, eine kleinste Skala, gibt, um realistisches physikalisches Verhalten abzubilden. LIOU und LIN modifizieren in [58] das *Greenwood-Williamson* Modell so, dass der Asperitenradius und deren Anzahl nicht mehr konstant sind, sondern von der fraktalen Dimension der Oberflächen abhängen. Diese wiederum ändert sich bei unterschiedlichem Abstand der Oberflächen zueinander. Diese Untersuchungen benutzen künstlich generierte Oberflächenmodelle, die ihren Ursprung in real gemessenen Oberflächen haben.

Ein weiterer Ansatz wird von TIAN und BHUSHAN in [88] vorgestellt. Hier wird gezeigt, dass der Kontaktdruck derjenige ist, bei dem die komplementäre potentielle Energie minimal ist. Dies wird mithilfe des Variationsprinzips aus der Energie im statischen Gleichgewicht berechnet. Auch hier wird die *Boussinesq*'sche Halbraumlösung benutzt. Zur Berechnung ist es nötig das Gebiet zu diskretisieren. Die Auswertung des Variationsprinzips liefert dann die diskreten Elemente, welche in Kontakt stehen und deren Kontaktdruck. Die Kontaktfläche berechnet sich durch Addieren der in Kontakt stehenden diskreten Elemente. WILLNER verwendet diese Methode in [96], [30] und [97] zur Berechnung der Kontaktparameter fraktaler Oberflächen. Die Informationen für die fraktalen Oberflächen wurden aus vorherigen Untersuchungen gewonnen. Diese Ansätze nähern sich schon den Finite-Element-Methoden. HYUN ET AL. zeigen in [47] eine vollständige Finite-Elemente Analyse von Kontakten zwischen einer rauhen, selbstaffinen Oberfläche

und einer glatten. Zwischen den Flächen gilt eine Undurchdringlichkeitsbedingung. Die Knoten an den Oberflächen werden in *Master* und *Slave* Knoten eingeteilt. Das Verfahren berechnet die Verschiebung der Knoten zunächst ohne die Kontaktbedingungen einzuhalten. In einem Korrekturschritt wird dann die Verschiebung unter Einhaltung der Undurchdringlichkeitsbedingung nachgebessert. So wird ein statisches Gleichgewicht bei einer bestimmten Kraft berechnet, aus welchem die Kontaktkräfte bestimmt werden können. Die Kontaktfläche wird dann durch Addieren aller zugehörigen diskreten Flächen der eindringenden Knoten berechnet. Die Verfahren zur Kontaktdetektierung und Berechnung der Kontaktkräfte wird unter anderem in WRIGGERS [98] oder WILLNER [95] ausführlich behandelt.

Die fraktalen Oberflächen werden anhand der Strukturfunktion und des Spektrums realer Oberflächen generiert. Diese generierten Oberflächen entsprechen einzelnen Realisierungen. Die Verfahren mit diskreten und mit finiten Elementen haben gemeinsam, dass sie sehr rechenzeitintensiv sind. Um statistische Auswertungen durchführen zu können, um so Aussagen über Mittelwert, Varianz und Spektrum bzw. Korrelation der Kontaktfläche treffen zu können, müssen viele Realisierungen untersucht werden. Dies bedarf eines Verfahrens, das mit geringem Rechenaufwand Kontaktanalysen vieler Oberflächen durchführen kann. Ein solches Verfahren wurde in der Literatur bisher noch nicht vorgestellt.

1.2.3 Reibungserregte Schwingungen

In der Dynamik kann Reibung zu reibungserregten Schwingungen und im besonderen zu *Stick-Slip* Schwingungen führen. Reibungserregte Schwingungen werden durch einen geschwindigkeitsabhängigen Reibwert verursacht. Dieser Effekt tritt vor allem bei geschmierten Kontakten auf. Dort wird er mit dem Übergang von trockenem Kontakt zu Mischkontakt, also der Ausbildung des Schmierfilms in Verbindung gebracht, [4], [18]. Das Phänomen tritt aber auch bei rein trockenem Kontakt auf. Es wird in verschiedenen Gebieten der Wissenschaft, z.B. Tribologie, Chemie, Physik untersucht, ist jedoch bis heute nicht vollständig verstanden. Verschiedene Ursachen werden in der Literatur diskutiert, unter anderem der Einfluss von Abrieb [71], [66] oder Ausbildung eines Schmierfilms infolge des eingeschlossenen Luftspalts. Mit Hilfe vieler Messungen und experimentellen Auswertungen ist es gelungen, Reibgesetze phänomenologisch sehr gut zu beschreiben. Viele ingenieurbasierte Arbeiten in der Literatur nutzen diese Gesetze zur Untersuchung reibungsinduzierter Schwingungen und *Stick-Slip* Schwingungen mit Hilfe des Modells eines deterministischen Reibschwingers, einem Ein-Massen-Schwinger auf einem Band. Dieses einfache Modell weist bereits zahlreiche Effekte der nichtlinearen Dynamik auf, wie der Übergang von stationären Lösungen zu periodischen bis hin zum Chaos.

In [37] wird das Bestehen des *Stick-Slip* Grenzyklus anhand einer Automobilbremse untersucht und mit Experimenten abgeglichen. In [40], [42], [85], [86], [41] und [70] wurden anhand verschiedener Reibschwingermodelle viele Parametereinflüsse untersucht. Dazu wurden Ein- und Mehrfreiheitsgradsysteme betrachtet bis hin zu Schwingungen eines Kontinuums, welches durch Reibung angeregt wird. Validiert wurden die Simulationen

mit Experimenten verschiedenster Materialkombinationen. In [26] werden Näherungen für die Reibkurve gefunden, so dass der Grenzyklus analytisch bestimmt werden kann. In [59], [57], [60] und [89] werden verschiedene Lösungsbifurkationen des eindimensionalen Reibschwingers, bei Selbst- und Fremderregung, abhängig von relevanten Systemparametern untersucht.

Zur Untersuchung dieser Modelle sind die Grundlagen der nichtlinearen Dynamik, wie Stabilität, Bifurkationen und der Beschreibung von Chaos wichtig. Grundlagenbücher zu diesen Themen sind z.B. [33], [61], [51], [69], [68], [87], [27]. Modelle für reibungserregte Schwingungen zählen zu einer Untergruppe der nichtlinearen Dynamik, der nichtglatten Systeme, welche ausführlich unter anderem in [56], [55] behandelt werden. Speziell die Stabilität nichtglatter Systeme wird in [64] untersucht.

Viele experimentelle Arbeiten zeigen zudem, dass der Reibwert stochastisch ist [40], [85], [70]. Zur Untersuchung stochastischer Systeme werden daher auch Kenntnisse in stochastischer Stabilität bzw. Momentenstabilität benötigt [99], [75], [49], [17], [83].

Die Effekte stochastischer Anregung auf nichtglatte Systeme werden unter anderem in folgenden Arbeiten untersucht. In [44] wird an allgemein formulierten nichtglatten Systemen gezeigt, dass bei additivem Rauschen mit kleinen Amplituden die Übergänge an Bifurkationspunkten geglättet werden. Damit kann die Bifurkation bei einem kleineren Parameterwert auftreten als beim deterministischen System. Bei stärkerem Rauschen können zusätzliche Bifurkationen auftreten, die im deterministischen System nicht existieren. In [46] werden Mehrfreiheitsgrad-Systeme mit Stoß, angeregt durch *Gauß*'sches weißes Rauschen, untersucht. Es wird die exakte stationäre Lösung für ein dissipatives, stochastisch angeregtes, hamiltonisches System bestimmt. Anhand eines Zwei-Freiheitsgrad Modells wird die Lösung welche mit dieser Methode bestimmt wurde mit einer durch stochastische Mittelwertbildung genäherten Lösung verglichen. In [24] und [23] wird ein *Duffing-Schwinger* mit Stoß, angeregt durch additives *Gauß*'sches Rauschen, untersucht. In [24] werden Wahrscheinlichkeitsdichten für Energie, Verschiebung und Geschwindigkeit mithilfe einer quasi konservativen Mittelwertbildung bestimmt und diese mit Ergebnissen der Monte Carlo Simulation verglichen. In [23] wird für das selbe System der Lyapunov Exponent bestimmt. Der Vergleich zwischen stochastischer und deterministischer Auswertung zeigt, dass bei leichtem Rauschen, der *Lyapunov* Exponent schwankt, aber eine Mittelwertbildung noch möglich ist. Die Übergänge von periodischer Lösung zu Chaos sind geglättet aber konsistent mit den deterministischen.

Ein stochastisch angeregter Reibschwinger wird in [25] behandelt. Hierbei wird sowohl der Reibwert als auch die relative Geschwindigkeit mit additivem *Gauß*'schen weißem Rauschen modelliert. Es werden Untersuchungen an Ein-, Zwei- und Dreifreiheitsgrad-Systemen durchgeführt. Diese zeigen, dass das Systemverhalten sich durch das Rauschen ändern kann. In [8] werden *Stick-Slip* Schwingungen auf Basis eines Reibwerts analysiert, welcher von der Oberflächenrauigkeit abhängt. Die Kontaktfläche wird bestimmt durch die Asperiten, die sowohl an ihrer Spitze als auch an ihren Flanken in Kontakt stehen. Das Reibmodell berücksichtigt Deformation der Asperiten und Adhäsion an diesen. Die Asperiten und deren Flanken werden als *Gauß*'sch verteilte Zufallszahlen modelliert. Es wird untersucht, in welcher Bandbreite der Bandgeschwindigkeit ein *Stick-Slip* Zyklus besteht und wie diese Bandbreite von der Oberfläche abhängt. Aktuelle Arbeiten, die den Einfluss

rauer Oberflächen auf die Reibung untersuchen, sind z.B. [22] und [21]. In [22] schwingt eine Masse tangential über eine Platte mit rauer Oberfläche. Die Oberflächenschwankungen bewirken eine Fußpunktanregung des schwingenden Systems, und die Kontaktstelle wird durch eine Feder-Dämpfer Kombination modelliert. Von Interesse sind hier die vertikalen Schwingungen, die die Masse aufgrund der Oberflächenrauigkeiten ausführt. Die Untersuchungen wurden mit Experimenten validiert. In [21] wird ein physikalisch basiertes Reibmodell vorgestellt und dieses auf einen einfachen Ein-Massen-Schwinger mit Reibung angewandt. Das Reibmodell benutzt das klassische *Greenwood-Williamson* Modell mit *Hertz* Kontakt an *Gauß* verteilten Asperiten, um die Reibkraft zu ermitteln. Dieses Modell wird verwendet, um Abrieb in Verbindungsstellen zu berechnen.

Die meisten Arbeiten, die den Reibwert stochastisch modellieren, nehmen an, dass es sich um weißes Rauschen handelt. In der Literatur fehlen Arbeiten, die den Rückschluss auf die Mikroebene ausführen, um zu zeigen, wie sich reale Oberflächenrauigkeiten auf die stochastischen Eigenschaften des Reibwerts auswirken und ob die Annahme eines weiß verrauschten Reibwerts zulässig ist. Anhand eines solchen Reibwerts können verschiedene Parametereinflüsse untersucht werden. Von größter Bedeutung ist, ob der *Stick-Slip* Zyklus besteht.

1.3 Thema und Aufbau der Arbeit

Wie in den vorherigen Kapiteln gezeigt, ergibt sich aus der Literatur die Fragestellung, ob es zulässig ist, den Reibwert weiß verrauscht zu modellieren bzw. wie sich Oberflächentopologien auf die stochastischen Eigenschaften des Reibwerts auswirken.

Um die Mikroebene einzubeziehen, müssen Oberflächen auf Basis gemessener Spektren erzeugt werden. Abhängig von solch einer Oberfläche können dann die Kontaktfläche und Kontaktkräfte ermittelt werden. Solche generierten Oberflächen werden in der Literatur häufig zur Kontaktanalyse mit diskreten oder finiten Elementen benutzt. Diese Verfahren haben den Nachteil, dass sie sehr große Rechenzeiten benötigen. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein Verfahren zur Kontaktanalyse entwickelt, welches sich durch eine geringe Rechenzeit auszeichnet. So können viele Oberflächenrealisierungen analysiert werden, um Mittelwert, Varianz und Spektrum bzw. Korrelation der Kontaktparameter und damit des Reibwerts zu bestimmen.

Ziel dieser Arbeit ist es, reibungserregte Schwingungen mit einem stochastischen Reibwert, welcher mithilfe der entwickelten Methode die Oberflächenbeschaffenheit der Reibpaarung auf der Mikroebene berücksichtigt, zu untersuchen. So wird der Effekt der Mikroebene auf das dynamische Verhalten in der Makroebene abgebildet.

Der Aufbau der Arbeit ist in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt. Es wird zunächst eine Kontaktanalyse anhand gemessener rauer Oberflächen durchgeführt. Daraus kann das Spektrum des stochastischen Reibwerts gewonnen werden, welches direkt von der Beschaffenheit der Mikroebene abhängt. Mithilfe dieses Spektrums wird ein stochastischer Reibwert erzeugt und mit diesem Schwingungen auf der Makroebene anhand des Reib-

schwingers untersucht.

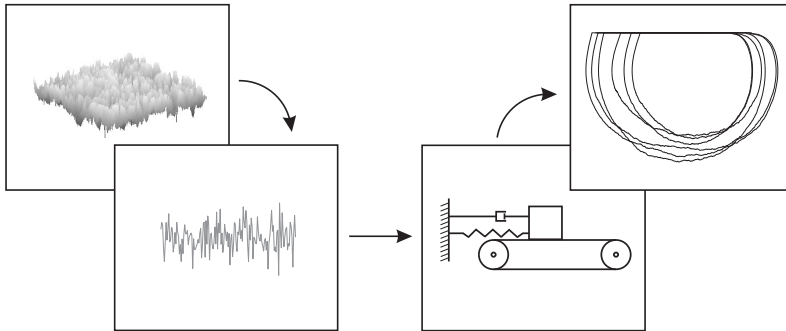


Abbildung 1.1: Aufbau der Arbeit: Kontaktanalyse gemessener Oberflächen → stochastischer Reibwert → Reibschwingeruntersuchungen mit stochastischem Reibwert → Einfluss der Mikroebene auf dynamisches Verhalten der Makroebene z.B. anhand Phasendiagramm

In Kapitel 2 werden zunächst die benötigten Grundlagen der Stochastik und der Kontaktmechanik vorgestellt.

Bei den stochastischen Grundlagen wird besonderer Fokus auf stochastische Prozesse und Spektraldarstellung gelegt. Diese Methoden werden benutzt, um den Reibwert als stochastischen Prozess zu beschreiben.

In den Grundlagen der Kontaktmechanik werden die in dieser Arbeit verwendeten Modelle vorgestellt. Dazu gehören das *Hertz'sche* Kontaktmodell zur Berechnung der Kontaktfläche bei elastischer Verformung. Außerdem wird das *Greenwood-Williamson* Modell zur Berechnung der Kontaktfläche bei stochastisch verteilten Kontaktstellen erläutert. Der *Bowden-Tabor* Ansatz, welcher benutzt wird um die Reibkraft zu bestimmen, wird ebenfalls vorgestellt.

In Kapitel 3 wird für zwei vermessene Oberflächen der stochastische Reibwertprozess bestimmt. Dafür werden zunächst stochastisch ähnliche Oberflächen erzeugt. Es wird eine Fourieranalyse der Oberflächendaten durchgeführt, die Amplituden bleiben erhalten, doch die Phasen werden durch passende Zufallszahlen ersetzt. Mit dem *Greenwood-Williamson* Modell kann für diese Oberflächen die Kontaktfläche und -kraft und mit dem *Bowden-Tabor* Ansatz daraus der stochastische Reibwert berechnet werden.

Durch Interpolieren der Fouriertransformierten, kann die Oberfläche vergrößert werden und durch stückweises Auswerten das Leistungsdichtespektrum des Reibwerts ermittelt werden. Daraus kann mit Hilfe der spektralen Darstellung der Reibwert als stochastischer Prozess modelliert werden.

Als praktische Beispiele werden diese Auswertungen für die Oberfläche eines benutzten Bremsbelags in Kapitel 3.2 und für die eines gewalzten Metallblechs aus Stahl DC04 in Kapitel 3.3 durchgeführt.

In Kapitel 4.1 wird der Reibschwinger vorgestellt. Zunächst werden das Modell und das benutzte numerische Integrationsverfahren erklärt. Anschließend werden die Veränderungen der Gleichung durch den stochastischen Reibwert hervorgehoben.

In Kapitel 4.2 und 4.3 werden die reibungserregten Schwingungen anhand der Beispiele Bremsbelag und Metallblech untersucht. Zum Vergleich werden immer drei Simulationen durchgeführt:

- deterministischer Reibwert
- weiß verrauschter Reibwert
- Reibwert aus Kontaktanalyse

Die Einflüsse der verschiedenen relevanten Parameter wie Normalkraft, Dämpfung und Anregung werden betrachtet und im jeweiligen Grenzfall der Unterschied zwischen deterministischer und stochastischer Simulation hervorgehoben.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

2 Grundlagen

Eine Oberfläche besteht aus stochastisch verteilten Asperiten. Zur Behandlung dieser werden die Grundlagen der Stochastik benötigt. Die Oberflächendaten werden durch eine Fourieranalyse genauer beschrieben. Die Fouriertransformation und die Spektrale Darstellung dienen außerdem dazu, stochastisch ähnliche Oberflächen zu erzeugen. Diese werden benutzt um eine statistische Kontaktanalyse durchzuführen. Für diese Kontaktanalyse sind die Grundlagen der Kontaktmechanik Voraussetzung. Es wird vor allem das benutzte *Hertz* Modell und das *Greenwood-Williamson* Modell, welches zur Berechnung von Kontaktfläche und -kraft benutzt wird und das *Bowden-Tabor* Modell, welches zur Berechnung der Reibkraft benutzt wird, vorgestellt.

2.1 Stochastik

Die Stochastik beinhaltet die Teilgebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik und ist keine Naturwissenschaft, sondern vielmehr eine Theorie zur Modellierung. Die hier aufgeführten Grundlagen basieren auf [29], [76], [28]. Hier und in vielen anderen Grundlagenbüchern kann weiteres zu diesem Thema nachgelesen werden.

Zunächst muss der Ereignisraum definiert werden. Im Ereignisraum Ω_ξ sind alle möglichen Ergebnisse ξ_i eines Versuches zusammengefasst. Einelementige Ereignisse ξ werden Elementarereignisse genannt. Eine Teilmenge A_ξ an Elementarereignissen ist ebenfalls ein Ereignis. Für die Teilmengen gelten die Rechenregeln der Mengenlehre. Die leere Menge \emptyset und der Ereignisraum Ω_ξ sind ebenfalls Ereignisse und werden als unmögliches und sicheres Ereignis bezeichnet.

Weiterhin wird der Begriff der σ -Algebra eingeführt. Eine Familie von Teilmengen \mathfrak{B} von Ω_ξ bezeichnet man als σ -Algebra auf Ω_ξ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $\Omega_\xi \in \mathfrak{B}$
- $A_\xi \in \mathfrak{B} \rightarrow \bar{A}_\xi \in \mathfrak{B}$ (wobei \bar{A}_ξ das komplementäre Ereignis zu A_ξ ist)
- für die Folge A_{ξ_i} gilt $\bigcup_i A_{\xi_i} \in \mathfrak{B}$

Als Wahrscheinlichkeitsmaß wird nach den *Kolmogorowschen* Axiomen eine Funktion P bezeichnet, welche folgende Eigenschaften besitzt:

- $0 \leq P(A_\xi) \leq 1 \quad \forall A_\xi \in \mathfrak{B}$
- $P(\Omega_\xi) = 1$
- für paarweise disjunctierte Ereignisse gilt $P(\sum_i(A_\xi)) = \sum_i P(A_\xi i)$

Zwei Ereignisse heißen statistisch unabhängig voneinander, wenn

$$P(A_{\xi 1} \cup A_{\xi 2}) = P(A_{\xi 1})P(A_{\xi 2}) \quad (2.1)$$

gilt.

2.1.1 Zufallsvariablen

Werden den zufälligen Ereignissen ξ reelle Zahlenwerte $X(\xi)$ zugeordnet, heißen diese $X(\xi)$ Zufallsvariablen. Für eine Zufallsvariable $X(\xi)$ lässt sich die Verteilungsfunktion $P_X(x)$ mit

$$P_X(x) = P(\xi \in \Omega_\xi : X(\xi) \leq x) \quad (2.2)$$

bestimmen, welche die folgenden Eigenschaften hat:

- $P_X(x) \geq 0$
- $P_X(-\infty) = 0$ und $P_X(\infty) = 1$
- $P_X(x = a) \leq P_X(x = b)$ für $a \leq b$
- $P_X(x = b) - P_X(x = a) = P(a \leq X(\xi) \leq b)$

Ist eine stetige Verteilungsfunktion $P_X(x)$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ differenzierbar, so heißt die Ableitung

$$p_X(x) = \frac{dP_X(x)}{dx} \quad (2.3)$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion oder einfach Dichtefunktion und besitzt die Eigenschaften:

- $p_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1$

Eine der wichtigsten Verteilungen ist die sogenannte *Gauß'sche* Verteilung oder Normalverteilung. Die Dichtefunktion hat die Form

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (2.4)$$

mit den Parametern Mittelwert μ_X und Streuung σ_X^2 . Eine weitere wichtige Verteilung ist die Gleichverteilung, welche in einem Wertebereich die gleiche Wahrscheinlichkeit hat und außerhalb dieses Bereiches die Wahrscheinlichkeit Null.

Ist die Verteilung einer Zufallsvariablen $X(\xi)$ nicht genau bekannt, kann diese über die stochastischen Momente charakterisiert werden. Ist $f(X(\xi))$ eine Funktion der Zufallsvariablen $X(\xi)$, dann ist der Erwartungswert dieser Funktion

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p_X(x)dx. \quad (2.5)$$

Die Momente einer Zufallszahl sind bestimmte Erwartungswerte. Das Moment k -ter Ordnung der Zufallsvariablen $X(\xi)$ berechnet sich durch

$$m_k = E[X(\xi)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_X(x)dx. \quad (2.6)$$

Die zwei wichtigsten Momente sind der Mittelwert

$$\mu_X = E[X(\xi)] \quad (2.7)$$

und die Varianz

$$\sigma_X^2 = E[(X(\xi) - \mu_X)^2], \quad (2.8)$$

deren Wurzel

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \quad (2.9)$$

Standardabweichung genannt wird.

Um die Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen $X_1(\xi)$ und $X_2(\xi)$ zu beurteilen, kann ihre Kovarianz

$$\text{cov}(X_1(\xi), X_2(\xi)) = K_{X_1 X_2} = E[(X_1(\xi) - \mu_{X_1})(X_2(\xi) - \mu_{X_2})] \quad (2.10)$$

verwendet werden. Diese kann mit den beiden Standardabweichungen zur Korrelation

$$\text{cor}(X_1(\xi), X_2(\xi)) = R_{X_1 X_2} = \frac{K_{X_1 X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (2.11)$$

normiert werden. Wenn die Kovarianz bzw. die Korrelation zweier Zufallszahlen verschwindet, sind sie unkorreliert.

2.1.2 Stochastische Prozesse

Ist eine Zufallsvariable von einer deterministischen Größe, wie z.B der Zeit oder dem Ort abhängig, wird dies stochastischer Prozess genannt. Als Beispiel wird eine Abhängigkeit von der Zeit gewählt, der Prozess wird dann mit $X(\xi, t)$ oder kurz $X(t)$ bezeichnet. Zu jedem festen Zeitpunkt t_0 ist $X(\xi, t_0)$ eine Zufallsvariable. Für jeden festen Zufallsparameter ξ_0 wird der Prozess eine deterministische Zeitfunktion $X(\xi_0, t)$, die Realisierung genannt wird. Genau wie bei den Zufallsvariablen können auch für Prozesse Momente und Kovarianz bzw. Korrelation berechnet werden:

$$\mu_X(t) = E[X(\xi, t)], \quad (2.12)$$

$$\sigma_X(t)^2 = E[(X(\xi, t) - \mu_X(t))^2], \quad (2.13)$$

$$K_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E[(X_1(t_1) - \mu_{X_1}(t_1))(X_2(t_2) - \mu_{X_2}(t_2))], \quad (2.14)$$

$$R_{X_1 X_2}(t_1, t_2) = E[X_1(t_1)X_2(t_2)]. \quad (2.15)$$

Handelt es sich bei $X_1(t)$ und $X_2(t)$ um unterschiedliche Prozesse, werden $K_{X_1 X_2}(t_1, t_2)$ und $R_{X_1 X_2}(t_1, t_2)$ als Kreuzvarianz- bzw. Kreuzkorrelationsfunktion bezeichnet. Wird nur ein Prozess untersucht gibt $K_{X_1 X_1}(t_1, t_2)$ bzw. $R_{X_1 X_1}(t_1, t_2)$, die sogenannte Autovarianz- bzw. Autokorrelationsfunktion Auskunft darüber, wie der Wert des Prozesses zum Zeitpunkt t_1 von dem zum Zeitpunkt t_2 abhängt.

Stochastische Prozesse lassen sich weiterhin nach verschiedenen Kriterien einteilen:

Stationarität: Als stationär wird ein Prozess bezeichnet, dessen Mittelwert nicht zeitabhängig und dessen Autokorrelationsfunktion nur von der Zeitdifferenz $\tau = t_2 - t_1$ abhängt.

Ergodizität: Als ergodisch wird ein Prozess bezeichnet, der stationär ist und bei dem eine Realisierung die gesamte stochastische Information enthält. Dies bedeutet, dass die Mittelung einer Realisierung über einem Zeitabschnitt (Zeitmittel) gleich der Mittelung über viele Realisierungen zu einen festen Zeitpunkt (Ensemblemittel) ist. Der Nachweis der Ergodizität ist oft schwierig, da dazu der stochastische Prozess analytisch bekannt sein muss. Durch Stichproben und dem Wissen um den physikalischen Ursprung des Prozesses kann jedoch oft eine hinreichend genaue Beurteilung getroffen werden.

Gauß'scher Prozess: Ein Prozess wird als Gauß'scher Prozess bezeichnet, wenn die

Zufallsvariable zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 einer Normalverteilung genügt.

Ein weiteres wichtige Kriterium zur Beurteilung eines stochastischen Prozesses ist das Leistungsdichtespektrum. Es gibt Aufschluss über die im Prozess auftretenden Frequenzen f . Nach der Wiener-Chintchin Beziehung lässt sich das Leistungsdichtespektrum aus der Autokorrelationsfunktion durch Fouriertransformation

$$S_{X_1 X_1}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{X_1 X_1}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \quad (2.16)$$

berechnen. Die Rücktransformation ist entsprechend

$$R_{X_1 X_1}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{X_1 X_1}(f) e^{i2\pi f \tau} df. \quad (2.17)$$

Es gilt für $\tau = 0$

$$R_{X_1 X_1}(\tau = 0) = \sigma_X^2. \quad (2.18)$$

Für einen ergodischen Prozess kann das Leistungsdichtespektrum auch aus einer Realisierung mit der verallgemeinerten Fourieranalyse

$$\mathfrak{F}[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) e^{i2\pi t} dt \quad (2.19)$$

durch

$$S_{X_1 X_1}(f) = \mathfrak{F}[X(t)] \overline{\mathfrak{F}[X(t)]} \quad (2.20)$$

berechnet werden, wobei $\overline{\mathfrak{F}[X(t)]}$ der konjugiert komplexe Anteil ist.

2.1.3 Statistik

Ein wichtiger Aspekt der Statistik ist die Schätztheorie. Real gemessene Signale oder Messreihen sind endlich lang und endlich in der Anzahl. Ziel der Schätztheorie ist es anhand solcher Signale, welche als Prozesse angesehen werden können, Aussagen über die beschreibenden Größen, wie Verteilungen, Momente und Korrelationen zu treffen. Die Integrale werden dabei zu Summen über die Anzahl an gemessenen Werten. So kann z.B. für n gemessene Werte der Mittelwert durch

$$\mu_X = E[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\xi) \quad (2.21)$$

und die Varianz durch

$$\sigma_X^2 = E[(X(\xi) - \mu_X)^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i(\xi) - \mu_X)^2 \quad (2.22)$$

geschätzt werden. Für die Autokorrelationsfunktion einer stationären Messreihe gilt entsprechend

$$R_{X_1 X_1}(t_1, t_2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_{1i}(\xi, t_1) X_{1i}(\xi, t_2)). \quad (2.23)$$

2.1.4 Stochastische Differentialgleichungen

Um reibungserregte Schwingungen mit stochastischem Reibwert zu untersuchen, werden die Grundlagen der stochastischen Differentialgleichungen (SDG) benötigt, siehe z.B. [52], [53] oder [5]. Durch stochastische Differentialgleichungen lassen sich Systeme mit zeitlich veränderlichen Zufallsgrößen beschreiben. Ein klassisches Beispiel ist die *Brown'sche* Molekularbewegung, welche die Bewegung eines Partikels in einem Fluid beschreibt, das durch die Molekularbewegung des Fluids angestoßen wird. SDGn haben vielfache Anwendungen z.B. in der Finanzmathematik, Biologie und auch der Mechanik. Eine allgemeine SDG hat die Form

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)\zeta_t dt. \quad (2.24)$$

Diese Differentialgleichung kann ebenfalls als Integralgleichung

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)\zeta_s ds, \quad (2.25)$$

dargestellt werden, wobei a den Driftterm beschreibt und b als Diffusionsterm bezeichnet wird. ζ_t ist ein *Gauß'scher* weißer Rauschprozess. Ein solcher Prozess zeichnet sich dadurch aus, dass er mittelwertfrei ist, die Amplituden normalverteilt sind und der Prozess ein konstantes unendliches Leistungsdichtespektrum besitzt.

Der sogenannte *Wiener* Prozess W_t ist ein Prozess, der die *Brown'sche* Molekularbewegung mathematisch beschreibt. W_t hat ebenfalls die Eigenschaften mittelwertfrei mit normalverteilten Amplituden zu sein. Der Prozess ist nicht differenzierbar aber Formal gilt $(dW_t)^2 = dt$. Eine weitere Eigenschaft ist, dass der Zuwachs $W_{t_2} - W_{t_1}$ ebenfalls mittelwertfrei und normalverteilt ist, und die Zuwächse $W_{t_2} - W_{t_1}$ und $W_{t_4} - W_{t_3}$ unabhängig voneinander sind. Damit besteht zwischen weißem Rauschen und dem *Wiener* Prozess der Zusammenhang

$$dW_t = \zeta_t dt. \quad (2.26)$$

Daher kann die Integralgleichung auch in der Form

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(s, X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) * dW_s \quad (2.27)$$

ausgedrückt werden. Das erste Integral ist ein klassisches *Riemann* Integral. Das zweite Integral, was einer Integration bezüglich des *Wiener* Prozesses entspricht, kann, weil dieser nicht differenzierbar ist, nicht so einfach gelöst werden. Das * steht dafür, dass das Integral verschieden ausgewertet werden kann.

Wird das Integrationsintervall in Teilintervalle mit den Rändern $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t$ zerlegt und eine Stützstellen gemäß

$$\tau_i = \gamma t_{i+1} + (1 - \gamma)t_i \quad (2.28)$$

für $\gamma \in [0, 1]$ definiert, so hängt die Summe

$$\sum_{i=0}^{N-1} b(X_{\tau_i}, \tau_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad (2.29)$$

von der Wahl für γ ab. Für $\gamma = 0$ wird das Integral am linken Rand ausgewertet, für $\gamma = 1$ am rechten und für $0 < \gamma < 1$ an einem Punkt dazwischen.

Im sogenannten *Itô* Kalkül wird $\gamma = 0$ benutzt, das Integral wird daher an der linken Intervallgrenze ausgewertet. Das *Itô* Integral wird dann in der Form

$$\int_{t_0}^t b(s, X_s) dW_s \quad (2.30)$$

dargestellt. Im *Itô* Kalkül gilt die Besonderheit, dass

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t \quad (2.31)$$

und nicht wie in der klassischen Integralrechnung

$$\int_0^t w_s dw_s = \frac{1}{2} w_t^2 \quad (2.32)$$

zu nehmen ist. Im sogenannten *Stratonovich* Kalkül wird $\gamma = \frac{1}{2}$ gewählt, das Integral daher in der Mitte ausgewertet. Das *Stratonovich* Integral wird in der Literatur mit einem 'o' dargestellt

$$\int_{t_0}^t b(s, X_s) \circ dW_s. \quad (2.33)$$

Für das *Stratonovich* Integral gilt wie in der klassischen Integralrechnung

$$\int_0^t W_s \circ dW_s = \frac{1}{2} W_t^2. \quad (2.34)$$

Zwischen den Lösungen des *Itô* und des *Stratonovich* Integrals besteht ein einfacher Zusammenhang. Ist X_t die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (2.35)$$

im *Itô* Kalkül, so ist X_t ebenfalls die Lösung der Gleichung

$$dX_t = \bar{a}(t, X_t)dt + b(t, X_t) \circ dW_t \quad (2.36)$$

im *Stratonovich* Kalkül. Der Zusammenhang zwischen a und \bar{a} ist durch

$$\bar{a}(t, X_t) = a(t, X_t) - \frac{1}{2} b(t, X_t) \frac{\partial b(t, X_t)}{\partial x} \quad (2.37)$$

gegeben.

2.2 Fourieranalyse

Die Fourieranalyse ist ein wichtiges Instrument in der Signalverarbeitung. Die Grundlagen werden hier, wie in der Literatur üblich, anhand eines Zeitsignals hergeleitet. In dieser Arbeit wird sie benutzt um raue Oberflächen zu analysieren, was einem ortsabhängigen Signal entspricht.

Durch den Übergang in den Frequenzbereich werden die enthaltenen Frequenzen des Signals sichtbar. Die integrale Fouriertransformation kann sowohl für periodische als auch für nicht periodische, Signale durchgeführt werden. Zu dem Signal $x(t)$ im Zeitbereich existiert die Fouriertransformierte $X(\omega)$ bzw. $X(f)$ im Frequenzbereich

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.38)$$

bzw.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i2\pi ft) dt. \quad (2.39)$$

Die Rücktransformation führt wieder zum originalen Signal

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (2.40)$$

bzw.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(i2\pi ft) df. \quad (2.41)$$

Diskrete Fouriertransformation

Für diskrete Signale, welche endlich lang sind, wird das Integral zu einer Summe, der diskreten Fouriertransformation (DFT). Ein Signal der Länge T , welches mit dem Zeitinkrement dt an N Werten abgetastet wird, hat demnach die DFT

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp\left(-i2\pi \frac{nk}{N}\right) \quad (2.42)$$

mit $n = 0..(N-1)$ und $df = \frac{1}{Ndt}$. Die nach dem Abtasttheorem maximale abgebildete Frequenz ist $f_{max} = \frac{1}{2dt}$. Dies entspricht einer Anzahl von $N/2$ Frequenzwerten. Aus N Abtastwerten in der Zeit können demnach maximal N Abtastungen in der Frequenz berechnet werden. Die Fourierwerte sind komplexwertig in der Form

$$X(n) = \Re\{X(n)\} + i \Im\{X(n)\}, \quad (2.43)$$

und so müssen zwei unbekannte Werte pro Frequenz bestimmt werden. Es gilt jedoch für ein reelles Zeitsignal

$$X(n) = X^*(-n), \quad (2.44)$$

so dass sich insgesamt N Frequenzwerte aus N Zeitwerten berechnen lassen, wovon $N/2$ unabhängige Werte sind und $N/2$ die zugehörigen konjugiert komplexen Werte.

Das Abtasten entspricht einer Multiplikation des kontinuierlichen Signals mit einem Impulskamm mit Abstand dt . Dies entspricht im Frequenzbereich einer Faltung mit einem Impulskamm mit Abstand $1/dt$. Dies bedeutet, dass das Abtasten des Signals im Zeitbereich eine periodische Fortsetzung der Fouriertransformierten im Frequenzbereich hervorruft. Für die Rücktransformation gilt entsprechend, dass die Abtastung im Frequenzbereich zu einer periodischen Fortsetzung des Zeitsignals führt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 2.1 noch einmal erläutert.

Die Rücktransformation erfolgt entsprechend mit

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp\left(i2\pi \frac{nk}{N}\right). \quad (2.45)$$

Eine ausführliche Behandlung findet man z.B. in [78].

Zweidimensionale diskrete Fouriertransformation

Die zweidimensionale diskrete Fouriertransformation (DFT2) ist ein Instrument, welches in der Bildverarbeitung häufig Verwendung findet. Die Fouriertransformation eines zweidimensionalen Signals $x(k, \ell)$ der Größe M, N kann mit der DFT2

$$X(m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x(k, \ell) \exp\left(-i2\pi \frac{mk}{M}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{n\ell}{N}\right) \quad (2.46)$$

für $m = 0..(M-1)$ und $n = 0..(N-1)$ berechnet werden. Für die Rücktransformation gilt

$$x(k, l) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} X(m, n) \exp\left(i2\pi \frac{mk}{M}\right) \exp\left(i2\pi \frac{n\ell}{N}\right). \quad (2.47)$$

Die Normierung mit \sqrt{MN} ist in der Bildverarbeitung verbreitet. Weitere Ausführungen zu diesem Thema können z.B. in [13] nachgelesen werden.

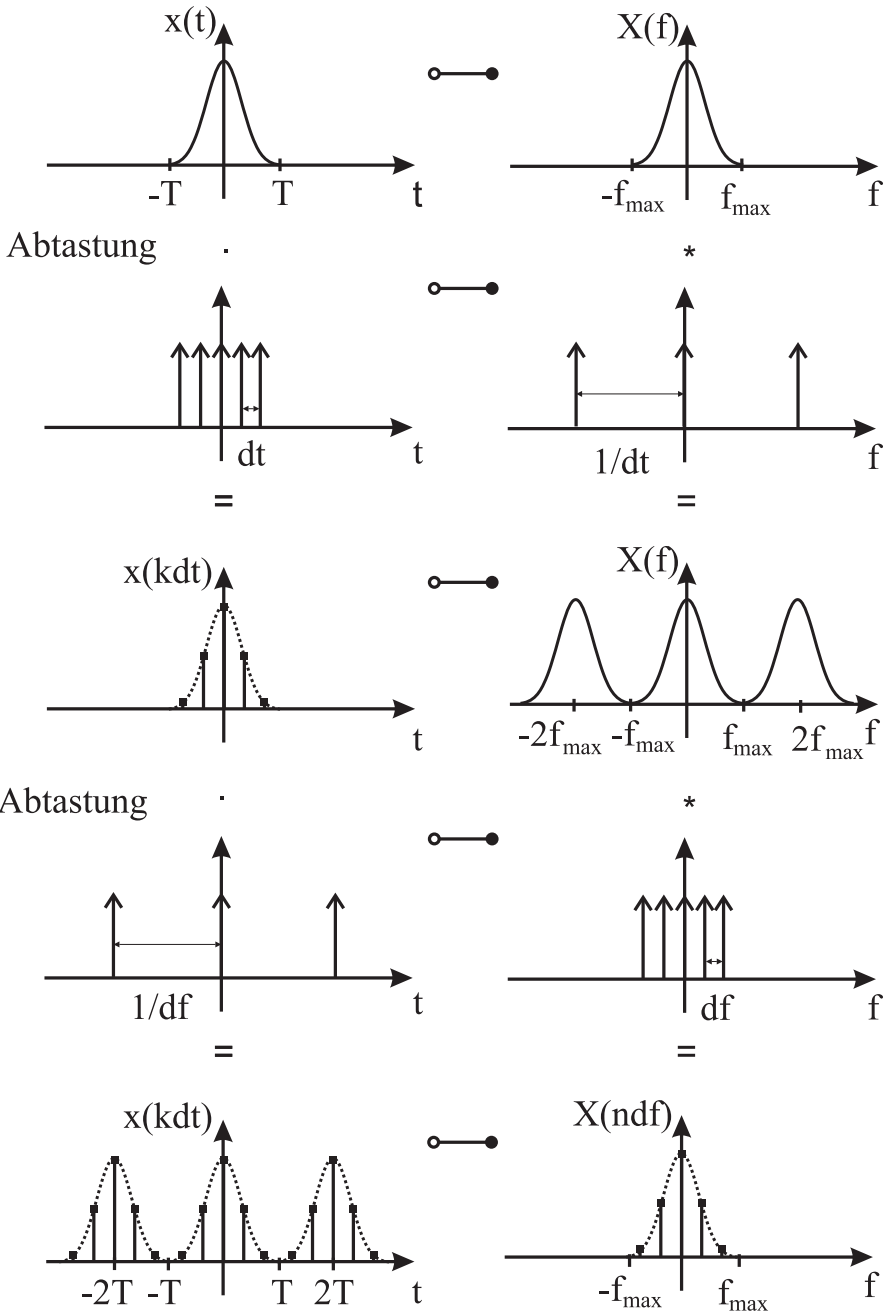


Abbildung 2.1: Fouriertransformation

2.3 Spektrale Darstellung

Eine Methode zur Generierung eines stochastischen Prozesses ist die Spektrale Darstellung. Einzelheiten können in [82] oder [28] nachgelesen werden. Diese Methode hat vielfältigen Einsatz zum Beispiel bei der Untersuchung von Mehrkörpersystemen, welche durch Wind angeregt werden [94]. Außerdem bei der Berechnung von örtlich verteilten Materialparametern [81] oder zur Beschreibung zufälliger Rauheiten von Oberflächen, z.B. der Straße [74].

Ein zeit- oder ortsabhängiger, normalverteilter, stochastischer Prozess kann für ein bekanntes Spektrum simuliert werden. Dabei wird eine Reihe aus harmonischen Funktionen mit zufälligen Phasen

$$x(t) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^N \sqrt{S_{xx}(f_i) \Delta f_i} \cos(2\pi f_i t + \psi_i). \quad (2.48)$$

entwickelt, wobei ψ_i eine gleichverteilte Zufallszahl im Intervall $[0, 2\pi]$ ist. f_i sind die gewählten Frequenzanteile und Δf_i ist der Abstand dieser Frequenzanteile. Bei äquidistanter Abtastung gilt daher $\Delta f_i = \Delta f = \text{konstant}$. Mit der Anzahl der Reihenglieder und damit Δf kann die Genauigkeit des Prozesses gesteigert werden. Um mittelwertfreie Prozesse zu generieren, ist die Länge des Prozesses auf $T = 1/\Delta f$ bzw. ganzzahlige Vielfache $k \cdot T$, beschränkt.

Für N-dimensionale Prozesse gilt äquivalent

$$x(t_1, t_2, \dots, t_N) = \sqrt{2} \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \dots \sum_{i_N=1}^{N_N} \sqrt{S_{xx}(f_{1i_1}, f_{2i_2}, \dots, f_{Ni_N}) \Delta f_1 \Delta f_2 \dots \Delta f_N} \cos(2\pi f_{1i_1} t_1 + 2\pi f_{2i_2} t_2 + \dots + 2\pi f_{Ni_N} t_N + \psi_{i_1} + \psi_{i_2}) \quad (2.49)$$

gemäß [82]. In dieser Arbeit werden ortsabhängige zweidimensionale Oberflächendaten $z(x, y)$ untersucht. Dafür gilt dann entsprechend

$$z(x, y) = \sqrt{2} \sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \sqrt{S_{xx}(f_{1i_1}, f_{2i_2}) \Delta f_1 \Delta f_2} \cos(2\pi f_{1i_1} x + 2\pi f_{2i_2} y + \psi_{i_1} + \psi_{i_2}). \quad (2.50)$$

2.4 Kontaktmechanik

Um Kontaktfläche und -kraft sowie die Reibkraft einer rauen Oberfläche zu berechnen, sind die Grundlagen der Kontaktmechanik Voraussetzung. Daher werden die in dieser Arbeit verwendeten Modelle der Kontaktmechanik hier kurz vorgestellt.

2.4.1 Hertz Modell

Kugel-Kugel Kontakt

HERTZ beschrieb in [35] den reibungsfreien Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern. Die Körper werden als Halbraum modelliert, was die Verwendung der *Boussinesq* Lösungen erlaubt. Zunächst wird der Kontakt zwischen zwei kugelförmigen Körpern hergeleitet, siehe Abbildung 2.2. Eine ausführliche Herleitung ist in [48] zu finden.

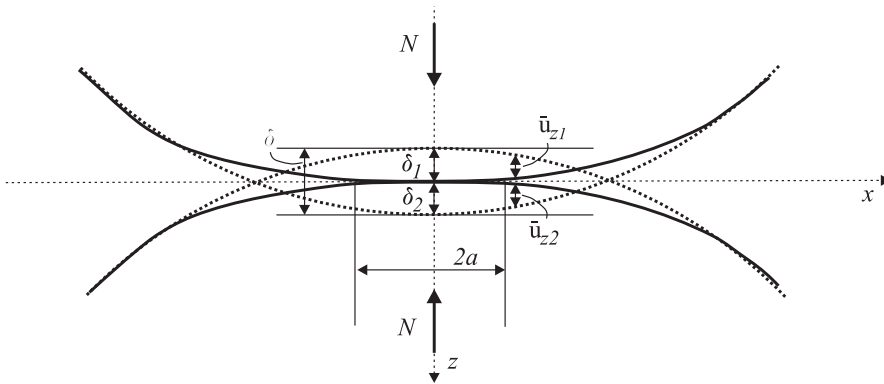


Abbildung 2.2: Kontakt zweier kugelförmiger Körper

Die Kontaktfläche ist kreisförmig mit Radius a , wie im folgenden anhand der Halbraumlösung für eine Punktlast auf einem Halbraum gezeigt wird. Eine Punktlast N in Normalrichtung auf einem elastischen Halbraum bewirkt in diesem die Verschiebungen

$$u_x = \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[\frac{xz}{r^3} - \frac{(1 - 2\nu)x}{r(r + z)} \right] N, \quad (2.51)$$

$$u_y = \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[\frac{yz}{r^3} - \frac{(1 - 2\nu)y}{r(r + z)} \right] N, \quad (2.52)$$

$$u_z = \frac{1 + \nu}{2\pi E} \left[\frac{z^2}{r^3} + \frac{2(1 - \nu)}{r} \right] N \quad (2.53)$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.54)$$

Durch Einsetzen von $z = 0$ ergibt sich die Verschiebung an der Oberfläche zu

$$\bar{u}_x = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} \frac{x}{r^2} N \quad (2.55)$$

$$\bar{u}_y = -\frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2\pi E} \frac{y}{r^2} N \quad (2.56)$$

$$\bar{u}_z = \frac{(1 + \nu)2(1 - \nu)}{2\pi E} \frac{1}{r} N \quad (2.57)$$

$$= \frac{(1 - \nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r} N \quad (2.58)$$

mit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.59)$$

Die Verschiebung in z -Richtung ist beim Kontakt die größte und damit die wichtigste, sie ist in Abbildung 2.3 zu sehen. Sie ist proportional zu $\frac{1}{r}$ und somit hyperbolisch. Sie ist maximal bei $r = 0$ und nähert sich asymptotisch $u_z = 0$.

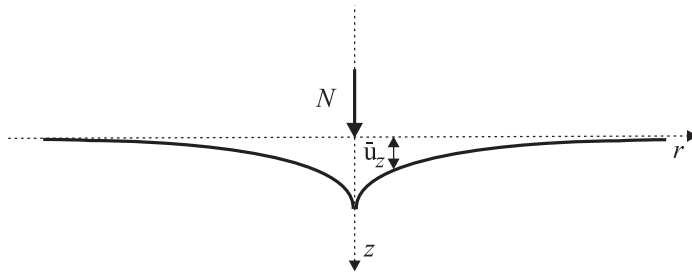


Abbildung 2.3: Punktlast auf Halbraum

Bei einer kontinuierlichen Verteilung der Normalkraft bzw. des Normaldrucks, welche an der Fläche S angreift, kann damit die Verschiebung an der Oberfläche durch

$$\bar{u}_z = \frac{1}{\pi E^*} \int_S \int p(x', y') \frac{dx' dy'}{r} \quad (2.60)$$

mit

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (2.61)$$

und

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (2.62)$$

oder alternativ in Polarkoordinaten s, φ

$$\bar{u}_z = \frac{1}{\pi E^*} \int_S \int p(s, \varphi) ds d\varphi. \quad (2.63)$$

berechnet werden. Bei der Druckverteilung

$$p(r) = p_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.64)$$

ergibt sich die Verschiebung

$$\bar{u}_z = \frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2). \quad (2.65)$$

Diese ist proportional zu r^2 , also nicht mehr hyperbolisch sondern quadratisch. Solch eine Druckverteilung entsteht, wenn zwei gekrümmte elastischen Körper, siehe Abbildung 2.2, miteinander in Kontakt stehen. Die Verschiebung an der Oberfläche im Kontakt ist durch

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \frac{1}{2\beta} r^2 \quad (2.66)$$

mit dem relativen Radius

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \quad (2.67)$$

gegeben. Bei zwei elastischen Körpern mit unterschiedlichen elastischen Materialparametern gilt

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (2.68)$$

Für den Sonderfall eines gekrümmten Körpers in Kontakt mit einem ebenem Körper entspricht der relative Radius dem des gekrümmten Körper, da $\beta_2 = \infty$. Bei der Annahme, dass eine starre Kugel in Kontakt mit einem ebenem Halbraum steht, gilt

$$\bar{u}_z = \delta - \frac{1}{2\beta} r^2 \quad (2.69)$$

wobei

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \quad (2.70)$$

zu nehmen ist, weil $E_2 \rightarrow \infty$.

Oben wurde gezeigt, dass eine Druckverteilung nach Gleichung (2.64) eine Verschiebung nach Gleichung (2.65) hervorruft. Die Verschiebung im Kontakt zweier gekrümmter Körper ist in Gleichung (2.66) bzw. (2.69) gegeben. Diese werden jetzt gleichgesetzt

$$\frac{\pi p_0}{4aE^*} (2a^2 - r^2) = \delta - \frac{1}{2\beta} r^2. \quad (2.71)$$

Durch Koeffizientenvergleich in Abhängigkeit der freien Variablen r , kann der Radius der Kontaktfläche a und die Eindringtiefe δ eliminiert werden

$$a = \frac{\pi p_0 \beta}{2E^*}, \quad (2.72)$$

$$\delta = \frac{\pi p_0}{2E^*}. \quad (2.73)$$

Daraus folgt

$$a^2 = \delta\beta. \quad (2.74)$$

Die resultierende Kraft dieser Druckverteilung kann über das Flächenintegral des Kontakts

$$N = \int_0^a p(r)2\pi r dr = \frac{2}{3}p_0\pi a^2 \quad (2.75)$$

berechnet werden. Damit kann der Kontaktradius abhängig von der Normalkraft, mit welcher die Körper aufeinander gepresst werden, ausgedrückt werden

$$a = \left(\frac{3N\beta}{4E^*}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.76)$$

Die zugehörige Kontaktfläche kann durch die Kreisfläche

$$A_c = \pi a^2 = \pi \left(\frac{3N\beta}{4E^*}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.77)$$

berechnet werden.

2.4.2 Greenwood-Williamson Modell

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, steigt die Kontaktfläche zweier gekrümmter Körper proportional zur Normalkraft hoch zwei Drittel. Diese Aussage widerspricht den Beobachtungen, dass die Reibkraft linear mit der Normalkraft wächst, da die Reibkraft direkt proportional zur Kontaktfläche angenommen wird. Eine Erklärung gaben GREENWOOD und WILLIAMSON in [31]. Die Grundidee besteht darin, dass ein Reibkontakt zwischen realen Flächen nie nur einen einzelnen Kontakt hat. Die Oberflächen mit ihren Mikrorauigkeiten stehen vielmehr an vielen Asperiten, welche unterschiedlichen Initialabstand haben, miteinander in Kontakt, siehe Abbildung 2.4. Es wird angenommen, dass die Asperiten nicht interagieren.

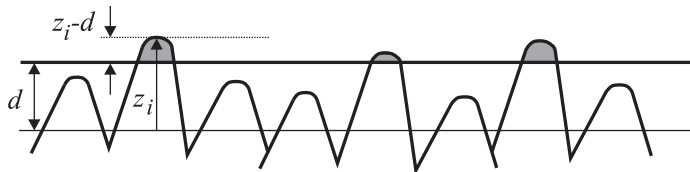


Abbildung 2.4: Raue Oberflächen in Kontakt

Jeder dieser Asperiten hat eine kugelförmige Kuppe, mit Radius $\bar{\beta}$. Eine raue Ebene wird mit einer glatten zueinander geführt, so dass d der Abstand der Referenzebenen ist. z ist die

Höhe der einzelnen Asperiten und $(z - d)$ ist daher die Eindringtiefe der Asperiten, welche in Kontakt stehen. Der Kontaktradius und damit die Kontaktfläche ist daher bestimmt durch

$$a_1^2 = \bar{\beta}(z - d), \quad (2.78)$$

$$A_1 = \pi a^2 = \pi \bar{\beta}(z - d). \quad (2.79)$$

Die Kraft, welche in jedem einzelnen Kontakt wirkt, ist

$$N_1 = \frac{4}{3} E^* \bar{\beta}^{\frac{1}{2}} (z - d)^{\frac{3}{2}}, \quad (2.80)$$

wobei

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (2.81)$$

gilt. Bei der Annahme, dass die Höhe der Asperiten stochastisch verteilt ist und diese Wahrscheinlichkeit mit $\phi(z)$ beschrieben wird, kann die Wahrscheinlichkeit, dass ein Asperit in Kontakt steht, durch

$$\text{prob}(z > d) = \int_d^\infty \phi(z) dz \quad (2.82)$$

berechnet werden. Bei einer Anzahl von K stochastisch unabhängigen Asperiten berechnet sich die geschätzte Anzahl der Kontakte zu

$$k = K \int_d^\infty \phi(z) dz. \quad (2.83)$$

Damit lässt sich die gesamte Kontaktfläche durch

$$A = \pi K \bar{\beta} \int_d^\infty (z - d) \phi(z) dz \quad (2.84)$$

und die gesamte Kraft durch

$$N = \frac{4}{3} K E^* \bar{\beta}^{\frac{1}{2}} \int_d^\infty (z - d)^{\frac{3}{2}} \phi(z) dz \quad (2.85)$$

beschreiben.

Als nächstes werden die Höhen abhängig von der Standardabweichung ihrer Verteilung ausgedrückt. $h = d/\sigma$ ist die normierte Distanz und ϕ^* ist die Verteilung der Höhe mit Standardabweichung gleich eins. Damit ergibt sich das Integral für die Kontaktfläche zu

$$A = \pi K \bar{\beta} \sigma \int_h^\infty (s - h) \phi^*(s) ds \quad (2.86)$$

und für die Kontaktkraft zu

$$N = \frac{4}{3}KE^*\bar{\beta}^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{3}{2}}\int_h^\infty (s-h)^{\frac{3}{2}}\phi^*(s)ds. \quad (2.87)$$

Für eine *Gauß*'sche Verteilung der Asperitenhöhen mit

$$\phi^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} \quad (2.88)$$

heißt das für die Kontaktfläche

$$A = \pi K\bar{\beta}\sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty (s-h)e^{-\frac{1}{2}s^2} ds \quad (2.89)$$

und für die Kontaktkraft

$$N = \frac{4}{3}KE^*\bar{\beta}^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_h^\infty (s-h)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds. \quad (2.90)$$

Diese Integrale können numerisch ausgewertet werden, und in [31] wird gezeigt, dass die Kontaktfläche linear mit der steigenden Kontaktkraft wächst. Damit ist der lineare Zusammenhang zwischen Normalkraft und Reibkraft, bei der davon ausgegangen wird, dass sie direkt proportional zur Kontaktfläche ist, gezeigt. Diese einfache Modellierung hat aber einige Beschränkungen. Zunächst kann eine Aussage über die Verteilung der Höhen nur bei ausreichend großer Anzahl von Asperiten in Kontakt getroffen werden. Außerdem rechnen GREENWOOD und WILLIAMSON mit einem konstanten Asperitenradius, was bei realen Oberflächen so nicht gegeben ist. Weiterhin wird die Annahme getroffen, dass die Asperiten nicht interagieren. Diese Aussage bleibt gültig, wenn sich die Eindringtiefe $z-d$ in der Größenordnung des Asperitenradius befindet. Trotz der vielen Vereinfachungen und Beschränkungen liefert das Modell eine gute Näherung für die Kontaktberechnung und die Idee, an jedem Kontaktpunkt einer rauen Mikroebene die *Hertz*'schen Annahmen zu nutzen, wird bis heute mit guten Ergebnissen verwendet.

2.4.3 Bowden-Tabor Modell

Mit dem *Hertz*'schen Modell lassen sich die Kontaktfläche und die Kontaktnormalkraft berechnen, mit dem *Bowden-Tabor* Modell wird ein Modell zur Berechnung der Reibkraft eingeführt. BOWDEN und TABOR beschreiben in [10] die Kontaktfläche A_c , welche eine harte Stahlkugel auf einer weichen Unterlage hinterlässt. Sie gehen davon aus, dass die Unterlage sich plastisch verformt. Abhängig von der Normallast N ist Kontaktfläche

$$A_c = \frac{N}{R_p}, \quad (2.91)$$

wobei R_p die Fließspannung des weicheren Materials bezeichnet. Als Ursachen für trockene Reibung beschreiben sie zwei Mechanismen, die Furchenbildung und das Abscheren lokaler

Metallbrücken. Diese zwei Mechanismen werden untersucht, indem "Reiter" mit verschiedenen Formen aus hartem Metall über eine glatte Oberfläche aus weichem Metall bewegt werden und die Reibkraft gemessen wird. Es wird beschrieben, dass die Reibkraft sich aus diesen beiden Anteilen additiv zusammensetzt

$$R = R_{Scher} + R_{Furch} \quad (2.92)$$

Der Anteil durch Furchenbildung P berechnet sich durch

$$R_{Furch} = A'_c \sigma'_p \quad (2.93)$$

wobei A'_c der Querschnitt der gefurchten Spur ist und σ'_p der mittlere Druck, der dem Verschieben des Reiters entgegen wirkt. Es wird angenommen, dass sich R'_p und R_p nicht bemerkenswert unterscheiden. Der Anteil des Abscherens wird durch

$$R_{Scher} = A_c \tau_{max} \quad (2.94)$$

beschrieben, wobei τ_{max} die maximale Scherspannung des weicheren Materials ist. Für bekannte Reiterformen können A_c bzw. A'_c berechnet werden, wobei A'_c als Querschnitt der gefurchten Spur der "Stirn" des Reiters entspricht und A_c der Projektion des Reiters. Es werden drei Reiter untersucht:

- ein Halbzylinder
- eine Halbkugel
- ein Halbzylinder ohne axiale Ausdehnung (sog. Spaten)

Sie haben jeweils den gleichen Durchmesser. Diese Reiter sind in Abbildung 2.5 zu sehen.

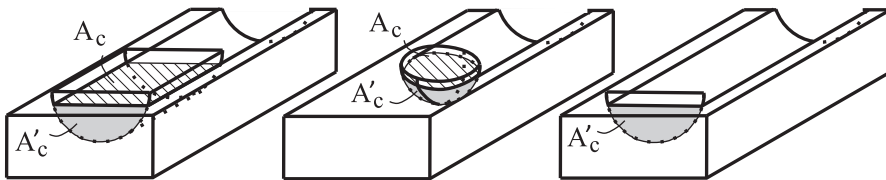


Abbildung 2.5: Reiter aus harten Metall auf Oberflächen aus weichem Metall

Für den Spaten ist der Scheranteil zu vernachlässigen, da die Ausdehnung gegen null geht. Damit kann der Scheranteil der Halbkugel und des Halbzylinders durch Subtraktion der Spatenkraft von der jeweiligen gemessenen Gesamtkraft berechnet werden. Es wird bestätigt, dass der Spaten die kleinste Reibkraft verursacht, der Zylinder die größte und die der Kugel sich dazwischen befindet.

Bei zwei harten Metallen in Kontakt gilt, dass der Furchenanteil vernachlässigt werden kann, da kein Eindringen auftritt. Damit folgt, da der Scheranteil der dominante ist und der Ansatz für trockene Reibung sich auf

$$R = A_c \tau_{max} \quad (2.95)$$

vereinfacht.

3 Kontaktsimulation

In den Grundlagen wird bereits gezeigt, dass die wahre Kontaktfläche eine große Rolle für die Berechnung des Reibwerts spielt. In diesem Kapitel wird vorgestellt, wie mit dem *Hertz*'schen Modell Kontaktfläche und -normalkraft und mit dem *Bowden-Tabor* Modell die Reibkraft einer rauen Oberfläche berechnet werden können. Aus der Normalkraft und der Reibkraft lässt sich dann der Reibwert ermitteln.

Es wird angenommen, dass die Asperiten kugelförmige Gipfel haben und die Verformung elastisch verläuft, was Voraussetzung für die Gültigkeit des *Hertz*'schen Modells ist. Es werden trockene Reibpaarungen untersucht, bei denen Adhäsion die Hauptursache für Reibung ist. Der Anteil der Furchenbildung kann vernachlässigt werden, wenn der Kontaktpartner aus weicherem Material die rauere Oberfläche besitzt, denn dann werden die Asperiten dieses Materials verformt [10].

Mit diesen Modellen kann der Reibwert abhängig von der mikroskopischen Oberflächenbeschaffenheit berechnet werden. Die Methode wird zunächst allgemein erläutert und dann an zwei beispielhaften Oberflächen benutzt.

3.1 Grundlagen

In diesem Kapitel wird die grundsätzliche Vorgehensweise zur Berechnung des Reibwerts von mikroskopisch vermessenen rauen Oberflächen erläutert. Zunächst wird dazu die Oberflächenbeschaffenheit untersucht.

3.1.1 Oberflächenanalyse

Die Rauigkeitsspitzen der Oberfläche können durch die Suche nach lokalen Maxima der Daten gefunden werden. Eine Spitze ist der höchste Punkt, wenn jeweils zwei Punkte links, rechts oben und unten niedrigere Werte haben. Die Höhe der Spitzen wird als $z_s(x_s, y_s)$ bezeichnet. Mit der Approximation zweiter Ordnung an den Spitzen (x_s, y_s)

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \Big|_{(x_s, y_s)} \tag{3.1}$$

kann über den Kehrwert der Gipfelradius $\beta = \frac{1}{\kappa}$ genähert werden.

3.1.2 Rekonstruktion der Oberfläche durch Spektraldarstellung

Die gemessenen Oberflächendaten liefern nur Information über einen kleinen Ausschnitt. Um viele ähnliche Oberflächen untersuchen zu können, werden diese mithilfe der Spektraldarstellung vervielfältigt. Die Oberfläche z der Größe $M \times N$ wird durch die zweidimensionale diskrete Fourier Transformation (DFT2) charakterisiert, welche durch die Gleichung

$$Z^*(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} z(k, \ell) \exp\left(-i2\pi \frac{mk}{M}\right) \exp\left(-i2\pi \frac{n\ell}{N}\right) \quad (3.2)$$

bestimmt wird. Diese wird zunächst mit $\frac{1}{\sqrt{MN}}$ normiert,

$$Z(m, n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} Z^*(m, n), \quad (3.3)$$

siehe Abbildung 3.1a. In Abbildung 3.1b ist der zweidimensionale Verlauf bei $f_x = 1\Delta f_x$ zu sehen. Bei $f = 0$ steht der Gleichanteil des Signals. Die maximale Wellenlänge bzw. kleinste auflösbare Wegfrequenz Δf_y ist durch die Größe der Oberfläche bestimmt. Diese hat die größte Amplitude. Die kleineren Wellenlängen sind annähernd gleichanteilig.

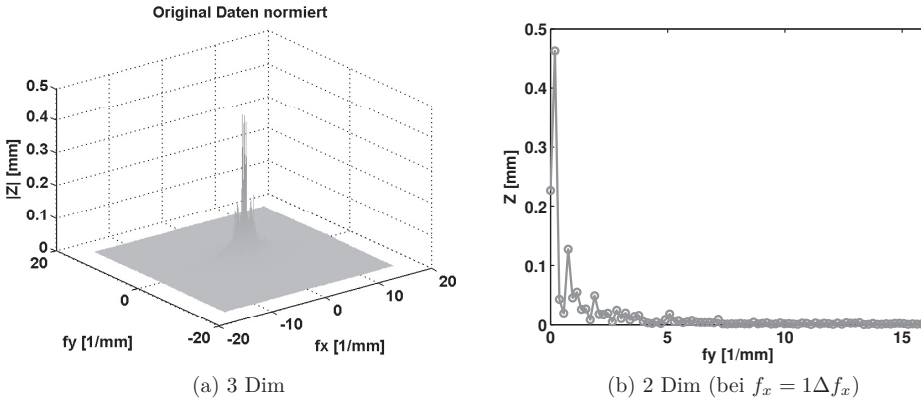


Abbildung 3.1: DFT2 der Oberfläche

Die DFT2 besteht aus einer Matrix der Beträge $|Z(m, n)|$ und einer der Phasen $Z_\varphi(m, n)$, welche im Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichverteilt sind. Zur stochastischen Auswertung werden ähnliche Oberflächen erzeugt, indem die DFT2 durch

$$Z_0(m, n) = |Z(m, n)| e^{iZ_\xi(m, n)} \quad (3.4)$$

ersetzt wird, wobei $|Z(m, n)|$ die Amplitudenmatrix der originalen DFT2 ist und $Z_\xi(m, n)$ eine Matrix der Größe $(m \times n)$, besetzt mit gleichverteilten Zufallszahlen im Intervall $[-\pi, \pi]$. $Z_0(m, n)$ wird zunächst "rücknormiert"

$$Z_0^*(m, n) = \sqrt{MN} Z_0(m, n) \quad (3.5)$$

und anschließend rücktransformiert, wodurch eine ähnliche raue Oberfläche der Größe $(m \times n)$ mit dem gleichen Amplitudenspektrum entsteht.

Wenn eine raue Oberfläche mit längeren Ausmaßen erzeugt werden soll, kann dies durch eine feinere Diskretisierung im Frequenzbereich erreicht werden, siehe Kapitel 2.2 oder [78], [13] u.s.w.. Da keine zusätzliche Information für eine feinere Diskretisierung zur Verfügung steht, muss zwischen den bekannten Werten interpoliert werden. Durch die Normierung zwischen $f_0 = 0$ Hz und $f_1 = 1\Delta f$ werden längere Wellenlängen mit in das Signal aufgenommen, welche in der originalen Oberfläche nicht zu finden sind. Da die Amplitude aber kleiner als der Maximalwert ist und zudem bei der Kontaktauswertung die großen Wellenlängen keinen Einfluss haben, wie anhand der Beispiele gezeigt wird, ist der so entstandene Fehler nicht erheblich. Es wird eine Amplitudenmatrix $|Z_1|$ erzeugt, z.B. der Größe $(m \times \ell)$ mit $\ell > n$. Die zufällige Phasenmatrix $Z_{1\xi}$ muss jetzt auch die Größe $(m \times \ell)$ haben. Vor der Rücktransformation muss nun die "Rücknormierung" mit der neuen Matrizengröße

$$Z_1^*(m, \ell) = \sqrt{ML}|Z_1(m, \ell)|e^{iZ_{1\xi}(m, \ell)}. \quad (3.6)$$

durchgeführt werden. Durch eine anschließenden Rücktransformation entsteht eine raue Oberfläche mit gleichem Amplitudenspektrum der Größe $(m \times \ell)$. Der gesamte Vorgang ist noch einmal schematisch in Abbildung 3.2 zu sehen.

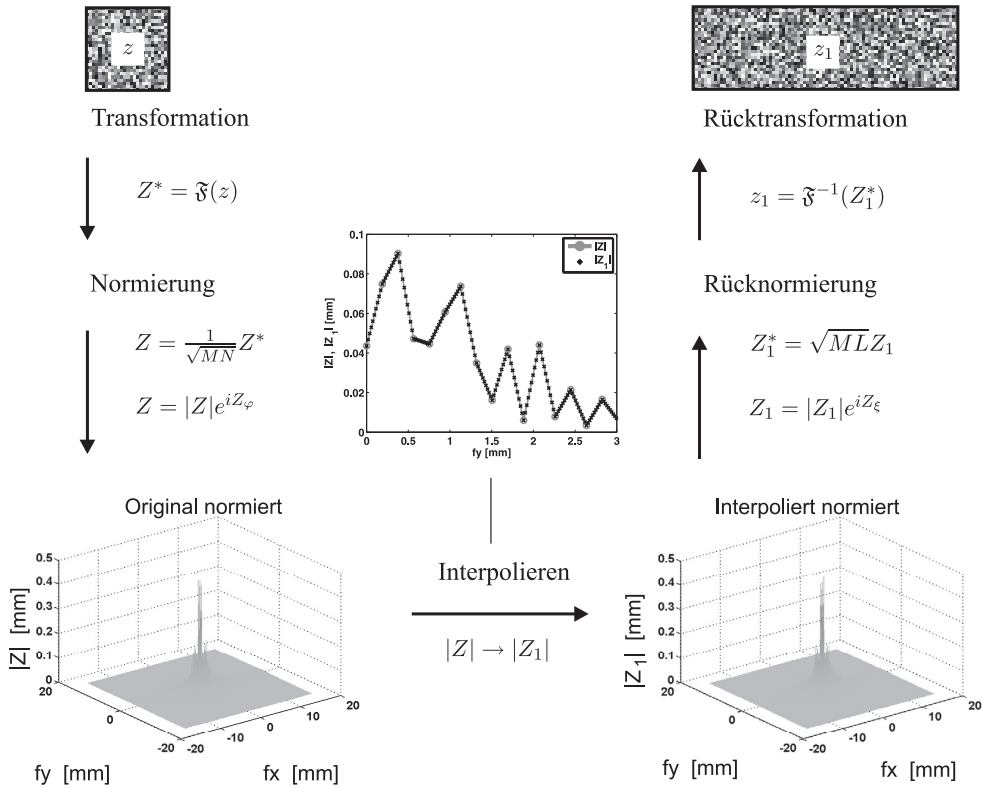


Abbildung 3.2: Schema Oberflächenvervielfältigung

Die Oberfläche eines in y -Richtung mit 9 Zwischenpunkten interpolierten Amplitudenmatrix ist in Abbildung 3.3 zu sehen.

3.1.3 Kontaktanalyse

Für diese stochastisch ähnlichen Oberflächen wird eine Kontaktanalyse, durchgeführt um die Kontaktfläche, -normalkraft und Reibkraft zu bestimmen. Für das *Hertz'sche* Modell ist Voraussetzung, dass die Verformung elastisch ist. Ob der Kontakt elastisch oder plastisch ist, kann durch den Plastizitätsindex gezeigt werden, welcher sich durch

$$\gamma = \frac{E^*}{H} \sqrt{\frac{\sigma_S}{\bar{\beta}}} \quad (3.7)$$

berechnet. E^* ist dabei der relative Elastizitätsmodul zweier Materialien in Kontakt, H beschreibt die Härte des Materials und berechnet sich aus dessen Fließspannung R_p mit $H = 5.6R_p$, σ_S ist die Standardabweichung der Asperitenhöhen z_s und $\bar{\beta}$ der mittlere

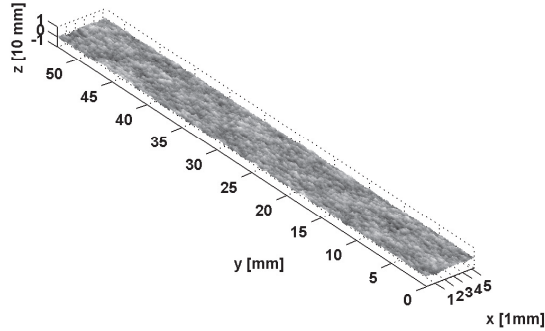


Abbildung 3.3: Beispiel einer verlängerten erzeugten Oberfläche

Asperitenradius. Ist $\gamma < 0.6$, ist die Verformung größtenteils elastisch, ist $\gamma > 1$, ist sie größtenteils plastisch [9].

Wenn der Plastizitätsindex ergibt, dass die Verformung elastisch verläuft und die Asperiten eine kugelförmige Form haben, deren Radius β mit Gleichung (3.1) angenähert werden, können für alle Asperiten in Kontakt, bei einer gegebenen Deformation d_i , die Kontaktfläche

$$A_{ci} = \pi d_i \beta_i \quad (3.8)$$

und die Kontaktkraft

$$N_i = \frac{4}{3} E^* \sqrt{\beta_i d_i^3} \quad (3.9)$$

mit dem relativen Elastizitätsmodul

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E2} \quad (3.10)$$

berechnet werden.

In den beiden Beispielen ist ein Kontaktpartner um viele Größenordnungen weicher und rauher als der andere. Daher wird für die Kontaktanalyse angenommen, dass die elastische raue Oberfläche gegen eine glatte starre Fläche gedrückt wird. Auf den Starrkörper wird eine Verschiebung u aufgebracht, welche am höchsten Asperiten startet, siehe Abbildung 3.4.

Die einzelnen Verformungen der Asperiten können mit

$$d_i = z_i - (z_{max} - u) \quad (3.11)$$

berechnet werden. Die gesamte Kontaktfläche und -kraft ermittelt sich aus der Summe aller in Kontakt stehenden Asperiten

$$A_c = \sum A_{ci} = \sum \pi d_i \beta_i, \quad (3.12)$$

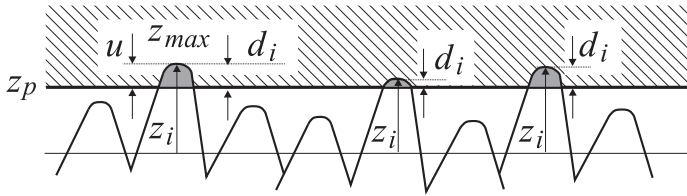


Abbildung 3.4: Kontakt Berechnung Hertz

$$N = \sum N_i = \sum \frac{4}{3} E^* \sqrt{\beta_i d_i^3}. \quad (3.13)$$

Der Kontaktdruck p entspricht

$$p = N/A_{nom}, \quad (3.14)$$

wobei A_{nom} , die nominale Fläche ist.

Die Reibkraft kann mit dem *Bowden-Tabor* Ansatz durch

$$R = A_c \tau_{max} \quad (3.15)$$

berechnet werden. Diese hängt damit von der Kontaktsimulation und der materialabhängigen maximalen Scherspannung ab.

Der Reibwert kann dann aus der Reibkraft und der Kontaktnormalkraft mit

$$\mu = \frac{A_c \tau_{max}}{N} \quad (3.16)$$

bestimmt werden. Er ist ebenfalls vom Material und der Oberflächenbeschaffenheit abhängig.

3.1.4 Statistische Kontaktanalyse

Mittelwert und Standardabweichung

Anschließend wird die Kontaktanalyse an den erzeugten, stochastisch ähnlichen Oberflächen durchgeführt. Als erste Auswertung werden mehrere Oberflächen, so genannte Realisierungen, mit Originalgröße erzeugt. Für jede Realisierung wird für verschiedene Starrkörperverschiebungen u die Kontaktfläche und Kontaktkraft berechnet und daraus mit dem *Bowden-Tabor* Ansatz der Reibwert ermittelt.

Eine weitere Möglichkeit den Mittelwert und die Standardabweichung zu berechnen, besteht darin, eine lange Oberfläche, wie oben beschrieben, zu erzeugen und abschnittsweise die Kontaktanalyse durchzuführen. Dies setzt Stationarität voraus, was durch die

benutzte Methode der Oberflächenerzeugung gegeben ist. Eine Realisierung ist ein Abschnitt von der Größe der originalen Oberfläche. Die Realisierung wird um den Abstand a_y , welche der Länge der originalen Oberfläche entspricht, über die lange Fläche geschoben, wie schematisch in Abbildung 3.5 dargestellt.

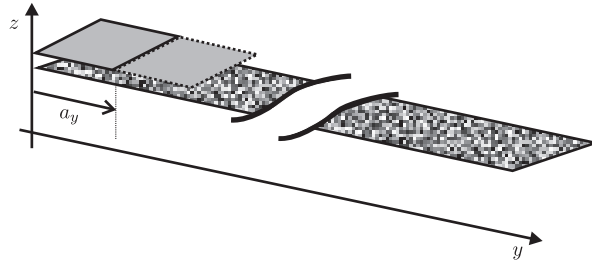


Abbildung 3.5: Verschiedene Realisierungen durch Verschiebung der zu analysierenden Fläche

Leistungsdichtespektrum und Autokorrelationsfunktion

Mit dieser Methode können weitere stochastische Kenngrößen, wie das Leistungsdichtespektrum und die Autokorrelationsfunktion berechnet werden. Dazu wird die zu untersuchende Realisierung wieder um a_y weiter geschoben. Jetzt ist a_y aber nur ein Bruchteil der Originallänge, siehe Abbildung 3.6.

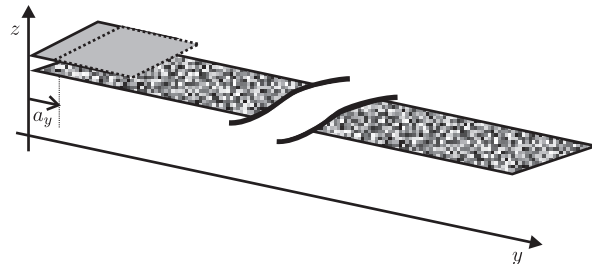


Abbildung 3.6: Verschiebung der Realisierung zur Berechnung z.B. des Spektrums

So wird der Reibwert abhängig von y berechnet. Zur Bestimmung der Autokorrelation wird zunächst der Reibwert so normiert, dass er mittelwertfrei ist und eine Standardabweichung von eins hat

$$\bar{\mu}(y, \xi) = \frac{\mu(y, \xi) - E[\mu]}{\sigma_\mu} \quad (3.17)$$

Damit kann dann die Autokorrelation

$$R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}(y_1, y_2, \xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_{1i}(y_1, \xi) \bar{\mu}_{2i}(y_2, \xi)) \quad (3.18)$$

geschätzt werden.

Eine weitere wichtige Charakterisierung eines stochastischen Prozesses ist das Leistungsdichtespektrum. Es kann, wie in Abschnitt 2.1.2 und 2.1.3 beschrieben, entweder nach der *Wiener-Chintchin* Beziehung als Fouriertransformation der Autokorrelation oder durch das Quadrat der Fouriertransformation des Originalprozesses, berechnet werden. Hierzu wird der mittelwertfreie, aber nicht standardnormalverteilte Prozess

$$\hat{\mu}(y, \xi) = \mu(y, \xi) - E[\mu(y, \xi)] \quad (3.19)$$

betrachtet. Damit ist das Leistungsdichtespektrum

$$S_{\hat{\mu}\hat{\mu}} = \mathfrak{F}[\hat{\mu}(y, \xi)] \overline{\mathfrak{F}[\hat{\mu}(y, \xi)]}, \quad (3.20)$$

wobei $\overline{\mathfrak{F}[\hat{\mu}(y, \xi)]}$ der konjugiert komplexe Anteil ist.

3.2 Beispiel Bremsbelag

Als ein erstes praktisches Beispiel werden die Oberflächendaten eines abgenutzten Bremsbelages untersucht. Die Daten wurden mit einem Weisslicht-Interferometer auf einer Fläche von $A_{nom} = 5.3 \times 5.3 \text{ mm}^2$ mit $n = 1700 \times 1700$ Datenpunkten, von Herrn Prof. Willner von der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, berührungslos aufgenommen.

3.2.1 Oberflächenanalyse

Zunächst muss das Messrauschen herausgefiltert werden. Dies wird mit einem median filter (Matlab `median2`, `filtradius=5`) [2], welcher oft in der Bildverarbeitung verwendet wird, umgesetzt. Die gefilterte Oberfläche ist in Abbildung 3.7 zu sehen.

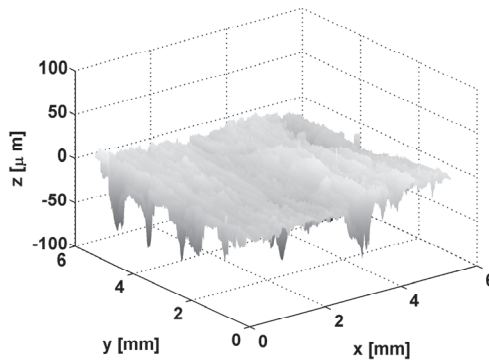


Abbildung 3.7: Gefilterte Oberflächendaten des Bremsbelages

In einem weiteren Schritt, wird anschließend die Datenmenge durch eine gröbere Diskretisierung verringert. In Abbildung 3.8 wird nur jeder zehnte Datenpunkt benutzt.

Dadurch verschwinden die feinsten Rauigkeiten und die nächste Rauigkeitsskala wird zu derjenigen für den Kontakt relevanten. Dies ist physikalisch sinnvoll, da die Rauigkeiten der kleinsten Skala beim ersten Kontakt plastisch verformt werden und miteinander verschmelzen. Auf der nächsten Rauigkeitsskala ist der Kontakt elastisch und die Annahme, dass die Spitzen nicht interagieren ist bei niedrigen Anpressdrücken gegeben. In Abbildung 3.9a und 3.9b ist zu sehen, dass durch die gröbere Diskretisierung das grundsätzlichen Aussehen der Oberfläche erhalten bleibt. In Abbildung 3.10a und 3.10b sind die Wahrscheinlichkeitsdichten aller Oberflächenwerte z und der Spitzen z_s zu sehen, auch hier führt die grobe Diskretisierung zu keiner sichtbaren Veränderung.

Lediglich in Abbildung 3.10c, der Wahrscheinlichkeitsdichte der Gipfelradien β , sieht man, dass diese sich vergrößern, welches den oben beschriebenen Effekt der plastischen Verformung widerspiegelt.

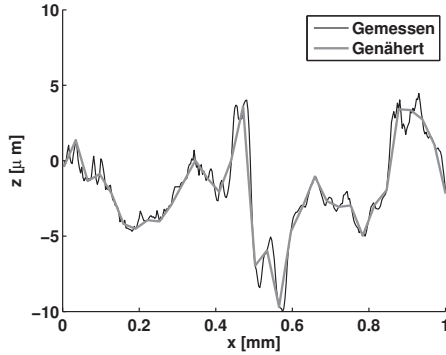


Abbildung 3.8: Größere Diskretisierung der Daten bei $y = 1\Delta y$

Das die grob diskretisierte Oberfläche sich elastisch verformt, kann durch den Plastizitätsindex gezeigt werden, welcher sich nach Gleichung (3.7) berechnen lässt. Für den Bremsbelag, der aus einer Vielzahl von Komponenten besteht, ist es sehr schwer Materialparameter zuverlässig zu bestimmen. Die Werte von E^* und R_p sind daher mit Ungewissheit belastet. Die Hauptbestandteile sind Eisenoxid mit Graphit Einlagerungen. Die Fließspannung von Eisenoxid liegt bei $R_p = 305$ MPa, die von Graphit bei $R_p = 35$ MPa. Als eine Abschätzung nach oben wird für die Berechnung des Plastizitätsindex das härtere der beiden, nämlich Eisenoxid benutzt.

Wenn die Bremsenoberfläche gegen eine glatt und starr angenäherte Bremsscheibe gedrückt wird, ergeben sich die Werte aus Tabelle 3.1.

Tabelle 3.1: Materialwerte Bremsbelag für Plastizitätsindex

E_1 [GPa]	ν_1	E_2 [GPa]	ν_2	E^* [GPa]	R_p [MPa]	H [MPa]
1.0	0.3	∞	0.3	1.1	305	1708

Damit errechnet sich der Plastizitätsindex für die gemessenen Daten zu $\gamma = 0.35$, für die grob diskretisierten zu $\gamma_{grob} = 0.1$. Damit liegen die grob diskretisierten Daten eindeutig im elastischen Bereich.

Zu erwähnen sind andere Methoden, um die Oberfläche nach der ersten plastischen Verformung zu berechnen, welche Volumenerhalt und andere Bedingungen erfüllen, siehe z.B. [45] und [93]. Hierbei werden die Asperiten als Balken modelliert. Es wird zunächst ermittelt, welche Asperiten plastisch verformt werden und um wie viel sich ihre Höhe ändert. Die Energie, welche benötigt wird, um die Asperiten zu verformen, wird anschließend genutzt um Täler bzw. Asperiten, die nicht in Kontakt stehen, zu erhöhen. Es kann der Fall

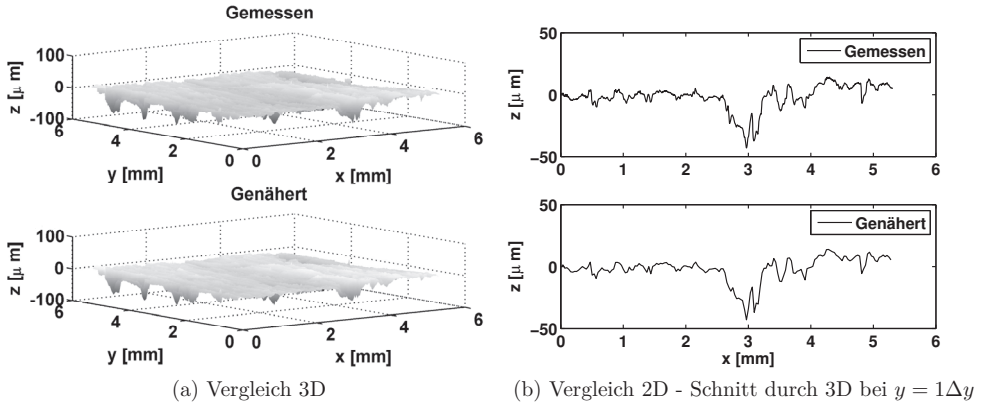


Abbildung 3.9: Vergleich Oberflächendiskretisierung Bremse

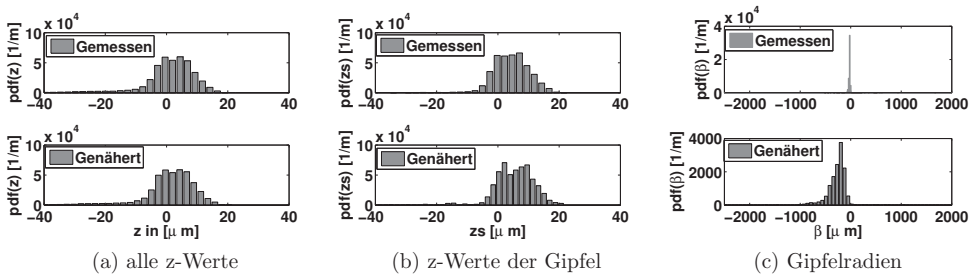


Abbildung 3.10: Vergleich Wahrscheinlichkeitsdichten

auftreten, dass durch das Anheben nun Asperiten zusätzlich in Kontakt treten und die Erhöhung nicht komplett durchgeführt werden kann. Diese Differenz wird wiederum in anderen Tälern addiert. So ergibt sich iterativ die neue Oberfläche.

Die hier genutzte Methode der größeren Diskretisierung ist jedoch einfacher und schneller. Daher wird im Weiteren die Kontaktanalyse des Bremsbelages mit den grob diskretisierten Oberflächendaten und der Annahme, dass die Verformung elastisch ist, durchgeführt.

3.2.2 Kontaktanalyse

Die Kontaktanalyse wird, wie in Abschnitt 3.1.3 eingeführt, für diese Oberfläche durchgeführt. Die nominelle Fläche des vermessenen Bremsbelages ist $A_{nom} = 5.3 \times 5.3 \text{ mm}^2$. Das Material eines Bremsbelages ist, wie in Abschnitt 3.2.1 bereits erwähnt, eine komplizierte Mischung aus Matrix und Additiven, was es schwierig macht verlässliche Materialparameter zu bestimmen. Hier wurde der Elastizitätsmodul sowie die Querkontraktionszahl gemäß [39] benutzt. Die maximale Scherspannung der Asperiten $\tau_{max} = \frac{R_p}{\sqrt{3}}$ wird aus der Streckgrenze R_p der Graphit Additiven berechnet. Das Graphit wird abgerieben und agiert als Schmierstoff zwischen den Reibpartnern [19], daher werden seine Materialparameter als die für die Scherung relevanten angesehen. Die Materialdaten der Reibpaarung sind in Tabelle 3.2 angegeben.

Tabelle 3.2: Materialwerte Bremsbelag für Kontaktberechnung

E_1 [GPa]	ν_1	E_2 [GPa]	ν_2	E^* [GPa]	τ_{max} [MPa]
1.0	0.3	∞	0.3	1.1	35

Für die Starrkörperverschiebungen $u = 1 \mu\text{m}$ bis $u = 12 \mu\text{m}$ ist in Abbildung 3.11a die Kontaktfläche A_c zu sehen. Der Kontaktdruck p und die Anzahl der Kontaktpunkte sind in Abbildung 3.11b und 3.11c gezeigt. Der Reibwert μ ist in Abbildung 3.11d dargestellt. Der Reibwert stimmt gut mit Messungen [11] und anderen Simulationen [19] überein.

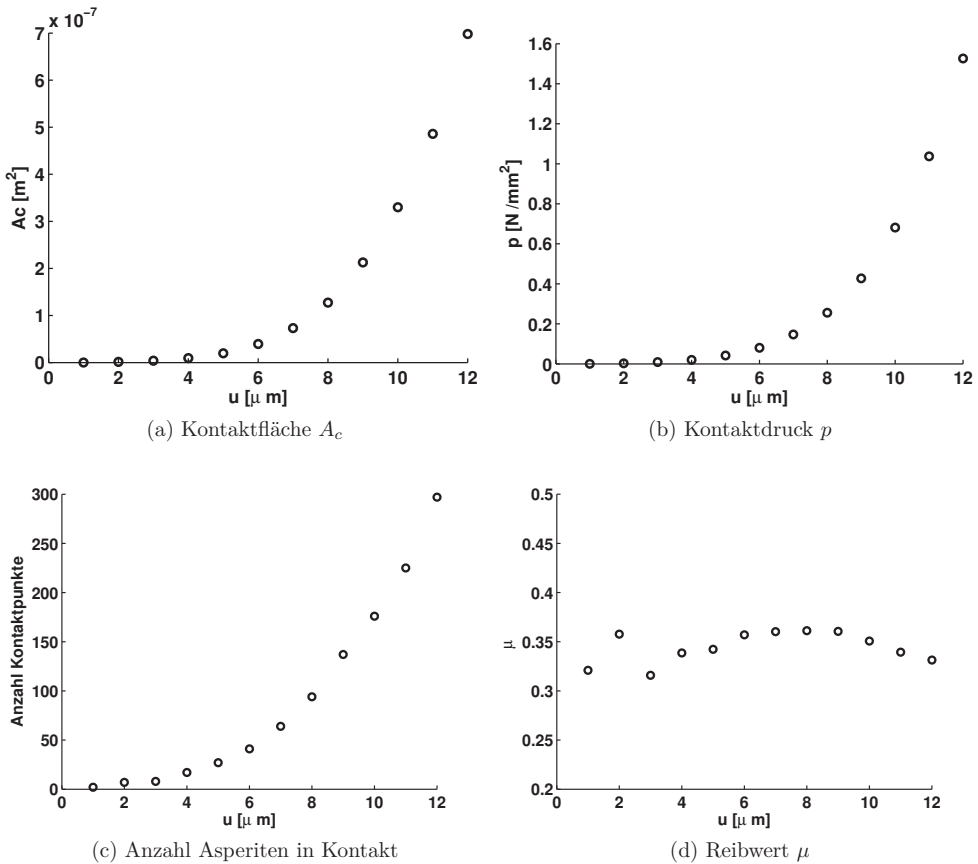


Abbildung 3.11: Ergebnisse Kontaktberechnung

Vergleich mit Finite Elemente Methode (FEM)

Zur Validierung der Kontaktberechnung wird eine einfache statische Finite-Elemente-Methode (FEM) Rechnung mit ABAQUS [1] durchgeführt. Der Ausschnitt des Bremsbelages wird als ein elastischer Körper mit den Abmaßen $5.3 \times 5.3 \times 1 \text{ mm}^3$ modelliert, mit der groben Diskretisierung der gemessenen Daten vernetzt und anschließend die Oberflächenknoten um die gemessenen Oberflächenwerte verschoben. Der Körper wird mit dreidimensionalen würfelförmigen Volumenelementen mit 8 Knoten (C3D8R) mit den Materialparametern aus Tabelle 3.2 modelliert. Kontaktpartner ist ein Starrkörper der gleichen Größe mit ebener Oberfläche, welcher fest eingespannt ist. Der gesamte Aufbau ist in Abbildung 3.12 zu sehen. Der elastische Körper wird zunächst soweit verschoben, bis der erste Knoten in Kontakt tritt. Anschließend wird der elastische Körper durch eine Starrkörperverschiebung auf den Starrkörper gedrückt. Die translatorischen Freiheitsgra-

de parallel zur Ebene sowie die Drehfreiheitsgrade werden unterdrückt. Die verformte Oberfläche bei einer Starrkörperverschiebung von $u = 1 \mu\text{m}$ ist in Abbildung 3.13a, für $u = 12 \mu\text{m}$ in Abbildung 3.13b zu sehen. Die dunklen Bereiche sind die, welche in Kontakt stehen und dadurch Verformungen und Spannungen erfahren.

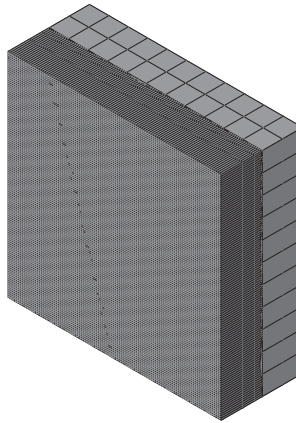
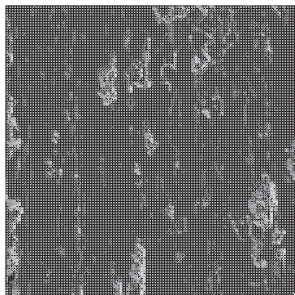
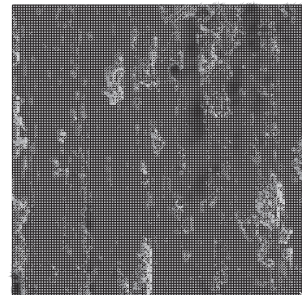


Abbildung 3.12: FEM Berechnung



(a) $u = 1 \mu\text{m}$



(b) $u = 12 \mu\text{m}$

Abbildung 3.13: Kontaktfläche FEM

Die gesamte Kontaktfläche und die Kontaktkraft können vom FEM-Programm ausgegeben werden. Die Kraft wird in Druck umgerechnet und mit den analytischen berechneten Werten verglichen, siehe Abbildung 3.14a und 3.14b. Bei einer Netzgröße, die den grob diskretisierten Werten der Messung entsprechen, fällt auf, dass der Druck größtenteils übereinstimmt, die Kontaktfläche jedoch vom FEM-Programm zu groß berechnet wird.

Der Grund hierfür ist, dass zur Berechnung der Kontaktfläche ermittelt wird, welche Knoten in Kontakt stehen und dann die Fläche des gesamten zugehörigen Elementes zu Kontaktfläche addiert wird [1]. Dies führt bei einem zu groben Netz zu einer Überschätzung der Kontaktfläche. Um dies zu zeigen, wird eine weitere FEM-Berechnung mit einem doppelt so feinen Netz durchgeführt. Es wird immer zwischen zwei benachbarten Knoten linear interpoliert. Ebenfalls in Abbildung 3.14a und 3.14b ist zu sehen, dass die Kontaktfläche so näher an der analytischen Lösung liegt und nur noch bei großen Verschiebungen überschätzt wird.

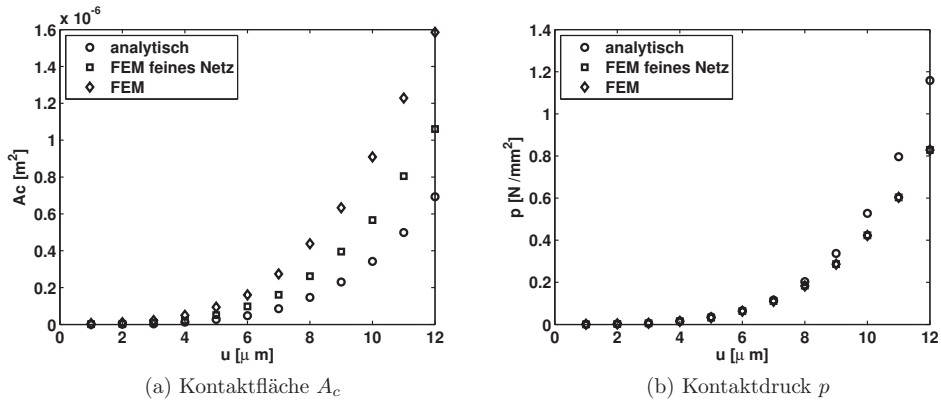
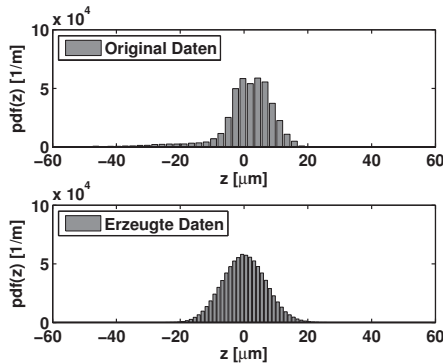


Abbildung 3.14: Vergleich FEM - analytisch

3.2.3 Rekonstruktion der Oberfläche durch Spektraldarstellung

Zur statistischen Auswertung werden jetzt, wie in Abschnitt 3.1.2 vorgestellt, viele stochastisch ähnliche Oberflächen erzeugt. Das normierte Histogramm aller z -Werte der originalen Oberfläche ist in Abbildung 3.15 gezeigt. Jede erzeugte Oberfläche hat durch die Spektraldarstellung eine symmetrische Normalverteilung. Die originale Oberfläche weist tiefe Furchen auf, durch welche die Verteilung leicht unsymmetrisch wird. Die in Kontakt tretende positive Flanke hat die Form einer Normalverteilung. Die Furchen werden aber nie in Kontakt treten, daher ist der Unterschied der beiden Verteilungen im negativen z -Bereich nicht von Bedeutung.

Abbildung 3.15: Vergleich Wahrscheinlichkeitsdichte von z

3.2.4 Statistische Kontaktanalyse

Mittelwert und Standardabweichung

Als erste Auswertung werden mehrere Oberflächen, so genannte Realisierungen, in Originalgröße erzeugt und jeweils eine Kontaktanalyse durchgeführt. Für jede Realisierung wird für verschiedene Starrkörperverschiebungen u die Kontaktfläche und Kontaktkraft berechnet und daraus mit dem *Bowden-Tabor* Ansatz der Reibwert ermittelt. Für 100 Realisierungen ist dieser in Abbildung 3.18a zu sehen. Sowohl der Mittelwert als auch die Standardabweichung sinken zunächst leicht mit steigendem u und nähern sich dann einer konstanten Sättigung. Dies entsteht durch den Übergang von der *Hertz'schen* Lösung ($A \propto p^{2/3}$), die für einen bzw. wenige Kontaktpunkte gilt, hin zur *Greenwood-Williamson* Lösung ($A \propto p$), wenn viele Punkte in Kontakt stehen. Die mittlere Kontaktfläche bei $u = 12 \mu\text{m}$ ist mit $A_c = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ immer noch nur ein Bruchteil der nominellen Fläche $\frac{A_c}{A_{nom}} = 0.07$. Die Wahrscheinlichkeitsdichten des Reibwerts μ für 500 Realisierungen für $u = 2 \mu\text{m}$, $u = 6 \mu\text{m}$ und $u = 12 \mu\text{m}$ sind in den Abbildungen 3.16 zu sehen. Bei $u = 6 \mu\text{m}$ herrscht niedriger Anpressdruck $p = 0.05 \text{ MPa}$ bei $u = 12 \mu\text{m}$ mittlerer $p = 0.4 \text{ MPa}$. Ausreißer entstehen, wenn die Annahme, dass die Asperiten nicht interagieren, verletzt wird. Dies führt zu einer größeren Kontaktfläche und damit auch zu einem fehlerhaft großen Reibwert. Diese Ausreißer führen dazu, dass die Standardabweichung für größere u leicht überschätzt wird, was in Abbildung 3.16c die verbreiterte Kurve verursacht.

In Abbildung 3.17 ist für die 100 ausgewerteten Flächen der Mittelwert des Anteils der Kontaktfläche zur nominellen Fläche über dem Mittelwert des Kontaktdrucks $p = \frac{E[N]}{A_{nom}}$ aufgetragen. Diese Darstellung zeigt, dass sich ein linearer Zusammenhang zwischen Normalkraft und Reibkraft ergibt.

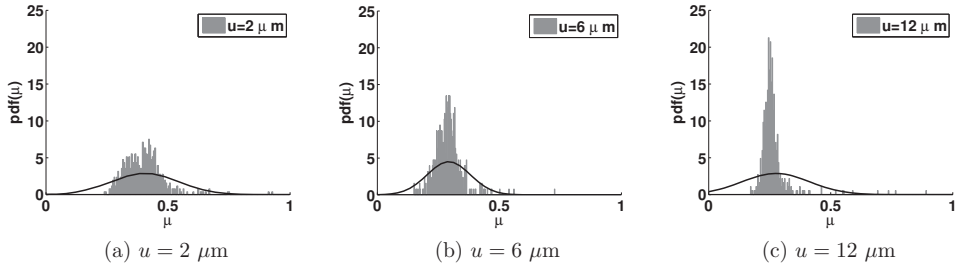


Abbildung 3.16: Wahrscheinlichkeitsdichte des Reibwerts, 500 einzelne Realisierungen

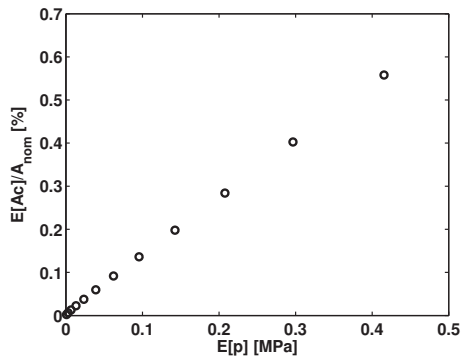
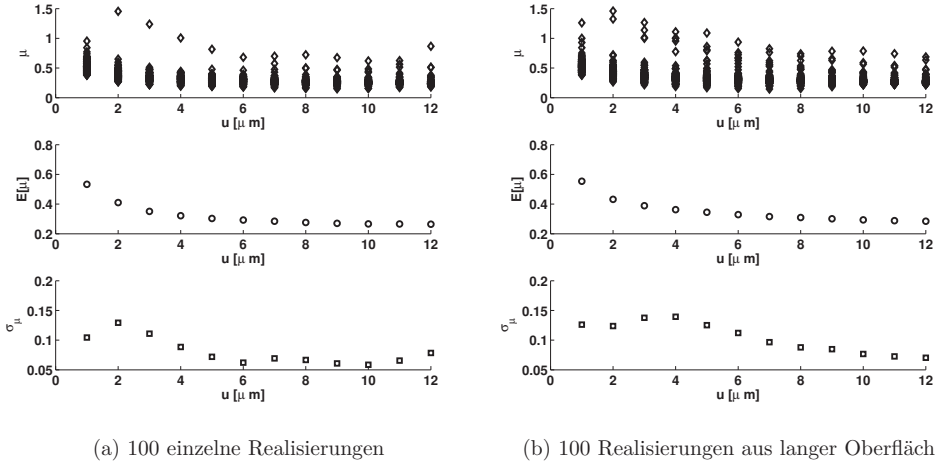


Abbildung 3.17: Kontaktfläche anteilig zu nomineller Fläche aufgetragen über dem Kontaktdruck

Als weitere Möglichkeit den Mittelwert und die Standardabweichung zu berechnen ist die, wie im Kapitel 3.1.4 beschrieben, eine lange Oberfläche, zu erzeugen und Abschnittsweise die Kontaktanalyse durchzuführen. Bei einer Oberfläche von ca. 0.5 m lassen sich 100 Realisierungen auswerten. Der Reibwert aller Realisierungen, deren Mittelwert und die Standardabweichung sind in Abbildung 3.18b zu sehen. Dass diese Werte durch beide Methoden annähernd gleich sind, kann als Beweis für Ergodizität gewertet werden. Außerdem zeigt es, wie schon vermutet, dass die langen Wellenlängen, welche durch die Interpolation hinzukommen, keinen Einfluss auf die Kontaktgrößen haben.



(a) 100 einzelne Realisierungen

(b) 100 Realisierungen aus langer Oberfläche

Abbildung 3.18: Reibwert μ von 100 Realisierungen, Mittelwert und Standardabweichung

Nun wird die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum, wie in Kapitel 3.1.4 beschrieben, berechnet. Zunächst wird nur eine lange Oberfläche erzeugt, um anhand dieser Abschätzungen zu treffen.

In Abbildung 3.19 ist die Autokorrelationsfunktion für drei Starrkörperverschiebungen u und verschiedene a_y zu sehen. Durch a_y ist die Diskretisierung der Autokorrelationsfunktion vorgegeben. Die Korrelationslänge ℓ_{corr} ist der Wert, bei der $R_{\bar{\mu}\bar{\mu}}$ das erste Mal die x -Achse schneidet. Die Länge einer Realisierung ist $\ell_{Fl} = 5.3$ mm. In Abbildung 3.19a wird die Realisierung um ihre gesamte Länge weitergeschoben, $a_y = \ell_{Fl} = 5.3$ mm. Dadurch ergibt sich für ℓ_{corr} genau die Länge dieser Verschiebung. Für eine feinere Auflösung mit $a_y = 0.06$ mm ($= 0.011\ell_{Fl}$), was eine Überschneidung der Realisierungen von fast 99% bedeutet, kann ℓ_{corr} genauer bestimmt werden. ℓ_{corr} ist kleiner als die Länge einer Realisierung, das heißt die Daten sind nicht korreliert. Die Extremfälle $a_y = 5.3$ mm und $a_y = 0.06$ mm dienen der Plausibilitätsprüfung.

Bereits für eine Diskretisierung von $a_y = 0.3$ mm ($= 0.056\ell_{Fl}$), Abbildung 3.19c, was einer Überschneidung von 94% entspricht, sieht man, dass ℓ_{corr} hinreichend genau bestimmt werden kann. Im Weiteren wird $a_y = 0.3$ mm benutzt.

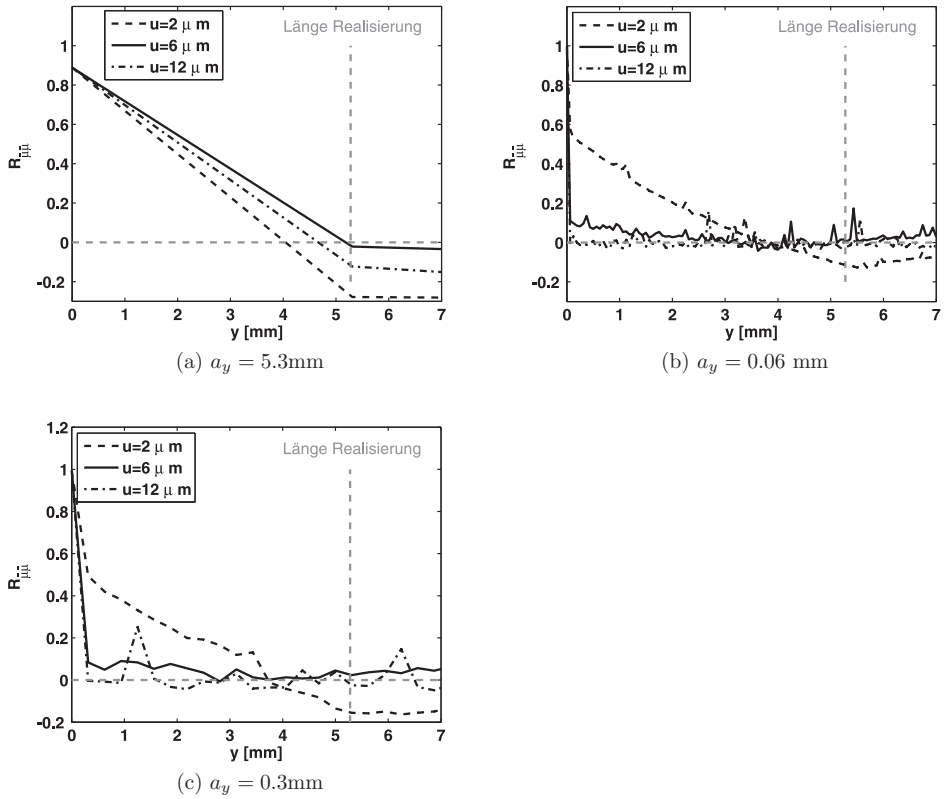


Abbildung 3.19: Autokorrelationsfunktion des Reibwerts für verschiedene u : eine Oberfläche

Für $a_y = 0.3$ mm ist das Leistungsdichtespektrum in Abbildung 3.20 zu sehen.

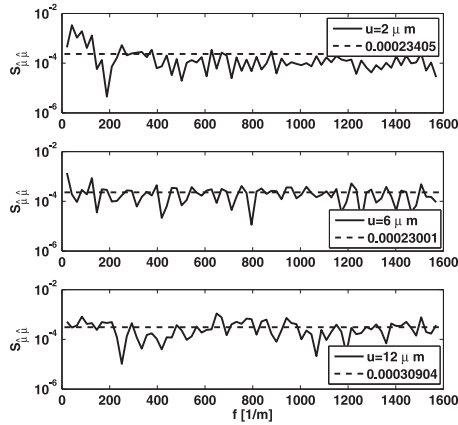


Abbildung 3.20: Leistungsdichtespektrum $S_{\hat{\mu}\hat{\mu}}$

Man erkennt, dass es bis auf Schwankungen konstant ist. Es kann durch eine Gerade im Mittel angenähert werden. Dies bedeutet, dass alle Frequenzen gleichanteilig sind. Auch das ist wieder ein Beweis dafür, dass die großen Wellenlängen der Oberfläche keinen Einfluss auf den Reibwert haben, sondern nur die kleinen Wellenlängen, welche gleichanteilig sind. Der stochastische Prozess für μ ist daher unkorreliert und hat ein konstantes Spektrum im untersuchten Bereich.

3.2.5 Übergang zur Makroebene

Zur Auswertung werden zunächst 10 Oberflächen der Länge 53 mm erzeugt. Von diesen Oberflächen werden Realisierungen im Abstand von $a_y = 0.3$ mm ausgewertet und anschließend über alle 10 Oberflächen gemittelt. So werden Mittelwert, Standardabweichung, Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichtespektrum, siehe Abbildungen 3.21, geschätzt. Die Autokorrelationsfunktion zeigt, dass im stochastischen Mittel die Korrelationslänge ℓ_{corr} unabhängig von der Verschiebung u und damit auch vom Druck ist.

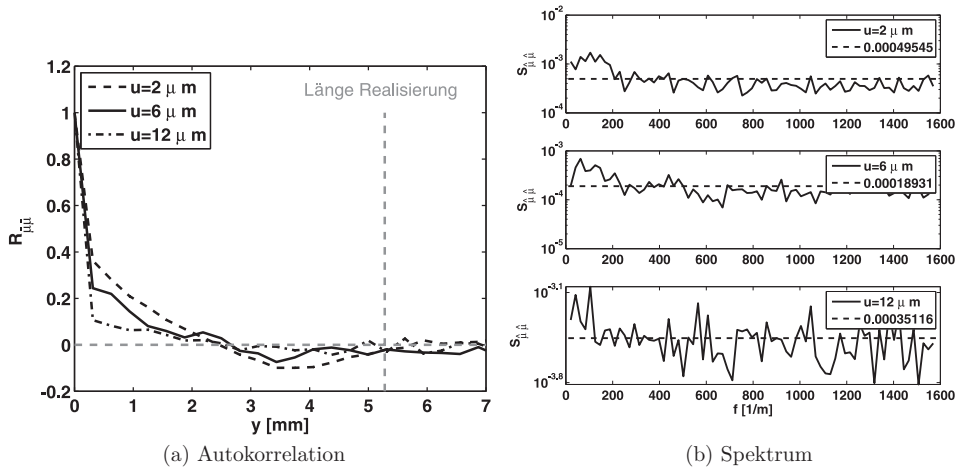


Abbildung 3.21: Autokorrelation und Spektrum des Reibwertes für verschiedene u : zehn Oberflächen

Für den Übergang zur Makroebene wird nun die Abhängigkeit der geschätzten stochastischen Größen vom Kontaktdruck betrachtet. Mit einem nichtlinearen Least-Squares-Schätzer kann eine Modellfunktion der Form

$$f(p) = ap^b + c \quad (3.21)$$

gefunden werden, welche die Abhängigkeit vom Druck p beschreibt. Ein nichtlinearer Least-Squares-Schätzer benutzt grundsätzlich die Vorgehensweise eines linearen Least-Squares-Schätzers, welcher versucht, die quadratische Abweichung zwischen Datenpunkten und Modellfunktion zu minimieren. Die Minimierung kann als Extremwertaufgabe durch partielle Ableitung und Suchen der Nullstellen durchgeführt werden. Dies führt zu einem linearen Gleichungssystem, welches analytisch gelöst werden kann. Beim nichtlinearen Schätzer können die Gleichungen zur Minimierung nicht mehr analytisch gelöst werden, sondern müssen iterativ z.B. mit dem *Gauss-Newton* Verfahren gelöst werden [7].

Die stochastischen Parameter, abhängig vom Kontaktdruck p , und die gefundenen Modellfunktionen sind in Abbildung 3.22 zu sehen.

Durch die Modellbeschränkung kommt es zu Ausreißern in der Kontaktanalyse und damit bei Standardabweichung und Spektrum zu einem fehlerhaften Anstieg der Werte für große Drücke. Diese werden für die Suche der Modellfunktion nicht berücksichtigt. Die Parameter der Modellfunktion sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst.

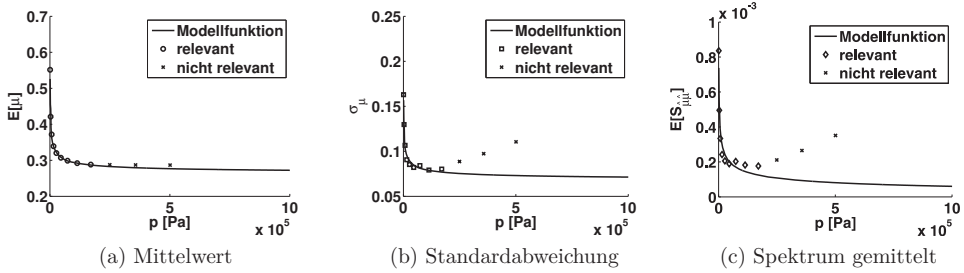


Abbildung 3.22: Geschätzte Modellfunktionen

Tabelle 3.3: Parameter der Modellfunktionen - Bremsbelag

	a	b	c
$E[\mu]$	5.8574	-0.4478	0.2603
σ_μ	1.6063	-0.4163	0.0663
$E[S_{\hat{\mu}\hat{\mu}}]$	0.0068	-0.3174	$2.4785 \cdot 10^{-05}$

Für weitere Simulationen kann der Reibwert als stochastischer Prozess generiert werden. Mit der Spektraldarstellung, Gleichung (2.48), wird der mittelwertfreie stochastische Anteil generiert. Als Spektrum wird die konstante Näherung abhängig von p verwendet. Der gesamte Prozess setzt sich additiv zusammen aus Mittelwert und schwankendem Prozess

$$\mu(x, \xi) = E[\mu] + \hat{\mu}_{SD}. \quad (3.22)$$

Ein Beispiel eines solchen Prozesses für den Druck $p = 0.5$ MPa ist in Abbildung 3.23a zu sehen, wobei in schwarz die aus der Modellfunktion geschätzte Standardabweichung bei diesem Druck eingezeichnet ist. In grau ist der Prozess und die entsprechende Standardabweichung dargestellt. Die beiden Standardabweichungen stimmen gut überein. In Abbildung 3.23b ist das Spektrum dieses Prozesses gezeigt. Es kann als konstant gemittelt werden und dieser gemittelte Wert stimmt mit dem konstanten Ausgangsspektrum überein. Dies dient zur Kontrolle. Die Standardabweichung des stochastischen Prozesses liegt bei $\sigma_{\hat{\mu}_{SD}} = 0.08$, der geschätzte Wert der Modellfunktion für $p = 0.5$ MPa bei $\sigma_\mu(p) = 0.087$, wohingegen die Standardabweichung der originalen Kontaktanalyse, auf Grund von Ausreißen durch die Modellbeschränkung, bei $\sigma_{\mu_{Orig}} = 0.11$ liegt. Dies zeigt noch einmal, dass durch die geschätzte Modellfunktion die Modellfehler ausgeglichen werden.

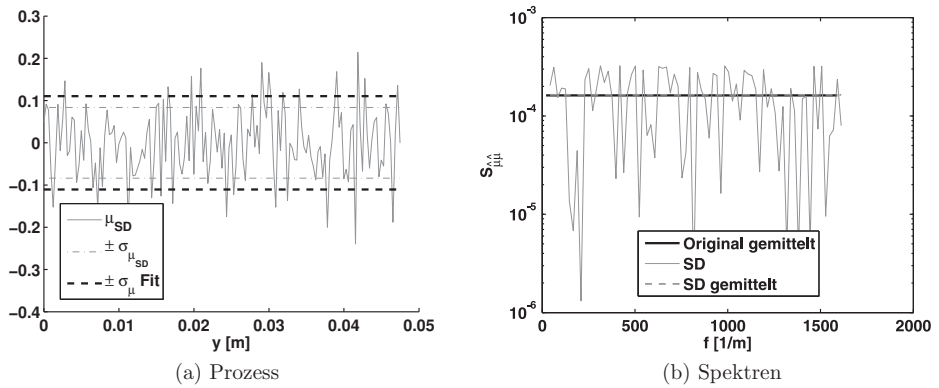


Abbildung 3.23: Mittelwertfreier Reibwertprozess und Vergleich der Spektren

3.3 Beispiel Metallblech

Als zweites Beispiel werden die Oberflächendaten eines gewalzten Metallblechs (Stahl DC04) untersucht. Solch ein Blech wird für Blech-Massivumformprozesse genutzt. Es erfährt beim Bearbeitungsprozess große Verformungen und große Anpressdrücke, wodurch sich die Oberflächenbeschaffenheit erheblich ändern wird. Die untersuchten Oberflächendaten sind die des Bleches in unverformtem Zustand. Die Daten wurden ebenfalls mit einem Weisslicht-Interferometer auf einer Fläche von $A_{nom} = 2.117 \times 2.117 \text{ mm}^2$ mit $n = 1356 \times 1356$ Datenpunkten von Prof. Kai Willner berührungslos aufgenommen.

3.3.1 Oberflächenanalyse

Zunächst muss das Messrauschen heraus gefiltert werden. Dies wird mit einem median filter (Matlab median2, filterradius=6) [2] umgesetzt. Die gefilterte Oberfläche ist in Abbildung 3.24 zu sehen.

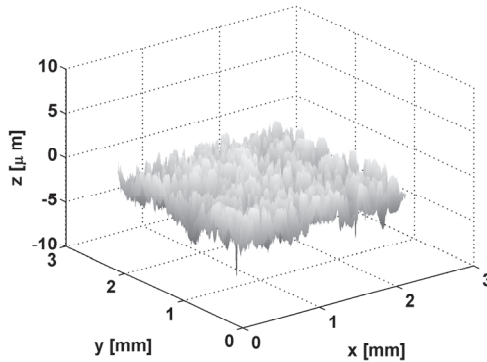


Abbildung 3.24: Gefilterte Oberflächendaten des Metallblechs

Weiter wird wieder gröber diskretisiert, in dem nur jeder zehnte Datenpunkt benutzt wird. Dies führt auch hier zu einer Glättung, siehe Abbildung 3.25, die beim ersten Kontakt durch plastische Verformung entsteht. Die Oberflächen im Vergleich sind in Abbildung 3.26 dargestellt.

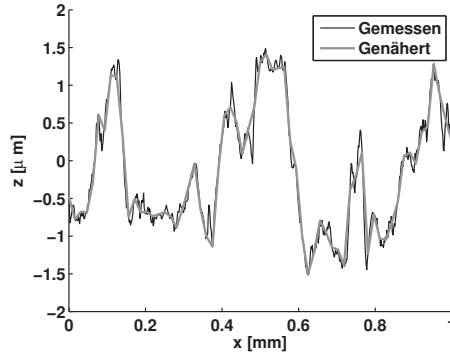
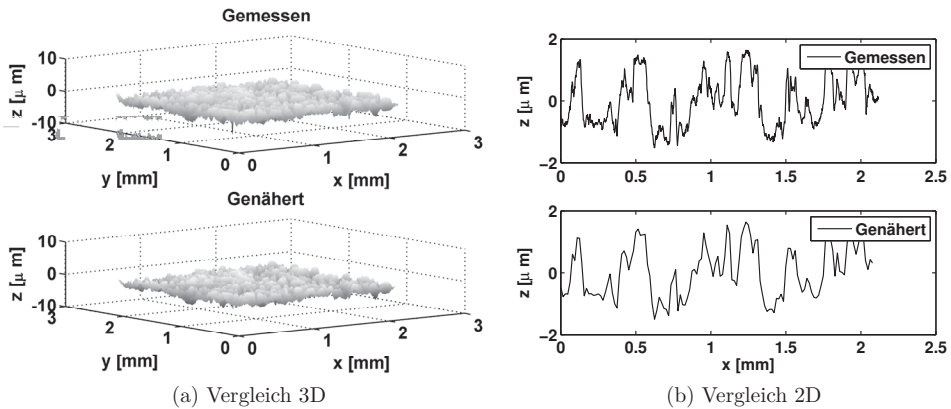
Abbildung 3.25: Gröbere Diskretisierung der Daten bei $y = 1\Delta y$ 

Abbildung 3.26: Vergleich Oberflächendiskretisierung Metallblech

Die Materialwerte für diesen Stahl zur Berechnung des Plastizitätsindex sind in Tabelle 3.4 zu finden. Der Plastizitätsindex nach Gleichung (3.7) berechnet sich für die gemessenen Daten zu $\gamma = 5.8$ und für die genäherten Daten zu $\gamma_{grob} = 1.2$. Dieser Wert liegt zwar immer noch im plastischen Verformungsbereich, es wird jedoch im Folgenden die elastische Verformung betrachtet. Durch plastische Verformung würden sich die Radien der Gipfel vergrößern, wodurch größere Kontaktflächen entstehen würden. Dies wiederum würde einen höheren Reibwert bewirken. Durch die Annahme, dass rein elastische Verformung vorliegt, wird der Reibwert also etwas unterschätzt. Das Höhenverhältnis der Gipfel, welches für die Reibwertschwankungen verantwortlich ist, wird sich jedoch vermutlich nicht ändern. Daher wird der Fehler in Kauf genommen.

In Abbildung 3.27 sind die Wahrscheinlichkeitsdichten, aller Oberflächendaten z , der Höhe der Gipfel z_s und deren Radien β zu sehen. Die Verteilung aller z -Werte bleibt weitgehend unverändert, bei den Höhen der Gipfel ist jedoch eine leichte Verschiebung zu höheren Werten zu sehen. Außerdem sind die z -Werte und die Höhen der Gipfel nicht normalverteilt. Durch die spektrale Darstellung werden normalverteilte Oberflächen erzeugt. Durch dies Methode entsteht also ein Fehler. Bei den Asperitenradien ist der Effekt zu erkennen, dass die kleinsten Asperiten zusammenschmelzen. Es gibt weniger Asperiten, die aber größere Radien haben.

Tabelle 3.4: Materialwerte Metallblech

E_1 [GPa]	ν_1	E_2 [GPa]	ν_2	E^* [GPa]	R_p [MPa]	H [MPa]
210	0.3	210	0.3	1.15	860	4850

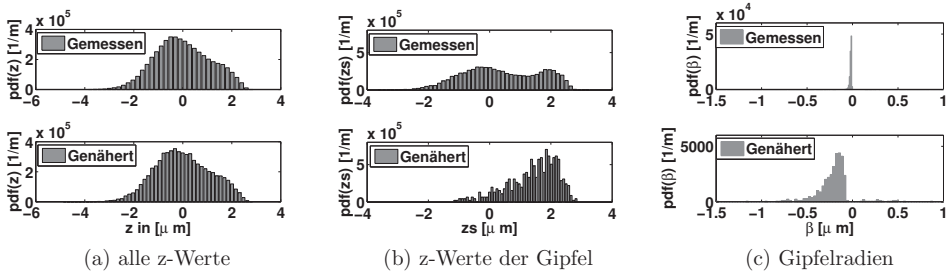


Abbildung 3.27: Vergleich Wahrscheinlichkeitsdichten Metallblech

3.3.2 Kontaktanalyse

Zur Kontaktanalyse werden, wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben, zunächst die Gipfel durch Suche lokaler Maxima bestimmt und deren Radien berechnet. Es wird simuliert, dass das raue Metallblech gegen ein glattes derselben Materialeigenschaften gedrückt wird. Die Kontaktfläche und die Kraft, bzw. der Druck lassen sich dann durch das *Hertz'sche* Kontakt Modell und die Reibkraft mit dem *Bowden-Tabor* Ansatz bestimmen. Die verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 3.5 zusammengefasst. Die Ergebnisse für Starrkörperverschiebungen von $u = 0.1 \mu\text{m}$ bis $u = 0.8 \mu\text{m}$ sind in Abbildungen 3.28a bis 3.28d zu sehen.

Tabelle 3.5: Materialwerte Metallblech für Kontaktberechnung

E_1 [GPa]	ν_1	E_2 [GPa]	ν_2	E^* [GPa]	τ_{max} [MPa]
210	0.3	210	0.3	1.15	500

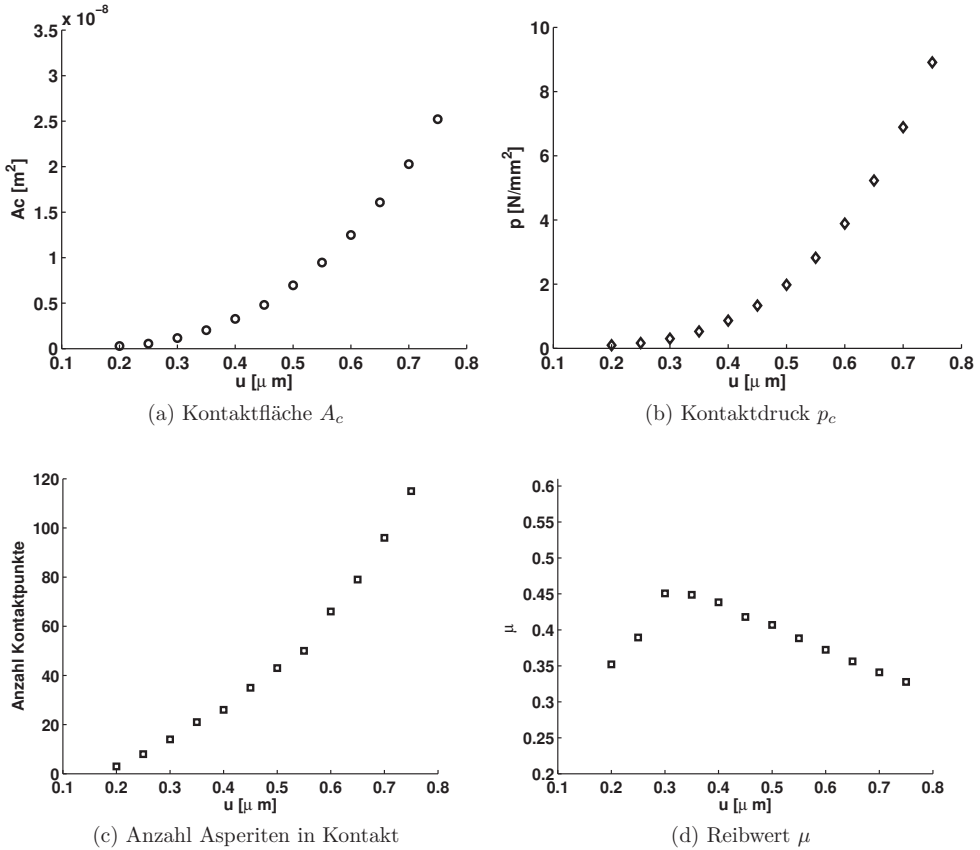


Abbildung 3.28: Ergebnisse Kontaktberechnung

3.3.3 Statistische Kontaktanalyse

Mittelwert und Standardabweichung

Zunächst werden 500 einzelne Realisierungen, wie in Kapitel 3.1.2 beschrieben, erzeugt und der Reibwert mit Hilfe der Kontaktanalyse bestimmt. In Abbildung 3.29 sind Reibwert, dessen Mittelwert und die Standardabweichung über verschiedene Starrkörperverschiebungen u aufgetragen. In Abbildung 3.30 sind die Wahrscheinlichkeitsdichten für eine niedrige ($u = 0.2 \mu\text{m}$) eine mittlere ($u = 0.45 \mu\text{m}$) und eine große ($u = 0.75 \mu\text{m}$) Verschiebung gezeigt.

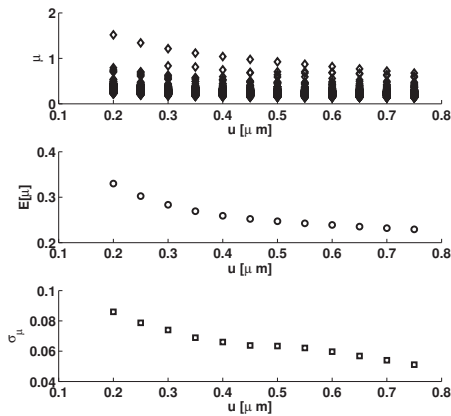


Abbildung 3.29: Reibwert μ von 500 Realisierungen, Mittelwert und Standardabweichung

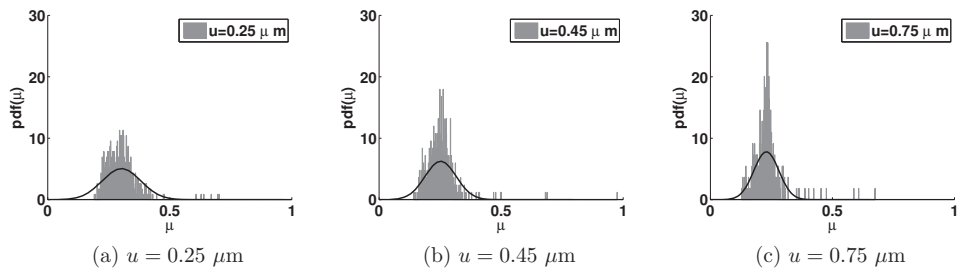


Abbildung 3.30: Wahrscheinlichkeitsdichten des Reibwerts, 500 einzelne Realisierungen

Leistungsdichtespektrum und Autokorrelationsfunktion

Zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion und des Leistungsdichtespektrums werden 10 Oberflächen der Länge 20.8 mm erzeugt. Die Kontaktanalyse wird an Realisierungen der Originalgröße $\ell_{Fl} \times \ell_{Fl} = 2.1 \times 2.1 \text{ mm}^2$ durchgeführt, welche um $a_y = 0.15 \text{ mm} (= 0.07a_y)$ verschoben werden, was einer Überschneidung von 93% entspricht. Das Leistungsdichtespektrum wird vom mittelwertfreien Prozess

$$\hat{\mu}(y, \xi) = \mu(y, \xi) - E[\mu(y, \xi)], \quad (3.23)$$

die Autokorrelationsfunktion vom mittelwertfreien und standardnormalverteilten Prozess

$$\bar{\mu}(y, \xi) = \frac{\mu(y, \xi) - E[\mu]}{\sigma_\mu} \quad (3.24)$$

berechnet. Die Ergebnisse für $u = 0.2 \mu\text{m}$, $u = 0.45 \mu\text{m}$ und $u = 0.75 \mu\text{m}$ sind in Abbildung 3.31 zu sehen. Die Korrelationslänge ℓ_{corr} ist für alle Verschiebungen unabhängig kleiner als die Länge einer Realisierung ℓ_{Fl} , d.h. der Prozess ist unkorreliert. Das Spektrum ist aber nicht exakt konstant, sondern fällt leicht mit größerer Frequenz, d.h. kleinerer Wellenlänge ab. Die größte aufgelöste Wellenlänge entspricht der Länge der Realisierung. Das Spektrum kann also nicht mehr als konstant angenähert werden.

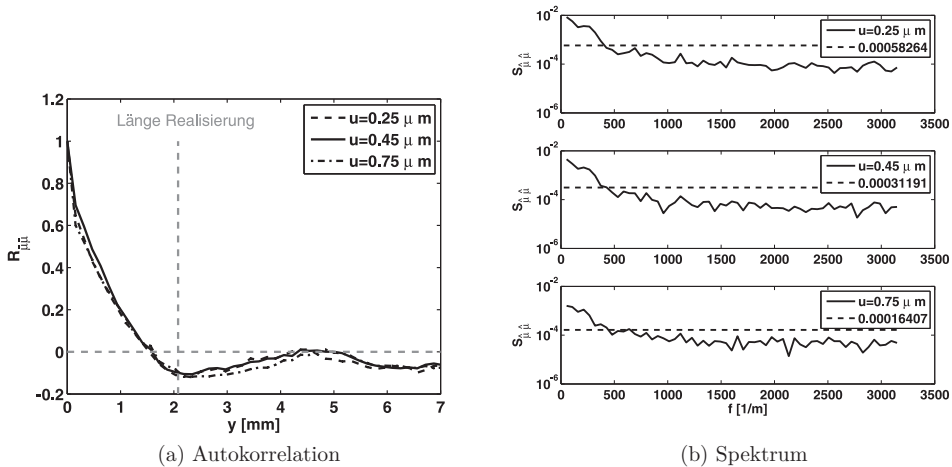


Abbildung 3.31: Autokorrelation und Spektrum des Reibwerts für verschiedene u

3.3.4 Übergang zur Makroebene

Für den Übergang zur Makroebene wird nun wieder eine Modellfunktion der Form

$$f(p) = ap^b + c \quad (3.25)$$

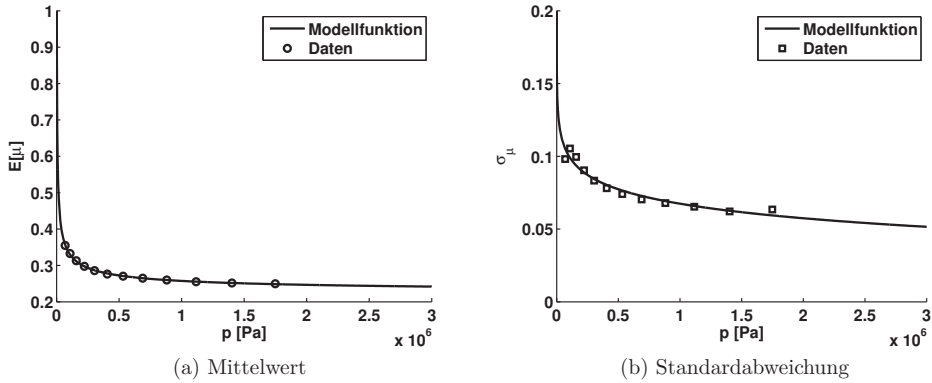


Abbildung 3.32: Geschätzte Modellfunktionen

geschätzt, um den Verlauf von Mittelwert und Standardabweichung abhängig vom Druck p zu beschreiben. Für das Spektrum ist dies nicht mehr möglich, da es nicht als konstant gemittelt werden kann. Zur späteren Verwendung auf der Makroebene stehen also nur für diejenigen Drücke Spektren zur Verfügung, die zuvor ausgewertet wurden. Für Mittelwert und Standardabweichung können aber auch hier mit Hilfe der Modellfunktion Werte für beliebige Drücke ermittelt werden. Die Parameter der Funktion werden mit einem nichtlinearen Least-Square Schätzer bestimmt. Die Daten und die entsprechende Modellfunktion sind in Abbildung 3.32 zu sehen, die zugehörigen Funktionsparameter sind in Tabelle 3.6 zusammengefasst.

Tabelle 3.6: Parameter der Modellfunktionen - Metallblech

	a	b	c
$E[\mu]$	28.3661	-0.4786	0.2194
σ_μ	-1.0185	0.0120	1.2689
$E[S_{\hat{\mu}\hat{\mu}}]$	0.0223	-0.3174	$-5.9154 \cdot 10^{-5}$

Um den Reibwert als stochastischen Prozess zu simulieren, wird wieder der berechnete Mittelwert zum stochastischen mittelwertfreien Prozess addiert, welcher mit Hilfe der Spektralen Darstellung generiert wird. Hierbei wird das für den Druck ermitteltes Spektrum benutzt.

Ein Beispiel eines solchen Prozesses für einen Druck von $p = 1.75$ MPa ist in Abbildung

3.33a zu sehen. Schwarz ist die geschätzte Standardabweichung der Modellfunktion für diesen Druck und grau die Standardabweichung des generierten Prozesses. In Abbildung 3.33b werden die Spektren verglichen. In schwarz ist das benutzte Spektrum von $p = 1.75$ MPa gezeichnet, in grau zur Kontrolle das Spektrum des generierten Prozesses.

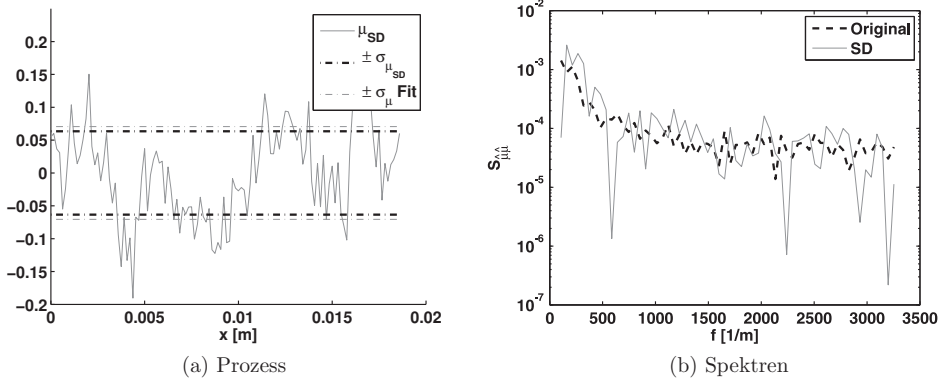


Abbildung 3.33: Mittelwertfreier Reibwertprozess und Vergleich Spektren

3.4 Zusammenfassung Kontaktsimulation

In diesem Kapitel wurde eine Kontaktsimulation für zwei verschiedene optisch vermessene Oberflächen durchgeführt. Die Kontaktsimulation setzt verschiedene Vereinfachungen voraus. Primär gilt, dass eine raue elastische Oberfläche mit einer glatteren, festeren in Kontakt steht. Außerdem muss der Kontakt rein elastisch sein. Zur statistischen Untersuchung an vielen stochastisch ähnlichen Oberflächen wird angenommen, dass eine Normalverteilung der Oberflächenwerte vorliegt.

Diese Kriterien werden von dem untersuchten Bremsbelag komplett erfüllt. Einziger Schwachpunkt der Simulation sind die Materialparameter, die bei solch komplizierten Zusammensetzungen, wie beim Bremsbelag, schwer abzuschätzen sind. Diese Materialparameter haben lediglich auf den Mittelwert des Reibprozesses Einfluss. Die Schwankungen hängen von der Oberflächenbeschaffenheit ab, die durch das optische Messverfahren eine hohe Genauigkeit haben. Die Ergebnisse zeigen, dass die Reibkraft linear mit der Normalkraft steigt, sobald einige wenige Kontaktpunkte bestehen. Außerdem ergibt sich, dass der Reibwert als stochastischer Prozess simuliert werden kann. Ein konstant genähertes, druckabhängiges Spektrum kann bestimmt werden, mit dem dieser Prozess generierbar ist. Dies ermöglicht eine Untersuchung dynamischer Systeme auf der Makroebene, in denen solch eine Reibpaarung auftritt.

Beim betrachteten Metallblech hingegen, werden einige der Kriterien verletzt. Zunächst

lässt der Plastizitätsindex auch nach der groben Diskretisierung, welche einen ersten plastischen Kontakt abbildet, vermuten, dass kein rein elastischer Kontakt vorliegt. Dies führt zu einer Unterschätzung des berechneten Reibwerts im Mittel. Die Schwankungen des Reibwerts werden aber richtig berechnet, da das Höhenverhältnis der Asperiten davon unabhängig sein sollte. Weiterhin gilt für das Metallblech, dass die Annahme, die Oberflächendaten wären normalverteilt, nicht zutrifft. Die spektrale Darstellung, welche zur Generierung stochastisch ähnlicher Oberflächen benutzt wird, erzeugt jedoch normalverteilte Oberflächen. Damit ist zwar die Kontaktanalyse für die vermessene Oberfläche richtig, aber die generierten Oberflächen besitzen eine leichte Abweichung zur originalen, und damit ist die Analyse leicht fehlerbehaftet. Es gibt neben der Spektralen Darstellung auch Methoden, welche nicht normalverteilte Prozesse erzeugen können. In weiteren Arbeiten wäre es aufschlussreich mit solch einer Methode stochastisch ähnliche Oberflächen zu erzeugen, um den Fehler abschätzen zu können.

Die nicht normalverteilten Daten liegen vor, da das Metall im Urzustand vermessen wurde. Die meisten Materialien weisen nach der ersten plastischen Verformung eine Normalverteilung auf. Daher wäre es weiterhin interessant, solch ein Metallblech nach der ersten plastischen Verformung optisch zu vermessen. Vermutlich ist dann sowohl die Annahme, dass die Verformung rein elastisch abläuft, als auch die, dass die Oberflächenwerte normalverteilt sind, richtig.

Mit den stochastisch ähnlichen, normalverteilten Oberflächen werden ähnliche Ergebnisse wie bei der Bremse bestimmt. Es liegt ein linearer Zusammenhang zwischen Reib- und Normalkraft vor, und der Reibwert ist ein stochastischer Prozess. Das beschreibende Spektrum ist hier aber nicht konstant. Daher liegen nur zu den berechneten Drücken Spektren vor, aus denen für spätere Simulationen auf den Makroebene ein Prozess erzeugt werden kann.

Grundsätzlich kann gesagt werden, dass die hier verwendete Methode durch die zu erfüllenden Kriterien besser für Oberflächen geeignet ist, bei denen die erste plastische Verformung bereits stattgefunden hat.

4 Reibungserregte Schwingungen

Mit Hilfe der in Kapitel 3 ermittelten stochastischen Reibwerte und deren Spektren kann das örtlich abhängige Rauschen des Reibwerts reproduziert werden. Damit kann der Einfluss eines stochastischen Reibwerts, welcher direkt abhängig ist von der mikroskopischen Oberflächenbeschaffenheit, auf makroskopische dynamische Vorgänge untersucht werden. Ein dynamisches Phänomen, bei dem Reibung eine große Rolle spielt, sind reibungserregte Schwingungen.

Daher wird in diesem Kapitel der Einfluss des stochastischen Reibwerts auf reibungserregte Schwingungen genauer untersucht. Dazu werden zunächst die Bewegungsgleichungen des Reibschwingers hergeleitet und die numerischen Verfahren vorgestellt.

Anschließend werden reibungserregte Schwingungen am Beispiel des Bremsbelags und am Beispiel des Metallblechs betrachtet. Besonders hervorgehoben werden die neuen Effekte, welche durch einen stochastischen Reibwert auftreten. Anhand dieser Untersuchungen werden die Unterschiede der beiden untersuchten Oberflächen aufgezeigt.

4.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen des Reibschwingers hergeleitet und die numerischen Integrationsverfahren erläutert.

4.1.1 Deterministischer Reibschwinger

Modell

Reibungserregte Schwingungen werden vielfach an einem Ein-Freiheitsgrad Modell einer Masse auf einem Band untersucht, siehe Abbildung 4.1. Die Masse m ist mit der Umgebung durch eine Feder mit Federkonstante c und einem Dämpfer mit Dämpferkonstante d verbunden. Das Band bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 , zwischen Band und Masse herrscht Reibung. Die Masse wird entweder nur durch ihr Eigengewicht auf das Band gedrückt oder mit einer zusätzlichen Normalkraft N . Mit diesem einfachen Modell lassen sich selbsterregte Schwingungen und sogenannte *Stick-Slip* Schwingungen untersuchen. Wird die Masse zusätzlich durch eine Kraft Q parallel zur Geschwindigkeit angeregt, treten Periodenverdopplungen bis hin zum Chaos auf [40].

Die Reibkraft F_R wechselt ihr Vorzeichen je nach relativer Geschwindigkeit der Kontaktpartner und wird daher über

$$F_R = \mu(v_{rel})N \operatorname{sign}(v_{rel}), \quad (4.1)$$

wobei $v_{rel} = v_0 - \dot{y}$ gilt, berechnet. Es treten zwei Reibzustände auf, *Haften*, bei dem die Masse sich mit dem Band mitbewegt und *Gleiten*, bei dem die Masse auf Grund der

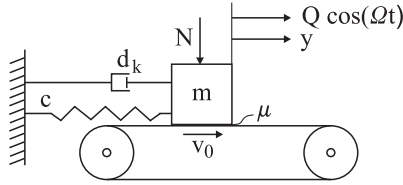


Abbildung 4.1: Reibschwinger

Rückstellkräfte über das Band gleitet. Die Bedingungen dieser Zustände lassen sich über ein Kräftegleichgewicht bestimmen. Für *Haften* muss für die Kraft

$$|F_{RH}| \geq |cy + d_k \dot{y} - Q \cos(\Omega t)| \quad (4.2)$$

gelten und die Geschwindigkeit muss der des Bands entsprechen, d.h.

$$\dot{y} = v_0. \quad (4.3)$$

Die Bewegungsgleichung des Systems ist damit je nach Zustand:

$$\text{Haften: } \dot{y} = v_0 \quad (4.4)$$

$$\text{Gleiten: } m\ddot{y} + d_k \dot{y} + cy = \mu(v_{rel})N \operatorname{sign}(v_0 - \dot{y}) + Q \cos(\Omega t) \quad (4.5)$$

Jetzt wird zunächst die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$, das *Lehr'sche* Dämpfungsmaß $D = \frac{d_k}{2\sqrt{cm}}$ und das Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ und anschließend die dimensionslose, auf eine Schwingungsdauer normierten Zeit $\tau = \omega_0 t$ und deren Ableitungen eingeführt. Bei klassischen Schwingungsproblemen wird außerdem die Wegkoordinate durch Normieren mit einer geeigneten Länge dimensionslos dargestellt [61], [92]. Da in diesem Modell keine solche Länge auftritt, wird y durch Beziehen auf die Länge $L = 1 \text{ m}$ in die dimensionslose Koordinate $x = \frac{y}{L}$ überführt. Dies führt auf die dimensionslose Bewegungsgleichung in Zustandsform mit $x = x_1$ und $\frac{dx}{d\tau} = x_2$

$$\begin{aligned} \text{Haften: } \quad dx_1 &= \gamma_0 d\tau \\ dx_2 &= 0 d\tau \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Gleiten: } \quad dx_1 &= x_2 d\tau \\ dx_2 &= \left[-x_1 - 2Dx_2 + n\mu(v_{rel}) \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0}x_2) + q \cos(x_3) \right] d\tau \\ dx_3 &= \eta d\tau \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit $n = \frac{N}{cL}$, $q = \frac{Q}{cL}$ und $\gamma_0 = \frac{v_0}{L\omega_0}$.

Die statische Ruhelage des rein selbsterregten Systems lässt sich anhand der Gleichung (4.7) bestimmen. Für $\dot{x}_2 = 0$, $\dot{x}_1 = 0$, $q = 0$ und $v_{rel} = v_0$ berechnet sich x_{1s} gemäß

$$x_{1s} = n\mu(v_0). \tag{4.8}$$

Aus der Kraftbedingung für den Zustand *Haften* lässt sich die Auslenkung am Übergang *Haften-Gleiten*

$$x_{1hg} = n\mu(0) - 2D\gamma_0 + q \cos(\eta\tau) \tag{4.9}$$

berechnen. Die maximal negative Auslenkung, bei der die Haftgerade noch erreicht wird, ist auf Grund der Symmetrie der Kraftbedingung

$$x_{1gh_{max}} = -n\mu(0) - 2D\gamma_0 + q \cos(\eta\tau). \tag{4.10}$$

Bei reiner Selbsterregung ($q = 0$) sind diese Positionen konstant, im fremderregten Fall oszillieren sie mit der Zeit.

Mit Hilfe verschiedener geschwindigkeitsabhängiger Reibgesetze lassen sich reibungsinduzierte Schwingungen untersuchen. Als einfachstes Reibgesetz wird ein konstanter Reibwert benutzt. Das zweite hat einen höheren Haftreibwert bei $v_{rel} = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und ist für alle anderen Geschwindigkeiten ebenfalls konstant. Als drittes wird ein phänomenologisches Reibgesetz mit einer fallenden Kennlinie untersucht. Dieses Gesetz wurde in [85] experimentell bestimmt. Ähnliche Verläufe werden vielfach verwendet z.B. in [40], [23], [59], [34]. Der quadratische Term führt zu einem Anstieg für hohe Relativgeschwindigkeiten, daher wird er bei einigen Modellen vernachlässigt. Die Gleichungen der drei Reibgesetze sind in Tabelle 4.1 aufgeführt, die Verläufe in Abbildung 4.2 zu sehen.

Tabelle 4.1: Reibgesetze

μ_I	μ_{II}	μ_{III}
$\mu(v_{rel}) = 0.25$	$\mu(0) = 0.4$ $\mu(v_{rel} \neq 0) = 0.25$	$\mu(v_{rel}) = \frac{\mu_0 - \mu_1}{1 + 1.42 v_{rel} } + \mu_1 + 0.01v_{rel}^2$ $\mu_0 = 0.4 \quad \mu_1 = 0.1$

Ein Phasendiagramm des *Stick-Slip* Grenzzyklus für das Reibgesetz III ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Alle Lösungen erreichen diesen Grenzzyklus, sobald sie einmal auf die Haftgerade gelangen.

Phasendiagramm des Modells für die drei vorgestellten Reibgesetze für verschiedene Anfangswerte sind in Abbildung 4.4 zu sehen ($D = 0, \omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \gamma_0 = 1, q = 0, n = 10$). Für fast alle Anfangswerte erreicht die Lösung die Haftgerade und damit den Grenzzyklus. Ausnahmen sind Phasenkurven, deren Anfangswerte innerhalb dieses Zyklus liegen. Hier wird der Unterschied der drei Reibgesetze deutlich. Bei I und II gibt es innerhalb des *Stick-Slip* Grenzzyklus kleinere stabile Zyklen, welche erreicht werden, wenn die statische Ruhelage gestört wird. Bei III hingegen werden alle Lösungen neben der Ruhelage auf die Haftgerade beschleunigt. Dies geschieht durch die anfachende Wirkung der fallenden

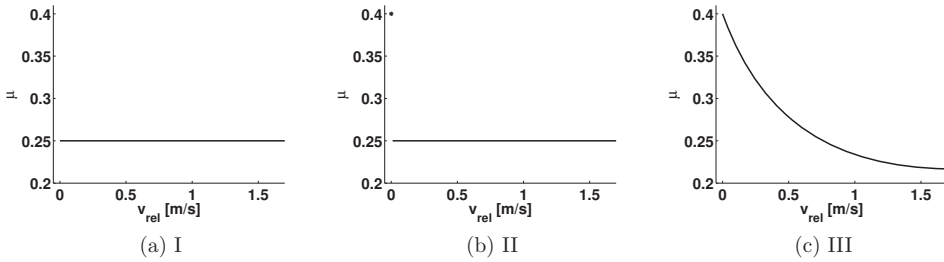


Abbildung 4.2: Verschiedene Reibgesetze

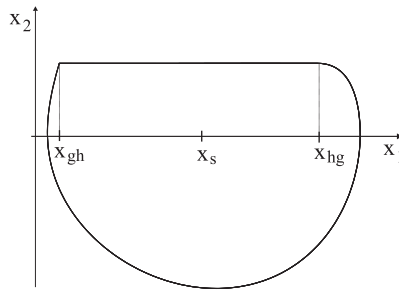


Abbildung 4.3: Phasendiagramm

Reibkurve. Außerdem kann man in Abbildung 4.4a sehen, dass bei I durch $\mu(0) = \mu(v_0)$ die Beziehung $x_s = x_{hg}$ (Gleichung (4.8)) folgt, bei II und III ist $x_{1s} \neq x_{1hg}$, da sich der Reibwert im Zustand *Haften* vom Reibwert im Zustand *Gleiten* unterscheidet. Bei I und II sind die Phasenkurven und der Grenzyklus beim *Gleiten* kreisförmig, bei III nicht. In den Untersuchungen der Schwingungen des Bremsbelages und des Metallblechs wird später das Reibgesetz III benutzt.

Wenn die äußere Anregung ungleich null ist, sind die Bedingungen für *Haften* und *Gleiten* zeitabhängig, und damit oszilliert auch x_{1hg} wie oben beschrieben. Das Phasendiagramm bekommt durch die zusätzliche Zustandsgröße eine dritte Dimension. Dadurch sind auch mehrperiodische Lösungen möglich. In Abbildung 4.5 ist das drei-dimensionale Phasendiagramm für $q = 0.5, \eta = 1.15, \omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \gamma_0 = 1, D = 0, n = 20, \mu_{III}$, und dessen zwei-dimensionale Projektion zu sehen. In 4.5a erkennt man die schwingende Haftgrenze und dass die Phasenlinie diese abwechselnd an zwei verschiedenen Orten trifft.

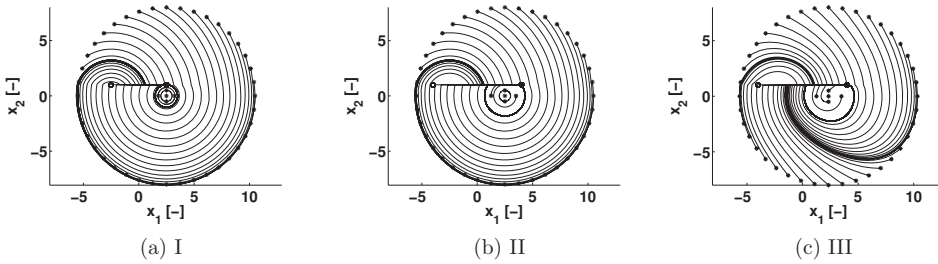


Abbildung 4.4: Phasendiagramm

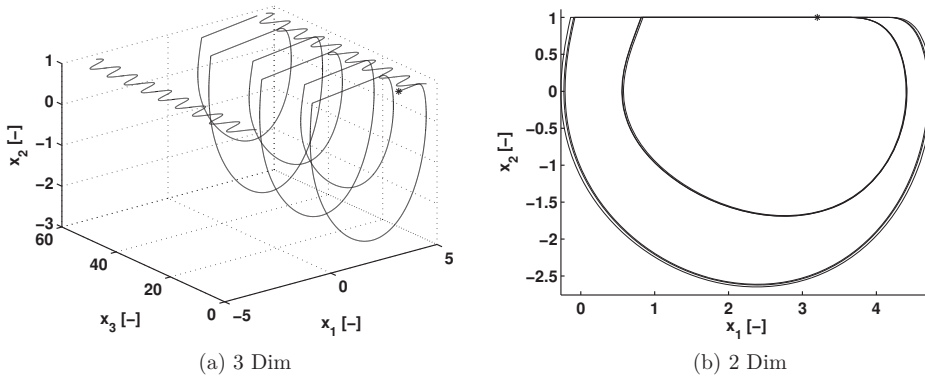


Abbildung 4.5: Phasendiagramme für fremderregte Schwingung

Numerische Integration

Die nichtglatten Gleichungen für den Reibschwinger können bereits im deterministischen Fall nur abschnittsweise analytisch gelöst werden, daher muss ein numerisches Integrationsverfahren benutzt werden. Als einfachstes Verfahren gilt das explizite *Euler* Verfahren. Es hat zwar im deterministischen Fall einige Schwachstellen, z.B. die Stabilität, worauf später noch genauer eingegangen wird, aber für die stochastische Simulation ist es das am einfachsten umzusetzende. Daher wird es hier für alle Simulationen verwendet. Es handelt sich um ein Einschrittverfahren, bei dem ausgehend vom Anfangszustand die Lösung für den jeweils nächsten Zeitschritt berechnet wird. Der Zeitschritt $\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k$ ist konstant. Damit folgt für die Bewegungsgleichungen die Iterationsvorschrift:

$$\begin{aligned} \text{Haften: } x_{1,k+1} &= x_{1,k} + \gamma_0 \Delta\tau \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + 0 \Delta\tau \end{aligned} \quad (4.11)$$

Gleiten:
$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + x_{2,k} \Delta\tau \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + \left[-x_{1,k} - 2Dx_{2,k} + n\mu(v_{rel}) \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} x_{2,k}) \right] \Delta\tau \\ &\quad + q \cos(x_{3,k}) \Delta\tau \\ x_{3,k+1} &= x_{3,k} + \eta \Delta\tau \end{aligned} \quad (4.12)$$

Es wird zu jedem Zeitschritt ermittelt ob die Haftbedingung wieder gilt, bzw. nicht mehr gilt. Wenn solch ein Ereignis eintritt, wird zwischen den Gleichungssystemen umgeschaltet. Wenn in einem Zeitschritt über die Bedingung 'hinaus' integriert wird, werden durch lineare Interpolation die Position und der Zeitpunkt ermittelt, zu dem das Ereignis eintritt.

Für glatte ungedämpfte Systeme ist das explizite *Euler* Verfahren instabil, für gedämpfte Systeme muss der Zeitschritt sehr klein gewählt werden, damit die Lösung stabil bleibt, das heißt sich nicht von der richtigen Lösung entfernt. Genauer zur Stabilität numerischer Lösungen kann in [12], [100], [80] o.ä. nachgelesen werden. Dieser Effekt ist bei einer Simulation eines inneren Grenzzyklus zu sehen, welcher nur bei μ_I und μ_{II} entstehen kann. In Abbildung 4.6a ist der innere Grenzzyklus des ungedämpften Systems zu sehen, berechnet mit dem Matlab internen *Runge-Kutta* Verfahren (*ode45*) mit variabler Schrittweitensteuerung [2], welches stabil ist, ($D = 0, q = 0, n = 10, \omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \gamma_0 = 1, x_{1,0} = 2, x_{2,0} = 0, \mu_{II}$). Dieser Matlab interne Integrator besitzt eine sogenannte 'Event-Steuerung', d.h. es können Ereignisse definiert werden, zu denen die Integration abbricht. So wird zwischen den Gleichungen hin- und her geschaltet. Hier handelt es sich aber um eine glatte Differentialgleichung, da der Haftzustand nicht erreicht wird. In Abbildung 4.6b wird das Gleichungssystem mit dem expliziten *Euler* Verfahren für den Zeitschritt $\Delta\tau = 0.001$ berechnet. Das Phasendiagramm zeigt auch für sehr kleine Zeitschritte, dass die Lösung des expliziten *Euler* Verfahren bei glatten, ungedämpften Systemen instabil ist.

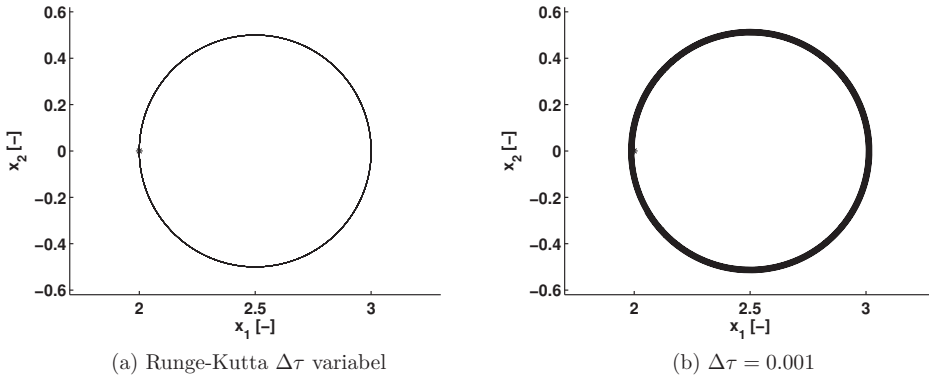


Abbildung 4.6: Vergleich numerische Instabilität

Nichtglatte Systeme sind weniger anfällig für Instabilitäten. In Abbildung 4.7 ist wieder eine Simulation des Systems mit anderen Anfangswerten zu sehen ($D = 0, q =$

$0, \omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \gamma_0 = 1, n = 10, x_{1,0} = 0, x_{2,0} = \gamma_0, \mu_{III}$). In grau ist die richtige Lösung, simuliert mit dem *Runge-Kutta* Verfahren, dargestellt. In schwarz sind Lösungen für $\Delta\tau = 0.001, \Delta\tau = 0.01$ und $\Delta\tau = 0.05$ gezeigt. Nur bei $\Delta\tau = 0.05$ ist eine Abweichung zu erkennen. Beim nichtglatten System kann also auch für den ungedämpften Fall mit dem expliziten *Euler* Verfahren eine hinreichend genaue Lösung berechnet werden, wenn der Zeitschritt klein genug gewählt wird. Der Grund hierfür ist, dass durch das Umschalten zwischen den Differentialgleichungen die Anfangsbedingungen praktisch wieder hergestellt werden. Für das rein selbsterregte System ist am Übergang *Haften-Gleiten* die Position und die Geschwindigkeit für jeden Durchgang gleich, somit wird der Fehler, welcher durch die Instabilität entsteht, wieder auf null gesetzt. Es spielt keine Rolle, zu welchem Zeitpunkt dieser Zustand erreicht wird.

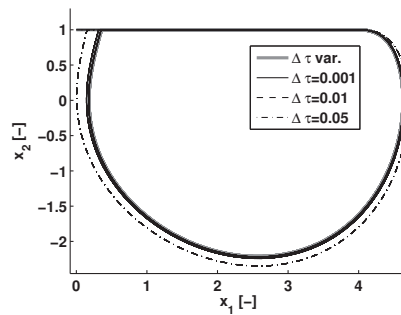


Abbildung 4.7: Vergleich Zeitschrittweite, $q = 0$

Weiterhin zeigt diese Simulation, dass die Charakteristik der Lösung sich auch für einen zu großen Zeitschritt nicht verändert. Dies gilt nicht mehr, wenn das fremderregte System betrachtet wird. Hier spielt es eine Rolle, zu welchem Zeitpunkt die Haftgrenze erreicht wird, da diese zeitlich oszilliert. In Abbildung 4.8 werden wieder Phasendiagramme des gleichen Systems verglichen ($D = 0, \omega_0 = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \gamma_0 = 1, n = 10, x_{1,0} = 3.2, x_{2,0} = \gamma_0, \mu_{III}$), jetzt aber mit zusätzlicher Fremdanregung mit $q = 0.5$ und $\eta = 1.15$. In 4.8a die genaue Lösung mit dem *Runge-Kutta* Verfahren berechnet und in Abbildung 4.8b bis 4.8g sind Lösungen, berechnet mit dem *Euler* Verfahren, bei verschiedenen Zeitschritten abgebildet. Wieder ist zu sehen, dass bis $\Delta\tau = 0.01$ die Lösung mit der "richtigen" übereinstimmt. Diese ist zwei-periodisch. Ab $\Delta\tau > 0.01$ kommt es zu Abweichungen. Besonders fällt hier auf, dass sich bei zu großen Zeitschritten der Charakter der Lösung verändert. In Abbildung 4.8g für $\Delta\tau = 0.1$ könnte fälschlicherweise abgelesen werden, dass sich das System bei diesen Parametern quasiperiodisch oder sogar chaotisch verhält.

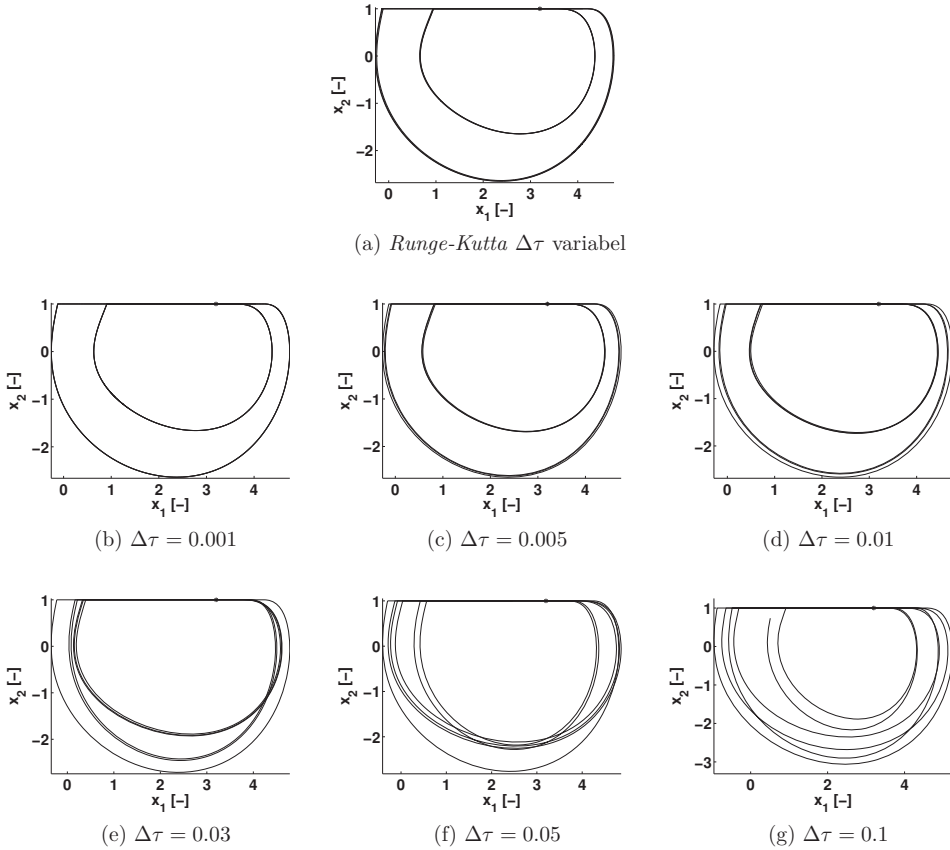


Abbildung 4.8: Vergleich Zeitschrittweite, $q = 0.5, \eta = 1.15$

Im Weiteren wird der Reibwert als ein stochastischer Prozess modelliert. Zur numerischen Integration wird das stochastische *Euler* Verfahren oder *Euler-Mayurama* benutzt, welches sich durch seine einfache Umsetzung empfiehlt. Die Stabilitätsprobleme dieses Verfahrens sind, wie oben gezeigt, bei nicht-glaten Systemen nicht von großer Relevanz, da auch für ungedämpfte Systeme Zeitschritte gefunden werden können, bei denen die Integration stabil durchgeführt werden kann. Der Zeitschritt muss jedoch klein sein, und es muss bedacht werden, dass ein zu großer Zeitschritt die Charakteristik der Lösung verändern kann.

4.1.2 Stochastischer Reibschwinger mit weiß verrauschtem Reibwert

Modell

Messungen, z.B. in [40], und die Auswertungen aus Kapitel 3 zeigen, dass der Reibwert nicht nur geschwindigkeitsabhängig, sondern auch stochastisch verrauscht ist. Dies hat zur Ursache, dass durch die rauen Oberflächen die Kontaktfläche beim *Gleiten* schwankt. Die Kontaktanalyse hat ergeben, dass der Reibwert ein bandbreitenbeschränkter stochastischer Prozess ist. Im Fall des Bremsbelags besitzt dieser ein konstantes Spektrum, im Fall des Metallblechs ein örtlich abhängiges. Zum Vergleich wird zunächst der Reibwert abhängig vom Ort, bzw. dem relativen Ort zwischen Masse und Band, als weißes Rauschen modelliert. Weißes Rauschen hat ein unendliches, konstantes Spektrum. Das heißt alle Frequenzen von $-\infty$ bis ∞ treten mit gleicher Amplitude auf. Vergleiche der Simulationen mit weißem Rauschen mit Simulationen mit bandbreitenbeschränktem Prozessen werden später zeigen, ob die unterschiedlichen Modelle des Reibwerts zu Abweichungen im Lösungsverhalten führen.

Mit dem weißen Rauschprozess wird die Bewegungsgleichung für den *Gleitvorgang* zu einer stochastischen Differentialgleichung. Der Reibwert beim *Haften* wird weiterhin deterministisch modelliert, da hierbei die Kontaktfläche konstant ist. Der Reibwert beim *Gleiten* wird zunächst durch einen ortsabhängigen stochastischen Prozess modelliert, der aus einem deterministischen, geschwindigkeitsabhängigen Anteil $\mu_D(v_{rel})$ und einem mittelwertfreien Rauschanteil $\hat{\mu}_w = \sigma_\zeta \zeta(x_{rel}, \xi)$ besteht. $\zeta(x_{rel}, \xi)$ ist ein weißer Rauschprozess, welcher additiv mit der Intensität σ_ζ eingeht. Der Gleichanteil entspricht dem Verlauf μ_{III} in Tabelle 4.1. Es wird zunächst aus der geschätzten Modellfunktion der Kontaktanalyse der druckabhängige Mittelwert des Reibwerts bestimmt, siehe Gleichung (3.21) bzw. (3.22). Dieser wird hier für $\mu_{fit}(p) = \mu_0 - \mu_1$ eingesetzt. Damit auch hier für $\mu_D(0) = \mu_0 = 0.4$ gilt, muss $\mu_1 = \mu_0 - \mu_{fit}(p)$ sein. Damit setzt sich das Reibgesetz zusammen aus dem deterministischen Anteil

$$\mu_D(v_{rel}) = \frac{\mu_{fit}(p)}{1 + 1.42|v_{rel}|} + \mu_0 - \mu_{fit}(p) + 0.01v_{rel}^2 \quad (4.13)$$

und dem stochastischen

$$\begin{aligned} \mu_w &= \mu_D(v_{rel}) + \hat{\mu}_w \\ &= \mu_D + \sigma_\zeta \zeta(x_{rel}, \xi). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Durch den Zusammenhang zwischen weißem Rauschen und dem *Wiener* Prozess aus Gleichung (2.26) hat die Bewegungsgleichung für den *Gleitvorgang* im *Stratonovich* Kalkül die Form [32]

$$\begin{aligned} dX_1 &= X_2 d\tau \\ dX_2 &= \left[-X_1 - 2DX_2 + n\mu_D(v_{rel}) \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0}X_2) + q \cos(X_3) \right] d\tau \\ &\quad + \left[n \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0}X_2) \right] \circ dW_{x_{rel}} \\ dX_3 &= \eta d\tau. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Für die Zeitintegration der Bewegungsgleichung muss der weiße Rauschprozess zunächst in den Zeitbereich transformiert werden. Dies erfolgt mit der dimensionslosen relativen Geschwindigkeit zwischen Masse und Band

$$dx_{rel} = \frac{v_{rel}}{L\omega_0} d\tau = \frac{v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0}X_2}{L\omega_0} d\tau = (\gamma_0 - X_2) d\tau \quad \text{mit} \quad \frac{v_0}{\gamma_0} = L\omega_0. \tag{4.16}$$

Der stochastische Zuwachs im Wegbereich ist [32]

$$dW_{x_{rel}}^2 = \sigma_\zeta dx_{rel}. \tag{4.17}$$

Daraus folgt

$$dW_{x_{rel}}^2 = \sigma_\zeta (\gamma_0 - X_2) d\tau \tag{4.18}$$

und mit

$$dW_\tau^2 = d\tau \tag{4.19}$$

$$dW_{x_{rel}}^2 = \sigma_\zeta (\gamma_0 - X_2) dW_\tau^2. \tag{4.20}$$

Die Wurzel aus diesem Ausdruck liefert den Zusammenhang zwischen dem stochastischen Zuwachs im Wegbereich und dem im Zeitbereich

$$dW_{x_{rel}} = \sqrt{\sigma_\zeta (\gamma_0 - X_2)} dW_\tau. \tag{4.21}$$

Diese Transformation wird vielfach im Bereich der Fahrzeug-Straße Anregung verwendet, bei der die Unebenheit der Straße in eine stochastische Zeitanregung umgerechnet wird, [74]. Hierbei ist jedoch meist die Geschwindigkeit konstant und nicht wie hier eine Zustandsgröße.

Damit ergeben sich die stochastischen Differentialgleichungen für die Bewegung des Reibschwingers

$$\begin{aligned} \text{Haften:} \quad dX_1 &= \gamma_0 d\tau \\ dX_2 &= 0 d\tau \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \text{Gleiten:} \quad dX_1 &= X_2 d\tau \\ dX_2 &= \left[-X_1 - 2DX_2 + n\mu_D(v_{rel}) \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_2) + q \cos(X_3) \right] d\tau \\ &\quad + \left[n \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_2) \right] \sqrt{\sigma_\zeta(\gamma_0 - X_2)} \circ dW_\tau \\ dX_3 &= \eta d\tau \end{aligned} \quad (4.23)$$

Durch die Transformation der Zuwächse in den Zeitbereich ist das System parametererregt. Die Integration ist im *Stratonovich* Kalkül aufgestellt. Das im folgenden Abschnitt gezeigte numerische Integrationsverfahren berechnet die Integration aber nach dem *Itô* Kalkül, da das Integral immer am linken Rand ausgewertet wird. Daher muss zunächst Gleichung (4.23) mithilfe von Gleichung (2.37) in das *Itô* Kalkül überführt werden. Dadurch erweitert sich der Driftterm durch den Summanden $-\frac{1}{4}(n\sigma_\zeta)^2 d\tau$ und man erhält

$$\begin{aligned} \text{Gleiten:} \quad dX_1 &= X_2 d\tau \\ dX_2 &= \left[-X_1 - 2DX_2 + n\mu_D(v_{rel}) \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_2) + q \cos(X_3) \right] d\tau \\ &\quad - \frac{1}{4}(n\sigma_\zeta)^2 d\tau + \left[n \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_2) \right] \sqrt{\sigma_\zeta(\gamma_0 - X_2)} dW_\tau \\ dX_3 &= \eta d\tau. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Diese Gleichung gilt nur noch für $X_2 \neq \gamma_0$, da die partielle Ableitung $\frac{\partial \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_2)}{\partial X_2}$ für $X_2 \neq \gamma_0$ verschwindet, für $X_2 = \gamma_0$ aber nicht differenzierbar ist. Für $X_2 = \gamma_0$ wechselt das System in die *Haft* Differentialgleichung (4.22), so dass diese Bedingung erfüllt ist.

Numerische Simulation - Monte Carlo Simulation

Die Lösungstrajektorie der stochastischen Differentialgleichung ist nicht mehr eindeutig. Über viele Auswertungen kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass die Trajektorie sich in einem bestimmten Bereich befindet.

Die Lösung der SDG kann auch hier nur durch numerische Integration bestimmt werden. Es wird wieder das explizite *Euler* Verfahren verwendet, welches für SDG auch explizites *Euler-Maruyama* Verfahren genannt wird. Die diskretisierte SDG für den *Gleitvorgang* hat dann die Form

$$X_{1,k+1} = X_{1,k} + X_{2,k} \Delta\tau \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} X_{2,k+1} &= X_{2,k} \\ &+ \left[-X_{1,k} - 2DX_{2,k} + n\mu_D(v_{rel}) \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_{2,k}) + q \cos(X_{3,k}) \right] \Delta\tau \\ &- \left[\frac{1}{4}(n\sigma_\zeta)^2 \right] \Delta\tau + \left[n \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_{2,k}) \right] \sqrt{\sigma_\zeta(\gamma_0 - X_{2,k})} \Delta W_\tau \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$X_{3,k+1} = X_{3,k} + \eta \Delta\tau$$

mit den Differenzen

$$\Delta\tau = \tau_{k+1} - \tau_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} ds \quad (4.27)$$

und

$$\Delta W = W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} dW_s. \quad (4.28)$$

Da das *Euler-Maruyama* das Integral an der unteren Integrationsgrenze auswertet, ist es konsistent mit dem *Itô* Kalkül. Durch die Eigenschaft $(dW_t)^2 = dt$ kann das Inkrement des *Wiener* Prozesses durch

$$\Delta W_{\tau_k} = R_k \sqrt{\Delta\tau} \quad (4.29)$$

berechnet werden, wobei R_k eine standardnormalverteilte Zufallszahl ist.

Daher können die Bewegungsgleichungen des Reibschwingers mit weiß verrauschtem Reibwert mit dem *Euler-Maruyama* Verfahren

$$\begin{aligned} \text{Haften:} \quad X_{1,k+1} &= X_{1,k} + \gamma_0 \Delta\tau \\ X_{2,k+1} &= X_{2,k} + 0 \Delta\tau \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Gleiten:} \quad X_{1,k+1} &= X_{1,k} + X_{2,k} \Delta\tau \\ X_{2,k+1} &= X_{2,k} \\ &+ \left[-X_{1,k} - 2DX_{2,k} + n\mu_D(v_{rel}) \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_{2,k}) \right] \Delta\tau \\ &+ \left[q \cos(X_{3,k}) - \frac{1}{4}(n\sigma_\zeta)^2 \right] \Delta\tau \\ &+ \left[n \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_{2,k}) \right] \sqrt{\sigma_\zeta(\gamma_0 - X_{2,k})} \Delta\tau R_k \\ X_{3,k+1} &= X_{3,k} + \eta \Delta\tau \end{aligned} \quad (4.31)$$

numerisch integriert werden. σ_ζ ist gleich der Standardabweichung des ortsabhängigen Prozesses, $\sigma_\zeta = \sigma_{\mu_{SD}}$. Der stochastische Zuwachs ist also abhängig von der Geschwindigkeit X_2 und variiert daher periodisch mit der Zeit.

Genauereres zu stochastischen Differentialgleichungen und deren Lösungsverfahren ist in [5] oder [52] zu finden, in [53] werden außerdem numerische Beispiele gezeigt.

Eine Lösungstrajektorie für den selbsterregten Fall mit den Parametern $D = 0, m = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, c = 1 \cdot 10^6, q = 0, N = 5600, \mu_{III}$ ist in Abbildung 4.9a der entsprechenden deterministischen Trajektorie in 4.9b gegenübergestellt. Im stochastischen Fall fällt auf, dass sich Phasenlinien schneiden, was im deterministischen Fall nie vorkommen kann. Der Grund dafür ist, dass der stochastische Anteil einer dritten Zustandsgröße entspricht, welche mitintegriert wird. Der Phasenraum ist im stochastischen Fall drei-dimensional bzw., falls äußere Anregung vorliegt, vier-dimensional. Die Phasenkurven schneiden sich also streng genommen nicht, sondern liegen hintereinander. Das zweidimensionale Phasendiagramm ist eine Projektion dieser Phasenlinien. Diese Ansicht wird zur besseren Übersichtlichkeit genutzt.

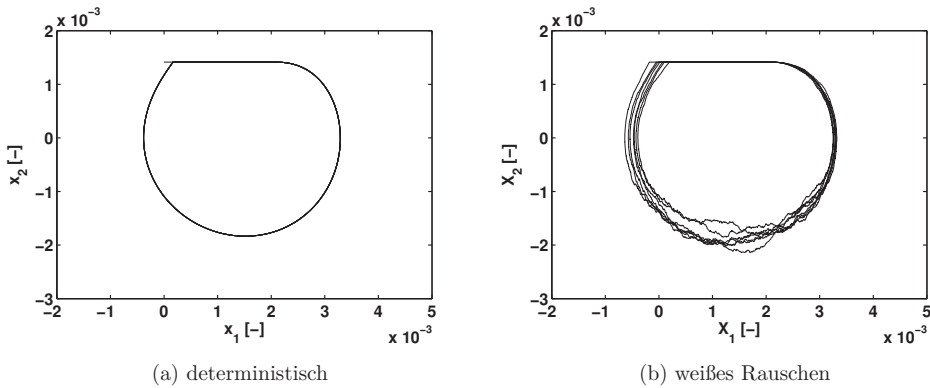


Abbildung 4.9: Phasendiagramm deterministisch-stochastisch

4.1.3 Stochastischer Reibschwinger mit Reibwert aus Kontaktanalyse

Modell

In Kapitel 3 wird gezeigt, wie mit Hilfe einer statistischen Kontaktanalyse der Reibwert und seine von der rauen Oberfläche abhängigen Schwankungen berechnet werden können. In 3.2.5 bzw. 3.3.4 wird, ausgehend von einem druck- und wegabhängigen Spektrum, mit Hilfe der Spektralen Darstellung der Reibwert als stochastischer Prozess

$$\hat{\mu}_{SD}(x, \xi) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^N \sqrt{S_{\mu\mu}(f_{xi})} \Delta f_{xi} \cos(2\pi(f_{xi}x + \xi_i)) \quad (4.32)$$

beschrieben.

Es wird eine globale Wegkoordinate x_{glob} eingeführt, die den absoluten Weg erfasst, welche

die Masse während eines *Gleitvorgangs* zurücklegt. Die globale Position wird jeweils um das berechnete $|\Delta x|$ vergrößert. So steigt die globale Wegkoordinate kontinuierlich an, egal ob die Masse vorwärts oder rückwärts schwingt. Anhand dieser globalen Wegkoordinate wird der stochastische Anteil des Reibwerts $\mu(x_{glob})$ ermittelt.

Der ortsabhängige Reibprozess ist diskret und besitzt daher nur Informationen an den Positionen $k\Delta x_{glob}$. Für Positionen $x_{glob}(t_i)$ zwischen diesen diskreten Werten wird der Reibwert durch lineare Interpolation der benachbarten Werte gewonnen. In Abbildung 4.10 ist ein beispielhafter Prozess gezeigt. In Abbildung 4.10b ist ein Ausschnitt gezeigt, um die Interpolation hervorzuheben. Es muss allerdings vermieden werden, dass die Schwingungen so klein sind, dass der Reibwert nur zwischen zwei Diskretisierungspunkten ausgelesen würde. Außerdem muss überprüft werden, ob der Reibprozess überhaupt für alle Positionen, welche bei einer Schwingung auftreten können, Informationen enthält. Durch eine Verlängerung von x in Gleichung (4.32) wird der Prozess periodisch fortgesetzt.

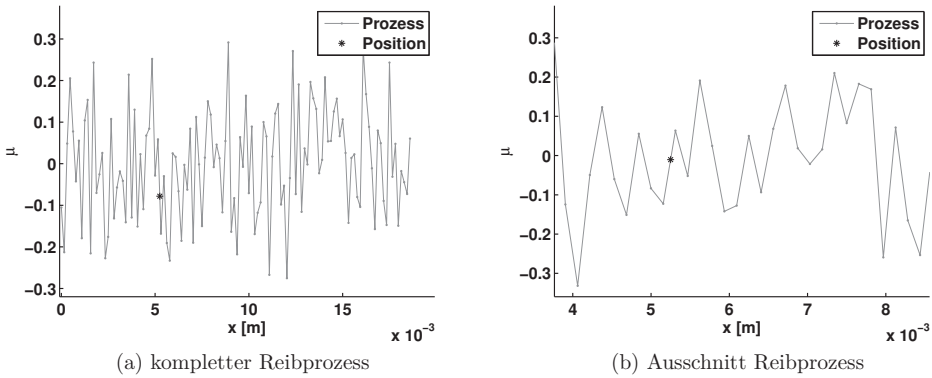


Abbildung 4.10: Reibprozess aus Spektraler Darstellung

Zum stochastischen Anteil des Reibwerts wird μ_D addiert. μ_D entspricht auch hier dem deterministischen geschwindigkeitsabhängigen Verlauf $\mu_{III}(v_{rel})$. Es wird zunächst aus der geschätzten Modellfunktion der Kontaktanalyse der druckabhängige Mittelwert des Reibwerts bestimmt, siehe Gleichung (3.21) bzw. (3.22). Dieser wird hier für $\mu_{fit}(p) = \mu_0 - \mu_1$ eingesetzt. Damit auch hier für $\mu_D(0) = \mu_0 = 0.4$ gilt, muss $\mu_1 = \mu_0 - \mu_{fit}(p)$ sein. Damit ergibt sich das deterministische Reibgesetz μ_{III} zu

$$\mu_D(v_{rel}) = \frac{\mu_{fit}(p)}{1 + 1.42|v_{rel}|} + \mu_0 - \mu_{fit}(p) + 0.01v_{rel}^2. \quad (4.33)$$

Der stochastische Prozess entsteht durch Addieren des Rauschanteils aus der Spektraldarstellung

$$\mu_{SD} = \mu_D(v_{rel}) + \hat{\mu}_{SD}(x, \xi). \quad (4.34)$$

$\hat{\mu}_{SD}$ ist mittelwertfrei und hat die Standardabweichung $\sigma_{\hat{\mu}_{SD}}$. Durch Einsetzen dieses Prozesses in die Bewegungsgleichungen ergeben diese sich

$$\begin{aligned} \text{Haften:} \quad dX_1 &= \gamma_0 d\tau \\ dX_2 &= 0 d\tau \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \text{Gleiten:} \quad dX_1 &= X_2 d\tau \\ dX_2 &= \left[-X_1 - 2DX_2 + (\mu_m(v_{rel}) + \hat{\mu}_{SD}(X_1, \xi))n \operatorname{sign}(v_0 - \frac{v_0}{\gamma_0} X_2) \right] d\tau \\ &\quad + [q \cos(X_3)] d\tau \\ dX_3 &= \eta d\tau. \end{aligned} \quad (4.36)$$

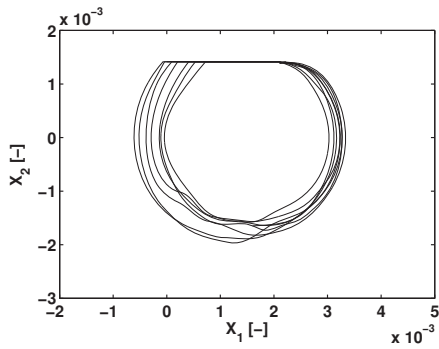
Numerische Integration

Der Reibwert wird, wie in Abschnitt 4.1.3 beschrieben zu jedem Zeitpunkt aus dem geschwindigkeitsabhängigen Anteil plus einen schwankenden Anteil aus dem Prozess ermittelt. Dieser Wert wird in den Bewegungsgleichungen benutzt. Diese sind jetzt keine stochastischen Differentialgleichungen mehr und können mithilfe des *Euler* Verfahrens integriert werden und zwar

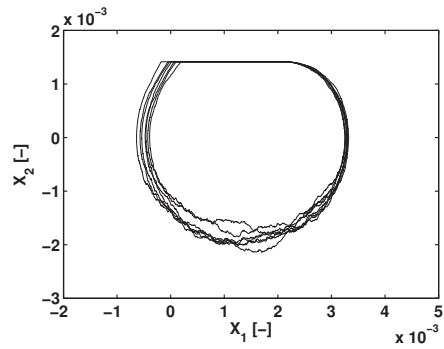
$$\begin{aligned} \text{Haften:} \quad X_{1,k+1} &= X_{1,k} + \gamma_0 \Delta\tau \\ X_{2,k+1} &= X_{2,k} + 0 \Delta\tau \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \text{Gleiten:} \quad X_{1,k+1} &= X_{1,k} + X_{2,k} \Delta\tau \\ X_{2,k+1} &= X_{2,k} + [-X_{1,k} - 2DX_{2,k} + q \cos(X_{3,k})] \Delta\tau \\ &\quad + [(\mu_m + \hat{\mu}_{SD}(X_1, \xi))n \operatorname{sign}(v_0 - L\omega_0 X_{2,k})] \Delta\tau \\ X_{3,k+1} &= X_{3,k} + \eta \Delta\tau. \end{aligned} \quad (4.38)$$

In Abbildung 4.11 ist das Phasendiagramm des Systems, mit übereinstimmenden Parametern simuliert, gezeigt. In Abbildung 4.11a mit der Methode der Spektralen Darstellung und in Abbildung 4.11b mit weißem Rauschen, vergl. Abbildung 4.9a. Die Abbildungen zeigen, dass die Rauschintensität der Reibkraft, welche sich direkt am Rauschen der Phasenlinie ablesen lässt, für weißes Rauschen etwas kleiner ist. Beim weißen Rauschen zeigt sie Phasenlinie auch kleinere Wellenlängen, bei der spektralen Darstellung ist die kleinste Wellenlänge durch die Diskretisierung des Spektrums beschränkt.



(a) Reibwert aus Kontaktanalyse



(b) weißes Rauschen

Abbildung 4.11: Phasendiagramm Reibprozess

4.2 Reibungserregte Schwingungen in der Bremse

Ein Beispiel für reibungserregte Schwingungen, welches durch seine hohe wirtschaftliche Relevanz schon sein Jahren vielfach untersucht und erforscht wird, sind Geräusche von Scheibenbremsen in Automobilen. Ein besonders interessantes Problem ist das Bremsenquietschen. Das Problem wird verschiedenst modelliert z.B. als vollständiges FEM Modell [77], [50], [63], [67], als elastisches Kontinuum mit Reibkontakten [36], [43], [34] oder mit verschiedenen Minimalmodellen [90]. Es ist gemeinhin akzeptiert, dass das Bremsenquietschen durch eine Instabilität des *Gleitzustands*, aufgrund der Kopplung verschiedener Freiheitsgrade an den Kontaktstellen, verursacht wird. Das Problem wird in die Kategorie der "Folgelastprobleme" eingeordnet. Diese sogenannte Flutterinstabilität, auch Mode-Coupling genannt, führt zu Schwingungen quer zur Kontaktfläche.

Das Einfreiheitsgrad-Modell des Reibschwingers kann diese Phänomene nicht abbilden. Bei niedrigen Geschwindigkeiten kann es jedoch in Bremsen auch zu Schwingungen parallel zur Kontaktfläche kommen [38]. Es handelt sich um selbsterregte Schwingungen mit einem *Stick-Slip* Grenzyklus. Diese verursachen niederfrequente Geräusche, welche oft als *Knarzen* ("groan") bezeichnet werden [91]. Aufgrund der abfallenden Kennlinie der Reibkurve können Instabilitäten auftreten, welche verschiedene dynamische Effekte verursachen. Diese Phänomene können mit dem einfachen Reibschwingermodell untersucht werden.

Die hier benutzten Parameter beruhen auf Messungen, welche im Rahmen früherer Arbeiten am Institut an einem Bremsenprüfstand entstanden sind, siehe [36], [79]. Als schwingende Masse wird $m = 2 \text{ kg}$ benutzt. Dies entspricht ungefähr der Masse der beiden Bremsbeläge, welche jeweils ca. $m = 500 \text{ g}$ wiegen plus deren Befestigung. Für die Steifigkeit des Systems wird eine grobe Abschätzung von $c = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ benutzt.

Der Reibwertprozess ist durch die Abmessung und Auflösung der untersuchten Oberfläche bandbreitenbeschränkt. Es muss daher bedacht werden, dass Schwingungen nur in diesem Bereich physikalisch sinnvoll untersucht werden können. Damit der Grenzyklus sich in diesem Bereich ausbildet, muss eine Bandgeschwindigkeit von $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gewählt werden. Die Parameter der folgenden Simulationen sind, sofern nicht anders angegeben, gemäß

$$m = 2 \text{ kg}, \quad c = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

gewählt, d.h. es gilt

$$\omega_0 = 707 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \gamma_0 = 1.4 \cdot 10^{-3}.$$

Zur Untersuchung der Stabilität wird häufig die homogene Bewegungsgleichung um $\dot{x} = 0$ linearisiert. Dabei wird die Reibkraft durch $n\mu_{in}\dot{x}$ angenähert, wodurch die Differentialgleichung für den Gleitvorgang eine gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\ddot{x} = -x - \dot{x}(-2D + n\mu_{in}) \quad (4.39)$$

ergibt, siehe z.B. [34], [36]. Daraus lässt sich bestimmen, dass die Stabilität der stationären Lösung abhängt von der Dämpfung D , der Normalkraft n und der Steigung der Reibkurve bei $\dot{x} = 0$ und damit $v_{rel} = v_0$. Die anfachende Wirkung der fallenden Reibkennlinie steht in Konkurrenz zur abklingenden Wirkung der Dämpfung. Im deterministischen Fall gilt: Ist die stationäre Lösung stabil, kann kein *Stick-Slip* Grenzzyklus entstehen.

Bei stochastischer Reibkraft treten Phänomene auf, die durch das Linearisieren der Reibkraft verloren gehen. Durch Monte Carlo Simulationen kann aber eine gute Abschätzung über das Systemverhalten getroffen werden. Die Steigung der Reibkurve ändert sich, wenn im Reibgesetz III die Parameter $\mu_0(p)$ und $\mu_1(p)$ druckabhängig eingebunden werden, siehe Gleichung (4.33). Es gilt allerdings, dass die Änderung der Steigung nicht isoliert betrachtet werden kann, da Druck- bzw Normalkraftänderungen auch in anderen Effekten zum Ausdruck kommen. Daher wird im Folgenden der kombinierte Einfluss der Normalkraft und der Dämpfung und zusätzlich der Einfluss der Anregung untersucht.

4.2.1 Einfluss der Normalkraft

Ungedämpftes System

Bei den gewählten Parametern bildet sich für die Normalkraft N im Bereich zwischen $N = 500$ N und $N = 20000$ N ein Grenzzyklus aus. Hier wird das Verhalten bei verschiedenen Werten der Normalkraft untersucht. Die Fläche des Bremsbelages wird $A_{pad} = 0.016$ m² gewählt, damit liegen die Anpressdrücke zwischen $p = 0.03$ MPa bis $p = 1.25$ MPa. Die druckabhängige Intensität des Rauschanteils aus der Kontaktanalyse ist im untersuchten Druckbereich annähernd konstant, siehe Abbildung 3.22b. Die Dämpfung wird sehr klein als $D = 5 \cdot 10^{-6}$ angenommen, die Simulationsdauer beträgt $\tau_{end} = 50$, die Schrittweite $\Delta\tau = 0.005$. In den Abbildungen 4.12 bis 4.14 sind die Phasendiagramme für eine Normalkraft von $N = 720$ N, $N = 2720$ N und $N = 8000$ N zu sehen. Es werden Werte gewählt, für die auch ein Spektrum berechnet wurde. Dies ist im Fall der Bremse nicht unbedingt nötig, da mithilfe der Modellfunktion für jeden Druck bzw. jede Kraft der Wert des konstanten Spektrums ermittelt werden kann. Für die im nächsten Kapitel untersuchten Schwingungen beim Metallblech ist das aber nicht möglich. In Abbildung 4.12 ist die deterministische Simulation gezeigt, in Abbildung 4.13 mit weiß verrauschtem Reibwert und in Abbildung 4.14 der stochastische Reibwert mit den berechneten Spektraldichten aus der Kontaktanalyse. Das Spektrum kann, wie in Kapitel 3.2.5 gezeigt, als konstant angenommen werden. Dieser konstante Wert kann mit Hilfe der Modellfunktion für einen beliebigen Druck bestimmt werden. Der erzeugte Prozess für den Reibwert, welcher beispielhaft in Abbildung 3.23a zu sehen ist, hat die kleinste Auflösung von $\Delta y = 6.3 \cdot 10^{-4}$ und eine Länge $y_{end} = 0.05$. Aus den Phasendiagrammen kann bestimmt werden, dass Schwingungen mit Amplituden von $x = 0.002 \rightarrow y = 2 \cdot 10^{-3}$ m auftreten. Eine Gleitphase wird also durch die Länge eines Prozesses abgedeckt. Durch eine Verlängerung von x in Gleichung (4.32) wird der Prozess periodisch fortgesetzt. Dieser periodisch fortgesetzte Prozess wird während einer Simulation mit mehreren Gleitphasen durchlaufen und der Reibwert an der Stelle x_{glob} durch Interpolieren der benachbarten Werte bestimmt. Für die stochastische Simulation werden immer mehrere Simulationen mit jeweils einem periodisch fortgesetzten Reibprozess durchgeführt.

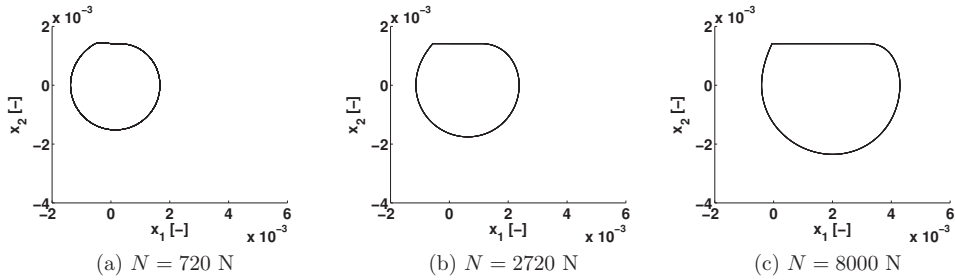


Abbildung 4.12: Phasendiagramm ungedämpft, deterministisch

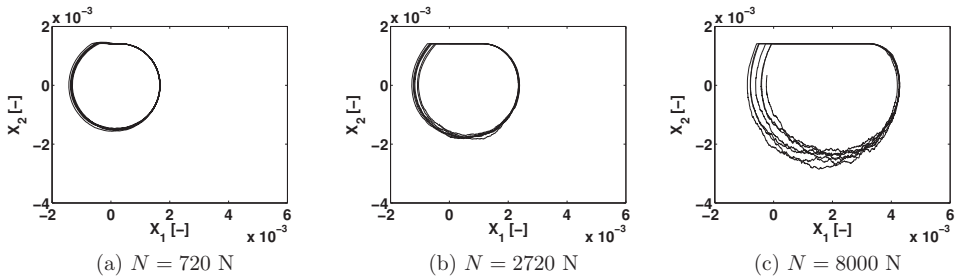


Abbildung 4.13: Phasendiagramm ungedämpft, weißes Rauschen

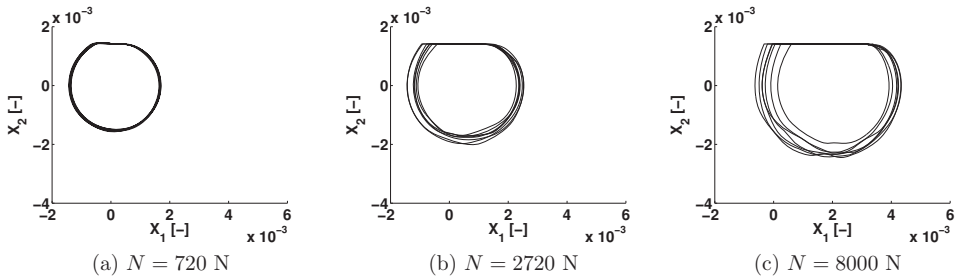


Abbildung 4.14: Phasendiagramm ungedämpft, aus Kontaktanalyse

Die Haftgrenze wird größer bei höherer Normalkraft. Außerdem vergrößert sich der Radius des Grenzzykus. Bei den stochastischen Simulationen fällt zudem auf, dass die Varianz der Phasenkurven mit steigender Normalkraft zunimmt, obwohl die Standardabweichung des Reibprozesses in diesem Druckbereich annähernd konstant ist oder sogar leicht abfällt. Das gilt sowohl bei weißem Rauschen, als auch beim Rauschen aus der Kontaktanalyse. Dies erklärt sich durch einen Blick auf Gleichung (4.23) oder Gleichung (4.36). Der Rauschanteil des Reibwerts geht in Form der Reibkraft mit dem Faktor $n\sigma_\zeta = \frac{1}{c_L}N\sigma_\zeta$ bzw. $n\sigma_{\hat{\mu}_{KM}} = \frac{1}{c_L}N\sigma_{\hat{\mu}_{KM}}$ in die Bewegungsgleichung ein. Die Rauschintensität steigt pro-

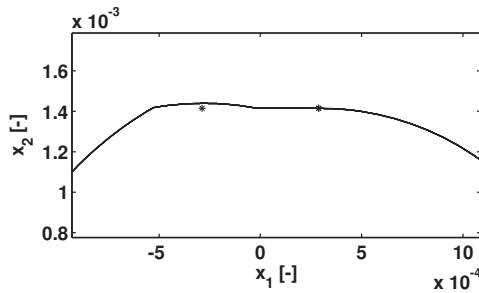


Abbildung 4.15: Ausschnitt Phasendiagramm ungedämpft, deterministisch, $N = 720 \text{ N}$

portional zu N .

Im Fall $N = 720 \text{ N}$ tritt eine Besonderheit auf. Wenn die Masse zum ersten Mal wieder die Bandgeschwindigkeit hat, ist die Kraftbedingung noch nicht erfüllt. Die Masse gleitet also zunächst weiter. Die Position, bei der Haften eintritt, ist daher weiter rechts, siehe Abbildung 4.15. Mit * sind die Positionen markiert, innerhalb derer die Kraftbedingung erfüllt ist.

Die Veränderung der Phasenkurvenvarianz wird am besten sichtbar, wenn man einen bestimmten Punkt des Phasendiagramms betrachtet. Hier ist daher die Wahrscheinlichkeitsdichte des Punktes $X_1 = X_{gh}$, bei dem die Haftgerade erreicht wird und die Bewegung von *Gleiten* in *Haften* übergeht, für die drei verschiedenen Werte der Normalkraft gezeigt. Um eine ausreichend große Datenmenge zu erhalten, werden 30 Simulationen mit einer Simulationsdauer von $\tau_{end} = 50$ durchgeführt, die Schrittweite ist weiterhin $\Delta\tau = 0.005$. In Abbildung 4.16 sind die Ergebnisse für den weiß verrauschtem Reibwert aufgetragen, die Ergebnisse des Reibwerts aus der Kontaktanalyse sind vergleichbar, siehe Abbildung 4.17 und die Daten in Tabelle 4.2. Der Mittelwert der stochastischen Simulationen $E[X_{gh}]$ entspricht dem deterministischen x_{gh} . Der Mittelwert steigt mit größerer Normalkraft, außer im Fall von $N = 720 \text{ N}$ auf $N = 2720 \text{ N}$, was wie oben gezeigt, eine Ausnahme darstellt. Die Standardabweichung steigt ebenfalls, da auch die Schwankungen der Reibkraft proportional zur Normalkraft steigen. Die Standardabweichung bei weißem Rauschen ist etwas niedriger als die aus der Kontaktanalyse. Die Näherung mit weißem Rauschen unterschätzt demnach die Varianz des Reibwerts etwas.

Um die Standardabweichung besser zu beurteilen, kann der Variationskoeffizient betrachtet werden. Dieser beschreibt die relative Streuung und berechnet sich über

$$VarK(X_{gh}) = \sigma_{X_{gh}}/E[X_{gh}]. \quad (4.40)$$

Der Variationskoeffizient für die stochastischen Simulationen ist in Tabelle 4.3 aufgelistet. Er ist streng genommen nur für positive Werte definiert. Daher wird er hier mit Hilfe der Beträge $VarK(X_{gh}) = |\sigma_{X_{gh}}|/|E[X_{gh}]|$ berechnet. Der Variationskoeffizient für $N = 8000 \text{ N}$ liefert durch den Mittelwert nahe null keine brauchbare Information. Abgesehen davon fällt er bei größer werdender Normalkraft ab.

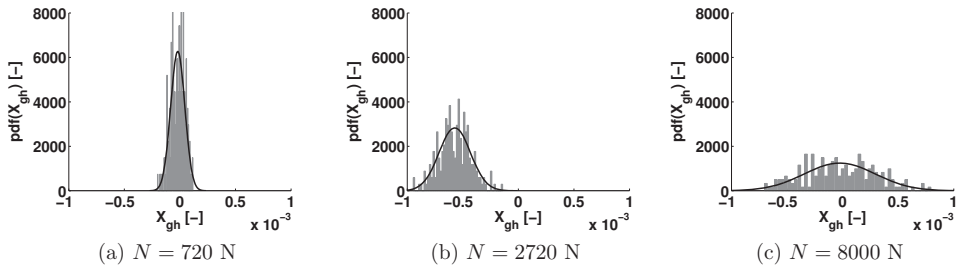


Abbildung 4.16: Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , weißes Rauschen

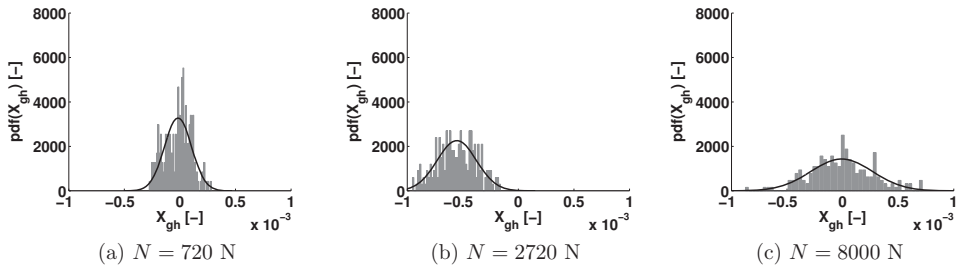


Abbildung 4.17: Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , aus Kontaktanalyse

Tabelle 4.2: Übergang *Gleiten-Haft* $X_1 = X_{gh}$

$E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$	$N = 720 \text{ N}$	$N = 2720 \text{ N}$	$N = 8000 \text{ N}$
deterministisch	$-0.013 \cdot 10^{-3}$	$-0.56 \cdot 10^{-3}$	$-0.05 \cdot 10^{-3}$
weißes Rauschen	$(-0.025 \pm 0.05) \cdot 10^{-3}$	$(-0.56 \pm 0.14) \cdot 10^{-3}$	$(-0.02 \pm 0.31) \cdot 10^{-3}$
aus Kontaktanalyse	$(-0.017 \pm 0.12) \cdot 10^{-3}$	$(-0.55 \pm 0.17) \cdot 10^{-3}$	$(0.008 \pm 0.27) \cdot 10^{-3}$

Tabelle 4.3: Variationskoeffizient Übergang *Gleiten-Haften* $X_1 = X_{gh}$

$VarK(X_{gh})$ in %	$N = 720$ N	$N = 2720$ N	$N = 8000$ N
weißes Rauschen	2.08	0.25	13.04
aus Kontaktanalyse	7.23	0.3	33.5

Gedämpftes System

Die oben gezeigten Simulationen sind mit $D = 5 \cdot 10^{-6}$ quasi dämpfungsfrei. Bei einem Dämpfungsmaß von $D = 0.15$ stellt sich für kleine Normalkräfte kein *Stick-Slip* Grenzzyklus mehr ein, sondern die Lösungstrajektorien schwingen sich auf die stationäre Lösung x_s ein. In Abbildung 4.18 ist die Trajektorie wieder für $N = 720$ N, $N = 2720$ N und $N = 8000$ N zu sehen. Der Radius wächst auch hier mit steigender Normalkraft, und somit dauert bei größerer Normalkraft der Einschwingvorgang länger.

In Abbildung 4.19 sind die gleichen Simulationen für den weiß verrauschten Reibwert durchgeführt. Für den Reibwert aus der Kontaktanalyse sind die Ergebnisse vergleichbar siehe Abbildung 4.20. Wieder wachsen bei größeren Normalkräften die Schwankungen der Phasenkurven an.

In Abbildung 4.21 ist die Wahrscheinlichkeitsdichte von $X_1 = X_{gh}$ für $N = 8000$ N aufgetragen, in Abbildung 4.21a für weißes Rauschen, in Abbildung 4.21b mit dem stochastischem Reibwert aus der Kontaktanalyse. Es werden 30 Simulationen mit je einer Simulationsdauer von $\tau = 50$ berechnet, um eine ausreichend große Datenmenge für die Auswertung zu erzeugen. Für die niedrigeren Werte der Normalkraft ist die Wahrscheinlichkeitsdichte null.

Bei den meisten Fällen ist das Verhalten von deterministischer zu stochastischer Lösung charakteristisch vergleichbar und der Mittelwert der stochastischen Lösung entspricht der deterministischen Lösung. Bei den hier gezeigten Simulationen gilt, wenn die stationäre Lösung im deterministischen Fall stabil ist, ist sie es auch im stochastischen Fall. In manchen Grenzfällen gilt dies aber nicht, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

4.2.2 Einfluss der Dämpfung

Deterministischer Reibwert

Wie bereits im vorherigen Abschnitt gezeigt, ist das Dämpfungsmaß ein Parameter von großem Einfluss auf das Systemverhalten. Die Frage, ob sich ein *Stick-Slip* Grenzzyklus einstellt, kann im deterministischen Fall bei sonst festen Systemparametern mit der Dämpferkonstanten beantwortet werden. In Abbildung 4.22 sind die Phasenkurven für $N = 5600$ N für verschiedene Dämpferkonstanten gezeigt. Für größer werdende Dämpfung wird der Radius des *Stick-Slip* Grenzzyklus kleiner bis irgendwann die Haftgrenze nicht mehr erreicht

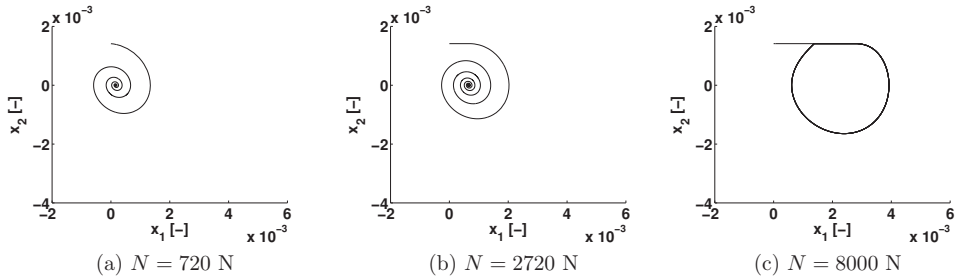


Abbildung 4.18: Phasendiagramm gedämpft, deterministisch

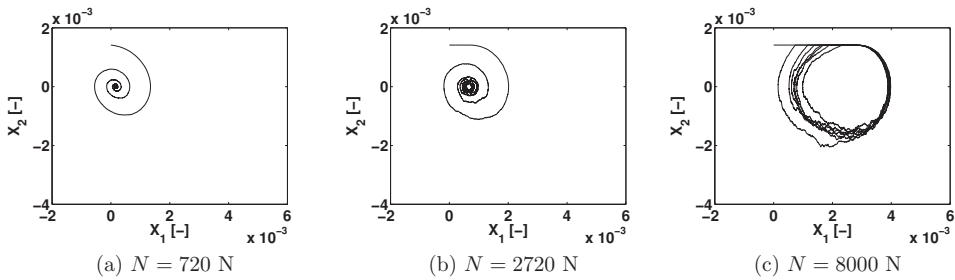


Abbildung 4.19: Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.15$, weißes Rauschen

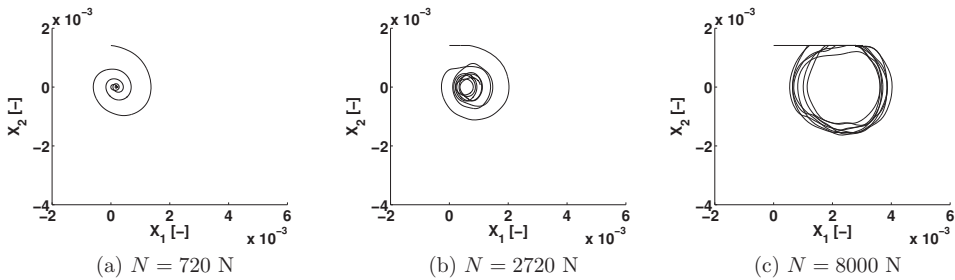


Abbildung 4.20: Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.15$, aus Kontaktanalyse

wird und die Phasenkurven sich auf die stabile Ruhelage einschwingen. Dieser Zusammenhang kann durch Näherungen sogar analytisch abgeschätzt werden, was in [38] gezeigt wird.

In Abbildung 4.23a wird dieser Punkt, an dem sich das Systemverhalten ändert, noch einmal genauer betrachtet. Für ein Dämpfungsmaß von $D = 0.05$ bis $D = 0.25$ und die Normalkraft von $N = 1800$ N bis $N = 8000$ N wurde die Position X_{gh} , bei der *Gleiten* in *Haften* übergeht aufgetragen. Der besseren Darstellung wegen wird X_{gh} auf null gesetzt, sobald die Haftgerade nicht mehr erreicht wird. Der Wert X_{gh} für ein festes Dämpfungs-

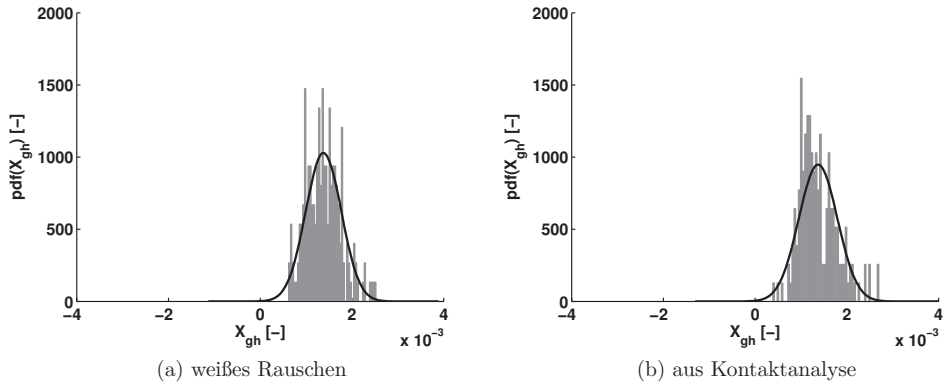


Abbildung 4.21: Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für $N = 8000 \text{ N}$, $D = 0.15$

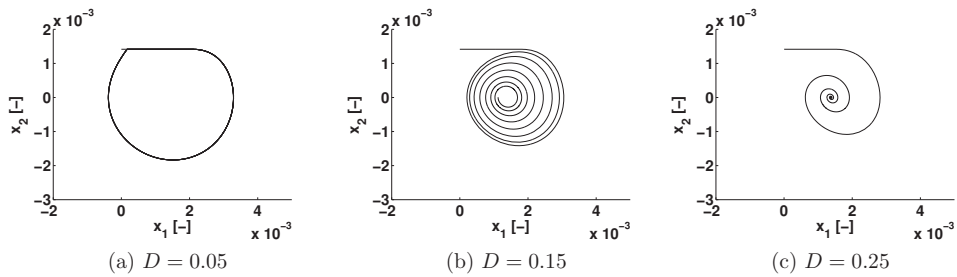
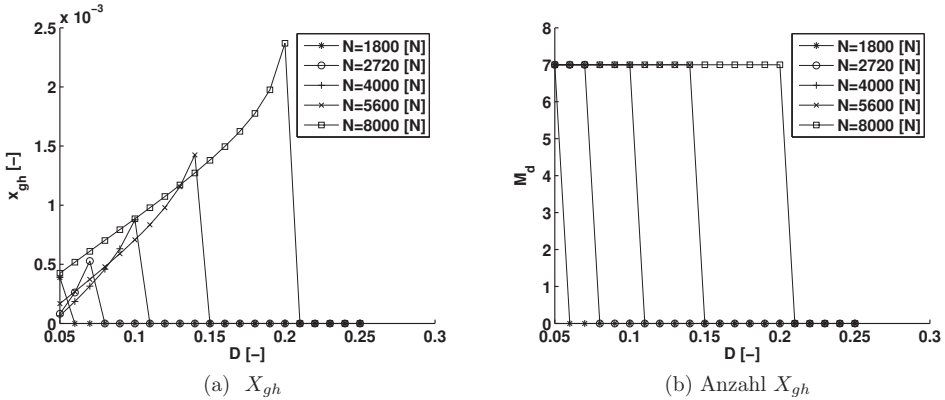


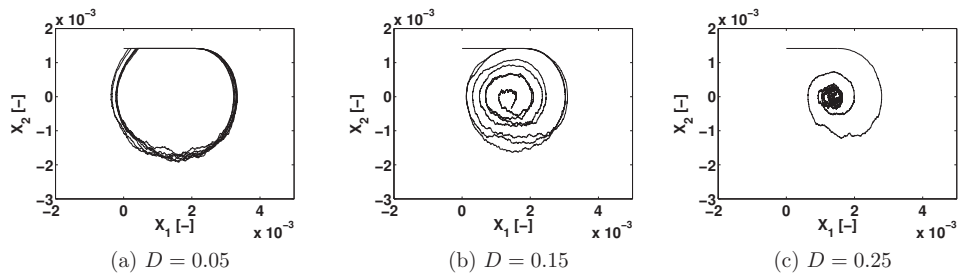
Abbildung 4.22: Phasendiagramm gedämpft, $N = 5600 \text{ N}$, deterministisch

maß steigt mit steigender Normalkraft, was die Vergrößerung des Radius widerspiegelt (die Übergangspunkte *Gleiten-Haften* und *Haften-Gleiten* bewegen sich auseinander). Das maximale Dämpfungsmaß D_{max}^d , bei dem sich noch ein *Stick-Slip* Grenzyklus einstellt, steigt mit steigender Normalkraft und kann genau bestimmt werden. In Abbildung 4.23b ist für eine Simulation mit einer Simulationsdauer von $\tau_{end} = 50$ die Anzahl der Punkte X_{gh} (M_d) aufgetragen.

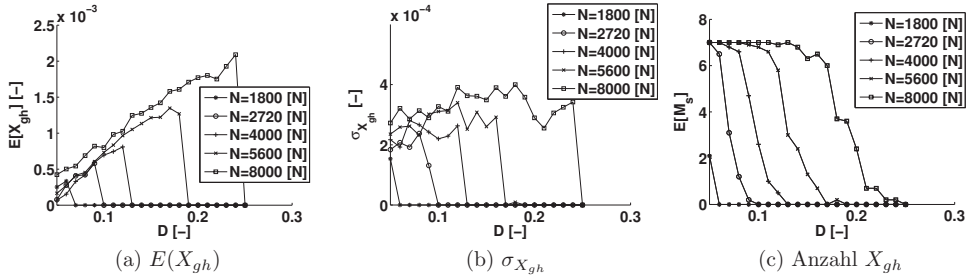

 Abbildung 4.23: X_{gh} und M_{det} für verschiedene N und D , deterministisch

Stochastischer Reibwert, weißes Rauschen

Wenn die Simulation mit stochastischem Reibwert durchgeführt wird, zeigt sich, dass dieser eindeutige Übergang nicht zwangsläufig erhalten bleibt. In Abbildung 4.24 sind die Phasendiagramme für weißes Rauschen mit denselben Parametern, die für die deterministische Simulation verwendet wurden, aufgetragen.


 Abbildung 4.24: Phasendiagramm gedämpft, $N = 5600$ N, weißes Rauschen

Für die folgende Auswertung wurden zehn Simulationsläufe mit einer Dauer von $\tau = 50$ durchgeführt. In Abbildung 4.25 wird, wie in Abbildung 4.23, der maximale noch existierende Punkt X_{gh} abhängig von Dämpfung und Normalkraft gesucht. Es kann nicht mehr genau bestimmt werden, ob für einen bestimmten Dämpfungswert der Grenzzyklus noch besteht oder bereits die stationäre Lösung attraktiv ist. Es können nur noch Wahrscheinlichkeiten für diese Aussagen getroffen werden. Hier wird der Mittelwert $E[X_{gh}]$ und die Standardabweichung $\sigma_{X_{gh}}$ dieser Punkte aufgetragen. Auch hier wird der Wert auf Null gesetzt, wenn die Haftgrenze nicht mehr erreicht wird. In Abbildung 4.25c ist der Mittelwert der Anzahl der Übergangspunkte $E[M_s]$ aufgetragen.


 Abbildung 4.25: $E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$, $E[M_s]$ für verschiedene N und D , weißes Rauschen

Wieder steigt das maximale Dämpfungsmaß D_{max}^s , bei dem sich noch ein *Stick-Slip* Grenzzyklus einstellt, mit steigender Normalkraft. Der Wert rückt jedoch zu größeren Dämpfungsmaßen.

Als Vergleich wird in Abbildung 4.26a die Differenz der Anzahl der Punkte X_{gh} der deterministischen Simulation und dem Mittel der stochastischen Simulationen, bei gleicher Zeitdauer, aufgetragen

$$M_{diff} = M_d - E[M_s]. \quad (4.41)$$

Solange bei der deterministischen Simulation der Grenzzyklus besteht und die Anzahl bei stochastischen Simulation $E[M_s] \leq M_d$ ist, gilt $M_{diff} > 0$. Wenn im deterministischen Fall die Ruhelage attraktiv ist, wird $M_d = 0$. Wenn dort im stochastischen Fall der Grenzzyklus aber noch vereinzelt besteht, wird $M_{diff} < 0$. Sobald bei der stochastischen Simulation auch kein Zyklus mehr besteht, ergibt sich $M_{diff} = 0$. Der Bereich in dem M_{diff} negativ ist, beschreibt den Bereich, in dem die deterministische Simulation nicht ausreichende Sicherheit zur Beurteilung des Systems liefert.

Je größer die Dämpfung, desto weniger Zyklen erreichen im stochastischen Fall noch die Haftgerade.

Eine andere Gegenüberstellung ist der Quotient der Werte

$$M_{quot} = \frac{E[M_s]}{M_d}. \quad (4.42)$$

Diese Auswertung ist in Abbildung 4.26b gezeigt. Der Quotient liefert allerdings nur Informationen, wenn im deterministischen Fall der Grenzzyklus überhaupt besteht. Die Fälle, bei denen im deterministischen Fall die stationäre Lösung attraktiv ist, im stochastischen Fall der Grenzzyklus aber noch besteht, können so nicht ermittelt werden.

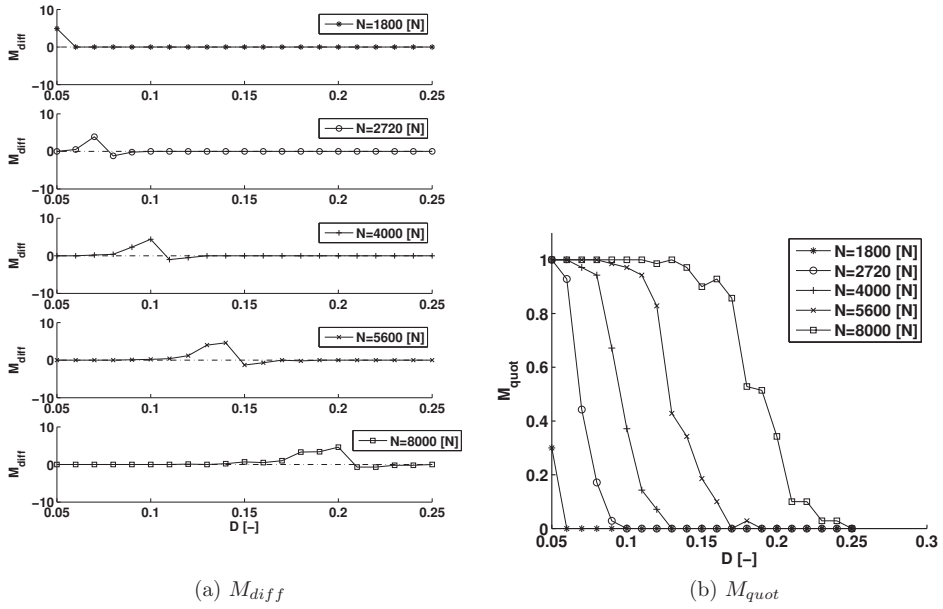


Abbildung 4.26: Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , weißes Rauschen

Stochastischer Reibwert aus Kontaktanalyse

Der gleiche Effekt ergibt sich auch bei Simulationen mit dem Reibwert aus der Kontaktanalyse, siehe Abbildungen 4.27, 4.28 und 4.29.

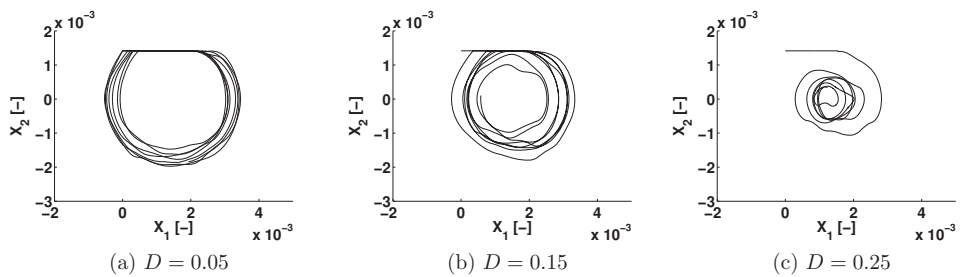


Abbildung 4.27: Phasendiagramm gedämpft, $N = 5600$ N, aus Kontaktanalyse

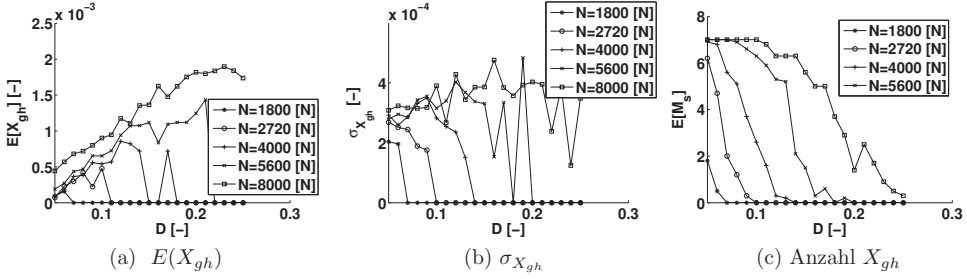


Abbildung 4.28: $E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$ und M_s für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse

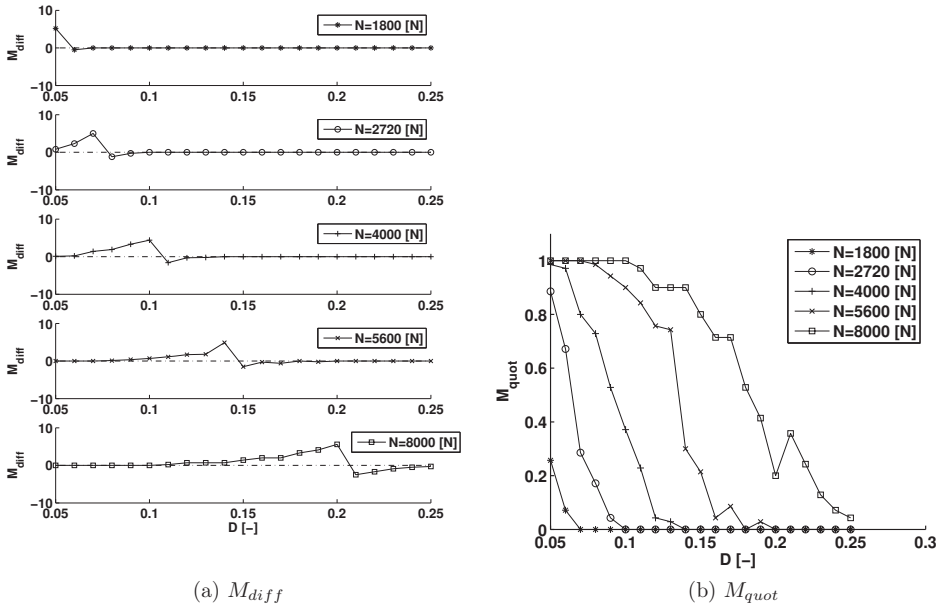


Abbildung 4.29: Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse

M_{diff} und M_{quot} der beiden stochastischen Simulationen sind nahezu identisch, d.h. obwohl beim weißen Rauschen die Varianz der Reibkraft unterschätzt wird, werden die kritischen Bereiche ausreichend genau wiedergegeben.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das maximale Dämpfungsmaß D_{max}^d , welches im deterministischen Fall ermittelt wird, nicht ausreichend zuverlässig ist. Erst durch eine stochastische Simulation kann beurteilt werden, ob in diesem Grenzfall ein *Stick-Slip* Grenzyklus erreicht wird. Mit der stochastischen Simulation kann der Grenzwert D_{max}^s

berechnet werden, für den die Wahrscheinlichkeit null gilt, dass der Grenzzyklus besteht. Dieser Grenzwert ist erheblich sicherer, liegt aber bei größeren Dämpfungsmaßen.

4.2.3 Einfluss der Anregung

Kleine Anregungsamplituden

Wird die äußere Anregung mit betrachtet, kann sich, wie in Abschnitt 4.1.1 bereits gezeigt, die Charakteristik der Lösung ändern. Beim Bremsenaufbau tritt keine Anregungskraft parallel zum Reibkontakt auf, der Fall wird jedoch trotzdem kurz untersucht, da er ein interessantes dynamisches Verhalten verursacht.

In Abbildung 4.32 sind die Phasendiagramme für $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $Q = 50$ N \rightarrow $q = 5 \cdot 10^{-5}$ für $\eta = 0$ bis $\eta = 3$ gezeigt. Mit $Q = 50$ N ist die Anregungsamplitude mit ungefähr $1/30$ der Reibkraft sehr klein. Um zu verdeutlichen, wie sich die Charakteristik der Lösung für verschiedene Anregungsfrequenzen ändert, dient ein Verzweigungsdiagramm. Hierbei werden die *Gleit-Haft* Übergangswerte x_{gh} einer Simulation über der Anregungsfrequenz η aufgetragen. Im deterministischen Fall ist die Lösung für einige η einperiodisch, für η -Werte dazwischen verbreitert sich der Bereich von x_{gh} . Zum Teil treten auch zwei-periodische Lösungen auf. Die Zyklen liegen dann aber sehr nah beieinander. Bei den Simulationen mit stochastischem Reibwert wurden wieder 10 Simulationen der Dauer von je $\tau = 50$ durchgeführt. In Abbildung 4.30 ist das deterministische Verzweigungsdiagramm in schwarz zusammen mit allen zehn stochastischen Simulationen in grau gezeigt. Hier zeigt sich, dass die stochastischen Lösungen sich für verschiedene η nicht unterscheiden. Das Verzweigungsdiagramm wird "geglättet". Dass die ein- und mehrperiodischen Lösungen nicht mehr unterschieden werden können, zeigt auch das normierte Histogramm in Abbildung 4.33. Das normierte Histogramm für die Simulation mit Reibwert aus der Kontaktanalyse sieht vergleichbar aus. Für jede Anregungsfrequenz gibt es nur einen Bereich, in dem die Werte auftreten. Für diesen Bereich kann der Mittelwert und die Standardabweichung bestimmt werden.

Dass dieser Mittelwert quasi unabhängig von der Anregungsfrequenz ist, kann am besten gezeigt werden, wenn im Verzweigungsdiagramm nicht alle Punkte X_{gh} , sondern der Mittelwert 'o' und die jeweilige Standardabweichung '+ +' in der Form $E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ aufgetragen werden. Dies gilt sowohl bei weißem Rauschen in Abbildung 4.31a, als auch beim Reibwert aus der Kontaktanalyse in Abbildung 4.31b. In dieser Darstellung sieht man wieder, dass bei der Simulation mit weißem Rauschen die Standardabweichung etwas kleiner ist. Für alle η -Werte ergibt sich ungefähr eine Verhältnis von 1.2.

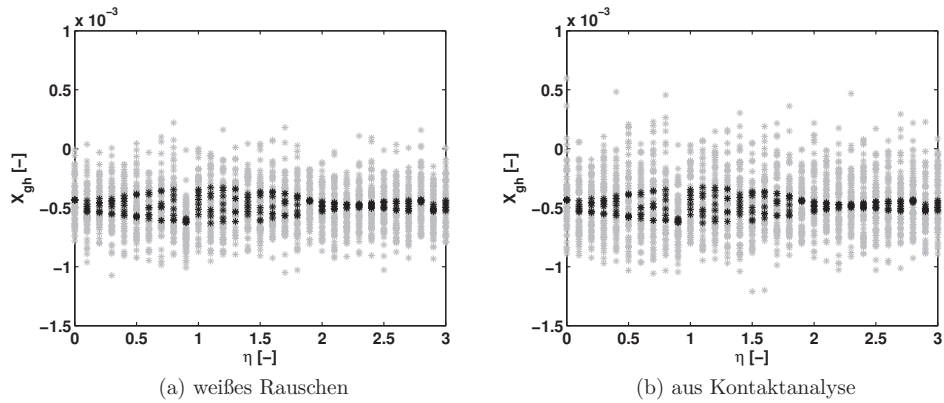


Abbildung 4.30: Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationdurchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

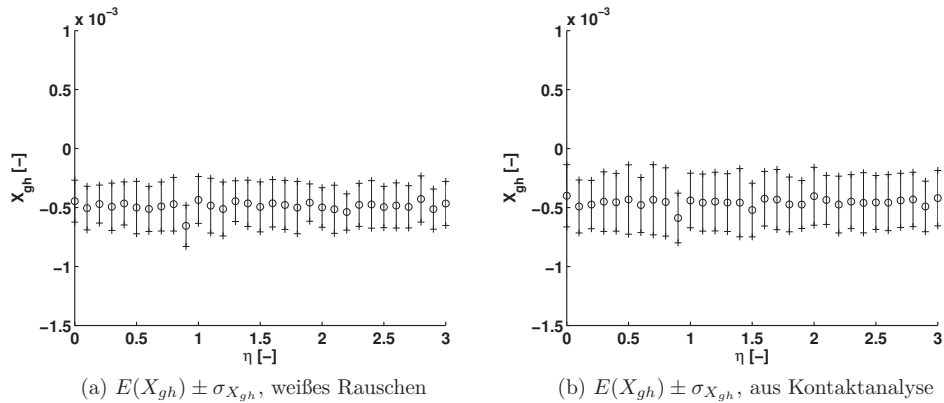


Abbildung 4.31: $E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

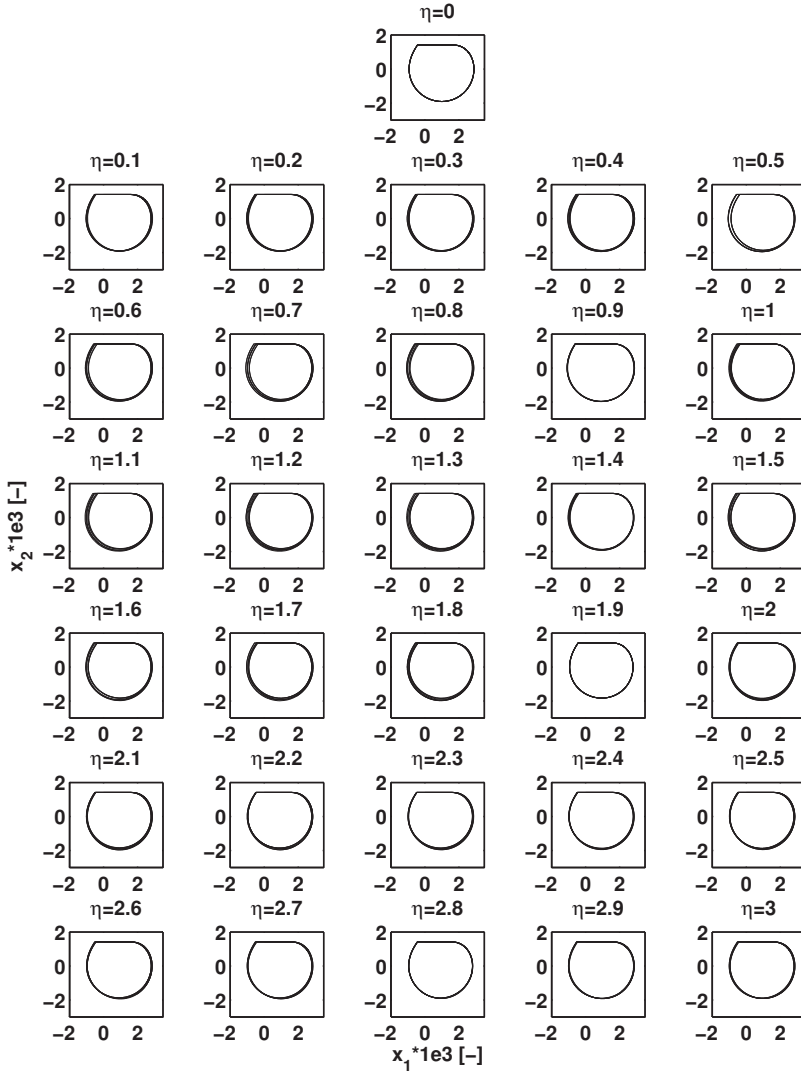


Abbildung 4.32: Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000 \text{ N}$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

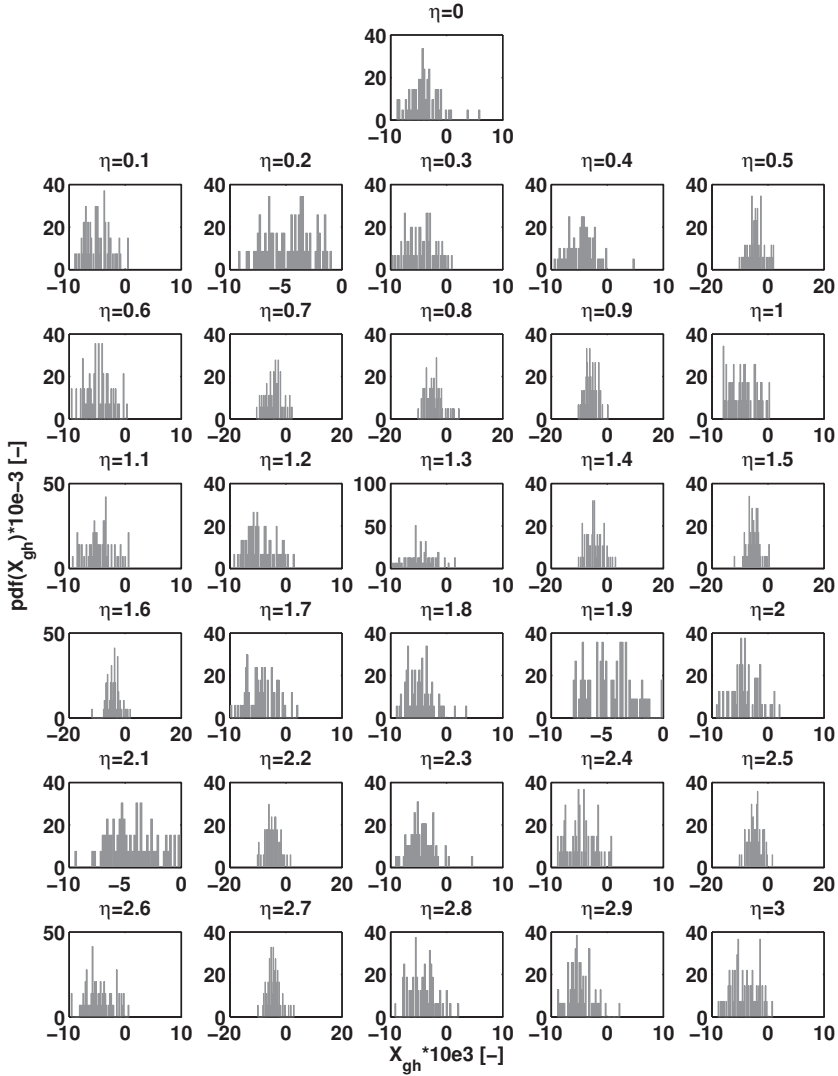


Abbildung 4.33: Normiertes Histogramm, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

Größere Anregungsamplituden

Eine größere Amplitude der Anregungskraft bewirkt bereits bei $Q = 500 \text{ N} \rightarrow q = 5 \cdot 10^{-4}$, was ca. einem Drittel der Reibkraft entspricht, bei einigen Anregungsfrequenzen mehrperiodischen Phasenkurven, wie die Abbildung 4.36 zu sehen ist.

Das Verzweigungsdiagramm für den *Gleit-Haft* Übergang X_{gh} zeigt aber auch hier, dass für die stochastische Simulation diese verschiedenen Charakteristika der Lösung nicht mehr zu unterscheiden sind, siehe Abbildung 4.34. Dies bestätigt auch wieder das normierte Histogramm, Abbildung 4.37. Es werden wieder der Mittelwert und die Standardabweichung im Verzweigungsdiagramm aufgetragen. Bei der größeren Anregungsamplitude ist zu sehen, dass der Mittelwert und die Standardabweichung der Charakteristik der deterministischen Lösung folgen. Das gilt sowohl für weißes Rauschen, siehe Abbildung 4.35a, als auch für den Reibwert aus der Kontaktanalyse, siehe Abbildung 4.35b. Hier ist der Unterschied in der Standardabweichung für alle η -Werte nur ca. 1.05. Für kleine Anregungsamplituden ist also die stochastische Reibkraft diejenige, die für die Schwingungscharakteristik verantwortlich ist. Wenn die Anregungsamplitude aber groß genug ist, ist die äußere anregende Kraft diejenige, welche die Charakteristik bestimmt.

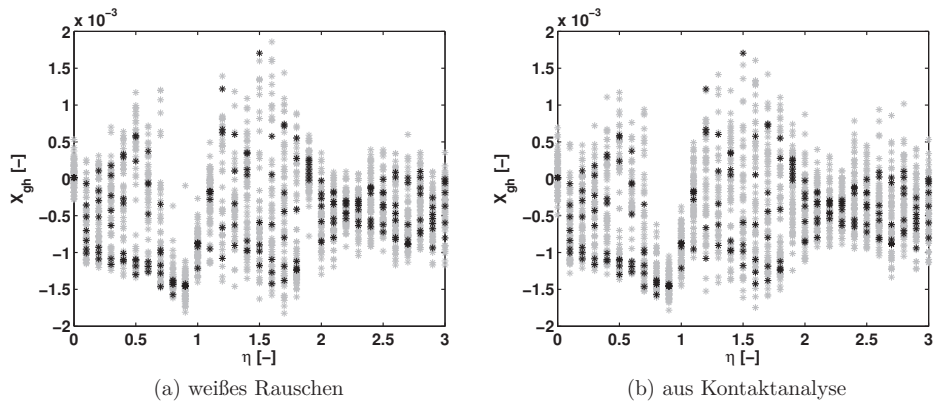


Abbildung 4.34: Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationen durchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000 \text{ N}$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

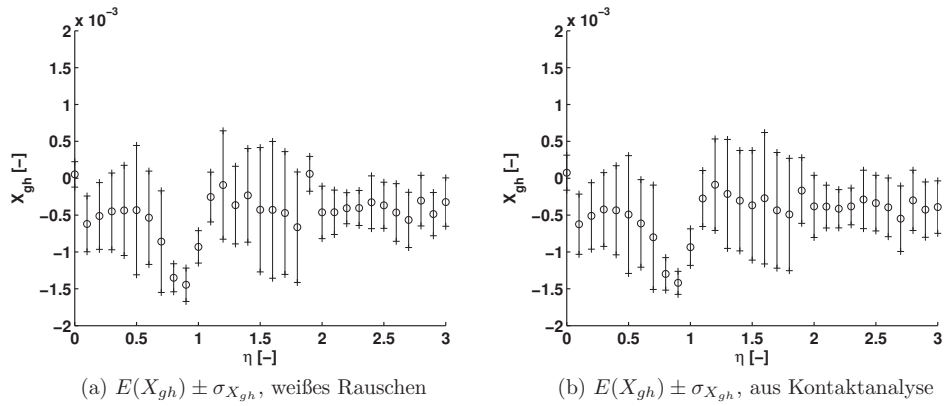


Abbildung 4.35: $E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$

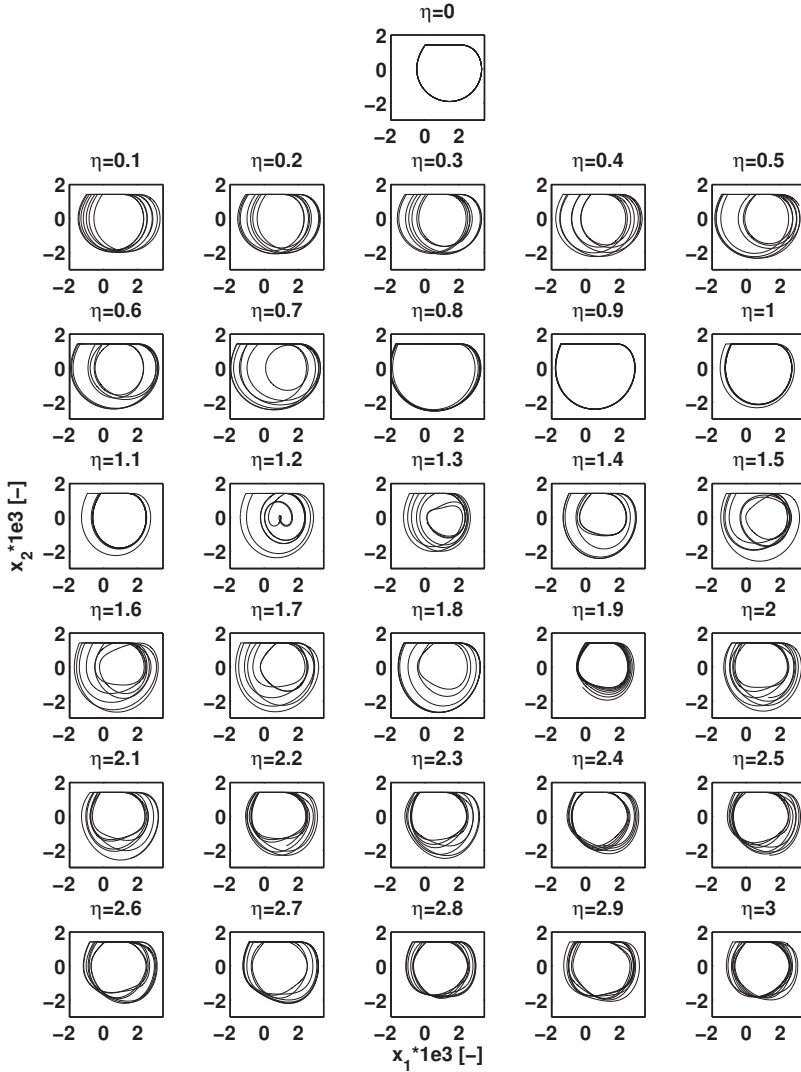


Abbildung 4.36: Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$

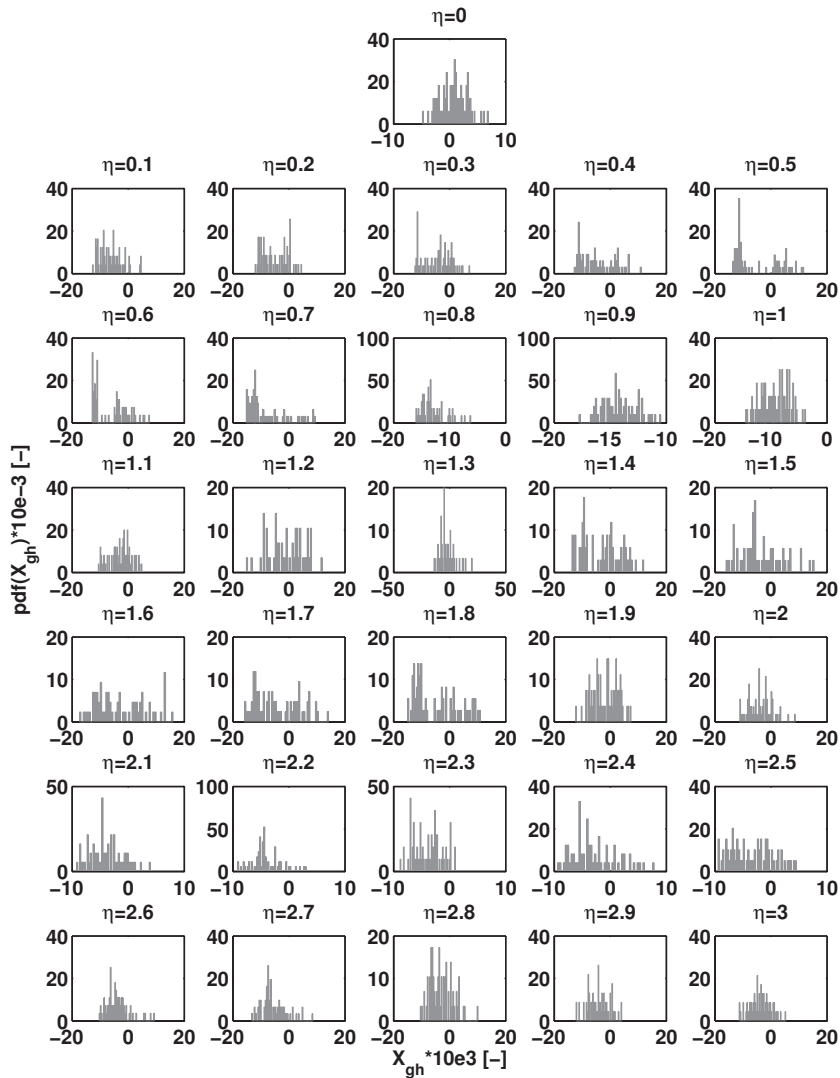


Abbildung 4.37: Normiertes Histogramm, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$

Lyapunov Exponent

Bei Trajektorien für z.B. $q = 5 \cdot 10^{-4}$ und $\eta = 1.2$ stellt sich die Frage, ob die Trajektorie chaotisches Verhalten aufweist. Chaos zeichnet sich vor allem durch die starke Empfindlichkeit der Lösung gegenüber Störungen in den Anfangsbedingungen aus. Sind Systeme hinreichend glatt, kann die Untersuchung basierend auf dem mathematischen Modell mit analytischen Verfahren wie Störungsrechnung oder Mittelungsmethoden durchgeführt werden. Nichtglatte Systemen hingegen können nur numerisch untersucht werden. Eine verbreitete Methode ist die numerische Berechnung des größten *Lyapunov* Exponenten. Dabei werden die Zeitverläufe der simulierten Koordinaten untersucht. Der *Lyapunov* Exponent gibt Auskunft über die exponentielle Konvergenz oder Divergenz benachbarter Lösungen. Der *Lyapunov* Exponent berechnet sich aus der zeitlichen Entwicklung zweier benachbarter Lösungen, genauer deren Abständen $w(\tau_i)$ zu bestimmten Zeitpunkten τ_i . Als Abstand wird oft die euklidische Norm benutzt. Häufig wird die Berechnung des *Lyapunov* Exponenten im mehrdimensionalen Phasenraum nicht direkt in diesem, sondern in der Poincaré Abbildung berechnet. Dabei wird eine $(N - 1)$ -dimensionale Schnittfläche in den N -dimensionalen Phasenraum gelegt und die Lösung auf dieser Schnittfläche untersucht. Hier bietet es sich an, eine Ebene auf Höhe der Haftgeraden zu legen und die Werte bei der Zustandsänderung von *Gleiten* in *Haften* zu betrachten. Im dreidimensionalen Phasenraum ist dies in Abbildung 4.38a zu sehen. Wenn, wie meist hier, die dreidimensionalen Phasendiagramme in der zweidimensionalen Projektion untersucht werden, ist die Schnittfläche eine Linie, wie in Abbildung 4.38b dargestellt. Diese Abbildungsart wurde auch in den vorherigen Kapiteln im Verzweigungsdiagramm benutzt.

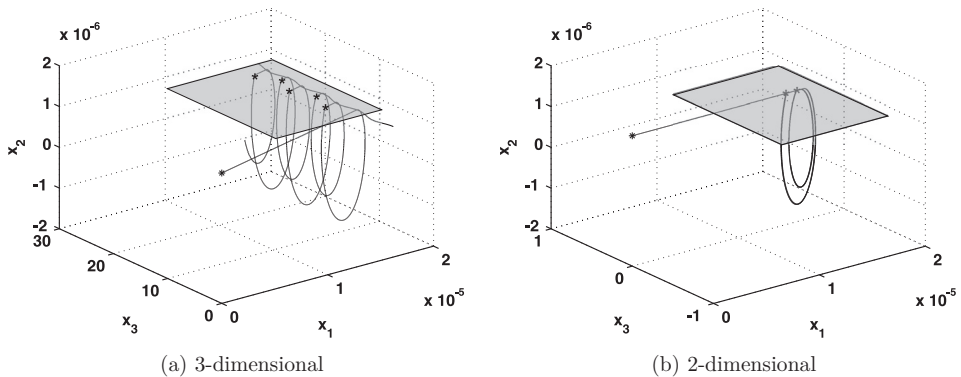


Abbildung 4.38: Poincaré Abbildung

Zur Berechnung des *Lyapunov* Exponenten wird der Abstand w der Werte x_{gh} beim Übergang von *Gleiten* zu *Haften* einer Referenztrajektorie zu den entsprechenden Werten einer Vergleichstrajektorie mit leicht veränderten Anfangsbedingungen genutzt. Die Übergangswerte sind leicht verschoben, wie in Abbildung 4.39a zu sehen ist, da sich die Haftbedin-

gung zeitlich ändert. Der Abstand w ist in Abbildung 4.39 einmal im Phasendiagramm und einmal im Verzweigungsdiagramm gezeigt.

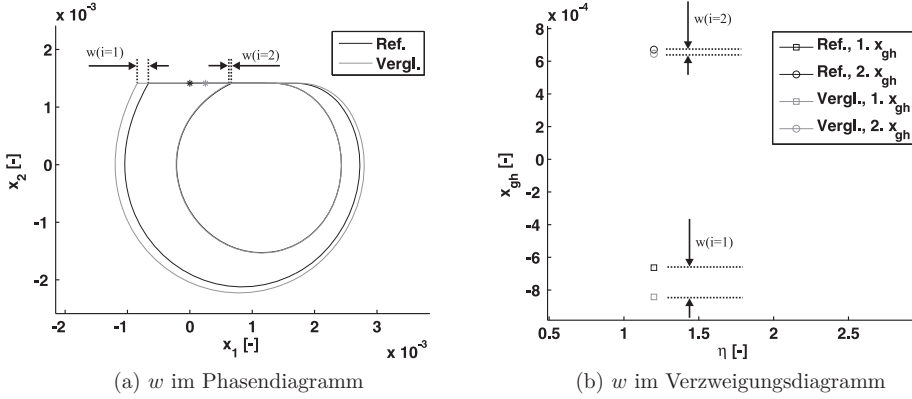


Abbildung 4.39: w zur Berechnung des *Lyapunov* Exponenten

Der Abstand w wird für eine ausreichende Simulationsdauer entweder zu- oder abnehmen. Dieses Verhalten wird durch den *Lyapunov* Exponenten

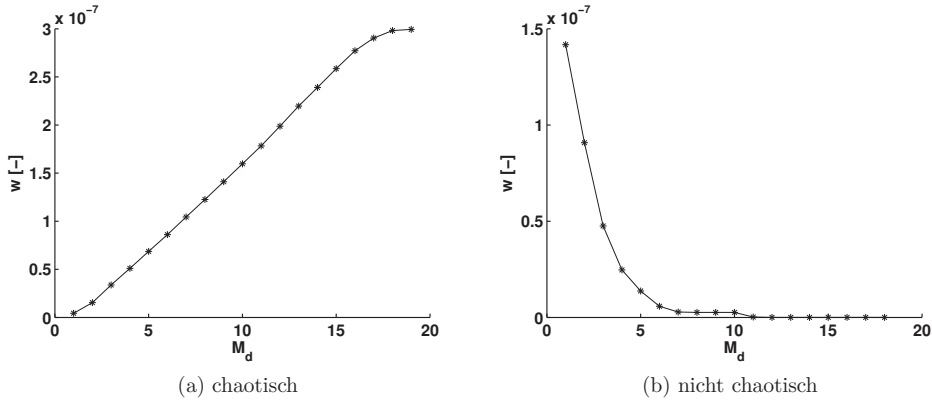
$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{w(i)}{w(1)} \quad (4.43)$$

beschrieben. Wenn der Abstand w zunimmt, ist der Exponent λ positiv, das heißt die Trajektorie hat chaotischen Charakter. Für einen negative Exponenten λ ist die Trajektorie nicht empfindlich gegenüber Störungen in Anfangsbedingungen, d.h. sie ist nicht chaotisch, siehe Abbildung 4.40. Bei den wenigsten Simulationen ist jedoch die Entwicklung von w so eindeutig wie hier gezeigt, weshalb eine ausreichend große Simulationsdauer nötig ist, um einen Trend zu erkennen.

Für den stochastischen Fall müssen die Referenztrajektorie und die Vergleichstrajektorie mehrmals simuliert und der Mittelwert des *Lyapunov* Exponenten mit Hilfe der Mittelwerte der Abstände $E[W(i)]$ berechnet werden

$$E[\Lambda] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \frac{E[W(i)]}{E[W(1)]}. \quad (4.44)$$

Weiterführende Erklärungen zur Untersuchung chaotischer Systeme ist in der Grundlagenliteratur zu nichtlinearer Dynamik zu finden, z.B. [27], [33], [51], [61], [65], [69], [87].

Abbildung 4.40: w Entwicklung über Anzahl der *Gleit-Haft* Wechsel

Im Folgenden werden einige Ergebnisse für Simulationen des *Lyapunov* Exponenten vorgestellt. Zunächst wird für verschiedene Normalkräfte N und verschiedene Anregungsfrequenzen η für einen deterministische Reibwert der Exponent berechnet. In Abbildung 4.41a ist der Verlauf für eine kleine Anregungsamplitude $q = 5 \cdot 10^{-5}$ zu sehen, in Abbildung 4.41b für eine größere, $q = 5 \cdot 10^{-4}$. Die Simulationsdauer beträgt $\tau = 200$, was zu ca. 30 *Gleit-Haft* Übergängen führt.

Bei den meisten Anregungsfrequenzen η ist das Vorzeichen des *Lyapunov* Exponenten für die beiden verschiedenen Anregungsamplituden gleich. Es kann nicht gesagt werden, dass bei größerer Anregungsamplitude mehr Simulationen chaotisches Verhalten aufweisen, obwohl die Phasenverläufe auf den ersten Blick dieses vermuten lassen. Der entscheidende Parameter für chaotisches Verhalten ist die Anregungsfrequenz η , nicht die Anregungsamplitude q . Wenn der Abstand w null wird, ergibt λ wegen $\ln \frac{0}{w(1)}$ keine Lösung. Wenn also ein Wert im Diagramm fehlt, liegen die Werte für X_{gh} der Referenzsimulation und der Vergleichssimulation nach einiger Zeit exakt aufeinander.

Außerdem wird die Simulation mit einem stochastischen Reibwert durchgeführt. In Abbildung 4.42 ist das Ergebnis mit einem weiß verrauschten Reibwert und in Abbildung 4.43 jenes mit dem Reibwert aus der Kontaktanalyse dargestellt.

Die Referenztrajektorie und die Vergleichstrajektorie werden zehn Mal mit einer Simulationsdauer von $\tau = 200$ berechnet und die Abstände W bestimmt. Aus diesen zehn W -Werten wird der Mittelwert bestimmt und mit diesem Mittelwert der *Lyapunov* Exponent $E[\Lambda]$ berechnet.

Wieder wurde die Simulation für $q = 5 \cdot 10^{-5}$ und für $q = 5 \cdot 10^{-4}$ durchgeführt.

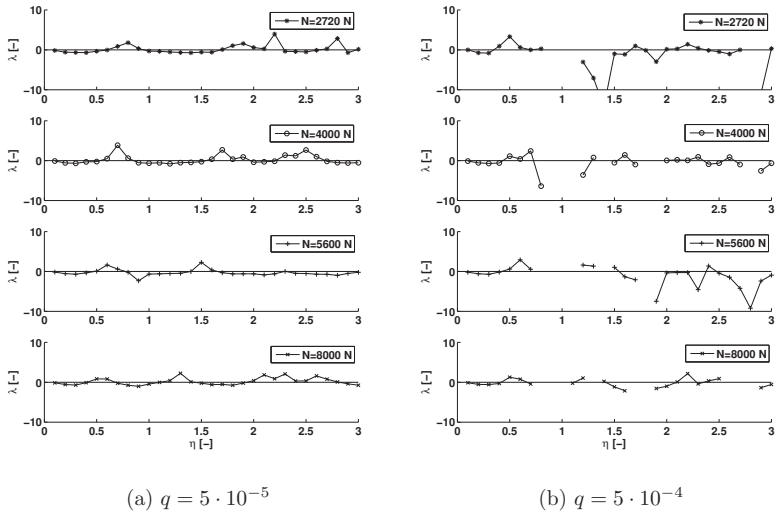


Abbildung 4.41: Deterministischer *Lyapunov* Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$

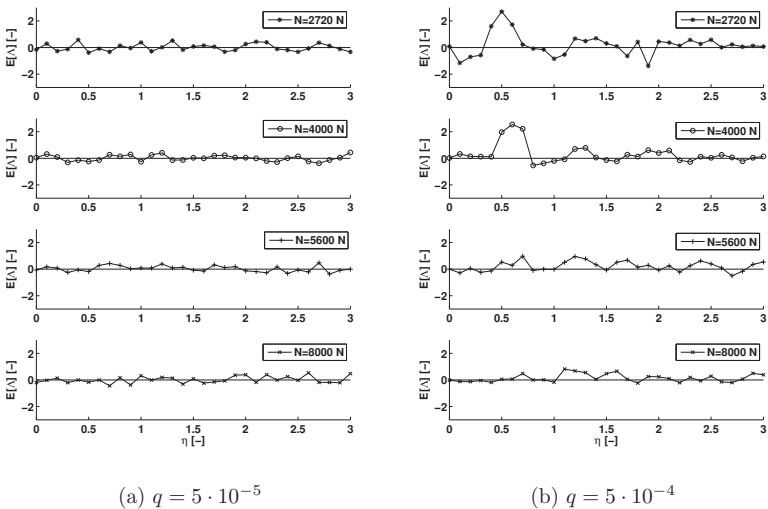


Abbildung 4.42: Stochastischer *Lyapunov* Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, weißes Rauschen

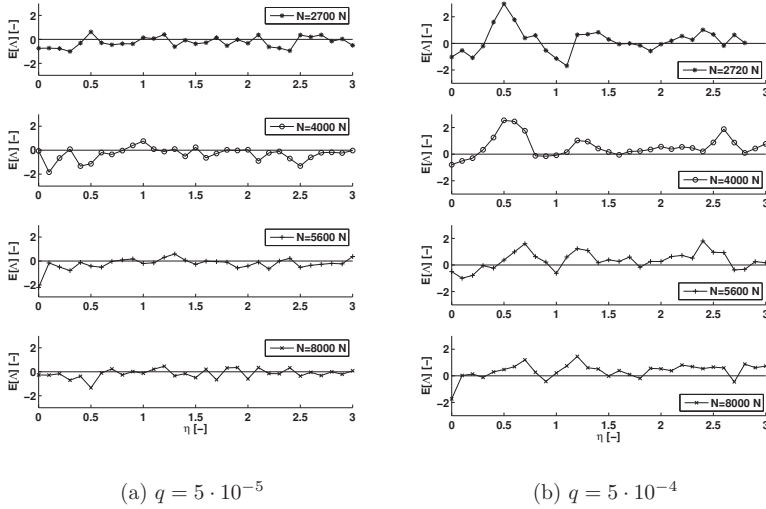


Abbildung 4.43: Stochastischer *Lyapunov* Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, aus Kontaktanalyse

Auch im stochastischen Fall lässt sich keine Abhängigkeit des *Lyapunov* Exponenten von der Anregungsamplitude feststellen. Wiederum ist die Anregungsfrequenz η der entscheidende Parameter. Es gibt ähnlich viele Simulationen, welche chaotisch sind, wie bei der deterministischen Simulation. Die Ergebnisse für verschiedene Anregungsamplituden unterscheiden sich aber häufiger als in der deterministischen Simulation. Auch folgt nicht zwingend, dass eine Parameterkombination, welche im deterministischen chaotisch ist, sich auch bei stochastischer Simulation so verhält und umgekehrt. Die Abweichungen verstärken sich bei zunehmender Normalkraft, da der Rauschanteil des Reibwerts dadurch verstärkt wird. Untersuchungen mit deterministischem Reibwert können daher auch für den Lyapunovexponenten zu falschen Schlussfolgerungen führen. Die Näherung mit weiß verrauschtem Reibwert ermittelt trotz der Unterschätzung der Reibwertvarianz prinzipiell vergleichbare Aussagen über den *Lyapunov* Exponenten.

4.3 Reibungserregte Schwingungen beim Metallblech

Als ein zweites Beispiel wurde in Kapitel 3.3 die Oberfläche eines Metallblechs untersucht. Mit den darüber gewonnenen Informationen sollen nun reibungserregte Schwingungen eines solchen Blechs untersucht werden. Solche Schwingungen können zum Beispiel bei der Weiterverarbeitung des Blechs an den Einspannstellen auftreten. Hier soll keine spezielle Anwendung betrachtet werden, sondern einfach Untersuchungen anhand der Parameter

$$m = 1 \text{ kg}, \quad c = 1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

und damit

$$\omega_0 = 316 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \gamma_0 = 3.16 \cdot 10^{-3},$$

durchgeführt werden, um eine Abschätzung des dynamischen Verhaltens zu bekommen.

4.3.1 Einfluss der Normalkraft

Reibungserregte Schwingungen mit einem *Stick-Slip* Grenzyklus treten im Bereich von $N = 100 \text{ N}$ bis ca. $N = 2000 \text{ N}$ auf. Wenn von einer Oberfläche $A = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ ausgegangen wird, liegt der Druck im Bereich von $p = 0.1 \text{ MPa}$ bis $p = 2 \text{ MPa}$. In Abschnitt 3.3 liegen Spektren für bestimmte Drücke vor. Es wird immer das nächste druckabhängige Spektrum verwendet. In diesem Druckbereich ist der Mittelwert druck- bzw. normalkraftabhängig und geht über $\mu_1 = \mu_0 - \mu_{fit}(N)$, siehe Gleichung (4.33), in das Reibgesetz ein. $\mu_1(N)$ verändert die Steigung der fallenden Reibkurve, welche ebenfalls einen Einfluss auf die Lösung hat. Für die stochastische Simulation aus der Kontaktanalyse ist auch die Intensität $\sigma_{\hat{\mu}_{SD}}(N)$ in diesem Bereich abhängig vom Druck bzw. der Normalkraft, siehe Abbildung 3.32b.

Tabelle 4.4: Druckabhängige Rauschintensitäten

$N \text{ [N]}$	1	5	10
$p \text{ [MPa]}$	0.1	0.5	1
$\sigma_{\hat{\mu}_{SD}}(N) = \sigma_{\zeta}(N)$	0.1001	0.0805	0.0594

Ungedämpftes System

In Abbildung 4.44 bis 4.46 sind die normalkraftabhängigen Phasendiagramme für den deterministischen Fall, für einen Reibwert mit weißem Rauschen und für den Reibwert aus der Kontaktanalyse zu sehen. Für alle ist die Simulationsdauer $\tau = 50$ und die Dämpfung mit $D = 5 \cdot 10^{-6}$ nahezu null. In Abbildung 3.33a ist ein möglicher Reibwertprozess gezeigt. Die kleinste aufgelöste Weggröße ist $\Delta x = 3 \cdot 10^{-4}$ und die Länge ist $x = 0.02$. Es wird pro Simulation ein entsprechender Prozess erzeugt und dieser durch Verlängern von x periodisch fortgesetzt. Der Reibwert wird am entsprechenden Ort durch Interpolation der nächsten Nachbarn bestimmt. Die Schwingungen liegen in der Größenordnung $x = 1 \cdot 10^{-3}$. Es muss jeweils geprüft werden, ob der Prozess überhaupt Informationen für die aktuelle Position enthält.

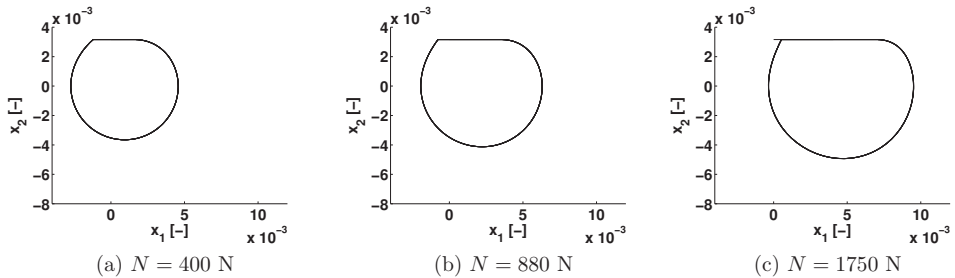


Abbildung 4.44: Phasendiagramm ungedämpft, deterministisch

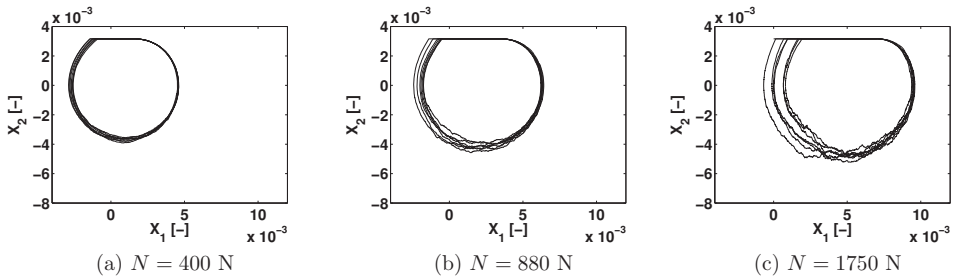


Abbildung 4.45: Phasendiagramm ungedämpft, weißes Rauschen

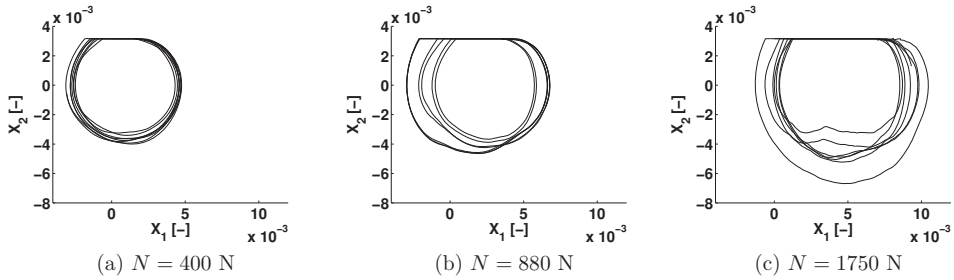


Abbildung 4.46: Phasendiagramm ungedämpft, aus Kontaktanalyse

Auch hier verschiebt sich die Haftgrenze zu größeren Werten, und der Radius vergrößert sich bei höherer Normalkraft. Die Intensität des Rauschens der Phasenlinie nimmt ebenfalls mit steigender Normalkraft zu, obwohl die Intensitäten $\sigma_\zeta(N) = \sigma_{\hat{\mu}_{SD}}(N)$ mit steigender Normalkraft abnehmen. Diese Abnahme ist jedoch gering im Gegensatz zum Anstieg der Normalkraft, welcher direkt proportional in das Rauschen der Reibkraft eingeht und damit auch in das Verhalten der Phasenlinie.

In Abbildung 4.47 ist die Wahrscheinlichkeitsdichte der Position x_{gh} , an dem *Gleiten* in *Haften* übergeht, gezeigt. Der Mittelwert der stochastischen Simulationen stimmt mit dem deterministischen Wert überein, wie noch einmal in Tabelle 4.5 überprüft werden kann. Der Wert steigt mit steigender Normalkraft an. Die Standardabweichung steigt ebenfalls mit wachsender Normalkraft, was die Beobachtung bestätigt, dass das Rauschen der Reibkraft zunimmt. Um die Standardabweichung besser beurteilen zu können, wurde auch hier der Variationskoeffizient ermittelt. Der Variationskoeffizient ist nur für positive Werte definiert. Daher wird er auch hier mit Hilfe der Beträge $VarK(X_{gh}) = |\sigma_{X_{gh}}|/|E[X_{gh}]|$ berechnet und in Tabelle 4.6 aufgeführt. Auch dieser wächst mit steigender Normalkraft, das heißt die Zunahme in der Standardabweichung ist größer als die im Mittelwert.

Ähnliche Ergebnisse ergeben sich auch bei der Simulation mit dem Reibwert aus der Kontaktanalyse, siehe Abbildung 4.48. Die Werte für Mittelwert, Standardabweichung und Variationskoeffizient sind ebenfalls in Tabelle 4.5 und 4.6 eingetragen. Die Standardabweichung ist beim Reibwert aus der Kontaktanalyse größer. Die aus der Kontaktanalyse berechnete Standardabweichung entspricht der Fläche unter dem Spektrum. Bei der Berechnung mit weißem Rauschen ist diese Fläche rechteckig, da das Spektrum weißen Rauschens konstant ist. Bei weißem Rauschen sind die Amplituden der niederfrequenten Anteile daher kleiner als die aus der Kontaktanalyse. Diese Verkleinerung führt zu einer Unterschätzung der Schwankung der Reibkraft.

Tabelle 4.5: Übergang *Gleiten-Haft* $X_1 = X_{gh}$

$E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$	$N = 400 \text{ N}$	$N = 880 \text{ N}$	$N = 1750 \text{ N}$
deterministisch	$-1.2 \cdot 10^{-3}$	$-0.7 \cdot 10^{-3}$	$0.5 \cdot 10^{-3}$
weißes Rauschen	$(-1.2 \pm 0.2) \cdot 10^{-3}$	$(-0.8 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}$	$(0.5 \pm 0.6) \cdot 10^{-3}$
aus Kontaktanalyse	$(-0.9 \pm 0.3) \cdot 10^{-3}$	$(-0.8 \pm 0.9) \cdot 10^{-3}$	$(0.7 \pm 0.9) \cdot 10^{-3}$

Tabelle 4.6: Variationskoeffizient Übergang *Gleiten-Haft* $X_1 = X_{gh}$

$VarK(X_{gh})$ in %	$N = 400 \text{ N}$	$N = 880 \text{ N}$	$N = 1750 \text{ N}$
weißes Rauschen	0.17	0.47	1.12
aus Kontaktanalyse	0.5	1.1	1.2

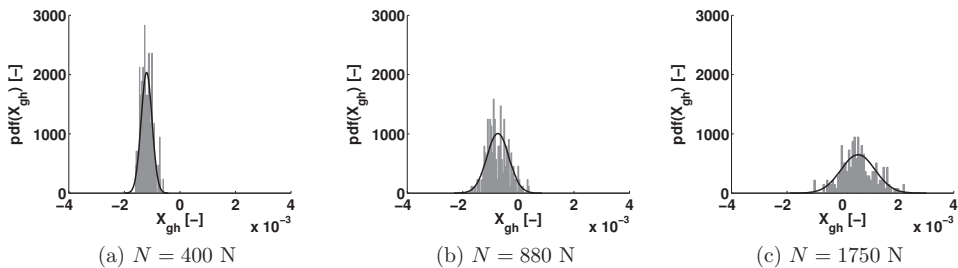


Abbildung 4.47: Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , weißes Rauschen

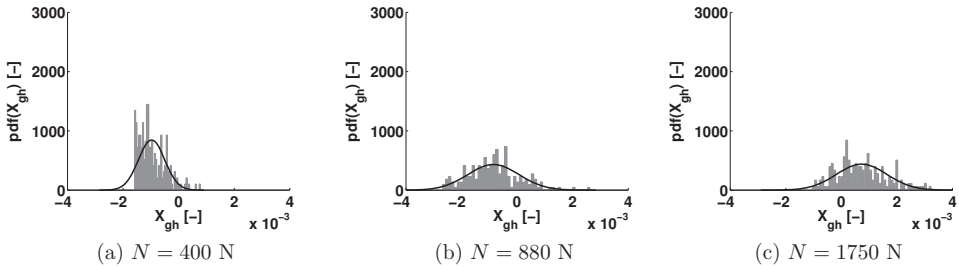


Abbildung 4.48: Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , aus Kontaktanalyse

Gedämpftes System

Als nächstes wird wieder ein gedämpftes System untersucht. Für $D = 0.17$ sind die deterministischen Phasendiagramme für $N = 400\text{ N}$, $N = 880\text{ N}$ und $N = 1750\text{ N}$ in Abbildung 4.49 zu sehen. Der Radius steigt mit höherer Normalkraft, und für $N = 1750\text{ N}$ wird der Grenzzyklus wieder erreicht.

Im stochastischen Fall, sowohl für weißes Rauschen, Abbildung 4.50, als auch für den Reibwert aus der Kontaktanalyse, Abbildung 4.51, sehen die Phasendiagramme ähnlich aus. Ob der Grenzzyklus besteht oder die Phasenkurve sich auf die stationäre Lösung einschwingt, hängt also wieder vom Dämpfungsmaß und der Normalkraft ab. In Abbildung 4.52 ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für $N = 1750\text{ N}$ und $D = 0.17$ für weißes Rauschen und für den Reibwert aus der Kontaktanalyse gezeigt. Auch hier wird deutlich, wie die Näherung über weißes Rauschen die Varianz des Reibwerts unterschätzt. Bei den niedrigeren Normalkräften ist die Wahrscheinlichkeitsdichte gleich null. Ob das maximale Dämpfungsmaß, bei welchem der deterministische Grenzzyklus noch besteht, genau mit dem bei stochastischem Reibwert übereinstimmt, wird im nächsten Abschnitt untersucht.

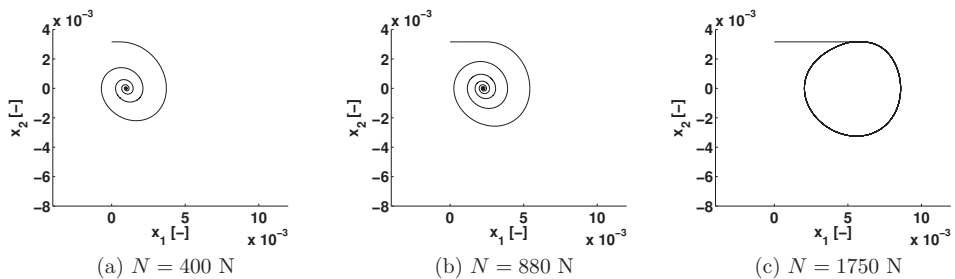


Abbildung 4.49: Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.17$, deterministisch

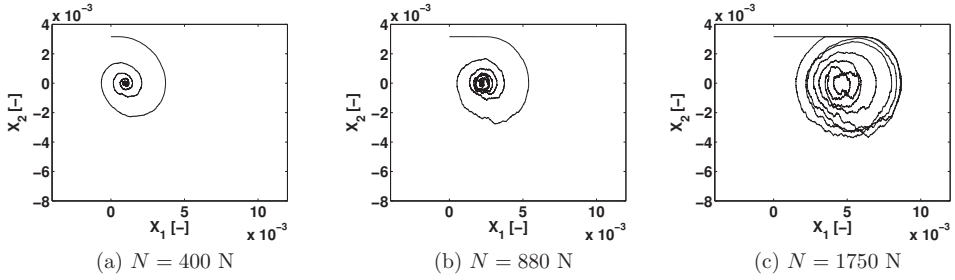


Abbildung 4.50: Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.17$, weißes Rauschen

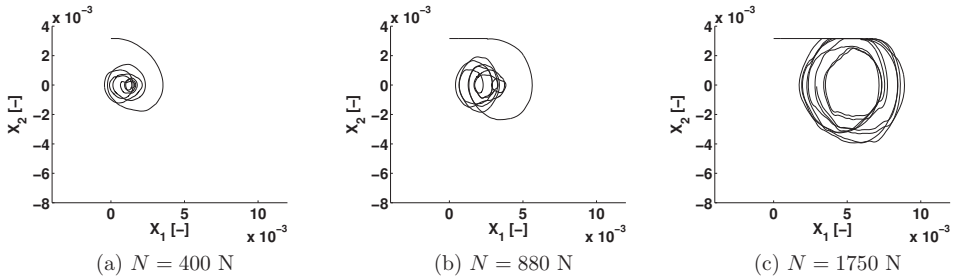


Abbildung 4.51: Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.17$, aus Kontaktanalyse

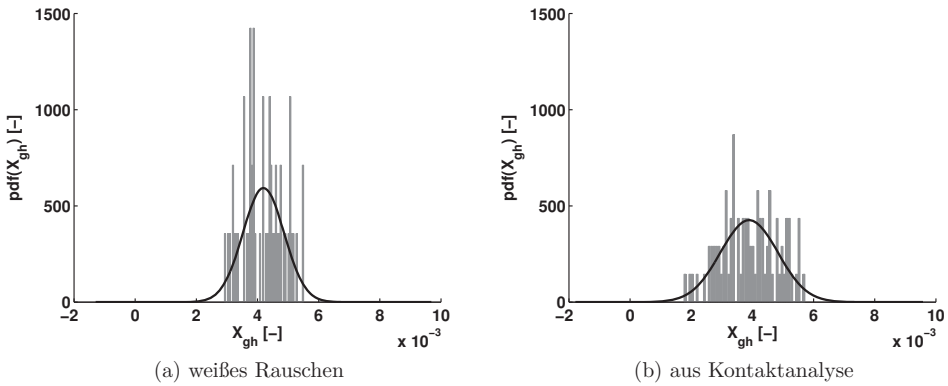


Abbildung 4.52: Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für $N = 1750 \text{ N}$, $D = 0.17$

4.3.2 Einfluss der Dämpfung

Deterministischer Reibwert

Das Systemverhalten des Reibschwingers hängt maßgeblich von der Normalkraft und dem Dämpfungsmaß ab. In Abbildung 4.53 sind Phasendiagramme für eine Normalkraft $N = 1400$ N für verschiedene Dämpfungsmaße gezeigt ($\tau = 50$). Für steigende Dämpfung verkleinert sich der Radius des Grenzzyklus, bis die Haftgrenze nicht mehr erreicht wird und die Phasenkurve sich auf die stationäre Lösung einschwingt.

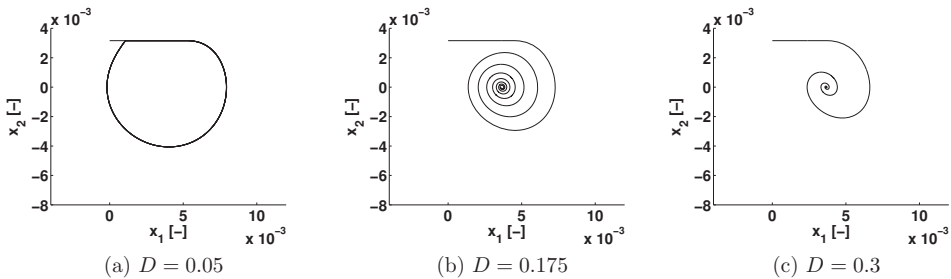


Abbildung 4.53: Phasendiagramm gedämpft, $N = 1400$ N, deterministisch

Es existiert ein maximales Dämpfungsmaß D_{max}^d bei welchem der Grenzzyklus noch besteht. Es ist abhängig von der Normalkraft. Um D_{max}^d zu ermitteln, ist in Abbildung 4.54a das Verzweigungsdiagramm der Position x_{gh} des Übergangs von *Gleiten* zu *Haften* über den Dämpfungsmaßen für verschiedene Normalkräfte und für eine Simulationsdauer von $\tau_{end} = 50$ gezeigt. Zusätzlich ist auch die Anzahl dieser Übergänge M_d über D in Abbildung 4.54b dargestellt. Wieder wurde der Wert auf Null gesetzt, wenn der Grenzzyklus nicht mehr besteht, das heißt die Haftgerade nicht mehr erreicht wird. Der Wert für x_{gh} steigt mit steigendem Dämpfungsmaß. Das maximale Dämpfungsmaß D_{max}^d bei dem sich noch ein Grenzzyklus einstellt, steigt mit steigender Normalkraft.

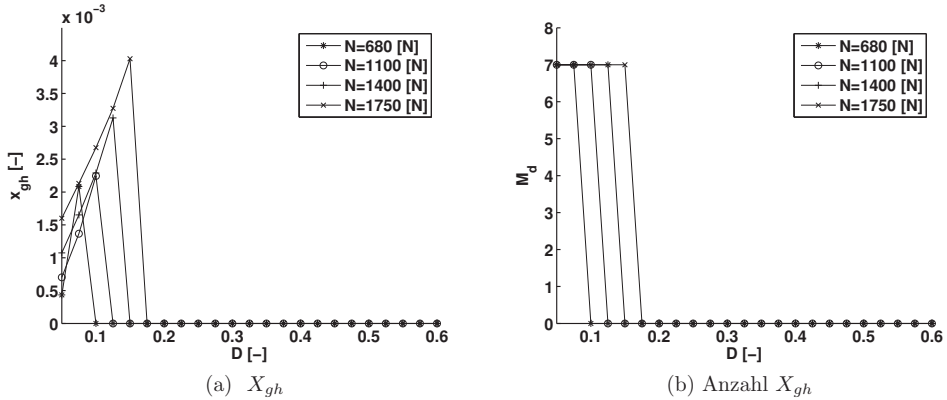


Abbildung 4.54: X_{gh} und M_d für verschiedene N und D , deterministisch

Stochastischer Reibwert, weißes Rauschen

Bei der stochastischen Simulation gilt wieder, dass die Lösungscharakteristik nicht zwangsläufig jener der deterministischen Simulation entspricht. In Abbildung 4.55 sind die Phasendiagramme mit denselben Systemparametern wie im deterministischen Fall gezeigt. In diesem Fall hat die stochastische Trajektorie die gleiche Charakteristik wie die deterministische. Ob dies immer der Fall ist, oder ob in Grenzfällen sich in einem Fall ein Grenzzyklus ausbildet, im anderen Fall die stationäre Lösung schon attraktiv ist, wird auch hier am Verzweigungsdiagramm für zehn Simulationen mit einer Dauer von je $\tau = 50$ deutlicher. In Abbildung 4.56a ist der Mittelwert von X_{gh} , in Abbildung 4.56b, dessen Standardabweichung und in Abbildung 4.56c der Mittelwert der Anzahl der auftretenden Wechsel $E[M_s]$ gezeigt. Auch hier gilt wie im deterministischen Fall, dass der Mittelwert $E[X_{gh}]$ für steigende Werte von D ansteigt bis die Haftgerade nicht mehr erreicht wird und der Wert auf Null gesetzt wird. Der Grenzwert D_{max}^s , bei dem sich noch ein Zyklus einstellt, liegt etwas niedriger als im deterministischen Fall.

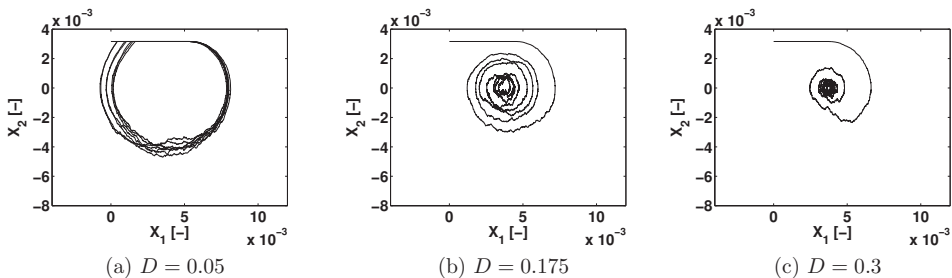


Abbildung 4.55: Phasendiagramm gedämpft, $N = 1400$ N, weißes Rauschen

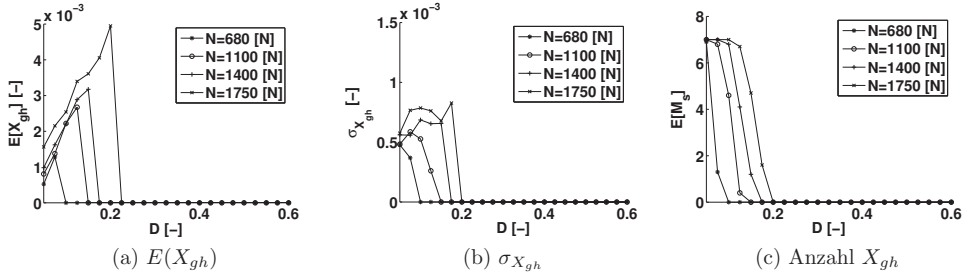


Abbildung 4.56: $E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$, M_w für verschiedene N und D , weißes Rauschen

Um diesen Unterschied zwischen deterministischem und stochastischem Grenzwert besser darzustellen, wird in Abbildung 4.57a wieder die Differenz der Anzahl der Wechsel

$$M_{diff} = M_d - E[M_s] \quad (4.45)$$

aufgetragen. Wenn $M_{diff} = 0$ gilt, stimmt die Anzahl der Übergänge im stochastischen Fall und im deterministischen Fall überein. Im unsicheren Bereich, in dem sich die Lösungen unterscheiden, ist $M_{diff} \neq 0$. Auch hier sieht man wieder eindeutig, dass dieser Bereich sich bei größerer Normalkraft zu höheren Dämpfungswerten verschiebt. Wenn $M_{diff} < 0$ wird, ist im deterministischen Fall die stationäre Lösung bereits attraktiv, im stochastischen Fall besteht der Grenzyklus aber noch. Erst wenn M_{diff} nach diesem Bereich erneut null wird, stellt sich in beiden Fällen die stationäre Lösung ein.

Eine andere Gegenüberstellung ist der Quotient der Werte. Es wird betrachtet, wie viele Grenzyklen im stochastischen Fall bezogen auf den deterministischen Fall bestehen

$$M_{quot} = \frac{E[M_s]}{M_d}. \quad (4.46)$$

Diese Auswertung ist in Abbildung 4.26b gezeigt.

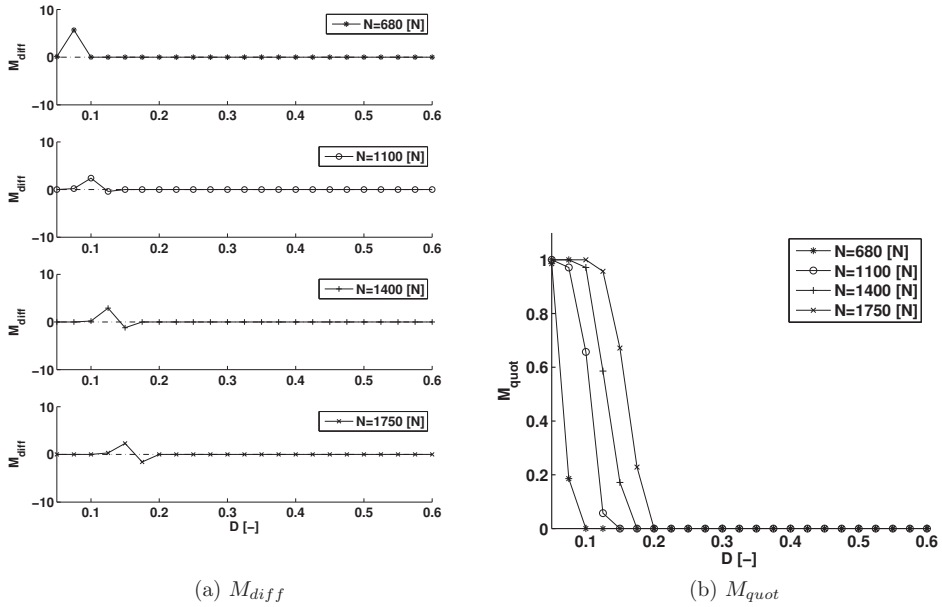


Abbildung 4.57: Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse

Stochastischer Reibwert aus Kontaktanalyse

Ähnliche Ergebnisse liefern auch die Simulationen mit dem Reibwert aus der Kontaktanalyse, siehe Abbildung 4.58 bis 4.60. Am Beispiel in Abbildung 4.58b sieht man, dass hier in manchen Durchläufen die Haftgrenze wieder erreicht wird, was im deterministischen Fall und auch bei weißem Rauschen nicht der Fall ist.

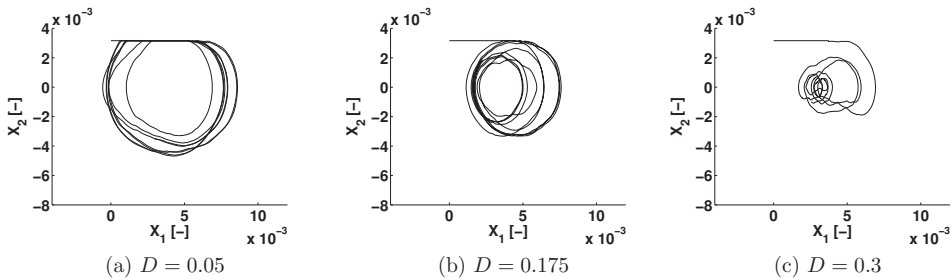


Abbildung 4.58: Phasendiagramm gedämpft, $N = 1400$ N, aus Kontaktanalyse

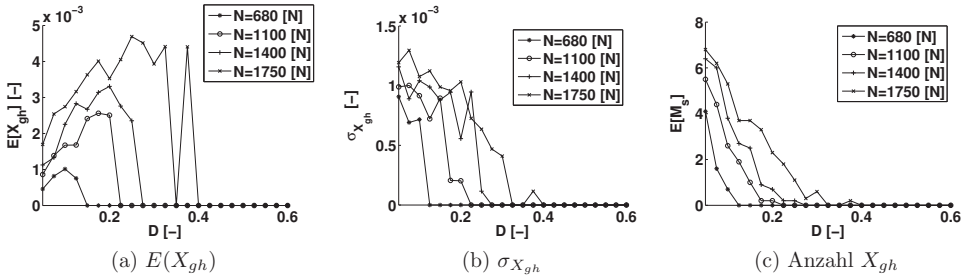


Abbildung 4.59: $E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$, M_s für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse

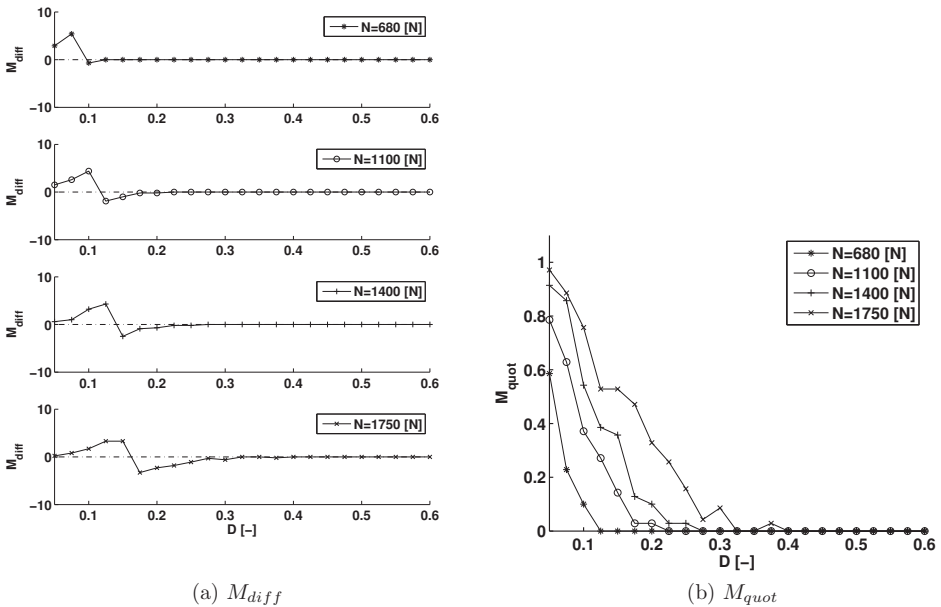


Abbildung 4.60: Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse

Für die Simulation mit weiß verrauschtem Reibwert liegen die kritischen Dämpfungsmaße niedriger als bei der Simulation mit einem Reibwert aus der Kontaktanalyse, da beim weißen Rauschen die Varianz des Reibwerts unterschätzt wird. Erst die Simulation mit dem Reibwert aus der Kontaktanalyse gibt zuverlässig Auskunft, dass der Grenzyklus mit Sicherheit nicht mehr besteht.

Grundsätzlich gilt, dass im Grenzbereich geprüft werden muss, welcher der Grenzwerte der höhere und damit der sichere ist.

4.3.3 Einfluss der Anregung

Kleine Anregungsamplitude

Weiterhin wird der Einfluss der Anregung untersucht. In Abbildung 4.61 ist das Verzweigungsdiagramm für $N = 1100$ N bei einer Anregungsamplitude von $q = 5 \cdot 10^{-5}$ für verschiedene Anregungsfrequenzen η zu sehen und zwar in Abbildung 4.61a für weißes Rauschen und in Abbildung 4.61b für den Reibwert aus der Kontaktanalyse. In schwarz ist die deterministische Simulation für eine Simulationsdauer von $\tau = 50$ dargestellt. In grau sind die Ergebnisse der stochastischen Simulationen für zehn Simulationsläufe mit je einer Simulationsdauer von $\tau = 50$ aufgetragen. Hier ist wieder die größere Varianz der Reibkraft aus der Kontaktanalyse zu sehen. Die stochastische Lösung verwischt in beiden Fällen das charakteristische Verhalten, und es kann nicht mehr unterschieden werden, ob ein- oder mehrperiodische Lösungen vorliegen. Dies wird nochmal durch die Wahrscheinlichkeitsdichte der stochastischen Simulation in Abbildung 4.63 verdeutlicht. Hier ist nur die Wahrscheinlichkeitsdichte für weißes Rauschen gezeigt, das Ergebnis für den Reibwert aus der Kontaktanalyse ist charakteristisch gleich, nur mit einer größeren Standardabweichung. Das Phasendiagramm in Abbildung 4.62 zeigt aber auch, dass wenn im deterministischen Fall mehrperiodische Lösungen vorliegen, diese sehr nahe beieinander liegen, so dass sie nicht zu unterscheiden sind. In Abbildung 4.64 ist der Mittelwert 'o' und die Standardabweichung '+ + +', in der Form $E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$, der stochastischen Werte X_{gh} aufgetragen. Auch hier ist die Charakteristik nicht mehr zu erkennen. Dies gilt sowohl für den weiß verrauschten Reibwert, Abbildung 4.64a als auch für den Reibwert aus der Kontaktanalyse, Abbildung 4.64b. Hier wird wieder deutlich, wie die Simulation mit weißem Rauschen die Standardabweichung unterschätzt. Es besteht ein Faktor zwischen der Standardabweichung der Simulation mit Reibwert aus der Kontaktanalyse und jener mit weißem Rauschen bei allen η -Werten von ca. 2,5.

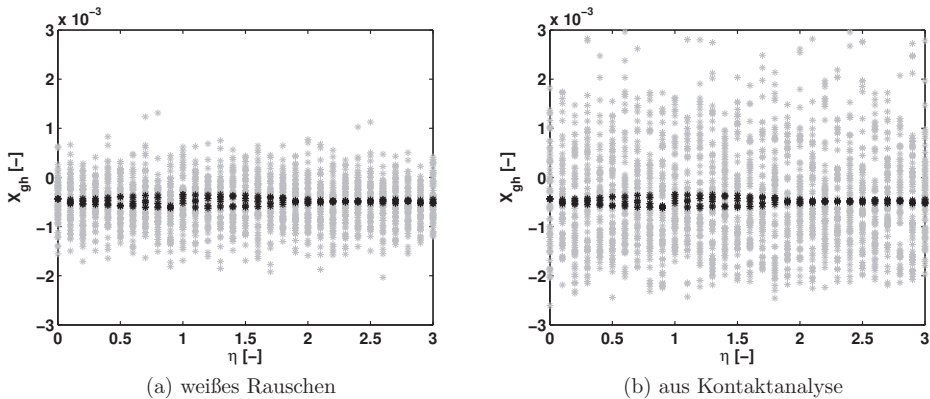


Abbildung 4.61: Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationsdurchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

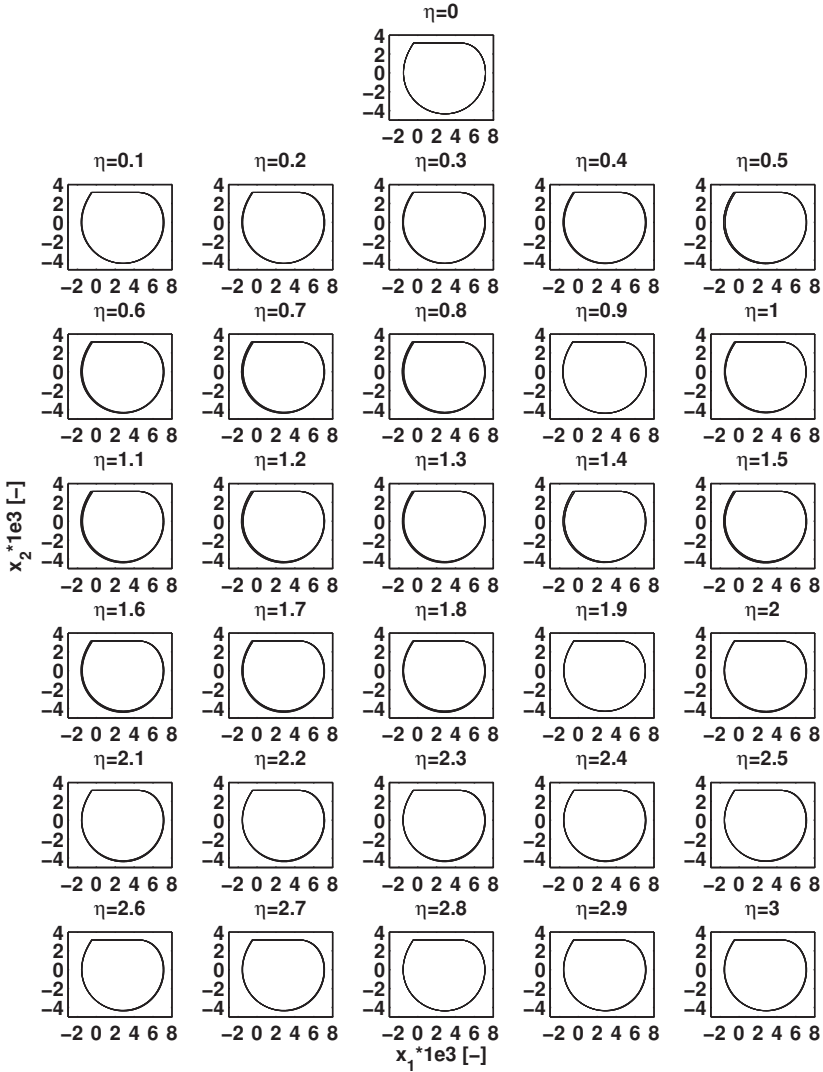


Abbildung 4.62: Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

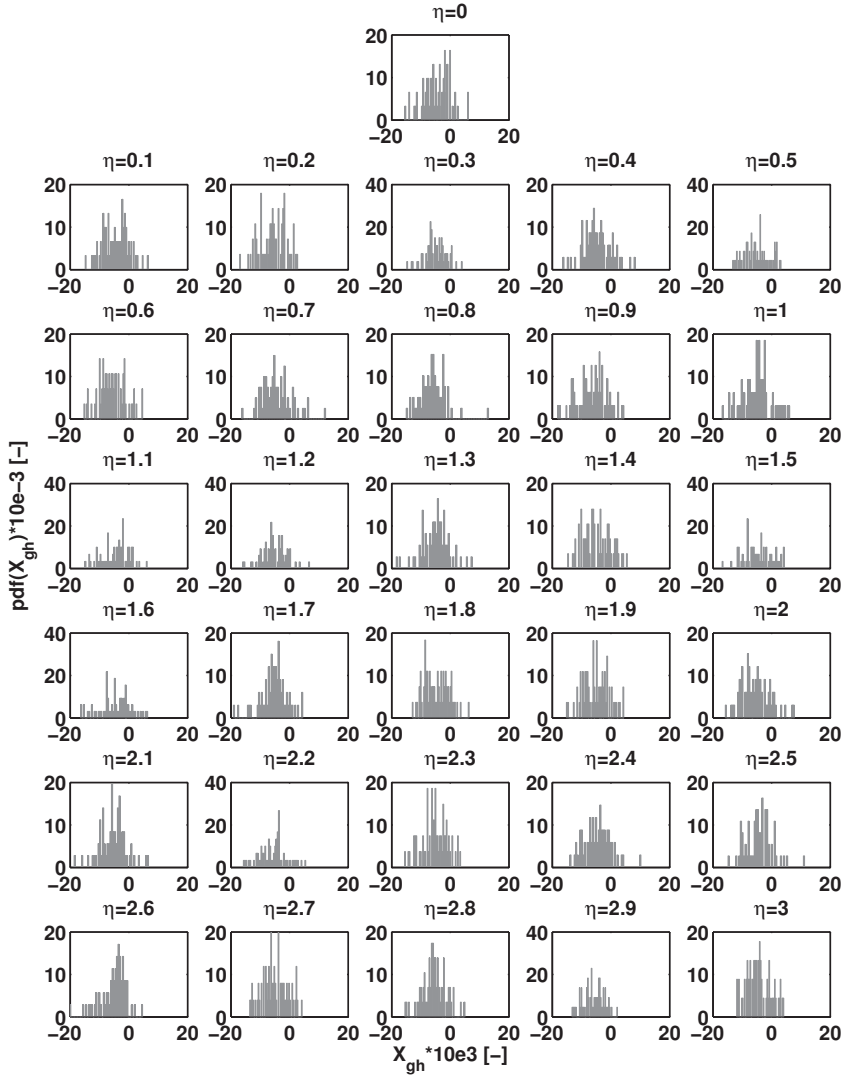


Abbildung 4.63: Normiertes Histogramm, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

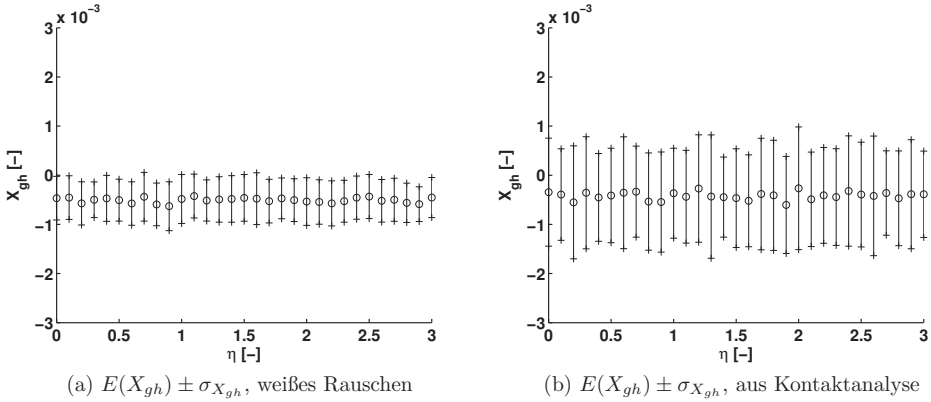


Abbildung 4.64: $E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 1100 \text{ N}$, $q = 5 \cdot 10^{-5}$

Größere Anregungsamplitude

Als nächstes wird eine größere Anregungsamplitude betrachtet. In Abbildung 4.66 ist das Phasendiagramm für $N = 1100 \text{ N}$ bei einer Anregungsamplitude von $q = 5 \cdot 10^{-4}$ für verschiedene Anregungsfrequenzen η zu sehen. Auch hier kann die Charakteristik der deterministischen Simulation nicht mehr erkannt werden. Dies bestätigt wieder die Darstellung des normierten Histogramms in Abbildung 4.67.

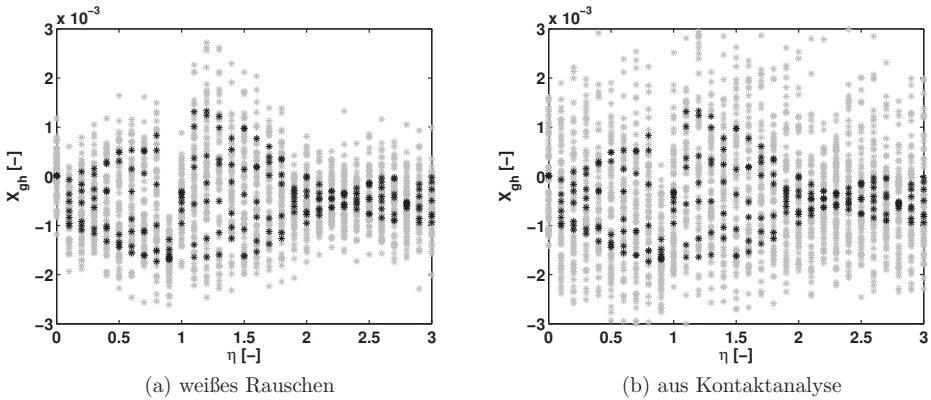


Abbildung 4.65: Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationsdurchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100 \text{ N}$, $q = 5 \cdot 10^{-4}$

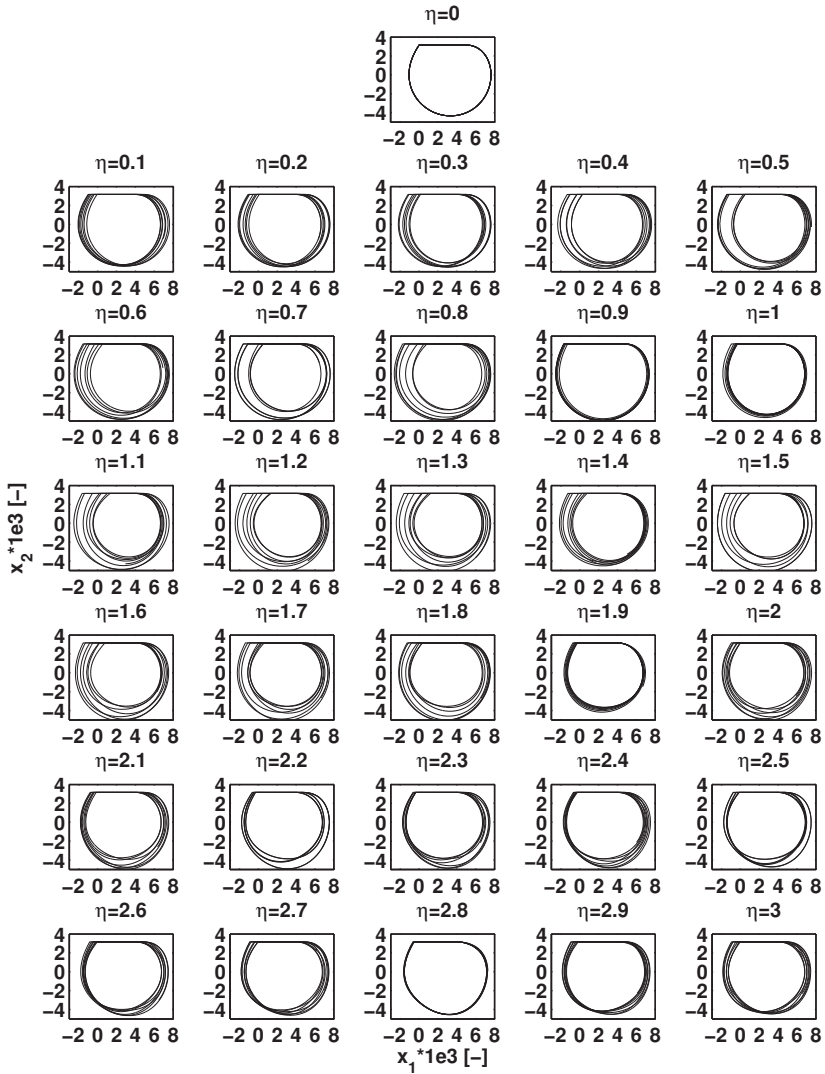


Abbildung 4.66: Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$

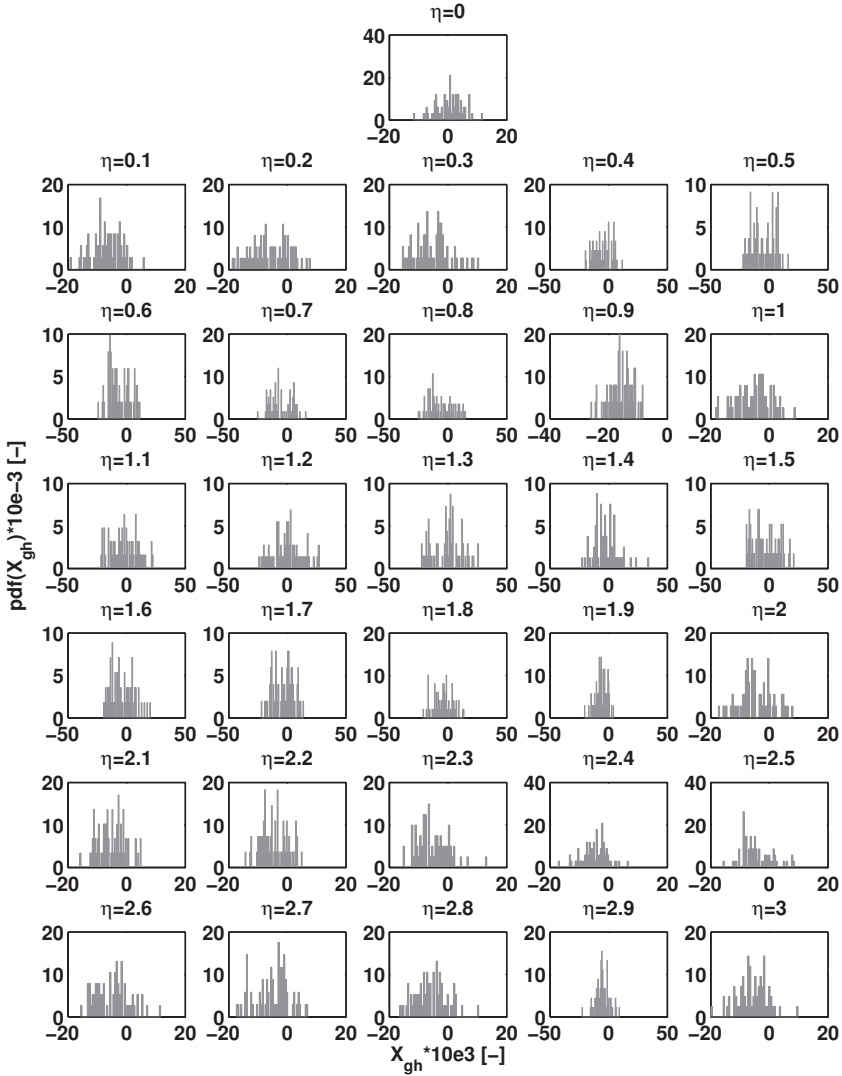


Abbildung 4.67: Wahrscheinlichkeitsdichte, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$

Es wird nur das Diagramm für weißes Rauschen gezeigt, da das für die Simulation mit Reibwert aus der Kontaktanalyse bis auf die größere Standardabweichung vergleichbar aussieht.

In Abbildung 4.68 ist wieder der Mittelwert und die Standardabweichung aufgetragen. Hier folgen Mittelwert und Standardabweichung der Charakteristik der deterministischen Lösung. Auch hier ist der Faktor zwischen Standardabweichung der Simulation mit Reibwert aus der Kontaktanalyse und jener mit weißem Rauschen ca. 2.5.

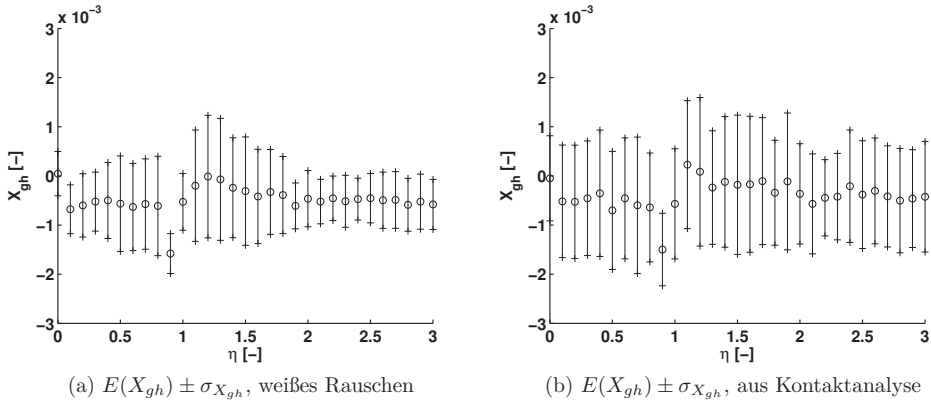


Abbildung 4.68: $E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 1100 \text{ N}$, $q = 5 \cdot 10^{-4}$

Lyapunov Exponent

Als nächstes wird der *Lyapunov* Exponent berechnet, um eine Aussage treffen zu können, ob die Phasenkurven chaotisches Verhalten aufweisen. Für den deterministischen Reibwert bei Anregungsamplituden $q = 5 \cdot 10^{-5}$ und $q = 5 \cdot 10^{-4}$ ist dieser in Abbildung 4.69, für den stochastischen Reibwert mit weißem Rauschen in Abbildung 4.70 und für den Reibwert aus der Kontaktanalyse in Abbildung 4.71 gezeigt.

Auch hier ist bei den meisten Anregungsfrequenzen η das Vorzeichen des *Lyapunov* Exponenten für die beiden verschiedenen Anregungsamplituden gleich. Der entscheidende Parameter für chaotisches Verhalten ist die Anregungsfrequenz η , nicht die Anregungsamplitude q .

Wenn ein Wert im Diagramm fehlt, sind die Werte für X_{gh} der Referenzsimulation und der Vergleichssimulation exakt gleich.

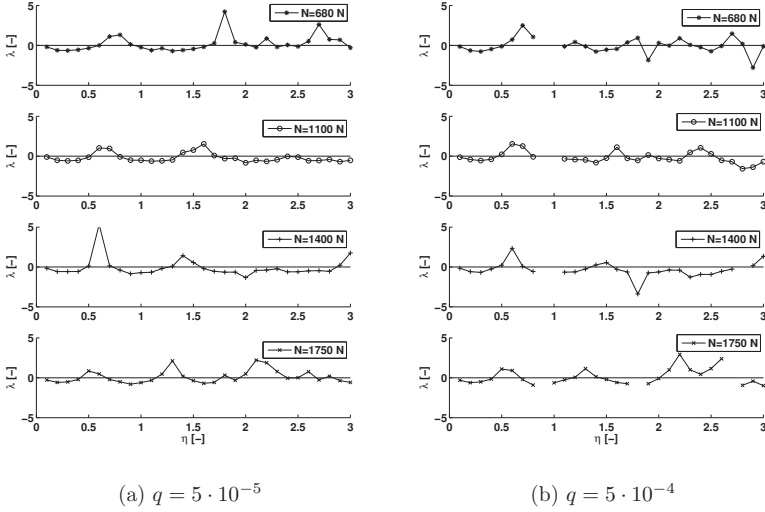


Abbildung 4.69: Deterministischer *Lyapunov* Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$

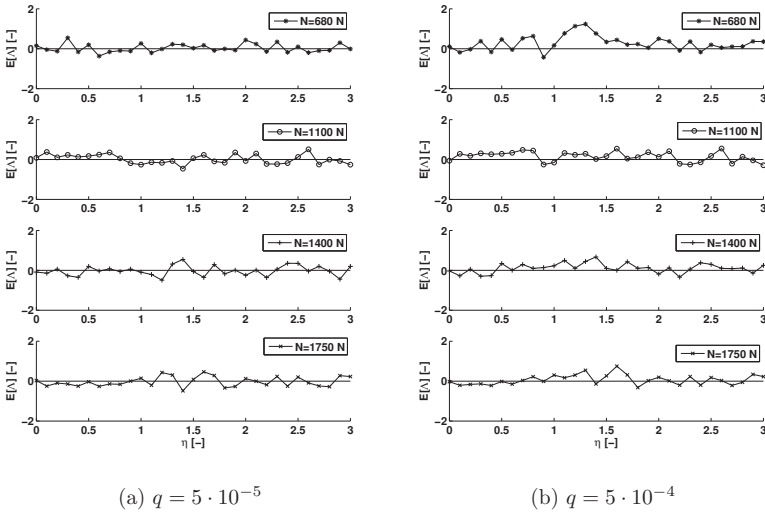


Abbildung 4.70: Stochastischer *Lyapunov* Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, weißes Rauschen

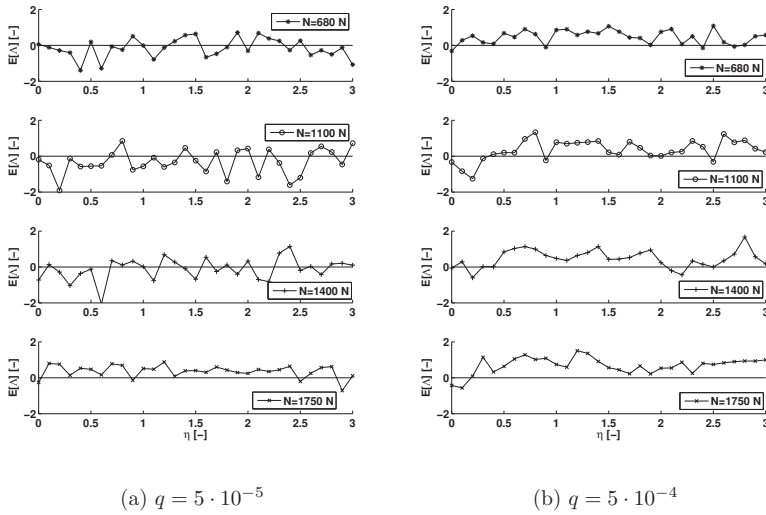


Abbildung 4.71: Stochastischer *Lyapunov* Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, aus Kontaktanalyse

Der Vergleich von deterministischer zu stochastischer Simulation zeigt, dass das Verhalten tendenziell gleich ist, es gibt aber Frequenzen, bei denen die stochastische Simulation chaotisch ist, wohingegen die deterministische nicht. Der umgekehrte Fall tritt ebenso auf. Es kann daher keine allgemein gültige Aussage über das Verhalten getroffen werden. Jede Parameterkombination muss einzeln simuliert werden.

Der Vergleich der stochastischen Simulationen zeigt, dass beim weißen Rauschen durch die kleinere Varianz, vor allem für eine größere Normalkraft, der *Lyapunov* Exponent negativ ist, bei der Simulation mit dem Reibwert aus der Kontaktanalyse aber positiv. Die Simulation mit weiß verrauschtem Reibwert führt also in manchen Fällen zu falschen Aussagen.

4.4 Zusammenfassung reibungserregte Schwingungen

In diesem Kapitel wird das dynamische Verhalten von Systemen untersucht, in denen die zuvor betrachteten Reibpaarungen auftreten.

Für den Bremsbelag kann das Spektrum als konstant genähert werden und das erlaubt, diesen konstanten Wert durch eine Modellfunktion zu schätzen. Innerhalb des Gültigkeitsbereichs kann so für eine beliebige Normalkraft ein Spektrum ermittelt werden. Beim Metallblech hingegen wird das Spektrum nicht gemittelt, sondern direkt das aus der Kontaktanalyse benutzt. So stehen nicht für alle Normalkräfte Spektren zur Verfügung. Um für jede Normalkraft ein Spektrum zu erhalten, müsste der Verlauf der Spektren durch eine Funktion genähert werden und ein normalkraftabhängiger Zusammenhang der beschreibenden Parameter dieser Funktion gesucht werden. Bei den Untersuchungen in diesem Kapitel wird darauf geachtet, dass für die benutzten Normalkräfte Spektren bekannt sind. Bei beliebigen Normalkräften würde jeweils das Spektrum der Normalkraft mit der geringsten Abweichung benutzt, was zu Fehlern führen würde.

Bei der Simulation mit weißem Rauschen kann durch die Modellfunktion für die Standardabweichung innerhalb des Gültigkeitsbereichs jede Normalkraft ohne Fehler betrachtet werden. Dies gilt sowohl für den Bremsbelag als auch für das Metallblech. Der Vergleich der beiden stochastischen Simulationen zeigt, dass für den Bremsbelag, bei dem das Spektrum zwar konstant aber nicht unendlich ist, es zulässig ist, das Rauschen als weißes Rauschen zu simulieren. Diese Methode bringt enorme Vorteile, da die stochastische Differentialgleichung mit analytischen Methoden weiter untersucht werden kann, und die Rechenzeit der Simulation erheblich kürzer ist. Außerdem muss hier nicht beachtet werden, ob die Position außerhalb des simulierten wegabhängigen Reibprozesses liegt, da weißes Rauschen alle Positionen abdeckt. Beim Metallblech, bei dem das Spektrum nicht konstant und nicht unendlich ist, wird durch eine Näherung über weißes Rauschen die Varianz der Reibkraft unterschätzt und so kann es vorkommen, dass kritische Parameter falsch ermittelt werden.

Das Systemverhalten des Reibschwingers wurde auf Einfluss der Normalkraft, der Dämpfung und der Anregung untersucht. Grundsätzlich kann gesagt werden, dass der Parametereinfluss für beide Reibpaarungen, Bremse und Metallblech, qualitativ ähnlich ist. Eine steigende Normalkraft bewirkt unter anderem erhöhtes Rauschen der Reibkraft, was wiederum zu verändertem Systemverhalten führen kann. Die wichtigste Frage bei Untersuchungen zu reibungserregten Schwingungen ist stets, ob der *Stick-Slip* Zyklus besteht. Dies gilt es in den meisten Anwendungen zu vermeiden. Zur Beantwortung dieser Frage reicht in Grenzfällen die deterministische Betrachtung nicht aus. Um sichere Aussagen treffen zu können, muss, vor allem bei großen Normalkräften, eine stochastische Simulation durchgeführt werden.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit untersucht die technisch relevante Frage nach dem Auftreten reibungsinduzierter Schwingungen. Dies wird anhand des klassischen Reibschwingers durchgeführt, wobei der Reibwert stochastisch modelliert wird. Viele natürlich vorkommende Oberflächen sind zufällig verteilt und damit auch ihr Reibwert. Zur korrekten Beschreibung müssen die stochastischen Eigenschaften berücksichtigt werden. Dazu wird eine Kontaktanalyse an optisch vermessenen Oberflächendaten durchgeführt. Aus den Oberflächendaten werden zunächst die Asperiten ermittelt und ihre Höhe und Radien bestimmt. Bei elastischer Verformung können mit dem *Hertz*'schen Kontaktmodell die Kontaktfläche und der Kontaktdruck berechnet werden. Die Kontaktsituation wird für verschiedene Abstände einer rauhen, elastischen Oberfläche zu einer glatten, starren untersucht. Durch die unterschiedlichen Abstände ändern sich die Anzahl der in Kontakt befindlichen Asperiten und die Tiefe der Eindringung und damit auch die Kontaktfläche und der Kontaktdruck. Das *Bowden-Tabor* Modell definiert die Reibkraft als diejenige, die benötigt wird, um in Kontakt stehende Asperiten abzuscheren. Damit berechnet sich die Reibkraft als Produkt der Kontaktfläche mal Scherfestigkeit des Materials. Mit dieser Reibkraft und der Kontaktnormalkraft kann der Reibwert dieser Paarung bestimmt werden.

Da der vermessene Oberflächenanteil nur einem Ausschnitt aus dem tatsächlichen Bauteil entspricht, wird die Oberfläche stochastisch vervielfältigt. Dazu wird eine Fouriertransformation der Oberflächendaten durchgeführt. Die Amplituden der Transformierten bleiben erhalten, die Phasen werden durch passende Zufallszahlen ersetzt. Durch Rücktransformation ergeben sich stochastisch ähnliche Oberflächen. Diese Methode setzt voraus, dass die Oberflächendaten normalverteilt sind. Dies trifft für die Oberfläche des Bremsbelags voll zu, für die des Metallblechs in guter Näherung. Der abgenutzte Bremsbelag enthält lediglich ein paar Furchen, die von der Normalverteilung abweichen, welche bei den stochastisch ähnlichen Flächen, die von normalverteilten Daten ausgehen, nicht abgebildet werden. Da die Furchen aber nie in Kontakt treten, ist diese Abweichung nicht relevant. Andere Oberflächencharakteristika, wie die erkennbare Abnutzung des Bremsbelags in eine Richtung, sind in der Amplitudenmatrix der Fouriertransformierten gespeichert. So haben auch die stochastisch ähnlichen Oberflächen eine eindeutig anisotrope Ausrichtung. Beim Metallblech ist die Verteilung der Oberflächenwerte nicht normalverteilt. Dies liegt vermutlich daran, dass das Blech in seinem Originalzustand vermessen wurde, die Asperiten also noch keine plastische Verformung erfahren haben. Durch die Fouriertransformation wird daher eine etwas von der originalen Oberfläche abweichenden Asperitenverteilung erzeugt.

Die hier durchgeführte statistische Auswertung der stochastisch ähnlichen Oberflächen führt zu einer Aussage über Mittelwert und Standardabweichung des Reibwerts. Diese Parameter sind abhängig von der Starrkörperverschiebung und damit auch dem Kon-

taktdruck. Dieser Zusammenhang kann durch eine Modellfunktion geschätzt werden, so dass für verschiedene Drücke ein stochastischer Prozess ermittelt werden kann. Die Einschränkungen, dass elastischer Kontakt vorliegt und dass die Asperiten nicht miteinander interagieren, beschränken den Zulässigkeitsbereich der Modellfunktion.

Durch Interpolation der Fouriertransformierten kann eine längere Oberfläche erzeugt werden. Durch Verschieben der Realisierung, die so groß ist, wie die Originaloberfläche, kann die Autokorrelationsfunktion und das Leistungsdichtespektrum berechnet werden. Durch die Interpolation enthält die neu erzeugte Oberfläche größere Wellenlängen, die in der originalen Oberfläche nicht vorhanden sind. Da diese aber kleinere Amplituden haben als die maximale Wellenlänge der Originaloberfläche, haben sie keinen Einfluss auf die Auswertung. Die Autokorrelationsfunktion zeigt, dass der Reibwert nicht korreliert ist, was bestätigt, dass die zusätzlichen Wellenlängen die Auswertung nicht verändern.

Für das Spektrum gilt, dass es beim Bremsbelag als konstant genähert werden kann. Damit kann auch für diesen konstanten Wert des Spektrums eine druckabhängige Modellfunktion ermittelt werden und so später für beliebige Drücke das konstante Spektrum ausgelesen werden.

Beim Metallblech kann das Spektrum nicht als konstant gemittelt werden. Damit kann auch keine Modellfunktion bestimmt werden. Für Drücke, die in der Kontaktanalyse nicht berechnet wurden, liegt daher auch keine Information über das Spektrum vor. Es wird das Spektrum des nächsten Drucks verwendet, was zu Abweichungen führt.

Als Ergebnis der Kontaktanalyse sind somit für beide Oberflächen Mittelwert, Standardabweichung und Spektrum ermittelt. Folglich sind alle Parameter bekannt, um den Reibwert als stochastischen Prozess zu modellieren.

Trotz der genannten Einschränkungen und Berücksichtigen von nur einer möglichen Ursache für Reibung liefern die Auswertungen gute Ergebnisse. Dies zeigen Vergleiche mit anderen Simulationen und auch mit experimentellen Untersuchungen. Das ist eine Bestätigung, dass in den untersuchten Fällen die Interaktion an den elastisch verformten Asperiten die Hauptursache für die trockene Reibung ist.

Diese hier eingeführte Methode erlaubt die Berechnung eines stochastischen Reibprozesses auf Basis der Mikroebene. Die Methode hat den Vorteil, dass sie sehr geringe Rechenzeit benötigt.

Das vielfältige dynamische Verhalten des Reibschwingers wurde in den 1990er Jahren von POPP und seinen Mitarbeitern detailliert untersucht. Sie bestätigten auch experimentell den abfallenden Verlauf des Reibgesetzes, welcher vielfach verwendet wird. Die Ursache dieser Geschwindigkeitsabhängigkeit ist bis heute noch nicht verstanden. Ideen reichen von thermischen oder chemischen Änderungen in den Kontakten über den Einfluss des Abriebs bis hin zu Schmierung durch den eingeschlossenen Luftspalt. Die benutzten phänomenologischen Gesetze haben sich in der Vergangenheit durch Experimente validieren lassen.

In dieser Arbeit wird der Reibwert als stochastischer und ebenfalls geschwindigkeitsabhängiger Prozess modelliert. Damit soll untersucht werden, wie solch ein stochastischer

Reibwert, das Schwingungsverhalten beeinflusst. Die Kontaktanalyse erzeugt einen bandbreitenbeschränkten Prozess. Beim Bremsbelag hat dieser ein konstantes Spektrum, beim Metallblech fällt das Spektrum leicht ab. Um zu untersuchen, wie groß die Abweichung zu weißem Rauschen ist, werden immer drei Simulationen verglichen: deterministisch, mit weißem Rauschen und mit dem Reibwert aus der Spektralen Darstellung. Die Intensität des weißen Rauschens berechnet sich druckabhängig aus der Varianz des Reibwerts aus der Kontaktanalyse. So wird auch beim weißen Rauschen die Oberflächenbeschaffenheit der Kontaktpartner berücksichtigt. Der Vergleich der beiden stochastischen Simulationen zeigt, dass für den Bremsbelag, bei dem das Spektrum zwar konstant aber nicht unendlich ist, es zulässig ist, das Rauschen als weißes Rauschen zu simulieren. Dies bringt enorme Vorteile, da die stochastischen Differentialgleichungen zusätzlich mit analytischen Methoden untersucht werden können, und die Rechenzeit der Simulation erheblich kürzer ist. Außerdem muss hier nicht beachtet werden, ob die Position außerhalb des simulierten wegabhängigen Reibprozesses liegt, da das weiße Rauschen alle Positionen abdeckt. Beim Metallblech, bei dem das Spektrum nicht konstant und nicht unendlich ist, wird durch eine Näherung über weißes Rauschen die Varianz der Reibkraft unterschätzt und so kann es vorkommen, dass kritische Parameter falsch ermittelt werden.

Der Mittelwert aus der statistischen Auswertung für den Reibwert ist druckabhängig. Dies fließt in das Reibgesetz ein. Der Haftreibwert bleibt gleich, daher ändert sich die Steigung der fallenden Reibkurve abhängig von Druck bzw. Normalkraft.

Für den rein selbsterregten Fall ist die wohl interessanteste Abhängigkeit die der Dämpfung, da bei großen Dämpfungsmaßen der *Stick-Slip* Zyklus nicht mehr existiert. Es existiert ein maximales Dämpfungsmaß, bei dem sicher kein Grenzzzyklus mehr vorliegt. Dieses kann aber von deterministischer zu stochastischer Simulation verschieden sein. Daher muss das Dämpfungsmaß für beide Fälle berechnet werden und nur der größere Wert der beiden gibt Sicherheit, dass kein Grenzzzyklus mehr besteht.

Wird zusätzlich äußere Anregung aufgebracht, kann die Phasenkurve ihre Charakteristik ändern. Es treten mehrperiodische, quasiperiodische und sogar chaotische Lösungen auf. Ist die Amplitude klein, ist der Effekt oft nicht zu erkennen. Bei größeren Amplituden hingegen beeinflusst primär die Anregungsfrequenz das Aussehen der Phasenkurve. Der Einfluss der Normalkraft und der Anregungsamplitude sind zweitrangig. Auch die Frage, ob die Lösung chaotisch ist, was anhand des *Lyapunov* Exponenten bestimmt wird, hängt primär von der Anregungsfrequenz ab. Beim Vergleich von deterministischer zu stochastischer Simulation stimmt der *Lyapunov* Exponent bei den meisten Parameterkombinationen überein. Es kann jedoch sein, dass bei bestimmten Anregungsfrequenzen die stochastische Lösung chaotisch ist, die deterministische aber nicht. Der entgegengesetzte Fall kann ebenfalls auftreten.

Der Parameter mit der größten Unsicherheit bei der Kontaktanalyse ist die maximale Scherfestigkeit τ_{max} an den Asperiten. Diese ist quasi nicht messbar. Zwar hat sich durch zahlreiche Experimente ein Zusammenhang zu anderen Materialparametern etabliert, aber das muss für jedes Material neu beurteilt werden. Vor allem bei so komplizierten Materialkombinationen, wie dem Bremsbelag, ist dies eine Herausforderung. Da dieser direkten Einfluss auf den Mittelwert des Reibwerts hat, ist es wichtig, die Ergebnisse mit

anderen Simulationen oder Experimenten zu vergleichen. Die Varianz der statistischen Kontaktanalyse ist jedoch von diesem kritischen Parameter unabhängig. Die Varianz ist für den stochastischen Prozess bei der Reibschwingersimulation der Parameter, der die Information über die reale Oberflächenbeschaffenheit der Mikroebene beinhaltet. So enthalten die Aussagen, die anhand der Reibschwingersimulation getroffen werden, eine physikalische Grundlage und damit eine größere Sicherheit.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Simulationen mit stochastischem Reibwert in Grenzfällen, bei denen sich die Lösungscharakteristik ändert, zusätzliche Informationen liefern. Vor allem bei großen Normalkräften, die eine große Varianz der Reibkraft verursachen, kann sich das Phasenportrait erheblich ändern. Im Fall des Bremsbelages ist es nicht nötig, den Reibwert mit Hilfe der Spektralen Darstellung zu simulieren, sondern der Prozess kann als weißer Prozess angenähert werden. Über die Intensität des Rauschens enthält der Prozess in beiden Fällen die Information der Beschaffenheit der vermessenen realen Oberfläche auf der Mikroebene. Im Falle des Metallblechs, bei dem das Spektrum nicht konstant genähert werden kann, wird die Varianz der Reibkraft beim weißen Rauschen unterschätzt, und in manchen Fällen werden kritische Parameter falsch berechnet. Im Falle des Metallblechs müssen daher die Simulationen mit der Spektralen Darstellung durchgeführt werden, um verlässliche Aussagen treffen zu können.

Die hier gezeigte Methode kann durch weitere Arbeiten verbessert und erweitert werden. Bei der Oberflächenanalyse hat sich gezeigt, dass die Oberflächendaten des Metallblechs nicht normalverteilt sind. Die Methode mithilfe der Fouriertransformierten stochastisch ähnliche Oberflächen zu erzeugen, produziert normalverteilte Höhen, wodurch eine Abweichung der erzeugten Oberflächen zur originalen entsteht. Es existieren Methoden zur Erzeugung nicht normalverteilter Datensätze. Mit solchen Methoden sollten Oberflächen erzeugt werden, welche die Verteilung der Originaldaten haben, um die Abweichung zur hier benutzten Methode zu beurteilen. Die Oberflächendaten des Metallblechs sind vermutlich nicht normalverteilt, da die erste plastische Verformung der Asperiten noch nicht stattgefunden hat. Um dies zu überprüfen, sollten benutzte Blechoberflächen vermessen werden. Sind die Daten eines solchen Blechs normalverteilt, kann dafür wieder die hier vorgestellte Methode verwendet werden.

Eine weitere Schwachstelle ist, dass die stochastisch ähnlichen Oberflächen aus nur einem vermessenen Teilstück produziert werden. Um eine stochastisch zuverlässigere Aussage treffen zu können, wäre es besser, an der Oberfläche eines Bauteils an verschiedenen Orten optische Messungen durchzuführen.

Bei Simulation des stochastischen Reibschwingers können für interessante Teilbereiche analytische Untersuchungen der stochastischen Differentialgleichungen durchgeführt werden. Analytische Betrachtungen des Gesamtsystems sind jedoch durch die nichtglatten Eigenschaften und die Parametererregung durch die Reibung schwierig.

Durch Experimente könnten verschiedene Aussagen validiert und dadurch Unsicherheiten des Modells beseitigt werden. Die maximale Scherspannung der Materialien und das verwendete Reibgesetz, insbesondere dessen Haftreibwert und die Steigung, sind solche Parameter. Außerdem bietet die Methode die Möglichkeit, weitere Reibpaarungen und das auftretende Schwingungsverhalten verschiedener anderer Oberflächen zu untersuchen.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufbau der Arbeit: Kontaktanalyse gemessener Oberflächen → stochastischer Reibwert → Reibschwingeruntersuchungen mit stochastischem Reibwert → Einfluss der Mikroebene auf dynamisches Verhalten der Makroebene z.B. anhand Phasendiagramm	8
2.1	Fouriertransformation	20
2.2	Kontakt zweier kugelförmiger Körper	22
2.3	Punktlast auf Halbraum	23
2.4	Raue Oberflächen in Kontakt	25
2.5	Reiter aus harten Metall auf Oberflächen aus weichem Metall	28
3.1	DFT2 der Oberfläche	30
3.2	Schema Oberflächenvervielfältigung	32
3.3	Beispiel einer verlängerten erzeugten Oberfläche	33
3.4	Kontakt Berechnung Hertz	34
3.5	Verschiedene Realisierungen durch Verschiebung der zu analysierenden Fläche	35
3.6	Verschiebung der Realisierung zur Berechnung z.B. des Spektrums	35
3.7	Gefilterte Oberflächendaten des Bremsbelages	37
3.8	Größere Diskretisierung der Daten bei $y = 1\Delta y$	38
3.9	Vergleich Oberflächendiskretisierung Bremse	39
3.10	Vergleich Wahrscheinlichkeitsdichten	39
3.11	Ergebnisse Kontaktberechnung	41
3.12	FEM Berechnung	42
3.13	Kontaktfläche FEM	42
3.14	Vergleich FEM - analytisch	43
3.15	Vergleich Wahrscheinlichkeitsdichte von z	44
3.16	Wahrscheinlichkeitsdichte des Reibwerts, 500 einzelne Realisierungen	45
3.17	Kontaktfläche anteilig zu nomineller Fläche aufgetragen über dem Kontakt- druck	45
3.18	Reibwert μ von 100 Realisierungen, Mittelwert und Standardabweichung	46
3.19	Autokorrelationsfunktion des Reibwerts für verschiedene u : eine Oberfläche	47
3.20	Leistungsdichtespektrum $S_{\hat{\mu}\hat{\mu}}$	48
3.21	Autokorrelation und Spektrum des Reibwertes für verschiedene u : zehn Oberflächen	49
3.22	Geschätzte Modellfunktionen	50
3.23	Mittelwertfreier Reibwertprozess und Vergleich der Spektren	51

3.24	Gefilterte Oberflächendaten des Metallblechs	52
3.25	Größere Diskretisierung der Daten bei $y = 1\Delta y$	53
3.26	Vergleich Oberflächendiskretisierung Metallblech	53
3.27	Vergleich Wahrscheinlichkeitsdichten Metallblech	54
3.28	Ergebnisse Kontaktberechnung	55
3.29	Reibwert μ von 500 Realisierungen, Mittelwert und Standardabweichung	56
3.30	Wahrscheinlichkeitsdichte des Reibwerts, 500 einzelne Realisierungen	56
3.31	Autokorrelation und Spektrum des Reibwerts für verschiedene u	57
3.32	Geschätzte Modellfunktionen	58
3.33	Mittelwertfreier Reibwertprozess und Vergleich Spektren	59
4.1	Reibschwinger	62
4.2	Verschiedene Reibgesetze	64
4.3	Phasendiagramm	64
4.4	Phasendiagramm	65
4.5	Phasendiagramme für fremderregte Schwingung	65
4.6	Vergleich numerische Instabilität	66
4.7	Vergleich Zeitschrittweite, $q = 0$	67
4.8	Vergleich Zeitschrittweite, $q = 0.5, \eta = 1.15$	68
4.9	Phasendiagramm deterministisch-stochastisch	73
4.10	Reibprozess aus Spektraler Darstellung	74
4.11	Phasendiagramm Reibprozess	76
4.12	Phasendiagramm ungedämpft, deterministisch	79
4.13	Phasendiagramm ungedämpft, weißes Rauschen	79
4.14	Phasendiagramm ungedämpft, aus Kontaktanalyse	79
4.15	Ausschnitt Phasendiagramm ungedämpft, deterministisch, $N = 720$ N	80
4.16	Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , weißes Rauschen	81
4.17	Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , aus Kontaktanalyse	81
4.18	Phasendiagramm gedämpft, deterministisch	83
4.19	Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.15$, weißes Rauschen	83
4.20	Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.15$, aus Kontaktanalyse	83
4.21	Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für $N = 8000$ N, $D = 0.15$	84
4.22	Phasendiagramm gedämpft, $N = 5600$ N, deterministisch	84
4.23	X_{gh} und M_{det} für verschiedene N und D , deterministisch	85
4.24	Phasendiagramm gedämpft, $N = 5600$ N, weißes Rauschen	85
4.25	$E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$, $E[M_s]$ für verschiedene N und D , weißes Rauschen	86
4.26	Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , weißes Rauschen	87
4.27	Phasendiagramm gedämpft, $N = 5600$ N, aus Kontaktanalyse	87
4.28	$E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$ und M_s für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse	88
4.29	Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse	88
4.30	Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationsdurchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$	90

4.31	$E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$	90
4.32	Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$.	91
4.33	Normiertes Histogramm, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$	92
4.34	Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationsdurchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$	93
4.35	$E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$	94
4.36	Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$.	95
4.37	Normiertes Histogramm, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 4000$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$	96
4.38	Poincaré Abbildung	97
4.39	w zur Berechnung des <i>Lyapunov</i> Exponenten	98
4.40	w Entwicklung über Anzahl der <i>Gleit-Haft</i> Wechsel	99
4.41	Deterministischer <i>Lyapunov</i> Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$	100
4.42	Stochastischer <i>Lyapunov</i> Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, weißes Rauschen	100
4.43	Stochastischer <i>Lyapunov</i> Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, aus Kontaktanalyse	101
4.44	Phasendiagramm ungedämpft, deterministisch	103
4.45	Phasendiagramm ungedämpft, weißes Rauschen	103
4.46	Phasendiagramm ungedämpft, aus Kontaktanalyse	104
4.47	Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , weißes Rauschen	105
4.48	Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für verschiedene Normalkräfte N , aus Kontaktanalyse	106
4.49	Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.17$, deterministisch	106
4.50	Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.17$, weißes Rauschen	107
4.51	Phasendiagramm gedämpft, $D = 0.17$, aus Kontaktanalyse	107
4.52	Wahrscheinlichkeitsdichte von X_{gh} für $N = 1750$ N, $D = 0.17$	107
4.53	Phasendiagramm gedämpft, $N = 1400$ N, deterministisch	108
4.54	X_{gh} und M_d für verschiedene N und D , deterministisch	109
4.55	Phasendiagramm gedämpft, $N = 1400$ N, weißes Rauschen	109
4.56	$E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$, M_w für verschiedene N und D , weißes Rauschen	110
4.57	Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse	111
4.58	Phasendiagramm gedämpft, $N = 1400$ N, aus Kontaktanalyse	111
4.59	$E[X_{gh}]$, $\sigma_{X_{gh}}$, M_s für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse	112
4.60	Vergleich M_s , M_d für verschiedene N und D , aus Kontaktanalyse	112
4.61	Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationsdurchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$	113
4.62	Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$.	114

4.63	Normiertes Histogramm, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$	115
4.64	$E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-5}$	116
4.65	Verzweigungsdiagramm, deterministisch (schwarz), weißes Rauschen (grau) (zehn Simulationsdurchläufe), $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$	116
4.66	Phasendiagramm, deterministisch, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$	117
4.67	Wahrscheinlichkeitsdichte, weißes Rauschen, $D = 5 \cdot 10^{-6}$, $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$	118
4.68	$E[X_{gh}] \pm \sigma_{X_{gh}}$ für $N = 1100$ N, $q = 5 \cdot 10^{-4}$	119
4.69	Deterministischer <i>Lyapunov</i> Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$	120
4.70	Stochastischer <i>Lyapunov</i> Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, weißes Rauschen	120
4.71	Stochastischer <i>Lyapunov</i> Exponent für verschiedene η und N , $D = 5 \cdot 10^{-6}$, aus Kontaktanalyse	121

Tabellenverzeichnis

3.1	Materialwerte Bremsbelag für Plastizitätsindex	38
3.2	Materialwerte Bremsbelag für Kontaktberechnung	40
3.3	Parameter der Modellfunktionen - Bremsbelag	50
3.4	Materialwerte Metallblech	54
3.5	Materialwerte Metallblech für Kontaktberechnung	55
3.6	Parameter der Modellfunktionen - Metallblech	58
4.1	Reibgesetze	63
4.2	Übergang <i>Gleiten-Haften</i> $X_1 = X_{gh}$	81
4.3	Variationskoeffizient Übergang <i>Gleiten-Haften</i> $X_1 = X_{gh}$	82
4.4	Druckabhängige Rauschintensitäten	102
4.5	Übergang <i>Gleiten-Haften</i> $X_1 = X_{gh}$	105
4.6	Variationskoeffizient Übergang <i>Gleiten-Haften</i> $X_1 = X_{gh}$	105

Literaturverzeichnis

- [1] *Abaqus Documentation, Version 6.9. : Abaqus Documentation, Version 6.9*
- [2] *MATLAB Hilfe Version R2012a. : MATLAB Hilfe Version R2012a*
- [3] ARCHARD, J.F.: Elastic Deformation and the Laws of friction. *Proceedings of the Royal Society of London* 243(1233) (1957), S. 190 – 205
- [4] ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.: *Control of Machines with friction*. Kluwer Academic Publishers, 1991
- [5] ARNOLD, L.: *Stochastische Differentialgleichungen*. Oldenbourg Verlag München, 1973
- [6] BARTZ, J.W.: *Zur Geschichte der Tribologie*. expert-Verlag, 1988
- [7] BATES, D.M. ; WATTS, D.G.: *Nonlinear Regression and its Application*. Wiley, New York, 1988
- [8] BENGISU, M.T. ; AKAY, A.: Stick-slip oscillations: Dynamics of friction and surface roughness. *Journal of Acoustic Society of America* 105 (1) (1999), S. 194–204
- [9] BHUSHAN, B.: *Introduction to Tribology*. New York : Wiley, 2002
- [10] BOWDEN, F.P. ; TABOR, D.: *The friction and Lubrication of solids*. Oxford classic texts in the physical sciences, Clarendon Press, Oxford, 1950
- [11] BOZ, M. ; KURT, A.: The effect of Al₂O₃ on the friction performance of automotive brake friction materials. *Tribology International* 40 (2007), S. 1161–1169
- [12] BRONSTEIN, I. N. ; K. A. SEMENDJAJEW, V. Ziegler und D. Z. Weitergeführt von G. Grosche G. Weitergeführt von G. Grosche: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart, Leipzig : B. G. Teubner, 1996
- [13] BURGER, W. ; BURGE, M. J.: *Digital Image Processing*. Springer, Berlin, 2008
- [14] BUSH, A.W. ; GIBSON, R.D.: The Elastic Contact of a Rough Surface. *Wear* 35 (1975), S. 87–111
- [15] CIAVARELLA, M. ; DEMELIO, G. ; BARBER, J.R. ; JANG, Y. H.: Linear elastic contact of the Weierstrass profile. *Proceedings of the Royal Society of London* 456 (2000), S. 387–405

- [16] CIAVARELLA, M. ; GREENWOOD, J.A. ; PAGGI, M.: Inclusion of "interaction" in the Greenwood and Williamson contact theory. *Wear* 265 (2008), S. 729–734
- [17] CICHON, M.: *Zum Einfluß stochastischer Anregung auf mechanische Systeme*, Universität Karlsruhe, Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik, Dissertation, 2006
- [18] CZICHOS, H. ; HABIG, K.-H.: *Tribologie Handbuck*. Vieweg+Teubner, 2010
- [19] DMITRIEV, A.I. ; ÖSTERLE, W.: Modeling of brake pad-disc interface with emphasis to dynamics and deformation of structures. *Tribology International* 43 (2010), S. 719–727
- [20] DOWSON, D.: *History of tribology*. Longman, 1979
- [21] ERITEN, M. ; POLYCARPOU, A. A. ; BERGMAN, L. A.: A Physics-Based Friction Model and Integration to a Simple Dynamical System. *Journal of Vibration and Acoustics* Vol. 134 (2012), S. 051012–1–051012–9
- [22] FELDMANN, J.: Roughness-Induced Vibration Caused by a Tangential Oscillating Mass on a Plate. *Journal of Vibration and Acoustics* Vol. 134 (2012), S. 041002–1–041002–9
- [23] FENG, J.: Analysis of bifurcations for non-linear stochastic non-smooth vibro-impact system via top Lyapunov exponent. *Applied Mathematics and Computation* (2009)
- [24] FENG, J. ; XU, W. ; WANG, R.: Stochastic responses of vibro-impact duffing oscillator excited by additive Gaussian noise. *Journal of Sound and Vibration* 309 (2008), S. 730–738
- [25] FENG, Q.: A discrete model of a stochastic friction system. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192 (2003), S. 2339–2354
- [26] FIDLIN, A.: Analytical approximations for stick-slip vibration amplitudes. *Non-linear Mechanics* 38 (2003), S. 389–403
- [27] FIDLIN, A.: *Nonlinear Oscillations in Mechanical Engineering*. Springer, Berlin, 2005
- [28] FRIEDRICH, H. ; LANGE, C.: *Stochastische Prozesse in Natur und Technik*. Verlag Harri Deutsch, 1999
- [29] FRIEDRICH, J. ; WIESLER, A.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und stochastische Prozesse*. Teubner, Stuttgart, 2000
- [30] GOERKE, D. ; WILLNER, K.: Normal contact of fractal surfaces - Experimental and numerical investigations. *Wear* 264(7-8) (2008), S. 589–598
- [31] GREENWOOD, J. ; WILLIAMSON, J.: Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London* 295(1442) (1966), S. 300–319

-
- [32] GRIGORIU, M.: *Stochastic Calculus*. Birkhäuser, 2002
- [33] HAGEDORN, P.: *Nichtlineare Schwingungen*. Wiesbaden: Akad. Verlagsges., 1983
- [34] HEILIG, J.: *Instabilitäten in Scheibenbremsen durch dynamischen Reibkontakt*. Fortschritt-Berichte VDI, VDI Verlag GmbH Düsseldorf, 2002
- [35] HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), S. 156–171
- [36] HETZLER, H.: *Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens*, Universität Karlsruhe, Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik, Dissertation, 2008
- [37] HETZLER, H. ; SCHWARZER, D. ; SEEMANN, W.: Analytical investigation of steady-state stability and Hopf-bifurcation occurring in sliding friction oscillators with application to low-frequency disc brake noise. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 12 (2007), S. 83–99
- [38] HETZLER, H. ; SCHWARZER, D. ; SEEMANN, W.: Steady-state stability and bifurcations of friction oscillators due to velocity-dependent friction characteristics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multibody Dynamics* 221, No. 3 (2007), S. 401–412
- [39] HETZLER, H. ; WILLNER, K.: On the influence of contact tribology on brake squeal. *Tribology International* 46 (2012), S. 237–246
- [40] HINRICHS, N.: *Reibungsschwingungen mit Selbst- und Fremderregung: Experiment, Modellierung und Berechnung*. Fortschritt-Berichte VDI, VDI Verlag GmbH Düsseldorf, 2007
- [41] HINRICHS, N. ; OESTRICH, M. ; POPP, K.: Dynamics of Oscillators with Impact and Friction. *Chaos, Solutions and Fractals* 8 No. 4 (1997), S. 535–558
- [42] HINRICHS, N. ; OESTRICH, M. ; POPP, K.: On the modelling of friction oscillators. *Journal of Sound and Vibration* 216(3) (1998), S. 435–459
- [43] HOCHLENERT, D. ; SPELSBERG-KORSPETER, G. ; HAGEDORN, P.: Friction Induces Vibrations in Moving Continua and their Application to Brake Squeal. *Journal of Applied Mechanics* 74 (2007), S. 542
- [44] HOGAN, S.J. ; GRIFFIN, T.C.L.: Qualitative effects of noise on nonsmooth systems. *Preprint* (2005)
- [45] HOL, J. ; ALFARO, M.V. C. ; ROOIJ, M.B. de ; MEINDERS, T.: Advanced friction modeling for sheet metal forming. *Wear* 286-287 (2012), S. 66–78
- [46] HUANG, Z.L. ; Z.H.LIU ; ZHU, W.Q.: Stationary response of multi-degree-of-freedom vibro-impact systems under white noise excitations. *Journal of Sound and Vibrations* 275 (2004), S. 223–240

- [47] HYUN, S. ; PEI, L. ; MOLINARI, J.-F. ; M.O.POBINS: Finite-element analysis of contact between elastic self-affine surfaces. *Physical Review* 70, 2 (2004), S. Article No 026117
- [48] JOHNSON, K.L.: *Contact Mechanics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1985
- [49] KARCH, G. ; WEDIG, W.: Determination of Lyapunov exponents by weak solutions of Fokker-Planck equations. *Probabilistic Engineering Mechanics* 10 (1995), S. 135–141
- [50] KARLSSON ; SORENSON ; HIBBITT: *Abaqus Documentation, Version 6.9: Example Problems Manual: Brake squeal analysis*
- [51] KAUDERER, H.: *Nichtlineare Mechanik*. Springer, Berlin, 1958
- [52] KLOEDEN, P. E. ; PLATEN, E.: *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer, Berlin, 1992
- [53] KLOEDEN, P. E. ; PLATEN, E. ; SCHURZ, H.: *Numerical solution of SDE through computer experiments*. Springer, Berlin, 1994
- [54] KRAGELSKIJ, I. ; DOBYCIN, M. ; KOMBALOV, V.: *Grundlagen der Berechnung von Reibung und Verschleiss*. Hanser, 1983
- [55] LEINE, R. I. ; CAMPEN, D. H.: Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002), S. 138–146
- [56] LEINE, R.I. ; CAMPEN, H. van ; VRANDE, B.L. van d.: Bifurcation in Nonlinear Discontinuous Systems. *Nonlinear Dynamics* 23 (2000), S. 105–164
- [57] LI, Y. ; FENG, Z.C.: Bifurcation and chaos in friction-induced vibration. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 9 (2004), S. 633–647
- [58] LIU, J. L. ; LIN, J. F.: A New Microcontact Model Developed for Variable Fractal Dimension, Topothesis, Density of Asperity and Probability Density Function of Asperity Heights. *Journal of Applied Mechanics* 74 (2007), S. 603–613
- [59] LIU, C.S. ; CHANG, W.T.: Frictional behaviour of a belt-driven and periodically exited oscillator. *Journal of Sound and Vibration* 258(2) (2002), S. 247–268
- [60] LU, C.: Existence of slip and stick periodic motions in a non-smooth dynamical system. *Chaos, Solutions and Fractals* 35 (2008), S. 949–959
- [61] MAGNUS, K. ; POPP, K. ; SEXTRO, W. ; AUFLAGE, 8. (Hrsg.): *Schwingungen*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008
- [62] MAJUMDAR, A. ; B.BHUSHAN: Fractal Model of Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces. *Journal of Tribology* 113 (1991), S. 1–11

-
- [63] MASSI, F. ; BAILLET, L. ; GIANNINI, O. ; SESTIERI, A.: Brake squeal: Linear and nonlinear numerical approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 21, 6 (2007), S. 2374–2393
- [64] MÜLLER, P.C.: Calculation of Lyapunov Exponents for Dynamic Systems with Discontinuities. *Chaos, Solutions and Fractals* 5, No. 9 (1995), S. 1671–1681
- [65] MOON, F.C.: *Chaotic Vibrations*. Wiley, New York, 2004
- [66] MUELLER, M. ; OSTERMEYER, G.P.: Cellular automata method for macroscopic surface and friction dynamics in brake systems. *Tribology International* 40 (2007), S. 942–952
- [67] NACK, W.V.: Brake squeal analysis by finite elements. *International Journal of Vehicle Design* 23 (3-4) (2000), S. 263–275
- [68] NAYFEH, A. ; MOOK, D.: *Nonlinear Oscillations*. Wiley, Chichester, 1979
- [69] NAYFEH, A.H. ; BALACHANDRAN, B.: *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley, New York, 1995
- [70] OESTRICH, M. ; HINRICHS, N. ; POPP, K.: Bifurcation and stability analysis for a non-smooth friction oscillator. *Archive of Applied Mechanics* 66 (1996), S. 301–314
- [71] OSTERMEYER, G.P.: On the dynamics of the friction coefficient. *Wear* 254 (2003), S. 852–858
- [72] PERSSON, B.N.J.: *Sliding friction: physical principles and applications*. Springer, Berlin,, 2000
- [73] POPOV, V. L.: *Kontaktmechanik und Reibung*. Springer, Berlin, 2009
- [74] POPP, K. ; SCHIEHLEN, W.: *Fahrzeugdynamik*. Teubner, Stuttgart, 1993
- [75] POTAPOV, V.D.: Stability of elastic and viscoelastic systems under stochastic non-Gaussian excitation. *Acta Mechanica* 199 (2008), S. 167–179
- [76] PROPPE, C.: *Skript zur Vorlesung "Stochastische Mechanik"*. 2006
- [77] RINSDORF, A. ; SCHIFFNER, K.: Practical Evaluation and FEM-Modelling of a Squealing Disc Brake. *SAE Technical Papers* Nr. 93307 (1993), S. 1–11
- [78] SCHEITHAUER, R.: *Signale und Systeme*. Teubner, Stuttgart, 1998
- [79] SCHMALFUSS, C.: *Theoretische und experimentelle Untersuchungen von Scheibenbremsen*. Fortschritt-Berichte VDI, VDI Verlag GmbH Düsseldorf, 2002
- [80] SCHWARZ, H. R. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009

- [81] SCHWARZER, D.: *Stochastische und mehrskalige Modellierung der Strukturdynamik von Metallschäumen*, Karlsruher Institut für Technologie, Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik, Dissertation, 2010
- [82] SHINOZUKA, M. ; JAN, C.-M.: Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration* 25 (1) (1972), S. 111–128
- [83] SIMON, M.: *Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer Anregung*, Universität Karlsruhe, Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik, Dissertation, 2004
- [84] SOLOVYEV, S.: *Reibungs- und Temperaturberechnung an Festkörper- und Mischreibungskontakten*, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Dissertation, 2007
- [85] STELTER, P.: *Nichtlineare Schwingungen reibungserregter Strukturen*. Fortschritt-Berichte VDI, VDI Verlag GmbH Düsseldorf, 1990
- [86] STELTER, P.: Nonlinear vibrations of structures induced by dry friction. *Nonlinear Dynamics* 3 (1992), S. 329–345
- [87] STROGATZ, S.: *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Book Group, Cambridge (MA, USA), 1994
- [88] TIAN, X. ; BHUSHAN, B.: A Numerical Three-Dimensional Model for the Contact of Rough Surfaces by Variational Principle. *Journal of Tribology* 118 (1996), S. 33–42
- [89] VIELSACK, P.: Stick-slip instability of decelerative sliding. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 36 (2001), S. 237–247
- [90] WAGNER, U. v. ; HOCHLENERT, D. ; HAGEDORN, P.: Minimal models for disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), S. 527–539
- [91] WALLASCHEK, J. ; HACK, K. ; STOLZ, U. ; MODY, P.: A survey of the present state of friction modelling in the analytical and numerical investigation of brake noise generation. *Proceedings of the ASME Vibration Conference, Las Vegas ASME* (1999), S. 12–15
- [92] WAUER, J.: *Kontinuumsschwingungen : Vom einfachen Strukturmodell zum komplexen Mehrfeldsystem*. Vieweg+Teubner, 2008
- [93] WESTENENG, J.: *Modelling of Contact and Friction in Deep Drawing Processes*, University of Twente, Dissertation, 2001
- [94] WETZEL, C.: *Zur probabilistischen Betrachtung von Schienen- und Kraftfahrzeugsystemen unter zufälliger Windanregung*, Karlsruher Institut für Technologie, Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik, Dissertation, 2009
- [95] WILLNER, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik*. Springer, Berlin, 2003

- [96] WILLNER, K.: Elasto-Plastic Normal Contact of Three-Dimensional Fractal Surfaces Using Halfspace Theory. *Journal of Tribology* 126 (2004), S. 28–33
- [97] WILLNER, K.: Fully coupled frictional contact using elastic halfspace theory. *Journal of Tribology* 130 (2008), S. 031405–1–031405–8
- [98] WRIGGERS, P.: *Computational Contact Mechanics*. Wiley, Chichester, 2002
- [99] XIE, W.-C.: Monte Carlo Simulations of Moment Lyapunov Exponents. *Journal of Applied Mechanics* 72 (2005), S. 269–275
- [100] ZWILLINGER, D.: *Handbook of Differential Equations*. Academic Press, 1997

Die Bände sind unter www.ksp.kit.edu als PDF frei verfügbar oder als Druckausgabe zu bestellen.

- Band 1** **Marcus Simon**
Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer
Anregung. 2004
ISBN 3-937300-13-9
- Band 2** **Clemens Reitze**
Closed Loop, Entwicklungsplattform für mechatronische
Fahrdynamikregelsysteme. 2004
ISBN 3-937300-19-8
- Band 3** **Martin Georg Cichon**
Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische
Systeme. 2006
ISBN 3-86644-003-0
- Band 4** **Rainer Keppler**
Zur Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen
unter Berücksichtigung von Greifkontakt bei Robotern. 2007
ISBN 978-3-86644-092-0
- Band 5** **Bernd Waltersberger**
Strukturdynamik mit ein- und zweiseitigen Bindungen
aufgrund reibungsbehafteter Kontakte. 2007
ISBN 978-3-86644-153-8
- Band 6** **Rüdiger Benz**
Fahrzeugsimulation zur Zuverlässigkeitsabsicherung
von karosseriefesten Kfz-Komponenten. 2008
ISBN 978-3-86644-197-2
- Band 7** **Pierre Barthels**
Zur Modellierung, dynamischen Simulation und
Schwingungsunterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten
Balkensystemen. 2008
ISBN 978-3-86644-217-7

- Band 8** **Hartmut Hetzler**
Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens. 2008
ISBN 978-3-86644-229-0
- Band 9** **Frank Dienerowitz**
Der Helixaktor – Zum Konzept eines vorverwundenen Biegeaktors. 2008
ISBN 978-3-86644-232-0
- Band 10** **Christian Rudolf**
Piezoelektrische Self-sensing-Aktoren zur Korrektur statischer Verlagerungen. 2008
ISBN 978-3-86644-267-2
- Band 11** **Günther Stelzner**
Zur Modellierung und Simulation biomechanischer Mehrkörpersysteme. 2009
ISBN 978-3-86644-340-2
- Band 12** **Christian Wetzel**
Zur probabilistischen Betrachtung von Schienen- und Kraftfahrzeugsystemen unter zufälliger Windanregung. 2010
ISBN 978-3-86644-444-7
- Band 13** **Wolfgang Stamm**
Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen mit flächigen Reibkontakten. 2011
ISBN 978-3-86644-605-2
- Band 14** **Felix Fritz**
Modellierung von Wälzlagern als generische Maschinenelemente einer Mehrkörpersimulation. 2011
ISBN 978-3-86644-667-0

- Band 15** **Aydin Boyaci**
Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern. 2012
ISBN 978-3-86644-780-6
- Band 16** **Ruggeri Toni Liong**
Application of the cohesive zone model to the analysis of rotors with a transverse crack. 2012
ISBN 978-3-86644-791-2
- Band 17** **Ulrich Bittner**
Strukturakustische Optimierung von Axialkolbeneinheiten. Modellbildung, Validierung und Topologieoptimierung. 2013
ISBN 978-3-86644-938-1
- Band 18** **Alexander Karmazin**
Time-efficient Simulation of Surface-excited Guided Lamb Wave Propagation in Composites. 2013
ISBN 978-3-86644-935-0
- Band 19** **Heike Vogt**
Zum Einfluss von Fahrzeug- und Straßenparametern auf die Ausbildung von Straßenunebenheiten. 2013
ISBN 978-3-7315-0023-0
- Band 20** **Laurent Ineichen**
Konzeptvergleich zur Bekämpfung der Torsionsschwingungen im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs. 2013
ISBN 978-3-7315-0030-8
- Band 21** **Sietze van Buuren**
Modeling and simulation of porous journal bearings in multibody systems. 2013
ISBN 978-3-7315-0084-1

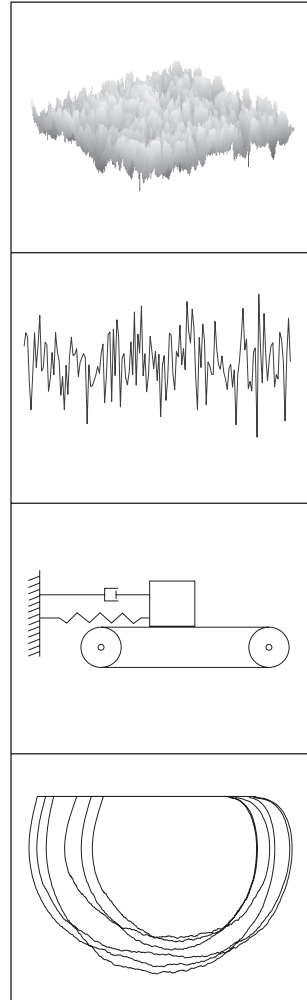
- Band 22** **Dominik Kern**
Neuartige Drehgelenke für reibungsarme Mechanismen. 2013
ISBN 978-3-7315-0103-9
- Band 23** **Nicole Gaus**
Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und dessen Einfluss
auf reibungserregte Schwingungen. 2013
ISBN 978-3-7315-0118-3



Diese Arbeit untersucht die technisch relevante Frage nach dem Auftreten reibungsinduzierter Schwingungen. Dies wird anhand des klassischen Reibschwingers durchgeführt, wobei der Reibwert stochastisch modelliert wird.

Viele natürlich vorkommende Oberflächen sind zufällig verteilt und damit auch ihr Reibwert. Zur korrekten Beschreibung müssen die stochastischen Eigenschaften berücksichtigt werden. Dazu wird eine Kontaktanalyse an optisch vermessenen Oberflächendaten durchgeführt. Die durchgeführte statistische Auswertung der Oberflächen führt zu einer Aussage über Mittelwert, Standardabweichung und Spektrum des Reibwerts. Somit sind alle Parameter bekannt, um den Reibwert als stochastischen Prozess zu modellieren, welcher die Oberflächenbeschaffenheit berücksichtigt.

Anschließend wird der Einfluss des stochastischen Reibwerts auf reibungsinduzierte Schwingungen anhand des klassischen Reibschwingers untersucht. Für den rein selbsterregten Fall ist die wohl interessanteste Abhängigkeit, die der Dämpfung, da bei großen Dämpfungsmaßen der *Stick-Slip* Zyklus nicht mehr existiert. Es existiert ein maximales Dämpfungsmaß, bei dem sicher kein Grenzzyklus mehr vorliegt. Dieses kann aber von deterministischer zu stochastischer Simulation verschieden sein. Daher muss das Dämpfungsmaß für beide Fälle berechnet werden, um mit Sicherheit sagen zu können, wann kein Grenzzyklus mehr besteht.



ISSN 1614-3914

ISBN 978-3-7315-0118-3

ISBN 978-3-7315-0118-3



9 783731 501183 >