

# Robuste Portfolio- Optimierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Wirtschaftswissenschaften

(Dr. rer. pol.)

von der Fakultät für

Wirtschaftswissenschaften,

Karlsruher Institut für Technologie,

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl. Wirtsch. Math. Marcel Sinske

geboren am 15. Januar 1981

in Bernburg

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juli 2013

Referent: Prof. Dr. Oliver Stein

Co-Referent: Prof. Dr. Ralf Werner

Karlsruhe 2013



# Danksagung

Eine wissenschaftliche Arbeit ist nie das Werk einer einzelnen Person, deshalb möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mir die Erstellung meiner Dissertation ermöglicht haben.

Herrn Prof. Dr. Oliver Stein danke ich für seine Geduld bei der Suche nach einem Thema sowie für seine fachliche Beratung und unermüdliche Bereitschaft bei Fragen, zur Verfügung zu stehen.

Herrn Prof. Dr. Ralf Werner danke ich für die hilfreichen Einblicke und Annäherungen an Themengebieten, denen ich vorher wenig Beachtung schenkte, und seinem Einsatz, für konstruktive Gespräche immer aufgeschlossen zu sein.

Ich möchte mich bei Frau Dr. Vanessa Lange und bei Frau Martina Staiger für ihre fachlichen Tipps und redaktionelle Bearbeitung meiner Dissertation bedanken.

Einen besonderen Dank widme ich meiner Familie und meinen Freunden, ohne deren Unterstützung und Aufmerksamkeit diese Dissertation nicht zu Stande gekommen wäre.



# Zusammenfassung

Vorgelegt wird das *Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem*  $MV_\lambda$ , das auf Harry M. Markowitz zurückgeht. Das Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem kann als ein quadratisches Optimierungsproblem mit den Parametern  $\mu$  und  $\Sigma$  angesehen werden, dessen Lösung unter bestimmten Voraussetzungen garantiert werden kann. Weiterhin kann  $MV_\lambda$  als quadratisches Optimierungsproblem effizient gelöst werden, sobald Schätzungen für die Parameter bekannt sind.

In dieser Arbeit wird für  $MV_\lambda$  der *Robust-Counterpart*  $RC_\lambda$  angegeben, der auf einer Arbeit von Aharon Ben-Tal und Arkadi Nemirovski basiert. Als Worst-Case-Analyse bezüglich  $\mu$  und  $\Sigma$  eignet er sich, Schätzungen für beide Parameter herzuleiten. Allerdings ist  $RC_\lambda$  ein Minmax-Problem, welches im Allgemeinen schwer lösbar ist.  $RC_\lambda$  kann durch Umformulierungen und der Angabe von Voraussetzungen an die zugehörige Unsicherheitsmenge  $U$  auf ein quadratisches Problem zurückgeführt werden, welches  $MV_\lambda$  mit geschätzten Parametern  $\mu$  und  $\Sigma$  entspricht.

Des Weiteren wird  $RC_\lambda$  als ein mehrstufiges Optimierungsproblem aufgefasst. In der untersten Stufe tritt dabei das Minimierungsproblem *MinVol* auf, welches eine *Chance-Constraint* enthält. Dieses wird zuerst mittels eines Ansatzes von Marco Campi und Simone Garatti gelöst und nach weiteren Umformulierungen ein quadratisches Optimierungsproblem für  $RC_\lambda$  wieder aufgestellt. Ein numerisches Beispiel soll die Ergebnisse veranschaulichen. Zuletzt wird  $RC_\lambda$  als *semi-infinites Optimierungsproblem mit parametrischer Indexmenge* betrachtet. An diese Art von semi-infiniten Optimierungsproblemen werden Unter- und Oberschranken an den optimalen Zielfunktionswert hergeleitet.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Matrix-Analysis . . . . .	3
2.2. Kurzeinführung in die Optimierung . . . . .	11
2.2.1. Rechenregeln . . . . .	14
2.2.2. Lösbarkeit . . . . .	16
2.2.3. Regularitätsbedingungen . . . . .	17
2.2.4. Optimalitätsbedingungen . . . . .	19
2.3. Semi-infinite Optimierung . . . . .	28
2.4. Parametrische Optimierung . . . . .	35
2.5. Robuste Optimierung: der Robust-Counterpart . . . . .	40
2.6. Chance-Constraints . . . . .	44
<b>3. Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz</b>	<b>51</b>
3.1. Mean-Varianz-Portfolio-Optimierung . . . . .	51
3.2. Parameterschätzung im Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem	57
<b>4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz</b>	<b>61</b>
4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$ . . . . .	65
4.1.1. Lösung des Problems $\mathbf{P}^r$ . . . . .	70
4.1.2. Lösung des Problems $\mathbf{P}^C$ . . . . .	72
4.1.3. Lösung des Problems $\mathbf{P}^\kappa$ . . . . .	76
4.1.4. Lösung des Problems $\mathbf{RC}_\lambda^{\max}$ . . . . .	78
4.2. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$ mit Chance-Constraint	80
<b>5. Semi-infinite Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge</b>	<b>83</b>
5.1. Reformulierungen semi-infiniten Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge . . . . .	84
5.2. Unter- und Obergrenzen für semi-infinite Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge . . . . .	88
<b>6. Implementierungen</b>	<b>99</b>
6.1. Implementierung des Optimierungsproblems $\mathbf{MV}_\lambda$ . . . . .	101
6.2. Implementierung des Optimierungsproblems $\mathbf{RC}_\lambda$ . . . . .	103
6.3. Implementierung des Optimierungsproblems $\mathbf{RC}_\lambda$ unter einer Chance-Constraints . . . . .	105

<b>7. Fazit und Ausblick</b>	<b>111</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>113</b>
A.1. Beweise zu Kapitel 2 . . . . .	113
A.2. Beweise zu Kapitel 4 . . . . .	121
A.3. Lösungen der Gleichung $\mathbf{f}'_{\lambda}(\kappa, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . . . . .	123
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>133</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>135</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>137</b>

# 1. Einleitung

Eine Herausforderung bei der Optimierung in der Praxis ist die Bereitstellung der zugrunde liegenden Daten im eigentlichen Anwendungsfall. Diese Bereitstellung kann durch Beobachtung oder Schätzung der Eingaben oder durch die Angabe, wie wahrscheinlich ein Ereignis der Zukunft ist, erfolgen. Die dritte Möglichkeit führt zur *stochastischen Optimierung*, auf die hier nicht näher eingegangen wird. Die Schätzung der Eingaben kann der Statistik zugeordnet werden.

In der Finanzwirtschaft führen viele Teildisziplinen zu solchen Herausforderungen. Da wären z.B. die Charakteristiken  $\mu$  und  $\Sigma$  eines Finanzmarktes, die im Allgemeinen nicht bekannt sind, wobei  $\mu$  die erwarteten Renditen der Aktien oder Finanzmarktclassen des Marktes widerspiegelt und in der Kovarianzmatrix  $\Sigma$  das Risiko der Abweichung von den erwarteten Renditen abbildet ist.  $\mu$  und  $\Sigma$  können als Parameter in das sogenannte *Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem*, das als Erstes in [36] vorgestellt wurde, interpretiert werden. In [36] wurden historische Beobachtungen als Grundlage beider Parameter benutzt.

Viele Publikationen sind erhältlich, die sich mit dem Thema beschäftigen, wie  $\mu$  und  $\Sigma$  geschätzt werden können, z.B. in [6], [28], [30] und [16]. Diese Arbeiten beinhalten zusätzlich kritische Diskussionen über die Qualität der vorgestellten Schätzer und deren Auswirkungen auf die eigentliche Optimierung. Grundsätzlich hängt die Lösung vom Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem von beiden Parametern ab, und unterschiedliche Schätzungen der Parameter führen zu stark unterschiedlichen optimalen Portfolios, siehe Beispiel 3.2.1. Das Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem hängt im stärkeren Maße von  $\mu$  und weniger von  $\Sigma$  ab.

Eine weitere Möglichkeit, die Unsicherheiten bezüglich der Schätzer zu beachten, ist die *Robuste Optimierung* mit dem *Robust-Counterpart*, eingeführt in [4]. Dort wird auf die Ebene der Modellierung zurückgegangen, und die Optimierung erfolgt jetzt nicht mehr nur für eine spezielle Realisierung der Parameter, sondern es werden eine Menge von Realisierungen in Betracht gezogen; das wird als *Worst-Case-Fall* bezeichnet. Wie man hier schon erahnen kann, spielt bei diesem Ansatz die Menge der Realisierungen, die sogenannte *Unsicherheitsmenge*, eine entscheidende Rolle. In [4] und [40] werden Ellipsoide als Unsicherheitsmengen für die Portfolio-Optimierung eingeführt und diskutiert.

In dieser Arbeit wird der Robust-Counterpart auf das Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem angewendet und genauer untersucht. Einen ersten beispielhaften Ansatz gibt es schon in [4], ein ausführlicherer Ansatz ist in [51] zu finden. Dort werden durch Voraussetzungen spezielle Unsicherheitsmengen hergeleitet und der Robust-Counterpart für das Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem betrachtet,

## 1. Einleitung

sowie die Qualität der Robustifizierung diskutiert. Es werden hier die Voraussetzungen auf zwei verschiedene Art und Weisen abgeschwächt und die Auswirkungen auf den Robust-Counterpart untersucht.

Des Weiteren wird eine nochmalige Verallgemeinerung vorgenommen, die darauf basiert, dass die Unsicherheitsmenge von Parametern abhängt. Bei Ellipsoiden kommen als Parameter z.B. der Mittelpunkt und die Form des Ellipsoids in Frage. Das führt zu *Semi-infiniten Optimierungsproblemen mit parametrischer Indexmenge*, für die Unter- und Oberschranken an den optimalen Zielfunktionswert angegeben werden.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 werden Grundlagen aufgeführt. Das umfasst einen Abschnitt 2.1 über Matrix-Analysis, in dem Begriffe und Abbildungen für Matrizen erläutert werden. Abschnitt 2.2 gibt eine Kurzeinführung in die Optimierung, in dem Grundlagen der Optimierung, insbesondere der konvexen Optimierung, beschrieben sind. Die Ausführungen in den beiden Abschnitten werden durchgängig in der Arbeit gebraucht und sind für die hier vorgenommenen Umformulierungen von besonderer Bedeutung. Die letzten vier Abschnitte geben Einführungen in spezielle Klassen von Optimierungsproblemen, die in der Arbeit angesprochen werden, um sich mit den Begriffen vertraut zu machen.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit dem Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem. Dort werden zusätzlich einige Schätzer für  $\mu$  und  $\Sigma$  vorgestellt.

Im ersten Hauptkapitel, Kapitel 4, wird der Robust-Counterpart bezüglich der hier getroffenen Annahmen aufgestellt. Es werden Umformulierungen angegeben, die dazu benutzt werden, den Robust-Counterpart zu lösen. Zudem wird beschrieben, wie bei einer Minimierung des Volumens eines Ellipsoids mit einer Chance-Constraint-Restriktion vorgegangen werden kann.

Im zweiten Hauptkapitel, Kapitel 5, werden semi-infiniten Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge eingeführt und untersucht. Es werden Reformulierungen angegeben, die zu Unter- und Oberschranken an den optimalen Zielfunktionswert führen.

Das 6. Kapitel beschäftigt sich mit Implementierungen der hier vorgestellten Ansätze und dem Test eines Beispiels.

Ein Fazit in Kapitel 7 mit einigen Ausblicken auf weitere Forschungstätigkeiten beschließt die Arbeit.

Im Anhang finden sich einige Beweise und eine längliche Herleitung eines kritischen Punktes, die den Lesefluss in den Kapiteln unterbrechen würden.

## 2. Grundlagen

In diesem Kapitel wird der generelle Hintergrund der Arbeit vorgestellt. Das umfasst das Unterkapitel 2.1 über Eigenschaften von Matrizen, eine Kurzeinführung in die Optimierung 2.2 sowie einige Spezialbereiche der Optimierung in den Abschnitten 2.3-2.5. Den Abschluss bildet der Abschnitt 2.6 in dem eine besondere Art von Nebenbedingung vorgestellt wird, die sogenannten *Chance-Constraints*.

Die zu den hier vorgestellten Sätzen und Lemmata gehörigen Beweise finden sich im Anhang A.1, sofern sie selbst geführt wurden.

### 2.1. Matrix-Analysis

Das folgende Kapitel gibt eine Einführung in die Lineare Algebra mit speziellem Blick auf Matrizen. Als Quellen dienen [39] und [40]. Dort finden sich auch weitergehende Ausführungen.

In [40, Kapitel IV Anhang A] wird die Einführung in die Lineare Algebra mit Fokus in Richtung der Finanzoptimierung bzw. des Risikomanagements gelegt. Dort findet man unter anderem die Abbildungen „ $\text{vec}(\cdot)$ “ und „ $\text{vecsymb}(\cdot)$ “, die im Folgenden eine große Rolle spielen werden.

Falls nicht anders erwähnt, betrachten wir in diesem Kapitel durchweg reelle quadratische Matrizen  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Die Vektoren werden standardmäßig als Spaltenvektoren betrachtet.

Zunächst werden einige Eigenschaften von Matrizen definiert.

**Definition 2.1.1** (Matrix-Eigenschaften). 1. Eine Matrix  $A$  heißt symmetrisch, falls

$$A^\top = A$$

*gilt. Dabei ist unter  $^\top$  das übliche Transponieren von Matrizen zu verstehen.*

2. Eine Matrix  $A$  heißt positiv semidefinit (negativ semidefinit), falls für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^\top Ax \geq 0 \quad (x^\top Ax \leq 0)$$

*gilt. Wir schreiben dann*

$$A \succeq 0 \quad (A \preceq 0).$$

3. Eine Matrix  $A$  heißt positiv definit (negativ definit), falls für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0$

$$x^\top Ax > 0 \quad (x^\top Ax < 0)$$

## 2. Grundlagen

gilt. Wir schreiben dann

$$A \succ 0 \quad (A \prec 0).$$

4. Eine Matrix  $A$  heißt invertierbar (oder regulär), falls eine Matrix  $B$  mit

$$AB = BA = I_n$$

existiert. Dabei bezeichnet  $I_n$  die  $(n, n)$ -Einheitsmatrix. Die Matrix  $B$  wird als inverse Matrix zur Matrix  $A$  bezeichnet und mit  $B = A^{-1}$  abgekürzt.  $B$  ist damit offensichtlich auch invertierbar mit Inverse  $A = B^{-1}$ .

5. Die Summe

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

heißt Spur der Matrix  $A$ .

6. Die Zahl  $\alpha \in \mathbb{C}$  heißt Eigenwert zur Matrix  $A$ , falls es ein  $x_\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit

$$Ax_\alpha = \alpha x_\alpha$$

gibt. Dieser Vektor  $x_\alpha$  wird auch als Eigenvektor zum Eigenwert  $\alpha$  bezeichnet. Eine  $(n, n)$ -Matrix hat maximal  $n$  Eigenwerte, die nicht notwendigerweise voneinander verschieden sein müssen.

Ist nicht aus dem Kontext ersichtlich, zu welcher Matrix der Eigenwert  $\alpha$  gehören soll, so wird  $\alpha$  in Abhängigkeit der Matrix notiert

$$\alpha(A) \quad (\alpha \text{ ist ein Eigenwert der Matrix } A).$$

7. Das Produkt

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \alpha_i$$

bezeichnet die Determinante der Matrix  $A$ .

Die Menge aller symmetrischen  $(n, n)$ -Matrizen werden wir mit  $\mathbb{S}^n$  und die Menge aller symmetrischen positiv definiten  $(n, n)$ -Matrizen mit  $\mathbb{S}_+^n$  abkürzen.

Die folgende Bemerkung gibt wohlbekannte Ergebnisse wieder; die Beweise sind in [39] zu finden. Diese Ergebnisse werden im Laufe der Arbeit ohne weitere Erwähnung benutzt.

**Bemerkung 2.1.2.** 1. Eine symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte. Ist die Matrix zusätzlich positiv semidefinit (negativ semidefinit), so sind alle Eigenwerte nichtnegativ (nichtpositiv). Ist die Matrix positiv definit (negativ definit), so sind alle Eigenwerte positiv (negativ). Eine Matrix, die positive und negative Eigenwerte besitzt, heißt indefinit.

2. Sei die Matrix  $A$  symmetrisch und positiv definit (negativ definit) und sei

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

die Menge der Eigenwerte von  $A$ . In diesem Fall existiert die inverse Matrix  $A^{-1}$ . Sie ist wegen

$$(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1} = A^{-1}$$

symmetrisch und die Eigenwerte von  $A^{-1}$  sind durch die Menge

$$\left\{ \frac{1}{\alpha_1}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \right\}$$

gegeben.  $A^{-1}$  ist positiv definit (negativ definit).

3. Eine symmetrische  $(n, n)$ -Matrix  $A$  ist normal<sup>1</sup> und demzufolge diagonalisierbar, d.h. es existieren eine Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und eine Matrix  $P$  mit

$$P^\top AP = D \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^\top.$$

Die  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sind dabei die Eigenwerte von  $A$  und die Spalten von  $P$  sind die orthonomierten Eigenvektoren von  $A$ .

Sei  $A$  zusätzlich positiv semidefinit. Mit Hilfe der diagonalisierten Darstellung von  $A$ , kann der Ausdruck  $A^{\frac{1}{2}}$  („die Wurzel einer Matrix“) mit

$$A^{\frac{1}{2}} = PD^{\frac{1}{2}}P^\top = P \text{diag}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})P^\top$$

definiert werden.

Für jede quadratische Form

$$x^\top Ax$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und symmetrischer positiv semidefiniter Matrix  $A$  gilt

$$\sqrt{x^\top Ax} = \sqrt{x^\top (A^{\frac{1}{2}})^\top A^{\frac{1}{2}} x} = \sqrt{(A^{\frac{1}{2}}x)^\top (A^{\frac{1}{2}}x)} = \|A^{\frac{1}{2}}x\|_2. \quad (2.1)$$

4. Es gilt für alle quadratischen Matrizen  $A$

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

Für alle invertierbaren Matrizen  $A$  gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Für alle invertierbaren Matrizen  $A$  muss demnach auch  $\det(A) \neq 0$  gelten.

Für die Spur einer Matrix wird das folgende Lemma gesondert angegeben und im

---

<sup>1</sup>Siehe [39] S. 547.

## 2. Grundlagen

Anhang bewiesen.

**Lemma 2.1.3.** 1. Es seien die Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gegeben.  
Dann gilt

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

2. Es seien die Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$  und  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  gegeben. Dann gilt

$$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA). \quad (2.2)$$

Man beachte bei Teil 2, dass die Reihenfolge der Matrizen nicht beliebig, sondern mit Rücksicht auf die zusammenpassenden Dimensionen erfolgt.

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 113. □

**Bemerkung 2.1.4.** Die Spur einer  $(1,1)$ -Matrix  $A$  ist definitionsgemäß

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11}.$$

Jedes Skalarprodukt  $x^\top y$  zweier Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  bzw. jede quadratische Form

$$x^\top Ax$$

mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und symmetrischer  $(n, n)$ -Matrix  $A$  ist eine reelle  $(1,1)$ -Matrix.

Somit hat man folgende Zusammenhänge

$$x^\top y = \operatorname{tr}(x^\top y) \quad \text{und} \quad x^\top Ax = \operatorname{tr}(x^\top Ax).$$

Mit Lemma 2.1.3 gilt weiter

$$x^\top y = \operatorname{tr}(x^\top y) = \operatorname{tr}(yx^\top) \quad \text{und} \quad x^\top Ax = \operatorname{tr}(x^\top Ax) = \operatorname{tr}(xx^\top A) = \operatorname{tr}(Axx^\top).$$

Der Ausdruck  $xx^\top$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$  führt zu einer symmetrischen positiv semidefiniten  $(n, n)$ -Matrix und wird als dyadisches Produkt von Vektoren bezeichnet.

Zu einer quadratischen Matrix wird im Folgenden eine Abbildung definiert, die diese Matrix in einen Vektor umwandelt. Dazu wird dann eine Umkehrabbildung definiert, d.h. Vektoren, deren Dimension als Quadratzahl dargestellt werden können, werden in quadratische Matrizen umsortiert.

**Definition 2.1.5** (Vektorisierung einer Matrix). 1. Zu einer  $(n, n)$ -Matrix  $A$  sei

die Abbildung  $\text{vec} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$  definiert

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \text{vec}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a.$$

Die Spalten der Matrix werden zu einem Vektor untereinander gestapelt. Wir sprechen dann von der Vektorisierung der Matrix  $A$ .

2. Die Abbildung  $\text{vec}^{-1} : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  wird durch

$$a \mapsto \text{vec}^{-1}(a) = A$$

definiert, schichtet also die Einträge eines Vektors zu einer  $(n, n)$ -Matrix zurück.

Im Folgenden wird es noch hilfreich sein, für symmetrische Matrizen eine speziellere Vektorisierung und deren Umkehrung zu betrachten.

**Definition 2.1.6** (Symmetrische Vektorisierung einer Matrix). 1. Zu einer symmetrischen  $(n, n)$ -Matrix  $A$  sei die Abbildung  $\text{vecsym} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  definiert

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \text{vecsym}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{14} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a.$$

Die oberhalb der Diagonalen liegenden Komponenten der Matrix werden zusammen mit den Diagonalelementen spaltenweise zu einem Vektor untereinander gestapelt. Wir sprechen dann von der symmetrischen Vektorisierung der

## 2. Grundlagen

Matrix  $A$ .

2. Die Abbildung  $\text{vecsym}^{-1} : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  wird durch

$$a \mapsto \text{vecsym}^{-1}(a) = A$$

definiert, schichtet also die Einträge eines Vektors der Länge  $\frac{n(n+1)}{2}$  zu einer symmetrischen  $(n, n)$ -Matrix zurück.

**Bemerkung 2.1.7.** 1. Die obigen Abbildungen sind bijektive Abbildungen, da die Abbildungen  $n \rightarrow n^2$  und  $n \rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$  mit  $n \geq 1$  bijektive Abbildungen sind. Somit gilt für Matrizen  $A$

$$A = \text{vec}^{-1}(\text{vec}(A))$$

und für symmetrische Matrizen  $A$

$$A = \text{vecsym}^{-1}(\text{vecsym}(A)).$$

2. Die Abbildungen  $\text{vec}$ ,  $\text{vec}^{-1}$ ,  $\text{vecsym}$  und  $\text{vecsym}^{-1}$  sind affin linear. Es gilt für  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^{n^2}$ ,  $C, D \in \mathbb{S}^n$ ,  $c, d \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  und  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{vec}(\alpha A + \beta B + \gamma) &= \alpha \text{vec}(A) + \beta \text{vec}(B) + \gamma, \\ \text{vec}^{-1}(\alpha a + \beta b + \gamma) &= \alpha \text{vec}^{-1}(a) + \beta \text{vec}^{-1}(b) + \gamma, \\ \text{vecsym}(\alpha C + \beta D + \gamma) &= \alpha \text{vecsym}(C) + \beta \text{vecsym}(D) + \gamma, \\ \text{vecsym}^{-1}(\alpha c + \beta d + \gamma) &= \alpha \text{vecsym}^{-1}(c) + \beta \text{vecsym}^{-1}(d) + \gamma. \end{aligned}$$

Folgendes Lemma gibt die Zusammenhänge zwischen den Abbildungen  $\text{vec}$  und  $\text{vecsym}$  wieder, vergleiche mit [40, Anhang A.6.3].

**Lemma 2.1.8.** Sei  $A$  eine symmetrische  $(n, n)$ -Matrix. Dann gilt

$$\text{vec}(A) = D_n \text{vecsym}(A) \tag{2.3}$$

und

$$\widehat{D}_n \text{vec}(A) = \text{vecsym}(A) \tag{2.4}$$

mit den Blockmatrizen

$$D_n = \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} & D^{13} & \dots & D^{1n} \\ 0 & D^{22} & D^{23} & \dots & D^{2n} \\ 0 & 0 & D^{33} & \dots & D^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D^{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times \frac{n(n+1)}{2}} \tag{2.5}$$

sowie

$$\widehat{D}_n = \begin{pmatrix} D^{11\top} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D^{22\top} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D^{33\top} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D^{nn\top} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times n^2}. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $D^{jj}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , definiert als  $(n, j)$ -Matrix mit  $d_{11}^{jj} = d_{22}^{jj} = \dots = d_{jj}^{jj} = 1$  und 0 sonst und  $D^{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n, i < j$ , definiert als  $(n, j)$ -Matrix mit  $d_{ji}^{ij} = 1$  und 0 sonst.

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 114. □

**Beispiel 2.1.9.** Sei  $A$  eine symmetrische  $(3, 3)$ -Matrix. Dann sind  $D_3 \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$  und  $\widehat{D}_3 \in \mathbb{R}^{9 \times 6}$  gegeben mit

$$D^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D^{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{D}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt  $\widehat{D}_3 D_3 = I_6$  und  $D_3 \widehat{D}_3 \neq I_9$ .  $\widehat{D}_n$  ist im Allgemeinen nur eine Linksinverse von  $D_n$ . Für Matrizen  $A \in \mathbb{S}^n$  gilt

$$D_n \widehat{D}_n \text{vec}(A) = \text{vec}(A),$$

so dass man in diesem Fall davon sprechen kann, dass  $\widehat{D}_n$  auch eine Rechtsinverse von  $D_n$  ist.

## 2. Grundlagen

**Bemerkung 2.1.10.** 1. Zwischen der Spur zweier Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und den Vektorisierungen besteht folgender Zusammenhang:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{vec}(A^\top)^\top \operatorname{vec}(B).$$

2. Zwischen der Spur zweier symmetrischer Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und den symmetrischen Vektorisierungen besteht folgender Zusammenhang:

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{vecsymb}(A)^\top D_n^\top D_n \operatorname{vecsymb}(B)$$

mit der Matrix  $D_n$  aus Formel (2.5).

Die Beweise zu beiden Aussagen finden sich im Anhang Teil A.1 S. 115.

Die Bemerkungen 2.1.4 und 2.1.10 ergeben für die quadratische Form  $x^\top Ax$  mit  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch

$$\begin{aligned} x^\top Ax &= \operatorname{tr}(x^\top Ax) = \operatorname{tr}(xx^\top A) \\ &= \operatorname{vec}(xx^\top)^\top \operatorname{vec}(A) \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$= \operatorname{vecsymb}(xx^\top)^\top D_n^\top D_n \operatorname{vecsymb}(A). \quad (2.8)$$

Erinnert sei daran, dass das dyadische Produkt  $xx^\top$  zu einer symmetrischen Matrix führt.

**Bemerkung 2.1.11.** 1. Für eine symmetrische Matrix  $A$  gilt per Definition

$$\operatorname{vec}(A^\top) = \operatorname{vec}(A) \quad \text{und} \quad \operatorname{vecsymb}(A^\top) = \operatorname{vecsymb}(A). \quad (2.9)$$

2. Sei  $A$  eine positiv definite Matrix. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0$

$$x^\top Ax > 0.$$

Mit (2.7) und (2.8) gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq 0$

$$\operatorname{vec}(xx^\top)^\top \operatorname{vec}(A) > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{vecsymb}(xx^\top)^\top D_n^\top D_n \operatorname{vecsymb}(A) > 0.$$

Im Folgenden sei  $x$  aus der Menge

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

gewählt.  $X$  wird als *Standardsimplex* des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.  $x = 0$  liegt offensichtlich nicht in  $X$ . Der Standardsimplex ist mit  $x_1 = 1, x_i = 0, i = 2, \dots, n$ , nichtleer sowie kompakt und da durch lineare Restriktionen beschrieben, ist  $X$  konvex. Setze zu  $x$  den Vektor

$$z = \operatorname{vec}(xx^\top) \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

Das nächste Lemma gibt Eigenschaften von  $z$  an.

**Lemma 2.1.12.** Sei  $x \in X$ . Es gilt

1.  $z \geq 0$ ,
2.  $\sum_{i=1}^{n^2} z_i = 1$ .

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 116. □

$z$  liegt nach obigem Lemma im Standardsimplex des  $\mathbb{R}^{n^2}$

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \sum_{i=1}^{n^2} z_i = 1, z \geq 0\}$$

und kann analog zu  $x$  nicht gleich null sein.

Für  $\bar{z} = \text{vecsymb}(xx^\top) \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  mit  $x \in X$  gilt offensichtlich  $\bar{z} \geq 0, z \neq 0$  und

$$\sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \bar{z}_i \leq \sum_{i=1}^{n^2} z_i = 1.$$

## 2.2. Kurzeinführung in die Optimierung

Diesem Kapitel liegen hauptsächlich die Ausführungen aus [23] und [29] zugrunde.

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i \in I = \{1, \dots, p\}$$

mit  $p \geq 0$  und zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$ . Das Problem  $P$  werden wir im Laufe dieser Arbeit oft als *gewöhnliches Optimierungsproblem* bezeichnen.

Mit  $\nabla f$  wird der Gradient der differenzierbaren Funktion  $f$  bezeichnet. Der Gradient wird hier immer als Spaltenvektor aufgefasst. Analoges gilt für die Restriktionsfunktionen  $g_i$ .

Wir beschränken uns hier auf Ungleichungsrestriktionen. Gleichungsrestriktionen können über

$$h(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} h(x) \leq 0 \\ -h(x) \leq 0 \end{array} \quad (2.10)$$

zu zwei Ungleichungen umgeformt werden.

Viele der folgenden Aussagen beziehen sich auf das Minimieren der Zielfunktion

## 2. Grundlagen

f. Sie lassen sich aber auch auf Maximierungsprobleme

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i \in I$$

übertragen. Speziell sei dafür auf Lemma 2.2.4 hingewiesen, bei dem Beziehungen zwischen Minimierungs- und Maximierungsproblemen angegeben sind. Einige Aussagen sind für Minimierungs- und Maximierungsprobleme aufgeführt.

Es soll auch noch bemerkt werden, dass der Definitionsbereich der Funktionen  $f, g_i, i = 1, \dots, n$ , nicht notwendigerweise ganz  $\mathbb{R}^n$  sein muss; z.B. reicht es aus,  $f$  auf der Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

zu definieren. Die hier getätigten Ausführungen lassen sich mit etwas mehr an technischem Aufwand auch auf Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ausweiten, siehe z.B. [23].

Kommen wir zum Problem  $P$  zurück. Ist die Menge  $I$  leer, so spricht man von einem unrestringierten Optimierungsproblem. Enthält die Menge  $I$  Indizes, so ist  $P$  ein restringiertes Optimierungsproblem.

**Definition 2.2.1.** 1. Die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

heißt zulässige Menge von  $P$ . Ist  $I$  leer, so gilt  $M = \mathbb{R}^n$ .

2. Ein Punkt  $x^* \in M$  heißt globaler Minimalpunkt von  $P$ , falls

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in M \tag{2.11}$$

gilt. Für ein Maximierungsproblem heißt ein Punkt  $x^* \in M$  globaler Maximalpunkt von  $P$ , falls

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in M \tag{2.12}$$

gilt.

3. Sei  $U \subset M$  eine Umgebung des Punktes  $x^* \in M$  und gelten die Ungleichungen (2.11) und (2.12) für alle  $x \in U$  statt für alle  $x \in M$ .  $x^*$  heißt dann lokaler Minimalpunkt bzw. lokaler Maximalpunkt von  $P$ .

4. Der Wert  $v \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  mit

$$v = \inf_{x \in M} f(x)$$

heißt optimaler Zielfunktionswert von  $P$ . Ist  $v = f(x)$  für ein  $x \in M$ , so kann  $v = \min_{x \in M} f(x)$  geschrieben werden.

5. Die Menge

$$S = \{x^* \in M \mid x^* \text{ globaler Minimalpunkt von } P\} = \arg \min_{x \in M} f(x)$$

heißt Menge der globalen Minimalpunkte von  $P$ .

Globale Minimalpunkte sind immer lokale Minimalpunkte. Lokale Minimalpunkte sind mit  $U = M$  globale Minimalpunkte.

Eine hilfreiche Eigenschaft beim Lösen von  $P$  ist die Konvexität von  $P$ . Folgende Definition gibt an, was darunter zu verstehen sein soll.

**Definition 2.2.2** (Konvexität). 1. Eine Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  heißt konvex, falls für alle  $x_1, x_2 \in N$  und  $\lambda \in (0, 1)$

$$(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in N$$

gilt.

2. Sei  $N$  konvex. Eine Funktion  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $N$  konvex, falls für alle  $x_1, x_2 \in N$  und  $\lambda \in (0, 1)$

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

gilt.

3. Sei  $N$  konvex. Eine Funktion  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  heißt auf  $N$  strikt konvex, falls für alle  $x_1, x_2 \in N$  mit  $x_1 \neq x_2$  und  $\lambda \in (0, 1)$

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

gilt.

4. Das Problem  $P$  heißt konvex, falls alle Funktionen  $f, g_i, i = 1, \dots, n$ , auf  $\mathbb{R}^n$  konvex sind oder die Menge  $M$  und die Funktion  $f$  auf  $M$  konvex sind.

Für eine differenzierbare Funktion  $f$  gibt es zu 2. und 3. äquivalente Formulierungen mittels der Hessematrix  $D^2f$  von  $f$ .

**Bemerkung 2.2.3.** Sei  $f$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

1.  $f$  ist genau dann eine konvexe Funktion, wenn die Hessematrix von  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  positiv semidefinit ist, d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$D^2f(x) \succeq 0.$$

2. Sei die Hessematrix von  $f$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  positiv definit, d.h. für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$D^2f(x) \succ 0.$$

Dann ist  $f$  eine strikt konvexe Funktion.

## 2. Grundlagen

1. und 2. nennt man  $C^2$ -Charakterisierung der Konvexität einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion. Ein Beweis zu Teil 1 findet sich bei Theorem 4.1.9 in [29]. Teil 2 wird auch in [29], siehe Theorem 4.1.10, bewiesen. Dass die Umkehrung von Teil 2 nicht gilt, kann man sich schnell an Hand der Funktion  $f(x) = x^4$  verdeutlichen.

Analog kann man ebenfalls konkave Funktionen (definiert auf konvexen Mengen) definieren. Die Maximierung einer konkaven Zielfunktion über einer konvexen zulässigen Menge soll als ein konvexes Optimierungsproblem bezeichnet werden.

Offensichtlich ist zudem, dass eine strikt konvexe Funktion auf einer konvexen Menge auch konvex ist.

Im Fall der Konvexität der Zielfunktion  $f$  von  $P$  stimmen die globalen und die lokalen Minimalpunkte überein, siehe Theorem 4.1.4 [29]. Analoges gilt für konvexe Maximierungsprobleme.

Die folgenden Ausführungen sind bekannte Aussagen aus dem Gebiet der Optimierung und sind durch die Kapitel 1.2, 1.3, 2.3, 2.4 und 2.6 aus [56] inspiriert. Sie betreffen Umformungen und Rechenregeln für  $P$  und die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung unrestringierter sowie restringierter Optimierungsprobleme.

### 2.2.1. Rechenregeln

Die folgenden Lemmata geben Beziehungen zwischen unterschiedlichen Optimierungsproblemen an. Im Verlauf der Arbeit werden sie benutzt, um gegebene Optimierungsprobleme, die anscheinend „schwer“ zu lösen sind, auf „einfacher“ zu lösende Optimierungsprobleme zurückzuführen.

Einige Aussagen über globale Optimalpunkte können analog auch für lokale Optimalpunkte gemacht werden.

Bei den Lemmata wird immer vorausgesetzt, dass die auftretenden Optimierungsprobleme lösbar sind, d.h. die optimalen Punkte und Werte existieren.

**Lemma 2.2.4** (Skalare, Vielfache, Summen). *Es seien eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , die Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sowie  $\beta \in \mathbb{R}$  gegeben.*

1. *Es gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha \geq 0$*

$$\min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta) = \alpha \min_{x \in M} f(x) + \beta$$

*sowie*

$$\max_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta) = \alpha \max_{x \in M} f(x) + \beta \tag{2.13}$$

*und die globalen Optimalpunkte stimmen jeweils überein.*

2. *Es gilt für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha < 0$*

$$\min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta) = \alpha \max_{x \in M} f(x) + \beta$$

## 2.2. Kurzeinführung in die Optimierung

und die globalen Optimalpunkte stimmen jeweils überein.

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 117. □

**Lemma 2.2.5** (Vereinigungslemma). *Es seien  $I$  eine beliebige Indexmenge und  $M_i \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i \in I$ . Dann gilt:*

1.

$$\min_{x \in \bigcup_{i \in I} M_i} f(x) = \min_{i \in I} \min_{x \in M_i} f(x)$$

2. Weiter gilt

$$\max_{x \in \bigcup_{i \in I} M_i} f(x) = \max_{i \in I} \max_{x \in M_i} f(x).$$

3. Die globalen Optimalpunkte stimmen bei 1. und 2. überein.

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 118. □

**Definition 2.2.6** (Orthogonale Projektion). *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Als orthogonale Projektion von der Menge  $M$  auf den Raum  $\mathbb{R}^n$  wird die Menge*

$$\text{pr}_x M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^m \text{ mit } (x, y) \in M\}$$

bezeichnet.

**Lemma 2.2.7** (Projektionslemma). *Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Die Probleme*

$$P_1 : \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad (x, y) \in M$$

und

$$P_2 : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in \text{pr}_x M$$

sind im folgende Sinne äquivalent:

1. Sei  $(x^*, y^*)$  optimaler Punkt von  $P_1$ , dann ist  $x^*$  optimaler Punkt von  $P_2$ .
2. Sei  $x^*$  optimaler Punkt von  $P_2$ , dann existiert ein  $y^* \in \mathbb{R}^m$ , so dass  $(x^*, y^*)$  optimaler Punkt von  $P_1$  ist.
3. Die Optimalwerte von  $P_1$  und  $P_2$  stimmen überein.

Die Aussagen 1., 2. und 3. gelten auch, wenn man bei  $P_1$  und  $P_2$  min durch max ersetzt.

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 118. □

## 2. Grundlagen

**Lemma 2.2.8** (Separationslemma). *Es seien  $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$  und  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Dann gilt*

$$\max_{(x,y) \in X \times Y} f(x,y) = \max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x,y) = \max_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y).$$

*Die globalen Optimalpunkte der Optimierungsprobleme stimmen überein.*

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 119. □

**Lemma 2.2.9** (Transformationslemma). *Es seien die Mengen  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $Y \subset \mathbb{R}$  sowie die Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$  und  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Weiter sei die Funktion  $\psi$  eine streng monoton wachsende Funktion. Dann gilt*

$$\min_{x \in M} \psi(f(x)) = \psi(\min_{x \in M} f(x)).$$

*Die globalen Optimalpunkte der Optimierungsprobleme stimmen überein.*

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 119. □

**Lemma 2.2.10** (Epigraphumformulierung). *Die Probleme*

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in M$$

*und*

$$P^{epi} : \min_{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} z \quad \text{u.d.N.} \quad f(x) \leq z, x \in M$$

*sind im folgende Sinne äquivalent:*

1. *Sei  $(x^*, z^*)$  optimaler Punkt von  $P^{epi}$ , dann ist  $x^*$  optimaler Punkt von  $P$ .*
2. *Sei  $x^*$  optimaler Punkt von  $P$ , dann existiert ein  $z^* \in \mathbb{R}$ , so dass  $(x^*, z^*)$  optimaler Punkt von  $P^{epi}$  ist.*
3. *Die Optimalwerte von  $P$  und  $P^{epi}$  stimmen überein.*

**Beweis.** Siehe Anhang A.1 S. 120. □

### 2.2.2. Lösbarkeit

Für die Lösbarkeit eines Optimierungsproblems  $P$  werden hier zwei Sätze angegeben.  $P$  ist offensichtlich genau dann lösbar, wenn die Menge  $S$  der globalen Minimalpunkte nichtleer ist.

**Satz 2.2.11** (Satz von Weierstraß). *Die Zielfunktion  $f$  sei stetig und die zulässige Menge  $M$  sei nichtleer und kompakt<sup>2</sup>. Dann ist  $P$  lösbar, d.h.  $P$  besitzt einen globalen*

---

<sup>2</sup>Die Kompaktheit einer Menge  $M$  im  $\mathbb{R}^n$  bedeutet, dass  $M$  eine beschränkte und abgeschlossene Menge im  $\mathbb{R}^n$  ist.

Minimalpunkt  $x^* \in M$ . Insbesondere ist die Menge  $S$  der globalen Minimalpunkte nichtleer.

**Beweis.** Siehe Theorem 1.1.8 in [29]. □

Einen Lösbarkeitssatz ähnlich wie Satz 2.2.11 für unrestringierte Probleme liefert Theorem 2.3 in [23].

Zuletzt soll ein Zusammenhang zwischen strikter Konvexität der Zielfunktion und der Menge  $S$  hergestellt werden.

**Satz 2.2.12.** *Sei  $P$  konvex mit strikt konvexer Zielfunktion. Dann besitzt  $S$  höchstens ein Element. Daraus folgt, dass das Problem  $P$  entweder nicht lösbar ist oder es besitzt einen eindeutig bestimmten globalen Minimalpunkt  $x^* \in M$ .*

**Beweis.** Siehe Satz 2.3.3 in [48]. □

Die Sätze 2.2.18 und 2.2.23 geben an, wann man den Fall ausschließen kann, dass  $S$  kein Element besitzt.

### 2.2.3. Regularitätsbedingungen

Für die Herleitung notwendiger Optimalitätsbedingungen in der restringierten Optimierung sind Regularitätsbedingungen von Bedeutung. Drei Regularitätsbedingungen und deren Beziehungen zueinander werden hier kurz vorgestellt.

Dazu sei für einen Punkt  $x \in M$  die Menge der aktiven Indizes durch

$$I_0(x) = \{i \in I \mid g_i(x) = 0\}$$

definiert.

**Definition 2.2.13** (Regularitätsbedingungen). *1. An  $x \in M$  gilt die Lineare Unabhängigkeits-Bedingung<sup>3</sup>, kurz LICQ, falls die Vektoren  $\nabla g_i(x), i \in I_0(x)$ , linear unabhängig sind.*

*2. An  $x \in M$  gilt die Mangasarian-Fromowitz-Bedingung<sup>4</sup>, kurz MFCQ, falls das System*

$$(\nabla g_i(x))^\top d < 0, \quad i \in I_0(x),$$

*eine Lösung  $d \in \mathbb{R}^n$  besitzt.*

*3. Die Menge  $M$  erfüllt die Slaterbedingung<sup>5</sup>, kurz SC, falls es einen Punkt  $x \in M$  mit*

$$g_i(x) < 0, \quad i \in I,$$

*gibt.*

<sup>3</sup>Engl. Linear Independence Constraint Qualification.

<sup>4</sup>Engl. Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification.

<sup>5</sup>Engl. Slater Condition.

## 2. Grundlagen

*LICQ* und *MFCQ* sind Bedingungen an einen Punkt der zulässigen Menge, während *SC* eine Bedingung für die ganze Menge  $M$  ist. *LICQ* und *MFCQ* sind für  $M$  erfüllt, wenn sie an jedem Punkt von  $M$  erfüllt sind.

**Lemma 2.2.14.** *Ist an  $x \in M$  *LICQ* erfüllt, so gilt auch *MFCQ* an  $x$ .*

**Beweis.** Siehe Theorem 5.2.4 in [29]. □

**Lemma 2.2.15.** *Sei die Menge  $M$  nichtleer und konvex. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *Es existiert ein Punkt  $x \in M$ , der *MFCQ* erfüllt.*
2. *Für alle Punkte  $x \in M$  ist *MFCQ* erfüllt.*
3. *Die Menge  $M$  erfüllt *SC*.*

**Beweis.** Siehe Satz 3.2.47 in [55]. □

Bemerkt sei noch, dass das Erfüllen einer Regularitätsbedingung wesentlich von der funktionalen Darstellung der Menge  $M$  abhängt. Das erkennt man z.B. daran, dass bei den Definitionen der Bedingungen die Gradienten der Restriktionsfunktionen eingehen. Die Umformung einer Gleichung in zwei Ungleichungen, siehe Formel (2.10), ist in diesem Zusammenhang problematisch und die aus der Umformung resultierenden Folgen eventuell auch nicht wünschenswert.

**Beispiel 2.2.16.** *Gegeben sei die Menge*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 0, g_2(x) = -x_1 - x_2 \leq 0\}.$$

*Wegen  $g_1(x) = -g_2(x)$  gilt für jeden Punkt  $x \in M$*

$$g_1(x) = g_2(x) = 0,$$

*d.h. für die Menge der aktiven Indizes*

$$I_0(x) = \{1, 2\}, \forall x \in M.$$

*$M$  kann also mittels der Gleichung  $x_1 + x_2 = 0$  dargestellt werden.*

*Weiter gilt*

$$\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

*Diese beiden Vektoren sind linear abhängig. Es folgt, dass *LICQ* an jedem Punkt von  $M$  verletzt ist. *MFCQ* ist ebenfalls an jedem Punkt von  $M$  nicht erfüllt, da das*

System

$$\begin{aligned}(\nabla g_1(x))^\top d &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\top d = d_1 + d_2 < 0 \\ (\nabla g_2(x))^\top d &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}^\top d = -d_1 - d_2 < 0 \Leftrightarrow d_1 + d_2 > 0\end{aligned}$$

keine Lösung  $d \in \mathbb{R}^2$  besitzt.

Die obigen Regularitätsbedingungen lassen sich auf Probleme mit Gleichungsrestriktionen erweitern, siehe [29]. Für die Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 0\}$$

gelten dann die erweiterten Regularitätsbedingungen LICQ und MFCQ an jedem Punkt.

### 2.2.4. Optimalitätsbedingungen

Zunächst betrachten wir ein unrestringiertes Optimierungsproblem.

**Definition 2.2.17** (Kritischer Punkt). Sei die stetig differenzierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Ein Punkt  $x^k \in \mathbb{R}^n$  heißt kritischer Punkt von  $f$ , falls

$$\nabla f(x^k) = 0 \tag{2.14}$$

gilt.

**Satz 2.2.18.** Sei das unrestringierte Optimierungsproblem  $P$  gegeben, d.h.  $M = \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

1. Ist  $x$  ein lokaler Minimalpunkt von  $P$ , dann ist  $x$  ein kritischer Punkt der Zielfunktion  $f$ .
2. Ist  $f$  konvex so ist ein Punkt  $x$  genau dann globaler Minimalpunkt von  $P$ , wenn  $x$  ein kritischer Punkt von  $f$  ist. Die Menge  $S$  ist dann nichtleer.

**Beweis.** Siehe Theorem 4.1.8 in [29]. □

Teil 1 von Satz 2.2.18 heißt *Regel von Fermat* und ist eine notwendige Optimalitätsbedingung für einen lokalen Minimalpunkt. Die Aussage gehört zu den Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung.

Die Aussage aus Teil 2 ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für einen globalen Minimalpunkt. Sie gehört auch zu den Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung.

**Bemerkung 2.2.19.** Sei das unrestringierte Optimierungsproblem  $P$  mit  $n = 1$  gegeben. Sei zusätzlich die Zielfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und strikt

## 2. Grundlagen

konvex. Nach Satz 2.2.12 ist die Menge der globalen Minimalpunkte  $S$  entweder leer oder enthält genau einen Punkt.

- Sei  $S$  leer. Dann gibt es keinen Punkt  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f'(x) = 0$ , vergleiche mit Satz 2.2.18 Teil 2. Angenommen es gibt einen Punkt  $x_1 \in \mathbb{R}$  mit  $f'(x_1) < 0$  und einen Punkt  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \neq x_1$ , mit  $f'(x_2) > 0$ . Dann existiert nach der Anwendung des Zwischenwertsatzes auf die stetige Funktion  $f'$  ein Punkt  $x^k$  mit  $f'(x^k) = 0$ .  $x^k$  ist also ein kritischer Punkt von  $f$ . Nach Satz 2.2.18 Teil 2 ist  $x^k$  ein globaler Minimalpunkt von  $P$  und  $S$  ist nichtleer. Das ist ein Widerspruch und für  $f$  gibt es nicht die Punkte  $x_1, x_2$  mit obigen Eigenschaften. Daraus folgt, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  entweder  $f'(x) < 0$  oder  $f'(x) > 0$  gelten muss.  $f$  ist auf  $\mathbb{R}$  entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend.
- Sei  $S$  nichtleer, d.h. es gibt genau ein  $x^* \in \mathbb{R}$  mit  $f'(x^*) = 0$ , vergleiche mit Satz 2.2.18 Teil 2. Ein zweites  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq x^*$  und  $f'(x) = 0$  kann es nicht geben. Sei angenommen, dass  $f$  monoton fallend (monoton wachsend) ist. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt somit  $f'(x) \leq 0$  ( $f'(x) \geq 0$ ). Da  $x^*$  einziger globaler Minimalpunkt ist, gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x \neq x^*$

$$f(x) > f(x^*).$$

Seien nun die Punkte  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  mit  $x_1 < x^* < x_2$  gegeben. Mit  $f(x^*) < f(x_2)$  kann  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  nicht monoton fallend sein und mit  $f(x^*) < f(x_1)$  kann  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  nicht monoton wachsend sein.  $f$  ist demnach weder monoton fallend noch monoton wachsend auf  $\mathbb{R}$ .

Jetzt betrachten wir restringierte Optimierungsprobleme  $P$ . Zu jedem Optimierungsproblem kann eine sogenannte Lagrangefunktion auf folgende Weise definiert werden.

**Definition 2.2.20** (Lagrangefunktion). Die Funktion

$$L(x, \alpha) = f(x) + \alpha^\top g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i g_i(x) \quad (2.15)$$

mit  $g(x) = (g_1(x), \dots, g_p(x))^\top$  und  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^\top \in \mathbb{R}^p$  heißt Lagrangefunktion von  $P$ .

Für ein Maximierungsproblem wird die Lagrangefunktion folgendermaßen definiert

$$L(x, \alpha) = f(x) - \alpha^\top g(x) = f(x) - \sum_{i=1}^p \alpha_i g_i(x).$$

Man beachte das negative Vorzeichen nach der Zielfunktion im Gegensatz zu (2.15).

Die Skalare  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , werden im Allgemeinen als (Lagrange-)Multiplikatoren bezeichnet und den Restriktionen  $g_i(x) \leq 0$ ,  $i \in I$ , zugeordnet.

## 2.2. Kurzeinführung in die Optimierung

Mittels der Lagrangefunktion kann nun ein Ungleichungs- und Gleichungssystem definiert werden. Lösungen  $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dieses Systems heißen KKT-Punkte.

**Definition 2.2.21** (Karush-Kuhn-Tucker-Punkt). *Der Punkt  $x^{KKT} \in \mathbb{R}^n$  heißt Karush-Kuhn-Tucker-Punkt von  $P$  mit dem Multiplikatorenvektor  $\alpha \in \mathbb{R}^p$ , kurz KKT-Punkt, falls der Punkt  $(x^{KKT}, \alpha)$  das KKT-System*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^{KKT}, \alpha) &= \nabla_x f(x^{KKT}) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla_x g_i(x^{KKT}) = 0, \\ g_i(x^{KKT}) &\leq 0, \quad i \in I, \\ \alpha^\top g(x^{KKT}) &= \sum_{i=1}^p \alpha_i g_i(x^{KKT}) = 0, \\ \alpha_i &\geq 0, \quad i \in I. \end{aligned}$$

löst.

Die erste Gleichung

$$\nabla_x L(x^{KKT}, \alpha) = \nabla_x f(x^{KKT}) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla_x g_i(x^{KKT}) = 0$$

kann als Kritische-Punkt-Bedingung zu  $x^{KKT}$  für restringierte Optimierungsprobleme interpretiert werden, ähnlich wie (2.14) für unrestringierte Optimierungsprobleme. Die zweite Ungleichung bedeutet, dass der Punkt  $x^{KKT}$  in der zulässigen Menge  $M$  liegt. Die letzten drei Bedingungen heißen zusammen Komplementaritätsbedingung und erzwingen für einen KKT-Punkt, dass für  $i \in I$   $g_i(x^{KKT}) = 0$  oder  $\alpha_i = 0$  gelten muss<sup>6</sup>.

**Satz 2.2.22.** 1. *Sei  $x^* \in \mathbb{R}^n$  ein lokaler Minimalpunkt von  $P$  an dem entweder die Regularitätsbedingung LICQ oder die Regularitätsbedingung MFCQ erfüllt ist.*

*Dann ist  $x^*$  ein KKT-Punkt mit passendem Multiplikator  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  von  $P$ .*

2. *Sei  $P$  ein konvexes Optimierungsproblem, welches die zugehörige zulässige Menge die Regularitätsbedingung SC erfülle, und sei  $x^* \in \mathbb{R}^n$  ein lokaler Minimalpunkt von  $P$ .*

*Dann ist  $x^*$  ein KKT-Punkt mit passendem Multiplikator  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  von  $P$ .*

**Beweis.** Siehe Theorem 5.2.3 in [29]. □

Satz 2.2.22 liefert eine notwendige Optimalitätsbedingung für restringierte (konvexe) Optimierungsprobleme.

<sup>6</sup>Das „oder“ an dieser Stelle ist nicht als ausschließendes „oder“ zu verstehen. Es ist auch  $g_i(x) = \alpha_i = 0$  für ein  $i \in I$  möglich. Man spricht dann von einem degenerierten Fall.

## 2. Grundlagen

Folgende hinreichende Optimalitätsbedingung 1. Ordnung lässt sich für restriktierte konvexe Optimierungsprobleme ableiten.

**Satz 2.2.23.**  *$P$  sei ein konvexes Optimierungsproblem und der Punkt  $x^{KKT} \in \mathbb{R}^n$  ein KKT-Punkt mit Multiplikator  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  von  $P$ . Dann ist  $x^{KKT}$  ein globaler Minimalpunkt von  $P$ .*

**Beweis.** Siehe Theorem 4.2.2 in [29]. □

**Bemerkung 2.2.24.** *1. Für nichtkonvexe Optimierungsprobleme lässt sich Satz 2.2.23 nicht ohne Weiteres übertragen, z.B. müssen dort auch lokale Minimalpunkte in Betracht gezogen werden. Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung sowie Constraint-Qualifications helfen dann beim Charakterisieren eines lokalen Minimalpunktes, siehe [29].*

*2. Betrachten wir ein konvexes Optimierungsproblem  $P$ . Ein kritischer Punkt  $x^k$  der Zielfunktion  $f$  ist dann ein globaler Minimalpunkt von  $P$ , wenn  $x^k$  zulässig ist, d.h.  $x^k \in M$  gilt. Das lässt sich mittels Satz 2.2.23 verifizieren.*

*Sei  $x^k \in \mathbb{R}^n$  ein kritischer Punkt von  $f$ , d.h. es gilt*

$$\nabla_x f(x^k) = 0,$$

*und sei  $x^k \in M$ . Setze  $\alpha_i = 0$  für alle  $i \in I$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^k, \alpha) &= \underbrace{\nabla_x f(x^k)}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^p \alpha_i \nabla_x g_i(x^k)}_{=0} = 0, \\ \alpha^\top g(x^k) &= \sum_{i=1}^p \alpha_i g_i(x^k) = 0, \\ &\alpha = 0. \end{aligned}$$

*Aus  $x^k \in M$  folgt noch  $g(x^k) \leq 0$  und alles zusammen besagt, dass  $x^k$  ein KKT-Punkt von  $P$  mit Multiplikator  $\alpha = 0$  ist. Nach Satz 2.2.23 ist  $x^k$  damit ein globaler Minimalpunkt von  $P$ .*

*3. Sei das restringierte Optimierungsproblem  $P$  mit  $n = 1$  und*

$$M = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a - x \leq 0, x - b \leq 0\}$$

*mit  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , gegeben. Mit  $\frac{1}{2}(a + b) \in (a, b)$  erfüllt  $M$  die Regularitätsbedingung SC. Sei zusätzlich die Zielfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und strikt konvex. Nach den Sätzen 2.2.11 und 2.2.12 enthält die Menge der globalen Minimalpunkte  $S$  genau einen Punkt  $x^*$ . Dieser globale Minimalpunkt ist nach Satz 2.2.22 Teil 2 ein KKT-Punkt von  $P$ .*

- *Sei  $x^* \notin (a, b)$ , d.h.  $x^* = a$  oder  $x^* = b$ . Angenommen  $f$  besitzt im offenen Intervall  $(a, b)$  einen kritischen Punkt  $x^k$ . Dann löst  $x^k$  mit Multipli-*

## 2.2. Kurzeinführung in die Optimierung

kator  $\alpha = (0, 0)^\top$  die KKT-Bedingungen, siehe Definition 2.2.21. Nach Satz 2.2.23 ist  $x^k$  ein weiterer globaler Minimalpunkt von  $P$  mit  $x^k \neq x^*$ . Das ist ein Widerspruch und  $f$  besitzt im offenen Intervall  $(a, b)$  keinen kritischen Punkt. Nur für  $x = a$  bzw.  $x = b$  kann  $f'(x) = 0$  gelten.  $f$  ist analog zur Bemerkung 2.2.19 entweder streng monoton fallend oder streng monoton wachsend auf  $(a, b)$ .

- Sei  $x^* \in (a, b)$ . Da  $x^*$  die KKT-Bedingungen erfüllt, existiert ein  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x^*) - \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\ \alpha &\geq 0 \\ a - x^* &< 0 \\ x^* - b &< 0 \\ \alpha_1(a - x^*) &= 0 \\ \alpha_2(x^* - b) &= 0. \end{aligned}$$

Aus den letzten vier Bedingungen folgt  $\alpha = 0$ . Eingesetzt in die erste Bedingung folgt  $f'(x^*) = 0$ .  $x^*$  ist somit ein kritischer Punkt von  $f$ , der in  $(a, b)$  liegt. Analog wie oben gezeigt wurde, kann es keinen weiteren kritischen Punkt  $x^k$  von  $f$  in  $(a, b)$  mit  $x^k \neq x^*$  geben. Weiter ist  $f$  weder monoton fallend noch monoton wachsend auf  $[a, b]$ , siehe Bemerkung 2.2.19.

Drei Beispiele, in denen einige Konzepte von oben veranschaulicht werden sollen, beschließen diesen Abschnitt. Die dort vorgestellten Problemstellungen kommen in leicht veränderten Formen im weiteren Verlauf der Arbeit vor.

**Beispiel 2.2.25** (Unrestringierte Minimierung). 1. Gegeben sei das unrestringierte quadratische Optimierungsproblem

$$P^x : \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top C x - c^\top x$$

mit der Matrix  $C \in \mathbb{S}_+^n$  und dem Vektor  $c \in \mathbb{R}^n$ . Zunächst überprüfen wir, ob die Zielfunktion  $f(x) = \frac{1}{2} x^\top C x + c^\top x$  konvex bzw. strikt konvex ist.

$f$  ist offensichtlich zweimal stetig differenzierbar. Für den Gradienten und die Hessematrix von  $f$  gilt

$$\nabla_x f(x) = Cx - c \quad \text{und} \quad D^2 f(x) = C.$$

Nach der  $C^2$ -Charakterisierung der Konvexität, siehe Bemerkung 2.2.3, ist  $f$  strikt konvex und damit auch konvex, da  $C$  als positiv definit vorausgesetzt ist. Nach Satz 2.2.12 gibt es höchstens einen globalen Minimalpunkt von  $P^x$ .

Versuchen wir einen kritischen Punkt von  $f$  zu berechnen. Wir setzen den

## 2. Grundlagen

Gradienten  $\nabla_x f$  gleich null, dann folgt

$$\nabla_x f(x^k) = 0 \Leftrightarrow Cx^k - c = 0 \Leftrightarrow x^k = C^{-1}c.$$

Die letzte Gleichung existiert genau dann, wenn  $C$  invertierbar ist. Nach Bemerkung 2.1.2 ist eine symmetrische positiv definite Matrix invertierbar.  $x^k$  ist ein kritischer Punkt von  $f$  und nach Satz 2.2.18 wäre dieser Punkt dann globaler Minimalpunkt von  $P^x$ .

2. Wechseln wir die Ansicht auf  $P^x$ , setzen  $c = 0$  und fassen die Matrix  $C$  als Entscheidungsvariable und den Vektor  $x \in M$  mit

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0\} \quad (2.16)$$

als Parameter auf

$$P_{\min}^C : \min_{C \in \mathbb{R}^{n \times n}} \frac{1}{2} x^\top C x.$$

Mit Hilfe der Abbildung  $\text{vec}(\cdot)$ , siehe 2.1.5 und Formel (2.7), kann  $P_{\min}^C$  umgeschrieben werden zu

$$\min_{c \in \mathbb{R}^{n^2}} \frac{1}{2} \text{vec}(xx^\top)^\top \text{vec}(C) = \frac{1}{2} z^\top c.$$

Die Zielfunktion  $\frac{1}{2} z^\top c$  ist eine lineare Funktion bezüglich  $c$ , damit konvex, und  $P_{\min}^C$  ist ein konvexes Optimierungsproblem. Der Gradient der Zielfunktion ist der Vektor  $z$ . Für  $z = \text{vec}(xx^\top)$  gilt  $z \neq 0$ , siehe Ausführungen S. 11. Setzt man folglich den Gradienten von  $z^\top c$  gleich null, so erhält man  $z = 0$  und einen Widerspruch. Die Zielfunktion von  $P_{\min}^C$  hat somit keinen kritischen Punkt. Nach Satz 2.2.18 Teil 2 ist jeder globale Minimalpunkt eines konvexen Optimierungsproblems ein kritischer Punkt der zugehörigen Zielfunktion. Es folgt, dass  $P_{\min}^C$  nicht lösbar ist, was auch nicht anders zu erwarten war, wenn man die lineare Funktion  $\frac{1}{2} z^\top c$  mit  $z \neq 0$  über der nicht beschränkten Menge  $\mathbb{R}^{n^2}$  minimiert.

**Beispiel 2.2.26** (Restringierte Minimierung). 1. Sei das restringierte Optimierungsproblem

$$P_{res}^x : \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top C x - c^\top x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in M$$

mit  $M$  aus (2.16),  $C \in \mathbb{S}_+^n$  und  $c \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Da die Zielfunktion konvex und die Restriktionen linear und damit konvex sind, ist auch  $P$  konvex.

Bestimmen wir die Lagrangefunktion von  $P_{res}^x$ . Setze  $g_i(x) = -x_i, i = 1, \dots, n$ , und  $g_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n x_i - 1$  sowie  $g_{n+2}(x) = -\sum_{i=1}^n x_i + 1$ . Die Lagrangefunktion

lautet damit

$$\begin{aligned}
 L(x, \alpha) &= f(x) + \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i g_i(x) \\
 &= \frac{1}{2} x^\top C x - c^\top x + \sum_{i=1}^n \alpha_i (-x_i) + \alpha_{n+1} \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) \\
 &\quad + \alpha_{n+2} \left( -\sum_{i=1}^n x_i + 1 \right) \\
 &= \frac{1}{2} x^\top C x - c^\top x - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) \\
 &\quad - \alpha_{n+2} \left( \sum_{i=1}^n x_i - 1 \right).
 \end{aligned}$$

Der Gradient von  $L$  nach  $x$  ist

$$\nabla_x L(x, \alpha) = Cx - c - \alpha_x + \alpha_{n+1}e - \alpha_{n+2}e$$

mit dem Vektor  $\alpha_x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top$  und dem Vektor  $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ . Das Nullsetzen von  $\nabla_x L$  ergibt

$$x = C^{-1}(c + \alpha_x - \alpha_{n+1}e + \alpha_{n+2}e), \quad (2.17)$$

wobei die Inverse von  $C$  existiert. Ein KKT-Punkt  $x^k$  von  $P_{res}^x$  muss somit (2.17) und für alle  $i = 1, \dots, n+2$  die Bedingungen

$$\begin{aligned}
 g_i(x^k) &\leq 0, \\
 \alpha_i g_i(x^k) &= 0, \\
 \alpha_i &\geq 0
 \end{aligned}$$

erfüllen.

2. Sucht man nicht das Minimum in  $P_{\min}^C$  aus Beispiel 2.2.25 über die Menge aller  $(n, n)$ -Matrizen, sondern beschränkt sich z.B. auf symmetrische  $(n, n)$ -Matrizen, so wird  $P_{\min}^C$  mit Hilfe der Abbildung  $\text{vec}^{-1}(\cdot)$  umgeformt zu

$$\min_{c \in \mathbb{R}^{n^2}} \frac{1}{2} z^\top c \quad \text{u.d.N.} \quad (\text{vec}^{-1}(c))^\top = \text{vec}^{-1}(c),$$

siehe Bemerkung 2.1.11. Die Restriktion dieses Problems lässt sich als Menge von linearen Gleichungen auffassen. Das führt typischerweise zu einer unbeschränkten zulässigen Menge und mit der Linearität der Zielfunktion zur Unlösbarkeit des Problems oder es ist trivial durch Auflösen der Gleichungen lösbar. Analog verhält es sich, wenn statt der Abbildung  $\text{vec}$  die Abbildung

## 2. Grundlagen

vecsym benutzt wird.

**Beispiel 2.2.27** (Restringierte Maximierung). 1. Schauen wir uns das Problem

$$P_{\max}^C : \max_{c \in \mathbb{R}^{n^2}} z^\top c \quad \text{u.d.N.} \quad (c - m)^\top S^{-1}(c - m) \leq \beta^2$$

mit dem Vektor  $z = \text{vec}(xx^\top)$  mit  $x$  aus dem Standardsimplex des  $\mathbb{R}^n$ , einem Vektor  $m \in \mathbb{R}^{n^2}$ , einer Matrix  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{n^2}$  und einem Skalar  $\beta > 0$  an. Die Zielfunktion ist wieder linear, und damit konvex. Die Restriktion

$$(c - m)^\top S^{-1}(c - m) \leq \beta^2$$

beschreibt einen Ellipsoid mit Mittelpunkt  $m$  und Formmatrix  $S$ , die um den Faktor  $\frac{1}{\beta^2}$  skaliert ist<sup>7</sup>. Die Restriktion ist somit quadratisch und für gegebenes  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{n^2}$  konvex.  $P_{\max}^C$  ist konvex.

Die Lagrangefunktion zu  $P_{\max}^C$  ist

$$L(c, \alpha) = z^\top c - \alpha((c - m)^\top S^{-1}(c - m) - \beta^2)$$

und der zugehörige Gradient nach  $c$

$$\nabla_c L(c, \alpha) = z - \alpha 2S^{-1}(c - m).$$

Setzt man  $\nabla_c L$  gleich null, so erhält man

$$c^* = \frac{1}{2\alpha^*} Sz + m$$

mit  $\alpha^* \neq 0$ .

Sei  $\alpha^* = 0$ . Dann ist

$$\nabla_c L(c, \alpha^*) = z.$$

Für einen KKT-Punkt von  $P_{\max}^C$  muss in diesem Fall  $z = 0$  gelten, das ist ein Widerspruch. Nach Lemma 2.1.12 ist  $z = \text{vec}(xx^\top)$  im Standardsimplex des  $\mathbb{R}^{n^2}$  und somit ungleich null, da nach Voraussetzung  $x$  im Standardsimplex des  $\mathbb{R}^n$  liegt.

Sei  $\alpha^* > 0$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} & \alpha^*((c^* - m)^\top S^{-1}(c^* - m) - \beta^2) = 0 \\ \stackrel{\alpha^* > 0}{\iff} & (c^* - m)^\top S^{-1}(c^* - m) - \beta^2 = 0 \\ \iff & \left(\frac{1}{2\alpha^*} Sz\right)^\top S^{-1} \left(\frac{1}{2\alpha^*} Sz\right) - \beta^2 = 0 \\ \iff & \frac{1}{4\alpha^{*2}} z^\top S^\top S^{-1} Sz = \beta^2 \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Es gilt  $S \in \mathbb{S}_+^{n^2}$ , da  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{n^2}$  gilt, siehe Bemerkung 2.1.2 Teil 2.

## 2.2. Kurzeinführung in die Optimierung

$$\begin{aligned}
 S \text{ pos. def.} & \iff \alpha^{*2} = \frac{1}{4\beta^2} \underbrace{z^\top S z}_{>0} \\
 & \iff \alpha^* = \frac{1}{2\beta} \sqrt{z^\top S z} \\
 \text{Bem. 2.1.2} & \iff \alpha^* = \frac{1}{2\beta} \|S^{\frac{1}{2}} z\|_2.
 \end{aligned}$$

sowie

$$c^* = \frac{1}{2\alpha^*} S z + m = \frac{\beta}{\|S^{\frac{1}{2}} z\|_2} S z + m. \quad (2.18)$$

Da  $S$  positiv definit,  $\beta > 0$  und  $z \neq 0$  ist, gilt  $\alpha^* = \frac{1}{2\beta} \|S^{\frac{1}{2}} z\|_2 > 0$ .

Bei der Bestimmung von  $\alpha^*$  wurde die Zulässigkeit von  $c^*$  durch

$$\alpha^* ((c^* - m)^\top S^{-1} (c^* - m) - \beta^2) = 0$$

mit  $\alpha^* > 0$  berücksichtigt.  $c^*$  ist also zulässig für  $P_{\max}^C$ .

Der Punkt  $c^*$  ist ein KKT-Punkt mit Multiplikator  $\alpha^*$  von  $P_{\max}^C$ , da  $c^*$  und  $\alpha^*$  das System

$$\begin{aligned}
 \nabla_c L(c^*, \alpha^*) &= 0 \\
 (c^* - m)^\top S^{-1} (c^* - m) - \beta^2 &\leq 0 \\
 \alpha^* ((c^* - m)^\top S^{-1} (c^* - m) - \beta^2) &= 0 \\
 \alpha^* &\geq 0
 \end{aligned}$$

erfüllen.

Nach Satz 2.2.23 ist  $c^*$  ein globaler Maximalpunkt von  $P_{\max}^C$  mit optimalem Zielfunktionswert

$$z^\top c^* = z^\top \left( \frac{\beta}{\|S^{\frac{1}{2}} z\|_2} S z + m \right) = \frac{\beta}{\|S^{\frac{1}{2}} z\|_2} z^\top S z + z^\top m = \beta \sqrt{z^\top S z} + z^\top m.$$

2. Man kann die Bedingung  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{n^2}$  in  $P_{\max}^C$  abschwächen. In der Herleitung des optimalen Punktes von  $P_{\max}^C$  in 1. benutzen wir die Inverse  $S$  von  $S^{-1}$ , die wegen  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{n^2}$  existiert, siehe Bemerkung 2.1.2 Teil 2. Für symmetrische positiv semidefinite Matrizen  $S^{-1}$  muss allerdings die Inverse  $S$  nicht existieren, so dass in diesem Fall die Vorgehensweise in 1. nicht angewendet werden kann. Die Restriktion in diesem Fall beschreibt immer noch eine Ellipsoid, die aber nicht die volle Dimension  $n^2$  haben muss. Folgende Umformungen ermöglichen es, trotzdem einen optimalen Punkt zu berechnen.

$P_{\max}^C$  mit symmetrischer positiv definiten  $(n^2, n^2)$ -Matrix  $S^{-1}$  ist äquivalent zu

## 2. Grundlagen

dem Problem

$$HP : \max_{c \in \mathbb{R}^{n^2}} z^\top c \quad \text{u.d.N.} \quad c = m + \beta S^{\frac{1}{2}} \zeta, \quad \|\zeta\|_2 \leq 1. \quad (2.19)$$

Dass die beiden zulässigen Mengen von  $P_{\max}^C$  und HP gleich sind, wird im Anhang A.1.1 S. 121 bewiesen.

Für HP fordern wir jetzt nur noch, dass  $S$  eine symmetrische positiv semidefinite  $(n^2, n^2)$ -Matrix ist, und formen weiter um zu

$$\max_{\zeta \in \mathbb{R}^{n^2}} \beta \left( S^{\frac{1}{2}} z \right)^\top \zeta + z^\top m \quad \text{u.d.N.} \quad \|\zeta\|_2^2 \leq 1. \quad (2.20)$$

Nach Lemma 2.2.4 und Umformulierung der Restriktion ist (2.20) äquivalent zu

$$\max_{\zeta \in \mathbb{R}^{n^2}} \left( S^{\frac{1}{2}} z \right)^\top \zeta \quad \text{u.d.N.} \quad \zeta^\top I_{n^2} \zeta \leq 1$$

mit der  $(n^2, n^2)$ -Einheitsmatrix  $I_{n^2}$ . Setze nun

$$c = \zeta, \quad \tilde{z} = S^{\frac{1}{2}} z, \quad m = 0, \quad \tilde{S}^{-1} = I_{n^2} \quad \text{und} \quad \beta = 1.$$

Aus  $\tilde{S}^{-1} = I_{n^2}$  folgt

$$\tilde{S} = I_{n^2} \quad \text{und} \quad \tilde{S}^{\frac{1}{2}} = I_{n^2}.$$

Damit liegt die Situation wie in 1. für  $P_{\max}^C$  mit  $\tilde{S}^{-1} = I_{n^2} \in \mathbb{S}_+^{n^2}$  vor. Der globale Maximalpunkt ist dann

$$\zeta^* = \frac{\beta}{\|\tilde{S}^{\frac{1}{2}} \tilde{z}\|_2} \tilde{S} \tilde{z} + m = \frac{1}{\|S^{\frac{1}{2}} z\|_2} S^{\frac{1}{2}} z.$$

Setzt man  $\zeta^*$  in  $c = m + \beta S^{\frac{1}{2}} \zeta$  ein, so erhält man als optimalen Punkt von HP

$$c^* = \frac{\beta}{\|S^{\frac{1}{2}} z\|_2} S z + m,$$

den wir auch in Formel (2.18) berechnet haben. Der optimale Zielfunktionswert ist wieder

$$z^\top c^* = \beta \sqrt{z^\top S z} + z^\top m.$$

## 2.3. Semi-infinite Optimierung

In diesem Abschnitt werden Optimierungsprobleme der Form

$$SIP : \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y$$

betrachtet. Dabei sind  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbare Funktionen,  $X \in \mathbb{R}^n$  und  $Y \in \mathbb{R}^m$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann  $X$  als Box im  $\mathbb{R}^n$  gewählt werden. Boxen sollen hier als mehrdimensionale abgeschlossene Intervalle

$$U = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$$

definiert sein.

Es handelt sich hierbei um sogenannte *semi-infinite Probleme*, da man eine endlich dimensionale Entscheidungsvariable  $x$  und unendlich viele Restriktionen hat. Diese unendlich vielen Restriktionen werden durch die sogenannte Indexmenge  $Y$  bestimmt, die nicht notwendigerweise endlich ist.

Ist  $Y$  eine nichtleere, kompakte Menge, dann spricht man von (*Standard*) *semi-infiniten Optimierungsproblemen*, abgekürzt durch *SIP* für engl. „(standard) semi-infinite programming“. Hängt die Indexmenge von der Entscheidungsvariablen  $x$  ab, so spricht man von *verallgemeinerten semi-infiniten Optimierungsproblemen*, abgekürzt durch *GSIP* für engl. „generalized semi-infinite programming“, und deutet dies mit  $Y(x)$  an.

Eine Einführung in die Theorie und Methodik für semi-infinite Optimierungsprobleme geben [22], [25], [34] und [47]. Eine Einführung in die semi-infinite Optimierung mit Blick auf eine zweistufige Betrachtungsweise liefert [53]. Einen Überblick über numerische Methoden findet man in [26] und [46]. In den Publikationen finden sich zahlreiche weitere Literaturreferenzen.

Anwendungsbeispiele semi-infiniten Optimierung sind z.B.

- Tschebyscheff-Approximation,
- Minmax-Optimierung,
- Robuste Optimierung,
- Design Centering,
- Fehlerminimierung bei Randwertproblemen mit Operatorgleichungen,
- Disjunktive Optimierung,

siehe [53].

Die Betrachtung robuster Optimierungsprobleme als semi-infinite Probleme wird in dieser Arbeit näher beleuchtet.

Wie man sich leicht klar machen kann, können Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung aus der gewöhnlichen restringierten Optimierung nicht ohne weiteres auf *SIP* angewendet werden, vergleiche z.B. Satz 2.2.23. Die Überprüfung auf Zulässigkeit eines Kandidaten für einen lokalen wie globalen Minimalpunkt ist bei unendlich vielen Restriktionen im Allgemeinen nicht durchführbar. Es kann aber gezeigt werden, dass bei einer lokalen Betrachtung eines zulässigen Punktes nur endlich viele Restriktionen eine Rolle spielen, siehe *Reduction Ansatz* in [53, Abschnitt 3.2.4.1].

Einige Konzepte aus Kapitel 2.2 sind auf *SIP* ohne zusätzlichem Aufwand über-

## 2. Grundlagen

tragbar. Hier folgen einige Beispiele.

**Bemerkung 2.3.1.** 1. Die zulässige Menge

$$M = \{x \in X \mid g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y\} \quad (2.21)$$

von *SIP* ist abgeschlossen.

2. Falls  $M$  beschränkt und nichtleer ist, dann ist *SIP* lösbar, vergleiche Satz 2.2.11.

3. *SIP* ist ein konvexes Optimierungsproblem, falls die zulässige Menge  $M$  und die Zielfunktion  $f$  auf  $M$  konvex sind, vergleiche Definition 2.2.2. Für konvexe *SIP* stimmen die globalen und die lokalen Minimalpunkte überein.

Ist die Zielfunktion  $f$  zusätzlich strikt konvex und *SIP* lösbar, dann ist der globale Optimalpunkt eindeutig.

Im Folgenden wird eine wohlbekannte Optimalitätsbedingung 1. Ordnung für *SIP* angeben. Dazu sei vorausgesetzt, dass die Box  $X$  hinreichend groß ist, um alle stationären Punkte im Innern zu beinhalten.

**Bemerkung 2.3.2.** 1. Die Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} g(x, y) \quad (2.22)$$

ist stetig. Die Entscheidungsvariable  $x$  von *SIP* ist hier als Parameter zu verstehen. Die Stetigkeit folgt dann aus Resultaten der parametrischen Optimierung, siehe Kapitel 2.4 Korollar 2.4.10.

2. Alle zulässigen Punkte  $x$  mit  $\varphi(x) < 0$  liegen im Inneren von  $M$ .

Ist  $x^*$  ein lokales Minimum von *SIP* mit  $\varphi(x^*) < 0$ , dann gilt bekanntermaßen

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Sei nun  $x$  aus dem (topologischen) Rand  $\partial M$  von  $M$ . Für diese  $x$  sei noch die Menge

$$Y_0(x) = \{y \in Y \mid g(x, y) = 0\}$$

als Menge der aktiven Indizes (bzgl.  $x$ ) definiert. Man beachte, dass  $Y_0(x)$  nichtleer und kompakt ist.

Ist  $Y_0(x)$  leer für ein  $x \in M$ , so liegt  $x$  im Inneren von  $M$ . Ob  $x$  ein lokaler Minimalpunkt von *SIP* ist, kann dann mit Mitteln der gewöhnlichen unrestringierten Optimierung beantwortet werden, siehe Bemerkung 2.3.2 oben.

Wir betrachten im Folgenden nur Minimalpunkte aus dem (topologischen) Rand von  $M$ .

**Satz 2.3.3** (Fritz John-Bedingung). Sei  $x^* \in \partial M$  ein lokales Minimum von *SIP*. Dann existieren  $y^k \in Y_0(x^*)$ ,  $1 \leq k \leq n + 1$ , und  $(\alpha_0, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $(\alpha_0, \alpha) \geq 0$

und  $\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$ , so dass die Bedingung

$$\alpha_0 \nabla f(x^*) + \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \nabla_x g(x^*, y^k) = 0 \quad (2.23)$$

gilt.

**Beweis.** Siehe Theorem 2.1 [20]. □

Lokal betrachtet, beschreiben  $k$  Restriktionen mit  $k \leq n + 1$  und damit endlich viele Restriktionen einen lokalen Minimalpunkt.

**Definition 2.3.4** (EMFCQ). *Ein  $x \in M$  erfüllt die Erweiterte-Mangasarian-Fromowitz-Bedingung, engl. Extended Mangasarian-Fromovitz Constraint Qualification, kurz EMFCQ, wenn*

$$(\nabla_x g(x, y))^\top d < 0 \quad \forall y \in Y_0(x) \quad (2.24)$$

für ein  $d \in \mathbb{R}^n$  gilt.

**Bemerkung 2.3.5.** 1. Vektoren  $d$ , die (2.24) erfüllen, heißen strikt zulässige Richtungen von  $x$ . Satz 2.3.3 kann dahingehend interpretiert werden, dass im Punkt  $x$  keine zulässigen Abstiegsrichtungen für  $f$  existieren, falls  $x$  ein lokaler Minimalpunkt ist. Dabei sind Abstiegsrichtungen  $d$  für  $f$  in  $x$  mit

$$(\nabla f(x))^\top d < 0$$

definiert. Satz 2.3.3 ist damit eine notwendige Optimalitätsbedingung.

2. Eine hinreichende Optimalitätsbedingung ist folgende Aussage. Existiert für ein  $x \in \partial M$  kein Vektor  $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  mit

$$(\nabla f(x))^\top d \leq 0, \quad (\nabla_x g(x, y))^\top d < 0 \quad \forall y \in Y_0(x),$$

so muss  $x$  ein lokaler Minimalpunkt sein, siehe Theorem 1 [34]. Die Existenz eines solchen  $d$  zu be- oder widerlegen, kann im Allgemeinen nicht erwartet werden, da  $Y_0(x)$  unendlich viele Indizes enthalten kann.

3. Ist die Regularitätsbedingung EMFCQ an einem lokalen Minimum  $x$  von SIP erfüllt, so kann man in Satz 2.3.3  $\alpha > 0$  wählen, und erhält die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen, siehe [26].

4. Im Falle von SIP konvex ist ein KKT-Punkt von SIP auch ein globaler Minimalpunkt von SIP.

Zuletzt wollen wir noch eine Umformulierung von SIP betrachten. Sei eine nicht-leere und kompakte Menge  $N$  von reellen Zahlen, die nicht notwendigerweise endlich sein muss, gegeben. Sind die Zahlen der Menge  $N$  alle kleiner gleich einer Zahl  $\gamma \in \mathbb{R}$ , so muss das Maximum aus allen Zahlen der Menge  $N$  auch kleiner als  $\gamma$  sein.

## 2. Grundlagen

Die Restriktionen

$$g(x, y) \leq 0 \quad \forall y \in Y$$

aus *SIP* lassen sich für alle  $x \in X$  damit umformen zu

$$\max_{y \in Y} g(x, y) \leq 0.$$

Die Entscheidungsvariable  $x$  ist hier Parameter, vergleiche Bemerkung 2.3.2. *SIP* ist dann äquivalent zu

$$SG : \min_{(x, y) \in X \times \mathbb{R}^m} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x, y^*) \leq 0 \quad \text{mit } y^* \text{ löst global } \max_{y \in Y} g(x, y), \quad (2.25)$$

siehe [52].

Das Optimierungsproblem aus (2.25) findet man in der Literatur auch als *Stackelberg-Spiel* bzw. *Bilevel-Optimierungsproblem*.

Im Folgenden werden wir das Optimierungsproblem

$$\max_{y \in Y} g(x, y)$$

als *Problem der unteren Stufe* und das reformulierte *SIP* aus (2.25) als Bilevel-Problem auffassen.

Ein Bilevel-Optimierungsproblem hat die allgemeine Darstellung<sup>8</sup>

$$BL : \min_{x \in \mathbb{R}^n} F(x, y) \quad \text{s.t.} \quad G(x, y) \leq 0, \\ y \text{ löst das Optimierungsproblem } Q(x),$$

mit dem Problem der unteren Stufe

$$Q(x) : \max_{y \in \mathbb{R}^m} u(x, y) \quad \text{u.d.N.} \quad v(x, y) \leq 0.$$

Die Funktionen  $F, u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  und  $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  werden als zweimal stetig differenzierbar bezüglich  $x$  und  $y$  vorausgesetzt.

$Q(x)$  ist ein parametrisches Optimierungsproblem mit Entscheidungsvariable  $y$  und Parameter  $x$ . Das beschreibt mathematisch den Einfluß des Problems der oberen Stufe auf das Problem der unteren Stufe.

Diese stufenweise hierarchische Betrachtung hat in der Praxis eine weitreichende Verbreitung. Erste Ansätze solcher Hierarchien als Bilevel-Probleme aufzufassen, finden sich nach [18] in der Spieltheorie und wurden von H. v. Stackelberg formuliert.

Eine erste Schwierigkeit in der allgemeinen Form ist der Umstand, dass der Ent-

---

<sup>8</sup>Diese Darstellung beinhaltet keine Gleichungsrestriktionen, analog zu  $P$  aus Kapitel 2.2 oder *SIP* vom Anfang des Kapitels.

scheider in der oberen Stufe nicht weiß, welches  $y$  der Entscheider der unteren Stufe aus der Menge der optimalen Punkte von  $Q(x)$

$$\Psi(x) = \arg \max_{y \in \mathbb{R}^m} \{u(x, y) \mid v(x, y) \leq 0\}$$

auswählt. Das sollen die Anführungsstriche bei „ $\min_{x \in \mathbb{R}^n}$ “ von  $BL$  verdeutlichen. Auch die eindeutige Lösbarkeit von  $Q(x)$  hängt eng damit zusammen. Ist  $Q(x)$  eindeutig lösbar, so hat  $\Psi(x)$  nur ein Element und der Entscheider der unteren Stufe keine Wahlmöglichkeit.

Dass die Uneindeutigkeit einer Lösung von  $Q(x)$  bei  $SG$  keine Rolle spielt, zeigt ein Vergleich von  $SG$  mit  $BL$ . Offensichtlich hängt die Zielfunktion  $f$  von  $SG$  nicht von der Entscheidungsvariable des Problems der unteren Stufe ab, wie das bei der Zielfunktion  $F$  von  $BL$  der Fall ist. Desweiteren gibt es die Restriktion  $G$  von  $BL$  nicht in  $SG$ , d.h. das Problem der oberen Stufe und das Problem der unteren Stufe sind nicht über eine Ungleichungsnebenbedingung in der oberen Stufe verknüpft. Die Restriktion  $g$  aus  $SG$  ist gleichzeitig die Zielfunktion des Problems der unteren Stufe.

Ein weniger offensichtlicher Unterschied zwischen  $SG$  und  $BL$  betrifft wieder die Funktion  $g$ . Die optimalen Punkte des Problems der unteren Stufe bezüglich eines  $x$  führen zu ein- und demselben Wert von  $g$ , da  $g$  auch die Zielfunktion der unteren Stufe ist.

Aus diesen Gründen kann die Variable  $y$  als Entscheidungsvariable in das Problem der oberen Stufe eingeführt und die Anführungsstriche weggelassen werden, da das Minimum in  $SG$  über  $x$  und  $y$  gebildet wird, und der Entscheider der unteren Stufe sich dadurch für ein  $y$  entscheidet<sup>9</sup>.

Es sei nochmal bemerkt, dass dafür das Problem der unteren Stufe

$$\max_{y \in Y} g(x, y)$$

nicht eindeutig lösbar zu sein braucht.

Bei dem Problem  $SG$  handelt es sich also um ein spezielles Bilevel-Optimierungsproblem.

Übersichtlichere und weitreichendere Einführungen in die Bilevel-Optimierung findet man in [18] und [2], Reformulierungen sowie Regularitäts- und Stabilitätsaussagen in [60]. Eine ausführlichere Darstellung von semi-infiniten Optimierungsproblemen als Bilevel-Probleme zeigt [53].

Kommen wir zurück zu  $SG$ . Das Problem der unteren Stufe sei definiert durch

$$Q(x) : \max_{y \in \mathbb{R}^m} g(x, y) \quad \text{u.d.N.} \quad y \in Y$$

<sup>9</sup>Oder der Entscheider der unteren Stufe entscheidet sich für mehrere  $y$ , die aber alle zu ein- und demselben Zielfunktionswert von  $f$  führen.

## 2. Grundlagen

mit der funktionalen Beschreibung von

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m \mid v(y) \leq 0\},$$

wobei  $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$  eine zweimal stetige Funktion ist.

Um eine Lösung des oberen Problems bestimmen zu können, benötigt man zuerst eine Lösung von  $Q(x)$  in Abhängigkeit des Parameters  $x$ . Folgende Vorgehensweise ist [53, Kapitel 5] entlehnt. Dabei muss  $Q(x)$  global gelöst werden, denn für lokale Lösungen kann

$$\max_{y \in Y} g(x, y) \leq 0 \tag{2.26}$$

nicht garantiert werden. Falls (2.26) nicht erfüllt ist, ist der Punkt  $(x, y)$  nicht zulässig für  $SG$  bzw.  $x$  ist nicht zulässig für  $SIP$ .

Eine ausführliche Diskussion über die *globale Optimierung* findet sich in [19]. Hier behelfen wir uns mit der Eigenschaft der Konvexität und den Folgen daraus. Die Sätze 2.2.22 Teil 2 und 2.2.23 liefern dann notwendige und hinreichende Bedingungen für einen globalen Minimalpunkt von  $Q(x)$ .

**Lemma 2.3.6.** *Sei  $Q(x)$  ein konvexes Problem und die Menge  $Y$  erfülle die Slaterbedingung  $SC$ . Der Punkt  $(y^*, \alpha^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q$  ist genau dann eine Lösung des Gleichungs- und Ungleichungssystems*

$$\begin{aligned} \nabla_y g(x, y) + \alpha^\top v(y) &= 0, \\ v(y) &\leq 0, \\ \alpha^\top v(y) &= 0, \\ \alpha &\geq 0, \end{aligned} \tag{2.27}$$

wenn  $y^*$  ein globaler Minimalpunkt von  $Q(x)$  ist.

**Beweis.** Sei  $(y^*, \alpha^*)$  eine Lösung des System (2.27). Das System (2.27) ist das KKT-System aus Definition 2.2.21 für das Problem  $Q(x)$ . Der Punkt  $y^*$  ist somit ein KKT-Punkt von  $Q(x)$  mit Multiplikator  $\alpha^*$ . Weiter ist  $y^*$  mit der Konvexität von  $Q(x)$  und Satz 2.2.23 ein globaler Minimalpunkt von  $Q(x)$ .

Sei  $y^*$  ein globaler Minimalpunkt von  $Q(x)$ . Mit Hilfe von Teil 2 Satz 2.2.22, wobei vorausgesetzt ist, dass  $Y$  als zulässige Menge von  $Q(x)$  die Slaterbedingung erfüllt, existiert ein Vektor  $\alpha^* \in \mathbb{R}^q$ , so dass  $y^*$  ein KKT-Punkt von  $Q(x)$  mit Multiplikator  $\alpha^*$  ist.  $(y^*, \alpha^*)$  erfüllt das Gleichungs- und Ungleichungssystems (2.27).

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Mit obigem Lemma kann  $SG$  äquivalent umformuliert werden zu

$$\begin{aligned}
 MPCC : \quad \min_{(x,y,\alpha) \in X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad & g(x, y) \leq 0, \\
 & \nabla_y g(x, y) + \alpha^\top v(y) = 0, \\
 & v(y) \leq 0, \\
 & \alpha^\top v(y) = 0, \\
 & \alpha \geq 0.
 \end{aligned}$$

Die Äquivalenz von  $SG$  und  $MPCC$  ist dabei so zu verstehen:

1. Eine Lösung  $(x^*, y^*)$  von  $SG$  kann mit einem zu (2.27) passendem  $\alpha^* \in \mathbb{R}^q$  zu einer Lösung von  $MPCC$  erweitert werden.
2. Ist  $(x^*, y^*, \alpha^*)$  eine Lösung von  $MPCC$ , dann ist  $(x^*, y^*)$  eine Lösung von  $SG$ .
3. Die Optimalwerte von  $SG$  und  $MPCC$  stimmen überein.

Für die Äquivalenz sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aus Lemma 2.3.6 wesentlich.

$MPCC$  ist ein nichtlineares Optimierungsproblem. Die letzten drei Restriktionen heißen Komplementaritätsbedingungen, engl. *Complementarity Constraints* (vergleiche Bemerkungen nach Definition 2.2.21). Obige Probleme nennt man Optimierungsprobleme mit Komplementaritätsbedingungen, engl. *Mathematical Programs with Complementarity Constraints*, kurz  $MPCC$ , oder in der neueren Literatur Optimierungsprobleme mit Gleichgewichtsbedingungen, engl. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, kurz  $MPEC$ . Interessierte Leser für solche Optimierungsprobleme verweisen wir auf [33] und [35].

Zuletzt sei hier nur noch bemerkt, dass Solver für nichtlineare Optimierungsprobleme Schwierigkeiten haben,  $MPCC$  zu lösen. Das liegt an den Komplementaritätsbedingungen, die dazu führen, dass die Regularitätsbedingung  $MFCQ$  an allen Punkten der zulässigen Menge verletzt ist, siehe [49].  $MFCQ$  wird bei vielen Standardsolver vorausgesetzt.

## 2.4. Parametrische Optimierung

Beschäftigen wir uns jetzt mit *parametrischen Optimierungsproblemen* und betrachten eine Familie von Optimierungsproblemen

$$P(t) : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(t, x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(t, x) \leq 0, \quad i \in I = \{1, \dots, p\},$$

mit Parameter  $t \in \mathbb{R}^m$  und stetig differenzierbaren Funktionen  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g_i : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$  bezüglich  $t$  und  $x$ .

Das Problem der unteren Stufe  $Q(x)$  auf S. 32 gehört in diese Problemklasse.

Zu  $P(t)$  definieren wir noch die zulässige Menge

$$M(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(t, x) \leq 0, \quad i \in I\},$$

## 2. Grundlagen

den Optimalwert

$$v(t) = \inf_{x \in M(t)} f(t, x)$$

und die Menge der optimalen Punkte

$$S(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(t, x) \leq v(t)\} = \arg \max_{x \in M(t)} f(t, x).$$

Im Folgenden wird mit  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  die Menge der erweiterten reellen Zahlen beschrieben. Wir werden  $\overline{\mathbb{R}}$  benutzen, um alle Fälle der Lösbarkeit von  $P(t)$  abzudecken. Ist etwa  $f$  für ein  $t \in \mathbb{R}^m$  nach unten nicht beschränkt, dann setzen wir  $v(t) = -\infty$ . Ist die zulässige Menge  $M(t)$  für ein  $t \in \mathbb{R}^m$  leer, so setzen wir  $v(t) = \infty$ .

$v(t)$  ist somit eine Funktion  $v : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , die jedem Parameter  $t$  einen reellen Wert oder  $-\infty, \infty$  zuordnet.  $M(t)$  und  $S(t)$  sind mengenwertige Abbildungen, die jedem Parameter  $t$  eine Menge aus dem  $\mathbb{R}^n$  zuordnen. Wir schreiben  $M : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  und  $S : \mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ .

Die Stabilität eines parametrischen Optimierungsproblems gibt Aussagen über die Abhängigkeit der Lösungen von  $P(t)$  vom Parameter  $t$ . Im besten Fall sollten die Lösungen stetig mit dem Parameter  $t$  variieren. Ziel ist es also, Bedingungen für die Stetigkeit der Funktion  $v$  und Bedingungen für die Stetigkeit der Abbildungen  $M$  und  $S$  anzugeben.

Um globale Stabilitätsaussagen treffen zu können, müssen einige Definitionen eingeführt werden. Sie stammen aus [10] und [54]. Analog zu Abschnitt 2.2 können alle Aussagen auch auf parametrische Maximierungsprobleme übertragen werden.

**Definition 2.4.1** (Limes inferior und Limes superior). *Sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und der Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Weiter sei  $B(\bar{x}, \delta)$  die abgeschlossene Kugel<sup>10</sup> mit Radius  $\delta$  um  $\bar{x}$ . Der Ausdruck*

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) := \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{x \in B(\bar{x}, \delta)} f(x)$$

heißt Limes inferior und der Ausdruck

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) := \lim_{\delta \searrow 0} \sup_{x \in B(\bar{x}, \delta)} f(x)$$

heißt Limes superior von  $f$  an  $\bar{x}$ .

**Definition 2.4.2** (Unter- und Oberhalbstetigkeit). *Sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  und der Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  gegeben.*

*Die Funktion  $f$  heißt an  $\bar{x}$  unterhalbstetig, falls*

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$$

<sup>10</sup> $B(\bar{x}, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\| \leq \delta\}$  mit beliebiger Norm aus dem  $\mathbb{R}^n$ .

gilt.

Die Funktion  $f$  heißt an  $\bar{x}$  oberhalbstetig, falls

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \leq f(\bar{x})$$

gilt.

$f$  heißt unterhalbstetig (oberhalbstetig), falls  $f$  in jedem Punkt des  $\mathbb{R}^n$  unterhalbstetig (oberhalbstetig) ist.

Offensichtlich gilt immer

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x}).$$

Somit ist  $f$  unterhalbstetig (oberhalbstetig), falls

$$\liminf_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \quad (\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}))$$

gilt.

$f$  ist genau dann stetig<sup>11</sup>, wenn  $f$  unter- und oberhalbstetig ist.

**Definition 2.4.3** (Lokale Beschränktheit). Sei die mengenwertige Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  und der Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  gegeben.  $F$  heißt an  $\bar{x}$  lokal beschränkt, falls eine Umgebung  $U(\bar{x})$  von  $\bar{x}$  und eine beschränkte Menge  $A \subset \mathbb{R}^m$  existieren, so dass  $F(x) \subset A$  für alle  $x \in U(\bar{x})$  gilt.

$F$  heißt lokal beschränkt, falls  $F$  in jedem Punkt des  $\mathbb{R}^n$  lokal beschränkt ist.

**Definition 2.4.4** (Abgeschlossenheit). Sei die mengenwertige Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  und der Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  gegeben.  $F$  heißt an  $\bar{x}$  abgeschlossen, falls für jede Folge  $x^\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \bar{x}$  und Punkte  $y^\nu \in F(x^\nu)$  mit  $y^\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \bar{y}$  auch  $\bar{y} \in F(\bar{x})$  gilt.

$F$  heißt abgeschlossen, falls  $F$  in jedem Punkt des  $\mathbb{R}^n$  abgeschlossen ist.

Die letzten beiden Definitionen dieses Abschnittes geben an, unter welchen Bedingungen eine mengenwertige Abbildung stetig genannt werden soll. Das klärt die Frage, was eine stetige Abhängigkeit der Abbildung  $M$  von  $t$  bedeutet.

**Definition 2.4.5** (Innerer Limes und Äußerer Limes). Sei eine Folge von Mengen  $(A^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  mit  $A^\nu \subset \mathbb{R}^n$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  gegeben.

Der Ausdruck

$$\liminf_{\nu \rightarrow \infty} A^\nu := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \left( \inf_{y \in A^\nu} \|y - x\| \right) = 0 \right\}$$

<sup>11</sup>  $f$  ist stetig an  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $f(\bar{x}) = -\infty$  ( $f(\bar{x}) = \infty$ ), falls für alle Folgen  $x^\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \bar{x}$   $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$  ( $\lim_{\nu \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) gilt.

## 2. Grundlagen

mit einer beliebigen Norm des  $\mathbb{R}^n$  heißt innerer Limes und der Ausdruck

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} A^\nu := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \left( \inf_{y \in A} \|y - x\| \right) = 0 \right\}$$

heißt äußerer Limes.

**Definition 2.4.6** (Inner- und Außerhalbstetigkeit sowie Stetigkeit). Sei die mengenwertige Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  und der Punkt  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  gegeben.

$F$  heißt an  $\bar{x}$  innerhalbstetig, falls

$$F(\bar{x}) \subset \bigcap_{x^\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \bar{x}} \liminf_{\nu \rightarrow \infty} F(x^\nu)$$

gilt.

$F$  heißt an  $\bar{x}$  äußerhalbstetig, falls

$$\bigcup_{x^\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \bar{x}} \limsup_{\nu \rightarrow \infty} F(x^\nu) \subset F(\bar{x})$$

gilt.

$F$  heißt an  $\bar{x}$  stetig, falls  $F$  an  $\bar{x}$  inner- und äußerhalbstetig ist.

$F$  heißt innerhalbstetig/äußerhalbstetig/stetig, falls  $F$  in jedem Punkt des  $\mathbb{R}^n$  innerhalbstetig/äußerhalbstetig/stetig ist.

Der nächste Satz gibt an, wann bei der Optimalwertfunktion  $v$ , inf durch min ersetzt werden kann.

**Satz 2.4.7.** Gegeben sei die Familie der Probleme  $P(t)$  mit  $t \in \mathbb{R}^m$ . Sei die Zielfunktion  $f$  stetig (bezüglich  $t$  und  $x$ ) und die mengenwertige Abbildung  $M$  der zulässigen Punkte lokal beschränkt und äußerhalbstetig. Weiter sei für die Abbildung  $M$  gegeben, dass für alle  $t \in \mathbb{R}^m$   $M(t)$  nichtleer ist.

Die Optimalwertfunktion  $v$  ist dann unterhalbstetig und es gilt für alle  $t \in \mathbb{R}^m$

$$v(t) = \min_{x \in M(t)} f(t, x). \quad (2.28)$$

**Beweis.** Siehe Satz 2.3.3 in [54]. □

Die Gleichung (2.28) bedeutet, dass  $P(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$  lösbar ist, d.h. es gilt  $S(t) \neq \emptyset$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$ . Insbesondere gilt für alle  $t \in \mathbb{R}^m$   $-\infty < v(t) < \infty$ .

**Bemerkung 2.4.8.** Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4.7 lassen sich folgende Aussagen für ein festes  $\bar{t} \in \mathbb{R}^m$  und zugehörigen  $P(\bar{t})$  treffen.

1. Die Stetigkeit der Zielfunktion  $f(\bar{t}, x)$  bezüglich  $x$  ist gegeben. Weiter ist vorausgesetzt, dass  $M(\bar{t})$  nichtleer ist.

2. Die lokale Beschränktheit für  $M$  liefert per Definition die Beschränktheit des Bildes  $M(\bar{t})$  von  $M$ .
3. Aus der Außerhalbstetigkeit von  $M$  folgt die Abgeschlossenheit von  $M$ , siehe Lemma 2.2.31 in [54], und damit die Abgeschlossenheit von  $M$  an dem Punkt  $\bar{t}$ . Setzt man in Definition 2.4.4 die konstante Folge  $t^\nu = \bar{t}$  für alle  $\nu \in \mathbb{N}$  ein, so erhält man die Abgeschlossenheit des Bildes  $M(\bar{t})$ .

$M(\bar{t})$  ist somit eine nichtleere und kompakte Menge und  $f(\bar{t}, x)$  eine stetige Funktion. Nach Satz von Weierstraß 2.2.11 ist  $P(\bar{t})$  lösbar.

Kommen wir nun zu Stetigkeitsaussagen für  $v$  und  $S$ .

**Satz 2.4.9.** Gegeben sei die Familie der Probleme  $P(t)$  mit  $t \in \mathbb{R}^m$ . Sei die Zielfunktion  $f$  stetig (bezüglich  $t$  und  $x$ ) und die mengenwertige Abbildung  $M$  der zulässigen Punkte lokal beschränkt und stetig. Weiter sei die Menge

$$\{(t, x) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid g_i(t, x) \leq 0, i \in I\} \quad (2.29)$$

nichtleer.<sup>12</sup>

Die Optimalwertfunktion  $v$  ist dann reellwertig und stetig.

**Beweis.** Siehe Korollar 2.3.5 in [54]. □

Die Reellwertigkeit von  $v$  bedeutet wieder die Lösbarkeit von  $P(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$ . Dass die Menge aus (2.29) nichtleer ist, bedeutet, dass es mindestens ein  $t \in \mathbb{R}^m$  mit  $M(t) \neq \emptyset$  gibt.

**Korollar 2.4.10.** Gegeben sei die Familie der Probleme  $P(t)$  mit  $t \in \mathbb{R}^m$ . Sei die Zielfunktion  $f$  stetig (bezüglich  $t$  und  $x$ ) und für die mengenwertige Abbildung  $M$  gilt  $M(t) \equiv N$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$  mit der Menge  $N \subset \mathbb{R}^n$  nichtleer und kompakt.

Die Optimalwertfunktion  $v$  ist dann reellwertig und stetig.

**Beweis.** Aus  $M(t) \equiv N$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$  mit  $N$  nichtleer und kompakt folgt unmittelbar die lokale Beschränktheit und die Stetigkeit der Abbildung  $M$  sowie die Existenz eines Punktes der Menge aus (2.29), vergleiche mit Bemerkung 2.4.8. Nach Anwendung des Satzes 2.4.9 folgt die Behauptung. □

**Satz 2.4.11.** Gegeben sei die Familie der Probleme  $P(t)$  mit  $t \in \mathbb{R}^m$ . Sei die Zielfunktion  $f$  stetig (bezüglich  $t$  und  $x$ ) und die mengenwertige Abbildung  $M$  der zulässigen Punkte lokal beschränkt und stetig. Weiter sei  $P(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$  eindeutig lösbar.

Die Optimalpunktabbildung  $S$  ist dann lokal beschränkt und stetig.

**Beweis.** Siehe Satz 2.3.13 in [54]. □

<sup>12</sup>(2.29) wird als Graph der Abbildung  $M$  bezeichnet, siehe in [54, Definition 2.2.9].

## 2. Grundlagen

In Satz 2.4.11 werden auch die Bedingungen von Satz 2.4.9 gefordert. Somit ist  $v$  wieder reellwertig und  $P(t)$  ist für alle  $t \in \mathbb{R}^m$  lösbar.

- Bemerkung 2.4.12.**
1. Die eindeutige Lösbarkeit der Probleme  $P(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$  erreicht man z.B. durch die Konvexität von  $P(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$  mit strikt konvexer Zielfunktion  $f$  bezüglich  $x$  für alle  $t \in \mathbb{R}^m$ , vergleiche Satz 2.2.12.
  2. Der Satz 2.4.9 liefert Bedingungen, wann die Probleme  $\inf_{t \in \mathbb{R}^m} v(t)$  und  $\inf_{t \in U} v(t)$  z.B. mit einer nichtleeren kompakten Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  lösbar sind. Aus den inf-Ausdrücken werden dann min-Ausdrücke.
  3. Aus Satz 2.4.11 folgt für ein festes  $t \in \mathbb{R}^m$  die Kompaktheit der nichtleeren Optimalpunktmenge  $S(t)$ , vergleiche Bemerkung 2.4.8.

Obige Aussagen sind Aussagen über globale Stabilität. Aussagen über lokale Stabilität und Aussagen, wie sensibel  $v$  und  $S$  auf eine (kleine) Änderungen des Parameters  $t$  reagieren, werden hier nicht ausgeführt, sondern auf die entsprechende Literatur [10] und [54] verwiesen.

## 2.5. Robuste Optimierung: der Robust-Counterpart

Betrachten wir ein gewöhnliches Optimierungsproblem

$$P : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i \in I = \{1, \dots, p\}$$

mit Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$ .

In der Praxis tritt neben dem eigentlichen Optimierungsproblem oft noch eine weitere Schwierigkeit auf. Die Eingabedaten des Optimierungsproblems sind unsicher. Das geschieht zum einen schon bei der Modellierung von  $P$  durch Messfehler in den Eingabedaten und zum anderen beim numerischen Lösen von  $P$ , da man dort davon ausgehen muss, dass numerische Rundungsfehler entstehen, man somit nur eine Approximation der eigentlichen Lösung erhält. Man löst demnach ein in den Eingabedaten von  $P$  leicht gestörtes Problem.

Die Eingabedaten für das Problem  $P$  sind die Funktionen  $f, g_i, i \in I$ . Die Einführung eines Parameters zu den Funktionen ist eine Möglichkeit dort, Störungen zu modellieren. Wir betrachten also Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, i \in I$ , mit einem Parameter  $u \in \mathbb{R}^m$ . Dies führt zu parametrischen Optimierungsproblemen

$$P(u) : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(u, x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I,$$

vergleiche Abschnitt 2.4.

Einen Einstieg in die robuste Optimierung mit dem Robust-Counterpart geben [4] und [53].

## 2.5. Robuste Optimierung: der Robust-Counterpart

Man kann nun Methoden der parametrischen Optimierung benutzen, um Lösungen von  $P(u)$  in Abhängigkeit von  $u \in \mathbb{R}^m$  zu berechnen oder lokale bzw. globale Stabilitäts- und Sensitivitätsaussagen für Lösungen zu treffen. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht möglich, Lösungen für alle Ausprägungen des Parameters zu bestimmen oder zu charakterisieren, selbst wenn die Lösungen stetig vom Parameter abhängen.

Eine Möglichkeit der Vereinfachung ist die Einführung einer Unsicherheitsmenge  $U \subset \mathbb{R}^m$  für  $u$ . Dies soll die Anzahl der Ausprägungen des Parameters einschränken und ist in der Praxis oft möglich. Die Unsicherheitsmenge sollte dabei einige wünschenswerte Eigenschaften erfüllen, z.B. dass  $U$  nichtleer und kompakt ist und durch hinreichend glatte Funktionen beschrieben wird.

Eine in den letzten Jahren verstärkt auftretende Methode, das Problem anzugehen, ist die *Robuste Optimierung*. Dort wird ein *Worst-Case-Szenario* für  $P(u)$  angenommen. Das kann in zwei Schritten durchgeführt werden.

Zuerst betrachten wir die Zielfunktion und einen Worst-Case-Fall des Parameters dort und halten ein  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  in  $f(u, \bar{x})$  fest. Da wir  $f$  bezüglich  $x$  minimieren wollen, müssen wir im Worst-Case-Fall das Supremum von  $f(u, \bar{x})$  bezüglich  $u \in U$  in Betracht ziehen, also

$$\sup_{u \in U} f(u, \bar{x}). \quad (2.30)$$

Führen wir das für alle zulässigen Punkte von  $P(u)$  durch, dann erhalten wir

$$\bar{P}(u) : \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{u \in U} f(u, x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I.$$

Unter welchen Bedingungen das Supremum bei  $\bar{P}$  durch ein Maximum ersetzt werden kann, wird wieder in Abschnitt 2.4 und der dort angegebenen Literatur aufgeführt. Zu beachten ist dabei, dass in (2.30)  $x$  der Parameter und  $u$  die Entscheidungsvariable ist. Im Folgenden schreiben wir  $\max$ .

Bleibt noch die Unsicherheit in den Nebenbedingungen. Ein Worst-Case-Verhalten sieht dort so aus, dass die zulässigen Punkte  $x$  die Ungleichungen

$$g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I,$$

nicht nur für bestimmte Parameterausprägungen erfüllen, sondern für alle Parameterausprägungen aus  $U$

$$g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I, \quad \forall u \in U.$$

Diese Art von Restriktion ist eine charakteristische Restriktion in semi-infiniten Optimierungsproblemen, vergleiche Abschnitt 2.3.

**Definition 2.5.1** (Robust-Counterpart). *Das Problem*

$$RC : \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{u \in U} f(u, x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I, \quad \forall u \in U,$$

## 2. Grundlagen

mit einer Unsicherheitsmenge  $U \subset \mathbb{R}^m$  heißt Robust-Counterpart von  $P(u)$ .

Wenn wir eine Epigraphumformulierung für  $RC$  durchführen und uns an die Umformulierung nach Bemerkung 2.3.5 erinnern, dann ist  $RC$  äquivalent zu

$$\begin{aligned} \overline{RC} : \quad \min_{(x,z) \in \mathbb{R}^{n+1}} z \quad \text{u.d.N.} \quad & f(u, x) - z \leq 0, \forall u \in U, \\ & g_i(u, x) \leq 0, i \in I, \forall u \in U. \end{aligned}$$

Führt man eine Epigraphumformulierung bei  $P(u)$  durch, so wandert die parametrische Zielfunktion in die Nebenbedingungen, und ein Worst-Case-Verhalten braucht nur bei der zulässigen Menge angewendet zu werden, um den Robust-Counterpart zu erhalten. Dies führt ebenfalls zu  $\overline{RC}$ . In der Literatur findet man aus diesem Grund auch die Definition des Robust-Counterparts ausgehend von Optimierungsproblemen mit linearer Zielfunktion ohne Parameter und beliebiger parametrischer zulässiger Menge, siehe [4].

Bei der Wahl der Unsicherheitsmenge  $U$  sind zunächst sämtliche Teilmengen des  $\mathbb{R}^m$  denkbar. Es sollte allerdings darauf geachtet werden, übliche Eigenschaften für zulässige Mengen eines gewöhnlichen Optimierungsproblems zu fordern, z.B. sollte  $U$  keine disjunktive Form besitzen<sup>13</sup>. Die Menge  $U$  in (2.31) stellt eine zulässige Menge dar. Des Weiteren sollte die Unsicherheitsmenge die Dimension  $m$  haben. Eine Dimension kleiner als  $m$  kann dahingehend interpretiert werden, dass eine oder mehrere Komponenten des Parameters nicht unsicher sind. Aus Sicht der Optimierung sollte  $U$  nichtleer, kompakt und wenn möglich konvex sein. Eine ausführlichere Diskussion der Wahl von  $U$  findet sich in [5] und im Hinblick auf die Portfolio-Optimierung in [40].

Eine erste Wahl von  $U$  sind Boxen des  $\mathbb{R}^m$ . Die Unsicherheitsmenge  $U$  ist in dieser Form nichtleer, kompakt und konvex, und jede Komponente des Parameters  $u$  ist als unsicher anzusehen.

Eine zweite übliche Wahl als Unsicherheitsmenge ist ein Ellipsoid im  $\mathbb{R}^m$  bzw. der Schnitt endlicher vieler Ellipsoide im  $\mathbb{R}^m$ . Wir werden im Folgenden einen Ellipsoiden betrachten und die Eignung als Unsicherheitsmenge kurz diskutieren, vergleiche [40].

Fassen wir den Vektor  $u$  als eine längere Reihe von Messdaten mit Häufigkeitsverteilung oder als Vektor von Zufallsvariablen  $u = (u_1, \dots, u_m)^\top$  mit einer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung auf. Im Folgenden werden Vektoren von Zufallsvariablen auch als Zufallsvariablen bezeichnet. Zu  $u$  finden sich in der multivariaten Statistik Lageparameter  $LP = (lp_1, \dots, lp_m)^\top \in \mathbb{R}^m$ , z.B. der Modus oder der Erwartungswert, und Streuungsparameter  $SP \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mit  $SP = (sp_{ij})$ , z.B. die Modendispersion oder die Kovarianz. Bei Zufallsvariablen entsprechen die Lage und die Streuung den ersten beiden Momenten der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Mit den beiden Parametern  $LP$  und  $SP$  lässt sich ein Ellipsoid für  $u$  in folgender

<sup>13</sup>Disjunktive zulässige Mengen sind Bestandteil eines Spezialgebiets der Optimierung, der *Disjunktiven Optimierung*, siehe [1]. Solche Probleme treten naturgemäß in der *Diskreten Optimierung* auf.

Form erzeugen

$$U := \{\tilde{u} \in \mathbb{R}^m \mid (\tilde{u} - LP)^\top SP^{-1}(\tilde{u} - LP) \leq 1\}. \quad (2.31)$$

Der Lageparameter entspricht dem Mittelpunkt und der Streuungsparameter der Form des Ellipsoids  $U$ . Der Ellipsoid verfügt über die Informationen aus diesen beiden Parametern und es ist sehr wahrscheinlich, dass  $U$  somit alle angegebenen Messdaten bzw. die Zufallsvariablen mit größter Wahrscheinlichkeit unter allen Ellipsoiden mit gleichem Volumen beinhaltet. Für den Streuungsparameter muss dabei vorausgesetzt werden, dass er als Matrix invertierbar ist. Das könnte z.B. durch die Symmetrie und die positive Definitheit der Matrix sichergestellt werden, siehe Bemerkung 2.1.2. Die positive Definitheit würde auch dazu führen, dass  $U$  die volle Dimension  $m$  besitzt.

Zusätzlich kann man zeigen, dass für alle  $i = 1, \dots, m$

$$lp_i - \sqrt{s_{ii}} \leq \tilde{u}_i \leq lp_i + \sqrt{s_{ii}}$$

gilt, siehe [40, S. 55,56]. Der Abstand der einzelnen Komponenten von  $\tilde{u}$  von der zugehörigen Komponente des Lageparameters  $LP$  ist höchstens die Wurzel des zugehörigen Diagonaleintrags der Matrix  $SP$ . Die Elemente von  $U$  sind also nur angemessen weit von der Lage des Parameters  $u$  gestreut.

Die Unsicherheitsmenge  $U$  als Ellipsoid mit symmetrischer, positiv definiten Formmatrix ist nichtleer, kompakt und konvex.

Kommen wir nochmal darauf zurück, wie wahrscheinlich es ist, dass  $u$  in  $U$  liegt. Nehmen wir an,  $u$  ist eine Zufallsvariablen, setzen wir in (2.31)  $LP = E(u)$  und  $SP = Cov(u)$  und ersetzen die rechte Seite in (2.31) durch das Quadrat eines  $\delta \in \mathbb{R}$

$$U = \{\tilde{u} \in \mathbb{R}^m \mid (\tilde{u} - E(u))^\top (Cov(u))^{-1} (\tilde{u} - E(u)) \leq \delta^2\}. \quad (2.32)$$

Obiger Ellipsoid ist eine um den Faktor  $\delta$  skalierte Version des Ellipsoids (2.31), d.h. die Länge der Hauptachsen wird mit  $\delta$  multipliziert.

Die Wahrscheinlichkeit, dass  $u$  nicht in  $U$  liegt, kann mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung abgeschätzt werden durch die Ungleichung

$$\mathbb{P}(u \notin U) \leq \frac{m}{\delta^2},$$

siehe [40, Formel (2.90)]. Mit  $\delta$  kann also gesteuert werden, wie wahrscheinlich es ist, dass  $u \in U$  gilt.

Ist  $u$  multivariat-normalverteilt, dann kann  $\delta^2$  als  $p$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $m$  Freiheitsgraden und dem Konfidenzlevel  $p \in (0, 1)$  gewählt werden<sup>14</sup> und es gilt

$$\mathbb{P}(u \in U) = p.$$

<sup>14</sup> $\chi^2$ -Verteilung siehe [40, Abschnitt 1.3.6].

## 2. Grundlagen

Ist man sehr risikofreudig bezüglich des Schätzrisikos für  $u$ , setzt man  $p$  nahe bei null. Das führt zu einem kleinem Ellipsoiden  $U$  und somit zu einer kleinen zulässigen Menge in (2.30). Das kann aber dazu führen, dass  $u \notin U$  ist. Wählt man hingegen  $p$  nahe bei eins, d.h. man verhält sich risikoavers gegenüber dem Schätzrisiko, so führt das auf eine relativ große zulässige Menge in (2.30) mit einer hohen Wahrscheinlichkeit, dass  $u \in U$  gilt, siehe [40, S. 451,452].

$U$  ist also das Ellipsoid unter allen Ellipsoiden mit gleichem Volumen, das den Parameter  $u$  am wahrscheinlichsten enthält.

Unsicherheitsmengen der Form (2.32) mit  $\delta^2$  als  $p$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $m$  Freiheitsgraden nennt man auch Konfidenzellipsoide.

Eine letzte Bemerkung gilt den elliptischen (multivariaten) Wahrscheinlichkeitsverteilungen<sup>15</sup>, z.B. (der multivariaten) Normalverteilung. Diese sind dadurch gekennzeichnet, dass die Höhenlinien der zugehörigen Dichtefunktionen Ellipsoide sind. Viele Situationen in der Portfolio-Optimierung führen auf elliptische Verteilungen und Konfidenzellipsoide in der robusten Optimierung können als Höhenlinien dieser elliptische Verteilungen betrachtet werden.

### 2.6. Chance-Constraints

Kommen wir nun zurück auf parametrische Optimierungsprobleme

$$P(u) : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(u, x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I,$$

mit dem Parameter  $u \in U$  und der Unsicherheitsmenge  $U \subset \mathbb{R}^m$ , vergleiche Abschnitte 2.4 und 2.5.

Im vorherigen Kapitel 2.5 wurde ein Worst-Case-Ansatz für  $P(u)$  gewählt, was zu dem Robust-Counterpart  $RC$  führt, siehe Definition 2.5.1. Ist  $U$  nicht endlich, dann wird die zulässige Menge

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I, \quad \forall u \in U\}$$

durch unendlich viele Restriktionen beschrieben. Wählt man endlich viele Elemente  $u^1, \dots, u^N$  aus  $U$  mit  $N \geq 1$ , dann ist die Menge

$$\widehat{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(u^j, x) \leq 0, \quad i \in I, \quad j = 1, \dots, N\}$$

eine Relaxierung von  $M$ , d.h.  $M \subset \widehat{M}$ . Das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{u \in U} f(u, x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in \widehat{M} \tag{2.33}$$

ist ein gewöhnliches Optimierungsproblem mit endlich vielen Restriktionen und liefert eine Unterschranke an den optimalen Zielfunktionswert von  $RC$ . Der optimale

<sup>15</sup>Elliptische Wahrscheinlichkeitsverteilung siehe [40, Abschnitt 2.7.1].

Punkt ist aber unter Umständen nicht zulässig für  $RC$ . Die Beschränkung auf endlich viele Nebenbedingungen ist der Ansatz bei Diskretisierungsmethoden in der semi-infiniten Optimierung, siehe [26] und [57]. Die Wahl der Punkte  $u_1, \dots, u_N$  aus  $U$  ist dabei entscheidend, um Aussagen über die Zulässigkeit bezüglich  $RC$  des optimalen Punktes treffen zu können, vergleiche Satz 2.3.3.

Fasst man  $u$  als Zufallsvariable auf und versieht man  $U$  mit einer  $\sigma$ -Algebra  $D$  und einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_u : D \rightarrow [0, 1]$ <sup>16</sup>, dann ist eine Möglichkeit, die Zulässigkeit eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^n$  bezüglich  $RC$  zu messen, durch den Ausdruck

$$\mathbb{P}_u[x \in M]$$

gegeben. Ist  $\mathbb{P}_u[x \in M] = 1$  für ein  $x \in \mathbb{R}^n$ , so gilt  $x \in M$  f.s. und  $x$  ist ein zulässiger Punkt von  $RC$ . Ist die Ungleichung

$$\mathbb{P}_u[x \in M] \geq 1 - \varepsilon,$$

für ein  $\varepsilon \in (0, 1)$  erfüllt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $x \in M$  gilt, größer als  $1 - \varepsilon$ .

Ersetzt man in  $RC$  die Zulässigkeitsbedingung  $x \in M$  durch  $\mathbb{P}_u[x \in M] \geq 1 - \varepsilon$  mit  $\varepsilon \in (0, 1)$ , so führt das zu einem Optimierungsproblem mit einer sogenannten *Chance-Constraint*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{u \in U} f(u, x) \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbb{P}_u[x \in M] \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.34)$$

Solche Probleme gehören zur *Stochastischen Optimierung*, siehe [44] und [45]. Ein Nachteil dieser Betrachtung ist, dass nur unter speziellen Wahrscheinlichkeitsmaßen die zulässige Menge in (2.34) konvex ist. Ist  $\mathbb{P}_u$  z.B. durch eine logkonkave Dichte erzeugt und ist  $M$  eine konvexe Menge, dann ist die zulässige Menge in (2.34) konvex, siehe [45, Theorem 2.3]. Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit logkonkaver Dichte sind z.B. die (multivariate) Gleichverteilung und die (multivariate) Normalverteilung. Konvexe Approximationen für die zulässige Menge von (2.34) finden sich z.B. in [42].

Betrachten wir nochmal das Problem (2.33). Sind die  $u^1, \dots, u^N$  eine unabhängige, identisch verteilte Zufallsstichprobe bezüglich  $\mathbb{P}_u$ , so kann die Lösung von (2.34) durch die Lösung von (2.33) approximiert werden. Ein Algorithmus zur Approximation einer Lösung des Problems in (2.34) basierend auf einer Zufallsstichprobe soll im nächsten Unterkapitel erläutert werden. Er ist den Arbeiten [14] und [15] entnommen.

---

<sup>16</sup>Siehe Definitionen 1.7 und 3.2 in [38].

## 2. Grundlagen

### Ein Sampling-and-Discarding-Ansatz für Chance-Constraints

Ausgangspunkt ist ein in der zulässigen Menge gestörtes konvexes Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion

$$CC : \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{u.d.N.} \quad \mathbb{P}_u[x \in X_u] \geq 1 - \varepsilon, \quad x \in X$$

mit  $c \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

$(U, D, \mathbb{P}_u)$  sei dabei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnisraum  $U$ ,  $\sigma$ -Algebra  $D$  und Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_u$ .

$X_u$  ist eine Mengen aus dem  $\mathbb{R}^n$  und ist durch  $u \in U$  parametrisiert. Die Menge  $X_u$  soll für alle  $u \in U$  nichtleer, kompakt und konvex sein.

In der nichtleeren, abgeschlossenen und konvexen Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  werden Restriktionen gesammelt, die nicht unsicher sind. Falls solche Restriktionen nicht vorkommen, dann kann  $X = \mathbb{R}^n$  gesetzt werden.

Die lineare Zielfunktion kann durch eine konvexe Zielfunktion ersetzt werden, da durch eine Epigraph-Umformulierung wieder die Standardform  $CC$  erreicht werden kann.

**Bemerkung 2.6.1.** 1.  $\varepsilon = 1$  entspricht dem konvexen Problem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X$$

und  $\varepsilon = 0$  entspricht dem konvexen semi-infiniten Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X_u \text{ f.s.}, \quad \forall u \in U, \quad x \in X.$$

Wir betrachten hier nur  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

2. Das Problem

$$P(u) : \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(u, x) \quad \text{u.d.N.} \quad g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I,$$

mit einem  $u \in U$  kann mit Hilfe des Epigraphen umgeformt werden zu

$$P^{\text{epi}}(u) : \min_{x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}} z \quad \text{u.d.N.} \quad f(u, x) \leq z, \quad g_i(u, x) \leq 0, \quad i \in I.$$

Mit  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $X_u = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(u, x) \leq z, g_i(u, x) \leq 0, i \in I\}$  und dem Ansatz, die Unsicherheit mittels einer Chance-Constraint zu behandeln, kann  $P^{\text{epi}}(u)$  in die Form  $CC$  gebracht werden.

Zu  $CC$  kann nun ein sogenanntes *Sample-Based-Optimierungsproblem* angegeben werden. Dazu benötigt man eine zufällige Stichprobe  $u_1, \dots, u_N$  des unsicheren Parameters  $u$ , deren Realisationen unabhängig voneinander bezüglich des Wahrschein-

lichkeitsmaes  $\mathbb{P}_u$  verteilt sind

$$SB_N : \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X_{u_j}, j = 1, \dots, N, x \in X.$$

Satz 2.6.4 zeigt den Zusammenhang zwischen  $CC$  und  $SB_N$ . Dafur werden die folgende Annahme und die folgende Definition benötigt.

**Annahme 2.6.2.** *Das Optimierungsproblem*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X_u, \forall u \in A, x \in X$$

sei fur jede beliebige Teilmenge  $A$  von  $U$  lösbar.

**Definition 2.6.3** ( $\varepsilon$ -robust-zulässiger Punkt). *Sei  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt  $\varepsilon$ -robust-zulässig, falls*

$$\mathbb{P}_u[x \notin X_u] \leq \varepsilon$$

*gilt.*

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein  $\varepsilon$ -robust-zulässiger Punkt nicht in  $X_u$  liegt, ist kleiner als  $\varepsilon$ . Fur einen  $\varepsilon$ -robust-zulässigen Punkt gilt somit

$$\mathbb{P}_u[x \in X_u] \geq 1 - \varepsilon \quad \text{sowie} \quad x \in X.$$

Er ist zulässig fur das Problem  $CC$ .

**Satz 2.6.4.** *Seien  $\varepsilon \in (0, 1), \beta \in [0, 1]$  und*

$$N \geq \frac{n}{\varepsilon\beta} - 1, \tag{2.35}$$

*dann ist der optimale Punkt  $x_N^*$  von  $SB_N$  mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \beta$   $\varepsilon$ -robust-zulässig.*

**Beweis.** Siehe Korollar 1 in [14]. □

Ausgehend von einem Parameter  $\varepsilon$  und einem Parameter  $\beta$  lässt sich somit eine Mindestanzahl  $N \geq 1$  an benötigten Realisationen  $u_1, \dots, u_N$  angeben, so dass der globale Minimalpunkt  $x_N^*$  von  $SB_N$   $\varepsilon$ -robust-zulässig ist,  $x_N^*$  also zulässig fur  $CC$  ist.

Der Beweis des Satzes 2.6.4 basiert hauptsächlich auf der Ungleichung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_u^N} (\mathbb{P}_u[x_N^* \notin X_u]) \leq \frac{n}{N+1}, \tag{2.36}$$

wobei  $\mathbb{P}_u^N = \underbrace{\mathbb{P}_u \times \dots \times \mathbb{P}_u}_{N\text{-mal}}$  das Wahrscheinlichkeitsmaß im Raum  $U \times \dots \times U$  fur die unabhängig identisch verteilte Stichprobe  $u_1, \dots, u_N$  ist. Grundlage der Ungleichung

## 2. Grundlagen

(2.36) ist die Aussage, dass für den optimalen Punkt  $x_N^*$  höchstens  $n$ -viele sogenannte *Support Constraints* existieren, siehe [14, Definition 4].

- Bemerkung 2.6.5.** 1. Die Ungleichung (2.35) hängt nur von  $n, N, \varepsilon$  und  $\beta$  ab, und das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_u$  ist nicht explizit beinhaltet.  $\mathbb{P}_u$  muss somit nicht bekannt sein, solange Stichproben  $u_1, \dots, u_N$  mit benötigter Länge  $N$  zur Verfügung stehen. Das ist z.B. dann der Fall, wenn die Stichprobe durch eine Mess- oder Beobachtungsreihe entsteht, die durch weitere Messungen oder Beobachtungen vergrößert werden kann.
2. Die Lösung von  $SB_N$  ist weniger konservativ als bei einer robusten Modellierung des unsicheren Parameters, da bei  $SB_N$  nicht alle Parameterausprägungen betrachtet werden und es erlaubt ist, nicht betrachtete Restriktionen in einem bestimmten Maße zu verletzen. Mit  $\varepsilon$  und  $\beta$  kann ein Trade-Off zwischen Zulässigkeit des Punktes  $x_N^*$  für das zugrundeliegende parametrische Optimierungsproblem und dessen Performance erreicht werden.
3. In [14] werden noch Erweiterungen von Satz 2.6.4 für den Fall angegeben, dass die Annahme 2.6.2 nicht erfüllt ist, d.h. es gibt Stichproben  $u_1, \dots, u_N$ , so dass  $SB_N$  nicht lösbar ist.

In [15] wird noch eine mögliche Verbesserung für die Approximation des optimalen Wertes vorgestellt. Diese Verbesserung basiert darauf, dass aus der ermittelten Stichprobe  $u_1, \dots, u_N$   $k$  Realisationen entfernt werden können, ohne die Eigenschaft der  $\varepsilon$ -Robustheit-Zulässigkeit von  $x_N^*$  zu verlieren. Berechnet man einen neuen Optimalpunkt bezüglich der reduzierten Stichprobe, so wird der optimale Zielfunktionswert nicht größer. Es ist sogar anzunehmen, dass er sich verbessert. Ein illustratives Beispiel findet sich in [15, Anhang A.1].

Seien die Mengen

$$K = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid u_k \text{ wird aus der Stichprobe } u_1, \dots, u_N \text{ entfernt}\}$$

und  $J = \{1, \dots, N\} \setminus K$  und das Optimierungsproblem

$$SB_{N;k} : \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X_{u_j}, j \in J, x \in X.$$

definiert.

Weiter sei die folgende Annahme erfüllt:

**Annahme 2.6.6.** Die Lösung  $x_{N;k}^*$  von  $SB_{N;k}$  verletzt die aus  $\{1, \dots, N\}$  entfernten Restriktionen fast sicher<sup>17</sup>.

Die Aussage aus Satz 2.6.4 kann damit erweitert werden zu

---

<sup>17</sup>Der Ausdruck *fast sicher* ist von technischer Natur, siehe dazu [15, nach Annahme 2.2].

**Satz 2.6.7.** Seien  $\varepsilon \in (0, 1)$  und  $\beta \in [0, 1]$ . Weiter seien ein  $N$  und ein  $k$  so gegeben, dass die Ungleichung

$$\binom{k+n-1}{k} \sum_{i=0}^{k+n-1} \binom{N}{i} \varepsilon^i (1-\varepsilon)^{N-i} \leq \beta \quad (2.37)$$

erfüllt ist. Dann ist der optimale Punkt  $x_{N;k}^*$  von  $SB_{N;k}$  mit Wahrscheinlichkeit  $1-\beta$   $\varepsilon$ -robust-zulässig.

**Beweis.** Siehe Theorem 2.1 in [15]. □

Die Ungleichung (2.37) kann nun benutzt werden, um geeignete  $N, \varepsilon, \beta$  und  $k$  festzulegen, um  $SB_{N;k}$  zu lösen. Dabei kann wie folgt vorgegangen werden:

- Bemerkung 2.6.8.**
1. Setze  $N \geq 1$  so groß, dass der Rechenaufwand beim Lösen von  $SB_N$  bzw.  $SB_{N;k}$  vom zugrunde gelegten Rechner noch bewältigt werden kann.
  2. Wähle  $\varepsilon \in (0, 1)$  nach der Risikopräferenz, z.B.  $\varepsilon = 0.01$  oder  $\varepsilon = 0.01$ .
  3. Wähle  $\beta \in [0, 1]$  so klein, dass es vernachlässigt werden kann, z.B.  $\beta = 10^{-6}$ .
  4. Berechne das größte  $k$  mittels der Ungleichung (2.37) bzw. mittels der Ungleichung

$$k \leq \varepsilon N - n + 1 - \sqrt{2\varepsilon N \ln \left( \frac{(\varepsilon N)^{n-1}}{\beta} \right)}, \quad (2.38)$$

die in [15, Kapitel 4.3] unter der Bedingung  $\varepsilon N \geq k + n - 1$  hergeleitet wird.

Welche Realisationen aus der gegebenen Stichprobe entfernt werden, kann auf unterschiedliche Weise geschehen, hat aber auf die Aussage in Satz 2.6.7 keinen Einfluss, solange die Annahme 2.6.6 gilt.

Möchte man mehrmals  $k$  Realisationen aus  $\{1, \dots, N\}$  entfernen, so kann Satz 2.6.7 wiederholt angewendet werden. Wendet man die Formel (2.37)  $M$ -mal an mit  $k_1, \dots, k_M, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$  und  $\beta_1, \dots, \beta_M$ , so gilt nach [15, Kapitel 3]

$$\mathbb{P}_u^N [\mathbb{P}_u[x_{N,k_i}^* \notin X_u] \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, M] \geq 1 - \sum_{i=1}^M \beta_i.$$

Je mehr Realisationen man entfernt, umso größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ursprüngliche Restriktion verletzt ist, aber der optimale Zielfunktionswert wird dabei in der Regel verbessert.

Der hier vorgestellte *Sampling-and-Discarding* Ansatz wird im Kapitel 4.2 benutzt, um ein Optimierungsproblem mit einer Chance-Constraint zu lösen.



## 3. Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

Das Portfolio-Management ist eine Disziplin der Finanzwirtschaft und versucht Verhalten an Finanzmärkten zu erklären. Die Hauptaufgabe besteht darin, Handlungsalternativen anzubieten, wie ein in der Regel fest vorgegebenes Kapital in ein Portfolio von Finanzprodukten investiert werden soll. Typisch für Finanzprodukte sind dabei z.B. Produkte aus Geldmärkten, Kreditmärkten oder Anleihemärkten. Denkbar sind aber auch materielle Güter wie Immobilien oder Konsumgüter.

In dieser Arbeit wird ein Finanzmarkt zugrunde gelegt. Dafür seien  $n$  risikobehaftete Aktien gegeben. Die Renditen dieser  $n$  Aktien in der Folgeperiode sind Zufallszahlen und seien im Vektor  $R \in \mathbb{R}^n$  gesammelt. Häufig wird in der Praxis die Annahme getroffen, dass  $R$  als Vektor von Zufallszahlen einer multivariaten Normalverteilung folgt. Diese Annahme hat aber keine Allgemeingültigkeit erlangt, da sie empirisch nicht nachgewiesen werden konnte. Bei Finanzmärkten werden oft starke Schwankungen an den Enden der Wahrscheinlichkeitsverteilung, genauer der Wahrscheinlichkeitsdichte, beobachtet, was mit Hilfe von Normalverteilungen nicht modelliert werden kann. Hier an dieser Stelle seien vorerst nur die Annahmen gestellt, dass  $R$  einer elliptischen Verteilung folgt und von der Verteilung die ersten beiden Momente existieren, aber nicht notwendigerweise bekannt sein müssen.

### 3.1. Mean-Varianz-Portfolio-Optimierung

Eine Antwort, wie ein Vermögen in die  $n$  Aktien investiert werden soll, gibt die *Portfolio-Theorie nach Markowitz*, was in der Literatur auch als klassische Portfolio-Theorie bezeichnet wird. Die Theorie wurde zuerst 1952 von H. M. Markowitz in dem Paper [36] vorgestellt und fand in der Folgezeit bis heute große Anwendung. Eine Erweiterung findet man in [37].

In der Portfolio-Theorie nach Markowitz betrachtet man die erwartete Rendite der Aktien

$$E(R) \in \mathbb{R}^n,$$

sowie die Standardabweichung der Aktien und die Korrelation der Aktien untereinander. Letztere werden als Risiko der Aktien bezeichnet und zusammen in der Kovarianzmatrix

$$\text{Cov}(R) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

dargestellt. Die erwartete Rendite und das Risiko der Aktien werden im Folgenden

### 3. Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

mit  $\mu$  und  $\Sigma$  bezeichnet. Ausgehend davon, dass die Rendite des Portfolios

$$x^\top R$$

maximiert werden soll, betrachtet man nun die erwartete Rendite des Portfolios

$$E(x^\top R) = x^\top E(R) = x^\top \mu,$$

sowie dessen Risiko ausgedrückt in der Varianz des Portfolios

$$\sqrt{\text{Cov}(x^\top R)} = \sqrt{x^\top \text{Cov}(R)x} = \sqrt{x^\top \Sigma x}.$$

Der Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet die Gewichtung der einzelnen Aktien im Portfolio. Es soll bei Aufsummieren der Komponenten das vorgegebene Kapital, was auf 1 gesetzt wird, ergeben

$$\sum_{i=1}^n x_i = x^\top e = 1.$$

Hier an dieser Stelle sind Bedingungen der Form  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ , noch nicht vorausgesetzt. Der Vektor  $e \in \mathbb{R}^n$  ist der Vektor, bei dem alle Komponenten auf 1 gesetzt sind. Die Gewichte  $x_i$  sind dann als relative Anteile der Aktien am Portfolio zu verstehen.

Der Term  $\sqrt{x^\top \Sigma x}$  ist wohldefiniert, da Kovarianzmatrizen als positiv semidefinit vorausgesetzt sind, siehe Definition 2.1.1.

Markowitz schlug nun vor, nicht nur die Maximierung der Rendite des Portfolios vorzunehmen, sondern die Maximierung der erwarteten Portfoliorendite gleichzeitig mit der Minimierung des Portfoliorisikos anzustreben. Das daraus resultierende Optimierungsproblem ist ein Mehrzieloptimierungsproblem mit zwei konkurrierenden Zielen. Sofern das Problem lösbar ist, wird eine Lösung  $x^*$  dieses Problems als effizient bezeichnet.

**Definition 3.1.1** (Effizientes Portfolio). *Ein Portfolio  $x^* \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^{*\top} e = 1$  heißt effizient, falls für kein Portfolio  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x^\top e = 1$  eine der Ungleichungen*

$$x^{*\top} \mu \leq x^\top \mu \quad \text{und} \quad \sqrt{x^{*\top} \Sigma x^*} \geq \sqrt{x^\top \Sigma x}$$

*strikt erfüllt ist.*

Alle effizienten Lösungen bilden den sogenannten *effizienten Rand*

$$\left\{ \left( x^{*\top} \mu, x^{*\top} \Sigma x^* \right) \mid x^* \text{ ist effizient} \right\},$$

sie dominieren alle anderen Portfolios bezüglich Portfoliorendite und -risiko. Man beachte, dass der effiziente Rand als Portfoliorisiko  $x^\top \Sigma x$  und nicht  $\sqrt{x^\top \Sigma x}$  enthält.

Der obige Effizienzbegriff ist aus der Mehrzieloptimierung entlehnt. Die Schwierigkeit besteht darin, eine Ordnung z.B. auf  $\mathbb{R}^m$  mit  $m > 1$  zu definieren, um

### 3.1. Mean-Varianz-Portfolio-Optimierung

minimale bzw. maximale Elemente von Mengen aus dem  $\mathbb{R}^m$  zu bestimmen. Dazu werden Ordnungskegel eingeführt, z.B. der positive Orthant des  $\mathbb{R}^m$

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^m := \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \geq 0\}$$

für eine Menge aus dem  $\mathbb{R}^m$ . Mit Hilfe von Ordnungskegeln können aber nicht alle Elemente des Grundraumes, z.B. des  $\mathbb{R}^m$ , geordnet werden. Näheres findet man in [27].

Der Umstand, dass mehrere Ziele verfolgt werden, macht ein Lösen schwierig. Abhilfe schafft ein sogenannter Trade-Off zwischen Portfoliorendite und Portfoliorisiko. Dieser soll durch einen Parameter  $\lambda \in [0, 1]$  beschrieben werden.

Das *klassische Portfolio-Optimierungsproblem* hat damit die Gestalt

$$MV_\lambda : \min_{x \in \mathbb{R}^n} (1 - \lambda)\sqrt{x^\top \Sigma x} - \lambda x^\top \mu \quad \text{u.d.N.} \quad x^\top e = 1.$$

Die Bezeichnung  $MV$  kommt aus dem Englischen und steht für *mean-variance*. Die zulässige Menge sei mit  $X$  bezeichnet.  $MV_\lambda$  gehört zur Klasse der parametrischen Optimierungsprobleme, siehe Kapitel 2.4. Wir kommen später nochmal darauf zurück. Löst man  $MV_\lambda$  für alle  $\lambda$  in  $[0, 1]$ , so erhält man den effizienten Rand, siehe Abbildung 1.

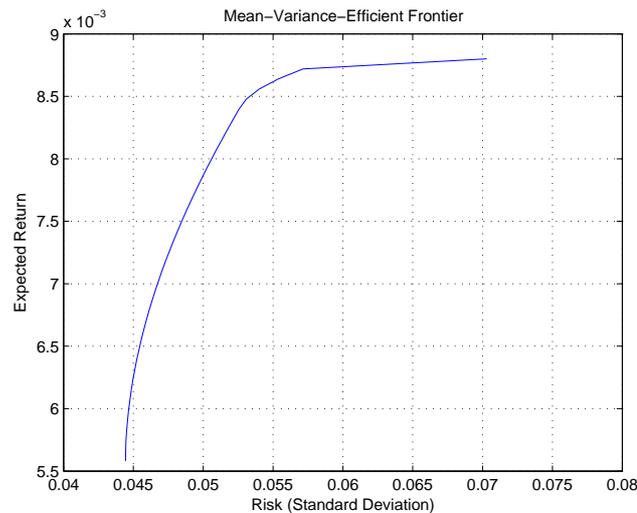
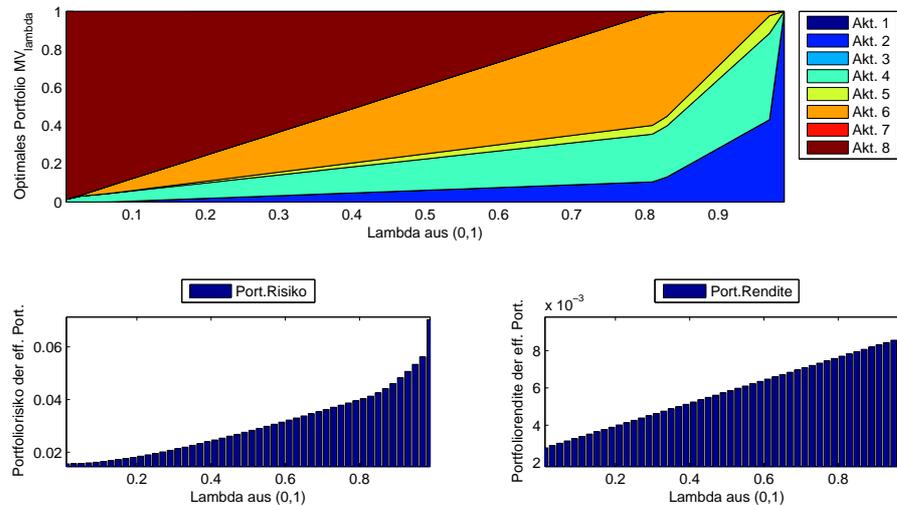


Abbildung 1.: Effizienter Rand

Der Trade-Off-Parameter bedeutet im Sinne der Mehrzieloptimierung eine gewichtete Skalarisierung der vektorwertigen Zielfunktion mit dem Vektor  $(1 - \lambda, \lambda)^\top \in \mathbb{R}^2$ . In Abbildung 2 ist links der Verlauf der Gewichte der optimalen Portfolios für 8 Aktien und für steigende Wahlen von  $\lambda \in [0, 1]$  dargestellt. Auf der rechten Seite sieht man den Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von  $MV_\lambda$ . Der optimale Ziel-

### 3. Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

funktionswert kann bei  $MV_\lambda$  negativ sein.



**Abbildung 2.:** Links oben: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von  $MV_\lambda$  – Links unten: Verlauf der Portfoliorisiken – Rechts unten: Verlauf der Portfoliorenditen

Setzt man  $\lambda = 0$  in  $MV_\lambda$ , so spricht man bei der zugehörigen Lösung vom *Minimum-Varianz-Portfolio*. Setzt man  $\lambda = 1$ , so spricht man bei der zugehörigen Lösung vom *Maximum-Return-Portfolio*. Beide Spezialfälle haben eine gesonderte Bedeutung für die effizienten Portfolios, da sie die Enden des effizienten Randes darstellen. Zum Lösen von  $MV_0$  bzw.  $MV_1$  wird nur der Parameter  $\Sigma$  bzw. der Parameter  $\mu$  benötigt und nicht beide.

**Bemerkung 3.1.2.** Eine weitere Möglichkeit, die vektorwertige Ausgangsformulierung der Zielfunktion (mit zwei Zielen) zu umgehen, ist die Angabe von Anspruchsniveaus für Ziele, die aus der Zielfunktion entfernt und mittels der Anspruchsniveaus in die Nebenbedingungen aufgenommen werden.

1. Sei  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}$  ein Anspruchsniveau für die Portfoliorendite, d.h. das optimale Portfolio soll mindestens den Renditewert  $\bar{\mu}$  erreichen. Dann ist

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sqrt{x^\top \Sigma x} \quad \text{u.d.N.} \quad x^\top \mu \geq \bar{\mu}, \quad x^\top e = 1. \quad (3.1)$$

eine Umformulierung des ursprünglichen Mehrzieloptimierungsproblems mittels Anspruchsniveaus.

2. Sei  $\bar{\Sigma} \in \mathbb{R}$  ein Anspruchsniveau für das Portfoliorisiko, d.h. das optimale Portfolio soll maximal als Risiko den Wert  $\bar{\Sigma}$  erreichen. Dann ist

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} -x^\top \mu \quad \text{u.d.N.} \quad \sqrt{x^\top \Sigma x} \leq \bar{\Sigma}, \quad x^\top e = 1 \quad (3.2)$$

### 3.1. Mean-Varianz-Portfolio-Optimierung

eine Umformulierung des ursprünglichen Mehrzieloptimierungsproblems mittels Anspruchsniveaus.

In Abbildung 2 unten sind Zielfunktionswerte von (3.1) und (3.2) eingezeichnet.

Wieder vorausgesetzt, dass die Probleme lösbar sind, kann durch verschiedene Wahlen des Anspruchsniveaus  $\bar{\mu}$  und des Anspruchsniveaus  $\bar{\Sigma}$  jeweils der effiziente Rand berechnet werden. Das führt dazu, dass die Problemformulierungen aus 1. und 2. sowie  $MV_\lambda$  äquivalent sind und die gleichen optimalen Portfolios liefern. Der Trade-Off-Parameter sowie die Anspruchsniveaus lassen sich ineinander überführen, siehe [17].

Bis jetzt sind wir davon ausgegangen, dass die Probleme lösbar sind. Nun untersuchen wir das genauer. Aus Kapitel 2.2 wissen wir, dass unter den Voraussetzungen des Satzes von Weierstraß, Satz 2.2.11, ein Optimierungsproblem lösbar ist. Weiter gibt Satz 2.2.12 an, unter welchen Bedingungen die Menge der optimalen Punkte  $S$  höchstens ein Element besitzt. Folglich ist der optimale Punkt eindeutig unter der Voraussetzung, dass das Optimierungsproblem lösbar ist.

Folgende Bemerkung zeigt einige Eigenschaften der Probleme (3.1),(3.2) sowie  $MV_\lambda$  auf.

**Bemerkung 3.1.3.** 1. Das Portfoliorisiko  $\sqrt{x^\top \Sigma x}$  ist mit  $\Sigma \succeq 0$ , wie oben bereits erwähnt, wohldefiniert und damit eine stetige Funktion in  $x$ . Mittels der Umformung (siehe Bemerkung 2.1.2 3.)

$$\sqrt{x^\top \Sigma x} = \|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2$$

wird in [50, Proposition 4.31] bewiesen, dass das Portfoliorisiko  $\sqrt{x^\top \Sigma x}$  strikt konvex bezüglich  $x$  aus  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top e = 1\}$  ist. Dazu muss zusätzlich gefordert werden, dass die Matrix  $\Sigma$  positiv definit ist. Da die  $n$  Aktien risikobehaftet sein sollen, ist es nicht problematisch dieses zu fordern.

Die Portfoliorendite  $x^\top \mu$  ist eine stetige Funktion in  $x$ . Sie ist linear bezüglich  $x$  und somit konvex. Die Eigenschaften bleiben erhalten, wenn man  $x^\top \mu$  mit  $-1$  multipliziert.

Die Zielfunktionen aus (3.1),(3.2) sind damit stetig und konvex. Die mit  $(1 - \lambda, \lambda)^\top$  gewichtete Summe der beiden Funktionen  $\sqrt{x^\top \Sigma x}$  und  $-x^\top \mu$  ist stetig und strikt konvex für alle  $\lambda \in [0, 1)$ .

2. Die zulässigen Mengen der Probleme haben die Bedingung  $e^\top x = 1$  gemein. Die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top e = 1\}$$

ist mit  $x_1 = 1, x_i = 0, i = 2, \dots, n$ , nichtleer und abgeschlossen. Sie ist aber nicht beschränkt und somit nicht kompakt.

Die Mengen

$$X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top \mu \geq \bar{\mu}, x^\top e = 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top e = 1\}$$

### 3. Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

$$X_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x^\top \Sigma x} \leq \bar{\Sigma}, x^\top e = 1\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top e = 1\}$$

mit  $\bar{\mu} \in \mathbb{R}$  und  $\bar{\Sigma} \in \mathbb{R}$  sind die zulässigen Mengen von (3.1) und (3.2). Sie sind konvex und abgeschlossen, aber im Allgemeinen nicht beschränkt. Sie können auch leer sein.

Damit der Satz von Weierstraß angewendet werden kann, fordern wir also, dass die zulässige Menge  $X$  von  $MV_\lambda$  eine nichtleere kompakte Teilmenge von

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top e = 1\}$$

ist. Dann ist  $MV_\lambda$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$  lösbar und bei geeigneter Wahl der Anspruchsniveaus auch die Probleme (3.1) und (3.2).

Ein Beispiel für eine nichtleere kompakte und konvexe Teilmenge ist z.B. der Standardsimplex des  $\mathbb{R}^n$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top e = 1, x \geq 0\},$$

siehe S.10 nach Bemerkung 2.1.11.

Die Bedingung  $x \geq 0$  kann dahingehend interpretiert werden, dass sogenannte Leerverkäufe nicht möglich sind. Ist  $x_i < 0$ , so wird die Aktie  $i$  (leer) verkauft, d.h. der Anleger veräußert die Aktie  $i$ , obwohl die Aktie zum Verkaufszeitpunkt nicht im Bestand seines Portfolios ist. Erst zu einem späteren Zeitpunkt, dem Erfüllungszeitpunkt, muss der Anleger die Aktie vorrätig haben, um den Verkauf zu rechtfertigen. Eine Aktie kann damit kurzfristig zur Vergrößerung des Kapitals dienen, um eine größere Menge einer anderen Aktie in das Portfolio aufzunehmen. Das kann zu unerwünschten Lösungen von  $MV_\lambda$  führen, z.B. kann die Lösung nur aus zwei Aktie bestehen, wobei eine leer verkauft wird.

3. Das optimale Portfolio von  $MV_\lambda$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  ist eindeutig, da  $X$  nichtleer und kompakt und die Zielfunktion von  $MV_\lambda$

$$(1 - \lambda)\sqrt{x^\top \Sigma x} - \lambda x^\top \mu$$

für alle  $\lambda \in [0, 1)$  strikt konvex ist. Die Probleme (3.1) und (3.2) sind für geeignete Wahlen der Anspruchsniveaus eindeutig lösbar.

Für  $\lambda = 1$  reduziert sich die Zielfunktion von  $MV_\lambda$  zu der konvexen, aber nicht strikt konvexen Funktion  $-x^\top \mu$ . Das führt dazu, dass z.B.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} -x^\top \mu \quad \text{u.d.N.} \quad x^\top e = 1, x \geq 0$$

lösbar, aber nicht eindeutig lösbar ist, siehe [50, Remark 4.33].

Im Folgenden möchten wir voraussetzen, dass das Portfolio-Optimierungsproblem in der Form von  $MV_\lambda$  für alle betrachteten  $\lambda$  eindeutig lösbar ist. Dazu erweitern wir das klassische Portfolio-Optimierungsproblem um die Restriktion  $x \geq 0$  und fordern, dass die Matrix  $\Sigma$  positiv definit ist und  $\lambda$  aus dem offenen Intervall  $(0, 1)$  gewählt

### 3.2. Parameterschätzung im Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem

wird. Das Minimum-Varianz-Portfolio und das Maximum-Return-Portfolio werden hier nicht weiter betrachtet.

**Definition 3.1.4** (Mean-Variance-Portfolio-Optimierungsproblem). *Es sei ein Finanzmarkt mit  $n$  risikobehafteten Aktien gegeben. Der Renditevektor  $R$  der  $n$  Aktien sei ein Zufallsvektor und folge einer multivariaten elliptischen Wahrscheinlichkeitsverteilung mit erstem Moment  $\mu \in \mathbb{R}^n$  und zweitem Moment  $\Sigma \in \mathbb{S}_+^n$ .  $\mu$  ist der Vektor der erwarteten Renditen der  $n$  Aktien, und die Kovarianzen sind in der positiv definiten Matrix  $\Sigma$  gegeben. Weiter sei  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top e = 1, x \geq 0\}$ .*

Dann bezeichnen wir das Optimierungsproblem

$$MV_\lambda : \min_{x \in \mathbb{R}^n} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top \Sigma x} - \lambda x^\top \mu \quad \text{u.d.N.} \quad x^\top e = 1, x \geq 0, \quad (3.3)$$

als Mean-Variance-Portfolio-Optimierungsproblem.

**Korollar 3.1.5.** *Das Mean-Variance-Portfolio-Optimierungsproblem aus Definition 3.1.4 ist für alle  $\lambda$  aus  $(0, 1)$  eindeutig lösbar.*

Wir haben bereits bemerkt, dass  $MV_\lambda$  bezüglich  $\lambda$  ein parametrisches Optimierungsproblem ist. Betrachten wir  $MV_\lambda$  als Familie von Optimierungsproblemen mit dem Parameter  $\lambda \in (0, 1)$ , so sind die Bedingungen des Korollars 2.4.10 und des Satzes 2.4.11 aus Abschnitt 2.4 erfüllt. Die Optimalwertfunktion  $v(\lambda)$  ist somit reellwertig und stetig, und die Optimalpunktabbildung  $S(\lambda)$  ist lokal beschränkt und stetig.

Zuletzt soll noch erwähnt werden, dass die Portfolio-Theorie nach Markowitz ein Ein-Perioden-Modell ist. Es werden dort keine dynamischen Verläufe in der Zeit betrachtet. Dementsprechend ist es auch nicht vorgesehen, Änderungen an den Gewichten  $x_i$  nach deren Wahl vorzunehmen. Ein Beispiel mehrperiodiger Betrachtung von Investmentstrategien liefert das *Black-Scholes-Modell*, siehe [8].

## 3.2. Parameterschätzung im Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem

Im Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem  $MV_\lambda$  werden als Inputdaten der Vektor der erwarteten Renditen  $\mu \in \mathbb{R}^n$  und die Kovarianzmatrix  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  benötigt. Im Allgemeinen liegen diese Daten für den betrachteten Finanzmarkt nicht vor, da für den Markt die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht bekannt ist. Oft kann man die Verteilung nur auf eine spezielle Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen einschränken, z.B. die Klasse der elliptischen symmetrischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Das reicht aber nicht, um  $MV_\lambda$  zu lösen,  $\mu$  und  $\Sigma$  müssen somit geschätzt werden.

Markowitz diskutiert in seinem Ansatz nur wenig die Wahl von  $\mu$  und  $\Sigma$ , sondern beschäftigt sich hauptsächlich mit der Lösung des Mean-Varianz-Portfolio-Optimie-

### 3. Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

rungsproblems. Als Schätzer für  $\mu$  und  $\Sigma$  benutzt er historische Daten, merkt aber bereits an, dass diese Daten mit Experteninformationen verknüpft werden sollten.

In [6] und [31] wird nachgewiesen, dass das optimale Portfolio von  $MV_\lambda$  entscheidend von den Schätzern für  $\mu$  und  $\Sigma$  abhängt. Insbesondere gilt das für den Vektor der erwarteten Renditen  $\mu$ . Die Wahl von  $\mu$ , aber auch von  $\Sigma$ , ist neben dem Lösen von  $MV_\lambda$  genauso entscheidend.

Dazu ein kleines Beispiel, angelehnt an [50].

**Beispiel 3.2.1.** Gegeben sei ein Finanzmarkt mit zwei Aktien mit

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.051 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir  $MV_{0.9999}$ , d.h. die Varianz der Portfoliorenditen kann vernachlässigt werden. Die offensichtliche Lösung von  $MV_{0.9999}$  ist  $x^1 = (0, 1)^\top$ . Das ganze Kapital wird in Aktie 2 investiert, da es die größere erwartete Rendite verspricht. Für

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.049 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

ist das optimale Portfolio von  $MV_{0.9999}$   $x^2 = (1, 0)^\top$ .  $x^1$  und  $x^2$  sind vollkommen voneinander verschiedene optimale Portfolios. Die Verschiebung in den Portfoliogewichten wurde nur durch die kleine Änderungen bei  $\mu$  verursacht, die durch das Prognoserisiko beim Schätzen von  $\mu$  erklärt werden kann. Das Portfoliorisiko hat hier keinen Effekt.

Mittels der Robusten Optimierung können die Auswirkungen auf das optimale Portfolio, die im obigen Beispiel veranschaulicht sind, abgeschwächt werden.

In der Arbeit werden nur einige Schätzer angesprochen. Einen tieferen Einblick geben [24, Kapitel 2] für  $\mu$  und [50, Kapitel 4.3] für  $\mu$  und  $\Sigma$  sowie die Literaturverzeichnisse darin.

Eine Art von Schätzern sind Schätzer, die nur auf historischen Daten basieren. Zu nennen sind da der *Sample-Schätzer* und der *Maximum-Likelihood-Schätzer*. Sei eine Menge von Stichproben  $R_i$  mit  $i = 1, \dots, N$  des Renditevektors aus früheren Perioden bekannt. Die  $R_i$  seien dabei unabhängig und identisch verteilt mit einer gemeinsamen elliptischen symmetrischen Verteilung. Nach [43] ist der Sample-Schätzer für  $\mu$  und  $\Sigma$

$$\begin{aligned} \mu^S &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i \\ \Sigma^S &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (R_i - \mu^S)(R_i - \mu^S)^\top \end{aligned}$$

### 3.2. Parameterschätzung im Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblem

und der Maximum-Likelihood-Schätzer für  $\mu$  und  $\Sigma$

$$\begin{aligned}\mu^{MLS} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i, \\ \Sigma^{MLS} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_i - \mu^S)(R_i - \mu^S)^\top.\end{aligned}$$

$\mu^S$  und  $\mu^{MLS}$  sind erwartungstreue Schätzer für  $\mu$ , d.h. es gilt

$$E(\mu^S) = E(\mu^{MLS}) = \mu,$$

siehe [50]. Erwartungstreue eines Schätzers ist in der Schätztheorie ein Qualitätsmerkmal. Für die Schätzer  $\Sigma^S$  und  $\Sigma^{MLS}$  kann die Erwartungstreue nicht ohne weitere Voraussetzungen gezeigt werden.

Ein Vorteil der beiden Schätzer ist die leichte Implementierung der Formeln, sowie die wenig aufwändige Berechnung. Nachteilig ist der Bedarf einer großen Menge von Daten, um aussagekräftige Schätzer zu bekommen. Im Fall von  $n$  Aktien benötigt man  $n + \frac{n(n+1)}{2}$  Daten. Ein weiterer wesentlicher Nachteil kann anhand folgendem Beispiel gesehen werden. Nehmen wir an, dass der zugrundeliegende Finanzmarkt in den letzten Perioden anhaltend sinkende Renditen aufwies. In der Finanzwirtschaft nennt man solche Märkte Baisse- oder Bärenmärkte. Befindet man sich nun am Ende dieser Entwicklung, d.h. es werden in Zukunft wieder steigende Renditen zu erwarten sein, so wird der Sample-Schätzer bzw. der Maximum-Likelihood-Schätzer nur die sinkenden Renditen aus den Vorperioden in Betracht ziehen und keine Steigerungen prognostizieren können, selbst wenn man die steigenden Renditen z.B. durch Experteninformationen vorausgesagt bekommt. Das führt zu nicht nachvollziehbaren optimalen Portfolios.

Eine weitere Klasse von Schätzern sind solche, die Experteninformationen mit einarbeiten. Zu nennen wären da z.B. der *Bayes-* und der *Black-Litterman-Schätzer*.

Bei Bayes-Schätzern werden Apriori-Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Finanzmarkt mittels beobachteter Daten zu einer Posteriori-Verteilung aktualisiert. Die Apriori-Informationen stammen von Experten und die beobachteten Daten können als Marktinformationen interpretiert werden. Beide Informationen werden mittels dem bekannten Theorem von Bayes aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, siehe [40, S. 46], zu einem Schätzer verarbeitet. Ergebnis ist eine gewichtete Summe beider Informationsquellen, siehe [30].

Ein Nachteil hier ist die Beschaffung der Apriori-Information, genauer der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die dem Finanzmarkt zugrunde liegen soll. Die Wahl kann sehr subjektiv vonstatten gehen. Hat man allerdings diese Information zur Hand, so können nun Posteriori-Aussagen über  $\mu$  und  $\Sigma$  getroffen werden.

Black-Litterman-Schätzer wurden ursprünglich für den Vektor der Renditen  $\mu$  entwickelt, vergleiche [9]. Die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  wird als bekannt vorausgesetzt

### 3. Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

oder mit wenig Berechnungsaufwand über historische Daten geschätzt, siehe die Schätzer  $\Sigma^S$  und  $\Sigma^{MLS}$ .

Zuerst wird eine Voraussage bezüglich  $\mu$  getroffen. Die Voraussage wird in [9] aus dem Gleichgewichtsportfolio des Finanzmarktes abgeleitet. Dann werden einige (oder alle) Komponenten von  $\mu$  durch absolute oder relative Expertenmeinungen gestört. Das ist auch die Herausforderung hier, genaue Aussagen über die Renditen zutreffen. Die Genauigkeit der Aussagen, also das Prognoserisiko, kann auch verarbeitet werden und sollte somit bei den Überlegungen berücksichtigt werden. Schlussendlich erhält man ähnlich zum Bayes-Schätzer wieder eine gewichtete Summe aus Markt- und Experteninformationen.

Der Unterschied zum Bayes-Schätzer liegt darin, dass beim Black-Litterman-Schätzern von Marktinformationen ausgegangen wird. Bei Bayes-Schätzer startet man von Expertenmeinungen.

Eine letzte Form von Schätzern für die Komponenten  $\mu_i, i = 1, \dots, n$ , von  $\mu$  sind Schätzer, die aus den Marktwerten  $V_i$  der Unternehmungen  $i$  Renditen ableiten<sup>18</sup>. Grundlage sind das *Discount Dividend Model* und eine Erweiterung, das *Residual Income Model*.  $V_i$  ergibt sich aus dem Buchwert des Unternehmens  $i$  und den diskontierten Barwerten zukünftiger Zahlungsströme zwischen Anlegern und Unternehmen, z.B. periodisch ausgezahlte Dividenden.

Die erwartete Rendite ist nun die vom Anleger verlangte Verzinsung der erwarteten Dividenden, um den Marktwert  $V_i$  zu erhalten, siehe [24]. Sie ist hier implizit über eine Gleichung  $V_i = f(\mu_i), i = 1, \dots, n$ , gegeben. Eine genaue Formulierung einer solchen Gleichung findet sich in [16]. Die Komponenten  $\mu_i$  müssen zunächst über die Gleichung bestimmt werden, bevor sie in  $MV_\lambda$  eingesetzt werden können. Dabei sollte betrachtet werden, dass die Lösung nicht eindeutig sein muss. Unerwünschte Lösungen wie  $\mu < 0$  sollten von vornherein ausgeschlossen werden.

Für die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  ist eine analoge Vorgehensweise nicht möglich.

Alle vorgestellten Schätzer haben ihre Stärken und Schwächen. Die Bayes- und Black-Litterman-Schätzer sind dabei robuster als die Schätzer, die nur auf historischen Datenreihen basieren, insbesondere wenn  $\mu$  geschätzt werden soll. Kombinationen aus verschiedenen Schätzern können das Prognoserisiko weiter verringern, vergleiche [24].

In dieser Arbeit wird ein weiterer Ansatz betrachtet, um das Prognoserisiko für  $\mu$  und  $\Sigma$  zu verkleinern. Dazu wird ein Robust-Counterpart von  $MV_\lambda$  im Sinne von Definition 2.5.1 gebildet. Das ist Inhalt des nächsten Kapitels.

---

<sup>18</sup>Im Sinne von Aktien kann hier vom Marktpreis der Aktie  $i$  gesprochen werden.

## 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

Wir betrachten in diesem Kapitel wieder das Mean-Variance-Portfolio-Optimierungsproblem aus Kapitel 3 mit unbekanntem Parameter  $\mu$  und  $\Sigma$  und  $\lambda \in (0, 1)$

$$MV_\lambda : \min_{x \in X} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top \Sigma x} - \lambda x^\top \mu. \quad (4.1)$$

Wie in Kapitel 3.2 kurz erläutert, können die beiden Parameter  $\mu$  und  $\Sigma$  auf unterschiedliche Art und Weise geschätzt und diese Schätzer dann zur eigentlichen Portfolio-Optimierung benutzt werden. Das kann zu unterschiedlichen Ergebnissen der optimalen Portfolios  $x^*$  und damit der Portfoliorendite und des Portfoliorisikos führen.

Hier soll ein anderer Ansatz weiter verfolgt werden, indem zu  $MV_\lambda$  der Robust-Counterpart  $RC_\lambda$  gebildet wird und ausgehend davon optimale Portfolios bestimmt werden. Das entspricht, wie in Kapitel 2.5 beschrieben, einer *Worst-Case-Analyse* bezüglich der beiden Parameter. Wir „robustifizieren“ uns also gegenüber „allen“ möglichen Ausprägungen von  $\mu$  und  $\Sigma$ . Das ähnelt mehr dem Verständnis eines risikoscheuen Anlegers, während es risikofreudigeren Investoren zu konservativ erscheinen mag. Dieser Ansatz wurde schon 1999 in [4] aufgegriffen.

Zum Aufstellen des RobustCounterparts ist es erforderlich, eine Unsicherheitsmenge  $U_\delta$  anzugeben. Hier wird der Ansatz einer ellipsoiden Unsicherheitsmenge der Größe  $\delta^2 \in \mathbb{R}$  mit Mittelpunkt  $m$  und Formmatrix  $S$  gewählt, siehe Kapitel 2.5.

Wünschenswerter wäre es noch,  $U_\delta$  als ein Konfidenzellipsoid zu betrachten. Dafür seien  $\mu$  und  $\text{vec}(\Sigma)$  Zufallsvariablen, die elliptischen Verteilungen folgen. Dann ist der Vektor  $u^{org} = \begin{pmatrix} \mu \\ \text{vec}(\Sigma) \end{pmatrix}$  auch eine Zufallsvariable. Das erste Moment von  $u^{org}$  sei mit  $m = E(u^{org}) \in \mathbb{R}^{n+n^2}$  bezeichnet und das zweite Moment mit  $S = \text{Cov}(u^{org}) \in \mathbb{S}^{n+n^2}$ . Die Matrix  $S$  kann aber nicht als positiv definit vorausgesetzt werden, da  $\Sigma$  eine symmetrische Matrix ist und dadurch  $\frac{n(n-1)}{2}$  Komponenten in  $\text{vec}(\Sigma)$  gleich sind. Das führt zu identischen Zeilen in  $S = \text{Cov}(u^{org})$ , und  $S$  kann nicht positiv definit sein.

Die Abbildung  $\text{vecsym}$ , siehe Definition 2.1.6, schafft Abhilfe, da es die doppelten Einträge in  $\Sigma$  nur einmal in den Vektor  $\text{vecsym}(\Sigma)$  aufnimmt. Die Matrix

$$S = \text{Cov}(u^{org}) = \text{Cov} \left( \begin{pmatrix} \mu \\ \text{vecsym}(\Sigma) \end{pmatrix} \right)$$

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

kann damit als symmetrisch und positiv definit der Dimension  $\bar{n} = n + \frac{n(n+1)}{2}$  angenommen werden, d.h.  $S \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}$ .

Im Allgemeinen liegen nicht die ersten beiden Momente von  $u^{org}$  vor, so dass man sich mit Schätzern für  $u^{org}$  behilft.  $E(u^{org})$  und  $\text{Cov}(u^{org})$  können dann umgangen werden, und der Mittelpunkt  $m$  und die Formmatrix  $S$  des Ellipsoids  $U_\delta$  können als Erwartung und Kovarianz des Punktschätzers betrachtet werden. Dafür können z.B. die Schätzer aus Abschnitt 3.2 herangezogen werden.

Vorausgesetzt sei also eine Zufallsvariable  $u = \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \text{vecsym}(\hat{\Sigma}) \end{pmatrix}$  mit bekanntem erstem Moment  $m = E(u)$  und bekanntem zweitem Moment  $\text{Cov}(u)$ , wobei  $\hat{\mu}$  ein Schätzer für  $\mu$  und  $\hat{\Sigma}$  ein Schätzer für  $\Sigma$  ist. Weiter seien ein Vektor  $r \in \mathbb{R}^n$  und eine Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben. Zu  $C$  wird ein Vektor  $c \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  mit  $c = \text{vecsym}(C)$  definiert. Der Vektor  $u = \begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  kombiniert dann  $r$  und  $c$  zu einem Vektor. Analoges soll für den Vektor  $m^r \in \mathbb{R}^n$  und die Matrix  $M^C \in \mathbb{S}_+^n$  gelten, d.h.  $m^c = \text{vecsym}(M^C)$  und  $m = \begin{pmatrix} m^r \\ m^c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$ . Weiter seien noch die beiden Matrizen  $S^r \in \mathbb{S}_+^n$  und  $S^c \in \mathbb{S}_+^{\frac{n(n+1)}{2}}$  gegeben, die zur Matrix

$$S = \begin{pmatrix} S^r & 0 \\ 0 & S^c \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}} \quad (4.2)$$

zusammengefasst werden sollen.

Der daraus resultierende Robust-Counterpart mit Ellipsoid  $U_\delta$  des Portfolio-Optimierungsproblems  $MV_\lambda$  hat mit obigen Bezeichnungen folgende Gestalt

$$RC_\lambda : \min_{x \in X} \max_{(r,c) \in U_\delta} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r,$$

wobei

$$U_\delta = \{u \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \mid (u - m)^\top S^{-1} (u - m) \leq \delta^2, u = \begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}, \text{vecsym}^{-1}(c) = C \in \mathbb{S}_+^n\} \quad (4.3)$$

mit  $\delta^2 > 0$  als ein  $p$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $\bar{n}$  Freiheitsgraden und  $p \in (0, 1)$

Da  $S$  als positiv definite Kovarianzmatrix vorausgesetzt ist, existiert  $S^{-1}$ .

**Bemerkung 4.0.2.** Es gilt per Definition  $S \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}$  und somit auch  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}$  sowie  $S^r, (S^r)^{-1} \in \mathbb{S}_+^n$  und  $S^c, (S^c)^{-1} \in \mathbb{S}_+^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Weiter gilt

$$m = E(u) \quad \text{sowie} \quad S = \text{Cov}(u) = E(uu^\top) - mm^\top$$

und damit

$$m^r = E(\mu) \quad \text{und} \quad m^c = E(\text{vecsym}(\Sigma)) \quad (4.4)$$

bzw.

$$S^r = E(\mu\mu^\top) - m^r(m^r)^\top \quad \text{und} \quad S^c = E(\text{vecsym}(\Sigma)\text{vecsym}(\Sigma)^\top) - m^c(m^c)^\top. \quad (4.5)$$

Die Struktur der Matrix  $S$  aus Formel (4.2) kann dahingehend interpretiert werden, dass die Punktschätzer für  $\mu$  und  $\Sigma$  unabhängig voneinander sind, was zu den Formeln (4.4) und (4.5) führt.

O.B.d.A kann  $M^C$  positiv definit angenommen werden, da  $M^C$  sinnbildlich für den Mittelpunkt eines Ellipsoiden bezüglich der Kovarianzmatrix  $\Sigma$  steht und Kovarianzmatrizen hier als positiv definit angenommen werden, siehe Definition 3.1.4.

Für  $\mu$  und  $\Sigma$  können allgemeinere Lage- und Streuungsparameter benutzt werden, vergleiche Formel (2.31).

$\delta^2$  ist in diesem Zusammenhang das angestrebte Konfidenzniveau aus Abschnitt 2.5.

Die Zielfunktion von  $RC_\lambda$  ist

$$f(x) = \max_{u \in U_\delta} (1 - \lambda)\sqrt{x^\top Cx} - \lambda x^\top r.$$

Weiter ist

$$(1 - \lambda)\sqrt{x^\top Cx} - \lambda x^\top r$$

bezüglich  $r$  und  $c = \text{vecsym}(C)$  stetig für alle  $\lambda \in (0, 1)$ . Die Menge  $U_\delta$  ist als Ellipsoid nichtleer und kompakt. Die Bedingung  $\text{vecsym}^{-1}(c) = C \in \mathbb{S}_+^n$  bedeutet dabei, dass wir im Raum der symmetrischen, positiv definiten Matrizen für  $C$  bleiben wollen. Sie sollen als Kovarianzmatrizen interpretiert werden, um  $\Sigma$  damit approximieren zu können.

Nach Korollar 2.4.10 ist  $f$  stetig für alle  $x \in X$ . Die Menge  $X$  wird als nichtleer und kompakt angenommen. Somit ist  $RC_\lambda$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$  lösbar.

Einen anderen Ansatz, den Mittelpunkt  $m$  und die Formmatrix  $S$  zu bestimmen, ist die Suche nach einem Ellipsoid  $Ell$  mit Mittelpunkt  $m$  und Formmatrix  $S$ , das den Parameter  $u^{org} = \begin{pmatrix} \mu \\ \text{vecsym}(\Sigma) \end{pmatrix}$  enthält und dabei minimales Volumen besitzt. Die Ungleichung (2.32) wird in diesem Ansatz mit  $\frac{1}{\delta^2}$  multipliziert, so dass die rechte Seite der Ungleichung sich zu 1 ergibt.

Da  $\begin{pmatrix} \mu \\ \text{vecsym}(\Sigma) \end{pmatrix}$  zufällig ist, ist die Forderung, dass  $u^{org}$  im Ellipsoid liegt, eine zufallsbehaftete Bedingung. Wir wollen stattdessen fordern, dass mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \varepsilon$  der Parameter  $u^{org}$  im Ellipsoid  $Ell$  liegt, siehe Kapitel 2.6. Das führt zu der *Chance-Constraint*

$$\mathbb{P} \left( \frac{1}{\delta^2} (u^{org} - m)^\top S^{-1} (u^{org} - m) - 1 \leq 0 \right) \geq 1 - \varepsilon.$$

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

Bekanntermaßen berechnet sich das Volumen eines Ellipsoids durch

$$\frac{\pi^{\frac{\bar{n}}{2}}}{\Gamma(\frac{\bar{n}}{2} + 1)\sqrt{\det(S^{-1})}},$$

wobei mit  $\Gamma$  die Standardgammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad \text{für } x > 0$$

bezeichnet ist. Offensichtlich hängt das Volumen nur von der Formmatrix  $S$  ab.

$S^{-1}$  ist symmetrisch und positiv definit, siehe Bemerkung 4.0.2, und es gilt  $\det(S^{-1}) > 0$ , siehe Definition 2.1.1 Teil 7.

$\frac{1}{\det(S^{-1})}$  zu minimieren, ist gleichbedeutend mit der Minimierung von  $\det(S)$  bzw. mit der Minimierung von  $-\ln(\det(S^{-\frac{1}{2}}))$ . Die Funktion  $\ln(x)$  ist eine konvexe und streng monoton fallende Zielfunktion auf  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ , siehe [58], so dass die Funktion  $-\ln(\det(S^{-\frac{1}{2}}))$  konvex und monoton fallend ist.

Durch die zusätzliche Bedingung  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}$  ist nicht nur  $\det(S^{-1}) > 0$  gewährleistet, sondern die zu  $S^{-1}$  inverse Matrix  $S$  kann als Kovarianzmatrix interpretiert werden.

Die Struktur

$$S = \begin{pmatrix} S^r & 0 \\ 0 & S^c \end{pmatrix}$$

muss noch eingearbeitet werden. Man beachte dabei, dass

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} (S^r)^{-1} & 0 \\ 0 & (S^c)^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

bzw.

$$S^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} (S^r)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (S^c)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

gilt. Um eine Bedingung für  $S^{-1}$  zu erhalten, reicht es also aus, die  $(n, \frac{n(n+1)}{2})$ -Blockmatrix „rechts oben“ aus (4.6), die nur aus Nullen besteht, zu modellieren, d.h.  $s_{i,j}^{-1} = 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  und  $j = n + 1, \dots, \bar{n}$ , wobei  $s_{i,j}^{-1}$  die Komponente in der  $i$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte von der Matrix  $S^{-1}$  ist. Durch die Symmetrieforderung an  $S^{-1}$  wird der Block „links unten“ auch auf Null gesetzt. Die Matrizen  $(S^r)^{-1}$  und  $(S^c)^{-1}$  können dann als Blöcke aus  $S^{-1}$  ausgelesen werden.

Alles zusammen führt zu dem folgenden Optimierungsproblem mit Chance-Cons-

#### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

traint

$$\begin{aligned} \min_{m,S} -\ln(\det(S^{-\frac{1}{2}})) \quad \text{u.d.N.} \quad & \mathbb{P}\left(\frac{1}{\delta^2}(u^{org} - m)^\top S^{-1}(u^{org} - m) - 1 \leq 0\right) \geq 1 - \epsilon, \\ & s_{ij}^{-1} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n+1, \dots, \bar{n} \\ & S \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Eine Umformung ist nach [58] gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{MinVol}(\mu, \Sigma) : \quad & \min_{b,A} -\ln(\det(A)) \\ \text{u.d.N.} \quad & \mathbb{P}\left((Au^{org} - b)^\top (Au^{org} - b) - 1 \leq 0\right) \geq 1 - \epsilon, \\ & a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n+1, \dots, \bar{n}, \\ & b \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

mit  $A = \frac{1}{\delta}S^{-\frac{1}{2}}$  und  $b = Am = \frac{1}{\delta}S^{-\frac{1}{2}}m$ . Dabei ist die Bedingung (4.9) durch Formel (4.7) ersichtlich. Sei  $(b^*, A^*)$  ein Minimalpunkt von  $\text{MinVol}(\mu, \Sigma)$ , dann ist  $(A^{*-1}b^*, \frac{1}{\delta^2}A^{*-2})$  ein Minimalpunkt von (4.8).

Zu diesem Problem  $\text{MinVol}(\mu, \Sigma)$  und die Einbindung in  $\mathbf{RC}_\lambda$  kommen wir in Kapitel 4.2 zurück.

### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

Sei  $u$  eine Zufallsvariable der Dimension  $\bar{n} = n + \frac{n(n+1)}{2}$  und  $u$  sei elliptisch verteilt mit erstem Moment  $m = \begin{pmatrix} m^r \\ m^c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  und zweitem Moment  $S \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}$  mit

$$S = \begin{pmatrix} S^r & 0 \\ 0 & S^c \end{pmatrix}.$$

Weiter sei  $\delta^2$  ein  $p$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $\bar{n}$  Freiheitsgraden und  $p \in (0, 1)$ .  $u$  kann mit  $u^{org} = \begin{pmatrix} \mu \\ \text{vecsym}(\Sigma) \end{pmatrix}$  gleichgesetzt und die Menge  $U_\delta$  aus (4.3) kann dann als Konfidenzellipsoid betrachtet werden, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass  $u^{org}$  in  $U_\delta$  liegt, beträgt  $p$ . Schätzt man  $u^{org}$  durch  $u$ , dann ist  $U_\delta$  im Allgemeinen kein Konfidenzellipsoid mehr,  $U_\delta$  kann aber noch als sinnvolle Unsicherheitsmenge für  $\mu$  und  $\Sigma$  interpretiert werden. Die obige Deutung von  $m, S$  und  $\delta^2$  wird später bei der Interpretation der optimalen Punkte der Hilfsprobleme wichtig sein, trägt aber zunächst nichts zur eigentlichen Lösung von  $\mathbf{RC}_\lambda$  bei.

Betrachten wir nun das Problem  $\mathbf{RC}_\lambda$  mit der Unsicherheitsmenge  $U_\delta$  aus (4.3) und  $m, S$  und  $\delta^2$ , wie oben definiert. Dieses Problem kann mittels einer Epigraphum-

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

formulierung dargestellt werden als

$$\overline{RC}_\lambda : \min_{x \in X, \gamma \in \mathbb{R}} \gamma \quad \text{u.d.N.} \quad \max_{u \in U_\delta} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r \leq \gamma.$$

Eine weitere wohlbekanntere Umformulierung bezüglich der Restriktion führt zu

$$SIP\text{-}RC_\lambda : \min_{x \in X, \gamma \in \mathbb{R}} \gamma \quad \text{u.d.N.} \quad (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r \leq \gamma, \quad \forall u \in U_\delta.$$

Dies entspricht einem (Standard) semi-infiniten Optimierungsproblem mit  $x$  und  $z$  als Entscheidungsvariablen,  $u$  als Indexvariable und  $U_\delta$  als Indexmenge. Lösungsverfahren der semi-infiniten Optimierung lassen sich darauf anwenden, vergleiche Kapitel 2.3.

$RC_\lambda$  kann in diesem Zusammenhang aber auch als Bi-Level-Optimierungsproblem verstanden werden

$$BL\text{-}RC_\lambda : \min_{x \in X, \gamma \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}^{n+n^2}} \gamma \quad \text{u.d.N.} \quad (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r \leq \gamma, \quad u \text{ löst } Q(x, \gamma)$$

mit dem Problem der unteren Stufe

$$Q(x, \gamma) : \max_{u \in \mathbb{R}^{n+n^2}} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r - \gamma \quad \text{u.d.N.} \quad u \in U_\delta.$$

Bleiben wir bei Problem  $RC_\lambda$ . Im Folgenden soll das Problem analytisch gelöst werden. Das geschieht in Anlehnung an [51, Kapitel 3.2]. Dort werden speziellere Wahrscheinlichkeitsverteilungen für  $\mu$  und  $\Sigma$  vorausgesetzt. Hier erfolgt im Gegensatz dazu eine allgemeinere Darstellung nicht notwendigerweise unter Annahme von Verteilungen.

Bevor wir  $RC_\lambda$  weiter umformen, wollen wir in  $U_\delta$  die Bedingung  $\text{vecsym}^{-1}(c) = C \in \mathbb{S}_+^n$  fallen lassen. Wir werden später auf diese Bedingung zurück kommen.

Die Entscheidungsvariable  $C$  als Matrix aufzufassen, würde zur *semi-definiten Optimierung*<sup>19</sup> führen. Dieser Ansatz wird hier an dieser Stelle aber nicht weiterverfolgt. Durch die Abbildung  $\text{vecsym}$  wird die Zielfunktion umgeformt zu

$$\begin{aligned} x^\top C x &= \text{tr}(x^\top C x) = \text{tr}(x x^\top C) \\ &= \text{vecsym}(x x^\top)^\top D_n^\top D_n \text{vecsym}(C) \\ &= \underbrace{\left( D_n^\top D_n \text{vecsym}(x x^\top) \right)^\top}_{=z} \text{vecsym}(C) \\ &= z^\top c \end{aligned} \tag{4.10}$$

mit  $z \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ , siehe (2.7). Zu  $z = \text{vecsym}(x x^\top)$  kann noch gesagt werden, dass  $x \neq 0$  für alle  $x \in X$  gilt. Daraus folgt, dass  $x x^\top \neq 0$  und damit  $z \neq 0$  ist, vergleiche

---

<sup>19</sup>Siehe [11].

#### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

Ausführungen auf S. 11.

Wir werden als Erstes ein Lemma mit Eigenschaften über  $U_\delta$  vorstellen. Dann wird das Problem  $\mathbf{RC}_\lambda$  reformuliert und stufenweise aufgelöst.

**Lemma 4.1.1.** 1. Die Ungleichungen

$$(u - m)^\top S^{-1}(u - m) \leq \delta^2 \quad (4.11)$$

und

$$(r - m^r)^\top (S^r)^{-1}(r - m^r) + (c - m^c)^\top (S^c)^{-1}(c - m^c) \leq \delta^2 \quad (4.12)$$

sind äquivalent. Des Weiteren gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq (r - m^r)^\top (S^r)^{-1}(r - m^r) \leq \delta^2 \\ 0 &\leq (c - m^c)^\top (S^c)^{-1}(c - m^c) \leq \delta^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

2.  $U_\delta$  lässt sich als Vereinigung über  $\kappa \in [0, 1]$  von unendlich vielen Mengen auffassen, d.h.

$$U_\delta = \bigcup_{\kappa \in [0, 1]} (U_{\sqrt{\kappa} \delta} \times U_{\sqrt{1-\kappa} \delta})$$

mit

$$\begin{aligned} U_{\sqrt{\kappa} \delta} &= \{r \in \mathbb{R}^n \mid (r - m^r)^\top (S^r)^{-1}(r - m^r) \leq \kappa \delta^2\} \\ U_{\sqrt{1-\kappa} \delta} &= \{c \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \mid (c - m^c)^\top (S^c)^{-1}(c - m^c) \leq (1 - \kappa) \delta^2\}. \end{aligned}$$

Die Mengen  $U_{\sqrt{\kappa} \delta} \subset \mathbb{R}^n$  und  $U_{\sqrt{1-\kappa} \delta} \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  können als Unsicherheitsmengen jeweils für  $r$  und  $c$  bzw.  $C = \text{vecsymb}^{-1}(c)$  angesehen werden. Sie besitzen die gleichen Eigenschaften wie  $U_\delta$ .

**Beweis.**

1. Setzt man  $m = \begin{pmatrix} m^r \\ m^c \end{pmatrix}$  und  $S$  wie in (4.2) in die Ungleichung (4.11) ein, so erhält man (4.12).

Die Rückrichtung der Äquivalenz bekommt man dadurch, dass man die in der Ungleichung (4.12) vorkommenden Vektoren  $m^r, m^c$  sowie die vorkommenden Matrizen  $S^r, S^c$  geschickt zu  $m$  und  $S$  zusammenfasst. Daraus ergibt sich unmittelbar die Ungleichung (4.11).

Die Ungleichungen aus (4.13) folgen zum einen wegen der Aussage aus Teil 1. Da die Inversen von  $S^r$  und  $S^c$  positiv definit sind, ergibt sich

$$0 \leq (r - m^r)^\top (S^r)^{-1}(r - m^r) \quad \text{und} \quad 0 \leq (c - m^c)^\top (S^c)^{-1}(c - m^c).$$

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

Die Ungleichung (4.12) ergibt

$$0 \leq (r - m^r)^\top (S^r)^{-1} (r - m^r) \leq \delta^2 \quad \text{und} \quad 0 \leq (c - m^c)^\top (S^c)^{-1} (c - m^c) \leq \delta^2.$$

2. Der Beweis folgt in 2 Teilen.

– Sei  $u = m$ , dann ist  $r = m^r$  und  $c = m^c$ . Weiter gilt für alle  $\kappa \in [0, 1]$

$$(r - m^r)^\top (S^r)^{-1} (r - m^r) = 0 \leq \kappa \delta^2$$

und

$$(c - m^c)^\top (S^c)^{-1} (c - m^c) = 0 \leq (1 - \kappa) \delta^2.$$

$u$  ist somit in  $\bigcup_{\kappa \in [0,1]} (U_{\sqrt{\kappa} \delta} \times U_{\sqrt{1-\kappa} \delta})$ .

Sei  $u \in U_\delta \setminus \{m\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (u - m)^\top S^{-1} (u - m) &\stackrel{1. \text{ Teil}}{=} \underbrace{(r - m^r)^\top (S^r)^{-1} (r - m^r)}_{=: a} \\ &\quad + \underbrace{(c - m^c)^\top (S^c)^{-1} (c - m^c)}_{=: b} \\ &= a + b \\ &\leq \delta^2. \end{aligned}$$

Es gilt für  $r \neq m^r$  und  $c \neq m^c$   $a + b > 0$ . Setze  $\bar{\kappa} = \frac{a}{a+b}$ . Dann gilt  $\bar{\kappa} \in [0, 1]$ ,  $1 - \bar{\kappa} = \frac{b}{a+b}$  sowie

$$\bar{\kappa} \delta^2 = \frac{a}{a+b} \delta^2 \geq \frac{a}{a+b} (a+b) = a$$

und

$$(1 - \bar{\kappa}) \delta^2 = \frac{b}{a+b} \delta^2 \geq \frac{b}{a+b} (a+b) = b.$$

Daraus folgt

$$(r - m^r)^\top (S^r)^{-1} (r - m^r) \leq \bar{\kappa} \delta^2 \quad \text{und} \quad (c - m^c)^\top (S^c)^{-1} (c - m^c) \leq (1 - \bar{\kappa}) \delta^2.$$

Damit ist  $r \in U_{\sqrt{\bar{\kappa}} \delta}$  und  $c \in U_{\sqrt{1-\bar{\kappa}} \delta}$ , d.h.  $u \in U_{\sqrt{\bar{\kappa}} \delta} \times U_{\sqrt{1-\bar{\kappa}} \delta}$ .

$u$  liegt somit in der Vereinigung der  $U_{\sqrt{\kappa} \delta} \times U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}$  mit  $\kappa \in [0, 1]$

$$u \in \bigcup_{\kappa \in [0,1]} (U_{\sqrt{\kappa} \delta} \times U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}). \quad (*)$$

#### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

– Sei  $u \in \bigcup_{\kappa \in [0,1]} (U_{\sqrt{\kappa}\delta} \times U_{\sqrt{1-\kappa}\delta})$ . Dann gibt es ein  $\bar{\kappa} \in [0,1]$  mit

$$(r-m^r)^\top (S^r)^{-1} (r-m^r) \leq \bar{\kappa} \delta^2 \quad \text{und} \quad (c-m^c)^\top (S^c)^{-1} (c-m^c) \leq (1-\bar{\kappa}) \delta^2.$$

Addiert man beide Ungleichungen, dann ergibt das

$$(r-m^r)^\top (S^r)^{-1} (r-m^r) + (c-m^c)^\top (S^c)^{-1} (c-m^c) \leq \bar{\kappa} \delta^2 + (1-\bar{\kappa}) \delta^2 = \delta^2.$$

Diese Ungleichung ist nach Teil 1 äquivalent zu

$$(u-m)^\top S^{-1} (u-m) \leq \delta^2,$$

also  $u \in U_\delta$ . (\*\*)

(\*) und (\*\*) ergeben die Behauptung. □

Der nächste Satz ist entscheidend für die stufenweise Darstellung und Auflösung von  $\mathbf{RC}_\lambda$ . Für den Beweis werden das Vereinigungslemma 2.2.5 und das Separationslemma 2.2.8 sowie das Lemma 4.1.1 Teil 3 benötigt.

**Satz 4.1.2.** *Gegeben seien die Mengen*

$$U_\delta = \{u \in \mathbb{R}^n \mid (u-m)^\top S^{-1} (u-m) \leq \delta^2\},$$

$$U_{\sqrt{\kappa}\delta} = \{r \in \mathbb{R}^n \mid (r-m^r)^\top (S^r)^{-1} (r-m^r) \leq \kappa \delta^2\}$$

und

$$U_{\sqrt{1-\kappa}\delta} = \{c \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \mid (c-m^c)^\top (S^c)^{-1} (c-m^c) \leq (1-\kappa) \delta^2\}.$$

Die Optimalwerte der beiden Optimierungsprobleme

$$\mathbf{RC}_\lambda : \min_{x \in X} \max_{(r,c) \in U_\delta} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r$$

und

$$\overline{\mathbf{RC}}_\lambda : \min_{x \in X} \max_{\kappa \in [0,1]} \max_{c \in U_{\sqrt{1-\kappa}\delta}} \max_{r \in U_{\sqrt{\kappa}\delta}} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r$$

stimmen überein.

**Beweis.** Es gilt

$$\min_{x \in X} \max_{(r,c) \in U_\delta} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r$$

$$\stackrel{\text{Lemma 4.1.1 Teil 3}}{=} \min_{x \in X} \max_{(r,c) \in \bigcup_{\kappa \in [0,1]} (U_{\sqrt{\kappa}\delta} \times U_{\sqrt{1-\kappa}\delta})} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r$$

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{Lemma}}{=} \underset{2.2.5}{\min}_{x \in X} \max_{\kappa \in [0,1]} \max_{(r,c) \in (U_{\sqrt{\kappa} \delta} \times U_{\sqrt{1-\kappa} \delta})} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \\
 & \stackrel{\text{Lemma}}{=} \underset{2.2.8}{\min}_{x \in X} \max_{\kappa \in [0,1]} \max_{c \in U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}} \max_{r \in U_{\sqrt{\kappa} \delta}} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.  $\square$

Ähnlich wie bei  $RC_\lambda$  können die Maxima bei  $\overline{RC}_\lambda$  mit Mitteln aus dem Abschnitt 2.4 gerechtfertigt werden, denn die Mengen  $[0, 1]$ ,  $U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}$  und  $U_{\sqrt{\kappa} \delta}$  sind nichtleer und kompakt, und die zu betrachtenden Zielfunktionen sind bezüglich der zugehörigen Entscheidungsvariablen stetig.

Formel (4.14) ist der Optimalwert des Optimierungsproblems

$$RC_\lambda^{\max} : \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\kappa \in [0,1]} \max_{c \in U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}} \max_{r \in U_{\sqrt{\kappa} \delta}} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X,$$

was nach obigen Satz äquivalent zu  $RC_\lambda$  ist.

$RC_\lambda^{\max}$  wird nun aufgelöst, indem das innerste Maximierungsproblem

$$P^r : \max_{r \in \mathbb{R}^n} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \quad \text{u.d.N.} \quad r \in U_{\sqrt{\kappa} \delta}$$

analytisch gelöst wird und der optimale Punkt  $r^* = r^*(x, \kappa)$  in das nächstinnere Problem

$$P^C : \max_{c \in \mathbb{R}^{n^2}} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \quad \text{u.d.N.} \quad c \in U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}$$

eingesetzt wird. Mit  $P^C$  verfährt man dann wie mit  $P^r$ . Ein optimaler Punkt von  $P^C$  sei  $c^* = c^*(x, \kappa)$ .  $r^*$  und  $c^*$  werden anschließend gemeinsam in das Problem

$$P^\kappa : \max_{\kappa \in \mathbb{R}} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \quad \text{u.d.N.} \quad \kappa \in [0, 1]$$

eingesetzt. Die Lösung  $\kappa^* = \kappa^*(\lambda, x)$  von  $P^\kappa$  fließt, zusammen mit  $r^*$  und  $c^*$ , in das äußere Minimierungsproblem, dem eigentlichen Portfolio-Optimierungsproblem, ein, mit dem ein optimales Portfolio in Abhängigkeit von  $\lambda$  bestimmt werden kann.

##### 4.1.1. Lösung des Problems $P^r$

Betrachten wir das Problem

$$P^r : \max_{r \in \mathbb{R}^n} (1-\lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \quad \text{u.d.N.} \quad r \in U_{\sqrt{\kappa} \delta}$$

mit

$$U_{\sqrt{\kappa} \delta} = \{r \in \mathbb{R}^n \mid (r - m^r)^\top (S^r)^{-1} (r - m^r) \leq \kappa \delta^2\}.$$

#### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

Zunächst sei angemerkt, dass  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\delta > 0$ ,  $x \in X$ ,  $\kappa \in [0, 1]$  und  $c \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  Parameter des Problems  $P^r$  sind. Einzige Entscheidungsvariable ist  $r \in \mathbb{R}^n$ . Demnach sieht man leicht, dass der zu maximierende Term

$$(1 - \lambda)\sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r$$

linear von der Entscheidungsvariable  $r$  abhängt und den konstanten Teil

$$(1 - \lambda)\sqrt{z^\top c}$$

besitzt. Des Weiteren kann  $\lambda > 0$  in  $-\lambda x^\top r$  vernachlässigt werden.

Äquivalent zu  $P^r$  ist also das Problem

$$\bar{P}^r : \max_{r \in \mathbb{R}^n} -x^\top r \quad \text{u.d.N.} \quad r \in U_{\sqrt{\kappa} \delta},$$

und zwar in dem Sinne, dass die Optimalpunkte beider Probleme übereinstimmen, siehe Lemma 2.2.4.

Die Unsicherheitsmenge  $U_{\sqrt{\kappa} \delta}$  ist bezüglich  $r$  quadratisch und konvex. Man muss insgesamt eine lineare Zielfunktion über einer quadratisch-konvexen zulässigen Menge maximieren, um  $\bar{P}^r$  zu lösen. Das wurde bis auf die Fallunterscheidung  $\kappa = 0$  und  $\kappa > 0$  und dem Minuszeichen bei der Zielfunktion bereits in Beispiel 2.2.27 auf Seite S. 26 getan.

Dazu sei zuerst  $\kappa = 0$ . Aus der Formel

$$0 \leq (r - m^r)^\top (S^r)^{-1} (r - m^r) \leq \kappa \delta^2 = 0,$$

wobei die erste Ungleichung aus der Bemerkung 4.1.1 Teil 2 (erste Ungleichung aus (4.13)) herrührt, folgt

$$(r - m^r)^\top (S^r)^{-1} (r - m^r) = 0,$$

d.h. mit  $S^r \succ 0$  muss  $r = m^r$  gelten.  $m^r$  ist somit einzig zulässiger Punkt von  $U_{\sqrt{\kappa} \delta}$  und somit Maximalpunkt von  $\bar{P}^r$  bzw.  $P^r$ .

Nach den vorherigen Bemerkungen kann unter anderem  $m^r$  der Erwartungswert eines Punktschätzers für  $\mu$  sein. Diesen Erwartungswert setzt man im Fall  $\kappa = 0$  dann als  $\mu$  in  $MV_\lambda$  ein. Man verlässt sich also darauf, dass man die eigentlich unsicheren Renditen mittels des Punktschätzers gut abgeschätzt hat. Unsicherheiten bleiben nur noch beim Schätzen der Kovarianz, also des Risikos.<sup>20</sup>

<sup>20</sup>Sollten auch die Unsicherheiten bei der Kovarianz wegfallen, machen die weiteren Betrachtungen hier keinen Sinn. Den Robust-Counterpart zu einem parametrischen Optimierungsproblem zu bilden, ist nur hilfreich, solange es einen wirklichen unsicheren Teil des Parameters gibt. Die Schätzer für  $\mu$  und  $\Sigma$  sollten direkt in  $MV_\lambda$  eingehen, falls man mit deren Eigenschaften zufrieden ist.

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

Sei nun  $\kappa > 0$ . Die Lösung in diesem Fall ist nach Beispiel 2.2.27

$$r^* = -\frac{\sqrt{\kappa} \delta}{\|(S^r)^{\frac{1}{2}} x\|_2} S^r x + m^r \quad (4.15)$$

mit Multiplikator

$$\alpha^* = \frac{1}{2\sqrt{\kappa} \delta} \|(S^r)^{\frac{1}{2}} x\|_2.$$

Da die Zielfunktion  $-x^\top r$  linear und die zulässige Menge konvex bezüglich  $r$  ist, ist  $r^*$  ein globaler Maximalpunkt von  $\overline{P}^r$  bzw.  $P^r$ . Der optimale Zielfunktionswert des Problems  $\overline{P}^r$  lautet

$$-x^\top r^* = \frac{\sqrt{\kappa} \delta}{\|(S^r)^{\frac{1}{2}} x\|_2} x^\top S^r x - x^\top m^r = \sqrt{\kappa} \delta \|(S^r)^{\frac{1}{2}} x\|_2 - x^\top m^r$$

und der von  $P^r$

$$(1 - \lambda)\sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r^* = (1 - \lambda)\sqrt{z^\top c} + \lambda \left( \sqrt{\kappa} \delta \|(S^r)^{\frac{1}{2}} x\|_2 - x^\top m^r \right). \quad (4.16)$$

#### 4.1.2. Lösung des Problems $P^C$

Schauen wir uns jetzt das Problem  $P^C$  an und setzen den optimalen Zielfunktionswert (4.16) dort ein

$$P^C : \max_{c \in \mathbb{R}^{n^2}} (1 - \lambda)\sqrt{z^\top c} + \lambda \left( \sqrt{\kappa} \delta \|(S^r)^{\frac{1}{2}} x\|_2 - x^\top m^r \right) \quad \text{u.d.N.} \quad c \in U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}.$$

mit

$$U_{\sqrt{1-\kappa} \delta} = \{c \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \mid (c - m^c)^\top (S^c)^{-1} (c - m^c) \leq (1 - \kappa)\delta^2\}.$$

Ähnlich zu  $P^r$  gibt es in  $P^C$  wieder die Parameter  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\delta > 0$ ,  $x \in X$  und  $\kappa \in [0, 1]$ , sowie eine Entscheidungsvariable  $c \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ . Der konstante Term in der Zielfunktion ist

$$\lambda \left( \sqrt{\kappa} \delta \|(S^r)^{\frac{1}{2}} x\|_2 - x^\top m^r \right),$$

und  $(1 - \lambda) > 0$  braucht im restlichen Term beim Bestimmen des optimalen Punktes nicht betrachtet zu werden, siehe Lemma 2.2.4. Auch die Wurzel als monoton steigende Funktion kann nach Lemma 2.2.9 vernachlässigt werden.

Dann ist  $P^C$  äquivalent zu folgendem Problem:

$$\overline{P}^C : \max_{c \in \mathbb{R}^{n^2}} z^\top c \quad \text{u.d.N.} \quad c \in U_{\sqrt{1-\kappa} \delta}.$$

Durch diese Umformungen ist wieder ein Maximierungsproblem zu lösen, das eine lineare Zielfunktion und eine quadratisch-konvexe zulässige Menge hat.

Betrachten wir vorab  $\kappa = 1$ , analog zu dem Fall  $\kappa = 0$  bei  $P^r$ . Es gilt für die

#### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

Ungleichung aus der zulässigen Menge

$$0 \leq (c - m^c)^\top (S^c)^{-1} (c - m^c) \leq (1 - \kappa) \delta^2 = 0,$$

und wegen  $S^c \succ 0$  muss wieder  $c = m^c$  gelten.  $m^c$  ist einzig zulässiger Punkt von  $U_{\sqrt{1-\kappa}\delta}$  und somit Maximalpunkt von  $\bar{P}^C$  bzw.  $P^C$ .

$m^c$  kann als Erwartungswert eines Punktschätzers für  $\text{vecsym}(\Sigma)$  betrachtet werden. Durch die Umkehrung der Abbildung  $\text{vecsym}$  können wir  $\text{vecsym}^{-1}(c^*) = \text{vecsym}^{-1}(m^c) = M^C$  setzen und  $M^C$  kann, komponentenweise betrachtet, als Erwartungswert des Punktschätzers für  $\Sigma$  verstanden werden. Der Fall  $\kappa = 1$  bedeutet also, dass wir in  $MV_\lambda$  für  $\Sigma$  den Schätzer  $M^C$  einsetzen und nur noch der Parameter  $\mu$  unsicher ist.

Sei nun  $\kappa < 1$ . Analog zu Beispiel 2.2.27 ist der optimale Punkt von  $P^C$

$$c^* = \frac{\sqrt{1-\kappa}\delta}{\left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2} S^c z + m^c \quad (4.17)$$

mit Multiplikator

$$\alpha^* = \frac{1}{2\sqrt{1-\kappa}\delta} \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2.$$

Da die Zielfunktion  $z^\top c$  linear und die zulässige Menge konvex bezüglich  $c$  ist, ist  $c^*$  ein globaler Maximalpunkt von  $\bar{P}^C$  bzw.  $P^C$ . Der optimale Zielfunktionswert des Problems  $\bar{P}^C$  lautet

$$z^\top c^* = \frac{\sqrt{1-\kappa}\delta}{\left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2} z^\top S^c z + z^\top m^c = \sqrt{1-\kappa}\delta \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 + z^\top m^c$$

und der von  $P^C$

$$\begin{aligned} & (1-\lambda) \sqrt{z^\top c^*} + \lambda \left( \sqrt{\kappa}\delta \left\| (S^r)^{\frac{1}{2}} x \right\|_2 - x^\top m^r \right) \\ &= (1-\lambda) \sqrt{\sqrt{1-\kappa}\delta \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 + z^\top m^c} + \lambda \left( \sqrt{\kappa}\delta \left\| (S^r)^{\frac{1}{2}} x \right\|_2 - x^\top m^r \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Damit  $C^* = \text{vecsym}^{-1}(c^*)$  als Kovarianzmatrix interpretiert werden kann, muss  $C^*$  noch auf die beiden Eigenschaften Symmetrie und positive Definitheit überprüft werden. Dabei ist die Symmetrie von  $C^*$  bereits durch Definition der Abbildung  $\text{vecsym}^{-1}$  gegeben.

Für die positive Definitheit präzisieren wir nochmals unsere Annahmen über  $m^c$  und  $S^c$ .

**Lemma 4.1.3.** Sei  $u = \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \text{vecsym}(\hat{\Sigma}) \end{pmatrix}$  eine Zufallsvariable der Dimension  $\bar{n}$  mit  $\hat{\mu} \in$

4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

$\mathbb{R}^n, \hat{\Sigma} \in \mathbb{S}_+^n$  sowie  $E(u) = \begin{pmatrix} E(\hat{\mu}) \\ E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})) \end{pmatrix}$  und

$$\text{Cov}(u) = \text{Cov} \begin{pmatrix} \hat{\mu} \\ \text{vecsym}(\hat{\Sigma}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(\hat{\mu}) & 0 \\ 0 & \text{Cov}(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})) \end{pmatrix}.$$

Weiter sei  $m^c = E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))$  und  $S^c = \text{Cov}(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))$  und die Matrix

$$E(x^\top \hat{\Sigma} x \hat{\Sigma}) + (2\alpha^* - x^\top E(\hat{\Sigma})x)E(\hat{\Sigma}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

positiv definit.

Dann ist die Matrix  $C^* = \text{vecsym}^{-1}(c^*)$  mit

$$c^* = \frac{\sqrt{1-\kappa} \delta}{\|(S^c)^{\frac{1}{2}} z\|_2} S^c z + m^c$$

positiv definit.

**Beweis.** Für Kovarianzen gilt der Verschiebungssatz

$$\begin{aligned} S^c &= \text{Cov}(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})) \\ &= E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})\text{vecsym}(\hat{\Sigma})^\top) - E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))^\top, \end{aligned}$$

siehe [38, Definition 5.15]. Führt man nun die Umkehrabbildung von  $\text{vecsym}$  an  $m^c$  aus, dann erhält man

$$\begin{aligned} M^C &= \text{vecsym}^{-1}(m^c) \\ &= \text{vecsym}^{-1}(E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))) \\ &= E(\text{vecsym}^{-1}(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))) \\ &= E(\hat{\Sigma}). \end{aligned}$$

Für  $c^*$  gelten dann folgende Umformungen

$$\begin{aligned} c^* &= \frac{1}{2\alpha^*} S^c z + m^c \\ &= \frac{1}{2\alpha^*} \left( E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})\text{vecsym}(\hat{\Sigma})^\top) - E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}))^\top \right) z \\ &\quad + E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})) \\ &= \frac{1}{2\alpha^*} \left( E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma}) \underbrace{\text{vecsym}(\hat{\Sigma})^\top D_n^\top D_n \text{vecsym}(xx^\top)}_{=x^\top \hat{\Sigma} x}) \right. \\ &\quad \left. - E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})) \underbrace{(E(\text{vecsym}(\hat{\Sigma})))^\top D_n^\top D_n \text{vecsym}(xx^\top)}_{=x^\top E(\hat{\Sigma}) x} \right) \end{aligned}$$

4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart  $\mathbf{RC}_\lambda$

$$\begin{aligned}
 & +\mathbf{E}(\text{vecsym}(\widehat{\Sigma})) \\
 = & \frac{1}{2\alpha^*} \left( \mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \text{vecsym}(\widehat{\Sigma})) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \mathbf{E}(\text{vecsym}(\widehat{\Sigma})) \right).
 \end{aligned}$$

Die Umkehrung von  $\text{vecsym}$  führt dann zu

$$\begin{aligned}
 2\alpha^* C^* & = 2\alpha^* \text{vecsym}^{-1}(c^*) \\
 & = 2\alpha^* \text{vecsym}^{-1} \left( \mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \text{vecsym}(\widehat{\Sigma})) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \mathbf{E}(\text{vecsym}(\widehat{\Sigma})) \right) \\
 & = \text{vecsym}^{-1} \left( \mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \text{vec}(\widehat{\Sigma})) \right) \\
 & \quad + (2\alpha^* - x^\top M^C x) \text{vecsym}^{-1} \left( \mathbf{E}(\text{vecsym}(\widehat{\Sigma})) \right) \\
 & = \mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \underbrace{\text{vecsym}^{-1}(\text{vecsym}(\widehat{\Sigma}))}_{=\widehat{\Sigma}}) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \underbrace{\text{vecsym}^{-1}(m^c)}_{=\mathbf{E}(\widehat{\Sigma})} \\
 & = \mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \widehat{\Sigma}) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \mathbf{E}(\widehat{\Sigma}).
 \end{aligned}$$

Mit

$$\mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \widehat{\Sigma}) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \mathbf{E}(\widehat{\Sigma}) \succ 0$$

ist

$$C^* = \underbrace{\frac{1}{2\alpha^*}}_{>0} \left( \mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \widehat{\Sigma}) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \mathbf{E}(\widehat{\Sigma}) \right)$$

positiv definit. □

**Bemerkung 4.1.4.** Die Bedingung  $\mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \widehat{\Sigma}) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \mathbf{E}(\widehat{\Sigma}) \succ 0$  kann zu folgender Bedingung (4.19) äquivalent umformuliert werden. Da  $\widehat{\Sigma}$  positiv definit vorausgesetzt ist, gilt

$$\mathbf{E}(\widehat{\Sigma}) \succ 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \widehat{\Sigma}) \succ 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathbf{E}(x^\top \widehat{\Sigma} x \widehat{\Sigma}) + (2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x) \mathbf{E}(\widehat{\Sigma}) \succ 0$$

gilt, falls die Bedingung

$$\frac{1}{\delta} \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 - x^\top M^C x \geq 0 \quad \iff \quad \frac{1}{\delta} \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 \geq x^\top M^C x \quad (4.19)$$

erfüllt ist, da

$$\begin{aligned}
 2\alpha^* - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x & = \frac{2}{2\sqrt{1-\kappa}\delta} \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 - x^\top \mathbf{E}(\widehat{\Sigma})x \\
 & \stackrel{\kappa \in [0,1]}{\geq} \frac{1}{\delta} \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 - x^\top M^C x.
 \end{aligned}$$

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

Im Weiteren sei nun die folgende Annahme getroffen.

**Annahme 4.1.5.** *Die Matrix*

$$E(x^\top \widehat{\Sigma} x \widehat{\Sigma}) + (2\alpha^* - x^\top E(\widehat{\Sigma})x)E(\widehat{\Sigma}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

sei positiv definit.

#### 4.1.3. Lösung des Problems $P^\kappa$

Zum Lösen von

$$P^\kappa : \max_{\kappa \in \mathbb{R}} (1 - \lambda) \sqrt{\sqrt{1 - \kappa} \delta \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 + z^\top m^c} + \lambda \left( \sqrt{\kappa} \delta \left\| (S^r)^{\frac{1}{2}} x \right\|_2 - x^\top m^r \right)$$

u.d.N.  $\kappa \in [0, 1]$

werden vorab einige Eigenschaften der Zielfunktion

$$f_\lambda(x, \kappa) = (1 - \lambda) \sqrt{\sqrt{1 - \kappa} \delta \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 + z^\top m^c} + \lambda \left( \sqrt{\kappa} \delta \left\| (S^r)^{\frac{1}{2}} x \right\|_2 - x^\top m^r \right) \quad (4.20)$$

aufgezeigt. Die Funktion  $f_\lambda$  ist mit der Annahme 4.1.5 wohldefiniert, da

$$\sqrt{1 - \kappa} \delta \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 + z^\top m^c = x^\top C^* x > 0$$

gilt. Wir setzen zwecks Übersichtlichkeit

$$a_1 = \delta \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2, \quad a_2 = z^\top m^c, \quad a_3 = \delta \left\| (S^r)^{\frac{1}{2}} x \right\|_2, \quad a_4 = x^\top m^r,$$

d.h.

$$f_\lambda(x, \kappa) = (1 - \lambda) \sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2} + \lambda (\sqrt{\kappa} a_3 - a_4). \quad (4.21)$$

Wegen  $S^c, S^r \succ 0$  und  $m^c = \text{vecsymb}(M^C)$  mit  $M^C \succ 0$  sowie  $z, x \neq 0$  sind  $a_1, a_2, a_3 > 0$ .

**Bemerkung 4.1.6.** *Die Funktion  $f_\lambda : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  aus (4.21) ist bezüglich  $\kappa$  für alle  $x \in X$  und  $\lambda \in (0, 1)$  auf  $(0, 1)$  stetig differenzierbar.*

*Die Ableitung  $f'_\lambda : \mathbb{R}^n \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit*

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x, \kappa) &= \frac{1 - \lambda}{2\sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2}} \cdot \left( -\frac{a_1}{2\sqrt{1 - \kappa}} \right) + \frac{\lambda a_3}{2\sqrt{\kappa}} \\ &= -\frac{(1 - \lambda)a_1}{4\sqrt{(\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2)(1 - \kappa)}} + \frac{\lambda a_3}{2\sqrt{\kappa}} \end{aligned}$$

#### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

ist bezüglich  $\kappa$  für alle  $x \in X$  und  $\lambda \in (0, 1)$  auf  $(0, 1)$  stetig differenzierbar.

**Lemma 4.1.7.** Die Funktion  $f_\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert in Formel (4.21) ist für alle  $\lambda \in (0, 1)$  bezüglich  $\kappa$  auf  $[0, 1]$  strikt konkav. Sie ist für alle  $\lambda \in (0, 1)$  weder monoton fallend noch monoton wachsend bezüglich  $\kappa \in [0, 1]$ .

**Beweis.** Der Beweis findet sich im Anhang A.2 S.121.  $\square$

Die Aussagen aus folgender Bemerkung sind unmittelbar aus dem Lemma 4.1.7 herleitbar.

**Bemerkung 4.1.8.**  $P^\kappa$  besitzt für alle  $\lambda \in (0, 1)$  einen eindeutigen globalen Maximalpunkt  $\kappa^* \in [0, 1]$ . Die Existenz von  $\kappa^*$  folgt z.B. aus der Stetigkeit von  $f_\lambda$  bezüglich  $\kappa$  und der Kompaktheit von  $[0, 1]$ , die Eindeutigkeit von  $\kappa^*$  aus der strikten Konkavität von  $f_\lambda$  bezüglich  $\kappa$ .

Da  $f_\lambda$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$  strikt konkav und weder monoton fallend noch monoton wachsend ist, existiert für alle  $\lambda \in (0, 1)$  ein  $\kappa^k$  mit  $f_\lambda(\kappa^k, x) = 0$  und  $\kappa^k \in [0, 1]$ .

Nachdem wir wissen, dass es ein eindeutiges Minimum von  $P^\kappa$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$  auf  $[0, 1]$  geben muss, versuchen wir nun, dieses zu bestimmen. Dafür werden wir die 1. Ableitung null setzen, d.h. wir werden versuchen die kritischen Punkte von  $f_\lambda$  zu bestimmen. Die Existenz und die Optimalität eines kritischen Punktes aus  $[0, 1]$  für  $P^\kappa$  folgt aus dem Lemma 4.1.7 und der Bemerkung 4.1.8. Zu bemerken wäre noch, dass es keine reellen kritischen Punkte von  $f_\lambda$  außerhalb von  $[0, 1]$  geben kann, da folgende Beobachtung gemacht werden kann.

**Beobachtung 4.1.9.** Sei  $\lambda \in (0, 1)$ . Die Funktion  $f'_\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f'_\lambda(\kappa, x) = -\frac{(1-\lambda)a_1}{4\sqrt{(\sqrt{1-\kappa}a_1+a_2)(1-\kappa)}} + \frac{\lambda a_3}{2\sqrt{\kappa}}$$

bildet Elemente aus  $(0, 1)$  auf Elemente aus  $\mathbb{R}$  und Elemente aus  $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$  auf komplexe Zahlen mit nicht verschwindendem Imaginärteil ab. Sie ist für  $\kappa = 0$  und  $\kappa = 1$  nicht definiert.

Das bedeutet insbesondere, dass nur Elemente aus  $(0, 1)$  als Nullstellen von  $f'_\lambda$  in Frage kommen.

Im Folgenden sei der kritische Punkt mit  $\kappa^k$  bezeichnet.

**Lemma 4.1.10.** Gegeben seien

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{1}{864a_1^3\lambda^6a_3^6} (64a_2^3\lambda^6a_3^6 + 48a_2^2(1-\lambda)^2a_1^2\lambda^4a_3^4 + 12a_1^4a_2(1-\lambda)^4\lambda^2a_3^2 \\ &\quad + (1-\lambda)^6a_1^6 - 216(1-\lambda)^2a_1^4\lambda^4a_3^4), \\ d_1 &= -\frac{1}{48a_1^2\lambda^4a_3^4} (16a_2^2\lambda^4a_3^4 + 8a_2(1-\lambda)^2a_1^2\lambda^2a_3^2 + (1-\lambda)^4a_1^4) \end{aligned}$$

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

und

$$c_2 = \frac{4\lambda^2 a_3^2 a_2 + (1-\lambda)^2 a_1^2}{4\lambda^2 a_3^2 a_1}.$$

Der Punkt

$$\kappa^k = 1 - \left( \max\{\psi \in \mathbb{R} \mid \psi^3 + d_1\psi + d_0 = 0\} - \frac{c_2}{3} \right)^2 \quad (4.22)$$

ist ein kritischer Punkt von  $f_\lambda$ .

**Beweis.** Sei  $\lambda \in (0, 1)$  und  $x \in X$ . Für  $\kappa^k$  gilt die Gleichung

$$f_\lambda(\kappa^k, x) = 0,$$

d.h.  $\kappa^k$  ist ein kritischer Punkt von  $f_\lambda$ . Für die Gültigkeit der Gleichung siehe Anhang A.3 S. 123.  $\square$

Nach der Bemerkung 2.2.24 und dem letzten Lemma 4.1.10 ist  $\kappa^k$  aus (4.22) ein globaler Maximalpunkt von  $P^\kappa$ . Wir verzichten hier auf das Einsetzen in die Zielfunktion.

#### 4.1.4. Lösung des Problems $RC_\lambda^{\max}$

Zum Lösen von

$$RC_\lambda^{\max} : \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_{\kappa \in [0,1]} \max_{c \in U_{\sqrt{1-\kappa}}^\delta} \max_{r \in U_{\sqrt{\kappa}}^\delta} (1-\lambda)\sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r \quad \text{u.d.N. } x \in X,$$

für alle  $\lambda \in (0, 1)$  setzen wir nun die jeweiligen optimalen Punkte  $r^*$ ,  $c^*$  und  $\kappa^*$  ein. Auf die genaue Darstellung möchten wir hier wieder verzichten. Wir werden nur die Lösbarkeit von  $RC_\lambda^{\max}$  untersuchen und dann auf numerische Lösungsverfahren hinweisen.

Da wir  $r^*$  und  $C^* = \text{vecsym}^{-1}(c^*)$  (in Abhängigkeit von  $\kappa^*$ ) berechnet haben, kommen wir zurück zum Problem

$$RC_\lambda : \min_{x \in X} \max_{(r,c) \in U_\delta} (1-\lambda)\sqrt{x^\top Cx} - \lambda x^\top r,$$

wobei wir  $r^*(x, \kappa)$  und  $C^*(x, \kappa)$  einsetzen und die Abhängigkeit von  $\kappa$ , wie folgt, darstellen können

$$RC_\lambda : \min_{x \in X} \max_{\kappa \in [0,1]} (1-\lambda)\sqrt{x^\top C^*(x, \kappa)x} - \lambda x^\top r^*(x, \kappa).$$

#### 4.1. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$

Die Funktion

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C^*(x, \kappa) x} - \lambda x^\top r^*(x, \kappa) \\ &= (1 - \lambda) \sqrt{\sqrt{1 - \kappa} \delta \left\| (S^c)^{\frac{1}{2}} z \right\|_2 + z^\top m^c} + \lambda \left( \sqrt{\kappa} \delta \left\| (S^r)^{\frac{1}{2}} x \right\|_2 - x^\top m^r \right) \end{aligned}$$

ist stetig bezüglich  $x$  und  $\kappa$ . Nach Korollar 2.4.10 ist die Zielfunktion von  $RC_\lambda$

$$\max_{\kappa \in [0, 1]} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C^* x} - \lambda x^\top r^* \quad (4.23)$$

stetig und da  $X$  als kompakt vorausgesetzt wird, ist  $RC_\lambda$  auch lösbar.

Bezüglich  $x$  ist die Zielfunktion nichtlinear und für  $C^* \in \mathbb{S}_+^n$  stetig differenzierbar. Die Konvexität der Zielfunktion sieht man, wie folgt. In Kapitel 3.1 haben wir gezeigt, dass für alle  $\lambda \in (0, 1)$  der Ausdruck

$$(1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r$$

mit  $C \in \mathbb{S}_+^n$  und  $r \in \mathbb{R}^n$  strikt konvex bezüglich  $x$  ist. (4.23) kann damit als Maximum von strikt konvexen Funktionen angesehen werden und das Maximum von beliebig vielen strikt konvexen Funktionen ist wieder strikt konvex.

Zu bemerken ist noch, dass beim Einsetzen von  $\kappa^*$  in (4.23), der Ausdruck

$$\max_{(r, c) \in \mathcal{U}_\delta} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r$$

nicht ohne Weiteres in die Form

$$(1 - \lambda) \sqrt{x^\top \bar{C} x} - \lambda x^\top \bar{r}$$

mit  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  und  $\bar{C} \in \mathbb{S}_+^n$  gebracht werden kann, da die Lösungen  $r^*$  und  $C^*$  über  $\kappa^*$  gekoppelt sind.

Für die Angabe von numerischen Lösungsverfahren für  $RC_\lambda$  kann nun Folgendes gesagt werden. Allgemein bietet sich für nichtlineare differenzierbare Optimierungsprobleme das *SQP-Verfahren*, engl. für *sequential quadratic programming*, an, siehe [21]. Sobald die Konvexität allerdings gezeigt werden kann, sind für konvexe Optimierungsprobleme Innere-Punkte-Verfahren sehr effizient, siehe [12].

In der Arbeit gingen wir bis jetzt von der polyedrischen zulässigen Menge

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0 \right\}$$

aus. Wie in Kapitel 3.1 kurz angerissen, sind aber noch weitere Nebenbedingungen an den Vektor  $x$  vorstellbar. Diese könnten die Eigenschaft der Linearität bzw. sogar der Konvexität von  $X$  verletzen. Um effiziente Verfahren, wie das Innere-Punkte-

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

Verfahren anwenden zu können, sollten aber die Eigenschaften der Konvexität und der Kompaktheit von  $X$ , sowie die Eigenschaft der stetigen Differenzierbarkeit aller beteiligten Funktionen in  $X$  erhalten bleiben.

Eine Implementierung mit Beispielrechnung des Lösungsansatzes für  $RC_\lambda$  aus diesem Abschnitt findet sich im Kapitel 6.2.

### 4.2. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $RC_\lambda$ mit Chance-Constraint

Betrachten wir den Robust-Counterpart des Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblems  $MV_\lambda$

$$RC_\lambda : \min_{x \in X} \max_{(r,c) \in U_\delta} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r,$$

mit der Unsicherheitsmenge

$$U_\delta = \{u \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \mid (u - m)^\top S^{-1} (u - m) \leq \delta^2, u = \begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}, \text{vec}^{-1}(c) = C \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}\},$$

wobei  $(m, S) = (A^{*-1}b^*, \frac{1}{\delta^2}A^{*-2})$  gilt und  $(b^*, A^*)$  eine optimale Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \text{MinVol}(\mu, \Sigma) : \quad & \min_{b, A} -\ln(\det(A)) \\ \text{u.d.N.} \quad & \mathbb{P}\left(\left(Au^{org} - b\right)^\top (Au^{org} - b) - 1 \leq 0\right) \geq 1 - \epsilon, \\ & a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n + 1, \dots, \bar{n}, \\ & A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}} \end{aligned}$$

ist.

$\text{MinVol}(\mu, \Sigma)$  soll hier mit dem Sampling-and-Discarding-Ansatz aus Kapitel 2.6 gelöst werden. Dazu muss gezeigt werden, dass die linke Seite der Ungleichung in der Chance-Constraint eine konvexe Funktion bezüglich  $(b, A)$  ist. Dazu formen wir sie um zu

$$(Au^{org} - b)^\top (Au^{org} - b) - 1 = \|Au^{org} - b\|_2^2 - 1. \quad (4.24)$$

(4.24) ist für alle  $u^{org} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  eine konvexe Funktion bezüglich  $(b, A)$ .

Setze nun

$$X = \{(b, A) \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}} \mid a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n + 1, \dots, \bar{n}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}\}$$

und

$$X_u = \{(b, A) \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \times \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}} \mid (Au - b)^\top (Au - b) - 1 \leq 0\}.$$

Die Bedingung  $A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}$  ist äquivalent zu  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, \bar{n}$ , und  $A \succ 0$ ,

#### 4.2. Lösungsansatz für den Robust-Counterpart $\mathbf{RC}_\lambda$ mit Chance-Constraint

wobei die Bedingung  $A \succ 0$  im Sinne der semi-definiten Optimierung eine lineare Matrixungleichung ist.  $A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}$  kann somit auch als konvexe Bedingung betrachtet werden. Dann entspricht  $MinVol(\mu, \Sigma)$  der Standardform aus Kapitel 2.6 mit einer konvexen Zielfunktion  $-\ln(\det(A))$ .

Sei nun eine identisch verteilte unabhängige Stichprobe  $u_1, \dots, u_N$  gegeben. Das zu  $MinVol(\mu, \Sigma)$  gehörige Sample-Based-Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} SB_N : \quad & \min_{b, A} -\ln(\det(A)) \\ \text{u.d.N.} \quad & (Au_l - b)^\top (Au_l - b) - 1 \leq 0, \quad l = 1, \dots, N \\ & s_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n+1, \dots, \bar{n}, \\ & b \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}} \end{aligned}$$

bzw. das Sample-Based-Optimierungsproblem mit  $k$  entfernten Ziehungen

$$\begin{aligned} SB_{N,k} : \quad & \min_{b, A} -\ln(\det(A)) \\ \text{u.d.N.} \quad & (Au_l - b)^\top (Au_l - b) - 1 \leq 0, \quad l \in J \\ & s_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n+1, \dots, \bar{n}, \\ & b \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}. \end{aligned}$$

$SB_N$  bzw.  $SB_{N,k}$  sind konvexe Probleme, da alle beteiligten Funktionen konvex sind. Aussagen über die Lösbarkeit von  $SB_N$  und  $SB_{N,k}$ , siehe Annahme 2.6.2, diskutieren wir im Kapitel 6.3.

$N, k, \varepsilon$  und  $\beta$  können, wie in Bemerkung 2.6.8 beschrieben, gewählt werden. Welche Restriktionen aus  $\{1, \dots, N\}$  entfernt werden, soll folgende Vorgehensweise beschreiben. Als Output erhält man eine Anzahl von Indizes, die nicht größer als  $k$  ist.

**Algorithmus 4.2.1.** Sei  $(b_N^*, A_N^*)$  ein optimaler Punkt von  $SB_N$  und sei  $M = 1$ .

1. Setze

$$K_M = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid (A_N^* u_k - b_N^*)^\top (A_N^* u_k - b_N^*) - 1 = 0\}.$$

Die im Optimalpunkt  $(b_N^*, A_N^*)$  aktiven Restriktionen sollen entfernt werden.

2. Ist  $K_M = \emptyset$ , dann stoppe.

3. Ist  $\sum_{\nu=1}^M |K_\nu| < k$ , dann stelle  $SB_{N;k}$  mit  $J = \{1, \dots, N\} \setminus (\bigcup_{\nu=1}^M K_\nu)$  auf, setze  $M = M + 1$  und gehe zu 4.

4. Ist  $\sum_{\nu=1}^M |K_\nu| \geq k$ , gehe zu 6.

5. Sei  $(b_{N;k}^*, A_{N;k}^*)$  eine Lösung von  $SB_{N,k}$ . Setze

$$K_M = \{k \in \{1, \dots, N\} \mid (A_{N;k}^* u_k - b_{N;k}^*)^\top (A_{N;k}^* u_k - b_{N;k}^*) - 1 = 0\}$$

#### 4. Robuste Portfolio-Optimierung nach dem Markowitz-Ansatz

und gehe zu 2.

6. Ist  $\sum_{\nu=1}^M |K_\nu| > k$ , dann entferne so viele Indizes aus  $\sum_{\nu=1}^M |K_\nu|$ , dass  $\sum_{\nu=1}^M |K_\nu| = k$  gilt.

Mehrmals sollen aktive Restriktionen bezüglich der Punkte  $(b_{N;k}^*, A_{N;k}^*)$  entfernt werden, bis die Anzahl  $k$  erreicht ist.  $\varepsilon$  und  $\beta$  können in allen betrachteten Problemen gleich gewählt werden. Die Indizes  $\sum_{\bar{\nu}=1}^M |K_{\bar{\nu}}|$  können aus  $\{1, \dots, N\}$  entfernt werden und der Optimalpunkt des Problems

$$\begin{aligned}
 SB_{N,k} : \quad & \min_{b,A} -\ln(\det(A)) \\
 \text{u.d.N.} \quad & (Au_l - b)^\top (Au_l - b) - 1 \leq 0, \quad l \in \{1, \dots, N\} \setminus \left(\sum_{\nu=1}^M |K_\nu|\right) \\
 & s_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n+1, \dots, \bar{n}, \\
 & b \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}.
 \end{aligned}$$

ist mindestens mit Wahrscheinlichkeit  $\sum_{i=1}^M \beta_i = M\beta$   $\varepsilon$ -robust-zulässig.

In Schritt 2 stoppt man, falls keine Restriktionen an dem dort betrachteten Punkt  $(b_{N;k}^*, A_{N;k}^*)$  aktiv sind. Falls bis dahin nur wenige Restriktionen entfernt wurden, d.h. die Differenz zwischen  $k$  und der Anzahl der entfernten Restriktionen noch relativ groß ist, dann sollte man andere Auswahlregeln anwenden, um sich der Anzahl  $k$  zu nähern. Oder, wenn das möglich ist, verwendet man eine neue Stichprobe  $u_1, \dots, u_N$  und durchläuft den Algorithmus 4.2.1 erneut, in der Hoffnung, mehr Restriktionen auszusortieren.

Sei  $(b_{N;k}^*, A_{N;k}^*)$  der nach dem Sampling-and-Discarding-Ansatz berechnete optimale Punkt von  $MinVol(\mu, \Sigma)$ . Dann ist  $(m, S) = (A_{N;k}^*{}^{-1} b_{N;k}^*, \frac{1}{\delta^2} A_{N;k}^*{}^{-2})$  eine Lösung des Problems (4.8), siehe S. 80. Über

$$m = \begin{pmatrix} mr \\ mc \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} Sr & 0 \\ 0 & Sc \end{pmatrix}$$

können dann die Eingaben  $m^r, S^r, m^c$  und  $S^c$  für  $RC_\lambda$  generiert werden.

Eine Implementierung mit Beispielrechnung des Lösungsansatzes für  $RC_\lambda$  mit Chance-Constraint findet sich im Kapitel 6.3.

## 5. Semi-infinite Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge

Wie in Kapitel 3 aufgeführt, sind für das Mean-Variance-Portfolio-Optimierungsproblem  $MV_\lambda$  verschiedene Wahlen der Parameter  $\mu \in \mathbb{R}^n$  und  $\Sigma \in \mathbb{S}_+^n$  möglich. Gleiches gilt natürlich auch für den Mittelpunkt  $m \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  mit  $\bar{n} = n + \frac{n(n+1)}{2}$  und die Formmatrix  $S \in \mathbb{S}_+^{\frac{n(n+1)}{2}}$  der Unsicherheitsmenge  $U_\delta$  im Robust-Counterpart  $RC_\lambda$  von  $MV_\lambda$ , siehe Kapitel 4.  $U_\delta$  hängt somit von den Parametern  $m$  und  $S$  ab. Das Skalar  $\delta^2$  soll weiterhin ein  $p$ -Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $\bar{n}$  Freiheitsgraden und  $p \in (0, 1)$  sein und soll hier nicht weiter untersucht werden.

In Abschnitt 4.1 wurden  $m$  und  $S$  als Erwartungswert bzw. als Kovarianzmatrix eines  $\bar{n}$ -dimensionalen Vektors  $u$  aus Zufallsvariablen gesetzt, wobei  $u$  als Schätzer für  $\begin{pmatrix} \mu \\ \text{vecsym}(\Sigma) \end{pmatrix}$  interpretiert wurde. Dafür eignen sich z.B. auch die vorgestellten Schätzer aus Kapitel 3.

Einen anderen Ansatz,  $m$  und  $S$  zu erhalten, wurde in Abschnitt 4.2 gegeben. Sie stammen dort aus einem Optimierungsproblem mit einer Chance-Constraint.

Die impliziten Renditen liefern eine weitere Möglichkeit, den Mittelpunkt  $m$  bei gegebener Formmatrix  $S$  zu bestimmen, siehe S. 62, falls nur eine Unsicherheit bezüglich der erwarteten Rendite modelliert werden soll. Die Menge, aus der  $m$  gewählt wird, ist in diesem Fall durch ein Gleichungs-/Ungleichungssystem gegeben. Ein Auflösen dieses Systems kann sehr aufwändig sein. Mehr noch, die Menge der möglichen  $m$  kann unendlich viele Elemente enthalten, und eine Darstellung aller Lösungen ist dann im Allgemeinen nicht mehr möglich.  $RC_\lambda$  bezüglich aller möglichen  $m$  zu lösen, ist in der Regel nicht wünschenswert und unter Umständen auch nicht möglich.

In diesem Kapitel werden nun der Vektor  $m$  und die Matrix  $S$  als Parameter für die Menge  $U_\delta$  aufgefasst. Das soll durch  $U_\delta(m, S)$  gekennzeichnet werden.

Wie am Anfang von Abschnitt 4.1 bereits angedeutet, kann  $RC_\lambda$  als ein semi-infinites Optimierungsproblem formuliert werden

$$SIP-RC_\lambda : \min_{x \in X, z \in \mathbb{R}} z \quad \text{u.d.N.} \quad (1 - \lambda)\sqrt{x^\top C x} - \lambda x^\top r \leq z, \quad \forall (r, C) \in U_\delta(m, S),$$

mit der Indexmenge  $U_\delta(m, S)$ , wobei die Parameter  $m$  und  $S$  nicht im Sinne der vorherigen Kapitel spezifiziert sein sollen. Hierbei handelt es sich somit um ein parametrisches semi-infinites Optimierungsproblem, genauer um ein *semi-infinites Optimierungsproblem mit parametrischer Indexmenge*. Diese Klasse von Optimie-

## Semi-infinte Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge

rungsproblemen soll im Folgenden untersucht werden.

Wir betrachten dazu eine Familie von parametrischen semi-infiniten Optimierungsproblemen

$$SIP(t) : \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x, y) \leq 0, \quad \forall y \in Y(t),$$

wobei der Parameter  $t \in T$  nur in der Indexmenge vorkommt, und die Menge  $T \subset \mathbb{R}^k$  nichtleer und kompakt ist.

Die Funktionen  $f, g$  sowie die Menge  $X$  sind wie in Abschnitt 2.3 definiert. Die Mengen

$$Y(t) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid w(y, t) \leq 0\}$$

mit zweimal stetig differenzierbarer Funktion  $w : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^q$  sollen für alle  $t \in T$  nichtleer und kompakt sein.

Wir definieren analog zu Abschnitt 2.4

$$M(t) = \{x \in X \mid g(x, y) \leq 0, \quad \forall y \in Y(t)\}$$

als zulässige Menge,

$$v(t) = \min_{x \in M(t)} f(x)$$

als optimalen Wert und

$$S(t) = \{x \in M(t) \mid f(x) \leq v(t)\} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) \mid x \in M(t)\}$$

als Optimalpunktmenge von  $SIP(t)$ ,  $t \in T$ .

## 5.1. Reformulierungen semi-infiniten Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge

Das Problem

$$(1) : \inf_{t \in \mathbb{R}^k} \min_{x \in M(t)} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad t \in T$$

liefert offensichtlich eine Unterschranke an die Optimalwertfunktion  $v(t)$ , und das Problem

$$(2) : \sup_{t \in \mathbb{R}^k} \min_{x \in M(t)} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad t \in T$$

eine Oberschranke.

inf und sup von (1) und (2) können durch min und max unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Abbildung  $M(t)$  und die Funktion  $v(t)$  ersetzt werden, siehe Abschnitt 2.4. Die Probleme (1) und (2) bleiben aber schwer zu lösen. Die Zielfunk-

tionen, in beiden Fällen

$$v(t) = \min_{x \in M(t)} f(x),$$

sind im Allgemeinen nicht differenzierbar, es liegen also nichtglatte Probleme vor.

Wie kann man die Menge  $T$  noch in  $SIP(t)$  einbauen, um mögliche Schranken zu erhalten?

Zunächst möchten wir die Menge  $T$  zu  $M(t)$  hinzufügen und  $t$  als Variable in  $SIP(t)$  aufnehmen

$$(3) : \quad \min_{(x,t) \in X \times T} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x,y) \leq 0, \quad \forall y \in Y(t).$$

Analog könnten wir  $Y(t)$  mit  $T$  erweitern zur Menge

$$\tilde{Y} := \{(y,t) \in \mathbb{R}^m \times T \mid w(y,t) \leq 0\}.$$

Wir erhalten das Problem

$$(4) : \quad \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x,y) \leq 0, \quad \forall (y,t) \in \tilde{Y}.$$

Der Parameter  $t$  wird hierbei unterschiedlich aufgefasst, in Problem (3) als weitere Entscheidungsvariable und in Problem (4) als weitere Indexvariable. Zu erwähnen ist auch, dass (3) ein verallgemeinertes semi-infinites Optimierungsproblem  $GSIP$  ist, da  $t$  als Entscheidungsvariable in die Indexmenge  $Y(t)$  eingeht. (4) ist ein Standard- $SIP$ , die zulässige Menge  $\tilde{Y}$  hängt nicht von der Entscheidungsvariable  $x$  ab.

Wir formen  $SIP(t)$  äquivalent zu

$$SIP(t) : \quad \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad \max_{y \in Y(t)} g(x,y) \leq 0$$

um, siehe Abschnitte 2.3. Die zulässige Menge  $M(t)$  wird durch die Restriktion  $\max_{y \in Y(t)} g(x,y) \leq 0$  beschrieben. Fordern wir nun, dass diese Restriktion mindestens für ein  $t \in T$  gelten soll, so folgt

$$(5) : \quad \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad \exists t \in T : \max_{y \in Y(t)} g(x,y) \leq 0.$$

Wir brauchen also nur ein geeignetes  $t \in T$ , für das die Restriktion erfüllt ist. Fordern wir weiter, dass die Restriktion für alle  $t \in T$  halten soll, so folgt

$$(6) : \quad \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad \forall t \in T : \max_{y \in Y(t)} g(x,y) \leq 0.$$

Wir erhöhen also die Anzahl der Restriktionen. Der Parameter  $t$  wird in (5) und (6) weder als Entscheidungs- noch als Indexvariable aufgefasst.

Betrachten wir das zu  $SIP(t)$  gehörige Problem der unteren Stufe, siehe Ab-

schnitt 2.3,

$$Q(x, t) : \max_{y \in \mathbb{R}^m} g(x, y) \quad \text{u.d.N.} \quad y \in Y(t).$$

Da der Parameter  $t$  nicht in die Zielfunktion  $f$  von  $SIP(t)$  eingeht, formulieren wir die beiden Probleme

$$\underline{Q}(x) : \inf_{t \in \mathbb{R}^k} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \quad \text{u.d.N.} \quad t \in T$$

und

$$\overline{Q}(x) : \sup_{t \in \mathbb{R}^k} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \quad \text{u.d.N.} \quad t \in T$$

und fügen sie als Probleme der unteren Stufe wieder zu  $SIP(t)$  hinzu. Es entstehen

$$(7) : \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad \inf_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0$$

und

$$(8) : \min_{x \in X} f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad \sup_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0.$$

Wieder unter zusätzlichen Voraussetzungen, diesmal an  $Y(t)$ , können  $\inf$  und  $\sup$  von (7) und (8) ersetzt werden durch  $\min$  und  $\max$ , siehe Abschnitt 2.4.

Wir werden im Folgenden die Probleme  $SIP(t)$ ,  $t \in T$ , und (1)-(8) etwas genauer betrachten und Beziehungen zwischen den Optimalwerten und den Optimalpunkt-mengen herleiten. Zu den Problemen (3)-(8) seien dazu folgende zulässige Mengen definiert

$$M_{(3)} := \{(x, t) \in X \times T \mid g(x, y) \leq 0, \forall y \in Y(t)\}$$

$$M_{(4)} := \{x \in X \mid g(x, y) \leq 0, \forall (y, t) \in \tilde{Y}\}$$

$$M_{(5)} := \{x \in X \mid \exists t \in T : \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0\}$$

$$M_{(6)} := \{x \in X \mid \forall t \in T : \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0\}$$

$$M_{(7)} := \{x \in X \mid \min_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0\}$$

$$M_{(8)} := \{x \in X \mid \max_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0\}.$$

Die zulässige Menge des Problems (1) bzw. (2) ist die Menge  $T$ . Weiter bezeichnen

$v_{(1)}, v_{(2)}, \dots, v_{(8)}$  die Optimalwerte und  $S_{(1)}, S_{(2)}, \dots, S_{(8)}$  die Optimalpunkt mengen der Probleme (1)-(8).

**Beispiel 5.1.1.** Gegeben sei

$$X = \mathbb{R}, \quad f(x) = (x + 1)^2, \quad g_1(x, y) = -e^x - y, \quad g_2(x, y) = x - 1, \\ w_1(y, t) = ty - 1, \quad w_2(y, t) = y - 1, \quad T := \{t \in \mathbb{R} \mid (t + 2)^2 - 1 = 0\}.$$

Dann gilt:

$$T = \{-1, -3\}, \quad Y(-3) = [-\frac{1}{3}, 1], \quad Y(-1) = [-1, 1],$$

$$\tilde{Y} = ([-\frac{1}{3}, 1] \times \{-3\}) \cup ([-1, 1] \times \{-1\}) = ([-1, -\frac{1}{3}] \times \{-1\}) \cup ([-\frac{1}{3}, 1] \times \{-3, -1\}).$$

Die Lösungen der obigen Probleme sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Problem	zulässige Menge	optimaler Punkt	optimaler Wert
$SIP(-3)$	$[\log(\frac{1}{3}), 1]$	-1	0
$SIP(-1)$	$[0, 1]$	0	1
(1)	$\{-3, -1\}$	-3	0
(2)	$\{-3, -1\}$	-1	1
(3)	$([0, 1] \times \{-1\}) \cup ([\log(\frac{1}{3}), 1] \times \{-3\})$	$(-1, -3)$	0
(4)	$[0, 1]$	0	1
(5)	$[\log(\frac{1}{3}), 1]$	-1	0
(6)	$[0, 1]$	0	1
(7)	$[\log(\frac{1}{3}), 1]$	-1	0
(8)	$[0, 1]$	0	1

**Tabelle 1.:** Lösungstabelle zum Beispiel 5.1.1

Es ist zu bemerken, dass  $M_{(4)} = M_{(6)} = M_{(8)} = [0, 1]$  bzw.  $M_{(5)} = M_{(7)} = [\log(\frac{1}{3}), 1]$  gilt, und dass die Vereinigung der Teilbereiche der  $x$ -Komponente aus der zulässigen Menge von Problem (3)  $[\log(\frac{1}{3}), 1]$  ergibt. Des Weiteren haben die Probleme (1) und (3) sowie die Probleme (2) und (4) den gleichen Optimalwert

errechnet.

Aus dem obigen Beispiel lassen sich Zusammenhänge zwischen den Problemen (1),(3),(5) und (7) bzw. den Problemen (2),(4),(6) und (8) vermuten.

## 5.2. Unter- und Oberschranken für semi-infinte Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge

In den nächsten drei Sätzen werden nun die zentralen Aussagen des Kapitels angegeben und in den Bemerkungen 5.2.4 und 5.2.6 die Schlussfolgerungen zusammengefasst. Bevor diese Zusammenhänge formuliert und bewiesen werden, soll auf die Definition 2.2.6 sowie die beiden Lemmatas 2.2.5 und 2.2.7, die die Äquivalenzen zwischen Optimierungsproblemen beschreiben, hingewiesen werden.

**Satz 5.2.1.** *Folgende Aussagen gelten:*

1.  $\text{pr}_x M_{(3)} = M_{(5)} = M_{(7)}$ ,
2.  $M_{(4)} = M_{(6)} = M_{(8)}$ ,
3.  $M_{(5)} = \bigcup_{t \in T} M(t)$ ,
4.  $M_{(6)} = \bigcap_{t \in T} M(t)$ .

**Beweis.** 1. Wir zeigen zunächst  $\text{pr}_x M_{(3)} = M_{(5)}$ .

Es gilt

$$\begin{aligned} \text{pr}_x M_{(3)} &= \{x \in X \mid \exists t \in T : (x, t) \in M_{(3)}\} \\ &= \{x \in X \mid \exists t \in T : g(x, y) \leq 0, \forall y \in Y(t)\} \\ &= \{x \in X \mid \exists t \in T : \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0\} \\ &= M_{(5)}. \end{aligned}$$

Wir zeigen weiter  $M_{(5)} = M_{(7)}$ .

Sei  $x \in M_{(5)}$ , d.h. es gibt ein  $t \in T$  mit  $\max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0$ . Insbesondere gibt es ein  $\hat{t} \in T$  mit  $\min_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) = \max_{y \in Y(\hat{t})} g(x, y) \leq 0$ . Das wiederum bedeutet, dass  $x \in M_{(7)}$  ist.

Sei  $x \in M_{(7)}$ , d.h.  $\min_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0$ . Es existiert somit ein  $\hat{t} \in T$  mit  $\max_{y \in Y(\hat{t})} g(x, y) \leq 0$  und  $x$  ist in  $M_{(5)}$ .

Damit ist Aussage 1. bewiesen.

2. Wir zeigen zunächst  $M_{(6)} = M_{(8)}$ .

Es sei  $x \in M_{(6)}$ , d.h. es gilt  $\max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0$  für alle  $t \in T$ . Es folgt  $\max_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0$ , und  $x$  ist in  $M_{(8)}$ . Die Rückrichtung folgt analog.

Wir zeigen weiter  $M_{(4)} = M_{(8)}$ .

Es gilt

$$\max_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \stackrel{(a)}{=} \max_{t \in T} \max_{y \in \bigcup_{t \in T} Y(t)} g(x, y) \stackrel{(b)}{=} \max_{y \in \text{pr}_y \tilde{Y}} g(x, y) \stackrel{(c)}{=} \max_{(y, t) \in \tilde{Y}} g(x, y)$$

und damit ist die Behauptung aus 2. bewiesen. Es fehlen noch die Beweise zu (a), (b) und (c).

(a) Nach Vereinigungslemma 2.2.5 Aussage 2 folgt die Behauptung.

(b) Zu zeigen ist  $\text{pr}_y \tilde{Y} = \bigcup_{t \in T} Y(t)$ .

Es sei  $y$  in  $\text{pr}_y \tilde{Y}$ . Es gibt also ein  $\hat{t} \in T$  mit  $w(y, \hat{t}) \leq 0$ , d.h.  $y \in Y(\hat{t})$  und es folgt  $y \in \bigcup_{t \in T} Y(t)$ . Die Rückrichtung folgt wieder analog und damit die Behauptung.

(c) Die Behauptung folgt mit Projektionslemma 2.2.7 Aussage 4 mit  $t$ -unabhängiger Zielfunktion  $g(x, y)$ .

3. Zu zeigen ist  $M_{(5)} = \bigcup_{t \in T} M(t)$ .

Sei  $x \in M_{(5)}$ , d.h. es gibt ein  $\hat{t} \in T$  mit  $\max_{y \in Y(\hat{t})} g(x, y) \leq 0$ . Es gilt also  $x \in M(\hat{t})$

und  $x$  ist somit in  $\bigcup_{t \in T} M(t)$ .

Sei  $x \in \bigcup_{t \in T} M(t)$ , d.h. es gibt ein  $\hat{t} \in T$  mit  $x \in M(\hat{t})$  bzw.  $\max_{y \in Y(\hat{t})} g(x, y) \leq 0$ .

Damit ist  $x \in M_{(5)}$ .

Die Behauptung ist bewiesen.

4. Zu zeigen ist  $M_{(6)} = \bigcap_{t \in T} M(t)$ .

Es sei  $x \in M_{(6)}$ , d.h. für alle  $t \in T$  gilt  $\max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq 0$ . Aber auch für alle

$t \in T$  ist  $x \in M(t)$  und somit  $x \in \bigcap_{t \in T} M(t)$ . Die Rückrichtung folgt wieder

analog und damit die Behauptung. □

Unter Berücksichtigung von Satz 5.2.1 der zu  $\text{pr}_x M_{(3)} = \bigcup_{t \in T} M(t)$  führt, kann nun folgendes Ergebnis geschlussfolgert werden.

**Satz 5.2.2.** *Für die Probleme (1) und (3) gelten folgende Aussagen.*

1. Sei  $(x^*, t^*)$  ein optimaler Punkt von (3), dann ist  $t^*$  ein optimaler Punkt von (1).
2. Sei  $t^*$  ein optimaler Punkt von (1), dann gibt es ein  $x^* \in M(t^*)$ , so dass  $(x^*, t^*)$  ein optimaler Punkt von (3) ist.
3. Es gilt  $v_{(1)} = v_{(3)} = f(x^*)$ .

*Semi-infinte Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge*

**Beweis.** 1. Sei  $(x^*, t^*)$  ein optimaler Punkt von (3), d.h.  $x^* \in M_{(3)}$ , also  $x^* \in X$ ,  $t^* \in T$  und  $g(x^*, y) \leq 0$  für alle  $y \in Y(t^*)$  und

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \forall (x, t) \in M_{(3)}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} f(x^*) \leq f(x) \quad \forall (x, t) \in M_{(3)} &\stackrel{2.2.7}{\Leftrightarrow} f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{pr}_x M_{(3)} \\ &\Leftrightarrow f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \bigcup_{t \in T} M(t) \\ &\Leftrightarrow f(x^*) \leq f(x) \quad \forall t \in T \quad \forall x \in M(t) \\ &\Leftrightarrow f(x^*) \leq \min_{x \in M(t)} f(x) \quad \forall t \in T. \quad (*) \end{aligned}$$

Die Bedingung  $g(x^*, y) \leq 0$  für alle  $y \in Y(t^*)$  bedeutet außerdem, dass  $x^* \in M(t^*)$  ist und somit

$$f(x^*) \geq \min_{x \in M(t^*)} f(x). \quad (**)$$

(\*) und (\*\*) zusammen ergeben dann

$$f(x^*) = \min_{x \in M(t^*)} f(x)$$

und eingesetzt

$$\min_{x \in M(t^*)} f(x) \leq \min_{x \in M(t)} f(x) \quad \forall t \in T.$$

$t^*$  ist damit optimaler Punkt von (1).

2. Sei  $t^*$  optimaler Punkt von (1) und  $x^* \in M(t^*)$  mit

$$f(x^*) = \min_{x \in M(t^*)} f(x) = v_{(1)}. \quad (+)$$

Es folgt  $x^* \in X$ ,  $t^* \in T$  und  $g(x^*, y) \leq 0$  für alle  $y \in Y(t^*)$  und damit

$$(x^*, t^*) \in M_{(3)}. \quad (++)$$

Weiter muss gelten

$$\begin{aligned}
 f(x^*) = \min_{x \in M(t^*)} f(x) \leq \min_{x \in M(t)} f(x) \quad \forall t \in T &\Leftrightarrow f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in M(t) \quad \forall t \in T \\
 &\Leftrightarrow f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \bigcup_{t \in T} M(t) \\
 &\Leftrightarrow f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{pr}_x M_{(3)} \\
 &\stackrel{2.2.7}{\Leftrightarrow} f(x^*) \leq f(x) \quad \forall (x, t) \in M_{(3)},
 \end{aligned}$$

d.h. zusammen mit (++) ist  $(x^*, t^*)$  optimaler Punkt von (3).

3. Mit (+) aus 2 gilt zunächst

$$f(x^*) = v_{(1)}$$

und mit  $\text{pr}_x M_{(3)} = \bigcup_{t \in T} M(t)$

$$\begin{aligned}
 v_{(1)} &= \min_{t \in T} \min_{x \in M(t)} f(x) \\
 &\stackrel{2.2.5}{=} \min_{x \in \bigcup_{t \in T} M(t)} f(x) \\
 &= \min_{x \in \text{pr}_x M_{(3)}} f(x) \\
 &\stackrel{2.2.7}{=} \min_{(x, t) \in M_{(3)}} f(x) \\
 &= v_{(3)}.
 \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

Für den folgenden Satz sind die Aussagen 2 und 4 von Satz 5.2.1 von Bedeutung. Eine Schlussfolgerung ist unter anderem, dass  $M_{(4)} = \bigcap_{t \in T} M(t)$  gilt.

**Satz 5.2.3.** Sei  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} \neq \emptyset$ , d.h. es gibt mindestens ein  $t \in T$ , so dass ein optimaler Punkt von  $SIP(t)$  in  $M_{(4)}$  liegt.

Für die Probleme (2) und (4) gelten dann folgende Aussagen.

1. Sei  $x^*$  ein optimaler Punkt von (4), dann gibt es ein  $t^* \in T$  mit  $x^* \in S(t^*)$ , so dass  $t^*$  ein optimaler Punkt von (2) ist.
2. Sei  $t^*$  ein optimaler Punkt von (2), dann existiert ein  $x^* \in S(t^*)$ , so dass  $x^*$  ein optimaler Punkt von (4) ist.
3. Es gilt  $v_{(2)} = v_{(4)} = f(x^*)$ .

**Beweis.** 1. Sei  $x^*$  optimaler Punkt von (4), d.h.  $f(x^*) = v_{(4)}$ . Es gilt zu zeigen: es gibt ein  $t^* \in T$ , so dass

$$x^* \in S(t^*), \text{ d.h. } f(x^*) = v(t^*) = \min_{x \in M(t^*)} f(x) \quad (a)$$

und

$$v(t^*) = v_{(2)} = \max_{t \in T} v(t) = \max_{t \in T} \min_{x \in M(t)} f(x) \quad (b)$$

ist.

- (a) Angenommen es existiert kein  $t \in T$ , so dass  $f(x^*) = \min_{x \in M(t)} f(x)$  ist. Da  $x^* \in M_{(4)} = \bigcap_{t \in T} M(t)$  ist, gilt dann

$$f(x^*) > v(t), \quad \forall t \in T. \quad (*)$$

Da  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} \neq \emptyset$  gilt, existiert ein  $\hat{x} \in M_{(4)}$  und ein  $\hat{t} \in T$ , so dass  $\hat{x} \in S(\hat{t}) \subset M(\hat{t})$  mit  $f(\hat{x}) = v(\hat{t})$  ist. Daraus folgt mit  $x^* \in M(\hat{t})$ , dass  $f(\hat{x}) \leq f(x^*)$  sowie  $\hat{x} \in M_{(4)}$  und damit  $f(x^*) \leq f(\hat{x})$ . Schlussendlich ist  $f(x^*) = f(\hat{x}) = v(\hat{t})$  und das ist ein Widerspruch zu (\*).

Es gibt also ein  $t^* \in T$ , so dass  $f(x^*) = \min_{x \in M(t^*)} f(x) = v(t^*)$ , d.h.  $x^*$  ist ein optimaler Punkt von (4), also  $x^* \in S_{(4)}$ , und von  $SIP(t^*)$ , also  $x^* \in S(t^*)$ . Es gilt

$$v_{(4)} = f(x^*) = v(t^*).$$

- (b) Es gilt immer  $v(t^*) \leq \max_{t \in T} v(t)$ .

Angenommen es gilt

$$v(t^*) < \max_{t \in T} v(t), \quad (**)$$

dann existiert ein  $\hat{t} \in T$  mit  $\hat{t} \neq t^*$  und  $v(\hat{t}) = \max_{t \in T} v(t)$  sowie ein  $\hat{x} \in M(\hat{t})$  mit  $f(\hat{x}) = \min_{x \in M(\hat{t})} f(x) = v(\hat{t})$ . Damit hat man  $f(\hat{x}) = \max_{t \in T} v(t)$ .

Da  $x^* \in M(\hat{t})$  ist, folgt  $f(x^*) \geq f(\hat{x})$ . Das ist gleichbedeutend mit  $v(t^*) \geq \max_{t \in T} v(t)$  und ein Widerspruch zu (\*\*).

Damit ist  $v(t^*) = \max_{t \in T} v(t)$ , d.h.  $t^*$  optimaler Punkt von (2).

Die Behauptung 1 ist bewiesen.

2. Sei  $t^*$  optimaler Punkt von (2), d.h.  $v(t^*) \geq v(t)$  für alle  $t \in T$ .

Zu zeigen ist nun, dass ein  $x^* \in S(t^*)$  existiert, so dass  $x^*$  optimaler Punkt von (4) ist. Der Beweis erfolgt in 2 Teilen.

Zuerst wird gezeigt, dass ein optimaler Punkt von  $SIP(t^*)$  in  $M_{(4)}$  liegt, falls  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} \neq \emptyset$  gilt.

Es folgt aus  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} \neq \emptyset$ , dass ein  $\hat{t} \in T$  und ein  $x^* \in M(\hat{t})$  mit  $f(x^*) = v(\hat{t})$  existieren, so dass  $x^* \in M_{(4)} = \bigcap_{t \in T} M(t)$  gilt.

Da  $t^*$  optimaler Punkt von (2) ist, gilt weiter

$$f(x^*) = v(\hat{t}) \leq v(t^*),$$

und da  $x^* \in M(t^*)$  auch

$$v(t^*) \leq f(x^*).$$

Beides zusammen ergibt  $v(t^*) = f(x^*)$ , d.h.  $x^*$  ist auch optimaler Punkt von  $SIP(t^*)$ , und damit liegt ein optimaler Punkt von  $SIP(t^*)$  in  $M_{(4)}$ .

Zuletzt wird gezeigt, dass der optimale Punkt  $x^* \in M_{(4)}$  von  $SIP(t^*)$  von oben auch ein optimaler Punkt von  $M_{(4)}$  ist.

Dabei gilt immer

$$v_{(4)} \leq f(x^*).$$

Angenommen es gilt  $v_{(4)} < f(x^*)$ , d.h. es existiert ein  $\hat{x} \in M_{(4)} = \bigcap_{t \in T} M(t)$

mit

$$f(\hat{x}) = v_{(4)} < f(x^*). \quad (+)$$

Da  $\hat{x} \in M(t^*)$  ist, gilt  $f(x^*) = v(t^*) \leq f(\hat{x})$ , das ist ein Widerspruch zu (+).  
Damit muss  $v_{(4)} = f(x^*)$  und  $x^*$  optimaler Punkt von (4) sein.

Aussage 2 ist somit bewiesen.

3. Aus 2 ist bereits  $v_{(4)} = f(x^*)$  bekannt.

Sei nun  $x^* \in M_{(4)} = \bigcap_{t \in T} M(t)$ . Dann ist  $x^* \in M(t)$  für alle  $t \in T$ , d.h.

$$\min_{x \in M(t)} f(x) \leq f(x^*), \quad \forall t \in T.$$

Da  $x^*$  beliebig gewählt war, gilt weiter

$$\min_{x \in M(t)} f(x) \leq \min_{x \in M_{(4)}} f(x) = v_{(4)}, \quad \forall t \in T,$$

und insbesondere

$$v_{(2)} = \max_{t \in T} v(t) = \max_{t \in T} \min_{x \in M(t)} f(x) \leq \min_{x \in M_{(4)}} f(x). \quad (++)$$

Angenommen es gilt  $v_{(2)} < v_{(4)}$ , d.h. es ist  $v(t) < f(x)$  für alle  $x \in M_{(4)}$  und alle  $t \in T$ . Daraus folgt dann, dass  $S(t) \cap M_{(4)} = \emptyset$  für alle  $t \in T$  ist. Mit obiger Voraussetzung  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} \neq \emptyset$  liegt hier ein Widerspruch vor. Somit hat man  $v_{(2)} = v_{(4)}$  und es gilt die Behauptung. □

**Bemerkung 5.2.4.** 1. Sei  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} \neq \emptyset$  und  $x \in \bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)}$ . Dann ist

$$f(x) = \max_{t \in T} \min_{x \in M(t)} f(x).$$

Alle Punkte aus  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)}$  sind somit in  $S_{(2)}$ , also optimale Punkte für das Problem (2). Mit dieser Bedingung gilt dann auch

$$v_{(2)} = v_{(4)}.$$

2. Sei im Gegensatz  $\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} = \emptyset$ . Dann gilt für alle  $x \in S(t)$  und für alle  $t \in T$

$$x \notin M_{(4)} = \bigcap_{t \in T} M(t).$$

Es liegt kein optimaler Punkt eines Problems  $SIP(t)$ ,  $t \in T$ , in der Vereinigung aller zulässigen Mengen der  $SIP(t)$ . Für die Optimalwerte  $v_{(2)}$ ,  $v_{(4)}$  und  $v(t)$  muss gelten

$$v(t) < v_{(4)}, \forall t \in T,$$

und somit

$$v_{(2)} = \max_{t \in T} v(t) < v_{(4)}.$$

$M_{(4)}$  ist damit auch eine echte Teilmenge von allen zulässigen Mengen  $M(t)$  der  $SIP(t)$ ,  $t \in T$ , d.h.

$$M_{(4)} \subsetneq M(t), \forall t \in T.$$

Die Sachverhalte der letzten Bemerkung werden nochmal im nächste Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 5.2.5.** Gegeben sei

$$X = [-2, 2], \quad f(x) = \cos(\pi x) + x, \quad g(x, y) = xy + a, a \in \mathbb{R}, \quad w_1(y, t) = 1 - ty, \\ w_2(y, t) = -3 + ty, \quad T := \{t \in \mathbb{R} \mid t^2 - 1 = 0\}.$$

Dann gilt:

$$T = \{-1, 1\}, \quad Y(-1) = [-3, -1], \quad Y(1) = [1, 3],$$

$$\tilde{Y} = ([-3, 1] \times \{-1\}) \cup ([1, 3] \times \{1\}).$$

1. Sei  $a = -3$ , d.h.  $g(x, y) = yx - 3$ . Es folgt

$$\begin{aligned} M(-1) &= [-1, 2], & v(-1) &= -2, & S(-1) &= \{-1\}, \\ M(1) &= [-2, 1], & v(1) &= -2.051, & S(1) &= \{-1.103\}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{pr}_x M_{(3)} &= M_{(5)} = M_{(7)} = \bigcup_{t \in T} M(t) = [-2, 2], \\ M_{(4)} &= M_{(6)} = M_{(8)} = \bigcap_{t \in T} M(t) = [-1, 1]. \end{aligned}$$

Für die Zusatzbedingung aus Satz 5.2.3 gilt

$$\bigcup_{t \in T} S(t) \cap M_{(4)} = (\{-1\} \cup \{-1.1031\}) \cap [-1, 1] = \{-1\},$$

sie ist also erfüllt.

Die Optimalwerte und die Optimalpunktmen gen der Probleme (1)-(8) berechnen sich zu

$$\begin{aligned} v_{(1)} &= -2.051, & S_{(1)} &= \{1\}, \\ v_{(2)} &= -2, & S_{(2)} &= \{-1\} \\ v_{(3)} &= -2.051, & S_{(3)} &= \{(-1.103, 1)\} \\ v_{(4)} &= -2, & S_{(4)} &= \{-1\} \\ v_{(5)} &= -2.051, & S_{(5)} &= \{-1.103\} \\ v_{(6)} &= -2, & S_{(6)} &= \{-1\}, \\ v_{(7)} &= -2.051, & S_{(7)} &= \{-1.103\}, \\ v_{(8)} &= -2, & S_{(8)} &= \{-1\}. \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$v(1) = v_{(1)} = v_{(3)} = v_{(5)} = v_{(7)} \quad \text{und} \quad v(-1) = v_{(2)} = v_{(4)} = v_{(6)} = v_{(8)}.$$

2. Sei  $a = 0$ , d.h.  $g(x, y) = yx$ . Es folgt

$$\begin{aligned} M(-1) &= [0, 2], & v(-1) &= -0.051, & S(-1) &= \{0.897\}, \\ M(1) &= [-2, 0], & v(1) &= -2.051, & S(1) &= \{-1.103\}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{pr}_x M_{(3)} &= M_{(5)} = M_{(7)} = \bigcup_{t \in T} M(t) = [-2, 2], \\ M_{(4)} &= M_{(6)} = M_{(8)} = \bigcap_{t \in T} M(t) = \{0\}. \end{aligned}$$

Für die Zusatzbedingung aus Satz 5.2.3 gilt

$$\bigcup_{t \in T} M^*(t) \cap M_{(4)} = (\{0.897\} \cup \{-1.1031\}) \cap \{0\} = \emptyset,$$

sie ist also verletzt.

Die Optimalwerte und die Optimalpunktmen gen der Probleme (1)-(8) berechnen sich zu

nen sich zu

$$\begin{array}{ll}
 v_{(1)} = -2.0511, & S_{(1)} = \{1\}, \\
 v_{(2)} = -0.051, & S_{(2)} = \{-1\} \\
 v_{(3)} = -2.0511, & S_{(3)} = \{(-1.103, 1)\} \\
 v_{(4)} = 1, & S_{(4)} = \{0.897\} \\
 v_{(5)} = -2.0511, & S_{(5)} = \{-1.103\} \\
 v_{(6)} = 1, & S_{(6)} = \{0.897\}, \\
 v_{(7)} = -2.0511, & S_{(7)} = \{-1.103\}, \\
 v_{(8)} = 1, & S_{(8)} = \{0.897\}.
 \end{array}$$

Es gilt somit

$$v(1) = v_{(1)} = v_{(3)} = v_{(5)} = v_{(7)} \quad \text{und} \quad v(-1) = v_{(2)} < v_{(4)} = v_{(6)} = v_{(8)}.$$

Obige Sätze 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 und Bemerkung 5.2.4 liefern Unterschranken bzw. Oberschranken an die Probleme  $SIP(t)$ ,  $t \in T$ , und können zusammengefasst werden zu:

**Bemerkung 5.2.6.** 1. Für die Probleme (1)-(8) und  $SIP(t)$ ,  $t \in T$ , gelten folgende Aussagen:

$$\begin{array}{l}
 v(t) \geq v_{(1)} = v_{(3)} = v_{(5)} = v_{(7)}, \quad \forall t \in T, \\
 v(t) \leq v_{(2)} \leq v_{(4)} = v_{(6)} = v_{(8)}, \quad \forall t \in T.
 \end{array}$$

Die Probleme (1), (3), (5), (7) berechnen Unterschranken und die Probleme (2), (4), (6), (8) Oberschranken an die Probleme  $SIP(t)$ ,  $t \in T$ . Dabei kann die Lücke zwischen der Oberschranke von (2) zu einer Lösung eines  $SIP(t)$  geringer als die Lücke zwischen den Oberschranken von (4), (6), (8) zu einer Lösung des  $SIP(t)$  sein.

2. Sei zusätzlich die Bedingung  $\bigcup_{t \in T} M^*(t) \cap M_{(6)} \neq \emptyset$  gegeben. Für die Probleme (2), (4), (6) und (8) kann die Aussage aus 1 verschärft werden zu:

$$v(t) \leq v_{(2)} = v_{(4)} = v_{(6)} = v_{(8)}, \quad \forall t \in T.$$

Die Oberschranken weisen also dieselbe Lücke auf.

Falls  $\bigcup_{t \in T} M^*(t) \cap M_{(6)} = \emptyset$  gilt, so ist nach Bemerkung 5.2.4 der Optimalwert des Problems (2) echt kleiner als die Optimalwerte der Probleme (4), (6), (8)

$$v_{(2)} < v_{(4)} = v_{(6)} = v_{(8)}.$$

3. Für die Probleme (4), (5), (6), (7) und (8) gelten folgende Aussagen:

$$S_{(5)} = S_{(7)}$$

und

$$S_{(4)} = S_{(6)} = S_{(8)}.$$

4. Das Problem (3) ist äquivalent zu (5) im Sinne von Projektionslemma 2.2.7.
5. Das Problem (1) ist äquivalent zu (3) im Sinne von Satz 5.2.2.
6. Das Problem (2) ist äquivalent zu (4) im Sinne von Satz 5.2.3.



## 6. Implementierungen

In diesem letzten Kapitel sollen einige Implementierungen der Mean-Varianz-Portfolio-Optimierung und der robusten Ansätze aus Kapitel 4 präsentiert werden. Die Implementierungen erfolgten in *Matlab Version R2012a (7.14.0.739) 64 Bit* auf einem Linux-Kernel *Version 3.2.0-29-generic (Ubuntu/Linaro 4.63-1ubuntu5 64 Bit)* mit dem Prozessor *AMD Athlon(tm) 64 X2 Dual Core Processor 4600+ x 2* und *3,7 GiB* Speicher.

Als Testbeispiel diente ein Finanzmarkt aus [41, Kapitel 2]. Dieser Finanzmarkt umfasst die 8 Klassen Kapitalmarkt Kanada (CAN), Kapitalmarkt Frankreich (FRA), Kapitalmarkt Deutschland (GER), Kapitalmarkt Japan (JPN), Kapitalmarkt Großbritannien (GB), Kapitalmarkt USA (US), USA Staatsanleihenmarkt (USB) und EURO Staatsanleihenmarkt (EURO). In Tabelle 2 sind die jeweiligen Nettorenditen und Standardabweichungen der Klassen angegeben.

Markt	Nettorendite in %	Standardabweichung in %
CAN	0.39	5.50
FRA	0.88	7.03
GER	0.53	6.22
JPN	0.88	7.04
GB	0.79	6.01
US	0.71	4.30
USB	0.25	2.01
EURO	0.27	1.56

**Tabelle 2.:** Nettorenditen und Standardabweichungen der Märkte

Dabei berechnet sich die Nettorendite aus dem Mittelwert der monatlichen Renditen aus dem Zeitraum Januar 1987 bis Dezember 1995, verringert um eine Risk-free-Rate. Diese Risk-free-Rate modelliert risikolose Zinssätze im Finanzmarkt über dem besagten Zeitraum. Nettorenditen reagieren stabiler auf schwankende risikolose Zinssätze als reale Renditen, und die optimalen Portfolios bezüglich der Nettorenditen müssen nicht mehr mit risikolosen Finanzprodukten verglichen werden, um optimale Anlageentscheidungen zu treffen. Die Korrelationen der Klassen bezüglich der Nettorenditen ist in Tabelle 3 gegeben.

## 6. Implementierungen

	CAN	FRA	GER	JPN	GB	US	USB	EURO
CAN	1	0.41	0.30	0.25	0.58	0.71	0.26	0.33
FRA	0.41	1	0.62	0.42	0.54	0.44	0.22	0.26
GER	0.30	0.62	1	0.35	0.48	0.34	0.27	0.28
JPN	0.25	0.42	0.35	1	0.40	0.22	0.14	0.16
GB	0.58	0.54	0.48	0.40	1	0.56	0.25	0.29
US	0.71	0.44	0.34	0.22	0.56	1	0.36	0.42
USB	0.26	0.22	0.27	0.14	0.25	0.36	1	0.92
EURO	0.33	0.26	0.28	0.16	0.29	0.42	0.92	1

**Tabelle 3.:** Korrelationen der Märkte

Mit diesen Daten kann die Kovarianzmatrix

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.0030 & 0.0016 & 0.0010 & 0.0010 & 0.0019 & 0.0017 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0016 & 0.0049 & 0.0027 & 0.0021 & 0.0023 & 0.0013 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0010 & 0.0027 & 0.0039 & 0.0015 & 0.0018 & 0.0009 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0010 & 0.0021 & 0.0015 & 0.0050 & 0.0017 & 0.0007 & 0.0002 & 0.0002 \\ 0.0019 & 0.0023 & 0.0018 & 0.0017 & 0.0036 & 0.0014 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0017 & 0.0013 & 0.0009 & 0.0007 & 0.0014 & 0.0018 & 0.0003 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0004 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0002 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

aufgestellt werden. Die Nettorenditen, im Folgenden zusammengefasst im Vektor

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} 0.39 \\ 0.88 \\ 0.53 \\ 0.88 \\ 0.79 \\ 0.71 \\ 0.25 \\ 0.27 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

und die Kovarianzmatrix  $\Sigma$  können dann als Eingabe für  $MV_\lambda$  dienen.

In Matlab wird z.B. die Funktion `frontcon` zur Verfügung gestellt, um effiziente Ränder und effiziente Portfolios auf Grundlage von  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\Sigma}$  zu bestimmen. Der Ablauf in `frontcon` ist dabei folgender: zuerst berechnet `frontcon` die Portfoliorenditen vom Minimum-Varianz-Portfolio und vom Maximum-Return-Portfolio. Dann werden zwischen beiden Portfoliorenditen weitere Portfoliorenditewerte erzeugt. Die Anzahl kann vom Benutzer vorgegeben werden. Diese Renditewerte werden dann als Anspruchsniveaus in das Optimierungsproblem (3.1) auf S. 54 eingesetzt. Durch Lösen erhält man effiziente Portfolios sowie die zugehörigen Portfoliorisiken. Die

## 6.1. Implementierung des Optimierungsproblems $MV_\lambda$

Portfoliorenditen und die Portfoliorisiken ergeben dann den effizienten Rand. Vertiefende Erläuterungen für Matlab-Funktionen, die mit Mean-Varianz-Portfolio-Optimierungsproblemen umgehen können, finden sich z.B. in [13, Kapitel 1.3.2].

Die Abbildung 1 im Abschnitt 3.1 wurde mit `frontcon` und den Eingaben  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\Sigma}$  in Matlab erstellt. Die Abbildung 2 wurde auch mittels Ausgaben von `frontcon` angefertigt. Dort sind der Verlauf der effizienten Portfolios, die `frontcon` berechnet hat, sowie die Verläufe der Portfoliorisiken und der Portfoliorenditen aller effizienten Portfolios eingezeichnet. Die zu den effizienten Portfolios gehörigen Zielfunktionswerte von  $MV_\lambda$  können allerdings nicht berechnet werden, da `frontcon` keine Rückschlüsse auf den Trade-Off-Parameter  $\lambda \in [0, 1]$  zulässt. Ausnahmen bilden die Werte  $\lambda = 0$  und  $\lambda = 1$ .

Der Vektor  $\hat{\mu}$  und die Matrix  $\hat{\Sigma}$  werden in den anschließenden Kapiteln die Datengrundlage liefern. Mit ihrer Hilfe werden optimale Portfolios von  $MV_\lambda$ ,  $RC_\lambda$  und  $RC_\lambda$  mit  $MinVol(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  berechnet und grafisch gegenübergestellt. Das Vorgehen ist dabei wie folgt:

$\hat{\mu}$  und  $\hat{\Sigma}$  bilden die Charakteristika des Finanzmarktes, bestehend aus den 8 Finanzmarktklassen. Sie werden direkt für  $\mu$  und  $\Sigma$  in  $MV_\lambda$  eingesetzt. Wir setzen weiterhin  $S = 216$  für den betrachteten Zeitraum. Für  $RC_\lambda$  können aus [51]  $m^r$ ,  $S^r$ ,  $m^c$  und  $S^c$  mit

$$\begin{aligned} m^r &= \hat{\mu}, \\ S^r &= \frac{1}{S} \hat{\Sigma}, \\ m^c &= \text{vecsymb}(\hat{\Sigma}), \\ S^c &= \frac{1}{S-1} \hat{D}_8 (I_{64} + K_{88}) \left( \hat{\Sigma} \otimes \hat{\Sigma} \right) \hat{D}_8^\top \end{aligned}$$

entnommen werden, wobei  $K_{88}$  eine Kommutationsmatrix ist und  $\otimes$  das Kronecker-Produkt zweier Matrizen darstellt<sup>21</sup>. Die Blockmatrix  $\hat{D}_8$  kommt hier über Formel (2.4) ins Spiel. Im letzten Fall wird das Problem  $MinVol(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  die Vektoren und Matrizen  $m^r$ ,  $S^r$ ,  $m^c$  und  $S^c$  liefern.

Es sei daran erinnert, dass bei  $\lambda$ -Werten nahe bei 0 die Minimierung der Portfoliorendite vernachlässigbar ist und bei  $\lambda$ -Werten nahe bei 1 die Minimierung des Portfoliorisikos so gut wie keine Rolle spielt.

## 6.1. Implementierung des Optimierungsproblems $MV_\lambda$

Das Problem

$$MV_\lambda : \min_{x \in \mathbb{R}^n} (1 - \lambda) \sqrt{x^\top \Sigma x} - \lambda x^\top \mu \quad \text{u.d.N.} \quad x^\top e = 1, x \geq 0$$

<sup>21</sup>Kommutationsmatrizen  $K_{nm}$  sind implizit über die Gleichung  $\text{vec}(A) = K_{nm} \text{vec}(A^\top)$  für  $(n, m)$ -Matrizen  $A$  definiert. Für das Kronecker-Produkt siehe [39, Übung 5.8.15].

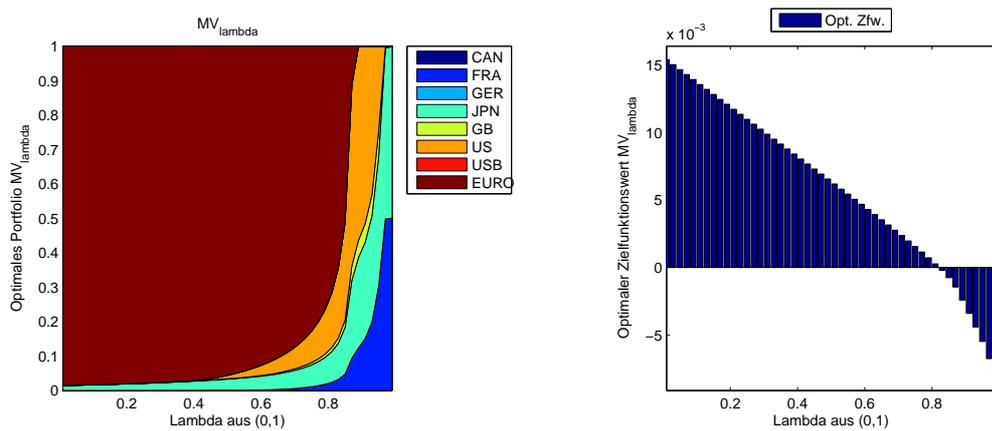
## 6. Implementierungen

ist bezüglich der Entscheidungsvariablen  $x \in \mathbb{R}^n$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$  ein konvexes Optimierungsproblem mit strikt konvexer Zielfunktion, siehe Korollar 3.1.5. Die zulässige Menge von  $MV_\lambda$  erfüllt zudem mit  $x_i = \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n$ , die Slater-Bedingung. Zum Lösen genügt somit ein Solver, der lokale Minimalpunkte bestimmt, da nach [29, Theorem 2.2.13 und Theorem 4.2.2] für konvexe Probleme jeder lokale Minimalpunkt auch ein globaler Minimalpunkt ist.

Matlab stellt die Funktion `fmincon` zur Verfügung, um lokale Minimalpunkte von restringierten nichtlinearen Optimierungsproblemen zu berechnen. `fmincon` verfügt dabei über die Algorithmenansätze Trust-Region, Active-Set, Sequential-Quadratic-Programming und Interior-Point. Interessierte Leser seien für ausführliche Beschreibungen der Ansätze auf [3] verwiesen. Zum Lösen von  $MV_\lambda$  wurde an dieser Stelle der Interior-Point-Ansatz als Solver in `fmincon` eingestellt.

Wir setzen hier nun  $\mu = \hat{\mu}$  und  $\Sigma = \hat{\Sigma}$  in  $MV_\lambda$ . Für  $\lambda \in \{0.01, 0.03, 0.05, \dots, 0.99\}$  wurden die optimalen Minimalpunkte und die optimalen Zielfunktionswerte von  $MV_\lambda$  mittels `fmincon` berechnet. Das sind insgesamt 50 Optimierungsprobleme.

In Abbildung 3 ist links der Verlauf der optimalen Portfolios abgetragen und rechts der Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes.



**Abbildung 3.:** Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von  $MV_\lambda$  für  $n = 8$   
 – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von  $MV_\lambda$  für  $n = 8$

Man erkennt, dass der EURO-Staatsanleihenmarkt fast bis zum Schluß die optimalen Portfolios dominiert. Bei den letzten sieben Problemen verschwindet der EURO fast aus den Portfolios ( $x_8^* = 0.5112$  bei  $\lambda_{43} = 0.85$ ,  $x_8^* = 0.1137$  bei  $\lambda_{44} = 0.87$  bzw.  $x_8^* = 0.0006$  bei  $\lambda_{45} = 0.89$ ). Die Kapitalmärkte der USA und Japans sowie ab  $\lambda_{47} = 0.93$  die Kapitalmärkte Frankreichs und Japans erlangen mehr an Bedeutung. Für  $\lambda$  gegen 1 spielen somit risikoreichere Klassen eine größere Rolle.

Man beachte, dass der optimale Zielfunktionswert ab  $\lambda_{43} = 0.83$  negativ ist, d.h.

## 6.2. Implementierung des Optimierungsproblems $RC_\lambda$

es gilt dort

$$\lambda x^\top \mu > (1 - \lambda) \sqrt{x^\top \Sigma x} > 0.$$

In allen anderen Fällen ist die gewichtete Portfoliorendite kleiner als das gewichtete Portfoliorisiko. Der effiziente Rand ist in Abbildung 1 in Kapitel 3 zu sehen.

Matlab benötigte insgesamt für die Berechnung der 50 Probleme 11.01 Sekunden.

## 6.2. Implementierung des Optimierungsproblems $RC_\lambda$

Das Optimierungsproblem

$$RC_\lambda : \min_{x \in X} \max_{(r,c) \in U_\delta} (1 - \lambda) \sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r$$

mit

$$U_\delta = \{u \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \mid (u - m)^\top S^{-1} (u - m) \leq \delta^2, u = \begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}, \text{vecsym}^{-1}(c) = C \in \mathbb{S}_+^n\}$$

ist wie  $MV_\lambda$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$  bezüglich  $x$  ein konvexes Optimierungsproblem mit strikt konvexer Zielfunktion, siehe S. 79. In Kapitel 4.1 haben wir Vektoren  $r^* = r^*(x, \kappa)$  und  $c^* = c^*(x, \kappa)$  hergeleitet, die mit einem  $\kappa^* = \kappa^*(\lambda, x)$  in  $RC_\lambda$  eingesetzt werden können, so dass das innere Maximierungsproblem gelöst ist

$$RC_\lambda : \min_{x \in X} (1 - \lambda) \sqrt{z^\top c^*(x, \kappa^*(\lambda, x))} - \lambda x^\top r^*(x, \kappa^*(\lambda, x)).$$

In diesem Abschnitt setzen wir

$$\begin{aligned} m^r &= \hat{\mu}, \\ S^r &= \frac{1}{S} \hat{\Sigma}, \\ m^c &= \text{vecsym}(\hat{\Sigma}), \\ S^c &= \frac{1}{S-1} \hat{D}_8 (I_{64} + K_{88}) \left( \hat{\Sigma} \otimes \hat{\Sigma} \right) \hat{D}_8^\top, \end{aligned}$$

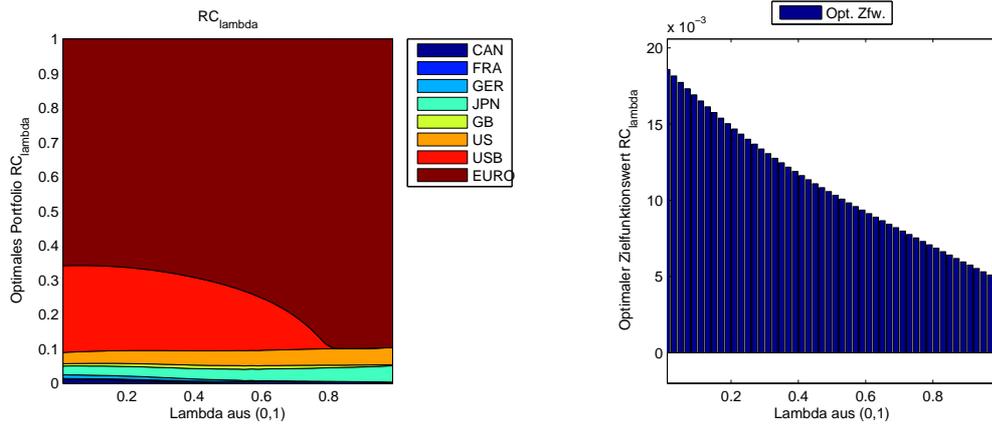
siehe S. 101.

73.71 Sekunden benötigte Matlab, um mit Hilfe von `fmincon` (wieder mit der Einstellung Interior-Point) die optimalen Portfolios für  $RC_\lambda$  mit  $\lambda \in \{0.01, 0.03, 0.05, \dots, 0.99\}$  zu berechnen.

Abbildung 4 zeigt die optimalen Portfolios und Zielfunktionswerte für  $RC_\lambda$ .

Bei  $RC_\lambda$  dominieren die EURO-Staatsanleihen. Zusammen mit den USA-Staatsanleihen bilden sie bis  $\lambda_{50} = 0.99$  mehr als 90% der optimalen Portfolios. Das ist auch zu erwarten, da beide Klassen die kleinsten Kovarianzen aufweisen und der Robust-Counterpart konservative Lösungen bevorzugen soll. Sonst sind nur die Kapitalmärkte aus Japan und den USA nennenswert im Portfolio vertreten.

## 6. Implementierungen



**Abbildung 4.:** Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von  $RC_{\lambda}$  für  $n = 8$   
 – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von  $RC_{\lambda}$  für  
 $n = 8$

Der optimale Zielfunktionswert ist durchgängig positiv. Das kann zum einen mit

$$0 \leq \lambda x^{\top} r^* < (1 - \lambda) \sqrt{z^{\top} c^*}$$

und zum anderen mit

$$\lambda x^{\top} r^* < 0$$

begründet werden.

Wie bereits auf S. 79 angedeutet, hat die Zielfunktion nicht mehr die Form

$$(1 - \lambda) \sqrt{x^{\top} \bar{C} x} - \lambda x^{\top} \bar{r}$$

mit  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  und  $\bar{C} \in \mathbb{S}_+^n$  unabhängig von  $\lambda$ . Eine Grafik, die den effizienten Rand abbildet, d.h. Portfoliorisiko und Portfoliorendite gesondert abbildet, kann an dieser Stelle nicht erstellt werden. Die Feststellung nach [51], dass die Robustifizierung von  $MV_{\lambda}$  durch  $RC_{\lambda}$  zu einem verkürzten effizienten Rand führt, kann nicht untersucht werden. Eine Idee, wie man  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  und  $\bar{C} \in \mathbb{S}_+^n$  erzeugen könnte, ist am Ende dieses Abschnittes kurz beschrieben.

In Lemma 4.1.3 wurde eine Bedingung an die Matrix  $C^* = \text{vecsym}^{-1}(c^*)$  gestellt, die die positive Definitheit von  $C^*$  sicherstellt. Daraus wurde die Annahme 4.1.5 abgeleitet. In den numerischen Ergebnissen hat sich gezeigt, dass die Terme  $\sqrt{z^{\top} c(x, \kappa(\lambda, x))}$  aus der Zielfunktion in jeder Iteration ausführbar waren. Das weist darauf hin, dass in jeder Iteration die Ungleichung  $z^{\top} c(x, \kappa(\lambda, x)) \geq 0$  erfüllt war. In den optimalen Portfolios konnte sogar  $z^{*\top} c^*(x^*, \kappa^*(\lambda, x^*)) > 0$  mit  $z^* = \text{vecsym}(x^* x^{*\top})$  für alle  $\lambda \in \{0.01, 0.03, 0.05, \dots, 0.99\}$  nachgewiesen werden.

### 6.3. Implementierung des Optimierungsproblems $\mathbf{RC}_\lambda$ unter einer Chance-Constraints

Vergleicht man  $MV_\lambda$  und  $RC_\lambda$ , so fällt auf, dass die optimalen Portfolios von  $RC_\lambda$  durchgängig aus den weniger risikoreichen Anleihen der beiden Staatsanleihenmärkte USA und EURO bestehen, während bei  $MV_\lambda$  bei  $\lambda$  nahe bei 1 die risikoreicheren Kapitalmärkte Japan, Frankreich und USA ins Spiel kommen. Der Investor nimmt dort also mehr Risiko in Kauf, um eine höhere Rendite zu generieren.

**Idee zur Erzeugung von  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  und  $\bar{C} \in \mathbb{S}_+^n$**

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in (0, 1)$  gegeben. Für alle  $i = 1, \dots, p$  sei  $x^*(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n$  das optimale Portfolio und  $v(\lambda_i) \in \mathbb{R}$  der optimale Zielfunktionswert von  $RC_{\lambda_i}$  mit  $z^*(\lambda_i) = \text{vecsym}(x^*(\lambda_i)x^*(\lambda_i)^\top)$ .

Weiter sei  $(\bar{c}, \bar{r})$  eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$(1 - \lambda_i)\sqrt{z^*(\lambda_i)^\top \bar{c}} - \lambda_i x^*(\lambda_i)^\top \bar{r} - v(\lambda_i) = 0 \quad i = 1, \dots, p$$

und für  $\bar{c}$  gelte die Zusatzbedingung  $\text{vecsym}^{-1}(\bar{c}) \in \mathbb{S}_+^n$ . Dann kann  $RC_\lambda$  mit  $\bar{C} = \text{vecsym}^{-1}(\bar{c})$  in die Form

$$(1 - \lambda)\sqrt{x^\top \bar{C} x} - \lambda x^\top \bar{r}$$

gebracht werden.

### 6.3. Implementierung des Optimierungsproblems $\mathbf{RC}_\lambda$ unter einer Chance-Constraints

In diesem Abschnitt soll das Problem

$$RC_\lambda : \min_{x \in X} \max_{(r,c) \in U_\delta} (1 - \lambda)\sqrt{z^\top c} - \lambda x^\top r$$

mit

$$U_\delta(m, S) = \{u \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \mid (u - m)^\top S^{-1}(u - m) \leq \delta^2, u = \begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}, \text{vecsym}^{-1}(c) = C \in \mathbb{S}_+^n\}$$

gelöst werden, wobei der Punkt  $(\frac{1}{\delta}S^{-\frac{1}{2}}m, \frac{1}{\delta}S^{-\frac{1}{2}})$  eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \text{MinVol}(\mu, \Sigma) : \quad & \min_{b, A} -\ln(\det(A)) \\ \text{u.d.N.} \quad & \mathbb{P}\left(\left(Au^{org} - b\right)^\top (Au^{org} - b) - 1 \leq 0\right) \geq 1 - \epsilon, \\ & a_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, n, j = n + 1, \dots, \bar{n}, \\ & b \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}} \end{aligned}$$

ist, siehe S. 80.

Der Sampling-and-Discarding-Ansatz aus Kapitel 2.6 bzw. Kapitel 4.2 soll ver-

## 6. Implementierungen

wendet werden, um  $MinVol(\mu, \Sigma)$  zu lösen. Dazu stellen wir für die unabhängig, identisch verteilte Stichprobe  $u_1, \dots, u_N$  und die Menge  $J$  der  $k$  entfernten Realisationen das zugehörige Sample-Based-Problem auf

$$\begin{aligned} SB_{N,k} : \quad & \min_{b,A} -\ln(\det(A)) \\ \text{u.d.N.} \quad & (Au_l - b)^\top (Au_l - b) - 1 \leq 0, \quad l \in J \\ & s_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = n+1, \dots, \bar{n}, \\ & b \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Das Problem  $SB_{N,k}$  wird nochmal umgeformt

$$\begin{aligned} \widehat{SB}_{N,k} : \quad & \min_{b,A,y,w} -\ln(\det(A)) \\ \text{u.d.N.} \quad & Au_l - b - y_l = 0, \quad l \in J \\ & w_l = 1, \quad l \in J \\ & \|y_l\| \leq w_l, \quad l \in J \\ & s_{i,j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = n+1, \dots, \bar{n}, \\ & b \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad A \in \mathbb{S}_+^{\bar{n}}, \\ & y_l \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad w_l \in \mathbb{R}, \quad l \in J, \end{aligned}$$

siehe [58], um es mit einem Solver aus Matlab lösen zu können. Die Bedingungen  $\|y_l\| \leq w_l$  bezeichnen dabei sogenannte *Second-Order-Cone-Constraints* (SOCP), und die Menge

$$\{(y_l, w_l) \in \mathbb{R}^{\bar{n}+1} \mid \|y_l\| \leq w_l\}$$

heißt *Lorentzkegel*<sup>22</sup>.

Der Solver SDPT3 erkennt selbstständig nicht lösbare Probleme und gibt eine entsprechende Meldung zurück. Wir überlassen es somit dem Solver, die Lösbarkeit von  $\widehat{SB}_{N,k}$  zu prüfen.

$\widehat{SB}_{N,k}$  kann in Matlab nun mit *Yalmip*<sup>23</sup> modelliert und gelöst werden. Yalmip benutzt dazu den Solver *SDPT3* als Standardsolver, siehe [59].

Die Tabelle 4 zeigt Problemgrößen vom Sampling-and-Discarding-Ansatz für verschiedene Dimensionen. Die Aussage ist, dass für die Größen  $n, \beta$  und  $\varepsilon$  die Größe  $N$  der Stichprobe wie in der Tabelle gewählt werden muss, damit die Anzahl  $k$  an maximal entfernbaren Realisationen größer als null ist.

Man erkennt, dass bei unserem Finanzmarkt mit  $n = 8$  Klassen und den in Abschnitt 4.2 vorgeschlagenen Parametern  $\beta = 10^{-6}$  und  $\varepsilon = 0.01$  die Stichprobengröße relativ hoch ist. Man beachte, dass mit dem Solver SDPT3 aus Speichergründen nur ungefähr  $N = 2500$  möglich ist.

Die Zuordnungen von  $\beta$  und  $\varepsilon$  sowie die Größe des Finanzmarktes sind hier also

<sup>22</sup>Im Englischen auch *ice cream cone*.

<sup>23</sup>Siehe <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/> zuletzt aufgerufen am 09.06.2013.

6.3. Implementierung des Optimierungsproblems  $\mathbf{RC}_\lambda$  unter einer Chance-Constraints

$n$	$\beta$	$\varepsilon$	$N$
8	$10^{-6}$	0.01	67058
8	$10^{-6}$	0.05	13412
8	$10^{-6}$	0.1	6706
8	$10^{-5}$	0.1	6675
8	$10^{-4}$	0.1	6600
8	$10^{-3}$	0.1	6547
8	$10^{-2}$	0.1	6493
7	$10^{-2}$	0.1	4971
6	$10^{-2}$	0.1	3664
5	$10^{-2}$	0.1	2567
4	$10^{-2}$	0.1	1674
3	$10^{-2}$	0.1	979

**Tabelle 4.:** Problemgrößen im Sampling-and-Discarding-Ansatz

nicht berechenbar. Wir reduzieren deswegen die Größe des Finanzmarktes auf  $n = 3$  und setzen  $\beta = 0.01$  und  $\varepsilon = 0.1$ . Um nochmal die Größe für diese Werte klar zum machen, sei die Tabelle 5 angegeben.

Anzahl an Nebenbedingungen	25054
Dimension der Matrixvariablen	9
Dimension der SOCP-Variablen	25000
Dimension der freien Variablen	25081
Anzahl an Matrixnebenbedingungen	1
Anzahl an SOCP-Nebenbedingungen	2500

**Tabelle 5.:** Problemgrößen laut SDPT3-Solver für  $\widehat{SB}_{N,k}$  bei  $n = 3, \beta = 0.01, \varepsilon = 0.1$  und  $N = 2500$

Wir werden nun  $MinVol(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  mittels Yalmip lösen. Dafür reduzieren wir unseren Finanzmarkt auf die drei Kapitalmärkte Kanada, Frankreich und Deutschland, setzen  $\beta = 0.01$  und  $\varepsilon = 0.1$  und berechnen mittels der Matlab-Funktion `mvnrnd` eine Stichprobe  $u_1, \dots, u_N$  mit  $u_i \sim \mathcal{N}(\tilde{\mu}, \tilde{\Sigma})$ , wobei

$$\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} m^r \\ m^c \end{pmatrix}$$

und

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} S^r & 0 \\ 0 & S^c \end{pmatrix}$$

mit  $m^r, S^r, m^c$  und  $S^c$  aus Abschnitt 6.2 gesetzt werden. Die Maximalanzahl an Realisationen, die entfernt werden können, ist  $k_{max} = 85$ , siehe Formel (2.38). Die

## 6. Implementierungen

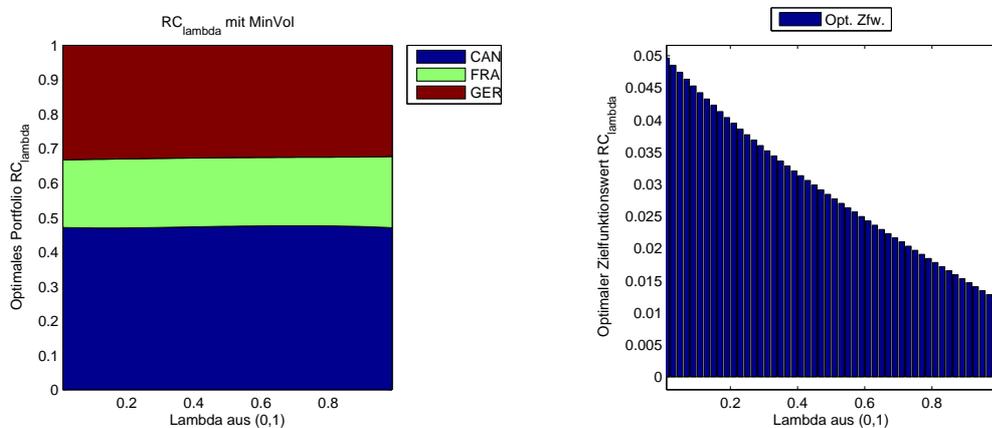
Lösung von  $MinVol(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  ist dann die Grundlage für  $RC_\lambda$ , wie am Ende von Kapitel 4.2 beschrieben. Algorithmus 4.2.1 wurde benutzt, um Realisierungen identifizieren zu können, die aus der Stichprobe entfernt werden sollen.

Matlab brauchte insgesamt 2731.92 Sekunden, was ungefähr 45,53 Minuten bedeutet. Den größten Teil der Zeit, genau 2725.94 Sekunden, beanspruchte erwartungsgemäß der Solver SDPT3. Für  $MinVol(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  wurden 5 Sample-Based-Teilprobleme  $\widehat{SB}_{N,k_i}, i = 1, \dots, 5$ , gelöst. Tabelle 6 zeigt die Teilprobleme mit ihren Berechnungszeiten, die Anzahl der aktiven Restriktionen im optimalen Punkt und  $k_i$ . Im Teilproblem 5 brauchten die aktiven Restriktionen nicht mehr berechnet zu werden, da  $k = k_5 = 85$  bereits erreicht wurde. Die Annahme 2.6.6 kann für die optimalen Punkte der Teilprobleme gezeigt werden.

Teilproblem $i$	$k_i$	Berechnungszeit in sec	Anzahl der akt. Rest.
1	0	521.55	25
2	25	513.68	25
3	50	587.14	30
4	80	574.40	28
5	85	529.17	-

**Tabelle 6.:** Teilprobleme  $\widehat{SB}_{N,k_i}, i = 1, \dots, 5$

Das Lösen von  $RC_\lambda$  erfolgte dann in 5.98 Sekunden. Abbildung 5 zeigt die optimalen Portfolios und Zielfunktionswerte für  $RC_\lambda$  unter  $MinVol(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$ .



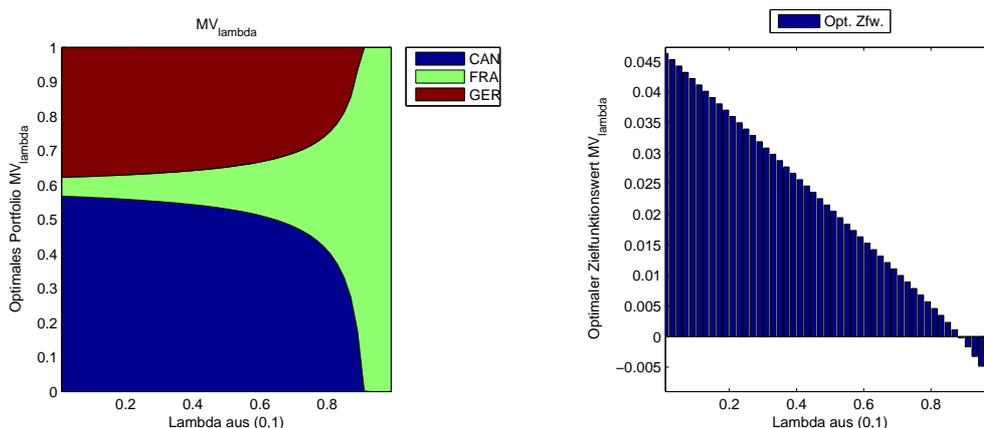
**Abbildung 5.:** Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von  $RC_\lambda$  unter einer Chance-Constraint – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von  $RC_\lambda$  unter einer Chance-Constraint

Der Kapitalmarkt Kanadas hat den größten Anteil an den Portfolios, was auch

### 6.3. Implementierung des Optimierungsproblems $RC_\lambda$ unter einer Chance-Constraints

zu erwarten war, da er die kleinste Standardabweichung (0.0030) und im Verhältnis zu den anderen beiden Kapitalmärkten, die kleinsten Kovarianzen (0.0016 und 0.0010) aufweist. Danach folgt der Kapitalmarkt Deutschlands, weil er gegenüber Frankreichs Kapitalmarkt über eine kleinere Standardabweichung verfügt ( $0.0039 < 0.0049$ ).

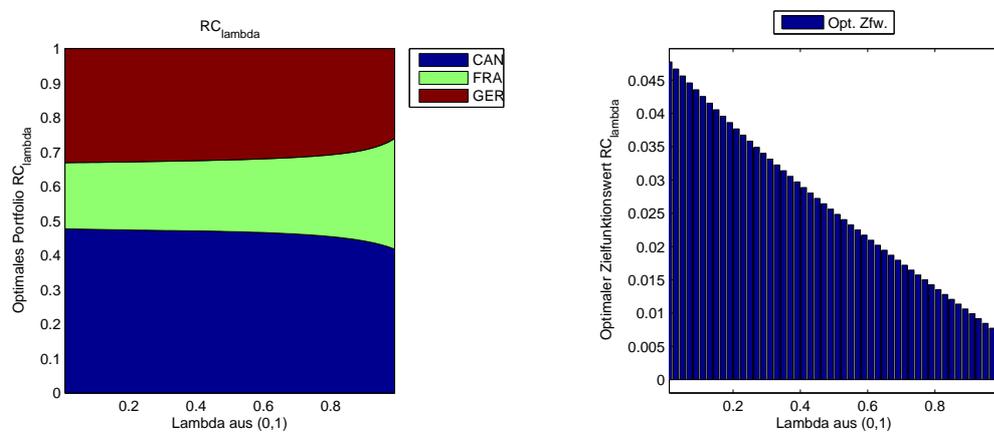
Die optimalen Zielfunktionswerte sind wieder durchgängig positiv wie bei  $RC_\lambda$  aus Abschnitt 6.2. Zum Vergleich werden zusätzlich noch  $MV_\lambda$  und  $RC_\lambda$  für den verkleinerten Finanzmarkt berechnet. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 6 und 7 dargestellt. Die Berechnungszeiten sind 4.61 Sekunden für  $MV_\lambda$  und 5.42 Sekunden für  $RC_\lambda$ .



**Abbildung 6.:** Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von  $MV_\lambda$  für  $n = 3$   
 – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von  $MV_\lambda$  für  $n = 3$

Die Robustifizierungen ähneln sich stark in den Verläufen. Die jeweiligen optimalen Portfolios sind sehr robust gegenüber dem Parameter  $\lambda$  und verändern nur wenig ihre Zusammensetzungen. Die erheblich größere Berechnungszeit durch das Lösen von  $MinVol(\hat{\mu}, \hat{\Sigma})$  und die noch zu groß festgesetzten Parameter  $\beta$  und  $\varepsilon$  machen den zweiten Ansatz in dieser Form aber wenig praktikabel.  $MV_\lambda$  gleicht beiden Robustifizierungen bis ungefähr  $\lambda_{40} = 0.79$ . Danach steigt die Dominanz des risiko-reicheren Kapitalmarktes von Frankreich und das optimale Portfolio bei  $\lambda_{50} = 0.99$  besteht zu 99.96 % nur noch aus diesem Markt.

## 6. Implementierungen



**Abbildung 7.:** Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von  $RC_{\lambda}$  für  $n = 3$   
– Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von  $RC_{\lambda}$  für  $n = 3$

## 7. Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wird der Mean-Varianz-Ansatz  $MV_\lambda$  für Portfolio-Optimierungsprobleme betrachtet. Ausgehend von der Unsicherheit der beinhalteten Parameter  $\mu$  und  $\Sigma$  wird der bekannte Robust-Counterpart aufgestellt, wobei die Definition der zugehörigen Unsicherheitsmenge auf zwei Arten geschieht. Zum einen wurde eine Zufallsvariable mit bestimmten Eigenschaften vorausgesetzt, die als Punktschätzer für  $\mu$  und  $\Sigma$  interpretiert werden kann. Zum anderen wurde die Form der Unsicherheitsmenge über ein Optimierungsproblem mit Chance-Constraint bestimmt. Dieses Problem *MinVol* bestimmt einen Ellipsoid mit minimalem Volumen, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass  $\mu$  und  $\Sigma$  (bzw. Punktschätzer für beide) in diesem Ellipsoid liegen, ein vorgegebenes Level überschreiten soll.

Hauptaugenmerk bei den Arbeiten liegt auf den Formulierungen sowie den Lösungsansätzen der Robustifizierungen von  $MV_\lambda$ . Ziel war es, mit Mitteln der Optimierung eine geschlossene Form der Lösung der robusten Probleme ohne Abhängigkeiten anzugeben, was bis auf die Lösung eines Teilproblems erfolgreich durchgeführt werden kann. Die noch vorhandene Abhängigkeit ist auch der Grund, warum die Aussage in [51] nicht bestätigt bzw. verallgemeinert werden kann, dass der effiziente Rand basierend auf dem Robust-Counterpart eine Verkürzung des effizienten Randes von  $MV_\lambda$  ist, was einem Spezialfall hier gleich kommt. Dort wurde dann die Schlussfolgerung gezogen, dass  $MV_\lambda$  bereits eine Robustifizierung beinhaltet. In dieser Arbeit wird dem Robust-Counterpart noch eine Eigenständigkeit zugeschrieben, es sich also durchaus lohnt, eine Robustifizierung von  $MV_\lambda$  zu betrachten, wenn der Bedarf nach konservativeren Lösungen des Portfolioproblems besteht.

Die Frage, ob der Robust-Counterpart auch in diesem Fall eine Verkürzung des effizienten Randes darstellt, sollte der Schwerpunkt weiterer Untersuchungen sein. Einen Ansatzpunkt liefert die Idee aus Kapitel 6.2.

Im zweiten Hauptteil werden semi-infinite Optimierungsprobleme mit parametrischer Indexmenge betrachtet. Dafür werden 8 Reformulierungen angegeben und näher beleuchtet. Für diese 8 Probleme sowie das Originalproblem werden Beziehungen für die optimalen Zielfunktionswerte und Punkte hergeleitet. Auch hier werden hauptsächlich bekannte Sachverhalte aus der kontinuierlichen Optimierung benutzt, um die angegebenen Aussagen zu erhalten.

Es stellt sich dabei heraus, dass 4 Probleme Unterschranken und 4 Probleme Oberschranken an den optimalen Zielfunktionswert des Originalproblems liefern. Während die Unterschranken nie strikt erfüllt sind, können einige Oberschranken unter der

## 7. Fazit und Ausblick

Bedingung

$$\bigcup_{t \in T} M^*(t) \cap M_{(6)} = \emptyset$$

strikt sein. Beispiel 5.2.5 gibt einen Einblick in die Wirkung der Bedingung. Da sie sehr technisch ist und vorab nur schwer überprüft werden kann, könnte die Herleitung einer Bedingung, die handhabbarer ist, das Ziel weiterer Forschung sein.

Des Weiteren konnten einige Gleichheiten zwischen den zulässigen Mengen gezeigt werden, was zu identischen Optimalpunktmengen und -werten führt. Aber auch hier können einige Gleichheiten nur unter der bereits erwähnten Bedingung gezeigt werden. Außerdem ist die Bestimmung der Optimalpunktmengen bzw. die Bestimmung eines optimalen Punktes und damit des optimalen Zielfunktionswertes in vielen Fällen noch nicht abschließend klar, sodass die Unter- und Oberschranken nur für spezielle Fälle vorliegen. Dort bedarf es weiterer Forschung.

Den Abschluß dieser Arbeit bilden einige Implementierungen aus dem ersten Teil der Arbeit. Es wird ein Beispiel eines Finanzmarktes gegeben und dafür  $MV_\lambda$  und der Robust-Counterpart gelöst. Der Robust-Counterpart wird über die beiden in Kapitel 4 beschriebenen Ansätze aufgestellt und implementiert. Während der erste Ansatz ohne Schwierigkeiten gelöst werden kann und die Ergebnisse bestätigen, dass die Robustifizierung konservativere Ergebnisse liefert, hat der zweite Ansatz erhebliche Nachteile bei der Berechnungszeit und der Genauigkeit. Ein konservativeres Verhalten bei der Wahl der optimalen Portfolios im Gegensatz zu  $MV_\lambda$  zeigt aber auch er. Einen konkurrenzfähigen Solver zum Lösen von *MinVol* bereitzustellen, ist die Hauptschwierigkeit in diesem Ansatz und sollte weiter untersucht werden.

# A. Anhang

In den ersten beiden Anhängen finden sich die Beweise zum Grundlagenkapitel 2 und zum Lemma 4.1.7. Im letzten Anhangskapitel ist die Herleitung eines kritischen Punktes einer strikt konkaven Funktion beschrieben. Die Verschiebung in den Anhang wurde jeweils aus Übersichtsgründen getan.

## A.1. Beweise zu Kapitel 2

Im diesem Teil des Anhang finden sich Beweise zu Lemmata und Sätzen aus Kapitel 2.

### Beweis. zu Lemma 2.1.3 S. 6

Der Beweis in abweichender Notation findet sich in [39].

1. Für die Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gilt

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m a_{nj}b_{jn} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n b_{1i}a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n b_{1i}a_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n b_{mi}a_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n b_{mi}a_{im} \end{pmatrix}.$$

Für die Spur bedeutet das

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(AB) &= \sum_{j=1}^m a_{1j}b_{j1} + \dots + \sum_{j=1}^m a_{nj}b_{jn} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^n b_{1i}a_{i1} + \dots + \sum_{i=1}^n b_{mi}a_{im} \\ &= \operatorname{tr}(BA). \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung.

A. Anhang

2. (2.2) für die Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$  und  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  folgt analog zu 1.  $\square$

**Beweis. zu Lemma 2.1.8 S. 8**

Sei  $A \in \mathbb{S}^n$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 D_n \text{vecsymb}(A) &= \begin{pmatrix} D^{11} & D^{12} & D^{13} & \dots & D^{1n} \\ 0 & D^{22} & D^{23} & \dots & D^{2n} \\ 0 & 0 & D^{33} & \dots & D^{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} D^{11}a_{11} + D^{12} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + D^{13} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} + \dots + D^{1n} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\
 D^{22} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + D^{23} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} + \dots + D^{2n} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\
 D^{33} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} + \dots + D^{3n} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \\
 \vdots \\
 D^{nn} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Schauen wir uns die ersten  $n$  Zeilen des obigen Vektors an

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} a_{11} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} + \dots \\
 + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{13} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Analog kann man die restlichen Zeilen umformen und es entsteht der Vektor

$$D_n \text{vecsym}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{A \in \mathbb{S}^n}{=} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \text{vec}(A).$$

Analog lässt sich Formel (2.4) mit der Matrix aus (2.6) zeigen. □

**Beweis. zur Bemerkung 2.1.7 Teil 2 S. 8**

1. Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(AB) &= \underbrace{a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1}}_{\text{1. Diagonalelement von } AB} + \underbrace{a_{21}b_{12} + \dots + a_{2n}b_{n2}}_{\text{2. Diagonalelement von } AB} + \dots \\
 &\quad + \underbrace{a_{n1}b_{1n} + \dots + a_{nn}b_{nn}}_{\text{n-tes Diagonalelement von } AB}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{n2} \\ \vdots \\ b_{1n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \text{vec} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^\top \text{vec} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \\
 &= \text{vec}(A^\top)^\top \text{vec}(B).
 \end{aligned}$$

2. Es gilt für die symmetrischen Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sowie die Blockmatrix  $D_n \in \mathbb{R}^{n^2 \times \frac{n(n+1)}{2}}$  aus Formel (2.5)

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(AB) &\stackrel{\text{Teil 1}}{=} \text{vec}(A^\top)^\top \text{vec}(B) \\
 &\stackrel{A \in \mathbb{S}^n}{=} \text{vec}(A)^\top \text{vec}(B) \\
 &\stackrel{\text{Lem. 2.1.8}}{=} (D_n \text{vecsym}(A))^\top (D_n \text{vecsym}(B)) \\
 &= \text{vecsym}(A)^\top D_n^\top D_n \text{vecsym}(B).
 \end{aligned}$$

□

**Beweis. zu Lemma 2.1.12 S. 11**

Sei  $x \in X$  mit

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0\}$$

und

$$z = \text{vec}(xx^\top) = \text{vec} \begin{pmatrix} x_1x_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2x_2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2}.$$

1. Jede Komponente der Matrix  $xx^\top$  ist nichtnegativ, da jede Komponente ein Produkt  $x_ix_j, i, j = 1 \dots, n$ , zweier Komponenten von  $x$  ist und  $x \geq 0$  gilt. Somit ist jede Komponente von  $z$  nichtnegativ, also  $z \geq 0$ .

2. Für die Summe der Komponenten von  $z$  gilt mit

$$e^{n^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2} \quad \text{und} \quad e^n = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^2} z_i &= z^\top e^{n^2} \\ &= \text{vec}(xx^\top)^\top \text{vec}(e^n e^{n^\top}) \\ &\stackrel{\text{Bem. 2.1.7}}{=} \text{tr}(xx^\top e^n e^{n^\top}) \\ &\stackrel{\text{Lem. 2.1.3}}{=} \text{tr}(e^{n^\top} xx^\top e^n) \\ &= \text{tr}\left((x^\top e^n)^\top (x^\top e^n)\right) \\ &\stackrel{\text{Bem. 2.1.4}}{=} (x^\top e^n)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 \\ &= (1)^2. \end{aligned}$$

□

**Beweis. zu Lemma 2.2.4 S. 14**

Sei  $f(\bar{x}) = \min_{x \in M} f(x)$ . Dann gilt für alle  $x \in M$  und  $\alpha \geq 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  beliebig gewählt

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) \leq f(x) &\Leftrightarrow \alpha f(\bar{x}) \leq \alpha f(x) \\ &\Leftrightarrow \alpha f(\bar{x}) + \beta \leq \alpha f(x) + \beta. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Damit ist  $\alpha f(\bar{x}) + \beta = \min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta)$ , d.h.

$$\alpha \left(\min_{x \in M} f(x)\right) + \beta = \min_{x \in M} (\alpha f(x) + \beta).$$

Dass die globalen Optimalpunkte übereinstimmen, folgt sofort aus (A.1).

Analog kann die Behauptung (2.13) sowie die dortige Übereinstimmung der Optimalpunkte bewiesen werden. □

**Beweis. zu Lemma 2.2.5 S. 15**

1. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \bigcup_{i \in I} M_i} f(x) \geq \alpha &\Leftrightarrow \forall x \in \bigcup_{i \in I} M_i : f(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \forall x \in M_i : f(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : \min_{x \in M_i} f(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow \min_{i \in I} \min_{x \in M_i} f(x) \geq \alpha. \end{aligned}$$

2. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \max_{y \in \bigcup_{t \in T} Y(t)} g(x, y) \leq \alpha &\Leftrightarrow \forall y \in \bigcup_{t \in T} Y(t) : g(x, y) \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall t \in T \forall y \in Y(t) : g(x, y) \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \forall t \in T : \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq \alpha \\ &\Leftrightarrow \max_{t \in T} \max_{y \in Y(t)} g(x, y) \leq \alpha. \end{aligned}$$

3. Die Übereinstimmung der globalen Optimalpunkte folgt unmittelbar aus den obigen Äquivalenzen. □

**Beweis. zu Lemma 2.2.7 S. 15**

1 Sei  $(x^*, y^*)$  optimaler Punkt von  $P_1$ . Daraus folgt, dass  $(x^*, y^*)$  in  $M$  liegt und für alle Punkte  $(x, y)$  aus  $M$  gilt

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Das ist gleichbedeutend damit, dass  $x^*$  in  $\text{pr}_x M$  liegt, und für alle Punkte  $x$  aus  $\text{pr}_x M$  ein  $y \in \mathbb{R}^m$  mit  $(x, y)$  aus  $M$  existiert, so dass gilt

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Damit ist  $x^*$  optimaler Punkt von  $P_2$ .

2 Sei  $x^*$  optimaler Punkt von  $P_2$ . Daraus folgt, dass  $x^*$  in  $\text{pr}_x M$  liegt und für alle Punkte  $x$  aus  $\text{pr}_x M$  gilt

$$f(x) \geq f(x^*),$$

d.h. es existiert ein  $y \in \mathbb{R}^m$  mit  $(x, y)$  aus  $M$ , so dass für alle  $(x, y)$  aus  $M$  mit  $x$  aus  $\text{pr}_x M$  gilt

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Damit ist  $(x^*, y^*)$  optimaler Punkt von  $P_1$ .

- 3 Die Zielfunktionswerte von  $P_1$  und  $P_2$  stimmen offensichtlich überein, da die Optimalpunkte von  $P_1$  und  $P_2$  im Sinne von Teil 1 und 2 äquivalent sind und die Zielfunktion  $f$  unabhängig von  $y$  ist.

□

**Beweis. zu Lemma 2.2.8 S. 16** Es gilt für  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha \geq \max_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in X \times Y : \alpha \geq f(x, y) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X \forall y \in Y : \alpha \geq f(x, y) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X : \alpha \geq \max_{y \in Y} f(x, y) \\ &\Leftrightarrow \alpha \geq \max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y). \end{aligned}$$

Es folgt

$$\max_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) = \max_{x \in X} \max_{y \in Y} f(x, y).$$

Analog folgt der Beweis für

$$\max_{(x,y) \in X \times Y} f(x, y) = \max_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Die Übereinstimmung der globalen Optimalpunkte folgt wieder unmittelbar aus den obigen Äquivalenzen. □

**Beweis. zu Lemma 2.2.9 S. 16**

Es sei  $v = \psi(f(\bar{x})) = \min_{x \in M} \psi(f(x))$ , d.h.  $\bar{x} \in M$  ist globales Minimum von

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \psi(f(x)) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in M.$$

Damit gilt für alle  $x \in M$

$$v \leq \psi(f(x)).$$

Da  $\psi$  streng monoton wachsend ist, existiert eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion  $\psi^{-1}$  mit

$$\psi^{-1}(v) = f(\bar{x}).$$

Aus  $v \leq \psi(f(x))$  für alle  $x \in M$  und aus dem streng monotonen Wachstum von  $\psi^{-1}$  folgt somit für alle  $x \in M$

$$\psi^{-1}(v) \leq f(x).$$

Weiter folgt

$$\min_{x \in M} f(x) = \psi^{-1}(v) = \psi^{-1}(\psi(f(\bar{x}))) = f(\bar{x}).$$

## A. Anhang

Damit ist  $f(\bar{x}) = \min_{x \in M} f(x)$  sowie  $\psi(f(\bar{x})) = \psi(\min_{x \in M} f(x))$  gezeigt, d.h.  $\bar{x}$  ist globaler Minimalpunkt von

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in M.$$

Wegen der äquivalenten Umformungen gilt hier auch die Rückrichtung und die Behauptungen sind bewiesen.  $\square$

### Beweis. zu Lemma 2.2.10 S. 16

Vorab betrachten wir folgende Aussage. Sei  $x \in M$ , dann ist  $(x, f(x))$  ein zulässiger Punkt von  $P^{epi}$ , d.h.  $(x, f(x)) \in M^{epi}$  mit

$$M^{epi} := \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq z, x \in M\}.$$

1. Sei  $(x^*, z^*)$  globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$ , d.h.  $z^* \leq z$  für alle  $(x, z) \in M^{epi}$  und  $x^* \in M$ .

Aus  $x^* \in M$  folgt  $(x^*, f(x^*)) \in M^{epi}$  und damit  $z^* \leq f(x^*)$ .

Angenommen es gilt  $z^* < f(x^*)$ . Das bedeutet, dass  $(x^*, z^*)$  nicht zulässig für  $P^{epi}$  ist. Das ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $(x^*, z^*)$  ein globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$  ist.

Es ist also  $z^* = f(x^*)$  und damit  $(x^*, f(x^*))$  globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$ .

Angenommen  $x^*$  ist kein globaler Minimalpunkt von  $P$ . Dann gibt es ein  $\bar{x} \in M$  mit  $f(\bar{x}) < f(x^*)$ . Da  $\bar{x} \in M$  gilt, folgt  $(\bar{x}, f(\bar{x})) \in M^{epi}$ , d.h.  $(\bar{x}, f(\bar{x}))$  ist zulässig für  $P^{epi}$  und  $f(\bar{x}) < f(x^*)$ . Das ist wieder ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $(x^*, f(x^*))$  ein globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$  ist.

Damit ist  $x^*$  globaler Minimalpunkt von  $P$ .

2. Sei  $x^*$  globaler Minimalpunkt von  $P$ , d.h.  $f(x^*) \leq f(x)$  für alle  $x \in M$ .

Angenommen  $(x^*, f(x^*))$  ist kein globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$ . Dann gibt es einen Punkt  $(\bar{x}, \bar{z}) \in M^{epi}$  mit den Eigenschaften

- a)  $f(\bar{x}) \leq \bar{z}$ ,
- b)  $\bar{x} \in M$ ,
- c)  $\bar{z} < f(x^*)$ .

Aus 1. und 3. folgt  $f(\bar{x}) \leq \bar{z} < f(x^*)$ , insbesondere  $f(\bar{x}) < f(x^*)$ . Mit 2. ist das ein Widerspruch zu der Annahme, dass  $x^*$  ein globaler Minimalpunkt von  $P$  ist.

Damit ist  $(x^*, f(x^*))$  globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$ .

3. Sei  $(x^*, f(x^*))$  globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$  mit optimalem Zielfunktionswert  $f(x^*)$ . Nach 1. ist  $x^*$  globaler Minimalpunkt von  $P$  mit optimalem Zielfunktionswert  $f(x^*)$ .

Sei  $x^*$  globaler Minimalpunkt von  $P$  mit optimalem Zielfunktionswert  $f(x^*)$ . Nach 2. ist  $(x^*, f(x^*))$  globaler Minimalpunkt von  $P^{epi}$  mit optimalem Zielfunktionswert  $f(x^*)$ .

□

Das nächste Lemma zeigt die Mengengleichheit der zulässigen Mengen von  $P_{\max}^C$  und  $HP$ , siehe Abschnitt 2.2 S. 28.

**Lemma A.1.1.** Sei  $z, m \in \mathbb{R}^{n^2}$ ,  $S^{-1} \in \mathbb{S}_+^{n^2}$  und  $\beta > 0$ . Es gilt die Gleichheit zwischen den beiden Mengen

$$M_1 = \{c \in \mathbb{R}^{n^2} \mid (c - m)S^{-1}(c - m) \leq \beta^2\}$$

und

$$M_2 = \{c \in \mathbb{R}^{n^2} \mid c = m + \beta S^{\frac{1}{2}}\zeta, \|\zeta\|_2 \leq 1\}.$$

**Beweis.** Es gilt mit Hilfe von Bemerkung 2.1.2

$$\begin{aligned} M_1 &= \{c \in \mathbb{R}^{n^2} \mid (c - m)S^{-1}(c - m) \leq \beta^2\} \\ &= \{c \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \frac{1}{\beta^2}(c - m) \left(S^{-\frac{1}{2}}\right) S^{-\frac{1}{2}}(c - m) \leq 1\} \\ &= \{c \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \sqrt{\frac{1}{\beta^2}(c - m)(S^{-\frac{1}{2}})S^{-\frac{1}{2}}(c - m)} \leq 1\} \\ &= \{c \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \left\| \frac{1}{\beta} S^{-\frac{1}{2}}(c - m) \right\|_2 \leq 1\} \\ &= \{c \in \mathbb{R}^{n^2} \mid c = m + \beta S^{\frac{1}{2}}\zeta, \|\zeta\|_2 \leq 1\} \\ &= M_2. \end{aligned}$$

□

## A.2. Beweise zu Kapitel 4

Hier findet sich der Beweis zu Lemma 4.1.7 aus dem Kapitel 4.

**Beweis. zu Lemma 4.1.7 S.77**

Sei die Funktion

$$f_\lambda(x, \kappa) = (1 - \lambda)\sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2} + \lambda(\sqrt{\kappa} a_3 - a_4)$$

gegeben.

Sei weiter  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $x \in X$  und  $\kappa \in (0, 1)$ . Die 1. und 2. Ableitung von  $f_\lambda$  lauten

$$\begin{aligned} f'_\lambda(x, \kappa) &= \frac{1 - \lambda}{2\sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2}} \cdot \left(-\frac{a_1}{2\sqrt{1 - \kappa}}\right) + \frac{\lambda a_3}{2\sqrt{\kappa}} \\ &= -\frac{(1 - \lambda)a_1}{4\sqrt{(\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2)(1 - \kappa)}} + \frac{\lambda a_3}{2\sqrt{\kappa}} \end{aligned}$$

## A. Anhang

und

$$\begin{aligned} f''_{\lambda}(x, \kappa) &= -\frac{1}{4}(1-\lambda)a_1 \left( -\frac{-\frac{3}{2}\sqrt{1-\kappa} a_1 - a_2}{2 \left( (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2) (1-\kappa) \right)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{\lambda a_3}{2} \left( -\frac{1}{2\kappa^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= -\frac{3(1-\lambda)a_1 (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2)}{16 \left( (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2) (1-\kappa) \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda a_3}{4\kappa^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Für alle  $x \in X$  gilt dann

$$\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2 > 0.$$

Man beachte, dass aus  $x \in X$   $x \neq 0$  und  $z \neq 0$  folgen, und die Bedingungen  $S^c, S^r, M^C \succ 0$  sowie  $\delta > 0$  gelten.

Mit  $\lambda \in (0, 1)$  gilt somit für alle  $\kappa \in (0, 1)$

$$f''_{\lambda}(x, \kappa) = -\frac{3(1-\lambda)a_1 (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2)}{16 \left( (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2) (1-\kappa) \right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda a_3}{4\kappa^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

$f_{\lambda}$  ist strikt konkav bezüglich  $\kappa \in (0, 1)$ .

An den Stellen  $\kappa = 0$  beziehungsweise  $\kappa = 1$  ist  $f_{\lambda}$  nicht differenzierbar. Für  $\kappa = 0$  beziehungsweise  $\kappa = 1$  gilt aber

$$\begin{aligned} f_{\lambda}(x, 0) &= (1-\lambda)\sqrt{a_1 + a_2} - \lambda a_4 \\ f_{\lambda}(x, 1) &= (1-\lambda)\sqrt{a_2} + \lambda(a_3 - a_4). \end{aligned}$$

Für die 1. Ableitung gilt noch, dass

$$f'_{\lambda}(x, \kappa) \longrightarrow +\infty \text{ für } \kappa \searrow 0 \tag{A.2}$$

und

$$f'_{\lambda}(x, \kappa) \longrightarrow -\infty \text{ für } \kappa \nearrow 1. \tag{A.3}$$

Zusammen mit der strikten Konkavität auf dem offenen Intervall  $(0, 1)$  ist  $f_{\lambda}$  strikt konkav bezüglich  $\kappa$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$ .

Aus der Stetigkeit von  $f'_{\lambda}$  bezüglich  $\kappa$  auf  $(0, 1)$  und (A.2) beziehungsweise (A.3) folgt die Existenz eines  $\kappa_1 \in (0, 1)$  mit  $f'_{\lambda}(\kappa_1, x) > 0$  beziehungsweise eines  $\kappa_2 \in (0, 2)$  mit  $f'_{\lambda}(\kappa_2, x) < 0$ . Wendet man den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion  $f'_{\lambda}$ , dann existiert ein  $\kappa_3 \in (0, 1)$  mit  $f'_{\lambda}(\kappa_3, x) = 0$ . Nach Bemerkung 2.2.24 Teil 2 ist  $\kappa_3$  ein globaler Maximalpunkt von  $P^{\kappa}$ , und nach Teil 3 ist  $f_{\lambda}$  bezüglich  $\kappa$  auf  $[0, 1]$  weder monoton fallend noch monoton wachsend für alle  $\lambda \in (0, 1)$ .  $\square$

### A.3. Lösungen der Gleichung $f'_\lambda(\kappa, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

Im folgenden Abschnitt findet sich eine Herleitung der möglichen kritischen Punkte von

$$f_\lambda(\kappa, x) = (1 - \lambda)\sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2} + \lambda(\sqrt{\kappa} a_3 - a_4),$$

$a_1, \dots, a_4$  siehe S. 76. Diese werden benötigt für die Bestimmung des optimalen Punktes von

$$P^\kappa : \max_{\kappa \in \mathbb{R}} (1 - \lambda)\sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2} + \lambda(\sqrt{\kappa} a_3 - a_4) \quad \text{u.d.N.} \quad \kappa \in [0, 1].$$

Auf die Bestimmung der optimalen Punkte wird in Kapitel 4.1.3 näher eingegangen. Dort wird die strikte Konkavität von  $f_\lambda$  auf  $[0, 1]$  sowie die Existenz und die Eindeutigkeit eines globalen Maximalpunktes von  $P^\kappa$  gezeigt.

Zu  $f_\lambda$  ist die 1. Ableitung definiert durch

$$\begin{aligned} f'_\lambda(\kappa, x) &= \frac{1 - \lambda}{2\sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2}} \cdot \left( -\frac{a_1}{2\sqrt{1 - \kappa}} \right) + \frac{\lambda a_3}{2\sqrt{\kappa}} \\ &= -\frac{(1 - \lambda)a_1}{4\sqrt{(\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2)(1 - \kappa)}} + \frac{\lambda a_3}{2\sqrt{\kappa}}. \end{aligned}$$

Für  $\kappa \in (0, 1)$  ist  $f'_\lambda$  wohldefiniert und nach Bemerkung 2.2.24 reicht es aus, im offenen Intervall  $(0, 1)$  nach einem kritischen Punkt von  $P^\kappa$  zu suchen.

Die weiteren Berechnungen zur Bestimmung des kritischen Punktes von  $f_\lambda$  wurden in *Maple 16.00, Saturday, March 3, 2012*, durchgeführt. In den roten Boxen stehen jeweils die Eingaben und in den blauen Boxen die zugehörigen Ausgaben, die Maple berechnet hat. Nach und zwischen den Berechnungen folgen weitere Hinweise und Erklärungen.

Kurz noch einige Bemerkungen zur Notation. Der Befehl *restart* löscht alle Zuweisungen, die bis dahin geschehen sind, und leert den Speicher von vorhergehenden Berechnungen. Mit *df* wird die 1. Ableitung von  $f_\lambda$ , mit *eq* wird die Gleichung  $f'_\lambda(x, \kappa) = 0$  und mit  $h_1, h_2, h_3$  werden Hilfsvariablen bezeichnet. Des Weiteren wird  $\mu = 1 - \lambda$  gesetzt, um ein unübersichtliches Ausklammern während der Berechnungen zu verhindern. Da  $1 - \lambda > 0$  für  $\lambda \in (0, 1)$  gilt, ist  $\mu$  offensichtlich echt größer null.

Zunächst vereinfachen wir die Gleichung  $f'_\lambda(x, \kappa) = 0$  soweit wie möglich.

> `restart`

> `df := -1/4 * (mu*a1 / (sqrt(sqrt(1-kappa)*a1+a2)*sqrt(1-kappa))) + 1/2 * (lambda*a3 / sqrt(kappa))`

$$df := -1/4 \frac{\mu a_1}{\sqrt{\sqrt{1 - \kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1 - \kappa}} + 1/2 \frac{\lambda a_3}{\sqrt{\kappa}}$$

## A. Anhang

>  $df := \text{simplify}(df)$

$$df := 1/4 \frac{-\mu a_1 \sqrt{\kappa} + 2 \lambda a_3 \sqrt{\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1-\kappa}}{\sqrt{\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1-\kappa} \sqrt{\kappa}}$$

>  $eq := df = 0$

$$eq := 1/4 \frac{-\mu a_1 \sqrt{\kappa} + 2 \lambda a_3 \sqrt{\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1-\kappa}}{\sqrt{\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1-\kappa} \sqrt{\kappa}} = 0$$

>  $eq := eq 4 \sqrt{\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1-\kappa} \sqrt{\kappa}$

$$eq := -\mu a_1 \sqrt{\kappa} + 2 \lambda a_3 \sqrt{\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1-\kappa} = 0$$

>  $eq := eq + \mu a_1 \sqrt{\kappa}$

$$eq := 2 \lambda a_3 \sqrt{\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2} \sqrt{1-\kappa} = \mu a_1 \sqrt{\kappa}$$

>  $h_1 := (\text{lhs}(eq))^2$

$$h_1 := 4 \lambda^2 a_3^2 (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2) (1-\kappa)$$

>  $h_2 := (\text{rhs}(eq))^2$

$$h_2 := \mu^2 a_1^2 \kappa$$

>  $eq := h_1 - h_2 = 0$

$$eq := 4 \lambda^2 a_3^2 (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2) (1-\kappa) - \mu^2 a_1^2 \kappa = 0$$

Die Gleichung

$$4 \lambda^2 a_3^2 (\sqrt{1-\kappa} a_1 + a_2) (1-\kappa) - \mu^2 a_1^2 \kappa = 0 \quad (\text{A.4})$$

ist also nach  $\kappa$  aufzulösen. Dazu setzen wir folgende Substitution

$$\theta := \sqrt{1-\kappa} \quad \text{mit} \quad \theta \geq 0, \quad (\text{A.5})$$

die mit

$$1-\kappa = \theta^2 \quad \text{und} \quad \kappa = 1-\theta^2$$

die linke Seite von (A.4) zu einem Polynom dritten Grades unwandelt

$$4 \lambda^2 a_3^2 (\theta a_1 + a_2) \theta^2 - \mu^2 a_1^2 (1-\theta^2) = 0.$$

Formen wir die Gleichung mit Maple weiter um.

A.3. Lösungen der Gleichung  $\mathbf{f}'_{\lambda}(\kappa, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

> `restart`

> `eq := 4 λ2 a32 (θ a1 + a2) θ2 - μ2 a12 (1 - θ2) = 0`

$$eq := 4 \lambda^2 a_3^2 (\theta a_1 + a_2) \theta^2 - \mu^2 a_1^2 (1 - \theta^2) = 0$$

> `eq := sort (collect (simplify (eq), θ), θ)`

$$eq := 4 \lambda^2 a_3^2 a_1 \theta^3 + (4 \lambda^2 a_3^2 a_2 + \mu^2 a_1^2) \theta^2 - \mu^2 a_1^2 = 0$$

> `b3 := 4 λ2 a32 a1`

$$b_3 := 4 \lambda^2 a_3^2 a_1$$

> `b2 := 4 λ2 a32 a2 + μ2 a12`

$$b_2 := 4 \lambda^2 a_3^2 a_2 + \mu^2 a_1^2$$

> `b1 := 0`

$$b_1 := 0$$

> `b0 := -μ2 a12`

$$b_0 := -\mu^2 a_1^2$$

> `eq := b3 θ3 + b2 θ2 + b1 θ + b0 = 0`

$$eq := 4 \lambda^2 a_3^2 a_1 \theta^3 + (4 \lambda^2 a_3^2 a_2 + \mu^2 a_1^2) \theta^2 - \mu^2 a_1^2 = 0$$

> `c3 := 1`

$$c_3 := 1$$

> `c2 :=  $\frac{b_2}{b_3}$`

$$c_2 := 1/4 \frac{4 \lambda^2 a_3^2 a_2 + \mu^2 a_1^2}{\lambda^2 a_3^2 a_1}$$

> `c1 :=  $\frac{b_1}{b_3}$`

$$c_1 := 0$$

> `c0 :=  $\frac{b_0}{b_3}$`

$$c_0 := -1/4 \frac{\mu^2 a_1}{\lambda^2 a_3^2}$$

> `eq := c3 θ3 + c2 θ2 + c1 θ + c0 = 0`

A. Anhang

$$eq := \theta^3 + 1/4 \frac{(4\lambda^2 a_3^2 a_2 + \mu^2 a_1^2) \theta^2}{\lambda^2 a_3^2 a_1} - 1/4 \frac{\mu^2 a_1}{\lambda^2 a_3^2} = 0$$

Die Konstanten  $b_3, \dots, b_0$  und  $c_3, \dots, c_0$  fassen Ausdrücke bezüglich der Grade von  $\theta$  zusammen und bilden damit die Koeffizienten für die allgemeine Darstellung ( $b_3 \neq 1$ ) beziehungsweise die normierte Darstellung ( $c_3 = 1$ ) eines Polynoms 3. Grades. Zum einen gilt  $b_3 = 4\lambda^2 a_3^2 a_1 > 0$  und im Allgemeinen  $b_3 \neq 1$ . Für  $c_3$  gilt  $c_3 = 1$ .

Wir betrachten ab hier die Gleichung

$$\theta^3 + c_2 \theta^2 + c_1 \theta + c_0 = 0. \quad (\text{A.6})$$

Das ist eine normierte kubische Gleichung, für die es einen wohlbekannten Ansatz zur Lösung gibt, siehe [7]. Dazu setzen wir eine zweite Substitution an

$$\psi := \theta + \frac{c_2}{3}. \quad (\text{A.7})$$

Für  $\psi$  gilt  $\psi \geq 0$ , da an  $\theta$  die Bedingung  $\theta \geq 0$  gestellt ist und  $\frac{c_2}{3} \geq 0$  gilt. Aus  $\theta \geq 0$  folgt auch  $\psi - \frac{c_2}{3} \geq 0$ . Man beachte zudem, dass aus  $\psi < 0$  folgt  $\theta < 0$ , d.h. Lösungen mit  $\psi < 0$  brauchen bei der Rücktransformation zu  $\theta$  nicht betrachtet zu werden.

Nach der Substitution verschwindet der Koeffizient für den 2. Grad. Stellen wir die Gleichung mit Maple wieder auf und gestalten sie übersichtlicher.

> `restart`

> `c2 := 1/4 * (4*lambda^2*a3^2*a2 + mu^2*a1^2) / (lambda^2*a3^2*a1)`

$$c_2 := 1/4 \frac{4\lambda^2 a_3^2 a_2 + \mu^2 a_1^2}{\lambda^2 a_3^2 a_1}$$

> `eq := collect( expand( (psi - 1/3*c2)^3 + 1/4 * (4*lambda^2*a3^2*a2 + mu^2*a1^2) * (psi - 1/3*c2)^2 - 1/4 * (mu^2*a1) / (lambda^2*a3^2) ), psi ) = 0`

$$eq := \psi^3 + \left( -1/3 \frac{a_2^2}{a_1^2} - 1/6 \frac{a_2 \mu^2}{\lambda^2 a_3^2} - 1/48 \frac{\mu^4 a_1^2}{\lambda^4 a_3^4} \right) \psi + \frac{2}{27} \frac{a_2^3}{a_1^3} + 1/18 \frac{a_2^2 \mu^2}{\lambda^2 a_3^2 a_1} + \frac{1}{72} \frac{a_1 a_2 \mu^4}{\lambda^4 a_3^4} + \frac{1}{864} \frac{\mu^6 a_1^3}{\lambda^6 a_3^6} - 1/4 \frac{\mu^2 a_1}{\lambda^2 a_3^2} = 0$$

> `d3 := 1`

### A.3. Lösungen der Gleichung $\mathbf{f}'_{\lambda}(\kappa, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$d_3 := 1$$

$$> d_2 := 0$$

$$d_2 := 0$$

$$> d_1 := \text{simplify} \left( -1/3 \frac{a_2^2}{a_1^2} - 1/6 \frac{a_2 \mu^2}{\lambda^2 a_3^2} - 1/48 \frac{\mu^4 a_1^2}{\lambda^4 a_3^4} \right)$$

$$d_1 := -1/48 \frac{16 a_2^2 \lambda^4 a_3^4 + 8 a_2 \mu^2 a_1^2 \lambda^2 a_3^2 + \mu^4 a_1^4}{a_1^2 \lambda^4 a_3^4}$$

$$> d_0 := \text{simplify} \left( \frac{2}{27} \frac{a_2^3}{a_1^3} + 1/18 \frac{a_2^2 \mu^2}{\lambda^2 a_3^2 a_1} + \frac{1}{72} \frac{a_1 a_2 \mu^4}{\lambda^4 a_3^4} + \frac{1}{864} \frac{\mu^6 a_1^3}{\lambda^6 a_3^6} - 1/4 \frac{\mu^2 a_1}{\lambda^2 a_3^2} \right)$$

$$d_0 := \frac{1}{864} \frac{64 a_2^3 \lambda^6 a_3^6 + 48 a_2^2 \mu^2 a_1^2 \lambda^4 a_3^4 + 12 a_1^4 a_2 \mu^4 \lambda^2 a_3^2 + \mu^6 a_1^6}{a_1^3 \lambda^6 a_3^6} + \frac{1}{864} \frac{-216 \mu^2 a_1^4 \lambda^4 a_3^4}{a_1^3 \lambda^6 a_3^6}$$

$$> h_3 := \text{simplify} (1/4 d_0^2 + 1/27 d_1^3)$$

$$h_3 := -\frac{1}{6912} \frac{\mu^2 (\mu^6 a_1^6 - 108 \mu^2 a_1^4 \lambda^4 a_3^4 + 64 a_2^3 \lambda^6 a_3^6 + 48 a_2^2 \mu^2 a_1^2 \lambda^4 a_3^4)}{a_1^2 \lambda^8 a_3^8} - \frac{1}{6912} \frac{12 a_1^4 a_2 \mu^4 \lambda^2 a_3^2}{a_1^2 \lambda^8 a_3^8}$$

Die mehrzeiligen Formeln wurden zwecks Seitengröße per Hand umgebrochen.  
Der Ausdruck

$$\left( \frac{d_0}{2} \right)^2 + \left( \frac{d_1}{3} \right)^3,$$

der als Letztes mit

$$-\frac{1}{6912} \frac{\mu^2 (\mu^6 a_1^6 - 108 \mu^2 a_1^4 \lambda^4 a_3^4 + 64 a_2^3 \lambda^6 a_3^6 + 48 a_2^2 \mu^2 a_1^2 \lambda^4 a_3^4 + 12 a_1^4 a_2 \mu^4 \lambda^2 a_3^2)}{a_1^2 \lambda^8 a_3^8} \quad (\text{A.8})$$

berechnet wurde, wird als Diskriminante bezeichnet und bestimmt mit dem Vorzeichen die Anzahl und Art der Lösungen von (A.6).

Da wir nach der 2. Substitution die reduzierte Form der kubischen Gleichung (A.6) betrachten

$$\psi^3 + d_1 \psi + d_0 = 0,$$

kann nun die in der Literatur als *Cardanische Formel* bekannte Vorgehensweise angewendet werden. Dazu wird folgende Fallunterscheidung nach der Diskriminanten

## A. Anhang

vorgenommen

$$\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3 < 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3 = 0 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3 > 0.$$

Folgende leicht nachvollziehbare Beobachtungen sind hilfreich für die zu untersuchenden Fälle. Die dort definierte Funktion  $f$  gleicht obigen Rücksubstitutionen von  $\psi$  zu  $\kappa$ , da

$$\psi \mapsto \theta = \psi - \frac{c_2}{3} \mapsto \kappa = 1 - \theta^2 = 1 - \left(\psi - \frac{c_2}{3}\right)^2 = f(\psi)$$

gilt.

**Beobachtung A.3.1.** Für  $\psi \in \mathbb{C}$  sei die folgende Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben

$$f(\psi) = 1 - \left(\psi - \frac{c_2}{3}\right)^2$$

mit  $c_2 \in \mathbb{R}$ .

1. Für  $\psi \in \mathbb{R}$  gilt

$$f(\psi) \in \mathbb{R}.$$

2. Für  $\psi \in \mathbb{C}$  mit  $(\psi - \frac{c_2}{3})^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  gilt

$$f(\psi) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt für  $\psi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  mit einem Realteil  $\operatorname{Re}(\psi)$  ungleich  $\frac{c_2}{3}$ , also  $\operatorname{Re}(\psi) \neq \frac{c_2}{3}$ , so dass

$$f(\psi) \notin \mathbb{R}$$

gilt.

3. Für drei voneinander verschiedene reelle Punkte  $\psi_1, \psi_2$  und  $\psi_3$  gilt

$$f(\psi_1) \neq f(\psi_2) \vee f(\psi_1) \neq f(\psi_3) \vee f(\psi_2) \neq f(\psi_3).$$

Die folgenden Lemmata geben an, welche Lösungen von  $f_\lambda(\kappa, x) = 0$  in den einzelnen Fällen für

$$\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3$$

auftreten. Dazu sei das Polynom 3. Grades

$$\psi^3 + d_1\psi + d_0$$

mit

$$d_0 = \frac{1}{864} \frac{64a_2^3\lambda^6 a_3^6 + 48a_2^2\mu^2 a_1^2\lambda^4 a_3^4 + 12a_1^4 a_2\mu^4\lambda^2 a_3^2 + \mu^6 a_1^6 - 216\mu^2 a_1^4\lambda^4 a_3^4}{a_1^3\lambda^6 a_3^6}$$

A.3. Lösungen der Gleichung  $\mathbf{f}'_\lambda(\kappa, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

$$d_1 = -\frac{1}{48} \frac{16a_2^2 \lambda^4 a_3^4 + 8a_2 \mu^2 a_1^2 \lambda^2 a_3^2 + \mu^4 a_1^4}{a_1^2 \lambda^4 a_3^4}$$

gegeben. Die Lösungen der Gleichung  $\psi^3 + d_1\psi + d_0 = 0$  seien mit  $\psi_i, i = 1, 2, 3$ , bezeichnet.

**Lemma A.3.2.** Sei

$$\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3 < 0.$$

Dann löst

$$\kappa^k = 1 - \left(\max\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} - \frac{c_2}{3}\right)^2$$

die Gleichung  $f_\lambda(\kappa, x) = 0$ .

**Beweis.** Nach [7] gibt es in diesem Fall drei voneinander verschiedene reelle Lösungen

1.  $2\sqrt{-\frac{d_1}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi\right)$
2.  $2\sqrt{-\frac{d_1}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)$
3.  $2\sqrt{-\frac{d_1}{3}} \cos\left(\frac{1}{3}\varphi + 2\frac{2\pi}{3}\right),$

wobei

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3d_0}{2d_1\sqrt{-\frac{d_1}{3}}}\right).$$

Nach Beobachtung A.3.1 ergeben sich daraus mindestens zwei voneinander verschiedene  $\kappa_1 = f(\psi_1), \kappa_2 = f(\psi_2)$  und  $\kappa_3 = f(\psi_3)$ . Es folgt, dass es unter den Lösungen eine oder zwei Lösungen geben muss, die nicht größer gleich null sind.

1. Sei o.B.d.A.  $\psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3$  mit  $\psi_1 < 0$  und  $\psi_2, \psi_3 \geq 0$ . Dann gilt  $\theta_2 = \psi_2 - \frac{c_2}{3} \geq 0$ ,  $\theta_3 = \psi_3 - \frac{c_2}{3} \geq 0$  und  $f(\psi_2) = f(\psi_3)$ , da es nur einen kritischen Punkt in  $[0, 1]$  von  $f_\lambda$  geben kann. Setze  $\kappa^k = 1 - (\psi_3 - \frac{c_2}{3})^2$ .
2. Sei o.B.d.A.  $\psi_1 \leq \psi_2 \leq \psi_3$  mit  $\psi_1 < 0, \psi_2 < 0$  und  $\psi_3 \geq 0$ . Setze  $\kappa^k = 1 - (\psi_3 - \frac{c_2}{3})^2$ .

An der Fallunterscheidung erkennt man, dass

$$1 - \left(\max\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} - \frac{c_2}{3}\right)^2$$

den kritischen Punkt  $\kappa^k$  liefert. □

A. Anhang

**Lemma A.3.3.** Sei

$$\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3 = 0.$$

Dann löst

$$\kappa^k = 1 - \left(\max\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} - \frac{c_2}{3}\right)^2$$

die Gleichung  $f_\lambda(\kappa, x) = 0$ .

**Beweis.** Nach [7] gibt es bei diesem Fall für  $d_0, d_1 \neq 0$  eine einfache reelle und eine zweifache reelle Lösung

1.  $\frac{3d_0}{d_1}$
2.  $-\frac{3d_0}{2d_1}$
3.  $\frac{3d_0}{2d_1}$

und für  $d_0 = d_1 = 0$  eine einzige dreifache Lösung

$$\psi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Da  $d_1 < 0$  gilt, ist der Fall  $d_0 = d_1 = 0$  nicht möglich.

Analog wie in Beweis zu Lemma A.3 muss eine Lösung größer gleich null sein, d.h.  $\frac{3d_0}{d_1} \geq 0$  oder  $-\frac{3d_0}{2d_1} \geq 0$  gelten. Setze wieder  $\kappa^k = 1 - \left(\max\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} - \frac{c_2}{3}\right)^2$ .  $\square$

**Lemma A.3.4.** Sei

$$\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3 > 0.$$

Dann löst

$$\kappa^k = 1 - \left(e_1 + e_2 - \frac{c_2}{3}\right)^2$$

mit

$$e_1 := \left(-\frac{d_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad e_2 := \left(-\frac{d_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{d_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{A.9})$$

die Gleichung  $f_\lambda(\kappa, x) = 0$ .

**Beweis.** Nach [7] gibt es eine reelle und zwei komplexe Lösungen. Dafür seien die

### A.3. Lösungen der Gleichung $\mathbf{f}'_\lambda(\kappa, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$

reellen Zahlen aus Formel (A.9) gegeben. Damit sind die drei Lösungen

1.  $e_1 + e_2 \in \mathbb{R}$
2.  $-\frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{e_1 - e_2}{2}i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$
3.  $-\frac{e_1 + e_2}{2} - \frac{e_1 - e_2}{2}i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$

gegeben. Wendet man die Rücksubstitutionen an, bekommt man eine reelle und zwei komplexe Lösungen. Hier wird auf die genauen Darstellungen der komplexen Lösungen verzichtet, da sie nicht in Betracht kommen. Nur für die reelle Lösung setzen wir die Substitutionen zurück und erhalten

$$\kappa = 1 - \left( e_1 + e_2 - \frac{c_2}{3} \right)^2.$$

□

Fassen wir alle drei Lemmata zusammen.

**Bemerkung A.3.5.** 1. Falls

$$\left( \frac{d_0}{2} \right)^2 + \left( \frac{d_1}{3} \right)^3 \leq 0$$

gilt, dann ist der kritische Punkt von  $f_\lambda$  gegeben durch

$$\kappa^k = 1 - \left( \max\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} - \frac{c_2}{3} \right)^2.$$

2. Falls

$$\left( \frac{d_0}{2} \right)^2 + \left( \frac{d_1}{3} \right)^3 > 0$$

gilt, dann ist der kritische Punkt von  $f_\lambda$  gegeben durch

$$\kappa^k = 1 - \left( e_1 + e_2 - \frac{c_2}{3} \right)^2.$$

Betrachtet man bei der Bildung des Maximums nur die reellen Lösungen von  $\psi^3 + d_1\psi + d_0 = 0$ , dann können alle drei Fälle in dem Ausdruck

$$\kappa^k = 1 - \left( \max\{\psi \in \mathbb{R} \mid \psi^3 + d_1\psi + d_0 = 0\} - \frac{c_2}{3} \right)^2$$

zusammengeführt werden.

null



# Tabellenverzeichnis

1.	Lösungstabelle zum Beispiel 5.1.1 . . . . .	87
2.	Nettorenditen und Standardabweichungen der Märkte . . . . .	99
3.	Korrelationen der Märkte . . . . .	100
4.	Problemgrößen im Sampling-and-Discarding-Ansatz . . . . .	107
5.	Problemgrößen laut SDPT3-Solver für $\widehat{SB}_{N,k}$ bei $n = 3, \beta = 0.01, \varepsilon =$ $0.1$ und $N = 2500$ . . . . .	107
6.	Teilprobleme $\widehat{SB}_{N,k_i}, i = 1, \dots, 5$ . . . . .	108



# Abbildungsverzeichnis

1.	Effizienter Rand . . . . .	53
2.	Links oben: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von $MV_\lambda$ – Links unten: Verlauf der Portfoliorisiken – Rechts unten: Verlauf der Portfoliorenditen . . . . .	54
3.	Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von $MV_\lambda$ für $n = 8$ – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von $MV_\lambda$ für $n = 8$	102
4.	Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von $RC_\lambda$ für $n = 8$ – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von $RC_\lambda$ für $n = 8$	104
5.	Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von $RC_\lambda$ unter einer Chance-Constraint – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von $RC_\lambda$ unter einer Chance-Constraint . . . . .	108
6.	Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von $MV_\lambda$ für $n = 3$ – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von $MV_\lambda$ für $n = 3$	109
7.	Links: Verlauf der effizienten Portfoliogewichte von $RC_\lambda$ für $n = 3$ – Rechts: Verlauf des optimalen Zielfunktionswertes von $RC_\lambda$ für $n = 3$	110



# Literaturverzeichnis

- [1] E. BALAS, *Disjunctive Optimization*, Annals of Discrete Mathematics, Vol. 5, 3-51, 1979.
- [2] J. F. BARD, *Practical Bilevel Optimization*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 1998.
- [3] M. S. BAZARAA, H. D. SHERALI, C. M. SHETTY *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2006.
- [4] A. BEN-TAL, A. NEMIROVSKI, *Robust Solutions of Uncertain Linear Programs*, Operations Research Letters, Vol. 25, 1-13, 1998.
- [5] A. BEN-TAL, L. EL GHAOU, A. NEMIROVSKI, *Robust Optimization*, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2009.
- [6] M. J. BEST, R. R. GRAUER, *On the Sensitivity of Mean-variance-efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results*, The Review of Financial Studies, Vol. 4, Issue 2, 1991.
- [7] J. BEWERSDORFF *Algebra für Einsteiger*, Vieweg+Teubner | GWV Fachverlag GmbH Wiesbaden, 2009.
- [8] F. BLACK, M. S. SCHOLES *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, 637-654, 1973.
- [9] F. BLACK, R. LITTERMAN, *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal, Vol 48, Issue 5, 1992.
- [10] J. F. BONNANS, A. SHAPIRO, *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2000.
- [11] S. BOYD, L. VANDENBERGHE, *Semidefinite Programming*, SIAM Review, Vol. 38, Issue 1, 49-95, 1996.
- [12] S. BOYD, L. VANDENBERGHE, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 2009.
- [13] P. BRANDIMARTE, *Numerical Methods in Finance: A Matlab-Based Introduction*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [14] G. CALAFIORE, M. C. CAMPI, *Uncertain Convex Programs: Randomized Solutions and Confidence Levels*, Mathematical Programming, Series A, Vol. 102, 25-46, 2005.
- [15] M. C. CAMPI, S. GARATTI, *A Sampling-and-Discarding Approach to Chance-Constrained Optimization: Feasibility and Optimality*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 148, 257-280, 2011.

- [16] J. CLAUS, J. THOMAS, *Equity Premia as Low as Three Percent? Evidence from Analysts Earnings Forecasts for Domestic and International Stock Markets*, The Journal of Finance, Vol. 56, Issue 5, 2001.
- [17] G. CORNUEJOLS, R. TÜTÜNCÜ, *Optimization Methods in Finance*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 2007.
- [18] S. DEMPE, *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 2002.
- [19] C. A. FLOUDAS, *Deterministic Global Optimization*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 2000.
- [20] C. A. FLOUDAS, O. STEIN, *The Adaptive Convexification Algorithm: a Feasible Point Method for Semi-infinite Programming*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 18, 1187-1208, 2007.
- [21] C. GEIGER, C. KANZOW, *Theorie und Numerik Restringierter Optimierungsprobleme*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [22] M. Á. GOBERNA, M. A. LÓPEZ, *Semi-infinite Programming: Recent Advances*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 2001.
- [23] O. GÜLER, *Foundations of Optimization*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2010.
- [24] M. M. HAGEMEISTER, *Die Schätzung erwarteter Renditen in der modernen Kapitalmarkttheorie: Implizit erwartete Renditen und ihr Einsatz in Kapitalmarktmodell-Tests und Portfoliooptimierung*, Dissertation an der Universität zu Köln, 2010.
- [25] R. HETTICH, K. O. KORTANEK, *Semi-infinite Programming: Theory, Methods, and Applications*, SIAM Review, Vol. 35, 380-429, 1993.
- [26] R. HETTICH, P. ZENKE, *Numerische Methoden der Approximation und Semi-infiniten Optimierung*, Teubner, Stuttgart, 1982.
- [27] J. JAHN, *Vector Optimization: Theory, Applications And Extensions*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.
- [28] J. D. JOBSON, B. KORKIE, *Estimation for Markowitz Efficient Portfolios*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 75, Nr. 371, 544-554 1980.
- [29] H.T. JONGEN, K. MEER, E. TRIESCH, *Optimization Theory*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 2004.
- [30] P. JORION, *Bayes-Stein estimation for portfolio analysis*, Journal Financ Quan Anal, Vol. 21, Issue 3, 1986.
- [31] P. JORION, *Portfolio Optimization in Practice*, Financial Analysts Journal, Vol. 48, Issue 1, 1992.
- [32] C. KANZOW, *Some Noninterior Continuation Methods for Linear Complementarity Problems*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Vol. 17, 851-868, 1996.
- [33] M. KOČVARA, J. OUTFRATA, J. ZOWE, *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equilibrium Constraints: Theory, Applications and Numerical*

- Results*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 1998.
- [34] M. A. LÓPEZ, G. STILL, *Semi-infinite Programming*, European Journal of Operational Research, Vol. 180, 491-518, 2007.
- [35] Z.-Q. LUO, J.-S. PANG, D. RALPH, *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1996.
- [36] H. M. MARKOWITZ, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, Vol. 7, Issue 1, 1952.
- [37] H. M. MARKOWITZ, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York, 1959.
- [38] D. MEINTRUP, S. SCHÄFFLER, *Stochastik: Theorie und Anwendungen*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005.
- [39] C. D. MEYER, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [40] A. MEUCCI, *Risk and Asset Allocation*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [41] R. O. MICHAUD, *Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation*, Harvard Business School Press, Boston, 1998.
- [42] A. NEMIROVSKI, A. SHAPIRO, *Convex Approximations of Chance Constrained Programs*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 17, 969-996, 2006.
- [43] S. J. PRESS, *Applied Multivariate Analysis*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1972.
- [44] A. PRÈKOPA, *Stochastic Programming*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 1995.
- [45] A. PRÈKOPA, *Probabilistic Programming*, In: A. Ruszczyski, A. Shapiro, Stochastic Programming, Handbooks in Operations Research and Management Science, Vol. 10, 2003
- [46] R. REEMTSEN, S. GÖRNER, *Numerical Methods for Semi-infinite Programming: A Survey*, In: R. Reemtsen, J.-J. Rückmann, Semi-infinite Programming, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 195-275, 1998.
- [47] R. REEMTSEN, J.-J. RÜCKMANN, *Semi-infinite Programming*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 1998.
- [48] R. REEMTSEN, *Lineare Optimierung Eine Vorlesung*, Shaker Verlag, Aachen, 2001.
- [49] H. SCHEEL, S. SCHOLTES, *Mathematical Programs with Complementarity Constraints: Stationarity, Optimality, and Sensitivity*, Mathematics of Operations Research, Vol. 25, 1-22, 2000.
- [50] K. SCHÖTTLE, *Robust Optimization with Application in Asset Management*, Dissertation an der Technische Universität München, 2007.

- [51] K. SCHÖTTLE, R. WERNER, *Robustness Properties of Mean-Variance Portfolios*, Optimization, Vol. 58, Issue 6, 641-663, 2009.
- [52] O. STEIN, G. STILL, *On Generalized Semi-infinte Optimization and Bilevel Optimization*, European Journal of Operations Research, Vol. 142, 444-462, 2002.
- [53] O. STEIN, *Bi-level Strategies in Semi-infinte Programming*, Kluwer, Boston/Dordrecht/New York/London, 2003.
- [54] O. STEIN, *Parametrische Optimierung*, Skript zur Vorlesung am Karlsruher Institut für Technologie im Wintersemester 2011/2012, 2011.
- [55] O. STEIN, *Nichtlineare Optimierung I und II*, Skript zur Vorlesung am Karlsruher Institut für Technologie im Sommersemester 2012, 2012.
- [56] O. STEIN, *Globale Optimierung I und II*, Skript zur Vorlesung am Karlsruher Institut für Technologie im Wintersemester 2012/2013, 2013.
- [57] G. STILL, *Discretization in Semi-infinite Programming: the Rate of Convergence*, Mathematical Programming Series A, Vol. 91, 53-69, 2001.
- [58] P. SUN, R. M. FREUND, *Computation of Minimum-Volume Covering Ellipsoids*, Operations Research, Vol. 52, Issue 5, 690-706, 2004.
- [59] K. C. TOH, M. J. TODD, R. H. TÜTÜNCÜ, *SDPT3 – A Matlab Software Package for Semi-definite Programming, Version 1.3*, Optimization Methods and Software, Vol. 11 & 12, 545-581, 1999.
- [60] A. B. ZEMKOHO, *Bi-level Programming: Reformulations, Regularity, and Stationarity*, Dissertationsschrift an der Technischen Universität Bergakademie Freiberg, 2012.

# Lebenslauf

Marcel Sinske  
Egelseestraße 1  
76228 Karlsruhe

**Geburtsdatum:** 15. Januar 1981  
**Geburtsort:** Bernburg  
**Familienstand:** ledig, keine Kinder  
**Staatsbrgerschaft:** deutsch

---

**Ausbildung:** September 1987 – August 1991  
Polytechnische Oberschule „Juri Gagarin“, Bernburg  
September 1991 – Juni 1999  
Hermann-Hellriegel-Gymnasium, Bernburg  
Abschluss: Allgemeine Hochschulreife (2,2)  
Oktober 2000 – Mrz 2007  
Studium der Wirtschaftsmathematik an der  
Martin-Luther-Universitt Halle-Wittenberg  
Abschluss: Diplom-Wirtschaftsmathematiker (2,2)

---

**Beruflicher Werdegang:** seit August 2007  
Akademischer Mitarbeiter am Institut für Operations Research, Lehrstuhl Prof. Dr. Oliver Stein, des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

Karlsruhe, den 10. Juni 2013



# Erklärung

(gemäß §4 (1), Abs. 4 der Promotionsordnung vom 15. August 2006)

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Dissertation bis auf die in der Abhandlung angegebene Hilfe selbständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und genau kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer und aus eigenen Veröffentlichungen unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

Karlsruhe, den 10. Juni 2013

