

Einige Gedanken zu: Oskulationen von Dispersionskurven, Entartung und Hybridisierung von Moden

Thomas Forbriger

11. Dezember 2006

Date: 2006/12/11 17:22:50 Revision: 1.28
erste Fassung: 12. Dezember 2001

1 Einleitung

Der erste Entwurf zu diesen Notizen entstand als Vorarbeit für einen DGG-Vortrag (Forbriger, 2002).

1.1 Hintergrund

Abhängig vom Ausbreitungsmedium können sich die Dispersionskurven der Phasengeschwindigkeit verschiedener Rayleigh-Moden sehr nahe kommen, sich fast berühren. Diese Berührungspunkte sind in der englischsprachigen Literatur als „osculatation points“ bekannt. Geläufig sind sie im Zusammenhang mit der Stoneley-Mode an der Kern-Mantel-Grenze. Deren Dispersionskurve wird aus Teilen der Dispersionskurven mehrerer Normalmoden aufgebaut. Jeweils an einer Oskulation wechselt die Stoneley-Mode zur nächsthöheren Normalmode.

Im Gegensatz zur globalen Erde ist der Verlauf der Dispersionskurven für flachseismische Medien vor einer Inversion unbekannt und kann von einem Untersuchungsgebiet zum anderen stark variieren. Oskulationen können dann problematisch werden, wenn sie nicht als solche erkannt werden, weil jeweils nur ein Teilast der beteiligten Moden angeregt ist. Das ist ein typisches Erscheinungsbild. Andererseits können Oskulationen Informationen über tiefer liegende Materialeigenschaften enthalten, die von den angeregten Oberflächenwellen nicht voll erfasst werden. Dies wird anhand von Feldbeispielen erläutert.

In extremen Fällen kann man den Eindruck gewinnen, Dispersionskurven würden sich kreuzen. Dann läge Entartung zweier Normalmoden vor. Bei genauer Betrachtung wechseln an Oskulationen tatsächlich meistens die physikalischen Eigenschaften der Wellenausbreitung von einem Modenast zum anderen. Dazu gehören die Gruppengeschwindigkeit, die Anregungskoeffizienten und die Form der Eigenfunktionen.

1.2 Beispiele

Oskulationen von Dispersionskurven sind in der seismologischen Literatur durchaus bekannt, auch wenn ihre Natur selten diskutiert wird.

- Okal (1978) diskutiert eine neue Klassifikation der sphäroidalen Moden der Erde. Diese orientiert sich nicht an der klassischen Oberton-Zählung, sondern sortiert die Moden in Gruppen mit physikalisch ähnlichen Eigenschaften und numeriert innerhalb dieser Gruppen. Er beschreibt eingehend, dass die physikalischen Eigenschaften an Oskulationen typischerweise den Modenast der klassischen Zählung wechseln. Eine von ihm ad hoc eingeführte Deutung der Oskulationen als Kopplung von Moden gab die Anregung zu den unten angestellten Überlegungen.
- Sezawa und Kanai (1935) behandeln den einfachsten Fall dispergierter Rayleigh-Moden in einem geschichteten Halbraum. Es handelt sich um eine homogene Schicht über einem nach unten unendlich ausgedehnten homogenen Halbraum. Die Schicht wird nach oben durch eine freie Oberfläche abgeschlossen. Beide Medien besitzen ein Poisson-Verhältnis von 0,25 ($\lambda = \mu$). Dieses Modell wird von den Autoren mathematisch exakt behandelt. Numerisch weisen sie eine Oskulation von Dispersionskurven nach¹. Für den Grenzübergang zu einem unendlich starren Halbraum (es

¹Numerisch kann der Effekt mit gängigen Methoden, wie dem Algorithmus von Schwab und Knopoff (1972), nachvollzogen werden. Für eine 10 m mächtige Schicht mit einer Dichte von 2 g/cm^3 und $v_s=1 \text{ km/s}$ sowie $v_p=1,73205 \text{ km/s}$ und einem Halbraum gleicher Dichte und um den Faktor 1000 größerer Geschwindigkeiten kann der Grenzübergang genähert werden. Es tritt dann eine Oskulation bei 43,3012 Hz und 0,5 s/km auf. Es kann nicht entschieden werden, ob es sich um eine Oskulation oder eine Entartung handelt. Im Bereich von relativen Variationen von Frequenz und Langsamkeit von 0,00001 um den Oskulationspunkt variiert das Vorzeichen der Rayleigh-Determinante aufgrund von Rundungsfehlern erratisch. Weicht man mit v_p in

verbleibt die Schicht als homogener Wellenleiter) deutet sich bei der numerischen Auswertung eine Entartung von zwei Moden bei einer Frequenz an. Der Übergang zur Entartung ist kontinuierlich, es tritt eine Oskulation auf. Selbst in diesem einfachen Fall sind die Gleichungen, mit denen elastische Wellenausbreitung und deren Randbedingungen beschrieben werden muss, jedoch so komplex, dass eine weitere, elementare Betrachtung des Phänomens kaum möglich erscheint.

- Kennett (1983, Abschnitt 11.4.1) beschreibt den wechselnden Charakter von Moden in der Nähe von Oskulationen und zeigt Beispiele der Dispersion der Phasen-Geschwindigkeit für ein Mantelmodell in zwei Abbildungen.
- Dahlen und Tromp (1998, Abschnitt 11.6.2) beschreiben die Oskulationen, die durch die Stoneley-Mode an der Kern-Mantel-Grenze hervorgerufen werden. Sie diskutieren auch den Verlauf der Gruppengeschwindigkeit, der sich an den Oskulationen der Phasen-Geschwindigkeits-Dispersionskurven drastisch ändert. Sie zeigen sowohl die Dispersionskurven der Phasengeschwindigkeit, wie auch der Gruppengeschwindigkeit.

In Abschnitt 8.8 führen sie eine ähnliche Klassifikation der sphäroidalen Moden durch, wie sie von Okal (1978) beschrieben wurde. Sie zeigen unter anderem Eigenfunktionen der Stoneley-Moden (Abbildung 8.15). Bemerkenswert ist ein Hinweis auf Seite 307, dass die toroidalen Moden im Mantel und im inneren Kern eigentlich zum selben Eigenschwingungssystem gehören. Beide Systeme werden aber getrennt behandelt, weil sie durch den flüssigen äußeren Kern vollständig entkoppelt sind. Würde man die Eigenfrequenzen jedoch in dasselbe ω, l -Diagramm eintragen, ergäbe sich ein ähnlich komplexes Bild, wie es durch die Kombination von Rayleigh- und Stoneley-Moden im Falle der sphäroidalen Bewegung auftritt.

- Nolet und Dorman (1996, Abbildung 3.a) zeigen Dispersionskurven der Gruppen- und Phasengeschwindigkeit für ein marines Modell. Darin sind deutlich Oskulationen der Phasengeschwindigkeit zu erkennen. Auch das typische Verhalten der Gruppengeschwindigkeits-Sprünge ist dort zu sehen.

der Schicht um 0,00005 vom Poissonschen Wert ($\nu=0,25$) ab, so tritt eindeutig keine Entartung, sondern nur eine starke Oskulation auf. Die Poisson-Zahl der Schicht scheint also ein absolut kritischer Parameter des Effekts zu sein. Die Poisson-Zahl des Halbraumes hat keinen nennenswerten Einfluss

- Buchen und Ben-Hador (1996, Abbildung 3.b) zeigen Dispersionskurven der Phasengeschwindigkeit mit deutlichen Oskulationen.
- Bohlen et al. (1999, Abbildung 2) zeigen Dispersionskurven der Phasenlangsamkeit für ein marines Modell, die sich scheinbar schneiden.
- Woodhouse (1988) beschreibt die Komplikationen, die aufgrund von Oskulationen bei der numerischen Suche nach Nullstellen der Rayleigh-Determinante auftreten. Um die Berechnung von Eigenschwingungen robust zu machen, wurde von ihm die Methode des „root count“ entwickelt.
- Kerry (1981) behandelt die Berechnung von Rayleigh-Wellen-Seismogrammen durch Moden-Summation. Insbesondere geht er dabei auf Komplikationen ein, die durch einen Kanal erniedrigter Geschwindigkeit (Asthenosphäre) auftreten. Die Kanalwellen führen zu starken Oskulationen der Dispersionskurven. Dies führt zu Problemen bei der Nullstellensuche, die Kerry dadurch löst, dass er die Kanalwellen identifiziert und im Modensatz getrennt und mit weniger Genauigkeit behandelt (da sie zu den Rayleigh-Wellen kaum beitragen).

Kerry zeigt, dass die Gruppengeschwindigkeit einer Mode an eine Oskulation sich auf einem kleinen Frequenzintervall stark ändert, während die Gruppengeschwindigkeit von der anderen Moden (quer über die Oskulation) fortgesetzt wird. Kennett (1983, Abbildung 11.7) zeigt die dazugehörigen Eigenfunktionen. Die Eigenfunktionen eines Obertones wechseln jeweils an einer Oskulation ihren Charakter von Rayleigh-Welle zu Kanal-Welle.

- Widmer-Schmidrig (1997) beschreibt ein Phänomen, das bei den globalen Normalmoden auftritt und zwar bei den Obertönen $_{10}S_2$ und $_{11}S_2$. Eine der beiden Moden hat ihre Energie auf die Scherdeformation im inneren Kern konzentriert und ist nicht an der Erdoberfläche beobachtbar (ICJ-Mode). Die andere hat viel Kompressions-Energie im äußeren Kern und im Erdmantel (PKIKP-Mode). Diese ist an der Erdoberfläche beobachtbar. Die Eigenfrequenz der ICJ-Mode hängt stark vom Radius r_{ICB} der Grenze zwischen innerem und äußerem Kern ab, während die der PKIKP-Mode praktisch unabhängig davon bei 4,04 mHz liegt. Zeichnet man beide Eigenfrequenzen als Kurven in Abhängigkeit von r_{ICB} , müssten sich diese für

PREM (Dziewonski und Anderson, 1981) bei $r_{\text{ICB}}=1221,5$ km schneiden. Das tun sie jedoch nicht. Statt dessen tauschen die Obertöne $_{10}S_2$ und $_{11}S_2$ die Rolle. Ob sich $_{10}S_2$ oder $_{11}S_2$ auf den Kern konzentriert ist, hängt ganz empfindlich vom Erdmodell ab. Auch das ist ein Oskulationsphänomen. Phänomene dieser Art haben Okal (1978) zur Beschreibung der physikalischen Klassifizierung von Obertönen veranlasst. Problematisch ist, dass der Charakter des Obertons empfindlich vom Erdmodell abhängt und bei $r_{\text{ICB}}=1221,5$ km für PREM $_{10}S_2$ und $_{11}S_2$ Mischformen zwischen ICJ-Mode und PKIKP-Mode annehmen.

Für globale Erdmodelle bezieht sich die Diskussion von Oskulationen hauptsächlich auf die Stoneley-Mode an der Kern-Mantel-Grenze. Deren Lage ist relativ gut bekannt und ändert sich im Rahmen von Inversionen nur unwesentlich. Für flachseismische Medien werden Oskulationen in Zusammenhängen beobachtet, die (mangels Erfahrung) bisher noch als überraschend empfunden werden. Da insbesondere die Anregung der Moden an einer Oskulation von einem Modenast auf einen anderen wechselt, können bei der Interpretation erhebliche Probleme auftreten (Forbriger, 1996). Einige Beispiele findet man bei Forbriger (2001):

- Die Datensätze BERKHEIM (Abbildungen VI.14, Seite 153 und VI.19, Seite 157) und HILZINGEN (Abbildungen VI.36, Seite 186 und VI.37, Seite 187) zeigen Oskulationen im Zusammenhang mit einer Zone erniedrigter Geschwindigkeit.
- Im Datensatz KÖRSCHTAL ist ebenfalls eine Oskulation zu erkennen.
- Anhand eines synthetischen Beispiels (Abbildungen VI.49, Seite 204 und VI.51) wird gezeigt, dass eine Oskulation möglicherweise im aufgezeichneten Wellenfeld auch bei idealer Datenqualität nicht erkennbar ist.

1.3 Begriffsklärung

Mathematisch existiert eine klare Definition für den Begriff *Oskulation*. *Osculation* steht für einen Berührungspunkt zweier Kurven (Korn und Korn, 1968). Diese Definition wird auch im deutschsprachigen Duden gegeben. Es werden dabei Berührungspunkte n -ter Ordnung unterschieden:

0-te Ordnung: Ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven.

1-te Ordnung: Ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven und dem auch die erste Ableitung der Kurven identisch ist (gemeinsame Tangente).

2-te Ordnung: Ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven und dem auch die erste und die zweite Ableitung der Kurven identisch ist (gemeinsame Tangente und gleiche Krümmung).

usw.

In der deutschsprachigen Literatur findet man auch Definitionen, nach denen nur ein gemeinsamer Punkt 2-ter Ordnung als *Oskulation* bezeichnet wird. Zwingend ist dabei, dass beide Kurven einen gemeinsamen Punkt besitzen. Beim hier beschriebenen Phänomen sollte man daher eher von *beinahe Oskulation* oder *quasi-osculatation* sprechen.

Osculum bedeutet lateinisch „kleiner Mund“ und *Oskulum* bezeichnet die Ausführöffnung der Schwämme (Gr. Brockhaus, mündl. Mitteilung Walter Zürn, 2006). Die Römer unterschieden drei Formen des Kusses. Wobei der am wenigsten leidenschaftliche, freundschaftliche Wangenkuss als *osculum* bezeichnet wurde („kiss“, Wikipedia, 2006). Diese Begriffsbeziehungen legen eine Verbindung zwischen *Oskulation* und *küssende Kurven* nahe, was auch anschaulich auf der Hand liegt.

Dahlen und Tromp bezeichnen das Phänomen bei Dispersionskurven als *osculations* (Dahlen und Tromp, 1998, Kapitel 11.6.2). In Kapitel 8.8.10 sprechen sie auch von *avoided crossing* und unterscheiden einmal zwischen ganz naher Berührung (*avoided crossing*) und Annäherung von Dispersionskurven (*osculatation*). Kennett (1983, Kapitel 11.4.1) verwendet die Bezeichnung *osculatation points*. Er beschreibt das Phänomen mit „two modes almost touch“. Im Zusammenhang mit dem regelmäßigen Auftreten von Oskulationen weist er auf *solotone effects* hin, mit einem Verweis auf einen Artikel von Kennett und Nolet (1979, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **56**, 283–308). Kerry (1981, Seite 434) verwendet ebenfalls den Begriff *Oskulation* in der Beschreibung „two curves osculate closely“. Die Bezeichnung *quasi-osculatation point* verwenden Levshin und Panza (2005, unpublished).

Der Begriff *avoided crossing* wird auch in Arbeiten der Quantenchemie (Energieeigenwerte in Molekülen) verwendet. Ebenfalls in Arbeiten der Festkörperphysik bei der Bezeichnung entsprechende Phänomene der Dispersionsbeziehung von Phononen. Für Phänomene bei Schwerewellen findet man die Bezeichnung *kissing modes*. Sezawa und Kanai (1935) bezeichnen das Phänomen als *discontinuity*. Okal (1978) beschreibt nicht unmittelbar den Verlauf der Dispersionskurven,

spricht aber im Zusammenhang mit dem diskutierten Phänomen von *hybridized modes*.

Keine expliziten Begriffe für das Phänomen findet man bei Nolet und Dorman (1996), Buchen und Ben Hador (1996) sowie Woodhouse (1988).

1.4 Fragen

Die Beispiele, in denen Oskulationen sehr eng werden werfen Fragen grundsätzlicher Natur auf. Im Grenzfall (von Sezawa und Kanai numerisch vollzogen) geht eine Oskulation in eine Entartung² zweier Moden über. Das heißt es würden dann verschiedene Eigenfunktionen zum selben Eigenwert existieren. Es ist bisher nicht formal untersucht worden, ob eine solche Entartung für ein realistisches, elastisches Medium überhaupt möglich ist³. Der von Sezawa und Kanai im Rahmen der numerischen Genauigkeit angedeutete Fall erfordert einen unendlich starren Halbraum, was nicht als realistisches Modell für die Erde betrachtet werden kann. Die unten angestellten Überlegungen bieten einen ersten Ansatz dafür, diese Frage dahingehend zu beantworten, dass physikalische Gründe gegen die Möglichkeit einer vollkommenen Entartung von Eigenschwingungen unterschiedlicher Eigenfunktionen sprechen.

Da die physikalischen Eigenschaften an einer Oskulation von einem Modenast auf einen anderen wechseln, ist die Natur des Phänomens für eine Interpretation der Oberflächenwellen-Dispersion interessant. Insbesondere scheint das Phänomen in den Fällen BERKHEIM und HILZINGEN (Forbriger, 2001) darauf hinzuweisen, dass Oskulationen einen Hinweis auf tiefer liegende Strukturen geben können, die von den unmittelbar beobachtbaren Oberflächenwellen nicht erfasst werden. Jedoch allein die Gefahr einer Fehlinterpretation, die sich durch eine nicht erkannte Oskulation ergibt, mag als Begründung dienen, dass eine Untersuchung des Phänomens nicht allein von akademischem Interesse ist.

²Der Begriff Entartung, so wie er hier benutzt wird, muss et was klarer gefasst werden: In der Literatur wird insbesondere im Zusammenhang mit „mode-splitting“ die Entartung von Eigenschwingungen bezüglich der azimutalen Ordnung m gemeint. Diese Entartung wird durch laterale Heterogenität aufgehoben, was zum Moden-Splitting führt. Moden unterschiedlicher Ordnung m aber gleichen Grades l (sphärische Modelle) oder Wellenzahl k (ebene Modelle), haben aber dieselbe Eigenfunktion für die Radialabhängigkeit bzw. Tiefenabhängigkeit.

Hier wird dagegen die Entartung von Moden unterschiedlichen Kugelfunktionsgrades l bzw. unterschiedlicher Wellenzahl k betrachtet. Diese haben Eigenfunktionen in r - bzw. z -Richtung, die sich voneinander unterscheiden.

³Persönliche Mitteilung von Peter Malischewsky.

1.5 Erklärungsansatz

In Anlehnung an Okal⁴ (1978) wird im Folgenden versucht, das Phänomen der Oskulationen als schwache Kopplung⁵ zwischen zwei sonst unabhängigen Schwingungssystemen zu verstehen. Im Falle der Stoneley-Mode bestehen diese beiden Systeme aus einer Grenzschicht-Mode an der Kern-Mantel-Grenze einerseits und der Erdoberfläche andererseits. Die Amplitude beider Moden klingt durch den Erdmantel hindurch exponentiell ab. Die Stoneley-Mode „spürt“ daher kaum etwas von der freien Erdoberfläche und die Rayleigh-Moden „spüren“ kaum etwas von der Kern-Mantel-Grenze. Die kleine Amplitude der Moden, die jeweils an der entfernten Diskontinuität noch bleibt, führt zu einer ganz schwachen Kopplung der beiden Schwingungsformen. Eine ähnliche Überlegung könnte im Fall BERKHEIM zutreffen.

Im Fall des von Sezawa und Kanai (1935) diskutierten Modells muss daran gedacht werden, dass die durch die Schwerwellen und Kompressionswellen im Vollraum unabhängigen Schwingungssysteme im Fall des idealen Wellenleiters zwei Schwingungssysteme aufbauen können, welche die Randbedingungen unabhängig voneinander erfüllen. Nur bei Abweichung vom absolut starren Halbraum tritt eine schwache Kopplung aufgrund

⁴Okal motiviert seinen ad hoc Ansatz mit Konzepten aus der Festkörperphysik, wo Oskulationsphänomene beispielsweise bei der Dispersion von Polaronen beobachtet werden.

⁵Der hier verwendete Begriff der „Kopplung“ bedarf dringend einer Erklärung! Er sollte nicht mit dem in der Eigenschwingungstheorie eingeführten Begriff der Modenkopplung verwechselt werden.

In einer sphärisch symmetrischen Erde oder einer flachen Erde, deren Eigenschaften nur mit der Tiefe variieren, sind die einzelnen Eigenschwingungen völlig unabhängig voneinander. Jede Mode kann für sich existieren, ist nicht mit den anderen Moden gekoppelt. Ist eine Mode angeregt, so schwingt sie unabhängig von den anderen. Die Moden tauschen keine Energie untereinander aus.

Der Begriff der Modenkopplung wird in der Eigenschwingungstheorie bei der Behandlung lateraler Heterogenitäten oder allgemein der Abweichung von der sphärischen Symmetrie (dazu zählen auch die Abplattung der Erde und ihre Rotation) eingeführt. Die dann auftretenden Eigenschwingungen können immernoch näherungsweise durch die Moden einer sphärisch symmetrischen Erde beschrieben werden. Allerdings müssen die Eigenfunktionen und Eigenfrequenzen korrigiert werden. Nun können die Moden aber nicht mehr unabhängig voneinander existieren. Sie sind im wörtlichen Sinne gekoppelt, wie zwei gekoppelte Pendel, und tauschen Energie untereinander aus. Wird eine Mode angeregt, so tauscht sie Energie mit einer anderen Mode aus, es kommt zu Schwebungen.

Die im vorliegenden Entwurf diskutierten Eigenschwingungen sind in diesem Sinne *ungekoppelt*! Sie tauschen keine Energie aus und können unabhängig voneinander angeregt werden und existieren! Trotzdem den Begriff Kopplung zu verwenden, wird durch das Gedankenexperiment in Abschnitt 3.1 nahegelegt, in dem zwei getrennte Medien mit ihren unabhängigen Eigenschwingungssystemen durch eine elastische Schicht gekoppelt werden, sowie durch die formale Kopplung zweier Differentialgleichungen in Gln. (6).

der veränderten Randbedingungen auf.

Als Normalfall in einem elastischen Medium muss eine starke Kopplung angenommen werden. Das heißt, die Schwingungen durchsetzen das ganze Medium und es treten keine beinahe isolierten Bereiche auf. Daher sind Oskulationen eher selten zu beobachten und sind relativ häufig mit starken Diskontinuitäten im Medium verknüpft.

Physikalische Formulierung

Die Impulserhaltung für das Kontinuum in einem Volumen V lautet

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{x}, t) \frac{d}{dt} \vec{u}(\vec{x}, t) dV = \int_{\partial V} \vec{f}_A(\vec{x}, t) dS + \int_V \vec{f}_V(\vec{x}, t) dV. \quad (1)$$

Darin ist \vec{u} die elastische Verschiebung und ρ die Massedichte. Die Volumenkraftdichte \vec{f}_V kann dazu dienen, beispielsweise die Schwerkraft in die Gleichung einzubringen. Von der Seismologie wird dieser Term benutzt, um eine seismische Quelle darzustellen. Das Feld \vec{f}_A ist eine Flächenkraftdichte. Damit werden Spannungen auf der Oberfläche von V beschrieben. Bei der Herleitung der elastischen Wellengleichung wird \vec{f}_A durch die Spannungsdehnungsbeziehung und $\vec{f}_A dS = \sigma(\vec{u}) \vec{n} dS$ beschrieben. Der Term kann dann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes in ein Volumenintegral über $\text{div} \sigma$ umgewandelt werden. Fordert man die Gültigkeit für ein beliebiges Volumen, so erhält man die bekannte Differentialgleichung für die elastische Kontinuumsbewegung.

In Abb. 3 sind zwei elastische Medien (Wellenleiter und Kanal) dargestellt, die an einer Fläche durch eine dünne Kopplungsschicht miteinander verbunden sind. Findet eine Bewegung im Kanal statt, so werden Spannungen durch die Kopplungsschicht auf die untere Begrenzungsfläche des Wellenleiters übertragen. Diese Spannungen sind als Flächenkraftdichte in Gl. (1) oder als Randbedingung in die Impulsbilanz für den Wellenleiter einzubringen. Auf diese Weise werden die Bewegungen in Wellenleiter und Kanal miteinander gekoppelt.

1.6 Motivation

Die Diskussion des Kopplungs-Ansatzes mag sehr akademisch und praktisch wenig relevant erscheinen. Es besteht aber ein wichtiger Bezug zur Interpretation beobachteter seismischer Wellen.

Oft ist zu beobachten, dass physikalische Eigenschaften der Wellenausbreitung an Oskulationen den Normalmoden-Ast wechseln. Jeweils zwei

Teiläste der beteiligten Normalmoden scheinen also zu einem gemeinsamen Schwingungssystem zu gehören. In einigen Fällen ist auch nur eines dieser Systeme an der Erdoberfläche beobachtbar. Der Kopplungsansatz erklärt die Oskulationen eben gerade durch zwei kombinierte Schwingungssysteme, die sich (im entkoppelten Fall) am Oskulationspunkt kreuzen. Falls das Kopplungs-Modell zu einem physikalischen Verständnis des Phänomens beitragen kann, könnte es helfen, die eigentlich beobachteten Schwingungssysteme physikalisch sinnvoll zu ordnen (so wie das von Okal (1978) beschrieben wird). Das wäre bei der Interpretation durchaus hilfreich.

2 Moden-Kopplung

2.1 Die Helmholtz-Gleichung

Zur Lösung des elastischen Randwertproblems wird das Wellenfeld für ein sphärisches Modell in „vector spherical harmonics“ (Takeuchi und Saito, 1972, Gl. (253); im Folgenden als TS72 zitiert) und für ein ebenes Modell in „vector surface harmonics“ (TS72, Gl. (214)) zerlegt. Eine Separation der elastischen Differentialgleichung gelingt durch einen Produktansatz, der die Zeitabhängigkeit (harmonische Funktionen), die horizontale Abhängigkeit⁶ und die Abhängigkeit in der Richtung in welcher sich die Materialeigenschaften ändern (sphärisch: in radialer Richtung; eben: in die Tiefe) trennt. In die Bewegungsgleichung eingesetzt erhält man eine Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta_2 + l(l+1)) \phi(\theta, \varphi) = 0 \quad (2a)$$

in Kugelkoordinaten, bzw.

$$(\Delta_2 + k^2) \phi(r, \varphi) = 0 \quad (2b)$$

in Zylinderkoordinaten oder

$$(\Delta_2 + k^2) \phi(x, y) = 0 \quad (2c)$$

in kartesischen Koordinaten. Dabei ist Δ_2 der Laplace-Operator, der nur auf die Horizontal-Koordinaten wirkt. Erfüllt wird die Helmholtz-Gleichung für Funktionen ϕ , die Eigenfunktionen von Δ_2 sind, für die also

$$\Delta_2 \phi = \lambda \phi \quad (3)$$

⁶Mit „Horizontalabhängigkeit“ ist hier immer auch die Abhängigkeit von θ und φ im sphärischen Fall gemeint.

sphärisch: „vector spherical harmonics“ abhängig von θ und φ ; kartesisch: ebene Wellen abhängig von x und y ; zylindrisch: „vector surface harmonics“ (Zylinderwellen) abhängig von r und φ .

gilt. Dabei ist $\lambda^2 = -l(l+1)$ und l eine Kugelfunktionsordnung im sphärischen Fall und $\lambda = -k^2$ und k eine Wellenzahl im ebenen Fall. Lösungen des Gleichungssystems für die radial- bzw. die z -Abhängigkeit (TS72, Seite 290 oben bzw. Gl. (226)), welche die Randbedingungen für eine homogene Bewegungsgleichung erfüllen, existieren nur bei ganz bestimmten, frequenzabhängigen Eigenwerten. Dies führt zur Dispersion der Eigen-schwingungen.

Alle weiteren Überlegungen setzen nur voraus, dass die Horizontalabhängigkeit einer Helmholtz-Gleichung (2) gehorcht, die horizontale Wellenfunktion ϕ also gemäß Gl. (3) eine Eigenfunktion von Δ_2 ist. Im Folgenden werde ich die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta_2 + k^2(\omega)) \phi = 0 \quad (4)$$

und für den Eigenwert eine Wellenzahl k benutzen. Alle Überlegungen gelten allerdings ganz analog auch für sphärische Modelle. Dort ist k^2 einfach durch $l(l+1)$ zu ersetzen.

2.2 Zwei Schwingungssysteme

Nun soll angenommen werden, dass in einem Medium zwei Schwingungssysteme existieren, welche die Randbedingungen unabhängig voneinander erfüllen. Diese Systeme will ich α -Typ und β -Typ nennen. Die zugehörigen Wellenfunktionen ϕ_α und ϕ_β erfüllen jeweils eine Helmholtzgleichung

$$(\Delta_2 + k_\alpha^2(\omega)) \phi_\alpha = 0 \quad (5a)$$

bzw.

$$(\Delta_2 + k_\beta^2(\omega)) \phi_\beta = 0. \quad (5b)$$

Die Funktionen $k_\alpha(\omega)$ und $k_\beta(\omega)$ sind die Dispersionsrelationen, die sich aufgrund der Randbedingungen für die getrennten Systeme ergeben.

2.3 Kopplung

Ich nehme nun (willkürlich) an, dass beide Wellentypen schwach miteinander koppeln. Eine Kopplung ergäbe sich physikalisch aus den Randbedingungen für die Funktion der r - bzw. z -Abhängigkeit. Hier wird sie ad hoc eingeführt.

Die gekoppelten Helmholtz-Gleichungen lauten

$$(\Delta_2 + k_\alpha^2(\omega)) \phi_\alpha = \kappa_{\alpha\beta}^2 \phi_\beta \quad (6a)$$

und

$$(\Delta_2 + k_\beta^2(\omega)) \phi_\beta = \kappa_{\beta\alpha}^2 \phi_\alpha. \quad (6b)$$

Dabei sind $\kappa_{\alpha\beta}^2$ und $\kappa_{\beta\alpha}^2$ Kopplungskonstanten mit der Einheit einer Wellenzahl zum Quadrat. Die Wellenfunktionen ϕ_α und ϕ_β , welche die Gln. (6) lösen, sind andere, als die zur Lösung der Gln. (5). Jedoch sind die $k_\alpha(\omega)$ und $k_\beta(\omega)$ im gekoppelten System identisch mit denen im ungekoppelten System.

Zur Lösung des gekoppelten Systems nehme ich an, dass die Wellenfunktionen immernoch Eigenfunktionen von Δ_2 sind, also

$$\Delta_2 \phi_\alpha = -K_\alpha^2 \phi_\alpha \quad (7a)$$

und

$$\Delta_2 \phi_\beta = -K_\beta^2 \phi_\beta \quad (7b)$$

gilt⁷ Damit gehorchen ϕ_α und ϕ_β wieder homogenen Helmholtz-Gleichungen, jetzt jedoch mit den Wellenzahlen K_α und K_β .

Die Gln. (6a), (6b), (7a) und (7b) erzwingen bereits die Gleichheit von K_α und K_β . Durch Einsetzen von Gl. (7a) in Gl. (6a) erhalte ich

$$\phi_\beta = \frac{k_\alpha^2 - K_\alpha^2}{\kappa_{\alpha\beta}^2} \phi_\alpha. \quad (8)$$

Diese Gleichung in auf beiden Seiten von Gl. (7b) eingesetzt ergibt mit Gl. (7a)

$$-K_\alpha^2 \frac{k_\alpha^2 - K_\alpha^2}{\kappa_{\alpha\beta}^2} \phi_\alpha = -K_\beta^2 \frac{k_\alpha^2 - K_\alpha^2}{\kappa_{\alpha\beta}^2} \phi_\alpha \quad (9)$$

was offenbar nur für $K_\alpha = K_\beta$ allgemein erfüllt sein kann. Es ist also ausreichend, die weiteren Überlegungen für K_α anzustellen. Die Ergebnisse gelten entsprechend für K_β .

Gl. (8) in Gl. (6b) eingesetzt ergibt unter anschließender Verwendung von Gl. (7a)

$$(k_\beta^2 - K_\alpha^2)(k_\alpha^2 - K_\alpha^2) \phi_\alpha = \kappa_{\alpha\beta}^2 \kappa_{\beta\alpha}^2 \phi_\alpha. \quad (10)$$

Von hier ab wird o.B.d.A. $\kappa^4 = \kappa_{\alpha\beta}^2 \kappa_{\beta\alpha}^2$ gesetzt. Nicht-triviale Lösungen von Gl. (10) existieren damit nur für

$$\begin{aligned} (k_\beta^2 - K_\alpha^2)(k_\alpha^2 - K_\alpha^2) - \kappa^4 = \\ K_\alpha^4 - 2K_\alpha^2 k_0^2 + k_\alpha^2 k_\beta^2 - \kappa^4 = \\ K_\alpha^4 - 2K_\alpha^2 k_0^2 + k_0^4 - k_\lambda^4 - \kappa^4 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (11)$$

⁷Es wird sich erweisen, dass die gekoppelten Differentialgleichungen für jeweils zwei Wellenzahlen $K_{\alpha 1,2}$ und $K_{\beta 1,2}$ erfüllbar sind. Außerdem werden wir $K_{\alpha 1} = K_{\beta 1}$ und $K_{\alpha 2} = K_{\beta 2}$ erhalten. Die gekoppelten Schwingungen treten also in beiden Systemen mit derselben Wellenzahl auf. Damit ist automatisch das geometrische Grundgesetz der Kontinuumsmechanik, die Stetigkeit der Verschiebung entlang der Kontaktfläche, erfüllt.

mit

$$k_0^2 = \frac{k_\alpha^2 + k_\beta^2}{2} \quad (12a)$$

und

$$k_\Delta^2 = \frac{k_\alpha^2 - k_\beta^2}{2}. \quad (12b)$$

Daher ist

$$K_{\alpha 1,2}^2 = k_0^2 \pm \sqrt{k_\Delta^4 + \kappa^4}. \quad (13)$$

Besitzen $\kappa_{\alpha\beta}^2$ und $\kappa_{\beta\alpha}^2$ dasselbe Vorzeichen⁸, so ist der Ausdruck in der Wurzel immer positiv. Es existiert dann eine Lösung mit der Phasenlangsamkeit

$$P_{\alpha 1}(\omega) = \frac{\sqrt{k_0^2(\omega) + \sqrt{k_\Delta^4(\omega) + \kappa^4}}}{\omega} \quad (14a)$$

für alle Frequenzen für die auch die Lösungen des ungekoppelten Problems existieren. Und es existiert eine Lösung mit

$$P_{\alpha 2}(\omega) = \frac{\sqrt{k_0^2(\omega) - \sqrt{k_\Delta^4(\omega) + \kappa^4}}}{\omega} \quad (14b)$$

für

$$k_\alpha^2 k_\beta^2 > \kappa^4. \quad (15)$$

2.4 Fallunterscheidung

Wir können uns die Wurzel in Gl. (13) noch vom Hals schaffen, indem wir zwei Fälle unterscheiden. Die Größe k_Δ^2 verschwindet dort, wo die Mode des α -Typs und die des β -Typs des ungestörten Problems (5) zueinander entartet sind, also $k_\alpha = k_\beta$ gilt. Welche der beiden Wellenzahlen größer ist, spielt im Ergebnis (13) keine Rolle, da dort nur k_Δ^4 auftritt. Aufgrund dieser Symmetrie kann erschlossen werden, dass die Lösung für ϕ_β im gekoppelten System (6b) mit $K_{\beta 1,2}^2 = K_{\alpha 1,2}^2$ identisch zu der für ϕ_α ist. Aus den unabhängigen Lösungen ϕ_α mit k_α und ϕ_β mit k_β des ungekoppelten Systems wurden also die unabhängigen Lösungen mit $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$ für das gekoppelte System. Bei einer Frequenz mit $k_\Delta^2(\omega) = 0$ erwarten wir bei schwacher Kopplung eine Oskulation der Lösungen $K_{\alpha 1}(\omega)$ und $K_{\alpha 2}(\omega)$ zu sehen.

⁸Das erscheint aufgrund der Symmetrie in den Gln. (6) plausibel. Bestimmt wird das Vorzeichen jedoch durch die physikalischen Randbedingungen, welche die Eigenfunktion in r - bzw. z -Richtung erfüllen muss. Vorzeichengleichheit wird hier nur ad hoc angenommen. Der Vollständigkeit halber wird unten auch der Fall ungleicher Vorzeichen kurz gezeigt (Abb. 2).

2.4.1 Entfernt von einer Oskulation: $k_\Delta^4 \gg \kappa^4$

In diesem Fall erhalten wir mit der linearen Näherung der Wurzel

$$K_{\alpha 1,2}^2 = k_0^2 \pm |k_\Delta^2| \sqrt{1 + \frac{\kappa^4}{k_\Delta^4}} \approx k_0^2 \pm |k_\Delta^2| \pm \frac{\kappa^4}{2|k_\Delta^2|}. \quad (16)$$

Und damit erhält man die Lösungen

$$K_{\alpha 1}^2 = \begin{cases} k_\alpha^2 + \frac{\kappa^4}{k_\alpha^2 - k_\beta^2} & \text{für } k_\alpha^2 > k_\beta^2 \text{ und} \\ k_\beta^2 + \frac{\kappa^4}{k_\beta^2 - k_\alpha^2} & \text{für } k_\alpha^2 < k_\beta^2 \end{cases} \quad (17a)$$

sowie

$$K_{\alpha 2}^2 = \begin{cases} k_\beta^2 - \frac{\kappa^4}{k_\alpha^2 - k_\beta^2} & \text{für } k_\alpha^2 > k_\beta^2 \text{ und} \\ k_\alpha^2 - \frac{\kappa^4}{k_\beta^2 - k_\alpha^2} & \text{für } k_\alpha^2 < k_\beta^2. \end{cases} \quad (17b)$$

Für verschwindende Kopplung mit $\kappa^2 \rightarrow 0$ wird also $K_{\alpha 1}^2$ zur größeren der beiden Funktionen k_α^2 bzw. k_β^2 . Und $K_{\alpha 2}^2$ wird zur kleineren der beiden Funktionen k_α^2 bzw. k_β^2 . Die neue Dispersionskurve wechselt also von einer Mode auf die andere, und zwar dort wo $k_\alpha(\omega)$ und $k_\beta(\omega)$ sich schneiden.

Sonst ist $K_{\alpha 1}^2$ immer größer als die größere von k_α^2 und k_β^2 . Entsprechend ist $K_{\alpha 2}^2$ immer kleiner als die kleinere von k_α^2 und k_β^2 .

2.4.2 Nahe einer Oskulation: $k_\Delta^4 \ll \kappa^4$

In diesem Fall erhalten wir mit der linearen Näherung der Wurzel

$$K_{\alpha 1,2}^2 = k_0^2 \pm |\kappa^2| \sqrt{1 + \frac{k_\Delta^4}{\kappa^4}} \approx k_0^2 \pm |\kappa^2| \pm \frac{k_\Delta^4}{2|\kappa^2|}. \quad (18)$$

Und an der Oskulation mit $k_\Delta^2 = 0$ erhält man die Lösungen

$$K_{\alpha 1}^2 = \frac{k_\alpha^2 + k_\beta^2}{2} + \kappa^2 \quad (19a)$$

und

$$K_{\alpha 2}^2 = \frac{k_\alpha^2 + k_\beta^2}{2} - \kappa^2. \quad (19b)$$

$K_{\alpha 1}^2$ führt also bei größeren Wellenzahlen am Entartungspunkt k_0^2 vorbei und $K_{\alpha 2}^2$ bei kleineren Wellenzahlen. Für verschwindende Kopplung mit $\kappa^2 \rightarrow 0$ wird dort $K_{\alpha 1}^2 = K_{\alpha 2}^2 = k_\alpha^2 = k_\beta^2$. Das heißt, auch die neuen Moden sind dann dort entartet.

2.5 Hybridisierung

Aus den beiden Moden des ungekoppelten Systems sind also zwei neue Lösungen entstanden. Die Symmetrie des Ausdrucks (13) bezüglich k_α und k_β zeigt, dass wir für K_β^2 dieselben Lösungen erhalten würden. Aus den Lösungen k_α und k_β sind durch Kombination die neuen Lösungen $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$ entstanden. Ich spreche dabei von „Hybridisierung“⁹. Die Bedeutung dieses Begriffes wird klarer, wenn man statt der asymptotischen Betrachtung die Lösungen (14) graphisch darstellt.

In Abb. 1 werden die Dispersionskurven $P_{\alpha 1}(\omega)$ und $P_{\alpha 2}(\omega)$ der Hybrid-Moden für drei verschiedene Kopplungskonstanten dargestellt. Für abnehmende Kopplung nähern sich die Hybrid-Kurven den Kurven des ungekoppelten Problems und entarten im Grenzfall am Schnittpunkt. Die eine Hybridkurve bleibt jedoch immer bei größeren Phasenlangsamkeiten als die größere der Einzelmoden p_α und p_β . Die andere Hybridmode bleibt immer unter der kleinsten Phasenlangsamkeit des ungekoppelten Problems. Auf diese Weise wird aus dem Schnittpunkt eine Oskulation. Je stärker die Kopplung ist, umso weniger haben die Dispersionseigenschaften mit denen des ungekoppelten Problems zu tun.

Im Falle entgegengesetzter Vorzeichen der Kopplungskonstanten $\kappa_{\alpha\beta}^2$ und $\kappa_{\beta\alpha}^2$ wird die Wurzel in Gl. (13) bei Annäherung an die Oskulation ab einer bestimmten Frequenz imaginär, nämlich für $|k_\Delta^2| < |\kappa^4|$. In diesem Frequenzintervall existieren keine Lösungen zu reellen Wellenzahlen $K_{\alpha 1,2}$, es entsteht eine „Bandlücke“ (Abb. 2). Die Wellenzahl selber wird dann komplex und die zugehörigen Wellenfunktionen sind in Ausbreitungsrichtung gedämpft. Die Dispersionskurven setzen sich aber trotzdem kontinuierlich fort. Ein solches Phänomen wurde für die elastische Wellenausbreitung noch nicht beobachtet (und existiert dort vermutlich nicht). Für elektronische Anregungszustände in Festkörpern ist dieser Effekt jedoch bekannt.

3 Vergleich mit Love-Moden

3.1 Gedankenexperiment

Betrachten wir die Stoneley-Moden an der Kern-Mantel-Grenze und die Rayleigh-Moden an der freien Oberfläche. Wenn wir die freie Oberfläche entfernen und die Erde stattdessen in einen homogenen Vollraum aus Krustenmaterial einbetten,

⁹Dieser Begriff bezieht sich eigentlich auf die veränderten Eigenfunktionen, die hier nicht behandelt werden.

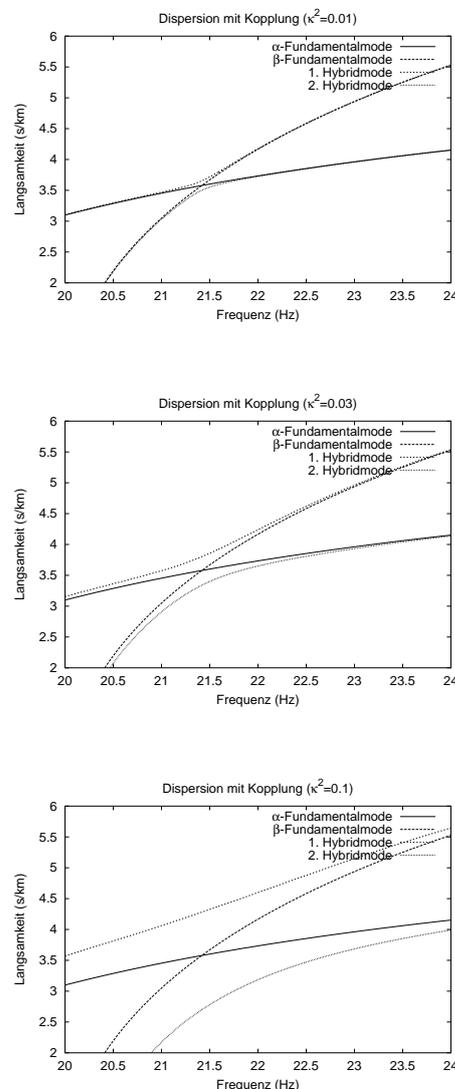


Abbildung 1: Beispiel für Dispersionskurven von hybridisierten Moden. Es wurden (von oben nach unten) die Kopplungskonstanten $\kappa^2 = 0.01$, $\kappa^2 = 0.03$, und $\kappa^2 = 0.1$ verwendet. Dargestellt sind jeweils die Dispersionskurven $p_\alpha(\omega) = k_\alpha(\omega)/\omega$ und $p_\beta(\omega) = k_\beta(\omega)/\omega$ des ungekoppelten Systems (hier als „Fundamentalmoden“ bezeichnet) und $P_{\alpha 1,2}(\omega) = K_{\alpha 1,2}(\omega)/\omega$ des gekoppelten Systems (hier als erste und zweite „Hybridmode“ bezeichnet), gemäß Gl. (13). Die Dispersionskurven des ungekoppelten Systems schneiden sich bei ca. 21.4 Hz, die Moden sind dort also entartet. Für das gekoppelte System entsteht dort eine Oskulation.

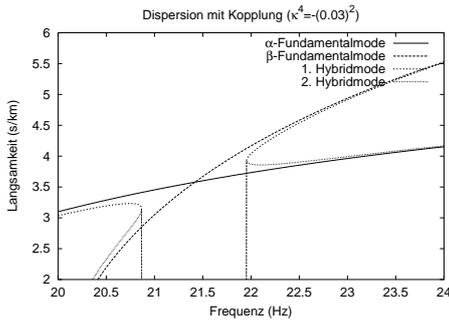


Abbildung 2: Beispiel für Dispersionskurven von hybridisierten Moden mit $\kappa^4 = -(0.03)^2 < 0$. Dies träte auf, falls die Kopplungskonstanten $\kappa_{\alpha\beta}^2$ und $\kappa_{\beta\alpha}^2$ ein unterschiedliches Vorzeichen hätten. In diesem Fall tritt zwischen 20.8 Hz und 21.9 Hz eine „Bandlücke“ auf, in der keine Eigenschwingungen zu reellen Wellenzahlen existieren können. Ein solches Phänomen wurde für Eigenschwingungen elastischer Medien noch nicht beobachtet, ist aber für elektronische Anregungszustände in Festkörpern wohl bekannt. Die senkrechten Linien bei 20.8 Hz und 21.9 Hz sind ein Artefakt des Plot-Programms.

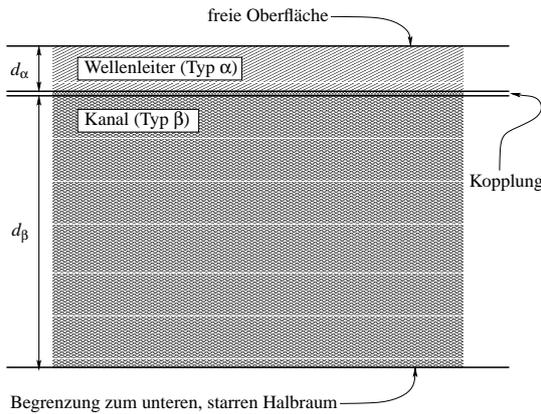


Abbildung 3: Ein Modell für gekoppelte Teilmedien. Das obere Teilmedium (α -Typ) ist ein Wellenleiter (oben freie Oberfläche unten starrer Boden) der Dicke d_α . Das untere Teilmedium (β -Typ) ist ein Kanal der Dicke d_β mit starrer Begrenzung oben und unten. Die starre Begrenzung zwischen den Teilmedien kann durch eine Kopplungsschicht ersetzt werden, um eine Kopplung der Eigenschwingungssysteme beider Medien zu erreichen.

werden sich die Stoneley-Moden kaum ändern. Die Rayleigh-Moden entfallen dafür vollständig. Andererseits könnten wir der Erde ihren Kern wegnehmen und sie bis zum Erdmittelpunkt mit Mantelmaterial füllen. Die Stoneley-Moden würden dabei verloren gehen, es ist aber nicht anzunehmen, dass diese Operation großen Einfluß auf die Rayleigh-Moden haben würde.

In Analogie zu diesem Gedankenexperiment will ich ein Experiment mit Love-Moden in einem lateral homogenen, geschichteten Medium durchzuführen. In Abb. 3 ist ein Modell skizziert. Es besteht aus einem Wellenleiter (α -Medium) der Dicke d_α und der Scherwellen-Geschwindigkeit c_α . Er hat nach oben eine freie Oberfläche und ist nach unten durch eine Kopplungs-Schicht abgeschlossen. Wird der Wellenleiter isoliert betrachtet, so ist die Kopplungsschicht unendlich starr und wirkt damit wie ein unendlicher Halbraum.

Neben dem Wellenleiter betrachte ich einen Kanal (β -Medium) der Dicke d_β und der Scherwellen-Geschwindigkeit c_β . Der Kanal ist nach unten durch einen starren Halbraum abgeschlossen und nach oben durch die Kopplungsschicht, die anfangs beliebig starr ist.

Die SH-Wellen in beiden Medien gehorchen der akustischen Wellengleichung. Entsprechend sind die Love-Moden akustische Moden dieser Medien. Als erstes wird die Dispersionsbeziehung der Moden in Wellenleiter und Kanal für den Fall einer unendlich starren Kopplungsschicht hergeleitet. Beide Teilmedien können in diesem Fall getrennt behandelt werden.

3.2 Akustische Moden

Zunächst betrachte ich ebene Wellen des Typs β . Diese erfüllen die akustische Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_\beta(x, z, t) - c_\beta^2 \Delta \Phi_\beta(x, z, t) = 0. \quad (20)$$

Dabei ist c_β die räumliche Phasengeschwindigkeit der Wellen und allein von den Materialeigenschaften abhängig. Δ ist der räumliche Laplace-Operator und Φ_β ist die Feldgröße (in diesem Fall das SH-Potential). Die z -Koordinate durchmisst die Schicht senkrecht zu den Begrenzungen und die x -Koordinate weise o.B.d.A. in die Richtung der Wellenausbreitung. Die Wellengleichung wird von

$$\Phi_\beta(x, z, t) = A \exp(i(k_x x + k_z z - \omega t)) \quad (21)$$

mit $k_x^2 + k_z^2 = 1/c_\beta^2$ erfüllt. Dabei ist $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)^T$ der Wellenzahlvektor der Welle.

Akustische Moden entstehen dann, wenn Wellen, die zunächst an der unteren Begrenzung reflektiert und dann an der oberen Begrenzung reflektiert wurden (und damit wieder in die ursprüngliche Richtung laufen) konstruktiv mit der Ausgangswelle interferieren. Das ist der Fall für $k_z d = n\pi$, wobei d die Dicke der Schicht und n eine ganze Zahl und ungleich null ist. Diese Bedingung ist für die horizontale Wellenzahl

$$k_\beta(\omega, n) = k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_\beta^2} - \left(\frac{n\pi}{d_\beta}\right)^2} \quad (22)$$

erfüllt. Dabei zählt n den Oberton. Die Fundamentalmode hat die Nummer $n = 1$. Nur für

$$\omega > \frac{nc_\beta\pi}{d_\beta} \quad (23)$$

können propagierende Moden existieren.

Für den Wellentyp α existieren propagierende Moden mit

$$k_\alpha(\omega, n) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_\alpha^2} - \left(\frac{(2n-1)\pi}{2d_\alpha}\right)^2} \quad (24)$$

für

$$\omega > (2n-1)\frac{c_\alpha\pi}{2d_\alpha}. \quad (25)$$

Der Unterschied zu Typ β rührt daher, dass im Kanal die Reflexionskoeffizienten an den Begrenzungen beides mal -1 sind, während der Koeffizient an der freien Oberfläche $+1$ ist. Außerdem muss im Kanal verlangt werden, dass die Verschiebung an den Begrenzungen verschwinden muss. Im Wellenleiter muss sie das nur an der unteren Begrenzung, an der oberen müssen die Spannungskräfte verschwinden.

3.3 Vergleich mit dem Randwertproblem

In Abbildung Abb. 4 sind die Dispersionsbeziehungen für die isolierten Modellbereiche α (Wellenleiter) und β (Kanal) dargestellt. Es wurde eine Berechnung der Lösungen des Randwertproblems für das angegebene Modell (jeweils links) durchgeführt. Dargestellt ist (jeweils in der Mitte) das Vorzeichen der charakteristischen Funktion (grau: positiv; weiß: negativ). Die Nulldurchgänge und damit die nicht-trivialen Lösungen liegen an den Grenzen zwischen weiß und grau. Rechts sind jeweils die Dispersionskurven der akustischen Moden gemäß Gln. (22) und (24) dargestellt. Die Abbildung dient als Test dafür, dass die oben abgeleiteten Dispersionsbeziehungen für die Love-Moden zu der benutzen Simulation des Wellenleiters bzw. Kanals passen.

In Abbildung Abb. 5 sind nun drei Fälle unterschiedlich starker Kopplung zwischen Wellenleiter und Kanal dargestellt. Für das Randwertproblem wurde die Kopplung durch eine immer weniger starre Kopplungsschicht vergrößert. Für die Hybrid-Moden (rechte Abbildungen) wurde in qualitativer Analogie eine zunehmende Kopplungskonstante gewählt. Sowohl die elastische Rechnung, wie auch das einfache Modell aus der Kopplung zweier Helmholtz-Gleichungen zeigen qualitativ das gleiche Verhalten.

Es sind aber auch deutliche Unterschiede zwischen der Lösung des Randwertproblems und

dem Ergebnis aus den gekoppelten Helmholtz-Gleichungen zu erkennen. Während die Phasenlangsamkeit $P_{\alpha 1}$ immer größer ist als die größere der beiden p_α und p_β und $P_{\alpha 2}$ entsprechend immer kleiner ist als die kleinere, trifft das im Randwertproblem (Abb. 5 Mitte) nur für die Mode mit größerer Phasenlangsamkeit zu. Die Phasenlangsamkeit der anderen Mode wächst ebenfalls mit zunehmender Kopplung und wird größer, als die kleinere Phasenlangsamkeit der ungekoppelten Systeme. Außerdem liegt die Oskulation bei starker Kopplung bei kleineren Frequenzen als bei schwacher Kopplung. Auch diesen Effekt zeigt die Kopplung der Helmholtz-Gleichungen nicht. Generell war es natürlich sehr willkürlich nur die beiden Fundamentalmoden zu koppeln. Das eine Kopplung aller Moden (sprich: aller Obertöne) zu einem wesentlich anderen Ergebnis führt ist aber erstmal nicht anzunehmen. Zudem haben nur die Fundamentalmoden im gezeigten Frequenzintervall reelle Eigenwerte. Generell zu kritisieren ist aber die Einführung der Gln. (6) ohne angemessene physikalische Herleitung.

4 Das Randwertproblem

Wie anfangs schon angedeutet, wird bei der Lösung des Randwertproblems die Wellenzahl, für die Eigenschwingungen möglich sind, nicht durch die Helmholtz-Gleichung bestimmt. Die Helmholtz-Gleichung bestimmt lediglich welche Form von Horizontalabhängigkeit das Wellenfeld bei gegebener Wellenzahl hat. Der oben beschriebene Kopplungs-Mechanismus stellt nicht sicher, dass die Randbedingungen für die so bestimmten Wellenzahlen $K_{1,2}$ überhaupt erfüllbar sind.

4.1 Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

Die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die z -Abhängigkeit der Verschiebung wird üblicherweise in ein System erster Ordnung

$$\frac{d}{dz}\vec{y}(z) = A(z, c, \rho, k, \omega)\vec{y}(z) \quad (26)$$

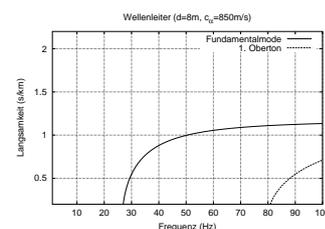
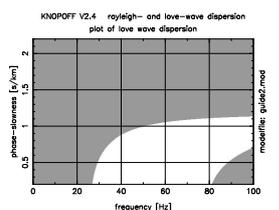
umgeformt (TS72, Gl. (46)). Dabei enthält die Matrix

$$A(z, c, \rho, k, \omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1/(\rho(z)c^2(z)) \\ k^2c^2(z)\rho(z) - \omega^2\rho(z) & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

die von z abhängigen Materialeigenschaften (Dichte ρ und Geschwindigkeit c). Sie hängt außerdem

Wellenleiter (Typ α)

z_i [m]	v_s [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]
0.00	0.85	2.00
8.00	2000.00	2.00



Kanal (Typ β)

z_i [m]	v_s [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]
0.00	2000.00	2.00
5.20	1.00	2.00
35.20	2000.00	2.00

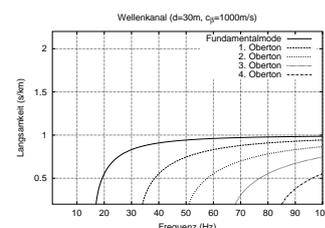
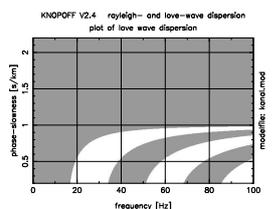


Abbildung 4: Akustische Moden von Wellenleiter (oben) und Kanal (unten). Links ist jeweils das Erdmodell angegeben. In der Mitte sind die aus dem elastischen Randwertproblem berechneten Love-Moden dargestellt. Rechts sind die akustischen Moden gemäß der Gln. (22) und (24) dargestellt.

Ein starrer Bereich wird im Modell durch eine um mehr als den Faktor 1000 größere Scherwellengeschwindigkeit genähert. Das entspricht einem um den Faktor 10^6 vergrößerten Modul.

In den Abbildungen in der Mitte liegen die Dispersionskurven jeweils auf dem Übergang von einer grauen zu einer weißen Fläche. Dargestellt ist das Vorzeichen der charakteristischen Funktion. Auf den Nulldurchgängen (Wechsel von grau nach weiß) liegen die nicht-trivialen Lösungen des Randwertproblems.

von den Separationskonstanten ω und k ab. Dabei ist k die in der Helmholtz-Gleichung auftretende Wellenzahl. Der Vektor

$$\vec{y}(z) = \begin{pmatrix} u_y(z) \\ \sigma_{yz}(z) \end{pmatrix} \quad (28)$$

enthält die Vertikalabhängigkeit der Horizontalverschiebung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle $u_y(z)$ sowie die Spannung $\sigma_{yz}(z)$. \vec{y} muss nicht nur die Gl. (26) erfüllen, sondern auch stetig in z sein und die Randbedingungen ($y_1 = 0$ am starren Boden bzw. $y_2 = 0$ an der freien Oberfläche) erfüllen. Aus diesen Bedingungen ergibt sich dann, dass nicht-triviale Lösungen nur für ganz bestimmte $k(\omega, n)$ existieren.

4.2 Ungekoppelte Medien

Wird $\vec{y}(z_1)$ in einer Tiefe z_1 gegeben, so ergibt sich durch Integration von Gl. (26) unmittelbar und eindeutig $\vec{y}(z_2)$ in der Tiefe z_2 . Das System (26) besitzt zwei voneinander unabhängige Fundamentallösungen $\vec{y}_1(z)$ und $\vec{y}_2(z)$. Fordert man die Erfüllung der Randbedingung an einer der Begrenzungsflächen (z.B. $y_2(z) = 0$ an der freien Oberfläche), so ist damit eine Linearkombination \vec{y} von \vec{y}_1 und \vec{y}_2 bestimmt. Damit ist die allgemeine Lösung $\vec{y}_\alpha(z) = A \vec{y}(z)$ bis auf einen konstanten Faktor A bestimmt. Durch die Integration von Gl. (26) hängt $\vec{y}(z)$ von

allen Parametern ab, von denen A abhängt, also insbesondere von k .

Entsprechend definiere ich $\vec{y}_\alpha(z)$ für die Lösung im Wellenleiter, welche die Randbedingung der freien Oberfläche $y_{\alpha 2}(z) = 0$ erfüllt und $\vec{y}_\beta(z)$ als Lösung im Kanal, welche die Randbedingung am starren Boden ($y_{\beta 1}(z) = 0$) erfüllen. Die Randwertprobleme für die einzelnen Teilmedien lauten dann

$$A_\alpha y_{\alpha 1}(z = d_\alpha - 0) = 0 \quad (29a)$$

für den Wellenleiter und

$$A_\beta y_{\beta 1}(z = d_\alpha + 0) = 0 \quad (29b)$$

für den Kanal. Dabei steht $d_\alpha - 0$ für die Position direkt über der Kopplungsschicht und $d_\alpha + 0$ für knapp darunter. Nicht-triviale Lösungen der Gln. (29) existieren dann nur für bestimmte $k_\alpha(\omega, n)$ im Wellenleiter und $k_\beta(\omega, n)$ im Kanal, wobei n den Oberton zählt. Für diese Wellenzahlen sind die Lösungen bis auf den Faktor A_α bzw. A_β bestimmt.

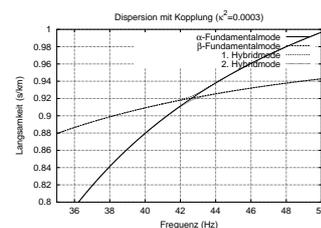
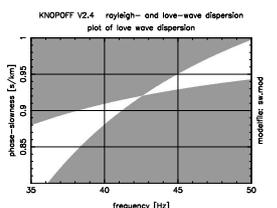
4.3 Gekoppelte Medien

Ich betrachte jetzt den Fall für eine Kopplung des Wellenleiters und des Kanals. Das gekoppelte Randwertproblem lautet dann

$$A_\alpha \vec{y}_\alpha(d_\alpha - 0) = A_\beta \kappa_{\alpha\beta} \vec{y}_\beta(d_\alpha + 0) \quad (30a)$$

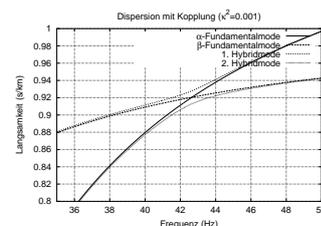
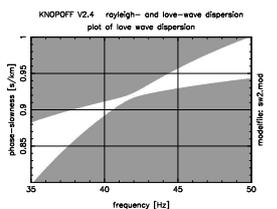
Schwache Kopplung

z_i [m]	v_s [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]
0.00	0.85	2.00
8.00	100.00	2.00
8.10	1.00	2.00
38.10	2000.00	2.00



Mittlere Kopplung

z_i [m]	v_s [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]
0.00	0.85	2.00
8.00	30.00	2.00
8.10	1.00	2.00
38.10	2000.00	2.00



Starke Kopplung

z_i [m]	v_s [$\frac{\text{km}}{\text{s}}$]	ρ [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]
0.00	0.85	2.00
8.00	15.00	2.00
8.10	1.00	2.00
38.10	2000.00	2.00

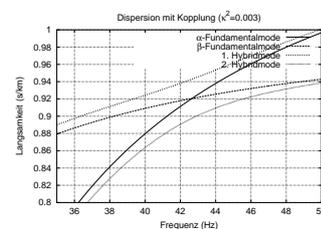
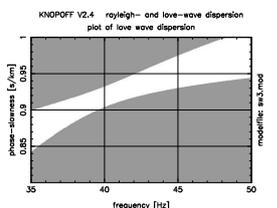


Abbildung 5: Dargestellt sind drei Fälle unterschiedlich starker Kopplung zwischen Wellenleiter und Kanal. Links ist jeweils das Erdmodell angegeben. In der Mitte sind die aus dem elastischen Randwertproblem berechneten Love-Moden dargestellt. Rechts sind die akustischen Moden gemäß der Gln. (22) und (24) dargestellt.

Die Kopplung zwischen den beiden Modell-Bereichen wird vergrößert, indem die Geschwindigkeit (und damit der Modul) der Kopplungsschicht auf kleinere Werte gesetzt wird. Die Kopplungsfaktoren für Hybrid-Moden (ganz rechts) sind nur qualitativ in Analogie zum Randwertproblem (links und Mitte) gewählt worden.

bzw.

$$M\vec{a} = \vec{0} \quad (30b)$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} \vec{y}_\alpha(d_\alpha - 0) & \kappa_{\alpha\beta} \vec{y}_\beta(d_\alpha + 0) \end{pmatrix} \quad (30c)$$

und

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} A_\alpha \\ A_\beta \end{pmatrix}. \quad (30d)$$

Dabei ist $\kappa_{\alpha\beta}$ eine Propagatormatrix, welche die Verschiebung und Spannung von unten nach oben durch die Kopplungsschicht hindurchreicht. Dabei müssen $\vec{y}_\alpha(z)$ und $\vec{y}_\beta(z)$ für die gleiche Wellenzahl berechnet werden. Das verlangt die Stetigkeitsbedingung für Verschiebung und Spannung. Nicht-triviale Lösungen existieren nur für

$$\det(M) = 0. \quad (31)$$

Diese Gleichung kann nur für einen diskreten Satz von $k(\omega, n)$, den Dispersionsbeziehungen für das gekoppelte System, erfüllt werden. Wird die Abhängigkeit der charakteristische Gleichung (31) von der Wellenzahl k voll ausgeschrieben, so erhält man eine sehr unhandliche Beziehung. Das liegt an den in \vec{y}_α und \vec{y}_β enthaltenen transzendenten Funktionen, die die Abhängigkeit von k enthalten. Bereits bei Sezawa und Kanai (1935) lässt sich das Problem nicht auf eine übersichtliche Form bringen. Enthalten die gekoppelten Medien mehr Struktur, so lässt sich das Problem nur noch numerisch durch Nullstellensuche lösen.

Die Gl. (30a) weist eine gewisse Ähnlichkeit mit der Struktur von (6) auf. Hier kann die Propagatormatrix $\kappa_{\alpha\beta}$ ganz anschaulich aus Kopplungsgröße aufgefasst werden. Die Auswertung der gestellten Bedingung (31) für k ist aber wegen der darin enthaltenen transzendenten Funktionen ungleich mühsamer, wenn nicht analytisch unmöglich und — und das wiegt viel schwerer — es ist nicht unmittelbar einsichtig, wie eine Beziehung zwischen den Wellenzahlen für das ungekoppelte Problem und denen des gekoppelten Problems hergestellt werden sollte, wenn nicht über eine Entwicklung der in den \vec{y}_α und \vec{y}_β enthaltenen transzendenten Funktionen.

Die Idee der gekoppelten Differentialgleichungen ist in gewisser Weise äquivalent mit der Behauptung, dass die Lösung von Gl. (31) bestimmbar wäre, wenn man nur die Wellenzahlen kennen würde, für welche Lösungen der Gln. (29) existieren. Das ist aber sicher nicht der Fall. Das ist sicher das stärkste Argument gegen das Konzept der schwachen Kopplung zur physikalisch, quantitativen Beschreibung der Oskulation von Dispersionskurven.

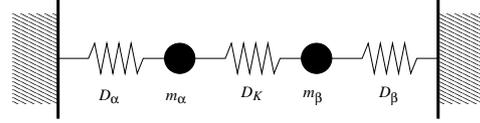


Abbildung 6: Modell für gekoppelte Masse-Feder-Pendel.

5 Gekoppelte Masse-Feder-Pendel

Was also schmerzlich vermisst wird ist eine physikalisch korrekte und vollständige Beschreibung des gekoppelten Randwertproblems über einen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen. Für gekoppelte Pendel geht das recht leicht. Warum nicht für die elastische Wellengleichung? Wo stehe ich im Nebel?

Um das noch deutlicher zu machen, will ich die gekoppelte Schwingungsgleichung für Masse-Feder-Pendel herleiten. In Abb. 6 sind zwei Masse-Feder-Pendel skizziert. Die Schwerkraft soll nicht existieren. Das eine Pendel besteht aus der Masse m_α und der Feder D_α , das andere aus m_β und D_β . Die Pendel sind durch eine Feder mit der Federkonstanten D_K gekoppelt. Die Bewegung wird durch u_α und u_β beschrieben. u_α gibt die Auslenkung von m_α aus der Ruhelage (alle Federn entspannt) an und u_β die Auslenkung von m_β .

Die Kraftbilanz führt zu den Differentialgleichungen

$$m_\alpha \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\alpha + D_\alpha u_\alpha = D_K (u_\beta - u_\alpha) \quad (32a)$$

und

$$m_\beta \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\beta + D_\beta u_\beta = D_K (u_\alpha - u_\beta) \quad (32b)$$

oder umgeformt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\alpha + \omega_\alpha^2 (1 + \kappa_\alpha) u_\alpha = \omega_\alpha^2 \kappa_\alpha u_\beta \quad (33a)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\beta + \omega_\beta^2 (1 + \kappa_\beta) u_\beta = \omega_\beta^2 \kappa_\beta u_\alpha \quad (33b)$$

mit

$$\omega_\alpha^2 = \frac{D_\alpha}{m_\alpha}, \quad \kappa_\alpha = \frac{D_K}{D_\alpha}, \quad (34)$$

$$\omega_\beta^2 = \frac{D_\beta}{m_\beta} \quad \text{und} \quad \kappa_\beta = \frac{D_K}{D_\beta}. \quad (35)$$

5.1 Ohne Kopplung

Werden die Pendel entkoppelt, also $\kappa_\alpha = \kappa_\beta = 0$ gesetzt, so erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\alpha = -\omega_\alpha^2 u_\alpha \quad (36a)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\beta = -\omega_\beta^2 u_\beta. \quad (36b)$$

Diese werden durch

$$u_\alpha(t) = A_1 \sin(\omega_\alpha t) + A_2 \cos(\omega_\alpha t) \quad (37a)$$

und

$$u_\beta(t) = B_1 \sin(\omega_\beta t) + B_2 \cos(\omega_\beta t) \quad (37b)$$

gelöst. Die Koeffizienten A_1 und A_2 bzw. B_1 und B_2 werden durch die Anfangsbedingungen für u_α und \dot{u}_α bzw. u_β und \dot{u}_β bestimmt.

5.2 Schwache Kopplung

Bei schwacher Kopplung, also $D_K \ll D_\alpha$ und $D_K \ll D_\beta$ kann in den Gln. (33)

$$(1 + \kappa_\alpha) \approx 1 \quad (38a)$$

und

$$(1 + \kappa_\beta) \approx 1 \quad (38b)$$

genähert werden. Damit erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\alpha + \omega_\alpha^2 u_\alpha = \omega_\alpha^2 \kappa_\alpha u_\beta \quad (39a)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\beta + \omega_\beta^2 u_\beta = \omega_\beta^2 \kappa_\beta u_\alpha \quad (39b)$$

und als Bedingung für die Lösung

$$(\omega_\beta^2 - \omega_{1,2}^2)(\omega_\alpha^2 - \omega_{1,2}^2) - \kappa_\alpha \kappa_\beta \omega_\alpha^2 \omega_\beta^2 = 0 \quad (40)$$

wenn man verlangt, dass die Lösungen des gekoppelten Systems der homogenen Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{\alpha,\beta} + \omega_{1,2}^2 u_{\alpha,\beta} = 0 \quad (41)$$

folgen¹⁰. Letzteres ist gleichbedeutend damit, das Problem über den Ansatz

$$u_{\alpha,\beta} = A_{\alpha,\beta} e^{i\omega_{1,2}t} \quad (42)$$

¹⁰Es wird sich erweisen, dass die gekoppelten Differentialgleichungen für jeweils zwei Frequenzen $\omega_{1,2}$ erfüllbar sind. Außerdem stellen wir fest, dass in den beiden Eigenmoden (symmetrische Schwingung und antisymmetrische Schwingung) des gekoppelten Systems beide Schwinger mit derselben Frequenz schwingen. Die spezielle Lösung eines beliebigen Anfangswertproblems setzt sich dann aus diesen beiden Eigen-schwingungen zusammen, was zu einer Schwebung führt und Energieaustausch zwischen den beiden Schwingern.

zu lösen.

Die Berechnung folgt ganz analog dem für Gl. (6) eingeschlagenen Weg. Entsprechend erhält man als Lösung

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_\Delta^4 + \kappa^4} \quad (43)$$

mit

$$\kappa^4 = \kappa_\alpha \kappa_\beta \omega_\alpha^2 \omega_\beta^2, \quad (44a)$$

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_\alpha^2 + \omega_\beta^2}{2} \quad \text{und} \quad (44b)$$

$$\omega_\Delta^2 = \frac{\omega_\alpha^2 - \omega_\beta^2}{2}. \quad (44c)$$

5.3 Starke Kopplung

Aber auch im Falle starker Kopplung kann das System gekoppelter Differentialgleichungen exakt gelöst werden. Im Unterschied zu (44b) und (44c) ist dann in (43)

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_\alpha^2 (1 + \kappa_\alpha) + \omega_\beta^2 (1 + \kappa_\beta)}{2} \quad \text{und} \quad (45a)$$

$$\omega_\Delta^2 = \frac{\omega_\alpha^2 (1 + \kappa_\alpha) - \omega_\beta^2 (1 + \kappa_\beta)}{2} \quad (45b)$$

zu wählen.

6 Diskussion des Modells

Im Gegensatz zu den gekoppelten Pendeln bleibt der Ansatz gekoppelter Differentialgleichungen beim Randwertproblem des Kontinuums unbefriedigend. Dort wird nicht sichergestellt, dass die berechnete Lösung die Randbedingungen wirklich erfüllt. Eine physikalisch korrekte Lösung des gekoppelten Randwertproblems lässt sich aber selbst für die einfachsten Fälle nicht auf eine Form wie Gl. (13) bringen. Damit ist es nicht möglich den Übergang vom entkoppelten zum schwach gekoppelten System in ähnlich anschaulicher Weise zu studieren.

Können wir aus dem beschriebenen Modell überhaupt etwas über Eigenschaften der Lösungen elastischer Randwertprobleme lernen? Hier ein paar Notizen:

- Bei elastischen Randwertproblemen ist die starke Kopplung die Regel. Normalerweise können die Randbedingungen nur durch eine Kombination der im Vollraum entkoppelten Wellentypen erfüllt werden. Dementsprechend sind Oskulationen eher selten.

- In der oben durchgeführten Diskussion fehlt eine explizite Betrachtung der z -Abhängigkeit der Hybrid-Moden, also der Eigenfunktionen. Diese sind die $\vec{y}_\alpha(z)$ und $\vec{y}_\beta(z)$ für k welche eine Erfüllung der Randwerte erlauben sowie derjenigen der gekoppelten Wellensysteme.

- Entartung von Oberflächenwellen ist offenbar nur bei vollständiger Entkopplung möglich. Das ist für Eigenschwingungssysteme in verschiedenen Modellteilen nur möglich, wenn die Modellteile mechanisch entkoppelt sind. Und das sind sie nie, dann würde man nämlich von zwei verschiedenen Medien sprechen.

Falls das Phänomen, welches beim Randwertproblem beobachtet wird, durch eine Kopplung korrekt beschrieben wird, kann aus den angestellten Überlegungen geschlossen werden, dass eine Entartung von Eigenschwingungen unterschiedlicher z -Anhängigkeit in elastisch zusammenhängenden Medien nicht möglich ist. Ansonsten würde man von zwei verschiedenen Medien sprechen. Der Fall, den Sezawa und Kanai (1935) diskutieren, scheint in dieser Hinsicht ein Sonderfall zu sein.

- Bei realistischen, elastischen Problemen wird beobachtet, dass sich physikalische Eigenschaften (Gruppengeschwindigkeit, Eigenfunktion, Anregungskoeffizienten) jeweils ein und derselben Hybrid-Mode zu beiden Seiten der Oskulation unterscheiden. Quer über die Oskulation hinweg besitzt die eine Hybrid-Mode jedoch Ähnlichkeit zur anderen. Im Bild des obigen Modells würde man sagen: Auf der einen Seite der Oskulation wird die Hybrid-Mode durch die Eigenschaften des α -Typs dominiert, auf der anderen Seite vom β -Typ. Und die andere Hybrid-Mode gerade umgekehrt.

Das kann im obigen Beispiel anhand der Gruppengeschwindigkeit nachvollzogen werden. Die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{1}{U} = \frac{dk}{d\omega} \quad (46)$$

wird durch die Steigung der Wellenzahl-Dispersionskurve bestimmt. Sowohl aus der asymptotischen Betrachtung, wie auch aus Abb. 1 geht hervor, dass die Hybrid-Mode $K_{\alpha 1}(\omega)$ vor der Oskulation der Kurve $k_\alpha(\omega)$ folgt und damit auch deren Steigung und somit auch deren Gruppengeschwindigkeit aufweist. Hinter der Oskulation folgt $K_{\alpha 1}(\omega)$ der Kurve $k_\beta(\omega)$.

Literatur

- Bohlen T., Klein G., Duveneck E., Milkereit B. und Franke D., 1999. Analysis of dispersive seismic surface waves in submarine permafrost. In: *61st Conference and Technical Exhibitions, Expanded Abstracts*. EAGE.
- Buchen P. und Ben-Hador R., 1996. Free-mode surface-wave computations. *Geophys. J. Int.*, 124: 869–887.
- Dahlen F.A. und Tromp J., 1998. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Dziewonski A.M. und Anderson D.L., 1981. Preliminary reference earth model. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 25: 297–356.
- Forbriger T., 1996. Zum Problem der Modenidentifikation in der Flachseismik. In: *Kolloquium: Seismik im Flachbereich*. Bucha/Sachsen. <URL: <http://www-gpi.uni-karlsruhe.de/pub/forbriger/>>, 2005.
- Forbriger T., 2001. Inversion flachseismischer Wellenfeldspektren. Dissertation, Institut für Geophysik, Universität Stuttgart. <URL: <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2001/861>>.
- Forbriger T., 2002. Oskulation von Dispersionskurven. In: *62. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*. DGG, Hannover, Germany.
- Kennett B.L.N., 1983. *Seismic wave propagation in stratified media*. Cambridge University Press.
- Kerry N.J., 1981. Synthesis of seismic surface waves. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64: 425–446.
- Korn G.A. und Korn T.M., 1968. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill, New York, 2. Ausgabe.
- Nolet G. und Dorman L.M., 1996. Waveform analysis of Scholte modes in ocean sediment layers. *Geophys. J. Int.*, 125: 385–396.
- Okal E., 1978. A physical classification of the earth's spheroidal modes. *J. Phys. Earth*, 26: 75–103.
- Schwab F. und Knopoff L., 1972. Fast surface wave and free mode computations. In: B.A. Bolt (Herausgeber), *Methods in Computational Physics, Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations*, Academic Press, New York and London, Seiten 87–180.

Sezawa K. und Kanai K., 1935. Discontinuity in the dispersion curves of Rayleigh waves. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 13: 237–244.

Takeuchi H. und Saito M., 1972. Seismic surface waves. In: B.A. Bolt (Herausgeber), *Methods in Computational Physics, Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations*, Academic Press, New York and London, Band 11, Seiten 217–295.

Widmer-Schmidrig R., 1997. Non-linear constraints for 1-D elastic core structure from the attenuation of $_{10}S_2$. In: *EOS Trans. AGU, Fall Meeting*. San Francisco.

Woodhouse J., 1988. The calculation of eigenfrequencies and eigenfunctions of the free oscillations of the earth and the sun. In: D.J. Doornbos (Herausgeber), *Seismological Algorithms*, Academic Press, London, Kapitel IV.2, Seiten 321–370.

A Gekoppelte Differentialgleichungen für die z -Abhängigkeit

Spaßeshalber will ich noch kurz eine Kopplung für die z -abhängigen Differentialgleichungen formulieren. Das System von Differentialgleichungen (26) ist äquivalent zu wahlweise einer Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right) y_1(z) = 0 \quad (47a)$$

für die Verschiebung $y_1 = u_y$, oder

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right) y_2(z) = 0 \quad (47b)$$

für die Spannung $y_2 = \sigma_{yz}$ für den Fall, dass der Schermodul nicht von z abhängt. Die gekoppelten Differentialgleichungen für die beiden Medien lauten dann

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_\alpha^2} - k_\alpha^2 \right) \right) y_\alpha(z) = \kappa_{\alpha\beta}^2 y_\beta(z) \quad (48a)$$

für den Wellenleiter und

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_\beta^2} - k_\beta^2 \right) \right) y_\beta(z) = \kappa_{\beta\alpha}^2 y_\alpha(z) \quad (48b)$$

für den Kanal.

Fordert man von der Lösung $y(z)$ des gekoppelten Systems

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_\alpha^2} - K^2 \right) \right) y(z) = 0 \quad (49a)$$

im Wellenleiter und

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \left(\frac{\omega^2}{c_\beta^2} - K^2 \right) \right) y(z) = 0 \quad (49b)$$

im Kanal, so erhält man aus Gl. (48a)

$$\begin{aligned} y_\beta(z) &= y_\alpha(z) \frac{1}{\kappa_{\alpha\beta}^2} \left[\left(\frac{\omega^2}{c_\alpha^2} - K^2 \right) - \left(\frac{\omega^2}{c_\alpha^2} - k_\alpha^2 \right) \right] \\ &= y_\alpha(z) \frac{k_\alpha^2 - K^2}{\kappa_{\alpha\beta}^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Durch Einsetzen in Gl. (48b) erhält man

$$(k_\alpha^2 - K^2)(k_\beta^2 - K^2)y_\alpha(z) = \kappa_{\alpha\beta}^2 \kappa_{\beta\alpha}^2 y_\alpha(z). \quad (51)$$

Diese kleine Zahlenspielerei ergibt netter Weise dasselbe Ergebnis für die gleiche Separationskonstante $-K^2$ wie es mit Gl. (11) aus den gekoppelten Helmholtz-Gleichungen abgeleitet wurde. Aber der physikalische Gehalt dieser Überlegungen ist doch sehr dürftig.