

# Abbildungsmethoden für die Brust mit einem 3D-Ultraschall-Computertomographen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

der Fakultät für Informatik  
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**

von

**Robin Dapp**

aus Bruchsal

Tag der mündlichen Prüfung:	16.7.2013
Erstgutachter:	Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Hartmut Gemmeke



Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie

Fakultät für Informatik, 2013

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Dillmann, Prof. Dr. Hartmut Gemmeke

## **Erklärung**

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der Fassung vom 17.05.2010 beachtet zu haben.

**Karlsruhe, 06.11.2013**

.....  
**(Robin Dapp)**



*I will tell you why; so shall my anticipation  
prevent your discovery, and your secrecy to the King and  
queene: moult no feather. I have of late, (but wherefore  
I know not) lost all my mirth, forgone all custom of exercises;  
and indeed, it goes so heavily with my disposition;  
that this goodly frame the earth, seems to me a sterrill  
promontory; this most excellent canopy the air,  
look you, this brave o'erhanging firmament, this Majesticall roofe,  
fretted with golden fire: why, it appeares no other thing  
to me, than a foul and pestilent congregation of vapours.  
What a piece of work is a man! How noble in  
reason, how infinite in faculty! In form and moving  
how express and admirable! In action how like an Angel!  
in apprehension how like a god! The beauty of the  
world! The paragon of animals! And yet to me, what is  
this quintessence of dust? Man delights not me; no,  
nor Woman neither; though by your smiling you seem  
to say so.*



# Zusammenfassung

Die am KIT entwickelte 3D-Ultraschall-Computertomographie (3D-USCT) ist ein neuartiges Verfahren zur Früherkennung von Brustkrebs. Im Vergleich zu etablierten Verfahren wie der Mammographie ist sie dreidimensional und nutzt keine ionisierende Strahlung; außerdem ist sie kostengünstiger als die Magnetresonanztomographie (MRT).

Die USCT stellt zwei verschiedene Bildgebungsmethoden zur Verfügung: die Reflexions- und die Transmissionstomographie. Die Reflexionstomographie kann *qualitative* 3D-Bilder mit Sub-Millimetrauflösung erzeugen, die Transmissionstomographie erlaubt hingegen *quantitative* Aussagen über die lokale Schallgeschwindigkeits- oder Dämpfungsverteilung in unbekanntem Gewebe.

In dieser Arbeit wird die Theorie, Implementierung und Evaluierung von Algorithmen der Transmissionstomographie behandelt. Bisherige Arbeiten etwa für die Computertomographie gehen stets von idealen Aperturen aus. Im Gegensatz dazu ist die Geometrie des am KIT entwickelten Prototypen 3D-USCT II nicht optimal für die Transmissionstomographie geeignet, weil man es wegen des vollständig dreidimensionalen Aufbaus mit einer vergleichsweise geringen Datenmenge und suboptimaler Verteilung der Ultraschall-Wandler zu tun hat. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt daher auf der in-vivo-Bildgebung für den klinischen Einsatz mit wenigen Daten und auf kurzer Rekonstruktionszeit für den 3D-USCT II und künftige Systeme.

Dazu wurde eine Kette vollständig dreidimensionaler Schritte von Simulation über Signaldetektion bis zur Rekonstruktion implementiert. Die Rekonstruktion, das Lösen eines sehr großen, dünnbesetzten linearen Gleichungssystems wurde mit Hilfe von Compressive-Sampling-Algorithmen durchgeführt. Außerdem wurde eine dreidimensionale Brechungskorrektur auf Basis der Eikonal-Gleichung implementiert.

Die entwickelten Methoden erreichen die Auflösung von  $(1,2 \text{ cm})^3$  für die strahlbasierte Transmissionstomographie an Echtdateien. Durch die Brechungskorrektur stimmen die Konturen der Schallgeschwindigkeitsbilder mit den Originalen besser überein. Die erzeugten Schallgeschwindigkeitsbilder wurden erfolgreich zur Korrektur der Reflexionsbilder eingesetzt. Der genutzte Rekonstruktionsalgorithmus wurde algorithmisch um einen Faktor 20 beschleunigt. Eine Rekonstruktion mit einer Voxelgröße von  $(2 \text{ mm})^3$  und etwa einer Million Voxeln ist insgesamt in etwa 15 Sekunden möglich. Außerdem wurde ein schneller Vorschaumodus implementiert, der die Rekonstruktion eines 3D-Bildes mit der Voxelgröße  $(8 \text{ mm})^3$  und 25 000 Voxeln in weniger als einer Sekunde erlaubt.

Hierdurch ist es jetzt möglich, 3D-Schallgeschwindigkeitsvolumen direkt zur klinischen Diagnose einzusetzen. Ferner wurde mit Hilfe einer Simulation eine optimierte Geometrie entworfen, die nur geringe Änderungen an der bisherigen nötig macht, aber deutlich bessere Abbildungseigenschaften für die Transmissionstomographie aufweist. Es konnte gezeigt werden, dass mit nur einer Aperturposition der optimierten Geometrie potentiell eine bessere Rekonstruktionsqualität erreicht werden kann als mit 16 Aperturpositionen des aktuellen Aufbaus.

Neben Simulationen und statischen Phantomen wurden die Methoden anhand klinischer Daten evaluiert, die in einer klinischen Pilotstudie am Universitätsklinikum Jena aufgenommen wurden. Von drei mit der MRT identifizierten Krebsfällen konnten mit der in dieser Arbeit entwickelten Schallgeschwindigkeits- und Dämpfungsbildgebung zwei eindeutig identifiziert werden.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung und Zielsetzung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Zielsetzung und wissenschaftlicher Beitrag . . . . .	4
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>3D-Ultraschall-Computertomographie</b>	<b>7</b>
2.1	Stand der Technik . . . . .	7
2.2	3D-Ultraschall-Computertomographie am KIT . . . . .	8
2.3	Grundbegriffe und Systemparameter . . . . .	12
2.4	Verfahren zur Erkennung von Brustkrebs . . . . .	15
2.5	Seismologie und geologische Exploration . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Bildgebung der 3D-Ultraschall-Computertomographie</b>	<b>19</b>
3.1	Physikalische Grundlagen der Ultraschallausbreitung . . . . .	19
3.2	Approximationen und Einschränkungen . . . . .	24
3.3	Linearisierung der Signallaufzeiten . . . . .	31
3.4	Grenzen der Strahlapproximation . . . . .	34
3.5	Reflexionstomographie . . . . .	36
3.6	Zusammenfassung . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Signaldetektion</b>	<b>41</b>
4.1	Laufzeitdetektion . . . . .	42
4.2	First-Arrival-Detektion . . . . .	48
4.3	Beheben von Falschdetektionen . . . . .	53
4.4	Laufzeitdetektion mit endlichem Frequenzeinfluss . . . . .	59
4.5	Dämpfungs-/Absorptionsdetektion . . . . .	61
4.6	Zusammenfassung . . . . .	68
<b>5</b>	<b>3D-Rekonstruktion für USCT</b>	<b>69</b>
5.1	Stand der Technik . . . . .	69
5.2	USCT-Vorwärtsmodell . . . . .	71
5.3	Simulation . . . . .	74
5.4	Vorwärtsmodell unter der Strahlapproximation . . . . .	76
5.5	Diskrete Modellierung des USCT . . . . .	77

5.6	Lösungsverfahren . . . . .	82
5.7	Compressive Sampling . . . . .	86
5.8	Banana-Doughnut-Rekonstruktion . . . . .	92
5.9	Zusammenfassung . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Rekonstruktionsalgorithmen</b>	<b>99</b>
6.1	TVAL3-Algorithmus . . . . .	99
6.2	Optimierung des TVAL3-Algorithmus . . . . .	102
6.3	Eikonal-Rekonstruktion . . . . .	110
6.4	Einfluss der diskreten Wegapproximation . . . . .	113
6.5	Zusammenfassung . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>117</b>
7.1	2D-Diffraktionssimulation . . . . .	117
7.2	3D-Simulationen . . . . .	122
7.3	Rekonstruktionen des Brustphantoms . . . . .	128
7.4	Korrektur der Reflexionstomographie . . . . .	136
7.5	Rekonstruktionsergebnisse der Pilotstudie . . . . .	139
7.6	Banana-Doughnut-Rekonstruktion . . . . .	150
7.7	Einschränkung der Zahl der Unbekannten . . . . .	152
7.8	Optimierung der Geometrie . . . . .	154
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick</b>	<b>159</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	159
8.2	Diskussion . . . . .	162
8.3	Ausblick . . . . .	166
<b>A</b>	<b>Elastodynamische Wellengleichung</b>	<b>169</b>
<b>B</b>	<b>Fourier-Scheibentheorem</b>	<b>173</b>
B.1	Transmissionstomographie mit Diffraktionstheorie . . . . .	178
<b>C</b>	<b>Weitere Rekonstruktionsmethoden</b>	<b>185</b>
C.1	3D X-Ray Transform . . . . .	185
C.2	Rekonstruktionsmethoden der Diffraktionstomographie . . . . .	189

# Kapitel 1 |

## Einführung und Zielsetzung

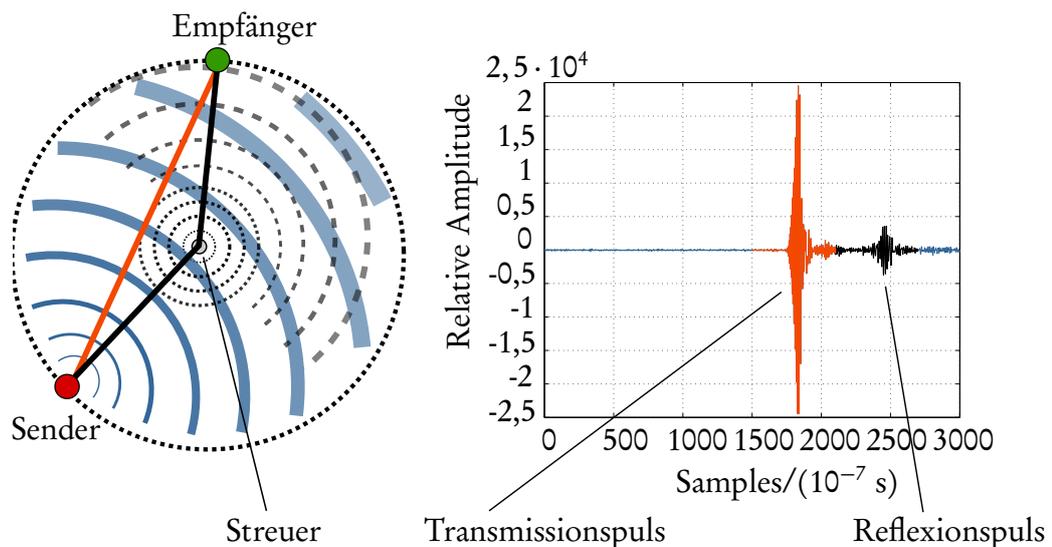
Brustkrebs ist die global am häufigsten diagnostizierte Krebserkrankung bei Frauen. Er macht 23 Prozent (1,4 Mio. pro Jahr) aller Krebsneuerkrankungen bei Frauen aus. Rund 14 Prozent (460 000) aller Todesfälle durch Krebs bei Frauen sind brustkrebsbedingt, was Brustkrebs zur häufigsten Todesursache durch Krebs macht [1]. Die Hälfte dieser Fälle und 60 Prozent der Todesfälle treten in der westlichen Welt auf. Zahlen für Deutschland finden sich in [2] und [3], für die USA in [4].

Diese Daten machen die Notwendigkeit deutlich, Tumoren frühestmöglich zu erkennen. Am Institut für Prozessdatenverarbeitung und Elektronik (IPE) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) wird aus diesem Grund seit dem Jahr 2000 die Idee der vollständig dreidimensionalen Ultraschall-Computertomographie (USCT) verfolgt. Zum damaligen Zeitpunkt wurden lediglich zweidimensionale Ultraschallverfahren genutzt, um die weibliche Brust auf Brustkrebs zu untersuchen. Ein hochauflösendes, reproduzierbares 3D-Volumenbild, wie es die 3D-USCT zum Ziel hat, kann für den behandelnden Arzt deutliche Vorteile bei der Diagnose und der Therapie bedeuten.

Hauptziel der 3D-USCT ist es, Tumoren in der Brust deutlich früher als bisher zur erkennen. Im Gegensatz zu einem Tumor in vitalen Organen, der schon früh in seiner Wachstumszeit eine beeinträchtigende Wirkung auf das umliegende Gewebe haben kann, bleiben Tumoren der Brust häufig solange unentdeckt, bis sie Metastasen gebildet haben. Die Metastasen sind zu diesem Zeitpunkt oft bereits im ganzen Körper verteilt. Dies erschwert eine lokalisierte und effiziente Therapie beträchtlich. Daher sterben die meisten Patientinnen nicht am Tumor selbst, sondern an den Nebenwirkungen der Erkrankung.

Die mittlere Größe eines Tumors bei der Erkennung beträgt zur Zeit etwa 1 cm, die Metastasenwahrscheinlichkeit liegt dann bei 30% [5]. In Abschnitt 2.4 werden die Verfahren erläutert, die dafür gegenwärtig in der klinischen Praxis eingesetzt werden. Andere hochauflösende 3D-Verfahren zur Brustkrebserkennung sind entweder sehr teuer (MRT), oder arbeiten mit ionisierender Strahlung (CT) und sind daher für regelmäßige Vorsorgeuntersuchungen nur bedingt tauglich.

Da Ultraschall für den menschlichen Organismus unschädlich ist, könnte die 3D-USCT langfristig als Brustkrebs-Vorsorgeuntersuchung eingesetzt werden. Ziel des USCT-



**Abbildung 1.1** – Zweidimensionales Schema der USCT-Aufnahmeprozedur (links) mit zugehörigem Amplitudenscan (rechts). Die blaue Welle stellt den Hintergrundschall dar, der sich im Hintergrundmedium ohne Einfluss von Streuern/Reflektoren ausbreitet. Die graue Welle symbolisiert das gestreute Feld. Der Transmissionspuls, der den direkten (orange gefärbten) Weg gegangen ist, trifft als erstes beim Empfänger ein, danach folgt der Reflexionspuls (schwarz), der einen Umweg über einen Streuer genommen hat.

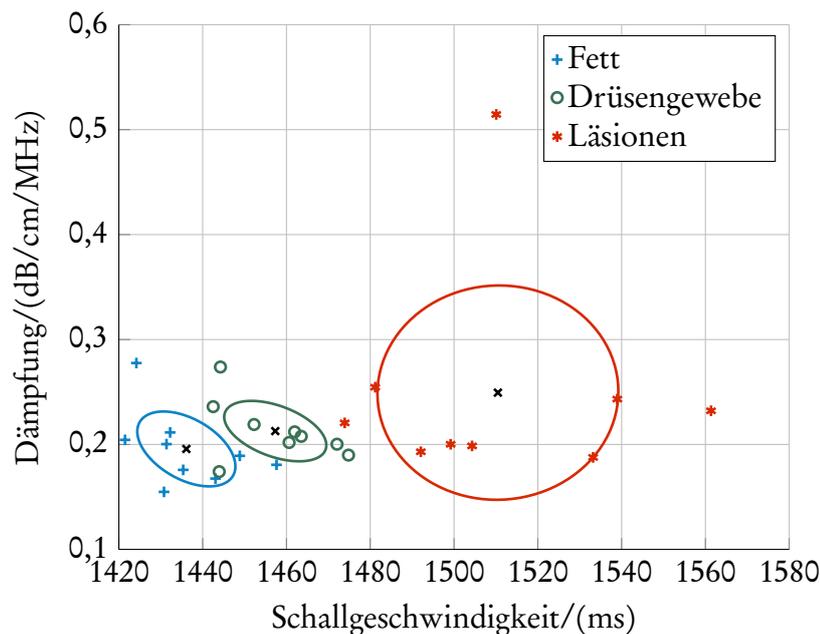
Projekts am KIT ist daher die zuverlässige Entdeckung von Tumoren mit der Größe von 5 mm zu prüfen, da bei dieser Größe die Wahrscheinlichkeit für Metastasenbildung bei nur 5% liegt [5].

## 1.1 Motivation

Gemessene USCT-Signale, sogenannte *Amplitudenscans* oder *A-Scans*, lassen sich in einen Transmissionsteil und einen Reflexionsteil aufspalten, wie in Abbildung 1.1 gezeigt wird. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der sogenannten Transmissionstomographie, die sich mit dem Transmissionsteil des Signals befasst.

Die Informationen, die ein Transmissionssignal auf dem Weg von Sender zu Empfänger gewinnt, definieren ein Linienintegral, aus dem man Rückschlüsse über das durchlaufene Medium ziehen kann. Namentlich sind das die Signallaufzeit, das heißt die mittlere Schallgeschwindigkeit entlang des Weges, und die Dämpfung, die ein Signal auf dem Weg erfahren hat. Beides sind sogenannte Modalitäten, also bildgebende Verfahren, die Indikatoren für krebsartige Strukturen darstellen können. Je A-Scan erhält man genau einen Schallgeschwindigkeits- oder Dämpfungswert, die Gesamtzahl der Messwerte entspricht damit der Anzahl der A-Scans.

Anders verhält es sich bei Reflexionssignalen, die wesentlich häufiger in einem A-Scan vertreten sein können. Reflexionspulse zeigen die Stärke der Reflexion verschiedener



**Abbildung 1.2** – Schallgeschwindigkeits- und Dämpfungs-Streuplot verschiedener Gewebearten für USCT-Daten des Karmanos Cancer Institutes in Detroit. Die Ellipsen geben die klassifizierten Gewebetypen an.

Medien an, die Stärke der Reflexion ist aber kein quantitatives Maß zur Identifikation von Krebs sondern bietet nur qualitativen Aufschluss über die innere Struktur der Brust. Wegen ihrer hohen Auflösung ( $< 1$  mm) ist die Reflexionstomographie eine der Hauptmodalitäten der 3D-USCT.

Die Bedeutung der Transmissionstomographie liegt nun darin, dass sie, im Gegensatz zur höheraufgelösten Reflexionstomographie, quantitative Aussagen über das Gewebe treffen kann. Für Ultraschall und speziell für die Brustkrebsfrühdagnostik wurden sowohl Schallgeschwindigkeit als auch Dämpfung bereits erprobt: Nach [6] kann man krebsartiges von gutartigem Gewebe vor allem durch die Schallgeschwindigkeit trennen; kombiniert mit der Dämpfung ergibt sich im allgemeinen ein aussagekräftiger Indikator für Krebs [7], [8]. Abbildung 1.2 zeigt dazu die Eigenschaften verschiedener Gewebearten. Je höher die Schallgeschwindigkeit und die Dämpfung, desto wahrscheinlicher ist die Läsion bösartig.

Darüberhinaus ist die Schallgeschwindigkeitsbildgebung auch noch für die Reflexionstomographie von Wichtigkeit. Die Reflexionstomographie nutzt in erster Näherung nur eine als konstant angenommene Hintergrundschallgeschwindigkeit. Diese Annahme ist für übliche Schallgeschwindigkeitswerte in der Brust deutlich verletzt und sorgt für eine Defokussierung der Reflexionsbilder. Mittels der Transmissionstomographie kann ein Schallgeschwindigkeitsbild rekonstruiert werden, das die Reflexionsbildgebung verbessert und die Defokussierung verhindert. Erst so kann die volle Auflösung von 0,24 mm der Reflexionstomographie erreicht werden.

## 1.2 Zielsetzung und wissenschaftlicher Beitrag

Ziel dieser Arbeit ist es, Algorithmen der Transmissionstomographie geometrieunabhängig für den aktuellen Prototypen 3D-USCT II und mögliche spätere Modelle zu implementieren und zu evaluieren. Der Transmissionstomographie erwachsen aus der für die Reflexionstomographie optimierten Geometrie des 3D-USCT II Probleme bei der Rekonstruktion: Wegen der für die Transmissionstomographie geringen Winkelabdeckung und die schmale Abstrahlcharakteristik der USCT-Wandler sind nur wenige Sender-Empfängerpaare zur Bildgebung nutzbar.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt daher auf der in-vivo-Bildgebung für den klinischen Einsatz mit wenigen Daten und auf kurzer Rekonstruktionszeit. Es sollen verschiedene Methoden zur Optimierung der Bildgebung genutzt werden, sowie die grundlegenden Beschränkungen dieser Methoden aufgezeigt und anhand synthetischer und statischer Phantome die Durchführbarkeit des Bildgebungsprinzips gezeigt werden. Schließlich sollen die Algorithmen an in-vivo-Daten getestet und evaluiert werden. Die Transmissionstomographie bietet hierfür wegen ihrer Spezifität (siehe Abbildung 1.2) einen entscheidenden Vorteil gegenüber den bisher üblichen Verfahren der Brustkrebsdiagnostik.

Zur Rekonstruktion eines unbekanntes Schallgeschwindigkeits- oder Dämpfungsvolumens  $\mathbf{x}$  wird in dieser Arbeit ein lineares Modell  $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}$  verwendet. Dabei stellt  $\mathbf{b}$  die Messungen der mittleren Schallgeschwindigkeit oder der Dämpfung dar und  $\mathbf{M}$  ein Modell für die Ultraschallausbreitung, das aus einem Volumen  $\mathbf{x}$  zugehörige Messungen  $\mathbf{b}$  erzeugt. Die Rekonstruktion umfasst die Umkehrung dieser Prozedur, also die Bestimmung eines Volumens  $\mathbf{x}$ , das die bestehenden Messungen  $\mathbf{b}$  per  $\mathbf{M}$  möglichst gut annähert.

Die Matrix  $\mathbf{M}$  ist bei 3D-USCT sehr groß (circa 1 Mio. Unbekannte/Spalten, bis zu 22 Mio. Zeilen) und schlecht konditioniert. Eine direkte Invertierung ist deshalb nicht möglich. Zur Lösung wird ein numerischer Minimierungsalgorithmus auf Basis des Compressive Sampling mit Total-Variation-Regularisierung verwendet.

Damit demonstriert diese Arbeit erstmals die schnelle Rekonstruktion vollständig dreidimensionaler Transmissionstomographiebilder. Es werden Methoden vorgestellt und implementiert, mit denen die Rekonstruktion trotz der für die Transmissionstomographie stark eingeschränkten Datenmenge gelingt und die mit der Strahlenoptik maximal mögliche Auflösung von circa  $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$  erreicht wird. Die Einschränkungen des 3D-USCT II für die Transmissionstomographie und verschiedener Bildgebungsalgorithmen werden quantifiziert. Weiterhin werden Vorschläge für eine optimierte Anordnung der Wandler gemacht, die ohne große Änderung des übrigen Aufbaus eine wesentliche Verbesserung der Qualität der Transmissionstomographierekonstruktion bewirken kann.

In einem Satz zusammengefasst werden in dieser Arbeit schnelle Methoden entwickelt, mit denen es erstmals möglich ist, vollständig dreidimensionale in-vivo-Schallgeschwindigkeits- und -Dämpfungsrekonstruktionen der Brust mit Ultraschall durchzuführen.

Die wesentlichen Beiträge der Arbeit sind daher

- Vollständig dreidimensionale Rekonstruktion der Schallgeschwindigkeits- und Dämpfungsverteilung in menschlichem Gewebe,
- Rekonstruktionsmethoden, die trotz nicht optimaler Geometrie die Auflösungsgrenzen der Strahlapproximation erreichen,
- Erste in realistischer Zeit (Stunden) berechenbare, dreidimensionale Brechungskorrektur für Transmissionstomographie,
- Entwurf einer optimierten Geometrie für künftige Systeme und
- Beschleunigung der Algorithmen, so dass Rekonstruktionen im Sekundenbereich möglich sind.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Die einzelnen Teile der eben angedeuteten linearen Modellierung geben die Marschrichtung für die Arbeit vor: Die Matrix  $\mathbf{M}$  beschreibt linear das gewählte Ausbreitungsmodell des Ultraschalls. Nachdem die Grundlagen des am KIT entwickelten 3D-USCT II in Kapitel 2 vorgestellt werden, folgen in Kapitel 3 verschiedene physikalische Modelle und Approximationen der Ultraschallausbreitung, die für die Bildgebung verwendet werden. Darüberhinaus werden deren Einschränkungen und Auflösungsgrenzen besprochen.

Bevor die Messungen  $\mathbf{b}$  für die Rekonstruktion verwendet werden können, müssen sie zunächst aus den Rohdaten, also den A-Scans, gewonnen werden. Dieser Vorgang der Signaldetektion wird in Kapitel 4 betrachtet. Die Signaldetektion ist ein vitaler Bestandteil der gesamten Rekonstruktionskette und bestimmt die zu erreichende Auflösung wesentlich mit. Außerdem bestehen grundlegende Zusammenhänge zwischen bestimmten Ultraschall-Ausbreitungsmodellen und Methoden zur Signaldetektion, die ebenfalls aufgezeigt werden.

Nachdem  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{b}$  festgelegt sind, kann  $\mathbf{x}$  rekonstruiert werden. In Kapitel 5 werden dafür verschiedene Lösungsansätze auf Grundlage numerischer Optimierung vorgestellt. Außerdem wird die Theorie des Compressive Sampling erläutert, soweit sie zur Rekonstruktion nötig ist. Anschließend werden Möglichkeiten zur Beschleunigung der Rekonstruktion in Kapitel 6 besprochen.

Zur Verifikation verschiedener Aspekte der Rekonstruktion wird eine Diffraktionssimulation für Beugung und Streuung und eine Eikonal-Simulation zur Abschätzung der Brechung genutzt. Beide sind in Abschnitt 5.3 beschrieben.

Die praktische Einsetzbarkeit der implementierten Methoden wird im Ergebniskapitel demonstriert: Kapitel 7 zeigt verschiedene Rekonstruktionsergebnisse statischer Schallgeschwindigkeits- und Dämpfungsphantome. Darüberhinaus werden Rekonstruktionsergebnisse einer klinischen Studie gezeigt und Vorschläge zur Optimierung der Geometrie gemacht.

In Kapitel 8 werden wesentliche Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst, die Verfahren kritische betrachtet und Ansatzpunkte für künftige Arbeiten aufgezeigt.

Im Anhang finden sich zusätzliche Herleitungen, Approximationen und weiterführende Rekonstruktionsmethoden, die sich nicht unmittelbar in den Fluss der Arbeit einfügen, aber dennoch einerseits zum Detailverständnis beitragen und andererseits der Einordnung der Arbeit in einen breiteren Kontext dienen sollen.

# Kapitel 2 |

## 3D-Ultraschall- Computertomographie

In diesem Kapitel werden die bisher am IPE konstruierten 3D-USCT-Prototypen vorgestellt sowie systemspezifische Parameter und Eigenschaften erläutert, die für die weitere Arbeit von Bedeutung sind. Zunächst wird der aktuelle Stand der Technik wiedergegeben.

### 2.1 Stand der Technik

Seit der maßgeblichen Veröffentlichungen von Greenleaf [9] hat sich das Feld der Ultraschall-Tomographie deutlich weiterentwickelt. Weltweit gibt es mehrere Gruppen, die sich mit Ultraschallbildgebung im Sinne von USCT befassen. Zunächst ist die Gruppe aus Detroit vom Karmanos Cancer Institute zu nennen, die sich mittlerweile als Delphinus Medical Technologies ausgegründet hat. Der Detroiter Prototyp hat bereits eine klinische Studie absolviert und zahlreiche Datensätze produziert [10]. Das Gerät besteht aus einem in z-Richtung verfahrbaren, zweidimensionalen Ring mit 256 Ultraschallwandlern. Die nächste Generation mit 2048 Wandlern wird gerade fertiggestellt. Erste Ergebnisse werden in diesen Wochen auf Konferenzen präsentiert [10]. Die Datenaufnahmezeit liegt inklusive Verfahren des Ringes im Minutenbereich.

Eine weitere Gruppe, die sich ebenfalls ausgegründet hat und bereits klinische Bilder vorzuweisen hat [11], [12], ist Techniscan Medical Systems aus Salt Lake City, USA. Techniscans Ultraschallsystem ist in einen Reflexions- und einen Transmissionsteil aufgetrennt und ist ebenfalls heb- und drehbar. Das Empfänger-Array für die Transmission besteht aus sechs Reihen à 160 Receivern, die drei Empfänger-Arrays für die Reflexion aus jeweils 192 Empfängern. Die Datenaufnahmezeit beträgt acht bis zehn Minuten [13].

In San Diego, USA gab es eine Gruppe unter der Leitung von André, deren schichtartiges System aus 512 und 1024 Wandlern besteht [14]. Seit einiger Zeit gibt es keine Veröffentlichungen der Gruppe mehr und es darf vermutet werden, dass hier nicht

mehr aktiv geforscht wird.

Eine Kooperation der Universität Athen mit der University of Southern California, Los Angeles, USA, die jetzt unter dem Namen MastroScopia firmiert, wird von Marmarelis geleitet. Ihr Gerät besitzt ein gegenüberliegendes Sender- und ein Empfängersegment, das rotiert und gehoben werden kann. Damit werden Schallgeschwindigkeits- und Dämpfungsbilder erzeugt; es gibt auch schon eine Anzahl klinischer Daten [15].

Die Gruppe um Ermert der Ruhr-Universität Bochum verwendet für die Brustuntersuchung einen gewöhnlichen Ultraschall-Handscanner, dem ein Spiegel gegenübergestellt ist, an dem die Signale reflektiert werden. Rotation ist in 36 Positionen möglich, zusätzlich kann der Aufbau in z-Richtung gehoben werden [16].

In Marseille, Frankreich existiert eine Ultraschall-Forschergruppe, die sich mit verschiedenen Bildgebungsverfahren per Ultraschall befasst. Das Marseiller System ANAÏS besteht aus einem drehbaren Halbring, auf dem 1024 fokussierte Wandler angebracht sind [17].

Alle genannten Gruppen arbeiten mit zwei- oder zweieinhalb-dimensionalen Verfahren. Im Unterschied zu einem vollständig dreidimensionalen Verfahren wie 3D-USCT kann man mit reinen 2D-Systemen keine Reflexionen aufnehmen, deren Streurichtung außerhalb der Ringebene liegt (*out-of-plane reflection*). Deshalb ist es möglich, dass derartige Strukturen fälschlich über- oder unterbetont werden.

Mit ihrem vollständig dreidimensionalen Ansatz ist die Ultraschall-Computertomographie in Karlsruhe einzigartig. Im folgenden Abschnitt wird ihre Geschichte zusammengefasst.

## 2.2 3D-Ultraschall-Computertomographie am KIT

Die Entstehungsgeschichte der 3D-USCT am Institut für Prozessdatenverarbeitung und Elektronik (IPE) begann zweidimensional mit der Diplomarbeit von Jan Würfel im Jahre 2000. In dieser wurde ein erster Prototyp konstruiert und an statischen Phantomen getestet. Das Gerät bestand aus einem zylinderförmigen, mit Wasser gefüllten Topf auf dem ein Ring mit zwei Ultraschallwandler-Arrays mit jeweils 16 Ultraschallwandlern (*Transducern*) montiert war. Ein Element eines Arrays fungiert als Sender, während das gegenüberliegende Array empfängt. Der Ring ist manuell drehbar, um eine höhere räumliche Abtastung des untersuchten Objekts zu erlauben. Der Aufbau ist in Abbildung 2.1 (links) zu sehen.

### 3D-USCT I

Der erste 3D-Ultraschall-Computertomograph (3D-USCT I) wurde 2006 in Betrieb genommen. Zu dieser Zeit war er das weltweit erste System, das vollständig dreidimensionale Ultraschalltomographie beherrschte. Durch Wiederverwendung der

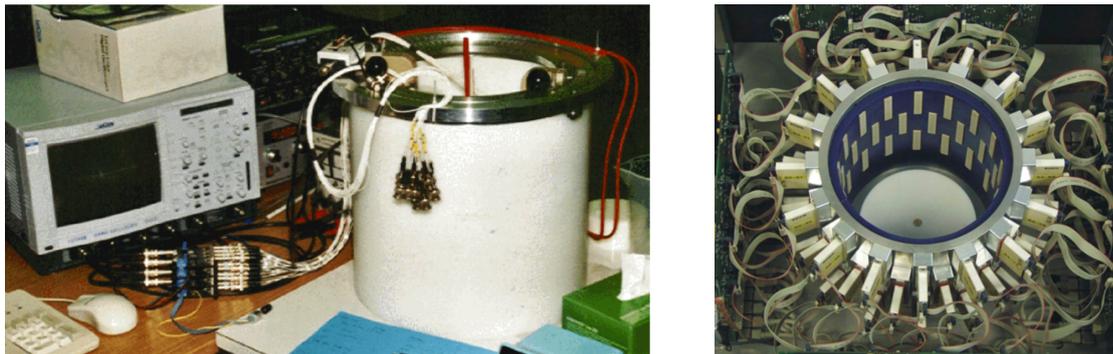


Abbildung 2.1 – 2D-USCT (links) und Apertur des 3D-USCT I (rechts).

Datenaufnahmehardware eines IPE-internen Prototypen für den Fluoreszenzdetektor des Pierre-Auger-Experiments konnten die Herstellungskosten gering gehalten werden. Da manche dieser Komponenten, wie beispielsweise die Hardware für die Datenaufnahme, nicht für derart große Datenmengen ausgelegt war wie sie beim 3D-USCT I anfielen, dauerte eine ganze Messung circa acht Stunden. In dieser Zeit wurden etwa 20 GB Rohdaten aufgenommen und auf einen angeschlossenen PC übertragen. Weil der 3D-USCT I jedoch ohnehin als Prototyp geplant war, der dazu dienen sollte, die Grundprinzipien und die Machbarkeit der dreidimensionalen Ultraschallbildgebung zu demonstrieren, war dieser Nachteil ohne Belang. Abbildung 2.1 (rechts) zeigt die Apertur des 3D-USCT I mit eingebauten Ultraschallwandlern.

An verschiedenen Brust-, Gelatine-, sowie Draht- und Fadenphantomen konnte gezeigt werden, dass die 3D-USCT in der Lage ist, die gestellten Erwartungen zu erfüllen: Es wurde zum Beispiel ein Reflexionsbild eines Drahtes mit 0,070 mm Durchmesser rekonstruiert. Außerdem war es möglich, ein sogenanntes *Triple Modality Breast Phantom* der Firma CIRS Inc., USA (das auch in dieser Arbeit verwendet wird) mit annähernd isotroper Auflösung in der  $x$ - $y$ -Ebene zu rekonstruieren [18]. Die darin eingeschlossenen Läsionen und ihr unterschiedlicher Reflexionscharakter waren im Reflexionsbild deutlich zu erkennen. Des Weiteren konnte ein dreidimensionales Schallgeschwindigkeitsvolumen rekonstruiert werden, das die Schallgeschwindigkeit des Brustphantoms angibt [19].

Der 3D-USCT I besteht aus drei versetzt übereinander verbauten Segmenten, die jeweils Träger 16 sogenannter Transducer-Array-Systeme (TAS) sind. Ein TAS enthält acht in einer vertikalen Reihe angeordnete Ultraschallemitter oder -sender und je vier einem Sender zugeordneten Ultraschallempfänger, also insgesamt acht Sender und 32 Empfänger. In einem Segment befinden sich 16 gleichwinklig verteilte und vertikal verbaute TAS, siehe [20]. Zusätzlich gibt es einen Motor, der es erlaubt, per Rotation der Apertur sechs vordefinierte Positionen anzufahren. Die damit insgesamt erreichbare Anzahl Messungen ist  $6 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 32 = 3\,538\,944$ . Sender und Empfänger sind im System relativ zueinander fest angeordnet, lassen sich also immer



**Abbildung 2.2** – Apertur des 3D-USCT II (links) und Gesamtansicht des geöffneten Systems (rechts).

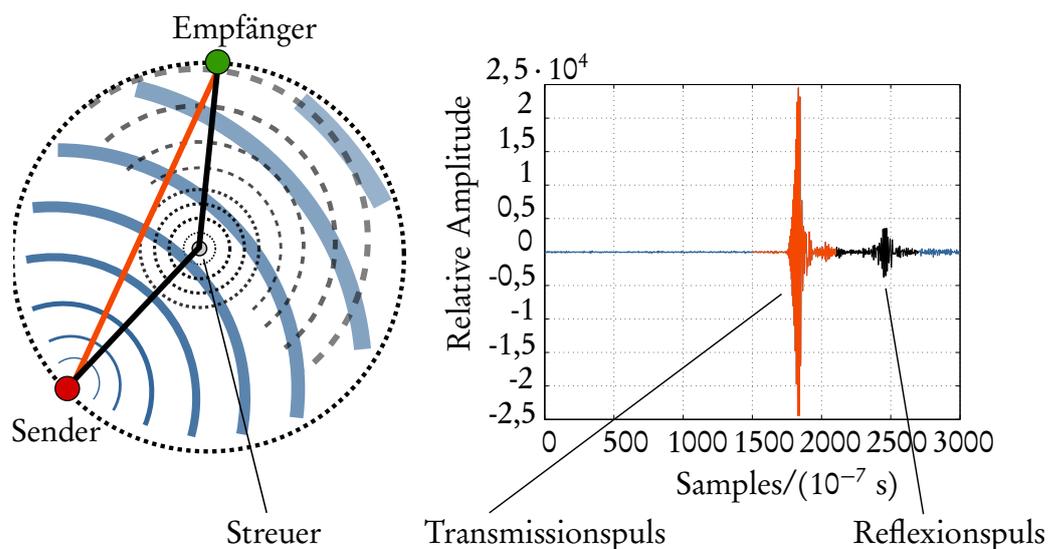
nur als Ganzes rotieren. Die Erkenntnisse, die während des Betriebs des 3D-USCT I gewonnen wurden, flossen in die Konstruktion des nun vorzustellenden 3D-USCT II ein.

### 3D-USCT II

Der 3D-USCT II entstand als Weiterentwicklung des 3D-USCT I und wurde als zweiter Prototyp für den Einsatz in klinischen Studien entwickelt. Im Rahmen der Dissertation von Schwarzenberg [21] wurde sowohl eine optimierte Aperturform als auch eine verbesserte räumliche Anordnung der TAS entwickelt. Optimierungsparameter waren unter anderem optimale Ausleuchtung in der Mitte der Apertur, der sogenannten *Region of Interest (ROI)* und optimaler Kontrast in Hinblick auf die Reflexionstomographie.

Die resultierende Apertur hat eine halbellipsoide Form. Sie wurde aus Polyoxymethylen (POM) gefertigt und hat Aussparungen für insgesamt 157 TAS. Jeder dieser TAS besitzt vier Sender und neun Empfänger, die quadratisch angeordnet sind (siehe Abbildung 2.5). Der gesamte Halbellipsoid kann mit Hilfe von Schrittmotoren beliebig um die vertikale Achse rotiert und gehoben werden. Ursprünglich waren für die klinische Praxis vier Dreh- und Hubpositionen vorgesehen, um etwa der Anzahl Messungen des 3D-USCT I gleichzukommen. Somit ergeben sich insgesamt  $4 \cdot 157 \cdot 4 \cdot 157 \cdot 9 = 3\,549\,456$  Messungen. Da dieselbe Abtaststrategie und dieselbe Messdauer wie beim 3D-USCT I genutzt wird, entspricht dies ebenfalls einer Rohdatenmenge von etwa 20 GB.

Für die Datenaufnahme wurde die verbesserte DAQ des Fluoreszenzdetektors des Pierre-Auger-Projektes verwendet, die ebenfalls IPE-intern gefertigt wurde. Diese



**Abbildung 2.3** – Zweidimensionales Schema der USCT-Aufnahmeprozedur (links) mit zugehörigem Amplitudenscan (rechts). (Nochmals Abbildung 1.1)

ist deutlich leistungsfähiger als die im 3D-USCT I verbaute. Unter anderem ist sie durch 40 GB internen Speicher in der Lage, bis zu zwei Brustaufnahmen mit vier Aperturpositionen im RAM aufzuzeichnen. Die Messprozedur nahm während der klinischen Studie für eine Brust etwa zehn Minuten mit zehn Aperturpositionen in Anspruch.

Durch Verbesserungen in der Datenkompression hat sich im Laufe der Inbetriebnahme des 3D-USCT II gezeigt, dass noch deutlich mehr Daten in den internen Speicher der DAQ-Hardware passen: Die maximale Anzahl Aperturpositionen liegt gegenwärtig bei 47, was fast 42 Millionen Messungen entspricht. Begrenzender Faktor für die Nutzung vieler Positionen bleibt die durch die Mechanik bedingte Messzeit für Rotation und Hub, so dass in der klinischen Praxis aus Gründen der Patientenfreundlichkeit wahrscheinlich eine geringere Anzahl Positionen verwendet, oder die Dreh- und Hubbewegung noch beschleunigt werden wird.

Zum Zeitpunkt der Fertigstellung dieser Arbeit hat der 3D-USCT II bereits eine Pilotstudie am Universitätsklinikum Jena mit zehn Patientinnen hinter sich. Vor Beginn der Studie wurde die Betriebssicherheit nach medizintechnischen Maßstäben vom TÜV Süd überprüft. Außerdem bestätigten das Bundesinstitut für Arzneimittel und Medizinprodukte (BfArM) die medizinische Eignung und biologische Verträglichkeit, sowie die Ethikkommission des Universitätsklinikums Jena die ethische Unbedenklichkeit einer USCT-Untersuchung.

## 2.3 Grundbegriffe und Systemparameter

Die Ultraschall-Datenaufnahmeprozedur des 3D-USCT II ist der Übersicht halber nochmals in Abbildung 2.3 dargestellt. Ein Sender sendet eine Ultraschallwelle aus, die sich im mit Wasser gefüllten Messellipsoid ausbreitet. Unterwegs trifft die Kugelwelle auf Streuer, die wiederum als Punktquelle fungieren und ein gestreutes Feld aussenden. Am Empfänger wird über eine Zeit von  $300 \mu\text{s}$  ein Schalldruckprofil aufgezeichnet, das im Ultraschallumfeld *A-Scan* genannt wird und in Abbildung 2.3 rechts dargestellt ist.

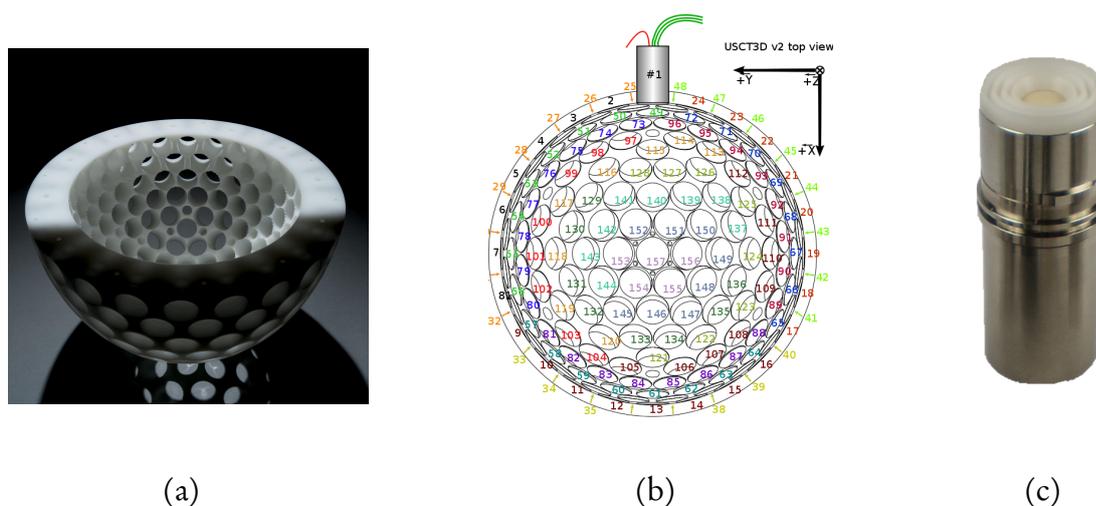
In Abbildung 2.3 sind im A-Scan zwei verschiedene Signaltypen markiert. Der zuerst eintreffende Puls hat den schnellsten Weg vom Sender zum Empfänger genommen, ohne reflektiert oder gestreut zu werden und wird Transmissionspuls genannt. Alle später eintreffenden Pulse sind von Streuern ausgehende Reflexionspulse. Diese Unterscheidung ist namensgebend für beide wesentlichen Bildgebungsverfahren, die bei USCT Verwendung finden: Die *Reflexionstomographie* und die *Transmissionstomographie*.

Die Reflexionstomographie bildet die Struktur eines Objekts ab, gibt an, wie stark ein einzelner Punkt im USCT streut, und kann damit Informationen über das Streuverhalten unterschiedlicher Medien liefern. Die Transmissionstomographie hingegen nutzt die entlang des Weges gesammelten Informationen wie Dämpfung und Signallaufzeit und kann quantitative Aussagen über das durchlaufene Gewebe liefern. Darüberhinaus erlaubt die Transmissionstomographie, in Form der Schallgeschwindigkeitsbildung, eine Verbesserung der Auflösung der Reflexionstomographie. Der für die Reflexionstomographie genutzte Algorithmus SAFT wird beispielsweise in [RD.1] besprochen. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Transmissionstomographie liegt, werden sich die folgenden Kapitel vornehmlich mit deren Grundlagen, Einschränkungen und Rekonstruktionsmethoden befassen.

Für eine ganze USCT-Messung senden die Sender sukzessive ein Ultraschallsignal aus, das von allen Empfängern simultan  $300 \mu\text{s}$  lang empfangen wird. Nachdem alle 157 Sender an der Reihe waren, wird der Messellipsoid gedreht und gehoben. Danach beginnt die Aufnahmeprozedur mit dem ersten Sender erneut.

Die Ultraschall-Wandler arbeiten mit einer Mittenfrequenz von 2,5 MHz. Für die Mittenfrequenz muss bei medizinischem Ultraschall stets ein Kompromiss zwischen Gewebe-Eindringtiefe und möglicher Auflösung gefunden werden. Wie in Abschnitt 4.5 beschrieben, nimmt die Dämpfung von Ultraschall mit steigender Frequenz zu. Je höher also die Mittenfrequenz, desto geringer ist die Eindringtiefe in das Gewebe. Gleichzeitig nimmt mit höherer Frequenz aber das Auflösungsvermögen zu: Je kleiner die Wellenlänge, desto kleiner auch die auflösbaren Objekte.

Die Datenaufnahme-Hardware (DAQ) zeichnet das Schalldruckprofil mit einer zeitlichen Abtastrate von 20 MHz auf. Die maximale auftretende Frequenz der Signale beträgt 5 MHz, also muss mit 10 MHz abgetastet werden. Der zusätzliche Faktor zwei erhöht den Signal-zu-Rauschabstand um einen Faktor  $\sqrt{2}$  (*multiple sampling*).



**Abbildung 2.4** – (a) Foto des 3D-USCT-II-Messellipsoids mit Aussparungen für die TAS, (b) Numerierungsschema der TAS bei Draufsicht, (c) einzelner, vergossener TAS in Metallmantel.

Der 3D-USCT II besitzt insgesamt 157 Ultraschall-Transducer-Array-Systeme (TAS), die aus jeweils vier Sendern und neun Empfängern bestehen. Ein solcher TAS, komplett verarbeitet und in einem Metallmantel vergossen, ist in Abbildung 2.4 (c) zu sehen. Die Gesamtfläche, auf der die Sender und Empfänger aufgebracht sind, beläuft sich auf circa  $16 \text{ mm}^2$ . Jeder TAS enthält außerdem einen Dreifach-Multiplexer, der simultanes Auslesen dreier Empfänger erlaubt.

Der Messellipsoid – in der Bildgebung spricht man auch von der *Apertur* – hat einen Durchmesser von 26 cm und ist 17 cm tief. Eine Abbildung des Ellipsoids ist in Abbildung 2.4 (a) zu sehen. Er kann mit einem Motor um  $30^\circ$  beliebig gedreht und um bis zu 30 mm gehoben werden. Die Anzahl der Drehungen und Translationen ist im Prinzip nur durch den internen Speicher der DAQ-Hardware und die Aufnahmedauer begrenzt, da eine Bewegung im Schnitt 40 Sekunden in Anspruch nimmt. Die eigentliche Messzeit ist mit etwa zehn Sekunden demgegenüber gering.

Die DAQ-Hardware besitzt 480 Kanäle, die 1413 Empfänger haben eine programmierbare Verstärkung (*Gain*) und werden mit 12-Bit-ADCs ausgelesen. Tabelle 2.1 fasst alle Systemparameter nochmals zusammen.

Abbildung 2.5 zeigt die strukturierte Piezofläche eines Wandler, wie er im 3D-USCT II verbaut ist. Die TAS-Köpfe sind reihum im USCT-Ellipsoid verbaut. Die Numerierung ist in Abbildung 2.4 (b) als Draufsicht gezeigt. Jeder TAS des 3D-USCT II besitzt einen eigenen Temperaturfühler. Damit kann die Temperatur jedes einzelnen TAS während der Messung ausgelesen werden. Zusätzlich gibt es noch zwei Jumo-PT100-Kalibrationssensoren, die die Wassertemperatur messen.

EIGENSCHAFT	WERT
Mittelfrequenz	2,5 MHz
Abtastrate	20 MHz
Bandbreite	1 MHz
Aufnahmezeit eines A-Scans	300 $\mu$ s
#TAS	157
#Sender/TAS	4
#Empfänger/TAS	9
#Mögliche Aperturpositionen	$n = 47$
#A-Scans	$n \cdot 157 \cdot 4 \cdot 157 \cdot 9$
Rohdaten	5-80 GB
DAQ-Aufnahmezeit für eine Aperturposition	10 s
Aufnahmezeit für $n$ Positionen	$10n + (n - 1)41$ s

Tabelle 2.1 – Übersicht der 3D-USCT-II-Systemparameter

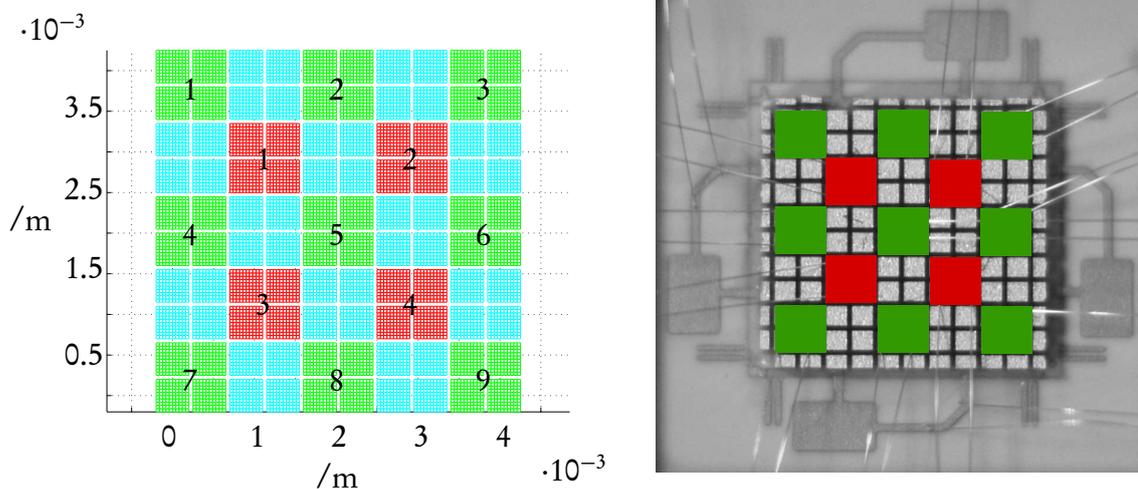


Abbildung 2.5 – Schema eines Wandlers des 3D-USCT II (links). Die Sendeelemente sind rot markiert, die Empfänger grün. Die inaktiven Elemente sind hellblau. Die Zahlen auf den Elementen geben die interne Numerierung an. Die Sender und Empfänger sind (rechts) auf einem strukturierten Piezoelement zu sehen.

## 2.4 Verfahren zur Erkennung von Brustkrebs

### Palpation

Die älteste und weitverbreitetste Methode zur Brustkrebsuntersuchung ist die manuelle Abtastung (Palpation) entweder durch die Patientin selbst und durch einen unterwiesenen Arzt. Aufgrund naheliegender Einschränkungen ist diese Methode jedoch sehr ungenau, schwierig reproduzierbar und kann höchstens Tumoren mit einer mittleren Größe von zwei Zentimetern entdecken. Bei dieser Größe liegt die Wahrscheinlichkeit für Metastasenbildung schon bei 60% [5].

### Konventioneller Ultraschall

Ultraschall als nicht-invasive Untersuchungsmethode spielt ebenfalls eine wichtige Rolle bei der Brustkrebsvorsorge. Sowohl als unterstützende Maßnahme, wenn andere Verfahren wie die Palpation oder die Mammographie unklare Befunde ergeben, als auch als eigenständige Methode wird Ultraschall (bisweilen *Mamma-Sonographie* genannt) genutzt. Bei der Untersuchung wird ein konventioneller Ultraschall-Handscanner verwendet, der manuell, in Kontakt, über die Brust bewegt wird. Je nach Frequenz (üblicherweise  $\geq 7,5$  MHz) ist die Auflösung sehr hoch; dadurch, dass der Scanner aber von Hand bewegt wird, ist die Reproduzierbarkeit einer solchen Untersuchung beschränkt. Darüberhinaus ist wegen der hohen Frequenz die Eindringtiefe des Ultraschalls in die Brust begrenzt, da mit steigender Frequenz die Dämpfung im Gewebe zunimmt.

### Mammographie

Die am weitesten verbreitete Vorsorgeuntersuchung (*Screening-Methode*) für Brustkrebs ist die Röntgen-Mammographie, bei der die Brust von zwei Kunststoffplatten flach zusammengedrückt und dann von zwei Seiten aufgenommen wird. Dadurch erhält man zwei Projektionsbilder, das craniocaudale und das oblique, die im Optimalfall einen genauen Eindruck von der Verteilung verschiedener Gewebearten wie Fett, Drüse und eventuell bösartigem Gewebe liefern. Die Kompression durch die Platten ist für die Patientin meist unangenehm und hat auch aus Sicht der Bildgebung einige Nachteile: Weil die biomechanische Kompression unvorhersehbar verläuft und außerdem schwierig reproduzierbar ist, kann die exakte dreidimensionale Lokalisierung eines Tumors, wie er etwa für eine Biopsie nötig werden kann, verkomplizieren. Des Weiteren ist die gerade bei Vorsorgeuntersuchungen wichtige Reproduzierbarkeit einer Messung und damit die Langzeitbeobachtung eines potentiell bösartigen Tumors erschwert. Die Strahlenbelastung ist zwar höher als bei gewöhnlichen Röntgenuntersuchungen (etwa eines Gelenks) und liegt bei 2 - 4 Milligray (mGy entspricht hier Millisievert, mSv) [22], also etwa im Bereich der typischen Jahresbelastung eines Mitteleuropäers von

etwa 3 mSv [23]. Außerdem sind Mammographie-Bilder bei dichtem Drüsengewebe wie beispielsweise bei jungen Patientinnen nur sehr bedingt aussagekräftig, weil nur schlechter Kontrast erzielt wird [24].

## Magnetresonanztomographie

Die Magnetresonanztomographie (MRT) ist das einzige echte dreidimensionale bildgebende Verfahren der weiblichen Brust, weil es nicht Schichtbilder, sondern direkt ein Volumen abbilden kann. Außerdem ist es für den Menschen unbedenklich, da keine ionisierende Strahlung Verwendung findet. Vorteilhafte Eigenschaften sind unter anderem hoher Kontrast in Weichgewebe und hohe Genauigkeit der Diagnose [25].

Das Auflösungsvermögen der MRT hängt beinahe direkt mit der Magnetfeldstärke zusammen, da sich das Signal-zu-Rauschverhältnis in etwa proportional zur Feldstärke verhält. Gegenwärtig in der klinischen Praxis übliche MRT-Geräte besitzen eine Magnetfeldstärke von 1,5 Tesla, werden aber zunehmend durch 3-Tesla-Geräte ersetzt. Höhere Feldstärken bis zu 17 Tesla werden zu Forschungszwecken bereits erprobt [26], bringen aber auch Nachteile mit sich: Bereits bei Geräten mit mehr als 3 Tesla kann es zu durch Wirbelströme verursachter Übelkeit und Schwindelgefühl bei der Untersuchung kommen [27]. 3-Tesla-MRTs erreichen Auflösungen im Bereich eines Millimeters.

Nachteile der MRT sind unter anderem die Enge der Messröhre, die Geräusentwicklung während der Untersuchung und die Notwendigkeit von Kontrastmittel für verlässliche Diagnosen. Hinzu kommt, dass die Anschaffungs- und die Betriebskosten eines MRT-Geräts sehr hoch sind. Aus diesem Grund wird eine MRT-Untersuchung heutzutage nicht zur Vorsorge sondern erst bei einem Verdacht empfohlen und durchgeführt. Als einzig echtes 3D-Verfahren bietet die MRT sich dennoch als Vergleichsmaßstab für 3D-USCT-Bilder an.

## Röntgen-Computertomographie der Brust

Mit etwa 100 Mikrometern ist die Computertomographie (CT) der Brust die 3D-Schichtmethode mit der höchsten Auflösung zur Erkennung von Brustkrebs. Dedizierte Brust-Computertomographen sind momentan in der Entwicklung, bislang werden aber bestehende CT-Geräte verwendet. Im Unterschied zum einfachen Röntgen ist daher die Strahlendosis (7–18 mGy [28]) und die einhergehende Belastung des Organismus noch unverhältnismäßig viel höher und steht damit für Vorsorgeuntersuchungen außer Frage.

Spezielle Brust-CTs werden momentan vorklinisch erprobt oder entwickelt. [29] beschreiben ein System, das 0,10 mm Pixelgröße besitzt und unter zehn Sekunden Aufnahmezeit pro Brust benötigt. Das beschriebene System ist allerdings noch in der Entwicklungsphase. Generell scheint es möglich, eine Strahlenbelastung ähnlich der

Zwei-Sicht-Mammographie zu erreichen, also etwa 4 mGy, wie auch [30] bestätigen. Erste klinische Ergebnisse stellten bereits [31] und [32] vor.

## 2.5 Seismologie und geologische Exploration

Wenngleich die erläuterten medizinischen Methoden eine hohe verfahrensmäßige Ähnlichkeit zur 3D-USCT aufweisen, das heißt ähnliche Ziele verfolgen und verwandte DatenaufnahmeprozEDUREN nutzen, sind doch die Herangehensweise und die Probleme bei der Bilderzeugung grundverschieden.

Im Gegensatz dazu hat die Seismologie, die in ihrer Ausrichtung zunächst völlig anders zu sein scheint, sehr viel mit der dreidimensionalen Ultraschallbildgebung gemein: Geht es bei der Ultraschall-Bildgebung darum, ein unbekanntes Objekt durch Messungen von Ultraschallpulsen darzustellen, versuchen Seismologen dasselbe für das unbekannte Objekt Erde mit Hilfe von Erdbeben/Erschütterungen (Sender) und Messstationen (Empfänger). A-Scans heißen in der Seismologie beispielsweise Seismogramme und dienen demselben Zweck wie in der Ultraschall-Bildgebung.

Das seismologische Problem ist von den Rahmenbedingungen her deutlich komplexer, da man es nicht mit einem akustischen, fluiden, sondern apriori mit einem elastischen Medium zu tun hat. Eine wesentliche Eigenschaft eines elastischen Mediums ist das Auftreten von Transversalwellen oder Bündelungseffekten wie Kaustiken, die die mathematische Behandlung und damit die Bildgebung erschweren.

Des Weiteren sind seismische Messstationen keineswegs gleichmäßig auf der Erde verteilt, sondern in manchen Gebieten häufig, in anderen, wie zum Beispiel in den Ozeanen, noch überhaupt nicht anzutreffen [33]. Hinzu kommt noch, dass Seismologen keine Kontrolle über ihre Schall-/Datenquellen haben und daher gewissermaßen auf Erdbeben angewiesen sind. Andererseits ändert sich das Untersuchungsobjekt, die Erde, nicht wie bei der medizinischen Bildgebung ständig, weshalb man auf einen reichen Fundus bestehender Ergebnisse zum selben Objekt zurückgreifen kann.

Durch die allgemeinere Problemstellung und die Schwierigkeiten der Datenlage, mussten für die Seismologie umfassende Theorien zur Bildgebung entworfen werden, deren Ursprünge bis in die 1930er-Jahre zurückreichen. Zu Beginn und teilweise bis heute (vornehmlich von Mineralölunternehmen) wurde noch Methoden ähnlich denen der medizinischen Bildgebung benutzt, doch herrscht mittlerweile Konsens darüber, dass es erweiterter Theorien bedarf, um den umfangreichen Herausforderungen gegenüberzutreten und den gestiegenen Auflösungsanforderungen Rechnung zu tragen. Ein Beispiel hierfür wird später in dieser Arbeit vorgestellt.

Ignoriert man die unterschiedlichen Medien, zeigen sich große Parallelen zwischen beiden Feldern. Dies geht sogar soweit, dass die Größenordnungen sich durch Skalierung mit dem Faktor 1 000 000 beinahe direkt ineinander überführen lassen. So ist medizinischer Ultraschall beispielsweise zwischen 1 und 25 MHz angesiedelt, während typische in der Seismologie betrachtete Pulse Frequenzen von 0,5 bis 20 Hz haben.

	MED. ULTRASCHALL	SEISMOLOGIE
Schallgeschwindigkeitsbereich	1400 – 1600 m/s	1500 – 6000 m/s
Frequenzbereich	0,80 – 25 MHz	0,50 – 20 Hz
Wellenlänge	0,060 – 2 mm	0,20 – 3 km
Entfernung Sender-Empfänger	100 – 300 mm	100 – 1000 km
Größe der Fresnel-Zone	4 – 20 mm	10 – 500 km

**Tabelle 2.2** – Kenngrößen medizinischen Ultraschalls und der Seismologie. Angepasst nach [34].

Ebenso verhält es sich mit den Abständen zwischen Sender und Empfänger, die bei USCT bis zu 26 cm betragen können, wohingegen in der Seismologie oft Distanzen von hunderten bis tausenden Kilometern nötig sind. Tabelle 2.2 nach [34] zeigt vergleichend einige Kenngrößen beider Forschungsfelder.

# Kapitel 3 | Bildgebung der 3D-Ultraschall- Computertomographie

*Felix qui potuit rerum cognoscere causas.*

— Vergil, Georgica 2,490

Im Folgenden werden die theoretischen Grundlagen für die Ausbreitung von Ultraschall beschrieben. Dabei wird stets von einem akustischen, fluiden Medium ausgegangen. Eine Herleitung der akustischen Wellengleichung aus der elastodynamischen, wie sie in der Seismologie Verwendung hat, findet sich in Anhang A. Die seismologischen Medien sind nicht notwendigerweise akustisch, deshalb gelten die unter den dortigen, allgemeineren, Annahmen getroffenen Aussagen auch für den akustischen Fall.

Für die Transmissionstomographie ist primär die Wellenausbreitung unter Berücksichtigung der Brechung aber auch der Beugung wichtig. Außerdem sind die Auflösungsgrenzen von Interesse, die sich durch die einzelnen Effekte ergeben.

## 3.1 Physikalische Grundlagen der Ultraschallausbreitung

Schall ist physikalisch definiert als wellenförmige Ausbreitung mechanischer Schwingungen in einem festen, flüssigen oder gasförmigen Medium [35]. Er wird im Allgemeinen mit der elastischen Wellengleichung modelliert, einer linearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Unter Ultraschall wird gemeinhin Schall verstanden, dessen Frequenzbereich sich zwischen 20 kHz und 1 GHz befindet [36].

Da Ultraschall wegen des hohen Impedanzunterschieds nur sehr schlecht von Luft an Brustgewebe angekoppelt werden kann, wird für die USCT als Koppelmedium Wasser verwendet. Wasser ist ein akustisches, fluides Medium, weshalb statt der elastischen die akustische Wellengleichung verwendet werden kann. Weil sich die menschliche Brust (durch ihren hohen Wasseranteil und die Abwesenheit von Knochen) ungefähr wie eine

Flüssigkeit verhält, gilt für sie als Medium ebenfalls die akustische Wellengleichung.

Die akustische Wellengleichung lässt sich beispielsweise aus dem Hookschen Gesetz herleiten. Bei der folgenden Theorie handelt es sich um eine Streutheorie wie aus der Quantenmechanik bekannt, weil sie sich mit der Streuung einer Welle an einem Objekt, also ihrer Ablenkung durch Interaktion mit einem anderen Objekt, befasst. Stellen oder Objekte an denen Streuung stattfindet werden zumeist Streuer genannt; in der Literatur finden sich aber auch die Bezeichnungen Kontrastquelle (*Contrast Source*) und Inhomogenität. Ganze Bereiche, die vom Hintergrund hinsichtlich einer Eigenschaft wie beispielsweise der Schallgeschwindigkeit abweichen, werden in der Seismologie *Anomalie* genannt.

Zur Herleitung wird hier der Ansatz nach Greenleaf [37] verwendet, der mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial t} + \rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})^2 \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.1)$$

und der Eulerschen Kraftgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial t} + \frac{1}{\rho}(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) = 0, \quad (3.2)$$

beginnt, wobei  $u(\mathbf{x})$  der skalare Druck,  $\mathbf{v}$  die Partikelgeschwindigkeit oder Schallschnelle,  $c$  die Schallgeschwindigkeit und  $\rho$  die Dichte ist. Diesen linearisierten Grundgleichungen liegen die Annahme adiabatischer Zustandsänderungen und hinreichend kleiner Schallschnellen zugrunde [36]. Außerdem wird, wie in der Akustik üblich, davon ausgegangen, dass die Dichte- und Druckänderungen im Vergleich zu den Ruhewerten sehr klein sind, wie in [35] erläutert. Darüberhinaus werden Viskosität, Wärmeleitung und druckabhängige Kompressibilitätsänderungen vernachlässigt [38].

Unter der Annahme, dass sich Druck und Partikelgeschwindigkeit Fourier-transformieren lassen, schreibt man dann die Wellengleichung für inhomogene Medien

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) - \frac{1}{\rho}(\mathbf{x})\nabla \rho(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Dazu wurden (3.1) nach der Zeit und (3.2) nach dem Ort differenziert und danach die Terme mit  $\mathbf{v}$  eliminiert. Außerdem wurde die Fourier-Annahme benutzt, die impliziert, dass  $\frac{\partial}{\partial t} = \omega$ . Die Notation dieses Kapitels wird den eben benutzten Konventionen folgen: vektorwertige Größen wie  $\mathbf{v}$  sind fett, Skalare normal gesetzt. Zur Vereinfachung der Notation werden, sofern eindeutig, die Ortsabhängigkeiten wie  $\mathbf{x}$  in  $u(\mathbf{x}) = u$  weggelassen.

Mit  $u := \frac{u}{\sqrt{\rho}}$  liest sich (3.3) einfacher als

$$\nabla^2 u + K^2 u = 0, \quad (3.4)$$

wobei

$$K^2 = k^2 + \frac{1}{2\rho} \nabla^2 \rho + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\rho} \nabla \rho \right)^2. \quad (3.5)$$

Hierbei und in (3.3) ist

$$k = \frac{2\pi}{\lambda(\mathbf{x})} = \frac{\omega}{c(\mathbf{x})} \quad (3.6)$$

die sogenannte *Wellenzahl* des Feldes und  $\lambda$  die Wellenlänge.

In den meisten Veröffentlichungen wird die Dichte  $\rho$  als konstant angenommen, so dass die beiden letzten Terme in (3.5) verschwinden und die Wellengleichung (3.4) in die Helmholtzgleichung übergeht

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0. \quad (3.7)$$

Dies geschieht unter Zuhilfenahme der Fourier-Voraussetzung in (3.3): Nach zeitlicher Fouriertransformation des Feldes besteht keine Zeitabhängigkeit mehr – das Feld befindet sich im stationären Zustand, der Druck  $u$  hat also eine monochromatische Lösung wie etwa  $\Re(u(\mathbf{x})e^{-i\omega t}) = u(\mathbf{x})\cos(\omega t)$ .

Im Zeitbereich lautet (3.7)

$$\nabla^2 u + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.8)$$

In [39] wird untersucht, wie groß die Dichteabweichungen in für USCT relevanten Materialien ist, die man durch Annahme konstanter Dichte vernachlässigt. Darauf aufbauend fasst Tabelle 3.1 wesentliche akustische Eigenschaften einiger Materialien zusammen. Wie man dort sieht, ist die Änderung der Dichte nur etwa halb so groß wie die Änderung der Kompressibilität. Auch Greenleaf [37] argumentiert, dass die Dichte für die Bildgebung keine große Rolle spielt, weil in (3.5) nicht mehr die Dichte selbst sondern ihre Änderung dominant ist. Dichteänderungen sind nach Greenleaf in Gewebe aber nur klein. In den folgenden Herleitungen wird die Dichte daher ebenfalls als konstant angenommen. Will man diese Approximation nicht anwenden, bietet beispielsweise die seismologische Bildgebung einen Ausweg.

Dass beispielsweise auf der rechten Seite von (3.7) eine Null steht, soll nicht darüber hinwegtäuschen, dass es sich *nicht* um eine homogene Differentialgleichung handelt. Die Inhomogenität steckt implizit im ortsabhängigen  $k(\mathbf{x})$ . Im homogenen Hintergrundmedium (etwa Wasser) ist die Wellenzahl konstant,  $k \equiv k_0$ , also kann man (3.7) schreiben

$$(\nabla^2 + k_0^2) u = 0. \quad (3.9)$$

Gewebe	$c/(\text{m s}^{-1})$	$\rho/(\text{kg m}^{-3})$	$\chi/(10^{-10}\text{Pa}^{-1})$	$Z/(10^6\text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1})$
Wasser (bei 20° C)	1483	993	4,0	1,47
Wasser (bei 37° C)	1524	993	4,3	1,51
Fett	1420	950	5,2	1,39
Krebs	1580	1100	3,6	1,73
Muskel	1568	1040	3,9	1,63
$\sigma/\%$	4,3	5,6	15	9,8

**Tabelle 3.1** – Akustische Eigenschaften verschiedener Materialien: Schallgeschwindigkeit  $c$ , Dichte  $\rho$ , Kompressibilität  $\chi$ , Akustische Impedanz  $Z$  und prozentuale Standardabweichung der Werte  $\sigma$ . Angepasst nach [39].

Diese Gleichung ist nun tatsächlich homogen. Für die Bildgebung interessant ist aber der Fall eines *inhomogenen* Mediums, weshalb man  $k^2$  in (3.7) umschreibt als

$$k^2 = k_0^2 n^2(\mathbf{x}) = k_0^2 (1 + n^2(\mathbf{x}) - 1) = k_0^2 + k_0^2 (n^2(\mathbf{x}) - 1). \quad (3.10)$$

Hierbei ist

$$n(\mathbf{x}) = \frac{c_0}{c(\mathbf{x})} \quad (3.11)$$

der Brechungsindex des Mediums an der Stelle  $\mathbf{x}$ .  $c_0$  ist die Hintergrundschallgeschwindigkeit und  $c(\mathbf{x})$  ist die Schallgeschwindigkeit des Mediums an der Stelle  $\mathbf{x}$ . Diese setzt sich wiederum zusammen aus Dichte  $\rho(\mathbf{x})$  und Kompressibilität  $\chi(\mathbf{x})$

$$c(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathbf{x})\chi(\mathbf{x})}}. \quad (3.12)$$

Manchmal definiert man  $\chi$  auch als Kompressionsmodul (*Bulk Modulus*), also als Inkompressibilität. In der Notation hier wäre der Kompressionsmodul mit  $\frac{1}{\chi}$  bezeichnet. Mit (3.12) schreibt man den inhomogenen Teil in (3.10) auch

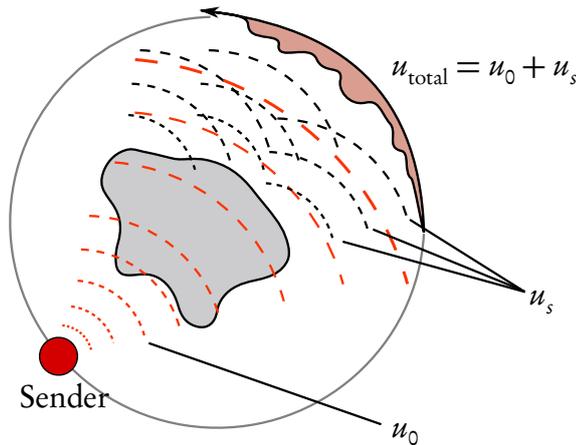
$$o(\mathbf{x}) := k_0^2 (n^2(\mathbf{x}) - 1), \quad (3.13)$$

was die sogenannte *Objektfunktion*  $o(\mathbf{x})$  bezeichnet, die in der aus (3.7) hervorgehenden Wellengleichung Verwendung findet:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k_0^2 u(\mathbf{x}) = -o(\mathbf{x})u(\mathbf{x}). \quad (3.14)$$

In dieser Gleichung wurden nun der homogene und der inhomogene Teil eindeutig getrennt. Dies wird im weiteren nützlich sein, weil man den inhomogenen Teil als auf das Feld einwirkende Kraft ansehen kann.

Zusätzlich trennt man, zur einfacheren Zuordnung der entsprechenden Teile, zuweilen auch den Brechungsindex selbst in einen homogenen und einen inhomogenen Teil. Es



**Abbildung 3.1** – Inzidentes Feld  $u_0$  (orange dargestellt) und gestreutes Feld  $u_s$  (schwarz). An Empfängern wird das gesamte Feld  $u_{\text{total}}$  gemessen, ergo die Summe des inzidenten und des gestreuten Feldes.

ist dann

$$n = \frac{c_0}{c_0 + \delta c} = \frac{c_0}{c_0} + \frac{-\delta c}{c_0 + \delta c} = 1 - \frac{\delta c}{c_0 + \delta c} =: n_0 + \delta n. \quad (3.15)$$

Meist wird nun angenommen, dass sich das gesamte Feld  $u = u_0 + u_s$  in zwei Teile aufspalten lässt, von denen der eine Teil  $u_0(\mathbf{x})$  das einfallende (inzidente, *incident*), der andere das gestreute (*scattered field*) Feld  $u_s(\mathbf{x})$  ist. Diese Aufspaltung ist in Abbildung 3.1 veranschaulicht und ist konzeptuell ähnlich zur Trennung von Transmissions- und Reflexionssignal. Das einfallende Feld  $u_0$  ist dasjenige, das entsteht, wenn keine Streuer oder Inhomogenitäten vorhanden sind, sich der Schall also im Hintergrundmedium frei ausbreiten kann. Da man  $u_0$  direkt berechnen oder messen kann, ist nur noch das gestreute Feld, das allein von Inhomogenitäten erzeugt wird, von Interesse.

Ein Feld, das (3.14) erfüllt, kann mit Hilfe einer *Greenschen Funktion*  $G$  gefunden werden, sofern man eine Randbedingung wie etwa die Sommerfeld-Strahlungsbedingung stellt [39].  $G$  repräsentiert das Feld an der Stelle  $\mathbf{x}$  eines Punktstreuers an einer Stelle  $\mathbf{y}$  und hat im Dreidimensionalen folgende Gestalt:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{ik_0(|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (3.16)$$

Die Greensche Funktion kann, systemtheoretisch, auch als Impulsantwort auf einen  $\delta$ -Impuls eines linearen, zeitinvarianten Systems verstanden werden. Dies stellt sich im Frequenzbereich folgendermaßen dar:

$$(\nabla^2 + k^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.17)$$

Wegen der Eigenschaften der  $\delta$ -Funktion, kann eine beliebige Kraft(vertei)lung  $f(\mathbf{x})$  als Summe von  $\delta$ -Punktquellen geschrieben werden [40], das heißt  $f(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x}-$

$y) dy$ . Dies gilt auch für die akustische  $\delta$ -Funktion, die Greensche Funktion  $G$ , wie nun zur Beschreibung des gestreuten Feldes genutzt. Dabei fungiert die Objektfunktion  $o(\mathbf{x})$  aus (3.14) als abzutastende Kraftverteilung.

Aufgrund der Linearität der Wellengleichung, kann  $u_s$  damit als Summe der skalierten und verschobenen Felder einzelner Punktstreuer geschrieben werden:

$$u_s(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) o(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3.18)$$

$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ist also das von einem Streuer an Position  $\mathbf{y}$  erzeugte Streufeld mit der vom Brechungsindex induzierten Streuamplitude  $o(\mathbf{y})$ . Über all diese Streuer, die außerdem noch mit dem gesamten Feld  $u(\mathbf{y})$  interagieren, wird zur Berechnung des gestreuten Feldes integriert. Da die Objektfunktion  $o(\mathbf{y})$  außerhalb des Objekts verschwindet, hat nur das Objekt selbst Einfluss auf das gestreute Feld.

Noch kann das gestreute Feld  $u_s$  nicht einfach berechnet werden, ohne von weiteren Approximationen Gebrauch zu machen, weil auf der rechten wie auf der linken Seite von (3.18) implizit das gestreute Feld  $u_s$  steht. Zwei der bekanntesten Approximationen der Wellengleichung setzen an dieser Stelle an. Es sind die *Born*- und die *Rytov-Approximation*, die jeweils eine eigene Linearisierung von (3.18) nutzen und in Abschnitt 3.2 sowie in Unterabschnitt B.1 besprochen werden.

Rekonstruktionmethoden, die auf vergleichbare Weise verfahren, werden gewöhnlich unter dem Oberbegriff *Diffractionstomographie* zusammengefasst. Durch die Aufspaltung in reflektierte und transmittierte Signalanteile ergeben sich damit auch die Begriffe *Reflexionstomographie* und *Transmissionstomographie* für die entsprechenden Methoden. Die Trennschärfe zwischen beiden ist jedoch für die Rekonstruktion nicht so absolut wie in Abbildung 2.3 gezeigt, weil sowohl die Reflexionstomographie wie auch die Transmissionstomographie Signalinformationen der jeweils anderen Methode verwenden können.

Löst man (3.18) mit roher numerischer Gewalt, spricht man ebenfalls von Diffractionstomographie. Im Allgemeinen ist die Diffractionstomographie das einzige Verfahren, das modellhaft alle Effekte abbildet, die Ultraschall in Wasser aufweist und auch die ganze Welle (ohne Aufspaltung) nutzt. Deswegen spricht man auch von *Vollwellenverfahren*, die in der Seismologie unter dem Stichwort *Full-Wave(form) Tomography* bekannt sind [41]. Es herrscht aber noch keine Einigkeit darüber, ob solche Verfahren anderen, mit größeren Approximationen arbeitenden, tatsächlich überlegen sind.

## 3.2 Approximationen und Einschränkungen

Eine andere Strategie den Rechenaufwand geringer zu halten, ist, nicht die komplette Wellengleichung sondern eine ihrer Approximationen zu verwenden. In diesem Abschnitt werden die bekanntesten und für die medizinische Bildgebung relevanten Approximationen hergeleitet. Alle hier vorgestellten Approximationen nutzen verschiedene Welleneigenschaften:

Die wesentlichen physikalischen Effekte einer akustischen Welle sind die Streuung, die Beugung und die Brechung. Die Born-Approximation und die Rytov-Approximation sind *Streuapproximationen*, die die Brechung nicht berücksichtigen. Die Eikonol-Approximation kann die *Brechung* berechnen, ignoriert aber Streuung und Beugung. Die einfache Strahlapproximation ignoriert Streuung, Beugung und Brechung.

## Born-Approximation

Grundannahme der Born-Approximation ist es, Mehrfachstreuung zu vernachlässigen. Dies bedeutet, dass nur das inzidente Feld mit dem Objekt (und sich selbst) interagiert, nicht aber gestreute oder reflektierte Felder. Damit linearisiert man die Wellengleichung und vereinfacht die Berechnung. Auch wenn die Wellengleichung eine lineare Differentialgleichung ist, kann man die Integralgleichung (3.18), die das gestreute Feld beschreibt, nicht direkt lösen. Die Born-Approximation linearisiert den Ausdruck für  $u_s$ , so dass  $u_s$  nur noch von  $u_0$  abhängig ist und somit direkt ausgerechnet werden kann.

Die schon für (3.14) genutzte Aufspaltung des Druckfeldes  $u(\mathbf{x})$ , das oft auch Gesamtfeld (*total field*) genannt wird,

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + u_s(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

in ein inzidentes Feld  $u_0$  und ein gestreutes Feld  $u_s$  ist bei der Born-Approximation von weiterreichender Bedeutung:

Die Schwierigkeit bei der Berechnung in (3.18) stellt dar, dass das Gesamtfeld  $u$  unter dem Integral steht. Man nutzt (3.19) um das gestreute Feld  $u_s$  umzuschreiben

$$u_s(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) o(\mathbf{y}) (u_0(\mathbf{y}) + u_s(\mathbf{y})) d\mathbf{y}. \quad (3.20)$$

Unter der Annahme, dass das gestreute Feld  $u_s$  im Vergleich zu  $u_0$  sehr klein ist, verzichtet man auf  $u_s$  auf der rechten Seite von (3.20):

$$u_{s,\text{Born}}(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) o(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (3.21)$$

Da nach Anwenden der Born-Approximation eine lineare Gleichung vorliegt, kann das gestreute Feld im Prinzip relativ einfach durch Lösen des Integrals in (3.21) bestimmt werden. Wichtig hierbei ist jedoch, das Nyquist-Kriterium einzuhalten, also pro Wellenlänge mindestens zwei Diskretisierungsschritte vorzusehen. Dabei ist sowohl die zeitliche als auch die räumliche Diskretisierung bedeutsam. Viele Veröffentlichungen, die die Born-Approximation auf diese Art zur Bestimmung des gestreuten Feldes verwenden, arbeiten aber ohnehin im Frequenzraum [39], wo zur Berechnung des Integrals primär die räumliche Auflösung relevant ist.

Setzt man iterativ das durch die Born-Approximation berechnete Feld  $u_{s,\text{Born}}$  statt  $u_0$  auf der rechten Seite ein, erhält man theoretisch ein Iterationsschema, mit dem man

im Konvergenzfall das korrekte Gesamtfeld  $u$  berechnen kann. Unter dieser Annahme repräsentiert jede zusätzliche Iteration eine weitere Streuordnung. Dieses Schema konvergiert jedoch im Allgemeinen nicht, beziehungsweise nur unter restriktiven Voraussetzungen [42].

Vor dem Hintergrund der USCT-Bildgebung stellt die Born-Approximation hohe Anforderungen an die Objektfunktion [43]: Der Phasenunterschied zwischen der Welle, die ein Objekt durchläuft, und der inzidenten Welle muss geringer als  $\pi$  sein.

Eine anschaulichere, äquivalente Anforderung ist [43], dass die Amplitude des gestreuten Feldes  $u_s$  wesentlich kleiner als die Amplitude des inzidenten Feldes  $u_0$  ist. Die erste Forderung lässt sich aus letzterer ableiten, indem man beispielsweise das inzidente Feld in Richtung  $\mathbf{r}$  als  $e^{-i\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}}$  annimmt. Nimmt man weiter als Objekt einen homogenen Zylinder mit Brechungsindex  $n \neq 1$ , und ignoriert ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Brechung, hat das Feld innerhalb des Zylinders die Form

$$u_{\text{obj}} = e^{-in_{\text{obj}}\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i(1+\delta n)\mathbf{r}\cdot\mathbf{x}},$$

mit  $\delta n := n_{\text{obj}} - n_0$  wie in (3.15). In den Zylinder passen näherungsweise  $\frac{2a}{\lambda}(1 + \delta n)$  Wellenzüge, während das inzidente Feld für diese Strecke  $\frac{2a}{\lambda}$  Wellenzüge benötigt. Der Gesamtphasenunterschied ist also  $\delta\varphi = \frac{2a}{\lambda}\delta n 2\pi$ . Damit die Born-Approximation gilt, muss  $\delta\varphi < \pi$ , also  $\frac{2\pi 2a\delta n}{\lambda} < \pi$  oder

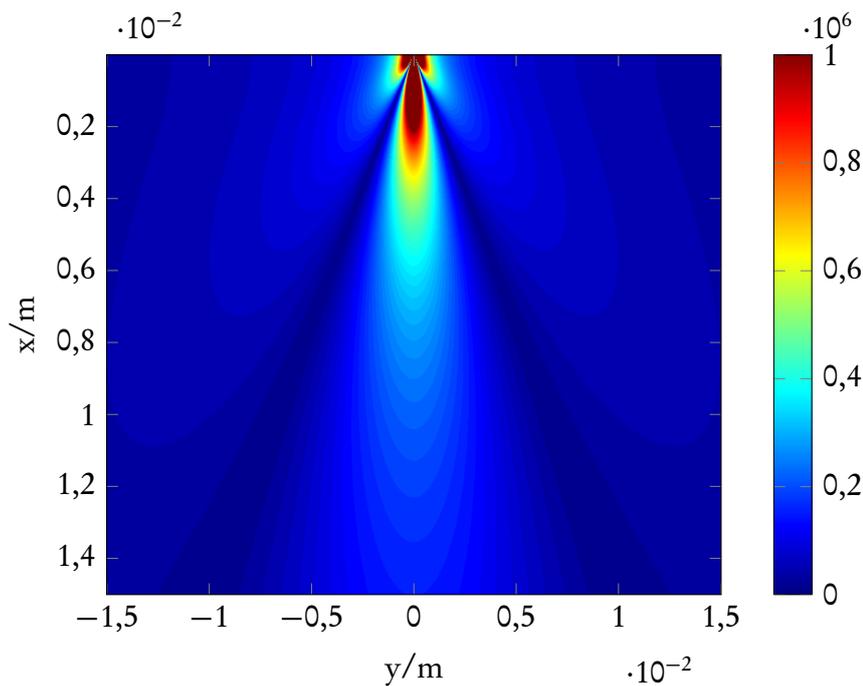
$$a\delta n < \frac{\lambda}{4}. \quad (3.22)$$

Daher muss entweder das Objekt oder der Unterschied im Brechungsindex klein sein, damit die Born-Approximation gilt.

Bei USCT kann man für Wasser etwa 1500 m/s annehmen und weiß, dass die davon abweichende Schallgeschwindigkeit eines Objekts etwa zwischen 1400 und 1600 m/s liegt. Bei einer Mittenfrequenz von 2,5 MHz liegt die Wellenlänge bei 0,60 mm. Dies entspricht 0,40  $\mu\text{s}$ . Ein Objekt dürfte dann nicht größer als 9,6 mm sein. Bei USCT geht man aber von Objekten der Größe 10-20 cm aus, womit die Born-Approximation deutlich verletzt wird.

Die Born-Approximation kann im Vergleich zur vollen Wellengleichung deutlich effizienter berechnet werden. Je nach Objekt beläuft sich der Beschleunigungsfaktor auf 25-100 [39]. Dies liegt daran, dass die Berechnung als linearer Operator in Matrixform dargestellt werden kann, dessen Einträge effizient über den Fourier-Faltungssatz bestimmt werden.

Die Auflösungsgrenze der Born-Approximation liegt bei  $\frac{\lambda}{2}$ , wie über das verallgemeinerte Fourier-Scheibentheorem gezeigt werden kann. Eine grundlegende Herleitung hierfür findet sich im Anhang in Unterabschnitt B.1.



**Abbildung 3.2** – Simuliertes Schallfeld eines 3D-USCT-II-Wandlers an der Position  $[x,y] = [0,0]$ , erzeugt mit TAC 1.3 [RD.2]. Die Farben geben den relativen Schalldruck an.

## Paraxiale Approximation

Die sogenannte paraxiale Approximation ist eine Approximation, die in jüngerer Zeit auf Interesse gestoßen ist, weil sie von [11] für hochaufgelöste Transmissionsbilder angewandt wurde. Grundgedanke ist es, die Wellenausbreitung nur in einer Hauptrichtung zu modellieren und die anderen Richtung weitgehend zu ignorieren.

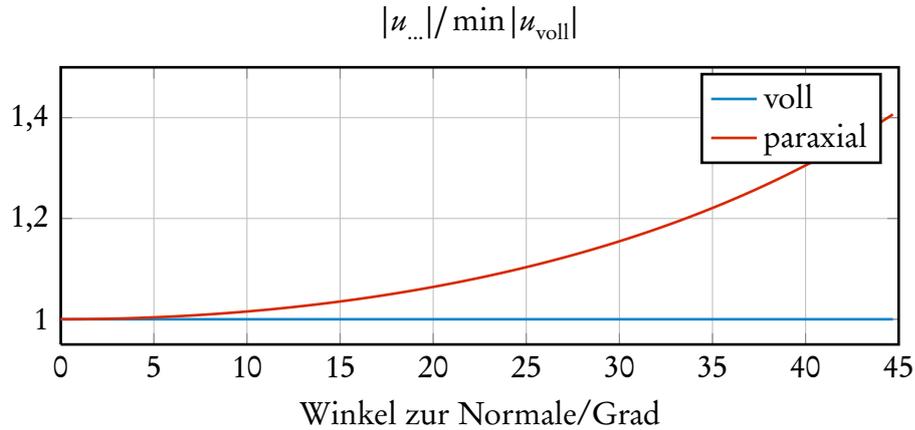
Man nimmt beispielsweise

$$u = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (3.23)$$

als inzidentes Feld an. Weiter setzt man voraus, dass der emittierte Ultraschall sich primär in eine Richtung ausbreitet (ohne Beschränkung der Allgemeinheit in  $x$ -Richtung) und sich das Feld in den übrigen Richtungen nur wenig ändert. Es ist

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x \sqrt{1 + \frac{y^2 + z^2}{x^2}} \approx x + \frac{y^2 + z^2}{2x} =: r_{\text{paraxial}},$$

wobei man  $y \ll x$  und  $z \ll x$  annimmt.



**Abbildung 3.3** – Unterschiede der Paraxialgleichung zur vollen Wellengleichung bei einer Frequenz von 3 MHz und einem Abstand von 17 cm. Dargestellt ist das Verhältnis des Schalldrucks der paraxialen Approximation zu dem der vollen Wellengleichung über den Winkel des Empfängers zur Sendernormale, also der Ausbreitungsrichtung.

Damit ergibt sich aus (3.23)

$$u \approx u_{\text{paraxial}} = \frac{e^{ikr_{\text{paraxial}}}}{4\pi r_{\text{paraxial}}} = \frac{e^{ik\left(x + \frac{y^2+z^2}{2x}\right)}}{4\pi\left(x + \frac{y^2+z^2}{2x}\right)} \approx \frac{e^{ikx} e^{ik\left(\frac{y^2+z^2}{2x}\right)}}{4\pi x} \quad (3.24)$$

Die rechte Seite von (3.24) spiegelt den Schalldruck für die paraxiale Approximation wider. Die letzte Approximation verdeutlicht, dass die Welle sich nur in  $x$ -Richtung ausbreitet, indem der Radius  $r$  der vollen Wellengleichung in  $x$  übergeht.

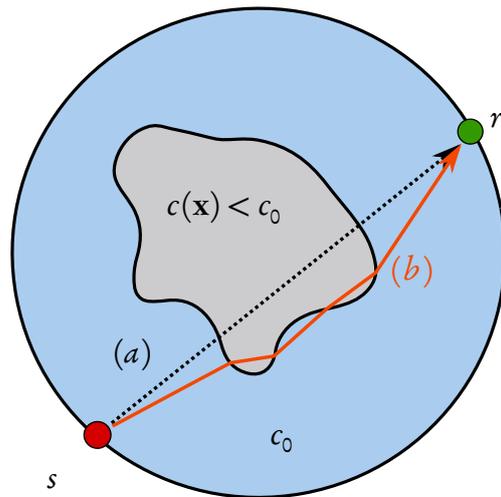
Die paraxiale Approximation der Helmholtzgleichung lautet [44]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + i2k \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.25)$$

(3.24) ist eine Lösung dieser Gleichung. In Abbildung 3.3 ist gezeigt, wie sich der von der paraxialen Approximation berechnete Schalldruck vom Schalldruck der vollen Wellengleichung bei 3 MHz und 17 cm Abstand unterscheidet.

Ein maßgeblicher Vorteil der paraxialen Approximation ist, dass sie sich einerseits für eine »strahlförmige« Wellenausbreitung eignet, wie sie USCT-Wandler vorgeben (siehe Abbildung 3.2) und andererseits schneller berechnet werden kann als die volle Wellengleichung.

Diese Möglichkeit der schnellen Berechnung fußt darauf, dass man sich bei der paraxialen Approximation auf die unmittelbare Umgebung des Ultraschall-Strahls beschränken kann. In Abbildung 3.2 ist zu sehen, dass sich der Hauptanteil des Schalldrucks primär in der Vorwärtsrichtung, vom Wandler aus gesehen, ausbreitet. Daher könnte



**Abbildung 3.4** – Schema der Eikonal-Approximation: (a) ist der Weg im homogenen Hintergrundmedium, (b) der gebrochene schnellste Weg, der mit der Eikonal-Gleichung berechnet werden kann.

man sich, bei der Berechnung mit Hilfe der paraxialen Approximation, auf einen quaderförmigen Bereich um den Strahl herum beschränken, in dem man die paraxiale Approximation löst. Damit vermeidet man es, das Schallfeld im gesamten Simulationsraum berechnen zu müssen und erreicht potentiell eine sehr hohe Beschleunigung. Wie in späteren Kapiteln noch ersichtlich werden wird, genügt es, sich auf einen Winkelbereich von etwa 30 Grad zur Normale eines Wandlers zu beschränken. Innerhalb diesem erhält man mit der paraxialen Approximation eine sehr genaue Annäherung der vollständigen Wellengleichung, wie in Abbildung 3.3 deutlich wird. Man erkennt beispielsweise, dass der Fehler bei 25 Grad nur etwa 10 Prozent beträgt.

Ein weiterer Vorteil bei der Berechnung ist, dass man die Ausbreitung der Welle beispielsweise schichtweise, orthogonal zur Ausbreitungsrichtung, bestimmen kann und damit die Welle iterativ von Schicht zu Schicht »transportieren« kann.

## Eikonal-Strahlapproximation

Die Eikonal-Approximation stellt eine weit größere Einschränkung als die Born- oder die Rytov-Approximation dar, weil sie nicht nur Terme zweiter Ordnung vernachlässigt, sondern auch den Grenzfall unendlicher Frequenz – und damit unendlich kleiner Wellenlänge – betrachtet. Dies sorgt dafür, dass Streuung und Beugung vernachlässigt werden und nur die Brechung der Welle in die Formulierung miteinfließt. Damit kann der Weg der Welle als Kurve oder Strahl verstanden werden, die den schnellsten Weg von Sender zu Empfänger nimmt. Dies ist in Abbildung 3.4 schematisch dargestellt. Die Eikonal-Approximation ist somit eine **Strahlapproximation**, die Brechung zulässt.

Bei der Born-Approximation hat man die Amplitude beziehungsweise direkt das Druckfeld  $u$  linearisiert. Für die Eikonal- und auch die Rytov-Approximation hingegen linearisiert man die Phase des Feldes. Diese spaltet man in eine inzidente Phase  $\varphi_0$  und eine gestreute Phase  $\varphi_s$  auf. Damit kann das Gesamtfeld  $u(\mathbf{x})$  als

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})e^{\varphi(\mathbf{x})} = u_0(\mathbf{x})e^{\varphi_0(\mathbf{x})+\varphi_s(\mathbf{x})} \quad (3.26)$$

geschrieben werden.  $\varphi$  wählt man als  $\varphi(\mathbf{x}) = ik_0\mathbf{r}\mathbf{x}$  für eine ebene Welle in Richtung  $\mathbf{r}$ . Setzt man  $u(\mathbf{x})$  aus (3.26) in (3.7) ein, ergibt sich

$$\nabla^2\varphi + |\nabla\varphi|^2 + k^2 = 0. \quad (3.27)$$

Unter der Annahme, dass sich das Feld  $u$  als  $u = u_0e^{ik_0\varphi}$  darstellen lässt, erhält man aus (3.27)

$$ik_0\nabla^2\varphi - k_0^2|\nabla\varphi|^2 + \underbrace{k_0^2n(\mathbf{x})^2}_{k^2} = 0. \quad (3.28)$$

Man teilt nun durch  $k_0^2$  und geht zu unendlicher Frequenz über ( $k_0 \rightarrow \infty$ ), womit man bei

$$|\nabla\varphi|^2 = n(\mathbf{x})^2 \quad (3.29)$$

angelangt. Dies ist die nichtlineare **Eikonal-Gleichung**, der Hochfrequenz-Grenzfall der Wellengleichung. Vernachlässigt werden alle Terme, in die die Frequenz invers als  $\frac{1}{\omega^2}$  (oder mit höherer Ordnung) eingeht.

[37] folgend, nutzt man die Spaltung des Brechungsindex und der Phase in einen gestreuten Anteil  $\varphi_s$  und einen inzidenten Anteil  $\varphi_0$ , um aus (3.29)

$$|\nabla\varphi_0|^2 + 2\nabla\varphi_0\nabla\varphi_s + |\nabla\varphi_s|^2 = 1 + 2\delta n + (\delta n)^2$$

zu erhalten.  $|\nabla\varphi_0|^2 = 1$  fällt als homogene Lösung weg. Man vernachlässigt weiterhin Änderungen höherer Ordnung des Brechungsindex  $(\delta n)^2$  und der gestreuten Phase  $|\nabla\varphi_s|^2$ . Insgesamt ähnlich geht man auch zur Herleitung der Rytov-Approximation vor, die im Anhang Unterabschnitt B.1 gezeigt ist.

Schließlich hat man

$$\nabla\varphi_s\nabla\varphi_0 = \delta n.$$

Für eine Anregung mit einer planaren Welle  $e^{ik\mathbf{r}\mathbf{x}}$  in Richtung  $\mathbf{r}$  ist  $\varphi_0 = \mathbf{r}\mathbf{x}$ , also  $\nabla\varphi_0 = k\mathbf{r}$ . Generell kann man, kennt man die Phase  $\varphi_s(\mathbf{s})$  an einem Sender und an einem Empfänger  $\varphi_s(\mathbf{r})$ , durch Integrieren aus dem Brechungsindex ein Wegintegral definieren

$$\varphi_s(\mathbf{x}_r) - \varphi_s(\mathbf{x}_s) = \int_{\mathbf{x}_s}^{\mathbf{x}_r} (\delta n) dl. \quad (3.30)$$

Dieses Wegintegral stellt den Zusammenhang zwischen (messbarer) Phase und (unbekanntem) Brechungsindex her und kann daher zur Bildgebung genutzt werden. Dasselbe Vorgehen funktioniert auch für die Dämpfung, wenn man einen komplexen Brechungsindex zulässt. Dann liefert (3.30) für Real- und Imaginärteil jeweils ein Integral, das die Laufzeit und die Dämpfung beinhaltet.

Das Hintergrundmedium in Form von  $k$  bestimmt, ob (3.30) eine Gerade, das heißt einen ungebrochenen, oder einen gebrochenen Strahl beschreibt. Für ein beliebiges  $k$  ist das Hintergrundmedium inhomogen und es tritt im Allgemeinen Brechung auf.

Insgesamt gesehen handelt es sich bei der Brechung gewissermaßen um einen makroskopischen Effekt, Streuung und Beugung sind mikroskopische Effekte. Auch wenn die Eikonal-Approximation in diesem Kapitel wegen der größeren Einschränkungen nach der Born- Approximation genannt wurde, impliziert das nicht, dass diese die Eikonal-Approximation enthielte. Vielmehr ist die Born-Approximation eine Streuapproximation, die von der Brechung abstrahiert, weil letztere für die Betrachtung der Mehrfachstreuung zunächst keine Bedeutung hat. Man kann sie aber in Kombination mit der Eikonal-Approximation verwenden, wie in Abschnitt 5.8 gezeigt wird.

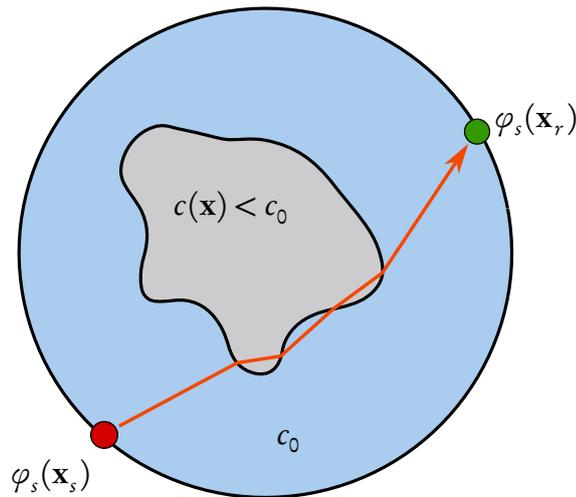
## Einfache Strahlapproximation

Die einfache Strahlapproximation ist die restriktivste aller vorgestellten Approximationen. Sie ist ein Spezialfall der Eikonal-Approximation, der sich ergibt, wenn man bei dieser ein homogenes Medium ( $k = k_0$ ) annimmt. Unter ihr haben weder Streuung noch Brechung oder Beugung Bedeutung, so dass nur die Schallausbreitung in einem homogenen Medium übrigbleibt, in dem die Schallwelle immer den schnellsten Weg nimmt. Da die Schallgeschwindigkeit im Hintergrundmedium homogen ist, ist der schnellste Weg stets der kürzeste – eine Gerade von Sender zu Empfänger. Siehe dazu wieder Abbildung 3.4 (a).

## 3.3 Linearisierung der Signallaufzeiten

Nun geht es darum, aus dem in (3.30) hergeleiteten Zusammenhang zwischen Phase und Brechungsindex eine für die Rekonstruktion nutzbare Formulierung zu extrahieren. Durch die Nichtlinearität der Eikonal-Gleichung ist es apriori nicht möglich einen linearen Zusammenhang zwischen Signallaufzeit (Phase) und Brechungsindex (Schallgeschwindigkeit) herzustellen.

Für die Strahlapproximation, egal ob mit oder ohne Eikonal-Gleichung, sind nur noch makroskopische Effekte und keine mikroskopischen wie Streuung relevant. Deshalb kann man auf Formulierungen der Strahlenoptik zurückgreifen. Nach [45] definiert man in der geometrischen Optik einen Strahl als Kurve, entlang der die Laufzeit  $t$  – als Funktion abhängig vom Strahl selbst – minimal ist. Damit erhält man ein



**Abbildung 3.5** – Ausgangspunkt zur Berechnung von Signallaufzeiten mit der Strahlapproximation. Der Ultraschall wird auf dem Weg zum Empfänger gebrochen. Am Empfänger kann die Phase  $\varphi(\mathbf{x}_r)$  gemessen werden, ihr Unterschied zur Phase am Sender  $\varphi(\mathbf{x}_s)$  gibt die Laufzeit des Signals an.

Variationsproblem, dessen Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dl} \right) = \nabla \left( \frac{1}{c} \right) \quad (3.31)$$

lautet, wobei  $l$  hier die Bogenlänge entlang des Strahls ist und  $\mathbf{x}$  die Position, also den Weg des Strahls bezeichnet.

Dasselbe Ergebnis kann man auch direkt aus der Eikonal-Gleichung (3.29) ableiten, wie zum Beispiel in [40] beschrieben. Damit gilt dann

$$\nabla \varphi = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{dl}.$$

Für weitere Details siehe auch [46].

Nach [45] erhält man für die Laufzeit  $t$

$$t = \int \nabla \varphi dl = \int \frac{1}{c(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \int \frac{1}{c(\mathbf{x}(l))} dl. \quad (3.32)$$

Der variable Weg  $\mathbf{x}(l)$  des Strahls verdeutlicht, dass es sich um ein nichtlineares Problem handelt, da Variationen in  $c(\mathbf{x})$  den Weg des Strahls selbst verändern.

Es ist möglich, die Nichtlinearität mit Hilfe des Fermatschen Prinzip zu umgehen. Dieses besagt, dass die Laufzeit eines Strahls für einen festen Anfangs- und Endpunkt konstant bleibt, auch wenn der vom Strahl genommene Weg leicht verändert wird. [40] zeigt, dass hinreichend kleine Änderungen des Weges nur einen Fehler

zweiter Ordnung ergeben. Das Prinzip von Fermat erlaubt es folglich, den Weg eines Strahls nur im Hintergrundmedium zu verfolgen und mit diesem die Laufzeit zu berechnen. Auf diese Weise wird in der Seismologie oft verfahren, weil dort apriori ein vergleichsweise gutes Modell für die Erde existiert. Mögliche Anomalien sind für die Laufzeit unerheblich, weil der Strahl des unveränderten Hintergrundmediums schon eine gute Approximation liefert. Für eine Herleitung und weitergehende Erklärungen hierzu siehe [40].

Einschränkend hinsichtlich der medizinischen Bildgebung sei angemerkt, dass man hier nicht über ein bekanntes Medium verfügt, weil sich Gewebe von Mensch zu Mensch deutlich unterscheidet. Für die USCT-Bildgebung ist zwar das Hintergrundmedium Wasser wohlbekannt, die Unterschiede der Medien beispielsweise in der Schallgeschwindigkeit liegen aber üblicherweise bei bis zu 8 Prozent der Wasserschallgeschwindigkeit (siehe Tabelle 3.1).

Für die USCT-Bildgebung kann man apriori also nicht das Prinzip von Fermat benutzen und muss die Nichtlinearität berücksichtigen. Dies kann iterativ etwa mit der Eikonal-Gleichung geschehen; zur Linearisierung der Signallaufzeiten muss man aber wie im Weiteren die Inhomogenität des Mediums ignorieren.

Bei der Rekonstruktion interessiert man sich für Abweichungen von der Signallaufzeit in Wasser  $t_0$ , das heißt Verzögerungen der Laufzeit  $\delta t$ , die man approximativ schreibt

$$\delta t = t - t_0 \approx \int_R \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} \right) dl \approx - \int_R \frac{\delta c}{c^2} dl. \quad (3.33)$$

Damit ist ein linearer Zusammenhang zwischen Laufzeitverzögerung  $\delta t$  und Störung der Schallgeschwindigkeit  $\delta c := c - c_0$  hergestellt. Die erste Approximation in (3.33) bezieht sich auf das Fermat-Prinzip oder der Vernachlässigung von Brechung. Die zweite ergibt sich aus

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} = -\frac{c - c_0}{cc_0} \approx -\frac{\delta c}{c^2} = -\frac{\delta c}{c_0^2} \quad (3.34)$$

unter der Annahme, dass  $c_0 \approx c$ .

In der Seismologie definiert man gewöhnlich

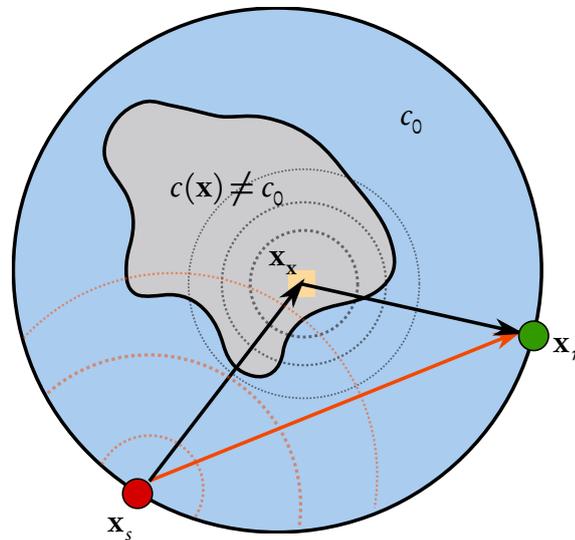
$$t = \int_R s(\mathbf{x}) dl. \quad (3.35)$$

Hierbei ist  $s(\mathbf{x}) = \frac{1}{c(\mathbf{x})}$  und wird *Slowness* genannt. Die Nützlichkeit der Slowness ergibt sich aus der Möglichkeit, auf die Approximation (3.34) zu verzichten. Danach hat man

$$\delta t = \int_R \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0} \right) dl = \int_R (s - s_0) dl = \int_R \delta s dl, \quad (3.36)$$

also einen linearen Zusammenhang der Laufzeitverzögerung zur Störung der Slowness.

### 3.4 Grenzen der Strahlapproximation



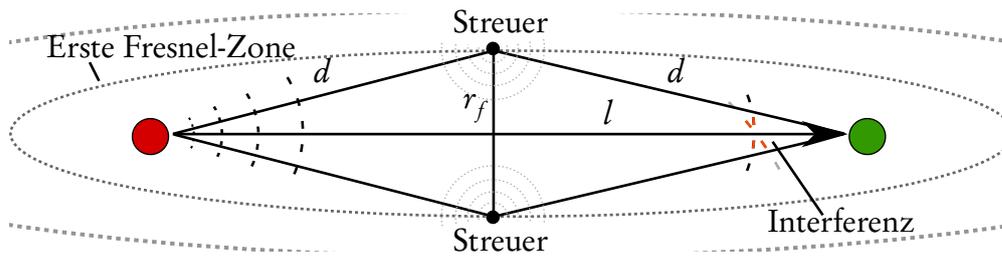
**Abbildung 3.6** – Schema des Streueinflusses auf Transmissionspulse. Das inzidente Feld (orange) trifft auf einen Streuer unterschiedlicher Schallgeschwindigkeit. Dessen gestreutes Feld (schwarz) interagiert mit dem inzidenten Feld am Empfänger.

Die untere Auflösungsgrenze der Strahlapproximation ist unabhängig davon, ob das Hintergrundmedium als homogen oder inhomogen angenommen wird. Entscheidender Einfluss ist die Vernachlässigung der Beugung oder Streuung, die in weniger restriktiven Approximationen wie der Born-Approximation einfließt.

Es gibt zwei Herangehensweisen zur Beschreibung der Grenze: Die erste stammt aus der seismologischen Bildgebung und nutzt die Born-Approximation sowie die Detektion von Laufzeiten mit Hilfe einer Korrelation. Damit wird der Unterschied zwischen reinen Strahlen (Wellen unendlicher Frequenz) und Wellen endlicher Frequenz veranschaulicht. Die zweite Herangehensweise nutzt das Fourier-Scheibentheorem und dessen für Beugung verallgemeinertes Pendant, siehe Anhang, Unterabschnitt B.1.

Konventionelle Strahlmethoden wie Eikonal-Approximation und einfache Strahlapproximation haben den fundamentalen Nachteil, dass ihr Auflösungsvermögen durch die sogenannte Fresnel-Zone begrenzt wird. Dies ist ein Bereich um den Strahl herum, innerhalb dessen Streuungen auf das am Empfänger gemessene Signal Einfluss haben. Bekanntester Anwendungsfall ist vermutlich die Antennentechnik, bei der man darauf Rücksicht nehmen muss, dass kein Bauwerk in die Fresnel-Zone hineinragt, damit empfangene Signale nicht stark gestört werden.

Der Effekt lässt sich geometrisch erklären, wenn man die in Abbildung 3.6 und Abbildung 3.7 veranschaulichte Situation betrachtet. Eine von einem Sender ausgesandte Wellenfront wird an einem Empfänger zuerst über den direkten Weg der Länge  $l$  empfangen. Ein leicht anderer Signalpfad führt über den Umweg eines Streuers. Ist



**Abbildung 3.7** – Schema der Interferenz innerhalb der ersten Fresnel-Zone: Eine Welle geht vom Sender links aus und kommt ohne Phasenänderung am Empfänger an. Die über einen Streuer laufende indirekte Welle erreicht den Empfänger verzögert.

der Laufzeitunterschied  $\delta t$  zwischen beiden Pfaden kleiner als eine halbe Wellenlänge, also  $\delta t < \lambda/2$ , kommt es zu Überlagerungen am Empfänger – das Signal wird gestört. Der Bereich, die *Fresnel-Zone*, in dem der Laufzeitunterschied diese Größe annimmt, wird im Dreidimensionalen von einem Ellipsoid berandet, das an seiner (orthogonal zur Ausbreitungsrichtung) ausgedehntesten Stelle circa  $\sqrt{l\lambda}$  breit ist. Aus Abbildung 3.7 ersieht man, dass  $r_f^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = d^2$  gilt. Damit ist

$$\begin{aligned} r_f^2 &= \left(\frac{l}{2} + \frac{\lambda}{4}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \\ r_f &= \sqrt{\frac{l\lambda}{4} + \frac{\lambda^2}{16}}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die Breite der Fresnel-Zone ist der Durchmesser  $d_f = 2r_f$ , womit sich aus (3.37) unter der Annahme  $\lambda \ll l$

$$d_f = 2r_f = \sqrt{l\lambda + \frac{\lambda}{4}} \approx \sqrt{l\lambda}$$

ableiten lässt. Für größere Laufzeitunterschiede wie  $n\frac{\lambda}{2}$  existieren analog Definitionen mit Fresnel-Zonen höherer Ordnung.

Nutzt man eine Strahlapproximation, hat im Modell nur der Strahl selbst Einfluss auf das gemessene Signal. Dadurch wird die Fresnel-Zone und ihr maßgeblicher Anteil am empfangenen Signal nicht modelliert und man ignoriert im schlimmsten Fall sämtliche Anomalien, die kleiner als diese sind. Da tatsächlich nämlich jeder Streuer innerhalb der Fresnel-Zone das Empfangssignal beeinflussen haben könnte, erhöht sich die Unsicherheit in der Rekonstruktion auf die Breite  $\sqrt{l\lambda}$  der Fresnel-Zone. Man kann daher nicht unterscheiden, ob sich ein Streuer auf dem Strahl oder innerhalb der ersten Fresnel-Zone befindet. Die mittlere Wellenlänge für USCT bei einer Schallgeschwindigkeit im Wasser von 1500 m/s beträgt bei der Mittenfrequenz von 2,5 MHz 0,60 mm. Der höchste Abstand zwischen Sender und Empfänger ist  $l = 0,26$  m. Damit

ergibt sich für die Breite der ersten Fresnel-Zone  $\sqrt{l\lambda} = \sqrt{0,26 \text{ m} \cdot 0,0006 \text{ m}} = 0,012 \text{ m}$  oder 12 mm.

[47] beschreiben zwar, dass die Fresnel-Zone keine Grenze für die Auflösung der Strahlapproximation darstellt, nutzen zur konkreten Demonstration aber nur rauschfreie Signale. Rauschen übt allerdings einen essentiellen Einfluss auf die mögliche Auflösung der Strahlapproximation aus [40].

## 3.5 Reflexionstomographie

Wie einführend beschrieben, kann in einem A-Scan jeder Puls, der nicht der Transmissionspuls ist, als für die Reflexionstomographie tauglicher Reflexionspuls angesehen werden. Deshalb wird für die Reflexionstomographie der Transmissionspuls ausgeschnitten und nur mit den Reflexionspulsen weitergearbeitet. Der Algorithmus, der bei USCT zur Reflexionsbildgebung verwendet wird, nennt sich *Synthetic Aperture Focussing Technique (SAFT)* oder auch *Elliptical Backprojection*. Fundiert erläutert wurde er zuerst 1973 von Norton und Linzer [48].

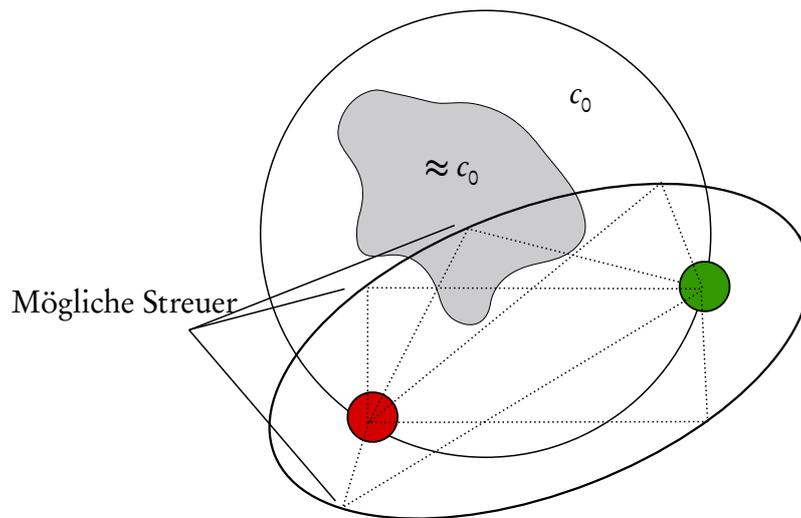
Bei der Reflexionstomographie rekonstruiert man den Intensitäts-Reflexionsfaktor  $R$  des Gewebes, der wie in der Elektrotechnik als

$$R = \left( \frac{Z_o - Z_i}{Z_o + Z_i} \right)^2$$

gegeben ist.

Das Vorgehen zur Bildrekonstruktion beruht darauf, dass der genaue Ort einer Reflexion, die an einem Empfänger aufgezeichnet wurde, nicht bekannt ist. Man weiß aber, dass die Position auf einer Ellipse um Sender und Empfänger liegen muss wie in Abbildung 3.8. Dies ergibt sich aus der Weglänge und der Schallgeschwindigkeit, die man zunächst als konstant annimmt. Weiter trägt man entlang der gesamten Ellipse die Stärke des Streuers ein und wiederholt das für sämtliche möglichen Paare von Sendern und Empfängern. Durch das Aufaddieren der Ellipsen aus allen Richtungen überlagern sich die Werte nur an den tatsächlichen Orten der Streuer stark konstruktiv. Bildbereiche mit hohen Werten sind demnach stark reflektierende Teile des untersuchten Objekts.

Die Reflexionstomographie auf Grundlage des SAFT-Algorithmus basiert auf der Born-Approximation für die Wellengleichung. Diese geht von einer angenommenen mittleren Schallgeschwindigkeit aus, die meist mit der Hintergrundschallgeschwindigkeit von Wasser gleichgesetzt wird. Nach [43] gilt die Born-Approximation nur, wenn der Phasenunterschied der durch das Objekt (anderer Schallgeschwindigkeit) gelaufenen Wellenfront und der Wellenfront im Wasser kleiner einer Wellenlänge ist. Dies gilt für USCT im Allgemeinen nicht, wie in Unterabschnitt 3.2 gezeigt wurde.



**Abbildung 3.8** – Prinzip der linearisierten Reflexionstomographie: Ein beim Empfänger gemessener Reflexionspuls kann seinen Ursprung auf allen Punkten einer Ellipse haben, deren Brennpunkte von Sender- (rot) und Empfängerposition (grün) festgelegt werden. Der SAFT-Algorithmus nimmt ein homogenes Medium an, weshalb sowohl Wasser als auch Objekt ungefähr dieselbe Schallgeschwindigkeit besitzen müssen.

Deutlich wird das direkt an der Rekonstruktionsformel für den SAFT-Algorithmus, die schematisch

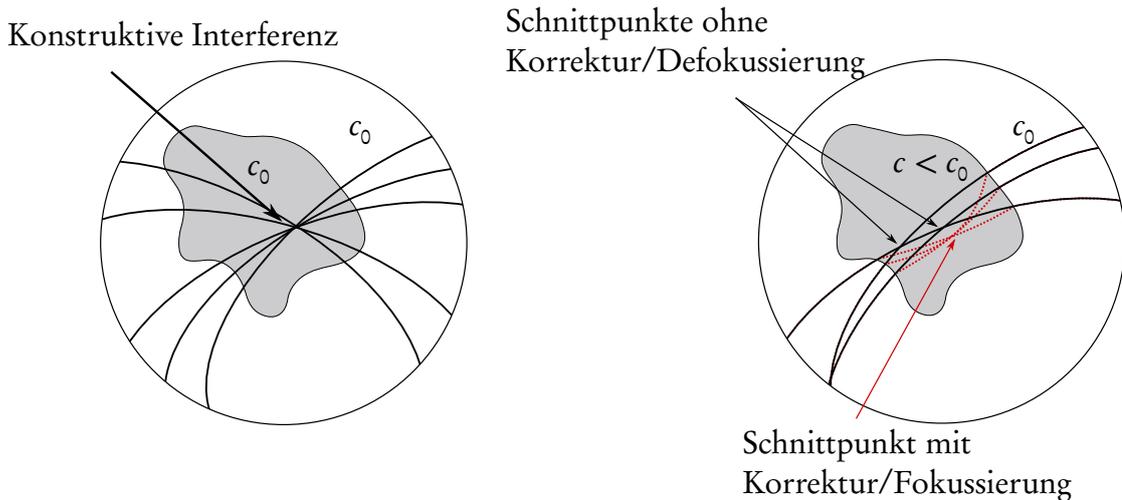
$$f(\mathbf{x}_x) = \sum_{s,r} \left( u_{s,r} \left( \frac{|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_x| + |\mathbf{x}_x - \mathbf{x}_r|}{c_0} \right) \right) \quad (3.38)$$

lautet. Hierbei ist  $u_{s,r}$  der an Empfänger  $r$  gemessene A-Scan von Sender  $s$  und  $c_0$  eine angenommene, homogene Hintergrundschallgeschwindigkeit.

Eine Lösung dieses Problems ist die Nutzung einer Schätzung der Schallgeschwindigkeit im Rekonstruktionsvolumen. Kennt man die Verteilung der Schallgeschwindigkeit im Gewebe genau, so verletzt man die Born-Approximation nicht mehr und kann ohne Defokussierungsartefakte rekonstruieren. Das bedeutet, dass  $c_0$  in (3.38) durch die mittlere Schallgeschwindigkeit entlang des Weges von Sender über Streuer zu Empfänger ersetzt wird.  $\int_{s,r}$  repräsentiert das Wegintegral entlang dieses Weges. Damit wird aus (3.38):

$$f(\mathbf{x}_x) = \sum_{s,r} \left( u_{s,r} \left( \frac{|\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_x| + |\mathbf{x}_x - \mathbf{x}_r|}{\int_{s,x,r} c(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'} \right) \right).$$

Diese Tatsache birgt eine zweite Motivation für die Transmissionstomographie: Je genauer die Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion, desto genauer kann die Reflexionstomographie auflösen. Erst mit Hilfe der Schallgeschwindigkeitskorrektur sind Auflösungen im Submillimeterbereich möglich.



**Abbildung 3.9** – Prinzip der SAFT-Bildgebung: (links) Pro Reflexionspuls wird eine Ellipse um Sender und Empfänger gezeichnet. Wird dies für viele Sender und Empfänger wiederholt, entsteht durch konstruktive und destruktive Interferenz ein Reflexionsbild. Unterscheidet sich die Schallgeschwindigkeit im untersuchten Gewebe stark von der Hintergrundschallgeschwindigkeit ist die Born-Approximation verletzt und die Schnittpunkte der verschiedenen Ellipsen defokussieren (rechts).

Die Verletzung der Voraussetzung für die Born-Approximation äußert sich in den Reflexionsbildern darin, dass manche Streuer, die sich eigentlich an einer Stelle befinden, durch die Rekonstruktion an unterschiedliche Stellen abgebildet werden – die Fokussierung schlägt also fehl. Im Ergebniskapitel zeigt Abbildung 7.18 eine Schicht eines Drahtes innerhalb eines Gelatinephantoms, das eine höhere Schallgeschwindigkeit hat als das es umgebende Wasser. Ohne Korrektur der Schallgeschwindigkeit wird der Schnitt des Drahtes als Kreis abgebildet. Mit Korrektur funktioniert die Fokussierung und man erkennt einen Punkt.

Vom SAFT-Algorithmus gibt es auch eine Frequenzraum-Variante, die sich *Backpropagation* nennt. In [49] stellt Devaney die zugehörige Theorie vor.

## 3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen der Ultraschallausbreitung in Wasser aufbereitet und alle für die Ultraschallbildgebung relevanten Approximationen erläutert. Die genauesten Approximationen der Wellengleichung mit der Auflösungsgrenze einer halben Wellenlänge  $\frac{\lambda}{2}$  sind die Born- und die Rytov-Approximation, die aber beide nur unter restriktiven Bedingungen anwendbar sind. Die um mehrere Größenordnungen schneller berechenbaren, aber restriktiveren Strahlapproximationen haben für USCT im schlechtesten Fall eine Auflösung von  $\sqrt{l\lambda} = 1,2$  cm, weil sie die Beugung, also den Wellencharakter des Ultraschalls vernachlässigen.

APPROX.	PRINZIP	AUFLÖSUNG	AUFWAND	VORAUSS.
Born	Drucklinearisierung	$\lambda/2$	hoch	$u_s \ll u$
Rytov	Phasenlinearisierung	$\lambda/2$	hoch	$\delta u \ll 1$
Paraxial	Anisotropes Feld	" $< \lambda/2$ "	hoch	$\partial^2 u / \partial y^2$ klein
Eikonal	Unendliche Frequenz	$\sqrt{l\lambda}$	mittel	$k$ klein
Strahl	Unendliche Frequenz	$\sqrt{l\lambda}$	gering	$c_0 = \text{const.}$
Fréchet	Eikonal und Born	" $< \sqrt{l\lambda}$ "	mittel-hoch	$u_s \ll u$

**Tabelle 3.2** – Übersicht der betrachteten Approximationen für die Wellengleichung.

Die Reflexionstomographie für USCT basiert auf der Born-Approximation und ist daher auf eine konstante Hintergrundschallgeschwindigkeit angewiesen. Unter typischen USCT-Rahmenbedingungen ist diese Annahme verletzt und es sind keine Rekonstruktionen im Submillimeterbereich möglich. Erst mit Hilfe der Transmissionstomographie steht eine genauere Schätzung der Schallgeschwindigkeit zur Verfügung, die Reflexionsrekonstruktionen mit Submillimeterauflösung erlaubt.

Tabelle 3.2 enthält synoptisch die wesentlichen Eigenschaften aller betrachteten Approximationen. Die in der Seismologie angewandte Approximation, die sogenannte Fréchet- oder Banana-Doughnut-Kerne benutzt, ist hierin mit »Fréchet« bezeichnet. Sie wird später an geeigneter Stelle erläutert. Die in der Spalte AUFLÖSUNG gesetzten Anführungszeichen symbolisieren, dass es noch keine gesicherten Erkenntnisse zur tatsächlichen Auflösung gibt, die Theorie aber die entsprechende Auflösung vorhersagt.



# Kapitel 4 |

## Signaldetektion

*Ruh ist Göttern nur gegeben  
Ihnen ziemt der Überfluß  
Doch für uns ist Handeln Leben  
Macht zu üben nur Genuß.*

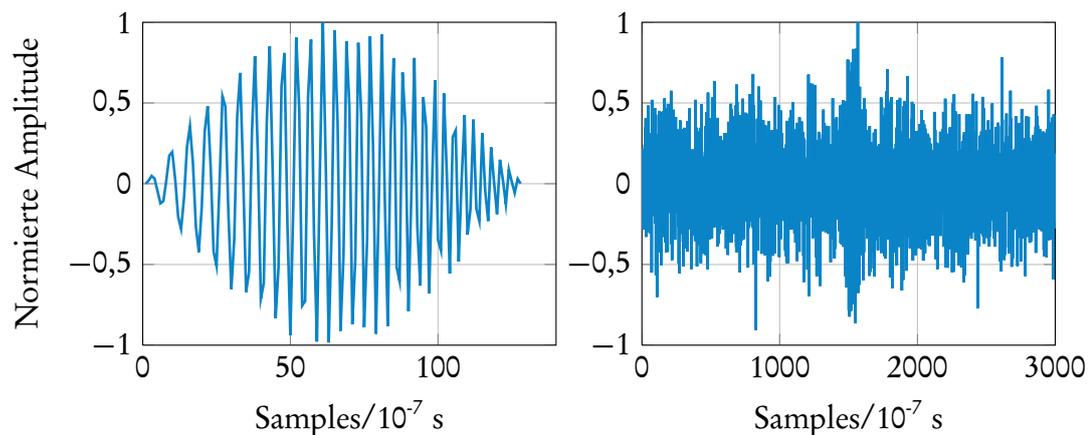
— Novalis, Alle Menschen seh ich leben. . .

Neben der Rekonstruktion ist die Signaldetektion die zweite große Einflussgröße bei der USCT-Bildrekonstruktion. Prinzipiell kann die Signaldetektion als abgeschlossene, von der Rekonstruktion unabhängige Einheit betrachtet werden: sie erhält als Eingabe die vorverarbeiteten Rohdaten (A-Scans) aus der USCT-Datenaufnahmehardware und liefert pro A-Scan genau einen Wert, die Schallgeschwindigkeit oder die Dämpfung. Für die Transmissionstomographie ist dabei nur der Transmissionspuls in den A-Scans von Bedeutung. Daher wird in diesem Kapitel die Bestimmung der Ankunftszeit (*Arrival Time* oder *Onset Time* in der Seismologie) und der Dämpfung des Transmissionspulses behandelt, wohingegen die Reflexionspulse weitestgehend ignoriert werden.

Eine große Herausforderung bei der Signaldetektion ist unter anderen, dass die USCT-Wandler eine winkelabhängige Charakteristik besitzen, die, je nach Sende- und Empfangswinkel, dafür sorgt, dass Frequenzen verschieden stark gedämpft werden und sich deshalb die Pulsform im Zeit- und im Frequenzbereich verändert.

Ein spezieller Vorteil der Transmissionstomographie ist, dass die Rekonstruktion prinzipiell unabhängig von der Art der Signaldetektion ist. Dies liegt darin begründet, dass das in Unterabschnitt 3.2 beschriebene Wegintegral sowohl für die Dämpfung als auch für die Schallgeschwindigkeit gültig ist. Daher kann die Signaldetektion soweit generisch gehalten werden, dass pro A-Scan nur eine kleine Anzahl von Hilfsdaten bereitgestellt werden muss, der Detektionsalgorithmus selbst aber beliebig ausgetauscht werden kann. Ebenso können die gleichen Datenstrukturen für Schallgeschwindigkeit und Dämpfung verwendet werden.

Der 3D-USCT II bietet die Möglichkeit, die USCT-Wandler mit einem sogenann-



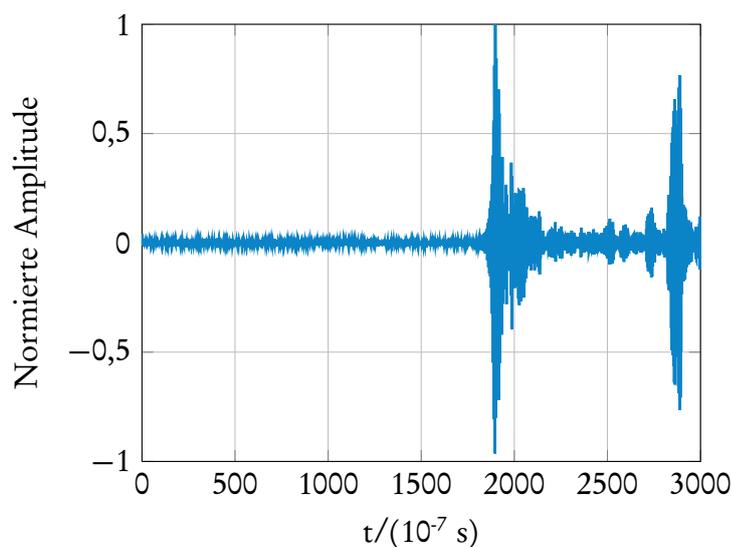
**Abbildung 4.1** – Chirp bei 10 MHz, 128 Abtastpunkte, Mittenfrequenz 2,5 MHz, Bandbreite 1,0 MHz (links) und synthetischer A-Scan, der einen von weißem Rauschen überlagerten Chirp enthält, SNR  $-10$  dB (rechts).

ten *Coded-Excitation*-Puls anzuregen, der frei in Software programmierbar ist. Im Allgemeinen wird ein Puls mit sich zeitlich ändernder Frequenz, ein sogenannter Chirp mit 2,4 - 2,5 MHz Mittenfrequenz, 1 MHz Bandbreite und 128 Abtastpunkten Länge verwendet. Bei der typischen Abtastrate von 10 MHz entspricht das  $13 \mu\text{s}$ . In [50] wurde untersucht, welche Auswirkungen unterschiedliche Anregungspulse auf den Signal-Rauschabstand in den A-Scans haben. In der klinischen Studie und in den allermeisten Experimenten wurde jedoch nur der Chirp benutzt. Aus diesem Grund werden die Algorithmen hier mit diesem getestet. Da kein Algorithmus auf eine konkrete Pulsform angewiesen ist, sind die Ergebnisse im Prinzip auch für andere Pulse gültig.

Abbildung 4.1 zeigt den Standard-Chirp und beispielhaft einen simulierten A-Scan, der diesen, von weißem Rauschen überlagert, enthält. Aufgabe der Signaldetektion und Thema dieses Kapitels ist das akkurate Finden, das heißt die Detektion der Ankunftszeit des Chirps oder seiner Dämpfung in einem verrauschten A-Scan. Ein echter USCT-II-A-Scan, wie in Abbildung 4.2 gezeigt, ist, von pathologischen Fällen mit ungünstigem Winkel abgesehen, mit deutlich weniger Rauschen behaftet als in Abbildung 4.1. Der A-Scan in Abbildung 4.2 hat ein SNR von 20 dB. Für die Transmissionstomographie relevanten Winkel (zur Problematik der relevanten Winkel siehe Unterabschnitt 4.1) liegt der SNR stets über 15 dB, der Mittelwert über den relevanten Winkelbereich liegt bei etwa 19 dB.

## 4.1 Laufzeitdetektion

Für die Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion muss die Signallaufzeit eines Ultraschallpulses bestimmt werden. Einschlägige Bezeichnungen für solche Verfahren in



**Abbildung 4.2** – Normierter A-Scan aus einer echten Messung. Die beteiligten Sender und Empfänger liegen sich genau gegenüber.

der Literatur sind TOF, *Time of Flight*, TOA, *Time of Arrival*, TDOA, *Time Delay of Arrival* oder TDE, *Time Delay Estimation*. Zu den wichtige Veröffentlichungen gehören [51], [52] und [53], die verschiedene TOF-Algorithmen vergleichen.

Hinsichtlich des verwendeten Vorwissens über das genutzte Signal trifft man nochmals eine Unterscheidung der Detektionen, auch wenn strenggenommen das grundlegende Vorgehen identisch bleibt. So wird bei der *absoluten* Detektion die wahrscheinlichste absolute zeitliche Position eines bekannten Pulses in einem unbekanntem, gemessenen Signal gesucht. Bei der *differentiellen* Detektion stehen zwei Empfänger zur Verfügung, zwischen denen ein Laufzeitunterschied bestimmt wird.

## Absolute Detektion

Nach [51] ist der beste Detektionsalgorithmus für TOF-Probleme die Korrelation des bekannten Anregungspulses mit dem A-Scan, in dem das Vorkommen des Pulses vermutet wird. Man kann zeigen, dass dieses Vorgehen das Signal-zu-Rausch-Verhältnis minimiert [54] und deswegen auch Optimalfilter beziehungsweise *Matched Filter* genannt wird. Der Name rührt von der Tatsache her, dass das Filter gewissermaßen optimal an das ausgesandte Signal angepasst ist.

Detektiert wird der Zeitpunkt im A-Scan, an dem das Anregungssignal mit höchster Wahrscheinlichkeit am Empfänger gemessen wurde. Der Anregungspuls ist für ein USCT-Experiment apriori vorgegeben und wird während der Messung nicht verändert. Deshalb kann bei der absoluten Detektion als Näherung für sämtliche A-Scans dasselbe Optimalfilter benutzt werden. Wegen der vorher erwähnten und in Abbildung 4.6 dargestellten Abstrahlcharakteristik handelt man sich damit aber erhebliche Unge-

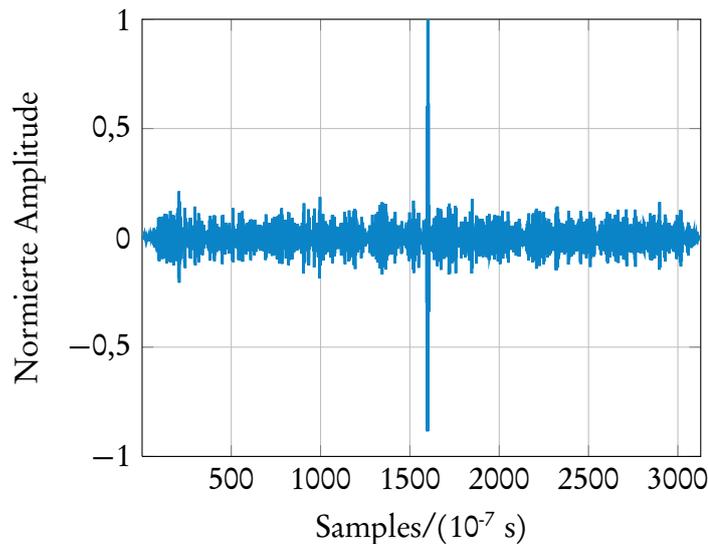


Abbildung 4.3 – Kreuzkorrelation von Chirp und A-Scan aus Abbildung 4.1.

naugigkeiten bei der Detektion ein, die durch eine differentielle Detektion zu einem Großteil vermieden werden können.

Zur Anwendung eines Optimalfilters führt man eine Kreuzkorrelation eines fraglichen A-Scans  $u(t)$  mit dem bekannten Anregungssignal  $u_0(t)$  durch. Die Kreuzkorrelation ist für diskrete Signale der Länge  $k$  definiert als

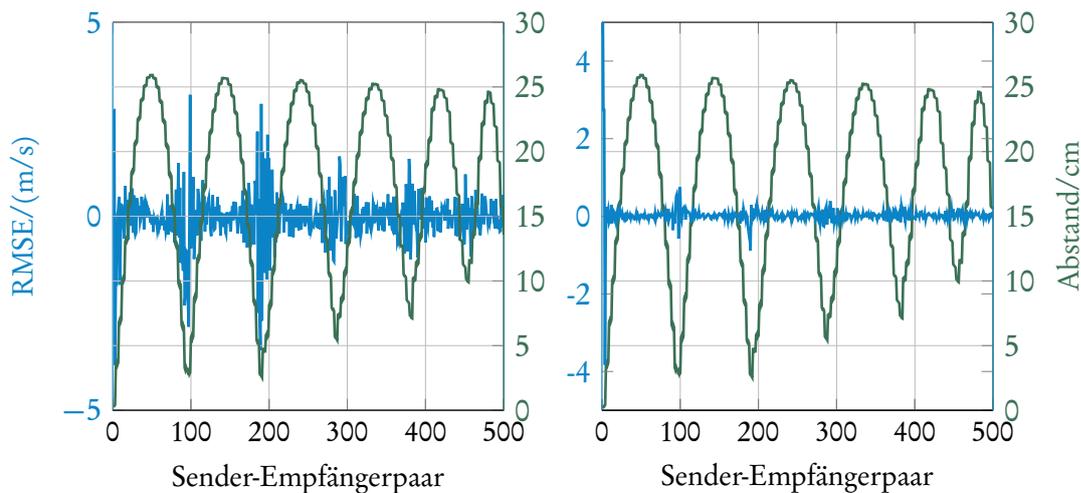
$$(u \star u_0)(n) = \sum_{m=-k}^k u^*(m)u_0(n+m). \quad (4.1)$$

Dabei ist  $u^*$  die Komplex-Konjugierte von  $u$ .

Man bestimmt das Maximum der Kreuzkorrelation, um die Stelle mit der höchsten Übereinstimmung zu finden. Diese Prozedere bedeutet salopp, dass die Signale solange »übereinandergeschoben« werden, bis ihre gleichzeitig überdeckte Fläche maximal wird. An diesem Punkt stimmen beide Signal am besten überein.

## Genauigkeit der Detektion

**Diskretisierungsfehler** Die Genauigkeit des Optimalfilters ist im diskreten Fall grundsätzlich durch die Abtastrate beschränkt. Da typische USCT-Signale jedoch bandbegrenzt sind, gestattet die Theorie generell eine beliebig hohe Abtastrate durch Überabtastung (*Upsampling*): Nach dem Abtasttheorem kann jedes bandbegrenzte (analytische) Signal perfekt, also exakt und eindeutig an jedem Punkt rekonstruiert werden, sofern bei der Abtastung das Nyquist-Kriterium eingehalten wurde. Somit könnte die Detektionsgenauigkeit beliebig erhöht werden.

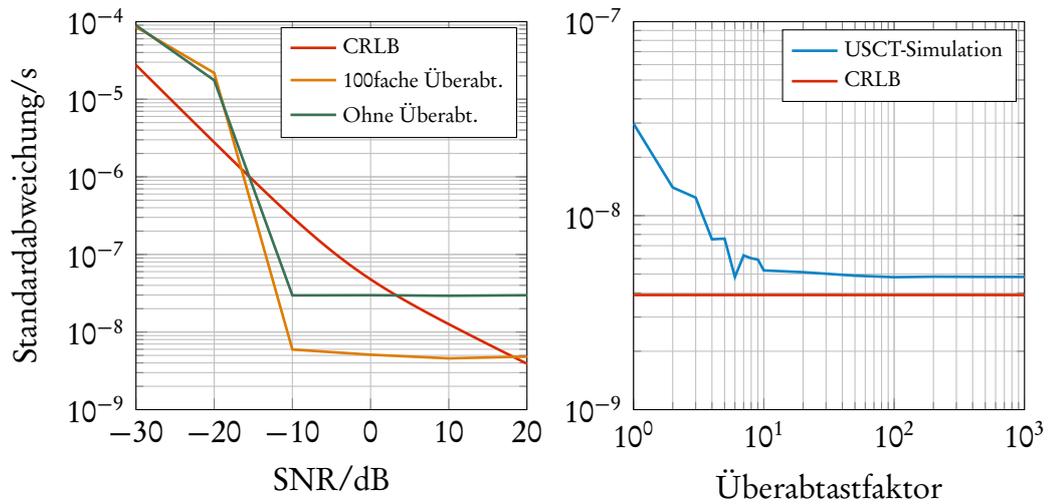


**Abbildung 4.4** – Ausschnitt des Schallgeschwindigkeits-Detektionsfehlers ohne Überabtastung (links) und mit zehnfacher Überabtastung (rechts). Die blaue Kurve gibt die Wurzel des mittleren quadratischen Fehlers in m/s an, die grüne Kurve den Abstand der Sender-Empfängerpaare. Je kleiner dieser Abstand ist, desto höher der Diskretisierungsfehler und damit auch der Detektionsfehler.

Legt man die übliche USCT-Abtastrate von 10 MHz für 3000 Abtastpunkte zugrunde, ergibt sich je nach zurückgelegter Wegstrecke eines Ultraschallsignals ein anderer Abtast- oder Diskretisierungsfehler. Je länger die Strecke, desto weniger fällt eine Falschdetektion von einem oder mehreren Abtastpunkten, was eine Diskretisierung letztlich ist, ins Gewicht. Der im 3D-USCT II maximal mögliche Abstand beträgt 26 cm. Für eine mittlere Schallgeschwindigkeit von  $c = 1500$  m/s ergibt sich eine Signallaufzeit von  $1,7E-4$  s, was gerundet 1731 Abtastpunkten entspricht. Dieses Aufrunden auf einen vollen Abtastpunkt, also der Diskretisierungsfehler, sorgt hier für einen Fehler in der detektierten mittleren Schallgeschwindigkeit von 0,29 m/s.

Durch Überabtasten ist es möglich, den Sampling- oder Diskretisierungsfehler zu minimieren, wie in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Wurzel des mittleren quadrierten Detektionsfehlers (*Root Mean Squared Error (RMSE)*) ohne Überabtastung liegt bei 0,57 m/s, mit fünffacher Überabtastung bei 0,17 m/s und bei zehnfacher Überabtastung bei 0,098 m/s. In Abbildung 4.4 ist auch zu erkennen, wie der Diskretisierungsfehler ohne Überabtasten vom Abstand des Sender-Empfängerpaares abhängt, während dieser Effekt mit Überabtastung verschwindet. Schon bei einer Überabtastrate von fünf werden die Diskretisierungsfehler deutlich verringert. Eine Zusammenfassung für verschiedene Überabtastfaktoren findet sich in Abbildung 4.5 und in Tabelle 4.4.

**Detektionsfehler** Da der Diskretisierungsfehler minimiert werden kann, ist interessant, welche Genauigkeit *prinzipiell* von einem Korrelations-TOF-Algorithmus erzielt werden kann. Man kann die untere Schranke für die Detektionsgenauigkeit theore-



**Abbildung 4.5** – CRLB für unterschiedliche SNR-Werte und Optimalfilterdetektion mit Simulationsdaten ohne Überabtastung und mit 100facher Überabtastung anhand simulierter Daten mit unterschiedlichem SNR (links). Detektion mit unterschiedlichen Überabtastfaktoren für simulierte Daten mit 20 dB SNR (rechts).

tisch auf unterschiedliche Weisen herleiten. Eine für Ultraschall nützliche und bereits angewandte ist die Anwendung der sogenannten Cramér-Rao-Schranke (*Cramér Rao Lower Bound*, CRLB). Diese ist aus der Statistik bekannt und wurde unter anderem von [55] auf Ultraschallsignale übertragen. Minimiert das Optimalfilter den SNR für eine Verschiebung von  $\tau$ , gibt die CRLB die Standardabweichung  $\sigma$  von  $\tau$  an, die durch Rauschen verursacht wird.

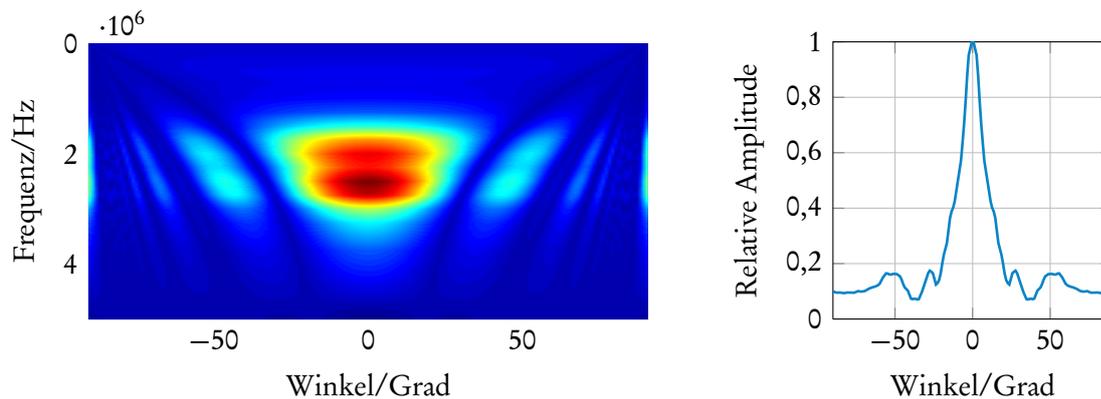
[56] leiten die Schranke her, die in (4.2) angegeben ist.

$$\sigma_{\text{CRLB}}^2 = \frac{3}{8\pi^2} \frac{1 + \text{SNR}}{\text{SNR}^2} \frac{1}{\Delta f^3 T_W} \quad (4.2)$$

Dabei ist  $\Delta f = \frac{\omega}{2\pi}$  die Bandbreite des Chirps, SNR der Signal-zu-Rauschabstand und  $T_W$  die Fensterlänge der Kreuzkorrelation.

In Abbildung 4.5 (links) sieht man, dass für 20 dB SNR die CRLB von  $3,9\text{E}-9$  s mit 100facher Überabtastung vor Anwendung des Optimalfilters annähernd erreicht wird ( $4,8\text{E}-9$  s). Ohne Überabtastung liegt die Standardabweichung des Optimalfilters bei  $3,0\text{E}-8$  s. Schon für 10 dB SNR wird aber die CRLB unterschritten, ebenso für 0 dB und -10 dB. Erst bei -20 dB verschwindet der Chirp fast vollständig im Rauschen und kann nicht mehr ordnungsgemäß detektiert werden. Dort ist die Standardabweichung dann auch wieder höher als von der CRLB vorhergesagt. Dies verdeutlicht, dass die CRLB für USCT-Signale keine besonders aussagekräftige Abschätzung ist. In Weiteren wird daher auf eine eigene Fehlerbetrachtung mit simulierten Daten zurückgegriffen.

Nützlich ist die CRLB hingegen für die Bestimmung eines geeigneten Überabtastfaktors: Für 20 dB SNR liegt die von der CRLB vorhergesagte Standardabweichung



**Abbildung 4.6** – Simuliertes relatives Amplitudenbild eines 3D-USCT-II-Senders über Winkel und Frequenz (links). Gemessene Amplitude eines 3D-USCT-II-Senders über dem Winkel (entspricht einem Schnitt im Amplitudenbild bei  $f = 2,5$  MHz) (rechts).

bei  $3,9E-9$  s. In Abbildung 4.5 (rechts) ist die Standardabweichung der Detektion simulierter USCT-Daten mit 20 dB SNR aufgetragen. Durch doppelte Überabtastung (20 MHz) halbiert sich die Standardabweichung des Fehlers und wird für zehnfache Überabtastung (100 MHz) nochmals dreimal kleiner. Danach (bis 1000fache Überabtastung, 10 GHz) verringert sich die Standardabweichung nur noch um etwa fünf Prozent, der Rechenaufwand nimmt aber deutlich zu. Realistischerweise würde man daher höchstens mit einem Faktor zehn überabtasten, um bis auf etwa einen Nanosekunde an die CRLB heranzureichen.

## Differentielle Detektion

Bei der differentiellen Detektion wird das starre Vorgehen der absoluten Detektion aufgeweicht, indem mehr Vorwissen über das zu detektierende Signal genutzt wird. Oft steht für ein USCT-Experiment ein korrespondierendes Vor-Experiment zur Verfügung, bei dem lediglich das Hintergrundmedium Wasser, ohne zu untersuchendes Gewebe, gemessen wurde. Eine derartige Messung wird auch *Leermessung* genannt. Mit Hilfe einer solchen können die systemspezifischen, systematischen Einflüsse, die das Eingangssignal auf dem Weg zum Empfänger verändern, direkt kompensiert werden. Ein wesentlicher Einfluss auf die Detektion ist beispielsweise die Abstrahl- oder Winkelcharakteristik der USCT-Wandler.

Abbildung 4.6 zeigt, dass sich sowohl die Bandbreite als auch die Amplitude des Signals über den Abstrahlwinkel ändert. So beträgt die Amplitude zum Beispiel bei  $35^\circ$  nur circa ein Zehntel des Maximalwertes, während das Rauschen stets die gleiche Amplitude hat. Daher kommt es zu einer Überdeckung des Signals durch das Rauschen. Zusätzlich verändert sich auch die Pulsform, weil etwa die höheren Frequenzen des Signals verhältnismäßig stark abgeschwächt werden.

Eine Optimalfilterung, also die Korrelation von Leermessungssignal und tatsächli-

ÜBERABTASTFAKTOR	RMSE/(m/s)	
	MF ABSOLUT	MF DIFFERENTIELL
1	0,57	0,24
10	0,098	0,060

**Tabelle 4.1** – Detektionsfehler (RMSE) mit absoluten und differentiellen Optimalfilter für Simulation mit winkelabhängiger Frequenzveränderung.

chem Signal ergibt lediglich eine differentielle Zeit  $\delta_{ij}$ . Diese gibt die Abweichung des tatsächlichen Signals zum Signal der Leermessung in Abtastpunkten an. Setzt man zusätzlich auch die mittlere Schallgeschwindigkeit  $c$  in Wasser für das fragliche Sender-Empfängerpaar als bekannt voraus (etwa durch eine Temperaturmessung), erhält man mittels  $l_{ij}/c$  die Signallaufzeit  $t_{ij}^{(w)}$ . Für jedes Paar kann anschließend die Gesamtsignallaufzeit  $t_{ij}^{(t)} = t_{ij}^{(w)} + \delta_{ij}$  berechnet werden. Damit ist man von einer absoluten Detektion der TOF sowohl in der tatsächlichen als auch in der Leermessung unabhängig, da die TOF implizit durch die gemessene Wassertemperatur vorgegeben ist. Vergleiche dazu auch die Linearisierung der TOF-Laufzeiten in Abschnitt 3.3.

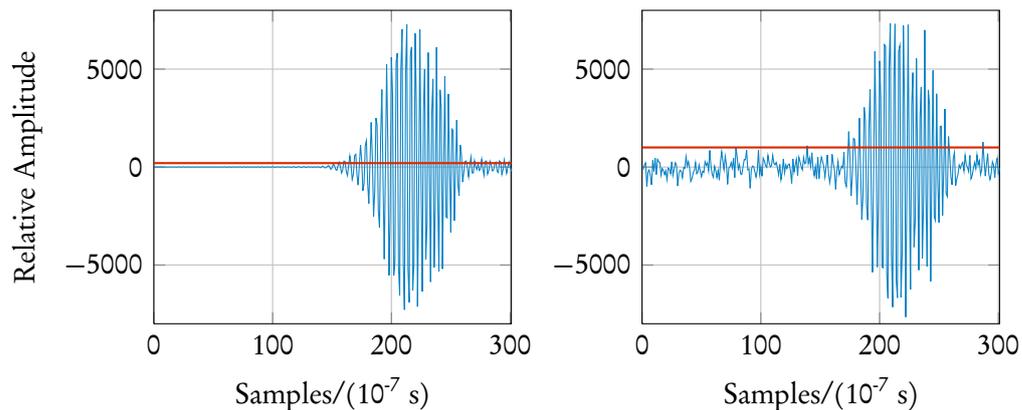
Wie in Unterabschnitt 2.2 beschrieben, besitzt der 3D-USCT II dedizierte Temperatursensoren in jedem TAS und zusätzlich spezielle Kalibrations-Temperatursensoren. Um eventuellen Ungenauigkeiten in der Kalibrierung der TAS-eigenen Sensoren vorzubeugen, wurde in der Detektionssoftware der Mittelwert aller Sensoren auf den Mittelwert der beiden Kalibrationssensoren gesetzt. Der resultierende Wert von Sender und Empfänger eines Paares wurde gemittelt und schließlich als Wassertemperatur für das Paar verwendet.

Die Wirkung der differentiellen Detektion ist anhand synthetischer Daten in Tabelle 4.1 gezeigt. In Verbindung mit Überabtastung kann der Detektionsfehler auf 0,060 m/s vermindert werden.

## 4.2 First-Arrival-Detektion

Detektionsalgorithmen, die nicht die gesamte Pulsform betrachten, sondern sich primär auf den vorderen Teil derselben konzentrieren um die genaue Ankunftszeit zu bestimmen, nennt man First-Arrival-Detektoren. Dabei geht es konkret nur um den ersten Abtastpunkt eines A-Scans, bei dem der Puls beginnt. In Abbildung 4.7 ist die Situation für einen unverrauschten und einen verrauschten (0 dB SNR) A-Scan gezeigt.

Ohne Rauschen ist es möglich, mit einem einfachen Schwellwert den exakten Ankunftszeitpunkt zu bestimmen. Liegt Rauschen vor, muss ein Schwellwert über dem Rauschniveau gewählt werden. Dies macht Schwellwertmethoden sehr anfällig gegenüber Ausreißern. Genau hier setzt der sogenannte *Constant Fraction Discriminator (CFD)* an. Das Grundprinzip der Constant-Fraction-Methode ist es, den Pulsbeginn



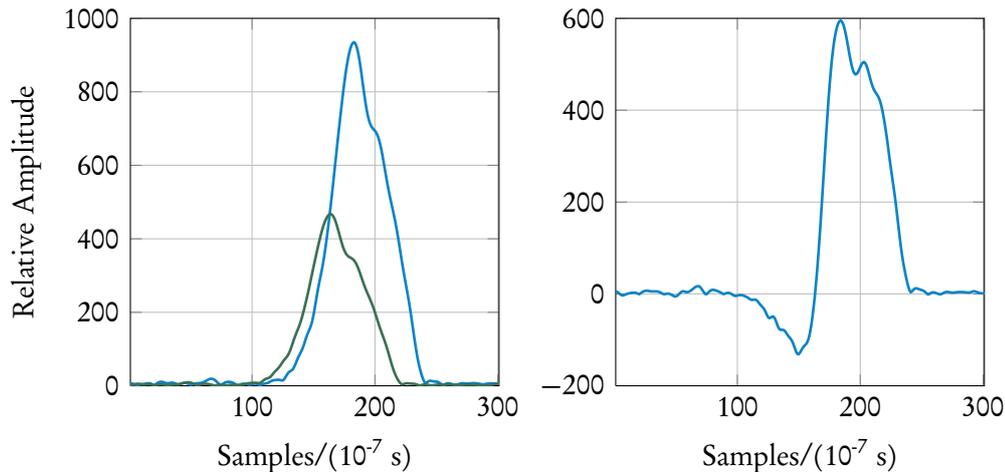
**Abbildung 4.7** – Schwellwertdetektion ohne (links) und mit Rauschen, SNR 0 dB (rechts). Ankunftszeit ist derjenige Abtastpunkt, dessen Wert einen vordefinierten Schwellwert überschreitet. Mögliche Schwellwerte für die jeweiligen Rauschniveaus sind rot markiert.

daran zu erkennen, dass ein gewisser Anteil (*Fraction*) der Gesamtpulshöhe erreicht wurde. Dazu nutzt man eine Kopie des Originalsignals, die um eine gewisse Zeit verzögert wird, während das Originalsignal um die vorher bestimmte *Fraction* abgeschwächt wird und anschließend beide voneinander abgezogen werden. Dies ist in Abbildung 4.8 veranschaulicht. Im Differenzsignal muss man den ersten Nulldurchgang finden, wobei man übriges Rauschen vor Beginn des eigentlichen Pulses durch einen weiteren Schwellwert unterdrücken kann.

Ein entscheidender Vorteil des CFD ist zudem, dass keine komplexen Operationen wie die FFT benötigt werden. Es werden lediglich ein Verzögerungsglied, ein Invertierer und ein Addierer genutzt. Dadurch ist der CFD sehr effizient in Hardware implementierbar.

Verzögerung und *Fraction* müssen puls- und rauschabhängig bestimmt werden, um eine zufriedenstellende Detektion zu erreichen. Wichtig ist auch, den A-Scan vor dem Verarbeiten zu filtern, um unerwünschte Frequenzanteile zu eliminieren. Für die USCT-A-Scans wurde ein FIR-Bandpassfilter von 2,2 MHz bis 3,3 MHz mit 96 Kanälen verwendet.

Eine einfache Möglichkeit zur Verbesserung des CFD besteht darin, statt eines Bandpassfilters vor der Detektion ein Optimalfilter anzuwenden und dann auf den Korrelationsdaten den ersten Signalanstieg zu detektieren. Dies hat den Vorteil, dass die erste Flanke steiler und daher die Rise-Time geringer ist. Ein Vergleich der CFD-Genauigkeit mit Bandpassfilter und Optimalfilter findet sich in Tabelle 4.2. Durch Verbindung beider Methoden lässt sich ohne Überabtastung dieselbe Genauigkeit erreichen wie beim Optimalfilter mit zehnfacher Überabtastung. Für diesen mit Optimalfilter kombinierten CFD kann ebenso wie für das normale Optimalfilter eine differentielle Detektion genutzt werden, indem das Filter je nach Sender angepasst wird. Der Vorteil der schnellen Berechnung geht damit allerdings verloren.



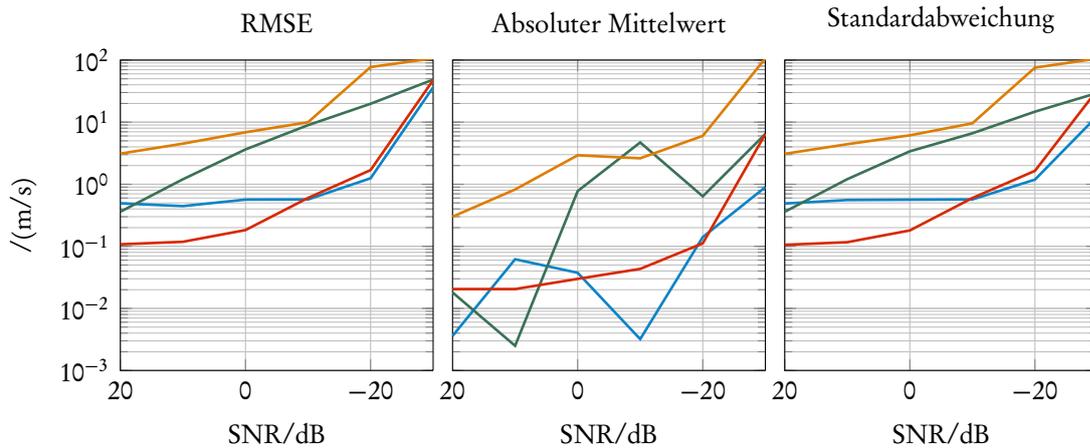
**Abbildung 4.8** – Prinzip des Constant Fraction Discriminators: (Links) Verzögerter (blau) und mit Fraction 0,5 multiplizierter Originalpuls (grün). Das Maximum des gedämpften Pulses wird genau bei 50 % der Amplitude des verzögerten Pulses erreicht. (Rechts) Differenz beider Pulse. Der Nulldurchgang gibt den Ankunftszeitpunkt (inklusive eines Puls- und Fraction-abhängigen Offsets) des Signals an.

Der Vollständigkeit halber wurde auch der AIC-Algorithmus implementiert, der in [57] zur Transmissionsdetektion vorgeschlagen wird. Dieser basiert auf einem Maximum-Likelihood-Ansatz, auf den hier aber nicht im Detail eingegangen wird. Die Funktionsweise des AIC ist unter anderem in [58] beschrieben.

Für sämtliche synthetischen Vergleiche der Algorithmen in diesem Kapitel wurde eine Simulation für den kompletten 3D-USCT II mit 628 Sendern und 1413 Empfängern, das heißt 887364 Paare einer Aperturposition durchgeführt, wie in Abschnitt 5.3 beschrieben. Für die Simulation sind Sender- und Empfängerkoordinaten und ihr Abstand  $l$  exakt vorgegeben. Ein synthetischer A-Scan wurde mit 1000 MHz erzeugt (also 100 mal höher als die USCT-Abtastrate). Zur Bestimmung des Ankunftszeitpunkts eines Pulses wurde der Weg von Sender zu Empfänger exakt durch ein Voxelgitter verfolgt. Der Beginn des Transmissionspulses wurde anschließend per  $c = l/t$  bestimmt und im A-Scan eingetragen. Schlussendlich wurde der A-Scan auf 10 MHz heruntergerechnet.

Da in diesem Kapitel allein der Detektionsfehler relevant ist, wurde Brechung vernachlässigt. Als Anregungspuls fand der in Abbildung 4.1 abgebildete Chirp mit 2,5 MHz Mittenfrequenz und 1 MHz Bandbreite Verwendung. Es wurde ein synthetisches Schallgeschwindigkeitsphantom definiert, das aus Schichten verschiedener Schallgeschwindigkeiten zwischen 1450 m/s und 1550 m/s besteht.

Für die synthetischen Daten wurde auf die A-Scans gemessenes, nicht-weißes USCT-Rauschen mit variabler Stärke addiert. Zur leichteren Interpretation werden die Fehlerwerte in m/s angegeben, indem die detektierte Laufzeit durch den zugehörigen Abstand geteilt wird. Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass bei kürzeren Wegen



**Abbildung 4.9** – Schallgeschwindigkeitsfehler der Detektionsalgorithmen: RMSE (links), Fehler-Mittelwert (Mitte) und Standardabweichung  $\sigma$  (rechts). Das Optimalfilter ist blau, der CFD grün, der CFD mit Optimalfilter rot und der AIC gelb dargestellt.

SNR/dB	RMSE/(m/s)			
	MF	CFD	CFD+MF	AIC
20	0,49	0,26	0,11	3,1
10	0,44	1,2	0,12	4,5
0	0,57	3,6	0,18	6,9
-10	0,57	8,9	0,60	10,0
-20	1,2	20	1,7	77
-30	36	48	48	110

**Tabelle 4.2** – RMSE detektierter Schallgeschwindigkeiten mit verschiedenen TOF-Algorithmen für synthetische Daten ohne winkelabhängige Frequenzveränderung.

Fehler wegen der Diskretisierung höheres Gewicht haben.

Zum Vergleich wurden auch echte USCT-Daten einer Leermessung genutzt. Für diese Daten wurde die erwartete Schallgeschwindigkeit der Leermessung pro Sender-Empfängerpaar aus dem Abstand und der Schallgeschwindigkeit errechnet, die sich mit der Formel von Marczak [59] aus dem Mittelwert beider ausgelesener TAS-Temperaturen ergibt.

In Abbildung 4.9 findet sich ein grafischer Vergleich der Fehler der betrachteten Detektionsalgorithmen. Die zugehörigen Wertetabellen sind Tabelle 4.2 und Tabelle 4.3. Der RMSE und die Varianz verhalten sich tendentiell ähnlich, weil die Mittelwerte der Fehler für höhere SNR-Werte ( $\geq 0$ ) nur sehr wenig von Null abweichen. Deshalb wird für die übrigen Betrachtungen nur noch der RMSE verwendet.

Wie in Tabelle 4.2 und Tabelle 4.3 deutlich wird, ist das Optimalfilter insgesamt erheblich unempfindlicher gegenüber Rauschen als der einfache CFD oder der AIC-Al-

SNR/DB	MITTELWERT $\pm \sigma$ /(m/s)			AIC
	MF	CFD	CFD+MF	
20	$-0,0036 \pm 0,49$	$-0,018 \pm 0,36$	$-0,021 \pm 0,11$	$-0,0060 \pm 3,7$
10	$0,062 \pm 0,56$	$0,0025 \pm 1,2$	$-0,021 \pm 0,12$	$-0,82 \pm 4,4$
0	$-0,038 \pm 0,56$	$0,78 \pm 3,4$	$-0,030 \pm 0,18$	$-2,9 \pm 6,1$
-10	$-0,0032 \pm 0,57$	$-4,7 \pm 6,6$	$-0,043 \pm 0,60$	$-2,6 \pm 9,6$
-20	$0,14 \pm 1,2$	$0,64 \pm 15$	$-0,11 \pm 1,6$	$6,0 \pm 76$
-30	$0,90 \pm 13$	$-6,5 \pm 30$	$-6,4 \pm 33$	$0,59 \pm 110$

**Tabelle 4.3** – Mittelwert und Standardabweichung der Detektionsfehler der TOF-Algorithmen für synthetische Daten ohne winkelabhängige Frequenzveränderung.

SNR/DB	RMSE/(m/s) bei ÜBERABTASTUNG						
	ohne	2fach	5fach	10fach	20fach	50fach	100fach
20	0,57	0,33	0,17	0,098	0,11	0,11	0,099
10	0,56	0,33	0,16	0,098	0,11	0,095	0,100
0	0,56	0,33	0,16	0,13	0,12	0,26	0,11

**Tabelle 4.4** – Einfluss der Überabtastung auf den Detektionsfehler des Optimalfilters bei verschiedenen Rauschniveaus ohne winkelabhängige Frequenzveränderung.

gorithmus; Beschränkt man sich allerdings auf den für die Transmissionstomographie relevanten Winkelbereich, liegt der SNR bei 20 dB und der CFD schneidet im Mittel besser ab. Noch deutlicher wird der Unterschied, wenn der CFD in Kombination mit dem Optimalfilter verwendet wird.

Tabelle 4.4 zeigt den Einfluss der Überabtastung auf den Detektionsfehler des Optimalfilters. Von Bedeutung ist die Überabtastung vor allem bei kleinen Distanzen ( $< 10$  cm), bei denen durch eine höhere Zeitaufösung eine deutlich höhere Auflösung der Schallgeschwindigkeit bewirkt.

Tabelle 4.5 zeigt eine Abschätzung des Detektionsfehlers aller Algorithmen anhand einer Leermessung. Anhand der Temperaturfühler der einzelnen TAS wurde die Wassertemperatur für jedes Sender-Empfängerpaar bestimmt und mit Hilfe der Formel von Marczak in die erwartete Schallgeschwindigkeit umgerechnet. Anschließend wurde der Detektionsfehler als Abweichung der Detektion von der Erwartung bestimmt. Die Fehlerwerte sind insgesamt wesentlich höher als bei den synthetischen Daten. Dies liegt an der Schätzung der erwarteten Schallgeschwindigkeit über die Wassertemperatur.

	MF	DIFF. MF	CFD	CFD+MF	AIC
RMSE/(m/s)	5,8	3,5	9,3	4,3	91
mean/(m/s)	0,096	-0,051	0,027	0,040	-0,016
$\sigma$ /(m/s)	11	2,4	14	9,5	510

**Tabelle 4.5** – Detektionsfehler der TOF-Algorithmen für Echtdaten einer Leermessung ohne Überabtastung.

### 4.3 Beheben von Falschdetektionen

Auch wenn das Optimalfilter für eine SNR-optimierte Detektion einzelner Signale sorgt, gibt es Möglichkeiten, die Detektion global zu verbessern. Dies kann unter anderem durch Einbeziehen systemspezifischer oder objektspezifischer Parameter geschehen, die nicht durch eine differentielle Detektion abgedeckt sind. Einfachstes Beispiel hierfür ist die Einschränkung des Detektionsfensters auf die Schallgeschwindigkeiten, die für das untersuchte Objekt oder Medium erwartet werden. Je weiter das Detektionsfenster eingeschränkt werden kann, desto wahrscheinlicher wird die Detektion die richtige Schallgeschwindigkeit ermitteln, weil weniger andere Pulse die Detektion erschweren.

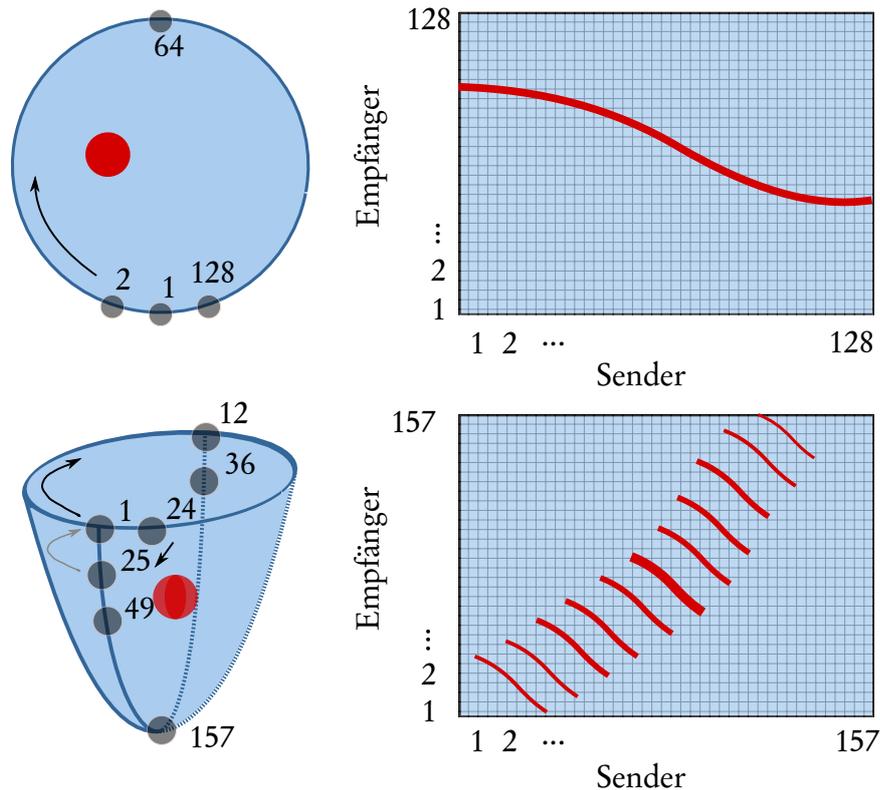
Im Normalfall kann das Fenster auf die Schallgeschwindigkeiten 1300 - 1600 m/s eingeschränkt werden, weil die niedrigsten und höchsten Schallgeschwindigkeitswerte für Brustgewebe in diesen Bereich fallen. Eine Ausnahme stellen Silikon-Implantate dar, deren mittlere Schallgeschwindigkeit bei ca. 990 m/s liegt [60].

Auch mit einem First-Arrival-Detektor wie dem CFD kann diese Art Falschdetektion umgangen werden, doch soll es in diesem Abschnitt um die Optimierung unter Berücksichtigung des Optimalfilters gehen, weil dieser für die kombinierte Detektion mit dem CFD (und damit für das Verfahren mit der höchsten Genauigkeit) ebenso benötigt wird.

### Sinogramme

Zur Erkennung systematischer Falschdetektionen ist eine geeignete Darstellungsform für die Detektionsergebnisse nötig. In Anlehnung an die Radon-Transformation (siehe Anhang, Unterabschnitt B) werden hierfür sogenannte Sinogramme verwendet.

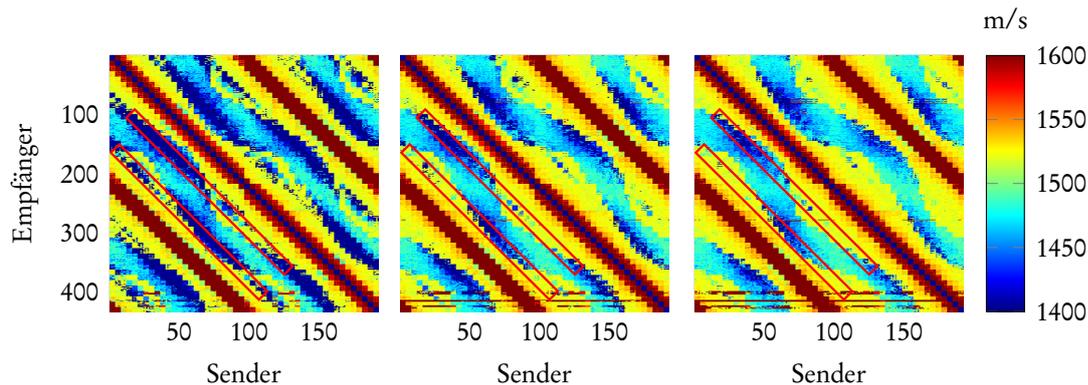
Zur Darstellung für USCT wurde das Konzept des Sinogramms etwas abgewandelt. Die  $x$ -Achse gibt dafür nicht nur den Winkel sondern die Sendernummer an. Ebenso repräsentiert die  $y$ -Achse die Empfängernummern, die wie in Abbildung 4.10 reihum abwärts numeriert sind. Damit ist ein USCT-Sinogramm die zweidimensionale Darstellung des dreidimensionalen USCT und bildet nicht wie ein gewöhnliches Sinogramm zwei Ortsdimensionen auf zwei Sinogrammdimensionen ab. Abbildung 4.10 zeigt schematisch, wie ein USCT-Sinogramm im Unterschied zu einem Sinogramm



**Abbildung 4.10** – Schematische Kreisapertur (oben links) mit Objekt (rot) und zugehöriges Sinogramm (oben rechts), das das gemessene Objekt als Sinus darstellt und schematische USCT-Apertur (unten links) mit Objekt (rot) und Numerierung der TAS. Das zugehörige Sinogramm (unten links) ist eine zweidimensionale Darstellung der dreidimensionalen TAS-Verteilung und zeigt deshalb mehrmals das Objekt aus unterschiedlichen Richtungen.

für eine einfache Kreisapertur aufgebaut ist. Es wurde bewusst nicht die übliche Darstellungsweise für 2D-Sinogramme gewählt um die Ähnlichkeit mit den gezeigten 3D-Sinogrammen des 3D-USCT II zu verdeutlichen.

Ein denkbare Szenario bei USCT, das allerdings in den hier betrachteten Detektionen keinen Einfluss hatte, ist die Reflexion des ausgesandten Signals an der Wasseroberfläche. Da an der Wasseroberfläche ein sehr schallharter Übergang (von Wasser nach Luft) besteht, wird die Welle vollständig reflektiert. Gerade an den oberen Empfängern des 3D-USCT II, die nicht sehr weit von der Wasseroberfläche entfernt sind, könnte es deswegen vorkommen, dass derartige Reflexionen unmittelbar nach dem eigentlichen Transmissionspuls eintreffen und, weil sie möglicherweise kein dämpfendes Medium durchlaufen haben, eine deutlich höhere Amplitude haben als dieser. Kennt man die mittlere Schallgeschwindigkeit des untersuchten Mediums genau, kann man die untere Grenze des Detektionsfensters sehr eng wählen und so die falsche Detektion von Reflexionen vermeiden.



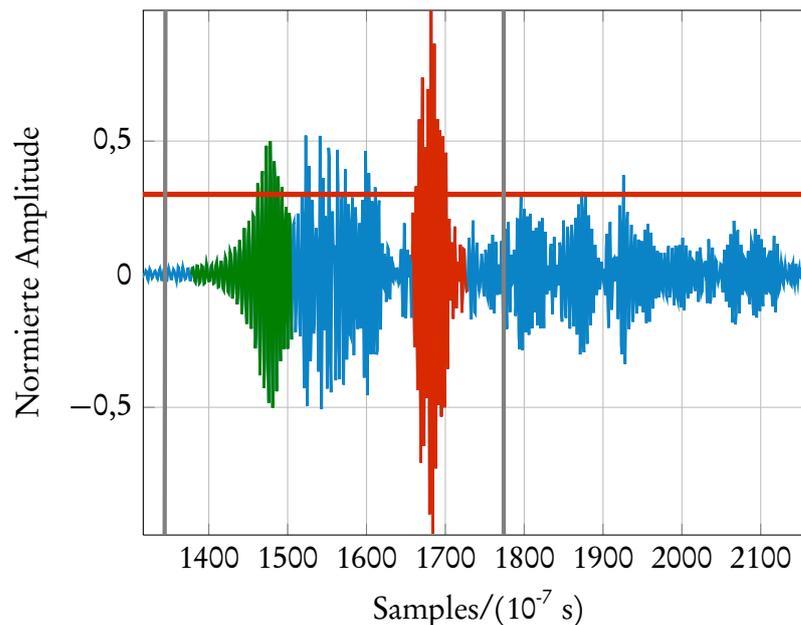
**Abbildung 4.11** – Sinogramm einer Optimalfilterdetektion für 48 Sender- und 48 Empfänger-TAS (links). Korrigierte Schwellwert-Optimalfilterdetektion mit Schwelle  $s = 1/3$  (Mitte) und Korrigierte Detektion mit  $s = 1/6$  (rechts). Die neuralgischen Stellen sind rot gerahmt.

## Detektion des ersten Pulses mit Optimalfilter

Normalerweise geht man davon aus, dass in einem A-Scan der Transmissionspuls der Puls mit der höchsten Amplitude ist. Dies gilt jedoch nur bedingt, wenn beispielsweise ein stark dämpfendes Medium untersucht wird und ein an der Wasseroberfläche reflektierter Puls das Medium sozusagen umgeht. Dieses Phänomen tritt bei echten USCT-Daten von Zeit zu Zeit auf, und ist unter den Winkeln zwischen der Hauptkeule und dem ersten Nebenmaximum der USCT-Wandler verstärkt zu beobachten (etwa bei  $22^\circ$ , vergleiche Abbildung 4.6 (rechts)). In Abbildung 4.11 (links) sind derartige Bereiche niedriger Schallgeschwindigkeit mit roten Rechtecken markiert. Ein A-Scan eines betroffenen Sender-Empfängerpaar ist in Abbildung 4.12 gezeigt.

Man sieht, dass der zuerst empfangene Puls (in Abbildung 4.12 grün markiert), der in aller Regel der Transmissionspuls sein muss, eine deutlich niedrigere Amplitude hat als ein zeitlich relativ kurz danach eintreffender Puls (rot markiert). Das Optimalfilter erkennt den späteren Puls fälschlich als Transmissionspuls, weil der Korrelationswert durch die größere Amplitude höher ist als der Korrelationswert des tatsächlichen Transmissionspulses. Eine engere Fensterung wäre keine Verbesserungsoption, weil die Schallgeschwindigkeit des falschen Pulses (hier etwa 1370 m/s) noch im möglichen Bereich für Brustgewebe liegt.

Aus diesem Grund muss dafür gesorgt werden, dass wirklich der erste Puls als Transmissionspuls erkannt wird. Ein gangbarer Weg ist, zunächst im vorgegebenen Fenster die übliche Detektion durchzuführen und dabei die maximale Amplitude zu bestimmen. Danach definiert man eine relative Schwelle  $s$  (in Abbildung 4.12 ebenfalls rot markiert), zum Beispiel ein Drittel der zuvor bestimmten Amplitude, und extrahiert alle lokalen Maxima der Korrelationsfunktion, die über dieser Schwelle liegen. Das zeitlich erste dieser Maxima muss der Transmissionspuls sein, sofern die Schwelle nicht



**Abbildung 4.12** – Falsch erkannter Transmissionspuls (rot) innerhalb des grau markierten Detektionsfensters. Der tatsächliche Transmissionspuls ist grün markiert. Die rote waagrechte Linie gibt den zur Detektion des korrekten Puls verwendeten Schwellwert an.

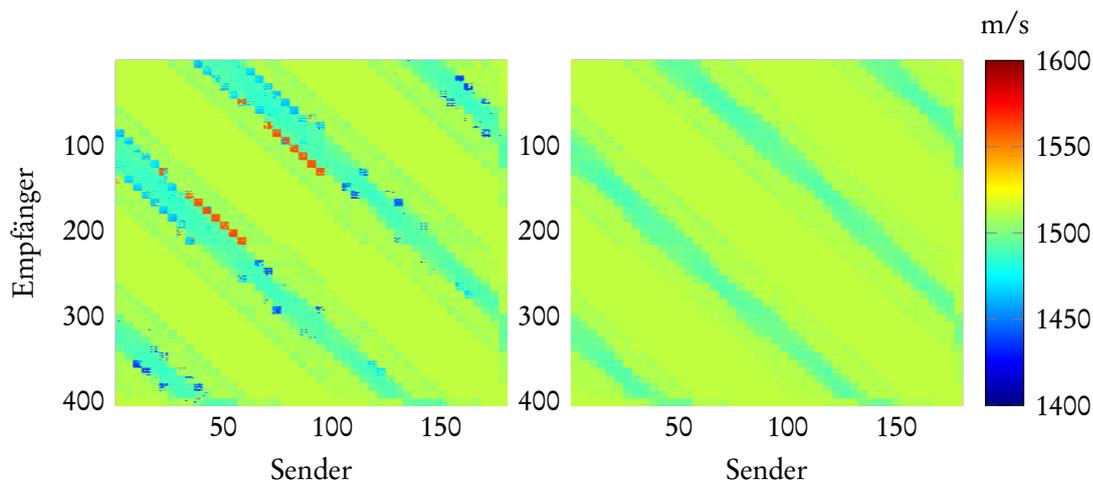
zu niedrig gewählt wurde. Bei zu niedriger Wahl der Schwelle ist es möglich, dass der Detektionszeitpunkt zu stark vom Rauschen beeinflusst wird.

Für USCT-Daten hat sich ein Schwellwert von  $s = 1/3$  bis  $s = 1/6$  des maximalen Korrelationswertes als gangbar erwiesen, um circa 80 Prozent der Falschdetektionen zu verhindern. Wählt man  $s$  noch niedriger, beginnt das Detektionsergebnis deutlich schlechter zu werden, weil der Transmissionspuls oftmals im Rauschen detektiert wird. So ergibt sich schon ab  $s = 1/9$  in 50 Prozent aller fraglichen A-Scans ein Schallgeschwindigkeitswert außerhalb des infragekommenden Fensters.

Abbildung 4.11 zeigt Sinogramme der Detektionsergebnisse für eine Aperturposition und 48 Sender-TAS sowie 48 Empfänger-TAS ohne und mit der hier beschriebenen Korrektur. Die blaue, sinusförmige Struktur ist die Brust, deren mittlere Schallgeschwindigkeit ca. zwischen 1400 und 1480 liegt. Die diagonalen, blauen Streifen (rot umrandet) repräsentieren Falschdetektionen, die sich in niedriger Schallgeschwindigkeit äußern. Mit der Schwellwertmethode und  $s = 1/6$  können diese weitgehend behoben werden, wie in Abbildung 4.11 rechts zu sehen.

## Gauß-Filterung

Je nach Objekt und Messung kommt es zu wesentlich mehr Falschdetektionen als nur den eben erklärten. Abbildung 4.13 (links) zeigt das Sinogramm einer Detektion echter Daten. Die tiefen oder auch hohen (dunkelblau beziehungsweise orange) Schall-



**Abbildung 4.13** – Sinogramm einer Optimalfilterdetektion des Brustphantoms ohne Gaußfilter (links) und mit Gaußfilter (rechts) mit 48 Sender-TAS und 48 Empfänger-TAS. Die Ausreißer (rot und blau) am Rand des Objekts werden mit dem Gaußfilter erfolgreich unterdrückt.

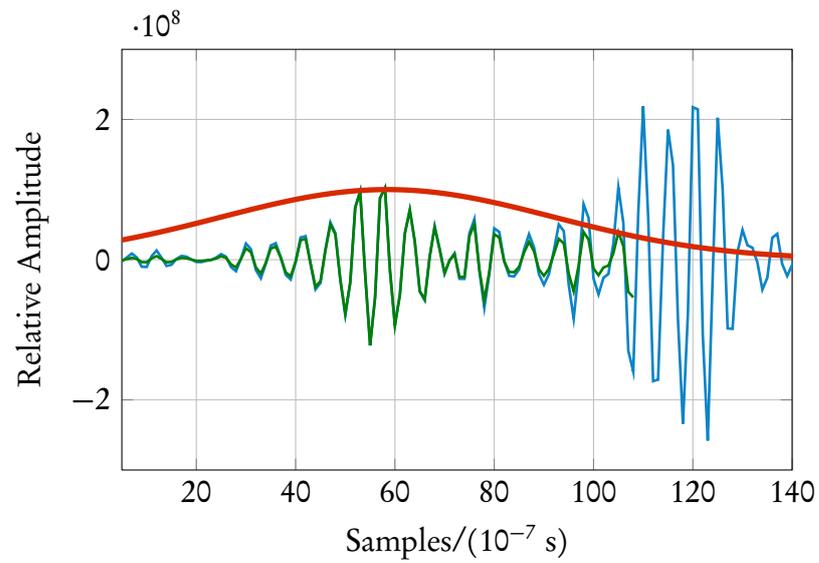
geschwindigkeiten am Rand des Objekts (hellblau) sind nach manueller Kontrolle auf Falschdetektionen zurückzuführen. Diese treten dann auf, wenn nach dem zuerst ankommenden Transmissionspuls ein Puls mit höherer Amplitude eintrifft. Obwohl man sich nicht in einem Minimum der Sendercharakteristik befindet, äußert sich das Problem dennoch in gleicher Weise wie im letzten Abschnitt beschrieben.

Im Bereich mangelnder Intensität kann dieses Phänomen mit der Brechung erklärt werden: Wird ein später eintreffender, weil entlang eines gebrochenen Weg gelaufener, Puls fälschlich als Transmissionspuls erkannt, ist seine Schallgeschwindigkeit wegen des längeren Weges niedriger als die des direkten Transmissionspulses.

Beheben kann man diese Art der Falschdetektion auf ähnliche Weise wie im vorherigen Abschnitt. Durch einen Gaußfilter, der um den erwarteten Ankunftszeitpunkt zentriert ist, kann man dafür sorgen, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit der erste Puls detektiert wird. Abbildung 4.14 veranschaulicht dies an einem neuralgischen A-Scan einer Echtdatenmessung, der mit einem Gaußfilter überlagert wurde.

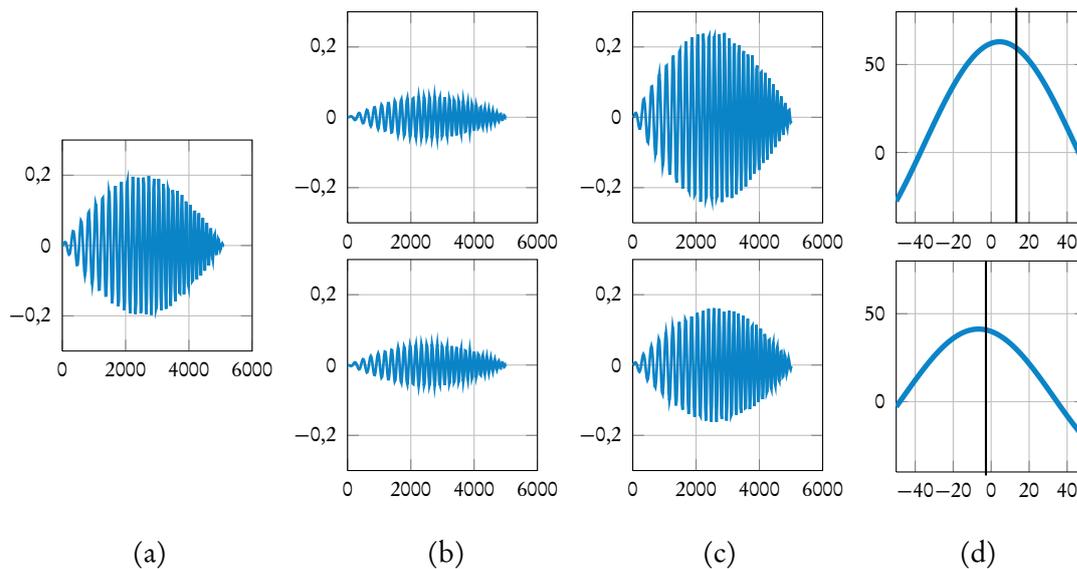
Wenn man akzeptiert, dass problematische Stellen im Zweifelsfalls eher als Wasser (denn als Gewebe) detektiert werden, kann diese Gaußfilter-Maßnahme zu einer deutlichen Verbesserung der Rekonstruktionen führen. In keinem der durchgeführten Experimente kam es durch eine aggressive Wahl des Gaußfilters zu merklichen Detektionsproblemen, wohl aber zu Bildverbesserungen. Ein direkter Rekonstruktionsvergleich findet sich im Ergebniskapitel in Abbildung 7.14.

Durch die Gaußfilterung werden die Falschdetektionen des letzten Abschnitts ebenso behoben. Dies geht jedoch eventuell auf Kosten der Richtigkeit der Detektion. Da aber gerade in derart unklaren Fällen andernfalls ohnehin manuelle Korrektur erforderlich



**Abbildung 4.14** – Ausschnitt eines A-Scans (blau), Gaußfilter (rot) um den erwarteten Ankunftszeitpunkt und gefilterter A-Scan (grün). Im gefilterten A-Scan wurde durch den Gaußfilter der erste Puls verstärkt und der zweite abgeschwächt. Deshalb wird der erste Puls detektiert.

wäre, scheint die hier vorgestellte Gaußfilterung eine lässliche Approximation zu sein, deren positive Wirkung die negative überwiegt (siehe auch Kapitel 7).



**Abbildung 4.15** – Veränderung des Detektionszeitpunkts durch Streuung. Die  $y$ -Achsen geben relative Amplituden an, die  $x$ -Achsen sind in Samples/ $(4 \cdot 10^{-7} \text{ s})$  angegeben. (a) zeigt den Transmissionspuls, (b) oben den an einem Streuer mit niedrigerer Schallgeschwindigkeit gestreuten Transmissionspuls, unten dasselbe für einen schnellen Streuer. (c) zeigt die gemessene Überlagerung von (a) und (b) und (d) zeigt einen Ausschnitt aus der Kreuzkorrelation von (a) mit (c). Die senkrechten Striche symbolisieren den Detektionszeitpunkt, der je nach Art des Streuers verschoben wird und ohne Streuung bei 0 läge.

## 4.4 Laufzeitdetektion mit endlichem Frequenzeinfluss

Die im letzten Abschnitt beschriebene Laufzeitdetektion fußt darauf, den exakten Ankunftszeitpunkt eines Signals zu bestimmen, der dann der Laufzeit eines Strahls von Sender zu Empfänger entspricht. Das ist nur dann möglich, wenn die ausgesandte Welle auch tatsächlich sehr hohe Frequenz besitzt. Dass dies für USCT nicht der Fall ist, wurde anhand der in Abschnitt 3.4 beschriebenen Grenze der Strahlapproximation deutlich. Dort wurde miteinbezogen, dass Streuung, ein Effekt endlicher Frequenz, Einfluss auf den Detektionszeitpunkt eines Transmissionspulses haben kann.

Dies erscheint zunächst nicht intuitiv, weil man annimmt, dass der Transmissionspuls stets der erste gemessene Puls sein muss. In der Praxis kann man jedoch wegen Rauschens nie den exakt ersten Ankunftszeitpunkt eines Pulses bestimmen, sondern detektiert innerhalb eines zeitlichen Fensters, wie beim Optimalfilter.

Mit Hilfe von Abbildung 4.15 kann verständlich gemacht werden, wie sich der Detektionszeitpunkt durch Streuung verändert. Ein gestreuter Puls, der noch innerhalb des Transmissions-Detektionsfensters eintrifft, verschiebt die Energie im Kreuzkorrelationsfenster und sorgt deshalb für eine leichte Verschiebung des Detektionszeitpunktes nach vorne oder nach hinten, je nach Art des Streuers. Wie in Abbildung 4.15 gezeigt, ist diese Interpretation der Signallaufzeiten eng mit dem Optimalfilter, also der

Kreuzkorrelation gekoppelt. Der Abschnitt folgt der Herleitung in [40]. Für andere Arten der Detektion wie einem First-Arrival-Detektor und auch der Bestimmung der Dämpfung muss man andere Herleitungen verwenden, gelangt aber zu ähnlichen Ergebnissen [40].

Sei  $u(t)$  ein A-Scan und

$$\gamma(t) = \int u(t')u(t-t') dt' \quad (4.3)$$

seine Autokorrelation. Die Verzögerungszeit wird als das Maximum der »beobachteten« Kreuzkorrelation  $\gamma_{\text{obs}}$  von  $u(t) + \delta u(t)$  mit  $u(t)$ , also dem veränderten A-Scan mit dem ursprünglichen, definiert

$$\gamma_{\text{obs}} = \gamma(t) + \delta\gamma(t) = \int (u(t') + \delta u(t')) u(t' - t) dt'. \quad (4.4)$$

Schränkt man das Korrelationsfenster passend ein, hat die Ableitung der Korrelation für einen unveränderten A-Scan ihr Minimum bei 0:

$$\dot{\gamma}(0) = 0. \quad (4.5)$$

Die beobachtete Kreuzkorrelation nimmt ihr Maximum genau an der Stelle  $t = \delta T$  an, so dass für die Taylor-Entwicklung ihrer Ableitung an dieser Stelle gilt

$$\dot{\gamma}_{\text{obs}}(\delta T) = \dot{\gamma}(\delta T) + \delta\dot{\gamma}(\delta T) = 0. \quad (4.6)$$

Hierbei wurden Terme zweiter Ordnung (siehe [40]) vernachlässigt. Danach kann man mit (4.4) und (4.5) die Verzögerung direkt ausdrücken:

$$\delta T = -\frac{\delta\dot{\gamma}(0)}{\ddot{\gamma}(0)} = -\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(t')\delta u(t') dt'}{\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{u}(t')u(t') dt'}. \quad (4.7)$$

Später wird noch nützlich sein, (4.7) im Fourierraum zu schreiben, weshalb dies hier vorweggenommen wird:

$$\delta T = -\frac{\Re \int_0^{\omega_{\text{max}}} i\omega u(\omega)^* \delta u(\omega) d\omega}{\int_0^{\omega_{\text{max}}} u(\omega)^* u(\omega) d\omega}, \quad (4.8)$$

wobei  $u^*$  die komplexe Konjugation bezeichnet.

An (4.8) wird deutlich, dass (Wellen-)effekte endlicher Frequenz den Detektionszeitpunkt verändern können. Dies ist ein fundamentaler Unterschied zur Strahlapproximation, bei der durch die unendliche Frequenz Streuung und Beugung keinen Einfluss haben.

## 4.5 Dämpfungs-/Absorptionsdetektion

Methoden und Grundlagen, die für dieses Kapitel verwendet wurden, sind auch in [RD.3] veröffentlicht.

Neben der Laufzeit des Ultraschallsignals kann mit den Mitteln der Transmissionstomographie auch die Dämpfung oder Absorption im untersuchten Gewebe geschätzt werden. Unter Absorption wird gewöhnlich der Teil des Energieverlusts eines Signals am Empfänger verstanden, der nicht durch Reflexion bedingt ist – sozusagen der Transmissionsteil des Energieverlusts. Dieser wiederum setzt sich zusammen aus verschiedenen Teileffekten, von denen die Umwandlung in Wärme für USCT-Ultraschallfrequenzen dominant ist.[61]. Diesen nennt man gemeinhin Dämpfung, findet aber auch die Bezeichnung Dissipation.

Tatsächlich messen kann man bei der Transmissionstomographie aber nur den Energieverlust eines Signals, so dass keine Gewissheit darüber herrscht, wie groß der Einfluss eines jeweiligen Teileffekts war. Laut [62] ist in Weichgewebe 60 - 90% der Absorption auf Dämpfung zurückzuführen, der Rest entfällt auf Streuung. Zuweilen werden die Begriffe *Dämpfung* und *Absorption* auch vertauscht – insbesondere in der deutschen Literatur hat sich noch keine einheitliche Sprechweise herausgebildet. Im Rest dieser Arbeit wird nur von Dämpfung die Rede sein, in Anlehnung an die Verwendung des englischen Begriffs *attenuation* in der Literatur.

Meist wird Dämpfung als Energieverlust oder Intensitätsverlust eines Signals beim Durchlaufen eines Mediums verstanden und modelliert. Nach dem Gesetz von Beer-Lambert stellt man den Intensitätsverlust durch Dämpfung in einem Medium folglich dar als

$$I = I_0 e^{-\alpha l}, \quad (4.9)$$

wobei  $l$  die Wegstrecke im Medium meint.  $\alpha$  ist der üblicherweise unbekannte *Dämpfungskoeffizient*, *attenuation coefficient*, den es bei der Schätzung der Dämpfung zu bestimmen gilt. Aus (4.9) ableitend, könnte man auch die Dämpfung der Amplitude als  $A = A_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha l}$  definieren. Je nach Quelle wird auf den Faktor  $\frac{1}{2}$  verzichtet. In dieser Arbeit wird ebenfalls  $A = A_0 e^{-\alpha l}$  verwendet, womit sich  $I = I_0 e^{-2\alpha l}$  ergäbe.

Bei obiger Definition (4.9) wurde die Frequenz noch ignoriert; die Dämpfung akustischer Signale ist aber mehr oder weniger stark frequenzabhängig. Die oben erwähnte Dissipation lässt sich, je nach Frequenz, in drei Teileffekte gliedern: viskose Dämpfung, molekulare Relaxation und Wärmeumwandlung. Für Ultraschall mit Frequenzen über 1 MHz ist die Wärmeumwandlung dominant [36].

Zwischen Frequenz und Dämpfungskoeffizient  $\alpha$  wird im Allgemeinen ein exponentieller Zusammenhang angenommen [63]:

$$\alpha = \beta f^k. \quad (4.10)$$

Für Weichgewebe ist  $k \approx 1$  [64], so dass man approximativ  $k = 1$  wählen kann. Damit gilt schließlich:

$$A = A_0 e^{-\beta f l}. \quad (4.11)$$

Somit ist der Zusammenhang zwischen  $f$  und  $\beta$  als linear fixiert und stellt eine Gerade im Frequenzraum dar; Interessant ist die Steigung dieser Geraden, die gerade von  $\beta$  angegeben wird. Es ist bekannt ([65], [61]), dass  $\beta$  als Diskriminante unterschiedlicher Gewebearten fungieren kann. Beispielsweise hat nach [61] mit 1,0-MHz-Ultraschall Fett einen Dämpfungskoeffizienten von  $\beta = 0,60$  dB/cm und Muskelgewebe  $\beta = 1,2$  dB/cm.

Dämpfungsdetektion mit Ultraschall wird seit den 1970er-Jahren untersucht. Maßgebliche Beiträge zum Stand der Forschung lieferte Kuc unter anderem in den Veröffentlichungen [66] und [67]. Oft untersuchtes Medium bei der Dämpfungsdetektion ist die menschliche Leber, da deren Dämpfungskoeffizient bei Krankheit starken Veränderungen unterworfen ist [68]. Kuc beschreibt beispielsweise die Übertragungsfunktion  $|H(f)|^2$  der Leber analog (4.9) als

$$|H(f)|^2 = e^{-4\pi f l}. \quad (4.12)$$

Im Gegensatz zur Schallgeschwindigkeitsdetektion ist es bei der Dämpfungsdetektion unerlässlich, eine entsprechende Leermessung zur Verfügung zu haben. Anders als bei der Detektion der Ankunftszeit hat nämlich beispielsweise die Abstrahlcharakteristik direkten Einfluss auf die Amplitude des am Empfänger gemessenen Signals und somit auf die Dämpfungsschätzung. Steht eine Leermessung zur Verfügung, kann man statt des eingesandten Pulses den entsprechenden, in der Wassermessung erhaltenen Puls zum Vergleich nutzen und somit implizit die Abstrahlcharakteristik kompensieren. Gleiches gilt für die geometrische Dämpfung oder normale Ausbreitungsdämpfung: diese Dämpfung erster Ordnung wird durch eine Leermessung ebenfalls implizit kompensiert und muss im Weiteren nicht mehr berücksichtigt werden.

## Detektionsmethoden im Frequenzraum

Die historisch zuerst untersuchten Methoden zur Bestimmung oder Schätzung der Signaldämpfung arbeiten im Frequenzraum [69], [70]. Sie machen sich stets die Eigenschaft der Dämpfung zunutze, dass hohe Frequenzen stärker gedämpft werden als niedrige.

Für die sogenannte **Spektralverschiebungsmethode**, *spectral shift method*, betrachtet man die durch diesen Effekt induzierte Verschiebung der Mittenfrequenz des empfangenen Pulsspektrums gegenüber dem unveränderten Ausgangspuls. Zu Beginn sei angemerkt, dass sich dieser Abschnitt vor allem auf Literatur stützt, die von der herkömmlichen Ultraschall-Bildgebung, also dem Puls-Echo-Verfahren ausgeht. Für USCT sind solche Algorithmen ebenso verwendbar, nur dass dabei keine Annahmen über das Rückstreuverhalten des Objekts getroffen werden müssen.

Wird ein Pulse (etwa ein Chirp, Abbildung 4.17) in ein Medium ausgesandt und gedämpft, verändert sich sein Spektrum: Ausgehend von der zu Beginn getroffenen Annahme, dass hohe Frequenzen stärker gedämpft werden, kann man eine Verschiebung der Mittenfrequenz beobachten. Siehe dazu ebenfalls Abbildung 4.17, die die Verschiebung der Mittenfrequenz mit einem sehr hohen Dämpfungskoeffizienten  $\beta = 30$  zeigt. Übliche Dämpfungskoeffizienten liegen zwischen 0 und 3 dB/cm/MHz, siehe etwa [71], zur Verdeutlichung wurde hier aber ein großes  $\beta$  gewählt. Die neue Mittenfrequenz bezeichnet man, [72] folgend, mit  $f_o$ . Die Übertragungsfunktion  $H$  des Mediums wird dann berechnet, indem man  $f_c$  und  $f_o$  voneinander abzieht.

Mit Hilfe der Übertragungsfunktion  $|H(f)|^2$  des Leistungsspektrums aus (4.12) schreibt man das empfangene Spektrum  $P_o$  als

$$P_o(f) = |H(f)|^2 P_i(f), \quad (4.13)$$

wobei

$$P_i = A_i e^{-\frac{(f-f_c)^2}{B^2}} \quad (4.14)$$

das anfängliche Spektrum sei. Dabei ist  $A_i$  eine Konstante wie in Unterabschnitt 4.1,  $f_c$  die Mittenfrequenz und  $B$  die Bandbreite.

Nach Einsetzen von (4.14) in (4.13) erhält man

$$P_o(f) = A_o e^{-\frac{f-(f_c-2\beta l B^2)}{B^2}}.$$

Hieraus ersieht man, dass die Mittenfrequenz  $f_c$  um  $f_o := 2\beta l B^2$  verschoben wird und kann ansetzen

$$\beta = \frac{(f_o - f_c)}{2l B^2}.$$

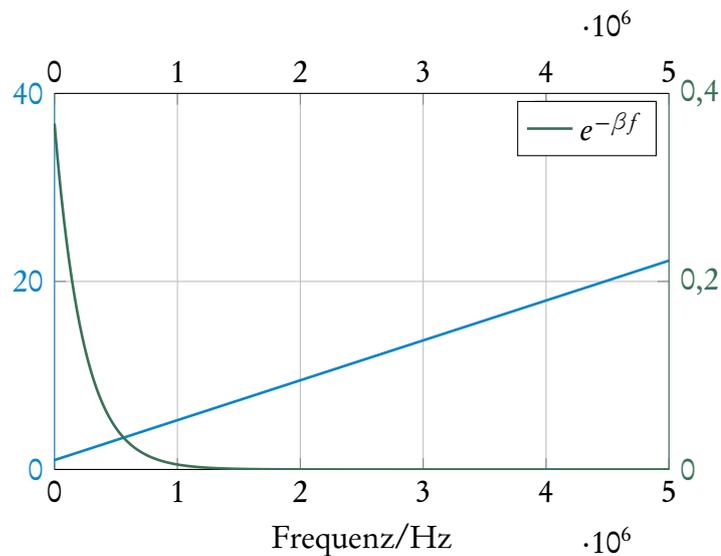
$\beta$  ändert sich also umso stärker, je mehr die »neue« Mittenfrequenz  $f_o$  von  $f_c$  abweicht. Grundannahme des Verfahrens war, dass das ausgesandte Spektrum  $P_i$  ein gaußförmiger Art ist. Dies muss nicht vollständig erfüllt sein, es genügt wenn in der Nähe der Mittenfrequenz genug Signalenergie vorhanden ist, so dass mit Hilfe eines Fits eine Gauß-Verteilung an das Spektrum angepasst werden kann [72]. Anschließend bestimmt man die neue, verschobene Mittenfrequenz. Die Differenz aus ursprünglicher und verschobener Mittenfrequenz steht wie gesehen in linearem Zusammenhang mit der Signaldämpfung.

Ähnlich geht man bei der **Spektraldifferenzmethode** vor. Führt man in (4.13) eine logarithmische Skala ein, gilt:

$$\log P_i(f) - \log P_o(f) = 4\pi\beta f l. \quad (4.15)$$

Auflösen nach  $\beta f$  ergibt:

$$\beta f = \frac{\log P_i(f) - \log P_o(f)}{4\pi l}. \quad (4.16)$$



**Abbildung 4.16** – Dämpfungsgerade und exponentielle Dämpfungsfunktion für  $\beta = 30$ . Ein mit dieser Funktion gedämpfter Chirp ist in Abbildung 4.17 zu sehen.

Dies stellt die vorher beschriebene Gerade dar, deren Steigung der Dämpfungskoeffizient  $\beta$  ist.

Normalerweise ist die rechte Seite von (4.16) für ein großes Frequenzband gegeben, so dass  $\beta$  recht einfach mittels Fit bestimmt werden kann. Mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate etwa kann direkt eine Gerade in gewählten Frequenzbereich angepasst und  $\beta$  berechnet werden. Daher gibt es gerade hier viele Stellschrauben, die das Detektionsergebnis beeinflussen. Unter anderem seien hier die Anzahl der gewählten Stützpunkte, das Frequenzband und die Fit-Methode genannt. Eine Untersuchung zu diesen Parametereinflüssen findet sich in [73].

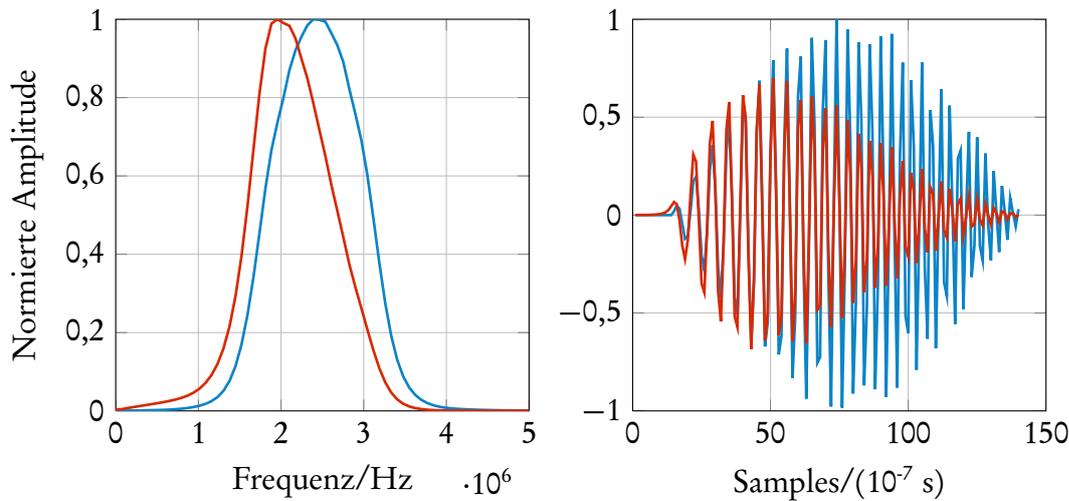
## Detektionsmethoden im Zeitbereich

Ähnlich wie beim Vorgehen im Frequenzraum wird auch im Zeitbereich das Verhältnis zweier Signale berechnet, woraus sich dann der Dämpfungskoeffizient ergibt.

Die in [74] vorgeschlagene Methode nutzt das sogenannte analytische Signal, das für ähnliche Zwecke auch in der Seismologie eingesetzt wurde [75]. Dieses ist ein Hilfsmittel in der Signalverarbeitung, das unter anderem die Berechnung der Einhüllenden vereinfacht. Für ein reellwertiges Signal  $u(t)$  ist das korrespondierende analytische Signal  $u^+$  definiert als

$$u^+(t) = u(t) + iH(u(t)), \quad (4.17)$$

wobei  $H(u(t))$  die Hilberttransformation von  $u(t)$  bezeichnet. Die (Amplituden-)Einhüllende des eigentlichen Signals kann damit per  $|u^+(t)| = \sqrt{u(t)^2 + H(u(t))^2}$  berechnet werden, siehe Abbildung 4.18.



**Abbildung 4.17** – Schematisches Amplitudenspektrum eines Chirps (blau) mit 2,5 MHz Mittenfrequenz und eines mit  $\beta = 30$  gedämpften Chirps (rot). Die Mittenfrequenz des gedämpften Chirps liegt etwa bei 1,9 MHz.

Nach [74] berechnet man die Signalenergie eines Pulses als Integral vom Startzeitpunkt  $t_s$  bis zum Endzeitpunkt  $t_e$ , die geeignet gewählt werden müssen:

$$\mathcal{E}_s = \int_{t_s}^{t_e} |u^+(t)|^2 dt. \quad (4.18)$$

Zur Bestimmung von  $t_s$  kann ein TOF-Algorithmus wie zum Beispiel ein Optimalfilter verwendet werden. Da die verwendete Pulsform und ihre Länge bekannt ist, genügt es, diese Länge zu  $t_s$  zu addieren, um  $t_e$  zu erhalten. Abbildung 4.18 zeigt  $t_s$  und  $t_e$  am Beispiel eines Chirps.

Um die Vergleichsenergie zu bestimmen, sollte, wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, möglichst eine Leermessung verwendet werden, die schon die geometrische Dämpfung enthält. Analog zu (4.18) berechnet man die Energie des entsprechenden Pulses der Leermessung  $\mathcal{E}_w$ . Auch dabei muss wieder der Anfangszeitpunkt des Pulses korrekt bestimmt werden.

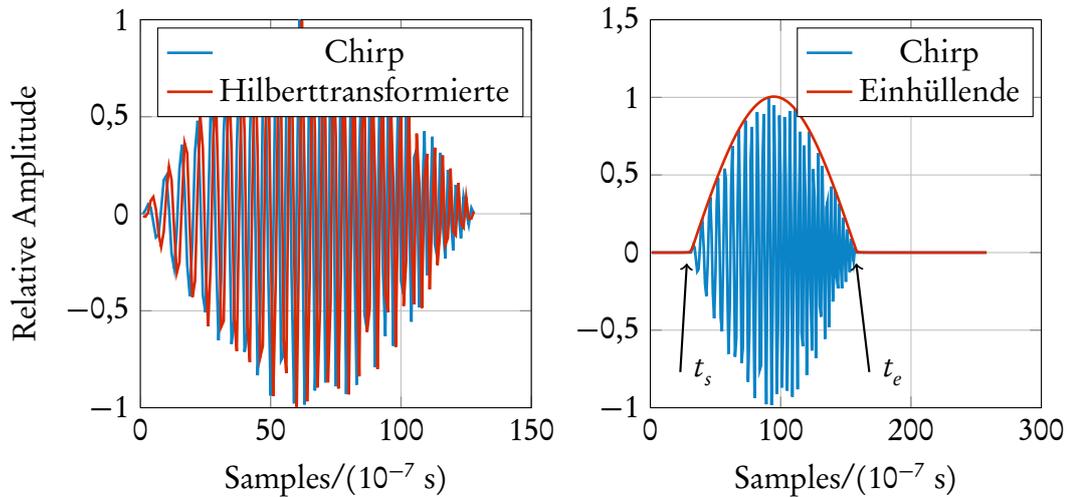
Aus (4.9) ergibt sich

$$-\beta l = \log \left( \frac{\mathcal{E}_s}{\mathcal{E}_w} \right).$$

Dieses  $\beta$  gibt die Dämpfung in Neper an. Für einen dB-Wert muss man  $\beta$  mit  $\frac{20}{\log(10)}$  multiplizieren.

[74] versuchen, die ignorierte Frequenzabhängigkeit bei dieser Methode durch

$$\beta l = \log_{10} \frac{\mathcal{E}_w}{\mathcal{E}_s} / f_n \quad (4.19)$$



**Abbildung 4.18** – Chirp mit 2,5 MHz Mittenfrequenz, Hilberttransformation (Chirp um  $\pi/2$  verzögert) und Einhüllende der Amplitude.  $t_s$  und  $t_e$  bezeichnen den zu bestimmenden Anfangs- und Endzeitpunkt des Pulses.

zu lindern, wobei  $f_n$  die halbe Abtastrate ist.

Die Berechnung der Energie (4.18) ist insgesamt eher phänomenologisch zu sehen. [74], [76] beschreiben zwar die Nutzung dieser Methode, jedoch wurde bisher nie ein Zusammenhang zum tatsächlichen Dämpfungskoeffizienten  $\beta$  hergestellt. Die Einhüllende kann einerseits als Approximation der Amplitude des Signals verstanden werden, andererseits wird durch die Integration im Zeitbereich immer über die Bandbreite des Pulses gemittelt. Duric weist selbst darauf hin, dass die Dämpfungswerte als relative Werte nutzbar sind [77].

Für den trivialen monochromatischen Fall  $u(t) = A \sin(2\pi f t)$  ergibt sich  $H(u(t)) = A \cos(2\pi f t)$ , so dass  $u^+(t) = A \sin(2\pi f t) + iA \cos(2\pi f t)$ . Damit ist

$$\mathcal{E}_s = \int |Au^+(t)|^2 = \int A^2 |\sin(2\pi f t)^2 + \cos(2\pi f t)^2| = A^2 \int 1 \quad (4.20)$$

und analog  $\mathcal{E}_w = A_0 \int 1$ . Mit (4.19) und nach der Definition der Dämpfung (4.11) erhält man  $\beta f l = \log\left(\frac{A_0}{A}\right)$ . Sobald aber  $u(t) \neq \sin(t)$ , ist  $H(u(t)) \neq \cos(t)$ , so dass der trigonometrische Zusammenhang (4.20) nicht mehr gegeben ist und die weiteren Schlüsse ebenfalls nicht mehr zulässig sind. Im Allgemeinen ist  $\beta$  dann zwar proportional zum Energieverhältnis (4.19) doch keineswegs linear. Zudem hängt das Verhältnis vom gewählten Signal  $u(t)$  ab.

Ist man nur an relativen Unterschieden interessiert, kann auch (4.19) genügen. Um einen tatsächlichen Dämpfungswert für einen A-Scan zu berechnen, kann man das korrespondierende Signal der Leermessung nach (4.11) für den infragekommenden Bereich von  $\beta$  (für Brustgewebe etwa 0-2 dB/cm/MHz) nach Gleichung 4.9 dämpfen und die sich mit (4.18) erhaltenen Werte in einer Tabelle speichern. Über eine Interpo-

SNR/(dB)	RMSE/(dB/cm/MHz)		
	SPEKTRALDIFF. $\beta = l \log(P_i/P_o)$	SPEKTRALVERSCH. $\beta = (f_o - f_c)/(2lB^2)$	ENERGIEVERHÄLTNIS $\beta = \log(\mathcal{E}_W/\mathcal{E}_S)/(f_n l)$
100	0,015	0,016	0,011
20	0,084	0,10	0,072
10	0,17	0,22	0,16
0	1,1	1,6	0,17
-10	5,0	5,6	0,80
-20	5,6	7,3	2,2
-30	6,4	7,9	4,3

**Tabelle 4.6** – RMSE des mit verschiedenen Methoden detektierten Dämpfungskoeffizienten für synthetische Daten mit verschiedenen Rauschniveaus.

lation in dieser Tabelle mit den gemessenen Energiewerten kann dann rückwärts auf den passenden Dämpfungskoeffizienten  $\beta$  geschlossen werden. Da dies aber für jeden Puls der Leermessung geschehen muss, ist ein solches Vorgehen nicht gerade effizient, verlangsamt in der aktuellen Implementierung die Detektion um einen Faktor drei und wurde nicht eingesetzt.

## Ergebnisse mit synthetischen Daten

Aus Mangel eines verlässlichen Phantoms wurden die Dämpfungsalgorithmen an simulierten Daten erprobt. Es wurde nur der realistische Fall mit winkelabhängiger Frequenz und frequenzabhängiger Dämpfung betrachtet. Als Rauschart wurde gemessenes USCT-Rauschen verwendet und, je nach gewähltem SNR, verstärkt auf die A-Scans addiert. Der Rest der Simulation basiert wie in Abschnitt 4.1 auf der in Abschnitt 5.3 vorgestellten Simulation. Die Dämpfung der A-Scans wurde mittels Gleichung 4.11 berechnet.

Tabelle 4.6 stellt die Fehler der betrachteten Algorithmen für A-Scans mit unterschiedlichem SNR dar. Wie zu erkennen ist, ist die Energie-Verhältnis-Methode am unempfindlichsten gegenüber Rauschen. Für die Mehrzahl der Echt Daten wurde nur diese Methode verwendet, weil sie sich auch dort als am stabilsten herausgestellt hat.

Ebenso wird in Tabelle 4.6 deutlich, dass auch für wenig Rauschen die detektierten Werte aller Methoden deutlich von den Referenzwerten abweichen. Dies ist ein Hinweis darauf, warum die meisten Ultraschallanwendungen, die Dämpfung benutzen, Dämpfungsschätzungen immer relativ zueinander betrachten und den tatsächlichen Dämpfungswerten weniger Beachtung schenken.

## 4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Detektionsverfahren für die Transmissionstomographie vorgestellt und die theoretische Grenze für die Genauigkeit des wichtigsten Algorithmus beschrieben. Verschiedene Algorithmen wurden für die USCT-Signaldetektion implementiert und mit Hilfe einer eigens entwickelten USCT-Simulation verglichen. Durch Verbindung des Optimalfilters mit dem Constant Fraction Discriminator wurde – mit synthetischen Simulationsdaten und USCT-Rauschen – bei einem SNR von 20 dB einen RMSE von 0,11 m/s erreicht. Das Optimalfilter liefert ohne Überabtastung einen RMSE von 0,50 m/s. Durch die kombinierte Detektionsmethode wird damit eine Genauigkeit ohne zusätzliche Laufzeit erreicht, die der des Optimalfilters mit zehnfacher Überabtastung gleicht.

Mit Hilfe der Cramér-Rao-Schranke konnte ein für USCT-Daten geeigneter Überabtastfaktor zehn bestimmt werden, mit dem sich die Genauigkeit der Detektion innerhalb einer Nanosekunde der Cramér-Rao-Schranke befindet.

Für die Detektion der Signaldämpfung wurden die relevanten Algorithmen der Literatur für USCT angepasst und implementiert. Die Energie-Verhältnis-Methode im Zeitbereich vernachlässigt zwar die Frequenzabhängigkeit, liefert aber dennoch den rauschunempfindlichsten Detektionsfehler von 0,072 dB/cm/MHz. Für echte Daten wurde diese Methode verwendet.

Alle Algorithmen wurden mit Hilfe einer generisch entwickelten Iteratorstruktur auf A-Scan-Ebene parallelisiert. Die Schallgeschwindigkeitsdetektion nimmt für circa neun Millionen A-Scans mit zwölf Prozessorkernen etwa 50 Minuten in Anspruch. Wegen der Trivialparallelisierbarkeit des Problems lässt sich die Detektionszeit mit der implementierten Software problemlos weiter senken.

Andere Gruppen wie [13] oder [78] beschreiben die Nutzung zusätzlicher relativer Informationen zwischen einzelnen Sendern und Empfängern. Vorläufige Implementierungen dieser Verfahren zeigten die Verwendbarkeit für USCT-Daten, wiesen jedoch eine vergleichsweise hohe Rechenzeit auf (Faktor 15 - 18 gegenüber der Optimalfilterdetektion). Die Detektionsergebnisse waren allerdings nicht deutlich besser als die der konventionellen Algorithmen, weshalb sie nicht in den Vergleich mitaufgenommen wurden.

# Kapitel 5 |

## 3D-Rekonstruktion für USCT

*Bescheidne Wahrheit sprech ich dir.  
Wenn sich der Mensch, die kleine Narrenwelt  
Gewöhnlich für ein Ganzes hält -*

— Johann Wolfgang von Goethe, Faust I

Dieses Kapitel behandelt die konkrete Rekonstruktion von 3D-Volumenbildern. Zunächst wird erörtert, welche Approximationen und Rekonstruktionsmethoden unter USCT-Rahmenbedingungen wie den Dimensionen des 3D-USCT II und den Eigenschaften der USCT-Wandler in Frage kommen. Danach werden Speicheranforderungen und Regularisierungen besprochen.

In Anhang C findet sich eine Übersicht alternativer Rekonstruktionsmethoden, die für USCT wegen der ellipsoidalen Geometrie nicht verwendbar sind, aber für andere Systeme verbreitet sind und deshalb der Vollständigkeit wegen erwähnt seien.

Bevor auf die Rekonstruktion für USCT eingegangen wird, enthält der kommende Abschnitt eine Verfeinerung des zu Beginn dieser Arbeit dargelegten Standes der Technik unter besonderer Berücksichtigung der Bildgebung.

### 5.1 Stand der Technik

Die beiden wichtigsten Gruppen, die schon eine Vielzahl klinischer Fälle untersucht haben, sind wie einführend erwähnt Delphinus Medical Technologies und Techniscan Medical Systems. Delphinus hat einen zweidimensionalen Aufbau mit stabförmigen Sendern/Empfängern, deren Frequenz- und Abstrahlcharakteristik annähernd einer zweidimensionalen Kugelwelle entspricht. Delphinus' CURE-Prototyp besitzt 256 dieser Elemente, die gleichmäßig auf eine Ring verteilt sind. Damit ergeben sich 66 000 verwendbare Sender-Empfängerpaare für eine zweidimensionale Schicht, die üblicherweise mit einer Auflösung von  $256 \times 256$  rekonstruiert wird.

Grundlage für die Transmissionstomographie bei Delphinus ist die Strahlapproximati-

on, das heißt die Vernachlässigung der Beugung. Zur Rekonstruktion der Transmissionsdaten wird ein numerischer Minimierungsalgorithmus, ein L-BFGS Quasi-Newtonverfahren mit Regularisierung verwendet. Die Brechung wird mit Hilfe der Eikonalgleichung einberechnet. Aktuell experimentiert Delphinus mit Multiskalenansätzen für Transmissionstomographie [79], [80].

[81] verwendet einen nichtlinearen Conjugate-Gradient-Algorithmus zur zweidimensionalen Ultraschallbildgebung der Brust mit Hilfe von Delphinus-Daten. Hormati wählt die Minimierung der Koeffizienten einer 2D-Wavelet-Basis als Regularisierer und nutzt einen *Back-Tracking-Line-Search*-Algorithmus zur Bestimmung der Schrittweite sowie die Fletcher-Reeves-Aktualisierungsformel [82].

Techniscan setzt auf einen zweistufigen Aufbau, bei dem die Reflexionsempfänger von den Transmissionsempfängern getrennt sind. Die Transmissionsempfänger sind kugelhakenförmig angeordnet und dem Ultraschallsender gegenüber angebracht. Die Reflexionsempfänger befinden sich im 90-Grad-Winkel links und rechts orthogonal zur Transmissions-Ausbreitungsrichtung. Auch diesem System fehlt die vollständige 3D-Information vor allem bei der Reflexion. Durch die Kugelhakenform der Empfangsvorrichtung wird für die Transmission ein recht großer Winkelbereich auch in 3D abgedeckt.

Techniscan veröffentlicht generell sehr wenig zu den verwendeten Verfahren und Techniken. In [83], [84] wird ersichtlich, dass zur Rekonstruktion der Transmissionsbilder ein mehrstufiges numerisches Optimierungsproblem definiert wird, das mit Hilfe eines nichtlinearen Conjugate-Gradient-Algorithmus gelöst wird. Zunächst werden einzelne Schichtbilder berechnet, die zusammengesetzt und gemeinsam als Anfangsschätzung für eine echte dreidimensionale Rekonstruktion verwendet werden.

Als Vorwärtsmodell nutzt Techniscan eine Abwandlung der Wellengleichung, die auf einer paraxialen Approximation beziehungsweise unidirektionalen Wellengleichung basiert. Diese besteht darin, die Wellenausbreitung primär in eine Richtung zu berechnen und Abweichungen in andere (orthogonal zur Ausbreitungsrichtung) nur begrenzt zuzulassen. Sie wird in der Seismologie schon seit Längerem auch im Zusammenhang mit dynamischem Raytracing angewandt [46].

Für die Reflexionsbilder wird sogenanntes Spatial Compounding von B-Scan-Daten genutzt. Zusätzlich zur nötigen Schallgeschwindigkeitskorrektur implementiert Techniscan auch eine Brechungskorrektur, beschreibt aber weder quantitativ noch qualitativ, inwiefern sich die Ergebnisbilder dadurch verändern.

Neben diesen praktisch orientierten Gruppen gibt es noch eine Reihe von Gruppen, die sich theoretischer mit dreidimensionaler Ultraschallbildgebung beschäftigen. Einige von ihnen, wie Mensah et al. [17] besitzen auch eigene Aufbauten, deren Untersuchungsobjekt allerdings nicht nur die menschliche Brust sondern allgemeinerer Natur ist, und die beispielsweise auch Knochenbildgebung vornehmen. Zur Rekonstruktion wird unter anderen der Backpropagation-Algorithmus [49] verwendet.

Theoretisch bedeutsam sind außerdem die Arbeiten von Simonetti, der vor allem zur Diffraktionstomographie publiziert, sich aber meist auf den zweidimensionalen Fall in-

nerhalb der Born-Approximation beschränkt. Einige Veröffentlichungen von Simonetti und Huthwaite nutzen Daten des Karmanos Cancer Institutes [85] und demonstrieren die praktische Einsetzbarkeit der vorher nur synthetisch gezeigten Methoden. In [86] begründet Simonetti die Notwendigkeit einer Schallgeschwindigkeitskorrektur für den SAFT-Algorithmus damit, dass die genutzte Born-Approximation für übliche Schallgeschwindigkeitsunterschiede in der Brustbildgebung nicht gültig ist. Dies bestätigt theoretisch die vorher von [87] und [88] praktisch gezeigten vorteilhaften Ergebnisse der Schallgeschwindigkeitskorrektur.

In einer neueren Veröffentlichung beschreibt [89] eine in dieser Art neue theoretische Sichtweise auf die Diffraktionstomographie, die die Beziehung zur Reflexionstomographie verdeutlicht: Durch Anwendung eines Frequenzraumfilters auf die Reflexionsdaten geht die Reflexionstomographie in die Diffraktionstomographie über. In grober Näherung kann auch das Ausschneiden des Transmissionspulses, das in der Vorverarbeitung der USCT-Reflexionstomographie vorgenommen wird, als ein solcher Filter verstanden werden. Dieser Zusammenhang und eine Schätzung der Schallgeschwindigkeit als Hintergrundmedium wird in der Veröffentlichung [86] genutzt, um zweidimensionale Echtdaten von Delphinus zu rekonstruieren. Die in dieser Arbeit vorgestellte Schallgeschwindigkeitskorrektur für USCT ist äquivalent.

Weitere theoretische Ergebnisse gibt es von van Dongen [90], [91], [92], der die akustische Wellengleichung mit iterativen Methoden löst. Dazu wird meist im Frequenzraum gearbeitet, was mit Hilfe der Linearität der Wellengleichung die Möglichkeit eröffnet, einzelne Frequenzen separat und damit parallel zu berechnen. Dennoch begrenzt das Nyquist-Kriterium und die verfügbare Rechenleistung solche Anstrengungen heutzutage noch auf den Frequenzbereich unter 1 MHz [42], [93].

Jiřík et al. [13] nutzen eine algebraische Rekonstruktionsmethode für die Transmissionstomographie. Zur Lösung des Gleichungssystems wird aber nicht wie üblich der Kaczmarz-Algorithmus verwendet, sondern ein Conjugate-Gradient-Algorithmus mit spezieller Regularisierung, die auf der Minimierung des diskreten Gradienten des zu rekonstruierenden Volumens beruht.

In der Seismologie werden sowohl die Strahlapproximation als auch die Born-, die Rytov- und die paraxiale Approximation benutzt. Für eine Rekonstruktionen auf Grundlage der Strahlapproximation wird oft der LSQR-Algorithmus verwendet, der dafür bekannt ist, sehr stabile Rekonstruktionen zu liefern, wenn  $\mathbf{M}$  eine hohe Konditionszahl hat [94].

## 5.2 USCT-Vorwärtsmodell

Ausgangspunkt für das Modell der Transmissionstomographie für USCT ist, in Anlehnung an die Seismologie und die algebraische Rekonstruktionsmethode [95], [96] der

folgende Ansatz:

$$\mathbf{b} = \mathcal{M}(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

wobei  $\mathbf{b}$  allgemein eine Menge von Messungen ist,  $\mathcal{M}$  ist ein Operator, der die Messung modelliert, also die Überführung des zu messenden Objekts in Messdaten beschreibt und  $\mathbf{x}$  ein gemessenes Objekt. Ist der Mess-Operator  $\mathcal{M}$  linear, kann man ihn in Matrixform  $\mathbf{M}$  schreiben – diese Matrix wird *Messmatrix* genannt. Weil sie den zeitlichen vorwärts ablaufenden Messprozess beschreibt, nennt man sie auch *Vorwärtsmodell* oder *Messmatrix*. Dies steht im Gegensatz zur Rekonstruktion eines unbekanntes Objekts aus den Messdaten, die gewissermaßen rückwärts abläuft und deshalb auch *inverses Problem* genannt wird. Wegen der nötigen Diskretisierung, durch die vektorwertige Größen und ortsabhängige skalare Größen zusammenfallen, sind ab diesem Abschnitt Vektoren und Matrizen fett gesetzt, Skalare normal.

Für USCT stellt  $\mathbf{M}$  die Wellengleichung oder eine ihrer Approximationen dar. Welche als Vorwärtsmodell für USCT in Frage kommen, wird im folgenden Abschnitt besprochen.

## Komplexität verschiedener Vorwärtsmodelle

In Abschnitt 3.1 wurden die Ultraschallausbreitung im akustischen Medium und verschiedene Approximationen beschrieben. Wie bereits angerissen, besteht keine einfache und effiziente Möglichkeit, das komplette Ultraschallfeld zu berechnen, wenn man von der numerischen Berechnung absieht [93]. Ein solches numerisches Verfahren ist im Frequenzraum zwar vergleichsweise einfach zu parallelisieren, doch sorgen die Diskretisierungsvoraussetzungen, die vom Nyquist-Kriterium diktiert werden, für erheblichen Berechnungsaufwand:

Nimmt man für die Schallgeschwindigkeit in Wasser  $c = 1500$  m/s an, ergibt sich für 5 MHz Maximalfrequenz (siehe Abschnitt 2.3) eine Wellenlänge von 0,30 mm. Bei einem Durchmesser von 26 cm erhält man so eine nötige Diskretisierung von  $1700 \times 1700 \times 1100$  Voxeln. Dies ist selbst für aktuelle Großrechner eine Herausforderung, weshalb etwa [42] mit einer Maximalfrequenz von  $< 300$  kHz rechnen.

In der Geologie und Seismologie werden seit einigen Jahren vermehrt Zeitbereich-Methoden genutzt, um die Wellengleichung zu simulieren. Mittlerweile weitverbreitet ist die sogenannte Methode der spektralen Elemente, die die Allgemeingültigkeit finiter Elemente mit der Genauigkeit spektraler Methoden kombiniert [97]. [98] beschreiben ein mit der Software SPECFEM3D [97] berechnetes seismologisches Bohrloch-Modell der Dimension  $200 \times 120 \times 120$  m<sup>3</sup>, dessen höchste darstellbare Frequenz 3 kHz bei einer Elementgröße von  $1 \times 1 \times 1$  m<sup>3</sup> beträgt. Würde man den 3D-USCT II um den Faktor 1000 vergrößern, hätte er ähnliche Dimensionen:  $260 \times 260 \times 200$  m<sup>3</sup> und damit etwa um den Faktor fünf mehr Unbekannte als das seismologische Modell.

Ebenfalls skaliert würde dann die Mittenfrequenz von 2,5 MHz auf 2,5 kHz und läge im gleichen Bereich wie im seismologischen Modell. Weiterhin unterscheidet sich

	$V/m^3$	$c_{\max}/(m/s)$	$\omega_{\max}/MHz$	$n$	Zeit pro Schallquelle
USCT	14E-3	1500	5	1,2E7	320 h
Seismologie	4,8E6	6000	0,0030	5E4	1 h

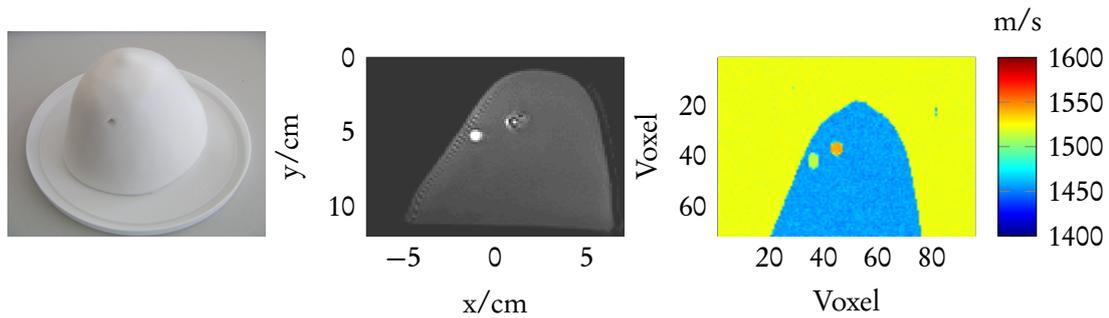
**Tabelle 5.1** – Kenngrößen zur Diskretisierung und numerischen Berechnung von Schallfeldern für USCT und in der Seismologie.

die typische Schallgeschwindigkeit bei USCT von 1500 m/s von den 6000 m/s, die im seismologischen Modell in [98] verwendet werden. Da die Wellenlänge von der Schallgeschwindigkeit per  $\lambda = c/f$  abhängig ist, ist bei USCT die Wellenlänge ca. um einen Faktor vier kleiner. Die Anzahl  $n$  der nötigen Abtastpunkte skaliert daher mit  $n = \frac{V}{\Delta x^3}$ . Dabei ist  $\Delta x \geq 2\lambda = 2 \frac{c_{\max}}{\omega_{\max}}$ , wenn man mindestens zwei Abtastpunkte pro Wellenlänge annimmt. Für USCT ist die Schallgeschwindigkeit vier mal geringer als im seismologischen Modell. Sie geht kubisch in die Anzahl der Unbekannten ein und man erhalte insgesamt für das USCT-Modell  $5 \times 4^3 = 320$  mal mehr Unbekannte als beim seismologischen Modell. Die Rechenzeit für eine Quelle im seismologischen Modell lag im Stundenbereich [99] – ein derartiges Modell liegt also auch mit seismologischen Verfahren unter USCT-Bedingungen, für 628 Sender pro Aperturposition, außer Berechnungsreichweite. In Tabelle 5.1 sind die gerade erwähnten Eigenschaften nochmals tabellarisch zusammengefasst.

Im Hinblick auf eine für den klinischen Alltag realistische Rekonstruktionszeit (höchstens Stunden) lässt sich konstatieren, dass gegenwärtig für USCT eine exakte dreidimensionale Lösung der Wellengleichung unmöglich ist. Auch die Born- oder Rytovapproximation sind auf aktueller Hardware nicht schnell berechenbar [39].

Die nächste, der Rechenzeit nach weniger aufwendige Approximation, ist die Eikonallstrahlapproximation. Pro Aperturposition für alle Sender und Empfänger kann sie mit Hilfe eines Fast-Marching-Algorithmus in etwa einem Tag berechnet werden. Die einfache Strahlapproximation benötigt für sämtliche Sender und Empfänger einer Aperturposition etwa eine Stunde. Für die USCT-Rekonstruktion wird deshalb primär die *Strahlapproximation*, aber auch die Eikonallstrahlapproximation verwendet und im folgenden Kapitel konkret in Matrixform dargestellt.

Wichtig ist das Vorwärtsmodell aber auch zur Erzeugung verlässlicher Simulationsdaten. Eine Simulation für die Transmissionstomographie muss das Vorwärtsproblem (5.1) lösen und mit Hilfe des Vorwärtsmodells aus einem vorgegeben Schallgeschwindigkeits- oder Dämpfungsvolumen A-Scans erzeugen, die zu diesem Volumen passen. Je genauer eine solche Simulation, desto besser können Approximationen beim inversen Problem, der Bildrekonstruktion, identifiziert und quantifiziert werden. Da für die Rekonstruktion die Strahlapproximation verwendet wird, sollte die Simulation mindestens ebensogut approximieren.



**Abbildung 5.1** – Triple Modality Biopsy Brustphantom der Firma CIRS Inc, USA (links). MRT-Schichtbild des Phantoms (Mitte) und segmentiertes und mit Schallgeschwindigkeiten versehenes synthetisches Phantom (rechts).

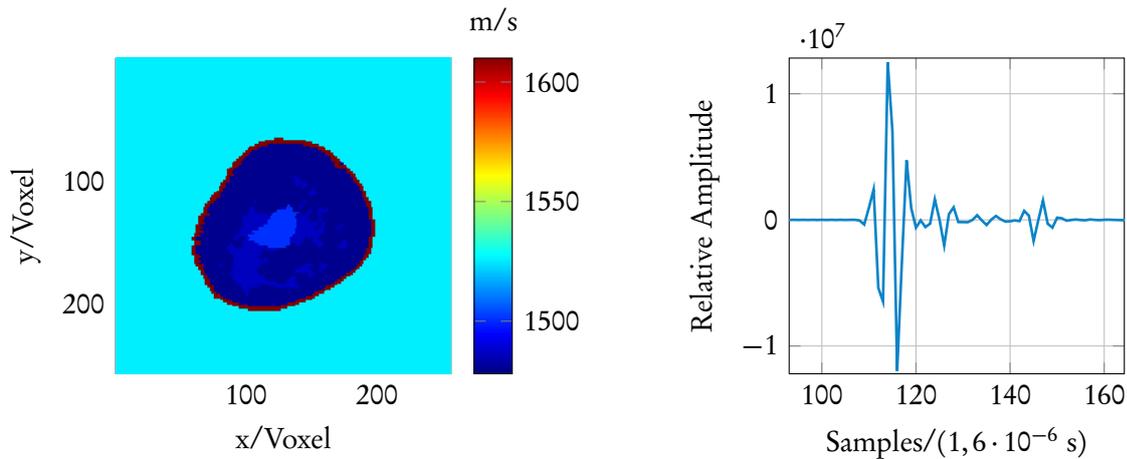
## 5.3 Simulation

Aus den vorgenannten Gründen wird in dieser Arbeit eine zweigleisige Strategie für die Erzeugung synthetischer Transmissionsdaten verfolgt: Einerseits wird eine dreidimensionale Simulation auf Basis der Eikonal-Gleichung verwendet um beispielsweise die Anzahl der nötigen Aperturpositionen, den Einfluss von Brechung und die Rauschabhängigkeit abzuschätzen. Andererseits wird eine zweidimensionale, vollständige Simulation der Wellengleichung genutzt, die es erlaubt, den Einfluss von Streuung, Mehrfachstreuung und den Unterschied zur Eikonal-Approximation zu untersuchen. Diese Diffraktionssimulation wurde freundlicherweise von Koen van Dongen, TU Delft, zur Verfügung gestellt.

### Eikonal-Simulation

Für die Simulation wird zunächst eine geeignete Diskretisierung vorgegeben, die von der Rekonstruktionsdiskretisierung abhängt. Weil die höchste für die Rekonstruktion verwendete Auflösung bei  $128 \times 128 \times 96$  Voxeln liegt, wird für die Simulation  $256 \times 256 \times 200$  Voxeln verwendet, also etwa acht mal mehr Voxel als bei der Rekonstruktion. Dies entspricht einer Auflösung von  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$ .

Abbildung 5.1 (links) zeigt ein Brustphantom der Firma CIRS Inc., USA, das Brustgewebe nachbildet. Es enthält verschiedene Läsionen, die unterschiedliche Schallgeschwindigkeit und Dämpfung besitzen. Für die synthetische Simulation wurde eine MRT-Rekonstruktion des Phantoms verwendet, die im Universitätsklinikum Jena mit einem 3-Tesla-MRT durchgeführt wurde. Die örtliche Auflösung betrug  $0,67 \text{ mm}^3$ . Das MRT-Volumen wurde auf die Simulationsauflösung von  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  interpoliert. Wegen der Homogenität des Phantoms konnte die Segmentierung mit Hilfe eines einfachen Schwellwerts durchgeführt werden. Da die MRT aber keine Schallgeschwindigkeitsinformation liefert, wurden die Läsionen mit Hilfe eines Region-



**Abbildung 5.2** – 2D-Diffraktionsphantom (links) und Ausschnitt eines simulierten A-Scans mit Transmissions- und Reflexionspulsen.

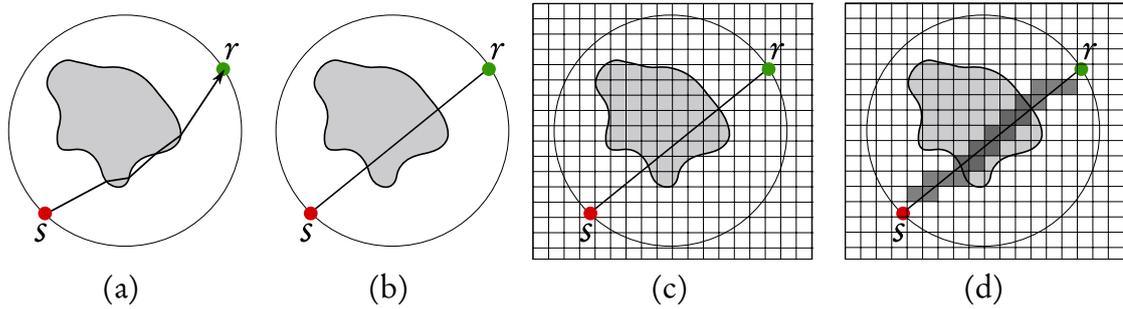
Growing-Algorithmus mit Schallgeschwindigkeits- und Dämpfungswerten versehen. Eine genaue Aufstellung der Größe und Werte der Läsionen findet sich in Kapitel 7.

Zur Berechnung der mittleren Schallgeschwindigkeit, also des Laufzeitunterschiedes, und Dämpfung wurden entlang des von der Eikonal-Gleichung vorgegebenen Weges die Einträge in den getroffenen Voxeln aufsummiert. Der Weg und die getroffenen Voxelsegmente wurde per exakter dreidimensionaler Strahlverfolgung berechnet. Danach wurden die Ergebnisse in A-Scans eingetragen, die mit 20 MHz diskretisiert wurden.

## 2D-Diffraktionssimulation

Für die Simulation der zweidimensionalen Wellengleichung wurde eine Geometrie vorgegeben, die dem obersten Ring des 3D-USCT II entspricht. Allerdings wurden statt der tatsächlichen Sende- und Empfangspositionen 128 auf dem Ring gleichverteilte Elemente gewählt, die sowohl als Sender als auch als Empfänger fungieren. Damit stehen auf jeden Fall genug Sender und Empfänger zur Verfügung, dass nicht die Geometrie als auflösungsbegrenzend wirkt und die Effekte, die die Rekonstruktion beeinflussen, werden ohne Beeinträchtigung abgebildet. Die Sender sind außerdem perfekte Punktstreuer mit gleichmäßiger Frequenzcharakteristik in alle Richtungen.

Die Zeitauflösung betrug  $dt = 1,6E-6$  s für 396 Zeitschritte, die räumliche Auflösung  $dx = 1,2$  mm für  $256 \times 256$  Pixel. Es wurde mit einer Frequenz von 160 kHz gerechnet. Eine Einschränkung der Simulation ist, dass keine Dämpfung und andere frequenzabhängigen Effekte berücksichtigt.



**Abbildung 5.3** – Schemata der Strahlapproximationen: (a) Gebrochene Strahlen (mit der Eikonal-Gleichung berechnet), (b) einfache Strahlapproximation, (c) diskrete einfache Strahlapproximation mit exakter Strahlverfolgung und (d) diskrete einfache Strahlapproximation mit diskreter Strahlverfolgung.

## 5.4 Vorwärtsmodell unter der Strahlapproximation

Nach dem vorherigen Abschnitt bietet sich wegen des vergleichsweise geringen Rechenaufwands als Vorwärtsmodell für USCT nur die Strahlapproximation an. Die verschiedenen »Approximationsstufen« der Strahlapproximation sind in Abbildung 5.3 – der Komplexität nach sortiert – schematisch gegenübergestellt.

In Abschnitt 3.3 wurde erläutert, dass es für eine Linearisierung der Signallaufzeiten von Sender zu Empfänger auch bei der Strahlapproximation nötig ist, die Brechung zu vernachlässigen. Man beginnt also bei der in Abbildung 5.3 (b) dargestellten Situation.

Ohne Brechung ist (3.35) exakt, also

$$t = \int_R s(\mathbf{x}) dl = \int_R \frac{1}{c(\mathbf{x})} dl,$$

wobei  $R$  den Weg von Sender zu Empfänger symbolisiert.

Diskret (Abbildung 5.3 (c)) kann man dieses Wegintegral schreiben als

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{c_i} l_i, \quad (5.2)$$

wobei  $c_i$  die Schallgeschwindigkeit im  $i$ -ten getroffenen Voxel und  $l_i$  die Länge des Strahls in diesem Voxel repräsentieren.  $k$  ist die diskrete Weglänge, das heißt die Anzahl der durchlaufenen Voxel,  $l := \sum l_i$  sei die undiskretisierte Weglänge.

Die Diskretisierung legt ein diskretes Volumen mit  $n$  Elementen fest, das wiederum das Vorwärtsmodell bestimmt. (5.2) expandiert man zu

$$t = l_1 \frac{1}{c_1} + l_2 \frac{1}{c_2} + \dots + l_k \frac{1}{c_k}. \quad (5.3)$$

$m$  Gleichungen der Form (5.3) ergeben ein lineares System

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}}_{\mathbf{t}} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & l_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} \\ \frac{1}{c_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{c_n} \end{pmatrix}}_{\mathbf{s}}. \quad (5.4)$$

Dieses System  $\mathbf{t} = \mathbf{L}\mathbf{s}$ , im Weiteren  $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}$  stellt das zu lösende Problem der USCT-Transmissionstomographie dar.  $\mathbf{M}$ , also die Weglänge ist nur durch die Geometrie gegeben und ändert sich für den 3D-USCT II nicht.  $\mathbf{b}$  wird durch die Messung erzeugt und das unbekannte 3D-Volumen  $\mathbf{x}$  gilt es in der Rekonstruktion zu berechnen. Das Rekonstruktionsproblem für die Dämpfung stellt sich genauso dar, nur dass  $\mathbf{b}$  jetzt keine Laufzeiten sondern die Gesamtdämpfung enthält und man mit  $\mathbf{x}$  die mittlere Dämpfung pro Voxel rekonstruiert. Die Diskretisierung und die Dimensionen des Problems werden in Abschnitt 5.5 untersucht, vorher wird aber auf eine weitere Approximation eingegangen.

## Diskretisierung der Weglänge

In Abbildung 5.3 (c) und (d) sind zwei verschiedene Diskretisierungsweisen gezeigt. (c) stellt die exakten Achsenabschnitte oder Voxelsegmente dar (vergleiche Abbildung 5.4 für eine 2D-Veranschaulichung), in (d) nimmt an, dass die Weglänge in jedem Voxel mit  $l_i = 1$  approximiert werden kann.

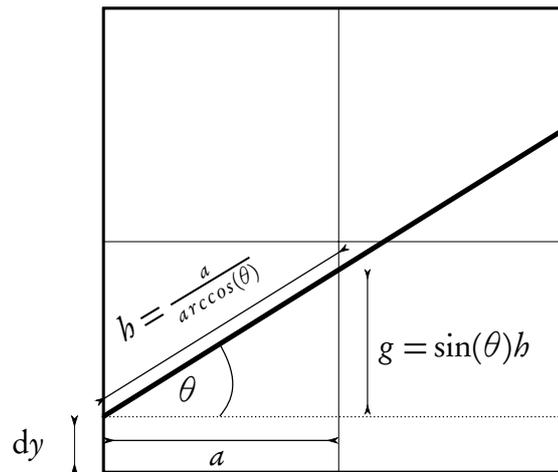
Damit wird aus (5.2)

$$t = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{c_i} l_i \approx k \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{c_i}. \quad (5.5)$$

Die Berechnung des exakten Wegpfades durch ein Voxelgitter nimmt sehr viel Zeit in Anspruch, weil für die Berechnung jedes Schnittpunkts mit dem Gitter auf trigonometrische Funktionen zurückgreifen muss (siehe Abbildung 5.4). Geht man approximativ davon aus, dass jeder Strahl ein Voxel mit der gleichen Länge durchläuft, kommt man ohne trigonometrische Funktionen aus und erzielt für die USCT-Geometrie eine Beschleunigung um einen Faktor zehn. Diese Approximation wird im Weiteren *Weglängenapproximation* genannt.

## 5.5 Diskrete Modellierung des USCT

Die in gewissem Sinne natürlichste Einschränkung bei der Repräsentation eines physikalisch-kontinuierlichen Systems auf einem Computer ist eine zeitliche und örtliche



**Abbildung 5.4** – Nötige Berechnungen für die exakte Strahlverfolgung in einem diskreten zweidimensionalen Gitter. Der Strahl beginnt auf der  $y$ -Achse mit Achsenabschnitt  $dy$ . Es muss sowohl seine Länge ( $h$ ) als auch der nächste Achsenabschnitt ( $g$ ) mit trigonometrischen Funktionen berechnet werden.

Fensterung und Diskretisierung. Beide spielen für das Vorwärtsmodell eine Rolle: Die Fensterung bestimmt den Raum und die Zeit, in dem das modellierte System operiert und mit dem Objekt interagiert, die Diskretisierung die Auflösung oder Genauigkeit des modellierten Objekts.

Im Falle von USCT ist die Festlegung der örtlichen und räumlichen Fensterung verhältnismäßig einfach, da sie durch den Messaufbau weitgehend gegeben ist. Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, werden Signale  $300 \mu\text{s}$  lang nach Emittieren aufgezeichnet. Hieraus und aus der festen Abtastrate von  $10 \text{ MHz}$  ergibt sich eine Zeitdiskretisierung von  $0,10 \mu\text{s}$  im Bereich von  $0$  bis  $300 \mu\text{s}$ .

Potentiell kann mit obiger Formulierung (5.1) jedes Element des Messvolumens Einfluss auf eine Messung haben. Dies motiviert den grundlegenden Aufbau der Messmatrix  $\mathbf{M}_{ij}$ . Die Anzahl der Elemente im Messvolumen ist durch die Diskretisierung gegeben: Jede Zeile  $i$  der Messmatrix enthält  $n = n_x n_y n_z$  Elemente, wobei  $n_x, n_y, n_z$  die Diskretisierungsgrößen eines vorgegebenen Volumens sind. Als Volumen kann beispielsweise ein den USCT umschließender Quader oder eine 2D-Schicht desselben genutzt werden.

Jedes Element einer Zeile  $i$   $m_{ij}$  entspricht einem Pixel oder Voxel, das heißt einem Volumenelement des diskretisierten Volumens. Die Indizierungsreihenfolge kann beliebig gewählt werden, darf aber nicht von Zeile zu Zeile variieren, so dass eine Spalte  $j$  von  $\mathbf{M}$  stets ein einziges Volumenelement  $(x, y, z)$  repräsentiert.

Die Werte, die ein Matrixeintrag  $m_{ij}$  annehmen kann, sind ausschließlich vom Vorwärtsmodell bestimmt. Jede Zeile  $i$  ist einer Messung zugeordnet, wird also derart befüllt, wie diejenige Messung im momentanen Vorwärtsmodell mit dem Volumen interagiert. Insgesamt gibt es  $m$  Messungen, das heißt Zeilen in  $\mathbf{M}$ .

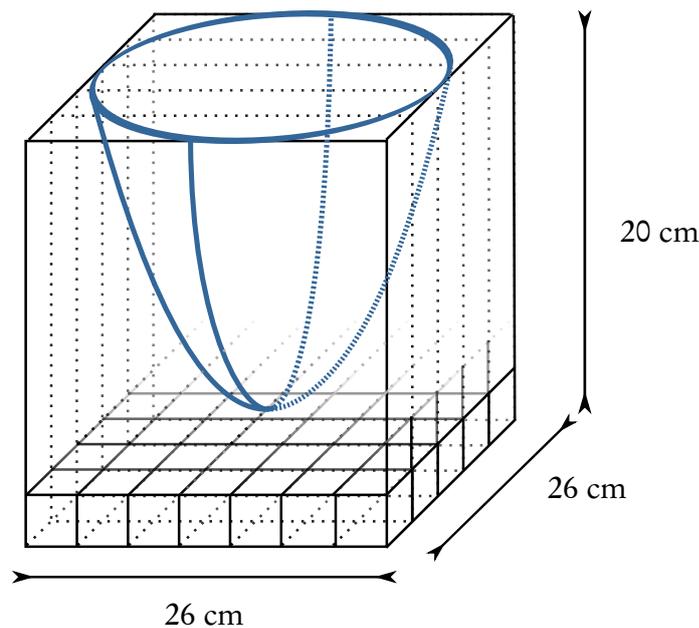


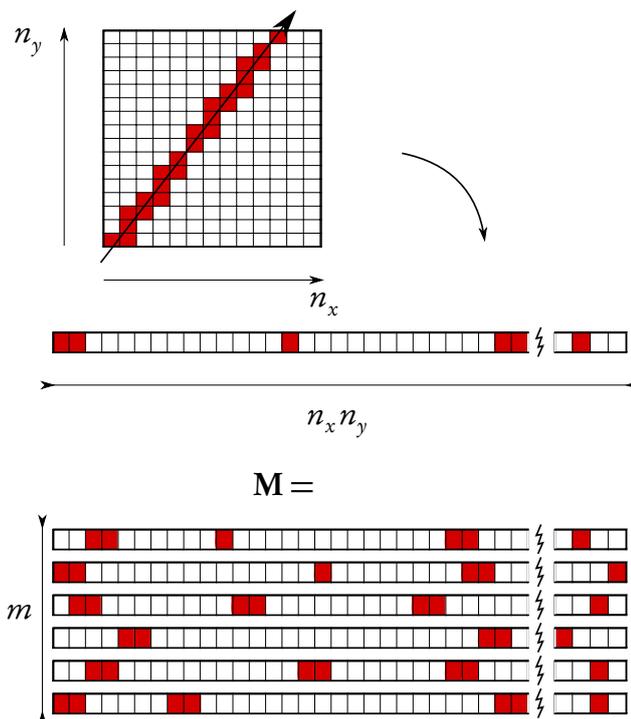
Abbildung 5.5 – Schema der Diskretisierung des 3D-USCT II.

Im einfachsten Strahlenmodell, der Strahlapproximation ohne Brechung mit Weglängenapproximation, siehe Abbildung 5.3 (d), das auch der algebraischen Rekonstruktionstechnik (ART) zugrundeliegt [95], wird pro Messung  $i$  ein Strahl minimaler Dicke von Sender zu Empfänger verfolgt. Dabei wird die Weglängenapproximation genutzt, die besagt, dass ein Volumenelement entweder ganz oder gar nicht getroffen wird und somit jedes getroffene Element  $m_{kl}$  wird mit 1 markiert. Die übrigen Werte der Zeile  $i$  sind identisch 0, siehe Abbildung 5.6.

## Problemdimensionen

Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, zeichnet der 3D-USCT II 887364 A-Scans für eine Position der Apertur auf. Der Messellipsoid des 3D-USCT II hat die Abmessungen  $0,26 \text{ cm} \times 0,26 \text{ cm} \times 0,17 \text{ cm}$ . Mit einem möglichen Hub von  $3 \text{ cm}$  ergeben sich maximal  $0,26 \text{ cm} \times 0,26 \text{ cm} \times 0,20 \text{ cm}$ . Zur Rekonstruktion werden vier verschiedene Auflösungen verwendet,  $32 \times 32 \times 24$ ,  $64 \times 64 \times 48$ ,  $96 \times 96 \times 72$  und  $128 \times 128 \times 96$ . Die Auflösungen wurden so gewählt, dass die Voxelgröße annähernd isotrop ist, wie in Tabelle 5.2 gezeigt. Nach Abschnitt 3.4 beträgt die Breite der Fresnel-Zone, also die untere Auflösungsschranke für strahlbasierte Verfahren,  $1,2 \text{ cm}$ . Damit ergibt sich eine nötige Diskretisierung von  $22 \times 22 \times 17$ . Da diese Schranke aber nur den schlechtesten Fall angibt, wurde als höchste Auflösung  $128 \times 128 \times 96$  gewählt. Diese ist um einen Faktor fünf höher aufgelöst als die geringste Auflösung.

Die Diskretisierung bestimmt auch die Anzahl der Unbekannten, also die Voxel im Rekonstruktionsvolumen, die Messungen sind die mit der Signaldetektion aus den



**Abbildung 5.6** – 2D-Beispiel zum Eintragen der von einem Strahl getroffenen Voxel in die lineare Darstellung eines Volumens. Jede Messung trifft unterschiedliche Voxel im Volumen (oben, rot markiert), die dann in eine linearisierte Repräsentation des Volumens eingetragen werden (unten). Jede der  $m$  Zeilen von  $\mathbf{M}$  stellt eine solche linearisierte Repräsentation dar, weil potentiell jedes Voxel auf die Messung Einfluss haben kann.

A-Scans gewonnenen Schallgeschwindigkeiten oder Dämpfungskoeffizienten. Da nach dem vorigen Abschnitt die Messmatrix  $\mathbf{M}$  eine Größe von #A-Scans  $\times$  #Voxel hat, ergibt sich für 887364 A-Scans und die kleinste Auflösung von  $32 \times 32 \times 24$  eine Matrixgröße von  $887354 \times 24576$ . Dies sind 21807857664 Matrixeinträge und bei 8 Bytes pro Eintrag schon etwa 162 GB Speicher.

Glücklicherweise ist die Matrix, wie in Abbildung 5.6 gezeigt, sehr dünn besetzt, weil ein Strahl stets nur wenige Voxel des gesamten Volumens trifft. In einem Sparse-Matrix-Datenformat kann man dann nur diejenigen Voxel speichern, die von Null verschieden sind. Empirisch hat sich für die Geometrie des 3D-USCT II ergeben, dass im Mittel die Länge eines Strahls 70% der größten Dimension einer Auflösung beträgt. Das entspricht beispielsweise für die Auflösung  $96 \times 96 \times 72$  einer mittleren Strahllänge von 67 Voxeln. Damit ist es möglich, eine realistischere Abschätzung des Speicherbedarfs zu treffen. Eine Übersicht über so erhaltene Matrixgrößen im CSC-Format zeigt Tabelle 5.3. Das CSC-Format ist ein bekanntes Format zur Speicherung von dünn besetzten Matrizen [100].

Empirisch hat sich die zweitgrößte Auflösung  $96 \times 96 \times 72$  als am geeignetsten für die Rekonstruktion erwiesen. Siehe dazu die Untersuchung in Unterabschnitt 6.2.

AUFLÖSUNG/(VOXEL <sup>3</sup> )	VOXEL-KANTENLÄNGE/MM	VOXELZAHL
32 × 32 × 24	8,1 × 8,1 × 8,3	24576
64 × 64 × 48	4,1 × 4,1 × 4,2	196608
96 × 96 × 72	2,7 × 2,7 × 2,8	663552
128 × 128 × 96	2,0 × 2,0 × 2,1	1572864

**Tabelle 5.2** – Voxelgröße und Voxelanzahl verschiedener USCT-Auflösungen.

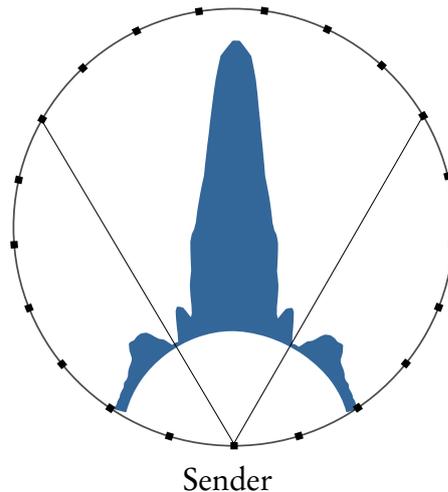
AUFLÖSUNG	SPEICHERBEDARF/MB				
	APERTURPOSITIONEN				
	1	2	4	8	16
32 × 32 × 24	156	311	622	1245	2491
64 × 64 × 48	304	609	1218	2437	4878
96 × 96 × 72	460	920	1841	3682	7365
128 × 128 × 96	609	1218	2437	4874	9748

**Tabelle 5.3** – Matrixgrößen in MB im CSC-Sparse-Format für unterschiedliche Auflösungen und Anzahl Aperturpositionen in MATLAB.

**Abstrahlcharakteristik der Wandler** Erschwerend für die Rekonstruktion kommt hinzu, dass keineswegs sämtliche 887354 Sender- und Empfängerpaare pro Aperturposition für die Transmissionstomographie nutzbare Signale enthalten. Der Grund liegt in der in Unterabschnitt 4.1 besprochenen Abstrahlcharakteristik der Wandler. Schematisch dargestellt ist deren Einfluss in Abbildung 5.7.

Wie dort zu sehen, gibt es pro Sender nur einen schmalen Bereich nutzbarer Empfänger. Im allgemeinen sind das diejenigen, die dem Sender gegenüber liegen. Bei den anderen A-Scans verschlechtert sich das SNR deutlich ( $< -15$  dB), so dass keine zuverlässige TOF-Schätzung mehr möglich ist. Für alle später gezeigten Rekonstruktionen wird deshalb nur eine Untermenge aller möglichen Paare verwendet. Diese wird anhand des Winkels zwischen Sendernormale und Sender-Empfänger-Richtung und umgekehrt zwischen Empfängernormale und Empfänger-Sender-Richtung selektiert. Insgesamt führt dies zu einer wesentlich reduzierten Anzahl Daten:

Für eine Aperturposition gibt es insgesamt 887354 Sender-Empfänger-Paare. Wählt man alle Paare, deren gemeinsame Amplitude höher als 30% der maximalen Amplitude liegt, reduziert sich die Zahl der Messungen auf 174049. Dies ist nur noch etwa ein Fünftel der ursprünglichen Datenmenge. Durch diese Einschränkung reduziert sich zwar der Speicherbedarf für die Messmatrix  $\mathbf{M}$ , gleichzeitig muss man aber auch mit weniger Messungen für die gleiche Zahl an Unbekannten auskommen.



**Abbildung 5.7** – Schematische Darstellung der winkelabhängigen Abstrahlcharakteristik eines 3D-USCT-II-Wandlers. Die Kurve gibt die mögliche Amplitude des Senders unter verschiedenen Winkeln an. Die schrägen schwarzen Strahlen kennzeichnen die Minima der winkelabhängigen Amplitude.

## 5.6 Lösungsverfahren

Nach den eben gezeigten Dimensionen von  $\mathbf{M}$  ist klar, dass naives Lösen des Gleichungssystems, etwa mit einer Art Gauß-Algorithmus keine Aussicht auf Erfolg hat. Darüberhinaus kommt noch Rauschen und eine begrenzte Anzahl Messungen hinzu, die eventuell kleiner als die Zahl der Unbekannten ist.

Deshalb kann zur Lösung nur ein iteratives Verfahren in Betracht kommen. Ein solches bestimmt von einem Startwert  $\mathbf{x}^{(0)}$  ausgehend schrittweise  $\mathbf{x}^{(i)}$ , die ein Fehlerfunktional. Für diese Minimierung ist es in jedem Schritt nötig, zumindest  $\mathbf{M}\mathbf{x}^{(i)}$  auszuwerten. Die in Abschnitt 5.3 erläuterten Laufzeitunterschiede verschiedener Vorwärtsmodell kämen an dieser Stelle also voll zum Tragen.

Generell gehört die Bildrekonstruktion nach dem Muster von Gleichung 5.1 zur Klasse der inversen Probleme. Inverse Probleme sind sehr oft schlecht gestellt (*ill-posed*). Dies erschwert ein einfaches Lösen beträchtlich wie im Weiteren gezeigt.

Ein Kennzeichen eines schlecht gestellten Problems ist, dass es eine der Eigenschaften eines gut gestellten Problems verletzt, die von Hadamard definiert wurden [101]. Diese Bedingungen verlangen, dass eine Lösung existiere, diese eindeutig sei und außerdem kleine Änderungen in den Anfangsbedingungen (den Daten) nur wenig Einfluss auf das Ergebnis haben.

Auf einen Operator beziehungsweise im USCT-Fall auf eine Matrix  $\mathbf{M}$  angewandt, bedeutete etwa die Eindeutigkeit einer Lösung, dass  $\mathbf{M}$  regulär sein müsste. Tatsächlich ist  $\mathbf{M}$  aber selbst für einfachste Fälle singular. Ebensovienig ist die Eindeutigkeit einer Lösung gegeben, weil in der Tomographie so gut wie immer verschiedene Lösungen

zulässig sind [102].

Die dritte hadamardsche Bedingung lässt sich für eine Matrix auch als *Konditionszahl* verstehen. Diese ist definiert als

$$\kappa(\mathbf{M}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{M})}{\sigma_{\min}(\mathbf{M})},$$

wobei  $\sigma_{\max}(\mathbf{M})$  der größte und  $\sigma_{\min}(\mathbf{M})$  der kleinste Singulärwert der Matrix  $\mathbf{M}$  sind. Sie gibt an, wie stark sich das Ergebnis einer Berechnung ändert, wenn die Eingabewerte geringfügig geändert werden. Eine gute Konditionszahl für Matrizen in der Numerik ist beispielsweise  $\kappa(\mathbf{M}) < 10$ .

Die Konditionierung der Matrix wird vor allem entscheidend, wenn die Daten mit Rauschen überlagert sind, also das allgemeine Rekonstruktionsmodell mit einem Rauschvektor  $\mathbf{n}$  als

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{n}$$

geschrieben werden kann.

Weil das USCT-Problems sehr groß ist, ist es schwierig seine Konditionszahl zu berechnen, weil auch für sie eine Singulärwertzerlegung gebraucht wird. Eine Abschätzung für eine Messmatrix mit  $128 \times 128$  Unbekannten und 82944 Messungen ergab eine Konditionszahl  $\kappa > 10^4$ . Dies bedeutet, dass das USCT-Problem sehr schlecht konditioniert ist.

Da eine direkte Invertierung der Matrix  $\mathbf{M}$  folglich schwierig ist, kann das Problem als ein Minimierungsproblem betrachtet werden. Die wohl bekannteste Lösungsmethode ist die sogenannte  $\chi^2$ -Minimierung

$$\chi^2(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{|\sum_j M_{ij} x_j - b_i|^2}{\sigma^2} \right) = \min. \quad (5.6)$$

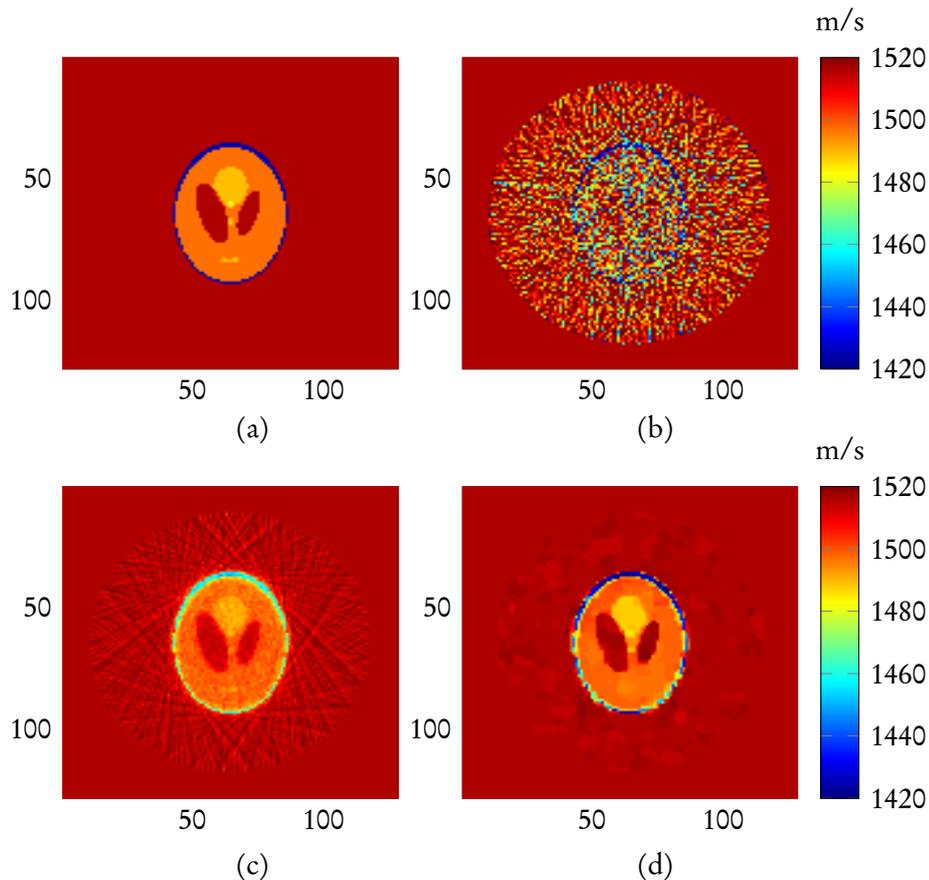
Dabei ist  $\sigma^2$  die Standardabweichung des Messfehlers oder auch sogenannten *Misfits*  $\|\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ .

Im Allgemeinen schreibt man ein Rekonstruktionsproblem auch wie folgt:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2. \quad (5.7)$$

Die Lösung für (5.7) kann beispielsweise mit Hilfe der Moore-Penrose-Pseudoinverse  $\mathbf{M}^+$  gefunden werden, deren Herleitung sich aus (5.6) ergibt. Die Pseudoinverse ist eine verallgemeinerte Form der Invertierung einer Matrix und kann genutzt werden, einen hinsichtlich Fehlerquadraten besten Fit in der Formulierung von (5.7) zu finden [103], [104]. Zur stabilen Berechnung der Pseudoinversen kann eine Matrix-Zerlegung (etwa SVD) benutzt werden, die aber ihrerseits oft aufwendig zu berechnen ist [105].

Eine Möglichkeit, die schlechte Konditionierung des Problems zu verbessern ist eine Regularisierung des Problems. Regularisierungen können als Vorwissen über das



**Abbildung 5.8** – Wichtigkeit der Regularisierung bei der Bildrekonstruktion: (a) zeigt das Shepp-Logan-Phantom. (b) zeigt eine Rekonstruktion mit Chi-Quadrat-Fit per Pseudoinverse, (c) zeigt eine LSQR-Rekonstruktion mit Tikhonov-Regularisierung und (d) zeigt eine Rekonstruktion mit Total-Variation-Regularisierung mit dem Compressive-Sampling-Algorithmus TVAL3.

zu erwartende Ergebnis verstanden werden, die man beispielsweise als Strafterm in das Minimierungsfunktional einbringt. Dieser Term bestraft Abweichungen vom modellierten Vorwissen. Ein Beispiel für Vorwissen wäre etwa, anzunehmen, dass die Lösung nicht stark oszilliert sondern sich nur langsam ändert.

Wie später in Abschnitt 6.1 kann man ein Rekonstruktionsproblem mit Regularisierung allgemein im Lagrange-Stil schreiben:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda R(\mathbf{x}),$$

wobei  $\lambda$  die Gewichtung der Regularisierung im Verhältnis zum Misfit-Term bestimmt und  $R(\mathbf{x})$  einen Regularisierungsoperator darstellt.

Als Beispiel für eine einfache Rekonstruktion wird in Abbildung 5.8 ein synthetisches MATLAB-Phantom, das sogenannte Shepp-Logan-Kopfphantom verwendet. Als Geometrie wurden, um nur die Wirkung der Regularisierung zu verdeutlichen, 128 Sender

und 128 gleichmäßig auf einem Ring verteilte Empfänger benutzt. Dieser Fall ist sogar noch einfacher zu berechnen als ein Ring der USCT-Geometrie.

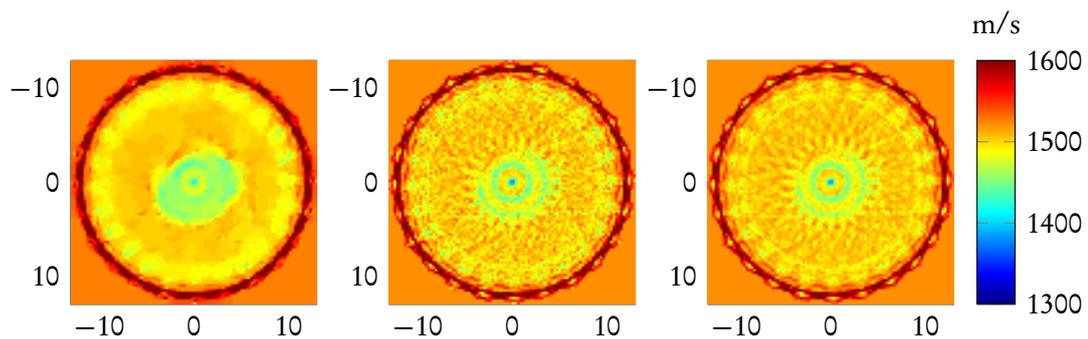
Auf simulierte USCT-Daten wurde für diesen Versuch normalverteiltes weißes Rauschen mit  $\sigma = 5$  m/s addiert. In Abbildung 5.8 ist die Wirkung zweier bekannter Regularisierungen dargestellt. Abbildung 5.8 (b) zeigt die Rekonstruktion mit dem Pseudoinversen-Ansatz. Für die regularisierten Rekonstruktionen wurde eine Tikhonov-Regularisierung und eine Total-Variation-Regularisierung verwendet. Die Tikhonov-Regularisierung ist sehr einfach zu implementieren und sorgt dafür, dass die Lösung geglättet wird und so Messfehler weniger Einfluss haben [106]. Die Total-Variation-Regu-la-ri-sie-rung findet im Compressive Sampling Verwendung, das in Abschnitt 5.7 beschrieben wird.

Besitzt man kein besonderes Vorwissen über das zu lösende System, bieten sich allgemeine Verfahren zur Lösung an. Zwei der bekanntesten, die für die medizinische Bildgebung allgemein und die Ultraschallbildgebung im Speziellen eingesetzt werden, sind *Conjugate-Gradient*-Algorithmen [107] und *Quasi-Newton*-Verfahren. Beide gibt es in den verschiedensten Ausprägungen, doch dürften der Bi-CGSTAB-Algorithmus (Conjugate Gradient) [108] und der L-BFGS-Algorithmus (Quasi-Newton) [109] wohl die bekanntesten Vertreter sein. Die einfachen Implementierungen beschränken sich oft auf den linearen Fall, sind aber für nichtlineare Zwecke anpassbar [110].

Im Allgemeinen benötigen Conjugate-Gradient-Algorithmen mehr Iterationen, die Konvergenz ist nach einer bestimmten Schrittzahl aber garantiert, sofern die Fließkommagenauigkeit ausreicht [110]. Quasi-Newton-Verfahren benötigen nur wenige Iterationen, erkaufen dies aber mit einem erhöhten Aufwand pro Iteration: es muss beispielsweise neben dem Gradienten der Zielfunktion auch die Hesse-Matrix explizit berechnet werden.

Ein anderer Weg zur Lösung, der in dieser Arbeit besprochen wird, ist, von vornherein anzunehmen, dass die Lösung von (5.7) eine niedrige Total-Variation-Norm hat oder habe, wie schon oft für medizinische Bilder gefordert und benutzt [111]. Dies lässt sich zusätzlich zum obigen Beispiel Abbildung 5.8 mit Abbildung 5.9 motivieren, das demonstriert, dass mit der Minimierung der Totalen Variation gute Ergebnisse für USCT-Daten erzielt werden. Dies führt zum sogenannten Compressive Sampling, das im folgenden Abschnitt 5.7 behandelt wird.

Abbildung 5.9 zeigt nun Rekonstruktionen einer Schicht des 3D-USCT II für ein gemessenes synthetisches Brustphantom (siehe Abschnitt 5.3). In den LSQR-Rekonstruktionen ist ein regelmäßiges, kreisartiges Muster zu sehen. Dieses ist Aliasing-bedingt und auf die geringe Anzahl Sender und Empfänger in einer Schicht des 3D-USCT II zurückzuführen. Die LSQR-Lösungen weisen, ob mit oder ohne Regularisierung, dasselbe Muster auf. Hingegen ist zu erkennen, dass der Compressive-Sampling-Algorithmus in der Lage ist, ein wesentlich homogeneres Bild zu rekonstruieren. Dieses Bild zeigt sich besonders im oberen Teil des USCT-Ellipsoids, weil es dort nur wenig nutzbare Messungen gibt, die sich nicht in einer z-Schicht befinden. Hieraus wird ersichtlich, dass es wenig erfolgversprechend ist, ohne Regularisierung zu rekonstruieren.



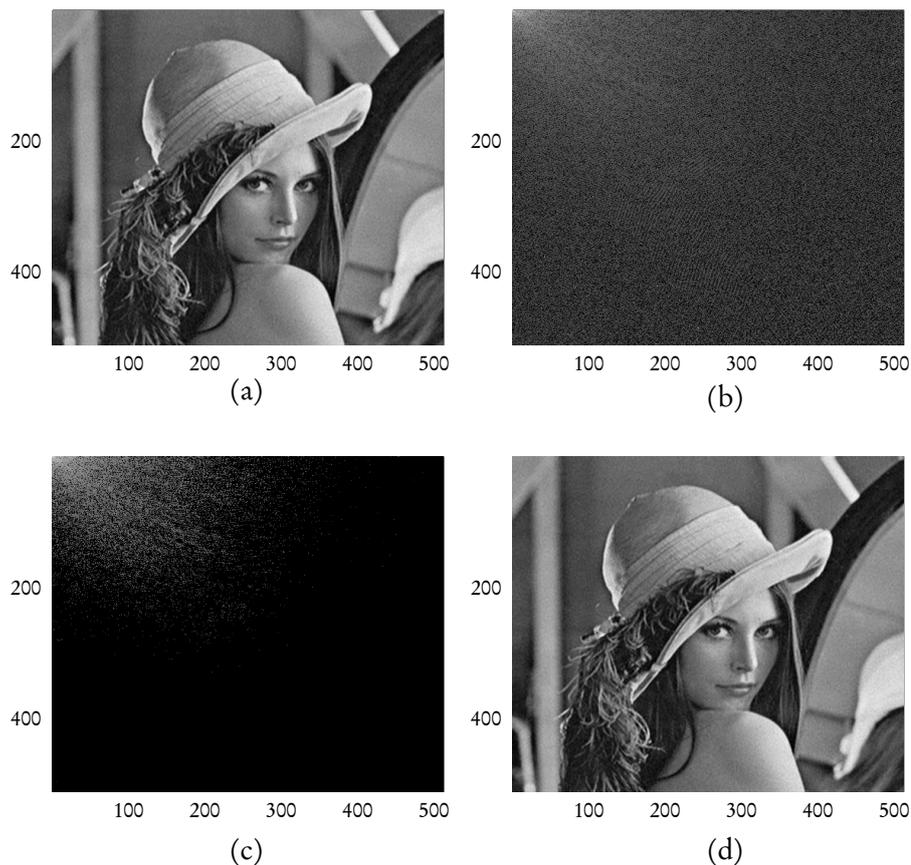
**Abbildung 5.9** – 2D-Rekonstruktion von echten USCT-Daten für die oberste Schicht des 3D-USCT II. (Links) ist eine Compressive-Sampling-/TVAL3-Rekonstruktion zu sehen, in der (Mitte) ist eine LSQR-Rekonstruktion abgebildet und (rechts) sieht man eine LSQR-Rekonstruktion mit Tikhonov-Regularisierung.

## 5.7 Compressive Sampling

Compressive Sampling ist ein Forschungsfeld, das sich erst innerhalb der letzten Jahre als Teilbereich der Signalverarbeitung herausgebildet hat. In den maßgeblichen Veröffentlichungen von Candès [112], Donoho [113] und anderen [114] wurden Kriterien definiert, die es erlauben, Signale mit deutlich weniger Messungen abzutasten, als konventionell nötig. Einfachstes Beispiel hierfür ist, dass normalerweise die minimale Abtastrate für ein beliebiges, integrierbares Signal durch das Abtasttheorem diktiert wird. Dieses besagt, dass die höchste Signalfrequenz öfter als zweimal pro Wellenlänge abgetastet werden muss um eine perfekte Rekonstruktion zu gestatten. Bleibt man unter dieser Grenze, entstehen sogenannte Aliasing-Effekte.

Compressive Sampling befasst sich zur Überwindung dieser Grenze im weitesten Sinne mit dünn besetzten (*sparse*) Signalen und deren Rekonstruktion. Dazu macht man sich zunutze, dass die meisten natürlich vorkommenden Signale kompressibel sind, das heißt sich ihre Information nur auf einen kleinen Teil ihrer Trägermenge beschränkt. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die 1992 vorgestellte JPEG-Norm zur Bildkompression: Ein (üblicherweise photographisches) Bild wird mit der diskreten Kosinus-Transformation in den diskreten Kosinusraum überführt, wo die Signalenergie primär auf nur wenige große Koeffizienten verteilt ist. Nun kann man beispielsweise einen Schwellwert definieren, der kleinere Koeffizienten aussortiert. Für das komprimierte Bild werden lediglich die relevanten, großen, Koeffizienten gespeichert, die wesentlich weniger Speicherplatz beanspruchen. Dieses Prinzip der JPEG-Kompression ist in Abbildung 5.10 dargestellt.

Kann man ein Bild mittels JPEG gut komprimieren, besitzt es, anders gesagt, eine große Menge Redundanz. Dies wird aber erst durch die Kompression selbst deutlich. Compressive Sampling gibt Rahmenbedingungen vor, direkt erheblich weniger Daten aufzunehmen (zu *samplen*) und somit die Kompression schon während der Aufnahme



**Abbildung 5.10** – Prinzip der JPEG-Kompression. (a) zeigt ein Beispielbild, (b) die zweidimensionale diskrete Kosinustransformation des Bildes, (c) die diskrete Kosinustransformation, bei der die 90% kleinsten Einträge nullgesetzt wurden und (d) die inverse diskrete Kosinustransformation von (c).

durchzuführen zu können.

Die umfangreiche Forschung im Compressive-Sampling-Umfeld, das sehr viele verwandte Bereiche wie Signalverarbeitung, Bildverarbeitung, Rekonstruktion und mehr tangiert, hat eine große Zahl an Algorithmen hervorgebracht. Allerdings sind bei weitem nicht alle an jede andere Problemstellung anpassbar, weil sie für spezielle Anwendungsbereiche optimiert wurden. Der von Candès et al. [114] für diesen Zweck Basis-Pursuit-Algorithmus hatte vor allem die Aufgabe, das Funktionieren der Theorie zu bestätigen, ohne auf hohe Ausführungsgeschwindigkeit zu achten. Einer der ersten schnellen, generischen Algorithmen war 2007 TwIST [115]. TwIST erlaubt die Benutzung verschiedener Regularisierungsfunktionen und ist dadurch sehr flexibel.

Vor der Anwendung von Compressive Sampling auf das USCT-Problem (5.7), wird zunächst ein Teil der grundlegenden Compressive-Sampling-Theorie rekapituliert.

## Theorie

Am einfachsten lässt sich die Theorie des Compressive Sampling an einem eindimensionalen diskreten Signal veranschaulichen, das hier mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet ist. Man nennt ein Signal  $\mathbf{x}$   $S$ -sparse oder  $S$ -dünn (besetzt), wenn die Kardinalität seiner Trägermenge  $\text{supp}\{k : x_k \neq 0\}$  kleiner oder gleich  $S$  ist.

Weiß man beispielsweise, dass ein zu rekonstruierendes Signal  $\mathbf{x}$   $S$ -dünn ist – und der Einfachheit halber binär – weiß man ebenso, dass alle besetzten Koeffizienten  $x_k = 1$  sein müssen. Ein naiver Rekonstruktionsalgorithmus würde dann sämtliche  $\binom{n}{S}$  Kombinationen »ausprobieren«, das heißt überprüfen, ob eine aktuelle Wahl  $\tilde{\mathbf{x}}$  die vorgegebenen Messungen  $\mathbf{b}$  erzeugt. Anders gesagt, wird das momentan geratene Signal per Messmatrix  $\mathbf{M}$  »messen« und die damit erhaltenen Messungen  $\tilde{\mathbf{b}}$  mit den tatsächlichen Messungen  $\mathbf{b}$  vergleichen (entsprechend der quadratischen Abweichung in Abschnitt 5.6):

$$\underbrace{\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}}}_{\tilde{\mathbf{b}}} - \mathbf{b} \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_{n,S}. \quad (5.8)$$

Dabei ist

$$\mathcal{X}_{n,S} = \{\tilde{\mathbf{x}} \in [0, 1]^n : \tilde{\mathbf{x}} \text{ enthält genau } S \text{ Elemente } \neq 0\}.$$

Die Kardinalität von  $\mathcal{X}_{n,S}$  ist  $\binom{n}{S} = \frac{n!}{S!(n-S)!} \in \mathcal{O}(n!)$ . Das bedeutet, dass simples Ausprobieren exponentielle Laufzeit hat und deswegen für realistische Signalgrößen nicht praktikabel ist.

Etwas umformuliert, und die Bedingung gelockert, dass  $\mathbf{x}$  genau  $S$  Einträge  $x_k \neq 0$  haben muss, kann man (5.8) auch schreiben

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{l_0} \text{ mit } \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}. \quad (5.9)$$

Entscheidend ist hierbei die  $l_0$ -Norm, die wie folgt definiert ist:

$$\|\mathbf{x}\|_{l_0} = \sum_i^{n-1} x_i^0.$$

Wenn man  $0^0 = 0$  wählt, zählt die  $l_0$ -Norm die Elemente  $x_i \neq 0$ . Damit verdeutlicht sich die Bedeutung in (5.9), ein Signal mit höchstens  $S$  Koeffizienten zu suchen, das die korrekten Messungen erzeugt.

Die Umformulierung ändert aber nichts an der Laufzeit des Problems, da man alle möglichen Signale mit  $S$  Koeffizienten ausprobieren muss. Bisher wurde kein Polynomzeit-Lösungsalgorithmus gefunden, da das Problem zur Klasse der  $\mathcal{NP}$ -vollständigen Probleme zählt. Dies zeigt man, indem man es polynomiell auf das SUBSET-SUM-Problem reduziert, von dem man weiß, dass es  $\mathcal{NP}$ -vollständig ist [116].

[112] zeigten aber, und dies ist der Grundstein der Compressive-Sampling-Theorie, dass es nicht zwingend nötig ist, (5.9) zu lösen. In der allermeisten Zahl der Fälle genügt es, statt der  $l_0$ -Norm die rechenaufwandsmäßig wesentlich anspruchslosere  $l_1$ -Norm zu verwenden, die für einen Koeffizientenvektor  $\mathbf{x}$  als

$$\|\mathbf{x}\|_{l_1} = \sum_{i=0}^{n-1} |x_i|$$

definiert ist. Damit wird (5.9) zu

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_{l_1} \text{ mit } \mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}. \quad (5.10)$$

Dies ist ein konvexes Problem, das mit unterschiedlichen Ansätzen gelöst werden kann. Für eine robuste Rekonstruktion schlagen [114] den sogenannten Basis-Pursuit-Algorithmus vor.

Die Compressive-Sampling-Theorie besagt nun, dass es mit einem derartigen Algorithmus im optimalen Fall möglich ist, ein  $S$ -dünnbesetztes Signal mit  $k$  wahlfreien Messungen im Fourierraum mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu rekonstruieren. Je größer  $k$ , desto höher auch die Wahrscheinlichkeit zur perfekten Rekonstruktion [112]. Je nachdem, wie dünn  $s$  besetzt ist, genügen sehr viel weniger Messungen als nach dem Nyquist-Kriterium nötig wären – Faktoren von 15 - 20 sind nicht ungewöhnlich [112].

Bevor ein realistischerer Fall mit Rauschen betrachtet wird, sei noch eine integrale Eigenschaft erwähnt, die Compressive Sampling so interessant macht. Der bisher beschriebene Fall, dass das Signal  $\mathbf{x}$  dünn besetzt ist, kann nur dann ausgenutzt werden, wenn die Messungen genügend Information über das zu messende Signal erhalten. Angenommen,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  sei in der Standardbasis  $S$ -dünn mit  $S \ll n$ , bestehe also nur aus sehr wenigen Koeffizienten und man messe ebenfalls in der Standardbasis. Da  $\mathbf{x}$  nur wenige Koeffizienten  $x_i \neq 0$  hat, »trifft« eine Messung diese Koeffizienten nur selten und wesentlich öfter Koeffizienten  $x_k = 0$ , weshalb kaum Information über das Signal gewonnen wird. In diesem Fall bestünde  $\mathbf{b}$  ebenfalls vornehmlich aus Nullen.

Anders sieht es aus, wenn beispielsweise im Fourierraum gemessen wird (hierfür ist die Magnetresonanztomographie ein prominentes Beispiel). Ein Signal  $\mathbf{x}$ , das im Ortsraum nur aus einem einzelnen Koeffizienten oder Peak besteht, ist im Fourierraum schon voll besetzt (durch eine monofrequente Welle). Jede Messung im Fourierraum »trifft« die monofrequente Welle, erhält also Information über den Peak im Ortsraum.

Der Fourierraum ist unter Compressive-Sampling-Gesichtspunkten eine optimale Wahl für die Mess-Matrix oder Basis, sofern das Signal in der Standardbasis gegeben ist. Dies liegt daran, dass die Fourierbasis und die Standardbasis maximal *inkohärent* sind, also salopp gesagt, einzelne Informationen in der einen Basis in der anderen maximal »gespreizt« werden. In [112] wird das mathematisch als Baseninkohärenz

*Basis Incoherence* gefasst; gleichzeitig wird jedoch auch erwähnt, dass diese Inkohärenz in der Praxis schwierig zu überprüfen ist. Stellvertretend wird unter Betrachtung von rauschbehafteten Messungen die sogenannte »Restricted-Isometry«-Eigenschaft definiert, die ähnliche Aussagen erlaubt. Auch diese ist noch nicht leicht zu überprüfen, für einfache Fälle aber möglich [117].

Die USCT-Messmatrix ist auch in einfachen Fällen noch zu groß, um eine Untersuchung der Baseninkohärenz durchzuführen. Es lässt sich aber sagen, dass das Tomographieproblem sich generell nicht optimal im Sinne der Inkohärenz darstellt. Dies liegt darin begründet, dass hier Messungen als Linienintegrale gegeben sind und durch die Linien oder Strahlen allein schon keine wahlfreie Messung möglich ist. Die benachbarten Voxel, die ein Strahl durchläuft, unterscheiden sich oft nur wenig voneinander, können also nicht als unabhängige Messwerte angesehen werden. Diese zunächst unvorteilhaft erscheinende Eigenschaft wird sich im Folgenden aber noch als nützlich erweisen.

## Anwendung auf USCT

Bei echten Daten wird man wegen Rauschens selten auf ein Problem wie in (5.10) stoßen. Daher ist es ratsam, ein angepasstes Problem zu lösen

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1 \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 \leq \varepsilon, \quad (5.11)$$

indem man einen  $l_2$ -Strafterm hinzufügt, der Abweichungen der geratenen Messungen von den tatsächlichen bestraft. Er entspricht genau der bereits erwähnten Term der quadratischen Abweichung aus Abschnitt 5.6. Auch dieses Problem (5.11) ist noch konvex und erlaubt eine exakte Lösung, da es ein Spezialfall eines sogenannten *Second Order Cone Problems* ist [114].

Von (5.11) ist es nicht mehr weit zu einer allgemeinen Minimierungsformulierung mit  $l_1$ -Regularisierung. Tatsächlich zeigen etwa [115], dass die Lösung von (5.11) auch mit

$$\min_{\tilde{\mathbf{x}}} \left( \|\tilde{\mathbf{x}}\|_1 + \lambda \|\mathbf{M}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\|_2 \right) \quad (5.12)$$

gefunden werden kann. Dies ist nun ein allgemeines Minimierungsproblem in Lagrange-Form.

Aus Compressive-Sampling-Sicht ist es für die Minimierung und die exakte Rekonstruktion notwendig, dass das zu rekonstruierende Signal dünn besetzt ist. Im Fall von (5.11) heißt das, dass  $\tilde{\mathbf{x}}$  nur wenige Einträge  $\tilde{x}_k \neq 0$  haben dürfte. Dies ist für USCT-Schallgeschwindigkeitsvolumen nicht erfüllt, weil diese die Schallgeschwindigkeit in jedem Voxel angeben und im Normalfall nie Null wird, insbesondere nicht für viele Voxel.

Eine elegante Rekonstruktionsmöglichkeit, deren Grundlagen im Fourierraum zu finden sind, wurde von [114] vorgestellt: Eine Eigenschaft, die viele Bilder zumindest näherungsweise erfüllen, ist hingegen, dass der Gradient, dünn besetzt ist. Statt nur

des Misfits wie in (5.6), also einer  $l_2$ -Minimierung, wird die  $l_1$ -Norm des Gradienten minimiert. Damit vermeidet man oszillierende oder rauschbehaftete Rekonstruktionen, kann aber dennoch starke Kanten erhalten. Die Eigenschaft der Kantenerhaltung ist für die menschliche Wahrnehmung eines Bildes sehr wichtig, da sich das Auge stark an Kanten und Objektgrenzen orientiert [118].

Es ist jedoch zum Beispiel bei Schallgeschwindigkeitsbildern wenig zielführend, nur den Gradienten zu rekonstruieren, da man an der Schallgeschwindigkeit und nicht nur ihrer Änderung interessiert ist. Auch hierfür gibt es eine Lösung, nämlich die Minimierung der sogenannten totalen Variation.

Die totale Variation (TV) ist ein Maß für die Variation einer Funktion innerhalb eines gegebenen Intervalls. Im Eindimensionalen liest sich die Definition der totalen Variation  $V_a^b$  für ein Intervall  $[a, b]$  und ein analytisches Signal  $f$

$$V_a^b = \int_a^b |f'(t)| dt, \quad (5.13)$$

wobei Differenzierbarkeit von  $f$  und Riemann-Integrierbarkeit von  $f'$  vorausgesetzt werden. Im Diskreten lautet (5.13)

$$V_a^b = \sum_t |f(t+1) - f(t)|.$$

Dass die Minimierung der TV in den Bereich der Compressive-Sampling-Theorie fällt, liegt an der Fourier-Korrespondenz der diskreten Ableitung, also der ersten Differenzen  $\Delta(f) = f(t+1) - f(t)$

$$\Delta(f) \circ \longrightarrow (1 - e^{-2\pi i \omega / N}) \hat{f}(\omega) := \Delta(\omega), \quad (5.14)$$

also einer Multiplikation im Frequenzraum mit dem Faktor  $1 - e^{-2\pi i \omega / N}$ . Diesen Faktor kann man herausdividieren, was man sieht, wenn man die Minimierung der TV nochmals in Minimierungsform ausschreibt

$$\min_{\tilde{f}} |\Delta \tilde{f}| = \min_{\tilde{f}} |\tilde{f}(t+1) - \tilde{f}(t)| \quad \text{mit} \quad \tilde{f}|_{\Omega} = \hat{f}|_{\Omega}. \quad (5.15)$$

Im Fourierraum erhält man aus (5.15) und mit Hilfe von (5.14)

$$\begin{aligned} \min_{\Delta(\omega)} (1 - e^{-2\pi i \omega / N}) \|\Delta(\omega)\|_{l_1} \quad \text{mit} \quad \hat{\Delta}|_{\Omega} = \hat{f}|_{\Omega} \\ \Leftrightarrow \min_{\Delta(\omega)} \|\Delta(\omega)\|_{l_1} \quad \text{mit} \quad \hat{\Delta}|_{\Omega} = \left( (1 - e^{-2\pi i \omega / N}) \hat{f} \right)|_{\Omega}, \end{aligned}$$

womit man insgesamt wieder ein  $l_1$ -Problem im Fourierraum löst. Es ist also dasselbe, eine  $l_1$ -Minimierung im Fourierraum oder eine Total-Variation-Minimierung im Ortsraum durchzuführen. Wenn man direkt im Ortsraum arbeitet, spart man sich die Hin- und Rücktransformation in den Fourierraum.

Wie gesehen ((5.12)) können Compressive-Sampling-Rekonstruktionen mit Optimierungsalgorithmen gelöst werden. In der Compressive-Sampling-Literatur finden sich einige generische Algorithmen, die sich zur Lösung des USCT-Optimierungsproblems eignen. Von diesen wird in Abschnitt 6.1 einer vorgestellt, der sich als für USCT als besonders geeignet erwiesen hat, weil er Total-Variation-Minimierung mit schneller Laufzeit verbindet.

## 5.8 Banana-Doughnut-Rekonstruktion

Unter den in Abschnitt 3.2 vorgestellten Approximationen nimmt die Banana-Doughnut-Methode eine Zwischenstellung ein, weil sie die Strahlapproximation als auch die Born-Approximation vereint. Grundidee ist es, in einem vorgegebenen Hintergrundmedium anfangs die Strahlapproximation (also unendliche Frequenz) zu nutzen, wie sie die Eikonal-Gleichung beschreibt, und damit die Hauptrichtung eines gedachten Strahls von Sender zu Empfänger vorzugeben.

Im Unterschied zu anderen Methoden wird nun jedoch nicht nur der in der Strahlentheorie bei unendlicher Frequenz infinitesimal dünne Strahl selbst in das Modell miteinbezogen, sondern es wird die Endlichkeit der Frequenz ausgenutzt, indem die Born-Approximation zur Berechnung sogenannter Sensitivitätskerne bemüht wird. Diese Sensitivitätskerne sind Bereiche um den Strahl herum, die der in Abschnitt 3.4 erwähnten Fresnel-Zone entsprechen und in denen Streuer (Störungen, *Perturbations*) in der Schallgeschwindigkeit Einfluss auf das empfangene Signal haben, der Empfänger also empfindlich oder sensitiv auf Änderungen reagiert. In der Strahlapproximation entspricht der Sensitivitätsbereich genau dem Strahl von Sender zu Empfänger – Schallgeschwindigkeitsunterschied abseits des Strahls werden nicht berücksichtigt.

Wegen ihrer charakteristischen Form wurden die seismologischen Sensitivitätsbereiche in [119] *Banana-Doughnut-Sensitivity-Kernels* getauft, werden aber oft auch *Fréchet-Kern* genannt. Die Berechnung eines Banana-Doughnut-Kerns (Fréchet-Kerns) erfolgt mit Hilfe der Born-Approximation, das heißt unter der Annahme von Einfachstreuung und geringen Abweichungen der Streuanomalien vom Hintergrund (siehe Unterabschnitt 3.2). Kontrovers diskutiert wurde insbesondere über die Tatsache, dass die Sensitivität, also die Empfindlichkeit eines Fréchet-Kerns direkt auf dem von der Strahlentheorie vorhergesagten Weg identisch Null ist, was vorherigen Ergebnissen als auch der Intuition zu widersprechen scheint. Eine Erklärung ist jedoch, dass ein Punktstreuer nur die Amplitude der ihn durchlaufenden Welle verändert, nicht jedoch deren Ankunftszeit. Siehe dazu [40].

### Grundlagen

In Abschnitt 4.4 wurde zur Erklärung des Einflusses der Streuung auf den durch Optimalfilter detektierten Pulsbeginn ein A-Scan verwendet. Diesen kann man auch als eine

Abfolge von Punktstreuern mit entsprechender Amplitude verstehen. Die Amplitude hängt sowohl von der Stärke des Streuers als auch von der geometrischen Dämpfung der Welle im Medium ab. Normalerweise ist sie in die Greenschen Funktion eingearbeitet, jedoch wurde bisher nur die Greensche Funktion für ein homogenes Medium benutzt – für die Banana-Doughnut-Rekonstruktion ist aber ein inhomogenes Medium möglich. Aus diesem Grund wird nun zunächst die geometrische Ausbreitung in einem inhomogenen Medium anhand der Greenschen Funktion besprochen, bevor diese schließlich benutzt wird, um die Sensitivitätskerne der Banana-Doughnut-Methode zu definieren.

Die folgenden Ausführungen orientieren sich stark an [119], [40] und insbesondere [120].

Wie in Abschnitt 3.1 benötigt also man wieder die Greensche Funktion zur Lösung. Wie beschrieben interessiert man sich zunächst nur für die Amplitude

$$A_s = \frac{1}{4\pi\rho_s c_s^2 r},$$

wobei  $c_s$  die Schallgeschwindigkeit und  $\rho_s$  die Dichte an der Quelle sind. Außerdem wurde angenommen, dass das Medium nahe an der Quelle betrachtet wird und daher als homogen vorausgesetzt werden kann.

Nun geht man, um Unterschied zur bisherigen Greenschen Funktion, von einem Medium inhomogen hinsichtlich Dichte und Schallgeschwindigkeit aus. Voraussetzung für diese Behandlung der Amplitude ist aber, dass sich das Medium kontinuierlich und langsam verändert. Mit Hilfe einer Energiebetrachtung (siehe wieder [40]) erhält man für die Amplitude  $A_r$  am Empfänger

$$A_r = \sqrt{\left(\frac{\rho_s c_s}{\rho(\mathbf{x}_r) c(\mathbf{x}_r)}\right)} \frac{r}{\mathcal{R}_{r,s}} A_s = \frac{1}{4\pi c_s \mathcal{R}_{r,s} \sqrt{\rho(\mathbf{x}_s) \rho(\mathbf{x}_r) c(\mathbf{x}_s) c(\mathbf{x}_r)}}$$

Hierfür wird betrachtet, wieviel Energie die Welle in einem rohrförmigen Ausbreitungsbereich von Sender zu Empfänger verliert, und damit auf die Amplitude beim Empfänger geschlossen. Das ist möglich, weil vorausgesetzt wurde, dass die Strahlapproximation gilt.  $\mathcal{R}_{r,s}$  ist der geometrische Ausbreitungsverlust im inhomogenen Medium; In einem homogenen Medium entspräche  $\mathcal{R}_{r,s} = r$  dem Abstand von Sender zu Empfänger.

Allgemein wird in der Seismologie als Quelle meist ein sogenannter Moment-Tensor  $M$  verwendet. Nimmt man an, dass dessen sämtliche Komponenten das gleiche zeitliche Verhalten an den Tag legen, erreicht man die zeitliche Quellfunktion  $m(t)$ , deren Ableitung  $\dot{m}(t)$  dem Druck, also einem Ultraschall-A-Scan entspricht.  $\dot{m}(\omega)$  stellt dann das Amplitudenspektrum eines A-Scans dar.

Mit Hilfe obiger Definitionen schreibt man den Druck am Empfänger (mit  $T_{rs}$  der Laufzeit von Sender zu Empfänger)

$$u(\mathbf{x}_r, \omega) = \frac{\dot{m}(\omega)}{4\pi c(\mathbf{x}_s) \mathcal{R}_{rs} \sqrt{\rho(\mathbf{x}_r) \rho(\mathbf{x}_s) c(\mathbf{x}_r) c(\mathbf{x}_s)}} e^{i\omega T_{rs}}. \quad (5.16)$$

Hierbei wurde wieder der Inhomogenität des Mediums Rechnung getragen, indem unterschiedliche Schallgeschwindigkeiten  $c(\mathbf{x}_s)$  und  $c(\mathbf{x}_r)$  an Sender- und Empfängerposition möglich sind. (5.16) beschreibt in der Seismologie ein Seismogramm und bei USCT einen A-Scan im Frequenzbereich. Dabei ist  $\dot{m}(\omega)$  das Spektrum des bei USCT bekannten Anregungssignals.

Zusätzlich muss noch ein Quellterm, also allgemein ein Punktstreuer eingeführt werden. Ein solcher liest sich im akustischen homogenen Medium mit  $t = r/c_0$  der Laufzeit von Sender zu Empfänger wie folgt:

$$\delta u(\mathbf{x}_r, \omega) = 2 \frac{\delta c}{c_0} \omega^2 \frac{e^{i\omega t}}{4\pi c_0^2 r}, \quad (5.17)$$

oder im inhomogenen Medium

$$\delta u(\mathbf{x}_r, \omega) = 2 \frac{\delta c}{c_0} \omega^2 \frac{e^{i\omega T_{sr}}}{4\pi c_s \mathcal{R}_{sr} \sqrt{\rho_r \rho_s c_r c_s}}. \quad (5.18)$$

Dabei ist  $T_{sr}$  die Laufzeit im inhomogenen Medium von Sender zu Empfänger.

In der in Abschnitt 3.4 beschriebenen Situation trifft ein Welle auf einen Streuer an der Stelle  $\mathbf{x}_x$ . Die von ihm ausgehende und am Empfänger  $\mathbf{x}_r$  gemessene Amplitude  $\delta u$  ist dann die Multiplikation von (5.16) und (5.18), das heißt der am Streuer ankommenden Amplitude und seiner Streuamplitude:

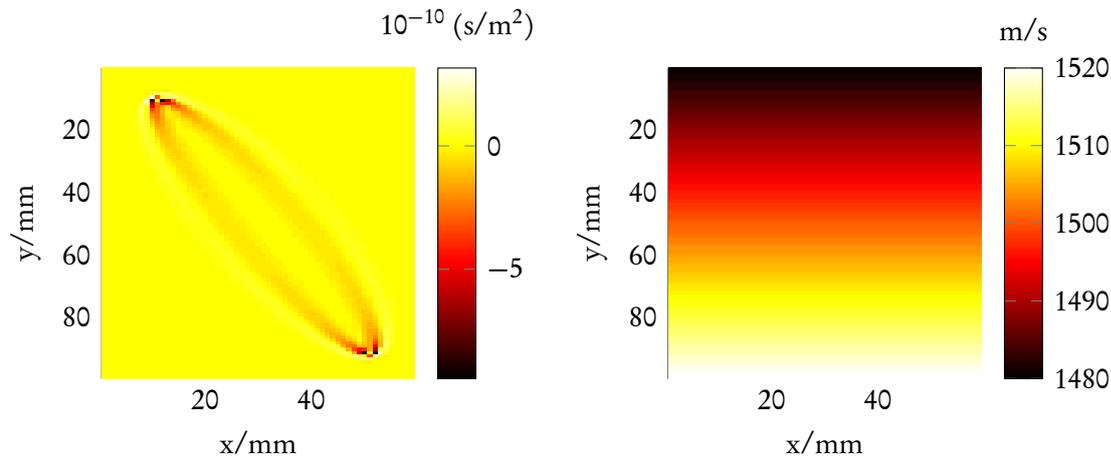
$$\delta u(\mathbf{x}_x, \omega) = - \frac{\dot{m}(\omega) \omega^2 (\delta c/c_0)_x dV}{8\pi^2 c(\mathbf{x}_s)^2 \sqrt{\rho(\mathbf{x}_s)} \sqrt{c(\mathbf{x}_r)^3} \sqrt{\rho(\mathbf{x}_r)} c(\mathbf{x}_r) \mathcal{R}_{sx} \mathcal{R}_{xr}} e^{i\omega(T_{sx}+T_{rx})}. \quad (5.19)$$

Dabei ist  $dV$  die Größe des Streuers.

## Fréchet-Kern

Nun hat man alles Handwerkszeug beisammen, um die Zeitverzögerung am Empfänger über die in Abschnitt 4.4 eingeführte Kreuzkorrelationsdefinition zu bestimmen. Dazu nutzt man (5.16) und (5.19) in (4.8), um

$$\delta T = - \frac{(\delta c/c_0)_x dV}{2\pi c(\mathbf{x}_r) c(\mathbf{x}_x)} \frac{\mathcal{R}_{rs}}{\mathcal{R}_{xs} \mathcal{R}_{xr}} \frac{\int_0^\infty |\dot{m}(t)|^2 \sin(\omega \Delta T(\mathbf{x}_r)) d\omega}{\int_0^\infty |\dot{m}(t)|^2 d\omega} \quad (5.20)$$



**Abbildung 5.11** – Fréchet-/Banana-Doughnut-Kern (links) in einem sich linear ändernden inhomogenem Medium (rechts).

zu erhalten. Dabei ist  $\Delta T$  die Zeit, die der Umweg über den Streuer  $\mathbf{x}_x$  in Anspruch nimmt. (5.20) ist lediglich die Definition für einen Streuer. Wie für (3.18) muss man nun über alle Streuer der Anomalie integrieren, und erhält die Zeitverzögerung  $\delta T$ :

$$\delta T = \int -\frac{1}{2\pi c(\mathbf{x}_r)c(\mathbf{x}_x)} \frac{\mathcal{R}_{rs}}{\mathcal{R}_{sx}\mathcal{R}_{xr}} \frac{\int_0^\infty \omega^3 |\dot{m}(t)|^2 \sin(\omega \Delta T(\mathbf{x}_x)) d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 |\dot{m}|^2 d\omega} \frac{\delta c}{c_0} d^3 \mathbf{x}_x. \quad (5.21)$$

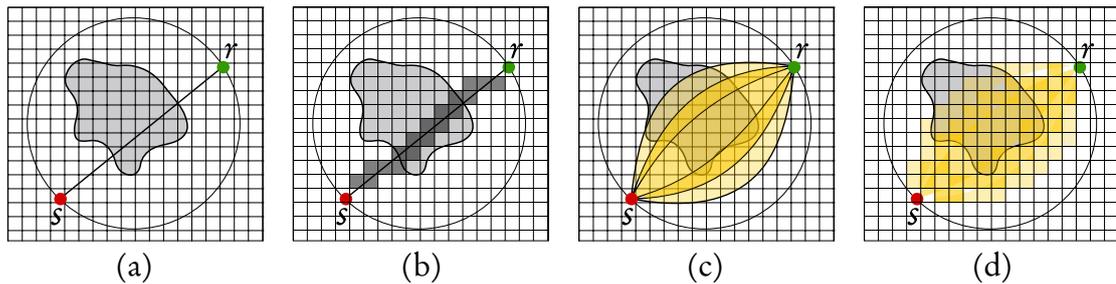
Der Integrand ist der der Theorie ihren Namen gebende **Banana-Doughnut-** oder **Fréchet-Kern**. Er gibt den Sensitivitätsbereich an, der Einfluss auf Ankunftszeit der Welle am Empfänger hat. Zu beachten ist, dass diese Definition nicht wie die Fresnel-Zone nur für eine Frequenz gilt, sondern wegen der Integration über das gesamte Frequenzspektrum alle Frequenzen berücksichtigt.

Abbildung 5.11 zeigt einen Fréchet-Kern in einem leicht inhomogenen Hintergrundmedium (lineare Änderung von  $c = 1480$  m/s bis  $c = 1520$  m/s).

## Heilen der Wellenfront

Eine wichtige Eigenschaft der Fréchet-Kerne ist, das sogenannte Heilen der Wellenfront, ein Beugungseffekt endlicher Frequenz, abzubilden. Dieses zeigt sich, nachdem eine Wellenfront eine Anomalie niedrigerer Schallgeschwindigkeit durchlaufen hat. [121] demonstrieren anschaulich, wie die Wellenfront nach einiger Zeit wieder ihre ursprüngliche Form annimmt, die sie vor Durchlaufen der Anomalie hatte. Erklärt werden kann es beispielsweise mit Hilfe des Huygens-Prinzips [121].

Offensichtliche Auswirkungen hat das Phänomen auf die gemessene Ankunftszeit: Die einfache Strahlapproximation, die sozusagen nur das Eintreffen der geheilten



**Abbildung 5.12** – Schematischer Vergleich verschiedener Vorwärtsmodelle: Einfache Strahlapproximation mit exakter Wegverfolgung (a) und mit einfacher Wegverfolgung (b), exaktes Banana-Doughnut-Vorwärtsmodell (c) und diskretisiertes Banana-Doughnut-Modell (d).

Welle in den gemessenen Daten beobachtet, wird die Anomalie nicht bemerken. Dadurch kommt es zu einer Fehlschätzung der Schallgeschwindigkeit. Früher wurde angenommen, dass die Schallgeschwindigkeiten nur überschätzt werden, [122] zeigen aber, dass der Zusammenhang komplexer ist und insgesamt nicht adäquat durch ein lineares Verfahren abgebildet werden kann.

Das Banana-Doughnut-Vorwärtsmodell ist aber zumindest in der Lage, das Heil-Phänomen abzubilden. Anschaulich kann sich eine Anomalie im Inneren eines »Doughnuts« »verstecken«. Je weiter Sender und Empfänger auseinanderliegen, desto breiter wird die Fresnel-Zone und damit auch der Doughnut [121].

Bezüglich der Fréchet-Theorie werden in [40] noch allgemeinere Fälle als der hier angeschnittene akustische behandelt, etwa ohne die Annahme reiner Vorwärtsstreuung. Da diese jedoch für USCT keine Rolle spielen, sei auf die Literatur verwiesen.

Von der Verwendung des Fermat-Prinzips und sonstigen Approximationen erster Ordnung abgesehen, nutzt die Methode der Fréchet-Kerne nur die Born-Approximation, ist also deren Auflösungsgrenze  $\lambda/2$  unterworfen. Dies ist aber zumindest theoretisch besser als alle anderen strahlbasierten Verfahren, deren Auflösungsgrenze von der Breite der Fresnel-Zone diktiert wird.

## Rekonstruktion

Die Rekonstruktion mit der Banana-Doughnut-Methode funktioniert ebenso wie in Abschnitt 5.6 gezeigt. Da es sich um ein lineares Modell handelt, kann es genauso wie für den Fall einfacher Strahlen in Matrixform gebracht werden. Die Rekonstruktion kann mit einem beliebigen Gleichungslöser geschehen, Nolet empfiehlt aber das LSQR-Verfahren mit Regularisierung [40], [94].

Die Fréchet-Kerne ähneln vom Prinzip her sehr den übrigen Strahlverfahren. Das grundlegende Vorgehen bei der Rekonstruktion ist dasselbe: Zunächst wird das Modell

in Form einer Matrix erzeugt, danach wird der Misfit zwischen Messungen und aktueller Schätzung des Modells minimiert. Die Unterschiede liegen im Detail: So ist die Messmatrix des seismologischen Verfahrens deutlich mehr gefüllt, wenngleich insgesamt immer noch recht dünn besetzt (siehe Abbildung 5.12). Statt Strahlen, die bei den anderen Strahlverfahren die Sensitivitätskerne darstellen, werden für die Banana-Doughnut-Methode die Fréchet-Kerne in die Matrix eingetragen. Dennoch bleibt das Grundverständnis und der Aufbau der Messmatrix  $\mathbf{M}$  gleich: Jede Zeile entspricht einer Messung, jede Spalte einem Voxel des Rekonstruktionsvolumens.

Zeitraubend bei der Erzeugung des Vorwärtsmodells ist vor allem die Berechnung aller möglichen Kombinationen der geometrischen Ausbreitung von Sender zu Empfänger. Wegen der Reziprozität der Ausbreitung von Sender- zu Empfänger [119] genügt es, pro Sender die Ausbreitung zu jedem Voxel (also jedem potentiellen Streuer) im Rekonstruktionsvolumen zu berechnen und zu speichern. Hierfür wird, ähnlich der Fast-Marching-Methode, eine Art Dijkstra-Algorithmus verwendet [123].

Eng verknüpft ist die Berechnung des Modells auch mit Strahlverfolgungsalgorithmen (Raytracing). Nolet verwendet eine sogenannte *Ray-Bending*-Methode, bei der zuerst ein gerader Strahl von Sender zu Empfängervoxel verfolgt und anschließend so gebogen wird, dass er den Eigenschaften des Modells genügt [123]. [40] merkt an, dass sich für diese Art Strahlverfolgung bisher kein idealer Algorithmus hervorgetan hat und sich das Forschungsfeld noch im Wandel befindet.

Weil gerade dieser Schritt, insbesondere für inhomogene Medien, sehr viel Zeit in Anspruch nimmt (für USCT etwa Tage bis Wochen), wurden verschiedene weitere Approximationen vorgeschlagen. Erwähnt sei beispielsweise [119], die die paraxiale Approximation nutzen, die im wesentlichen nur Vorwärtsstreuung zulässt. Dies wird aber für die Herleitung hier nicht genutzt.

Sind die Sensitivitätskerne einmal berechnet, kann man sie ebenso wie bei der Strahlapproximation in Matrixform darstellen, und das entstehende System mit einem beliebigen Gleichungslöser lösen. Generell ist das Problem damit deutlich besser bestimmt also bei unendlich dünnen Strahlen, da durch die Ausdehnung der Fresnel-Zone senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle wesentlich mehr Voxel getroffen werden, die dann auch Einfluss auf die Ankunftszeit haben. Der maßgebliche Unterschied im Vorwärtsmodell ist in Abbildung 5.12 gezeigt. Abbildung 5.12 (d) zeigt das für die Banana-Doughnut-Methode genutzte Modell.

Der Code für die seismologische Banana-Doughnut-Methode wurde freundlicherweise von Guust Nolet zur Verfügung gestellt. Zur Benutzung mit USCT-Daten mussten einige Programmteile des FORTRAN-Codes angepasst werden. Außerdem war es nötig, bestimmte Plausibilitätsannahmen und -anforderungen für USCT etwas aufzuweichen:

Ein Beispiel betrifft etwa die Breite der Fresnel-Zone. Für seismologische Rekonstruktionen reicht üblicherweise eine Auflösung von  $256 \times 256 \times 100$  Voxel aus, bringt aber schon sehr hohen Berechnungsaufwand der geometrischen Ausbreitungsverluste mit sich (Tage bis Wochen). Für USCT ist diese Auflösung unter der Annahme einer isotropen Voxelgröße von  $1 \text{ mm}^3$  gerade noch ausreichend, sollte aber besser

erhöht werden. Der Grund hierfür liegt in der Annahme, dass, um gute Konvergenz der Volumenintegrale über die »Bananen« zu erreichen, eine gewisse Diskretisierung erforderlich ist. Im Code wurde deshalb für seismologische Zwecke als Faustformel vorausgesetzt, dass die Breite der ersten Fresnel-Zone mindestens zehn Voxel umfassen soll. Die größte USCT-Fresnel-Zone ist ca. 1,2 cm breit (siehe (3.37)), enthält also 12 Voxel. Schon bei etwas kleineren Abständen ist diese Anforderung für USCT daher nicht mehr erfüllt und wurde deshalb auf fünf Voxel pro Fresnel-Zone herabgesetzt. Vergleiche dazu auch Abbildung 5.12.

Ohne Aufweichung der Diskretisierungsanforderungen liegt die Rechenzeit, gerade für das Vorwärtsmodell und hier insbesondere für die Erzeugung der Strahlen im Hintergrundmedium, deutlich höher als für die gewöhnliche Strahlapproximation ohne Brechung und ist eher mit der Laufzeit für die Berechnung der Eikonal-Approximation zu vergleichen (wenn auch immer noch circa um einen Faktor drei langsamer, etwa drei Tage für alle Sender-Empfängerpaar einer Aperturposition des 3D-USCT II). Dabei ist zu beachten, dass für die Erzeugung der Strahlen im Banana-Doughnut-Modell nur ein homogenes Hintergrundmedium verwendet, also keine Brechung berücksichtigt wurde. Versuche mit inhomogenem Hintergrundmedium nahmen noch deutlich mehr Zeit in Anspruch und konvergierten nur schlecht. Aus diesem Grund wurden für die Rekonstruktionen mit der Banana-Doughnut-Methode nur homogene Hintergrundmedien benutzt.

## 5.9 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Dimensionen und Randbedingungen des Rekonstruktionsproblems der USCT-Transmissionstomographie konkretisiert. Die Herausforderung besteht im Lösen einer dünn besetzten Matrix der Dimension  $600\,000 \times 2\,000\,000$ . Die Voxelgröße liegt bei  $2,7 \times 2,7 \times 2,7 \text{ mm}^3$ , wobei zwölf Aperturpositionen benutzt werden.

Anhand eines synthetischen Phantoms und echter USCT-Daten wurde demonstriert, dass die Minimierung der Total-Variation-Norm für USCT-Volumen deutlich bessere Ergebnisse liefert als gewöhnliche Rekonstruktionsmethoden. Die Minimierung der Total-Variation-Norm wurde mit Hilfe der Theorie des *Compressive Sampling*, einem Rahmenwerk zur Signal- und Bildrekonstruktion als gewöhnliches Optimierungsproblem erläutert. Dieses Optimierungsproblem wird anstelle konventioneller Lösungsverfahren wie der  $\chi^2$ -Minimierung oder eines Conjugate-Gradient-Algorithmus zur effizienten Lösung des USCT-Problems genutzt.

Darüberhinaus wurde die seismologische Methode der Banana-Doughnut-Rekonstruktion eingeführt. Deren Vorwärtsmodell ist genauer als übliche Strahlapproximationen, die Rekonstruktion kann aber ebenso wie die zuvor erläuterten Methoden auf ein Optimierungsproblem zurückgeführt werden.

# Kapitel 6 |

## Rekonstruktionsalgorithmen

*Do you see what I see?*

*Truth is an offense*

— Metallica, Eye of the Beholder

Nachdem im vorigen Kapitel Methoden zur Lösung des USCT-Rekonstruktionsproblems besprochen wurden, folgen nun in diesem Kapitel konkrete Implementierungen.

### 6.1 TVAL3-Algorithmus

Nach dem vorigen Kapitel lässt sich das Lösen des USCT-Minimierungsproblems mit Total-Variation-Regularisierung auf die Lösung folgender Gleichung herunterbrechen

$$\min_{\mathbf{x}} \|D_x \mathbf{x} + D_y \mathbf{x} + D_z \mathbf{x}\| \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (6.1)$$

wobei  $D_x$  der diskrete Gradient in Richtung  $x$  sei und die Norm innerhalb der Summe sowohl die  $l_1$ - als auch die  $l_2$ -Norm bezeichnen kann. Im Folgenden wird  $D_i$  für den diskreten Gradienten in Richtung  $i$  benutzt, wobei  $i \in \{1, 2, 3\}$  für eine der Richtungen  $x, y$  oder  $z$  steht.

Der TVAL3-Algorithmus geht das beschränkte Optimierungsproblem (6.1) mit einer erweiterten Lagrange-Methode (*Augmented Lagrangian*) in Verbindung mit einem Algorithmus für alternierende Richtungen (*Alternating Direction*) an [124]. Grundidee eines Lagrange-Verfahrens ist es, ein beschränktes Optimierungsproblem durch unbeschränkte Teilprobleme zu approximieren. Diese Teilprobleme lassen sich im Idealfall deutlich einfacher berechnen und analysieren, womit man zu einem iterativen Verfahren gelangt, das gegen die Lösung des Ursprungsproblems konvergiert. Das Kriterium zur Konvergenz ist dabei, dass der Gradient unter eine bestimmten Toleranzschwelle  $\epsilon$  fällt.

Die Grundgleichung eines allgemeinen Lagrange-Verfahrens schreibt sich wie folgt als

beschränktes Optimierungsproblem (mit Gleichheitseinschränkung):

$$\min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) \quad \text{mit} \quad h(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.2)$$

Eine Möglichkeit, zu einem unbeschränkten Problem zu gelangen, ist es, die Schranken- oder Straffunktion und das eigentliche Problem zu addieren. Dadurch bestraft man implizit Verletzungen der Schrankenfunktion. Spezialität des erweiterten Lagrange-Verfahrens ist das Auftreten der Straffunktion  $h(\mathbf{x})$  sowohl linear als auch quadratisch:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda; \mu) = f(\mathbf{x}) - \lambda^t h(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} h(\mathbf{x})^t h(\mathbf{x}). \quad (6.3)$$

$\lambda$  wird hierbei definierend Lagrange-Multiplikator genannt,  $\mu$  ist ein Schrankenparameter.

Mit Hilfe des Lagrange-Formalismus und zusätzlicher Relaxation des TV-Terms lässt sich (6.1) neu aufbereiten:

$$\min_{\mathbf{w}_i, \mathbf{x}} \sum_i \|\mathbf{w}_i\| \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{und} \quad D_i \mathbf{x} = \mathbf{w}_i. \quad (6.4)$$

Das zugehörige Lagrange-Problem, dessen Lösung die Lösung für (6.4) dargestellt ist

$$\mathcal{L}(\lambda; \mu) = \underbrace{\sum_i \left( \|\mathbf{w}_i\| - \nu_i^t (D_i \mathbf{x} - \mathbf{w}_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i \mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|_2^2 \right)}_{w\text{-Teilproblem}} - \underbrace{\lambda^t (\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2}_{x\text{-Teilproblem}}. \quad (6.5)$$

Das  $w$ -Teilproblem wird eingeführt, weil der Total-Variation-Term  $\|D_i \mathbf{x}\|$  nicht differenzierbar ist. Daher behilft man sich mit einer Relaxation, die (hier für nur eine Koordinate) lautet

$$\|\mathbf{w}_i\| - \nu_i^t (D_i \mathbf{x} - \mathbf{w}_i) + \frac{\beta}{2} \|D_i \mathbf{x} - \mathbf{w}_i\|_2^2. \quad (6.6)$$

Statt mit  $\|D_i \mathbf{x}\|$  direkt zu rechnen, löst man damit erneut ein Lagrange-Problem, das die Abweichung von  $\mathbf{w}_i$  zu  $D_i \mathbf{x}$  minimiert. Dazu setzt man einen weiteren (dreidimensionalen) Lagrange-Multiplikator  $\nu$  ein, dessen Komponenten  $\nu_i$  den  $D_i$  zugeordnet werden können.

Das  $w$ -Teilproblem erlaubt eine geschlossene Lösung, wenn man die Konvexität der Zielfunktion und ihre Beschränktheit ausnutzt [124]. Dadurch ist es möglich (mittels einer sogenannten »Shrinkage-like«-Formel, [125]) den iterativ nächsten  $(k+1)$ -ten Wert  $\mathbf{w}_{i,k+1}$  direkt zu berechnen. Shrinkage/Thresholding-Algorithmen werden schon seit längerem auch zur Bildrekonstruktion eingesetzt [115].

Nun geschieht das Aktualisieren von  $\mathbf{w}_{i,k}$  nicht ständig, sondern in Abwechslung mit  $u_k$ , womit man bei einem sogenannten alternierenden Optimierungsalgorithmus angelangt ist, der jeweils einen Optimierungsparameter bearbeitet, während er den anderen festhält [126].

Steht  $\mathbf{w}_{i,k+1}$  fest, gilt es folglich noch,  $u_{k+1}$  zu berechnen. Dazu kann man  $\mathbf{w}_{i,k+1}$  in (6.5) einsetzen und das erste Vorkommen von  $\mathbf{w}_{i,k+1}$  in der Summe vernachlässigen, um die quadratische Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda; \mu) = & \sum_i \left( \|\mathbf{w}_{i,k+1}\| - \nu_i^t (D_i \mathbf{x} - \mathbf{w}_{i,k+1}) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i \mathbf{x} - \mathbf{w}_{i,k+1}\|_2^2 \right) \\ & - \lambda^t (\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}) + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \end{aligned} \quad (6.7)$$

zu erhalten. Um (6.7) zu minimieren, sucht man die Nullstelle  $\mathbf{x}_{k+1}$  seines Gradienten. Diese lässt sich »exakt« als

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left( \sum_i \beta_i D_i^t D_i + \mu \mathbf{M}^t \mathbf{M} \right)^+ \left( \sum_i (D_i^t \nu_i + \beta D_i^t \mathbf{w}_{i,k+1}) + \mathbf{M}^t \lambda + \mu \mathbf{M}^t \mathbf{b} \right) \quad (6.8)$$

beschreiben. Dabei steht  $()^+$  für die Moore-Penrose-Pseudoinverse. Die Exaktheit hängt von der Güte der Pseudoinverse ab und kann je nach Anzahl und Qualität der verfügbaren Daten variieren.

Von numerischen Problemen einmal abgesehen, ist es aufwendig, diese Pseudoinverse in jedem Schritt zu berechnen. Deshalb führt man einen einzigen Schritt eines Gradientenabstiegverfahrens durch. Die Bestimmung der Schrittweite  $\alpha_k$  ist von mehreren Parametern abhängig und wird nach der Methode von Barzilai und Borwein durchgeführt [127]. Es kann vorkommen, dass die von dieser Methode gefundene Schrittweite zu groß ist, was mittels der sogenannten Armijo-Bedingung [128] geprüft wird. In diesem Fall wird der eingeschlagene Weg wieder rückwärts gegangen, indem die Schrittweite mit einem Skalierungsparameter multipliziert wird. [125] rät dazu, höchstens fünf Rückschritte (*backtracking*) durchzuführen, ehe mit der nächsten Iteration begonnen wird. Dieser Wert ist jedoch primär empirisch motiviert und dient der Verkürzung der Laufzeit.

In Algorithmus 1 ist der gesamte Algorithmus nochmals in Pseudocode zusammengefasst.

Weil er nur 2D-Rekonstruktionen beherrscht, ist der TVAL3-Algorithmus in der vorgestellten Form nicht direkt für USCT einsetzbar. Die Erweiterung auf 3D ist einfach, weil nur der TV-Term angepasst werden muss, welcher mittels des diskreten Gradienten und der Divergenz berechnet wird. Diese Rechenschritte wurden für drei Dimensionen angepasst und in den Algorithmus eingefügt.

---

**Algorithmus 1** TVAL3

---

```

1: while Abbruchkriterium nicht erfüllt do
2:   while Inneres Abbruchkriterium nicht erfüllt do
3:     Berechne neues  $\mathbf{w}_{i,k+1}$  mit Shrinkage-Algorithmus
4:     Wähle Schrittweite  $\alpha_k$  nach Barzilai und Borwein[127]
5:     while Armijo-Bedingung [128] nicht erfüllt do
6:       Verringere Schrittweite (Backtracking)
7:     end while
8:     Gehe einen Schritt des steilsten Abstiegs mit Schrittweite  $\alpha_k$ 
9:   end while
10:  Aktualisiere Lagrange-Parameter  $\lambda$  und  $\nu$  nach Hestens und Powell[107]
11:  Aktualisiere Straffaktoren  $\mu$  und  $\beta$ 
12: end while

```

---

## 6.2 Optimierung des TVAL3-Algorithmus

In diesem Abschnitt werden Optimierungen für den TVAL3-Algorithmus beschrieben, die in [RD.4] ausführlicher erläutert werden. Die hier verwendeten Daten und Zeiten stammen aus dieser Veröffentlichung. In einer parallel entstehenden Arbeit von Matthias Birk [129] werden Optimierungsdetails für die Berechnung der Matrix-Vektormultiplikation auf der GPU besprochen.

Die Originalimplementierung des TVAL3-Algorithmus liegt nur für MATLAB vor, was die Rekonstruktionsgeschwindigkeit deutlich limitiert. Insbesondere im Hinblick auf notwendige Echtzeitbildgebung mit Latenzen von wenigen Sekunden verbietet sich deshalb ein Einsatz der MATLAB-Implementierung.

### Stand der Technik

Bisher gibt es nur wenige optimierte Implementierungen von Compressive-Sampling-Algorithmen. Lee und Wright [130] implementierten eine GPU-Version des SpARSA-Algorithmus, bei dem die Matrix  $\mathbf{M}$  als Matrix der diskreten Kosinustransformation fest vorgegeben ist und die  $l_1$ -Norm minimiert wird. Die GPU-Version ist um den Faktor 25-98 schneller als die MATLAB-Variante.

Eine optimierte Fassung eines TV-Minimierungsalgorithmus wurde von Daehyun Kim et al. [131] vorgelegt. Das Vorwärtsmodell ist auf eine MRT-Datenaufnahme im Frequenzraum ausgelegt. Im Vergleich mit einem Intel Core i7 werden auf der GPU Beschleunigungsfaktoren von 4-7 erreicht.

[132] beschreiben Optimierungsmöglichkeiten für verschiedene, auf Greedy-Ansätzen beruhende Compressive-Sampling-Algorithmen. Die optimierten Algorithmen vergleichen sie mit MATLAB-Implementierungen und erreichen Beschleunigungsfaktoren von 50 bis 70.

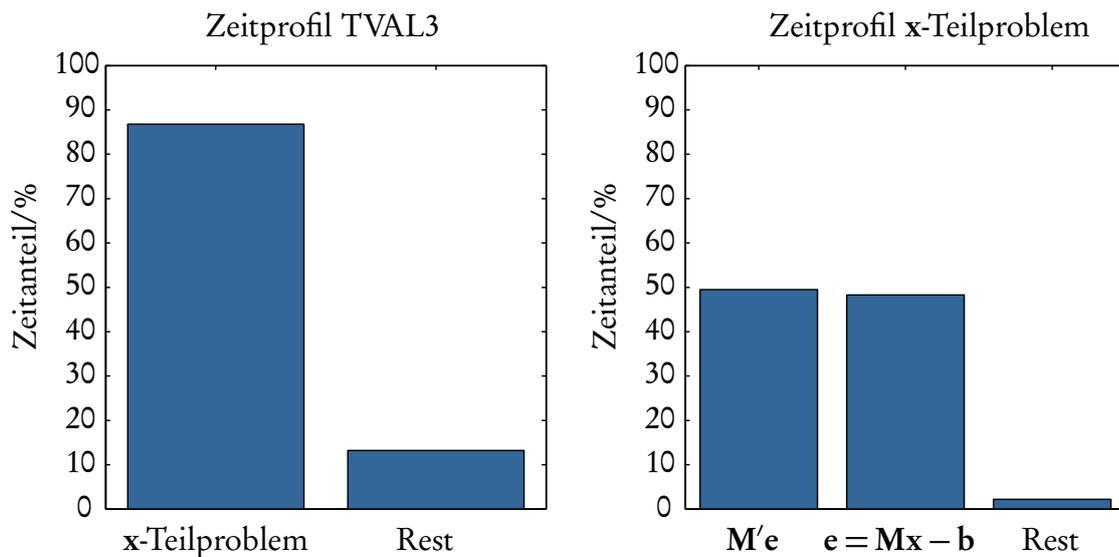


Abbildung 6.1 – Zeitprofil eines typischen TVAL3-Laufs in MATLAB.

Da die beiden erstgenannten Algorithmen wegen ihrer speziellen Messmatrizen nicht für USCT verwendbar sind, und der letztgenannte nur grobe Optimierungen enthält, wurde eine eigene beschleunigte Version des TVAL3-Algorithmus entwickelt, deren Details im Folgenden vorgestellt werden.

## Optimierte CPU-Version

Zur Optimierung der Ausführungsgeschwindigkeit werden zunächst die aufwendigsten Rechenschritte identifiziert. Dies geschieht am einfachsten durch ein Zeitprofil während der Rekonstruktion verschieden großer Datenmengen und unterschiedlicher Rekonstruktionsvolumen. Abbildung 6.1 zeigt das Profil der Ausführungszeit für eine 2D-Rekonstruktion der MATLAB-Implementierung des TVAL3-Algorithmus bei einer Auflösung  $128 \times 128$  Pixeln und 83 000 Messungen.

Wie man in Abbildung 6.1 sieht, benötigt die Matrix-Vektormultiplikation bei weitem die meiste Ausführungszeit, so dass eine Optimierung dieser Operation lohnenswert ist. Die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Matrix-Vektormultiplikation ist Optimierungsalgorithmen eigen, die auf einem Gradientenabstieg beruhen:

Minimiert man nämlich die Summe der Fehlerquadrate, wie es auch das x-Teilproblem des TVAL3-Algorithmus tut,

$$\min_x f = \min_x \|\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2,$$

ist ein Kriterium für ein Extremum von  $f$  eine Nullstelle des *Gradienten*

$$\nabla f = 2\mathbf{M}'(\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0. \quad (6.9)$$

Dabei ist  $\mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}$  wieder der Term der quadratischen Abweichungen aus Abschnitt 5.6, der mit der Adjungierten  $\mathbf{M}'$  der Messmatrix multipliziert wird. Bei USCT ist die Messmatrix immer reell, die Adjungierte entspricht also der Transponierten.

Wie in Kapitel 5 gezeigt, ist  $\mathbf{M}$  sehr dünn besetzt und wird in einem Sparse-Matrixformat gespeichert. Die Multiplikation dünn besetzter Matrizen ist wegen zusätzlicher Indirektionen und schlechter Cache-Lokalität deutlich ineffizienter als die Multiplikation vollbesetzter Matrizen [133].

Neben der Implementierung in C++ und anderer Optimierungen, die in [129] beschrieben sind, ist die wichtigste Änderung gegenüber der MATLAB-Version des TVAL3-Algorithmus die Verwendung einer schnellen Bibliothek für die Matrix-Vektormultiplikation.

Für die Multiplikation dünn besetzter Matrizen gibt es bereits eine Reihe von hochoptimierten Bibliotheken. Zu den gegenwärtig schnellsten Implementierungen für Allzweckprozessoren auf x86-Basis gehört die der Intel Math Kernel Library (MKL) [134]. Diese wurde für die optimierte Implementierung benutzt. Damit wird im Regelfall eine Beschleunigung um den Faktor fünf gegenüber der MATLAB-Implementierung erreicht.

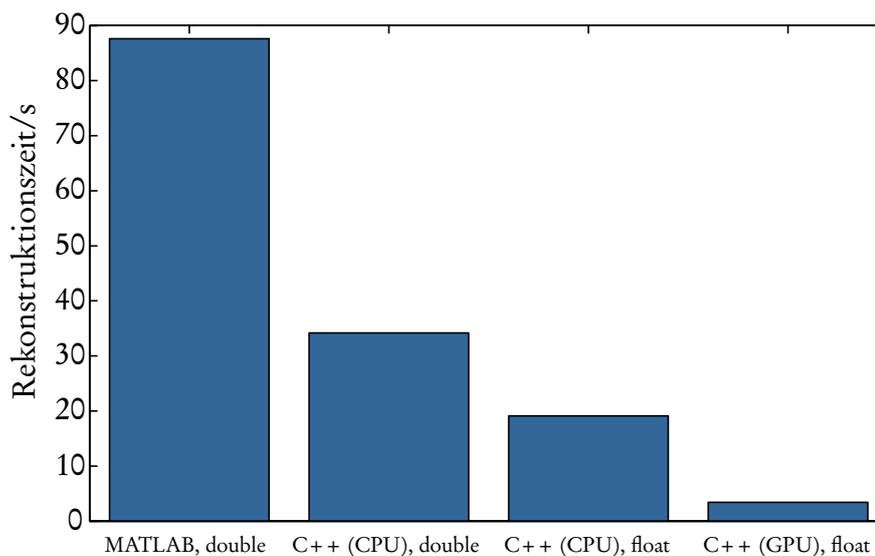
## GPU-Version

Weitere Beschleunigung kann durch den Übergang auf Grafikkarten erreicht werden. Im Gegensatz zu trivial parallelisierbaren Problemen eignet sich die Matrix-Vektormultiplikation allerdings nicht besonders gut zur Berechnung auf Grafikkarten [135], [136].

Der TVAL3-Algorithmus nutzt außer der Matrix-Vektormultiplikation für die Minimierung des  $w$ -Terms ein Differenzen-Schema (siehe Abschnitt 6.1). Dieser Schritt kann auf neueren Grafikkarten mit Hilfe des Texturspeichers implementiert werden. Dieser ist inhärent zwei- oder dreidimensional und unterstützt zwei- und dreidimensionale Differenzbildung in Hardware. Dadurch wird eine weitere Senkung der Rekonstruktionszeit erreicht, wenn auch die Matrix-Vektormultiplikation nach wie vor den Löwenanteil der Rechenzeit einnimmt.

Insgesamt erreicht man mit einer optimierten Implementierung des TVAL3-Algorithmus auf einer aktuellen Grafikkarte (Nvidia GeForce GTX 580) eine Beschleunigung um den Faktor 26 gegenüber der MATLAB-Implementierung. Der Beschleunigung gegenüber einem aktuellen x86-Prozessor (Intel Core i7 970) liegt bei einem Faktor von 5,6. Dies ist grafisch nochmals in Abbildung 6.2 dargestellt.

Die Implementierungen, die diese Beschleunigungswerte erreichen, stoßen stets auch an die obere Grenze der Speicherbandbreite ihrer jeweiligen Plattform. Aus dieser Sicht wird die Hardware also optimal ausgenutzt. Andererseits könnte man einwenden, dass die Speicherbandbreite auch durch einen trivialen, langsamen Algorithmus ausgereizt werden könnte, der keineswegs die volle Rechenleistung ausschöpft. Für



**Abbildung 6.2** – Laufzeit der optimierten TVAL3-Implementierungen im Vergleich zur Original-MATLAB-Variante.

die Sparse-Matrix-Vektormultiplikation sind jedoch keine, aus Rechenleistungssicht, effizienteren Algorithmen bekannt [135].

**GPU-Implementierung** Problematisch bei der GPU-Implementierung des TVAL3-Algorithmus ist nach dem vorigen Absatz primär der Speicher, der mit der Messmatrix und ihrer Adjungierten angefüllt ist. Im Nvidia-Fermi-Referenzdesign sind bis zu sechs GB DRAM vorgesehen [137], die meisten Grafikkarten, die aber nicht speziell für wissenschaftliches Rechnen ausgelegt sind, besitzen zwischen 1 und 3 GB Hauptspeicher. Typische Messmatrixgrößen bewegen sich zwischen 1 und 10 GB (siehe Unterabschnitt 5.5), reizen also den Speicher einer Karte mehr als aus.

Aus diesem Grund wurde zunächst die Idee verfolgt, die Zeilen der Messmatrix  $\mathbf{M}$  nicht im Voraus zu speichern, sondern sie während der Rekonstruktion bei Bedarf zu berechnen. Man erkaufte sich demnach geringeren Speicherbedarf durch gesteigerten Rechenaufwand, was bei ohnehin brachliegender Rechenleistung sinnvoll erscheint. Eine zweite Möglichkeit ist die Verteilung der Messmatrix auf mehrere Grafikkarten. Für die (nichttransponierte) Matrix-Vektormultiplikation wird die Messmatrix nur zeilenweise benötigt, daher kann sie entlang der Spalten in gleichgroße Stücke aufgeteilt werden. Siehe dazu [129].

An diesem Punkt ist eine performante Funktion zur Berechnung der Wegstrecken wichtig, denn wie in Abschnitt 3.3 erklärt, setzen sich die einzelnen Zeilen der Messmatrix aus den getroffenen Voxeln des aktuellen Strahls von Sender zu Empfänger zusammen. Betrachtet man etwa (6.9), wird zur Berechnung des inneren Misfit-Terms  $\mathbf{e} := \mathbf{M}\mathbf{x} - \mathbf{b}$  für einen Wert von  $\mathbf{e}$  nur eine Zeile von  $\mathbf{M}$  und eine Spalte von  $\mathbf{x}$  benötigt (und eine nicht rechenaufwendige Subtraktion eines Eintrags von  $\mathbf{b}$ ). Dies kann, auch

mit zusätzlichem Berechnungsaufwand für die Wegverfolgung von entsprechendem Sender zu Empfänger, sehr schnell geschehen, weil einzelne Einträge voneinander unabhängig zu berechnen sind.

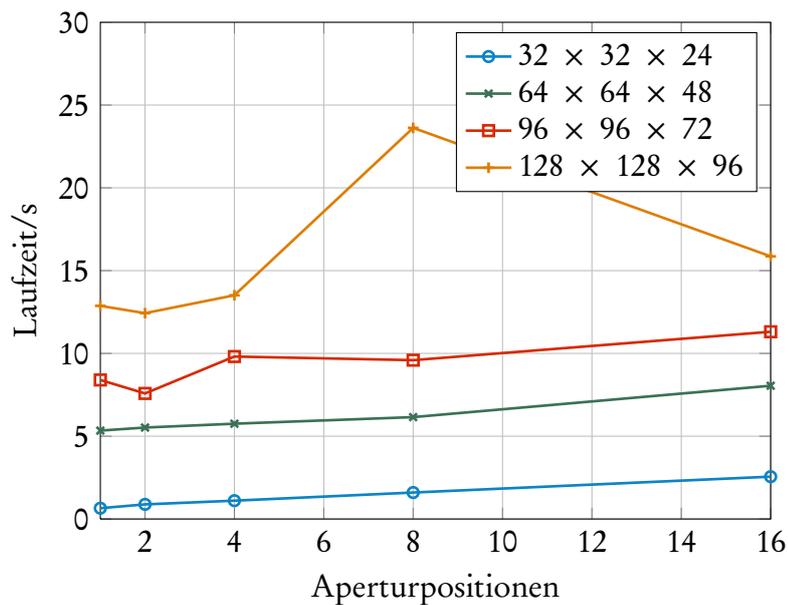
Anders sieht es im Falle der Multiplikation mit der Adjungierten  $\mathbf{M}'\mathbf{e}$  aus. Für das USCT- beziehungsweise das ART-Rekonstruktionsmodell beschreibt die Adjungierte der Messmatrix, von welchen Strahlen ein Voxel getroffen wird – im Gegensatz zur Messmatrix, die beschreibt welche Voxel ein Strahl trifft. Es muss demzufolge eine große Anzahl von Wegen verfolgt werden, um den Wert eines Voxels oder die Einträge einer Zeile der adjungierten Messmatrix zu bestimmen. Erschwerend kommt hinzu, dass durch diese Art des Speicherzugriffs Konflikte zwischen den einzelnen Ausführungsthreads entstehen können. Dies bedeutet, dass man entweder andere Threads während der Berechnung vom Zugriff ausschließen muss, also die Operation atomar macht, oder einen separaten Speicher für jeden Thread vorsieht und all diese am Ende der Berechnung summiert. In [129] werden verschiedene Strategien beschrieben und implementiert, mit denen die transponierte Multiplikation beschleunigt werden kann. Maßgeblichen Einfluss auf die Rekonstruktionszeit hat in diesem Zusammenhang die Möglichkeit auf GPUs dreidimensionale Interpolation hardwarebeschleunigt durchzuführen. Spezielle 3D-Caching-Verfahren [137] kommen der Strahlverfolgung durch ein Volumen sehr entgegen und man erzielt allein durch diese Maßnahme eine Beschleunigung um das Doppelte [129].

**Dynamische Berechnung** Ab sechs Aperturpositionen ist die Matrix  $\mathbf{M}$  so groß, dass sie nicht mehr in den Hauptspeicher einer Grafikkarte passt (1,5 GB bei einer Nvidia GTX 580). Eine Möglichkeit ist nun, die Matrix auf mehrere Grafikkarten zu verteilen und dann parallel weiterzurechnen; es ist allerdings auch möglich die zur Matrix-Vektormultiplikation benötigten Zeilen von  $\mathbf{M}$  *on the fly* zu berechnen, wann immer sie gebraucht werden. Damit wird für die Berechnung nur noch sehr wenig Speicher verbraucht, das dynamische Berechnen geht aber zu Lasten der Rechenzeit. Wie die Rechenzeit beeinflusst wird, hängt vom verwendeten Vorwärtsmodell ab. In Abschnitt 6.4 wird deshalb darauf eingegangen, wie man die in Unterabschnitt 3.2 vorgestellte Strahlapproximationen noch weiter beschleunigen kann.

## Laufzeit des optimierten TVAL3-Algorithmus

In diesem Abschnitt wird die Laufzeit des TVAL3-Algorithmus für verschieden große Datenmengen untersucht. Außerdem wird anhand eines statischen, synthetischen Phantoms beurteilt, wieviele Daten nötig sind, um eine hohe Rekonstruktionsgüte zu erzielen. Für alle Versuche, auch diejenigen mit synthetischen Daten, wurde nur der relevante Winkelbereich der USCT-Wandler benutzt (siehe Unterabschnitt 5.5).

In Abbildung 6.3 ist veranschaulicht, wie sich die optimierte GPU-Version des TVAL3-Algorithmus im Verhältnis zu der Anzahl der Aperturpositionen verhält. Die Laufzeit



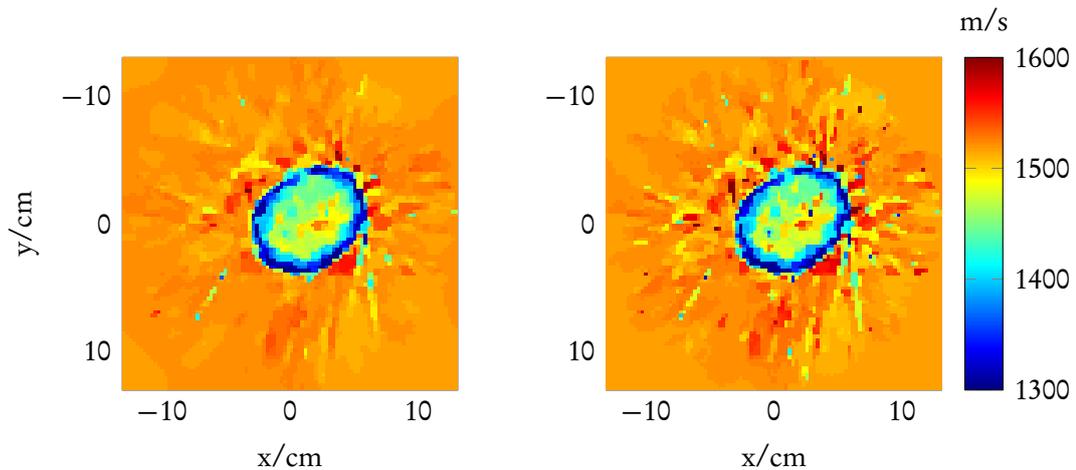
**Abbildung 6.3** – Laufzeiten der optimierten GPU-Version des TVAL3-Algorithmus für unterschiedliche Auflösungen und Anzahl Aperturpositionen bei 200 Iterationen.

wurde für 200 Iterationen des Algorithmus bestimmt. Mit acht GPUs kann ein Volumen der höchsten Auflösung von  $128 \times 128 \times 96$  kann in circa 15 Sekunden rekonstruiert werden.

200 Iterationen hat sich für synthetische und echte Daten als sinnvolle obere Grenze für die Anzahl der Iterationen erwiesen. Die meisten Rekonstruktionen benötigen weniger als 200 Iterationen, bei denjenigen die mehr brauchen, ist die Veränderung nicht mehr groß, wie in Abbildung 6.4 gezeigt am Beispiel einer echten Rekonstruktion gezeigt. Dies lässt sich nach [138] damit erklären, dass bei der Rekonstruktion zunächst große Singulärwerte Einfluss auf die Rekonstruktion haben, die großen Flächen oder niederfrequenten Anteilen im Bild entsprechen. Mit fortschreitender Iterationszahl gewinnen auch die höherfrequenten Anteile an Einfluss. Oft sind aber gerade diese höherfrequenten Anteile des Bildes rauschbehaftet, so dass zu viele Iterationen eher das Rauschen verstärken. Man kann deshalb die Beschränkung auf wenige Iterationen auch als eine Art Regularisierung ansehen, auch wenn sich deren genaue Wirkung schwierig quantifizieren lässt [139].

Die Wahl 200 Iterationen kann noch verfeinert werden, wenn man den Fehler genau quantifizieren kann. Für Abbildung 6.5 wurde das in Abbildung 5.8 gezeigte, angepasste synthetische Shepp-Logan-Phantom benutzt und mit additivem weißen Rauschen der Stärke 4 m/s versehen.

Wie man anhand der oberen Reihe erkennt, nimmt der RMSE bei jeder Auflösung und jeder Anzahl Aperturpositionen bis zur vierten äußeren Iteration ab und stagniert danach oder steigt wieder. Die Anzahl der Gesamtiterationen ist pro Auflösung und

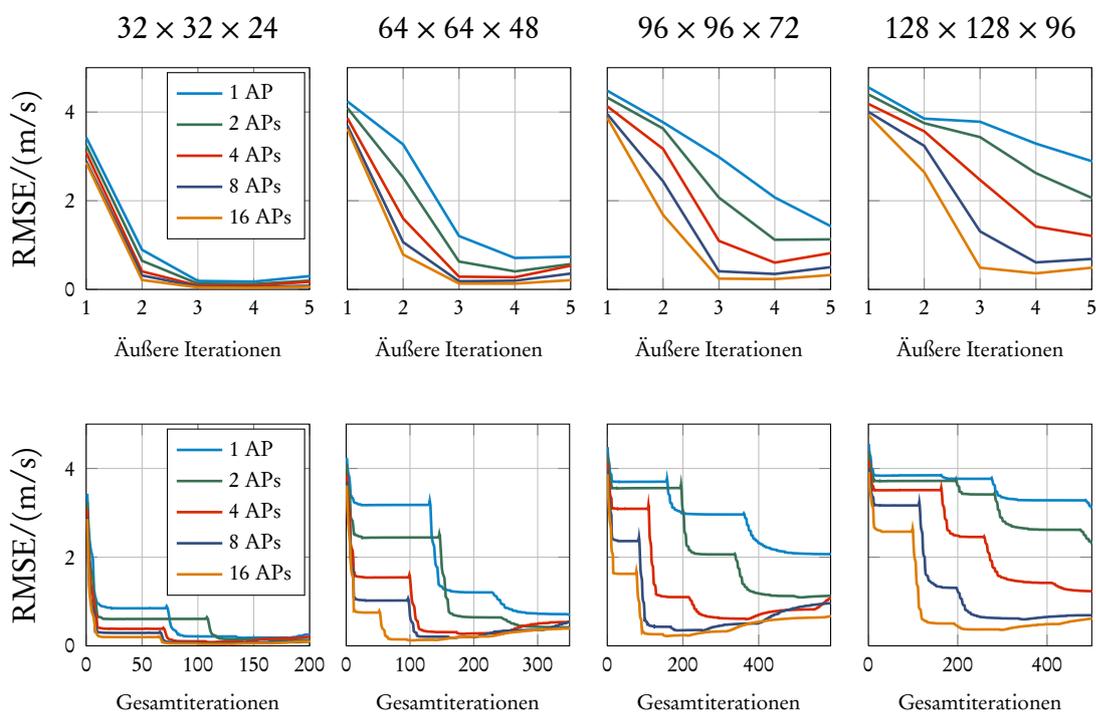


**Abbildung 6.4** – TVAL3-Rekonstruktion echter Daten mit 200 Iterationen (links) und mit 1500 Iterationen (rechts).

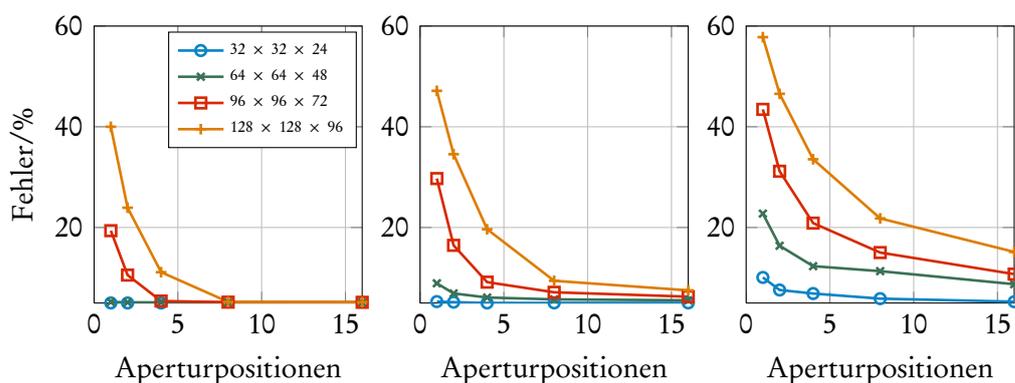
Anzahl Aperturpositionen abhängig von der Anzahl der äußeren Iterationen. Der Fehler in Abhängigkeit von dieser ist in Abbildung 6.5 (unten) dargestellt. Wie man sieht sind die gewählten 200 Iterationen für die meisten Auflösungen und Aperturpositionen ein guter Wert, nach dem der Fehler nur noch wenig abnimmt oder sogar ansteigt. Konkret für dieses Phantom würde man etwa für acht Aperturpositionen und die niedrigste Auflösung  $32 \times 32 \times 24$  und  $64 \times 64 \times 48$  ca. 150 Iterationen wählen, für  $96 \times 96 \times 64$  etwa 200 und für  $128 \times 128 \times 96$  etwa 250.

Für Abbildung 6.6 wurde dasselbe Phantom, allerdings mit Rauschen unterschiedlicher Stärke, verwendet. Dazu wurde auf den von der Simulation ohne Rauschen berechneten Mittelwert der Schallgeschwindigkeit normalverteiltes weiße Rauschen addiert. Je nach Stärke des Rauschens werden mehr Daten (also Aperturpositionen) benötigt, um hohe Auflösungen noch ohne großen Fehler rekonstruieren zu können. Die typische Stärke des Rauschens liegt bei echten USCT-Daten im relevanten Winkelbereich zwar unter  $\sigma = 8$  m/s, doch kommt eventuell eine Zahl ausgefallener TAS und ein systematischer Fehler hinzu, was die Rekonstruktion erschwert. Daher ist auch die Betrachtung mit  $\sigma = 8$  m/s von Interesse.

Ohne Rauschen ( $\sigma = 0$ ) genügen für die kleineren Auflösungen ( $< 64 \times 64 \times 48$ ) eine oder höchstens zwei Aperturpositionen. Die Standardauflösung  $96 \times 96 \times 72$  lässt sich mit vier Positionen gut rekonstruieren, die höchste Auflösung  $128 \times 128 \times 96$  benötigt mehr als acht Aperturpositionen. Mit der niedrigsten Auflösung ist eine Rekonstruktion in weniger als einer Sekunde möglich. Ist die Datenauslesezeit gering, wird mit dieser Konstellation eine sehr schnelle Vorschaumöglichkeit für den 3D-USCT II eröffnet.



**Abbildung 6.5** – Fehler des TVAL3-Algorithmus für unterschiedliche Auflösungen und Anzahl Aperturpositionen. Die obere Reihe zeigt den Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl der äußeren Iterationen, die untere Reihe den Fehler in Abhängigkeit von den Gesamtiterationen.



**Abbildung 6.6** – Relativer Fehler des TVAL3-Algorithmus für unterschiedliches Rauschen,  $\sigma = 0$  m/s (links),  $\sigma = 3$  m/s (Mitte) und  $\sigma = 8$  m/s (rechts).

## 6.3 Eikonal-Rekonstruktion

In den bisher vorgestellten Methoden wurde die Brechung noch nicht berücksichtigt. Die Eikonal-Gleichung bezieht als einziges der vorgestellten Verfahren die durch die Brechung verursachte Nichtlinearität mit ein und kann deshalb nicht mit Standard-Minimierungsalgorithmen gelöst werden.

Die Nichtlinearität der Eikonal-Gleichung stellt sich so dar, dass im Rekonstruktionsmodell  $\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{x}$  nicht mehr nur  $\mathbf{x}$ , sondern auch  $\mathbf{M}$  unbekannt ist. Dies liegt daran, dass  $\mathbf{M}$  nun die Brechung miteinschließt und es daher vom Objekt beziehungsweise  $\mathbf{x}$  abhängig ist, wie die gebrochenen Strahlen verlaufen und welche Gestalt  $\mathbf{M}$  hat. Weiterhin hängt nach wie vor natürlich  $\mathbf{x}$  von  $\mathbf{M}$  ab.

Eine Lösungsmöglichkeit ist, in erster Näherung  $\mathbf{M}^{(0)}$  für ungebrochene Strahlen zu berechnen, damit eine Schätzung für die Schallgeschwindigkeit  $\mathbf{x}^{(0)}$  und mit dieser eine weitere Approximation  $\mathbf{M}^{(1)}(\mathbf{x}^{(0)})$  zu generieren. Dieses Schritte iteriert man bis sich aufeinanderfolgende Schätzungen nur noch wenig unterscheiden.

Da für USCT, wie in Abschnitt 5.6 gezeigt, iterative Minimierungsalgorithmen genutzt werden, wäre die korrekte Lösung,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{x}$  in jedem Iterationsschritt neu auszuwerten.

Insbesondere im Diskreten gibt es eine Reihe von schnellen Algorithmen zur Berechnung der Eikonal-Gleichung. Ein weitverbreiteter ist der sogenannte Fast-Marching-Algorithmus (*Fast Marching Method (FMM)*), der etwa in [140] beschrieben wird. Die FMM wird benutzt, um die Ausbreitung einer Wellenfront im zwei- oder dreidimensionalen Medium zu verfolgen und ihre Ankunftszeit an einem bestimmten Punkt zu berechnen. Das algorithmische Vorgehen ist ähnlich zu dem des Dijkstra-Algorithmus: Es wird ein Heap verwendet, um auf dasjenige Voxel zuerst zuzugreifen, das den geringsten Abstand beziehungsweise die kürzeste Laufzeit von der bisher besuchten Menge Voxel hat.

Es existiert auch eine exaktere Variante des FMM (*High Accuracy Fast Marching Method (HAFMM)*), die zu berechnen kaum Mehraufwand erfordert [140], deren Genauigkeit jedoch durch die Nutzung höherer Ableitungen eine Größenordnung besser ist. Diese wird im Weiteren zur USCT-Rekonstruktion verwendet.

Andere Gruppen wie beispielsweise [141] und [81] nutzen auch die Eikonal-Approximation in Verbindung mit nichtlinearen Gleichungslösern. Allerdings beschränken sich beide Ansätze auf den zweidimensionalen Fall. Im Dreidimensionalen benötigt auch der HAFMM noch etwa einen Tag für eine Aperturposition und alle Sender-Empfängerpaar des 3D-USCT II. Bei der Lösung mit dem TVAL3-Algorithmus sind, wie in Abschnitt 6.2 gesehen, circa 200 Iterationsschritte zur Konvergenz erforderlich. Würde man in jedem dieser Schritte die Eikonal-Gleichung lösen, wäre man schon bei nur einer Aperturposition bei Rechenzeiten von 200 Tagen. Deshalb wird im Folgenden für die 3D-USCT-Eikonal-Rekonstruktion eine andere Herangehensweise vorgeschlagen, nachdem die vollständige Lösung algorithmisch erklärt wurde.

---

**Algorithmus 2** Vollständig nichtlinearer Eikonal-Algorithmus mit modifizierter Minimierung

---

Berechne erste Schätzung  $\mathbf{x}^{(0)}$  mit einfacher Strahlapproximation  
 Berechne Matrix  $\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(0)})$  mit HAFMM-Algorithmus aus  $\mathbf{x}_0$   
**while** Modifizierter TVAL3 nicht konvergiert **do**  
   Führe einen Iterationsschritt des modifizierten TVAL3-Algorithmus durch um  $\mathbf{x}^{(i)}$  zu erhalten  
   Berechne neues Vorwärtsmodell  $\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)})$  mittels HAFMM-Algorithmus  
**end while**

---

## Vollständig nichtlineare Lösung

[141] und [81] gehen die Nichtlinearität als Ganzes an, lassen also in einem Schritt Änderungen sowohl im Modell  $\mathbf{M}$  als auch in der Schätzung von  $\mathbf{x}$  zu. In [81] wird das System dann mittels eines nichtlinearen Conjugate-Gradient-Algorithmus gelöst, der zur Berechnung die Gradientenrichtung

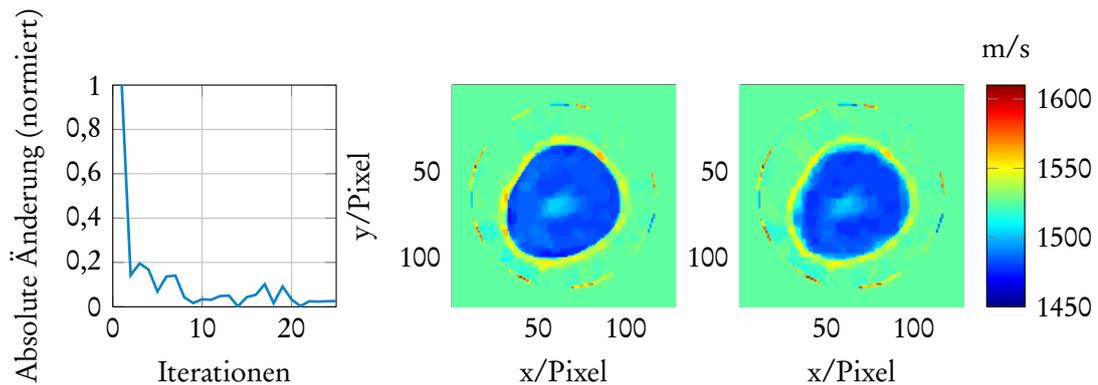
$$\nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) = 2\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)})^t (\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)}) - \mathbf{b}) + \lambda \mathbf{R}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}^t \mathbf{x}^{(i)} \quad (6.10)$$

benutzt. Hierbei symbolisiert  $S$  eine Hilfsvariable zur Skalierung der Regularisierung, ist aber für die Erläuterung der Prozedur ohne Belang.

Der nichtlineare Algorithmus ist in Algorithmus 2 aufgeführt. Dabei entspricht die `while`-Schleife der äußeren Schleife des TVAL3-Algorithmus. Bei jeder Benutzung der Matrix  $\mathbf{M}$  muss die aktuelle Schätzung auf Grundlage der aktuellen Schallgeschwindigkeitsverteilung berechnet werden.

Diese Formulierung unterscheidet sich von den bisherigen dadurch, dass die Nichtlinearität direkt abgebildet wird, indem die Messmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{x}^{(i)})$  als von der aktuellen Schätzung  $\mathbf{x}^{(i)}$  abhängig angenommen wird. Dies bedeutet allerdings, dass in jedem Minimierungsschritt  $\mathbf{M}$  neu in Abhängigkeit von  $\mathbf{x}^{(i)}$  berechnet werden muss. Dies ist sehr rechenaufwendig und für USCT nur bei 2D-Rekonstruktionen sinnvoll einsetzbar: So dauert eine solche Rekonstruktion für die kleinste sinnvolle 3D-Auflösung  $32 \times 32 \times 24$  schon über 40 Stunden; eine 2D-Rekonstruktion mit der Auflösung  $256 \times 256$  kann in weniger als fünf Stunden berechnet werden. Bei einer typischen Iterationszahl von 200 entspricht dies mindestens 200 Stunden für eine 3D-Rekonstruktion einer Auflösung von  $64 \times 64 \times 48$ . Unter den Gesichtspunkten von Abschnitt 6.2 wurde die ohnehin schon rechenaufwendigste Operation, die in jedem Iterationsschritt ausgeführt wird, deutlich verteuert.

Abbildung 6.7 (links) zeigt die absolute Veränderung von  $\mathbf{x}$  je Iteration über die äußeren Iterationen für eine Rekonstruktion eines zweidimensionalen Brustphantoms. Es ist zu erkennen, dass die größte Änderung bereits im ersten äußeren Schritt geschieht. Spätere Iterationen bringen nur wenig Änderung mit sich.



**Abbildung 6.7** – Schrittweise nichtlineare Eikonal-Rekonstruktion ohne Neuberechnung der Matrix in jedem Schritt. (Links) ist die absolute Änderung von einer Iteration zur nächsten aufgetragen. (Mitte) zeigt die Rekonstruktion nach 2 Iterationen, (rechts) nach 25 Iterationen.

---

### Algorithmus 3 Bent-Ray-Algorithmus

---

```

Berechne erste Schätzung  $\mathbf{x}^{(0)}$  mit einfacher Strahlapproximation
while Relative Änderung  $> \varepsilon$  do
    Berechne neues Vorwärtsmodell  $\mathbf{M}^{(i)}$  mittels HAFMM-Algorithmus und  $\mathbf{x}^{(i-1)}$ 
    Löse Problem  $\min_{\mathbf{x}^{(i)}} (\|\mathbf{M}^{(i)}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda\text{TV}(\mathbf{x}^{(i)}))$  mit TVAL3-Algorithmus
    Berechne relative Änderung  $\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(i-1)}$ 
end while

```

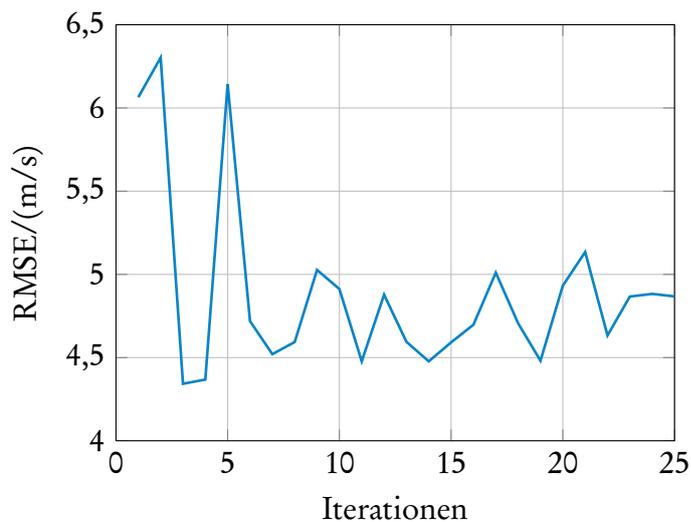
---

### Schrittweise nichtlineare Lösung

Abbildung 6.7 motiviert eine andere Herangehensweise: Für die dreidimensionale Berechnung der Eikonal-Gleichung bei USCT kann man  $\mathbf{M}$  auch nur in jedem äußeren Iterationsschritt neu bestimmen, nachdem der Rekonstruktionsalgorithmus gegen eine temporäre Lösung  $\mathbf{x}$  konvergiert ist. Dieses Vorgehen, das auch in [RD.5] veröffentlicht wurde, basiert lose auf einer Idee in [142] und [143].

Es ist nicht leicht, den absoluten Unterschied zwischen korrekter nichtlinearer Invertierung und vereinfachter Invertierung zu bestimmen, weil die Ergebnisse wesentlich stärker von der gewählten Regularisierung und den Eingangsdaten abhängen. Generell lässt sich sagen, dass eine Eikonal-Rekonstruktion für USCT die richtige Tendenz aufweist, weil vor allem die Form der untersuchten Objekte besser wiedergegeben wird. Siehe dazu auch Abschnitt 7.3. Der schrittweise nichtlineare Algorithmus ist in Algorithmus 3 in Pseudocode dargestellt.

In Abbildung 6.8 ist der Fehler der schrittweise nichtlinearen im Vergleich zum Ergebnis der vollständig nichtlinearen Methode aufgetragen. Da in einem Schritt der schrittweise nichtlinearen Methode wesentlich mehr Veränderung stattfindet als in einem Iterationsschritt der vollständig nichtlinearen Methode, wurden hierfür die Feh-



**Abbildung 6.8** – RMSE der schrittweise nichtlinearen Methode im Vergleich zur vollständig nichtlinearen Methode.

ler der 25 Schritte schrittweisen Methode mit den entsprechenden Iterationsschritten 8, 16, 24, ... (von insgesamt 200 Iterationen) verglichen. Ein Vergleich bleibt dennoch schwierig, weil die Regularisierung bei der schrittweise nichtlinearen Methode deutlich stärker wirkt als bei der vollständig nichtlinearen. Das liegt daran, dass das Ergebnisvolumen im Prinzip 25 Mal separat regularisiert wird, während im Normalfall die Regularisierung implizit zwar in jedem Schritt, insgesamt aber nur einmal durchgeführt wird.

Dennoch zeigt sich in Abbildung 6.8, dass beide Methoden ähnliches Konvergenzverhalten aufweisen. Der RMSE der schrittweise nichtlinearen Methode liegt nach wenigen Iterationen (sechs oder sieben) bei etwa 5 m/s und ändert sich nicht mehr maßgeblich.

## 6.4 Einfluss der diskreten Wegapproximation

Wie bereits erwähnt, ist es im Hinblick auf schnelle Rekonstruktion eminent wichtig, das Vorwärtsmodell schnell berechnen zu können. Wie in Abschnitt 6.2 erläutert, muss dieses in jedem Iterationsschritt des TVAL3-Algorithmus evaluiert werden. Passt die Messmatrix  $\mathbf{M}$  in den Speicher, ist die Generierungszeit durch Vorberechnung kein Hindernis. Falls sie jedoch zum Beispiel zu groß für den beschränkten Hauptspeicher einer Grafikkarte ist, wird sie zum Flaschenhals. Dies liegt daran, dass jede für die Matrix-Vektormultiplikation erforderliche Zeile der Matrix  $\mathbf{M}$  dynamisch erzeugt werden muss. Eine Zeile von  $\mathbf{M}$  beinhaltet nach Kapitel 5 einen einzelnen Weg von Sender zu Empfänger, der durch Strahlverfolgung bestimmt wird. Um diese Operation maximal zu beschleunigen, ist es hier günstig, die in Unterabschnitt 5.4 erwähnte

	WEGVERFOLGUNG			
	EIKONAL	HAFMM	EXAKT	APPROXIMIERT
RMSE/(m/s)	-	2,5	6,5	6,6
Beschleunigung	1	20	400	4000

**Tabelle 6.1** – Beschleunigung und Abschätzung der Fehler verschiedener Strahlapproximationen.

Approximation der Pfadsegmente in den Voxel zu nutzen, und davon auszugehen, dass jeder Strahl einen Voxel entweder ganz ( $l_i = 1$ ) oder gar nicht trifft ( $l_i = 0$ ). Dies ist eine Approximation, die umso besser wird, je genauer man diskretisiert, da dann die Gesamtwegstrecke durch die Einheitslängen angenähert wird.

Damit vermeidet man die kostspielige Strahlverfolgung und kann einen effizienten Algorithmus wie beispielsweise den Bresenham-Algorithmus einsetzen. Dieser arbeitet in der ursprünglichen Fassung [144] vollständig ganzzahlig, was ihn auch auf heutiger Hardware noch sehr effizient macht. Wie in Abschnitt 6.2 gezeigt, hat die Strahlverfolgung einen wesentlichen Anteil an der Berechnungszeit des Vorwärtsmodells.

Für USCT-typische Schallgeschwindigkeiten handelt man sich durch die Verwendung dieser Approximation einen Fehler von durchschnittlich 1,1 m/s ein (bei einer mittleren Weglänge von 60 Voxeln) Eigenschaften der Approximationen sind in Tabelle 6.1 nochmals zusammengefasst. Eine Veranschaulichung des Fehlers an Echtdateen findet sich in Abbildung 6.9. Hierfür wurde eine 2D-Schichtrekonstruktion des Brustphantoms durchgeführt. Der Mittelwert der rekonstruierten Schallgeschwindigkeiten des Phantoms beträgt 1456,5 m/s für die schnelle Weglängenapproximation und 1458 m/s für die exakte Wegverfolgung. Dies findet sich auch im Schallgeschwindigkeitshistogramm wieder, bei dem man zusätzlich erkennt, dass die Schallgeschwindigkeiten mit exakter Wegverfolgung weniger streuen.

In Tabelle 6.1 wurde versucht, den Fehler zu quantifizieren, den man begeht, wenn man statt gebrochener Strahlen gerade Strahlen verwendet. Dazu wurde ein 2D-Schnitt eines simulierten 3D-Brustphantoms (siehe Abschnitt 5.3) verwendet. Mit Hilfe des HAFMM-Algorithmus wurden die gebrochenen Strahlen berechnet. Für die Berechnung des Unterschieds zwischen gebrochenen und ungebrochenen Strahlen wurde sowohl die gebrochene als auch die ungebrochene Schallgeschwindigkeit ausgerechnet. Über die Differenz dieser Werte wurde für alle Sender- und Empfängerpaare gemittelt. Der Fehler der HAFMM-Methode gegenüber der vollständigen Simulation der Eikonal-Gleichung stammt aus der Literatur [140]. Einschränkend zu bedenken ist, dass sowohl die FMM als auch die HAFMM ebenfalls die Weglängenapproximation nutzen.

Zusammenfassend gilt also, dass, auf die Weglängenapproximation verzichtet werden sollte, wenn hohe Genauigkeit für die Schallgeschwindigkeitsbilder erforderlich ist. Für USCT-Zwecke bedeutet das, dass die Schallgeschwindigkeitsvolumen zur Korrektur der

Reflexionsbildgebung mit akkurater Strahlverfolgung berechnet werden. Bei separaten Schallgeschwindigkeitsvolumen sind kleinere Fehler eher tolerabel, solange sie die Erkennung bösartigen Gewebes nicht beeinträchtigen. Im Allgemeinen kann zu diesem Zweck auch ein relativer Wert wie die Abweichung der Schallgeschwindigkeit von einem Referenzwert[145] wie etwa der Schallgeschwindigkeit von Fett genutzt werden, so dass ein Fehler von etwa  $0,10\% \approx 1,5 \text{ m/s}$  keine Relevanz hätte.

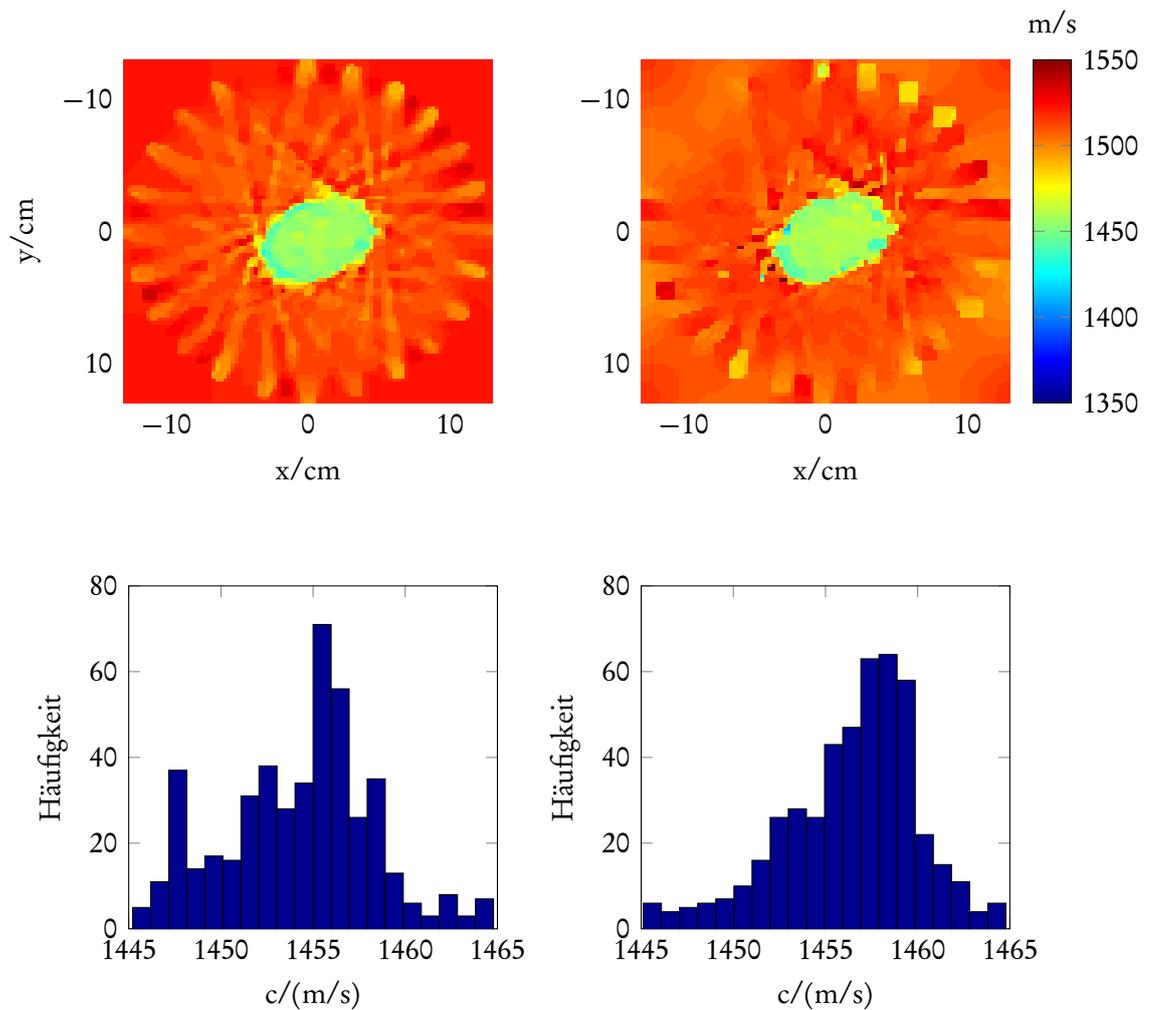
## 6.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Compressive-Sampling-Algorithmus TVAL3 genauer erläutert. Der Algorithmus wurde analysiert, auf 3D erweitert und durch implementatorische Optimierungen um den Faktor 25 beschleunigt. Dazu wurde eine GPU-Implementierung erstellt, anhand synthetischer Phantome verifiziert und zur Bildrekonstruktion mit echten Daten verwendet.

Darüberhinaus wird quantifiziert, welchen Einfluss die diskrete Weglängenapproximation auf den Rekonstruktionsfehler hat: Eine Beschleunigung um einen Faktor zehn kann mit sehr kleinem Fehler von  $0,10 \text{ m/s}$  erreicht werden und wird daher in der GPU-Implementierung eingesetzt.

Insgesamt ist es dadurch möglich ein 3D-USCT-Schallgeschwindigkeits- oder Dämpfungsvolumen mit einer Voxelgröße von  $(2,7 \text{ mm})^3$  in unter 20 Sekunden zu rekonstruieren. Reduziert man die Voxelgröße auf  $(8 \text{ mm})^3$ , ist mit dem optimierten Algorithmus eine Rekonstruktion in unter einer Sekunde möglich. Dieser Bildgebungsmodus könnte künftig für schnelle Vorschaubilder der Patientinnenpositionierung während klinischer Aufnahmen genutzt werden.

Außerdem wird die dreidimensionale *High Accuracy Fast Marching Method* (HAFMM) zur Implementierung einer brechungskorrigierten Version des TVAL3-Algorithmus genutzt. Durch seltenes Neuberechnen der gebrochenen Wege kann eine Beschleunigung um einen Faktor 20 erreicht werden, wobei man sich einen Fehler (RMSE) von etwa  $5 \text{ m/s}$  gegenüber der unapproximierten Variante einhandelt. Damit ist es erstmals möglich, dreidimensionale brechungskorrigierte Rekonstruktionen der Schallgeschwindigkeit und der Dämpfung in realistischer Zeit (weniger als zwölf Stunden) zu berechnen.



**Abbildung 6.9** – 2D-Rekonstruktion des Brustphantoms approximierter Wegverfolgung (links oben) und mit exakter Wegverfolgung (rechts oben). Die untere Zeile zeigt Ausschnitte der zugehörigen Schallgeschwindigkeits-Histogramme, die dem Phantom entsprechen.

# Kapitel 7 | Ergebnisse

*Un homme est toujours la proie de ses vérités.*

— Albert Camus, Le mythe de Sisyphe

In diesem Kapitel werden unterschiedliche Rekonstruktionsergebnisse gezeigt und verglichen. Es wurde, sofern nicht anders angegeben, der optimierte TVAL3-Algorithmus verwendet. Die Rekonstruktionen wurden auf dem USCT-Rechenserver durchgeführt. Er ist mit vier Achtkern-Prozessoren des Typs Opteron 6134 mit 2,3 GHz und 256 GB DDR3-ECC-RAM ausgestattet.

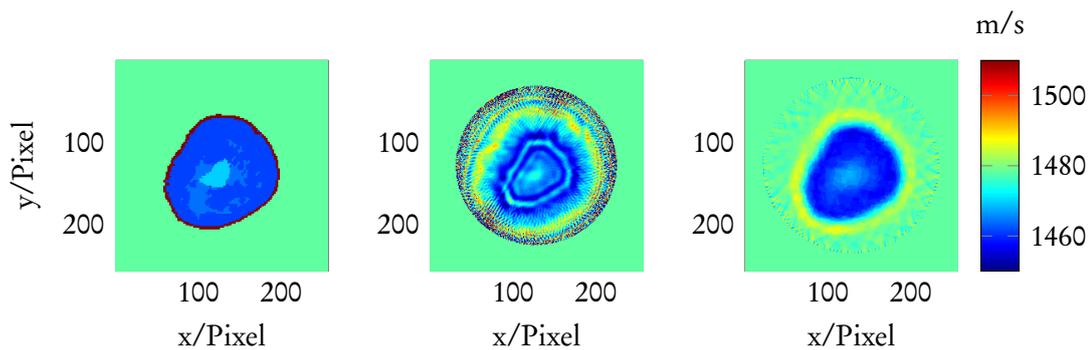
Zu Beginn werden Rekonstruktionen für synthetische Daten gezeigt, um die theoretischen Auflösungsgrenzen praktisch zu untermauern. Dazu wird zunächst mit der 2D-Diffraktionssimulation begonnen, die mit der Strahlapproximation ohne Brechung und mit der Eikonal-Approximation mit Brechung rekonstruiert wird. Anhand dieser Rekonstruktionen wird der Einfluss der Beugung veranschaulicht. Außerdem werden Ergebnisse mit der Banana-Doughnut-Rekonstruktion gezeigt.

Dann folgen Rekonstruktionsergebnisse auf Grundlage der Eikonal-Simulation des segmentierten Brustphantoms, bei denen es unter anderem um die Wirkung der Brechung geht. Anschließend werden Rekonstruktionen echter mit dem 3D-USCT II aufgenommener Daten gezeigt, zunächst das Brust- und ein Gelatinephantom, dann die Ergebnisse der klinischen Studie in Jena.

Zum Abschluss werden Ergebnisse gezeigt, die unter dem Aspekt der Geometrieoptimierung für eine kommende USCT-Generation mit Simulationen erzeugt wurden.

## 7.1 2D-Diffraktionssimulation

In diesem Abschnitt werden einige Rekonstruktionsergebnisse präsentiert, die auf der zweidimensionalen Simulation der Wellengleichung aus Abschnitt 5.3 basieren. Die Simulation beherrscht Brechung und Mehrfachstreuung, Dämpfung wird vernachlässigt. Speziell soll es hier um Diffraktionseffekte gehen, die die strahlbasierte 3D-Simulation nicht abzubilden vermag. Die Simulation enthält keine Dämpfung und bildet keine



**Abbildung 7.1** – Referenz (links), Rekonstruktion nach Optimalfilterdetektion (Mitte) und Rekonstruktion nach First-Arrival-Detektion (rechts).

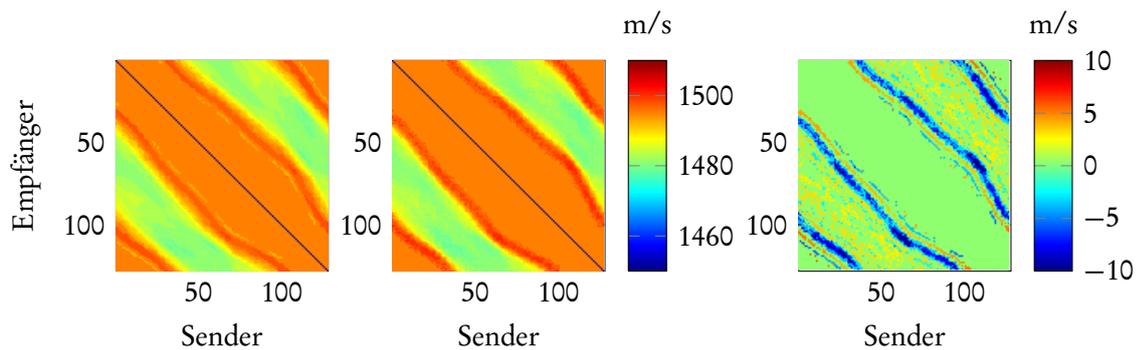
winkel- oder frequenzabhängigen Eigenschaften der Wandler ab. Die Ausleuchtung des Bildes ist daher an jeder Stelle gut.

Abbildung 7.1 zeigt das zur Simulation (links) verwendete Original, eine Rekonstruktion mit Optimalfilter-Signaldetektion (Mitte) und eine Rekonstruktion mit CFD-Signaldetektion (rechts, siehe Kapitel 4). Die simulierte Brust hat an der größten Stelle einen Durchmesser von 18 cm. Für diese und künftige synthetische Daten werden die Achsen in Pixeln oder Voxeln, bei Echtdateien in cm angegeben.

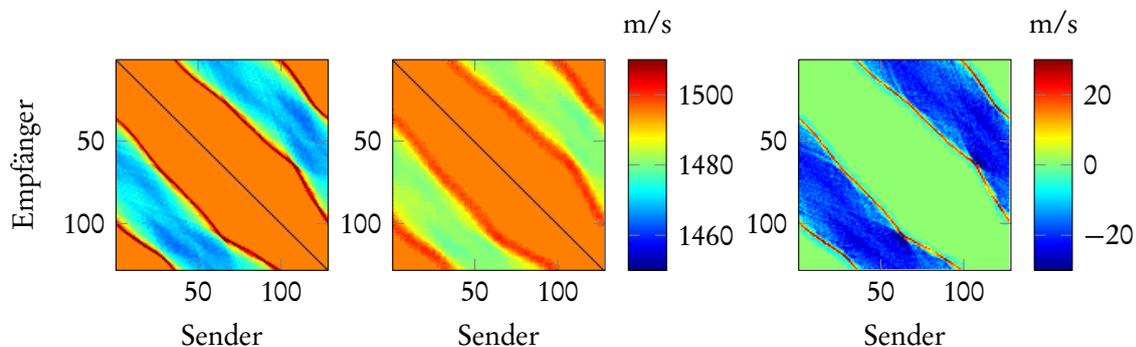
Es ist zu erkennen, dass eine Rekonstruktion nach Detektion mit einem Optimalfilter im Unterschied zum Original deutliche Artefakte aufweist. Die ringartigen Konturschatten außerhalb der Brust und außerhalb der krebsartigen Struktur sind Streueinflüsse, die innerhalb des Detektionsfensters für die Transmissionstomographie eintreffen und deshalb sowohl die Detektion wie auch das Rekonstruktionsergebnis verfälschen. Nach [122] ist ein *First-Arrival*-Detektor (wie es der CFD ist) in der Lage, den Detektionsfehler zumindest bei schnellen Streuern gering zu halten, wie sie hier im simulierten Phantom vornehmlich an den Rändern auftreten.

Der RMSE der Rekonstruktion nach Optimalfilterdetektion beträgt 27 m/s, mit CFD-Detektion 18 m/s. Der Fehlerterm wird dominiert von der Hautschicht am Rand der Brust, die eine sehr hohe Schallgeschwindigkeit aufweist (1610 m/s). Diese wird von keiner der beiden Rekonstruktionen dargestellt. Im Gegenteil zeigt sich, dass an der entsprechenden Stelle in der Rekonstruktion eher niedrigere Schallgeschwindigkeit (1500, hellblaue Kontur innerhalb der gelben äußeren Kontur) anzutreffen ist. Die drüsengewebeartigen Strukturen des Originals mit niedrigem Kontrast (+10 m/s, hellblaue Flächen in der Nähe des Tumors in Abbildung 7.2 (links)) sind in der Rekonstruktion mit Optimalfilter nicht und in der mit CFD nur sehr schemenhaft zu sehen.

Für die 2D-Simulation wurde kein Rauschen verwendet, um nur den Einfluss der Beugung und Streuung auf den Transmissionspuls darzustellen. In Abbildung 7.2 sind Sinogramme der Detektion mit Optimalfilter und Schwellwertdetektion dargestellt. Abbildung 7.2 (rechts) zeigt ein Differenzsinogramm zwischen beiden Sinogrammen. Die dort sichtbaren Unterschiede sind Streueinflüsse auf den Transmissionspuls.



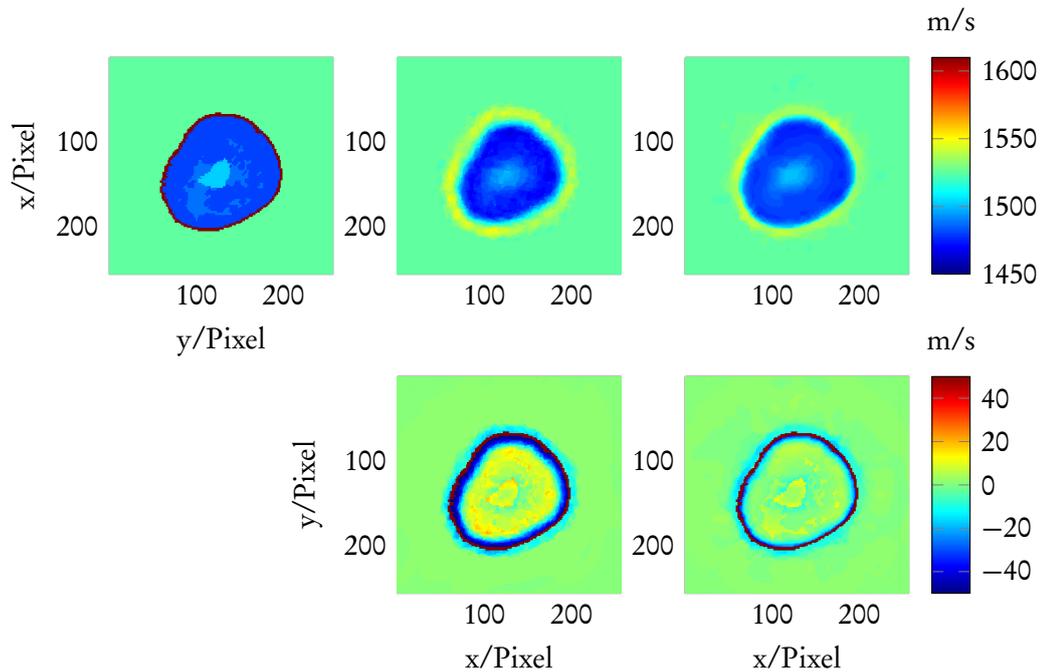
**Abbildung 7.2** – Sinogramme der Optimalfilterdetektion (links), CFD-Detektion (Mitte) und Differenzbild (rechts). Die Sinogramme sind jeweils über alle 128 Sender und Empfänger aufgetragen.



**Abbildung 7.3** – Optimal-Sinogramm ohne Streuung, Beugung und Brechung (links), CFD-Detektion (Mitte) und Differenzbild (rechts).

In Abbildung 7.3 ist ein Vergleich des *optimalen* Sinogramms (links), das per Strahlapproximation berechnet wurde, mit dem Sinogramm nach CFD-Detektion (Mitte) gezeigt; das Differenzbild ist (rechts) zu sehen. Anhand dieses Vergleiches wird deutlich, dass auch der CFD nicht in der Lage ist, alle Streueinflüsse »auszublenden«. Insbesondere ist zu sehen, dass der Rand sehr viel breiter ist als im optimalen Sinogramm.

Der Einfluss der Brechung wird in Abbildung 7.4 deutlich. Die Brust in der Rekonstruktion in Abbildung 7.4 (Mitte), die mit dem CFD durchgeführt wurde, ist im Vergleich zum Original deutlich kleiner. Dies ist der Einfluss der Brechung, wie man anhand einer brechungskorrigierten Rekonstruktion demonstrieren kann. Abbildung 7.4 (rechts) zeigt ein mit schrittweise-nichtlinearer Brechungskorrektor (vergleiche Abschnitt 6.3) rekonstruiertes Bild, auf dem die Brust annähernd die gleiche Größe wie im Original hat. Dies zeigt sich auch im RMSE: bei der unkorrigierten Version ergibt sich ein RMSE von 18 m/s, während sich mit Brechungskorrektur ein RMSE-Wert von 15 m/s ergibt. Auch mit Brechungskorrektur werden die Strukturen niedrigen Kontrasts nicht zufriedenstellend rekonstruiert. Ebenso wird die Breite der Hautschicht noch deutlich



**Abbildung 7.4** – Rekonstruktionen des synthetischen Phantoms (links oben) ohne (oben Mitte) und mit schrittweise nichtlinearer Brechungskorrektur (rechts oben). Die untere Reihe zeigt Differenzbilder zum Original.

(Faktor drei) zu »dick« wiedergegeben und enthält ebenso wie in der brechungslosen Rekonstruktion eine Schicht niedriger Schallgeschwindigkeit. Diese Phänomene können durch Streuer erklärt werden, die den Detektionszeitpunkt des Transmissionsignals und damit die Rekonstruktion verändern (vergleiche Abschnitt 4.4), sich aber mit einer strahlbasierten Methode nicht vermeiden lassen. Ergebnisse zum selben Phantom werden auch in [RD.6] gezeigt.

Aus diesem Grund wurden die 2D-Simulationsdaten auch mit der seismologischen Banana-Doughnut-Methode rekonstruiert. Ein Ergebnisbild ist in Abbildung 7.5 zu sehen. Erstaunlicherweise stimmt der äußere Rand der Brust sehr genau mit dem Original überein, obwohl keine Brechung in die Rekonstruktion einbezogen wurde. Hingegen weichen die Schallgeschwindigkeitswerte des Wassers und auch des Phantoms deutlich vom Original ab. Deshalb weist die gezeigte Rekonstruktion auch einen RMSE-Wert von 43 m/s auf. Die Position des Tumors in der Mitte ist weitgehend korrekt. Insgesamt erfüllt für diese Simulation die Banana-Doughnut-Rekonstruktion die Erwartungen nicht – die eben gezeigten strahlbasierten Rekonstruktionen begehen weniger Fehler und stimmen auch optisch besser mit dem Original überein.

Ein möglicher Ansatzpunkt zur Erklärung dieser Diskrepanz ist [122]. Dort wird erwähnt, dass unter bestimmten Umständen eine lineare endlichfrequente Modellierung der Streueinflüsse keine Vorteile gegenüber der Strahlenoptik bringt, die genauen Bedingungen hierfür bleiben aber im Unklaren.

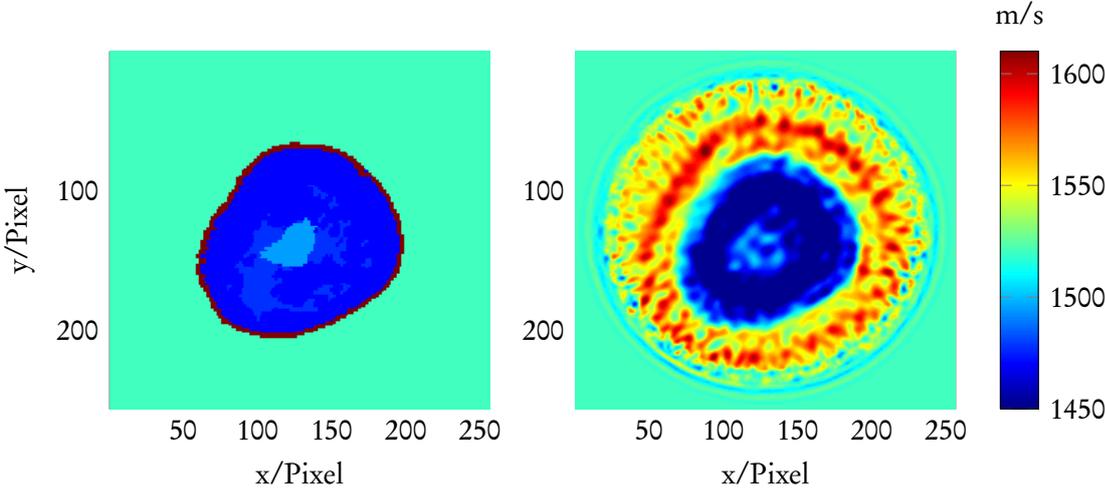
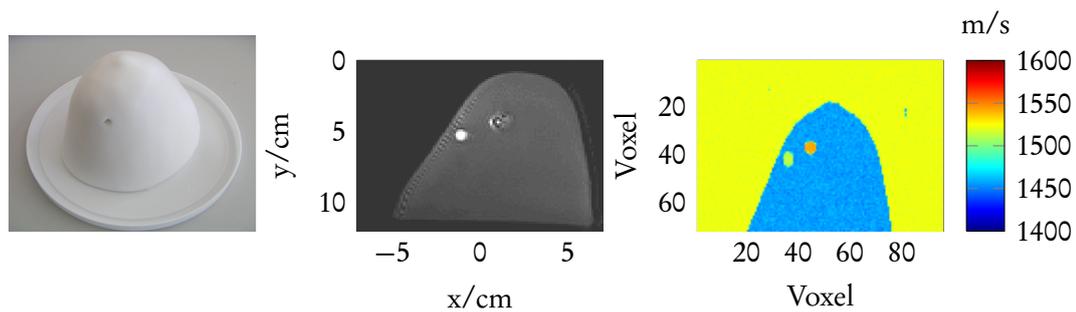


Abbildung 7.5 – Original (links) und Banana-Doughnut-Rekonstruktion (rechts).



**Abbildung 7.6** – Triple Modality Biopsy Brustphantom der Firma CIRS (links), MRT-Schichtbild des Phantoms (Mitte) und segmentiertes und mit Schallgeschwindigkeiten versehenes synthetisches Phantom (rechts).

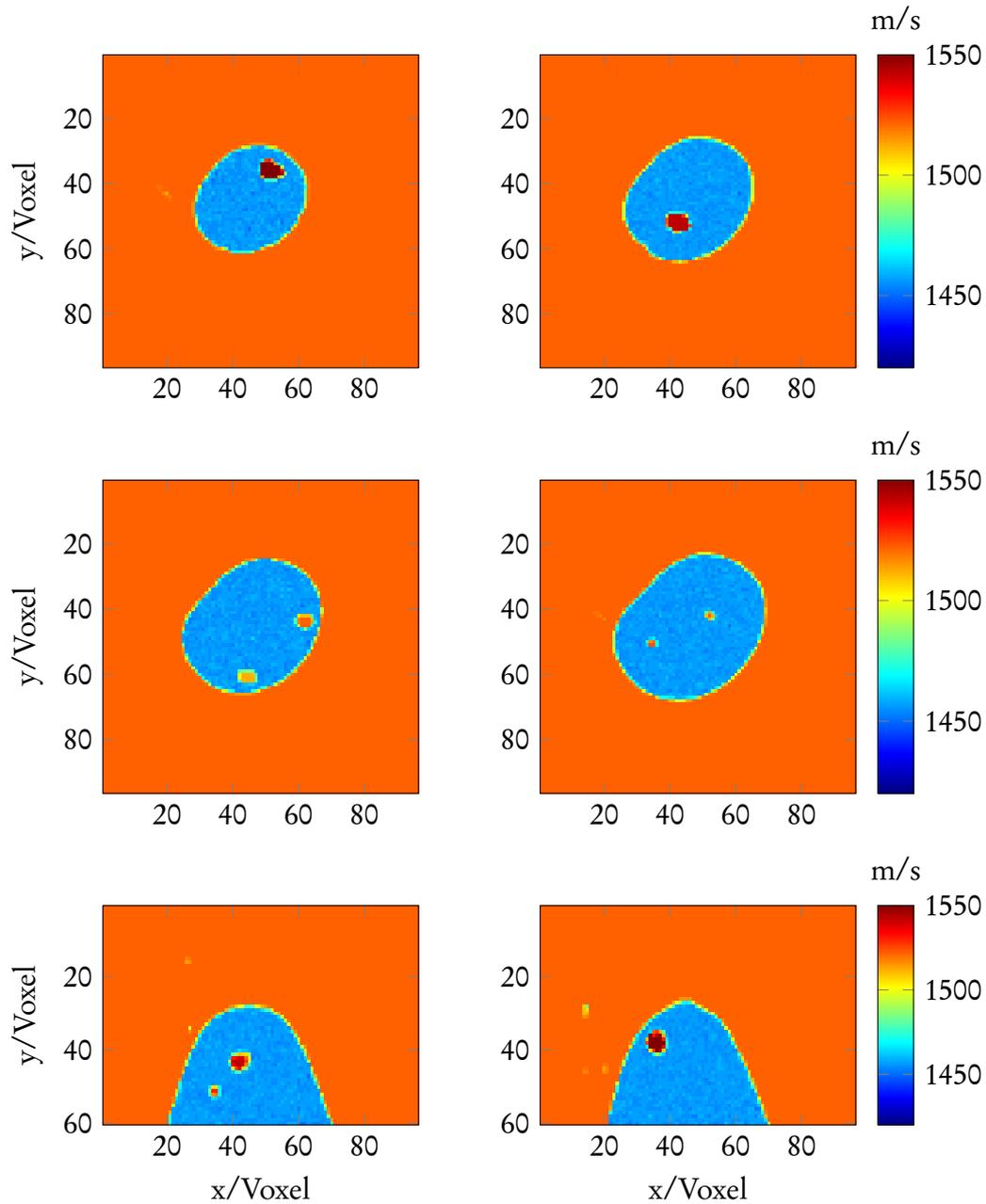
LÄSION	GRÖßE/CM	SCHALLGESCHWINDIGKEIT/(M/S)
Phantom	10	1455
Wasser (35° C)	-	1520
L1	1,8	1550
L2	1,6	1540
L3	1,4	1520
L4	1,1	1510
L5	0,41	1520
L6	0,54	1530

**Tabelle 7.1** – Medieneigenschaften im synthetischen Schallgeschwindigkeitsphantom

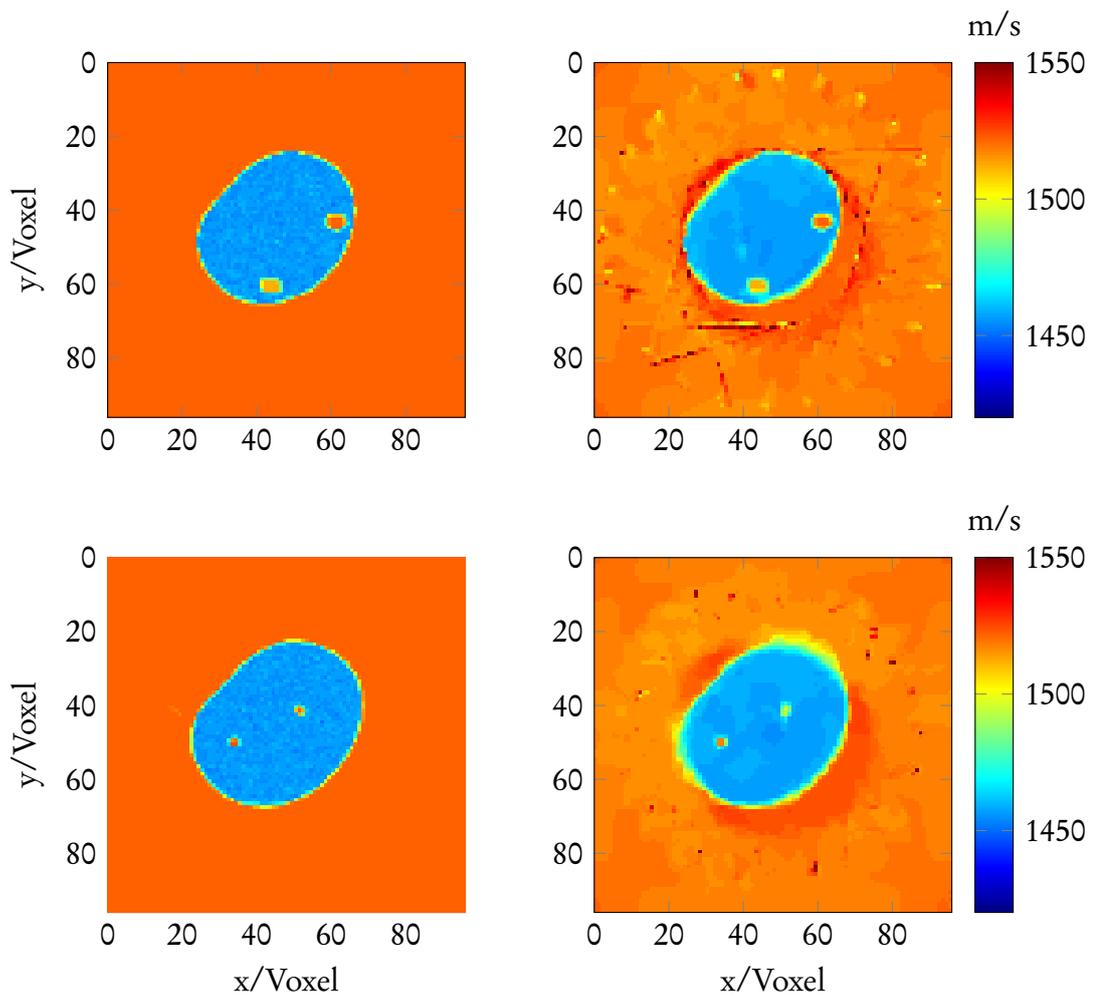
## 7.2 3D-Simulationen

Die 3D-Simulation verwendet die Strahlapproximation, mit der Effekte endlicher Frequenz wie Beugung oder Streuung nicht beschrieben werden können. Nachdem in der 2D-Simulation gezeigt wurde, welche Auswirkungen derartige Phänomene haben können, geht es nun bei der 3D-Simulation mehr um den Einfluss der Apertur, verschiedener Aperturpositionen und der Brechung.

Zur Einschätzung des Auflösungsvermögens wurde ein synthetisches MATLAB-Phantom erstellt. Dieses basiert auf einem MRT-Scan des CIRS-Brustphantoms mit einem 3-Tesla-MRT im Universitätsklinikum Jena. Es enthält Läsionen der Größe 1,8 cm (L1), 1,6 cm (L2), 1,4 cm (L3), 1,1 (L4), 0,41 cm (L5) und 0,54 cm (L6). Der besseren Übersicht wegen wird das in Abschnitt 5.3 vorgestellte und hier verwendete Phantom in Abbildung 7.6 nochmals gezeigt. Tabelle 7.1 zeigt tabellarisch die Eigenschaften der verschiedenen Läsionen und des synthetischen Phantoms. Abbildung 7.7 zeigt verschiedene z- und x-Schichten des Phantoms mit den unterschiedlichen Läsionen.



**Abbildung 7.7** – Übersicht des synthetischen Schallgeschwindigkeitsphantoms. (Links oben) ist L1 zu sehen, (rechts oben) L2, (Mitte links) zeigt L3 und L4 (L3 oben, L4 unten) und (Mitte rechts) zeigt L5 und L6 (L5 links, L6 rechts). In der unteren Reihe sind  $yz$ -Schnitte zu sehen, die nochmals L2 und L6 (links unten) und L1 zeigen (rechts unten).



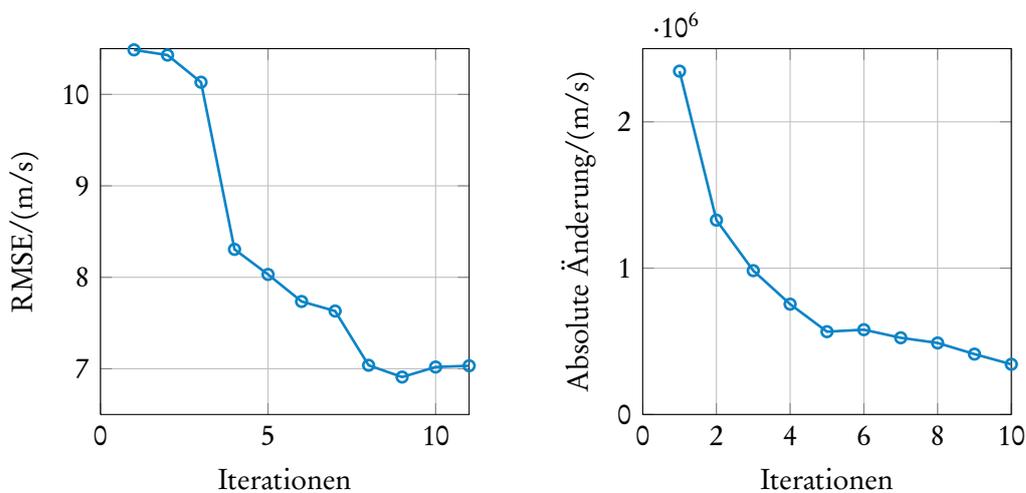
**Abbildung 7.8** – Original (links) und Rekonstruktion (rechts) des synthetischen Brustphantoms.

## Phantom ohne Brechung

Das Rauschniveau auf den A-Scans wurde mit 17-20 dB SNR so gewählt, dass es tatsächlichen USCT-Messungen gleichkommt (siehe Kapitel 4). Die Winkelabhängigkeit der Wandler wurde für Sender und Empfänger anhand der gemessenen Amplitude (siehe Abbildung 4.6) in die Simulation miteinbezogen. Als Anregungspuls wurde der Standard-Chirp (siehe Abbildung 4.1) verwendet.

Es wurden 16 Aperturpositionen simuliert. Diese entsprechen den Aperturpositionen 6 - 22, die für eine Echtdatenmessung des Brustphantoms verwendet wurden. Da der RMSE für unterschiedliche Anzahl Aperturpositionen bereits in Unterabschnitt 6.2 untersucht wurde, werden in diesem Abschnitt Ergebnisse für zehn Aperturpositionen gezeigt. Dieses Aperturpositionsprofil wurde für die klinische Studie in Jena bei fast allen Patientinnen benutzt.

Abbildung 7.8 zeigt eine Rekonstruktion mit zehn Aperturpositionen. Der Mittelwert



**Abbildung 7.9** – Veränderung des RMSE (links) und der absoluten Differenz der rekonstruierten Schallgeschwindigkeiten über die Iterationen der schrittweise nichtlinearen Eikonalkonstruktion.

der Schallgeschwindigkeit des Phantoms in der Rekonstruktion beträgt 1456 m/s, bei einer Standardabweichung von 3 m/s. Der RMSE zum Original liegt bei 2,3 m/s. Der RMSE nur für die Läsionen berechnet liegt bei 3,5 m/s. Der Durchmesser der Läsionen wurde manuell anhand der größten Ausdehnung bestimmt. Der RMSE dieser Durchmesser liegt bei etwa 3 mm.

Mit 16 Aperturpositionen ändert sich der Mittelwert der Schallgeschwindigkeit nicht, die Standardabweichung reduziert sich auf 2,6 m/s. Ebenso verhält es sich mit dem RMSE, der auf 2 m/s für das Phantom und auf 3,1 m/s für die Läsionen sinkt.

## Phantom mit Brechung

Dieselbe Simulation wie eben wurde für diese Untersuchung mit Brechung durchgeführt. Puls, Rauschniveau, Winkelabhängigkeit und Bewegungsprofil wurden beibehalten.

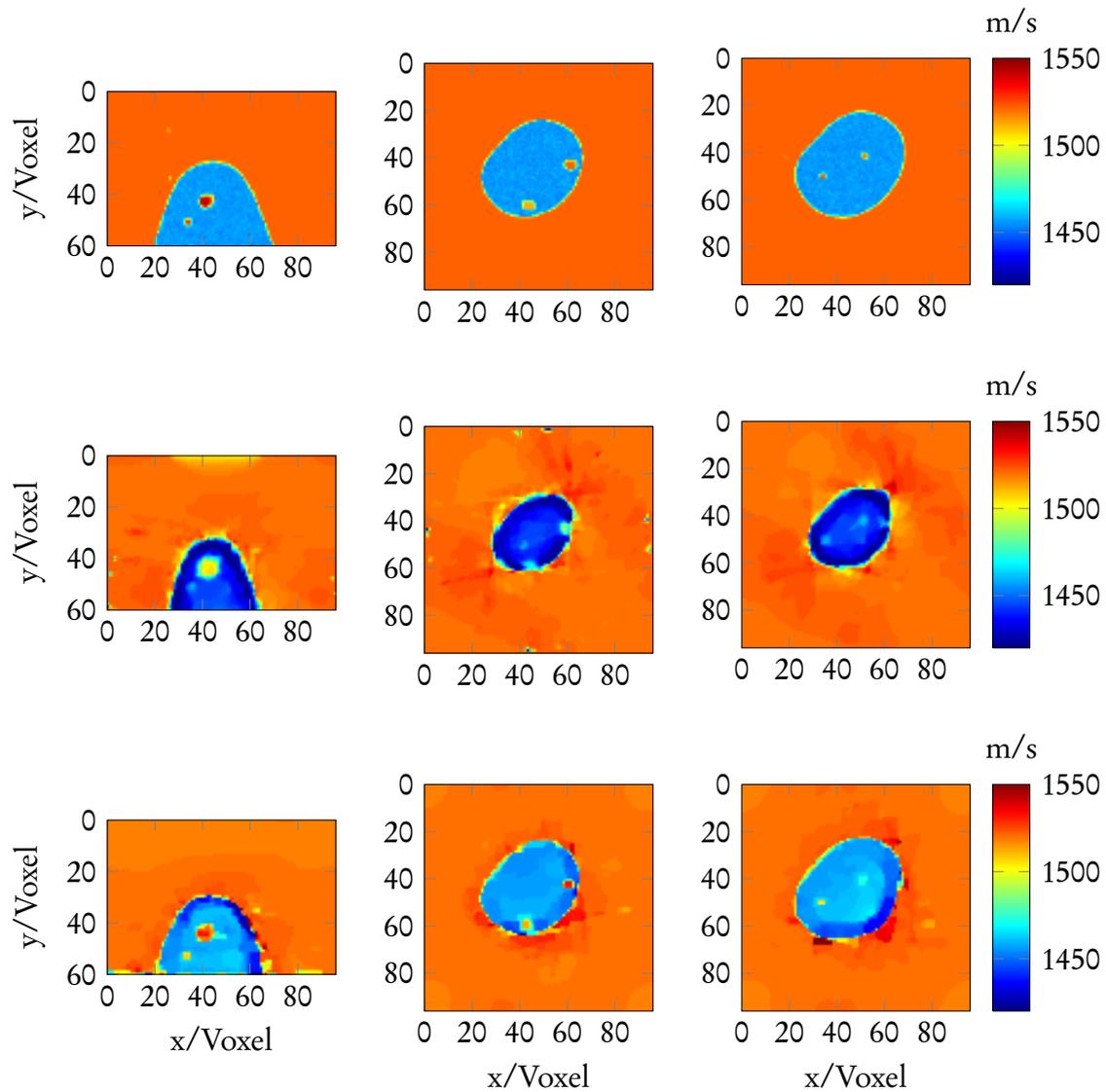
Es ist in Abbildung 7.10 deutlich zu beobachten, dass sich sowohl die Kontur wie auch die Größe der Läsionen und der Gesamtform des Brustphantoms verändern. Die Referenz hat unten eine Breite von circa 45 Pixeln (12 cm entsprechend), während das ohne Brechung rekonstruierte Phantom weniger als 37 Pixel, das heißt 10 cm groß ist. Mit Eikonalkonstruktion liegt die Breite bei 42 Pixeln, 11,4 cm. Außerdem ist die Läsion L2 in der brechungslosen Rekonstruktion deutlich größer als die der Referenz. Dies ist damit zu erklären, dass durch die höhere Schallgeschwindigkeit, die Strahlen eher einen Weg durch die Läsion wählen als an ihr vorbei. Dieselbe Argumentation greift auch für die Verkleinerung des Phantoms. Dieses hat eine geringere Schallgeschwindigkeit als Wasser – der Weg gebrochener Strahlen wird in Randbereichen also eher am Phantom vorbei durch das Wasser verlaufen als durch das

Phantom selbst.

Aus Gründen der Rechenzeit wurden nur zehn Iterationen des schrittweise nichtlinearen Eikonal-Algorithmus durchgeführt. Abbildung 7.9 zeigt die Veränderung des RMSE und die absolute Änderung pro Iteration. Dort ist außerdem zu sehen, dass die Schallgeschwindigkeit der brechungslosen Rekonstruktion deutlich niedriger liegt als bei der Referenz. Die mittlere Schallgeschwindigkeit des Phantoms der Referenz liegt bei 1458 m/s, in der brechungslosen Rekonstruktion bei 1448 m/s und bei der Rekonstruktion mit Brechung bei 1457 m/s.

Es ist weiterhin zu bemerken, dass die kleinere Läsion L6 (0,54 cm) durch die Brechung nur noch schlecht in der brechungslosen Rekonstruktion zu sehen ist. Dieser Effekt ist für alle Läsionen in Abbildung 7.10 (Mitte) veranschaulicht.

In Abbildung 7.10 kann man außerdem erkennen, dass alle Läsionen in der Rekonstruktion mit Brechung deutlicher zu sehen sind als bei der brechungslosen Rekonstruktion. Der RMSE der Läsionen beträgt bei der Rekonstruktion ohne Brechung 8,2 m/s, bei der mit Brechung 3,5 m/s. Ein Effekt, der die Sichtbarkeit der Läsionen beeinträchtigt, ist, dass durch die Verkleinerung des Phantoms (durch die Brechung) am Rand liegende Läsionen (wie in Abbildung 7.10 im mittleren Bild zu sehen) nahezu mit dem Rand verschmelzen und dadurch weniger eindeutig identifizierbar werden. Dies verbessert sich durch die Brechungskorrektur einerseits durch die Vergrößerung des Phantoms, andererseits durch die schärferen Kanten der Läsionen.



**Abbildung 7.10** – Rekonstruktionen mit und ohne Brechung. Die obere Reihe zeigt das Original, die mittlere Reihe die Rekonstruktion ohne Brechung und die untere Reihe die Rekonstruktion mit dem schrittweise nichtlinearen Eikonal-Algorithmus.

## 7.3 Rekonstruktionen des Brustphantoms

Für dieses Echtdaten-Experiment wurde das als Grundlage der Simulation verwendete »Triple Modality Breast Phantom« im 3D-USCT II gemessen. Als Anregungspuls wurde der Standard-Chirp verwendet. Insgesamt wurden 22 Aperturpositionen angefahren. Die Positionen sind Ergebnis eines Optimierungsprozesses für die Reflexionsbildung, der unter anderem den maximalen Abstand verschiedener TAS zum Ziel hatte.

CIRS gibt für das Phantom eine mittlere Schallgeschwindigkeit von 1450 m/s an. Dabei ist einerseits nicht klar, wie genau dieser Wert ist und andererseits, ob für den Mittelwert die Läsionen, deren Schallgeschwindigkeit nicht angegeben ist, mitberücksichtigt wurden. Der Mittelwert der rekonstruierten Schallgeschwindigkeiten des Phantoms in Abbildung 7.11 beträgt circa 1457 m/s. Die Schallgeschwindigkeit exklusive der Läsionen stellt sich aber nicht eindeutig linear dar, sondern ist vielmehr in den Außenbereichen des Phantoms niedriger als 1450 m/s (circa 1445 m/s), in den inneren Bereichen aber höher (Mittelwert circa 1463 m/s). Die Standardabweichung des gesamten Phantoms betrug 7 m/s. Von CIRS selbst gibt es keine genaueren Angaben zur Schallgeschwindigkeitsverteilung.

Die Läsionen L1-L4, die größer als ein Zentimeter sind, sind in den Schallgeschwindigkeitsbildern deutlich sichtbar. Die kleineren Läsionen L5 und L6 ( $< 0,60$  cm) heben sich nicht eindeutig vom Hintergrund ab und sind von Artefakten nicht zu unterscheiden. Über die Struktur oder das Material der Läsionen ist ebenfalls nichts bekannt. Nach den Reflexionsrekonstruktionen kann aber vermutet werden, dass es sich um zwei Arten von Läsionen handelt: eine Art scheint aus kleinen, stark streuenden Elementen aufgebaut zu sein, die andere Art ist wahrscheinlich eine gel- oder flüssigkeitsgefüllte Kugel. In den Schallgeschwindigkeitsrekonstruktionen scheint sich nur diese letzte Art Läsionen abzubilden.

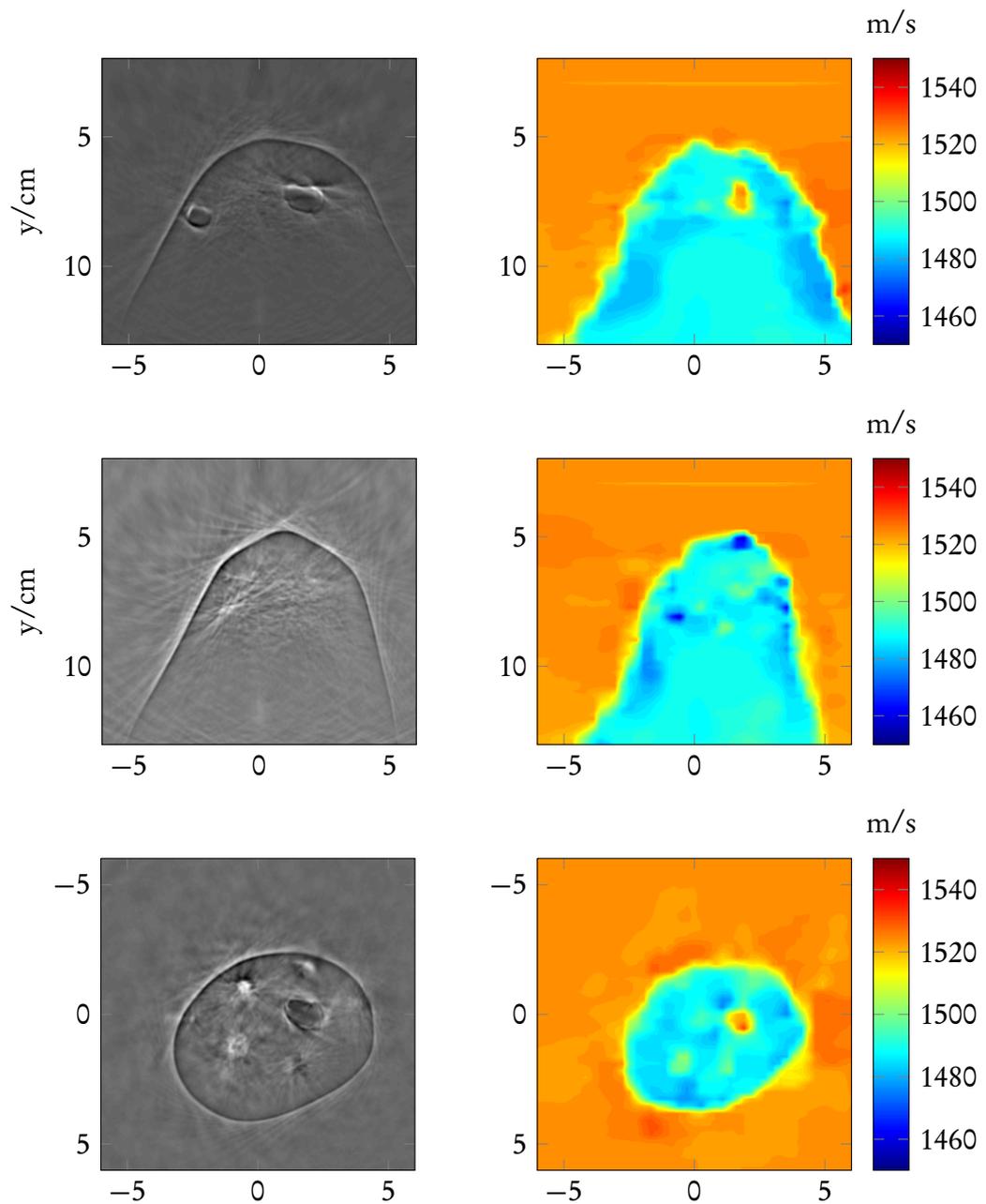
Insgesamt sind im Reflexionsbild wegen der höheren Auflösung deutlich mehr Läsionen sichtbar. Die größeren Läsionen (etwa 1 cm) sind aber auch im Schallgeschwindigkeits- und im Dämpfungsbild deutlich zu erkennen (Abbildung 7.11 und Abbildung 7.12). Generell sind die Dämpfungsbilder unschärfer und am Rand des Phantoms finden sich stärkere Artefakte als beim Schallgeschwindigkeitsbild.

CIRS gibt als mittlere Dämpfung für das Phantom 0,5 dB/cm/MHz an, wobei auch hier nicht klar ist, worauf sich der Mittelwert bezieht, wie er gemessen wurde und welche Genauigkeit er hat. Der Mittelwert der rekonstruierten Dämpfungswerte des Phantoms betrug 0,6 dB/cm/MHz. Hierfür wurde allerdings nur der innere Bereich des Phantoms in die Berechnung miteinbezogen. An der Standardabweichung von 0,2 dB/cm/MHz ist erkennbar, dass die Homogenität noch nicht mit der der Schallgeschwindigkeitsbilder vergleichbar ist.

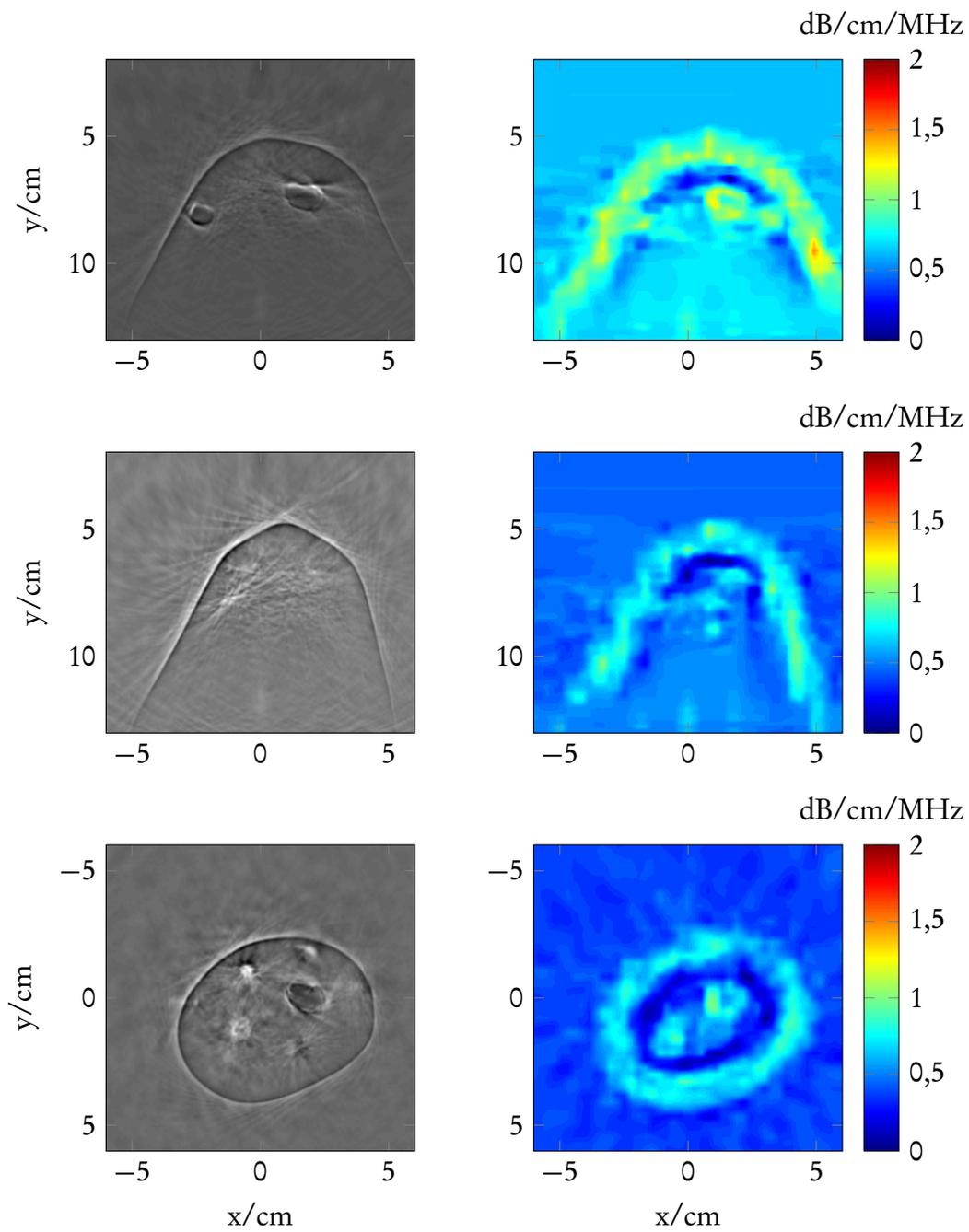
In Abbildung 7.13 sind auf dem Schallgeschwindigkeitsbild noch die Läsionen (links und oben) zu erkennen, verschmelzen aber mit dem Rand. Die Läsionen haben eine Größe (an der größten Ausdehnung manuell gemessen) von etwa 9 mm. Im

Dämpfungsbild ist an den selben Stellen zwar auch etwas zu erkennen, doch finden sich auch im Rest des Phantoms erhöhte Dämpfungswerte, die nicht eindeutig von Läsionen zu trennen sind.

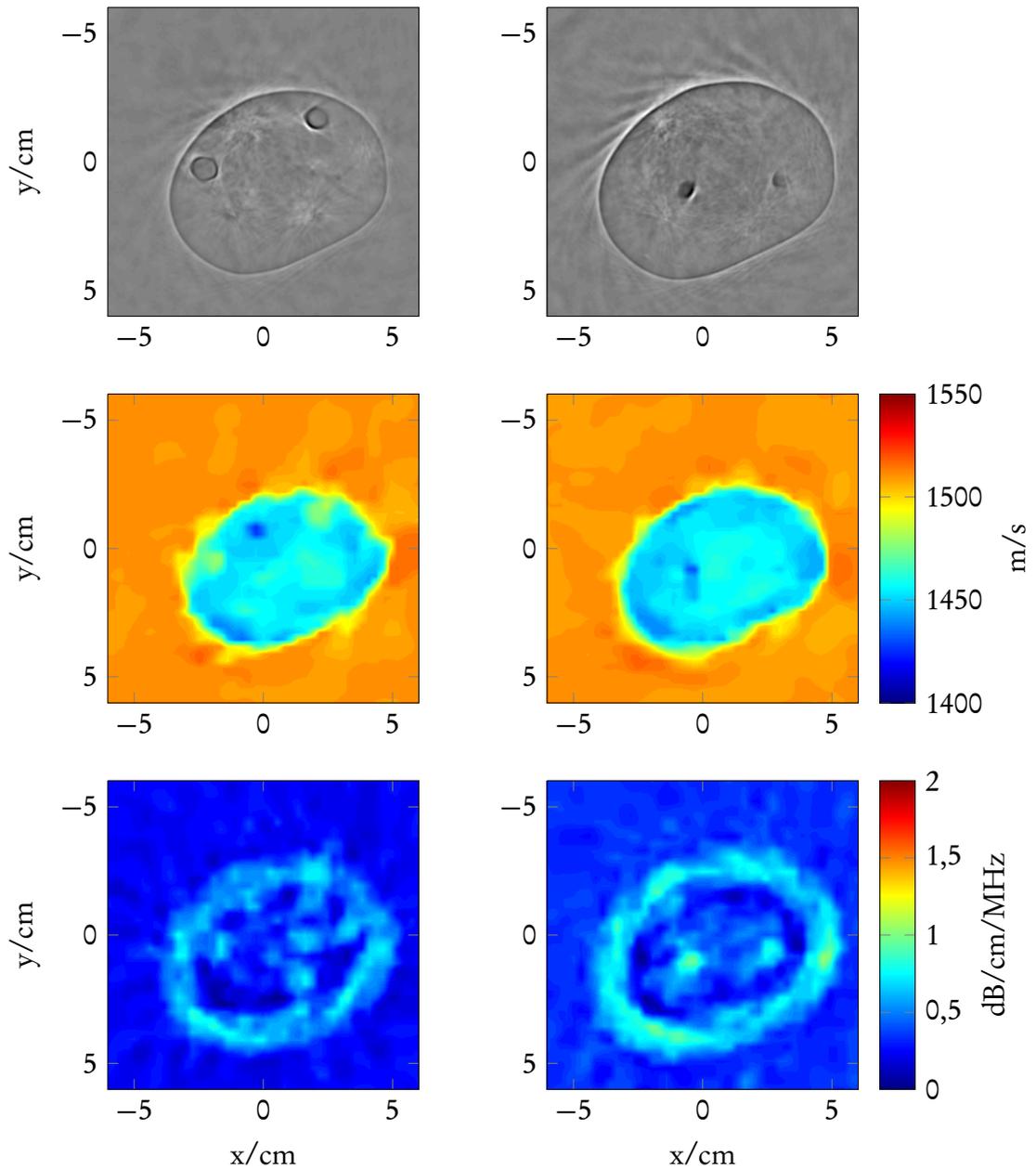
Anders in Abbildung 7.13 (rechts). Die Läsionen hier sind etwa 4 – 5 mm groß (entsprechen L5 und L6 im simulierten Phantom). Auf dem Schallgeschwindigkeitsbild sind diese nicht mehr eindeutig identifizierbar, auf dem Dämpfungsbild hingegen zeichnen sie sich deutlich vom Hintergrund ab. Eine mögliche Erklärung ist, dass der Fréchet-Kern für die Dämpfung zwar die gleiche Form hat wie der für die Schallgeschwindigkeit, die Sensitivität aber anders verteilt ist [146] und sich damit der Einfluss auf den Transmissionspuls verändert.



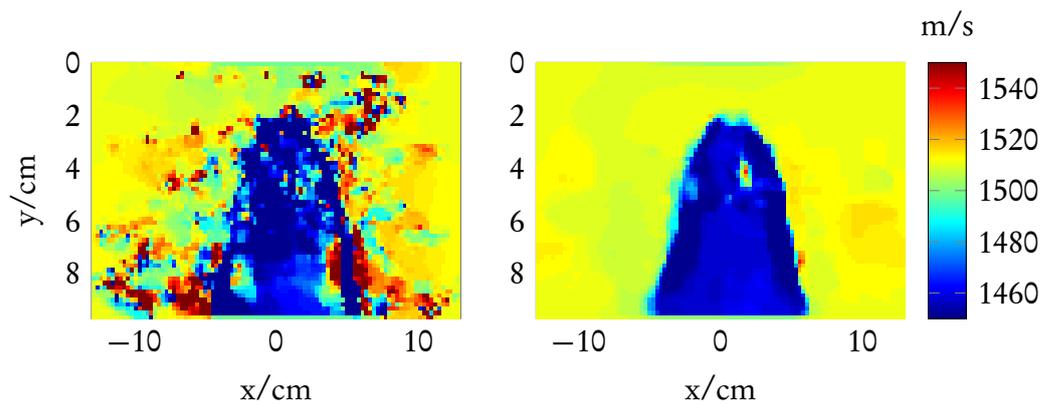
**Abbildung 7.11** – Reflexionsrekonstruktionen (links) und Schallgeschwindigkeitsrekonstruktionen (rechts) des Brustphantoms.



**Abbildung 7.12** – Schichtbilder der Reflexionsrekonstruktion (links) und der Dämpfungsrekonstruktion (rechts) des Brustphantoms.



**Abbildung 7.13** – Reflexionsbilder (oben), Schallgeschwindigkeitsbilder (Mitte) und Dämpfungsbilder (unten) des Brustphantoms. Die Läsionen der linken Seite haben eine Größe von 1,4 cm (L3) und 1,1 cm (L4), die der rechten Seite von 0,50 cm (L6) und 0,41 cm (L5).



**Abbildung 7.14** – Rekonstruktionen des Brustphantoms ohne (links) und mit Gauß-Filterung (rechts).

## Einfluss der Gauß-Filterung

Die in Abschnitt 4.3 beschriebene Gauß-Filterung auf A-Scan-Ebene hat einen merklichen Einfluss auf die Qualität der Rekonstruktion. Dies wird in Abbildung 7.14 sehr deutlich. Die dort gezeigte Rekonstruktion ohne Filterung weisen sehr niedrige Schallgeschwindigkeiten ( $< 1350$  m/s) am Rand des Phantoms auf. Diese Ausreißer erschweren die Lösung des Gesamtsystems, was sich wiederum in höherem Rauschen im Rest des Bildes äußert. Bei der Rekonstruktion mit Gauß-Filterung sind diese Effekte unterdrückt und das Phantom kann deutlich homogener rekonstruiert werden. Die Standardabweichung des Wassers  $\sigma = 4$  m/s im Gegensatz zu 21 m/s vorher spiegelt die Verbesserung der Homogenität wider. Auch die Homogenität im Phantom nimmt zu (das heißt die Standardabweichung nimmt ab:  $\sigma = 11$  m/s gegenüber  $\sigma = 7$  m/s). Dies liegt vor allem daran, dass durch die Filterung keine großflächigen Artefakte am Rand des Phantoms mehr auftreten.

## Einfluss der Regularisierung

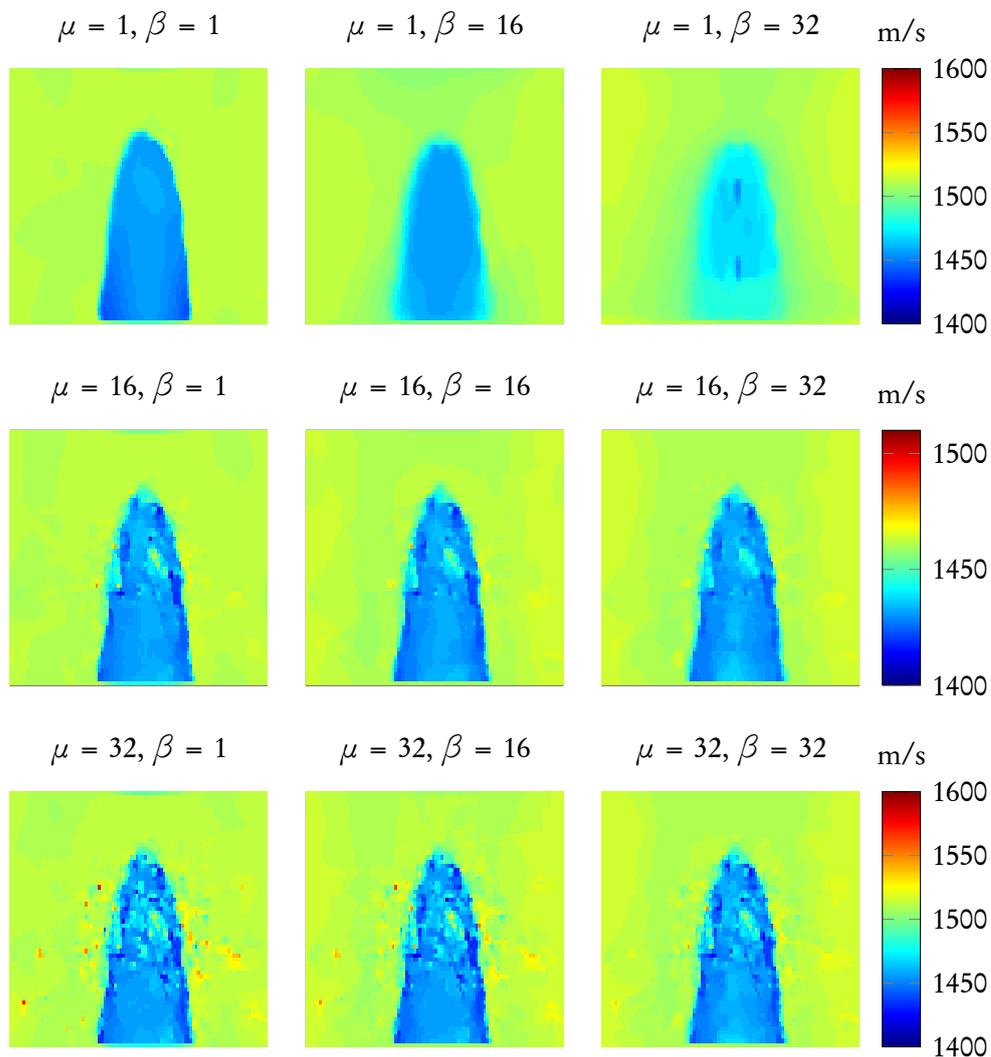
Die vermutlich größte Wirkung auf die Qualität der Rekonstruktionen haben außer der Signaldetektion die Regularisierungsparameter. Die Wahl der Parameter ist teilweise objektabhängig, weil je nach Größe der Läsionen das Gewicht Regularisierung erhöht oder verringert werden muss. Im Falle des TVAL3-Algorithmus sind die Parameter  $\mu$ , das Gewicht des Misfit-Terms und  $\beta$ , das Gewicht des Total-Variation-Terms.

Um die Regularisierungsparameter für Echtdaten richtig einzustellen, kann nur eine subjektive Einschätzung der Bildqualität vorgenommen werden. Eine Messung der Homogenität mittels der Standardabweichung würde sehr glatte Lösungen bevorzugen, bei der kleinere, eigentlich erwünschte Läsionen verschwinden.

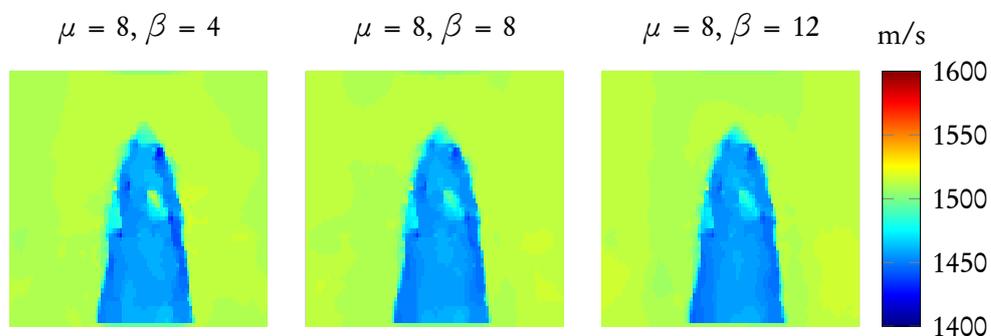
In Abbildung 7.15 sind Rekonstruktionen mit unterschiedlicher Wahl der Parameter gegenübergestellt. Für das Brustphantom liegt nach Abbildung 7.15 ein guter Kom-

promiss zwischen Datentreue (Misfit) und Total-Variation-Minimierung bei  $\beta = 8$  und  $\mu \in (1, 16)$ . Augenscheinlich nimmt das Rauschen zu, je höher die Datentreue eingestellt wird. Andererseits sind die Läsionen nicht zu sehen, wenn der TV-Term im Vergleich zur Datentreue ein zu hohes Gewicht hat.

In Abbildung 7.16 sind für  $\beta$  deshalb noch die Zwischenstufen  $\beta = 4$ ,  $\beta = 8$  und  $\beta = 12$  gezeigt. Die vermutlich beste Rekonstruktion unter den gezeigten Parametern ist diejenige mit  $\mu = 8$  und  $\beta = 8$ , weil bei ihr die Läsionen deutlich zu erkennen sind, das Rauschen aber nicht überwiegt.



**Abbildung 7.15** – Rekonstruktionen des Brustphantoms mit zehn Aperturpositionen und unterschiedlichen Regularisierungsparametern. In  $x$ -Richtung erhöht sich das Gewicht des Total-Variation-Terms  $\beta$ , in  $y$ -Richtung das Gewicht des Misfit-Terms  $\mu$ .



**Abbildung 7.16** – Rekonstruktionen wie in Abbildung 7.15 mit Regularisierungsparametern  $\mu = 8$  und  $\beta \in [4, 12]$ .

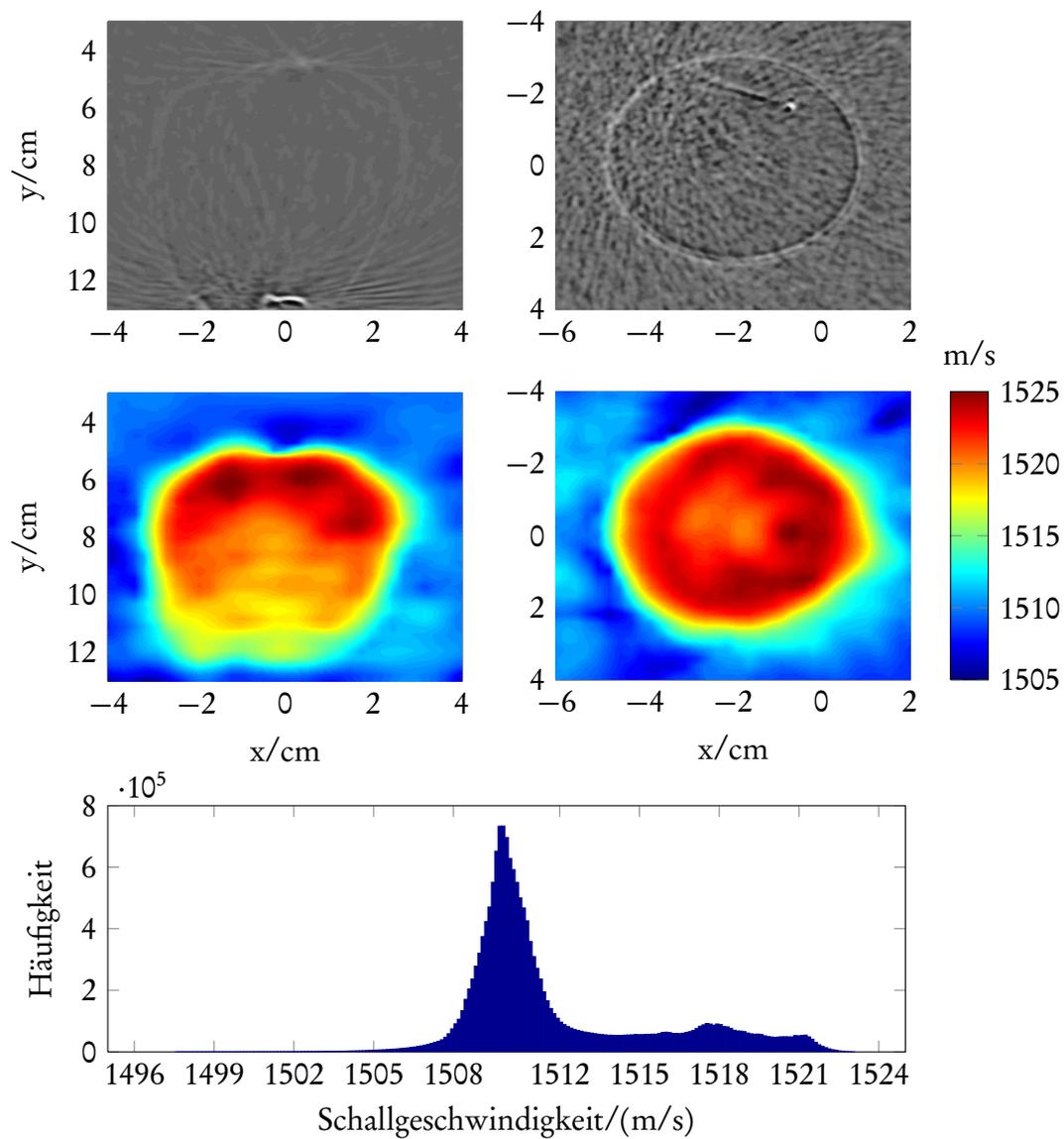
## 7.4 Korrektur der Reflexionstomographie

Wie in Abschnitt 3.5 erläutert, basiert der SAFT-Algorithmus, der für die Reflexionstomographie verwendet wird, auf der Born-Approximation. Diese gilt nur, wenn die Schallgeschwindigkeit des gemessenen Objekts nur wenig von der Schallgeschwindigkeit des Hintergrunds abweicht (vgl. Unterabschnitt 3.2). In erster Näherung nimmt man für die Hintergrundschallgeschwindigkeit die Schallgeschwindigkeit des Wassers an. Üblicherweise weichen Gewebearten oder Medien, die mit der USCT untersucht werden um bis zu 100 m/s von der Wasserschallgeschwindigkeit ab (siehe Abschnitt 3.2). Damit ist die Born-Approximation verletzt.

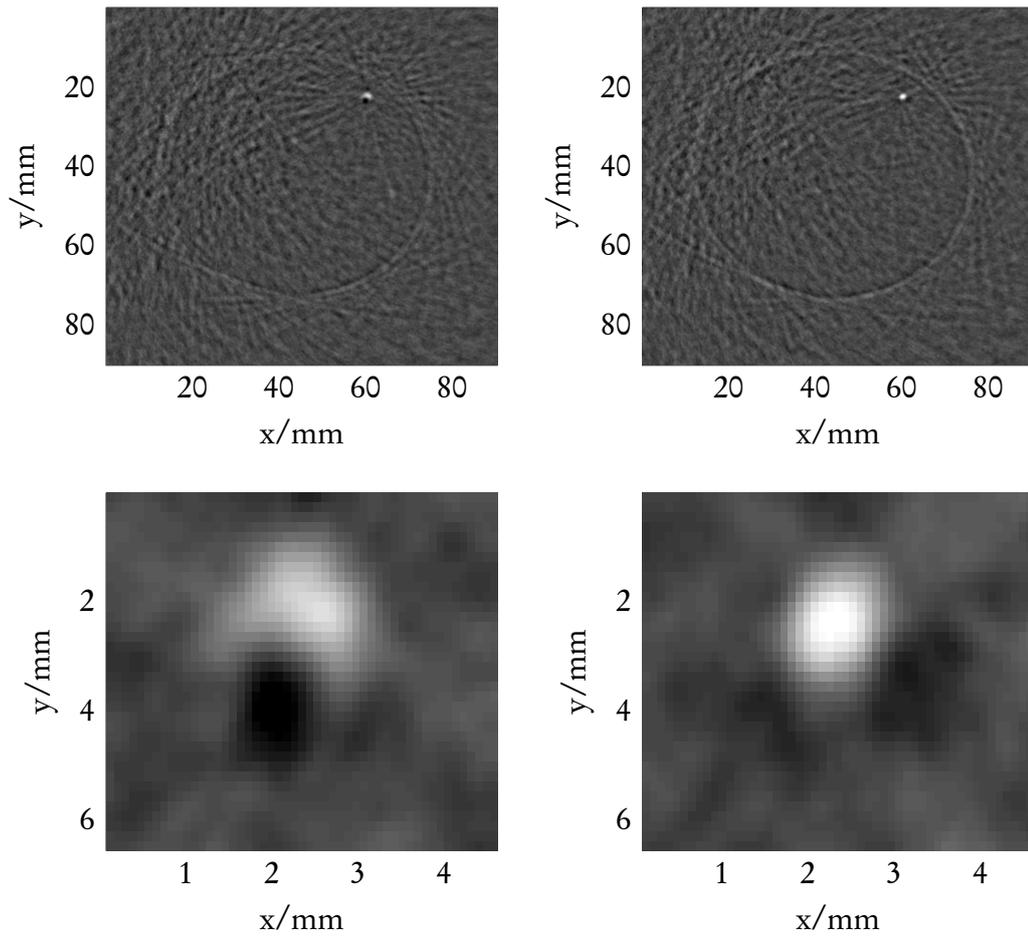
Um dieses Problem zu beheben, kann mit der Transmissionstomographie die Schallgeschwindigkeitsverteilung rekonstruiert werden und als Hintergrundmedium für den SAFT-Algorithmus dienen. Zu Testzwecken wurde ein Gelatine-Phantom hergestellt, in das ein Draht eingebracht wurde. Die Schallgeschwindigkeit der Gelatine wurde vor dem Experiment in einem vollständig mit Gelatine gefüllten Quader der Seitenlänge  $7 \times 7 \times 7$  cm mit  $1519 \pm 2$  m/s bestimmt. Die Wassertemperatur während des Experiments betrug  $31^\circ$  Celsius, was 1510 m/s entspricht. Diese Abweichung ist groß genug, dass der SAFT-Algorithmus den Draht nur defokussiert darstellt. Mit der Korrektur der Hintergrundschallgeschwindigkeit durch die Transmissionstomographie wird der Draht im Schnittbild als Punkt dargestellt.

In Abbildung 7.17 ist eine Reflexions- und eine Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion des Phantoms dargestellt. Der Mittelwert der rekonstruierten Schallgeschwindigkeiten im Phantom betrug 1518 m/s, der Mittelwert der Schallgeschwindigkeiten des Wassers lag bei 1510 m/s. Siehe dazu auch das Histogramm in Abbildung 7.17 (unten).

In Abbildung 7.18 ist sowohl der Defokussierungseffekt als auch das Beheben desselben mit Hilfe einer Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion zu sehen. Das Gelingen dieses Versuchs demonstriert einerseits die Genauigkeit der Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion, andererseits auch das nahtlose Zusammenspiel der Reflexions- und der Transmissionstomographie.



**Abbildung 7.17** – Reflexionsrekonstruktionen des Gelatinephantoms ohne Schallgeschwindigkeitskorrektur (oben), Schallgeschwindigkeitsrekonstruktionen (Mitte) und Histogramm der rekonstruierten Schallgeschwindigkeiten (unten).



**Abbildung 7.18** – Reflexionsbilder einer Schicht des Gelatinephantoms mit Draht. SAFT-Rekonstruktion mit einer Aperturposition ohne Schallgeschwindigkeitskorrektur (links oben), mit Schallgeschwindigkeitskorrektur (rechts oben) und vergrößerte Ausschnitte des Drahts (unten). In der unkorrigierten Rekonstruktion ist der Draht defokussiert, die korrigierte Rekonstruktion zeigt einen fokussierten Punkt.

## 7.5 Rekonstruktionsergebnisse der Pilotstudie

In diesem Abschnitt werden Schallgeschwindigkeits- und Dämpfungskonstruktionen der Messungen der Studie in Jena vorgestellt, die teilweise auch in [RD.7] veröffentlicht werden. Zur Darstellung hier wurden für jede Aufnahme zwei Übersichtsbilder erstellt. Als Referenz werden in der oberen Zeile jeweils ein transversales und ein coronales MRT-Differenzbild gezeigt, das durch Subtraktion des Bildes nach Kontrastmittelgabe vom nativen Bild entsteht. Danach folgen zwei USCT-Schallgeschwindigkeitsbilder, die so gewählt sind, dass sie annähernd dieselbe Schicht wie im MRT zeigen und zwei USCT-Reflexionsbilder derselben Schichten. Die MRT- und USCT-Schichten entsprechen einander nicht exakt, weil eine MRT-Schicht einen größeren Teil der Brust abbildet und große Brüste dort eventuell verformt sind. Im USCT gibt es durch den Auftrieb des Wassers eine Stauchung der Brust. Da die Transmissionstomographie prinzipbedingt nur einen kleineren Bereich darstellen kann als die Reflexionstomographie, wurden die Transmissionsbilder auf die Größe des Reflexionsbildes extrapoliert. Dies ist in den transversalen Bildern zu sehen, bei denen die unterste z-Schicht vervielfacht wurde.

In Abbildung 7.19 sind Ergebnisse der Untersuchung P16 gezeigt. In der Brust ist ein großer Tumor mit Gesamtdurchmesser  $5 \times 3 \times 4$  cm erkennbar (laut Radiologenbefund aus Jena »ein konfluierendes Gebilde multipler Anreicherungsherde«). Der Tumor ist im Subtraktionsbild Abbildung 7.19 (oben links) auf der rechten Seite des Bildes im unteren Teil der Brust zu sehen. Im Reflexionsbild ist der Rand der Brust deutlich zu sehen und einige bindegewebeartige Strukturen im oberen Bereich. An der Stelle wo der Tumor sein sollte, ist jedoch keine erhöhte Reflexion festzustellen.

Im USCT-Schallgeschwindigkeitsbild Abbildung 7.19 (Mitte) ist eine Region deutlich erhöhte Schallgeschwindigkeit ( $> 1530$  m/s) zu erkennen. Dieselbe Tendenz zeigt das Dämpfungsbild Abbildung 7.19 ((c) rechts) mit erhöhter Dämpfung ( $> 0,60$  dB/cm/MHz).

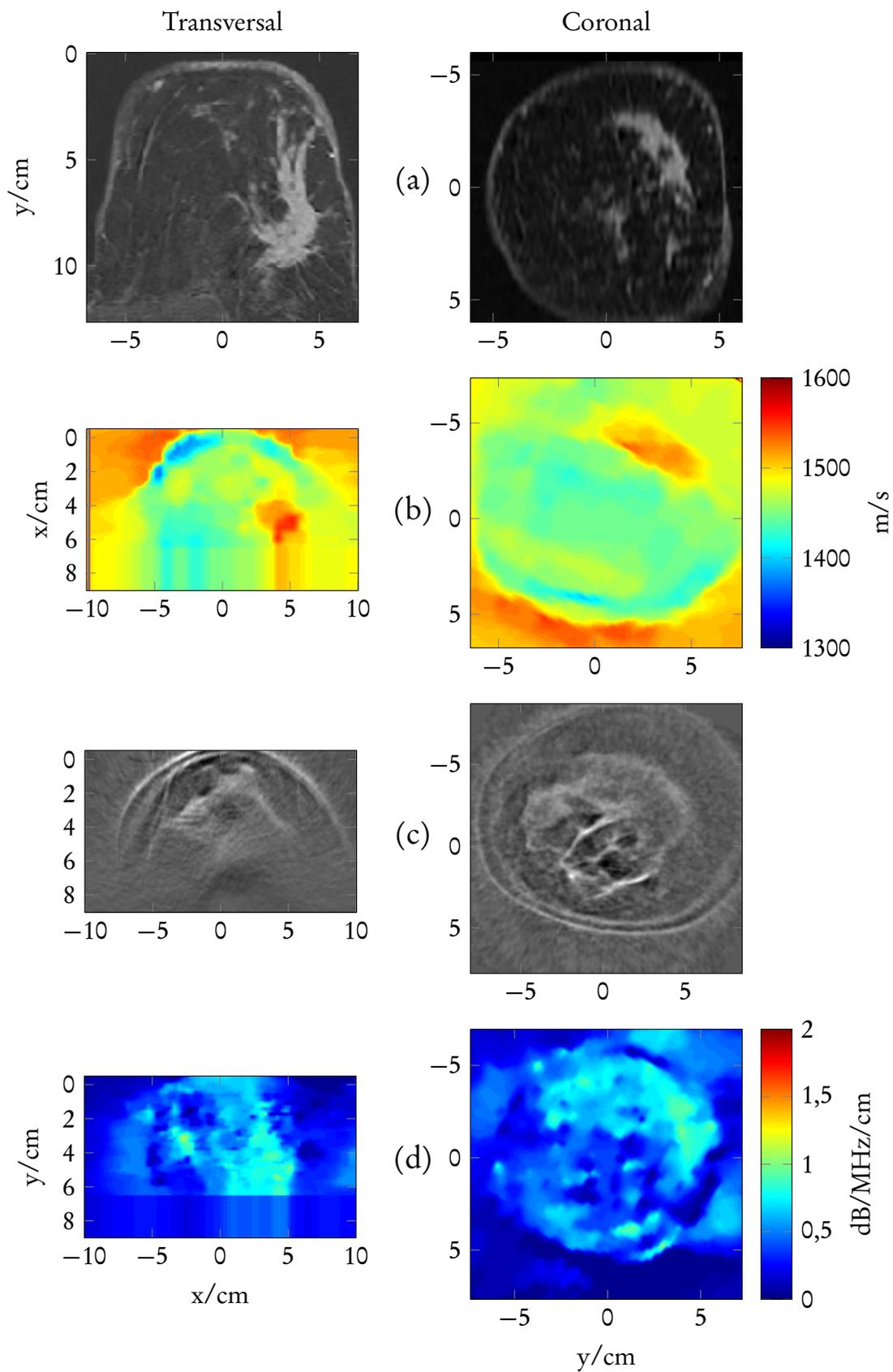
Einen weniger eindeutigen Fall (P10) zeigt Abbildung 7.20. Laut Befund gibt es einige verdächtige Bereiche in der Brust, jedoch keine eindeutig malignen Veränderungen. Der USCT-Schallgeschwindigkeit nach beurteilt, kann man zu einem ähnlichen Schluss kommen. Es gibt verschiedene Bereiche leicht erhöhter Schallgeschwindigkeit ( $1490 \text{ m/s} \leq c \leq 1505 \text{ m/s}$ ), aber keine eindeutigen Herde. Das Dämpfungsbild Abbildung 7.20 ((c) unten) erlaubt ebenfalls keine eindeutigen Schlüsse. Das coronale Reflexionsbild zeigt sehr viel Struktur im Inneren der Brust, gibt aber keinen Aufschluss über eventuell bösartige Veränderungen.

Abbildung 7.21 ist ein weiteres Beispiel (P9) eines unklaren MRT-Befundes: Es gibt keine eindeutigen Kennzeichen für einen bösartigen Herd (nach Befund: »geringgradig großengradig, suspekter Herd, multiple bilaterale Proliferationsareale«). Im USCT-Schallgeschwindigkeitsbild sind große Bereiche mit geringfügig höherer Schallgeschwindigkeit zu sehen, die jedoch ebenfalls keine eindeutigen Hinweise auf eine bösartige Veränderung geben. Das Dämpfungsbild Abbildung 7.21 (c rechts) ist eben-

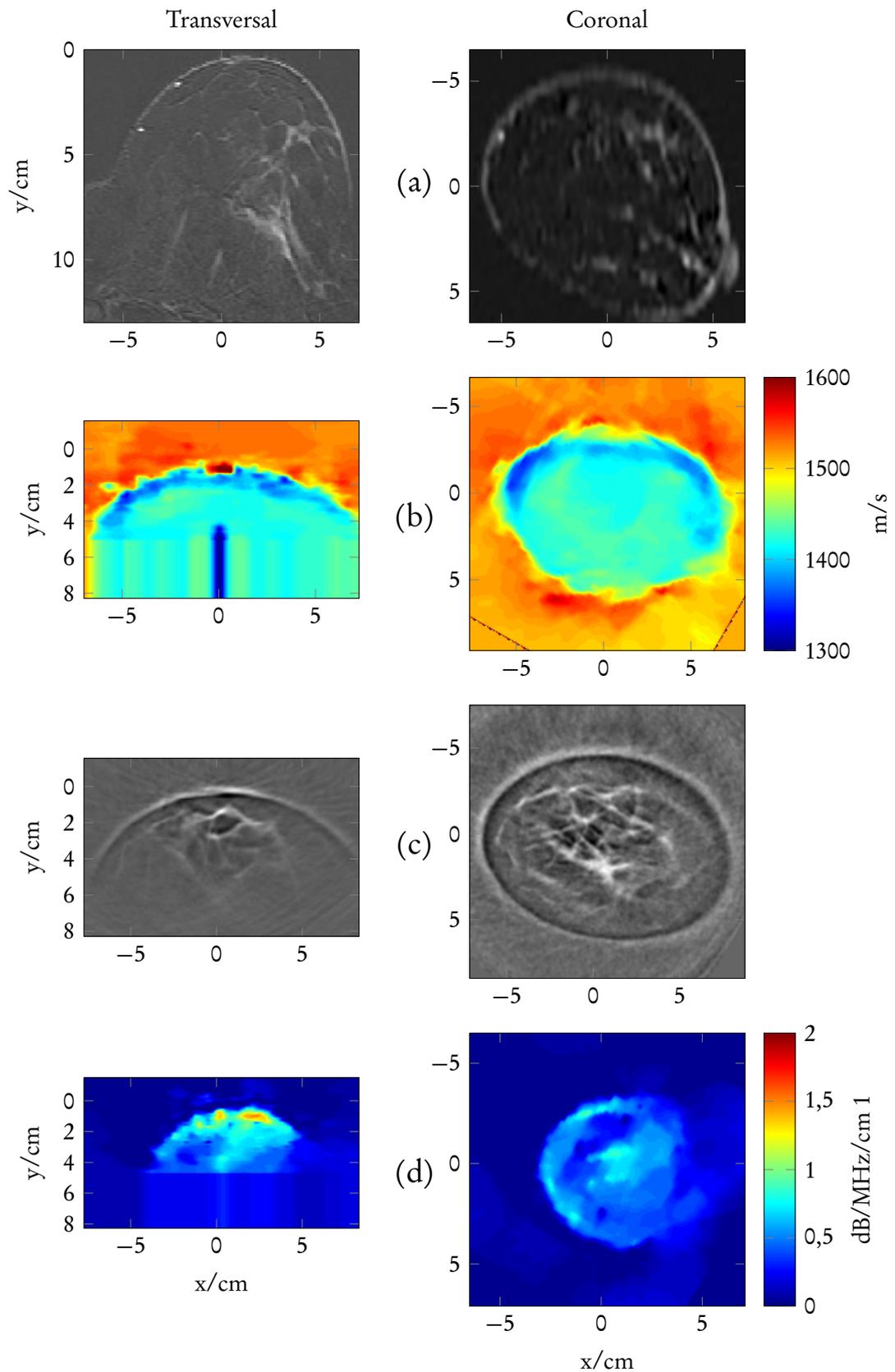
falls uneindeutig. Im Reflexionsbild wie auch im Schallgeschwindigkeitsbild finden sich die im MRT sichtbaren inneren Strukturen teilweise wieder, doch die diffus-unklaren Anreicherungen, die im MRT zu sehen sind, werden nicht deutlicher.

In Untersuchung P17, Abbildung 7.22, zeigt das MRT-Bild laut Befund ein  $2,5 \times 1,5$  cm großes Karzinom, das aus mehreren kleinen Herdbefunden besteht. Im USCT-Schallgeschwindigkeitsbild deutet sich ein Bereich mit Schallgeschwindigkeiten um 1505 m/s im 5-Uhr-Segment der coronalen Schicht an, der auch im Dämpfungsbild auffällig scheint. Sonst liegt die höchste Schallgeschwindigkeit im Innern der Brust bei etwa 1450 m/s. Ebenso verhält es sich mit dem Dämpfungsbild, das bis auf den Rand der Brust nur Werte unter 0,50 dB/cm/MHz aufweist. Der Tumor im MRT-Bild liegt allerdings auf der anderen Seite und kann, obwohl die Brust durch die MRT-Spulen stark verformt war, nicht durch Deformation erklärt werden. Laut Befund finden sich an einigen Stellen der Brust auch durch Entzündungen verursachte Wasseranreicherungen, die in der Region der USCT-Auffällig liegen könnten, eine genaue Identifikation ist jedoch schwierig. Das Reflexionsbild zeigt im Bereich um den Tumor einige stark konturierte Strukturen, doch lässt sich kein eindeutiger Tumorherd ausmachen. Eine andere Erklärung für die erhöhte Schallgeschwindigkeit könnte auch eine gutartige Veränderung (Fibroadenom) sein, deren Schallgeschwindigkeit in diesen Bereich fällt (vergleiche [147]), allerdings gibt das MRT-Bild darüber keinen Aufschluss.

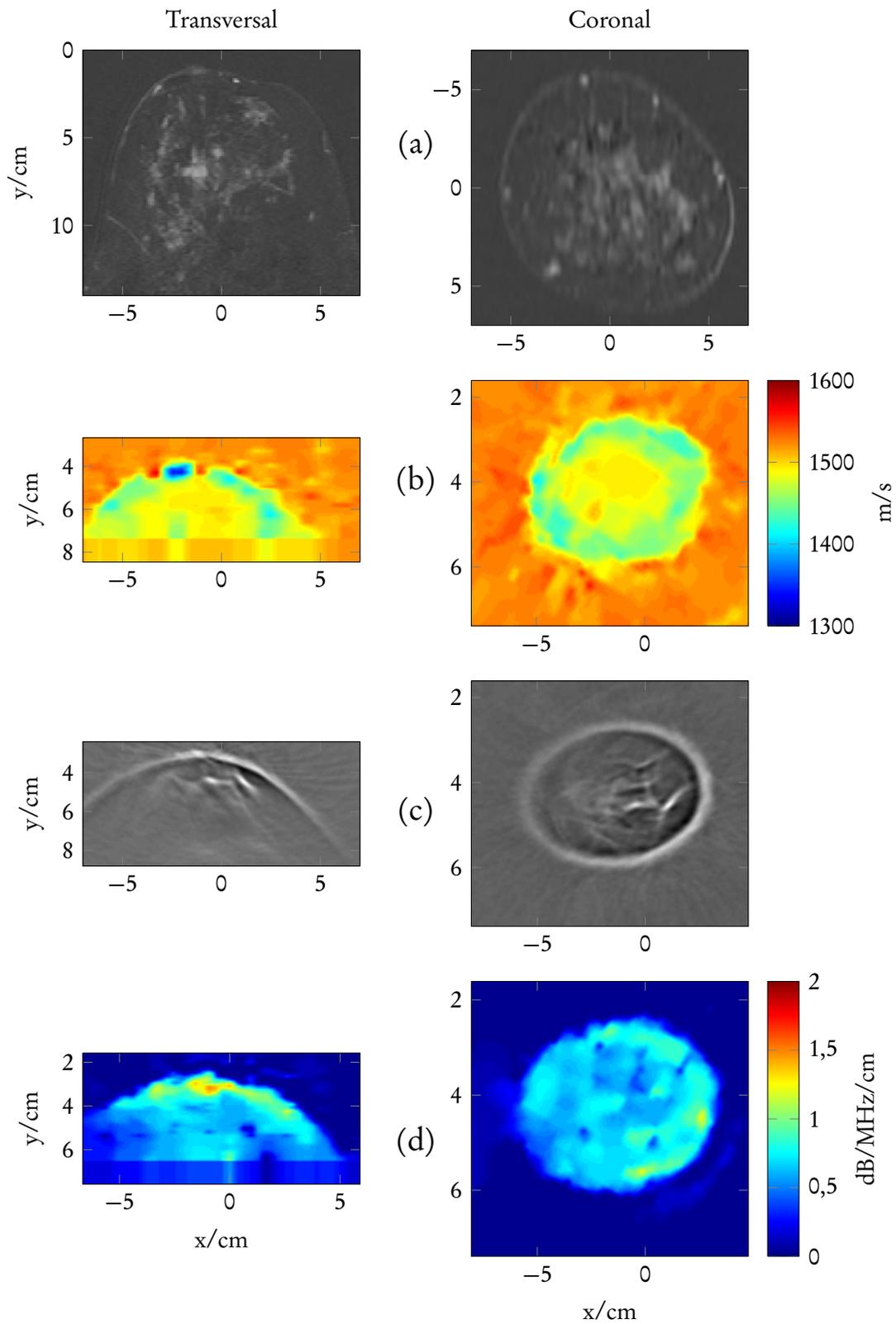
Abbildung 7.23 zeigt Ergebnisse der Untersuchung P12. In den MRT-Bildern ist ein circa  $5 \times 6$  cm großer bösartiger Herd zu sehen. Dieser hat laut Befund eine trianguläre Formation. Im USCT-Schallgeschwindigkeitsbild ist im unteren Teil der Brust eine Region deutlich erhöhter Schallgeschwindigkeit zu erkennen, die sich auch im Dämpfungsbild wiederfindet, im Schallgeschwindigkeitsbild aber wesentlich klarer vom umliegenden Gewebe zu trennen ist. Der Kontrast der zugehörigen Reflexionsbilder ist etwa im Vergleich zu P16 recht schwach. Deshalb sieht man in den gezeigten Schichten auch nicht viele innere Details. Auffällig ist wieder, dass der Tumor sich im Reflexionsbild nicht abzeichnet und nur in den Bildern der Transmissionsstomographie sichtbar ist.



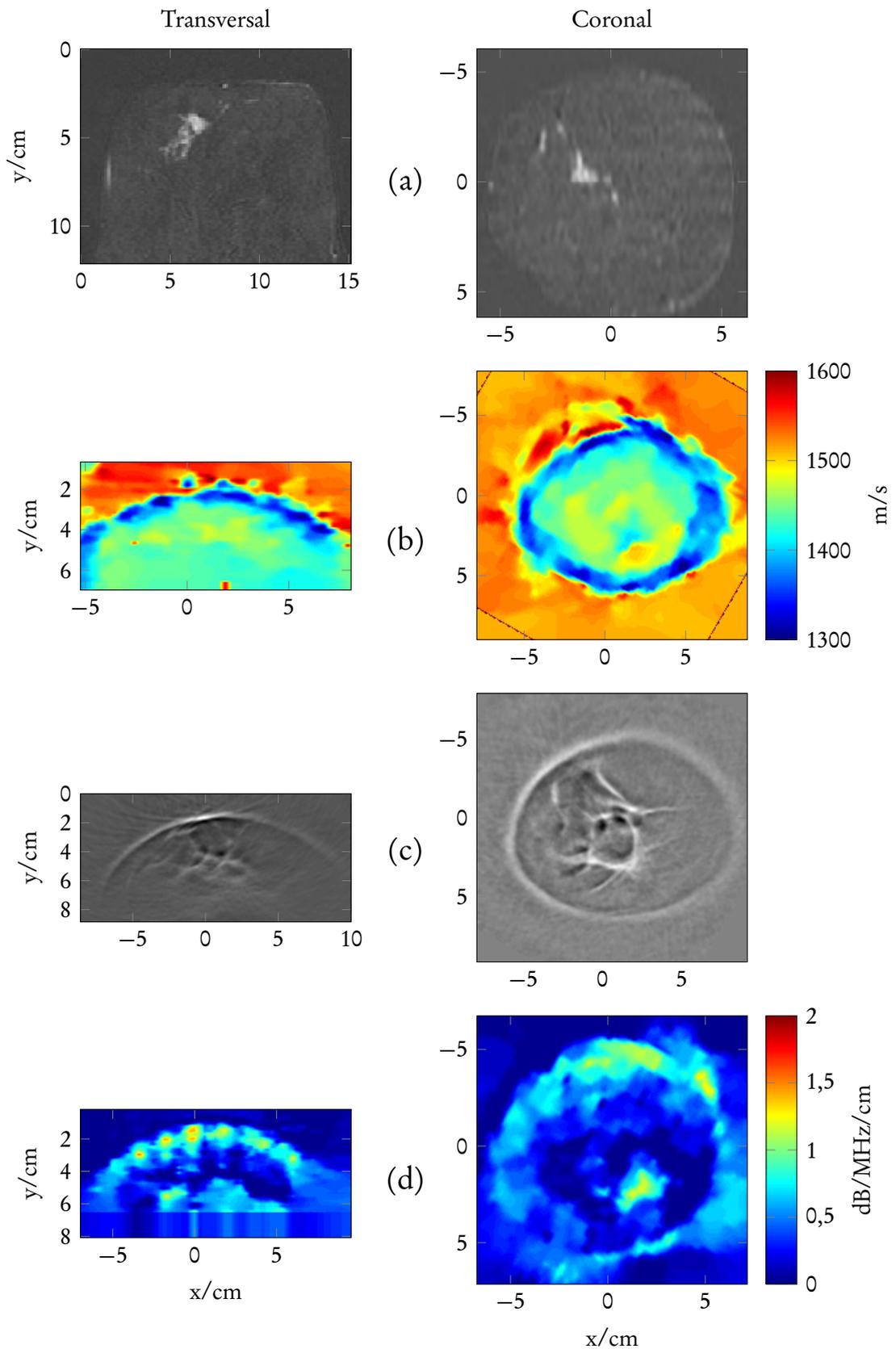
**Abbildung 7.19** – P16: Transversales und coronales MRT-Bild (a), entsprechende Schallgeschwindigkeits- (b), Reflexions- (c) und Dämpfungsrekonstruktionen (d).



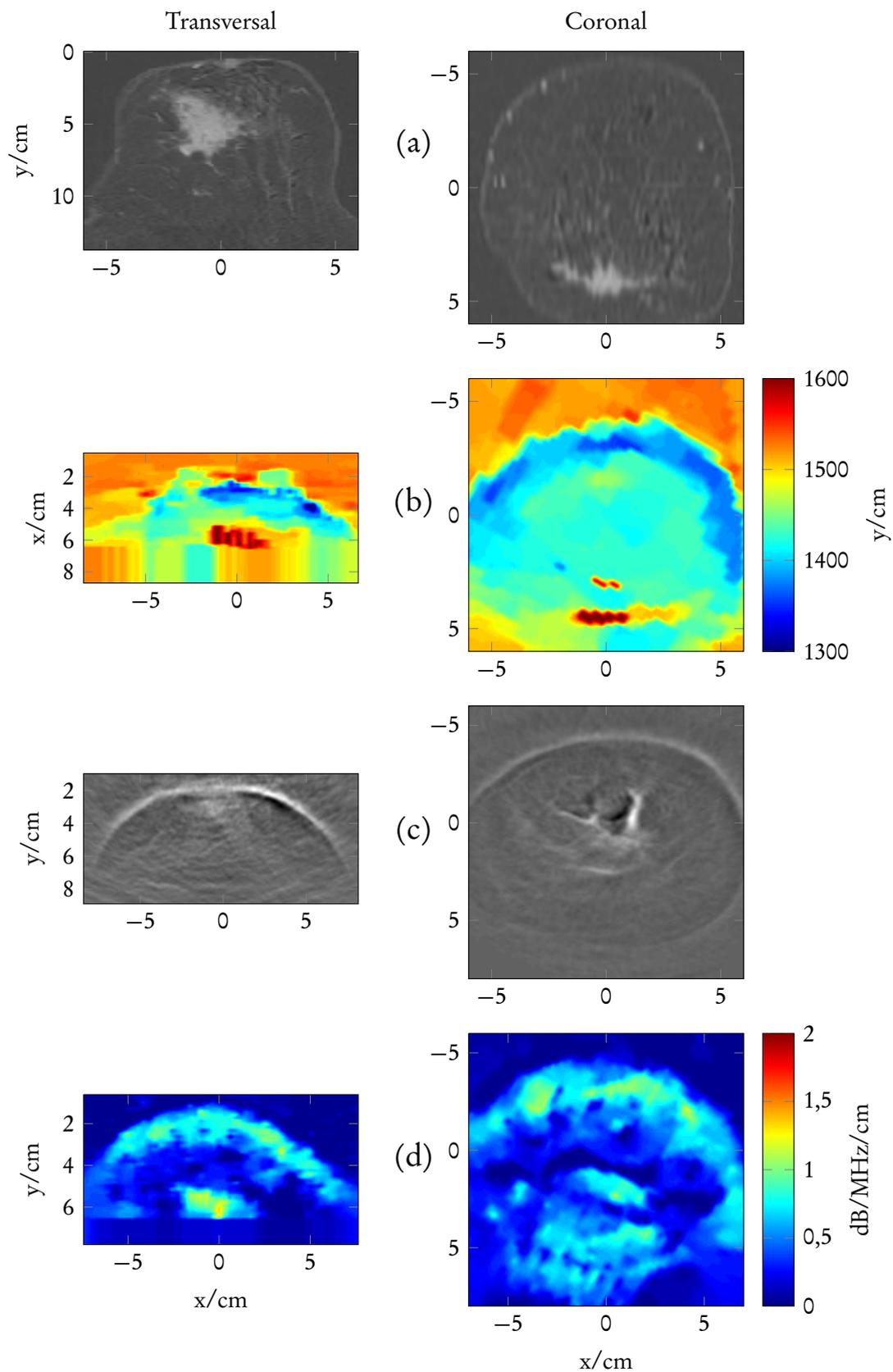
**Abbildung 7.20** – P10: Transversales und coronales MRT-Bild (a), entsprechende Schallgeschwindigkeits- (b), Reflexions- (c) und Dämpfungsrekonstruktionen (d).



**Abbildung 7.21** – P9: Transversales und coronales MRT-Bild (a), entsprechende Schallgeschwindigkeits- (b), Reflexions- (c) und Dämpfungsrekonstruktionen (d).



**Abbildung 7.22** – P17: Transversales und coronales MRT-Bild (a), entsprechende Schallgeschwindigkeits- (b), Reflexions- (c) und Dämpfungsrekonstruktionen (d).



**Abbildung 7.23** – P12: Transversales und coronales MRT-Bild (a), entsprechende Schallgeschwindigkeits- (b), Reflexions- (c) und Dämpfungsrekonstruktionen (d).

## Eikonal-Rekonstruktion mit Echtdate

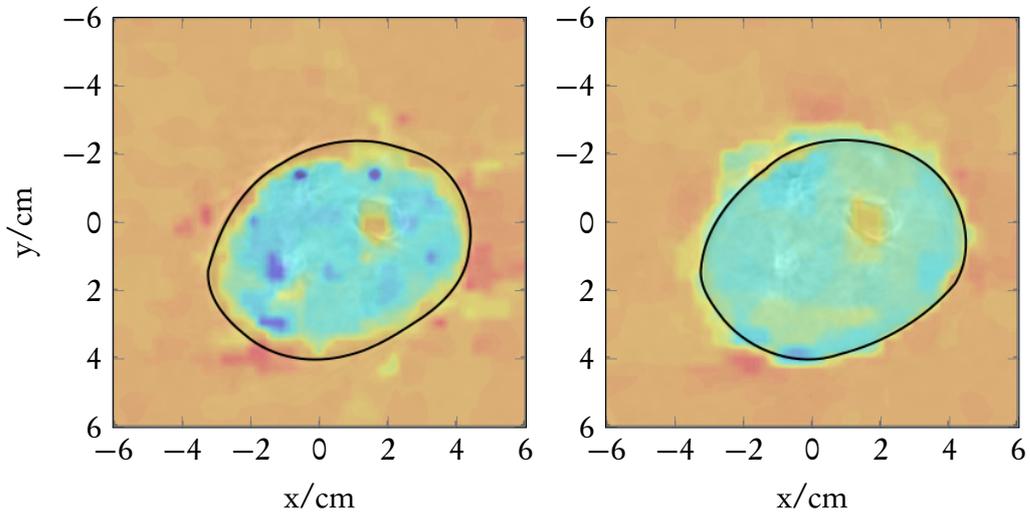
Der Einfluss der Brechung an Echtdate ist schwierig zu quantifizieren, kann aber an der bereits erwähnten Verkleinerung von Objekten niedriger Schallgeschwindigkeit festgemacht werden. Abbildung 7.24 zeigt die Überlagerung einer Schicht der Reflexionsrekonstruktion des Brustphantoms und Schichten nicht-brechungskorrigierter (links) und brechungskorrigierter (rechts) Schallgeschwindigkeitsrekonstruktionen.

In den Simulationen zur Brechungskorrektur Unterabschnitt 7.2 wurde deutlich, dass sich der äußere Rand des synthetischen Phantoms im Vergleich zur Referenz um bis zu zwei Zentimeter (Durchmesser) verkleinert, wenn die Brechung nicht korrigiert wird. Dies trifft wie in Abbildung 7.24 zu sehen auch für die Echtdate zu, ist aber beim echten Phantom nicht so stark ausgeprägt. Die brechungskorrigierte Rekonstruktion scheint den äußeren Rand leicht zu überschätzen, stimmt aber insgesamt deutlich besser mit der Reflexionsschicht überein als die unkorrigierte Version.

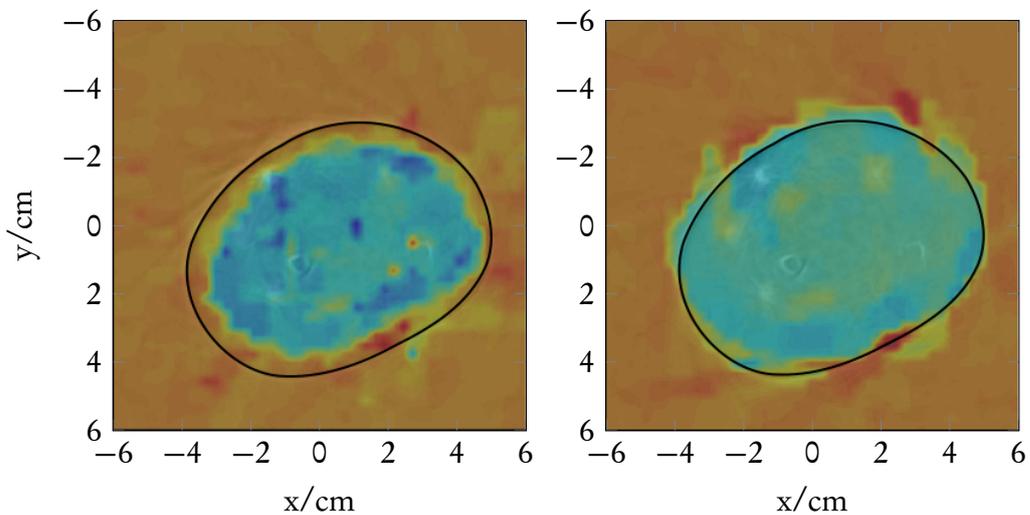
Diese Tendenz verstärkt sich, wenn man eine tiefere Schicht desselben Phantoms betrachtet, die in Abbildung 7.25 gezeigt ist. Hier unterschätzt die brechungslose Rekonstruktion den Durchmesser um circa 1,5 cm, während in der brechungskorrigierten Version der Durchmesser um circa 0,10 cm überschätzt wird. Dieselbe Schicht im synthetischen Phantom ist ohne Brechungskorrektur circa 2 cm kleiner als die Referenz.

Ein weniger klares Bild als beim Brustphantom zeigt sich bei der Eikonal-Rekonstruktion P16 aus der Jena-Studie, die in Abbildung 7.27 dargestellt ist. Wie erwartet wird der Tumor kleiner, wenn man die Brechung berücksichtigt; gleichzeitig werden die Ränder deutlicher und die Form beginnt, mehr der MRT-Darstellung zu ähneln. So sind beispielsweise die einzelnen »Arme« andeutungsweise zu sehen. Ebenso wird die hintere, abgespreizte Struktur des Tumors sichtbar. Siehe dazu die Vergrößerung in Abbildung 7.26.

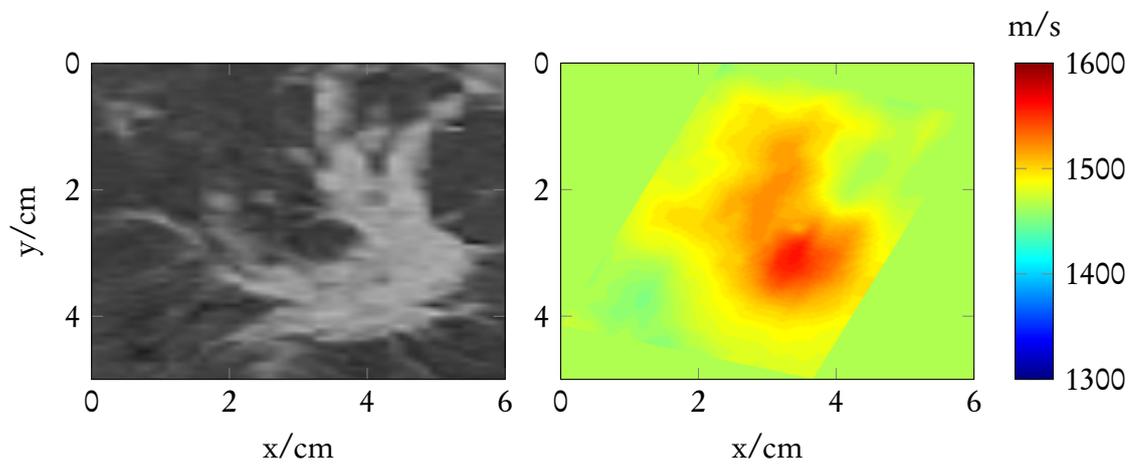
Der äußere Rand der Brust wird zwar (korrekterweise) deutlich größer rekonstruiert als bei der brechungslosen Rekonstruktion, doch auch größer als in der Reflexionsrekonstruktion. Dies liegt unter anderem daran, dass die Brust durch ihre Größe in Bereichen schlechter Winkelabdeckung der Wandler zu sehen ist, an denen die Rändern ohnehin weniger stark konturiert sind. Durch das iterative Vorgehen bei der Eikonal-Rekonstruktion verstärkt sich diese Tendenz weiter, könnte aber durch höhere Winkelabdeckung verbessert werden. Dies lässt sich beispielsweise durch Wandler mit größerem Öffnungswinkel oder größerem Abstand der Wandler von der Brust erreichen.



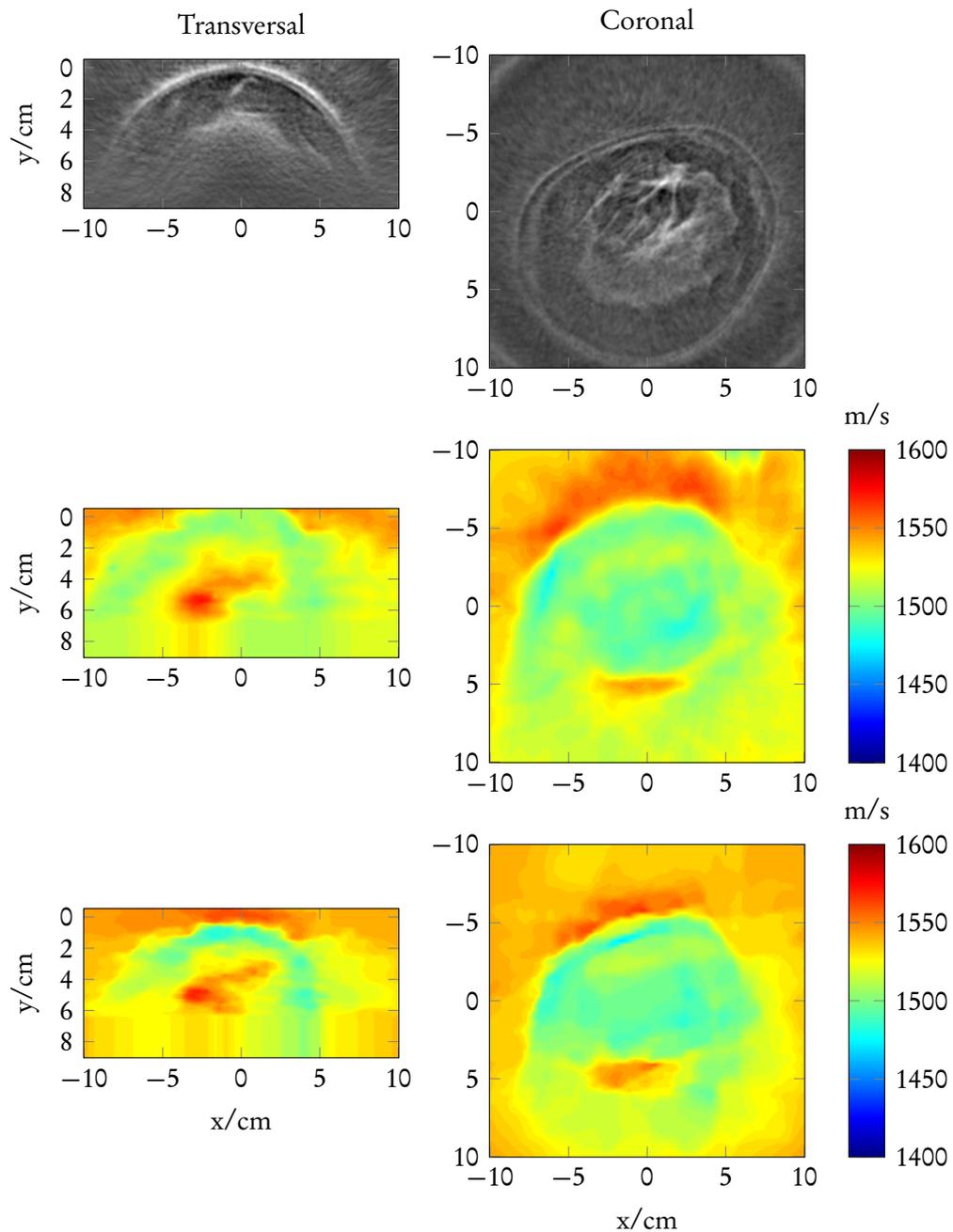
**Abbildung 7.24** – Überlagerungen einer Reflexionsschicht ( $z = 5,6$  cm) des Brustphantoms mit einer Schallgeschwindigkeitsschicht ohne Brechung (links) und mit Brechung (rechts). Der Umriss des Phantoms in der Reflexionsrekonstruktion ist schwarz nachgezeichnet.



**Abbildung 7.25** – Überlagerungen einer Reflexionsschicht ( $z = 4,2$  cm) des Brustphantoms mit einer Schallgeschwindigkeitsschicht ohne Brechung (links) und mit Brechung (rechts). Der Umriss des Phantoms in der Reflexionsrekonstruktion ist schwarz nachgezeichnet.



**Abbildung 7.26** – Vergrößerung des Tumors im MRT-Bild (links) und im Schallgeschwindigkeitsvolumen.



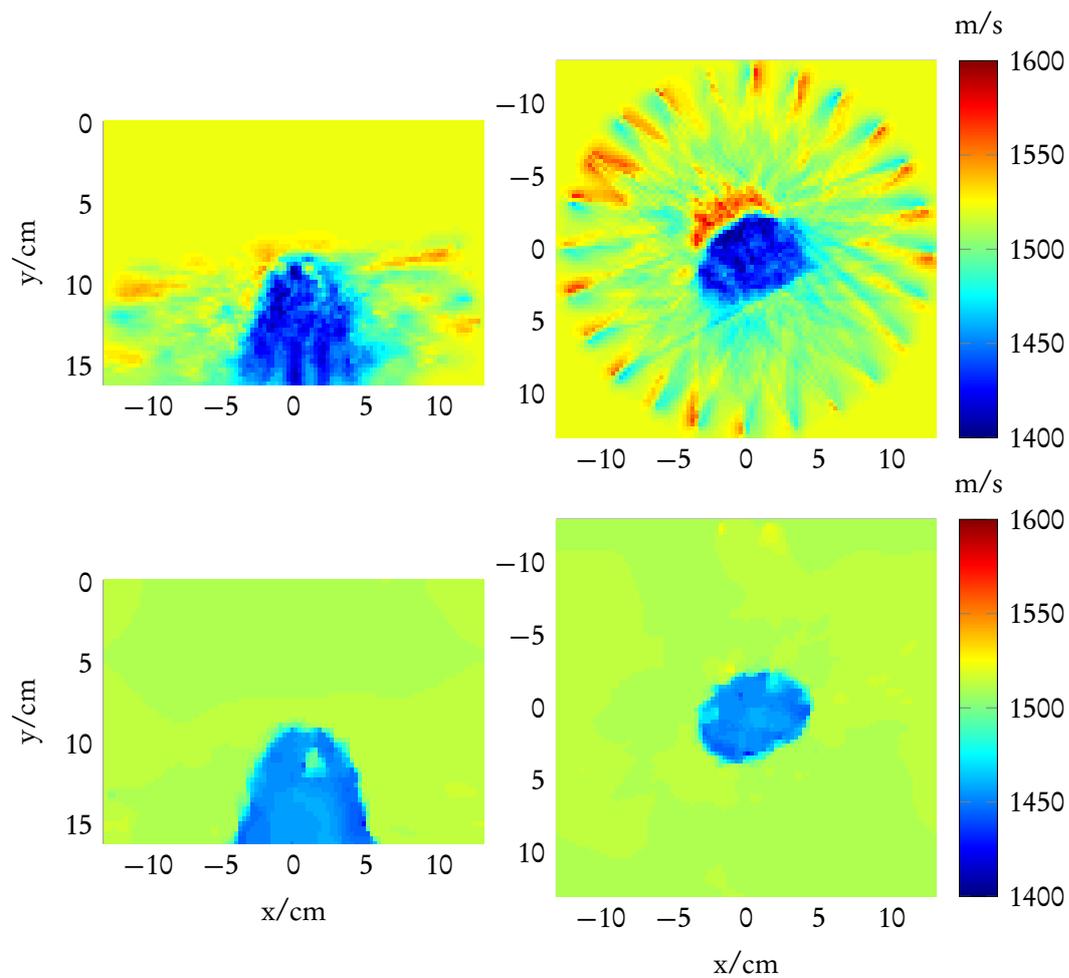
**Abbildung 7.27** – Wirkung der Brechungskorrektur: Reflexionsrekonstruktionen von P16, transversal (links oben) und coronal (rechts oben), entsprechende brechungskorrigierte Schallgeschwindigkeitsrekonstruktionen (Mitte) und Rekonstruktionen ohne Brechung (unten).

## 7.6 Banana-Doughnut-Rekonstruktion

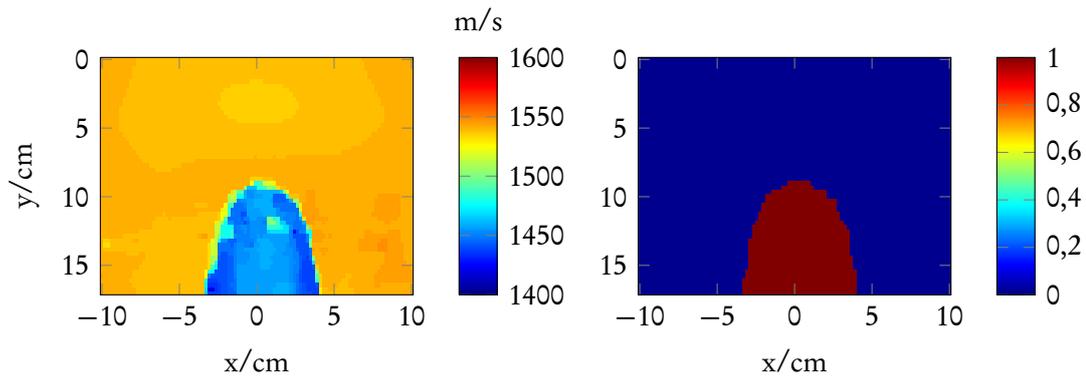
Abbildung 7.28 zeigt Schichtbilder einer Banana-Doughnut-Rekonstruktion des Brustphantoms. Wegen der unterschiedlichen Diskretisierungen ist ein direkter Vergleich mit bisher gezeigten Bildern nicht direkt möglich. Insgesamt ist jedoch zu bemerken, dass die seismologische Rekonstruktion an ähnlichen Artefakten krankt wie die anderen bisher gezeigten Rekonstruktionen. Die erhoffte deutliche Verbesserung durch den Einfluss der breiteren Sensitivitätsbereiche blieb aus.

Der Mittelwert des Phantoms in der Banana-Doughnut-Rekonstruktion beträgt 1458 m/s. Die größte Läsion (L1) ist andeutungsweise zu sehen, bleibt aber undeutlicher als in der gewöhnlichen Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion. Die anderen Läsionen sind nicht identifizierbar. Der RMSE des Durchmessers der Läsionen oder deren Schallgeschwindigkeit kann deshalb nicht berechnet werden.

Im Allgemeinen sind die Rekonstruktionsergebnisse der Banana-Doughnut-Methode weniger scharf als die der normalen Rekonstruktion. Dies ist auf die fehlende Total-Variation-Regularisierung zurückzuführen und zeigt sich auch an der Homogenität des Phantoms (Standardabweichung  $\sigma = 27$  m/s) und des Wassers ( $\sigma = 16$  m/s).



**Abbildung 7.28** – Rekonstruktion des Brustphantoms mit der Banana-Doughnut-Methode (oben) und mit Strahlapproximation und TVAL3 (unten). (Links) ist jeweils eine  $x$ -Schicht durch die Mitte des Phantoms gezeigt. (Rechts) ist ein  $z$ -Schnitt bei  $z = 4$  cm dargestellt.



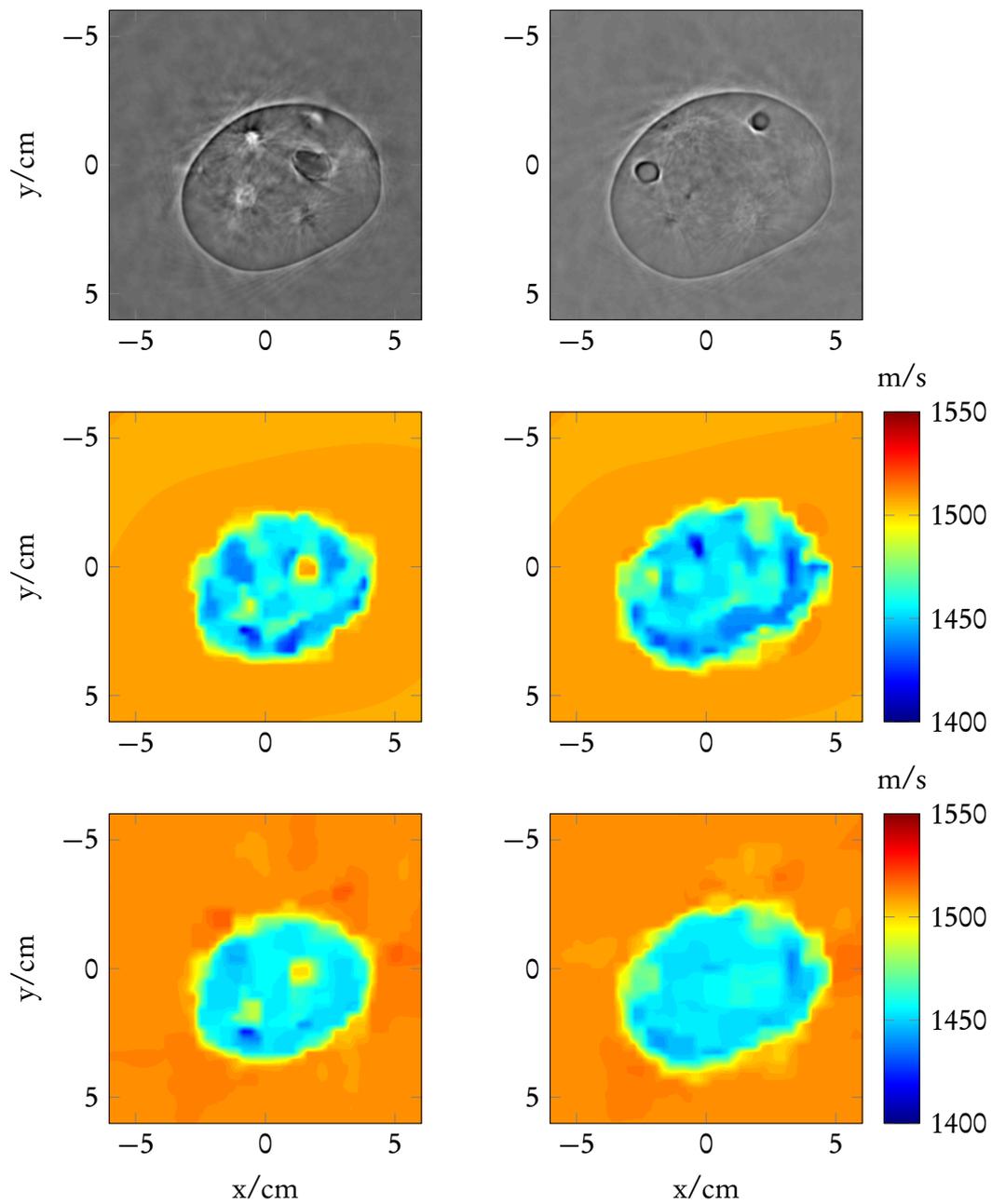
**Abbildung 7.29** – Rekonstruktion des Brustphantoms (links) und Schwellwertsegmentierung der Voxel, die nicht Wasser entsprechen (rechts).

## 7.7 Einschränkung der Zahl der Unbekannten

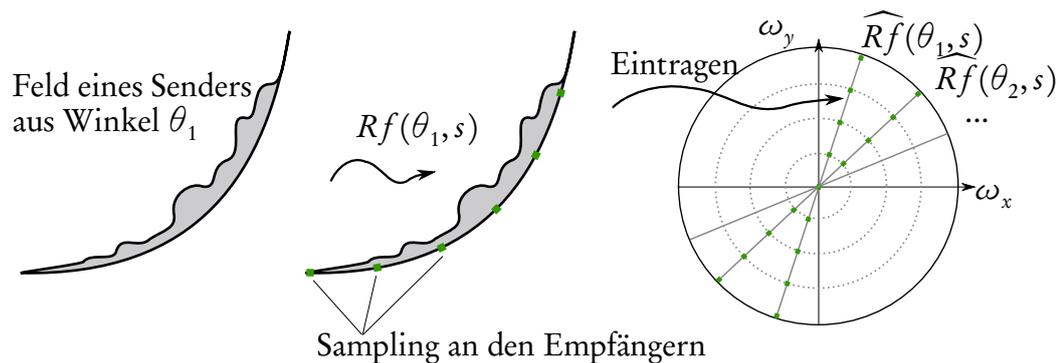
Die Bildrekonstruktion in der vorgestellten Form ist desto stabiler, je weniger Unbekannte im Sinne eines *Fits* an die Daten angepasst werden müssen. Da die Schallgeschwindigkeit im Wasser bekannt ist und Voxel, die Wasser enthalten, daher nicht zu rekonstruiert werden brauchen, ist es sinnvoll, die Rekonstruktion auf einen »interessanten« Bereich einzugrenzen. Dafür ist es nötig, diesen Bereich von Interesse *vor* der Rekonstruktion festzulegen. Dies wurde für das Brustphantom mit Hilfe einer Schwellwertsegmentierung durchgeführt: Abbildung 7.29 (links) zeigt eine Rekonstruktion des Brustphantoms und (rechts) den durch Segmentierung gewählten Rekonstruktionsbereich. Es wurde ein Schwellwert von 1500 m/s festgelegt. Zur Glättung des segmentierten Bereichs wurde ein morphologisches *Closing* durchgeführt.

Die Anzahl der Unbekannten verringert sich in diesem Extrembeispiel um den Faktor zehn, aber auch im Normalfall kann man mindestens von einem Faktor drei bis vier ausgehen.

Abbildung 7.30 zeigt einen direkten Vergleich der Reflexionsrekonstruktionen, der bereichsbeschränkten Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion und der gewöhnlichen Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion. Die Homogenität des Wassers ist bei entsprechender Wahl der Regularisierung auch in der unbeschränkten Rekonstruktion gut (Standardabweichung  $\sigma = 1,1$  m/s) und nimmt für die bereichsbeschränkte Rekonstruktion etwas zu ( $\sigma = 0,55$  m/s). Die Homogenität im Phantom nimmt eher ab (von  $\sigma = 15,51$  m/s auf  $\sigma = 16,34$  m/s), die Läsionen scheinen etwas deutlicher sichtbar, wenngleich auch Artefakte in Nicht-Läsions-Bereichen zunehmen. Alles in allem zeigt sich keine merkliche Verbesserung der Bildqualität durch Einschränkung der Anzahl der Unbekannten. Rekonstruktionen der Pilotstudie wiesen die gleiche Tendenz auf.



**Abbildung 7.30** – Reflexionsrekonstruktion des Brustphantoms (oben), bereichsbeschränkte Rekonstruktion (Mitte) und konventionelle Rekonstruktion (unten).



**Abbildung 7.31** – Schritte des Fourier-Scheibentheorems zum Eintragen einer Projektion in den polaren Fourierraum: Das ausgesandte Feld wird an endlich vielen Empfängern auf einem Kreis gemessen. Die Anzahl der Empfänger bestimmt die Anzahl der radialen Abtastpunkte einer Projektion im Fourierraum. Durch Rotation kommen im Fourierraum auf den grau markierten Kreisen Werte hinzu, zwischen den Kreisen wird aber keine Information gewonnen.

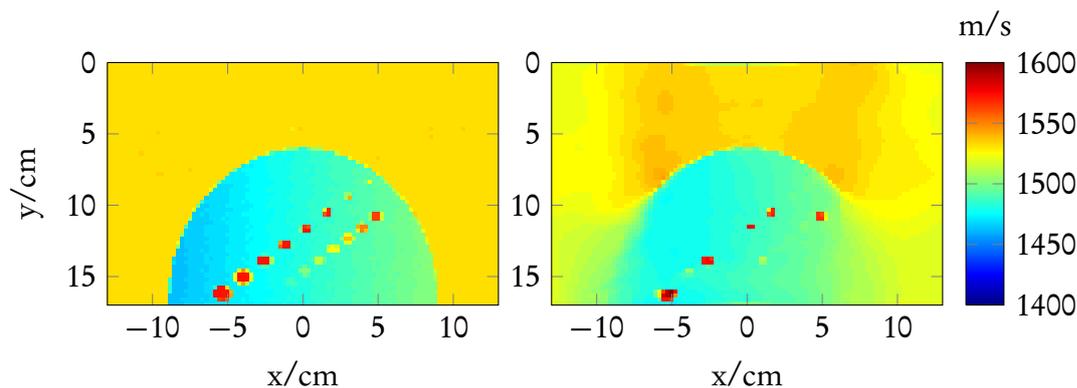
## 7.8 Optimierung der Geometrie

In Abschnitt 5.6 wurde bereits erwähnt, dass die geringe Dichte an Ultraschall-Sendern und -Empfängern für Probleme bei der Rekonstruktion sorgt. Dieses Problem ist auf Aliasing zurückzuführen, wie man erkennen kann, wenn man einige Vereinfachungen trifft. Die oberen Wandler-Ringe des 3D-USCT II können für sich genommen als jeweils ein 2D-Ring betrachtet werden, wenn man sämtliche anderen Sender-Empfängerpaare ignoriert.

Auf eine solche Ringgeometrie ist dann das Fourier-Scheibentheorem anwendbar, das Rückschlüsse auf die nötige räumliche Abtastung erlaubt. Das Scheibentheorem findet sich in Unterabschnitt B im Anhang.

[43] erläutern, dass für eine gute Rekonstruktion eine gleichmäßige Abtastung des polaren Fourierraums in radialer wie in azimuthaler Richtung notwendig ist. Dazu wird im Allgemeinen geraten, dass  $\frac{n_{\text{Projektionen}}}{n_{\text{Strahlen}}} \approx \frac{\pi}{2}$  gewählt werde. Dies bedeutet, dass es ungefähr gleich viele Projektionen wie Messpunkte pro Projektion geben soll. Auf einem Ring des 3D-USCT II ist die Anzahl der Projektionen durch die Sender, die der Messpunkte pro Projektion durch die Empfänger gegeben. Beider Zahl ist ungefähr gleich, wenn man jeden TAS als einzelne Sender oder Empfänger betrachtet und sehr nah beieinanderliegende somit zusammenfasst – man hat auf einem Ring dann 24 Messpunkte und Projektionen (im Gegensatz zu mindestens 256 wie sie für 2D-Systeme oft benutzt werden [141]).

Abbildung 7.31 veranschaulicht, wie die Empfänger zum Sampling des polaren Fourierraums beitragen. Je mehr Sender aus unterschiedlichen Winkeln es gibt, desto besser kann man die azimuthale Richtung des Fourierraums abdecken. Nutzt man aber nicht gleichzeitig auch mehr Empfänger, wird die Abdeckung in radialer Richtung stets nur auf wenige Ringe beschränkt bleiben (in der Abbildung grau dargestellt). In etwa dies



**Abbildung 7.32** – Synthetisches Phantom zur Evaluierung von Geometrieigenschaften mit unterschiedlich großen Läsionen (links). Idealisierte Rekonstruktion mit einer Aperturposition des 3D-USCT II (rechts).

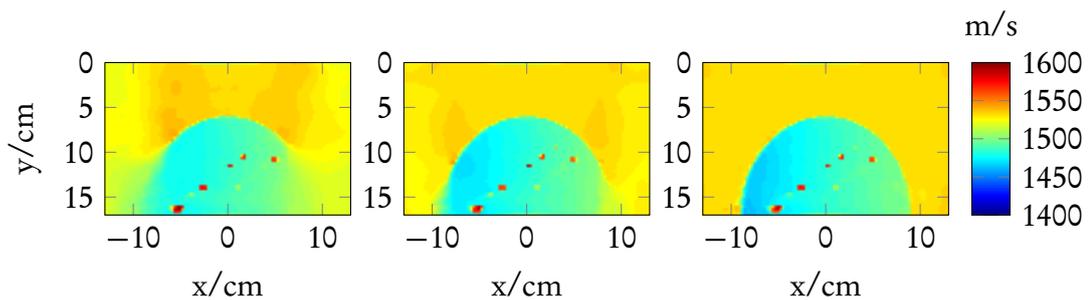
geschieht, wenn verschiedene Aperturpositionen des 3D-USCT II angefahren werden. Alleine durch Drehung erhöht sich die radiale Abtastung nicht, der Gesamttraum bleibt also unterabgetastet.

Zwar verbessert sich die Situation etwas, wenn im Dreidimensionalen auch der Hub genutzt wird – weil damit schräge Einträge aus anderen z-Schichten die fehlende Abdeckung einer Schicht lindern können –, das Grundproblem bleibt jedoch bestehen und kann nur durch Erhöhung der Empfängerzahl behoben werden. Reine Rotation hilft nicht viel, wie man sich auch anschaulich damit erklären kann, dass ein durch Ring-Aliasing verursachtes Artefakt kreissymmetrisch ist und daher bei Rotation gewissermaßen »mitgedreht« wird.

Generell gilt damit auch für die Transmissionstomographie, dass zuvorderst mehr Sender und Empfänger (pro Sender) die Rekonstruktionsergebnisse verbessern. Die Anzahl der TAS-Köpfe ist im 3D-USCT II beschränkt, weil mechanisch nur eine gewisse Anzahl Halterungen in den Ellipsoid passen. Denkbar wäre aber eine Änderung der Abstände der einzelnen Sende- und Empfangselemente auf einem TAS, denn damit könnte eine bessere Winkelabdeckung erreicht werden.

Zur Optimierung der Geometrie hinsichtlich Transmissionstomographie wurde ein synthetisches Phantom erstellt, das verschieden große Läsionen enthält. Es besitzt es eine Größe von  $20 \times 20 \times 10 \text{ cm}^3$ , die sich aus Rekonstruktionen der Brustgröße mit dem 3D-USCT II in der Jena-Studie ergab. Unter Berücksichtigung der eben erwähnten Abtastprobleme, ist es zur Verbesserung der Bilder nötig, mit den Sendern und Empfängern eine höhere Winkelabdeckung zu erreichen. Zu diesem Zweck wurde der 3D-USCT II in einer Simulation angepasst. Erste Maßnahme war es, die Fläche der Wandler zu erhöhen, um mehr Winkel abzudecken. Abschätzungen zur TAS-Oberfläche ergaben, dass man den Abstand der Sender und Empfänger zum Mittelpunkt des TAS bis zu drei Mal vergrößern könnte, ohne große Veränderungen am Konzept der TAS vornehmen zu müssen.

In Abbildung 7.32 ist die Schicht des synthetischen Phantoms gezeigt, die alle Läsionen



**Abbildung 7.33** – Rekonstruktion mit einer Aperturposition des 3D-USCT II mit dessen normalen Öffnungswinkel (links), Rekonstruktion mit derselben Geometrie aber mit um 15 Grad vergrößertem Öffnungswinkel (Mitte) und Rekonstruktion mit um 30 Grad vergrößertem Öffnungswinkel.

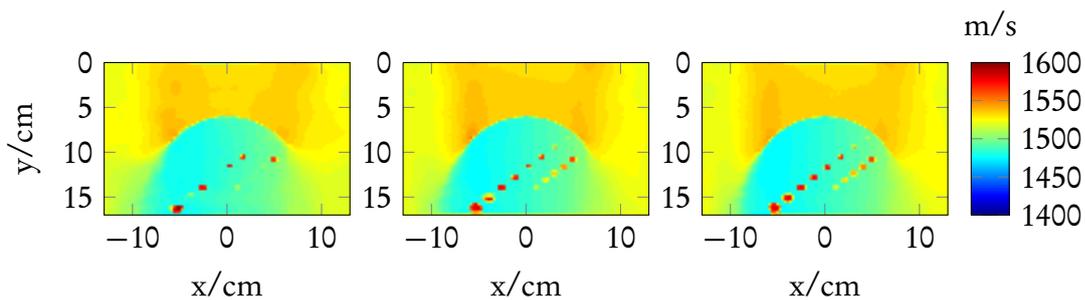
zeigt. Die obere Reihe enthält acht Läsionen, die sich nur in ihrer Größe, nicht aber in ihrer Schallgeschwindigkeit unterscheiden. Die größte Läsion hat umgerechnet einen Durchmesser von 1,1 cm, die kleinste 0,27 cm. Die untere Reihe enthält Läsionen der Größe 0,60 cm, die sich nur in ihrer Schallgeschwindigkeit, das heißt ihrem Kontrast voneinander und vom Hintergrund unterscheiden. Da es zur Evaluierung verschiedener Geometrien zunächst nicht auf Brechung und Beugung ankommt, wurde die einfache Strahlapproximation ohne Brechung verwendet. Auch der Zwischenschritt der Signaldetektion aus den A-Scans wurde ausgespart, so dass sich ergebende Änderungen in der Rekonstruktion rein auf die unterschiedlichen Geometrien zurückzuführen sind. Miteinbezogen wurde allerdings der Öffnungswinkel der Wandler. Zur quantitativen Auswertung wurde ein gewichteter RMSE verwendet, der die Läsionen am höchsten gewichtet (dreifach), die Phantomregion normal (einfach) und das Wasser ignoriert.

Abbildung 7.32 (rechts) zeigt eine Rekonstruktion mit einer Aperturposition des 3D-USCT II. Es sind zwei disjunkte Effekte zu beobachten: Der unscharfe Rand des Phantoms wird durch den begrenzten Öffnungswinkel hervorgerufen, die schlechte Abbildung der Läsionen hängt mit der Positionierung der TAS zusammen. Der RMSE dieser Rekonstruktion liegt bei 7,3 m/s.

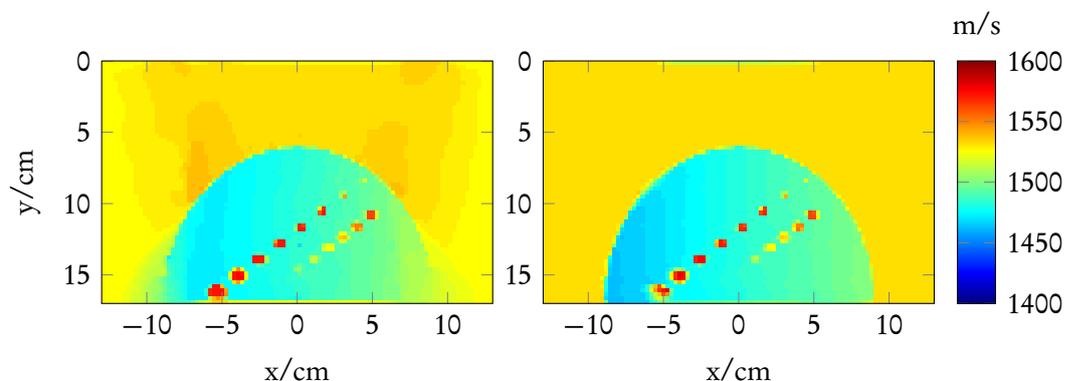
Besser wäre für die Transmissionstomographie und das hier gezeigte Phantom ein größerer Öffnungswinkel. In Abbildung 7.33 ist dargestellt, wie sich die Rekonstruktion mit zunehmendem Öffnungswinkel ändert. Schon mit einem um 15 Grad vergrößertem Öffnungswinkel wird der Rand des Phantoms deutlicher abgebildet, der RMSE sinkt auf 4,8 m/s. Noch deutlicher ist die Wirkung eines um 30 Grad vergrößertem Öffnungswinkels, bei dem die Ränder des Phantoms sehr scharf dargestellt werden und der RMSE bei 3,4 m/s liegt.

Das Phänomen, dass die Läsionen nur unvollständig abgebildet werden, hängt, wie eben gesehen, nicht primär mit dem Öffnungswinkel zusammen, sondern ist auf mangelnde Winkelabdeckung zurückzuführen, wie zu Beginn des Abschnitts erläutert.

Das Rekonstruktionsergebnis nach Vergrößerung aller TAS um einen Faktor zwei



**Abbildung 7.34** – Rekonstruktion mit einer Aperturposition des 3D-USCT II mit normaler Verteilung der Sender und Empfänger auf einem TAS (links), Rekonstruktion mit um Faktor zwei vergrößerte TAS (Mitte) und mit um Faktor drei vergrößerte TAS (rechts).



**Abbildung 7.35** – Rekonstruktion mit 16 Aperturpositionen des 3D-USCT II (links) und Rekonstruktion mit um 30 Grad vergrößertem Öffnungswinkel und um Faktor drei vergrößerte TAS (rechts).

ist in Abbildung 7.34 zu sehen, ebenso für einen Faktor drei. Der RMSE sinkt von ursprünglich 7,3 m/s über 7,0 m/s auf 5,8 m/s.

Durch 16 Aperturpositionen (aus dem Fahrprofil, das zur Messung des Brustphantoms verwendet wurde) erreicht man schon im 3D-USCT II eine deutlich bessere Abbildung der Läsionen (RMSE 5,5 m/s), siehe Abbildung 7.35. Die für Transmissionstomographie optimierte Geometrie mit um 30 Grad vergrößertem Öffnungswinkel und um Faktor drei vergrößerte TAS erzielt einen RMSE von 1,8 m/s, obwohl sie insgesamt mit zehnmal weniger Sender-Empfängerpaaren auskommen muss. Die zugehörige Rekonstruktion ist ebenfalls in Abbildung 7.35 gezeigt. Eine Vergrößerung der TAS ist wie schon erwähnt prinzipiell möglich, die Vergrößerung des Öffnungswinkels könnte sich als schwieriger erweisen. Zur Verbesserung der Bildqualität in den Innenbereichen genügt aber auch schon die Vergrößerung der TAS.



# Kapitel 8 | Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

*Versuch' in Zeichen fortzueilen,  
ungefangen ist mein Geist,  
ehe sich die Zeilen schließen,  
glaub' ich frei zu sein,  
meist.*

— Dornenreich, Leben Lechzend Herzgeflüster

## 8.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden quantitative bildgebende Verfahren für die 3D-Ultraschall-Computertomographie untersucht und für den am KIT entwickelten zweiten Prototypen des 3D-Ultraschall-Computertomographen (3D-USCT II) implementiert. Im Unterschied zu bestehenden Methoden, die sich auf zwei- oder zweieinhalbdimensionale Rekonstruktionen beschränken, wurde in dieser Arbeit ein vollständig dreidimensionales Verfahren zur Detektion und Rekonstruktion der Schallgeschwindigkeit und der Dämpfung unbekanntes Gewebes entwickelt.

**Rekonstruktion** Anders als die Rekonstruktionsalgorithmen in der Literatur wurden die Algorithmen in dieser Arbeit darauf optimiert, mit sehr wenigen Daten auszukommen. Diese Randbedingung wird von der Hardware diktiert: Durch die dreidimensionale Bauweise des 3D-USCT II ist man auf eine insgesamt geringe Zahl an Sendern und Empfängern beschränkt. Von allen 887354 Sender-Empfängerpaaren einer Aperturposition im 3D-USCT II sind mit der Transmissionstomographie nur 170000, etwa 20 Prozent, nutzbar. Das ist für ein gesamtes 3D-Volumen nur etwa dreimal soviel wie beispielsweise [141] bereits für eine einzelne 2D-Schicht zur Verfügung haben. Die Ursache hierfür liegt in der beschränkten Abstrahlcharakteristik der USCT-Wandler

(siehe Abbildung 4.6). Doch auch wenn die Sender perfekte Kugelwellen emittieren könnten, wäre ihre für die Reflexionstomographie optimierte Verteilung immer noch suboptimal für die Transmissionstomographie. Dies konnte durch eine Simulation (Abschnitt 7.8) und theoretische Betrachtungen gezeigt werden.

An Simulationen und statischen Phantomen wurden die praktischen Auflösungsgrenzen und die Genauigkeit der Rekonstruktion aufgezeigt. Dazu wurde ein Gelatinephantom verwendet, dessen Schallgeschwindigkeit bei  $1519 \pm 2$  m/s liegt. Die mittlere Schallgeschwindigkeit einer Rekonstruktion mit den im Rahmen dieser Arbeit implementierten Methoden betrug 1518 m/s.

Weiter wurde ein klinisches *Triple-Modality*-Brustphantom der Firma CIRS Inc. rekonstruiert. CIRS gibt eine mittlere Schallgeschwindigkeit von etwa 1450 m/s an. Die rekonstruierte Schallgeschwindigkeit betrug 1457 m/s. Das Brustphantom besitzt vier Läsionen, deren Durchmesser größer als ein Zentimeter ist. In der Schallgeschwindigkeitsrekonstruktion sind alle diese Läsionen zu sehen. Dies entspricht einer Abschätzung der Auflösungsgrenze für Ultraschall-Transmissionstomographie, die für USCT bei etwa 1,2 cm liegt. Als Dämpfungswert gibt CIRS etwa 0,5 dB/cm/MHz an. In der Rekonstruktion ergab sich für den Phantombereich im Mittel 0,6 dB/cm/MHz. In der Dämpfungsrekonstruktion sind ebenso alle erwähnten Läsionen zu sehen.

In dieser Arbeit wurde erstmals die dreidimensionale Eikonal-Approximation zur Brechungskorrektur genutzt. Da diese in ihrer gewöhnlichen Form sehr rechenintensiv ist, wurde eine Beschleunigung entwickelt und implementiert, die im Mittel um einen Faktor 15 schneller zu berechnen ist und damit den Rekonstruktionsaufwand deutlich verringert. Normalerweise würde eine dreidimensionale Rekonstruktion mit der Eikonal-Gleichung mehrere Tage bis Wochen in Anspruch nehmen. Mit der hier vorgestellten Methode ist eine Berechnung in etwa zehn Stunden möglich. Anhand von Simulationen wurde gezeigt, dass es damit möglich ist, den Einfluss der Brechung in die Rekonstruktion miteinzubeziehen und die Auflösung zu verbessern. So sind beispielsweise synthetische Läsionen von 0,5 cm Durchmesser ohne Brechungskorrektur nicht rekonstruierbar, werden aber mit Brechungskorrektur sichtbar.

**Echtdaten** In einer klinischen Pilotstudie wurden mit dem 3D-USCT II zehn Patientinnen in-vivo aufgenommen. Von diesen wurden 3D-Schallgeschwindigkeitsrekonstruktionen durchgeführt und damit die praktische Nutzbarkeit der Methoden demonstriert. Bisher gab es keine vollständig dreidimensionalen in-vivo-3D-Schallgeschwindigkeitsbilder mit Ultraschall. Von drei Krebsfällen können derzeit mit der USCT-Schallgeschwindigkeitsbildgebung zwei eindeutig identifiziert werden.

Die Schallgeschwindigkeit wurde erfolgreich zur Verbesserung der Reflexionsbilder eingesetzt: Die Reflexionstomographie beruht auf der für Brustgewebe falschen Annahme konstanter Schallgeschwindigkeit. Diese Annahme wurde durch die rekonstruierte Schallgeschwindigkeit verbessert und anhand von Reflexionsbildern verifiziert:

Mit Hilfe der berechneten Schallgeschwindigkeitsvolumens konnte mit der Reflexionstomographie des 3D-USCT II ein Nylondraht von 0,07 mm Durchmesser fokussiert

dargestellt werden, während dies ohne Schallgeschwindigkeitskorrektur nur unfokussiert gelingt. Die erreichbare Reflexionsauflösung steigt damit von etwa 0,5 mm auf circa 0,2 mm.

**Signaldetektion** An Simulationen wurde gezeigt, dass das Optimalfilter zwar SNR-optimale Detektionsergebnisse liefert, aber dennoch durch domänenspezifisches Vorwissen erheblich optimiert werden kann. Die in dieser Arbeit implementierte hybride Detektion aus Constant Fraction Discriminator und Optimalfilter erlaubt Sub-Sample-Auflösung ohne Überabtastung zu benötigen. Damit verringert sich der mittlere Fehler bei der Detektion von 0,5 m/s auf 0,1 m/s. Durch die in dieser Arbeit durchgeführte Parallelisierung der Signalverarbeitungskette ist es möglich, die Signaldetektion effizient durchzuführen.

**Beschleunigung** Mit Hilfe angepasster Algorithmen aus dem Forschungsfeld des *Compressive Sampling* wurde ein schnelles und genaues Rekonstruktionsverfahren entwickelt. Dazu wurde der Compressive-Sampling-Algorithmus TVAL3 von 2D auf 3D erweitert und eine optimierte Versionen implementiert.

Die reine Rekonstruktionsdauer für zehn Aperturpositionen des 3D-USCT II, also circa 2 Mio. Messungen und etwa 660 000 Voxel bei einer Voxelgröße von  $(2,7 \text{ mm})^3$  beträgt damit auf zwei Grafikkarten des Typs Nvidia GTX 590 zehn Sekunden. Eine Rekonstruktion mit maximaler Voxelzahl von  $128 \times 128 \times 96$ , (entspricht einer Voxelgröße von  $(2 \text{ mm})^3$ ) ist auf fünf GTX 590 in fünfzehn Sekunden möglich.

Durch weitere algorithmische Optimierungen und Approximationen in der Rekonstruktion ist aus Softwaresicht erstmals eine Live-Bildgebung möglich. Diese ist für künftige USCT-Anwendungen wie die Thermoerapie eines Tumors nützlich. Innerhalb von 0,6 Sekunden kann ein Volumen mit der Voxelgröße  $(8 \text{ mm})^3$  mit einer GPU rekonstruiert werden.

**Theorie** Die theoretischen Grenzen der gesamten Verarbeitungskette wurde vom Systemaufbau über die Signaldetektion bis zur Rekonstruktion dargelegt. Herkömmliche Algorithmen für die Transmissionstomographie, die auf der Annahme basieren, dass man auf Beugung oder Streuung verzichten kann, besitzen eine Auflösungsgrenze von etwa  $\sqrt{l\lambda}$  für die Wellenlänge  $\lambda$  und den Sender-Empfänger-Abstand  $l$ . Diese Grenze beziehungsweise ihre Auswirkungen und Implikationen wurden für Ultraschall bisher nicht eindeutig berücksichtigt. In dieser Arbeit wird der bislang nur in der Seismologie genutzte Banana-Doughnut-/Fréchet-Formalismus für USCT angepasst und für USCT-Daten verwendet, der theoretisch nicht an die  $\sqrt{l\lambda}$ -Grenze gebunden ist. Diese Tatsache konnte für simulierte und echte USCT-Daten allerdings nicht verifiziert werden.

## 8.2 Diskussion

Zur statistisch eindeutigen Bestimmung der Erkennungsgenauigkeit ist eine wesentlich größere Fallzahl nötig als mit der Studie am Universitätsklinikum Jena erreicht wurde. In naher Zukunft ist eine weitere Studie an der Uniklinik Mannheim geplant, bei der sowohl die Fallzahl erhöht als auch die Auswahl der Fälle verändert werden soll. Ein Problem für die Transmissionstomographie in der Jena-Studie war oft, dass die Brüste nicht tief genug in den USCT reichten. Dies lag zum einen allem am drei Zentimeter hohen Wulst am Rand der Apertur, zum anderen am unerwartet starken Auftrieb durch das Wasser. Zum Problem wird diese Tatsache wenn sich ein Tumor nur im hinteren Teil der Brust befindet oder dort am deutlichsten zu sehen ist. Dies ist beispielsweise bei P10 der Jena-Studie der Fall, auch wenn der Tumor dort noch Ausläufer in den vorderen Teil der Brust aufzuweisen scheint. Auf Grundlage der Ergebnisse der Transmissionstomographie an diesen Daten, soll für die kommende Studie der Wulst maßgeblich verkleinert und außerdem die Liege des USCT angepasst werden.

Für die Transmissionstomographie kam erschwerend hinzu, dass die in der klinischen Studie in Jena untersuchten Fälle von Radiologen als »uneindeutig« oder schwierig klassifiziert worden waren. Das liegt daran, dass Jena als MRT-Brustkrebs-Zentrum nur diejenigen Patientinnen überwiesen bekommt, deren Mammographie-Befund schon nicht eindeutig ist und deshalb auch mit anderen Arten der Bildgebung schwierig zu beurteilen ist. Zur Evaluierung der Algorithmen wären in dieser Phase des Projekts »einfach« zu diagnostizierende Fälle und Tumoren geeigneter. In der kommenden klinischen Studie werden deshalb auch »eindeutigere« Fälle untersucht werden.

**Rekonstruktion** Ein Unterschied der in dieser Arbeit verwendeten Rekonstruktionsmethode etwa zur gefilterten Rückprojektion, die bei der Computertomographie verwendet werden kann, ist ihre Geometrieunabhängigkeit. So ist nicht nötig, dass die Sender und Empfänger auf einem Kreis, einem Zylinder oder einer Helix angeordnet sind, sondern es können beliebige Anordnungen genutzt werden, ohne die Algorithmen maßgeblich zu verändern.

Entscheidendes Kriterium für die Güte der Rekonstruktion ist neben der Geometrie dann aber die Wahl der Regularisierungsparameter. Vor der Pilotstudie in Jena wurden anhand von Testdatensätzen die Parametrisierung manuell optimiert, um die Rekonstruktion für die Echtdaten weitgehend zu vereinheitlichen. Mit jeweils einem optimierten Satz Parameter für Schallgeschwindigkeit und Dämpfung wurden dann alle Rekonstruktionen der Studie durchgeführt.

Für eine manuelle Bestimmung eines generischen Parametersatzes für Echtdaten ist eine größere Zahl echter Datensätze erforderlich als bisher zur Verfügung steht. Dies liegt unter anderem daran, dass bei nur drei Fällen eindeutig Tumoren in der MRT-Rekonstruktion zu sehen waren – mit mehr derartigen Fällen ließen sich abschätzen, mit welcher Parametrisierung, die beste Übereinstimmung mit den MRT-

Rekonstruktionen erreichbar ist. An statischen Phantomen oder mit Simulationen ist dies zwar begrenzt auch möglich, doch ist die genaue Struktur und Charakteristik verschiedener Arten von Tumoren in der Ultraschallbildgebung noch zu unklar, um beispielsweise konkrete Aussagen über die Homogenität oder das Streuverhalten treffen zu können.

Es besteht auch die Möglichkeit, die Wahl der Parameter zu automatisieren. Dies kann mit der Methode der sogenannten L-Kurve geschehen, die in [138] erläutert wird. Das Prinzip der Methode ist die Bestimmung des optimalen Verhältnisses zwischen Regularisierung und Datentreue. Hierfür ist es aber ebenso nötig, eine große Anzahl an Testläufen mit jeweils veränderter Parametrisierung für *einen* Datensatz durchzuführen.

Beide Ansätze sind durch die in dieser Arbeit beschriebene Beschleunigung der Rekonstruktion nun in realistischer Zeit möglich. Ohne Beschleunigung könnte die Validierung verschiedener Parametersätze Tage dauern und einer optimalen Parameterwahl in der klinischen Praxis zuwiderlaufen.

Ein weiterer Einflussfaktor der Rekonstruktion ist die Wahl des Rekonstruktionsalgorithmus. Im Rahmen dieser Arbeit wurden acht verschiedene Compressive-Sampling-Algorithmen untersucht, von denen sich aber nur zwei als verlässlich herausstellten. Dies liegt unter anderem daran, dass die meisten der Algorithmen nur einen *Proof-of-Concept*-Charakter besitzen, also nur für wenige ausgewählte Fälle gut funktionieren, bei anderen aber schlechtes Konvergenzverhalten an den Tag legen oder sogar divergieren. Außerdem waren zum Zeitpunkt der Evaluierung einige Algorithmen auch noch im Beta-Stadium. Zu gegebener Zeit sollte eine erneute Evaluierung durchgeführt werden, um die dann hoffentlich »gereiften« Algorithmen zu prüfen.

**Apriori-Information** Die Modellierung mit der Strahlapproximation bietet die Möglichkeit, die Abstrahlcharakteristik der Ultraschallwandler direkt abzubilden, indem beispielsweise Strahlen mit großem Winkel zwischen Sender und Empfänger schwächer gewichtet werden als solche die im Maximum der Charakteristik liegen. Dies wurde in [RD.8] untersucht, aber für die Rekonstruktionen in dieser Arbeit nicht verwendet, weil sich das Konvergenzverhalten mit derartigen Anpassungen verändert.

Es ist in diesem Zusammenhang außerdem wichtig, dass Ausreißer in den Daten wie etwa besonders hohe oder niedrige mittlere Schallgeschwindigkeiten schon vor der Rekonstruktion eliminiert werden. Weil das Rekonstruktionsproblem schlecht gestellt ist, können auch schon wenige Ausreißer die Rekonstruktion erschweren und etwa die Schallgeschwindigkeiten in einem Bereich stark in eine unerwünschte Richtung verändern. Ein Beispiel hierfür ist der Ausfall eines oder mehrerer Wandlerköpfe (je vier Sender und neun Empfänger), wie während der Studie in Jena mehrmals geschehen. Die zugehörigen Sender-Empfängerpaar müssen vor der Rekonstruktion entfernt werden, was im Falle eines derartigen leicht zu erkennenden Ausfalls einfach ist.

Es gibt allerdings auch weniger eindeutige Messfehler, die manuell korrigiert werden

müssen. Im Falle einer symmetrischen Apertur wie bei Delphinus Medical Technologies genügen einfache Validitätsprüfungen, die bei USCT wegen der komplexeren Apertur nicht möglich sind. In [RD.8] sind Beispiele aufgeführt, die zeigen wie groß der Einfluss der Messfehler ist. Bisher wurde dieser Schritt noch größtenteils manuell durchgeführt. Eine zweidimensionale Medianfilterung auf der Sinogramm-darstellung der Daten wurde für Phantommessungen getestet, brachte aber keine merkliche Steigerung der Bildqualität. Einen anderen Ansatz zur Filterung nutzt die Banana-Doughnut-Rekonstruktion. Dort wird zu Beginn ein Rekonstruktionslauf mit schwacher Regularisierung/Dämpfung durchgeführt. Die sich aus dem so rekonstruierten Schallgeschwindigkeitsvolumen ergebenden mittleren Schallgeschwindigkeiten werden mit den gemessenen Schallgeschwindigkeiten verglichen. Jede Messung, deren Differenz zur mittleren Schallgeschwindigkeit des Volumens größer als ein vorgegebenes  $\varepsilon$  ist, wird verworfen. Es wird momentan untersucht, wie gut dieser Ansatz für USCT-Daten funktioniert.

**Signaldetektion** Durch die Ergebnisse dieser Arbeit wurde deutlich, wie stark die Qualität der Rekonstruktionsergebnisse von der Signaldetektion abhängt: In dieser Arbeit wurden in diesem Zusammenhang erste Ergebnisse zum Einfluss der Streuung auf das Transmissionssignal präsentiert, die der Theorie seismologischer P-Wellen entstammen. Obwohl die Theorie wie gezeigt von den Grundlagen identisch ist, kann es künftig lohnenswert sein, die unterschiedlichen Charakteristika der Daten noch exakter zu quantifizieren, wie es etwa mit einer genaueren Simulation möglich wäre.

Ergebnisse von [13] anhand von Messungen des Brustphantoms mit dem 3D-USCT I deuten darauf hin, dass synthetische Fokussierung auch für die Signaldetektion der Transmissionstomographie von Vorteil sein kann. Abgesehen von Beugungseffekten, kann damit der SNR der Transmissionspulse erhöht werden. Versuche mit Daten des 3D-USCT II zeigten für dieses Vorgehen aber keine Vorteile bei der Signaldetektion. Ein Grund dafür ist höchstwahrscheinlich, dass der SNR beim 3D-USCT II schon sehr hoch ist und durch weiteres Mitteln oder Fokussieren, insbesondere ohne Überabtastung, keine merkliche Verbesserung erzielt werden kann.

Durch Überabtastung kann die Genauigkeit der verwendeten Algorithmen noch erheblich gesteigert werden, wie aber im Laufe dieser Arbeit deutlich wurde, kommt es im Hinblick auf hohe Auflösung ( $< 1$  cm) nicht primär auf die Detektionsgenauigkeit an, sondern vielmehr auf die Interpretation der Detektionsdaten im Zusammenspiel mit dem gewählten Modell für die Ultraschallausbreitung. Bedeutsam ist in dieser Hinsicht auch Dispersion, also frequenzabhängige Phasenlaufzeit, die je nach Medium dafür sorgt, dass sich der ausgesandte Puls frequenzabhängig verformt. In dieser Situation ist die sogenannte Gruppenlaufzeit eine bessere Schätzung für die Laufzeit des Signals als die normalerweise verwendete Phasenlaufzeit. Die Nutzung der Gruppenlaufzeit zur Signaldetektion wurde in [148] untersucht, das Grundproblem der Signaldetektion mit der Strahlapproximation bleibt aber auch dort bestehen.

**Beschleunigung** Zur Beschleunigung der Rekonstruktion wurde in dieser Arbeit primär der TVAL3-Algorithmus optimiert. Dazu wurde die Multiplikation dünn besetzter Matrizen und Vektoren als Flaschenhals identifiziert und mit dem höchsten Optimierungsaufwand bedacht. Auch wenn die Laufzeit aller ähnlich gearteten Optimierungsalgorithmen von der Matrix-Vektormultiplikation dominiert wird, könnte es künftig sinnvoll sein, Algorithmen dahingehend zu entwerfen, dass sie weniger dieser Operationen dieser Art benötigen um unnötige Speichertransfers zu vermeiden.

Die brechungskorrigierte Rekonstruktion mit Hilfe des TVAL3-Algorithmus wurde ebenfalls wesentlich beschleunigt. Die Beschleunigung ist im Wesentlichen eher auf algorithmische Veränderungen als auf Optimierungen zurückzuführen. Erste Versuche zur Rechenzeitoptimierung deuten darauf hin, dass insbesondere die Berechnung der Wellenausbreitung mit der Eikonal-Gleichung stark von GPU-Berechnung profitieren und damit künftig auch die vollständige Lösung der Eikonal-Gleichung ermöglichen könnte.

Die Signaldetektion wurde im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls in MATLAB parallelisiert, benötigt aber dennoch nicht zu vernachlässigende Rechenzeit. Durch eine Implementierung in einer schnelleren Programmiersprache oder der Verwendung von Grafikkarten kann die Rechenzeit in Zukunft minimiert werden. Da das Problem trivialparallel ist, ist die weitere Beschleunigung einfach möglich.

**Simulation** Sowohl zum besseren Verständnis der Echtdaten als auch zur Verbesserung der Rekonstruktion ist eine möglichst genaue Simulation oder Vorwärtslösung von Nutzen. Da, wie gezeigt, die vollständige Lösung der Wellengleichung zur jetzigen Zeit nur auf den größten Supercomputern möglich ist, bleibt in diesem Punkt vor allem die Hoffnung auf das Mooresche Gesetz, das eine andauernde Verringerung der Rechenzeit erhoffen lässt. Ein erster Schritt in Richtung einer realistischen Simulation jedoch kann die in dieser Arbeit erläuterte Banana-Doughnut-Methode sein. Da diese sich auch in linearer Matrixform darstellen lässt, könnte sie, auf die Vorarbeiten dieser Arbeit aufbauend, als Grundlage einer Simulation genutzt werden, die Brechung und Streuung unter der Born-Approximation für Transmissionssignale bereitstellt. Da die Simulation mit der Strahlapproximation wie schon die Signaldetektion trivialparallel ist, kann auch sie einfach durch Hinzunehmen weiterer Rechenkerne oder -knoten weiter beschleunigt werden.

**Optimierung der Geometrie** Wie in dieser Arbeit gezeigt, bewirkt beim aktuellen Aufbau des 3D-USCT II nicht die Anzahl der Wandler sondern deren Verteilung die größten Unterschiede in der Bildqualität. Anhand von Simulationen konnte gezeigt werden, dass durch eine Vergrößerung der TAS, also eine Vergrößerung der Abstände zwischen einzelnen Sendern und Empfängern auf einem TAS eine wesentlich bessere Rekonstruktion möglich ist. Man erreicht mit einem derart modifizierten USCT ohne Rotation und Hub etwa die Bildqualität, die aktuell mit 16 Aperturpositionen möglich ist. Eine für kommende USCT-Generationen angedachte Vergrößerung

des Durchmessers hätte auf die Transmissionstomographie nur indirekt über die Abstrahlcharakteristik Einfluss: Bei gleichbleibender Charakteristik würde ein zentral positioniertes Objekt in einem größeren USCT besser ausgeleuchtet. Vom physikalischen Standpunkt der Wellenausbreitung betrachtet, ist ein größerer Durchmesser wegen der Beugung und des *Wave Front Healing* jedoch nicht vorteilhaft für die Transmissionstomographie.

## 8.3 Ausblick

In dieser Arbeit wurde mehrfach die Wichtigkeit der Streuung und der endlichen Frequenz betont, die in bisherigen Arbeiten nur ungenügend behandelt wurde. Eine Ausnahme stellen Veröffentlichungen aus der Seismologie dar, deren Algorithmen aber bisher nur bedingt für USCT einsetzbar sind (siehe Abschnitt 7.6 und Abbildung 7.5). Weitere Arbeiten zur Verbesserung der Transmissions-Auflösung werden nicht umhinkommen, Einfach- und eventuell Mehrfachstreuung in die Rekonstruktion miteinzubeziehen. Vor diesem Hintergrund seien die seismologischen Bestrebungen erwähnt, Vollwellentomographie (*Full-Waveform Tomography*) auf globaler Skala durchzuführen [149]. Derartige Ansätze könnten, insbesondere wegen des einfacheren Mediums, künftig auch für USCT denkbar sein. [90] entwickeln momentan einen nichtlinearen Algorithmus (*Contrast Source Inversion*), der Mehrfachstreuung in die Rekonstruktion miteinbeziehen kann. Solange jedoch die wegen des Abtasttheorems hohen Diskretisierungsvorgaben verhindern, die vollständige dreidimensionale Wellengleichung effektiv zu lösen, haben derartige Verfahren keine Aussicht auf erfolgreiche klinische Verwendung.

Wie gezeigt bieten auch die bekannte Born- oder Rytov-Approximation für die Berechnung keine maßgeblichen Vorteile. Anders könnte es aber insbesondere mit der in der Seismologie schon besser bekannten [119] paraxialen Approximation aussehen. Diese stellt einen Ausgangspunkt dar, wie künftig sowohl exaktere Simulationen als auch Rekonstruktionen in realistischer Zeit durchgeführt werden könnten. Techniscan [83] verwendet eine Variante der paraxialen Approximation um die dreidimensionale Wellengleichung zu lösen, beschreibt aber die Methode nicht genauer. Eine kurze Zusammenfassung findet sich in dieser Arbeit in ???. Grundsätzlich rührt die Beschleunigung bei der Berechnung der paraxialen Approximation daher, dass auf höhere Ableitungen verzichtet werden kann. Techniscans Ergebnisse lassen darauf schließen, dass der Ansatz für Transmissionsdaten funktioniert, da in den Transmissionsbildern auch Strukturen kleiner als 1 cm zu sehen sind. Aus diesem Grund sollte die paraxiale Approximation künftig als Ausbreitungs-, also Vorwärtsmodell für die Transmissionstomographie ernsthaft in Betracht gezogen werden.

Im Rahmen der Evaluierung der Rekonstruktionsalgorithmen wurden Versuche mit »nicht zusammenpassenden« Vorwärtsmodellen und Rückwärtsmodellen in Anlehnung an [150] durchgeführt. Ein solches Vorgehen hat zum Beispiel Sinn, wenn man

aus Beschleunigungsgründen die Transponierte nicht in jedem Iterationsschritt eines Rekonstruktionsalgorithmus neu berechnet, sondern nur alle  $k$  Schritte. Erste Ergebnisse lassen darauf schließen, dass man mindestens jede zweite Neuberechnung auslassen kann, ohne die Konvergenz zu verhindern und das Ergebnis zu beeinträchtigen. Da die Berechnung der Transponierten einen wesentlichen Anteil an der Rekonstruktionszeit hat (siehe Abschnitt 6.2), lässt sich so die Rechenzeit weiter senken. Zur endgültigen Validierung wären aber noch weitere Untersuchungen mit mehr Daten nötig.

Ein Ansatzpunkt, die Banana-Doughnut-Rekonstruktionen für USCT zu verbessern, wäre die Nutzung der Total-Variation-Regularisierung. Wie in Abschnitt 5.6 gezeigt, bringt diese deutliche Vorteile für USCT-Daten und wurde auch schon für seismologische Daten evaluiert [139].

Im Hinblick auf die in Abschnitt 4.4 erwähnten Probleme bei der Signaldetektion mit endlichem Frequenzeinfluss erscheint es sinnvoll, eine Art Beamforming zu evaluieren. Damit, also Fokussierung in Software ähnlich dem SAFT-Algorithmus, wäre es möglich, den Einfluss endlicher Frequenzen zu begrenzen. Dies könnte analog zur Nutzung des USCT als *Phased Array* funktionieren, mit dem ein fokussierter Ultraschallstrahl erzeugt wird. Die Ausdehnung des Strahls ist unter anderem abhängig von der Anzahl der zur Fokussierung benutzten Sender und Empfänger. Weil der Ultraschall dann synthetisch strahlfokussiert wäre, hätten Streuer außerhalb des Strahls keinen Einfluss auf den Detektionszeitpunkt am Empfänger und es wäre möglich, die Auflösung zu erhöhen. Erste Versuche deuten zwar darauf hin, dass mit der aktuellen USCT-Geometrie kein Strahl erzeugbar ist, der kleiner als die erste Fresnel-Zone wäre, doch bedarf es zur endgültigen Beurteilung noch genauerer Analysen. Problematisch ist unter anderem, dass sich das Nahfeld eines virtuell fokussierten Senders vergrößert (teilweise um einige Zentimeter) und damit die Bildgebung störende Effekte einfluss gewinnen. Außerdem ist noch unklar, wie die (tatsächliche) Streuung auf synthetische fokussierte Signale wirkt.

Eine Untersuchung der Auflösungsgrenze von  $\sqrt{l\lambda}$  der Strahlapproximation samt Simulation könnte künftig Aufschluss darüber geben, in welchen Situation und für welche Streuerstärke relevante (durch Streuung induzierte) Änderungen des Transmissionspulses detektiert werden. Linderung für die Grenze von  $\sqrt{l\lambda}$  würde auch eine geringere Winkelabhängigkeit oder eine breitere Hauptkeule der Wandler schaffen, weil dann auch Sender-Empfängerpaar mit geringerer Entfernung  $l$  nutzbar würden. Könnte man beispielsweise konsistent Paare der Entfernung  $l = 0,10$  m verwenden, läge die Auflösungsgrenze bei 7,8 mm statt bei 12 mm – eine Verbesserung um fast 40 Prozent.

In [57] wird berichtet, dass es mit dem AIC-Algorithmus zur Signaldetektion möglich ist, die  $\sqrt{l\lambda}$ -Grenze zu unterschreiten. Das wird anhand einer zweidimensionalen numerischen Simulation mit 800 kHz demonstriert. Als Läsionen werden lediglich solche höherer Schallgeschwindigkeit verwendet, die beispielsweise nach [122] bis zu einer gewissen Entfernung von Sender und Empfänger von einem First-Arrival-

Algorithmus detektiert werden können. Läsionen niedrigerer Schallgeschwindigkeit werden nicht betrachtet. Allerdings sind es gerade diese Läsionen, die sich nicht gut mit einem First-Arrival-Algorithmus erkennen lassen und damit eine Auflösungsgrenze darstellen. Für weitere Forschungen wäre es nützlich den konkreten Einfluss eines First-Arrival-Detektors auf echte Daten zu quantifizieren um zum Beispiel anhand unterschiedlicher Läsionen zu unterscheiden, ob und inwiefern es Abweichungen bei der Rekonstruktion dieser gibt.

Hierzu und zum erwähnten Beamforming laufen momentan neue theoretische Untersuchungen, deren Ergebnisse in naher Zukunft in die Bildgebung einfließen werden.

# Anhang A

## Elastodynamische Wellengleichung

*A renúncia é a libertação. Não querer é poder.*

— Livro do desassossego, Bernardo Soares/Fernando Pessoa

Für die seismologische Bildgebung kann man im allgemeinen keine Vereinfachungen der Wellengleichung treffen, die darauf beruhen, dass man sich in einem fluiden oder isotropen Medium befindet. Die in Abschnitt 5.8 behandelte seismologische Rekonstruktionsmethode basiert auf der elastischen Wellengleichung, die nun kurz vorgestellt wird. Sie unterscheidet sich beispielsweise darin von der akustischen, dass sie auch Scher- oder Transversalwellen berücksichtigt.

Mittels weniger Vereinfachungen lässt sich aus der elastischen Wellengleichung die akustische ableiten. Dies wird im Weiteren zur Verdeutlichung der Zusammenhänge zwischen beiden Feldern in verkürzter Form durchgeführt. Für einen umfassenden Überblick aller in der Seismologie relevanten Phänomene sei [40] oder [139] empfohlen.

Nach [40], dem dieser Abschnitt folgt, geht man vom sogenannten *Stresstensor*  $\sigma$  oder Spannungstensor aus, der den linearen Zusammenhang beschreibt, wie eine Kraft auf ein Volumenelement  $dV$  eines kontinuierlichen Mediums wirkt.

Die elastodynamische Wellengleichung lautet damit

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}_D(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.1})$$

Hierbei ist  $\sigma$  der mechanische Stresstensor,  $\mathbf{v}_D$  das sogenannte Verschiebungsfeld (*Displacement field*), das mit der Partikelgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  eines Partikels an  $\mathbf{x}$  zusammenhängt: [151]

$$\mathbf{v}_i = \left( \frac{\partial (\mathbf{v}_D)_i}{\partial t} \right) + (v_D)_j \left( \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{x}_j} \right). \quad (\text{A.2})$$

Dabei ist allerdings zu beachten, dass im ersten Term in (A.2) der Ort fest ist, im zweiten Term die Zeit.

Man geht davon aus, dass für  $t \leq 0$   $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0$  und  $\dot{\mathbf{u}}$  gilt. Der Stresstensor  $\sigma$  hängt folgendermaßen vom Dehnungstensor  $\varepsilon$  und vom Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  ab:

$$\sigma(\mathbf{x}, t)_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1, j=1}^n \dot{\mathbf{C}}_{ijkl}(\mathbf{x}, t - t') \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t') dt'. \quad (\text{A.3})$$

$\mathbf{C}$  ist ein vierdimensionaler Tensor, dessen Elemente  $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}$  genügen. Der Dehnungstensor  $\varepsilon$  ist definiert als  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}_D + \nabla \mathbf{v}_D^t)$ .

Nimmt man Isotropie an, reduziert sich  $\mathbf{C}$  zu Linearkombinationen der sogenannten Lamé-Parameter  $\lambda$  und  $\mu$ :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{ij} \delta_{jl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (\text{A.4})$$

$\mu$  heißt Schermodul, mit  $\frac{1}{\chi} := \lambda + \frac{2}{3}$  definiert man den Kompressionsmodul  $\frac{1}{\chi}$ .  $\delta_{ij}$  ist das Kronecker-Delta.

Im fluiden, akustisch-isotropen Fall wie für USCT beispielsweise Wasser gibt es keine Scherkräfte, also  $\mu = 0$ . Folgerichtig ergibt sich aus (A.3) mit (A.4)

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\chi} \delta_{ij} \operatorname{div} \mathbf{v} = -u \delta_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

Außerdem sind alle Richtungskräfte gleich:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}.$$

Nutzt man (A.5), vereinfacht sich (A.1) zu

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + \nabla u = \mathbf{f}.$$

Nach [41] erhält man (wie für (3.3) per Eliminierung von  $\mathbf{v}_D$ )

$$\chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \left( \frac{1}{\rho} \nabla u \right) = -\operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{f} \right).$$

Wenn man nun wieder annimmt, dass sich die Dichte  $\rho$  nur sehr langsam ändert oder konstant ist, kann man sie aus den entsprechenden Termen herausziehen und schreibt die akustische Wellengleichung im Zeitbereich:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 u = -c^2 \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (\text{A.6})$$

Dies ist analog zu (3.8), wobei in (A.6) allerdings explizit ein Quellterm  $\mathbf{f}$  vorkommt. Dieser findet sich in Abschnitt 3.1 implizit in  $\mathbf{k}$  oder explizit als Objektfunktion  $o(\mathbf{x})$ .



# Anhang B

## Fourier-Scheibentheorem

### Radon-Transformation

Die Radon-Transformation ist eine Transformation, die Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , also von einem Raum auf seine Hyperebenen. Im Zweidimensionalen und mit Hyperebenen  $H(\theta, s)$  im Winkel  $\theta$  und dem Achsenabschnitt  $s$  lautet sie:

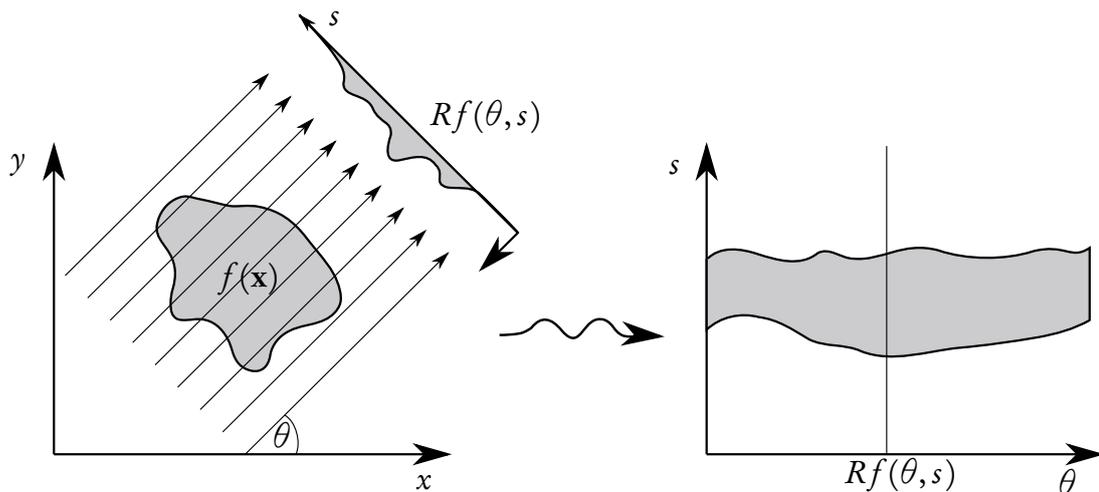
$$\underbrace{Rf(\theta, s)}_{\mathbf{b}} = \underbrace{\int}_{H(\theta, s)} \underbrace{f(\mathbf{x})}_{\mathbf{x}} dx. \quad (\text{B.1})$$

Hier wurden  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{x}$  aus Kapitel 5 schematisch ihren Entsprechungen in der Radon-Transformation zugeordnet.

Im Zweidimensionalen hat man es demnach mit Linienintegralen zu tun. Im dreidimensionalen Fall würde über Ebenen integriert, tatsächlich wird in der Literatur der Begriff Radon-Transformation meistens als einer ihrer Spezialfälle, der Integraltransformation über Linienintegrale verstanden. Strenggenommen spricht man im  $\mathbb{R}^n$  für  $n \geq 3$  von der Strahl- oder Röntgen-Transformation (im Englischen *X Ray Transform* aufgrund ihres Ursprungs in der Röntgenbildgebung).

Das »Ergebnis« der Radon-Transformation lässt sich anschaulich in Form eines sogenannten Sinogramms darstellen. Dies ist im 2D-Fall ein zweidimensionales Bild, das den Wert des Linienintegrals in (B.1) über den beiden Parametern  $\theta$  und  $s$  aufträgt. Für einen festen Winkel  $\theta_1$  heißt  $Rf(\theta_1, s)$  dann auch Projektion für  $\theta_1$ . Abbildung B.1 zeigt dies schematisch für ein Messsystem mit ebenem Sender und mehreren Empfänger, die auf einer Linie angeordnet sind. Für eine Gesamtsicht, wie sie ein Sinogramm ist, werden beide in einem bestimmten Winkel um das Objekt gedreht. Einen solchen Aufbau nennt man auch Fächer- oder Fächerstrahlgeometrie, oder, im Dreidimensionalen auch Kegelstrahl- oder (*Cone-Beam*-)Geometrie. Der 3D-USCT I besaß eine Kegelstrahl-Geometrie, der 3D-USCT II kann wegen des ellipsoidalen, nicht symmetrischen Aufbaus nicht als solche angesehen werden.

Der Name Sinogramm leitet sich aus der sinusartigen Struktur desselben her: Wenn man einen Punkt Radon-transformiert, ist das Ergebnis eine Sinusfunktion entlang



**Abbildung B.1** – Schematische Aufnahme-prozedur/Radon-Transformation (links) und Sinogramm (rechts) für eine parallele Sender- und Empfänger-geometrie. Die Sender befinden sich am Beginn der Pfeile, die Empfänger an ihrem Ende.

des Winkels  $\theta$ . Veranschaulicht ist dies in Abbildung 4.10 (oben) für eine kreisförmige Apertur.

Dies erkennt man auch direkt, wenn man (B.1) umschreibt als

$$\begin{aligned} Rf(\theta, s) &= \int_{H(\theta, s)} f(x(t), y(t)) dt \\ &= \int_{H(\theta, s)} f(t \sin \theta + s \cos \theta, -t \cos \theta + s \sin \theta) dt, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

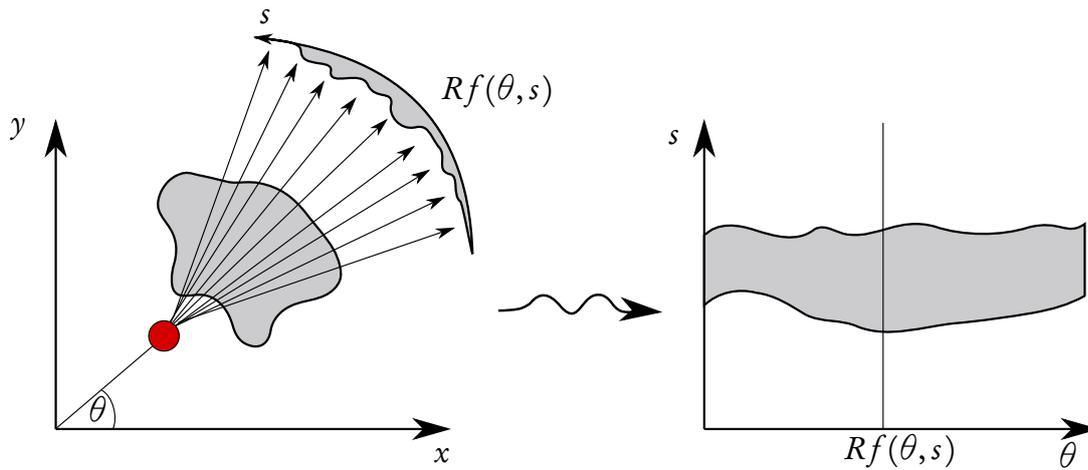
wobei die Sinus-Cosinus-Parametrisierung einer Geraden benutzt wurde, wie sie für das der Radon-Transformation verwandte Konzept des Hough-Raumes verwendet wird.

In Anhang C findet sich eine Auswahl an Rekonstruktionsverfahren, die auf den hier angerissenen Grundlagen basieren.

## Fourier-Scheibentheorem

Ein der Radon-Transformation verwandtes Prinzip ist die Fourier-Transformation. Durch die Kombination beider Transformationen gelangt man zu einem Hilfsmittel, das für die Nutzbarkeit der Radon-Transformation in der Bildgebung unerlässlich wurde.

Bis jetzt wurde nur die Vorwärtsrichtung, also die Transformation von bekannten  $f(\mathbf{x})$  nach  $Rf(\theta, s)$  beschrieben. Für die Bildgebung aus Messdaten ist jedoch die Rücktransformation, also das Rekonstruieren eines unbekanntes  $f(\mathbf{x})$  aus  $Rf(\theta, s)$  entscheidend.



**Abbildung B.2** – Schematische Aufnahme-prozedur (links) und Sinogramm (rechts) für eine Fächergeometrie. Der Sender ist rot markiert, die Empfänger befinden sich am Ende der Pfeile.

Eine *Projektion*  $p(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  ist ein Linienintegral

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy. \tag{B.3}$$

Die zweidimensionale Fourier-Transformation von  $\hat{f}(\mathbf{x})$  von  $f(\mathbf{x})$  ergibt sich als

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i(\mathbf{x} \cdot \mathbf{k})} d\mathbf{x}. \tag{B.4}$$

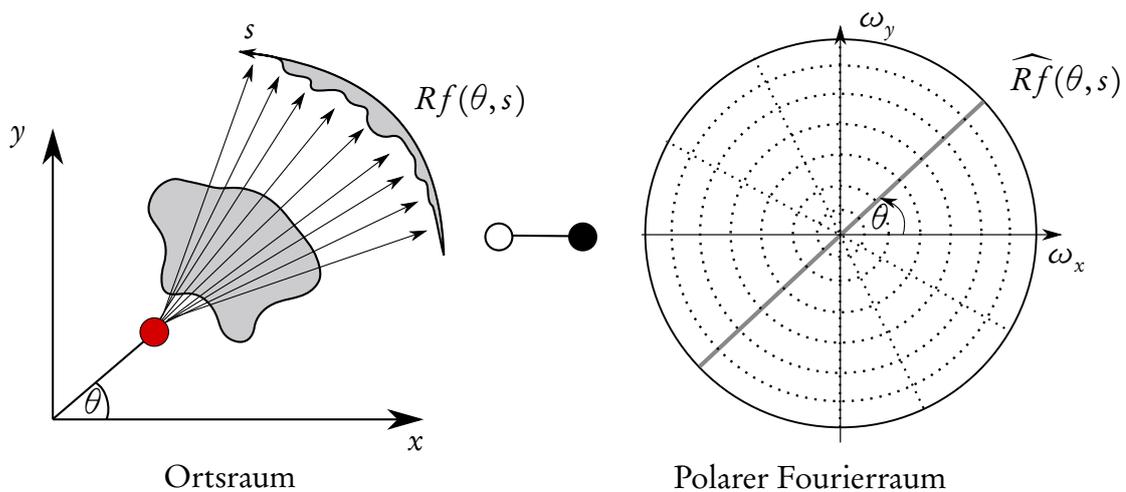
Die Aussage des sogenannten Fourier-Scheibentheorem  $s$  im Zweidimensionalen ist, dass ein Schnitt im Winkel  $\theta$  (oder eine »Scheibe«) der 2D-Fouriertransformierten von  $f(\mathbf{x})$  genau der 1D-Fouriertransformierten der Projektion  $p(x)$  entlang einer Geraden im gleichen Winkel  $\theta$  entspricht. Siehe dazu Abbildung B.3.

Man erkennt den Zusammenhang, wenn man mit einem Schnitt  $s(k_x)$  der 2D-Fouriertransformierten von  $f(\mathbf{x})$  wie in (B.4) beginnt,

$$\begin{aligned} s(k_x) = \hat{f}(k_x, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i x k_x} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right]}_{=p(x)} e^{-2\pi i x k_x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-2\pi i x k_x} dx = \hat{p}(x) \end{aligned} \tag{B.5}$$

und nach Umformung bei der 1D-Fouriertransformierten  $\hat{p}(x)$  endet.

Korrekterweise geht man beim Scheibentheorem von einem planaren Senderarray und einem ebensolchen Empfängerarray aus. Durch Interpolation kann die hier (Abbildung B.3) gezeigte Fächergeometrie in eine planare überführt werden [152].



**Abbildung B.3** – Fourier-Scheibentheorem: Die 1D-Fouriertransformierte einer Projektion eines Objekts im Ortsraum entspricht einer Scheibe in der 2D-Fouriertransformierten des Objekts. Die hier gezeigte Geometrie ist eine Fächerstrahlgeometrie im Gegensatz zu einer planaren Sender- und Empfängergeometrie wie beim normalen Fourier-Scheibentheorem. Beide können durch Interpolation ineinander überführt werden.

**Gefilterte Rückprojektion** Die gefilterte Rückprojektion ist gewissermaßen die natürliche Invertierung der Radon-Transformation. Ihr Prinzip ist in Abbildung B.4 dargestellt. Das Grundprinzip der gefilterten Rückprojektion besteht darin, Projektionen entlang ihres Aufnahmewinkels wieder im Bildraum einzutragen. Weil durch die Projektion die Information entlang der Richtung des Aufnahmewinkels verloren geht, werden die gleichen Werte der Projektion entlang der gesamten Richtung bis zum Empfänger eingetragen. Dies geschieht für jede vorhandene Projektion, so dass alle Projektionen durch Überlagerung eine Rekonstruktion des gemessenen Objekts ergeben.

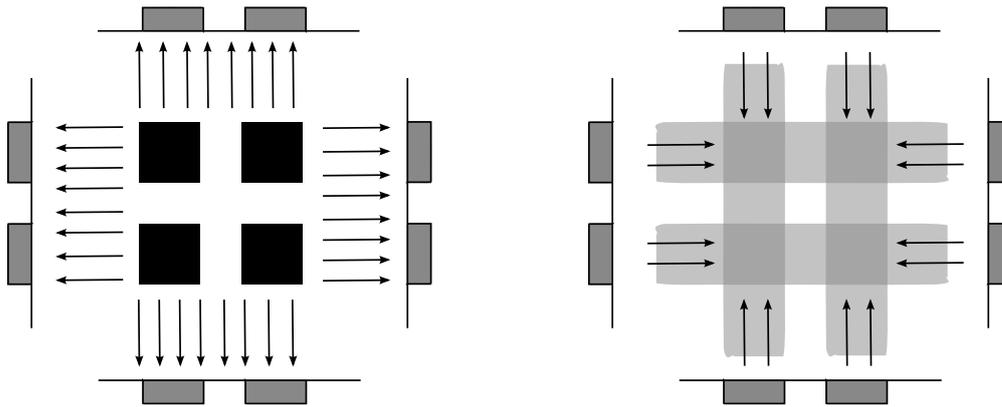
Die ursprüngliche Verwendung der gefilterten Rückprojektion war die Röntgenbildgebung. Wegen der hohen Frequenz der Röntgenstrahlen ( $> 10^{17}$  Hz [153]), kann man vom Grenzfall unendlicher Frequenz der Wellengleichung ausgehen und vernachlässigt üblicherweise auch Brechung. Ohne Beugung und Brechung nutzt man also die einfache Strahlapproximation zur Beschreibung der Ausbreitung.

Die inverse kartesische Fouriertransformation des gesuchten Objekts  $f$  lautet

$$f(\mathbf{x}) = \int \hat{f}(\mathbf{u}) e^{2\pi i(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{u}.$$

Da man über das Fourier-Scheibentheorem aber keine kartesischen, sondern polare Einträge im Fourierbereich erhält, geht man zu polaren Koordinaten  $(r, \theta)$  über:

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(r, \theta) e^{2\pi i r(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} r dr d\theta.$$



**Abbildung B.4** – Prinzip der (gefilterten) Rückprojektion. Gemessene Projektionen (links) werden entlang ihres Aufnahmewinkels zurück in das Volumen »geschmiert« (rechts). Mehrere Projektionen überlagern sich dann de- und konstruktiv, so dass sich mit einer genügend großen Anzahl das zu rekonstruierende Bild ergibt.

Dabei ist  $r$  auch die Jacobi-Funktionaldeterminante der Transformation

$$r = \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, h)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Bezieht man beide »Richtungen«, also positive und negative Radien  $r$  mit ein, ergibt sich

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(r, \theta) e^{2\pi i r(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)} |r| dr d\theta. \quad (\text{B.6})$$

Wichtig für die Rekonstruktion ist der Faktor  $|r|$  in (B.6). Da im Fourierraum mit  $|r|$  multipliziert wird, entspricht dies einer Faltung mit der inversen Fouriertransformierten von  $|r|$  im Ortsraum. Dieser Faktor stellt den namensgebenden Filter der gefilterten Rückprojektion dar. Er sorgt für eine Hochpass-artige Gewichtung der Frequenzen. Die inverse Fouriertransformierte von  $|r|$  ist allerdings nicht geschlossen darstellbar [154]. Aus diesem Grund wurden für die Bildgebung unterschiedliche Filter vorgeschlagen [95], von denen die bekanntesten der Ram-Lak- und der Shepp-Logan-Filter sind.

Die gefilterte Rückprojektion in ihrer üblichen Form funktioniert nur mit Kreisaperturen oder im Dreidimensionalen mit zylinderförmigen Aperturen wie es der 3D-USCT I eine besaß. Möglich sind außerdem noch helixartige Strukturen für Sender- und Empfängergeometrie. Für beliebige Geometrien, also beispielsweise auch ein Ellipsoid existierten bis vor kurzem keine exakte Rekonstruktion. In [155] wurden Methoden für beliebige Geometrien vorgestellt, die bisher aber noch nicht in nutzbaren Algorithmen mündeten.

## B.1 Transmissionstomographie mit Diffraktionstheorie

Zunächst wird die Rytov-Approximation rekapituliert, die als Fundament der Eikonal-Gleichung dient. Sie kann wie die Born-Approximation als Basis für das verallgemeinerte Scheibentheorem verwendet werden.

### Rytov-Approximation

Zur besseren Übersicht werden die Anfangsgleichungen aus Unterabschnitt 3.2 hier nochmals dargestellt. Grundannahme für die Rytov-Approximation ist, dass sich die Gesamtphase  $\varphi$  in eine gestreute und eine inzidente Phase aufspalten lässt, so dass mit  $\varphi = \varphi_0 + \varphi_s$

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x})e^{\varphi(\mathbf{x})} = u_0(\mathbf{x})e^{\varphi_0(\mathbf{x})+\varphi_s(\mathbf{x})} \quad (\text{B.7})$$

geschrieben werden. Als  $\varphi$  wählt man  $\varphi(\mathbf{x}) = ik_0\mathbf{r}\mathbf{x}$  für eine ebene Welle in Richtung  $\mathbf{r}$ . Setzt man  $u(\mathbf{x})$  aus (B.7) in (3.7) ein, ergibt sich

$$\nabla^2\varphi + |\nabla\varphi|^2 + \mathbf{k}^2 = 0. \quad (\text{B.8})$$

Auf (B.8) aufbauend, folgt die Notation und Argumentation dieses Abschnitts folgt [156] und [43].

Trennt man  $\varphi$  in (B.8) wie in (3.26), hat man nun

$$\nabla^2(\varphi_0 + \varphi_s) + |\nabla\varphi_0|^2 + 2\nabla\varphi_0\nabla\varphi_s + |\nabla\varphi_s|^2 + k_0^2(n^2) = 0. \quad (\text{B.9})$$

Die Terme  $\nabla^2\varphi_0$ ,  $|\nabla\varphi_0|^2$  und  $k_0^2$  addieren sich in (3.27) mit  $\varphi = \varphi_0$  zu 0, weil das derart beschriebene inzidente Feld die Lösung der homogenen Helmholtzgleichung ist. Damit gilt

$$\nabla^2\varphi_s + 2\nabla\varphi_0\nabla\varphi_s + (\nabla\varphi_s)^2 - k^2 - k_0^2 = 0.$$

Hier nimmt man als inzidenten Feld wieder eine planare Welle an und schreibt, mit  $n = 1 + \delta n$ ,

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right) u_0\varphi_s + u_0\left((\nabla\varphi_s)^2 + k_0^2(1 + 2(\delta n(\mathbf{x})) + (\delta n(\mathbf{x})^2) - 2)\right) = 0.$$

Auf diese Weise kann die Phase des gestreuten Felds analog der Born-Approximation mit Hilfe einer Greenschen Funktion  $G$  geschrieben werden als

$$u_0\varphi_s = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \left((\nabla\varphi_s)^2 + k_0^2(2\delta n + (\delta n)^2)\right) u_0 \, d\mathbf{y}.$$

Die Rytov-Approximation besteht im Weglassen von Termen zweiter Ordnung,  $(\nabla\varphi_s)^2$ , der quadrierten Änderung der Phase, und  $(\delta n)^2$ . Dann lautet die gestreute Phase unter der Rytov-Approximation

$$u_0(\mathbf{x})\varphi_s = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) o(\mathbf{y}) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y},$$

oder mit Hilfe der Born-Approximation

$$\varphi_s = \frac{u_{s,\text{Born}}}{u_0}.$$

Dabei ist die Objektfunktion nun erster Ordnung

$$o(\mathbf{x}) \approx 2k_0(\delta n)(\mathbf{x}).$$

Als Ausdruck für das approximierte, gestreute Feld unter der Rytov-Approximation erhält man

$$u_{s,\text{Rytov}} = u_0 \varphi_s = u_0 \log \left( \frac{\mathbf{u}_s}{u_0} + 1 \right).$$

Im Gegensatz zur Born-Approximation ist es für die Rytov-Approximation weitgehend unerheblich, wie groß das Objekt mit anderem Brechungsindex ist, also wie groß die gesamte Phasenänderung ist. Entscheidend für die Approximation ist hingegen die Änderung des Brechungsindex pro Wellenlänge, die wiederum für die Born-Approximation nur eine geringe Rolle spielt. Dies wurde in Kak und Slaney [43] anhand eines Zylinders vergleichend dargestellt, wie er schon für die Abschätzung der Born-Approximation benutzt wurde. Kak und Slaney nennen als Bedingung für die Rytov-Approximation

$$\delta n \gg \left( \frac{\nabla \varphi_s \lambda}{2\pi} \right)^2.$$

$\nabla \varphi_s$  ist die Veränderung der Phase des gestreuten Feldes pro Einheitsabstand. Da nur die Veränderung der Phase in die Bedingung eingeht, muss diese klein sein – nicht die Gesamtänderung.

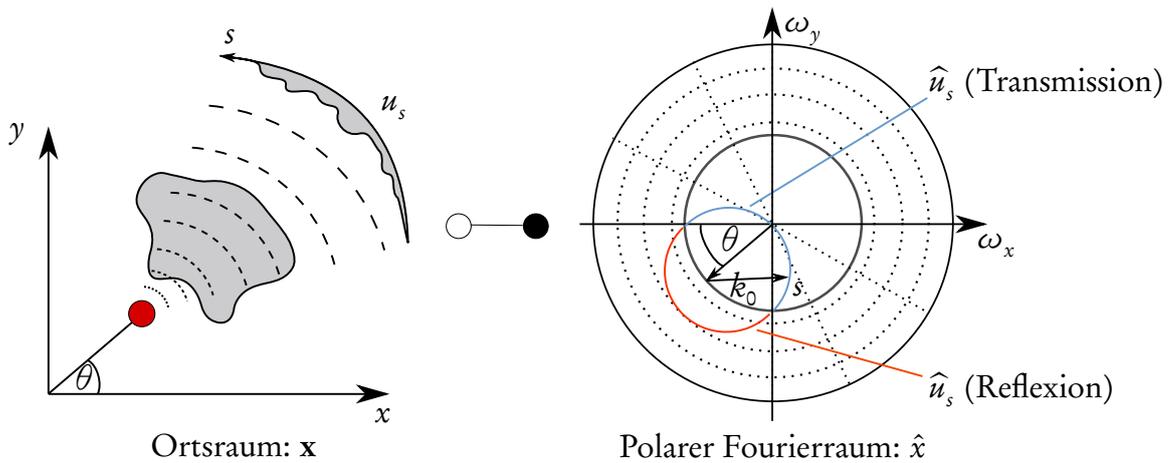
Die Auflösungsgrenze der Rytov-Approximation kann ebenso wie die der Born-Approximation mit Hilfe des verallgemeinerten Fourier-Scheibentheorems bestimmt werden und liegt bei  $\frac{\lambda}{2}$ . Siehe dazu Abschnitt B.1.

Ein qualitativer Vergleich der Born- und der Rytov-Approximation findet sich in [157].

## Verallgemeinertes Fourier-Scheibentheorem

Auf den Grundlagen in Abschnitt 3.2 aufbauend, wird hier das Scheibentheorem für die Diffraktionstheorie hergeleitet. Dabei folgt dieser Abschnitt weitgehend den Ausführungen von [43]. Wegen der besseren Anschaulichkeit wird hier ebenfalls nur der zweidimensionalen Fall behandelt.

Voraussetzung für das auf endliche Frequenz verallgemeinerte Fourier-Scheibentheorem ist schwache Streuung und die dadurch mögliche Linearisierung der Berechnung



**Abbildung B.5** – Schema des verallgemeinerten Fourier-Scheibentheorems. Das gemessene gestreute Feld  $u_s$  wird fouriertransformiert entlang eines Halbkreises in den Fourierraum eingetragen. Je nach Position des Empfängers trägt man entweder den Reflexionsanteil (orange, äußerer Halbkreis, höhere Ortsfrequenz) oder den Transmissionsanteil ein (blau, innerer Halbkreis, niedrigere Ortsfrequenz).

des gestreuten Feldes auf Grundlage von (3.18) wie sie die Born- und die Rytov-Approximation bieten. Ein Zusammenhang wie hier dargestellt ist nur für deren jeweils erste Approximationsschritt (ohne weiteres Iterieren) bekannt. In [43] werden zwei Ansätze für die Herleitung beschrieben. Wegen der größeren Ähnlichkeit zum einfachen Scheibentheorem und der Überschneidungen mit dem seismologischen Ansatz, wird hier der zweite Ansatz rekapituliert.

Die Herleitung beginnt wieder mit (3.18)

$$u_s(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) o(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (\text{B.10})$$

Die Fouriertransformation beider Seiten ergibt

$$\hat{u}_s(\omega) = \hat{G}(\omega) (\hat{o}(\omega) * \hat{u}_0). \quad (\text{B.11})$$

Wegen der Fourierkorrespondenz von Multiplikation und Faltung wird aus der Faltung in (B.10) eine Multiplikation in (B.11) und analog aus der Multiplikation eine Faltung. Die Fouriertransformation der Greenschen Funktion  $G$  im Zweidimensionalen lautet

$$\hat{G}(\omega, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e^{-i\omega \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{|\omega|^2 - k_0^2},$$

wobei man definiert  $\omega = [\omega_x \ \omega_y]$ . Unter der Annahme, dass das inzidente Feld in Richtung der positiven  $y$ -Achse verläuft, kann man das gestreute Feld im Ortsraum

entlang der  $x$ -Achse ( $\mathbf{x} := [x \quad l_0]$ ) schreiben

$$u_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_s(\omega) e^{-i\omega \cdot \mathbf{x}} d\omega_x d\omega_y. \quad (\text{B.12})$$

Dies ist eine inverse Fouriertransformation des gestreuten Feldes. Unter Vernachlässigung technischer Details (diese finden sich wieder in [43]) ergibt sich für das gestreute Feld

$$u_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{i \hat{\delta}(\omega_x, \sqrt{k_0^2 - \omega_y^2} - k_0)}{2\sqrt{k_0^2 - \omega_x^2}} e^{i\sqrt{k_0^2 - \omega_x^2} x} e^{i\omega_x x} d\omega_x, \quad (\text{B.13})$$

sofern der Empfänger an  $y = l_0$  sich *über* dem Objekt befindet.

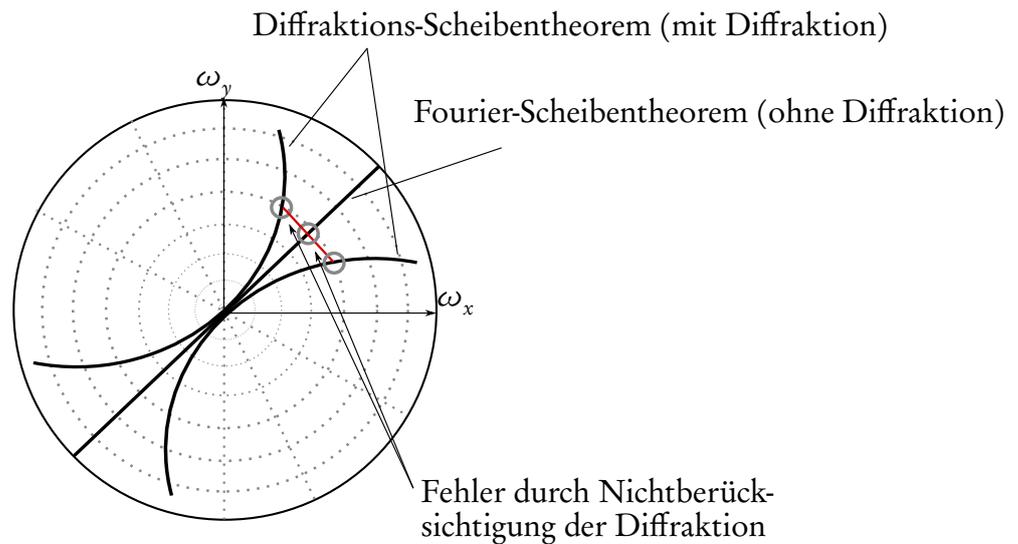
Diese unterscheidende Formulierung ist einerseits möglich, da vorher die Wellenausbreitung in positive  $y$ -Richtung angenommen wurde und andererseits wichtig, weil durch die Position des Empfängers intuitiv auch die Art der empfangenen Signalanteile bestimmt werden kann. Befindet sich, bei Anregung in positive  $y$ -Richtung, der Empfänger über dem Objekt, wird er den Transmissionsanteil empfangen. Befindet er sich hingegen unter dem Objekt, empfängt er nur den Reflexionsanteil des gestreuten Feldes. Die Trennung von Reflexions- und Transmissionsanteil ist nur für planare Aperturen sinnvoll, bei Kreisaperturen wie dem USCT ist die Trennung nicht auf diese Art möglich.

Der Wurzelterm  $\sqrt{k_0^2 - \omega^2}$  in (B.13), der sich aus der Polstelle des Integrals in (B.12) ergibt, gewinnt eine anschauliche Bedeutung, wenn man ihn als Kreisbogen im Fourierraum versteht. Siehe dazu Abbildung B.5. Der dort blau markierte Halbkreis beschreibt den Transmissionsteil, der blaue den Reflexionsteil des gestreuten Feldes.

Das vorgestellte Verfahren zur Füllung des Fourierraums kann für die Born-, wie für die Rytov-Approximation durchgeführt werden. Sobald man mit einer solchen Linearisierung arbeitet, das heißt  $u_s$  aus der Born- oder der Rytov-Approximation erhalten hat, besteht der Zusammenhang, den das verallgemeinerte Fourier-Scheibentheorem beschreibt.

Betrachtet man das Prinzip, wie der Fourierraum gefüllt wird, erkennt man die Auflösungsgrenze der Born- und auch der Rytov-Approximation. Die gezeigten Halbkreise im Fourierraum ergeben sich durch die Transmissionstomographie. Die fehlenden Hälften der Kreise erhält man nach der Interpretation dieses Abschnitts durch die Nutzung der Reflexionssignale, die man dann empfängt, wenn sich der Empfänger unter dem Objekt befindet.

Nutzt man sowohl den Reflexions- als auch den Transmissionsanteil, kann man volle Kreise im Fourierraum eintragen. Der Radius eines solchen Kreises ist wie gehabt mit  $\frac{\lambda}{2}$  gegeben. Alle Kreise befinden sich also innerhalb eines Grenzkreises mit dem Radius  $\lambda$ . Höhere Auflösungen können demnach mit dem verallgemeinerten Fourier-Scheibentheorem nicht erreicht werden. Damit liegt die Auflösungsgrenze für die



**Abbildung B.6** – Schematische Darstellung des Fehlers der Strahlapproximation, der durch die Vernachlässigung der Diffraktion entsteht. Für die Strahlapproximation kann das Fourier-Scheibentheorem angewandt werden, sonst nutzt man das verallgemeinerte Scheibentheorem für die Diffraktionstomographie. Der Unterschied (rot markiert) zwischen entsprechenden Punkten (mit Kreisen markiert) auf Strahl und Kreisbogen beschreibt den Fehler, wenn statt der Diffraktion die Strahlapproximation verwendet wird.

Born- und die Rytov-Approximation circa bei einer halben Wellenlänge  $\frac{\lambda}{2}$ . Betrachtet man entweder den Reflexions- oder den Transmissionsteil separat, erhält man eine Auflösungsgrenze von  $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ .

In [156] wird die Auflösungsgrenze der Strahlapproximation hergeleitet, indem die Einträge des Fourierraums betrachtet werden, der mit der Radon-Transformation über das Fourier-Scheibentheorem (Unterabschnitt B) gefüllt wird. Verglichen werden diese Einträge mit den korrekteren Werten, wie sie das verallgemeinerte Scheibentheorem (Abbildung B.5) vorgibt. Kurz gesagt besteht der Unterschied beider Theoreme darin, dass das verallgemeinerte die Daten auf einem Kreisbogen festlegt, das einfache hingegen auf einer geraden Linie. Die Distanz zwischen Kreisbogen und Linie bestimmt die Ungenauigkeit der Strahlapproximation im Fourierraum. Siehe dazu Abbildung B.6.

Nach einigen Vereinfachungen gelangt Williamson zu dem Schluss, dass die Auflösungsgrenze etwa bei  $\sqrt{l\lambda}$  liegt, wobei  $l$  der Abstand von Sender zu Empfänger ist. Dies entspricht genau dem Durchmesser der Fresnel-Zone, die in Abschnitt 3.4 erläutert wird. Dies wird in einer späteren Veröffentlichung auch numerisch belegt [158].

Wenn man von der Fresnel-Zone ausgeht, kann man diese Auflösungsgrenze auch auf gebrochene Strahlen ausdehnen. Nach Abschnitt 3.4 haben Streuer, abseits des direkten Weges aber innerhalb der Fresnel-Zone starken Einfluss auf das am Empfänger gemessene Signal. Diese Tatsache ändert sich nicht, wenn der Strahl durch Nutzung eines nicht homogenen Hintergrundmediums, wie bei der Eikonal-Gleichung, keinen geraden

---

sondern einen gekrümmten Weg verfolgt. Williamsons Fourierraum-Argument greift bei der Eikonal-Gleichung jedoch nicht, weil für die inhärent nichtlineare Eikonal-Gleichung kein linearer Zusammenhang wie das Fourier-Scheibentheorem existiert.



# Anhang C

## Weitere Rekonstruktionsmethoden

### C.1 3D X-Ray Transform

Die Weg der sogenannten *3D X-Ray Transform* wurde maßgeblich von Averbuch et al. [159] beschrieben. Es ist ein Verfahren, das vollständig im Fourierraum arbeitet, ohne unmittelbar Interpolationen zu benötigen. Der entscheidende Schritt bei der Rekonstruktion ist, dass nicht im Frequenzraum operiert wird, sondern durch geschickte Rücktransformation und Filterung direkt im Ortsraum. Dies ist nur möglich, wenn die Geometrie kreisförmig ist. Andernfalls hat man es mit dem komplexen Problem der inversen Fouriertransformation aus einem polaren Koordinatensystem in ein kartesisches System zu tun. Diese Transformation ist sowohl vorwärts als auch rückwärts im Allgemeinen zeitaufwendig, weil keine schnelle Transformation wie die FFT zur Verfügung steht und darüberhinaus schwierig, weil das zugehörige inverse Problem schlecht konditioniert ist. Averbuch et al. [160] sowie vorher [161] gehen das Geschwindigkeitsproblem der Transformation durch eine spezielle Wahl des Abtastgitters an, für das die Chirp-Z-Transformation eine schnelle Lösung erlaubt. Im Folgenden werden die wesentlichen Schritte dieser Methode rekapituliert und die Rekonstruktionsmöglichkeiten erörtert.

[159] beginnt mit einer Diskretisierung des Bildraumes in  $n_1 \times n_2 \times n_3$  Voxel:

$$f = \{I(u, v, w) : -n/2 \leq u, v, w \leq n/2 - 1\}. \quad (\text{C.1})$$

Weiter werden sogenannte  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Geraden definiert per

$$l_x(\alpha, \beta, c_1, c_2) = \begin{cases} y = \alpha x + c_1, \\ z = \beta x + c_2, \end{cases} \quad |\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1, c_1, c_2 \in \{-n, \dots, n\}. \quad (\text{C.2})$$

$x$ -Geraden sind also Geraden, deren Hauptrichtung die entlang der  $x$ -Achse ist. Das heißt, dass die  $x$ -Koordinate schneller als die  $y$ - und  $z$ -Koordinate erhöht wird. Analoge Definitionen gelten für die  $y$ - und  $z$ -Geraden. Somit kann jede Gerade des  $\mathbb{R}^3$  als eine dieser drei Geradenarten dargestellt werden. Zu beachten ist, dass  $\alpha$  und  $\beta$  hier noch reell, d.h. undiskretisiert sind.

Als weitere Zutat für die 3D-Röntgentransformation benötigt man eine stetige Fortsetzung des Bildraumes  $f$ , damit der diskrete Raum unter beliebigen Winkeln ausgewertet werden kann. Dazu definiert man, ausgehend von der eben getroffenen Geradenvereinbarung für  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Fortsetzungen

$$f_x(u, y, z) = \sum_{v=-n/2}^{n/2} \sum_{w=-n/2}^{n/2} I(u, v, w) D_m(y-v) D_m(z-w), \quad (\text{C.3})$$

wobei  $u \in \{-n/2, \dots, n/2 - 1\}$  und  $y, z \in \mathbb{R}$ . Außerdem ist

$$D_m(t) = \frac{\sin \pi t}{m \sin(\pi t/m)} \quad (\text{C.4})$$

der *Dirichlet-(Integral)Kern* der Länge  $m = 2n + 1$ . Dieser hat seine Wurzeln in Dirichlets Beweis der Konvergenz von Fourier-Reihen und wird hier wegen seiner geschickten mathematischen Eigenschaften benutzt. Es gilt nämlich

$$\sum_{u=-n}^n D_m(\alpha x + u - y) e^{-2\pi i k u/m} = e^{-2\pi i k (y - \alpha x)/m}. \quad (\text{C.5})$$

Man kann nun die diskrete dreidimensionale Röntgentransformation definieren als

$$P_x f(\alpha, \beta, c_1, c_2) = \sum_{u=-n/2}^{n/2-1} f_x(u, \alpha u + c_1, \beta u + c_2), \quad (\text{C.6})$$

wobei wie gehabt  $|\alpha| \leq 1$ ,  $|\beta| \leq 1$  nicht diskret und  $c_1, c_2 \in \{-n, \dots, n\}$ . Analog definiert man auch  $P_y f$  und  $P_z f$ .

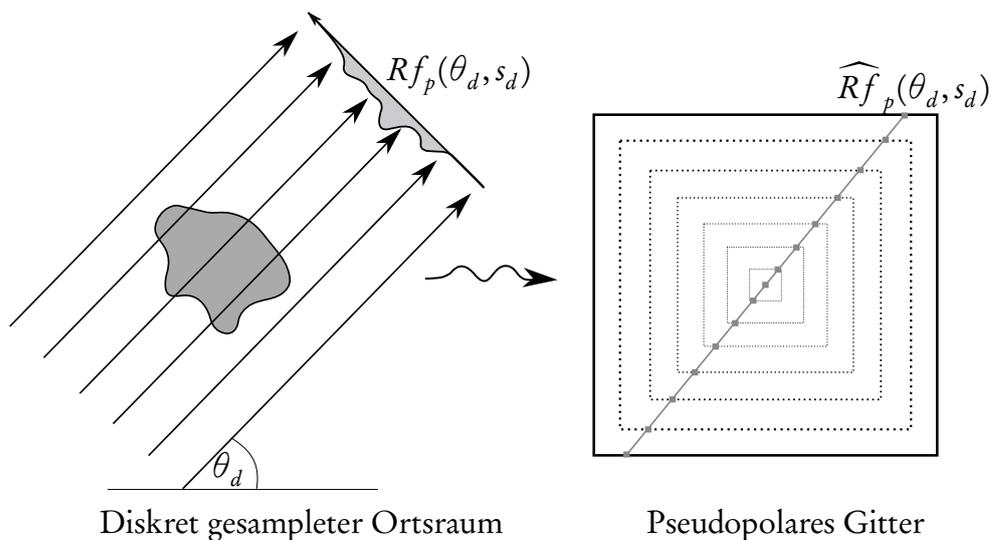
Es gilt dann weiter

$$\begin{aligned} \hat{P}_{x(\alpha\beta)} f(k, l) &= \sum_{u,v,w=-n/2}^{n/2-1} f(u, v, w) e^{-2\pi i k (v - \alpha u)/m} e^{-2\pi i l (w - \beta u)/m} \\ &= \sum_{u,v,w=-n/2}^{n/2-1} f(u, v, w) e^{-2\pi i (\alpha k - \beta l) u/m} e^{-2\pi i k v/m} e^{-2\pi i l w/m} \\ &= \hat{f}(-\alpha k - \beta l, k, l). \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Dabei ist  $\hat{f}$  die diskrete 3D-Fouriertransformierte von  $f$ , definiert für die diskreten Koordinaten  $\mathbf{u} := u, v, w \in \{-n/2, \dots, n/2 - 1\}^3$ :

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \sum_{u,v,w} f(\mathbf{u}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \mathbf{u}/m}. \quad (\text{C.8})$$

(C.7) ist das dreidimensionale, diskrete Äquivalent zum Scheibentheorem.



**Abbildung C.1** – Schematische Darstellung der 3D-Röntgentransformation (links) und Eintrags der transformierten Projektion in einen pseudo-polaren Fourier-Raum (rechts). Im Unterschied zum gewöhnlichen Scheibentheorem sind nur bestimmte, vorgegebene Winkel und Abtastschritte nötig.

Die hier vorgestellte Methode ist eine Möglichkeit, das Scheibentheorem diskret und dreidimensional ohne Interpolation zu berechnen. Der Verzicht auf Interpolation erklärt sich dadurch, dass apriori eine Menge von Einstrahlwinkeln definiert wird, die wohldefinierten Strahlen im polaren Fourier-Raum entspricht. Die Strahlen im Fourier-Raum sind ebenso wie die Strahlen im Ortsraum durch Winkel und Achsenabschnitte definiert. Dies bedeutet, dass man nur einen Unterraum des Fourier-Raums füllt, der in Abbildung C.1 veranschaulicht ist.

Diesen Raum nennt man pseudo-polaren Fourier-Raum. Er dient zur einfacheren Interpolation auf dem Weg in den polaren Raum und kann auch separat zur schnelleren Berechnung verwendet werden. Die einfachere und genauere Interpolation erklären [162] damit, dass durch den Aufbau des Raumes die einzelnen Interpolationsschritte nur eindimensional berechnet werden müssen.

Eine Möglichkeit zur schnellen Berechnung wird von der *Chirp-Z-Transformation* eröffnet. Sie kann vor dem Hintergrund der hier vorgestellten Methode als Erweiterung der schnellen Fouriertransformation verstanden werden, die die schnelle Berechnung nicht nur auf einem äquidistant gefüllten Fourier-Raum, sondern auch in einem pseudo-polaren Raum gestattet.

Wie das nicht-diskrete Scheibentheorem bleibt die Beschränkung auf eine zylinder- oder helixförmige Geometrie bestehen. Für eine Verwendung mit USCT könnte man nur diejenigen Strahlen nutzen, die Strahlen der USCT-Geometrie entsprechen.

Interpolation wird erst nötig, wenn man in ein kartesisches Koordinatensystem wechseln will. Für die Vorwärtstransformation ist dies nicht notwendig, weil der Zusammenhang vom kartesischen Ortsraum in den polaren Fourier-Raum ja gerade durch das

Scheibentheorem gegeben ist. Für die Rekonstruktion eines Objekts aus gegebenen Einträgen im Fourierraum allerdings, kann es durchaus nützlich sein, sich in einem kartesischen Koordinatensystem zu befinden. Averbuch et al. [159] sparen den Rekonstruktionsschritt aus und beschränken sich auf die den Beweis der Existenz einer Lösung.

Für die Rekonstruktion muss folgendes Minimierungsproblem gelöst werden

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|. \quad (\text{C.9})$$

Hierbei entspricht  $\mathbf{A}$  dem Vorwärtsmodell der diskreten 3D-Röntgentransformation. Wäre  $\mathbf{A}$  eine kartesische Fouriermatrix, könnte man (C.9) einfach  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{b}$  berechnen, was mittels der schnellen Fouriertransformation effizient ( $\mathcal{O}(n \log n)$ ) und akkurat möglich ist. Stattdessen hat man es bei (C.9) mit einem Minimierungsproblem zu tun, dessen Lösung wegen der Größe der Matrix  $\mathbf{A}$  am besten mit einem iterativen Algorithmus gefunden werden kann.  $\mathbf{A}$  ist im Unterschied zur Matrix  $\mathbf{M}$  in Unterabschnitt 5.5 nicht dünn besetzt. Die nötige Regularisierung macht den Vorteil, keine Interpolation für die Vorwärtslösung zu benutzen, wieder zunichte und kann je nach Regularisierungsoperator sogar deutlich stärkeren Einfluss auf das Ergebnis haben als eine eventuell nötige Interpolation. Zur Wahl der Vorkonditionierung und Regularisierung siehe etwa [160].

Gleich aus mehreren Gründen ist daher eine einfache Rücktransformation nicht möglich: Erstens existiert für den polaren Fourierraum keine effiziente schnelle Fouriertransformation. Dies bedingt, dass zur schnellen Berechnung meist der polare Fourierraum per Interpolation in einen kartesischen transformiert wird, auf den dann die schnelle inverse Fouriertransformation angewendet werden kann. Zweitens ist die polare Fouriertransformation unter den in [160] beschriebenen Voraussetzungen ein schlecht gestelltes Problem, für dessen Lösung es nötig ist, ein Gleichungssystem zu lösen. [162] bemerken, dass dies nur mit Regularisierung möglich ist. Drittens sind Daten im Fourierraum durch dessen oszillatorische Struktur rauschempfindlicher als im Ortsraum, wodurch die Rekonstruktion weiter erschwert wird.

In [163] verallgemeinern Averbuch et al. die 3D-Röntgentransformation auf Fächerstrahlgeometrien. Dies wird allerdings durch Weglassen von Strahlen der hier beschriebenen Vorwärtstransformation erreicht und macht eine Nutzung für USCT daher kaum praktikabel.

Averbuch et al. schlagen in [164], unter Zuhilfenahme ähnlicher Formalismen wie in [159], auch eine Transformation für das erweiterte Fourier-Scheibentheorem vor, das in Abschnitt C.2 beschrieben wird. Bis dato existiert aber nur diese Veröffentlichung, die die Theorie beschreibt und noch keine Implementierung.

## C.2 Rekonstruktionsmethoden der Diffraktionstomographie

Für die Rekonstruktion von Diffraktionstomographiedaten gibt es sehr viele unterschiedliche Ansätze. Für Ultraschall sind seit den grundlegenden Veröffentlichungen etwa von Kak et al. [43] vor allem Rekonstruktionen im Frequenzraum bekannt, die auf der Born- oder der Rytov-Approximation beruhen. Das grobe Vorgehen hierbei ähnelt der einfacheren gefilterten Rückprojektion beziehungsweise ihrem Konterpart im Frequenzraum, wie zum Beispiel die 3D-Röntgentransformation aus Abschnitt C.1. Prinzipiell besteht durch die Born- oder Rytov-Approximation ein linearer Zusammenhang zwischen Fouriertransformation einer Projektion (definiert wie in Unterabschnitt B) und einer (Schnitt-)Linie in der Fouriertransformierten des gesuchten Objekts. Im Unterschied zum einfachen Scheibentheorem sind die Schnitte allerdings keine Geraden mehr, sondern beschreiben Halbkreise im Fourierraum. Wie beim Scheibentheorem ist es nun möglich durch entsprechend viele Projektionen den Fourierraum so zu füllen, dass die Rekonstruktion mittels einer inversen Fouriertransformation durchführbar ist. Auch hier bleibt aber das Problem der inversen polaren Fouriertransformation dominant, das eine einfache Rekonstruktion zumindest erschwert.

In [165] zeigen Simonetti et al. Ergebnisse, die auf diesem k-Space-Verfahren beruhen, demonstrieren sie allerdings nur an einem einzigen, einfachen Datensatz.

Auf Abschnitt B.1 basierend, werden nun noch Methoden vorgestellt, wie man das Fourier-Scheibentheorem zur Rekonstruktion nutzen kann.

### Rekonstruktion

Wie für das einfache Scheibentheorem genügt im Prinzip eine inverse Fouriertransformation des gefüllten Fourierraums, um das Objekt im Ortsraum zu erhalten. Wie bereits erwähnt, ist jedoch das Problem, dass die inverse **polare** Fouriertransformation mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist. Das erste, noch wenig gravierende Problem ist, dass keine schnelle Transformation existiert. Dies erkennt man, wenn man die Transformation in Matrixform darstellt [166], so dass

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}_p \mathbf{x}_p, \quad (\text{C.10})$$

wobei  $\mathbf{F}_p$  den Operator für die polare Fouriertransformation bezeichne.  $\mathbf{x}$  ist hier kartesisch, während  $\mathbf{x}_p$  in polaren Koordinaten vorliegt. Die gewöhnliche kartesische Fouriertransformation lässt sich ebenso wie (C.10) darstellen mit  $\mathbf{F}$  statt  $\mathbf{F}_p$  und  $\mathbf{x}$  statt  $\mathbf{x}_p$ . Der entscheidende Vorteil der kartesischen Variante ist, dass ihre Fouriermatrix unitär ist, das heißt  $F^*F = I$ . Damit gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^* \mathbf{b}.$$

Die polare Fouriertransformation hat diese Eigenschaft nicht, folglich muss für die direkte Rekonstruktion  $\mathbf{F}^{-1}$  berechnet werden und hat es mit den üblichen Problemen einer Matrixinvertierung zu tun. Dazu kommt, dass  $\mathbf{F}$  voll besetzt ist, also keine Rechenerleichterungen durch dünn besetzte Zeilen bietet. Insgesamt ist der deshalb nötige Rechenaufwand um ein Vielfaches höher.

Das zweite, schwerwiegende Problem ergibt sich direkt aus obiger Argumentation. Weil es sich beim Rekonstruktionsproblem um ein Matrixinvertierungsproblem handelt und die Matrix voll besetzt ist, ist es nötig, die direkte Invertierung zu vermeiden. Wenn die Messdaten im Fourierraum zusätzlich mit Rauschen behaftet sind, erreicht die Problemstellung die Eigenschaften des bereits erwähnten Minimierungsproblems

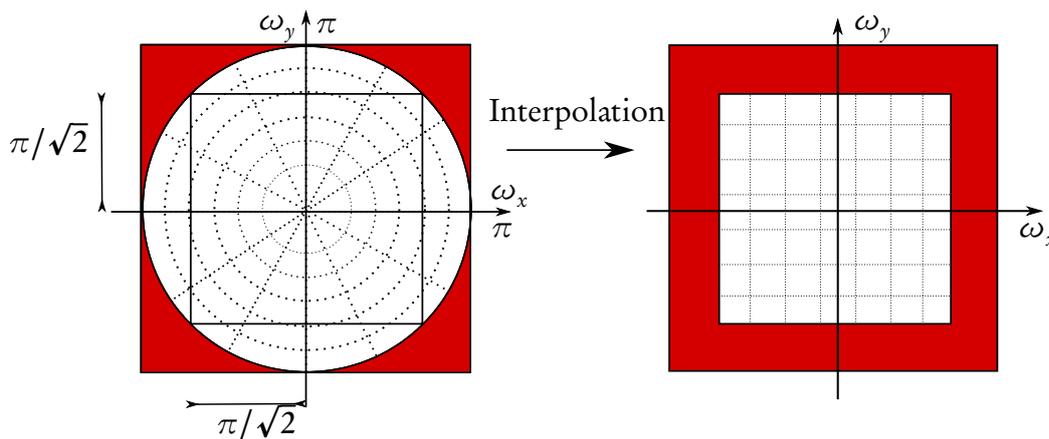
$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{F}_p \mathbf{x} - \mathbf{b}_p,$$

das mit einem prinzipiell beliebigen Optimierungsalgorithmus gelöst werden kann. Unvorteilhaft ist allerdings, dass die Matrix  $\mathbf{F}_p$ , zusätzlich zu ihrer Größe, auch noch schlecht konditioniert ist. Dies liegt darin begründet, dass der kartesische Raum nicht perfekt durch einen polaren Raum abgedeckt werden kann, wie in Abbildung C.2 gezeigt und darüberhinaus der polare Fourierraum in Richtung der Nullfrequenz im Zentrum immer dichter abgetastet ist.

Dieser Effekt zeigt sich auch bei der Transformation vom polaren Fourierraum in den kartesischen Ortsraum. [162] schlagen vor, die höchste Ortsfrequenz auf  $\pi/\sqrt{2}$  zu begrenzen und damit implizit die Konditionierung zu verbessern. Dies entspricht einer Verkleinerung des Rekonstruktionsbereiches im Ortsraum. Muss der Randbereich des kartesischen Fourierraums wie in Abbildung C.2 rechts rot markiert gefüllt werden, ist die Konditionszahl der Transformation sehr hoch [162]. Verwendet zur Rekonstruktion nur das innere Quadrat, also weniger Frequenzen, verbessert sich die Konditionszahl erheblich. Diese Beobachtung führt zu einer anderen Idee der Rekonstruktion, die nun vorgestellt wird.

## Interpolation

Ein wesentlich vielversprechenderer Weg, die Schwierigkeiten der inversen polaren Fouriertransformation zu umgehen, ist die Interpolation der polaren Fouriereinträge auf ein Gitter im kartesischen Fourierraum. Wenn diese Interpolation ohne große Fehler gelingt, muss anschließend nur noch eine inverse Fouriertransformation durchgeführt werden, um die Rekonstruktion abzuschließen. [166] schlagen zu diesem Zweck ein pseudopolares Gitter als Zwischenschritt vor, um einerseits die



**Abbildung C.2** – Polarer Fourierraum (links) und kartesischer Fourierraum (rechts). Die polare Fouriertransformation füllt eine Kreisscheibe im polaren Fourierraum, hat aber keine Information über die rot markierten Restsegmente. Bei der inversen polaren Fouriertransformation in den kartesischen Ortsraum müssen implizit (auch ohne Umweg über den kartesischen Fourierraum) die rechts rot markierten Bereiche gefüllt werden.

Interpolation zu vereinfachen und andererseits die Berechnung mittels der Chirp-Z-Transformation zu beschleunigen. Fenn, Kunis und Potts [167] hingegen wählen einen sogenannten NUFFT-Ansatz (*Non-Uniform Fast Fourier Transform*) und vergleichen in [167] diesen mit dem pseudopolaren Ansatz. Die NUFFT-Idee wurde vor allem durch Fessler [168] publik gemacht und läuft letzten Endes auch wieder auf einen Optimierungsalgorithmus hinaus.

[169] nutzen NUFFT-Code von Fessler [168] und verbinden die Rekonstruktion mit einer Total-Variation-Regularisierung. Sie demonstrieren die Ergebnisse anhand eines dicht abgetasteten Shepp-Logan-Phantoms synthetisch. Seit der Veröffentlichung im Jahre 2008 gab es aber keine weiteren Versuche oder Veröffentlichungen der Autoren mit echten Daten oder anderen Geometrien.



# Literatur

## Verweise

- [1] Ahmedin Jemal, Freddie Bray, Melissa M. Center, Jacques Ferlay, Elizabeth Ward und David Forman. „Global cancer statistics“. In: *CA: A Cancer Journal for Clinicians* 61.2 (2011), 69–90.
- [2] C. Hahn. *Mammographie-Screening in Deutschland: Bewertung des Strahlenrisikos: Stellungnahme der Strahlenschutzkommission mit wissenschaftlicher Begründung*. Berichte der Strahlenschutzkommission (SSK) des Bundesministeriums für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit. Urban & Fischer, 2002.
- [3] J.Griebel E.A.Nekolla und G. Brix. „Einführung eines Mammographie-screeningprogramms in Deutschland“. In: *Radiologe* 45 (2005), S. 245–254.
- [4] *Breast Cancer Facts and Figures 2011-2012*. American Cancer Society, 2011.
- [5] R Sivaramakrishna und R Gordon. „Detection of breast cancer at a smaller size can reduce the likelihood of metastatic spread: a quantitative analysis“. In: *Academic radiology* 4.1 (1997). PMID: 9040864, 8–12.
- [6] Torsten Hopp. „Multimodal Registration of X-Ray Mammography with 3D Volume Datasets“. Diss. 2012.
- [7] C. Calderon, D. Vilkomerson, R. Mezrich, K. F. Etzold, B. Kingsley und M. Haskin. „Differences in the attenuation of ultrasound by normal, benign, and malignant breast tissue“. In: *Journal of Clinical Ultrasound* 4.4 (1976), 249–254.
- [8] S.A. Johnson u. a. „Non-Invasive Breast Tissue Characterization Using Ultrasound Speed and Attenuation“. In: *Acoustical Imaging*. Hrsg. von Michael P. André u. a. Bd. 28. Springer Netherlands, 147–154.
- [9] James F Greenleaf und Robert C Bahn. „Clinical Imaging with Transmissive Ultrasonic Computerized Tomography“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* BME-28.2 (1981), 177–185.
- [10] Neb Duric u. a. „Breast imaging with the SoftVue imaging system: first results“. In: *SPIE Medical Imaging*. 2013, 86750K–86750K–8.

- [11] J. Wiskin, D. Borup, K. Callahan, Y. Parisky, J. Smith, M.P. André und S. Johnson. „Inverse Scattering Results“. English. In: *Acoustical Imaging*. Hrsg. von Michael P. André, Joie P. Jones und Hua Lee. Bd. 30. Acoustical Imaging. Springer Netherlands, 2011, S. 61–68.
- [12] P. Pellegretti u. a. „A clinical experience of a prototype automated breast ultrasound system combining transmission and reflection 3D imaging“. In: *Ultrasonics Symposium (IUS), 2011 IEEE International*. 2011, S. 1407–1410.
- [13] R. Jirik, I. Peterlik, N. Ruiter, J. Fousek, R. Dapp, M. Zapf und J. Jan. „Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 59.2 (February), 254–264.
- [14] Michael P. André, Helmar S. Janée, Peter J. Martin, Gregory P. Otto, Brett A. Spivey und Douglas A. Palmer. „High-speed data acquisition in a diffraction tomography system employing large-scale toroidal arrays“. In: *International Journal of Imaging Systems and Technology* 8.1 (1997), 137–147.
- [15] Vasilis Z. Marmarelis, Tae-Seong Kim und Ramez E. N. Shehada. „High-resolution ultrasound transmission tomography“. In: *SPIE Medical Imaging* (2003), S. 33–40.
- [16] J. Opretzka, M. Vogt und Helmut Ermert. „A high-frequency ultrasound imaging system combining limited-angle spatial compounding and model-based synthetic aperture focusing“. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 58.7 (2011), 1355–1365.
- [17] S. Mensah, P. Lasaygues, E. Debieu und E. Franceschini. „ANAI: An ultrasound mammograph“. In: *Acoustical Society of America Journal* 123 (2008), S. 3002.
- [18] N.V. Ruiter, G.F. Schwarzenberg, M. Zapf, R. Liu, R. Stotzka und H. Gemmeke. „2J-2 3D Ultrasound Computer Tomography: Results with a Clinical Breast Phantom“. In: *IEEE Ultrasonics Symposium, 2006*. 2006, 989–992.
- [19] N.V. Ruiter, R. Schnell, M. Zapf und H. Gemmeke. „P3D-2 Phase Aberration Correction for 3D Ultrasound Computer Tomography Images“. In: *IEEE Ultrasonics Symposium, 2007*. 2007, 1808–1811.
- [20] H. Gemmeke und N.V. Ruiter. „3D ultrasound computer tomography for medical imaging“. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 580.2 (2007), S. 1057–1065.
- [21] Gregor Schwarzenberg. „Untersuchung der Abbildungseigenschaften eines 3D-Ultraschall-Computertomographen zur Berechnung der 3D-Abbildungsfunktion und Herleitung einer optimierten Sensorgeometrie“. Diss. 2008.

- [22] Franca Bianchini Harri Vainio. „Breast Cancer Screening“. In: IARC Press, 2002, S. 153.
- [23] Bundesamt für Strahlenschutz. *Jahresbericht 2010*. Hrsg. von Naturschutz und Reaktorsicherheit Bundesministerium für Umwelt. 2012.
- [24] Etta D Pisano u. a. „Diagnostic accuracy of digital versus film mammography: exploratory analysis of selected population subgroups in DMIST“. In: *Radiology* 246.2 (2008). PMID: 18227537, 376–383.
- [25] Wendy DeMartini und Constance Lehman. „A review of current evidence-based clinical applications for breast magnetic resonance imaging“. In: *Topics in magnetic resonance imaging: TMRI* 19.3 (2008). PMID: 18941394, 143–150.
- [26] *The Iseult project for the Neurospin platform*, [http://irfu.cea.fr/en/Phoce/Vie\\_des\\_labos/Ast/ast\\_visu.php?id\\_ast=3058](http://irfu.cea.fr/en/Phoce/Vie_des_labos/Ast/ast_visu.php?id_ast=3058), abgerufen 1.5.2013.
- [27] Theysohn u. a. „Subjective acceptance of 7 Tesla MRI for human imaging“. In: *MAGMA Magnetic Resonance Materials in Physics, Biology and Medicine* 21.1-2 (2008), S. 63–72.
- [28] K Fujii, T Aoyama, C Yamauchi-Kawaura, S Koyama, M Yamauchi, S Ko, K Akahane und K Nishizawa. „Radiation dose evaluation in 64-slice CT examinations with adult and paediatric anthropomorphic phantoms“. In: *British Journal of Radiology* 82.984 (2009), S. 1010–1018.
- [29] WilliA. Kalender, Marcel Beister, JohnM. Boone, Daniel Kolditz, SabrinaV. Vollmar und MichaelaC.C. Weigel. „High-resolution spiral CT of the breast at very low dose: concept and feasibility considerations“. English. In: *European Radiology* 22.1 (2012), S. 1–8.
- [30] John M. Boone, Thomas R. Nelson, Karen K. Lindfors und J. Anthony Seibert. „Dedicated Breast CT: Radiation Dose and Image Quality Evaluation1“. In: *Radiology* 221.3 (2001), S. 657–667.
- [31] Nicolas D Prionas, Karen K Lindfors, Shonket Ray, Shih-Ying Huang, Laurel A Beckett, Wayne L Monsky und John M Boone. „Contrast-enhanced dedicated breast CT: initial clinical experience“. In: *Radiology* 256.3 (2010). PMID: 20720067, 714–723.
- [32] Randolph L. McKinley, Martin P. Tornai, Laura A. Tuttle, Doreen Steed und Cherie M. Kuzmiak. „Development and initial demonstration of a low-dose dedicated fully 3d breast CT system“. In: *Proceedings of the 11th international conference on Breast Imaging. IWDWM'12*. Philadelphia, PA: Springer-Verlag, 2012, S. 442–449.
- [33] F. B. Wooding, K.R. Peal und J. A. Collins. „Broadband seismometry beneath the seafloor“. In: *OCEANS 2000 MTS/IEEE Conference and Exhibition*. Bd. 2. 2000, 1227–1231 vol.2.

- [34] R. G. Pratt, L. Huang, N. Duric und P. Littrup. „Sound-speed and attenuation imaging of breast tissue using waveform tomography of transmission ultrasound data“. In: *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. Bd. 6510. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. 2007.
- [35] Heinrich Kuttruff. *Akustik : eine Einführung*. Stuttgart: Hirzel, 2004.
- [36] Heinrich Kuttruff. *Physik und Technik des Ultraschalls*. Stuttgart: Hirzel, 1988.
- [37] J.F. Greenleaf. „Computerized tomography with ultrasound“. In: *Proceedings of the IEEE* 71.3 (1983), 330–337.
- [38] Philip M. Morse, K. Uno Ingard, Philip M. Morse, Philip M. Morse, K. Uno Ingard und K. Uno Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, 1986.
- [39] Marcus Hardt. „Distributed Simulations for 3D Ultrasound Computer Tomography“. Diss. 2012.
- [40] Guust Nolet. *A Breviary of Seismic Tomography: Imaging the Interior of the Earth and Sun*. Cambridge University Press, 2008.
- [41] Andreas Fichtner. „Full waveform inversion for structural and source parameters“. Diss. PhD Thesis, Ludwig-Maximilians Universität München, 2009.
- [42] Koen W.A. van Dongen. Persönliche Korrespondenz. 2013.
- [43] A. C. Kak und Malcolm Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Society of Industrial und Applied Mathematics, 2001.
- [44] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. 2nd. McGraw-Hill, 1996.
- [45] Roel Snieder und Malcolm Sambridge. „Ray perturbation theory for travel-times and ray paths in 3-D heterogeneous media“. In: *Geophysical Journal International* 109.2 (1992), 294–322.
- [46] V. Červený. *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press, 2005.
- [47] Cuiping Li und Neb Duric. „Resolution limitation of travel time tomography: beyond the first Fresnel zone“. In: *SPIE Medical Imaging* (2013), S. 86751D–86751D–10.
- [48] Stephen J. Norton und Melvin Linzer. „Ultrasonic Reflectivity Imaging in Three Dimensions: Exact Inverse Scattering Solutions for Plane, Cylindrical, and Spherical Apertures“. In: *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on BME*-28.2 (1981), S. 202–220.
- [49] A.J. Devaney. „A filtered backpropagation algorithm for diffraction tomography“. In: *Ultrasonic Imaging* 4.4 (1982), S. 336–350.

- [50] Badreddine Fares Derouiche. „Vergleich zwischen Chirps und binären Codes für einen experimentellen 3D Ultraschall Computertomographen“. Magisterarb. 2008.
- [51] S. Langeland, J. D’hooge, H. Torp, B. Bijns und P. Suetens. „A simulation study on the performance of different estimators for two-dimensional velocity estimation“. In: *Ultrasonics Symposium, 2002. Proceedings. 2002 IEEE*. Bd. 2. 2002, 1859–1862 vol.2.
- [52] Francesco Viola und William F Walker. „A comparison of the performance of time-delay estimators in medical ultrasound“. In: *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 50.4 (2003). PMID: 12744395, 392–401.
- [53] Jingdong Chen, Jacob Benesty und Yiteng A. Huang. „Time Delay Estimation in Room Acoustic Environments: An Overview“. In: *EURASIP Journal on Applied Signal Processing* 2006 (2006), S. 1–19.
- [54] Friedrich Jondral. *Nachrichtensysteme : Grundlagen, Verfahren, Anwendungen*. 4., überarb. und erweiterte Aufl. Schlembach, 2011.
- [55] W.F. Walker und G.E. Trahey. „A fundamental limit on delay estimation using partially correlated speckle signals“. In: *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on* 42.2 (1995), S. 301–308.
- [56] G. Clifford Carter. „Coherence and time delay estimation“. In: *Proceedings of the IEEE* 75.2 (1987), 236–255.
- [57] Cuiping Li, Lianjie Huang, Nebojsa Duric, Haijiang Zhang und Charlotte Rowe. „An improved automatic time-of-flight picker for medical ultrasound tomography“. In: *Ultrasonics* 49.1 (2009), S. 61–72.
- [58] Jochen H. Kurz, Christian U. Grosse und Hans-Wolf Reinhardt. „Strategies for reliable automatic onset time picking of acoustic emissions and of ultrasound signals in concrete“. In: *Ultrasonics* 43.7 (2005), S. 538–546.
- [59] Wojciech Marczak. „Water as a standard in the measurements of speed of sound in liquids“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 102.5 (1997), 2776–2779.
- [60] Katrina A. Rosculet, Debra M. Ikeda, Maureen E. Forrest, Robert M. Oneal, Jonathan M. Rubin, Deborah O. Jeffries und Mark A. Helvie. „Ruptured Gel-Filled Silicone Breast Implants: Sonographic Findings in 19 Cases“. In: *American Journal of Roentgenology* 159 (1992), S. 711–716.
- [61] Willian R. Hendee. *Medical Imaging Physics*. New York: Wiley-Liss, 2002.
- [62] C. Hill, J. Bamber und G. T. Haar. *Physical Principles of Medical Ultrasonics*. 2. Aufl. Wiley, 2002.
- [63] B. A. J. Angelsen und R. C. Waag. „Ultrasound Imaging: Waves, Signals, and Signal Processing“. In: *Acoustical Society of America Journal* 121 (2007), S. 1820.

- [64] A.C. Kak und Kris A. Dines. „Signal Processing of Broadband Pulsed Ultrasound: Measurement of Attenuation of Soft Biological Tissues“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* BME-25.4 (1978), 321–344.
- [65] P.N.T. Wells. „Absorption and dispersion of ultrasound in biological tissue“. In: *Ultrasound in Medicine and Biology* 1.4 (1975), 369–376.
- [66] R. Kuc. „Bounds on estimating the acoustic attenuation of small tissue regions from reflected ultrasound“. In: *Proceedings of the IEEE* 73.7 (1985), 1159 – 1168.
- [67] Roman Kuc. „Clinical Application of an Ultrasound Attenuation Coefficient Estimation Technique for Liver Pathology Characterization“. In: *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* BME-27.6 (1980), 312–319.
- [68] L.S. Wilson, D.E. Robinson und B.D. Doust. „Frequency domain processing for ultrasonic attenuation measurement in liver“. In: *Ultrasonic Imaging* 6.3 (1984), 278–292.
- [69] R. Kuc. „Estimating acoustic attenuation from reflected ultrasound signals: Comparison of spectral-shift and spectral-difference approaches“. In: *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing* 32.1 (1984), 1–6.
- [70] R. Kuc, M. Schwartz und L.V. Micsky. „Parametric Estimation of the Acoustic Attenuation Coefficient Slope for Soft Tissue“. In: *1976 Ultrasonics Symposium*. 1976, 44–47.
- [71] T. Douglas Mast. „Empirical relationships between acoustic parameters in human soft tissues“. In: *Acoustics Research Letters Online* 1.2 (2000), 37–42.
- [72] R. Kuc. „Applying Spectral-Shift Procedures for Estimating Acoustic Attenuation to Non-Gaussian Spectra“. In: *1983 Ultrasonics Symposium*. 1983, 831–834.
- [73] Max Gutschera. „Implementierung und Vergleich von USCT-Dämpfungsalgorithmen“. Magisterarb. 2011.
- [74] Cuiping Li, Neb Duric und Lianjie Huang. „Comparison of ultrasound attenuation tomography methods for breast imaging“. In: *SPIE Medical Imaging* (2008), 692015–692015.
- [75] Rainer Tonn. „The Determination of the Seismic Quality Factor Q from Vsp Data: A Comparison of Different Computational Methods“. In: *Geophysical Prospecting* 39.1 (1991), 1–27.
- [76] Cuiping Li, N. Duric und Lianjie Huang. „Breast Imaging Using Transmission Ultrasound: Reconstructing Tissue Parameters of Sound Speed and Attenuation“. In: *International Conference on BioMedical Engineering and Informatics, 2008. BMEI 2008*. Bd. 2. 2008, 708–712.
- [77] Torsten Hopp. Persönliche Korrespondenz. 2013.

- [78] O. Roy, C. Li und N. Duric. „Travel time denoising in ultrasound tomography“. In: *SPIE Medical Imaging* (2012), S. 832006–832006–9.
- [79] Cuiping Li, A. Stewart und Nebojsa Duric. „Multi-grid tomographic inversion for breast ultrasound imaging“. In: *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. Bd. 8320. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. Feb. 2012.
- [80] L. Huang F. Simonetti und N. Duric. „A multiscale approach to diffraction tomography of complex three-dimensional objects“. In: *Applied Physics Letters* 95 (2009).
- [81] Ali Hormati, Ivana Jovanović, Olivier Roy und Martin Vetterli. „Robust ultrasound travel-time tomography using the bent ray model“. In: *SPIE Medical Imaging* (2010), S. 76290I–76290I–12.
- [82] R. Fletcher und C. M. Reeves. „Function minimization by conjugate gradients“. In: *The Computer Journal* 7.2 (1964), S. 149–154.
- [83] J. Wiskin, D. Borup und S. Johnson. „Inverse Scattering Theory“. English. In: *Acoustical Imaging*. Hrsg. von Michael P. André, Joie P. Jones und Hua Lee. Bd. 30. Acoustical Imaging. Springer Netherlands, 2011, S. 53–59.
- [84] J. Wiskin, D.T. Borup, S.A. Johnson, M. Berggren, T. Abbott und R. Hannover. „Full-Wave, Non-Linear, Inverse Scattering“. In: *Acoustical Imaging* (2007). Hrsg. von M.P. André, S. 183–193.
- [85] F. Simonetti, L. Huang und N. Duric. „Frequency Diversity in Breast Ultrasound Tomography“. In: *Proceedings of SPIE Vol. 6913*. 2008.
- [86] P. Huthwaite und F. Simonetti. „High-resolution imaging without iteration: a fast and robust method for breast ultrasound tomography“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 130.3 (2011), S. 1721–1734.
- [87] N.V. Ruiter, R. Schnell, M. Zapf und H. Gemmeke. „P3D-2 Phase Aberration Correction for 3D Ultrasound Computer Tomography Images“. In: *Ultrasonics Symposium, 2007. IEEE*. 2007, S. 1808–1811.
- [88] Steven P. Schmidt, Olivier Roy, Cuiping Li, Nebojsa Duric und Zhi-Feng Huang. „Modification of Kirchhoff migration with variable sound speed and attenuation for tomographic imaging of the breast“. In: *SPIE Medical Imaging* (2011), S. 796804–796804–11.
- [89] F. Simonetti und L. Huang. „From beamforming to diffraction tomography“. In: *Journal of Applied Physics* 103.10, 103110 (2008), S. 103110.
- [90] Koen W. A. van Dongen und William M. D. Wright. „A full vectorial contrast source inversion scheme for three-dimensional acoustic imaging of both compressibility and density profiles“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 121.3 (2007), S. 1538–1549.

- [91] L. Demi, K. W. A. van Dongen und M. D. Verweij. „A contrast source method for nonlinear acoustic wave fields in media with spatially inhomogeneous attenuation“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 129.3 (2011), S. 1221–1230.
- [92] Koen W. A. van Dongen und William M. D. Wright. „A forward model and conjugate gradient inversion technique for low-frequency ultrasonic imaging“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 120.4 (2006), S. 2086–2095.
- [93] N. Ozmen-Eryilmaz, L. Demi, E.J. Alles, M.D. Verweij und K. W A Van Dongen. „Modeling acoustic wave field propagation in 3D breast models“. In: *Ultrasonics Symposium (IUS), 2011 IEEE International*. 2011, S. 1700–1703.
- [94] Christopher C. Paige und Michael A. Saunders. „LSQR: An Algorithm for Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares“. In: *ACM Trans. Math. Software* (1982), S. 43–71.
- [95] Frank Natterer. *The mathematics of computerized tomography*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial und Applied Mathematics, 2001.
- [96] A.H. Andersen. „Algebraic reconstruction in CT from limited views“. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 8.1 (1989), 50–55.
- [97] Jeroen Tromp, Dimitri Komatitsch und Qinya Liu. „Spectral-Element and Adjoint Methods in Seismology“. In: *Communications in Computational Geophysics* 3 (2008), S. 1–32.
- [98] E. Diego Mercerat und Guust Nolet. „On the linearity of cross-correlation delay times in finite-frequency tomography“. In: *Geophysical Journal International* 192.2 (February, 2013), S. 681–687.
- [99] Guust Nolet. Persönliche Korrespondenz. 2012.
- [100] Gene H. Golub und Charles F. Van Loan. *Matrix computations (3rd ed.)* Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.
- [101] Jacques Hadamard. „Sur les problèmes aux dérivés partielles et leur signification physique“. In: *Princeton University Bulletin* 13 (1902), S. 49–52.
- [102] Thomas Capricelli. *Compressive sensing and Tomography*. 2008.
- [103] R. Penrose. „A generalized inverse for matrices“. In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51.03 (1955), S. 406–413.
- [104] Youcef Saad und Martin H Schultz. „GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems“. In: *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7.3 (1986), S. 856–869.
- [105] Gene H. Golub und Charles F. Van Loan. *Matrix computations (3rd ed.)* Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.

- [106] Albert Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.
- [107] Magnus R. Hestenes und Eduard Stiefel. „Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems“. In: *Journal of Research of the National Bureau of Standards* 49.6 (1952), S. 409–436.
- [108] H. A. van der Vorst. „BI-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems“. In: *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 13.2 (1992), S. 631–644.
- [109] Jorge Nocedal. „Updating Quasi-Newton Matrices with Limited Storage“. In: *Mathematics of Computation* 35.151 (1980), S. 773–782.
- [110] Jonathan R Shewchuk. *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*. Techn. Ber. Pittsburgh, PA, USA, 1994.
- [111] Yang Wang und Haomin Zhou. „Total Variation Wavelet-Based Medical Image Denoising“. In: *International Journal of Biomedical Imaging* 2006 (2006), 1–6.
- [112] Emmanuel J. Candès, Justin K. Romberg und Terence Tao. „Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements“. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 59.8 (2006), 1207–1223.
- [113] DL Donoho. „Compressed sensing“. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 52.4 (2006), S. 1306,1289.
- [114] E.J. Candes, J. Romberg und T. Tao. „Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information“. In: *IEEE Transactions on Information Theory* 52.2 (Feb.), 489–509.
- [115] José M Bioucas-Dias und Mario A T Figueiredo. „A new twIst: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration“. In: *IEEE Transactions on Image Processing: A Publication of the IEEE Signal Processing Society* 16.12 (2007). PMID: 18092598, 2992–3004.
- [116] R. M. Karp. „Reducibility Among Combinatorial Problems“. In: *Complexity of Computer Computations*. Hrsg. von R. E. Miller und J. W. Thatcher. Plenum Press, 1972, S. 85–103.
- [117] E. J. Candès. „Compressive Sampling“. In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (2006).
- [118] P. G. J. Barten. „Contrast sensitivity of the human eye an its effects on image quality“. Diss. 1999.
- [119] F. A. Dahlen, S.-H. Hung und Guust Nolet. „Fréchet kernels for finite-frequency traveltimes – I. Theory“. In: *Geophysical Journal International* 141.1 (2000), S. 157–174.

- [120] S.-H. Hung, F.A. Dahlen und Guust Nolet. „Fréchet kernels for finite-frequency traveltimes – II. Examples“. In: *Geophysical Journal International* 141.1 (2000), S. 175–203.
- [121] S.H. Hung, F. A Dahlen und Guust Nolet. „Wavefront Healing: A Banana–Doughnut Perspective“. In: *Geophysical Journal International* 146.2 (2001), 289–312.
- [122] Alison E. Malcolm und Jeannot Trampert. „Tomographic errors from wave front healing: more than just a fast bias“. In: *Geophysical Journal International* 185.1 (2011), 385–402.
- [123] Jean Virieux. „Seismic Ray Tracing“. In: *Seismic modelling of earth structure*. Hrsg. von E. Boschi, G. Ekström und A Morelli. Editrice Compositori, S. 223–304.
- [124] Yilun Wang, Junfeng Yang, Wotao Yin und Yin Zhang. „A New Alternating Minimization Algorithm for Total Variation Image Reconstruction“. In: *SIAM Journal on Imaging Sciences* 1.3 (2008), 248–272.
- [125] Chengbo Li. „An Efficient Algorithm For Total Variation Regularization with Applications to the Single Pixel Camera and Compressive Sensing“. Magisterarb. 2009.
- [126] I. Csiszár und G. Tusnady. „Information geometry and alternating minimization procedures“. In: *Statistics and Decisions* Supplementary Issue 1 (1984).
- [127] Roger Fletcher. *On the Barzilai-Borwein Method*. Hrsg. von Liqun Qi, Koklay Teo und Xiaoqi Yang. 2005.
- [128] J.J.F. Bonnans, J.C. Gilbert und C. Lemaréchal. *Numerical Optimization*. Springer London, Limited, 2007.
- [129] Matthias Birk. „Vorläufiger Titel: Applikationsbeschleunigung mittels heterogener Systemarchitekturen am Beispiel der 3D Ultraschall Computertomographie“. Diss. 2013.
- [130] Sangkyun Lee und Stephen J Wright. *Implementing Algorithms for Signal And Image Reconstruction on Graphical Processing Units*. Techn. Ber. 2008.
- [131] Daehyun Kim, Joshua Trzasko, Mikhail Smelyanskiy, Clifton Haider, Pradeep Dubey und Armando Manduca. „High-Performance 3D Compressive Sensing MRI Reconstruction Using Many-Core Architectures“. In: *International Journal of Biomedical Imaging* 2011 (2011), 1–11.
- [132] J.D. Blanchard und J. Tanner. „GPU Accelerated Greedy Algorithms for Compressed Sensing“. In: *to be submitted* (2012).
- [133] Eun-Jin Im. „Optimizing the Performance of Sparse Matrix-Vector Multiplication“. Diss. EECS Department, University of California, Berkeley, 2000.

- [134] Marcus Ditlevsen. „GPU-basierte Bildrekonstruktion mit Compressive Sampling“. Magisterarb. 2011.
- [135] John D. Davis und Eric S. Chung. *SpMV: A Memory-Bound Application on the GPU Stuck Between a Rock and a Hard Place*. Techn. Ber. 2012.
- [136] Samuel Williams, Leonid Oliker, Richard Vuduc, John Shalf, Katherine Yelick und James Demmel. „Optimization of sparse matrix-vector multiplication on emerging multicore platforms“. In: *Proceedings of the 2007 ACM/IEEE conference on Supercomputing*. SC '07. Reno, Nevada: ACM, 2007, 38:1–38:12.
- [137] C.M. Wittenbrink, E. Kilgariff und A. Prabhu. „Fermi GF100 GPU Architecture“. In: *Micro, IEEE* 31.2 (2011), S. 50–59.
- [138] Per Christian Hansen. „The L-Curve and its Use in the Numerical Treatment of Inverse Problems“. In: *Computational Inverse Problems in Electrocardiology*, ed. P. Johnston, *Advances in Computational Bioengineering*. WIT Press, 2000, S. 119–142.
- [139] Andreas Fichtner. *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*. Springer Verlag, 2010.
- [140] J. A. Bærentzen. *On the implementation of fast marching methods for 3D lattices*. Techn. Ber. Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby: Informatics und Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU, 2001.
- [141] Cuiping Li, Nebojsa Duric, Peter Littrup und Lianjie Huang. „In vivo breast sound-speed imaging with ultrasound tomography“. In: *Ultrasound in Medicine & Biology* 35.10 (2009). PMID: 19647920, 1615–1628.
- [142] Shengying Li, Marcel Jackowski, Donald P. Dione, Trond Varslot, Lawrence H. Staib und Klaus Mueller. „Refraction corrected transmission ultrasound computed tomography for application in breast imaging“. In: *Medical Physics* 37.5 (2010), S. 2233–2246.
- [143] William S. Harlan. „Tomographic estimation of seismic velocities from reflected raypaths“. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts* 8.1 (1989), 922–924.
- [144] J. E. Bresenham. „Algorithm for computer control of a digital plotter“. In: *IBM Systems Journal* 4.1 (1965), 25–30.
- [145] Carri Glide, Nebojsa Duric und Peter Littrup. „Novel approach to evaluating breast density utilizing ultrasound tomography“. In: *Medical physics* 34.2 (2007). PMID: 17388192, 744–753.
- [146] Jeroen Tromp, Carl Tape und Qinya Liu. „Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels“. In: *Geophysical Journal International* 160.1 (2005), 195–216.

- [147] C. Li, N. Duric und L. Huang. „Breast ultrasound tomography with total-variation regularization“. In: *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*. Bd. 7265. Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series. Feb. 2009.
- [148] Guust Nolet und F. A. Dahlen. „Wave front healing and the evolution of seismic delay times“. In: *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* 105.B8 (2000), S. 19043–19054.
- [149] Andreas Fichtner, Brian L. N. Kennett, Heiner Igel und Hans-Peter Bunge. „Theoretical background for continental and global scale full-waveform inversion in the time-frequency domain“. In: *Geophys. J. Int.* 175.2 (2008). [Winner of the 2008 Student Paper Award of the Geophysical Journal International.], S. 665–685.
- [150] G.L. Zeng und G.T. Gullberg. „Unmatched projector/backprojector pairs in an iterative reconstruction algorithm“. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 19.5 (2000), S. 548–555.
- [151] Stuart Crampin. „Quantitative Seismology: Theory and Methods“. In: *Geological Journal* 16.1 (1981), S. 90–90.
- [152] L. A. Feldkamp, L. C. Davis und J. W. Kress. „Practical cone-beam algorithm“. In: *J. Opt. Soc. Am. A* 1.6 (1984), S. 612–619.
- [153] J. A. Bearden. „X-Ray Wavelengths“. In: *Reviews of Modern Physics* 39 (1967), S. 78–124.
- [154] Peter Toft. „The Radon Transform – Theory and Implementation“. Diss. 1996.
- [155] Yangbo Ye, Shiyong Zhao, Hengyong Yu und Ge Wang. „A general exact reconstruction for cone-beam CT via backprojection-filtration“. In: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 24.9 (2005), S. 1190–1198.
- [156] P. R. Williamson. „A guide to the limits of resolution imposed by scattering in ray tomography“. In: *Geophysics* 56.2 (1991), 202–207.
- [157] Marta Jo Woodward. *A Qualitative Comparison of the First-Order Born and Rytov Approximation*. 1989.
- [158] Paul R. Williamson und M. H. Worthington. „Resolution limits in ray tomography due to wave behavior; numerical experiments“. In: *Geophysics* 58.5 (1993), S. 727–735.
- [159] Amir Averbuch und Yoel Shkolnisky. „3D discrete X-ray transform“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 17.3 (2004), 259–276.
- [160] A. Averbuch, R. R. Coifman, D. L. Donoho, M. Israeli, Y. Shkolnisky und I. Sedelnikov. „A Framework for Discrete Integral Transformations II — The 2D Discrete Radon Transform“. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30.2 (2008), 785–803.

- [161] Frank Natterer und Frank Wuebbeling. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, 2001.
- [162] A. Averbuch, R.R. Coifman, D.L. Donoho, M. Elad und M. Israeli. „Fast and accurate Polar Fourier transform“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 21.2 (2006), 145–167.
- [163] Amir Averbuch, Ilya Sedelnikov und Yoel Shkolnisky. „CT reconstruction from parallel and fan-beam projections by 2D discrete Radon transform“. In: *Image Processing, IEEE Transactions on* 21.2 (2012).
- [164] I. Sedelnikov, A. Averbuch und Y. Shkolnisky. „The discrete diffraction transform“. In: *IMA Journal of Applied Mathematics* 73.3 (2008), 496–538.
- [165] F. Simonetti, L. Huang, N. Duric und O. Rama. „Imaging beyond the Born approximation: An experimental investigation with an ultrasonic ring array“. In: *Physical Review E* 76.3 (2007), S. 036601.
- [166] A. Averbuch, R. R. Coifman, D. L. Donoho, M. Israeli, Y. Shkolnisky und I. Sedelnikov. *A framework for discrete integral transformations I – the pseudo-polar Fourier transform*.
- [167] Markus Fenn, Stefan Kunis und Daniel Potts. „On the computation of the polar FFT“. In: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 22.2 (2007), 257–263.
- [168] J.A. Fessler und B.P. Sutton. „Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation“. In: *Signal Processing, IEEE Transactions on* 51.2 (2003), S. 560–574.
- [169] M.M. Bronstein, A.M. Bronstein, M. Zibulevsky und H. Azhari. „Reconstruction in diffraction ultrasound tomography using nonuniform FFT“. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 21.11 (2002), 1395 –1401.

## Veröffentlichungen

- [RD.1] Nicole V. Ruiter, **Robin Dapp**, Michael Zapf und Hartmut Gemmeke. „A new method for grating lobe reduction for 3D synthetic aperture imaging with ultrasound computer tomography“. In: *Ultrasonics Symposium (IUS), 2010 IEEE*. 2010, S. 2372–2375.
- [RD.2] B. Kohout, L. Palacios, **Robin Dapp**, M. Zapf und N.V. Ruiter. „Sound field simulation tool for arbitrary transducer array matrices“. In: *Ultrasonics Symposium (IUS), 2012 IEEE International*. 2012.
- [RD.3] **Robin Dapp**, H. Gemmeke und N.V. Ruiter. „Attenuation reconstruction for 3D Ultrasound Computer Tomography“. In: *2012 19th International Conference on Systems, Signals and Image Processing (IWSSIP)*. 2012, 484–487.

- [RD.4] Matthias Birk, **Robin Dapp**, Nicole V. Ruiter und Juergen Becker. „GPU-accelerated Iterative Transmission Reconstruction for 3D Ultrasound Computer Tomography“. In: *To be submitted to Journal of Parallel and Distributed Computing* (2013).
- [RD.5] **Robin Dapp**, Hartmut Gemmeke und Nicole V. Ruiter. „3D refraction-corrected transmission reconstruction for 3D ultrasound computer tomography“. In: *SPIE Medical Imaging* (2012), S. 832014–832014–7.
- [RD.6] Neslihan Ozmen-Eryilmaz, **Robin Dapp**, Michael Zapf, Hartmut Gemmeke, Nicole Ruiter und Koen W.A. van Dongen. „Simulation based evaluation of different speed of sound reconstruction methods for Ultrasound Computer Tomography“. In: *accepted for IEEE Ultrasonics* (2013).
- [RD.7] H. Gemmeke, **Robin Dapp**, T. Hopp, E. Kretzek, M. Zapf und N.V. Ruiter. „Advanced Medical Imaging by the use of 3D Ultrasound Computer Tomography“. In: *CARS 2013, accepted*. Heidelberg, 2013.
- [RD.8] **Robin Dapp**, M. Zapf und N.V. Ruiter. „Geometry-independent speed of sound reconstruction for 3D USCT using apriori information“. In: *Ultrasonics Symposium (IUS), 2011 IEEE International*. 2011, S. 1403–1406.
- [RD.9] B. Kohout, **Robin Dapp** und N.V. Ruiter. „Ultrasound Breast Cancer Diagnosis and Therapy – A Design Study“. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2013*. 2013.
- [RD.10] N.V. Ruiter, M. Zapf, T. Hopp, **Robin Dapp** und H. Gemmeke. „Phantom image results of optimized full 3D USCT“. In: *Ultrasonics Symposium (IUS), 2012 IEEE International*. 2012.
- [RD.11] R. Jirik, I. Peterlik, N. Ruiter, J. Fousek, **Robin Dapp**, M. Zapf und J. Jan. „Sound-speed image reconstruction in sparse-aperture 3-D ultrasound transmission tomography“. In: *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on* 59.2 (2012), S. 254–264.
- [RD.12] **Robin Dapp**, Michael Zapf und Nicole V. Ruiter. „Quantitative Bildgebung für die 3D-Ultraschall-Computertomographie“. In: *Fortschritte der Akustik - DAGA 2012*. 2012.
- [RD.13] Nicole V. Ruiter, Michael Zapf, Torsten Hopp, **Robin Dapp** und Hartmut Gemmeke. „Phantom image results of an optimized full 3D USCT“. In: *SPIE Medical Imaging* (2012), S. 832005–832005–6.
- [RD.14] N.V. Ruiter, **Robin Dapp**, M. Zapf und H. Gemmeke. „Evaluation of 3D point spread function of a semi-ellipsoidal ultrasound computer tomography system“. In: *Ultrasonics Symposium (IUS), 2011 IEEE International*. 2011, S. 242–245.
- [RD.15] Michael Zapf, **Robin Dapp**, M. Hardt, P. A. Henning und N. V. Ruiter. „Fast k-space-based evaluation of imaging properties of ultrasound apertures“. In: *SPIE Medical Imaging* (2011), 79680Q–79680Q–8.

- [RD.16] Qi Chen und **Robin Dapp**. *Interpolation of space curves using variational subdivision surfaces*. Techn. Ber. Karlsruhe, 2010.
- [RD.17] **Robin Dapp**, M. Zapf und N.V. Ruiten. „Transmission Tomography Approaches for 3D USCT“. In: *5th International Workshop on Data - Algorithms - Decision Making*. Plzeň, Czech Republic, 2009.

*Sagte vender hun Hovedet halfft  
Lyddende fjærnt til Ord som bli'r talt  
Et Stæd under Bakken, om Hiertets Vee  
»Sola gaar bak Aase ned  
Skuggan' bli saa lange  
Natte kjem snart atteved  
Teke meg i Fange«  
De Taaren dend fulgte hendes Savn  
Een Længsel hiem til siine  
Hun vilde saa gierne hafve dem i siin Favn  
Sorrigen sadte Rood i navnløs Piine  
Hun graader  
Hun falmer  
Hun seer ey paa Nattesti  
Hun falder i Sofn paa Moseseng  
Oc aldtiing tier  
Saa dæcker et Mulm  
Hendes Drømmers Stier*