



**Ein flaches Schalenelement mit  
anisotropem geschichtetem Aufbau**

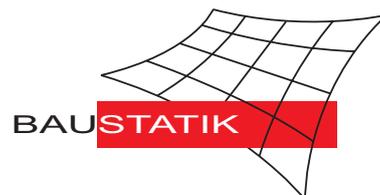
**W. Wagner**

**Mitteilung 3(2007)**

## Ein flaches Schalenelement mit anisotropem geschichtetem Aufbau

W. Wagner

Mitteilung 3(2007)



## Vorbemerkungen

- Dies ist der unveränderte Nachdruck des IBNM-Berichtes 90/4 des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, Appelstr. 9A, D-3000 Hannover 1.
- Das beschriebene Schalenelement ist im Programmsystem FEAP des Instituts für Baustatik der Universität Karlsruhe implementiert. Das Element wurde modifiziert. Der Schubanteil wird nicht reduziert integriert, bzw. es werden keine Stabilisierungsmatrizen eingesetzt. Vielmehr wird der bekannte Bathe-Dvorkin-Ansatz mit einer  $2 \times 2$ -Integration verwendet (z.B. Dvorkin, E., Bathe, K.-J.: A Continuum Mechanics Based Four Node Shell Element for General Nonlinear Analysis, Engineering Computations, 1, 77–88, 1984 ).

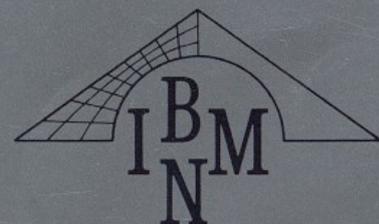


UNIVERSITÄT HANNOVER

**Ein flaches Schalenelement  
mit anisotropem geschichtetem Aufbau**

W. Wagner

IBNM-Bericht 90/4



INSTITUT FÜR BAUMECHANIK UND NUMERISCHE MECHANIK

## Vorbemerkungen

- Dies ist der unveränderte Nachdruck des IBNM-Berichtes 90/4 des Instituts für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover, Appelstr. 9A, D-3000 Hannover 1.
- Das beschriebene Schalenelement ist im Programmsystem FEAP des Instituts für Baustatik der Universität Karlsruhe implementiert. Das Element wurde modifiziert. Der Schubanteil wird nicht reduziert integriert, bzw. es werden keine Stabilisierungsmatrizen eingesetzt. Vielmehr wird der bekannte Bathe-Dvorkin-Ansatz mit einer  $2 \times 2$ -Integration verwendet (z.B. Dvorkin, E., Bathe, K.-J.: A Continuum Mechanics Based Four Node Shell Element for General Nonlinear Analysis, Engineering Computations, 1, 77–88, 1984 ).
- Alle Darstellungen und Informationen entsprechen dem Kenntnisstand von 1990!!

EIN FLACHES SCHALENELEMENT MIT  
ANISOTROPEM GESCHICHTETEM AUFBAU

W. Wagner

*Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik  
Universität Hannover, Appelstr. 9A, D-3000 Hannover 1*

## 1 Einleitung

Bauteile aus Faserverbundwerkstoffen werden seit etwa 25 Jahren in zunehmendem Maße im Bereich des Flugzeugbaus, aber auch in vielen anderen Bereichen verwendet. Sie wurden zunächst z.B. in der Flugzeugindustrie als untergeordnete Bauteile, wie z.B. Teile des Innenausbaus, Teile des Cockpits u.a., später aber auch als tragende Teile wie Tragflächen und Höhenleitwerke verwendet.

Basierend auf einer kontinuumsmechanischen Beschreibung liegt ein orthotropes bzw. orthogonal isotropes Materialverhalten innerhalb einer unidirektionalen Faserverbundschicht (UD-Schicht) vor. Ein sog. Laminat setzt sich aus einer Vielzahl von UD-Schichten zusammen, dessen Materialeigenschaften aufgrund der unterschiedlichen Orientierung der Faserlagen wiederum allgemein anisotrop sind.

Durch die Anwendung im Bereich des Flugzeugbaus werden häufig schalenartige Strukturen hergestellt, die in der Regel auch stabilitätsgefährdet sind.

Die Grundlagen der kontinuumsmechanischen und mikromechanischen Beschreibung von Faserverbundmaterialien finden sich in den Arbeiten von Calcote [1969], Puck [1967],[1969], Jones [1975] und Tsai, Hahn [1985]. Eine Vielzahl von Versuchsergebnissen sind in den Berichten 85-45 und 88-41 der DLR von Bergmann et.al. enthalten. Weitere Grundlagen wie die Frage der Qualitätskontrolle, der Schallemissionen oder der Betriebsbedingungen werden z. B. in Niederstedt et. al. [1985] behandelt. Einen umfassenden Überblick über den aktuellen Stand der theoretischen Beschreibung sowie des Schädigungseinflusses gibt das Handbuch von Tsai [1988].

Bei der theoretischen und numerischen Untersuchung von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen geht man unterschiedlich vor, wobei die Lösungskonzepte im wesentlichen durch die zu untersuchende Fragestellung bestimmt werden.

Strukturuntersuchungen einschließlich der Stabilitätsberechnungen und dynamischen Untersuchungen werden durch Anwendung von schubelastischen Platten- bzw. Schalentheorien möglich. Es existieren eine Vielzahl von Veröffentlichungen, die jedoch meistens auf semi-analytischen Verfahren beruhen, so daß Strukturuntersuchungen an regelmäßigen Systemen, wie Rechteckplatten oder Kreiszyinderschalen diskutiert werden. Häufig werden nur kleine Verschiebungen zugelassen, so daß eine geometrisch lineare Theorie verwendet wird, siehe z. B. Whitney [1969].

Die numerischen Untersuchungen – in der Regel mit der Methode der Finiten Elemente durchgeführt – sind für beliebige Platten- und Schalenträgerwerke durchführbar. Neben zweidimensionalen Schalenelementen werden häufig auch degenerierte Schalenelemente verwendet siehe z.B. Puchta, Reddy [1983], Saigal et.al. [1984], Jun, Hong [1988], Lardeur, Batoz [1989], Yeom, Lee [1989].

Sollen speziellere Prozesse wie z.B. das Delaminationsverhalten von verschiedenen Schichten untersucht werden sind andere Strategien anzuwenden. Als Delamination bezeichnet man das Ablösen von einzelnen UD-Schichten untereinander. Probleme dieser Art sind durch einen dreidimensionalen Spannungszustand innerhalb der einzelnen UD-Schicht gekennzeichnet. Damit sind je Schicht neben dem genauen Verlauf der Schubspannungen auch Spannungen in Dickenrichtung zu ermitteln. In der Regel erfolgt die Untersuchung durch die Formulierung einer dreidimensionalen orthotropen Theorie sowie einer entsprechenden Finite-Element-Formulierung je Schicht.

Eine allgemeine Übersicht über mögliche Berechnungsweisen findet man bei Reddy [1989]. In dem nachfolgenden Beitrag soll, basierend auf einer schubelastischen Schalentheorie, die Ableitung eines isoparametrischen Schalenelementes für flache Schalen mit Anwendung auf orthotrope geschichtete Materialien diskutiert werden.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Schalentheorien

An dieser Stelle kann – mit Hinblick auf die Behandlung von **flachen** Schalen – auf die umfangreiche Darstellung einer Schalentheorie verzichtet werden. Vielmehr können durch einfache geometrische Überlegungen im Sinne von z. B. Marguerre [1938] die wesentlichen Gleichungen abgeleitet werden. Bei der Formulierung von Schalen- bzw. Plattentheorien lassen sich zwei grundlegende Richtungen unterscheiden. Einerseits existiert die klassische Kirchhoff-Love-Theorie, andererseits wird besonders in neuerer Zeit die weiter gefaßte Reissner-Mindlin-Theorie vielfach verwendet. Insbesondere im Hinblick auf die numerische Formulierung bietet diese Theorie Vorteile, da nur Ableitungen 1.Ordnung auftreten. Beide Theorien unterscheiden sich im wesentlichen durch die getroffenen kinematischen Annahmen. Schalen bzw. Platten sind Körper, bei denen eine Abmessung – die Schalendicke  $h$  – sehr klein gegenüber den Längenabmessungen bzw. dem kleinsten Krümmungsradius der Schalenmittelfläche (SMF) ist. Hieraus lassen sich folgende kinematische Annahmen einführen:

1. Querschnitte, die vor der Verformung eben sind, bleiben auch nach der Verformung eben.
2. Ein Direktorvektor auf der SMF, der vor der Verformung in Normalenrichtung zeigt, zeigt auch nach der Verformung in Normalenrichtung.
3. In Dickenrichtung treten keine Dehnungen auf.

Werden die Annahmen 1–3 eingeführt so liegen die kinematischen Annahmen der Kirchhoff-Love-Theorie vor, gelten die Annahmen 1 und 3 und wird Annahme 2 aufgegeben, so wird die Kinematik der Reissner-Mindlin-Theorie verwendet. Diese ist damit durch die mögliche Berücksichtigung eines Schubwinkels und damit durch das Auftreten von Schubverzerrungen gekennzeichnet.

Eine graphische Erläuterung mit Einführung eines Koordinatensystems sowie der verwendeten kinematischen Größen zeigt Bild 1.

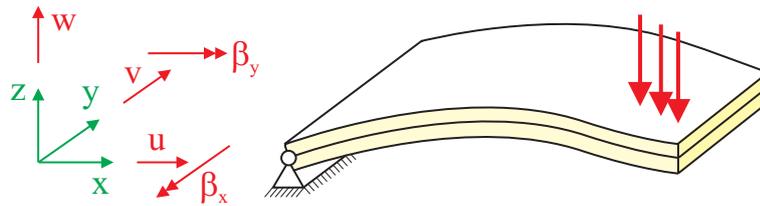


Bild 1: Kinematische Annahmen

Die Einführung des vollständigen Verschiebungsfeldes ist in Bild 2 gezeigt. Hierbei ist die Krümmung der Schalenmittelfläche zu berücksichtigen.

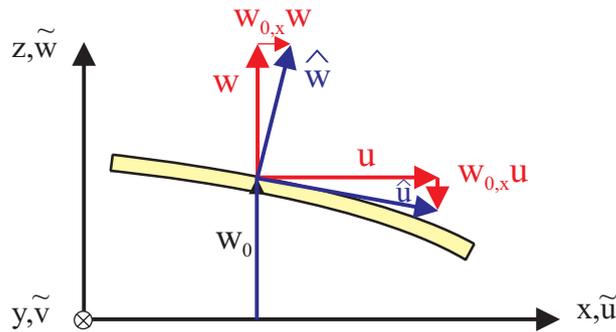


Bild 2: Zur Einführung des Verschiebungsfeldes in der x-z-Ebene

Entsprechend Bild 2 ergibt sich der folgende geometrische Zusammenhang auf der Schalenmittelfläche

$$\tilde{u} = u + w_{0,x} w \quad \tilde{w} = w - w_{0,x} u \quad (1)$$

mit den weiteren Näherungen  $u \approx \hat{u}$  und  $w \approx \hat{w}$ . Unter Berücksichtigung der Schubverformungen sowie der Annahme  $w_{0,x} u \ll 1$  kann das Verschiebungsfeld schließlich wie folgt bei Einführung einer Koordinate  $\hat{z}$  in Dickenrichtung angegeben werden

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, z) &= u(x, y) + w_{0,x} w(x, y) - \beta_x(x, y) \hat{z} \\ \tilde{v}(x, y, z) &= v(x, y) + w_{0,y} w(x, y) - \beta_y(x, y) \hat{z} \\ \tilde{w}(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Der erste Anteil beschreibt die Verschiebungen in der SMF, der zweite Anteil berücksichtigt die Krümmung der Schale und der dritte Anteil ist für die Verschiebungsanteile außerhalb der SMF erforderlich.

Damit lassen sich anschließend die Verzerrungen formulieren. Im Rahmen einer nichtlinearen Darstellung soll von einem Bezug auf die Referenzkonfiguration ausgegangen – also eine "Total Lagrangesche Betrachtungsweise" eingeführt werden. Damit wird der

Greensche Verzerrungstensor verwendet, dessen lineare Anteile sich aus

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}
 \end{aligned} \tag{3}$$

berechnen lassen. Die einfachste Form einer nichtlinearen Erweiterung ergibt sich, wenn die Dehnungen der Schalenmittelfläche um die wesentlichen nichtlinearen Anteile aus den Produkten von  $w_{,x}$  und  $w_{,y}$  erweitert werden. Diese Darstellung geht von linearen Biege- und Schubanteilen aus und ist als Theorie mäßiger Drehungen bekannt. Nach Trennung in Dehnungen der SMF ( $\epsilon^m$ ), Dehnungsanteile infolge Krümmung ( $\epsilon^i$ ), nichtlineare Dehnungsanteile ( $\epsilon^{nl}$ ), Biegeverzerrungen ( $\epsilon^b \equiv \kappa$ ) und Schubverzerrungen ( $\epsilon^s \equiv \gamma$ ) lassen sich die wesentlichen Komponenten des Greenschen Verzerrungstensors wie folgt in Matrixschreibweise darstellen

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon^m + \epsilon^i + \epsilon^{nl} \\ \hat{z}\kappa \\ \gamma \end{bmatrix} \tag{4}$$

mit

$$\epsilon^m = \begin{bmatrix} \epsilon_x^m \\ \epsilon_y^m \\ \gamma_{xy}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

$$\epsilon^i = \begin{bmatrix} \epsilon_x^i \\ \epsilon_y^i \\ \gamma_{xy}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{0,x} w_{,x} \\ w_{0,y} w_{,y} \\ w_{0,x} w_{,y} + w_{0,y} w_{,x} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

$$\epsilon^{nl} = \begin{bmatrix} \epsilon_x^{nl} \\ \epsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 w_{,x}^2 \\ 1/2 w_{,y}^2 \\ w_{,x} w_{,y} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta_{x,x} \\ -\beta_{y,y} \\ -\beta_{x,y} - \beta_{y,x} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^s \\ \gamma_{yz}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} - \beta_x \\ w_{,y} - \beta_y \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

Üblicherweise wird bei Flächentragwerken mit Schnittgrößen gearbeitet, welche durch Integration der Normal- und Schubspannungen über die Schalendicke erhalten werden.

Somit ergeben sich als auf die Länge '1' bezogene streckenhaft verteilte Größen die Normalkräfte ( $\mathbf{N}$ ), Biegemomente ( $\mathbf{M}$ ) und Querkräfte ( $\mathbf{Q}$ ) in der Form

$$N_x = \int_{(z)} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{(z)} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{(z)} \tau_{xy} dz \quad (5.1)$$

$$M_x = \int_{(z)} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{(z)} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{(z)} \tau_{xy} z dz \quad (5.2)$$

$$Q_x = \int_{(z)} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{(z)} \tau_{yz} dz. \quad (5.3)$$

Bei dieser Integration über die Schalendicke ist ein geschichteter Aufbau der Schale zu berücksichtigen, so daß die Integration abschnittsweise vorgenommen werden muß.

Bei Annahme eines linear elastischen allgemein anisotropen Materialverhaltens kann je Schicht ( $k$ ) eine konstitutive Beziehung zwischen den Spannungen (2. Piola–Kirchhoff–Spannungen) und den Verzerrungen (Green–Lagrangesche Verzerrungen) in der Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}_k &= \mathbf{C}^k \mathbf{h}^k \begin{bmatrix} 1 & z_s \\ z_s & \frac{h^2}{12} + z_s^2 \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}_k &= \tilde{\mathbf{C}}^k h^k \boldsymbol{\gamma} \end{aligned} \quad (6)$$

angegeben werden. Hierin sind die Elastizitätsmatrizen  $\mathbf{C}^k$  und  $\tilde{\mathbf{C}}^k$  noch anzugeben, was im Abschnitt 2.2 zunächst allgemein und dann unter besonderer Berücksichtigung des Faserverbundmaterialaufbaus geschehen soll.

Nach Summation über alle Schichten erhält man 'verschmierte' Gesamtschnittgrößen durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^m & \mathbf{D}^{mb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{mbT} & \mathbf{D}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (7)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^m &= \sum_{k=1}^{NLAY} \mathbf{C}^k h^k \\ \mathbf{D}^b &= \sum_{k=1}^{NLAY} \mathbf{C}^k \left[ \frac{h^{k3}}{12} + h^k z_s^{k2} \right] \\ \mathbf{D}^{mb} &= \sum_{k=1}^{NLAY} \mathbf{C}^k h^k z_s^k \\ \mathbf{D}^s &= \sum_{k=1}^{NLAY} \tilde{\mathbf{C}}^k h^k. \end{aligned}$$

In (7) beschreibt  $h^k$  die Schichtdicke,  $z_s^k$  den Abstand vom Schichtschwerpunkt zur Bezugsachse während  $NLAY$  die Gesamtanzahl der Schichten darstellt. Weiterhin ist in Gl. (7) deutlich die Kopplung von Membran- und Biegeanteilen durch die Matrix  $\mathbf{D}^{mb}$  infolge des anisotropen Materialverhaltens zu erkennen.

Diese Gesamtschnittgrößen können im Rahmen der numerischen Behandlung weiterverwendet werden, haben jedoch für die Ausgabe keine direkte Bedeutung. Vielmehr sind je Schicht (k) die Spannungen in der Form

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^k &= \mathbf{C}^k [(\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^i + \boldsymbol{\epsilon}^{nl}) + z^k \boldsymbol{\kappa}] \\ \boldsymbol{\tau}^k &= \tilde{\mathbf{C}}^k \boldsymbol{\gamma}\end{aligned}\quad (8)$$

zu ermitteln, wobei mit der Koordinate  $z^k$  die genaue Lage innerhalb der Schicht angegeben werden kann.

Für die spätere numerische Behandlung wird nun das Prinzip der virtuellen Arbeiten herangezogen. Bezogen auf die Schalenmittelfläche und aufgeteilt in Membran-, Biege- und Schubanteile erhält man bei Einwirkung äußerer Belastungen  $\hat{\mathbf{t}}$  und Nichtberücksichtigung von Trägheitstermen die Form

$$\begin{aligned}D\pi \cdot \delta \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \{ \mathbf{N} \cdot \delta(\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^i + \boldsymbol{\epsilon}^{nl}) + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{Q} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} \} \mathbf{d}\Omega \\ &- \int_{\Omega_{\sigma}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \mathbf{d}\Omega\end{aligned}\quad (9)$$

Hierin ist  $\pi$  die gesamte potentielle Energie.

Innerhalb der nichtlinearen Rechnung ist im Rahmen eines Newton-Verfahrens iterativ zu rechnen, so daß auch die nächst höhere Ableitung der potentiellen Energie benötigt wird

$$\begin{aligned}D[D\pi \cdot \delta \mathbf{u}] \cdot \Delta \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \Delta(\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^i + \boldsymbol{\epsilon}^{nl}) \cdot \mathbf{D}^m \cdot \delta(\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^i + \boldsymbol{\epsilon}^{nl}) \mathbf{d}\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{D}^{mb} \cdot \delta(\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^i + \boldsymbol{\epsilon}^{nl}) \mathbf{d}\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \Delta(\boldsymbol{\epsilon}^m + \boldsymbol{\epsilon}^i + \boldsymbol{\epsilon}^{nl}) \cdot \mathbf{D}^{mbT} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa} \mathbf{d}\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{D}^b \cdot \delta \boldsymbol{\kappa} \mathbf{d}\Omega + \int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{D}^s \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} \mathbf{d}\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{N} \cdot \Delta \delta \boldsymbol{\epsilon}^{nl} \mathbf{d}\Omega.\end{aligned}\quad (10)$$

Gleichung (10) setzt die Wegunabhängigkeit der Belastung voraus. Weiterhin ist in dieser Ableitung die Abhängigkeit von der gewählten Schalentheorie zu erkennen, so daß nur Normalkräfte in die Berechnung eingehen (letzter Term).

## 2.2 Zur Formulierung eines Stoffgesetzes

### 2.2.1 Allgemeines

Die allgemeinste Form eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannungen und Verzerrungen erhält man aus der folgenden in Index bzw. Matrixschreibweise gegebenen konstitutiven Beziehung

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad . \quad (11)$$

Dabei hat  $C_{ijkl}$  in allgemeinsten Form  $3^4 = 81$  Konstanten. Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  und der Symmetrie des Verzerrungstensors  $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$  kann eine Reduktion auf 36 Konstante in der Form

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (12)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (13)$$

erfolgen. Eine Reduktion auf 21 Konstante gelingt bei Annahme der Existenz eines elastischen Potentials  $U = U(\epsilon_{ij})$  und der Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (14)$$

Mit der konstitutiven Beziehung  $\frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = C_{ijkl}$  und der Vertauschbarkeit der Reihenfolge der part. Ableitungen  $C_{ijkl} = C_{klij}$  lautet die allgemeinste Form eines anisotropen linear elastischen Materialgesetzes

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad C_{ij} = C_{ji} \quad (15)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$C_{ij}$  hat damit 21 unabhängige Konstanten.

Jede Materialsymmetrie reduziert die Anzahl der Konstanten weiter. Diese Symmetrien lassen sich durch bestimmte Drehungen des Koordinatensystems leicht einführen. Idee dabei ist, daß durch die Drehung die Materialbeschreibung nicht verändert werden soll. Beispielsweise führt eine Drehung um die z-Achse um  $180^\circ$  zu einer Reduktion auf 13 Konstante

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ & & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Orthotropes Materialverhalten mit 9 Konstanten ergibt sich bei einer anschließenden Drehung um die x - Achse um  $180^\circ$  mit den Ergebnissen

$$\begin{aligned} C_{14} &= 0 \\ C_{24} &= 0 \\ C_{34} &= 0 \\ C_{56} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Für ein transversal isotropes Materialverhalten mit nur 5 Konstanten sind die zusätzlichen Ergebnisse

$$\begin{aligned} C_{13} &= C_{12} \\ C_{33} &= C_{22} \\ C_{44} &= 0.5(C_{22} - C_{23}) \\ C_{66} &= C_{55} \end{aligned} \tag{19}$$

zu berücksichtigen. Schließlich sei der Vollständigkeit halber das isotrope Materialverhalten mit 2 Konstanten angesprochen, welches zusätzlich durch

$$\begin{aligned} C_{22} &= C_{11} \\ C_{23} &= C_{12} \\ C_{55} &= 0.5(C_{11} - C_{12}) \end{aligned} \tag{20}$$

gekennzeichnet ist.

### 2.2.2 Formulierung eines Stoffgesetzes bei geschichteten Flächenträgern

Im Hinblick auf die Behandlung von Flächenträgern sind die oben angegebenen Materialgesetze in einer 2-dimensionalen Form anzugeben. Dies soll für den Fall der Orthotropie mit 6 zu bestimmenden Konstanten durchgeführt werden

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{44} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & C_{55} & 0 \\ & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Im Hinblick auf eine spätere Trennung sollen neue Bezeichnungen in der Form

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & \tilde{C}_{11} & 0 \\ & & & & \tilde{C}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{22}$$

eingeführt werden. Flächentragwerke aus Faserverbundmaterialien setzen sich aus einer Anzahl von übereinander liegenden UD-Schichten zusammen. Dabei kann für jede UD-Schicht ein Materialgesetz in Form von Gl. (22) angenommen werden. Üblicherweise laufen die Fasern innerhalb der UD-Schicht in Richtung der lokalen x-Achse. Im Rahmen eines Mehrschichtenverbundes, also bei Anordnung mehrerer UD-Schichten, werden – um die Steifigkeitseigenschaften des Tragwerkes zu erhöhen – je Schicht unterschiedliche Faserorientierungen gewählt, so daß Gl. (22) nur für lokale Richtungen je Schicht anwendbar ist.

Damit ist das Materialgesetz auf eine festzulegende globale Richtung zu transformieren. Diese Transformation soll im folgenden erläutert werden. Die Transformation zwischen einem lokalen  $(x_L, y_L)$  Koordinatensystem und einem globalen  $(x_G, y_G)$  Koordinatensystem ist durch die Transformationsbeziehung

$$\begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_L = \mathbf{T}_x \mathbf{x}_G \quad (23)$$

mit dem Drehwinkel  $\varphi$  gegeben. Um die Transformationsmatrix für die Verzerrungen anzugeben, sind diese nach der Kettenregel abzuleiten. Beispielsweise erhält man für die Dehnung

$$\epsilon_{xL} = \frac{\partial u_L}{\partial x_L} = \frac{\partial u_L}{\partial x_G} \cdot \frac{\partial x_G}{\partial x_L} + \frac{\partial u_L}{\partial y_G} \cdot \frac{\partial y_G}{\partial x_L}. \quad (24)$$

Einsetzen der Transformationsbeziehungen (23) z.B.

$$\begin{aligned} u_L &= \cos\varphi u_G + \sin\varphi v_G & \text{in } \frac{\partial u_L}{\partial x_G} \\ x_G &= \cos\varphi x_L - \sin\varphi y_L & \text{in } \frac{\partial x_G}{\partial x_L} \end{aligned}$$

führt zum Ergebnis

$$\epsilon_{xL} = \cos^2\varphi \epsilon_{xG} + \sin^2\varphi \epsilon_{yG} + \sin\varphi \cos\varphi \gamma_{xyG},$$

so daß sich die folgende Transformationsbeziehung

$$\boldsymbol{\epsilon}_L = \mathbf{T}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon}_G \quad (25)$$

$$\text{mit } \mathbf{T}_\epsilon = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} s &= \sin\varphi \\ c &= \cos\varphi \end{aligned}$$

ergibt. Aus dem Vergleich der spezifischen Formänderungsarbeiten

$$dW = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_L^T \boldsymbol{\epsilon}_L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_G^T \boldsymbol{\epsilon}_G \quad (26)$$

erhält man für die Transformation der Spannungen die Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma}_L = \mathbf{T}_\sigma \boldsymbol{\sigma}_G \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_\epsilon^{\mathbf{T}^{-1}}, \quad (27)$$

so daß schließlich die Transformation des Materialgesetzes durch

$$\boldsymbol{\sigma}_G = \mathbf{C}_G \boldsymbol{\epsilon}_G \quad \boldsymbol{\sigma}_L = \mathbf{C}_L \boldsymbol{\epsilon}_L \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_G = \mathbf{T}_\epsilon^{\mathbf{T}} \mathbf{C}_L \mathbf{T}_\epsilon \quad (28)$$

beschrieben werden kann. Diese Beziehungen gelten für die Dehnungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  sowie die Biegeverzerrungen  $\boldsymbol{\kappa}$ .

Sinngemäß sind die Schubverzerrungen, Schubspannungen und das zugehörige Materialgesetz zu transformieren, wobei hier  $\mathbf{T}_\gamma = \mathbf{T}_x$  gilt.

Nach Ausführung dieser Transformation erhält man schließlich die folgenden, auf das globale Koordinatensystem bezogenen Materialparameter

$$\begin{aligned}
 C_{11G} &= c^4 C_{11L} + 2s^2 c^2 (C_{12L} + 2C_{33L}) + s^4 C_{22L} \\
 C_{22G} &= s^4 C_{11L} + 2s^2 c^2 (C_{12L} + 2C_{33L}) + c^4 C_{22L} \\
 C_{12G} &= s^2 c^2 (C_{11L} + C_{22L} - 4C_{33L}) + (s^4 + c^4) C_{12L} \\
 C_{13G} &= c^3 s (C_{11L} - C_{12L} - 2C_{33L}) + s^3 c (C_{12L} - C_{22L} + 2C_{33L}) \\
 C_{23G} &= s^3 c (C_{11L} - C_{12L} - 2C_{33L}) + c^3 s (C_{12L} - C_{22L} + 2C_{33L}) \\
 C_{33G} &= s^2 c^2 (C_{11L} + C_{22L} - 2C_{12L} - 2C_{33L}) + (s^4 + c^4) C_{33L}
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{11G} &= c^2 \tilde{C}_{11L} + s^2 \tilde{C}_{22L} \\
 \tilde{C}_{22G} &= s^2 \tilde{C}_{11L} + c^2 \tilde{C}_{22L} \\
 \tilde{C}_{12G} &= sc (\tilde{C}_{11L} - \tilde{C}_{22L})
 \end{aligned}$$

Damit bleibt durch die Transformation die Symmetrie des Materialgesetzes bewahrt, sie führt jedoch zu einer vollen Besetzung der Matrizen, so daß bezogen auf die globalen Achsen von einem allgemein anisotropen Materialverhalten entsprechend Gl.(17) auszugehen ist.

### 2.2.3 Zur Bestimmung der Materialparameter bei Faserverbundmaterialien

UD-Schichten aus Faserverbundmaterialien bestehen aus 2 Anteilen, nämlich dem Fasermaterial aus Kohlefasern o. ä. Werkstoffen sowie dem Matrixmaterial, welches z. B. aus Epoxid-Harzen bestehen kann. Beide Materialien haben stark unterschiedliche Werkstoffeigenschaften, so daß im Rahmen einer Strukturanalyse nur mit gemittelten bzw. verschmierten Materialparametern gearbeitet wird. Die Ermittlung dieser Materialparameter erfolgt mit sog. Mischungsregeln, auf die hier nicht genauer eingegangen werden soll. Genauere Informationen finden sich z. B. in Niederstedt [1985, Abschn. 5]. Zur Verdeutlichung der Attraktivität von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen sind in Tabelle 1 einige Materialparameter im Vergleich zu Stahl angegeben. Sie sind dem Buch von Tsai [1988] entnommen.

Parameter	CFK-Faser T 300, AS Graphit	UD-Schicht T 300 / N 5208 Graphit/Epoxy	Stahl
$E_1 [kN/mm^2]$	230	181	210
$E_2 [kN/mm^2]$		10.3	210
$G [kN/mm^2]$		7.2	81
$\nu$		0.28	0.3
$\alpha_F$		0.6	
Dicke [mm]	0.007	0.125	
$\sigma_z [N/mm^2]$	3000	1800	$\frac{300 - 500}{1500 - 2000} \begin{matrix} BSt \\ SpSt \end{matrix}$
$\rho [g/cm^3]$	1.75	1.6	7.85

Tabelle 1: Vergleich von Materialdaten

### 3 Finite-Element-Formulierung

#### 3.1 Ableitung eines Finiten Elementes für flache Schalen

In diesem Abschnitt soll in knapper Form die Formulierung des entsprechenden Finiten Elementes diskutiert werden. Für einen grundsätzlichen Überblick über die Methode sei auf die Lehrbücher von z. B. Zienkiewicz, Taylor [1989] und Bathe [1982] verwiesen. Zur Behandlung nichtlinearer Probleme mit der FEM innerhalb einer Verschiebungsmethode ist die Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen als Darstellung des Residuums im Rahmen einer iterativen Berechnung notwendig. Die konsistente Linearisierung dieses Residuums ist dann Basis des im allgemeinen verwendeten Newton-Verfahrens, welches die quadratische Konvergenzeigenschaft des Iterationsprozesses lokal sicherstellt. Hierzu wird eine allgemeine Finite-Element-Diskretisierung

$$B^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$$

mit  $n_e$  Elementen eingeführt. Innerhalb eines einzelnen Elementes  $\Omega_e$  werden das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  und das Feld der virtuellen Verschiebungen  $\delta\mathbf{u}$  durch

$$\mathbf{u}^h = \{u, v, w, \beta_x, \beta_y\}^T = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{v}_I, \quad \delta\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{N}_I \delta\mathbf{v}_I \quad (30)$$

approximiert.  $N_I$  sind die Ansatzfunktionen und  $\mathbf{v}_I$  bzw.  $\delta\mathbf{v}_I$  stellen die Knoten- und die virtuellen Knotenverschiebungsvektoren des jeweiligen Elementes mit  $\mathbf{v}_I = \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \beta_x, \beta_y \}_I^T$  dar. Als Ansatzfunktionen  $N_I$  werden je nach Elementformulierung Lagrange'sche oder Serendipity-Funktionen berücksichtigt. In diesem Zusammenhang ist  $nel$  die Anzahl der Knoten am Element.

Für die Darstellung der Verzerrungen (Gl. (4)) werden üblicherweise im Rahmen der Finite-Element-Formulierung die sog.  $\mathbf{B}$ -Matrizen eingeführt, die dann die entsprechend der verwendeten Theorie auftretenden Ableitungen der Ansatzfunktionen enthalten. Für die virtuellen Verzerrungen ergeben sich auf Elementebene die folgenden Verzerrungen

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\epsilon}^h &= \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I^m \delta \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_I + \sum_{I=1}^{nel} (\mathbf{B}_I^i + \mathbf{B}_I^{nl}) \delta \begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}_I \\ \delta\boldsymbol{\kappa}^h &= \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I^b \delta \begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}_I \\ \delta\boldsymbol{\gamma}^h &= \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I^s \delta \begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}_I \end{aligned} \quad (31)$$

Hierin sind die  $\mathbf{B}$ -Matrizen entsprechend Gl. (4) zu formulieren und lauten

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_I^i = \begin{bmatrix} w_{0,x} N_{I,x} & 0 & 0 \\ w_{0,y} N_{I,y} & 0 & 0 \\ w_{0,x} N_{I,y} + w_{0,y} N_{I,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(32)

$$\mathbf{B}_I^b = \begin{bmatrix} 0 & -N_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{I,y} \\ 0 & -N_{I,y} & -N_{I,x} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_I^{nl} = \begin{bmatrix} w_{,x} N_{I,x} & 0 & 0 \\ w_{,y} N_{I,y} & 0 & 0 \\ w_{,x} N_{I,y} + w_{,y} N_{I,x} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_I^s = \begin{bmatrix} N_{I,x} & -N_I & 0 \\ N_{I,y} & 0 & -N_I \end{bmatrix}.$$

Entsprechend den Angaben in den Gl. (5–6) werden die Gesamtschnittgrößen zu einem Vektor in der Form

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{N}_x, \mathbf{N}_y, \mathbf{N}_{xy}, \mathbf{M}_x, \mathbf{M}_y, \mathbf{M}_{xy}, \mathbf{Q}_x, \mathbf{Q}_y\}^T \quad (33)$$

zusammengestellt.

Die Finite-Element-Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit (Gl. 9) lautet auf Elementebene

$$\begin{aligned} G_e^h(\mathbf{v}_e, \delta \mathbf{v}_e) &= \delta \mathbf{v}_e^T \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T(\mathbf{v}_e) \mathbf{S}(\mathbf{v}_e) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}^T \hat{\mathbf{t}} \, d(\partial\Omega) \right\} \\ &= \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{v}_e) \mathbf{S}(\mathbf{v}_e) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_I^T \hat{\mathbf{t}} \, d(\partial\Omega) \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

und nach dem Zusammenbau

$$\delta \mathbf{v}^T \mathbf{G} = \bigcup_{e=1}^{ne} \mathbf{G}_e^h. \quad (35)$$

Hierin ist  $\mathbf{G}$  das Residuum für die Formulierung einer nichtlinearen Berechnung, welches nach Multiplikation des Lastterms mit einem Lastfaktor  $\lambda$  die Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (36)$$

annimmt. Damit gilt

$$\begin{aligned} R_e^h(\mathbf{v}_e, \delta \mathbf{v}_e) &= \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^T(\mathbf{v}_e) \mathbf{S}(\mathbf{v}_e) \, d\Omega \\ P_e^h(\mathbf{v}_e, \delta \mathbf{v}_e) &= \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}_I^T \hat{\mathbf{t}} \, d(\partial\Omega) \\ \delta \mathbf{v}^T \mathbf{R}(\mathbf{v}) &= \bigcup_{e=1}^{ne} R_e^h; \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{v}^T \mathbf{P} = \bigcup_{e=1}^{ne} P_e^h \end{aligned} \quad (37)$$

Die Linearisierung von (34) an der Stelle  $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}$  führt auf die Definition der tangentialen Steifigkeitsmatrix eines finiten Elementes

$$\begin{aligned} D G_e^h(\bar{\mathbf{v}}_e, \delta \mathbf{v}_e) \Delta \mathbf{v}_e &= \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}_I^T(\bar{\mathbf{v}}_e) \mathbf{D} \mathbf{B}_K(\bar{\mathbf{v}}_e) + \mathbf{G}_I^T \hat{\mathbf{S}}(\bar{\mathbf{v}}_e, \bar{\mathbf{v}}_e) \mathbf{G}_K] \, d\Omega \Delta \mathbf{v}_K \\ &= \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{K}_{TIK} \Delta \mathbf{v}_K \\ &= \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{K}_{Te} \Delta \mathbf{v}_e \end{aligned} \quad (38)$$

In Gl. (38) wurde von verformungsunabhängigen Belastungen ausgegangen. Der Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen (38) führt auf die globale tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$

$$\delta \mathbf{v}^T \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{v}_e^T \mathbf{K}_{T_e} \Delta \mathbf{v}_e. \quad (39)$$

Die Matrizen  $\mathbf{G}_I, \mathbf{G}_K$  sind nicht von den Verschiebungen abhängig sondern enthalten nur Ableitungen der Ansatzfunktionen, die Matrix  $\hat{\mathbf{S}}$  enthält Spannungen in bestimmter Anordnung. Dies Matrizen sind im Rahmen der verwendeten Theorie zu formulieren. Im Rahmen der hier eingeführten Theorie mäßiger Drehungen erhält man für die aus Effizienzgründen ausmultiplizierte Matrix  $\mathbf{K}_{\sigma IK} = \int_{\Omega_e} \mathbf{G}_I \hat{\mathbf{S}} \mathbf{G}_K d\Omega$  (sog. 'Anfangsspannungsmatrix') nur an der Stelle (3,3) den Term

$$\mathbf{K}_{\sigma IK}|_{(3,3)} = \int_{\Omega_e} [N_x N_{I,x} N_{K,x} + N_y N_{I,y} N_{K,y} + N_{xy} (N_{I,x} N_{K,y} + N_{I,y} N_{K,x})] d\Omega. \quad (40)$$

Für die numerische Behandlung kann die tangentielle Steifigkeitsmatrix auch in ihre Einzelbestandteile zerlegt werden. Mit Berücksichtigung der Aufteilung der Verzerrungen (Gl. 4 bzw. 31) sowie des formulierten Stoffgesetzes (Gl. 7) folgt für den Anteil von  $\mathbf{K}_T$  aus den Knoten I und K

$$\mathbf{K}_{TIK} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_I^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}_K^m & \mathbf{B}_I^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}_K^i \\ + \mathbf{B}_I^{mT} \mathbf{D}^m \mathbf{B}_K^{nl} & + \mathbf{B}_I^{mT} \mathbf{D}^{mb} \mathbf{B}_K^b \\ + \mathbf{B}_I^{bT} \mathbf{D}^{mbT} \mathbf{B}_K^m & + (\mathbf{B}_I^i + \mathbf{B}_I^{nl})^T \mathbf{D}^{mb} \mathbf{B}_K^b \\ + \mathbf{B}_I^{bT} \mathbf{D}^{mbT} (\mathbf{B}_K^i + \mathbf{B}_K^{nl}) & \end{bmatrix} + \mathbf{K}_{\sigma IK} \quad (41)$$

In Gl. (41) sind die nichtlinearen Terme durch  $\dots$  und die Terme die sich infolge des geschichteten Materialaufbaus ergeben durch  $\dots$  gekennzeichnet.

Um für die Diskretisierung möglichst variable Elementformulierungen zu erhalten wird eine sog. isoparametrische Formulierung gewählt.

Das isoparametrische Konzept bedeutet dabei, daß alle Feldgrößen, wie z.B. die Geometrie  $\mathbf{X}$  und das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$ , durch dieselben Ansatzfunktionen  $N_I$  im Element  $\Omega_e$  approximiert werden

$$\mathbf{x}^h = \sum_{\mathbf{I}=1}^{\text{nel}} N_{\mathbf{I}}(\xi, \eta) \mathbf{x}_{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{u}^h = \sum_{\mathbf{I}=1}^{\text{nel}} N_{\mathbf{I}}(\xi, \eta) \mathbf{v}_{\mathbf{I}}. \quad (42)$$

Für Kontinuumsprobleme und schubelastische Schalenprobleme ist eine wesentliche Anforderung an die Ansatzfunktionen  $N_I$  die  $C^0$  – Stetigkeit. Weiterhin sollten die Ansatzfunktionen  $N_I$  vollständige Polynome in  $x$  und  $y$  sein.

Unter den verschiedenen Möglichkeiten Ansatzfunktionen zu konstruieren, die die o.g. Voraussetzungen erfüllen, wird hier exemplarisch, das Konzept der Lagrangeschen Interpolation verfolgt, siehe z.B. Zienkiewicz, Taylor [1989]. Ein Beispiel für die Ansatzfunktionen eines 4-Knoten Scheiben- oder Plattenelementes sind die folgenden Funktionen

$$N_I = \frac{1}{2} (1 + \xi_I \xi) \frac{1}{2} (1 + \eta_I \eta). \quad (43)$$

Die Ansatzfunktionen sind in dem lokalen Koordinatensystem  $\xi, \eta$  definiert. Daher ist eine Transformation auf die globalen Koordinaten  $x$  und  $y$  notwendig, in denen die Schalentheorie formuliert wurde.

In der schwachen Formulierung des Gleichgewichtes, dem Prinzip der virtuellen Arbeiten (Gl. 9) werden die Ableitungen des Verschiebungsfeldes benötigt. Innerhalb des isoparametrischen Konzeptes können diese wie folgt berechnet werden

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e^h}{\partial X_A} = \sum_{I=1}^{\text{nel}} \frac{\partial N_I(\xi, \eta)}{\partial X_A} \mathbf{v}_I, \quad \mathbf{X}_A = \mathbf{x}, \mathbf{y}. \quad (44)$$

Hierin muß die Kettenregel benutzt werden, um die partiellen Ableitungen von  $N_I$  nach  $X_A$  zu bestimmen:

$$\begin{Bmatrix} N_{I,x} \\ N_{I,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}, \quad (45)$$

wobei  $\mathbf{J}$  die *Jacobi*-Matrix der Transformation zwischen  $d\xi, d\eta$  und  $dx, dy$  ist.

Bei der Berechnung des Residuums (Gl. 34) bzw. der tangentialen Steifigkeitsmatrix (Gl. 38) wird im Rahmen des isoparametrischen Konzeptes eine numerische Integration nach Gauss-Legendre durchgeführt. Hierbei werden die Matrizen an den Gauss-Punkten ausgewertet und anschließend werden die erhaltenen Ergebnisse summiert

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\mathbf{T}IK} &= \int_{\Omega_e} \mathbf{T}_{IK} \mathbf{d}\Omega_e = \int_{\xi=-1}^{+1} \int_{\eta=-1}^{+1} \mathbf{T}_{IK}(\xi, \eta) \det \mathbf{J}(\xi, \eta) \mathbf{d}\xi \mathbf{d}\eta \\ &= \sum_{p=1}^{p_{max}} \sum_{q=1}^{q_{max}} \mathbf{T}_{IK}(\xi_p, \eta_q) \det \mathbf{J}(\xi_p, \eta_q) \mathbf{W}_p \mathbf{W}_q \end{aligned} \quad (46)$$

In Gl. (46) ist  $\mathbf{T}_{IK}$  der Integrand,  $\xi_p, \eta_q$  sind die lokalen Koordinaten der Gauss-Punkte,  $W_p, W_q$  sind Wichtungsfaktoren und  $p_{max}$  bzw.  $q_{max}$  beschreiben die Integrationsordnung. Analog wird die numerische Integration des Residuums vorgenommen.

### 3.2 Bemerkungen zur Anwendbarkeit der Elemente

Werden alle Anteile der Steifigkeitsmatrizen exakt integriert, so erhält man bei dünnen Platten falsche, d.h. zu steife Ergebnisse. Dieser Effekt ist als 'Shear-Locking Effekt' in der Literatur bekannt. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Elementformulierung abzuändern, um bessere Ergebnisse zu erhalten. Hierzu zählen im Wesentlichen die Verwendung reduzierter Integrationstechniken mit 'Stabilisierung', die Verwendung selektiv-reduzierter Integrationstechniken sowie die Formulierung sog. 'Assumed Strain'-Elemente, bei denen Verzerrungsfelder auf Elementebene vorgegeben werden.

Der zunächst verwendete einfachste Weg sich Abhilfe zu verschaffen gelingt mit reduzierten bzw. selektiv reduzierten Integrationstechniken, siehe z.B. Zienkiewicz, Taylor, Too [1971], Hughes et.al. [1977,1978]. Diese Vorgehensweise wurde zunächst als 'Trick' bezeichnet, später konnte allerdings die Begründung über den Zusammenhang mit gemischten Elementen gezeigt werden, Malkus, Hughes [1978]. Der Gebrauch der reduzierten Integration erzeugt jedoch in einigen Fällen das weitere Problem eines Rangabfalles in der Steifigkeitsmatrix.

Tabelle 2 zeigt die Anzahl der Nulleigenwerte für schubelastische Plattenelemente in Abhängigkeit von der Integrationsregel. Dabei sind die Integrationsregeln U (reduzierte Integration aller Terme), S (vollständige Integration des Biegeterms, reduzierte Integration des Schubterms) und V (vollständige Integration aller Terme) berücksichtigt. Bei linearen Ansatzfunktionen ist eine 1x1 Integration reduziert während eine 2x2 Integration vollständig ist. Für quadratische Ansatzfunktionen sind Integrationen 2x2 bzw. 3x3 zu verwenden. Die Anzahl der Nulleigenwerte läßt sich aus einer Spektralanalyse der Elementsteifigkeitsmatrix gewinnen. Hierin sind die 3 möglichen Starrkörperverschiebungen enthalten, so daß die Anzahl der zusätzlichen Nulleigenwerte aus Tabelle 2 nach Abzug der 3 Starrkörper-Nulleigenwerte ersichtlich wird.

Anzahl Knoten am Element	Art der Ansatzfunktion	Integrationsart		
		U	S	V
4	linear	7	5	3
8	quadratisch(Serendipity)	4	3	3
9	quadratisch(Lagrange)	7	4	3
8/9	quadratisch('Heterosis')		3	3

Tabelle 2: Anzahl der Nulleigenwerte für schubelastische Plattenelemente in Abhängigkeit von der Integrationsregel.

Diese sog. 'Zero-Energy-Modes' werden nach ihrer charakteristischen Form auch 'Hourglass-Modes' genannt.

Als Beispiel seien die Modes eines reduziert integrierten 4 Knotenelementes auf quadratischem Grundriss mit x-y-Koordinatensystem in der Mitte angegeben:

Mode	w	$\beta_x$	$\beta_y$
w-Hourglass	xy	0	0
$\beta_x$ -Hourglass	0	xy	0
$\beta_y$ -Hourglass	0	0	xy
In-Plane-Twist	0	-y	x

Tabelle 3: 'Zero-Energy-Modes' des reduziert integrierten 4 Knotenelementes

Bei Verwendung der selektiven Integration verbleiben nur der w-Hourglass- und der In-Plane Twist Mode (vgl. auch Hughes et.al.[1978]. Dieses Element wird aufgrund seiner geringen Anzahl von Freiheitsgraden häufig eingesetzt, obwohl 2 Zero-Energy-Modes möglich sind. Das 9-Knoten Lagrange-Element enthält immer noch den w-Hourglass-Mode, so daß dieses Element keine grundsätzliche Abhilfe schafft. Das Vorhandensein von Zero-Energy-Modes muß in der praktischen Anwendung kein Nachteil sein, da vielfach die zusammengebaute Steifigkeitsmatrix positiv definit ist und somit Zero-Energy-Modes nicht global vorhanden sind. Die numerische Erfahrung (Hughes et. al. [1978]) zeigt, daß wenn die Zero-Energy-Modes in einem Element durch die Randbedingungen unterdrückt werden, dies auch für den Rest des FE- Netzes gilt.

Das 8-Knoten Serendipity-Element, welches in selektiv-reduzierter Integration einen korrekten Rangabfall hat, liefert bei Plattenproblemen im Vergleich zu den vorgenannten Elementen schlechtere Ergebnisse, so daß es keine Alternative darstellt.

Wird Wert auf einen korrekten Rangabfall gelegt, so bietet sich das sog. 'Heterosis'-Element, Hughes, Cohen [1978], an. Es beruht auf der Beobachtung, daß der wesentliche Zero-Energy-Mode der w-Hourglass-Mode ist. Dieser ist beim 8-Knoten Serendipity-Element nicht vorhanden. Daher läßt sich das 'Heterosis'-Element wie folgt konstruieren. Für die Drehfreiheitsgrade  $\beta_x$  und  $\beta_y$  werden die 9-Knoten-Lagrange-Ansatzfunktionen verwendet während für die Durchbiegung  $w$  die 8-Knoten-Serendipity-Ansatzfunktionen eingeführt werden. Es besitzt damit keine Zero-Energy-Modes, hat also einen korrekten Rang. Der Nachteil, daß sowohl Serendipity- als auch Lagrange-Ansatzfunktionen und -ableitungen zu bestimmen sind entfällt, wenn das Element hierarchisch formuliert wird. Numerische Untersuchungen zeigen, daß das 4-Knoten-Element mit selektiv-reduzierter Integration am wirtschaftlichsten eingesetzt werden kann, während das 'Heterosis'-Element am sichersten zu einer korrekten Lösung führt, siehe auch Hughes et al. [1978]. Vom Standpunkt der Effizienz betrachtet sind einheitlich integrierte Elemente vorteilhafter, da je Integrationsordnung unterschiedliche Stützstellen innerhalb der numerischen Integrationsprozedur zu verwenden sind. Damit müssen z.B. Biege- und Schubanteile bei selektiv-reduzierten Elementen getrennt integriert werden. Aus diesem Grund wurden eine Reihe von vollständig reduziert integrierten Elementen angegeben, deren nun vorhandene Zero-Energy-Modes durch sog. Stabilisierungsmatrizen 'kontrolliert' wurden, siehe z.B. Belytschko, Tsai [1983,1984], Wagner [1988] u.a.

Damit lautet z.B. die stabilisierte Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{\text{Ts}} = \mathbf{K}_{\text{Tur}} + \mathbf{K}_{\text{H}} \quad (47)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{Ts}} &= \text{stabilisierte tang. Steifigkeitsmatrix} \\ \mathbf{K}_{\text{Tur}} &= \text{vollständig reduziert integrierte tang. Steifigkeitsmatrix} \\ \mathbf{K}_{\text{H}} &= \text{Stabilisierungsmatrix} \end{aligned}$$

Diese Stabilisierungsmatrix kann wie folgt berechnet werden

$$\mathbf{K}_{\text{HIK}} = \sum_{\text{I}=1}^{\text{nel}} \sum_{\text{K}=1}^{\text{nel}} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_{\text{I}}^{\text{H}^T} \mathbf{D}^{\text{H}} \mathbf{B}_{\text{K}}^{\text{H}} \, d\Omega \quad (48)$$

Die Matrizen  $\mathbf{B}_I^H$  enthalten Ableitungen von Ansatzfunktionen, die durch Orthogonalitätsbedingungen bestimmt werden können. Die Matrix  $\mathbf{D}^H$  beschreibt das 'Materialgesetz' für die zugehörigen Hourglass-Spannungen und wird üblicherweise als Diagonalmatrix in der Form

$$\mathbf{D}^H = \begin{bmatrix} C_u & & & & \\ & C_u & & & \\ & & C_w & & \\ & & & C_\beta & \\ & & & & C_\beta \end{bmatrix} \quad (49)$$

angegeben. In dieser Matrix, die z.B. für Schalen zutrifft, sind die Parameter  $C_u, C_w$  und  $C_\beta$  zu wählen, wobei jedoch auf keine Ableitung zurückgegriffen werden kann. Im Einzelfall liefern diese Elemente sehr gute Ergebnisse, eine universelle Einsetzbarkeit erscheint jedoch fraglich.

Die Verwendung sog. 'Assumed Strain' Elemente beruht auf einer Erweiterung des Funktionals  $\pi$  mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatorenmethode in der Form

$$\pi_L = \pi + \int_{\Omega} \lambda_{13} (\bar{\gamma}_{\xi\zeta} - \gamma_{\xi\zeta}) d\Omega + \int_{\Omega} \lambda_{23} (\bar{\gamma}_{\eta\zeta} - \gamma_{\eta\zeta}) d\Omega. \quad (50)$$

Dabei sind  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  und  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$  vorgegebene Schubverzerrungen, die aus Polynomansätzen zusammengesetzt sind, siehe z.B. Huang, Hinton [1984]. Diese Elemente werden in den Biegetermen vollständig integriert, während die Schubterme in obiger Formulierung jeweils eigene Integrationsverfahren haben (hier z.B. 3x2 für  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  und 2x3 für  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$ ). Diese Elemente sind zuverlässig, benötigen aber aufgrund der o.g. verschiedenen Integrationsverfahren hohe Rechenzeiten im Vergleich zu reduziert integrierten Elementen.

Die vorliegenden Beispiele werden daher für dünne Schalen mit dem selektiv-reduziert integrierten 4-Knotenelement berechnet. Es erfolgt eine Beobachtung möglicher Zero-Energy-Modes durch globale Eigenwertuntersuchungen. Mäßig dicke Schalen werden mit dem vollständig integrierten 4-Knotenelement untersucht.

### 3.3 Nichtlineare Lösungsstrategien

Zur Behandlung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik existiert eine Vielzahl von Algorithmen und Lösungsverfahren. An dieser Stelle soll nur ein ausgewählter Algorithmus diskutiert werden. Für weitere Informationen sei z.B. auf Stein, Wagner, Wriggers [1989] verwiesen.

Im Rahmen der numerischen Behandlung von Strukturproblemen wird man in der Regel auf nichtlineare Gleichungssysteme in der Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (50)$$

geführt (siehe auch Gl. 36). An dieser Stelle soll zunächst davon ausgegangen werden, daß keine Instabilitätspunkte auftreten. Damit ist  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda)$  hinreichend oft in der Umgebung der untersuchten Stelle  $\mathbf{v}_i, \lambda_i$  differenzierbar. Die Gleichung (50) ist nichtlinear in den Knotenverschiebungen  $\mathbf{v}$ . Eine wichtige Lösungsmethode ist das sog. Newton-Raphson

Verfahren. Hierzu wird zur Berechnung des nächsten Gleichgewichtszustands die Gleichung (50) an einem bekannten Punkt  $\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda}$  in einer Taylorreihe entwickelt. Wird nach dem linearen Term abgebrochen und eine konsistente Linearisierung von  $\mathbf{G}$  verwendet, siehe Abschnitt 3.1, so läßt sich ein quadratisches Konvergenzverhalten in der Nähe der Gleichgewichtslösung nachweisen. Das Verfahren beruht auf einer Sequenz von Lösungen linearisierter Gleichungssysteme. Der Lösungsalgorithmus ist in Box 1 angegeben.

\* Setzen der Anfangswerte:  $i = 0, \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}.$

\* Iterationsschleife

- 1.) Verschiebungsinckremente:  $\mathbf{K}_T(\mathbf{v}_i) \Delta \mathbf{v}_i = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \bar{\lambda})$
- 2.) Neue Gesamtverschiebung:  $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_i$
- 3.) Konvergenzabfrage

$$\|\mathbf{G}(\mathbf{v}_{i+1}, \bar{\lambda})\| \quad \begin{cases} \leq \text{TOL} \longrightarrow \text{STOP} \\ > \text{TOL} \longrightarrow \text{Setze } i = i + 1, \text{ gehe zu 1.} \end{cases}$$

BOX 1 : Algorithmus für Newton-Verfahren

### 3.4 Direkte Berechnung von singulären Punkten

Im Hinblick auf die Beispielrechnungen sei an dieser Stelle kurz die direkte Berechnung von singulären Punkten skizziert. Das Auftreten singulärer Punkte in einer Lösungskurve  $\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda)$  kann durch die Untersuchung des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{K}_T - \omega \mathbf{1}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0} \tag{51}$$

gekennzeichnet werden, welches sich im singulären Punkt mit  $\omega = 0$  auch in der Form  $\mathbf{K}_T \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$  darstellen läßt. Die direkte Berechnung solcher singulären Punkten gelingt durch die Formulierung des folgenden erweiterten Systems

$$\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{v}, \lambda, \boldsymbol{\varphi}) = \{ \mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) \mathbf{K}_T(\mathbf{v}, \lambda) \boldsymbol{\varphi} \mathbf{l}(\boldsymbol{\varphi}) \} \tag{52}$$

mit einer Skalierungsfunktion für den Eigenvektor  $l(\boldsymbol{\varphi}) = \|\boldsymbol{\varphi}\| - 1 = 0$ .

Für die direkte Berechnung singulärer Punkte ist Gl. (51) konsistent zu linearisieren, so daß das folgende Newton-Verfahren verwendet werden kann

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{K}}_{Ti} \Delta \mathbf{w}_{i+1} &= -\widehat{\mathbf{G}}(\mathbf{w}_i) \\ \mathbf{w}_{i+1} &= \mathbf{w}_i + \Delta \mathbf{w}_{i+1} \end{aligned} \tag{53}$$

mit  $\widehat{\mathbf{K}}_{Ti} = \left. \frac{\partial \widehat{\mathbf{G}}}{\partial \mathbf{w}} \right|_i$  und  $\mathbf{w} = \{ \mathbf{v} \lambda \boldsymbol{\varphi} \}$

Ist ein singulärer Punkt gefunden, so kann die Art dieses Punktes mit Hilfe des Kriteriums

$$\boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{P} = \begin{cases} = 0 \dots \text{Verzweigungspunkt} \\ \neq 0 \dots \text{Durchschlagpunkt} \end{cases} \tag{54}$$

bestimmt werden. Eine ausführlichere Beschreibung kann der Arbeit Wriggers, Wagner, Miehe [1988] entnommen werden.

## 4 Beispiele

Das entwickelte geschichtete flache Schalenelement wurde in ein am IBNM vorhandenes Finite-Element-Programmpaket implementiert. Die Beispiele wurden auf einer Workstation Apollo DN 3000 gerechnet.

### 4.1 Quadratplatte unter Gleichlast

Als erstes (lineares) Beispiel wird eine naviergelagerte geschichtete Quadratplatte unter Gleichlast untersucht. Aufgrund der vorhandenen Symmetrie ('Cross-Ply'-Anordnung der Schichten) wird nur 1/4 der Platte berechnet. System und Materialdaten sind in Bild 3 angegeben. Das Beispiel ist Pinsky, Jasti [1989] entnommen.

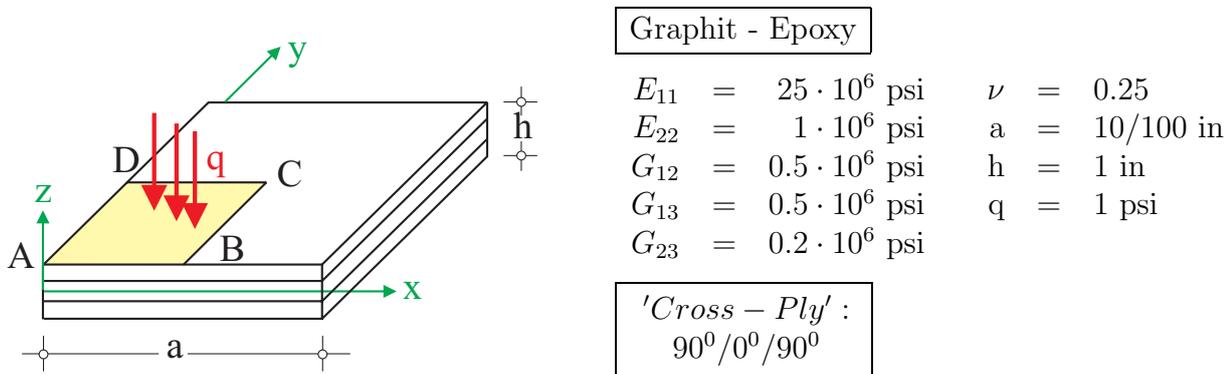


Bild 3: Quadratplatte unter Gleichlast

a/h	Lösung	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{22}$	$\bar{\sigma}_{12}$	$\bar{\sigma}_{13}$	$\bar{\sigma}_{23}$
a/h = 10	analytisch	10.219	0.772	0.307	0.052	0.768	0.329
	FEM 8x8 Netz	9.863	0.765	0.316	0.046	0.603	0.228
a/h = 100	analytisch	6.697	0.807	0.193	0.043	0.784	0.296
	FEM 8x8 Netz	6.314	0.803	0.194	0.038	0.621	0.204

Tabelle 4: Ergebnisse für eine Quadratplatte unter Gleichlast

Alle angegebenen Werte sind wie folgt skaliert

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{h^3 E_{22} 10^3}{q a^4} w(a/2, a/2) \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{q} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \sigma_{11}(a/2, a/2) & \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{q} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \sigma_{22}(a/2, a/2) & \bar{\sigma}_{12} &= \frac{1}{q} \left(\frac{h}{a}\right)^2 \sigma_{12}(0, 0) \\ \bar{\sigma}_{13} &= \frac{h}{q a} \sigma_{13}(0, a/2) & \bar{\sigma}_{23} &= \frac{h}{q a} \sigma_{23}(a/2, 0) \end{aligned}$$

Bei der Untersuchung wurde jeweils der in z-Richtung auftretende Maximalwert herangezogen.

Tabelle 4 zeigt, daß die FEM-Lösung für das o.g. Problem, welches aufgrund der speziellen Geometrie und Belastung auch analytisch lösbar ist, mit dieser analytischen Lösung in guter Übereinstimmung ist.

## 4.2 Zylindersegment unter Einzellast

Das zweite Beispiel ist als Beispiel zum Test der nichtlinearen Anteile in der Schalenformulierung anzusehen. Gleichzeitig zeigt es den Einfluß der Schichtfolge auf das Tragverhalten des untersuchten Systems, welches in Bild 4 dargestellt ist. In Bild 5 sind Lastverschiebungskurven für verschiedene Schichtanordnungen angegeben. Die Lösung  $0^0/90^0/0^0$  liefert die steifste geschichtete Lösung, da die Randfasern in Haupttragrichtung zeigen. Entsprechend weich ist die Lösung für eine Schichtfolge  $90^0/0^0/90^0$ , da nun die Randfasern in Nebentragrichtung zeigen. Ähnliche Ergebnisse erhält man auch für die Schichtung  $+45^0/-45^0$ , wobei hier mit dem vollen System zu rechnen ist, da aufgrund der schiefen Faserlage und der Schalenkrümmung keine Symmetrieachsen mehr vorliegen. Alle Ergebnisse stimmen mit Angaben aus der Literatur, z. B. Saigal, Kapania, Yang [1986], Yeom, Lee [1989], sehr gut überein, so daß auf eine Eintragung der Referenzlösungen in Bild 4 verzichtet wurde. Die Berechnung erfolgte mit einem  $4 \times 4$  Finite-Element-Netz für  $1/4$  der Schale. Aufgrund der konsistenten Linearisierung sind je Inkrement der nichtlinearen Rechnung nur wenige Iterationsschritte (3–5) notwendig.

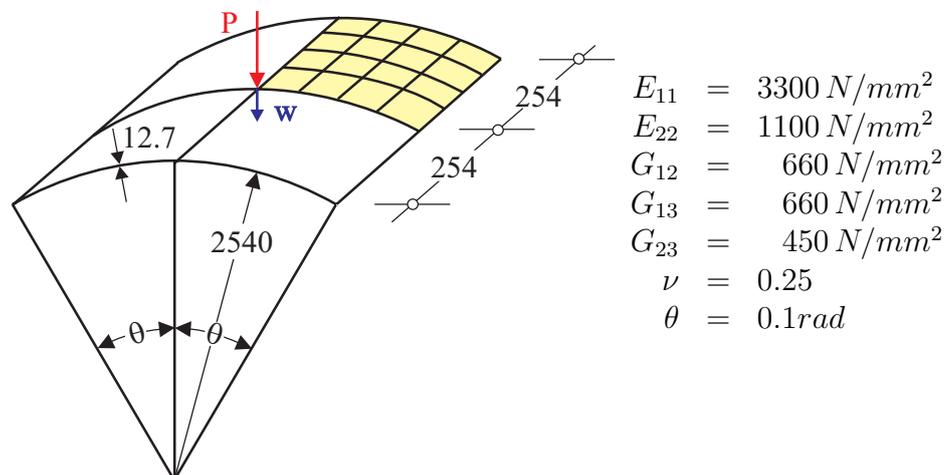


Bild 4: Zylindersegment unter Einzellast

Im Folgenden sind in Bild 6 exemplarisch für den Schichtungsfall  $+45^0/-45^0$  die Spannungen  $\sigma_x$  in Haupttragrichtung am oberen und unteren Rand der einzelnen Schichten angegeben. Das einfache Beispiel zeigt schon den bei anisotropen Materialien sehr komplexen Verlauf der Spannungen. Während im oberen und unteren Randbereich die Spannungen den 'isotropen Vorstellungen' entsprechen, sind die Verteilungen in Schalenmitte sehr stark von den Schichtungsverhältnissen abhängig.

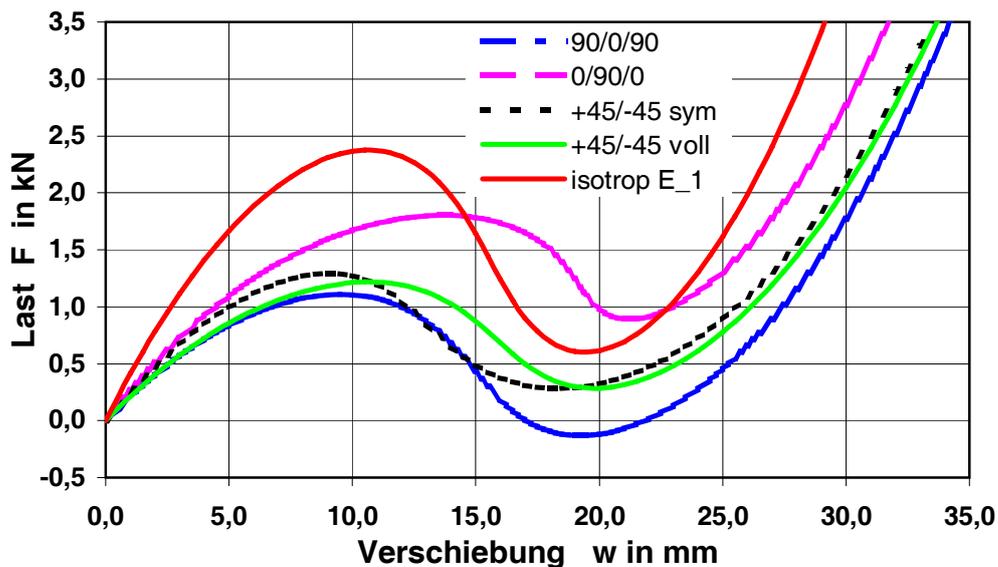
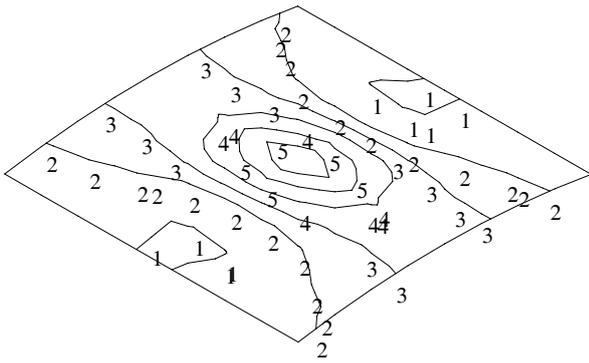


Bild 5: Tragverhalten eines Zylindersegmentes <sup>1</sup> )

### 4.3 Zylindersegment unter Einzellast

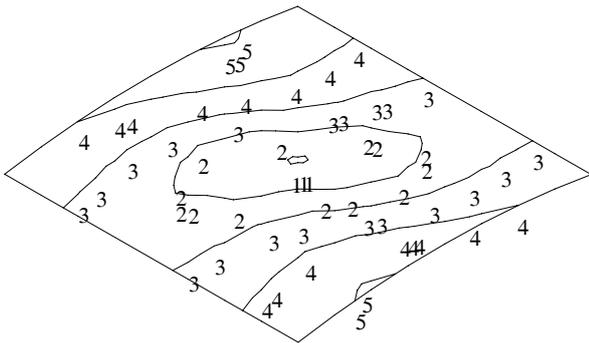
Dieses Beispiel entspricht dem in Abschnitt 4.2 untersuchten Zylindersegment mit der Schichtfolge  $90^0/0^0/90^0$ . Mit Bezug auf Abschnitt 3.4 soll die direkte Berechnung des Durchschlagpunktes demonstriert werden. Die Lage dieses Durchschlagpunktes kann Bild 7 entnommen werden. In Tabelle 5 ist in den ersten 4 Spalten das Iterationsverhalten des erweiterten Systems, siehe Gl. (52), bei der Berechnung des Durchschlagpunktes zu sehen. Alternativ ist in Spalte 5 und 6 die Lösung mittels der häufig verwendeten linearen Beulanalyse angegeben, welche aufgrund des stark nichtlinearen Tragverhaltens bezüglich der Durchschlaglast weit von der tatsächlichen Lösung abweicht.

<sup>1</sup>Neuberechnung mit der Version 2007 des Elementes!



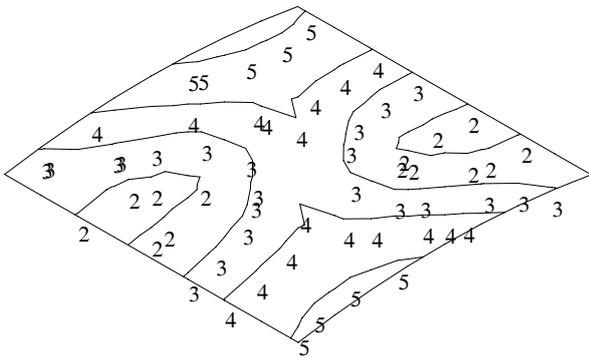
1	-0.0020
2	-0.0010
3	+0.0000
4	+0.0010
5	+0.0020
6	+0.0030

Spannung  $\sigma_x$  in  $kN/mm^2$  in der unteren Schicht ( $z = -6.3$  mm)



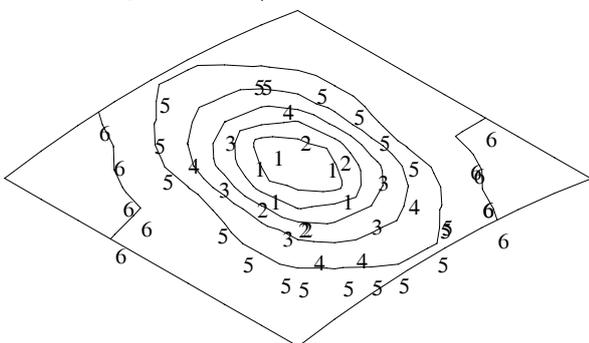
1	-0.0025
2	-0.0020
3	-0.0015
4	-0.0010
5	-0.0005

Spannung  $\sigma_x$  in  $kN/mm^2$  in der unteren Schicht ( $z = -0.0$  mm)



1	-0.0025
2	-0.0020
3	-0.0015
4	-0.0010
5	-0.0005

Spannung  $\sigma_x$  in  $kN/mm^2$  in der oberen Schicht ( $z = +0.0$  mm)



1	-0.0060
2	-0.0050
3	-0.0040
4	-0.0030
5	-0.0020
6	-0.0010

Spannung  $\sigma_x$  in  $kN/mm^2$  in der oberen Schicht ( $z = +6.3$  mm)

Bild 6: Verlauf der Spannungen  $\sigma_x$  über die Schalendicke <sup>2</sup>

<sup>2</sup>Neuberechnung mit der Version 2007 des Elementes!

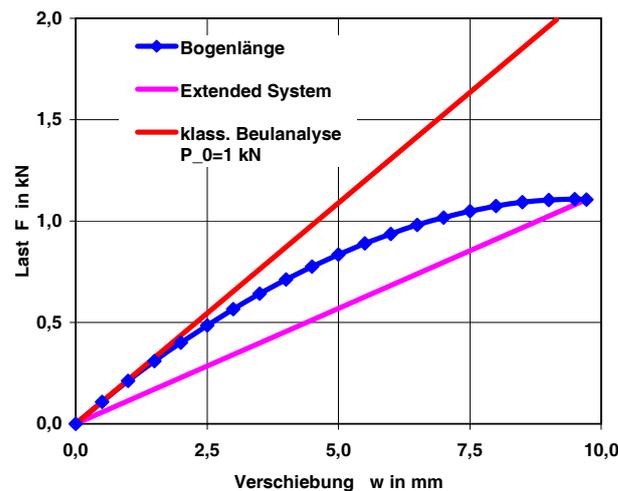


Bild 7: Berechnung des Durchschlagpunktes

It.	$\ G\ $	Last P [kN]	Versch. w [mm]	Last P [kN]	Versch. w [mm]
1	$1.25 \cdot 10^2$	1.981	9.062	1.993	9.152
2	$1.82 \cdot 10^0$	1.189	9.741		
3	$0.87 \cdot 10^{-1}$	1.134	9.728		
4	$0.77 \cdot 10^{-3}$	1.132	9.717		
5	$0.28 \cdot 10^{-7}$	1.132	9.717		

Tabelle 5: Berechnung des Durchschlagpunktes

## 5 Literatur

- \* Bathe, K.-J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1982).
- \* Belytschko, T., Tsay, C. S.: A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature, Int. J. Num. Meth. Engng., **19** (1983), 405–419.
- \* Belytschko, T., Tsay, C. S., Lin, J. I.: Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., **42** (1984), 225–251.
- \* Bergmann, H. W. et.al.: Mechanical Properties and Damage Mechanisms of Carbon-fiber-Reinforced Composites, Tension Loading, Institut f. Strukturmechanik, DLR Braunschweig, DVFLR-FB 85-45 (1985).
- \* Bergmann, H. W. et.al.: Mechanical Properties and Damage Mechanisms of Carbon-fiber-Reinforced Composites, Compression Loading, Institut f. Strukturmechanik, DLR Braunschweig, DVFLR-FB 88-41 (1988).

- \* Calcote, L.R.: The Analysis of Laminated Composite Structures, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1969).
- \* Huang, H. C., Hinton, E.: A nine Node Lagrangian Mindlin Plate Element with Enhanced Shear Interpolation, *Eng. Comp.* **1** (1984), 369–379.
- \* Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Kanoknukulchai, W.: A simple and efficient finite element for plate bending, *Int. J. Num. Meth.Engng.* **11** (1977), 1529–1543.
- \* Hughes, T.J.R., Cohen, M., Haroun, M.: Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates, *Nucl. Engng. Des.* **46** (1978), 203–222.
- \* Hughes, T.J.R., Cohen, M.: The heterosis finite element for plate bending, *Comp. & Structures* **9** (1978), 445–450.
- \* Jones, R. M.: Mechanics of Composite Materials, Scripta Book Co., Mc Graw-Hill Book Co. New York (1975).
- \* Jun, S. M., Hong, C. S.: Buckling Behavior of Laminated Composite Cylindrical Panels under Axial Compression, *Comp. & Structures* **29** (1988), p. 479–490.
- \* Lardeur, P., Batoz, J. L.: Composite Plate Analysis using a new Discrete Shear Triangular Finite Element, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **27** (1989), p. 343–359.
- \* Malkus, D.S., Hughes, T.R.J.: Mixed Finite Element Methods - Reduced and Selective Integration Techniques: a Unification of Concepts. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **15** (1978) 63–81.
- \* Marguerre, K.: Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung. *Proc. 5.th Int. Congr. Appl. Mech. Cambridge/ Mass., J. Wiley* (1939), 93–101.
- \* Niederstedt, G.: Leichtbau mit kohlenfaserverstärkten Kunststoffen, *Kontakt & Studium Band 167, Expert-Verlag, Sindelfingen* (1985).
- \* Pinsky, P. M., Jasti, R. V.: A mixed Finite Element for Laminated Composite Plates based on the Use of Bubble Functions, *Eng. Comp.* **6** (1989), 316–330.
- \* Puchtta, N. S., Reddy, J. N.: A Mixed Shear Flexible Element for the Analysis of Laminated Plates, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **44** (1984), p. 213–227.
- \* Puck, A.: Zur Beanspruchung und Verformung von GFK-Mehrschichtverbund-Bau-elementen - Teil 1: Grundlagen der Spannungs- und Verformungsanalyse, *Kunststoffe Bd. 57* (1967), p. 284–293.
- \* Puck, A.: Festigkeitsberechnung an Glasfaser/Kunststoff-Laminaten bei zusammengesetzter Beanspruchung – Bruchhypothesen und schichtenweise Bruchanalyse, *Kunststoffe Bd. 59* (1969), p.780–787.
- \* Reddy, J. N.: On Refined Computational Models of Composite Laminates, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **27** (1989), p. 361–382.

- \* Saigal, S., Kapania, R. K., Yang, T. Y.: Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of imperfect Laminated Shells, *J. Composite Materials* **20** (1986), p. 197–214.
- \* Stein, E., Wagner, W., Wriggers, P.: Grundlagen nichtlinearer Berechnungsverfahren in der Strukturmechanik, in: *Nichtlineare Berechnungen im konstruktiven Ingenieurbau*, ed. E. Stein, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1988, 1–53.
- \* Tsai, W. S., Hahn, H. T.: *Introduction to Composite Materials*, Technomic Lancaster, Pennsylvania 17604 (1985).
- \* Tsai, W. S.: *Composites Design, Think Composites*, Dayton (1988).
- \* Wagner, W.: Zur Formulierung eines Zylinderschalenelementes mit vollständig reduzierter Integration, *ZAMM*, **68** (1988), 5, T 430–T 433.
- \* Whitney, J. M.: Bending–Extensional Coupling in Laminated Plates under Transverse Loading, *J. Composite Materials* **3** (1969), p. 20–28.
- \* Wriggers, P., Wagner, W., Miehe, C.: A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **70** (1988), pp 329–347.
- \* Yeom, C. H., Lee, S. W.: An Assumed Strain Finite Element Model for Large Deflection Composite Shells, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **28** (1989), p. 1749–1768.
- \* Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Too, J.M.: Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells. *Int. J. Num. Meth. Engng.* **3** (1971) 275–290.
- \* Zienkiewicz O. C., Taylor, R. L.: *The Finite Element Method*, 4. Aufl., Mc Graw–Hill, London, 1989.