

**FEM für Flächentragwerke -
Beispiele zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit**

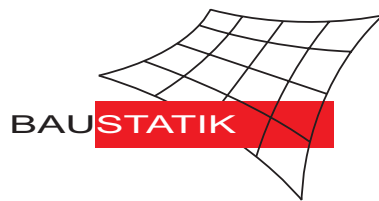
W. Wagner, F. Gruttmann

Mitteilung 1(2005)

**FEM für Flächentragwerke -
Beispiele zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit**

W. Wagner, F. Gruttmann

Mitteilung 1(2005)



© Prof. Dr.-Ing. W. Wagner Telefon: (0721) 608-2280
Institut für Baustatik Telefax: (0721) 608-6015
Universität Karlsruhe E-mail: bs@uni-karlsruhe.de
Postfach 6980 Internet: <http://www.bs.uni-karlsruhe.de>
76128 Karlsruhe

FEM für Flächentragwerke - Beispiele zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit

Werner Wagner¹, Friedrich Gruttmann²

¹Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)

²Institut für Werkstoffe und Mechanik im Bauwesen, TU Darmstadt

Zusammenfassung: In diesem Beitrag werden einige Hinweise zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit von Scheiben- und Plattenelementen in FE-Programmen vorgestellt. An ausgewählten Beispielen werden die Prüfung des korrekten Ranges der Elementmatrizen, die Beschreibung konstanter Verzerrungszustände, der Einfluss von Netzverzerrungen sowie das Verhalten von Scheibenelementen unter Biegung aufgezeigt.

1 EINLEITUNG

Bei der Verwendung von (kommerziellen) Programmsystemen ist dem Anwender in der Regel wenig über die verwendeten Elemente, deren Theorie, Formulierung und Einbau in das FE-Programm bekannt. Auch in der Beratung über eine Hotline kann hierzu oft keine detaillierte Information erhalten werden. Da die Formulierung effizienter Scheiben- und Plattenelemente ungleich schwieriger als die Entwicklung von Stabelementen ist, werden einige charakteristische Testbeispiele vorgestellt, um als Anwender die Qualität und Brauchbarkeit der implementierten Elemente einschätzen zu können. Die dabei verwendeten Zahlenwerte sind unwesentlich und größtenteils historisch bedingt.

2 VORBEMERKUNGEN ZU STABTRAGWERKEN

FE-Formulierungen sind in der Regel Näherungsverfahren. Durch Multiplikation der statischen Feldgleichungen (Gleichgewichtsbedingungen) mit virtuellen Verschiebungen und anschließende Integration über das zu untersuchende Gebiet entsteht die sogenannte schwache Form des Gleichgewichts, in der Statik auch als Prinzip der virtuellen Arbeit bekannt. Die damit verbundene Näherungscharakteristik wird aus der Tatsache klar, dass die virtuellen Verschiebungen nur die wesentlichen (geometrischen) nicht aber die restlichen (statischen) Randbedingungen erfüllen müssen.

Beispiel: Für den ebenen Biegestab (Bernoulli-Theorie) sind die Randbedingungen für Verschiebung und Verdrehung w und w' einzuhalten nicht aber diejenigen für Moment und Querkraft $w'' \sim M$ und $w''' \sim Q$.

Damit würde es beispielsweise möglich sein, einen Balken auf zwei Stützen unter Gleichlast mit einem Element und einem quadratischen Verschiebungsansatz zu berechnen. Während die Verschiebung w relativ gut berechnet wird, folgt daraus für das Biegemoment $M = -EIw'' = \text{constant}(!)$ und für die Querkraft $Q = 0(!)$, so dass diese Näherungslösung aus statischer Sicht sicher nicht brauchbar ist.

Die in der Finite-Element-Methode verwendeten linearen (Dehnstab, Fachwerkstab) und kubischen (Biegestab) Ansatzfunktionen haben jedoch die Eigenschaft, dass sie die homogene DGL des jeweiligen Problems $EAu'' = 0$ bzw. $EIw'''' = 0$ erfüllen. Somit werden bei konstanten Dehn- und Biegesteifigkeiten an den Knoten exakte Verschiebungen und Knotenkräfte berechnet. Letztere sind bei diesen Tragwerken, bis auf das Vorzeichen, identisch mit den Knotenschnittgrößen. Im Elementinneren können die Schnittgrößen aus den lokalen Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden. Damit liefert die FEM exakte Ergebnisse im Rahmen der gewählten mechanischen Theorie ("Stab", Bernoulli-Theorie, Stoffgesetz, Lagerungen, ...) Ausnahmen sind z.B. Träger mit veränderlicher Höhe/Breite, z.B. Vouten, elastisch gebettete Tragwerke, wo durch Wahl mehrerer Elemente eine ausreichende Genauigkeit erzielbar ist.

3 FLÄCHENTRAGWERKE

Bei Flächentragwerken ist die Situation grundsätzlich anders. Hier erfüllen die Ansätze nicht mehr uneingeschränkt die homogene DGL. (z.B. $\Delta\Delta w = 0$ bei Platten). Ebenso gibt es Probleme mit der Wahl der Ansatzparameter und der Erfüllung der Übergangsbedingungen an den Elementgrenzen. Im Gegensatz zu Stabtragwerken können nun die Schnittgrößen auch nicht mehr aus den Knotenkräften ermittelt werden. Als Beispiel sei ein Scheibentragwerk mit den Knotenkräften F_x, F_y und den Schnittgrößen n_x, n_y, n_{xy} genannt. Hier müssen diese nun aus dem Stoffgesetz (Verschiebungsmethode) berechnet werden. Im Gegensatz zu den Stabtragwerken kommt der Näherungscharakter der FE-Methode hier voll zum Tragen. Nunmehr werden die Ergebnisse stark beeinflusst durch die Wahl der Diskretisierung (Element-Vernetzung), durch die Wahl des zu verwendeten Elementtyps und auch die verwendete Theorie (z.B. Kirchhoff-Theorie oder Reissner-Mindlin Theorie). Dies stellt erheblich höhere Anforderungen an die FE-Kenntnisse des Programmanwenders, insbesondere da Ergebnisse in der Regel immer produzierbar sind. Die kritische Auseinandersetzung mit den FE-Ergebnissen und die anschauliche Kontrolle durch einfache Stabmodelle sind daher unabdingbar bei der Anwendung von FE-Programmen für Flächentragwerke. Darüberhinaus muss aber auch die Leistungsfähigkeit des verwendeten Programmes bzw. seiner Elemente bekannt sein. Da die theoretischen Hintergründe der Elementformulierungen nicht bekannt oder nur eingeschränkt dokumentiert sind, bleibt in der Regel hier nur der Weg über die Diskussion aussagefähiger Beispiele. Nachfolgend werden einige Probleme bei der FE-Formulierung sowie zugehörige Testbeispiele diskutiert.

3.1 Netzdichte

Bei der Bestimmung der erforderlichen Dichte des FE-Netzes kann auf eigene Erfahrungswerte zurückgegriffen werden. Systematische Hilfen findet man z.B. in Werkle [9] oder Rom-

bach [10]. Oft werden auch durch die verwendeten Programmsysteme Vorschläge bei der Netzgenerierung gemacht. Eine Vorgabe, dass ein Element "wenn möglich 0.5×0.5 Meter gross sein muss, um genaue Ergebnisse zu erhalten" ist dabei jedoch unsinnig. Im Zweifelsfall lässt sich die Konvergenz der Lösung gegen einen Endwert leicht durch zwei aufeinander folgende Rechnungen mit unterschiedlich feinen Netzen überprüfen. Eine übliche Verfeinerung ist dabei etwa die Viertelung jedes Elementes. Treten keine Änderungen mehr auf, ist die genaue Lösung erreicht. Treten lokal noch größere Änderungen auf, ist zu untersuchen, ob es sich um Singularitäten handelt.

3.2 Test an analytischen Lösungen

Die Leistungsfähigkeit der verwendeten Elementtypen kann zunächst an einfachen Beispielen getestet werden, für die analytische Lösungen vorliegen. Hierbei ist jedoch darauf zu achten, dass in den Beispielen häufig vereinfachende Annahmen getroffen wurden. Diese betreffen Material, Geometrie und Belastung. Oft können z.B. Randbedingungen auf einem Rand nur in integraler Weise erfüllt werden. Meistens werden zur Lösung Reihenansätze verwendet, so dass die angegebenen Lösungen auch von der Anzahl der ausgewerteten Reihenglieder abhängt.

Bekannte analytische Beispiele sind, siehe z.B. [2], [4], [7]:

Scheiben

Scheibe mit Loch
 Kreisscheibe
 Kreisringscheibe
 ...
 ...

Platten

Quadratplatte naviergelagert/eingespannt
 Quadratplatte auf Einzelstützen
 Kreisplatte
 Kreisringplatte
 ...

Beispiel: Quadratplatte unter Gleichlast

In diesem Beispiel wird das Konvergenzverhalten zweier Elementtypen am Beispiel einer naviergelagerten Quadratplatte unter Gleichlast untersucht, siehe Abbildung 1. Aufgrund der Symmetrie wird nur ein Viertel der Platte diskretisiert.

$a = 10$
 $h = 0.1$
 $q = 1$
 $E = 1092000$
 $\nu = 0.3$

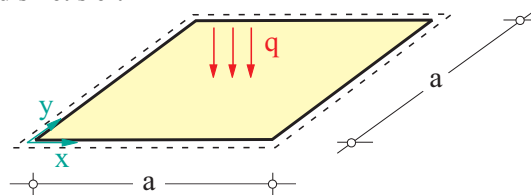


Abbildung 1: Quadratplatte unter Gleichlast

Die Reihenlösung im Rahmen der Kirchhoff-Theorie liefert bei 15 Reihengliedern für die Durchbiegung $w(a/2, a/2) = 0.40623$ und für das Moment $m_x(a/2, a/2) = 4.787$, siehe z.B. [7]. Ergebnisse für verschiedene Netzdichten sind in Tabelle 1 angegeben. Dabei werden exemplarisch das "Diskrete-Kirchhoff-Element (DKQ) [1] und das Bathe/Dvorkin-Element [3] mit der analytischen Lösung verglichen. Zur Erzwingung der Kirchhoff-Lösung wurde

in dem Schubelastischen B/D–Element ein Schubkorrekturfaktor von $\kappa = 1000$ verwendet. Deutlich erkennbar ist das schlechtere Konvergenzverhalten der Schnittgrößen.

Tabelle 1: Konvergenzverhalten für Durchbiegung und Biegemoment m_x in Plattenmitte

$w(a/2, a/2)$	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32
DKQ[1]	0.37903	0.40458	0.40600	0.40619	0.40622	0.40623
B/D ($\kappa = 1000$)[3]	0.31888	0.39690	0.40414	0.40572	0.40611	0.40621
analytisch						0.40623

$m_x(a/2, a/2)$	1×1	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32
DKQ[1]	2.628	4.294	4.667	4.758	4.781	4.787
B/D ($\kappa = 1000$)[3]	2.211	4.307	4.672	4.759	4.781	4.787
analytisch						4.787

3.3 Test des korrekten Ranges der Elementmatrizen

Die in der FE–Methode verwendeten Elemente müssen einen korrekten Rang besitzen. Dies lässt sich durch eine Eigenwertanalyse der Elementsteifigkeitsmatrix leicht über die Anzahl der Null–Eigenwerte überprüfen. Je möglicher Starrkörperbewegung muss sich ein Null–Eigenwert ergeben. Die zugehörigen Eigenvektoren beschreiben die Starrkörperbewegungen des Tragwerkes.

Beispiel: Punktgestützte Platte unter Gleichlast

Hinweise für einen korrekten Rang der Elementmatrizen kann man auch indirekt an einem 'kritischen Beispiel', z.B. einer punktgestützten Platte mit der Seitenlänge $2a$ unter Gleichlast, siehe Abbildung 2, erhalten. Ein Näherungsansatz gemäß [5] lautet

$$w(x, y) = c_1 + c_2x^2 + c_3y^2 + c_4x^4 + c_5x^2y^2 + c_6y^4, \quad (1)$$

wobei der Ursprung des Koordinatensystems in Plattenmitte liegt. Dieser Ansatz erfüllt die Randbedingung $M = 0$ auf dem Rand nur in integraler Weise. Die anderen Randbedingungen sowie die DGL werden exakt erfüllt. Nach Bestimmung der Konstanten erhält man für $y = 0$ eine approximierte Kirchhoff–Lösung

$$w(x, y = 0) = \frac{qa^4}{2Eh^3} \left[11 - 6\nu - \nu^2 + (-5 + 4\nu + \nu^2) \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{\nu}{2} - \frac{\nu^2}{2}\right) \left(\frac{x}{a}\right)^4 \right]. \quad (2)$$

Die Verschiebungen $w(x, y = 0)$ für verschiedene Elemente sind unter Verwendung eines 8×8 Netzes in Abbildung 3 dargestellt. Aufgrund der näherungsweise Erfüllung der Randbedingung für M am freien Rand gibt es keine Übereinstimmung zwischen analytischer Lösung und FEM–Lösung mit dem DKQ–Element. Weiterhin ist eine unbrauchbare oszillierende Lösung eingetragen, die bei Verwendung eines Elementes mit weiteren (unzulässigen) Null–Eigenwerten entsteht. Plots der verformten Systeme sind in einer Perspektive in Abbildung 4 dargestellt.

$$\begin{aligned}
 a &= 12 \\
 h &= 0.375 \\
 q &= 0.03125 \\
 E &= 430000 \\
 \nu &= 0.38 \\
 \rho &= 0.001
 \end{aligned}$$

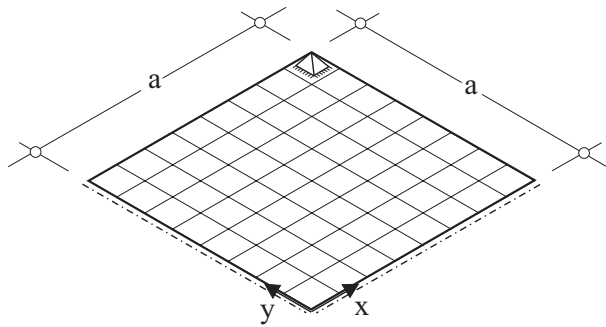


Abbildung 2: Punktgestützte Platte unter Gleichlast

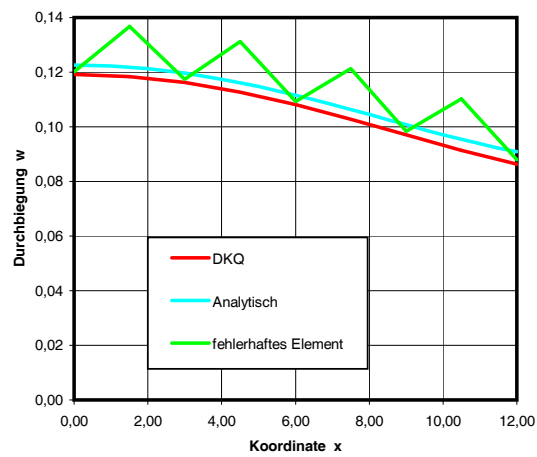


Abbildung 3: Durchbiegung $w(x, y = 0)$, analytische sowie 2 verschiedene FE-Lösungen

3.4 Patchtest

Ein wichtiger Test zur Sicherung des Konvergenzverhaltens von finiten Elementen ist der sog. Patch-Test, siehe z.B. [8]. Hierbei wird ein beliebiger "Patch" (Flecken) von Elementen mit mindestens einem Innenknoten als System gewählt. Es wird eine äußere Last so auf das System aufgebracht, dass konstante Verzerrungen bzw. Spannungen entstehen. Dies ist für jeden verwendeten Elementtyp nachzuweisen.

Beispiel: Scheiben

Zwei einfache Beispiele sind nachfolgend angegeben und mit einem isoparametrischen 4-Knoten-Scheibenelement berechnet worden, siehe Abbildungen 5 and 6.

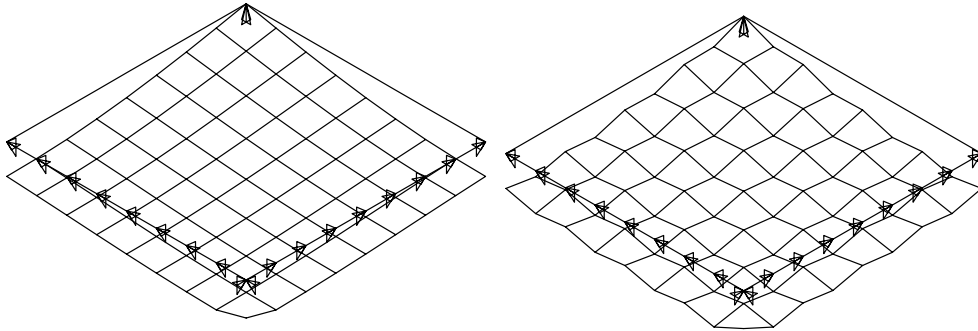


Abbildung 4: Verformte Systeme mit DKQ-Element bzw. fehlerhaftem Element

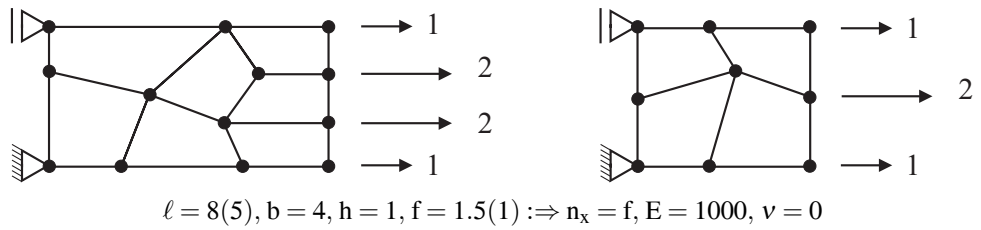


Abbildung 5: Beispiele zum Scheiben-Patchtest

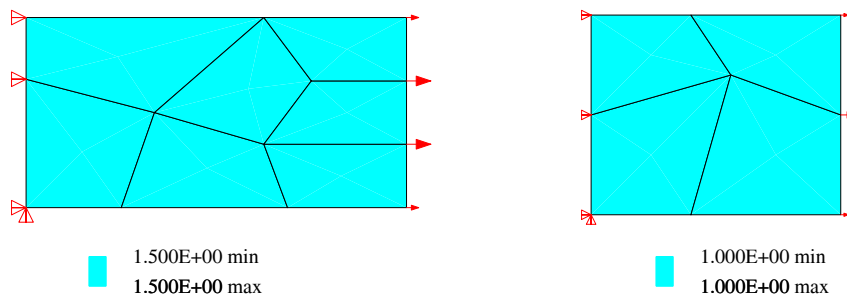


Abbildung 6: Normalkraftverteilung n_x im Patchtest

Beispiel: Platte

Als Patchtest für ein Platten­tragwerk kann die folgende rechteckige Platte betrachtet werden. Diese hat die Länge a und die Breite b , ist an drei Ecken punktgestützt gelagert und an der vierten Ecke durch eine Einzellast belastet. Darüberhinaus wirken weitere äußere Momente, siehe Abbildung 7. Die Lösung kann analytisch ermittelt werden. Die vertikale Durchbiegung von Knoten 1 ist $w_1 = 12.48$ und die Biegemomente $m_x = m_y = m_{xy} = 1.0$ sind konstant über die gesamte Platte, siehe Abbildung 8.

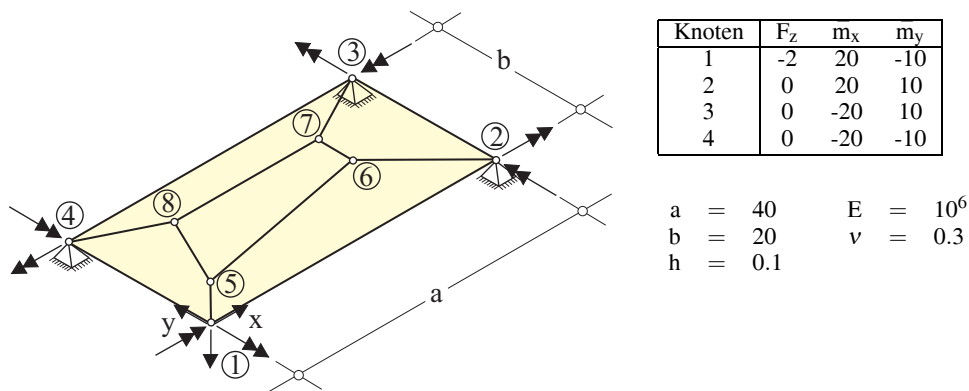


Abbildung 7: Beispiel zum Platten-Patchtest

3.5 Test des Einflusses von Netzverzerrungen

Netzverzerrungen, wie sie insbesondere durch den Einsatz von automatischen Vernetzern entstehen, führen zu einer näherungsweise Integration in den entsprechenden Elementmatrizen. Die Abhängigkeit lässt sich z.B. mit nachfolgendem Beispiel einfach untersuchen.

Beispiel: Eingespannte Quadratplatte unter Einzellast

Die Geometrie- und Materialdaten finden sich in Abbildung 9. Das gewählte FE-Netz besteht aus 2×2 Elementen für ein Viertel der Platte unter Ausnutzung der Symmetrie. Durch das Verschieben des inneren Knotens mit $0 < s < 10$ in x - and y -Richtung wird der Einfluss der Netzverzerrung getestet. Die analytische Kirchhoff-Lösung für die Mittendurchbiegung lautet $w = 0.0056 Fa^2/K = 1$, siehe z.B. [7]. Die Abhängigkeit zweier Elemente vom Verzerrungsparameter s ist in Abbildung 10 dargestellt. Das DKQ-Element [1] verhält sich relativ insensitive, liefert aber eine zu weiche Lösung für das untersuchte grobe Netz. Das andere getestete Element, das Bathe/Dvorkin-Element [3] zeigt bei großen Verzerrungen stärkere Abweichungen um bis zu 24 % und ist insgesamt zu steif. Ein Konturplot der Durchbiegungen für einen Verzerrungsparameter von $s = 10$ ist in Abbildung 11 dargestellt.

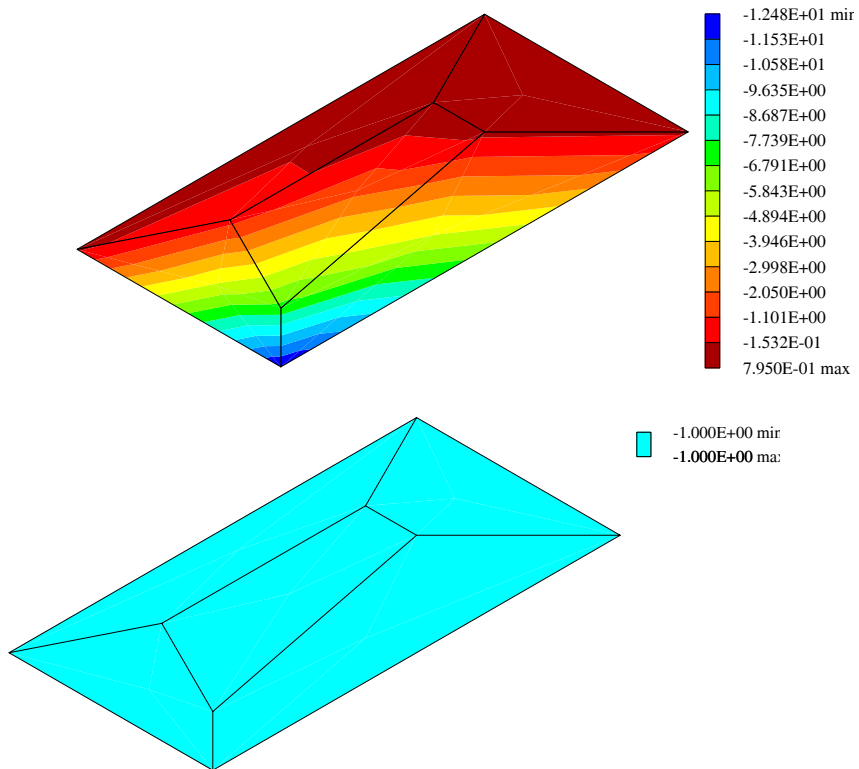


Abbildung 8: Durchbiegung w und Moment m_x bei Verwendung von DKQ-Elementen [1]

$$\begin{aligned}
 a &= 100 \\
 h &= 1 \\
 F &= 16.3527 \\
 E &= 10000 \\
 \nu &= 0.3 \\
 K &= Eh^3/12(1 - \nu^2)
 \end{aligned}$$

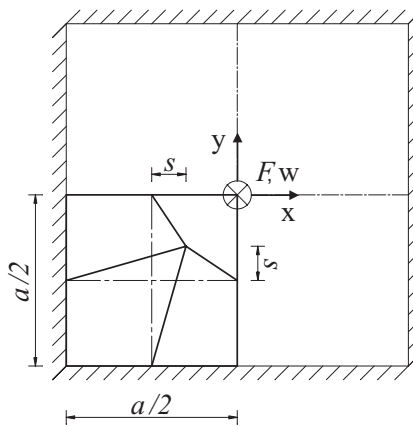


Abbildung 9: Verzerrung des FE-Netzes für eine eingespannte Platte

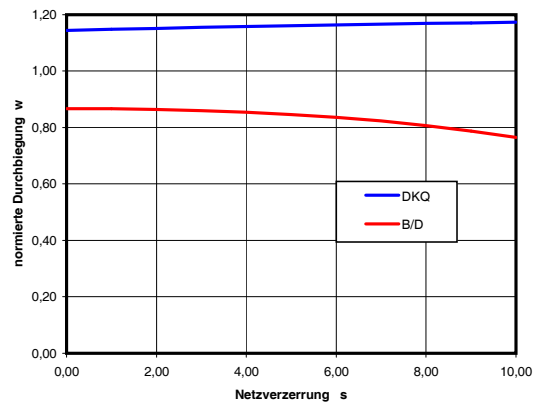


Abbildung 10: Einfluss der Netzverzerrung auf die Mittendurchbiegung

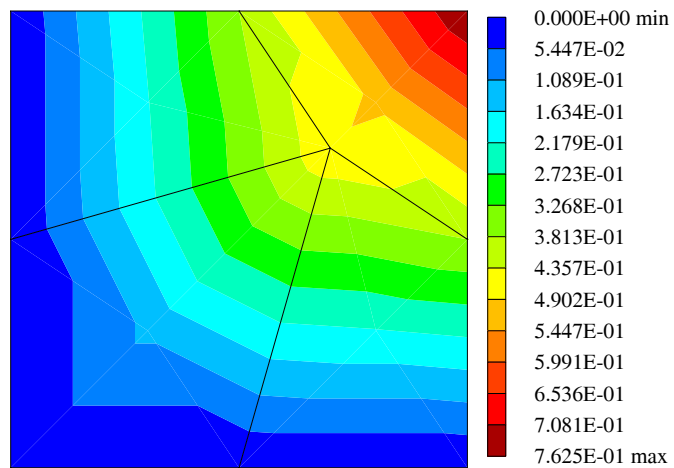


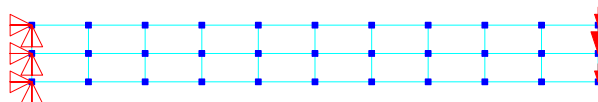
Abbildung 11: Konturplot der Durchbiegungen des B/D-Elementes bei $s=10$

3.6 Biegung von Scheibenelementen

Treten bei Scheibentragwerken Systeme mit starker Biegebelastung auf (in der Regel für große Werte l/h), so ist die Leistungsfähigkeit des Scheibenelementes zu prüfen, da die Lösung oft erheblich zu steif ist. Nur höherwertige Verschiebungselemente bzw. gemischte Elemente mit speziellen Spannungsansätzen, z.B. [6], liefern brauchbare Ergebnisse.

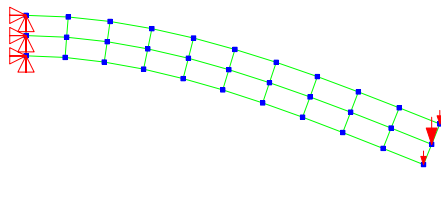
Beispiel: Stegblech eines I-Trägers, Kragträger unter Einzellast

An diesem System werden die oben gemachten Aussagen beispielhaft demonstriert. Abbildung 13 zeigt u.a. die Lösung bei Verwendung höherer Verschiebungsansätze, während Abbildung 14 die Lösung bei Verwendung eines gemischten Elementes mit Spannungsansätzen, z.B. [6], wiedergibt. Die verformten Systeme in den Abbildungen 13 und 14 sind 20-fach überhöht dargestellt. Die maximale Durchbiegung nach der Balkentheorie ohne Schubverformungen beträgt $f_{\max} = 0.2$ m. Das Beispiel zeigt, dass das 4-Knoten-Verschiebungselement zu kleine Verschiebungen und erheblich zu kleine Spannungen liefert.

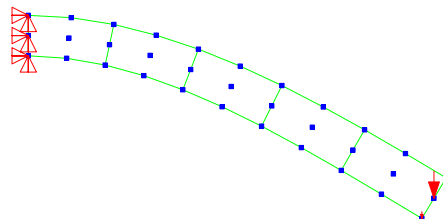


$$(\ell = 10 \text{ m}, h = 1 \text{ m}, b = 1 \text{ m}, F = 150 \text{ kN}, E = 3 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2, f_{\max} = 0.2 \text{ m})$$

Abbildung 12: Kragträger unter Einzellast



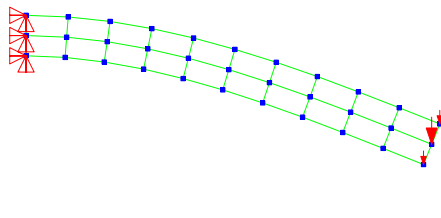
$$f_{\max} = 0.134 \text{ m}$$



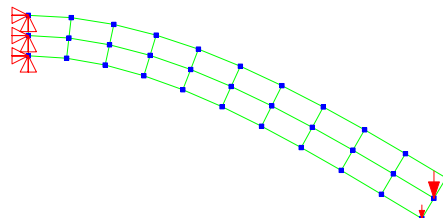
$$f_{\max} = 0.200 \text{ m}$$

Abbildung 13: 4-Knoten-Verschiebungselement

9-Knoten-Verschiebungselement



$$f_{\max} = 0.134 \text{ m}$$



$$f_{\max} = 0.200 \text{ m}$$

Abbildung 14: 4-Knoten-Verschiebungselement

Pian-Sumihara-Element [6]

4 ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden einige Anmerkungen zum indirekten Testen von Scheiben- und Plattenelementen in FE-Programmen vorgestellt. Hierbei zeigt sich deutlich der Näherungscharakter der FE-Methode. Sofern keine ausreichende Erfahrung bzw. ausführliche Dokumentationen vorliegen, sollten Elemente eines neuen Programmsystems sinngemäß getestet werden, um später eine sichere Anwendung sowie eine korrekte Berechnung und Bemessung zu gewährleisten.

Literatur

- [1] Batoz, J. L.; Tahar, M. B.
Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element
Int. J. Num. Meth. Engng. 21 (1982), S. 1655–1677
- [2] Czerny, F.
Tafeln für Rechteckplatten
in z.B. Betonkalender 1999, Teil I, S. 277–340 W. Ernst & Sohn, Berlin, 1998
- [3] Dvorkin, E.; Bathe, K.-J.
A Continuum Mechanics Based 4 Node Shell Element for General Nonlinear Analysis
Engineering Computations 1 (1984), S. 77–88
- [4] Girkmann, K.
Flächentragwerke
6. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 1963
- [5] Lee, S. L.; Ballesteros, P.
Uniformly loaded rectangular plate supported at corners
Int. J. Mech. Sci. 2 (1960), S. 206–211.
- [6] Pian, T. H. H.; Sumihara, K.
Rational approach for assumed stress finite elements
Int. J. Num. Meth. Eng. 20 (1984), S. 1685–1695
- [7] Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, S.
Theory of Plates and Shells
Int. Stud. Ed., 2nd edition, McGraw Hill, London, New York, 1970
- [8] Taylor, R.L.; Simo, J.C.; Zienkiewicz, O.C.; Chan, A.C.H.
The patch test - A condition for assessing FEM convergence
Int. J. Num. Meth. Engng. 22 (1986), S. 39–62
- [9] Werkle, H.
Finite Elemente in der Baustatik, Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke
2. Aufl. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 2001
- [10] Rombach, G.
Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau: Fehlerquellen und ihre Vermeidung,
W. Ernst & Sohn-Verlag, Berlin, 2000.