

# Ein praktikabler spieltheoretischer Lösungsvorschlag zur Kostenzuteilung in kooperativen Märkten

Zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der  
Wirtschaftswissenschaften

(Dr. rer. pol.)

bei der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften des Karlsruher Instituts für  
Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl. Wi.-Ing. Jan Selders

Referent: Prof. Dr. Karl-Martin Ehrhart

Korreferent: Prof. Dr. Hagen Lindstädt

Karlsruhe: 28. April 2014

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	vi
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Ausgangslage und Aufgabenstellung . . . . .	3
1.2 Ziele und Lösungsweg . . . . .	6
<b>2 Kostenzuteilung aus Sicht der kooperativen Spieltheorie</b>	<b>12</b>
2.1 Grundlagen der Kostenzuteilung im Koalitionsspiel . . . . .	12
2.2 Spieltheoretische Kriterien zur Bewertung von Zuteilungsverfahren . .	17
2.2.1 Eigenschaften der Akzeptanz . . . . .	18
2.2.2 Eigenschaften der Anreizwirkung . . . . .	23
2.3 Spieltheoretische Zuteilungsverfahren: Mengenkonzepte . . . . .	26
2.3.1 Kern, Epsilon-Kern und Kleinst Kern . . . . .	28
2.3.2 Der Nucleolus . . . . .	32
2.4 Spieltheoretische Zuteilungsverfahren: Wertkonzepte . . . . .	34
2.4.1 Der Shapley-Wert . . . . .	34
2.4.2 Weitere Wertkonzepte . . . . .	37
2.5 Bewertung der Zuteilungsverfahren anhand der spieltheoretischen Kri- terien . . . . .	42
2.6 Diskussion der Ergebnisse . . . . .	46
<b>3 Weitere spieltheoretische Ansätze und Kostenzuteilung</b>	<b>50</b>
3.1 Erweiterungen und Abwandlungen von Koalitionsspielen . . . . .	51
3.1.1 Konvexe Koalitionsspiele und Activity-Optimization Games .	51
3.1.2 Market Games, Equivalence Theorem und der Kern . . . . .	56
3.1.3 Relevanz für die Kostenzuteilung im gegebenen Fall . . . . .	60
3.2 Mehrproduktmonopole und Kostenzuteilung . . . . .	63
3.2.1 Contestable Market Theory und Supportability . . . . .	65
3.2.2 Relevanz für die Kostenzuteilung im gegebenen Fall . . . . .	73
3.3 Kostenzuteilung einer Produktion und Preismechanismen . . . . .	75

---

3.3.1	Kooperativer Ansatz und Aumann-Shapley-Preise . . . . .	77
3.3.2	Nicht-kooperativer Ansatz und Serial Cost Sharing . . . . .	85
3.3.3	Vergleich der Preismechanismen und Relevanz für die Kosten- zuteilung im gegebenen Fall . . . . .	88
3.4	Diskussion der Ergebnisse und weiteres Vorgehen . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Lösungsverfahren der Kostenzuteilung in der Praxis</b>	<b>96</b>
4.1	Kurzer Überblick über gängige Kostenrechnungsverfahren . . . . .	97
4.1.1	Das System der Kostenrechnung . . . . .	97
4.1.2	Verfahren der Kostenstellenrechnung . . . . .	99
4.1.3	Verfahren der Kostenträgerrechnung . . . . .	101
4.1.4	Verfahren der Prozesskostenrechnung . . . . .	103
4.2	Alternative Sichtweise: Fallbeispiel Wertbildungsrechnung . . . . .	107
4.3	Bewertung der Verfahren anhand der spieltheoretischen Kriterien . .	117
4.4	Modellierungsansatz der vorgeschlagenen Netzwerksichtweise . . . . .	120
4.4.1	Wechselseitiger Leistungsaustausch zwischen dezentralen Pro- duzenten . . . . .	121
4.4.2	Der Leistungsaustausch in der Input-Output Analyse . . . . .	123
4.4.3	Interpretation: Leistungsberechnung statt Kostenzuteilung . .	131
4.5	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Entwicklung eines praktikablen und stabilen Zuteilungsverfahrens im kooperativen Fall</b>	<b>136</b>
5.1	Kooperative Kostenzuteilung aus der Prozesssicht . . . . .	136
5.1.1	Subventionsfreie Preise . . . . .	139
5.1.2	Illustration subventionsfreier Preise . . . . .	142
5.1.3	Diskussion der Realitätsnähe und Konsequenzen subventions- freier Preise . . . . .	146
5.2	Zusammenhänge mit der Kostenzuteilung im Koalitionsspiel . . . . .	154
5.3	Implementierung des Aumann-Shapley Preismechanismusses . . . . .	166
5.4	Zusammenfassung und Ergebnisse . . . . .	172
5.4.1	Zusammenfassung der Untersuchung . . . . .	172
5.4.2	Bewertung des Lösungsvorschlags anhand der spieltheoreti- schen Kriterien . . . . .	177
5.4.3	Diskussion der Ergebnisse . . . . .	181

5.4.4	Leitfaden für ein Berichtswesen im Unternehmen . . . . .	186
<b>6</b>	<b>Schlussbemerkungen</b>	<b>189</b>
<b>A</b>	<b>Beweis der Stabilitätseigenschaft subventionsfreier Preise</b>	<b>191</b>
<b>B</b>	<b>Beweis der Existenz subventionsfreier Preise</b>	<b>198</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>204</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Herkömmliche Betrachtung und Anwendungsgebiete von Kostenteilungsspielen. . . . .	5
1.2	Erweiterung der Kostenteilungsproblematik auf beliebige, marktliche Situationen. . . . .	7
1.3	Erweiterung der Kostenteilungsproblematik auf beliebige, marktliche Situationen mit Berücksichtigung des externen Marktes. . . . .	9
2.1	Graphische Darstellung von Beispiel 2.1 als Simplex. . . . .	23
2.2	Simplex von Beispiel 2.1 mit Lösungen. . . . .	43
2.3	Illustration der Bewertung der Zuteilungsverfahren. . . . .	46
3.1	Die Zuteilungen des Greedy-Algorithmus für Beispiel 2.1. . . . .	54
3.2	Plot einer tragbaren Kostenfunktion eines Mehrproduktmonopols. . .	72
3.3	Strukturannahmen und geeignete Instrumentarien. . . . .	94
4.1	Kostenrechnungssysteme im Überblick. . . . .	98
4.2	Schema der differenzierenden Zuschlagskalkulation. . . . .	102
4.3	Gemeinkostenentwicklung in Unternehmen zwischen 1850 und 1985. .	104
4.4	Prinzip der Prozesskostenrechnung. . . . .	106
4.5	Struktur des Preis-Leistungskatalogs. . . . .	110
4.6	Struktur der Wertbildungsrechnung [WBR]. . . . .	111
4.7	Die Stufen der Wertbildung. . . . .	112
4.8	Betrachtung des Unternehmens als föderatives Netzwerk. . . . .	116
5.1	Mögliche Koalitionsbildungen. . . . .	137
5.2	Das Unternehmen aus der Prozesssicht. . . . .	138
5.3	Das Zuteilungsverfahren aus Prozesssicht. . . . .	141
5.4	Nicht tragbare Kostenfunktion im Ein-Produkt-Fall. . . . .	142
5.5	Tragbare Kostenfunktion im Ein-Produkt-Fall. . . . .	143
5.6	Veränderungen in den Inputpreisen oder Technologien. . . . .	145
5.7	Elastizität als Indikator für die Tragbarkeit. . . . .	145
5.8	Subventionsfreie Preisbestimmung im Ein-Produkt-Fall. . . . .	147

---

5.9	Zielsetzungen verschiedener Verrechnungspreise. . . . .	151
5.10	Beispiel eines wechselseitigen Leistungsaustauschs. . . . .	156
5.11	Simplex von Beispiel 2.1 mit (subventionsfreien) Aumann-Shapley Preisen [AS Preise]. . . . .	182
5.12	Illustration der Bewertung der Zuteilungsverfahren. . . . .	183
5.13	Der kooperative Markt mit Kostenzuteilung durch Aumann-Shapley Preise. . . . .	185

# Tabellenverzeichnis

2.1	Tabellarischer Vergleich der Zuteilungsverfahren. . . . .	44
4.1	Tabellarischer Vergleich der Kostenrechnungsverfahren. . . . .	117
4.2	Input-Output Analyse . . . . .	130
4.3	Vergleich der verschiedenen Arten der Kostenzuteilung. . . . .	135
5.1	Tabellarische Aufstellung des Beispiels. . . . .	162
5.2	Tabellarischer Vergleich der Zuteilungsverfahren mit dem entwickelten Lösungsvorschlag . . . . .	178

# 1. Einleitung

Untersuchungsgegenstand der vorliegenden Arbeit sind interaktive strategische Entscheidungssituationen, in denen eine Partei ihr Ergebnis nicht alleine herbeiführen kann, sondern in denen ihr Ergebnis abhängig von dem Verhalten anderer Parteien ist. Dabei wird angenommen, dass sich in den gegebenen Entscheidungssituationen eine kooperative Zusammenarbeit empfiehlt, und dass Entscheidungen dezentral getroffen werden. Derartige Entscheidungssituationen werden durch Spezialisierung und Arbeitsteilung hervorgerufen. Beispiele dafür sind arbeitsteilige Beziehungen zwischen den Organisationseinheiten eines Unternehmens oder einer Non-Profit-Organisation, die Bereitstellung öffentlicher Güter, die Kopplung von Energieströmen zwischen Unternehmen aus dem produzierenden Gewerbe, oder Investitionen in Infrastrukturprojekte.

Wie lässt sich in den oben genannten Situationen praktikabel ermitteln, welche Verteilung des gemeinsam erreichten Ergebnisses oder der gemeinsam verursachten Kosten die freiwillige Kooperation der Parteien sicherstellt? Dieses ist die zentrale Aufgabenstellung der vorliegenden Untersuchung und Gegenstand der *Theorie der strategischen Spiele* oder kurz *Spieltheorie*.<sup>1</sup> Dementsprechend ist die Zielsetzung der Arbeit, anhand einer spieltheoretischen Untersuchung ein Zuteilungsverfahren zu entwickeln, das dieses Problem löst.

Der Grundstein der Spieltheorie wurde 1944 mit dem Buch *The Theory of Games and Economic Behaviour* von John von Neumann und Oskar Morgenstern gelegt.<sup>2</sup> Grundsätzliche Merkmale der Spieltheorie sind, dass Entscheidungssituationen mit mindestens zwei Parteien, in der Spieltheorie *Spieler* genannt, betrachtet werden. Jeder Spieler verfolgt ein individuelles Ziel. Zur Zielerreichung stehen den Spielern verschiedene Handlungsmöglichkeiten (*Strategien*) zur Verfügung. Das wesentliche Merkmal der Spieltheorie liegt in der Interaktion der Spieler bzw. der Interdependenz des Spiels, denn ein Spieler hat Einfluss auf die Zielerreichung der anderen Spieler und umgekehrt. Aus diesem Grund wird die Spieltheorie auch als „Wissenschaft

---

<sup>1</sup>Vgl. Berninghaus et al. (2010).

<sup>2</sup>Vgl. von Neumann und Morgenstern (1944). Für Einsatzmöglichkeiten der Spieltheorie in der betrieblichen Praxis siehe z. B. Berninghaus et al. (1996) oder Lindstädt und Müller (2010, Januar). Die Spieltheorie findet u.A. Anwendung in den Wirtschaftswissenschaften, der Psychologie, der Soziologie und der Biologie. Vgl. einleitend Dixit und Nalebuff (1993), Rasmusen (2004), Binmore (1992) oder Berninghaus et al. (2010).



des strategischen Denkens und Handelns“ bezeichnet.<sup>3</sup> Somit ist auch der Informationsstand der Spieler von Bedeutung. Aus Kenntnissen oder Annahmen über die Charakteristika der Spieler (Ziele, Wissen, finanzielle Ausstattung und Strategien) und über die Interaktionsstruktur lassen sich zu erwartende Ergebnisse ableiten.

Im Zuge der Entwicklung kristallisierten sich zwei Hauptgruppen von (strategischen) Spielen heraus, und es entstand die Unterscheidung zwischen der *nicht-kooperativen Spieltheorie* und der *kooperativen Spieltheorie*.<sup>4</sup> Die nicht-kooperative Spieltheorie zeichnet sich dadurch aus, dass die Spieler keine (bindenden) Absprachen über die Wahl der Strategien treffen bzw. treffen können. Ein Spiel dieser Gruppe ist das *Gefangenendilemma*.<sup>5</sup> Im Unterschied dazu modelliert die kooperative Spieltheorie Spiele, in denen die Spieler bindende Absprachen über ihre Strategiewahlen treffen und gemeinsam handeln können.<sup>6</sup> Wenn drei oder mehr Spieler ein kooperatives Spiel miteinander spielen, spricht man allgemein von einem *n*-Personenspiel.<sup>7</sup> *n*-Personenspielen berücksichtigen die Situation, dass die Spieler die gemeinsam erzielten Gewinne untereinander aufteilen können. Insbesondere können sich Gruppen von Spielern zu *Koalitionen* zusammenschließen. Diese Art von kooperativen *Koalitionsspielen mit transferierbarem Nutzen* werden in Kapitel 2 behandelt und sind die Grundlage der weiteren Untersuchung.

Bei der Untersuchung dieser kooperativen Spiele wird betrachtet, wie sich ein gemeinsam erreichter Gewinn bzw. gemeinsam erreichte Kosten so zuteilen lassen, dass alle Spieler damit möglichst zufrieden sind und keinen Grund haben, gegen die Zuteilung zu protestieren. Es wird eine Kooperation angestrebt, die von keinem Teilnehmer unterwandert wird und die *stabil* ist.<sup>8</sup> In diesem Zusammenhang wird auch von „Fairness“ gesprochen. Das Anliegen der kooperativen Spieltheorie darf dadurch jedoch nicht missverstanden werden: Obwohl sich eine Kooperation nach außen hin harmonisch darstellen kann bzw. soll, unterliegt sie streng rationalen Kriterien und wird von jedem Spieler auf seinen individuellen Vorteil hin ausgereizt.

---

<sup>3</sup>Vgl. Berninghaus et al. (2010).

<sup>4</sup>Diese Unterscheidung findet sich erstmals in Nash (1951). Vgl. zur Einführung in die kooperative Spieltheorie Peleg und Sudhölter (2007) oder Holler und Illing (2003), S. 267–338.

<sup>5</sup>Vgl. Berninghaus et al. (2010), S. 14–15.

<sup>6</sup>Vgl. Holler und Illing (2003), S. 267.

<sup>7</sup>Spiele, in denen Gewinne unter zwei Spielern aufgeteilt werden, werden in der *Verhandlungstheorie* getrennt betrachtet, vgl. einführend Berninghaus et al. (2010), S. 157–229, sowie Nash (1950), Nash (1953) und Rubinstein (1982) als Grundlagenarbeiten dieses Gebiets.

<sup>8</sup>Die Eigenschaft der Stabilität wird in Abschnitt 2.2.1 spieltheoretisch definiert.

## 1.1 Ausgangslage und Aufgabenstellung

Kooperationen in wirtschaftlichen Entscheidungssituationen können zu Kosteneinsparungen durch Synergieeffekte führen. Im weiteren Verlauf der Untersuchung steht als Untersuchungsgegenstand die Kooperation innerhalb von Unternehmen bzw. von Organisationen im Allgemeinen im Vordergrund. Die in Unternehmen bestehende Aufgabe, Kosten und insbesondere Gemeinkosten zuzuteilen, lässt sich anhand der kooperativen Spieltheorie analysieren.<sup>9</sup> Für die Abteilungen eines Unternehmens stellt sich beispielsweise die Frage, ob die Gehaltsabrechnungen jeweils separat durchgeführt werden sollten, oder ob sich durch eine gemeinsame Lösung Kosten einsparen lassen. Sollte es zu einer Kooperation kommen, indem z. B. eine Abteilung ein unternehmensweites System der Gehaltsabrechnung einrichtet, ist zu klären, welchen Anteil der Gesamtkosten des Systems jede Abteilung zu tragen hat. Weil die einzelnen Abteilungen im Unternehmen unter einer Führung angeordnet sind, um ihren Beitrag zu einem möglichst großen (wie auch immer definierten) Unternehmenserfolg zu leisten, lässt sich zur Beantwortung dieser Frage auf Konzepte der kooperativen Spieltheorie zurückgreifen.

Die Untersuchung eines kooperativen Spiels der Kostenzuteilung ist in der Literatur als *Kostenteilungsspiel* (*cost-allocation game*) bekannt.<sup>10</sup> In Kostenteilungsspielen wird das Gesamtergebnis der Kooperation durch alle an der Kooperation teilnehmenden Spieler erzeugt. Wenn das gemeinsam erreichte Ergebnis auf die einzelnen Spieler aufgeteilt wird, treten individuelle und nicht-kooperative Bestrebungen in den Vordergrund. In diesem Spannungsfeld des so genannten *kooperativen Konflikts* kann es passieren, dass aufgrund der individuellen Kostenzuteilung so große Unzufriedenheiten bei Spielern entstehen, dass die Kooperation unterminiert wird. Dieser Konflikt soll dann vermieden werden, wenn die Kooperation aller Spieler in den betrachteten Spielen das insgesamt beste Ergebnis darstellt.

Die kooperative Spieltheorie bietet Lösungsverfahren für Koalitionsspiele an, die das Zustandekommen der Kooperation sicherstellen. Die Lösungsverfahren basieren auf der so genannten *charakteristischen Funktion*,<sup>11</sup> die allen Spielern und Koalitionen

---

<sup>9</sup>In der von James und Lee (1971) eingeführten *Alternate Cost Avoided Method*, die auf ein Kostenteilungsproblem der Tennessee Valley Authority im Jahre 1941 zurückgeht, vgl. Ransmeier (1942), wird der Zusammenhang von kooperativer Spieltheorie und Kostenrechnung deutlich. Vgl. Young (1994), S. 1194f.

<sup>10</sup>Vgl. Schotter und Schwödiauer (1980), Tijs und Driessen (1986), Young (1985b), Young (1994) und Biddle und Steinberg (1985).

<sup>11</sup>Vgl. Abschnitt 2.1.

nen die entsprechenden Werte eines Spiels zuordnet. Die Komplexität der Verfahren liegt aufgrund der Anzahl aller Koalitionen bei  $2^n$ , wobei  $n$  die Anzahl aller Spieler darstellt. Will man ein Unternehmen mit 20 Abteilungen als Kostenteilungsspiel modellieren, sind also bereits über eine Million Kombinationen zu untersuchen. Die spieltheoretischen Lösungen sind deshalb im Allgemeinen zur Anwendung in der Praxis ungeeignet, einmal aufgrund der schwer ermittelbaren Datenbasis und zweitens wegen des unverhältnismäßigen Aufwands der Berechnung.<sup>12</sup> In diesem Zusammenhang spricht man vom so genannten *Berechnungsproblem*, welches im Folgenden illustriert wird.<sup>13</sup>

Verschiedene Projekte der Kosteneinsparung durch Kooperation werden in der Literatur aus spieltheoretischer Sicht untersucht. Speziell für den Fall der Gemeinkostenzuteilung in Unternehmen sind Schichtel (1981) und Wißler (1997) zu nennen, wobei der Ursprung der Anwendung der kooperativen Spieltheorie auf betriebswirtschaftliche Fragestellungen in Shubik (1962) zu sehen ist.<sup>14</sup> Weitere Beispiele der Anwendung spieltheoretischer Verfahren in der Praxis sind das Beispiel der *Aircraft Landing Fees*, in dem durch Littlechild und Owen (1973), Littlechild (1974), Littlechild und Thompson (1977) und Dubey (1982) die Zuteilung von Landegebühren empirisch untersucht wird, die Zuteilung von Infrastrukturkosten der *Tennessee Valley Authority*, untersucht von Ransmeier (1942) und James und Lee (1971), und das Beispiel der *Internal Telephone Billing Rates*, in dem durch Billera et al. (1978) die Zuteilung von Telefonkosten analysiert wird. Ein weiteres Praxisbeispiel ist das von Frank (2003) untersuchte Beispiel der Kopplung von Energieströmen zwischen Unternehmen aus dem produzierenden Gewerbe. Weitere Untersuchungen neuerer Zeit sind die von Doll (2005) untersuchte Allokation von Kosten der Straßeninfrastruktur und die von Karagök (2006) behandelte Zusammensetzung des schweizerischen Bundesrats.

Klammert man den Fall der Gemeinkostenzuteilung aus, lassen sich die in den genannten Beispielen auftretenden Entscheidungssituationen gemäß Abbildung 1.1 abstrahieren. Es existiert immer eine Kosten verursachende Quelle – interpretierbar als Produzent –, während alle Spieler Träger der verursachten Kosten sind – interpretierbar als  $n$  Abnehmer. Dies ist die typische Modellierung von Kostentei-

---

<sup>12</sup>Vgl. Schotter und Schwödiauer (1980).

<sup>13</sup>Vgl. Karagök (2006), S. 7 und Doll (2005), S. 83–89. Wege zur Umgehung des Problems werden im Laufe der Arbeit aufgezeigt, vgl. Abschnitt 3.1.1.

<sup>14</sup>Vgl. auch Young (1994), S. 1217–1219.

lungsspielen, die in der Literatur Verwendung findet, wie zum Beispiel das vielfach theoretisch betrachtete Beispiel der als *Gebührenspiel* bekannten Situation, dass drei oder mehr Nachbargemeinden eine gemeinsame Wasserversorgung einrichten.<sup>15</sup>

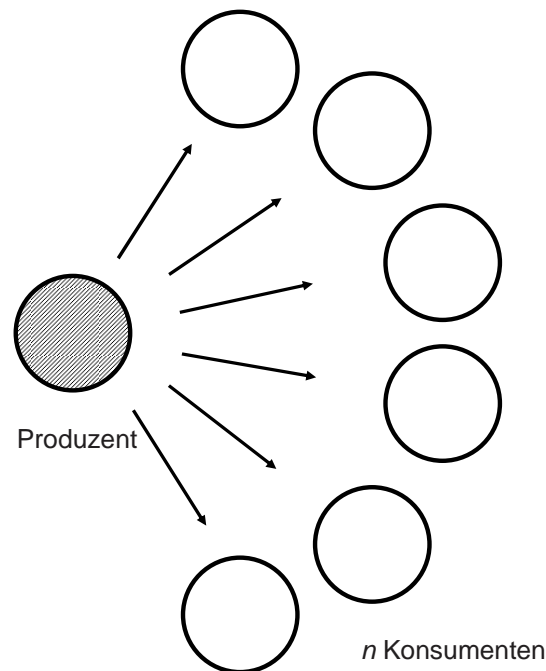


Abbildung 1.1: Herkömmliche Betrachtung und Anwendungsgebiete von Kostenteilungsspielen.

Diese Situation der Kostenzuteilung weist eine einfache Struktur auf, weil die zu teilenden Kosten nur von einer Quelle verursacht werden. Es liegt nahe, mehrere Kosten verursachende Quellen zuzulassen, wie es bei der Gemeinkostenzuteilung in Unternehmen der Fall ist. Die Modellierung als Koalitionsspiel und die existierenden spieltheoretischen Lösungsverfahren sind nicht für diesen Fall einsetzbar. Koalitionsspiele weisen eine *eingeschränkte Anwendbarkeit* auf. Zusätzlich kann die Anwendung der charakteristischen Funktion selbst bei einfachen Situationen zu dem oben angeführten Berechnungsproblem führen. In Kombination mit der eingeschränkten Anwendbarkeit auf komplexe Interaktionsstrukturen führt die Modellierung einer Entscheidungssituation anhand der charakteristischen Funktion zu einem *Praktikabilitätsproblem*, was den Einsatz spieltheoretischer Methoden in der Praxis der Kostenrechnung verhindert. Es gibt nachvollziehbarerweise kein spieltheoretisches

<sup>15</sup>Das Gebührenspiel wird z. B. von Faulhaber (1975), Moulin (1988) und Young (1994) untersucht und zur Illustration spieltheoretischer Lösungsverfahren verwendet.

Zuteilungsverfahren, das (bei Gemeinkostenzuteilungen) eine breite Akzeptanz in der Praxis finden konnte.<sup>16</sup>

Deshalb wurde der Versuch unternommen, in der Praxis verwendete Verfahren der Kostenzuteilung zu untersuchen und spieltheoretisch zu bewerten. Es sind die zwei genannten Arbeiten zur Gemeinkostenzuteilung in Unternehmen von Schichtel (1981) und Wißler (1997) zu nennen. Sie bewerten die in der Praxis existierenden Verfahren argumentativ anhand der spieltheoretischen Kriterien, die sich auf die charakteristische Funktion beziehen.<sup>17</sup> Dabei konnte kein zufriedenstellendes Verfahren identifiziert werden.<sup>18</sup> Die Autoren versuchen, eine bestmögliche Auswahl unter den existierenden Lösungsverfahren der Spieltheorie und der Praxis zu treffen, kommen aber zu keiner eindeutigen Empfehlung für ein bestimmtes Verfahren. Trotz der von den Autoren aufgezeigten Mängel der bestehenden Verfahren weist weder die kooperative Spieltheorie noch die Praxis Ansätze zu einer aus spieltheoretischer und praxisorientierter Sicht zufriedenstellenden Lösung der Gemeinkostenzuteilung auf.

Insofern kristallisiert sich ein bis heute nicht gelöstes Problem heraus: Ist es möglich, ein Zuteilungsverfahren zu entwickeln, das noch zu definierenden spieltheoretischen Kriterien an eine Kostenzuteilung genügt, und das sowohl auf jede Art von realen Situationen als auch praktikabel anwendbar ist?

## 1.2 Ziele und Lösungsweg

Das Ziel, spieltheoretische Lösungen für reale Situationen praktikabel berechnen zu können, ist bei größeren Spielermengen im Allgemeinen nicht mit dem Einsatz herkömmlicher Lösungsverfahren von Koalitionsspielen zu erreichen. Weil zur Bestimmung der charakteristischen Funktion  $2^n$  Werte bestimmt werden müssen, verhindert sie den Einsatz der spieltheoretischen Lösungsverfahren für reale Kostenteilungsprobleme. Aus diesem Grund ist zur Bewältigung des in Abschnitt 1.1 formulierten Praktikabilitätsproblems ein anderer Ansatz zu entwickeln.

Dazu wird die herkömmliche Perspektive von Kostenteilungsspielen erweitert. Anstatt nur einen Kostenverursacher zu berücksichtigen, erlaubt ein flexibles Modell, dass jeder Spieler nicht nur als Abnehmer, sondern auch als Produzent auftreten kann. Die so entstehende Entscheidungssituation berücksichtigt dezentrale und interdependente Strukturen und lässt sich als *kooperativer Markt* interpretieren. Sie

---

<sup>16</sup>Vgl. Biddle und Steinberg (1985). So bemerken die Autoren eine „beschränkte Akzeptanz“ der spieltheoretischen Methoden in der Praxis.

<sup>17</sup>Dieses Vorgehen wurde von Frank (2003) und Doll (2005) übernommen.

<sup>18</sup>Vgl. Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.3.

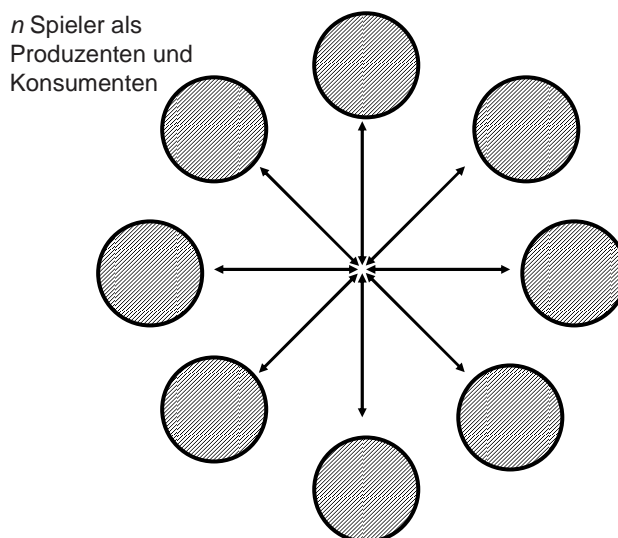


Abbildung 1.2: Erweiterung der Kostenteilungsproblematik auf beliebige, marktliche Situationen.

lässt sich wie in Abbildung 1.2 illustrieren. Die unternehmensinterne Spezialisierung und Arbeitsteilung kann als solcher kooperativer Markt aufgefasst werden. Dabei ist Kooperation gleichbedeutend damit, dass ein Leistungsaustausch stattfindet.

Es existiert keine vollständige Konkurrenz, weil die Anzahl der Anbieter und Nachfrager begrenzt ist. Weiterhin können die Spieler Einfluss auf die Preise nehmen, da die unternehmensinternen Preise frei gewählt werden können. Bei der hier betrachteten Interaktionsstruktur handelt es sich deshalb nicht um einen perfekten Wettbewerbsmarkt, sondern um einen unvollkommenen Markt.<sup>19</sup> Es wird angenommen, dass ein gewisses (hier nicht näher definiertes) Maß an Dezentralisierung vorteilhaft für die Koordination der Kooperation ist.<sup>20</sup> Die Aufgabenstellung besteht nicht in einer bestmöglichen operativen Steuerung bzw. Koordination der Spieler bei gegebenen Preisen,<sup>21</sup> sondern in der Berechnung der Kostenzuteilung, die die freiwillige Kooperation sicherstellt. Diese dient der strategischen Entscheidung der Kooperation bzw. Nicht-Kooperation der Spieler und unterliegt Argumenten der *Contestable Market Theory*.<sup>22</sup>

<sup>19</sup>Der Markt in Abbildung 1.2 ist von daher nicht gleichzusetzen mit den so genannten Market Games, vgl. Shapley und Shubik (1966, 1975). Diese werden in Abschnitt 3.1.2 diskutiert.

<sup>20</sup>Vgl. von Hayek (1945), S. 524.

<sup>21</sup>Zu Koordinierungsproblemen dieser Art vgl. Milgrom (1992), S. 90-97.

<sup>22</sup>Vgl. zur Contestable Market Theory Abschnitt 3.2.1.

*The critical assumption in perfect competition is price-taking behavior. The reader is entitled to know what behavioral postulate replaces price-taking in the new theory [contestable market theory] and serves the same or similar role. The answer is entry. [...] the theory replaces price-taking with rapid entry and exit.*<sup>23</sup>

Die dargestellte Situation lässt sich dahingehend erweitern, dass auch externe Beziehungen berücksichtigt werden. Dadurch lässt sich der Fall modellieren, dass die Spieler gemeinsam einen extern vorgegebenen Bedarf durch Spezialisierung und interne Arbeitsteilung kooperativ herstellen und am externen Markt verkaufen. Dazu werden auch externe Inputfaktoren verwendet.

Zusammenfassend hat sich der zu entwickelnde spieltheoretische Lösungsvorschlag an den im Folgenden angeführten Punkten zu messen. Die *Zielsetzung der Arbeit* ist die Entwicklung eines Zuteilungsverfahrens, dass der so definierten *Aufgabenstellung* gerecht wird.

1. Der Lösungsvorschlag hat sich an der in Abbildung 1.3 dargestellten interaktiven Entscheidungssituation zu orientieren. Dies stellt die Anwendbarkeit auf Spiele mit hochgradig vernetzten Spielern sicher, die sowohl als Produzenten als auch als Abnehmer auftreten.
2. Für die Fälle, in denen eine Kooperation sinnvoll ist, hat der Lösungsvorschlag eindeutig vorzugeben, wie die Beiträge der Spieler zum Ganzen zu bewerten sind, und zwar so, dass der Lösungsvorschlag der spieltheoretischen Eigenschaft der Stabilität genügt.<sup>24</sup> Dadurch wird die Kooperation sichergestellt und die Teilnahme der Spieler am Spiel erfolgt freiwillig.
3. Gemäß der Forderung nach Praktikabilität ist auf die Verwendung einer charakteristischen Funktion zu verzichten. Damit besteht gleichzeitig die Möglichkeit, das Zuteilungsverfahren in dem Sinne *transparent* zu gestalten, dass es leicht nachvollziehbar ist und den Spielern eine direkte Beurteilung der ihnen zur Verfügung stehenden Strategien ermöglicht.

Im ersten Schritt wird in *Kapitel 2* ein Überblick über die herkömmlichen Kostenteilungsspiele der kooperativen Spieltheorie gegeben, womit Koalitionsspiele gemeint sind. Es werden Eigenschaften vorgestellt, an denen Zuteilungsverfahren gemessen

---

<sup>23</sup>Vgl. Spence (1983), S. 982.

<sup>24</sup>Vgl. zur Definition der Stabilität (Sicherung der Zusammenarbeit) im Sinne einer Kooperation Abschnitt 2.2.1.

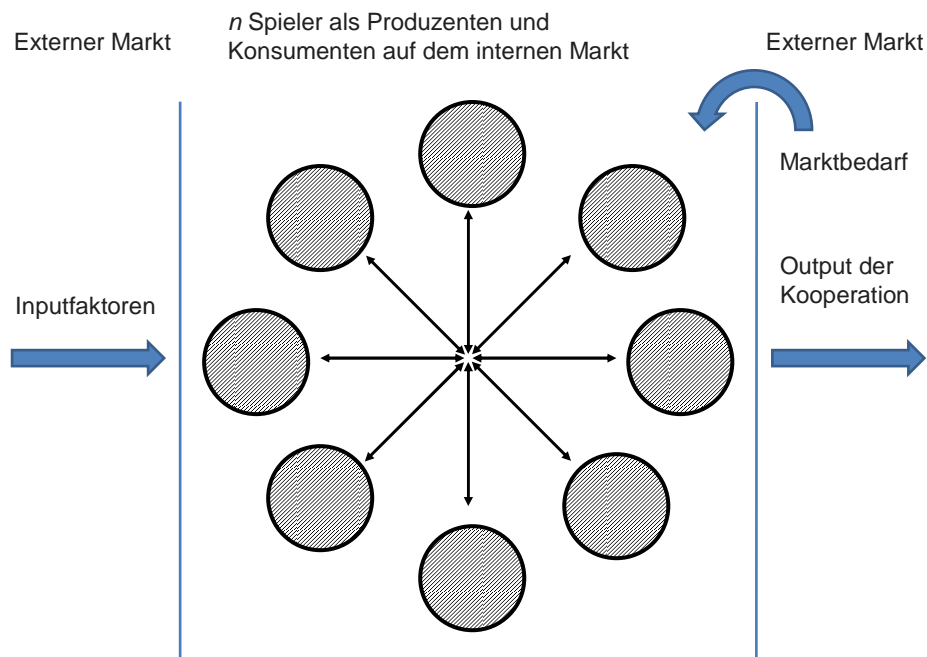


Abbildung 1.3: Erweiterung der Kostenteilungsproblematik auf beliebige, marktliche Situationen mit Berücksichtigung des externen Marktes.

werden. Sie dienen im Verlauf der Untersuchung als *spieltheoretische Kriterien* für die Bewertung der Zuteilungsverfahren der Spieltheorie, der Zuteilungsverfahren der Praxis, und des entwickelten Lösungsvorschlags. Insbesondere wird dabei die Eigenschaft der Stabilität spieltheoretisch definiert und diskutiert. Nach einer Beschreibung der spieltheoretischen Lösungsverfahren zeigt sich, dass sie die aufgestellten Forderungen nicht erfüllen, denn es gibt kein stabiles Lösungsverfahren, das praktikabel und auf die Situation aus Abbildung 1.3 anwendbar ist.

Neben den Zuteilungsverfahren für Koalitionsspiele existieren weitere spieltheoretische Lösungsverfahren, die auf Kostenteilungsspiele angewendet werden können. Diese werden in *Kapitel 3* vorgestellt und diskutiert, wobei die Untersuchung auch auf die nicht-kooperative Spieltheorie ausgeweitet wird. Dazu gehören *konvexe Spiele* und *Activity-Optimization Games*<sup>25</sup> und *Market Games*.<sup>26</sup> Als weitere Ansätze zur Lösung der Fragestellung werden die *Contestable Market Theory*<sup>27</sup> und *Preismechanismen*<sup>28</sup> vorgestellt. Aus den vorgestellten spieltheoretischen Lösungsverfahren

<sup>25</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.1.

<sup>26</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.2.

<sup>27</sup>Vgl. Abschnitt 3.2.1.

<sup>28</sup>Vgl. Abschnitt 3.3.



wird eine Auswahl der Verfahren getroffen, die zur Lösung der Aufgabenstellung beitragen. Damit schließt der Überblick über spieltheoretische Lösungsverfahren.

In *Kapitel 4* wird die Suche nach einem geeigneten Lösungsverfahren auf Verfahren der Praxis erweitert. Nach einer Beschreibung der Kostenrechnungsverfahren zeigt sich, dass sie die aufgestellten Forderungen ebenfalls nicht erfüllen, denn es gibt kein Verfahren der Praxis, das stabile Zuteilungen generiert. Basierend auf einem als Fallbeispiel untersuchten alternativen Verfahren, der so genannten *Wertbildungsrechnung*, wird ein alternativer Modellierungsansatz vorgestellt.<sup>29</sup> Dieser basiert auf einer Netzwerksichtweise und modelliert explizit den innerhalb des kooperativen Marktes existierenden Leistungsaustausch.

Der Ansatzpunkt für ein alternatives spieltheoretisches Lösungsverfahren liegt dabei in der monetären Bewertung („Bepreisung“) des Leistungsaustauschs. Dies ist Gegenstand von *Kapitel 5*. In zwei Schritten wird ein Lösungsvorschlag erarbeitet. Zuerst werden die in Kapitel 3 erarbeiteten Erkenntnisse der Contestable Market Theory für den Fall eines einzelnen Produzenten interpretiert, der seine Leistungen auf einem kooperativen Markt anbietet. Dieser stellt somit ein reguliertes Mehrproduktmonopol auf dem internen Markt dar. Das Preissystem des Produzenten erzeugt eine stabile Zuteilung, wenn mit den innerhalb der Kooperation vorhandenen Technologien nicht mit Gewinn in seinen Markt eingebrochen werden kann. Diese Sichtweise stellt die Umformulierung der Stabilität in eine geeignete testbare Bedingung dar, und geht zurück auf Faulhaber (1975), Panzar und Willig (1977), Telser (1978) und Sharkey und Telser (1978). Dass das so formulierte Konzept der *subventionsfreien Preise*<sup>30</sup> für den Fall eines Mehrproduktmonopols äquivalent zu einer stabilen Zuteilung im korrespondierenden Koalitionsspiel ist, wird von Moulin (1988) gezeigt.<sup>31</sup>

Im zweiten Schritt wird die Untersuchung auf eine beliebige Anzahl von vernetzten Produzenten erweitert. Die Herausforderung liegt dabei in der akkuraten Abbildung der Beziehungen der Spieler, die gleichzeitig sowohl als Produzenten als auch als Abnehmer auftreten, und die beliebig viele Leistungen erstellen und tauschen. Um den internen Markt realitätsnah zu modellieren, werden die Technologien (bzw. die Kostenfunktionen) der Spieler als vernetzt angesehen, d. h. die Preissetzung ei-

---

<sup>29</sup>Vgl. Abschnitt 4.2. Die Wertbildungsrechnung ist eine Eigenentwicklung des Unternehmens *dm-drogerie markt*, vgl. Kaletta und Gerhard (1998).

<sup>30</sup>Vgl. Abschnitt 5.1.

<sup>31</sup>Wesentliche Vorarbeiten sind die von Telser (1978), Sharkey und Telser (1978) and Scarf (1986).

nes Spielers beeinflusst die Kostenfunktionen – und damit die Preise – aller anderen Spieler. Es ist zu überprüfen, ob dieses Vorgehen lösbar und gleichzeitig äquivalent zu einer stabilen Zuteilung im korrespondierenden Koalitionsspiel ist. Aufbauend auf der Untersuchung von Preismechanismen durch Mirman et al. (1983) und Mirman et al. (1985) wird zusätzlich der Spezialfall des *konvexen Spiels* formuliert und untersucht, ob sich für diesen Fall weitere Aussagen ableiten lassen.

In *Abschnitt 5.4* werden die wesentlichen Schritte der Arbeit zusammengefasst, bewertet und diskutiert. Es wird betrachtet, in wie weit das entwickelte Zuteilungsverfahren der Aufgabenstellung (vgl. Seite 8) genügt. Schließlich wird ein Leitfaden für ein Berichtswesen im Unternehmen vorgestellt, welches jedem Teilnehmer des zugrunde liegenden Spiels sichtbar macht, welche Kooperationen sinnvoll sind.

Die Arbeit schließt mit *Kapitel 6*.

## 2. Kostenzuteilung aus Sicht der kooperativen Spieltheorie

In diesem Teil der Arbeit wird ein Überblick über die Kostenzuteilung der kooperativen Spieltheorie (*cost-allocation games*) gegeben.<sup>1</sup> Dabei werden insbesondere die eingangs erwähnten Koalitionsspiele betrachtet. Nach der Beschreibung der grundlegenden Eigenschaften von Koalitionsspielen werden die Eigenschaften von Zuteilungsverfahren betrachtet, die im Weiteren als Kriterien zur Bewertung von Zuteilungsverfahren dienen. Aufbauend darauf werden verschiedene Zuteilungsverfahren für Koalitionsspiele vorgestellt und diskutiert.

### 2.1 Grundlagen der Kostenzuteilung im Koalitionsspiel

Kooperative Spiele lassen sich anhand zweier Kriterien klassifizieren. Erstens ist zu unterscheiden, ob die Spieler den gemeinsam erreichten Gewinn ohne Verluste untereinander aufteilen können, oder ob dies nicht möglich ist. Man unterscheidet demnach zwischen Spielen mit *transferierbarem Nutzen* (TU-Games) und Spielen mit *nicht transferierbarem Nutzen* (NTU-Games). Im Folgenden werden ausschließlich Spiele mit transferierbarem Nutzen betrachtet, so dass der Gewinn einer Koalition in jeder beliebigen Weise und ohne Verluste unter den Spielern der Koalition aufgeteilt werden kann. Solche Spiele werden auch als *Spiele mit Seitenzahlungen* bezeichnet.

Ist die Menge der Spieler bekannt und lässt sich jeder Spieler individuell bestimmen, wird ein Spiel als *atomares Spiel* (*atomic-game*) bezeichnet. Ein *nicht-atomares Spiel* (*non-atomic game*) ist dadurch gekennzeichnet, dass die Spieler nicht abzählbar sind oder die Spielermenge nur in ihrer statistischen Zusammensetzung bekannt ist. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden nur atomare Spiele untersucht.<sup>2</sup> Vgl. im Folgenden z. B. Peleg und Sudhölter (2007).

Es sei nun ein kooperatives atomares Spiel mit transferierbarem Nutzen betrachtet, an dem drei oder mehr Spieler teilnehmen, so dass für die Gesamtzahl  $n$  aller

---

<sup>1</sup>Vgl. Young (1985b, 1994).

<sup>2</sup>Dadurch werden Lösungsverfahren wie zum Beispiel der *Aumann-Shapley Wert für nicht-atomare Spiele* von der weiteren Betrachtung ausgeklammert. Zu nicht-atomaren Spielen siehe Aumann und Shapley (1974) und Mirman et al. (1982).

Spieler gilt  $n \geq 3$ . Ein einzelner Spieler wird dabei mit dem Index  $i$  identifiziert, und die Menge aller Spieler wird als *Spielermenge* (*society*)  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  bezeichnet.

Es ist den einzelnen Spielern möglich, sich in *Koalitionen* zu vereinen und ein gemeinsames Ergebnis zu erreichen. Eine Koalition  $S$  aus der Spielermenge  $N$  kann jede beliebige Koalition beschreiben, was alle *Einerkoalitionen*  $S = \{i\}$ , die *große Koalition*  $N$  (auch Allkoalition genannt) und die *leere Koalition*  $\emptyset$  einschließt. Es sei  $\rho(N)$  die Potenzmenge von  $N$ :

$$\rho(N) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, N\}.$$

Aus der Anzahl aller möglichen Teilmengen von  $N$ ,  $|\rho(N)| = 2^n$ , folgt, dass es  $2^n$  mögliche Koalitionen gibt.

### Definition 2.1. Charakteristische Funktion

Eine charakteristische Funktion  $v(\cdot)$  ordnet jeder Koalition von Spielern  $S \subseteq N$  aus der Spielermenge  $N$  eindeutig einen Wert zu, den so genannten Koalitionswert.

$$v : S \in \rho(N) \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad v(\emptyset) = 0.$$

Im Folgenden wird, wie es häufig getan wird, die charakteristische Funktion in der Form betrachtet, dass sie der Koalition  $S$  den Wert beimisst, den sie sich aus eigener Kraft sichern kann.  $v(N)$  ist der Wert der großen Koalition, bezieht sich also darauf, dass alle Spieler kooperieren.

Zur Aufstellung der charakteristischen Funktion sind  $2^n$  Werte zu bestimmen. Während bei fünf Spielern 32 Werte ermittelt werden müssen, steigt diese Zahl bei zehn Spielern schon auf 1024. Bei 20 Spielern müssen schon mehr als eine Million Werte errechnet werden. Dieser mit der Spielerzahl exponentiell steigende Berechnungsaufwand stellt das einleitend beschriebene Problem dar, Kostenzuteilungen in der Praxis spieltheoretisch zu analysieren.

### Definition 2.2. Koalitionsspiel

Sei  $N$  eine Menge von Spielern und  $v(\cdot)$  eine charakteristische Funktion. Das Tupel  $\Gamma = (N, v)$  ist ein  $n$ -Personenspiel in Koalitionsform, im Folgenden Koalitionsspiel genannt.

**Definition 2.3. Teilspiel des Koalitionsspiels<sup>3</sup>**

Sei  $(N, v)$  ein Koalitionsspiel und  $S \subset N$  eine nichtleere Koalition. Dann ist  $(S, v)$ ,

$$v_S : T \in \rho(S) \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad v(\emptyset) = 0$$

ein Teilspiel von  $(N, v)$  mit  $v_S(T) = v(T)$  für alle  $T \subseteq S$ .

Gemäß der Aufgabenstellung soll die Aufteilung von Kosten und nicht von positiven Auszahlungen spieltheoretisch untersucht werden. In diesem Fall ordnet die charakteristische Funktion  $v(\cdot)$  den Koalitionen die Kosten in Form von negativen Auszahlungen zu. Es wird deshalb  $c(S) = -v(S)$  für alle  $S \subseteq N$  verwendet. Zwischen dem eingeführten Koalitionsspiel  $(N, v)$  und dem Koalitionsspiel  $(N, c)$ , in dem Kosten aufgeteilt werden, existiert ein eindeutiger Zusammenhang, da beide Spiele strategisch äquivalent sind.<sup>4</sup>

**Definition 2.4. Strategische Äquivalenz**

Zwei Koalitionsspiele  $(N, v)$ ,  $(N, v')$  sind strategisch äquivalent, falls es reelle Zahlen  $b \in \mathbb{R}$  und  $a_i \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$v(S) = b \cdot v'(S) + \sum_{i \in S} a_i.$$

Die charakteristische Funktion drückt – analog zum obigen Verständnis – im Fall des Koalitionsspiels  $(N, c)$  aus, mit welchem minimalen Kostenniveau  $c(S)$  eine Koalition  $S \subseteq N$  beispielsweise ihr Produktionsziel aus eigener Kraft erreichen kann, wenn sich alle anderen Spieler gegen sie stellen. Ist eine Koalition bestrebt,  $v(\cdot)$  möglichst groß werden zu lassen, versucht sie,  $c(\cdot)$  möglichst klein zu halten.<sup>5</sup>

**Beispiel 2.1.** Anhand eines Beispiels wird das Koalitionsspiel veranschaulicht. Das Beispiel wird durchgehend verwendet, um die noch zu beschreibenden Konzepte der kooperativen Spieltheorie zu illustrieren. Es seien  $n = 3$  Spieler gegeben, die vereinbaren, ein Bedürfnis in Kooperation zu erfüllen, wobei die anfallenden gemeinsamen Kosten untereinander aufgeteilt werden sollen. Bei dem Bedürfnis kann es sich so-

<sup>3</sup>Das hier definierte Teilspiel ist nicht zu verwechseln mit dem Teilspiel von nicht-kooperativen Spielen in Extensivform. Siehe zur Definition auch Peleg und Sudhölter (2007), S. 33.

<sup>4</sup>Vgl. Owen (1982), S. 148, Schichtel (1981), S. 40–43 und Wißler (1997), S. 30.

<sup>5</sup>Das Koalitionsspiel  $(N, v)$  wird auch als Gewinnspiel bezeichnet, während das Koalitionsspiel  $(N, c)$  als Kostenteilungsspiel bezeichnet wird.

wohl um die Nachfrage nach Dienstleistungen oder physischen Produkten als auch um eine gemeinsame Investition handeln.

Die Kosten für den ersten Spieler, wenn er nicht an der Kooperation teilnimmt, seien 95 (Geldeinheiten), die des zweiten Spielers 55 und die des dritten 50. Wenn der erste und der zweite Spieler kooperieren, können sie ihr Vorhaben mit den Kosten von 110 realisieren. Spieler eins und Spieler drei kommen zusammen auf Kosten von 105, Spieler zwei und Spieler drei auf 70. Wenn alle drei Spieler kooperieren, betragen die Gesamtkosten 117.

Daraus ergeben sich  $2^3 = 8$  mögliche Koalitionen mit den folgenden Werten der charakteristischen Funktion:

$$\begin{aligned} c(\{1\}) &= 95 & c(\{1, 2\}) &= 110 \\ c(\emptyset) &= 0 & c(\{2\}) &= 55 & c(\{1, 3\}) &= 105 & c(N) &= 117 \\ c(\{3\}) &= 50 & c(\{2, 3\}) &= 70 \end{aligned}$$

Spiele, in denen die Kooperation der Spieler zu einem besseren Ergebnis führt als die Nicht-Kooperation, heißen *wesentlich*.<sup>6</sup>

### Definition 2.5. Wesentliches Spiel

Ein Koalitionsspiel  $(N, c)$  heißt *wesentlich*, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^n c(\{i\}) > c(N).$$

Wenn der Zusammenschluss aller Spieler zu mehr Kosten führt als die Summe aller Einzelkosten, ist eine Kooperation offensichtlich nicht sinnvoll. Das Spiel aus Beispiel 2.1 ist wesentlich, denn es gilt  $95 + 55 + 50 > 117$ .

Eine weitere Eigenschaft der charakteristischen Funktion eines Koalitionsspiels ist die *Subadditivität*.

### Definition 2.6. Subadditivität

Ein Koalitionsspiel  $(N, c)$  heißt *subadditiv*, wenn für alle  $S, T \subseteq N$  mit  $S \cap T = \emptyset$  gilt:

$$c(S \cup T) \leq c(S) + c(T)$$

Schränkt man die Spielermenge  $N$  auf die Spieler mit positivem Beitrag ein, so ist das Spiel subadditiv. Erst durch die Annahme der Subadditivität wird ermöglicht,

<sup>6</sup>Vgl. im Folgenden wieder Peleg und Sudhölter (2007).

dass im Koalitionsspiel alle Spieler zusammen das insgesamt niedrigste Kostenniveau  $c(N)$  erreichen können, so dass sich die große Koalition  $N$  einstellen kann. Auf ein Unternehmen bezogen drückt die Subadditivität die Größen- und Verbundeffekte im Unternehmen aus. Der Zusammenschluss von zwei Unternehmensteilen ist ökonomischer als die Summe der Einzelergebnisse. Ein subadditives Spiel ist offensichtlich immer ein wesentliches Spiel.

Es lässt sich zeigen, dass das Spiel aus Beispiel 2.1 subadditiv ist. Dafür sind sechs Ungleichungen zu überprüfen.

$$\begin{aligned}
c(\{1\} \cup \{2\}) &= 110 < 150 = c(\{1\}) + c(\{2\}) \quad \checkmark \\
c(\{1\} \cup \{3\}) &= 105 < 145 = c(\{1\}) + c(\{3\}) \quad \checkmark \\
c(\{2\} \cup \{3\}) &= 70 < 105 = c(\{2\}) + c(\{3\}) \quad \checkmark \\
c(\{1, 2\} \cup \{3\}) &= 117 < 160 = c(\{1, 2\}) + c(\{3\}) \quad \checkmark \\
c(\{1, 3\} \cup \{2\}) &= 117 < 160 = c(\{1, 3\}) + c(\{2\}) \quad \checkmark \\
c(\{2, 3\} \cup \{1\}) &= 117 < 165 = c(\{2, 3\}) + c(\{1\}) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Das Spiel kann weiterhin *submodular* sein, wenn die Größenvorteile mit einer zunehmenden Koalitionsgröße wachsen.

### Definition 2.7. Submodularität

Ein Koalitionsspiel  $(N, c)$  heißt *submodular*, wenn für beliebige Koalitionen  $S, T \subseteq N$  gilt:

$$c(S \cup T) + c(S \cap T) \leq c(S) + c(T)$$

Die Submodularität kann für alle  $S, T \subseteq N$  mit  $S \subset T \subset N \setminus \{i\}$  und für alle  $i \in N$  auch ausgedrückt werden als:<sup>7</sup>

$$c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(T \cup \{i\}) - c(T)$$

Diese Eigenschaft besagt, dass der Vorteil durch den Beitritt eines Spielers zu einer größeren Koalition mindestens so groß ist wie beim Beitritt zu einer kleineren. So ist aus der zweiten Schreibweise ersichtlich, dass der Verlust in Form von gestiegenen Kosten beim Eintritt von  $i$  in der großen Koalition  $T$  in Relation zur kleineren

<sup>7</sup>Vgl. Peleg und Sudhölter (2007), S. 10–11 oder Holler und Illing (2003), S. 272–273.

Koalition  $S$  geringer ist. Die durch den Beitritt eines weiteren Spielers entstehenden Kosten sinken mit wachsender Koalitionsgröße. Liegt eine submodulare charakteristische Funktion vor, wird das Kostenminimum immer durch die Kooperation aller Spieler, ausgedrückt durch die große Koalition  $N$ , erreicht. Aus der Submodularität der charakteristischen Funktion folgt offensichtlich die Subadditivität.

Es lässt sich zeigen, dass das Spiel aus Beispiel 2.1 submodular ist. Dafür sind ebenfalls sechs Ungleichungen zu überprüfen.

$$\begin{aligned}
c(\{1\} \cup \{2\}) - c(\{1\}) &= 15 > 12 = c(\{1, 3\} \cup \{2\}) - c(\{1, 3\}) \quad \checkmark \\
c(\{1\} \cup \{3\}) - c(\{1\}) &= 10 > 7 = c(\{1, 2\} \cup \{3\}) - c(\{1, 2\}) \quad \checkmark \\
c(\{2\} \cup \{1\}) - c(\{2\}) &= 55 > 47 = c(\{2, 3\} \cup \{1\}) - c(\{2, 3\}) \quad \checkmark \\
c(\{2\} \cup \{3\}) - c(\{2\}) &= 15 > 7 = c(\{1, 2\} \cup \{3\}) - c(\{1, 2\}) \quad \checkmark \\
c(\{3\} \cup \{1\}) - c(\{3\}) &= 55 > 47 = c(\{2, 3\} \cup \{1\}) - c(\{2, 3\}) \quad \checkmark \\
c(\{3\} \cup \{2\}) - c(\{3\}) &= 20 > 12 = c(\{1, 3\} \cup \{2\}) - c(\{1, 3\}) \quad \checkmark
\end{aligned}$$

## 2.2 Spieltheoretische Kriterien zur Bewertung von Zuteilungsverfahren

Im Folgenden wird ein atomares, subadditives Koalitionsspiel  $(N, c)$  mit transferierbarem Nutzen betrachtet, in dem der charakteristische Funktionswert  $c(S)$  die geringsten Kosten ausdrückt, welche eine Koalition  $S$  unter den für sie widrigsten Bedingungen erreichen kann. In diesem Abschnitt werden spieltheoretische Kriterien angeführt, anhand derer sich Zuteilungsverfahren bewerten lassen und deren Erfüllung von einem Zuteilungsverfahren gefordert wird.<sup>8</sup> Die Auszahlungen an die Spieler, die von einem Zuteilungsverfahren vorgeschlagen werden, werden als *Zuteilung* bezeichnet.

### Definition 2.8. Zuteilung

Eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  ist ein Vektor  $(x_1, \dots, x_n)$ . Jeder Spieler  $i \in \{1, \dots, n\}$  hat im Spiel den Kostenbetrag  $x_i \in \mathbb{R}^+$  zu tragen.

Beschreibt die Zuteilung  $x_i$  das Ergebnis von  $i$ , wenn er am Spiel teilnimmt, ist im Unterschied dazu  $c(\{i\})$  der Wert des Spielers  $i$ , wenn er nicht am Spiel teil-

<sup>8</sup>Vgl. z. B. Peleg und Sudhölter (2007) und Balachandran und Ramakrishnan (1981).



nimmt. Wird im Spiel eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  vorgeschlagen, so können die Spieler daraus ableiten, in wie weit sich ihre Situation durch die Teilnahme am Spiel gegenüber ihrer Nichtteilnahme ändert.

Jedes Zuteilungsverfahren, das Zuteilungen vorschlägt, kann verschiedene Eigenschaften aufweisen. Diese dienen im weiteren Verlauf der Untersuchung als spieltheoretische Kriterien zur Bewertung der verschiedenen Zuteilungsverfahren.<sup>9</sup> Zuerst werden die Eigenschaften beschrieben, die die Akzeptanz einer Zuteilung beschreiben, und im Anschluss werden die Eigenschaften der Monotonie aufgeführt, die die Anreizwirkung einer Zuteilung beschreiben.

### 2.2.1 Eigenschaften der Akzeptanz

In diesem Abschnitt werden Eigenschaften beschrieben, deren Erfüllung für eine Akzeptanz der Zuteilung als notwendig angesehen wird, vgl. Young (1985b, 1994), Faulhaber (1975), Wißler (1997) und Curiel (1997).

Eine Zuteilung ist *individuell rational* wenn sie sicherstellt, dass jeder Spieler für sich allein stehend einen Anreiz hat, sich für die Teilnahme am Spiel zu entscheiden.

#### Definition 2.9. Individuelle Rationalität

Eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  heißt *individuell rational*, wenn die Kostenzuteilung für keinen Spieler  $i \in N$  höher ist als die Kosten, die er ohne Teilnahme am Spiel hätte.

$$x_i \leq c(\{i\}) \tag{2.1}$$

Da eine Teilnahme am Spiel den Spieler nicht schlechter stellt als seine Nichtteilnahme, hat er keinen Anreiz, aus dem Spiel auszutreten oder die Zuteilung abzulehnen. Im Verhandlungsspiel zwischen zwei Spielern nennt man die individuelle Rationalität auch Drohpunkt (*outside-option*).

Eine Zuteilung, die für alle Spieler individuell rational ist, ist jedoch nicht zwangsläufig rational für Koalitionen. Um eine freiwillige Kooperation zu erreichen, soll für keine Koalition ein Anreiz bestehen, die Zuteilung abzulehnen. Eine Zuteilung, die diese Verallgemeinerung der individuellen Rationalität sicherstellt, heißt *koalitionsrational*.

---

<sup>9</sup>Siehe Tijs und Driessen (1986), Schichtel (1981), Young (1985a,c), Wißler (1997), Moulin (1988), Doll (2005) und Frank (2003). Die Eigenschaften von Shapley (1953) werden in Abschnitt 2.4.1 betrachtet. Die Konsistenz als Eigenschaft des Nucleolus wird bewusst ausgeklammert, vgl. dazu Hart und Mas-Colell (1989).

**Definition 2.10. Koalitionsrationalität**

Eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  heißt koalitionsrational, wenn keine Koalition  $S \subseteq N$  durch die Teilnahme am Spiel schlechter gestellt wird im Vergleich zu ihrer Eigenständigkeit.

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \quad \forall S \subseteq N. \quad (2.2)$$

$\sum_{i \in S} x_i$  wird auch geschrieben als  $x_S$ .

Der Test auf Koalitionsrationalität wird auch als *stand-alone* Test bezeichnet, da er nur erfüllt wird, wenn die Koalition  $S$  nicht schlechter gestellt wird als wenn sie ihr Ergebnis aus eigener Kraft sichern müsste, also „alleine stehen“ würde.<sup>10</sup> Da hierbei auch die Einerkoalitionen  $S = \{i\}$  erfasst sind, schließt die Koalitionsrationalität die individuelle Rationalität ein.

Der Wert der großen Koalition  $c(N)$ , welcher das niedrigste Niveau an Gesamtkosten der Kooperation repräsentiert, soll den Spielern durch ein Zuteilungsverfahren zugeordnet werden. Bezogen auf die Kooperation als Ganzes gesehen sollen im Spiel nicht mehr Kosten als nötig getragen werden und alle anfallenden Kosten vollständig aufgeteilt werden. Dies führt zur Bedingung der *Effizienz*.<sup>11</sup>

**Definition 2.11. Effizienz**

Eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  heißt effizient, wenn das niedrigste Kostenniveau sicher gestellt und exakt diese Kosten vollständig aufgeteilt werden.

$$\sum_{i=1}^n x_i = c(N) \quad (2.3)$$

$\sum_{i=1}^n x_i$  wird auch geschrieben als  $x_N$ .

Nach Anwendung eines Zuteilungsverfahrens sollen keine Kosten übrig bleiben, die keinem Spieler zugeordnet wurden. Bei Verwendung eines ineffizienten Zuteilungsverfahrens blieben nach der Anwendung immer noch nicht verteilte Kosten übrig.<sup>12</sup> Genauso wenig soll der Fall auftreten, dass alle Zuteilungen in Summe einen höheren Betrag ergeben, als überhaupt an Kosten vorhanden ist.

<sup>10</sup>Die Koalitionsrationalität ist damit ein wesentlicher Bestandteil einer stabilen Zuteilung.

<sup>11</sup>Konform mit Young (1994), S. 1229 wird die Effizienz hier als Eigenschaft der Akzeptanz eingestuft.

<sup>12</sup>Young (1994), S. 1229 sieht die Effizienz deshalb als Gerechtigkeitsaspekt an.

Aus der Effizienz lässt sich ableiten, unter welchen Bedingungen die individuelle Rationalität oder die Koalitionsrationalität verletzt wird. Dies kann in einer Kooperation dann geschehen, wenn eine Koalition weniger Kosten trägt, als sie in Wirklichkeit verursacht. Gemäß (2.3) müssen diese Kosten dann von anderen Koalitionen getragen werden. In diesem Fall kann von einer Subventionierung innerhalb der Kooperation gesprochen werden: Spieler haben Kosten zu tragen, die sie gar nicht verursacht haben, wodurch für diese Spieler die Bedingung der individuellen Rationalität (2.1) oder der Koalitionsrationalität (2.2) verletzt wird. Diese subventionierenden Spieler haben einen Anreiz „aus dem Spiel auszutreten“, weil sie sich aus eigener Kraft ein besseres Ergebnis (aufgrund von geringeren Kosten) sichern können. Es wird deshalb gefordert, dass eine Zuteilung *subventionsfrei* ist.<sup>13</sup>

**Definition 2.12. Subventionsfreiheit**

Eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  heißt *subventionsfrei*, wenn für alle  $S \subseteq N$  gilt:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S) \quad (2.4)$$

Die Kosten, die von der Koalition  $S \subseteq N$  getragen werden, sind bei einer subventionsfreien Zuteilung mindestens so groß wie die Zusatzkosten, die  $S$  durch die Teilnahme am Spiel verursacht. Aus diesem Grund wird der Test auf Subventionsfreiheit auch *Zusatzkostentest* genannt.<sup>14</sup> Für den Fall der Einerkoalition, d. h.  $S = \{i\}$ , werden durch die Gleichheit in der Bedingung der Subventionsfreiheit (2.4) die so genannten *Grenzkosten*  $x_i^{GK}$  (auch *inkrementelle Kosten* genannt) beschrieben,

$$x_i^{GK} = c(N) - c(N \setminus \{i\}). \quad (2.5)$$

Wenn ein Spieler nicht mindestens seine Grenzkosten trägt und so durch seine Teilnahme an der Kooperation Mehrkosten für die übrigen Spieler entstehen, so subventioniert er sich auf ihre Kosten, und es droht ihm, von den anderen ausgeschlossen zu werden.

Es lässt sich zeigen, dass eine für alle Koalitionen subventionsfreie Zuteilung auch eine koalitionsrationale Zuteilung für alle Koalitionen ist.<sup>15</sup> Abweichend von (2.4) lässt sich die Subventionsfreiheit auch so formulieren, dass ein direkter Zusam-

<sup>13</sup>Das Konzept der Subventionsfreiheit wurde formuliert von Faulhaber (1975), S. 969.

<sup>14</sup>Vgl. z.B. Holler und Illing (2003), S. 284.

<sup>15</sup>Vgl. Faulhaber (1975), S. 968–969.

menhang hergestellt werden kann zwischen einer Koalition  $S$ , für die die Zuteilung nicht rational ist, und der *komplementären Koalition*  $N \setminus S$  (auch *Gegenkoalition* genannt), die den Zusatzkostentest nicht erfüllt.

**Satz 2.1. Test auf eine subventionierte Koalition**

Im Koalitionsspiel  $(N, c)$  wird eine Koalition  $N \setminus S$  von der Gegenkoalition  $S$  subventioniert – d. h. die linke Bedingung ist nicht haltbar – wenn die rechte Bedingung verletzt wird:

$$\sum_{i \in S} x_i \leq c(S) \Leftrightarrow \sum_{i \in N \setminus S} x_i \geq c(N) - c(S) \quad (2.6)$$

*Beweis.* Nach Multiplikation mit  $-1$  wird (2.2) mit  $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$  erweitert, so dass

$$\sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(S),$$

was mit  $\sum_{i \in N} x_i - \sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in N \setminus S} x_i$  zur angegebenen Bedingung führt. Diese ist äquivalent mit Definition 2.10, wenn sie für alle  $S \subseteq N$  erfüllt ist.  $\square$

Somit kann statt dem Test, ob eine Koalition höchstens ihre *stand-alone* Kosten zu tragen hat, auch getestet werden, ob andere Koalitionen mindestens die Zusatzkosten tragen, die sie durch ihren Beitritt verursachen. Die Subventionsfreiheit besagt, dass sich keine Koalition auf Kosten einer anderen Koalition bereichert, d. h. kein Teil einer Gemeinschaft muss einen anderen Teil mittragen (subventionieren), weil dieser zu wenig bezahlt. Dies ist äquivalent zu der Forderung, dass keine Koalition durch die Teilnahme am Spiel schlechter gestellt wird als vor ihrer Teilnahme. Konkret subventioniert eine Koalition  $S$ , für die die Koalitionsrationalität verletzt ist, die komplementäre Koalition (Gegenkoalition)  $N \setminus S$ , für die der Zusatzkostentest verletzt ist. Durch (2.6) kann diese Beziehung direkt hergestellt werden.

Alle hier aufgeführten Eigenschaften, die die Akzeptanz einer Zuteilung beschreiben, lassen sich zusammenfassen als alle effizienten Zuteilungen, die für keine Koalition die Bedingung der Rationalität verletzen. Eine Zuteilung, die alle diese Eigenschaften erfüllt, wird als (*strategisch*) *stabile Zuteilung* bezeichnet.

**Definition 2.13. Stabilität**

Zuteilungen, die die Eigenschaft der individuellen Rationalität, Koalitionsrationalität und der Effizienz erfüllen, heißen *stabil*. Sie erfüllen die Eigenschaft der Subventionsfreiheit.

Stabile Zuteilungen zeichnen sich dadurch aus, dass kein einzelner Spieler und keine Koalition die Möglichkeit besitzen, die vorgeschlagene Zuteilung in der Form zu „blockieren“, als dass sie in der Lage sind, sich aus eigener Kraft ein besseres Ergebnis zu sichern. Sie liefern für kein  $S \subseteq N$  einen Anreiz, das Spiel zu verlassen bzw. die vorgeschlagene Zuteilung abzulehnen.

Es wird das Beispiel 2.1 mit drei Spielern und der charakteristischen Funktion

$$\begin{aligned} c(\{1\}) &= 95 & c(\{1, 2\}) &= 110 \\ c(\emptyset) &= 0 & c(\{2\}) &= 55 & c(\{1, 3\}) &= 105 & c(N) &= 117 \\ c(\{3\}) &= 50 & c(\{2, 3\}) &= 70 \end{aligned}$$

fortgeführt. Eine Zuteilung dieses Spiels ist dann stabil, wenn sie die Bedingungen der Rationalität und Effizienz

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 95 & x_1 + x_2 &\leq 110 \\ x_2 &\leq 55 & x_1 + x_3 &\leq 105 & x_1 + x_2 + x_3 &= 117 \\ x_3 &\leq 50 & x_2 + x_3 &\leq 70 \end{aligned}$$

erfüllt. Die Beziehungen lassen sich wie in Abbildung 2.1 graphisch durch den zweidimensionalen Simplex

$$s^{(3)} := \{x_1, x_2, x_3 \geq 0 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 117\}$$

darstellen. Die Eckpunkte des Simplex repräsentieren die Zuteilungen, die jeweils einem Spieler die Gesamtkosten der großen Koalition zuteilen. Die Kanten des Dreiecks beschreiben die Zuteilungen, die einem Spieler keine Kosten zuteilen. Alle Punkte innerhalb des Simplex sind effiziente Zuteilungen, die jedem Spieler einen positiven Kostenbetrag zuteilen. Die eingetragenen Linien repräsentieren die durch die individuelle Rationalität bzw. die Koalitionsrationalität gegebenen Schranken. Die Fläche des Simplex, die von allen Bedingungen eingeschlossen wird, beinhaltet die Menge aller stabilen Zuteilungen.

Angenommen, die Zuteilung  $x_S$  der Koalition  $S$  aus Spieler zwei und drei würde die Koalitionsrationalität verletzen und wäre größer als  $c(S) = 70$ , z. B.  $x_S = 80$ . Dann gibt es aufgrund der Bedingung der Effizienz zwangsläufig eine Koalition, die zu wenig Kosten trägt. Tatsächlich gilt für  $N \setminus \{2, 3\} = \{1\}$ :

$$x_1 = 37 \not\geq 117 - 70 = 47$$

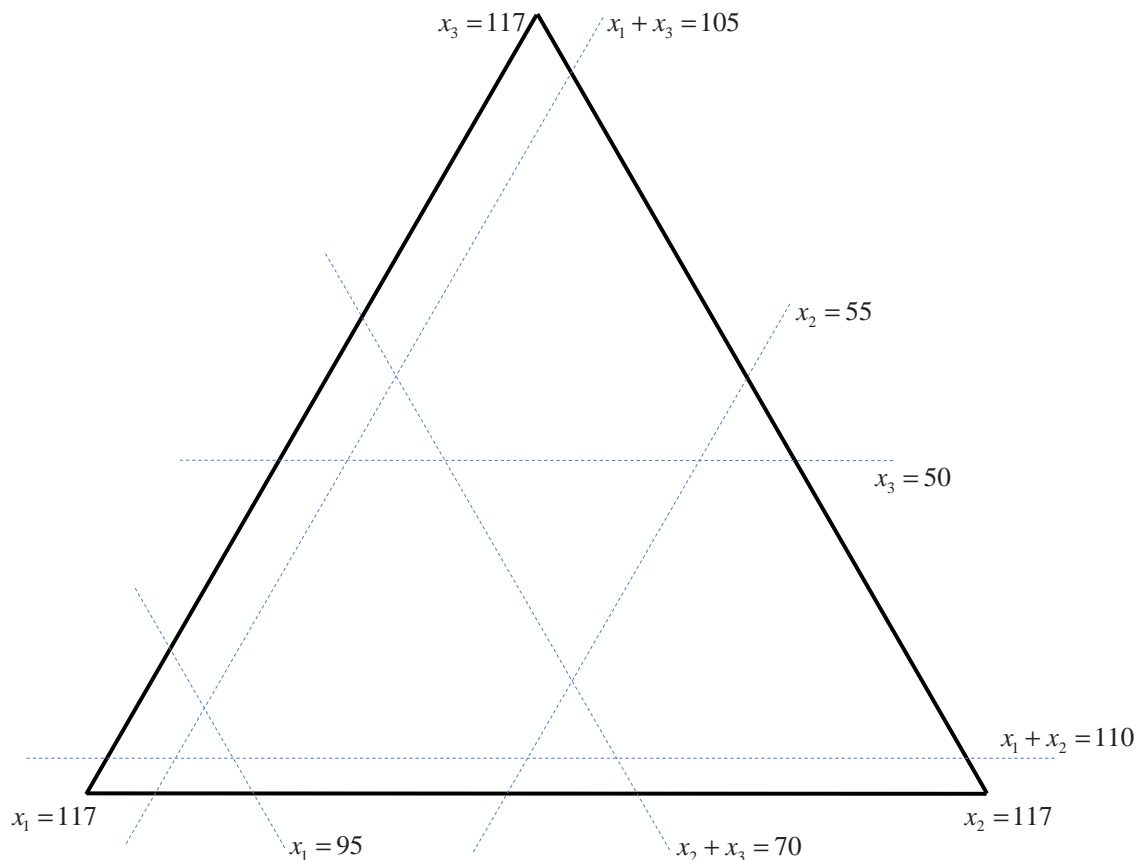


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung von Beispiel 2.1 als Simplex.

Weil der erste Spieler seine Zusatzkosten nicht trägt, ist die Zuteilung instabil in dem Sinne, dass die anderen Spieler nicht mit dem ersten Spieler kooperieren wollen. Der Test auf eine subventionierte Koalition (2.6) ist pragmatisch anwendbar.

### 2.2.2 Eigenschaften der Anreizwirkung

Ein *Zuteilungsverfahren* ist ein *Lösungsverfahren*  $f(\cdot)$  für Koalitionsspiele. Wie im Folgenden definiert wird, können Zuteilungsverfahren keine ( $|f(\cdot)| = 0$ ), eine eindeutige ( $|f(\cdot)| = 1$ ) oder eine Menge von Zuteilungen ( $|f(\cdot)| > 1$ ) ermitteln.

#### Definition 2.14. Zuteilungsverfahren im Koalitionsspiel<sup>16</sup>

Gegeben sei ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ . Dann ist  $f(N, c)$  ein Zuteilungsverfahren, das dem Koalitionsspiel  $(N, c)$  eine Teilmenge des  $\mathbb{R}_+^n$  zuordnet,  $f(N, c) \subset \mathbb{R}_+^n$ , so dass gilt:

$$f(N, c) = \{\mathbf{x}\},$$

<sup>16</sup>Vgl. Curiel (1997), S. 5.

wobei  $f(N, c) = \emptyset$  möglich ist. Dabei ist  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ .

**Definition 2.15. Eindeutige Zuteilungsverfahren im Koalitionsspiel<sup>17</sup>**

Gegeben sei ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ . Ein Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  heißt *eindeutig*, wenn es dem Koalitionsspiel  $(N, c)$  genau ein Element des  $\mathbb{R}_+^n$  zuordnet,  $f(N, c) \in \mathbb{R}_+^n$ , so dass gilt:

$$f(N, c) = \mathbf{x},$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ .

Bis zu diesem Punkt wurde noch keine Aussage über die Anreizorientierung getroffen. Bisher wurde vorausgesetzt, dass sich die charakteristische Funktion nicht ändert. Die im Abschnitt 2.2.1 beschriebene Eigenschaft der Stabilität stellt in dem Sinne ein „statisches“ Konzept dar, dass sie eine Zuteilung einmalig analysiert. Sie trifft jedoch keine Aussagen darüber, wie sich die Zuteilung bei Änderungen in der charakteristischen Funktion  $c(\cdot)$  verhält. Was aber passiert, wenn die Spieler sich zu einer Kooperation zusammenschließen, und sich nach dem Zusammenschluss die Koalitionswerte verändern? Dann sollte vorausgesetzt werden können, dass sich auch die Zuteilung verändert.

Für Koalitionsspiele werden drei verschiedene Arten der Anreizorientierung durch die Konzepte der *Monotonie* definiert. Die Beschreibung der drei verschiedenen Arten der Monotonie erfolgt nach Young (1985a,c).<sup>18</sup> Dabei wird untersucht, in welchem Verhältnis die Zuteilungen  $\mathbf{x}$  im Koalitionsspiel  $(N, c)$  und  $\mathbf{x}'$  im Koalitionsspiel  $(N, c')$  zueinander stehen. Betrachtet sei zunächst der Fall, dass die charakteristische Funktion für alle  $S \subset N$  gleich bleibt und nur für die große Koalition von  $c(N)$  auf einen neuen Wert  $c'(N)$  abweicht.

**Definition 2.16. Monotonie im Aggregat**

Ein eindeutiges Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  heißt *monoton im Aggregat*, wenn für  $f(N, c) = \mathbf{x}$  und  $f(N, c') = \mathbf{x}'$  mit  $c'(N) \leq c(N)$  und  $c'(S) = c(S)$  für alle  $S \subset N$  gilt:

$$x'_i \leq x_i \text{ für alle } i \in N.$$

Die Monotonie im Aggregat besagt, dass bei einer Verminderung der Kosten der großen Koalition kein Spieler mehr Kosten zu tragen hat als vorher, und dass

<sup>17</sup>Vgl. Curiel (1997), S. 5.

<sup>18</sup>Die Schreibweise folgt Wißler (1997).

mindestens ein Spieler weniger Kosten trägt. Ist dies nicht der Fall, steigen also die zu tragenden Kosten eines Spielers trotz einer Verringerung der Gesamtkosten, so hat dieser Spieler keinen Anreiz, an der Kostensenkung mitzuwirken. Andersherum wird ein Spieler die Zunahme der Gesamtkosten nicht verhindern, wenn seine zu tragenden Kosten bei steigendem  $c(N)$  sinken.<sup>19</sup>

Die Monotonie im Aggregat lässt sich auf die Veränderung jedes beliebigen Koalitionswertes verallgemeinern. Eine Zuteilung, die Änderungen der charakteristischen Funktion für alle Koalitionen  $S \subseteq N$  berücksichtigt, heißt *koalitionsmonoton*.

**Definition 2.17. Koalitionsmonotonie**

Ein eindeutiges Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  heißt *koalitionsmonoton*, wenn für  $f(N, c) = \mathbf{x}$  und  $f(N, c') = \mathbf{x}'$  mit  $c'(S) \leq c(S)$  für eine Koalition  $S \subset N$  und  $c'(T) = c(T)$  für alle  $T \neq S$  gilt:

$$x'_i \leq x_i \text{ für alle } i \in S.$$

Die Interpretation dieser Monotonieeigenschaft erfolgt analog zur Monotonie im Aggregat. Es lässt sich jedoch zeigen, dass sie noch nicht hinreichend ist, in jeder Situation Anreize zu setzen. Sie belohnt kostensparendes Verhalten eines Spielers nur dann, wenn dieses nicht durch gegensätzliches Verhalten erhalten anderer Spieler überkompensiert wird.

Dies sei anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht.<sup>20</sup> In einem Unternehmen werden die Gemeinkosten des Lagers proportional zur Nutzung (Lagerfläche, Ein- und Auslagerung von Material etc.) auf zwei Produktionsbereiche aufgeteilt. Die charakteristische Funktion sei dabei gegeben durch

$$c(\emptyset) = 0, \quad c(\{1\}) = 40, \quad c(\{2\}) = 60, \quad c(\{1, 2\}) = 75,$$

und die Zuteilung sei bestimmt durch:

$$x_1 = \frac{40}{100} \cdot 75 = 30, \quad x_2 = \frac{60}{100} \cdot 75 = 45.$$

Angenommen, Spieler 1 verringert seinen Nutzungsbedarf und senkt seinen Koalitionswert auf 39, wodurch gleichzeitig die Gesamtkosten auf 74 verringert werden. Seine zu tragenden Kosten sinken dann auf 29.16, während die von Spieler 2 auf 44.84 sinken.

<sup>19</sup>Vgl. Karagök (2006), S. 63.

<sup>20</sup>Vgl. im Folgenden Young (1994), S. 1218–1219.



Was passiert nun, wenn Spieler 1 seinen Bedarf so verringert, dass er nur Kosten von 39 erzeugt, Spieler 2 alleine jedoch Kosten von 71 hat, und aufgrund der neuen Gesamtkapazität des Lagers die Gesamtkosten 85 betragen? Dann lautet die neue Aufteilung

$$x_1 = \frac{39}{110} \cdot 85 = 30.14, \quad x_2 = \frac{71}{110} \cdot 85 = 54.86.$$

Das hier gewählte Zuteilungsverfahren gelangt zu einem unbefriedigenden Ergebnis, da eigentlich der erste Spieler aufgrund seiner Effizienzverbesserung weniger zahlen sollte statt mehr. Damit ein Spieler nicht schlechter gestellt wird, wenn der Wert des Spiels sich aufgrund des Verhaltens eines anderen Spielers verschlechtert, muss die *strenge Monotonie* erfüllt sein.

**Definition 2.18. Strenge Monotonie**

Ein eindeutiges Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  heißt *streng monoton*, wenn für  $f(N, c) = \mathbf{x}$  und  $f(N, c') = \mathbf{x}'$  mit  $c'(S) \leq c(S)$  für alle  $S \subset N$  gilt:

$$x'_i \leq x_i \text{ für alle } i \in S.$$

Die strenge Monotonie schließt die Koalitionsmonotonie ein, die Koalitionsmonotonie schließt die Monotonie im Aggregat ein, andersherum gilt dies jedoch nicht.<sup>21</sup> Die strenge Monotonie ist demnach die strengste Monotonieeigenschaft und belohnt produktives Verhalten bzw. bestraft unproduktives Verhalten. Wenn sie von einem Zuteilungsverfahren erfüllt wird, spricht man von einem *anreizkompatiblen* Zuteilungsverfahren.

## 2.3 Spieltheoretische Zuteilungsverfahren: Mengenkonzepte

Es wird nach einer Antwort gesucht, wie eine geeignete (wie auch immer definierte) Zuteilung  $\mathbf{x}$  generiert werden kann. Ausgangspunkt der im Folgenden vorgestellten Mengenkonzepte sind Zuteilungen, die individuell rational und effizient sind.<sup>22</sup> Denn: Ist eine Zuteilung nicht individuell rational, gibt es mindestens einen Spieler, der seine Teilnahme am Spiel verweigert. Es ist unter keinen Umständen möglich, ihm einen Anreiz zur Teilnahme zu schaffen. Zuteilungen, die nicht individuell rational sind, verhindern jedwede Kooperation und sind bei den Spielern nicht

<sup>21</sup>Vgl. Young (1985b), S. 17–18.

<sup>22</sup>Vgl. im Folgenden Peleg und Sudhölter (2007), S. 20–26; S. 57.

durchsetzbar. Ist eine Zuteilung nicht effizient, weil sie weniger Kosten verteilt, als im Spiel anfallen, so ist sie nicht durchführbar und bricht mit Sinn und Zweck einer Zuteilung gemeinsamer Kosten. Ist eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  nicht effizient, weil sie mehr Kosten verteilt als im Spiel anfallen, dann existiert eine Zuteilung  $\mathbf{y}$ , die mindestens einen Spieler besser stellt, ohne die anderen Spieler schlechter zu stellen. Dann ist  $\mathbf{x}$  nicht Pareto-optimal und nicht zur Kostenzuteilung geeignet. Individuell rationale und effiziente Zuteilungen heißen *Imputationen*.

### Definition 2.19. Imputation

Eine *Imputation* ist eine effiziente und individuell rationale Zuteilung,

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in N} x_i = c(N) \text{ und } x_i \leq c(\{i\}) \forall i \in N$$

In einem subadditiven Koalitionsspiel gibt es potentiell eine unendliche Anzahl von Imputationen. Die Menge aller Imputationen heißt *Imputationsmenge*  $\mathcal{I}(\cdot)$ .

### Definition 2.20. Imputationsmenge

Die *Imputationsmenge*  $\mathcal{I}(N, c)$  eines Koalitionsspiels  $(N, c)$  ist die Menge aller effizienten und individuell rationalen Zuteilungen (*Imputationen*).

Die Imputationsmenge stellt eine Vorauswahl an Lösungen dar, die eine Kooperation nicht partout verhindern und die durch die Forderung nach geeigneten (wie auch immer definierten) Eigenschaften verfeinert werden kann. Um die Imputationsmenge einzugrenzen, werden verschiedene Imputationen miteinander verglichen und Aussagen darüber getroffen, welche Imputationen von den Spielern vorgezogen werden. Dafür wird der Begriff der *Dominanz* eingeführt, der sich nur auf eine Koalition  $S$  als auch auf die Kooperation aller Spieler im Allgemeinen beziehen kann.

### Definition 2.21. Dominante Imputationen bezüglich einer Koalition

Sei  $S$  eine Koalition und seien  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  zwei Imputationen im Koalitionsspiel  $(N, c)$ .  $\mathbf{x}$  dominiert  $\mathbf{y}$  bezüglich der Koalition  $S$ ,  $\mathbf{x} \succ_S \mathbf{y}$ , wenn

$$x_i < y_i \text{ für alle } i \in S \text{ und } \sum_{i \in S} x_i \geq c(S)$$

Jeder Spieler der Koalition  $S$  wird durch  $\mathbf{x}$  besser gestellt als durch  $\mathbf{y}$ , so dass sich der Schluss ziehen lässt, dass die Koalition  $S$   $\mathbf{x}$  im Vergleich zu  $\mathbf{y}$  bevorzugen wird.<sup>23</sup> Die Dominanz bezüglich einer Koalition wird auf eine allgemeine Form erweitert.

### Definition 2.22. Dominante Imputationen

Seien  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  und  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  zwei Imputationen im Koalitionsspiel  $(N, c)$ .  $\mathbf{x}$  dominiert  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ , wenn eine Koalition  $S \subset N$  existiert, bezüglich der  $\mathbf{x}$   $\mathbf{y}$  dominiert,  $\mathbf{x} \succ_S \mathbf{y}$ .

$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$  bedeutet, dass es im Spiel Koalitionen gibt, die  $\mathbf{x}$  gegenüber  $\mathbf{y}$  durchsetzen wollen. Allerdings können sich Imputationen gegenseitig dominieren. So gilt z. B. für  $\mathbf{x} = (0, 0, 1/2, 1/2)$  und  $\mathbf{y} = (1/2, 1/2, 0, 0)$  für  $S = \{1, 2\}$  und  $T = \{3, 4\}$ , dass  $\mathbf{x} \succ_S \mathbf{y}$  und  $\mathbf{y} \succ_T \mathbf{x}$ .

Alle der in den folgenden beiden Abschnitten vorgestellten Zuteilungsverfahren lassen sich in die Kategorie der *Mengenkonzepte* einordnen, da sie auf dem Dominanzbegriff von Imputationen aufbauen und die Imputationsmenge einschränken.

### 2.3.1 Kern, Epsilon-Kern und Kleinst Kern

Die Imputationsmenge besteht aus allen effizienten und individuell rationalen Zuteilungen. Eine Imputation garantiert jedoch nicht, dass die große Koalition gebildet wird. Sie stellt zwar alle Spieler einzeln gesehen besser, garantiert jedoch noch nicht die Koalitionsrationalität.<sup>24</sup>

Der *Kern*  $\mathcal{K}(\cdot)$ , im Englischen *core*, wurde erstmals von Gillies (1953) formuliert, und soll sicherstellen, dass die Teilnahme am Spiel für alle Koalitionen rational ist.

### Definition 2.23. Kern

Gegeben sei ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ . Der Kern  $\mathcal{K}(N, c)$  des Spiels  $(N, c)$  ist die Menge aller nicht-dominierten Imputationen.

Es lassen sich direkt folgende **Eigenschaften des Kerns** ableiten:

- Der Kern ist eine Teilmenge der Imputationsmenge

<sup>23</sup>Die hier vorgestellte Definition entspricht der *strikten Dominanz*. Ersetzt man die erste Bedingung der Definition mit  $x_i \leq y_i \forall i \in S$  und  $\exists j \in S$  mit  $x_j < y_j$ , so spricht man von *schwacher Dominanz*. Diese Unterscheidung ist hier irrelevant, da ausschließlich Spiele mit Seitenzahlungen betrachtet werden. Eine schwache Dominanz kann durch eine Umverteilung von  $x_j$  unter den anderen Spielern der Koalition immer in eine strikte Dominanz umgewandelt werden. Vgl. Holler und Illing (2003), S. 276.

<sup>24</sup>Vgl. Definition 2.10.

- Der Kern kann leer sein, d.h. es gibt Spiele  $(N, c)$ , für die keine Imputationen existieren, welche die Bedingungen des Kerns erfüllen.<sup>25</sup>
- Der Kern muss nicht einelementig sein.

Der folgende Satz verdeutlicht dies.

**Satz 2.2. Owen (1982)**

Der Kern  $\mathcal{K}(N, c)$  eines Koalitionsspiels  $(N, c)$  besteht aus der Menge aller Zuteilungen, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

$$\mathcal{K}(N, c) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in N} x_i = c(N) \text{ und } \sum_{i \in S} x_i \leq c(S), \forall S \neq \emptyset \right\} \quad (2.7)$$

Die Forderung des Kerns, nur nicht-dominierte Imputationen auszuwählen, verleiht ihm die Eigenschaft der Koalitionsrationalität. Der Kern enthält alle effizienten Zuteilungen, die für keinen Spieler und keine Koalition von Spielern die Bedingung der Rationalität verletzen. Somit erfasst das Konzept des Kerns die Bedingung der Effizienz und über die Koalitionsrationalität auch die Bedingung der Subventionsfreiheit. Somit sind alle in Abschnitt 2.2.1 eingeführten Eigenschaften im Kern vereint. Demnach erfüllt der Kern Definition 2.13 und kann als die *Menge der (strategisch) stabilen Zuteilungen* bezeichnet werden. Wie schon erwähnt besitzen kein Spieler und keine Koalition die Möglichkeit, eine vorgeschlagene stabile Zuteilung in der Form zu „blockieren“, als dass sie in der Lage sind, sich aus eigener Kraft ein besseres Ergebnis zu sichern, denn keine Koalition kann glaubwürdig damit drohen, aus der großen Koalition auszutreten. Dies folgt direkt aus der Eigenschaft des Kerns, nur nicht-dominierte Imputationen zuzulassen. Zuteilungen aus der Menge des Kerns liefern für kein  $S \subseteq N$  einen Anreiz, das Spiel zu verlassen bzw. eine durch den Kern vorgeschlagene Zuteilung abzulehnen und stellen die freiwillige Kooperation der Spieler sicher. Weil der Kern gerade die spieltheoretische Forderung nach Stabilität verkörpert wird eine Zuteilung *Kernzuteilung* genannt, wenn sie im Kern liegt und die Eigenschaft der Stabilität aufweist.<sup>26</sup>

Der Kern lässt sich einschränken bzw. vergrößern, indem die Bedingung der Koalitionsrationalität verschärft bzw. gelockert wird. Dieses Variantenspiel des Kerns

<sup>25</sup>Vgl. Holler und Illing (2003), S. 281.

<sup>26</sup>Deshalb werden Zuteilungsverfahren angestrebt, die Kernzuteilungen erzeugen. Der Kern von Beispiel 2.1 entspricht gerade der Menge aller stabilen Zuteilungen gemäß Abschnitt 2.2.1.

wird durch den so genannten  $\epsilon$ -Kern  $\mathcal{K}_\epsilon(\cdot)$  formalisiert, der von Shapley und Shubik (1966) vorgeschlagen wird.

**Definition 2.24.  $\epsilon$ -Kern**

Es sei  $\epsilon$  eine reellwertige Zahl und  $(N, c)$  ein Koalitionsspiel. Dann heißt

$$\mathcal{K}_\epsilon(N, c) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i \in N} x_i = c(N) \text{ und } \sum_{i \in S} x_i + \epsilon \leq c(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset \right\}$$

der  $\epsilon$ -Kern des Spiels.

Dass der  $\epsilon$ -Kern für  $\epsilon = 0$  mit dem Kern übereinstimmt, folgt sofort aus der Definition. Der  $\epsilon$ -Kern erfüllt folgenden Zweck: Ist der Kern leer, dann können die Spieler durch ein  $\epsilon < 0$  subventioniert werden. Sie werden dadurch besser gestellt, als es ihnen eine Imputation des Spiels erlauben würde. Ab einem bestimmten Epsilon wird dann die Koalitionsrationalität erfüllt, so dass der Kern des so modifizierten Spiels gewährleistet wird.<sup>27</sup>

Das Konzept des  $\epsilon$ -Kerns lässt sich in analoger Weise dazu verwenden, den Kern einzuschränken. Ist der Kern nichtleer und enthält mehr als ein Element, dann werden die Positionen der Spieler durch ein  $\epsilon > 0$  verschlechtert. Ein steigendes Epsilon vermindert die Attraktivität einer Zuteilung für alle Spieler. Wird das Epsilon genügend groß gewählt, existieren gar keine Zuteilungen mehr, die die Koalitionsrationalität sicherstellen. Mit dem Wert  $\epsilon_0$  ist es möglich den  $\epsilon$ -Kern so zu justieren, dass er möglichst wenige Elemente enthält. Diese Lösung nennt man den *Kleinst-Kern*  $\mathcal{K}_{\epsilon_0}(\cdot)$  oder den  $\epsilon_0$ -Kern, englisch *Least-Core*.<sup>28</sup>

**Definition 2.25.  $\epsilon_0$ -Kern**

Sei  $(N, c)$  ein Koalitionsspiel mit nichtleerem Kern. Es werde  $\epsilon$  im Koalitionsspiel  $(N, c)$  so weit auf den Wert  $\epsilon_0$  maximiert, dass der  $\epsilon$ -Kern von  $(N, c)$  gerade nichtleer ist. Die so bestimmte Menge  $\mathcal{K}_{\epsilon_0}(N, c)$  heißt *Kleinst-Kern*.

Aus der Definition folgt direkt, dass der Kleinst-Kern eine Menge von Kernzuteilungen bestimmt und dass er nichtleer ist, wenn der Kern existiert. Es verbleibt

<sup>27</sup>Vgl. Shubik (1985), S. 84–88.

<sup>28</sup>Vgl. Maschler et al. (1979).

zu zeigen, wie der Wert  $\epsilon_0(N, c)$  bestimmt werden kann.<sup>29</sup> Formuliert man die Bedingung  $\sum_{i \in S} x_i + \epsilon \leq c(S)$  des  $\epsilon$ -Kerns um in

$$\epsilon \leq c(S) - \sum_{i \in S} x_i,$$

entspricht dies den Abständen, die die Zuteilungen zu den Grenzen haben, die durch die Koalitionsrationalität vorgegeben sind. Vergleicht man alle Abstände einer bestimmten Zuteilung  $\mathbf{x}$  des  $\epsilon$ -Kerns, so ist  $\epsilon$  für eine Koalition  $S \neq \emptyset, N$  kleiner als für alle anderen Koalitionen dieser Zuteilung. Dieser Abstand sei definiert durch

$$\epsilon_{\min}(\mathbf{x}) := \min_{S \neq \emptyset, N} \left\{ c(S) - \sum_{i \in S} x_i \right\}.$$

Wird dieser Wert überschritten, so wird für  $S$  die Koalitionsrationalität verletzt, die Zuteilung  $\mathbf{x}$  wird aus dem Kern „herausgeschoben“. Um die Zuteilungen nach und nach auszuschließen, wird  $\epsilon$  für alle Imputationen  $\mathbf{x}$  betrachtet und nach und nach auf den Wert  $\epsilon_0$  angehoben, so dass der Kern gerade nichtleer ist.  $\epsilon_0(N, c)$  entspricht also gerade dem größtmöglichen Wert von  $\epsilon_{\min}(\mathbf{x})$  über alle  $\mathbf{x}$ , und kann errechnet werden durch

$$\epsilon_0(N, c) := \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{I}(N, c)} \min_{S \neq \emptyset, N} \left\{ c(S) - \sum_{i \in S} x_i \right\}.$$

Der zur Berechnung von  $\epsilon_0$  verwendete Ausdruck

$$e(S, \mathbf{x}) := c(S) - \sum_{i \in S} x_i$$

wird als *Koalitionsüberschuss* (engl. *excess*) bezeichnet.<sup>30</sup> Da sich die Koalition  $S$  den Koalitionswert  $c(S)$  alleine sichern kann, beschreibt der Koalitionsüberschuss, in wie weit sich eine Koalition bei Annahme einer Zuteilung  $\mathbf{x}$  gegenüber ihrem stand-alone Wert verbessert ( $e(S, \mathbf{x}) > 0$ ) bzw. verschlechtert ( $e(S, \mathbf{x}) < 0$ ). Der Koalitionsüberschuss dient damit als Maß der Unzufriedenheit einer Koalition bezüglich einer Zuteilung. Die Koalition  $S$  ist mit einer Zuteilung umso unzufriedener, je geringer der Koalitionsüberschuss ist, und sie favorisiert eine Zuteilung umso mehr, je

<sup>29</sup>Die mathematische Herleitung erfolgt analog zu Karagök (2006), S. 35. Diese ist entnommen aus Maschler et al. (1979), S. 306, wurde jedoch auf den Fall der Kostenteilung übertragen.

<sup>30</sup>Vgl. Peleg und Sudhölter (2007), S. 58.

mehr diese ihren Koalitionsüberschuss erhöht. Der Kleinst-Kern schränkt den Kern auf die Zuteilungen ein, die die minimalen Koalitionsüberschüsse maximieren.<sup>31</sup> Es lässt sich festhalten, dass der Kleinst-Kern versucht, den Nachteil des Kerns auszugleichen, keine eindeutige Zuteilung zu bestimmen. Obwohl der Kleinst-Kern den Kern eingrenzt, kann er jedoch nicht sicherstellen, dass durch geeignete Wahl von  $\epsilon_0$  genau eine Zuteilung übrig bleibt.<sup>32</sup>

### 2.3.2 Der Nucleolus

Da keine „Kernvariante“ (Kern, Epsilon-Kern oder Kleinst-Kern) eine eindeutige Lösung garantiert, schlägt Schmeidler (1969) den *Nucleolus* vor.<sup>33</sup> Der Nucleolus stellt eine Art Kompromiss bzw. Schlichtung zwischen den Spielern dar, was in diesem Abschnitt erläutert wird.

Im vorigen Abschnitt wurde der Begriff des Koalitionsüberschusses eingeführt und als Maß der Unzufriedenheit interpretiert. Eine Koalition  $S$  wird die Zuteilung  $\mathbf{x}$  der Zuteilung  $\mathbf{y}$  vorziehen, wenn  $e(S, \mathbf{x}) > e(S, \mathbf{y})$  ist. Ist eine Zuteilung  $\mathbf{x}$  gegeben, wird diejenige Koalition  $S$  am stärksten gegen  $\mathbf{x}$  protestieren, für die  $\mathbf{x}$  den kleinsten Koalitionsüberschuss aufweist.

Es sei  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$  der *Vektor der geordneten Koalitionsüberschüsse* bezüglich  $\mathbf{x}$ , der die Koalitionsüberschüsse aller Koalitionen vom kleinsten zum größten ordnet. Da es  $2^n$  Koalitionen gibt, hat  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$   $2^n$  Komponenten. Der Vektor weist also in seiner ersten Komponente die Koalition mit dem kleinsten Koalitionsüberschuss bezüglich  $\mathbf{x}$  aus, in seiner zweiten Komponente die Koalition mit dem zweitkleinsten Koalitionsüberschuss bezüglich  $\mathbf{x}$  etc. Der zu findende Kompromiss sei so definiert, dass der Koalitionsüberschuss der (unter allen möglichen Imputationen) unzufriedensten Koalition möglichst groß ist, damit die Koalition nicht das Bestehen der großen Koalition gefährdet.<sup>34</sup> Der Vektor  $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})$  lässt sich mit den Vektoren  $\boldsymbol{\theta}(\cdot)$  für die anderen Zuteilungen  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$  vergleichen. Wurden die Zuteilungen mit dem größtmöglichen Überschuss in der ersten Komponente des Vektors  $\boldsymbol{\theta}(\cdot)$  gefunden, so werden die anderen Zuteilungen verworfen und das Verfahren wird sukzessive für die weiteren

<sup>31</sup>Vgl. Karagök (2006), S. 35.

<sup>32</sup>Es lässt sich leicht ein Gegenbeispiel konstruieren, bei dem der minimale Koalitionsüberschuss für zwei verschiedene Koalitionen  $S$  und  $T$  bei zwei verschiedenen Zuteilungen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  gleich groß ist.

<sup>33</sup>Der Nucleolus schlägt eine eindeutige Lösung vor, wird hier aber aufgrund seines Vorgehens und gemäß Holler und Illing (2003) auch als Mengenkonzept eingestuft.

<sup>34</sup>Maschler et al. (1979) werten den Nucleolus deshalb als „fair“, da er sich wie ein Schlichter verhält, der die Position des jeweils am schlechtesten Gestellten versucht zu verbessern. Karagök (2006), S. 48 beschreibt den Nucleolus als „Minimalkonsens“.

Komponenten von  $\theta(\cdot)$  fortgeführt. Es findet also eine *lexikographische* Ordnung statt.<sup>35</sup>

**Definition 2.26.** Ein Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  ist *lexikographisch größer* als der Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{a} >_L \mathbf{b}$ , wenn es eine Indexzahl  $m \leq n$  gibt mit

- $a_i = b_i$  für  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  und
- $a_m > b_m$ ,

mit  $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ .  $\mathbf{a} \geq_L \mathbf{b}$  bedeutet, dass entweder  $\mathbf{a} >_L \mathbf{b}$  oder  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$  gilt.

Die Idee der lexikographischen Ordnung spiegelt dadurch den Grundgedanken des Nucleolus, einen Kompromiss so einzugehen, dass der jeweils kleinste Koalitionsüberschuss maximiert wird.

**Definition 2.27. Nucleolus**

Sei  $(N, c)$  ein Koalitionsspiel. Der Nucleolus  $\mathcal{N}(N, c)$  ist die Menge aller Imputationen, die  $\theta(\mathbf{x})$  lexikographisch maximieren.

$$\mathcal{N}(N, c) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{I}(N, c) : \theta(\mathbf{x}) \geq_L \theta(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{I}(N, c)\}$$

Der Nucleolus weist folgende **Eigenschaften** auf.<sup>36</sup>

- Der Nucleolus existiert immer.<sup>37</sup>
- Bei nichtleerem Kern liegt der Nucleolus im Kern.<sup>38</sup>
- Der Nucleolus bestimmt eine eindeutige Lösung.<sup>39</sup>
- Der Nucleolus ist nicht monoton im Aggregat.<sup>40</sup>

Da der Nucleolus nicht monoton im Aggregat ist, kann er weder koalitionsmonoton noch streng monoton sein. Er erfüllt somit keine der Eigenschaften der Anreizkompatibilität. Ebenso sei bemerkt, dass er sich nur mit großem Aufwand berechnen lässt: Der Nucleolus kann für Spiele mit mehr als drei Spielern nur durch eigens entwickelte

<sup>35</sup>Vgl. Karagök (2006), S. 46.

<sup>36</sup>Insbesondere erfüllt der Nucleolus (als einzigstes Zuteilungsverfahren die *Konsistenzeigenschaft* und die *Kovarianzeigenschaft*, vgl. Sobolev (1975), S. 92–151) und Karagök (2006), S. 56–70. Diese Eigenschaften sind für die Ergebnisse dieser Arbeit nicht von Bedeutung.

<sup>37</sup>Vgl. Maschler und Peleg (1966). Zitiert nach Schmeidler (1969).

<sup>38</sup>Vgl. Schmeidler (1969), S. 1165.

<sup>39</sup>Vgl. Schmeidler (1969), S. 1164. Die Lösung des Nucleolus wird selbst als Nucleolus bezeichnet.

<sup>40</sup>Vgl. Megiddo (1974).



Methoden bestimmt werden.<sup>41</sup> Auf die Veranschaulichung der Berechnung für das Beispiel 2.1 wird hier verzichtet.<sup>42</sup> Die Lösung lautet  $\mathcal{N}(N, c) = (64.00, 29.00, 24.00)$ .

Mit dem Nucleolus schließt die Betrachtung der Mengenkonzeppte. Die *Verhandlungsmenge*,<sup>43</sup> der *Kernel*,<sup>44</sup> und die *Neumann-Morgenstern Lösung*<sup>45</sup> werden nicht betrachtet, da sie – gemessen an den Eigenschaften der Akzeptanz und der Anreizwirkung – keinem der vorgestellten Zuteilungsverfahren überlegen sind.<sup>46</sup>

## 2.4 Spieltheoretische Zuteilungsverfahren: Wertkonzepte

Alle der bisher betrachteten Zuteilungsverfahren haben gemeinsam, dass sie aus einer Menge von Zuteilungen (der Imputationsmenge) geeignete Zuteilungen auswählen. Im Unterschied zu diesem Vorgehen bauen die in diesem Abschnitt vorgestellten Zuteilungsverfahren nicht auf dem Dominanzbegriff auf. Als eindeutige Zuteilungsverfahren werden sie *Wertkonzepte* genannt.

### 2.4.1 Der Shapley-Wert

Als ein mögliches Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  für Koalitionsspiele  $(N, c)$  stellte Shapley (1953) den nach ihm benannten *Shapley-Wert*  $\Phi(N, c)$  vor, der sich anhand der Effizienz (2.11) und den drei folgenden, von Shapley zusätzlich geforderten Eigenschaften ableiten lässt.

#### Definition 2.28. Anonymität

Sei  $(N, c)$  ein Koalitionsspiel und  $\pi$  eine Permutation der Menge  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ . Ein Zuteilungsverfahren  $f(N, c) = (f_1(N, c), f_2(N, c), \dots, f_n(N, c))$  heißt *anonym*, wenn für alle  $i \in N$  gilt

$$f_{\pi(i)}(\pi)(N, c) = f_i(N, c).$$

Die Anonymität fordert, dass das Zuteilungsverfahren die Spieler unabhängig von deren Reihenfolge bzw. Nummerierung betrachtet. Sie stellt sicher, dass eine Permutation der Spieler sich nicht auf deren Ergebnis auswirkt.

<sup>41</sup>Vgl. Karagök (2006), S. 51.

<sup>42</sup>Es sei auf Karagök (2006), S. 48–51 verwiesen.

<sup>43</sup>Vgl. Aumann und Maschler (1964), englisch *bargaining set*.

<sup>44</sup>Vgl. Davis und Maschler (1965) und Maschler et al. (1972).

<sup>45</sup>Vgl. Peleg und Sudhölter (2007), S 51-80 und Holler und Illing (2003), S. 289–299.

<sup>46</sup>Gleiches gilt für die Nucleolus Varianten des *f-Nucleolus*, vgl. Sudhölter (1997), des *Modiculus*, vgl. Wallmeier (1983), und des *normalisierten Nucleolus* und des *Disruptions-Nucleolus*, vgl. Schichtel (1981), S. 15–17. Siehe auch Karagök (2006), S. 55–56.

Für die Definition der nächsten Eigenschaft ist der Begriff des *Dummy-Spielers* vonnöten. Ein Dummy-Spieler fügt dem Koalitionswert jeder denkbaren Koalition  $S$  lediglich seinen individuellen Koalitionswert hinzu, ohne einen Kostenvorteil zu ermöglichen, d.h.  $c(S) + c(\{i\}) = c(S \cup \{i\})$ . Da der Dummy-Spieler zu keiner Koalition einen Kostenvorteil der Form  $c(S) + c(\{i\}) > c(S \cup \{i\})$  beitragen kann, ist seine Position im Spiel schwach, da es für eine Koalition unerheblich ist, ob  $i$  an ihr teilnimmt oder nicht.

**Definition 2.29. Dummy-Eigenschaft**

Sei  $i$  ein Dummy-Spieler im Koalitionsspiel  $(N, c)$ . Ein Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  erfüllt die Dummy-Eigenschaft, wenn gilt:

$$f_i(N, c) = c(\{i\}).$$

Diese Eigenschaft setzt durch, dass jeder Dummy-Spieler im Spiel seine individuellen Kosten trägt und nicht von Kostenvorteilen profitiert, die aus Kooperationen entstehen.

Letztlich fordert Shapley, dass die Zuteilung des Koalitionsspiels aus der Vereinigung von zwei unabhängigen Koalitionsspielen  $(N, c)$  und  $(N, c')$  gleich sein soll wie die Summe der Zuteilung aus den beiden Koalitionsspielen.

**Definition 2.30. Additivität**

Gegeben seien zwei Koalitionsspiele  $(N, c)$  und  $(N, c')$ , und sei  $f(N, c)$  die Zuteilung des Spiels  $(N, c)$  und  $f(N, c')$  die Zuteilung des Spiels  $(N, c')$ . Ein Zuteilungsverfahren  $f(\cdot)$  heißt *additiv*, wenn gilt:

$$f_i(N, c + c') = f_i(N, c) + f_i(N, c').$$

Shapley leitet aus der Effizienz und diesen drei Forderungen den Shapley-Wert ab und beweist, dass dieser als einziges Zuteilungsverfahren alle Eigenschaften erfüllt.

**Definition 2.31. Shapley-Wert**

Gegeben sei ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ . Der Shapley-Wert  $\Phi(N, c)$  ist ein Zuteilungsverfahren des Koalitionsspiels  $(N, c)$  mit

$$\Phi_i(N, c) = \sum_{i \in S, S \subseteq N} \frac{(n - |S|)! (|S| - 1)!}{n!} (c(S) - c(S \setminus \{i\})).$$

**Satz 2.3. Shapley (1953)**<sup>47</sup>

*Es gibt nur ein Zuteilungsverfahren, das die Effizienz, die Anonymität, die Dummy-Eigenschaft und die Additivität erfüllt. Es ist der Shapley-Wert.*

Der Shapley-Wert lässt sich folgendermaßen veranschaulichen: Der Term  $c(S) - c(S \setminus \{i\})$  misst die Grenzkosten  $x_i^{GK}$ , die Spieler  $i$  einer Koalition  $S$  hinzufügt. Dieser Beitrag wird mehrmals gezählt, und zwar so oft, wie es dem Spieler  $i$  möglich ist, als letzter zu einer Koalition beizutreten. Da es  $n!$  mögliche Reihenfolgen gibt, Koalitionen zu bilden, ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Permutation  $1/n!$ , wie im Nenner des Bruchs angegeben. Wenn Spieler  $i$  die Koalition  $S$  komplettiert gibt es  $(|S| - 1)!$  Möglichkeiten, wie die  $(|S| - 1)$  Spieler vor  $i$  der Koalition  $S$  beigetreten sein können. Die Anzahl der Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge die übrigen  $(n - |S|)$  Spieler hinzustoßen können, um die große Koalition  $N$  zu vervollständigen, beträgt  $(n - |S|)!$ . Somit drückt der Bruchterm die Wahrscheinlichkeit aus, dass  $i$  eine Koalition vervollständigt, und dass seine Grenzkosten berücksichtigt werden.

Welches sind die **Eigenschaften des Shapley-Werts**? Offensichtlicherweise ist der Shapley-Wert eindeutig. Weiterhin ist er effizient und individuell rational.<sup>48</sup> Außerdem gilt:

**Satz 2.4. Shapley (1953)**

*Die Dummy-Eigenschaft und die Additivität lassen sich durch die Eigenschaft der strengen Monotonie ersetzen.*

Der Shapley-Wert ist also streng monoton und erfüllt folglich die Monotonie im Aggregat und die Koalitionsmonotonie. Der Shapley-Wert erfüllt deshalb alle Eigenschaften der Anreizwirkung. Dies ist die Eigenschaft des Shapley-Wertes, die ihn von allen anderen Zuteilungsverfahren für Koalitionsspiele abgrenzt, denn es gilt:

**Satz 2.5. Young (1985c), S. 70.**<sup>49</sup>

*Der Shapley-Wert ist das einzige streng monotone Zuteilungsverfahren.*

Ein Nachteil des Shapley-Wertes ist, dass er nicht koalitionsrational ist.<sup>50</sup> Deshalb erfüllt er nicht die spieltheoretische Eigenschaft der Stabilität. Allerdings besitzt er

<sup>47</sup>Shapley (1953), S. 309–312

<sup>48</sup>Vgl. Frank (2003), S. 91.

<sup>49</sup>Der Satz gilt für atomare Spiele. Für nichtatomare Spiele vgl. Young (1985a), S. 762–764 bzgl. des Aumann-Shapley-Wertes.

<sup>50</sup>Vgl. Frank (2003), S. 91.

die Eigenschaft, bei Spielen mit submodularen charakteristischen Funktionen immer eine Zuteilung zu bestimmen, die im Kern liegt. Auf dieses Ergebnis sei an dieser Stelle nur hingewiesen, vgl. im Detail Abschnitt 3.1.1.

Zur Veranschaulichung des Zuteilungsverfahrens wird der Shapley-Wert für das Beispiel 2.1 berechnet. Für die Berechnung von  $\Phi_1(N, c)$  gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_1(N, c) &= \frac{2!0!}{3!} \cdot c(\{1\}) + \frac{1!1!}{3!} \cdot [c(\{1, 2\}) - c(\{2\})] + \frac{1!1!}{3!} \cdot [c(\{1, 3\}) - c(\{3\})] \\ &\quad + \frac{2!0!}{3!} \cdot [c(N) - c(\{2, 3\})] = \frac{1}{3} \cdot 95 + \frac{1}{6} \cdot 55 + \frac{1}{6} \cdot 55 + \frac{1}{3} \cdot 47 \\ &= 65.67.\end{aligned}$$

Aus der Berechnung von  $\Phi_2(N, c)$  und  $\Phi_3(N, c)$  folgt  $\Phi = (65.67, 28.17, 23.17)$ . Da die zugrundeliegende charakteristische Funktion submodular ist, bestimmt der Shapley-Wert für das Beispiel eine Kernzuteilung, was sich leicht überprüfen lässt.

## 2.4.2 Weitere Wertkonzepte

Als weitere Wertkonzepte sind für die Fragestellung dieser Arbeit zusätzlich der  $\tau$ -Wert (auch *Lückenkriterium* genannt), die *Alternate Cost Avoided Method* (ACA Methode) und die *proportionale Kostenzuteilung* von Bedeutung. Weitere in der Literatur verwendete Zuteilungsverfahren wie die Allokationen von Moriarity und Louderback,<sup>51</sup> Jensen,<sup>52</sup> oder Zuteilungsverfahren, die auf der Auftrennung von Kostenbestandteilen fußen, wie die „*equal charge method*“ (EC-method), und die „*separable cost remaining benefits method*“ (SCRB-method),<sup>53</sup> werden nicht berücksichtigt. Sie sind weder stabil noch streng monoton und haben in der Praxis nur eine untergeordnete Bedeutung.<sup>54</sup> Der Vollständigkeit halber sei noch auf die so genannten *Machtindizes* hingewiesen, die zu den Wertkonzepten gezählt werden.<sup>55</sup>

Der  $\tau$ -Wert wird von Tijs (1981) und Tijs und Driessen (1985) als Lösungsmethode vorgeschlagen.<sup>56</sup> Ausgehend von einem Koalitionsspiel mit einer submo-

<sup>51</sup>Vgl. Moriarity (1975, 1976) und Louderback (1976).

<sup>52</sup>Vgl. Jensen (1977).

<sup>53</sup>Vgl. Tijs und Driessen (1986).

<sup>54</sup>Vgl. Young (1985b), Young (1994), S. 1210 und auch Frank (2003), S. 160.

<sup>55</sup>Dazu gehören der *Deegan-Packel-Index*, vgl. Deegan und Packel (1978), der *Banzhaf-Index*, vgl. Owen (1977) und Dubey und Shapley (1979), und der *Public-Good-Index*, vgl. Holler und Packel (1983). Siehe auch Holler und Illing (2003), S. 304–338.

<sup>56</sup>Die Beschreibung erfolgt hier analog zu Doll (2005), S. 87–80, der den  $\tau$ -Wert anhand der Definition von Curiel (1997) für ein Koalitionsspiel umformuliert. Vgl. auch Wißler (1997), S. 53–56, der den  $\tau$ -Wert in seiner Formulierung als Lückenkriterium beschreibt.

dularen charakteristischen Funktion bildet der  $\tau$ -Wert eine Linearkombination aus zwei Werten, die individuell für jeden Spieler bestimmt werden. Dabei ist durch die Grenzkosten  $x_i^{GK} = c(N) - c(N \setminus \{i\})$  das Minimum der Kosten gegeben, die Spieler  $i$  im Spiel zu tragen hat. Durch die Submodularität der charakteristischen Funktion entsteht eine degressive Kostenentwicklung mit steigender Koalitionsgröße, so dass die geringsten Grenzkosten für Spieler  $i$  durch seinen Beitritt zur Koalition  $N \setminus \{i\}$  bestimmt werden, die schon alle Spieler außer ihm enthält.  $i$  kann im besten Fall die Kostenzuteilung  $x_i^{GK}$  vom  $\tau$ -Wert erwarten.

Der schlechteste Fall für  $i$  tritt ein, wenn alle anderen Spieler  $j \neq i$  ihre jeweiligen minimalen Kostenbeiträge  $x_j^{GK}$  beanspruchen und zugeteilt bekommen, so dass  $i$  die übrig gebliebenen Kosten tragen muss. Das Maximum  $\mu_i = \max_{S:i \in S} (c(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_j^{GK})$  bildet also  $i$ 's Kostenzuteilung unter der Bedingung, dass alle anderen Spieler  $x_j^{GK}$  entrichten. Der  $\tau$ -Wert wird aus der Linearkombination der beiden Grenzen  $x_i^{GK}$  und  $\mu_i$  berechnet.

### Definition 2.32. $\tau$ -Wert

Gegeben sei ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ , die Vektoren  $\mathbf{x}^{GK} = (x_1^{GK}, x_2^{GK}, \dots, x_n^{GK})$ ,  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  und der Faktor  $\lambda \in [0, 1]$ , wobei

$$\begin{aligned} x_i^{GK} &= c(N) - c(N \setminus \{i\}) \quad \text{für alle } i \in N, \\ \mu_i &= \max_{S:i \in S} \left( c(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} x_j^{GK} \right) \quad \text{für alle } i \in N \text{ und } S \subseteq N \text{ und} \\ \lambda &= \frac{c(N) - \sum_{i=1}^n \mu_i}{\sum_{i=1}^n x_i^{GK} - \sum_{i=1}^n \mu_i}. \end{aligned}$$

$\tau(N, c)$  ist ein Zuteilungsverfahren des Koalitionsspiels  $(N, c)$  mit

$$\tau(N, c) = \lambda \cdot \mathbf{x}^{GK} + (1 - \lambda) \cdot \boldsymbol{\mu}.$$

Der  $\tau$ -Wert erfüllt die **Eigenschaften** der Eindeutigkeit, der Effizienz und der individuellen Rationalität. Nachteilig ist, dass er selbst bei nichtleerem Kern nicht zwangsläufig im Kern liegt.<sup>57</sup> Ein weiterer Nachteil des  $\tau$ -Werts ist, dass es nur für

<sup>57</sup>Vgl. Doll (2005), S. 80.

so genannte *quasi-balancierte Spiele* definiert ist, und dass er keine Monotonieeigenschaft erfüllt.<sup>58</sup>

Der  $\tau$ -Wert wird anhand von Beispiel 2.1 illustriert. Für den Vektor  $\mathbf{x}^{\mathbf{GK}}$  ergeben sich die Werte (47, 12, 7). Beispielsweise ermittelt sich  $\mu_1$  durch  $\mu_1 = \max\{95, 98, 98, 98\} = 98$ . Es folgen die Werte für  $\boldsymbol{\mu} = (98, 63, 58)$  und  $\lambda = 0.667$ . Daraus folgt für den  $\tau$ -Wert

$$\boldsymbol{\tau} = 0.667 \cdot \begin{pmatrix} 47 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix} + 0.333 \cdot \begin{pmatrix} 98 \\ 63 \\ 58 \end{pmatrix} = (64.00, 29.00, 24.00).$$

Die *Alternate Cost Avoided Method*, kurz (ACA Methode), wird von James und Lee (1971) eingeführt und geht zurück auf ein Kostenteilungsproblem der Tennessee Valley Authority im Jahre 1941.<sup>59</sup> Die Idee des Zuteilungsverfahrens besteht darin, dass jeder Spieler mindestens seine Grenzkosten  $x_i^{\mathbf{GK}} = c(N) - c(N \setminus \{i\})$  zu tragen hat, die in der ACA Methode als *separierbare Kosten* bezeichnet werden.<sup>60</sup> Alle übrigen Kosten  $O$  stellen die *Overhead-Kosten* dar,

$$O = c(N) - \sum_{i=1}^n x_i^{\mathbf{GK}}.$$

Diese werden den einzelnen Spielern zusätzlich zu ihren Grenzkosten anhand eines Zuteilungsschlüssels berechnet. Dieser ermittelt sich anhand der von den Spielern im Spiel *vermiedenen Kosten*

$$r_i = c(\{i\}) - x_i^{\mathbf{GK}}.$$

### Definition 2.33. Alternate Cost Avoided Method

Gegeben sei ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ , die Grenzkosten  $x_i^{\mathbf{GK}}$ , die Overhead-Kosten  $O$  und die vermiedenen Kosten  $r_i$  für alle Spieler  $i$ . Die ACA Methode  $ACA(N, c)$  ist ein Zuteilungsverfahren des Koalitionsspiels  $(N, c)$  mit

$$ACA_i = x_i^{\mathbf{GK}} + \frac{r_i}{\sum_{i=1}^n r_i} \cdot O.$$

<sup>58</sup>Vgl. Wißler (1997), S. 53–56 und S. 64 zur Definition quasi-balancierter Spiele und weiterführender Literatur.

<sup>59</sup>Vgl. Ransmeier (1942).

<sup>60</sup>Vgl. dazu den Gedanken der Subventionsfreiheit aus Definition 2.12.

Die ACA Methode weist folgende **Eigenschaften** auf: Sie ermittelt offensichtlich eine eindeutige und eine effiziente Lösung. Weiterhin erfüllt sie die Monotonie im Aggregat und die Koalitionsmonotonie, jedoch nicht die strenge Monotonie.<sup>61</sup> Die Erfüllung der Koalitionsrationalität ist bei der ACA Methode nur für drei oder weniger Spieler garantiert. Sie ist somit nicht stabil und liegt bei mehr als drei Spielern nicht notwendigerweise im Kern.<sup>62</sup>

Angewendet auf das Beispiel 2.1 folgt für die ACA Methode, dass  $x_1^{GK} = 47, x_2^{GK} = 12, x_3^{GK} = 7$  und  $O = 51$ . Daraus lassen sich die Werte  $r_1 = 48, r_2 = 43, r_3 = 43$  ermitteln, und es folgt die von der ACA Methode bestimmte Zuteilung

$$\mathbf{ACA} = (65.27, 28.37, 23.37).$$

Letztlich kann die Kostenzuteilung anhand von *proportionalen Zuteilungsverfahren*  $\sigma(N, c)$  vorgenommen werden. Der proportional zugeweilte Kostenanteil ergibt sich, im Unterschied zu den bisher vorgestellten Zuteilungsverfahren, anhand nichtstrategischer Zuteilungsvariablen. Dabei wird jedem Spieler ein Gewicht  $g_i$  zugeordnet, anhand dessen ihm sein Anteil an zu tragenden Kosten zugeteilt wird. Die Gewichte können z. B. aus der Beschäftigtenzahl eines Bereiches  $i$  im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Beschäftigten des Unternehmens bestimmt werden. Die Gewichte addieren sich entweder auf Eins, so dass die Zuteilung effizient ist, oder im Fall von  $g_i \in \mathbb{R}^+$  ist der Faktor eines Spielers sein Gewicht dividiert durch die Summe aller Gewichte aller Spieler:

$$\sigma_i = c(N) \cdot g_i, \quad \text{falls } \sum_{i=1}^n g_i = 1, \quad \text{oder } \sigma_i = c(N) \cdot \frac{g_i}{\sum_{i=1}^n g_i}.$$

Legt man beispielsweise die Gewichte  $g_i$  für Beispiel 2.1 so fest, dass

$$g_i = \frac{c(\{i\})}{\sum_{i=1}^n c(\{i\})},$$

---

<sup>61</sup>Vgl. Frank (2003), S. 159–162.

<sup>62</sup>Vgl. Young (1994), S. 1202.

dann folgt aus dem proportionalen Zuteilungsverfahren mit den Gewichten  $g_1 = 0.475$ ,  $g_2 = 0.275$  und  $g_3 = 0.25$ , deren Summe Eins ist, die Zuteilung

$$\sigma = (55.58, 32.18, 29.25).$$

In der einfachsten Form sind die Gewichte alle gleich, so dass jeder Spieler den Anteil  $\sigma_i = \frac{1}{n} \cdot c(N)$  der Gesamtkosten trägt. Für das Beispiel 2.1 folgt unmittelbar

$$\sigma_i = \frac{1}{3} \cdot 117 \Rightarrow \sigma = (39, 39, 39).$$

Das Zuteilungsverfahren kann verfeinert werden, indem mehrere Eigenschaften  $k$  definiert werden, die je nach Spieler unterschiedlich stark ausgeprägt sein können, gemessen durch  $q_k(i)$ . Daraufhin wird jede Eigenschaft mit einem eigenen Gewicht  $g_k$  versehen, so dass die Zuteilung anhand mehrerer Parameter proportionalisiert wird.<sup>63</sup>

**Definition 2.34. Proportionale Kostenzuteilung**

Gegeben sei ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ , die Quantität  $q_k(i) \in \mathbb{R}^+$  der Eigenschaft  $k$ , die Spieler  $i$  besitzt, sowie die dazugehörigen Gewichte  $g_k \in \mathbb{R}^+$ . Das proportionale Zuteilungsverfahren  $\sigma(N, c)$  ist ein Zuteilungsverfahren des Koalitionsspiels  $(N, c)$  mit

$$\sigma_i = c(N) \cdot \frac{\sum_{k=1}^n g_k \cdot q_k(i)}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n g_k \cdot q_k(j)}.$$

Die Aussagen, die sich bezüglich der **Eigenschaften des proportionalen Zuteilungsverfahrens** machen lassen, ist, dass dieses eindeutig ist und dass es effizient ist, wenn die Gewichte in Summe Eins ergeben bzw. auf Eins normiert werden. Zusätzlich ist ein proportionales Zuteilungsverfahren offensichtlich monoton im Aggregat.<sup>64</sup> Die Erfüllung der anderen Eigenschaften wird von dem proportionalen Zuteilungsverfahren aber nicht garantiert. Es werden keinerlei Interdependenzen berücksichtigt und die Kostenzuteilung wird strikt linearisiert, so dass die Gewichte nicht die strategischen Gegebenheiten des Spiels wiedergeben müssen. Das proportionale Zuteilungsverfahren ist deshalb nicht als spieltheoretisches Zuteilungsverfahren

<sup>63</sup>Vgl. Doll (2005), S. 80.

<sup>64</sup>Vgl. Young (1985a), S.762 und Young (1994), S. 1210.



zu werten. Es ist jedoch in der Praxis leicht anzuwenden und benötigt keine charakteristische Funktion.

## 2.5 Bewertung der Zuteilungsverfahren anhand der spieltheoretischen Kriterien

An dieser Stelle erfolgt eine Gegenüberstellung der vorgestellten Zuteilungsverfahren mit dem Ziel, die Vor- und Nachteile der Zuteilungsverfahren zu identifizieren. Zur visuellen Einordnung der Zuteilungsverfahren wird erneut Beispiel 2.1 betrachtet. In die Illustration des Beispiels aus Abbildung 2.1 werden in Abbildung 2.2 nun zusätzlich die Lösungen der vorgestellten Zuteilungsverfahren eingetragen. Da die Lösungen des  $\tau$ -Werts und der ACA Methode mit denen des Nucleolus bzw. des Shapley-Werts identisch sind, werden die beiden Zuteilungsverfahren nicht extra eingetragen. Dies ist kein Zufall, der auf den für das Beispiel gewählten Werten basiert: der  $\tau$ -Wert ist für Dreipersonenspiele identisch mit dem Nucleolus.<sup>65</sup>

Als Kriterien des Vergleichs sind dabei im Rahmen dieser Arbeit die in Abschnitt 2.2 eingeführten spieltheoretischen Kriterien maßgebend. Der Vergleich wird in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Die spieltheoretischen Kriterien der Akzeptanz und der Anreizwirkung werden in den Zeilen der Tabelle eingetragen, während die untersuchten Zuteilungsverfahren in den Spalten abgetragen werden.<sup>66</sup>

Alle Zuteilungsverfahren werden also hinsichtlich folgender Punkte bewertet: Effizienz, individuelle Rationalität, Koalitionsrationalität, Stabilität, Monotonie im Aggregat, Koalitionsmonotonie und strenge Monotonie. Weiterhin wird die Eigenschaft der Eindeutigkeit untersucht, ebenso wie die im Sinne der Aufgabenstellung der Arbeit relevante Praktikabilität, die anhand der Komplexität der Zuteilungsverfahren gemessen wird. Es ist im Hinblick auf die Aufgabenstellung nicht nötig, die Zuteilungsverfahren der Komplexität nach zu ordnen, um eine möglichst feine Unterteilung zu erreichen. So ließe sich zum Beispiel anführen, dass die Berechnung des Nucleolus aufwändiger ist als die Berechnung der ACA Methode.<sup>67</sup> Für den Vergleich

---

<sup>65</sup>Vgl. Tijs (1981), S. 128.

<sup>66</sup>Wißler (1997) stellt erstmalig einen derartigen Vergleich auf. Dieser wird übernommen und erweitert von Doll (2005) und Frank (2003). Die Ergebnisse aller drei Arbeiten werden hier fortgeführt. Vgl. im Einzelnen Doll (2005), S. 105–106, Frank (2003), S. 160 und Wißler (1997), S. 60–64.

<sup>67</sup>Besonders im Fall der ACA Methode ist anzumerken, dass nicht Koalitionswerte berechnet werden müssen. Es müssen für jeden Spieler seine inkrementellen Kosten (in Bezug auf die große Koalition  $N$ ) und seine stand-alone Kosten bestimmt werden, die anderen Werte können vernachlässigt werden.

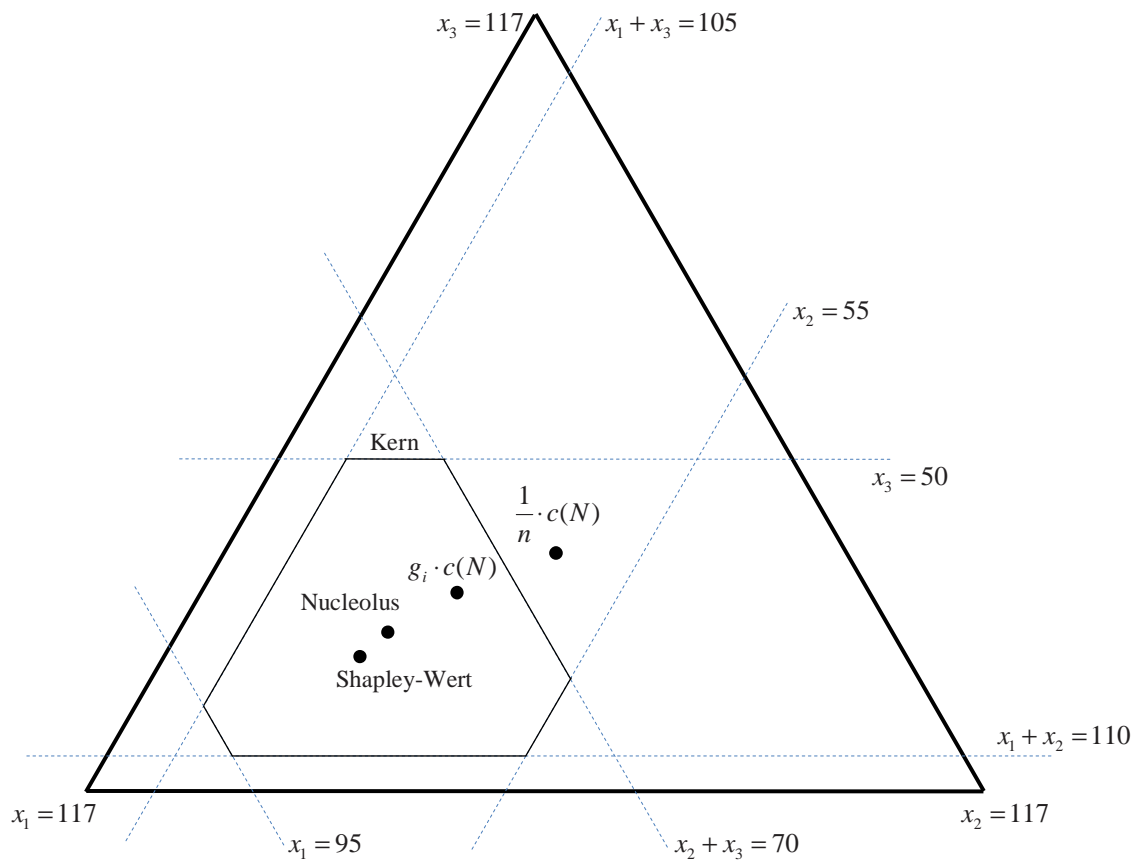


Abbildung 2.2: Simplex von Beispiel 2.1 mit Lösungen.

ist es jedoch hinreichend, beide Zuteilungsverfahren als nicht praktikabel einzustufen, ohne auf diesen Unterschied einzugehen, mit der Begründung, dass in dieser Arbeit nach praktikablen Zuteilungsverfahren gesucht wird, wobei als Unterscheidungskriterium herangezogen wird, ob ein Zuteilungsverfahren die charakteristische Funktion voraussetzt oder nicht. Somit wird für die Zuteilungsverfahren, die eine charakteristische Funktion voraussetzen, vereinfachend  $c(\cdot)$  dafür angegeben, dass sie nicht praktikabel sind. Zuteilungsverfahren, die keine charakteristische Funktion voraussetzen, werden als praktikabel bewertet.

Die von Shapley angeführten Eigenschaften der Anonymität, Dummy-Eigenschaft und Additivität fließen nicht in die Tabelle ein. Dies wurde erstens aus Gründen der Übersichtlichkeit unterlassen und zweitens, weil die Erfüllung dieser Eigenschaften gleichbedeutend damit ist, dass das Zuteilungsverfahren streng monoton ist.<sup>68</sup>

<sup>68</sup>Vgl. Hart und Mas-Colell (1989).

Tabelle 2.1: Tabellarischer Vergleich der Zuteilungsverfahren.

Eigenschaft	Kern	Nucleolus	S-Wert	$\tau$ -Wert	ACA	Prop.
Effizienz	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Individuelle Rationalität	✓	✓	✓	✓	✓	
Koalitionsrationalität	✓	✓				
Stabilität	✓	✓				
Monotonie im Aggregat			✓		✓	✓
Koalitionsmonotonie			✓		✓	
Strenge Monotonie			✓			
Eindeutigkeit		✓	✓	✓	✓	✓
Praktikabilität	$c(\cdot)$	$c(\cdot)$	$c(\cdot)$	$c(\cdot)$	$c(\cdot)$	✓

In den Spalten von Tabelle 2.1 werden die untersuchten Zuteilungsverfahren abgetragen. Dazu gehört der Kern [Kern], stellvertretend für den Kern an sich, den  $\epsilon$ -Kern und den Kleinst-Kern. Als weiteres Mengenkonzept wird der Nucleolus [Nucleolus] in den Vergleich mit aufgenommen. Von den vorgestellten Wertkonzepten werden Shapley-Wert [S-Wert],  $\tau$ -Wert [ $\tau$ -Wert], die ACA Methode [ACA] und die proportionale Zuteilung [Prop.] betrachtet.

Anhand von Tabelle 2.1 ergeben sich folgende Aussagen:

- Es gibt kein stabiles und streng monotonen Zuteilungsverfahren.
- Es gibt kein stabiles Zuteilungsverfahren, das monoton im Aggregat ist.
- Es gibt kein stabiles und praktikables Zuteilungsverfahren.
- Es gibt kein streng monotonen und praktikables Zuteilungsverfahren.

Diese Auflistung unterschlägt zwei Ausnahmen: Erstens ermittelt der  $\tau$ -Wert bei Dreipersonenspielen immer eine Lösung im Kern, jedoch nicht notwendigerweise für mehr als drei Spieler. Da die Aufgabenstellung Lösungen für Spiele mit beliebig vielen Spielern fordert, wird der  $\tau$ -Wert nicht als stabil gewertet. Zweitens liegt der Shapley-Wert bei Spielen mit einer submodularen charakteristischen Funktion im Kern.<sup>69</sup> Somit ist der Shapley-Wert bei Spielen mit einer submodularen charakteristischen Funktion theoretischerweise ein geeignetes Zuteilungsverfahren, das alle geforderten

<sup>69</sup>Vgl. Abschnitt 2.4.1 und Abschnitt 3.1.1.

spieltheoretischen Kriterien erfüllt. Weil der Shapley-Wert aber nur in Abhängigkeit von dieser Voraussetzung eine Kernzuteilung erzeugt und die Aufgabenstellung für alle subadditiven charakteristischen Funktionen formuliert wurde – was auch nicht-submodulare charakteristische Funktionen zulässt – wird er nicht als stabil gewertet.

Anhand einer genaueren Betrachtung von Tabelle 2.1 fällt auf, dass zwischen den beiden spieltheoretischen Zuteilungsverfahren, die die meisten Eigenschaften erfüllen, nämlich Nucleolus und Shapley-Wert, eine gewisse Polarität herrscht. Die Zuteilungsverfahren unterscheiden sich in der Bewertung dadurch, dass der Nucleolus stabil und der Shapley-Wert anreizkompatibel (streng monoton) ist. Es liegt nahe, ein Zuteilungsverfahren zu entwickeln, dass diesen Unterschied überbrückt und alle Eigenschaften erfüllt. Dies ist jedoch gemäß des folgenden Satzes nicht möglich.

**Satz 2.6. Young (1985c)**

*Für  $|N| \geq 5$  gibt es keine koalitionsmonotone Kernzuteilung.*

Demnach gibt es keine streng monotone und gleichzeitig stabile Kostenzuteilung für Kooperationen mit mehr als vier (drei)<sup>70</sup> Spielern. Allgemein kann ein Zuteilungsverfahren nur entweder stabil (und monoton im Aggregat) sein, oder streng monoton. Diese Polarität findet sich in Shapley-Wert und Nucleolus wieder.

Die Ergebnisse aus Tabelle 2.1 und die getroffenen Schlussfolgerungen lassen sich anhand von Abbildung 2.3 illustrieren. Die waagerechte Achse differenziert die Zuteilungsverfahren nach ihrer Fähigkeit, die Anreizkompatibilität zu erfüllen, die senkrechte Achse tut dies in Bezug auf die Stabilität. Die Grafik verdeutlicht die Relevanz des Nucleolus und des Shapley-Wertes,<sup>71</sup> sowie die angesprochene Polarität.

Da sowohl die Stabilität als auch die strenge Monotonie Eigenschaften sind, die von Zuteilungsverfahren im Allgemeinen gefordert werden, ist das obere rechte Feld in Abbildung 2.3 grau hinterlegt und markiert die bestmögliche Kombination von Eigenschaften. Aufgrund des Unmöglichkeitsergebnisses von Young ist das Feld konsequenterweise leer, und es ist der Aussage von Young zuzustimmen, dass es kein für alle Situationen geeignetes Zuteilungsverfahren gibt.<sup>72</sup> Zusätzlich ist keines der vorgestellten spieltheoretischen Zuteilungsverfahren praktikabel. Deshalb ist im Fol-

---

<sup>70</sup>Clark und Housman (1998) erweitern das Unmöglichkeitsergebnis von Young. Sie zeigen, dass sogar für ein  $N$  mit vier Spielern keine koalitionsmonotone Kernzuteilung existiert.

<sup>71</sup>Der Kern ist eine Menge von Lösungen und wurde daher von der Betrachtung ausgeklammert. Da Abbildung 2.3 nicht zwischen Lösungsmengen und eindeutigen Lösungen unterscheidet, erscheint hier der Kern als äquivalent zum Nucleolus.

<sup>72</sup>Vgl. Young (1994), S. 1230.

<b>Stabilität</b>	Stabil	Kern Nucleolus	—
	Nicht stabil	$\tau$ -Wert ACA Methode Proportionale Verfahren	Shapley-Wert
		Nicht anreizkomparibel	Anreizkompatibel <b>Anreizkompatibilität</b>

Abbildung 2.3: Illustration der Bewertung der Zuteilungsverfahren.

genden zu diskutieren, welche Schlüsse im Hinblick auf die Aufgabenstellung aus der Auswertung zu ziehen sind.

## 2.6 Diskussion der Ergebnisse

Es ist die Aufgabenstellung der Arbeit, ein praktikables Zuteilungsverfahren zu identifizieren, das gewisse strategische Vorteile bietet. Die strategischen Eigenschaften werden in diesem Kapitel anhand von Koalitionsspielen definiert. Im bestmöglichen Fall sollte ein Zuteilungsverfahren alle angeführten Eigenschaften erfüllen, denn allgemein wird von einem Zuteilungsverfahren gefordert, dass es effizient, stabil und anreizorientiert ist.<sup>73</sup>

Anhand der durchgeführten Betrachtung der existierenden Zuteilungsverfahren wird deutlich, dass dies für kein Zuteilungsverfahren der Fall ist. Laut Satz 2.6, dem Unmöglichkeitsergebnis von Young, ist es generell nicht möglich, ein derartiges Zuteilungsverfahren zu entwickeln. Deshalb ist zu entscheiden, welche Eigenschaft für die jeweils gegebene Aufgabenstellung vorzuziehen ist: die Stabilität oder die Anreizkompatibilität. Je nach Situation kann dabei entweder ein stabiles oder ein streng monotonen Zuteilungsverfahren die geeignete Lösung darstellen.

<sup>73</sup>Vgl. Wißler (1997) oder Young (1994), S. 1229.

Bei der Auswahl eines Zuteilungsverfahrens ist also darüber zu entscheiden, welche Eigenschaft für die gegebene Fragestellung als relevanter erachtet wird. Aus diesem Grund erfolgt eine Diskussion der Eigenschaften im hier gegebenen Kontext.<sup>74</sup> In der Literatur findet sich, bezogen auf den speziellen Fall der Kostenzuteilung in Unternehmen, der Standpunkt von Young: Er argumentiert, dass

*One could argue that in the present context the incentives created by monotonicity are more compelling than the incentives embodied in the core. The reason is that a firm is not a voluntary association of divisions that must be given an incentive to remain together (which is the argument for a core allocation), rather, the problem for the firm is to send the right signals to divisions to get them to act efficiently.*<sup>75</sup>

Young zieht also Zuteilungsverfahren vor, die die strenge Monotonie erfüllen. Er setzt voraus, dass aufgrund von dezentralen Gewinnoptimierungen auch das Gesamtergebnis des Unternehmens maximiert wird. Es lässt sich zeigen, dass diese Annahme dann nicht ohne weiteres getroffen werden kann, wenn die Stabilität verletzt wird.<sup>76</sup> Eine instabile Zuteilung kann Nachteile haben, wenn sie zur Koordination des Unternehmens benutzt wird. Da für einige Spieler ein Anreiz besteht, die durch das Zuteilungsverfahren vorgeschlagene Zuteilung abzulehnen, sind Unzufriedenheiten, und damit Konflikte oder Manipulationsversuche, nicht auszuschließen. Es lässt sich einwenden, dass die Spieler sich nicht gegen die Teilnahme am Spiel entscheiden können, da sie nicht freiwillig ist – jedoch können sie sich durchaus aus individueller Sicht rational verhalten und Maßnahmen treffen, um individuell ungünstige Eigenschaften einer freien Kooperation zu vermeiden oder zu manipulieren. Diese individuell rationalen Entscheidungen können aus Sicht der anderen Spieler irrational sein. Instabile Zuteilungen können verursachen, dass der Einzelne zwar in seinem besten Interesse handelt, dass dies aber nicht im Sinne des Ganzen die richtige Handlung ist.<sup>77</sup>

---

<sup>74</sup>Da keines der untersuchten stabilen oder anreizkompatiblen Zuteilungsverfahren praktikabel ist, führt die Entscheidung zugunsten einer der Eigenschaften nicht zur Lösung der Aufgabenstellung, so dass in jedem Fall eine weitere Untersuchung notwendig ist.

<sup>75</sup>Vgl. Young (1994), S. 1218.

<sup>76</sup>Vgl. Shubik (1962).

<sup>77</sup>Vgl. auch die durch Prinzipal-Agenten Modelle behandelten Problematiken und *second-best* Lösungen. Ronen und Balachandran (1988) modellieren eine *Hidden-Action* Situation und empfehlen unternehmensinterne Verrechnungspreise mit Gewinnaufschlag zur Anreizorientierung. Li und Balachandran (1997) modellieren einen *Hidden-Information* Fall und empfehlen Verrechnungspreise mit Gewinnaufschlägen, die einen Anreiz zur wahrheitsgemäßen Berichterstattung liefern, der Gewinnaufschlag stelle dabei die „Informationsrente“ dar. In instabilen (nicht-kooperativen) Situa-

Welche Argumente sprechen für die Bevorzugung des Kerns bzw. der Stabilität? Eine Eigenschaft des Kerns ist, dass er leer sein kann.<sup>78</sup> Bei der Kostenzuteilung in Organisationen kann ein leerer Kern einen Hinweis auf eine grundlegende Problematik in der Kooperation geben: es existiert keine Möglichkeit, eine stabile Zuteilung der Gesamtkosten zu erreichen, so dass die große Koalition sich nicht bilden wird – zumindest nicht basierend auf Freiwilligkeit. Zuteilungsverfahren, die nicht stabil sind, eignen sich folglich nicht als Indikator dafür, ob die große Koalition für die Kooperation die beste Form der Zusammenarbeit ist. Deshalb sollte die Eigenschaft der Stabilität nicht ohne weiteres zugunsten der Anreizorientierung aufgegeben werden.

Es ist somit berechtigt zu hinterfragen, ob – wie Young argumentiert – die Anreizorientierung in arbeitsteiligen Prozessen der Stabilität vorzuziehen ist. So schreibt der Soziologe Miller in „*Managerial Dilemmas*“, dass das volle Potenzial einer arbeitsteiligen Entscheidung erst dann ausgenutzt wird, wenn die Auswirkung auf andere ins Kalkül mit einbezogen wird. Miller plädiert gegen Anreizsysteme oder eine sonstige Erzwingung der „richtigen“ Lösung, und schlägt vor, Regeln in Organisationen dahingehend zu verändern, dass die Akteure beim eigennützigem Handeln selbstständig zur kooperativen Lösung gelangen.<sup>79</sup>

Das von Young angeführte Argument verliert weiter an Relevanz, wenn Kooperationen betrachtet werden, die explizit eine harmonische Zusammenarbeit anstreben – man denke z. B. an karitative Einrichtungen oder das Vereinswesen. Während sich über die Notwendigkeit diskutieren lässt, Anreize für Manager eines gewinnorientierten Unternehmens zu schaffen, sind dieselben Anreize im Beispiel von mehreren kleinen Ortschaften, die eine gemeinsame Wasseraufbereitungsanlage bauen und betreiben wollen, von geringerer Bedeutung.<sup>80</sup> Letztendlich ist es die Wahl der an der Kooperation beteiligten Spieler, welche Zielsetzung – Stabilität oder Anreizkompatibilität – im Vordergrund stehen soll.

Inwiefern lässt sich durch ein Zuteilungsverfahren unterstützen, dass die Spieler die große Koalition bilden? Erfüllt das Zuteilungsverfahren die Eigenschaft der Stabilität, dann subventioniert keine Koalition eine andere und die von einer Koalition zu tragenden Kosten sind höchstens so hoch, wie sie für die Bedienung dieser Ko-

---

tionen muss also unter Umständen ein Mechanismus eingeführt werden, um ein möglichst zufriedenstellendes Ergebnis zu erreichen.

<sup>78</sup>Vgl. Holler und Illing (2003), S. 281. Es wird als Schwäche des Kerns angesehen, dass er leer sein kann, ebenso wie die Eigenschaft, dass er keine eindeutige Lösung bestimmt.

<sup>79</sup>Vgl. Miller (1992).

<sup>80</sup>Vgl. das in Abschnitt 1.1 beschriebene Gebührenspiel.

alition alleinstehend wären, und mindestens so hoch wie die Zusatzkosten, die sie einer schon bedienten Koalition hinzufügt.<sup>81</sup> Wird ein stabiles Zuteilungsverfahren in der Organisation eingesetzt, wird für die Spieler nachvollziehbar, wo sich eine Kooperation lohnt, oder wo sie nicht anzustreben ist.

Neben den Vorteilen, eine freiwillige Kooperation sicherzustellen, beinhaltet die Stabilität den Nachteil, dass sie ein „statisches“ Konzept ist, wie in Abschnitt 2.2.2 erläutert wird. Sie ist nicht dazu geeignet, die Zuteilung bei Änderungen in der charakteristischen Funktion anzupassen. In diesem Fall werden Anreize nur durch Monotonieeigenschaften geschaffen. Zuteilungsverfahren, die stabile Zuteilungen erzeugen, erfüllen somit nicht zwangsläufig alle an ein Zuteilungsverfahren geforderten Eigenschaften.<sup>82</sup> Aufgrund der Unvereinbarkeit beider Eigenschaften ist aber in Kauf zu nehmen, dass kein für alle Situationen passendes Zuteilungsverfahren existiert, und dass durch die Auswahl eines Zuteilungsverfahrens entweder die Stabilität oder die Anreizkompatibilität nicht erfüllt werden kann.

Die oben gemachten Ausführungen legen nahe, dass die Stabilität unter der gegebenen Zielsetzung – Sicherung der freiwilligen Kooperation in arbeitsteiligen Zusammenhängen – der Eigenschaft der Anreizkompatibilität vorzuziehen ist. Wenn von einem kooperativen Ansatz ausgegangen wird, kann der Zusammenhalt der Gemeinschaft als oberste Priorität angesehen werden. Es soll eine kooperative Haltung unterstützt werden, so dass eine in dem Sinne stabile Kooperation angestrebt wird, dass die Spieler die Zusammenarbeit freiwillig mittragen.

Zusammenfassend werden also Zuteilungsverfahren gesucht, welche stabile Zuteilungen vorschlagen, d. h. nur solche Zuteilungen, die im Kern liegen und somit effizient und subventionsfrei (koalitionsrational) sind. Nur dadurch ist sicher gestellt, dass alle Spieler und Koalitionen von Spielern einen Anreiz haben, am Spiel teilzunehmen und der Zuteilung zuzustimmen. Ebenso wird dadurch sichergestellt, dass kein Spieler gegen das Zuteilungsverfahren an sich Einwände hat. Somit wird die freiwillige Kooperation auch bei individueller Zielverfolgung gewahrt.

Die Ergebnisse aus Abschnitt 2.5 machen jedoch deutlich, dass es kein stabiles Zuteilungsverfahren gibt, das als praktikabel angesehen werden kann. Im folgenden Kapitel 3 wird deshalb untersucht, ob sich aus den weiteren existierenden spieltheoretischen Ansätzen, die einen Bezug zur Kostenzuteilung aufweisen, geeignete Lösungen entwickeln lassen.

---

<sup>81</sup>Vgl. Moulin (1995b), S. 243.

<sup>82</sup>Vgl. den Beginn dieses Abschnitts.



# 3. Weitere spieltheoretische Ansätze und Kostenzuteilung

In Kapitel 2 werden im Rahmen der Kostenzuteilung der kooperativen Spieltheorie Koalitionsspiele betrachtet. An dieser Stelle werden weitere spieltheoretische Ansätze vorgestellt, die einen Bezug zur Kostenzuteilung oder zur Erzeugung von Kernzuteilungen haben.

Wie in Abschnitt 2.1 angeführt, werden nicht-atomare Spiele und Spiele mit nichttransferierbarem Nutzen (Spiele ohne Seitenzahlungen) nicht betrachtet, weil die Spieler hier abzählbar sind und innerhalb von Organisationen immer die Möglichkeit existiert, über interne Verrechnungen Kosten zu transferieren. Probleme der Kostenzuteilung werden generell mit transferierbarem Nutzen modelliert, was auch hier zutreffend ist. Der Vollständigkeit halber sei jedoch auf die entsprechende Literatur verwiesen, die spieltheoretische Lösungsverfahren im NTU-Spiel behandelt.<sup>1</sup>

Gemeinsam ist den folgenden Ausführungen, dass die Ansätze zuerst beschrieben werden, worauf aufbauend die Verbindung zur Kostenzuteilung bzw. zum Kern erläutert und die Relevanz für die gegebene Fragestellung diskutiert wird. In Abschnitt 3.1.1 werden konvexe Spiele und Activity-Optimization Games als Spezialfall von Koalitionsspielen mit speziellen Eigenschaften diskutiert. In Abschnitt 3.1.2 wird das Equivalence Theorem vorgestellt, das die Zusammenhänge zwischen Kernzuteilungen und dem perfekten Wettbewerbsgleichgewicht herleitet. In Abschnitt 3.2 wird die Definition der Stabilität von der Frage motiviert, unter welchen Bedingungen sich in Mehrproduktmonopole gewinnbringend einbrechen lässt. Daraus lässt sich ableiten, unter welchen Bedingungen Technologien von mehreren Spielern im Einklang mit der spieltheoretischen Eigenschaft der Stabilität geteilt werden können. Die Contestable Market Theory beschäftigt sich ausführlich mit dieser Fragestellung. Die Betrachtung von spieltheoretische Lösungsverfahren für die Bepreisungen von Produktionen (Preismechanismen) erfolgt in Abschnitt 3.3, insbesondere des Aumann-Shapley Preismechanismusses und der seriellen Kostenzuteilung.

---

<sup>1</sup>Vgl. zum Kern Aumann (1961), Aumann und Peleg (1960), Peleg (1985) und zu Wertkonzepten Harsanyi (1963), Shapley (1969), Aumann (1985) und Hart (1985).

In Abschnitt 3.4 findet eine abschließende Diskussion der Ansätze statt. Die zu entwickelnde Lösung wird konkretisiert und es wird ein Vorschlag für das weitere Vorgehen gemacht.

## 3.1 Erweiterungen und Abwandlungen von Koalitionsspielen

In Kapitel 2 wird die Kostenzuteilung in Koalitionsspielen behandelt. In diesem Abschnitt wird untersucht, ob sich aus bestimmten Eigenschaften einer charakteristischen Funktion weitere Aussagen ableiten lassen. Dabei werden die so genannten *konvexen Spiele* untersucht, deren charakteristische Funktion submodular ist. Darauf aufbauend werden *Activity-Optimization Games* und *Market Games* vorgestellt, die sich aus bestimmten Entscheidungssituationen ableiten.

### 3.1.1 Konvexe Koalitionsspiele und Activity-Optimization Games

Folgende Eigenschaft der charakteristischen Funktion weist ein Spiel als *balanciertes Spiel* aus.<sup>2</sup>

#### Definition 3.1. Balancierte Gewichte

Bei  $n$  Spielern ist für  $S \subset N$  eine Familie balancierter Gewichte  $\delta_S$  eine Abbildung  $\delta_S : \rho(N) \setminus N \rightarrow [0, 1]$ , so dass:

$$\sum_{S:i \in S} \delta_S = 1 \quad \forall i. \quad (3.1)$$

Die Summe enthält alle Koalitionen  $S$ , die den Spieler  $i$  enthalten. Die Koeffizienten  $\delta_S$  heißen Gewichte der Koalitionen  $S$ .

#### Definition 3.2. Balancierte Spiele

Ein Koalitionsspiel  $(N, c)$  heißt *balanciert*, wenn für alle Familien von balancierten Gewichten  $\delta_S$  gilt:

$$\sum_{S \subset N} \delta_S \cdot c(S) \geq c(N) \quad (3.2)$$

Diese Eigenschaft lässt sich folgendermaßen interpretieren:<sup>3</sup> Man nehme an, jeder Spieler verfügt über Ressourcen (z. B. Arbeitszeit), die er beliebig verwenden kann.

<sup>2</sup>Vgl. Peleg und Sudhölter (2007), S.27–29.

<sup>3</sup>Vgl. Karagök (2006), S. 37–41.

In (3.2) werden die Koalitionen  $\delta_S \cdot c(S)$  mit einer geringeren Intensität betrieben als  $c(S)$ . Ist die Ungleichung erfüllt, ist es für die Spieler vorteilhaft, die große Koalition zu bilden. Also besagt die Bedingung (3.2), dass in einem balancierten Spiel die Kosten der Koalitionen  $c(S)$  in Bezug auf die Kosten der großen Koalition  $c(N)$  relativ groß sind.

Zusätzlich gilt:<sup>4</sup>

**Definition 3.3. Total balancierte Spiele**

*Ein Koalitionsspiel  $(N, c)$  heißt total balanciert, wenn jedes Teilspiel<sup>5</sup> von  $(N, c)$  balanciert ist.*

Das Konzept des balancierten Spiels erlaubt es zu testen, ob der Kern des Spiels existiert.

**Satz 3.1. Bondareva (1963), Shapley (1967).**

*Der Kern  $\mathcal{K}(N, c)$  eines Koalitionsspiels  $(N, c)$  mit transferierbarem Nutzen ist nicht-leer, wenn das Spiel balanciert ist.*

Der so genannte Bondareva-Shapley Satz besagt, dass der Kern eines Koalitionsspiels immer dann existiert, wenn das Spiel balanciert ist.

Zwischen der Definition eines balancierten Spiels und einer submodularen charakteristischen Funktion, vgl. Definition 2.7, besteht folgender Zusammenhang.

**Satz 3.2. Shapley (1971)**

*Ein Koalitionsspiel  $(N, c)$ , dessen charakteristische Funktion  $c(\cdot)$  submodular ist, ist total balanciert.*

Der Satz gilt nicht in die andere Richtung, d.h. die charakteristische Funktion eines Koalitionsspiels, das (total) balanciert ist, ist nicht notwendigerweise submodular. Koalitionsspiele mit einer submodularen charakteristischen Funktion heißen *konvex*.<sup>6</sup> Da die Konvexität eine stärkere Bedingung als die Balanciertheit ist, folgt aus dem Bondareva-Shapley Satz direkt, dass der Kern eines konvexen Koalitionsspiels nichtleer ist. Weiterhin weist der Shapley-Wert bei konvexen Koalitionsspielen die Eigenschaft auf, immer eine Kernzuteilung zu bestimmen.

<sup>4</sup>Vgl. Peleg und Sudhölter (2007), S. 33.

<sup>5</sup>Vgl. Definition 2.3.

<sup>6</sup>Vgl. Topkis (2009), S. 208–209. Der Begriff des konvexen Spiels gilt strenggenommen nur für Koalitionsspiele  $(N, v)$  mit supermodularen charakteristischen Funktionen  $v(\cdot)$ . Er wird in der Literatur anstatt des Begriffs des konkaven Spiels auch für Koalitionsspiele  $(N, c)$  mit submodularen charakteristischen Funktionen  $c(\cdot)$  benutzt. Diesem Vorgehen wird hier der Einfachheit halber gefolgt.

**Satz 3.3. Shapley (1967)**

Bei konvexen Koalitionsspielen liegt der Shapley-Wert im Kern.

Wie in Abschnitt 2.5 angemerkt wird, berechnet der Shapley-Wert bei konvexen Koalitionsspielen eine stabile Zuteilung und erfüllt dann alle spieltheoretischen Kriterien der Stabilität und der Anreizwirkung. Da der Shapley-Wert auch bei konvexen Koalitionsspielen die Kenntnis aller  $2^n$  Koalitionswerte voraussetzt, bleibt das Berechnungsproblem des Shapley-Werts bestehen, so dass er – analog Abschnitt 2.5 – nach wie vor nicht als praktikabel angesehen werden kann.

Topkis (2009) untersucht, in wie weit das Berechnungsproblem in konvexen Koalitionsspielen umgangen werden kann, denn es existiere ein „unresolved issue of efficiently determining whether or not a given payoff vector is in the core of a convex game.“<sup>7</sup> Seine Zielsetzung deckt sich mit der Zielsetzung dieser Arbeit, eine stabile Zuteilung ohne Verwendung der charakteristischen Funktion zu bestimmen. Er wählt den Ansatz, anhand des *Greedy-Algorithmus* eine Kernzuteilung zu bestimmen.

**Definition 3.4. Greedy-Algorithmus<sup>8</sup>**

Sei  $\pi : N \rightarrow N$  eine Permutation der Spielermenge  $N = \{1, \dots, n\}$ . Sei  $\Pi$  die Menge aller  $n!$  Permutationen von  $N$ . Für  $\pi \in \Pi$  sei  $S(\pi, i) = \{\pi(1), \dots, \pi(i)\}$  für alle  $i = 0, 1, \dots, n$ . Der Greedy-Algorithmus bestimmt die Zuteilung  $x_{\pi(i)}(\pi)$  für Spieler  $\pi(i)$  für ein  $\pi \in \Pi$  anhand der folgenden Formel,

$$x_{\pi(i)}(\pi) = c(S(\pi, i)) - c(S(\pi, i - 1)), \quad (3.3)$$

für  $i = 1, \dots, n$ . Es gilt  $\mathbf{x}(\pi) \in \mathbb{R}_+^n$ .

Bei gegebenem  $\pi \in \Pi$  teilt der Greedy-Algorithmus Spieler  $i$  die Kosten zu, die Spieler  $i$  der schon bestehenden Koalition  $S(\pi, i - 1)$  hinzufügt, also gerade die Grenzkosten (2.5),  $x_i^{GK} = c(S) - c(S \setminus \{i\})$ . Die Berechnung wird für das Beispiel 2.1 exemplarisch für die Permutation  $\pi = \{\pi(1) = 2, \pi(2) = 1, \pi(3) = 3\}$  durchgeführt. Es gilt:

$$\begin{aligned} x_{\pi(1)}(\pi) &= c(\{2\}) - c(\emptyset) = 55 - 0 = 55 \\ x_{\pi(2)}(\pi) &= c(\{2\} \cup \{1\}) - c(\{1\}) = 110 - 55 = 55 \\ x_{\pi(3)}(\pi) &= c(\{2\} \cup \{1\} \cup \{3\}) - c(\{2\} \cup \{1\}) = 117 - 110 = 7 \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Vgl. Topkis (2009), S. 227.

<sup>8</sup>Vgl. Topkis (1987), S. 363

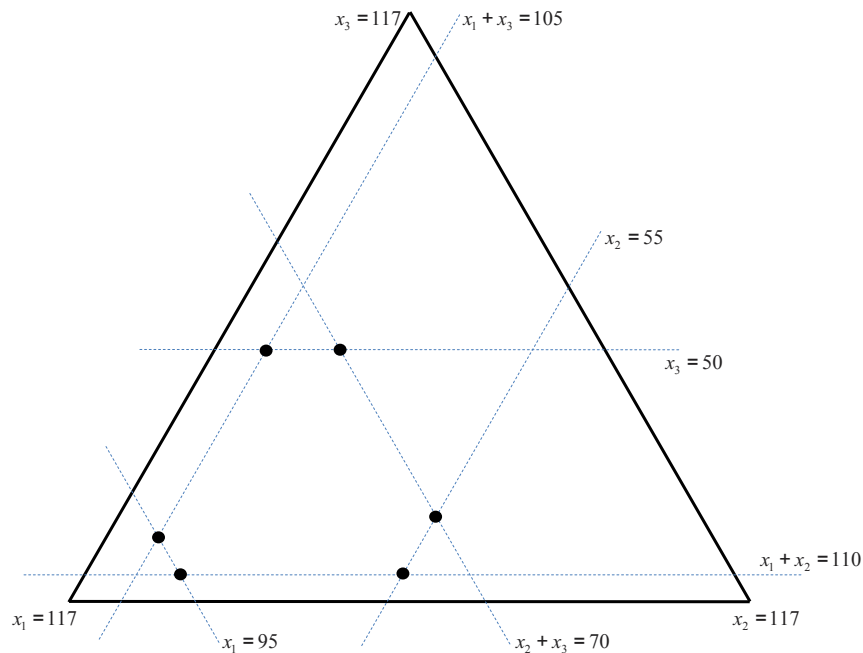


Abbildung 3.1: Die Zuteilungen des Greedy-Algorithmus für Beispiel 2.1.

Da es  $3! = 6$  Permutationen gibt, können für das Beispiel sechs Kernzuteilungen berechnet werden, die gemäß Shapley (1971) die Eckpunkte des Kerns sind, wie sich an Abbildung 3.1 leicht überprüfen lässt. Ebenfalls lässt sich für das Beispiel 2.1 leicht überprüfen, dass sich, teilt man jedem Spieler  $i$  den Durchschnitt der Kosten (3.3) aller  $n!$  möglichen Permutationen  $\pi$  zu, gerade der Shapley-Wert von Spieler  $i$  ergibt,<sup>9</sup>

$$\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} x_{\pi(i)}(\pi) = \Phi_i(N, c).$$

Die folgenden Sätze belegen den Zusammenhang zwischen dem Greedy-Algorithmus und konvexen Koalitionsspielen.

**Satz 3.4. Shapley (1971)**

*Ist das Koalitionsspiel  $(N, c)$  konvex, dann liegt die durch den Greedy-Algorithmus bestimmte Zuteilung  $\mathbf{x}(\pi)$  für alle Permutationen  $\pi \in \Pi$  im Kern.*

<sup>9</sup>Vgl. Topkis (2009), S. 210.

**Satz 3.5. Ichiishi (1981)**

Gegeben sei das Koalitionsspiel  $(N, c)$ . Wenn die durch den Greedy-Algorithmus bestimmte Zuteilung  $\mathbf{x}(\pi)$  für alle Permutationen  $\pi \in \Pi$  im Kern liegt, dann ist das Koalitionsspiel  $(N, c)$  konvex.

Mit den *Activity-Optimization Games with Complementarity*<sup>10</sup> stellt Topkis eine spezielle Klasse von Spielen vor, die konvex sind und gemäß Topkis „attractive computational features“ aufweisen.<sup>11</sup> In einem Koalitionsspiel  $(N, v)$  habe jeder Spieler  $i \in N$   $m_i$  private *Aktivitäten*, für die er eigenständig Aktivitätenlevel festlegen kann. Sei  $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}_+^{m_i}$  der Vektor der Level der  $m_i$  Aktivitäten von Spieler  $i$ . Eine Koalition, in der  $i$  nicht enthalten ist, kann keinen Einfluss auf den Aktivitätenlevel von Spieler  $i$  nehmen. Es gebe  $m_0$  öffentliche Aktivitäten, die von jeder Koalition gesteuert werden können. Sei  $\mathbf{a}_0$  der Vektor der  $m_0$  öffentlichen Aktivitäten. Es sei  $m = \sum_{i=0}^n m_i$  die Anzahl aller im Spiel existierenden Aktivitäten, die im Vektor  $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  zusammengefasst werden. Der Aktivitätenlevel über alle Aktivitäten  $\mathbf{a}$ , der von einer Koalition gewählt wird, muss in der Menge  $L \subseteq \mathbb{R}^m$  liegen,  $\mathbf{a} \in L$ , wobei Aktivitäten nur positive Aktivitätenlevel aufweisen können,  $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ .

Es sei  $M(S)$  die Menge aller Vektoren der Aktivitätenlevel, die Koalition  $S$  durchsetzen kann, so dass

$$M(S) = \{\mathbf{a} : \mathbf{a} \in L, \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \ \forall i \in N \setminus S\}$$

Wählt eine Koalition  $S$  einen durchsetzbaren Aktivitätenvektor  $\mathbf{a}$ , erhält sie eine Auszahlung gemäß der reelwertigen Funktion  $g(\mathbf{a}, S)$ , die durch  $S \subseteq N$  und  $\mathbf{a} \in M(S)$  beschränkt ist. Es wird angenommen, dass allein durch die öffentlichen Aktivitäten keine positive Auszahlung bewirkt werden kann, und dass das Betreiben aller Aktivitäten mit dem Level Null ebenfalls zu keinem Gewinn führt, so dass  $\sup_{\mathbf{a} \in M(\emptyset)} g(\mathbf{a}, \emptyset) = 0$  und  $g(\mathbf{0}, S) = 0$ .

Jede Koalition  $S$  ist bemüht, ihre Auszahlung zu maximieren. Dazu wählt sie den Aktivitätenvektor  $\mathbf{a}$ , der  $g(\mathbf{a}, S)$  maximiert, und den sie aus eigener Kraft durchsetzen kann. Die daraus folgende Auszahlung ist ihr Koalitionswert  $v(S)$ .

<sup>10</sup>Zur folgenden Beschreibung vgl. Topkis (1987), S. 359–360.

<sup>11</sup>Vgl. Topkis (1987), S. 359.

**Definition 3.5. Activity-Optimization Game**<sup>12</sup>

Ein Activity-Optimization Game  $(N, g(\mathbf{a}, S), L)$  ist ein Gewinnspiel mit der folgenden charakteristischen Funktion  $v(\cdot)$  für alle  $S \subseteq N$ :

$$v(S) = \sup_{\mathbf{a} \in M(S)} g(\mathbf{a}, S). \quad (3.4)$$

Um die angestrebten „attractive computational features“ zu erreichen, schlägt Topkis zur Lösung eines Activity-Optimization Game die Benutzung des Greedy-Algorithmus vor. Topkis definiert aufbauend auf dem Activity-Optimization Game das Activity-Optimization Game mit Komplementarität, für das er gewisse Annahmen bezüglich der Menge  $L$  und der Funktion  $g(\mathbf{a}, S)$  trifft.<sup>13</sup> Topkis zeigt, dass ein Activity-Optimization Game mit Komplementarität ein konvexes Spiel ist.<sup>14</sup> Dadurch erreicht Topkis, dass die vom Greedy-Algorithmus berechnete Zuteilung für das so von ihm definierte Spiel gemäß Satz 3.4 eine Kernzuteilung ist.

Zusammenfassend lassen sich folgende Schlüsse aus den untersuchten Eigenschaften von Koalitionsspielen ziehen. Ist ein Koalitionsspiel  $(N, c)$  balanciert, dann ist der Kern nichtleer. Es steht somit ein geeigneter Test zur Verfügung, um die Existenz des Kerns zu überprüfen. Ist das Koalitionsspiel konvex, bietet sich der Greedy-Algorithmus an, um eine Kernzuteilung zu bestimmen. Topkis schlägt vor, diese Tatsache über die Formulierung der Entscheidungssituation als Activity-Optimization Game mit Komplementarität auszunutzen.

**3.1.2 Market Games, Equivalence Theorem und der Kern**

Neben der Formulierung im Koalitionsspiel können sowohl der Kern als auch der Shapley-Wert in anderer Form beschrieben werden. Im Folgenden werden Märkte betrachtet, in denen eine Vielzahl von Spielern, von denen jeder für sich gesehen keinen wesentlichen Einfluss auf die Gesamtsituation ausüben kann, miteinander in Austausch treten. Die grundlegende Situation wird durch das Walras-Gleichgewicht im perfekten Wettbewerb beschrieben, in dem jeder Spieler als Preisnehmer auftritt und die im Gleichgewicht bestehenden Preise den Markt räumen, also Angebot und Nachfrage gleich sind.<sup>15</sup> Aufbauend auf den Überlegungen des Gleichgewichts im

<sup>12</sup>Vgl. Topkis (1987), S. 360

<sup>13</sup>Vgl. Topkis (2009), S. 245.

<sup>14</sup>Vgl. Topkis (1987), S. 363

<sup>15</sup>Vgl. Walras (1874). Die spieltheoretische Beschreibung kann sowohl mit als auch ohne transferierbaren Nutzen durchgeführt werden, während Walras und Edgeworth ihre Märkte mit nicht-transferierbarem Nutzen modellieren.

perfekten Wettbewerbsmarkt lassen sich Zusammenhänge mit dem Kern und dem Shapley-Wert herstellen, welche unter dem Begriff des *Equivalence Theorem* bekannt sind.<sup>16</sup>

Das Verständnis des Kerns – Immunität gegenüber Abweichungen von Koalitionen – wurde von Edgeworth (1881) erstmalig formuliert und später von Gillies (1953) in den spieltheoretischen Kontext übernommen.<sup>17</sup> Edgeworth stellt eine Tauschsituation mit zwei Spielern und zwei Gütern dar. Die Allokationen, die Pareto-optimal sind, die also keinen Spieler besser stellen können, ohne dass ein anderer Spieler schlechter gestellt wird, und die beide Spieler besser stellen als in der Ausgangssituation, bilden die so genannte *Kontraktkurve*. Nun werden nicht zwei Individuen, sondern zwei Gruppen mit jeweils  $n$  Spielern mit identischen Präferenzen und Ausstattungen betrachtet, die wie zwei einzelne Spieler in Austausch treten. Damit dies gilt, ist auszuschließen, dass mehrere Spieler, unabhängig davon, welcher Gruppe sie angehören, einen eigenen Tauschmarkt bilden. Diese Idee stellt den stand-alone Test<sup>18</sup> des Kerns dar und wird von Edgeworth als *recontractring* bezeichnet. Edgeworth zeigt, dass mit steigender Spielerzahl immer mehr Allokationen ausgeschlossen werden, so dass die Kontraktkurve im Limit gerade auf das so genannte *perfekte Wettbewerbsgleichgewicht* schrumpft.

In einem reinen Tauschmarkt (*pure exchange economy*)<sup>19</sup> tauschen die Spieler  $i$  aus der Menge  $N$   $k = 1, 2, \dots, m$  Güter. Gegeben sei die Menge  $X_i \in R_+^m$  für alle  $i \in N$ . Jeder Spieler hält zu Beginn eine Anfangsausstattung  $\mathbf{w}_i \in X_i$ . Seine Zuteilung<sup>20</sup> sei  $\mathbf{x}_i \in X_i$ , wobei eine Zuteilung nur durchführbar ist, wenn  $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i$ . Ausschlaggebend für die Zuteilung sind die Nutzenfunktionen  $u_i(\mathbf{x}_i)$  der Spieler, die generell als nichtnegativ und stetig differenzierbar angenommen werden, wobei die Annahme der Konkavität<sup>21</sup> teilweise ebenfalls getroffen wird.<sup>22</sup>

<sup>16</sup>Vgl. Shapley (1955a), Shubik (1959), Debreu und Scarf (1963), Aumann (1964), Scarf (1967) und Anderson (1978).

<sup>17</sup>Vgl. Shubik (1959) zur Übereinstimmung von Kontraktkurve und Kern.

<sup>18</sup>Vgl. Definition 2.10.

<sup>19</sup>Vgl. Shapley und Shubik (1969b, 1975).

<sup>20</sup>Da Güter zugeteilt werden, wird in der Literatur der Begriff *Allokation* verwendet. Hier wird aus Gründen der Konsistenz  $\mathbf{x}$  weiter als Zuteilung bezeichnet.

<sup>21</sup>Bei konkaven Nutzenfunktionen liegt ein abnehmender Grenznutzen vor, d. h. der Nutzengewinn durch den Konsum einer zusätzlichen Einheit eines Gutes nimmt mit der Höhe der bereits konsumierten Menge dieses Gutes ab.

<sup>22</sup>Siehe unten zu den Konsequenzen und weiterführender Literatur.



**Definition 3.6. Reiner Tauschmarkt**

Es sei  $\mathbf{p} \in R_+^m$  ein Preisvektor,  $\mathbf{w}_i$  die Anfangsausstattung der Spieler und  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  und  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$  zwei Zuteilungen.  $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  ist ein perfektes Wettbewerbsgleichgewicht im reinen Tauschmarkt, wenn

- $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}_i \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i \quad \forall i$  (Budgeteinhaltung),
- $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i$  (Markträumung) und
- $u_i(\mathbf{x}_i) \geq u_i(\mathbf{y}_i)$  für alle  $i$  mit  $(\mathbf{y}_i \in X_i : \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_i \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)$  (Spieler  $i$  zieht die Zuteilung  $\mathbf{x}_i$  allen anderen Zuteilungen vor, die in seinem Budget liegen).

Es lässt sich daraus nicht ableiten, wie die Preise zustande kommen.<sup>23</sup> Die einzelnen Spieler agieren als Preisnehmer und legen die Preise nicht selber fest. Mit Hilfe des Konzepts des Kerns kann eine Erklärung für die Existenz gerade dieser Preise gegeben werden. Um das perfekte Wettbewerbsgleichgewicht mit dem Konzept des Kerns vergleichen zu können, wird aus dem reinen Tauschmarkt ein so genanntes *Market Game* abgeleitet, dessen charakteristische Funktion für alle  $S \subseteq N$  folgendermaßen aufgestellt wird:<sup>24</sup>

$$v(S) = \max_{\mathbf{x}} \sum_{i \in S} u_i(\mathbf{x}_i). \quad (3.5)$$

Man sagt auch, der zu dem so definierten Koalitionsspiel zugehörige Markt ist eine *Repäsentation* von  $(N, v)$ . In Worten beschreibt die so definierte charakteristische Funktion, welchen maximalen Nutzen eine Koalition  $S$  erreichen kann, wenn sie nicht an dem Tausch auf dem Markt teilnimmt, sondern die Spieler der Koalition  $S$  nur untereinander tauschen, sprich, ihren eigenen Tauschmarkt eröffnen. Die Idee des Equivalence Theorem besteht darin, dass bei einem Tausch unter allen Spielern aus  $N$  für alle Koalitionen immer ein größerer Nutzen erzielt werden kann als wenn sie nur unter sich tauschen würden. Somit ist das perfekte Wettbewerbsgleichgewicht immun gegenüber Abweichungen nicht nur von einzelnen Spielern, sondern auch von Koalitionen, stellt also eine Kernzuteilung dar. Debreu und Scarf (1963) beweisen anhand des Market Games folgenden Satz:

<sup>23</sup>Laut Walras solle man sich einen Auktionator vorstellen, der die Preise festlegt.

<sup>24</sup>Vgl. Shapley und Shubik (1969b).

**Satz 3.6. Equivalence Theorem**<sup>25</sup>

Gegeben sei ein reiner Tauschmarkt gemäß Definition 3.6 mit nichtleerem Kern. Dann gilt: Das perfekte Wettbewerbsgleichgewicht liegt im Kern.

Darüberhinaus lässt sich zeigen, dass bei wachsender Anzahl der Spieler der Kern immer kleiner wird, bis er im Limit gerade der durch den Preisvektor  $\mathbf{p}$  entstehenden Zuteilung entspricht.<sup>26</sup>

Neben dem Equivalence Theorem, das sich mit dem Zusammenhang zwischen perfektem Wettbewerbsgleichgewicht und Kern beschäftigt, ist die Untersuchung zwischen perfektem Wettbewerbsgleichgewicht und Shapley-Wert unter dem Begriff des *Value Equivalence Theorem* bekannt. Vgl. zur Formulierung als nichtatomares Spiel Aumann und Shapley (1974) (TU) und Aumann (1975) (NTU) oder als Annäherung durch Wiederholungen (*limit of replicas*) Shapley (1955b) (TU) und Mas-Colell (1977) (NTU).<sup>27</sup>

Das Equivalence Theorem wurde unter verschiedenen Aspekten erweitert. Dazu zählen zum Beispiel die „symmetrischen Märkte“ von Shapley und Shubik (1969a), die Erweiterung auf Spiele mit nichttransferierbarem Nutzen (NTU-Games),<sup>28</sup> die Betrachtung von Spielen mit linearer Produktion,<sup>29</sup> und andere Problemstellungen.<sup>30</sup> Es gibt auch Beispiele für Situationen, in denen das Equivalence Theorem (speziell das Value Equivalence Theorem) nicht gültig ist, d.h. die spieltheoretischen Konzepte stimmen nicht mit dem perfekten Wettbewerbsgleichgewicht überein.<sup>31</sup> Andersherum gibt es auch Situationen, in denen der Kern bzw. der Shapley-Wert existieren, jedoch kein perfektes Wettbewerbsgleichgewicht zustande kommt.<sup>32</sup>

Der Kern muss also nicht zwangsläufig existieren. Maßgeblich für die Existenz bzw. Nicht-Existenz des Kerns sind die Annahmen über die Nutzenfunktionen der Spieler. Shapley und Shubik (1966) und Shapley und Shubik (1969b) untersuchen diese Bedingungen und zeigen, dass jedes Market Game, das aus einem reinen Tauschmarkt abgeleitet wird, unter gewissen Bedingungen an die Nutzenfunktionen  $u_i(\mathbf{x}_i)$  total balanciert ist.

<sup>25</sup>Vgl. Debreu und Scarf (1963), Theorem 1, S. 240 sowie Aumann (1964) und Anderson (1978).

<sup>26</sup>Vgl. Shubik (1959). Zum nichtatomaren Fall siehe Dubey und Neyman (1984).

<sup>27</sup>Vgl. zum nicht differenzierbaren Fall Champsaur (1975) und Hart (1977). Vgl. für Erweiterungen und neuere Entwicklungen Hart (2001).

<sup>28</sup>Vgl. Hart (1994a) und Hart (1994b).

<sup>29</sup>Vgl. Owen (1975) und Billera und Raanan (1981).

<sup>30</sup>Siehe z.B. Wooders (1994).

<sup>31</sup>Vgl. z.B. Aumann und Rosenthal (1977), Lefevre (1994) oder Hart und Mas-Colell (1996).

<sup>32</sup>Vgl. z.B. Mas-Colell (1980), Shapley und Shubik (1966) und Shapley und Shubik (1967).

Im Hinblick auf die gegebene Fragestellung dieser Arbeit wird der reine Tauschmarkt auf einen Tauschmarkt mit Produktion (*productive economy*)<sup>33</sup> erweitert. Zusätzlich zur Menge  $X_i$  sei nun die Menge  $Z \in R_+^m$  der möglichen Produktionen gegeben, die konvex ist und vom Nullpunkt ausgeht, d.h. der reine Tauschmarkt stellt gerade die Situation dar, in der nicht produziert wird.<sup>34</sup> Ein mögliches Produktionsniveau sei mit  $\mathbf{z}$  bezeichnet.

### Definition 3.7. Tauschmarkt mit Produktion

Es sei  $\mathbf{p} \in R_+^m$  ein Preisvektor,  $\mathbf{w}_i$  die Anfangsausstattung der Spieler und  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  und  $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$  zwei Zuteilungen.  $(\mathbf{p}, \mathbf{x})$  ist ein perfektes Wettbewerbsgleichgewicht im Tauschmarkt mit Produktion, wenn

- der Gewinn auf  $Z$  maximiert wird,
- $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \mathbf{z} + \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i$ , so dass  $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i - \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_i$  in  $Z$  ist, und
- $u_i(\mathbf{x}_i) \geq u_i(\mathbf{y}_i)$  für alle  $i$  mit  $(\mathbf{y}_i \in X_i : \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}_i \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}_i)$  (Spieler  $i$  zieht die Zuteilung  $\mathbf{x}_i$  allen anderen Zuteilungen vor, die in seinem Budget liegen).

Ausgehend von Shapley und Shubik (1969b) zeigen Billera und Bixby (1974), dass jedes Market Game, das aus einem Tauschmarkt mit Produktion abgeleitet wird, unter gewissen Bedingungen an die Nutzenfunktionen  $u_i(\mathbf{x}_i)$  total balanciert ist.<sup>35</sup>

Zusammenfassend zeigen die Ausführungen dieses Abschnitts, dass aus Tauschmärkten abgeleitete Spiele (Market Games) unter gewissen Voraussetzungen einen nichtleeren Kern haben. Dies gilt für reine Tauschmärkte und für Tauschmärkte mit Produktion. Zusätzlich besagt das Equivalence Theorem, dass das perfekte Wettbewerbsgleichgewicht der betrachteten Märkte unter diesen Voraussetzungen im Kern liegt.

### 3.1.3 Relevanz für die Kostenzuteilung im gegebenen Fall

Der vorige Abschnitt zeigt, dass Zusammenhänge zwischen dem perfekten Wettbewerbsgleichgewicht und Konzepten der kooperativen Spieltheorie herleitbar sind. Auf Seiten des Wettbewerbsmarkts besteht die „Lösung“ in einem markträumenden

<sup>33</sup>Vgl. Billera und Bixby (1974).

<sup>34</sup>Aus diesem Grund wird er auch als einfacher Markt (*simple market*) bezeichnet.

<sup>35</sup>Vgl. auch Billera und Bixby (1973a), Billera und Bixby (1973b), Billera (1970) und Billera (1974). Der Beweis wird für NTU-Spiele geführt, in denen die Balanciertheit analog zu TU-Spielen eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Kerns ist, vgl. Scarf (1967).

Gleichgewicht, auf Seiten des kooperativen Spiels besteht die „Lösung“ in der Immunität gegenüber Abweichungen von Koalitionen.<sup>36</sup> Es kann gezeigt werden, dass der Preisvektor des perfekten Wettbewerbsgleichgewichts eine Kernzuteilung erzeugt.

Im Sinne der Aufgabenstellung ist das Ergebnis relevant, dass der Kern in Märkten unter den angegebenen Bedingungen existiert und auch ohne die Ermittlung der charakteristischen Funktion als nichtleer bewiesen werden kann. Weiterhin ist die durch das perfekte Wettbewerbsgleichgewicht erzeugte Zuteilung eine Kernzuteilung. Folgt daraus, dass die Aufgabenstellung trivial ist? Dazu ist zu überprüfen, in wie weit die gegebene Entscheidungssituation (vgl. Kapitel 1) mit den hier betrachteten Märkten vergleichbar ist.

1. Market Games sind implizit als Gewinnspiel modelliert. Die Koalitionswerte  $v(\cdot)$  sind die Nutzen der Spieler, nicht ihre Kosten. Die Zuteilung wird über die Nutzenfunktionen der Spieler bestimmt. Ein Kostenteilungsspiel grenzt sich von diesem Vorgehen ab, indem die Kosten, die zu Erzeugung eines Outputs anfallen, unter den Spielern aufgeteilt werden. Der Output wurde schon erzeugt bzw. ist exogen vorgegeben, und die anfallenden Kosten sind vollständig aufzuteilen, ohne dass die Spieler eine Möglichkeit haben, das Spiel zu ändern.<sup>37</sup>
2. Zusätzlich gewünschte Produkte werden in den Market Games über nicht näher definierte, zentral verfügbare Technologien bereitgestellt, wobei der Gewinn aus der Produktion maximiert wird. Es wird keine Aussage darüber gemacht, welche Abhängigkeiten innerhalb der Produktion bestehen. Nicht die Spieler treten als Produzenten auf, sondern die Technologien sind einer abstrakten Entität zugeordnet, die jedes gewünschte Produktionsniveau hervorbringen kann.

Wie Punkt 1. und Punkt 2. zeigen, unterscheiden sich Market Games von der gegebenen Fragestellung. Hier sind Produktionen vernetzt, Produktionsniveaus können nicht beliebig eingestellt werden, die Technologien sind genauer zu beschreiben und es gilt, eine Kostenzuteilung praktikabel zu bestimmen. Die Existenz des Kerns kann hier von weiteren Faktoren abhängen, und er muss weiterhin nicht eindeutig sein.

Aus den gleichen Gründen lässt sich die hier gegebene Entscheidungssituation nicht als Activity-Optimization Game abbilden. Das Activity-Optimization Game ist ebenfalls als Gewinnspiel modelliert, wobei sich die Koalitionswerte  $v(\cdot)$  über die

---

<sup>36</sup>Vgl. Debreu und Scarf (1963), S. 237.

<sup>37</sup>Vgl. Young (1985b), S. vii.

Funktion  $g(\mathbf{a}, S)$  ergeben. Interdependenzen zwischen den verschiedenen Aktivitäten und deren gewählten Level sind allein durch  $g(\mathbf{a}, S)$  nicht adäquat abbildbar.

Weiter ist zu hinterfragen, ob der Greedy-Algorithmus als geeignetes Lösungsverfahren akzeptiert werden kann. Er bietet den Vorteil, bei konvexen Koalitionsspielen eine Kernzuteilung zu bestimmen, ist aber selber nicht stabil.<sup>38</sup> Weiterhin ist die Lösung in gewisser Weise willkürlich, da sie von der gewählten Permutation abhängt. Selbst wenn die Entscheidungssituation Konvexität induziert und der Greedy-Algorithmus eine Kernzuteilung berechnet, stellt sich die Frage, ob die Spieler diese Zuteilung akzeptieren werden. Schließlich wird bei einem zweiten Durchlauf des Verfahrens eine andere Zuteilung berechnet, die auch stabil ist. Aus diesem Grunde ist der Greedy-Algorithmus nicht als spieltheoretisch-strategisches Zuteilungsverfahren einzustufen und wird nicht als Lösung der Aufgabenstellung akzeptiert.

Letztlich ist anzumerken, dass die Bemühungen von Topkis, das Berechnungsproblem zu umgehen, die Feststellung aus Abschnitt 2.6 belegen: es gibt kein Lösungsverfahren, das stabil und praktikabel ist. Allein durch die Einschränkung auf konvexe Koalitionsspiele lässt sich dieses Problem nicht umgehen.

Nichtsdestotrotz geben die Untersuchungen zum Equivalence Theorem und zu den Activity-Optimization Games Hinweise für die weitere Vorgehensweise. Relevant ist die Schlussfolgerung von Shapley und Shubik, dass die Güterverteilung des Marktes alle möglichen Interdependenzen des Spiels enthält, wohingegen die Betrachtung im herkömmlichen Koalitionsspiel nur einige ausgewählte Transaktionen berücksichtigt und somit Information verloren geht.<sup>39</sup> Daher erscheint der Ansatz lohnenswert, über das Preissystem nicht nur die Existenz des Kerns zu testen, sondern eine Kernzuteilung zu berechnen.

Weiterhin können die in der Organisation stattfindenden Prozesse als Aktivitäten aufgefasst werden. Die  $n$  Spieler lassen sich als Spieler auf einem Markt interpretieren, denen Technologien mit jeweils  $m_i$  Produkten zur Verfügung stehen, die zu verschiedenen Aktivitätenleveln betrieben werden können und dementsprechend Kosten verursachen. Zieht man die Erkenntnisse konvexer Spiele bzw. der Komplementarität zu Rate,<sup>40</sup> lassen sich eventuell eindeutige Zusammenhänge zwischen der

---

<sup>38</sup>Hier ähnelt er dem Shapley-Wert, der in Abschnitt 2.6 nicht als geeignete Lösung akzeptiert wird, da die Aufgabenstellung nicht vorsieht, den zu entwickelnden Ansatz auf konvexe Spiele zu beschränken.

<sup>39</sup>Vgl. Shapley und Shubik (1975), S. 236. Dies wird im Weiteren ausgenutzt, vgl. Abschnitt 4.4.3.

<sup>40</sup>Vgl. Topkis (2009) und Abschnitt 3.1.1.

Form der Kostenfunktionen, einem Preisvektor und dem Kern ableiten. Es gilt, diese Grundlagen in der weiteren Untersuchung der Aufgabenstellung zu berücksichtigen und in den Kontext der Kostenzuteilung umzuformulieren.<sup>41</sup>

## 3.2 Mehrproduktmonopole und Kostenzuteilung

Neben der Kostenzuteilung im Koalitionsspiel (vgl. Kapitel 2) umfasst die spieltheoretische Betrachtung der Kostenzuteilung auch die Kostenzuteilung einer Produktion. In diesem Fall ist nicht die charakteristische Funktion die Grundlage für ein Lösungsverfahren, sondern die mit der Produktion assoziierte Kostenfunktion. Bevor die spieltheoretischen Lösungsverfahren vorgestellt werden (vgl. Abschnitt 3.3), die man in diesem Fall als Preismechanismen bezeichnet, werden an dieser Stelle die allgemeinen Bedingungen diskutiert, unter denen eine Produktion in Einklang mit der spieltheoretischen Eigenschaft der Stabilität geteilt werden kann.

Die maßgeblich von Panzar und Willig (1977), Baumol und Willig (1977) und Baumol et al. (1982) entwickelte *Contestable Market Theory* (Theorie der bestreitbaren Märkte) beschäftigt sich mit den Möglichkeiten des Markteintritts (engl. *entry*) in ein reguliertes Mehrproduktmonopol. Sie wurde entwickelt, um Fragen der Regulierung von Mehrproduktmonopolen zu behandeln. Diese haben einen anderen Fokus als die in dieser Arbeit gegebene Fragestellung, woraus sich die im Folgenden vorgestellten Abweichungen des hier vertretenen Ansatzes von der Contestable Market Theory begründen.

Im spieltheoretischen Kontext wurde die Pionierarbeit zum Eintritt in Mehrproduktmonopole von Faulhaber (1975) geleistet. Nach den Weiterentwicklungen in der Contestable Market Theory erfolgte eine Präzisierung durch Faulhaber und Levinson (1981). Im Weiteren nimmt die Arbeit von Sharkey und Telser (1978) eine zentrale Rolle ein. Sie wird nicht von allen Autoren zum Ursprung der Contestable Market Theory hinzugezählt. Sie nimmt deshalb eine Außenseiterrolle in der Theorie ein, weil sie anderen Annahmen und Zielsetzungen unterliegt und sich rein mit der Kostenseite eines Mehrproduktmonopols auseinandersetzt, und die Nachfrageseite außer Acht lässt. Auch dieser Aspekt ist im Folgenden zu untersuchen und stellt eine der Grundannahmen der gegebenen Vorgehensweise dar.<sup>42</sup> Bei der Kostenzuteilung bei positiven Skaleneffekten ist diese Annahme dahingehend charakterisiert, dass die

---

<sup>41</sup>Vgl. Abschnitt 3.2, Abschnitt 3.4 und Abschnitt 5.3.

<sup>42</sup>Siehe Abschnitt 3.3.3.

Nutzer einer gemeinsam geteilten Technologie die Methode der Kostenzuteilung unabhängig von der Charakteristik der individuellen Nachfragen wählen.<sup>43</sup>

Grundgedanke der Contestable Market Theory ist, dass die Produktion eines Mehrproduktmonopols von allen Nachfragern genau dann freiwillig geteilt wird, wenn es nicht möglich ist, einen Teil der Produktion anderweitig gewinnbringend zu produzieren. In diesem Fall kann nicht mit Gewinn in das Mehrproduktmonopol eingebrochen werden und es ist für alle Nachfrager am kostengünstigsten, die gemeinsame Nachfrage zu bündeln und durch einen einzigen Anbieter produzieren zu lassen.<sup>44</sup> Dazu wird im Folgenden anhand der Preisstruktur des Mehrproduktmonopols untersucht, unter welchen Bedingungen der Markteintritt möglich ist oder verhindert wird.<sup>45</sup>

Es wird die Notation vorgestellt, die im Weiteren Verwendung findet. Gegeben sei ein reguliertes Mehrproduktmonopol, das die notwendige Technologie verfügt, um  $k \in \{1, \dots, m\}$  Produkte hervorzubringen. Der Output wird durch den Vektor  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^m$  ausgedrückt. Hierbei bezeichnet  $\bar{\mathbf{q}}$  den durch die exogen gegebene Nachfrage geforderten Output des Mehrproduktmonopols. Die Schreibweise  $\mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$  steht im Folgenden für die Situation, dass die Komponenten von  $\mathbf{q}$  höchstens so groß sind wie die Komponenten von  $\bar{\mathbf{q}}$ , und dass mindestens eine Komponente von  $\mathbf{q}$  kleiner ist als von  $\bar{\mathbf{q}}$ , also  $q^k \leq \bar{q}^k$  für alle  $k \in \{1, \dots, m\}$  und  $q^l < \bar{q}^l$  für mindestens ein  $l \in \{1, \dots, m\}$ .

Weiter ist  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m$  der Preisvektor des Mehrproduktmonopols. Es sei  $C(\cdot)$  die nichtfallende, nichtnegative und mindestens zwei mal stetig differenzierbare Kostenfunktion des Mehrproduktmonopols, die allein vom Output der  $m$  Produkte abhängt. Es ist insbesondere nicht nötig, dass  $C(\mathbf{0}) = 0$  ist. Folglich sind auch Kostenfunktionen mit Fixkosten zugelassen. Sei

$$\mathbf{D}(\mathbf{p}) = (D^1(\mathbf{p}), \dots, D^m(\mathbf{p}))$$

die Nachfragefunktion nach den Produkten zu den Preisen  $\mathbf{p}$ . Mit  $\mathbf{D}_S(\mathbf{p})$  wird der von den in der Koalition  $S \subseteq N$  zusammengefassten Nachfragern geforderte Output bezeichnet.

<sup>43</sup>Vgl. Moulin (1996), S. 226.

<sup>44</sup>Vgl. genauer Kapitel 1, Abschnitt 3.2.1 und Abschnitt 5.1.

<sup>45</sup>Vgl. Mirman et al. (1985), S. 116–117 und ten Raa (1984), S. 135–136.

### 3.2.1 Contestable Market Theory und Supportability

Die verschiedenen Eigenschaften von Preisvektoren werden formal eingeführt und diskutiert. Das zuerst vorgestellte Konzept ist eine notwendige Bedingung für das zweite Konzept, wobei letzteres wiederum hinreichend für das erste Konzept ist. Diese „Reihenfolge“ wird für die weiteren Konzepte fortgeführt. Die vorgestellten subventionsfreien Preise werden schlicht durch  $\mathbf{p}$  bezeichnet, da sie im Rest der Arbeit verwendet werden, während die anderen Preise eine Kennzeichnung zur besseren Unterscheidung erhalten.

#### Definition 3.8. Subsidy-free Preise nach Faulhaber (1975)

Gegeben sei ein Mehrproduktmonopol mit der Kostenfunktion  $C(\cdot)$ . Der Preisvektor  $\mathbf{p}^{sf} \in \mathbb{R}_+^m$  heißt *Subsidy-free*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{sf} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{p}^{sf}) &= C(\mathbf{D}(\mathbf{p}^{sf})) \quad \text{und} \\ \mathbf{p}^{sf} \cdot \mathbf{D}_S(\mathbf{p}^{sf}) &\leq C(\mathbf{D}_S(\mathbf{p}^{sf})) \quad \text{für alle } S \subset N. \end{aligned}$$

Subsidy-free Preise verhindern, dass der Teil  $\mathbf{q}_S$  der Produktion mit Gewinn von einem Konkurrenten angeboten werden kann. Subsidy-free Preise verhindern jedoch nicht, dass ein Konkurrent mit Gewinn in einen Teil des Sortiments des Mehrproduktmonopols einbrechen kann. *Subventionsfreie Preise*<sup>46</sup> verallgemeinern die Subsidy-free Preise dahingehend, dass kein Teil der Produktion quersubventioniert wird, unabhängig davon, ob dieser Teil von einer bestimmten Gruppe von Nachfragern nachgefragt wird oder nicht.<sup>47</sup>

#### Definition 3.9. Subventionsfreie Preise

Gegeben sei ein Mehrproduktmonopol mit der Kostenfunktion  $C(\cdot)$  und der geforderte Output  $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}_+^m$ . Der Preisvektor  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m$  heißt *subventionsfrei*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= C(\bar{\mathbf{q}}) \quad \text{und} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &\leq C(\mathbf{q}) \quad \text{für alle } \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}. \end{aligned}$$

<sup>46</sup>Subventionsfreie Preise basieren auf dem Konzept der Supportability von Sharkey und Telser (1978), vgl. Definition 3.13. Der Begriff „subventionsfreie Preise“ wird aus sprachlichen Gründen dem Begriff „tragbare Preise“ vorgezogen. Das Konzept ist nicht zu verwechseln mit den subsidy-free Preisen nach Faulhaber (1975).

<sup>47</sup>Vgl. Sharkey und Telser (1978), S. 25. Der Begriff der Subventionsfreiheit stammt von Faulhaber (1975), jedoch weicht die hier benutzte Definition der subventionsfreien Preise von Faulhabers Definition der Subsidy-free Preise ab.



Subventionsfreie Preise enthalten nicht die Bedingung, dass der Markt geräumt wird. In Faulhaber und Levinson (1981) wird das Konzept der subventionsfreien Preise dahingehend erweitert, dass die Markträumung gefordert wird:<sup>48</sup>

**Definition 3.10. Anonymous Equity Preise**

Gegeben sei ein Mehrproduktmonopol mit der Kostenfunktion  $C(\cdot)$ . Der Preisvektor  $\mathbf{p}^{ae} \in \mathbb{R}_+^m$  heißt *Anonymous Equity Preisvektor*, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{ae} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{p}^{ae}) &= C(\mathbf{D}(\mathbf{p}^{ae})) \quad \text{und} \\ \mathbf{p}^{ae} \cdot \mathbf{q} &\leq C(\mathbf{q}) \quad \text{für alle } \mathbf{q} \leq \mathbf{D}(\mathbf{p}^{ae}). \end{aligned}$$

Anonymous Equity Preise sind gleichzeitig Subsidy-free Preise.<sup>49</sup> Wenn das Mehrproduktmonopol zu Anonymous Equity Preisen anbietet, dann ist es nicht möglich, zu gleichen Preisen mit Gewinn in einen Teil des Mehrproduktmonopolmarktes einzudringen. Anonymous Equity Preise beschreiben subventionsfreie Preise analog zu Definition 3.9, in denen zusätzlich die Markträumungsbedingung gemacht wird.

Formal werden Preise, die jegliche Form des Markteintritts verhindern, durch die Eigenschaft der *Sustainability* beschrieben.<sup>50</sup>

**Definition 3.11. Sustainability**

Gegeben sei ein Mehrproduktmonopol mit der Kostenfunktion  $C(\cdot)$ . Der Preisvektor  $\mathbf{p}^{ss} \in \mathbb{R}_+^m$  heißt *Sustainable*, wenn gilt:

$$\mathbf{p}^{ss} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{p}^{ss}) = C(\mathbf{D}(\mathbf{p}^{ss})),$$

und wenn für niedrigere Preise  $\mathbf{p}' \leq \mathbf{p}^{ss}$  für alle möglichen Preis-Mengenkombinationen  $(\mathbf{p}', \mathbf{q}')$  mit  $\mathbf{q}' \leq \mathbf{D}(\mathbf{p}')$  gilt:

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{q}' \leq C(\mathbf{q}').$$

Wenn ein Preisvektor die Eigenschaft der Sustainability erfüllt, dann kann ein Konkurrent mit dem Versuch, durch niedrigere Preise in den Markt einzutreten, keine Gewinne erwirtschaften. Die Sustainability ist somit die stärkste Eintrittsbedingung.

<sup>48</sup>Anonymous Equity Preise können sowohl als Erweiterung der Subsidy-free Preise (was die originäre Vorgehensweise von Faulhaber und Levinson (1981) ist) als auch der subventionsfreien Preise aufgefasst werden.

<sup>49</sup>Vgl. Faulhaber und Levinson (1981), S. 1086.

<sup>50</sup>Vgl. Panzar und Willig (1977).

Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den verschiedenen Eigenschaften von Preisvektoren?<sup>51</sup> Faulhaber und Levinson beweisen, dass subventionsfreie Preise eine notwendige Bedingung für Anonymous Equity sind, während Sustainability eine hinreichende Bedingung für Anonymous Equity ist.<sup>52</sup> Dies stuft die drei Eigenschaften nach ihrer Fähigkeit ab, den Markteintritt zu verhindern. Es ist jedoch zu hinterfragen, welche Aussagekraft dieser Vergleich im Bezug auf die hier gegebene Aufgabenstellung hat, denn es werden drei unterschiedliche Situationen miteinander verglichen:

- Subventionsfreie Preise beziehen sich rein auf die Kostenseite des Mehrproduktmonopols.
- Das Konzept der Anonymous Equity zieht die Nachfrageseite bei unveränderten Preisen in Betracht.
- Das Konzept der Sustainability analysiert Markteintrittsbedingungen für beliebige Preise.

Zuerst werden subventionsfreie Preise mit Anonymous Equity Preisen verglichen. Die vorangehenden Definitionen machen deutlich, dass de facto Anonymous Equity Preise gerade markträumenden subventionsfreien Preisen entsprechen. Unter der Annahme von unelastischen Nachfragen, dass also Preisänderungen eine (prozentual) unterproportionale Mengenänderungen nach sich ziehen, gleichen sich beide Eigenschaften.<sup>53</sup> Auch wenn sich im hier gegebenen Kontext vertreten lässt, diese Annahme zu treffen,<sup>54</sup> stellt sie eine Einschränkung des Modells dar.<sup>55</sup> Durch die Erkenntnisse von ten Raa (1983) lässt sich dies vermeiden.

---

<sup>51</sup>Subsidy-free Preise stellen eine recht einfache Bedingung auf, die von den anderen Preisvektoren erfüllt werden. Sie werden im Folgenden nicht weiter betrachtet.

<sup>52</sup>Vgl. Faulhaber und Levinson (1981), S. 1090.

<sup>53</sup>Vgl. Sharkey und Telser (1978), S. 25.

<sup>54</sup>In kooperativen Märkten sind die Nachfragen nicht notwendigerweise abhängig von den Preisen. Handelt es sich bei der Kooperation zum Beispiel um den internen Markt eines Unternehmens, so hängt die interne Nachfrage nicht von den Spielern ab, sondern wird durch den extern vorgegebenen Bedarf festgelegt. Innerhalb des Unternehmens stellt sich dann nur noch die binäre Entscheidung der Produktion bzw. der Nichtproduktion einer Leistung. Wird die Nachfrage berücksichtigt, wird implizit angenommen, dass der Nachfrager auf die Leistung nicht angewiesen ist, vgl. Sharkey (1982), S. 61. Darüberhinaus kann davon ausgegangen werden, dass die Nachfrage fest vorgegeben ist. Handelt es sich bei der Kooperation zum Beispiel um die Bereitstellung eines öffentlichen Gutes (z.B. die Wasserversorgung mehrerer Städte), so ist die Markträumung garantiert.

<sup>55</sup>Die Annahme unelastischer Nachfragen lässt sich durch weniger einschränkende Annahmen substituieren, vgl. Mirman et al. (1985), S. 123–124.

**Satz 3.7. ten Raa (1983)**

*Preisvektoren, die den Markteintritt in ein Mehrproduktmonopol verhindern, beinhalten, dass der Markt geräumt wird. Somit ist die Erfüllung von Definition 3.9 (subventionsfreie Preise) hinreichend für die Erfüllung von Definition 3.10 (Anonymous Equity Preise).*

Laut ten Raa ist die Nebenbedingung der Markträumung ein Grenzfall, der ohne weitere Einschränkung des Modells ausgeschlossen werden kann.<sup>56</sup> Die Unverwundbarkeit des Mehrproduktmonopols gegenüber eines Markteintrittes und die Räumung des Marktes scheinen auf den ersten Blick unabhängig zu sein. Die Untersuchung von ten Raa zeigt jedoch, dass die Markträumungsbedingung durch subventionsfreie Preise impliziert wird. Subventionsfreie Preise können deshalb als hinreichend für Anonymous Equity Preise angesehen werden. Folgt man ten Raa, ist der Unterschied zwischen subventionsfreien Preisen und der Eigenschaft der Sustainability, im Gegensatz zu der „oberflächlichen“ Differenz zwischen subventionsfreien Preisen und Anonymous Equity Preisen, nicht ohne weiteres zu überbrücken:

*In fact, from supportability [subventionsfreien Preisen] at the quantities demanded one obtains anonymous equity by the additional requirement of market clearance. And from anonymous equity one obtains sustainability by requiring that the condition of subsidy freeness or invulnerability to the threat of entry is also met for lower prices. The first tightening up is but superficial, [...] going from anonymous equity to Sustainability, is an open issue. This, however, is not so much a matter of market clearance [...].<sup>57</sup>*

Es lässt sich zeigen, dass subventionsfreie Preise nicht sicherstellen, dass nicht in das Mehrproduktmonopol eingedrungen werden kann, wenn ein Konkurrent den Eintritt mit niedrigeren Preisen versucht.<sup>58</sup> Mit anderen Worten, subventionsfreie Preise sind nicht hinreichend für die Erfüllung der Sustainability. Es existiert allerdings eine Annahme, die Nachfrageseite des Modells betreffend, die den Unterschied zwischen den Konzepten beseitigt, nämlich die *Weak Gross Substitutability*.

**Definition 3.12. Weak Gross Substitutability<sup>59</sup>**

*Seien  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{p}'$  zwei Preisvektoren eines Mehrproduktmonopols. Weak Gross Sub-*

<sup>56</sup>Vgl. ten Raa (1983), S. 180. Ten Raa verweist an dieser Stelle auf Debreu (1962).

<sup>57</sup>Vgl. ten Raa (1983), S. 178.

<sup>58</sup>Vgl. ten Raa (1984).

<sup>59</sup>Vgl. ten Raa (1984), S. 137

stitutability bedeutet, dass die Nachfrage nach einem Produkt  $k$  nicht zurück geht, wenn die Preise für beliebige andere Produkte  $l \neq k$  steigen.

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{p}', \quad p^k = p'^k \Rightarrow D^k(\mathbf{p}) \geq D^k(\mathbf{p}').$$

Hierbei bedeutet  $\mathbf{p} \geq \mathbf{p}'$ , dass alle Preise in  $\mathbf{p}$  mindestens so hoch sind wie in  $\mathbf{p}'$ , und dass es mindestens einen Preis  $p^l$  gibt, der in  $\mathbf{p}$  größer ist als in  $\mathbf{p}'$ .

**Satz 3.8. Sharkey und Telser (1978), S. 24, Mirman et al. (1985), S. 120–121**

Preise, die die Sustainability erfüllen, sind notwendigerweise subventionsfrei. Unter der Annahme der Weak Gross Substitutability und unelastischen Nachfragen<sup>60</sup> ist es zur Erfüllung der Sustainability hinreichend, dass die Preise subventionsfrei sind.

Es verbleibt zu untersuchen, unter welchen Bedingungen subventionsfreie Preise existieren. Die Forderung nach subventionsfreien Preisen setzt bestimmte Eigenschaften der Kostenfunktion voraus. Eine Eigenschaft lässt sich am Fall eines Monopols, das nur eine Leistung  $k$  anbietet, illustrieren. In diesem Fall folgt für  $\bar{q}_i^k > q_i^k$  aus den beiden Bedingungen in Definition 3.9

$$\frac{C(\bar{q}^k)}{\bar{q}^k} \leq \frac{C_i(q^k)}{q^k},$$

was bedeutet, dass die Durchschnittskosten mit steigender Outputmenge nicht zunehmen dürfen. Das Monopol offeriert also gerade dann zu subventionsfreien Preisen, wenn die Kostenfunktion auch ein *natürliches Monopol* erlaubt. Der Begriff des natürlichen Monopols wird hier so gebraucht, dass eine subadditive Kostenfunktion ein natürliches Monopol ausmacht.<sup>61</sup>

Eine weitere Eigenschaft zeigt sich, wenn die beiden Bedingungen in Definition 3.9 für den Fall  $\bar{\mathbf{q}} \geq \mathbf{q}$  mit  $\bar{q}^k > q^k$  und  $\bar{q}^l = q^l$  für alle  $l \neq k$  betrachtet werden. In diesem Fall gibt es genau eine Komponente in  $\bar{\mathbf{q}}$ , die größer als die entsprechende Komponente in  $\mathbf{q}$  ist. Subtrahiert man die zweite Bedingung von Definition 3.9 von der ersten, führt dies zu

$$p^k(\bar{q}^k - q^k) \geq C(\bar{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{q}), \quad (3.6)$$

<sup>60</sup>Wenn eine Preisänderung eine (prozentual) unterproportionale Mengenänderung nach sich zieht, spricht man von einer unelastischen Nachfrage.

<sup>61</sup>Fallende Durchschnittskosten implizieren eine subadditive Kostenfunktion.

was bedeutet, dass bei einem Rückgang der Nachfrage nach Leistung  $k$  von  $\bar{q}^k$  auf  $q^k$  der Umsatz des Monopols mindestens so stark abnimmt wie seine Produktionskosten. Eine Kostenfunktion, die diese Eigenschaften erfüllt und subventionsfreie Preise ermöglicht, wird als *tragbar* (*supportable*) bezeichnet.<sup>62</sup>

**Definition 3.13. Tragbare Kostenfunktionen (Supportability)**

*Eine Kostenfunktion ist dann und nur dann tragbar, wenn zu jedem vorgegebenen Output  $\bar{\mathbf{q}}$  ein subventionsfreies Preissystem  $\mathbf{p}$  nach Definition 3.9 existiert.*

Ergänzend ist hinzuzufügen, dass eine Kostenfunktion auch als *abschnittsweise tragbar* charakterisiert werden kann. Dies ist dann der Fall, wenn die Kostenfunktion bis zu einem gewissen Punkt  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}_+^m$  tragbar ist, wenn also zu jedem Output  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{0} \leq \mathbf{q} \leq \tilde{\mathbf{q}}$  ein subventionsfreies Preissystem  $\mathbf{p}$  existiert.

Es sei angemerkt, dass die Subadditivität eine Produktionstechnologie zwar als ein natürliches Mehrproduktmonopol definiert, aber nicht sicherstellt, dass nicht in das Mehrproduktmonopol eingedrungen werden kann.<sup>63</sup> Um dies zu garantieren, hat die Kostenfunktion notwendigerweise tragbar zu sein.

**Satz 3.9. Notwendige Bedingungen der Tragbarkeit (Sharkey und Telser (1978), S. 27–28)**

*Gegeben sei ein Mehrproduktmonopol mit der Kostenfunktion  $C(\cdot)$  und den Outputs  $\mathbf{q}'$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}_+^m$ . Dann ist  $C(\cdot)$  tragbar, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- *Subadditivität,  $C(\mathbf{q} + \mathbf{q}') \leq C(\mathbf{q}) + C(\mathbf{q}')$ .*
- *Subhomogenität,  $C(\lambda\mathbf{q}) \leq \lambda C(\mathbf{q})$  für  $\lambda \geq 1$  und  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$ .*
- *$\nabla C(\bar{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{q} \leq C(\mathbf{q})$ .<sup>64</sup> Im Einproduktfall bewirken nicht steigende Durchschnittskosten, dass Preise zu Grenzkosten nicht die Kosten decken. Die hier angegebene Beziehung verallgemeinert diese Aussage auf den Mehrproduktfall.*

Es werden exemplarisch zwei hinreichende Bedingungen angeführt, die Kostenfunktionen als tragbar definieren.

<sup>62</sup>Vgl. Sharkey und Telser (1978).

<sup>63</sup>Vgl. Baumol und Willig (1977).

<sup>64</sup> $\nabla C(\cdot)$  ist der Vektor der partiellen Ableitungen der Kostenfunktion,

$$\left( \frac{\partial C(\cdot)}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial C(\cdot)}{\partial q^m} \right).$$

**Satz 3.10. Sharkey und Telser (1978), S. 31–33**

Die Kostenfunktion  $C(\cdot)$  ist tragbar, wenn sie für alle  $\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'' \geq \mathbf{0}$  und für  $\mathbf{q}' \leq \mathbf{q}''$  die folgende Bedingung erfüllt:

$$C(\mathbf{q}' + \mathbf{q}) - C(\mathbf{q}') \geq C(\mathbf{q}'' + \mathbf{q}) - C(\mathbf{q}'').$$

Dies ist die auf Kostenfunktionen übertragene Eigenschaft der Submodularität, vgl. Definition 2.7. Die so genannte *Kostenkomplementarität* wird für Kostenfunktionen auch wie folgt formuliert:

**Definition 3.14. Kostenkomplementarität**<sup>65</sup>

Eine zweifach differenzierbare Kostenfunktion  $C(\cdot)$  erfüllt die Kostenkomplementarität, wenn gilt:

$$\frac{\partial^2 C(\mathbf{q})}{\partial q^k \partial q^l} \leq 0.$$

**Satz 3.11. Sharkey und Telser (1978), S. 33**

Die Kostenfunktion  $C(\cdot)$  ist tragbar, wenn sie die Kostenkomplementarität erfüllt.

**Beispiel 3.1.** Gegeben sei eine quadratische Kostenfunktion einer Technologie mit  $m$  Produkten mit den Konstanten  $a^k$  und  $b^{kl}$  der Form

$$C(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^m a^k q^k + \sum_{k,l} b^{kl} q^k q^l.$$

Die Überprüfung der Kostenkomplementarität liefert

$$\frac{\partial^2 C(\mathbf{q})}{\partial q^k \partial q^l} = b^{kl} + b^{lk},$$

so dass alle quadratischen, kostenkomplementären ( $b^{kl} + b^{lk} \leq 0$  für jede Paarung  $k, l$ ) Kostenfunktionen tragbar sind.<sup>66</sup> Als Beispiel sei hier die Kostenfunktion

$$C(\mathbf{q}) = 2q^1 + q^2 - 0.1q^1 q^2$$

mit  $m = 2$  gegeben.  $C(\mathbf{q})$  ist in Abbildung 3.2 für den Bereich  $q^1 = [0 \dots 10]$ ,  $q^2 = [0 \dots 10]$  geplottet. In diesem Bereich ist  $C(\mathbf{q})$  offensichtlich subadditiv.

<sup>65</sup>Vgl. Mirman et al. (1985), S. 117.

<sup>66</sup>Vgl. Sharkey und Telser (1978), S. 33–34.

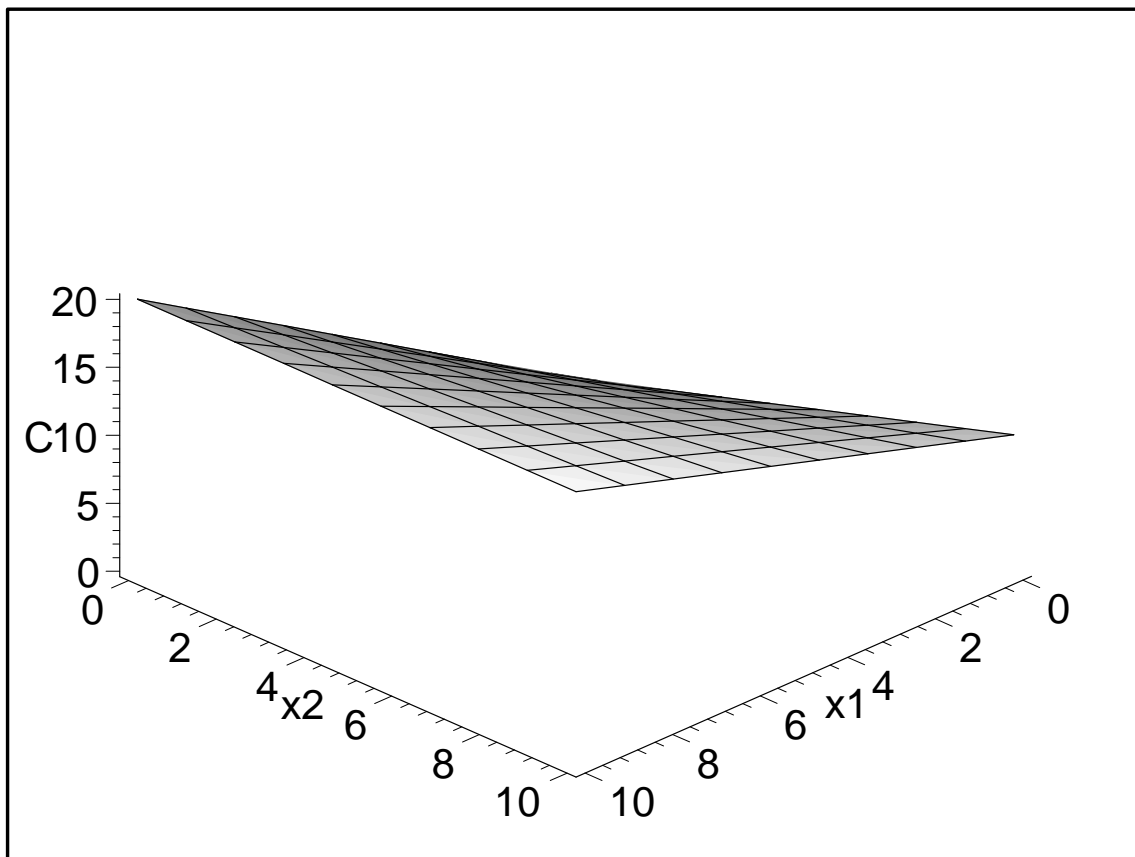


Abbildung 3.2: Plot einer tragbaren Kostenfunktion eines Mehrproduktmonopols.

Die Kostenfunktion ist für  $\tilde{\mathbf{q}} = (10, 10)$  abschnittsweise tragbar, denn es gilt:

$$\frac{\partial^2 C(\mathbf{q})}{\partial q^1 \partial q^2} = \frac{\partial^2 C(\mathbf{q})}{\partial q^2 \partial q^1} = -0.1$$

Weitere hinreichende Bedingungen für tragbare Kostenfunktionen finden sich in Sharkey und Telser (1978), S. 29–37, Sharkey (1982), S. 59–60 und Telser (1978), S. 138–174.

### Satz 3.12. Weitere hinreichende Bedingungen der Tragbarkeit

- Die Kostenfunktion  $C(\cdot)$  ist tragbar, wenn sie quasi-konvex<sup>67</sup> und subhomo-  
gen<sup>68</sup> ist.

<sup>67</sup>Eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  heisst quasikonvex, wenn für  $x, y \in A$  und  $\lambda \in [0, 1]$  gilt, dass  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max(f(x), f(y))$ .

<sup>68</sup>Vgl. Satz 3.9.

- Eine für  $\mathbf{q} > \mathbf{0}$  konvexe Kostenfunktion  $C(\cdot)$  ist dann und nur dann tragbar, wenn sie subadditiv ist.
- Die Kostenfunktion  $C(\cdot)$  ist tragbar, wenn sie positiv homogen vom Grad 1 ( $C(\lambda\mathbf{q}) = \lambda C(\mathbf{q}), \forall \lambda > 0$ ) und subadditiv ist.

### 3.2.2 Relevanz für die Kostenzuteilung im gegebenen Fall

Die folgenden Ausführungen sind von der Frage geleitet, in wie weit die Erkenntnisse der Contestable Market Theory zur Umsetzung der spieltheoretischen Eigenschaft der Stabilität geeignet sind. Die Contestable Market Theorie wird als Verallgemeinerung der Theorie des perfekten Wettbewerbs gesehen.<sup>69</sup> Das perfekte Wettbewerbsgleichgewicht<sup>70</sup> steht in der Contestable Market Theory nicht im Fokus – stattdessen wird untersucht, ob es Mehrproduktmonopole gibt, in deren Markt gewinnbringend eingebrochen werden kann. Die Verwundbarkeit des Mehrproduktmonopols wird anhand der Eigenschaften der Preise untersucht, deren Bestimmung die strategische Wahl des Monopolisten darstellt.

Wenn die Bedingung der Sustainability<sup>71</sup> erfüllt wird, dann ist es unter keinen Umständen möglich, mit Gewinn in das Mehrproduktmonopol einzubrechen. Wenn die Bedingung der Sustainability nicht erfüllt ist, folgt aber nicht zwangsläufig, dass ein Konkurrent in das Mehrproduktmonopol einbrechen kann: wenn ein Konkurrent zu niedrigeren Preisen anbietet, dann wird das Mehrproduktmonopol seine Preisstruktur ebenfalls verändern.<sup>72</sup> Der aus Sicht dieser Arbeit zu kritisierende Punkt am Konzept der Sustainability ist, dass diese ein nicht-kooperatives Spiel zwischen Monopolist und Konkurrent suggeriert. Wenn die Sustainability nicht haltbar ist, gibt das Konzept keinen Aufschluss darüber, welche Konsequenzen aus dem nicht-kooperativen Verhalten der Spieler resultieren. Der Markteintritt kann, muss aber nicht geschehen.

Im Unterschied dazu ist der Markteintritt für einen Konkurrenten immer lohnenswert, wenn die Preisstruktur des Mehrproduktmonopols nicht der Tragbarkeit<sup>73</sup> genügt. Gemäß Sharkey und Telser basiert die Tragbarkeit auf einem kooperativen Spiel. Der Markteintritt ist für die Nachfrager lohnenswert, wenn sie sich mit ihren

---

<sup>69</sup>Vgl. Spence (1983), S. 981–982.

<sup>70</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.2.

<sup>71</sup>Vgl. Definition 3.11.

<sup>72</sup>Vgl. zur Argumentation und anderen von der Sustainability vernachlässigten Aspekten Sharkey und Telser (1978), S. 26.

<sup>73</sup>Vgl. Definition 3.9 und Definition 3.13.



eigenen Ressourcen besser stellen, als wenn sie die Produkte des Mehrproduktmonopols beziehen.

*Thus, the condition of supportability fails to hold only when a rival firm would find entry attractive irrespective of the actions of the natural monopolist.*<sup>74</sup>

Im Rahmen der hier gegebenen Aufgabenstellung kann der Argumentation von Sharkey und Telser gefolgt werden. Im kooperativen Markt ist nämlich der Konkurrent kein Konkurrent im eigentlichen Sinne. Es handelt sich nicht um eine dritte Partei, die das Mehrproduktmonopol (den Spieler  $i$ ) ersetzen (aus dem Markt herausdrängen) will, um die Nachfrage der anderen Spieler zu erfüllen. Vielmehr sind im kooperativen Markt die Nachfrager selber die „Konkurrenten“, die sich fragen, ob es für alle am Besten ist, wenn  $i$  die ihm zugewiesenen Güter produziert, bzw. ob das Spieler  $i$  zugewiesene Sortiment in dieser Struktur von einem einzigen Anbieter angeboten werden sollte. Aufgrund der gegebenen Zielsetzung – Kostenzuteilung in kooperativen Märkten – ist es ausreichend, allein die Kostenfunktionen zu analysieren. Wie angeführt, ist dabei die Markträumung garantiert.<sup>75</sup>

Im Weiteren wird deshalb die eigentliche Contestable Market Theory nicht weiter verfolgt. Die neueren Entwicklungen zeigen, dass Regulierungsfragen – im Einklang mit den Grundannahmen der Theorie – auf nicht-kooperative Spiele ausgelegt sind. So sind grundsätzlich Informationsasymmetrien zwischen dem Monopol und der regulierenden Instanz Ausgangspunkt extensiver Untersuchungen, z.B. zur Bepreisung der Monopoleistung bei (dem Regulator) unbekanntem Kostenfunktionen und den daraus folgenden Problemen der so genannten *adverse selection* („hidden information“) bzw. des so genannten *moral hazard* („hidden action“).<sup>76</sup> Die kooperative Seite der Kostenzuteilung eines Mehrproduktmonopols, deren Ausgangspunkt die Untersuchung von Sharkey und Telser (1978) bildet, ist in der Literatur weniger stark beachtet worden. Sharkey selber wendet sein Modell auf Netzwerke an, in denen die Verbindungen zwischen den verschiedenen Spielern und externen Quellen Kosten verursachen. Die Koalitionsbildungen lassen sich anhand des Konzepts der Tragbarkeit untersuchen.<sup>77</sup>

---

<sup>74</sup>Vgl. Sharkey und Telser (1978), S. 26.

<sup>75</sup>Alternativ können auch die Annahmen getroffen werden, unter denen die Konzepte der Sustainability und der Tragbarkeit gleich sind.

<sup>76</sup>Vgl. Armstrong und Sappington (2005).

<sup>77</sup>Vgl. Sharkey (1992).

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Forderung nach subventionsfreien Preisen und der Forderung nach strategischer Stabilität, wie sie in Abschnitt 2.2.1 formuliert wurde? Ein Mehrproduktmonopol bietet seine Produkte dann zu subventionsfreien Preisen an, wenn gemäß Definition 3.9

1. seine Kosten zum geforderten Output gerade gedeckt sind und
2. es keinem Konkurrenten bzw. mehreren Konkurrenten möglich ist in das Mehrproduktmonopol einzudringen, wenn also alle  $\mathbf{q} < \bar{\mathbf{q}}$  bei den festgelegten Preisen nur unter Verlust hergestellt werden können.

Dann ist das Mehrproduktmonopol „stabil“ in dem Sinne, dass kein Konkurrent innerhalb der Kooperation in seinen Markt eindringen kann, d. h. für keinen Nachfrager gibt es einen Anreiz, die von ihm benötigten Güter nicht vom Mehrproduktmonopol zu beziehen, da er anderweitig nur auf höhere Preise stoßen wird. Wenn ein Mehrproduktmonopol subventionsfreie Preise anbietet, dann erkennen alle Spieler, dass es sich nicht lohnt, nicht mit dem Mehrproduktmonopol zu kooperieren, da die Aufteilung der durch die grosse Koalition entstehenden Gesamtnachfrage auf mehrere Anbieter alle schlechter stellt, als wenn die Nachfrage auf einen einzigen Anbieter – das Mehrproduktmonopol – gebündelt wird. Es kann formal gezeigt werden, dass eine tragbare Kostenfunktion äquivalent dazu ist, dass es Zuteilungen gibt, die im Kern liegen.<sup>78</sup>

### 3.3 Kostenzuteilung einer Produktion und Preismechanismen

Wie in Abschnitt 3.2 erläutert, umfasst die spieltheoretische Betrachtung der Kostenzuteilung neben der Kostenzuteilung im Koalitionsspiel (vgl. Kapitel 2) auch die Kostenzuteilung einer Produktion. In diesem Fall ist nicht die charakteristische Funktion ausschlaggebend für ein Lösungsverfahren, sondern die mit der Produktion assoziierte Kostenfunktion. Während in Abschnitt 3.2 allgemeine Voraussetzungen erläutert werden, unter denen eine Technologie zwischen mehreren Spielern geteilt werden kann, und an welchen Faktoren dies getestet bzw. formalisiert werden kann – nämlich dem Preissystem – wird an dieser Stelle auf die Bepreisung an sich eingegangen.

---

<sup>78</sup>Vgl. Sharkey und Telser (1978), S. 28–29 und Moulin (1988), S. 100–101. Wie sich ein Koalitionsspiel aus einer tragbaren Kostenfunktion ableiten lässt, wird in Kapitel 5 gezeigt.

Das Problem der Preisbestimmung wird als Kostenteilungsspiel  $\Gamma = (C, \bar{\mathbf{q}})$  in der (mindestens einmal) stetig differenzierbaren, nichtnegativen und nichtfallenden Kostenfunktion  $C(\cdot)$  und des geforderten Outputs  $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}_+^m$  der  $m$  Güter betrachtet.<sup>79</sup> Ein Lösungsverfahren  $f(\cdot)$ <sup>80</sup> für ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$  heisst *Preismechanismus*.

**Definition 3.15. Preismechanismus**<sup>81</sup>

Gegeben sei ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$ . Dann ist  $f(C, \bar{\mathbf{q}})$  ein Preismechanismus, der dem Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$  für jedes gegebene  $\bar{\mathbf{q}}$  ein eindeutiges Element des  $\mathbb{R}_+^m$  zuordnet,  $f(C, \bar{\mathbf{q}}) \subset \mathbb{R}_+^m$ , so dass gilt:

$$f(C, \bar{\mathbf{q}}) = \mathbf{p},$$

mit  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m$ . Für die Betrachtung eines Produkts  $k$  gilt:

$$f^k(C, \bar{\mathbf{q}}) = p^k.$$

Das hier beschriebene Kostenteilungsspiel unterscheidet sich dadurch von den in Kapitel 2 behandelten Koalitionsspielen. Die hier gesuchte Lösung des Spiels ist nicht eine Zuteilung  $\mathbf{x}$ , sondern ein Preisvektor  $\mathbf{p}$ . Es wird anstatt eines Koalitionsspiels  $(N, c)$  mit einer charakteristischen Funktion  $c(\cdot)$  und einem Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$  mit einer gemeinsamen Kostenfunktion  $C(\cdot)$  und einem Preismechanismus  $f(C, \bar{\mathbf{q}})$  untersucht.

Regulierungsbeschränkungen von Monopolen, von denen einige auch direkt die Bepreisung beeinflussen, werden aufgrund ihres nicht spieltheoretisch-strategisch ausgerichteten Ansatzes im Folgenden nicht untersucht. Dazu gehören die so genannte price-cap regulation, revenue-cap regulation und rate-of-return regulation.<sup>82</sup> Diese sind – wie einleitend und in Abschnitt 3.2 erläutert – klar zu unterscheiden von der hier gegebenen Zielsetzung, eine stabile Zuteilung zu erzeugen. Die in Abschnitt 3.2 betrachteten Eigenschaften von Preisvektoren, insbesondere die Tragbarkeit, weisen auf Rahmenbedingungen hin, die erfüllt sein müssen, damit nicht in das Mehrpro-

<sup>79</sup>Vgl. Mirman und Neyman (1983) und Abschnitt 3.2.

<sup>80</sup>Die Notation  $f(\cdot)$  wird durchweg für ein spieltheoretisches Lösungsverfahren verwendet, unabhängig davon, ob es sich um ein Zuteilungsverfahren  $f(N, c)$  oder um einen Preismechanismus  $f(C, \bar{\mathbf{q}})$  handelt.

<sup>81</sup>Vgl. Billera et al. (1981).

<sup>82</sup>Vgl. Armstrong und Sappington (2005).

duktmonopol eingedrungen werden kann, sind jedoch unabhängig von der Frage zu sehen, wieviel Gewinn der Regulator einem Monopol erlaubt.

Es werden die folgenden Preismechanismen untersucht:<sup>83</sup>

- Ramsey Preise  $f^R(C; \bar{\mathbf{q}})$
- Preise zu Grenzkosten  $f^{GK}(C; \bar{\mathbf{q}})$
- Aumann-Shapley Preise  $f^{AS}(C; \bar{\mathbf{q}})$
- Serial Cost Sharing  $f^S(C; \bar{\mathbf{q}})$

Der Vollständigkeit halber sei auf die Möglichkeit hingewiesen, anhand des Shapley-Werts eine Zuteilung aus einer Kostenfunktion zu bestimmen. Diese Möglichkeit wurde von Shubik (1962) vorgeschlagen und ist heutzutage als *Shapley-Shubik Methode*  $f^{SS}(C, \bar{\mathbf{q}})$  bekannt. Die Shapley-Shubik Methode ist nicht als Preismechanismus im eigentlichen Sinne zu werten, sondern erzeugt aus einer Kostenfunktion direkt eine Zuteilung. Es sei

$$c(S) = C \left( \sum_{i \in S} \mathbf{d}_i \right),$$

wobei  $\mathbf{d}_i = (q^1, \dots, q^k, \dots, q^m)$   $i$ 's Nachfrage nach den Produkten bezeichnet. Die Shapley-Shubik Methode bestimmt die Zuteilung  $f_i^{SS}$  von Spieler  $i$  durch<sup>84</sup>

$$f_i^{SS}(C, \bar{\mathbf{q}}) = \sum_{i \in S, S \subseteq N} \frac{(n - |S|)! (|S| - 1)!}{n!} \left( C \left( \sum_{i \in S} \mathbf{d}_i \right) - C \left( \sum_{j \in S, j \neq i} \mathbf{d}_j \right) \right).$$

### 3.3.1 Kooperativer Ansatz und Aumann-Shapley-Preise

Ramsey (1927) schlägt vor, die Preise eines Mehrproduktmonopols, das einer Gewinnbeschränkung<sup>85</sup> unterliegt, so zu bestimmen, dass die im weiteren definierte Konsumentenrente maximiert wird.<sup>86</sup> Sei  $q^k(p^k)$  die Nachfrage nach Gut  $k$  des Mehr-

<sup>83</sup>Der Vollständigkeit halber sei auf den Vorschlag von Moriarity hingewiesen, vgl. Moriarity (1975, 1976) und Louderback (1976). Das *Serial Cost Sharing* (vgl. Moulin und Shenker (1992)) wird in Abschnitt 3.3.2 behandelt.

<sup>84</sup>Angepasst von Friedman und Moulin (1999), S. 279.

<sup>85</sup>Die so genannten Ramsey-Boiteux Preise behandeln explizit den Fall, dass der Gewinn des Mehrproduktmonopols gerade Null ist, vgl. Boiteux (1971).

<sup>86</sup>Ramseys Fokus liegt dabei auf Problemen der Besteuerung. Anwendungen für die Bepreisung öffentlicher Güter folgen in Manne (1952) und Baumol und Bradford (1970), vgl. Young (1994), S. 1220.

produktmonopols zum Preis  $p^k$ , und sei  $G$  der Gewinn des Mehrproduktmonopols. Es soll die Konsumentenrente

$$\sum_{k=1}^m \int_{p^k}^{\infty} q^k(p^k) dp^k$$

unter der Nebenbedingung

$$G = \sum_{k=1}^m p^k \cdot q^k(p^k) - C(q^1(p^1), \dots, q^m(p^m))$$

maximiert werden. Die Lösung des Optimierungsproblems liefert die so genannten *Ramsey Preise*, die einen Zuschlag auf die Grenzkosten ermitteln, der umgekehrt proportional zur Preiselastizität der Nachfrage ist.<sup>87</sup> Dies bewirkt, dass die Nachfrager viel zahlen, die nicht ausweichen bzw. auf das Gut verzichten können. Durch die dadurch hervorgerufene Quersubventionierung zwischen den Gütern sind Ramsey Preise nicht subventionsfrei.<sup>88</sup>

Ramsey Preise werden bezüglich ihrer Anwendbarkeit kritisiert. Zu ihrer Bestimmung werden viele Informationen benötigt, die nicht als bekannt bzw. als ermittelbar vorausgesetzt werden können. Dazu gehört die Kenntnis der individuellen Nachfrage- und Nutzenfunktionen sowie der Abhängigkeiten der Nutzenfunktionen der Nachfrager untereinander.<sup>89</sup> Ebenso ist die von Ramsey gemachte Annahme zu hinterfragen, dass die Nachfragen nach den Gütern unabhängig voneinander sind, dass also die Güter auf verschiedenen Märkten verkauft werden. Dies ist insbesondere in der hier gegebenen Situation kooperativer Märkte, wie ihn z.B. der interne Markt eines Unternehmens darstellt, eine nicht zutreffende Annahme.

---

<sup>87</sup>Die Preiselastizität der Nachfrage gibt an, wie Nachfrage prozentual steigt/sinkt, wenn der Preis prozentual sinkt/steigt.

<sup>88</sup>Vgl. Mirman et al. (1986), S 126–131.

<sup>89</sup>Mirman und Tauman (1982a), S. 41–42.

Die Preise eines Mehrproduktmonopols können anhand von *Preisen zu Grenzkosten*  $f^{GK}(C, \bar{\mathbf{q}})$  vorgenommen werden. Diese bestimmen sich für Gut  $k$  anhand der Formel<sup>90</sup>

$$f^{GK,k}(C, \bar{\mathbf{q}}) = \frac{\partial C(\bar{\mathbf{q}})}{\partial q^k}.$$

Preise zu Grenzkosten stellen nicht sicher, dass die Gesamtkosten des Mehrproduktmonopols gedeckt werden. Gemäß Definition 3.9 sind Preise zu Grenzkosten deshalb nicht subventionsfrei. Der Vollständigkeit halber sei auf die proportional angepassten Preise zu Grenzkosten  $f^{GKp}(\cdot)$  hingewiesen, die sich für Gut  $k$  anhand der folgenden Formel bestimmen:

$$f^{GKp,k}(C, \bar{\mathbf{q}}) = \frac{\frac{\partial C(\bar{\mathbf{q}})}{\partial q^k}}{\sum_{k=1}^m \bar{q}^k \frac{\partial C(\bar{\mathbf{q}})}{\partial q^k}} \cdot C(\bar{\mathbf{q}}).$$

Diese Preise sind kostendeckend, aber nicht subventionsfrei, und verlieren darüber hinaus die Eigenschaften, die Preise zu Grenzkosten auszeichnen. Sie sind ein Spezialfall von Ramsey Preisen: wenn alle Preiselastizitäten gleich sind, bestimmen sich die Ramsey Preise gerade anhand dieser Formel.<sup>91</sup>

Als weiterer Preismechanismus wird der *Aumann-Shapley Preismechanismus*  $f^{AS}(C, \bar{\mathbf{q}})$  vorgestellt.<sup>92</sup> Der so genannte *Aumann-Shapley Wert* von Aumann und Shapley (1974) ist die Anpassung des Shapley-Werts für nicht-atomare Spiele, und wird in Billera et al. (1978) erstmalig auf ein Kostenteilungsspiel angewendet.<sup>93</sup> Durch die Umformulierung des Aumann-Shapley Wertes für differenzierbare Kostenfunktionen lässt sich ein Preismechanismus ableiten, dessen Zuteilung der Produktionskosten auf die einzelnen Produkte als *Aumann-Shapley Preise* bezeichnet werden. Der Vollständigkeit halber sei auf alternative, hier nicht explizit vorgestellte

<sup>90</sup>Zu einer axiomatischen Herleitung – die analog zur Herleitung von Aumann-Shapley Preisen erfolgt – vgl. Samet und Tauman (1982) und Dubey et al. (1981), S. 122. Aumann-Shapley Preise und Preise zu Grenzkosten unterscheiden sich dadurch, dass letztere nicht die Eigenschaft der Effizienz erfüllen, und dass die Gewichte in (3.7), zu denen Grenzkosten berücksichtigt werden, alle am Punkt 1 gebündelt sind, während für die Verteilung beim Aumann-Shapley Preismechanismus das sogenannte Lebesgue-Maß gilt, vgl. Samet und Tauman (1982).

<sup>91</sup>Ebenda.

<sup>92</sup>Die Untersuchung folgt dabei im Wesentlichen Billera und Heath (1982), Mirman und Tauman (1982a), Mirman et al. (1985) und Young (1985a).

<sup>93</sup>Sie wenden den Preismechanismus zur Bestimmung von Verbindungspreisen für Telefongespräche an.

Charakterisierungen der Aumann-Shapley Preise durch Hart und Mas-Colell (1989), Monderer und Neyman (1988), Mirman und Neyman (1984) sowie Neyman (1977) verwiesen.<sup>94</sup> Ebenso werden Erweiterungen und Anwendungen von Aumann-Shapley Preisen (bzw. des Aumann-Shapley Wertes) für nichtverwandte Fragestellungen, wie z.B. die Berechnung von Transportkosten oder die Zuteilung von Infrastrukturkosten, nicht näher betrachtet.<sup>95</sup>

Durch Billera und Heath (1982) und Mirman und Tauman (1982a) wird parallel eine axiomatische Herleitung des Aumann-Shapley Preismechanismus durchgeführt. Die Beschreibung hält sich im Weiteren an die Herleitung von Billera und Heath, zu der vier Axiome – im Weiteren als Eigenschaften bezeichnet – benötigt werden.<sup>96</sup>

### Definition 3.16. Effizienz eines Preismechanismus

Gegeben sei ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$ . Der Preismechanismus  $f(C, \bar{\mathbf{q}})$  heißt effizient,<sup>97</sup> wenn gilt:

$$f(C, \bar{\mathbf{q}}) \cdot \bar{\mathbf{q}} = C(\bar{\mathbf{q}}).$$

Die Effizienz, also die Bedingung, dass genau alle Kosten des Mehrproduktmonopols vollständig unter den produzierten Gütern aufgeteilt werden, ist eine elementare Bedingung an den Preismechanismus.<sup>98</sup>

Die nächste Eigenschaft begründet sich aus buchhalterischer Sichtweise. Angenommen, das Mehrproduktmonopol lässt sich in organisatorische Teilbereiche unterteilen. Diese seien durch die Kostenfunktionen  $C'(\cdot)$  und  $C''(\cdot)$  charakterisiert.<sup>99</sup> Um die Unabhängigkeit des Preismechanismus von der gewählten Buchhaltungs- bzw. Organisationsweise zu garantieren, wird gefordert, dass dieser *additiv* ist.

<sup>94</sup>Für einen Vergleich der verschiedenen Eigenschaftensysteme der Autoren vgl. Tauman (1988).

<sup>95</sup>Vgl. Samet et al. (1984) und zu aktuellen Anwendungen und Erweiterungen (z. B. der so genannten *Mertens-Formel*) Doll (2005).

<sup>96</sup>Der Weg von Mirman und Tauman (1982a) unterscheidet sich davon nur unwesentlich: sie ersetzen die Aggregations-Invarianz (welche im Folgenden definiert wird) durch die so genannten Eigenschaften der Konsistenz und der Maßstabsänderung (*consistency* und *rescaling*), benötigen also insgesamt fünf Eigenschaften, gelangen jedoch zum äquivalenten Resultat. Wie sie selber hervorheben, unterliegen die von ihnen benutzten Eigenschaften ökonomischen Motiven, während die Aggregations-Invarianz eine buchhalterisch wertvolle Interpretation eröffnet. Anmerkung: Die Konsistenz von Mirman und Tauman (1982a) ist nicht zu verwechseln mit der Konsistenz von Hart und Mas-Colell (1989). Letztere Eigenschaft ist eine Eigenschaft der Akzeptanz einer Zuteilung in Koalitionsspielen, und wird alleinig vom Nucleolus erfüllt.

<sup>97</sup>Man sagt auch, der Preismechanismus erfüllt die Eigenschaft des *cost-sharing*.

<sup>98</sup>Die Begründung folgt Abschnitt 2.2.1.

<sup>99</sup>Ebenso können die beiden Kostenfunktionen die Trennung von  $C(\cdot)$  in fixe und variable Kostenbestandteile o.Ä. sein.

**Definition 3.17. Additivität eines Preismechanismusses**

Gegeben sei ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$ , in dem  $C(\cdot)$  die Summe von zwei Kostenfunktionen  $C'(\cdot)$  und  $C''(\cdot)$  ist,  $C(\cdot) = C'(\cdot) + C''(\cdot)$ . Der Preismechanismus  $f(C, \bar{\mathbf{q}})$  heißt *additiv*, wenn gilt:

$$f(C, \bar{\mathbf{q}}) = f(C', \bar{\mathbf{q}}) + f(C'', \bar{\mathbf{q}}).$$

Eine weitere Bedingung ist, dass die Preisbestimmung unabhängig von der Einheit ist, in der ein Produkt gemessen wird. Ein Preismechanismus, der für zwei Produkte, die unter Kostengesichtspunkten gleich sind, die gleichen Preise bestimmt, heißt *aggregations-invariant*.

**Definition 3.18. Aggregations-Invarianz eines Preismechanismusses**

Gegeben sei ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$ . Der Preismechanismus  $f(C, \bar{\mathbf{q}})$  heißt *aggregations-invariant*, wenn für alle  $C(\cdot), C'(\cdot)$  mit  $C(q^1, \dots, q^m) = C'(\lambda^1 q^1, \dots, \lambda^m q^m)$  für einen Vektor  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$  und für  $\lambda * \bar{\mathbf{q}} = (\lambda^1 q^1, \dots, \lambda^m q^m)$  gilt:

$$f^k(C, \bar{\mathbf{q}}) = \lambda^k \cdot f^k(C', \lambda * \bar{\mathbf{q}}).$$

Eine vierte Bedingung ist, dass alle Preise bei mit der Zunahme des Outputs steigenden Kosten (bzw. nichtfallenden Kosten) positiv sind. Ein Preismechanismus, der dann ausschließlich positive Preise bestimmt, heißt *nichtnegativ*.<sup>100</sup>

**Definition 3.19. Nichtnegativität eines Preismechanismusses**

Gegeben sei ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$ . Der Preismechanismus  $f(C, \bar{\mathbf{q}})$  heißt *nichtnegativ*, wenn für alle  $C(\mathbf{q}) \leq C(\mathbf{q}')$  mit  $\mathbf{0} \leq \mathbf{q} < \mathbf{q}' \leq \bar{\mathbf{q}}$  gilt:

$$f(C, \bar{\mathbf{q}}) \geq \mathbf{0}.$$

Aus den vorgestellten Eigenschaften lässt sich der *Aumann-Shapley Preismechanismus* ableiten und der nachfolgende Satz beweisen.

**Definition 3.20. Aumann-Shapley Preismechanismus<sup>101</sup>**

Gegeben sei ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$ . Der Preismechanismus  $f^{AS}(C, \bar{\mathbf{q}})$  heißt

<sup>100</sup>Mirman und Tauman (1982a) benutzen den Begriff *positive*, Billera und Heath (1982) den Begriff *monotonic*.

<sup>101</sup>Vgl. Billera und Heath (1982) und Mirman und Tauman (1982a).



Aumann-Shapley Preismechanismus, wenn die Preise  $\phi \in \mathbb{R}_+^m$  bestimmt werden durch:

$$\phi^k = \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q^k}(t\bar{\mathbf{q}}) \right) dt. \quad (3.7)$$

Hierbei bezeichnet  $\phi^k$  den Aumann-Shapley Preis von Gut  $k$ .

**Satz 3.13. Billera und Heath (1982) und Mirman und Tauman (1982a)**

Es gibt einen eindeutigen Preismechanismus, der Definition 3.16–Definition 3.19 erfüllt. Dies ist der Aumann-Shapley Preismechanismus.

Der Aumann-Shapley Preismechanismus bestimmt den Preis für ein Gut über die *gemittelten Grenzkosten*. Der Gesamtoutput wird gleichförmig und in inkrementellen Schritten von  $(0, \dots, 0)$  auf  $(\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^m)$ , nämlich gemäß  $(t \cdot \bar{q}^1, \dots, t \cdot \bar{q}^m)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , erhöht. Die Grenzkosten an jeder Stelle werden dabei mit gleichem Gewicht berücksichtigt. Aumann-Shapley Preise sind die natürliche Erweiterung von Durchschnittskosten des Einproduktmonopols auf die Situation des Mehrproduktmonopols.<sup>102</sup>

**Beispiel 3.2.** Zur Veranschaulichung werden die Aumann-Shapley Preise für die Kostenfunktion

$$C(\mathbf{q}) = 2q^1 + q^2 - 0.1q^1q^2$$

aus Beispiel 3.1 bestimmt, wobei der geforderte Output des Mehrproduktmonopols  $\bar{\mathbf{q}} = (10, 10)$  sei. Angewendet auf das so formulierte Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$  und mit

$$\frac{\partial C(\mathbf{q})}{\partial q^1} = 2 - 0.1q^2, \quad \frac{\partial C(\mathbf{q})}{\partial q^2} = 1 - 0.1q^1$$

folgen aus dem Aumann-Shapley Preismechanismus die Aumann-Shapley Preise

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q^1}(t\bar{\mathbf{q}}) \right) dt = \int_0^1 (2 - t) dt = 1.5 \quad \text{und} \\ \phi^2 &= \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q^2}(t\bar{\mathbf{q}}) \right) dt = \int_0^1 (1 - t) dt = 0.5. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\phi \cdot \bar{\mathbf{q}} = 1.5 \cdot 10 + 0.5 \cdot 10 = 20 = C(\bar{\mathbf{q}}),$$

und die Kosten werden für die nachgefragte Menge vollständig zugeteilt.

<sup>102</sup>Vgl. Billera und Heath (1982), S. 34, Mirman et al. (1985), S. 121 und Young (1994), S. 1222.

Anhand der Beispielrechnung, der Eigenschaften und der Definition des Aumann-Shapley Preismechanismus zeigt sich, dass zu seiner Berechnung nur zwei Informationen benötigt werden, nämlich die Kostenfunktion und die nachgefragte Menge. Letztere muss nur in ihrer Gesamtheit bekannt sein, insbesondere werden nicht die Mengen der einzelnen Nachfrager oder die Nachfragefunktionen an sich benötigt. Es werden keine Kenntnisse über die Abhängigkeiten der Nachfragefunktionen untereinander benötigt, die Nachfrager können ihre Entscheidungen dezentral und autonom treffen.<sup>103</sup> Deshalb kann der Aumann-Shapley Preismechanismus als praktikable Möglichkeit der Preisbestimmung angesehen werden.

Weiterhin ist von Interesse, ob Aumann-Shapley Preise die Markträumung garantieren.<sup>104</sup> Es lässt sich zeigen, dass in der Tat ein Outputniveau  $\bar{q}$  existiert, zu dem Nachfrage und Angebot gleich sind, wenn der Aumann-Shapley Preismechanismus zur Bepreisung der Produkte eingesetzt wird.<sup>105</sup>

Der Aumann-Shapley Preismechanismus beinhaltet den Nachteil, dass er nur für Kostenfunktionen ohne Fixkosten definiert ist. Fixkosten  $C_{fix}$  können separat auf die Produkte verteilt und alle weiteren Kosten anhand des Aumann-Shapley Preismechanismus zugeteilt werden. Die Fixkostenzuteilung  $p_{fix}^k$  für Produkt  $k$  kann beispielsweise anhand einer der beiden folgenden Alternativen vorgenommen werden.<sup>106</sup>

$$1. p_{fix}^k = \frac{C_{fix}}{m} \frac{1}{\sum_{k=1} \bar{q}^k}$$

$$2. p_{fix}^k = \frac{C_{fix}}{m \cdot \bar{q}^k}$$

Im ersten Fall werden die Fixkosten gleichmäßig auf die Menge aller produzierten Güter verteilt. Im zweiten Fall werden die Fixkosten gleichmäßig auf jedes Gut  $k$  verteilt, so dass jede Art von Gut die Fixkosten  $C_{fix}/m$  trägt, welche innerhalb  $k$  durch die Anzahl  $\bar{q}^k$  der produzierten Güter dividiert werden. Beide Alternativen sind allerdings nicht mit den Eigenschaften des Aumann-Shapley Preismechanismus

<sup>103</sup>Vgl. Mirman und Tauman (1982a), S. 41–42.

<sup>104</sup>Diese Fragestellung wird untersucht in Mirman und Tauman (1982a), S. 46–53 und Mirman und Tauman (1982b).

<sup>105</sup>Vgl. dazu Young (1994), S. 1223. Zu vergleichbaren Untersuchungen siehe Boes und Tillmann (1983), Dierker et al. (1985) und Boehm (1985).

<sup>106</sup>Vgl. Mirman et al. (1983), S. 146.

vereinbar. Es lässt sich zeigen, dass dies für alle Preise der Fall ist, die die Fixkosten unabhängig von den variablen Kosten zuteilen.<sup>107</sup>

Deshalb ist ein anderer Weg zu befolgen. Mirman et al. (1983) ändern dazu die Additivitätseigenschaft ab und ersetzen sie durch zwei alternative Eigenschaften.<sup>108</sup> Unter Einbeziehung der beiden neuen Eigenschaften (und Vernachlässigung der ursprünglichen Additivitätseigenschaft) lässt sich der *proportionalisierte Aumann-Shapley Preismechanismus*  $f^{ASp}(\cdot)$  ableiten und der nachfolgende Satz beweisen.

**Definition 3.21. Proportionalisierter Aumann-Shapley Preismechanismus**  
Gegeben sei ein Kostenteilungsspiel  $(C, \bar{\mathbf{q}})$ . Der Preismechanismus  $f^{ASp}(C, \bar{\mathbf{q}})$  heißt *proportionalisierter Aumann-Shapley Preismechanismus*, wenn die Preise  $\varphi \in \mathbb{R}_+^m$  bestimmt werden durch

$$\varphi^k = \eta(\bar{\mathbf{q}}) \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q^k}(t\bar{\mathbf{q}}) \right) dt \quad (3.8)$$

$$\text{mit } \eta(\bar{\mathbf{q}}) = \frac{C(\bar{\mathbf{q}})}{C(\bar{\mathbf{q}}) - C(\mathbf{0})}. \quad (3.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\varphi^k$  den *proportionalisierten Aumann-Shapley Preis* von Gut  $k$ .

**Satz 3.14. Mirman et al. (1983), S. 147–151**

*Es gibt einen eindeutigen Preismechanismus, der die Eigenschaften des Aumann-Shapley Preismechanismusses aufweist und fixe Kosten entsprechend zuteilt. Dies ist der proportionalisierte Aumann-Shapley Preismechanismus.*

Es ist somit möglich, den Aumann-Shapley Preismechanismus auch auf Kostenfunktionen mit  $C(\mathbf{0}) > 0$  anzuwenden, was seine Anwendbarkeit erhöht und ihn für die Praxis geeignet macht.

Abschließend erfolgt an dieser Stelle ein kurzer Kommentar der vorgestellten Preismechanismen. Es ist festzuhalten, dass Ramsey Preise aufgrund ihrer Anforderungen nicht als praktikabel einzustufen sind. Preise zu Grenzkosten beinhalten den Nachteil, dass durch sie die Kosten nicht vollständig gedeckt werden. Beide Preismechanismen sind deshalb nicht zur Lösung der Aufgabenstellung geeignet. Der Aumann-Shapley Preismechanismus ist praktikabel und teilt alle Kosten zu.

<sup>107</sup>Vgl. Mirman et al. (1983), S. 146.

<sup>108</sup>Vgl. Mirman et al. (1983), S. 146–147.

Im Weiteren verbleibt zu untersuchen, in wie weit er dazu geeignet ist, die in Abschnitt 3.2 beschriebenen Preissysteme, darunter besonders subventionsfreie Preise, zu implementieren.

### 3.3.2 Nicht-kooperativer Ansatz und Serial Cost Sharing

Bei den in Abschnitt 3.3.1 untersuchten Preismechanismen sind die Präferenzen der Spieler sowie ihre Verhaltensweisen nicht von Bedeutung. Es handelt sich um eine Preisbestimmung im kooperativen Spiel, in der nicht das Zustandekommen der Situation (nachgefragte und produzierte Mengen), sondern die Zuteilung der Kosten aus dieser Situation im Fokus steht. Im nicht-kooperativen Fall richtet sich das Augenmerk auf die Wahl der Nachfrage in Abhängigkeit der Kostenzuteilung, in diesem Fall treffen die Nachfrager eine strategische Wahl ihrer Nachfrage, und sind dadurch Spieler in einer strategischen Entscheidungssituation.

Im Folgenden wird das nicht-kooperative Kostenteilungsspiel der Einfachheit halber anhand eines Einproduktmonopols illustriert. Es sei  $q_i$  die strategisch gewählte Nachfrage von Spieler  $i$ , wobei Spieler  $i$  auch genau die nachgefragte Menge  $q_i$  aus der Produktion bekommt. Die Gesamtnachfrage sei  $\bar{q} = \sum_{i=1}^n q_i$  und  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^n$  der Vektor der Nachfragen aller  $n$  Spieler.

Die Kosten, die Spieler  $i$  zu tragen hat, sind wie im kooperativen Fall durch die Zuteilung  $x_i$  bestimmt, wobei die Zuteilung durch die Wahl der Strategien  $q_i$  der Spieler beeinflusst wird, so dass  $x_i = x_i(\mathbf{q})$ . Dabei ist  $x_i(q_i, \mathbf{q}_{-i})$  die Zuteilung von  $i$ , wenn  $i$  die Menge  $q_i$  nachfragt, und alle anderen Spieler  $\mathbf{q}_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$  nachfragen.

Es sei  $u_i(x_i(\mathbf{q}), q_i)$  die stetige, konvexe, in  $x_i(\mathbf{q})$  nichtsteigende und in  $q_i$  nichtfallende Nutzenfunktion von Spieler  $i$ , die durch  $M_i$  begrenzt ist, indem  $u_i(x_i(\mathbf{q}), q_i) = -\infty$  für  $x_i(\mathbf{q}) > M_i$ .

#### Definition 3.22. Nash-Gleichgewicht<sup>109</sup>

Eine Strategiekonfiguration  $(q_1^*, \dots, q_n^*)$  heißt Nash-Gleichgewicht [NGG], wenn für jede Nachfrage  $q_i$  eines jeden Spielers  $i \in N$  gilt

$$u_i(x_i(q_i^*, \mathbf{q}_{-i}^*), q_i^*) \geq u_i(x_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}^*), q_i),$$

wenn alle anderen Spieler  $j \neq i$  ihre Nachfrage  $q_j^*$  wählen.

<sup>109</sup>Vgl. Berninghaus et al. (2010), S. 24.

Gilt in der angegebenen Bedingung  $u_i(x_i(q_i^*, \mathbf{q}_{-i}^*), q_i^*) > u_i(x_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}^*), q_i)$ , so spricht man von einem *strikten Gleichgewicht*.<sup>110</sup> Die im Weiteren vorgestellte Methode der Kostenzuteilung macht sich zu Nutze, dass eine Lösung, die durch Eliminierung dominierter Strategien erreicht wird, ein Nash-Gleichgewicht ist.<sup>111</sup>

**Definition 3.23. Strikt dominante Strategien**<sup>112</sup>

Eine Strategie  $q_i^0$  heißt *strikt dominant*, wenn für alle  $\mathbf{q}_{-i}$  und für alle  $q_i \neq q_i^0$  gilt

$$u_i(x_i(q_i^0, \mathbf{q}_{-i}), q_i^0) > u_i(x_i(q_i, \mathbf{q}_{-i}), q_i).$$

Im Folgenden wird der von Moulin und Shenker (1992) entwickelte Ansatz der *seriellen Kostenzuteilung* (*Serial Cost Sharing*) beschrieben, in dem die strategisch gewählten Nachfragen der Spieler die zugeteilten Kosten beeinflussen.<sup>113</sup>

Gegeben sei die Situation, dass  $n$  Spieler der Spielermenge  $N$  die Kosten einer gemeinsamen Produktion eines einzigen, teilbaren Gutes teilen, wobei mit  $C(\cdot)$  die zugehörige steigende, strikt konvexe Kostenfunktion mit  $C(\mathbf{0}) = 0$  bezeichnet wird. Das bedeutet, es gibt keine Skaleneffekte im Spiel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Nachfragen der Größe nach geordnet, so dass  $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$ . Gemäß der Idee der seriellen Kostenzuteilung zahlt jeder Spieler einen gleichmäßigen Anteil bis zur Höhe seiner Nachfrage, zu der er aus dem Zuteilungsmechanismus herausfällt. Nach dem „Ausscheiden“ des Spielers werden die Kosten dann den Spielern gleichmäßig zugeteilt, die eine höhere Nachfrage ausweisen. Insgesamt werden gerade alle Kosten zugeteilt, d. h.

$$\sum_{i=1}^n x_i = C\left(\sum_{i=1}^n q_i\right).$$

Der Mechanismus lässt sich veranschaulichen, in dem man sich die Spieler in einem Raum vorstellt, wobei jeder Spieler eine Lampe auf dem Tisch vor sich stehen hat. Zu Beginn der Zuteilung sind alle Lampen angeschaltet. Solange alle Lampen an sind, zahlt jeder Spieler die Kosten zu gleichen Teilen. Sobald der Spieler mit der

<sup>110</sup>Vgl. Berninghaus et al. (2010), S. 68.

<sup>111</sup>Vgl. Berninghaus et al. (2010), S. 27.

<sup>112</sup>Vgl. Berninghaus et al. (2010), S. 18–20.

<sup>113</sup>Vgl. auch Shenker (1990, 1995).

kleinsten Nachfrage (Spieler 1) seine Lampe ausschaltet, sind nur noch die anderen  $n - 1$  Spieler „im Rennen“, um Kosten zu tragen. Spieler 1 zahlt also gerade

$$x_1 = \frac{C(n \cdot q_1)}{n}$$

Spieler 2 zahlt auch diesen Anteil, bis Spieler 1 seine Lampe ausschaltet. Bis er selber seine Lampe ausschaltet, müssen die verbleibenden  $n - 1$  Spieler den weiterhin anfallenden Betrag

$$C\left(q_1 + \sum_{i \geq 2} q_i\right) - C(n \cdot q_1)$$

zahlen, so dass Spieler 2 gerade

$$x_2 = \frac{C(n \cdot q_1)}{n} + \frac{C(q_1 + (n - 1) \cdot q_2) - C(n \cdot q_1)}{n - 1}$$

zahlt. Die Zuteilungen der Spieler 3 bis  $n$  ergeben sich entsprechend.<sup>114</sup>

Es sei  $\Gamma = (C; u_1, \dots, u_n)$  ein nicht-kooperatives Kostenteilungsspiel, in dem die Kosten anhand der seriellen Kostenzuteilung zugeteilt werden. Der *Einstimmigkeitsnutzen* (*unanimity utility*) von Spieler  $i$  sei definiert durch

$$\max u_i(x_i(\mathbf{q}), q_i) \quad \text{für alle } q_i \geq 0 \quad \text{und} \quad x_i = \frac{C(n \cdot q_i)}{n}. \quad (3.10)$$

Es sei  $q_i^*$  die *Einstimmigkeitsnachfrage* von  $i$ , die die Optimierung (3.10) löst. Der Nachfragevektor  $(q_1^*, \dots, q_n^*)$  stellt ein Nash-Gleichgewicht dar: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Nachfrage von Spieler 1 am kleinsten. Er zahlt – da seine Nachfragemenge am kleinsten ist – gerade  $C(n \cdot q_1)/n$ , so dass  $q_1$  ihm den Nutzen  $u_1(C(n \cdot q_1)/n, q_1)$  sichert. Deshalb kann Spieler 1 seinen garantierten Einstimmig-

<sup>114</sup>Vgl. Moulin und Shenker (1994), S. 186 und Moulin (1996), S. 232 zur Entwicklung einer allgemeinen Schreibweise für  $x_i$ . Die *serielle Kostenzuteilung im stetigen Fall*  $f^S(C; q)$  ergibt sich mit der ersten Ableitung  $C'(\cdot)$  für die Kostenfunktion  $C(\cdot)$  und mit

$$\Delta_i(t) = \min\{t, q_i\}; \quad \delta_i(t) = \begin{cases} 1, & t \leq q_i, \\ 0, & t > q_i. \end{cases}$$

für Spieler  $i$  zu

$$f_i^S(C; q) = \int_0^\infty \delta_i(t) \cdot C' \left( \sum_j \Delta_j(t) \right) \cdot dt,$$

vgl. Moulin und Shenker (1992), S. 1015-1016.

keitsnutzen mit seiner Einstimmigkeitsnachfrage  $q_1^*$  maximieren. Die Einstimmigkeitsnachfrage  $q_1^*$  ist aufgrund der Annahmen bzgl. der Nutzen- und Kostenfunktion, speziell der Konvexität von  $C(\cdot)$ , eindeutig.<sup>115</sup> Moulin und Shenker zeigen, dass für alle  $i \geq 2$  gilt  $q_1^* \leq q_i^*$ .<sup>116</sup> Anhand einer Wiederholung des obigen Arguments für das reduzierte (n-1) Spiel der Spieler  $2, \dots, n$  wird ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht bestimmt: Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Spieler 1 seine Nachfrage mit  $q_1^*$  wählt, lautet der garantierte (reduzierte) Einstimmigkeitsnutzen der anderen Spieler

$$\begin{aligned} \max u_i(x_i(\mathbf{q}), q_i) \quad & \text{für alle } q_i \geq q_1^* \quad \text{und} \\ x_i = x_1^* + \frac{C(q_1^* + (n-1) \cdot q_i) - n \cdot q_1^*}{n-1}. \end{aligned}$$

Wiederum wird die Optimierung durch die Einstimmigkeitsnachfrage  $q_2^*$  gelöst.

### Satz 3.15. NGG der seriellen Kostenzuteilung<sup>117</sup>

Gegeben sei das Spiel  $\Gamma = (C; u_1, \dots, u_n)$ , in. Die sukzessive Eliminierung von strikt dominierten Strategien konvergiert zum eindeutigen Nash-Gleichgewicht des Spiels.

Die Autoren zeigen weiterhin, dass die serielle Kostenzuteilung als einzige Kostenzuteilung diese Lösung erzeugt.<sup>118</sup>

### 3.3.3 Vergleich der Preismechanismen und Relevanz für die Kostenzuteilung im gegebenen Fall

In Abschnitt 3.3.1 und Abschnitt 3.3.2 wird die Kostenzuteilung bei einer gegebenen Kostenfunktion  $C(\cdot)$  untersucht, einmal aus kooperativer und einmal aus nicht-kooperativer Sicht. Dabei werden der Aumann-Shapley Preismechanismus und die serielle Kostenzuteilung als mögliche Lösungsansätze der gegebenen Fragestellung identifiziert. Im Folgenden werden die Preismechanismen untereinander verglichen mit dem Ziel, eine Auswahl für die weitere Untersuchung zu treffen.

Der Vergleich des Aumann-Shapley Preismechanismusses mit der seriellen Kostenzuteilung ist (aus nicht-kooperativer Sicht) durch Moulin und Shenker (1994), Moulin (1996) und Friedman und Moulin (1999) erfolgt. Die Autoren vergleichen beide Preismechanismen anhand mehrerer Eigenschaften (Anonymität, Rangfolge,

<sup>115</sup>Vgl. Moulin und Shenker (1992), S. 1018.

<sup>116</sup>Vgl. Moulin und Shenker (1992), S. 1018-1021.

<sup>117</sup>Vgl. Moulin und Shenker (1992), S. 1019, 1025.

<sup>118</sup>Vgl. Moulin und Shenker (1992), S. 1027.

separierbare Kosten, Additivität, Monotonie, Konsistenz und Free Lunch) und zeigen, dass beide Preismechanismen nicht alle Eigenschaften erfüllen, und in ihren Eigenschaften verschieden sind.<sup>119</sup>

Durch Friedman und Moulin (1999) findet ein Vergleich des Aumann-Shapley Preismechanismus und der seriellen Kostenzuteilung für den Fall heterogener Güter statt.<sup>120</sup> Die Autoren bemängeln den Aumann-Shapley Preismechanismus, weil er die im Folgenden definierte Eigenschaft der Nachfragemonotonie nicht erfüllt:

**Definition 3.24. Nachfragemonotonie**<sup>121</sup>

Gegeben sei die Kostenfunktion  $C(\cdot)$  und  $m$  heterogene Güter  $(q^1, \dots, q^m)$ . Ein Zuteilungsverfahren  $f(C, \bar{q})$  heißt nachfragemonoton, wenn für zwei verschiedene Outputs von  $k$ ,  $q^k \leq q'^k$ , gilt

$$f^k(C; q^1, \dots, q^k, \dots, q^m) \leq f^k(C; q^1, \dots, q'^k, \dots, q^m).$$

Die Eigenschaft besagt, dass aufgrund der Erhöhung der Nachfrage nach Gut  $k$  von  $q^k$  auf  $q'^k$  ceteris paribus der Preis für  $k$  nicht sinkt. Die Autoren begründen die Bedeutung der Eigenschaft mit folgendem Argument: Angenommen, Spieler  $i$  verbraucht den größten Teil der Produktion des Gutes  $k$ . Dann kann die unwahrscheinliche Meldung eines höheren Bedarfs die Gesamtkosten des Spielers senken, wenn die Nachfragemonotonie nicht erfüllt ist. Die Autoren zeigen, dass die serielle Kostenzuteilung nachfragemonoton ist und empfehlen diese aus diesem Grund als geeignetes Zuteilungsverfahren im nicht-kooperativen Kostenteilungsspiel.

Gemäß Moulin und Shenker (1992, 1994), Moulin (1996) und Friedman und Moulin (1999) ist die serielle Kostenzuteilung anderen Verfahren zur Lösung nicht-kooperativer Kostenteilungsspiele vorzuziehen.<sup>122</sup> Das folgende Zitat verdeutlicht sowohl diese Position, als auch die dahinter stehenden Annahmen.

*Thus, with a convex cost function, serial cost sharing is compelling when we wish to ensure a single equilibrium outcome among strategically minded agents (who, however, cannot transfer outputs).*<sup>123</sup>

Die von den Autoren getroffenen Annahmen implizieren nämlich Folgendes:

<sup>119</sup>Vgl. im Einzelnen Moulin und Shenker (1992), S. 1014 und Moulin und Shenker (1994), S. 197.

<sup>120</sup>Vgl. dazu auch Koster (1998) und Tejedo und Truchon (2002).

<sup>121</sup>Vgl. Moulin (1995a).

<sup>122</sup>Vgl. insbesondere Moulin und Shenker (1994), S. 179-180.

<sup>123</sup>Vgl. Moulin und Shenker (1994), S. 183.



1. Die Aussagen werden für konvexe Kostenfunktionen getroffen, es handelt sich also um eine Produktion ohne Skaleneffekte.
2. Es handelt sich um ein nicht-kooperatives Spiel, in dem der Bedarf durch die Spieler im Hinblick auf ihren Nutzen endogen unter strategischen Gesichtspunkten bestimmt (und auch manipuliert) werden kann.<sup>124</sup>
3. Weiterhin wird nicht deutlich, in wie weit die serielle Kostenzuteilung auf Produktionen mehrerer Güter angewendet werden kann.

Die einzelnen Annahmen und die daraus folgenden Implikationen sind zu analysieren, um eine Aussage darüber treffen zu können, ob die serielle Kostenzuteilung anderen Verfahren – speziell dem Aumann-Shapley Preismechanismus – tatsächlich überlegen ist.

Zum ersten Punkt ist anzuführen, dass mit Moulin (1996) eine Betrachtung speziell für den Fall positiver Skaleneffekte erfolgt. In diesem Fall verliert die serielle Kostenzuteilung die Eigenschaft, immer ein Nash-Gleichgewicht zu bestimmen.<sup>125</sup>

Punkt 2. macht die unterschiedlichen Rahmenbedingungen beider Verfahren deutlich. Wenn die Spieler – wie in den von den Autoren betrachteten Situationen<sup>126</sup> – keine bindenden Absprachen treffen, ist das Argument nachvollziehbar, dass die serielle Kostenzuteilung dem Aumann-Shapley Preismechanismus überlegen ist, da sie ein Nash-Gleichgewicht bestimmt. Für den kooperativen Fall kann gegenteilig argumentiert werden. Hier kommen die positiven Eigenschaften der seriellen Kostenzuteilung nicht zum Tragen. Darüberhinaus verlieren die (aus nicht-kooperativer Sicht) als negativ zu wertenden Eigenschaften des Aumann-Shapley Preismechanismus ihre Relevanz, insbesondere die Nicht-Erfüllung der Nachfragemonotonie (vgl. Definition 3.24). So schreiben Friedman und Moulin:

*On the other hand, when the demand of a given good is an aggregate of – small – demands by individual agents, as in the telephone pricing example, or, more generally, in the problem of pricing a regulated monopoly, demand monotonicity is no longer compelling. The aggregate demand of a particular good does not correspond to a normatively relevant group of agents (this is especially true if*

---

<sup>124</sup>Aufgrund der nicht-kooperativen Situation transferieren die Spieler keine Güter, es wird ein Spiel mit nichttransferierbarem Nutzen impliziert. Vgl. Moulin und Shenker (1992), S. 1013.

<sup>125</sup>Vgl. Moulin (1996), S. 229.

<sup>126</sup>Vgl. Moulin (1996), S. 228 und Moulin und Shenker (1992), S. 1017–1023.

*individual agents may demand a positive quantity of several goods), therefore the equity and incentives justifications of the axiom disappear.*<sup>127</sup>

Die Diskriminierung zwischen nicht-kooperativer und kooperativer Kostenzuteilung findet in der Annahme über die Nachfragen der Spieler statt: sind diese endogen und strategisch wählbar, d. h. werden die Spieler mit Nutzenfunktionen ausgestattet, anhand derer sie zwischen nachgefragten Mengen und zu tragenden Kosten abwägen, bietet sich die nicht-kooperative Modellierung an. Ist jedoch – wie in der vorliegenden Aufgabenstellung – die interne Nachfrage der Spieler durch die exogen vorgegebene Nachfrage eindeutig determiniert, bietet sich die kooperative Modellierung an.

Bezüglich Punkt 3. ist anzumerken, dass die serielle Kostenzuteilung nicht für die Kostenzuteilung von Mehrproduktmonopolen geeignet scheint. Zwar wird die serielle Kostenzuteilung von Friedman und Moulin (1999) auf heterogene Güter erweitert, jedoch fragt jeder Spieler nur ein Gut aus dem Sortiment des Produzenten nach. Möchte man den allgemeinen Fall zulassen, dass die Spieler mehrere Güter des Sortiments nachfragen können, und sich somit die einzelnen Nachfragen nicht nur in einem Gut, sondern in allen Gütern aggregieren, verliert die serielle Kostenzuteilung ihre Eigenschaften. Erweiterungen durch Ersatz von einigen der hier angeführten Eigenschaften durch schwächere Eigenschaften wie z. B. in Koster et al. (1998) werden dabei als nicht zufrieden stellend angesehen.<sup>128</sup>

Es lässt sich als Fazit ziehen, dass sich im Vergleich zwischen dem Aumann-Shapley Preismechanismus und der seriellen Kostenzuteilung anhand der angeführten Eigenschaften keine Methode eindeutig empfiehlt. Dies liegt darin begründet, dass sie verschiedene Voraussetzungen haben und für jeweils bestimmte Aufgabenstellungen entwickelt wurden. So merken Moulin und Shenker (1992) an, dass sich im Fall der Bepreisung von Gütern eines regulierten Mehrproduktmonopols die eindeutige Empfehlung ableiten lässt, Preise zu Durchschnittskosten zu verwenden, wobei die Herausforderung in der Formulierung für mehrere Güter besteht, die durch den Aumann-Shapley Preismechanismus beantwortet wird.<sup>129</sup> Die Autoren erklären ihre Präferenz durch den folgenden Sachverhalt: Wenn die Güter beliebig zugeordnet werden können (transferierbarer Nutzen), dann können sich mehrere Spieler beliebig zu Koalitionen zusammenschließen, und Koalitionen können sich in mehrere Spieler/Koalitionen aufteilen. Wenn die Zuteilung für zusammengeschlossene Koalitionen

<sup>127</sup>Vgl. Friedman und Moulin (1999), S. 282.

<sup>128</sup>Vgl. Tejedo und Truchon (1999).

<sup>129</sup>Vgl. Moulin und Shenker (1992), Sharkey (1982), Tauman (1988).

kleiner/größer ist als für mehrere einzelne Spieler/Koalitionen, dann ist dieser Zusammenschluss/diese Aufteilung vorteilhaft und führt zu einem anderen Spiel. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass genau in diesem Punkt der Anreiz der Kooperation in der Contestable Market Theory besteht, vgl. Abschnitt 3.2.1. Dieser Effekt verzerrt jedoch den seriellen Preismechanismus. Moulin (1987), S. 168 zeigt, dass allein Preise zu Durchschnittskosten immun gegen diese Verzerrung sind.<sup>130</sup> Selbst wenn sich die Spieler nicht verbinden oder teilen können, ist es ihnen möglich, ihre Nachfrage durch Koalitionsbildung zu bündeln, um den gleichen Effekt hervorzurufen. Auch in diesem Fall sind nur Preise zu Durchschnittskosten (oder Preise zu Grenzkosten) immun gegenüber Verzerrungen.<sup>131</sup> Es erfolgt also der Hinweis und die Bestätigung, dass die Preise eines Mehrproduktmonopols im kooperativen Fall durch den Aumann-Shapley Preismechanismus bestimmt werden sollten.<sup>132</sup> Dies wird im weiteren Verlauf der Arbeit diskutiert.<sup>133</sup>

### 3.4 Diskussion der Ergebnisse und weiteres Vorgehen

In Kapitel 2 werden Koalitionsspiele analysiert. Anhand der Analyse zeigt sich, dass die herkömmlichen Ansätze nicht praktikabel und nicht für allgemeine Entscheidungssituationen geeignet sind. Darüberhinaus zeigt sich anhand eines Unmöglichkeitsergebnisses, dass die Forderung nach Stabilität grundsätzlich nicht mit der Forderung nach Anreizkompatibilität vereinbar ist. Aufgrund der in Abschnitt 2.6 angeführten Argumente wird für die Lösung der Aufgabenstellung die Erfüllung der Stabilität der Erfüllung der Anreizkompatibilität vorgezogen.

In Kapitel 3 werden weitere spieltheoretische Ansätze im Hinblick auf Kostenteilungsspiele untersucht. Die in Abschnitt 3.1 vorgestellten Eigenschaften konvexer Spiele als Spezialfall von Koalitionsspielen zeigen auf, dass Lösungsansätze im Falle von Konvexität vereinfacht werden können. Aufgrund der Erkenntnisse aus Abschnitt 3.1.2 lässt sich folgern, dass in der vorliegenden Situation davon ausgegangen werden kann, einen nichtleeren Kern vorzufinden. Es erscheint darüberhinaus auch nicht abwegig, eine Kernzuteilung über ein Preissystem nicht nur zu testen bzw. zu

---

<sup>130</sup>Zitiert nach Moulin und Shenker (1992), S. 1012, vgl. auch Anderson (1981) und O'Neill (1982).

<sup>131</sup>Vgl. Moulin (1987).

<sup>132</sup>Dies wird auch von Billera et al. (1978), Billera und Heath (1982), Mirman und Tauman (1982a), Mirman et al. (1985), Young (1985a) und Tauman (1988) so gesehen.

<sup>133</sup>Vgl. Abschnitt 3.4 und Kapitel 5.

verifizieren, sondern sie auch zu bestimmen bzw. zu errechnen. Zieht man – wie in Abschnitt 3.1.3 angedeutet – zusätzlich die Erkenntnisse konvexer Spiele bzw. der Komplementarität zu Rate,<sup>134</sup> lassen sich eventuell eindeutige Zusammenhänge zwischen der Form der Kostenfunktionen, einem Preisvektor und dem Kern ableiten. Dies wird im Weiteren, speziell in Abschnitt 5.3, berücksichtigt und genutzt.

Besonders die in Abschnitt 3.2 vorgestellten Konzepte erscheinen aus der Sicht der Aufgabenstellung als vielversprechend. Sie machen deutlich, dass bei einer gegebenen Produktion die Erfüllung der Stabilität getestet bzw. durchgesetzt werden kann, ohne dass eine charakteristische Funktion aufgestellt werden muss. Der beschriebene Fall geht von einer geteilten Technologie aus und korrespondiert mit der in Abschnitt 1.2 beschriebenen Situation aus Abbildung 1.1. Es gilt nun, diese Grundlagen zu verallgemeinern, um der in Abbildung 1.3 skizzierten Situation gerecht zu werden. Der zu entwickelnde Lösungsvorschlag scheint also erfolgsversprechend, wenn er sich auf die Konzepte der Tragbarkeit von Kostenfunktionen und der subventionsfreien Preise stützt. Aufbauend darauf bietet die Untersuchung aus Abschnitt 3.3 eine Auswahl existierender Preismechanismen. Es bietet sich an, diese Konzepte miteinander zu verknüpfen.

Bevor diese Idee konkretisiert wird, sei auf die Möglichkeit hingewiesen, Kostenzuteilungen in Märkten nicht-kooperativ und mit privater Information zu modellieren.<sup>135</sup> Dazu werden so genannte Mechanismen eingesetzt, darunter vor allem der bekannte Vickrey-Clarke-Groves [VCG] Mechanismus.<sup>136</sup> In dem Fall liegen Annahmen vor, die die Aufgabenstellung so stark modifizieren, dass sich kein Vergleich mit dem Ansatz einer Modellierung als kooperatives Kostenteilungsspiel ziehen lässt: Wißler (1997), Moulin und Shenker (2001) und Schwartz und Wen (2007) beschäftigen sich mit dem Einsatz von Mechanismen zur Kostenzuteilung und kommen zu dem Ergebnis, dass diese nicht zur Kostenzuteilung eingesetzt werden sollten, da sie im Allgemeinen nicht kostendeckend, nicht stabil und auch nicht praktikabel seien. Weitere Probleme, die bei der Anwendung des VCG Mechanismus in der Praxis auftreten, werden in Rothkopf (2007) beschrieben. So schreibt Rothkopf: „However,

---

<sup>134</sup>Vgl. Shapley und Shubik (1969b), Billera (1974) und Topkis (2009) und Abschnitt 3.1.1.

<sup>135</sup>Private Information folgt aus asymmetrischer Informationsverteilung, aus der eine Marktunvollkommenheit resultiert (bzw. resultieren kann), vgl. Marschak und Radner (1972), Hurwicz (1972) und Hurwicz (1973).

<sup>136</sup>Vgl. Groves (1973) und Makowski und Ostroy (1987).

they [Mechanismen] are just not practical. They do not work the way the (simple) theory says they should.“<sup>137</sup>

Abbildung 3.3 dient der Übersicht und der Verdeutlichung des weiteren Vorgehens. Im oberen Teil der Grafik sind die drei Anforderungen an ein Zuteilungs-

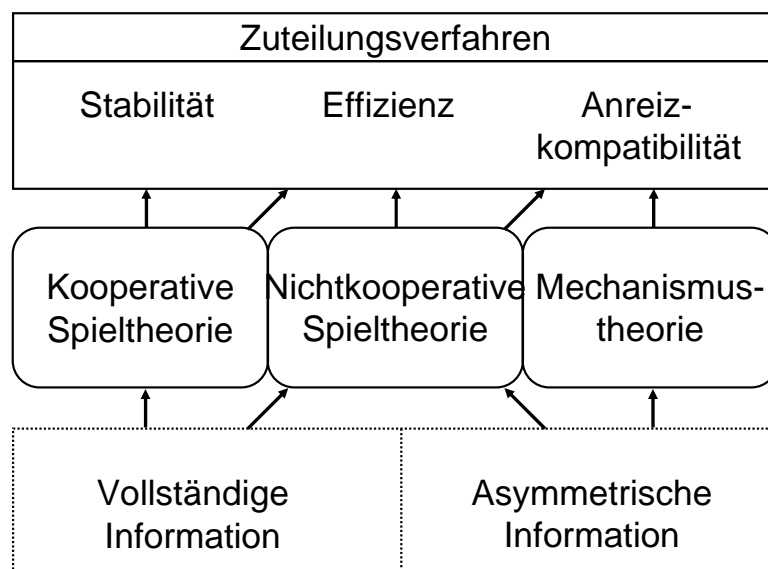


Abbildung 3.3: Strukturannahmen und geeignete Instrumentarien.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Vgl. Wißler (1997), S. 6

verfahren – Stabilität, Effizienz und Anreizkompatibilität – wiedergegeben.<sup>138</sup> Im unteren Teil sind die Annahmen über den Informationsgehalt – vollständige Information oder asymmetrische Information – angeführt. In diesem Spannungsfeld der Kostenzuteilung lassen sich drei Lösungsansätze unterscheiden – Kostenzuteilung aus kooperativer oder nicht-kooperativer Sicht oder anhand der Mechanismustheorie.<sup>139</sup>

Es ist bekannt, dass die drei Anforderungen nicht gleichzeitig erfüllt werden können.<sup>140</sup> Aufgrund der Diskussion und der Ergebnisse aus Abschnitt 2.6 ist die Forderung hier, ein stabiles Zuteilungsverfahren zu entwickeln, was die Effizienz mit einschließt. Gemäß Abbildung 3.3 fällt somit die Wahl auf Lösungen der kooperativen Spieltheorie und es wird bewusst in Kauf genommen, dass die Anreizkompatibilität nicht im Fokus stehen kann.

<sup>137</sup>Vgl. Rothkopf (2007), S. 195.

<sup>138</sup>Vgl. Young (1994), S. 1229 und Abschnitt 2.2.

<sup>139</sup>Nichtatomare Spiele und Spiele ohne Seitenzahlungen werden hier nicht berücksichtigt.

<sup>140</sup>Vgl. Satz 2.6.

Zur Lösung der Aufgabenstellung ist es nötig, die gegebene Situation eindeutig abzugrenzen, vor allem gegenüber nicht-kooperativen Ansätzen. Es werden die Annahmen getroffen, dass die Kosten transferierbar und die Spieler abzählbar sind. Es werden also, wie schon einleitend festgehalten, atomare Spiele mit Seitenzahlungen behandelt. Zusätzlich sind nun die folgenden beiden Annahmen gegeben, die die Aufgabenstellung präzisieren und die Auswahl eines Lösungswegs erlauben: Es wird angenommen, dass alle Absprachen zwischen den Spielern bindend sind und dass kein Spieler private Informationen besitzt.

Durch die beiden letzten Annahmen wird eindeutig festgelegt, dass es sich bei der gegebenen Entscheidungssituation um ein kooperatives Spiel mit vollständiger Information handelt. Somit kommen die folgenden Lösungsansätze in Betracht:

- Eintrittsmöglichkeiten in Mehrproduktmonopole, speziell das Konzept der Tragbarkeit (vgl. Abschnitt 3.2),
- Preismechanismen im kooperativen Fall (vgl. Abschnitt 3.3), speziell Aumann-Shapley Preise.
- Zusätzlich ist der Spezialfall konvexer Spiele bzw. der Komplementarität zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 3.1.1.)

Es sei auf die Fragestellung der Arbeit hingewiesen, eine praktikable Kostenzuteilung in kooperativen Märkten wie Organisationen, die geschlossen eine exogene Nachfrage bedienen, zu bestimmen, so dass alle Spieler freiwillig am Spiel teilnehmen. Es folgt ein kooperatives Kostenteilungsspiel, das praktikabel mit alleiniger Information der Kostenfunktionen gelöst werden soll. Die Herausforderung gegenüber den herkömmlichen Zuteilungsverfahren im Koalitionsspiel besteht darin, dass der zu entwickelnde Lösungsvorschlag (i) praktikabel und (ii) für allgemeine Situationen<sup>141</sup> bestimmbar sein soll.

Der im Weiteren (vgl. Kapitel 5) verfolgte Lösungsvorschlag wird im folgenden Kapitel 4 anhand von Lösungsverfahren der Kostenzuteilung in der Praxis motiviert.

---

<sup>141</sup>Vgl. Abbildung 1.3.

# 4. Lösungsverfahren der Kostenzuteilung in der Praxis

Die in Kapitel 2 durchgeführte Analyse ergibt, dass keines der spieltheoretischen Zuteilungsverfahren für Koalitionsspiele die geforderten spieltheoretischen Kriterien erfüllt. Deshalb wird die Untersuchung auf weitere spieltheoretische Ansätze und auf Zuteilungsverfahren der Praxis ausgeweitet. Während in Kapitel 3 weitere spieltheoretische Ansätze untersucht werden, werden in diesem Kapitel Zuteilungsverfahren der Praxis betrachtet, die bei möglichst allgemein gehaltenen Entscheidungssituationen, wie durch Abbildung 1.3 in Abschnitt 1.2 definiert, eingesetzt werden. Dazu zählen nicht die Zuteilungsverfahren, die für die Aufteilung gemeinsamer Kosten in einfachen Situationen entwickelt wurden und die in ihrer Anwendung zumeist auf Spezialfälle begrenzt sind. Solche sind zum Beispiel die von Frank (2003) zur Kostenzuteilung bei der Produktion von Kuppelprodukten untersuchten – und aus spieltheoretischer Sicht verworfenen – Zuteilungsverfahren der Restwertrechnung und der Verteilungsrechnung. Doll (2005) betrachtet die Wegekostenrechnung zur Allokation gemeinsamer Kosten der Straßeninfrastruktur. Zu den Zuteilungsverfahren der Praxis gehört auch das in Abschnitt 2.4.2 vorgestellte proportionale Zuteilungsverfahren.<sup>1</sup>

Untersucht werden *Kostenrechnungsverfahren*, also die Methoden, die in der Unternehmenspraxis in der innerbetrieblichen Rechnungslegung Anwendung finden und für die Allokation der so genannten Gemeinkosten eingesetzt werden. Kostenrechnungsverfahren bilden kooperative Märkte ab, in denen sich eine Kooperation darin ausdrückt, dass ein Leistungsaustausch stattfindet. Unter anderem wird als Fallbeispiel die so genannte *Wertbildungsrechnung* vorgestellt.<sup>2</sup> Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 2 werden die vorgestellten Verfahren in Abschnitt 4.3 anhand der spieltheoretischen Kriterien bewertet. Die Ergebnisse motivieren die in Abschnitt 4.4 durchgeführte allgemeine Modellierung des Leistungsaustauschs. Diese formalisiert die in Abbildung 1.3 dargestellte Entscheidungssituation.

---

<sup>1</sup>An dieser Stelle werden auch die EC-Methode und die SCRB-Methode ausgeschlossen, vgl. Abschnitt 2.4.2.

<sup>2</sup>Vgl. Abschnitt 4.2.

## 4.1 Kurzer Überblick über gängige Kostenrechnungsverfahren

Bei der *innerbetrieblichen Rechnungslegung* handelt es sich nicht um ein isoliertes Instrument wie z.B. ein einzelnes Produktionsplanungssystem, sondern um ein *übergreifendes Koordinationsinstrument* im Unternehmen.<sup>3</sup> Eine übergreifende und somit integrierende Funktion hat ein Informationssystem erst dann, wenn es relevant für jeden Unternehmensteil ist. In dieser Arbeit werden deshalb ausschließlich Methoden der innerbetrieblichen *Kosten-Leistungsrechnung* [KLR] und der daraus folgenden Berichtswesen betrachtet, die von der Finanzrechnung, Bilanzrechnung und Investitionsrechnung klar abgegrenzt sind.<sup>4</sup> Beschrieben werden das allen Verfahren zugrundeliegende System der Kostenrechnung<sup>5</sup> sowie die Kostenstellen-, Kostenarten- und Prozesskostenrechnung.

### 4.1.1 Das System der Kostenrechnung

Alle heute verwendeten Verfahren zur innerbetrieblichen Abbildung des Unternehmens bauen auf *Kostenrechnungssystemen* auf, deren Bestandteile sich in die *Kostenartenrechnung*, *Kostenstellenrechnung* und *Kostenträgerrechnung* unterteilen lassen. Die drei Teilrechnungen bauen aufeinander auf, und bilden die *Kostenrechnungsstufen* eines Kostenrechnungssystems. Gemäß Abbildung 4.1 stellt die Kostenartenrechnung die *Kostenrechnungsphase* der *Kostenerfassung* dar, während die Aufgabe der beiden darauffolgenden Stufen die der *Kostenverteilung* ist.

Die Aufgabe der Kostenartenrechnung ist somit die Messung der Kosten und ihre Klassifizierung.<sup>6</sup> Eine Gruppe von Kosten sind die *Einzelkosten*, die die direkt zurechenbaren Kosten darstellen. Sie können mit einem einzelnen Kostenträger, z. B. einem Produkt, direkt in Zusammenhang gebracht werden. Im Unterschied dazu stellen *Gemeinkosten* die nicht direkt zurechenbaren Kosten dar, die (möglichst verursachungsgerecht) verteilt werden sollen. Einzel- und Gemeinkosten sind nicht zwingend gleich den *variablen* und *fixen* Kosten. Diese unterscheiden anfallende Kosten dahingehend, ob sie abhängig oder unabhängig von der Beschäftigung (vom Output) sind. Weiterhin erklärt der Begriff der *primären Kosten*, dass vom Beschaffungsmarkt be-

---

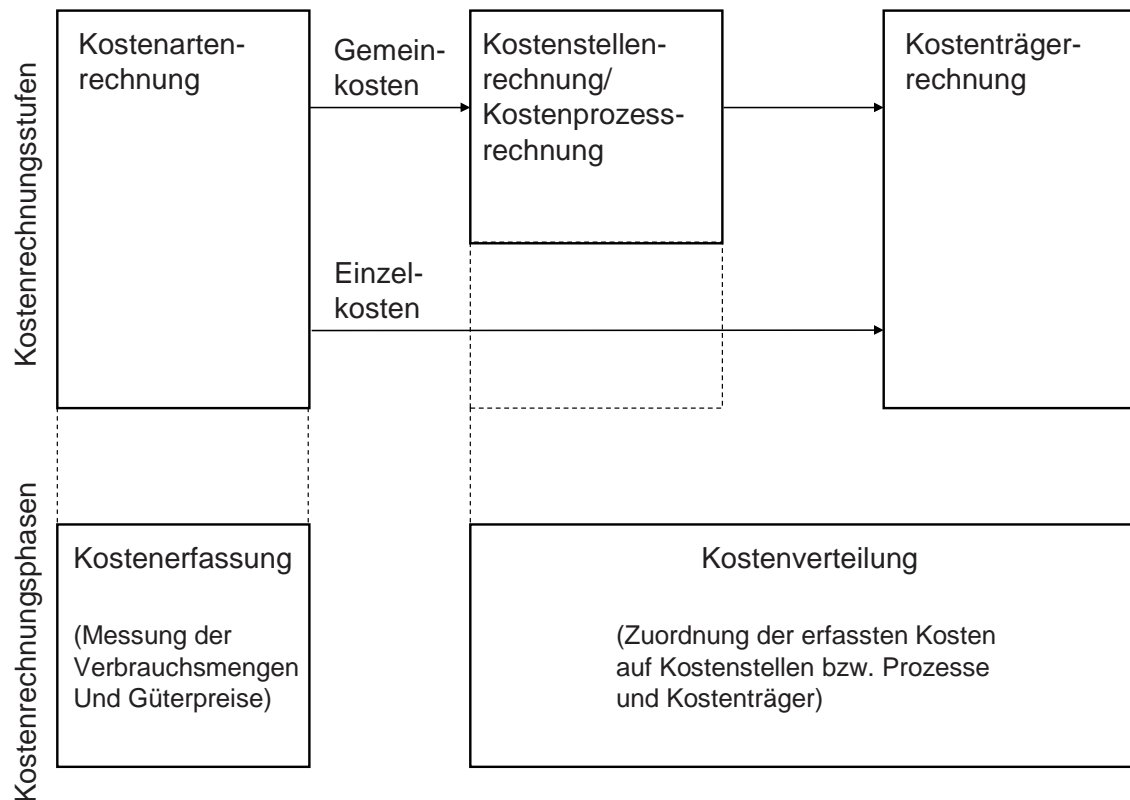
<sup>3</sup>Vgl. Küpper (2001), S. 24–29.

<sup>4</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 10–12.

<sup>5</sup>Bei Teilkostenrechnungen ändert sich nur der Umfang der Verrechnung, vgl. Huch et al. (1998), S. 15–18.

<sup>6</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 93–97.



Abbildung 4.1: Kostenrechnungssysteme im Überblick.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 39.

zogene Leistungen und Güter verbraucht werden. *Sekundäre Kosten* fallen für vom Betrieb selbst erzeugte und selbst verbrauchte Leistungen an.<sup>7</sup>

Teilbereiche (z. B. Abteilungen) des Unternehmens werden über *Kostenstellen* rechnungsmäßig abgegrenzt.<sup>8</sup> Kostenstellen sind die Orte, an denen Kosten entstehen. Aufgabe der Kostenstellenrechnung ist die Verteilung der Gemeinkosten über entsprechende Verfahren. Dabei unterscheidet man die *Vorkostenstellen*, deren Kosten auf andere Kostenstellen verrechnet werden, und die *Endkostenstellen*, deren Kosten nicht auf andere Kostenstellen, sondern auf die Kostenträger verrechnet werden. Die Kostenstellenrechnung ist somit das Bindeglied zwischen Kostenartenrechnung und Kostenträgerrechnung.<sup>9</sup>

<sup>7</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 580.

<sup>8</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 126–131.

<sup>9</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 66.

In der letzten Stufe der Kostenrechnung werden die Kosten pro Produkteinheit (je Periode) berechnet.<sup>10</sup> Über die so genannten Kostenträger werden die erstellten Produkte erfasst. Aufgabe der Kostenträgerrechnung und ihrer Verfahren ist die Verteilung der (Gemein-)Kosten (der Endkostenstellen) auf die Kostenträger. Zusätzlich können hier gewünschte Gewinnmargen eingerechnet werden, um zu einer Preisbildung für den externen Markt zu kommen. Die Preise werden dann kalkuliert und dem Markt bekannt gegeben.

### 4.1.2 Verfahren der Kostenstellenrechnung

Die Problematik der *innerbetrieblichen Leistungsverrechnung* – die Verteilung sekundärer (Gemein-)Kosten und primärer Gemeinkosten auf die Endkostenstellen – ist darin zu sehen, dass die Abteilungen, die eine nicht absatzfähige, in den eigenen Produktionsprozessen weiterverwertete Leistung herstellen, sich wechselseitig austauschen. Möchte man die Kostenrechnung nicht ungebührlich beschränken, sind derartige Situationen zuzulassen. Als Beispiel sei eine Firma genannt, die sowohl eine IT-Abteilung als auch eine Personalabteilung hat. Beide Abteilungen sind zu einem gewissen Grad voneinander abhängig und tauschen wechselseitig Leistungen aus, bevor sie ihre eigene Leistung an Dritte weitergeben. Laut Eisele ist „die Berücksichtigung dieser Interdependenzen durch Ermittlung von Verrechnungssätzen für innerbetriebliche Leistungen“ die „zentrale Fragestellung bei der Verrechnung“.<sup>11</sup>

Die Verrechnung findet heutzutage überwiegend durch statistisch-tabellarische Abrechnungsmethoden statt, und nicht anhand einer kontenmäßigen Verbuchung nach den Grundsätzen der doppelten Buchführung. Dafür dient der *Betriebsabrechnungsbogen* [BAB] als technisches Hilfsmittel. Es bieten sich zur innerbetrieblichen Verrechnung drei so genannte *Kostenstellenumlageverfahren* an.<sup>12</sup>

1. Beim *Anbauverfahren* werden die primären Kosten der Vorkostenstellen entsprechend der folgenden Formel unmittelbar auf die Endkostenstellen umgelegt,

$$\text{Verrechnungssatz} = \frac{\text{Primärkosten der Vorkostenstelle}}{\text{Leistungsabgabe an Endkostenstellen}}$$

---

<sup>10</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 162–166. In dieser Arbeit wird hauptsächlich die *Kostenträgerstückrechnung* als Berechnung der Kosten pro Produkteinheit betrachtet, die *Kostenträgerzeitrechnung* ermittelt die Kosten pro Periode.

<sup>11</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 613–615.

<sup>12</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 609–634.

2. Beim *Treppenverfahren* werden die Kostenstellen in eine Reihenfolge von den überwiegend Leistung abgebenden Kostenstellen zu den überwiegend Leistung empfangenden Kostenstellen gebracht. In dieser Reihenfolge werden die Kosten dann gemäß folgender Formel auf die jeweils nächsten Kostenstellen umgelegt,

$$\text{Verrechnungssatz} = \frac{\text{Primärkosten} + \text{Sekundärkosten vorgelagerter Kostenstellen}}{\text{Leistungsabgabe an Endkostenstellen}}$$

3. Das *Sprungverfahren* legt wie das Anbauverfahren die Primärkosten der Vorkostenstellen unmittelbar auf die Endkostenstellen um. Der Verrechnungssatz wird anhand eines einmalig durchgeführten Treppenverfahrens bestimmt, woraus feste Prozentsätze für die Verrechnung abgeleitet werden.

Generell wird bei den Umlageverfahren eine Anordnung der Kostenstellen in eine bestimmte Reihenfolge vorgenommen. Die Kosten werden gemäß dieser Reihenfolge von Kostenstelle zu Kostenstelle weiterverrechnet. Da die Verrechnung nur in eine Richtung erfolgt, kann zwischen zwei Kostenstellen nur einmal verrechnet werden. Eine wechselseitige Leistungsverflechtung abzubilden ist nicht möglich. Die Umlageverfahren werden deshalb auch als „Näherungsverfahren“ bezeichnet.<sup>13</sup>

1. Beim *Anbauverfahren* entstehen laut Eisele „größere Ungenauigkeiten“, weil keine Leistungsbeziehungen berücksichtigt werden.<sup>14</sup>
2. Das *Treppenverfahren* liefere exaktere Ergebnisse. Weil Gemeinkosten nur in eine Richtung umgelegt werden, führe es bei wechselseitigen Leistungsverflechtungen jedoch „zwangsläufig zu unkorrekten Ergebnissen.“ Trotzdem sei es das in der Praxis am häufigsten verwendete Verfahren.<sup>15</sup>
3. Das *Sprungverfahren* mische die Methoden des Anbauverfahrens mit dem Treppenverfahren und sei häufig nicht praktikabel. Zudem versage es wie die anderen Näherungsverfahren bei wechselseitigen Beziehungen in der Leistungsverflechtung.<sup>16</sup>

Als weitere Alternative der Kostenverrechnung bietet die traditionelle Kostenrechnung die *simultane Verrechnung (Gleichungsverfahren)* an. Die auf den Kostenstellen angefallenen Gesamtkosten werden mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems

---

<sup>13</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 620–634.

<sup>14</sup>Ebenda.

<sup>15</sup>Ebenda.

<sup>16</sup>Ebenda.

simultan verrechnet. Die Gesamtkosten sind die Summe der Gemeinkosten der jeweiligen Kostenstelle und alle von anderen Kostenstellen zugerechneten Gemeinkosten.<sup>17</sup> Die simultane Verrechnung ist im Unterschied zu den Umlageverfahren keine Näherungslösung, sondern stellt eine exakte Verrechnung sicher. Sie findet in der Praxis aufgrund der aufwendigen Berechnungen nur selten Gebrauch.<sup>18</sup>

### 4.1.3 Verfahren der Kostenträgerrechnung

Aufgabe der Kostenträgerrechnung und ihrer Verfahren ist die Verteilung der (Gemein-)Kosten (der Endkostenstellen) auf die Kostenträger. Kalenberg (2004) unterteilt die Verfahren der Kostenträgerrechnung in drei Gruppen:<sup>19</sup>

- Die *Divisionsverfahren*<sup>20</sup> unterstellen, dass die Kostenträger die Inputfaktoren und Produktionsprozesse in gleicher Weise beanspruchen. Die Gesamtkosten werden durch eine einfache Division, z. B. anhand der Stückzahlen, auf die Kostenträger verrechnet. Die Divisionsverfahren gelten bei komplexen Produktionsstrukturen als zu ungenau und werden hier nicht weiter betrachtet.<sup>21</sup>
- Die *Zuschlagsverfahren* gehen von der Annahme aus, dass sich die Gemeinkosten proportional zu den Einzelkosten verhalten. Die Gesamtkosten werden in Einzel- und Gemeinkosten aufgespalten und getrennt verrechnet. Bei der *summarischen Zuschlagskalkulation* werden die gesamten Gemeinkosten als proportional zu den Einzelkosten angenommen und anhand eines einzigen Zuschlagssatzes verrechnet. Das wird als unrealistisch eingestuft.<sup>22</sup> Die *differenzierende Zuschlagskalkulation* unterteilt den Gemeinkostenblock gemäß der Kostenstellenrechnung weiter in Material-, Fertigungs-, Verwaltungs- und Vertriebsgemeinkosten, und wird anhand des in Abbildung 4.2 dargestellten Schemas durchgeführt.
- Das Verfahren der *Kuppelkalkulation* findet Anwendung, wenn während eines Produktionsprozesses mehrere Produkte gleichzeitig entstehen. Das Verfahren

---

<sup>17</sup>Vgl. Friedl (2004), S. 170–171.

<sup>18</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 635–636. Wenn (lineare) Gleichungssysteme zu lösen sind, ist im Allgemeinen gar nicht sicher, ob die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gegeben ist. Nur bei Existenz und Eindeutigkeit der Lösung kann man davon sprechen, dass eine exakte Verrechnung sichergestellt ist. Vgl. Anhang B.

<sup>19</sup>Vgl. Kalenberg (2004), S. 110–111.

<sup>20</sup>Kalenberg zählt die so genannte Äquivalenzziffernkalkulation auch zu den Divisionsverfahren, vgl. Kalenberg (2004), S. 110.

<sup>21</sup>Vgl. Kloock et al. (1991), S. 133–137.

<sup>22</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 656–658.

<b>Fertigungsmaterial</b> (Einzelkosten)	<b>Material- kosten</b>	<b>Herstell- kosten</b>	<b>Selbstkosten</b>
<b>Materialgemeinkosten</b> (zugeschlagen auf Basis des Fertigungsmaterials)			
<b>Fertigungslohn</b> (Einzelkosten)	<b>Fertigungs- kosten</b>		
<b>Fertigungsgemeinkosten</b> (zugeschlagen auf Basis des Fertigungslohns)			
<b>Sondereinzelkosten der Fertigung</b> (Einzelkosten)			
<b>Verwaltungsgemeinkosten</b> (zugeschlagen auf Basis der Herstellkosten)			
<b>Vertriebsgemeinkosten</b> (zugeschlagen auf Basis der Herstellkosten)			
<b>Sondereinzelkosten des Vertriebs</b> (Einzelkosten)			

Abbildung 4.2: Schema der differenzierenden Zuschlagskalkulation.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Vgl. Kloock et al. (1991), S. 141.

ist im Prinzip auch ein Divisionsverfahren, wird aber aufgrund seiner speziellen Anwendung gesondert betrachtet.

Die betrachteten Kostenrechnungsstufen und ihre Verfahren werden durch die Kostenrechnungen zu einem System vereint. Unterschieden wird dabei in *Vollkostenrechnungen* und *Teilkostenrechnungen*. Die Vollkostenrechnung verrechnet alle angefallenen Kosten auf die Kostenträger. Die Teilkostenrechnung verzichtet auf die Zurechnung der fixen Kosten auf die einzelnen Kostenträger mit der Begründung, dass eine verursachungsgerechte Zurechnung der Fixkosten nicht möglich sei. Bei der Ermittlung des Betriebsergebnisses werden die Fixkosten jedoch berücksichtigt.

Es ist heutzutage allgemein anerkannt, dass eine Kostenrechnung auf Teilkostenbasis der Vollkostenrechnung für Planungs- und Entscheidungsaufgaben vorzuziehen ist.<sup>23</sup> Im Folgenden werden die Grenzplankostenrechnung und die mehrstufigen Deckungsbeitragsrechnung, die beide als Teilkostenrechnungen eingestuft werden, vor-

<sup>23</sup>Vgl. dazu Eisele (1993), S. 670–378 und Schweitzer und Küpper (1995), S. 371–373.

gestellt. Sie gelten als die „ausgefeiltesten“ Instrumentarien der Kostenrechnung,<sup>24</sup> und versuchen, das angesprochene Problem der Gemeinkostenverrechnung zu lösen.

Die *Deckungsbeitragsrechnung* [DB] (hier ist die *mehrstufige Deckungsbeitragsrechnung* gemeint) ist eine Teilkostenrechnung und hat zum Ziel, die Vorteile einer Teil- und Vollkostenrechnung zu vereinen. Es werden nur die variablen Kosten der Vorkostenstellen auf die Endkostenstellen umgelegt, die Fixkosten der Vor- und Endkostenstellen gehen direkt in die Kostenträgerrechnung ein.<sup>25</sup> Die Fixkosten werden darauf aufbauend mehrstufig und möglichst verursachungsgerecht zugerechnet, es findet also eine Aufspaltung des Fixkostenblocks in verschiedene Fixkostenstufen statt. Beispielsweise enthält der Deckungsbeitrag I nur die variablen Kosten, der Deckungsbeitrag II die Produktgruppenkosten, Deckungsbeitrag III zusätzlich die Unternehmensbereichskosten, und der Deckungsbeitrag IV schließlich die restlichen Fixkosten.<sup>26</sup>

Die *Grenzplankostenrechnung* ist eine flexible Plankostenrechnung, und rechnet als solche mit Planwerten, d. h. es werden sowohl die zukünftigen Outputmengen wie auch die Einsatzmengen an Produktionsfaktoren und deren Preise geplant. Aus dem Produkt von Planmengen und Planverrechnungspreisen leiten sich die Plankosten ab.<sup>27</sup> Die Aufgaben der Grenzplankostenrechnung sind die Vorkalkulation der betrieblichen Leistungen, Kontrolle der Wirtschaftlichkeit und die Ursachenanalyse der Abweichungen zwischen im Voraus kalkulierten Kosten und tatsächlich angefallenen Kosten. Die Grenzplankostenrechnung bezieht nur variable Kosten in die Betrachtung ein, die fixen Kosten werden als Block in das Betriebsergebnis übernommen. Die Grenzplankostenrechnung vereinfacht die Kostenkontrolle und die Durchführung von Abweichungsanalysen in der Grenzplankostenrechnung. Die Grenzplankostenrechnung eignet sich deshalb besonders für dispositive Aufgaben.<sup>28</sup>

#### 4.1.4 Verfahren der Prozesskostenrechnung

Den bisher dargestellten „traditionellen“ Systemen der Kostenrechnung werden gewisse Mängel zugeschrieben. Dazu zählt insbesondere der Aspekt der *Verschiebung der Kostenstrukturen* von variablen Kosten zu fixen Gemeinkosten aufgrund der fortschreitenden Automatisierung der Fertigung und der Zunahme der Wertschöpfung

---

<sup>24</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 476–477.

<sup>25</sup>Vgl. Huch et al. (1998), S. 15–18.

<sup>26</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 683–689.

<sup>27</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 707.

<sup>28</sup>Vgl. Kalenberg (2004), S. 215–223.

indirekter – und damit Gemeinkostenverursachender – Leistungsbereiche.<sup>29</sup> Wie in Abbildung 4.3 illustriert, überwiegen die Gemeinkosten die Einzelkosten in heutigen Kostenstrukturen in Unternehmen deutlich.<sup>30</sup> Gemäß Eisele resultieren aufgrund die-

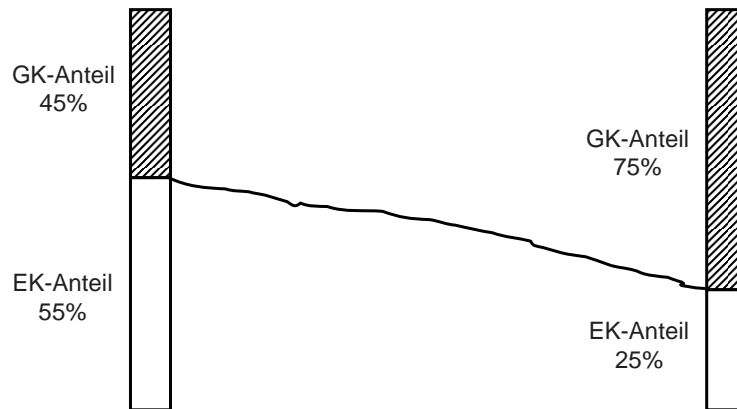


Abbildung 4.3: Gemeinkostenentwicklung in Unternehmen zwischen 1850 und 1985.

ses expandierenden Gemeinkostenvolumens „schwerwiegende Kalkulationsfehler“ aus den traditionellen Kostenrechnungsverfahren.<sup>31</sup> Darüberhinaus stellt die Trennung der Kosten in fixe und variable Bestandteile in der Praxis Probleme dar und kann zu Fehlentscheidungen führen.<sup>32</sup>

Die traditionellen Systeme der Kostenrechnung sind an „den kurzfristigen Entscheidungen der Planung und Steuerung der Produktionsmengen bzw. Produktionsprozesse orientiert“.<sup>33</sup> Wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, bietet die Kostenstellenrechnung nur Näherungslösungen für die innerbetriebliche Verrechnung und zieht Interdependenzen im Leistungsaustausch nicht realitätsgerecht in Betracht. Bei den in Abschnitt 4.1.3 vorgestellten Verfahren werden die Gemeinkosten entweder bewusst nicht in die Rechnung mit einbezogen oder nur durch prozentuale Zuschläge verteilt. Somit erreichen die Verfahren keine vollständige Verteilung der Kosten und bilden deshalb nur einen (immer geringer werdenden) Teil des sich vollziehenden Leistungsaustauschs ab.<sup>34</sup>

<sup>29</sup>Vgl. Kalenberg (2004), S. 297–298.

<sup>30</sup>Vgl. Miller und Vollmann (1985), S. 143. Obwohl der Beobachtungszeitraum nur bis 1985 reicht, verdeutlicht diese Studie den langfristigen und ungebrochenen Trend der Gemeinkostenentwicklung.

<sup>31</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 661.

<sup>32</sup>Vgl. Huch et al. (1998), S. 55.

<sup>33</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 321.

<sup>34</sup>Die angeführten Mängel der traditionellen Verfahren spiegeln sich auch in ihrer spieltheoretischen Bewertung, vgl. Wißler (1997), S. 60–64. Darauf wird Abschnitt 4.3 eingegangen.

Die angeführten Unzulänglichkeiten der traditionellen Verfahren werden auch von den Vertretern des so genannten *Activity-Based-Costing* geteilt. Statt grober Zuordnung in der Kostenstellenrechnung und der Aufschlüsselung der Gemeinkosten in der Kostenträgerrechnung, die zu völlig falschen Bildern führten, hätten, so schreiben Kaplan und Kooper, viele Unternehmen das Willkürliche an der Zurechnung von Gemeinkosten erkannt und auf Grundlage der Einzelkostenrechnung den Übergang zur Teilkostenrechnung (Deckungsbeitragsrechnung) vollzogen.<sup>35</sup> Diese Methode habe wiederum den Nachteil, dass sie die Gemeinkosten nicht in hinreichendem Maße abbilde. Deshalb entwickelten Kaplan und Cooper als Alternative die in Deutschland unter diesem Begriff bekannte *Prozesskostenrechnung*, mit dem Anspruch, den zunehmenden Gemeinkostenblock besser auf die Produkte zu verteilen.<sup>36</sup>

Die in der Prozesskostenrechnung ablaufenden Schritte sind in Abbildung 4.4 schematisch dargestellt. Sie basiert wie alle anderen Verfahren auf der Kostenartenrechnung und fasst die Kosten in Kostenstellen zusammen. Statt jedoch eine Leistungsverrechnung vorzunehmen, werden in den Kostenstellen *Aktivitäten* und daraus *Teilprozesse* gebildet. Für diese werden im nächsten Schritt die Kosten ermittelt, worauf sie zu *Hauptprozessen* gebündelt und direkt den Kostenträgern zugerechnet werden. Die Zurechnung erfolgt anhand so genannter *Kostentreiber*: *Transaktions-treiber* messen die Häufigkeit, mit der eine Aktivität angefordert wird. *Zeittreiber* werden eingesetzt, wenn die Dauer der Durchführung bestimmend ist. *Intensitätstreiber* schaffen Abhilfe bei variablem Ressourceneinsatz einer Aktivität.

Dieser Teilschritt der Prozesskostenrechnung ersetzt wie in Abbildung 4.1 dargestellt die Kostenstellenrechnung mit der *Kostenprozessrechnung*. Der wesentliche Aspekt der Prozesskostenrechnung ist also, dass die Kostenstellenrechnung in den Hintergrund tritt und nur noch als Sammlerin von Kosten fungiert, die auf Prozesse verrechnet werden. „Kostenstellen können als Abrechnungsbezirke zwar gebildet werden, sie spielen jedoch eine untergeordnete Rolle.“<sup>37</sup> Dadurch, dass die Prozesse und die ihnen zugerechneten Kosten direkt auf die Kostenträger umgelegt werden, entfällt der Schritt der internen Leistungsverrechnung.

In wie weit behebt die Prozesskostenrechnung die angeführten Mängel der traditionellen Kostenrechnung? Einer kritischen Betrachtung der Prozesskostenrechnung

---

<sup>35</sup>Vgl. Kaplan und Cooper (1999), S. 20–25.

<sup>36</sup>Vgl. Kaplan und Cooper (1988, 1999). Im deutschen Sprachraum ist Horváth und Mayer (1989) als erste Quelle zur Prozesskostenrechnung zu nennen.

<sup>37</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 323–327.



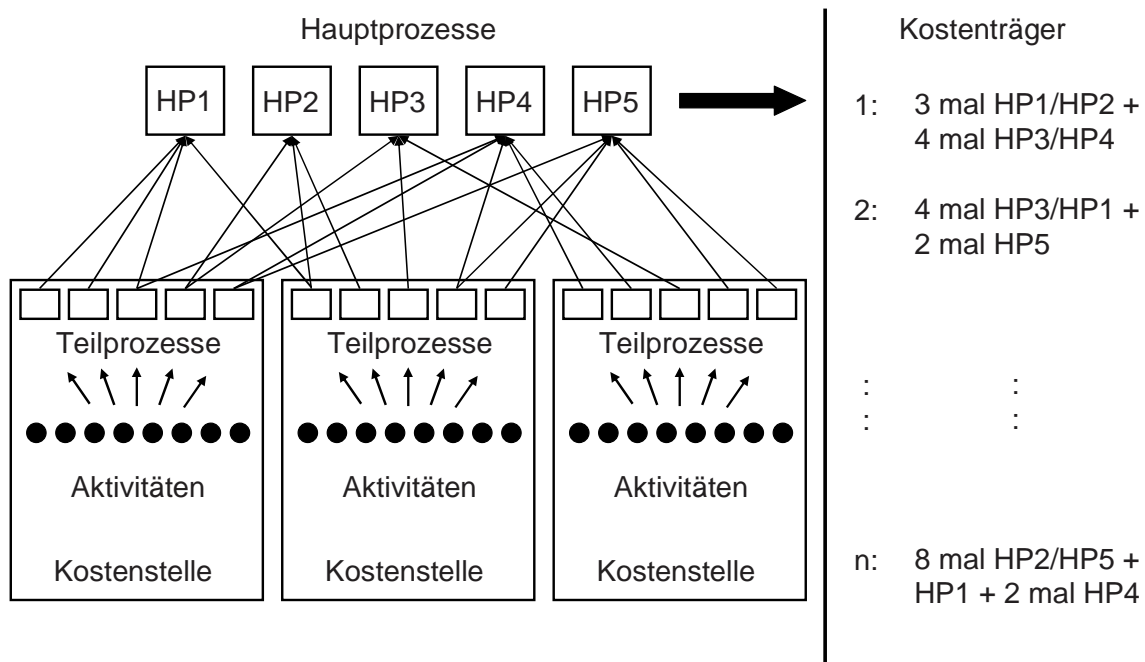


Abbildung 4.4: Prinzip der Prozesskostenrechnung.<sup>a</sup> „HP“ steht für Hauptprozess.

<sup>a</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 340.

ist voranzustellen, dass sie sich trotz großem Interesses in Wissenschaft und Praxis nicht durchsetzen konnte. Dies liegt daran, dass sie hauptsächlich als zu kompliziert und zu aufwändig angesehen wird.<sup>38</sup> Ebenso wird sie in ihrer Leistung gegenüber der Grenzplankostenrechnung und Deckungsbeitragsrechnung als unterlegen beurteilt.<sup>39</sup> Mit der Grenzplankostenrechnung seien direkte Leistungsbereiche genauer abbildbar als mit der Prozesskostenrechnung.<sup>40</sup> Somit ist der Schluss zu ziehen, dass die Prozesskostenrechnung in Literatur und Praxis nicht als alleinstehende Alternative zu den traditionellen Kostenrechnungen gesehen wird.

Auch im Sinne der Aufgabenstellung dieser Arbeit ist die Prozesskostenrechnung nicht als zielführend anzusehen. Die Umgehung des Leistungsaustauschs und die Fokussierung auf die Kostenträgerrechnung bewirkt, dass die Akteure im Unternehmen keine Übersicht über die ausgetauschten Leistungen haben, denn ein kostenstellenverantwortlicher Manager eines Unternehmens kann nicht einsehen, welche Leistungen er bezieht bzw. wer seine Leistungen bezieht. Somit kann die Prozesskos-

<sup>38</sup>Vgl. Weber (2004), S. 68.

<sup>39</sup>Vgl. Franz (1990), S. 134.

<sup>40</sup>Vgl. Schweitzer und Küpper (1995), S. 333.

tenrechnung nicht als ein strategisches Verfahren angesehen werden, das den Spielern eine direkte Beurteilung der ihnen zur Verfügung stehenden Strategien ermöglicht. Es lässt sich aus spieltheoretisch-strategischer Sicht kein grundsätzlicher Unterschied zu traditionellen Kostenrechnungsverfahren ausmachen, da in der Prozesskostenrechnung die Leistungsgenerierung und -erfassung nach wie vor Mittel zu dem Zweck ist, Produkte zu kalkulieren. Diese Kritik verschärfend kommt hinzu, dass im Unterschied zu anderen Verfahren der Leistungsaustausch gänzlich missachtet wird. Insbesondere spielt bei der Prozesskostenrechnung gemäß Berger „der Prozessgedanke entgegen intuitiver Vermutungen keine besondere Rolle“.<sup>41</sup>

Dabei ist im Gedanken der Prozessorientierung ein Ansatz zu einem geeigneten spieltheoretischen Instrument zu finden: Wenn Kosten nicht durch statistisch-tabellarische Verfahren verrechnet werden, sondern Prozesse an sich abgebildet werden, wird ein Ansatzpunkt für die Bewertung des Leistungsaustauschs erzeugt. Die Überlegung, Prozesse nicht direkt auf Kostenträger zu verrechnen, sondern sie unmittelbar für die Abbildung des Leistungsaustauschs heranzuziehen und Prozesse im Unternehmen über Kostenstellengrenzen hinweg zu betrachten, ermöglicht eventuell eine andere Sicht auf die Abbildung eines kooperativen Leistungsaustauschs und ist zu untersuchen. Aus Sicht der Spieltheorie ist den dezentralen Entscheidern ein aussagefähiges System an die Hand zu geben, das strategische Entscheidungen mit Bezug auf die Kooperationspartner ermöglicht. Im folgenden Abschnitt 4.2 wird eine Kostenrechnung vorgestellt, die – so die Vermutung – diese Sichtweise aufweist. Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit, dieses Instrument bzw. die ihm zu Grunde liegende Sichtweise anhand der spieltheoretischen Methodik zu untersuchen und zu bewerten, um zu einer Lösung der Aufgabenstellung zu gelangen.

## 4.2 Alternative Sichtweise: Fallbeispiel Wertbildungsrechnung

In der Praxis implementieren Organisationen Kostenrechnungen und Berichtswesen, die auf die speziellen Eigenarten der jeweiligen Organisation abgestimmt sind. Es ist anzunehmen, dass einige dieser Eigenentwicklungen zur Lösung der Fragestellung der Arbeit beitragen können. Somit soll ein Verfahren der Praxis untersucht werden, dessen Zielsetzung es ist, eine freiwillige Kooperation zu ermöglichen, das also die strategischen Entscheidungen der Spieler implizit berücksichtigt.

---

<sup>41</sup>Vgl. Berger (2004), S. 63.

Als ein Beispiel der alternativen Ansätze der innerbetrieblichen Rechnungslegungen wird hier die *Wertbildungsrechnung* untersucht.<sup>42</sup> Die Wertbildungsrechnung ist eine Eigenentwicklung des Unternehmens *dm-drogerie markt*.<sup>43</sup> Das Instrument wird vorgestellt und dahingehend untersucht, ob es tatsächlich zur gewünschten Lösung beiträgt. Es ist zu berücksichtigen, dass das Instrument eine Entwicklung eines eigentümergeführten Filialunternehmens<sup>44</sup> ist und die folgenden Ausführungen wiedergeben, wie das Instrument der Wertbildungsrechnung und das Thema der Kostenrechnung bei *dm-drogerie markt* aufgefasst wird.<sup>45</sup>

Kerngedanke der Wertbildungsrechnung ist, die wechselseitigen Abhängigkeiten im Unternehmen explizit sichtbar zu machen. Dadurch soll jeder Mitarbeiter in die Lage versetzt werden, eigenverantwortlich und dezentral die im Sinne des Gesamtunternehmens richtige Entscheidung zu treffen.<sup>46</sup> Diese ist gemäß der Wertbildungsrechnung diejenige Entscheidung, die den nachfolgenden Bearbeitungsschritt im arbeitsteiligen Prozess bestmöglich unterstützt. Es soll also eine auf den (internen oder externen) Kunden bezogene und damit unternehmerische Haltung bezweckt werden. Der interne Markt des Unternehmens wird deshalb auch als *Miteinander-Füreinander-Leisten* bezeichnet.<sup>47</sup> Dieses Grundverständnis des wechselseitigen Leistungsaustauschs deckt sich mit dem Verständnis der Spieltheorie: Die Manager, die die Abteilungen des Unternehmens repräsentieren, sind spieltheoretisch als Spieler aufzufassen, während die Abteilungen als *Subunternehmen* betrachtet werden kön-

---

<sup>42</sup>Vgl. Irlé (2009). Zu weiteren Ansätzen siehe unten.

<sup>43</sup>Vgl. Kaletta und Gerhard (1998). Das Unternehmen *dm-drogerie markt* ist ein filialisiertes Handelsunternehmen mit Sitz in Karlsruhe und wurde 1973 von Prof. Götz W. Werner gegründet. Das Unternehmen erwirtschaftete im Geschäftsjahr 2011/2012 in 2.802 Filialen einen Umsatz von 6,87 Milliarden Euro mit 43.930 Mitarbeitern in neun Ländern Europas. Vgl. die Homepage [www.dm-drogeriemarkt.de](http://www.dm-drogeriemarkt.de) des Unternehmens, Stand 03.07.2013. Vgl. zu einer eingehenden Beschreibung des Unternehmens Pullig (2000), S. 264–325.

<sup>44</sup>Während die Wertbildungsrechnung im Unternehmen entwickelt und eingeführt wurde, war Götz Werner geschäftsführender Gesellschafter bei *dm-drogerie markt*.

<sup>45</sup>Dieser Abschnitt enthält Auszüge aus Selders (2007) und Pfläging und Selders (2012). Ebenfalls dienten dem Autor Gespräche mit Mitarbeitern des Unternehmens und ein Praktikum in der Controlling Abteilung des Unternehmens als Informationsquelle.

<sup>46</sup>Vgl. zur Unternehmenskultur des Unternehmens Werner (2006) und Dietz und Kracht (2011). Heutzutage werden Unternehmen mehr und mehr als Zusammenschluss von dezentralen Einheiten, die unternehmerisch und weitestgehend autonom handeln sollen, aufgefasst. Zur wissenschaftlichen Diskussion der Problemstellung, welche Vor- und Nachteile eine „demokratischere“ Führung hat vgl. Neuberger (2002), S. 426 ff.. Der durch die Wertbildungsrechnung implizierte Standpunkt wird diskutiert in Allerbeck (1977), Kuhn (2000) und Wunderer (2011).

<sup>47</sup>Vgl. Werner (2004). Bei *dm-drogerie markt* hat sich dazu der Leitspruch „Mein Kollege – mein bester Kunde, meine Kollegin – meine zuverlässigste Lieferantin“ entwickelt, vgl. Werner (2000).

nen, die im unternehmensinternen Markt sowohl als Abnehmer als auch als Produzenten auftreten.<sup>48</sup>

Als so bezeichnete „Wahrnehmungsoberfläche“ soll die Wertbildungsrechnung dem Zweck dienen, den Leistungsaustausch im Unternehmen finanziell erlebbar zu machen, um so die Unternehmenskultur des unternehmerischen und selbstständigen Handelns zu unterstützen. Um im ersten Schritt die innerhalb des Unternehmens erbrachten Leistungen sichtbar zu machen, wird jede Abteilung in die Rolle des eigenständigen Unternehmens versetzt und erstellt ein bepreistes Angebotsverzeichnis, den so genannten *Preis-Leistungskatalog*. Dadurch sollen die Austauschbeziehungen zwischen den Abteilungen abgebildet und durch Bepreisung monetär bewertet werden. So kommt jede Abteilung zu Einnahmen, die eine wirtschaftliche Bewertung ermöglichen soll. Erst dadurch, dass Leistungen berechnet werden, entsteht die Möglichkeit, Einnahmen und Ausgaben einander gegenüber zu stellen und ähnlich einer Gewinn- und Verlustrechnung zu saldieren. Daraus entsteht dann der eigentliche *Bericht der Wertbildungsrechnung*, anhand dessen die Abteilungsleiter ihre unternehmerischen Entscheidungen treffen sollen.

Der **Preis-Leistungskatalog** (kurz: Leistungskatalog) einer Abteilung beschreibt alle angebotenen Leistungen der Abteilung und weist die Preise dieser Leistungen aus. Dies erfolgt aufgrund der Zielsetzung, Austauschbeziehungen im Netzwerk des Unternehmens abzubilden. Statt Kostenblöcke zu verrechnen, sieht die Wertbildungsrechnung Abteilungen als Anbieter verschiedenster Leistungen, die sie sich einander – wie gegenüber Dritten – berechnen. Dadurch soll für die Entscheidungsträger transparent werden, welche Austauschbeziehungen sinnvoll sind und welche nicht. Statt also Leistungen zu erstellen und in einem vom Leistungsaustausch losgelösten, separaten Prozess die angefallenen Kosten zu verrechnen, werden in der Wertbildungsrechnung die Leistungen an sich Gegenstand der Betrachtung. Dadurch soll vermieden werden, dass gearbeitet wird, wo eine Leistung gar nicht erwünscht bzw. notwendig ist: Erst durch einen Ausweis jeder Leistung und durch eine Bepreisung und Abrechnung der Leistung erhält der Empfänger der Leistung Einblick in die Geschehnisse und die Vor- und Nachteile einer Kooperation.

Diese Überlegungen werden anhand der Leistungskataloge instrumentalisiert. Das Unternehmen wird dabei so strukturiert, dass jede Abteilung mehrere Leis-

---

<sup>48</sup>Der Begriff des Subunternehmens verdeutlicht den Gedanken des Subsidiaritätsprinzips in der Führung des Unternehmens bei *dm-drogerie markt*, und ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff des Subunternehmens in der Bauwirtschaft. Vgl. Werner (2006).

tungen und/oder verschiedene Abnehmer hat. Für den Leistungskatalog bedeutet dies, dass sowohl nach den verschiedenen Leistungen, als auch nach den verschiedenen Abnehmern unterschieden wird. Jeder Eintrag des Leistungskataloges hat dann potentiell einen anderen Preis und auch eine andere Art der Berechnung.

Da die Abteilung in die Position des unabhängigen Unternehmers versetzt wird, sind im Rahmen der Erstellung eines Leistungskataloges folgende Fragen zu beantworten:

1. Welche Leistungen werden erbracht?
2. Für wen werden die Leistungen erbracht? Wer benötigt die Leistungen?
3. Auf welche Weise werden die Leistungen abgerechnet?
4. Welcher Preis ist für die Leistungen angemessen und zu berechnen?

Der Leistungskatalog erhält damit die in Abbildung 4.5 dargestellte Struktur.<sup>49</sup>

Leistungen (was?)	Kunden (für wen?)	Leistungspreis (für wie viel?)
Leistung A	Kunde A	Preis 1
	Kunde B	Preis 1
Leistung B	Kunde A	Preis 2
	Kunde C	Preis 2

Abbildung 4.5: Struktur des Preis-Leistungskatalogs.

Aufbauend auf den Leistungskatalogen ist es möglich, jeder Abteilung einen eigenen **Bericht der Wertbildungsrechnung** zur Verfügung zu stellen. Grundsätzlich werden dafür die Einnahmen den Ausgaben gegenübergestellt. Dabei sind für ein Subunternehmen nicht nur die Zahlungsströme mit externen Partnern des Unternehmens relevant. Es sind auch die Einnahmen und Ausgaben zu berücksichtigen, die im Leistungsaustausch mit anderen Subunternehmen innerhalb des Unternehmens entstehen.

Der Bericht der Wertbildungsrechnung lässt sich wie folgt strukturieren: Über interne Lieferung von Leistungen kommt das Subunternehmen zu *Erlösen*, über externe Lieferung von Leistungen zu *Umsätzen*. Davon abzuziehen ist der *Wareneinsatz* für die erbrachten Produkte, da dieser nicht zur Bemessung der Wertschöpfung

<sup>49</sup>Vgl. Selders (2007), S. 86.

herangezogen wird.<sup>50</sup> Unter dem Begriff des Wareneinsatzes sind alle physischen Vorprodukte vereint. Aus der Differenz von Umsatz und Wareneinsatz ergibt sich der *Deckungsbeitrag*. Dieser ist jedoch nicht auf ein einzelnes Produkt oder auf eine einzelne Dienstleistung bezogen, sondern auf die Gesamtleistung der Abteilung.<sup>51</sup> Von ihm sind die eingekauften Leistungen zu bezahlen. Dazu zählen einmal die extern bezogenen Leistungen, die *Fremdleistungen*. Weiterhin müssen innerhalb des Unternehmens erbrachte *Vorleistungen* honoriert werden. Letztlich wird eine *Eigenleistung* erbracht, die benutzt werden kann um zu investieren und die Vereinbarungen mit Kapitalgebern, dem Staat und den Mitarbeitern zu erfüllen. Die Wertbildungsrechnung erhält dadurch die in Abbildung 4.6 skizzierte Struktur.

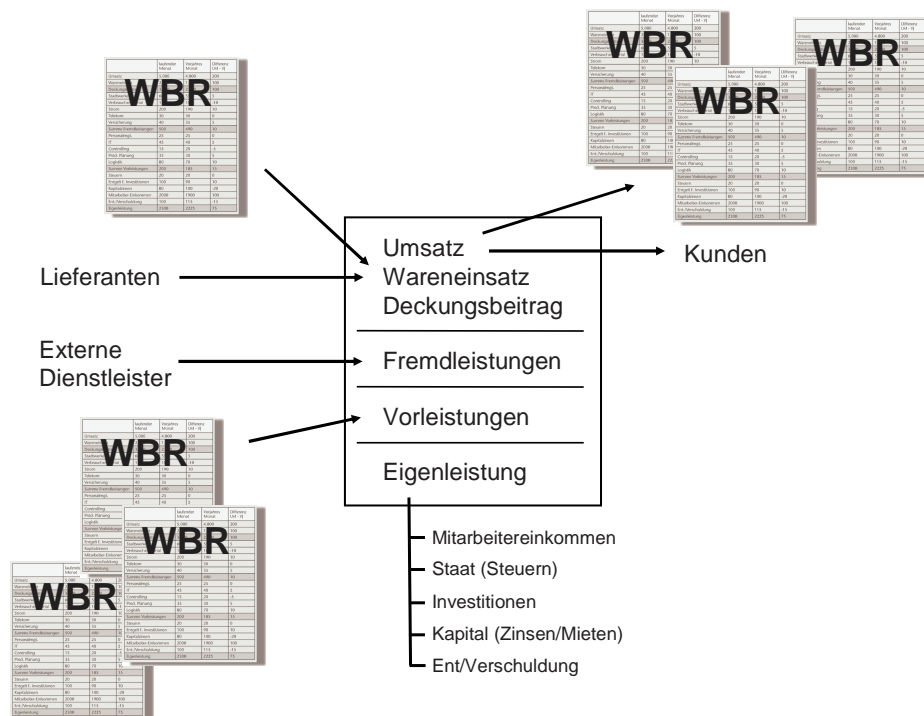


Abbildung 4.6: Struktur der Wertbildungsrechnung [WBR].

Die Positionen Umsatz, Wareneinsatz, und damit der Deckungsbeitrag, resultieren nur bei intern leistenden Abteilungen aus den Preisen der Leistungskataloge. Die

<sup>50</sup>Die Wertschöpfung sei dabei als Gesamtleistung minus Vorleistung definiert.

<sup>51</sup>Im Unterschied zur Deckungsbeitragsrechnung misst die Wertbildungsrechnung Produktmargen wenig Bedeutung zu.

Vorleistungen ergeben sich immer aus den Leistungskatalogen, da sie die sekundären Kosten<sup>52</sup> darstellen.

Abbildung 4.7 illustriert die zwei Stufen der Abrechnung im Bericht der Wertbildungsrechnung. Der linke Teil der Abbildung stellt als erste Stufe den Umsatz (die

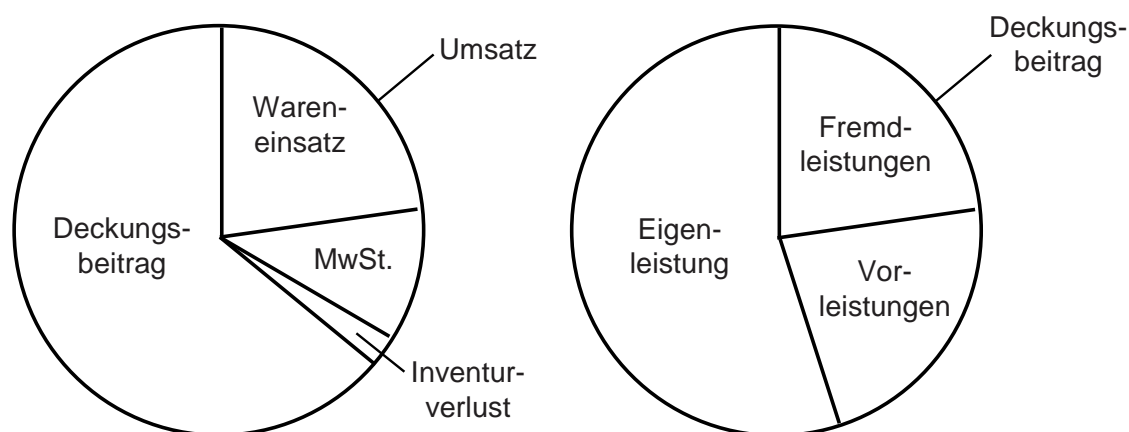


Abbildung 4.7: Die Stufen der Wertbildung.<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Gezeigt von Michael Hansen bei der *Almatura* Partnerinitiative am 06. Juni 2007 in Bickenbach.

Wertbildung) beim Kunden dar. Direkt abzuziehen sind Bestandsdifferenzen (Diebstahl, verdorbene Ware, sonstige Inventurverluste etc.) und die Mehrwertsteuer. Als weitere Position wird an dieser Stelle der Wareneinsatz abgezogen, weil an physischen Vorprodukten keine weitere Wertbildung erfolgt. Aus dem Verständnis der Wertbildungsrechnung lässt sich dies damit begründen, dass der Kunde den Wareneinsatz auch selber beim Hersteller beziehen könnte, da er fertige Produkte darstellt. Der Wareneinsatz erhöht den Umsatz zwar dem Betrag nach, hat aber relativ gesehen keine Auswirkungen auf den Beitrag des Unternehmens. Beispielhaft lässt sich dies an einem Handelsunternehmen verdeutlichen: die dort angebotene und eingekaufte Ware kann vom Konsumenten theoretisch auch direkt ab Werk gekauft werden. Insbesondere ist ihr Wert schon in den Preisen im Laden enthalten – also ist der Kunde sowieso bereit, den Wert des Produktes an sich zu zahlen. Erst die Spanne aus Ladenpreisen und Warenpreisen, eben der Deckungsbeitrag, zeigt auf, welchen Wert der Kunde dem eigentlichen Handelsunternehmen beimisst. Der Deckungsbeitrag ist im rechten Teil der Abbildung dargestellt und gliedert sich auf in Fremdleistungen, Vorleistungen und Eigenleistungen.

<sup>52</sup>Sekundäre Kosten fallen für vom Betrieb selbst erzeugte und selbst verbrauchte Leistungen an. Vgl. Eisele (1993), S. 580.

Es zeigt sich, dass die Wertbildungsrechnung die primären Kosten in Fremdleistung und Eigenleistung aufspaltet.<sup>53</sup> Statt zwei Gruppen von Kosten – primäre und sekundäre Kosten –, existieren in der Wertbildungsrechnung drei Arten von Leistungen: extern von anderen erbrachte Leistungen, intern von anderen erbrachte Leistungen, und selber erstellte Leistungen. Der innerbetriebliche Leistungsaustausch wird also differenziert und wie ein eigenständiger Markt behandelt. Das Ziel besteht darin, sowohl Mittelentstehung als auch Mittelverwendung in einer Rechnung zu vereinen. Die Position der Eigenleistung dient dabei der Darstellung der Wertschöpfung.<sup>54</sup>

Durch die Leistungskataloge und ihre Preise werden Preisgrenzen zwischen den Abteilungen gezogen. So wird erreicht, von den unternehmensweiten Gemeinkosten, z. B. „Rechnungswesen“ oder „Vertriebskosten“, einen Schritt näher an die Kostenentstehung zu gelangen. Eine Abteilung muss Gemeinkosten wie Abschreibungen, Telefonkosten etc. somit intern verteilen, unternehmensweit verrechnete Gemeinkosten fallen durch die Wertbildungsrechnung jedoch weg. Durch die Bepreisung interner Leistungen wird also eine verursachungsgerechte Zuteilung simuliert.<sup>55</sup> Die Vorleistungen der Wertbildungsrechnung beinhalten zwar die Gemeinkosten der traditionellen Kostenstellenrechnung, ersetzen jedoch durch die Leistungsberechnung die Gemeinkostenverrechnung. Die Vorleistungen stellen für das einzelne Subunternehmen auch eine fremderzeugte Leistung dar, obwohl sie im Gesamtbetrieb erzeugte und verbrauchte Leistungen sind. Erst durch ihren eigenständigen Begriff wird dem Subunternehmen deutlich, welche zugekauften Leistungen im Unternehmen verhandelbar sind und welche am Markt bezogen werden. Die Vorleistung der Wertbildungsrechnung ist das Bindeglied zwischen den Abteilungen und damit Ausdruck der strategischen Kooperation im Unternehmen.

Die Wertbildungsrechnung will anregen, den internen Markt des Unternehmens als ein Netzwerk von interdependenten Produzenten aufzufassen. Aus Sicht der Wertbildungsrechnung besteht das Unternehmen aus einer Vielzahl von spezialisierten Einheiten, die einander mit Gütern und Leistungen beliefern, um letztendlich das marktfähige Produkt bzw. die marktfähige Dienstleistung hervorzubringen. Das Unternehmen ist ein Netzwerk der Kooperation. Diese Sichtweise lässt sich auf alle

---

<sup>53</sup>Scheytt (2004), S. 73 bezeichnet dies als „revolutionär“.

<sup>54</sup>Die Wertschöpfung sei dabei als Gesamtleistung minus Vorleistung definiert. Vgl. Weber (1993) zum Begriff der Wertschöpfung.

<sup>55</sup>Vgl. Hardorp (1987), S. 214–218.



Formen von Organisationen erweitern, zum Beispiel auf Nichtregierungsorganisationen oder Non-Profit-Organisationen.

Angesichts des netzwerkartigen Leistungsaustauschs in Unternehmen ist aus Sicht der Wertbildungsrechnung ein Mangel an den üblichen Verfahren auszumachen: Sie geben nicht den eigentlich horizontal verlaufenden Leistungsprozess des Unternehmens wieder und stellen somit nicht den durch die Arbeitsteilung entstehenden wechselseitigen Leistungsaustausch des Unternehmens dar. Sie begreifen das Unternehmen als eine funktionale Differenzierung und nicht als einen Wertfluss zum Kunden. Aufgrund dieses Sachverhalts lässt sich kritisierend anbringen, dass Leistungsströme durch Umlagen und Kostenverrechnungen nicht richtig abgebildet werden.<sup>56</sup>

Laut Berger (2004) sind die Instrumente heutiger Kostenrechnung deshalb so entwickelt worden, weil das dahinter stehende Controlling-Verständnis dahin führt. In den Augen der Controlling-Wissenschaft funktionieren die Unternehmen (organisationstheoretisch gesehen) prinzipiell durch die Trennung des dispositiven Faktors vom ausführenden Faktor (Planung → Ausführung → Kontrolle). Das Weltbild des Controlling sei als zentralistisch und mechanistisch zu bezeichnen.<sup>57</sup> Im Unterschied dazu betonen Befürworter einer Prozessorientierung, wie z. B. Kaplan und Cooper (1999), den Markt oder Vertreter des „*Lean Thinking*“,<sup>58</sup> alternative Sichtweisen. Ein der Wertbildungsrechnung ähnlicher Ansatz findet sich im *Value Stream Costing*, einem Instrument des *Lean Accounting*.<sup>59</sup>

*What you really need is value stream/product-based costing [...] so that all participants in a value stream can see clearly whether their collective efforts are adding more cost than value or reverse.*<sup>60</sup>

Gemäß diesem Ansatz geht die Fokussierung auf Prozesse innerhalb des Unternehmens mit einer Dezentralisierung von Verantwortung einher. Die Begründer des

---

<sup>56</sup>Vgl. Abschnitt 4.1.4.

<sup>57</sup>Vgl. Berger (2004), S. 98–99.

<sup>58</sup>Das *Lean Thinking* basiert auf der Untersuchung von Jones et al. (1990) des Toyota Produktionssystems. Vgl. insbesondere Kuhn (2000), S. 53–56 und S. 59–65 und Selders (2006).

<sup>59</sup>Zu den ersten Ansätzen des *Lean Accounting* sei auf Maskell und Baggaley (2004), Huntzinger (2007) und Stenzel (2007) verwiesen.

<sup>60</sup>Vgl. Jones und Womack (2003), S. 262.

*Wertstromdesigns*,<sup>61</sup> Rother und Shook, stellen drei Prinzipien für Informationssysteme auf:<sup>62</sup>

1. Das Instrument sollte die Mitarbeiter vor Ort in die Lage versetzen, „das gewünschte Verhalten an den Tag zu legen.“
2. „Das Instrument sollte dem oberen Management Informationen liefern, um Entscheidungen treffen zu können.“
3. „Prinzip 1 kommt vor Prinzip 2.“

Es ist mithin nicht zielführend, wenn die Führung auf der einen Seite strategisches Verhalten der Mitarbeiter einfordert, auf der anderen Seite jedoch nicht die dazu notwendigen Instrumente bereitstellt. Dazu gehört, dass die Zusammenhänge in der Organisation durch entsprechende Instrumente für jeden wirklichkeitsgerecht wahrnehmbar gemacht werden. Diese Prinzipien und die Fokussierung auf den Leistungsaustausch werden durch das als Fallbeispiel betrachtete Instrument der Wertbildungsrechnung offensichtlich umgesetzt.

Es ist hervorzuheben, dass die Wertbildungsrechnung nicht der einzige derartige Ansatz ist. Ähnliche Ansätze finden sich im erwähnten Lean Accounting. Unter dem Begriff der *pretialen Lenkung* wird eine marktwirtschaftliche Koordination des Leistungsaustauschs anhand von Preisen verstanden.<sup>63</sup> Auch existieren weitere Praxisbeispiele, die verschiedene Alternativen und Entwicklungsmöglichkeiten der Kostenrechnung und des Berichtswesens aufzeigen.<sup>64</sup> Die Wertbildungsrechnung wird als Fallbeispiel angeführt, weil sie den im Weiteren vorgeschlagenen Lösungsvorschlag motiviert. Die Organisation wird im Folgenden als Netzwerk aufgefasst. Die Teilnehmer des Netzwerks sollen durch ein Zuteilungsverfahren befähigt werden, die arbeitsteiligen Beziehungen nachzuvollziehen. Weil die Arbeitsteilung der wesentliche Grund ist, warum Organisationen (und andere Formen der Kooperation) gebildet werden,<sup>65</sup> wird im Weiteren ein Zuteilungsverfahren entwickelt, das jeweils deutlich macht, wann die Zusammenarbeit die Spieler besser stellt, und wann nicht.

---

<sup>61</sup>Das Wertstromdesign hat zum Ziel, ausgehend vom aktuellen Stand einer Produktion und deren Prozesse eine flussorientierte Produktion zu konzipieren und zu realisieren. Es ist damit Bestandteil bzw. Ergänzung des Lean Thinking. Vgl. Rother und Shook (2000).

<sup>62</sup>Vgl. Rother und Shook (2000), S. 101.

<sup>63</sup>Vgl. Laux und Liermann (2003), S. 385 und Milgrom (1992), S. 79–81.

<sup>64</sup>Beispiele (unter anderem auch die Wertbildungsrechnung) werden in Pfläging (2006) beschrieben.

<sup>65</sup>Vgl. Coase (1937) und Abschnitt 2.6.

Aus dieser Sichtweise folgt der **Lösungsvorschlag für die gegebene Aufgabenstellung**: Die Kooperation wird netzwerkartig dargestellt, um Beziehungen zwischen Organisationsteilen explizit zu betrachten und abzubilden.<sup>66</sup> Es werden nicht die Produkte als Spieler aufgefasst, sondern die Manager, die einen Bereich der Organisation repräsentieren. Das grundlegende Modell ist in Abbildung 4.8 skizziert und wird in Abschnitt 4.4 formalisiert. Wegen der charakteristischen Struktur eines Unternehmens, dass die einzelnen Bereiche unter einer Führung angeordnet sind, um ihren Beitrag zu einem möglichst großen (wie auch immer definierten) Unternehmenserfolg zu leisten, wird hier der kooperative Ansatz favorisiert. Der kooperative Markt wird im Sinne einer *Föderation* als Zusammenschluss selbständiger Einheiten zu einem Ganzen interpretiert.

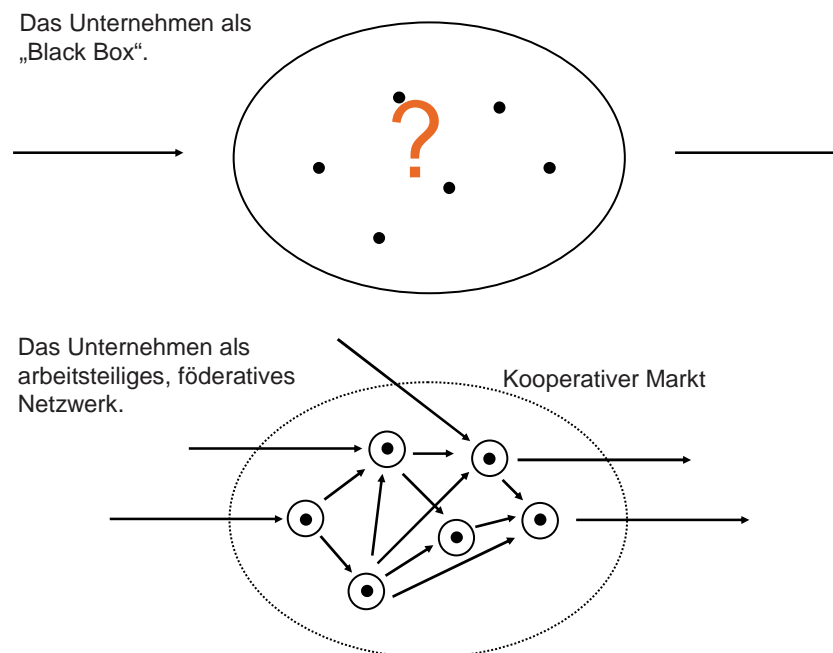


Abbildung 4.8: Betrachtung des Unternehmens als föderatives Netzwerk.

Somit wird Wißlers Fragestellung gefolgt, ob es Zuteilungsverfahren gibt, „die durch die adäquate Berücksichtigung strategischen Verhaltens der Entscheidungsträger zu einem besseren Ergebnis führen, als die klassischen Kostenrechnungsverfahren.“<sup>67</sup> Dieses Zuteilungsverfahren hat hinreichend praktikabel zu sein, um die

<sup>66</sup>Vgl. dazu den Begriff der *Integrationsphase* von Glasl und Lievegoed (2004), mit dem eine Prozessorientierung über eine ausdifferenzierte Struktur hinweg beschrieben wird. Zur praktischen Umsetzung vgl. Beadle und Hemming (1992).

<sup>67</sup>Vgl. Wißler (1997), S. 25.

heutzutage verwendeten Verfahren potentiell ersetzen zu können. Es bleibt zu untersuchen, ob der aus der Betrachtungsweise entwickelte Lösungsvorschlag den spieltheoretischen Kriterien genügt.

### 4.3 Bewertung der Verfahren anhand der spieltheoretischen Kriterien

Analog zu Abschnitt 2.5 werden die angeführten Kostenrechnungsverfahren anhand der spieltheoretischen Kriterien bewertet. Wißler (1997) stellt erstmalig eine spieltheoretisch motivierte Übersicht für in der Praxis verwendete und nicht nur für spieltheoretische Verfahren auf.

In Tabelle 4.1 werden die spieltheoretischen Kriterien für Zuteilungsverfahren wieder in den Zeilen angeführt. In den Spalten werden die Verfahren der Deckungsbeitragsrechnung [DB], der Grenzplankostenrechnung [GPK] und der Prozesskostenrechnung [PKR] eingetragen. Auch die proportionalen Zuteilungsverfahren [Prop.] werden als Verfahren der Praxis erneut angeführt. Zusätzlich wird mit der Spalte „Lösungsvorschlag“ vermerkt, dass der vorgeschlagene Lösungsvorschlag noch auf seine spieltheoretischen Kriterien zu untersuchen ist.<sup>68</sup> Die Bewertung der Kostenrechnungsverfahren erfolgt analog zu Wißler (1997).<sup>69</sup>

Tabelle 4.1: Tabellarischer Vergleich der Kostenrechnungsverfahren.

Eigenschaft	DB	GPK	PKR	Prop.	Lösungsvorschlag
Effizienz			✓	✓	zu untersuchen
Individuelle Rationalität					zu untersuchen
Koalitionsrationalität					zu untersuchen
Stabilität					zu untersuchen
Monotonie im Aggregat	✓	✓		✓	zu untersuchen
Koalitionsmonotonie					zu untersuchen
Strenge Monotonie					zu untersuchen
Eindeutigkeit	✓	✓	✓	✓	zu untersuchen
Praktikabilität	✓	✓	✓	✓	zu untersuchen

<sup>68</sup>Vgl. Abschnitt 4.4 und Kapitel 5.

<sup>69</sup>Vgl. Wißler (1997), S. 60–64. Zu den proportionalen Zuteilungsverfahren vgl. Abschnitt 2.5.

Die Deckungsbeitragsrechnung ist als Teilkostenverfahren per Definition ineffizient, da sie die Kosten nicht vollständig verteilt, und ist folglich nicht stabil. Sie kann individuell rational sein, wenn nur die rein variablen Kosten zugeteilt werden, die immer unter den Kosten liegen, die ein Unternehmensbereich eigentlich tragen müsste, würden die Gemeinkosten mitberücksichtigt. Sobald Gemeinkosten berücksichtigt werden, die direkt auf die Kostenträger umgelegt werden, ist die individuelle Rationalität nicht mehr gewährleistet. Bei Betrachtung aus anderer Perspektive kommt man zu dem gleichen Schluss: Da die Deckungsbeitragsrechnung per Definition weniger als die verursachten Kosten zuteilt, gewinnen dadurch einige Spieler unberechtigte Vorteile: die Nutznießer dieses Effekts sind die Spieler, die am Ende des Wertschöpfungsprozesses stehen und seine volle Leistung beziehen, aber nicht seine Kosten zugeteilt bekommen. Diese Spieler werden zwangsläufig subventioniert.<sup>70</sup> Mit dem gleichen Argument lässt sich für die Deckungsbeitragsrechnung die Erfüllung der Koalitionsmonotonie ausschließen. Aufgrund der Proportionalität in der Kostenzuteilung kann jedoch davon ausgegangen werden, dass die Monotonie im Aggregat erfüllt wird.<sup>71</sup>

Die Grenzplankostenrechnung ist als Teilkostenverfahren per Definition ebenfalls ineffizient und folglich nicht stabil. Obwohl die Grenzplankostenrechnung eine Teilkostenrechnung ist und nicht alle Gemeinkosten zuteilt, erfüllt sie die individuelle Rationalität nicht, da sie jedem Spieler einen festen Anteil an Gemeinkosten auferlegt.<sup>72</sup> Deshalb stellt sie nicht sicher, dass Spieler Gemeinkostenanteile tragen, die sie verursacht haben bzw. kann es andersherum Spieler geben, deren Anteil an zu tragenden Gemeinkosten größer ist als es der berechtigterweise zu tragende Anteil wäre. Folglich ist sie weder koalitionsrational noch stabil.<sup>73</sup> Aus demselben Grund

---

<sup>70</sup>Wißler (1997), S. 60–64 sieht darin eine Stärke der Deckungsbeitragsrechnung. Weil Wißler die Produkte (bzw. die dafür zuständigen Manager) als Spieler sieht und in der Deckungsbeitragsrechnung kein Produkt seine vollen Kosten tragen muss, ist die Deckungsbeitragsrechnung unter Wißlers Annahmen immer individuell rational. Unter der Perspektive der Leistungsberechnung gilt dies jedoch gerade nicht. Trotzdem beurteilt Wißler die Deckungsbeitragsrechnung als instabil, weil die Koalitionsrationalität aufgrund der Gemeinkostenzuteilung in der Deckungsbeitragsrechnung nicht gegeben sei.

<sup>71</sup>Proportionale Verfahren sind monoton im Aggregat, vgl. Young (1994), S. 1210.

<sup>72</sup>Vgl. Wißler (1997), S. 61.

<sup>73</sup>Aus derselben Argumentation folgt, dass auch die Deckungsbeitragsrechnung nicht koalitionsrational und somit nicht stabil ist. Darüberhinaus zeigen Hamlen et al. (1977), S. 624, dass beide Verfahren Kosten relativ gleichmäßig verteilen. Dies kann bei der Gemeinkostenzuteilung ungünstig sein, da so der zu tragende Anteil an den Kosten unabhängig von der Divisionsgröße bzw. der Produktrelevanz ist.

wird die Grenzplankostenrechnung – analog zur Deckungsbeitragsrechnung – nicht als koalitionsmonoton, sondern lediglich als monoton im Aggregat bewertet.

Zusätzlich ist anzuführen, dass die Deckungsbeitrags- und die Grenzplankostenrechnung nicht die Dummy-Eigenschaft aus Definition 2.29 erfüllen.<sup>74</sup> Laut Satz 2.4 wird diese von der strengen Monotonie vorausgesetzt, so dass die Verfahren nicht streng monoton sind. Dies deckt sich mit Satz 2.5, dass der Shapley-Wert das einzige streng monotone Zuteilungsverfahren ist.

Die Prozesskostenrechnung verteilt alle im Unternehmen anfallenden Kosten, ist also effizient. Es ist nicht formal nachprüfbar, ob sie individuell rational bzw. monoton im Aggregat ist. Diese Eigenschaften lassen sich im Einzelfall nur dadurch überprüfen, dass die in der Prozesskostenrechnung definierten Aktivitäten<sup>75</sup> untersucht werden. Da das Kostenteilungsspiel jedoch so modelliert wird, dass die Manager der Abteilungen als Spieler fungieren, lassen sich zur Prozesskostenrechnung keine Aussagen machen, weil sie den Schritt der Kostenstellenrechnung umgeht.

Anhand von Tabelle 4.1 lässt sich festhalten, dass die Zuteilungsverfahren der Praxis weder stabil noch streng monoton sind. Sie erfüllen zwar die Anforderungen der Praxis, mit vertretbarem Aufwand umsetzbar zu sein, sind jedoch aus spieltheoretischer Sicht keine Alternative. Dies wurde schon von Thomas (1978) bemängelt, der der Buchhaltungs- und Controllinggemeinde vorwarf, beliebige Zuteilungen bar jeder Systematik zu verwenden.<sup>76</sup> Darauf antwortete Callen (1981), dass dieser Vorwurf nicht gerechtfertigt sei: Solange man sich auf drei grundlegende und plausible Eigenschaften verständige (nämlich die von Shapley geforderten Eigenschaften)<sup>77</sup>, stünde mit dem Shapley-Wert ein geeignetes Zuteilungsverfahren zur Verfügung.<sup>78</sup> Die Forderung von Callen wurde jedoch bis heute nicht umgesetzt, was dadurch begründet werden kann, dass der Shapley-Wert nicht praktikabel ist.

Nach den Diskussionen aus Abschnitt 2.6 und diesem Abschnitt lässt sich abschließend festhalten, dass weder in der kooperativen Spieltheorie noch in der Praxis ein Zuteilungsverfahren für kooperative Märkte existiert, das stabil und praktikabel ist.

---

<sup>74</sup>Siehe Abschnitt 2.4.1. Vgl. Wißler (1997), S. 62.

<sup>75</sup>Vgl. Abschnitt 4.1.4.

<sup>76</sup>Vgl. Thomas (1978).

<sup>77</sup>Vgl. Abschnitt 2.4.1.

<sup>78</sup>Vgl. Callen (1981).

## 4.4 Modellierungsansatz der vorgeschlagenen Netzwerksichtweise

Um eine Zuteilung nicht anhand der charakteristischen Funktion zu bestimmen, jedoch trotzdem die gewünschten spieltheoretischen Kriterien zu erreichen, wird gemäß Abschnitt 4.2 zur Lösung der Aufgabenstellung folgendes Vorgehen vorgeschlagen: In einem kooperativen Markt werden selbstständig entscheidende Einheiten betrachtet, die füreinander Leistungen erbringen. Insbesondere verfügt jede Einheit über eine eigene Produktionstechnologie, die beliebige Inputs der anderen Einheiten und vom externen Markt einsetzen kann, und aus der eine Mehrzahl von Gütern hervorgeht, die von den anderen Einheiten oder vom externen Markt nachgefragt werden. In Kapitel 5 wird (spieltheoretisch) gezeigt, dass sich aus diesem Vorgehen heraus eine praktikable und eindeutige Handlungsempfehlung ableitet, wie gemeinsame Kosten, die durch die Kooperation anfallen, so zugeteilt werden können, dass die freiwillige Zusammenarbeit gesichert ist. In den folgenden Ausführungen wird das zugrundeliegende Modell ausgearbeitet. Es wird die Annahme getroffen, dass alle in der Kooperation zu erstellenden Leistungen einer Einheit exklusiv zugewiesen werden, so dass monopolistische Verhältnisse entstehen, die die Einheiten als *Mehrproduktmonopole* charakterisieren.<sup>79</sup> Das Zuteilungsverfahren soll die Akteure in die Lage versetzen zu entscheiden, welche Koalitionen gebildet werden, wobei die Zielsetzung darin liegt, die große Koalition (falls der Kern des Spiels nichtleer ist) zu ermöglichen. Es bedarf also folgender Schritte:

- **Föderation:** Der interne Markt der Gemeinschaft wird (pro Spieler) in einzelne Produzenten (Mehrproduktmonopole) unterteilt.
- **Prozesssicht im Netzwerk:** Leistungszusammenhänge des kooperativen Marktes werden möglichst realitätsgerecht abgebildet.
- **Transparenz:** Von den anderen Spielern bezogene und verbrauchte Leistungen und von anderen Spielern nachgefragte bzw. für andere Spieler erstellte Leistungen werden abgebildet, so dass jeder Spieler selbstständig (dezentral und autonom) seine strategischen Entscheidungen treffen kann.

Dieser Ansatz wird im Folgenden modelliert. Um eine anschauliche Beschreibung zu liefern, erfolgt diese anhand des internen Marktes eines Unternehmens, ist jedoch auf beliebige Situationen von kooperativen Spielen übertragbar.

---

<sup>79</sup>Vgl. zur Erläuterung und Begründung Kapitel 3.

### 4.4.1 Wechselseitiger Leistungsaustausch zwischen dezentralen Produzenten

In einem Unternehmen mit  $n$  Abteilungen beliefert die Abteilung  $i$  die Abteilung  $j$  mit Leistungen (virtuellen Produkten)<sup>80</sup>  $k \in \{1, \dots, m\}$  zu den Mengen  $q_{ij}^k$ . Für festes  $i$  und festes  $j$  drückt der Vektor  $\mathbf{q}_{ij} \in \mathbb{R}_+^m$  aus, welche Leistungen von  $i$  an  $j$  geliefert werden. Es gelte  $q_{ii}^k = 0$ . Wird nur der Output von einer Leistung  $k$  von  $i$  beschrieben, und nicht näher nach den Empfängern unterteilt, gilt  $q_i^k = \sum_{j=1}^n q_{ij}^k$ . Die Leistungen seien dabei so sortiert, dass sie sich den Abteilungen gruppenweise zuordnen lassen. Bei zwei Abteilungen mit jeweils zwei Leistungen werden  $k = 1$  und  $k = 2$  von der ersten Abteilung, und  $k = 3$  und  $k = 4 (= m)$  von der zweiten Abteilung hergestellt. Wie in der Summe  $\mathbf{q}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_{ij}$  beschrieben, lässt sich der Gesamtoutput von  $i$  als Vektor darstellen zu  $\mathbf{q}_i = (q_i^1, \dots, q_i^m)$ . Da eine Abteilung nicht alle Leistungen herstellt, die es im Unternehmen gibt, sondern nur einen Teil davon, ist  $q_i^k > 0$  für die Leistungen, die  $i$  anbietet, und  $q_i^k = 0$  sonst. Daraus folgt, dass  $q_{ij}^k > 0$  dann, wenn  $i$  die Leistung  $k$  anbietet und wenn  $j$  diese Leistung auch bezieht. Aus  $q_i^k = 0$  folgt  $q_{ij}^k = 0$  für alle  $j$  für dieses  $k$ .

Das gesamte Produktionsprogramm einer Unternehmung ergibt sich aus der Summe aller Einzelproduktionen,  $\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i$ . Weil jede Abteilung einen Monopolstatus für ihr Sortiment hat, wird jedes Produkt nur von einer Abteilung hergestellt, und es gibt eine klare Zuordnung der Produkte zu Abteilungen im Unternehmen. Bei der Summe gibt es pro Produkt  $k$  nur einen positiven Eintrag  $q_i^k > 0$ , alle  $q_j^k = 0$  für alle  $j \neq i$ . Aus diesem Grund ergibt die Addition der Sortimente gerade den Vektor  $\mathbf{q} = (q_1^1, \dots, q_n^m)$ . Mit  $\bar{\mathbf{q}}$  und  $\bar{\mathbf{q}}_i$  werden die Mengen bezeichnet, die sich aufgrund der exogen vorgegebenen Nachfrage aller Spieler ergeben.

Als Beispiel wird ein Automobilunternehmen betrachtet, anhand dessen gezeigt wird, wie eine dezentrale Mengensteuerung des Leistungsaustauschs abgebildet werden kann. Im Folgeabschnitt wird aufbauend darauf die Input-Output Analyse des Unternehmens entwickelt.<sup>81</sup> Vgl. zur beispielhaft durchgeführten Berechnung des Produktionsprogramms – dem so genannten *Gozinto-Verfahren* – Vazsonyi (1962) und Neumann (1996), S. 81–90.

Das Beispielunternehmen besteht aus den  $n = 3$  Abteilungen „Verwaltung“ (Einkauf des Materials etc.), „Fertigung“ und „Montage“. Die Fertigung produziert dabei

<sup>80</sup>Leistungen sind Dienstleistungen oder hergestellte physische Produkte.

<sup>81</sup>Vgl. Abschnitt 4.4.2.



zwei Produkte, Räder und Motoren, die Montage liefert das Endprodukt Auto. Insgesamt gibt es damit  $m = 4$  Leistungen  $k$ . Pro Auto werden 4 Räder, ein Motor und 10 „Einheiten“ Verwaltung (2 pro Rad und 2 pro Motor) benötigt. Die linear-limitationale Produktionsfunktion (auch Leontief-Produktionsfunktion genannt) lautet somit

$$\text{Auto} = \min \left( \frac{\text{Verwaltung}}{10}; \frac{\text{Motor}}{1}; \frac{\text{Rad}}{4} \right)$$

Lautet die Nachfrage (der Marktbedarf)  $\mathbf{B} = (0, 0, 0, 10)$ , werden also zehn Autos nachgefragt, dann sind 100 Einheiten Verwaltung, 10 Motoren und 40 Räder das optimale Produktionsprogramm, so dass

$$\bar{\mathbf{q}}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}_1 + \bar{\mathbf{q}}_2 + \bar{\mathbf{q}}_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Wird die Produktion dezentral gesteuert, lauten die Produktionsfunktionen wie folgt:

i	Abteilung	k	Leistung	Produktionsfunktion
1	Verwaltung	1	Verwaltung	–
2	Fertigung	2	Motor	$\min \left( \frac{\text{Verwaltung}}{2} \right)$
		3	Rad	$\min \left( \frac{\text{Verwaltung}}{2} \right)$
3	Produkt	4	Auto	$\min \left( \frac{\text{Motor}}{1}; \frac{\text{Rad}}{4} \right)$

Daraus ergibt sich die *Direktbedarfsmatrix*  $D$  der Dimension  $4 \times 4$  ( $m \times m$ ), in der in den Zeilen und in den Spalten die Leistungen abgetragen sind. Sie gibt an, welche Mengen von Leistungen direkt in eine übergeordnete Leistung eingehen.<sup>82</sup>

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der Direktbedarfsmatrix  $D$  und der Marktnachfrage  $\mathbf{B}$  werden die zu erstellen den Mengen aller Abteilungen bestimmt. Dazu sind folgende Umformungen notwen-

<sup>82</sup>Die Direktbedarfsmatrix wird deshalb auch als *Baukastenmatrix* bezeichnet.

dig: Sei  $I$  die *Einheitsmatrix*. Durch Subtraktion der Direktbedarfsmatrix  $D$  von  $I$  folgt

$$I - D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um die gewünschten Outputmengen  $\bar{\mathbf{q}}$  der einzelnen Leistungen zu bestimmen, wird das lineare Programm

$$(I - D) \cdot \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{B} \quad (4.1)$$

gelöst. Durch die Invertierung von  $(I - D)$  erhält man die *Gesamtbedarfsmatrix*  $G$ .

$$G = (I - D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilen von  $G$  enthalten einen Verwendungsnachweis, in den Spalten lässt sich die Mengenübersicht ablesen.<sup>83</sup> Durch Umformung von (4.1) folgt:

$$\bar{\mathbf{q}} = (I - D)^{-1} \cdot \mathbf{B} = G \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Durch diese Art der Bedarfsermittlung wird eine zentrale Koordination unnötig, um die ausgetauschten Mengen zu ermitteln. Die Abteilungen benötigen nur Kenntnis über ihre Technologie und den Bedarf ihrer Abnehmer. Durch die Nachfrage  $\mathbf{B}$  wird dem Unternehmen der Bedarf des Marktes mitgeteilt. Über eine Erweiterung der Matrix  $D$  ist es möglich, Inputfaktoren vom externen Markt zu berücksichtigen.

#### 4.4.2 Der Leistungsaustausch in der Input-Output Analyse

In diesem Abschnitt wird der Leistungsaustausch zu einem allgemeinen Modell weiterentwickelt, in das die Verteilung der Kosten über Preise integriert wird. Zuerst wird der Leistungsaustausch allgemein formuliert und strukturiert dargestellt. Die

<sup>83</sup>Die Gesamtbedarfsmatrix wird deshalb auch als *Mengenübersichtsmatrix* bezeichnet.

dafür benötigte Bedarfsermittlung lässt sich direkt aus Gleichung (4.1) ablesen. Als Ergebnis erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1^1 \\ q_2^2 \\ q_2^3 \\ q_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} q_1^1 = 2q_2^2 + 2q_2^3 \\ q_2^2 = q_3^4 \\ q_2^3 = 4q_3^4 \\ q_3^4 = 10. \end{cases}$$

Aus dem Gleichungssystem lässt sich direkt ablesen, wie viel Einheiten  $q_{ij}^k$  einer Leistung  $k$  bei gegebenem Bedarf  $\mathbf{B}$  von  $i$  an  $j$  geliefert werden. Zusätzlich lässt sich ablesen, für welche Leistungen  $l \in (1, \dots, m)$ , die  $j$  erbringt, die Leistung  $k$  von  $i$  abgerufen wird. So liefert die zweite Abteilung vier Einheiten des Gutes  $k = 3$  zur Herstellung von einer Einheit des Gutes  $l = 4$  an die dritte Abteilung. D.h.,  $q_{23}^{34} = 4$  für eine Einheit des vierten Gutes. Es gelte  $q_{ij}^{kl} = 0$  für alle  $i = j$  und für alle  $k = l$ . Diese Verflechtungen lassen sich in der *erweiterten Verflechtungsmatrix*  $\tilde{Q}$  darstellen.  $\tilde{Q}$  ist leistungsbezogen und hat  $m \times m^{84}$  Einträge.

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\tilde{Q}$  kann vereinfacht werden, wenn vernachlässigt wird, in welche Leistungen  $l$  des Abnehmers  $j$  die Leistung  $k$  von  $i$  einfließt.  $q_{ij}^{kl}$  wird so in  $q_{ij}^k$  überführt. Dadurch entsteht eine Ungenauigkeit, wenn z. B. die Verwaltung 2 Einheiten für ein Rad an die Fertigung liefern würde, aber 7 Einheiten pro Motor. Aus der daraus folgenden Gesamtleistung von 15 pro Auto würde dann ein Mittel von 3 pro Zwischenprodukt entstehen.<sup>85</sup> Es geht somit die Information verloren, wie viel Input für ein einzelnes Produkt tatsächlich verwendet wird. Diese Vereinfachung stellt die Abkehr von

<sup>84</sup>Sowohl in den Zeilen als auch in den Spalten sind die Leistungen abgetragen.

<sup>85</sup>Die Leistungsverflechtung verliert an Information, der Output eines Produktes  $k$  an die Abteilung  $j$  bleibt jedoch gleich:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ wird zu } D' = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

einer verursachungsgerechten Zuordnung von Leistungen und Kosten im Unternehmen dar. Tatsächlich ist es bis auf den Bereich der physischen Produkte, für die über eine Materialliste die Inputs bestimmt werden können, in der Praxis schwer möglich, sämtliche Aufwände verursachungsgerecht zuzuteilen. Die 100 Einheiten Verwaltung, die an die zweite Abteilung gehen, stellen für diese Gemeinkosten dar, wenn sie daraus ihre eigenen Produktpreise kalkulieren muss. Auf diesen Sachverhalt wird in Abschnitt 4.4.3 eingegangen, hier sei nur angemerkt, dass keine verursachungsgerechte Zuteilung versucht wird, dass aber auch noch keine traditionellen Gemeinkosten auftauchen, die über die ganze Firma verteilt werden müssen, da Leistungsbeziehungen zwischen den Abteilungen nach wie vor berücksichtigt werden. Allein die produktgenaue Zuordnung wird als nicht realistisch eingestuft. Die Matrix  $Q'$  der Dimension  $m \times n$ <sup>86</sup> lässt sich dann schreiben als

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ersichtlich bleibt, dass die 100 Einheiten der Abteilung 1 für die zweite Abteilung, die zwei Zeilen umfasst, bestimmt sind, werden alle Einträge  $q_{ij}^k$  für festes  $i$  und festes  $j$  zusammengefasst. Diese Zusammenfassung bezieht sich auf Leistungen, die von einer Abteilung, bezeichnet als *Lieferant*, erstellt werden, und die einer weiteren Abteilung, bezeichnet als *Empfänger*, zukommen. Die vom Lieferanten nicht angebotenen Leistungen werden dabei nicht auf Null gesetzt, sondern aus dem Vektor entfernt, so dass gilt:

$$\mathbf{q}_{ij}^* = \begin{pmatrix} \underline{m}_i \\ q_{ij}^{\underline{m}_i} \\ \vdots \\ q_{ij}^{\overline{m}_i} \end{pmatrix},$$

wobei mit  $\underline{m}_i$  und  $\overline{m}_i$ , beide in  $\{1, \dots, m\}$ , der Bereich der Produkte bezeichnet wird, der von  $i$  angeboten wird.  $\mathbf{q}_{ij}^*$  hat dabei so viele Komponenten wie die Anzahl der Leistungen, die  $i$  insgesamt anbietet, nämlich  $\overline{m}_i - \underline{m}_i + 1$ .<sup>87</sup> Setzt man aus den

<sup>86</sup>Die Leistungen stehen in den Zeilen, in den Spalten stehen die Abteilungen.

<sup>87</sup>Dadurch gilt, dass die Summe aller Einzelangebote gerade der Gesamtzahl  $m$  aller Leistungen im Unternehmen entspricht, also

$$\sum_{i=1}^n (\overline{m}_i - \underline{m}_i + 1) = m.$$

Vektoren  $\mathbf{q}_{ij}^*$  die *Verflechtungsmatrix*  $Q$  zusammen, so wird die Matrix  $Q$  übersichtlich als  $n \times n$  Matrix geschrieben, hat jedoch die Dimension  $m \times n$ . In den Zeilen und Spalten stehen die Abteilungen, „öffnet“ man eine Zeile  $i$ , erhält man die Leistungen  $(\underline{m}_i, \dots, \overline{m}_i)$  von  $i$ . Die Leistungen werden also abteilungsweise geordnet. Die Verflechtungen zwischen allen Abteilungen lassen sich dadurch übersichtlich darstellen mit

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{11}^* & \cdots & \mathbf{q}_{1i}^* & \cdots & \mathbf{q}_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_{i1}^* & \cdots & \mathbf{q}_{ii}^* & \cdots & \mathbf{q}_{in}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_{n1}^* & \cdots & \mathbf{q}_{ni}^* & \cdots & \mathbf{q}_{nn}^* \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Die Spaltenvektoren von  $Q$  sind dabei die aneinander gesetzten Vektoren  $\mathbf{q}_{ij}^*$ . Durch  $\mathbf{q}_{ij}^*$  wird der Teil der positiven Komponenten aus  $\mathbf{q}_{ij}$  „herausgeschnitten“, so dass  $Q$  die Dimension  $m \times n$  statt  $n \cdot m \times n$  hat. Die redundanten „Leerzeilen“ werden entfernt.

Betrachtet man eine Zeile  $i$  von  $Q$ , ergibt die Zeilensumme über  $j$  gerade den Absatz von  $i$ ,  $\mathbf{q}_i^* = \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_{ij}^*$ . Hingegen liefert  $\mathbf{q}_{\bullet j} = \sum_{i=1}^n \mathbf{q}_{ij}$  den zusammengesetzten Spaltenvektor einer Spalte  $j$  aus  $Q$ . Die  $i$ -te Zeile von  $Q$  gibt also an, was  $i$  (an alle) liefert und die  $j$ -te Spalte von  $Q$  gibt an, mit was  $j$  (von allen) beliefert wird.

$\mathbf{q}_{\bullet j}$  kann als Nachfrage  $\mathbf{d}_j = (q_{1j}^1, \dots, q_{nj}^m)$  von  $j$  nach allen im Unternehmen angebotenen Leistungen interpretiert werden. Die Gesamtnachfrage entspricht folglich dem gesamten Produktionsprogramm.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1^* \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^* \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \overline{\mathbf{q}}_i = \overline{\mathbf{q}} = \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_j.$$

Mit den angegebenen, in  $Q$  enthaltenen Bedingungen wird der Leistungsaustausch vollständig beschrieben. Im Folgenden wird die physische Produktion in Transaktionen mit einem reinen Geldwert überführt. Dazu wird die Mengenmatrix mit Preisen versehen: Die Abteilung  $i$  bietet alle ihre Leistungen  $q_i^k$  zu einem Preis  $p_i^k$  an. Analog zu  $\mathbf{q}_{ij}$ ,  $\mathbf{q}_{ij}^*$  und  $Q$  seien die Vektoren  $\mathbf{m}_{ij}$ ,  $\mathbf{m}_{ij}^*$  und die Matrix  $P$  definiert. Um die

Produktflüsse der Matrix  $Q$  zu bewerten, wird diese mit der *Preismatrix*  $P$  komponentenweise multipliziert.

**Definition 4.1. Komponentenweises Produkt (\*)**

Als *komponentenweises Produkt (\*)* zweier Matrizen wird die Matrix bezeichnet, die die jeweiligen Einträge der Zeile  $i$  und der Spalte  $j$  zweier Ausgangsmatrizen multipliziert, so dass gilt:

$$a_{ij} = b_{ij} \cdot c_{ij}, \quad \forall i, j.$$

**Beispiel 4.1.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 & 2 \cdot 7 \\ 8 \cdot 1 & 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen  $Q$  und  $P$  werden durch das komponentenweise Produkt quasi „übereinander gelegt“, so dass die innerbetrieblichen Güterströme monetär bewertet werden. Die Preismatrix  $P$  besteht aus den Preisvektoren  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}_+^m$ , die für jedes  $i$  die Preise der angebotenen Leistungen angeben. Wenn  $i$  eine Leistung  $k$  nicht anbietet, dann gilt ebenso wie für die Mengen  $q_i^k = 0$  für die Preise  $p_i^k = 0$ . Durch das komponentenweise Produkt von  $q_{ij}$  und  $p_i$  entstehen die monetären Transaktionen  $m_{ij}$  von Abteilung  $i$  an Abteilung  $j$ . Betrachtet man analog zu  $\mathbf{q}_{ij}^*$  auch hier nur die positiven Einträge, erhält man  $\mathbf{m}_{ij}^* = (q_{ij}^{m_i} \cdot p_i^{m_i}, \dots, q_{ij}^{\bar{m}_i} \cdot p_i^{\bar{m}_i})$ . Aus diesen Vektoren lässt sich analog zu  $Q$  die *Transaktionsmatrix*  $M$  erstellen. Die Matrix  $M$  wird wie  $Q$  und  $P$  in  $n \times n$  Form aufgeschrieben, besitzt jedoch die Dimension  $m \times n$ .<sup>88</sup>

$$\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{q}_{ij} * \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} q_{ij}^1 \\ \vdots \\ q_{ij}^m \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p_i^1 \\ \vdots \\ p_i^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{ij}^1 \cdot p_i^1 \\ \vdots \\ q_{ij}^m \cdot p_i^m \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{11}^* & \cdots & \mathbf{m}_{1i}^* & \cdots & \mathbf{m}_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_{i1}^* & \cdots & \mathbf{m}_{ii}^* & \cdots & \mathbf{m}_{in}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_{n1}^* & \cdots & \mathbf{m}_{ni}^* & \cdots & \mathbf{m}_{nn}^* \end{pmatrix}$$

**Definition 4.2. Eins-Vektor  $\mathbf{1}$**

Der Vektor  $\mathbf{1}$  ist ein Zeilen- oder Spaltenvektor mit beliebiger Dimension, in dem

<sup>88</sup>In den Zeilen und Spalten stehen die Abteilungen, „öffnet“ man eine Zeile  $i$ , erhält man die Transaktionen  $(m_i, \dots, \bar{m}_i)$ .

alle Komponenten 1 sind. Das Skalarprodukt von  $\mathbf{1}$  mit einem Vektor  $\mathbf{a}$  ergibt die Summe aller Komponenten von  $\mathbf{a}$ . Beispiel:

$$\mathbf{1} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{a} = a + b + c.$$

Summiert man alle Einträge  $\mathbf{m}_{ij}$  für festes  $i, j$  zu  $\hat{m}_{ij}$  wie folgt auf,<sup>89</sup>

$$\hat{m}_{ij} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}_{ij} = \sum_{k=1}^m q_{ij}^k \cdot p_i^k,$$

so erhält man die Matrix  $\hat{M}$  der Dimension  $n \times n$ . In dieser Matrix geht zusätzlich die Information verloren, für welche Leistungen  $k$  ein Wertstrom von  $i$  an  $j$  fließt. Mit Matrizen dieser Form wird meist gerechnet, wenn Kosten zwischen Abteilungen verrechnet werden sollen.<sup>90</sup> Dann werden sekundäre Kosten per Umlage auf die Kostenstellen verteilt. Im anfänglichen Beispiel aus Abschnitt 4.4.1 würden also einfach die Gesamtkosten der Verwaltung auf die Fertigung umgelegt. Dies entspricht dem klassischen Gemeinkostenproblem, auf welche Abteilungen die Gesamtkosten einer Abteilung umzulegen sind, welches über eine Kostenstellenrechnung gelöst wird. Aufgrund der fehlenden Leistungsbeziehungen kann dies nur über Schlüsselungs- und Umlageverfahren geschehen.<sup>91</sup> Deshalb findet in der hier entwickelten Input-Output Analyse ausschließlich die Matrix  $M$  Verwendung.

Kaplan (1973) gelang es zu zeigen, dass bei einer Struktur  $\hat{M}$  auch bei Selbstbelieferung einer Abteilung  $i$ ,  $\hat{m}_{ii} > 0$ , so gerechnet werden kann, als gäbe es keine Selbstbelieferung, so dass  $\hat{m}_{ii} = 0$ .<sup>92</sup> Die Kosten der „Selbstbedienung“ müssen dann nur anteilmäßig auf die Empfänger der Leistungen von  $i$  verteilt werden. Gilt für die Abteilung  $i$  eine Aufteilung  $[i; j; j'] = [0.1; 0.8; 0.1]$ , so lautet die neue Aufteilung

<sup>89</sup>In der Summe gilt  $q_{ij}^k = 0$ ,  $p_i^k = 0$  für alle  $k$ , die  $i$  nicht herstellt bzw.  $q_{ij}^k = 0$  für alle  $k$ , die  $j$  von  $i$  nicht empfangen. Ebenso kann man  $\hat{m}_{ij}$  bestimmen durch

$$\hat{m}_{ij} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}_{ij}^* = \sum_{k=\bar{m}_i}^{\bar{m}_i} q_{ij}^k \cdot p_i^k.$$

<sup>90</sup>Siehe z. B. Williams und Griffin (1964), Manes (1965), Butterworth und Sigloch (1971) und Livingstone (1969).

<sup>91</sup>Vgl. auch Schweitzer und Küpper (1995), S. 134–138.

<sup>92</sup>Vgl. Kaplan (1973).

$[0; 8/9; 1/9]$ . Die Diagonale der Matrix  $\hat{M}$  ist somit eine Nulldiagonale. Übertragen auf  $M$  bedeutet dies, dass  $\mathbf{m}_{ii} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{m}_{ii}^* = \mathbf{0}$  für alle  $i$  und alle  $k$ .

Zu einer vollständigen Input-Output Analyse fehlen neben den durch  $M$  beschriebenen internen Leistungsbezügen, den sekundären Kosten, hier als *Vorleistungen*  $VL_i$  bezeichnet, noch die externen Beziehungen. Die primären Kosten werden bezeichnet als *Eigenleistung*  $EL_i$ .<sup>93</sup> Um zwischen Preisen für Kunden auf dem externen Markt und Preisen, die an interne Abnehmer berechnet werden, unterscheiden zu können, wird mit  $p_{ic}^k$  der Marktpreis bezeichnet. Mit dem Verkauf an die Kunden  $c$  wird der *Realumsatz*  $q_{ic}^k \cdot p_{ic}^k$  erwirtschaftet. Die Marktnachfrage wird über  $c$  abgebildet, und stellt den Eintrag  $n + 1$  in der Verflechtungsmatrix dar.

Sei  $u_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}_{ij}$  der Wert der Leistungen für andere Abteilungen,  $\sum_{k=1}^m q_{ic}^k \cdot p_{ic}^k$  der Wert der extern verkauften Güter, und  $\sum_{j=1}^n \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}_{ji}$  der Wert der intern bezogenen Güter der Abteilung  $i$ . Dann wird mit  $U_i$  der *Gesamtumsatz* von  $i$  zusammengefasst zu<sup>94</sup>

$$U_i = \underbrace{\sum_{j=1}^n \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}_{ij}}_{u_i} + \sum_{k=1}^m q_{ic}^k \cdot p_{ic}^k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m q_{ij}^k \cdot p_{ij}^k, \text{ mit } j \in \{1, \dots, n, c\}. \quad (4.4)$$

Mit  $K_i$  werden die *Gesamtkosten* von  $i$  zusammengefasst zu

$$K_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{1} \cdot \mathbf{m}_{ji} + EL_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{k=1}^m q_{ji}^k \cdot p_j^k}_{VL_i} + EL_i. \quad (4.5)$$

Daraus folgt die *Input-Output Analyse*<sup>95</sup>, die im Fall der hier entwickelten Modellierung von volkswirtschaftlichen Fragestellungen auf das Unternehmen übertragen wird.<sup>96</sup> Was in der Volkswirtschaft die Sektoren sind, sind hier die Abteilungen des Unternehmens. Der Realumsatz ist die extern an den Markt abgegebene Leistung. Die Matrix  $M$  stellt die Vorleistungsverflechtungen dar, und unter dem Begriff der

<sup>93</sup>Im Unterschied zu der in Abschnitt 4.2 beschriebenen Wertbildungsrechnung wird hier zur Vereinfachung nicht in Fremdleistung und Eigenleistung differenziert.

<sup>94</sup>Der Einfachheit halber wird  $p_{ij}^k$  benutzt, um den Preis  $p_{ic}^k$  in die Summe aufzunehmen. Es soll nicht suggeriert werden, dass die  $i$  seine Preise je nach Abnehmer  $j$  ändert.

<sup>95</sup>Vorgestellt wurde die Analyse von Wassily Leontief, vgl. Leontief (1966).

<sup>96</sup>Laut Livingstone (1969), S. 64 gibt es keinen Grund, warum die Input-Output Analyse nicht genauso gut für interne Beziehungen eines ökonomischen Systems verwendet kann, wie für Beziehungen zwischen Firmen, Branchen, oder der gesamten Volkswirtschaft.



Eigenleistung (Arbeit, Kapital, Abschreibungen und Steuern) wird die Wertschöpfung subsummiert. Für eine beliebige Abteilung  $i$  stellt somit die Zeile in Tabelle 4.2

Tabelle 4.2: Input-Output Analyse

	interne Umsätze					Realumsatz	Gesamtumsatz
$VL$	$\mathbf{m}_{11}^*$	$\cdots$	$\mathbf{m}_{1i}^*$	$\cdots$	$\mathbf{m}_{1n}^*$	$q_{1c}^k \cdot p_{1c}^k$	$U_1$
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\mathbf{m}_{i1}^*$	$\cdots$	$\mathbf{m}_{ii}^*$	$\cdots$	$\mathbf{m}_{in}^*$	$q_{ic}^k \cdot p_{ic}^k$	$U_i$
	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$\mathbf{m}_{n1}^*$	$\cdots$	$\mathbf{m}_{ni}^*$	$\cdots$	$\mathbf{m}_{nn}^*$	$q_{nc}^k \cdot p_{nc}^k$	$U_n$
$EL$	$EL_1$	$\cdots$	$EL_i$	$\cdots$	$EL_n$		
$Kosten$	$K_1$	$\cdots$	$K_i$	$\cdots$	$K_n$		

den Umsatz, und die Spalte die Kosten dar. Wesentliche Gestaltungsaspekte liegen darin, wer die Preise festlegt, und wie sie bestimmt werden. Bevor eine spieltheoretische Modellierung der in der aufgestellten Input-Output Analyse enthaltenen interdependenten Entscheidungssituation erfolgt, wird zur Illustration das Beispiel aus Abschnitt 4.4.1 fortgeführt.

**Beispiel 4.2.** Aus der Verflechtungsmatrix  $Q$  des Eingangsbeispiels aus Abschnitt 4.4.1 kann eine rein mengenmäßige Input-Output Analyse erstellt werden.

$i$	Abteilung	$k$	Mengen			Absatz
1	Verwaltung	1	0	100	0	0
2	Fertigung	2	0	0	10	0
		3	0	0	40	0
3	Produkt	4	0	0	0	100

Zur vollständigen Input-Output Analyse sind noch die Preise zu berücksichtigen, ebenso wie die Eigenleistungen der Abteilungen.

$i$	Abteilung	$k$	interne Umsätze			Realumsatz	Gesamtumsatz
1	Verwaltung	1	0	$100 \cdot p_1^1$	0	0	$100 \cdot p_1^1$
2	Fertigung	2	0	0	$10 \cdot p_2^2$	0	$10 \cdot p_2^2 + 40 \cdot p_2^3$
		3	0	0	$40 \cdot p_2^3$	0	
3	Produkt	4	0	0	0	$100 \cdot p_{3c}^4$	$100 \cdot p_{3c}^4$
	EL		$EL_1$	$EL_2$	$EL_3$		
	Kosten		$K_1$	$K_2$	$K_3$		

Unter der Vorgabe, dass Einnahmen und Ausgaben (Leistung und Gegenleistung) einer Abteilung ausgeglichen sein sollen, folgt  $U_i = K_i$  für alle  $i$ , und daraus:

$$\begin{aligned}
 100 \cdot p_1^1 &= EL_1 \\
 10 \cdot p_2^2 + 40 \cdot p_2^3 &= 100 \cdot p_1^1 + EL_2 \\
 100 \cdot p_{3c}^4 &= 10 \cdot p_2^2 + 40 \cdot p_2^3 + EL_3
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Es ist nach Abschnitt 4.4.1 nicht weiter überraschend, dass sich durch die dezentrale Preisfindung auch die Gesamtkalkulation des Unternehmens ergibt zu

$$100 \cdot p_{3c}^4 = EL_1 + EL_2 + EL_3.$$

Durch  $100 \cdot p_{3c}^4 = EL_1 + EL_2 + EL_3 + G$  lässt sich die Situation darstellen, dass die Firma einen Gewinn erwirtschaftet, und dementsprechend der Marktpreis  $p_{3c}^4$  über Kosten liegt.

### 4.4.3 Interpretation: Leistungsberechnung statt Kostenzuteilung

Anhand der Untersuchung aus Abschnitt 4.4.2 lassen sich drei verschiedene Arten der Kostenzuteilung im Unternehmen identifizieren:

- Die verursachungsgerechte Zuteilung [VG]
- Die Kostenverrechnung [KV]
- Die Leistungsberechnung [LB]

Bei der *verursachungsgerechten Zuteilung* wird für jede Leistung nachgehalten, wofür sie bezogen wurde, es gibt einen Verwendungsnachweis für innerbetriebliche Leistungen.  $q_{ij}^{kl}$  entspricht dem Produkt  $k$ , das  $i$  an  $j$  liefert, und das  $j$  für das Produkt  $l$

verwendet. Dies entspricht der erweiterten Verflechtungsmatrix  $\tilde{Q}$ , die für ein Beispiel mit drei Abteilungen und sechs Leistungen folgendermaßen abgebildet wird:

j		1		2		3		c
i	k	1	2	3	4	5	6	
1	1			$q_{12}^{13}$	$q_{12}^{14}$		$q_{13}^{16}$	
	2			$q_{12}^{23}$		$q_{13}^{25}$	$q_{13}^{26}$	
2	3	$q_{21}^{31}$	$q_{21}^{32}$			$q_{23}^{35}$	$q_{23}^{36}$	
	4						$q_{23}^{46}$	
3	5							$q_{3c}^5$
	6							$q_{3c}^6$

Diese Art der Zuteilung ist in Unternehmen nicht praktikabel durchführbar. Eine Ausnahme bilden Materiallisten für physische Produkte. Aber auch hier wird eine verursachungsgerechte Zuteilung für C-Teile oder etwa in der Prozessindustrie unmöglich. Dies gilt erst recht für Dienstleistungen in der Verwaltung, in Vertrieb und Marketing, oder für Projektmanagement und Entwicklung.

In Unternehmen versucht man sich durch Schlüsselung und Umlage der nicht zu-rechenbaren Gemeinkosten zu behelfen.<sup>97</sup> Werden die Gesamtkosten einer Abteilung  $i$  anhand von Schlüsseln  $\beta_{ij}^k$  auf andere Abteilungen  $j$  oder Produkte  $k$  umgelegt, kann von *Kostenverrechnung* und interner Leistungsverrechnung gesprochen werden:

j		1	2	3	c	
i	k					
1			$\frac{K_1}{\beta_{12}}$	$\frac{K_1}{\beta_{13}}$		$\beta_{12} + \beta_{13} = 1$
2		$\frac{K_2}{\beta_{21}}$		$\frac{K_2}{\beta_{23}}$		$\beta_{21} + \beta_{23} = 1$
5					$\frac{K_3}{\beta_3^5}$	$\beta_3^5 + \beta_3^6 = 1$
3	6				$\frac{K_3}{\beta_3^6}$	

$$\hat{m}_{ij} = p_i \cdot q_{ij} = \frac{K_i}{\beta_{ij}}$$

Die Summe der Schlüssel ergibt Eins, so dass genau die Gesamtkosten  $K_i$  einer Abteilung umgelegt werden. Die Kosten werden so in Kostenblöcke  $K_i/\beta_{ij}$  aufgeteilt und

<sup>97</sup>Vgl. Abschnitt 4.1.2.

verrechnet. Eventuell wird durch eine interne Leistungsverrechnung ein Schlüssel genauer bestimmt, z. B. durch Stundenaufschreiben. Dann wird die Situation simuliert, dass jede Abteilung genau eine Leistung erzeugt. Z. B. wird dann das Rechnungswesen nicht mehr über Gemeinkostenschlüssel auf die anderen Bereiche umgelegt, sondern es bietet die (einzige) Leistung „Rechnungswesen“ an, die in der Form  $p_i \cdot q_{ij}$  stundenweise abgerechnet (verrechnet) wird. Dies erzeugt ebenfalls Schlüssel  $K_i/\beta_{ij}$ . Es ist also zu unterscheiden, ob es für die Schlüsselung einen Preis gibt, oder ob die Gesamtkosten pauschal umgelegt werden. Daran wird hier der Unterschied zwischen dem internen Verrechnungspreis und der Kostenverrechnung festgemacht. Beide Arten der Verrechnung stellen sich in der Matrix  $\hat{M}$  und den einzelnen Komponenten  $\hat{m}_{ij}$  dar. Die Kosten der intern leistenden Abteilungen (Vorkostenstellen) werden auf die Abteilungen mit Marktkontakt (Endkostenstellen) umgelegt. Dies ist gerade das Vorgehen der Umlageverfahren der Kostenstellenrechnung.<sup>98</sup> Im letzten Schritt werden durch die Kostenträgerrechnung über Zuschlagskalkulationen (erneute Schlüsselung) Preise für die Produkte kalkuliert.<sup>99</sup>

Die *interne Leistungsberechnung* entspricht dem Vorgang des Leistungsaustauschs zwischen Unternehmen: Die Leistungen werden auf marktwirtschaftliche Art und Weise, also wie gegenüber Dritten, ausgewiesen und bepreist. Wofür die Leistungen verwendet werden, ist jedoch nicht nachvollziehbar. Dies entspricht der Verflechtungsmatrix  $Q$  bzw. der Transaktionsmatrix  $M$  der Input-Output Analyse mit den Komponenten  $\mathbf{m}_{ij}$ .

i	k	j			c
		1	2	3	
1	1		$q_{12}^1$	$q_{13}^1$	
	2		$q_{12}^2$	$q_{13}^2$	
2	3	$q_{21}^3$		$q_{23}^3$	
	4			$q_{23}^4$	
3	5				$q_{3c}^5$
	6				$q_{3c}^6$

$$\mathbf{m}_{ij}^* = \begin{pmatrix} p_i^{\bar{m}_i} \cdot q_{ij}^{\bar{m}_i} \\ \vdots \\ p_i^{\bar{m}_i} \cdot q_{ij}^{\bar{m}_i} \end{pmatrix}$$

<sup>98</sup>Vgl. Abschnitt 4.1.2.

<sup>99</sup>Die hier dargestellte Situation ist eine Vereinfachung, um die Verrechnung der Gemeinkosten zu verdeutlichen. Die Einzelkosten werden ohne Schlüssel direkt den entsprechenden Kostenstellen zugerechnet.

## 4.5 Diskussion der Ergebnisse

Es erfolgt an dieser Stelle eine kurze Diskussion der drei identifizierten Ansätze, um die weitere Vorgehensweise der Arbeit zu verdeutlichen. Die Ermittlung von  $K_3/\beta_3^5$  und  $K_3/\beta_3^6$  in der Kostenverrechnung ist identisch<sup>100</sup> mit der von  $p_{3c}^5$  und  $p_{3c}^6$  in der Leistungsberechnung. Zur Schnittstelle des externen Marktes ändert sich bei der Kostenverrechnung die Art der Kostenzuteilung zu einer Leistungsberechnung. Der Grund ist, dass zum externen Markt unabhängig vom unternehmensintern verwendeten Verfahren immer Preise angegeben werden. Daraus lässt sich folgern, dass die Leistungsberechnung eine marktliche Koordination darstellt, die Kostenverrechnung jedoch nicht, denn ansonsten könnte sie auch im letzten Schritt zum externen Markt hin verwendet werden.

Auch in der Leistungsberechnung existieren Gemeinkosten. Alle Abteilungen im Beispiel haben das gleiche Bestimmungsproblem der Preise wie auch die zweite Abteilung im Beispiel 4.2:

$$p_i^{m_i} \cdot q_i^{m_i} + p_i^{\bar{m}_i} \cdot q_i^{\bar{m}_i} = \text{Gesamtkosten von } i$$

Die Leistungsberechnung transformiert das Gemeinkostenproblem des Gesamtunternehmens in ein abteilungsinternes Gemeinkostenproblem der Preiskalkulation.

Wie in der Volkswirtschaft zwischen Unternehmen wird zwischen den Abteilungen des Unternehmens eine verursachungsgerechte Zuteilung simuliert, weil Preisgrenzen zwischen den Abteilungen gebildet werden. Obwohl viele Unternehmen und Haushalte den Strom eines Energieversorgers beziehen, ist darin kein Problem der Zuordnung von Energiegemeinkosten zu sehen, da Strompreise und Stromverbrauchsmessung eine verursachungsgerechte Zuteilung erlauben. Die Strompreise des Energieunternehmens enthalten jedoch Gemeinkosten, die (möglichst verursachungsgerecht) in die Preise kalkuliert werden. Die Leistungsberechnung simuliert also das Unternehmen als Verbund „virtueller Unternehmen“. Deshalb ist sie zur Kostenzuteilung in allen Arten von kooperativen Märkten geeignet.

Im Grunde ist die Leistungsberechnung eine Art „Speisekarte“, auf der die einzelnen Produkte mit Preisen angegeben werden. Die Gesamtkosten eines Restaurants

<sup>100</sup>Zusätzlich sind noch die Mengen zu berücksichtigen, was hier der Übersichtlichkeit halber vernachlässigt wird.

werden am Ende des Monats oder Jahres auch nicht anhand eines Schlüsselungsverfahrens über alle Gäste verteilt, die es in diesem Zeitraum besucht haben. Durch die Leistungsberechnung werden Leistungen bepreist und im Unternehmen schrittweise weitergegeben, so dass Kostenstellenumlageverfahren entfallen können. Deshalb tauchen innerbetrieblich keine Gemeinkosten auf, sondern nur abteilungsspezifische Gemeinkosten, die so genannten *Stellenkosten*.<sup>101</sup>

Wie in Abschnitt 4.4.2 angedeutet, besteht im verminderten Informationsgehalt der Kostenverrechnung gegenüber der Leistungsberechnung eine wesentliche Einschränkung, wie sich in Tabelle 4.3<sup>102</sup> an der Gegenüberstellung der Verfahren sehen lässt.<sup>103</sup> Die Art der Preisbestimmung und Preisberechnung hat wesentlichen

Tabelle 4.3: Vergleich der verschiedenen Arten der Kostenzuteilung.

Verfahren	Abbildung der Mengenstruktur		monetäre Bewertung	Zuteilung
VG:	$m > n$	$k$ von $i \rightarrow l$ von $j$	$q_{ij}^{kl}$	Preis VG = $\mathbf{x}$
KV:	$m = n$	$i \rightarrow j$	$\hat{m}_{ij}$	kein Preis $c(\cdot) \rightsquigarrow \mathbf{x}$
LB:	$m > n$	$k$ von $i \rightarrow j$	$\mathbf{m}_{ij}, q_{ij}^k$	Preis $p_i^k \rightsquigarrow \mathbf{x}$

Einfluss darauf, wie die interne Leistungsverflechtung zu interpretieren ist. Es kann vorweggenommen werden, dass die Kostenverrechnung die Abteilung als Einproduktunternehmen ( $m = n$ ) auffasst, und dass die Leistungsberechnung die realistische Sichtweise ermöglicht, dass eine Abteilung ein Mehrproduktunternehmen ( $m > n$ ) ist – aus Umlagen werden Preise.<sup>104</sup> Die Leistungsberechnung ermöglicht einen anderen Ansatz, die Kostenzuteilung  $\mathbf{x}$  in Unternehmen – sowie in kooperativen Märkten allgemein – zu bestimmen, der im folgenden Kapitel 5 beschrieben wird.

<sup>101</sup>Vgl. Eisele (1993), S. 609–616.

<sup>102</sup>[VG] bezeichnet die verursachungsgerechte Zuteilung, [KV] die Kostenverrechnung, und [LB] die Leistungsberechnung.

<sup>103</sup>Der Informationsverlust resultiert aus der Beschränkung der Transaktionen, die vom Verfahren betrachtet werden, vgl. Shapley und Shubik (1975), S. 236. und Abschnitt 3.1.3.

<sup>104</sup>Hierin besteht die Differenzierung zu einem reinen Verrechnungspreis für die Gesamtleistung der Abteilung.

# 5. Entwicklung eines praktikablen und stabilen Zuteilungsverfahrens im kooperativen Fall

In Kapitel 2 werden Zuteilungsverfahren für Koalitionsspiele vorgestellt, die aufgrund ihrer Komplexität nicht für den Einsatz in der Praxis geeignet sind.<sup>1</sup> Zusätzlich sind sie nicht auf komplexe Interaktionsstrukturen, wie in Abbildung 1.3 dargestellt, ausgelegt. Der zu entwickelnde Lösungsvorschlag kann deshalb keine Anpassung eines existierenden Zuteilungsverfahrens sein, sondern bedarf einer anderen Modellierung. In Abschnitt 3.4 wird unter den in Kapitel 2 und Kapitel 3 vorgestellten spieltheoretischen Verfahren, die einen Bezug zur Kostenzuteilung aufweisen, eine Vorauswahl von zur Lösung der Aufgabenstellung geeigneten Zuteilungsverfahren getroffen. In Kapitel 4 wird anhand eines Fallbeispiels der Praxis ein Lösungsvorschlag entwickelt, der in diesem Kapitel spieltheoretisch untersucht wird.

Aufbauend auf der Modellierung aus Abschnitt 4.4 wird der Lösungsvorschlag der Kostenzuteilung aus der Prozesssicht in diesem Kapitel spieltheoretische ausgearbeitet. Es wird bewiesen, dass das vorgeschlagene Zuteilungsverfahren ohne Verwendung einer charakteristischen Funktion eine Kernzuteilung bestimmt und somit der Aufgabenstellung genügt.

## 5.1 Kooperative Kostenzuteilung aus der Prozesssicht

In Abschnitt 3.4 wird festgehalten, dass die folgenden untersuchten spieltheoretischen Ansätze zur Lösung der Aufgabenstellung eingesetzt werden können:

- Eintrittsmöglichkeiten in Mehrproduktmonopole, speziell das Konzept der Tragbarkeit (vgl. Abschnitt 3.2),

---

<sup>1</sup>Vgl. Abschnitt 2.5.

- Preismechanismen im kooperativen Fall (vgl. Abschnitt 3.3), speziell Aumann-Shapley Preise.
- Zusätzlich ist der Spezialfall konvexer Spiele bzw. der Komplementarität zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 3.1.1.)

Diese werden in diesem Abschnitt auf die in Abschnitt 4.4 erfolgte Modellierung der gegebenen Entscheidungssituation angewendet. Insbesondere werden die Ansätze vom Fall eines Produzenten auf die Situation beliebig vieler, miteinander vernetzter Produzenten übertragen. Aufgrund der dadurch entstehenden Interdependenz werden die Produzenten zu Spielern einer strategischen Entscheidungssituation und im Folgenden auch als solche bezeichnet. Es sei auf die in Abbildung 1.3 skizzierte Entscheidungssituation hingewiesen, die in Abbildung 4.8 verdeutlicht und in Tabelle 4.2 als Input-Output Analyse formalisiert wird. Der den folgenden Ausführungen zugrunde liegende Gedanke wird an dieser Stelle einführend erläutert und bezieht sich insbesondere auf die in Abschnitt 3.2 vorgestellten subventionsfreien Preise.

Herkömmlicherweise werden die Werte des Spiels für die große Koalition und alle anderen Koalitionen anhand der charakteristischen Funktion bestimmt. Es ergibt sich somit ein Blick „von oben“ oder aus der „Vogelperspektive“ wie in Abbildung 5.1 auf den Markt: einzelne Teile werden herausgenommen oder hereingenommen und permutiert. Da alle möglichen Koalitionen bewertet werden, ergeben sich aufgrund

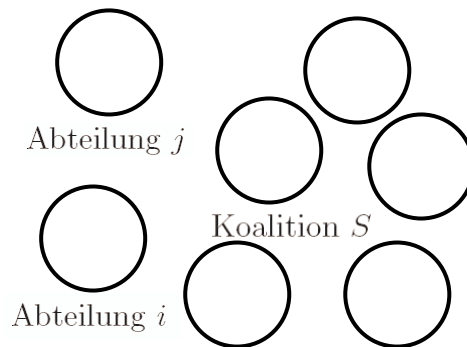


Abbildung 5.1: Mögliche Koalitionsbildungen.

der Anzahl aller Permutationen  $2^n$  Berechnungen für die Bestimmung der charakteristischen Funktion. Wie an entsprechender Stelle diskutiert wurde, ist dies in der Praxis in einem Unternehmen nicht mit vertretbarem Aufwand durchzuführen.<sup>2</sup> Es sei angemerkt, dass die Sichtweise und das Verständnis eines Koalitionsspiels, be-

<sup>2</sup>Vgl. Abschnitt 1.1, Abschnitt 2.5 und Abschnitt 3.1.1.



zogen auf die Gemeinkostenzuteilung in Unternehmen, mit denen der traditionellen Kostenrechnungen vergleichbar ist: das Unternehmen wird vertikal betrachtet, und Kostenblöcke werden zwischen Unternehmensteilen verrechnet.<sup>3</sup>

Betrachtet man die zugeteilten Werte nicht aus vertikaler Sicht, sondern aus einer Prozesssicht wie in Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.4 entwickelt und in Abbildung 5.2 gezeigt, so lässt sich diese Problematik umgehen. Für die im bisherigen Verlauf der

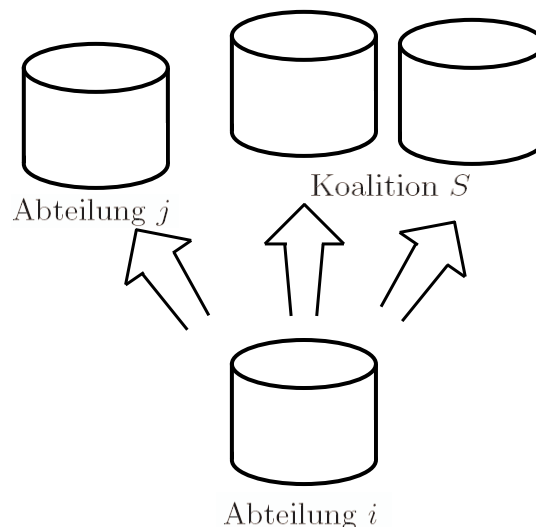


Abbildung 5.2: Das Unternehmen aus der Prozesssicht.

Arbeit vorgeschlagene Struktur von miteinander in Austausch tretenden Spieler wird ein Weg vorgeschlagen, der es ohne Verwendung der charakteristischen Funktion ermöglicht, stabile Zuteilungen zu erzeugen.

Dadurch, dass den Spielern im Markt der Status eines regulierten Mehrproduktmonopols eingeräumt wird, sind diese innerhalb des Marktes konkurrenzlos bezüglich ihrer Produkte, d. h. die Menge der Produkte hat für jede zwei Spieler eine leere Schnittmenge. Es gibt also genau einen Spieler  $i$ , der Produkt  $k$  anbietet, was für festes  $k$   $q_i^k > 0$  und  $q_j^k = 0$  für alle  $j \neq i$  induziert. Es lässt sich überprüfen, ob dieses Mehrproduktmonopol von den anderen Spielern anerkannt wird.<sup>4</sup> Wenn es für keine Koalition (z.B. die anderen Abteilungen eines Unternehmens) einen Anreiz gibt, aus der großen Koalition auszubrechen und einen Teil der Nachfrage aus eigenen Ressourcen herzustellen, dann ist das regulierte Mehrproduktmonopol auch ein natürliches Mehrproduktmonopol, das sich nicht auf Kosten der anderen Spieler

<sup>3</sup>Vgl. Abschnitt 4.1, Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.4.3.

<sup>4</sup>Dies ist Inhalt der Contestable Market Theory, die in Abschnitt 3.2.1 behandelt wird.

subventioniert.<sup>5</sup> Dahinter steht die Annahme, dass potentiell alle Spieler Zugriff auf alle Technologien haben, die innerhalb der Kooperation verwendet werden.<sup>6</sup> Aufgrund der Arbeitsteilung werden diese eindeutig jeweils einem Spieler zugewiesen, wodurch diese zu regulierten Mehrproduktmonopolen werden. Es wird durch den skizzierten Test also überprüft, ob alle Spieler damit einverstanden sind, die ihnen zugewiesenen Technologien gemeinsam zu teilen.

### 5.1.1 Subventionsfreie Preise

Es erfolgt die spieltheoretische Untersuchung des in Abschnitt 4.4 aufgestellten Modells des interdependenten Leistungsaustauschs der Spieler. Um eine übersichtliche Notation zu wählen, aufbauend auf der Notation aus Abschnitt 4.4, wird die Anzahl der Leistungen, die Spieler  $i \in \{1, \dots, n\}$  erstellt, mit  $m_i$  bezeichnet.<sup>7</sup> Da, wie angenommen wird, kein Spieler Leistungen hervorbringt, die auch ein anderer erstellt, gibt es in der Kooperation der  $n$  Spieler  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$  Leistungen. Gegeben seien der Output von Spieler  $i$ ,  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}_+^{m_i}$ , der Preisvektor  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}_+^{m_i}$ , und die für Spieler  $i$  relevanten externen Inputpreise  $\boldsymbol{\pi}_i \in \mathbb{R}_+^{r_i}$ . Der Vollständigkeit halber wird hier eingeführt:

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^m \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m$$

Mit  $\mathbf{p}_{-i} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_n)$  werden im Folgenden die Preisvektoren aller Spieler außer  $i$  bezeichnet. Der Einfachheit halber wird im Folgenden für die externen Inputpreise für jedes Mehrproduktmonopol lediglich  $\boldsymbol{\pi}$  geschrieben und auf die Indizierung verzichtet.

Wie erläutert wird ein Weg gesucht, mit dem sich die Bedingung der Stabilität anhand der Preise testen lässt. Der Preisvektor  $\mathbf{p}_i$  von Spieler  $i$  ergibt sich aus seiner Kostenfunktion  $C_i(\cdot)$ , wobei die Annahme getroffen wird, dass alle Kostenfunktionen tragbar seien.<sup>8</sup> Bei gegebener Nachfrage und Preisen seien die Produktionskosten vom Spieler  $i$  durch den Wert seiner Kostenfunktion  $C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$  gegeben, was die

<sup>5</sup>Siehe Moulin (1988), S. 98–99. Siehe zur genaueren Erläuterung Abschnitt 3.2.1.

<sup>6</sup>Vgl. Sharkey (1982), S. 57.

<sup>7</sup>Mit der Notation von Abschnitt 4.4 folgt:  $m_i = \bar{m}_i - \underline{m}_i + 1$ .

<sup>8</sup>Vgl. Abschnitt 3.2.1.

kosteneffiziente Produktion der Nachfrage  $\mathbf{q}_i$  von Spieler  $i$  widerspiegelt.<sup>9</sup> Die in Abschnitt 3.2.1 vorgestellten subventionsfreien Preise werden auf die Situation  $n$  vernetzter Spieler übertragen:<sup>10</sup>

**Definition 5.1. Subventionsfreie Preise**

Es sei  $C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$  die tragbare Kostenfunktion von Spieler  $i$  und  $\bar{\mathbf{q}}_i$  die vorgegebene Nachfrage nach den internen Leistungen von Spieler  $i$  durch die anderen Spieler. Spieler  $i$  bietet seine Leistungen genau dann zu subventionsfreien Preisen an, wenn gilt:

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k q_i^k = C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad (5.1)$$

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k q_i^k \leq C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \text{ für alle } \mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i \quad (5.2)$$

Hierbei bedeutet  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$ , dass für alle  $k \in \{1, \dots, m_i\}$  gilt  $q_i^k \leq \bar{q}_i^k$  und mindestens ein  $l \in \{1, \dots, m_i\}$  existiert mit  $q_i^l < \bar{q}_i^l$ .

Die erste Bedingung (5.1) besagt, dass den anderen Spielern genau alle Kosten des Spielers  $i$  berechnet werden, so dass  $i$  kostendeckend arbeitet. Die zweite Bedingung (5.2) stellt sicher, dass es keine Quersubventionierung zwischen Leistungen des Spielers  $i$  gibt. Das bedeutet, dass Spieler  $i$  seine Produkte nicht so bepreisen darf, dass zwar seine Gesamtkosten gedeckt sind, für eine seiner Leistungen jedoch mehr bezahlt werden muss, als  $i$  deren Erstellung kostet, wodurch diese Leistung andere Leistungen von  $i$  subventionieren würde. Hier zeigt sich formal die Aussage aus Abschnitt 4.4.3, dass durch den Informationsgehalt der Leistungsberechnung das Zurechenbarkeitsproblem von Gemeinkosten in ein Kalkulationsproblem der Preise überführt wird. Dies wird in Abbildung 5.3 illustriert.

**Beispiel 5.1.** Es sei die Situation betrachtet, in der Spieler  $i$  jeweils 50 Einheiten von zwei Produkten  $A$  und  $B$  anbietet, wobei  $A$  ausschließlich von Spieler  $j$  und  $B$  von den restlichen Spielern, die in der Koalition  $S$  zusammengefasst sind, nachgefragt wird. Die Gesamtkosten der Produktion betragen 1000 Geldeinheiten, welche  $i$  über einen Stückpreis von 10 für  $A$  und 10 für  $B$  an  $j$  und  $S$  weitergibt, so dass durch

<sup>9</sup>Die Kostenfunktion  $C_i(\cdot)$  bestimmt sich über den Ansatz der Kostenminimierung: Bei gegebenen internen Preisen  $\mathbf{p}_{-i}$  und Marktpreisen  $\boldsymbol{\pi}$  gibt  $C_i(\cdot)$  die geringsten Kosten wieder, mit denen Abteilung  $i$  die bei ihr intern nachgefragten Leistungen  $\mathbf{q}_i$  produzieren kann.

<sup>10</sup>Vgl. Definition 3.9. Im Folgenden findet aufgrund der angepassten Notation ausschließlich Definition 5.1 Verwendung.

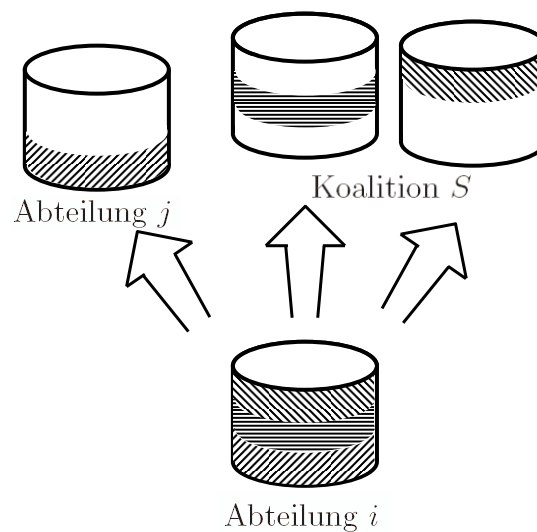


Abbildung 5.3: Das Zuteilungsverfahren aus Prozesssicht.

den Umsatz genau die Gesamtkosten von  $i$  gedeckt sind. Untersucht wird nun der Fall, dass  $i$  nur die 50 Einheiten von  $A$  für  $j$  produziert, jedoch keine Einheiten von  $B$ . Angenommen, die Gesamtkosten betragen jetzt 300, also nur 6 je Einheit  $A$ . Gemäß Definition 5.1 bietet  $i$  dann seine Leistungen nicht zu subventionsfreien Preisen an, weil  $B$  durch  $A$  subventioniert wird, was hier gleichbedeutend damit ist, dass Koalition  $S$  von Abteilung  $j$  subventioniert wird.<sup>11</sup> Weil Spieler  $j$  Kosten tragen muss, die von anderen Spielern verursacht werden, ist die individuelle Rationalität für Spieler  $j$  verletzt, und er wird die Belieferung durch  $i$  ablehnen. Spieler  $i$  wiederum wird mit dem Verkauf des restlichen Sortiments  $B$  an  $S$  einen Verlust machen. Eine Kooperation kommt nicht zustande.

Faulhaber bemerkt zur Eigenschaft der Subventionsfreiheit:

*If the provision of any commodity (or group of commodities) by a multicommodity enterprise subject to a profit constraint leads to prices for the other commodities no higher than they would pay by themselves, then the price structure is subsidy-free.*<sup>12</sup>

Der Begriff und das Konzept der Subvention, also die Verheimlichung der wahren Kosten einer Leistung durch die unrechtmäßige Erhöhung des Preises einer ande-

<sup>11</sup>Faulhaber und Levinson (1981), S. 1084 nennen den Effekt, dass die Vermeidung einer Quersubventionierung von Produkten auch eine Subventionierung von Spielern verhindert, *consumer-subsidy-free*.

<sup>12</sup>Vgl. Faulhaber (1975), S. 966–967.

ren Leistung, findet sich also in den Leistungspreisen wieder. Aus in diesem Sinne „falschen“ Preisen folgt eine wahrhaftige Subventionierung zwischen den Spielern, wie im obigen Beispiel gezeigt.<sup>13</sup> Der Test (5.2) auf potentiell alle Teile  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  des Outputs  $\bar{\mathbf{q}}_i$  stellt dabei sicher, dass im Sortiment keine Quersubventionierung existiert.

### 5.1.2 Illustration subventionsfreier Preise

Die Bedingung der Subventionsfreiheit und die Eigenschaften einer Kostenfunktion, die tragbar ist, wird zur Verdeutlichung der Konzepte anhand eines Einproduktfalles graphisch illustriert.<sup>14</sup> Die folgenden Ausführungen sind dabei unabhängig vom Preismechanismus, der die subventionsfreien Preise erzeugt. Die Kostenfunktion des Mehrproduktmonopols sei gegeben, ebenso wie die nachgefragte Menge  $\bar{q}$ . Im ersten Schritt werden die Einflüsse anderer Spieler auf die Kostenfunktion vernachlässigt. Das Monopol hat den Preis  $p$  in Abhängigkeit von  $q$  so zu kalkulieren, dass bei gegebener Nachfrage  $\bar{q}$  die Kosten gedeckt sind. Dieser Preis wird mit  $\bar{p}$  bezeichnet.

Wird der Preis zu hoch festgelegt, z.B. auf  $p'$ , kann ein Konkurrent in den Markt eindringen. Die Preise werden also kostendeckend kalkuliert, damit die erste Bedin-

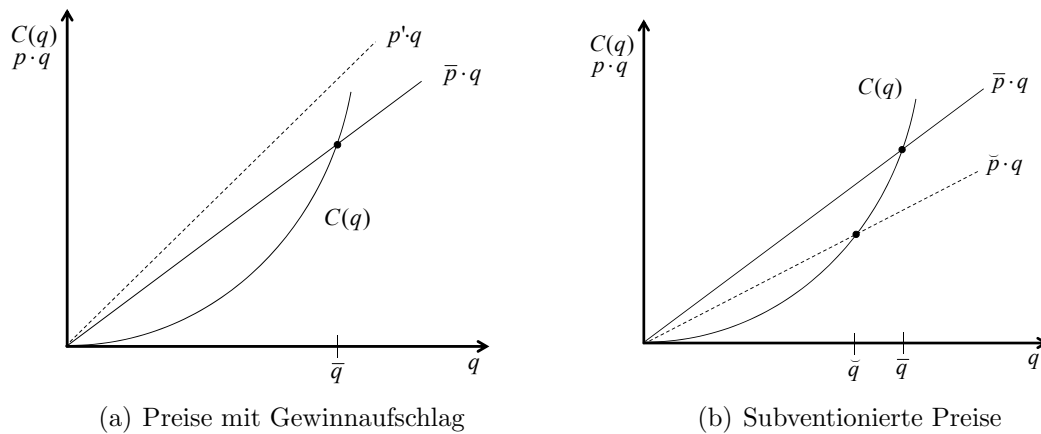


Abbildung 5.4: Nicht tragbare Kostenfunktion im Ein-Produkt-Fall.

gung der Subventionsfreiheit (5.1) erfüllt ist. Trotzdem kann bei bestimmten Kostenfunktionen, wie in Abbildung 5.4 dargestellt, nicht gewährleistet werden, dass ein Konkurrent nur unter Verlust eindringen kann: Es gibt ein  $\check{q} < \bar{q}$ , für das eine

<sup>13</sup>Aus diesem Grunde wurde der Zusatzkostentest in Abschnitt 2.2.1 explizit angegeben.

<sup>14</sup>Auf die Indizierung wird aufgrund der Übersichtlichkeit so weit wie möglich verzichtet. Ebenso stellen die Mengen und Preise  $q$  und  $p$  keine Vektoren dar.

Gewinnspanne existiert. Ein Konkurrent kann z. B. die Menge  $\check{q}$  bedienen, und den Gewinn

$$\check{q} \cdot \bar{p} - C(\check{q}) > 0$$

realisieren. Für den Monopolisten bleibt dann nur die Menge  $\bar{q} - \check{q}$  übrig, die er eventuell nur mit Verlust bedienen kann.

**Beispiel 5.2.** Es sei folgende Kostenfunktion betrachtet: Das erste Produkt kostet einen Euro, jedes nachfolgende Produkt wird immer um einen Euro teurer. Das zweite Produkt kostet also zwei Euro, das dritte drei Euro usw. Die Menge  $\bar{q}$  von fünf Produkten kostet fünfzehn Euro, so dass der Preis eines Produktes mit  $15/5$  gleich drei Euro veranschlagt wird. Je kleiner die produzierte Menge ist, umso mehr Gewinn verbleibt dem Spieler. Bei dieser Art von Technologie wird der kostenminimale Punkt dann erreicht, wenn jeder Abnehmer sein Produkt selber herstellt.

Die Bedingung der Subventionsfreiheit besagt also, dass zu einer beliebigen Nachfrage  $\bar{q}$  kein  $q < \bar{q}$  der Nachfrage die Möglichkeit zur Konkurrenz eröffnen darf. Ein derartiger Preis ist subventionsfrei und ist nur möglich, wenn die Kostenfunktion tragbar ist.<sup>15</sup> Ein Beispiel für tragbare Kostenfunktionen sind im Einproduktfall solche der Form  $C(q) = q^a, 0 < a \leq 1$ , wie in Abbildung 5.5 gezeigt. Der Monopolist

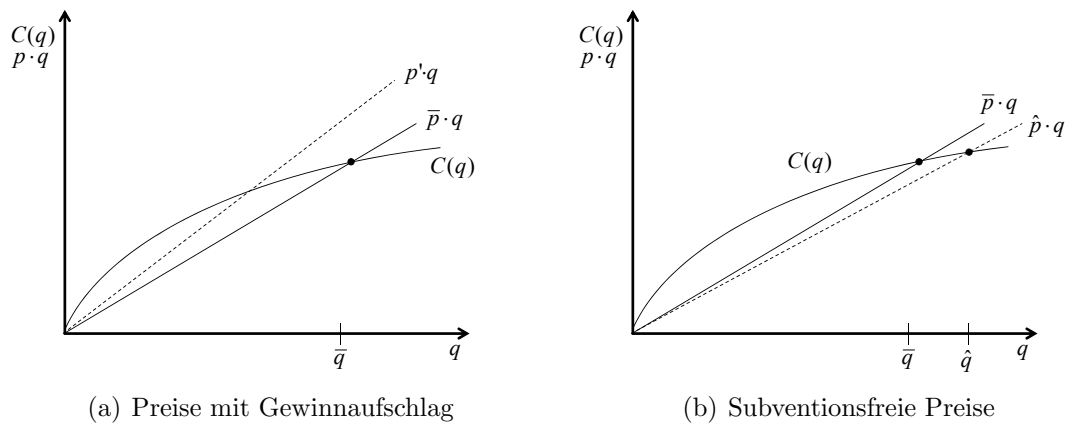


Abbildung 5.5: Tragbare Kostenfunktion im Ein-Produkt-Fall.

muss allerdings auch hier kostendeckend kalkulieren. Wählt er einen Preis mit Gewinnmarge  $p'$ , so existiert ein Preis, zu dem ein Konkurrent eindringen kann. Werden beide Bedingungen der Subventionsfreiheit erfüllt und lässt die Kostenfunktion es

<sup>15</sup>Vgl. Definition 3.13.

zu, ist das regulierte Monopol auch ein natürliches Monopol. Es lässt sich keine Menge  $q < \bar{q}$  finden, zu der ein Konkurrent zu gleichen Preisen gewinnbringend in den Markt eindringen kann. Die freiwillige Kooperation ist gesichert: Alle Abnehmer werden beim Monopolisten ihre Nachfrage zum Preis  $\bar{p}$  beziehen. Steigt die Nachfrage auf ein  $\hat{q} > \bar{q}$ , so muss auch die Preiskalkulation auf  $\hat{p}$  angepasst werden. Tut der Monopolist dies nicht, kann ein Konkurrent einen Teil der Nachfrage gewinnbringend abschöpfen.

Berücksichtigt man die Auswirkungen der Preise anderer Technologien  $\mathbf{p}_{-i}$ , von denen das Mehrproduktmonopol Leistungen bezieht, dann hat eine erneute Preiskalkulation zu erfolgen, sobald sich die Inputpreise erhöhen oder erniedrigen. Gleiches gilt, wenn sich die Technologie  $C(\cdot)$  zu  $C'(\cdot)$  ändert. Dies wird in Abbildung 5.6 veranschaulicht.

Aufgrund der ersten Bedingung subventionsfreier Preise decken diese immer genau die Kosten. Es ist für die Preiskalkulation an sich also unerheblich, welche Form die Kostenfunktion genau hat, und wie sie zustande kommt. Die Preiskalkulation erfolgt auf den Mengen  $\bar{\mathbf{q}}_i$ . Daraufhin entscheiden die Spieler, ob sie einer Kooperation zustimmen wollen, ob also die große Koalition  $N$  zustande kommt. Den Spielern steht als Alternative zur Wahl, die Leistung selber herzustellen. Da die Technologien innerhalb des kooperativen Marktes natürliche Mehrproduktmonopole erlauben, stellen sie sich dadurch immer schlechter, sofern die Preisgestaltung keine ungerechtfertigten Preise enthält.<sup>16</sup> Wenn die große Koalition nicht zustande kommt, liegt dies also entweder daran, dass der Kern leer ist, oder dass die Zuteilung aufgrund einer „falschen“ Preisbestimmung nicht im Kern liegt. Im ersten Fall ist das zugrunde liegende Spiel zu ändern, erst der zweite Fall fällt in die Verantwortung des gewählten Zuteilungsverfahrens.<sup>17</sup>

Als weitere Illustration seien zwei konvexe Kostenfunktionen betrachtet, anhand derer sich verdeutlicht, dass die Forderung der Tragbarkeit einer Kostenfunktion nicht allzu restriktiv ist. Anhand des Beipfels in Abbildung 5.7 zeigt sich, dass eine tragbare Kostenfunktion folgender Forderung genügt: Durch den Zutritt weiterer Spieler werden die Kosten der bestehenden Spieler nicht erhöht.<sup>18</sup> Dies ist äquivalent dazu, dass die Erhöhung des Outputs nicht zu steigenden Stückkosten führen darf.

<sup>16</sup>Vgl. Littlechild (1975). Littlechild beweist, dass bei einer geteilten Technologie mit positiven Skaleneffekten die große Koalition das Optimum darstellt.

<sup>17</sup>Das Konzept der Subventionsfreiheit trifft deshalb weniger eine Aussage über die Technologien, als über die Preisgestaltung bei gegebenen Technologien, vgl. Abschnitt 3.2.

<sup>18</sup>Vgl. den Zusatzkostentest (2.4).

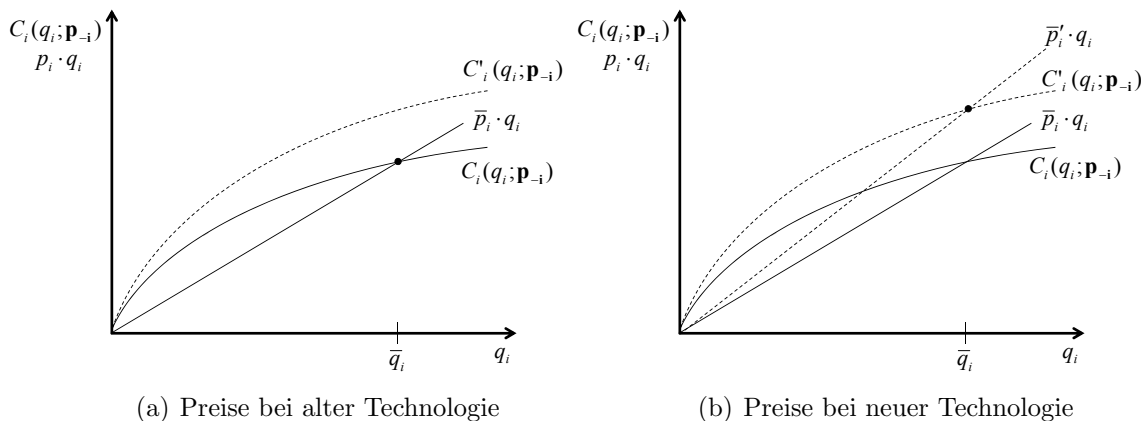


Abbildung 5.6: Veränderungen in den Inputpreisen oder Technologien.

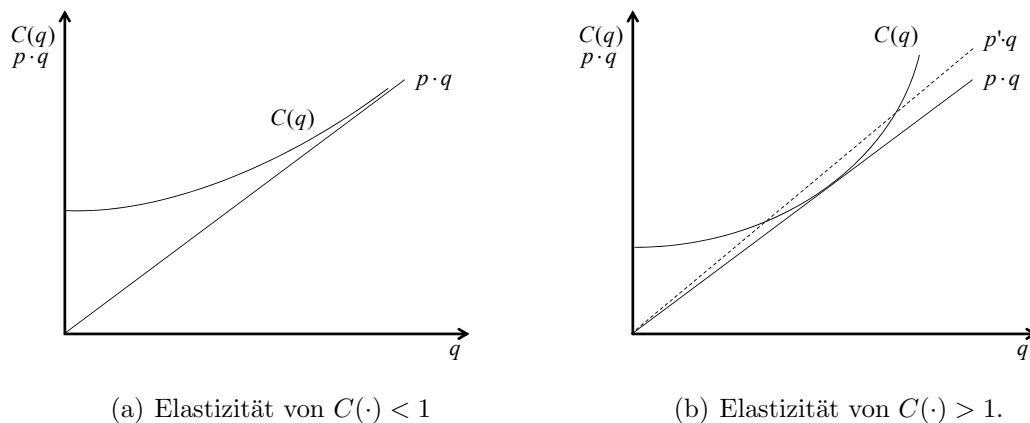


Abbildung 5.7: Elastizität als Indikator für die Tragbarkeit.

Dafür ist weniger die genaue Art der Kostenfunktion ausschlaggebend, als dass die *Produktionselastizität* der dahinter stehenden Technologie kleiner als Eins ist, d.h.:<sup>19</sup>

$$\frac{\partial C_i(q; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i} \cdot \frac{q_i}{C_i(\cdot)} \leq 1.$$

Konkave Kostenfunktionen erfüllen die Bedingung im Einproduktfall immer.

**Beispiel 5.3.** Im Fall von  $C(\cdot) = b \cdot q^a$ ,  $0 < a \leq 1$ ,  $b > 0$  folgt:

$$\frac{\partial C_i(q; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i} \cdot \frac{q_i}{C_i(\cdot)} = a \cdot b \cdot q^{a-1} \cdot \frac{q}{b \cdot q^a} = a \leq 1 \quad \checkmark$$

<sup>19</sup>Übertragen aus der Anschauung von Telser (1978), S. 159–160, der Kostenfunktionen dieser Art als „nett“ (*kind*) bezeichnet.



Bei konvexen Kostenfunktionen können beide Fälle auftreten: Für den Fall (a) aus Abbildung 5.7 gilt bei einer Funktion  $C(\cdot) = b - \ln(q + 1) + q$ ,  $b \geq 0$ :

$$\frac{\partial C_i(q; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i} \cdot \frac{q_i}{C_i(\cdot)} = 1 - \frac{1}{q + 1} < 1 \text{ für } 0 < q < \infty, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{q + 1} = 1 \quad \checkmark$$

Für den Fall (b) aus Abbildung 5.7 gilt bei einer Funktion  $C(\cdot) = e^q$ :

$$\frac{\partial C_i(q; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i} \cdot \frac{q_i}{C_i(\cdot)} = e^q \cdot \frac{q}{e^q} = q \begin{cases} \leq 1, & 0 \leq q \leq 1 \\ > 1, & \forall q > 1 \end{cases}$$

Der letzte Fall zeigt, dass eine Kostenfunktion bis zu dem Punkt tragbar ist, an dem die Elastizität kleiner gleich Eins ist. Darüber ist sie nicht mehr tragbar. Man spricht in diesem Fall von einer abschnittsweise tragbaren Kostenfunktion, siehe Definition 3.13.

Die durch subventionsfreie Preise geforderte kostendeckende Kalkulation kann auch graphisch veranschaulicht werden. Definiert man die Gewinnfunktion des regulierten Monopols  $h_i(q_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$ , die bei  $\bar{q}_i$  laut Definition Null ergeben soll zu

$$h_i(\bar{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) = p_i \cdot \bar{q}_i - C_i(\bar{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) = 0,$$

dann lassen sich die Preisbestimmungen anhand Abbildung 5.8 veranschaulichen: Im Fall (a) werden Umsätze und Kosten einander gegenübergestellt. Durch die Berechnung von  $p_i$  wird die Steigung der Geraden  $p_i \cdot q_i$  so bestimmt, dass sich die Graphen bei der jeweiligen Nachfrage schneiden. Im Fall (b) werden Umsätze und Kosten voneinander abgezogen, die Ausgeglichenheit von Umsatz und Kosten wird zu einer Nullstellenbestimmung umformuliert.

### 5.1.3 Diskussion der Realitätsnähe und Konsequenzen subventionsfreier Preise

Aus der Forderung nach subventionsfreien Preisen folgt die Forderung nach tragbaren Kostenfunktionen. Im Zusammenhang damit stellt sich die Frage, ob es realistisch ist anzunehmen, dass die Kostenfunktionen der Spieler positive Skaleneffekte beinhalten. Damit geht die Frage einher, welche Konsequenzen sich daraus ergeben. Folgende Beispiele lassen sich anführen:

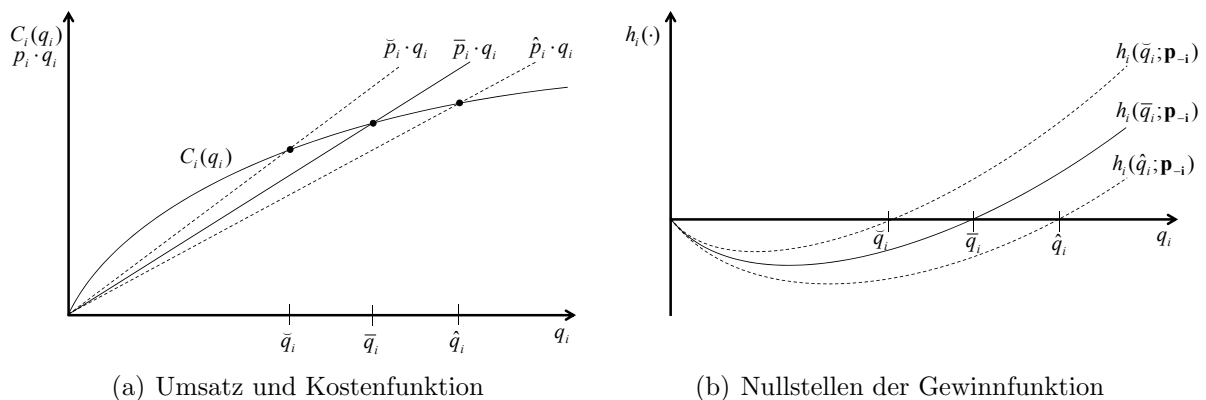


Abbildung 5.8: Subventionsfreie Preisbestimmung im Ein-Produkt-Fall.

- IT-Abteilungen von Unternehmen haben eine Kostendegression: mit jedem neuen Nutzer eines Systems wird der einzelne Arbeitsplatz günstiger.
- Buchhaltungsabteilungen haben eine Kostendegressionen: je mehr Buchungen durchgeführt werden, desto billiger wird das System und das Know-How, und damit jede einzelne Buchung.
- Die Produktion hat eine bessere Auslastung bei höherer Menge, und dadurch geringere Stückkosten.
- Der Einkauf hat Mengenvorteile (Rabatte) bei größeren Einkaufsmengen.
- Im Vertrieb entstehen Kostenvorteile durch mehr Außendienstmitarbeiter, da die entsprechenden Reisegebiete kleiner werden.
- Die Kosten für das Konzept des Marketings (z. B. Branding oder Corporate Identity) sinken mit jeder weiteren Aktivität.

Es wird also von sinkenden Durchschnittskosten ausgegangen, d. h. je mehr Spieler ein Produkt konsumieren, desto besser ist das Ergebnis für alle Beteiligten.<sup>20</sup>

Ungereimtheiten treten bei Investitionen auf, die sprungfixe Kosten darstellen können. Investiert beispielsweise die IT-Abteilung in einen weiteren Server, muss sie den Preis auch für alle schon bestehenden Arbeitsplätze anheben. Würde die überflüssige Kapazität vernachlässigt und nur die tatsächlich benutzte Kapazität in die Preisbestimmung einfließen, dann wären nicht alle Kosten verteilt und die Bedin-

<sup>20</sup>Laut Moulin (1995b), S. 242 ist die Stabilität unter diesen Bedingungen notwendig, damit es keinen Konflikt in der Interpretation dessen geben kann, was als „gerecht“ aufgefasst wird. Dies bestätigt die Forderung nach subventionsfreien Preisen. Vgl. auch Gorman (1985).

gung der Effizienz wäre verletzt. Die Effizienz ist jedoch eine notwendige Bedingung für eine Kernzuteilung. Betriebswirtschaftlich gesehen ist auch bei freier Kapazität zu Vollkosten zu rechnen, d. h. Überkapazitäten werden in der innerbetrieblichen Verrechnung nicht berücksichtigt. Dies ist der Grund, warum in der Praxis bei Kapazitätsentscheidungen zusätzlich eine Teilkostenrechnung verwendet wird.<sup>21</sup>

Ein weiteres Gegenargument liegt auf den ersten Blick darin begründet, dass ab einer bestimmten Größe einer Abteilung und ihrer Aufgabe die positiven Skaleneffekte aufgrund gesteigener Komplexität und Transaktionskosten nicht mehr existieren. Ab diesem Punkt kann sich das Mehrproduktmonopol aufgrund steigender Durchschnittskosten nicht mehr halten. Dies ist jedoch kein Widerspruch zur Realität – an dieser Stelle können Abteilungen in kleinere Einheiten aufgegliedert werden. Die Unternehmen *W.L. Gore* und *Semco* sind zwei Fallbeispiele für dieses Vorgehen: Sobald ein Unternehmensbereich mehr als ca. 150 Menschen umfasst, wird eine von den Unternehmen so genannte „Zellteilung“ vorgenommen.<sup>22</sup> Es werden dann sogar die administrativen Vorgänge geteilt: es gibt zwei Buchhaltungen, zwei IT-Abteilungen, zwei Wareneingänge, zwei Personalabteilungen, zwei Werkshallen etc.

Die Bedingung, dass einzelne Abteilungen innerhalb ihres Aufgabengebietes positive Skaleneffekte haben, ist nicht zwingend als Grund für eine Zentralisierung anzusehen, sondern kann als ein Grund für eine Dezentralisierung des Unternehmens in kleine Einheiten mit geringer Komplexität angesehen werden.<sup>23</sup> Es lässt sich als Vorteil einer Rechnungslegung ansehen, wenn sie den Punkt identifiziert, ab dem eine Abteilung zu unwirtschaftlich arbeitet, um positive Skaleneffekte aufweisen zu können. Ab diesem Punkt existiert keine stabile Zuteilung mehr, da die Kostenfunktion nicht mehr tragbar ist und keine subventionsfreien Preise erlaubt.

Es ist anzumerken und zu diskutieren, dass die Forderungen nach einem natürlichen Monopol und der kostendeckenden Eigenschaft subventionsfreier Preise dazu führen, dass die Erlöse einer Abteilung auf dem internen Markt gerade ihre Kosten ausgleichen, dass sie also keinen Gewinn erwirtschaftet. Da es nicht mehr möglich ist, Anreizsysteme an das Berichtswesen zu koppeln, wirft dies die Frage auf, in welcher Weise eine Motivation für die Entscheidungsträger besteht, effizient zu arbeiten.<sup>24</sup>

---

<sup>21</sup>Gerade für Fragestellungen der kurzfristigen Disposition wurden Teilkostenrechnungen entwickelt. Für die Bewertung des Leistungsaustauschs werden sie jedoch aus spieltheoretischer Sicht als ungeeignet angesehen, vgl. Wißler (1997), S. 60–64.

<sup>22</sup>Vgl. Deutschman (2004) und Semler (1999).

<sup>23</sup>Zur These „*small is beautiful*“ vgl. auch Schumacher und McRobie (1977).

<sup>24</sup>Zur Kritik an ebendiesen Anreizsystemen siehe Pfläging (2003), S. 17–81.

Durch die Bedingung, ein reguliertes Mehrproduktmonopol (ohne Gewinn) darzustellen, wird zwar der Motivationseffekt einer Gewinnorientierung ausgeschlossen, trotzdem wird durch das natürliche Monopol aber eine effiziente Produktion gefordert, nämlich, dass Skaleneffekte zu nutzen sind und dass sich diese in minimierten Preisen widerspiegeln. So schreibt Spence:

*The contestable market theory then provides a more robust welfare standard [als die Theorie des perfekten Wettbewerbs]. In particular, it locates or points to properties of efficient vectors of prices. Still more important, it deals with efficient (in the sense of cost minimizing) industry structures. The efficient industry structure issue does not quite disappear in the perfectly competitive world, but it isn't very interesting or visible. With scale economies and multiproduct firms, it is.*<sup>25</sup>

Diese Fragestellung ist verbunden mit der in der Betriebswirtschaftslehre kontroversen Diskussion, welche Zielsetzungen durch *interne Verrechnungspreise* verfolgt werden sollen, um ein bestmögliches Betriebsergebnis zu erreichen. Um den hier gemachten Lösungsvorschlag einordnen zu können, wird ein grober Überblick über die Thematik gegeben. Als Bestimmungsansätze für Verrechnungspreise lassen sich überblicksweise die folgenden Methoden anführen:<sup>26</sup>

- **Grenzkosten und Grenzkosten-plus:** Verrechnungspreise zu Grenzkosten sowie Grenzkosten-plus (Grenzkosten mit Aufschlag) orientieren sich nur an den beschäftigungsabhängigen (variablen) Kosten.
- **Vollkosten und Vollkosten-plus:** Verrechnungspreise zu Vollkosten werden verwendet, um die tatsächlich angefallenen Kosten einer Leistungsart auf die verursachende Einheit zu übertragen. Beim *cost-plus* Verfahren wird ein (interner) Gewinnaufschlag hinzugefügt.
- **Verhandlungspreis:** Der Verhandlungspreis basiert nicht auf einem vereinbarten Berechnungsverfahren, sondern er wird in Verhandlungen zwischen Lieferant und Empfänger bestimmt.
- **Marktpreis:** Der Marktpreis ist der Preis für das Gut (bzw. eines vergleichbaren Gutes) am externen Markt inklusive seiner Bezugskosten.<sup>27</sup>

---

<sup>25</sup>Vgl. Spence (1983), S. 982.

<sup>26</sup>Vgl. Küpper (2001), S. 381–391.

<sup>27</sup>Dem Vorteil von Marktpreisen, dass sie einen direkten Vergleich mit am Markt frei verfügbaren Leistungen erlauben, werden zwei wesentliche Kritikpunkte für deren Verwendung für die interne

Diese unterschiedlichen Prinzipien führen in der Regel auch zu unterschiedlichen Preisen, wobei Verrechnungspreise zu Marktpreisen oder Verhandlungspreisen sowohl unter als auch über Vollkostenpreisen liegen können bzw. gerade die Grenzkosten oder die Vollkosten abbilden können.

Mit der Festlegung von Verrechnungspreisen lassen sich bestimmte Zielsetzungen verfolgen, wobei drei wesentliche Funktionen unterschieden werden:<sup>28</sup>

1. **Die Lenkungsfunktion:** Es soll ein Mechanismus geschaffen werden, welcher den innerbetrieblichen Güter- und Leistungsverkehr so beeinflusst, dass die dezentral getroffenen Entscheidungen auf ein optimales Gesamtergebnis der Unternehmung gerichtet sind. Anhand interner Preise soll eine autonome, marktliche Koordination ohne regulierende zentrale Kontrolle ermöglicht werden.
2. **Die Erfolgsermittlungsfunktion:** In dieser Funktion steht der Verrechnungspreis im Zusammenhang mit der *Profit-Center Organisation*. Ein Profit-Center ist ein organisatorischer Teil eines Unternehmens, für den ein eigener Periodenerfolg ermittelt wird. Die einem Profit-Center übertragene Verantwortung und Autonomie wird durch einen Gewinnauftrag unterstützt und es erfolgt eine leistungsorientierte Beurteilung der Entscheidungsträger.<sup>29</sup> Der Verrechnungspreis wird durch einen Gewinnaufschlag über Kosten erhöht und die Vergütungssysteme der Entscheidungsträger direkt an das Ergebnis gekoppelt. Diese Verwendung von interner Leistungsverrechnung, Profit-Center Struktur und variabler Vergütung ist in der Praxis verbreitet und soll Anreize zu unternehmerischem Verhalten setzen.
3. **Die Kostenrechnungsfunktion:** Diese dient weniger der Steuerung des Unternehmens, sondern erfüllt eine Funktion des Rechnungswesen. Sie wird für die Kalkulation von Produktpreisen, zur Bestandsbewertung oder für die Investitionsrechnung verwendet.

---

Kostenverrechnung entgegen gehalten. Erstens ist es häufig nicht möglich, Marktpreise zu ermitteln, und zweitens ist selbst bei ermittelbaren Marktpreisen zu hinterfragen, in wie weit diese etwas mit der tatsächlichen Situation des Unternehmens zu tun haben, vgl. Gschwend (1986), S. 81–86, Schultheiss (1990), S. 251 und Milgrom (1992), S. 80. Küpper lehnt Marktpreise mit der Begründung ab, dass das Unternehmen ein unvollkommener Markt ist, vgl. Küpper (2001), S. 383–384. Siehe zur Diskussion marktnaher/marktferner Preise auch Lindstädt et al. (2008a).

<sup>28</sup>Vgl. Gschwend (1986), S. 72–75.

<sup>29</sup>Vgl. Haid (2004), S. 255–262.

Die verschiedenen Verrechnungspreise und ihre Zielsetzungen lassen sich gemäß Abbildung 5.9 anhand dieser Zielsetzungen kategorisieren.<sup>30</sup> Es gibt keinen Verrechnungspreis, der alle drei Anforderungen erfüllt.<sup>31</sup> Preise unter Vollkosten, insbesondere Grenzkostenpreise, ermöglichen kurzfristige Kapazitätsentscheidungen. Zur Gewinnermittlung und Anreizfunktion bieten sich Preise an, die einen Gewinnaufschlag beinhalten. Verrechnungspreise zu Vollkosten erlauben eine vollständige Kostenentlastung der leistenden Abteilung und erfüllen die Perspektive einer reinen Kostenbetrachtung.

Verrechnungspreis	Zielsetzung	Wertansatz
Grenzkosten	Lenkungsfunktion	unter Vollkosten
Grenzkosten plus	Lenkungsfunktion	unter Vollkosten
Vollkosten	Kostenrechnungsfunktion	kostendeckend
Vollkosten plus	Erfolgsermittlungsfunktion	über Vollkosten
Verhandlungspreis	Erfolgsermittlungsfunktion	-----
Marktpreis	Erfolgsermittlungsfunktion	-----

Abbildung 5.9: Zielsetzungen verschiedener Verrechnungspreise.

Die Frage, wie ein Anreiz für effizientes Handeln geschaffen werden kann, wird durch *cost-plus* Preise, die der Zielsetzung der Erfolgsermittlung genügen, versucht zu beantworten. Besonders in der Praxis ist dieser Ansatz verbreitet,<sup>32</sup> und auch in der Literatur werden Verrechnungspreise gemäß dem heutigen Managementmodell meist unter der Annahme betrachtet, dass sie Anreizprobleme lösen sollen.<sup>33</sup> Erfolgsermittlung, Leistungsbeurteilung und Vergütung sollen, gestützt durch das Controlling, vereint werden. Dies entspricht der Profit-Center Rechnung, laut der für jeden Teilbereich des Unternehmens ein eigenes Ergebnis ausgewiesen wird, wodurch auch für intern liefernde Abteilungen die Maxime der Gewinnmaximierung gilt. Laut dem Konzept subventionsfreier Preise zeigt sich jedoch, dass diese Zielsetzung eine instabile Zuteilung bedingt.<sup>34</sup> Im Unterschied zu *cost-plus* Preisen und

<sup>30</sup>Die Zuordnung ist nicht eindeutig, was hier vernachlässigt wird. Es wird angenommen, dass Grenzkosten-plus Preise immer unter Vollkostenpreisen liegen.

<sup>31</sup>Vgl. Schultheiss (1990), S. 245–249 und Küpper (2001), S. 378–379.

<sup>32</sup>Vgl. Küpper (2001), S. 389–390.

<sup>33</sup>Vgl. Schultze und Weiler (2007), S. 102.

<sup>34</sup>Vgl. Shubik (1962).

der Erfolgsermittlungsfunktion wird durch die spieltheoretisch motivierte Forderung nach Stabilität und nach subventionsfreien Preisen festgelegt, dass die internen Preise zu Vollkosten, die der Zielsetzung der Kostenrechnung entsprechen, bestimmt werden.

Dass in diesem Fall ein Anreiz zu kostenminimierendem Verhalten existiert, liegt an dem im Folgenden beschriebenen Sachverhalt: Es sei ein virtueller Gewinn  $G_i$  für jeden Spieler definiert. Dieser wird dabei so ausgelegt, dass jeder Spieler bei kostenminimalem Verhalten davon profitiert. In Unternehmen lässt sich dies dadurch umsetzen, dass keine Anreize auf individuelle Leistung gesetzt werden, sondern eine Gewinnbeteiligung am Gesamtergebnis ausgesprochen wird.

### Definition 5.2. Gewinnbeteiligung durch einen virtuellen Gewinn

Es seien  $K_i$  die Kosten von Spieler  $i$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_{ic}$  die zum externen Markt gelieferten Produkte und  $\mathbf{p}_{ic}$  die entsprechenden Preise.<sup>35</sup> Der virtuelle Gewinn  $G_i$  des Spielers  $i$  bestimmt sich durch seinen Anteil  $\gamma_i$  am Gesamtgewinn des Unternehmens.

$$G_i = \gamma_i \cdot \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{ic} \cdot \bar{\mathbf{q}}_{ic} - \sum_{i=1}^n K_i \right), \quad (5.3)$$

wobei  $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$ .

Die Anteile (Beteiligungen)  $\gamma_i$  stellen dabei Gewichte dar, die z. B. anhand der Mitarbeiterzahl pro Abteilung bestimmt werden können, so dass der virtuelle Gewinn pro Kopf gleich ist. Aus der Summe aller Gewinnbeteiligungen ergibt sich das Gesamtergebnis des Unternehmens:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n G_i &= \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{ic} \cdot \bar{\mathbf{q}}_{ic} - \sum_{i=1}^n K_i \\ &= \text{Unternehmensumsatz} - \text{Gesamtkosten} \\ &= \text{Unternehmensgewinn} \end{aligned}$$

Durch die Bestimmung von  $G_i$  mit Faktoren  $\gamma_i$ ,  $\sum_{i=1}^n \gamma_i < 1$  kann die realistischere Situation dargestellt werden, dass nur ein Teil des Unternehmensgewinns an die Mitarbeiter ausgeschüttet wird.<sup>36</sup>

<sup>35</sup>Vgl. Abschnitt 4.4.

<sup>36</sup>Es gibt Unternehmen, die Mitarbeiterbeteiligungen dieser Form anwenden, siehe z. B. zum System („Oktogon“) der Svenska Handelsbanken Pfläging (2003), S. 336.

Es wird angenommen, dass die Leistungen so über die Abteilungen verteilt sind, dass eine Abteilung entweder nur für den Markt (externorientiert) oder nur für interne Abnehmer (internorientiert) leistet. Somit kann eine Fallunterscheidung für die Auswirkung von  $G_i$  getroffen werden. Für alle externorientierten Abteilungen gilt:

$$\max G_i = \max \gamma_i \cdot \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{ic} \cdot \bar{\mathbf{q}}_{ic} - \sum_{i=1}^n K_i \right) \Rightarrow \max \mathbf{p}_{ic} \cdot \bar{\mathbf{q}}_{ic} - K_i.$$

Dies steht nicht im Widerspruch zur Subventionsfreiheit, da nur die externen Preise  $\mathbf{p}_{ic}$  maximiert werden und die eigenen Kosten  $K_i$  minimiert werden. Insbesondere erlauben die marktnahen Abteilungen nicht, dass die von Ihnen bezogenen internen Leistungen jeden beliebigen Preis haben können, solange nur ihr eigener Gewinn positiv ist. Vielmehr soll die Differenz der monetären Bewertung abgegebener und bezogener Leistung maximiert werden, so dass die marktnahen Abteilungen den Preisdruck des Marktes in das Unternehmen hinein weitergeben und minimierte interne Preise verlangen.

Für internorientierte Abteilungen gilt aufgrund von  $\mathbf{q}_{ic} = \mathbf{0}$ :

$$\begin{aligned} \max G_i &= \max \gamma_i \cdot \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_{ic} \cdot \bar{\mathbf{q}}_{ic} - \sum_{i=1}^n K_i \right) \\ &\Rightarrow \max \gamma_i \cdot (0 - K_i) \Rightarrow \min K_i \Leftrightarrow \min \mathbf{p}_i \cdot \bar{\mathbf{q}}_i \end{aligned}$$

Weil sich bei gerade kostendeckenden Preisen alle Kosten  $K_i$  einer Abteilung in ihrem (internen) Umsatz  $\mathbf{p}_i \cdot \bar{\mathbf{q}}_i$  spiegeln, kommt die Minimierung Ihrer Kosten einer Minimierung ihrer internen Preise  $\mathbf{p}_i$  gleich und vice versa. Internorientierte Abteilungen haben also einen Anreiz, ihre eigenen Kosten zu minimieren, und sie haben einen Anreiz, die von ihnen abgegebenen Leistungen möglichst kostengünstig weiterzugeben. Durch möglichst geringe interne Preise maximieren sie den zu verteilenden Ausschüttungsbetrag – und damit auch ihren eigenen Anteil.

Zusammenfassend gilt also, dass die Abteilungen, die einen Realumsatz erzielen, die Preise an externe Kunden  $\mathbf{p}_{ic}$  maximieren, sofern sie einen Einfluss auf die Marktpreise haben.<sup>37</sup> Interne Preise werden immer minimiert. Aus der Aggregation aller Zielfunktionen wird dann die Zielfunktion des Unternehmens, den Gesamtumsatz mi-

<sup>37</sup>Werden die Marktpreise als gegeben angenommen, werden an den Markt liefernde Abteilungen ihre Leistung genau dann anbieten, wenn die Marktpreise eine (möglichst hohe) Überdeckung erlauben.



nus die Gesamtkosten zu maximieren, erfüllt. Insbesondere sei auf die Diskussion in Abschnitt 2.6 verwiesen und daran erinnert, dass das Hauptaugenmerk dieser Arbeit auf kooperativen Märkten liegt. Je nach Standpunkt kann ein unternehmensinterner Markt als solcher angesehen werden – oder eben auch nicht. In letzterem Fall ist das hier vorgeschlagene Modell nicht als Konkurrenz zu bestehenden Konzepten von Anreizen in Märkten und Unternehmen zu sehen, sondern aufgrund der verschiedenen Annahmen und Zielsetzungen nicht anwendbar.

Die Spieltheorie zeigt weiterhin, dass die Erfolgsermittlungsfunktion unter Umständen nicht zielführend ist, vgl. Shubik (1962). Gleiches ergibt sich anhand der Analyse von Lindstädt et al. (2008b) für die Lenkungsfunktion: Anhand zweier Gestaltungsparameter ergeben sich 48 verschiedenen Szenarien für den Einsatz von Verrechnungspreises: Die *Transaktionsbasis* legt fest, welcher Verrechnungspreis verwendet werden soll, und die *Transaktionsfreiheit* legt fest, ob interne Leistungen durch am Markt verfügbare Leistungen substituiert werden dürfen bzw. ob interne Leistungen am Markt angeboten werden dürfen.<sup>38</sup> In etwa 21 der 48 analysierten Fälle sollten Kostenpreise zur Anwendung kommen, in 20 der 48 analysierten Fälle sollte zur Koordination gar kein Verrechnungspreis eingesetzt werden, d.h. in weniger als 20% der analysierten Fälle dürfen aus betriebswirtschaftlicher Sicht abweichende Zielsetzungen verfolgt werden.<sup>39</sup> Somit kann durchaus die Empfehlung abgegeben werden, Verrechnungspreise nicht zur Koordination (Lenkungsfunktion) oder als Anreiz (Erfolgsermittlungsfunktion) zu gebrauchen, sondern rein zur Kostenzuteilung. Verrechnungspreise sind – aus dieser Perspektive betrachtet – kein Management- oder Koordinationsinstrument, sondern ein reines Informationsinstrument.

## 5.2 Zusammenhänge mit der Kostenzuteilung im Koalitionsspiel

Im Folgenden wird anhand eines zur Illustration absichtlich vereinfachten Beispiels entwickelt, wie sich die beiden Sichtweisen der Kostenzuteilung, repräsentiert auf der einen Seite als Koalitionsspiel und auf der anderen als Zuteilung anhand eines Preisvektors – im Folgenden als Leistungsberechnung bezeichnet<sup>40</sup> –, ineinander überführen lassen. Darauf aufbauend erfolgt der formale Beweis, dass eine

---

<sup>38</sup>Vgl. Lindstädt et al. (2008b), S. 31–32.

<sup>39</sup>Vgl. Lindstädt et al. (2008b), S. 45–46.

<sup>40</sup>Vgl. Abschnitt 4.4.3.

Kostenzuteilung anhand subventionsfreier Preise eine Kernzuteilung im zugehörigen Koalitionsspiel induziert. Anschließend verbleibt zu zeigen, dass die Existenz subventionsfreier Preise garantiert ist.

Zwischen einem Koalitionsspiel  $(N, c)$ , das über eine charakteristische Funktion  $c(\cdot)$  beschrieben wird, und einer auf einer Leistungsberechnung basierenden Kostenzuteilung, lässt sich ein eindeutiger Zusammenhang ableiten. Wie in Abschnitt 4.4.3 angedeutet, entsteht die Zuteilung in letzterem Fall durch die bepreisten Mengen, die zwischen den Spielern ausgetauscht werden. Die Behauptung, dass durch dieses Vorgehen die Kalkulation einer charakteristischen Funktion überflüssig wird, gilt dann, wenn aufgrund einer „richtigen“ Bepreisung – nämlich durch subventionsfreie Preise  $\mathbf{p}_i$  für alle  $i$  – eine Kernzuteilung induziert wird.

Es wird ein Unternehmen mit  $n = 3$  Abteilungen betrachtet, die sich wie in Abbildung 5.10 gegenseitig beliefern. Jede Abteilung erstellt dabei nur ein Produkt, so dass auf die Indizierung der Produkte verzichtet wird, da die erste Abteilung das erste Produkt produziert,  $i = 2$  das zweite und  $i = 3$  das dritte.  $q_{ij}$  bezeichnet die Menge, mit der Abteilung  $i$  Abteilung  $j$  beliefert.

Das Spiel ist dabei so angelegt, dass die Kosten der ersten Abteilung unberücksichtigt bleiben können. Sie gibt lediglich die Marktnachfrage weiter und befreit von der Notwendigkeit, den Markt selber als Spieler betrachten zu müssen. Der Einfachheit halber benötigen alle Abteilungen den selben Input  $\varrho$  vom Markt, der zum vorgegebenen Preis  $\pi = 2$  bezogen werden kann, wobei Spieler 2 die Menge  $\varrho_2$  und Spieler 3 die Menge  $\varrho_3$  bezieht. Aufgrund der Marktnachfrage bei Spieler 1 fragt dieser 65 Einheiten der Leistung von Spieler 2 und 16 Einheiten der Leistung von Spieler 3 nach.

Die Produktion wird hier vereinfachend als linear-limitational angenommen. Die Produktionsfunktionen der Abteilungen zwei und drei lauten

$$\xi_2(q_3, \varrho_2) = \min \{(q_3)^2, (\varrho_2)^2\} \quad \text{und} \quad \xi_3(q_2, \varrho_3) = \min \{(q_2)^{1.161}, (\varrho_3)^{1.161}\}.$$

Es wird die Annahme getroffen, dass sich aus den Produktionsfunktionen eindeutige Nachfragefunktionen ableiten.  $D_i^j(q_i, p_j)$  und  $D_i^{\varrho}(q_i, \pi)$  seien die Nachfragefunktionen von Spieler  $i$  nach dem Produkt des Spielers  $j$  bzw. nach dem Marktinput  $\varrho$ , in

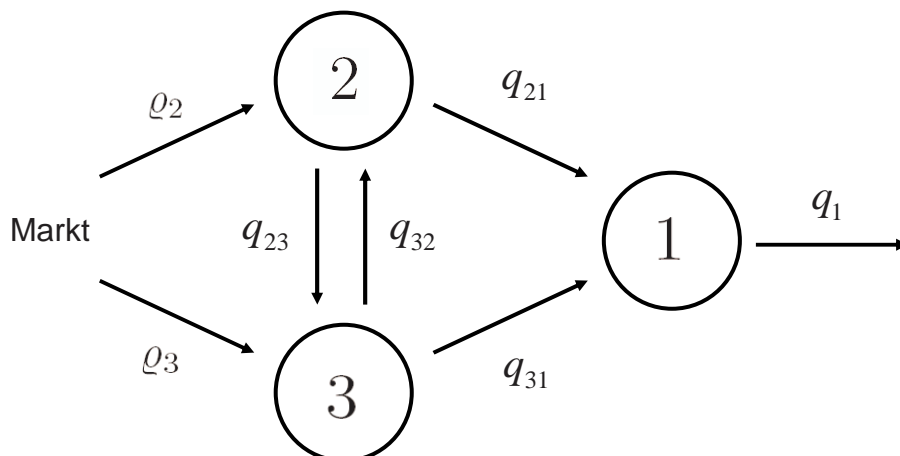


Abbildung 5.10: Beispiel eines wechselseitigen Leistungsaustauschs.

Abhängigkeit der zu produzierenden Menge  $q_i$  und der Preise der Inputfaktoren  $p_j$  und  $\pi$ .

$$D_2^3(q_2, p_3) = \begin{cases} \sqrt{q_2}, & p_3 \text{ ist subventionsfrei} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad D_2^g(q_2, \pi) = \sqrt{q_2} \quad \text{und}$$

$$D_3^2(q_3, p_2) = \begin{cases} (q_3)^{0.8614}, & p_2 \text{ ist subventionsfrei} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad D_3^g(q_3, \pi) = (q_3)^{0.8614}$$

Hier kommen die Strategien der Spieler zum Ausdruck. Werden die ausgetauschten Leistungen bepreist, und werden diese Preise den Spielern bekannt gegeben, so können sie daran eine autonome Entscheidung treffen, ob sich der Leistungsaustausch für sie lohnt, d. h. ob sie einen Anreiz haben, an der Kooperation teilzunehmen.<sup>41</sup> Es ist für andere Abteilungen gerade dann sinnvoll einer Belieferung durch eine andere Abteilung zuzustimmen, wenn sie sich dadurch nicht schlechter stellen, als wenn sie die Leistung selber erstellen oder durch andere Spieler oder Koalitionen erstellen lassen. Diese Situation liegt genau dann vor, wenn es nicht möglich ist, mit Gewinn in das Mehrproduktmonopol des Lieferanten einzubrechen, was durch subventionsfreie Preise sichergestellt wird.<sup>42</sup> (Ein Unternehmen, in dem die Spieler sich nicht gegenseitig beliefern lassen wollen, ist in dem Sinne „schlecht“ organisiert, dass keine tragbaren Kostenfunktionen im Unternehmen bestehen. Die Konsequenz daraus

<sup>41</sup>Aus Managementsicht ist dann zu beantworten, ob ein Bezug am Markt erlaubt wird oder nicht, d.h. in wie weit Transaktionsfreiheit gegeben ist, vgl. Lindstädt et al. (2008b).

<sup>42</sup>Vgl. Abschnitt 3.2 und Abschnitt 5.1.3.

könnte beispielsweise eine Reorganisation sein.) Insbesondere hat hier die Kenntnis der Preise keinerlei Einfluss auf die Menge der Nachfrage, die Spieler treffen eine binäre Entscheidung zwischen einer Belieferung oder einer Nicht-Belieferung.<sup>43</sup> Die Größe des Marktes ist somit gegeben und unterliegt nicht Optimierungsbestrebungen wie im perfekten Wettbewerbsmarkt, in dem die Wahl des Outputs bei gegebenen Preisen die Strategien der Spieler sind. Dazu schreibt Spence:

*The contestable market theory focuses on costs and technology. Demand plays a minimal role. The only role for demand functions in contestable market theory is to set the size of the various markets. Roughly, the market sizes are the levels of demand when prices are in the neighborhood of average costs. The properties of demand at prices above marginal or average costs are not centrally important in this theory.*<sup>44</sup>

Die Kosten der Abteilungen seien der Form<sup>45</sup>

$$K_i = p_j \cdot q_{ji} + \varrho_i \cdot \pi + EL_i,$$

wobei im Beispiel entweder  $i = 2$  und  $j = 3$  oder  $i = 3$  und  $j = 2$  ist. Die Fixkosten, hier als Eigenleistung  $EL_i$  bezeichnet, seien  $EL_2 = 22.5$  und  $EL_3 = 12.25$ . Der Preisvektor über alle Preise aller Produkte aller Abteilungen des Unternehmens wird mit  $\mathbf{p}$  bezeichnet, so dass hier  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  ist.  $\mathbf{p}$  bilden betriebswirtschaftlich gesehen die sekundären Kosten ab, also die Kosten, die innerhalb des kooperativen Marktes existieren und berechnet werden sollen.<sup>46</sup> Sie haben im Gegensatz zu den primären Kosten, die sich durch die externen Inputpreise bestimmen, keinen Bezug zum externen Markt. Sie können also frei gesetzt werden und ihre Bestimmung unterliegt den selbstgesetzten Regeln der Preisbestimmung der Kooperation.

---

<sup>43</sup>Diese Annahme wird vor dem Hintergrund getroffen, dass die meisten innerhalb des Unternehmens ausgetauschten Leistungen nicht substitutiv verwendet werden können. Dies gilt im Bereich von physisch ausgetauschten Produkten und auch im Bereich der internen Dienstleistungen. Es soll weiterhin den Abteilungen nicht wie bei einem reinen Gewinndenken erlaubt sein, Leistungen stillzulegen bzw. zu unterlassen, nicht zu investieren, oder Lagerhaltung zu betreiben. Innerhalb des Unternehmens gilt: „was anliegt, wird gemacht“.

<sup>44</sup>Vgl. Spence (1983), S. 988.

<sup>45</sup>Vgl. Abschnitt 4.4.2.

<sup>46</sup>Vgl. Abschnitt 4.1.1.

Die Kostenfunktionen der Abteilungen lauten demnach

$$\begin{aligned} C_2(q_2; p_3, \pi) &= p_3 \cdot \sqrt{q_2} + \pi \cdot \sqrt{q_2} + 22.5 \\ C_3(q_3; p_2, \pi) &= p_2 \cdot (q_3)^{0.8614} + \pi \cdot (q_3)^{0.8614} + 12.25 \end{aligned}$$

woraus sich die eindeutigen Nachfragefunktionen ableiten. Die Kostenfunktionen weisen nichtsteigende Durchschnittskosten auf und sind somit tragbar.

Spieler  $i$  fragt eine gewisse Menge von (potentiell) allen innerhalb der Kooperation verfügbaren Leistungen nach. Sei  $\mathbf{d}_{ij}$  die Menge, die Spieler  $i$  bei Spieler  $j$  nachfragt, so dass  $\mathbf{d}_{ij} \in \mathbf{R}_+^{m_j}$ .<sup>47</sup> Sei

$$\mathbf{d}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{in} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_i \in \mathbf{R}_+^m$$

der Vektor von  $i$ 's Gesamtnachfrage über alle Produkte innerhalb der Kooperation, wobei  $\mathbf{d}_{ii} = \mathbf{0}$ . Die Komponenten des Vektors  $\mathbf{q}_j = (q_j^1, \dots, q_j^{m_j})$  sind dann unter Berücksichtigung von  $d_{ii}^k = 0$  durch  $q_j^k = \sum_{i=1}^n d_{ij}^k$  gegeben.

Teilen sich  $n$  Spieler eine Technologie, dann ergibt sich die Gesamtnachfrage  $\mathbf{d}_N$ <sup>48</sup> durch die Summe aller Einzelnachfragen:

$$\mathbf{d}_N = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i = \mathbf{d}_1 + \dots + \mathbf{d}_n = \begin{pmatrix} d_{11}^1 \\ \vdots \\ d_{1n}^{m_n} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} d_{i1}^1 \\ \vdots \\ d_{in}^{m_n} \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} d_{n1}^1 \\ \vdots \\ d_{nn}^{m_n} \end{pmatrix},$$

wobei  $q_{ii}^k = 0$  für alle  $i$  gilt. An dieser Stelle sei die Bedeutung von  $\mathbf{q}_i$  und von  $\mathbf{d}_i$  noch einmal veranschaulicht: Bei Summation über die Outputs  $\mathbf{q}_i$  wird über die Zeilen der Verflechtungsmatrix  $Q$  (4.3) summiert, bei der Summation der Nachfragen  $\mathbf{d}_i$  wird über die Spalten der Verflechtungsmatrix  $Q$  (4.3) summiert. Die verschiedenen Outputs der Technologien werden durch die Nachfrage der Spieler bestimmt. Der

<sup>47</sup>Vgl. Abschnitt 4.4.2.

<sup>48</sup>Das tiefgestellte  $N$  steht für die große Koalition  $N$ . Zwar gilt  $\mathbf{d}_N = \bar{\mathbf{q}}$ , in den folgenden Ausführungen ist es jedoch vorteilhaft, die Gesamtmenge als nachgefragte Menge kenntlich zu machen.

Output  $\bar{\mathbf{q}}$  entspricht folglich der Gesamtnachfrage  $\mathbf{d}_N$ . Daraus folgt im Beispiel die Gesamtnachfrage von<sup>49</sup>

$$\bar{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_N} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 65 \\ 16 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\bar{q}_2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{q}_3)^{0.8614} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{d}_3}.$$

Aus dem Gleichungssystem der zweiten und dritten Zeile folgt

$$\bar{q}_2 = 81, \quad \bar{q}_3 = 25, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 81 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Die Abteilungen kalkulieren nun ihre subventionsfreien Preise. Da laut Bedingung (5.1) gelten soll  $\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k \bar{q}_i^k = C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \pi)$  folgt:

$$81 \cdot p_2 = p_3 \cdot 9 + \pi \cdot 9 + 22.5$$

$$25 \cdot p_3 = p_2 \cdot 16 + \pi \cdot 16 + 12.25$$

woraus sich mit  $\pi = 2$  die folgenden Preise ergeben:

$$p_2 = 0.75 \quad \text{und} \quad p_3 = 2.25 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0.75 \\ 2.25 \end{pmatrix}.$$

Anhand des Beispiels lassen sich die Beziehungen zwischen den Kostenfunktionen und den berechneten Preisen ableiten: Die Outputs  $\mathbf{q}_i$  werden durch die Nachfrage der anderen Spieler bestimmt. Wird nach den zu tragenden Kosten einer Koalition  $S$  gefragt, sind nur die Nachfragen der Spieler relevant, die in  $S$  enthalten sind. Deren Nachfrage wird mit  $\mathbf{d}_{Sj} \in \mathbb{R}_+^{m_j}$  bzw.  $\mathbf{d}_S \in \mathbb{R}_+^m$  bezeichnet und bestimmt sich zu

$$\mathbf{d}_{Sj} = \sum_{i \in S} \mathbf{d}_{ij} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{d}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{S1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{Sn} \end{pmatrix} = \sum_{i \in S} \mathbf{d}_i.$$

<sup>49</sup> $\bar{q}_1$  ist normalerweise größer als Null. Hier wird der Bedarf des Marktes  $\mathbf{B}$  nicht berücksichtigt.

Die Koalition  $S$  verursacht durch ihre Nachfrage  $\mathbf{d}_S$  gerade die Kosten  $C_i(\mathbf{d}_{Si}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$  bei Spieler  $i$ . Diese Kosten hat sie zu tragen, wenn sie nicht mit den anderen Spielern kooperiert, d. h. wenn die Technologie, die Spieler  $i$  zugewiesen wird, allein zur Herstellung der durch  $\mathbf{d}_S$  nachgefragten Güter verwendet wird. Die Nachfrage  $\mathbf{d}_S$  wird mit den innerhalb der Kooperation hergestellten Produkten befriedigt, wobei potentiell jeder Spieler  $i$  einen Teil der Produktion beisteuert. Die Kosten der Nachfrage  $\mathbf{d}_S$  ergeben sich folglich aus der Summe über alle Kostenfunktionen, ausgewertet zu den durch die Nachfrage induzierten Outputs. Zum Beispiel verursacht die Nachfrage von Spieler Eins ( $S = \{1\}$ ) im Beispiel die Kosten  $C_2(\mathbf{d}_{12}; \mathbf{p}_{-1}, \boldsymbol{\pi}) + C_3(\mathbf{d}_{13}; \mathbf{p}_{-1}, \boldsymbol{\pi}) = C_2(65; 2.25, 2) + C_3(16; 0.75, 2) = 98.97$ . Dieser Wert entspricht gerade dem Koalitionswert der Koalition  $S$ , weil die durch  $\mathbf{d}_S$  verursachten Kosten gerade das Kostenniveau darstellen, das eine Koalition zu tragen hat, wenn sich alle anderen Spieler gegen sie stellen, so dass

$$c(S) = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Si}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall S \subset N.$$

Für den Fall der großen Koalition  $N$  gilt:

$$c(N) = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Ni}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}).$$

Bisher wurde das Spiel für den Fall beschrieben, dass keine Kooperation stattfindet: der Koalitionswert entspricht den Kosten der Koalition  $S$  bei Nichtteilnahme am Spiel. Nun sei der Fall der Kooperation betrachtet, in dem die Zuteilung über die Preise bestimmt wird: bei Teilnahme am Spiel tragen die Spieler die durch die Leistungsberechnung zugeteilten Kosten. Dazu werden die Preise  $\mathbf{p}_i$  einer Abteilung gemäß dem entwickelten Lösungsvorschlag kostendeckend kalkuliert. Schreibt man Gleichung (5.1) mit Vektoren  $\mathbf{p}_i$  und  $\mathbf{q}_i$  und setzt die Nachfrage  $\mathbf{d}_N = \bar{\mathbf{q}}_i$  ein, so erhält man

$$\mathbf{p}_i \cdot \bar{\mathbf{q}}_i = C_i(\mathbf{d}_{Ni}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$$

Der Zusammenhang gilt für alle Abteilungen  $i \in N$  und beide Seiten aufsummiert schreiben sich zu<sup>50</sup>

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_N = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Ni}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}). \quad (5.4)$$

Um zu testen, ob diese Preise eine stabile Zuteilung induzieren, ist zu untersuchen, ob es eine Koalition  $S \subset N$  gibt, die bei diesen Preisen dadurch benachteiligt wird, dass sie mehr bezahlt, als wenn sie alleine stehen würde. Dabei bestimmen sich die Zuteilungen einer Koalition  $S$  im entwickelten Lösungsvorschlag durch die Berechnung von Mengen mal Preisen. Die Zuteilung schreibt sich folglich als das Skalarprodukt  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S = p_1^1 \cdot \sum_{i \in S} d_{i1}^1 + \dots + p_n^{m_n} \cdot \sum_{i \in S} d_{in}^{m_n}$ . Der ersten Abteilung wird im Beispiel die Summe  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_1 = 65 \cdot 0.75 + 16 \cdot 2.25 = 84.75$  berechnet, was die von ihr im Spiel zu tragenden Kosten sind. Diese dürfen nicht die von ihrer Nachfrage hervorgerufenen Kosten übersteigen (hier 98.97), weil es sonst eine Möglichkeit gäbe, gewinnbringend in ein Mehrproduktmonopol einzubrechen. Allgemein gibt die folgende Bedingung an, dass die Zuteilung (die im Spiel zu tragenden Kosten) nicht höher sind als die Kosten, die eine Koalition alleinstehend verursacht.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S \leq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Si}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall S \subset N \quad (5.5)$$

Dies schließt den Spezialfall für  $|S| = 1, S = \{i\}$ , ein:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_i \leq \sum_{j=1}^n C_j(\mathbf{d}_{ij}; \mathbf{p}_{-j}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall i \in N \quad (5.6)$$

Aufgrund des Spezialfalls (5.6) stellt (5.5) sicher, dass (5.1) und (5.2) für alle  $i$  erfüllt werden. Es ist insbesondere nicht möglich, dass ein subventionierter Preis einen anderen (subventionierenden) Preis ausgleicht.<sup>51</sup>

<sup>50</sup>Es ist nicht ersichtlich, dass sich ein (eindeutiges)  $\mathbf{p}$  finden lässt, dass diese Bedingung erfüllt. Aufgrund der Interdependenzen müssen die Kalkulationen für (5.1) simultan durchgeführt werden. In Anhang B wird gezeigt, dass sich immer eindeutige Preise finden lassen.

<sup>51</sup>Für den Beweis siehe Satz 5.1.



Die beschriebenen Zusammenhänge werden in Tabelle 5.1 für das Beispiel ausgewertet.<sup>52</sup> Es lässt sich daran überprüfen, dass die Bedingung (5.5) immer eingehalten wird. Interpretiert man dabei die Kosten der Technologie als Koalitionswert und die Preise mal den Mengen als die Zuteilung einer Koalition, dann wird die Koalitionsrationalität aus Definition 2.10 nicht verletzt. Bedingung (5.5) lässt sich als  $x_S \leq c(S)$  für alle  $S \subseteq N$  interpretieren.

Tabelle 5.1: Tabellarische Aufstellung des Beispiels.

$S \subseteq N$	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{1, 3}*	{2, 3}	{1, 2, 3}
$\mathbf{d}_S \Rightarrow q_2$	65	0	16	65	81	81	16	81
$q_3, \varrho_2$	8.06	0	4	8.06	9	9	4	9
$p_3 \cdot q_3$	18.14	0	9	18.14	20.25	20.25	9	20.25
$\varrho_2 \cdot \pi$	16.12	0	8	16.12	18	18	8	18
$C_2(q_2; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$	56.76	22.5	39.5	56.76	60.75	50	39.5	60.75
$\mathbf{d}_S \Rightarrow q_3$	16	9	0	25	16	16	9	25
$q_2, \varrho_3$	10.89	6.64	0	16	10.89	10.89	6.63	16
$p_2 \cdot q_2$	8.17	4.98	0	12	8.17	8.17	4.98	12
$\varrho_3 \cdot \pi$	21.79	13.27	0	32	21.79	21.79	13.27	32
$C_3(q_3; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$	42.21	30.5	12.25	56.25	42.21	42.21	30.5	56.25
$\sum_{i=1}^n C_i(\cdot)$	98.97	53	51.75	113	102.96	92.21	70	117
$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S$	84.75	20.25	12	105	96.75	96.75	32.25	117

Angenommen, eine Kostenfunktion sei nicht tragbar, so dass Bedingung (5.5) für mindestens ein Output  $\mathbf{d}_S$  nicht erfüllt werde. Im Beispiel wäre dies z. B. dann der Fall, wenn die Kosten des Outputs (0, 81, 16) bzw. der Nachfrage der Koalition {1, 3} nur  $0 + 50 + 42.21 = 92.21$  betragen würden, hier gekennzeichnet mit {1, 3}\* . Der Preis wäre dann nicht subventionsfrei, denn es würde gelten:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S \not\leq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_S; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \Leftrightarrow 96.75 \not\leq 92.21.$$

<sup>52</sup> $C_i(q_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$  ergibt sich aus der Summe der eingesetzten Preise und Mengen und der Eigenleistungen  $EL_2 = 22.5$  und  $EL_3 = 12.25$ .

Der Test auf eine subventionierte Koalition aus Satz 2.1 erhält in Bezug auf das regulierte Mehrproduktmonopol folgende Formulierung,<sup>53</sup>

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{d}_N - \mathbf{d}_S) \geq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{N_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) - \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \quad (5.7)$$

so dass im Beispiel gilt

$$\begin{aligned} 0.75 \cdot (81 - 81) + 2.25 \cdot (25 - 16) &\not\geq 117 - 92.21 \\ \Leftrightarrow 20.25 &\not\geq 24.79. \end{aligned}$$

Die Koalition  $\{1, 3\}^*$  zahlt über die Preise den Betrag von 4.54 zu viel und subventioniert den Spieler 2 um diesen Betrag.

Die anhand des Beispiels entwickelten Zusammenhänge mit der Kostenteilung im Koalitionsspiel werden nun allgemein untersucht. In kooperativen Märkten ist jeder der  $n$  Spieler in der Rolle des regulierten Mehrproduktmonopols Anbieter von mehreren konkurrenzlosen Produkten. Die Spieler sind sowohl Abnehmer als auch Produzenten, wobei sich die Produktionen gegenseitig beeinflussen. Der entwickelte Lösungsvorschlag ist die Generalisierung des Kostenteilungsspiels  $\Gamma = (C, \bar{\mathbf{q}})$  auf  $n$  derartige Kostenteilungsspiele, die darüberhinaus miteinander derart vernetzt sind, dass die Zuteilungen eines Spiels die Zuteilungen der anderen Spiele beeinflusst.

### Definition 5.3. Vernetztes Kostenteilungsspiel

Ein vernetztes Kostenteilungsspiel besteht aus  $i \in \{1, \dots, n\}$  Kostenteilungsspielen  $\Gamma_i = (C_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$ , in denen die Kostenfunktionen eines jeden Spiels  $i$  als Inputfaktoren die Lösungen  $\mathbf{p}_j$  (potentiell) aller anderen  $n - 1$  Spiele beinhalten, so dass gilt:

$$\Gamma = (C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \mathbf{d}_i).$$

<sup>53</sup>Beweis. Mit (5.4) folgt

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{d}_N - \mathbf{d}_S) \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_N - \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}),$$

was durch Zusammenfassung und Multiplikation mit  $-1$  zu (5.5) führt,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S \leq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}).$$

Vgl. insbesondere (3.6). □

Es lässt sich zeigen, dass ein Zusammenhang zwischen der „Stabilität“ eines vernetzten Kostenteilungsspiels  $(C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \mathbf{d}_i)$  und der Stabilität im Koalitionsspiel  $(N, c)$  besteht. Ebenso besteht ein Zusammenhang zwischen subventionsfreien Preisen  $\mathbf{p}_i$  und einer Kernzuteilung  $\mathcal{K}(N, c)$ .

**Satz 5.1. Stabilität im vernetzten Kostenteilungsspiel**

*Gegeben sei ein vernetztes Kostenteilungsspiel sowie die Nachfragen  $\mathbf{d}_i$ . Das dazu korrespondierende Koalitionsspiel  $(N, c)$*

$$c(N) = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{N_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad (5.8)$$

$$c(S) = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall S \subset N \quad (5.9)$$

*hat dann und nur dann einen nichtleeren Kern, wenn alle Kostenfunktionen tragbar gemäß Definition 5.1 sind.*

**Beweis:** Siehe Anhang A.

**Interpretation:** Die Verbindung mit Definition 5.1 lässt sich folgendermaßen verdeutlichen. Da die Kosten der Nachfrage einer Koalition  $S$  genau ihren Koalitionswert  $c(S)$  ergeben, und die Zuteilung  $x_S = \sum_{i \in S} x_i$  durch die zu zahlenden Preise der Leistungsberechnung  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S$  festgelegt wird, gilt: Die erste Gleichung (5.1) des subventionsfreien Mehrproduktmonopols ist äquivalent mit der Definition 2.11 der Effizienz, und die zweite Gleichung (5.2) des subventionsfreien Mehrproduktmonopols ist äquivalent mit der Definition 2.10 der Koalitionsrationalität.

Der erste Teil des Beweises aus Anhang A belegt auch die folgende Schlussfolgerung:

**Satz 5.2. Subventionsfreie Preise und der Kern**

*Gegeben sei das in Satz 5.1 formulierte Koalitionsspiel  $(N, c)$  sowie die Kostenfunktionen  $C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}_i)$  und Nachfragen  $\mathbf{d}_i$  aller  $n$  Spieler. Wenn alle Kostenfunktionen tragbar sind, dann ist die Kostenzuteilung durch Preise  $\mathbf{p}_i$  eine Kernzuteilung, wenn diese subventionsfrei sind.*

Satz 5.2 gilt nur in eine Richtung – es ist möglich, eine Kernzuteilung zu konstruieren, die durch subventionsfreie Preise nicht erreicht werden kann.

**Beispiel 5.4.** Es sei folgende Situation betrachtet. Zwei Spieler teilen sich den Output einer Technologie, die ein einziges Produkt herstellt und deren Kostenfunktion durch  $C_i(q_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}_i) = \sqrt{q_i}$  gegeben ist. (Es wird angenommen, dass alle Inputpreise Eins sind.) Spieler 1 benötigt 9 Einheiten des Guts, und Spieler 2 benötigt 16. Die jeweiligen stand-alone Kosten<sup>54</sup> (und Preise) der Spieler sind 3 (0.33) und 4 (0.25). Weil die Kostenfunktion tragbar und damit subadditiv ist, sind die geringsten gemeinsamen Kosten die der großen Koalition. Diese führt zu einem subventionsfreien Preis von 0.2 und der Zuteilung  $\mathbf{x} = (1.8, 3.2)$ , die eine Kernzuteilung ist.

Jedoch ist  $\mathbf{x}' = (2, 3)$  ebenso eine Kernzuteilung. Damit diese Zuteilung über Preise erreicht wird, müssen diese abhängig von dem jeweiligen Spieler sein, an den das Gut geliefert wird, das heißt, Spieler 1 muss pro Einheit 0.2222 zahlen, während Spieler 2 0.1875 pro Einheit zahlt. Dies entspricht nicht der Forderung subventionsfreier Preise, genügt jedoch der Koalitionsrationalität (2.10).

Weil der Kern eine Menge von Zuteilungen ist, subventionsfreie Preise jedoch eine eindeutige Lösung darstellen, weichen die Konzepte voneinander ab. Es stellt sich die Frage nach der Bedeutung dieses Sachverhalts. Es ist anzuzweifeln, dass eine Preisbildung in einem kooperativen Markt, die nicht unabhängig von der Identität des Nachfragers ist, sinnvoll im gewählten Modell ist. Ebenso lässt sich hier auch der subjektive Eindruck von „Gerechtigkeit“ ansprechen, der bei unterschiedlichen Preisen für verschiedene Nachfrager nicht gegeben zu sein scheint. Dies belegt, dass subventionsfreie Preise eine Kostenzuteilung beschreiben, die über die reine Eigenschaft, eine Kernzuteilung (stabil) zu sein, hinausgeht. Dies lässt sich so deuten, dass sie eine in dem Sinne „faire“ Zuteilung vorschlagen, dass sie alle Spieler gleich behandelt.

Darüberhinaus sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber hinzugefügt, dass subventionsfreie Preise, wie alle proportionalen Zuteilungsverfahren, im Unterschied zum Kern die schwächste Form der Monotonie erfüllen.<sup>55</sup>

Zusammenfassend wird nach einer Möglichkeit gesucht, eine stabile Zuteilung von Kosten in kooperativen Märkten zu finden, ohne auf die charakteristische Funktion  $c(\cdot)$  angewiesen zu sein. Es wird der Ansatz gewählt, die einzelnen Spieler über einen Preisvektor  $\mathbf{p}_i$  zu Umsätzen kommen zu lassen, durch den die Zuteilung bestimmt wird. Es wird gezeigt, dass das korrespondierende Koalitionsspiel einen nichtleeren

<sup>54</sup>Vgl. Definition 2.10 in Abschnitt 2.2.1.

<sup>55</sup>Es handelt sich um die Monotonie im Aggregat, vgl. Abschnitt 2.2.2 und Young (1994), S. 1210. Vgl. genauer Abschnitt 5.4.2.

Kern aufweist, wenn die Kostenfunktionen tragbar sind, und dass subventionsfreie Preise eine Kernzuteilung bestimmen. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen der Tragbarkeit und subventionsfreien Preisen lässt sich sagen, dass wenn die Preisbildung im Kern liegt, auch die daraus resultierende Kostenzuteilung im Kern liegt.

Wenn (a) alle Kostenfunktionen tragbar sind, dann existieren (b) subventionsfreie Preise. Wenn die subventionsfreien Preise gewählt werden, dann ist (c) die daraus entstehende Zuteilung eine Kernzuteilung. (a) wird (realistischerweise) vorausgesetzt.<sup>56</sup> Die Bedingungen für (b) werden angegeben und als erfüllbar gezeigt.<sup>57</sup> (c) wird formal bewiesen. Das Problem, eine praktikable Kernzuteilung in kooperativen Märkten zu erreichen, ist somit ein Problem der Preisbestimmung und Preisdarstellung bei gegebener Struktur und gegebener Technologie. Das Konzept der subventionsfreien Preise erlaubt dabei eine eindeutige Bestimmung der Preise.

### 5.3 Implementierung des Aumann-Shapley Preismechanismusses

In Abschnitt 5.2 wird vorgeschlagen, subventionsfreie Preise zur Kostenzuteilung einzusetzen. Dadurch ist der Spieler (das Mehrproduktmonopol) auf dem kooperativen Markt gegenüber Eintritten der anderen Spieler abgesichert. Das Spiel ist in der Hinsicht stabil, dass alle Spieler sich gegenseitig als beste Lieferanten anerkennen und freiwillig Leistungen austauschen.

In diesem Abschnitt wird die Frage untersucht, wie genau diese Preise zu bestimmen sind. Dabei soll die Preisfindung praktikabel sein und als Lösung solche Preise bestimmen, die subventionsfrei sind, also den Eintritt in das Mehrproduktmonopol verhindern. Formal ausgedrückt stellt sich also die Frage, wie sich die  $m_i$  Preise  $\mathbf{p}_i$  von Spieler  $i$  so bestimmen lassen, dass gemäß (5.1)  $\mathbf{p}_i \cdot \bar{\mathbf{q}}_i = C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$  und (5.2)  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}_i \leq C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$  für alle  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  erfüllt werden.<sup>58</sup> Die in Abschnitt 3.3 untersuchte Kostenzuteilung einer Produktion wird an dieser Stelle mit der Contestable Market Theory verknüpft.

Im Koalitionsspiel ist die Subadditivität der charakteristischen Funktion eine notwendige Bedingung dafür, dass der Kern nichtleer ist, während die Balanciertheit eine notwendige und hinreichende Bedingung ist. Eine hinreichende Bedingung ist die Submodularität der charakteristischen Funktion, also dass das Spiel konvex

---

<sup>56</sup>Vgl. Abschnitt 5.1.3.

<sup>57</sup>Vgl. Abschnitt 3.2.

<sup>58</sup>Vgl. Definition 5.1.

ist.<sup>59</sup> Analog dazu ist in Kostenteilungsspielen in Produktionen die Subadditivität der Kostenfunktion eine notwendige Bedingung dafür, dass der Kern des zugehörigen Koalitionsspiels nichtleer ist, während die Tragbarkeit eine notwendige und hinreichende Bedingung ist.<sup>60</sup> Eine hinreichende Bedingung ist die Kostenkomplementarität. Analog zu einer submodularen charakteristischen Funktion bewirkt eine kostenkomplementäre Kostenfunktion ein Spiel mit speziellen Eigenschaften.

**Definition 5.4. Kostenkomplementarität<sup>61</sup>**

Die Kostenfunktion  $C(\cdot)$  ist kostenkomplementär, wenn sie für alle  $\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{q}'' \geq \mathbf{0}$  und für  $\mathbf{q}' \leq \mathbf{q}''$  die folgende Bedingung erfüllt:

$$C_i(\mathbf{q}' + \mathbf{q}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) - C_i(\mathbf{q}'; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \geq C_i(\mathbf{q}'' + \mathbf{q}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) - C_i(\mathbf{q}''; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad (5.10)$$

Wenn  $C_i(\cdot)$  zweifach stetig differenzierbar sowie nichtfallend in allen Komponenten ist, lässt sich die Kostenkomplementarität entsprechend der Definition 3.14 äquivalent schreiben als

$$\frac{\partial^2 C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i^k \partial q_i^l} \leq 0.$$

**Satz 5.3. Kostenkomplementarität und Submodularität**

Wenn alle Kostenfunktionen  $C_i(\cdot)$  kostenkomplementär sind, dann ist das Koalitionsspiel  $(N, c)$ , das durch die Gleichungen (5.8) und (5.9) definiert wird, konvex.

*Beweis.* <sup>62</sup> Das folgende Lemma zeigt, dass die Addition mehrerer Kostenfunktionen, wie es im vernetzten Kostenteilungsspiel geschieht, die Eigenschaft der Tragbarkeit unverletzt lässt.

**Lemma 5.1. Sharkey und Telser (1978), S. 29**

Gegeben seien zwei tragbare Kostenfunktionen  $C'_i(\cdot)$  und  $C''_i(\cdot)$  und die positiven Konstanten  $\lambda_1, \lambda_2$ . Es gilt: Die Kostenfunktion  $C_i(\cdot) = \lambda_1 C'_i(\cdot) + \lambda_2 C''_i(\cdot)$  ist tragbar.

Da alle Kostenfunktionen die Eigenschaft der Kostenkomplementarität aufweisen, kann die Gleichung (5.10) über alle  $i \in N$  aufsummiert und neu formuliert werden zu

<sup>59</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.1.

<sup>60</sup>Vgl. Abschnitt 3.2.1.

<sup>61</sup>Die Kostenkomplementarität wurde in anderer Formulierung in Definition 3.14 angegeben.

<sup>62</sup>Angepasst von Moulin (1988), p. 116.

$$\sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{q}' + \mathbf{q}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) + \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{q}''; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \geq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{q}'' + \mathbf{q}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) + \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{q}'; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$$

Nun sei  $\mathbf{q}' = \sum_{j \in S \cap T} \mathbf{d}_j$ ,  $\mathbf{q}'' = \sum_{j \in T} \mathbf{d}_j$  und  $\mathbf{q} = \sum_{j \in S \setminus T} \mathbf{d}_j$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n C_i\left(\sum_{j \in S} \mathbf{d}_{ji}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}\right) + \sum_{i=1}^n C_i\left(\sum_{j \in T} \mathbf{d}_{ji}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}\right) \\ & \geq \sum_{i=1}^n C_i\left(\sum_{j \in S \cup T} \mathbf{d}_{ji}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}\right) + \sum_{i=1}^n C_i\left(\sum_{j \in S \cap T} \mathbf{d}_{ji}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}\right) \end{aligned}$$

und, mit (5.9),

$$c(S) + c(T) \geq c(S \cup T) + c(S \cap T),$$

was zeigt, dass die charakteristische Funktion des korrespondierenden Koalitionsspiels submodular ist.  $\square$

Unter der Annahme, dass alle Kostenfunktionen des Spiels kostenkomplementär sind, ist das zugrunde liegende Spiel konvex, was garantiert, dass der Kern nichtleer ist. Es lässt sich zeigen, dass der proportionalisierte Aumann-Shapley Preismechanismus in diesem Fall subventionsfreie Preise bestimmt.

**Satz 5.4. Subventionsfreiheit des Aumann-Shapley Preismechanismusses**  
Gegeben sei das Kostenteilungsspiel  $\Gamma = (C_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$  mit der tragbaren Kostenfunktion  $C_i(\cdot)$ . Unter der Annahme, dass  $C_i(\cdot)$  kostenkomplementär gemäß Definition 5.4 ist, bestimmt der proportionalisierte Aumann-Shapley Preismechanismus subventionsfreie Preise.

*Beweis.* (Mirman et al. (1985), S.122)

(1): Es gilt zu zeigen, dass Gleichung (5.1),  $\mathbf{p}_i \cdot \bar{\mathbf{q}}_i = C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$ , erfüllt wird. Mit Definition 3.16, Satz 3.13 und Satz 3.14 gilt:

$$\sum_{k=1}^{m_i} \varphi_i^k \cdot \bar{q}_i^k = \eta(\bar{\mathbf{q}}_i) \sum_{k=1}^{m_i} \bar{q}^k \cdot \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q^k}(t\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \right) dt = C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}),$$

so dass der Gesamtumsatz gerade den Gesamtkosten des Mehrproduktmonopols entspricht.

(2): Es gilt zu zeigen, dass Ungleichung (5.2),  $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}_i \leq C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$ , für alle  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  erfüllt wird. Aufgrund von  $\frac{\partial^2 C_i(\bar{\mathbf{q}}_i)}{\partial q_i^k \partial q_i^l} \leq 0$  und  $C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) < C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$  gilt

$$\begin{aligned} C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) &= \eta(\mathbf{q}_i) \sum_{k=1}^{m_i} q_i^k \cdot \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q^k}(t\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \right) dt \\ &\geq \eta(\mathbf{q}_i) \sum_{k=1}^{m_i} q_i^k \cdot \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q^k}(t\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \right) dt = \varphi_i \cdot \mathbf{q}_i. \end{aligned}$$

□

Letztendlich bewirkt die Kostenkomplementarität, dass aufgrund der in ihr enthaltenen Skaleneffekte die Preise, die zu den Mengen  $\bar{\mathbf{q}}_i$  kalkuliert werden, immer kleiner sind als die Preise, die zu den Mengen  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  kalkuliert werden.

Anzumerken ist, dass der Shapley-Wert, würde er für die Preisbestimmung herangezogen, unter diesen Voraussetzungen ebenfalls eine Kernzuteilung bestimmen würde.<sup>63</sup> Dies folgt daraus, dass die Eigenschaft der Kostenkomplementarität für Kostenfunktionen äquivalent zu der Eigenschaft der Submodularität für charakteristische Funktionen ist. Für den Aumann-Shapley Preismechanismus gelten deshalb die gleichen Schlussfolgerungen wie für den Shapley-Wert: Er ist nicht in der Lage, die Subventionsfreiheit zu garantieren und ist folglich nicht als stabil zu werten. Unter der Annahme kostenkomplementärer Kostenfunktionen – was eine in der Literatur häufig getroffene Annahme ist<sup>64</sup> – erzeugt er jedoch Preise, die subventionsfrei sind. Ein Unterschied zwischen dem Aumann-Shapley Preismechanismus und dem Shapley-Wert liegt in der Praktikabilität. Während für den Shapley-Wert eine charakteristische Funktion benötigt wird, werden zur Berechnung der Aumann-Shapley Preise außer der Kostenfunktion und der (exogen gegebenen) Nachfrage keine weiteren Informationen benötigt. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass Aumann-Shapley Preise unter gewissen Annahmen die Eigenschaften der Anonymous Equity aus Definition 3.10 und der Sustainability aus Definition 3.11 erfüllen.<sup>65</sup>

<sup>63</sup>Vgl. Shapley (1967) und Abschnitt 3.1.1.

<sup>64</sup>Vgl. Mirman et al. (1985), S. 117.

<sup>65</sup>Unter der Annahme der Kostenkomplementarität und oberhalbstetiger Nachfragefunktionen erfüllen die Aumann-Shapley Preise die Eigenschaft der Anonymous Equity, vgl. Mirman et al. (1985), S. 122–123. Unter der Annahme der Kostenkomplementarität und der Weak Gross Substitutability (Definition 3.14 und Definition 3.12) und weiterer, austauschbarer Annahmen, lässt sich zeigen, dass es hinreichende Bedingungen dafür gibt, dass Aumann-Shapley Preise die Eigenschaft der Sustainability erfüllen, vgl. Mirman et al. (1985), S. 122–124.



In Abschnitt 2.2.2 werden Eigenschaften der Anreizwirkung von Zuteilungsverfahren diskutiert. Die dort vorgestellten Monotoniekonzepte beziehen sich auf Koalitionsspiele. Analog zu den drei aufgestellten Bedingungen der Monotonie für Zuteilungsverfahren in Koalitionsspielen existieren Monotonieeigenschaften für Preismechanismen.<sup>66</sup> Dabei wird untersucht, in welchem Verhältnis die Preise  $\mathbf{p}_i$  im Kostenteilungsspiel  $(C_i, \mathbf{q}_i)$  und  $\mathbf{p}'_i$  im Kostenteilungsspiel  $(C'_i, \mathbf{q}_i)$  zueinander stehen. Dabei werden zum einfacheren Vergleich die Namen der Eigenschaften aus Abschnitt 2.2.2 beibehalten.

Betrachtet sei zunächst der Fall, dass die durch  $C'_i(\cdot)$  gegebenen Kosten für einen Output  $\mathbf{q}_i$  für alle Produkte  $k$  geringer sind als für  $C_i(\cdot)$ .<sup>67</sup>

**Definition 5.5. Im Aggregat monotoner Preismechanismus**

Der Preismechanismus  $f(C_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$  heißt *monoton im Aggregat*, wenn für  $f(C_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{p}_i$  und  $f(C'_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{p}'_i$  für alle  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  gilt:

$$\frac{\partial C'_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i^k} \leq \frac{\partial C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i^k} \quad \text{für alle } k \Rightarrow p_i'^k \leq p_i^k \quad \text{für alle } k.$$

Es ist ein Nachteil der Monotonie im Aggregat, dass sie nur Kostenänderungen in allen Produkten nachvollzieht, und nicht auch für einzelne Produkte. Dies sei anhand eines Beispiels verdeutlicht.<sup>68</sup>

**Beispiel 5.5.** Ein Mehrproduktmonopol produziere die  $m_i = 3$  Güter  $k = 1, 2, 3$  zu den Kosten

$$C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) = 14q_i^1 + q_i^2 + q_i^3 + (q_i^1 + q_i^2 + q_i^3)^2.$$

Der quadratische Term kommt aufgrund der gemeinsamen Nutzung einer Anlage der drei Güter zustande. Angenommen durch eine technologische Verbesserung wird dieser Prozessschritt für das erste Produkt nicht mehr benötigt, und die neue Kostenfunktion laute

$$C'_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) = 14q_i^1 + q_i^2 + q_i^3 + (q_i^2 + q_i^3)^2.$$

Die Gesamtproduktionskosten sind nun jetzt geringer als vorher, wobei die Kostenersparung allein durch das erste Produkt erzielt wurde. Die Preise für Gut 1 lassen

<sup>66</sup>Die Beschreibung richtet sich nach Young (1985a).

<sup>67</sup>Vgl. Young (1985a), S.762.

<sup>68</sup>Vgl. im Folgenden Young (1985a), S. 759.

sich in beiden Situationen anhand der proportional angepassten Grenzkosten bzw. der Ramsey Preise bei inelastischen Nachfragen wie folgt berechnen:<sup>69</sup>

$$f^1(C, \bar{\mathbf{q}}) = \frac{(14 + 2(\bar{q}_i^1 + \bar{q}_i^2 + \bar{q}_i^3))}{14\bar{q}_i^1 + \bar{q}_i^2 + \bar{q}_i^3 + 2(\bar{q}_i^1 + \bar{q}_i^2 + \bar{q}_i^3)^2} \cdot C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}),$$

$$f^1(C', \bar{\mathbf{q}}) = \frac{(14 + 2(\bar{q}_i^2 + \bar{q}_i^3))}{14\bar{q}_i^1 + \bar{q}_i^2 + \bar{q}_i^3 + 2(\bar{q}_i^2 + \bar{q}_i^3)^2} \cdot C'_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}).$$

Ausgewertet an der Stelle  $\bar{q}^1 = \bar{q}^2 = \bar{q}^3 = 1$  ergibt sich

$$f^1(C', \mathbf{1}) = 15 \not\leq 14.7 = f^1(C, \mathbf{1}),$$

so dass die durchgeführte Verbesserung zu erhöhten Preisen für das erste Produkt führt.

Ein Preismechanismus, der Änderungen in der Kostenfunktion für einzelne Produkte  $k$  berücksichtigt, heißt *koalitionsmonoton*.<sup>70</sup>

#### Definition 5.6. Koalitionsmonotoner Preismechanismus

Der Preismechanismus  $f(C_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$  heißt *koalitionsmonoton*, wenn für  $f(C_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{p}_i$  und  $f(C'_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{p}'_i$  für alle  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  gilt:

$$\frac{\partial C'_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i^k} \leq \frac{\partial C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i^k} \Rightarrow p_i^k \leq p_i^k \quad \text{für alle } k.$$

Ein Preismechanismus, der Änderungen in der Kostenfunktion eines Produkts  $k$  im Vergleich zu einem anderen Produkt  $l$  berücksichtigt, heißt *streng monoton*.<sup>71</sup>

#### Definition 5.7. Streng monotoner Preismechanismus

Der Preismechanismus  $f(C_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$  heißt *streng monoton*, wenn für  $f(C_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{p}_i$  und  $f(C'_i, \bar{\mathbf{q}}_i) = \mathbf{p}'_i$  für alle  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  gilt:

$$\frac{\partial C'_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i^k} \leq \frac{\partial C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})}{\partial q_i^l} \Rightarrow p_i^k \leq p_i^l \quad \text{für alle } k, l.$$

Bezogen auf einen Preismechanismus schließt die strenge Monotonie die Koalitionsmonotonie und die Koalitionsmonotonie die Monotonie im Aggregat ein, andersherum gilt dies jedoch nicht. Die strenge Monotonie ist demnach die strengste

<sup>69</sup>Vgl. Abschnitt 3.3.1.

<sup>70</sup>Oder *monotonic*, vgl. Young (1985a), S.759.

<sup>71</sup>Oder *symmetrically monotonic*, vgl. Young (1985a), S. 759.

Monotonieeigenschaft und belohnt produktives Verhalten bzw. bestraft unproduktives Verhalten. Wenn sie von einem Preismechanismus erfüllt wird, spricht man von einem *anreizkompatiblen* Preismechanismus.

**Satz 5.5. Young (1985a), S. 760–761**

*Der Aumann-Shapley Preismechanismus ist der einzige streng monotone Preismechanismus.*

Der Aumann-Shapley Preismechanismus ist also anreizkompatibel und erfüllt alle Eigenschaften der Monotonie bzw. Anreizwirkung. Dies ist die Eigenschaft des Aumann-Shapley Preismechanismusses, die ihn von allen anderen Preismechanismen abgrenzt. Im konvexen Spiel eignet er sich zusätzlich zur Bestimmung von subventionfreien Preisen.

## 5.4 Zusammenfassung und Ergebnisse

Aufbauend auf der im folgenden Abschnitt gegebenen Zusammenfassung wird der entwickelte Lösungsvorschlag anhand der spieltheoretischen Kriterien bewertet. Eine Diskussion und Interpretation der gewonnenen Erkenntnisse schließt den Überblick der spieltheoretischen Untersuchung ab. Letztlich wird ein Leitfaden für ein Berichtswesen im Unternehmen vorgeschlagen.

### 5.4.1 Zusammenfassung der Untersuchung

Die Zielsetzung der Arbeit ist die Entwicklung eines Zuteilungsverfahrens, das auf allgemeine Situationen mit marktähnlichen Strukturen anwendbar ist,<sup>72</sup> und das praktikabel umsetzbar ist.<sup>73</sup>

Als erster Schritt der Untersuchung wird in Kapitel 2 überprüft, in wie weit in der kooperativen Spieltheorie Lösungsansätze für die gegebene Fragestellung existieren. Nach der Betrachtung von Koalitionsspielen in Abschnitt 2.1 werden in Abschnitt 2.2 Eigenschaften von Zuteilungsverfahren vorgestellt. Sie dienen als *spieltheoretische Kriterien* für die Bewertung von Zuteilungsverfahren. Sie lassen sich in Eigenschaften der Akzeptanz und Eigenschaften der Anreizwirkung unterteilen, wobei die Stabilität und die strenge Monotonie als wünschenswerte Kriterien identifiziert werden.

Die Zuteilungsverfahren für Koalitionsspiele werden in Abschnitt 2.3 (Mengenkonzepte) und Abschnitt 2.4 (Wertkonzepte) vorgestellt und in Abschnitt 2.5 anhand

---

<sup>72</sup>Vgl. Abbildung 1.3.

<sup>73</sup>Vgl. Kapitel 1.

der spieltheoretischen Kriterien bewertet. Dabei wird offensichtlich, dass es kein Zuteilungsverfahren gibt, das sowohl stabil als auch anreizkompatibel ist, und dass es auch nicht möglich ist, ein derartiges Zuteilungsverfahren zu entwickeln. In der in Abschnitt 2.6 folgenden Diskussion wird festgehalten, dass im hier gegebenen Kontext die Stabilität der Anreizkompatibilität vorzuziehen ist, da sie die freiwillige Kooperation aller Spieler sicherstellt. Weil keines der existierenden Zuteilungsverfahren stabil und praktikabel ist, ist ein entsprechendes Zuteilungsverfahren zu entwickeln.

In Kapitel 3 werden dazu weitere spieltheoretische Ansätze untersucht, die einen Bezug zur Kostenzuteilung aufweisen. Zusammenfassend werden die folgenden Ansätze als Ausgangspunkt des zu entwickelnden Zuteilungsverfahrens identifiziert (Abschnitt 3.4):

1. Eintrittsmöglichkeiten in Mehrproduktmonopole, speziell das Konzept der Tragbarkeit (vgl. Abschnitt 3.2),
2. Preismechanismen im kooperativen Fall (vgl. Abschnitt 3.3), speziell Aumann-Shapley Preise.
3. Zusätzlich ist der Spezialfall konvexer Spiele bzw. der Komplementarität zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 3.1.1.)

Ebenfalls untersuchte Ansätze sind die aus Tauschmärkten abgeleiteten Market Games (vgl. Abschnitt 3.1.2) und die nicht-kooperative serielle Kostenzuteilung (vgl. Abschnitt 3.3.2). Diese kommen aufgrund der an der jeweiligen Stelle geführten Diskussion nicht als Lösungsmöglichkeit in Betracht. Mit Hilfe der ausgewählten Ansätze ist ein Zuteilungsverfahren zu entwickeln, wobei eine geeignete Modellierung der gegebenen Entscheidungssituation vorzunehmen ist.

Dazu wendet sich die Untersuchung in Kapitel 4 den traditionellen Zuteilungsverfahren der Praxis zu, die speziell für Verhältnisse vernetzter Produktionen entwickelt wurden. Dabei handelt es sich um die in Abschnitt 4.1 vorgestellten Kostenrechnungsverfahren. Zusätzlich wird in Abschnitt 4.2 die in der Praxis entwickelte Wertbildungsrechnung als Fallbeispiel betrachtet, ein Kostenrechnungsverfahren, das vor dem Hintergrund dezentraler und autonomer Strukturen von dem Filialisten dm-drogerie markt entwickelt wurde. Die Wertbildungsrechnung wird als Fallbeispiel ausgewählt, weil sie den spieltheoretischen Lösungsvorschlag aus der Praxis heraus motiviert. Die in Abschnitt 4.3 durchgeführte Bewertung der traditionellen Kostenrechnungsverfahren anhand der spieltheoretischen Kriterien zeigt, dass die-

se losgelöst von spieltheoretisch-strategischen Aspekten entwickelt wurden und aus spieltheoretischer Sicht keine befriedigenden Alternativen aufzeigen.

Die der Wertbildungsrechnung zu Grunde liegende Abbildung des Leistungsaustauschs und der Kostenzuteilung wird spieltheoretisch untersucht und anhand einer Input-Output Analyse in Abschnitt 4.4 formal modelliert. In diesem Modell besteht der kooperative Markt aus einer beliebigen Anzahl von Spielern, die beliebig viele Leistungen untereinander austauschen. Es gibt für jede Leistung einen eindeutigen Ersteller dieser Leistung, dieser stellt ein reguliertes Mehrproduktmonopol dar. Betrachtet man in der Input-Output Analyse (vgl. Tabelle 4.2) eine Zeile  $i$  und die dazugehörige  $i$ -te Spalte, so entstehen die Gleichungen (4.4) und (4.5). Sie stellen die Einnahmen und Ausgaben eines Spielers dar und ermöglichen die Beurteilung seines Beitrags zur Kooperation. Aus der Modellierung des Netzwerks lässt sich ableiten, dass eine Zuteilung von Kosten nicht über Umlagen und Kostenverrechnungen, sondern über Preise erfolgen sollte, die eine Aussage über die Sinnhaftigkeit einer Austauschbeziehung ermöglichen (vgl. Abschnitt 4.4.3). Die Preise eines Mehrproduktmonopols werden durch die Preise der anderen Mehrproduktmonopole beeinflusst, weil diese sich auf die Kostenfunktion des Mehrproduktmonopols auswirken, so dass die Wahl und die Höhe der Preise Interdependenzen in der Organisation hervorrufen.

Kapitel 5 widmet sich der Aufgabe, die gewünschte Stabilitätseigenschaft im entwickelten Modellrahmen auf praktikable Art und Weise sicherzustellen, also eine Kernzuteilung zu bestimmen. Dazu wird in Abschnitt 5.1 zuerst ein einzelner Spieler betrachtet, dem innerhalb der Kooperation ein Exklusivrecht auf die von ihm angebotenen Leistungen gewährt wird. Die Idee besteht darin, dass genau dann eine Kernzuteilung vorliegt, wenn keiner der belieferten Spieler oder Koalitionen Einwände gegen eine Belieferung hat, also seine Nachfrage nicht lieber anderweitig bezieht. Dies ist genau dann der Fall, wenn keine Quersubventionierung zwischen den Leistungen des anbietenden Spielers besteht, was formal durch das Konzept der subventionsfreien Preise sichergestellt wird.<sup>74</sup>

---

<sup>74</sup>Vgl. Definition 5.1.

Subventionsfreie Preise

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k \bar{q}_i^k = C_i(\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi})$$

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k q_i^k \leq C_i(\mathbf{q}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \text{ für alle } \mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$$

Die Einnahmen des Mehrproduktmonopols entsprechen zum geforderten Output gerade den Gesamtkosten, die von der produzierten Menge, den Preisen der anderen Spieler, und den externen Inputpreisen abhängen. Kein Teil des Outputs bietet einem Konkurrenten die Möglichkeit zum Markteintritt. Sollte das regulierte Mehrproduktmonopol sich nicht halten können, weil es seine Leistungen nicht mit positiven Skaleneffekten erzeugen kann, wenn also Teile des Outputs mit Gewinn produziert werden können, kann die Technologie nicht in Einklang mit der Eigenschaft der Stabilität geteilt werden. Damit wird Punkt 1. (Eintrittsmöglichkeiten in Mehrproduktmonopole) in die Untersuchung integriert.

In Abschnitt 5.2 wird der Lösungsvorschlag in dem Sinne erweitert, dass die Interdependenzen zwischen den Spielern explizit modelliert werden. Die Idee besteht hier darin, dass sich die Zuteilung eines Spielers aus seiner Nachfrage errechnet, die mit den jeweiligen Preisen der (kooperationsinternen) Lieferanten multipliziert werden. Der Koalitionswert einer Koalition bestimmt sich aus den Kosten, die sich ergeben, wenn nur die Nachfrage der Koalition produziert wird, wenn diese also alleine steht:<sup>75</sup>

<sup>75</sup>Vgl. Satz 5.1 sowie die Gleichungen (5.4) und (5.5).

Beziehungen zwischen den Spielern

$$c(S) = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall S \subseteq N \quad (\text{Koalitionswert})$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_N = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{N_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}).$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S \leq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall S \subseteq N \quad (\text{stand-alone Test})$$

Der erste Ausdruck leitet den Koalitionswert aus den Kostenfunktionen ab. Die beiden anderen Ausdrücke beschreiben die Bedingungen der Stabilität: bei Produktion der Nachfrage der großen Koalition sind die Kosten aller Spieler gedeckt und keine Koalition trägt mehr Kosten, als zur Erzeugung ihrer Nachfrage notwendig ist.

Es wird formal bewiesen, dass die so erfolgte Kostenzuteilung genau dann stabil ist, wenn die Preise subventionsfrei sind und den oben gegebenen Bedingungen genügen. Ebenso lässt sich zeigen, dass eindeutige Preise für alle Leistungen existieren, so dass eine Lösung für das vorgeschlagene Modell existiert.<sup>76</sup> Somit lässt sich die eindeutige Empfehlung abgeben, zur Kostenzuteilung subventionsfreie Preise einzusetzen. Dies ist das Hauptergebnis der Untersuchung, und die Zielstellung der Arbeit ist damit erfüllt.

In Abschnitt 5.3 wird das bis dahin allgemein untersuchte Spiel durch die Annahme der Kostenkomplementarität<sup>77</sup> eingegrenzt. Es wird bewiesen, dass das Spiel konvex ist, wenn alle Kostenfunktionen diese Eigenschaft aufweisen. Es wird gezeigt, dass Aumann-Shapley Preise in diesem Fall subventionsfrei sind. Über die Proportionalisierung der Aumann-Shapley Preise können auch Kostenfunktionen erlaubt werden, die Fixkosten berücksichtigen. Damit werden die Punkte 2. (Preismechanismen im kooperativen Fall) und 3. (konvexes Spiel) in die Untersuchung integriert.

<sup>76</sup>Vgl. Anhang A und Anhang B.

<sup>77</sup>Vgl. Definition 5.4.

Proportionalisierte Aumann-Shapley Preise

$$\varphi_i^k = \eta(\bar{\mathbf{q}}_i) \int_0^1 \left( \frac{\partial C_i}{\partial q_i^k}(t\bar{\mathbf{q}}_i; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \right) dt.$$

Zur Bestimmung der Aumann-Shapley Preise ist keine charakteristische Funktion erforderlich. Sie sind anreizkompatibel und unter der Voraussetzung, dass die Spieler über kostenkomplementäre Produktionstechnologien verfügen, subventionsfrei. Somit kann im konvexen Spiel für die Bestimmung der subventionsfreien Preise auf bestehende Instrumente zurückgegriffen werden.<sup>78</sup> Diese fügen sich in den entwickelten Lösungsvorschlag ein und vervollständigen den Vorschlag eines strategisch stabilen und praktikablen Zuteilungsverfahrens. Dies ist das zweite Ergebnis der Untersuchung.

### 5.4.2 Bewertung des Lösungsvorschlags anhand der spieltheoretischen Kriterien

Die im vorigen Abschnitt zusammengefassten Ergebnisse werden an dieser Stelle anhand der spieltheoretischen Kriterien bewertet. Tabelle 5.2 führt dabei die bisherigen Ergebnisse der Arbeit fort und nimmt den entwickelten Lösungsvorschlag in den Vergleich mit auf. Da aus spieltheoretischer Sicht kein Verfahren der Praxis in die nähere Auswahl kommt,<sup>79</sup> werden die Zuteilungsverfahren aus Kapitel 2 mit dem entwickelten Lösungsvorschlag verglichen, nämlich der Nucleolus [Nucl.] und der Shapley-Wert [S-Wert]. Ebenso von Interesse sind die proportionalen Zuteilungsverfahren [Prop.], was im Folgenden begründet wird. Schließlich werden die subventionsfreien Preise [subv. Preise] mit in den Vergleich aufgenommen. Sie repräsentieren den entwickelten Lösungsvorschlag, inklusive dem dahinter stehenden Modell des vernetzten Kostenteilungsspiels und der Leistungsberechnung. Die Zuteilungsverfahren sind in den Spalten und die Eigenschaften in den Zeilen von Tabelle 5.2 aufgeführt.

Zusätzlich wird in Tabelle 5.2 der Fall des konvexen Spiels mit in den Vergleich aufgenommen. Im konvexen Spiel ist es möglich, die Berechnung subventionsfreier Preise anhand des Aumann-Shapley Preismechanismusses vorzunehmen. Ausserdem

<sup>78</sup>Für den Fall des nicht-konvexen Spiels sind dem Autor keine geeigneten Preismechanismen bekannt.

<sup>79</sup>Vgl. Abschnitt 4.3.



ändern sich die Eigenschaften des Shapley-Werts im konvexen Spiel, so dass dieser erneut angeführt wird. An den Eigenschaften der anderen Zuteilungsverfahren ändert sich nichts.

Tabelle 5.2: Tabellarischer Vergleich der Zuteilungsverfahren mit dem entwickelten Lösungsvorschlag.

Eigenschaft	Nucl.	S-Wert	Prop.	subv. Preise	konvexes Spiel	
					S-Wert	A-S Preise
Effizienz	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Indiv. Rationalität	✓	✓		✓	✓	✓
Koalitionsrationalität	✓			✓	✓	✓
Stabilität	✓			✓	✓	✓
Mon. im Aggregat		✓	✓	✓	✓	(✓) <sup>a</sup>
Koalitionsmonotonie		✓			✓	(✓) <sup>a</sup>
Strenge Monotonie		✓			✓	(✓) <sup>a</sup>
Eindeutigkeit	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Praktikabilität	$c(\cdot)$	$c(\cdot)$	✓	✓	$c(\cdot)$	✓

<sup>a</sup>An dieser Stelle ist die Monotonie des Preismechanismusses gemeint. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird der Aumann-Shapley Preismechanismus hier in die gleiche Tabelle eingetragen.

Die Einträge für den Nucleolus, den Shapley-Wert und die proportionalen Zuteilungsverfahren sind aus Tabelle 2.1 übernommen. Hinzuzufügen sind die Eigenschaften der subventionsfreien Preise. Diese sind gemäß Gleichung (5.4) bzw. der Berechnung aus Anhang B effizient. Weiterhin erzeugen sie gemäß Abschnitt 5.2 eine stabile Zuteilung, woraus folgt, dass sie individuell rational und koalitionsrational sind. Offensichtlich bestimmen sie eine eindeutige Zuteilung. Ihre Berechnung ist in der Praxis durchführbar und bedarf keiner charakteristischen Funktion.

Letztlich verbleibt zu untersuchen, in wie weit subventionsfreie Preise anreizkompatibel sind. Laut Satz 2.6 können sie weder streng monoton noch koalitionsmonoton sein, da das Unmöglichkeitsergebnis dieses Satzes besagt, dass diese Eigenschaften eine instabile Zuteilung bedingen. Demnach können subventionsfreie Preise bestenfalls monoton im Aggregat sein. Der entwickelte Lösungsvorschlag besagt, dass Spieler

$i$  die Kosten  $x_i$  zu tragen hat, die sich so aus den subventionsfreien Preisen  $\mathbf{p}$  und seiner Nachfrage  $\mathbf{d}_i$  bestimmen, so dass

$$x_i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_i.$$

$\mathbf{p}$  und  $\mathbf{d}_i$  stellen Gewichte dar, anhand deren dem Spieler  $i$  sein Teil der zu tragenden Kosten zugewiesen wird. Das vorgeschlagene Zuteilungsverfahren ist als proportionales Zuteilungsverfahren einzustufen. Da alle proportionalen Zuteilungsverfahren die Monotonie im Aggregat erfüllen,<sup>80</sup> ist der entwickelte Lösungsvorschlag, wie in Tabelle 5.2 vermerkt, ebenfalls monoton im Aggregat.

Im Unterschied zu den bisher betrachteten proportionalen Zuteilungsverfahren<sup>81</sup> unterliegen die gewählten Gewichte, nämlich die subventionsfreien Preise und die ausgetauschten Mengen, einem strategischem Kalkül. Dieses findet sich in der Überlegung der Verhinderung des Eintritts in ein reguliertes Mehrproduktmonopol. Die Zuteilung über subventionsfreie Preise unterscheidet sich von den herkömmlichen proportionalen Zuteilungsverfahren, welche als einzige Information lediglich die Kosten der großen Koalition  $N$  berücksichtigen. Subventionsfreie Preise hingegen richten sich nach den Kosten jedes einzelnen Mehrproduktmonopols, was zur Erfüllung der Stabilität führt.

Die Verfeinerung gegenüber anderen proportionalen Zuteilungsverfahren zeigt sich an der Zuteilung  $x_i$  von Spieler  $i$ . Diese ist kein festgelegter (Verrechnungs-) Schlüssel, sondern besteht aus einer proportionalen Zuteilung mit Gewichten wie in der Gleichung aus Definition 2.34. Trennt man die Zuteilung  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_i$  in ihre Bestandteile auf, so folgt

$$x_i = p_1^1 \cdot q_{1i}^1 + \dots + p_n^{m_n} \cdot q_{ni}^{m_n}$$

mit  $m$  Summanden.<sup>82</sup> Subventionsfreie Preise stellen eine proportionale Zuteilung dar, die aus den unterschiedlichen Gewichten  $p_j^k$  der Preise und  $q_{ji}^k$  der ausgetauschten Mengen besteht. Diese sind bei jedem Spieler anders ausgeprägt, denn die Mengen  $q_{ji}^k$  bestimmen die Anzahl der Einheiten des Produkts  $k$ , die Spieler  $i$  von den anderen Spielern bezieht. Es ergibt sich ein differenziertes proportionales Zuteilungsverfahren mit  $n \cdot m$  Gewichten.

<sup>80</sup>Vgl. Young (1985a), S. 762 und Young (1994), S. 1210.

<sup>81</sup>Vgl. Abschnitt 2.4.

<sup>82</sup>Davon sind (mindestens)  $m_i$  Summanden gleich Null, da die Selbstbelieferung einer Abteilung im Modell ausgeschlossen wird.

Im konvexen Spiel wird zusätzlich der Aumann-Shapley Preismechanismus als eigentlicher Preismechanismus betrachtet. Dieser kann zur Berechnung der subventionsfreien Preise herangezogen werden, sofern die Kostenfunktionen der Mehrproduktmonopole die Kostenkomplementarität aufweisen. Unter diesen Umständen ist der Aumann-Shapley Preismechanismus vergleichbar mit dem Shapley-Wert: Beiden ist gemeinsam, dass sie nicht stabil sind, jedoch im konvexen Spiel verbesserte Eigenschaften aufweisen. Der Shapley-Wert erzeugt in diesem Fall immer eine Kernzuteilung und die Aumann-Shapley Preise erfüllen die Subventionsfreiheit.<sup>83</sup> Beide Lösungsverfahren erzeugen im konvexen Spiel eine stabile Zuteilung. Eine zusätzliche Gemeinsamkeit beider Lösungsverfahren ist die Eigenschaft der strengen Monotonie, sie erfüllen beide die Anreizkompatibilität. Der Unterschied besteht in der hier gegebenen Aufgabenstellung darin, dass der Shapley-Wert nicht praktikabel ist, weil zu seiner Bestimmung die charakteristische Funktion benötigt wird, während der Aumann-Shapley Preismechanismus praktikabel ist.

Die Stabilitätseigenschaft der Aumann-Shapley Preise werden für das Beispiel aus Abschnitt 5.2 illustriert. Die dort gegebenen Kostenfunktionen lauten<sup>84</sup>

$$\begin{aligned} C_2(q_2; p_3, \pi) &= p_3 \cdot \sqrt{q_2} + \pi \cdot \sqrt{q_2} + 22.5 \\ C_3(q_3; p_2, \pi) &= p_2 \cdot (q_3)^{0.8614} + \pi \cdot (q_3)^{0.8614} + 12.25 \end{aligned}$$

Da beide Kostenfunktionen Fixkosten enthalten, findet im Folgenden der proportionalisierte Aumann-Shapley Preismechanismus Verwendung. Es folgt für die Berechnung von  $\varphi_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \eta(\bar{q}_2) \int_0^1 \left( \frac{\partial C}{\partial q_2}(t\bar{q}_2; p_2, \pi) \right) dt = \eta(\bar{q}_2) \int_0^1 \left( \frac{p_3 + \pi}{2 \cdot (t\bar{q}_2)^{\frac{1}{2}}} \right) dt \\ &= \eta(\bar{q}_2) \int_0^1 \left( \frac{p_3 + \pi}{2 \cdot 9 \cdot \sqrt{t}} \right) dt = \eta(\bar{q}_2) \cdot \left[ \frac{p_3 + \pi}{9} \sqrt{t} \right]_0^1 \\ &= \eta(\bar{q}_2) \cdot \frac{p_3 + \pi}{9}, \end{aligned}$$

<sup>83</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.1 und Abschnitt 5.3.

<sup>84</sup>Im Beispiel in Abschnitt 5.2 wird auf die Indizierung des Produkts verzichtet, da jeder Spieler nur ein Produkt herstellt, und deshalb mit der Benennung des Spielers das Produkt eindeutig identifiziert wird.

mit

$$\eta(\bar{q}_2) = \frac{C(\bar{q}_2; p_2, \pi)}{C(\bar{q}_2; p_2, \pi) - C(\mathbf{0}; p_2, \pi)} = \frac{40.5 + 9p_3}{18 + 9p_3}.$$

Aus einer analogen Berechnung folgt der Ausdruck für  $\varphi_3$ ,

$$\varphi_3 = \frac{44.25 + 16p_2}{32 + 16p_2} \cdot \frac{p_2 + \pi}{1.5683},$$

und die zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten lösen sich mit  $\pi = 2$  auf in  $\varphi_2 = 0.75$  und  $\varphi_3 = 2.25$ , was genau den in Abschnitt 5.2 durch ein simultanes Gleichungsverfahren ausgerechneten Preisen entspricht.

Die so für das Beispiel 2.1<sup>85</sup> berechnete Zuteilung wird in Abbildung 5.11 eingetragen. Mit den errechneten Preisen und den in Beispiel 2.1 gegebenen Nachfragen folgt die Zuteilung  $\mathbf{x} = (84.75, 20.25, 12)$ . Somit wird für dieses Beispiel gezeigt, dass der entwickelte Lösungsvorschlag tatsächlich eine Kernzuteilung erzeugt.

### 5.4.3 Diskussion der Ergebnisse

An dieser Stelle erfolgt eine Diskussion mit dem Ziel, die Vor- und Nachteile des entwickelten Lösungsvorschlags zu identifizieren. Anhand von Tabelle 2.1, die sich aus der Untersuchung der bestehenden Zuteilungsverfahren für Koalitionsspiele ergibt, werden in Abschnitt 2.5 folgende Aussagen getroffen:

1. Es gibt kein stabiles und streng monotonen Zuteilungsverfahren.
2. Es gibt kein stabiles Zuteilungsverfahren, dass monoton im Aggregat ist.
3. Es gibt kein stabiles und praktikables Zuteilungsverfahren.
4. Es gibt kein streng monotonen und praktikables Zuteilungsverfahren.

Diese vier Unzulänglichkeiten lassen sich durch den entwickelten Lösungsvorschlag teilweise ausgleichen:

1. Dieses Problem lässt sich nur im konvexen Spiel umgehen.<sup>86</sup>
2. Die Leistungsberechnung anhand subventionsfreie Preise repräsentiert ein proportionales Zuteilungsverfahren und ist damit sowohl stabil als auch monoton im Aggregat.

<sup>85</sup>Anhand von Tabelle 5.1 lässt sich sehen, dass das Spiel identisch ist mit Beispiel 2.1, wobei an den Werten im Beispiel 2.1 zur einfacheren Erklärung bewusst Rundungen vorgenommen wurden, so dass die Koalitionswerte  $c(\cdot)$  für  $S \subset N$  nicht exakt übereinstimmen.

<sup>86</sup>Vgl. das Unmöglichkeitsergebnis von Young aus Satz 2.6.

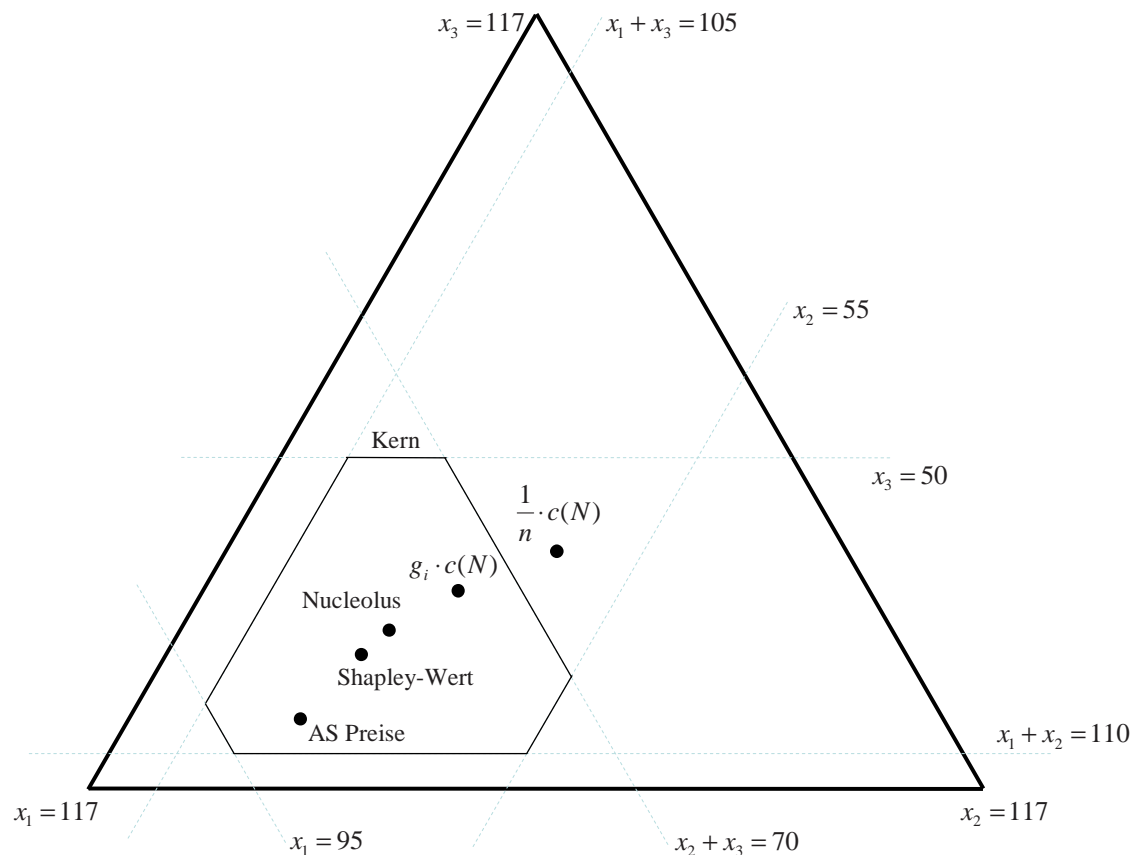


Abbildung 5.11: Simplex von Beispiel 2.1 mit (subventionsfreien) Aumann-Shapley Preisen [AS Preise].

3. Die Leistungsberechnung anhand subventionsfreier Preise ist stabil und praktikabel.
4. Der Aumann-Shapley Preismechanismus ist streng monoton und praktikabel und kann im konvexen Spiel als Ergänzung zum entwickelten Lösungsvorschlag zur Bestimmung subventionsfreier Preise eingesetzt werden.

Die Ergebnisse aus Tabelle 5.2 und die hier getroffenen Aussagen lassen sich anhand von Abbildung 5.12 veranschaulichen.<sup>87</sup> Auf der waagerechten Achse wird abgetragen, ob das Zuteilungsverfahren praktikabel ist. Wie schon in Abschnitt 2.5 argumentiert wird, ist der hier zugrundeliegende diskriminierende Faktor, ob das Zuteilungsverfahren eine charakteristische Funktion voraussetzt oder nicht. Die senkrechte Achse differenziert die Zuteilungsverfahren nach ihrer Fähigkeit, die spieltheoreti-

<sup>87</sup>Vgl. Abbildung 2.3.

<b>Stabilität</b>	Stabil	Kern Nucleolus	Subventionsfreie Preise
	Nicht stabil	Shapley-Wert $\tau$ -Wert ACA Methode	Kostenrechnungs- Verfahren (DB, GPK, PKR) Proportionale Verfahren
		Nicht praktikabel	Praktikabel <b>Praktikabilität</b>

Abbildung 5.12: Illustration der Bewertung der Zuteilungsverfahren.

sche Eigenschaft der Stabilität zu erfüllen. Die Grafik verdeutlicht die Unterschiede zwischen den herkömmlichen spieltheoretischen Zuteilungsverfahren und den Verfahren der Praxis: die spieltheoretischen Zuteilungsverfahren sind nicht praktikabel, die Verfahren der Praxis sind nicht stabil.<sup>88</sup>

Das rechte obere Feld in Abbildung 5.12 ist grau unterlegt, da es die vorgegebene Zielsetzung symbolisiert, ein praktikables Zuteilungsverfahren zu entwickeln, das die spieltheoretische Forderung der Stabilität erfüllt. Wie im Verlauf der Arbeit bewiesen wird, erfüllt eine Zuteilung anhand subventionsfreier Preise diese Eigenschaft.<sup>89</sup> Somit lässt sich unter diesem Blickwinkel der entwickelte Lösungsvorschlag sowohl von den herkömmlichen spieltheoretischen Zuteilungsverfahren als auch von den Verfahren der Praxis eindeutig abgrenzen.

Da der entwickelte Lösungsvorschlag stabil, praktikabel und monoton im Aggregat ist, erfüllt er die (im Rahmen dieser Arbeit) bestmöglichen spieltheoretischen Kriterien, die ein Zuteilungsverfahren aufweisen kann. Unter Verwendung des Aumann-Shapley Preismechanismusses und unter der Voraussetzung der Kosten-

<sup>88</sup>Es zeigt sich, dass die Verfahren der Praxis die strategischen Kalküle der Spieler nur ungenügend berücksichtigen.

<sup>89</sup>Vgl. Abschnitt 5.2.

komplementarität aller Kostenfunktionen ist der entwickelte Lösungsvorschlag stabil, praktikabel und streng monoton, erfüllt also alle von einem Zuteilungsverfahren der kooperativen Spieltheorie geforderten Eigenschaften.<sup>90</sup>

Der – im Unterschied zur herkömmlichen Formulierung als Koalitionsspiel – andere Modellierungsansatz, explizit den durch die Arbeitsteilung hervorgerufenen wechselseitigen Leistungsaustausch abzubilden, führt zu einem Verständnis des Unternehmens (bzw. jedweder arbeitsteiligen Organisation) als Zusammenschluss dezentraler und autonomer Einheiten. Die Entscheidungsträger bewegen sich dabei in einem Netzwerk, das sich als kooperativer Markt interpretieren lässt. Durch diese Sichtweise folgt die Forderung, Kosten über interne Preise zuzuteilen, woraus sich das Problem der geeigneten Preisbestimmung ergibt. Subventionsfreie Preise stellen dabei eine stabile Zuteilung dar. Dass sich derartige Preise bestimmen lassen, wird in der Untersuchung gezeigt.<sup>91</sup>

Deshalb lässt sich folgendes Fazit ziehen: Wenn das eingangs formulierte Problem gegeben ist, in einem kooperativen Markt, in dem  $n$  Spieler miteinander in Austausch treten und wechselseitige Abhängigkeiten haben, die gemeinsamen Kosten auf praktikable Art und Weise so zuzuteilen, dass eine freiwillige Kooperation sichergestellt wird, dann bietet es sich an, den hier vorgeschlagenen Weg zu gehen, eine Leistungsberechnung zu installieren, die auf subventionsfreien Preisen basiert. Dadurch wird das strategische Verhalten der Entscheidungsträger berücksichtigt, und es wird eine freiwillige Kooperation sichergestellt.

Durch die – im Unterschied zu herkömmlichen Zuteilungsverfahren, die auf der charakteristischen Funktion basieren – praktikablen subventionsfreien Preise zeigt sich spieltheoretisch der Vorteil einer Methode, die dieses Konzept anwendet und umsetzbar macht.<sup>92</sup> Sie eignet sich als Entscheidungsgrundlage in arbeitsteiligen Organisationen, weil sie die spieltheoretische Eigenschaft der Stabilität erfüllt, so dass kein Entscheidungsträger Vorteile aus der Ablehnung der aus ihr folgenden Kostenzuteilung ziehen kann. Durch die Kombination der Netzwerksichtweise mit der Contestable Market Theory und der Verallgemeinerung bzw. Erweiterung auf eine Situation mit beliebig vielen Spielern und Produkten, kann das gewünschte Ergebnis erreicht werden.

---

<sup>90</sup> Ausgenommen davon bleibt die Eigenschaft der Konsistenz, die ausschließlich vom Nucleolus erfüllt wird, vgl. Hart und Mas-Colell (1989). Diese wird jedoch nicht zu den geforderten Eigenschaften gezählt. Vgl. Wißler (1997) oder Young (1994), S. 1229.

<sup>91</sup> Vgl. Anhang B.

<sup>92</sup> Vgl. Abschnitt 5.4.2.

Die oben gemachten Ausführungen werden folgendermaßen interpretiert: Durch den hier entwickelten Lösungsvorschlag anhand subventionsfreier Preise wird eine globale (marktweite) Möglichkeit der Kostenzuteilung beschrieben – es handelt sich dabei um das *Hauptergebnis* der Arbeit. Das aufgestellte und durch die Input-Output Analyse formalisierte Modell bietet die Struktur, in der die Kostenzuteilung und die Kooperation stattfinden. Die subventionsfreien Preise bieten einen Rahmen, innerhalb dessen sich die Preise – und damit die strategischen Entscheidungen der Spieler – bewegen. Nicht eindeutig festlegbar ist jedoch, wie sich lokal beim Spieler Preise bestimmen lassen, die diese Anforderungen erfüllen. Im kooperativen Markt sind die Spieler z.B. die Manager eines Unternehmens oder die Vertreter der Partner eines Investitionsprojekts. Bei der lokalen eigentlichen Preisbestimmung handelt es sich um ein eher „technisches“ Instrument, das den Anforderungen des Vorschlags zu genügen hat. Unter den existierenden Preismechanismen bietet sich dabei der Aumann-Shapley Preismechanismus als eine Möglichkeit der Preisbestimmung an – dies ist das *zweite Ergebnis* der Arbeit. Beide Ergebnisse werden durch Abbildung 5.13 zusammenfassend veranschaulicht.

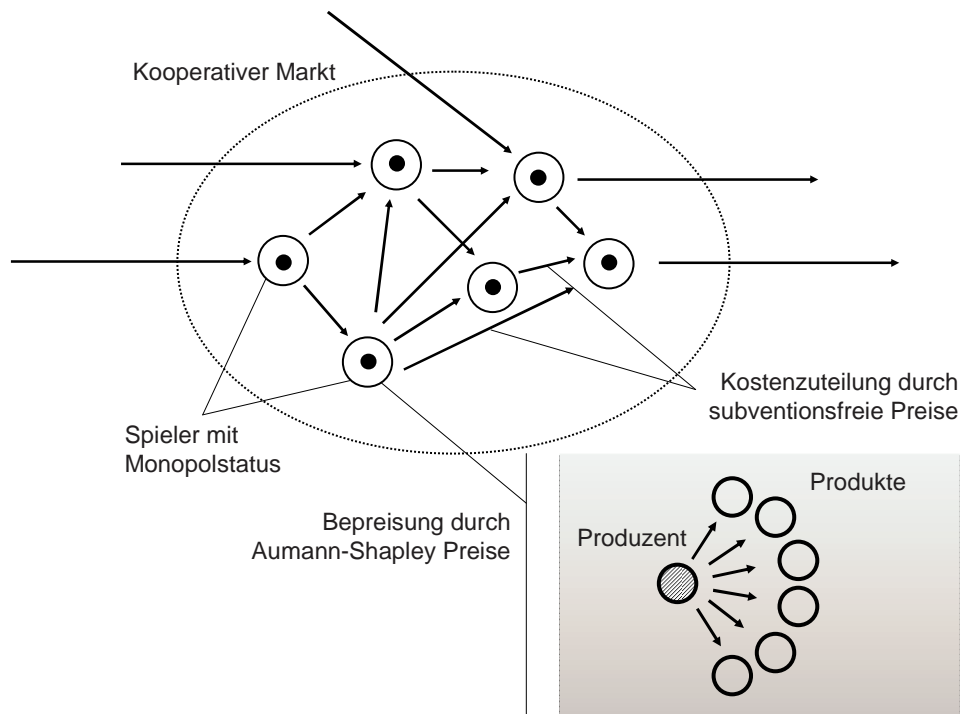


Abbildung 5.13: Der kooperative Markt mit Kostenzuteilung durch Aumann-Shapley Preise.



Somit besteht die Möglichkeit, das Modell und die vorgeschlagene Methode weiter zu konkretisieren. Während die Art der Kostenzuteilung an sich durch die Leistungsberechnung (Zuteilung der Kosten durch subventionsfreie Preise) eindeutig geklärt ist, wenn eine stabile und praktikable Lösung angestrebt wird, so weist die Preisbestimmung und Abrechnungsmethodik Potenzial zur Detaillierung und Verbesserung auf. Der Aumann-Shapley Preismechanismus ist nämlich nur unter der Voraussetzung subventionsfrei, dass die zugrundeliegende Kostenfunktion kostenkomplementär ist. Es ist wünschenswert, auf diese Annahme verzichten zu können, so dass Bedarf nach weiteren Preismechanismen besteht, die sich in den Vorschlag einfügen. Ebenso ist mit Hinblick auf die Praxis nach einem Instrument zu forschen, das den Preismechanismus so praxisnah gestaltet, dass die Kostenfunktion eines Mehrproduktmonopols nicht mehr im Detail bekannt sein muss, sondern dass aus den standardmäßig vorliegenden Daten einer buchhalterischen Abrechnung eine Kalkulation subventionsfreier Preise erfolgen kann.

#### 5.4.4 Leitfaden für ein Berichtswesen im Unternehmen

Als ein Vorschlag zu einer Überleitung der formal erreichten Ergebnisse in ein handhabbares Instrument für die Praxis, wird in diesem Abschnitt ein spieltheoretisch motivierter Leitfaden für ein Berichtswesen in Unternehmen aufgestellt.

Spieltheoretisch und nach der Technik des Rechnungswesens gesehen werden die einzelnen Spieler als *Quasi-Profit-Center*<sup>93</sup> (bzw. gemäß der Terminologie der Wertbildungsrechnung als Subunternehmen) angesehen. Diese bilden die Struktur des Unternehmens und arbeiten arbeitsteilig vernetzt zusammen.

#### Definition 5.8. Quasi-Profit-Center (Subunternehmen)

*Ein Spieler bildet als Quasi-Profit-Center eine selbstständige, rechnungsmäßig abge-*

---

<sup>93</sup>Es gibt keine einheitliche Definition für diesen Begriff in der Literatur. Kaplan und Cooper (1999), S. 90–102 definieren die Quasi-Profit-Center Organisation als Methode, Abteilungen wie Profit-Center zu behandeln, diesen jedoch nicht die Kontrolle über Preise zu geben. Selbst dann gesteht Kaplan der Quasi-Profit-Center Rechnung Vorteile gegenüber einer reinen Kostenrechnung zu:

- Schnelle, leicht verständliche Berichterstattung,
- Ursachengerechte Kostenzurechnung,
- Ausgleich gegensätzlicher Erfordernisse (Trade-offs),
- Schwerpunktsetzung und Rechtfertigung von Ausgaben für Verbesserungen und Investitionen,
- Stärkung der Eigenverantwortung für die lokale Entscheidungsfindung.

*grenzte Einheit eines Unternehmens, die eine vollständige Übersicht und Entscheidungsgewalt über Einnahmen, Ausgaben und Investitionen hat, und gleichzeitig keinen Gewinn erwirtschaften soll. Insbesondere soll das Quasi-Profit-Center die vollständige Kontrolle über seine Preise haben.*

Im Grunde handelt es sich um Unternehmen, die zwar organisatorisch, jedoch nicht rechtlich eigenständig sind, also um „virtuelle Unternehmen“ im Gesamtunternehmen. Sie haben ein gemeinsames, übergeordnetes Ziel, so dass die Manager der virtuellen Unternehmen keine individuelle Gewinnmaximierung betreiben.

Gemäß der vorgeschlagenen Vorgehensweise werden interne Kunden-Lieferanten Beziehungen zwischen den virtuellen Unternehmen im Unternehmen deskriptiv-objektiv gemäß den Leistungsströmen abgerechnet. Die internen Preise beinhalten keine Preisaufschläge, decken die Kosten und subventionieren die Abteilung nicht auf Kosten der Empfänger. Durch die Erfüllung dieser Forderungen ist es möglich, eine Kernzuteilung zu erzeugen. Dazu ist die Struktur der Quasi-Profit-Center so anzulegen, dass die Punkte des folgenden Leitfadens erfüllt sind:

1. Jede Abteilung stellt ein reguliertes Mehrproduktmonopol dar, das innerhalb des Unternehmens konkurrenzlos bezüglich seiner Produkte ist.
2. Für interne Kunden leistende Abteilungen bzw. Unternehmenbereiche weisen keine Gewinne aus.
3. Die Kostenzuteilung wird anhand von Preisen und nicht anhand von Umlagen oder Schlüsselungen vollzogen.
4. Zum durch die externe Nachfrage vorgegebenen Produktionsprogramm  $\bar{\mathbf{q}} \Rightarrow \bar{\mathbf{q}}_i$  sind die Kosten genau gedeckt.
5. Die Kostenfunktionen der Abteilungen erlauben für alle  $\mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$  ein natürliches Mehrproduktmonopol gemäß Definition 5.1. Die dann mögliche subventionsfreie Preisstruktur wird gewählt. Das regulierte Mehrproduktmonopol ist dann ein natürliches Mehrproduktmonopol innerhalb des kooperativen Marktes.
6. Damit die Spieler (Abteilungen) entscheiden können, ob die Kooperation mit den anderen Spielern (Bezug der Leistung) für sie sinnvoll ist, sind die internen Preise bekanntzugeben und zu berechnen.

Für eine Rechnungslegung und ihr Berichtswesen, die sich an dem spieltheoretischen Leitfaden orientieren, bedeutet dies, dass:

1. es keine Umlagen (traditionelle Kostenverrechnung) gibt, sondern eine Leistungsberechnung angewandt wird.
2. jede Abteilung einen Bericht erhält, in dem sowohl Einnahmen als auch Ausgaben ausgewiesen und gegenübergestellt werden.
3. in diesem Bericht alle verursachten Kosten (bezogenen Leistungen) abgebildet werden, inklusive der von anderen Abteilungen bezogenen Leistungen.
4. jede Abteilung ihre Leistungen bepreist und über ihre Preisstruktur zu Umsätzen kommt.
5. die Preise abgebildet werden, so dass sie eine Diskussionsgrundlage bieten (Transparenz).
6. diese Umsätze als Ausgaben bei den Empfängern abgebildet werden, damit diese eine Einschätzung darüber treffen können, ob es sich lohnt, sich mit den internen Lieferanten auszutauschen.

Damit schließt die spieltheoretische Untersuchung. Von dem vorgeschlagenen Leitfaden ausgehend lässt sich der in Abschnitt 1.2 formulierte Anspruch erfüllen, die Ergebnisse in eine für die Praxis leichter verwertbare Form zu überführen. Dazu bedarf es einer Ausgestaltung des Leitfadens in konkrete Instrumente, die zur Anwendung in der täglichen Praxis der Unternehmensrechnung oder ähnlichen Anwendungsfeldern geeignet sind. Zu einer weiteren Untersuchung bieten sich unter anderem die vorgestellte Wertbildungsrechnung oder Methoden und Instrumente des Lean Accounting an.<sup>94</sup>

---

<sup>94</sup>Vgl. Abschnitt 4.2 sowie beispielsweise Dietz und Kracht (2011) und Grasso et al. (2011).

## 6. Schlussbemerkungen

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind wirtschaftliche Entscheidungssituationen, in denen durch Kooperation Kostenvorteile entstehen, bindende Absprachen eingegangen werden können und in denen die Teilnehmer der Kooperation sich wechselseitig beeinflussen. Als Beispiel für eine derartige Entscheidungssituation wird die Kostenzuteilung in Unternehmen betrachtet, die als kooperativer Markt interpretiert wird.<sup>1</sup> Eine Zusammenfassung der Arbeit, der erreichten Ergebnisse, sowie eine Diskussion derselben, erfolgt in Abschnitt 5.4.

Aufgabenstellung der Arbeit ist die Entwicklung eines Zuteilungsverfahrens, das die gemeinsamen Kosten der Teilnehmer so unter den Teilnehmern zuteilt, dass diese freiwillig miteinander kooperieren. Das Zuteilungsverfahren hat praktikabel und auf allgemeine Entscheidungssituationen (vgl. Abbildung 1.3) anwendbar zu sein.

Als Methodik wird die kooperative Spieltheorie angewandt. Es werden Eigenschaften von Zuteilungsverfahren vorgestellt. Diese dienen als spieltheoretische Kriterien für die Bewertung aller untersuchten Zuteilungsverfahren. Aufgrund der Aufgabenstellung wird die Stabilität als notwendigerweise zu erfüllende Eigenschaft festgelegt.<sup>2</sup> Diese garantiert, dass die Spieler bei der Teilnahme am Spiel besser gestellt sind als bei der Nichtteilnahme. Zusätzlich wird gefordert, dass das Zuteilungsverfahren eine eindeutige Lösung bestimmt und nicht auf der charakteristischen Funktion aufbaut, welche den Einsatz in der Praxis verhindert.<sup>3</sup> Untersucht werden Zuteilungsverfahren von Koalitionsspielen (Kapitel 2), weitere Ansätze der Spieltheorie mit Bezug zur Kostenzuteilung (Kapitel 3), und Verfahren der Praxis (Kapitel 4).

Anhand der Untersuchung der Zuteilungsverfahren lässt sich feststellen, dass kein Zuteilungsverfahren der Aufgabenstellung gerecht wird. Jedoch lassen sich Zuteilungsverfahren identifizieren, die in einem geeigneten Modell zur Lösung beitragen können.<sup>4</sup> Das Modell wird anhand eines Fallbeispiels der Praxis motiviert und formal entwickelt.<sup>5</sup> Aufbauend darauf wird ein Zuteilungsverfahren vorgestellt, das der Aufgabenstellung gerecht wird (Kapitel 5).

---

<sup>1</sup>Vgl. Abschnitt 1.2.

<sup>2</sup>Vgl. zur Definition Abschnitt 2.2.1 und zur Diskussion Abschnitt 2.6.

<sup>3</sup>Vgl. Abschnitt 1.1 und zur charakteristischen Funktion Abschnitt 2.1.

<sup>4</sup>Vgl. Abschnitt 3.4.

<sup>5</sup>Vgl. Abschnitt 4.2 und Abschnitt 4.4.

Das Modell sieht vor, dass die Spieler auf dem kooperativen Markt als Produzenten und Abnehmer auftreten, wobei sich die Produktionen der Spieler gegenseitig beeinflussen. Diese Interdependenz begründet den Einsatz der Spieltheorie. Sie entsteht dadurch, dass die Preise der von einem Spieler produzierten Güter die Preise der von anderen Spielern erstellten Güter verändern. Somit lässt sich der spieltheoretische Lösungsvorschlag an der Berechnung der Preise festmachen.

Das Hauptergebnis der Arbeit besteht darin, dass die Zuteilung dann eindeutig, praktikabel und stabil ist, wenn die Preise der Spieler zur Zuteilung eingesetzt werden und wenn diese dem spieltheoretischen Konzept subventionsfreier Preise<sup>6</sup> genügen (vgl. Abschnitt 5.2). Es bietet in der Praxis testbare Forderungen, die auf ein Preissystem (z. B. eine Rechnungslegung) angewendet werden können. Somit wird gezeigt, dass das entwickelte Zuteilungsverfahren die Aufgabenstellung erfüllt. Das zweite Ergebnis der Arbeit lautet, dass sich die Preise im konvexen Spiel<sup>7</sup> anhand des Aumann-Shapley Preismechanismusses<sup>8</sup> berechnen lassen (Abschnitt 5.3). Ein Leitfaden für ein Berichtswesen in Unternehmen, welcher auf der spieltheoretischen Untersuchung basiert, zeigt auf, wie die gewonnenen Ergebnisse in der Praxis umgesetzt werden können (Abschnitt 5.4.4). Aufgrund der spieltheoretischen Untersuchung besteht die begründete Vermutung, dass eine dezentral organisierte Unternehmensführung durch eine Rechnungslegung, die sich an dem aus den spieltheoretischen Kriterien abgeleiteten Leitfaden orientiert, besser unterstützt wird als durch die herkömmliche Kostenrechnung.<sup>9</sup>

Schließlich ist anzumerken, dass zwei Aspekte in zukünftigen Untersuchungen weiterentwickelt werden können. Erstens lässt sich der Aumann-Shapley Preismechanismus nur im konvexen Spiel zur Berechnung subventionsfreier Preise einsetzen. Eine Lockerung dieser Annahme bzw. die Entwicklung eines subventionsfreien Preismechanismusses ist als Fortschritt des Modells zu werten. Zweitens können die gewonnenen Erkenntnisse, darunter besonders der Leitfaden für ein Berichtswesen, in einer anwendungsorientierten Untersuchung praxisnah umgesetzt werden. Insbesondere empfiehlt sich die eingehende Untersuchung des Instruments der Wertbildungsrechnung.

---

<sup>6</sup>Vgl. Abschnitt 3.2.1 und Abschnitt 5.2.

<sup>7</sup>Vgl. Abschnitt 3.1.1

<sup>8</sup>Vgl. Abschnitt 3.3.1

<sup>9</sup>Vgl. Abschnitt 4.3 und Abschnitt 5.4.3.

# A. Beweis der Stabilitätseigenschaft subventionsfreier Preise

*Beweis.* Für „dann“:<sup>1</sup> Wenn alle Preisvektoren subventionsfrei sind, dann gibt es kein Mehrproduktmonopol, in das gewinnbringend eingedrungen werden kann und alle Spieler beliefern sich gegenseitig. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass durch subventionsfreie Preise die große Koalition sichergestellt wird. Wenn dies gilt, muss das durch subventionsfreie Preise entstehende Koalitionsspiel  $(N, c)$  gemäß Satz 5.1 konsequenterweise einen nichtleeren Kern haben. Dies lässt sich daran überprüfen, dass das Spiel balanciert ist.<sup>2</sup>

Alle  $\mathbf{p}_i$  seien subventionsfrei gemäß Definition 5.1,

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k q_i^k \leq C_i(q_i^1, \dots, q_i^{m_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall \mathbf{q}_i, \mathbf{0} \leq \mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i$$

Wenn alle  $\mathbf{p}_i$  subventionsfrei sind, gilt die Ungleichung für jedes  $i$ . Summiert man über alle einzelnen Spieler, dann folgt Bedingung (5.5)

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_S \leq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall S \subseteq N,$$

die ebenso erfüllt wird. Unter Berücksichtigung von  $\mathbf{d}_S = \sum_{j \in S} \mathbf{d}_j$  und Multiplikation beider Seiten mit balancierten Gewichten  $\delta_S$  ergibt sich:

$$\sum_{S \subseteq N} \delta_S \cdot \left\{ \mathbf{p} \cdot \left( \sum_{j \in S} \mathbf{d}_j \right) \right\} \leq \sum_{S \subseteq N} \delta_S \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{S_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \right\} \quad (\text{A.1})$$

In der linken Seite der Ungleichung kann die Summe  $\sum_{j \in S}$  vorgezogen werden, und man erhält

$$\sum_{S \subseteq N} \sum_{j \in S} \delta_S \cdot \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_j\}.$$

<sup>1</sup>Adaptiert von Moulin (1988), S. 100–101 und Bondavera (1963).

<sup>2</sup>Vgl. Definition 3.2.

Durch die ersten beiden Summen  $\sum_{S \subset N} \sum_{j \in S}$  kommt zum Ausdruck, wie oft ein Spieler gezählt wird. Da alle Koalitionen durchpermutiert werden, kommt jedes  $j$  vor, und zwar genau so oft, wie es Koalitionen gibt, in denen  $j$  vorkommt. Dies kann für den Fall  $N = \{1, 2, 3\}$  kurz veranschaulicht werden:

$S \subset N$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$
$j=1$	x			x	x	
$j=2$		x		x		x
$j=3$			x		x	x

Jedes  $j$  kommt drei mal vor, da es drei Koalitionen  $S \subset N$  gibt, die  $j$  enthalten. Die Summen können also umformuliert werden in die Summe aller  $j$  mal die Anzahl der Koalitionen, in denen sie vorkommen, und man erhält

$$\sum_{j=1}^n \left( \sum_{S: j \in S} \delta_S \right) \cdot \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_j\}.$$

Mit der Eigenschaft balancierter Gewichte (3.1) und der Aufsummierung der einzelnen Nachfragen  $\mathbf{d}_j$  zur Nachfrage der großen Koalition  $\mathbf{d}_N = \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_j$  folgt:

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \sum_{S: j \in S} \delta_S \right)}_{=1} \cdot \{\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_j\} = \sum_{j=1}^n \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_j = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_N.$$

Alle Preise multipliziert mit der Gesamtnachfrage der großen Koalition müssen nach Gleichung (5.4) gleich den Kosten über alle Spieler sein. Wie in Gleichung (5.8) angegeben, entsprechen die Kosten aller Spieler gerade dem Koalitionswert der großen Koalition.

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_N = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Ni}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) = c(N).$$

Durch Einsetzen in die linke Seite der Ungleichung (A.1) und mit (5.9) erhält man

$$\begin{aligned} c(N) &\leq \sum_{S \subset N} \delta_S \cdot \left\{ \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Si}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \right\} \\ \Leftrightarrow c(N) &\leq \sum_{S \subset N} \delta_S \cdot c(S) \end{aligned} \tag{A.2}$$

Ungleichung (A.2) entspricht einem balancierten Spiel (3.2), und nach Satz 3.1 ist der Kern des Koalitionsspiels  $(N, c)$  nichtleer. Gibt es jedoch auch nur einen Preisvektor  $\mathbf{p}_i$ , der nicht subventionsfrei ist, dann ist das Spiel nicht balanciert und der Kern ist leer. Nicht subventionsfreie Preise bzw. nicht tragbare Kostenfunktionen verhindern also eine Kernzuteilung. Dass tragbare Kostenfunktionen nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung für die Existenz des Kerns sind, ist bewiesen, wenn für jedes Koalitionsspiel mit nichtleerem Kern ein Preisvektor im Kern für jedes  $i$  existiert.

Für „nur dann“:<sup>3</sup> Wenn das Spiel einen nichtleeren Kern hat, dann gibt es mindestens eine Zuteilung, die sowohl effizient als auch koalitionsrational ist. Die Zuteilung kann im Falle der Leistungsberechnung aufgeteilt werden in Preise mal Mengen. Es lässt sich zeigen, dass diese Preise immer den Eigenschaften subventionsfreier Preise genügen.

Der Spaltenvektor  $\mathbf{e}^k$  für  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $x \in \{1, \dots, m\}$  sei der kanonische Einheitsvektor mit

$$e_x^k = \begin{cases} 1, & \text{für } k = x \\ 0, & \forall k \neq x \end{cases}, \quad \text{Beispiele: } \mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ m \end{pmatrix}.$$

Gegeben sei das Koalitionsspiel  $(N, c)$  mit  $k \in \{1, \dots, m\}$  und  $h \in \{1, \dots, 2^r\}$ , so dass das Spiel  $|N| = (m \cdot 2^r)$  Spieler hat. Man setze für eine beliebige Zahl  $r > 0$  die Doppelreihe

$$\bar{q}^{k,h} = \frac{\bar{q}^k}{2^r} \cdot \mathbf{e}^k.$$

Interpretation:  $\bar{q}^k$  ist die Menge des  $k$ ten Produkts, die Produkte sind also die Spieler.  $\bar{q}^{k,h}$  ist unabhängig von  $h$ , und es gilt:

$$\sum_{h=1}^{2^r} \bar{q}^{k,h} = 2^r \cdot \frac{\bar{q}^k}{2^r} \cdot \mathbf{e}^k = \bar{q}^k \cdot \mathbf{e}^k.$$

---

<sup>3</sup>Adaptiert von Moulin (1988), S. 100–101 und Scarf (1986).



Summiert man die Doppelreihe über alle Spieler auf, ergibt sich das gesamte Produktionsprogramm, äquivalent zur Nachfrage der großen Koalition  $\mathbf{d}_N$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^{2^r} \bar{q}^{k,h} &= \sum_{k=1}^m \bar{q}^k \cdot \mathbf{e}^k = \bar{q}^1 \cdot \mathbf{e}^1 + \dots + \bar{q}^m \cdot \mathbf{e}^m \\ &= \bar{q}^1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \bar{q}^m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{q}^1 \\ \vdots \\ \bar{q}^m \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{d}_N. \end{aligned}$$

Die Zuteilungen seien bezeichnet durch  $\alpha^{kh}$ . Das Koalitionsspiel  $(N, c)$  habe einen nichtleeren Kern, so dass gilt:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^{2^r} \alpha^{kh} = c(N), \quad \sum_{k \in S} \sum_{h \in S} \alpha^{kh} \leq c(S) \quad \forall S \subseteq N.$$

Gemäß Satz 5.1 sind dabei  $c(N)$  die Gesamtkosten der Kooperation und  $c(S)$  die Kosten, die eine Koalition  $S$  bei den anderen Spielern hervorruft, um die durch  $S$  nachgefragte Menge  $\mathbf{d}_S$  herzustellen. Mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  seien nun  $n$  verschiedene Technologien bezeichnet, die sich die  $m \cdot 2^r$  Spieler teilen. Das Spiel kann also so modelliert werden, dass die Kosten  $c(N)$ ,  $c(S)$  des Spiels durch genau eine ( $n = 1$ ) Technologie bis hin zu einer beliebigen Anzahl von Technologien entstehen. Interpretation: Die Produkte (Spieler)  $k, h$  werden von den Technologien  $i$  produziert. Mit  $\sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^{2^r} \bar{q}^{k,h} = \mathbf{d}_N \Rightarrow \mathbf{d}_{N_i}$  gilt für alle  $S \subseteq N$ :

$$\sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^{2^r} \alpha^{kh} = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{N_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \quad \sum_{k \in S} \sum_{h \in S} \alpha^{kh} \leq \sum_{i=1}^n C_i \left( \sum_{k \in S} \sum_{h \in S} \bar{q}^{k,h}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi} \right) \quad (\text{A.3})$$

Die Spieler seien so geordnet, dass  $\alpha^{k1} \geq \alpha^{k2} \geq \dots \geq \alpha^{k2^r}$ . Nun setze man

$$u^k = \sum_{h=1}^{2^r} \alpha^{kh}.$$

Aufgrund der Sortierung der  $\alpha^{kh}$  gilt für die natürlichen Zahlen  $g^k$ :

$$\frac{g^k}{2^r} \cdot \underbrace{\sum_{h=1}^{2^r} \alpha^{kh}}_{u^k} \leq \sum_{h=1}^{g^k} \alpha^{kh}, \quad \forall g^k, 0 \leq g^k \leq 2^r.$$

Beweis durch Grenzbetrachtung:

$$\text{Fall 1.) } g^k = 2^r \Rightarrow \frac{2^r}{2^r} \cdot u^k \leq u^k \quad \checkmark$$

$$\text{Fall 2.) } g^k = 1 \Rightarrow \frac{1}{2^r} \cdot (\alpha^{k1} + \dots + \alpha^{k2^r}) \leq \frac{1}{2^r} \cdot \underbrace{(\alpha^{k1} + \dots + \alpha^{k1})}_{2^r \cdot \alpha^{k1}} = \alpha^{k1} \quad \checkmark$$

Für die Beziehungen (A.3) folgt daraus mit  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $h \in \{1, \dots, g^k\}$  für  $(k, h) \in S$  für alle  $S \subseteq N$  und für  $0 \leq g^k \leq 2^r$ :

$$\sum_{k=1}^m u^k = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Ni}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \quad \sum_{k=1}^m \frac{g^k}{2^r} \cdot u^k \leq \sum_{i=1}^n C_i \left( \sum_{k=1}^m \frac{g^k}{2^r} \cdot \bar{q}^k \cdot \mathbf{e}^k; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi} \right).$$

Alle  $u^k$ , die beide Bedingungen erfüllen, bilden für alle  $r$  eine nichtleere abgeschlossene Menge.

$$\{u^1, \dots, u^m\} := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m : u^k \geq 0, \sum_{k=1}^m u^k = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Ni}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \right\}.$$

Die Menge der  $u^k$  für  $r+1$  ist in der Menge für  $r$  enthalten. Es gibt also eine Menge  $u^k$ , die beide Bedingungen für alle  $r$  erfüllt. Sei  $t^k = g^k/2^r$ , dann gilt für  $r \rightarrow \infty$  im Limit  $u^{k*}$  für alle  $0 \leq t^k \leq 1$ :

$$\sum_{k=1}^m u^{k*} = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{Ni}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \quad \sum_{k=1}^m t^k \cdot u^{k*} \leq \sum_{i=1}^n C_i \left( \sum_{k=1}^m t^k \cdot \bar{q}^k \cdot \mathbf{e}^k; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi} \right)$$

Sei

$$p^k = \begin{cases} \frac{u^{k*}}{\bar{q}^k}, & \forall \bar{q}^k > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn für ein  $\bar{q}^k = 0$  gilt, so ist ebenfalls  $u^k = 0$  und damit  $u^{k*} = 0$  für dieses  $k$ .  
Damit ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^m p^k \cdot \bar{q}^k = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{\mathbf{N}i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \quad \sum_{k=1}^m p^k \cdot (t^k \cdot \bar{q}^k) \leq \sum_{i=1}^n C_i \left( \sum_{k=1}^m t^k \cdot \bar{q}^k \cdot \mathbf{e}^k; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi} \right)$$

für  $\{t^1, \dots, t^m\} \in [0, 1]^m$ . Da  $0 \leq t^k \leq 1$ , können alle beliebigen Outputs bzw. Nachfragekombinationen erzeugt werden:

$$t^k \cdot \bar{q}^k \Leftrightarrow 0 \leq q^k \leq \bar{q}^k \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^m t^k \cdot \bar{q}^k \cdot \mathbf{e}^k = \underbrace{(t^1 \cdot q^1, \dots, t^m \cdot q^m)}_{0 \leq q^k \leq \bar{q}^k \forall q^k} \Leftrightarrow \mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}.$$

Da alle  $\mathbf{q} \leq \bar{\mathbf{q}}$  durch die Nachfragen der Koalitionen  $S \subseteq N$  erzeugt werden, gilt

$$\sum_{k=1}^m p^k \cdot \bar{q}^k = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{N}} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^m p^k \cdot (t^k \cdot \bar{q}^k) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{S}}.$$

So folgen die allgemeinen Gleichungen des subventionsfreien Spiels (5.4) und (5.5):

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{N}} = \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{\mathbf{N}i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}), \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{S}} \leq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{\mathbf{S}i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall S \subseteq N$$

Aus der Ungleichung folgt mit dem Spezialfall  $|S| = 1, S = \{j\}$ :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_{\mathbf{j}} \leq \sum_{i=1}^n C_i(\mathbf{d}_{\mathbf{j}i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}).$$

Die Produkte  $k$  werden jetzt noch nach den Technologien  $i$  gruppiert, d.h. das durch die  $i$ -te Technologie hergestellte Produkt  $k$  bekommt den Marker  $i$  und die  $m$  Produkte werden entsprechend in Gruppen  $m_i$  aufgeteilt. Durch die Nachfrage nur eines Spielers kann jedes beliebige Gut  $k$  einzeln auf seine Subventionsfreiheit getestet werden kann, indem  $j$  nur ein einziges Gut bezieht, z. B. durch  $0 < t^k \leq 1, t^l = 0 \forall l \neq k$ . Dadurch werden die Kosten aller Technologien, die dieses Produkt nicht herstellen, auf Null gesetzt und es folgt:

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k \bar{q}_i^k = C_i(\bar{q}_i^1, \dots, \bar{q}_i^{m_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}),$$

---

$$\sum_{k=1}^{m_i} p_i^k q_i^k \leq C_i(q_i^1, \dots, q_i^{m_i}; \mathbf{p}_{-i}, \boldsymbol{\pi}) \quad \forall \mathbf{q}_i, \mathbf{0} \leq \mathbf{q}_i \leq \bar{\mathbf{q}}_i,$$

und es wurden subventionsfreie Preisvektoren  $\mathbf{p}_i$  für alle  $i$  gefunden. □

# B. Beweis der Existenz subventionsfreier Preise

Es wird gezeigt, dass gemäß der Forderung subventionsfreier Preise eine eindeutige Bestimmung von kostendeckenden internen Preisen in einem kooperativen Markt möglich ist. Gegeben ist die Situation, dass die Kalkulation von Preisen eines Spielers auch die Kalkulation der anderen Spieler beeinflusst. Dies stellt die Interdependenz des Spiels dar. Es ist zu zeigen, dass sich unter dieser Bedingung genau ein Vektor von (positiven) Preisen als Lösung einer Optimierungsaufgabe ergibt. Die Problematik der wechselseitigen Preisbeziehungen, die sich auf Grund der Modellierung als Netzwerkstruktur ergeben, ist dabei zu berücksichtigen.

Aus der spieltheoretischen Bedingung subventionsfreier Preise ergibt sich, dass jeder Spieler  $i$  durch seine  $m_i$  Preise gerade die Kosten deckt. Der Funktionswert von  $C_i(\cdot)$  ist der Betrag der minimalen Kosten zur Produktion von  $\mathbf{q}_i$ . Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1 &= C_1(\mathbf{q}_1; \mathbf{p}_{-1}, \boldsymbol{\pi}_1) \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{q}_2 &= C_2(\mathbf{q}_2; \mathbf{p}_{-2}, \boldsymbol{\pi}_2) \\ &\vdots \\ \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{q}_n &= C_n(\mathbf{q}_n; \mathbf{p}_{-n}, \boldsymbol{\pi}_n). \end{aligned} \tag{B.1}$$

Hieraus ist nicht zu ersehen, dass zu jedem Angebot der einzelnen Mehrproduktmonopole, das in seiner Gesamtheit gleich der Nachfrage der Gesamtheit der Spieler sein soll, also zu jedem

$$\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$$

und zu jeder Situation

$$\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \dots, \boldsymbol{\pi}_n)$$

der übrigen Inputpreise genau ein positiver Preisvektor (Vektor von Preisvektoren)

$$\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$$

existiert derart, dass das System (B.1) gelöst wird.<sup>1</sup> Für den entwickelten Lösungsvorschlag existiert dann eine Lösung – d. h. er ist (theoretisch) anwendbar – wenn folgende Aufgabenstellung gelöst wird: Die Aufgabe besteht darin zu zeigen, dass für jeden Outputvektor  $\mathbf{q}$  und für jeden Preisvektor  $\boldsymbol{\pi}$  genau ein Preisvektor  $\mathbf{p}$  existiert, dessen Preise zudem alle positiv sind.

**Lösung der Aufgabe:** Es sei angenommen, dass die Bestimmung der Preise bei bestehender Mengenstruktur geschieht. Aufgrund der externen Marktnachfrage entsteht aufgrund der eindeutigen Nachfragefunktionen der Spieler mit Kontakt zum externen Markt bei den weiteren Spielern ein internes Produktionsprogramm  $\bar{\mathbf{q}}$ . Falls kein externer Markt zu berücksichtigen ist, entsteht das Produktionsprogramm rein aus den internen Nachfragefunktionen. Sind die untereinander gelieferten Mengen vereinbart, sind diese zu bepreisen. In die Preise eines Mehrproduktmonopols fließen dabei auch die Preise der vorleistenden Spieler ein. Es wird angenommen, dass die Kostenfunktionen in (B.1) empirisch/mathematisch ermittelt und hinreichend oft differenzierbar seien. Sie seien bis zu zwei Gliedern zweiten Grades entwickelt bzw. sei ihre Darstellung in der folgenden Form näherungsweise richtig (Die weiteren Kostenfunktionen  $C_2, \dots, C_n$  gelten analog):

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{q}_1; \mathbf{p}_{-1}, \boldsymbol{\pi}_1) \\ &= a_1 + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{q}_1 + \mathbf{c}_{12} \cdot \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{c}_{1n} \cdot \mathbf{p}_n + \mathbf{d}_1 \cdot \boldsymbol{\pi}_1 \\ &+ Q_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n, \boldsymbol{\pi}_1), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

wobei  $a_1 \in \mathbb{R}_+$  den fixen Kosten entspricht und  $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}_+^{m_1}$ ,  $\mathbf{c}_{12} \in \mathbb{R}_+^{m_2}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{c}_{1n} \in \mathbb{R}_+^{m_n}$ ,  $\mathbf{d}_1 \in \mathbb{R}_+^{r_1}$  Vektoren von Konstanten sind.<sup>2</sup>  $Q_1$  ist eine quadratische Form in allen

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n + r_1$$

<sup>1</sup>Dies ist in bestimmten Situationen auch nicht zu erwarten, z. B. nicht im Fall

$$\begin{aligned} p_1^1 \cdot q_1^1 &= 2 \cdot q_1^1 \cdot p_2^2 && (= C_1(q_1^1; p_2^2)) \\ p_2^2 \cdot q_2^2 &= q_2^2 \cdot p_1^1 && (= C_2(q_2^2; p_1^1)). \end{aligned}$$

<sup>2</sup> $\mathbf{d}_1$  ist nicht zu verwechseln mit der Nachfrage von Spieler 1. Der Ausdruck wird nur hier in geänderter Bedeutung verwendet.

Variablen, d. h. es gilt insbesondere<sup>3</sup>

$$Q_1(\lambda \cdot \mathbf{q}_1, \lambda \cdot \mathbf{p}_2, \dots, \lambda \cdot \mathbf{p}_n, \lambda \cdot \boldsymbol{\pi}_1) = \lambda^2 \cdot Q_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n, \boldsymbol{\pi}_1).$$

Es werden nun alle Gleichungen aus (B.1) der Reihe nach nach

$$q_1^1, \dots, q_1^{m_1}, q_2^1, \dots, q_2^{m_2}, \dots, q_n^1, \dots, q_n^{m_n}$$

abgeleitet. Daraus ergeben sich  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$  Gleichungen zur Bestimmung von ebensovielen Preisen. Ökonomisch bzw. mathematisch haben nach den obigen Schritten diese Preise die Eigenschaft, dass jeder Spieler bei diesen Preisen und den gemachten Annahmen seine Einnahmen den Ausgaben angleicht. Sind die Einnahmen also größer/kleiner als die Ausgaben, dann verkleinert/vergrößert der Spieler die Preise und (B.1) ist gelöst. Dabei werden die  $q_i^k$  nicht als abhängig von den Preisen  $p_i^k$  angesehen.<sup>4</sup>

Betrachtet man in (B.1) zunächst  $C_1(\cdot)$  in der Form (B.2), und leitet diese zunächst partiell nach  $q_1^1$  ab, dann folgt

$$\begin{aligned} p_1^1 &= \frac{\partial C_1(\mathbf{q}_1; \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n, \boldsymbol{\pi}_1)}{\partial q_1^1} \\ &= b_1^1 + \alpha_{12}^{11} \cdot p_2^1 + \dots + \alpha_{12}^{1m_2} \cdot p_2^{m_2} + \dots + \alpha_{1n}^{11} \cdot p_n^1 + \dots + \alpha_{1n}^{1m_n} \cdot p_n^{m_n} \\ &\quad + \beta_1^1 \cdot \pi_1^1 + \dots + \beta_1^{r_1} \cdot \pi_1^{r_1} \\ &\quad + 2 \cdot \gamma_1^1 \cdot q_1^1 + \gamma_1^2 \cdot q_1^2 + \dots + \gamma_1^{m_1} \cdot q_1^{m_1} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

mit positiven und konstanten  $\alpha's$ ,  $\beta's$  und  $\gamma's$ .<sup>5</sup> Dabei gilt  $\alpha_{ij}^{kl}$ , wobei  $k$  anzeigt, nach welchem  $q_i^k$  von  $i$  abgeleitet wird, und  $l$  anzeigt, um welchen Inputpreis  $p_j^l$  von  $j$  es sich handelt. Die unteren Indizes der  $\beta's$  und  $\gamma's$  geben ebenfalls den Spieler  $i$  an, und die oberen Indizes die Preise (der Inputfaktoren) bzw. die Mengen (der Outputs).

<sup>3</sup>Die Kostenfunktionen werden (realistischerweise) als streng wachsende Funktionen aller ihrer Variablen angenommen. Gleiches gilt folglich für alle quadratischen Formen.

<sup>4</sup>Zur Unabhängigkeit der Nachfragen von den Preisen siehe auch Abschnitt 3.2.1.

<sup>5</sup>Aufgrund der Annahme, dass die Kostenfunktionen streng wachsende Funktionen aller ihrer Variablen sind, sind die Konstanten positiv. Die Kostenfunktion löst ein Minimierungsproblem und gibt immer die minimalen Kosten an, d. h. durch Erhöhung eines Inputfaktors kann der Wert der Kostenfunktion nur größer werden.

Leitet man  $C_1(\cdot)$  auch nach den weiteren Outputs des ersten Spielers ab, und danach alle anderen Kostenfunktionen nach allen anderen Outputs, erhält man ein System von  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$  Gleichungen zur Bestimmung der  $m$  links und rechts der Gleichheitszeichen stehenden Preise.

Alle Gleichungen untereinander gestellt ergeben ein Gleichungssystem von  $m$  Gleichungen mit  $m$  Unbekannten. Das Gleichungssystem kann durch die Schreibweise von Matrizen und Vektoren so aufgestellt werden, dass eine Lösung für die gesuchten Preise ermittelt werden kann, wenn alle von den Preisen  $p_i^k$  freigestellten Glieder der rechten Seiten aus (B.3) rechts der Gleichheitszeichen belassen, und die übrigen auf die linke Seite des Gleichheitszeichens geführt werden. Dazu sei die mit  $W$  bezeichnete  $m \times m$  Matrix auf Seite 202 betrachtet. Mit dem Vektor  $\mathbf{p}$  der als Spaltenvektor aufgefassten Vektoren  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  und dem Vektor  $\mathbf{t}$ , der aus  $m$  Komponenten von affin linearen Funktionen besteht, so dass gilt:<sup>6</sup>

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1^1(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1) \\ t_1^2(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1) \\ \vdots \\ t_1^{m_1}(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1) \\ t_2^1(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_2) \\ \vdots \\ t_2^{m_2}(\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_2) \\ \vdots \\ t_n^1(\mathbf{q}_n, \boldsymbol{\pi}_n) \\ \vdots \\ t_n^{m_n}(\mathbf{q}_n, \boldsymbol{\pi}_n) \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

folgt die Beziehung

$$W \cdot \mathbf{p} = \mathbf{t}. \quad (\text{B.4})$$

Die auf Seite 202 aufgeführte Eigenschaft der Matrix  $W$  der Quasi-Dominanz in der Diagonalen bedeutet, dass die Matrix nichtsingulär ist.  $W$  ist also invertierbar, und  $W^{-1}$  existiert. Ebenso sei erneut betont, dass  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ , so dass sich der folgende Satz auf das gegebene Problem anwenden lässt.

<sup>6</sup>Es wird angenommen, dass die Kostenfunktionen in  $\mathbf{t}$  so beschaffen sind, dass  $\mathbf{t} > \mathbf{0}$ .



$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & -\alpha_{12}^{11} & \cdots & -\alpha_{12}^{1m_2} & \cdots & -\alpha_{1n}^{11} & \cdots & -\alpha_{1n}^{1m_n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -\alpha_{12}^{m_1 1} & \cdots & -\alpha_{12}^{m_1 m_2} & \cdots & -\alpha_{1n}^{m_1 1} & \cdots & -\alpha_{1n}^{m_1 m_n} \\ -\alpha_{21}^{11} & \cdots & -\alpha_{21}^{1m_1} & 1 & & 0 & \cdots & -\alpha_{2n}^{11} & \cdots & -\alpha_{2n}^{1m_n} \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{21}^{m_2 1} & \cdots & -\alpha_{21}^{m_2 m_1} & 0 & & 1 & \cdots & -\alpha_{12}^{m_2 1} & \cdots & -\alpha_{12}^{m_2 m_n} \\ & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ -\alpha_{n1}^{11} & \cdots & -\alpha_{n1}^{1m_1} & -\alpha_{n2}^{11} & \cdots & -\alpha_{n2}^{1m_2} & \cdots & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ -\alpha_{n1}^{m_n 1} & \cdots & -\alpha_{n1}^{m_n m_1} & -\alpha_{n2}^{m_n 1} & \cdots & -\alpha_{n2}^{m_n m_2} & \cdots & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Die oben dargestellte Matrix  $W$  ist als  $m \times m$  Matrix quadratisch, und die einzigen positiven Elemente (alle gleich Eins) stehen in der Diagonalen. An den übrigen Stellen der Matrix stehen Nullen und negative Elemente. Es wird die Annahme getroffen, dass die Summe der absoluten Beträge jeder Zeile  $x$  und jeder Spalte  $y$  (abzüglich der jeweiligen Eins in der Diagonale) stets kleiner Eins sind. Die Diagonalelemente  $a_{xx}$  sind also „schwer“ im Vergleich zu den anderen Elementen  $a_{xy}$ , denn es gilt

$$d_x \cdot |a_{xx}| \geq \sum_{y \neq x} d_x \cdot |a_{xy}|, \quad d_x > 0,$$

für jede Zeile  $x$ . Matrizen mit diesen Eigenschaften werden *quasi-dominant in der Diagonalen* genannt.<sup>a</sup> Die Preiswirkungen der Preise der bezogenen Waren und Leistungen auf die eigenen von dem Mehrproduktmonopol zu verlangenden Preise sind also (hinreichend) klein.

<sup>a</sup>Vgl. McKenzie (1960), S. 47–49.

**Satz B.1. McKenzie (1960)**

Gegeben sei eine quadratische Matrix  $A$  mit  $a_{xx} > 0$  für alle  $x$  und  $a_{xy} \leq 0$  für alle  $x \neq y$ . Damit es für  $A \cdot \mathbf{b} = \mathbf{d}$  eine eindeutige Lösung mit  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  für alle  $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$  gibt, ist es eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass  $A$  quasi-dominant in der Diagonalen ist.

Dies bedeutet, der aus (B.4) eindeutig bestimmbare Preisvektor  $\mathbf{p} = W^{-1} \cdot \mathbf{t}$  ist positiv, und zwar für jede Konstellation von Outputgrößen  $\mathbf{q}_i$  und Inputpreisen  $\boldsymbol{\pi}_i$ :

$$(\mathbf{q}_1, \boldsymbol{\pi}_1), (\mathbf{q}_2, \boldsymbol{\pi}_2), \dots, (\mathbf{q}_n, \boldsymbol{\pi}_n).$$

Durch die vorgestellte Lösung wird folgender Satz bewiesen:

**Satz B.2.** *Unter den getroffenen (nicht unrealistischen) Annahmen existiert für jeden Vektor von Outputquantitäten  $\mathbf{q}$  und in jeder Preissituation  $\boldsymbol{\pi}$  genau ein Preisvektor  $\mathbf{p}$ , dessen Preise zudem alle positiv sind.*

Durch die Marktnachfrage und die externen Inputpreise wird das Modell kalibriert. Werden Güter am Markt verkauft, wird der intern ermittelte Preis durch den Marktpreis ersetzt, alle anderen Preise bleiben bestehen.<sup>7</sup>

---

<sup>7</sup>Annahme: Im Falle einer Organisation mit Marktbezug wird ein Gut entweder nur Organisationsintern verbraucht, oder nur für den Markt hergestellt.

# Literaturverzeichnis

- Allerbeck, Mechthild (1977):** *Ausgewählte Probleme der Führungsforschung.* Dissertation Universität München, München.
- Anderson, R. M. (1978):** An elementary core equivalence theorem. In: *Econometrica*, volume 46: S. 1483–1487.
- Anderson, R. M. (1981):** Equity considerations in traditional full-cost allocation practices: an axiomatic perspective. In: *Joint Cost Allocations, S. Moriarity (Hrsg.)*.
- Armstrong, Mark und Sappington, David (2005):** Recent Developments in the Theory of Regulation. In: *Armstrong, Mark und Porter, Robert (Hrsg.): Handbook of Industrial Organization, Volume 3*, S. 1560–1695.
- Aumann, R. und Shapley, Lloyd (1974):** *Values of Non-Atomic Games.* Princeton University Press, Princeton.
- Aumann, R. J. (1961):** The core of a cooperative game without side payments. In: *Transactions of the American Mathematical Society*, volume 98: S. 539–552.
- Aumann, R. J. (1964):** Markets with a Continuum of Traders. In: *Econometrica*, volume 32: S. 39–50.
- Aumann, R. J. (1975):** Values of Markets with a Continuum of Traders. In: *Econometrica*, volume 43: S. 611–646.
- Aumann, R. J. (1985):** An Axiomatization of the Non-Transferable Utility Value. In: *Econometrica*, volume 53: S. 599–612.
- Aumann, R. J. und Peleg, B. (1960):** Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments. In: *Bulletin of the American Mathematical Society*, volume 66: S. 173–179.
- Aumann, R. J. Gardner, R. J. und Rosenthal, R. W. (1977):** Core and Value for a Public Goods Economy: An Example. In: *Journal of Economic Theory*, volume 15: S. 363–365.

- Aumann, Robert und Maschler, Michael (1964):** The Bargaining Set for Cooperative Games. In: *Young, Peyton (Hrsg.): Cost Allocation: Methods, Principles and Applications*, S. 79–94.
- Balachandran, Bala und Ramakrishnan, Ram (1981):** Joint Cost Allocation: A Unified Approach. In: *The Accounting Review*, volume 56(1): S. 85–96.
- Baumol, William und Bradford, D. (1970):** Optimal departures from marginal cost pricing. In: *American Economic Review*, volume 60: S. 265–283.
- Baumol, William, Panzar, John und Willig, Robert (1982):** *Contestable Markets and the Theory of Industry Structure*. Harcourt Brace Jovanovich.
- Baumol, William und Willig, Robert (1977):** Weak Invisible Hand Theorems on the Sustainability of Multiproduct Natural Monopoly. In: *The American Economic Review*, volume 67(3): S. 350–365.
- Beadle, Elaine und Hemming, Albrecht (1992):** *Die Organisation für „Stachelschweine“*. Das föderative Prinzip in der Bundesphase einer Organisation. MIRA Entwicklungsbegleiter (Hrsg.), Staufen.
- Berger, Michael Martin (2004):** *Controlling und Wahrnehmung. Ansätze zu einem erweiterten Controlling-Begriff*. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.
- Berninghaus, Siegfried, Ehrhart, Karl-Martin und Güth, Werner (2010):** *Strategische Spiele*. Springer Verlag, Berlin, 3. Auflage.
- Berninghaus, Siegfried, Ehrhart, Karl-Martin und Völker, Rainer (1996):** „How to Win the Game of Business:“ Anwendungsmöglichkeiten der Spieltheorie in der betrieblichen Praxis. In: *Die Betriebswirtschaft*, volume 56: S. 509–521.
- Biddle, Gary und Steinberg, Richard (1985):** Common Cost Allocation in the Firm. In: *Young, Peyton (Hrsg.): Cost Allocation: Methods, Principles and Applications*, S. 31–55.
- Billera, Louis (1970):** Some theorems on the core of an n-person game without side-payments. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics*, volume 18(3): S. 567–579.
- Billera, Louis (1974):** On Games Without Side Payments Arising from a General Class of Markets. In: *Journal of Mathematical Economics*, volume 1: S. 129–139.

- Billera, Louis und Bixby, Robert (1973a):** A characterization of Pareto surfaces. In: *proceedings of the american mathematical society*, volume 41: S. 261–267.
- Billera, Louis und Bixby, Robert (1973b):** A characterization of polyhedral market games. In: *International Journal of Game Theory*, volume 2: S. 253–261.
- Billera, Louis und Bixby, Robert (1974):** Market representations of n-person games. In: *Bulletin of the american mathematical society*, volume 80(3): S. 522–526.
- Billera, Louis und Heath, David (1982):** Allocation of shared costs: a set of axioms yielding a unique procedure. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 7: S. 32–39.
- Billera, Louis, Heath, David und Raanan, Joseph (1978):** Internal Telephone Billing Rates – A Novel Application of Non-Atomic Game Theory. In: *Operations Research*, volume 26(6): S. 186–204.
- Billera, Louis, Heath, David und Verrechia, Robert (1981):** A Unique Procedure for Allocating Common Costs from a Production Process. In: *Journal of Accounting Research*, volume 19(1): S. 185–196.
- Billera, Louis und Raanan, J. (1981):** Cores of nonatomic linear production games. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 6(3): S. 420–423.
- Binmore, Ken (1992):** *Fun and Games: A Text on Game Theory*. D. C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts.
- Boehm, V. (1985):** *Existence and Optimality of Equilibria with Price Regulation*. Universität Mannheim, Mannheim.
- Boes, G. und Tillmann, G. (1983):** Cost-axiomatic regulatory pricing. In: *Journal of Public Economics*, volume 22: S. 243–256.
- Boiteux, M. (1971):** On the management of public monopolies subject to budgetary constraints. In: *Journal of Economic Theory*, volume 3: S. 219–240.
- Bondavera, Olga (1963):** Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. In: *Problemy Kybernetiki*, S. 119–139.

- Butterworth, John und Sigloch, Berndt (1971):** A Generalized Multi-Stage Input-Output Model and Some Derived Equivalent Systems. In: *The Accounting Review*, volume 46(4): S. 700–716.
- Callen, Jeffrey (1981):** Financial Cost Allocations: A Game-Theoretic Approach. In: *The Accounting Review*, volume 53(2): S. S. 303–308.
- Champsaur, P. (1975):** Cooperation vs. Competition. In: *Journal of Economic Theory*, volume 11: S. 394–417.
- Clark, Lori und Housman, David (1998):** Core and monotonic allocation. In: *International Journal of Game Theory*, volume 27: S. 611–616.
- Coase, Ronald (1937):** The Nature of the Firm. In: *Economica*, volume 4: S. 386–405.
- Curiel, Imma (1997):** *Cooperative Game Theory and Applications – Cooperative Games Arising from Combinatorial Optimization Problems, volume 16 of Series C: Game Theory, Mathematical Programming and Operations Research*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Davis, Morton und Maschler, Michael (1965):** The kernel of a cooperative game. In: *Naval Research Logistics Quarterly*, volume 11: S. 223–259.
- Debreu, G. (1962):** New concepts and techniques for equilibrium analysis. In: *International Economic Review*, volume 3: S. 257–273.
- Debreu, G. und Scarf, H. (1963):** A limit theorem on the core of an economy. In: *International Economic Review*, volume 4: S. 235–246.
- Deegan, J. und Packel, Edward (1978):** A new index of power for simple n-person games. In: *International Journal of Game Theory*, volume 7(2): S. 113–123.
- Deutschman, Alan (2004):** The Fabric of Creativity. In: *Fast Company Magazine*, Dezember, volume 89: S. 54–58.
- Dierker, E., Guesnerie, R. und Neuefeind, W. (1985):** General equilibrium when some firms follow special pricing rules. In: *Econometrica*, volume 53: S. 1369–1393.

- Dietz, Karl-Martin und Kracht, Thomas (2011):** *Dialogische Führung: Grundlagen – Praxis. Fallbeispiel: dm-drogerie markt*. Campus Verlag, Frankfurt/Main. 3. Auflage.
- Dixit, Avinash und Nalebuff, Barry (1993):** *Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics, and Everyday Life*. W. W. Norton & Company, New York.
- Doll, Claus (2005):** *Allokation gemeinsamer Kosten der Straßeninfrastruktur*. Nomos Verlagsgesellschaft, Baden–Baden.
- Dubey, P. und Neyman, A. (1984):** Payoffs in Nonatomic Economies: An Axiomatic Approach. In: *Econometrica*, volume 52: S. 1129–1150.
- Dubey, Pradeep (1982):** The Shapley Value as Aircraft Landing Fees-Revisited. In: *Management Science*, volume 28(8): S. 869–874.
- Dubey, Pradeep, Neyman, Abraham und Weber, Robert (1981):** Value Theory without Efficiency. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 1(6): S. 122–128.
- Dubey, Pradeep und Shapley, Lloyd (1979):** Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 4(2): S. 99–131.
- Edgeworth, F. Y. (1881):** *Mathematical Psychics*. Kegan Paul Publishers, London. Reprinted in 2003, P. Newman (ed.): *F. Y. Edgeworth's Mathematical Psychics and Further Papers on Political Economy*. Oxford University Press.
- Eisele, Wolfgang (1993):** *Technik des betrieblichen Rechnungswesens*. Verlag Franz Vahlen, München, 5. Auflage.
- Faulhaber, Gerald (1975):** Cross-Subsidization: Pricing in Public Enterprises. In: *The American Economic Review*, volume 65(5): S. 966–977.
- Faulhaber, Gerald und Levinson, Stephen (1981):** Subsidy-Free Prices and Anonymous Equity. In: *The American Economic Review*, volume 71(5): S. 1083–1091.

- Frank, Michael (2003):** *Entwicklung und Anwendung einer integrierten Methode zur Analyse von betriebsübergreifenden Energieversorgungskonzepten*. Dissertation Universität Karlsruhe, Karlsruhe.
- Franz, Klaus-Peter (1990):** Die Prozesskostenrechnung – Darstellung und Vergleich mit der Plankosten- und Deckungsbeitragsrechnung. In: *Ahlert, Franz, Göppl (Hrsg.): Finanz- und Rechnungswesen als Führungsinstrument*, S. 110–136.
- Friedl, Birgit (2004):** *Kostenrechnung*. Oldenburg Verlag, München.
- Friedman, Eric und Moulin, Hervé (1999):** Three Methods to Share Joint Costs or Surplus. In: *Journal of Economic Theory*, volume 87: S. 275–312.
- Gillies, Donald (1953):** *Some theorems on n-person games*. Dissertation, Princeton University, Dept. of Mathematics.
- Glasl, Friedrich und Lievegoed, Bernard (2004):** *Dynamische Unternehmensentwicklung: Grundlagen für nachhaltiges Change Management*. Haupt Verlag, Bern, 3. Auflage.
- Gorman, Ian (1985):** Conditions for economies of scope in the presence of fixed costs. In: *Rand Journal of Economics*, volume 16(3): S. 431–436.
- Grasso, Lawrence, Maskell, Brian und Baggaley, Bruce (2011):** *Practical Lean Accounting: A Proven System for Measuring and Managing the Lean Enterprise*. CRC Press, Boca Raton. 2. Auflage.
- Groves, Theodore (1973):** Incentives in Teams. In: *Econometrica*, volume 41(4): S. 617–631.
- Gschwend, Walter (1986):** *Die Zielproblematik des Verrechnungspreises: Eine kritische Analyse der verschiedenen Verrechnungspreisfunktionen*. D-Druck-Spescha, St. Gallen.
- Haid, Dirk (2004):** *Corporate Entrepreneurship im strategischen Management*. Deutscher Universitäts-Verlag, Wiesbaden.
- Hamlen, Susan, Hamlen, William und Tschirhart, John (1977):** The Use of Core Theory in Evaluating Joint Cost Allocation Schemes. In: *The Accounting Review*, volume 52(3): S. 616–627.



- Hardorp, Benediktus (1987):** Unternehmensbezogene Einkommensbildung. In: *Die Wirtschaftlichen Assoziationen*, volume II, Verlag Freies Geistesleben, Stuttgart.
- Harsanyi, J. C. (1963):** A Simplified Bargaining Model for the n-Person Cooperative Game. In: *International Economic Review*, volume 4: S. 194–220.
- Hart, S. (1985):** An Axiomatization of Harsanyi's Non-Transferable Utility Solution. In: *Econometrica*, volume 53: S. 1295–1313.
- Hart, S. und Mas-Colell, A. (1996):** Harsanyi Values of Large Economies: Non-Equivalence to Competitive Equilibria. In: *Games and Economic Behavior*, volume 13: S. 74–99.
- Hart, Sergiu (1977):** Values of Non-Differentiable Markets with a Continuum of Traders. In: *Journal of Mathematical Economics*, volume 4: S. 103–116. Reprinted in *Game and Economic Theory*, S. Hart and A. Neyman (eds.), The University of Michigan Press [1995], 321–334.
- Hart, Sergiu (1994a):** Value Equivalence Theorems: The TU and NTU Cases. In: *Game-Theoretic Methods in General Equilibrium Analysis*, J.-F. Mertens and S. Sorin (Hrsg.), S. 113–120.
- Hart, Sergiu (1994b):** The Harsanyi Value. In: *Game-Theoretic Methods in General Equilibrium Analysis*, J.-F. Mertens and S. Sorin (Hrsg.), S. 105–111.
- Hart, Sergiu (2001):** Values of Perfectly Competitive Economies. In: *Handbook of Game Theory with Economic Applications*, Aumann and S. Hart (Hrsg.), volume 3.
- Hart, Sergiu und Mas-Colell, Andreu (1989):** Potential, Value, and Consistency. In: *Econometrica*, volume 57(3): S. S. 589–614.
- Holler, Manfred und Illing, Gerhard (2003):** *Einführung in die Spieltheorie*. Springer Verlag, Berlin.
- Holler, Manfred und Packel, Edward (1983):** Power, luck and the right index. In: *Journal of Economics*, volume 43(1): S. 21–29.

- Horváth, Péter und Mayer, Reinhold (1989):** Prozesskostenrechnung. Der neue Weg zu mehr Kostentransparenz und wirkungsvolleren Unternehmensstrategien. In: *Controlling*, volume 1: S. 214–219.
- Huch, Burkhard, Behme, Wolfgang und Ohlendorf, Thomas (1998):** *Rechnungswesenorientiertes Controlling*. Physica-Verlag, 3., vollst. überarb. u. erw. Aufl. Auflage.
- Huntzinger, James (2007):** *Lean Cost Management: Accounting for Lean by Establishing Flow*. J. Ross Publishing, Fort Lauderdale.
- Hurcwicz, Leonid (1972):** On Informationally Decentralized Systems. In: *Decision and Organization*, Carl McGuire and Roy Radner, S. 297–336.
- Hurcwicz, Leonid (1973):** The Design of Mechanisms for Resource Allocations. In: *American Economic Review*, volume 63(2): S. 1–30.
- Ichiishi, Tatsuro (1981):** Supermodularity: Applications to Convex Games and to the Greedy Algorithm for LP. In: *Journal of Economic Theory*, volume 25(2): S. 283–286.
- Irle, Mathias (2009):** Zahlen bitte. In: *brand eins*, September, volume 09/08: S. 136–141.
- James, L. und Lee, R. (1971):** *Economics of Water Resource Planning*. McGraw-Hill, New York.
- Jensen, Daniel (1977):** A Class of Mutually Satisfactory Allocations. In: *The Accounting Review*, volume 52(4): S. S. 842–856.
- Jones, Daniel T., Roos, Daniel und Womack, James P. (1990):** *The machine that changed the world*. Harper Perennial, New York.
- Jones, Daniel T. und Womack, James P. (2003):** *Lean Thinking: Banish waste and create wealth in your corporation*. Free Press, New York.
- Kalenberg, Frank (2004):** *Grundlagen der Kostenrechnung*. Oldenburg Verlag, München.

- Kaletta, Brigitte und Gerhard, Thorsten (1998):** Innovation und Distribution im Handel: Die Wertbildungsrechnung bei dm-drogerie markt. In: *Controller Magazin*, volume 98(6): S. 403–406.
- Kaplan, Robert (1973):** Variable and Self-Service Costs in Reciprocal Allocation Models. In: *The Accounting Review*, volume 48(4): S. 738–748.
- Kaplan, Robert und Cooper, Robin (1988):** Measure Costs Right: Make the Right Decisions. In: *Harvard Business Review*, September–Oktober, S. 96–103.
- Kaplan, Robert und Cooper, Robin (1999):** *Prozesskostenrechnung als Managementinstrument*. Campus Verlag, Frankfurt.
- Karagök, Yavuz (2006):** *Methoden zur Berechnung des Nukleolus kooperativer Spiele mit einer Anwendung für die Schweiz*. Dissertation Universität Freiburg, Freiburg.
- Kloock, Josef, Sieben, Günter und Schildbach, Thomas (1991):** *Kosten- und Leistungsrechnung*. Werner Verlag, 6 Auflage.
- Koster, M., Tjis, S. und Borm, P. (1998):** Serial cost sharing methods for multicommodity situations. In: *Mathematical Social Science*, volume 36: S. 229–242.
- Koster, Maurice (1998):** *Multi-Service serial cost sharing: a characterization of the Moulin-Shenker rule*. Department of Econometrics and CentER for Economic Research, Tilburg University.
- Küpper, Hans-Ulrich (2001):** *Controlling: Konzeption, Aufgaben und Instrumente*. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 3. Auflage.
- Kuhn, Thomas (2000):** *Internes Unternehmertum: Begründungen und Bedingungen einer „kollektiven Kehrtwendung“*. Verlag Franz Vahlen, München.
- Laux, Helmut und Liermann, Felix (2003):** *Grundlagen der Organisation: Die Steuerung von Entscheidungen als Grundproblem der Betriebswirtschaftslehre*. Springer Verlag, Berlin, 5. Auflage.

- Lefevre, F. (1994):** The Shapley Value of a Perfectly Competitive Market May Not Exist. In: *Game-Theoretic Methods in General Equilibrium Analysis*, J.-F. Mertens and S. Sorin (Hrsg.), S. 95–104.
- Leontief, Wassily (1966):** *Input–Output Economics*. Oxford University Press.
- Li, S.-H. und Balachandran, Kashi (1997):** Optimal transfer pricing schemes for work averse division managers with private information. In: *European Journal of Operational Research*, volume 98(1): S. 138–153.
- Lindstädt, Hagen und Müller, Jürgen (2010, Januar):** Making game theory work for managers. In: *McKinsey Quarterly*.
- Lindstädt, Hagen, Staubach, Stefan und Wolff, Michael (2008a):** Einsatz und Wirksamkeit marktnaher Verrechnungspreise. In: *Die Unternehmung*, volume 62(2): S. 146–166.
- Lindstädt, Hagen, Staubach, Stefan und Wolff, Michael (2008b):** Gestaltung von Verrechnungspreissystemen – ein axiomatischer Ansatz für interne Markt-Preis-Beziehungen. In: *Zeitschrift für Management*, volume 3(1): S. 27–50.
- Littlechild, S. (1974):** A Simple Expression for the Nucleolus in a Special Case. In: *International Journal of Game Theory*, volume 3(1): S. 21–29.
- Littlechild, S. und Owen, G. (1973):** A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case. In: *Management Science*, volume 20: S. 370–372.
- Littlechild, S. und Thompson, G. (1977):** Aircraft Landing Fees: A Game Theory Approach. In: *The Bell Journal of Economics*, volume 8(1): S. 186–204.
- Littlechild, Stephen (1975):** Common Costs, Fixed Charges, Clubs and Games. In: *Review of Economic Studies*, Januar, volume 42: S. 117–124.
- Livingstone, John (1969):** Input–Output Analysis for Cost Accounting, Planning and Control. In: *The Accounting Review*, volume 44(1): S. 48–64.
- Louderback, Joseph (1976):** Another Approach to Allocating Joint Costs: A Comment. In: *The Accounting Review*, volume 51(3): S. 683–685.

- Makowski, Louis und Ostroy, Joseph (1987):** Vickrey-Clarke-Groves Mechanisms and Perfect Competition. In: *Journal of Economic Theory*, volume 42: S. 244–261.
- Manes, Rene (1965):** Comment on Matrix Theory and Cost Allocation. In: *The Accounting Review*, volume 40(3): S. 640–643.
- Manne, A. (1952):** Multi-purpose public enterprises - criteria for pricing? In: *Economica*, volume 19: S. 322–326.
- Marschak, Jacob und Radner, Roy (1972):** *Economic Theory of Teams*. Yale University Press, New Haven.
- Mas-Colell, A. (1977):** Competitive and Value Allocations of Large Exchange Economies. In: *Journal of Economic Theory*, volume 14: S. 419–438.
- Mas-Colell, A. (1980):** Remarks on the Game-Theoretic Analysis of a Simple Distribution of Surplus Problem. In: *International Journal of Game Theory*, volume 9: S. 125–140.
- Maschler, Michael und Peleg, Bezalel (1966):** A characterization, existence proof and dimension bounds for the kernel of a game. In: *Pacific Journal of Mathematics*, volume 18: S. 289–328.
- Maschler, Michael, Peleg, Bezalel und Shapley, Lloyd (1972):** The Kernel and Bargaining Set for Convex Games. In: *International Journal of Game Theory*, volume 1: S. 73–93.
- Maschler, Michael, Peleg, Bezalel und Shapley, Lloyd (1979):** Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus, and Related Solution Concepts. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 4(4): S. 303–338.
- Maskell, Brian und Baggaley, Bruce (2004):** *Practical Lean Accounting*. Productivity Press.
- McKenzie, Lionel (1960):** Matrices With Dominant Diagonals and Economic Theory. In: *Arrow, K. J.; Karlin, S.; Supper, P. (Hrsg.): Mathematical Methods in the Social Science*, S. 47–62.

- Megiddo, Nimrod (1974):** On the Nonmonotonicity of the Bargaining Set, The Kernel and the Nucleolus of a Game. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics*, volume 27(2): S. 355–358.
- Milgrom, John, Paul und Roberts (1992):** *Economics, Organization & Management*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Miller, Gary (1992):** *Managerial Dilemmas*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Miller, Jeffrey und Vollmann, Thomas (1985):** The hidden factory. In: *Harvard Business Review*, September, volume 63: S. 142–150.
- Mirman, Leonard und Neyman, Abraham (1983):** Prices for homogenous cost functions. In: *Journal of Mathematical Economics*, volume 12: S. 257–273.
- Mirman, Leonard und Neyman, Abraham (1984):** Diagonality of Cost Allocation Prices. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 9(1): S. 66–74.
- Mirman, Leonard, Ranaan, Joseph und Zang, Israel (1982):** A sufficient condition on  $f$  for  $f \circ \mu$  to be in  $pNAD$ . In: *Journal of Mathematical Economics*, volume 9: S. 251–257.
- Mirman, Leonard, Samet, D. und Tauman, Yair (1983):** An axiomatic approach to the allocation of a fixed cost through prices. In: *Bell Journal of Economics*, volume 14: S. 139–151.
- Mirman, Leonard und Tauman, Yair (1982a):** Demand compatible equitable cost sharing prices. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 7: S. 40–56.
- Mirman, Leonard und Tauman, Yair (1982b):** The continuity of the Aumann-Shapley price mechanism. In: *Journal of Mathematical Economics*, volume 9: S. 235–249.
- Mirman, Leonard, Tauman, Yair und Zang, Israel (1985):** Supportability, sustainability, and subsidy-free prices. In: *Rand Journal of Economics*, volume 16(1): S. 114–126.

- Mirman, Leonard, Tauman, Yair und Zang, Israel (1986):** Ramsey prices, average cost prices and price sustainability. In: *International Journal of Industrial Organization*, volume 4: S. 123–140.
- Monderer, Dov und Neyman, Abraham (1988):** Values of Smooth Nonatomic Games: The Method of Multilinear Approximation. In: *Roth (Hrsg): The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, S. 217–234.
- Moriarity, Shane (1975):** Another Approach to Allocating Joint Costs. In: *The Accounting Review*, volume 50(4): S. 791–795.
- Moriarity, Shane (1976):** Another Approach to Allocating Joint Costs: A Reply. In: *The Accounting Review*, volume 51(3): S. 686–687.
- Moulin, Hervé (1987):** Equal or Proportional Division of a Surplus, and Other Methods. In: *International Journal of Game Theory*, volume 16: S. 161–186.
- Moulin, Hervé (1988):** *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Moulin, Hervé (1995a):** On additive methods to share joint costs. In: *Japanese Economic Review*, volume 46: S. 303–332.
- Moulin, Hervé (1995b):** *Cooperative Microeconomics: A Game-Theoretic Introduction*. Prentice Hall, Hertfordshire.
- Moulin, Hervé (1996):** Cost Sharing under Increasing Returns: A Comparison of Simple Mechanisms. In: *Games and Economic Behavior*, volume 13(2): S. 225–251.
- Moulin, Hervé und Shenker, Scott (1992):** Serial Cost Sharing. In: *Econometrica*, volume 60(5): S. 1009–1037.
- Moulin, Hervé und Shenker, Scott (1994):** Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing: An Axiomatic Comparison. In: *Journal of Economic Theory*, volume 64: S. 178–201.
- Moulin, Hervé und Shenker, Scott (2001):** Strategyproof sharing of submodular costs: budget balance versus efficiency. In: *Economic Theory*, volume 18: S. 511–533.

- Nash, John (1950):** The Bargaining Problem. In: *Econometrica*, volume 18: S. 155–162.
- Nash, John (1951):** Non-Cooperative Games. In: *Annals of Mathematics*, volume 54: S. 286–295.
- Nash, John (1953):** Two-person Cooperative Games. In: *Econometrica*, volume 21: S. 128–140.
- Neuberger, Oswald (2002):** *Führen und führen lassen*. Lucius & Lucius, Stuttgart, 6., völlig neu bearb. u. erw. Auflage.
- Neumann, Klaus (1996):** *Produktions- und Operations-Management*. Springer Verlag, Berlin.
- Neyman, Abraham (1977):** Continuous Values Are Diagonal. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 2(4): S. 338–342.
- O’Neill, B. (1982):** A problem of right arbitration in the Talmud. In: *Mathematical Social Sciences*, volume 2: S. 345–371.
- Owen, G. (1975):** *On the core of linear production games*. Math Program 9:358–370.
- Owen, Guillermo (1977):** Characterization of the Banzhaf-Coleman Index. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics*, volume 35(2): S. 315–327.
- Owen, Guillermo (1982):** *Game Theory*. Academic Press, 2. Auflage.
- Panzar, John und Willig, Robert (1977):** Free Entry and the Sustainability of a Natural Monopoly. In: *The Bell Journal of Economics*, volume 8(1): S. 1–22.
- Peleg, B. (1985):** An axiomatization of the core of cooperative games without side payments. In: *Journal of Mathematical Economics*, volume 14: S. 203–214.
- Peleg, B. und Sudhölter, P. (2007):** *Introduction to the theory of cooperative games*. Springer, Berlin, 2. Auflage.
- Pfläging, Niels (2003):** *Beyond Budgeting, Better Budgeting: Ohne feste Budgets zielorientiert führen und erfolgreich steuern*. Rudolf Haufe Verlag, Plannegg/München.



- Pfläging, Niels (2006):** *Führen mit flexiblen Zielen. Beyond Budgeting in der Praxis.* Campus Verlag, Frankfurt.
- Pfläging, Niels und Selders, Jan (2012):** Fallstudie zum Beyond Budgeting: Dezentralisierte Führung und flexible Steuerungsprozesse umsetzen – am Beispiel der Wertbildungsrechnung bei dm-drogerie markt. In: *Dillerup/Stoi (Hrsg.): Praxis der Unternehmensführung*, S. 397–414. 2. Auflage.
- Pullig, Karl-Klaus (2000):** *Innovative Unternehmenskulturen: zwölf Fallstudien zeitgemässer Sozialordnungen.* Rosenberger Fachverlag, Leonberg.
- Ramsey, F.P. (1927):** A Contribution to the Theory of Taxation. In: *The Economic Journal*, volume 37(145): S. 47–61.
- Ransmeier, J. (1942):** *The Tennessee Valley Authority: A Case Study in the Economics of Multiple Purpose Stream Planning.* The Vanderbilt University Press, Nashville, Tennessee.
- Rasmusen, Eric (2004):** *Games and Information. An Introduction to Game Theory.* Blackwell Publishing, Malden, Massachusetts, 3. Auflage.
- Ronen, Joshua und Balachandran, Kashi (1988):** An Approach to Transfer Pricing Under Uncertainty. In: *Journal of Accounting Research*, volume 26(2): S. 300–314.
- Rother, Mike und Shook, Kohn (2000):** *Sehen lernen. Mit Wertstromdesign die Wertschöpfung erhöhen und Verschwendung beseitigen.* Fraunhofer Institut für Produktionstechnik und Automatisierung (IPA), Stuttgart.
- Rothkopf, Michael (2007):** Thirteen Reasons Why the Vickrey-Clarke-Groves Process Is Not Practical. In: *Operations Research*, volume 55(2): S. 191–197.
- Rubinstein, Ariel (1982):** Perfect Equilibrium in a Bargaining Problem. In: *Econometrica*, volume 50: S. 97–110.
- Samet, Dov und Tauman, Yair (1982):** The Determination of Marginal Cost Prices under a Set of Axioms. In: *Econometrica*, volume 50(4): S. 895–909.

- Samet, Dov, Tauman, Yair und Zang, Israel (1984):** An Application of the Aumann-Shapley Prices for Cost Allocation in Transportation Problems. In: *Mathematics of Operations Research*, volume 9(1): S. 25–42.
- Scarf, Herbert (1967):** Cores of an N-person game. In: *Econometrica*, volume 35: S. 50–69.
- Scarf, Herbert (1986):** Notes on the Core of a Productive Economy. In: *Hildenbrand, Werner und Debreu, Gérard (Hrsg.): Contributions to mathematical economics*, S. 401–429.
- Scheytt, S. (2004):** Filialen an die Macht. In: *McK Wissen*, volume o. Jg.(8): S. 68–73.
- Schichtel, Ulrich (1981):** *Aufteilung gemeinsamer Kosten: eine spieltheoretische Untersuchung*. Dissertation Universität Augsburg, Augsburg.
- Schmeidler, David (1969):** The Nucleolus of a Characteristic Function Game. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics*, volume 17(6): S. 1163–1170.
- Schotter, Andrew und Schwödiauer, Gerhard (1980):** Economics and the Theory of Games: A Survey. In: *Journal of Economic Literature*, volume 18(2): S. 479–528.
- Schultheiss, Luc (1990):** *Auswirkungen der Profit-Center-Organisation auf die Ausgestaltung des Controlling*. Difo-Druck, Bamberg.
- Schultze, Wolfgang und Weiler, Andreas (2007):** Gestaltung von Verrechnungspreisen unter Beachtung von Anreiz- und Steuerungseffekten. In: *Zeitschrift für Controlling und Management*, volume 51(2): S. 102–107.
- Schumacher, Ernst und McRobie, George (1977):** *Small is beautiful: Die Rückkehr zum menschlichen Maß*. Rowohlt, Hamburg.
- Schwartz, Jesse und Wen, Quan (2007):** A Subsidized Vickrey Auction for Cost Sharing. In: *Working Paper No. 07-W05*, April.
- Schweitzer, Marcell und Küpper, Hans-Ulrich (1995):** *Systeme der Kosten- und Erlösrechnung*. Verlag Franz Vahlen, München.

- Selders, Jan (2006):** *Empowerment und Commitment durch KAIZEN: Das Toyota Produktionssystem bei Knorr-Bremse*. VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken.
- Selders, Jan (2007):** Controlling und unternehmerisches Denken – nicht unbedingt ein Widerspruch! Die Wertbildungsrechnung bei dm-drogerie markt. In: *Controller Magazin*, volume 32(1): S. 85–90.
- Semler, Ricardo (1999):** *Maverick! The success story behind the world's most unusual workplace*. Random House, London.
- Shapley, Lloyd (1953):** A Value for n-Person Games. In: *Arrow, Kenneth J.; Kuhn, Harold William (Hrsg.): Annals of mathematics studies Nr. 28, Contributions to the theory of games*, volume 2: S. 307–317.
- Shapley, Lloyd (1955)a:** *Markets as Cooperative Games, RAND Corporation working paper P-629*. Santa Monica, RAND Corporation, CA.
- Shapley, Lloyd (1955)b:** *Values of Large Games VII: A General Exchange Economy with Money, RAND Corporation RM-4248-PR*. Santa Monica, RAND Corporation, CA.
- Shapley, Lloyd (1967):** On Balanced Sets and Cores. In: *Naval Research Logistics Quarterly*, volume 14: S. 453–460.
- Shapley, Lloyd (1969):** Utility Comparison and the Theory of Games. In: *La Décision, Editions du CNRS, Paris*, S. 251–263.
- Shapley, Lloyd (1971):** Cores of Convex Games. In: *International Journal of Game Theory*, volume 1: S. 11–26.
- Shapley, Lloyd und Shubik, Martin (1966):** Quasi-Cores in a Monetary Economy with Nonconvex Preferences. In: *Econometrica*, volume 34: S. 805–827.
- Shapley, Lloyd und Shubik, Martin (1967):** Ownership and the production function. In: *Quarterly Journal of Economics*, S. 88–111.
- Shapley, Lloyd und Shubik, Martin (1969a):** Pure Competition, Coalitional Power, and Fair Division. In: *International Economic Review*, volume 24: S. 1–39.
- Shapley, Lloyd und Shubik, Martin (1969b):** On market games. In: *Journal of Economic Review*, volume 1: S. 9–25.

- Shapley, Lloyd und Shubik, Martin (1975):** Competitive Outcomes in the Cores of Market Games. In: *International Journal of Game Theory*, volume 4(4): S. 229–237.
- Sharkey, William (1982):** Suggestions for a Game-Theoretic Approach to Public Utility Pricing and Cost Allocation. In: *The Bell Journal of Economics*, volume 13(1): S. 57–68.
- Sharkey, William (1992):** Supportability of network cost functions. In: *Annals of Operations Research*, volume 36(1): S. 1–16.
- Sharkey, William und Telser, Lester (1978):** Supportable Cost Functions for the Multiproduct Firm. In: *Journal of Economic Theory*, volume 18(1): S. 23–37.
- Shenker, Scott (1990):** *Making Greed work in networks: a game-theoretic analysis of gateway service disciplines*. Mimeo, Xerox Research Center, Palo Alto.
- Shenker, Scott (1995):** Making Greed work in networks: a game-theoretic analysis of switch service disciplines. In: *Transactions on Networking*, volume 3: S. 819–831.
- Shubik, Martin (1959):** Edgeworth Market Games. In: *Annals of mathematics studies No 40: Contributions to the theory of games*, volume 4.
- Shubik, Martin (1962):** Incentives, Decentralized Control, the Assignment of Joint Costs and Internal Pricing. In: *Management Science*, volume 8(3): S. 325–343.
- Shubik, Martin (1985):** The Cooperative Form, the Value, and the Allocation of Joint Costs and Benefits. In: *Young, Peyton (Hrsg.): Cost Allocation: Methods, Principles and Applications*, S. 79–94.
- Sobolev, A.I (1975):** Characterization of the Principle of Optimality for Cooperative Games through Functional Equations. In: *Voroby'ev (Hrsg.): Mathematical Methods in the Social Sciences*, S. 94–151.
- Spence, Michael (1983):** Contestable Markets and the Theory of Industry Structure: A Review Article. In: *Journal of Economic Literature*, volume 21(3): S. 981–990.

- Stenzel, Joe (2007):** *Lean Accounting. Best Practices for Sustainable Integration.* Wiley & Sons, New Jersey.
- Sudhölter, P. (1997):** The Modified Nucleolus: Properties and Axiomatizations. In: *International Journal of Game Theory*, volume 26: S. 147–182.
- Tauman, Yair (1988):** The Aumann-Shapley Prices: A Survey. In: *Roth (Hrsg.): The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, S. 279–304.
- Tejedo, Cyril und Truchon, Michel (1999):** *Multi-Product serial cost sharing: an incompatibility result.* Mimeo Crefa and Département d'économique, Université Laval.
- Tejedo, Cyril und Truchon, Michel (2002):** *Serial cost sharing in multidimensional contexts.* Mimeo 2001s-68R, Cirano.
- Telser, Lester (1978):** *Economic theory and the core.* University of Chicago Press.
- ten Raa, Thijs (1983):** Supportability and Anonymous Equity. In: *Journal of Economic Theory*, volume 31: S. 176–181.
- ten Raa, Thijs (1984):** Resolution of Conjectures on the Sustainability of Natural Monopoly. In: *Rand Journal of Economics*, volume 15: S. 135–141.
- Thomas, A. (1978):** Arbitrary and Incurable Allocations: A Comment. In: *The Accounting Review*, Januar, S. 263–269.
- Tijs, S. (1981):** Bounds for the core and the  $\tau$ -value. In: *Moeschlin, O. und Pallaschke, D. (Hrsg.): Game Theory and Mathematical Economics*, S. S. 123–132.
- Tijs, S. und Driessen, T. (1985):** The  $\tau$ -Value, The Core and Semiconvex Games. In: *International Journal of Game Theory*, volume 14(4): S. 229–248.
- Tijs, S. und Driessen, T. (1986):** Game Theory and Cost Allocation Problems. In: *Management Science*, volume 32(8): S. 1015–1028.
- Topkis, M. Donald (1987):** Activity optimization games with complementarity. In: *European Journal of Operations Research*, volume 28: S. 358–368.
- Topkis, M. Donald (2009):** *Supermodularity and Complementarity.* Princeton University Press, Princeton.

- Vazsonyi, Andrew (1962):** *Die Planungsrechnung in Wirtschaft und Industrie.* Oldenbourg. Original: Scientific programming in business and industry.
- von Hayek, Friedrich (1945):** The Use of Knowledge in Society. In: *American Economic Review*, volume 35: S. 519–530.
- von Neumann, John und Morgenstern, Oskar (1944):** *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton.
- Wallmeier, E. (1983):** *Der  $f$ -Nukleolus und ein dynamisches Verhandlungsmodell als Lösungskonzepte für kooperative  $n$ -Personenspiele.* Dissertationsschrift, Institut für Mathematische Statistik, Skripte zur Mathematischen Statistik, Nr. 5, Westfälische Wilhelm-Universität Münster.
- Walras, L. (1874):** *Elements of Pure Economics, or the Theory of Social Wealth.* Reprinted in 1984 by Orion Editions, Philadelphia.
- Weber (2004):** *Logistikkostenrechnung.* Springer Verlag, Berlin, 2 Auflage.
- Weber, Helmut (1993):** Wertschöpfungsrechnung. In: *Handwörterbuch der Betriebswirtschaft 3 (R–Z), Köhler/Küpper/Pfingsten (Hrsg.),* S. 4659–4670.
- Werner, Götz (2000):** Das Füreinander Leisten. In: *GDI–Impuls–Spezial*, November, S. 16–20.
- Werner, Götz W. (2004):** *Wirtschaft – Das–Füreinander–Leisten.* Universitätsverlag Karlsruhe, Karlsruhe.
- Werner, Götz W. (2006):** *Führung für Mündige: Subsidiarität und Marke als Herausforderungen einer modernen Führung.* Universitätsverlag Karlsruhe, Karlsruhe.
- Wißler, Wolfram (1997):** *Unternehmenssteuerung durch Gemeinkostenzuteilung: eine spieltheoretische Untersuchung.* Dt. Univ.–Verl., Wiesbaden.
- Williams, Thomas und Griffin, Charles (1964):** Matrix Theory and Cost Allocation. In: *The Accounting Review*, volume 39(3): S. 671–678.
- Wooders, M. (1994):** Large Games and Economies with Effective Small Groups. In: *Game-Theoretic Methods in General Equilibrium Analysis, J.-F. Mertens and S. Sorin (Hrsg.),* S. 145–206.

- 
- Wunderer, Rolf (2011):** *Führung und Zusammenarbeit - Eine unternehmerische Führungslehre*. Luchterhand, Köln, 9., neu überarbeitete Auflage.
- Young, H. Peyton (1985a):** Producer Incentives in Cost Allocation. In: *Econometrica*, volume 53(4): S. 757–765.
- Young, H. Peyton (1985b):** *Cost Allocation: Methods, Principles and Applications*. North–Holland, Amsterdam.
- Young, H. Peyton (1985c):** Monotonic Solutions of Cooperative Games. In: *International Journal of Game Theory*, volume 14(2): S. 65–72.
- Young, H. Peyton (1994):** Cost Allocation. In: *Aumann, R. und Hart, S. (Hrsg.): Handbook of Game Theory*, volume 2: S. 1193–1235.