

Seltene B-Meson-Zerfälle innerhalb und jenseits des Standardmodells

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
von der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Thomas Hermann
aus Göppingen

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Mai 2014

Referent: Prof. Dr. Matthias Steinhauser
Korreferentin: Prof. Dr. Margarete Mühlleitner

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	5
2.1	Standardmodell der Teilchenphysik	5
2.2	2-Higgs-Dublett-Modelle	10
2.3	Seltene B -Meson-Zerfälle und effektive Theorien	12
3	$B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ im Standardmodell	17
3.1	Der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$	17
3.2	Berechnung des Wilson-Koeffizienten C_A	22
3.2.1	W -Boson-Box-Diagramme	23
3.2.2	Z -Boson-Pinguin-Diagramme	35
3.3	$\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im SM zur NNLO	42
4	$B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ in 2-Higgs-Dublett-Modellen	53
4.1	Box-Diagramme	54
4.2	Z -Boson-Pinguin-Diagramme	59
4.3	Higgs-Boson-Pinguin-Diagramme	63
4.4	$\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2HDM Typ-II zur NNLO	68
5	$\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ im Standardmodell	73
5.1	Der Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$	73
5.2	Wilson-Koeffizienten C_1 bis C_8	76
5.2.1	Berechnung von C_1 bis C_6	76
5.2.2	Berechnung von C_7 und C_8	81
5.3	$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im SM zur NNLO	88
6	$\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ in 2-Higgs-Dublett-Modellen	91
6.1	Berechnung der Wilson-Koeffizienten	91
6.2	$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im 2HDM zur NNLO	98
7	Zusammenfassung	107
A	Renormierungskonstanten	109
A.1	Renormierungskonstanten für die Operatoren P_1 - P_8	109
A.2	QCD-Renormierungskonstanten	110
B	Renormierungsgruppenlaufen von C_A	113

C	Projektoren	117
C.1	Projektoren für Q_A , Q_A^E , Q_S und Q_P	117
C.2	Projektoren für P_7 und P_8	118
D	C_A, C_S und C_P im 2HDM Typ-II	121
D.1	Box-Diagramme	121
D.2	Z-Boson-Pinguin-Diagramme	124
D.3	Higgs-Boson-Pinguin-Diagramme	124
	Literaturverzeichnis	129

Mit dem Large Hadron Collider (LHC) am CERN bei Genf hat sich eine bisher unerreichte Energieskala für die Erforschung von Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen eröffnet. Das Ziel dieses riesigen Forschungsprojekts ist die Beantwortung der Frage nach dem Ursprung der elektroschwachen Symmetriebrechung und damit einhergehend die Suche nach dem Higgs-Boson. Dazu werden Protonen bei einer hohen Schwerpunktsenergie zur Kollision gebracht, wodurch kurzzeitig neue Teilchen entstehen, deren Zerfallsprodukte dann in den Detektoren der Experimente ATLAS, CMS und LHCb nachgewiesen werden können. Diese Reaktionen können im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik beschrieben werden. Diese bisher wohl erfolgreichste Theorie in der Geschichte der Physik vereint mit der starken, der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung drei der vier fundamentalen Kräfte im Universum und beschreibt alle bekannten Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen. Das letzte fehlende Puzzleteil des Standardmodells ist das Higgs-Boson, das als fundamentales, skalares Teilchen in Folge der elektroschwachen Symmetriebrechung von der Theorie vorhersagt wird. Durch die Entdeckung eines skalaren Teilchens am LHC im Juli 2012 ist man der Ursache der elektroschwachen Symmetriebrechung einen großen Schritt nähergekommen. Ob es sich bei dem entdeckten Teilchen um das Standardmodell-Higgs-Boson handelt, oder um ein Higgs-Boson aus einer zum Standardmodell erweiterten Theorie oder gar um einen Bindungszustand einer neuen Wechselwirkung wird sich wohl erst in den kommenden Jahren herausstellen.

Bisher wurden keine signifikanten Abweichungen vom Standardmodell an Experimenten zur Erforschung von Elementarteilchen gefunden. Trotzdem hat das Standardmodell offensichtliche Probleme, die zu der Schlussfolgerung führen, dass es Physik jenseits des Standardmodells geben muss. Die Einbindung der Gravitation ist wohl das größte Problem. An der Planck-Skala $M_{\text{Planck}} \approx 10^{19} \text{ GeV}$ wird die Gravitation auch auf Quantenniveau eine Rolle spielen und muss daher in das Gesamtbild integriert werden. Des Weiteren wurde unter anderem durch Messungen von Rotationskurven von Galaxien die Existenz von sogenannter dunkler Materie nachgewiesen, welche nicht durch die Teilchen des Standardmodells erklärt werden kann. Weitere Argumente für Physik jenseits des Standardmodells sind das Hierarchie-Problem und die Zusammenführung der elektroschwachen und der starken Wechselwirkung in eine große vereinheitlichte Theorie. Die Entdeckung von Neutrinooszillationen lässt eindeutig darauf schließen, dass Neutrinos eine nicht-verschwindende Masse haben, wodurch das Standardmodell erweitert werden muss. Des

Weiteren stellt sich damit die Frage, ob es sich bei den Neutrinos um sogenannte Majorana-Fermionen handelt. Auch der Yukawa-Sektor mit seinen vielen Parametern wirft Fragen auf. Warum gibt es zwischen den Massen der Elementarteilchen eine so große Hierarchie? Warum ist die Quark-Mischungsmatrix nahezu diagonal, während die Einträge der Lepton-Mischungsmatrix keine so eindeutige Hierarchie aufweisen? Wie oben schon erwähnt ist die Frage nach der elektroschwachen Symmetriebrechung und damit die Realisierung des Higgs-Sektors noch nicht geklärt. Eine der einfachsten Erweiterungen des Standardmodell-Higgs-Sektors sind sogenannte 2-Higgs-Dublett-Modelle, die auf zusätzliche neue Teilchen führen. Ebendiese Modelle wurden auch im Rahmen dieser Arbeit betrachtet.

Für die Suche nach neuer Physik gibt es mit der direkten und der indirekten Suche zwei verschiedene Strategien.

- Bei der direkten Suche an Kollidern wie dem LHC wird nach neuen schweren Teilchen gesucht, indem versucht wird diese durch hohe Kollisionsenergien zu erzeugen und ihre Zerfallsprodukte nachzuweisen.
- Bei der indirekten Suche wird nach Abweichungen zwischen Theorievorhersagen im Standardmodell und experimentellen Ergebnissen gesucht. Neue Teilchen treten hierbei nur indirekt als virtuelle Teilchen innerhalb von Schleifendiagrammen auf. Um Abweichungen von den erwarteten Werten finden zu können, müssen sehr präzise theoretische Vorhersagen und experimentelle Ergebnisse vorliegen. Beispiele für indirekte Suchen sind unter anderem $(g - 2)_\mu$, elektroschwache Präzisionsobservablen oder seltene Zerfälle von B -Mesonen.

In dieser Arbeit werden die beiden seltenen Zerfälle $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ und $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ untersucht. Beide Zerfälle sind äußerst sensitiv auf neue Physik und können im Standardmodell sehr präzise vorhergesagt werden. Die experimentellen Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit den Standardmodell-Vorhersagen und weisen schon heute eine mit den Theorievorhersagen vergleichbare Genauigkeit auf, oder werden diese in den kommenden Jahren erreichen. Da Beiträge durch neue Physik diese Vorhersagen stark beeinflussen können und die experimentellen Unsicherheiten sich in den kommenden Jahren weiter reduzieren werden, gibt es gute Aussichten in diesen seltenen B -Meson-Zerfällen signifikante Abweichungen von den Standardmodell-Vorhersagen zu entdecken. Aus diesem Grund wurden in dieser Arbeit die Zerfälle im Standardmodell und in 2-Higgs-Dublett-Modellen zu einer hohen Ordnung innerhalb der Störungsreihe berechnet, um sehr präzise Vorhersagen treffen zu können.

Der erste betrachtete Zerfall ist $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$, dessen Messung von den Experimenten CMS und LHCb einer der Höhepunkte der Teilchenphysik der letzten Jahre war. In den kommenden Jahren werden sich die experimentellen Unsicherheiten auf einige Prozent reduzieren, wodurch es notwendig wird die Genauigkeit der Standardmodell-Vorhersagen durch Hinzunahme von Korrekturen höherer Ordnung in der Störungsreihe zu verbessern. In Kapitel 3 wird $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ innerhalb des Standardmodells untersucht. Es werden die Drei-Schleifen-Korrekturen in der Quantenchromodynamik (QCD) zu diesem Zerfall diskutiert und präzise Standardmodell-Vorhersagen für das Verzweigungsverhältnis präsentiert. In Kapitel 4 wird der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ innerhalb des 2-Higgs-Dublett-Modells Typ-II betrachtet, wobei auch hier die Bestimmung der Drei-Schleifen-Korrekturen in der QCD diskutiert wird.

Für den zweiten betrachteten Zerfall in dieser Arbeit, $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$, gibt es bereits eine sehr präzise Standardmodell-Vorhersage. Außerdem wurde die Zerfallsbreite an vielen Experimenten gemessen, was zu einem äußerst präzisen experimentellen Mittelwert führt. Die Vorhersage innerhalb des Standardmodells und die experimentellen Ergebnisse sind in sehr guter Übereinstimmung.

Beiträge zu $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ aus Theorien jenseits des Standardmodells können jedoch einen großen Einfluss auf die Zerfallsbreite haben, wodurch es möglich ist Ausschlussgrenzen an die Parameter dieser Modelle zu geben. In Kapitel 5 wird die Berechnung der entsprechenden Wilson-Koeffizienten innerhalb des Standardmodells zur Drei-Schleifen-Ordnung diskutiert. In Kapitel 6 werden dieselben Wilson-Koeffizienten in 2-Higgs-Dublett-Modellen zur Drei-Schleifen-Ordnung berechnet. Aus der vorhergesagten Zerfallsbreite für $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ im 2-Higgs-Dublett-Modell Typ-II wird durch den Vergleich mit den experimentellen Daten eine untere Grenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons abgeleitet.

In Kapitel 2 werden zunächst die Grundlagen für diese Arbeit beschrieben. Dazu gehört eine kompakte Einführung in das Standardmodell der Teilchenphysik und in 2-Higgs-Dublett-Modelle. Des Weiteren werden seltene Zerfälle von B -Mesonen und ihre Vorhersagen im Rahmen effektiver Theorien diskutiert.

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen für diese Arbeit beschrieben. Dazu gehört eine Einführung in das Standardmodell (SM) der Teilchenphysik und in 2-Higgs-Dublett-Modelle, welche ein spezielles Beispiel für Erweiterungen des SM sind. Außerdem werden einige allgemeine Aspekte seltener B -Meson-Zerfälle und effektiver Theorien diskutiert.

2.1. Standardmodell der Teilchenphysik

In diesem Kapitel wird das SM in kompakter Weise beschrieben. Detaillierte Erläuterungen finden sich in der Literatur, z.B. in Ref. [1–3], wobei hier der Notation aus Ref. [1] gefolgt wird.

Das SM ist eine Eichtheorie basierend auf der Eichgruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ und beschreibt die Wechselwirkungen zwischen Quarks, Leptonen, Eichbosonen und dem Higgs-Boson. Damit vereint das SM mit der elektromagnetischen, der schwachen [4–6] und der starken Wechselwirkung [7–11] drei der vier bekannten Grundkräfte. Die Einbindung der Gravitation in dieses Bild ist weiterhin nicht geklärt und einer der Gründe für die Suche nach Physik jenseits des SM. Die Quarks und Leptonen sind in drei Generationen oder auch Familien angeordnet, wobei die Elementarteilchen in den verschiedenen Familien die gleichen Quantenzahlen haben und sich nur durch ihre Masse unterscheiden. Diese Massen der Fermionen entstehen durch die Yukawa-Wechselwirkungen zwischen dem Higgs-Feld und den Fermionen zusammen mit dem Higgs-Mechanismus. Des Weiteren führen die Yukawa-Wechselwirkungen auf Übergänge zwischen Quarks aus verschiedenen Generationen und sind damit die Grundlage für die Flavourphysik. In Abb. 2.1 sind alle bisher entdeckten Elementarteilchen dargestellt.

Die Wechselwirkungen im SM werden durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Fermion}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \quad (2.1)$$

beschrieben, wobei hier die technischen Aspekte der Eichfixierung und der Geist-Felder vernachlässigt werden. Die einzelnen Bestandteile der SM-Lagrangedichte werden nun kurz erläutert.

Die Eichbosonen der SM-Eichgruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ werden mit

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a,\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.2)$$

mass →	=2.3 MeV/c ²	=1.275 GeV/c ²	=173.07 GeV/c ²	0	=126 GeV/c ²
charge →	2/3	2/3	2/3	0	0
spin →	1/2	1/2	1/2	1	0
	u up	c charm	t top	g gluon	H Higgs boson
QUARKS					
	=4.8 MeV/c ²	=95 MeV/c ²	=4.18 GeV/c ²	0	
	-1/3	-1/3	-1/3	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	d down	s strange	b bottom	γ photon	
	0.511 MeV/c ²	105.7 MeV/c ²	1.777 GeV/c ²	91.2 GeV/c ²	
	-1	-1	-1	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	e electron	μ muon	τ tau	Z Z boson	
LEPTONS					
	<2.2 eV/c ²	<0.17 MeV/c ²	<15.5 MeV/c ²	80.4 GeV/c ²	
	0	0	0	±1	
	1/2	1/2	1/2	1	
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	W W boson	
					GAUGE BOSONS

Abbildung 2.1.: Teilcheninhalt des Standardmodells der Teilchenphysik. Die Abbildung wurde aus Ref. [12] übernommen.

beschrieben, wobei die Feldstärketensoren durch

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \\
 W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\
 B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

definiert sind. Die Eichfelder der starken Wechselwirkung $SU(3)_C$ sind die Gluonen G_μ^a (mit $a = 1, \dots, 8$), W_μ^a (mit $a = 1, \dots, 3$) sind die Eichfelder der Gruppe $SU(2)_L$ und B_μ ist das Eichfeld der Gruppe $U(1)_Y$. Die Größen g_s und g_2 sind die Eichkopplungen der Eichgruppen $SU(3)_C$ und $SU(2)_L$. Durch eine spontane Symmetriebrechung der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ entstehen aus den masselosen W_μ^a - und B_μ -Bosonen die drei massiven Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung, W_μ^\pm und Z_μ , und das masselose Photon A_μ , das Eichboson der elektromagnetischen Wechselwirkung.

Die Fermion-Lagrangedichte beschreibt die Wechselwirkung der Quarks und Leptonen mit den Eichbosonen,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Fermion}} &= \bar{L}'_{i,L} i \not{D} L'_{i,L} + \bar{Q}'_{i,L} i \not{D} Q'_{i,L} \\
 &\quad + \bar{l}'_{i,R} i \not{D} l'_{i,R} + \bar{u}'_{i,R} i \not{D} u'_{i,R} + \bar{d}'_{i,R} i \not{D} d'_{i,R},
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei die Fermionfelder über die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \left(\partial_\mu - ig_2 I_W^a W_\mu^a + ig_1 \frac{Y_W}{2} B_\mu - ig_s T^a G_\mu^a \right) \tag{2.5}$$

an die Eichfelder koppeln. I_W^a , Y_W und T^a sind die Generatoren der Eichgruppen $SU(2)_L$, $U(1)_Y$ und $SU(3)_C$ in der fundamentalen Darstellung. Mit g_1 wird die Kopplungskonstante der Eichgruppe $U(1)_Y$ bezeichnet. Die Gluonen koppeln nur an die Quarks, da die Leptonen keine $SU(3)_C$ -Farbladung tragen. Die Wechselwirkung der Eichgruppe $SU(2)_L$ unterscheidet zwischen linkshändigen und rechtshändigen Fermionfeldern Ψ ,

$$\Psi_{L,R} = P_{L,R} \Psi = \frac{1}{2} (1 \mp \gamma_5) \Psi. \tag{2.6}$$

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$L_{i,L}$	1	2	-1
$l_{i,R}$	1	1	-2
$Q_{i,L}$	3	2	1/3
$u_{i,R}$	3	1	4/3
$d_{i,R}$	3	1	-2/3
G_μ^a	8	1	0
W_μ^a	1	3	0
B^μ	1	1	0
Φ	1	2	1

Tabelle 2.1.: Transformationsverhalten der Standardmodell-Teilchen unter den Eichgruppen. Oben stehen die Fermionfelder, in der Mitte die Eichbosonen und unten das Higgs-Feld. Die Zahlen in der Spalte $SU(3)_C$ und $SU(2)_L$ geben an, in welcher Darstellung der Eichgruppe sich die Felder befinden. Die Zahlen in der Spalte $U(1)_Y$ geben die Hyperladung Y der Felder an.

Die linkshändigen Leptonen und Quarks sind in $SU(2)_L$ -Dubletts angeordnet,

$$L'_{i,L} = \begin{pmatrix} \nu'_{i,L} \\ l'_{i,L} \end{pmatrix}, \quad Q'_{i,L} = \begin{pmatrix} u'_{i,L} \\ d'_{i,L} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

während die rechtshändigen Leptonen ($l'_{i,R}$) und Quarks ($u'_{i,R}, d'_{i,R}$) sich unter der $SU(2)_L$ -Singulett-Darstellung transformieren und damit nicht mit den Eichbosonen W_μ^a wechselwirken.¹ In Tab. 2.1 ist das Transformationsverhalten der SM-Felder unter den Eichgruppen dargestellt. Der Index i in Gl. (2.4)–(2.7) deutet an, dass die Quarks und Leptonen in drei Generationen oder Familien auftreten. Diese drei verschiedenen Generationen haben identische Eigenschaften in Bezug auf die Eichwechselwirkungen. Bei den Leptonen befindet sich das Elektron, das Myon und das Tau zusammen mit den entsprechenden Neutrinos jeweils in einer Familie. Bei den Quarks bestehen die drei Familien aus Up- und Down-Quark, Charm- und Strange-Quark und Top- und Bottom-Quark.

In der bisher dargestellten Form ist es nicht möglich explizite Massenterme für die Eichbosonen und Fermionen in die Lagrangedichte einzuführen, da diese die Eichinvarianz verletzen würden. Da es aber experimentell sowohl schwere Eichbosonen als auch Fermionen mit einer nicht-verschwindenden Masse gibt, müssen die Massen in die Theorie integriert werden ohne dabei die Eichinvarianz zu zerstören. Die Lösung für dieses Problem ist der sogenannte Higgs-Mechanismus [13–17]. Dazu wird das Higgs-Feld Φ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad (2.8)$$

eingeführt. Das Higgs-Feld

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

¹Da in dieser Arbeit Neutrinomassen vernachlässigt werden, brauchen rechtshändige Neutrinos nicht berücksichtigt werden.

ist ein $SU(2)_L$ -Dublett und setzt sich aus zwei komplexen Feldern zusammen, was vier Freiheitsgraden entspricht. Das Higgs-Potential im SM lautet

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 . \quad (2.10)$$

Dieses Potential hat für $\lambda, \mu^2 > 0$ bei

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

ein Minimum, mit

$$v = 2 \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \approx 246 \text{ GeV} . \quad (2.12)$$

Die Größe v wird Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes genannt. Obwohl das Higgs-Potential invariant unter der Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ist, wird diese Symmetrie durch das Festlegen auf einen Grundzustand mit dem Vakuumerwartungswert $v \neq 0$ gebrochen. Da die Symmetrie nicht explizit, sondern nur durch den Grundzustand gebrochen ist, spricht man von spontaner Symmetriebrechung. Der Grundzustand ist weiterhin invariant unter einer $U(1)$ -Symmetrie, die mit der Eichgruppe $U(1)_{\text{em}}$ der Quantenelektrodynamik (QED) identifiziert werden kann. Als weitere Konsequenzen entstehen aus den vier masselosen Eichbosonen der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ drei massive Eichbosonen W_μ^\pm und Z_μ und ein masseloses Eichboson A_μ , welches mit dem Photon und damit dem Eichboson der $U(1)_{\text{em}}$ identifiziert wird. Außerdem ergibt sich ein skalares Elementarteilchen, das sogenannte Higgs-Boson. Die Suche nach dem Higgs-Boson ist eines der Hauptziele des LHC und führte mit der Entdeckung eines skalaren Teilchens im Juli 2012 [18, 19] zum Nobelpreis für Physik 2013 an Englert und Higgs.

Die Eichbosonen W^\pm , Z und A sind Massen- und Ladungseigenzustände und entstehen durch Mischen der Eichbosonen W^a und B ,

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) , \quad (2.13)$$

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} . \quad (2.14)$$

Der Parameter θ_W ist der schwache Mischungswinkel, auch Weinberg-Winkel genannt, und hängt über die Relation

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{M_W}{M_Z} \quad (2.15)$$

mit den Kopplungskonstanten g_1 und g_2 bzw. den Massen der Eichbosonen zusammen.

Der letzte Teil der SM-Lagrangedichte beinhaltet die Yukawa-Wechselwirkungen zwischen den Fermionen und dem Higgs-Feld,

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \left(\bar{L}'_{i,L} Y_{ij}^l l'_{j,R} \Phi + \bar{Q}'_{i,L} Y_{ij}^d d'_{j,R} \Phi + \bar{Q}'_{i,L} Y_{ij}^u u'_{j,R} \Phi^c + \text{h.c.} \right) . \quad (2.16)$$

Auch für die Fermionen sind explizite Massenterme auf Grund der Eichsymmetrie verboten. Durch den von null verschiedenen Vakuumerwartungswerts des Higgs-Feldes ergeben sich aus der Yukawa-Lagrangedichte die Massenmatrizen der Fermionen,

$$M_{ij}^l = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^l , \quad M_{ij}^u = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^u , \quad M_{ij}^d = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_{ij}^d . \quad (2.17)$$

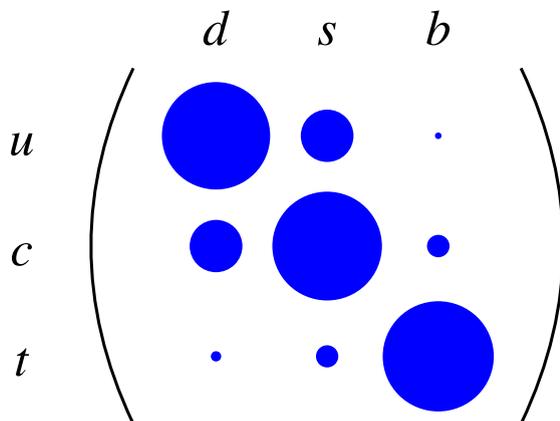


Abbildung 2.2.: Anschauliche Darstellung der Größenverhältnisse der einzelnen Elemente der CKM-Matrix. Die Fläche der Kreise ist proportional zu den Werten $|V_{ij}|$.

Da die Yukawa-Matrizen Y_{ij} eine beliebige Form haben können, sind die Massenmatrizen im Allgemeinen nicht diagonal. Durch bi-unitäre Transformationen

$$\begin{aligned}
 u'_{i,L} &\rightarrow u_{i,L} = U_{ij}^{u,L} u'_{j,L}, \\
 u'_{i,R} &\rightarrow u_{i,R} = U_{ij}^{u,R} u'_{j,R}, \\
 d'_{i,L} &\rightarrow d_{i,L} = U_{ij}^{d,L} d'_{j,L}, \\
 d'_{i,R} &\rightarrow d_{i,R} = U_{ij}^{d,R} d'_{j,R},
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

lassen sich die Quarks aus der Wechselwirkungsbasis (u'_i, d'_i) in die Massenbasis (u_i, d_i) transformieren und damit die Massenmatrizen diagonalisieren. Auf Grund der Unitarität der Transformations-Matrizen heben sich diese in fast allen Teilen der SM-Lagrangedichte heraus. Nur in der Wechselwirkung zwischen Quarks und W^\pm -Bosonen taucht eine Kombination als Quark-Mischungsmatrix, auch CKM-Matrix [20, 21] genannt,

$$V_{\text{CKM}} = U^{u,L} U^{d,L\dagger} \tag{2.19}$$

auf. Die CKM-Matrix kann als Übergang von den Masseneigenzuständen d, s, b der down-artigen Quarks zu den Wechselwirkungseigenzuständen d', s', b' verstanden werden,

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Die Kopplungen zwischen den up-artigen Quarks u_i , den down-artigen Quarks d_j und dem W -Boson sind gerade proportional zum Matrixelement V_{ij} . Die relativen Größenverhältnisse der CKM-Matrix sind in Abb. 2.2 dargestellt, wobei die Fläche der Kreise proportional zum Wert von $|V_{ij}|$ ist. Für die Werte der Diagonalelemente ergibt sich dabei $V_{ii} \approx 1$.

Innerhalb der Quantenchromodynamik (QCD), also der starken Wechselwirkung, treten interessante Phänomene bezüglich ihrer Kopplungskonstanten auf. Die Stärke der Kopplungskonstanten

$$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \tag{2.21}$$

hängt sehr stark von der Energieskala der Wechselwirkung ab. Bei niedrigen Energien ist diese so groß, dass Rechnungen innerhalb der Störungstheorie nicht anwendbar sind. In diesem Energiebereich können Vorhersagen z.B. mit Hilfe von QCD-Gitter-Rechnungen gemacht werden. Desweiteren treten Quarks und Gluonen nur als gebundene, farbneutrale Hadronen in der Natur auf. Dieses Phänomen wird als *Confinement* bezeichnet. Bei sehr hohen Energien wird α_s immer kleiner, sodass die Quarks in diesem Bereich als freie Teilchen innerhalb der Störungstheorie behandelt werden können, was als asymptotische Freiheit bezeichnet wird. Da bei der Masse des Z -Bosons, $M_Z = 91.1876 \text{ GeV}$, die Kopplungskonstante den im Vergleich zur elektromagnetischen Kopplung relativ großen Wert [22]

$$\alpha_s(M_Z) = 0.1184(7) \approx 15 \cdot \alpha_{\text{em}}(M_Z) \quad (2.22)$$

hat, ist es oft notwendig, höhere Ordnungen in α_s innerhalb der Störungstheorie miteinzubeziehen, um verlässliche Vorhersagen treffen zu können.

2.2. 2-Higgs-Dublett-Modelle

Der Higgs-Sektor ist der bisher am wenigsten bekannte Teil des SM und mit nur einem $SU(2)_L$ -Higgs-Dublett auch die minimale Möglichkeit zur Brechung der elektroschwachen Symmetrie. Die Erforschung des Higgs-Sektors ist damit eines der wichtigsten Ziele aktueller und zukünftiger Experimente. Eine der einfachsten Erweiterungen des SM-Higgs-Sektors sind Modelle mit einem weiteren Higgs-Dublett, sogenannte 2-Higgs-Dublett-Modelle (2HDM). Dadurch gibt es nach der Brechung der elektroschwachen Symmetrie mit einem geladenen und drei ungeladenen skalaren Teilchen zusätzliche Elementarteilchen im Vergleich zum SM.

Die Lagrangedichte des Higgs-Sektors aus Gl. (2.8) wird im 2HDM durch

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi_1)^\dagger (D^\mu \Phi_1) + (D_\mu \Phi_2)^\dagger (D^\mu \Phi_2) - V_{2\text{HDM}}(\Phi_1, \Phi_2) \quad (2.23)$$

ersetzt. Das skalare Potential im 2HDM [23, 24] lautet

$$\begin{aligned} V_{2\text{HDM}} = & m_{11}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_{22}^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - (m_{12}^2 \Phi_1^\dagger \Phi_2 + \text{h.c.}) \\ & + \frac{\lambda_1}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1) \\ & + \left[\frac{\lambda_5}{2} (\Phi_1^\dagger \Phi_2)^2 + \lambda_6 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_1^\dagger \Phi_2) + \lambda_7 (\Phi_2^\dagger \Phi_2) (\Phi_1^\dagger \Phi_2) + \text{h.c.} \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

wobei die Parameter $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ und m_{12}^2 im Allgemeinen komplex sein können. In dieser Arbeit soll keine CP-Verletzung im Higgs-Potential auftreten, deswegen wird gefordert, dass alle Parameter in Gl. (2.24) reell sind.

Zusätzlich zur Lagrangedichte im Higgs-Sektor ändert sich auch die Yukawa-Lagrangedichte, da nun zwei Higgs-Felder existieren, an welche die Fermionen koppeln können,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & - \left(\bar{Q}'_{i,L} Y_{ij}^d d'_{j,R} \Phi_1 + \bar{Q}'_{i,L} Y_{ij}^u u'_{j,R} \Phi_1^c \right. \\ & + \bar{Q}'_{i,L} \tilde{Y}_{ij}^d d'_{j,R} \Phi_2 + \bar{Q}'_{i,L} \tilde{Y}_{ij}^u u'_{j,R} \Phi_2^c \\ & \left. + \bar{L}'_{i,L} Y_{ij}^l l'_{j,R} \Phi_1 + \bar{L}'_{i,L} \tilde{Y}_{ij}^l l'_{j,R} \Phi_2 + \text{h.c.} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Im 2HDM kann es durch die Yukawa-Wechselwirkungen zu *Flavour-Changing-Neutral-Currents* (FCNC) auf Tree-Level-Niveau kommen, da sich im Allgemeinen nicht alle Yukawa-Matrizen gleichzeitig diagonalisieren lassen. Dadurch treten flavour-ändernde Kopplungen von neutralen Higgs-Bosonen auf. Da FCNC experimentell aber stark eingeschränkt sind, sollten diese innerhalb der Lagrangedichte stark unterdrückt oder sogar unterbunden sein. Eine Möglichkeit diese zu unterbinden ist das Postulieren einer Z_2 -Symmetrie unter der die Lagrangedichte invariant sein soll. Dadurch treten FCNC nur durch schleifeninduzierte Prozesse auf [25]. Es wird gefordert, dass sich die Higgs-Felder mit $\Phi_1 \rightarrow -\Phi_1$ und $\Phi_2 \rightarrow \Phi_2$ unter der postulierten Z_2 -Symmetrie transformieren. Damit nun das Potential in Gl. (2.24) invariant unter dieser Transformation ist, muss $m_{12} = 0$, $\lambda_6 = 0$ und $\lambda_7 = 0$ gelten. Zusätzlich zum Transformationsverhalten der Higgs-Felder werden auch für die rechtshändigen down-artigen Quarks und die rechtshändigen Leptonen Transformationsregeln postuliert, wobei im Folgenden davon ausgegangen wird, dass sich $d'_{i,R}$ und $l'_{i,R}$ identisch transformieren. Alle anderen Felder sollen sich nicht unter der Z_2 -Symmetrie verändern. Damit gibt es zwei verschiedene Realisierungen des 2HDM, die mit Typ-I und Typ-II bezeichnet werden.

- 2HDM Typ-I: Die rechtshändigen down-artigen Quarks transformieren sich mit $d'_{i,R} \rightarrow d'_{i,R}$ unter der Z_2 -Symmetrie. Damit die Yukawa-Lagrangedichte invariant unter dieser Transformation ist, kann nur ein Higgs-Feld, hier Φ_2 , an die Quarks koppeln. In Gl. (2.25) verschwinden damit die Terme mit Y_{ij}^d , Y_{ij}^u und Y_{ij}^l .
- 2HDM Typ-II: Die rechtshändigen down-artigen Quarks transformieren sich mit $d'_{i,R} \rightarrow -d'_{i,R}$ unter der Z_2 -Symmetrie. Damit koppeln beide Higgs-Felder an die Quarks, wobei Φ_1 an die rechtshändigen down-artigen und Φ_2 an die rechtshändigen up-artigen Quarks koppelt. In Gl. (2.25) verschwinden damit die Terme mit Y_{ij}^u , \tilde{Y}_{ij}^d und \tilde{Y}_{ij}^l .

In dieser Arbeit wird hauptsächlich das Typ-II Modell betrachtet, da dieses auch in der minimalen supersymmetrischen Erweiterung des SM realisiert ist und damit ein phänomenologisch sehr interessantes Modell darstellt.

Nach der spontanen Symmetriebrechung können die beiden Higgs-Felder folgendermaßen parametrisiert werden,

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_i^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_i + \phi_i + i\chi_i) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

mit $i = 1, 2$. Dabei bezeichnet v_i den Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes Φ_i . Die Anregungen ϕ_i , χ_i und ϕ_i^+ mit $i = 1, 2$ ergeben insgesamt acht Freiheitsgrade und gehen nach dem Diagonalisieren der Massenmatrizen im Higgs-Potential in die *would-be* Goldstone-Bosonen G^\pm und G^0 , in zwei CP-gerade neutrale Higgs-Bosonen h^0 und H^0 , in ein CP-ungerades neutrales Higgs-Boson A^0 und in ein elektrisch geladenes Higgs-Boson H^\pm über. Diese Übergänge in die Masseneigenzustände der Higgs-Bosonen können durch die beiden Winkel α und β parametrisiert werden. Die Massenmatrix der geladenen Felder ϕ_i^+ wird mit den Transformationen

$$\begin{aligned} G^\pm &= \cos \beta \phi_1^\pm + \sin \beta \phi_2^\pm, \\ H^\pm &= -\sin \beta \phi_1^\pm + \cos \beta \phi_2^\pm, \end{aligned} \quad (2.27)$$

diagonalisiert. Die CP-ungeraden Felder χ_i haben dieselbe Transformationsmatrix,

$$\begin{aligned} G^0 &= \cos \beta \chi_1 + \sin \beta \chi_2, \\ A^0 &= -\sin \beta \chi_1 + \cos \beta \chi_2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Felder G^\pm und G^0 sind die *would-be* Goldstone-Bosonen und gehen in der unitären Eichung in die longitudinalen Komponenten der W^\pm - und Z -Bosonen über. Bei H^\pm und A^0 handelt es sich um das geladene und das CP-ungerade Higgs-Boson. Der freie Parameter $\tan \beta$ ist das Verhältnis der beiden Vakuumerwartungswerte,

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}, \quad (2.29)$$

wobei $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ den SM-Vakuumerwartungswert darstellt. Mit dem Winkel α wird die Rotationsmatrix zur Diagonalisierung der Massenmatrix für die CP-geraden Felder ϕ_1 und ϕ_2 parametrisiert. Die Masseneigenzustände sind

$$\begin{aligned} h^0 &= -\sin \alpha \phi_1 + \cos \alpha \phi_2, \\ H^0 &= \cos \alpha \phi_1 + \sin \alpha \phi_2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

wobei das leichtere CP-gerade Higgs-Boson h^0 in dieser Arbeit mit dem von ATLAS und CMS entdeckten skalaren Teilchen identifiziert wird.

2.3. Seltene B -Meson-Zerfälle und effektive Theorien

Für die experimentelle Suche nach physikalischen Effekten, die nicht alleine durch das SM beschrieben werden können, gibt es mit der direkten und der indirekten Suche zwei verschiedene Ansätze. Bei der direkten Suche, z.B. am LHC, wird versucht durch Kollisionen von Teilchen mit einer hohen Energie neue schwere Teilchen zu erzeugen, deren Zerfallsprodukte dann gemessen werden. Bei der indirekten Suche wird nach Abweichungen von der SM-Vorhersage gesucht, wobei neue Teilchen nur als virtuelle Teilchen innerhalb von Schleifen auftreten können. Seltene Zerfälle von B -Mesonen sind wichtige Beispiele für indirekte Suchen nach Physik jenseits des SM.

B -Mesonen sind gebundene Zustände eines Bottom-Quarks und eines leichteren Quarks. Im Besonderen werden hier die B -Meson-Zerfälle von elektrisch neutralen B_d - ($\bar{b}d$) und B_s -Mesonen ($\bar{b}s$) betrachtet. In Abb. 2.3 sind die B_d - und B_s -Mesonen und ihre Antiteilchen dargestellt. Die Massen der beiden Mesonen liegen mit $M_{B_d} = 5279.6$ MeV und $M_{B_s} = 5366.8$ MeV nahe beieinander. Die dominanten Zerfallskanäle der B -Mesonen sind Tree-Level-Zerfälle des Bottom-Quarks in ein leichteres Charm- oder Up-Quark und in ein W -Boson, welches dann entweder in ein Lepton- oder in ein Quarkpaar zerfällt. In Abb. 2.4 ist ein solcher Tree-Level-Zerfall für ein B_s -Meson skizziert.²

In dieser Arbeit werden seltene Zerfälle von B -Mesonen untersucht, die relativ zu den Tree-Level-Beiträgen stark unterdrückt sind, da erwartet wird, dass hier große Abweichungen zur SM-Vorhersage auftreten können. Im SM gibt es keine FCNC auf Tree-Level-Niveau, d.h. es gibt keine Wechselwirkung die Übergänge von Quarks verschiedener Familien mit gleicher elektrischer Ladung herbeiführt. Die Gluonen, Photonen, Z -Bosonen und das Higgs-Boson koppeln im SM nur an Quarks mit der gleichen Flavour-Quantenzahl. Ein Flavour-Übergang kann deswegen nur durch die Wechselwirkung mit W -Bosonen auftreten. Aus diesem Grund können solche Flavour-Übergänge von Quarks mit gleicher elektrischer Ladung nur durch Schleifendiagramme induziert werden. In diesen Schleifen werden für eine kurze Zeitspanne schwere, virtuelle Teilchen wie das W -Boson und das Top-Quark erzeugt. Da diese Schleifendiagramme im Vergleich zu dem Tree-Level-Diagramm in Abb. 2.4 unterdrückt sind, ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Art von

²Für das Zeichnen von Diagrammen wurde in dieser Arbeit das Programm JAXODRAW [26] verwendet.

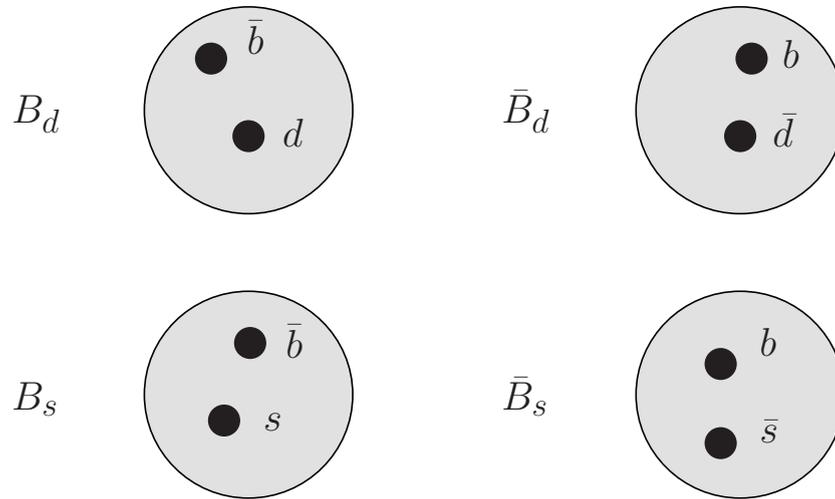


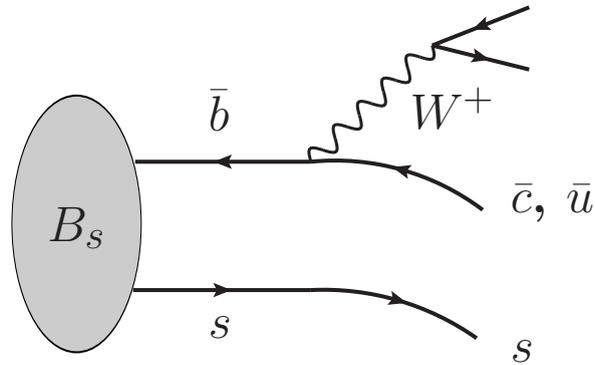
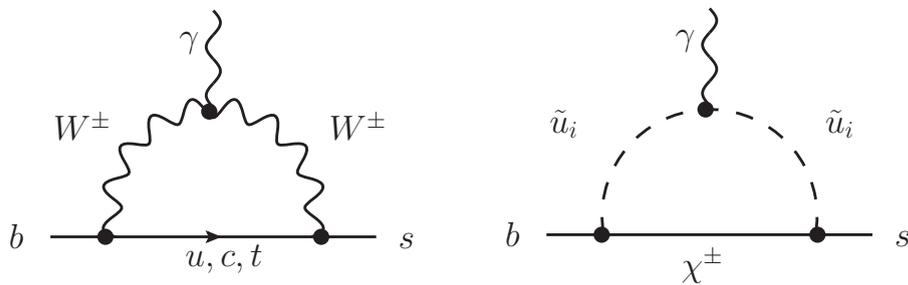
Abbildung 2.3.: Schematische Darstellung von B -Mesonen als Bindungszustand eines Bottom-Quarks und eines Down- oder Strange-Quarks.

Zerfall auftritt, relativ klein. Aus diesem Grund werden diese Zerfallskanäle auch seltene Zerfälle genannt. In Abb. 2.5 (links) ist ein solches Schleifendiagramm im SM für den Zerfall $b \rightarrow s\gamma$ dargestellt. In Theorien jenseits des SM (BSM) kann es zusätzliche Beiträge geben, die durch neue schwere Teilchen in den Schleifendiagrammen entstehen und von derselben Größenordnung sind wie die SM-Anteile. In Abb. 2.5 (rechts) ist ein Beispieldiagramm mit Teilchen aus der supersymmetrischen Erweiterung des SM dargestellt. Durch präzise experimentelle Messungen für diese Zerfälle auf der einen Seite und präzise theoretische Vorhersagen auf der anderen Seite können mögliche Abweichungen vom SM festgestellt werden. Werden hingegen keine Abweichungen zwischen der SM-Vorhersage und den experimentellen Ergebnissen gefunden, kann man daraus Ausschlussgrenzen an Theorien jenseits des SM ableiten. Aus diesem Grund sind seltene Zerfälle ein sehr wichtiges Werkzeug für die Suche nach neuer Physik.

In Kapitel 6 wird eine solche Ausschlussgrenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons im 2HDM Typ-II auf Grund des Zerfalls $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ diskutiert, \bar{B} ist in diesem Zusammenhang eine andere Schreibweise für \bar{B}_d . Solche Ausschlussgrenzen an einen einzelnen BSM-Parameter sind aber die Ausnahme, da im Allgemeinen die Theorie-Vorhersagen von vielen unterschiedlichen BSM-Parametern abhängen. Aus diesem Grund werden oft verschiedene Observablen kombiniert, um damit nach Bereichen im Parameterraum zu suchen, die durch experimentelle Ergebnisse ausgeschlossen sind. Ein Beispiel für ein Programm, das BSM-Vorhersagen für Observablen aus der Flavourphysik enthält, ist SUPERISO [27].

In dieser Arbeit werden zwei seltene Zerfälle betrachtet:

- $B_{s,d} \rightarrow l^+ l^-$: Das Hauptaugenmerk liegt hier auf den Zerfall des B_s -Mesons in zwei Myonen. Für diesen Zerfall gibt es erste Messungen von CMS [28] und LHCb [29]. In dieser Arbeit wurden die Drei-Schleifen-QCD-Korrekturen im SM und im 2HDM berechnet. Details zu diesen Rechnungen finden sich in Kapitel 3 und Kapitel 4.
- $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$: Bei diesem Zerfall handelt sich um den inklusiven Zerfall eines \bar{B} -Mesons in ein Photon und einen Endzustand mit einem Strange-Quark. Auf Parton-Niveau kann

Abbildung 2.4.: Tree-Level-Zerfall eines B_s -Mesons.Abbildung 2.5.: Beiträge zu $b \rightarrow s\gamma$ innerhalb des SM (links) und innerhalb supersymmetrischer Erweiterungen des SM (rechts).

dieser Prozess durch den Zerfall eines Bottom-Quarks in ein Photon und ein Strange-Quark, $b \rightarrow s\gamma$, genähert werden. In Kapitel 5 werden die Drei-Schleifen-Korrekturen im SM diskutiert. Im Kapitel 6 findet sich die Berechnung der Drei-Schleifen-Korrekturen im 2HDM. Beispieldiagramme für diesen Prozess sind in Abb. 2.5 dargestellt.

Neben diesen beiden Zerfällen gibt es weitere interessante seltene B -Meson-Zerfälle, wie z.B. $B \rightarrow K^* l^+ l^-$. In diesem Zerfall gibt es in einer Observablen Abweichungen zwischen der SM-Vorhersage [30] und den Messergebnissen von LHCb [31]. Im Gegensatz zu den beiden Prozessen $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ und $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ gibt es bei diesem Prozess aber große theoretische Unsicherheiten durch nicht-perturbative Effekte, was präzise Vorhersagen sehr schwierig macht.

Bei der Berechnung von Prozessen wie in Abb. 2.5 treten verschiedene Skalen auf. Der eigentliche Zerfall findet an der Energieskala der Masse des Bottom-Quarks m_b statt. Andererseits treten innerhalb der Schleifen schwere Teilchen wie das W -Boson und das Top-Quark mit den Massen M_W und m_t auf, welche auf logarithmische Terme der Form $\ln(m_b/M)$ mit $M = M_W, m_t$ führen. Da es zwischen den verschiedenen Skalen für den B -Meson-Zerfall eine große Hierarchie mit $m_b \ll M_W, m_t$ gibt, können diese Logarithmen groß werden und damit die Konvergenz der Störungsreihe negativ beeinflussen. Um das Konvergenzverhalten der Störungsreihe zu verbessern und damit korrekte Theorievorhersagen machen zu können, müssen diese Logarithmen in einer konsistenten Art und Weise zu allen Ordnungen der Störungsreihe aufsummiert werden.



Abbildung 2.6.: Schematische Darstellung des Übergangs von der vollen zur effektiven Theorie.

Dazu geht man von der vollen Theorie, z.B. dem SM, in eine effektive Theorie über, indem man alle schweren Teilchen ausintegriert. In der effektiven Theorie treten dann nur noch die leichten Teilchen und effektive Operatoren mit effektiven Kopplungskonstanten, den sogenannten Wilson-Koeffizienten, auf. In Abb. 2.6 ist der Übergang von der vollen zur effektiven Theorie schematisch dargestellt. Die schweren Teilchen innerhalb der Schleifendiagramme in der vollen Theorie, wie etwa das Top-Quark und das W -Boson, tragen dann nur zum Wilson-Koeffizienten C_7 bei. Innerhalb der effektiven Theorie ist es dann möglich, mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen die großen Logarithmen aufzusummieren, indem die Wilson-Koeffizienten von der hohen Skala $\mu_0 \approx M_W, m_t$ zur eigentlichen Skala des Zerfalls, $\mu_b \approx m_b$, evolviert werden.

Ein weiterer Vorteil von effektiven Theorien ist, dass diese universell sind, da die Beiträge durch neue schwere Teilchen nur die effektiven Kopplungen, nicht aber die effektiven Operatoren beeinflussen. Damit können alle Berechnungen in der effektiven Theorie auch für BSM-Vorhersagen übernommen werden, ohne für jede neue Theorie die gesamte Rechnung wiederholen zu müssen. Des Weiteren vereinfacht sich die Berechnung der Feynman-Diagramme durch den Übergang in die effektive Theorie signifikant, da sich der Prozess in zwei unabhängige Teile aufspalten lässt, nämlich in die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten und in die Berechnung der on-shell Matrixelemente des betrachteten Übergangs. Für die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten ist es möglich die externen Teilchen off-shell zu behandeln. Auf der anderen Seite treten bei der Berechnung der on-shell Matrixelemente innerhalb der effektiven Theorie keine schweren Teilchen, wie das Top-Quark und das W -Boson, mehr auf. Dadurch sind die Schleifendiagramme für die beiden einzelnen Probleme einfacher zu bestimmen als die eigentlichen Diagramme des Gesamtproblems. So wäre es ohne effektive Theorien gar nicht möglich, die Zerfälle $B_{s,d} \rightarrow l^+ l^-$ und $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ mit dieser Präzision vorherzusagen. Eine ausführliche Einführung in effektive Theorien im Rahmen der Flavourphysik findet sich in Ref. [32, 33].

In dieser Arbeit wurden die Wilson-Koeffizienten für die Zerfälle $B_{s,d} \rightarrow l^+ l^-$ und $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ berechnet. Die effektiven Operatoren und die Lagrangedichten der effektiven Theorien werden in den entsprechenden Kapiteln vorgestellt. Im Folgenden wird die Berechnung der effektiven Kopplungskonstanten am Beispiel $b \rightarrow s \gamma$ skizziert. Die Lagrangedichte in der effektiven Theorie hat die Form

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b) + \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i V_{\text{CKM}}^i C_i(\mu) Q_i + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M_W^4}\right), \quad (2.31)$$

wobei die Operatoren Q_i Massendimension 5 oder 6 haben. Zur Bestimmung der Wilson-Koeffizienten werden Amplituden wie etwa $b \rightarrow s \gamma$ in der vollen Theorie, also z.B. dem SM, bis inklusive

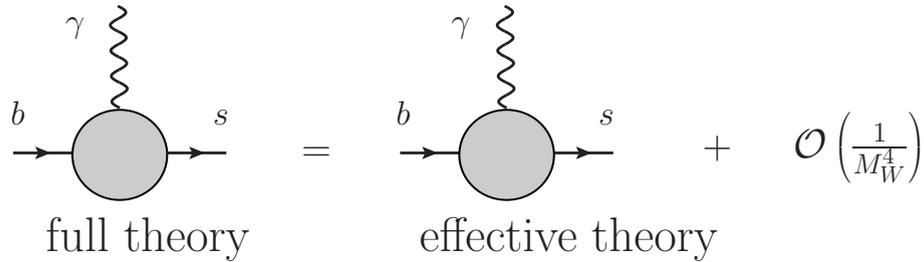


Abbildung 2.7.: Zur Bestimmung der effektiven Kopplungskonstanten werden die Amplituden des entsprechenden Prozesses in der vollen und der effektiven Theorie berechnet und die Ergebnisse gleichgesetzt. Da in der Amplitude der effektiven Theorie die Wilson-Koeffizienten als Kopplungskonstanten auftreten, können diese dadurch bestimmt werden.

der Ordnung $1/M_W^2$ berechnet. In der effektiven Theorie werden dieselben Amplituden mit der gleichen kinematischen Konfiguration wie in der vollen Theorie berechnet. Das Gleichsetzen der Amplituden in der vollen und der effektiven Theorie ergibt die Wilson-Koeffizienten, welche in den Amplituden der effektiven Theorie als Kopplungskonstanten auftreten. Diese Prozedur wird *Matching* genannt und ist schematisch in Abb. 2.7 dargestellt. Die Vorhersage in der effektiven Theorie ist am Ende bis zur Ordnung $1/M_W^2$ korrekt. Im Prinzip ist es möglich durch Hinzunahme von höherdimensionalen Operatoren zur effektiven Theorie die $1/M_W^4$ -Anteile in die Vorhersage zu integrieren. Diese sind aber relativ zu den Anteilen der Operatoren mit Massendimension 5 oder 6 mit $m_b^2/M_W^2 \approx 0.0025$ unterdrückt und werden daher in den kommenden Jahren keine Rolle spielen.

In dieser Arbeit wurden bei der Berechnung der Amplituden nur Diagramme berücksichtigt, die nicht mit einem Schnitt durch einen Propagator eines leichten Teilchens in zwei getrennte Diagramme zerfallen. Diese Diagramme werden 1LPI (one-light-particle-irreducible) genannt und sind eine Erweiterung von Ein-Teilchen-irreduziblen-Diagrammen. Es ist möglich sich auf 1LPI-Diagramme zu beschränken, wenn das Matching off-shell, d.h. ohne Ausnutzen der Bewegungsgleichungen äußerer Teilchen, durchgeführt wird. Anstelle von Flavour-Übergängen in äußeren Quark-Linien werden in dieser Arbeit elektroschwache Counterterme eingeführt, deren Einsetzungen ebenfalls nur in 1LPI-Diagrammen berücksichtigt werden müssen.

Für die Suche nach Abweichungen vom SM und damit für die Suche nach neuer Physik müssen wie oben erwähnt die Zerfälle präzise gemessen werden und eine präzise SM-Vorhersage vorliegen. Bei dieser benötigten Präzision reicht es nicht aus den Zerfall nur zur führenden Ordnung (LO) in der Störungsreihe zu bestimmen. Es müssen ebenfalls die QCD-Korrekturen zur nächstführenden (NLO) und sogar zur nächst-nächst-führenden Ordnung (NNLO) in Betracht gezogen werden. Des Weiteren werden auch die elektroschwachen Korrekturen zur NLO benötigt. Die Berechnung verschiedenster Wilson-Koeffizienten zur NNLO innerhalb der QCD war das Hauptziel dieser Arbeit und wird in den folgenden Kapiteln ausführlichst diskutiert.

In diesem Kapitel wird der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ innerhalb des Standardmodells untersucht. Dabei werden insbesondere die QCD-Korrekturen zur Drei-Schleifen-Ordnung diskutiert, da diese für eine präzise Theorievorhersage notwendig sind. Am Ende des Kapitels werden die Standardmodell-Vorhersagen präsentiert und die verbleibenden Unsicherheiten im Detail diskutiert.

3.1. Der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ dient als wichtiger Test des Standardmodells (SM) und zur Erforschung von Theorien jenseits des SM. Von der Seite der Theorie kann die Zerfallsbreite äußerst präzise vorhergesagt werden. Aus experimenteller Sicht war es bis vor kurzem nur möglich obere Grenzen an das Verzweigungsverhältnis $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ zu setzen [34–38]. Im Jahr 2012 wurde eine erste Evidenz für den Zerfall vom LHCb Experiment gemessen [39]. Daraufhin folgten im Jahr 2013 durch die Analyse weiterer Daten verbesserte Ergebnisse von LHCb und CMS,

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) &= (2.9_{-1.0}^{+1.1}) \times 10^{-9}, & \text{LHCb [29]}, \\ \bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) &= (3.0_{-0.9}^{+1.0}) \times 10^{-9}, & \text{CMS [28]}.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Die Kombination dieser beiden Messungen [40] ergibt

$$\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (2.9 \pm 0.7) \times 10^{-9}. \quad (3.2)$$

Bei der gemessenen Größe $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ handelt es sich um das gemittelte, zeitintegrierte Verzweigungsverhältnis, welches mit $\bar{\mathcal{B}}$ bezeichnet wird. Die genaue Definition folgt im Laufe dieses Kapitels. Die experimentelle Unsicherheit ist derzeit mit 24% noch weit höher als die theoretische Unsicherheit von 6.4%, dies wird sich aber nach dem Upgrade von LHCb [41] ändern. Es wird erwartet, dass die experimentellen Ergebnisse eine ähnliche Genauigkeit wie die theoretische Vorhersage erreichen werden. Die Bestimmung der theoretischen Unsicherheiten wird am Ende dieses Kapitels ausführlich diskutiert.

Es gibt zwei Gründe dafür, dass der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ im Standardmodell so selten ist. Zum einen ist der Zerfall schleifeninduziert, d.h. er tritt erst zur Ein-Schleifen-Ordnung auf. Im Standardmodell gibt es mit den W -Box- und Z -Pinguin-Diagrammen zwei Beiträge zur Zerfallsbreite,

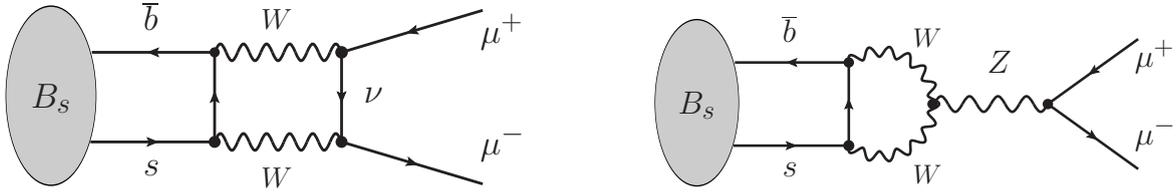


Abbildung 3.1.: Der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ist im SM über W -Box-Diagramme (links) und Z -Pinguin-Diagramme (rechts) realisiert.

Beispiele sind in Abb. 3.1 dargestellt. Zum anderen ist der Zerfall helizitätsunterdrückt und damit proportional zur Myonmasse. Im Limes masseloser Leptonen verschwindet die Zerfallsrate komplett.

Das große Interesse an dem Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ kommt dadurch zustande, dass dieser im Standardmodell sehr selten ist, es in Theorien jenseits des SM aber zusätzliche Beiträge geben kann, durch die das Verzweigungsverhältnis signifikant vom SM-Wert abweichen würde. Insbesondere durch einen erweiterten Higgs-Sektor kann es zu großen Abweichungen von der SM-Vorhersage kommen. Bevor das Verzweigungsverhältnis von CMS und LHCb gemessen wurde, gab es die Hoffnung, im Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ große Diskrepanzen zum SM zu finden. Durch die neusten Messungen hat sich aber gezeigt, dass das Verzweigungsverhältnis von der Größenordnung der SM-Vorhersage ist. Aus diesem Grund werden präzise Vorhersagen innerhalb des SM in den kommenden Jahren immer wichtiger, zum einen um nach Abweichungen von der Vorhersage zu suchen und zum anderen um Ausschlussgrenzen an Parameter von BSM-Theorien geben zu können.

Die bisher größte Unsicherheit der SM-Vorhersage von $\overline{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ kommt von der leptonicen Zerfallskonstanten f_{B_s} und beträgt zurzeit ca. 4%. Die Zerfallskonstante geht quadratisch in das Verzweigungsverhältnis ein und kann durch QCD-Gitter-Rechnungen bestimmt werden. Die zweite große Unsicherheit entsteht durch die CKM-Faktoren und liegt bei ca. 4%. Durch den Fortschritt in der Bestimmung von f_{B_s} in den letzten Jahren [42–47] ist es nun notwendig, bisher vernachlässigte Beiträge höherer Ordnung in der Störungsreihe miteinzubeziehen, um damit die Renormierungsskalen-Unsicherheit der Wilson-Koeffizienten zu reduzieren. Der Fehler der NLO-QCD-Korrekturen ist 2% und soll in diesem Teil der Arbeit durch Hinzunahme der NNLO-QCD-Korrekturen weiter reduziert werden.

Neben $\overline{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ wird in den kommenden Jahren auch das Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-$ eine wichtige Rolle spielen. Für die SM-Vorhersage unterscheiden sich diese beiden Zerfälle nur durch die Eingangsparameter B -Meson-Masse, CKM-Faktoren und leptoniche Zerfallskonstante. Zurzeit gibt es experimentell nur obere Grenzen an $\overline{\mathcal{B}}(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-)$, wobei aber anzunehmen ist, dass es in den kommenden Jahren möglich sein wird den Zerfall genau zu messen. Auch Zerfälle in andere Lepton-Paare wären äußerst interessant, doch ist nicht zu erwarten, dass es in den kommenden Jahren experimentell möglich sein wird, diese Zerfälle am LHC zu messen. Bei dem neuen Experiment BELLE-II am KEKB-Kollider in Japan gibt es aber Anstrengungen den Zerfall in zwei Tau-Leptonen zu messen bzw. die oberen Grenzen an das Verzweigungsverhältnis signifikant zu reduzieren.

Für die experimentelle Bestimmung des Zerfalls $B_{s,d} \rightarrow \mu^+ \mu^-$ wird die invariante Massenverteilung des Myon-Paars $m_{\mu\mu}$ gemessen, wobei der Signalbereich um die Massen der B -Mesonen

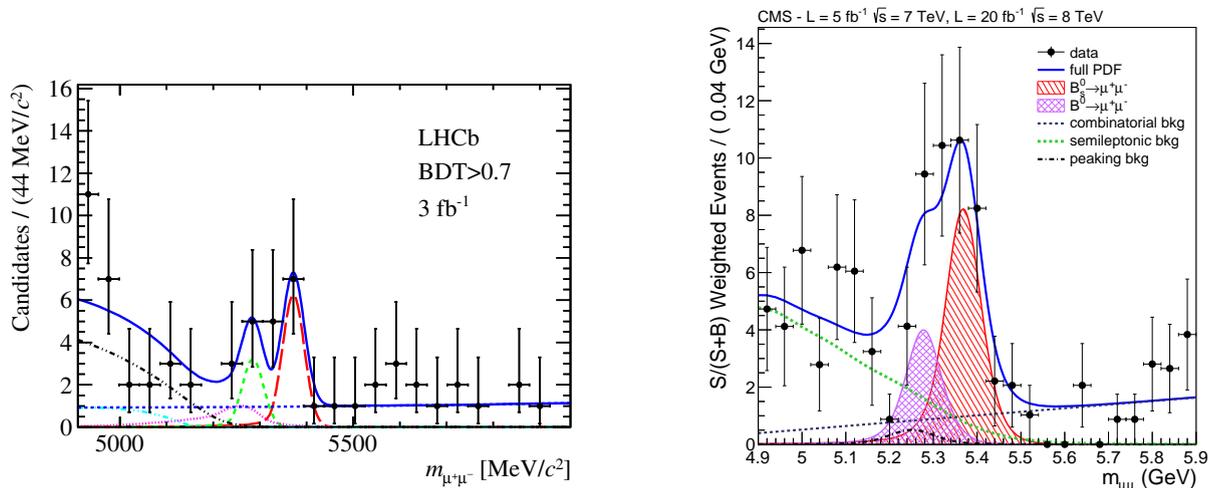


Abbildung 3.2.: Experimentelle Ergebnisse von LHCb (links) und CMS (rechts) für die Zerfälle $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ und $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Die Diagramme wurden aus Ref. [29] und Ref. [28] übernommen.

konzentriert ist. In Abb. 3.2 sind die Ergebnisse von LHCb (links) und CMS (rechts) aus Ref. [29] und Ref. [28] zu sehen. Es gibt zwei Arten von Untergründen, Zerfälle, die eine fast konstante Verteilung in der Signalregion haben, und Zerfälle, die ebenfalls die Peak-Struktur bei der B -Meson-Masse besitzen. Die erste Art von Untergründen kann durch den Vergleich mit Kontrollregionen in $m_{\mu\mu}$, in denen $B_{s,d} \rightarrow \mu^+ \mu^-$ nicht beiträgt, abgeschätzt werden. Zu diesen Untergrundprozessen gehören hauptsächlich semi-leptonische Zerfälle von Hadronen mit Bottom-Quarks. Die zweite Art von Untergrund kommt durch Zerfälle $B_{s,d} \rightarrow hh'$ zustande, wobei h und h' geladene Hadronen sind, die fälschlicherweise als Myonen identifiziert werden. Zur Bestimmung dieses Untergrunds werden Monte-Carlo-Simulationen verwendet.

Ein weiterer wichtiger Aspekt für die Messung und die Vorhersage des Zerfalls $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ ist die Meson-Mischung im B_s - \bar{B}_s -System. Die Masseneigenzustände entsprechen nicht den Flavour-Eigenzuständen B_s und \bar{B}_s . Dadurch kommt es zu einer quantenmechanischen, zeitabhängigen Oszillation zwischen den Flavour-Eigenzuständen B_s und \bar{B}_s . Des Weiteren gibt es einen relativ großen Unterschied in der Zerfallsbreite des leichten und des schweren B_s -Masseneigenzustands, $\Delta\Gamma^s = \Gamma_L^s - \Gamma_H^s$. Um diesen Effekten Rechnung zu tragen, werden am Ende des Kapitels die Ergebnisse für die gemittelten, zeitintegrierten Verzweungsverhältnisse $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow l^+ l^-)$ angegeben, welche direkt mit den experimentellen Ergebnissen verglichen werden können. Zur Herleitung der Formel für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow l^+ l^-)$ wurden die Ergebnisse aus Ref. [48, 49] zu den B_s - \bar{B}_s -Mischungseffekten verwendet.

Im Folgenden wird kurz die Herleitung der Formel für das Verzweungsverhältnis

$$\mathcal{B}(A \rightarrow B) = \frac{\Gamma(A \rightarrow B)}{\Gamma_{\text{tot}}} \quad (3.3)$$

skizziert. $\mathcal{B}(A \rightarrow B)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Anfangszustand A in den Endzustand B übergeht. Hierbei ist $\Gamma(A \rightarrow B)$ die partielle Zerfallsbreite und $\Gamma_{\text{tot}} = 1/\tau_A$ die totale Zerfallsbreite, wobei τ_A die Lebensdauer des Teilchens A ist. Für den Zwei-Teilchen-Zerfall

$\Gamma(A \rightarrow B_1 B_2)$ gilt im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens (siehe z.B. Ref. [22])

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{[(M_A^2 - (m_1 + m_2)^2)(M_A^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2 M_A} \quad (3.4)$$

und

$$d\Gamma = \frac{1}{32 \pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{|\vec{p}_1|}{M_A^2} d\Omega. \quad (3.5)$$

Hierbei ist $d\Gamma$ die differentielle Zerfallsbreite, \mathcal{M} das Matrixelement für den Zerfall und $d\Omega$ das differentielle Raumwinkelement. Hier betrachten wir den Zerfall $B_q \rightarrow l^+ l^-$ mit $q = s, d$ und $l = e, \mu, \tau$, d.h. es gilt $m_1 = m_2 = m_l$. Damit vereinfachen sich diese Formeln zu

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \frac{M_{B_q}}{2} \left(1 - 4 \frac{m_l^2}{M_{B_q}^2}\right)^{1/2} \quad (3.6)$$

und

$$d\Gamma = \frac{1}{64 \pi^2} |\mathcal{M}|^2 \frac{1}{M_{B_q}} \left(1 - 4 \frac{m_l^2}{M_{B_q}^2}\right)^{1/2} d\Omega. \quad (3.7)$$

Die Integration über den Raumwinkel ergibt die gesuchte Zerfallsbreite $\Gamma(B_q \rightarrow l^+ l^-)$. Die Schwierigkeit liegt nun in der Berechnung des Matrixelements \mathcal{M} . Dazu ist es äußerst hilfreich, in eine effektive Theorie überzugehen, in der alle schweren Teilchen ausintegriert sind. Dadurch lassen sich die Effekte der schweren Teilchen in den Schleifendiagrammen von den QCD-Bindungseffekten in den Mesonen trennen. Nach dem Ausintegrieren aller schwerer Teilchen ergibt sich folgende effektive Lagrangedichte,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b, e, \mu, \tau) + N \sum_n C_n Q_n + \text{h.c.} \quad (3.8)$$

mit den Operatoren

$$Q_A = (\bar{b} \gamma_\alpha \gamma_5 q)(\bar{l} \gamma^\alpha \gamma_5 l), \quad Q_S = (\bar{b} \gamma_5 q)(\bar{l} l), \quad Q_P = (\bar{b} \gamma_5 q)(\bar{l} \gamma_5 l) \quad (3.9)$$

und

$$N = V_{tb}^* V_{tq} G_F^2 M_W^2 / \pi^2, \quad (3.10)$$

mit $q = s, d$. Für den Zerfall des B_q -Mesons treten hadronische Matrixelemente der Art

$$\langle 0 | \bar{b} \Gamma q | B_q(p) \rangle \quad (3.11)$$

auf, wobei p der Vierer-Impuls des B_q -Mesons ist. Die Größe Γ kann sich im Allgemeinen aus dem Skalar-, Pseudo-Skalar-, Vektor-, Axial-Vektor- und antisymmetrischen Tensor-Strom zusammensetzen. Da es sich beim B_q -Meson um ein Pseudo-Skalar handelt, können nur der Pseudo-Skalar-Strom und der Axial-Vektor-Strom zum Zerfall beitragen, was bei der Wahl der Operatoren in Gl. (3.9) bereits berücksichtigt wurde. Die entsprechenden Matrixelemente lauten

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{b} \gamma_\mu \gamma_5 q | B_q(p) \rangle &= i p_\mu f_{B_q}, \\ \langle 0 | \bar{b} \gamma_5 q | B_q(p) \rangle &= -i f_{B_q} \frac{M_{B_q}^2}{m_b + m_q}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei f_{B_q} die leptonic Zerfallskonstante ist, die zurzeit am genauesten durch QCD-Gitter-Rechnungen bestimmt werden kann. Neben Q_A , Q_S und Q_P in Gl. (3.9) gibt es im Prinzip auch den Operator

$$Q_V = (\bar{b}\gamma_\alpha\gamma_5 q)(\bar{l}\gamma^\alpha l). \quad (3.13)$$

Dieser trägt jedoch auf Grund der elektromagnetischen Stromerhaltung für die Leptonen nicht zum Zerfall $B_q \rightarrow l^+ l^-$ bei, da $(\bar{l}\gamma^\alpha l)$ nach Kontraktion mit $p_\alpha = p_\alpha^l + p_\alpha^{\bar{l}}$ verschwindet. Schließlich ergibt sich folgendes Ergebnis für das Matrixelement \mathcal{M} ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i N f_{B_q} \left[p_\alpha C_A (\bar{l}\gamma^\alpha\gamma_5 l) - \frac{M_{B_q}^2}{m_b+m_q} C_S (\bar{l}l) - \frac{M_{B_q}^2}{m_b+m_q} C_P (\bar{l}\gamma_5 l) \right] \\ &= i N f_{B_q} \left[\left(2m_l C_A - \frac{M_{B_q}^2}{m_b+m_q} C_P \right) (\bar{l}\gamma_5 l) - \frac{M_{B_q}^2}{m_b+m_q} C_S (\bar{l}l) \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei beim Übergang in die zweite Zeile die Dirac-Gleichung für die Leptonen ausgenutzt wurde. Das quadrierte Matrixelement lautet

$$|\mathcal{M}|^2 = |N|^2 f_{B_q}^2 M_{B_q}^4 2 \left(|r_q C_A - u_q C_P|^2 + |u_q C_S|^2 (1 - r_q^2) \right), \quad (3.15)$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden,

$$r_q = \frac{2m_l}{M_{B_q}}, \quad \beta_q = \sqrt{1 - r_q^2}, \quad u_q = \frac{M_{B_q}}{m_b + m_q}. \quad (3.16)$$

Nach der Integration über den Raumwinkel erhält man

$$\overline{\mathcal{B}}(B_q \rightarrow l^+ l^-) = \frac{|N|^2 M_{B_q}^3 f_{B_q}^2}{8\pi \Gamma_H^q} \beta_q \left[|r_q C_A - u_q C_P|^2 F_P + |u_q \beta_q C_S|^2 F_S \right] + \mathcal{O}(\alpha_{em}), \quad (3.17)$$

mit $q = s, d$ und $l = e, \mu, \tau$. Es ist zu beachten, dass es sich bei $\overline{\mathcal{B}}(B_q \rightarrow l^+ l^-)$ um das gemittelte, zeitintegrierte Verzweigungsverhältnis handelt. Der Unterschied zwischen der Definition des Verzweigungsverhältnisses $\mathcal{B}(B_q \rightarrow l^+ l^-)$ aus Gl. (3.3) und dem gemittelten, zeitintegrierten Verzweigungsverhältnisses $\overline{\mathcal{B}}(B_q \rightarrow l^+ l^-)$ aus Gl. (3.17) kommt durch die verschiedenen Zerfallsbreiten der B_s -Masseneigenzustände zustande und äußert sich in der Normierung mit der Zerfallsbreite des schweren Masseneigenzustands des B_s - \bar{B}_s -Systems und durch die Faktoren

$$\begin{aligned} F_P &= 1 - \frac{\Delta\Gamma^s}{\Gamma_L^s} \sin^2 \left[\frac{1}{2} \phi_s^{\text{NP}} + \arg(r_s C_A - u_s C_P) \right], \\ F_S &= 1 - \frac{\Delta\Gamma^s}{\Gamma_L^s} \cos^2 \left[\frac{1}{2} \phi_s^{\text{NP}} + \arg C_S \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei ϕ_s^{NP} die CP-verletzenden Anteile zur B_s - \bar{B}_s -Mischung aus Modellen jenseits des SM beschreibt. Zur Herleitung von Gl. (3.17) wurden die Ergebnisse aus Ref. [48, 49] verwendet. Die Vorhersagen aus Gl. (3.17) können direkt mit den Ergebnissen von LHCb und CMS verglichen werden. Ohne zusätzliche CP-Verletzung aus Beiträgen jenseits des SM, d.h. für reelle Wilson-Koeffizienten und $\phi_s^{\text{NP}} = 0$, folgt aus Gl. (3.18),

$$\begin{aligned} F_P &= 1, \\ F_S &= 1 - \frac{\Delta\Gamma^s}{\Gamma_L^s}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Für die Vorhersage von $\mathcal{B}(B_d \rightarrow l^+ l^-)$ spielen Effekte durch die Meson-Mischung im B_d - \bar{B}_d -System keine Rolle, da bisherige Ergebnisse [50] darauf hindeuten, dass $\Delta\Gamma^d/\Gamma^d$ klein ist, was auch mit der SM-Vorhersage aus Ref. [51] übereinstimmt. Dadurch können $\Gamma_H^d = \Gamma_{\text{tot}}^d$, $F_P = 1$ und $F_S = 1$ zur Vorhersage von $\mathcal{B}(B_d \rightarrow l^+ l^-)$ in Gl. (3.17) verwendet werden.

Im SM sind die Beiträge der Wilson-Koeffizienten C_S und C_P zu $B_q \rightarrow l^+ l^-$ mit $M_{B_q}^2/M_W^2$ unterdrückt, deshalb vereinfacht sich Gl. (3.17) zu

$$\bar{\mathcal{B}}(B_q \rightarrow l^+ l^-) = \frac{|N|^2 M_{B_q}^3 f_{B_q}^2 \beta_q r_q^2 |C_A(\mu_b)|^2}{8\pi \Gamma_H^q} + \mathcal{O}(\alpha_{em}). \quad (3.20)$$

In Kapitel 4 wird $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ im 2HDM untersucht, dort spielen die Koeffizienten C_S und C_P eine wichtige Rolle. Im folgenden Abschnitt wird die Berechnung des Wilson-Koeffizienten C_A im SM beschrieben.

3.2. Berechnung des Wilson-Koeffizienten C_A

Da im SM nur der Operator Q_A zum Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ beiträgt, wird im Folgenden die Berechnung des Wilson-Koeffizienten C_A inklusive der Drei-Schleifen-QCD-Korrekturen diskutiert.

C_A kann als Reihe in α_s dargestellt werden,

$$C_A = C_A^{(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_A^{(2)} + \dots, \quad (3.21)$$

wobei der führende Term unabhängig von α_s ist. $C_A^{(0)}$ wurde in Ref. [52] und die Gluon-induzierten Korrekturen $C_A^{(1)}$ in Ref. [53–56] berechnet. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zum ersten Mal die Drei-Schleifen-Korrekturen $C_A^{(2)}$ berechnet und in Ref. [57] veröffentlicht.

Zur Bestimmung von C_A betrachtet man die 1LPI (one-light-particle-irreducible) Greens-Funktion $s \rightarrow b l^+ l^-$ sowohl in der vollen Theorie als auch in der effektiven Theorie. Im SM gibt es hierbei zwei Diagrammklassen: Box-Diagramme mit W -Bosonen und Z -Boson-Pinguin-Diagramme, siehe Abb. 3.1. Damit lässt sich C_A in zwei unabhängige Anteile aufspalten,

$$C_A^{(n)} = C_A^{W,(n)} + C_A^{Z,(n)}. \quad (3.22)$$

Die beiden Anteile können getrennt renormiert werden, sind aber einzeln eichabhängig in Bezug auf die elektroschwachen Eichbosonen. In dieser Arbeit wurde für die elektroschwachen Eichbosonen die Hintergrundfeld-Version der 't Hooft-Feynman Eichung verwendet.

In Kapitel 3.2.1 und Kapitel 3.2.2 wird die Berechnung von $C_A^{W,(n)}$ und $C_A^{Z,(n)}$ im Detail diskutiert. Zur Bestimmung beider Anteile ist es möglich, für die äußeren Fermionlinien ein antikommutierendes γ_5 zu verwenden. Dies gilt nicht mehr, falls eine ungerade Anzahl von γ_5 -Matrizen innerhalb einer geschlossenen Fermion-Schleife auftritt. In diesem Fall ist eine gesonderte Behandlung von γ_5 nötig, Details hierzu finden sich in Kapitel 3.2.2.2.

In führender Ordnung laufen in der Schleife alle up-artigen Quarks, siehe z.B. Abb. 3.3(a) und Abb. 3.7(a). Zur Bestimmung der Wilson-Koeffizienten wurden alle leichten Quarks als masselos behandelt, da Effekte der leichten Quark-Massen mit m_q/M_W unterdrückt sind. Dadurch unterscheiden sich die Anteile der Up- und der Charm-Quarks in der Schleife nur durch die CKM-Faktoren und es genügt zwei Beiträge, im Folgenden als „Top-“ und „Charm-Anteil“ bezeichnet, zu berechnen.

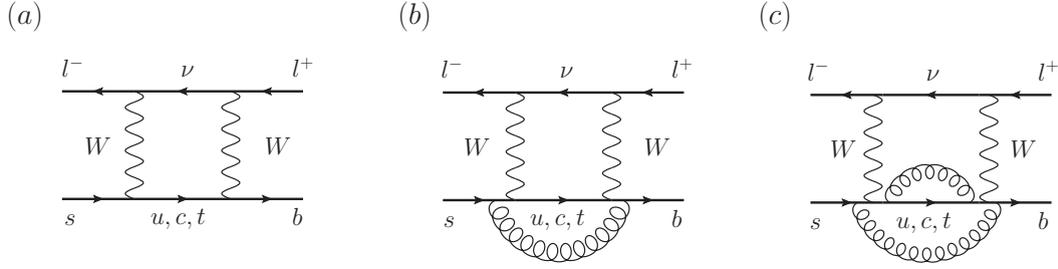


Abbildung 3.3.: Beiträge zu $C_A^{W(n)}$ im SM auf Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung.

3.2.1. W -Boson-Box-Diagramme

Auf Grund der Unitarität der CKM-Matrix gilt

$$C_A^{W,(n)} = C_A^{W,t,(n)} - C_A^{W,c,(n)}, \quad (3.23)$$

wobei der Top- und Charm-Quark-Anteil getrennt voneinander berechnet werden kann. Beispieldiagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung sind in Abb. 3.3 dargestellt. Zur Drei-Schleifen-Ordnung gibt es 124 Diagramme.

Um C_A^W aus der Anpassung (*Matching*) der Amplituden der effektiven und der vollen Theorie zu bestimmen, sollen im Folgenden zwei Möglichkeiten betrachtet werden. Im ersten Zugang wird das Matching in $d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen durchgeführt. Dabei treten infrarote Divergenzen in der vollen und in der effektiven Theorie als Pole in ϵ auf, welche sich erst beim Matching gegenseitig herausheben. Da es aber in Zwischenschritten der Rechnung zu zusätzlichen Polen in ϵ kommen kann, muss man sogenannte evaneszente Operatoren einführen und deren Beiträge in der Matching-Formel mitberücksichtigen, mehr dazu in Kapitel 3.2.1.1. Im zweiten Ansatz wird das Matching in $d = 4$ Dimensionen durchgeführt. Dabei müssen die infraroten Divergenzen auf andere Weise regularisiert werden, z.B. durch das Einführen von Massen für leichte Quarks. In Kapitel 3.2.1.2 wird diese Methode genauer erläutert.

3.2.1.1. Matching in d Dimensionen

Wird das Matching von voller und effektiver Theorie in d Dimensionen durchgeführt, muss neben dem eigentlichen Operator Q_A zusätzlich der evaneszente Operator Q_A^E [56] mitberücksichtigt werden,

$$Q_A^E = (\bar{b}\gamma_{\alpha_1}\gamma_{\alpha_2}\gamma_{\alpha_3}\gamma_5 s)(\bar{\mu}\gamma^{\alpha_3}\gamma^{\alpha_2}\gamma^{\alpha_1}\gamma_5\mu) - 4Q_A. \quad (3.24)$$

Als evaneszenter Operator verschwindet dieser in $d = 4$ Dimensionen. Da die Anpassung der Amplituden im SM und in der effektiven Theorie in $d \neq 4$ Dimensionen durchgeführt wird und die infraroten Divergenzen sich erst beim Matching herausheben, kann der Limes $d \rightarrow 4$ erst zum Schluss genommen werden. Des Weiteren mischen die Operatoren Q_A und Q_A^E durch QCD-Korrekturen ineinander und damit trägt der Wilson-Koeffizient C_A^E bei der Bestimmung von C_A bei. Aus diesem Grund darf der Operator Q_A^E nicht von Anfang an in $d = 4$ Dimensionen null gesetzt werden.

Im folgenden Abschnitt werden die technischen Aspekte zur Berechnung der Diagramme diskutiert. Zur Erzeugung aller benötigter Diagramme wurde das Programm QGRAF [58] verwendet. Die Programme Q2E und EXP [59, 60] erstellen einen FORM-Code [61] aus der QGRAF-Ausgabe, wobei EXP auch die benötigte asymptotische Entwicklung [62] in den schweren Massen durchführt, dazu später mehr. Die Diagramme wurden für verschwindende äußere Impulse berechnet. Außerdem haben nur das Top-Quark und das W -Boson in der hier verwendeten Näherung eine nicht-verschwindende Masse. Dadurch bleiben Vakuüm-Diagramme, sogenannte Tadpole-Diagramme, zur Drei-Schleifen-Ordnung mit bis zu zwei verschiedenen Massen übrig. Diese Tadpole-Diagramme wurden mit dem FORM-Paket MATAD [63] berechnet, wobei zusätzlich in den Massen entwickelt wurde. Eine detaillierte Beschreibung der verwendeten Programme findet sich in Ref. [64].

Um die Amplituden proportional zu den Dirac-Strukturen der Operatoren Q_A und Q_A^E und damit die Wilson-Koeffizienten C_A^W und C_A^E zu erhalten, müssen aus den Diagrammen die entsprechenden Dirac-Strukturen extrahiert werden. Das in dieser Arbeit verwendete FORM-Setup ist darauf ausgelegt, dass auf die Dirac-Struktur der Diagramme projiziert wird, indem die Spuren über äußere Fermionlinien gebildet werden. Zur Bestimmung der entsprechenden Anteile zu C_A^W und C_A^E müssen Projektoren bestehend aus γ -Matrizen auf die Ausdrücke für die Diagramme multipliziert werden. Die Projektoren sind im Anhang C.1 angegeben und wurden mit Hilfe von FORM und MATHEMATICA bestimmt.

Der verwendete Zugang mit Projektoren aus γ -Matrizen ist sehr praktisch, hat aber Nachteile, wenn es darum geht innere, geschlossene Fermion-Schleifen, wie in Kapitel 3.2.2.2 für die Fermion-Dreiecks-Diagramme, zu bearbeiten. Aus diesem Grund wurde in dieser Arbeit in einem zweiten Ansatz auf die Projektoren verzichtet und die Dirac-Strukturen explizit behandelt. Dazu war es nötig, eigene γ -Matrizen in FORM zu implementieren. Die Schwierigkeit in diesem zweiten Ansatz ist, dass im Gegensatz zur Projektor-Methode Tadpole-Diagramme mit Tensorstrukturen auftreten. Deswegen war es nötig eine Tensorreduktion der Tadpole-Diagramme durchzuführen, wobei hier eine modifizierte Version der FORM-Routine aus Ref. [65] verwendet wurde. Viele Prozesse in dieser Arbeit wurden mit beide Methoden berechnet, was auch zur Kontrolle der verwendeten Methoden diente.

In der effektiven Theorie und in der vollen Theorie müssen die entsprechenden Amplituden in der gleichen kinematischen Konfiguration berechnet werden. Da in der effektiven Theorie keine schweren Teilchen auftreten und die Amplituden für verschwindende äußere Impulse und für masselose Quarks berechnet wurden, bleiben in der effektiven Theorie nur skalenlose Integrale übrig, welche innerhalb der Dimensionalen Regularisierung verschwinden. Die einzigen Beiträge aus der effektiven Theorie kommen damit durch Operatoreinsetzungen in Tree-Level-Diagramme zustande. Auch wenn die Schleifendiagramme in den Amplituden der effektiven Theorie beim Matching verschwinden, müssen trotzdem die Operatoren in der effektiven Theorie renormiert werden, da die Counterterme für die ultravioletten (UV) Divergenzen in der effektiven Theorie benötigt werden, um die infraroten (IR) Divergenzen in den Amplituden der vollen Theorie zu eliminieren. Diese zunächst widersprüchliche Aussage wird im Folgenden erläutert.

Im Allgemeinen treten bei der Berechnung der Amplituden in der vollen und der effektiven Theorie sowohl UV- als auch IR-Divergenzen auf. Die UV-Divergenzen in der vollen Theorie werden durch die Renormierung aller Parameter und Felder eliminiert, in der effektiven Theorie müssen zusätzlich zu den Parametern und Feldern auch die Operatoren renormiert werden. Die IR-Divergenzen in der vollen Theorie sind identisch zu den IR-Divergenzen in der effektiven Theorie und heben sich damit gegenseitig beim Matching weg. Da wie oben beschrieben in der

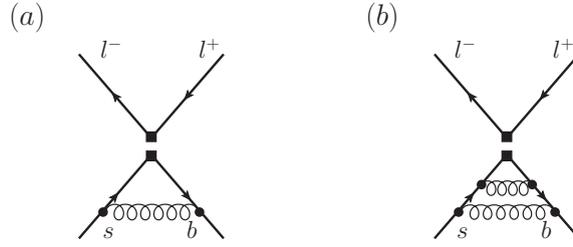


Abbildung 3.4.: Ein- und Zwei-Schleifen-Diagramme für die Renormierungskonstanten Z_{NN} , Z_{NE} , Z_{EN} und Z_{EE} . Die Quadrate repräsentieren die Operatoreinsetzungen Q_A oder Q_A^E und deren Dirac-Struktur.

effektiven Theorie alle Schleifen-Beiträge in der Dimensionalen Regularisierung verschwinden, heben sich in dieser kinematischen Konfiguration auch die IR- und die UV-Divergenzen in den Diagrammen gegenseitig raus. Damit ergeben also die UV-Counterterme in der effektiven Theorie gerade die IR-Divergenzen in der effektiven Theorie und damit auch in der vollen Theorie. Daraus folgt, dass nach der Renormierung in der vollen und der effektiven Theorie und dem Matching der jeweiligen Ergebnisse alle Divergenzen herausfallen und die Wilson-Koeffizienten damit UV- und IR-endlich sind.

Im Folgenden wird die Renormierung der Operatoren und die Bestimmung der Renormierungskonstanten in der effektiven Theorie diskutiert. In der effektiven Theorie geht die Lagrangedichte mit $C_A Q_A + C_A^E Q_A^E$ durch Strahlungskorrekturen in die renormierte Lagrangedichte mit

$$C_A Q_A + C_A^E Q_A^E \rightarrow Z_\psi (C_A Z_{NN} Q_A + C_A Z_{NE} Q_A^E + C_A^E Z_{EN} Q_A + C_A^E Z_{EE} Q_A^E) \quad (3.25)$$

über. Z_ψ ist hier die QCD-Wellenfunktions-Renormierungskonstante der Quarks im $\overline{\text{MS}}$ -Schema. Die Wellenfunktions-Renormierungskonstante der Leptonen hat keinen QCD-Anteil und wird deswegen hier nicht benötigt. Die restlichen Z -Faktoren sind die Renormierungskonstanten der Operatoren, wobei Z_{EN} und Z_{NE} durch das Mischen der Operatoren generiert werden.

In Abb. 3.4 sind Beispieldiagramme zu den QCD-Korrekturen der Operatoreinsetzungen von $C_A Q_A$ bzw. $C_A^E Q_A^E$ dargestellt, wobei die Quadrate in den Diagrammen die Operatoren und deren Dirac-Strukturen repräsentieren. Beim Berechnen der Diagramme mit Einsetzungen von $C_A^E Q_A^E$ stellt man fest, dass sowohl Anteile mit der Dirac-Struktur des eingesetzten Operators Q_A^E , als auch Anteile mit der Dirac-Struktur des Operators Q_A auftreten. Beide Anteile können UV-divergent sein und müssen damit renormiert werden. Die UV-divergenten Anteile proportional zur Dirac-Struktur des Operators Q_A^E bzw. des Operators Q_A werden in die Renormierungskonstanten Z_{EE} bzw. Z_{EN} absorbiert. Analog kann es bei QCD-Korrekturen zu Diagrammen mit der Einsetzung $C_A Q_A$ zu Beiträgen proportional zur Dirac-Struktur der Operatoren Q_A und Q_A^E kommen. Die UV-divergenten Anteile werden dann in die Renormierungskonstanten Z_{NN} und Z_{NE} absorbiert. Für Z_{NN} und Z_{NE} wurden $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungsbedingungen verwendet, d.h. es wurde gefordert, dass die Amplitude proportional zu C_A UV-endlich ist. Für Z_{EE} und Z_{EN} wurde zusätzlich die Bedingung gestellt, dass die Amplitude proportional zu C_A^E im Limes $d \rightarrow 4$ verschwindet, da der Operator Q_A^E in $d = 4$ Dimensionen null ist und damit der Koeffizient C_A^E in $d = 4$ Dimensionen nicht auftreten darf. Dies führt dazu, dass Z_{EE} und Z_{EN} nicht nur UV-Pole, sondern auch endliche Anteile aufweisen.

Zur Bestimmung der Z -Faktoren in Gl. (3.25) wurden Ein- und Zwei-Schleifen-Diagramme mit den Operatoreinsetzungen Q_A oder Q_A^E und entsprechende QCD-Korrekturen berechnet, Beispieldiagramme sind in Abb. 3.4 dargestellt, wobei alle Quark-Massen auf null gesetzt wurden und ein von null verschiedener äußerer Impuls durch die Diagramme „geleitet“ wurde. Alternativ wäre es auch möglich gewesen, allen Teilchen innerhalb der Schleifen, inklusive dem Gluon, eine Masse zu geben und die Diagramme dann für verschwindenden äußeren Impuls zu berechnen. Die Ergebnisse für die Z -Faktoren zur benötigten Ordnung in α_s lauten

$$\begin{aligned} Z_{NN} &= 1, \\ Z_{NE} &= 0, \\ Z_{EN} &= \frac{\alpha_s}{4\pi} 32 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-176 + \frac{32}{3} n_q \right) + \frac{1192}{3} - \frac{112}{9} n_q \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \\ Z_{EE} &= 1 + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Mit n_q wird die Anzahl der Quarks in der effektiven Theorie bezeichnet, in diesem Fall gilt also $n_q = 5$. Das Ergebnis für Z_{NN} und Z_{NE} gilt auf Grund der Quark-Stromerhaltung im Operator Q_A zu allen Ordnungen der Störungsreihe. Der α_s^2 -Anteil der Renormierungskonstanten Z_{EE} trägt nicht zu $C_A^{W,(2)}$ bei. Der einzige neue Anteil im Vergleich zu Ref. [56] ist damit der α_s^2 -Beitrag von Z_{EN} .

In der vollen Theorie mussten Diagramme mit zwei verschiedenen Massen bis zur Drei-Schleifen-Ordnung berechnet werden, siehe Abb. 3.3. Für die Ein- und Zwei-Schleifen-Diagramme konnten die Ergebnisse mit exakter Massenabhängigkeit aus Ref. [56] reproduziert werden. Dazu wurden FORM-Routinen aus Ref. [66, 67] verwendet, um die Ein- und Zwei-Schleifen-Diagramme auf Ein- und Zwei-Schleifen-Tadpole-Topologien für mehrere Massen abzubilden. Diese Topologien wurden mit dem MATHEMATICA-Programm FIRE [68] auf einige wenige Masterintegrale reduziert. Für die Masterintegrale wurde das MATHEMATICA-Paket TWOMASSTADPOLES [69] verwendet, in dem die Masterintegrale, durch Harmonische Polylogarithmen ausgedrückt, vorliegen. Die Drei-Schleifen-Tadpole-Masterintegrale mit zwei verschiedenen Massen sind teilweise analytisch bekannt [69], trotzdem wurde hier eine andere Strategie verwendet, die sich schon in Ref. [70] als erfolgreich herausgestellt hat. Dazu wurden für die Drei-Schleifen-Diagramme zwei verschiedene Entwicklungen im Massenverhältnis zwischen m_t und M_W durchgeführt, mit dem Ziel zwischen den beiden Entwicklungen zu interpolieren um daraus die Ergebnisse im physikalischen Bereich für M_W/m_t zu erhalten. Folgende Variablen erweisen sich hierbei als nützlich,

$$x = \frac{m_t^2(\mu_0)}{M_W^2}, \quad w = 1 - \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (3.27)$$

Die erste Entwicklung war eine asymptotische Entwicklung [62] für $m_t \gg M_W$ ($y \ll 1$), wobei die Diagramme bis zur Ordnung y^{12} berechnet wurden. In Abb. 3.5 ist die asymptotische Entwicklung für ein Beispieldiagramm zur Drei-Schleifen-Ordnung dargestellt. Das Ausgangsdiagramm geht dabei in zwei Subdiagramme über. Auf der rechten Seite sind die beiden Subdiagramme zu sehen, wobei der Operator \mathcal{T}_{M_W} die Taylorentwicklung in M_W im linken Subdiagramm andeutet. Mit Hilfe der Zahlen an den Propagatoren des ursprünglichen Diagramms ist zu erkennen, welcher Propagator in welchem Teildiagramm auf der rechten Seite auftritt. Das erste Subdiagramm wird nach der Taylorentwicklung in M_W zu einem Drei-Schleifen-Tadpole mit einer Masse (m_t). Das zweite Subdiagramm setzt sich aus einem Ein-Schleifen-Tadpole mit der Masse M_W und einem Zwei-Schleifen-Tadpole mit der Masse m_t zusammen. Die genaue Vorschrift zur Bestimmung

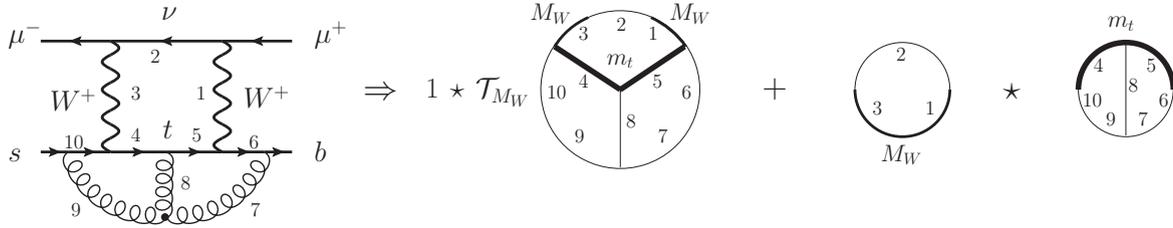


Abbildung 3.5.: Beispieldiagramm mit asymptotischer Entwicklung für $m_t \gg M_W$. Die Zahlen an den Linien deuten an, aus welchen Linien des ursprünglichen Diagramms sich die Subdiagramme zusammensetzen. Der Operator \mathcal{T}_{M_W} symbolisiert die Taylorentwicklung in M_W , die in dem Subdiagramm durchgeführt wird.

der Subdiagramme für die asymptotische Entwicklung ist z.B. in Ref. [71] angegeben. In dieser Arbeit wurde zur Erzeugung der Subdiagramme das Programm EXP [59, 60] verwendet.

Für die zweite Entwicklung wurde eine Taylorentwicklung für $m_t \approx M_W$ ($w \ll 1$) bis zur Ordnung w^{16} durchgeführt. Dazu wurde M_W im W -Boson- und im would-be Goldstone-Boson-Propagator durch m_t und w ausgedrückt und die Propagatoren für $w \ll 1$ entwickelt,

$$\frac{1}{p^2 - M_W^2} = \frac{1}{p^2 - m_t^2 + w m_t^2} = \frac{1}{p^2 - m_t^2} \sum_{i=0}^k \left(\frac{w m_t^2}{p^2 - m_t^2} \right)^i + \mathcal{O}(w^{k+1}). \quad (3.28)$$

Damit tritt nur die Masse des Top-Quarks in den Propagatoren auf und das Problem reduziert sich auf Drei-Schleifen-Tadpole mit einer Masse.

Im Folgenden werden die Gleichungen zur Bestimmung der Wilson-Koeffizienten, auch Matching-Formeln genannt, diskutiert. Die Grundidee dieser Formeln ist das Gleichsetzen der Amplituden in der vollen und der effektiven Theorie,

$$A_{\text{eff}}(\mu_0) \stackrel{!}{=} A_{\text{SM}}(\mu_0), \quad (3.29)$$

an der Matching-Skala μ_0 . Daraus lassen sich die Wilson-Koeffizienten ableiten, welche als effektive Kopplungskonstanten in A_{eff} auftreten. Den Wilson-Koeffizient $C_A^{E,Q}$ des evaneszenten Operators Q_A^E erhält man aus folgender Gleichung,

$$C_A^{E,Q} = C_{A,\text{bare}}^{E,Q,(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(C_{A,\text{bare}}^{E,Q,(1)} + \delta^{tQ} \Delta T^{E,t,(1)} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \quad (3.30)$$

mit $Q = c, t$. Die Größen $C_{A,\text{bare}}^{E,Q,(0)}$ und $C_{A,\text{bare}}^{E,Q,(1)}$ sind die unrenormierten SM-Amplituden die in Kombination mit der Dirac-Struktur des Operators Q_A^E auftreten. Des Weiteren muss in der vollen Theorie die Masse des Top-Quarks renormiert werden. Die Renormierung von m_t wird in Gl. (3.30) durch die Größe

$$\Delta T^{E,t,(1)} = \left(C_{A,\text{bare}}^{E,t,(0)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} \right)_{\alpha_s} \quad (3.31)$$

dargestellt, was gerade der multiplikativen Renormierung des unrenormierten Ein-Schleifen-Ergebnisses entspricht. Auf der Seite der effektiven Theorie gibt es, wie weiter oben bereits

erläutert, nur die Tree-Level-Einsetzung des Operators Q_A^E , eine Renormierung des Operators tritt zu dieser Ordnung in α_s nicht auf.

Den Wilson-Koeffizient $C_A^{W,Q}$ erhält man durch die Gleichung

$$C_A^{W,Q} = (1 + \Delta Z_\psi) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \left[(Z_{g_s}^{\text{SM}})^{2n} C_{A,\text{bare}}^{W,Q,(n)} + \delta^{tQ} \Delta T^{W,t,(n)} \right] - Z_{EN} C_A^{E,Q} + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.32)$$

mit $Q = c, t$. Hierbei sind $C_{A,\text{bare}}^{W,Q,(n)}$ als unrenormierte $(n+1)$ -Schleifen-Amplituden zur Dirac-Struktur des Operators Q_A zu verstehen. Diese Gleichung muss in α_s entwickelt werden, um die Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ergebnisse zu erhalten. Es ist zu beachten, dass Gl. (3.32) nur bis zur Drei-Schleifen-Ordnung korrekt ist. Der Term $Z_{EN} C_A^{E,Q}$ in Gl. (3.32) kommt durch die Renormierung des Operators Q_A zustande und verbindet gerade den Wilson-Koeffizient des evaneszenten Operators Q_A^E mit dem physikalischen Wilson-Koeffizient C_A^W . In der SM-Amplitude muss die Top-Quark-Masse m_t renormiert werden,

$$\begin{aligned} \Delta T^{W,t,(0)} &= 0, \\ \Delta T^{W,t,(1)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{W,t,(0)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta T^{W,t,(2)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{W,t,(0)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{A,\text{bare}}^{W,t,(1)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} \right)_{\alpha_s^2}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dabei wurde die nackte Masse durch die renormierte Masse multipliziert mit der Renormierungskonstanten Z_{m_t} ersetzt und der Koeffizient von $\left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^n$ mit $n = 1, 2$ genommen, was durch α_s und α_s^2 am Ende der Klammern in Gl. (3.33) angedeutet ist. Neben der Masse des Top-Quarks muss auch die starke Kopplungskonstante in der SM-Amplitude renormiert werden, was durch eine multiplikative Renormierung mit der Renormierungskonstanten $Z_{g_s}^{\text{SM}}$ der starken Kopplungskonstanten g_s in Gl. (3.32) geschieht. Der Faktor ΔZ_ψ steht für die Wellenfunktions-Renormierung und wird zusammen mit den genauen Definitionen der verwendeten Renormierungskonstanten im folgenden Abschnitt erklärt.

Da in der effektiven Theorie alle schweren Teilchen ausintegriert sind, handelt es sich bei α_s in der effektiven Theorie um $\alpha_s^{(5)}$, also um die 5-Flavour-Kopplung mit ausintegriertem Top-Quark. Im restlichen Teil der Arbeit gilt immer $\alpha_s = \alpha_s^{(5)}$. In der vollen Theorie befindet man sich in der 6-Flavour-Theorie, da das Top-Quark enthalten ist. Um nun beide Seiten zusammenzubringen, muss $\alpha_s^{(6)}$ in der vollen Theorie durch $\alpha_s^{(5)}$ ausgedrückt werden,

$$\alpha_s^{(6)} = \frac{\alpha_s^{(5)}}{\zeta_{g_s}^2}. \quad (3.34)$$

ζ_{g_s} ist der Entkopplungskoeffizient der starken Eichkopplung. Alle in dieser Arbeit benötigten Entkopplungskoeffizienten finden sich in Ref. [72], eine detaillierte Beschreibung zum Entkoppeln von schweren Quarks in der QCD findet sich in Ref. [73].

Außerdem ist es nötig, die Renormierungskonstanten für die SM-Amplituden so anzupassen, dass alle Größen durch ihre 5-Flavour-Version ausgedrückt sind. Die verwendeten Renormierungskonstanten im $\overline{\text{MS}}$ -Schema lauten damit

$$Z_{g_s}^{\text{SM}} = \frac{1}{\zeta_{g_s}} Z_{g_s}^{(6)}$$

$$= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(-\frac{23}{6} \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{3\epsilon} N_\epsilon \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (3.35)$$

und

$$\begin{aligned} Z_{m_t} &= Z_{m_t}^{(6)} \\ &= 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} 4 \frac{1}{\epsilon} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(\frac{74}{3\epsilon^2} - \frac{27}{\epsilon} - \frac{8}{3\epsilon^2} N_\epsilon \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \end{aligned} \quad (3.36)$$

mit

$$N_\epsilon = \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right)^\epsilon e^{\gamma_E \epsilon} \Gamma(1 + \epsilon). \quad (3.37)$$

In dieser Arbeit wurde die Konvention verwendet, dass n -Schleifen-Diagramme mit $\tilde{\mu}^{n\epsilon}$ normiert werden, mit $\tilde{\mu}^2 = \mu^2 e^{\gamma_E}/(4\pi)$ und der Euler-Mascheroni-Konstanten γ_E . In dieser Konvention treten keine Terme mit γ_E und $\ln 4\pi$ in $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungskonstanten auf. Für $Z_{m_t}^{(6)}$ wurde die Renormierungskonstante $Z_m^{(6)}$ aus Anhang A.2 verwendet und $\alpha_s^{(6)}$ durch $\alpha_s^{(5)}$ mit Gl. (3.34) ausgedrückt, $Z_{g_s}^{(n)}$ ist in Anhang A.2 angegeben.

Neben der Parameter-Renormierung von α_s und m_t müssen auch die Quark-Felder sowohl in der effektiven als auch in der vollen Theorie renormiert werden. In der effektiven Theorie gilt

$$Z_\psi^{\text{eff}} = Z_\psi^{(5)}, \quad (3.38)$$

$Z_\psi^{(5)}$ ist im Anhang A.2 angegeben. In der vollen Theorie gilt für die Wellenfunktions-Renormierungskonstante

$$Z_\psi^{\text{SM}} = \frac{1}{\zeta_\psi} Z_\psi^{(6)}. \quad (3.39)$$

Außerdem wurden alle Größen in $Z_\psi^{(6)}$ durch die entsprechenden 5-Flavour-Größen ausgedrückt, für α_s wurde Gl. (3.34) verwendet und für den QCD-Eichparameter ξ die Relation

$$\xi^{(6)} - 1 = \frac{1}{\zeta_{gl}} \left(\xi^{(5)} - 1 \right). \quad (3.40)$$

Das Ergebnis für Z_ψ^{SM} lautet

$$\begin{aligned} Z_\psi^{\text{SM}} &= 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \xi \right) \\ &+ \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{44}{9} - \frac{61}{9} \xi + \frac{17}{9} \xi^2 \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{35}{3} + 5\xi - \frac{1}{2} \xi^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{5}{9} + \frac{4}{3} \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3, \epsilon). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Da die Quark-Felder sowohl in der vollen als auch in der effektiven Theorie renormiert werden müssen, wird in Gl. (3.32) nur die Differenz zwischen Z_ψ in der vollen und der effektiven Theorie benötigt,

$$\Delta Z_\psi = Z_\psi^{\text{SM}} - Z_\psi^{\text{eff}}$$

$$= \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 N_\epsilon^2 \left(\frac{2}{3\epsilon} - \frac{5}{9}\right) + \mathcal{O}(\alpha_s^3, \epsilon). \quad (3.42)$$

Da ΔZ_ψ erst zur Ordnung α_s^2 beiträgt, tritt dieser Term in der Matching-Formel für C_A^E in Gl. (3.30) nicht auf. Im folgenden Kapitel 3.2.1.2 werden die Renormierungskonstanten Z_ψ^{SM} und Z_ψ^{eff} aber einzeln benötigt.

Die Ergebnisse für $C_A^{E,Q}$ zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung lauten

$$\begin{aligned} C_A^{E,t,(0)} &= \frac{1}{64} \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right)^\epsilon \left[\frac{2}{x-1} - \frac{2x \ln x}{(x-1)^2} + \epsilon \left(\frac{3}{x-1} - \frac{(x+2) \ln x + x \ln^2 x}{(x-1)^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ C_A^{E,t,(1)} &= \frac{7-23x}{24(x-1)^2} + \frac{7x+9x^2}{24(x-1)^3} \ln x + \frac{x}{4(x-1)^2} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &\quad + \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{-x}{2(x-1)^2} + \frac{x+x^2}{4(x-1)^3} \ln x \right] + \mathcal{O}(\epsilon), \\ C_A^{E,c,(0)} &= -\frac{1}{64} \left(\frac{\mu_0^2}{M_W^2}\right)^\epsilon (2+3\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ C_A^{E,c,(1)} &= \frac{7}{24} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die Ergebnisse für $C_A^{W,Q}$ werden in Kapitel 3.2.1.3 angegeben und diskutiert.

3.2.1.2. Matching in vier Dimensionen

In einer zweiten Rechnung wurden die Quark-Massen m_b und m_s als IR-Regulatoren eingeführt, ähnlich zu der Rechnung für die Zwei-Schleifen-Beiträge zu C_A in Ref. [56]. Dadurch gibt es nun auch Ein- und Zwei-Schleifen-Beiträge zur Amplitude $s \rightarrow bl^+l^-$ in der effektiven Theorie, im vorherigen Kapitel waren diese Diagramme null. Die Amplituden in der effektiven und der vollen Theorie wurden getrennt voneinander renormiert. Da nun m_b und m_s als IR-Regulatoren verwendet wurden, traten nach der Renormierung keine Pole in ϵ mehr auf und die Ergebnisse der vollen und effektiven Theorie konnten damit in $d = 4$ Dimensionen in der Matching-Formel gleichgesetzt werden. Evaneszente Operatoren tragen nicht bei, da diese in vier Dimensionen verschwinden.

In der effektiven Theorie wurden Ein- und Zwei-Schleifen-Diagramme mit dem Operator Q_A berechnet, siehe Abb. 3.4, diesmal aber mit nicht-verschwindenden Quark-Massen m_b und m_s . Die äußeren Impulse wurden auch hier auf null gesetzt. Außerdem wurde eine asymptotische Entwicklung in

$$m_b \gg m_s \quad (3.44)$$

durchgeführt. Die renormierte Amplitude A_{eff}^Q , mit $Q = c, t$, lautet

$$\begin{aligned} A_{\text{eff}}^Q &= Z_{NN} Z_\psi^{\text{eff}} \left[1 + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) \left(Z_{g_s}^{(5)}\right)^2 A_{\text{bare}}^{(1l)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \left(A_{\text{bare}}^{(2l)} + \Delta A_\xi + \Delta A_{m_{b,s}}\right) \right] C_A^{W,Q} + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dabei mussten der Eichparameter ξ und die Massen m_b und m_s renormiert werden,

$$\begin{aligned}\Delta A_\xi &= \left(A_{\text{bare}}^{(1l)} \Big|_{(\xi^{\text{bare}}-1) \rightarrow Z_{gl}^{(5)}(\xi-1)} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta A_{m_{b,s}} &= \left(A_{\text{bare}}^{(1l)} \Big|_{m_{b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_m m_{b,s}} \right)_{\alpha_s}.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Die Amplitude A_{eff}^Q ist UV-endlich, jedoch abhängig vom QCD-Eichparameter. Außerdem ist es nicht möglich den Limes $m_s \rightarrow 0$ und $m_b \rightarrow 0$ zu bilden, da m_b und m_s die IR-Divergenzen regularisieren.

In der vollen Theorie berechnet man nun dieselben Diagramme wie in Kapitel 3.2.1.1, diesmal aber mit bis zu vier Massen. Diese Diagramme wurden mit Hilfe der asymptotischen Entwicklung

$$m_t, M_W \gg m_b \gg m_s \quad (3.47)$$

berechnet. Zusätzlich wurde die Entwicklung $m_t \gg M_W$ bzw. $m_t \approx M_W$ verwendet. Die renormierte SM-Amplitude A_{SM}^Q ist ebenfalls UV-endlich und vom QCD-Eichparameter abhängig,

$$\begin{aligned}A_{\text{SM}}^Q &= Z_\psi^{\text{SM}} \left[C_{A,\text{bare}}^{W,Q,(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right) \left((Z_{g_s}^{\text{SM}})^2 C_{A,\text{bare}}^{W,Q,(1)} + \delta^{tQ} \Delta T^{W,t,(1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(C_{A,\text{bare}}^{W,Q,(2)} + \delta^{tQ} \Delta T^{W,t,(2)} + \Delta R_\xi^Q + \Delta R_{m_{b,s}}^Q \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3),\end{aligned}\quad (3.48)$$

mit $Q = c, t$. Durch die Renormierung der leichten Quark-Massen und des QCD-Eichparameters gibt es folgende Anteile,

$$\begin{aligned}\Delta R_\xi^Q &= \left(C_{A,\text{bare}}^{W,Q,(1)} \Big|_{(\xi^{\text{bare}}-1) \rightarrow Z_{gl}^{\text{SM}}(\xi-1)} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta R_{m_{b,s}}^Q &= \left(C_{A,\text{bare}}^{W,Q,(1)} \Big|_{m_{b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_m m_{b,s}} \right)_{\alpha_s}.\end{aligned}\quad (3.49)$$

Hierbei ist zu beachten, dass Z_{gl}^{SM} die Gluon-Wellenfunktions-Renormierungskonstante ausgedrückt durch Größen in der 5-Flavour-Theorie ist,

$$Z_{gl}^{\text{SM}} = \frac{1}{\zeta_{gl}} Z_{gl}^{(6)}. \quad (3.50)$$

$Z_{gl}^{(6)}$ ist im Anhang A.2 angegeben.

Setzt man die renormierten Amplituden der effektiven und vollen Theorie gleich,

$$A_{\text{eff}}^Q = A_{\text{SM}}^Q, \quad (3.51)$$

kann daraus $C_A^{W,Q}$ bestimmt werden. Nach dem Matching ist es nun auch möglich den Limes $m_s \rightarrow 0$ und $m_b \rightarrow 0$ zu bilden. Das so erhaltene Ergebnis für $C_A^{W,Q}$ ist unabhängig von ξ und stimmt mit den Resultaten aus Kapitel 3.2.1.1 überein. Da diese Rechnung im Vergleich zum Matching in d Dimensionen einen weit größeren Rechenaufwand benötigt, wurden nur die ersten zwei (drei) Terme in der Entwicklung in y (w) getestet. Dies ist als unabhängige Kontrolle für die Ergebnisse in Kapitel 3.2.1.1 ausreichend.

3.2.1.3. Ergebnisse für $C_A^{W,(2)}$

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse für $C_A^{W,(2)}$ angegeben und diskutiert. Die Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnisse aus Ref. [56] konnten reproduziert werden und lauten

$$\begin{aligned}
C_A^{W,t,(0)}(\mu_0) &= \frac{1}{8(x-1)} - \frac{x}{8(x-1)^2} \ln x, \\
C_A^{W,t,(1)}(\mu_0) &= -\frac{3+13x}{6(x-1)^2} + \frac{17x-x^2}{6(x-1)^3} \ln x + \frac{x}{(x-1)^2} \text{Li}_2\left(1-\frac{1}{x}\right) \\
&\quad + \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{-2x}{(x-1)^2} + \frac{x+x^2}{(x-1)^3} \ln x \right], \\
C_A^{W,c,(0)}(\mu_0) &= -\frac{1}{8}, \\
C_A^{W,c,(1)}(\mu_0) &= -\frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{3.52}$$

mit $x = m_t^2/M_W^2$. Aus den exakten Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnissen lassen sich die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile des Drei-Schleifen-Ergebnisses mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung (RGE) mit exakter Massenabhängigkeit bestimmen. Da dies für alle Wilson-Koeffizienten zur Drei-Schleifen-Ordnung in dieser Arbeit gemacht wurde, wird das Vorgehen hier exemplarisch skizziert. Ausgangspunkt ist die RGE für einen Wilson-Koeffizient $C_i(\mu)$,

$$\mu \frac{d}{d\mu} C_i(\mu) = C_j(\mu) \gamma_{ji}(\mu), \tag{3.53}$$

die in

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} C_i(\mu) = C_j(\mu) \gamma_{ji}(\mu) - \beta(\tilde{\alpha}_s) \frac{d}{d\tilde{\alpha}_s} C_i(\mu) - \sum_X \gamma_X X \frac{d}{dX} C_i(\mu), \tag{3.54}$$

mit $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s/(4\pi)$, umgeschrieben werden kann. Die anomalen Dimensionen γ_{ji} sind im Allgemeinen Matrizen, da verschiedene Wilson-Koeffizienten C_j mit C_i mischen können. Die β -Funktion der starken Kopplungskonstanten ist mit

$$\mu \frac{d}{d\mu} \tilde{\alpha}_s = \beta(\tilde{\alpha}_s) = - \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_s^{n+2} \beta_n \tag{3.55}$$

definiert. In Gl. (3.54) wird über alle μ -abhängigen Größen $X = m_t, \dots$, die in C_i auftreten, summiert. Die anomale Dimension γ_X für die Größe X ist mit

$$\mu \frac{d}{d\mu} X = X \gamma_X = -X \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_s^{n+1} \gamma_X^n \tag{3.56}$$

definiert. Eine ausführliche Beschreibung der Berechnung von anomalen Dimensionen und der QCD- β -Funktion findet sich z.B. in Ref. [74]. Nachdem Gl. (3.54) in α_s entwickelt wurde, erkennt man, dass der Wilson-Koeffizient auf der linken Seite immer zu einer höheren Ordnung in α_s auftritt als die Wilson-Koeffizienten auf der rechten Seite. Durch Integrieren der Gleichung erhält man dann die gesuchten $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile zur n -Schleifen-Ordnung aus den Ergebnissen der niedrigeren Ordnungen.

Im Folgenden wird Gl. (3.54) für den Wilson-Koeffizient C_A diskutiert. Die anomale Dimension von C_A ist null, außerdem kommt neben α_s nur die Masse des Top-Quarks als μ -abhängige Größe in C_A vor. Dadurch ergeben sich folgende Gleichungen zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung.

- Ordnung α_s^0 :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} C_A^{(0)} = 0 \quad (3.57)$$

- Ordnung α_s :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} C_A^{(1)} = \gamma_m^0 m_t \frac{d}{dm_t} C_A^{(0)} \quad (3.58)$$

- Ordnung α_s^2 :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} C_A^{(2)} = \gamma_m^0 m_t \frac{d}{dm_t} C_A^{(1)} + \gamma_m^1 m_t \frac{d}{dm_t} C_A^{(0)} + \beta_0 C_A^{(1)} \quad (3.59)$$

Nach der Integration von Gl. (3.59) erhält man die Ergebnisse der $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile zur Drei-Schleifen-Ordnung mit exakter Massenabhängigkeit,

$$\begin{aligned} C_A^{W,t,(2)}(\mu_0) &= C_A^{t,W,(2)}(\mu_0 = m_t) + \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{69 + 1292x - 209x^2}{18(x-1)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{521x + 105x^2 - 50x^3}{9(x-1)^4} \ln x - \frac{47x + x^2}{3(x-1)^3} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right] \\ &\quad + \ln^2\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{61x + 11x^2}{3(x-1)^3} - \frac{49x + 96x^2 \text{wei} - x^3}{6(x-1)^4} \ln x \right], \\ C_A^{W,c,(2)}(\mu_0) &= C_A^{c,W,(2)}(\mu_0 = M_W) - \frac{23}{6} \ln\left(\frac{\mu_0^2}{M_W^2}\right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Ergebnisse zur Drei-Schleifen-Ordnung wurden in Ref. [57] veröffentlicht und lauten für die beiden Entwicklungen mit $m_t \gg M_W$ und $m_t \approx M_W$

$$\begin{aligned} C_A^{W,c,(2)}(\mu_0 = M_W) &= -5.222 - 0.2215 y^2 + 0.1244 y^2 \ln y - 0.08889 y^2 \ln^2 y + 0.04146 y^4 \\ &\quad - 0.02955 y^4 \ln y + 0.009524 y^4 \ln^2 y - 0.001092 y^6 + 0.0006349 y^6 \ln y \\ &\quad - 0.00004286 y^8 + 0.00003207 y^8 \ln y - 3.109 \cdot 10^{-6} y^{10} \\ &\quad + 2.643 \cdot 10^{-6} y^{10} \ln y - 3.009 \cdot 10^{-7} y^{12} + 2.775 \cdot 10^{-7} y^{12} \ln y \\ &\quad + \mathcal{O}(y^{14}), \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} C_A^{W,c,(2)}(\mu_0 = M_W) &= -5.403 + 0.09422 w + 0.02786 w^2 + 0.01355 w^3 + 0.008129 w^4 \\ &\quad + 0.005469 w^5 + 0.003957 w^6 + 0.003009 w^7 + 0.002373 w^8 \\ &\quad + 0.001925 w^9 + 0.001596 w^{10} + 0.001346 w^{11} + 0.001153 w^{12} \\ &\quad + 0.0009996 w^{13} + 0.0008757 w^{14} + 0.0007742 w^{15} + 0.0006898 w^{16} \\ &\quad + \mathcal{O}(w^{17}), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$C_A^{W,t,(2)}(\mu_0 = m_t) = 2.710 y^2 + 6.010 y^2 \ln y - 8.156 y^4 - 1.131 y^4 \ln y - 0.5394 y^6$$

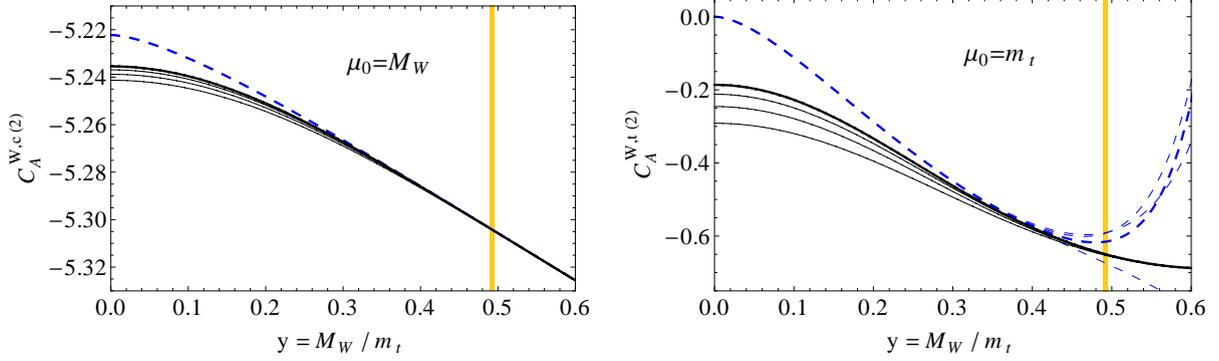


Abbildung 3.6.: $C_A^{W,(2)}$ als Funktion von $y = M_W/m_t$ für den Charm- (links) und Top-Quark-Sektor (rechts). Die blaue, gestrichelte Linie gibt die Entwicklung für $y \ll 1$ und die schwarze, durchgezogene Linie für $w = 1 - y^2 \ll 1$ an. Dünne Linien wurden weniger weit in y bzw. w entwickelt. Das gelbe Band entspricht dem physikalischen Bereich für y .

$$\begin{aligned}
& -13.97 y^6 \ln y + 35.32 y^8 + 15.64 y^8 \ln y + 103.9 y^{10} \\
& + 149.2 y^{10} \ln y + 207.7 y^{12} + 454.8 y^{12} \ln y + \mathcal{O}(y^{14}) , \quad (3.63) \\
C_A^{W,t,(2)}(\mu_0 = m_t) = & -0.4495 - 0.5845 w + 0.1330 w^2 + 0.1563 w^3 + 0.1233 w^4 \\
& + 0.09333 w^5 + 0.07134 w^6 + 0.05561 w^7 + 0.04425 w^8 \\
& + 0.03589 w^9 + 0.02960 w^{10} + 0.02478 w^{11} + 0.02102 w^{12} \\
& + 0.01803 w^{13} + 0.01562 w^{14} + 0.01366 w^{15} + 0.01204 w^{16} \\
& + \mathcal{O}(w^{17}) . \quad (3.64)
\end{aligned}$$

Die Vorfaktoren von y und w sind hier numerisch angegeben, analytische Ausdrücke für diese Koeffizienten können als MATHEMATICA-Datei von der Webseite [75] heruntergeladen werden.

In Abb. 3.6 sind die Drei-Schleifen-Ergebnisse für den Charm- (links) und den Top-Quark-Anteil (rechts) in Abhängigkeit von $y = M_W/m_t$ dargestellt. Die schwarzen, durchgezogenen Linien entsprechen der Entwicklung $y = \sqrt{1-w} \approx 1$ und die blauen, gestrichelten Linien der Entwicklung $y \ll 1$. Dünne Linien stehen für weniger weit entwickelte Ergebnisse. Diese können als Abschätzung für die Güte der Entwicklung angesehen werden. In Bereichen, in denen es eine Überlappung zwischen den Entwicklungen mit geringerer „Tiefe“ und der höchsten Entwicklung gibt, kann angenommen werden, dass die Entwicklung das exakte (unbekannte) Ergebnis sehr gut approximiert. Für den Charm-Quark-Beitrag wurde die Matching-Skala auf die W -Boson-Masse gesetzt, $\mu_0 = M_W$. Hier stimmen die beiden Entwicklungen in einem großen Bereich überein. Das Top-Quark tritt in den Diagrammen zu $C_A^{W,c,(2)}$ nur durch Schleifen-Korrekturen im Gluon-Propagator auf. Im Top-Quark-Sektor wurde die Matching-Skala auf die Top-Quark-Masse gesetzt, $\mu_0 = m_t$. Die Entwicklungen konvergieren in ihrem jeweiligen Bereich sehr gut. Außerdem gibt es eine deutliche Überlappung im Bereich von $0.3 < y < 0.4$ zwischen den beiden unterschiedlichen Entwicklungen. Dadurch ist es nun möglich den gesamten Bereich in y durch diese Entwicklungen abzudecken. Mit Blick auf den physikalischen Bereich von y (gelbes Band in Abb. 3.6), ist die Entwicklung für $M_W \approx m_t$ ausreichend.

Um die Koeffizienten in einer handlichen Form darzustellen, wurden die Ergebnisse aus Gl. (3.61)

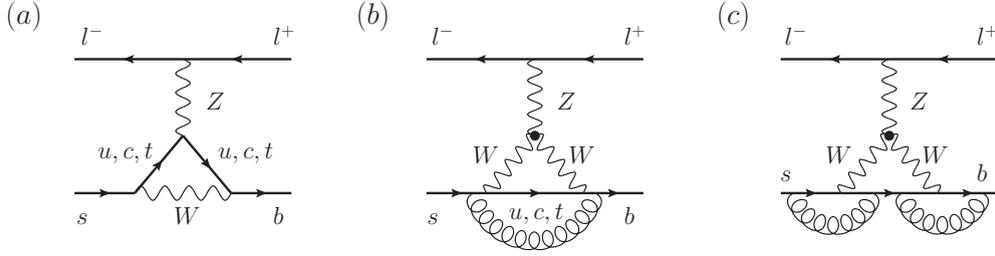


Abbildung 3.7.: Beiträge zu $C_A^{Z(n)}$ im SM auf Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung.

und Gl. (3.62) bzw. Gl. (3.63) und Gl. (3.64) gefittet,

$$\begin{aligned} C_A^{W,c,(2)}(\mu_0 = M_W) &\simeq -0.015y^2 - 0.182y - 5.211, \\ C_A^{W,t,(2)}(\mu_0 = m_t) &\simeq 2.255y^2 - 2.816y + 0.189, \end{aligned} \quad (3.65)$$

wobei diese Formeln die Kurven in Abb. 3.6 mit einer Genauigkeit besser als 1% im Bereich $0.3 < y < 0.7$ approximieren.

3.2.2. Z-Boson-Pinguin-Diagramme

Analog zu den W -Boson-Box-Diagrammen lassen sich auch die Z -Boson-Pinguin-Anteile in einen Top- und einen Charm-Quark-Beitrag aufspalten,

$$C_A^{Z,(n)} = C_A^{Z,t,(n)} - C_A^{Z,c,(n)} + \delta^{n,2} \left(C_A^{Z,t,\text{tria.}} - C_A^{Z,c,\text{tria.}} \right). \quad (3.66)$$

Für den Z -Pinguin-Anteil gibt es zur Drei-Schleifen-Ordnung zum ersten Mal einen Beitrag durch Fermion-Dreiecks-Diagramme $C_A^{Z,\text{tria.}}$, siehe Abb. 3.10(a). In diesen Diagrammen muss darauf geachtet werden, dass γ_5 innerhalb der Schleife korrekt behandelt wird. Eine genaue Beschreibung der Berechnung dieser Diagramme findet sich in Kapitel 3.2.2.2.

Außerdem ist es schon in führender Ordnung notwendig einen elektroschwachen Counterterm einzuführen, um die flavour-nichtdiagonale Zwei-Punkt-Funktion, die den Übergang von einem Strange- in ein Bottom-Quark beschreibt, so zu renormieren, dass diese für einen verschwindenden äußeren Impuls null wird. Die Bestimmung der entsprechenden Renormierungskonstanten wird im folgenden Kapitel diskutiert.

Die eigentlichen Drei-Schleifen-Diagramme zum Z -Pinguin und die Matching-Formel für $C_A^{Z,Q}$ werden im Kapitel 3.2.2.3 behandelt. In Abb. 3.7 sind Beispieldiagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung dargestellt.

3.2.2.1. Elektroschwacher Counterterm

Für die Z -Pinguin-Diagramme ist es notwendig einen elektroschwachen Counterterm einzuführen, der schon auf Ein-Schleifen-Niveau beiträgt. Dieser ist so definiert, dass die off-shell Propagatoren der leichten Quarks flavour-diagonal bleiben, bis auf Effekte, die mit q^2/M_W^2 unterdrückt sind [70], wobei q der äußere Impuls ist. Die Counterterm-Lagrangedichte lautet [70, 76]

$$\mathcal{L}_{\text{counter}}^{\text{ew}} = \frac{G_F M_W^2}{4\sqrt{2}\pi^2} [V_{cb}^* V_{cs} \bar{b} P_R (i Z_{2, sb}^c \not{D} - Z_{0, sb}^c m_b) s$$

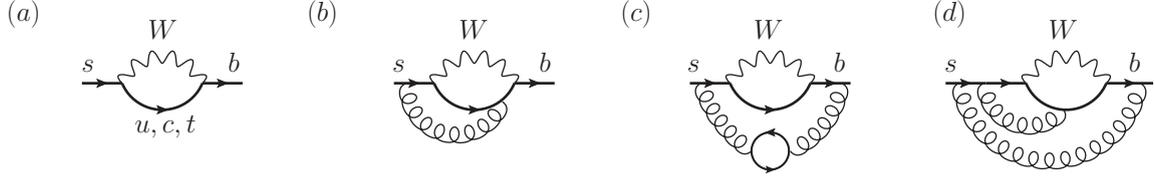


Abbildung 3.8.: Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Diagramme für die Renormierungskonstanten $Z_{2, sb}^Q$ und $Z_{0, sb}^Q$.

$$+ V_{tb}^* V_{ts} \bar{b} P_R \left(i Z_{2, sb}^t \not{D} - Z_{0, sb}^t m_b \right) s \Big], \quad (3.67)$$

wobei D^μ die kovariante Ableitung aus Gl. (2.5) bezeichnet. Die daraus resultierenden Counterterme liefern Beiträge zu den Übergängen sb , $sb\gamma$, sbZ und müssen in alle möglichen Kombinationen innerhalb der 1LPI-Diagramme eingesetzt werden.

Die Renormierungskonstanten $Z_{0, sb}^Q$ mit $Q = c, t$ werden für C_A nicht benötigt, da alle leichten Quark-Massen auf null gesetzt wurden. Sie treten jedoch in Kapitel 4 für den Higgs-Pinguin und in Kapitel 5 für $b \rightarrow s\gamma$ auf. Zur Bestimmung der Renormierungskonstanten $Z_{2, sb}^Q$ kann die Zwei-Punkt-Funktion sb berechnet werden. Hierzu wurde eine Taylor-Entwicklung im äußeren Impuls durchgeführt. Da der Counterterm sbZ schon in der führenden Ordnung $C_A^{Z, (0)}$ auftritt, müssen für die Renormierungskonstanten $Z_{2, sb}^Q$ die Drei-Schleifen-QCD-Korrekturen berechnet werden. Beispieldiagramme sind in Abb. 3.8 zu sehen. Die Reihenentwicklung von $Z_{2, sb}^Q$ in α_s lautet

$$\begin{aligned} Z_{2, sb}^c &= \sum_{n=0} \left(\frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right)^{(n+1)\epsilon} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n Z_{2, sb}^{c, (n)}, \\ Z_{2, sb}^t &= \sum_{n=0} \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right)^{(n+1)\epsilon} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n Z_{2, sb}^{t, (n)}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Die Faktoren $(\mu_0^2/M_W^2)^{n\epsilon}$ und $(\mu_0^2/m_t^2)^{n\epsilon}$ treten bei der Berechnung der n -Schleifen-Diagramme für $Z_{2, sb}^c$ und $Z_{2, sb}^t$ in dieser Form auf und können aus dem Ergebnis herausgezogen werden.

An dieser Stelle muss noch erwähnt werden, dass in $Z_{2, sb}^Q$ die Parameter α_s und m_t schon renormiert wurden. Dabei wurden wieder die Renormierungskonstanten aus Gl. (3.35) und Gl. (3.36) verwendet, um die Ergebnisse durch α_s in der 5-Flavour-Theorie auszudrücken. Die QCD-Wellenfunktions-Renormierung wurde hingegen noch nicht durchgeführt, da diese in der eigentlichen Matching-Formel berücksichtigt wird.

Ein interessanter Punkt ist, dass zur Bestimmung von $Z_{2, sb}^{Q, (2)}$ auch Counterterm-Einsetzungen von $Z_{2, sb}^{Q, (0)}$ in die Zwei-Punkt-Funktion sb benötigt werden. In Abb. 3.9 sind die Diagramme mit den Counterterm-Einsetzungen und einer geschlossenen Top-Quark-Schleife dargestellt. Alle anderen Counterterm-Einsetzungen verschwinden, da die entsprechenden Diagramme skalenlos sind.

Zur Drei-Schleifen-Ordnung wurden die Diagramme wieder für $y \ll 1$ und für $w \ll 1$ in den Massen entwickelt. Die Ergebnisse zur Ein-Schleifen-Ordnung lauten

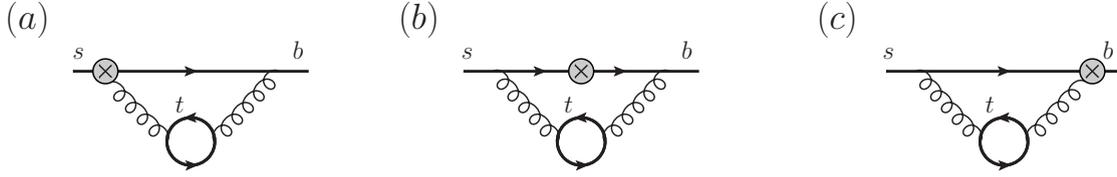


Abbildung 3.9.: Zwei-Schleifen-Diagramme zur Bestimmung der Renormierungskonstanten $Z_{2, sb}^{Q, (2)}$ mit Counterterm-Einsetzungen.

$$\begin{aligned}
 Z_{2, sb}^{c, (0)} &= -\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon), \\
 Z_{2, sb}^{t, (0)} &= \frac{1}{\epsilon} \left(-1 - \frac{x}{2} \right) + \frac{3x^2 + x + 2}{4 - 4x} + \ln x \frac{2x^2 + 3x - 2}{2(x-1)^2} + \mathcal{O}(\epsilon),
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

wobei die ϵ - und ϵ^2 -Anteile genauso wie die Resultate zur Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung von der Webseite [75] heruntergeladen werden können.

3.2.2.2. Fermion-Dreiecks-Diagramme

Für den Z -Pinguin-Anteil C_A^Z tritt mit den Fermion-Dreiecks-Diagrammen zur Drei-Schleifen-Ordnung eine neue Diagrammklasse auf, die gesondert behandelt werden muss. Ein Beispieldiagramm ist in Abb. 3.10(a) zu sehen. Innerhalb der geschlossenen Quark-Schleife tritt genau ein γ_5 auf, was dazu führt das dieses γ_5 in der Fermion-Spur gesondert behandelt werden muss. Diese Diagramme wurden hier mit zwei verschiedenen Methoden, Larin's Methode und evaneszente Spur-Operatoren, berechnet. In beiden Fällen wurde nur der Axial-Vektor-Anteil in der Quark-Schleife berücksichtigt, da auf Grund von Furry's Theorem [77] der Vektor-Anteil verschwindet. Für masselose Quarks der gleichen Familie, also dem Up- und Down-Quark und dem Charm- und Strange-Quark, heben sich die Anteile gegenseitig weg. Dies ist eine Folge der Anomalie-Freiheit im SM. Deshalb tragen nur Diagramme mit einem massiven Top-Quark und einem masselosen Bottom-Quark in der Quark-Schleife zur Amplitude bei. Für beide Methoden, die im Folgenden diskutiert werden, mussten die Dirac-Matrizen in der geschlossenen Fermion-Schleife bearbeitet werden, was mit dem in dieser Arbeit verwendeten FORM-Setup, basierend auf Projektoren auf die Dirac-Struktur der Diagramme, schwierig ist. Deshalb wurden, wie zu Beginn des Kapitels beschrieben, eigene γ -Matrizen implementiert.

Im ersten Verfahren wurde die Axial-Vektor-Kopplung in der Quark-Schleife, basierend auf Larin's Methode [78], mit

$$\gamma^\mu \gamma_5 \rightarrow \frac{i}{12} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma - \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma_\nu) \tag{3.70}$$

ersetzt. Danach wurde die Spur in d Dimensionen gebildet. Als einzige Eigenschaft des ϵ -Tensors wurde benutzt, dass er für zwei gleiche Indizes verschwindet. Ansonsten wurde der ϵ -Tensor nur symbolisch eingeführt und am Ende mit

$$\begin{aligned}
 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5 &\rightarrow 6 \gamma^\mu \otimes \gamma_\mu \gamma_5, \\
 i \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \otimes \gamma_\mu \gamma_5 &\rightarrow 6 \gamma^\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5,
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

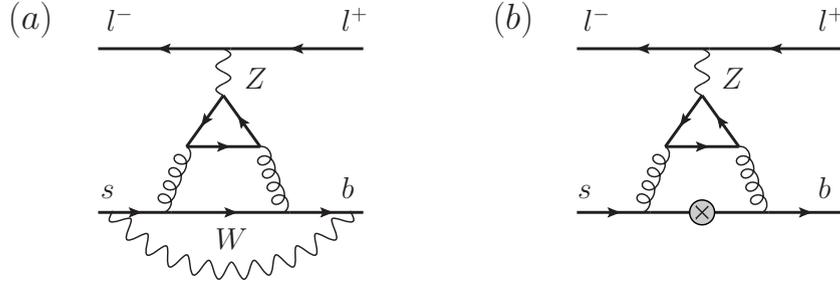


Abbildung 3.10.: Diagramme mit geschlossenem Quark-Dreieck und Axial-Vektor-Kopplung.

wieder ersetzt.

In der zweiten Methode wurde die Fermion-Spur in der geschlossenen Quark-Schleife nicht berechnet. Es wurden nur die Zyklicität der Spur und die Antikommutator-Relationen aller γ -Matrizen, bis auf γ_5 , ausgenutzt. Im Ergebnis bleiben damit die Strukturen

$$\begin{aligned} & \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5 \operatorname{Tr} (\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_5) , \\ & \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \otimes \gamma_\mu \gamma_5 \operatorname{Tr} (\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_5) , \end{aligned} \quad (3.72)$$

stehen. Durch Addieren und Subtrahieren von $24\gamma^\mu \otimes \gamma_\mu \gamma_5$ zur ersten und $24\gamma^\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5$ zur zweiten Struktur in Gl. (3.72) erhält man zum einen Beiträge zu den Koeffizienten der evaneszenten Spur-Operatoren [79]

$$\begin{aligned} Q_1^E &= \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5 \operatorname{Tr} (\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_5) + 24 \gamma^\mu \otimes \gamma_\mu \gamma_5 , \\ Q_2^E &= \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \otimes \gamma_\mu \gamma_5 \operatorname{Tr} (\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu \gamma_5) + 24 \gamma^\mu \gamma_5 \otimes \gamma_\mu \gamma_5 , \end{aligned} \quad (3.73)$$

und zum anderen Beiträge zum Wilson-Koeffizienten C_A . Diese evaneszenten Spur-Operatoren sind analog zu den evaneszenten Operatoren, die für den W -Boson-Anteil verwendet wurden, zu verstehen, d.h. sie verschwinden im Limes $d \rightarrow 4$, müssen aber innerhalb des d -dimensionalen Matchings berücksichtigt werden. Die Wilson-Koeffizienten der evaneszenten Spur-Operatoren sind aber im konkreten Fall nicht von Interesse, da die Operatoren erst auf Vier-Schleifen-Niveau mit dem Operator Q_A mischen können. Hier wurden sie nur benötigt, um den Anteil C_A zu bestimmen.

Die beide vorgestellten Methoden lieferten das gleiche Ergebnis. Zusätzlich zu den eigentlichen Drei-Schleifen-Diagrammen treten auch Counterterm-Einsetzungen von $Z_{2, sb}^{Q, (0)}$ in Zwei-Schleifen-Diagramme auf, siehe z.B. Abb. 3.10(b). Diese Diagramme sind nur dann von null verschieden, wenn ein Top-Quark in der inneren Schleife läuft, da die Diagramme mit masselosen Bottom-Quarks in der Schleife auf skalenlose Integrale führen und damit verschwinden. Die Drei-Schleifen-Diagramme mit Top-Quark und Bottom-Quark in der geschlossenen Quark-Schleife und die Zwei-Schleifen-Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen und einer Top-Quark-Schleife ergeben zusammengenommen ein UV-endliches und von $\ln(\mu_0^2/M^2)$ unabhängiges Ergebnis, was eine wichtige Kontrolle ist.

3.2.2.3. Z-Boson-Pinguin-Diagramme

Beispiele für die eigentlichen Z -Boson-Pinguin-Diagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung sind in Abb. 3.7 dargestellt. Die Ein- und Zwei-Schleifen-Diagramme konnten wieder

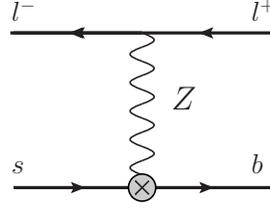


Abbildung 3.11.: Elektroschwacher Counterterm in Tree-Level-Diagramm eingesetzt.

mit exakter Massenabhängigkeit berechnet werden. Zur Drei-Schleifen-Ordnung gibt es 1640 Diagramme, die wieder analog zu den W -Boson-Box-Diagrammen in den Massen entwickelt wurden. Dabei wurde für $m_t \gg M_W$ ($y \ll 1$) eine asymptotische Entwicklung der Diagramme und für $m_t \approx M_W$ ($w \ll 1$) eine Taylorentwicklung der W -Boson-Propagatoren durchgeführt. Die Matching-Formel für $C_A^{Z,Q}$ mit $Q = c, t$, ohne die Fermion-Dreiecks-Diagramme, lautet

$$C_A^{Z,Q} = (1 + \Delta Z_\psi) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \left[(Z_{g_s}^{\text{SM}})^{2n} C_{A,\text{bare}}^{Z,Q,(n)} + \delta^{tQ} \Delta T^{Z,t,(n)} + K^{Q,(n)} \right] + \tilde{K}^Q + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (3.74)$$

wobei wieder in α_s entwickelt werden muss. Bei $C_{A,\text{bare}}^{Z,Q,(n)}$ handelt es sich um die unrenormierten $(n+1)$ -Schleifen-Amplituden zur Dirac-Struktur von Q_A . Die Z -Pinguin-Diagramme liefern keinen Beitrag zum Wilson-Koeffizienten des evaneszenten Operators Q_A^E . Aus diesem Grund treten keine zusätzlichen Terme in Gl. (3.74) durch die Renormierung des Operators Q_A auf. Wie schon in der Matching-Formel für die W -Boson-Box-Diagramme in Gl. (3.32), müssen auch hier die Masse des Top-Quarks, die starke Kopplungskonstante α_s und die Wellenfunktionen der Quarks renormiert werden. Die Größen

$$\begin{aligned} \Delta T^{Z,t,(0)} &= 0, \\ \Delta T^{Z,t,(1)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{Z,t,(0)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta T^{Z,t,(2)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{Z,t,(0)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{A,\text{bare}}^{Z,t,(1)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} \right)_{\alpha_s^2}, \end{aligned} \quad (3.75)$$

beschreiben die Renormierung der Masse des Top-Quarks. Die Renormierungskonstanten $Z_{g_s}^{\text{SM}}$, Z_{m_t} und ΔZ_ψ sind in Gl. (3.35), Gl. (3.36) und Gl. (3.42) angegeben.

Im Vergleich zum Matching des W -Boson-Box-Anteils treten zusätzlich in der Matching-Formel in Gl. (3.74) mit $K^{Q,(n)}$ die Tree-Level-Einsetzungen des elektroschwachen Counterterms auf. Das entsprechende Tree-Level-Diagramm ist in Abb. 3.11 dargestellt und ergibt

$$\begin{aligned} K^{t,(n)} &= \left(-\frac{1}{16} + \frac{\sin^2 \theta_W}{24} \right) \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right)^{(n+1)\epsilon} Z_{2,sb}^{t,(n)}, \\ K^{c,(n)} &= \left(-\frac{1}{16} + \frac{\sin^2 \theta_W}{24} \right) \left(\frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right)^{(n+1)\epsilon} Z_{2,sb}^{c,(n)}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Zur Drei-Schleifen-Ordnung für $C_A^{Z,Q}$ gibt es nicht nur diese Tree-Level-Einsetzungen, sondern auch Einsetzungen in Zwei-Schleifen-Diagramme mit einer geschlossenen Top-Quark-Schleife,

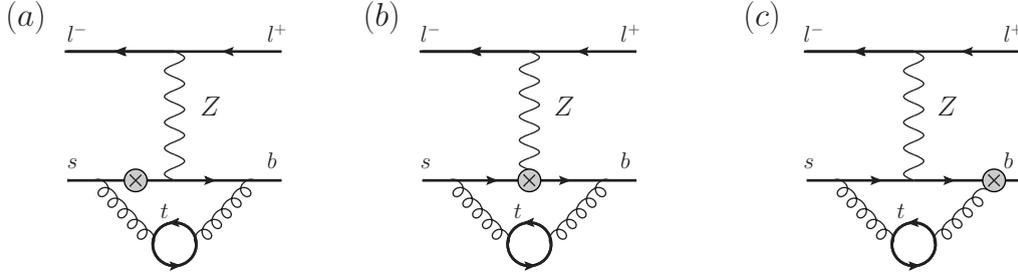


Abbildung 3.12.: Counterterm-Einsetzungen in Diagramme mit einer geschlossenen Top-Quark-Schleife.

siehe Abb. 3.12. Dieser Anteil wird in der Matching-Formel mit \tilde{K}^Q bezeichnet und enthält die Ergebnisse der Zwei-Schleifen-Diagramme zusammen mit den Renormierungskonstanten $Z_{2, sb}^{Q, (0)}$. Es ist interessant, dass sich \tilde{K}^Q exakt mit den Counterterm-Einsetzungen von $Z_{2, sb}^{Q, (0)}$ in den Diagrammen in Abb. 3.9 für den $Z_{2, sb}^{Q, (2)}$ Beitrag weghebt.

Im Ergebnis für $C_A^{Z, Q}$ heben sich alle Anteile proportional zu $\sin^2 \theta_W$ heraus. Ein weiteres interessantes Ergebnis ist, dass der Charm-Quark-Anteil in der Hintergrundfeld-Version der 't Hooft-Feynman Eichung verschwindet und damit $C_A^{Z, c, (n)} = 0$ ergibt. $C_A^{Z, t, (n)}$ ist natürlich ungleich null und wird zusammen mit den Ergebnissen der Quark-Dreiecks-Diagramme im nächsten Kapitel angegeben und diskutiert.

3.2.2.4. Ergebnisse für $C_A^{Z, (2)}$

Die Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnisse aus Ref. [53, 56] konnten für C_A^Z reproduziert werden und lauten

$$\begin{aligned}
 C_A^{Z, t, (0)}(\mu_0) &= \frac{-6x + x^2}{16(x-1)} + \frac{2x + 3x^2}{16(x-1)^2} \ln x, \\
 C_A^{Z, t, (1)}(\mu_0) &= \frac{29x + 7x^2 + 4x^3}{6(x-1)^2} - \frac{23x + 14x^2 + 3x^3}{6(x-1)^3} \ln x - \frac{4x + x^3}{2(x-1)^2} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\
 &\quad + \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{8x + x^2 + x^3}{2(x-1)^2} - \frac{x + 4x^2}{(x-1)^3} \ln x \right]. \quad (3.77)
 \end{aligned}$$

Aus den Ergebnissen zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung konnten mit Hilfe der RGE die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile zum Drei-Schleifen-Koeffizienten mit exakter Massenabhängigkeit hergeleitet werden

$$\begin{aligned}
 C_A^{Z, t, (2)}(\mu_0) &= C_A^{Z, t, (2)}(\mu_0 = m_t) + \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{188x + 4x^2 + 95x^3 - 47x^4}{6(x-1)^3} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1468x + 1578x^2 - 25x^3 - 141x^4}{18(x-1)^4} \ln x - \frac{4622x + 1031x^2 + 582x^3 - 475x^4}{36(x-1)^3} \right] \\
 &\quad + \ln^2\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{49x + 315x^2 - 4x^3}{6(x-1)^4} \ln x - \frac{440x + 257x^2 + 72x^3 - 49x^4}{12(x-1)^3} \right]. \quad (3.78)
 \end{aligned}$$

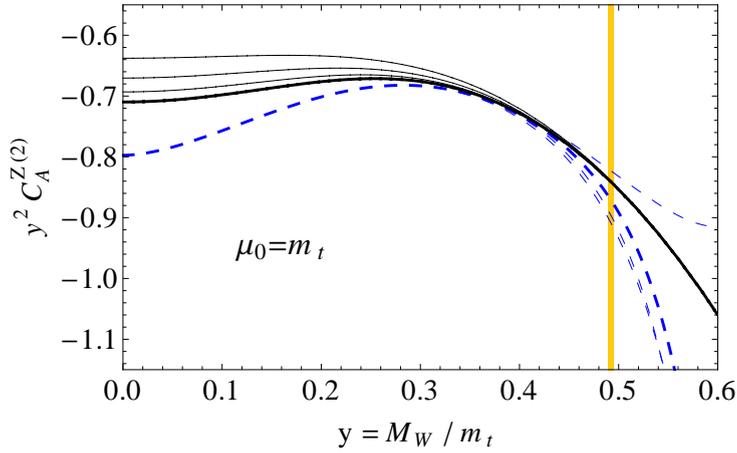


Abbildung 3.13.: $y^2 C_A^{Z(2)}$ als Funktion von $y = M_W/m_t$. Die blauen, gestrichelten Linien stammen aus der Entwicklung $y \ll 1$ und die schwarzen, durchgezogenen Linien aus der Entwicklung $w = 1 - y^2 \ll 1$. Dünnere Linien stellen weniger weit entwickelte Ergebnisse dar. Das gelbe Band beschreibt den physikalischen Bereich für y .

Die in y und w entwickelten Ergebnisse zur Drei-Schleifen-Ordnung für $\mu_0 = m_t$ lauten

$$\begin{aligned}
C_A^{Z,t,(2)}(\mu_0 = m_t) &= \frac{0.1897}{y^2} + 2.139 + 28.59 y^2 + 33.85 y^2 \ln y + 28.01 y^4 + 97.98 y^4 \ln y \\
&\quad - 31.41 y^6 + 106.2 y^6 \ln y - 167.0 y^8 - 78.59 y^8 \ln y - 387.4 y^{10} \\
&\quad - 618.3 y^{10} \ln y - 697.9 y^{12} - 1688. y^{12} \ln y + \mathcal{O}(y^{14}) , \\
C_A^{Z,t,(2)}(\mu_0 = m_t) &= -1.934 + 0.8966 w + 0.7399 w^2 + 0.6058 w^3 + 0.5113 w^4 + 0.4439 w^5 \\
&\quad + 0.3948 w^6 + 0.3582 w^7 + 0.3303 w^8 + 0.3087 w^9 + 0.2916 w^{10} \\
&\quad + 0.2778 w^{11} + 0.2667 w^{12} + 0.2575 w^{13} + 0.2498 w^{14} + 0.2433 w^{15} \\
&\quad + 0.2379 w^{16} + \mathcal{O}(w^{17}) . \tag{3.79}
\end{aligned}$$

Wie schon erwähnt hebt sich der Charm-Quark-Anteil in der Hintergrundfeld-Version der 't Hooft-Feynman Eichung gerade heraus, d.h. es gilt $C_A^{Z,c,(n)} = 0$.

Zur Drei-Schleifen-Ordnung kommen außerdem noch die Fermion-Dreiecks-Diagramme hinzu. Die entsprechenden Ergebnisse werden getrennt von $C_A^{Z,t,(2)}$ dargestellt. Hier gibt es sowohl einen Top-Quark- als auch einen Charm-Quark-Anteil,

$$\begin{aligned}
C_A^{Z,t,\text{tria.}} &= -\frac{0.9871}{y^2} - 2.388 - 1.627 y^2 - 3.516 y^2 \ln y - 1.830 y^4 - 6.959 y^4 \ln y \\
&\quad - 2.038 y^6 - 10.83 y^6 \ln y - 2.210 y^8 - 15.09 y^8 \ln y - 2.353 y^{10} - 19.65 y^{10} \ln y \\
&\quad - 2.473 y^{12} - 24.48 y^{12} \ln y + \mathcal{O}(y^{14}) , \\
C_A^{Z,t,\text{tria.}} &= -2.418 - 1.334 w - 1.147 w^2 - 1.080 w^3 - 1.048 w^4 - 1.030 w^5 - 1.019 w^6 \\
&\quad - 1.012 w^7 - 1.007 w^8 - 1.003 w^9 - 1.001 w^{10} - 0.9984 w^{11} - 0.9968 w^{12} \\
&\quad - 0.9955 w^{13} - 0.9944 w^{14} - 0.9936 w^{15} - 0.9928 w^{16} + \mathcal{O}(w^{17}) ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_A^{Z,c,\text{tria.}} &= -1.250 + 1.500 \ln y - 0.5331 y^2 + 0.2778 y^2 \ln y - 0.2222 y^2 \ln^2 y + 0.1144 y^4 \\
&\quad - 0.08194 y^4 \ln y + 0.02778 y^4 \ln^2 y - 0.003538 y^6 + 0.002143 y^6 \ln y \\
&\quad - 0.0001573 y^8 + 0.0001235 y^8 \ln y - 0.00001283 y^{10} + 0.00001145 y^{10} \ln y \\
&\quad - 1.382 \cdot 10^{-6} y^{12} + 1.338 \cdot 10^{-6} y^{12} \ln y + \mathcal{O}(y^{14}) , \\
C_A^{Z,c,\text{tria.}} &= -1.672 - 0.5336 w - 0.3100 w^2 - 0.2181 w^3 - 0.1683 w^4 - 0.1370 w^5 \\
&\quad - 0.1156 w^6 - 0.09997 w^7 - 0.08808 w^8 - 0.07873 w^9 - 0.07118 w^{10} \\
&\quad - 0.06495 w^{11} - 0.05973 w^{12} - 0.05529 w^{13} - 0.05147 w^{14} - 0.04814 w^{15} \\
&\quad - 0.04522 w^{16} + \mathcal{O}(w^{17}) . \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Auch hier sind die Vorfaktoren von y und w nur numerisch angegeben, analytische Ausdrücke für diese Koeffizienten können von der Webseite [75] heruntergeladen werden.

In Abb. 3.13 ist das gesamte Drei-Schleifen-Ergebnis für den Z -Boson-Anteil $C_A^{Z,(2)}$ dargestellt. $C_A^{Z,(2)}$ wächst proportional zu m_t^2 für eine große Top-Quark-Masse. Der Grund hierfür liegt in der Yukawa-Wechselwirkung zwischen dem would-be Goldstone-Boson G^\pm und den Quarks. Deshalb ist es sinnvoll die Größe $y^2 C_A^{Z,(2)}$ abzubilden, damit im Limes $y \rightarrow 0$ ein endliches Ergebnis dargestellt werden kann. Die blauen Linien sind das Ergebnis der Entwicklung $y \ll 1$. Die schwarzen, durchgezogenen Linien stammen aus der Entwicklung $w = 1 - y^2 \ll 1$. Für diese zweite Entwicklung muss noch erwähnt werden, dass der Faktor y^2 selbst auch in $w = 1 - y^2$ entwickelt wurde. Das gelbe Band beschreibt wieder den physikalischen Bereich für M_W/m_t . Im Bereich von $y \approx 0.4$ gibt es eine Überlappung der beiden Entwicklungen. Außerdem konvergieren die einzelnen Entwicklungen in diesem Bereich sehr gut. Deswegen deckt eine Kombination der beiden Entwicklungen den kompletten Bereich in y sehr gut ab. Für den physikalisch interessanten Bereich von y (gelbes Band) ist wieder die Entwicklung in den Massendifferenzen ausreichend, da in diesem Bereich die Entwicklungen in w sehr gut konvergieren. Es ist interessant, dass der Anteil $C_A^{Z,t,\text{tria.}} - C_A^{Z,c,\text{tria.}}$ um mehr als eine Größenordnung den Anteil $C_A^{Z,t,(2)}$ übersteigt, für den physikalischen Wert von y gilt $y^2 C_A^{Z,t,(2)} \approx -0.02$.

Die Ergebnisse zur Drei-Schleifen-Ordnung für die Z -Pinguin-Diagramme lassen sich sehr kompakt durch die Formel

$$C_A^{Z,(2)}(\mu_0 = m_t) \simeq 36.802 y^3 - 79.060 y^2 + 57.988 y - 17.222 \tag{3.81}$$

approximieren. Die Genauigkeit dieser Formel ist besser als 1% im Bereich $y > 0.4$. Die Ergebnisse zur Drei-Schleifen-Ordnung wurden zum ersten Mal im Rahmen dieser Arbeit berechnet und in Ref. [57] veröffentlicht.

3.3. $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im SM zur NNLO

Das Verzweigungsverhältnis $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ innerhalb des SM ist proportional zu $|C_A|^2$, siehe Gl. (3.20). Aus diesem Grund werden zuerst die numerischen Auswirkungen der Drei-Schleifen-QCD-Korrekturen zu $|C_A|^2$ diskutiert. Danach werden diese Ergebnisse mit den elektroschwachen NLO-Korrekturen [80] kombiniert, um Vorhersagen für das Verzweigungsverhältnis zu geben. Diese kombinierten Ergebnisse wurden in Ref. [81] veröffentlicht.

In Abb. 3.14 ist $|C_A|^2$ in Abhängigkeit der Matching-Skala μ_0 dargestellt. Die elektroschwachen NLO-Korrekturen sind in dieser Abbildung nicht enthalten. Das Einbinden aller Beiträge der

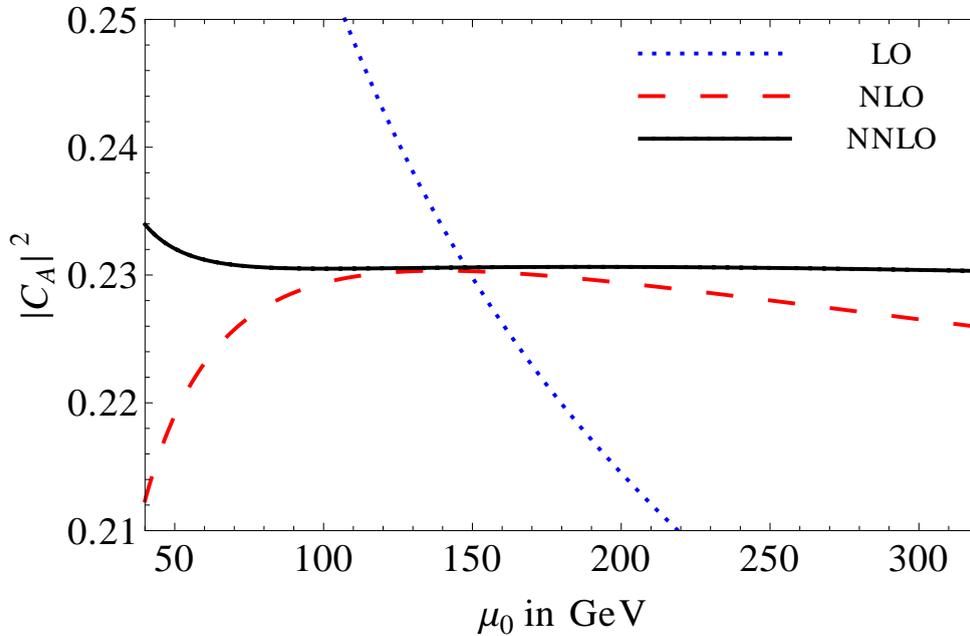


Abbildung 3.14.: $|C_A|^2$ in Abhängigkeit der Matching-Skala μ_0 . Die blau gepunktete Kurve stellt das LO-, die rot gestrichelte Kurve das NLO- und die schwarz durchgezogene Kurve das NNLO-Ergebnis dar.

Ordnung α_{em} zum Wilson-Koeffizienten C_A wird im Laufe dieses Kapitels erklärt. Die Größe C_A , ohne QED-Korrekturen, ist invariant unter dem Renormierungsgruppenlaufen und damit unabhängig von der Matching-Skala μ_0 . Durch das Abschneiden der Störungsreihe für C_A zu einer festen Ordnung in α_s bleibt eine μ_0 -Abhängigkeit übrig mit der es möglich ist die Größenordnung der fehlenden Korrekturen höherer Ordnung in α_s abzuschätzen. Die Skala in Abb. 3.14 ist von $\mu_0 \approx M_W/2$ bis $\mu_0 \approx 2m_t$ dargestellt, was dadurch motiviert ist, dass sowohl das W -Boson als auch das Top-Quark in den Diagrammen auftreten und beide Teilchen an der gleichen Skala ausintegriert wurden. Zur Abschätzung der Unsicherheiten wird später dagegen nur das Intervall $\mu_0 \in [\frac{1}{2}m_t, 2m_t]$ verwendet. Als Eingangsparameter dienen

$$\begin{aligned} \alpha_s(M_Z) &= 0.1184, \\ M_Z &= 91.1876 \text{ GeV}, \\ M_t &= 173.1 \text{ GeV}, \\ M_W &= 80.358 \text{ GeV}, \end{aligned} \tag{3.82}$$

wobei die Werte für $\alpha_s(M_Z)$, M_Z und M_t aus Ref. [22] übernommen wurden. Die Masse des W -Bosons wurde mit der Fit-Formel aus Ref. [82] berechnet und ist konsistent mit dem Wert $M_W = 80.385 \text{ GeV}$ aus direkten Messungen [22]. Die Umrechnung der Pol-Masse des Top-Quarks M_t in die $\overline{\text{MS}}$ -Masse $m_t(m_t)$ ergibt $m_t(m_t) \simeq 163.5 \text{ GeV}$, wobei dazu und zum Laufen von $\alpha_s(\mu_0)$ und $m_t(\mu_0)$ das Programm RUNDEC [83] verwendet wurde. Das Laufen von $\alpha_s(\mu_0)$ und $m_t(\mu_0)$ wurde mit den RUNDEC-Routinen zur Vier-Schleifen-Ordnung und die Umrechnung von M_t zu m_t zur Drei-Schleifen-Ordnung durchgeführt.

Die blau gepunktete Kurve in Abb. 3.14 zeigt das Skalenverhalten des LO-Ergebnisses. Durch

das NLO-Ergebnis mit der rot gestrichelten Kurve nimmt diese Skalenunsicherheit sehr stark ab. Die verbleibende Skalenunsicherheit auf NLO ist damit 1.8% im Bereich $\mu_0 \in [\frac{1}{2} m_t, 2 m_t]$. Diese Unsicherheit geht auf 0.2% zurück, wenn auch das NNLO-Ergebnis (schwarz durchgezogene Kurve) miteinbezogen wird. Die Skala μ_0 ist im Prinzip beliebig, wird aber in der Praxis so gewählt, dass Korrekturen höherer Ordnungen so klein wie möglich sind. Für $\mu_0 = m_t$ ist der Unterschied zwischen dem LO- und dem NLO-Ergebnisses mit ca. 2% relativ klein, der Unterschied zwischen dem NLO-Ergebnis und dem NNLO-Ergebnis liegt sogar nur im Promille-Bereich. Für $\mu_0 = M_W$ sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Kurven bedeutend größer. Damit ist die Skala $\mu_0 \approx m_t$ die geeignete Wahl, da hier die Effekte höherer Ordnungen sehr klein sind und damit die Störungsreihe bei dieser Skala sehr gut konvergiert. Dies wurde in der Vergangenheit schon in Ref. [54] vermutet, aber erst durch die explizite Drei-Schleifen-Rechnung konnte dies nun wirklich gezeigt werden, da a priori die Skala des Problems von der Größenordnung der Massen der ausintegrierten Teilchen, also in diesem Fall der Masse des W -Bosons, des Z -Bosons und des Top-Quarks ist. Nun konnte die verbleibende Skalen-Unsicherheit auf nahezu null gebracht werden. In der weiteren Analyse wird $\mu_0 = 160$ GeV verwendet.

Das Ergebnis für C_A hängt natürlich von den Parametern $\alpha_s(M_Z)$ und M_t ab. Deshalb bietet es sich an, das Ergebnis für C_A als Funktion dieser Parameter anzugeben,

$$C_A = 0.4802 \left(\frac{M_t}{173.1} \right)^{1.52} \left(\frac{\alpha_s(M_Z)}{0.1184} \right)^{-0.09} + \mathcal{O}(\alpha_{em}). \quad (3.83)$$

Diese Formel liefert innerhalb der Intervalle $\alpha_s(M_Z) \in [0.11, 0.13]$ und $M_t \in [170, 175]$ GeV ein Ergebnis, das das exakte Ergebnis mit einer Genauigkeit von 0.1% oder besser approximiert.

Es sei noch einmal erwähnt, dass bisher nur die QCD-Korrekturen, nicht aber die elektroschwachen NLO-Korrekturen mitberücksichtigt wurden, diese werden im Folgenden diskutiert. Der Wilson-Koeffizient inklusive der elektroschwachen Korrekturen kann bei der Matching-Skala μ_0 mit

$$C_A(\mu_0) = C_A^s + \frac{\alpha_{em}(\mu_0)}{4\pi} C_A^{e,(1)}(\mu_0) + \mathcal{O}(\alpha_{em}^2, \alpha_{em}\alpha_s) \quad (3.84)$$

dargestellt werden, wobei C_A^s den LO-Anteil zusammen mit den NLO- und NNLO-QCD-Korrekturen beschreibt. Dieser Anteil ist als ganzes skalenunabhängig, nur durch das Abschneiden der Störungsreihe bei einer bestimmten Ordnung entsteht eine Skalenabhängigkeit, siehe Abb. 3.14. Der Anteil $C_A^{e,(1)}(\mu_0)$ stellt die elektroschwachen NLO-Korrekturen dar. Die vollen elektroschwachen Zwei-Schleifen-Korrekturen wurden in Ref. [80] berechnet, davor waren diese Korrekturen nur im Limes $m_t \gg M_W$ bekannt [84]. Bei der Normierung der effektiven Lagrangedichte und des Verzweungsverhältnisses gibt es verschiedene Möglichkeiten, die zur führenden Ordnung in α_{em} durch die Tree-Level-Relation

$$G_F = \frac{\pi\alpha_{em}}{\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W} \quad (3.85)$$

ineinander umgerechnet werden können. Numerisch macht es aber einen großen Unterschied, ob z.B. für $\sin^2 \theta_W$ der Wert im $\overline{\text{MS}}$ - oder im On-Shell-Schema verwendet wird. Solange man sich in Bezug auf α_{em} in der führenden Ordnung befindet ist das Renormierungsschema beliebig und beide Werte können verwendet werden. Erst durch die vollen Korrekturen zur Ordnung α_{em} wird diese Ambiguität aufgelöst, da dadurch das Renormierungsschema fixiert ist. Im konkreten Fall des Verzweungsverhältnisses $\overline{\mathcal{B}}(B_q \rightarrow l^+ l^-)$ wurde durch die Hinzunahme der vollen

elektroschwachen NLO-Korrekturen $C_A^{e,(1)}(\mu_0)$ eine Unsicherheit von 7% auf Grund verschiedener elektroschwacher Schemata beseitigt. In dieser Analyse wurde das OS-2-Schema aus Ref. [80] verwendet, d.h. die effektive Lagrangedichte ist mit G_F^2 normiert, siehe Gl. (3.8), und die Massen M_t , M_W und M_Z und $\sin^2 \theta_W$ sind im On-Shell-Schema renormiert, wobei die Top-Quark-Masse innerhalb der QCD im \overline{MS} -Schema renormiert wurde. Für α_{em} wird die \overline{MS} -Kopplung verwendet.

Im nächsten Schritt muss der Wilson-Koeffizient an der Skala $\mu_b \approx m_b$ bestimmt werden, da dies die Skala ist, an der die Matrixelemente für den B -Meson-Zerfall ausgewertet werden. Dazu werden die RGE für C_A zum Laufen von der Skala μ_0 zur Skala μ_b verwendet, um Logarithmen der Form $\ln(\mu^2/M^2)$ konsistent aufzusummieren. Eine Lösung der RGE erhält man mit Hilfe des Evolutionsoperators $U(\mu_b, \mu_0)$, der die Wilson-Koeffizienten von der Skala μ_0 zur Skala μ_b überführt,

$$C_i(\mu_b) = \sum_j U_{ij}(\mu_b, \mu_0) C_j(\mu_0). \quad (3.86)$$

Der Anteil C_A^s verändert sich nicht durch das Laufen von μ_0 zu μ_b , da die anomale Dimension des Operators Q_A innerhalb der QCD null ist. Die Hinzunahme der QED-Korrekturen, bei denen es im Gegensatz zu den QCD-Korrekturen auch Schleifen-Beiträge an der Lepton-Linie gibt, führt zu einem nicht-trivialen RGE-Verhalten, bei dem es zum Mischen verschiedener Operatoren kommt. Die entsprechenden anomalen Dimensionen der Operatoren wurden in Ref. [85, 86] berechnet. Nach dem Renormierungsgruppenlaufen, bei dem in $\alpha_{em}/\alpha_s \ll 1$ und α_s entwickelt wurde, erhält man für C_A an der niedrigen Skala μ_b den Ausdruck

$$\begin{aligned} C_A(\mu_b) &= C_A^s + \frac{\alpha_{em}(\mu_b)}{\alpha_s^2(\mu_b)} F_1 \sin^2 \theta_W + \frac{\alpha_{em}(\mu_b)}{\alpha_s(\mu_b)} [F_2 + F_3 \sin^2 \theta_W] \\ &\quad + \alpha_{em} G + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha_{em}^2}{\alpha_s^3}, \alpha_{em} \alpha_s\right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Die Anteile F_1 , F_2 und F_3 heißen logarithmisch-verstärkte QED-Korrekturen, da sie zusätzlich zu α_{em} noch durch inverse Ordnungen von α_s verstärkt sind und damit zu großen Beiträgen führen können. Wie schon in Ref. [87] gezeigt, ergeben diese Beiträge einen Effekt von -1.5% für $\overline{B}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$. Die genauen Ausdrücke für F_1 , F_2 und F_3 wurden mit Hilfe der Ergebnisse in Ref. [85, 86] erstellt und sind im Anhang B angegeben. Der Beitrag G ist nicht logarithmisch-verstärkt, er beinhaltet aber unter anderem das neue elektroschwache NLO-Ergebnis aus Ref. [80]. Ein Ausdruck für die einzelnen Bestandteile von G lässt sich ebenfalls aus den Ergebnissen in Ref. [85, 86] herleiten und findet sich im Anhang B. Für das Laufen von $\alpha_{em}(\mu)$ wurde die Formel aus Ref. [86] verwendet, in der die Zwei-Schleifen-Korrekturen innerhalb der QED und die gemischten QCD-QED-Korrekturen zur Drei-Schleifen-Ordnung enthalten sind.

Nachdem nun alle Beiträge zu C_A an der niedrigen Skala μ_b diskutiert wurden, kann eine analoge Formel zu Gl. (3.83) angegeben werden,

$$\begin{aligned} C_A(\mu_b) &= 0.4802 R_t^{1.52} R_\alpha^{-0.09} - 0.0112 R_t^{0.89} R_\alpha^{-0.09} \\ &= 0.4690 R_t^{1.53} R_\alpha^{-0.09}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

mit

$$R_t = \frac{M_t}{173.1 \text{ GeV}},$$

Parameter	Wert	Ref.
G_F	$1.166379 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$	[22]
$\alpha_s^{(5)}(M_Z)$	0.1184(7)	[22]
$\alpha_{em}^{(5)}(M_Z)$	1/127.944(14)	[22]
$\Delta\alpha_{em,\text{hadr}}^{(5)}(M_Z)$	0.02772(10)	[22]
M_Z	91.1876(21) GeV	[22]
M_t	173.1(9) GeV	[22]
M_H	125.9(4) GeV	[22]
m_e	0.510998928 MeV	[22]
m_μ	105.6583715 MeV	[22]
m_τ	1776.82 MeV	[22]
M_{B_s}	5366.77(24) MeV	[22]
M_{B_d}	5279.58(17) MeV	[22]
f_{B_s}	227.7(4.5) MeV	[88]
f_{B_d}	190.5(4.2) MeV	[88]
$1/\Gamma_H^s$	1.615(21) ps	[50]
$2/(\Gamma_H^d + \Gamma_L^d)$	1.519(7) ps	[50]
$ V_{cb} $	0.0424(9)	[89]
$ V_{tb}^* V_{ts}/V_{cb} $	0.980(1)	[90, 91]
$ V_{tb}^* V_{td} $	0.0088(3)	[90, 91]

Tabelle 3.1.: Eingangsparameter für $\bar{B}(B_q \rightarrow l^+ l^-)$.

$$R_\alpha = \frac{\alpha_s(M_Z)}{0.1184}. \quad (3.89)$$

Der erste Beitrag in der ersten Zeile von Gl. (3.88) ist das Ergebnis aus Gl. (3.83), der zweite Anteil entspricht den $\mathcal{O}(\alpha_{em})$ -Anteilen. Es ist sinnvoll $C_A(\mu_b)$ neben der Pol-Masse des Top-Quarks auch durch die $\overline{\text{MS}}$ -Masse $m_t(m_t)$ zu parametrisieren,

$$\begin{aligned} C_A(\mu_b) &= 0.4802 \tilde{R}_t^{1.50} R_\alpha^{0.015} - 0.0112 \tilde{R}_t^{0.86} R_\alpha^{-0.031} \\ &= 0.4690 \tilde{R}_t^{1.51} R_\alpha^{0.016}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

mit

$$\tilde{R}_t = \frac{m_t(m_t)}{163.5 \text{ GeV}}. \quad (3.91)$$

Die Renormierungsskalen wurden auf $\mu_0 = 160 \text{ GeV}$ und $\mu_b = 5 \text{ GeV}$ gesetzt. Diese Formeln liefern innerhalb der Intervalle $\alpha_s(M_Z) \in [0.11, 0.13]$, $M_t \in [170, 175] \text{ GeV}$ und $m_t(m_t) \in [160, 165] \text{ GeV}$ ein Ergebnis, das das eigentliche Ergebnis mit einer Genauigkeit von 0.1% oder besser approximiert.

Nun kann der Wilson-Koeffizient $C_A(\mu_b)$ in Gl. (3.20) eingesetzt werden. Die benötigten Parameter sind in Tab. 3.1 angegeben. Für die leptonischen Zerfallskonstanten f_{B_s} und f_{B_d} werden die Mittelwerte der FLAG Kollaboration [88] aus den $N_f = 2 + 1$ Ergebnissen aus Ref. [43, 44, 92] verwendet. Diese Werte sind konsistent mit den neusten Ergebnissen für $N_f = 2$ [93] und $N_f = 2 + 1 + 1$ [47].

Eine direkte Bestimmung von V_{ts} und V_{td} aus Tree-Level-Zerfällen gibt es nicht. Aus diesem Grund ist man bei der Bestimmung der CKM-Faktoren auf die Unitarität der CKM-Matrix und Verhältnisse wie $|V_{tb}^* V_{ts}/V_{cb}|$ und $|V_{tb}^* V_{td}/V_{ub}|$ angewiesen. Das Verhältnis $|V_{tb}^* V_{ts}/V_{cb}|$ wird durch die Wolfenstein-Parameter ausgedrückt, deren Werte aus Ref. [90, 91] übernommen sind. Der Fehler des Verhältnisses $|V_{tb}^* V_{ts}/V_{cb}|$ ist im Vergleich zur Unsicherheit von $|V_{cb}|$ klein. Da es Spannungen zwischen den Werten für $|V_{cb}|$ aus inklusiven und exklusiven semi-leptonischen Zerfällen gibt, wurde für $|V_{cb}|$ der Wert aus Ref. [89] verwendet, welcher aus gefitteten Werten von inklusiven Zerfällen hervorgeht. Für $\bar{\mathcal{B}}(B_d \rightarrow l^+ l^-)$ werden die gefitteten Ergebnisse für $|V_{tb}^* V_{td}|$ direkt aus Ref. [90, 91] übernommen, da die Bestimmung von $|V_{ub}|$ aus inklusiven Zerfällen keinen Vorteil gegenüber $|V_{ub}|$ aus exklusiven Zerfällen bringt.

Ein weiterer wichtiger Parameter in Gl. (3.20) ist die Lebensdauer des schweren Masseneigenzustands im B_q - \bar{B}_q -System, $\tau_H^q = 1/\Gamma_H^q$. Für $\tau_H^s = 1/\Gamma_H^s$ wurde der Wert aus Ref. [50] verwendet. Für die Lebensdauer des schweren Masseneigenzustands im B_d - \bar{B}_d -System gilt $\tau_H^d = 1/\Gamma_H^d \simeq 2/(\Gamma_H^d + \Gamma_L^d) \equiv \tau_d^{\text{av}}$, da, wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, $\Delta\Gamma^d/\Gamma^d$ klein ist. Der Wert für τ_d^{av} wurde ebenfalls aus Ref. [50] übernommen.

Auch für die Endergebnisse ist es sinnvoll, diese in Abhängigkeit der Parameter mit der größten Unsicherheit darzustellen. Damit ist es möglich, die Vorhersage für die Zerfallsbreiten bei geänderten Eingangsparametern einfach zu aktualisieren. Wie schon für das Ergebnis von C_A werden auch die Ergebnisse für $\bar{\mathcal{B}}(B_q \rightarrow l^+ l^-)$ in Abhängigkeit von α_s , M_t und $m_t(m_t)$ mit

$$R_{t\alpha} = R_t^{3.06} R_\alpha^{-0.18} = \tilde{R}_t^{3.02} R_\alpha^{0.032} \quad (3.92)$$

dargestellt. Für den Zerfall des B_s -Mesons wird die Formel

$$R_s = \left(\frac{f_{B_s} [\text{MeV}]}{227.7} \right)^2 \left(\frac{|V_{cb}|}{0.0424} \right)^2 \left(\frac{|V_{tb}^* V_{ts}/V_{cb}|}{0.980} \right)^2 \frac{\tau_H^s [\text{ps}]}{1.615} \quad (3.93)$$

und für den Zerfall des B_d -Mesons die Formel

$$R_d = \left(\frac{f_{B_d} [\text{MeV}]}{190.5} \right)^2 \left(\frac{|V_{tb}^* V_{td}|}{0.0088} \right)^2 \frac{\tau_d^{\text{av}} [\text{ps}]}{1.519} \quad (3.94)$$

verwendet. Die SM-Vorhersagen für den Zerfall des B_s -Mesons in zwei Leptonen lauten damit

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) &= (3.65 \pm 0.06) R_{t\alpha} R_s \times 10^{-9} = (3.65 \pm 0.23) \times 10^{-9}, \\ \bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow e^+ e^-) &= (8.54 \pm 0.13) R_{t\alpha} R_s \times 10^{-14} = (8.54 \pm 0.55) \times 10^{-14}, \\ \bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \tau^+ \tau^-) &= (7.73 \pm 0.12) R_{t\alpha} R_s \times 10^{-7} = (7.73 \pm 0.49) \times 10^{-7}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Für das B_d -Meson ergeben sich folgende SM-Vorhersagen,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-) &= (1.06 \pm 0.02) R_{t\alpha} R_d \times 10^{-10} = (1.06 \pm 0.09) \times 10^{-10}, \\ \bar{\mathcal{B}}(B_d \rightarrow e^+ e^-) &= (2.48 \pm 0.04) R_{t\alpha} R_d \times 10^{-15} = (2.48 \pm 0.21) \times 10^{-15}, \\ \bar{\mathcal{B}}(B_d \rightarrow \tau^+ \tau^-) &= (2.22 \pm 0.04) R_{t\alpha} R_d \times 10^{-8} = (2.22 \pm 0.19) \times 10^{-8}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Die Unsicherheiten, die weder von $R_{t\alpha}$ noch von R_s oder R_d kommen, sind in der mittleren Spalte zusammengefasst. Hierbei handelt es sich hauptsächlich um Unsicherheiten, die nicht auf Parameter-Unsicherheiten zurückzuführen sind. Diese nicht-parametrischen Unsicherheiten werden auf 1.5% abgeschätzt. In ihr sind folgende Anteile enthalten:

	f_{B_q}	CKM	τ_H^q	M_t	α_s	andere Parameter	nicht- parametrisch	Σ
$\overline{B}(B_s \rightarrow l^+ l^-)$	4.0%	4.3%	1.3%	1.6%	0.1%	< 0.1%	1.5%	6.4%
$\overline{B}(B_d \rightarrow l^+ l^-)$	4.5%	6.9%	0.5%	1.6%	0.1%	< 0.1%	1.5%	8.5%

Tabelle 3.2.: Einzelne Beiträge der relativen Unsicherheiten für $\overline{B}(B_q \rightarrow l^+ l^-)$. In der letzten Spalte ist die Gesamtunsicherheit angegeben, die sich durch quadratisches Addieren der einzelnen Unsicherheiten ergibt.

- Der vernachlässigte Anteil $\mathcal{O}(\alpha_{em})$ in Gl. (3.20). Zu diesem Anteil gehören Beiträge von Operatoren wie Q_V in Gl. (3.13), bei denen ein Photon die Quark- und Lepton-Linie verbindet, und $Q_2 = (\bar{b}_L \gamma_\mu c_L)(\bar{e}_L \gamma^\mu s_L)$ bei denen die Charm-Quarks eine Schleife bilden, welche durch zwei Photonen an die Lepton-Linie koppelt. Der Fehler kann abgeschätzt werden, indem man μ_b in $|C_A(\mu_b)|^2$ zwischen $m_b/2$ und $2m_b$ variiert. Dies ergibt eine Unsicherheit von 0.3%.
- Vernachlässigte höhere Ordnungen in der Störungsreihe beim Berechnen des Wilson-Koeffizienten $C_A(\mu_0)$. Diese Beiträge können durch Variation von μ_0 abgeschätzt werden und ergeben für die NNLO-QCD-Korrekturen und die elektroschwachen NLO-Korrekturen jeweils ungefähr 0.2%.
- Beiträge der Ordnung $M_{B_q}^2/M_W^2$, die durch das Nichtberücksichtigen von C_S und C_P in Gl. (3.17) vernachlässigt werden. Die daraus resultierende Unsicherheit wird mit 0.4% abgeschätzt.
- Unsicherheiten bei der Bestimmung der Pol-Masse M_t des Top-Quarks aus den experimentellen Ergebnissen. Des Weiteren gibt es eine Unsicherheit bei der Umrechnung der Pol-Masse M_t in die \overline{MS} -Masse m_t . Beide Unsicherheiten werden jeweils mit ca. 0.3% abgeschätzt.
- Abweichungen von der Formel $\overline{B}(B_q \rightarrow l^+ l^-) = \Gamma(B_q \rightarrow l^+ l^-)/\Gamma_H^q$, d.h. Beiträge zu Gl. (3.17), in denen der leichtere Masseneigenzustand zerfällt. Diese sind aber im SM mit $M_{B_q}^2/M_W^2$ oder α_{em} stark unterdrückt und werden hier nicht berücksichtigt.

In Tab. 3.2 sind die einzelnen Beiträge zur Gesamtunsicherheit nochmals aufgelistet. Diese Unsicherheiten werden quadratisch addiert und ergeben die relative Gesamtunsicherheit in der letzten Spalte von Tab. 3.2 und die absolute Gesamtunsicherheit in der hinteren Spalte von Gl. (3.95) und Gl. (3.96). Hierbei ist interessant, dass die Unsicherheiten durch die CKM-Faktoren nun den größten Beitrag zur Gesamtunsicherheit liefern.

Ein weiterer Aspekt, der bei der hohen Genauigkeit in Gl. (3.95) diskutiert werden muss, sind Beiträge durch abgestrahlte, weiche (*soft*) Photonen. Dazu wird der Prozess

$$B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- + n \gamma, \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.97)$$

betrachtet, wobei die Photonen eine so kleine Energie haben, dass sie experimentell nicht aufgelöst werden können. Dabei müssen zwei Arten von Photon-Abstrahlungen unterschieden werden, Bremsstrahlung und direkte Abstrahlung. In Abb. 3.15 sind diese beiden Anteile zur invarianten Massenverteilung des Myonpaares für $\Gamma(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- + n \gamma)$ dargestellt, wobei die

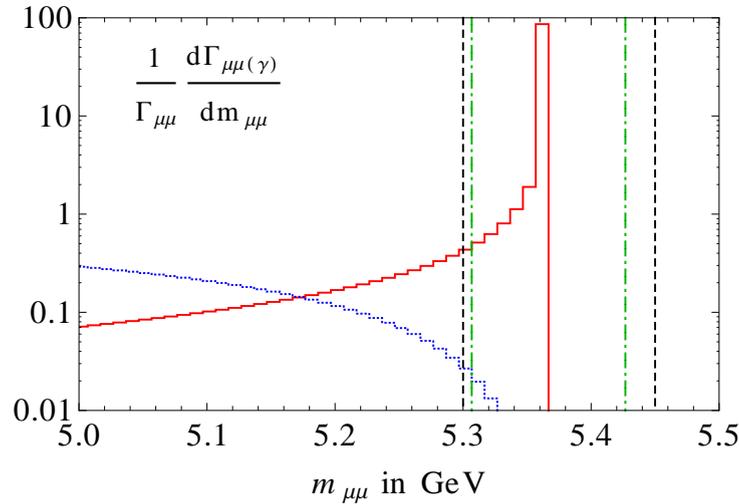


Abbildung 3.15.: Anteile zur invarianten Massenverteilung des Myonpaares durch Hinzunahme der Abstrahlung von soften Photonen. Die schwarzen, gestrichelten und die grünen, strichpunktiierten Linien stellen den Signalbereich von CMS und LHCb dar. Der Schwanz der roten Kurve entsteht durch die Abstrahlung von Bremsstrahlungs-Photonen von den Myonen und die blaue Kurve durch die direkte Abstrahlung der soften Photonen vom B_s -Meson.

blaue Kurve die direkte Photon-Abstrahlung und die rote Kurve den Signalpeak zusammen mit den Bremsstrahlungskorrekturen beschreibt. Die invariante Massenverteilung des Myonpaares für $\Gamma(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^- + n \gamma)$ erhält man durch Summation der roten und blauen Kurve. Die schwarzen, gestrichelten (grünen, strichpunktiierten) Linien stellen den Signalbereich von CMS (LHCb) dar. In Ref. [94] wird die Bremsstrahlung der Myonen diskutiert. Dazu wurden Formeln für die Abstrahlung beliebig vieler Photonen in der Soft-Photon-Näherung angegeben, siehe auch Formeln in Ref. [95]. Der Schwanz der roten Kurve in Abb. 3.15 entsteht gerade durch die Abstrahlung der soften Photonen von den Myonen. Ohne diese Abstrahlung würde es einen scharfen Peak bei der B_s -Meson-Masse geben. Die zweite Art von Photon-Abstrahlung kommt durch Photonen, die direkt von den Quarks abgestrahlt werden. Dazu wurde in Ref. [96] unter anderem der Zerfall $B_s \rightarrow B_s^* \gamma_{\text{soft}} \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma_{\text{soft}}$ berechnet. Das weiche Photon wird vom B_s -Meson emittiert und dieses geht als Zwischenzustand in das Vektormeson B_s^* über. Das B_s^* -Meson zerfällt dann in zwei Myonen. Da B_s^* ein Vektormeson ist, ist die Helizitätsunterdrückung aufgehoben, d.h. es gibt auch einen endlichen Beitrag für $m_\mu \rightarrow 0$. Mit den Ergebnissen aus Ref. [96] ergibt sich die blaue Kurve in Abb. 3.15.

Aus experimenteller Sicht sind die Bremsstrahlungskorrekturen (rote Kurve) in der gemessenen Größe enthalten, wobei die Experimente CMS und LHCb diese mit dem Monte-Carlo Programm PHOTOS [97] simulieren und dann wieder aus der gemessenen Größe herausrechnen. Damit können die von CMS und LHCb veröffentlichten Ergebnisse direkt mit der Theorievorhersage ohne Bremsstrahlungskorrekturen verglichen werden. Die direkte Emission (blaue Kurve) wird von den Experimenten als Hintergrund behandelt. Im Signalbereich ist dieser Anteil sehr gering und kann vernachlässigt werden, in der Theorievorhersage sind diese Beiträge nicht in der Definition von $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ enthalten. Aus diesen Gründen entsprechen die Messergebnisse in Gl. (3.1)

den Theorievorhersagen aus Gl. (3.95) und Gl. (3.96).

Vergleicht man nun die Ergebnisse für $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ aus Gl. (3.95),

$$\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (3.65 \pm 0.23) \times 10^{-9}, \quad (3.98)$$

mit den experimentellen Ergebnissen

$$\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (2.9 \pm 0.7) \times 10^{-9}, \quad \text{CMS und LHCb [40]}, \quad (3.99)$$

so fällt auf, dass die experimentelle Unsicherheit um den Faktor drei größer ist. Nach dem Upgrade von LHCb [41] wird erwartet, dass sich diese signifikant reduziert und dieselbe Größenordnung wie die theoretische Unsicherheit erreichen wird. Die jetzigen experimentellen Resultate stimmen innerhalb der Fehler hervorragend mit der SM-Vorhersage überein, wodurch sich starke Einschränkungen an Theorien jenseits des SM ergeben, siehe z.B. Ref. [98].

Der Zerfall $B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-$ kann in den kommenden Jahren ebenfalls zu interessanten Erkenntnissen bei der Suche nach neuer Physik führen und ist gerade zusammen mit $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ sehr wichtig. Erste Ergebnisse von LHCb [29] und CMS [28] ergeben das kombinierte Ergebnis

$$\bar{\mathcal{B}}(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (3.6^{+1.6}_{-1.4}) \times 10^{-10}, \quad \text{CMS und LHCb [40]}. \quad (3.100)$$

Die Ergebnisse sind noch nicht aussagekräftig genug, aber innerhalb der Fehler konsistent mit der SM-Vorhersage aus Gl. (3.96).

Wie oben schon erwähnt kommt die größte Unsicherheit der Theorievorhersage durch die CKM-Faktoren und die leptonische Zerfallskonstante zustande. Aus diesem Grund wurden in Ref. [99] verschiedene Verhältnisse von Observablen vorgeschlagen, in denen sich diese Unsicherheiten teilweise wegheben,

$$\begin{aligned} \kappa_{ql} &= \frac{\bar{\mathcal{B}}(B_q \rightarrow l^+ l^-) \Gamma_H^q}{(G_F M_W m_l)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{2m_l}{M_{B_q}}\right)^2} \Delta M_{B_q}} \\ &\stackrel{\text{SM}}{\simeq} \frac{3 |C_A(\mu_b)|^2}{\pi^3 C_{LL}(\mu_b) B_{B_q}(\mu_b)}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

In die erste Zeile können die experimentellen Ergebnisse eingesetzt werden, um diese mit der theoretischen SM-Vorhersage aus der zweiten Zeile zu vergleichen. ΔM_{B_q} ist die Massendifferenz im B_q - \bar{B}_q -System. $C_{LL}(\mu_b)$ ist ein Wilson-Koeffizient der effektiven $\Delta B = 2$ Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{weak}} = -\frac{1}{4} N V_{tb}^* V_{tq} C_{LL} (\bar{b} \gamma_\alpha P_L q) (\bar{b} \gamma^\alpha P_L q) + \dots \quad (3.102)$$

und beschreibt die B_q - \bar{B}_q Mischungen. Über das hadronische Matrixelement

$$\langle \bar{B}_q | (\bar{b} \gamma_\alpha P_L q) (\bar{b} \gamma^\alpha P_L q) | B_q \rangle = \frac{2}{3} f_{B_q}^2 B_{B_q} M_{B_q}^2 \quad (3.103)$$

ist der Bag-Parameter B_{B_q} definiert. Dieser wird zusammen mit f_{B_q} durch QCD-Gitter-Rechnungen bestimmt. Für $C_{LL}(\mu_b)$ sind die NLO-QCD-Korrekturen [100] und die elektroschwachen NLO-Korrekturen [101] innerhalb des SM bekannt, diese ergeben

$$\hat{C}_{LL} \equiv C_{LL}(\mu_b) \frac{B_{B_q}(\mu_b)}{\hat{B}_{B_q}} = 1.27 R_t^{1.51}, \quad (3.104)$$

für $\alpha_s^{(5)}(M_Z) = 0.1184$ and $\mu_b = 5 \text{ GeV}$. Für die Bag-Parameter wurden die HPQCD Ergebnisse [102] $\hat{B}_{B_s} = 1.33(6)$ und $\hat{B}_{B_d} = 1.27(10)$ verwendet. Eingesetzt in die zweite Zeile in Gl. (3.101) ergeben sich folgende SM-Vorhersagen,

$$\begin{aligned}\kappa_{s\ell}^{\text{SM}} &= 0.0126(7), \\ \kappa_{d\ell}^{\text{SM}} &= 0.0132(12).\end{aligned}\tag{3.105}$$

Die größte Unsicherheit kommt vom Bag-Parameter. Die Gesamtunsicherheit für $\kappa_{s\ell}^{\text{SM}}$ ist im Vergleich zur $\overline{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ -Vorhersage etwas niedriger. Für $\kappa_{d\ell}^{\text{SM}}$ ist die Unsicherheit sogar leicht höher als für $\overline{\mathcal{B}}(B_d \rightarrow \mu^+ \mu^-)$, was aus der großen Unsicherheit von \hat{B}_{B_d} folgt. In beiden Fällen können diese Unsicherheiten jedoch durch verbesserte Vorhersagen für \hat{B}_{B_q} stark reduziert werden. Der Vorteil von κ_{ql} liegt darin, dass sich die Unsicherheiten der CKM-Faktoren herausgehoben haben. Mit $\Delta M_{B_s} = 17.69(8) \text{ ps}^{-1}$ [50] und $\Delta M_{B_d} = 0.510(4) \text{ ps}^{-1}$ [50] ergeben sich in der ersten Zeile in Gl. (3.101) die experimentellen Ergebnisse

$$\begin{aligned}\kappa_{s\mu}^{\text{exp}} &= 0.0104(25), \\ \kappa_{d\mu}^{\text{exp}} &= 0.047(20).\end{aligned}\tag{3.106}$$

Auch hier sind die experimentellen Werte innerhalb der Fehlern konsistent mit der SM-Vorhersage.

KAPITEL 4

$B_S \rightarrow \mu^+ \mu^-$ IN 2-HIGGS-DUBLETT-MODELLEN

In diesem Kapitel wird der Zerfall $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ innerhalb des 2-Higgs-Dublett-Modells (2HDM) Typ-II betrachtet. Dazu wurden die Wilson-Koeffizienten C_A , C_S und C_P zu den Operatoren Q_A , Q_S und Q_P aus Gl. (3.9) zur Drei-Schleifen-Ordnung innerhalb der QCD berechnet. Die Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnisse aus Ref. [103–105] konnten erfolgreich reproduziert werden.

Im 2HDM gibt es drei verschiedene Diagrammklassen, die zu den Wilson-Koeffizienten C_A , C_S und C_P beitragen: Box-Diagramme (Kapitel 4.1), Z -Pinguin-Diagramme (Kapitel 4.2) und Higgs-Pinguin-Diagramme (Kapitel 4.3). Nur die Beiträge zu C_S und C_P verändern die Vorhersage für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ signifikant. Insbesondere liefern die Higgs-Pinguin-Diagramme Beiträge zu C_S und C_P , die für große Werte von $\tan \beta$ große Effekte auf die Vorhersage für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ haben. Aus diesem Grund liegt das Hauptaugenmerk in diesem Kapitel auf großen Werten von $\tan \beta$, weshalb die Higgs-Pinguin-Diagramme und Box-Diagramme auch in diesem Limes berechnet wurden.

Bei der Bestimmung der Wilson-Koeffizienten treten Diagramme zur Drei-Schleifen-Ordnung mit bis zu drei verschiedenen Massen M_W , m_t und M_{H^+} auf. Diese Diagramme mussten in den Massen entwickelt werden, wobei drei verschiedene Hierarchien verwendet wurden,

$$\begin{aligned} h_1 : \quad & M_W \ll m_t \ll M_{H^+}, \\ h_2 : \quad & M_W \approx m_t \ll M_{H^+}, \\ h_3 : \quad & M_W \approx m_t \approx M_{H^+}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bei der Wahl der Hierarchien wurde ausgenutzt, dass die Masse des geladenen Higgs-Bosons M_{H^+} nicht kleiner als die Masse des Top-Quarks ist. Dabei wurden die Ergebnisse aus Kapitel 6 vorweggenommen, da dort eine untere Grenze von $M_{H^+} \geq 380 \text{ GeV}$ aus der Observablen $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ abgeleitet wurde. In der Hierarchie h_1 wurden die Diagramme für $M_W \ll m_t \ll M_{H^+}$ asymptotisch entwickelt. Die Hierarchie h_2 ist eine Kombination aus der asymptotischen Entwicklung $m_t \ll M_{H^+}$ und der Taylorentwicklung $M_W \approx m_t$. In der Hierarchie h_3 wurden zwei Taylorentwicklungen mit $M_W \approx m_t$ und $M_{H^+} \approx m_t$ durchgeführt. Es hat sich herausgestellt, dass die Ergebnisse der beiden Hierarchien h_1 und h_2 sehr ähnlich sind. Damit lässt sich der gesamte phänomenologisch relevante Bereich durch die beiden Hierarchien h_2 und h_3 abdecken.

In manchen Anteilen, wie z.B. den Z -Pinguin-Diagrammen, kommen nur die Massen M_{H^+} und m_t vor, wodurch die beiden Hierarchien h_1 und h_3 jeweils ohne M_W benötigt werden. Bei allen in diesem Kapitel berechneten Wilson-Koeffizienten wurde die Unitarität der CKM-Matrix ausgenutzt, d.h. die Top-Quark- und Charm-Quark-Anteile wurden in den Gleichungen und Ergebnissen schon zusammengefasst.

Zur Darstellung der Ergebnisse wurden die folgenden Definitionen verwendet,

$$r = \frac{m_t^2(\mu_0)}{M_{H^+}^2}, \quad x = \frac{m_t^2(\mu_0)}{M_W^2}, \quad \bar{u} = 1 - r, \quad w = 1 - \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (4.2)$$

Für die 3-Higgs-Vertizes $h^0 H^+ H^-$ und $H^0 H^+ H^-$ wurden die Feynman-Regeln aus Ref. [104] für die Bedingung $\lambda_1 = \lambda_2$ im Higgs-Potential und in der Näherung für große Werte von $\tan\beta$ verwendet. Alle anderen Feynman-Regeln wurden für das 2HDM Typ-II aus FeynArts [106] übernommen.

Im Folgenden werden die einzelnen Diagrammklassen diskutiert, numerische Ausdrücke für die Ergebnisse zur Drei-Schleifen-Ordnung sind im Anhang D angegeben. Das Verzweigungsverhältnis $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ zur NNLO im 2HDM Typ-II wird in Kapitel 4.4 diskutiert.

4.1. Box-Diagramme

Box-Diagramme mit einem bzw. zwei geladenen Higgs-Bosonen tragen zu den Wilson-Koeffizienten C_S und C_P bzw. C_A bei. Beispieldiagramme sind in Abb. 4.1 und Abb. 4.2 dargestellt. Zur Drei-Schleifen-Ordnung gibt es insgesamt 372 Box-Diagramme, in denen bis zu zwei geladene Higgs-Bosonen vorkommen. Die Wilson-Koeffizienten als Reihenentwicklung in α_s lauten

$$\begin{aligned} C_A^{\text{box}} &= C_A^{\text{box},(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A^{\text{box},(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_A^{\text{box},(2)} + \dots, \\ C_S^{\text{box}} &= C_S^{\text{box},(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_S^{\text{box},(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_S^{\text{box},(2)} + \dots, \\ C_P^{\text{box}} &= C_P^{\text{box},(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_P^{\text{box},(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_P^{\text{box},(2)} + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Der Beitrag zum Wilson-Koeffizient C_A^{box} kommt durch Box-Diagramme mit zwei geladenen Higgs-Bosonen zustande, was durch die Dirac-Struktur der Diagramme ersichtlich wird. Der Effekt von C_A^{box} auf $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ ist jedoch vernachlässigbar, denn für $M_{H^+} = 400$ GeV und $\tan\beta = 50$ sind diese Anteile zum Verzweigungsverhältnis um den Faktor 10^{-7} und für $\tan\beta = 100$ um den Faktor 10^{-6} kleiner als das Gesamtergebnis für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2HDM Typ-II. Die entsprechenden Ergebnisse zur Drei-Schleifen-Ordnung werden deswegen nur der Vollständigkeit halber diskutiert. Es wurde nur der höchste Anteil in $\tan\beta$, d.h. der Anteil proportional zu $\tan^4\beta$, betrachtet. In den Diagrammen mit zwei geladenen Higgs-Bosonen gibt es zusätzlich einen Anteil ohne $\tan\beta$. Dieser spielt jedoch keine Rolle, da er proportional zu m_μ^2 ist und keinen Verstärkungsfaktor besitzt. Weitere Beiträge durch Diagramme mit zwei would-be Goldstone Bosonen und einem would-be Goldstone Boson und einem geladenen Higgs-Boson sind relativ zu den $\tan^4\beta$ -Beiträgen noch stärker unterdrückt und wurden deshalb nicht betrachtet. Die Koeffizienten C_S^{box} und C_P^{box} haben einen wesentlich größeren Beitrag zum Verzweigungsverhältnis $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$. Diese Anteile kommen durch Box-Diagramme mit einem geladenen Higgs-Boson und einem W -Boson zustande. Für $M_{H^+} = 400$ GeV und $\tan\beta = 50$ sind diese Beiträge zum Verzweigungsverhältnis mit 10^{-2} unterdrückt, aber für $\tan\beta = 100$ sind die Beiträge von derselben Größenordnung wie das Gesamtergebnis für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2HDM Typ-II.

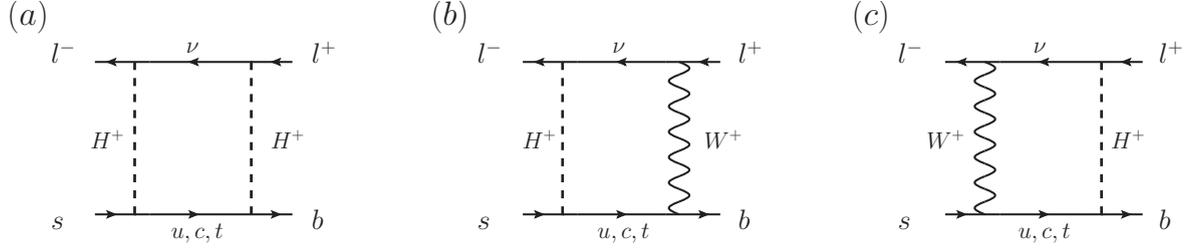


Abbildung 4.1.: Ein-Schleifen-Box-Diagramme mit geladenen Higgs-Bosonen. Das Diagramm (a) trägt zu C_A und die Diagramme (b) und (c) tragen zu C_S und C_P bei.

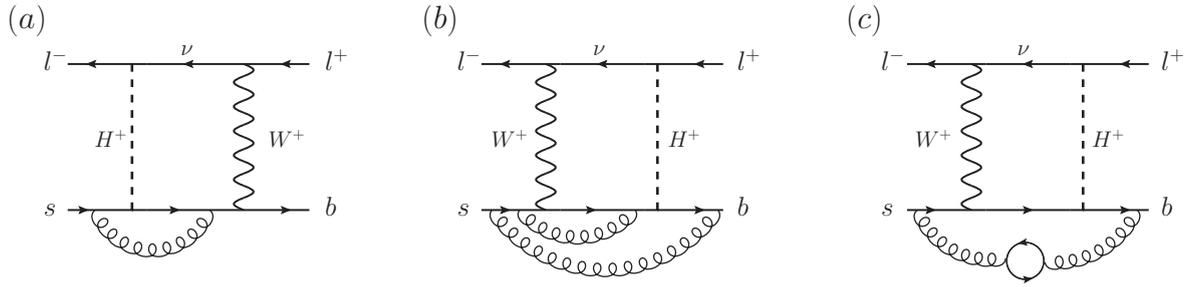


Abbildung 4.2.: Zwei- und Drei-Schleifen-Box-Diagramme mit geladenen Higgs-Bosonen.

Im Folgenden wird die Bestimmung von C_A zur Drei-Schleifen-Ordnung diskutiert. Der höchste Anteil in $\tan\beta$ lässt sich mit

$$C_A^{\text{box},(n)} = \tan^4\beta \frac{m_l^2 m_b m_s}{M_W^2 m_t^2} C_{A,m_b m_s}^{\text{box},(n)} + \dots \quad (4.4)$$

darstellen. Die Diagramme im 2HDM liefern keinen Beitrag zum Wilson-Koeffizienten des evaneszenten Operators Q_A^E , womit dieser auch nicht zur Matching-Formel beiträgt. Analog zur Matching-Formel in Gl. (3.32) für die W -Boson-Box-Diagramme im SM gilt für C_A im 2HDM,

$$C_A^{\text{box}} = (1 + \Delta Z_\psi) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \left[(Z_{g_s}^{\text{SM}})^{2n} C_{A,\text{bare}}^{\text{box},(n)} + \Delta M^{\text{box},(n)} \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \quad (4.5)$$

Die einzige Erweiterung ist, dass nun neben m_t auch m_b und m_s renormiert werden müssen,

$$\begin{aligned} \Delta M^{\text{box},(0)} &= 0, \\ \Delta M^{\text{box},(1)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{\text{box},(0)} \Big|_{m_{t,b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t,b,s}} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta M^{\text{box},(2)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{\text{box},(0)} \Big|_{m_{t,b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t,b,s}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{A,\text{bare}}^{\text{box},(1)} \Big|_{m_{t,b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t,b,s}} \right)_{\alpha_s^2}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei für m_b und m_s dieselbe Renormierungskonstante wie für m_t verwendet wurde, siehe Gl. (3.36).

Die Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnisse aus Ref. [105] konnten erfolgreich reproduziert werden und sollen der Vollständigkeit halber angegeben werden,

$$C_{A, m_b m_s}^{\text{box},(0)} = \frac{r^2}{32(r-1)} - \frac{r^2}{32(r-1)^2} \ln r, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} C_{A, m_b m_s}^{\text{box},(1)} &= -\frac{r^2 (\pi^2 (r-1)^2 - 11r + 27)}{24(r-1)^2} + \frac{r^2 (12r^2 - 33r + 37)}{24(r-1)^3} \ln r \\ &+ \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{r} \right) \frac{r^2 (r^2 - 2r + 2)}{4(r-1)^2} \\ &+ \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left(\frac{r^2 (r-3)}{4(r-1)^2} + \frac{r^2}{2(r-1)^3} \ln r \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Mit Hilfe der RGE wurden die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile des Drei-Schleifen-Ergebnisses aus den exakten Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnissen hergeleitet:

$$\begin{aligned} C_{A, m_b m_s}^{\text{box},(2)} &= C_{A, m_b m_s}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) \\ &+ \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left(\frac{r^2 (904r^2 - 71\pi^2 (r-1)^3 - 2854r + 3102)}{72(r-1)^3} \right. \\ &+ \frac{r^2 (708r^3 - 2619r^2 + 3872r - 3113)}{72(r-1)^4} \ln r \\ &+ \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{r} \right) \frac{r^2 (71r^3 - 213r^2 + 236r - 142)}{12(r-1)^3} \Bigg) \\ &+ \ln^2 \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left(\frac{r^2 (49r^2 - 172r + 267)}{24(r-1)^3} + \frac{r^2 (r-73)}{12(r-1)^4} \ln r \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die entwickelten Drei-Schleifen-Ergebnisse $C_{A, m_b m_s}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t)$ in den beiden Hierarchien h_1 bis zur Ordnung r^5 und h_3 bis zur Ordnung \bar{u}^8 sind im Anhang D.1 angegeben. In Abb. 4.3(a) ist $C_{A, m_b m_s}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t)$ in Abhängigkeit der Masse des geladenen Higgs-Bosons dargestellt. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen den Ergebnissen für $m_t \approx M_{H^+}$, also der Hierarchie h_3 . Die roten, gestrichelten Kurven wurden für $m_t \ll M_{H^+}$ (h_1) entwickelt. Dünnere Kurven stellen die entsprechenden Ergebnisse zu einer niedrigeren Ordnung in \bar{u} bzw. r dar. Im Bereich von $M_{H^+} \approx 435$ GeV ergibt sich eine Überlappung zwischen den beiden Entwicklungen. Das unbekannte, exakte Drei-Schleifen-Ergebnis lässt sich mit der abschnittsweise definierten Funktion

$$C_{A, m_b m_s}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) = \begin{cases} C_{A, m_b m_s, h_3}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) & \text{für } M_{H^+} \leq 435 \text{ GeV} \\ C_{A, m_b m_s, h_1}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) & M_{H^+} > 435 \text{ GeV} \end{cases} \quad (4.10)$$

approximieren.

Die Beiträge zu den Wilson-Koeffizienten C_S und C_P aus den Box-Diagrammen mit einem geladenen Higgs-Boson und einem W -Boson können durch den Koeffizient $C_{S, m_b}^{\text{box},(n)}$ dargestellt werden,

$$C_S^{\text{box},(n)} = \tan^2 \beta \frac{m_l (m_b - m_s)}{M_W^2} C_{S, m_b}^{\text{box},(n)}, \quad (4.11)$$

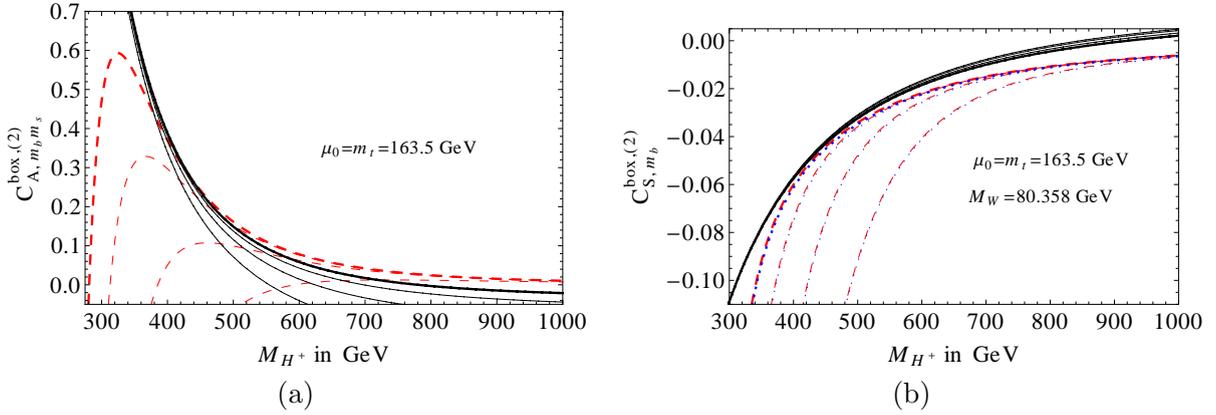


Abbildung 4.3.: Im linken Diagramm ist der Koeffizient $C_{A, m_b m_s}^{\text{box}, (2)}$ in Abhängigkeit der Masse des geladenen Higgs-Bosons dargestellt. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen der Entwicklung h_3 . Die roten, gestrichelten Kurven entsprechen der Entwicklung h_1 . Im rechten Diagramm ist der Koeffizient $C_{S, m_b}^{\text{box}, (2)}$ in Abhängigkeit der Masse des geladenen Higgs-Bosons dargestellt, wobei für m_t und M_W feste Werte gewählt wurden. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven zeigen die Ergebnisse der Hierarchie h_3 , die roten, gestrichelten Kurven die Ergebnisse der Hierarchie h_1 und die blauen, gepunkteten Kurven die Ergebnisse der Hierarchie h_2 .

$$C_P^{\text{box}, (n)} = -\tan^2 \beta \frac{m_l (m_b + m_s)}{M_W^2} C_{S, m_b}^{\text{box}, (n)}. \quad (4.12)$$

Der einzige Unterschied zwischen der Matching-Formel für C_S^{box} und für C_A^{box} in Gl. (4.5) ist die Renormierungskonstante Z_{SS} für den Operator Q_S . Die Operatoren Q_S und Q_P in Gl. (3.9) müssen in der effektiven Theorie renormiert werden. Im Gegensatz zur Renormierungskonstanten für Q_A verschwinden die entsprechenden Renormierungskonstanten nicht. Innerhalb der QCD entsprechen diese Renormierungskonstanten den Renormierungskonstanten der Quark-Massen,

$$Z_{SS} = Z_{PP} = Z_m^{(5)}, \quad (4.13)$$

mit $Z_m^{(5)}$ aus Gl. (A.4). Damit ergibt sich folgende Matching-Formel für C_S^{box} ,

$$Z_{SS} C_S^{\text{box}} = (1 + \Delta Z_\psi) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \left[(Z_{g_s}^{\text{SM}})^{2n} C_{S, \text{bare}}^{\text{box}, (n)} + \Delta M^{\text{box}, (n)} \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \quad (4.14)$$

Die Anteile, die durch die Renormierung von m_t , m_b und m_s auftreten, lauten

$$\begin{aligned} \Delta M^{\text{box}, (0)} &= 0, \\ \Delta M^{\text{box}, (1)} &= \left(C_{S, \text{bare}}^{\text{box}, (0)} \Big|_{m_{t, b, s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t, b, s}} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta M^{\text{box}, (2)} &= \left(C_{S, \text{bare}}^{\text{box}, (0)} \Big|_{m_{t, b, s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t, b, s}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{S, \text{bare}}^{\text{box}, (1)} \Big|_{m_{t, b, s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t, b, s}} \right)_{\alpha_s^2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Durch die Tatsache, dass Z_{SS} gerade die Renormierungskonstante der Quark-Massen in der effektiven Theorie ist, kann zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung auf die Renormierung des

Operators Q_S verzichtet werden, wenn auch die leichten Quark-Massen m_b und m_s in der vollen Theorie nicht renormiert werden, da sich beide Anteile herausheben. Zur Drei-Schleifen-Ordnung gibt es einen Unterschied zwischen den Renormierungskonstanten, da m_b und m_s in der vollen Theorie durch die 6-Flavour-Renormierungskonstanten renormiert werden müssen, Z_{SS} jedoch in der 5-Flavour-Theorie definiert ist. Somit ist also nur die Differenz zwischen der Renormierungskonstanten für m_b und m_s in der vollen und in der effektiven Theorie notwendig.

Die Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnisse aus Ref. [105] ergeben

$$C_{S,m_b}^{\text{box},(0)} = -\frac{r^2}{8(r-1)(r-x)} \ln r + \frac{rx}{8(x-1)(r-x)} \ln x \quad (4.16)$$

und

$$\begin{aligned} C_{S,m_b}^{\text{box},(1)} &= \frac{r(\pi^2(r-1)(x-1) + 8)}{6(r-1)(x-1)} + \frac{r^2(7-3r)}{3(r-1)^2(r-x)} \ln r \\ &+ \frac{rx(3x-7)}{3(x-1)^2(r-x)} \ln x + \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{rx}{r-x} - \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{r^2}{r-x} \\ &+ \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left(\frac{r}{(r-1)(x-1)} + \frac{r^2}{(r-1)^2(r-x)} \ln r - \frac{rx}{(x-1)^2(r-x)} \ln x \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Auch hier konnten aus den exakten Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnissen die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile des Drei-Schleifen-Ergebnisses hergeleitet werden,

$$\begin{aligned} C_{S,m_b}^{\text{box},(2)} &= C_{S,m_b}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) \\ &+ \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left(\frac{r(47\pi^2(r-1)^2(x-1)^2 + r(43x-427) - 427x + 811)}{18(r-1)^2(x-1)^2} \right. \\ &- \frac{r^2(277r^2 - 789r + 896)}{18(r-1)^3(r-x)} \ln r + \frac{rx(277x^2 - 789x + 896)}{18(x-1)^3(r-x)} \ln x \\ &+ \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{47rx}{3(r-x)} - \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{47r^2}{3(r-x)} \\ &+ \ln^2\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left(-\frac{r(r(23x+25) + 25x - 73)}{6(r-1)^2(x-1)^2} - \frac{r^2(r^2 - 3r + 50)}{6(r-1)^3(r-x)} \ln r \right. \\ &\left. + \frac{rx(x^2 - 3x + 50)}{6(x-1)^3(r-x)} \ln x \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die entwickelten Drei-Schleifen-Ergebnisse $C_{S,m_b}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t)$ in den drei Hierarchien h_1 bis zur Ordnung (r^5, y^{20}) , h_2 bis zur Ordnung (r^5, w^{10}) und h_3 bis zur Ordnung (\bar{u}^8, w^8) sind im Anhang D.1 angegeben. In Abb. 4.3(b) ist $C_{S,m_b}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t)$ als Funktion von M_{H^+} dargestellt, wobei die beiden anderen Massen auf die Werte $M_W = 80.358 \text{ GeV}$ und $m_t(m_t) = 163.5 \text{ GeV}$ gesetzt wurden. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven zeigen die Ergebnisse der Hierarchie h_3 , die roten, gestrichelten Kurven die Ergebnisse der Hierarchie h_1 und die blauen, gepunkteten Kurven die Ergebnisse der Hierarchie h_2 . Dünnere Kurven stellen die entsprechenden Ergebnisse zu einer niedrigeren Ordnung in r bzw. \bar{u} dar. Für die Ergebnisse der Hierarchien h_1 und h_2 gibt es in dieser Darstellung keinen erkennbaren Unterschied. Auf Grund den Erfahrungen aus der SM-Rechnung, in der sich die Entwicklung in $w = 1 - M_W^2/m_t^2 \ll 1$ im physikalischen

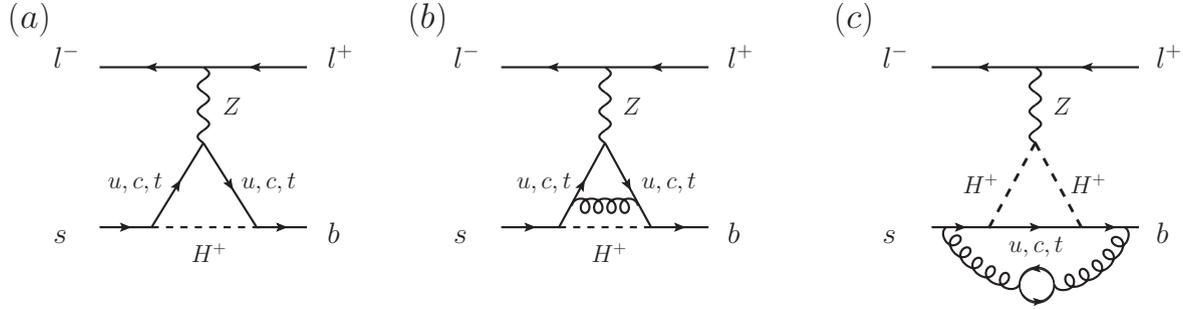


Abbildung 4.4.: Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Diagramme zum Z-Pinguin-Anteil im 2HDM.

Bereich von M_W/m_t als besser geeignet im Vergleich zur asymptotischen Entwicklung $y = M_W/m_t \ll 1$ herausgestellt hat, wird im Folgenden nur die Hierarchie h_2 verwendet und h_1 nicht weiter betrachtet. Im Bereich um $M_{H^+} \approx 435$ GeV liegen die Entwicklungen für h_2 und h_3 nahe zusammen. Damit lässt sich mit einer abschnittsweise definierten Funktion aus den beiden Hierarchien h_2 und h_3 der gesamte relevante Massenbereich von M_{H^+} abdecken,

$$C_{S,m_b}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) = \begin{cases} C_{S,m_b,h_3}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) & \text{für } M_{H^+} \leq 435 \text{ GeV} \\ C_{S,m_b,h_2}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) & M_{H^+} > 435 \text{ GeV} \end{cases} . \quad (4.19)$$

4.2. Z-Boson-Pinguin-Diagramme

In diesem Abschnitt werden die Anteile zu C_A durch Z-Boson-Pinguin-Diagramme im 2HDM diskutiert. Beispieldiagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung sind in Abb. 4.4 dargestellt. Zur Drei-Schleifen-Ordnung treten insgesamt 696 Diagramme auf. Die Reihenentwicklung in α_s lautet

$$C_A^{Z,H^\pm} = C_A^{Z,H^\pm,(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A^{Z,H^\pm,(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_A^{Z,H^\pm,(2)} + \dots \quad (4.20)$$

Der Wilson-Koeffizient kann in zwei Anteile aufgespalten werden,

$$C_A^{Z,H^\pm,(n)} = \tan^2 \beta \frac{m_b m_s}{M_W^2} C_{A,m_b m_s}^{Z,(n)} + \frac{1}{\tan^2 \beta} \frac{m_t^2}{M_W^2} C_{A,\tan^{-2} \beta}^{Z,(n)} . \quad (4.21)$$

Die Koeffizienten $C_{A,m_b m_s}^Z$ und $C_{A,\tan^{-2} \beta}^Z$ sind zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung identisch, erst zur Drei-Schleifen-Ordnung gibt es auf Grund der Fermion-Dreiecks-Diagramme einen Unterschied zwischen den Koeffizienten. Dieser Unterschied wird im Laufe dieses Kapitels genauer erklärt. Der Effekt durch $C_{A,\tan^{-2} \beta}^{Z,H^\pm}$ für $\bar{B}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ ist ebenfalls vernachlässigbar klein, für $M_{H^+} = 400$ GeV und $\tan \beta = 50$ sind diese Beiträge um den Faktor 10^{-3} und für $\tan \beta = 100$ um den Faktor 10^{-2} kleiner als das Gesamtergebnis. Auch hier werden die entsprechenden Ergebnisse zur Drei-Schleifen-Ordnung nur der Vollständigkeit halber angegeben. Der Anteil $C_{A,\tan^{-2} \beta}^Z$ ist mit $1/\tan^2 \beta$ unterdrückt und hat damit für große Werte von $\tan \beta$ keine Bedeutung, für kleine Werte von $\tan \beta$ wird dieser aber wichtig.

Die Matching-Formel für C_A^{Z,H^\pm} ist analog zur Matching-Formel in Gl. (3.74) für die Z -Pinguin-Anteile im SM,

$$C_A^{Z,H^\pm} = (1 + \Delta Z_\psi) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \left[(Z_{g_s}^{\text{SM}})^{2n} C_{A,\text{bare}}^{Z,H^\pm,(n)} + \Delta M^{H^\pm,(n)} + K^{H^\pm,(n)} \right] + \tilde{K}^{H^\pm} + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \quad (4.22)$$

Auch im 2HDM treten zur Drei-Schleifen-Ordnung Fermion-Dreiecks-Diagramme mit einem γ_5 auf. Diese Diagramme wurden auf dieselbe Weise behandelt wie in der SM-Rechnung in Kapitel 3.2.2.2. Um die Beiträge aus den Fermion-Dreiecks-Diagrammen im Detail diskutieren zu können, wurden diese in Kapitel 3.2.2 von der eigentlichen Matching-Formel in Gl. (3.74) getrennt. Diese Trennung wird in diesem Kapitel nicht mehr vollzogen. Dadurch sind die Anteile aus den Fermion-Dreiecks-Diagrammen in $C_{A,\text{bare}}^{Z,H^\pm,(2)}$ enthalten. Die elektroschwachen Counterterm-Einsetzungen in Fermion-Dreiecks-Diagramme tragen zu der Größe \tilde{K}^{H^\pm} bei. Die Renormierung von m_t , m_b und m_s wird durch

$$\begin{aligned} \Delta M^{H^\pm,(0)} &= 0, \\ \Delta M^{H^\pm,(1)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{Z,H^\pm,(0)} \Big|_{m_{t,b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t,b,s}} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta M^{H^\pm,(2)} &= \left(C_{A,\text{bare}}^{Z,H^\pm,(0)} \Big|_{m_{t,b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t,b,s}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{A,\text{bare}}^{Z,H^\pm,(1)} \Big|_{m_{t,b,s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t,b,s}} \right)_{\alpha_s^2}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

dargestellt. Da in diesem Kapitel auch Anteile mit $m_b m_s$ betrachtet werden, die in der SM-Rechnung komplett vernachlässigt wurden, muss die Definition der elektroschwachen Counterterm-Lagrangedichte aus Gl. (3.67) um die Anteile mit P_L erweitert werden,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{counter}}^{\text{ew}} &= \frac{G_F M_W^2}{4\sqrt{2} \pi^2} \left(V_{tb}^* V_{ts} \bar{b} P_R [i(Z_{2, sb, L}^t - Z_{2, sb, L}^c) \not{D} - (Z_{0, sb, L}^t - Z_{0, sb, L}^c) m_b] s \right. \\ &\quad \left. + V_{tb}^* V_{ts} \bar{b} P_L [i(Z_{2, sb, R}^t - Z_{2, sb, R}^c) \not{D} - (Z_{0, sb, R}^t - Z_{0, sb, R}^c) m_s] s \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Renormierungskonstanten $Z_{2, sb, L}^Q$ entsprechen damit gerade den Renormierungskonstanten $Z_{2, sb}^Q$ aus Kapitel 3.2.2. Für C_A^{Z,H^\pm} werden die Beiträge zu $Z_{2, sb, L}$ und $Z_{2, sb, R}$ mit geladenen Higgs-Bosonen benötigt. Diese Anteile werden im Folgenden mit

$$\begin{aligned} Z_{2, sb, i}^{c, 2\text{HDM}} &= \sum_{n=0} \left(\frac{\mu_0^2}{M_{H^+}^2} \right)^{(n+1)\epsilon} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n Z_{2, sb, i}^{c, 2\text{HDM}, (n)}, \\ Z_{2, sb, i}^{t, 2\text{HDM}} &= \sum_{n=0} \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right)^{(n+1)\epsilon} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n Z_{2, sb, i}^{t, 2\text{HDM}, (n)}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

bezeichnet, mit $i = L, R$. Zur Bestimmung von $Z_{2, sb, L}^{Q, 2\text{HDM}}$ und $Z_{2, sb, R}^{Q, 2\text{HDM}}$ wurden Diagramme mit einem geladenen Higgs-Boson zur Zwei-Punkt-Funktion sb berechnet. Beispieldiagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung sind in Abb. 4.5 dargestellt. Die Einsetzungen der elektroschwachen Counterterme in das Tree-Level-Diagramm in Abb. 3.11 ergeben

$$K^{H^\pm,(n)} = \left(-\frac{1}{16} + \frac{\sin^2 \theta_W}{24} \right) \left[\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right)^{(n+1)\epsilon} Z_{2, sb, L}^{t, 2\text{HDM}, (n)} - \left(\frac{\mu_0^2}{M_{H^+}^2} \right)^{(n+1)\epsilon} Z_{2, sb, L}^{c, 2\text{HDM}, (n)} \right]$$

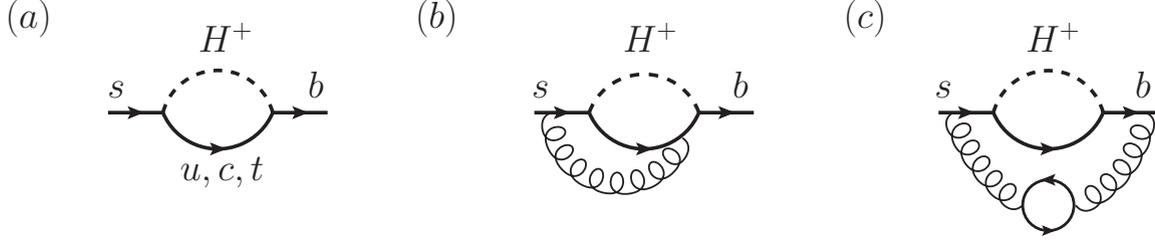


Abbildung 4.5.: Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Diagramme mit einem geladenen Higgs-Boson zur Zwei-Punkt-Funktion sb .

$$-\frac{\sin^2 \theta_W}{24} \left[\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right)^{(n+1)\epsilon} Z_{2, sb, R}^{t, 2\text{HDM}, (n)} - \left(\frac{\mu_0^2}{M_{H^+}^2} \right)^{(n+1)\epsilon} Z_{2, sb, R}^{c, 2\text{HDM}, (n)} \right]. \quad (4.26)$$

Zur Drei-Schleifen-Ordnung für C_A^{Z, H^\pm} gibt es analog zur SM-Rechnung nicht nur die Tree-Level-Einsetzungen, sondern auch Einsetzungen in Zwei-Schleifen-Diagramme mit einer geschlossenen Top-Quark-Schleife, siehe Abb. 3.12 und Abb. 3.10(b). Dieser Anteil wird in der Matching-Formel mit \tilde{K}^{H^\pm} bezeichnet.

Die Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnisse aus Ref. [105] lauten

$$C_{A, m_b m_s}^{Z, (0)} = \frac{r}{16(r-1)} - \frac{r}{16(r-1)^2} \ln r \quad (4.27)$$

und

$$C_{A, m_b m_s}^{Z, (1)} = \frac{2r(r-3)}{3(r-1)^2} + \frac{r(11-3r)}{6(r-1)^3} \ln r - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{r} \right) \frac{r(r-2)}{2(r-1)^2} + \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left(\frac{r(r-3)}{2(r-1)^2} + \frac{r}{(r-1)^3} \ln r \right). \quad (4.28)$$

Die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile des Drei-Schleifen-Ergebnisses mit exakter Massenabhängigkeit ergeben

$$C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)} = C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) + \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left(\frac{r(475r^2 - 1852r + 2529)}{36(r-1)^3} - \frac{r(141r^2 - 589r + 1024)}{18(r-1)^4} \ln r - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{r} \right) \frac{r(47r^2 - 141r + 142)}{6(r-1)^3} \right) + \ln^2 \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left(\frac{r(49r^2 - 172r + 267)}{12(r-1)^3} + \frac{r(r-73)}{6(r-1)^4} \ln r \right). \quad (4.29)$$

Die entwickelten Drei-Schleifen-Ergebnisse $C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t)$ in den Hierarchien h_1 bis zur Ordnung r^6 und h_3 bis zur Ordnung \bar{u}^{16} sind im Anhang D.2 angegeben. In Abb. 4.6(a) sind die beiden Entwicklungen für $C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t)$ in Abhängigkeit von M_{H^+} dargestellt. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen der Entwicklung h_3 . Die roten, gestrichelten Kurven

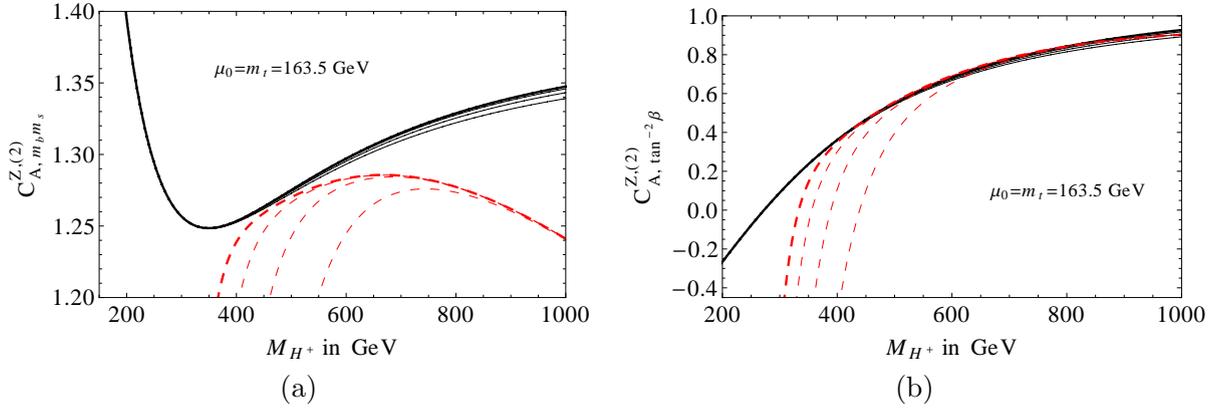


Abbildung 4.6.: Im linken Bild ist $C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)}$ und im rechten Bild $C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, (2)}$ in Abhängigkeit von M_{H^+} dargestellt. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen der Entwicklung h_3 , die roten, gestrichelten Kurven der Entwicklung h_1 .

entsprechen der Entwicklung h_1 . Dünnere Kurven stellen die Ergebnisse für die Hierarchien h_1 und h_3 zu einer niedrigeren Ordnung in r und \bar{u} dar. Bei $M_{H^+} \approx 470$ GeV ergibt sich eine Überlappung der beiden Entwicklungen, wodurch sich das Gesamtergebn durch die abschnittsweise definierte Funktion

$$C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) = \begin{cases} C_{A, m_b m_s, h_3}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) & \text{für } M_{H^+} \leq 470 \text{ GeV} \\ C_{A, m_b m_s, h_1}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) & M_{H^+} > 470 \text{ GeV} \end{cases} \quad (4.30)$$

approximieren lässt.

Die Ergebnisse für den mit $1/\tan^2 \beta$ unterdrückten Koeffizienten $C_{A, \tan^{-2} \beta}^Z$ sind zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung identisch zu $C_{A, m_b m_s}^Z$,

$$\begin{aligned} C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, (0)} &= C_{A, m_b m_s}^{Z, (0)}, \\ C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, (1)} &= C_{A, m_b m_s}^{Z, (1)}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile von $C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, (2)}$ sind ebenfalls identisch zu den entsprechenden Anteilen von $C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)}$. Erst durch die Hinzunahme der Fermion-Dreiecks-Diagramme zur Drei-Schleifen-Ordnung gibt es einen Unterschied zwischen $C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t)$ und $C_{A, m_b m_s}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t)$. Für nicht-verschwindende Yukawa-Kopplungen gilt folgende Relation für die Koeffizienten,

$$\tan^2 \beta \frac{m_b m_s}{M_W^2} C_{A, m_b m_s}^{Z, Q} = \frac{1}{\tan^2 \beta} \frac{m_Q^2}{M_W^2} C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, Q}, \quad (4.32)$$

mit $Q = c, t$. Dies ist offensichtlich, wenn man die Yukawa-Kopplungen des geladenen Higgs-Bosons in Kombination mit den Z -Pinguin-Diagrammen zur Ein-Schleifen-Ordnung betrachtet. In dieser Rechnung wird die Masse des Charm-Quarks vernachlässigt, wodurch die Relation in Gl. (4.32) für $Q = c$ nicht mehr erfüllt ist, da die rechte Seite verschwindet. Da aber analog zur SM-Rechnung in Kapitel 3.2.2.3 alle Charm-Quark-Anteile bis auf die Beiträge durch

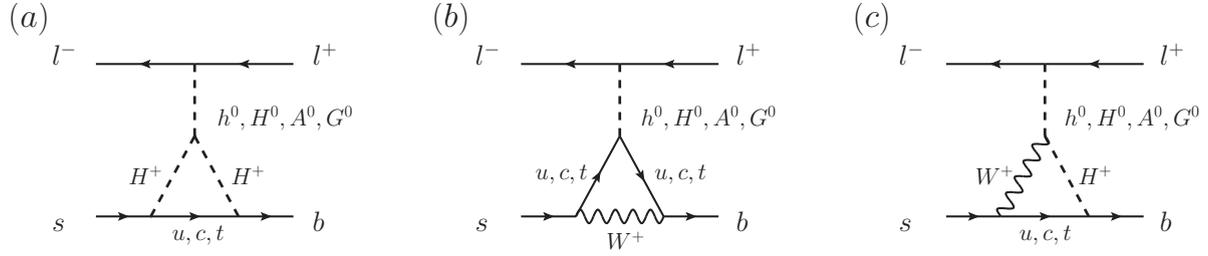


Abbildung 4.7.: Beispieldiagramme zur Ein-Schleifen-Ordnung für die Higgs-Pinguin-Anteile zu C_S und C_P .

die Fermion-Dreiecks-Diagramme verschwinden, folgt aus Gl. (4.32) für $Q = t$ die Gleichheit von $C_{A, m_b m_s}^Z$ und $C_{A, \tan^{-2} \beta}^Z$ zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung. Der Unterschied zwischen $C_{A, m_b m_s}^Z$ und $C_{A, \tan^{-2} \beta}^Z$ zur Drei-Schleifen-Ordnung kommt damit alleine durch den Charm-Quark-Anteil der Fermion-Dreiecks-Diagramme zustande.

Die in den Hierarchien h_1 und h_3 entwickelten Drei-Schleifen-Ergebnisse $C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t)$ sind im Anhang D.2 angegeben und in Abb. 4.6(b) als Funktion von M_{H^+} dargestellt. Auch hier gibt es eine Überlappung zwischen den Entwicklungen in der Hierarchie h_3 (schwarze, durchgezogene Kurven) und in der Hierarchie h_1 (rote, gestrichelte Kurven) im Bereich $M_{H^+} \approx 445$ GeV. Das Gesamtergebnis lässt sich durch

$$C_{A, \tan^{-2} \beta}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) = \begin{cases} C_{A, \tan^{-2} \beta, h_3}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) & \text{für } M_{H^+} \leq 445 \text{ GeV} \\ C_{A, \tan^{-2} \beta, h_1}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) & M_{H^+} > 445 \text{ GeV} \end{cases} \quad (4.33)$$

approximieren.

4.3. Higgs-Boson-Pinguin-Diagramme

Der wichtigste Beitrag zum Verzweigungsverhältnis $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ im 2HDM Typ-II kommt durch sogenannte Higgs-Boson-Pinguin-Diagramme zustande, d.h. Diagramme in denen eines der neutralen Higgs-Bosonen h^0 , H^0 oder A^0 an die Leptonen koppelt. Das *would-be* Goldstone-Boson G^0 liefert keinen Beitrag zu den hier berechneten $\tan^2 \beta$ -Anteilen. Beispieldiagramme zur Ein-Schleifen-Ordnung sind in Abb. 4.7 dargestellt. Die CP-geraden Higgs-Bosonen h^0 und H^0 tragen zu C_S und das CP-ungerade Higgs-Boson A^0 zu C_P bei. An dieser Stelle werden nun die Drei-Schleifen-QCD-Korrekturen zu den Wilson-Koeffizienten diskutiert. Die Reihenentwicklungen in α_s lauten

$$C_S^H = C_S^{H, (0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_S^{H, (1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_S^{H, (2)} + \dots \quad (4.34)$$

und

$$C_P^H = C_P^{H, (0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_P^{H, (1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_P^{H, (2)} + \dots \quad (4.35)$$

In dieser Arbeit wurden nur die Anteile zur höchsten Ordnung in $\tan \beta$ berechnet, d.h. die Beiträge proportional zu $\tan^2 \beta$. Die $(n+1)$ -Schleifen-Koeffizienten $C_S^{H, (n)}$ können in zwei unabhängige

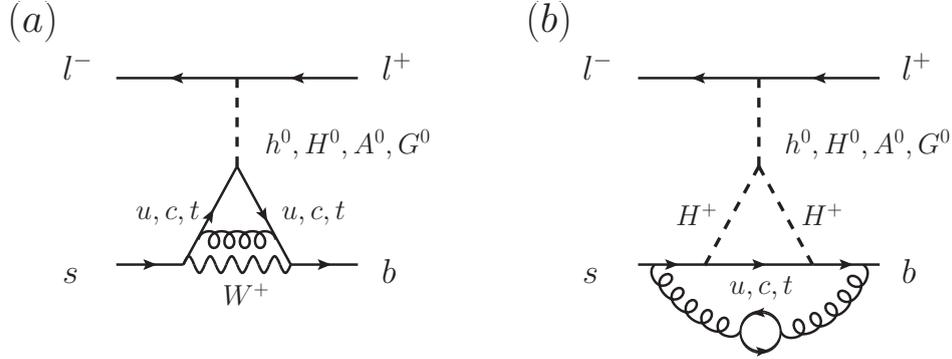


Abbildung 4.8.: Beispieldiagramme zur Zwei-Schleifen-Ordnung (links) und Drei-Schleifen-Ordnung (rechts) für die Higgs-Pinguin-Anteile zu C_S und C_P .

Anteile $C_{S,m_b}^{H,(n)}$ und $C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(n)}$ aufgespalten werden,

$$C_S^{H,(n)} = \tan^2 \beta \frac{m_l (m_b - m_s)}{M_W^2} \left(C_{S,m_b}^{H,(n)} + \sin^2(2\alpha) \frac{(M_{H^0}^2 - M_{h^0}^2)^2}{M_{H^0}^2 M_{h^0}^2} C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(n)} \right) + \dots \quad (4.36)$$

Der Anteil proportional zu $\sin^2(2\alpha)$ kommt aus Diagrammen mit den 3-Higgs-Kopplungen $h^0 H^+ H^-$ und $H^0 H^+ H^-$, siehe Abb. 4.7(a), die entsprechenden Feynman-Regeln wurden aus Ref. [104] übernommen, wobei diese für $\lambda_1 = \lambda_2$ und große Werte von $\tan \beta$ gültig sind. Die $(n+1)$ -Schleifen-Koeffizienten $C_P^{H,(n)}$ erhält man ebenfalls aus $C_{S,m_b}^{H,(n)}$,

$$C_P^{H,(n)} = -\tan^2 \beta \frac{m_l (m_b + m_s)}{M_W^2} C_{S,m_b}^{H,(n)} + \dots \quad (4.37)$$

Damit müssen nur die zwei Koeffizienten $C_{S,m_b}^{H,(n)}$ und $C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(n)}$ berechnet werden. Zur Ein-Schleifen-Ordnung wurde $C_{S,m_b}^{H,(0)}$ in Ref. [103, 104] und $C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(0)}$ in Ref. [104] berechnet. Zur Zwei-Schleifen-Ordnung gibt es in der Literatur bisher nur Ergebnisse für $C_{S,m_b}^{H,(1)}$ [105]. In dieser Arbeit wurden der Zwei-Schleifen-Koeffizient $C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(1)}$ und die Drei-Schleifen-Koeffizienten $C_{S,m_b}^{H,(2)}$ und $C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(2)}$ berechnet.

Zur Bestimmung von C_S^H und C_P^H wurden Diagramme bis zur Drei-Schleifen-Ordnung berechnet, Beispieldiagramme sind in Abb. 4.7 und Abb. 4.8 dargestellt. Dabei wurde in den Massen der leichten Quarks m_b und m_s bis zur linearen Ordnung entwickelt. Da in den Diagrammen mit M_W , m_t und M_{H^+} bis zu drei verschiedene Massen auftreten können, wurden die Drei-Schleifen-Diagramme in den drei verschiedenen Hierarchien h_1 , h_2 und h_3 entwickelt, siehe Gl. (4.1). Die Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnisse konnten mit exakter Massenabhängigkeit bestimmt werden. Die Berechnung der Diagramme wurde mit einem generischen Higgs-Boson durchgeführt, die eigentlichen Kopplungen der einzelnen Higgs-Bosonen h^0 , H^0 und A^0 wurden später in einem MATHEMATICA Programm eingefügt. Zur Drei-Schleifen-Ordnung treten 2832 Diagramme für das generische Higgs-Boson auf.

Analog zum Z -Pinguin wird auch für den Higgs-Pinguin-Anteil ein elektroschwacher Counterterm aus der Counterterm-Lagrangedichte in Gl. (4.24) benötigt. Zu den Higgs-Pinguinen tragen

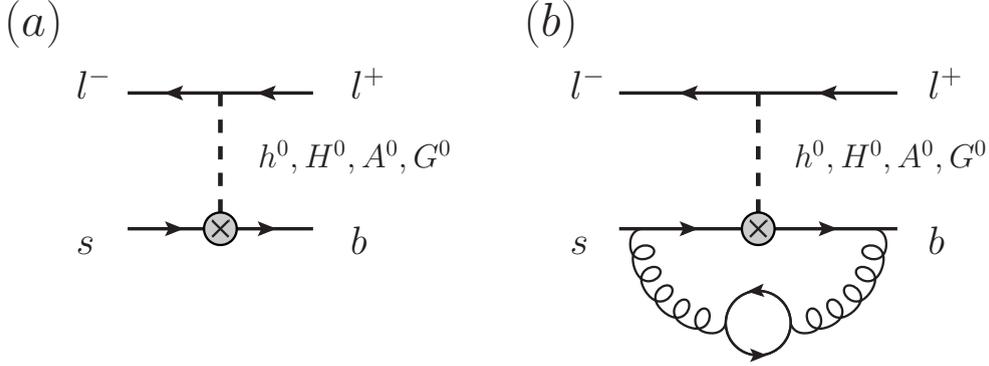


Abbildung 4.9.: Counterterm-Einsetzungen in Tree-Level-Diagramm (a) und in Zwei-Schleifen-Diagramm mit geschlossener Top-Quark-Schleife (b).

die Renormierungskonstanten $Z_{0, sb, L}^Q$ und $Z_{0, sb, R}^Q$ bei, da diese gerade die Beiträge zur Renormierung der Yukawa-Kopplungen sbH für alle neutralen Higgs-Bosonen H liefern. Diese Counterterme treten durch Tree-Level-Einsetzungen, siehe Abb. 4.9(a), schon zur führenden Ordnung auf. Die Feynman-Regeln für diese Counterterme können direkt von den flavour-diagonalen Vertizes ddH übernommen werden. Die Renormierungskonstanten $Z_{0, sb, L}^Q$ und $Z_{0, sb, R}^Q$ werden zur Drei-Schleifen-Ordnung benötigt, wobei in der flavour-ändernden Zwei-Punkt-Funktion sb sowohl Beiträge mit geladenen Higgs-Bosonen H^\pm , als auch mit W^\pm und G^\pm berücksichtigt werden müssen. Die eigentlichen Diagramme zu $Z_{0, sb, L}^Q$ und $Z_{0, sb, R}^Q$ wurden schon in Kapitel 3.2.2.1 und Kapitel 4.2 berechnet, siehe Abb. 3.8 und Abb. 4.5.

Die Matching-Formel zur Bestimmung der Wilson-Koeffizienten ist sehr ähnlich zu den vorherigen Formeln in diesem Kapitel. $C_{S, \text{bare}}^{H, (n)}$ steht für die unrenormierte Amplitude zur $(n+1)$ -Schleifen-Ordnung, wobei die Anteile für h^0 und H^0 addiert und die Top- und Charm-Quark-Anteile zusammengefasst wurden. Es gilt

$$Z_{SS} C_S^H = (1 + \Delta Z_\psi) \sum_{n=0}^2 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n \left[(Z_{g_s}^{\text{SM}})^{2n} C_{S, \text{bare}}^{H, (n)} + \Delta M^{H, (n)} + K^{H, (n)} \right] + \tilde{K}^H + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \quad (4.38)$$

mit der Renormierung von m_t , m_b und m_s durch

$$\begin{aligned} \Delta M^{H, (0)} &= 0, \\ \Delta M^{H, (1)} &= \left(C_{S, \text{bare}}^{H, (0)} \Big|_{m_{t, b, s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t, b, s}} \right)_{\alpha_s}, \\ \Delta M^{H, (2)} &= \left(C_{S, \text{bare}}^{H, (0)} \Big|_{m_{t, b, s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t, b, s}} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{S, \text{bare}}^{H, (1)} \Big|_{m_{t, b, s}^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_{t, b, s}} \right)_{\alpha_s^2}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Des Weiteren muss in der effektiven Theorie der Operator Q_S mit Z_{SS} renormiert werden. $K^{H, (n)}$ sind die Einsetzungen der elektroschwachen Counterterme zur $(n+1)$ -Schleifen-Ordnung in Tree-Level-Diagramme, siehe Abb. 4.9(a). \tilde{K}^H steht für die Counterterm-Einsetzungen in Zwei-Schleifen-Diagramme mit einer Top-Quark-Schleife, siehe Abb. 4.9(b).

Die Ein-Schleifen-Ergebnisse für $C_{S,m_b}^{H,(0)}$ aus Ref. [104] lauten

$$C_{S,m_b}^{H,(0)} = \frac{r x}{8(r-1)(r-x)} \ln r - \frac{r x}{8(x-1)(r-x)} \ln x. \quad (4.40)$$

Für $C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(0)}$ ergibt sich zur führenden Ordnung [104]

$$C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(0)} = \frac{r}{32(r-1)} - \frac{r^2}{32(r-1)^2} \ln r. \quad (4.41)$$

Aus den Zwei-Schleifen-Korrekturen im MSSM aus Ref. [105] folgen die Ergebnisse

$$\begin{aligned} C_{S,m_b}^{H,(1)} &= -\frac{4 r x}{3(r-1)(x-1)} + \frac{r x(3r-7)}{3(r-1)^2(r-x)} \ln r + \frac{r x(7-3x)}{3(x-1)^2(r-x)} \ln x \\ &+ \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{r x}{r-x} - \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{r x}{r-x} \\ &+ \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left(\frac{r x}{(x-1)^2(r-x)} \ln x - \frac{r x}{(r-1)^2(r-x)} \ln r - \frac{r x}{(r-1)(x-1)} \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Im 2HDM Typ-II tritt zusätzlich der Anteil

$$\begin{aligned} C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(1)} &= \frac{-r^2 - 7r}{12(r-1)^2} + \frac{5r^2 + 3r}{12(r-1)^3} \ln r \\ &+ \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left(\frac{-r^2 - r}{4(r-1)^2} + \frac{r^2}{2(r-1)^3} \ln r \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

auf. Im MSSM gibt es folgende Relation zwischen den Winkeln α und β ,

$$\sin(2\alpha) = -\sin(2\beta) \frac{M_{H^0}^2 + M_{h^0}^2}{M_{H^0}^2 - M_{h^0}^2}. \quad (4.44)$$

Durch eine Entwicklung von $\sin^2(2\alpha)$ für großes $\tan\beta$ erkennt man, dass der Koeffizient $C_{S,\sin(2\alpha)}^H$ im MSSM nicht zur Ordnung $\tan^2\beta$ beiträgt und deswegen in Ref. [105] nicht berücksichtigt wurde.

Aus den RGE lässt sich die exakte Massenabhängigkeit des $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteils der Drei-Schleifen-Korrekturen herleiten,

$$\begin{aligned} C_{S,m_b}^{H,(2)} &= C_{S,m_b}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t) \\ &+ \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{r x(811r - 427rx + 811x - 1195)}{18(r-1)^2(x-1)^2} + \frac{r x(789x - 277x^2 - 896)}{18(x-1)^3(r-x)} \ln x \right. \\ &+ \frac{r x(277r^2 - 789r + 896)}{18(r-1)^3(r-x)} \ln r + \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{47rx}{3(x-r)} + \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \frac{47rx}{3(r-x)} \left. \right] \\ &+ \ln^2\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{r x(73r - 25rx + 73x - 121)}{6(r-1)^2(x-1)^2} - \frac{r x(x^2 - 3x + 50)}{6(x-1)^3(r-x)} \ln x \right. \\ &+ \left. \frac{r x(r^2 - 3r + 50)}{6(r-1)^3(r-x)} \ln r \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

und

$$C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(2)} = C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t) \quad (4.46)$$

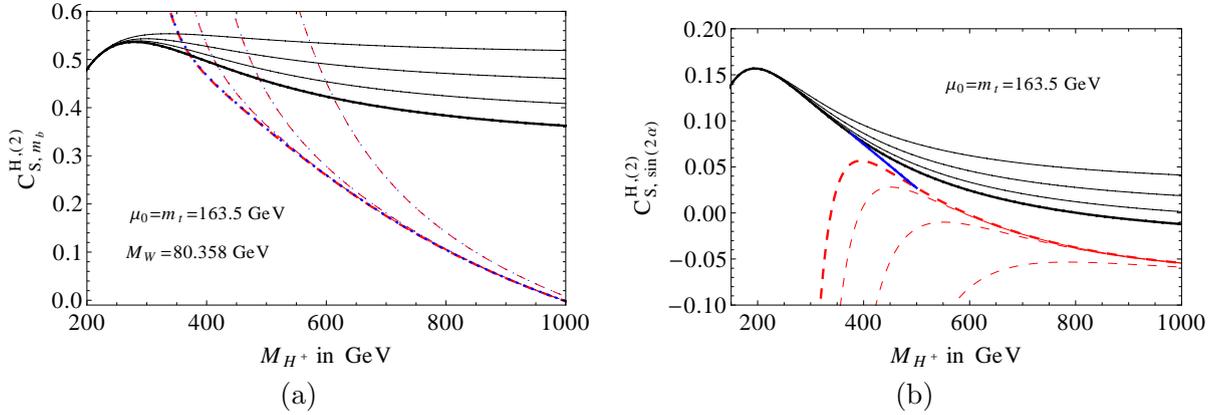


Abbildung 4.10.: Im linken Bild ist $C_{S,mb}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t)$ in den drei Entwicklungen h_1 (rote, gestrichelte Kurven), h_2 (blaue, gepunktete Kurven) und h_3 (schwarze, durchgezogene Kurven) dargestellt. Im rechten Bild ist $C_{S,\sin(2\alpha)}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t)$ aufgetragen. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen den Ergebnissen der Hierarchie h_3 und die roten, gestrichelten Kurve der Hierarchie h_1 . Die blaue Kurve ist eine Interpolation zwischen den beiden Entwicklungen.

$$\begin{aligned}
& + \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left(\frac{-75r^3 + 203r^2 + 448r}{36(r-1)^3} + \frac{5r^4 + 178r^3 - 1053r^2 - 282r}{72(r-1)^4} \ln r \right) \\
& + \ln^2\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left(\frac{-12r^3 + 59r^2 + 25r}{12(r-1)^3} - \frac{r^4 - 4r^3 + 147r^2}{24(r-1)^4} \ln r \right).
\end{aligned}$$

Die entwickelten Drei-Schleifen-Ergebnisse $C_{S,mb}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t)$ in den drei Hierarchien h_1 bis zur Ordnung (r^5, y^{20}) , h_2 bis zur Ordnung (r^5, w^{10}) und h_3 bis zur Ordnung (\bar{u}^8, w^8) sind im Anhang D.3 angegeben. In Abb. 4.10(a) sind die verschiedenen Entwicklungen für $C_{S,mb}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t)$ dargestellt, wobei die schwarzen, durchgezogenen Kurven den Ergebnissen der Hierarchie h_3 , die roten, gestrichelten Kurven den Ergebnissen der Hierarchie h_1 und die blauen, gepunkteten Kurven den Ergebnissen der Hierarchie h_2 entsprechen. Dünnere Kurven stellen die entsprechenden Ergebnisse zu einer niedrigeren Ordnung in r bzw. \bar{u} dar. Für die Ergebnisse der Hierarchie h_1 und h_2 gibt es in dieser Darstellung keinen sichtbaren Unterschied. Im Bereich um $M_{H^+} \approx 375$ GeV überschneiden sich die Entwicklungen für h_2 und h_3 . Aus den schwarzen, durchgezogenen Kurven und den blauen, gepunkteten Kurven kann gefolgert werden, dass die Entwicklung h_3 im Bereich $M_{H^+} < 350$ GeV und die Entwicklung h_2 im Bereich $M_{H^+} > 450$ GeV das exakte Ergebnis sehr gut approximieren. Im Bereich $350 \text{ GeV} < M_{H^+} < 450 \text{ GeV}$ muss zwischen den beiden Entwicklungen interpoliert werden. Anstelle einer Interpolation wird hier eine abschnittsweise definierte Funktion aus den beiden Hierarchien h_2 und h_3 zusammen mit dem Schnittpunkt bei $M_{H^+} \approx 375$ GeV verwendet,

$$C_{S,mb}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t) = \begin{cases} C_{S,mb,h_3}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t) & \text{für } M_{H^+} \leq 375 \text{ GeV} \\ C_{S,mb,h_2}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t) & M_{H^+} > 375 \text{ GeV} \end{cases}. \quad (4.47)$$

Damit lässt sich der gesamte relevante Massenbereich von M_{H^+} abdecken, wobei der Fehler im Bereich $350 \text{ GeV} < M_{H^+} < 450 \text{ GeV}$ vernachlässigt werden kann.

Die entwickelten Drei-Schleifen-Ergebnisse $C_{S, \sin(2\alpha)}^{H, (2)}(\mu_0 = m_t)$ in den Hierarchien h_1 bis zur Ordnung r^5 und h_3 bis zur Ordnung \bar{u}^8 sind im Anhang D.3 angegeben und in Abb. 4.10(b) dargestellt. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen den Ergebnissen für $m_t \approx M_{H^+}$, also der Hierarchie h_3 . Die roten, gestrichelten Kurve wurden für $m_t \ll M_{H^+}$ (h_1) entwickelt. Dünnere Kurven stellen die entsprechenden Ergebnisse zu einer niedrigeren Ordnung in \bar{u} bzw. r dar. Da es keine Überlappung zwischen den beiden Entwicklungen gibt, wurde im Bereich $375 \text{ GeV} < M_{H^+} < 500 \text{ GeV}$ zwischen den beiden Entwicklungen linear interpoliert (blaue Kurve). Das Gesamtergebn lässt sich damit durch die folgende Funktion approximieren,

$$C_{S, \sin(2\alpha)}^{H, (2)}(\mu_0 = m_t) = \begin{cases} C_{S, \sin(2\alpha), h_3}^{H, (2)}(\mu_0 = m_t) & \text{für } M_{H^+} \leq 375 \text{ GeV} \\ -0.0777 \frac{M_{H^+}}{m_t} + 0.2648 & 375 \text{ GeV} < M_{H^+} < 500 \text{ GeV} \\ C_{S, \sin(2\alpha), h_1}^{H, (2)}(\mu_0 = m_t) & M_{H^+} \geq 500 \text{ GeV} \end{cases} \quad (4.48)$$

4.4. $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2HDM Typ-II zur NNLO

Ausgangspunkt für die Bestimmung von $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2HDM Typ-II ist die Formel für das Verzweungsverhältnis in Gl. (3.17). Für reelle Wilson-Koeffizienten und ohne eine zusätzliche CP-verletzende Phase ϕ_s^{NP} in der B_s - \bar{B}_s -Mischung gilt

$$\begin{aligned} F_P &= 1, \\ F_S &= 1 - \frac{\Delta\Gamma^s}{\Gamma_L^s} = \frac{\Gamma_H^s}{\Gamma_L^s}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Für den experimentellen Wert der Zerfallsbreite des leichteren B_s -Masseneigenzustands wird im Folgenden $1/\Gamma_L^s = 1.428(13) \text{ ps}$ [50] verwendet. Alle anderen Parameter werden aus der SM-Vorhersage übernommen und sind in Tab. 3.1 angegeben.

Da die Renormierungskonstanten Z_{SS} und Z_{PP} für die Operatoren Q_S und Q_P nicht verschwinden, sind auch die anomalen Dimensionen für die Koeffizienten C_S und C_P ungleich null. Aus diesem Grund müsste man die Wilson-Koeffizienten von der Matching-Skala μ_0 zur eigentlichen Skala des B_s -Meson-Zerfalls μ_b mit Hilfe der RGE evolvieren. Die Wilson-Koeffizienten C_S und C_P treten immer in der Kombination $u_s C_S$ und $u_s C_P$, mit $u_s = M_{B_s}/(m_b + m_s)$, im Verzweungsverhältnis in Gl. (3.17) auf. Die Größen $C_S/(m_b + m_s)$ und $C_P/(m_b + m_s)$ sind invariant unter dem Renormierungsgruppenlaufen. Dies kann man daran erkennen, dass die Renormierungskonstanten Z_{SS} und Z_{PP} gerade gleich der Renormierungskonstante der Quark-Massen sind, womit sich in der Kombination $C_S/(m_b + m_s)$ bzw. $C_P/(m_b + m_s)$ die anomalen Dimensionen gegenseitig wegheben. Aus diesem Grund wurden die Wilson-Koeffizienten C_S und C_P und alle leichten Quark-Massen in Gl. (3.17) an der Matching-Skala μ_0 ausgewertet. Als Eingangsparameter für die leichten Quark-Massen wurden die Werte $m_b(m_b) = 4.163 \text{ GeV}$ [107] und $m_s(2 \text{ GeV}) = 0.095(5) \text{ GeV}$ [22] verwendet. Mit dem Programm RUNDEC [83] wurden diese dann zur Skala μ_0 evolviert.

Im Folgenden werden die Effekte der Drei-Schleifen-Korrekturen diskutiert. Dazu werden in Abb. 4.11 die Vorhersagen für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2HDM Typ-II für verschiedene Szenarien in Abhängigkeit der Matching-Skala μ_0 gezeigt. Die blauen, gepunkteten Kurven geben das LO-Ergebnis an. Die roten, gestrichelten Kurven repräsentieren das NLO-Ergebnis, wobei auch die SM-Anteile zur NLO eingehen. Die grünen, strichpunktieren Kurven enthalten die 2HDM-Anteile zur NLO und die SM-Anteile zur NNLO. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen den vollen NNLO-Ergebnissen. Der Unterschied zwischen den grünen und den schwarzen

Kurven gibt den Effekt der Drei-Schleifen-Korrekturen im 2HDM an, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet wurden.

In Abb. 4.11(a), (b) und (c) sind die Vorhersagen für $\sin^2(2\alpha) = 0$ und unterschiedlichen Werten für M_{H^+} und $\tan\beta$ gezeigt. In (a) wurde $M_{H^+} = 400$ GeV und $\tan\beta = 50$ gewählt. In (b) und (c) wurde $\tan\beta = 100$ und $M_{H^+} = 400$ GeV bzw. $M_{H^+} = 700$ GeV verwendet. Für $\tan\beta = 50$ (a) gibt es kaum einen Unterschied zwischen der grünen und der schwarzen Kurve. Die Abhängigkeit von der Matching-Skala kommt damit alleine durch die SM-Anteile zustande und wird durch die Hinzunahme der Drei-Schleifen-Korrekturen im SM-Anteil stark reduziert. Für $\tan\beta = 100$ (b) und (c) ist die Situation gerade umgekehrt. Durch Hinzunahme der NNLO-Korrekturen im SM gibt es keine Reduktion der Skalenabhängigkeit. Erst durch die Hinzunahme der vollen NNLO-Korrekturen reduziert sich diese stark.

In Abb. 4.11(d) ($\tan\beta = 50$, $M_{H^+} = 400$ GeV), (e) ($\tan\beta = 50$, $M_{H^+} = 600$ GeV) und (f) ($\tan\beta = 100$, $M_{H^+} = 400$ GeV) wurden $\sin^2(2\alpha) = 1$ gewählt und die Massen der beiden CP-geraden Higgs-Bosonen wurden auf $M_{h^0} = 125.9$ GeV und $M_{H^0} = 600$ GeV gesetzt. Für $\tan\beta = 50$ und $M_{H^+} = 600$ GeV (e) gibt es eine Reduktion der Skalenabhängigkeit durch die SM-Ergebnisse zur NNLO (grüne Kurve). Durch Hinzunahme der 2HDM-Ergebnisse zur NNLO (schwarze Kurve) wird die Skalenabhängigkeit weiter abgeschwächt. Für $M_{H^+} = 400$ GeV und $\tan\beta = 50$ (d) bzw. $\tan\beta = 100$ (f) gibt es im Vergleich zwischen den NLO-Ergebnissen (rote Kurven) und den Ergebnissen zur NLO im 2HDM und zur NNLO im SM (grüne Kurve) keine signifikante Verbesserung der μ_0 -Abhängigkeit durch Hinzunahme der SM-Anteile zur NNLO. Erst durch die Hinzunahme der Ergebnisse im 2HDM zur NNLO (schwarze Kurven) gibt es eine signifikante Reduktion der Skalenabhängigkeit.

Als Fazit kann man sagen, dass im Allgemeinen eine deutliche Reduktion der Skalenabhängigkeit nur dann auftritt, wenn neben den NNLO-Beiträgen des SM auch diejenigen des 2HDM berücksichtigt werden.

In Abb. 4.12 sind die Vorhersagen für $\bar{B}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ mit verschiedenen Werten für $\tan\beta$ in Abhängigkeit der Masse des geladenen Higgs-Bosons dargestellt, wobei in Abb. 4.12(a) $\sin^2(2\alpha) = 0$ und in Abb. 4.12(b) $\sin^2(2\alpha) = 1$ mit $M_{h^0} = 125.9$ GeV und $M_{H^0} = 600$ GeV gewählt wurden. Die blauen Linien stellen die SM-Vorhersage zusammen mit dem 1σ -Fehlerintervall dar. Die roten, gestrichelten Linien entsprechen dem experimentellen Ergebnis und dessen 1σ -Fehlerintervall. Die graue Fläche deutet den durch $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ ausgeschlossenen Bereich für $M_{H^+} < 380$ GeV an. Details zu dieser unteren Grenze werden in Kapitel 6 ausführlich diskutiert. Ganz allgemein kann man feststellen, dass für große Werte von $\tan\beta$ und kleine Werte für M_{H^+} die Vorhersagen im 2HDM Typ-II den experimentellen Wert deutlich übersteigen, wodurch diese Parameterbereiche ausgeschlossen werden können. Die Kombination von großen Werten von $\tan\beta$ und großen Werten für M_{H^+} führt aber zu Vorhersagen die weiterhin sehr gut mit den experimentellen Resultaten verträglich sind.

Für $\tan\beta < 50$ sollte jedoch in Betracht gezogen werden, dass die Beiträge der Higgs-Pinguin-Diagramme nur zur höchsten Ordnung in $\tan\beta$, also zur Ordnung $\tan^2\beta$, berechnet wurden. Anteile zur Ordnung $\tan\beta$ können für kleine und moderate Werte von $\tan\beta$ von Bedeutung sein.

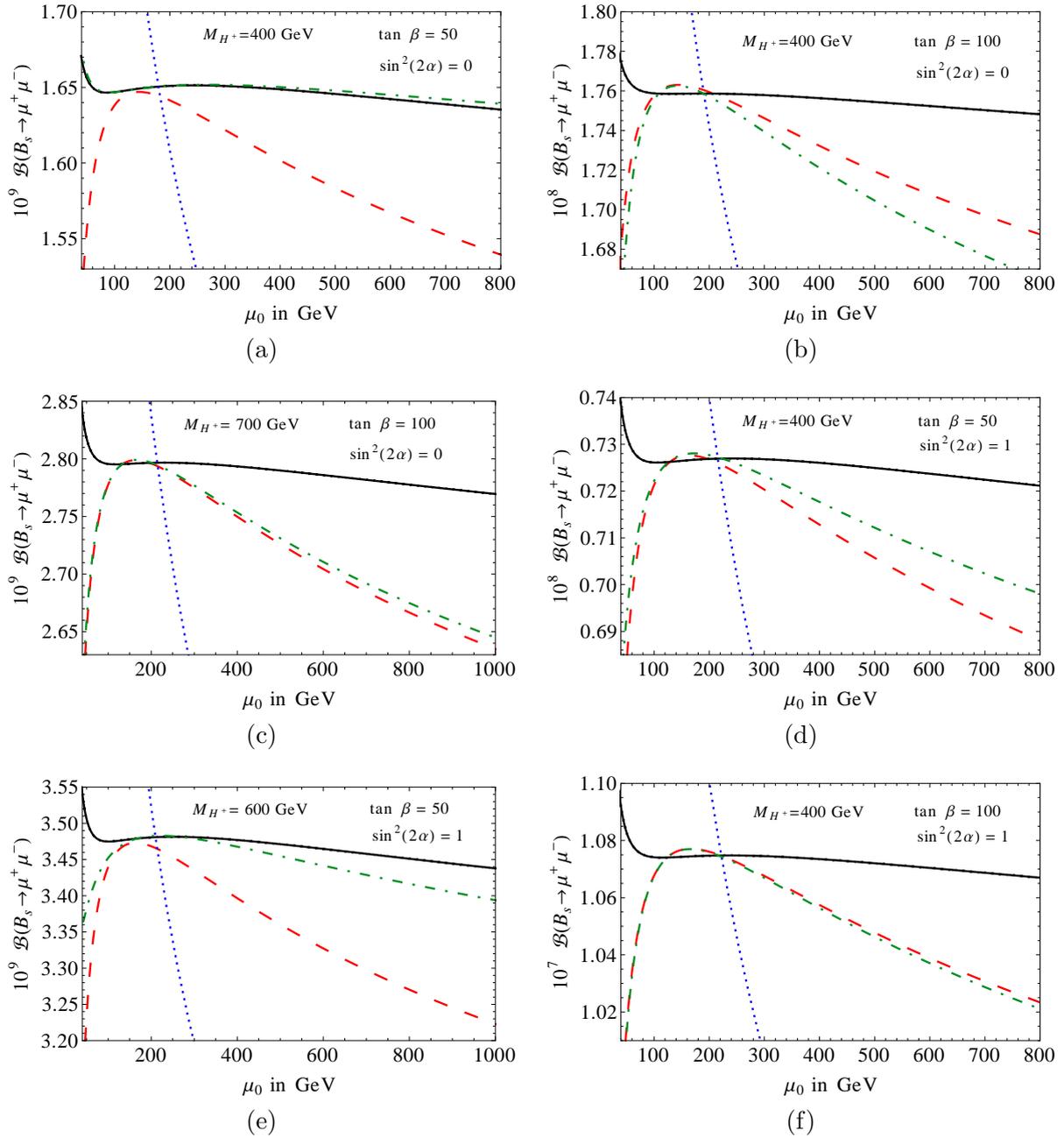


Abbildung 4.11.: Vorhersagen für $\overline{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2HDM Typ-II in Abhängigkeit der Matching-Skala μ_0 für verschiedene Szenarien. In (a) ($\tan \beta = 50$, $M_{H^+} = 400$ GeV), (b) ($\tan \beta = 100$, $M_{H^+} = 400$ GeV) und (c) ($\tan \beta = 100$, $M_{H^+} = 700$ GeV) wurden $\sin^2(2\alpha) = 0$ und in (d) ($\tan \beta = 50$, $M_{H^+} = 400$ GeV), (e) ($\tan \beta = 50$, $M_{H^+} = 600$ GeV) und (f) ($\tan \beta = 100$, $M_{H^+} = 400$ GeV) $\sin^2(2\alpha) = 1$ gewählt. Die blauen, gepunkteten Kurven geben das LO-Ergebnis und die roten, gestrichelten Kurven das NLO-Ergebnis an. Die grünen, strichpunktiierten Kurven zeigen das NLO-Ergebnis für den 2HDM-Anteil und das NNLO-Ergebnis für den SM-Anteil. Die schwarzen, durchgezogenen Kurven entsprechen den vollen NNLO-Ergebnissen.

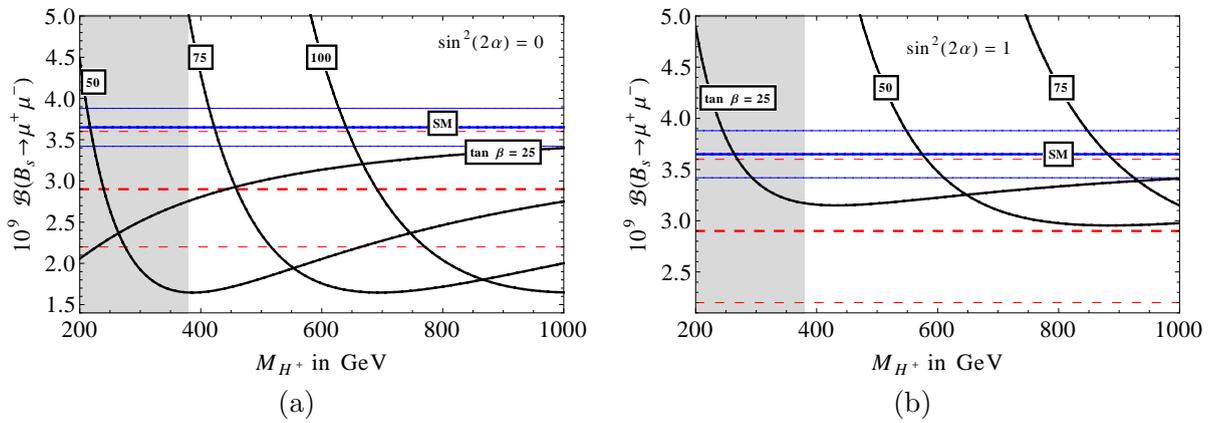


Abbildung 4.12.: Vorhersagen für $\overline{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ für verschiedene Werte von $\tan \beta$ in Abhängigkeit von M_{H^+} . Die blauen Linien stellen die SM-Vorhersage mit dem 1 σ -Fehlerintervall dar. Die roten, gestrichelten Linien zeigen den experimentellen Wert und das 1 σ -Fehlerintervall. Die graue Fläche ist durch $\overline{B} \rightarrow X_s \gamma$ ausgeschlossen.

Als zweiter wichtiger Prozess in dieser Arbeit wird der inklusive Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ untersucht. Dieser ist ebenfalls äußerst sensitiv auf Physik jenseits des SM (BSM) und stellt damit ein wichtiges Werkzeug bei der Suche nach Abweichungen vom SM dar. In diesem Kapitel wird insbesondere die Berechnung der NNLO-QCD-Korrekturen zu den Wilson-Koeffizienten innerhalb des SM diskutiert, wobei die Ergebnisse aus Ref. [70, 108] reproduziert wurden.

5.1. Der Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$

Für den inklusiven Zerfall $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ gibt es präzise Ergebnisse, die bei den Experimenten CLEO [109], ALEPH [110], BELLE [111, 112] und BABAR [113–116] gemessen wurden. Die aktuelle Kombination aller Messergebnisse aus Ref. [117] lautet

$$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)|_{E_\gamma > 1.6 \text{ GeV}} = (3.37 \pm 0.23) \times 10^{-4}. \quad (5.1)$$

Für die Photon-Energie wird üblicherweise eine untere Grenze von $E_\gamma > 1.6 \text{ GeV}$ verwendet, da Photonen mit einer niedrigen Energie experimentell nicht aufgelöst werden können und für eine Cut-Off Energie um 2 GeV und höher die theoretischen Unsicherheiten durch nicht-perturbative Effekte groß werden. Die SM-Vorhersage [118, 119] inklusive der NNLO-QCD-Korrekturen und der elektroschwachen NLO-Korrekturen lautet

$$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)|_{E_\gamma > 1.6 \text{ GeV}} = (3.15 \pm 0.23) \times 10^{-4} \quad (5.2)$$

und ist in sehr guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert. Außerdem ist im Gegensatz zu $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ die experimentelle Unsicherheit mit ca. 7% auf demselben niedrigen Niveau wie die theoretische Unsicherheit. Da $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ sehr sensitiv auf zusätzliche Beiträge von BSM-Teilchen ist, eignet sich diese Observable hervorragend um Ausschlussgrenzen an erweiterte Modelle zu geben. Mit der Masse des geladenen Higgs-Bosons in 2HDM wird in Kapitel 6 ein Beispiel für Ausschlussgrenzen an solche Modelle ausführlich diskutiert.

Das Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ wurde bisher nur an e^+e^- -Experimenten gemessen. Bei den B -Fabriken BELLE und BABAR werden die B -Mesonen über die $b\bar{b}$ -Resonanz $\Upsilon(4S)$

produziert, $e^+e^- \rightarrow \Upsilon(4S) \rightarrow B\bar{B}$. Die Größe X_s im Verzweigungsverhältnis steht für alle hadronischen Endzustände, die ein Strange-Quark beinhalten. Dabei tragen zum einen resonante Zustände wie z.B. \bar{K}^* , aber auch nicht-resonante hadronische Endzustände zu $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ bei. Exklusive Zerfälle wie $\bar{B} \rightarrow \bar{K}^* \gamma$ sind experimentell einfacher zu messen als die inklusive Zerfallsbreite. Die Vorhersagen hierfür sind aber sehr ungenau, da die hadronischen Matrixelemente nicht innerhalb der Störungstheorie berechnet werden können. Für inklusive Zerfälle ist dies möglich, wobei dann aber für die experimentelle Bestimmung die Schwierigkeit darin liegt, so „inklusiv wie möglich“ zu sein.

Zur expliziten Berechnung dieses Zerfalls wird die *Heavy Quark Expansion* [120–124] verwendet. Dadurch kann der inklusive Zerfall des B -Mesons auf den Zerfall des Bottom-Quarks in ein Strange-Quark und ein Photon zurückgeführt werden,

$$\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma) = \Gamma(b \rightarrow X_s^{\text{parton}} \gamma) + \mathcal{O}\left(\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{m_b^2}\right). \quad (5.3)$$

Die Größe X_s^{parton} steht dabei für partonische Endzustände der Art s , sg , sgg , $sq\bar{q}$. Die Unsicherheit auf Grund von nicht-perturbativen Beiträgen, also Abweichungen von der Relation in Gl. (5.3), liegt bei 5% [118, 125]. Der partonische Zerfall wird analog zu $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ innerhalb einer effektiven Theorie berechnet. In dieser sind wieder alle schweren Teilchen ausintegriert. Dadurch können die großen Massen m_t und M_W , die innerhalb der Schleifen auftreten, von der eigentlichen Skala des B -Meson-Zerfalls $\mu_b \approx m_b$ getrennt werden. Nur durch diese Separation der Skalen ist es möglich, die großen Logarithmen der Form $\ln(m_b^2/M_W^2)$ konsistent aufzusummieren und damit eine korrekte Vorhersage für die Zerfallsbreite zu erhalten. Die Lagrangedichte der effektiven Theorie für $b \rightarrow s \gamma$ lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b) \\ &+ \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{q=u,c} V_{qs}^* V_{qb} (C_1^c P_1^q + C_2^c P_2^q) \\ &+ \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \sum_{i>2} [(V_{us}^* V_{ub} + V_{cs}^* V_{cb}) C_i^c + V_{ts}^* V_{tb} C_i^t] P_i, \end{aligned} \quad (5.4)$$

mit den effektiven Operatoren

$$\begin{aligned} P_1^c &= (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a c_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu T^a b_L), \\ P_1^u &= (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a u_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu T^a b_L), \\ P_2^c &= (\bar{s}_L \gamma_\mu c_L)(\bar{c}_L \gamma^\mu b_L), \\ P_2^u &= (\bar{s}_L \gamma_\mu u_L)(\bar{u}_L \gamma^\mu b_L), \\ P_3 &= (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu q), \\ P_4 &= (\bar{s}_L \gamma_\mu T^a b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^\mu T^a q), \\ P_5 &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} q), \\ P_6 &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} T^a b_L) \sum_q (\bar{q} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} T^a q), \end{aligned}$$

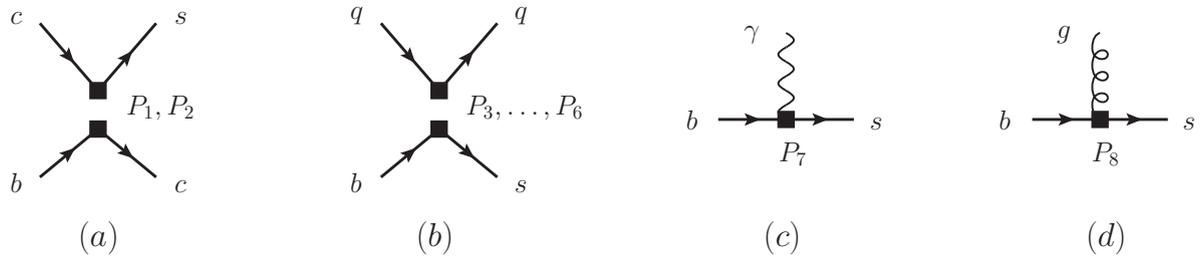


Abbildung 5.1.: Darstellung der effektiven $\Delta B = 1$ und $\Delta S = -1$ Operatoren. Die zwei ausgefüllten Quadrate in (a) und (b) deuten die beiden Fermionlinien in den Operatoren an.

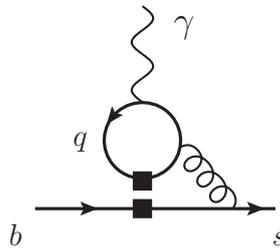


Abbildung 5.2.: Beispieldiagramm für Beiträge der Operatoren P_3 bis P_6 zur Zerfallsbreite $\Gamma(b \rightarrow s\gamma)$.

$$\begin{aligned}
 P_7 &= \frac{e m_b}{g_s^2} (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_R) F_{\mu\nu}, \\
 P_8 &= \frac{m_b}{g_s} (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} T^a b_R) G_{\mu\nu}^a,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

wobei in den Operatoren P_3 bis P_6 über alle leichten Quarks summiert wird. In Abb. 5.1 sind die Operatoren P_1 bis P_8 dargestellt. Der Hauptbeitrag zur partiellen Zerfallsbreite $\Gamma(b \rightarrow s\gamma)$ entsteht durch die sogenannten Dipol-Operatoren P_7 und P_8 , aber auch alle anderen Operatoren liefern nicht-vernachlässigbare Beiträge. Die Vier-Quark-Operatoren P_1 bis P_6 können durch Diagramme, in denen die Quarks eine geschlossene Schleife bilden und Gluonen und ein Photon abstrahlen, beitragen. Ein solches Diagramm ist in Abb. 5.2 dargestellt.

Die Berechnung von $\Gamma(b \rightarrow X_s^{\text{parton}} \gamma)$ kann in drei Schritte aufgespalten werden:

- Matching: Die Berechnung der Wilson-Koeffizienten $C_i(\mu_0)$ an der Skala $\mu_0 \approx m_t, M_W$.
- Renormierungsgruppenlaufen: Durch das RGE-Laufen werden die Wilson-Koeffizienten von der Skala μ_0 zur Skala μ_b evolviert, d.h. aus $C_i(\mu_0)$ wird $C_i(\mu_b)$ bestimmt. In diesem Schritt werden die oben erwähnten großen Logarithmen zu allen Ordnungen der Störungsreihe aufsummiert.
- On-shell Matrixelemente: Berechnung der on-shell Matrixelemente an der Skala μ_b innerhalb der effektiven Theorie.

In dieser Arbeit liegt das Hauptaugenmerk auf dem ersten Schritt, der Berechnung der Wilson-Koeffizienten. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel die Berechnung aller Wilson-Koeffizienten im SM, die zur NNLO zu $\Gamma(b \rightarrow s\gamma)$ beitragen, diskutiert. Alle Wilson-Koeffizienten werden bis inklusive der Ordnung α_s^2 benötigt, was für C_1 bis C_6 der Zwei-Schleifen-Ordnung und für C_7 und C_8 der Drei-Schleifen-Ordnung entspricht. Dabei wurden die Ergebnisse aus Ref. [70, 108] reproduziert, wobei die Drei-Schleifen-Ergebnisse für die Koeffizienten C_7 und C_8 durch eine tiefere Entwicklung in den Massenverhältnissen verbessert werden konnten. Im Weiteren wird dem Vorgehen und der Notation aus Ref. [70, 108] gefolgt.

Die Wilson-Koeffizienten lassen sich als Reihenentwicklung in α_s darstellen,

$$C_i^q = C_i^{q(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_i^{q(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_i^{q(2)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 C_i^{q(3)} + \mathcal{O}(\alpha_s^4), \quad (5.6)$$

mit $q = c, t$. Im Folgenden wird der Index q immer dann weggelassen, wenn er nicht unbedingt benötigt wird. Man beachte in der Definition von P_7 und P_8 in Gl. (5.5) die Normierung mit dem Faktor $1/g_s^2$. Im Operator P_8 tritt ebenfalls g_s auf, analog zur elektrischen Ladung in P_7 , wodurch in Gl. (5.5) für P_8 nur der Faktor $1/g_s$ vorkommt. Diese Normierung wird nur beim Matching verwendet und sorgt dafür, dass $C_i^{(n)}$ den n -Schleifen-Anteil zum Wilson-Koeffizienten bezeichnet. Für das Renormierungsgruppenlaufen und die Berechnung der on-shell Matrixelemente geht man zu den eigentlichen Operatoren,

$$\begin{aligned} Q_7 &= \frac{e}{16\pi^2} m_b (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} b_R) F_{\mu\nu}, \\ Q_8 &= \frac{g_s}{16\pi^2} m_b (\bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} T^a b_R) G_{\mu\nu}^a, \end{aligned} \quad (5.7)$$

über, bei denen der führende Anteil der Wilson-Koeffizienten kein α_s enthält.

Durch QCD-Korrekturen mischen die Operatoren in Gl. (5.5) miteinander, analog zu den Operatoren Q_A und Q_A^E in Kapitel 3.2.1.1. Aus diesem Grund werden die Renormierungskonstanten für die Wilson-Koeffizienten in Matrixform dargestellt,

$$C_{i,B}(\mu) = Z_{j,i} C_j(\mu), \quad (5.8)$$

mit

$$Z_{i,j} = \delta_{ij} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i,j}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \delta Z_{i,j}^{(2)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 \delta Z_{i,j}^{(3)} + \mathcal{O}(\alpha_s^4). \quad (5.9)$$

Alle in diesem Kapitel benötigten Renormierungskonstanten $\delta Z_{i,j}^{(n)}$ wurden in Ref. [126, 127] berechnet und sind im Anhang A angegeben.

5.2. Wilson-Koeffizienten C_1 bis C_8

In diesem Kapitel wird die Berechnung aller benötigter Wilson-Koeffizienten zur Zwei- bzw. Drei-Schleifen-Ordnung diskutiert, wobei auf alle Komponenten der Matching-Formeln ausführlich eingegangen wird.

5.2.1. Berechnung von C_1 bis C_6

Die Wilson-Koeffizienten C_1 bis C_6 werden bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung, d.h. zur Ordnung α_s^2 , benötigt und tragen zum Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ durch das Renormierungsgruppenlaufen von C_7 und C_8 und als effektive Kopplungskonstanten in den Matrixelementen

bei. Da die Operatoren P_1 bis P_6 durch QCD-Korrekturen miteinander mischen ist es von Vorteil die Berechnung dieser Koeffizienten zusammen zu diskutieren.

Für das Matching, also die Bestimmung der Wilson-Koeffizienten, gibt es im Prinzip mehrere Möglichkeiten. Beim on-shell Matching werden die Amplituden in der vollen und der effektiven Theorie für äußere Teilchen auf ihrer Massenschale und unter Ausnutzung der Bewegungsgleichungen berechnet. Dadurch ist es notwendig auch Schleifenkorrekturen in der effektiven Theorie zu betrachten. Außerdem sind die Integrale in der vollen Theorie schwierig zu berechnen, da es sich um on-shell Integrale mit verschiedenen Massen handelt. Die zweite Möglichkeit ist das off-shell Matching, welches in dieser Arbeit verwendet wurde. Mit dieser Methode können alle äußeren Impulse auf null gesetzt werden, was in der vollen Theorie auf Tadpole-Integrale führt, die einfacher zu berechnen sind als on-shell Integrale. Außerdem müssen keine Schleifenkorrekturen in der effektiven Theorie berechnet werden, da diese auf skalenlose Integrale führen würden. Der Preis für die vereinfachte Kinematik ist, dass die Operatorbasis im Vergleich zum on-shell Matching durch sogenannte *equation-of-motion-vanishing* Operatoren erweitert werden muss. Dies sind Operatoren die verschwinden, sobald die Bewegungsgleichungen auf die äußeren Teilchen angewandt werden. In dieser Arbeit treten mit

$$\begin{aligned} P_{31} &= \frac{1}{g_s} (\bar{s}_L \gamma^\mu T^a b_L) D^\nu G_{\mu\nu}^a + P_4, \\ P_{34} &= \frac{i}{g_s} \left(\bar{s}_L \overleftarrow{D} \sigma^{\mu\nu} T^a b_L G_{\mu\nu}^a - G_{\mu\nu}^a \bar{s}_L T^a \sigma^{\mu\nu} \overrightarrow{D} b_L \right) + P_8, \\ P_{35} &= \frac{ie}{g_s^2} \left(\bar{s}_L \overleftarrow{D} \sigma^{\mu\nu} b_L F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} \bar{s}_L \sigma^{\mu\nu} \overrightarrow{D} b_L \right) + P_7, \end{aligned} \quad (5.10)$$

drei dieser Operatoren beim Matching auf. Außerdem werden die evaneszenten Operatoren

$$\begin{aligned} P_{11}^q &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} T^a q_L) (\bar{q}_L \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} T^a b_L) - 16 P_1^q, \\ P_{12}^q &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} q_L) (\bar{q}_L \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} b_L) - 16 P_2^q, \\ P_{21}^q &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} T^a q_L) (\bar{q}_L \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_5} T^a b_L) - 20 P_{11}^q - 256 P_1^q, \\ P_{22}^q &= (\bar{s}_L \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} q_L) (\bar{q}_L \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_5} b_L) - 20 P_{12}^q - 256 P_2^q, \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit $q = u, c$, benötigt. Analog zu dem evaneszenten Operator Q_A^E in Kapitel 3.2.1.1 sind diese Operatoren in $d = 4$ Dimensionen algebraisch null. Da aber infrarote Divergenzen in den Diagrammen auftreten, die sich erst beim Matching herausheben, ist es nötig, die Wilson-Koeffizienten dieser unphysikalischen Operatoren mit zu berücksichtigen.

Zur Bestimmung von C_1 bis C_6 werden in der vollen Theorie, d.h. im SM, alle 1LPI-Diagramme die zur Amplitude $b \rightarrow sc\bar{c}$ und $b \rightarrow sdd$ auf Tree-Level-, Ein-Schleifen- und Zwei-Schleifen-Niveau beitragen, berechnet. In Abb. 5.3 sind Beispieldiagramme für $b \rightarrow sc\bar{c}$ dargestellt. Das linke Diagramm ist der einzige Tree-Level-Beitrag, die Diagramme in der Mitte und rechts sind Beispieldiagramme für die α_s - und α_s^2 -Korrekturen. Für die Amplitude $b \rightarrow sdd$ treten erst ab der Ordnung α_s^2 1LPI-Diagramme im SM auf, in Abb. 5.4 sind zwei Beispieldiagramme dargestellt.

Die verschiedenen Dirac-Strukturen in den Diagrammen wurden mit Hilfe von Projektoren extrahiert, siehe Anhang C.1. Die Rechnung wurde in $d \neq 4$ Dimensionen ausgeführt, wodurch auch Terme mit Dirac-Strukturen auftreten, die für $d = 4$ Dimensionen verschwinden würden. Diese ergeben die Wilson-Koeffizienten der evaneszenten Operatoren aus Gl. (5.11), was im Laufe dieses Kapitels im Detail beschrieben wird. Zur Unterscheidung der Operatoren mit gleicher

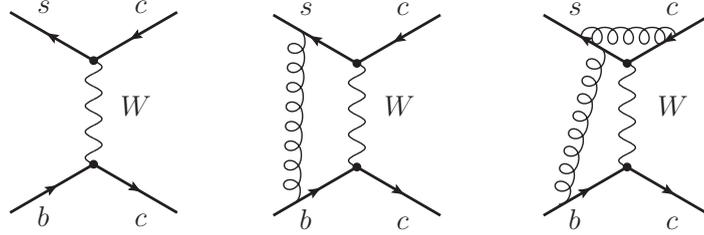


Abbildung 5.3.: Beispieldiagramme für die Amplitude $b \rightarrow sc\bar{c}$, die zur Berechnung von C_1 und C_2 benötigt werden.

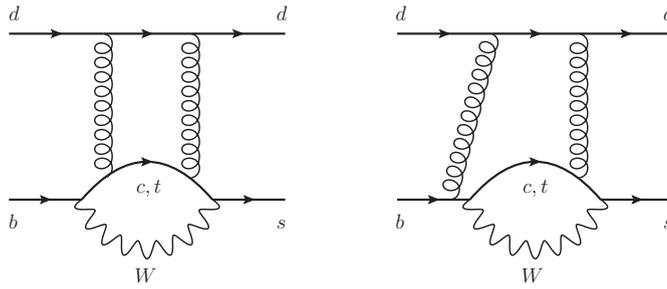


Abbildung 5.4.: Beispieldiagramme zur Zwei-Schleifen-Ordnung für die Amplitude $b \rightarrow sdd\bar{d}$, die zur Berechnung von C_3 bis C_6 benötigt werden.

Dirac-Struktur aber unterschiedlicher Farbstruktur wurde die QCD-Relation

$$\delta_{il}\delta_{kj} = 2T_{ij}^a T_{kl}^a + \frac{1}{n_c}\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (5.12)$$

verwendet.

Die unrenormierten Amplituden für $b \rightarrow sc\bar{c}$ und $b \rightarrow sdd\bar{d}$ lassen sich als Reihenentwicklung in α_s darstellen,

$$\begin{aligned} A_{b \rightarrow sc\bar{c}} &= A_{b \rightarrow sc\bar{c}}^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) A_{b \rightarrow sc\bar{c}}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 A_{b \rightarrow sc\bar{c}}^{(2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^3), \\ A_{b \rightarrow sdd\bar{d}} &= A_{b \rightarrow sdd\bar{d}}^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right) A_{b \rightarrow sdd\bar{d}}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 A_{b \rightarrow sdd\bar{d}}^{(2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die auftretenden Dirac-Strukturen in den Amplituden können wie folgt klassifiziert werden,

$$\begin{aligned} D_1 &= (\gamma_\mu P_L T^a) \otimes (\gamma^\mu P_L T^a), \\ D_2 &= (\gamma_\mu P_L) \otimes (\gamma^\mu P_L), \\ D_3 &= (\gamma_\mu P_L) \otimes (\gamma^\mu), \\ D_4 &= (\gamma_\mu P_L T^a) \otimes (\gamma^\mu T^a), \\ D_5 &= (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} P_L) \otimes (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}), \\ D_6 &= (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} P_L T^a) \otimes (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} T^a), \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
D_{11} &= (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} P_L T^a) \otimes (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} P_L T^a) - 16 D_1, \\
D_{12} &= (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} P_L) \otimes (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} P_L) - 16 D_2, \\
D_{21} &= (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} P_L T^a) \otimes (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_5} P_L T^a) - 20 D_{11} - 256 D_1, \\
D_{22} &= (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} P_L) \otimes (\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_5} P_L) - 20 D_{12} - 256 D_2.
\end{aligned}$$

Die Bezeichnung dieser Dirac-Strukturen ist analog zu den entsprechenden Operatoren in Gl. (5.5) und Gl. (5.11) gewählt. Im Folgenden wird die unrenormierte n -Schleifen-Teilamplitude, die zusammen mit der Dirac-Struktur D_i auftritt, mit $C_{i,\text{bare}}^{q(n)}$ bezeichnet. Der Zusammenhang mit den Wilson-Koeffizienten C_i kommt erst innerhalb der Matching-Formeln zustande. Eine explizite Rechnung von $b \rightarrow sc\bar{c}$ auf Tree-Level-, Ein- und Zwei-Schleifen-Niveau ergibt folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
A_{b \rightarrow sc\bar{c}}^{(0)} &= i \frac{4 G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{cb} C_{2,\text{bare}}^{c(0)} D_2, \\
A_{b \rightarrow sc\bar{c}}^{(1)} &= i \frac{4 G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{cb} \left\{ C_{1,\text{bare}}^{c(1)} D_1 + C_{11,\text{bare}}^{c(1)} D_{11} \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\
A_{b \rightarrow sc\bar{c}}^{(2)} &= i \frac{4 G_F}{\sqrt{2}} V_{cs}^* V_{cb} \left\{ C_{1,\text{bare}}^{c(2)} D_1 + C_{2,\text{bare}}^{c(2)} D_2 + C_{11,\text{bare}}^{c(2)} D_{11} \right. \\
&\quad \left. + C_{12,\text{bare}}^{c(2)} D_{12} + C_{21,\text{bare}}^{c(2)} D_{21} + C_{22,\text{bare}}^{c(2)} D_{22} \right\} \\
&\quad + i \frac{4 G_F}{\sqrt{2}} \sum_{i=3}^6 \left(V_{cs}^* V_{cb} C_{i,\text{bare}}^{c(2)} + V_{ts}^* V_{tb} C_{i,\text{bare}}^{t(2)} \right) D_i + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Das Tree-Level-Ergebnis $C_{2,\text{bare}}^{c(0)} = -1$ entsteht aus dem linken Diagramm in Abb. 5.3. Die analoge Rechnung für $b \rightarrow sdd\bar{d}$ ergibt

$$\begin{aligned}
A_{b \rightarrow sdd\bar{d}}^{(0)} &= 0, \\
A_{b \rightarrow sdd\bar{d}}^{(1)} &= 0, \\
A_{b \rightarrow sdd\bar{d}}^{(2)} &= i \frac{4 G_F}{\sqrt{2}} \sum_{i=3}^6 \left(V_{cs}^* V_{cb} C_{i,\text{bare}}^{c(2)} + V_{ts}^* V_{tb} C_{i,\text{bare}}^{t(2)} \right) D_i + \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Amplitude $b \rightarrow sdd\bar{d}$ trägt erst zur Ordnung α_s^2 bei, wobei dieser Anteil auch in der Amplitude $b \rightarrow sc\bar{c}$ vorkommt, vgl. letzte Zeile in Gl. (5.15).

Nun müssen in der effektiven Theorie dieselben Amplituden berechnet werden. Dazu werden alle Operator-Einsetzungen in Tree-Level-Diagramme betrachtet, die einen Beitrag zu den Amplituden $b \rightarrow sc\bar{c}$ und $b \rightarrow sdd\bar{d}$ liefern können. Schleifenkorrekturen in der effektiven Theorie verschwinden, da die äußeren Impulse und alle leichten Quark-Massen auf null gesetzt werden und damit nur skalenlose Schleifen-Integrale übrigbleiben, die keinen Beitrag liefern. Die Operatoren P_1 bis P_6 tragen zu $b \rightarrow sc\bar{c}$ bei, genauso wie die evaneszenten Operatoren P_{11} , P_{12} , P_{21} und P_{22} . Des Weiteren liefert der Operator P_{31} ebenfalls einen Anteil zu $b \rightarrow sc\bar{c}$, da dieser einen Term proportional zum Operator P_4 besitzt. Zur Amplitude $b \rightarrow sdd\bar{d}$ können die Operatoren P_3 bis P_6 und P_{31} beitragen. Da diese Amplitude in der vollen Theorie aber erst zur Ordnung α_s^2 von null verschieden ist, muss in der effektiven Theorie dasselbe gelten. Die Operatoren P_4 und P_{31} tragen zur selben Dirac-Struktur bei, wodurch sich die entsprechenden Wilson-Koeffizienten gegenseitig bis zur Ordnung α_s^2 wegheben müssen,

$$C_4^q = -C_{31}^q + \mathcal{O}(\alpha_s^2), \tag{5.17}$$

da es sonst einen Beitrag zur Amplitude $b \rightarrow s d \bar{d}$ geben würde. Der Koeffizient $C_4^{q(1)}$ wird über den Koeffizienten $C_{31}^{q(1)}$ und Gl. (5.17) bestimmt. Da der Operator P_{31} auch einen Anteil mit bsg hat, wird die 1LPI-Amplitude $b \rightarrow sg$ zur Berechnung von C_{31} verwendet. Die eigentliche Rechnung für C_{31}^q und damit auch für C_4^q wird im Kapitel 5.2.2 zusammen mit der Berechnung von C_8 diskutiert. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel davon ausgegangen, dass die Wilson-Koeffizienten C_{31}^q und C_4^q einschließlich der Ordnung α_s^2 bekannt sind. Die Tree-Level- und Ein-Schleifen-Anteile zu den Wilson-Koeffizienten für die Operatoren P_3 , P_5 und P_6 müssen dagegen zwangsläufig null sein,

$$\begin{aligned} C_i^{q(0)} &= 0, \\ C_i^{q(1)} &= 0, \quad i = 3, 5, 6, \end{aligned} \quad (5.18)$$

da sie jeweils die einzigen Beiträge zur entsprechenden Dirac-Struktur in der Amplitude $b \rightarrow s d \bar{d}$ liefern und diese erst zur Ordnung α_s^2 ungleich null ist.

Im Folgenden werden die Matching-Formeln für die Koeffizienten C_1 , C_2 , C_3 , C_5 und C_6 diskutiert. Im Allgemeinen hat die Matching-Formel die Form

$$Z_{j,i} C_j \langle Z(P_i) \rangle_R = A_{i,R}^{\text{SM}}, \quad (5.19)$$

wobei es sich bei $A_{i,R}^{\text{SM}}$ um die renormierte SM-Amplitude mit der Dirac-Struktur D_i , also die renormierte Version von $C_{i,\text{bare}}^q$ aus Gl. (5.15) und Gl. (5.16) handelt. Dazu wurde die Renormierung aller Massen, Felder und Kopplungskonstanten durchgeführt. Bei $\langle Z(P_i) \rangle_R$ handelt es sich um die renormierten Matrixelemente des Operators P_i , wobei auch hier alle Felder und Kopplungskonstanten renormiert wurden. Da, wie schon mehrmals erwähnt, in der effektiven Theorie keine Schleifenkorrekturen auftreten, reduziert sich $\langle Z(P_i) \rangle_R$ zu Einsetzungen von P_i in Tree-Level-Diagramme. Die Renormierungskonstanten der Felder werden in den folgenden Gleichungen nur dann berücksichtigt, wenn sich diese in der vollen und der effektiven Theorie unterscheiden. Alle benötigten Renormierungskonstanten $Z_{j,i}$ für die Operatoren sind im Anhang A angegeben. Auf Tree-Level-Niveau folgt aus Gl. (5.19) und Gl. (5.15) für den Koeffizienten von P_2 ,

$$C_2^{c(0)} = C_{2,\text{bare}}^{c(0)} = -1. \quad (5.20)$$

Zur Ordnung α_s gibt es Beiträge zu C_1 und C_{11} , aber keinen Beitrag zu C_2 ,

$$\begin{aligned} C_1^{c(1)} &= C_{1,\text{bare}}^{c(1)} - \delta Z_{2,1}^{(1)} C_2^{c(0)}, \\ C_2^{c(1)} &= 0, \\ C_{11}^{c(1)} &= C_{11,\text{bare}}^{c(1)} - \delta Z_{2,11}^{(1)} C_2^{c(0)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Zur Ordnung α_s^2 gibt es zu allen Koeffizienten Beiträge. Die Matching-Formeln für die Zwei-Schleifen-Koeffizienten $C_1^{c(2)}$ und $C_2^{c(2)}$ lauten

$$\begin{aligned} C_1^{c(2)} &= C_{1,\text{bare}}^{c(2)} + (Z_{g_s}^{\text{SM}})^2 C_{1,\text{bare}}^{c(1)} \\ &\quad - \left(\delta Z_{1,1}^{(1)} C_1^{c(1)} + \delta Z_{11,1}^{(1)} C_{11}^{c(1)} + \delta Z_{2,1}^{(2)} C_2^{c(0)} \right), \\ C_2^{c(2)} &= C_{2,\text{bare}}^{c(2)} + 2 \Delta Z_\psi C_2^{c(0)} - \left(\delta Z_{1,2}^{(1)} C_1^{c(1)} + \delta Z_{2,2}^{(2)} C_2^{c(0)} + \delta Z_{11,2}^{(1)} C_{11}^{c(1)} \right), \end{aligned} \quad (5.22)$$

mit der Renormierungskonstanten $Z_{g_s}^{\text{SM}}$ für g_s aus Gl. (3.35). Für die Wellenfunktions-Renormierung wird mit ΔZ_ψ wieder nur die Differenz zwischen der Renormierungskonstanten in der

vollen und der effektiven Theorie benötigt, siehe Gl. (3.42). Für die QCD-Pinguin-Operatoren P_3 , P_5 und P_6 erhält man folgende Formeln auf Zwei-Schleifen-Niveau,

$$\begin{aligned} C_3^{q(2)} &= C_{3,\text{bare}}^{q(2)} - \left(\delta Z_{4,3}^{(1)} C_4^{q(1)} + \delta^{cq} \delta Z_{2,3}^{(2)} C_2^{c(0)} \right), \\ C_5^{q(2)} &= C_{5,\text{bare}}^{q(2)} - \left(\delta Z_{4,5}^{(1)} C_4^{q(1)} + \delta^{cq} \delta Z_{2,5}^{(2)} C_2^{c(0)} \right), \\ C_6^{q(2)} &= C_{6,\text{bare}}^{q(2)} - \left(\delta Z_{4,6}^{(1)} C_4^{q(1)} + \delta^{cq} \delta Z_{2,6}^{(2)} C_2^{c(0)} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Für alle diese Koeffizienten wurden Zwei-Schleifen-Integrale mit verschwindenden äußeren Impulsen und exakter Massenabhängigkeit berechnet. Damit war es möglich die Ergebnisse in Ref. [108] zu bestätigen. Dort sind auch analytische Ergebnisse für die Koeffizienten angegeben.

5.2.2. Berechnung von C_7 und C_8

In diesem Kapitel wird die Berechnung der Wilson-Koeffizienten C_7 und C_8 zur Drei-Schleifen-Ordnung beschrieben. Der Wilson-Koeffizient C_7 ist von zentraler Bedeutung für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$, und C_8 trägt durch das Renormierungsgruppenlaufen zu C_7 bei. In diesem Kapitel wird dem Vorgehen aus Ref. [70, 108] gefolgt.

Die Amplituden in der vollen Theorie wurden wieder off-shell berechnet, wobei in den äußeren Impulsen bis zur zweiten Ordnung entwickelt wurde, da die Operatoren P_7 und P_8 in Gl. (5.5) jeweils eine Ableitung und die Operatoren P_{31} , P_{34} und P_{35} in Gl. (5.10) jeweils zwei Ableitungen enthalten. Außerdem wurde bis zur linearen Ordnung in der Masse des Bottom-Quarks m_b entwickelt. In den Amplituden $b \rightarrow s\gamma$ und $b \rightarrow sg$ wurde für die äußeren Photon- und Gluon-Felder die Hintergrundfeld-Version der 't Hooft-Feynman Eichung verwendet. In dieser Eichung reduziert sich die Anzahl der Diagramme, da der $W^\pm G^\mp \gamma$ -Vertex verschwindet. Für das Matching in diesem Kapitel ist diese Eichung zwingend notwendig, da die hier verwendete Operatorbasis aus Ref. [108] für äußere Photon- und Gluon-Felder in der Hintergrundfeld-Version der 't Hooft-Feynman Eichung hergeleitet wurde. Die 1LPI-Amplitude $b \rightarrow s\gamma$ im SM hat die Form

$$A_{b \rightarrow s\gamma} = i \frac{4 G_F}{\sqrt{2}} \frac{e P_R}{16 \pi^2} \left[(V_{us}^* V_{ub} + V_{cs}^* V_{cb}) \sum_{j=1}^{13} Y_j^c S_j + V_{ts}^* V_{tb} \sum_{j=1}^{13} Y_j^t S_j \right]. \quad (5.24)$$

Für die Amplitude $b \rightarrow sg$ ergibt sich

$$A_{b \rightarrow sg} = i \frac{4 G_F}{\sqrt{2}} \frac{g_s P_R T^a}{16 \pi^2} \left[(V_{us}^* V_{ub} + V_{cs}^* V_{cb}) \sum_{j=1}^{13} G_j^c S_j + V_{ts}^* V_{tb} \sum_{j=1}^{13} G_j^t S_j \right], \quad (5.25)$$

jeweils mit den Dirac-Strukturen

$$\begin{aligned} S_j &= \left\{ \gamma_\mu \not{p} \not{k}, \gamma_\mu (p \cdot k), \gamma_\mu p^2, \gamma_\mu k^2, \not{p} k_\mu, \not{p} p_\mu, \not{k} p_\mu, \not{k} k_\mu, \right. \\ &\quad \left. m_b \not{k} \gamma_\mu, m_b \gamma_\mu \not{k}, m_b \not{p} \gamma_\mu, m_b \gamma_\mu \not{p}, M_W^2 \gamma_\mu \right\}_j. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Der auslaufende Photon-Impuls (bzw. auslaufende Gluon-Impuls) wird mit k bezeichnet und p ist der Impuls des einlaufenden Bottom-Quarks. Die Funktionen Y_j^q und G_j^q können als Reihenentwicklung in α_s dargestellt werden,

$$Y_j^q = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{n-1} Y_j^{q(n)}, \quad (5.27)$$

$$G_j^q = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{n-1} G_j^{q(n)}.$$

Im off-shell Matching tragen nicht nur die physikalischen Operatoren, sondern auch die equation-of-motion-vanishing Operatoren zu den Amplituden in der effektiven Theorie bei. So liefern P_7 und P_{35} einen Anteil zur Struktur S_{10} in der Amplitude $b \rightarrow s\gamma$. Zur Struktur S_2 in der Amplitude $b \rightarrow s\gamma$ trägt nur der Operator P_{35} bei. Damit kann der physikalische Wilson-Koeffizient C_7 bestimmt werden, indem in der vollen Theorie eine Linearkombination aus den Funktionen Y_2^q und Y_{10}^q betrachtet wird, in der sich der Anteil von C_{35} in der effektiven Theorie gerade heraushebt. Eine analoge Situation tritt auch für die Operatoren P_8 und P_{34} in der Amplitude $b \rightarrow sg$ auf. Wie in Ref. [108] gezeigt, ergeben die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} C_{7,\text{bare}}^{q(n)} &= \frac{1}{4} Y_2^{q(n)} + Y_{10}^{q(n)}, \\ C_{8,\text{bare}}^{q(n)} &= \frac{1}{4} G_2^{q(n)} + G_{10}^{q(n)}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

die unrenormierten Wilson-Koeffizienten $C_{7,\text{bare}}^{q(n)}$ bzw. $C_{8,\text{bare}}^{q(n)}$. Des Weiteren gilt

$$C_{31,\text{bare}}^{q(n)} = - \left(\frac{1}{2} G_2^{q(n)} + G_8^{q(n)} \right), \quad (5.29)$$

womit auch $C_{4,\text{bare}}^{q(1)}$ bestimmt werden kann, siehe Gl. (5.17).

Um nun die Wilson-Koeffizienten C_4 , C_7 und C_8 zu bestimmen müssen die 1LPI-Diagramme im SM für $b \rightarrow s\gamma$ und $b \rightarrow sg$ berechnet werden und dabei die Anteile zu den Strukturen S_2 , S_8 und S_{10} extrahiert werden. Beispieldiagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung sind in Abb. 5.5 dargestellt. Zum Extrahieren der Strukturen S_2 , S_8 und S_{10} wurden in dieser Arbeit Projektoren auf diese Strukturen verwendet, die zuvor mit Hilfe von FORM und MATHEMATICA erzeugt wurden. Die Projektoren sind im Anhang C.2 angegeben.

Bevor die Drei-Schleifen-QCD-Korrekturen für die Koeffizienten C_7 und C_8 diskutiert werden, muss noch das Matching für C_{31} und damit auch C_4 erläutert werden. Diese Koeffizienten müssen nur bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung berechnet werden. Die Matching-Formeln für C_{31} lauten

$$\begin{aligned} C_{31}^{q(1)} &= C_{31,\text{bare}}^{q(1)} - \delta^{cq} \delta Z_{2,31}^{(1)} C_2^{c(0)}, \\ C_{31}^{c(2)} &= C_{31,\text{bare}}^{c(2)} - \left(\delta Z_{2,31}^{(2)} C_2^{c(0)} + \delta Z_{4,31}^{(1)} C_4^{c(1)} + \delta Z_{1,31}^{(1)} C_1^{c(1)} \right. \\ &\quad \left. + \delta Z_{31,31}^{(1)} C_{31}^{c(1)} + \delta Z_{11,31}^{(1)} C_{11}^{c(1)} - 2 \delta Z_{g_s}^{(1)} C_{31}^{c(1)} \right. \\ &\quad \left. - 2 \delta Z_g^{(1)} \delta Z_{2,31}^{(1)} C_2^{c(0)} \right), \\ C_{31}^{t(2)} &= C_{31,\text{bare}}^{t(2)} + \Delta T_{31}^{t(1)} - \left(\delta Z_{4,31}^{(1)} C_4^{t(1)} + \delta Z_{31,31}^{(1)} C_{31}^{t(1)} - 2 \delta Z_{g_s}^{(1)} C_{31}^{t(1)} \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Zur Zwei-Schleifen-Ordnung müssen neben dem Mischen der verschiedenen Operatoren zwei weitere Aspekte beachtet werden. Da das Ein-Schleifen-Ergebnis $C_{31,\text{bare}}^{t(1)}$ von der Top-Quark-Masse abhängt, muss diese auch renormiert werden,

$$\Delta T_{31}^{t(1)} = \left(C_{31,\text{bare}}^{t(1)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z m_t m_t} \right)_{\alpha_s}. \quad (5.31)$$

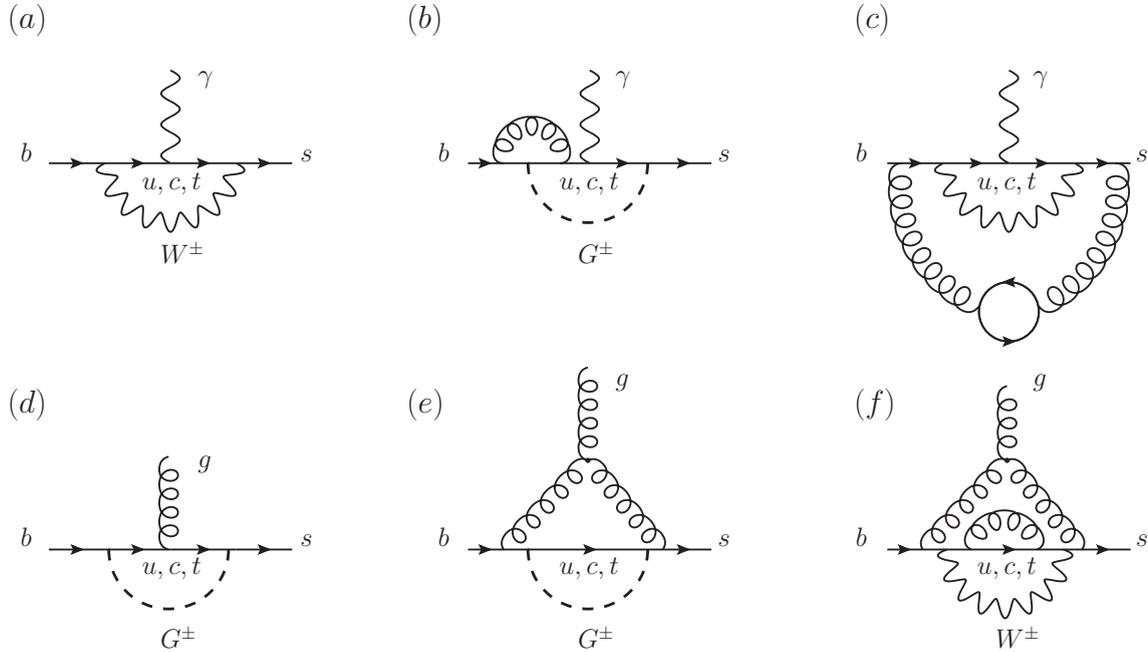


Abbildung 5.5.: Beispieldiagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung für C_7 (a-c) und C_8 (d-f) im SM.

Eine Renormierung von α_s in der vollen Theorie tritt zu dieser Schleifen-Ordnung noch nicht auf, da die Amplitude $b \rightarrow sg$ mit dem äußeren Gluon in der Hintergrundfeld-Eichung berechnet wurde und sich dadurch die Renormierung der Gluon-Wellenfunktion und der Eichkopplung gerade herausheben. In der Normierung des bsg -Anteils des Operators P_{31} tritt ebenso wie in der Normierung der Operatoren P_7 und P_8 ein Faktor $1/g_s^2$ auf, welcher bei der Renormierung in der effektiven Theorie mitberücksichtigt werden muss. Dies führt auf die Terme proportional zu $\delta Z_{g_s}^{(1)}$ in Gl. (5.30). $\delta Z_{g_s}^{(1)}$ ist der α_s -Anteil der Renormierungskonstanten $Z_{g_s}^{(5)}$ aus Gl. (A.3) mit $n_q = 5$,

$$\delta Z_{g_s}^{(1)} = \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{23}{6} \right). \quad (5.32)$$

Da es sich beim Operator P_{31} um einen zusammengesetzten Operator handelt muss darauf geachtet werden, wie sich die einzelnen Anteile renormieren. Deshalb liefert nur der erste Term von P_{31} in Gl. (5.10) einen Beitrag zur Renormierung der Eichkopplung, d.h. es gilt

$$Z_{g_s}(P_{31}) \rightarrow \frac{1}{Z_{g_s}^2} \frac{1}{g_s} (\bar{s}_L \gamma^\mu T^a b_L) D^\nu G_{\mu\nu}^a + P_4. \quad (5.33)$$

Die Gluonen in diesem Operator befinden sich hierbei wieder alle in der Hintergrundfeld-Eichung, d.h. die Renormierung der Eichkopplung im Vertex, von welchem das Gluon abgestrahlt wird, und die Gluon-Wellenfunktions-Renormierung heben sich gegenseitig weg.

Für den Wilson-Koeffizient C_4 folgt damit aus C_{31}^q ,

$$C_4^{q(0)} = 0, \quad (5.34)$$

$$C_4^{q(1)} = -C_{31}^{q(1)}.$$

Zur Zwei-Schleifen-Ordnung wird für das Matching die Amplitude $C_{4,\text{bare}}^{q(2)}$, also der Anteil zur Dirac-Struktur D_4 in der Amplitude $A_{b \rightarrow s d \bar{d}}$ aus Gl. (5.16), verwendet. In der effektiven Theorie tragen P_4 und P_{31} zu dieser Amplitude bei. Deshalb lautet die Matching-Gleichung

$$Z_{j,4} C_j^q + Z_{j,31} C_j^q = C_{4,\text{bare}}^q. \quad (5.35)$$

Durch Einsetzen der Renormierungskonstanten in der effektiven Theorie ergeben sich folgende Gleichungen,

$$\begin{aligned} C_4^{c(2)} &= C_{4,\text{bare}}^{c(2)} - \left(\delta Z_{4,4}^{(1)} C_4^{c(1)} + \delta Z_{2,4}^{(2)} C_2^{c(0)} + \delta Z_{1,4}^{(1)} C_1^{c(1)} + \delta Z_{11,4}^{(1)} C_{11}^{c(1)} \right. \\ &\quad + C_{31}^{c(2)} + \delta Z_{2,31}^{(2)} C_2^{c(0)} + \delta Z_{1,31}^{(1)} C_1^{c(1)} + \delta Z_{4,31}^{(1)} C_4^{c(1)} \\ &\quad \left. + \delta Z_{31,31}^{(1)} C_{31}^{c(1)} + \delta Z_{11,31}^{(1)} C_{11}^{c(1)} \right), \\ C_4^{t(2)} &= C_{4,\text{bare}}^{t(2)} - \left(\delta Z_{4,4}^{(1)} C_4^{t(1)} + C_{31}^{t(2)} + \delta Z_{4,31}^{(1)} C_4^{t(1)} + \delta Z_{31,31}^{(1)} C_{31}^{t(1)} \right). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Man beachte, dass hier keine Eichkopplungs-Renormierung in der effektiven Theorie auftritt, da die Anteile in P_{31} , die zu $b \rightarrow s d \bar{d}$ beitragen, keinen Faktor $1/g_s^2$ haben. Des Weiteren muss für $C_4^{t(2)}$ im Gegensatz zu $C_{31}^{t(2)}$ keine Renormierung der Top-Quark-Masse durchgeführt werden, da es im SM keine Ein-Schleifen-Diagramme zu $C_{4,\text{bare}}^{t(1)}$ gibt.

Die Wilson-Koeffizienten C_7 und C_8 können bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung mit exakter Massenabhängigkeit bestimmt werden. Zur Drei-Schleifen-Ordnung mussten die Diagramme wiederum in den Massenverhältnissen $y = M_W/m_t \ll 1$ und $w = 1 - M_W^2/m_t^2 \ll 1$ entwickelt werden. Dieses Vorgehen ist identisch zur Berechnung von C_A auf Drei-Schleifen-Niveau im Kapitel 3, d.h. es wurde eine asymptotische Entwicklung für $y = M_W/m_t \ll 1$ und eine Taylorentwicklung für $w = 1 - M_W^2/m_t^2 \ll 1$ durchgeführt. Die Matching-Formel für $i = 7, 8$ lautet

$$\begin{aligned} \left[\left(Z_{g_s}^{(5)} \right)^2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \right]^{-1} \sum_k C_k^q Z_{k,i} &= (1 + \Delta Z_\psi) \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{n-1} \left[(Z_{g_s}^{\text{SM}})^{2(n-1)} C_{i,\text{bare}}^{q(n)} + \delta^{tq} \Delta T_i^{t(n)} \right] \\ &\quad + \delta^{tq} \Delta Z_m B_i + \frac{M_W^2}{m_t^2} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 \left(Z_{2,sb}^q K_i + Z_{0,sb}^q R_i \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^3). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Auf der linken Seite von Gl. (5.37) stehen die Tree-Level-Einsetzungen in der effektiven Theorie. Der Faktor $Z_{g_s}^{(5)}$ auf der linken Seite tritt wieder auf Grund der Renormierung des Faktors $1/g_s^2$ in den Operatoren P_7 und P_8 auf. Auf der rechten Seite von Gl. (5.37) sind die unrenormierten Amplituden im SM $C_{i,\text{bare}}^{q(n)}$ und deren Renormierung dargestellt. In dieser Formel muss in α_s entwickelt werden um die Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ergebnisse zu erhalten, wobei die Formel nur bis zur Drei-Schleifen-Ordnung korrekt ist. Es muss noch erläutert werden welche Wilson-Koeffizienten auf der linken Seite der Matching-Formel zu welcher Ordnung in α_s mit C_7 oder C_8 mischen. In führender Ordnung, also α_s^0 , tritt keine Renormierung der Amplitude in der vollen Theorie und auch kein Mischungsbeitrag von anderen Koeffizienten auf, d.h. $C_i^{q(1)} = C_{i,\text{bare}}^{q(1)}$ für $i = 7, 8$. Zur Zwei-Schleifen-Ordnung werden die Renormierungskonstanten $\delta Z_{77}^{(1)}$, $\delta Z_{27}^{(1)}$, $\delta Z_{87}^{(1)}$ für $C_7^{q(2)}$ sowie $\delta Z_{88}^{(1)}$ und $\delta Z_{28}^{(1)}$ für $C_8^{q(2)}$ benötigt. Die Renormierungskonstanten für das Matching auf Drei-Schleifen-Niveau sind in Tab. 5.1 aufgeführt.

$C_7^{q(3)}$	$C_8^{q(3)}$
$\delta Z_{7,7}^{(1)}, \delta Z_{7,7}^{(2)}$	$\delta Z_{8,8}^{(1)}, \delta Z_{8,8}^{(2)}$
$\delta Z_{8,7}^{(1)}, \delta Z_{8,7}^{(2)}$	-
$\delta Z_{4,7}^{(2)}$	$\delta Z_{4,8}^{(2)}$
$\delta Z_{2,7}^{(2)}, \delta Z_{2,7}^{(3)}$	$\delta Z_{2,8}^{(2)}, \delta Z_{2,8}^{(3)}$
$\delta Z_{1,7}^{(2)}$	$\delta Z_{1,8}^{(2)}$
$\delta Z_{11,7}^{(2)}$	$\delta Z_{11,8}^{(2)}$

Tabelle 5.1.: Renormierungskonstanten in der effektiven Theorie, die für $C_7^{q(3)}$ und $C_8^{q(3)}$ benötigt werden.

Auf der SM-Seite muss die Top-Quark-Masse renormiert werden, wobei die entsprechenden Beiträge durch

$$\begin{aligned}
\Delta T_i^{t(1)} &= 0, \\
\Delta T_i^{t(2)} &= \left(C_{i,\text{bare}}^{t(1)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} \right)_{\alpha_s}, \\
\Delta T_i^{t(3)} &= \left(C_{i,\text{bare}}^{t(1)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_{i,\text{bare}}^{t(2)} \Big|_{m_t^{\text{bare}} \rightarrow Z_{m_t} m_t} \right)_{\alpha_s^2},
\end{aligned} \tag{5.38}$$

gegeben sind. Für C_7 und C_8 zur Drei-Schleifen-Ordnung muss α_s mit $Z_{g_s}^{\text{SM}}$ aus Gl. (3.35) renormiert werden. In Analogie zur Berechnung von C_A muss auch bei C_7 und C_8 auf Drei-Schleifen-Niveau die Differenz der Wellenfunktions-Renormierungskonstanten der Quarks in der vollen und in der effektiven Theorie, ΔZ_ψ aus Gl. (3.42), berücksichtigt werden. Der Term $\Delta Z_m B_i$ in der Matching-Formel kommt durch die Renormierung der Bottom-Quark-Masse m_b zustande. In der Definition der Operatoren P_7 und P_8 kommt m_b linear vor. Wie in Ref. [108] dargestellt, ist es möglich in der effektiven Theorie $Z_m = 1$ zu setzen, d.h. der Faktor m_b in P_7 und P_8 muss nicht renormiert werden. In der vollen Theorie kommt m_b ebenfalls zur linearen Ordnung in der Struktur S_{10} vor. Auch hier muss m_b nicht renormiert werden, sofern die Renormierungskonstanten in der vollen und der effektiven Theorie gleich sind. Zur Ordnung α_s^2 gibt es aber für Z_m analog zur Wellenfunktions-Renormierung der Quarks einen Unterschied innerhalb der 5- und der 6-Flavour-Theorie. Dieser Unterschied wird in der Größe ΔZ_m berücksichtigt, die durch

$$\Delta Z_m = Z_m^{\text{SM}} - Z_m^{\text{eff}} = \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^2 N_\epsilon^2 \left(-\frac{4}{3\epsilon^2} + \frac{10}{9\epsilon} - \frac{89}{27} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^3, \epsilon) \tag{5.39}$$

gegeben ist, N_ϵ wurde in Gl. (3.37) definiert. Die Größe B_i in Gl. (5.37) ist der Anteil des Ein-Schleifen-Ergebnisses, der proportional zu m_b ist, also der Term proportional zur Struktur S_{10} in Gl. (5.26),

$$\begin{aligned}
B_7 &= Y_{10}^{t(1)}, \\
B_8 &= G_{10}^{t(1)}.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Im Charm-Quark-Sektor gilt $Y_{10}^{c(1)} = G_{10}^{c(1)} = 0$ und somit ist dort keine Renormierung von m_b notwendig.

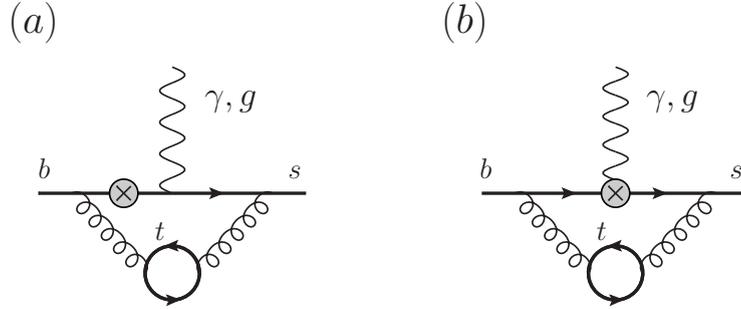


Abbildung 5.6.: Beispieldiagramme für Einsetzungen des elektroschwachen Counterterms. Diese Diagramme ergeben die Größen K_i und R_i .

Der letzte Baustein der Matching-Formel sind die Einsetzungen der elektroschwachen Counterterme. Analog zum Z -Pinguin-Anteil für $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ wird auch hier die elektroschwache Counterterm-Lagrangedichte aus Gl. (3.67) benötigt. Im Gegensatz zum Z -Pinguin gibt es keine Tree-Level-Einsetzungen der Counterterme, da diese keinen Beitrag zu den Strukturen S_2 und S_{10} liefern. Die Counterterme tragen nur durch Einsetzungen in Zwei-Schleifen-Diagramme mit einer Top-Quark-Schleife bei, Beispieldiagramme sind in Abb. 5.6 dargestellt. Alle anderen Einsetzungen führen auf skalenlose Integrale und verschwinden damit. Aus diesem Grund werden die elektroschwachen Renormierungskonstanten nur zur Ein-Schleifen-Ordnung benötigt. $Z_{2, sb}^c$ und $Z_{2, sb}^t$ sind in Gl. (3.68)–(3.69) angegeben. Die Renormierungskonstanten

$$\begin{aligned} Z_{0, sb}^c &= \sum_{n=0} \left(\frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right)^{(n+1)\epsilon} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n Z_{0, sb}^{c, (n)}, \\ Z_{0, sb}^t &= \sum_{n=0} \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right)^{(n+1)\epsilon} \left(\frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^n Z_{0, sb}^{t, (n)}, \end{aligned} \quad (5.41)$$

ergeben zur Ein-Schleifen-Ordnung

$$\begin{aligned} Z_{0, sb}^{c, (0)} &= 0, \\ Z_{0, sb}^{t, (0)} &= \frac{x(x^\epsilon - x)e^{\gamma_E \epsilon} \Gamma(\epsilon)}{(1 - \epsilon)(x - 1)}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

mit $x = m_t^2/M_W^2$. Die Zwei-Schleifen-Diagramme mit einer Top-Quark-Schleife und den Counterterm-Einsetzungen ergeben für $b \rightarrow s \gamma$

$$\begin{aligned} K_7 &= -\frac{8}{405} + \frac{88}{6075} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\ R_7 &= \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (5.43)$$

und für $b \rightarrow sg$

$$K_8 = -\frac{169}{2160} + \frac{10333}{64800} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (5.44)$$

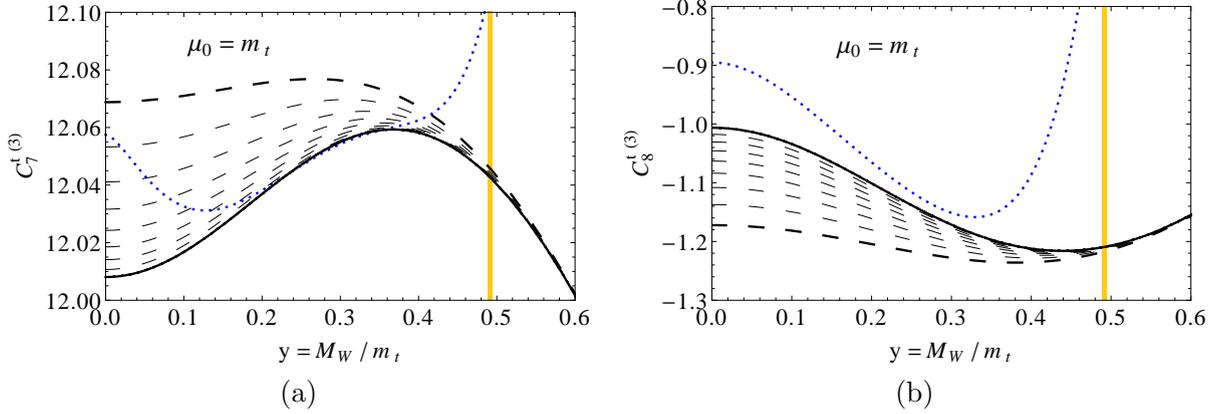


Abbildung 5.7.: Drei-Schleifen-Korrekturen $C_7^{t(3)}$ (links) und $C_8^{t(3)}$ (rechts) in Abhängigkeit von $y = M_W/m_t$. Die gepunkteten Linien zeigen die Entwicklung für $y \ll 1$ zur Ordnung y^8 . Die durchgezogenen Linien zeigen die Entwicklung $y \approx 1$ bis zur Ordnung w^{16} . Das gelbe Band gibt den physikalischen Bereich für y an.

$$R_8 = \frac{1}{40\epsilon} + \frac{193}{1200} - \frac{8441}{36000} \epsilon + \frac{\pi^2}{240} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Im Folgenden werden die Ergebnisse für $C_7^{q(3)}$ und $C_8^{q(3)}$ im SM diskutiert, die in Ref. [70] veröffentlicht und in dieser Arbeit reproduziert wurden. Außerdem konnte durch Hinzunehmen von weiteren Entwicklungstermen im Limes $m_t \approx M_W$ das Ergebnis verbessert werden. Aus den exakten Ein- und Zwei-Schleifen-Ergebnissen lassen sich auch hier mit Hilfe der RGE die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Anteile des Drei-Schleifen-Ergebnisses mit exakter Massenabhängigkeit herleiten. In Abb. 5.7 sind die entwickelten Drei-Schleifen-Korrekturen $C_7^{t(3)}$ und $C_8^{t(3)}$ für $\mu_0 = m_t$ in Abhängigkeit von $y = M_W/m_t$ dargestellt. Die gepunkteten Linien zeigen die Entwicklung um $y = 0$ zur Ordnung y^8 und die durchgezogenen Linien zeigen die Entwicklung um $y = 1$ zur Ordnung w^{16} . Die gestrichelten Linien stellen die Ergebnisse in niedriger Ordnung in w dar, wobei die dick gestrichelten Linien gerade der Ordnung w^8 und damit den Ergebnissen aus Ref. [70] entsprechen. Sowohl für $C_7^{t(3)}$ als auch für $C_8^{t(3)}$ ist deutlich zu erkennen, wie sich die Ergebnisse für die verschiedenen Entwicklungen durch die Hinzunahme der höheren Ordnungen in w , bezogen auf die Ergebnisse aus Ref. [70], im mittleren Bereich annähern. Für $C_7^{t(3)}$ gibt es sogar eine Überlappung im Bereich $0.2 \leq y \leq 0.35$. Die exakten Kurven lassen sich damit im gesamten y -Bereich sehr gut durch die beiden Entwicklungen approximieren. Für den Bereich $0.4 < y < 0.6$, in dem auch der physikalisch relevante Bereich von y liegt (gelbes Band), lassen sich damit die Ergebnisse durch die Formeln

$$\begin{aligned} C_7^{t(3)}(\mu_0 = m_t) &= 11.92 + 0.751 y - 1.03 y^2, \\ C_8^{t(3)}(\mu_0 = m_t) &= -0.764 - 2.06 y + 2.35 y^2, \end{aligned} \quad (5.45)$$

approximieren, wobei der Fehler dieser Formeln kleiner als 0.1% ist. Diese verbesserten SM Koeffizienten sind auch in Ref. [76] angegeben. Die Koeffizienten $C_7^{(c)3}$ und $C_8^{(c)3}$ sind in Abb. 5.8 in Abhängigkeit von y dargestellt. Hier gibt es eine perfekte Überlappung im gesamten y -Bereich. Kompakte Formeln für diese Koeffizienten lauten

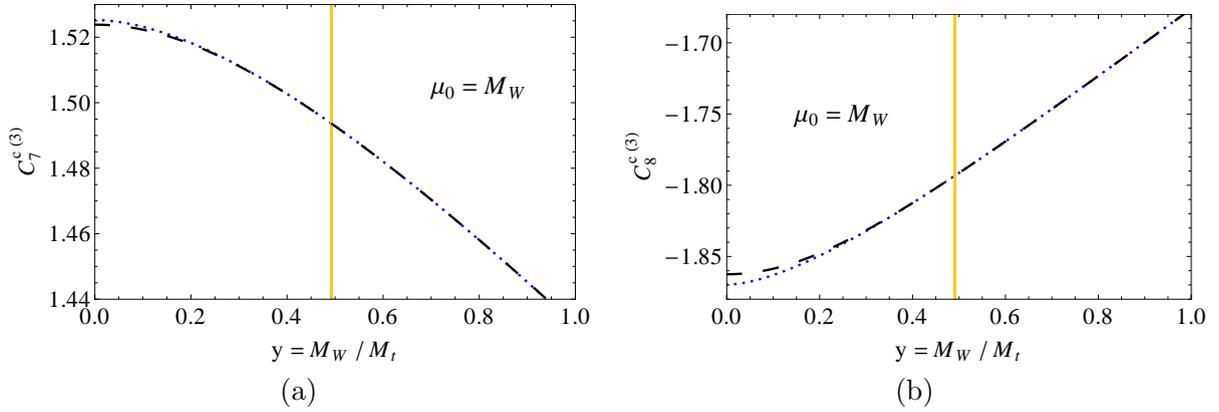


Abbildung 5.8.: Drei-Schleifen-Korrekturen $C_7^{(c)3}$ (links) und $C_8^{(c)3}$ (rechts) in Abhängigkeit von $y = M_W/m_t$. Die gepunktete Linie zeigt die Entwicklung für $y \ll 1$ und die gestrichelte Linie für $y \approx 1$. Das gelbe Band entspricht dem physikalischen Bereich für y .

$$\begin{aligned} C_7^{(c)3}(\mu_0 = M_W) &= 1.458 y^{-0.0338}, \\ C_8^{(c)3}(\mu_0 = M_W) &= -1.718 y^{-0.0598}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

5.3. $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im SM zur NNLO

Im vorherigen Abschnitt wurde die Berechnung der Wilson-Koeffizienten an der hohen Skala $\mu_0 \sim m_t, M_W$ beschrieben. Nun müssen die Wilson-Koeffizienten mit Hilfe der RGE von der Matching-Skala μ_0 zur niedrigen Skala $\mu_b \sim m_b$ evolviert werden, um sie dort in die on-shell Matrixelemente einzusetzen. Durch Ausnutzen der Unitarität der CKM-Matrix lassen sich die Wilson-Koeffizienten für den Charm-Quark- und den Top-Quark-Anteil mit

$$C_i = C_i^t - C_i^c \quad (5.47)$$

zusammenfassen. Damit wird die effektive Lagrangedichte aus Gl. (5.4) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \mathcal{L}_{\text{QCD} \times \text{QED}}(u, d, s, c, b) + \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{ts}^* V_{tb} \sum_{i=1}^8 C_i P_i \\ &+ \frac{4G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* V_{ub} \sum_{i=1}^2 C_i^c (P_i^u - P_i^c). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Die Definition

$$C_i^{\text{eff}}(\mu) = \begin{cases} C_i(\mu), & \text{für } i = 1, \dots, 6, \\ \left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right) C_7(\mu) + \sum_{j=1}^6 y_j C_j(\mu), & \text{für } i = 7, \\ \left(\frac{4\pi}{\alpha_s}\right) C_8(\mu) + \sum_{j=1}^6 z_j C_j(\mu), & \text{für } i = 8, \end{cases} \quad (5.49)$$

erweist sich als sinnvoll, da die Matrixelemente $b \rightarrow s\gamma$ und $b \rightarrow sg$ zur führenden Ordnung proportional zu C_7^{eff} bzw. C_8^{eff} sind [128]. Die Werte für y_i und z_i im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit antikommutierenden γ_5 lauten [126]

$$\begin{aligned}\vec{y} &= \left(0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{4}{9}, -\frac{20}{3}, -\frac{80}{9}\right), \\ \vec{z} &= \left(0, 0, 1, -\frac{1}{6}, 20, -\frac{10}{3}\right).\end{aligned}\quad (5.50)$$

Die Reihenentwicklung für die Wilson-Koeffizienten in α_s ist damit durch

$$C_i^{\text{eff}}(\mu) = C_i^{(0)\text{eff}}(\mu) + \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi} C_i^{(1)\text{eff}}(\mu) + \left(\frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}\right)^2 C_i^{(2)\text{eff}}(\mu) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \quad (5.51)$$

gegeben. Im nächsten Schritt werden die Wilson-Koeffizienten von der Skala μ_0 zur Skala μ_b evolviert. Die RGE für die Wilson-Koeffizienten lauten

$$\mu \frac{d}{d\mu} C_i^{\text{eff}}(\mu) = C_j^{\text{eff}}(\mu) \gamma_{ji}^{\text{eff}}(\mu), \quad (5.52)$$

mit der Lösung

$$\vec{C}^{\text{eff}}(\mu_b) = \hat{U}(\mu_b, \mu_0) \vec{C}^{\text{eff}}(\mu_0). \quad (5.53)$$

Der Evolutionsoperator \hat{U} , entwickelt in α_s , lautet

$$\hat{U}(\mu_b, \mu_0) = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\alpha_s(\mu_0)}{4\pi}\right)^n \hat{U}^{(n)}. \quad (5.54)$$

Zusammen mit der Reihenentwicklung für $C_i^{\text{eff}}(\mu)$ in Gl. (5.51) ergibt dies die Wilson-Koeffizienten an der Skala μ_b ,

$$\begin{aligned}\vec{C}^{(0)\text{eff}}(\mu_b) &= \hat{U}^{(0)} \vec{C}^{(0)\text{eff}}(\mu_0), \\ \vec{C}^{(1)\text{eff}}(\mu_b) &= \eta \left[\hat{U}^{(0)} \vec{C}^{(1)\text{eff}}(\mu_0) + \hat{U}^{(1)} \vec{C}^{(0)\text{eff}}(\mu_0) \right], \\ \vec{C}^{(2)\text{eff}}(\mu_b) &= \eta^2 \left[\hat{U}^{(0)} \vec{C}^{(2)\text{eff}}(\mu_0) + \hat{U}^{(1)} \vec{C}^{(1)\text{eff}}(\mu_0) + \hat{U}^{(2)} \vec{C}^{(0)\text{eff}}(\mu_0) \right],\end{aligned}\quad (5.55)$$

mit $\eta = \alpha_s(\mu_0)/\alpha_s(\mu_b)$. Die für \hat{U} benötigten anomalen Dimensionen γ_{ji} wurden in Ref. [79, 126, 127, 129, 130] berechnet und die Matrix \hat{U} wurde aus Ref. [130] übernommen.

Wie schon weiter oben erwähnt kann für den inklusiven Zerfall die Relation

$$\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma) \simeq \Gamma(b \rightarrow X_s^{\text{parton}} \gamma) \quad (5.56)$$

verwendet werden. Die Formel für das Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ lautet damit

$$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)|_{E_\gamma > E_0} = \mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu})_{\text{exp}} \left| \frac{V_{ts}^* V_{tb}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{6 \alpha_{em}}{\pi C_{\text{fit}}} [P(E_0) + N(E_0)]. \quad (5.57)$$

Für die Photon-Energie E_γ wird eine untere Grenze mit $E_\gamma > E_0$ gefordert, diese wird auf $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$ gesetzt. Die perturbativen Beiträge sind in $P(E_0)$ zusammengefasst und mit $N(E_0)$ werden die nicht-perturbativen Beiträge bezeichnet [125, 131–136]. Hinsichtlich der Normierung des Verzweigungsverhältnisses sind einige Punkte zu erwähnen. Da die Zerfallsbreite

$\Gamma(b \rightarrow X_s \gamma)$ proportional zu m_b^5 ist, bietet es sich an, die damit einhergehende Unsicherheit durch die Normierung mit der sehr gut bekannten Größe $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu})_{\text{exp}}$ zu reduzieren. Durch das Einführen des Phasenraum-Verhältnisses

$$C_{\text{fit}} = \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_c e \bar{\nu})}{\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_u e \bar{\nu})}, \quad (5.58)$$

kann die Abhängigkeit der Charm-Quark-Masse vom eigentlichen perturbativen Anteil $P(E_0)$ mit

$$\frac{\Gamma(b \rightarrow X_s \gamma)_{E_\gamma > E_0}}{|V_{cb}/V_{ub}|^2 \Gamma(b \rightarrow X_u e \bar{\nu})} = \left| \frac{V_{ts}^* V_{tb}}{V_{cb}} \right|^2 \frac{6 \alpha_{em}}{\pi C_{\text{fit}}} P(E_0) \quad (5.59)$$

getrennt werden. Das Phasenraum-Verhältnis C_{fit} wird aus experimentellen Daten bestimmt, siehe Ref. [137, 138]. In $P(E_0)$ geht damit sowohl die eigentliche Zerfallsbreite $\Gamma(b \rightarrow X_s \gamma)_{E_\gamma > E_0}$, als auch die zur NNLO innerhalb der QCD [139, 140] bekannte Zerfallsbreite $\Gamma(b \rightarrow X_u e \bar{\nu})$ ein. Der perturbative Anteil hat die Form

$$P(E_0) = \sum_{i,j=1}^8 C_i^{\text{eff}}(\mu_b) C_j^{\text{eff}}(\mu_b) K_{ij}(E_0, \mu_b), \quad (5.60)$$

mit

$$K_{ij} = \delta_{i7} \delta_{j7} + \frac{\alpha_s(\mu_b)}{4\pi} K_{ij}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s(\mu_b)}{4\pi} \right)^2 K_{ij}^{(2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^3(\mu_b)). \quad (5.61)$$

Durch die effektiven Wilson-Koeffizienten ist K_{ij} zur führenden Ordnung in $\alpha_s(\mu_b)$ proportional zu $(C_7^{\text{eff}}(\mu_b))^2$. Die on-shell Matrixelemente $K_{ij}^{(1)}$ zur NLO innerhalb der QCD wurden in Ref. [141–145] und die NNLO-Korrekturen zu den Matrixelementen $K_{ij}^{(2)}$ in Ref. [118, 139, 140, 145–152] berechnet. Alle Ergebnisse sind in Ref. [118] zusammengefasst. Zu den QCD Korrekturen sind auch die elektroschwachen NLO-Korrekturen [153] und Korrekturen proportional zu V_{ub} [143] bekannt. Die SM-Vorhersage zur NNLO wurde in Ref. [118, 119] veröffentlicht. Seit den Veröffentlichungen im Jahr 2006 sind weitere Ergebnisse [154–159] hinzugekommen, die aber die Vorhersage nur geringfügig ändern und in einem zukünftigen Update der Vorhersage mitberücksichtigt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden alle Beiträge, die auch schon in die SM-Vorhersage aus dem Jahr 2006 eingingen, in ein MATHEMATICA Programm implementiert, um die Zerfallsbreite $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im SM berechnen zu können. Damit konnte die SM-Vorhersage

$$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)|_{E_\gamma > 1.6 \text{ GeV}} = (3.15 \pm 0.23) \times 10^{-4} \quad (5.62)$$

aus Ref. [118, 119] reproduziert werden. Im nächsten Kapitel dienen diese Resultate als Grundlage für die Vorhersage des Verzweungsverhältnisses $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ zur NNLO im 2HDM.

KAPITEL 6

$\bar{B} \rightarrow X_S \gamma$ IN 2-HIGGS-DUBLETT-MODELLEN

Das Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_S \gamma)$ spielt im Zusammenhang mit 2-Higgs-Dublett-Modellen (2HDM) eine wichtige Rolle, da es durch $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_S \gamma)$ möglich ist, starke untere Schranken an die Masse des geladenen Higgs-Bosons zu setzen. In diesem Kapitel wird die Berechnung der NNLO-QCD-Korrekturen der Wilson-Koeffizienten im 2HDM beschrieben. Durch diese Beiträge wurde eine Reduktion der Skalenunsicherheit erreicht und damit die Vorhersagen für die Ausschlussgrenzen an die Masse des geladenen Higgs-Bosons stabilisiert. Die Ergebnisse aus diesem Kapitel wurden in Ref. [76] veröffentlicht.

6.1. Berechnung der Wilson-Koeffizienten

Als Basis für die Berechnung der Wilson-Koeffizienten im 2HDM dienen die technischen Aspekte der SM-Rechnung aus Kapitel 5. Im 2HDM kommen zusätzliche Beiträge durch Diagramme mit einem geladenen Higgs-Boson H^\pm hinzu, Beispieldiagramme sind in Abb. 6.1 angegeben. Diese Anteile können in folgender Form zu den SM-Koeffizienten addiert werden,

$$C_i^q = C_i^{q,\text{SM}} + C_i^{q,2\text{HDM}}. \quad (6.1)$$

Die Wilson-Koeffizienten $C_i^{c,2\text{HDM}}$ sind mit m_c^2/M_W^2 unterdrückt und werden daher vernachlässigt. Diese Näherung wurde auch bei den Wilson-Koeffizienten im SM angewandt. Analog zum SM lassen sich die Koeffizienten im 2HDM durch

$$C_i^{t,2\text{HDM}} = C_i^{H(0)} + \frac{\alpha_s}{4\pi} C_i^{H(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 C_i^{H(2)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 C_i^{H(3)} + \dots \quad (6.2)$$

darstellen, wobei $C_i^{H(n)}$ den n -Schleifen-Anteil bezeichnet. Es treten keine Tree-Level-Koeffizienten $C_i^{H(0)}$ auf, die Ein- und Zwei-Schleifen-Beiträge $C_7^{H(1)}$, $C_8^{H(1)}$, $C_4^{H(1)}$, $C_7^{H(2)}$ und $C_8^{H(2)}$ wurden in Ref. [160–164] berechnet und konnten im Rahmen dieser Arbeit bestätigt werden. Zur NNLO tragen auch die Zwei-Schleifen-Koeffizienten $C_3^{H(2)}$, $C_4^{H(2)}$, $C_5^{H(2)}$ und $C_6^{H(2)}$ bei. Diese wurden zuerst im MSSM in Ref. [165] berechnet und hier noch einmal unabhängig im 2HDM reproduziert. In dieser Arbeit wurden zum ersten Mal die Drei-Schleifen-Koeffizienten $C_7^{H(3)}$ und $C_8^{H(3)}$ berechnet.

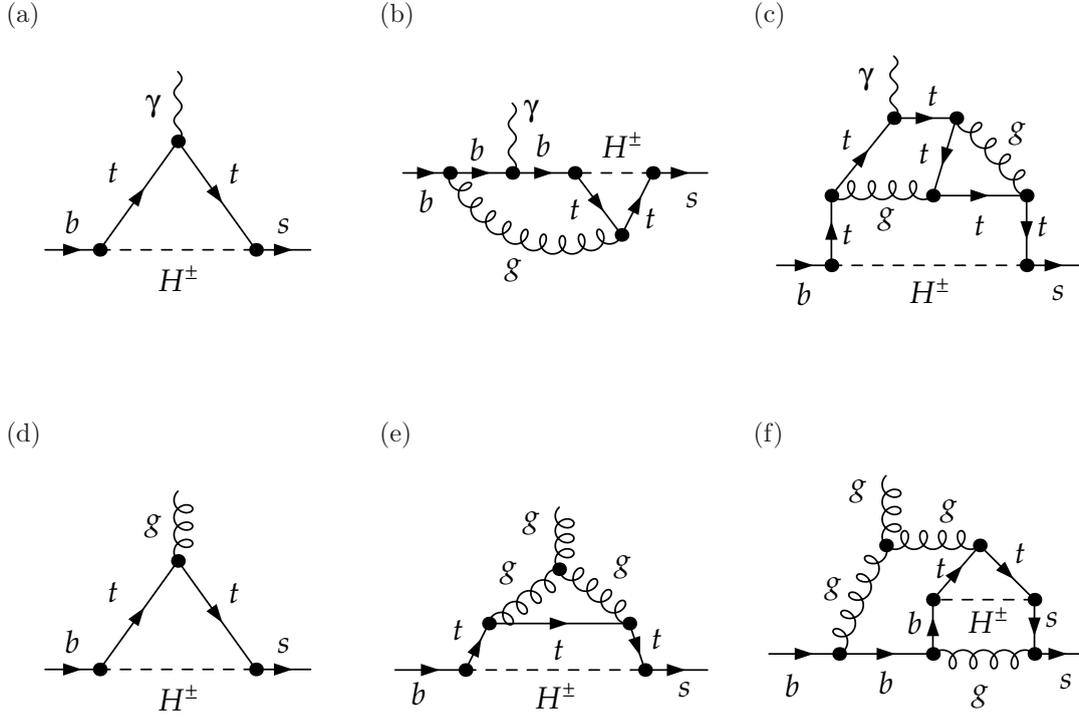


Abbildung 6.1.: Beispiele für Diagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung mit geladenem Higgs-Boson, die zu C_7 (a-c) und C_8 (d-f) beitragen.

Die Wechselwirkungs-Lagrangedichte für die Quarks und die geladenen Higgs-Bosonen lautet

$$\mathcal{L}_{H^\pm} = (2\sqrt{2}G_F)^{1/2} \sum_{i,j=1}^3 \bar{u}_i (A_u m_{u_i} V_{ij} P_L - A_d m_{d_j} V_{ij} P_R) d_j H^\pm + \text{h.c.}, \quad (6.3)$$

wobei die Notation aus Ref. [160] übernommen wurde. Die Kopplungen A_d und A_u haben im 2HDM Typ-I die Form

$$A_u = A_d = \frac{1}{\tan \beta}, \quad (6.4)$$

und lauten im 2HDM Typ-II

$$A_u = -\frac{1}{A_d} = \frac{1}{\tan \beta}. \quad (6.5)$$

Die Koeffizienten $C_i^{H(n)}$ lassen sich daher noch weiter in

$$C_i^{H(n)} = A_d A_u^* C_{i,A_d A_u^*}^{H(n)} + A_u A_d^* C_{i,A_u A_d^*}^{H(n)} \quad (6.6)$$

aufspalten, wobei Anteile mit A_d^* vernachlässigt werden, da diese proportional zur Masse des Strange-Quarks m_s sind. Zur Darstellung der Ergebnisse erweisen sich folgende Definitionen als

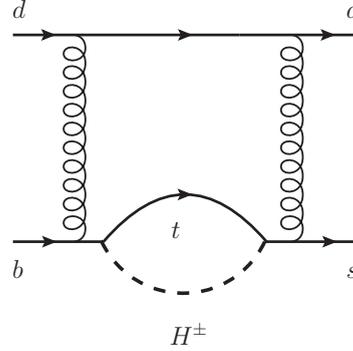


Abbildung 6.2.: Beispieldiagramm für die Wilson-Koeffizienten C_3 - C_6 zur Zwei-Schleifen-Ordnung.

hilfreich:

$$r = \frac{m_t^2(\mu_0)}{M_{H^+}^2}, \quad \bar{u} = 1 - r \quad \text{und} \quad u = 1 - \frac{1}{r}. \quad (6.7)$$

Die Berechnung der Wilson-Koeffizienten im 2HDM erfolgt analog zur SM-Rechnung und wird im folgenden Abschnitt diskutiert. Zur Bestimmung von $C_4^{H(1)}$ und $C_4^{H(2)}$ werden die Wilson-Koeffizienten $C_{31}^{H(1)}$ und $C_{31}^{H(2)}$ des equation-of-motion-vanishing Operators P_{31} in Gl. (5.10) zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung benötigt. Dazu muss die Amplitude $A_{b \rightarrow sg}$ mit einem geladenen Higgs-Boson auf Ein- und Zwei-Schleifen-Niveau berechnet werden, Beispieldiagramme sind in Abb. 6.1(d) und Abb. 6.1(e) dargestellt, wobei für C_{31} die Linearkombination der Strukturkoeffizienten G_2 und G_8 aus Gl. (5.29) benötigt wird. Die Matching-Formel in Gl. (5.30) kann wieder verwendet werden, um aus den unrenormierten Amplituden die renormierten Wilson-Koeffizienten zu bestimmen. Aus $C_{31}^{H(1)}$ ergibt sich mit Gl. (5.34) der Wilson-Koeffizient $C_4^{H(1)}$. Für die Koeffizienten $C_3^{H(2)}$, $C_4^{H(2)}$, $C_5^{H(2)}$ und $C_6^{H(2)}$ werden die Beiträge zur Amplitude $A_{b \rightarrow s\bar{d}\bar{d}}^{(2)}$ mit einem geladenen Higgs-Boson berechnet. Ein Beispieldiagramm ist in Abb. 6.2 dargestellt. Auch hier können die SM-Formeln in Gl. (5.23) und Gl. (5.36) verwendet werden. Analytische Ergebnisse für diese Koeffizienten können von der Webseite in Ref. [166] als MATHEMATICA-Datei heruntergeladen werden.

Für die Bestimmung von $C_7^{H(1)}$, $C_7^{H(2)}$ und $C_7^{H(3)}$ müssen Diagramme für $b \rightarrow s\gamma$ mit einem geladenen Higgs-Boson berechnet werden. Beispieldiagramme zur Ein-, Zwei- und Drei-Schleifen-Ordnung sind in Abb. 6.1(a-c) dargestellt. Entsprechend müssen für $C_8^{H(1)}$, $C_8^{H(2)}$ und $C_8^{H(3)}$ Diagramme für $b \rightarrow sg$ berechnet werden, siehe Abb. 6.1(d-f). Die unrenormierten Wilson-Koeffizienten erhält man wieder durch die Kombination von Y_2 und Y_{10} , bzw. G_2 und G_{10} , in Gl. (5.28). Die Matching-Formel in Gl. (5.37) kann auch für die 2HDM-Beiträge angewendet werden, wobei einige Anteile angepasst werden müssen. Für die elektroschwachen Counterterme müssen zusätzlich die Beiträge des geladenen Higgs-Bosons,

$$\begin{aligned} Z_{2, sb}^{t, 2\text{HDM}} &= \frac{m_t^2}{M_W^2} A_u A_u^* \Gamma(\epsilon) \left[-\frac{1}{2} + \frac{2r-1}{2(r-1)^2} (r^\epsilon - 1) - \epsilon \frac{3r-1}{4(r-1)} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right], \\ Z_{0, sb}^{t, 2\text{HDM}} &= \frac{M_{H^+}^2}{M_W^2} A_d A_u^* Z_{0, sb}^{t, \text{SM}} \Big|_{M_W \rightarrow M_{H^+}}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

verwendet werden, wobei $Z_{0,sb}^{t,SM}$ in Gl. (5.42) angegeben ist. Außerdem müssen die Terme für die Renormierung von m_b angepasst werden:

$$B_k^{2HDM} = A_d A_u^* B_k^{SM}|_{M_W \rightarrow M_{H^+}}, \quad \text{für } k = 7, 8. \quad (6.9)$$

Analytische Ergebnisse für B_k^{SM} sind in Ref. [70] angegeben.

Da wie in der SM-Rechnung für C_7 und C_8 die Diagramme in den äußeren Impulsen bis zur quadratischen Ordnung entwickelt wurden, treten nur Tadpole-Integrale mit zwei verschiedenen Massen, m_t und M_{H^+} , auf. Zur Ein- und Zwei-Schleifen-Ordnung konnten wiederum die Ergebnisse mit exakter Massenabhängigkeit bestimmt werden. Zur Drei-Schleifen-Ordnung musste hingegen in verschiedenen Massenverhältnissen entwickelt werden. Da das geladene Higgs-Boson auch leichter als das Top-Quark sein kann wurden insgesamt drei Entwicklungen,

$$\begin{aligned} m_t &\ll M_{H^+}, \quad (r \ll 1), \\ m_t &\approx M_{H^+}, \quad (u \ll 1), \\ m_t &\gg M_{H^+}, \quad (1/r \ll 1), \end{aligned} \quad (6.10)$$

durchgeführt. In der Entwicklung für annähernd gleiche Massen wurde bis zur Ordnung u^{16} entwickelt. In den beiden anderen Hierarchien wurde eine asymptotische Entwicklung bis zur Ordnung r^5 bzw. $1/r^5$ durchgeführt.

Im Folgenden werden die Ergebnisse für $C_7^{H(3)}$ und $C_8^{H(3)}$ angegeben. Aus den exakten Zwei-Schleifen-Resultaten war es mit Hilfe der RGE möglich die $\ln(\mu_0^2/M^2)$ -Terme der Drei-Schleifen-Ergebnisse mit exakter Massenabhängigkeit herzuleiten,

$$\begin{aligned} C_{7,A_u A_u^*}^{H(3)}(\mu_0) &= C_{7,A_u A_u^*}^{H(3)}(\mu_0 = m_t) \\ &+ \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[-\frac{r(67930r^4 - 470095r^3 + 1358478r^2 - 700243r + 54970)}{2187(r-1)^5} \right. \\ &\quad + \frac{r(10422r^4 - 84390r^3 + 322801r^2 - 146588r + 1435)}{729(r-1)^6} \ln r \\ &\quad \left. + \frac{2r^2(260r^3 - 1515r^2 + 3757r - 1446)}{27(r-1)^5} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \right] \\ &+ \ln^2\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{r(-518r^4 + 3665r^3 - 17397r^2 + 3767r + 1843)}{162(r-1)^5} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2(-63r^3 + 532r^2 + 2089r - 1118)}{27(r-1)^6} \ln r \right], \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} C_{7,A_d A_u^*}^{H(3)}(\mu_0) &= C_{7,A_d A_u^*}^{H(3)}(\mu_0 = m_t) \\ &+ \ln\left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2}\right) \left[\frac{r(3790r^3 - 22511r^2 + 53614r - 21069)}{81(r-1)^4} \right. \\ &\quad + \frac{2r(-1266r^3 + 7642r^2 - 21467r + 8179)}{81(r-1)^5} \ln r \\ &\quad \left. - \frac{8r(139r^3 - 612r^2 + 1103r - 342)}{27(r-1)^4} \text{Li}_2\left(1 - \frac{1}{r}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \ln^2 \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left[\frac{r (284r^3 - 1435r^2 + 4304r - 1425)}{27(r-1)^4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2r (63r^3 - 397r^2 - 970r + 440)}{27(r-1)^5} \ln r \right], \tag{6.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_u A_u^*}^{H(3)}(\mu_0) &= C_{8,A_u A_u^*}^{H(3)}(\mu_0 = m_t) \\
& + \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left[\frac{r (51948r^4 - 233781r^3 + 48634r^2 - 698693r + 2452)}{1944(r-1)^6} \ln r \right. \\
& \quad - \frac{r (522347r^4 - 2423255r^3 + 2706021r^2 - 5930609r + 148856)}{11664(r-1)^5} \\
& \quad \left. + \frac{r^2 (481r^3 - 1950r^2 + 1523r - 2550)}{18(r-1)^5} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right] \\
& + \ln^2 \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left[\frac{r (-259r^4 + 1117r^3 + 2925r^2 + 28411r + 2366)}{216(r-1)^5} \right. \\
& \quad \left. - \frac{r^2 (139r^2 + 2938r + 2683)}{36(r-1)^6} \ln r \right], \tag{6.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_d A_d^*}^{H(3)}(\mu_0) &= C_{8,A_d A_d^*}^{H(3)}(\mu_0 = m_t) \\
& + \ln \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left[\frac{r (1463r^3 - 5794r^2 + 5543r - 15036)}{27(r-1)^4} \right. \\
& \quad + \frac{r (-1887r^3 + 7115r^2 + 2519r + 19901)}{54(r-1)^5} \ln r \\
& \quad \left. + \frac{r (-629r^3 + 2178r^2 - 1729r + 2196)}{18(r-1)^4} \text{Li}_2 \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right] \\
& + \ln^2 \left(\frac{\mu_0^2}{m_t^2} \right) \left[\frac{r (259r^3 - 947r^2 - 251r - 5973)}{36(r-1)^4} \right. \\
& \quad \left. + \frac{r (139r^2 + 2134r + 1183)}{18(r-1)^5} \ln r \right]. \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Für die Entwicklung in $m_t \approx M_{H^+}$ ist es möglich die Ergebnisse in $u = 1 - M_{H^+}^2/m_t^2(\mu_0)$ oder in $\bar{u} = 1 - m_t^2(\mu_0)/M_{H^+}^2$ zu entwickeln, wobei eine Entwicklung einfach in die andere umgerechnet werden kann. Es hat sich gezeigt, dass die Entwicklung in u für den Bereich $m_t \geq M_{H^+}$ und die Entwicklung in \bar{u} für den Bereich $m_t \leq M_{H^+}$ zu einem besser konvergierenden Ergebnis führt, ähnliche Beobachtungen wurde auch schon in Ref. [167–169] gemacht. Im Folgenden wird die Entwicklung in $u = 1 - M_{H^+}^2/m_t^2(\mu_0)$ mit $r \rightarrow 1^+$ und die Entwicklung in $\bar{u} = 1 - m_t^2(\mu_0)/M_{H^+}^2$ mit $r \rightarrow 1^-$ gekennzeichnet. Die analytischen Ergebnisse für $C_7^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ und $C_8^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ sind sehr umfassend, sodass für die verschiedenen Hierarchien die Koeffizienten vor den Entwicklungsparametern numerisch angegeben werden. Die exakten Ausdrücke dieser Koeffizienten können von der Webseite in Ref. [166] als MATHEMATICA-Datei heruntergeladen werden. Die Ergebnisse für $\mu_0 = m_t$ lauten

$$C_{7,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 0} = 0.9225 r \ln^2 r + 4.317 r \ln r - 8.278 r$$

$$\begin{aligned}
& -20.73 r^2 \ln^3 r - 112.4 r^2 \ln^2 r - 396.1 r^2 \ln r - 480.9 r^2 \\
& -34.50 r^3 \ln^3 r - 348.2 r^3 \ln^2 r - 1292 r^3 \ln r - 1158 r^3 \\
& -23.26 r^4 \ln^3 r - 541.4 r^4 \ln^2 r - 2540 r^4 \ln r - 1492 r^4 \\
& +42.30 r^5 \ln^3 r - 412.4 r^5 \ln^2 r - 3362 r^5 \ln r - 823.0 r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (6.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{7,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^-} &= 1.283 - 0.7158 \bar{u} - 0.3039 \bar{u}^2 - 0.1549 \bar{u}^3 - 0.08625 \bar{u}^4 - 0.05020 \bar{u}^5 \\
& -0.02970 \bar{u}^6 - 0.01740 \bar{u}^7 - 0.009752 \bar{u}^8 - 0.004877 \bar{u}^9 \\
& -0.001721 \bar{u}^{10} + 0.0003378 \bar{u}^{11} + 0.001679 \bar{u}^{12} + 0.002542 \bar{u}^{13} \\
& +0.003083 \bar{u}^{14} + 0.003404 \bar{u}^{15} + 0.003574 \bar{u}^{16} + \mathcal{O}(\bar{u}^{17}), \quad (6.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{7,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^+} &= 1.283 + 0.7158 u + 0.4119 u^2 + 0.2629 u^3 + 0.1825 u^4 + 0.1347 u^5 \\
& +0.1040 u^6 + 0.08306 u^7 + 0.06804 u^8 + 0.05688 u^9 + 0.04833 u^{10} \\
& +0.04163 u^{11} + 0.03625 u^{12} + 0.03188 u^{13} + 0.02827 u^{14} + 0.02525 u^{15} \\
& +0.02269 u^{16} + \mathcal{O}(u^{17}), \quad (6.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{7,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow \infty} &= 3.970 - 8.753 \frac{\ln r}{r} + 15.35 \frac{1}{r} - 38.12 \frac{\ln r}{r^2} + 47.09 \frac{1}{r^2} - 103.8 \frac{\ln r}{r^3} \\
& +79.15 \frac{1}{r^3} - 168.3 \frac{\ln r}{r^4} + 24.41 \frac{1}{r^4} - 72.13 \frac{\ln r}{r^5} - 274.2 \frac{1}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right), \quad (6.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{7,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 0} &= -20.94 r \ln^3 r - 123.5 r \ln^2 r - 453.5 r \ln r - 572.2 r \\
& -8.889 r^2 \ln^3 r - 195.7 r^2 \ln^2 r - 870.3 r^2 \ln r - 524.1 r^2 \\
& +19.73 r^3 \ln^3 r - 46.61 r^3 \ln^2 r - 826.2 r^3 \ln r + 166.7 r^3 \\
& +36.08 r^4 \ln^3 r + 323.2 r^4 \ln^2 r + 169.9 r^4 \ln r + 1480 r^4 \\
& -66.63 r^5 \ln^3 r + 469.4 r^5 \ln^2 r + 1986 r^5 \ln r + 2828 r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (6.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{7,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^-} &= 12.82 + 1.663 \bar{u} + 0.7780 \bar{u}^2 + 0.3755 \bar{u}^3 + 0.1581 \bar{u}^4 \\
& +0.03021 \bar{u}^5 - 0.04868 \bar{u}^6 - 0.09864 \bar{u}^7 - 0.1306 \bar{u}^8 \\
& -0.1510 \bar{u}^9 - 0.1637 \bar{u}^{10} - 0.1712 \bar{u}^{11} - 0.1751 \bar{u}^{12} \\
& -0.1766 \bar{u}^{13} - 0.1763 \bar{u}^{14} - 0.1748 \bar{u}^{15} - 0.1724 \bar{u}^{16} + \mathcal{O}(\bar{u}^{17}), \quad (6.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{7,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^+} &= 12.82 - 1.663 u - 0.8852 u^2 - 0.4827 u^3 - 0.2976 u^4 - 0.2021 u^5 \\
& -0.1470 u^6 - 0.1125 u^7 - 0.08931 u^8 - 0.07291 u^9 - 0.06083 u^{10} \\
& -0.05164 u^{11} - 0.04446 u^{12} - 0.03873 u^{13} - 0.03407 u^{14} - 0.03023 u^{15} \\
& -0.02702 u^{16} + \mathcal{O}(u^{17}), \quad (6.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{7,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow \infty} &= 8.088 + 9.757 \frac{\ln r}{r} - 12.91 \frac{1}{r} + 38.43 \frac{\ln r}{r^2} - 49.32 \frac{1}{r^2} + 106.2 \frac{\ln r}{r^3} \\
& -78.90 \frac{1}{r^3} + 168.4 \frac{\ln r}{r^4} - 24.97 \frac{1}{r^4} + 101.1 \frac{\ln r}{r^5} + 194.3 \frac{1}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right), \quad (6.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 0} &= 0.6908 r \ln^2 r + 3.238 r \ln r + 0.7437 r \\
& -22.98 r^2 \ln^3 r - 169.1 r^2 \ln^2 r - 602.7 r^2 \ln r - 805.5 r^2 \\
& -66.32 r^3 \ln^3 r - 779.6 r^3 \ln^2 r - 3077 r^3 \ln r - 3357 r^3 \\
& -143.4 r^4 \ln^3 r - 2244 r^4 \ln^2 r - 10102 r^4 \ln r - 9016 r^4 \\
& -226.7 r^5 \ln^3 r - 5251 r^5 \ln^2 r - 26090 r^5 \ln r - 19606 r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (6.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^-} &= 1.188 - 0.4078 \bar{u} - 0.2076 \bar{u}^2 - 0.1265 \bar{u}^3 - 0.08570 \bar{u}^4 - 0.06204 \bar{u}^5 \\
&\quad - 0.04689 \bar{u}^6 - 0.03652 \bar{u}^7 - 0.02907 \bar{u}^8 - 0.02354 \bar{u}^9 \\
&\quad - 0.01933 \bar{u}^{10} - 0.01605 \bar{u}^{11} - 0.01345 \bar{u}^{12} - 0.01137 \bar{u}^{13} \\
&\quad - 0.009678 \bar{u}^{14} - 0.008293 \bar{u}^{15} - 0.007148 \bar{u}^{16} + \mathcal{O}(\bar{u}^{17}), \quad (6.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^+} &= 1.188 + 0.4078 u + 0.2002 u^2 + 0.1190 u^3 + 0.07861 u^4 + 0.05531 u^5 \\
&\quad + 0.04061 u^6 + 0.03075 u^7 + 0.02386 u^8 + 0.01888 u^9 + 0.01520 u^{10} \\
&\quad + 0.01241 u^{11} + 0.01026 u^{12} + 0.008575 u^{13} + 0.007238 u^{14} \\
&\quad + 0.006164 u^{15} + 0.005290 u^{16} + \mathcal{O}(u^{17}), \quad (6.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_u A_u^*}^{H(3),r \rightarrow \infty} &= 2.278 - 5.214 \frac{1}{r} + 20.02 \frac{\ln r}{r^2} - 39.76 \frac{1}{r^2} + 78.58 \frac{\ln r}{r^3} - 66.39 \frac{1}{r^3} \\
&\quad + 91.89 \frac{\ln r}{r^4} + 96.35 \frac{1}{r^4} - 300.7 \frac{\ln r}{r^5} + 826.2 \frac{1}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right), \quad (6.26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 0} &= -19.80 r \ln^3 r - 174.7 r \ln^2 r - 658.4 r \ln r - 929.8 r \\
&\quad - 31.83 r^2 \ln^3 r - 612.6 r^2 \ln^2 r - 2770 r^2 \ln r - 2943 r^2 \\
&\quad - 40.68 r^3 \ln^3 r - 1439 r^3 \ln^2 r - 7906 r^3 \ln r - 6481 r^3 \\
&\quad + 54.66 r^4 \ln^3 r - 2777 r^4 \ln^2 r - 17770 r^4 \ln r - 11684 r^4 \\
&\quad + 1003 r^5 \ln^3 r - 2627 r^5 \ln^2 r - 29962 r^5 \ln r - 15962 r^5 + \mathcal{O}(r^6), \quad (6.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^-} &= -0.6110 + 1.095 \bar{u} + 0.6492 \bar{u}^2 + 0.4596 \bar{u}^3 + 0.3569 \bar{u}^4 \\
&\quad + 0.2910 \bar{u}^5 + 0.2438 \bar{u}^6 + 0.2075 \bar{u}^7 + 0.1785 \bar{u}^8 \\
&\quad + 0.1546 \bar{u}^9 + 0.1347 \bar{u}^{10} + 0.1177 \bar{u}^{11} + 0.1032 \bar{u}^{12} \\
&\quad + 0.09073 \bar{u}^{13} + 0.07987 \bar{u}^{14} + 0.07040 \bar{u}^{15} + 0.06210 \bar{u}^{16} + \mathcal{O}(\bar{u}^{17}), \quad (6.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow 1^+} &= -0.6110 - 1.095 u - 0.4463 u^2 - 0.2568 u^3 - 0.1698 u^4 - 0.1197 u^5 \\
&\quad - 0.08761 u^6 - 0.06595 u^7 - 0.05079 u^8 - 0.03987 u^9 - 0.03182 u^{10} \\
&\quad - 0.02577 u^{11} - 0.02114 u^{12} - 0.01754 u^{13} - 0.01471 u^{14} - 0.01244 u^{15} \\
&\quad - 0.01062 u^{16} + \mathcal{O}(u^{17}), \quad (6.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{8,A_d A_u^*}^{H(3),r \rightarrow \infty} &= -3.174 + 10.89 \frac{1}{r} - 35.42 \frac{\ln r}{r^2} + 63.74 \frac{1}{r^2} - 110.7 \frac{\ln r}{r^3} + 62.26 \frac{1}{r^3} \\
&\quad - 71.62 \frac{\ln r}{r^4} - 205.7 \frac{1}{r^4} + 476.9 \frac{\ln r}{r^5} - 1003 \frac{1}{r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^6}\right). \quad (6.30)
\end{aligned}$$

Die Geltungsbereiche sowie die Konvergenzeigenschaften der Entwicklungen sind in Abb. 6.3 und Abb. 6.4 dargestellt und sollen im Folgenden diskutiert werden.

In Abb. 6.3 sind $C_{7,A_u A_u^*}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ (a) und $C_{7,A_d A_u^*}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ (b) in Abhängigkeit der Masse des geladenen Higgs-Bosons M_{H^+} dargestellt. Die schwarz gestrichelten Kurven, die blau durchgezogenen Kurven und die rot strichpunktieren Kurven zeigen die Ergebnisse für $r \rightarrow 0$, $r \rightarrow 1$ und $r \rightarrow \infty$. Dünnere Linien repräsentieren niedrigere Ordnungen der jeweiligen Entwicklungen und dienen zur Kontrolle des Konvergenzverhaltens. In Abb. 6.3(a) gibt es im Bereich $M_{H^+} \approx 30 - 70$ GeV eine Überlappung zwischen den Entwicklungen für $r \rightarrow 1$ und $r \rightarrow \infty$. Dadurch kann das exakte Ergebnis durch eine abschnittsweise definierte Funktion approximiert werden, wobei für $M_{H^+} < 50$ GeV die Entwicklung für $r \rightarrow \infty$ und für $M_{H^+} > 50$ GeV die Entwicklung für $r \rightarrow 1$ verwendet wird. Im Bereich $M_{H^+} \approx 500 - 650$ GeV lässt sich ein ähn-

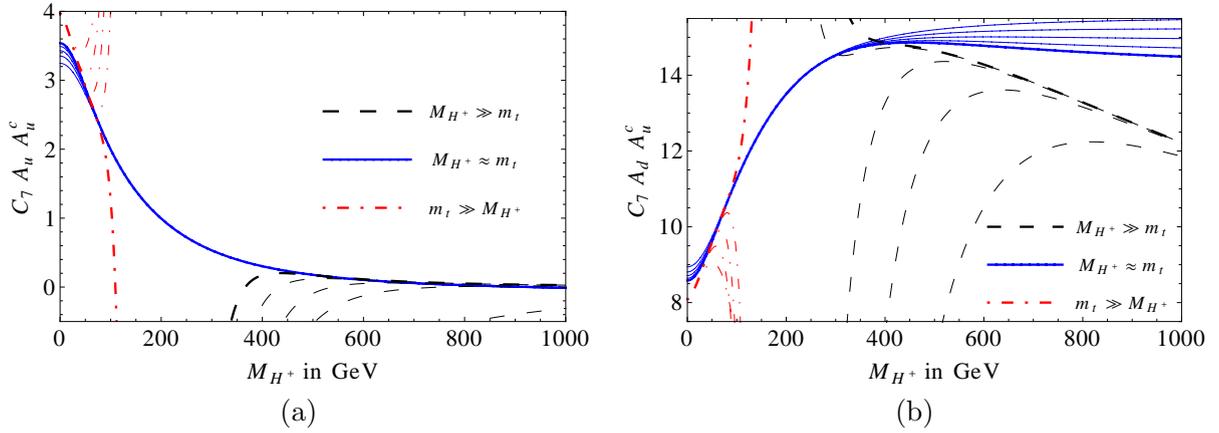


Abbildung 6.3.: Drei-Schleifen-Koeffizienten $C_{7,A_u A_u^c}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ (a) und $C_{7,A_d A_u^c}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ (b) als Funktion von M_{H^+} .

liches Verhalten zwischen den Entwicklungen für $r \rightarrow 1$ und $r \rightarrow 0$ beobachten. Im Bereich $M_{H^+} < 520$ GeV kann die Entwicklung für $r \rightarrow 1$ und im Bereich $M_{H^+} > 520$ GeV die Entwicklung für $r \rightarrow 0$ verwendet werden. Für $C_{7,A_d A_u^c}^{H(3)}$ in Abb. 6.3(b) ist die Situation ähnlich, auch hier kann das exakte Ergebnis durch eine abschnittsweise definierte Funktion sehr gut approximiert werden. $C_{7,X}^{H(3)}$ lässt sich damit als

$$C_{7,X}^{H(3)} = \begin{cases} C_{7,X}^{H(3)}(r \rightarrow \infty) & \text{für } M_{H^+} < 50 \text{ GeV} \\ C_{7,X}^{H(3)}(r \rightarrow 1) & 50 \text{ GeV} \leq M_{H^+} < M_{7,X} \\ C_{7,X}^{H(3)}(r \rightarrow 0) & M_{H^+} \geq M_{7,X} \end{cases}, \quad (6.31)$$

mit $M_{7,A_u A_u^c} = 520$ GeV und $M_{7,A_d A_u^c} = 400$ GeV angeben.

In Abb. 6.4 sind die Ergebnisse für $C_{8,A_u A_u^c}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ und $C_{8,A_d A_u^c}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ in Abhängigkeit von M_{H^+} dargestellt. Auch hier gibt es Bereiche, in denen die verschiedenen Entwicklungen sich überlappen, wodurch es möglich ist, das Gesamtergebnis als abschnittsweise definierte Funktion

$$C_{8,X}^{H(3)} = \begin{cases} C_{8,X}^{H(3)}(r \rightarrow \infty) & \text{für } M_{H^+} < 50 \text{ GeV} \\ C_{8,X}^{H(3)}(r \rightarrow 1) & 50 \text{ GeV} \leq M_{H^+} < M_{8,X} \\ C_{8,X}^{H(3)}(r \rightarrow 0) & M_{H^+} \geq M_{8,X} \end{cases} \quad (6.32)$$

mit $M_{8,A_u A_u^c} = 600$ GeV und $M_{8,A_d A_u^c} = 520$ GeV zu approximieren.

Mit Hilfe der betrachteten Entwicklungen ist es also möglich Resultate für $C_7^{H(3)}$ und $C_8^{H(3)}$ zu erhalten, die im gesamten phänomenologisch relevanten Bereich Gültigkeit haben. Außerdem sollte betont werden, dass keine komplexen Funktionen numerisch ausgewertet werden müssen, da die Ergebnisse für $r \rightarrow 0, 1, \infty$ nur Logarithmen enthalten.

6.2. $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im 2HDM zur NNLO

Nachdem im letzten Kapitel alle Wilson-Koeffizienten im 2HDM zur NNLO berechnet wurden, wird in diesem Kapitel das Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ in Abhängigkeit der 2HDM-Parameter $\tan \beta$ und M_{H^+} diskutiert. Alle Eingangsparameter, bis auf $\alpha_s(M_Z) = 0.1184 \pm 0.0014$

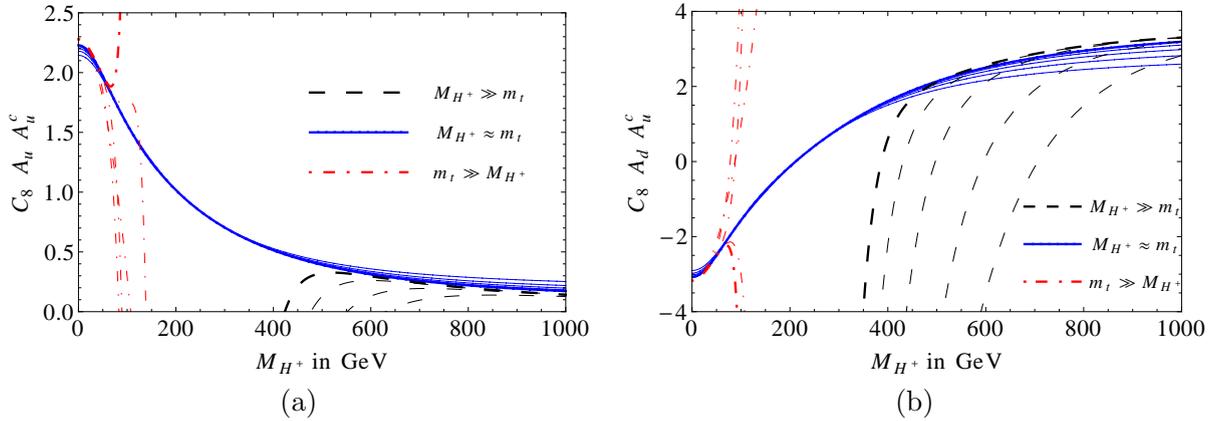


Abbildung 6.4.: Drei-Schleifen-Koeffizienten $C_{8,A_u A_u^c}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ (a) und $C_{8,A_d A_u^*}^{H(3)}(\mu_0 = m_t)$ (b) als Funktion von M_{H^+} .

Parameter	Wert
$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_c \bar{\nu})_{\text{exp}}$	0.1061 ± 0.0017
C_{fit}	0.580 ± 0.016
$ V_{ts}^* V_{tb}/V_{cb} ^2$	0.9676 ± 0.0033
$\alpha_{em}(0)$	$1/137.036$
M_Z	91.1876 GeV
M_W	80.403 GeV
m_b^{1S}	$(4.68 \pm 0.03) \text{ GeV}$
$m_c(m_c)$	$(1.224 \pm 0.0566) \text{ GeV}$

Tabelle 6.1.: Eingangparameter für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$, übernommen aus der SM-Vorhersage in Ref. [118].

und $M_t = (173.18 \pm 0.94) \text{ GeV}$, wurden aus der SM-Vorhersage [118] übernommen. Die wichtigsten Parameter sind in Tab. 6.1 zusammengefasst, alle anderen Parameter finden sich im Anhang A von Ref. [118]. Für die elektroschwachen NLO-Korrekturen konnten nur die SM-Resultate verwendet werden, da diese im 2HDM nicht bekannt sind. Für die Renormierungsskalen wurden die Standardwerte $\mu_0 = 160 \text{ GeV}$, $\mu_b = 2.5 \text{ GeV}$ und $\mu_c = 1.5 \text{ GeV}$ verwendet, wobei μ_c die Renormierungsskala der Charm-Quark-Masse ist. Die Photon-Cut-Off-Energie wurde wie bereits in Kapitel 5 auf $E_0 = 1.6 \text{ GeV}$ gesetzt.

Das Hauptaugenmerk der phänomenologischen Analyse soll auf dem 2HDM Typ-II liegen, da es nur in diesem Modell möglich ist, durch $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ eine allgemeine untere Grenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons anzugeben. Auf das Typ-I Modell wird am Ende des Kapitels eingegangen. In Abb. 6.5(a) ist $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ in Abhängigkeit von $\tan \beta$ im Bereich $0.5 \leq \tan \beta \leq 10$ gezeigt, wobei $M_{H^+} = 400 \text{ GeV}$ verwendet wurde. Die schwarze, durchgezogene Kurve zeigt das NNLO-Ergebnis, während die blau gepunktete und die rot gestrichelte Kurve das LO- und das NLO-Ergebnis darstellen. Es ist deutlich zu erkennen, dass für $\tan \beta < 2$ die Vorhersage für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ stark anwächst, während das Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$

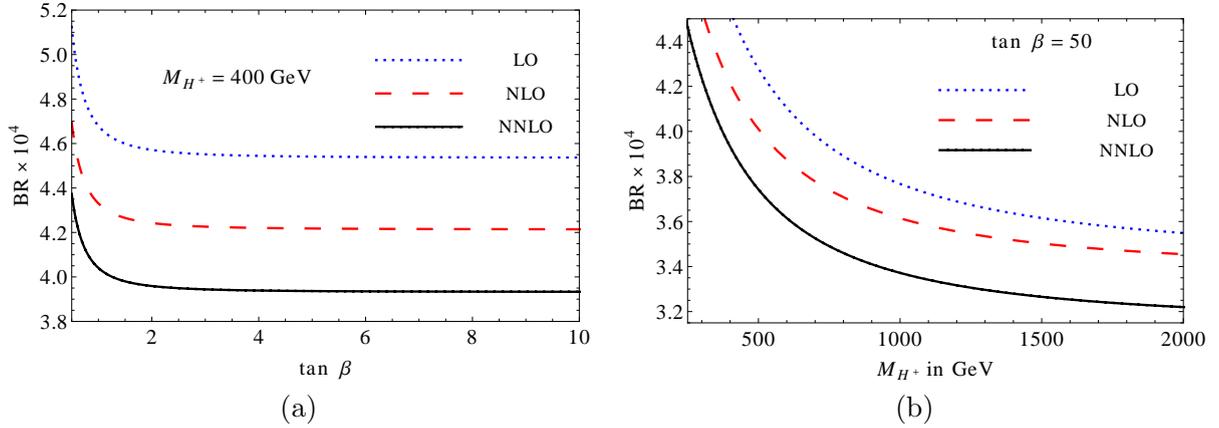


Abbildung 6.5.: $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ in Abhängigkeit von $\tan \beta$ für $M_{H^+} = 400 \text{ GeV}$ (links) und $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ in Abhängigkeit von M_{H^+} für $\tan \beta = 50$ (rechts).

für $\tan \beta > 2$ nahezu unabhängig von $\tan \beta$ ist. Zwischen $\tan \beta = 10$ und $\tan \beta = 50$ ändert sich die Vorhersage für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ nur um 0.03%. Der Grund hierfür liegt in den Vorfaktoren der Wilson-Koeffizienten in Gl. (6.6). Aus Gl. (6.5) folgt, dass der Anteil $C_{i,A_d A_u^*}^{H(n)}$ im 2HDM Typ-II proportional zu $1/\tan^2 \beta$ und damit vernachlässigbar für große Werte von $\tan \beta$ ist. Der zweite Anteil $C_{i,A_d A_u^*}^{H(n)}$ der Wilson-Koeffizienten ist aber im 2HDM Typ-II unabhängig von $\tan \beta$, wodurch das Verzweigungsverhältnis für große Werte von $\tan \beta$ nahezu unabhängig von $\tan \beta$ wird. Im Folgenden wird $\tan \beta = 50$ verwendet, da Werte mit $\tan \beta < 2$ zu einer stark erhöhten Vorhersage führen würden und damit auch zu einer höheren unteren Grenze an M_{H^+} , während die untere Grenze für M_{H^+} bei $\tan \beta = 50$ für den gesamten Bereich von $\tan \beta$ gültig ist. In Abb. 6.5(b) ist das Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ in Abhängigkeit von M_{H^+} für $\tan \beta = 50$ gezeigt. Für große Werte von M_{H^+} geht das 2HDM-Resultat für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ in die SM-Vorhersage über, die sich auf der M_{H^+} -Achse des Schaubildes befindet. Der Unterschied zwischen der SM-Vorhersage und der Vorhersage im 2HDM Typ-II beträgt 35% bei $M_{H^+} = 400 \text{ GeV}$ und 2% bei $M_{H^+} = 2 \text{ TeV}$.

Im nächsten Schritt wird die Abhängigkeit des Verzweigungsverhältnisses von der Matching-Skala μ_0 untersucht. Die Zerfallsbreite ist als physikalische Observable im Prinzip unabhängig von μ_0 , durch das Abschneiden der Störungsreihe zu einer bestimmten Ordnung bleibt aber eine Abhängigkeit von μ_0 übrig. Mit dieser verbleibenden Abhängigkeit können die Effekte der vernachlässigten Ordnungen abgeschätzt werden. Die Reduzierung der μ_0 -Abhängigkeit ist das Hauptergebnis der neuen Drei-Schleifen-Korrekturen für die Wilson-Koeffizienten C_7 und C_8 . In Abb. 6.6(a) wird der Beitrag des geladenen Higgs-Bosons zum Verzweigungsverhältnis, $\Delta \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}_{2\text{HDM}} - \mathcal{B}_{\text{SM}}$, in Abhängigkeit von μ_0 dargestellt. Die Masse des geladenen Higgs-Bosons ist auf $M_{H^+} = 400 \text{ GeV}$ gesetzt. Außerdem wurde $\Delta \mathcal{B}(\mu_0)$ mit $\Delta \mathcal{B}(M_{H^+} = 400 \text{ GeV})$ normiert. Der 2HDM-Beitrag $\Delta \mathcal{B}(\mu_0)$ mit $\tan \beta = 50$ und $M_{H^+} = 400 \text{ GeV}$ beträgt ungefähr 25% von $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)_{\text{SM}}$. Zu sehen sind die LO- (blau gepunktet), die NLO- (rot gestrichelt), die unvollständige NNLO- (grün strichpunktiiert) und die NNLO-Kurven (schwarz durchgezogen). Die unvollständige NNLO-Kurve (partial NNLO) entspricht dem Ergebnis aus Ref. [119], d.h. mit SM-Wilson-Koeffizienten zur NNLO und 2HDM-Koeffizienten zur NLO. Der Unterschied zwischen der partial NNLO- und der NNLO-Kurve kommt damit gerade aus den NNLO-

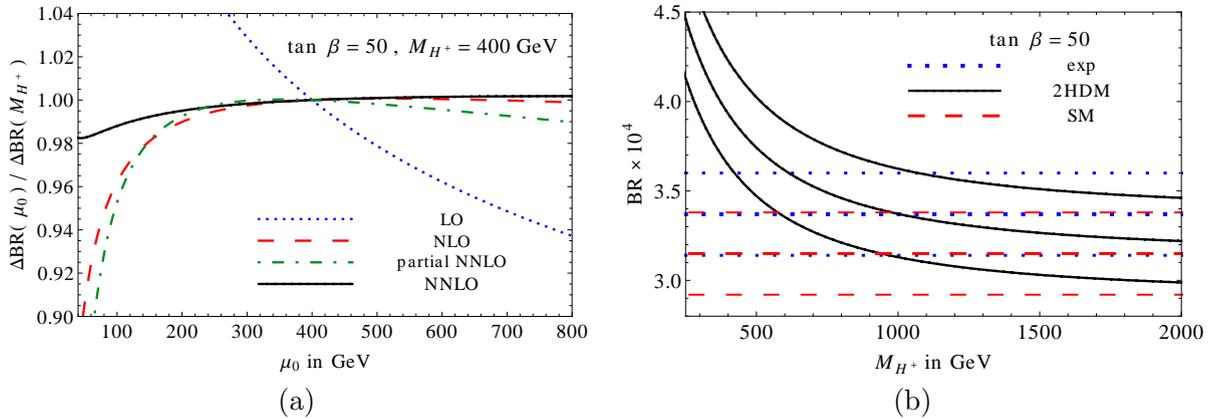


Abbildung 6.6.: $\Delta\mathcal{B}(\mu_0)/\Delta\mathcal{B}(M_{H^+} = 400 \text{ GeV})$ in Abhängigkeit der Matching-Skala μ_0 (links). Im rechten Bild ist $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ als Funktion von M_{H^+} dargestellt. Die durchgezogene, mittlere Kurve stellt den 2HDM-Zentralwert dar. Die mittlere, rot gestrichelte Linie und die mittlere, blau gepunktete Linie sind der SM-Zentralwert und der experimentelle Durchschnittswert. Um die mittleren Kurven sind jeweils die um $\pm 1\sigma$ verschobenen Kurven gezeichnet.

Korrekturen zu den 2HDM-Wilson-Koeffizienten, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet wurden. Das LO-Ergebnis hat eine sehr große Skalenabhängigkeit, diese wird durch Hinzunahme der NLO-Ergebnisse reduziert. Die Ergebnisse zur partial NNLO sorgen für keine Verbesserung der Skalenabhängigkeit des 2HDM-Anteils, für große Werte von μ_0 wird diese sogar größer. Erst durch Hinzunahme der vollen NNLO-Korrekturen im 2HDM kommt es zu einer starken Reduktion der Skalenabhängigkeit. Im Intervall $\mu_0 \in [\frac{1}{2} m_t, 2 M_{H^+}]$ variiert das partial NNLO-Ergebnis um 6.6%, während das volle NNLO-Ergebnis sich nur noch um 1.6% ändert.

Im Folgenden werden die einzelnen theoretischen Unsicherheiten für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ diskutiert, diese entsprechen den Unsicherheiten der SM-Vorhersage aus Ref. [118].

- Nicht-perturbative Unsicherheit: Die nicht-perturbative Unsicherheit wurde in Ref. [118] auf $\pm 5\%$ geschätzt und in Ref. [125] bestätigt. Es wird hier angenommen, dass dieser Wert unabhängig von der Masse des geladenen Higgs-Bosons ist.
- In Ref. [118, 152] wurde für die Operator-Matrixelemente eine Entwicklung für große Werte von m_c durchgeführt und zum physikalischen Wert interpoliert, wobei für $m_c = 0$ geeignete Annahmen gemacht wurden. Die Unsicherheit durch die Interpolation und die Annahmen bei $m_c = 0$ wurden auf $\pm 3\%$ geschätzt. Auch diese Unsicherheit ist unabhängig von M_{H^+} .
- Parameter-Unsicherheit: Die Unsicherheiten der einzelnen Parameter, siehe Tab. 6.1 und Anhang A in Ref. [118], wurden quadratisch addiert. Die Gesamtunsicherheit beträgt ungefähr 2 – 3%, wobei sie für alle M_{H^+} -Werte einzeln berechnet wurde.
- Perturbative Unsicherheit: Diese Unsicherheit hat ihren Ursprung in den vernachlässigten höheren Ordnungen in der Störungsreihe. Hierbei wurden die Renormierungsskalen in den Intervallen $80 \text{ GeV} \leq \mu_0 \leq \max\{2M_{H^+}, 320 \text{ GeV}\}$, $1.25 \text{ GeV} \leq \mu_b \leq 5 \text{ GeV}$ und $1.224 \text{ GeV} \leq \mu_c \leq M_b^{1S} = 4.68 \text{ GeV}$ variiert. Auch diese Unsicherheit wurde für alle Werte von M_{H^+} neu berechnet und liegt im Bereich von 3 – 4%.

Die Parameter-Unsicherheit und die Renormierungsskalen-Unsicherheit wurden asymmetrisch behandelt. In Abb. 6.6(b) ist der Zentralwert für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ (mittlere schwarze Kurve) zusammen mit dem 1σ -Fehlerband (obere und untere schwarze Kurve) in Abhängigkeit von M_{H^+} dargestellt. Die rot gestrichelten Linien sind die SM-Vorhersage zusammen mit dem 1σ -Fehlerband. Die blau gepunkteten Linien stellen den experimentellen Wert für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ zusammen mit dem 1σ -Fehlerband dar. Wie man an dem Diagramm erkennen kann, lässt sich das 2HDM Typ-II für kleine Massen des geladenen Higgs-Bosons ausschließen, da die theoretische Vorhersage von den experimentell bestimmten Werten signifikant abweicht. Zur Bestimmung der unteren Grenze an M_{H^+} werden die experimentelle Unsicherheit aus Gl. (5.1) und die theoretische Unsicherheit quadratisch addiert. Der einseitige 95% (99%) Vertrauensbereich (C.L.) ergibt sich aus dem größten Wert für M_{H^+} , für den die Differenz zwischen theoretischen und experimentellen Zentralwert größer als die mit 1.645 (2.326) multiplizierte Gesamtunsicherheit ist. Die Faktoren 1.645 (2.326) werden aus der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, \quad (6.33)$$

bestimmt. Es gilt $\Phi(1.645) \approx 0.95$ und $\Phi(2.326) \approx 0.99$. Damit ergeben sich folgende untere Grenzen an die Masse des geladenen Higgs-Bosons,

$$\begin{aligned} M_{H^+} &\geq 380 \text{ GeV} && \text{mit 95\% C.L.}, \\ M_{H^+} &\geq 289 \text{ GeV} && \text{mit 99\% C.L.} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Der relativ große Unterschied dieser neuen Ausschlussgrenzen im Vergleich zu den Ergebnissen in Ref. [119] ($M_{H^+} \geq 295 \text{ GeV}$ mit 95% C.L.) kommt hauptsächlich durch eine Verschiebung des experimentellen Wertes für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$, welcher kleiner ist als der in Ref. [119] verwendete Wert. Variiert man die Matching-Skala μ_0 zwischen 80 GeV und 400 GeV so variiert die untere Grenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons um 25 GeV, wenn die Drei-Schleifen-2HDM-Korrekturen für C_7 und C_8 nicht berücksichtigt werden. Durch Hinzunahme dieser Korrekturen variiert die untere Grenze nur noch um 7 GeV. Wird die Matching-Skala auf $\mu_0 = 160 \text{ GeV}$ gesetzt, so wird die untere Grenze auf Grund der neuen Drei-Schleifen-Koeffizienten aber nur um 5 – 6 GeV erhöht. Das Hauptergebnis der Berechnung der Drei-Schleifen-Korrekturen ist also eine Stabilisierung der unteren Grenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons.

Auf der Webseite der *Heavy Flavor Averaging Group* [170] wird mit

$$\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)|_{E_\gamma > 1.6 \text{ GeV}} = (3.43 \pm 0.22) \times 10^{-4} \quad (6.35)$$

ein Mittelwert der verschiedenen experimentellen Messungen angegeben, der vom Mittelwert in Gl. (5.1) geringfügig abweicht. Zur Vollständigkeit werden die Ausschlussgrenzen auch für diesen Mittelwert angegeben,

$$\begin{aligned} M_{H^+} &\geq 360 \text{ GeV} && \text{mit 95\% C.L.}, \\ M_{H^+} &\geq 277 \text{ GeV} && \text{mit 99\% C.L.} \end{aligned} \quad (6.36)$$

In Abb. 6.7(a) ist die 95% C.L. Grenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons in Abhängigkeit des experimentellen Zentralwerts für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ und der experimentellen Unsicherheit als Konturdiagramm dargestellt. Die Zahlen auf den Linien geben die untere Grenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons an, der schwarze Punkt stellt das aktuelle experimentelle Ergebnis aus Gl. (5.1) dar. Es ist deutlich zu erkennen wie sich eine Reduktion der experimentellen

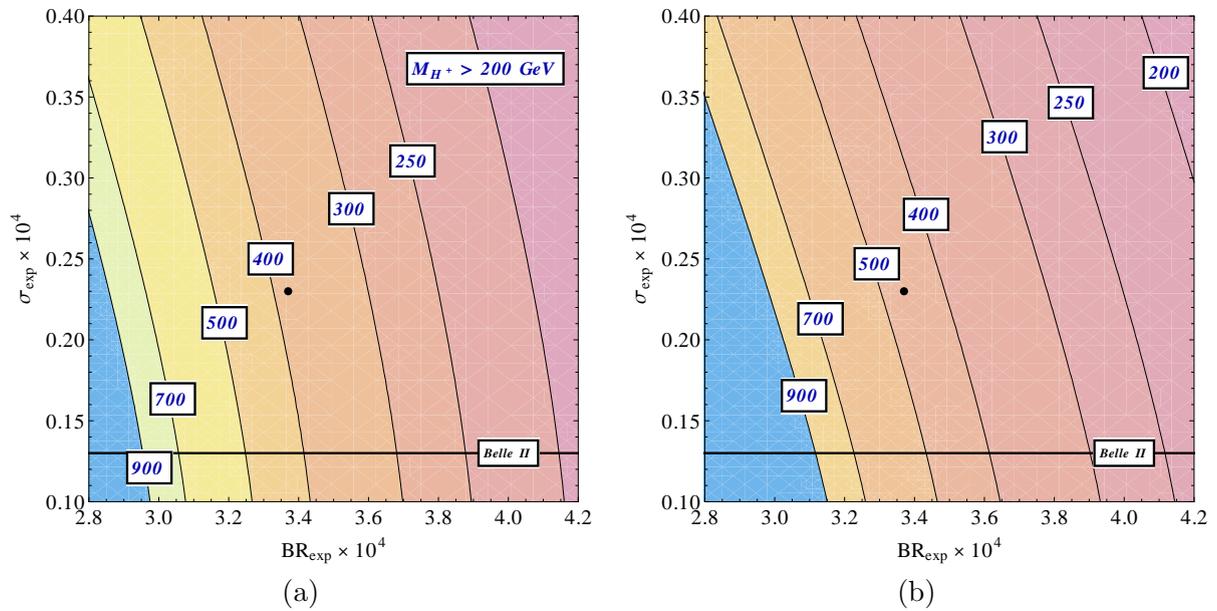


Abbildung 6.7.: Konturdiagramme für die untere Grenze an die Masse des geladenen Higgs-Bosons in Abhängigkeit des experimentellen Zentralwertes und der experimentellen Unsicherheit. Der schwarze Punkt repräsentiert das experimentelle Ergebnis aus Gl. (5.1). Im rechten Diagramm wurde die Theorie-Unsicherheit um den Faktor 2 reduziert.

Unsicherheiten, z.B. auf das von BELLE-II [171] erwartete Niveau, bei einem gleichbleibenden experimentellen Zentralwert auswirken würde. In diesem Fall würde sich die Ausschlussgrenze zu $M_{H^+} \geq 400$ GeV ändern. Wenn sich dabei auch noch der experimentelle Zentralwert zu 3.0×10^{-4} verschieben würde, wäre die Ausschlussgrenze bei $M_{H^+} \geq 800$ GeV. In Abb. 6.7(b) ist dasselbe Konturdiagramm noch einmal gezeigt, diesmal mit einer um den Faktor 2 reduzierten Theorie-Unsicherheit. Falls es also in den kommenden Jahren möglich wäre, die Theorie-Unsicherheit um einen Faktor 2 zu reduzieren und sich der Zentralwert der Theorie-Vorhersage nicht verschieben würde, könnte man bei einem gleichbleibenden experimentellen Zentralwert und einer experimentellen Unsicherheit auf dem Niveau von BELLE-II eine Ausschlussgrenze von $M_{H^+} \geq 550$ GeV erzielen.

Zum Schluss werden die Ergebnisse für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im Zusammenhang mit dem 2HDM Typ-I diskutiert. Die durchgezogenen, schwarzen Linien in Abb. 6.8 stellen die Theorie-Vorhersage zusammen mit dem 1σ -Fehlerband für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ in Abhängigkeit von M_{H^+} dar, im linken Bild für $\tan \beta = 1$ und im rechten Bild für $\tan \beta = 2$. Außerdem sind wieder die SM-Vorhersage und der experimentelle Wert zusammen mit ihren Unsicherheiten dargestellt. Aus Gl. (6.4) kann man ablesen, dass die 2HDM-Anteile in $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ proportional zu $1/\tan^2 \beta$ und damit für $\tan \beta > 2$ sehr stark unterdrückt sind, sodass die Kurven kaum von der SM-Vorhersage abweichen. Nur für kleine Werte von $\tan \beta$ ist es möglich, Ausschlussgrenzen an die Masse des geladenen Higgs-Bosons zu setzen, da in diesem Fall die Vorhersage für $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen deutlich reduziert ist. In Abb. 6.9 sind die Ausschlussgrenzen in der $\tan \beta$ - M_{H^+} -Ebene für das 2HDM Typ-I dargestellt, wobei die blaue Fläche mit 95% C.L. ausgeschlossen werden kann. Damit kann das 2HDM Typ-I für $\tan \beta \lesssim 1$ ausgeschlossen werden.

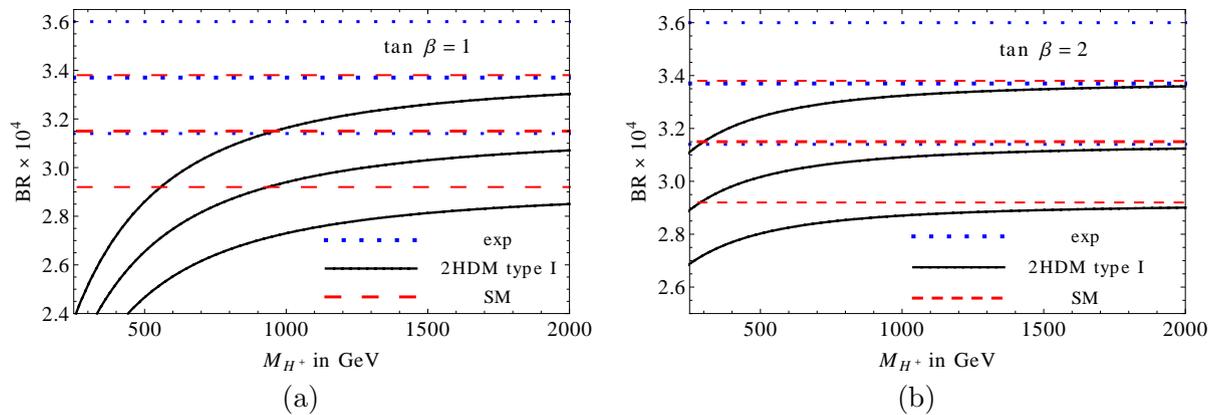


Abbildung 6.8.: $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ im 2HDM Typ-I in Abhängigkeit von M_{H^+} für $\tan \beta = 1$ (links) und $\tan \beta = 2$ (rechts).

Für $2 \gtrsim \tan \beta \gtrsim 1$ kann man untere Schranken an die Masse des geladenen Higgs-Bosons von 1 TeV bis 200 GeV angeben. Für $\tan \beta \gtrsim 2$ können keine Aussagen gemacht werden.

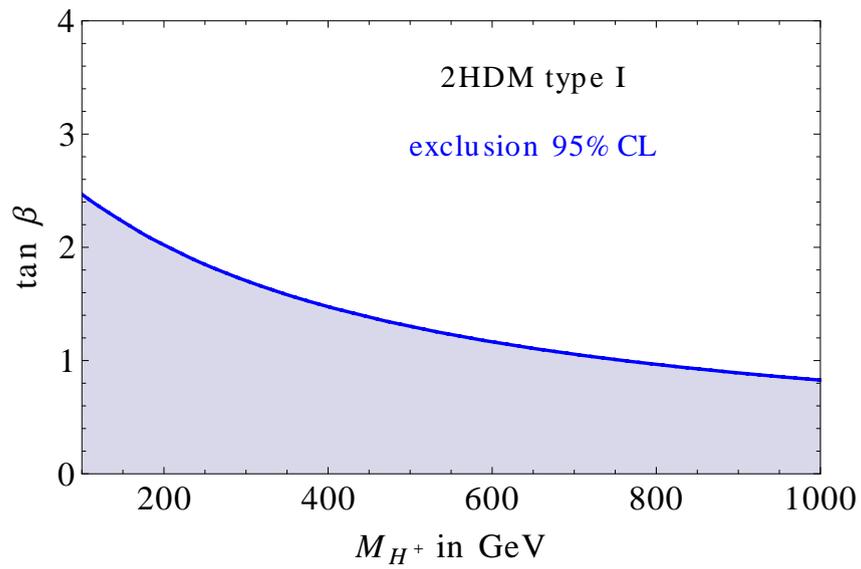


Abbildung 6.9.: Durch $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ ausgeschlossener Bereich im 2HDM Typ-I in der $\tan \beta$ - M_{H^+} -Ebene.

In dieser Arbeit wurden die seltenen Zerfälle $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ und $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ im Standardmodell und in 2-Higgs-Dublett-Modellen betrachtet. Dazu wurden jeweils die QCD-Korrekturen zur Drei-Schleifen-Ordnung für die entsprechenden Wilson-Koeffizienten berechnet.

Die Messung des Verzweigungsverhältnisses $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ von CMS und LHCb war einer der Höhepunkte der bisherigen Ergebnisse am LHC. Bis zur Messung dieses Zerfalls gab es die Hoffnung, dass es in diesem Zerfall große Abweichungen von der Standardmodell-Vorhersage geben könnte. Die neusten experimentellen Ergebnisse sind aber von der Größenordnung der Standardmodell-Vorhersage. Da $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ äußerst sensitiv auf Physik jenseits des Standardmodells ist und sich die experimentellen Unsicherheiten für $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ in den kommenden Jahren stark reduzieren werden, sind präzise Vorhersagen für diesen Zerfall innerhalb des Standardmodells äußerst wichtig. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die NNLO-QCD-Korrekturen für den Wilson-Koeffizienten C_A und damit für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ berechnet. Zum Matching der vollen Theorie und der effektiven Theorie mussten im Standardmodell Tadpole-Diagramme zur Drei-Schleifen-Ordnung in Abhängigkeit der Massen m_t und M_W berechnet werden. Dazu wurden die Diagramme in den beiden Grenzen $m_t \gg M_W$ und $m_t \approx M_W$ entwickelt. Für phänomenologische Analysen sind diese Entwicklungen den exakten Ergebnissen gleichwertig und damit vollkommen ausreichend. Damit konnte die Skalenunsicherheit von ca. 2% auf nahezu null gebracht werden. Die Resultate für C_A zur Drei-Schleifen-Ordnung wurden in Ref. [57] veröffentlicht. Des Weiteren wurden die Ergebnisse mit den elektroschwachen NLO-Korrekturen [80] kombiniert, was zu folgender Vorhersage innerhalb des Standardmodells führt,

$$\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (3.65 \pm 0.23) \times 10^{-9}.$$

Damit konnten die nicht-parametrischen Unsicherheiten auf 1.5% reduziert werden. Die größten Unsicherheiten in der Vorhersage für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ haben ihren Ursprung in den CKM-Faktoren und in der leptonischen Zerfallskonstanten. Die kombinierte Analyse wurde in Ref. [81] veröffentlicht. Des Weiteren wurden die QCD-Korrekturen zur Drei-Schleifen-Ordnung zu den entsprechenden Wilson-Koeffizienten für $\bar{\mathcal{B}}(B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-)$ im 2-Higgs-Dublett-Modell Typ-II berechnet.

Der zweite Prozess in dieser Arbeit ist $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$. Für diesen Zerfall gibt es präzise experimentelle Ergebnisse, welche in sehr guter Übereinstimmung mit der präzisen Standardmodell-Vorhersage

sind. Theorien jenseits des Standardmodells müssen sich dieser Präzisionsobservablen stellen, was zu starken Ausschlussgrenzen an die Parameter dieser Theorien führen kann. Im Rahmen dieser Arbeit wurden die NNLO-QCD-Korrekturen für $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ innerhalb von 2-Higgs-Dublett-Modellen berechnet. Dazu wurden die Drei-Schleifen-Korrekturen der Wilson-Koeffizienten C_7 und C_8 bestimmt, die insbesondere von der Masse des geladenen Higgs-Bosons abhängen. In den Tadpole-Diagrammen treten mit m_t und M_{H^+} zwei verschiedene Massen auf. Die Diagramme wurden in den Hierarchien $m_t \ll M_{H^+}$, $m_t \approx M_{H^+}$ und $m_t \gg M_{H^+}$ entwickelt. Die Kombination der Ergebnisse für diese drei Entwicklungen deckt den gesamten Massenbereich ab und ist damit aus phänomenologischer Sicht dem Ergebnis mit exakter Massenabhängigkeit äquivalent. Durch diese Korrekturen konnte die Skalenunsicherheit für $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ innerhalb der 2-Higgs-Dublett-Modelle stark reduziert werden. Im 2-Higgs-Dublett-Modell Typ-II ist das Verzweigungsverhältnis für kleine Werte von M_{H^+} im Vergleich zu den experimentellen Ergebnissen zu groß, was zu folgenden Ausschlussgrenzen an die Masse des geladenen Higgs-Boson führt,

$$\begin{aligned} M_{H^+} &\geq 380 \text{ GeV} && \text{mit 95\% C.L. ,} \\ M_{H^+} &\geq 289 \text{ GeV} && \text{mit 99\% C.L. .} \end{aligned}$$

Diese Ausschlussgrenzen wurden für $\tan \beta = 50$ bestimmt, wobei das Verzweigungsverhältnis für $\tan \beta > 2$ nahezu unabhängig von $\tan \beta$ ist. Für $\tan \beta < 2$ wäre das Verzweigungsverhältnis noch größer im Vergleich zum experimentellen Wert, was auf noch höhere Ausschlussgrenzen führen würde. Damit ist die hier angegebene Ausschlussgrenze für alle Werte von $\tan \beta$ gültig. Die Ergebnisse für die NNLO-QCD-Korrekturen für $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ innerhalb 2-Higgs-Dublett-Modelle wurden in Ref. [76] veröffentlicht.

A.1. Renormierungskonstanten für die Operatoren P_1 - P_8

In diesem Kapitel sind alle benötigten Renormierungskonstanten für die Operatoren P_1 - P_8 aus Kap. 5 angegeben. Diese wurden aus Ref. [126, 127] übernommen.

Die Entwicklung der Renormierungskonstanten in α_s lautet

$$Z_{i,j} = \delta_{ij} + \frac{\alpha_s}{4\pi} \delta Z_{i,j}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^2 \delta Z_{i,j}^{(2)} + \left(\frac{\alpha_s}{4\pi}\right)^3 \delta Z_{i,j}^{(3)} + \mathcal{O}(\alpha_s^4). \quad (\text{A.1})$$

Die einzelnen Renormierungskonstanten sind

$$\begin{aligned} \delta Z_{1,1}^{(1)} &= -\frac{2}{\epsilon}, & \delta Z_{2,1}^{(1)} &= \frac{6}{\epsilon}, \\ \delta Z_{1,2}^{(1)} &= \frac{4}{3} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{11,1}^{(1)} &= 64, \\ \delta Z_{11,2}^{(1)} &= \frac{32}{3}, & \delta Z_{2,1}^{(2)} &= -\frac{29}{\epsilon^2} + \frac{349}{12} \frac{1}{\epsilon}, \\ \delta Z_{2,2}^{(2)} &= \frac{4}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon}, & \delta Z_{4,3}^{(1)} &= -\frac{20}{9} \frac{1}{\epsilon}, \\ \delta Z_{1,4}^{(1)} &= -\frac{1}{9} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{4,4}^{(1)} &= -\frac{50}{9} \frac{1}{\epsilon}, \\ \delta Z_{11,4}^{(1)} &= \frac{4}{9}, & \delta Z_{4,5}^{(1)} &= \frac{2}{9} \frac{1}{\epsilon}, \\ \delta Z_{4,6}^{(1)} &= \frac{5}{12} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{2,11}^{(1)} &= \frac{1}{\epsilon}, \\ \delta Z_{1,31}^{(1)} &= \frac{1}{9} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{2,31}^{(1)} &= -\frac{2}{3} \frac{1}{\epsilon}, \\ \delta Z_{4,31}^{(1)} &= -\frac{28}{9} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{11,31}^{(1)} &= -\frac{4}{9}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}
\delta Z_{31,31}^{(1)} &= -\frac{9}{2} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{2,3}^{(2)} &= -\frac{20}{27} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{104}{81} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{2,4}^{(2)} &= -\frac{128}{27} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{338}{81} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{2,5}^{(2)} &= \frac{2}{27} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{14}{81} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{2,6}^{(2)} &= \frac{5}{36} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{35}{108} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{2,31}^{(2)} &= \frac{181}{54} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1889}{324} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{7,7}^{(1)} &= -\frac{7}{3} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{8,7}^{(1)} &= -\frac{16}{9} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{8,8}^{(1)} &= -\frac{3}{\epsilon}, & \delta Z_{1,7}^{(2)} &= -\frac{58}{243} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{2,7}^{(2)} &= \frac{116}{81} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{4,7}^{(2)} &= -\frac{50}{243} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{7,7}^{(2)} &= \frac{35}{3} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{650}{27} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{8,7}^{(2)} &= \frac{104}{9} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{548}{81} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{11,7}^{(2)} &= \frac{1096}{243}, & \delta Z_{1,8}^{(2)} &= \frac{167}{648} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{2,8}^{(2)} &= \frac{19}{27} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{4,8}^{(2)} &= -\frac{1409}{648} \frac{1}{\epsilon}, \\
\delta Z_{8,8}^{(2)} &= \frac{16}{\epsilon^2} + \frac{1975}{108} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{11,8}^{(2)} &= -\frac{761}{162}, \\
\delta Z_{2,7}^{(3)} &= -\frac{23848}{2187} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{13390}{2187} \frac{1}{\epsilon}, & \delta Z_{2,8}^{(3)} &= -\frac{7249}{1458} \frac{1}{\epsilon^2} + \frac{5749}{5832} \frac{1}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

A.2. QCD-Renormierungskonstanten

In diesem Kapitel sind die benötigten QCD-Renormierungskonstanten angegeben. Mit n_q wird die Anzahl der aktiven Quarks bezeichnet und damit die Renormierungskonstanten in der n_q -Flavour-Theorie gekennzeichnet.

Renormierung der starken Eichkopplung mit $g_{s,\text{bare}} = Z_{g_s} g_s$:

$$\begin{aligned}
Z_{g_s}^{(n_q)} &= 1 + \frac{\alpha_s^{(n_q)}}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{11}{2} + \frac{n_q}{3} \right) \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_s^{(n_q)}}{4\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{51}{2} + \frac{19 n_q}{6} \right) + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{363}{8} - \frac{11 n_q}{2} + \frac{n_q^2}{6} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3).
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Renormierung der Quark-Masse mit $m_{\text{bare}} = Z_m m$:

$$\begin{aligned}
Z_m^{(n_q)} &= 1 - \frac{\alpha_s^{(n_q)}}{4\pi} \frac{4}{\epsilon} \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_s^{(n_q)}}{4\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{101}{3} + \frac{10 n_q}{9} \right) + \frac{1}{\epsilon^2} \left(30 - \frac{4 n_q}{3} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3).
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Renormierung der Quark-Wellenfunktion mit $\Psi_{\text{bare}} = Z_\psi^{1/2} \Psi$:

$$\begin{aligned}
Z_\psi^{(n_q)} &= 1 + \frac{\alpha_s^{(n_q)}}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \xi^{(n_q)} \right) \\
&+ \left(\frac{\alpha_s^{(n_q)}}{4\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{47}{3} + \frac{2n_q}{3} + 5\xi^{(n_q)} - \frac{1}{2} \left(\xi^{(n_q)} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{44}{9} - \frac{61}{9} \xi^{(n_q)} + \frac{17}{9} \left(\xi^{(n_q)} \right)^2 \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_s^3).
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Renormierung der Gluon-Wellenfunktion mit $A_{\mu,\text{bare}}^a = Z_{gl}^{1/2} A_\mu^a$ und des QCD-Eichparameters ξ mit $(\xi^{\text{bare}} - 1) = Z_{gl} (\xi - 1)$:

$$Z_{gl}^{(n_q)} = 1 + \frac{\alpha_s^{(n_q)}}{4\pi} \frac{1}{\epsilon} \left(5 - \frac{2}{3} n_q + \frac{3}{2} \xi^{(n_q)} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2). \tag{A.6}$$

ANHANG B

RENORMIERUNGSGRUPPENLAUFEN VON C_A

Die Größen F_1 , F_2 und F_3 in Gl. (3.87) ergeben mit Hilfe der anomalen Dimensionen aus Ref. [85, 86] folgende Ausdrücke,

$$\begin{aligned} F_1 &= \sum_{i=1}^8 p_i \eta^{a_i}, \\ F_2 &= \frac{3(\eta - 1)}{23\eta} Y(x), \\ F_3 &= \frac{3(\eta - 1)}{23\eta} V(x) + \frac{z \ln \eta}{\eta} + \sum_{i=1}^8 \eta^{a_i} \left(q_i + \eta r_i + \eta s_i E(x) + \eta t_i \ln \left(\frac{\mu_0^2}{M_W^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

mit $z \simeq 0.0553$, $x = m_t^2/M_W^2$ und

$$\eta = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{\alpha_s(\mu_b)}. \quad (\text{B.2})$$

Die Koeffizienten p_i , q_i , r_i , s_i und t_i und die Potenzen a_i sind in Tab. B.1 angegeben. Die Größen F_i setzen sich aus Kombinationen von Wilson-Koeffizienten zusammen, deren Operatoren mit Q_A durch Hinzunahme von QED-Korrekturen mischen:

- Wilson-Koeffizienten in F_1 : $C_2^{c(0)}$
- Wilson-Koeffizienten in F_2 : $C_9^{(1)}$
- Wilson-Koeffizienten in F_3 : $C_2^{c(0)}$, $C_1^{c(1)}$, $C_4^{(1)}$, $C_9^{(1)}$

Die Koeffizienten $C_2^{c(0)}$, $C_1^{c(1)}$ und $C_4^{(1)}$ wurden ausführlich in Kapitel 5 diskutiert. Der Koeffizient $C_9^{(1)}$ gehört zum Operator

$$P_9 = \frac{e^2}{g^2} (\bar{s}_L \gamma_\mu b_L) \sum_l (\bar{l} \gamma^\mu l), \quad (\text{B.3})$$

der dem Operator Q_V in Gl. (3.13) entspricht. Die Ergebnisse für alle Koeffizienten im SM finden sich in Ref. [108] und ergeben zusammengefasst die Funktionen

$$Y(x) = \frac{3x^2}{8(x-1)^2} \ln x + \frac{x^2 - 4x}{8(x-1)}, \quad (\text{B.4})$$

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	-2	-1	$\frac{6}{23}$	$-\frac{12}{23}$	0.4086	-0.4230	-0.8994	0.1456
p_i	-0.0222	-0.0768	-0.0714	0.0672	0.0074	0.0360	0.0614	-0.0014
q_i	0	0	0.2440	-0.2231	0.1204	-0.2874	-0.3080	-0.0429
r_i	0.4464	0.1626	-0.0116	-0.0316	0.0027	-0.0299	-0.0421	0.0004
s_i	0.0040	0.0183	0	0	0.0017	0.0076	-0.0320	0.0004
t_i	0.0271	0.0469	-0.0114	-0.0214	0.0018	-0.0093	-0.0337	-0.0001

Tabelle B.1.: Ergebnisse für die Koeffizienten und Potenzen aus Gl. (B.1).

$$V(x) = \frac{-24x^4 + 6x^3 + 63x^2 - 50x + 8}{18(x-1)^4} \ln x + \frac{-18x^4 + 163x^3 - 259x^2 + 108x}{36(x-1)^3},$$

$$E(x) = \frac{-9x^2 + 16x - 4}{6(1-x)^4} \ln x + \frac{x^3 + 11x^2 - 18x}{12(x-1)^3}.$$

Die Koeffizienten in Tab. B.1 erfüllen die Relationen

$$\sum_{i=1}^8 p_i a_i = \sum_{i=1}^8 p_i = \sum_{i=1}^8 (q_i + r_i) = \sum_{i=1}^8 s_i = \sum_{i=1}^8 t_i = 0, \quad (\text{B.5})$$

mit denen man zeigen kann, dass $C_A(\mu_b)$ in Gl. (3.87) im Limes $\alpha_s \rightarrow 0$ endlich ist, obwohl die Anteile F_i zusammen mit den Faktoren $1/\alpha_s$ und $1/\alpha_s^2$ auftreten. Dazu muss die Formel zum Renormierungsgruppenlaufen von $\alpha_s(\mu)$ aus Gl. (35) in Ref. [86] in Gl. (3.87) eingesetzt und in α_s entwickelt werden. Die Terme mit $1/\alpha_s$ und $1/\alpha_s^2$ fallen mit den Relationen aus Gl. (B.5) heraus. Im Limes $\alpha_s \rightarrow 0$ bleiben nur Anteile proportional zu $\ln \frac{\mu_0}{\mu_b}$ und $\ln^2 \frac{\mu_0}{\mu_b}$ übrig, wobei die Terme mit $\ln \frac{\mu_0}{\mu_b}$ aus den Anteilen mit $1/\alpha_s$ (F_2 und F_3) und die Terme mit $\ln^2 \frac{\mu_0}{\mu_b}$ aus den Anteilen mit $1/\alpha_s^2$ (F_1) hervorgehen. Aus diesem Grund werden diese Anteile logarithmisch-verstärkte QED-Korrekturen genannt.

Für die nicht logarithmisch-verstärkten Korrekturen G aus Gl. (3.87) gilt

$$G = \sin^2 \theta_W \left(\sum_{i=1}^8 \eta^{a_i+2} \left[(\eta^{-1} b_i + c_i) C_1^{(1)} + (\eta^{-1} d_i + e_i) C_4^{(1)} + \sum_{j=1}^6 f_i^{(j)} C_j^{(2)} \right] \right. \\ \left. - \left[0.0111 C_1^{(1)} + 0.0132 C_4^{(1)} + 0.0939 C_9^{(1)} \right] \ln \eta \right. \\ \left. + (\eta - 1) 0.0104 C_9^{(2)} + 0.0796 \frac{1}{\sin^2 \theta_W} C_A^{e,(1)} \right). \quad (\text{B.6})$$

Die Koeffizienten sind in Tab. B.2 angegeben. Bis auf $C_A^{e,(1)}$ sind alle Wilson-Koeffizienten aus Gl. (B.6) in Ref. [108] zu finden. Mit $C_A^{e,(1)}$ werden die elektroschwachen NLO-Korrekturen aus Ref. [80] bezeichnet, wobei das Ergebnis dort als $\tilde{c}_{10}^{(22)}$ mit $C_A^{e,(1)} = -\frac{1}{2} \tilde{c}_{10}^{(22)}$ angegeben ist.

In Ref. [80] sind ebenfalls die Formeln für $C_A(\mu_b)$ angegeben, wobei darauf zu achten ist, dass hier eine andere Definition und Normierung der Operatoren gewählt wurde und sich damit die Formeln unterscheiden.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
b_i	0	0	0.0065	0.0118	0.0019	0.0191	0.0103	-0.0018
c_i	-0.0451	-0.0037	0.0009	-0.0003	-0.00005	-0.0007	0.0012	0.00005
d_i	0	0	0	0	0.0281	-0.0607	0.1606	0.0109
e_i	-0.1348	0.0043	0	0	-0.00005	-0.0027	-0.0065	0.0007
$f_i^{(1)}$	-0.0004	0.0012	-0.0002	-0.0003	$9.2 \cdot 10^{-6}$	-0.0002	-0.0002	$-4.8 \cdot 10^{-6}$
$f_i^{(2)}$	-0.0001	-0.0005	-0.0005	0.0004	0.00005	0.0002	0.0004	$-8.9 \cdot 10^{-6}$
$f_i^{(3)}$	-0.0009	0.0049	0	0	0.0002	-0.0008	-0.0031	-0.0003
$f_i^{(4)}$	0.0003	0.0015	0	0	0.0001	0.0006	-0.0025	0.00003
$f_i^{(5)}$	-0.0078	0.0371	0	0	0.0040	-0.0159	-0.0151	-0.0024
$f_i^{(6)}$	0.0068	-0.0158	0	0	0.0018	0.0077	-0.0005	-0.0001

Tabelle B.2.: Ergebnisse für Koeffizienten aus Gl. (B.6).

C.1. Projektoren für Q_A , Q_A^E , Q_S und Q_P

Zur Bestimmung der Wilson-Koeffizienten C_A , C_A^E , C_S und C_P wurden Projektoren für die entsprechenden Dirac-Strukturen verwendet. Diese Projektoren haben die Form

$$\Gamma_1 \otimes \Gamma_2, \quad (\text{C.1})$$

wobei Γ_1 ein Produkt aus γ -Matrizen der ersten äußeren und Γ_2 der zweiten äußeren Fermionlinie ist. Für die Wilson-Koeffizienten zu $B_d \rightarrow l^+ l^-$ sind das die äußere Quark- und die äußere Lepton-Linie. Es wurde folgender Ausdruck während der Berechnung der Diagramme auf die Amplitude multipliziert:

$$\begin{aligned}
P = & d_1 1 \otimes 1 \\
& + d_2 g_5 \otimes 1 \\
& + d_3 1 \otimes g_5 \\
& + d_4 g_5 \otimes g_5 \\
& + d_5 \gamma_{\mu_1} \otimes \gamma^{\mu_1} \\
& + d_6 \gamma_{\mu_1} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_1} \\
& + d_7 \gamma_{\mu_1} \otimes \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& + d_8 \gamma_{\mu_1} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& + d_9 \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \otimes \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \\
& + d_{10} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \\
& + d_{11} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \otimes \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& + d_{12} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& + d_{13} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \otimes \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \\
& + d_{14} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_{15} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \otimes \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& +d_{16} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& +d_{17} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \otimes \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \\
& +d_{18} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \\
& +d_{19} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \otimes \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& +d_{20} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& +d_{21} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \otimes \gamma^{\mu_5} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \\
& +d_{22} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_5} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \\
& +d_{23} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \otimes \gamma^{\mu_5} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 \\
& +d_{24} \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_5 \otimes \gamma^{\mu_5} \gamma^{\mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1} \gamma_5 .
\end{aligned}$$

Wie in Kapitel 3 beschrieben, werden in dem verwendeten FORM-Setup die Spuren für die äußeren Fermionlinien in d Dimensionen gebildet. Die Koeffizienten d_1 bis d_{24} müssen für die jeweilige gesuchte Dirac-Struktur angepasst werden. Um zum Beispiel in den Diagrammen den Anteil zur Dirac-Struktur von Q_A ,

$$A_8 \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha \gamma_5, \quad (\text{C.2})$$

zu erhalten, müssen die Koeffizienten d_i auf die Werte

$$\begin{aligned}
d_8 &= -\frac{1}{2\epsilon} \frac{4416 - 11840d + 11340d^2 - 4200d^3 + 525d^4}{1920(d-3)(d-2)(d-1)d}, \\
d_{16} &= \frac{1}{2\epsilon} \frac{-96 + 224d - 126d^2 + 21d^3}{192(d-3)(d-2)(d-1)d}, \\
d_{24} &= -\frac{1}{2\epsilon} \frac{24 - 50d + 15d^2}{1920(d-3)(d-2)(d-1)d}, \\
d_i &= 0, \quad \text{für } i \neq 8, 16, 24,
\end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

gesetzt werden.

Für die Operatoren P_1 bis P_6 in Kapitel 5 und Kapitel 6 wurden analoge Projektoren verwendet, wobei aber noch zusätzliche Terme mit bis zu sieben γ -Matrizen in jeder Fermion-Spur berücksichtigt wurden.

C.2. Projektoren für P_7 und P_8

Die Projektoren auf die Strukturen S_i in Gl. (5.26) lauten

$$\begin{aligned}
P_{b \rightarrow s\gamma} &= \gamma^\mu (c_1 \not{p} \not{k} + c_2 (p \cdot k) + c_3 p^2 + c_4 k^2 + c_{10} m_b \not{k} + c_{12} m_b \not{p} + c_{13} M_W^2) \\
&+ (c_9 m_b \not{k} + c_{11} m_b \not{p}) \gamma^\mu + c_5 \not{p} k_\mu + c_6 \not{p} p_\mu + c_7 \not{k} p_\mu + c_8 \not{k} k_\mu,
\end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

wobei die Koeffizienten c_i für die gesuchte Struktur angepasst werden müssen. p und k bezeichnen den einlaufenden Impuls des Bottom-Quarks und den auslaufenden Impuls des Photons (Gluons).

Um auf $S_2 = \gamma_\mu (p \cdot k)$ zu projizieren, also um Y_2^q oder G_2^q zu erhalten, wird bei der Berechnung der Diagramme $P_{b \rightarrow s\gamma}$ auf die Amplitude multipliziert und die Spur der äußeren Quark-Linie in d Dimensionen gebildet. Die Koeffizienten werden auf

$$\begin{aligned} c_1 &= -(p \cdot k)^2, \\ c_2 &= 2(p \cdot k)^2 - k^2 p^2, \\ c_5 &= -2(p \cdot k)^2, \\ c_6 &= k^2 (p \cdot k), \\ c_8 &= p^2 (p \cdot k), \\ c_i &= 0, \quad \text{für } i \neq 1, 2, 5, 6, 8, \end{aligned} \tag{C.5}$$

gesetzt. Danach werden nur die Anteile verwendet, bei denen die Impulse p und k jeweils zur Ordnung p^4 und k^4 auftreten. Am Ende muss das Ergebnis mit

$$\frac{1}{4(2-d) [p^2 k^2 (p \cdot k)^2 - (p \cdot k)^4]} \tag{C.6}$$

normiert werden.

Für die Struktur $S_8 = \not{k} k_\mu$, also zur Bestimmung von G_8^q , werden die Koeffizienten folgendermaßen gesetzt,

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{p^2}{(p \cdot k)} [(p \cdot k)^2 - p^2 k^2], \\ c_5 &= (1-d) p^2 (p \cdot k), \\ c_6 &= (d-2) (p \cdot k)^2 + p^2 k^2, \\ c_7 &= (1-d) p^2 (p \cdot k), \\ c_8 &= (d-1) p^4, \\ c_i &= 0, \quad \text{für } i \neq 2, 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \tag{C.7}$$

Es werden nur die Anteile verwendet, die zur Ordnung p^4 und k^4 sind. Das Ergebnis muss zusätzlich mit

$$\frac{1}{4(2-d) [2p^2 k^2 (p \cdot k)^2 - p^4 k^4 - (p \cdot k)^4]} \tag{C.8}$$

normiert werden.

Zur Bestimmung der Anteile mit der Struktur $S_{10} = m_b \gamma_\mu \not{k}$, also Y_{10}^q und G_{10}^q , müssen die Koeffizienten folgende Werte annehmen,

$$\begin{aligned} c_9 &= -d p^2, \\ c_{10} &= (2-d) p^2, \\ c_{11} &= d (p \cdot k), \\ c_{12} &= (d-2) (p \cdot k), \\ c_i &= 0, \quad \text{für } i \neq 9, 10, 11, 12. \end{aligned} \tag{C.9}$$

Es werden nur die Anteile zur Ordnung p^2 und k^2 mitgenommen. Das Ergebnis muss mit

$$\frac{1}{16 m_b^2 (1-d) [p^2 k^2 - (p \cdot k)^2]} \tag{C.10}$$

normiert werden.

ANHANG D

C_A , C_S UND C_P IM 2HDM TYP-II

In diesem Kapitel sind die Ergebnisse der Drei-Schleifen-Korrekturen zu den Koeffizienten C_A , C_S und C_P im 2HDM Typ-II aus Kapitel 4 angegeben.

D.1. Box-Diagramme

$$\begin{aligned}
 C_{A,m_b m_s, h_1}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) &= -111.4 r^2 - 84.88 r^2 \ln r - 21.10 r^2 \ln^2 r - 1.917 r^2 \ln^3 r \\
 &\quad -126.7 r^3 - 187.3 r^3 \ln r - 32.02 r^3 \ln^2 r - 0.2500 r^3 \ln^3 r \\
 &\quad -186.7 r^4 - 363.3 r^4 \ln r - 49.03 r^4 \ln^2 r - 1.792 r^4 \ln^3 r \\
 &\quad -273.9 r^5 - 607.4 r^5 \ln r - 84.00 r^5 \ln^2 r - 2.302 r^5 \ln^3 r \\
 &\quad + \mathcal{O}(r^6)
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
 C_{A,m_b m_s, h_3}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) &= 10.34 - 17.45 \bar{u} + 5.261 \bar{u}^2 + 1.091 \bar{u}^3 + 0.3858 \bar{u}^4 \\
 &\quad + 0.1721 \bar{u}^5 + 0.08762 \bar{u}^6 + 0.04853 \bar{u}^7 + 0.02848 \bar{u}^8 \\
 &\quad + \mathcal{O}(\bar{u}^9)
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
 C_{S,m_b, h_1}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) &= -1.559 r y^2 + 0.8241 r y^2 \ln y - 135.0 r^2 y^2 - 91.40 r^2 \ln r y^2 \\
 &\quad -24.25 r^2 \ln^2 r y^2 - 2.500 r^2 \ln^3 r y^2 - 51.98 r^3 y^2 - 145.5 r^3 \ln r y^2 \\
 &\quad -19.17 r^3 \ln^2 r y^2 + 2.111 r^3 \ln^3 r y^2 - 60.28 r^4 y^2 - 223.7 r^4 \ln r y^2 \\
 &\quad -15.43 r^4 \ln^2 r y^2 + 1.722 r^4 \ln^3 r y^2 - 74.83 r^5 y^2 - 305.3 r^5 \ln r y^2 \\
 &\quad -24.54 r^5 \ln^2 r y^2 + 4.648 r^5 \ln^3 r y^2 \\
 &\quad -7.686 r y^4 - 11.33 r y^4 \ln y - 1.559 r^2 y^4 + 0.8241 r^2 y^4 \ln y \\
 &\quad -135.0 r^3 y^4 - 91.40 r^3 \ln r y^4 - 24.25 r^3 \ln^2 r y^4 - 2.500 r^3 \ln^3 r y^4 \\
 &\quad -51.98 r^4 y^4 - 145.5 r^4 \ln r y^4 - 19.17 r^4 \ln^2 r y^4 + 2.111 r^4 \ln^3 r y^4 \\
 &\quad -60.28 r^5 y^4 - 223.7 r^5 \ln r y^4 - 15.43 r^5 \ln^2 r y^4 + 1.722 r^5 \ln^3 r y^4 \\
 &\quad -1.237 r y^6 - 21.40 r y^6 \ln y - 7.686 r^2 y^6 - 11.33 r^2 y^6 \ln y - 1.559 r^3 y^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.8241 r^3 y^6 \ln y - 135.0 r^4 y^6 - 91.40 r^4 \ln r y^6 - 24.25 r^4 \ln^2 r y^6 \\
& - 2.500 r^4 \ln^3 r y^6 - 51.98 r^5 y^6 - 145.5 r^5 \ln r y^6 - 19.17 r^5 \ln^2 r y^6 \\
& + 2.111 r^5 \ln^3 r y^6 \\
& + 9.484 r y^8 - 13.55 r y^8 \ln y - 1.237 r^2 y^8 - 21.40 r^2 y^8 \ln y \\
& - 7.686 r^3 y^8 - 11.33 r^3 y^8 \ln y - 1.559 r^4 y^8 + 0.8241 r^4 y^8 \ln y \\
& - 135.0 r^5 y^8 - 91.40 r^5 \ln r y^8 - 24.25 r^5 \ln^2 r y^8 - 2.500 r^5 \ln^3 r y^8 \\
& + 21.82 r y^{10} + 17.58 r y^{10} \ln y + 9.484 r^2 y^{10} - 13.55 r^2 y^{10} \ln y \\
& - 1.237 r^3 y^{10} - 21.40 r^3 y^{10} \ln y - 7.686 r^4 y^{10} - 11.33 r^4 y^{10} \ln y \\
& - 1.559 r^5 y^{10} + 0.8241 r^5 y^{10} \ln y \\
& + 34.90 r y^{12} + 74.21 r y^{12} \ln y + 21.82 r^2 y^{12} + 17.58 r^2 y^{12} \ln y \\
& + 9.484 r^3 y^{12} - 13.55 r^3 y^{12} \ln y - 1.237 r^4 y^{12} - 21.40 r^4 y^{12} \ln y \\
& - 7.686 r^5 y^{12} - 11.33 r^5 y^{12} \ln y \\
& + 34.90 r^2 y^{14} + 74.21 r^2 y^{14} \ln y + 21.82 r^3 y^{14} + 17.58 r^3 y^{14} \ln y \\
& + 9.484 r^4 y^{14} - 13.55 r^4 y^{14} \ln y - 1.237 r^5 y^{14} - 21.40 r^5 y^{14} \ln y \\
& + 34.90 r^3 y^{16} + 74.21 r^3 y^{16} \ln y + 21.82 r^4 y^{16} + 17.58 r^4 y^{16} \ln y \\
& + 9.484 r^5 y^{16} - 13.55 r^5 y^{16} \ln y \\
& + 34.90 r^4 y^{18} + 74.21 r^4 y^{18} \ln y + 21.82 r^5 y^{18} + 17.58 r^5 y^{18} \ln y \\
& + 34.90 r^5 y^{20} + 74.21 r^5 y^{20} \ln y \\
& + \mathcal{O}(r^6, y^{22}) \tag{D.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{S,m_b,h_2}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) = & +0.05570 r - 135.0 r^2 - 91.40 r^2 \ln r - 24.25 r^2 \ln^2 r - 2.500 r^2 \ln^3 r \\
& - 187.0 r^3 - 236.9 r^3 \ln r - 43.42 r^3 \ln^2 r - 0.3889 r^3 \ln^3 r - 247.2 r^4 \\
& - 460.6 r^4 \ln r - 58.85 r^4 \ln^2 r + 1.333 r^4 \ln^3 r - 322.1 r^5 - 765.8 r^5 \ln r \\
& - 83.38 r^5 \ln^2 r + 5.981 r^5 \ln^3 r \\
& - 0.5963 r w + 134.4 r^2 w + 91.40 r^2 \ln r w + 24.25 r^2 \ln^2 r w \\
& + 2.500 r^2 \ln^3 r w + 321.4 r^3 w + 328.3 r^3 \ln r w + 67.67 r^3 \ln^2 r w \\
& + 2.889 r^3 \ln^3 r w + 568.6 r^4 w + 788.9 r^4 \ln r w + 126.5 r^4 \ln^2 r w \\
& + 1.556 r^4 \ln^3 r w + 890.7 r^5 w + 1555. r^5 \ln r w + 209.9 r^5 \ln^2 r w \\
& - 4.426 r^5 \ln^3 r w \\
& + 0.08893 r w^2 + 0.6853 r^2 w^2 - 133.7 r^3 w^2 - 91.40 r^3 \ln r w^2 \\
& - 24.25 r^3 \ln^2 r w^2 - 2.500 r^3 \ln^3 r w^2 - 455.1 r^4 w^2 - 419.7 r^4 \ln r w^2 \\
& - 91.92 r^4 \ln^2 r w^2 - 5.389 r^4 \ln^3 r w^2 - 1024. r^5 w^2 - 1209. r^5 \ln r w^2 \\
& - 218.4 r^5 \ln^2 r w^2 - 6.944 r^5 \ln^3 r w^2 \\
& + 0.1165 r w^3 + 0.02761 r^2 w^3 - 0.6577 r^3 w^3 + 133.0 r^4 w^3 \\
& + 91.40 r^4 \ln r w^3 + 24.25 r^4 \ln^2 r w^3 + 2.500 r^4 \ln^3 r w^3 + 588.1 r^5 w^3 \\
& + 511.1 r^5 \ln r w^3 + 116.2 r^5 \ln^2 r w^3 + 7.889 r^5 \ln^3 r w^3 \\
& + 0.08205 r w^4 - 0.03449 r^2 w^4 - 0.06211 r^3 w^4 + 0.5955 r^4 w^4 \\
& - 132.5 r^5 w^4 - 91.40 r^5 \ln r w^4 - 24.25 r^5 \ln^2 r w^4 - 2.500 r^5 \ln^3 r w^4 \\
& + 0.05568 r w^5 - 0.02637 r^2 w^5 + 0.008126 r^3 w^5 + 0.07023 r^4 w^5 \\
& - 0.5253 r^5 w^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.03872 r w^6 - 0.01696 r^2 w^6 + 0.009406 r^3 w^6 + 0.001280 r^4 w^6 \\
& -0.06895 r^5 w^6 \\
& +0.02783 r w^7 - 0.01089 r^2 w^7 + 0.006069 r^3 w^7 - 0.003338 r^4 w^7 \\
& -0.004618 r^5 w^7 \\
& +0.02064 r w^8 - 0.007192 r^2 w^8 + 0.003700 r^3 w^8 - 0.002369 r^4 w^8 \\
& +0.0009687 r^5 w^8 \\
& +0.01573 r w^9 - 0.004905 r^2 w^9 + 0.002287 r^3 w^9 - 0.001413 r^4 w^9 \\
& +0.0009562 r^5 w^9 \\
& +0.01228 r w^{10} - 0.003450 r^2 w^{10} + 0.001456 r^3 w^{10} - 0.0008314 r^4 w^{10} \\
& +0.0005812 r^5 w^{10} \\
& +\mathcal{O}(r^6, w^{11})
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
C_{S,m_b,h_3}^{\text{box},(2)}(\mu_0 = m_t) = & -0.5406 + 0.08893 w + 0.1165 w^2 + 0.08205 w^3 + 0.05568 w^4 \\
& +0.03872 w^5 + 0.02783 w^6 + 0.02064 w^7 + 0.01573 w^8 \\
& +0.4517 \bar{u} - 0.1165 \bar{u} w - 0.08205 \bar{u} w^2 - 0.05568 \bar{u} w^3 - 0.03872 \bar{u} w^4 \\
& -0.02783 \bar{u} w^5 - 0.02064 \bar{u} w^6 - 0.01573 \bar{u} w^7 - 0.01228 \bar{u} w^8 \\
& +0.1165 \bar{u}^2 - 0.03449 \bar{u}^2 w - 0.02637 \bar{u}^2 w^2 - 0.01696 \bar{u}^2 w^3 \\
& -0.01089 \bar{u}^2 w^4 - 0.007192 \bar{u}^2 w^5 - 0.004905 \bar{u}^2 w^6 - 0.003450 \bar{u}^2 w^7 \\
& -0.002494 \bar{u}^2 w^8 \\
& +0.03449 \bar{u}^3 - 0.008126 \bar{u}^3 w - 0.009406 \bar{u}^3 w^2 - 0.006069 \bar{u}^3 w^3 \\
& -0.003700 \bar{u}^3 w^4 - 0.002287 \bar{u}^3 w^5 - 0.001456 \bar{u}^3 w^6 - 0.0009558 \bar{u}^3 w^7 \\
& -0.0006465 \bar{u}^3 w^8 \\
& +0.008126 \bar{u}^4 + 0.001280 \bar{u}^4 w - 0.003338 \bar{u}^4 w^2 - 0.002369 \bar{u}^4 w^3 \\
& -0.001413 \bar{u}^4 w^4 - 0.0008314 \bar{u}^4 w^5 - 0.0004998 \bar{u}^4 w^6 \\
& -0.0003093 \bar{u}^4 w^7 - 0.0001973 \bar{u}^4 w^8 \\
& -0.001280 \bar{u}^5 + 0.004618 \bar{u}^5 w - 0.0009687 \bar{u}^5 w^2 - 0.0009562 \bar{u}^5 w^3 \\
& -0.0005812 \bar{u}^5 w^4 - 0.0003317 \bar{u}^5 w^5 - 0.0001904 \bar{u}^5 w^6 \\
& -0.0001120 \bar{u}^5 w^7 - 0.00006784 \bar{u}^5 w^8 \\
& -0.004618 \bar{u}^6 + 0.005586 \bar{u}^6 w - 0.00001250 \bar{u}^6 w^2 - 0.0003750 \bar{u}^6 w^3 \\
& -0.0002495 \bar{u}^6 w^4 - 0.0001412 \bar{u}^6 w^5 - 0.00007840 \bar{u}^6 w^6 \\
& -0.00004420 \bar{u}^6 w^7 - 0.00002557 \bar{u}^6 w^8 \\
& -0.005586 \bar{u}^7 + 0.005599 \bar{u}^7 w + 0.0003625 \bar{u}^7 w^2 - 0.0001255 \bar{u}^7 w^3 \\
& -0.0001083 \bar{u}^7 w^4 - 0.00006283 \bar{u}^7 w^5 - 0.00003420 \bar{u}^7 w^6 \\
& -0.00001864 \bar{u}^7 w^7 - 0.00001036 \bar{u}^7 w^8 \\
& -0.005599 \bar{u}^8 + 0.005236 \bar{u}^8 w + 0.0004880 \bar{u}^8 w^2 - 0.00001716 \bar{u}^8 w^3 \\
& -0.00004547 \bar{u}^8 w^4 - 0.00002863 \bar{u}^8 w^5 - 0.00001557 \bar{u}^8 w^6 \\
& -8.276 \cdot 10^{-6} \bar{u}^8 w^7 - 4.450 \cdot 10^{-6} \bar{u}^8 w^8 \\
& +\mathcal{O}(\bar{u}^9, w^9)
\end{aligned} \tag{D.5}$$

D.2. Z-Boson-Pinguin-Diagramme

$$\begin{aligned}
C_{A, m_b m_s, h_1}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) &= -131.0 r - 100.4 r \ln r - 28.27 r \ln^2 r - 3.833 r \ln^3 r \\
&\quad - 249.1 r^2 - 287.7 r^2 \ln r - 69.09 r^2 \ln^2 r - 3.870 r^2 \ln^3 r \\
&\quad - 374.3 r^3 - 617.2 r^3 \ln r - 117.6 r^3 \ln^2 r - 4.722 r^3 \ln^3 r \\
&\quad - 532.0 r^4 - 1101. r^4 \ln r - 189.5 r^4 \ln^2 r - 3.639 r^4 \ln^3 r \\
&\quad - 756.2 r^5 - 1815. r^5 \ln r - 311.5 r^5 \ln^2 r + 2.127 r^5 \ln^3 r \\
&\quad - 1382. r^6 - 3244. r^6 \ln r - 692.3 r^6 \ln^2 r - 5.977 r^6 \ln^3 r \\
&\quad + \mathcal{O}(r^7)
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
C_{A, m_b m_s, h_3}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) &= 1.548 - 0.4576 \bar{u} - 0.03069 \bar{u}^2 + 0.03907 \bar{u}^3 + 0.05064 \bar{u}^4 \\
&\quad + 0.04781 \bar{u}^5 + 0.04137 \bar{u}^6 + 0.03452 \bar{u}^7 + 0.02826 \bar{u}^8 \\
&\quad + 0.02282 \bar{u}^9 + 0.01820 \bar{u}^{10} + 0.01430 \bar{u}^{11} + 0.01104 \bar{u}^{12} \\
&\quad + 0.008298 \bar{u}^{13} + 0.005996 \bar{u}^{14} + 0.004059 \bar{u}^{15} \\
&\quad + 0.002425 \bar{u}^{16} \\
&\quad + \mathcal{O}(\bar{u}^{17})
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
C_{A, \tan^{-2} \beta, h_1}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) &= -133.4 r - 99.45 r \ln r - 28.58 r \ln^2 r - 3.778 r \ln^3 r \\
&\quad - 248.9 r^2 - 287.9 r^2 \ln r - 68.93 r^2 \ln^2 r - 3.843 r^2 \ln^3 r \\
&\quad - 374.1 r^3 - 617.3 r^3 \ln r - 117.3 r^3 \ln^2 r - 4.722 r^3 \ln^3 r \\
&\quad - 531.8 r^4 - 1101. r^4 \ln r - 189.2 r^4 \ln^2 r - 3.639 r^4 \ln^3 r \\
&\quad - 755.9 r^5 - 1815. r^5 \ln r - 310.9 r^5 \ln^2 r + 2.127 r^5 \ln^3 r \\
&\quad - 1381. r^6 - 3242. r^6 \ln r - 691.2 r^6 \ln^2 r - 5.977 r^6 \ln^3 r \\
&\quad + \mathcal{O}(r^7)
\end{aligned} \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
C_{A, \tan^{-2} \beta, h_3}^{Z, (2)}(\mu_0 = m_t) &= -0.4105 + 0.3222 \bar{u} + 0.2493 \bar{u}^2 + 0.1927 \bar{u}^3 + 0.1507 \bar{u}^4 \\
&\quad + 0.1194 \bar{u}^5 + 0.09572 \bar{u}^6 + 0.07752 \bar{u}^7 + 0.06332 \bar{u}^8 \\
&\quad + 0.05208 \bar{u}^9 + 0.04307 \bar{u}^{10} + 0.03577 \bar{u}^{11} + 0.02979 \bar{u}^{12} \\
&\quad + 0.02485 \bar{u}^{13} + 0.02074 \bar{u}^{14} + 0.01729 \bar{u}^{15} + 0.01438 \bar{u}^{16} \\
&\quad + \mathcal{O}(\bar{u}^{17})
\end{aligned} \tag{D.9}$$

D.3. Higgs-Boson-Pinguin-Diagramme

$$\begin{aligned}
C_{S, m_b, h_1}^{H, (2)}(\mu_0 = m_t) &= +135.0 r + 91.40 r \ln r + 24.25 r \ln^2 r + 2.500 r \ln^3 r + 51.98 r^2 \\
&\quad + 145.5 r^2 \ln r + 19.17 r^2 \ln^2 r - 2.111 r^2 \ln^3 r + 60.28 r^3 \\
&\quad + 223.7 r^3 \ln r + 15.43 r^3 \ln^2 r - 1.722 r^3 \ln^3 r + 74.83 r^4 \\
&\quad + 305.3 r^4 \ln r + 24.54 r^4 \ln^2 r - 4.648 r^4 \ln^3 r + 55.86 r^5 \\
&\quad + 341.6 r^5 \ln r + 10.14 r^5 \ln^2 r - 22.24 r^5 \ln^3 r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1.559 r y^2 - 0.8241 r y^2 \ln y + 135.0 r^2 y^2 + 91.40 r^2 \ln r y^2 \\
& +24.25 r^2 \ln^2 r y^2 + 2.500 r^2 \ln^3 r y^2 + 51.98 r^3 y^2 + 145.5 r^3 \ln r y^2 \\
& +19.17 r^3 \ln^2 r y^2 - 2.111 r^3 \ln^3 r y^2 + 60.28 r^4 y^2 + 223.7 r^4 \ln r y^2 \\
& +15.43 r^4 \ln^2 r y^2 - 1.722 r^4 \ln^3 r y^2 + 74.83 r^5 y^2 + 305.3 r^5 \ln r y^2 \\
& +24.54 r^5 \ln^2 r y^2 - 4.648 r^5 \ln^3 r y^2 \\
& +7.686 r y^4 + 11.33 r y^4 \ln y + 1.559 r^2 y^4 - 0.8241 r^2 y^4 \ln y + 135.0 r^3 y^4 \\
& +91.40 r^3 \ln r y^4 + 24.25 r^3 \ln^2 r y^4 + 2.500 r^3 \ln^3 r y^4 + 51.98 r^4 y^4 \\
& +145.5 r^4 \ln r y^4 + 19.17 r^4 \ln^2 r y^4 - 2.111 r^4 \ln^3 r y^4 + 60.28 r^5 y^4 \\
& +223.7 r^5 \ln r y^4 + 15.43 r^5 \ln^2 r y^4 - 1.722 r^5 \ln^3 r y^4 \\
& +1.237 r y^6 + 21.40 r y^6 \ln y + 7.686 r^2 y^6 + 11.33 r^2 y^6 \ln y + 1.559 r^3 y^6 \\
& -0.8241 r^3 y^6 \ln y + 91.40 r^4 \ln r y^6 + 24.25 r^4 \ln^2 r y^6 + 2.500 r^4 \ln^3 r y^6 \\
& +135.0 r^4 y^6 + 51.98 r^5 y^6 + 145.5 r^5 \ln r y^6 + 19.17 r^5 \ln^2 r y^6 \\
& -2.111 r^5 \ln^3 r y^6 \\
& -9.484 r y^8 + 13.55 r y^8 \ln y + 1.237 r^2 y^8 + 21.40 r^2 y^8 \ln y + 7.686 r^3 y^8 \\
& +11.33 r^3 y^8 \ln y + 1.559 r^4 y^8 - 0.8241 r^4 y^8 \ln y + 135.0 r^5 y^8 \\
& +91.40 r^5 \ln r y^8 + 24.25 r^5 \ln^2 r y^8 + 2.500 r^5 \ln^3 r y^8 \\
& -21.82 r y^{10} - 17.58 r y^{10} \ln y - 9.484 r^2 y^{10} + 13.55 r^2 y^{10} \ln y \\
& +1.237 r^3 y^{10} + 21.40 r^3 y^{10} \ln y + 7.686 r^4 y^{10} + 11.33 r^4 y^{10} \ln y \\
& +1.559 r^5 y^{10} - 0.8241 r^5 y^{10} \ln y \\
& -34.90 r y^{12} - 74.21 r y^{12} \ln y - 21.82 r^2 y^{12} - 17.58 r^2 y^{12} \ln y \\
& -9.484 r^3 y^{12} + 13.55 r^3 y^{12} \ln y + 1.237 r^4 y^{12} + 21.40 r^4 y^{12} \ln y \\
& +7.686 r^5 y^{12} + 11.33 r^5 y^{12} \ln y \\
& -34.90 r^2 y^{14} - 74.21 r^2 y^{14} \ln y - 21.82 r^3 y^{14} - 17.58 r^3 y^{14} \ln y \\
& -9.484 r^4 y^{14} + 13.55 r^4 y^{14} \ln y + 1.237 r^5 y^{14} + 21.40 r^5 y^{14} \ln y \\
& -34.90 r^3 y^{16} - 74.21 r^3 y^{16} \ln y - 21.82 r^4 y^{16} - 17.58 r^4 y^{16} \ln y \\
& -9.484 r^5 y^{16} + 13.55 r^5 y^{16} \ln y \\
& -34.90 r^4 y^{18} - 74.21 r^4 y^{18} \ln y - 21.82 r^5 y^{18} - 17.58 r^5 y^{18} \ln y \\
& -34.90 r^5 y^{20} - 74.21 r^5 y^{20} \ln y \\
& +\mathcal{O}(r^6, y^{22})
\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
C_{S,m_b,h_2}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t) = & +135.0 r + 91.40 r \ln r + 24.25 r \ln^2 r + 2.500 r \ln^3 r + 187.0 r^2 \\
& +236.9 r^2 \ln r + 43.42 r^2 \ln^2 r + 0.3889 r^2 \ln^3 r + 247.2 r^3 \\
& +460.6 r^3 \ln r + 58.85 r^3 \ln^2 r - 1.333 r^3 \ln^3 r + 322.1 r^4 \\
& +765.8 r^4 \ln r + 83.38 r^4 \ln^2 r - 5.981 r^4 \ln^3 r + 377.9 r^5 \\
& +1107. r^5 \ln r + 93.53 r^5 \ln^2 r - 28.22 r^5 \ln^3 r \\
& +0.5963 r w - 134.4 r^2 w - 91.40 r^2 \ln r w - 24.25 r^2 \ln^2 r w \\
& -2.500 r^2 \ln^3 r w - 321.4 r^3 w - 328.3 r^3 \ln r w - 67.67 r^3 \ln^2 r w \\
& -2.889 r^3 \ln^3 r w - 568.6 r^4 w - 788.9 r^4 \ln r w - 126.5 r^4 \ln^2 r w \\
& -1.556 r^4 \ln^3 r w - 890.7 r^5 w - 1555. r^5 \ln r w - 209.9 r^5 \ln^2 r w \\
& +4.426 r^5 \ln^3 r w
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0.08893 r w^2 - 0.6853 r^2 w^2 + 133.7 r^3 w^2 + 91.40 r^3 \ln r w^2 \\
& + 24.25 r^3 \ln^2 r w^2 + 2.500 r^3 \ln^3 r w^2 + 455.1 r^4 w^2 + 419.7 r^4 \ln r w^2 \\
& + 91.92 r^4 \ln^2 r w^2 + 5.389 r^4 \ln^3 r w^2 + 1024. r^5 w^2 + 1209. r^5 \ln r w^2 \\
& + 218.4 r^5 \ln^2 r w^2 + 6.944 r^5 \ln^3 r w^2 \\
& - 0.1165 r w^3 - 0.02761 r^2 w^3 + 0.6577 r^3 w^3 - 133.0 r^4 w^3 \\
& - 91.40 r^4 \ln r w^3 - 24.25 r^4 \ln^2 r w^3 - 2.500 r^4 \ln^3 r w^3 - 588.1 r^5 w^3 \\
& - 511.1 r^5 \ln r w^3 - 116.2 r^5 \ln^2 r w^3 - 7.889 r^5 \ln^3 r w^3 \\
& - 0.08205 r w^4 + 0.03449 r^2 w^4 + 0.06211 r^3 w^4 - 0.5955 r^4 w^4 \\
& + 132.5 r^5 w^4 + 91.40 r^5 \ln r w^4 + 24.25 r^5 \ln^2 r w^4 + 2.500 r^5 \ln^3 r w^4 \\
& - 0.05568 r w^5 + 0.02637 r^2 w^5 - 0.008126 r^3 w^5 - 0.07023 r^4 w^5 \\
& + 0.5253 r^5 w^5 \\
& - 0.03872 r w^6 + 0.01696 r^2 w^6 - 0.009406 r^3 w^6 - 0.001280 r^4 w^6 \\
& + 0.06895 r^5 w^6 \\
& - 0.02783 r w^7 + 0.01089 r^2 w^7 - 0.006069 r^3 w^7 + 0.003338 r^4 w^7 \\
& + 0.004618 r^5 w^7 \\
& - 0.02064 r w^8 + 0.007192 r^2 w^8 - 0.003700 r^3 w^8 + 0.002369 r^4 w^8 \\
& - 0.0009687 r^5 w^8 \\
& - 0.01573 r w^9 + 0.004905 r^2 w^9 - 0.002287 r^3 w^9 + 0.001413 r^4 w^9 \\
& - 0.0009562 r^5 w^9 \\
& - 0.01228 r w^{10} + 0.003450 r^2 w^{10} - 0.001456 r^3 w^{10} + 0.0008314 r^4 w^{10} \\
& - 0.0005812 r^5 w^{10} \\
& + \mathcal{O}(r^6, w^{11}) \tag{D.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{S,m_b,h_3}^{H,(2)}(\mu_0 = m_t) = & +0.5963 - 0.08893 w - 0.1165 w^2 - 0.08205 w^3 - 0.05568 w^4 \\
& - 0.03872 w^5 - 0.02783 w^6 - 0.02064 w^7 - 0.01573 w^8 \\
& + 0.08893 \bar{u} + 0.1165 \bar{u} w + 0.08205 \bar{u} w^2 + 0.05568 \bar{u} w^3 + 0.03872 \bar{u} w^4 \\
& + 0.02783 \bar{u} w^5 + 0.02064 \bar{u} w^6 + 0.01573 \bar{u} w^7 + 0.01228 \bar{u} w^8 \\
& - 0.02761 \bar{u}^2 + 0.03449 \bar{u}^2 w + 0.02637 \bar{u}^2 w^2 + 0.01696 \bar{u}^2 w^3 \\
& + 0.01089 \bar{u}^2 w^4 + 0.007192 \bar{u}^2 w^5 + 0.004905 \bar{u}^2 w^6 \\
& + 0.003450 \bar{u}^2 w^7 + 0.002494 \bar{u}^2 w^8 \\
& - 0.06211 \bar{u}^3 + 0.008126 \bar{u}^3 w + 0.009406 \bar{u}^3 w^2 + 0.006069 \bar{u}^3 w^3 \\
& + 0.003700 \bar{u}^3 w^4 + 0.002287 \bar{u}^3 w^5 + 0.001456 \bar{u}^3 w^6 \\
& + 0.0009558 \bar{u}^3 w^7 + 0.0006465 \bar{u}^3 w^8 \\
& - 0.07023 \bar{u}^4 - 0.001280 \bar{u}^4 w + 0.003338 \bar{u}^4 w^2 + 0.002369 \bar{u}^4 w^3 \\
& + 0.001413 \bar{u}^4 w^4 + 0.0008314 \bar{u}^4 w^5 + 0.0004998 \bar{u}^4 w^6 \\
& + 0.0003093 \bar{u}^4 w^7 + 0.0001973 \bar{u}^4 w^8 \\
& - 0.06895 \bar{u}^5 - 0.004618 \bar{u}^5 w + 0.0009687 \bar{u}^5 w^2 + 0.0009562 \bar{u}^5 w^3 \\
& + 0.0005812 \bar{u}^5 w^4 + 0.0003317 \bar{u}^5 w^5 + 0.0001904 \bar{u}^5 w^6 \\
& + 0.0001120 \bar{u}^5 w^7 + 0.00006784 \bar{u}^5 w^8 \\
& - 0.06433 \bar{u}^6 - 0.005586 \bar{u}^6 w + 0.00001250 \bar{u}^6 w^2 + 0.0003750 \bar{u}^6 w^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +0.0002495 \bar{u}^6 w^4 + 0.0001412 \bar{u}^6 w^5 + 0.00007840 \bar{u}^6 w^6 \\
& +0.00004420 \bar{u}^6 w^7 + 0.00002557 \bar{u}^6 w^8 \\
& -0.05875 \bar{u}^7 - 0.005599 \bar{u}^7 w - 0.0003625 \bar{u}^7 w^2 + 0.0001255 \bar{u}^7 w^3 \\
& +0.0001083 \bar{u}^7 w^4 + 0.00006283 \bar{u}^7 w^5 + 0.00003420 \bar{u}^7 w^6 \\
& +0.00001864 \bar{u}^7 w^7 + 0.00001036 \bar{u}^7 w^8 \\
& -0.05315 \bar{u}^8 - 0.005236 \bar{u}^8 w - 0.0004880 \bar{u}^8 w^2 + 0.00001716 \bar{u}^8 w^3 \\
& +0.00004547 \bar{u}^8 w^4 + 0.00002863 \bar{u}^8 w^5 + 0.00001557 \bar{u}^8 w^6 \\
& +8.276 \cdot 10^{-6} \bar{u}^8 w^7 + 4.450 \cdot 10^{-6} \bar{u}^8 w^8 \\
& +\mathcal{O}(\bar{u}^9, w^9)
\end{aligned} \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}
C_{S, \sin(2\alpha), h_1}^{H, (2)}(\mu_0 = m_t) &= -22.85 r - 12.12 r \ln r - 1.875 r \ln^2 r \\
& -49.36 r^2 - 45.95 r^2 \ln r - 3.208 r^2 \ln^2 r + 0.5278 r^2 \ln^3 r \\
& -86.07 r^3 - 119.6 r^3 \ln r - 6.424 r^3 \ln^2 r + 0.8611 r^3 \ln^3 r \\
& -132.4 r^4 - 241.2 r^4 \ln r - 14.92 r^4 \ln^2 r + 3.486 r^4 \ln^3 r \\
& -141.3 r^5 - 346.7 r^5 \ln r + 6.535 r^5 \ln^2 r + 22.24 r^5 \ln^3 r \\
& +\mathcal{O}(r^6)
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
C_{S, \sin(2\alpha), h_3}^{H, (2)}(\mu_0 = m_t) &= 0.1491 + 0.04446 \bar{u} - 0.04294 \bar{u}^2 - 0.04830 \bar{u}^3 - 0.04121 \bar{u}^4 \\
& -0.03320 \bar{u}^5 - 0.02639 \bar{u}^6 - 0.02099 \bar{u}^7 - 0.01678 \bar{u}^8 \\
& +\mathcal{O}(\bar{u}^9)
\end{aligned} \tag{D.14}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. Böhm, A. Denner, and H. Joos, *Gauge theories of the strong and electroweak interaction*.
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*.
- [3] T. Muta, *Foundations of quantum chromodynamics. Second edition*. World Sci. Lect. Notes Phys. **57** (1998) 1–409.
- [4] S. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*. Nucl.Phys. **22** (1961) 579–588.
- [5] S. Weinberg, *A Model of Leptons*. Phys.Rev.Lett. **19** (1967) 1264–1266.
- [6] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*. Conf.Proc. **C680519** (1968) 367–377.
- [7] M. Gell-Mann, *A Schematic Model of Baryons and Mesons*. Phys.Lett. **8** (1964) 214–215.
- [8] G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1*.
- [9] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, *Advantages of the Color Octet Gluon Picture*. Phys.Lett. **B47** (1973) 365–368.
- [10] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*. Phys.Rev.Lett. **30** (1973) 1343–1346.
- [11] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?* Phys.Rev.Lett. **30** (1973) 1346–1349.
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Standard_Model_of_Elementary_Particles.svg.
- [13] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*. Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 508–509.
- [14] P. W. Higgs, *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*. Phys.Rev. **145** (1966) 1156–1163.

- [15] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*. *Phys.Rev.Lett.* **13** (1964) 321–323.
- [16] G. Guralnik, C. Hagen, and T. Kibble, *Global Conservation Laws and Massless Particles*. *Phys.Rev.Lett.* **13** (1964) 585–587.
- [17] T. Kibble, *Symmetry breaking in nonAbelian gauge theories*. *Phys.Rev.* **155** (1967) 1554–1561.
- [18] **ATLAS Collaboration**, G. Aad *et al.*, *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*. *Phys.Lett.* **B716** (2012) 1–29, [arXiv:1207.7214 \[hep-ex\]](#).
- [19] **CMS Collaboration**, S. Chatrchyan *et al.*, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*. *Phys.Lett.* **B716** (2012) 30–61, [arXiv:1207.7235 \[hep-ex\]](#).
- [20] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*. *Phys.Rev.Lett.* **10** (1963) 531–533.
- [21] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*. *Prog.Theor.Phys.* **49** (1973) 652–657.
- [22] **Particle Data Group**, J. Beringer *et al.*, *Review of Particle Physics (RPP)*. *Phys.Rev.* **D86** (2012) 010001.
- [23] J. F. Gunion and H. E. Haber, *The CP conserving two Higgs doublet model: The Approach to the decoupling limit*. *Phys.Rev.* **D67** (2003) 075019, [arXiv:hep-ph/0207010 \[hep-ph\]](#).
- [24] G. Branco, P. Ferreira, L. Lavoura, M. Rebelo, M. Sher, *et al.*, *Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models*. *Phys.Rept.* **516** (2012) 1–102, [arXiv:1106.0034 \[hep-ph\]](#).
- [25] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Natural Conservation Laws for Neutral Currents*. *Phys.Rev.* **D15** (1977) 1958.
- [26] D. Binosi and L. Theussl, *JaxoDraw: A Graphical user interface for drawing Feynman diagrams*. *Comput.Phys.Commun.* **161** (2004) 76–86, [arXiv:hep-ph/0309015 \[hep-ph\]](#).
- [27] F. Mahmoudi, *SuperIso v3.0, flavor physics observables calculations: Extension to NMSSM*. *Comput.Phys.Commun.* **180** (2009) 1718–1719.
- [28] **CMS Collaboration**, S. Chatrchyan *et al.*, *Measurement of the $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ branching fraction and search for $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ with the CMS Experiment*. [arXiv:1307.5025 \[hep-ex\]](#).
- [29] **LHCb Collaboration**, R. Aaij *et al.*, *Measurement of the $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ branching fraction and search for $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ decays at the LHCb experiment*. [arXiv:1307.5024 \[hep-ex\]](#).
- [30] S. Descotes-Genon, T. Hurth, J. Matias, and J. Virto, *Optimizing the basis of $B \rightarrow K^* \ell^+ \ell^-$ observables in the full kinematic range*. *JHEP* **1305** (2013) 137, [arXiv:1303.5794 \[hep-ph\]](#).

- [31] **LHCb Collaboration**, R. Aaij *et al.*, *Measurement of form-factor independent observables in the decay $B^0 \rightarrow K^{*0} \mu^+ \mu^-$* . *Phys.Rev.Lett.* **111** (2013) 191801, [arXiv:1308.1707 \[hep-ex\]](#).
- [32] G. Buchalla, A. J. Buras, and M. E. Lautenbacher, *Weak decays beyond leading logarithms*. *Rev.Mod.Phys.* **68** (1996) 1125–1144, [arXiv:hep-ph/9512380 \[hep-ph\]](#).
- [33] A. J. Buras, *Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays*. [arXiv:hep-ph/9806471 \[hep-ph\]](#).
- [34] **D0 Collaboration**, V. M. Abazov *et al.*, *Search for the rare decay $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$* . *Phys.Lett.* **B693** (2010) 539–544, [arXiv:1006.3469 \[hep-ex\]](#).
- [35] **CDF Collaboration**, T. Aaltonen *et al.*, *Search for $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ and $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ Decays with CDF II*. *Phys.Rev.Lett.* **107** (2011) 191801, [arXiv:1107.2304 \[hep-ex\]](#).
- [36] **CMS Collaboration**, S. Chatrchyan *et al.*, *Search for $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ and $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ decays*. *JHEP* **1204** (2012) 033, [arXiv:1203.3976 \[hep-ex\]](#).
- [37] **LHCb Collaboration**, R. Aaij *et al.*, *Strong constraints on the rare decays $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$ and $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$* . *Phys.Rev.Lett.* **108** (2012) 231801, [arXiv:1203.4493 \[hep-ex\]](#).
- [38] **ATLAS Collaboration**, G. Aad *et al.*, *Search for the decay $B_s^0 \rightarrow \mu \mu$ with the ATLAS detector*. *Phys.Lett.* **B713** (2012) 387–407, [arXiv:1204.0735 \[hep-ex\]](#).
- [39] **LHCb Collaboration**, R. Aaij *et al.*, *First Evidence for the Decay $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$* . *Phys.Rev.Lett.* **110** (2013) 021801, [arXiv:1211.2674 \[hep-ex\]](#).
- [40] **CMS and LHCb Collaborations**, *Combination of results on the rare decays $B_{(s)}^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ from the CMS and LHCb experiments*. <http://cds.cern.ch/record/1564324>.
- [41] **On behalf of the LHCb Collaboration**, F. Alessio, *The LHCb Upgrade*. [arXiv:1310.0183 \[physics.ins-det\]](#).
- [42] **ETM Collaboration**, P. Dimopoulos *et al.*, *Lattice QCD determination of m_b , f_B and f_{B_s} with twisted mass Wilson fermions*. *JHEP* **1201** (2012) 046, [arXiv:1107.1441 \[hep-lat\]](#).
- [43] C. McNeile, C. Davies, E. Follana, K. Hornbostel, and G. Lepage, *High-Precision f_{B_s} and HQET from Relativistic Lattice QCD*. *Phys.Rev.* **D85** (2012) 031503, [arXiv:1110.4510 \[hep-lat\]](#).
- [44] **Fermilab Lattice Collaboration, MILC Collaboration**, A. Bazavov *et al.*, *B- and D-meson decay constants from three-flavor lattice QCD*. *Phys.Rev.* **D85** (2012) 114506, [arXiv:1112.3051 \[hep-lat\]](#).
- [45] F. Bernardoni, B. Blossier, J. Bulava, M. Della Morte, P. Fritzscht, *et al.*, *B-physics from non-perturbatively renormalized HQET in two-flavour lattice QCD*. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **234** (2013) 181–186, [arXiv:1210.6524 \[hep-lat\]](#).
- [46] N. Carrasco, P. Dimopoulos, R. Frezzotti, V. Gimenez, G. Herdoiza, *et al.*, *B-physics from lattice QCD...with a twist*. *PoS ICHEP2012* (2013) 428, [arXiv:1212.0301 \[hep-ph\]](#).

- [47] **HPQCD Collaboration**, R. Dowdall, C. Davies, R. Horgan, C. Monahan, and J. Shigemitsu, *B-meson decay constants from improved lattice NRQCD and physical u , d , s and c sea quarks*. *Phys.Rev.Lett.* **110** (2013) 222003, [arXiv:1302.2644 \[hep-lat\]](#).
- [48] K. De Bruyn, R. Fleischer, R. Knegjens, P. Koppenburg, M. Merk, *et al.*, *Branching Ratio Measurements of B_s Decays*. *Phys.Rev.* **D86** (2012) 014027, [arXiv:1204.1735 \[hep-ph\]](#).
- [49] K. De Bruyn, R. Fleischer, R. Knegjens, P. Koppenburg, M. Merk, *et al.*, *Probing New Physics via the $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ Effective Lifetime*. *Phys.Rev.Lett.* **109** (2012) 041801, [arXiv:1204.1737 \[hep-ph\]](#).
- [50] **Heavy Flavor Averaging Group**, Y. Amhis *et al.*, *Averages of B-Hadron, C-Hadron, and tau-lepton properties as of early 2012*. [arXiv:1207.1158 \[hep-ex\]](#).
- [51] A. Lenz and U. Nierste, *Numerical Updates of Lifetimes and Mixing Parameters of B Mesons*. [arXiv:1102.4274 \[hep-ph\]](#).
- [52] T. Inami and C. Lim, *Effects of Superheavy Quarks and Leptons in Low-Energy Weak Processes $K_L \rightarrow \mu \bar{\mu}$, $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$ and $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$* . *Prog.Theor.Phys.* **65** (1981) 297.
- [53] G. Buchalla and A. J. Buras, *QCD corrections to the $\bar{s}dZ$ vertex for arbitrary top quark mass*. *Nucl.Phys.* **B398** (1993) 285–300.
- [54] G. Buchalla and A. J. Buras, *QCD corrections to rare K and B decays for arbitrary top quark mass*. *Nucl.Phys.* **B400** (1993) 225–239.
- [55] G. Buchalla and A. J. Buras, *The rare decays $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$, $B \rightarrow X \nu \bar{\nu}$ and $B \rightarrow l^+ l^-$: An Update*. *Nucl.Phys.* **B548** (1999) 309–327, [arXiv:hep-ph/9901288 \[hep-ph\]](#).
- [56] M. Misiak and J. Urban, *QCD corrections to FCNC decays mediated by Z penguins and W boxes*. *Phys.Lett.* **B451** (1999) 161–169, [arXiv:hep-ph/9901278 \[hep-ph\]](#).
- [57] T. Hermann, M. Misiak, and M. Steinhauser, *Three-loop QCD corrections to $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$* . *JHEP* **1312** (2013) 097, [arXiv:1311.1347 \[hep-ph\]](#).
- [58] P. Nogueira, *Automatic Feynman Graph Generation*. *Journal of Computational Physics* **105** (1993) no. 2, 279 – 289.
- [59] R. Harlander, T. Seidensticker, and M. Steinhauser, *Complete corrections of $\mathcal{O}(\alpha_s)$ to the decay of the Z boson into bottom quarks*. *Phys. Lett.* **B426** (1998) 125–132, [arXiv:hep-ph/9712228](#).
- [60] T. Seidensticker, *Automatic application of successive asymptotic expansions of Feynman diagrams*. [arXiv:hep-ph/9905298](#).
- [61] J. A. M. Vermaseren, *Symbolic Manipulation with FORM*. CAN (1991).
- [62] V. A. Smirnov, *Analytic tools for Feynman integrals*. *Springer Tracts Mod.Phys.* **250** (2012) 1–296.
- [63] M. Steinhauser, *MATAD: A program package for the computation of massive tadpoles*. *Comput. Phys. Commun.* **134** (2001) 335–364, [arXiv:hep-ph/0009029](#).

- [64] R. Harlander and M. Steinhauser, *Automatic computation of Feynman diagrams*. *Prog.Part.Nucl.Phys.* **43** (1999) 167–228, [arXiv:hep-ph/9812357](#) [[hep-ph](#)].
- [65] A. Kurz, private communications.
- [66] J. Grigo, *Nichtdiagonale Stromkorrelatoren zur Dreischleifenordnung*. Diplomarbeit, KIT, 2012.
- [67] J. Grigo, private communications.
- [68] A. V. Smirnov, *Algorithm FIRE – Feynman Integral REduction*. *JHEP* **10** (2008) 107, [arXiv:0807.3243](#) [[hep-ph](#)].
- [69] J. Grigo, J. Hoff, P. Marquard, and M. Steinhauser, *Moments of heavy quark correlators with two masses: exact mass dependence to three loops*. *Nucl.Phys.* **B864** (2012) 580–596, [arXiv:1206.3418](#) [[hep-ph](#)].
- [70] M. Misiak and M. Steinhauser, *Three loop matching of the dipole operators for $b \rightarrow s \gamma$ and $b \rightarrow s g$* . *Nucl.Phys.* **B683** (2004) 277–305, [arXiv:hep-ph/0401041](#) [[hep-ph](#)].
- [71] V. A. Smirnov, *Applied asymptotic expansions in momenta and masses*. Springer Tracts Mod.Phys. **177** (2002) 1–262.
- [72] A. G. Grozin, M. Höschele, J. Hoff, and M. Steinhauser, *Simultaneous decoupling of bottom and charm quarks*. *JHEP* **1109** (2011) 066, [arXiv:1107.5970](#) [[hep-ph](#)].
- [73] M. Steinhauser, *Results and techniques of multiloop calculations*. *Phys.Rept.* **364** (2002) 247–357, [arXiv:hep-ph/0201075](#) [[hep-ph](#)].
- [74] T. Hermann, *Counterterme und anomale Dimensionen in der supersymmetrischen Quantenchromodynamik*. Diplomarbeit, KIT, 2011.
- [75] <http://www.ttp.kit.edu/Progdata/ttp13/ttp13-034>.
- [76] T. Hermann, M. Misiak, and M. Steinhauser, *$\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ in the Two Higgs Doublet Model up to Next-to-Next-to-Leading Order in QCD*. *JHEP* **1211** (2012) 036, [arXiv:1208.2788](#) [[hep-ph](#)].
- [77] W. Furry, *A Symmetry Theorem in the Positron Theory*. *Phys.Rev.* **51** (1937) 125–129.
- [78] S. Larin, *The Renormalization of the axial anomaly in dimensional regularization*. *Phys.Lett.* **B303** (1993) 113–118, [arXiv:hep-ph/9302240](#) [[hep-ph](#)].
- [79] M. Gorbahn and U. Haisch, *Effective Hamiltonian for non-leptonic $|\Delta F| = 1$ decays at NNLO in QCD*. *Nucl.Phys.* **B713** (2005) 291–332, [arXiv:hep-ph/0411071](#) [[hep-ph](#)].
- [80] C. Bobeth, M. Gorbahn, and E. Stamou, *Electroweak Corrections to $B_{s,d} \rightarrow \ell^+ \ell^-$* . *Phys.Rev.* **D89** (2014) 034023, [arXiv:1311.1348](#) [[hep-ph](#)].
- [81] C. Bobeth, M. Gorbahn, T. Hermann, M. Misiak, E. Stamou, *et al.*, *$B_{s,d} \rightarrow \ell^+ \ell^-$ in the Standard Model with Reduced Theoretical Uncertainty*. *Phys.Rev.Lett.* **112** (2014) 101801, [arXiv:1311.0903](#) [[hep-ph](#)].

- [82] M. Awramik, M. Czakon, A. Freitas, and G. Weiglein, *Precise prediction for the W boson mass in the standard model*. *Phys.Rev.* **D69** (2004) 053006, [arXiv:hep-ph/0311148](#) [[hep-ph](#)].
- [83] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, and M. Steinhauser, *RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses*. *Comput. Phys. Commun.* **133** (2000) 43–65, [arXiv:hep-ph/0004189](#).
- [84] G. Buchalla and A. J. Buras, *Two loop large m_t electroweak corrections to $K \rightarrow \pi\nu\bar{\nu}$ for arbitrary Higgs boson mass*. *Phys.Rev.* **D57** (1998) 216–223, [arXiv:hep-ph/9707243](#) [[hep-ph](#)].
- [85] C. Bobeth, P. Gambino, M. Gorbahn, and U. Haisch, *Complete NNLO QCD analysis of $\bar{B} \rightarrow X_s l^+ l^-$ and higher order electroweak effects*. *JHEP* **0404** (2004) 071, [arXiv:hep-ph/0312090](#) [[hep-ph](#)].
- [86] T. Huber, E. Lunghi, M. Misiak, and D. Wyler, *Electromagnetic logarithms in $B \rightarrow X_s l^+ l^-$* . *Nucl.Phys.* **B740** (2006) 105–137, [arXiv:hep-ph/0512066](#) [[hep-ph](#)].
- [87] M. Misiak, *Rare B -Meson Decays*. [arXiv:1112.5978](#) [[hep-ph](#)].
- [88] S. Aoki, Y. Aoki, C. Bernard, T. Blum, G. Colangelo, *et al.*, *Review of lattice results concerning low energy particle physics*. [arXiv:1310.8555](#) [[hep-lat](#)].
- [89] P. Gambino and C. Schwanda, *Inclusive semileptonic fits, heavy quark masses, and V_{cb}* . *Phys.Rev.* **D89** (2014) 014022, [arXiv:1307.4551](#) [[hep-ph](#)].
- [90] **CKMfitter Group**, J. Charles *et al.*, *CP violation and the CKM matrix: Assessing the impact of the asymmetric B factories*. *Eur.Phys.J.* **C41** (2005) 1–131, [arXiv:hep-ph/0406184](#) [[hep-ph](#)].
- [91] M. Ciuchini, G. D’Agostini, E. Franco, V. Lubicz, G. Martinelli, *et al.*, *2000 CKM triangle analysis: A Critical review with updated experimental inputs and theoretical parameters*. *JHEP* **0107** (2001) 013, [arXiv:hep-ph/0012308](#) [[hep-ph](#)].
- [92] H. Na, C. J. Monahan, C. T. Davies, R. Horgan, G. P. Lepage, *et al.*, *The B and B_s Meson Decay Constants from Lattice QCD*. *Phys.Rev.* **D86** (2012) 034506, [arXiv:1202.4914](#) [[hep-lat](#)].
- [93] N. Carrasco, M. Ciuchini, P. Dimopoulos, R. Frezzotti, V. Gimenez, *et al.*, *B -physics from $N_f = 2$ tmQCD: the Standard Model and beyond*. [arXiv:1308.1851](#) [[hep-lat](#)].
- [94] A. J. Buras, J. Gierbach, D. Guadagnoli, and G. Isidori, *On the Standard Model prediction for $BR(B_{s,d} \rightarrow \mu^+ \mu^-)$* . *Eur.Phys.J.* **C72** (2012) 2172, [arXiv:1208.0934](#) [[hep-ph](#)].
- [95] S. Jadach, B. Ward, and Z. Was, *Coherent exclusive exponentiation for precision Monte Carlo calculations*. *Phys.Rev.* **D63** (2001) 113009, [arXiv:hep-ph/0006359](#) [[hep-ph](#)].
- [96] Y. Aditya, K. Healey, and A. A. Petrov, *Faking $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$* . *Phys.Rev.* **D87** (2013) 074028, [arXiv:1212.4166](#) [[hep-ph](#)].

- [97] P. Golonka and Z. Was, *PHOTOS Monte Carlo: A Precision tool for QED corrections in Z and W decays*. *Eur.Phys.J.* **C45** (2006) 97–107, [arXiv:hep-ph/0506026](#) [[hep-ph](#)].
- [98] A. Arbey, M. Battaglia, F. Mahmoudi, and D. Martinez Santos, *Supersymmetry confronts $B_s \rightarrow \mu^+ \mu^-$: Present and future status*. *Phys.Rev.* **D87** (2013) 035026, [arXiv:1212.4887](#) [[hep-ph](#)].
- [99] A. J. Buras, *Relations between $\Delta M(s, d)$ and $B(s, d) \rightarrow \mu \bar{\mu}$ in models with minimal flavor violation*. *Phys.Lett.* **B566** (2003) 115–119, [arXiv:hep-ph/0303060](#) [[hep-ph](#)].
- [100] A. J. Buras, M. Jamin, and P. H. Weisz, *Leading and Next-to-leading QCD Corrections to ϵ Parameter and $B^0 - \bar{B}^0$ Mixing in the Presence of a Heavy Top Quark*. *Nucl.Phys.* **B347** (1990) 491–536.
- [101] P. Gambino, A. Kwiatkowski, and N. Pott, *Electroweak effects in the $B^0 - \bar{B}^0$ mixing*. *Nucl.Phys.* **B544** (1999) 532–556, [arXiv:hep-ph/9810400](#) [[hep-ph](#)].
- [102] **HPQCD Collaboration**, E. Gamiz, C. T. Davies, G. P. Lepage, J. Shigemitsu, and M. Wingate, *Neutral B Meson Mixing in Unquenched Lattice QCD*. *Phys.Rev.* **D80** (2009) 014503, [arXiv:0902.1815](#) [[hep-lat](#)].
- [103] H. E. Logan and U. Nierste, *$B_{(s,d)} \rightarrow \ell^+ \ell^-$ in a two Higgs doublet model*. *Nucl.Phys.* **B586** (2000) 39–55, [arXiv:hep-ph/0004139](#) [[hep-ph](#)].
- [104] C. Bobeth, T. Ewerth, F. Krüger, and J. Urban, *Analysis of neutral Higgs boson contributions to the decays $\bar{B}_s \rightarrow \ell^+ \ell^-$ and $\bar{B} \rightarrow K \ell^+ \ell^-$* . *Phys.Rev.* **D64** (2001) 074014, [arXiv:hep-ph/0104284](#) [[hep-ph](#)].
- [105] C. Bobeth, A. J. Buras, F. Krüger, and J. Urban, *QCD corrections to $\bar{B} \rightarrow X_{d,s} \nu \bar{\nu}$, $\bar{B}_{d,s} \rightarrow \ell^+ \ell^-$, $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$ and $K_L \rightarrow \mu^+ \mu^-$ in the MSSM*. *Nucl.Phys.* **B630** (2002) 87–131, [arXiv:hep-ph/0112305](#) [[hep-ph](#)].
- [106] T. Hahn, *Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3*. *Comput.Phys.Commun.* **140** (2001) 418–431, [arXiv:hep-ph/0012260](#) [[hep-ph](#)].
- [107] K. Chetyrkin, J. Kühn, A. Maier, P. Maierhöfer, P. Marquard, *et al.*, *Charm and Bottom Quark Masses: An Update*. *Phys.Rev.* **D80** (2009) 074010, [arXiv:0907.2110](#) [[hep-ph](#)].
- [108] C. Bobeth, M. Misiak, and J. Urban, *Photonic penguins at two loops and m_t dependence of $BR(B \rightarrow X_s l^+ l^-)$* . *Nucl.Phys.* **B574** (2000) 291–330, [arXiv:hep-ph/9910220](#) [[hep-ph](#)].
- [109] **CLEO Collaboration**, S. Chen *et al.*, *Branching fraction and photon energy spectrum for $b \rightarrow s \gamma$* . *Phys.Rev.Lett.* **87** (2001) 251807, [arXiv:hep-ex/0108032](#) [[hep-ex](#)].
- [110] **ALEPH Collaboration**, R. Barate *et al.*, *A Measurement of the inclusive $b \rightarrow s \gamma$ branching ratio*. *Phys.Lett.* **B429** (1998) 169–187.
- [111] **Belle Collaboration**, K. Abe *et al.*, *A Measurement of the branching fraction for the inclusive $B \rightarrow X_s \gamma$ decays with BELLE*. *Phys.Lett.* **B511** (2001) 151–158, [arXiv:hep-ex/0103042](#) [[hep-ex](#)].

- [112] **Belle Collaboration**, A. Limosani *et al.*, *Measurement of Inclusive Radiative B-meson Decays with a Photon Energy Threshold of 1.7 GeV*. *Phys.Rev.Lett.* **103** (2009) 241801, [arXiv:0907.1384 \[hep-ex\]](#).
- [113] **BaBar Collaboration**, J. Lees *et al.*, *Precision Measurement of the $B \rightarrow X_s \gamma$ Photon Energy Spectrum, Branching Fraction, and Direct CP Asymmetry $A_{CP}(B \rightarrow X_{s+d} \gamma)$* . *Phys.Rev.Lett.* **109** (2012) 191801, [arXiv:1207.2690 \[hep-ex\]](#).
- [114] **BaBar Collaboration**, J. Lees *et al.*, *Measurement of $B(B \rightarrow X_s \gamma)$, the $B \rightarrow X_s \gamma$ photon energy spectrum, and the direct CP asymmetry in $B \rightarrow X_{s+d} \gamma$ decays*. *Phys.Rev.* **D86** (2012) 112008, [arXiv:1207.5772 \[hep-ex\]](#).
- [115] **BaBar Collaboration**, J. Lees *et al.*, *Exclusive Measurements of $b \rightarrow s \gamma$ Transition Rate and Photon Energy Spectrum*. *Phys.Rev.* **D86** (2012) 052012, [arXiv:1207.2520 \[hep-ex\]](#).
- [116] **BaBar Collaboration**, B. Aubert *et al.*, *Measurement of the $B \rightarrow X_s \gamma$ branching fraction and photon energy spectrum using the recoil method*. *Phys.Rev.* **D77** (2008) 051103, [arXiv:0711.4889 \[hep-ex\]](#).
- [117] S. Stone, *New physics from flavour*. PoS ICHEP2012 (2013) 033, [arXiv:1212.6374](#).
- [118] M. Misiak and M. Steinhauser, *NNLO QCD corrections to the $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ matrix elements using interpolation in m_c* . *Nucl.Phys.* **B764** (2007) 62–82, [arXiv:hep-ph/0609241 \[hep-ph\]](#).
- [119] M. Misiak, H. Asatrian, K. Bieri, M. Czakon, A. Czarnecki, *et al.*, *Estimate of $\mathcal{B}(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$ at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$* . *Phys.Rev.Lett.* **98** (2007) 022002, [arXiv:hep-ph/0609232 \[hep-ph\]](#).
- [120] J. Chay, H. Georgi, and B. Grinstein, *Lepton energy distributions in heavy meson decays from QCD*. *Phys.Lett.* **B247** (1990) 399–405.
- [121] I. I. Bigi, N. Uraltsev, and A. Vainshtein, *Nonperturbative corrections to inclusive beauty and charm decays: QCD versus phenomenological models*. *Phys.Lett.* **B293** (1992) 430–436, [arXiv:hep-ph/9207214 \[hep-ph\]](#).
- [122] I. I. Bigi, M. A. Shifman, N. Uraltsev, and A. I. Vainshtein, *QCD predictions for lepton spectra in inclusive heavy flavor decays*. *Phys.Rev.Lett.* **71** (1993) 496–499, [arXiv:hep-ph/9304225 \[hep-ph\]](#).
- [123] B. Blok, L. Koyrakh, M. A. Shifman, and A. Vainshtein, *Differential distributions in semileptonic decays of the heavy flavors in QCD*. *Phys.Rev.* **D49** (1994) 3356, [arXiv:hep-ph/9307247 \[hep-ph\]](#).
- [124] A. V. Manohar and M. B. Wise, *Inclusive semileptonic B and polarized Λ_b decays from QCD*. *Phys.Rev.* **D49** (1994) 1310–1329, [arXiv:hep-ph/9308246 \[hep-ph\]](#).
- [125] M. Benzke, S. J. Lee, M. Neubert, and G. Paz, *Factorization at Subleading Power and Irreducible Uncertainties in $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ Decay*. *JHEP* **1008** (2010) 099, [arXiv:1003.5012 \[hep-ph\]](#).

- [126] K. G. Chetyrkin, M. Misiak, and M. Münz, *Weak radiative B meson decay beyond leading logarithms*. *Phys.Lett.* **B400** (1997) 206–219, [arXiv:hep-ph/9612313](#) [[hep-ph](#)].
- [127] P. Gambino, M. Gorbahn, and U. Haisch, *Anomalous dimension matrix for radiative and rare semileptonic B decays up to three loops*. *Nucl.Phys.* **B673** (2003) 238–262, [arXiv:hep-ph/0306079](#) [[hep-ph](#)].
- [128] A. Buras, M. Misiak, M. Münz, and S. Pokorski, *Theoretical uncertainties and phenomenological aspects of $B \rightarrow X_s \gamma$ decay*. *Nucl.Phys.* **B424** (1994) 374–398, [arXiv:hep-ph/9311345](#) [[hep-ph](#)].
- [129] M. Gorbahn, U. Haisch, and M. Misiak, *Three-loop mixing of dipole operators*. *Phys.Rev.Lett.* **95** (2005) 102004, [arXiv:hep-ph/0504194](#) [[hep-ph](#)].
- [130] M. Czakon, U. Haisch, and M. Misiak, *Four-Loop Anomalous Dimensions for Radiative Flavour-Changing Decays*. *JHEP* **0703** (2007) 008, [arXiv:hep-ph/0612329](#) [[hep-ph](#)].
- [131] I. I. Bigi, B. Blok, M. A. Shifman, N. Uraltsev, and A. I. Vainshtein, *A QCD 'manifesto' on inclusive decays of beauty and charm*. [arXiv:hep-ph/9212227](#) [[hep-ph](#)].
- [132] A. F. Falk, M. E. Luke, and M. J. Savage, *Nonperturbative contributions to the inclusive rare decays $B \rightarrow X_s \gamma$ and $B \rightarrow X_s l^+ l^-$* . *Phys.Rev.* **D49** (1994) 3367–3378, [arXiv:hep-ph/9308288](#) [[hep-ph](#)].
- [133] M. Voloshin, *Large $\mathcal{O}(m_c^{-2})$ nonperturbative correction to the inclusive rate of the decay $B \rightarrow X_s \gamma$* . *Phys.Lett.* **B397** (1997) 275–278, [arXiv:hep-ph/9612483](#) [[hep-ph](#)].
- [134] G. Buchalla, G. Isidori, and S. Rey, *Corrections of order λ_{QCD}^2/m_c^2 to inclusive rare B decays*. *Nucl.Phys.* **B511** (1998) 594–610, [arXiv:hep-ph/9705253](#) [[hep-ph](#)].
- [135] C. W. Bauer, *Corrections to moments of the photon spectrum in the inclusive decay $B \rightarrow X_s \gamma$* . *Phys.Rev.* **D57** (1998) 5611–5619, [arXiv:hep-ph/9710513](#) [[hep-ph](#)].
- [136] T. Ewerth, P. Gambino, and S. Nandi, *Power suppressed effects in $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ at $\mathcal{O}(\alpha_s)$* . *Nucl.Phys.* **B830** (2010) 278–290, [arXiv:0911.2175](#) [[hep-ph](#)].
- [137] C. W. Bauer, Z. Ligeti, M. Luke, A. V. Manohar, and M. Trott, *Global analysis of inclusive B decays*. *Phys.Rev.* **D70** (2004) 094017, [arXiv:hep-ph/0408002](#) [[hep-ph](#)].
- [138] P. Gambino and P. Giordano, *Normalizing inclusive rare B decays*. *Phys.Lett.* **B669** (2008) 69–73, [arXiv:0805.0271](#) [[hep-ph](#)].
- [139] T. van Ritbergen, *The Second order QCD contribution to the semileptonic $b \rightarrow u$ decay rate*. *Phys.Lett.* **B454** (1999) 353–358, [arXiv:hep-ph/9903226](#) [[hep-ph](#)].
- [140] M. Steinhauser and T. Seidensticker, *Second order corrections to the muon lifetime and the semileptonic B decay*. *Phys.Lett.* **B467** (1999) 271–278, [arXiv:hep-ph/9909436](#) [[hep-ph](#)].
- [141] N. Pott, *Bremsstrahlung corrections to the decay $b \rightarrow s \gamma$* . *Phys.Rev.* **D54** (1996) 938–948, [arXiv:hep-ph/9512252](#) [[hep-ph](#)].
- [142] C. Greub, T. Hurth, and D. Wyler, *Virtual $\mathcal{O}(\alpha_s)$ corrections to the inclusive decay $b \rightarrow s \gamma$* . *Phys.Rev.* **D54** (1996) 3350–3364, [arXiv:hep-ph/9603404](#) [[hep-ph](#)].

- [143] P. Gambino and M. Misiak, *Quark mass effects in $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$* . *Nucl.Phys.* **B611** (2001) 338–366, [arXiv:hep-ph/0104034](#) [hep-ph].
- [144] A. J. Buras, A. Czarnecki, M. Misiak, and J. Urban, *Two loop matrix element of the current current operator in the decay $B \rightarrow X_s \gamma$* . *Nucl.Phys.* **B611** (2001) 488–502, [arXiv:hep-ph/0105160](#) [hep-ph].
- [145] A. J. Buras, A. Czarnecki, M. Misiak, and J. Urban, *Completing the NLO QCD calculation of $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$* . *Nucl.Phys.* **B631** (2002) 219–238, [arXiv:hep-ph/0203135](#) [hep-ph].
- [146] Z. Ligeti, M. E. Luke, A. V. Manohar, and M. B. Wise, *The $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ photon spectrum*. *Phys.Rev.* **D60** (1999) 034019, [arXiv:hep-ph/9903305](#) [hep-ph].
- [147] I. R. Blokland, A. Czarnecki, M. Misiak, M. Slusarczyk, and F. Tkachov, *The Electromagnetic dipole operator effect on $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$* . *Phys.Rev.* **D72** (2005) 033014, [arXiv:hep-ph/0506055](#) [hep-ph].
- [148] K. Melnikov and A. Mitov, *The Photon energy spectrum in $B \rightarrow X_s + \gamma$ in perturbative QCD through $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$* . *Phys.Lett.* **B620** (2005) 69–79, [arXiv:hep-ph/0505097](#) [hep-ph].
- [149] H. Asatrian, A. Hovhannisyan, V. Poghosyan, T. Ewerth, C. Greub, *et al.*, *NNLL QCD contribution of the electromagnetic dipole operator to $\Gamma(\bar{B} \rightarrow X_s \gamma)$* . *Nucl.Phys.* **B749** (2006) 325–337, [arXiv:hep-ph/0605009](#) [hep-ph].
- [150] H. Asatrian, T. Ewerth, A. Ferroglia, P. Gambino, and C. Greub, *Magnetic dipole operator contributions to the photon energy spectrum in $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$* . *Nucl.Phys.* **B762** (2007) 212–228, [arXiv:hep-ph/0607316](#) [hep-ph].
- [151] K. Bieri, C. Greub, and M. Steinhauser, *Fermionic NNLL corrections to $b \rightarrow s \gamma$* . *Phys.Rev.* **D67** (2003) 114019, [arXiv:hep-ph/0302051](#) [hep-ph].
- [152] M. Misiak and M. Steinhauser, *Large- m_c Asymptotic Behaviour of $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ Corrections to $B \rightarrow X_s \gamma$* . *Nucl.Phys.* **B840** (2010) 271–283, [arXiv:1005.1173](#) [hep-ph].
- [153] P. Gambino and U. Haisch, *Complete electroweak matching for radiative B decays*. *JHEP* **0110** (2001) 020, [arXiv:hep-ph/0109058](#) [hep-ph].
- [154] H. Asatrian, T. Ewerth, H. Gabrielyan, and C. Greub, *Charm quark mass dependence of the electromagnetic dipole operator contribution to $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ at $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$* . *Phys.Lett.* **B647** (2007) 173–178, [arXiv:hep-ph/0611123](#) [hep-ph].
- [155] R. Boughezal, M. Czakon, and T. Schutzmeier, *NNLO fermionic corrections to the charm quark mass dependent matrix elements in $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$* . *JHEP* **0709** (2007) 072, [arXiv:0707.3090](#) [hep-ph].
- [156] H. Asatrian, T. Ewerth, A. Ferroglia, C. Greub, and G. Ossola, *Complete (O_7, O_8) contribution to $B \rightarrow X_s \gamma$ at order α_s^2* . *Phys.Rev.* **D82** (2010) 074006, [arXiv:1005.5587](#) [hep-ph].
- [157] A. Ferroglia and U. Haisch, *Chromomagnetic Dipole-Operator Corrections in $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ at $\mathcal{O}(\beta_0 \alpha_s^2)$* . *Phys.Rev.* **D82** (2010) 094012, [arXiv:1009.2144](#) [hep-ph].

- [158] M. Misiak and M. Poradzinski, *Completing the Calculation of BLM corrections to $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$* . *Phys.Rev.* **D83** (2011) 014024, [arXiv:1009.5685 \[hep-ph\]](#).
- [159] M. Kaminski, M. Misiak, and M. Poradzinski, *Tree-level contributions to $B \rightarrow X_s \gamma$* . *Phys.Rev.* **D86** (2012) 094004, [arXiv:1209.0965 \[hep-ph\]](#).
- [160] M. Ciuchini, G. Degrossi, P. Gambino, and G. Giudice, *Next-to-leading QCD corrections to $B \rightarrow X_s \gamma$: Standard model and two Higgs doublet model*. *Nucl.Phys.* **B527** (1998) 21–43, [arXiv:hep-ph/9710335 \[hep-ph\]](#).
- [161] F. Borzumati and C. Greub, *2HDMs predictions for $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ in NLO QCD*. *Phys.Rev.* **D58** (1998) 074004, [arXiv:hep-ph/9802391 \[hep-ph\]](#).
- [162] F. Borzumati and C. Greub, *Two Higgs doublet model predictions for $\bar{B} \rightarrow X_s \gamma$ in NLO QCD: Addendum*. *Phys.Rev.* **D59** (1999) 057501, [arXiv:hep-ph/9809438 \[hep-ph\]](#).
- [163] P. Ciafaloni, A. Romanino, and A. Strumia, *Two loop QCD corrections to charged Higgs mediated $b \rightarrow s \gamma$ decay*. *Nucl.Phys.* **B524** (1998) 361–376, [arXiv:hep-ph/9710312 \[hep-ph\]](#).
- [164] C. Bobeth, M. Misiak, and J. Urban, *Matching conditions for $b \rightarrow s \gamma$ and $b \rightarrow s g$ in extensions of the standard model*. *Nucl.Phys.* **B567** (2000) 153–185, [arXiv:hep-ph/9904413 \[hep-ph\]](#).
- [165] C. Bobeth, A. J. Buras, and T. Ewerth, *$\bar{B} \rightarrow X_s l^+ l^-$ in the MSSM at NNLO*. *Nucl.Phys.* **B713** (2005) 522–554, [arXiv:hep-ph/0409293 \[hep-ph\]](#).
- [166] <http://www.ttp.kit.edu/Progdata/ttp12/ttp12-029>.
- [167] D. Eiras and M. Steinhauser, *Complete Higgs mass dependence of top quark pair threshold production to order α_s* . *Nucl.Phys.* **B757** (2006) 197–210, [arXiv:hep-ph/0605227 \[hep-ph\]](#).
- [168] N. Zerf, *Dreischleifenkorrekturen zur Higgsbosonproduktion durch Gluonfusion im MSSM*. PhD thesis, KIT, 2012.
- [169] A. Pak, M. Steinhauser, and N. Zerf, *Supersymmetric next-to-next-to-leading order corrections to Higgs boson production in gluon fusion*. *JHEP* **1209** (2012) 118, [arXiv:1208.1588 \[hep-ph\]](#).
- [170] <http://www.slac.stanford.edu/xorg/hfag/>.
- [171] B. Meadows, M. Blanke, A. Stocchi, A. Drutskoy, A. Cervelli, *et al.*, *The impact of SuperB on flavour physics*. [arXiv:1109.5028 \[hep-ex\]](#).

DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich in den letzten Jahren unterstützt haben.

An erster Stelle gilt mein Dank Prof. Dr. Matthias Steinhauser für die Betreuung dieser Doktorarbeit. Die Zusammenarbeit habe ich als äußerst lehrreich und fruchtbar empfunden. Außerdem möchte ich mich dafür bedanken, dass ich die Möglichkeit hatte meine Arbeit auf zahlreichen Konferenzen und Schulen zu präsentieren. Ich danke auch Prof. Dr. Margarete Mühlleitner für die Übernahme des Korreferats. Desweiteren danke ich Prof. Dr. Mikołaj Misiak für die sehr erfolgreiche Zusammenarbeit und die Beantwortung unzähliger Fragen.

Mein weiterer Dank gilt allen Mitarbeitern am Institut für Theoretische Teilchenphysik für die sehr angenehme und produktive Arbeitsatmosphäre, insbesondere danke ich meinen Zimmerkollegen.

Ich möchte mich bei Jonathan Grigo, Alexander Kurz und Nikolai Zerf für ihre fachliche Unterstützung und viele interessante Diskussionen bedanken. Desweiteren möchte ich mich bei allen Admins am ITP und TTP für die tolle Zusammenarbeit bedanken, insbesondere gilt mein Dank Bastian Feigl, Jens Hoff und Peter Marquard, von denen ich sehr viel gelernt habe und die mir immer hilfreich zur Seite standen.

Für das Korrekturlesen danke ich Christian Hangst und Franziska Schissler.

Zu guter Letzt möchte ich mich ganz herzlich bei meiner Familie bedanken, insbesondere bei meinen Eltern die mir immer den nötigen Rückhalt gegeben haben.

Mein größter Dank gilt aber Franzi, die mich in den letzten Jahren begleitet hat und mir immer zur Seite stand.