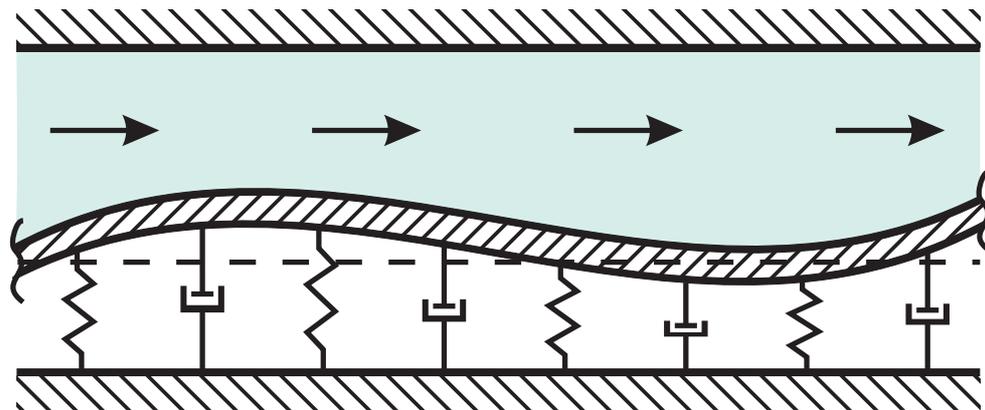


## Dissertation

Lineare und nichtlineare Analyse  
strömungsinduzierter Schwingungen  
in schlanken elastischen Kanälen



Dipl.-Ing. Karolina Bach

Abbildung auf der Titelseite: Modell eines ebenen, durchströmten Kanals

# **Lineare und nichtlineare Analyse strömungsinduzierter Schwingungen in schlanken elastischen Kanälen**

---

Zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor der Ingenieurwissenschaften**

der  
Fakultät für Maschinenbau  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Karolina Bach**  
aus Wesel

---

Tag der mündlichen Prüfung:

25.04.2014

Hauptreferent:

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann

Korreferent:

Ao. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Steindl



# Kurzfassung

Die Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur ist in Natur und Technik weit verbreitet. Daher gibt es auf diesem Gebiet bereits zahlreiche Untersuchungen. Nichtsdestotrotz ist das Problem noch nicht vollständig verstanden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die lineare und nichtlineare analytische Untersuchung der strömungsinduzierten Schwingungen eines schlanken Kanals. Daher wird ein reduziertes Modell eines durchströmten elastischen Kanals betrachtet. Dieses soll für nichtlineare analytische Untersuchungen zugänglich sein und gleichzeitig die wesentlichen Aspekte der Fluid-Struktur-Wechselwirkung abbilden.

Mit diesem Ziel werden in dieser Arbeit drei Modelle eingeführt, untersucht und miteinander verglichen. Modell *A* enthält eine inkompressible oder kompressible Potentialströmung und eine Näherung zur Berücksichtigung der Fluidviskosität. Beim Modell *B* wird von einem schlanken Kanal und einer Schleichströmung ausgegangen. Modell *C* enthält ebenfalls die Annahme eines schlanken Kanals, hier wird jedoch die Fluidträglichkeit unter Verwendung einiger Näherungen berücksichtigt. Der Kanal wird in allen Modellen eben und unendlich ausgedehnt modelliert. Dabei wird von einer starren und einer visko-elastisch gebetteten, biegesteifen Wand mit axialer Vorspannung ausgegangen.

Mittels analytischer Untersuchungen der linearisierten Gleichungen der drei Modelle werden die wesentlichen Anregungsmechanismen der selbsterregten Schwingungen identifiziert. Die Analyse der nichtlinearen Gleichungen ermöglicht darüber hinaus Aussagen bezüglich des postkritischen Verhaltens. Hierfür wird eine Störungsrechnung mit verschiedenen Zeitskalen verwendet.

Die lineare Analyse der Modelle zeigt, dass die Grundströmungsgeschwindigkeit entscheidend für die Stabilität des stationären Zustandes ist: Ab einer bestimmten Geschwindigkeit wird der stationäre Zustand instabil. Zusätzlich wird der Einfluss der einzelnen Modellparameter, der Kanalhöhe und der Fluidviskosität auf diese kritische Geschwindigkeit und somit die Stabilität des stationären Zustandes untersucht. Anhand des Modells *A* wird der Unterschied zwischen einem kompressiblem und inkompressiblem Fluid untersucht.

Die nichtlinearen Untersuchungen werden anhand der Modelle *B* und *C* durchgeführt. Es kann gezeigt werden, dass je nach Größe der Modellparameter und ihrem Verhältnis zueinander sub- oder superkritische Hopf-Bifurkationen auftreten.

Ein Vergleich der Modelle ergibt, dass die Ergebnisse der Modelle *A* und *C* für große Wellenlängen gut übereinstimmen. Auch zeigt sich, dass das Modell *B* nur in bestimmten Fällen zulässig ist. Das Modell *C* hingegen erfüllt alle Forderungen: Es ermöglicht analytische nichtlineare Untersuchungen und bildet die wesentlichen Aspekte der Fluid-Struktur-Wechselwirkung ab.



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Technische Mechanik (ITM), Bereich Dynamik/Mechatronik, des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann danke ich für die Möglichkeit zur Promotion, die Anregung zu dieser Arbeit und die Übernahme des Hauptreferats. Auch die Möglichkeit zum fachlichen Austausch im In- und Ausland weiß ich sehr zu schätzen. Mein Dank gilt ebenfalls Herrn Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Alois Steindl für die Übernahme des Korreferats. Durch seine positive Art hat er mich bestärkt und durch seine Anregungen wurde diese Arbeit abgerundet. Für die freundliche Übernahme des Verfahrensvorsitzes bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Hans-Jörg Bauer.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Jörg Wauer. Bereits im Studium hat er mein Interesse für die Dynamik geweckt, mich anschließend zur Promotion am ITM ermutigt und diese durch wertvolle Impulse bereichert. Sehr dankbar bin ich auch für die Durchsicht meiner Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin möchte ich für sein ehrliches Interesse, seine noch ehrlichere Kritik und das umso wertvollere Lob danken. Unsere Gespräche haben mich herausgefordert und dadurch weitergebracht. Ein großer Dank geht an Herrn Dr.-Ing. Hartmut Hetzler für die mentale und fachliche Unterstützung. Seine motivierende Art hat manches Tief vorüberziehen lassen.

Allen Kollegen und Professoren, dem Sekretariat und der Werkstatt des ITM danke ich herzlichst für die Hilfsbereitschaft, die netten sowohl fachlichen als auch persönlichen Gespräche und die unvergesslichen Erlebnisse im Alltag, bei Ausflügen und Konferenzen. Besonders bedanken möchte ich mich bei Frau Gudrun Volz und Frau Barbara Windbiel für die freundliche, kompetente Hilfe und die herzliche Art. Bei meinen lang- und kurzfristigen Zimmerkollegen Benedikt und Marius bedanke ich mich für die schöne Zeit und das Korrekturlesen. Besonders möchte ich auch meinen Mädels Claudia, Heike und Nici danken. Zusammen waren die Tiefs erträglich und die Hochs viel schöner.

Zum Glück konnte ich während der Promotion auch mal abschalten und das verdanke ich meinem großartigen privaten Umfeld. Besonders wichtig waren dabei meine Karlsruher Freunde, die mich seit dem ersten Semester begleiten. Vielen Dank für den Rückhalt, die Ablenkung und die wunderbare gemeinsame Zeit.

Des Weiteren möchte ich von Herzen meinen Eltern danken. Sie haben mich immer unterstützt und dafür gesorgt, dass es mir an Nichts fehlte. Zusammen mit meiner Schwester haben sie mich ermutigt, getröstet und stets an mich geglaubt.

Mein tiefster Dank geht an meinen Gerd. Obwohl selbst stark ausgelastet, hat er mich in allen Phasen der Promotion angespornt, beraten und unterstützt. Er ist mein größter Fan und strengster Kritiker. Und er macht mich glücklich.

Karlsruhe, im Mai 2014

*Karolina Bach*



# Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| Kurzfassung . . . . .   | IX        |
| Symbolverzeichnis . . . . .                                   | XVII      |
| <b>1 Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Literaturübersicht . . . . .                              | 2         |
| 1.1.1 Lineare Untersuchungen . . . . .                        | 5         |
| 1.1.2 Nichtlineare Untersuchungen . . . . .                   | 7         |
| 1.2 Ziel der Arbeit . . . . .                                 | 8         |
| 1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .                               | 9         |
| <b>2 Grundlagen zur Stabilitätsuntersuchung</b>               | <b>11</b> |
| 2.1 Selbsterregte Schwingungen . . . . .                      | 11        |
| 2.1.1 Selbsterregungsfähige Systeme . . . . .                 | 11        |
| 2.1.2 Energiehaushalt . . . . .                               | 12        |
| 2.1.3 Lösungsverhalten . . . . .                              | 12        |
| 2.2 Grundbegriffe der Wellenausbreitung . . . . .             | 14        |
| 2.3 Stabilitätsbegriff . . . . .                              | 15        |
| 2.4 Lineare Stabilitätsuntersuchung . . . . .                 | 17        |
| 2.5 Nichtlineare Stabilitätsuntersuchung . . . . .            | 18        |
| 2.5.1 Bifurkationstheorie . . . . .                           | 19        |
| 2.5.2 Nichtlineare Berechnungsmethoden . . . . .              | 22        |
| <b>3 Grundlagen zur Beschreibung des durchströmten Kanals</b> | <b>27</b> |
| 3.1 Beschreibung der Strömung . . . . .                       | 27        |
| 3.1.1 Potentialströmung . . . . .                             | 28        |
| 3.1.2 Viskose Strömung im schlanken Kanal . . . . .           | 32        |
| 3.2 Beschreibung der elastischen Struktur . . . . .           | 34        |
| 3.3 Übergangsbedingungen . . . . .                            | 35        |
| 3.4 Stationärer Zustand und Fluktuationen . . . . .           | 37        |
| 3.5 Testfälle . . . . .                                       | 37        |
| <b>4 Kanal mit Potentialströmung</b>                          | <b>39</b> |
| 4.1 Herleitung der Gleichungen . . . . .                      | 39        |
| 4.1.1 Stationärer Zustand und Fluktuationen . . . . .         | 39        |
| 4.1.2 Dimensionslose Schreibweise . . . . .                   | 41        |
| 4.2 Lineare Stabilitätsuntersuchung . . . . .                 | 42        |
| 4.2.1 Dispersionsgleichung . . . . .                          | 43        |
| 4.2.2 Grundsätzliches zur Auswertung . . . . .                | 44        |
| 4.2.3 Grundströmungsgeschwindigkeit . . . . .                 | 46        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.2.4    | Phasenverschiebung . . . . .                                    | 49        |
| 4.2.5    | Steifigkeits- und Vorspannungsparameter . . . . .               | 51        |
| 4.2.6    | Wellenzahl . . . . .  | 52        |
| 4.2.7    | Dämpfungsparameter . . . . .                                    | 53        |
| 4.2.8    | Kanalhöhe . . . . .   | 57        |
| 4.2.9    | Untersuchung der Testfälle . . . . .                            | 60        |
| 4.3      | Zusammenfassung . . . . .                                       | 61        |
| <b>5</b> | <b>Schlanker Kanal unter Vernachlässigung der Fluidträgheit</b> | <b>65</b> |
| 5.1      | Herleitung der Gleichungen . . . . .                            | 65        |
| 5.1.1    | Stationärer Zustand und Fluktuationen . . . . .                 | 66        |
| 5.1.2    | Dimensionslose Schreibweise . . . . .                           | 68        |
| 5.2      | Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .                            | 69        |
| 5.2.1    | Dispersionsgleichung . . . . .                                  | 69        |
| 5.2.2    | Grundsätzliches zur Auswertung . . . . .                        | 70        |
| 5.2.3    | Grundströmungsgeschwindigkeit . . . . .                         | 70        |
| 5.2.4    | Steifigkeits- und Vorspannungsparameter . . . . .               | 71        |
| 5.2.5    | Wellenzahl . . . . .  | 72        |
| 5.2.6    | Dämpfungsparameter . . . . .                                    | 73        |
| 5.2.7    | Untersuchung der Modellrestriktionen . . . . .                  | 74        |
| 5.3      | Nichtlineare Stabilitätsanalyse . . . . .                       | 75        |
| 5.3.1    | Multiple-Scales-Methode . . . . .                               | 76        |
| 5.3.2    | Methode der Harmonischen Balance . . . . .                      | 79        |
| 5.3.3    | Untersuchung des Bifurkationsverhaltens . . . . .               | 80        |
| 5.4      | Zusammenfassung . . . . .                                       | 85        |
| <b>6</b> | <b>Schlanker Kanal unter Berücksichtigung der Fluidträgheit</b> | <b>87</b> |
| 6.1      | Herleitung der Gleichungen . . . . .                            | 87        |
| 6.1.1    | Stationärer Zustand und Fluktuationen . . . . .                 | 88        |
| 6.1.2    | Dimensionslose Schreibweise . . . . .                           | 89        |
| 6.2      | Lineare Stabilitätsanalyse . . . . .                            | 90        |
| 6.2.1    | Dispersionsgleichung . . . . .                                  | 91        |
| 6.2.2    | Grundsätzliches zur Auswertung . . . . .                        | 91        |
| 6.2.3    | Grundströmungsgeschwindigkeit . . . . .                         | 92        |
| 6.2.4    | Wellenzahl . . . . .  | 93        |
| 6.2.5    | Dämpfungsparameter . . . . .                                    | 93        |
| 6.2.6    | Vergleich mit dem Modell ohne Fluidträgheit . . . . .           | 94        |
| 6.2.7    | Vergleich mit dem Modell mit Potentialströmung . . . . .        | 96        |
| 6.3      | Nichtlineare Stabilitätsanalyse . . . . .                       | 97        |
| 6.3.1    | Multiple-Scales-Methode . . . . .                               | 97        |
| 6.3.2    | Methode der Harmonischen Balance . . . . .                      | 101       |
| 6.3.3    | Untersuchung des Bifurkationsverhaltens . . . . .               | 101       |
| 6.4      | Zusammenfassung . . . . .                                       | 104       |

|   |            |
|---|------------|
| <b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>     | <b>107</b> |
| 7.1 Zusammenfassung . . . . .             | 107        |
| 7.2 Ausblick . . . . .                    | 109        |
| <br>                                      |            |
| <b>Anhang</b>                             | <b>113</b> |
| <b>A Methode der Harmonischen Balance</b> | <b>113</b> |
| <b>B Fluidgleichung des Modells C</b>     | <b>115</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>               | <b>117</b> |



# Symbolverzeichnis

## Konvention der verwendeten Symbole

|                  |  |
|------------------|--|
| Amplituden       | regulär, Großbuchstaben                    |
| Matrizen         | fett, Großbuchstaben                       |
| Skalare          | regulär, Klein- oder Großbuchstaben        |
| Vektoren         | fett, Kleinbuchstaben                      |
| $()'$            | Ableitung nach einer Ortskoordinate        |
| $\bar{()}$       | Lösung einer linearisierten Gleichung      |
| $\dot{()}$       | Ableitung nach der Zeit                    |
| $\hat{()}$       | dimensionsbehaftete Variable               |
| $\hat{\hat{()}}$ | Fluktuation vom Ruhezustand                |
| $\tilde{()}$     | harmonische Funktion                       |
| $f()$            | Funktion                                   |
| $\Im\{\}$        | Imaginärteil                               |
| $L(), N()$       | Differential- oder algebraische Operatoren |
| $\mathcal{O}()$  | Ordnung der Terme                          |
| $\Re\{\}$        | Realteil                                   |

## Indizes

|     |  |
|-----|--|
| 0   | stationärer bzw. ungestörter Zustand         |
| 1   | dimensionsloser Parameter in Schreibweise 1  |
| 2   | dimensionsloser Parameter in Schreibweise 2  |
| 3   | dimensionsloser Parameter in Schreibweise 3  |
| $F$ | Variable bzw. allgemeiner Zustand des Fluids |
| $i$ | Imaginärteil                                 |

|           |  |
|-----------|--|
| $k_{rit}$ | Wert am kritischen (Bifurkations-)Punkt        |
| $\bar{m}$ | gemittelte Größe                               |
| $max$     | Maximum  |
| $min$     | Minimum  |
| $\cdot_n$ | Komponente in Normalenrichtung                 |
| $n$       | an der Stelle $n$                              |
| $R$       | Ruhezustand                                    |
| $r$       | Realteil                                       |
| $reell$   | reelle Größe                                   |
| $S$       | Variable bzw. allgemeiner Zustand der Struktur |
| $s$       | Größe am singulären Punkt                      |
| $\cdot_t$ | Komponente in tangentialer Richtung            |
| $V$       | Verlustgröße                                   |

**Symbole**

|              |                       |
|--------------|-----------------------|
| $a_n$        | Fourierkoeffizient    |
| $a_R$        | Fluid-Konstante       |
| $B$          | Dicke der Struktur    |
| $b_n$        | Fourierkoeffizient    |
| $c$          | Phasengeschwindigkeit |
| $D$          | Biegesteifigkeit      |
| $d$          | Abstandsmaß           |
| $da$         | Flächenelement        |
| $E$          | Elastizitäts-Modul    |
| $f_p$        | Druckfunktion         |
| $H$          | Kanalhöhe             |
| $\mathbf{I}$ | Einheitsmatrix        |
| $i$          | imaginäre Einheit     |

---

|              |  |
|--------------|--|
| $\mathbf{J}$ | Jacobi-Matrix  |
| $J$          | quadratischer Fehler                                   |
| $K$          | Konstante  |
| $k$          | Wellenzahl   |
| $K_S$        | Steifigkeitskonstante                                  |
| $k_c$        | Steifigkeitskonstante                                  |
| $k_d$        | Dämpfungskonstante                                     |
| $\ell$       | Abstand zwischen Stützstellen                          |
| $L$          | Mindestlänge des Kanals                                |
| $N$          | Normalkraft  |
| $n$          | ganze Zahl   |
| $P$          | Gesamtheit der dimensionslosen Parameter               |
| $p, p_A$     | (äußerer) Druck  |
| $q$          | Auslenkung der Struktur                                |
| $r$          | Polarkoordinate  |
| Re           | Reynoldszahl   |
| $S$          | Vorspannung  |
| $T$          | Periodendauer  |
| $t$          | Zeit   |
| $T_n$        | $n$ -te Zeitskala                                      |
| $U$          | (mittlere) Geschwindigkeit des Fluids in $x$ -Richtung |
| $u$          | Geschwindigkeit des Fluids in $x$ -Richtung            |
| $v$          | Geschwindigkeit des Fluids in $y$ -Richtung            |
| $w$          | allgemeine skalare Lösung                              |
| $\mathbf{x}$ | allgemeiner Lösungsvektor                              |
| $x$          | kartesische Koordinate                                 |
| $y$          | kartesische Koordinate                                 |

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $z$                     | kartesische Koordinate                                |
| $\alpha$                | dimensionsloser Kopplungsparameter                    |
| $\beta$                 | dimensionsloser Parameter für Vorspannung             |
| $\gamma$                | dimensionsloser Parameter für Steifigkeit der Bettung |
| $\Delta \mathbf{x}$     | Abweichung von ungestörtem Zustand                    |
| $\Delta E$              | Energieeintrag über einen Zyklus                      |
| $\delta$                | dimensionsloser Parameter für Biegesteifigkeit        |
| $\delta_{\text{ink}}$   | Stellvertreter-Variable                               |
| $\epsilon, \varepsilon$ | (kleine) Parameter                                    |
| $\zeta$                 | dimensionsloser Parameter für Dämpfung der Bettung    |
| $\eta$                  | Systemparameter                                       |
| $\Theta$                | Polarkoordinate                                       |
| $\vartheta$             | dimensionsloser Parameter für Reibungsverlust         |
| $\kappa$                | Isentropenkoeffizient des Fluids                      |
| $\lambda$               | Wellenlänge   |
| $\mu_F$                 | dynamische Viskosität                                 |
| $\nu$                   | Querkontraktionszahl                                  |
| $\nu_F$                 | kinematische Viskosität                               |
| $\xi$                   | dimensionslose Eigenwertfunktion                      |
| $\pi$                   | Kreiskonstante  |
| $\rho$                  | Dichte  |
| $\sigma$                | Normalspannung  |
| $\tau$                  | Normal- und Schubspannung                             |
| $\phi$                  | Potential des Fluids                                  |
| $\varphi$               | Phasenverschiebung                                    |
| $\omega$                | Eigenkreisfrequenz                                    |

# 1 Einleitung

Die Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur ist in Natur und Technik weit verbreitet. Besonders eindrücklich lässt sie sich beim Loslassen eines durchströmten Gartenschlauchs oder beim Stehversuch auf einer schwimmenden Luftmatratze erleben. In unserem Körper findet eine Interaktion zwischen den Blut- und Luftgefäßen und den zugehörigen Fluiden statt. Diese ist beispielsweise an der Stimmtonerzeugung und dem Fortpflanzen des Pulses in den Arterien aber auch an der Entstehung unerwünschter Atemgeräusche oder dem Venenkollaps beteiligt [36]. Auch in technischen Anwendungen sind die Wechselwirkungen präsent, zum Beispiel bei strömungsinduzierten Schwingungen von Kühl- oder Brennstoffleitungen in Kraftwerken [76] oder bei Steigleitungen von Ölbohrschiffen [78]. Die Interaktion wird aber auch ausgenutzt, zum Beispiel im Coriolis-Massendurchflussmesser [25] oder beim Energy-Harvesting [23]. Diese Beispiele zeigen einerseits die große Relevanz und andererseits die notwendige Beschränkung auf ein spezielles Gebiet.

Es gibt bereits zahlreiche Untersuchungen auf dem Gebiet der Fluid-Struktur-Interaktion, diese reichen von abstrahierten analytischen Modellen zu detaillierten numerischen Simulationen [75]. Nichtsdestotrotz ist das Problem noch nicht vollständig verstanden. Der Vorteil von reduzierten Modellen besteht darin, dass analytische Ausdrücke der interessierenden Größen ermittelt werden können. Sie erlauben einen Einblick in die Physik des Problems und ermöglichen Rückschlüsse auf wichtige Zusammenhänge und wesentliche Einflussparameter, was jedoch keinesfalls die detaillierteren Modelle ersetzt. Vielmehr ist ein Zusammenspiel aus allen Disziplinen erstrebenswert. Die einfachen Modelle ermöglichen eine erste Abschätzung der Wertebereiche der physikalischen Parameter, in denen interessierende Effekte zu erwarten sind. Im eingegrenzten Bereich folgt die detaillierte Analyse und Auslegung durch zeitaufwändige Simulationen der umfangreicheren Modelle. Die Untersuchung von vereinfachten Modellen erhöht somit das Verständnis und kann durch erste Abschätzungen im Vorfeld aufwändiger Simulationen viel Zeit einsparen.

In der vorliegenden Arbeit wird ein reduziertes Modell eines durchströmten schlanken, elastischen Kanals betrachtet. Das Modell soll soweit reduziert werden, dass einerseits analytisch zugängliche Gleichungen erhalten und andererseits die wesentlichen Aspekte der Fluid-Struktur-Interaktion abgebildet werden. Mit diesem Ziel werden verschiedene Modellierungsansätze verwendet und miteinander verglichen. Mittels analytischer Untersuchungen der linearisierten Gleichungen dieses Modells werden die wesentliche Anregungsmechanismen der selbsterregten Schwingungen identifiziert. Die Analyse der nichtlinearen Gleichungen ermöglicht darüber hinaus Aussagen bezüglich des postkritischen Verhaltens. Erkenntnisse aus abstrahierten Modellen können auch auf andere Beispiele aus verwandten Bereichen übertragen werden (siehe Abschnitt 1.1). Die vorliegende Arbeit soll daher einen Beitrag zum Verständnis der strömungsinduzierten Schwingungen in schlanken Kanälen und den grundsätzlichen Aspekten der Fluid-Struktur-Wechselwirkung leisten.

## 1.1 Literaturübersicht

Fluid-Struktur-Interaktion bezeichnet zunächst eine beliebige Wechselwirkung zwischen einem Fluid und einer Struktur. Diese Übersicht beschränkt sich auf selbsterregte Schwingungen von durchströmten, elastischen Strukturen, wobei von einer stationären Grundströmung ausgegangen wird. Es werden verschiedenen Modellierungsansätze und wichtige Erkenntnisse zusammengefasst.

Die Modellierung dieser Schwingungssysteme führt auf gekoppelte nichtlineare, partielle Differentialgleichungen, für die keine exakten Lösungen bekannt sind. Eine Möglichkeit, auf welche hier nicht weiter eingegangen wird, ist das System möglichst detailliert zu modellieren und anschließend mit aufwändiger Numerik zu simulieren. Eine andere Möglichkeit ist, das Modell sinnvoll zu vereinfachen, sodass es für (semi)analytische Untersuchungen zugänglich ist. Dieser Ansatz ermöglicht einen Einblick in die Physik und die grundlegenden Mechanismen. Païdoussis liefert in den Büchern [75], [76] eine ausführliche Einführung in die Thematik und eine gute Literaturübersicht. In [16] wird ein Überblick über Arbeiten zu durchströmten Rohren und Kanälen gegeben und im Speziellen auf Instabilitäten eingegangen.

Strömungen, die mit angrenzenden Strukturen interagieren, sind weit verbreitet, daher wurde bereits sehr früh versucht, diese zu beschreiben (z. B. [115]). Doch erst ab der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts finden sich verstärkt Untersuchungen. Die ersten Arbeiten zu durchströmten Rohren entstanden durch Beobachtungen an Pipelines (z. B. [49]) und auch aufgrund der Tatsache, dass dieses verhältnismäßig einfache Modell eine reichhaltige Dynamik besitzt (siehe [6], [32] und die Literaturübersicht in [77]). Aus dem Bereich der Aerodynamik entstanden Arbeiten zu überströmten Platten und Schalen (z. B. [68], [24]) und Beobachtungen an nuklearen Reaktoren verstärkten die Forschung zu durchströmten Kanälen (vgl. [33], [69], [111], Überblick in [70]). Zeitgleich wurde im Bereich der Fluidmechanik der Einfluss von flexiblen Wänden auf die Strömung untersucht (z. B. [31], [41]). Etwas später kamen medizinisch motivierte Arbeiten mit Kanälen und Rohren zur Erklärung von Erkrankungen im Bereich der Luft- und Atemwege hinzu (z. B. [34], [56], [92], Übersichten [9] und [36]). Diese Untersuchungen mit über- bzw. durchströmten Platten, Rohren und Kanälen und teils sehr unterschiedlichen Ausrichtungen entstanden parallel. Die Erkenntnisse sind jedoch teilweise übertragbar, weshalb sich die verschiedenen Forschergruppen auch gegenseitig beeinflussten: Das macht eine chronologische Übersicht schwer, sodass hier stattdessen die wesentlichen Ansätze und Erkenntnisse zusammengefasst werden.

Als Kanäle werden im Rahmen dieser Arbeit Strukturen mit ursprünglich rechteckigem Querschnitt bezeichnet, siehe Abbildung 1.1. In den diskutierten Arbeiten werden nur die obere und untere Wand als flexibel angenommen. Diese werden meist als einparametrische, nicht permeable Kontinua mit (visko)elastischer Bettung (siehe [37], [60], [61], [112]) modelliert. Häufig wird eine Rückstellung aufgrund einer Vorspannung berücksichtigt (z. B. [90] und [112]) und meistens werden die Kontinua zusätzlich als biegesteif angenommen. In den aufgeführten Arbeiten werden die Transversalschwingungen dieser elastischen Strukturen betrachtet. Es gilt jedoch zu beachten, dass je nach Parameterbereich zusätzliche Längsschwingungen einen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten haben können [110]. Bei ei-

nigen Arbeiten wird anstatt einer elastischen Struktur eine nachgiebige Schicht betrachtet (z. B. [17], [29], [80]). Bei Stewart et al. [101] wird die Trägheit vernachlässigt, während bei Rotenberry und Saffman [87] nur die elastische Rückstellung berücksichtigt wird.

Das Fluid wird bei durchströmten Kanälen meist über die Kontinuitätsgleichung und die laminaren Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Die Gleichungen vereinfachen sich stark für ebene und inkompressible Strömungen. Bei nicht viskosen Strömungen wird das Fluid häufig als Potentialströmung modelliert (z. B. [60], [90], [112]), wodurch eine Fluidgleichung eingespart werden kann. Bei Grotberg und Reiss [37] und den Folgearbeiten [35], [38], [83] wird die Gleichung einer ebenen, inkompressiblen Potentialströmung um einen Reibungs- bzw. Kompressibilitätsparameter erweitert. Teilweise werden die Schubspannungsterme an den Wänden durch Reibungsansätze genähert [52], [63] oder Näherungen für Strömungen mit kleiner [29] oder großer [101] Geschwindigkeit eingeführt. Vereinfachte Gleichungen für viskose, langsame Strömungen in schlanken Spalten finden sich auch in der Gleitlager-Theorie zur Beschreibung von Schmierfilmen unter der englischen Bezeichnung *Lubrication-Theory* (z. B. [42] und [105]). Bei einer viskosen Strömung können verschiedene Strömungsschichten unterschieden werden. Einige Arbeiten beschäftigen sich damit und untersuchen insbesondere den Einfluss der Grenzschicht (siehe [27], [93], [101]).

Im Bereich der durchströmten Rohre gibt es zahlreiche, interessante Arbeiten, welche von einem konstanten Querschnitt ausgehen und einen sogenannten *Plug Flow* annehmen (z. B. [53], [75], [99]). Diese Arbeiten sind für die Untersuchung von Schwingungen von Kanälen aber weniger relevant, da hier meist ein veränderlicher Querschnitt vorausgesetzt wird. Untersuchungen zu Rohren mit veränderlichem Querschnitt sind bei Païdoussis [75] gelistet. Die Fluidmodellierung ist unterschiedlich detailliert, zur Modellierung der Struktur werden häufig Schalenelemente verwendet.

Die Erkenntnisse aus Untersuchungen mit Rohren oder Kanälen, sind teilweise übertragbar. So nutzt Walsh [110] beispielsweise Erkenntnisse, welche anhand eines Kanals gemacht wurden, zur Verbesserung einer eindimensionalen Fluidmodellierung in durchströmten Rohren. Und sowohl bei Rohren als auch bei Kanälen kann über die linearisierten Gleichungen eine kritische Geschwindigkeit der stationären Grundströmung bestimmt werden, ab der die stationäre Lösung instabil wird. Außerdem kann ein abgeflachtes Rohr in guter Näherung als Kanal modelliert werden (siehe [50], [57], [114]). Nicht nur Grotberg und Davis [34], Grotberg und Gavriely [35] und Webster et al. [116] verwenden absichtlich dieses stark vereinfachte Modell, um die eher rohrförmigen Luftgefäße zu modellieren und damit anschauliche Erklärungen für physiologische Phänomene zu finden. Von Weaver und Païdoussis [114] wird zudem gezeigt, dass das Verhalten eines abgeflachten Rohres durch einen Kanal besser abgebildet wird, als durch ein Modell unter Verwendung von Schalenelementen.

In durchströmten Kanälen können sowohl statische als auch dynamische Instabilitäten beobachtet werden. Vor allem über die Frage, ob nach der statischen Divergenz-Instabilität die dynamische Flutter-Instabilität (*Post-divergence Flutter*) auftritt, wurde viel diskutiert, weshalb es zahlreiche Arbeiten dazu gibt (z. B. [37], [59], [60], [114]). Zur Erklärung und Deutung der Instabilitäten werden häufig die von Benjamin [5], [7] und Landahl [64] eingeführten Klassifikationen von Instabilitäten verwendet. Hierbei wird der Energieaustausch zwischen Fluid und Struktur betrachtet. Als Ursache für Flattern wird häufig die Phasenverschiebung zwischen der Auslenkung der Struktur und dem Druck angeführt

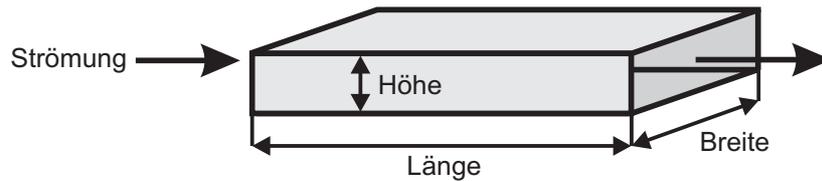


Abbildung 1.1: Schema eines durchströmten Kanals

(z. B. [35], [114]). Es kann gezeigt werden, dass manche Störungen durch Dämpfung stabilisiert und andere destabilisiert werden, z. B. [7]. Manche Instabilitäten treten erst bei einem viskosen Fluid auf [20]. Andere treten erst aufgrund der elastischen Wände auf und wieder andere Störungen können dadurch stabilisiert werden (siehe [31], [41]). Zusätzlich können die verschiedenen Störungen miteinander interagieren. Zahlreiche Arbeiten beschäftigen sich mit diesem Zusammenspiel (z. B. [16], [29], [50], [101]). In diesen Arbeiten liegt der Fokus auf den strömungsmechanischen Instabilitäten.

Anhand von Abbildung 1.1 werden im Folgenden einige Begriffe und Modellierungen erläutert. Die Ausdehnungen des Kanals in den drei Raumrichtungen werden in der vorliegenden Arbeit als Höhe, Länge und Breite bezeichnet. Von einem schlanken Kanal wird gesprochen, wenn die Höhe im Vergleich zur Länge sehr viel kleiner ist [44].

Die Kontaktbedingungen zwischen Fluid und Wand werden in dieser Arbeit als Übergangsbedingungen bezeichnet, die Bedingungen an den Kanalenden bzw. Rändern als Randbedingungen. Bei einem Kanal mit endlicher Länge werden die Randbedingungen berücksichtigt und es kommen meist Spektralmethoden zum Einsatz, siehe Überblick in [75]. Im Gegensatz dazu fließen diese bei einem unendlich langen Kanal nicht ein. Bei Betrachtung eines unendlich langen Kanals wird das sogenannte lokale Stabilitätsverhalten diskutiert. Doaré und de Langre [22] untersuchen den Übergang vom lokalen Stabilitätsverhalten unendlicher Strukturen zum globalen Verhalten endlicher Strukturen: Bei großen Längen und für bestimmte Randbedingungen sind die Kriterien für globale Instabilität den lokalen Kriterien nahe. Kudou et al. [63] und Webster [116] weisen nach, dass die theoretischen Ergebnisse unter Betrachtung eines unendlich langen Kanals für bestimmte Wellenlängen gut mit Experimenten übereinstimmen. Stewart et al. [100] zeigen aber auch, dass ein instabiler globaler Mode sich aus stabilen lokalen Moden zusammensetzen kann. Allerdings werden instabile lokale Moden als Ursache für globale Instabilitäten gesehen und somit ist auch die Untersuchung der lokalen Stabilität sinnvoll [101].

Zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens des stationären Zustandes werden Störungen dieses Zustandes betrachtet. Diese Störungen werden als sich ausbreitende Wellen modelliert und ihr Verhalten wird untersucht. In den meisten Arbeiten werden dabei zweidimensionale Störungen betrachtet, das heißt die Wellen breiten sich lediglich in Höhen- und Längsrichtung aus. Das lässt sich dadurch begründen, dass diese für viele Parameterkonstellationen im Vergleich zu  $3D$ -Störungen instabiler und somit kritischer sind [93]. Des Weiteren zeigen Rotenberry und Saffman [87] für viskose Strömungen, dass das Squire-Theorem [98] auch für einen Kanal mit flexiblen Wänden gilt. Laut diesem Theorem sind bei einer viskosen Strömung in einem Kanal die  $2D$ -Störungen entscheidend für die kritische Geschwindigkeit [20]. Bei Betrachtung dieser  $2D$ -Störungen und unter Annahme eines

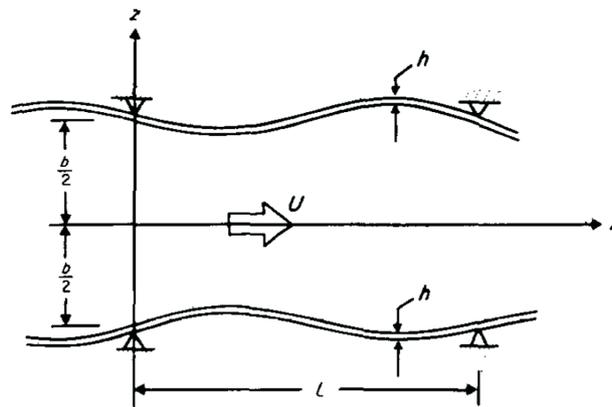


Abbildung 1.2: Skizze eines unendlich langen Kanals im symmetrischen Mode aus [114]

unendlich breiten Kanals ist eine ebene Modellierung des Systems zulässig [117]. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Ausbreitung der Störungen und somit das Stabilitätsverhalten zu untersuchen, siehe z. B. [16]. Dazu wird meistens die sogenannte Dispersionsgleichung hergeleitet, welche die Frequenzen mit den Wellenzahlen verknüpft. Eine Möglichkeit ist, die Frequenz vorzugeben (*Spatial Approach*) und in Abhängigkeit davon die Wellenzahlen zu bestimmen. Dieser Ansatz wird vor allem bei periodischer Anregung verwendet [75]. Eine weitere Möglichkeit ist, die Antwort des Systems auf eine impulsartige Störung zu betrachten. Je nach Systemantwort wird von absoluter oder konvektiver Instabilität gesprochen. Diese Stabilitätsbetrachtung stammt aus der Plasma-Physik [75], wird aber auch bei durchströmten Kanälen angewendet (z. B. [19] und [21]). Die dritte Möglichkeit besteht in der Vorgabe der Wellenzahl (*Temporal Approach*) und der anschließenden Bestimmung der davon abhängenden Frequenzen aus der Dispersionsgleichung. Dadurch können bestimmte Wellen untersucht oder periodische Randbedingungen berücksichtigt werden [75]. Diese Vorgehensweise wird meistens bei unendlich langen Kanälen verwendet (z. B. [37], [60], [112]).

### 1.1.1 Lineare Untersuchungen

Im Folgenden werden die Erkenntnisse zu linearen Untersuchungen des stationären Grundzustandes von durchströmten Systemen zusammengefasst. Zur Beurteilung ist die sogenannte kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  notwendig, welche die Grundströmungsgeschwindigkeit kennzeichnet, ab welcher der stationäre Zustand instabil wird. Diese kann aus dem linearisierten Gleichungssystem durch Einsetzen eines Wellenansatzes berechnet werden. Aus der entstehenden Dispersionsgleichung kann  $U_{krit}$  in Abhängigkeit von der Wellenzahl und den restlichen Parametern entweder analytisch oder numerisch bestimmt werden. Die kritische Geschwindigkeit hängt stark von der Wellenzahl bzw. der Wellenlänge ab ([34], [60]). In zahlreichen Arbeiten wird diese Tatsache für Vereinfachungen genutzt und beispielweise nur große Wellenlängen (siehe [20], [29], [50], [116]) betrachtet.

Bei einem ebenen Kanal mit zwei flexiblen Wänden wird zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Bewegungsmoden unterschieden (siehe Abb. 1.2). Bei nicht viskosem Fluid ist der symmetrische Mode der kritischere, da hier  $U_{krit}$  deutlich kleiner ist (z. B. [37], [60], [114]). In diesem Fall sind die Übergangsbedingungen die gleichen wie für den Fall mit nur einer flexiblen Wand [60]. Für ein viskoses Fluid gilt dies aufgrund der Haftbedingung nicht. Laut Nagata und Cole [71] sowie Stewart et al. [101] ist bei einem viskosen Fluid der antisymmetrische Mode der kritischere. Weitere Überlegungen sind bei Gaurav und Shankar[29], Huang [50] und Stewart et al. [101] zu finden.

Die Kanalhöhe hat ebenfalls einen Einfluss auf  $U_{krit}$  (vgl. [35], [104]): Je kleiner die Höhe umso größer wird der Einfluss und umso kleiner die kritische Geschwindigkeit.

Sowohl die Biegesteifigkeit als auch die Vorspannung der Struktur haben eine stabilisierende Wirkung und erhöhen die kritische Geschwindigkeit (siehe [30], [35], [60], [63]). Bei einer viskoelastischen Bettung haben sowohl die Steifigkeit als auch die Dämpfung einen großen Einfluss auf die Stabilität des Grundzustandes. Die Steifigkeit der Bettung wirkt bei einem nicht viskosen Fluid stets stabilisierend [60]. Für ein viskoses Fluid ist eine entsprechende Untersuchung nicht bekannt. Durch die Berücksichtigung der Dämpfung sind bei einem nicht viskosen Fluid bestimmte Geschwindigkeitsbereiche instabil, die zuvor noch grenzstabil waren: Dämpfung wirkt hier destabilisierend und bei Vernachlässigung einer vorhandenen Dämpfung wird dadurch ein zu großes  $U_{krit}$  berechnet (vgl. [34], [60], [114]). Bei einem viskosen Fluid hingegen kann äußere Dämpfung sowohl stabilisierend als auch destabilisierend wirken (siehe [7], [101]). Dieses kann durch das Zusammenspiel der verschiedenen Instabilitäten begründet werden, z. B. [101].

Wichtige Fluideigenschaften sind die Viskosität und die Kompressibilität. Für den Fall einer nicht viskosen, aber kompressiblen Strömung führen Horáček und Zolotarev [47] und Wauer [112] einen Kopplungsparameter ein, wodurch es möglich ist, die Kopplung zwischen Struktur und Fluid zu untersuchen. Durch Nullsetzen dieses Parameters wird das System entkoppelt. In diesem Fall gibt es bei einem kompressiblen Fluid einen Strukturmode und mehrere Fluidmoden, welche miteinander interagieren. Für manche Parameterkonstellationen sind die Eigenkreisfrequenzen des gekoppelten Systems kleiner als die des ungekoppelten Systems (*Added-Mass-Effekt*), siehe [112]. Ein ausführlicher Vergleich zwischen Systemen mit inkompressiblem und kompressiblem Fluid und eine Untersuchung der Auswirkungen auf  $U_{krit}$  wird in diesen Arbeiten nicht durchgeführt. Nach dem Modell von Grotberg und Shee [38] gibt es keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen  $U_{krit}$  und dem eingeführten Kompressibilitätsfaktor, die kritische Schwingungsfrequenz steigt hingegen mit zunehmender Kompressibilität.

Die linearen Untersuchungen zeigen, dass die Erkenntnisse unter Verwendung eines nicht viskosen Fluids nur bedingt auf Systeme mit viskosem Fluid übertragbar sind (z. B. [35], [50]). Außerdem kann gerade für die interessierenden Kanäle mit geringer Höhe die Viskosität nicht vernachlässigt werden (siehe [37], [96]). Daher ist die Betrachtung eines viskosen Fluids unerlässlich. Bei einem viskosen Fluid kommen aufgrund der Haftbedingung zwischen Fluid und Struktur zusätzliche Übergangsbedingungen hinzu und die Strömungsgleichungen werden um viskose Terme erweitert. Neben dem Modell von Grotberg [37], bei dem die Haftbedingung umgangen wird, gibt es auch andere vereinfachte Ansätze. Huang [50] verwendet beispielweise ein Fluidmodell mit nicht viskosen Eigenschaften (Strömungsglei-

chungen ohne viskose Terme) und viskosen Eigenschaften (Poiseuille-Grundströmung). In anderen Arbeiten werden die vollständigen viskosen Gleichungen verwendet und die Randwertprobleme, welche nach Einführung eines Wellenansatzes entstehen, mittels Spektralmethoden näherungsweise gelöst (siehe [20], [31], [90], [101]).

### 1.1.2 Nichtlineare Untersuchungen

Gerade bei schlanken Kanälen ist die kritische Geschwindigkeit gering. Außerdem ist zu erwarten, dass sich hier die Kopplung zwischen Fluid und Struktur und somit die Auslenkung der Struktur besonders stark auswirkt. Bei linearisierten Gleichungen wird diese Verschiebung der Grenzfläche zwischen Fluid und Struktur jedoch nicht berücksichtigt [17]. Im Falle einer subkritischen Bifurkation kann der stationäre Zustand je nach Störung bereits für eine kleinere Geschwindigkeit als  $U_{krit}$  instabil werden. Außerdem ist auch von Interesse, ob sich Schwingungen mit konstanter Amplitude einstellen.

Die Arbeit von Wambsganss [111] aus dem Jahr 1967 gehört zu den ersten Arbeiten mit nichtlinearer Untersuchung eines durchströmten Kanals. Hier wird das stationäre Modell von Miller [69] um die Trägheit der Struktur erweitert und Prognosen für die maximalen Schwingungsamplituden der Struktur gemacht. Für das Fluid wird ein 1D-Modell unter Vernachlässigung der Fluidträgheit verwendet. Für nichtlineare Untersuchungen von Strömungen in starren Rohren bzw. Kanälen wurden zur ähnlichen Zeit auch asymptotische Methoden verwendet (siehe [95], [102]). Aufbauend auf diesen Erkenntnissen entstanden Arbeiten zur Untersuchung des Einflusses von elastischen Wänden auf die hydrodynamischen Instabilitäten (z. B. [27], [29], [86], [87]).

Eine Besonderheit der nichtlinearen Gleichungen stellen die Übergangsbedingungen an der aktuellen Position der flexiblen Struktur in Form von impliziten Funktionen dar. Unter Annahme von kleinen Verschiebungen der Grenzfläche werden diese in den meisten Arbeiten mittels einer Taylorentwicklung um die stationäre Lage approximiert (z. B. [27], [35], [37], [38], [83] und [112]). Aufgrund der Integration über die Kanalhöhe und der damit verbundenen direkten Einbindung der Übergangsbedingungen kann diese Näherung bei schlanken Kanälen umgangen werden. In Verbindung mit nichtlinearen Untersuchungen sind hierzu jedoch keine Arbeiten bekannt.

Zusätzlich zu den Randbedingungen können weitere Nichtlinearitäten hinzukommen. Bei Verwendung eines viskosen Fluids sind das die konvektiven Terme in den Navier-Stokes-Gleichungen. Teilweise weisen die Strukturen Nichtlinearitäten in Form von Bettungen mit kubischen Steifigkeiten (z. B. [35], [112]) oder durch Betrachtung einer von Kármán-Platte mit großen Durchbiegungen (siehe [37]) auf.

Dass es zu Schwingungen mit konstanter Amplitude kommen kann, wurde bereits sehr früh bei durchströmten Kanälen in Reaktoren (z. B. [111]) und auch in Experimenten mit Rohren beobachtet (z. B. [30], [114]). Dieses Wissen wird bei den analytischen Stabilitätsuntersuchungen mittels asymptotischer Methoden ausgenutzt. Grotberg und Reiss [37] und die Folgearbeiten [35], [38] verwenden sowohl die Poincaré-Linstedt- als auch die *Multiple-Scales*-Methode. Hier werden die konvektiven Terme durch einen linearen Reibungsterm ersetzt und der Einfluss durch die Nichtlinearität der Struktur als dominant angenommen. Unter diesen Annahmen ergibt sich für die Schwingungsamplitude der Struktur eine

superkritische Bifurkation vom nicht ausgelenkten Grundzustand. Sowohl eine Nichtlinearität der Struktur [37] als auch eine kubische Bettung [35] führen zu einer Versteifung durch Biegung und somit zu höheren Frequenzen bei steigender Amplitude bzw. Grundströmungsgeschwindigkeit (siehe auch [114]). Zusätzlich wird von Grotberg und Shee [38] gezeigt, dass die Schwingungsamplituden mit steigendem Kompressibilitätsparameter steigen. Grundsätzlich ergeben die Vergleiche in [30] und [35] qualitativ gute Übereinstimmungen zwischen den experimentellen und theoretischen Ergebnissen. Es ist zu erwähnen, dass im Experiment [30] auch andere, nicht untersuchte, niederfrequente Schwingungen beobachtet wurden. Prince [83] erweitert das Modell von Grotberg und Reiss [37] für mehrere Platten und weist nach, dass es aufgrund der mehrfachen Eigenwerte der verschiedenen Platten auch mehrere Verzweigungen gibt.

Rottenberry und Saffman [86], [87] nähern die Lösung mit Hilfe einer Störungsrechnung mit unterschiedlichen Orts- und Zeitskalen an. Hier geht es um den Einfluss der elastischen Wand auf die Stabilität der Strömung, daher wird eine stark vereinfachte Struktur angenommen. Es wird gezeigt, dass die Bifurkation bei zunehmender Wandsteifigkeit von sub- zu superkritisch übergeht. Betrachtet wird dabei die Amplitude der Strömungsgeschwindigkeit. Auch bei Gajjar und Sibanda [27] geht es um den Einfluss der flexiblen Struktur. Zur Untersuchung wird ebenfalls ein asymptotisches Verfahren verwendet und es wird eine Näherung für hohe Strömungsgeschwindigkeiten vorgenommen. Es ergibt sich, dass die Trägheit, die Vorspannung und die Dämpfung der Struktur einen deutlichen Einfluss haben. Wauer [112] wendet eine Lindstedt-Poincaré Störungsrechnung an, um die Korrektur der Eigenkreisfrequenzen durch die Nichtlinearitäten für ein kompressibles Fluid zu bestimmen. Es wird von einer starren Struktur ausgegangen, eine Stabilitätsuntersuchung wird nicht durchgeführt.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel der Arbeit ist die lineare und nichtlineare analytische Untersuchung der strömungsinduzierten Schwingungen eines schlanken Kanals. Anhand der linearisierten Gleichungen sollen die Anregungsmechanismen, die zu einer Instabilität des stationären Zustandes führen, analysiert werden. Des Weiteren gilt es, eine geeignete Vorgehensweise für die analytische Untersuchung der nichtlinearen Gleichungen zu erarbeiten, um anschließend das postkritische Verhalten ermitteln zu können. Im Speziellen geht es dabei um die Frage, ob und wann sich periodische Lösungen einstellen.

Zur linearen Untersuchung der Stabilität des stationären Zustandes wird bei unendlich ausgedehnten Strukturen häufig ein Wellenansatz unter Vorgabe der Wellenzahl (*Temporal Approach*) verwendet, siehe Abschnitt 1.1. Die Literaturübersicht (siehe Abschnitt 1.1.2) ergab, dass für die nichtlinearen Untersuchungen eine Störungsrechnung, ggf. mit mehreren Zeitskalen, geeignet ist (z. B. [46], [72]).

Es wird ein Modell angestrebt, welches für nichtlineare analytische Untersuchungen zugänglich und gleichzeitig die wesentlichen Aspekte der Fluid-Struktur-Wechselwirkung abbilden kann. Im Folgenden werden daher Modellanforderungen und zulässige Vereinfachungen zusammengefasst, welche sich auf die Erkenntnisse aus der Literaturübersicht in

Abschnitt 1.1 stützen. Dort werden die getroffenen Aussagen durch die entsprechenden Literaturverweise untermauert.

Der Fokus der Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit liegt auf der vollständigen Berücksichtigung der nichtlinearen Übergangsbedingungen zwischen Fluid und Struktur. Des Weiteren wird ein Strukturmodell verwendet, welches dessen Trägheit, Biegesteifigkeit und axiale Vorspannung enthält und auch die Berücksichtigung einer viskoelastischen Bettung ermöglicht. Bei der Literaturdurchsicht wurden keine Arbeiten gefunden, welche alle angesprochenen Eigenschaften in einem Modell vereinen und diese systematisch untersuchen. Zusätzlich wird aufgrund der schwerpunktmäßigen Betrachtung von schlanken Kanälen und den zu erwartenden interessanten Effekten durch die zusätzliche Dämpfung eine viskose Modellierung des Fluids angestrebt. Aus der Literatur geht hervor, dass eine antisymmetrische Modellierung des Kanals in diesem Fall interessant ist.

Um trotz dieser Modelleigenschaften analytisch behandelbare Gleichungen zu erhalten, sind Vereinfachungen an anderen Stellen notwendig. Die Literaturübersicht ergab, dass die Untersuchung eines ebenen und unendlich ausgedehnten Kanals sinnvoll ist. Strukturgeometrische Nichtlinearitäten können vernachlässigt werden, da sie für das Auftreten von strömungsinduzierten Schwingungen nicht wichtig sind. Da es bereits zahlreiche Untersuchungen zu strömungsmechanischen Instabilitäten gibt, sollen diese in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht werden. Es wird ein möglichst einfaches Fluidmodell angestrebt.

Aus diesen Modellanforderungen und -vereinfachungen wurden drei Modelle herausgearbeitet. Modell *A* stellt in der Gesamtheit der berücksichtigten Effekte eine Erweiterung bestehender Modelle dar. Es dient vor allem zum besseren Verständnis des gekoppelten Problems und zur Begründung der Vereinfachungen der Modelle *B* und *C*. Bei der Literaturübersicht wurden keine analytischen, nichtlinearen Untersuchungen eines schlanken Kanals mit viskosem Fluid unter vollständiger Berücksichtigung der Übergangsbedingungen, Strukturträgheit und -biegesteifigkeit gefunden. Diese Lücke soll mit der vorliegenden Arbeit anhand der Untersuchungen der Modelle *B* und *C* geschlossen werden.

Die aufgestellten Modelle sollen im Hinblick auf die eingangs formulierte Zielsetzung der Arbeit untersucht und miteinander verglichen werden.

## 1.3 Aufbau der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in sieben Kapitel. Im aktuellen Kapitel werden die Motivation und das Ziel der Arbeit formuliert. Anschließend wird eine Einordnung in den Kontext bereits bestehender Arbeiten aus dem Bereich der Fluid-Struktur-Wechselwirkung vorgenommen und ein Überblick über die für diese Arbeit relevante Literatur gegeben.

In Kapitel 2 werden die Grundlagen für die linearen und nichtlinearen Untersuchungen in dieser Arbeit erläutert. Dabei wird auf einige Aspekte der Wellenausbreitung, der selbsterregten Schwingungen, dem Begriff der Stabilität und der nichtlinearen Näherungsmethoden eingegangen.

In Kapitel 3 wird die Modellierung des durchströmten Kanals vorgestellt. Dabei wird der grundsätzliche Aufbau erklärt, notwendige Annahmen begründet und die Gleichungen zur

Beschreibung der Strömung, der Struktur und der Übergangsbedingungen hergeleitet. Außerdem werden sowohl der stationäre Zustand als auch vier Testfälle definiert.

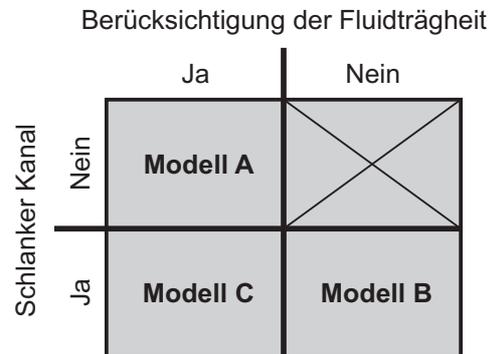


Abbildung 1.3: Übersicht der verschiedenen Modelle

Anschließend erfolgt die Einführung und Untersuchung der verschiedenen Modelle. Abbildung 1.3 gibt einen Überblick über die verwendeten drei Modelle und die wesentlichen Unterschiede. In Kapitel 4 wird das Modell *A* hergeleitet und einer linearen Stabilitätsanalyse unterzogen. Anhand dieses Modells mit kompressibler oder inkompressibler Potentialströmung werden die grundsätzlichen Phänomene und Effekte der strömungsinduzierten Schwingungen in einem Kanal diskutiert und die Vereinfachungen der folgenden Modelle begründet. Diese sind für die nichtlinearen Untersuchungen notwendig.

Das Modell *B* wird in Kapitel 5 untersucht. Bei diesem Modell wird von einem schlanken Kanal und einer vernachlässigbaren Fluidträgheit ausgegangen. Diese Vereinfachungen ermöglichen die lineare und nichtlineare Untersuchung der Stabilität des stationären Zustandes, stellen jedoch auch eine starke Einschränkung des Modells dar.

Diese sollen durch das in Kapitel 6 eingeführte Modell *C* umgangen werden. Dieses Modell geht ebenfalls von den Schlankkanalgleichungen aus, berücksichtigt aber die Fluidträgheit. Dadurch werden jedoch andere Vereinfachungen und Näherungen notwendig. Es wird sowohl eine lineare und eine nichtlineare Stabilitätsanalyse als auch ein Vergleich mit den anderen beiden Modellen durchgeführt.

Abschließend werden in Kapitel 7 die Ergebnisse aus den Untersuchungen und den Vergleichen der einzelnen Modelle zusammengefasst. Zusätzlich werden noch offene Punkte diskutiert und interessante Aspekte für weitere Untersuchungen genannt.

## 2 Grundlagen zur Stabilitätsuntersuchung

Der betrachtete durchströmte Kanal wird durch autonome, nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben (siehe Kapitel 3). In einem solchen System können sich aus dem stationären Zustand selbsterregte Schwingungen entwickeln. Sie entstehen durch kleine Störungen des Grundzustandes in Form von Wellen. Das Aufklingen dieser Wellen lässt sich als kinetische Instabilität der stationären Lösung interpretieren. Aufgrund der Nichtlinearitäten können sich auch neue stabile, periodische Lösungen einstellen. In diesem Kapitel werden die notwendigen Begriffe, Grundlagen und nichtlinearen Näherungsmethoden zur Untersuchung der Stabilität des stationären Zustandes und zur Berechnung der davon abzweigenden Lösungen erläutert.

### 2.1 Selbsterregte Schwingungen

Die Gleichungen zur Beschreibung von selbsterregten Schwingungen sind stets nichtlinear und meist autonom [67]. Autonom bedeutet, dass kein explizit von der Zeit abhängiger Anregungsterm vorhanden ist (siehe z. B. [65]). Allerdings muss stets eine Energiequelle vorhanden sein, aus welcher der Schwinger in jedem Zyklus Energie entnehmen kann, um die Schwingungen aufrecht zu erhalten. Trotzdem wird von selbsterregten Schwingungen gesprochen, da ihr Auftreten und ihre Erscheinungsweise (z. B. die Frequenz) vollständig vom System bestimmt sind und nicht von außen aufgeprägt oder gesteuert werden [45]. Der Unterschied zu den freien Schwingungen liegt somit in dem Mechanismus ihrer Entstehung, der Aufrechterhaltung und dem Lösungsverhalten [67].

#### 2.1.1 Selbsterregungsfähige Systeme

Selbsterregungsfähige Systeme lassen sich nach Magnus et al. [67] in Speicher- und Schwinger-Typen unterteilen. Der Schwinger-Typ besteht grundsätzlich aus einem Schwinger, einer Energiequelle und einem Steuermechanismus. Außerdem ist auch eine (kleine) Anfangsstörung, z. B. in Form einer kleinen Auslenkung, erforderlich. In der Natur sind kleinste Störungen stets vorhanden, bei der mathematischen Behandlung müssen sie künstlich eingeführt werden. Für diese Arbeit sind vor allem die strömungserregten Schwingungen (englisch: *Flow Induced Vibrations*) relevant. Dabei stellt die Struktur den Schwinger, die Strömung die Energiequelle und die instationären Wechselwirkungen an der schwingenden Struktur den Steuermechanismus dar. Weitere Beispiele sind Schwingungen von umströmten Tragflügeln, freihängenden Leitungskabeln oder von Luft- oder Blutgefäßen (siehe z. B. [32]).

### 2.1.2 Energiehaushalt

In selbsterregungsfähigen Schwingungssystemen gibt es sowohl Energiequellen als auch Energiesenken. Aus diesem Grund trägt ein Blick auf den Energiehaushalt zum Verständnis des Erregungs-Mechanismus bei. Entscheidend ist dabei die Energiebilanz über einen Zyklus. Ist die Energiebilanz über einen Zyklus positiv, d. h. es wird Energie zugeführt, so findet eine Anfachung statt und der stationäre Zustand wird instabil (vgl. [45], [81]).

Im Folgenden wird die Berechnung des Energieeintrags am Beispiel des durchströmten Kanals skizziert. Die Energie, welche an einer bestimmten Position  $x$  über einen Zyklus vom Fluid auf die Struktur übergeht, wird unter Vernachlässigung von Schubspannungen durch

$$d(\Delta E) = \oint (-N(x, t)) \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} dt \quad (2.1)$$

beschrieben (siehe [3], [67]). Hierbei ist  $N(x, t)$  die durch das Fluid an der Stelle  $x$  aufgebraachte Normalkraft und  $q(x, t)$  die Auslenkung der Struktur aus dem stationären Zustand an der betreffenden Stelle. Betrachtet wird der Kontakt an einem infinitesimal kleinen Flächenelement  $da$ . Die Normalkraft ergibt sich als Produkt aus dieser Fläche und der Fluid-Spannung  $\tau_{yy}$  an der Wand. Die Eigenkreisfrequenz  $\omega$  wird über einen Zyklus als konstant angenommen und es folgt

$$d(\Delta E) = -\frac{da}{\omega} \int_0^{2\pi} \tau_{yy}(x, t)|_{y=q} \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} d(\omega t). \quad (2.2)$$

Für den Fall eines nicht viskosen Fluids gilt  $\tau_{yy} = -p_F$  (siehe dazu Abschnitt 3.2). Unter der Annahme, dass für die Druck-Fluktuation  $p = P \cos(kx + \omega t + \varphi_p)$  gelte, folgt für die Auslenkung der Struktur  $q = Q \cos(kx + \omega t + \varphi_q)$ . Hierbei stellt  $\varphi = \varphi_p - \varphi_q$  eine mögliche Phasenverschiebung zwischen Druck und Auslenkung dar. Eingesetzt ergibt sich die Energiebilanz

$$\begin{aligned} d(\Delta E) &= -daPQ \int_0^{2\pi} \cos(kx + \omega t + \varphi_p) \sin(kx + \omega t + \varphi_p - \varphi) d(\omega t) \\ &= daPQ\pi \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

über einen Zyklus an der Stelle  $x$ . Es ist ersichtlich, dass der Energieeintrag an einer bestimmten Position  $x$  lediglich von der Phasenverschiebung zwischen Druck und Auslenkung abhängt (siehe auch [35], [45], [114]). Für  $\sin(\varphi) > 0$  ist der Energieeintrag über einen Zyklus positiv und der stationäre Zustand wird instabil [3].

### 2.1.3 Lösungsverhalten

Bei der Untersuchung von dynamischen Systemen interessiert vor allem das asymptotische Verhalten von Lösungstrajektorien für  $t \rightarrow \infty$ , d. h. es wird direkt der eingeschwungene Zustand berücksichtigt [12].

Ein möglicher Lösungstyp ist die Gleichgewichtslösung, d. h. eine konstante Lösung für alle Zeiten. Im Rahmen dieser Arbeit wird dieser Zustand, für den alle Fluktuationen verschwinden, als stationärer Zustand bzw. Grundzustand bezeichnet. Im Phasendiagramm

stellt diese Lösung einen singulären Punkt dar. Bei selbsterregten Schwingungen gibt es aufgrund der nichtlinearen Terme jedoch weitere mögliche Lösungstypen.

Für periodische Lösungen mit der Periodendauer  $T$  gilt, dass die Lösungen zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t+T$  identisch sind. Eine isolierte periodische Lösung liegt vor, wenn in der unmittelbaren Nachbarschaft keine weitere geschlossene Lösung existiert [12]. Im autonomen Fall wird eine isolierte periodische Lösung als Grenzzykel bezeichnet. Im Phasenraum ergibt sich eine geschlossene Kurve.

Abbildung 2.1 zeigt exemplarisch zwei Phasenportraits von selbsterregten Schwingern. Auf der linken Seite ist ein Schwinger mit stabilem Grenzzykel dargestellt. Der stationäre Grundzustand ( $x_1 = x_2 = 0$ ) wird, aufgrund von positiver Energiezufuhr über einen Zyklus, instabil. Die Lösung entfernt sich von diesem Zustand und strebt asymptotisch einer neuen, periodischen Lösung (Grenzmenge) zu. Jede Trajektorie, die innerhalb des Grenzzykels im Anfachungsgebiet startet, geht mit der Zeit auf den Grenzzykel über. Jenseits des Grenzzykels liegt das sogenannte Dämpfungsgebiet und alle dort startenden Trajektorien laufen ebenfalls auf den Grenzzykel zu. Abbildung 2.1b zeigt einen instabilen Grenzzyklus. Hier sind Dämpfungs- und Anfachungsgebiet vertauscht. Eine Trajektorie, die innerhalb des Dämpfungsgebietes startet, strebt dem stabilen Grundzustand zu, während eine außerhalb startende Trajektorie sich von der geschlossenen Kurve entfernt.

Hier liegt der wesentliche Unterschied zwischen selbsterregten und freien Schwingungen. Auch bei freien, ungedämpften Schwingungen gibt es geschlossene Kurven im Phasenraum (siehe Abb. 2.2), allerdings ergeben sich dort für jede Anfangsbedingung konzentrische Kurven. Es sind somit Schwingungen mit beliebiger Amplitude möglich [67]. Bei freien Schwingungen kann nicht von isolierten periodischen Lösungen und somit auch nicht von Grenzzyklen gesprochen werden.

In Anlehnung an vorhergehende Untersuchungen von durchströmten Strukturen (siehe Abschnitt 1.1.2) werden in dieser Arbeit lediglich Gleichgewichtslösungen und periodische Lösungen betrachtet. Weitere Lösungstypen stellen quasi-periodische und chaotische Lösungen dar [12].

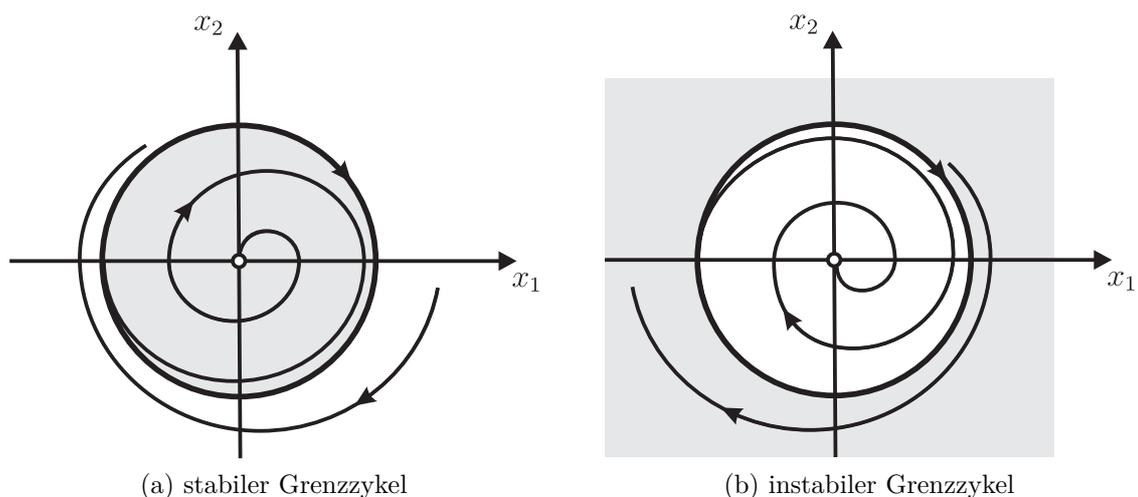


Abbildung 2.1: Phasenportraits von selbsterregten Schwingern

## 2.2 Grundbegriffe der Wellenausbreitung

Für eine grundlegende und detaillierte Einführung in die Wellenausbreitung wird auf die Lehrbücher [11], [18], [40], [58] verwiesen. In diesem Abschnitt sollen lediglich einige Grundlagen und Begrifflichkeiten vorgestellt werden, die zum Verständnis der Arbeit benötigt werden.

Die Ausbreitung einer Störung in einem kontinuierlichen Medium wird als Welle bezeichnet [58]. Ihre Funktion hängt von den Ortskoordinaten und der Zeit ab.

Lineare skalare, harmonische Wellen in einem eindimensionalen Medium werden durch den Wellenansatz

$$w(x, t) = W e^{i(kx + \omega t)}, \quad \text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.4)$$

beschrieben. Hierbei ist  $W$  die komplexe Amplitude,  $k$  die Wellenzahl,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\lambda$  die Wellenlänge. Der Ansatz wird in die lineare Gleichung des Wellenleiters eingesetzt. Dieses Einsetzen des Wellenansatzes entspricht einer Fouriertransformation in den Bildbereich (siehe [22], [101]). Nach dem Einsetzen und Ausklammern von  $W e^{i(kx + \omega t)}$  ergibt sich die sogenannte Dispersionsgleichung  $f_{disp}(k, \omega) = 0$ .

Je nach Ansatz wird eine reelle Wellenzahl (*Temporal Approach*) oder Frequenz (*Spatial Approach*) vorgegeben [22]. Bei Vorgabe der Frequenz wird untersucht, welche Wellenlängen bei einer bestimmten Frequenz auftreten können. Dieser Ansatz eignet sich besonders bei periodischer Anregung. Bei Vorgabe der Wellenzahl wird die Entwicklung einer bestimmten Welle über die Zeit untersucht. Hierzu wird die im Allgemeinen komplexe Frequenz  $\omega(k)$  mithilfe der Dispersionsgleichung bestimmt. Durch das Einsetzen von  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  in Gleichung (2.4) wird deutlich, dass es sich bei dem Realteil  $\omega_r$  um die tatsächliche Frequenz und bei dem Imaginärteil  $\omega_i$  um einen Dämpfungsanteil handelt:

$$w = W e^{ikx + i(\omega_r + i\omega_i)t} = W e^{-\omega_i t} e^{ikx + i\omega_r t}. \quad (2.5)$$

Mithilfe des Realteils kann die Phasengeschwindigkeit der Welle bestimmt werden [101]:  $c = \frac{\Re\{\omega\}}{k} = \frac{\omega_r}{k}$ . Diese Geschwindigkeit sagt aus, wie schnell und in welche Richtung sich ein bestimmter Punkt der Welle ausbreitet [18]. Bei Verwendung des Ansatzes (2.4) bedeutet ein positives Vorzeichen ( $c > 0$ ) eine Ausbreitung in negative  $x$ -Richtung [11]. Wenn die Phasengeschwindigkeit  $c$  von der Wellenzahl  $k$  abhängt, handelt es sich um eine dispersive Welle [73]. In einem Wellenleiter bewegen sich stets mehrere Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen. Bei dispersiven Wellen bewegen sich die Wellen mit unterschiedlichen Wellenzahlen im gleichen Medium somit unterschiedlich schnell.

In einem unendlich ausgedehnten Medium können alle Wellenzahlen vorkommen. In einem Medium mit periodischen Stützstellen (Abstand  $\ell$ ) und einfacher Lagerung können dagegen nur ganzzahlige Vielfache  $n$  von  $\frac{\pi}{\ell}$  auftreten:

$$k = n \frac{\pi}{\ell}. \quad (2.6)$$

Bei einer linearen Welle gilt das Superpositionsprinzip und die Lösung setzt sich additiv aus den Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen  $k$  zusammen.

Das Betrachten von komplexen Wellen ist rechnerisch vorteilhaft. Der Zusammenhang zwischen einer reellen Welle  $w_{reell}(x, t)$  und einer komplexen Welle  $w(x, t)$  mit komplexer Frequenz  $\omega$  lautet

$$w_{reell}(x, t) = \Re\{w(x, t)\} = W_{reell} e^{-\omega_i t} \cos(kx + \omega_r t + \varphi) \quad (2.7)$$

mit  $W = W_{reell} e^{i\varphi}$  und der möglichen Phasenverschiebung  $\varphi$  [58].

In der vorliegenden Arbeit werden auch nichtlineare Gleichungen und somit nichtlineare Wellen betrachtet. Während bei linearen Wellen lediglich  $\omega$  eine Funktion von  $k$  ist, hängt bei nichtlinearen Wellen auch die „Amplitude“ von  $\omega$  und  $k$  ab [58]. Da nur kleine Abweichungen von den linearen Lösungen untersucht werden, wird weiterhin von harmonischen Wellen, allerdings mit veränderter, zeitabhängiger Amplitude und Phasenverschiebung, ausgegangen. Es wird somit untersucht, wie sich die Nichtlinearitäten auf die Amplitude  $W$  bzw.  $W_{reell}$  und die Phase  $\varphi$  auswirken und ob sich periodische Lösungen mit konstanten Amplituden einstellen.

## 2.3 Stabilitätsbegriff

In den vorhergehenden Abschnitten wurde bereits von Stabilität gesprochen und aus dem alltäglichen Sprachgebrauch scheint die Bedeutung des Begriffs intuitiv klar. Jedoch gibt es, selbst wenn von der Verwendung im Alltag (im Sinne von Standfestigkeit, Haltbarkeit etc.) abgesehen wird, auch im Bereich der mathematischen Stabilitätstheorie keine eindeutige Definition des Stabilitätsbegriffs [85]. Das liegt daran, dass es sich bei der Stabilität nicht um eine objektive physikalische Größe handelt und sie beispielsweise von der Methode und dem gewählten Bezugssystem abhängt. Die hier verwendeten Begrifflichkeiten und Erläuterungen basieren auf den Büchern von Leipholz [65] und Riemer et al. [85]. Was alle Stabilitätskonzepte gemeinsam haben, ist die Definition eines ungestörten Grundzustandes (siehe hierzu die Trajektorie des Punktes  $A$  in Abb. 2.2). Durch eine Störung wird dieser Grundzustand in einen gestörten Zustand überführt (Trajektorie des Punktes  $B$ ). Anschließend wird ein Maß für die Störung und ein Maß für die Abweichung bzw. den Abstand des gestörten Zustandes vom Grundzustand eingeführt. Der Grundzustand gilt als stabil, wenn sich durch eine beschränkte Störung auch stets eine Abweichung innerhalb des Abstandsmaßes einstellt. Die Wahl der Abstandsmaße ist jedoch nicht eindeutig festgelegt und darin unterscheiden sich die Stabilitätsmethoden. Abbildung 2.2 soll zur Veranschaulichung der kinematischen und geometrischen Stabilitätsmethode dienen. Die ungestörte Trajektorie des Punktes  $A$  geht zum Zeitpunkt  $t_0$  durch den Punkt  $A(t_0)$ . Durch eine leicht veränderte Anfangsbedingung startet die gestörte Trajektorie im Punkt  $B(t_0)$ . Die dargestellte Phasenkurve, könnte beispielsweise zu einem ungedämpften, hängenden Pendel gehören. Das Pendel startet jeweils mit einer leicht abweichenden Anfangsauslenkung und anhand dieses gestörten Zustandes wird die Stabilität beurteilt:

- Es ist ersichtlich, dass die Trajektorien unabhängig von der Zeit stets den gleichen Abstand  $d = d(t_0)$  haben. Wird ein Schlauch mit einem kleinen Radius um die Grundlösung definiert, so bleibt die gestörte Lösung stets innerhalb dieses Schlauches. Nach der *geometrischen Stabilitätsmethode* ist die Grundlösung bahnstabil oder orbital stabil [108].

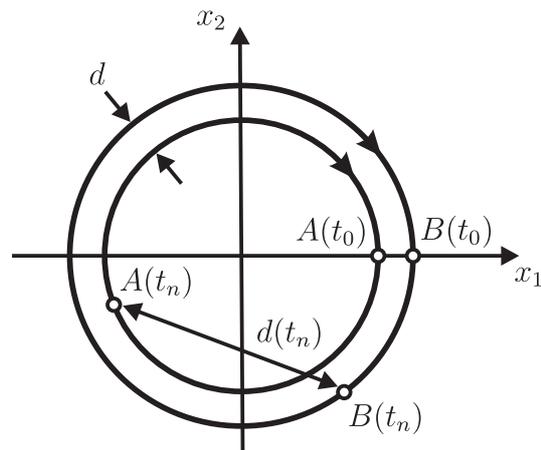


Abbildung 2.2: Trajektorien einer Grundlösung  $A$  und einer gestörten Lösung  $B$  im Phasenraum

- Andererseits verursacht die leicht veränderte Anfangsauslenkung eine gestörte Bewegung mit leicht veränderter Schwingdauer. Aufgrund dieser Anfangsstörung besitzen die Punkte  $A$  und  $B$  zu einem späteren Zeitpunkt  $t_n$  den Abstand  $d(t_n)$ . Die Betrachtung der gestörten Bewegung und die damit verbundene Wahl des zeitabhängigen Abstandsmaßes entspricht der *kinetischen Stabilitätsmethode*. Da es nicht gelingt diesen Abstand beliebig klein zu halten, ist die periodische Lösung nach dieser Definition nicht stabil.

Es wird sich in den späteren Kapiteln zeigen, dass bei dem betrachteten System dynamische Flatter-Instabilitäten auftreten können. Zur Stabilitätsanalyse wird daher eine kinetische Stabilitätstheorie benötigt [45]. Hier wird die Stabilitätstheorie nach Ljapunow verwendet:

- Eine ungestörte Bewegung  $\mathbf{x}_0(t)$  heißt stabil im Sinne Ljapunows, wenn zu jedem (beliebig kleinen)  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  gefunden werden kann, sodass bei Wahl einer begrenzten Anfangsstörung  $\Delta\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)$

$$|\Delta\mathbf{x}(t_0)| < \delta(\varepsilon) \tag{2.8}$$

der gestörte Zustand  $\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)$  für alle Zeiten  $t > t_0$  beschränkt ist und

$$|\Delta\mathbf{x}(t)| < \varepsilon \tag{2.9}$$

gilt.

- Kann ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  so gewählt werden, dass für eine begrenzte Anfangsstörung  $|\Delta\mathbf{x}(t_0)| < \delta(\varepsilon)$  die Störungen im Laufe der Zeit verschwinden

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\Delta\mathbf{x}(t)| = 0, \tag{2.10}$$

so ist die ungestörte Bewegung attraktiv.

- Die ungestörte Bewegung  $\mathbf{x}_0(t)$  ist asymptotisch stabil, wenn sie sowohl stabil als auch attraktiv ist [12].
- Die ungestörte Bewegung  $\mathbf{x}_0(t)$  heißt instabil, wenn sie nicht stabil ist.

Bisher wurde stets von einer begrenzten Anfangsstörung gesprochen, bezüglich der ein Grundzustand asymptotisch stabil oder instabil ist. In diesem Zusammenhang ist der Begriff des Einzugsbereichs zu erwähnen. Bei dem Lösungsverhalten der selbsterregten Schwingungen (siehe Abb. 2.1) wurde bereits gezeigt, dass sich je nach Anfangsstörung verschiedene Lösungen ergeben können. Umfasst dieser Einzugsbereich alle Punkte des Phasenraums bzw. alle Punkte von denen Bewegungen ausgehen können, so wird von Stabilität im Ganzen bzw. im Großen gesprochen. Wenn der Einzugsbereich hingegen nur einen kleinen Bereich einschließt, kann es sich um praktische Stabilität (instabil im Kleinen) oder praktische Instabilität (stabil im Kleinen) handeln (siehe z. B. [40], [85]).

## 2.4 Lineare Stabilitätsuntersuchung

Die erste Methode von Ljapunow umfasst alle Methoden, die zur Beurteilung der Stabilität die Lösungen der Störungsgleichungen betrachten [85]. Hierzu werden die Ansätze  $x_n = x_{0,n} + \Delta x_n$  in die Differentialgleichungen des zu untersuchenden Systems eingesetzt, um die Gleichungen für die Störungen  $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$  zu finden.

Für lineare Störungsgleichungen werden zur Abschätzung der Stabilität die charakteristischen Größen verwendet. Diese sind bei Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten die charakteristischen Exponenten, bei periodischen Koeffizienten die charakteristischen Multiplikatoren und bei beliebigen Koeffizienten die charakteristischen Zahlen [85]. Bei nichtlinearen Gleichungen können die Störungsgleichungen der Ersten Näherung ermittelt werden. Das bedeutet, dass die nichtlinearen Ausgangsgleichungen um die auf Stabilität zu untersuchende Lösung linearisiert werden. Dadurch kann aber nur auf asymptotische Stabilität oder Instabilität geschlossen werden.

Beim durchströmten Kanal ergeben sich nach Linearisierung der Fluktuations-Gleichungen um den stationären Grundzustand lineare partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Somit genügt zur Stabilitätsuntersuchung eine Betrachtung der charakteristischen Exponenten. Die Fluktuationen stellen die gestörten Lösungen dar und können als Wellen mit dem Ansatz  $\Delta \mathbf{x}(x, t) = \mathbf{X} e^{ikx+i\omega t}$  aus Abschnitt 2.2 beschrieben werden. Bei der kinetischen Stabilitätstheorie wird das zeitliche Verhalten der gestörten Lösung untersucht und somit ist  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  der zu untersuchende charakteristische Exponent. Werden Real- und Imaginarteil von  $\omega$  in den Wellenansatz  $\Delta \mathbf{x}(x, t) = \mathbf{X} e^{ikx+i\omega_r t} e^{-\omega_i t}$  eingesetzt, so ist ersichtlich, dass die Lösung für negative Imaginärteile aufklingt. Dies steht scheinbar im Gegensatz zu den Aussagen zur Stabilität in vielen Büchern (z. B. [65], [85]) und liegt an dem anderen Lösungsansatz. Die Verwendung des Wellenansatzes ist vor allem in der Literatur zu strömungsinduzierten Schwingungen weit verbreitet (siehe [37], [60]).

Nach Einsetzen des Ansatzes in die linearisierte Gleichung ergibt sich die sogenannte Dispersionsgleichung, welche der charakteristischen Gleichung bei diskreten Systemen entspricht. Hieraus kann der charakteristische Exponent  $\omega$  als Funktion der Systemparameter und der Wellenzahl  $k$  bestimmt werden. In einem unbegrenzten System können prinzipiell

alle Wellenzahlen  $k$  auftreten, bei periodischen Stützstellen dagegen nur noch bestimmte (siehe Abschnitt 2.2). Das bedeutet aber auch, dass, im Gegensatz zu begrenzten Systemen, prinzipiell abzählbar unendlich viele charakteristische Exponenten möglich sind. Daher muss die Stabilität entweder für alle  $k$  überprüft oder die Stabilität des Grundzustandes bezüglich einer bestimmten Störung der Wellenzahl  $k$  untersucht werden.

Für die Stabilität im Sinne von Ljapunow bezüglich einer Störung mit Wellenzahl  $k$  gilt bei linearen Störungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten und unter Verwendung des Wellenansatzes:

- Besitzt der charakteristische Exponent  $\omega(k)$  einen *positiven Imaginärteil*, dann ist die ungestörte Gleichgewichtslage  $\mathbf{x}_0$  *asymptotisch stabil*.
- Besitzt der charakteristische Exponent  $\omega(k)$  einen *negativen Imaginärteil*, dann ist die ungestörte Gleichgewichtslage  $\mathbf{x}_0$  *instabil*. Im Falle eines verschwindenden Realteils, handelt es sich um *monotone Instabilität (Divergenz)*. Ansonsten handelt es sich um *oszillatorische Instabilität (Flattern)* [85].
- Hat der charakteristische Exponent dagegen einen *verschwindenden Imaginärteil*, so liegt eine nicht-hyperbolische Gleichgewichtslage vor. Hier ist asymptotische Stabilität ausgeschlossen.

Im dritten Fall mit verschwindenden Imaginärteil muss anhand der nichtlinearen Gleichungen untersucht werden, ob die Lösung schwach stabil oder instabil ist. Mit der ersten Methode nach Ljapunow kann nur über die Stabilität von hyperbolischen Gleichgewichtslagen entschieden werden [12].

Bei linearen bzw. linearisierten Störungsgleichungen mit nicht konstanten, aber periodischen Koeffizienten werden die charakteristischen Multiplikatoren untersucht. Hierzu wird die sogenannte Floquet-Theorie verwendet [85]. Dieser Typ von Gleichungen ergibt sich bei Linearisierung der Störungsgleichungen um eine periodische Lösung (Grenzzykel). Die gefundene nichtlineare Lösung kann auf Stabilität im Sinne von Ljapunow untersucht werden. Lineare Störungsgleichungen mit beliebigen Koeffizienten haben nach Riemer et al. [85] eine geringe praktische Bedeutung; Stabilitätskriterien fehlen weitgehend.

## 2.5 Nichtlineare Stabilitätsuntersuchung

Die Analyse der, um den zu untersuchenden Zustand, linearisierten Gleichungen erlaubt Vorhersagen, ob eine hyperbolische Gleichgewichtslage stabil oder instabil ist. Dabei kann nur das Verhalten in kleinen Bereichen um diese Gleichgewichtslage betrachtet werden. Was jedoch nach dem Stabilitätsverlust passiert und ob es außerhalb der unmittelbaren Umgebung des Linearisierungspunktes weitere Lösungen gibt, kann anhand der linearisierten Gleichungen nicht ermittelt werden. Dafür müssen die nichtlinearen Terme berücksichtigt werden und es kommen spezielle Berechnungsmethoden zum Einsatz.

Ein typisches Beispiel ist in Abbildung 2.1a zu sehen. Aus den linearisierten Gleichungen folgt, dass der singuläre Punkt  $x_{1,s} = x_{2,s} = 0$  instabil ist. Mithilfe von nichtlinearen Methoden kann ein Grenzzykel berechnet werden. Der stationäre Zustand ist instabil, klingt

aber nicht, wie durch die Untersuchung der linearisierten Gleichungen prognostiziert, unbeschränkt auf. Im Gegensatz dazu, zeigt Abbildung 2.1b das Verhalten eines Schwingers, bei dem anhand der linearisierten Gleichungen eine stabile Ruhelage ermittelt wurde. Im Kleinen stimmt diese Aussage, denn alle Lösungen die innerhalb des Grenzykels starten, streben dieser Ruhelage zu. Trajektorien die außerhalb des Grenzykels starten, entfernen sich jedoch von selbigem.

### 2.5.1 Bifurkationstheorie

Ein dynamisches, autonomes System wird durch Differentialgleichungen mit den Parametern  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots)$  beschrieben. Die Lösungstypen aus Abbildung 2.1 könnten prinzipiell beide zum selben System, mit veränderten Systemparametern, gehören. Die Änderung des Lösungsverhaltens aufgrund einer Parameter-Variation wird Bifurkation genannt. Durch eine stetige Variation eines oder mehrerer sogenannter Bifurkationsparameter ändert sich an einem bestimmten Punkt die Anzahl der Lösungen und häufig auch das Lösungsverhalten (siehe [12], [58]). Insbesondere können Wechsel zwischen stabilen und instabilen Lösungen stattfinden. Der Satz von Parametern, bei dem die Bifurkation auftritt, wird Bifurkationspunkt genannt [103]. In der vorliegenden Arbeit werden Bifurkationen der Gleichgewichtslösungen betrachtet, wodurch sich am Bifurkationspunkt die Anzahl der „instabilen“ charakteristischen Exponenten ändert. Bei Bifurkationen von periodischen Lösungen ändert sich die Anzahl der „instabilen“ Floquet-Multiplikatoren [12].

Bifurkationen treten nicht in jedem System auf, sondern nur bei jenen mit struktureller Instabilität (siehe [106], [108]). Das bedeutet, dass sich das Lösungsverhalten des Systems bei Variation eines Parameters ändert. Diese Instabilität ist nicht zu verwechseln mit der zuvor definierten Stabilität nach Ljapunov. Bei dem Begriff nach Ljapunow wird die Stabilität eines Zustandes bezüglich einer Störung desselben beurteilt. Ein strukturell stabiles System kann instabile stationäre Lösungen im Sinne von Ljapunow besitzen. Ihre Anzahl oder Art ändert sich aber nicht bei Änderung von Systemparametern.

Ein System  $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})$  ist strukturell instabil, wenn ein singulärer Punkt  $\boldsymbol{x}_s$  nicht-hyperbolisch ist [106]. Ein singulärer Punkt ist nicht-hyperbolisch, wenn die Jacobi-Matrix  $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{\eta}) = \left. \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})}{\partial x_m} \right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_s}$  Eigenkreisfrequenzen mit verschwindendem Imaginärteil besitzt.

Wenn ein System strukturell instabil ist, muss im nächsten Schritt die Codimension der Bifurkation bestimmt werden [118]. Die Codimension einer Bifurkation gibt die kleinste Dimension des Parameterraumes an, mit der eine Bifurkation beschreibbar ist (siehe [39], [108]). Codimension 0 bedeutet, dass es keine Bifurkation gibt und das System somit strukturell stabil ist. Bei Codimension-1-Bifurkationen gibt es einen Bifurkationsparameter. Zur Bestimmung der Codimension kann der Defekt der Jacobi-Matrix an der Stelle des singulären, nicht-hyperbolischen Punktes betrachtet werden. Der Defekt einer  $(n \times n)$ -Matrix  $\boldsymbol{A}$  entspricht der Differenz der Dimension  $n$  und dem Rang der Matrix:  $\text{def}(\boldsymbol{A}) = n - \text{rang}(\boldsymbol{A})$ , vgl. [109]. Praktisch bedeutet dies, dass für den Fall einer am Bifurkationspunkt singulären Jacobi-Matrix die Unterdeterminanten zur Bestimmung der Codimension entscheidend sind. Gibt es eine von null verschiedene Unterdeterminante der Ordnung  $n-1$ , so hat die Bifurkation die Codimension 1. Bei oszillatorischen Instabilitäten

ist die Jacobi-Matrix nichtsingulär, da nicht die gesamten Eigenkreisfrequenzen, sondern nur deren Imaginärteile null sind. Doch auch hier gilt Codimension 1, falls eine von null verschiedene Unterdeterminante der Ordnung  $n-1$  existiert. Dies kann durch Überführung auf Polarkoordinaten gezeigt werden [106], wodurch sich verschwindende Eigenkreisfrequenzen und eine singuläre Matrix ergeben (siehe Abschnitt zur Hopf-Bifurkation). In der vorliegenden Arbeit treten Codimension-1-Bifurkationen auf. Nach Thomsen [106] können dabei vier verschiedene Bifurkations-Typen unterschieden werden: Pitchfork-, Sattelknoten-, Transkritische- und Hopf-Bifurkation. Im Folgenden werden zwei, zur Untersuchung des stationären Grundzustandes relevante, Bifurkationen vorgestellt.

### Pitchfork-Bifurkation

Die Normalform dieser Bifurkation ist durch

$$\dot{w} = \eta w \pm w^3 \quad (2.11)$$

gegeben und es gilt  $\dot{(\ )} = \frac{d(\ )}{dt}$  [106]. Hierbei ist  $w$  eine skalare, zeitabhängige Lösung und  $\eta$  der Bifurkationsparameter. Die singulären Punkte liegen bei  $w_s = 0$  und  $w_s^2 = \mp \eta$  und

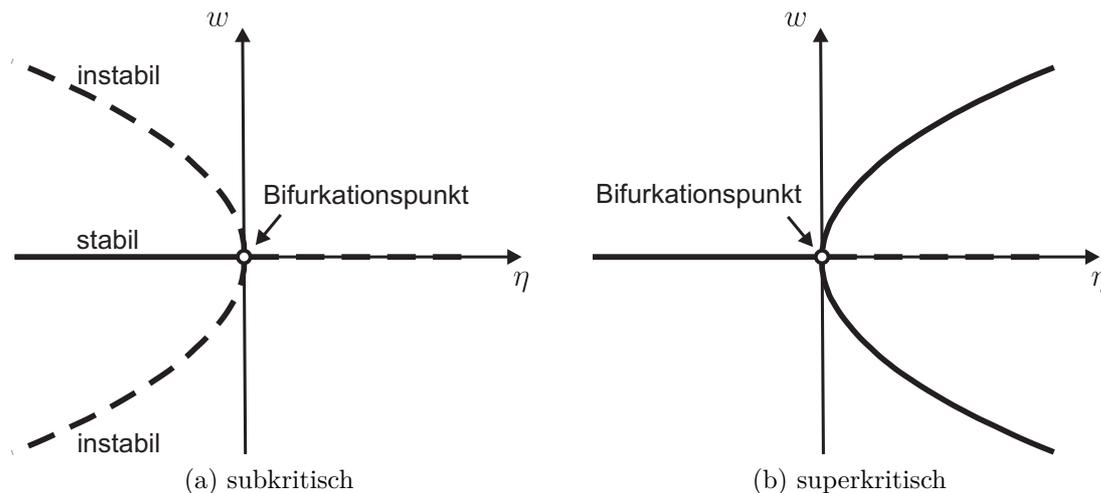


Abbildung 2.3: Pitchfork-Bifurkationen

die Jacobi-Matrix der Gleichung lautet dafür  $J(w_s, \eta) = \eta \pm 3w_s^2$ . Für  $\eta = 0$  fallen die singulären Punkte zusammen ( $w_s = 0$ ) und sind nicht-hyperbolisch, es handelt sich um den Bifurkationspunkt. Die Verläufe der singulären Punkte über dem Bifurkationsparameter sind in Abbildung 2.3 dargestellt. Bei positivem Vorzeichen des kubischen Terms ergibt sich eine subkritische Bifurkation und bei negativem Vorzeichen eine superkritische Bifurkation. Anhand der Eigenkreisfrequenzen der Jacobi-Matrix kann bestimmt werden, ob die Lösungsäste stabil (positiver Imaginärteil) oder instabil (negativer Imaginärteil) sind. Die Eigenkreisfrequenzen sind hier stets rein imaginär und somit handelt es sich bei der Instabilität der einzelnen Lösungen um eine nicht-oszillatorische Divergenz-Instabilität. Am Bifurkationspunkt sind die Eigenkreisfrequenzen null.

Es ist deutlich zu erkennen, wie sich die Lösungen am Bifurkationspunkt verzweigen und

sich sowohl die Anzahl der Lösungen als auch ihre Stabilität ändert.

Das Bifurkationsdiagramm stellt die Grenzmenge der Lösungen dar, welche sich nach einer bestimmten Zeit einstellen. Die stabilen und instabilen Äste markieren somit das Einzugsgebiet der einzelnen Lösungen. Anhand des Beispiels einer subkritischen Bifurkation wird in Abb. 2.4 deutlich, welchem Lösungsast eine anfänglich gestörte Lösung für  $t \rightarrow \infty$  zustrebt. Hier wird auch die zuvor erwähnte Stabilität im Kleinen ersichtlich. Denn die Grundlösung ist für  $\eta < 0$  nur gegenüber kleinen Störungen stabil.

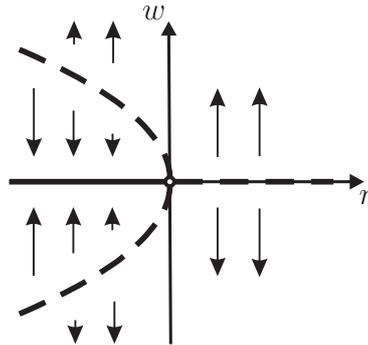


Abbildung 2.4: Einzugsgebiete der Lösungen einer subkritischen Bifurkation

### Hopf-Bifurkation

Bezeichnend für eine Hopf-Bifurkation ist, dass aus einer Gleichgewichtslage am Bifurkationspunkt ein Grenzzykel und somit eine periodische Bewegung entsteht. Die Normalform dieser Bifurkation besteht aus einem Paar von Gleichungen [106]:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1 \left( \eta \mp (x_1^2 + x_2^2) \right), \quad (2.12)$$

$$\dot{x}_2 = +x_1 + x_2 \left( \eta \mp (x_1^2 + x_2^2) \right). \quad (2.13)$$

Das Vorzeichen vor den kubischen Termen entscheidet über eine sub- (+) oder superkritische (−) Bifurkation.

Hier wird exemplarisch die superkritische Hopf-Bifurkation diskutiert. Der singuläre Punkt  $x_{1,s} = x_{2,s} = 0$  beschreibt den Gleichgewichtszustand. Die Jacobi-Matrix, d. h. die Systemmatrix der linearisierten Gleichungen, lautet dafür

$$\mathbf{J}(x_{1,s}, x_{2,s}, \eta) = \begin{pmatrix} \eta & -1 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Daraus ergibt sich das komplexe Eigenkreisfrequenz-Paar  $\omega = -i\eta \pm 1$ . Für  $\eta = 0$  gilt  $\omega = \pm 1$  und daher ist der singuläre Punkt nicht-hyperbolisch. Es handelt sich somit um den Bifurkationspunkt. Die Jacobi-Matrix ist an diesem Punkt zwar nichtsingulär, es handelt sich aber um eine Codimension-1-Bifurkation. Durch Transformation auf Polarkoordinaten entsteht eine singuläre Jacobi-Matrix mit Defekt 1. Für  $\eta < 0$  ist die Ruhelage stabil und folglich für  $\eta > 0$  instabil. Als weitere singuläre Lösung ergibt sich  $x_{1,s}^2 + x_{2,s}^2 = \eta$ .

Damit wird der entstehende Grenzzykel mit Radius  $\sqrt{\eta}$  beschrieben. Für jeden Wert des Parameters  $\eta$  stellt sich nach gewisser Zeit eine Schwingung mit dieser Amplitude ein. Durch Auftragen über  $\eta$  ergibt sich ein dreidimensionales Gebilde, auf dessen Oberfläche die Grenzmenge der Lösungen liegt. Diese ist auf der linken Seite von Abbildung 2.5 dargestellt.

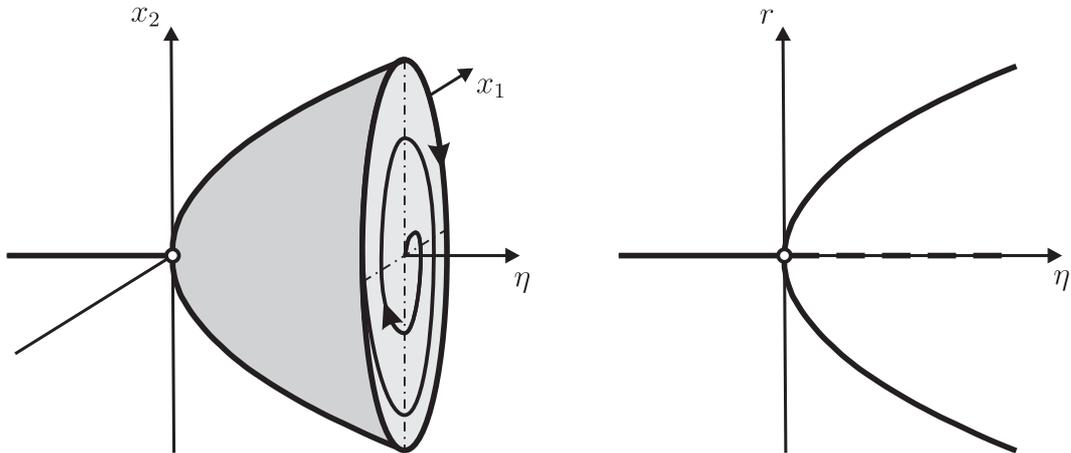


Abbildung 2.5: Superkritische Hopf-Bifurkation im dreidimensionalen  $(x_1, x_2, \eta)$ - und zweidimensionalen  $(r, \eta)$ -Raum

Anschaulicher wird diese Bifurkation durch eine Transformation auf Polarkoordinaten  $(x_1 = r \cos \Theta, x_2 = r \sin \Theta)$ , wodurch sich die Gleichungen

$$\dot{\Theta} = 1, \tag{2.15}$$

$$\dot{r} = \eta r - r^3 \tag{2.16}$$

ergeben [106]. Die Kreisfrequenz der Schwingung ist konstant und die Amplitude wird durch dieselbe Gleichung wie die der superkritischen Pitchfork-Bifurkation beschrieben. Durch Transformation auf Polarkoordinaten kann die Amplitude einer Hopf-Bifurkation durch eine Pitchfork-Bifurkation beschrieben werden. Allerdings wird hier der Gleichgewichtszustand aufgrund einer oszillatorischen Instabilität verlassen.

### 2.5.2 Nichtlineare Berechnungsmethoden

Im Folgenden werden zwei Näherungsverfahren zur Berechnung der Lösungen der nichtlinearen Gleichungen vorgestellt.

Das Vorgehen wird jeweils anhand der Gleichung  $\ddot{w} + \dot{w}(\varepsilon w^2 - (\eta - 1)) + w = 0$  veranschaulicht. Hierbei ist  $\varepsilon$  ein beliebiger konstanter Parameter und  $\eta$  der Bifurkationsparameter. Es kann gezeigt werden, dass der Bifurkationspunkt und somit der kritische Zustand bei  $\eta_{krit} = 1$  liegt. Eine Abweichung vom Bifurkationspunkt um  $\varepsilon \Delta \eta$  wird daher durch  $\eta = \eta_{krit} + \varepsilon \Delta \eta$  beschrieben. Es ergibt sich die sogenannte Van der Pol Gleichung

$$\ddot{w} + \varepsilon \dot{w} (w^2 - \Delta \eta) + w = 0. \tag{2.17}$$

Durch Transformation auf ein System 1. Ordnung ergeben sich mit  $x_1 = w$  und  $x_2 = \dot{w}$  die Gleichungen

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{2.18}$$

$$\dot{x}_2 = -\varepsilon x_2 (x_1^2 - \Delta\eta) - x_1. \tag{2.19}$$

Die Gleichgewichtslage liegt bei  $x_{1,s} = x_{2,s} = 0$  und die Jacobi-Matrix an diesem Punkt lautet

$$\mathbf{J}(x_{1,s}, x_{2,s}, \Delta\eta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \Delta\eta \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Das System ist strukturell instabil, da die Imaginärteile der Eigenkreisfrequenzen der Jacobi-Matrix

$$\omega_{1,2} = -i\frac{\Delta\eta}{2} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\eta}{2}\right)^2} \tag{2.21}$$

an dem singulären Punkt mit  $\Delta\eta = 0$  verschwinden. Am Bifurkationspunkt existiert ein rein reelles Eigenkreisfrequenz-Paar und es liegt eine Hopf-Bifurkation vor. Zur Berechnung der an diesem Punkt abzweigenden Lösungen werden nichtlineare Näherungsverfahren benötigt.

### Multiple-Scales-Methode

Die *Multiple-Scales*-Methode ist eine spezielle Art der Störungsrechnung und stellt eine Erweiterung der regulären Störungsrechnung dar (siehe z. B. [85]). Bei der Störungsrechnung wird im Allgemeinen die Näherungslösung eines gestörten Problems gesucht, welches nur schwach von dem zugehörigen ungestörten Problem abweicht. Dies wird durch den kleinen Störparameter  $\varepsilon \ll 1$  sichtbar. Die Lösung des ungestörten Problems muss dabei bekannt sein. Die gestörten Gleichungen können anschließend durch Entwicklung der Lösung in einer Potenzreihe in dem kleinen Parameter näherungsweise gelöst werden. Nach Riemer et al. [85] lässt sich der Lösungsgedanke wie folgt veranschaulichen:

Das gestörte Problem  $L(w)$  wird durch die Gleichung

$$L(w) = K + \varepsilon N(w) \tag{2.22}$$

beschrieben und die Lösung durch

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{2.23}$$

approximiert. Hierbei stellen  $L$  und  $N$  entweder Differential- oder algebraische Ausdrücke dar,  $K$  ist eine Konstante und die Lösung des ungestörten Problems  $L(w_0) = K$  für  $\varepsilon = 0$  wird als bekannt vorausgesetzt. Nach Einsetzen des Ansatzes und Sortierung nach den einzelnen Ordnungen von  $\varepsilon$  ergibt sich ein rekursiv lösbares Gleichungssystem. Hierbei können Säkularterme auftreten [85]. Denn in dem rekursiven Gleichungssystem stellen

die bereits berechneten Lösungen aus den kleineren Ordnungen in einer höheren Ordnung Anregungsterme dar. Dabei kann es zu einer Anregung mit der Eigenkreisfrequenz kommen und die Lösung würde mit der unabhängigen Variablen aufklingen. Bei Annahme von Lösungen mit endlicher Amplitude müssen daher die sogenannten Säkularterme, welche diese Resonanzanregung enthalten, verschwinden. Aus dieser Forderung ergeben sich weitere Gleichungen zur Bestimmung der gestörten Lösung.

Eine wesentliche Voraussetzung für diese Methode ist, dass die ungestörte Lösung ( $\varepsilon = 0$ ) den wesentlichen Charakter der gestörten Lösung wiedergibt. Bei einem schwach gedämpften Schwinger (siehe z. B. [103]) ist diese Voraussetzung beispielsweise nicht erfüllt. Die ungestörte Lösung ist ungedämpft und klingt somit nicht ab. In diesem Fall bewirken auch die Korrekturterme kein Abklingen der Lösung und das Lösungsverhalten wird nicht korrekt wiedergegeben. Der Grund liegt darin, dass bei diesem System zwei Zeitskalen existieren. Die „ungedämpfte“ Schwingung findet auf einer schnellen Zeitskala statt und nur diese wird bei der regulären Störungsrechnung beachtet. Das Abklingen der Amplitude findet hingegen auf einer langsamen Zeitskala statt.

Genau dieser Sachverhalt wird bei der *Multiple-Scales*-Methode berücksichtigt. Bei zwei Zeitskalen wird auch der Begriff *Two-Timing* verwendet [103]. Der deutsche Begriff Multiskalen-Ansatz wird häufig nicht im Zusammenhang mit Störungsrechnung verwendet und daher wird hier der englische Ausdruck bevorzugt. Bei der *Multiple-Scales*-Methode werden verschiedene Zeitskalen berücksichtigt. Die Idee besteht darin, dass eine langsame Zeitskala in Bezug auf eine schnelle Zeitskala als konstant angesehen werden kann [103]. Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Zeitskalen einzuführen (siehe [46], [72]), z. B. die hier verwendete:

$$T_n = \varepsilon^n t \quad \text{mit} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Durch Einführung dieser neuen Zeitskalen ergibt sich für die zeitliche Ableitung

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial T_0} \frac{dT_0}{dt} + \frac{\partial w}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial T_2} \frac{dT_2}{dt} + \dots = \frac{\partial w}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial w}{\partial T_2} + \dots \quad (2.25)$$

Die Lösung kann folglich von den verschiedenen Zeitskalen abhängen. Das prinzipielle Vorgehen beim Lösen der gestörten Gleichungen ist analog zur regulären Störungsrechnung und wird am Beispiel der Van der Pol Gleichung (2.17) beschrieben.

Für  $\varepsilon \ll 1$  wird die Lösung wie folgt entwickelt:  $w = w_0 + \varepsilon w_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Unter Verwendung der Zeitskalen  $T_0 = t$  und  $T_1 = \varepsilon t$  ergeben sich nach Sortierung folgende rekursiv lösbare Gleichungen:

$$\mathcal{O}(\varepsilon^0) : \quad \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0^2} + w_0 = 0, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon^1) : \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + w_1 = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial T_0 \partial T_1} - \frac{\partial w_0}{\partial T_0} (w_0^2 - \Delta \eta). \quad (2.27)$$

Aus der ersten Gleichung folgt  $w_0(T_0, T_1) = W_0(T_1) \cos(T_0 + \varphi(T_1))$ . Eingesetzt in die Gleichung der ersten Ordnung und unter Auswertung der Produkte der trigonometrischen Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^2} + w_1 &= 2 \left( \frac{\partial W_0}{\partial T_1} \sin(T_0 + \varphi) + W_0 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} \cos(T_0 + \varphi) \right) \\ &+ \frac{W_0^3}{4} \left( \sin(T_0 + \varphi) + \sin(3(T_0 + \varphi)) \right) - W_0 \sin(T_0 + \varphi) \Delta\eta. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Für nicht aufklingende Lösungen müssen die Säkularterme und daher die Koeffizienten vor  $\sin(T_0 + \varphi)$  und  $\cos(T_0 + \varphi)$  verschwinden:

$$\frac{\partial W_0}{\partial T_1} = \frac{\Delta\eta}{2} W_0 - \frac{1}{8} W_0^3, \quad (2.29)$$

$$2W_0 \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = 0. \quad (2.30)$$

Die Amplitudengleichung (2.29) beschreibt eine superkritische Pitchfork-Bifurkation (vgl. Gleichung (2.11)). Der Bifurkationspunkt, der bei  $\Delta\eta = 0$  und  $W_0 = \pm 2\sqrt{\Delta\eta}$  liegt, stellt die stationäre, nichttriviale Lösung dar. Aus Gleichung (2.30) folgt für nichttriviale Lösungen  $\varphi(T_1) = \varphi = \text{konst.}$  und für  $t \rightarrow \infty$  stellt sich  $w_0(t) = 2\sqrt{\Delta\eta} \cos(t + \varphi)$  ein.

### Methode der Harmonischen Balance

Die Methode der Harmonischen Balance (siehe z. B. [67]) geht im Unterschied zu der zuvor besprochenen Methode nicht von kleinen Störungen aus und ist diesbezüglich weniger eingeschränkt. Allerdings werden hier stets harmonische Lösungen angenommen. Für harmonische Schwingungen und Wellen sind die Lösungen somit exakt. Doch auch bei stark abweichenden Dreiecks- oder Rechtecksschwingungen lassen sich nach Magnus et al. [67] noch brauchbare Abschätzungen machen.

Gesucht wird eine Lösung für die autonome, nichtlineare Differentialgleichung  $N(w(t)) = 0$ . Hierbei stellt  $N$  einen Differential-Operator dar. Unter der Annahme von harmonischen Lösungen (mit konstanter Kreisfrequenz  $\omega$ ) wird durch die Entwicklung der Funktion  $N(w(t))$  in ihre Fourierreihe  $\tilde{N}(\omega t)$  eine harmonische Analyse durchgeführt [14]:

$$\tilde{N}(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (2.31)$$

Durch das Abbrechen nach endlich vielen Gliedern wird diese Funktion durch das trigonometrische Polynom  $\tilde{N}_m(\omega t)$  approximiert:

$$\tilde{N}(\omega t) \approx \tilde{N}_m(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t). \quad (2.32)$$

Die einzelnen Fourier-Koeffizienten können über

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(\tilde{w}_m(\omega t)) \cos(n\omega t) d(\omega t), \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (2.33)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(\tilde{w}_m(\omega t)) \sin(n\omega t) d(\omega t), \quad \text{mit } n = 1, 2, \dots, m \quad (2.34)$$

bestimmt werden. Hierbei ist  $\tilde{w}_m(\omega t)$  die harmonische Lösung der Differentialgleichung und für diese Lösung wird, entsprechend der Anzahl  $m$  der berücksichtigten Glieder der Fourierreihe, ein Ansatz gewählt. Für die zu lösende Differentialgleichung gilt  $N(w(t)) = 0$  und daher muss auch für die Approximation  $\tilde{N}_m(\omega t) = 0$  gelten. Es folgt für alle Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$ :

$$a_n \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.35)$$

$$b_n \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.36)$$

Es werden Funktionen betrachtet, für die  $a_0 = 0$  gilt (siehe [67]). Die Gleichungen für die restlichen  $2m$  Koeffizienten ergeben die Bestimmungsgleichungen für die  $2m$  Unbekannten des Lösungsansatzes.

Im Folgenden wird das Vorgehen für  $m = 1$  anhand der Van der Polschen Gleichung (2.17) illustriert. Die Approximation der Funktion lautet in diesem Fall

$$\tilde{N}_1(\omega t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \quad (2.37)$$

und als Ansatz wird  $\tilde{w}_1(\omega t) = W_1 \cos(\omega t)$  gewählt. Hierbei ist  $W_1$  die noch zu bestimmende Amplitude und  $\omega$  die unbekannte Eigenkreisfrequenz. Aus den Gleichungen für  $a_1 = 0$  und  $b_1 = 0$  können die zwei Unbekannten  $W_1$  und  $\omega$  bestimmt werden:

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(\tilde{w}_1(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t) = W_1(1 - \omega^2) \stackrel{!}{=} 0, \quad (2.38)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N(\tilde{w}_1(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{W_1 \varepsilon \omega}{4} (4\Delta\eta - W_1^2) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.39)$$

Aus der ersten Gleichung folgt für die nichttriviale Eigenkreisfrequenz  $|\omega| = 1$  und aus der zweiten Gleichung ergibt sich für  $\Delta\eta > 0$  als Amplitude der stationären Lösung:  $|W_1| = 2\sqrt{\Delta\eta}$ . Das Ergebnis stimmt bis auf eine konstante Phasenverschiebung mit dem anhand der *Multiple-Scales*-Methode genäherten Ergebnis überein. Für  $\Delta\eta < 0$  gibt es keine Lösung für eine reelle Amplitude. Somit stellt sich nur für positive Werte von  $\Delta\eta$  bei beliebigen Anfangsbedingungen nach einer gewissen Zeit eine Schwingung mit konstanter Amplitude und Frequenz ein.

Im Gegensatz zur Störungsrechnung ist die Annahme  $\varepsilon \ll 1$  für dieses Lösungsverfahren nicht nötig. Wird jedoch der mittlere quadratische Fehler aufgrund der Approximation

$$J_m = \int_{-\pi}^{\pi} (N(\tilde{w}_m(\omega t)) - \tilde{N}_m(\omega t))^2 d(\omega t) \quad (2.40)$$

betrachtet, so kann gezeigt werden, dass dieser sowohl von  $\varepsilon$  als auch von  $\Delta\eta$  abhängt. Somit ist die Näherungslösung nahe am Bifurkationspunkt am besten.

Häufig ist die Berücksichtigung von nur einem Glied ausreichend. Falls der Fehler aufgrund der Approximation jedoch zu groß ist, müssen weitere Glieder berücksichtigt werden. In dieser Arbeit ist eine Approximation mit  $m = 1$  nicht ausreichend und daher wird  $m = 2$  verwendet. Für den Ansatz gilt dann  $\tilde{w}_2(\omega t) = W_1 \cos(\omega t) + W_2 \cos(2\omega t) + W_3 \sin(2\omega t)$ . Hierbei wird eine mögliche Phasenverschiebung bei dem höherharmonischen Anteil berücksichtigt. Die  $2m = 4$  Unbekannten sind folglich  $W_1, W_2, W_3$  und  $\omega$  und können über  $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$  bestimmt werden. Das sich ergebende nichtlineare Gleichungssystem ist häufig nur noch numerisch lösbar.

### 3 Grundlagen zur Beschreibung des durchströmten Kanals

Gegenstand der Untersuchungen in dieser Arbeit ist ein unendlich langer, durchströmter Kanal (siehe Abb. 3.1). Die obere Wand des Kanals wird starr und die untere Wand flexibel angenommen. Innerhalb der impermeablen Wände strömt ein Fluid mit konstanter Grundströmungs-Geschwindigkeit.

Es wird von einem in  $\hat{z}$ -Richtung ausreichend breiten Kanal und zweidimensionalen Störungen ausgegangen, sodass eine ebene Modellierung gerechtfertigt ist (siehe [20], [87]). Die abhängigen Variablen des Fluids (Dichte  $\hat{\rho}_F$ , Druck  $\hat{p}_F$ , Geschwindigkeiten  $\hat{u}_F$  und  $\hat{v}_F$ ) hängen somit von den Ortskoordinaten  $\hat{x}$  und  $\hat{y}$  und der Zeit  $\hat{t}$  ab, die Variable der Struktur (Auslenkung  $\hat{q}_S$ ) hängt nur von  $\hat{x}$  und  $\hat{t}$  ab. Der Übersichtlichkeit halber wird diese Abhängigkeit der Variablen im Folgenden nicht explizit aufgeführt. Als schlank wird in dieser Arbeit ein Kanal bezeichnet, dessen Ausdehnung in  $\hat{y}$ -Richtung deutlich kleiner als in  $\hat{x}$ -Richtung ist (siehe [44] und Abschnitt 1.1).

Dimensionsbehaftete Variablen werden durch  $(\hat{\quad})$  markiert. Der Index  $(\quad)_0$  zeigt an, dass es sich um Größen handelt, welche den stationären Zustand beschreiben.

#### 3.1 Beschreibung der Strömung

Betrachtet wird die ebene Strömung eines Fluides mit der Dichte  $\hat{\rho}_F$ , dem Druck  $\hat{p}_F$  und den Strömungsgeschwindigkeiten  $\hat{u}_F$  und  $\hat{v}_F$  in  $\hat{x}$ - bzw.  $\hat{y}$ -Richtung. Die Beschreibung der Strömung erfolgt in räumlichen bzw. Euler-Koordinaten. Die abhängigen Variablen des Fluids werden somit jeweils an einer bestimmten Stelle im Kanal betrachtet [113].

In dieser Arbeit werden zwei unterschiedliche Strömungsmodellierungen verwendet: Zum einen die Potentialströmung eines inkompressiblen oder kompressiblen Fluids und zum

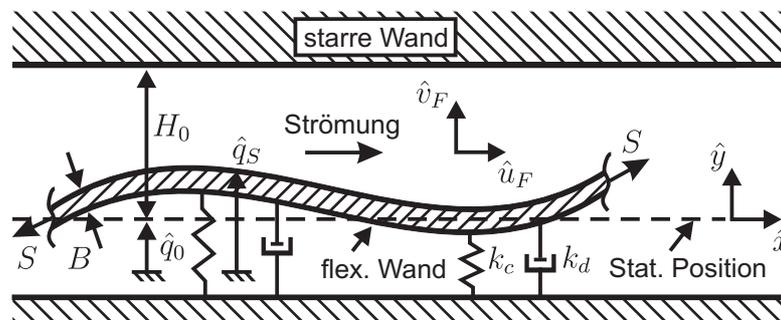


Abbildung 3.1: Modell des Kanals

anderen die Strömung eines inkompressiblen Newtonschen Fluids mit der dynamischen Viskosität  $\mu_F$  in einem schlanken Kanal.

Die Beschreibung der Strömung basiert stets auf der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \hat{\rho}_F}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{\rho}_F \hat{u}_F)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial (\hat{\rho}_F \hat{v}_F)}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (3.1)$$

und den laminaren Navier-Stokes-Gleichungen für ein Newtonsches Fluid

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_F \left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \right) = \\ - \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} + \mu_F \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}_F}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}_F}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_F \left( \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_F \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_F \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}} \right) = \\ - \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{y}} + \mu_F \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}_F}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}_F}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

unter Vernachlässigung von Volumenkräften [74]. Je nach Strömung wird noch eine weitere Gleichung benötigt, z. B. die thermische Zustandsgleichung idealer Gase für den Fall einer kompressiblen Strömung.

Ausgehend von diesen Grundgleichungen werden im Folgenden die Gleichungen für die interessierenden Strömungsmodelle abgeleitet.

### 3.1.1 Potentialströmung

Für reibungsfreie Strömungen vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen (3.2) und (3.3) zu den Euler-Gleichungen

$$\hat{\rho}_F \left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \right) = - \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}}, \quad (3.4)$$

$$\hat{\rho}_F \left( \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_F \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_F \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}} \right) = - \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{y}}. \quad (3.5)$$

Unter der zusätzlichen Annahme einer rotationsfreien Strömung, d. h.  $\nabla \times \hat{\mathbf{v}}_F = \mathbf{0}$ , kann der Geschwindigkeitsvektor  $\hat{\mathbf{v}}_F$  über das skalare Geschwindigkeitspotential  $\hat{\phi}_F$  ausgedrückt werden [74]:

$$\hat{\mathbf{v}}_F = \begin{pmatrix} \hat{u}_F \\ \hat{v}_F \end{pmatrix} = \nabla \hat{\phi}_F. \quad (3.6)$$

Die Kontinuitätsgleichung (3.1) lautet nach Einsetzen von  $\hat{\phi}_F$

$$\frac{\partial \hat{\rho}_F}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\rho}_F}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\rho}_F}{\partial \hat{y}} + \hat{\rho}_F \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}^2} \right) = 0, \quad (3.7)$$

die Euler-Gleichungen (3.4) und (3.5) werden zur Bernoulli-Gleichung [94]:

$$\frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right] + \hat{f}_p = 0. \quad (3.8)$$

Die Druckfunktion ist für eine barentrope Strömung als  $\hat{f}_p(\hat{p}_F) = \int_{\hat{p}_R}^{\hat{p}_F} \frac{d\hat{p}}{\hat{\rho}_F(\hat{p})}$  definiert. Der Druck und die Dichte des Fluids werden im Ruhezustand, d. h. ohne Strömungsgeschwindigkeit, mit  $\hat{p}_R$  und  $\hat{\rho}_R$  bezeichnet und in einem allgemeinen Zustand mit  $\hat{p}_F$  und  $\hat{\rho}_F$ . Der Zusammenhang zwischen den Ruhegrößen  $\hat{p}_R$  und  $\hat{\rho}_R$  ist über das ideale Gasgesetz festgelegt.

Für ein inkompressibles Fluid gilt  $\hat{\rho}_F = \hat{\rho}_R = \text{konst.}$  und  $\hat{f}_p(\hat{p}_F) = \frac{1}{\hat{\rho}_R}(\hat{p}_F - \hat{p}_R)$ . Vereinfachend kann angenommen werden, dass dieses auch für ein kompressibles Fluid unter Annahme von kleinen Druckfluktuationen ( $\hat{p}_F = \hat{p}_R + \hat{p}$  mit  $\hat{p} \ll \hat{p}_R$ ) und einer isentropen Zustandsänderung gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}_p(\hat{p}_F) &= \int_{\hat{p}_R}^{\hat{p}_F} \frac{1}{\hat{\rho}} d\hat{p} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\hat{p}_R}{\hat{\rho}_R} \left[ \left( 1 + \frac{\hat{p}}{\hat{p}_R} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \\ &\approx \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\hat{p}_R}{\hat{\rho}_R} \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\hat{p}}{\hat{p}_R} \right) = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}_R} = \frac{\hat{p}_F - \hat{p}_R}{\hat{\rho}_R} \end{aligned} \quad (3.9)$$

mit dem Isentropenkoeffizienten  $\kappa$  (vgl. [112]). Die Bernoulli-Gleichung für ein inkompressibles oder kompressibles Fluid lautet somit [2]

$$\hat{\rho}_R \left[ \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right] + \hat{p}_F - \hat{p}_R = 0. \quad (3.10)$$

Die Potentialströmung ist per Definition reibungsfrei, weshalb viskose Terme nicht berücksichtigt werden. Allerdings gibt es vereinfachte Modelle zur Berücksichtigung des Druckverlustes aufgrund der Fluidreibung. Eine mögliche Näherung wird anhand der inkompressiblen Poiseuille-Strömung im ebenen Kanal ermittelt (siehe [74], [119]). Deren analytische Lösung ist bekannt und daher kann der Druckverlust für eine Potentialströmung in einem ebenen Kanal näherungsweise über

$$\frac{\partial \hat{p}_V}{\partial \hat{x}} = - \frac{\hat{\rho}_F \lambda_V}{4(H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0)} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \right)^2 \quad (3.11)$$

angegeben werden (vgl. [37], [43]). Hierbei ist  $H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0$  die aktuelle Kanalhöhe und  $\lambda_V$  der Verlustkoeffizient. Dieser hängt von der Strömungsart und dem Strömungsquerschnitt ab und kann für einfache Querschnitte und laminare Strömungen rechnerisch ermittelt werden. In der Regel geschieht dies jedoch experimentell und die Werte werden in speziellen Diagrammen festgehalten (z. B. Moody-Diagramm [43], [74]). Hieraus können die Verlustkoeffizienten für verschiedene Querschnitte, Rauigkeiten und Strömungsgeschwindigkeiten jeweils für laminare und turbulente Strömungen abgelesen werden. Für laminare Kanalströmungen gilt der Zusammenhang

$$\lambda_V = \frac{48}{\text{Re}}. \quad (3.12)$$

Die darin enthaltene Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{\hat{U}_F L \hat{\rho}_F}{\mu_F} \quad (3.13)$$

hängt von der charakteristischen Länge  $L$ , der Strömungsgeschwindigkeit  $\hat{U}_F$ , der Dichte  $\hat{\rho}_F$  und der Viskosität  $\mu_F$  des Fluids ab [97]. Die Definition (3.12) gilt für die Verwendung der Kanalhöhe als charakteristische Länge  $L$ .

Für turbulente Strömungen ergeben sich komplexere Zusammenhänge, z. B. das sogenannte Blasius-Gesetz [43]. Da das Ziel der viskosen Näherung eine grundsätzliche Erfassung des Einflusses durch die innere Reibung unter Verwendung möglichst einfacher, analytisch zugänglicher Gleichungen ist, wird in der vorliegenden Arbeit lediglich die laminare Modellierung verwendet (vgl. Ansätze in [37], [52], [63]). Gerade bei schlanken Kanälen ist eine eindeutige Bestimmung der Reynoldszahl, ab der eine turbulente Strömung vorliegt, ohnehin schwierig. Unterhalb von  $\text{Re} = 10^3$  kann in der Regel von einer laminaren Strömung ausgegangen werden, für den Transitionsbereich ergibt sich aus der einschlägigen Literatur der Bereich  $\text{Re} = 10^3 \dots 10^4$  (siehe [43], [55], [97], [117]). In der vorliegenden Arbeit werden daher vorwiegend Fälle mit  $\text{Re} < 2000$  betrachtet. Die laminare Betrachtung von Konfigurationen mit höheren Reynoldszahlen erfolgt nur innerhalb der linearen Untersuchungen. Dieses wird durch die kleinen, abklingenden Störungen und die Betrachtung von kleinen Wellenzahlen und somit großen Wellenlängen begründet. Nichtsdestotrotz bedeutet die laminare Modellierung der Reibungsterme in diesem Fall möglicherweise einen Fehler aufgrund der zu gering abgeschätzten Reibungsverluste.

Für die laminare Modellierung der Reibungsverluste wird im Falle der Potentialströmung mit  $\hat{U}_F = \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}}$  die Reynoldszahl durch

$$\text{Re} = \frac{(H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{\rho}_F}{\mu_F} \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \quad (3.14)$$

beschrieben (vgl. [37], [52]). Dadurch ergibt sich der Druckverlust

$$\frac{\partial \hat{p}_V}{\partial \hat{x}} = - \frac{K_V \mu_F}{(H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0)^2} \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \quad (3.15)$$

mit der Konstanten  $K_V = 12$  für eine laminare, ebene Kanalströmung. Diese Näherung gilt für kleine Strukturauslenkungen  $\hat{q}_S - \hat{q}_0$  und Geschwindigkeitsabweichungen  $\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}}$  vom Grundzustand. Daher werden diese bezüglich  $\hat{q} = \hat{q}_0$  und  $\frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}}$  linearisiert (siehe Abschnitt 3.4 für die Bezeichnungen):

$$\frac{\partial \hat{p}_V}{\partial \hat{x}} = - \frac{K_V \mu_F}{H_0^2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{\hat{q}_S - \hat{q}_0}{H_0} \right) \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}} \right]. \quad (3.16)$$

Anschließend wird die Bernoulli-Gleichung (3.10) nach  $\hat{x}$  differenziert und um den Reibungsverlust erweitert [43]:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_R \left[ \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{t} \partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y} \partial \hat{x}} \right] + \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} = \\ - \frac{K_V \mu_F}{H_0^2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{\hat{q}_S - \hat{q}_0}{H_0} \right) \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}} \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Im Falle eines inkompressiblen Fluids kann die Bernoulli-Gleichung (3.10) anschließend durch diese Gleichung ersetzt werden. Für  $K_V = 0$  wird kein Reibungsverlust berücksichtigt und somit die reguläre Potentialströmung betrachtet. Für eine kompressible Strömung ist kein Äquivalent zur Poiseuille-Strömung mit bekannter analytischer Lösung vorhanden. Somit ist auch keine Näherung der Fluidreibung nach dem zuvor beschriebenen Prinzip möglich.

Bisher wurden die Kontinuitäts-Gleichung (3.7) und die Bernoulli-Gleichung (3.10) bzw. (3.17) hergeleitet. Während die Strömung eines inkompressiblen Fluids mit den zwei abhängigen Variablen  $\hat{p}_F$  und  $\hat{\phi}_F$  dadurch vollständig beschrieben ist, besitzt ein kompressibles Fluid zusätzlich die veränderliche Dichte  $\hat{\rho}_F$  und es wird eine weitere Gleichung benötigt. Für die isentrope Zustandsänderung eines perfekten Gases gilt  $p\rho^{-\kappa} = \text{konstant}$  [89]. Für kleine Druckfluktuationen ergibt sich die lineare Approximation [113]

$$(\hat{p}_F - \hat{p}_R) - (\hat{\rho}_F - \hat{\rho}_R) a_R^2 = 0 \quad (3.18)$$

mit der Abkürzung  $a_R = \sqrt{\kappa \frac{\hat{p}_R}{\hat{\rho}_R}}$ , welche für kompressible Strömungen der Schallgeschwindigkeit entspricht [89]. Mithilfe dieser Gleichung wird in der Kontinuitätsgleichung (3.7) die Dichte durch den Druck ersetzt und dieser wiederum über die Druckfunktion aus der Bernoulli-Gleichung, wodurch sich die Potentialgleichung

$$\begin{aligned} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{t}^2} + \left[ a_R^2 - \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}^2} + \left[ a_R^2 - \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}^2} \\ - 2 \left[ \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y} \partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

ergibt [94]. Nach Einführung der Stellvertreter-Variablen

$$\delta_{\text{ink}} = \begin{cases} 1 & \text{für ein inkompressibles Fluid,} \\ 0 & \text{für ein kompressibles Fluid} \end{cases} \quad (3.20)$$

lautet das Gleichungssystem zur vollständigen Beschreibung der Potentialströmung

$$a_R^2 \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}^2} \right) + (\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{t}^2} + \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}^2} + \left( \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}^2} \right] \\ + 2 (\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y} \partial \hat{t}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right] = 0, \quad (3.21)$$

$$\hat{\rho}_R \left[ \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{t} \partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y} \partial \hat{x}} \right] + \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} \\ + \frac{\delta_{\text{ink}} K_V \mu_F}{H_0^2} \left[ \left( 1 + 2 \frac{\hat{q}_S - \hat{q}_0}{H_0} \right) \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}} \right] = 0, \quad (3.22)$$

$$(\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ (\hat{p}_F - \hat{p}_R) - (\hat{\rho}_F - \hat{\rho}_R) a_R^2 \right] = 0. \quad (3.23)$$

### 3.1.2 Viskose Strömung im schlanken Kanal

Die Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Strömung lautet nach (3.1)

$$\frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}} = 0. \quad (3.24)$$

Unter Berücksichtigung dieses Zusammenhangs können die Navier-Stokes-Gleichungen (3.2) und (3.3) für einen schlanken Kanal, bei dem die Höhe  $H_0$  im Vergleich zur Mindestlänge  $L$  viel kleiner ist, aufgrund der unterschiedlichen Größenverhältnisse vereinfacht werden. Szeri [105] zeigt, dass für  $H_0 \ll L$  folgende Schlankkanalgleichungen gelten:

$$\hat{\rho}_F \underbrace{\left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{t}} + \hat{u}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}} + \hat{v}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \right)}_{(*)} \approx - \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} + \mu_F \frac{\partial^2 \hat{u}_F}{\partial \hat{y}^2}, \quad (3.25)$$

$$0 \approx - \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{y}}. \quad (3.26)$$

Im Falle des verschwindenden Produktes aus Reynoldszahl und Längenverhältnis

$$\text{Re} \left( \frac{H_0}{L} \right) \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

gilt zusätzlich, dass die substantielle Ableitung (\*) in (3.25) vernachlässigt werden kann:

$$0 \approx - \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} + \mu_F \frac{\partial^2 \hat{u}_F}{\partial \hat{y}^2}, \quad (3.28)$$

siehe [44], [105], [119]. Die Reynoldszahl  $\text{Re}$  beschreibt das Verhältnis von Trägheits- und Reibungseinfluss in einer Strömung. Aus Gleichung (3.13) wird deutlich, dass eine kleine Reynoldszahl somit durch kleine Geschwindigkeiten, geringe Kanalhöhen und eine große

kinematische Viskosität  $\nu_F = \frac{\mu_F}{\rho_F}$  begünstigt wird. Durch die Vernachlässigung der Trägheitsterme entsteht eine lineare Gleichung, welche die sogenannte Schleichströmung beschreibt (siehe [74], [88]).

Bei schlanken Kanälen werden die Fluidgleichungen häufig über die Kanalhöhe gemittelt. Hierbei wird die Tatsache ausgenutzt, dass in diesen Kanälen die Änderung des Druckes in  $\hat{y}$ -Richtung vernachlässigbar klein ist, siehe Gleichung (3.26). Der Vorteil besteht darin, dass die gemittelten Gleichungen, welche nach Integration über die Kanalhöhe erhalten werden, nur noch von einer Ortskoordinate abhängen. Außerdem sind die Übergangsbedingungen, welche an den Grenzen zur Struktur erfüllt sein müssen, bereits enthalten. Die gemittelte Strömungsgeschwindigkeit in  $\hat{x}$ -Richtung wird mit

$$\hat{U}_F = \frac{1}{H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \hat{u}_F d\hat{y} \quad (3.29)$$

berechnet (siehe z. B. [119]). Hierbei stellt  $\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0$  die Position der elastischen Struktur und somit die untere Begrenzung des Fluids dar, die obere Begrenzung liegt bei  $\hat{y} = H_0$ . Zusätzlich wird für das Modell mit Fluidträgheit folgende Näherung nach Inada und Hayama [52] benötigt:

$$\int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} (\hat{u}_F^2) d\hat{y} \approx \frac{1}{H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0} \left( \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \hat{u}_F d\hat{y} \right)^2 = (H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{U}_F^2. \quad (3.30)$$

Bei einer viskosen Strömung existieren an den begrenzenden Wänden Schubspannungen, welche zu dem in Abschnitt 3.1.1 erwähnten Druckverlust führen. Bei den gemittelten Gleichungen treten diese Reibungsverluste in Form von Geschwindigkeitsgradienten an den Wänden auf. Unter Verwendung des Stokesschen Reibungsansatzes werden diese Gradienten mit der Schubspannung verknüpft [119]:

$$\frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F} \left( \left. \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}=H_0} - \left. \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0} \right) \approx \frac{1}{\hat{\rho}_F} \left( \hat{\tau}_{xy}|_{\hat{y}=H_0} - \hat{\tau}_{xy}|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0} \right). \quad (3.31)$$

Die Schubspannungen werden über den Druckverlust ermittelt (siehe [52] und [74]). Die Modellierung ist dieselbe wie im vorhergehenden Abschnitt, d. h. zur Bestimmung wird das Modell einer stationären und laminaren Poiseuille-Strömung mit parallelen Wänden und  $\hat{v}_F = 0$  angenommen. Letztendlich ergibt sich daraus die Näherung

$$\frac{1}{\hat{\rho}_F} \left( \hat{\tau}_{xy}|_{\hat{y}=H_0} - \hat{\tau}_{xy}|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0} \right) = -\frac{1}{4} \lambda_V \hat{U}_F^2, \quad (3.32)$$

mit dem Verlustkoeffizienten  $\lambda_V = \frac{48}{\text{Re}}$  nach Gleichung (3.12) und der Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{(H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{\rho}_F \hat{U}_F}{\mu_F}. \quad (3.33)$$

## 3.2 Beschreibung der elastischen Struktur

Die flexible Struktur wird als 2-parametriges Kontinuum mit konstanter Dicke  $B$ , Dichte  $\rho_S$ , Elastizitätsmodul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$  modelliert. Aufgrund der ebenen Betrachtung ergibt sich die Beschreibung als 1-parametriges Kontinuum mit der zugehörigen Auslenkung  $\hat{q}_S$  in  $\hat{y}$ -Richtung. Die biegegesteife Struktur besitzt die Plattensteifigkeit  $D = \frac{EB^3}{12(1-\nu^2)}$ , die konstante Vorspannung  $S$  und befindet sich auf einer visko-elastischen Bettung mit den Steifigkeits- und Dämpfungskonstanten  $k_c$  und  $k_d$  (entspannt für  $\hat{q}_S = 0$ ). Mit der Zielsetzung, wesentliche Aspekte des dynamischen Verhaltens der Struktur qualitativ richtig abzubilden, wird ein Kirchhoff-Platten- bzw. ein Euler-Bernoulli-Balkenmodell herangezogen [113]. In Übereinstimmung mit der in der Literatur üblichen Vorgehensweise wird die Änderung der Längsspannung aufgrund der Querauslenkung nicht berücksichtigt [40].

Da die Wände undurchlässig sind, bewirkt das Fluid an der Oberfläche der flexiblen Wand sowohl eine Normalspannung  $\hat{\tau}_{yy}$  als auch eine Schubspannung  $\hat{\tau}_{yx}$ . Letztere verursacht ein Biegemoment  $M = \frac{B}{2}\hat{\tau}_{xy}$  pro Flächeneinheit, welches proportional zur angenommenen Strukturdicke ist [96]. Aufgrund der Annahme eines dünnen Kontinuums wird der Einfluss auf die Balkenschwingung als vernachlässigbar klein angenommen (vgl. [37], [63], [112]). Die Normalspannung entspricht für ein nicht viskoses Fluid dem Druck  $\hat{p}_F$  durch das Fluid:  $\hat{\tau}_{yy} = -\hat{p}_F$ . Im Falle eines viskosen Fluids gibt es zusätzliche Reibungseffekte und für die Spannung an der Wand gilt nach Oertel et al. [74]

$$\hat{\tau}_{yy} = \hat{\sigma}_{yy} - \hat{p}_F. \quad (3.34)$$

Für die Normalspannung wird der Stokesche Reibungsansatz eines inkompressiblen Mediums verwendet:

$$\hat{\sigma}_{yy} = 2\mu_F \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}}. \quad (3.35)$$

Die Wechselwirkung findet an der Grenzfläche statt. Die Beschreibung der Struktur erfolgt jedoch in materiellen bzw. Lagrange-Koordinaten, d. h. die aktuelle Position eines materiellen Punktes wird in Abhängigkeit von einer Referenzplatzierung ausgedrückt [113]. In der vorliegenden Arbeit werden die Auslenkungen der Struktur vom unverformten Ausgangszustand durch  $\hat{q}_S$  und die Position der unverformten Struktur im stationären Zustand durch  $\hat{q}_0$  beschrieben (siehe Abb. 3.1). Um die Geschwindigkeit des Fluids an der Wand bestimmen zu können, muss daher der Zusammenhang zwischen der räumlichen Beschreibung (in  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  und  $\hat{t}$ ) und materiellen Beschreibung (in  $\hat{q}_S$  bzw.  $\hat{q}_0$  und  $\hat{t}$ ) berücksichtigt werden: Die Grenzfläche liegt bei  $\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0$ .

Um eine Verformung oder Verschiebung der flexiblen Wand im stationären Zustand zu verhindern und somit  $\hat{p}_0 = \text{konst.}$  zu gewährleisten, wirkt zusätzlich ein äußerer Druck  $p_A$  auf die flexible Struktur (siehe auch [37]).

Nach Berücksichtigung aller beschriebener Annahmen und Einflüsse lautet die Gleichung der elastischen Wand

$$B\rho_S \frac{\partial^2 \hat{q}_S}{\partial \hat{t}^2} + D \frac{\partial^4 \hat{q}_S}{\partial \hat{x}^4} - S \frac{\partial^2 \hat{q}_S}{\partial \hat{x}^2} + k_c \hat{q}_S + k_d \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}} - \hat{\tau}_{yy}|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} - p_A = 0. \quad (3.36)$$

Sowohl die Spannung  $\hat{\tau}_{yy}$  als auch der äußere Druck  $p_A$  sind in positive  $\hat{y}$ -Richtung angenommen (vgl. Abb. 3.1).

### 3.3 Übergangsbedingungen

Aufgrund der Annahme einer unendlich langen Struktur werden in der vorliegenden Arbeit keine Randbedingungen benötigt. Durch die Wahl der Wellenzahl können jedoch einfache, periodische Lagerungen berücksichtigt werden, siehe Gleichung (2.6).

Zur Ermittlung der Übergangsbedingungen an der Grenzfläche zwischen Fluid und Struktur sind geometrische Überlegungen notwendig. Dazu sind in Abbildung 3.2 die Geschwindigkeiten des Fluids und der flexiblen Struktur an der Grenzfläche an einer bestimmten  $\hat{x}$ -Position dargestellt. Zur Beschreibung der Wechselwirkung an der bewegten Grenzfläche wird der Zusammenhang zwischen der Euler-Formulierung des Fluids und der Lagrange-Formulierung der Struktur benötigt (siehe auch Abschnitt 3.2). Durch die Wahl des Koordinatensystems (siehe Abb. 3.1 und Abschnitt 3.4) wird die Position der Struktur mit  $\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0$  beschrieben. Durch diesen Zusammenhang zwischen den räumlichen und materiellen Koordinaten ergeben sich nichtlineare, implizite Funktionen für die Geschwindigkeiten an der Wand, z. B. gilt

$$\hat{u}_F = \hat{u}_F(\hat{x}, \hat{y} = \hat{q}_S(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{q}_0, \hat{t}). \quad (3.37)$$

Bei einer linearen Betrachtung ist das nicht der Fall, da hier die Verschiebung der Grenzfläche nicht berücksichtigt wird.

Aufgrund der impermeablen Wände müssen die Geschwindigkeiten von Fluid  $\hat{u}_{F,n}$ ,  $\hat{v}_{F,n}$  und Wand  $\hat{v}_{S,n}$  an den Grenzflächen bei  $\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0$  in Normalenrichtung übereinstimmen:

$$\hat{u}_{F,n}|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} + \hat{v}_{F,n}|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = \hat{v}_{S,n}. \quad (3.38)$$

Kleine Verdrehwinkel der Struktur können näherungsweise durch die Linearisierung  $\frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{x}}$  beschrieben werden und mit  $\hat{v}_{S,n} = \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}}$  folgt

$$-\frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{x}} \hat{u}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} + \hat{v}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}} \quad (3.39)$$

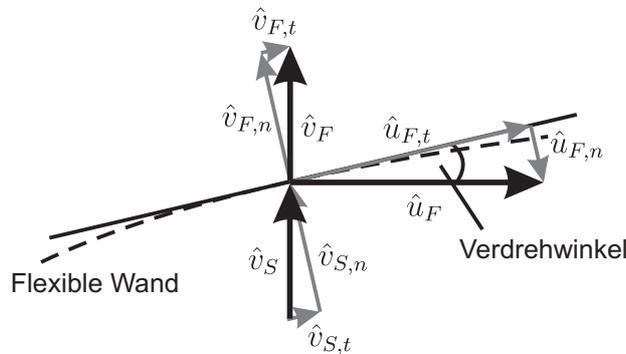


Abbildung 3.2: Geschwindigkeiten an der Wand

Die Impermeabilitäts-Bedingung gilt ebenfalls an der starren, ruhenden Wand bei  $\hat{y} = H_0$  und lautet

$$\hat{v}_F|_{\hat{y}=H_0} = 0. \quad (3.40)$$

Diese Übergangsbedingungen gelten sowohl für den Kanal mit Potentialströmung als auch für den schlanken Kanal mit viskoser Strömung. Die vollständigen Übergangsbedingungen für die beiden Fälle werden im Folgenden spezifiziert.

### Potentialströmung

Nach Einsetzen der Potentialfunktion in die Gleichungen (3.39) und (3.40) lauten die Übergangsbedingungen für die Potentialströmung (vgl. [37], [112])

$$-\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} + \frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}}, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=H_0} = 0. \quad (3.42)$$

Dadurch ist der Übergang zwischen Fluid und Struktur hier vollständig beschrieben.

### Viskose Strömung

Bei einer viskosen Strömung kommt zusätzlich zur Impermeabilitäts-Bedingung die Haftbedingung in tangentialer Richtung

$$\hat{u}_{F,t}|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} + \hat{v}_{F,t}|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = \hat{v}_{S,t} \quad (3.43)$$

hinzu. Hierbei wird gefordert, dass die Geschwindigkeiten der Struktur und des Fluids an der Wand in tangentialer Richtung übereinstimmen müssen. Nach Linearisierung der tangentialen Geschwindigkeiten für kleine Verdrehwinkel lauten die Übergangsbedingungen aufgrund der Haftung an der flexiblen und starren Wand

$$\hat{u}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} + \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{x}} \hat{v}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}}, \quad (3.44)$$

$$\hat{u}_F|_{\hat{y}=H_0} = 0. \quad (3.45)$$

Für eine viskose Strömung gelten sowohl die Impermeabilitäts- als auch die Haftbedingung und nach Einsetzen von (3.39) in (3.44) folgt für kleine Verdrehwinkel

$$\hat{u}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = 0 \quad \text{und somit auch} \quad (3.46)$$

$$\hat{v}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = \frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}} \quad (3.47)$$

für die Übergangsbedingungen des viskosen Fluids an der flexiblen Wand (vgl. [90]). Die Übergangsbedingungen an der starren Wand sind durch (3.45) und (3.40) gegeben.

### 3.4 Stationärer Zustand und Fluktuationen

Die abhängigen Variablen des Fluids und der Struktur können als Summe von Variablen zur Beschreibung des stationären Zustandes und den davon abweichenden zeitabhängigen Fluktuationen dargestellt werden:

$$\hat{p}_F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = \hat{p}_0(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{p}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}), \quad (3.48)$$

$$\hat{\rho}_F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = \hat{\rho}_0(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}), \quad (3.49)$$

$$\hat{u}_F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = \hat{u}_0(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}), \quad (3.50)$$

$$\hat{v}_F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = \hat{v}_0(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}), \quad (3.51)$$

$$\hat{\phi}_F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = \hat{\phi}_0(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{\phi}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}), \quad (3.52)$$

$$\hat{U}_F(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{U}_0(\hat{x}) + \hat{U}(\hat{x}, \hat{t}), \quad (3.53)$$

$$\hat{q}_S(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{q}_0(\hat{x}) + \hat{q}(\hat{x}, \hat{t}). \quad (3.54)$$

Der stationäre Zustand wird hierbei durch  $(\dots)_0$  symbolisiert. Durch den äußeren Druck  $p_A$  wird sichergestellt, dass  $\hat{q}_0 = \text{konst.}$  gilt und somit die flexible Wand im stationären Zustand unverformt und parallel zur starren Wand ist. Da in dieser Arbeit die Stabilität des stationären Zustandes untersucht wird, wurde das Koordinatensystem so festgelegt (siehe Abb. 3.1), dass in diesem Zustand  $\hat{q} = 0$  gilt [112]. Des Weiteren wird angenommen, dass die Strömung im stationären Zustand unabhängig von der  $\hat{x}$ -Achse ist und das Fluid entlang des Kanals somit eine konstante Geschwindigkeit hat. Bei der Potentialströmung ist die Geschwindigkeit zusätzlich von der  $\hat{y}$ -Achse unabhängig und es gilt  $\hat{\phi}_0 = \hat{U}_0 \hat{x}$ . Im Falle des viskosen Fluids wird in den Kapiteln 5 und 6 eine über die Kanalhöhe gemittelte Grundströmungsgeschwindigkeit  $\hat{U}_0 = \text{konst.}$  eingeführt.

Nach Einsetzen von (3.48)-(3.54) in die hergeleiteten Gleichungen für den durchströmten Kanal werden die Gleichungen, welche den stationären Zustand beschreiben, ermittelt. Nach Berücksichtigung dieses Zustandes ergeben sich Gleichungen für die Fluktuationen bzw. Störungen. Damit kann anschließend die Stabilität des stationären Zustandes bestimmt werden.

### 3.5 Testfälle

In den folgenden Kapiteln werden Testfälle mit realistischen Werten für die Struktur- und Fluidparameter untersucht. Das ermöglicht eine Abschätzung der auftretenden kritischen Geschwindigkeiten und der relevanten Wellenzahlen. Je nach Modell werden zu den Modellannahmen passende Testfälle verwendet.

Für alle Testfälle wird  $p_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $S = 0 \text{ N/m}^3$  und  $k_d = 0 \text{ Ns/m}^3$  zugrunde gelegt, die anderen Parameter sind in Tabelle 3.1 gelistet. Die Werte für Wasser und Luft sind den Büchern [10], [89], [119] entnommen. Die Werte für Öl sind anhand von [54], [62], [66] und die für die Kunststoffe Silastic, Latex und PET anhand von [30], [34], [35], [63], [107] gewählt. Für die Dimensionen des dünnen Kanals und der Struktur wurden Werte von [30], [42] und [63] übernommen bzw. als Richtwerte verwendet.

|                                     | <b>Testfall 1</b>  | <b>Testfall 2</b>   | <b>Testfall 3</b>    | <b>Testfall 4</b>  |
|-------------------------------------|--------------------|---------------------|----------------------|--------------------|
| Fluid                               | Wasser             | Wasser              | Luft                 | Öl                 |
| Werkstoff                           | Silastic           | Latex               | PET                  | Silastic           |
| $\hat{\rho}_R$ [kg/m <sup>3</sup> ] | 998.2              | 998.2               | 1.2                  | 900                |
| $\kappa$ [–]                        | 1.33               | 1.33                | 1.4                  | 1.33               |
| $\mu_F$ [kg/sm]                     | $1 \cdot 10^{-3}$  | $1 \cdot 10^{-3}$   | $18.2 \cdot 10^{-6}$ | $80 \cdot 10^{-3}$ |
| $E$ [N/m <sup>2</sup> ]             | $1.7 \cdot 10^6$   | $1 \cdot 10^6$      | $3 \cdot 10^9$       | $1.7 \cdot 10^6$   |
| $\nu$ [–]                           | 0.5                | 0.5                 | 0.4                  | 0.5                |
| $\rho_S$ [kg/m <sup>3</sup> ]       | 1255               | 940                 | 1400                 | 1255               |
| $k_c$ [N/m <sup>3</sup> ]           | $3 \cdot 10^5$     | $6 \cdot 10^5$      | $3 \cdot 10^4$       | $1 \cdot 10^2$     |
| $B$ [m]                             | $28 \cdot 10^{-4}$ | $5 \cdot 10^{-4}$   | $16 \cdot 10^{-6}$   | $19 \cdot 10^{-5}$ |
| $H_0$ [m]                           | $5 \cdot 10^{-3}$  | $1.4 \cdot 10^{-3}$ | $5 \cdot 10^{-3}$    | $5 \cdot 10^{-3}$  |

Tabelle 3.1: Physikalische Größen der Testfälle

## 4 Kanal mit Potentialströmung

In diesem Kapitel wird das Modell *A* mit kompressibler und inkompressibler Potentialströmung betrachtet (siehe Übersicht in Abb. 1.3). Untersucht wird dabei der Einfluss verschiedener Struktur- und Fluideigenschaften auf die lineare Stabilität des stationären Zustandes. Auch der Unterschied zwischen der Kopplung der elastischen Struktur mit einem kompressiblen und einem inkompressiblen Fluid wird herausgearbeitet.

Die systematische Untersuchung stellt eine Erweiterung der vorhandenen Arbeiten auf diesem Gebiet dar und trägt zum Verständnis des gekoppelten Systems bei. Die Vereinfachungen der Modelle *B* und *C* stützen sich auf die hier gewonnenen Erkenntnisse.

### 4.1 Herleitung der Gleichungen

In Kapitel 3 wurden die Gleichungen für einen Kanal mit Potentialströmung hergeleitet und in Abschnitt 3.4 wurde die Unterteilung in Größen des stationären Zustandes und den davon abweichenden Fluktuationen eingeführt. Im folgenden Abschnitt werden diese Ansätze eingesetzt und die Gleichungen für den stationären Zustand und die Fluktuationen hergeleitet. Anschließend werden die Gleichungen in eine dimensionslose Form überführt.

#### 4.1.1 Stationärer Zustand und Fluktuationen

In die Fluid-Gleichungen (3.21)-(3.23), die Struktur-Gleichung (3.36) und die Übergangsbedingungen (3.41), (3.42) werden zunächst die Ansätze (3.48)-(3.54) für die stationären Variablen und Fluktuationen eingesetzt. Im stationären Grundzustand existieren die Fluktuationen nicht ( $\hat{p} = \hat{\rho} = \hat{\phi} = \hat{q} = 0$ ) und somit ergeben sich folgende Gleichungen für ein reibungsfreies, kompressibles oder inkompressibles Fluid:

$$\frac{1}{2}\hat{\rho}_R\hat{U}_0^2 + \hat{p}_0 - \hat{p}_R = 0, \quad (4.1)$$

$$\hat{p}_0 - \hat{p}_R - a_R^2(\hat{\rho}_0 - \hat{\rho}_R) = 0, \quad (4.2)$$

$$k_c\hat{q}_0 + \hat{p}_0 - p_A = 0. \quad (4.3)$$

Diese beschreiben den stationären Zustand, bei dem die Struktur unverformt ist und das Fluid mit konstanter Geschwindigkeit  $\hat{U}_0$  in  $\hat{x}$ -Richtung strömt. Die Übergangsbedingungen sind im stationären Zustand stets erfüllt.

Über die Bernoulli-Gleichung (4.1) kann der stationäre Druck in Abhängigkeit der Grundströmungsgeschwindigkeit  $\hat{U}_0 = \text{konst.}$  und dem bekannten Ruhedruck  $\hat{p}_R = \text{konst.}$  bestimmt werden. Die zweite Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte im stationären Zustand an und die dritte Gleichung beschreibt die Auslenkung der Struktur. Für ein reibungsfreies Fluid folgt aus (4.1) ein konstanter Druck  $\hat{p}_0$  und daher folgt

aus (4.3) die Auslenkung  $\hat{q}_0 = \text{konst.}$ . Der zuvor eingeführte Außendruck  $\bar{p}_A$  ist hier nicht erforderlich. Falls doch ein Außendruck aufgebracht wird, muss dieser konstant sein und es gibt entweder keine Auslenkung (für  $p_A = \hat{p}_0$ ) oder eine konstante Auslenkung  $\hat{q}_0$ . Bei Berücksichtigung der Fluidreibung (siehe Näherung in Abschnitt 3.1.1) kommt im inkompressiblen Fall bei der nach  $\hat{x}$  differenzierten Bernoulli-Gleichung (3.17) ein linearer Reibungsterm hinzu. Im stationären Zustand wird Gleichung (4.1) durch folgende Gleichung ersetzt:

$$\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \hat{x}} + \frac{K_V \mu_F}{H_0^2} \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{x}} = 0. \quad (4.4)$$

Mit  $\hat{\phi}_0 = \hat{U}_0 \hat{x}$  hängt der stationäre Druck in diesem Fall linear von der Koordinate  $\hat{x}$  ab. Sowohl anschaulich als auch aus der Strukturgleichung (4.3) folgt, dass dadurch eine Verformung der Struktur, d. h. eine von  $\hat{x}$  abhängige Auslenkung  $\hat{q}_0$  möglich ist. Um dieser Verformung im stationären Zustand entgegenzuwirken, wird ein ebenfalls von  $\hat{x}$  abhängiger äußerer Druck  $p_A$  aufgebracht.

Unter Berücksichtigung des Grundzustandes ergeben sich folgende Gleichungen für die Fluktuationen bzw. Störungen dieses Zustandes:

$$a_R^2 \left( \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{y}^2} \right) + (\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{t}^2} + \left( \hat{U}_0 + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} + \left( \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \right)^2 \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{y}^2} \right] \\ + 2 (\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ \left( \hat{U}_0 + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right) \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{t} \partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{t} \partial \hat{y}} + \left( \hat{U}_0 + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right] = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{t} \partial \hat{x}} + \left( \hat{U}_0 + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right) \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial \hat{y} \partial \hat{x}} + \frac{1}{\hat{\rho}_R} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} + \frac{\delta_{\text{ink}} K_V \mu_F}{\hat{\rho}_R H_0^2} \left( \frac{2 \hat{U}_0 \hat{q}}{H_0} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \right) = 0, \quad (4.6)$$

$$(\delta_{\text{ink}} - 1) (\hat{p} - a_R^2 \hat{\rho}) = 0, \quad (4.7)$$

$$B \rho_S \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{t}^2} + D \frac{\partial^4 \hat{q}}{\partial \hat{x}^4} - S \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{x}^2} + k_c \hat{q} + k_d \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} + \hat{p}|_{\hat{y}=\hat{q}} = 0, \quad (4.8)$$

$$-\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} \left( \hat{U}_0 + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{x}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}} \right) + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}} - \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} = 0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=H_0} = 0. \quad (4.10)$$

Es wird die, in Abschnitt 3.1.1 eingeführte, Schreibweise unter Verwendung der Stellvertreter-Variable  $\delta_{\text{ink}}$  verwendet. Für ein inkompressibles Fluid gilt  $\delta_{\text{ink}} = 1$ , andernfalls ist  $\delta_{\text{ink}} = 0$ . Die Gleichungen (4.6)-(4.7) beschreiben die Strömung, Gleichung (4.8) die Struktur und (4.9),(4.10) die Übergangsbedingungen an der flexiblen und starren Wand.

### 4.1.2 Dimensionslose Schreibweise

Die dimensionsbehafteten Gleichungen der Fluktuationen um den Grundzustand werden in dimensionslose Form überführt. In dieser Arbeit werden für die verschiedenen zu untersuchenden Größen und Modelle unterschiedliche dimensionslose Schreibweisen verwendet und der Übersichtlichkeit halber nummeriert.

#### Schreibweise 1

In Anlehnung an Wauer [112] werden für dieses Modell die Kanalhöhe  $H_0$ , die Ruhedichte  $\hat{\rho}_R$  und die Konstante  $a_R = \sqrt{\kappa \frac{\hat{p}_R}{\hat{\rho}_R}}$  als Referenzgrößen verwendet. Es ergeben sich folgende dimensionslose Variablen

$$x = \frac{\hat{x}}{H_0}, \quad y = \frac{\hat{y}}{H_0}, \quad q = \frac{\hat{q}}{H_0}, \quad t = \frac{a_R \hat{t}}{H_0}, \quad \rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_R}, \quad p = \frac{\hat{p}}{a_R^2 \hat{\rho}_R},$$

$$\phi = \frac{\hat{\phi}}{a_R H_0}, \quad \phi_0 = \frac{\hat{\phi}_0}{a_R H_0}$$

und Parameter

$$U_{0,1} = \frac{\hat{U}_0}{a_R}, \quad \alpha_1 = \frac{H_0 \hat{\rho}_R}{B \rho_S}, \quad \beta_1 = \frac{S}{B \rho_S a_R^2}, \quad \gamma_1 = \frac{k_c H_0^2}{B \rho_S a_R^2},$$

$$\delta_1 = \frac{D}{B \rho_S a_R^2 H_0^2}, \quad \zeta_1 = \frac{k_d H_0}{B \rho_S a_R}, \quad \vartheta_1 = \frac{K_V \mu_F}{\hat{\rho}_R a_R H_0}$$

in der Schreibweise 1, was durch den entsprechenden Index verdeutlicht wird. Aufgrund der Bezugslängen entspricht  $a_R$  bei einem kompressiblen Fluid der Schallgeschwindigkeit und  $U_{0,1}$  der Machzahl [89]. Das sich ergebende dimensionslose Gleichungssystem für ein inkompressibles ( $\delta_{\text{ink}} = 1$ ) oder kompressibles ( $\delta_{\text{ink}} = 0$ ) Fluid lautet

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + (\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \left( U_{0,1} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right]$$

$$+ 2 (\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ \left( U_{0,1} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} + \left( U_{0,1} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right] = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \left( U_{0,1} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \delta_{\text{ink}} \vartheta_1 \left( 2U_{0,1} q + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.12)$$

$$(\delta_{\text{ink}} - 1) (p - \rho) = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} - \beta_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \gamma_1 q + \zeta_1 \frac{\partial q}{\partial t} + \alpha_1 p|_{y=q} = 0, \quad (4.14)$$

$$-\frac{\partial q}{\partial x} \left( U_{0,1} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{y=q} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=q} - \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0. \quad (4.16)$$

Die Dichte  $\rho$  ist nur noch in Gleichung (4.13) enthalten. Aus dieser Gleichung kann letztendlich mithilfe des berechneten Druck die Dichte bestimmt werden, sie wird für die folgenden Untersuchungen nicht benötigt.

Für das Modell  $A$  wird bis auf Abschnitt 4.2.8 die Schreibweise 1 verwendet. Die Herleitung der Dispersionsgleichung wird daher exemplarisch anhand dieser Hauptschreibweise gezeigt.

## Schreibweise 2

Um eine Untersuchung des Einflusses der Kanalhöhe zu ermöglichen, wird für das Modell  $A$  eine weitere Schreibweise mit der Referenzlänge  $L$  verwendet. Diese Länge kann als Mindestlänge des Kanals interpretiert werden und ermöglicht somit die Beurteilung der Schlankheit des Kanals (siehe [42], [105]). Die Schreibweise 2 unterscheidet sich durch die Bezugslänge, womit folgende dimensionslosen Variablen und Parameter

$$\begin{aligned} x &= \frac{\hat{x}}{L}, \quad y = \frac{\hat{y}}{L}, \quad q = \frac{\hat{q}}{L}, \quad t = \frac{a_R \hat{t}}{L}, \quad \rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_R}, \quad p = \frac{\hat{p}}{a_R^2 \hat{\rho}_R}, \quad \phi = \frac{\hat{\phi}}{a_R L}, \\ U_{0,2} &= \frac{\hat{U}_0}{a_R}, \quad \alpha_2 = \frac{\hat{\rho}_R L}{\rho_S B}, \quad \beta_2 = \frac{S}{B \rho_S a_R^2}, \quad \gamma_2 = \frac{k_c L^2}{B \rho_S a_R^2}, \quad \delta_2 = \frac{D}{B \rho_S a_R^2 L^2}, \\ \zeta_2 &= \frac{k_d L}{B \rho_S a_R}, \quad \vartheta_2 = \frac{K_V \mu_F}{\hat{\rho}_R a_R L}, \quad \alpha_0 = \frac{H_0}{L} \end{aligned}$$

erhalten werden. Ein Vergleich mit den Parametern der Schreibweise 1 ergibt, dass  $U_{0,1} = U_{0,2}$  und  $\beta_1 = \beta_2$  gilt. Die anderen Parameter unterscheiden sich durch Potenzen des Längenverhältnisses  $\alpha_0$ . Das sich ergebende dimensionslose Gleichungssystem für die Abweichungen vom Grundzustand ist bis auf die Bernoulli-Gleichung (4.12) und die Übergangsbedingung (4.16) an der starren Wand identisch. Die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} + \left( U_{0,2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \delta_{\text{ink}} \frac{\vartheta_2}{\alpha_0^2} \left( \frac{2U_{0,2} q}{\alpha_0} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.17)$$

unterscheidet sich in der Schreibweise 2 durch das zusätzliche Längenverhältnis  $\alpha_0$  im Reibungsterm. Die starre Wand befindet sich nun bei  $y = \alpha_0$ :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=\alpha_0} = 0. \quad (4.18)$$

Diese Schreibweise wird einmalig zur Untersuchung des Einflusses der Kanalhöhe in Abschnitt 4.2.8 verwendet. Die Dispersionsgleichung wird in Abschnitt 4.2.1 angegeben.

## 4.2 Lineare Stabilitätsuntersuchung

Es werden kleine Abweichungen vom stationären Zustand betrachtet. Somit können die impliziten Funktionen an der flexiblen Wand durch eine Taylorreihe dargestellt werden:

$$f(x, y = q(x, t), t) \approx f(x, 0, t) + \left. \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} q(x, t) + \dots \quad (4.19)$$

Anschließend werden die nichtlinearen Gleichungen bezüglich des stationären Grundzustandes linearisiert:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + (\delta_{\text{ink}} - 1) \left[ \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial t^2} + U_{0,1}^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + 2U_{0,1} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial t \partial x} \right] = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial t \partial x} + U_{0,1} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \delta_{\text{ink}} \vartheta_1 \left( 2\bar{q} U_{0,1} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \right) = 0, \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial t^2} + \delta_1 \frac{\partial^4 \bar{q}}{\partial x^4} - \beta_1 \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} + \gamma_1 \bar{q} + \zeta_1 \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \alpha_1 \bar{p}|_{y=0} = 0, \quad (4.22)$$

$$-\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} U_{0,1} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{y=0} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = 0, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0. \quad (4.24)$$

Hierbei deutet  $(\bar{\quad})$  an, dass es sich um Variablen der linearisierten Gleichungen handelt.

### 4.2.1 Dispersionsgleichung

Nach Einsetzen von (4.21) in die nach  $x$  differenzierte Gleichung (4.22) entsteht ein Gleichungssystem mit zwei Feldgleichungen in  $\bar{\phi}$  und  $\bar{q}$  und zwei Übergangsbedingungen. Zur Lösung des Gleichungssystems werden die Wellenansätze  $\bar{\phi}(x, y, t) = \bar{\Phi}(y) e^{ikx+i\omega t}$  und  $\bar{q}(x, t) = \bar{Q} e^{ikx+i\omega t}$  benutzt (siehe [112]). Darin ist  $k$  die dimensionslose Wellenzahl und  $\omega$  die dimensionslose und komplexe Eigenkreisfrequenz.

Das Einsetzen der Ansatz-Funktionen und die Eliminierung von  $\bar{Q}$  führt zum zeitfreien Randwertproblem

$$\bar{\Phi}'' - \left( (\delta_{\text{ink}} - 1) (\omega + kU_{0,1})^2 + k^2 \right) \bar{\Phi} = 0, \quad (4.25)$$

$$(-\omega^2 + \delta_1 k^4 + \beta_1 k^2 + \gamma_1 + i\omega \zeta_1) \bar{\Phi}'(0) + \alpha_1 (\omega + kU_{0,1})^2 \bar{\Phi}(0) = 0, \quad (4.26)$$

$$\bar{\Phi}'(1) = 0 \quad (4.27)$$

mit  $(\quad)' = \frac{d(\quad)}{dy}$ . Das Gleichungssystem des kompressiblen Systems unterscheidet sich nur durch die gewöhnliche Differentialgleichung (4.25) von dem des inkompressiblen Fluids mit  $\delta_{\text{ink}} = 1$ . Die Lösung von (4.25) lautet

$$\bar{\Phi}(y) = K_1 e^{\xi y} + K_2 e^{-\xi y},$$

mit der nichtlinearen Funktion  $\xi = \sqrt{(\delta_{\text{ink}} - 1) (\omega + kU_{0,1})^2 + k^2}$  und dem Zusammenhang  $K_1 = e^{-2\xi} K_2$  zwischen den Konstanten, welcher sich aus Gleichung (4.27) ergibt.

Nach Anpassung an die Randbedingungen (4.26), (4.27) und unter der Annahme  $\xi \neq 0$  ergibt sich für nichttriviale Lösungen die Dispersionsgleichung

$$\alpha_1 \left[ (\omega + kU_{0,1})^2 - i \delta_{\text{ink}} \vartheta_1 (\omega + kU_{0,1}) \right] \coth(\xi) - \xi \left( -\omega^2 + \underbrace{\delta_1 k^4 + \beta_1 k^2 + \gamma_1}_{K_S} + i\omega \zeta_1 + i \delta_{\text{ink}} \frac{2\vartheta_1 U_{0,1} \alpha_1}{k} \right) = 0. \quad (4.28)$$

Der Einfluss der verschiedenen Steifigkeiten lässt sich in der Konstanten  $K_S$  zusammenfassen. Die Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  aus der Dispersionsgleichung für eine bestimmte Wellenzahl  $k$  ist für ein kompressibles Fluid nur numerisch möglich. Für die vorliegende Arbeit wurden die Eigenkreisfrequenzen mithilfe des Müller-Verfahrens in MATLAB berechnet [82]. Das Müller-Verfahren stellt eine Verallgemeinerung des Sekanten-Verfahrens dar und hat den Vorteil, dass auch komplexe Nullstellen berechnet werden können [8].

Für ein inkompressibles Fluid gilt  $\delta_{\text{ink}} = 1$  und somit  $\xi = k$ , was nach Umformung die Dispersionsgleichung in der Form

$$\begin{aligned} \omega^2 \left( k^2 + \alpha_1 k \coth(k) \right) - i\omega \left( \alpha_1 \vartheta_1 k \coth(k) + \zeta_1 k^2 + i2\alpha_1 U_{0,1} k^2 \coth(k) \right) \\ - k \left( K_S k + i\alpha_1 \vartheta_1 U_{0,1} (k \coth(k) + 2) - \alpha_1 U_{0,1}^2 k^2 \coth(k) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

nach sich zieht. In diesem Fall kann die Gleichung analytisch nach den Eigenkreisfrequenzen aufgelöst werden. Ohne zusätzliche Dämpfung, d. h. für  $\zeta_1 = \vartheta_1 = 0$ , ergeben sich für ein inkompressibles Fluid die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{1,2} = -k \frac{\alpha_1 U_{0,1} \coth(k) \pm \sqrt{\coth(k) \alpha_1 \left( \frac{K_S}{k} - k U_{0,1}^2 \right) + K_S}}{\alpha_1 \coth(k) + k}. \quad (4.30)$$

Anhand dieser Gleichung wird deutlich, dass die Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl abhängt:  $c = \frac{\Re\{\omega\}}{k} = f(k)$ . Bei dem vorliegenden Problem treten dispersive Wellen auf.

In der Schreibweise 2 ergibt sich die leicht veränderte Dispersionsgleichung

$$\begin{aligned} \alpha_2 \left[ (\omega + kU_{0,2})^2 - i\delta_{\text{ink}} \frac{\vartheta_2}{\alpha_0^2} (\omega + kU_{0,2}) \right] \coth(\xi \alpha_0) \\ - \xi \left( -\omega^2 + \delta_2 k^4 + \beta_2 k^2 + \gamma_2 + i\omega \zeta_2 + i\delta_{\text{ink}} \frac{2\vartheta_2 U_{0,2} \alpha_2}{\alpha_0^3 k} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Diese entspricht bis auf die geänderten Parameter und dem Produkt  $\xi \alpha_0$  im Argument des Kotangens Hyperbolicus der Gleichung (4.28).

## 4.2.2 Grundsätzliches zur Auswertung

In Kapitel 2 wurde gezeigt, dass der stationäre Grundzustand für  $\Im\{\omega\} < 0$  instabil ist. In den folgenden Abschnitten wird untersucht, wie sich bestimmte Fluid- und Struktureigenschaften auf den Verlauf der Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  und somit auf das Stabilitätsverhalten auswirken.

Soweit nicht explizit andere Werte genannt werden, liegen den Ergebnissen in diesem Kapitel die Parameter

$$\alpha_1 = 1.4, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0.3, \delta_1 = 0.3, \zeta_1 = 0, \vartheta_1 = 0, U_{0,1} = 0$$

zugrunde. Diese Werte wurden gewählt, um möglichst aussagekräftige Diagramme zu erhalten und sind, mit Ausnahme der höher angenommenen Bettungssteifigkeit  $k_c$ , an den

in Abschnitt 3.5 eingeführten Testfall 1 angelehnt. Soweit nicht anders gekennzeichnet, werden Wellen mit der dimensionslosen Wellenzahl  $k = 0.9$  untersucht.

Vor der Diskussion des Einflusses der einzelnen Parameter, werden im Folgenden einige Grundlagen zur Kopplung zwischen Fluid und Struktur und zur Kompressibilität des Fluids erläutert. Diese sollen zum besseren Verständnis der Ergebnisse in den folgenden Abschnitten beitragen.

Der Parameter  $\alpha$  wird Kopplungsparameter genannt, da durch ihn in der dimensionslosen Strukturgleichung (4.14) der Einfluss des Fluids berücksichtigt wird. Für  $\alpha = 0$  liegt ein ungekoppeltes System vor.

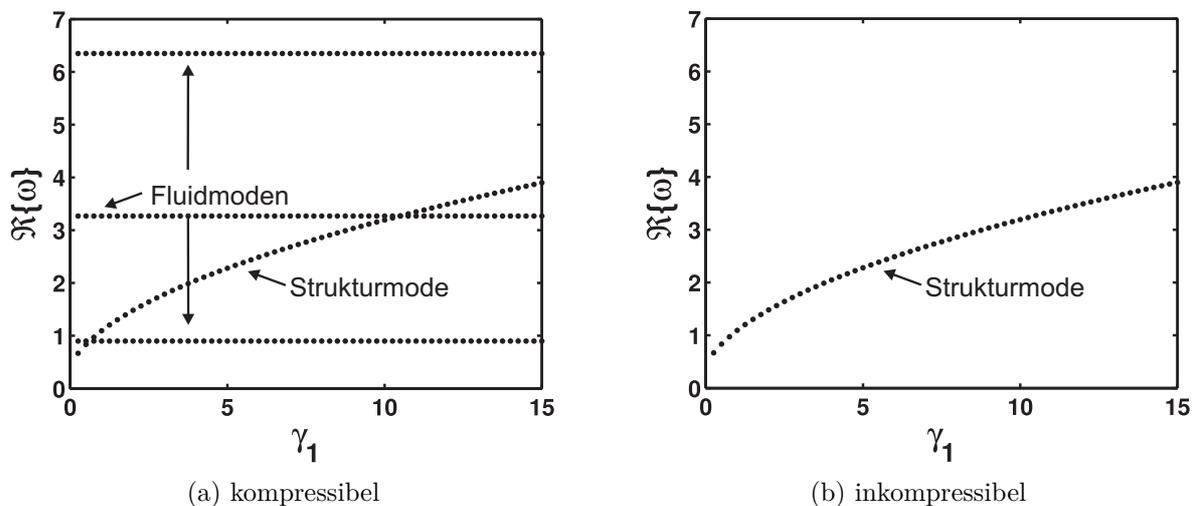


Abbildung 4.1: Eigenkreisfrequenzen des entkoppelten Systems ( $\alpha_1 = 0$ ) über dem Parameter  $\gamma_1$  der Struktur

In Abbildung 4.1 sind die ungekoppelten Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  über dem Steifigkeitsparameter  $\gamma_1$  aufgetragen. Die Auftragung über dem Parameter  $\gamma_1$  der Struktur dient zur Veranschaulichung des Einflusses der Kopplung und der Kompressibilität, der Einfluss des Parameters an sich wird in Abschnitt 4.2.5 diskutiert. Die Eigenkreisfrequenzen sind reell und symmetrisch zur horizontalen Achse, daher werden lediglich die positiven Realteile dargestellt. Aufgrund der nicht vorhandenen Imaginärteile ist der Grundzustand für diese Parameter stabil.

Im ungekoppelten Fall ( $\alpha_1 = 0$ ) können die Eigenkreisfrequenzen bestimmten Moden zugeordnet werden. Sowohl für einen Kanal mit kompressiblem als auch für einen Kanal mit inkompressiblem Fluid existiert ein Strukturmode, siehe Abbildung 4.1. Dieser ist unabhängig von den Fluideigenschaften und somit in beiden Fällen identisch. Der Parameter  $\gamma_1$  ist ein Parameter der Struktur, folglich ändern sich die Frequenzen des Strukturmoden bei Variation von  $\gamma_1$ . Nur ein kompressibles Fluid ist schwingungsfähig, wenn es zwischen starren Wänden eingeschlossen ist [113]. Aufgrund dieser Eigenschaft existieren nur bei diesem Fluid sogenannte Fluid- bzw. akustische Moden. Da diese Moden unabhängig vom Strukturparameter sind, stellen sich die zugehörigen Eigenwertverläufe als horizontale Linien

dar. Bei Abbildung 4.1a handelt es sich um einen Ausschnitt, denn für jede Wellenzahl  $k$  existieren abzählbar unendlich viele Fluidmoden.

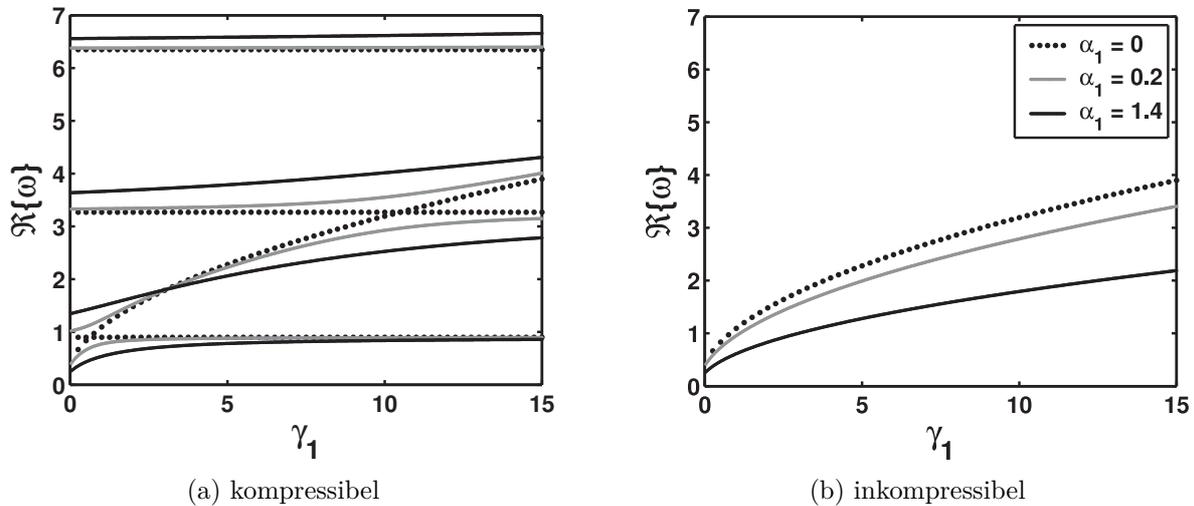


Abbildung 4.2: Eigenkreisfrequenzen des Systems über dem Strukturparameter  $\gamma_1$  für verschiedene Werte des Kopplungsparameters  $\alpha_1$

Für ein gekoppeltes System mit  $\alpha_1 > 0$  existieren keine separaten Moden. In Abbildung 4.2 sind die Eigenkreisfrequenzen für verschiedene Werte von  $\alpha_1$  aufgetragen. Der Kopplungsparameter geht aus der dimensionslosen Schreibweise hervor und besitzt keine isolierte Bedeutung. In ihm ist das Verhältnis von  $H_0 \hat{\rho}_R$  zu  $B \rho_S$  enthalten. Dieser Parameter kann daher als Verhältnis zwischen Fluid- und Strukturmasse bzw. als Verhältnis des Einflusses des Fluids gegenüber dem der Struktur interpretiert werden. Die vier Größen  $H_0$ ,  $\hat{\rho}_R$ ,  $B$  und  $\rho_S$  sind auch in den anderen dimensionslosen Parametern enthalten, siehe Abschnitt 4.1.2. Eine Variation von  $\alpha_1$  bei Fixierung aller anderen dimensionslosen Parameter bedeutet somit gleichzeitig eine Variation des zugrunde liegenden physikalischen Systems.

Für einen geringen Einfluss des Fluids, d. h. kleine Werte von  $\alpha_1$ , sind die Verläufe der Kreisfrequenzen sehr nahe an denen für  $\alpha_1 = 0$ . Dort, wo sich in Abbildung 4.2a die Verläufe für  $\alpha_1 = 0$  beim kompressiblen Fluid kreuzen, ist nun ein Abstoßen bzw. Abdrehen der Kurven aufgrund der Kopplung (englisch *Curve-Veering*) zu beobachten [112]. Die Eigenkreisfrequenzen des gekoppelten Systems können sowohl höher als auch niedriger als die des ungekoppelten Systems sein. Anders verhält es sich beim inkompressiblen Fluid, siehe Abbildung 4.2b. Hier sind die Eigenkreisfrequenzen des gekoppelten Systems stets niedriger. Dieses Absinken der Eigenkreisfrequenzen aufgrund der Kopplung mit einem Fluid wird *Added-Mass-Effekt* genannt (siehe [75], [112]).

### 4.2.3 Grundströmungsgeschwindigkeit

Die Grundströmung stellt die Energiequelle für das selbsterregungsfähige System dar. Der dimensionslose Parameter, welcher diese Energiezufuhr steuert und somit eine Instabilität des Grundzustandes verursachen kann, ist der Grundströmungsparameter  $U_0$ .

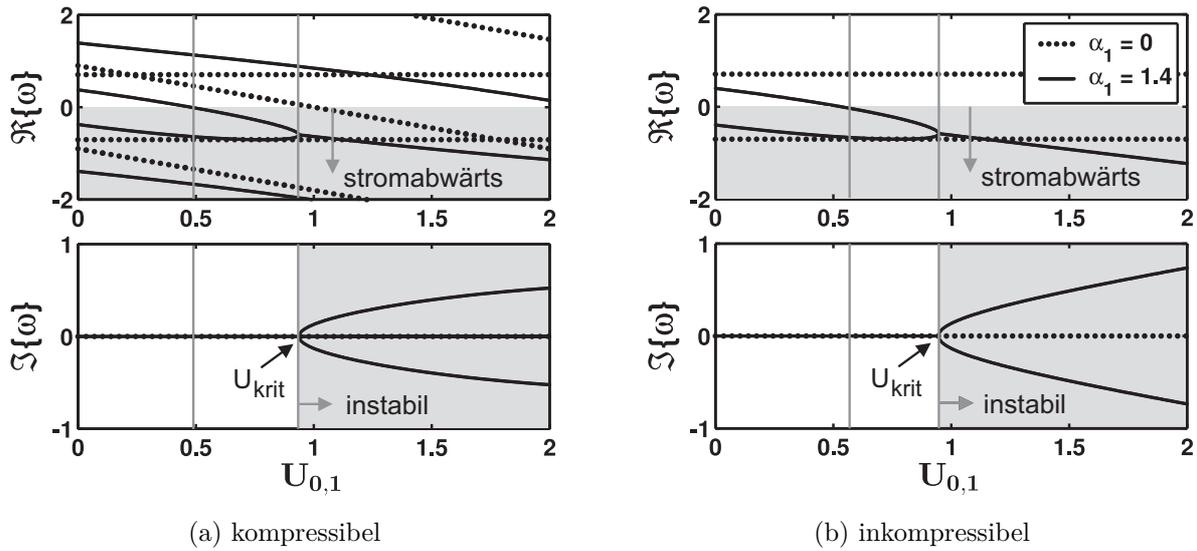


Abbildung 4.3: Einfluss des Grundströmungsparameter  $U_{0,1}$  auf die Eigenkreisfrequenzen

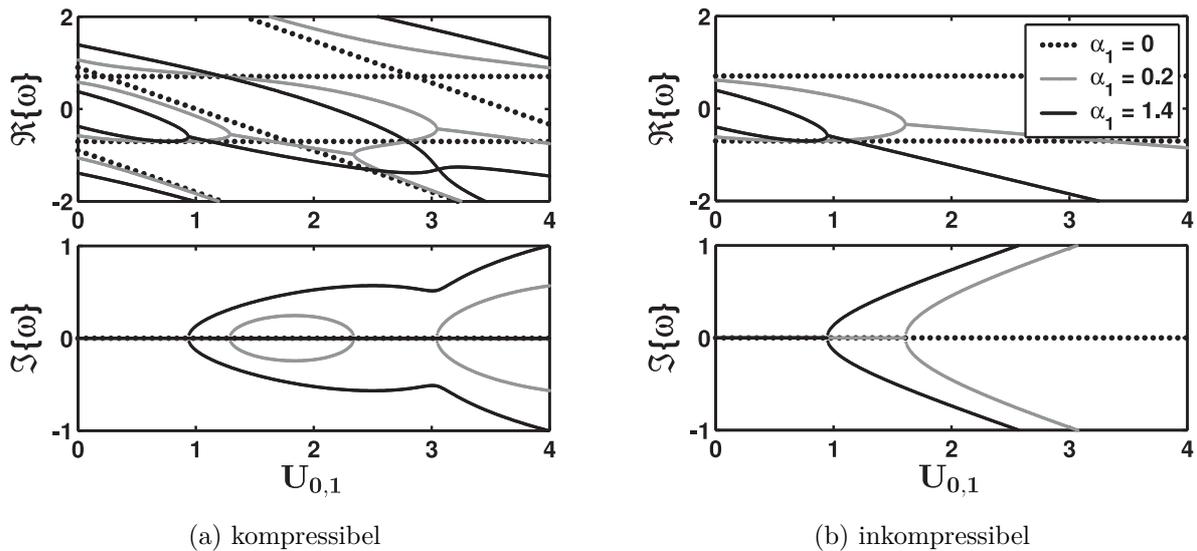


Abbildung 4.4: Eigenkreisfrequenzen für verschiedene Parameter  $\alpha_1$

In Abbildung 4.3 sind die Eigenkreisfrequenzen über der Grundströmungsgeschwindigkeit für zwei verschiedene Werte von  $\alpha_1$  aufgetragen. Es ist ersichtlich, dass die Eigenwerte nicht mehr rein reell und symmetrisch zur horizontalen Achse sind. Die nicht existente Symmetrie liegt an der nun vorhandenen axialen Transportgeschwindigkeit (siehe auch das Beispiel der bewegten Saite in [113]).

Zunächst wird Abbildung 4.3b für das inkompressible Fluid betrachtet. Die Struktur ist ohne Kopplung ( $\alpha_1 = 0$ ) nicht von der Transportgeschwindigkeit betroffen und somit verlaufen die Eigenkreisfrequenzen horizontal. Für  $\alpha_1 > 0$  sind zunächst beide Eigenwerte reell und von entgegengesetztem Vorzeichen. Da für die Phasengeschwindigkeit der Wellen

$c = \frac{\Re\{\omega\}}{k}$  gilt (siehe Gleichung 2.2), breitet sich eine Welle stromaufwärts ( $c > 0$ ) und eine Welle stromabwärts aus. Mit zunehmendem Geschwindigkeitsparameter  $U_{0,1}$  wird die Phasengeschwindigkeit der stromaufwärts laufenden Welle kleiner und schließlich bewegt sich auch diese Welle stromabwärts. Für ein bestimmtes  $U_{0,1} = U_{krit}$  konvergieren die zwei Verläufe, danach stellen sich identische Realteile und betragsmäßig gleiche positive bzw. negative Imaginärteile ein. Somit existieren für  $U_{0,1} > U_{krit}$  zwei stromabwärts laufende Wellen mit gleicher Schwingungsfrequenz, von der eine mit der Zeit ab- und die andere aufklingt [60]. Ab dieser kritischen Geschwindigkeit  $U_{krit}$  ist der stationäre Zustand instabil. Es handelt sich um eine Flutter-Instabilität.

Die Verläufe der Eigenkreisfrequenzen für ein kompressibles Fluid sind in Abbildung 4.3a dargestellt. Zusätzlich zum Strukturmode existieren hier für  $\alpha_1 = 0$  abzählbar unendlich viele Fluidmoden, welche sich durch linear abfallende Eigenwert-Verläufe äußern. Unter Berücksichtigung der Kopplung existiert auch hier, analog zum inkompressiblen Fall, ein interagierendes Eigenwertpaar und eine der stromabwärts laufenden Wellen und somit auch der Grundzustand wird für  $U_{0,1} > U_{krit}$  instabil. Die kritische Geschwindigkeit ist aber nicht dieselbe wie beim inkompressiblen Fluid, Abbildung 4.4 verdeutlicht dieses. Hier sind die Eigenwerte über  $U_{0,1}$  aufgetragen, allerdings für einen größeren Geschwindigkeitsbereich und für drei verschiedene Werte des Kopplungsparameters. Der Grundzustand des Kanals mit inkompressiblem Fluid bleibt für  $U_{0,1} > U_{krit}$  instabil, siehe Abbildung 4.4b. Für ein kompressibles Fluid (Abb. 4.4a) ist zu erkennen, dass auch die anderen Moden interagieren. Für  $\alpha_1 = 0.2$  ergibt sich aufgrund der Interaktion zwischen den einzelnen Moden zunächst wieder ein stabiler Bereich und für größere Geschwindigkeiten ein instabiler Bereich. Mit zunehmendem Kopplungsparameter werden die instabilen Geschwindigkeitsbereiche größer, bis schließlich der stabile Bereich nicht mehr vorhanden ist. Für große Kopplungsparameter sind die Unterschiede zwischen den Verläufen der Eigenwerte des Systems mit kompressiblem und inkompressiblem Fluid geringer.

Bisher wurde der Einfluss des Grundströmungsparameters und die Bestimmung der kritischen Geschwindigkeit anschaulich anhand der Verläufe der Eigenkreisfrequenzen gezeigt. Für ein inkompressibles Fluid kann die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  direkt aus der Dispersionsgleichung (4.28) mit  $\delta_{ink} = 1$  bestimmt werden. Es handelt sich um die Geschwindigkeit  $U_{0,1}$ , bei der gerade der Wechsel zwischen positivem bzw. verschwindendem und negativem Imaginärteil von  $\omega$  erfolgt. Für  $U_{0,1} = U_{krit}$  gilt somit  $\Im\{\omega_{krit}\} = 0$ . Ohne Dämpfung ( $\zeta_1 = \vartheta_1 = 0$ ) gilt

$$U_{krit,OD} = \sqrt{K_S \left( \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\alpha_1 k \coth(k)} \right)}. \quad (4.32)$$

Sobald eine äußere Dämpfung  $\zeta_1$  durch die Bettung oder die viskose Näherung mit  $\vartheta_1$  berücksichtigt wird, ergibt sich

$$U_{krit,MD} = \frac{\sqrt{K_S} (\alpha_1 \vartheta_1 k \coth(k) + k^2 \zeta_1)}{\sqrt{\alpha_1} \sqrt{k \coth(k) (2\alpha_1 \vartheta_1 - k^2 \zeta_1)^2 + \alpha_1 \vartheta_1^2 k^2 (2 + k \coth(k))^2}}. \quad (4.33)$$

Diese Formeln ermöglichen die analytische Untersuchung des Einflusses der einzelnen Parameter auf die kritische Geschwindigkeit.

### 4.2.4 Phasenverschiebung

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, dass der stationäre Zustand für  $U_{0,1} > U_{krit}$  instabil wird. Die Betrachtung des Energiehaushaltes über einen Zyklus ermöglicht ein tieferes Verständnis. Ziel dieses Abschnittes ist es, die Mechanismen, welche zu den Instabilitäten führen, genauer zu verstehen. Es ist nicht das Ziel die exakten Lösungen zu bestimmen, weshalb die dissipativen Effekte durch die Bettung und die viskose Näherung vernachlässigt werden.

In Kapitel 2.1.2 wurde gezeigt, dass die Phasenverschiebung  $\varphi = \varphi_p - \varphi_q$  zwischen dem Druck  $p$  des Fluids an der Wand und der Auslenkung  $q$  der Struktur die Stabilität bedingt. Dem selbsterregungsfähigen System wird für

$$\sin(\varphi) > 0 \quad (4.34)$$

Energie zugeführt und es kommt zum Stabilitätsverlust des stationären Zustandes.

Die reellen Wellen der Fluktuationen des Druckes und der Auslenkung werden durch

$$\begin{aligned} p_{reell} &= P_{reell} e^{-\omega_i t} \cos(kx + \omega_r t + \varphi_p), \\ q_{reell} &= Q_{reell} e^{-\omega_i t} \cos(kx + \omega_r t + \varphi_q) \end{aligned}$$

beschrieben (siehe Kapitel 2.2). Der Realteil  $\omega_r$  stellt die Schwingungsfrequenz dar, während der Imaginärteil ein Auf- oder Abklingen der Amplitude bewirkt. Zur Abschätzung der zugeführten Leistung wird  $\omega$  und somit auch die Amplitude bei der Integration über einen Zyklus als konstant angenommen. Für den kritischen Fall  $\omega_i = 0$  ist diese Annahme exakt erfüllt.

Der Zusammenhang zwischen den reellen und komplexen Amplituden lautet:  $\bar{P} = P_{reell} e^{i\varphi_p}$  und  $\bar{Q} = Q_{reell} e^{i\varphi_q}$  (siehe Abschnitt 2.2). Die Argumente  $\varphi_p = \arg(\bar{P})$  und  $\varphi_q = \arg(\bar{Q})$  dieser komplexen Zahlen lassen sich aus dem Verhältnis der Imaginär- und Realteile berechnen [14].

Aus Gleichung (4.21) und mit dem Wellenansatz für  $\bar{\phi}$  ergibt sich für die komplexe Druckamplitude an der Wand:

$$\bar{P}\Big|_{y=0} = -i(\omega + kU_{0,1})(e^{-2\xi} + 1)K_2. \quad (4.35)$$

Für die komplexe Amplitude der Strukturauslenkung folgt aus Gleichung (4.23) mit den Wellenansätzen für  $\bar{q}$  und  $\bar{\phi}$

$$\bar{Q} = -i \frac{1}{\omega + kU_{0,1}} (e^{-2\xi} - 1)\xi K_2. \quad (4.36)$$

Für einen bestimmten Parametersatz kann zunächst die Eigenkreisfrequenz bestimmt werden, anschließend können aus den Real- und Imaginärteilen von  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  die Argumente berechnet werden und daraus die gesuchte Phasenverschiebung der instabil werdenden Wellen.

Für die vereinfachten Gleichungen im Falle eines inkompressiblen Fluids lassen sich die Real- und Imaginärteile von  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  explizit angeben:

$$\bar{P}\Big|_{y=0} = [\omega_i - i(\omega_r + kU_{0,1})] (e^{-2k} + 1)K_2, \quad (4.37)$$

$$\bar{Q} = [\omega_i + i(\omega_r + kU_{0,1})] \frac{(-e^{-2k} + 1)kK_2}{(\omega_r + kU_{0,1})^2 + \omega_i^2}. \quad (4.38)$$

Die energetische Betrachtung wird im Folgenden ausführlich für ein inkompressibles Fluid durchgeführt, da hier die Phasenverschiebung analytisch bestimmt werden kann. In Abschnitt 4.2.3 wurde gezeigt, dass stets die stromabwärts laufenden Wellen instabil werden. Für diese kritischen Wellen gilt  $\omega_r < 0$ .

Zunächst wird der Fall für kleine Geschwindigkeiten  $U_{0,1} < U_{krit}$  betrachtet. Sowohl aus der Gleichung für die Eigenkreisfrequenz (4.30) mit  $\zeta_1 = 0$  als auch aus den Eigenwertverläufen im vorherigen Abschnitt wird deutlich, dass in diesem Fall  $\omega_i = 0$  gilt. Aus den Gleichungen (4.37) und (4.38) ist ersichtlich, dass sich für  $\omega_i = 0$  rein imaginäre  $\bar{P}$  und  $\bar{Q}$  einstellen. Für die Wellen mit  $\omega_r < 0$  ergibt sich für  $\omega_r + kU_{0,1} < 0$  die Phasenverschiebung  $\varphi = -\pi$  und für  $\omega_r + kU_{0,1} > 0$  die Phasenverschiebung  $\varphi = \pi$ . Dem System wird für  $U_{0,1} < U_{krit}$  gemäß Bedingung (4.34) keine Energie zugeführt.

Für größere Geschwindigkeiten  $U_{0,1} > U_{krit}$  werden die Eigenkreisfrequenzen komplex und für  $\omega_i < 0$  ergibt sich aus der Differenz der Argumente von (4.37) und (4.38) stets

$$\varphi = 2 \arctan \left( -\frac{\omega_r + kU_{0,1}}{\omega_i} \right). \quad (4.39)$$

Der Wertebereich liegt für  $\omega_r + kU_{0,1} > 0$  zwischen 0 und  $\pi$ : Der Energieeintrag über einen Zyklus ist positiv (vgl. Bedingung (4.34)). Für  $U_{0,1} > \frac{-\omega_r}{k}$  wird der kritischen Welle (mit  $\omega_r < 0$ ) Energie zugeführt. In Abbildung 4.5b ist die Phasenverschiebung der kritischen Wellen für ein inkompressibles Fluid über dem Grundströmungsparameter aufgetragen. Der Vergleich mit Abbildung 4.4b zeigt, dass  $U_{krit}$  mit den Grenzen für Energiezufuhr zusammenfällt.

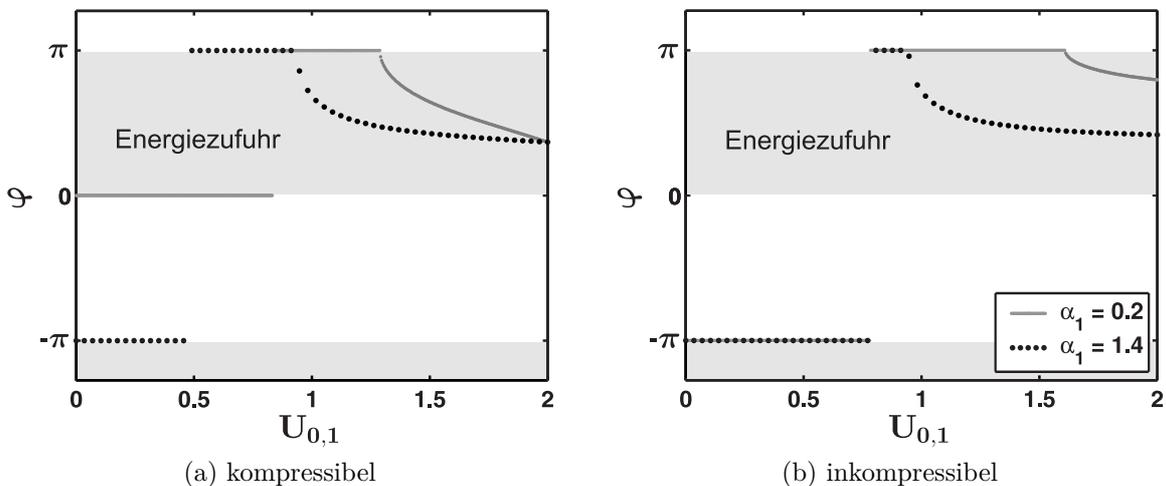


Abbildung 4.5: Phasenverschiebung zwischen Auslenkung der Struktur und Druck an der Wand für verschiedene Parameter  $\alpha_1$

Für ein kompressibles Fluid kann die Phasenverschiebung aufgrund der Nichtlinearität der Bestimmungsgleichung für  $\omega$  nicht analytisch ermittelt werden. Außerdem interagieren mehrere Moden miteinander und es können nicht einzelne Wellen als kritisch identifiziert werden. Für die Eigenkreisfrequenzen des kompressiblen Fluids kann bis zum ersten Stabilitätsverlust eine kritische Welle ausgemacht werden. Auch hier treffen die Aussagen über den Zusammenhang zwischen der Energiezufuhr und der Instabilität zu (siehe Abb. 4.5a).

### 4.2.5 Steifigkeits- und Vorspannungsparameter

Gemäß Abschnitt 4.2.3 wird das Auftreten von Instabilitäten ausschließlich vom Grundströmungsparameter  $U_0$  bedingt. Die restlichen dimensionslosen Parameter beeinflussen jedoch den genauen Wert der kritischen Geschwindigkeit  $U_{krit}$ . In diesem Abschnitt werden die Einflüsse der Bettungssteifigkeit, der Biegesteifigkeit und der Vorspannung der Struktur untersucht.

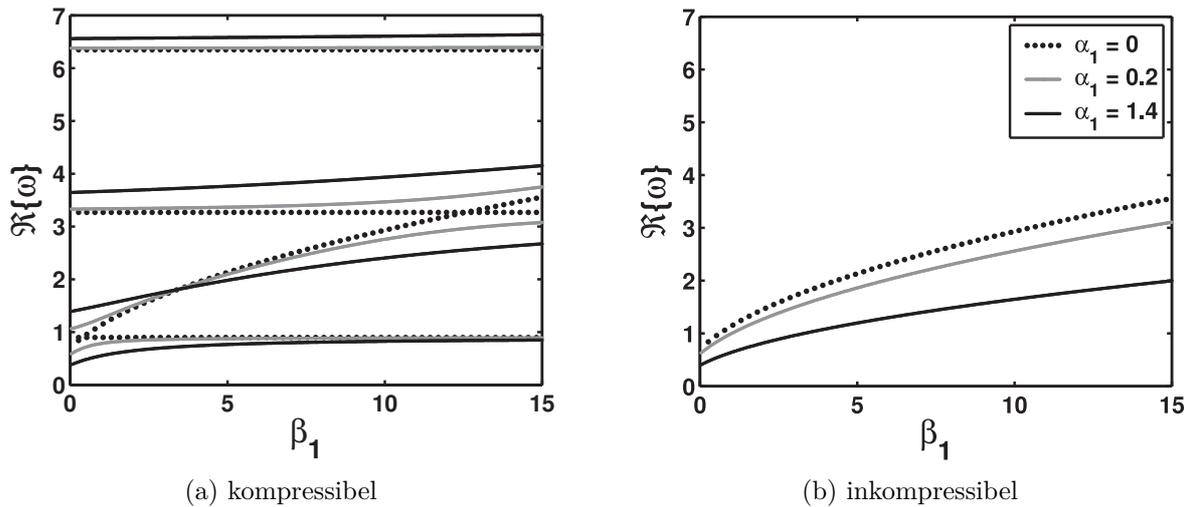


Abbildung 4.6: Eigenkreisfrequenzen über Vorspannungsparameter  $\beta_1$

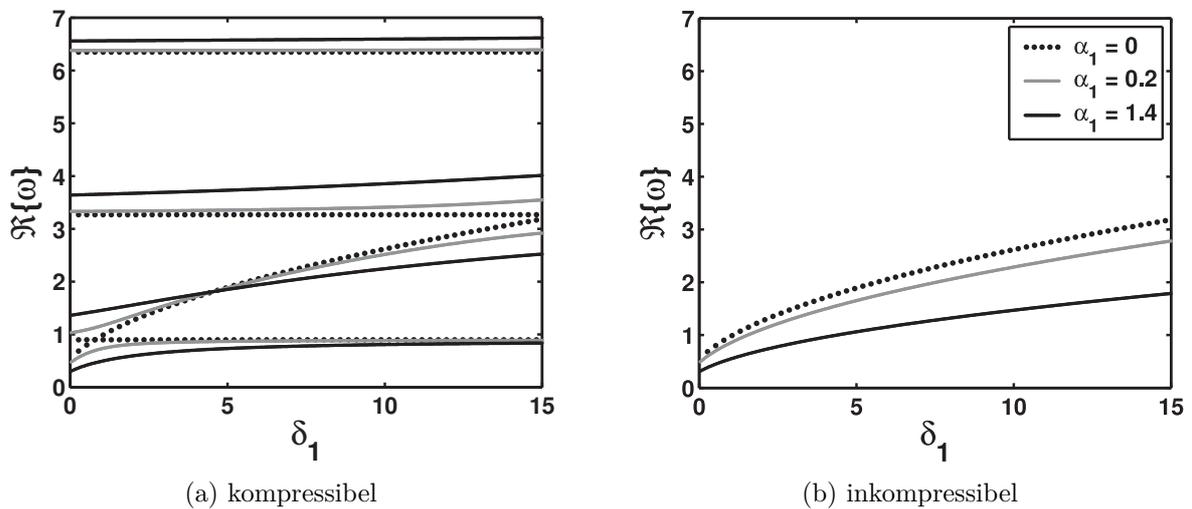


Abbildung 4.7: Eigenkreisfrequenzen über Biegesteifigkeitsparameter  $\delta_1$

Die Bettungssteifigkeit ist im Parameter  $\gamma_1$  enthalten, dessen Einfluss auf die Eigenkreisfrequenzen bereits in Abbildung 4.2 dargestellt wurde. Die Eigenwerte steigen mit zunehmender Steifigkeit der Bettung.

Ähnlich verhält es sich mit der Rückstellung aufgrund des Membraneffekts, diese ist über

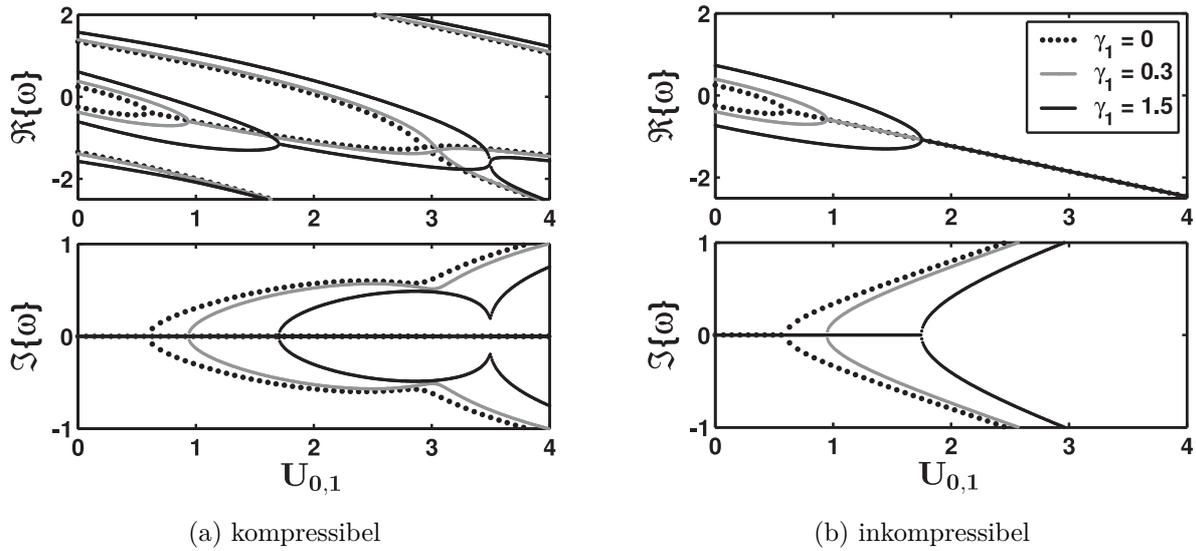


Abbildung 4.8: Eigenkreisfrequenzen über Grundströmungsparameter  $U_{0,1}$  für verschiedene Werte von  $\gamma_1$

die Vorspannung im Parameter  $\beta_1$  enthalten (siehe Abschnitt 4.1.2). Der Verlauf der Eigenwerte ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Auch eine zunehmende Biegesteifigkeit der Struktur, welche in den Parameter  $\delta_1$  einfließt, bewirkt ein Ansteigen der Eigenkreisfrequenzen, siehe Abbildung 4.7.

Alle drei Steifigkeits- bzw. Vorspannungsparameter können in der Dispersionsgleichung als  $K_S = \delta_1 k^4 + \beta_1 k^2 + \gamma_1$  zusammengefasst werden, siehe Abschnitt 4.2.1. Daraus wird deutlich, dass diese die Stabilität qualitativ gleichwertig beeinflussen. In Abbildung 4.8 sind exemplarisch die Eigenkreisfrequenzen über dem Grundströmungsparameter für verschiedene Werte von  $\gamma_1$  dargestellt. Die Erhöhung der Steifigkeit bewirkt auch eine höhere kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  (vgl. Gleichungen (4.32) bzw. (4.33) für inkompressibles Fluid). Alle drei Parameter  $\gamma_1$ ,  $\beta_1$  und  $\delta_1$  wirken somit stabilisierend.

### 4.2.6 Wellenzahl

In einem unendlich ausgedehnten System können Wellen mit allen Wellenzahlen  $k > 0$  auftreten. Wird die Annahme unendlicher Ausdehnung durch die Annahme periodisch fortgesetzter Randbedingungen oder einer endlichen Struktur aufgehoben, sind nur noch endlich viele Wellenzahlen möglich. Bei einfacher, periodisch fortgesetzter Lagerung mit Lagerabstand  $\ell$  ist  $k = \frac{\pi}{\ell}$  die kleinste auftretende Wellenzahl (siehe Abschnitt 2.2).

Wird die Wellenzahl  $k$  variiert, wirkt sich dieses sowohl auf die Eigenwerte der Struktur als auch auf die Eigenwerte des Fluids aus. Abbildung 4.9 zeigt die Eigenkreisfrequenzen für den ungekoppelten und den gekoppelten Fall. Auch hier ist das *Curve-veering* und für ein inkompressibles Fluid der *Added-Mass*-Effekt zu erkennen.

Die Wellenzahl hat keine eindeutige Auswirkung auf die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$ . Dies wird bei Betrachtung der Dispersionsgleichung (4.28) oder auch der Gleichungen (4.32) bzw. (4.33) für  $U_{krit}$  im inkompressiblen Fall deutlich. Es handelt sich um dispersive Wel-

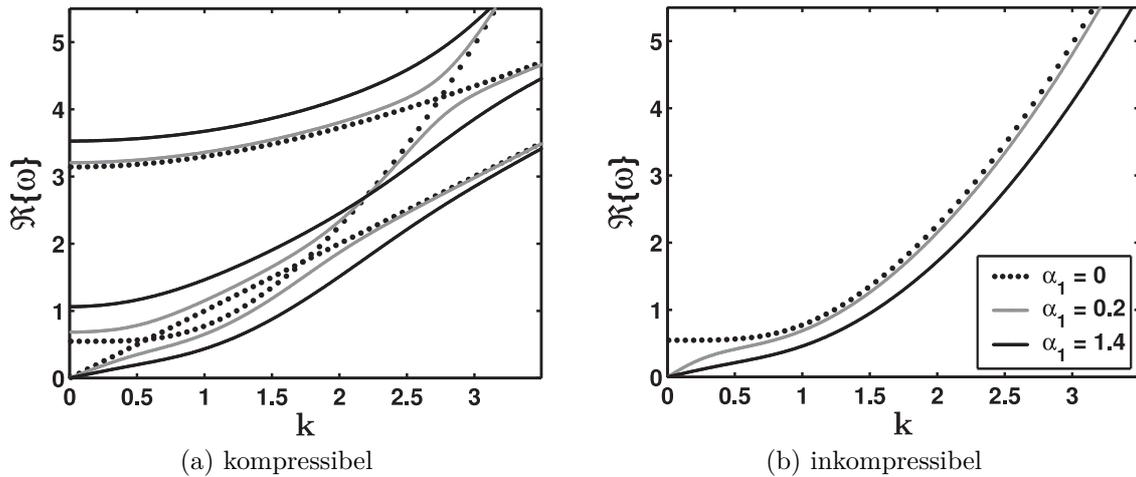


Abbildung 4.9: Eigenkreisfrequenzen über Wellenzahl  $k$  für verschiedene Werte von  $\alpha_1$

len, deren Phasengeschwindigkeit von der Wellenzahl abhängt. Diese ist in allen Termen enthalten und somit hängt die Stabilität des stationären Zustandes von der Größe der Wellenzahl und dem Verhältnis der Parameter zueinander ab.

Abbildung 4.10 zeigt beispielhaft den Einfluss der Wellenzahl auf die kritische Geschwindigkeit für den Fall eines kompressiblen Fluids. In Abbildung 4.10b ist für  $\alpha_1 = 1.4$  der Verlauf der kritischen Geschwindigkeit über  $k$  aufgetragen. In dem betrachteten Bereich verliert der Grundzustand bei gegebenem  $k$  seine Stabilität und bleibt danach instabil, es gibt genau ein  $U_{krit} = U_{krit,1}$ . Für ein bestimmtes  $k_{min}$  hat die kritische Geschwindigkeit ein Minimum. Wird die minimale kritische Geschwindigkeit eines Systems gesucht, so muss unbedingt die richtige Wellenzahl betrachtet werden. Dabei ist sowohl die durch die Geometrie vorgegebene kleinstmögliche Wellenzahl als auch  $k_{min}$  zu berücksichtigen.

Bereits in Abbildung 4.4 wurde gezeigt, dass durch die Interaktion der Moden bei gleichbleibender Wellenzahl für  $U > U_{krit}$  auch wieder stabile Bereiche auftreten können. Auch in Abbildung 4.10a ist dieser Sachverhalt zu erkennen. Hierbei bezeichnet  $U_{stab}$  die Geschwindigkeiten, oberhalb derer der stationäre Zustand wieder stabil ist. Auch hier kann eine minimale kritische Geschwindigkeit  $U_{min}$  gefunden werden.

Bei einem inkompressiblen Fluid interagieren nur zwei Moden miteinander und es gibt eine kritische Geschwindigkeit, siehe Abbildung 4.11. Auch hier kann eine minimale kritische Geschwindigkeit für eine bestimmte Wellenzahl ermittelt werden.

### 4.2.7 Dämpfungsparameter

Die Dämpfungsparameter sind  $\zeta_1$  und  $\vartheta_1$ . Zunächst wird der Parameter  $\zeta_1$  betrachtet, welcher die Dämpfungskonstante der viskoelastischen Bettung enthält. In Abbildung 4.12 sind die Eigenkreisfrequenzen über  $\zeta_1$  aufgetragen. Es fällt auf, dass die Eigenwerte hier bereits ohne Grundströmung komplex sind und ihr Verlauf nicht mehr symmetrisch zur horizontalen Achse ist. Die Eigenwerte sind komplex, jedoch mit einem positiven Imaginärteil. Somit bewirkt die Dämpfung keinen Stabilitätsverlust des Grundzustandes.

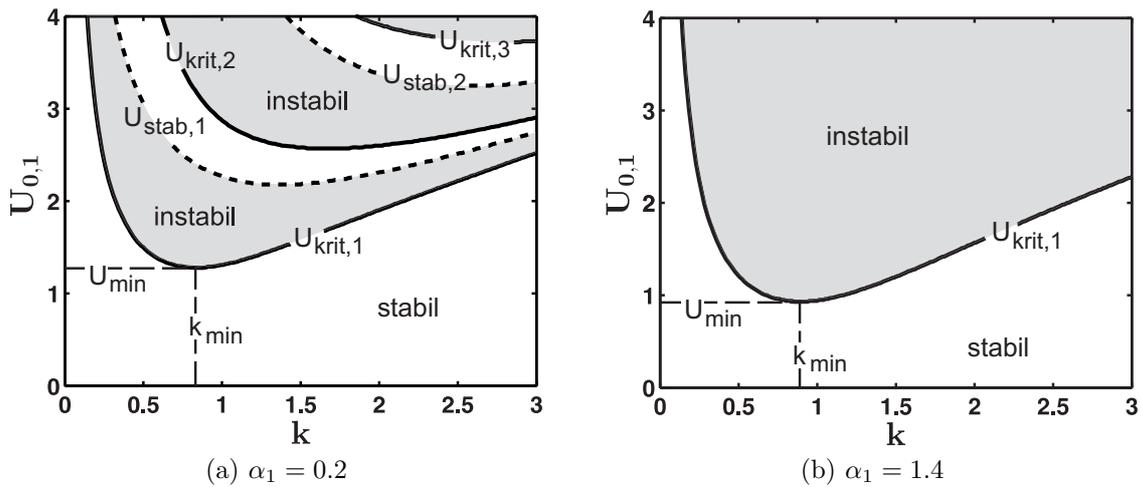


Abbildung 4.10: Grundströmungsparameter über Wellenzahl  $k$  für ein kompressibles Fluid und verschiedene Werte von  $\alpha_1$

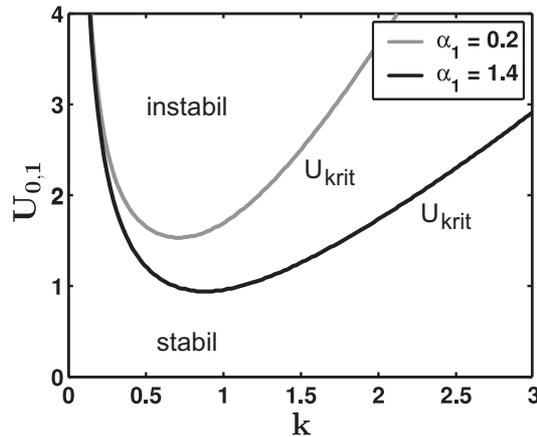


Abbildung 4.11: Grundströmungsparameter  $U_{0,1}$  über Wellenzahl  $k$  für ein inkompressibles Fluid und verschiedene Werte von  $\alpha_1$

Die Eigenkreisfrequenzen des Strukturmoden werden durch die zunehmende Dämpfung der Struktur beeinflusst. Für das kompressible Fluid gibt es abzählbar unendlich viele Fluidmoden, welche in Abbildung 4.12a parallele Geraden darstellen. Aufgrund dieser Fluidmoden sind in der Abbildung für  $\alpha_1 = 1.4$  mehr Imaginär- als Realteile der Eigenkreisfrequenzen zu sehen. Während die Realteile der Eigenwerte des gekoppelten Systems größtenteils außerhalb des Ausschnittes liegen, ergeben sich aufgrund der Interaktion zwischen den einzelnen Moden Eigenwerte mit kleineren Imaginärteilen. Somit sind Imaginärteile sichtbar, welche zu nicht abgebildeten Realteilen gehören.

Als Nächstes wird die Auswirkung des Dämpfungsparameters  $\zeta_1$  auf die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  betrachtet. In Abbildung 4.13 sind die Eigenkreisfrequenzen über dem Grundströmungsparameter mit und ohne Dämpfung dargestellt. Für  $\zeta_1 = 0$  entsprechen die Verläufe denen aus Abbildung 4.3. Hier werden die Eigenwerte zunächst negativ, was stromabwärts laufenden Wellen entspricht. Anschließend konvergieren die Kurven, es entstehen

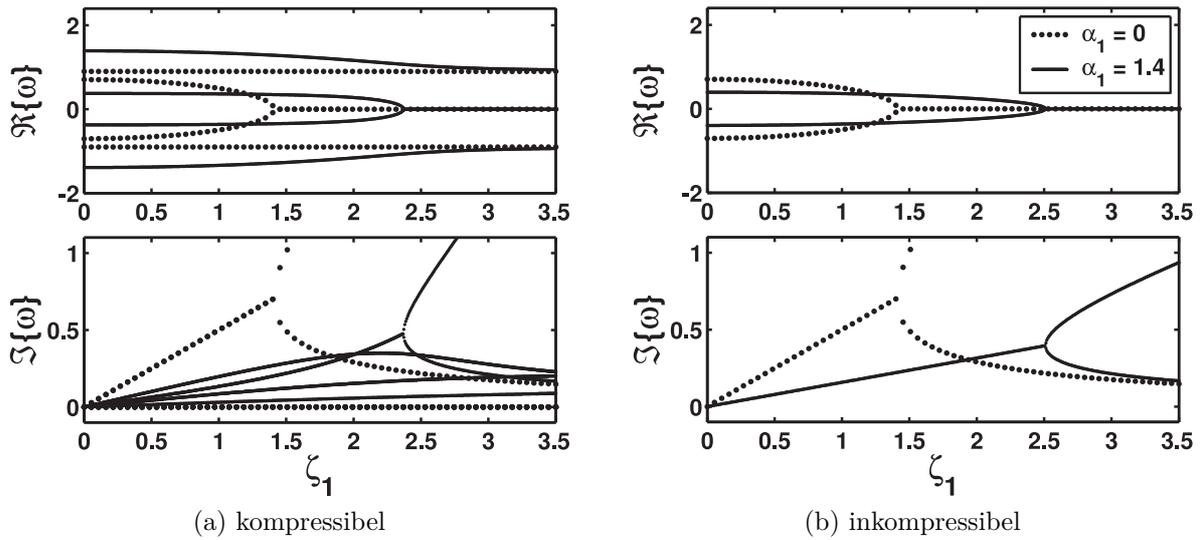


Abbildung 4.12: Eigenkreisfrequenzen über Dämpfungparameter  $\zeta_1$

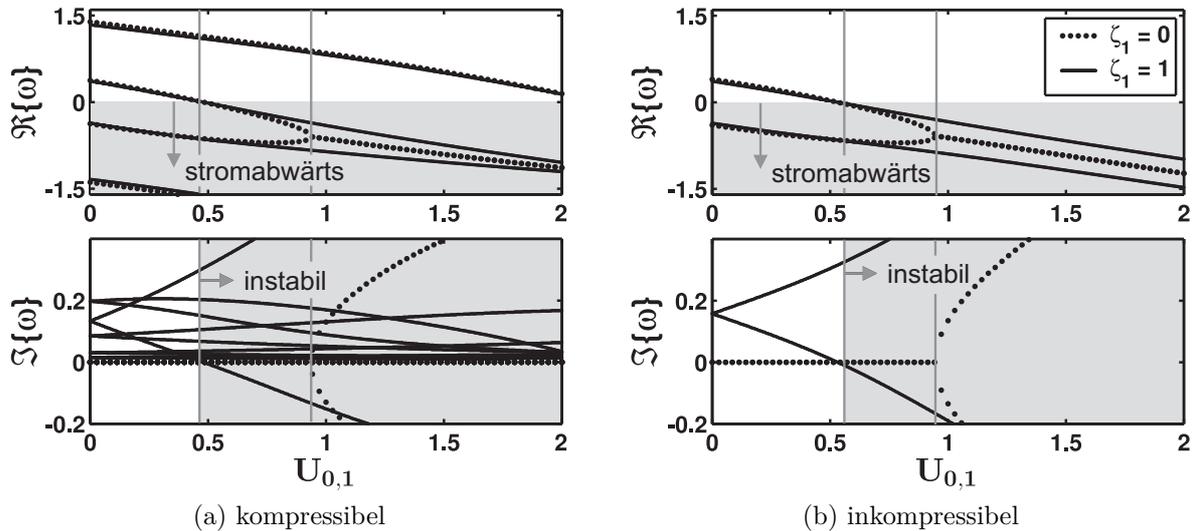


Abbildung 4.13: Eigenkreisfrequenzen über Grundströmungsparameter  $U_{0,1}$  für verschiedene Werte von  $\zeta_1$

komplexe Eigenwerte und der stationäre Zustand wird instabil. Mit Berücksichtigung der Dämpfung sind die Eigenwerte bereits für  $U_{0,1} = 0$  komplex und die Aufspaltung der Imaginärteile findet ab  $U_{0,1} > 0$  statt. Sobald beide Realteile des zuvor konvergierenden Eigenwert-Paares negativ werden, wird auch der Grundzustand instabil. Da der Realteil der Eigenkreisfrequenz hier für  $U_{krit}$  verschwindet, wird in einigen Arbeiten (z. B. [37], [60]) in diesem Zusammenhang von Divergenz-Instabilität gesprochen. Durch die Berücksichtigung der Dämpfung wird die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  abgesenkt. Der Dämpfungsparameter  $\zeta_1$  wirkt destabilisierend.

Der zweite Dämpfungsparameter ist  $\vartheta_1$ . Dieser Parameter entsteht durch die Berücksichtigung des Reibungsverlustes aufgrund der Viskosität des Fluids und gilt nur für die in-

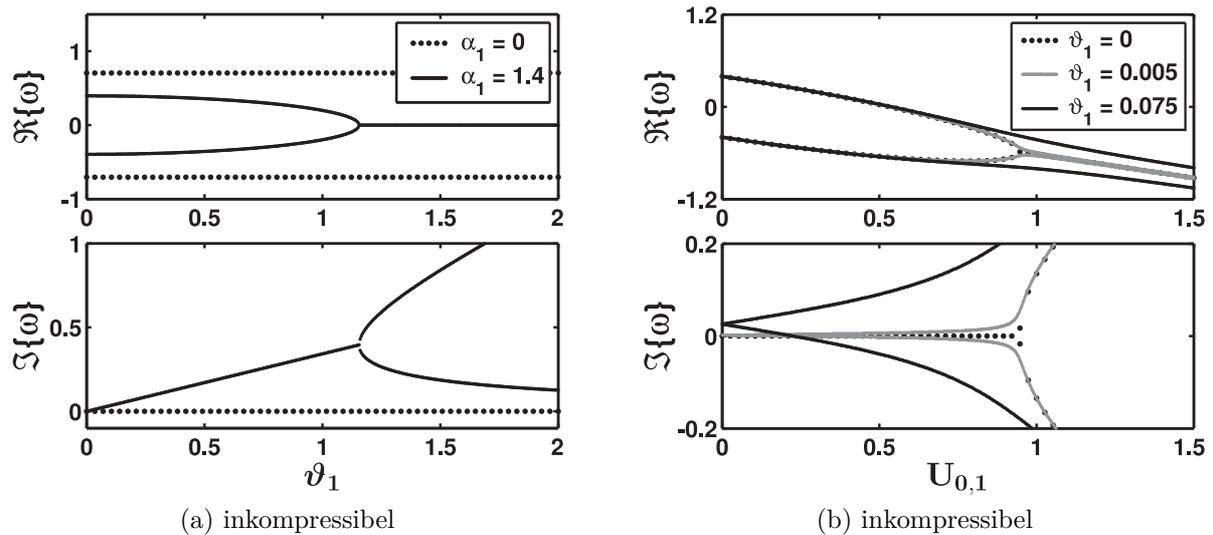


Abbildung 4.14: Eigenkreisfrequenzen über Dämpfungsparameter  $\vartheta_1$  und über Grundströmungsparameter  $U_{0,1}$

kompressible Modellierung (siehe Abschnitt 3.1.1). Der Parameter enthält die Viskosität des Fluids, welche für den hier verwendeten Testfall klein ist. Um den Einfluss der Fluiddämpfung qualitativ zeigen zu können, sind die Werte von  $\vartheta_1$  in den Abbildungen teilweise überhöht. Abbildung 4.14a stellt die Eigenkreisfrequenzen über dem Dämpfungsparameter  $\vartheta_1$  für den ent- und gekoppelten Fall dar. Die Viskosität ist eine Eigenschaft des Fluids und daher bleiben die Strukturmoden durch  $\vartheta_1$  unverändert. Die Eigenwerte sind komplex und nicht symmetrisch zur horizontalen Achse. Der stationäre Zustand ist ohne Grundströmung stabil. Analog zur Untersuchung der Strukturdämpfung sind in Abbildung 4.14b die Eigenwerte über dem Grundströmungsparameter mit und ohne Dämpfungsparameter  $\vartheta_1$  aufgetragen. Die Dämpfung bewirkt eine deutliche Absenkung der kritischen Geschwindigkeit: Der Parameter  $\vartheta_1$  wirkt destabilisierend.

Aus Abbildung 4.14b ist des Weiteren die Ähnlichkeit der Verläufe für sehr kleine  $\vartheta_1$  und für  $\vartheta_1 = 0$  zu erkennen. Während die Abbildung es nur erahnen lässt, wird anhand der Gleichungen (4.32) und (4.33) für  $U_{krit}$  jedoch deutlich, dass die kritische Geschwindigkeit für  $\zeta_1 = 0$  unabhängig von  $\vartheta_1$  ist. Selbst für sehr kleine Parameter  $\vartheta_1$  nähert sich der Einfluss des viskosen Fluids dem des nicht viskosen Fluids nicht an. Dieses singuläre Verhalten ist aus der Strömungsmechanik bekannt: Im Allgemeinen ergibt sich durch die nicht viskose oder schwach viskose Modellierung des Fluids ein anderes Strömungsbild [97].

Bisher ist der Einfluss der einzelnen Dämpfungsparameter unter Vernachlässigung des jeweils anderen untersucht worden. Um den Einfluss der beiden Dämpfungsparameter gleichzeitig zu untersuchen, ist in Abbildung 4.15 die kritische Geschwindigkeit über dem Verhältnis der Dämpfungsparameter aufgetragen. Die kritische Geschwindigkeit hängt entscheidend von diesem Dämpfungsverhältnis ab. Je nach Verhältnis wirkt eine weitere Erhöhung desselben stabilisierend bzw. destabilisierend.

Die Dämpfung durch die Bettung der Struktur kann als äußere Dämpfung  $\zeta_1$  und die Dämpfung durch die Viskosität des Fluids kann als innere Dämpfung interpretiert werden.

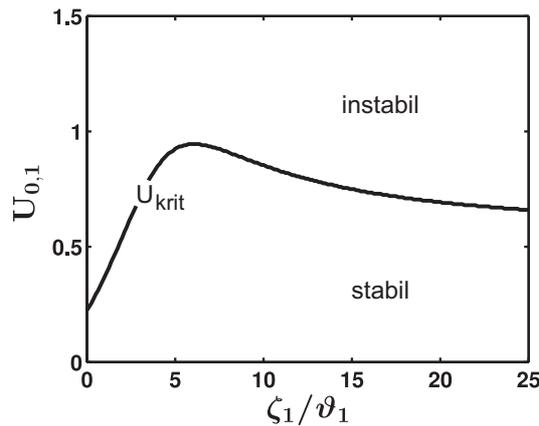


Abbildung 4.15: Einfluss der Dämpfungsparameter  $\zeta_1$  und  $\vartheta_1$  auf die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$

Die Stabilität hängt somit von dem Verhältnis zwischen äußerer und innerer Dämpfung ab. Dieses Phänomen ist aus der Rotordynamik bekannt [28]. Dort wird die Rotordrehzahl über dem Dämpfungsverhältnis aufgetragen und es ergibt sich ein linearer Verlauf für die Stabilitätsgrenze, welcher mit dem steigenden Teil der Kurve in 4.15 vergleichbar ist.

Beim hier vorliegenden Problem des durchströmten Kanals überwiegt auf der linken Seite der Einfluss der inneren Dämpfung durch die Fluidreibung, während auf der rechten Seite der Einfluss durch die äußere Dämpfung dominierend ist [37]. Das Maximum der kritischen Geschwindigkeit liegt bei

$$\left(\frac{\zeta_1}{\vartheta_1}\right)_{max} = \frac{\coth(k)(k + 2\alpha_1) + 2}{k \coth(k)} \quad (4.40)$$

und wird von der Wellenzahl  $k$  und dem Kopplungsparameter  $\alpha_1$  bestimmt. Auffallend ist die kleine kritische Geschwindigkeit für  $\zeta_1/\vartheta_1 = 0$ . Dieser Fall entspricht den in Abbildung 4.14b dargestellten Verläufen und macht deutlich, dass hier auch der Unterschied zwischen der kritischen Geschwindigkeit eines Fluids mit  $\vartheta_1 = 0$  und  $\vartheta_1 \neq 0$  groß ist. Dieser Sachverhalt wird im kommenden Abschnitt genauer untersucht.

### 4.2.8 Kanalhöhe

Zur Untersuchung des Einflusses der Kanalhöhe wird die dimensionslose Schreibweise 2 mit der Bezugslänge  $L$  verwendet (siehe Abschnitt 4.1.2). Es liegen aber weiterhin die gleichen dimensionsbehafteten Fluid- und Strukturgrößen zugrunde und daraus ergeben sich folgende dimensionslosen Parameter:

$$\alpha_2 = 170.4, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 4613.4, \delta_2 = 0.25 \cdot 10^{-4}, \zeta_2 = 0, \vartheta_2 = 0, U_{0,2} = 0, \alpha_0 = 0.008.$$

Auch die Wellenzahl der untersuchten Wellen ist identisch und entspricht der dimensionslosen Wellenzahl  $k = 108$  in der Schreibweise 2. Die Kanalhöhe  $H_0$  ist in dem Längenverhältnis  $\alpha_0 = \frac{H_0}{L}$  enthalten. Eine Variation von  $\alpha_0$  bewirkt eine Variation der Kanalhöhe.

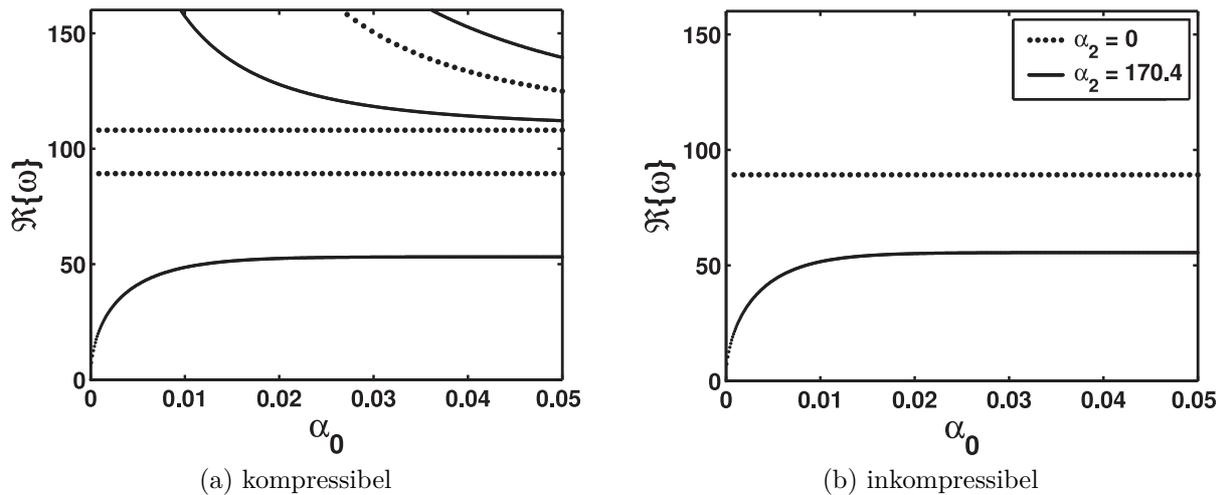


Abbildung 4.16: Eigenkreisfrequenzen über Längenverhältnis  $\alpha_0$  für verschiedene Werte des Kopplungsparameters  $\alpha_2$

Abbildung 4.16 zeigt die Eigenkreisfrequenzen über dem Längenverhältnis  $\alpha_0$  für den ent- und gekoppelten Fall. Ohne Grundströmung sind die Eigenkreisfrequenzen reell und symmetrisch zur  $\alpha_0$ -Achse, weshalb lediglich die positiven Werte dargestellt werden.

Die zum Strukturmode gehörenden Eigenkreisfrequenzen bleiben durch die Variation der Kanalhöhe unverändert und erscheinen als horizontale Linien. Die Abweichung zwischen den ungekoppelten und den gekoppelten Eigenwerten ist besonders groß für kleine Längenverhältnisse  $\alpha_0$ . Somit ist der Einfluss der Kopplung für schlanke Kanäle am größten (siehe dazu die ähnlichen Untersuchungen [48] und [104]).

Ab einem bestimmten Wert von  $\alpha_0$  hat die Kanalhöhe bei einem inkompressiblen Fluid nahezu keinen Einfluss mehr. Bei Betrachtung der Gleichung (4.30) für die Eigenkreisfrequenzen wird deutlich, dass die Kanalhöhe lediglich im Term  $\coth(k\alpha_0)$  enthalten ist. Da für den Kotangens Hyperbolicus  $\lim_{x \rightarrow \infty} \coth(x) = 1$  und  $\coth(\pi) = 1.004$  gilt, kann der Einfluss der Kanalhöhe beim inkompressiblen und reibungsfreien Fluid für  $\alpha_0 > \frac{\pi}{k}$  vernachlässigt werden [2]. In Abbildung 4.16b entspricht dies dem Wert  $\frac{\pi}{k} = 0.029$ .

Aus Abbildung 4.16a ist ersichtlich, dass für ein kompressibles Fluid keine eindeutige Aussage über den Einfluss von  $\alpha_0$  möglich ist. Der Einfluss der Kopplung wird mit zunehmendem  $\alpha_0$  zwar kleiner, es kann aber kein konkreter Wert genannt werden, ab dem die Kanalhöhe vernachlässigbar ist.

Bislang wurde gezeigt, dass sich die Kopplung bei schlanken Kanälen besonders stark auswirkt und zumindest eine der Eigenkreisfrequenzen mit abnehmender Kanalhöhe kleiner wird. Wie sich das Längenverhältnis  $\alpha_0$  auf die Stabilität des Grundzustandes auswirkt, ist in Abbildung 4.17 dargestellt. Hier sind die Verläufe von  $\omega$  über der Grundströmungsgeschwindigkeit für verschiedene Werte des Längenverhältnisses  $\alpha_0$  aufgetragen. Sowohl für das inkompressible als auch für das kompressible Fluid sinkt  $U_{krit}$  mit abnehmender Kanalhöhe. Somit wird die Strömung in einem schlanken Kanal für kleinere Grundströmungsgeschwindigkeiten instabil als in einem nicht schlanken Kanal. Ein größeres Längenverhältnis  $\alpha_0$  wirkt stabilisierend.

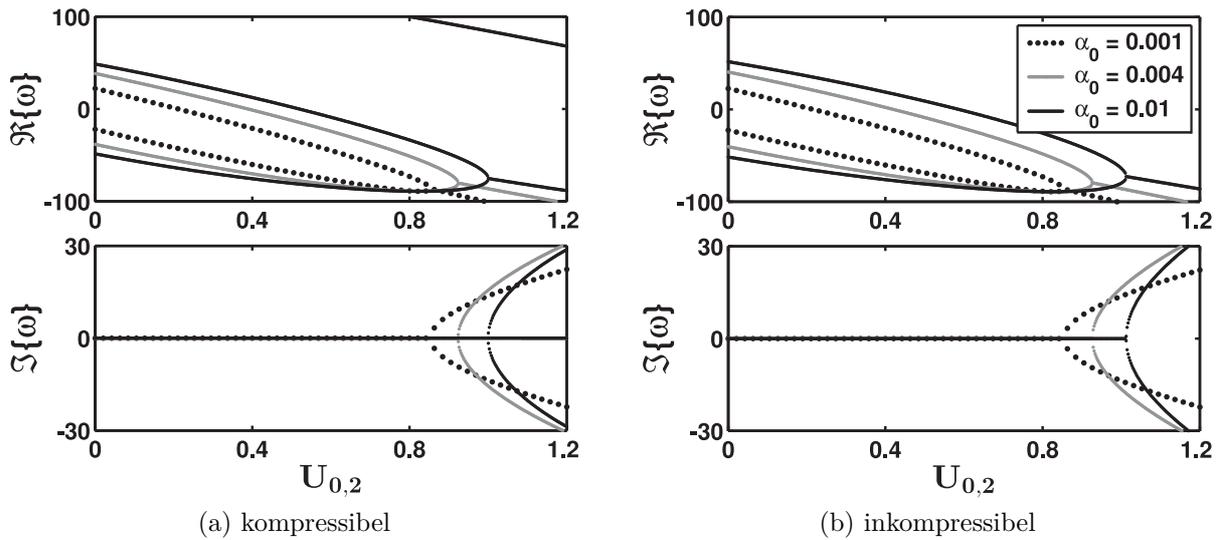


Abbildung 4.17: Eigenkreisfrequenzen über Grundströmungsparameter  $U_{0,2}$  für verschiedene Längenverhältnisse  $\alpha_0$  und  $\vartheta_2 = \zeta_2 = 0$

Die dargestellten Ergebnisse sind unter Vernachlässigung der Fluidreibung ( $\vartheta_2 = 0$ ) ent-

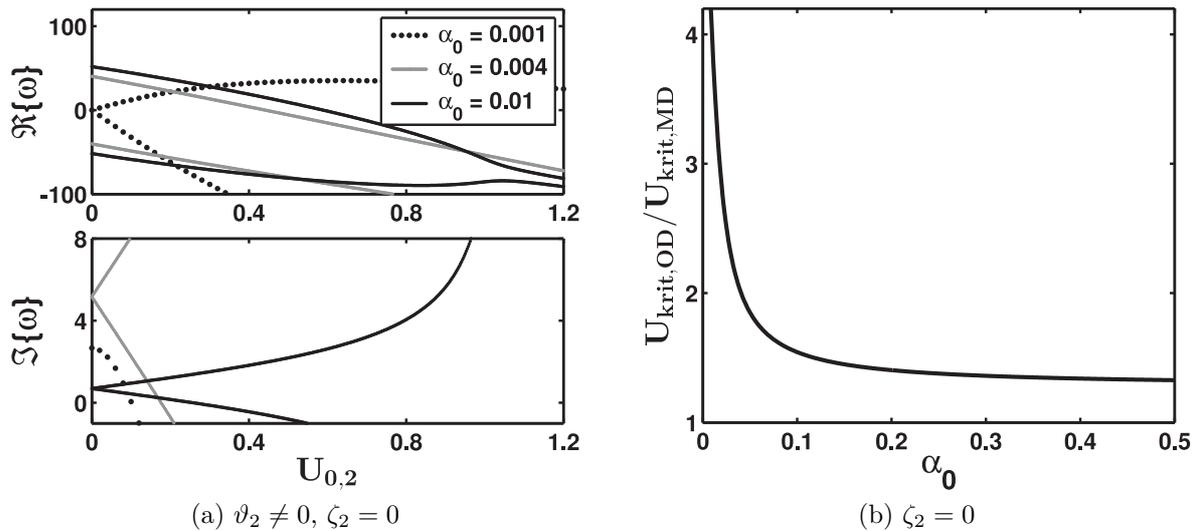


Abbildung 4.18: Einfluss der Kanalhöhe auf die Eigenkreisfrequenzen und das Verhältnis der kritischen Geschwindigkeiten mit und ohne Fluidviskosität

standen. Im vorhergehenden Abschnitt wurde bereits gezeigt, dass diese einen großen Einfluss hat. In Abbildung 4.18a sind daher die Eigenwerte eines inkompressiblen Fluids mit  $\vartheta_2 \neq 0$  für verschiedene Längenverhältnisse  $\alpha_0$  dargestellt. Die Beobachtung aus Abschnitt 4.2.7, dass die kritischen Geschwindigkeiten durch Berücksichtigung der Fluidviskosität deutlich herabgesenkt werden, wird durch den Vergleich mit Abbildung 4.17b bestätigt. Zusätzlich ist zu erkennen, dass mit abnehmendem Längenverhältnis die kritischen Geschwindigkeiten ebenfalls sinken. Somit wirken auch bei einem viskosen Fluid kleinere Kanalhöhen destabilisierend.

|             |       | Testfall 1 | Testfall 2 | Testfall 3 | Testfall 4 |
|-------------|-------|------------|------------|------------|------------|
| $k$         | [-]   | 0.16       | 0.18       | 1.6        | 0.45       |
| $U_{krit}$  | [-]   | 0.803      | 0.7678     | 0.032      | 0.026      |
| $\hat{U}_0$ | [m/s] | 9.267      | 8.860      | 10.964     | 0.313      |

Tabelle 4.1: Dimensionslose und -behaftete Werte der Testfälle am kritischen Punkt für  $\vartheta_1 = 0$

Offen bleibt die Frage, wovon der im vorherigen Abschnitt beobachtete Unterschied zwischen der kritischen Geschwindigkeiten mit und ohne Berücksichtigung der Viskosität abhängt. Um diese Fragestellung zu untersuchen, wird  $U_{krit,OD}$  für den Fall ohne zusätzliche Dämpfung

$$U_{krit,OD} = \sqrt{K_S \left( \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\alpha_2 k \coth(\alpha_0 k)} \right)} \quad (4.41)$$

mit  $U_{krit,MD}$  für den Fall mit innerer oder äußerer Dämpfung

$$U_{krit,MD} = \frac{\sqrt{K_S} (\alpha_2 \vartheta_2 k \coth(\alpha_0 k) + k^2 \zeta_2 \alpha_0^2) \alpha_0}{\sqrt{\alpha_2} \sqrt{k \coth(\alpha_0 k) (2\alpha_2 \vartheta_2 - k^2 \zeta_2 \alpha_0^3)^2 + \alpha_2 \vartheta_2^2 k^2 (2 + \alpha_0 k \coth(\alpha_0 k))^2}} \quad (4.42)$$

verglichen. In Abbildung 4.18b ist der Quotient aus den beiden Geschwindigkeiten über  $\alpha_0$  aufgetragen. Hierbei ist  $\zeta_2 = 0$  gewählt, da hier der Unterschied der kritischen Geschwindigkeiten im betrachteten Fall besonders groß ist (vgl. Abb. 4.14b). Es wird deutlich, dass der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten mit zunehmender Kanalhöhe abnimmt. Der Einfluss der Viskosität ist für schlanke Kanäle nicht zu vernachlässigen, was die Aussage von Sorokin und Chubinskij [96] für diesen konkreten Fall bestätigt.

## 4.2.9 Untersuchung der Testfälle

Zum Abschluss dieses Kapitels werden für die in Abschnitt 3.5 eingeführten Testfälle einige kritische dimensionslose und -behaftete Geschwindigkeiten betrachtet. Hierfür werden wieder die dimensionslosen Gleichungen in der Hauptschreibweise 1 verwendet. In Tabelle 4.1 sind die Werte für  $\vartheta_1 = 0$  angegeben, d. h. eine mögliche Fluidreibung wird vernachlässigt. Im Testfall 1 und 2 strömt Wasser durch einen Kanal mit einer elastischen Wand aus Silastic bzw. Latex. In beiden Fällen liegen die kritischen Geschwindigkeiten in einem realistischen Bereich. Der Fall 2 unterscheidet sich vor allem durch eine geringere Wanddicke und Kanalhöhe und daher ist  $\hat{U}_0$  in diesem Fall kleiner. Für den Testfall 3 wird Luft und eine flexible Kunststoffwand aus PET verwendet. Die Kanalhöhe ist gleich der des Testfalles 1, der Elastizitätsmodul ist deutlich größer und die Wanddicke deutlich kleiner. Insgesamt ergibt sich eine höhere kritische Geschwindigkeit. Da die Strömungsgeschwindigkeit in der

|             |       | Testfall 1 | Testfall 2 | Testfall 3 | Testfall 4 |
|-------------|-------|------------|------------|------------|------------|
| $k_{min}$   | [-]   | 0.16       | 0.18       | 1.6        | 0.45       |
| $U_{min}$   | [-]   | 0.053      | 0.040      | 0.006      | 0.001      |
| $\hat{U}_0$ | [m/s] | 0.607      | 0.457      | 1.947      | 0.017      |
| Re          | [-]   | 3029.557   | 638.626    | 641.833    | 0.958      |

Tabelle 4.2: Dimensionslose und -behaftete Werte der Testfälle am kritischen Punkt für  $\vartheta_1 \neq 0$

Schreibweise 1 mithilfe der Schallgeschwindigkeit  $a_R$  entdimensioniert wird, entspricht der Grundströmungsparameter  $U_{0,1}$  und daher auch  $U_{krit}$  im kompressiblen Fall der Machzahl (siehe Abschnitt 4.1.2). Im Testfall 3 gilt für die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit} < 0.3$  und daher kann die Strömung dieses Testfalles als inkompressibel angenommen werden [97]. Die kritischen Geschwindigkeiten aus der kompressiblen und der inkompressiblen Betrachtung sind kaum zu unterscheiden und bestätigen diese Aussage. Beim Testfall 4 ist die kritische Geschwindigkeit aufgrund der kleineren Vorspannung und Wanddicke im Vergleich zu den anderen Fällen deutlich geringer.

In Tabelle 4.2 sind einige Werte für  $\vartheta_1 \neq 0$  aufgelistet. Für die Wellenzahlen der Testfälle 1-3 werden die Wellenzahlen der minimalen Grundströmungsgeschwindigkeit  $U_{min}$  verwendet. Die kritische Geschwindigkeit des Testfalles 4 besitzt bei Berücksichtigung der Viskosität kein Minimum bezüglich  $k$ . Hier wird  $k_{min}$  für den Fall mit  $\vartheta_1 = 0$  benutzt. Bei Berücksichtigung der Fluidviskosität ist es sinnvoll, auch die Reynoldszahl, welche über

$$\text{Re} = \frac{\hat{U}_0 H_0 \hat{\rho}_R}{\mu_F}$$

berechnet wird, anzugeben. Dadurch ist, im Gegensatz zur Strömungsgeschwindigkeit  $\hat{U}_0$ , eine Beurteilung der Geschwindigkeiten und der Strömungsmodellierung möglich. Alle Reynoldszahlen liegen in realistischen Bereichen. Die laminare Modellierung ist in den Fällen 2-4 eindeutig gerechtfertigt, im Testfall 1 wird der Reibungsverlust möglicherweise unterschätzt (siehe Abschnitt 3.1.1).

Die innere Dämpfung führt zu kleineren kritischen Geschwindigkeiten und wirkt destabilisierend. Die große Geschwindigkeitsdifferenz liegt zum Einen an den kleinen Kanalhöhen (vgl. Abschnitt 4.2.8) und zum Anderen an der nicht vorhandenen äußeren Dämpfung  $\zeta_1$  (siehe Abschnitt 4.2.7). Anhand der Testfälle wird deutlich, dass der Einfluss der Viskosität bei schlanken Kanälen, unabhängig von der Art des Fluids, berücksichtigt werden sollte.

## 4.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Einfluss verschiedener Parameter auf die Eigenkreisfrequenzen des Modells  $A$  mit kompressibler und inkompressibler Strömung untersucht. Zur Lösung der linearisierten Gleichungssysteme, welche die Abweichungen vom stationären

Grundzustand beschreiben, wurden Wellenansätze verwendet. Aus den sich ergebenden Dispersionsgleichungen wurden die Eigenkreisfrequenzen unter Vorgabe der Wellenzahl bestimmt. Dabei kann die Dispersionsgleichung eines Kanals mit inkompressiblen Fluid analytisch gelöst werden, während dieses beim kompressiblen Fluid nur mittels numerischer Verfahren möglich ist.

Der Kopplungsparameter  $\alpha$  kann als Verhältnis zwischen der Masse des Fluids und der Struktur interpretiert werden. Für  $\alpha = 0$  ist das System entkoppelt und es können die Eigenkreisfrequenzen des Strukturmoden und der abzählbar unendlich vielen Fluidmoden bestimmt werden. Die Strukturmoden sind für beide Fluidarten identisch, die Fluidmoden existieren nur im Falle des kompressiblen Fluids. Für  $\alpha > 0$  werden die Eigenkreisfrequenzen des gekoppelten Systems untersucht. Für kleine Kopplungsparameter unterscheiden sich diese nur geringfügig von den Eigenwerten des entkoppelten Systems und es kann ein *Curve-Veering* in der Nähe der ehemaligen Schnittstellen beobachtet werden. Für ein inkompressibles Fluid ist der *Added-Mass*-Effekt zu erkennen, d. h. die Frequenzen des gekoppelten Systems sind kleiner als die des ungekoppelten Systems. Im Falle des kompressiblen Fluids tritt dieser Effekt nicht auf, dafür findet eine Interaktion der abzählbar unendlich viele Moden statt.

Der stationäre Zustand wird für negative Imaginärteile der Eigenkreisfrequenzen instabil und es wurde gezeigt, dass in diesem Fall dem System über einen Zyklus Energie zugeführt wird. Die Grundströmung stellt die Energiequelle dar, sodass der Grundströmungsparameter  $U_0$  entscheidend für das Auftreten von Instabilitäten ist. Bei einem inkompressiblen Fluid wird der Grundzustand ab einer kritischen Geschwindigkeit  $U_{krit}$  instabil. Dabei ist zu beobachten, dass zunächst beide Eigenkreisfrequenzen der betrachteten Welle negativ werden und sich somit stromabwärts ausbreiten. Erst wenn deren Realteile zusammenfallen, treten zwei betragsmäßig gleiche Imaginärteile mit entgegengesetzten Vorzeichen auf. Beim kompressiblen Fluid trifft das zunächst auch zu, jedoch ergeben sich aufgrund der interagierenden Moden wieder stabile Bereiche für höhere Geschwindigkeiten. Ob den stabilen Bereichen wieder instabile Bereiche folgen, hängt vom Kopplungsparameter ab. Je größer dieser ist, desto ähnlicher werden die Ergebnisse für ein kompressibles und inkompressibles Fluid.

Die Steifigkeits- bzw. Vorspannungsparameter umfassen die Steifigkeit der Bettung, die Biegesteifigkeit und die Rückstellung aufgrund der axialen Vorspannung der Struktur. Eine Erhöhung dieser Parameter wirkt stabilisierend, d. h. die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  wird erhöht.

In einem unendlich ausgedehnten System können prinzipiell alle Wellenzahlen auftreten. Besitzt die Funktion von  $U_{krit}$  ein Minimum bezüglich der Wellenzahlen, so ist es sinnvoll, die zur minimalen kritischen Geschwindigkeit  $U_{min}$  zugehörige Wellenzahl  $k_{min}$  zu betrachten. Bei endlichen Längen oder periodischen Stützstellen kann die kleinste mögliche Wellenzahl ermittelt werden.

Unter Berücksichtigung der Dämpfungsparameter sind die Eigenkreisfrequenzen stets komplex. Doch auch hier wird der stationäre Zustand erst für  $U_0 > U_{krit}$  instabil. Im Gegensatz zum ungedämpften Fall tritt die Instabilität direkt auf, wenn beide Realteile des betreffenden Eigenwertpaares negativ werden. Wenn jeweils nur ein Dämpfungsparameter berücksichtigt wird, also entweder die äußere Dämpfung infolge viskoelastischer

Bettung oder die innere Dämpfung durch Fluidreibung, wird die kritische Geschwindigkeit im Gegensatz zum ungedämpften Fall herabgesetzt. Somit wirken die einzelnen Dämpfungsparameter destabilisierend. Werden beide Parameter gleichzeitig berücksichtigt, kann sowohl eine Erhöhung als auch eine Absenkung von  $U_{krit}$  beobachtet werden. Es kommt dann auf das Verhältnis der Parameter zueinander an.

Bei kleinen Kanalhöhen ist der Effekt der Kopplung, d. h. der Unterschied zwischen den Eigenkreisfrequenzen des ent- und gekoppelten Systems, am größten. Außerdem senkt eine Reduzierung der Kanalhöhe die kritische Geschwindigkeit und wirkt somit destabilisierend. Des Weiteren konnte gezeigt werden, dass der Einfluss der Viskosität gerade bei schlanken Kanälen groß ist und nicht vernachlässigt werden sollte.

Anhand der Testfälle wurde gezeigt, dass die kritischen Geschwindigkeiten in technisch realisierbaren Bereichen liegen. Somit empfiehlt es sich, den Effekt der selbsterregten Schwingungen bei durchströmten Kanälen zu berücksichtigen.

Alle aufgeführten Ergebnisse gehen aus den linearisierten Gleichungen hervor,  $U_{krit}$  beschreibt die lineare Stabilitätsgrenze. Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (4.11)-(4.16) ist analytisch schwierig. Nicht ohne Grund wurden in der Literatur nur Untersuchungen zu mehr oder weniger stark vereinfachten Systemen gefunden, siehe Abschnitt 1.1.2. Daher werden auch in der vorliegenden Arbeit für die folgenden nichtlinearen Untersuchungen Vereinfachungen vorgenommen.



## 5 Schlanker Kanal unter Vernachlässigung der Fluidträchtigkeit

In Kapitel 4 wurden die linearisierten Gleichungen eines Kanals mit Potentialströmung untersucht. Für die Betrachtung der nichtlinearen Gleichungen sind Vereinfachungen notwendig. In vielen Arbeiten zu durchströmten Kanälen werden die nichtlinearen Übergangsbedingungen linearisiert (siehe Abschnitt 1.1). Da in dieser Arbeit jedoch gerade die größeren Auslenkungen im Fokus stehen, werden Vereinfachungen an anderer Stelle vorgenommen. Der Unterschied zwischen den Eigenwerten eines Kanals mit kompressiblem und inkompressiblem Fluid wird in Kapitel 4 ausgiebig untersucht. Der Einfluss der Steifigkeits- und Vorspannungsparameter, der äußeren Dämpfung und der Kanalhöhe ist für beide Fluide gleich. Auch die minimale kritische Geschwindigkeit ist für große Kopplungsparameter vergleichbar. Zusätzlich ermöglicht die inkompressible Modellierung, welche bei kleinen Geschwindigkeiten auch für kompressible Medien zulässig ist [97], die Berücksichtigung der Fluidreibung. Unter Berücksichtigung all dessen und der Tatsache, dass sich die Fluidgleichungen für ein inkompressibles Fluid stark vereinfachen, wird im Folgenden eine inkompressible Strömung betrachtet.

Des Weiteren wurde gezeigt, dass für schlanke Kanäle die kritische Geschwindigkeit am kleinsten und der Einfluss der Kopplung am größten ist. Die Untersuchung von schlanken Kanälen ist daher sinnvoll und die Fluidgleichungen vereinfachen sich erheblich. Da bei einem schlanken Kanal der Einfluss der Viskosität jedoch nicht vernachlässigbar ist (siehe Kapitel 4 und [96]), wird diese im Folgenden berücksichtigt. Da im Zusammenhang mit engen Spalten und viskoser Strömung häufig schleichende Strömungen angenommen werden (siehe Abschnitt 1.1), wird diese Modellierung auch für das aktuelle Modell  $B$  verwendet. Die Vernachlässigung der Fluidträchtigkeit führt zu stark vereinfachten, analytisch zugänglichen Fluidgleichungen.

Die vereinfachten Gleichungen für einen schlanken Kanal mit inkompressibler, viskoser Schleichströmung werden sowohl einer linearen als auch einer nichtlinearen Stabilitätsanalyse unterzogen. Nach der ausführlichen Untersuchung des Einflusses der einzelnen Parameter auf die Eigenwerte und die lineare Stabilitätsgrenze im vorhergehenden Kapitel, beschränkt sich die lineare Stabilitätsanalyse in diesem Kapitel auf die wesentlichen Unterschiede und eine erste Validierung des Modells  $B$ . Der Fokus liegt auf der nichtlinearen Untersuchung. Hierbei werden mittels der *Multiple-Scales*- und der Harmonischen-Balance-Methode periodische Lösungen bestimmt.

### 5.1 Herleitung der Gleichungen

In Kapitel 3 wurden die Gleichungen zur Beschreibung der flexiblen Struktur und der inkompressiblen Schleichströmung in einem schlanken Kanal hergeleitet. Im aktuellen Ab-

schnitt werden die Gleichungen zunächst über die Kanalhöhe integriert und erst anschließend wird die in Abschnitt 3.4 eingeführte Unterteilung in Grundzustand und Fluktuationen vorgenommen. Abschließend werden die Gleichungen in eine dimensionslose Schreibweise überführt.

### 5.1.1 Stationärer Zustand und Fluktuationen

Für eine schleichende Strömung im schlanken Kanal gelten die Gleichungen (3.24), (3.26) und (3.28), das Vorgehen bei der Umformung der Gleichungen ist an [105] angelehnt.

Aus Gleichung (3.26) ist ersichtlich, dass der Druck  $\hat{p}_F$  nicht von der  $\hat{y}$ -Koordinate abhängt. Nach zweimaliger Integration von Gleichung (3.28) über  $\hat{y}$  folgt

$$\hat{u}_F = \frac{1}{2\mu_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} \hat{y}^2 + K_1 \hat{y} + K_2. \quad (5.1)$$

Die Integrationskonstanten  $K_1$  und  $K_2$  können durch Berücksichtigung der Übergangsbedingungen (3.45) und (3.46) an der starren und elastischen Wand bestimmt werden. Die axiale Strömungsgeschwindigkeit wird folglich durch

$$\hat{u}_F = \frac{1}{2\mu_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} \left( \hat{y}^2 - (\hat{q}_S - \hat{q}_0 + H_0) \hat{y} + (\hat{q}_S - \hat{q}_0) H_0 \right) \quad (5.2)$$

beschrieben. Anschließend wird auch die Kontinuitätsgleichung (3.24) unter Verwendung der Leibniz'schen Integrationsregel<sup>1</sup> über die Höhe, d. h. von  $\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0$  bis  $\hat{y} = H_0$ , integriert:

$$\hat{v}_F|_{\hat{y}=H_0} - \hat{v}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{\hat{q}_S-\hat{q}_0}^{H_0} \hat{u}_F d\hat{y} + \underbrace{\hat{u}_F|_{\hat{y}=H_0}}_{=0} \frac{\partial H_0}{\partial \hat{x}} - \underbrace{\hat{u}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0}}_{=0} \frac{\partial(\hat{q}_S - \hat{q}_0)}{\partial \hat{x}}. \quad (5.3)$$

Nach Einsetzen von  $\hat{u}_F$  (5.2) und den Übergangsbedingungen (3.40) und (3.47) folgt

$$\frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{12\mu_F} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left( \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} (\hat{q}_S - \hat{q}_0 - H_0)^3 \right). \quad (5.4)$$

Nachdem die Geschwindigkeiten des Fluids bekannt sind, kann der Normalspannungsterm  $\hat{\sigma}_{yy}$  für die Strukturgleichung gemäß Gleichung (3.35) unter Ausnutzung der Kontinuitätsgleichung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{yy}|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} &= 2\mu_F \left. \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}} \right|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} = -2\mu_F \left. \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}} \right|_{\hat{y}=\hat{q}_S-\hat{q}_0} \\ &= \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} \frac{\partial(\hat{q}_S - \hat{q}_0)}{\partial \hat{x}} (\hat{q}_S - \hat{q}_0 - H_0). \end{aligned} \quad (5.5)$$

<sup>1</sup>  $\frac{\partial}{\partial x} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy + F(x, f_2(x)) \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} - F(x, f_1(x)) \frac{\partial f_1(x)}{\partial x}$  [14]

In den Gleichungen für die Geschwindigkeit  $\hat{u}_F$  (5.2), das Fluid (5.4) und die Struktur (3.36) werden die abhängigen Variablen  $\hat{p}_F$ ,  $\hat{q}_S$  und  $\hat{u}_F$  durch die jeweiligen Summen aus stationärer Größe und Fluktuation ersetzt (siehe Abschnitt 3.4). Der Grundzustand  $\hat{p}_0$ ,  $\hat{q}_0$ ,  $\hat{u}_0$  (mit  $\hat{p} = \hat{q} = \hat{u} = 0$ ) wird somit durch die Gleichungen

$$\hat{u}_0 = \frac{1}{2\mu_F} \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \hat{x}} (\hat{y}^2 - H_0 \hat{y}), \quad (5.6)$$

$$0 = - \frac{H_0^3}{12\mu_F} \frac{\partial^2 \hat{p}_0}{\partial \hat{x}^2}, \quad (5.7)$$

$$0 = k_c \hat{q}_0 + p_0|_{\hat{y}=0} - p_A \quad (5.8)$$

beschrieben. Aus (5.7) folgt  $\frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \hat{x}} = \text{konst.}$ : Der Druck  $\hat{p}_0$  ist linear von  $\hat{x}$  abhängig. Daher muss gemäß Gleichung (5.8) auch der äußere Druck  $p_A$  eine lineare Funktion von  $\hat{x}$  sein, um eine unverformte Struktur mit  $\hat{q}_0 = \text{konst.}$  im stationären Zustand zu gewährleisten. Des Weiteren folgt aus dem konstanten Druckgradienten, dass die stationäre Geschwindigkeit  $\hat{u}_0$  lediglich eine Funktion von  $\hat{y}$  ist, siehe Gleichung (5.6). Es liegt ein konstanter Volumenstrom vor und die Strömung kann über eine mittlere Geschwindigkeit  $\hat{U}_0$  beschrieben werden. Diese wird nach Gleichung (3.29) durch die Integration von  $\hat{u}_0$  über die stationäre Kanalhöhe (von  $\hat{y} = 0$  bis  $\hat{y} = H_0$ ) ermittelt:

$$\hat{U}_0 = - \frac{H_0^2}{12\mu_F} \frac{\partial \hat{p}_0}{\partial \hat{x}}. \quad (5.9)$$

Somit kann der stationäre Druckgradient in Abhängigkeit von  $\hat{U}_0$  ausgedrückt werden. Für die Spannung an der Wand folgt damit

$$\hat{\sigma}_{yy}|_{\hat{y}=\hat{q}} = \left( - \frac{12\mu_F}{H_0^2} \hat{U}_0 + \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} (\hat{q} - H_0). \quad (5.10)$$

Unter Berücksichtigung des Grundzustandes und nach Ersetzen des Druckgradienten wird aus (5.4) und (3.36) schließlich

$$12\mu_F \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} - \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial \hat{x}^2} (\hat{q} - H_0)^3 + 3(\hat{q} - H_0)^2 \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} \left( \frac{12\mu_F}{H_0^2} \hat{U}_0 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right) = 0, \quad (5.11)$$

$$B\rho_S \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{t}^2} + D \frac{\partial^4 \hat{q}}{\partial \hat{x}^4} - S \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{x}^2} + k_c \hat{q} + k_d \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} + (\hat{q} - H_0) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} \left( \frac{12\mu_F}{H_0^2} \hat{U}_0 - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} \right) + \hat{p} = 0. \quad (5.12)$$

Diese zwei Gleichungen beschreiben die Fluktuationen  $\hat{q}$  und  $\hat{p}$  des schlanken Kanals mit viskoser, inkompressibler Schleichströmung vollständig; die Übergangsbedingungen sind bereits erfüllt.

Bei Bedarf können die verbleibenden Variablen  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  berechnet werden. Die Geschwindigkeit  $\hat{u}$  kann durch Einsetzen der Grundgrößen und Fluktuationen in Gleichung (5.2) und unter Berücksichtigung des stationären Zustandes bestimmt werden. Damit kann anschließend  $\hat{v}$  bestimmt werden. Dazu wird die Kontinuitätsgleichung (3.24) über  $\hat{y}$  integriert, an die Übergangsbedingungen angepasst und die Größen  $\hat{u}_0$  und  $\hat{u}$  eingesetzt.

### 5.1.2 Dimensionslose Schreibweise

Die dimensionsbehafteten Gleichungen der Fluktuationen werden in eine dimensionslose Form überführt. In dieser Arbeit werden für die einzelnen Modelle unterschiedliche dimensionslose Schreibweisen verwendet und der Übersichtlichkeit halber nummeriert.

#### Schreibweise 3

Um gut dimensionierte und aussagekräftige Parameter und Gleichungen zu erhalten, werden für das Modell *B* die Kanalhöhe  $H_0$ , die Fluidichte  $\hat{\rho}_F$  und die Viskosität  $\mu_F$  als Referenzgrößen verwendet. Es ergeben sich die dimensionslosen Variablen

$$x = \frac{\hat{x}}{H_0}, \quad y = \frac{\hat{y}}{H_0}, \quad q = \frac{\hat{q}}{H_0}, \quad t = \frac{\mu_F \hat{t}}{H_0^2 \hat{\rho}_F}, \quad p = \frac{\hat{\rho}_F H_0^2 \hat{p}}{\mu_F^2}$$

und Parameter

$$U_{0,3} = \frac{\hat{U}_0 H_0 \hat{\rho}_F}{\mu_F}, \quad \alpha_3 = \frac{H_0 \hat{\rho}_F}{B \rho_S}, \quad \beta_3 = \frac{S \hat{\rho}_F^2 H_0^2}{B \rho_S \mu_F^2}, \quad \gamma_3 = \frac{k_c \hat{\rho}_F^2 H_0^4}{B \rho_S \mu_F^2},$$

$$\delta_3 = \frac{D \hat{\rho}_F^2}{B \rho_S \mu_F^2}, \quad \zeta_3 = \frac{k_d \hat{\rho}_F H_0^2}{B \rho_S \mu_F}.$$

Der dimensionslose Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$  entspricht aufgrund der Bezugslängen der Reynoldszahl des Grundzustandes, vgl. Gleichung (3.13). Die dimensionslosen Gleichungen für Strömung und Struktur lauten

$$12\dot{q} - p''(q-1)^3 + 3(q-1)^2 q' (12U_{0,3} - p') = 0, \quad (5.13)$$

$$\ddot{q} + \delta_3 q'''' - \beta_3 q'' + \gamma_3 q + \zeta_3 \dot{q} + \alpha_3 [(q-1)q' (12U_{0,3} - p') + p] = 0 \quad (5.14)$$

mit  $\dot{(\ )} = \frac{\partial(\ )}{\partial t}$  und  $(\ )' = \frac{\partial(\ )}{\partial x}$ . In diesem Kapitel wird lediglich die Schreibweise 3 verwendet und daher auch alle Herleitungen anhand von ihr gemacht.

#### Schreibweise 1

Diese Schreibweise mit den Referenzgrößen  $H_0$ ,  $\hat{\rho}_F$  und  $a_R$  wird eingeführt, um in Kapitel 6 einen Vergleich mit dem Modell *C* in Hinblick auf den Einfluss der Viskosität machen zu können. Es ergeben sich die dimensionslosen Variablen und Parameter

$$x = \frac{\hat{x}}{H_0}, \quad y = \frac{\hat{y}}{H_0}, \quad q = \frac{\hat{q}}{H_0}, \quad t = \frac{a_R \hat{t}}{H_0}, \quad p = \frac{\hat{p}}{a_R^2 \hat{\rho}_F},$$

$$U_{0,1} = \frac{\hat{U}_0}{a_R}, \quad \alpha_1 = \frac{H_0 \hat{\rho}_F}{B \rho_S}, \quad \beta_1 = \frac{S}{B \rho_S a_R^2}, \quad \gamma_1 = \frac{k_c H_0^2}{B \rho_S a_R^2},$$

$$\delta_1 = \frac{D}{B \rho_S a_R^2 H_0^2}, \quad \zeta_1 = \frac{k_d H_0}{B \rho_S a_R}, \quad \vartheta_1 = \frac{12 \mu_F}{a_R H_0 \hat{\rho}_F}.$$

Hierbei entspricht der Viskositätsparameter  $\vartheta_1$  dem für das Modell *A* mit  $K_V = 12$ . Nach Einsetzen ergeben sich die dimensionslosen Gleichungen

$$\dot{q}\vartheta_1 - p''(q-1)^3 + 3(q-1)^2q'(\vartheta_1U_{0,3} - p') = 0, \quad (5.15)$$

$$\ddot{q} + \delta_3q'''' - \beta_3q'' + \gamma_3q + \zeta_3\dot{q} + \alpha_3[(q-1)q'(\vartheta_1U_{0,3} - p') + p] = 0 \quad (5.16)$$

mit  $\dot{(\ )} = \frac{\partial(\ )}{\partial t}$  und  $(\ )' = \frac{\partial(\ )}{\partial x}$ . Durch die geänderten Bezugslängen unterscheiden sich die Werte der Parameter im Vergleich zur Schreibweise 3. Die Systemgleichungen (5.13), (5.14) und (5.15), (5.16) sind jedoch bis auf den Parameter  $\vartheta_1$  anstelle der Zahl 12 identisch.

## 5.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Die nichtlinearen, dimensionslosen Gleichungen für die Fluktuationen werden bezüglich des stationären Grundzustandes ( $q = 0, p = 0$ ) linearisiert:

$$\bar{p}'' + 12(\dot{\bar{q}} + 3U_{0,3}\bar{q}') = 0, \quad (5.17)$$

$$\ddot{\bar{q}} + \delta_3\bar{q}'''' - \beta_3\bar{q}'' + \gamma_3\bar{q} + \zeta_3\dot{\bar{q}} + \alpha_3(-12U_{0,3}\bar{q}' + \bar{p}) = 0. \quad (5.18)$$

Hierbei markiert  $\bar{(\ )}$  die Variablen der linearisierten Gleichungen.

### 5.2.1 Dispersionsgleichung

Durch das Auflösen von Gleichung (5.18) nach  $\bar{p}$  und Einsetzen in Gleichung (5.17), wird der Druck eliminiert und die erhaltene Gleichung hängt lediglich von  $\bar{q}$  ab. Zur Lösung dieser Gleichung wird der Wellenansatz  $\bar{q}(x, t) = \bar{Q}e^{ikx+i\omega t}$  verwendet und es ergibt sich die Dispersionsgleichung

$$\omega^2k^2 - i\omega(12\alpha_3 + \zeta_3k^2) - k\left(\underbrace{\delta_3k^5 + \beta_3k^3 + \gamma_3k}_{kK_S} + i12\alpha_3U_{0,3}\underbrace{3(-k^2)}_{K_\sigma}\right) = 0, \quad (5.19)$$

wobei die verschiedenen Steifigkeitsparameter wieder in der Konstanten  $K_S$  zusammengefasst werden. Der mit  $K_\sigma$  markierte Term entfällt bei Vernachlässigung der Spannung  $\hat{\sigma}_{yy}$  in der Strukturgleichung und wird im späteren Verlauf noch besprochen. Aus der Dispersionsgleichung können die Eigenkreisfrequenzen für eine bestimmte Wellenzahl  $k$  analytisch bestimmt werden:

$$\omega_{1,2} = \frac{i}{k^2} \left( 6\alpha_3 + \frac{\zeta_3k^2}{2} \pm \sqrt{\left(6\alpha_3 + \frac{\zeta_3k^2}{2}\right)^2 - k^3(kK_S + i12\alpha_3U_{0,3}(3 - k^2))} \right). \quad (5.20)$$

Die Dispersionsgleichung für dasselbe Modell in Schreibweise 1 lautet

$$\omega^2k^2 - i\omega(\vartheta_1\alpha_1 + \zeta_1k^2) - k\left(\underbrace{\delta_1k^5 + \beta_1k^3 + \gamma_1k}_{kK_S} + i3\vartheta_1\alpha_1U_{0,1}\right) = 0. \quad (5.21)$$

Diese Gleichung wird der Vollständigkeit halber für den späteren Vergleich mit Modell *C* angegeben. Da bereits die Systemgleichungen denen der Schreibweise 3 (bis auf  $\vartheta_1$  statt 12) entsprechen, gilt dieses auch für die Dispersionsgleichung. Der Term  $K_\sigma$  ist nicht enthalten, da das Modell *C* mit Fluidträgheit die Spannung  $\hat{\sigma}_{yy}$  nicht abbilden kann.

### 5.2.2 Grundsätzliches zur Auswertung

Der stationäre Grundzustand wird nach der linearen Theorie für  $\Im\{\omega\} < 0$  instabil. Im Folgenden werden die Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  und die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  für verschiedene Parameter untersucht.

Soweit nicht explizit andere Werte genannt werden, liegen den Ergebnissen in diesem Kapitel die Parameter

$$\alpha_3 = 18.9, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 33.2, \delta_3 = 687.7, \zeta_3 = 0, U_{0,3} = 0$$

zugrunde. Diese ergeben sich beispielsweise aus den Werten des in Abschnitt 3.5 eingeführten Testfalles 4. Soweit nicht anders gekennzeichnet, werden Wellen mit der dimensionslosen Wellenzahl  $k = 1.2$  untersucht.

Die Gleichungen basieren auf den Annahmen  $\frac{H_0}{L} \ll 1$  und  $\text{Re}\left(\frac{H_0}{L}\right) \rightarrow 0$  (siehe Abschnitt 3.1.2). Wird wie bei Gavriely et al. [30] für die Testfälle eine Mindestlänge von  $L = 0.6$  m angenommen, so ist mit  $\frac{H_0}{L} \leq 0.008$  die erste Annahme erfüllt. In Abschnitt 5.2.7 wird untersucht, ob die auftretenden kritischen Geschwindigkeiten die zweite Annahme erfüllen.

### 5.2.3 Grundströmungsgeschwindigkeit

Durch die Grundströmungsgeschwindigkeit wird dem System Energie zugeführt. In Abbildung 5.1 ist zu sehen, dass auch bei diesem Modell der Grundzustand für hohe Geschwindigkeiten  $U_{0,3}$  instabil ( $\omega_i < 0$ ) wird. In dem abgebildeten Fall gilt  $\omega_r < 0$  für die instabil werdende Welle, d. h. die stromabwärts laufende Welle wird instabil.

In der Abbildung fällt auf, dass die Realteile von  $\omega$  trotz vorhandener Grundströmung

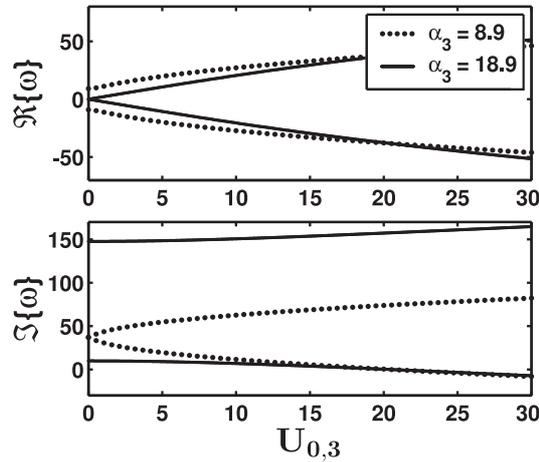


Abbildung 5.1: Eigenkreisfrequenzen über Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$

symmetrisch zur horizontalen Achse sind. Offensichtlich wird die Symmetrie der Eigenwerte aufgrund der Transportgeschwindigkeit nur im Zusammenhang mit vorhandener Fluidträchtigkeit aufgebrochen. Des Weiteren treten aufgrund der Viskosität stets komplexe Eigenkreisfrequenzen auf. In Abschnitt 4.2.7 wird beim Modell A der Einfluss der Dämpfungsparameter untersucht. Bei der Viskosität handelt es sich um innere Dämpfung und

daher ist eine Ähnlichkeit der Verläufe von  $\omega$  mit denen in Abbildung 4.14b zu erkennen. Dies ist vor allem für den kleineren Wert von  $\alpha_3$  der Fall.

Die Geschwindigkeit  $U_{krit}$ , ab der ein Stabilitätsverlust des stationären Zustandes auftritt, und die zugehörige Eigenkreisfrequenz  $\omega_{krit}$  werden durch

$$U_{krit} = -\omega_{krit} \frac{12\alpha_3 + \zeta_3 k^2}{12\alpha_3 k \underbrace{(3 - k^2)}_{K_\sigma}}, \quad (5.22)$$

$$\omega_{krit} = \pm \sqrt{K_S} \quad (5.23)$$

beschrieben. Da das Modell stets ein viskoses Fluid beinhaltet, ist eine Unterscheidung von  $U_{krit}$  mit und ohne zusätzlicher Dissipation nicht erforderlich.

### 5.2.4 Steifigkeits- und Vorspannungsparameter

Eine Erhöhung der Steifigkeitsparameter (Biegesteifigkeit  $\delta_3$ , Bettungssteifigkeit  $\gamma_3$ ) und des Vorspannungsparameters  $\beta_3$  wirkt stets stabilisierend. Das lässt sich unter anderem daran erkennen, dass sich die drei Parameter in der Gleichung (5.20) für die Eigenkreisfrequenzen zu der positiven Konstanten  $K_S$  zusammenfassen lassen.

In Abbildung 5.2 ist beispielhaft der Einfluss des Vorspannungsparameters  $\beta_3$  dargestellt.

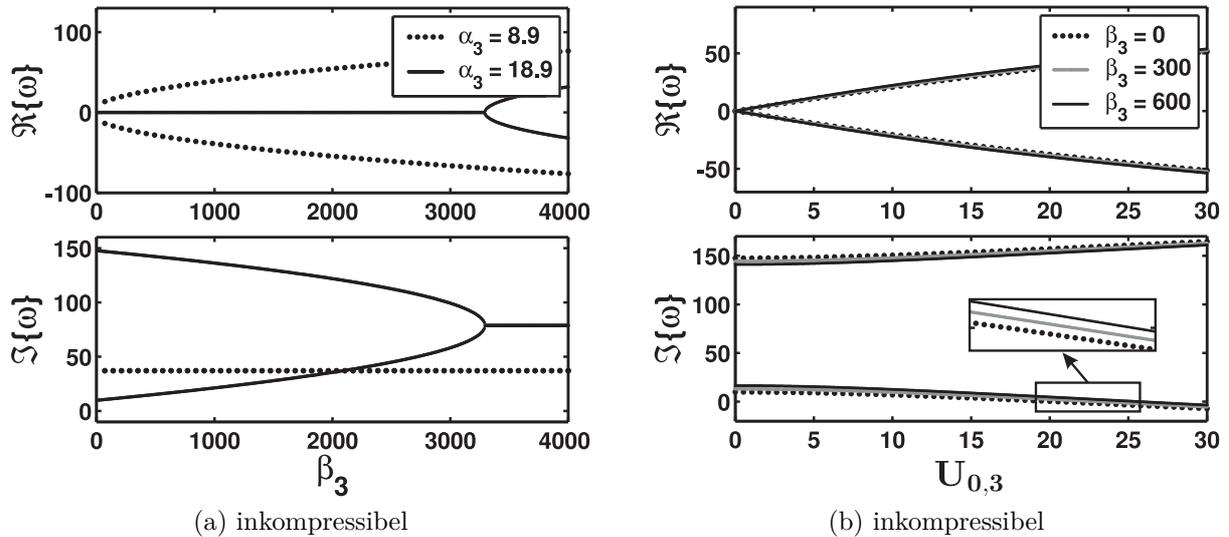


Abbildung 5.2: Einfluss des Vorspannungsparameter  $\beta_3$  auf die Eigenkreisfrequenzen und die kritische Geschwindigkeit

Die Verläufe über die Steifigkeitsparameter sind qualitativ gleich. Abbildung 5.2a zeigt die Eigenwerte über dem Parameter  $\beta_3$  bei nicht vorhandener Grundströmung ( $U_{0,3} = 0$ ). Aufgrund der Viskosität besitzen die Eigenkreisfrequenzen stets nicht verschwindende positive Imaginärteile. Für positive Radikanten in Gleichung (5.20) ergeben sich rein imaginäre Eigenwerte und somit klingen Störungen in diesem Fall monoton ab. Sobald der Radikant negativ wird, kommen reale Anteile hinzu und es stellt sich ein konstanter Imaginärteil

ein.

In Abbildung 5.2b sind die Verläufe von  $\omega$  über dem Grundströmungsparameter für verschiedene Werte von  $\beta_3$  dargestellt. Je höher der Wert des Vorspannungsparameters, umso höher ist auch die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$ , vgl. Gleichung (5.22).

### 5.2.5 Wellenzahl

Im Gegensatz zu den Steifigkeitsparametern ist der Einfluss der Wellenzahl nicht so eindeutig, siehe Gleichung (5.19). Aus der Gleichung (5.22) für die kritische Geschwindigkeit ist ersichtlich, dass diese für  $K_\sigma \neq 0$  bei  $k = k_{Pol} = \sqrt{3}$  eine Polstelle hat. Die Grundströmungsgeschwindigkeit und somit auch der zugehörige dimensionslose Parameter sind stets positiv und daher kann gezeigt werden, dass für  $k < k_{Pol}$  die stromabwärts und für  $k > k_{Pol}$  die stromaufwärts laufenden Wellen instabil werden. Dieser Sachverhalt ist für den Testfall 4 in Abbildung 5.3 dargestellt. Während die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit,ab}$  der sich stromabwärts ausbreitenden Wellen ein Minimum besitzt, trifft dies für die Geschwindigkeit  $U_{krit,auf}$  der stromaufwärts laufenden Wellen nicht zu. Aufgrund des Zusammenhangs (2.4) zwischen Wellenzahl  $k$  und Wellenlänge  $\lambda$  bedeuten kleine Wellenzahlen große Wellenlängen. Somit werden für große Wellenlängen  $\lambda > \lambda_{Pol}$  die stromabwärts laufenden Wellen instabil und es existiert ein minimales  $U_{krit}$ . Die Beschränkung auf große Wellenlängen wird in der Literatur *Long-Wave-Approximation* genannt (siehe z. B. [50]). Für große Wellenzahlen und kleine Wellenlängen werden diejenigen Wellen instabil, welche sich stromaufwärts ausbreiten. Die minimale kritische Geschwindigkeit kann in diesem Fall durch Abschätzung der kleinsten Wellenlänge, für welche dieses Plattenmodell physikalisch noch sinnvoll ist, ermittelt werden. Die Beschränkung  $\hat{\lambda} > 5B$  ergibt sich durch Annahme der Kirchhoff-Platte [13]. Es ist jedoch anzunehmen, dass aufgrund der hohen Viskosität eine weitere Obergrenze für die maximal auftretenden Wellenzahlen existiert. Das Auftreten der Polstelle beruht auf der Berücksichtigung der Spannung  $\hat{\sigma}_{yy}$ , welche auf-

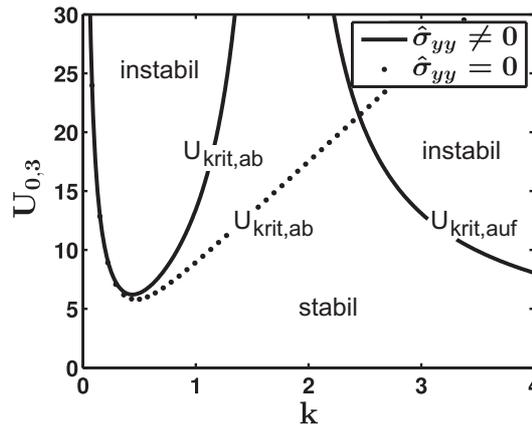


Abbildung 5.3: Stabile Bereiche in Abhängigkeit von Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$  und Wellenzahl  $k$

grund der Viskosität vom Fluid auf die Struktur wirkt (siehe Gleichungen (5.5) und (3.34)). Während  $\hat{\sigma}_{yy}$  in einigen Arbeiten mit viskosen Fluiden berücksichtigt wird (z. B. [51],

[91], [96]), wird in der Mehrheit der gesichteten Arbeiten  $\hat{\tau}_{yy}|_{\dot{y}=\dot{q}} = -\hat{p}_F$  angenommen (z. B. [20], [42], [50], [63], [90]). Für diese Vereinfachung entfällt der Term  $K_\sigma$  in der Dispersionsgleichung (5.19) und in der Gleichung (5.22) für  $U_{krit}$ . In diesem Fall werden stets die stromabwärts laufenden Wellen instabil und es gibt ein eindeutiges Minimum. Dieser Verlauf ist ebenfalls in Abbildung 5.3 dargestellt. Auffallend ist, dass die Verläufe für kleine Wellenzahlen gut übereinstimmen. Die minimale kritische Geschwindigkeit für  $k < k_{Pol}$  wird durch die Berücksichtigung des Spannungsterms leicht erhöht. Die Berücksichtigung von  $\hat{\sigma}_{yy}$  bewirkt in diesem Bereich eine Stabilisierung.

### 5.2.6 Dämpfungsparameter

Es kann zwischen innerer und äußerer Dämpfung unterschieden werden (siehe Kapitel 4). Die äußere Dämpfung durch die viskoelastische Bettung ist in dem Parameter  $\zeta_1$  (Schreibweise 1) bzw.  $\zeta_3$  (Schreibweise 3) enthalten. Die Viskosität des Fluids  $\mu_F$  stellt die innere Dämpfung dar.

Im vorhergehenden Abschnitt 5.2.5 wurde der Einfluss des Spannungsterms  $\hat{\sigma}_{yy}$  auf die kritische Geschwindigkeit untersucht. Dieser Term wird durch Gleichung (5.10) beschrieben und hängt unter anderem von der Viskosität  $\mu_F$  ab. Somit wurde bereits ein Aspekt der Berücksichtigung der inneren Dämpfung auf  $U_{krit}$  diskutiert.

In Abschnitt 4.2.7 wurde gezeigt, dass für die Stabilität des stationären Zustandes das Verhältnis von innerer zu äußerer Dämpfung entscheidend ist. Zum Vergleich ist in Abbildung 5.4a nochmals die kritische Geschwindigkeit über diesem Verhältnis für das Modell A dargestellt. Dabei wird durch den Parameter  $\vartheta_1$  die Viskosität berücksichtigt. Beim Mo-

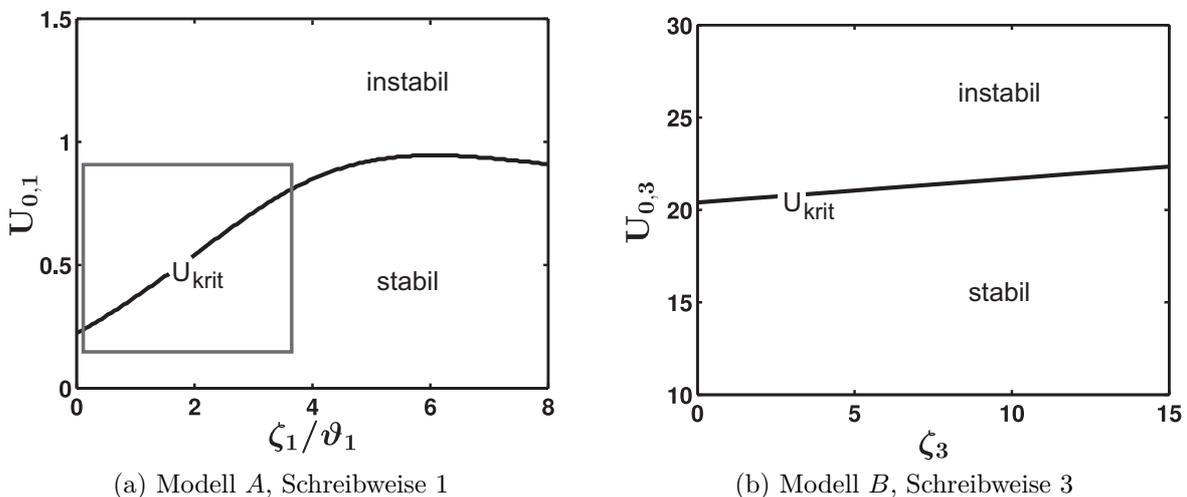


Abbildung 5.4: Vergleich des Einflusses der Dämpfungsparameter auf die kritische Geschwindigkeit in den verschiedenen Modellen

dell B ist die innere Dämpfung stets vorhanden, tritt in der Schreibweise 3 aber nicht explizit in Form eines dimensionslosen Parameters auf. Eine Variation des Parameters  $\zeta_3$  bedeutet in diesem Fall eine Variation der äußeren Dämpfung bei fixierter innerer Dämpfung und das entspricht beim Modell A der Variation von  $\zeta_1$  bei festgehaltenem  $\vartheta_1$ . Der

Verlauf der kritischen Geschwindigkeit des Modells  $B$  ist in Abbildung 5.4b dargestellt. Die Zahlenwerte in den beiden Abbildungen sind aufgrund der unterschiedlichen dimensionslosen Schreibweisen nicht vergleichbar, qualitative Aussagen sind jedoch möglich. Modell  $B$  gilt nur für sehr viskose Fluide. Das entspricht einem großen Wert von  $\vartheta_1$  und somit einem kleinen Verhältnis  $\zeta_1 / \vartheta_1$  in Abbildung 5.4a. Wird der zugehörige, durch das Quadrat hervorgehobene, Ausschnitt mit Abbildung 5.4b verglichen, so ist in beiden Fällen ein linearer Verlauf zu erkennen. Innerhalb der Geltungsbereiche der Modelle sind die Ergebnisse und somit die Auswirkungen der Dämpfung auf die Stabilität qualitativ vergleichbar.

Die Vergrößerung des Dämpfungsparameters  $\zeta_3$  bewirkt beim Modell  $B$  mit vorhandener innerer Dämpfung eine Erhöhung der kritischen Geschwindigkeit  $U_{krit}$ . Der Dämpfungsparameter  $\zeta_3$  wirkt bei diesem Modell stets stabilisierend.

### 5.2.7 Untersuchung der Modellrestriktionen

Den Gleichungen des Modells liegen die Annahmen  $\frac{H_0}{L} \ll 1$  und  $\text{Re}\left(\frac{H_0}{L}\right) \rightarrow 0$  zugrunde. Während die erste Annahme direkt überprüft werden kann, wird zur Überprüfung der zweiten Annahme die kritische Geschwindigkeit benötigt. Nach Einsetzen der Gleichung für die kritische Geschwindigkeit (5.22) in die Reynoldszahl ergibt sich nach Ersetzen der dimensionslosen Parameter

$$\text{Re} = \frac{1}{|3 - k^2|} \sqrt{\frac{EB^2}{12(1 - \nu^2)\rho_S} k^4 + \frac{SH_0^2}{B\rho_S} k^2 + \frac{k_c H_0^4}{B\rho_S} \left(\frac{1}{k} + \frac{k_d H_0 k}{12\mu_F}\right) \frac{H_0}{\nu_F^2}}. \quad (5.24)$$

Um die Forderung nach kleinen Reynoldszahlen zu erfüllen, sind geringe Kanalhöhen  $H_0$ , kleine Werte der Strukturgrößen  $\frac{E}{\rho_S}$ ,  $S$ ,  $k_c$  und  $k_d$  und große Viskositäten  $\nu_F = \frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F}$  bzw.  $\mu_F$  erstrebenswert. Große Werte von  $\nu_F$  entsprechen einem zähen Fluid mit vergleichsweise hoher Dichte  $\hat{\rho}_F$ . Für die üblichen Werkstoffe sind kleine Strukturdicken  $B$  erforderlich, um die hohen Werte des Elastizitätsmoduls  $E$  auszugleichen.

Der Parameter  $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{H_0 \hat{\rho}_F}{B\rho_S}$  ist für die Kopplung entscheidend: Für sehr kleine Werte ist der Einfluss der Struktur dominierend, für große Werte der Einfluss des Fluids [63]. Das ist auch daran zu erkennen, dass die Dispersionsgleichungen (4.29) und (5.21) der Modelle  $A$  und  $B$  für sehr kleine Werte von  $\alpha$  nahezu identisch sind. Da sich die Modelle in der Modellierung des Fluids unterscheiden, sind sie bei dominierender Struktur vergleichbar. In den Voruntersuchungen zu dieser Arbeit konnten nur Konstellationen mit großem  $\alpha$  die Forderung nach kleinen Reynoldszahlen und somit die Modellrestriktionen erfüllen. Ausschlaggebend waren dabei stets die hohe Fluidichte und die geringe Strukturdicke.

Dies ist auch beim Testfall 4 gegeben. Es folgen die Werte aus Tabelle 5.1, denen das lokale Minimum  $U_{min,ab}$  für große Wellenlängen zugrunde liegt. Für  $\frac{H_0}{L} \leq 0.008$  (siehe 5.2.2) folgt  $\text{Re}\left(\frac{H_0}{L}\right) \approx 0.05$ . Die Modellannahmen werden für den Testfall 4 somit gut erfüllt und reale Entsprechungen dieses Modells scheinen möglich. Ein Vergleich mit der kritischen Geschwindigkeit aus Abschnitt 4.2.9 zeigt jedoch eine deutliche Abweichung. Eine Beurteilung dieser Abweichung und somit auch der Gültigkeit der bisher betrachteten Modelle wird in Kapitel 6 vorgenommen.

|             |       | Testfall 4 |
|-------------|-------|------------|
| $k_{min}$   | [-]   | 0.45       |
| $U_{min}$   | [-]   | 5.804      |
| $\hat{U}_0$ | [m/s] | 0.103      |
| Re          | [-]   | 5.804      |

Tabelle 5.1: Werte des Testfalls 4 am kritischen Punkt

### 5.3 Nichtlineare Stabilitätsanalyse

In der Literaturübersicht 1.1.2 werden einige theoretische und praktische Arbeiten vorgestellt, in denen die Existenz von zeitperiodischen Lösungen in durchströmten Strukturen gezeigt und untersucht wird. In den folgenden Abschnitten werden zunächst die nichtlinearen Berechnungen am aktuellen Modell vorgestellt und anschließend untersucht, unter welchen Bedingungen sich periodische Lösungen einstellen und von welchem Typ die Bifurkationen sind.

Im ersten Schritt müssen dafür die strukturelle Instabilität, der Bifurkationspunkt und die Codimension bestimmt werden. Es ist bereits bekannt, dass die lineare Stabilität entscheidend vom Wert des Grundströmungsparameters  $U_{0,3}$  abhängt. Anhand der Jacobi-Matrix [15] wird im Folgenden gezeigt, dass das System strukturell instabil und  $U_{0,3}$  der Bifurkationsparameter ist.

Dafür wird aus den linearisierten Gleichungen (5.17) und (5.18) zunächst der Druck  $p$  eliminiert. Um gewöhnliche Differentialgleichungen zu erhalten wird  $\theta = kx + \omega t$  eingeführt. Anschließend können die Gleichungen in Zustandsform

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\theta} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \left[ q, \frac{dq}{d\theta}, \frac{d^2q}{d\theta^2}, \frac{d^3q}{d\theta^3}, \frac{d^4q}{d\theta^4}, \frac{d^5q}{d\theta^5} \right]^T \quad (5.25)$$

gebracht werden. Die Linearisierung erfolgte um den singulären Grundzustand  $\mathbf{x}_s = \mathbf{0}$ , sodass die Matrix  $\mathbf{A}$  die Jacobimatrix am singulären Punkt darstellt:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}_s, U_{0,3}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{12\alpha_3(\omega+3kU_{0,3})}{\delta_3 k^6} & -\frac{\gamma_3}{\delta_3 k^4} & \frac{-\zeta_3\omega+12\alpha_3kU_{0,3}}{\delta_3 k^4} & \frac{-\omega^2+\beta_3k^2}{\delta_3 k^4} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Die Eigenwerte dieser Matrix können durch  $\text{Det}(\mathbf{J} - \omega \mathbf{I}) = 0$  mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  bestimmt werden. Es ergibt sich wieder die Dispersionsgleichung (5.19), deren Lösungen  $\omega$  bekannt sind. Da es stets zumindest eine Eigenkreisfrequenz mit verschwindendem Imaginärteil gibt, ist der singuläre Zustand nicht-hyperbolisch und das System strukturell instabil. Aus dem Defekt der Matrix  $\text{def}(\mathbf{J}) = n - \text{rang}(\mathbf{J}) = 6 - 5 = 1$  folgt, dass es sich

am Bifurkationspunkt  $U_{0,3} = U_{krit}$  um eine Bifurkation der Codimension 1 handelt (siehe Abschnitt 2.5).

Um die nichtlinearen Gleichungen (5.13) und (5.14) dieses Modells zu untersuchen, wird die *Multiple-Scales*-Methode verwendet und die Ergebnisse anhand einer Harmonischen-Balance-Analyse verifiziert.

### 5.3.1 Multiple-Scales-Methode

Die Lösung bifurkiert vom stationären Grundzustand im Bifurkationspunkt bei  $U_{0,3} = U_{krit}$ . Eine kleine Änderung des Bifurkationsparameters

$$U_{0,3} = U_{krit} + \Delta U = U_{krit} + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots \quad (5.27)$$

bewirkt an diesem Punkt auch kleine Fluktuationen

$$q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots, \quad (5.28)$$

$$p = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \quad (5.29)$$

vom stationären Zustand. Hierbei stellt  $\varepsilon$  einen noch zu bestimmenden kleinen Parameter dar. Die Zeitskalen werden wie folgt gewählt:

$$\tau = \omega_{krit} t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t. \quad (5.30)$$

Die Ableitungen nach der Zeit werden gemäß Gleichung (2.25) gebildet, die Ortsableitungen sind unverändert. Diese Ansätze und Zeitskalen werden in die nichtlinearen Gleichungen (5.13) und (5.14) eingesetzt, und diese schließlich nach den Ordnungen von  $\varepsilon$  sortiert. Bis auf die Schreibweise  $p_1, q_1$  (statt  $\bar{p}, \bar{q}$ ) entsprechen die Gleichungen der ersten Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  exakt den linearisierten Gleichungen (5.17) und (5.18). Das liegt daran, dass die linearisierten Gleichungen keine kleinen Terme enthalten. Wie zuvor wird der Druck  $p_1$  eliminiert, woraus eine lineare, partielle Differentialgleichung für  $q_1$  folgt

$$12U_{krit} \frac{\partial^3 q_1}{\partial x^3} + 12 \left( 3U_{krit} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \omega_{krit} \frac{\partial q_1}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{\alpha_3} \left( \delta_3 \frac{\partial^6 q_1}{\partial x^6} - \beta_3 \frac{\partial^4 q_1}{\partial x^4} + \gamma_3 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \omega_{krit}^2 \frac{\partial^4 q_1}{\partial x^2 \partial \tau^2} + \zeta_3 \omega_{krit} \frac{\partial^3 q_1}{\partial x^2 \partial \tau} \right) = 0, \quad (5.31)$$

welche im Folgenden durch

$$L(q_1) = 0 \quad (5.32)$$

gekennzeichnet wird. Da für das rekursive Gleichungssystem reelle Lösungen benötigt werden, wird der konjugiert komplexe Wellenansatz

$$\begin{aligned} q_1(x, \tau, T_1, T_2) &= \frac{1}{2} Q_1(T_1, T_2) e^{i(kx + \tau + \varphi(T_1, T_2))} + \frac{1}{2} Q_1(T_1, T_2) e^{-i(kx + \tau + \varphi(T_1, T_2))} \\ &= Q_1(T_1, T_2) \cos(kx + \tau + \varphi(T_1, T_2)) \end{aligned} \quad (5.33)$$

in (5.32) eingesetzt. Der Übersichtlichkeit halber wird die Abhängigkeit von der Ortsvariablen  $x$  und den Zeitvariablen  $\tau$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  nur bei Änderungen angegeben. Durch das Einsetzen ergeben sich die Bestimmungsgleichungen (5.22) und (5.23) für  $U_{krit}$  und  $\omega_{krit}$ . Anschließend werden die Lösungen

$$q_1 = Q_1 \cos(kx + \tau + \varphi), \quad (5.34)$$

$$p_1 = f(q_1) = - \left( 12kU_{krit} + \frac{\zeta_3 \sqrt{K_S}}{\alpha_3} \right) Q_1 \sin(kx + \tau + \varphi) \quad (5.35)$$

mit den noch zu bestimmenden Größen  $Q_1$  und  $\varphi$  in die Gleichungen der höheren Ordnung eingesetzt.

Die lineare, inhomogene Differentialgleichung der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  lässt sich nach Eliminierung von  $p_2$  und einigen trigonometrischen Umformungen in der Form

$$L(q_2) = f_{sc,2} \cos(kx + \tau + \varphi) + f_{ss,2} \sin(kx + \tau + \varphi) + f_{s,2} \sin(2(kx + \tau + \varphi)) \quad (5.36)$$

darstellen. Die Amplituden der Anregungsterme  $f_{sc,2}$ ,  $f_{ss,2}$  und  $f_{s,2}$  sind durch

$$f_{sc,2} = - \frac{\partial Q_1}{\partial T_1} (12\alpha_3 + k^2 \zeta_3) + \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} Q_1 2\omega_{krit} k^2, \quad (5.37)$$

$$f_{ss,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} Q_1 (12\alpha_3 + k^2 \zeta_3) + \frac{\partial Q_1}{\partial T_1} 2\omega_{krit} k^2 + U_1 Q_1 12\alpha_3 k(3 - k^2), \quad (5.38)$$

$$f_{s,2} = - Q_1^2 (12U_{krit} k(2k^4 - 5k^2 + 3) + \sqrt{K_S} \frac{\zeta_3 k^2}{\alpha_3} (2k^2 - 3)) \quad (5.39)$$

gegeben. Die homogene Differentialgleichung entspricht der Gleichung (5.32) der ersten Ordnung mit der zugehörigen Lösung (5.33). Die Inhomogenitäten mit den Amplituden  $f_{sc,2}$  und  $f_{ss,2}$  haben somit die Form von Resonanzanregungstermen und stellen die Säkularterme dar. Für periodische Lösungen ergibt sich die Forderung nach verschwindenden Säkulartermen:

$$f_{sc,2} \stackrel{!}{=} 0, \quad (5.40)$$

$$f_{ss,2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.41)$$

Für periodische Lösungen mit konstanter Amplitude muss  $\frac{\partial Q_1}{\partial T_1} = 0$  gelten. Aus (5.40) folgt damit  $\frac{\partial \varphi}{\partial T_1} = 0$  und aus (5.41) für nichttriviale Lösungen  $U_1 = 0$ .

Mit  $Q_1 = Q_1(T_2)$ ,  $\varphi = \varphi(T_2)$  und  $U_1 = 0$  kann die durch den verbleibenden Anregungsterm entstehende partikuläre Lösung  $q_{2,p}$  bestimmt werden:

$$q_2(x, \tau, T_2) = Q_{c,2}(T_2) \cos(2(kx + \tau + \varphi(T_2))) + Q_{s,2}(T_2) \sin(2(kx + \tau + \varphi(T_2))). \quad (5.42)$$

Da  $q_{2,h}$  exakt der Lösung der ersten Ordnung entspricht, wird sie in der Gesamtlösung bereits berücksichtigt und kann hier zu null gesetzt werden. Die partikuläre Lösung besteht aus einem Kosinus- und einem Sinusanteil mit den unterschiedlichen Amplituden  $Q_{c,2}$  und  $Q_{s,2}$ . Deren Ausdrücke hängen jeweils von der Amplitude  $Q_1$ , der Wellenzahl  $k$  und den anderen dimensionslosen Parametern  $P = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \zeta_3)$  ab. Die unübersichtlichen

Ausdrücke werden mithilfe der Software MAPLE berechnet und sowohl hier als auch in den folgenden Schritten aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht ausgeschrieben. Die Berechnung des Druckes  $p_2(q_2)$  aus  $q_2$  schließt die Betrachtung der zweiten Ordnung ab. Für die Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  ergibt sich nach Einsetzen aller bisher bestimmten Lösungen  $q_1, p_1, q_2, p_2$ , Berücksichtigung aller bisherigen Erkenntnisse, Eliminierung von  $p_3$  und einigen Umformungen die inhomogene Differentialgleichung

$$L(q_3) = f_{sc,3} \cos(kx + \tau + \varphi) + f_{ss,3} \sin(kx + \tau + \varphi) + f_{c,3} \cos(3(kx + \tau + \varphi)) + f_{s,3} \sin(3(kx + \tau + \varphi)). \quad (5.43)$$

Die Amplituden  $f_{sc,3}, f_{ss,3}, f_{c,3}$  und  $f_{s,3}$  der Inhomogenitäten hängen von  $P, k, Q_1, \varphi$  und  $U_2$  ab. Auch hier ist die linke Seite identisch mit denen der anderen Ordnungen. Dadurch können auf der rechten Seite zwei Säkularterme

$$f_{sc,3} = Q_1 \left[ \frac{d\varphi}{dT_2} f_{c1}(k, P) + Q_1^2 f_{c2}(k, P) \right], \quad (5.44)$$

$$f_{ss,3} = Q_1 \left[ \frac{d\varphi}{dT_2} f_{s1}(k, P) + Q_1^2 f_{s2}(k, P) + U_2 f_{s3}(k, P) \right], \quad (5.45)$$

mit den Abkürzungen  $f_{c1}(k, P)$  und  $f_{c2}(k, P)$ , identifiziert werden. Aus der Forderung nach periodischen Lösungen mit konstanter Amplitude  $Q_1$  folgt daher

$$f_{sc,3} \stackrel{!}{=} 0, \quad (5.46)$$

$$f_{ss,3} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.47)$$

Gleichung (5.46) wird nach  $\frac{d\varphi}{dT_2}$  aufgelöst und dieser Ausdruck in Gleichung (5.47) eingesetzt. Daraus ergibt sich für die Amplitude als nichttriviale Lösung

$$Q_1 = \sqrt{U_2 f_{Q1}(k, P)}. \quad (5.48)$$

Die Amplitude  $Q_1$  hängt von der Wellenzahl  $k$  und allen Parametern  $P$  ab und wird durch einen unübersichtlich langen Ausdruck beschrieben. Stellvertretend wird hier der Term  $f_{Q1}(k, P)$  verwendet. Nach Einsetzen von  $Q_1$  und einmaliger Integration folgt

$$\varphi(T_2) = f_\varphi(k, P) U_2 T_2. \quad (5.49)$$

Die unübersichtlichen Abhängigkeiten von  $k$  und  $P$  werden durch  $f_\varphi(k, P)$  dargestellt. Zusammengefasst ergibt sich aus der Störungsrechnung nach Einsetzen aller Ergebnisse und Zeitskalen

$$U_{0,3} = U_{krit} + \varepsilon^2 U_2, \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} q(x, t) &\approx \varepsilon \sqrt{U_2 f_{Q1}(k, P)} \cos(kx + \omega_{krit} t + f_\varphi(k, P) U_2 \varepsilon^2 t) \\ &= \varepsilon \sqrt{U_2 f_{Q1}(k, P)} \cos(kx + [\omega_{krit} + \varepsilon^2 f_\varphi(k, P) U_2] t) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten sowohl eine Frequenzkorrektur als auch eine Bifurkation der Amplitude bei  $U_{krit}$  bewirkt.

Noch ausstehend ist die Bestimmung des kleinen Störungsparameters  $\varepsilon$ . Einer Argumentation von Grotberg und Reiss [37] folgend, kann der Grundströmungsparameter auch als  $U_{0,3} = U_{krit} + \varepsilon^2$  geschrieben werden, woraus für die kleine Änderung der Grundströmungsgeschwindigkeit  $\epsilon = \sqrt{U_{0,3} - U_{krit}} = \sqrt{\Delta U}$  folgt. Mit diesem kleinen Parameter  $\epsilon = \varepsilon\sqrt{U_2}$  können die Ergebnisse wie folgt dargestellt werden:

$$U_{0,3} = U_{krit} + \Delta U, \quad (5.52)$$

$$q(x, t) \approx \sqrt{\Delta U f_{Q_1}(k, P)} \cos(kx + [\omega_{krit} + \Delta U f_\varphi(k, P)] t). \quad (5.53)$$

Für reelle Amplituden  $Q_1 = \sqrt{\Delta U f_{Q_1}}$  muss bei einer kleinen Erhöhung des Grundströmungsparameters ( $\Delta U > 0$ ) die Funktion  $f_{Q_1}$  ebenfalls positiv sein, was eine superkritische Bifurkation bewirkt. Für  $\Delta U < 0$  und  $f_{Q_1} < 0$  handelt es sich um eine subkritische Bifurkation.

Der große Vorteil der vorgestellten Berechnungsmethode ist, dass analytische Ausdrücke für die Amplituden und Frequenzen erhalten werden. Allerdings sind in diesem Fall die Ausdrücke so unübersichtlich, dass eine analytische Untersuchung hinsichtlich der Wirkung der einzelnen Parameter kaum möglich ist. In Abschnitt 5.3.3 wird daher eine numerische Analyse durchgeführt.

Wird der Einfluss des Fluids auf die Struktur vereinfacht ( $\hat{\sigma}_{yy} = 0$ ) und zusätzlich eine elastische Bettung ( $\zeta_3 = 0$ ) angenommen, so lauten die Ausdrücke

$$f_{Q_1} = \frac{6kK_1}{\sqrt{K_S}(K_1 - 12\alpha_3^2)}, \quad f_\varphi = \frac{36\alpha_3^2 k}{K_1 - 12\alpha_3^2} \quad (5.54)$$

mit  $K_S = \delta_3 k^4 + \beta_3 k^2 + \gamma_3$  und  $K_1 = -4k^8\delta_3 + k^4\gamma_3$ . Dabei sind  $U_{krit}$  und  $\omega_{krit}$  bereits eingesetzt. Das Vorgehen zur Bestimmung von  $f_{Q_1}$  und  $f_\varphi$  entspricht exakt dem zuvor beschriebenen. Auch hier handelt es sich für  $f_{Q_1} > 0$  um eine superkritische Bifurkation.

### 5.3.2 Methode der Harmonischen Balance

Die Vorgehensweise bei der Anwendung der Harmonischen Balance Methode wird in Abschnitt 2.5.2 anhand einer gewöhnlichen Differentialgleichung erklärt. Hier wird die Methode auf ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen angewendet. Die nichtlinearen Gleichungen lassen sich nicht nach  $p$  auflösen und somit wird jeweils ein Ansatz für  $q$  und  $p$  benötigt. Da im Vorfeld gezeigt werden konnte, dass der mittlere Fehler  $J_1$  bei der Berücksichtigung von nur einem Glied der Fourierreihe sehr groß ist und sich daraus ein fehlerhaftes Bifurkationsverhalten ergibt (siehe [4]), werden hier direkt Ansätze höherer Ordnung verwendet:

$$\tilde{q}_2(x, t) = Q_1 \cos(kx + \omega t) + Q_{c,2} \cos(2(kx + \omega t)) + Q_{s,2} \sin(2(kx + \omega t)), \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} \tilde{p}_2(x, t) &= P_{c,1} \cos(kx + \omega t) + P_{s,1} \sin(kx + \omega t) \\ &+ P_{c,2} \cos(2(kx + \omega t)) + P_{s,2} \sin(2(kx + \omega t)). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Durch den zusätzlichen Sinusterm in  $\tilde{p}_2$  wird eine mögliche Phasenverschiebung zwischen Druck und Auslenkung berücksichtigt. Es wird direkt nach Lösungen mit konstanten Amplituden  $Q$  und  $P$  gesucht. Im Gegensatz zur Störungsrechnung wird kein kleiner Parameter

benötigt.

Die Ansätze (5.55) und (5.56) werden in die nichtlinearen Gleichungen (5.13) und (5.14) eingesetzt, welche den Ausdrücken  $N_1(\tilde{q}_2(x, t), \tilde{p}_2(x, t)) = 0$  bzw.  $N_2(\tilde{q}_2(x, t), \tilde{p}_2(x, t)) = 0$  entsprechen (siehe auch Anhang A). Nach dem Einsetzen wird in den Argumenten der Sinus- und Kosinus-Funktionen die Vereinfachung  $\theta = kx + \omega t$  eingeführt. Die Fourierkoeffizienten werden gemäß der Gleichungen (2.33) und (2.34) berechnet. Es kann gezeigt werden, dass stets  $a_{0,1} = a_{0,2} = 0$  gilt. Die restlichen Koeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  mit  $n = 1, 2$  werden über

$$a_{n,1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N_1(\tilde{q}_2(\theta), \tilde{p}_2(\theta)) \cos(n\theta) d\theta = 0, \quad (5.57)$$

$$b_{n,1} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N_1(\tilde{q}_2(\theta), \tilde{p}_2(\theta)) \sin(n\theta) d\theta = 0, \quad (5.58)$$

$$a_{n,2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N_2(\tilde{q}_2(\theta), \tilde{p}_2(\theta)) \cos(n\theta) d\theta = 0, \quad (5.59)$$

$$b_{n,2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} N_2(\tilde{q}_2(\theta), \tilde{p}_2(\theta)) \sin(n\theta) d\theta = 0 \quad (5.60)$$

ermittelt. Daraus ergeben sich acht nichtlineare Gleichungen für die acht Unbekannten  $Q_1, Q_{c,2}, Q_{s,2}, P_{c,1}, P_{s,1}, P_{c,2}, P_{s,2}, \omega$ . Dieses Gleichungssystem wird für jeden Wert des Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$  numerisch in MATLAB gelöst. Dazu wird die Funktion *fsolve* verwendet, welche anhand einer Anfängsschätzung reelle Nullstellen sucht. Als Startwerte dienen Ergebnisse aus der Störungsrechnung, danach wird jeweils der vorherige Lösungsvektor verwendet.

Diese Methode hat den Vorteil, dass sie einfach in der Umsetzung ist und direkt, ohne Einführung eines kleinen Parameters, auf das Problem angewendet werden kann. Als nachteilig hat sich erwiesen, dass die Startwerte geeignet gewählt werden müssen und kein analytischer Ausdruck für die Amplitude erhalten wird.

### 5.3.3 Untersuchung des Bifurkationsverhaltens

Nach Herleitung der Gleichungen zur Bestimmung der Bifurkationslösungen, werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse im Zusammenhang mit den Parametern ausgewertet. Zunächst wird dabei der Fall mit  $\hat{\sigma}_{yy} \neq 0$  betrachtet. In Abbildung 5.5a ist der Verlauf der Amplitude für den Testfall 4 und unter Betrachtung einer Welle mit  $k_{min} = 0.44$  dargestellt (vgl. Abschnitt 5.2.7). Zu sehen ist eine superkritische Bifurkation und eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der *Multiple-Scales*-Untersuchung und der Harmonischen-Balance-Methode. Das Ergebnis der Harmonischen-Balance wird erst ab einer gewissen Amplitude dargestellt, da für den numerischen Lösungsalgorithmus ein von null verschiedener Startwert benötigt wird um nichttriviale Lösungen zu finden.

In Abbildung 5.5b ist das Verhalten für eine Wellenzahl jenseits der Polstelle dargestellt. Auch hier liegt eine superkritische Bifurkation vor. Abbildung 5.6 zeigt, dass auch subkritische Bifurkationen auftreten können. Das Bifurkationsverhalten hängt von der Wellenlänge ab und daher ist es wichtig, im konkreten Anwendungsfall die auftretenden Wellenzahlen einzugrenzen. Die subkritische Bifurkation stellt den kritischeren Fall dar:

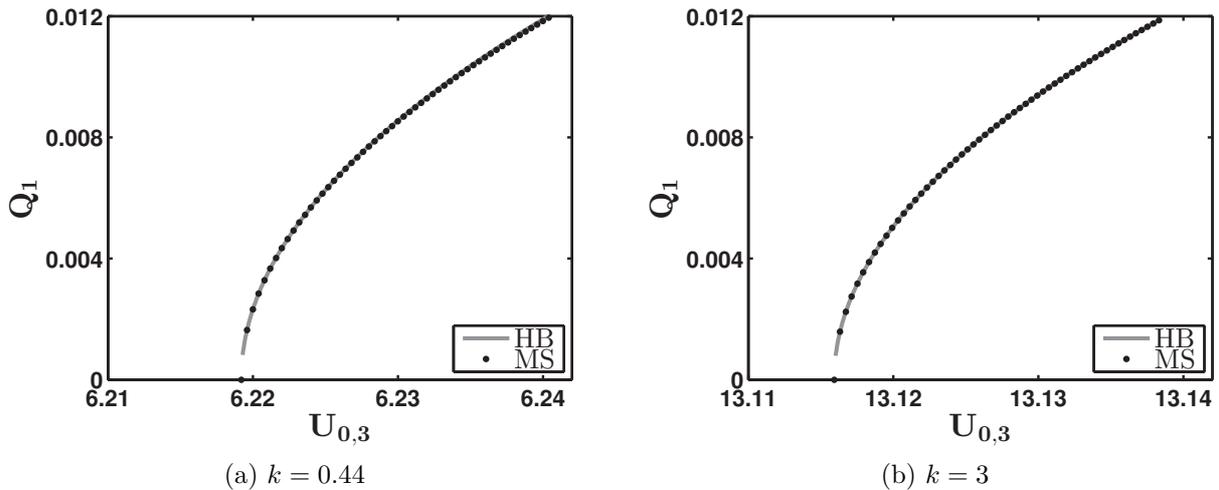


Abbildung 5.5: Amplitude  $Q_1$  aus der Harmonischen-Balance- (HB) bzw. Multiple-Scales-Methode (MS) über Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$

Je nach Amplitude der Störungen kann der stationäre Zustand bereits für Grundströmungsgeschwindigkeiten  $U_0 < U_{krit}$  instabil werden.

Bei  $k \approx 1.2$  findet ein Wechsel zwischen einer super- und subkritischen Bifurkation statt. In der Nähe dieser Wellenzahl (siehe Abb. 5.6a) ist eine deutlich größere Amplitude zu erkennen und die Lösungen der zwei Berechnungsverfahren weichen mit zunehmendem Abstand zum Bifurkationspunkt stärker voneinander ab. Es ist anzunehmen, dass diese Abweichung aus der Annahme der kleinen Auslenkung in der Störungsrechnung resultiert. Für eine größere Wellenzahl stimmen die Lösungen trotz größerem Abstand zum Bifurkationspunkt nahezu überein.

In Abschnitt 5.2.6 wurde der Einfluss des Dämpfungsparameters  $\zeta_3$  auf die kritische Geschwindigkeit und somit auf die Lage des Bifurkationspunktes diskutiert. In Abbildung 5.7 ist nun der Verlauf der Amplitude  $Q_1$  mit und ohne diese äußere Dämpfung  $\zeta_3$  exemplarisch dargestellt. Die abgebildeten Verläufe sind sehr ähnlich und für noch kleinere Werte von  $\zeta_3$  kaum zu unterscheiden.

Grundsätzlich werden die Ergebnisse aus der Störungsrechnung durch die aus der Harmonischen-Balance-Analyse, welche ohne Annahme eines kleinen Parameters auskommt, bestätigt. In beiden Fällen können zeitperiodische Lösungen gefunden werden und die Art der Bifurkation stimmt ebenfalls überein. In der Nähe des Bifurkationspunktes und für kleine Amplituden sind die Verläufe nahezu identisch. Zusätzlich zur Validierung mithilfe der Harmonischen-Balance-Methode wurden die Ergebnisse in der Studienarbeit von Fischer [26] auch numerisch überprüft. Hierzu wurden die nichtlinearen Gleichungen für die Fluktuationen mit der FEM-Software COMSOL gelöst. Unter Vorgabe einer Welle mit bestimmter Wellenzahl stellen sich periodische Lösungen mit sub- bzw. superkritischen Bifurkationen ein. Auch die Verläufe der Amplituden aus der numerischen Berechnung mittels COMSOL und der Harmonischen-Balance-Analyse stimmen gut überein. Somit sind nicht nur die verwendeten Methoden, sondern auch die Annahme der periodischen Lösungen validiert. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im Folgenden nur noch die

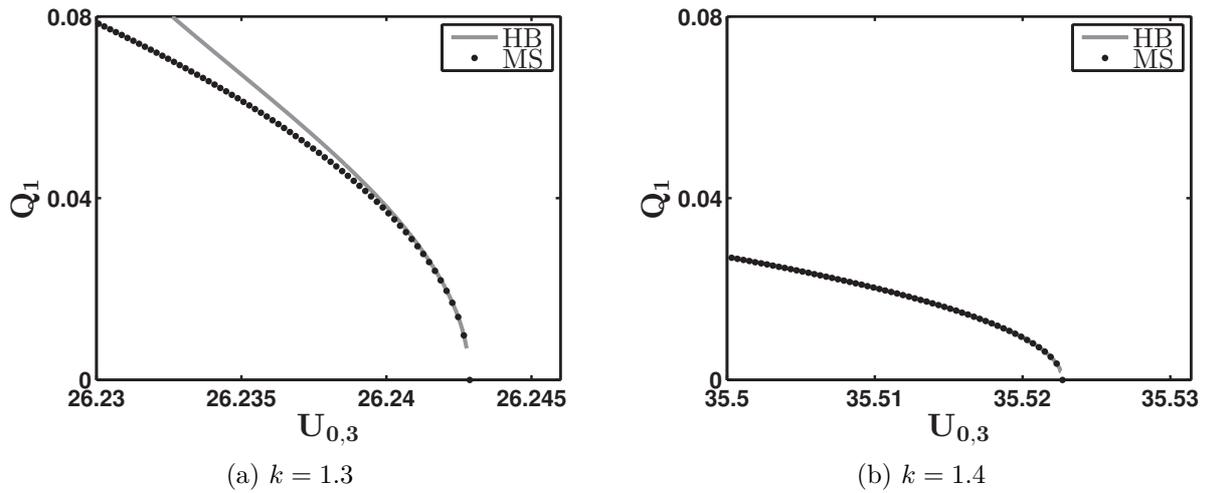


Abbildung 5.6: Amplitude  $Q_1$  über Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$

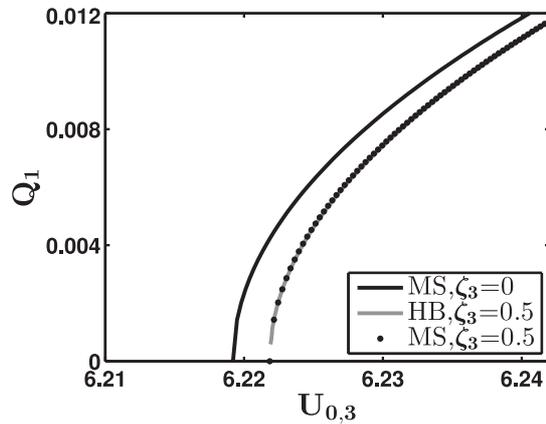


Abbildung 5.7: Amplitude  $Q_1$  mit und ohne äußere Dämpfung  $\zeta_3$  für  $k = 0.44$

Ergebnisse aus der Störungsrechnung dargestellt. Zunächst werden die Ergebnisse mit und ohne Berücksichtigung des Spannungsterms  $\hat{\sigma}_{yy}$  verglichen. Abbildung 5.8 zeigt den Verlauf der Amplituden für beide Fälle. Für die Rechnung wurden die Wellenzahlen  $k_{min,ab} = 0.44$  bzw.  $k_{min} = 0.47$  verwendet, bei denen jeweils die minimale kritische Geschwindigkeit auftritt (siehe Abb. 5.3). Im vereinfachten Fall ist  $U_{min}$  etwas niedriger (umgerechnet entspricht die Geschwindigkeitsdifferenz im betrachteten Fall  $0.008 \text{ m/s}$ ). Abbildung 5.8a zeigt zudem, dass die Amplitude in diesem Fall deutlich geringer ist. Hier stellt sich in beiden Fällen eine superkritische Bifurkation ein. Es gilt jedoch noch zu überprüfen, ob diese Übereinstimmung stets vorhanden ist. Außerdem soll auch der Einfluss der dimensionslosen Parameter auf das Bifurkationsverhalten untersucht werden, wofür eine genauere Betrachtung der Gleichung für  $Q_1$  erforderlich ist. Unter Berücksichtigung des Spannungsterms  $\hat{\sigma}_{yy}$  und des Dämpfungsparameters  $\zeta_3$  ergeben sich äußerst unübersichtliche Terme für  $Q_1$  und verhindern somit eine analytische Untersuchung des Einflusses der einzelnen Parameter. Im vereinfachten Fall mit  $\hat{\sigma}_{yy} = 0$

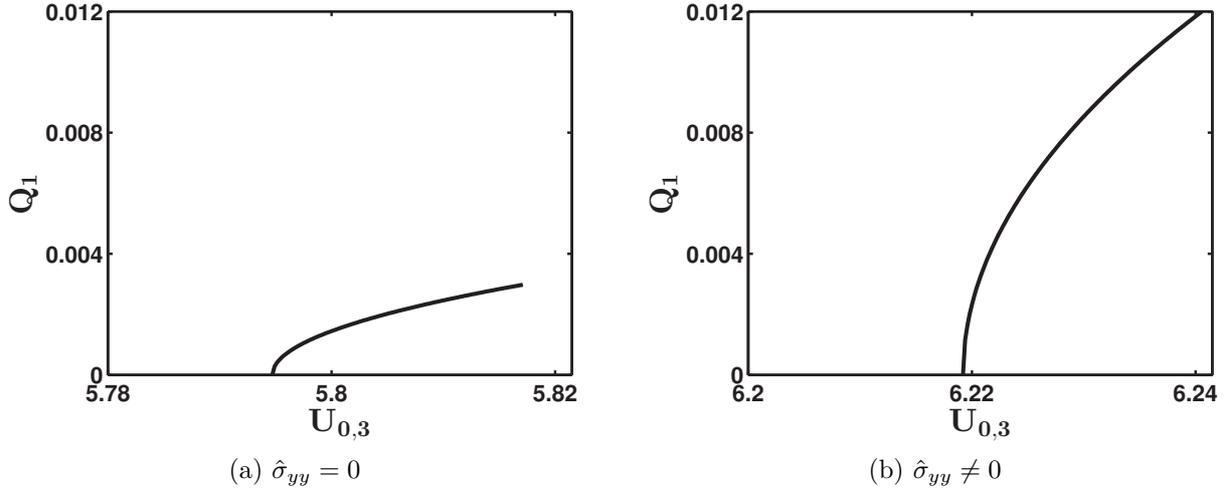


Abbildung 5.8: Amplitude  $Q_1$  über Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$  mit und ohne  $\hat{\sigma}_{yy}$

und  $\zeta_3 = 0$  wird die Amplitude über den Term (5.54) beschrieben. Da  $k > 0$  und  $K_S > 0$  gilt, ist die Bifurkation für

$$K_2 = \frac{K_1}{K_1 - 12\alpha_3^2} > 0 \quad (5.61)$$

superkritisch. Dieser Bedingung ist für

$$K_1 = k^4 (-4k^4\delta_3 + \gamma_3) < 0 \quad (5.62)$$

stets erfüllt. Für  $K_1 > 0$  ist eine weitere Fallunterscheidung notwendig, denn für

$$0 < k^4 (-4k^4\delta_3 + \gamma_3) < 12\alpha_3^2 \quad (5.63)$$

ist die Bifurkation subkritisch, andernfalls wieder superkritisch. Offensichtlich hängt die Art der Bifurkation nicht von dem Parameter  $\beta_3$ , sondern nur von den restlichen Parametern und der Wellenzahl ab. Der Einfluss der einzelnen Parameter lässt sich dabei nicht unabhängig voneinander diskutieren. Grundsätzlich kann gesagt werden, dass  $\alpha_3$  für negative  $K_1$  keinen Einfluss hat und bei positivem  $K_1$  eine subkritische Bifurkation begünstigt. Dagegen begünstigen große Werte von  $\delta_3$  superkritische und große Werte von  $\gamma_3$  subkritische Bifurkationen.

Zur Untersuchung des Einflusses der Wellenzahl wird der Quotient  $K_2$  aus Gleichung (5.61) genauer betrachtet. Dieser hat für positive  $k$  stets eine Nullstelle bei

$$k_0 = \left( \frac{\gamma_3}{4\delta_3} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.64)$$

und ein Minimum bei

$$k_m = \left( \frac{\gamma_3}{8\delta_3} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (5.65)$$

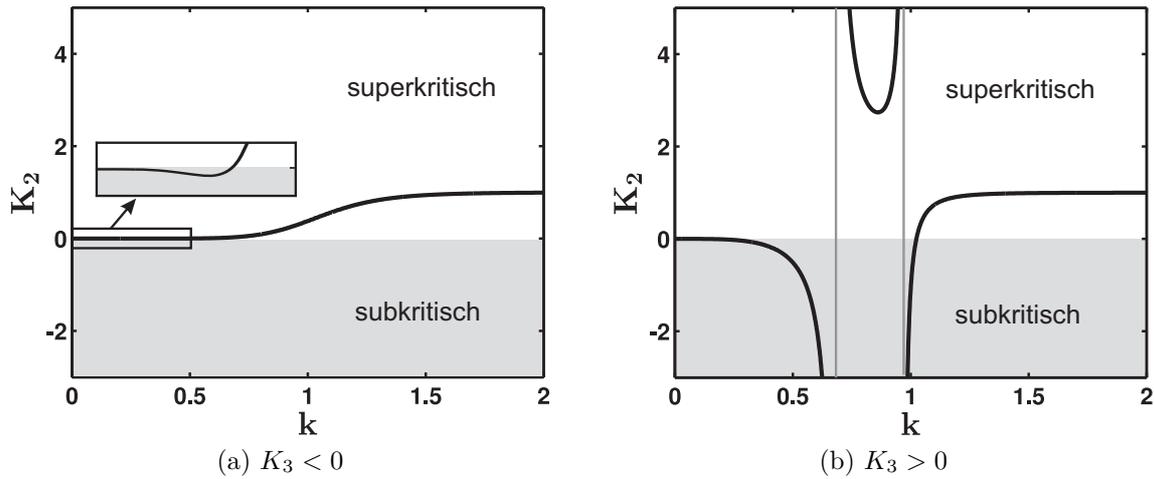


Abbildung 5.9: Einfluss der Wellenzahl  $k$  und der Quotienten  $K_2$  und  $K_3$  auf den Bifurkationstyp

Es kann gezeigt werden, dass der Quotient  $K_2$  an der Stelle  $k = k_m$  für

$$K_3 = \frac{\gamma_3^2}{16\delta_3} - 12\alpha_3^2 < 0 \quad (5.66)$$

stets negativ ist. In diesem Fall treten für  $k < k_0$  subkritische und für  $k > k_0$  superkritische Bifurkationen auf, siehe Abbildung 5.9a. Für  $K_3 > 0$  ist der Quotient an der Stelle des Minimums positiv und es existieren zwei Polstellen. Ein beispielhafter Verlauf von  $K_2$  ist in Abbildung 5.9b dargestellt. Es gibt zwei Bereiche in denen  $K_2$  positiv ist (superkritische Bifurkation) und zwei Bereiche mit negativem  $K_2$ .

Im betrachteten Testfall gilt  $K_3 < 0$  und somit treten ab  $k_0 = 0.33$  superkritische Bifurkationen auf. Bei vollständiger Berücksichtigung der Fluidwirkung trifft das nicht zu (siehe Abb. 5.6). Für  $\hat{\sigma}_{yy} \neq 0$  ist die Amplitudengleichung sehr unübersichtlich und muss numerisch untersucht werden.

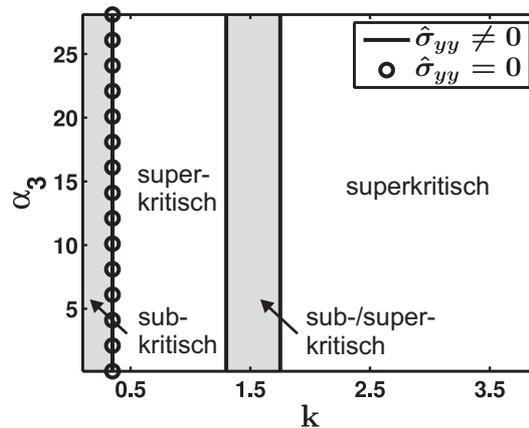


Abbildung 5.10: Einfluss des Kopplungsparameters  $\alpha_3$  und der Wellenzahl  $k$  auf die Art der Bifurkation

In Abbildung 5.10 ist der Einfluss der Wellenzahl und des Kopplungsparameters für beide Fälle dargestellt. Zu sehen sind die Grenzen zwischen den Bereichen mit sub- bzw. superkritischer Bifurkation. Hierfür werden die Wert von  $f_{Q1}$  für die jeweiligen Parameter numerisch ermittelt und je nach Vorzeichen der zugehörigen Bifurkation zugeordnet. Im betrachteten Bereich hat der Kopplungsparameter  $\alpha_3$  in beiden Fällen keinen Einfluss. Der linke Teil der Abbildung ist identisch, d. h. für sehr kleine  $k$  treten subkritische Bifurkationen auf. Allerdings gibt es nun für den Fall mit  $\hat{\sigma}_{yy} \neq 0$  für  $k < k_{Pol}$  (siehe Gleichung (5.22)) einen zusätzlichen Bereich mit subkritischen Bifurkationen. Der Steifigkeitsparameter  $\beta_3$  hat im betrachteten Bereich für beide Fälle keinen Einfluss und ist daher nicht abgebildet. Der Einfluss des Steifigkeitsparameters  $\gamma_3$  ist in Abbildung 5.11a dargestellt. Für beide

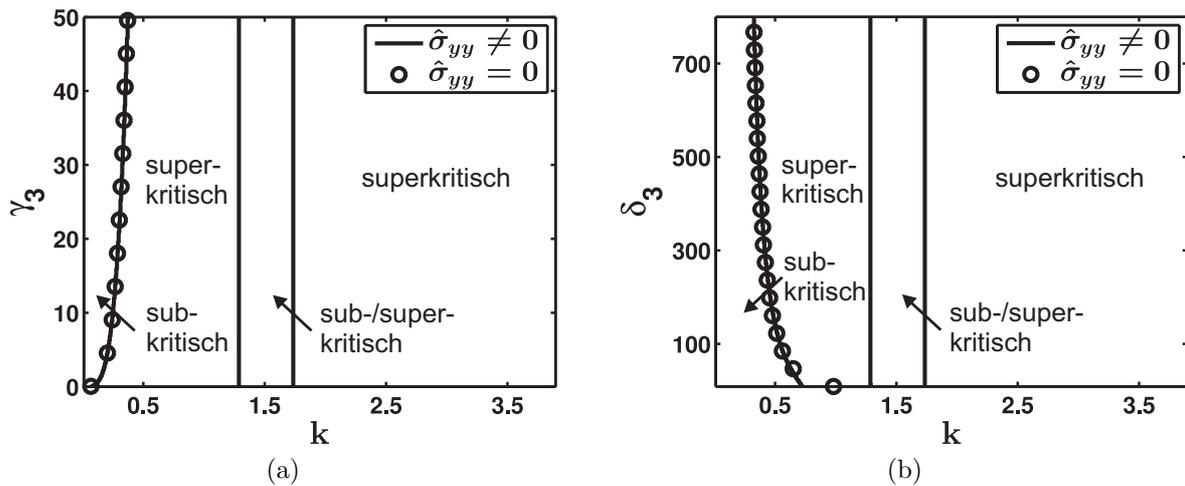


Abbildung 5.11: Einfluss der Steifigkeitsparameter  $\gamma_3$  und  $\delta_3$  und der Wellenzahl  $k$  auf den Bifurkationstyp

Fälle ist die Wirkung von  $\gamma_3$  gleich, eine Erhöhung begünstigt subkritische Bifurkationen. Der Bereich, in dem nur bei  $\hat{\sigma}_{yy} \neq 0$  subkritische Bifurkationen auftreten, ist unverändert. Das ist auch in Abbildung 5.11b der Fall, auch hier ist der Einfluss des Parameters für beide Fälle sehr ähnlich. Nur für sehr kleine Werte von  $\delta_3$  kann eine Abweichung im Verlauf der Bereichsgrenze beobachtet werden. Eine Erhöhung von  $\delta_3$  begünstigt superkritische Bifurkationen.

## 5.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das Modell  $B$  für einen schlanken Kanal mit inkompressibler, viskoser Strömung unter Vernachlässigung der Fluidträgheit betrachtet. Dabei wurde die Stabilität des stationären Grundzustandes sowohl linear als auch nichtlinear unter Berücksichtigung der Verschiebung der Grenzfläche zwischen Fluid und elastischer Wand untersucht. Zur Berechnung der vom Grundzustand abweichenden, periodischen Lösungen wurde die *Multiple-Scales*-Methode und die Harmonische-Balance-Analyse verwendet. Der Übersichtlichkeit halber wurde dabei der dämpfende Anteil der Bettung vernachlässigt.

Auch bei diesem Modell ergab die lineare Untersuchung des Grundzustandes eine Destabilisierung durch die Grundströmungsgeschwindigkeit. Die Realteile der Eigenwerte sind symmetrisch zur horizontalen Achse, was durch die nicht vorhandene Fluidträchtigkeit zu begründen ist. Die Imaginärteile sind nicht symmetrisch, was an der stets vorhandenen inneren Dämpfung durch die Viskosität liegt. Eine zusätzliche äußere Dämpfung durch die viskoelastische Bettung wirkt stets stabilisierend. Das stimmt qualitativ mit den Ergebnissen im Bereich großer innerer Dämpfung des Modells *A* überein. Die Steifigkeitsparameter wirken auch hier stabilisierend. Bei dem Einfluss der Wellenzahl kommt es auf die Berücksichtigung der Fluidwirkung auf die Struktur an. Bei vollständiger Berücksichtigung der Normalspannung an der elastischen Wand besitzt die Funktion für kleine Wellenzahlen ein lokales Minimum von  $U_{krit}$  und die abwärtslaufenden Wellen werden instabil. Für Wellenzahlen jenseits der Polstelle gibt es kein Minimum und die aufwärtslaufenden Wellen werden instabil. Wird der Einfluss des Fluids vereinfacht und auf den Fluiddruck an der Wand reduziert, so gibt es ein Minimum von  $U_{krit}$  und die abwärtslaufenden Wellen werden instabil. Die minimale kritische Geschwindigkeit ist in diesem Fall etwas geringer. Daher ist es wichtig, die im realen Anwendungsfall auftretenden und mit dem Modell vereinbaren Wellenzahlen einzugrenzen. Ein Abgleich der kritischen Geschwindigkeit des Testfalls 4 mit den Modellrestriktionen zeigte, dass diese mit dem Modell vereinbar sind.

Das Modell ist für nichtlineare analytische Berechnungsmethoden zugänglich. Mithilfe einer Störungsrechnung mit drei Zeitskalen können zeitperiodische Lösungen mit konstanter Amplitude gefunden werden. Als kleiner Parameter dient die Abweichung  $\Delta U$  des Grundströmungsparameters vom Wert  $U_{krit}$  am Bifurkationspunkt. Mit zunehmender Entfernung von diesem Punkt kann eine Frequenzkorrektur beobachtet werden. Die Ergebnisse aus der Störungsrechnung werden durch die Harmonische-Balance-Analyse verifiziert.

Es wurde untersucht, inwiefern sub- bzw. superkritische Bifurkationen vom Verhältnis der Wellenzahl  $k$ , des Kopplungsparameters  $\alpha$  und der Steifigkeitsparametern  $\delta$  und  $\gamma$  abhängen. Die Berücksichtigung der vollständigen Fluidwirkung auf die Struktur hat ebenfalls einen Einfluss auf das nichtlineare Verhalten. Die Amplituden der vom jeweiligen Bifurkationspunkt abzweigenden Lösungen sind im vereinfachten Fall geringer. Für kleine Wellenzahlen ist die Art der Bifurkation im betrachteten Bereich identisch, für größere Wellenzahlen gibt es bei der vollständigen Berücksichtigung der Fluidwirkung einen zusätzlichen Bereich in dem subkritische Bifurkationen auftreten können. Somit eignet sich das vereinfachte Modell zur Abschätzung der minimalen kritischen Geschwindigkeit und der Art der auftretenden Bifurkationen vor allem für kleine Wellenzahlen. Darüber hinaus ist die Berücksichtigung der vollständigen Fluidwirkung sinnvoll.

Abschließend lässt sich sagen, dass die Ergebnisse der linearen Theorie dieses Modells qualitativ mit den Aussagen aus dem vorherigen Kapitel vereinbar sind. Aufgrund der sehr unterschiedlichen Modellierung gibt es jedoch quantitative Abweichungen. Eine Beurteilung dieser Abweichungen und der Modellgültigkeit erfolgt im folgenden Kapitel. Die zusätzliche nichtlineare Betrachtung ermöglicht einen tieferen Einblick und ein größeres Verständnis des betrachteten gekoppelten Systems.

Die vollständige Berücksichtigung der Viskosität ist eine Erweiterung des in Kapitel 4 untersuchten Modells *A*. Die Vernachlässigung der Fluidträchtigkeit vereinfacht die Gleichungen erheblich, stellt aber auch eine Einschränkung für die Anwendbarkeit dieses Modells dar.

## 6 Schlanker Kanal unter Berücksichtigung der Fluidträgheit

Das Modell *A* des Kanals mit Potentialströmung berücksichtigt die Viskosität des Fluids durch eine Näherung, bildet aber sonst das vollständige Problem eines ebenen Kanals ab. Aufgrund des sehr umfangreichen nichtlinearen Randwertproblems sind für analytische, nichtlineare Untersuchungen Vereinfachungen notwendig. Modell *B* ist durch die Annahme eines schlanken Kanals und einer vernachlässigbaren Fluidträgheit stark vereinfacht. Unter diesen Annahmen können die Gleichungen exakt hergeleitet werden und sind für eine nichtlineare Untersuchung zugänglich. Die Annahme des dominierenden Reibungseinflusses stellt aber eine starke Modelleinschränkung dar. Das in diesem Kapitel betrachtete Modell *C* ermöglicht die nichtlineare Untersuchung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung unter Berücksichtigung der Fluidträgheit. Hierbei wird wie beim Modell *B* ein schlanker Kanal betrachtet. Die Berücksichtigung der Reibungsverluste erfolgt über dieselbe Näherung wie beim Modell *A*. Somit stellt das Modell *C* einen Mittelweg zwischen den beiden vorherigen Modellen dar und wird in diesem Kapitel auch mit ihnen verglichen.

### 6.1 Herleitung der Gleichungen

Zur Beschreibung der ebenen, inkompressiblen Strömung werden die Kontinuitätsgleichung (3.24) und die modifizierten Navier-Stokes-Gleichungen (3.25), (3.26) für einen schlanken Kanal benötigt. Die Struktur wird durch Gleichung (3.36) beschrieben.

Dem Beispiel von Kudou et al. [63] folgend, werden die Fluidgleichungen über die Kanalhöhe gemittelt. Dadurch werden vereinfachte, an die Übergangsbedingungen angepasste Gleichungen erhalten und vorallem kann das Fluid durch nur zwei abhängige Variablen, den Druck  $\hat{p}_F$  und die gemittelte Geschwindigkeit  $\hat{U}_F$ , beschrieben werden. Durch die Berücksichtigung der Fluidträgheit ist die Integration über die Kanalhöhe jedoch nicht mehr exakt, sondern nur mit Näherungen möglich.

Die über die Höhe integrierte Kontinuitätsgleichung (5.3) lautet nach Einsetzen der Übergangsbedingungen (3.40) und (3.47) und der gemittelten Geschwindigkeit (3.29)

$$\frac{\partial \hat{q}_S}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial \left( (H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{U}_F \right)}{\partial \hat{x}}. \quad (6.1)$$

Zur Beschreibung der Strömung wird noch eine weitere Gleichung benötigt (detaillierte Herleitung im Anhang B). Dafür wird die Kontinuitätsgleichung (3.24) mit  $\hat{u}_F$  multipliziert und mit der, durch  $\hat{\rho}_F$  dividierten, Gleichung (3.25) addiert. Nach Umformungen folgt

$$\frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial (\hat{u}_F^2)}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial (\hat{u}_F \hat{v}_F)}{\partial \hat{y}} = - \frac{1}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} + \frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial^2 \hat{u}_F}{\partial \hat{y}^2}. \quad (6.2)$$

Anschließend wird diese Gleichung über die Kanalhöhe integriert. Gleichung (3.26) liefert  $\hat{p}_F = \hat{p}_F(\hat{x}, \hat{t})$ . Mit diesem Wissen und unter Verwendung der Leibniz'schen Integrationsregel folgt nach Einsetzen der Übergangsbedingungen (3.45) und (3.46)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \hat{u}_F d\hat{y} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} (\hat{u}_F)^2 d\hat{y} = \\ - \frac{(H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0)}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} + \frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F} \left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=H_0} - \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0} \right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Nach Einsetzen der gemittelten Geschwindigkeit (3.29) und den Näherungen (3.30) und (3.32) ergibt sich die zweite Fluidgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left( (H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{U}_F \right)}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \left( (H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{U}_F^2 \right)}{\partial \hat{x}} = \\ - \frac{(H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0)}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} - \frac{1}{4} \lambda_V \hat{U}_F^2, \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit dem Verlustkoeffizienten  $\lambda_V = \frac{48}{\text{Re}}$  für laminare Strömungen (siehe Kapitel 3.1.2). Der Einfluss durch die Fluidviskosität kann nach Einsetzen von  $\lambda_V$  und  $\text{Re}$  nach (3.33) und unter Verwendung von  $K_V = 12$  durch

$$\frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F} \left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=H_0} - \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0} \right) = - \frac{K_V \mu_F \hat{U}_F}{H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0} = \frac{(H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0)}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} \quad (6.5)$$

beschrieben werden. Durch Vergleich mit Gleichung (3.15) für den Druckverlust  $\hat{p}_V$  ist zu erkennen, dass die hier verwendete Näherung mit der des Modells *A* übereinstimmt. Durch Einsetzen der Mittelung  $\hat{U}_F$  der Geschwindigkeit  $\hat{u}_F$  aus Gleichung (5.2) in (6.5) kann zudem gezeigt werden, dass diese Näherung für das Modell *B* exakt erfüllt ist.

Bei dieser Modellierung werden die Geschwindigkeitsgradienten an den Rändern über den Druckverlust bei einer stationären Poiseuille-Strömung approximiert, bei der keine Strömung in  $\hat{y}$ -Richtung existiert. In diesem Modell ist somit keine Information für die Spannung  $\hat{\sigma}_{yy}$  an der elastischen Wand enthalten und daher wird in der Strukturgleichung (3.36) der Einfluss des Fluids lediglich durch  $\hat{\tau}_{yy} = -\hat{p}_F$  berücksichtigt [63].

### 6.1.1 Stationärer Zustand und Fluktuationen

In die Systemgleichungen (6.1), (6.4) und (3.36) werden durch Einsetzen von (3.48), (3.53), (3.54) die Grund- und Störgrößen eingeführt. Im stationären Zustand gilt  $\hat{q} = \hat{U} = \hat{p} = 0$ , dieser wird somit durch die Gleichungen

$$- \frac{H_0}{\hat{\rho}_F} \frac{d\hat{p}_0}{d\hat{x}} - \frac{K_V \mu_F}{H_0 \hat{\rho}_F} \hat{U}_0 = 0, \quad (6.6)$$

$$k_c \hat{q}_0 + \hat{p}_0 - p_A = 0 \quad (6.7)$$

mit der konstanten Auslenkung  $\hat{q}_0$  und der konstanten Grundströmungsgeschwindigkeit  $\hat{U}_0$  beschrieben wird. Die stationäre Strukturgleichung (6.7) entspricht Gleichung (4.3) und

aus (6.6) folgt die gleiche mittlere Grundströmungsgeschwindigkeit  $\hat{U}_0$  wie bei Modell *B* (vgl. Gleichung (5.7)). Unter Berücksichtigung dieses Grundzustandes und nach einigen Umformungen ergeben sich die Gleichungen für die Fluktuationen  $\hat{q}$ ,  $\hat{U}$  und  $\hat{p}$  in der Form

$$-\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} - (\hat{U}_0 + \hat{U}) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} + (H_0 - \hat{q}) \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} = 0, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} & - (H_0 - \hat{q}) (\hat{U}_0 + \hat{U}) \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} + (H_0 - \hat{q})^2 \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{t}} \\ & - (H_0 - \hat{q}) (\hat{U}_0 + \hat{U})^2 \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{x}} + 2 (H_0 - \hat{q})^2 (\hat{U}_0 + \hat{U}) \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$+ \frac{(H_0 - \hat{q})^2}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} - \frac{K_V \mu_F}{\hat{\rho}_F} \left[ \left( -2 \frac{\hat{q}}{H_0} + \frac{\hat{q}^2}{H_0^2} \right) \hat{U}_0 - \hat{U} \right] = 0$$

$$B \rho_S \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{t}^2} + D \frac{\partial^4 \hat{q}}{\partial \hat{x}^4} - S \frac{\partial^2 \hat{q}}{\partial \hat{x}^2} + k_c \hat{q} + k_d \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{t}} + \hat{p} = 0. \quad (6.10)$$

Bei Betrachtung eines nicht viskosen Fluids gilt  $K_V = 0$  und die zugehörigen Terme der Gleichungen (6.6) und (6.9) entfallen.

### 6.1.2 Dimensionslose Schreibweise

In diesem Abschnitt werden die dimensionsbehafteten Gleichungen der Fluktuationen um den Grundzustand in dimensionslose Gleichungen überführt.

#### Schreibweise 3

Um einen Vergleich mit Modell *B* zu ermöglichen, werden auch für das aktuell betrachtete Modell die Kanalhöhe  $H_0$ , die Fluidichte  $\hat{\rho}_F$  und die Viskosität  $\mu_F$  als Referenzgrößen verwendet. Es ergeben sich die dimensionslosen Variablen

$$x = \frac{\hat{x}}{H_0}, \quad y = \frac{\hat{y}}{H_0}, \quad q = \frac{\hat{q}}{H_0}, \quad t = \frac{\mu_F \hat{t}}{H_0^2 \hat{\rho}_F}, \quad p = \frac{\hat{\rho}_F H_0^2 \hat{p}}{\mu_F^2}, \quad U_m = \frac{H_0 \hat{\rho}_F \hat{U}}{\mu_F}$$

und Parameter

$$\begin{aligned} U_{0,3} &= \frac{\hat{U}_0 H_0 \hat{\rho}_F}{\mu_F}, \quad \alpha_3 = \frac{H_0 \hat{\rho}_F}{B \rho_S}, \quad \beta_3 = \frac{S \hat{\rho}_F^2 H_0^2}{B \rho_S \mu_F^2}, \quad \gamma_3 = \frac{k_c \hat{\rho}_F^2 H_0^4}{B \rho_S \mu_F^2}, \\ \delta_3 &= \frac{D \hat{\rho}_F^2}{B \rho_S \mu_F^2}, \quad \zeta_3 = \frac{k_d \hat{\rho}_F H_0^2}{B \rho_S \mu_F}. \end{aligned}$$

Um spätere Verwechslungen mit dem Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$  zu vermeiden, wird die dimensionslose gemittelte Geschwindigkeitsabweichung vom Grundzustand als  $U_m$  bezeichnet. Die dimensionslosen Gleichungen für Strömung und Struktur lauten

$$\dot{q} + (U_{0,3} + U_m) q' + (q - 1) U_m' = 0, \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} & (q - 1) (U_{0,3} + U_m) \dot{q} + (q - 1)^2 \dot{U}_m + (q - 1) (U_{0,3} + U_m)^2 q' \\ & + 2 (q - 1)^2 (U_{0,3} + U_m) U_m' + (q - 1)^2 p' - K_V [(q - 2) q U_{0,3} - U_m] = 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\ddot{q} + \delta_3 q'''' - \beta_3 q'' + \gamma_3 q + \zeta_3 \dot{q} + \alpha_3 p = 0 \quad (6.13)$$

mit  $\dot{(\ )} = \frac{\partial(\ )}{\partial t}$ ,  $(\ )' = \frac{\partial(\ )}{\partial x}$  und der dimensionslosen Verlustkonstanten  $K_V$ . Diese Schreibweise wird im gesamten Kapitel, bis auf Abschnitt 6.2.7, verwendet. Daher werden auch die Herleitungen beispielhaft anhand dieser Hauptschreibweise durchgeführt.

### Schreibweise 1

Um einen Vergleich mit Modell A und eine Untersuchung des Einflusses der Fluidviskosität zu ermöglichen, wird für das aktuelle Modell zusätzlich die Schreibweise 1 mit den Referenzgrößen  $H_0$ ,  $\hat{\rho}_F$  und  $a_R$  verwendet. Es ergeben sich die dimensionslosen Variablen

$$x = \frac{\hat{x}}{H_0}, \quad y = \frac{\hat{y}}{H_0}, \quad q = \frac{\hat{q}}{H_0}, \quad t = \frac{a_R \hat{t}}{H_0}, \quad p = \frac{\hat{p}}{a_R^2 \hat{\rho}_F}, \quad U_m = \frac{\hat{U}}{a_R}$$

und Parameter

$$U_{0,1} = \frac{\hat{U}_0}{a_R}, \quad \alpha_1 = \frac{H_0 \hat{\rho}_F}{B \rho_S}, \quad \beta_1 = \frac{S}{B \rho_S a_R^2}, \quad \gamma_1 = \frac{k_c H_0^2}{B \rho_S a_R^2},$$

$$\delta_1 = \frac{D}{B \rho_S a_R^2 H_0^2}, \quad \zeta_1 = \frac{k_d H_0}{B \rho_S a_R}, \quad \vartheta_1 = \frac{K_V \mu_F}{a_R H_0 \hat{\rho}_F}.$$

Die dimensionslosen Gleichungen lauten folglich

$$\dot{q} + (U_{0,1} + U_m) q' + (q - 1) U_m' = 0, \quad (6.14)$$

$$(q - 1) (U_{0,1} + U_m) \dot{q} + (q - 1)^2 \dot{U}_m + (q - 1) (U_{0,1} + U_m)^2 q' + 2(q - 1)^2 (U_{0,1} + U_m) U_m' + (q - 1)^2 p' - \vartheta_1 [(q - 2) q U_{0,1} - U_m] = 0, \quad (6.15)$$

$$\ddot{q} + \delta_1 q'''' - \beta_1 q'' + \gamma_1 q + \zeta_1 \dot{q} + \alpha_1 p = 0, \quad (6.16)$$

mit  $\dot{(\ )} = \frac{\partial(\ )}{\partial t}$  und  $(\ )' = \frac{\partial(\ )}{\partial x}$ . Diese Schreibweise wird in diesem Kapitel einmalig für den linearen Vergleich mit Modell A in Abschnitt 6.2.7 verwendet. Die zugehörige Dispersionsgleichung wird in Abschnitt 6.2.1 angegeben.

Durch die geänderten Bezugslängen sind die Werte der einzelnen Parameter unterschiedlich im Vergleich zu Schreibweise 3. Die Systemgleichungen (6.11)-(6.13) bzw. (6.14)-(6.16) sind jedoch bis auf den Parameter  $\vartheta_1$  anstelle der Konstanten  $K_V$  identisch. Somit können die im Folgenden ermittelten Gleichungen auch auf die Schreibweise 1 übertragen werden.

## 6.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Die bezüglich des stationären Grundzustandes ( $q = 0$ ,  $p = 0$ ,  $U_m = 0$ ) linearisierten und dimensionslosen Gleichungen für die Fluktuationen lauten

$$\dot{\bar{q}} + U_{0,3} \bar{q}' - \bar{U}_m' = 0, \quad (6.17)$$

$$-U_{0,3} \dot{\bar{q}} + \dot{\bar{U}}_m - U_{0,3}^2 \bar{q}' + 2U_{0,3} \bar{U}_m' + \bar{p}' + K_V (2\bar{q} U_{0,3} + \bar{U}_m) = 0, \quad (6.18)$$

$$\ddot{\bar{q}} + \delta_3 \bar{q}'''' - \beta_3 \bar{q}'' + \gamma_3 \bar{q} + \zeta_3 \dot{\bar{q}} + \alpha_3 \bar{p} = 0. \quad (6.19)$$

Aus Gleichung (6.17) kann

$$\bar{U}_m' = \dot{\bar{q}} + U_{0,3}\bar{q}' \quad (6.20)$$

bestimmt werden. Damit wird nach Differentiation der Gleichung (6.18) bezüglich  $x$  die Geschwindigkeit  $\bar{U}_m$  aus den Gleichungen eliminiert:

$$\underbrace{\ddot{\bar{q}} + 2U_{0,3}\dot{\bar{q}}' + U_{0,3}^2\bar{q}''}_{(*)} + \bar{p}'' + K_V (\dot{\bar{q}} + 3U_{0,3}\bar{q}') = 0, \quad (6.21)$$

$$\ddot{\bar{q}} + \delta_3\bar{q}'''' - \beta_3\bar{q}'' + \gamma_3\bar{q}' + \zeta_3\dot{\bar{q}} + \alpha_3\bar{p} = 0. \quad (6.22)$$

Die mit (\*) markierten Terme stammen ursprünglich aus den Trägheitstermen der gemittelten Fluid-Gleichung (6.2) und stellen somit den Unterschied zum Modell ohne Fluidträgheit dar.

### 6.2.1 Dispersionsgleichung

Zunächst wird Gleichung (6.21) nach dem Druck aufgelöst und dieser in (6.22) ersetzt. Für die verbleibende abhängige Variable wird der Wellenansatz  $\bar{q}(x, t) = \bar{Q} e^{ikx+i\omega t}$  verwendet, woraus folgende Dispersionsgleichung

$$\begin{aligned} \omega^2 (k^2 + \alpha_3) - i\omega (K_V\alpha_3 + \zeta_3k^2 + i2\alpha_3kU_{0,3}) \\ - k \left( \underbrace{\delta_3k^5 + \beta_3k^3 + \gamma_3k}_{kK_S} + i3K_V\alpha_3U_{0,3} - k\alpha_3U_{0,3}^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

folgt. Aus der Dispersionsgleichung können die Eigenkreisfrequenzen für eine bestimmte Wellenzahl  $k$  analytisch bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} = \frac{i}{k^2 + \alpha_3} \left( K_\omega \pm \sqrt{K_\omega^2 - k(k^2 + \alpha_3)(kK_S + i3K_V\alpha_3U_{0,3} - k\alpha_3U_{0,3}^2)} \right) \quad (6.24) \\ \text{mit } K_\omega = \frac{K_V\alpha_3}{2} + \frac{\zeta_3k^2}{2} + i\alpha_3kU_{0,3}. \end{aligned}$$

In der Schreibweise 1 lautet die Dispersionsgleichung

$$\begin{aligned} \omega^2 (k^2 + \alpha_1) - i\omega (\alpha_1\vartheta_1 + \zeta_1k^2 + i2\alpha_1kU_{0,1}) \\ - k \left( \underbrace{\delta_1k^5 + \beta_1k^3 + \gamma_1k}_{kK_S} + i3\alpha_1\vartheta_1U_{0,1} - k\alpha_1U_{0,1}^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

### 6.2.2 Grundsätzliches zur Auswertung

Der stationäre Grundzustand wird nach der linearen Theorie für  $\Im\{\omega\} < 0$  instabil (siehe Abschnitt 2.4). Im Folgenden wird der Verlauf der Eigenkreisfrequenzen  $\omega$  und die kritische Geschwindigkeit für verschiedene Parameter untersucht und mit den Ergebnissen der anderen zwei Modelle verglichen.

Soweit nicht explizit andere Werte genannt werden, liegen den Ergebnissen in diesem Kapitel folgende Parameter und Konstanten zugrunde:

$$\alpha_3 = 2, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 1000, \delta_3 = 1200, \zeta_3 = 0, U_{0,3} = 0, K_V = 12.$$

Hierbei handelt es sich um Werte, die zwischen denen des Testfalles 1 mit großem Trägheitseinfluss und denen des Testfalles 4 mit großem Reibungseinfluss liegen. Soweit nicht anders gekennzeichnet, werden Wellen mit der dimensionslosen Wellenzahl  $k = 0.6$  untersucht. Anhand der genannten Werte werden die qualitativen Verläufe der Eigenwerte diskutiert.

Da der Einfluss der Steifigkeits- bzw. Vorspannungsparameter auf die Stabilität mit dem bei den anderen Modellen übereinstimmt (siehe Abschnitte 4.2.5 und 5.2.4), wird hier auf eine erneute Diskussion verzichtet. Sowohl aus der Dispersionsgleichung als auch aus Gleichung (6.24) geht der Einfluss eindeutig hervor. Die Parameter  $\beta_3$ ,  $\gamma_3$  und  $\delta_3$  erhöhen die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  und wirken somit stabilisierend.

### 6.2.3 Grundströmungsgeschwindigkeit

Es wurde bereits gezeigt, dass der stationäre Grundzustand ab einem bestimmten kritischen Wert  $U_{krit}$  des Grundströmungsparameters  $U_{0,3}$  instabil wird. Das gilt auch beim Modell  $C$  und die kritische Geschwindigkeit lautet im Falle eines viskosen Fluids

$$U_{krit} = \frac{\sqrt{K_S}}{\sqrt{\alpha_3}} \frac{K_V \alpha_3 + \zeta_3 k^2}{\sqrt{(\zeta_3 k^2 - 2K_V \alpha_3)^2 + 9K_V^2 \alpha_3 k^2}}, \quad (6.26)$$

für  $k > 0$  und  $\alpha_3 > 0$ . In schlanken Kanälen ist eine Vernachlässigung der Viskosität zwar

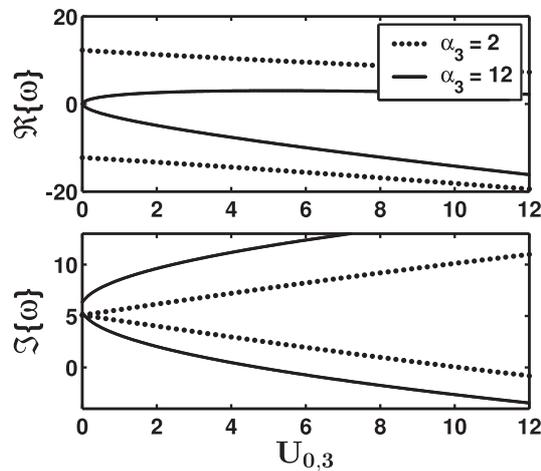


Abbildung 6.1: Eigenkreisfrequenzen über Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$

nicht empfehlenswert (siehe z. B. [96] und Kapitel 4), nichtsdestotrotz ist mit diesem Modell auch die Betrachtung eines nicht viskosen Fluids möglich. Die kritische Geschwindigkeit ergibt sich dann zu

$$U_{krit} = \sqrt{K_S \left( \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{k^2} \right)}. \quad (6.27)$$

In Abbildung 6.1 ist der Verlauf der Eigenkreisfrequenzen für zwei verschiedene Werte von  $\alpha_3$  dargestellt. Aufgrund der vorhandenen Fluidträgheit ist der Verlauf der Realteile nun nicht mehr symmetrisch zur horizontalen Achse. Das stimmt mit den Ergebnissen des Modells mit Potentialströmung überein (vgl. Abb. 4.14b). In beiden Modellen wird der Einfluss der Fluidträgheit und -viskosität berücksichtigt. Insbesondere für den kleineren Wert von  $\alpha_3$  stimmen die Verläufe qualitativ sehr gut mit denen aus Abbildung 4.14b, welche ebenfalls unter Verwendung eines kleinen Kopplungsparameters entstanden, überein.

### 6.2.4 Wellenzahl

In dem gekoppelten System können Wellen mit verschiedenen Wellenlängen auftreten. Dabei hat die Wellenzahl  $k$  einen großen Einfluss auf die Eigenwerte des Systems und somit auch auf die kritische Geschwindigkeit. Diese wird durch Gleichung (6.26) beschrieben und es ist ersichtlich, dass es für  $k$  keine Null- oder Polstellen gibt. Das liegt daran, dass auch bei dem aktuell betrachteten Modell die Wirkung des Fluids in der Strukturgleichung (6.19) nur durch den Druck berücksichtigt ist. Ein Verlauf der kritischen Geschwindigkeit für verschiedene Werte von  $k$  ist in Abbildung 6.2a dargestellt. Bei den betrachteten Werten kann wieder eine minimale kritische Geschwindigkeit ausgemacht werden.

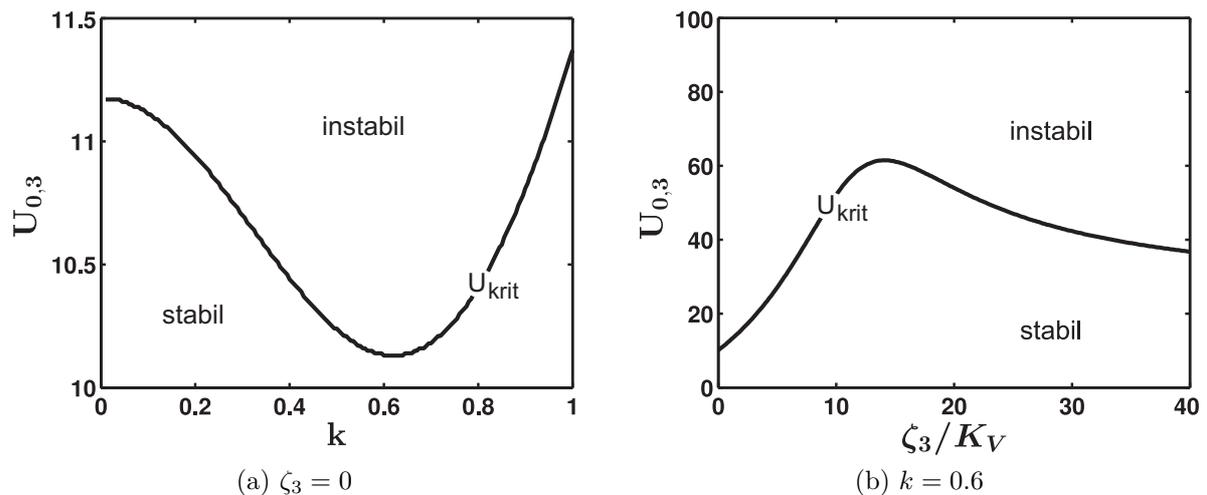


Abbildung 6.2: Einfluss der Wellenzahl  $k$ , des Dämpfungsparameter  $\zeta_3$  und der Viskositätskonstanten  $K_V$  auf die kritische Geschwindigkeit

### 6.2.5 Dämpfungsparameter

Im betrachteten System kann zwischen innerer Dämpfung aufgrund der Fluidviskosität und äußerer Dämpfung durch die viskoelastische Bettung unterschieden werden. In den Abschnitten 4.2.7 und 5.2.6 wurde bereits gezeigt, dass das Verhältnis von äußerer zu innerer Dämpfung für das Stabilitätsverhalten entscheidend ist. Sowohl das aktuell betrachtete Modell  $C$  als auch das Modell  $B$  enthalten innere Dämpfung. Bei Letzterem wirkt eine zusätzliche äußere Dämpfung stets stabilisierend. In Abbildung 6.2b ist der Verlauf

von  $U_{krit}$  über dem Verhältnis von äußerem Dämpfungsparameter  $\zeta_3$  und der Viskositätskonstanten  $K_V$  für Modell  $C$  dargestellt. Hier gibt es, wie bereits zuvor im Modell  $A$  (siehe Abb. 4.15), ein Maximum. Die zusätzliche äußere Dämpfung wirkt zunächst stabilisierend und ab einem bestimmten Wert von  $\zeta_3$  destabilisierend. Eine Vernachlässigung der äußeren Dämpfung  $\zeta_3 = 0$  ergibt die kleinste kritische Geschwindigkeit und stellt somit eine konservative Abschätzung der minimalen kritischen Geschwindigkeit dar.

## 6.2.6 Vergleich mit dem Modell ohne Fluidträchtigkeit

In Abbildung 6.1 wird gezeigt, dass durch die Berücksichtigung der Fluidträchtigkeit die Symmetrie der Eigenwertverläufe bezüglich der horizontalen Achse wieder aufgebrochen wird. Des Weiteren zeigt der Vergleich der Dispersionsgleichungen (6.23) und (5.19), dass diese für  $\alpha_3 = 0$  identisch sind. Allerdings gibt es in diesem Fall keine Kopplung zwischen Fluid und Struktur und somit keine Instabilität. Für sehr kleine Werte von  $\alpha_3$  sind die Dispersionsgleichungen und somit die Eigenwerte sehr ähnlich, was an dem verschwindend kleinen Einfluss des Fluids gegenüber dem der Struktur liegt. Da sich die Modelle lediglich in der Modellierung des Fluids unterscheiden, ist die Übereinstimmung bei einem dominierenden Einfluss durch die Struktur zwingend. Es handelt sich jedoch nicht um ein geeignetes Kriterium zur Beurteilung der Modelle.

Aufschlussreicher ist der Vergleich der linearen Gleichungen (5.17), (5.18) des Modells  $B$  mit den Gleichungen (6.21), (6.22) des aktuellen Modells. Die Strukturgleichungen sind identisch, die Gleichungen zu Beschreibung des Fluids und der Übergangsbedingungen unterscheiden sich durch die drei mit (\*) markierten Terme in Gleichung (6.21). Da es sich bei dem Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$  um die Reynoldszahl des Grundzustandes handelt (siehe Abschnitt 6.1.2) und von kleinen Geschwindigkeitsfluktuationen ausgegangen wird, entspricht  $U_{0,3} \rightarrow 0$  einer verschwindenden Fluidträchtigkeit. Nach Einsetzen dieses Grenzfalles in die linearen Fluidgleichungen, verschwindet der (\*)-Term nicht vollständig. Die Gleichungen unterscheiden sich bei Vernachlässigung der Fluidträchtigkeit durch den zusätzlichen Term  $\ddot{q}$  beim Modell  $C$ . Es wird deutlich, dass es einen Unterschied macht, ob die Trächtigkeit des Fluids noch vor Berücksichtigung der Kopplung vernachlässigt wird oder erst hinterher. Gleichung (6.20) zeigt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitsfluktuation und der Auslenkung der Struktur. Eine Geschwindigkeitsänderung von Struktur oder Fluid bewirkt auch eine Veränderung des jeweils Anderen und somit kann es auch bei einer schleichenden Strömung zur Beschleunigung  $\ddot{q}$  der Struktur kommen. Nur wenn diese ebenfalls klein ist, stimmen die zwei Modelle für diesen Grenzfall überein.

Somit wird bei direkter Verwendung der Schleichströmung eine mögliche Beschleunigung der Struktur fälschlicherweise vernachlässigt. Die gängige Vorgehensweise aus dem Bereich der Gleitlagertheorie ist daher nicht ohne Weiteres auf durchströmte Kanäle übertragbar. In Tabelle 6.1 sind die kritischen Geschwindigkeiten für den Testfall 4 dargestellt. Dabei wird die Wellenzahl  $k_{min} = 0.05$  der minimalen kritischen Geschwindigkeit und die Wellenzahl  $k = 0.45$  aus Tabelle 4.2 verwendet. Die Ergebnisse weichen deutlich von denen des Modells ohne Fluidträchtigkeit ab. Offensichtlich ist bei diesem Testfall die Beschleunigung der Struktur nicht vernachlässigbar.

|             |       | Testfall 4 |       |
|-------------|-------|------------|-------|
| $k$         | [-]   | 0.05       | 0.45  |
| $U_{krit}$  | [-]   | 0.663      | 0.891 |
| $\hat{U}_0$ | [m/s] | 0.012      | 0.016 |
| Re          | [-]   | 0.663      | 0.891 |

Tabelle 6.1: Werte des Testfalles 4 am kritischen Punkt in Schreibweise 3

Um einen weiteren Einblick zu bekommen, wird im Folgenden die von  $\mu_F$  unabhängige Schreibweise 1 verwendet. Es gilt  $\alpha_1 = \alpha_3$  und die Dispersionsgleichung (5.21) des Modells  $B$  ergibt in diesem Fall die Formel

$$U_{krit,B} = \frac{\sqrt{K_S}(\vartheta_1\alpha_1 + \zeta_1 k^2)}{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{9\vartheta_1^2\alpha_1 k^2}}. \quad (6.28)$$

Für das Modell  $C$  liefert die Dispersionsgleichung (6.25) dagegen

$$U_{krit,C} = \frac{\sqrt{K_S}(\vartheta_1\alpha_1 + \zeta_1 k^2)}{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{(\zeta_1 k^2 - 2\vartheta_1\alpha_1)^2 + 9\vartheta_1^2\alpha_1 k^2}}. \quad (6.29)$$

Der direkte Vergleich ergibt, dass die kritischen Geschwindigkeiten für  $\zeta_1 k^2 - 2\vartheta_1\alpha_1 = 0$  gleich sind. Da die Berechnungsvorschriften der kritischen Geschwindigkeiten nicht für  $\zeta_1 = 0$  und gleichzeitig  $\vartheta_1 = 0$  gelten, kann in diesem Fall die Forderung nicht erfüllt werden. Außerdem ist die Forderung bei einem bestimmten System mit festen Werten von  $\zeta_1$ ,  $\vartheta_1$  und  $\alpha_1$  nur für eine Wellenzahl  $k$  erfüllbar, wenn Sie überhaupt erfüllt werden kann. Grundsätzlich lässt sich jedoch sagen, dass der Unterschied zwischen den kritischen Geschwindigkeiten für

$$\zeta_1 k^2 - 2\vartheta_1\alpha_1 \rightarrow 0 \quad (6.30)$$

minimal ist. Eine wichtige Größe beim Vergleich der Modelle ist die Reynoldszahl

$$\text{Re} = \frac{\hat{U}_0 H_0 \hat{\rho}_F}{\mu_F} = \frac{U_{0,1} K_V}{\vartheta_1}. \quad (6.31)$$

Hierbei sind die dimensionsbehafteten Größen  $\hat{U}_0$  und  $\mu_F$  durch die dimensionslosen Parameter und ihre Bezugsgrößen ersetzt. Da es um die Untersuchung der Instabilitäten geht, ist es sinnvoll, in der Reynoldszahl die kritische Geschwindigkeit  $U_{0,1} = U_{krit}$  zu verwenden. Diese hängt wiederum von  $\zeta_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\vartheta_1$  und  $k$  ab und daher hängt auch die Übereinstimmung der Modelle von diesen Größen ab. Durch Anpassung der Systemparameter an die Forderung (6.30) werden die kritischen Geschwindigkeiten und somit auch die Reynoldszahlen (6.31) der beiden Modelle angeglichen. Das Angleichen der Reynoldszahlen geschieht jedoch völlig unabhängig von den Modellrestriktionen.

In Abbildung 6.3 sind zur Verdeutlichung die Verläufe der kritischen Geschwindigkeiten der beiden Modelle über dem Dämpfungsverhältnis für den Testfall 4 und  $k = 1$  aufgetragen. Für  $\zeta_1 k^2 - 2\vartheta_1 \alpha_1 = 0$  berühren sich die beiden Kurven. Das Modell  $B$  ist nur für Fluide mit großer innerer Dämpfung  $\vartheta_1$  erfüllt (siehe Abschnitt 5.2.7) und somit eher für kleine Werte von  $\zeta_1/\vartheta_1$ . Eine Erhöhung des Dämpfungsverhältnisses bewirkt zunächst eine Annäherung der Kurven. Es gilt aber stets zu überprüfen, ob die Modellrestriktionen in der Nähe des Berührungspunktes erfüllt werden können. Für den dargestellten Testfall 4 ergibt sich am Berührungspunkt mit  $\zeta_1/\vartheta_1 = 37.8$  unter Annahme der ursprünglichen Viskosität die Reynoldszahl  $Re = 27.1$ . Dieser Wert ist zwar selbst nach Multiplikation mit dem Längenverhältnis nicht mit den Modellrestriktionen vereinbar (vgl. Abschnitt 5.2.7), die Abweichungen sind jedoch gering. Allerdings bedeutet das hohe Dämpfungsverhältnis unter den Annahmen eine große äußere Dämpfung. Für diesen konkreten Fall ist die Vereinbarkeit mit den Modellrestriktionen und realistischen Parameterwerten schwierig, grundsätzlich sind aber vergleichbare kritische Geschwindigkeiten der beiden Modelle denkbar.

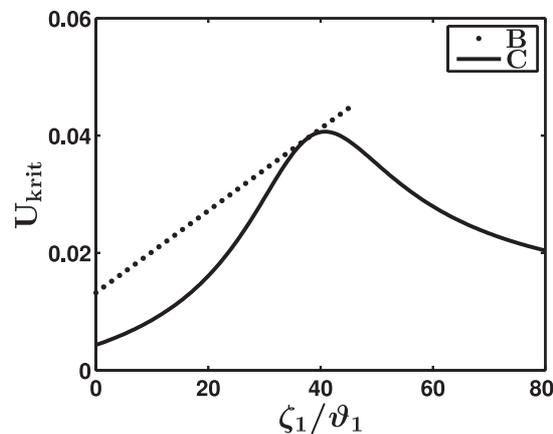


Abbildung 6.3: Einfluss der Dämpfungsparameter auf die kritischen Geschwindigkeiten der Modelle  $B$  und  $C$

### 6.2.7 Vergleich mit dem Modell mit Potentialströmung

In Abbildung 6.1 wird gezeigt, dass die Verläufe der Eigenwerte über dem Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$  gerade für kleine Kopplungsparameter qualitativ sehr gut mit denen des Modells  $A$  mit Potentialströmung übereinstimmen. Auch das Verhältnis der Dämpfungsparameter wirkt sich in gleicher Weise auf die kritische Geschwindigkeit aus (vgl. Abb. 6.2b). Ein Vergleich von  $\hat{U}_0$  und  $Re$  des Testfalles 4 aus Tabelle 6.1 mit denen des Modells  $A$  aus Tabelle 4.2 zeigt für  $k = 0.45$  ebenfalls recht gute Übereinstimmungen. Das liegt daran, dass in beiden Modellen sowohl die Fluidträchtigkeit als auch die Fluidreibung berücksichtigt wird. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch in der Annahme eines schlanken Kanals und der damit verbundenen Vereinfachungen der Gleichungen.

Für den Vergleich wird die dimensionslose Schreibweise 1 verwendet und der Fall der inkompressiblen Potentialströmung betrachtet. Anhand der beiden Dispersionsgleichungen (4.29) und (6.25) ist zu erkennen, dass die Gleichungen für  $k \coth(k) = 1$  exakt überein-

|             |       | Testfall 1 | Testfall 2 | Testfall 3 |
|-------------|-------|------------|------------|------------|
| $k$         | [–]   | 0.16       | 0.18       | 1.6        |
| $U_{krit}$  | [–]   | 0.052      | 0.039      | 0.004      |
| $\hat{U}_0$ | [m/s] | 0.605      | 0.455      | 1.400      |
| Re          | [–]   | 3018.038   | 635.401    | 461.669    |

Tabelle 6.2: Werte der Testfälle 1 - 3 mit  $\vartheta_1 \neq 0$ 

stimmen. Die Funktion  $f(k) = k \coth(k)$  ist für positive Wellenzahlen monoton steigend, für  $k = 0.55$  gilt bereits  $f(0.55) = 1.1$ . Aufgrund des Zusammenhangs  $k\lambda = 2\pi$  stimmen die zwei Dispersionsgleichungen somit für kleine Wellenzahlen und große Wellenlängen überein. In diesem Fall ist die Annahme des schlanken Kanals gerechtfertigt.

In Tabelle 6.2 sind als Vergleich die Werte der ersten drei Testfälle für die Wellenzahlen aus Tabelle 4.2 gelistet. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Werte für kleinere Wellenzahlen besser mit denen des Modells mit Potentialströmung übereinstimmen.

## 6.3 Nichtlineare Stabilitätsanalyse

In Abschnitt 2.5 wurden Grundlagen zur nichtlinearen Stabilitätsanalyse erläutert und in Abschnitt 5.3 wurde die Anwendung der nichtlinearen Näherungsverfahren am Beispiel des Modells  $B$  verdeutlicht.

Im Folgenden werden zunächst die nichtlinearen Berechnungen am aktuellen Modell  $C$  vorgestellt und anschließend untersucht, unter welchen Bedingungen sich periodische Lösungen einstellen und von welchem Typ die Bifurkationen sind.

Auch bei diesem Modell kann gezeigt werden, dass das System eine strukturelle Instabilität aufweist. Dabei ist  $U_{0,3}$  der Bifurkationsparameter und der Bifurkationspunkt liegt im kritischen Punkt bei  $U_{0,3} = U_{krit}$ . Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Codimension entspricht der in Abschnitt 5.3 und ergibt auch beim Modell  $C$  die Codimension 1 für die Bifurkation vom stationären Zustand.

Um die nichtlinearen Bewegungsgleichungen (6.11), (6.12) und (6.13) dieses Modells zu untersuchen, wird die *Multiple-Scales*-Methode verwendet und die Ergebnisse anhand einer Harmonischen-Balance-Analyse verifiziert.

### 6.3.1 Multiple-Scales-Methode

Die Vorgehensweise entspricht der aus Abschnitt 5.3.1 und ist daher kurz gefasst. Eine kleine Abweichung des Bifurkationsparameters

$$U_{0,3} = U_{krit} + \Delta U = U_{krit} + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \dots \quad (6.32)$$

vom Wert  $U_{krit}$  am Bifurkationspunkt bewirkt auch kleine Abweichungen

$$q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots, \quad (6.33)$$

$$p = \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots, \quad (6.34)$$

$$U_m = \varepsilon U_{m,1} + \varepsilon^2 U_{m,2} + \dots \quad (6.35)$$

der Auslenkungen, des Druckes und der gemittelten Geschwindigkeit vom Grundzustand. Hierbei stellt  $\varepsilon$  einen kleinen Parameter dar, welcher auch hier der Geschwindigkeitsabweichung  $\varepsilon = \sqrt{\Delta \bar{U}}$  entspricht. Dies stellt einen Vorgriff dar, da erst im Laufe der Berechnung gezeigt wird, dass die Voraussetzung  $U_1 = 0$  auch hier erfüllt ist (siehe auch Kapitel 5.3.1). Die Zeitskalen sind gemäß

$$\tau = \omega_{krit} t, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t \quad (6.36)$$

gewählt. Diese Ansätze und Zeitskalen werden in die drei nichtlinearen Gleichungen (6.11), (6.12) und (6.13) eingesetzt, um diese anschließend nach den Ordnungen von  $\varepsilon$  zu sortieren.

Die Gleichungen der ersten Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$  entsprechen exakt den linearisierten Gleichungen (6.17), (6.18) und (6.19). Wie bei der Herleitung der Dispersiongleichung wird zunächst die Geschwindigkeitsableitung  $\frac{\partial U_{m,1}}{\partial x}$  und der Druck  $p_1$  eliminiert. Es ergibt sich die lineare, partielle Differentialgleichung für  $q_1$

$$\begin{aligned} \omega_{krit}^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} + U_{krit}^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + 2U_{krit} \omega_{krit} \frac{\partial^2 q_1}{\partial x \partial \tau} + K_V \left( 3U_{krit} \frac{\partial q_1}{\partial x} + \omega_{krit} \frac{\partial q_1}{\partial \tau} \right) \\ - \frac{1}{\alpha_3} \left( \delta_3 \frac{\partial^6 q_1}{\partial x^6} - \beta_3 \frac{\partial^4 q_1}{\partial x^4} + \gamma_3 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \omega_{krit}^2 \frac{\partial^4 q_1}{\partial x^2 \partial \tau^2} + \zeta_3 \omega_{krit} \frac{\partial^3 q_1}{\partial x^2 \partial \tau} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6.37)$$

welche im Folgenden durch

$$L(q_1) = 0 \quad (6.38)$$

abgekürzt wird. Da für das rekursive Gleichungssystem reelle Lösungen benötigt werden, wird wieder der Ansatz

$$q_1(x, \tau, T_1, T_2) = Q_1(T_1, T_2) \cos(kx + \tau + \varphi(T_1, T_2)) \quad (6.39)$$

verwendet und in (6.38) eingesetzt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Abhängigkeit von  $k, \tau, T_1, T_2$  nur dann explizit angegeben, wenn die Information zum Verständnis beiträgt. Nach Einsetzen des Ansatzes ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  (siehe Gleichung (6.26)) und die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_{krit} = -\frac{3K_V \alpha_3 k}{K_V \alpha_3 + \zeta_3 k^2} U_{krit}. \quad (6.40)$$

Dadurch wird der Bifurkationspunkt definiert.

Für das Problem zweiter Ordnung wird die Geschwindigkeit  $U_{m,1}$  benötigt, von der zunächst nur die Ortsableitung als Funktion von  $q_1$  bekannt ist. Nach Integration über  $x$

und Bestimmung der Integrationskonstanten  $K_1(\tau, T_1, T_2)$  durch Anpassung an die weitere Fluidgleichung erster Ordnung wird  $U_{m,1}$  erhalten. Anschließend werden die Lösungen  $q_1$ ,  $U_{m,1}$  und  $p_1$  als Funktionen der noch zu bestimmenden Größen  $Q_1$  und  $\varphi$  in die Gleichungen der höheren Ordnung eingesetzt.

Die Gleichung der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$  lässt sich nach Eliminierung von  $\frac{\partial U_{m,2}}{\partial x}$  und  $p_2$  und einigen trigonometrischen Umformungen in der Form

$$L(q_2) = f_{sc,2} \cos(kx + \tau + \varphi) + f_{ss,2} \sin(kx + \tau + \varphi) + f_{c,2} \cos(2(kx + \tau + \varphi)) + f_{s,2} \sin(2(kx + \tau + \varphi)) \quad (6.41)$$

darstellen. Die Inhomogenitäten besitzen die Amplituden

$$f_{sc,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} Q_1 2(U_{krit} \alpha_3 k + \omega_{krit}(\alpha_3 + k^2)) + U_1 Q_1 2\alpha_3 k (U_{krit} k + \omega_{krit}), \quad (6.42)$$

$$f_{ss,2} = \frac{\partial \varphi}{\partial T_1} Q_1 (K_V \alpha_3 + \zeta_3 k^2) + U_1 Q_1 3K_V \alpha_3 k \quad (6.43)$$

und  $f_{c,2}$ ,  $f_{s,2}$ . Die Amplituden der Anregungsterme höherer Ordnung bestehen aus unübersichtlich langen Termen, weshalb auf eine Darstellung verzichtet wurde. Die homogene Differentialgleichung  $L(q_2) = 0$  entspricht (6.38) der ersten Ordnung. Die Terme mit den Amplituden  $f_{sc,2}$  und  $f_{ss,2}$  stellen somit eine Resonanzanregung dar. Für periodische Lösungen mit konstanter Amplitude  $Q_1$  ergibt sich die Forderung nach verschwindenden Säkulartermen:

$$f_{sc,2} \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.44)$$

$$f_{ss,2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.45)$$

Nichttriviale Lösungen  $Q_1$  sind mit  $k > 0$ ,  $K_V > 0$  nur für  $\varphi = \varphi(T_2)$  und  $U_1 = 0$  möglich. Aufgrund Letzterem kann auch in diesem Modell der kleine Parameter  $\varepsilon$  über die Geschwindigkeitsdifferenz  $U_{0,3} - U_{krit}$  bestimmt werden (siehe Kapitel 5.3.1).

Nach Unterdrückung der Säkularterme kann schließlich die nicht aufklingende partikuläre Lösung  $q_{2,p}$  über einen Ansatz vom Typ der rechten Seite bestimmt werden. Da  $q_{2,h}$  exakt der Lösung der ersten Ordnung entspricht, wird sie in der Gesamtlösung bereits berücksichtigt und kann hier zu null gesetzt werden. Diese Lösung  $q_2 = q_{2,p}$  hängt von der Amplitude  $Q_1$ , der Wellenzahl  $k$  und den anderen Parametern  $P = (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \zeta_3)$  ab. Die Ausdrücke wurden mithilfe der Software MAPLE berechnet und sind sehr lang. Daher wird hier und auch in den folgenden Schritten aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine explizite Angabe dieser Terme verzichtet. Mithilfe der nun bekannten Lösung  $q_2$  kann anschließend der Druck  $p_2$  und nach Integration über  $x$  und Bestimmung der Integrationskonstanten  $K_2 = K_2(\tau, T_1, T_2)$  schließlich auch die gemittelte Geschwindigkeit  $U_{m,2}$  der zweiten Ordnung bestimmt werden.

Zur Untersuchung der Ordnung  $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$  werden alle bisher bestimmten Lösungen  $q_1$ ,  $p_1$ ,  $U_{m,1}$ ,  $q_2$ ,  $p_2$ ,  $U_{m,2}$  eingesetzt. Es folgt die Eliminierung von  $U_{m,3}$  und  $p_3$  und einige Umformungen, um schließlich die Gleichung der Form

$$L(q_3) = f_{sc,3} \cos(kx + \tau + \varphi) + f_{ss,3} \sin(kx + \tau + \varphi) + f_{c,3} \cos(3(kx + \tau + \varphi)) + f_{s,3} \sin(3(kx + \tau + \varphi)), \quad (6.46)$$

mit den Amplituden  $f_{sc,3}$ ,  $f_{ss,3}$ ,  $f_{c,3}$  und  $f_{s,3}$  zu erhalten. Auch hier ist die linke Seite  $L(q_3)$  identisch mit denen der anderen Ordnungen und daher besitzt die Differentialgleichung zwei Resonanzanregungsterme mit den Amplituden

$$f_{sc,3} = Q_1 \left[ \frac{d\varphi}{dT_2} f_{c1}(k, P) + Q_1^2 f_{c2}(k, P) + U_2 f_{c3}(k, P) \right], \quad (6.47)$$

$$f_{ss,3} = Q_1 \left[ \frac{d\varphi}{dT_2} f_{s1}(k, P) + Q_1^2 f_{s2}(k, P) + U_2 f_{s3}(k, P) \right]. \quad (6.48)$$

Hierbei stellen  $f_{c1}$ - $f_{c3}$  und  $f_{s1}$ - $f_{s3}$  zeitunabhängige Terme dar, welche von der Wellenzahl  $k$  und den Parametern  $P$  abhängen. Aus der Forderung nach periodischen Lösungen mit konstanter Amplitude  $Q_1$  folgt

$$f_{sc,3} \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.49)$$

$$f_{ss,3} \stackrel{!}{=} 0. \quad (6.50)$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystem wurden mit MAPLE berechnet und lauten

$$Q_1 = \sqrt{U_2 f_{Q1}(k, P)}, \quad (6.51)$$

$$\varphi(T_2) = f_\varphi(k, P) U_2 T_2, \quad (6.52)$$

mit den konstanten, von  $k$  und  $P$  abhängigen, Ausdrücken  $f_{Q1}$  und  $f_\varphi$ . Mit diesen Lösungen folgt nach Einsetzen der Zeitskalen und der Festlegung von  $\varepsilon$  über die Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta U$  das Ergebnis

$$U_{0,3} = U_{krit} + \Delta U, \quad (6.53)$$

$$q(x, t) \approx \sqrt{\Delta U f_{Q1}(k, P)} \cos \left( kx + [\omega_{krit} + \Delta U f_\varphi(k, P)] t \right). \quad (6.54)$$

Die Struktur der Lösung entspricht der des Modells ohne Fluidträgheit. Die Amplitude der Strukturauslenkung nimmt mit zunehmender Geschwindigkeitsdifferenz  $\Delta U$  zu und dabei wird gleichzeitig die Schwingungsfrequenz angepasst.

Auch hier ergibt sich ein langer, unübersichtlicher Term für  $f_{Q1}$ , welcher aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt wird. Bei Annahme einer elastischen Bettung ( $\zeta_3 = 0$ ) ergibt sich für ein viskoses Fluid mit  $K_V \neq 0$  und nach Einsetzen von  $U_{krit}$  und  $\omega_{krit}$  der stark vereinfachte Ausdruck

$$f_{Q1} = \frac{8k^4 \sqrt{(9k^2 + 4\alpha_3)(9k^2 + 4\alpha_3)} K_3}{3\sqrt{K_S} K_4} \quad (6.55)$$

mit den Konstanten

$$K_3 = 4k^2 \delta_3 (9k^2 + 5\alpha_3) - 9\gamma_3 + 4\alpha_3 \beta_3, \quad (6.56)$$

$$K_4 = 4\delta_3 k^6 (108k^4 + 141\alpha_3 k^2 + 44\alpha_3^2) + 12\beta_3 k^4 \alpha_3 (7k^2 + 4\alpha_3) - 4\gamma_3 k^2 (27k^4 + 9\alpha_3 k^2 + 4\alpha_3^2) + K_V^2 \alpha_3^2 (9k^2 + 4\alpha_3). \quad (6.57)$$

Hierbei ist der Quotient  $K_5 = \frac{K_3}{K_4}$  entscheidend für die Art der Bifurkation. Für reelle Amplituden  $Q_1 = \sqrt{\Delta U f_{Q_1}}$  ist die Bifurkation nur dann superkritisch, wenn  $f_{Q_1} > 0$  gilt. Da die Parameter und die Steifigkeitskonstante  $K_S$  stets positiv sind, kommt es nur für positive Quotienten zu superkritischen Bifurkationen.

Auch für den Fall ohne innere und äußere Dämpfung kann  $f_{Q_1}$  aufgestellt werden. Allerdings ist bereits gezeigt worden, dass bei einem schlanken Kanal die Viskosität nicht vernachlässigt werden sollte. Daher wird dieser Fall hier nicht mehr diskutiert.

### 6.3.2 Methode der Harmonischen Balance

Die Theorie zur Anwendung der Harmonischen Balance Methode wurde in Abschnitt 2.5.2 und die konkrete Anwendung auf ein System von partiellen Differentialgleichungen in Abschnitt 5.3.2 erläutert.

Die zu lösenden nichtlinearen Gleichungen (6.11), (6.12) und (6.13) können durch Auflösen von (6.13) nach  $p$  und Einsetzen in (6.12) in ein System von zwei Gleichungen für die abhängigen Variablen  $q$  und  $U_m$  überführt werden. Für diese beiden Größen werden folgende Lösungsansätze verwendet:

$$\tilde{q}_2(x, t) = Q_1 \cos(kx + \omega t) + Q_{c,2} \cos(2(kx + \omega t)) + Q_{s,2} \sin(2(kx + \omega t)), \quad (6.58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{m,2}(x, t) &= U_{c,1} \cos(kx + \omega t) + U_{s,1} \sin(kx + \omega t) \\ &+ U_{c,2} \cos(2(kx + \omega t)) + U_{s,2} \sin(2(kx + \omega t)). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Diese Ansätze werden in die nichtlinearen Gleichungen eingesetzt und anschließend werden die acht Unbekannten  $Q_1, Q_{c,2}, Q_{s,2}, U_{c,1}, U_{s,1}, U_{c,2}, U_{s,2}, \omega$  bestehend aus den konstanten Amplituden und der korrigierten Frequenz numerisch mittels MATLAB bestimmt.

Im Gegensatz zur Störungsrechnung wird bei dieser Methode kein kleiner Parameter benötigt. Somit eignet sich diese Methode gut zur Kontrolle der Ergebnisse. Allerdings werden keine analytischen Ausdrücke erhalten und für die numerische Bestimmung der Unbekannten werden gute Startwerte benötigt.

### 6.3.3 Untersuchung des Bifurkationsverhaltens

Nach Durchführung der Störungsrechnung und der Harmonischen-Balance-Methode liegt sowohl ein analytischer Ausdruck für die Amplitude  $Q_1$  als auch eine numerische Berechnung vor. Für das in Abschnitt 6.2.2 definierte Beispiel ergeben sich die in Abbildung 6.4 dargestellten Amplitudenverläufe. Auch hier treten sowohl sub- als auch superkritische Bifurkationen auf.

Der Einfluss des Dämpfungsparameters  $\zeta_3$  auf die kritische Geschwindigkeit wurde bereits in Abschnitt 6.2.5 diskutiert; wie sich  $\zeta_3$  auf den Amplitudenverlauf auswirkt ist in Abbildung 6.5 zu sehen. Es ergibt sich ein qualitativ ähnlicher Verlauf und auch hier stimmen die Ergebnisse der beiden Näherungsverfahren gut überein. Das Verfahren der Störungsrechnung ist somit auch für dieses Modell geeignet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind in den folgenden Abbildungen lediglich die Ergebnisse aus der Störungsrechnung dargestellt, sie wurden aber mit der Harmonischen-Balance-Methode verifiziert.

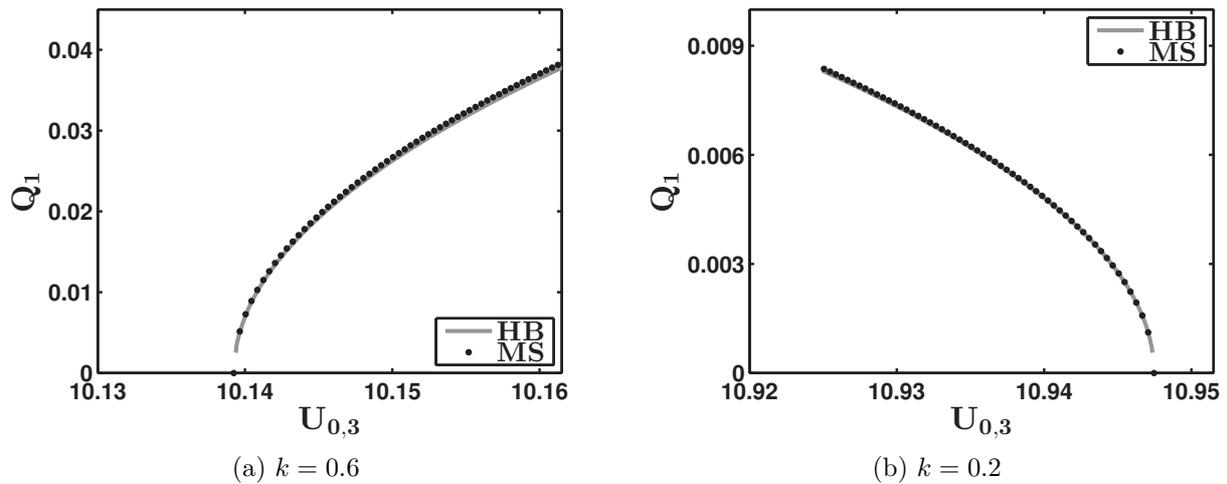


Abbildung 6.4: Amplitude  $Q_1$  aus der Harmonischen-Balance-Methode (HB) bzw. Störungsrechnung (MS) über Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$

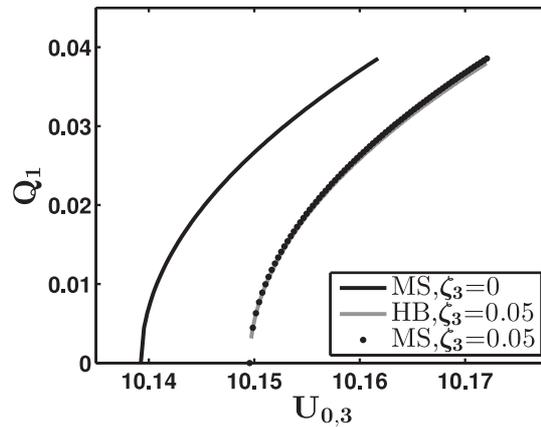


Abbildung 6.5: Amplitude  $Q_1$  mit und ohne äußere Dämpfung  $\zeta_3$  für  $k = 0.6$

In Abbildung 6.6 sind die Verläufe des Testfalles 4 für  $\vartheta_1 \neq 0$  und  $k = 1$  und für zwei verschiedene Werte von  $\alpha_3$  dargestellt. Zusätzlich ist der Verlauf aus dem Modell ohne Fluidträgheit zu sehen. Wie bereits in der linearen Untersuchung, gleichen sich auch hier die Verläufe für kleine Werte von  $\alpha_3$  an. In Abbildung 6.6a ist ein großer Geschwindigkeitsbereich dargestellt, sodass die Art der Bifurkation schwer zu erkennen ist. Es handelt sich jedoch in allen Fällen um superkritische Bifurkationen.

In Abbildung 6.7 ist zusätzlich der Amplitudenverlauf für den Testfall 2 mit  $\vartheta_1 \neq 0$  dargestellt. Um gut dimensionierte Parameter und Amplitudenverläufe zu erhalten, wird hierfür die Schreibweise 1 verwendet. In Abschnitt 6.1.2 wird gezeigt, dass sich die Gleichungen in der Schreibweise 1 lediglich durch  $\vartheta_1$  statt  $K_V$  unterscheiden. Für die betrachtete Wellenzahl  $k = 0.18$  ergibt sich eine superkritische Bifurkation.

Abschließend verbleibt noch die Frage nach dem Einfluss der beschriebenen Parameter auf das Bifurkationsverhalten. Aus der *Multiple-Scales-Analyse* folgt Gleichung (6.55) für den Ausdruck  $f_{Q_1}$  der Amplitude. Für das Bifurkationsverhalten ist dabei der Quotient  $K_5$

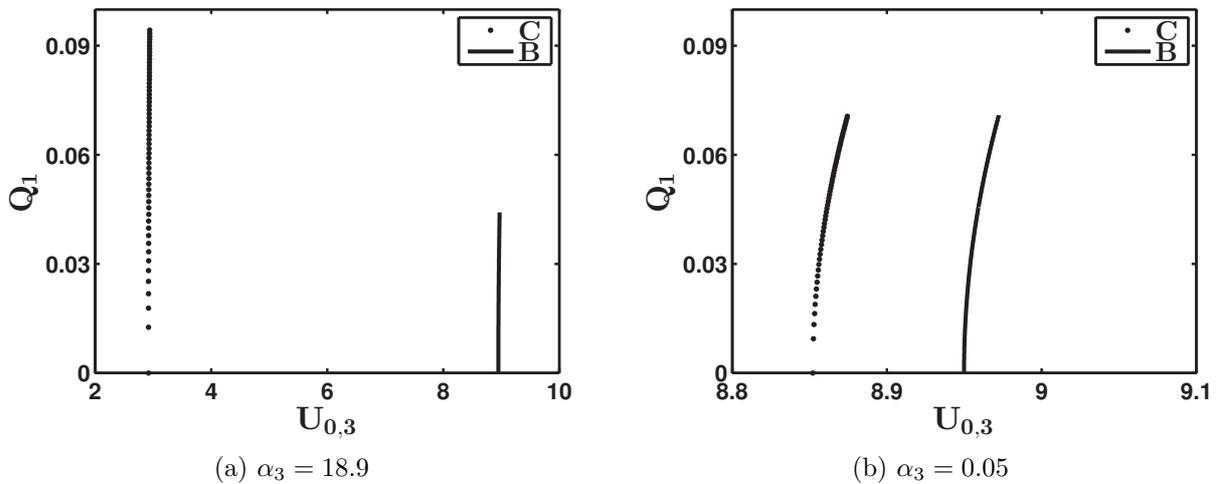


Abbildung 6.6: Amplitudenverläufe  $Q_1$  der Modelle  $B$  und  $C$  über Grundströmungsparameter  $U_{0,3}$

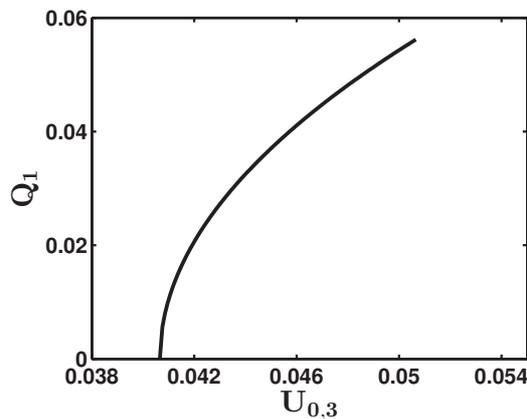


Abbildung 6.7: Amplitude  $Q_1$  über Grundströmungsparameter  $U_{0,1}$  für Testfall 2

entscheidend. Für  $K_5 > 0$  handelt es sich um superkritische, andernfalls um subkritische Bifurkationen. Da der analytische Ausdruck für  $K_5$  bekannt ist, kann der Einfluss der einzelnen Parameter auf das Bifurkationsverhalten untersucht werden. Beim Modell ohne Fluidträgheit ist dieses für den Testfall 4 sehr ausführlich durchgeführt (siehe Abschnitt 5.3.3). Da auch die Terme dieses Modells sehr lang sind, ist eine ausführliche Diskussion nur nach Einsetzen der Parameter für einen bestimmten Testfall möglich. Das Ziel dieser Arbeit ist jedoch nicht die detaillierte Untersuchung eines speziellen Falles, sondern grundsätzliche Erkenntnisse.

Der Einfluss der einzelnen Parameter ist nicht unabhängig voneinander, was generelle Aussagen erschwert. Zudem ist aufgrund der sehr unübersichtlichen Terme für  $\zeta > 0$  eine genauere Analyse der Amplitudengleichung nicht praktikabel. Für  $\zeta = 0$  können aus einer Kurvendiskussion der Funktion  $K_5(P, k)$  (siehe Abschnitt 6.3.1) jedoch einige Informationen gewonnen werden. Diese gelten für die Schreibweisen 1 und 3 gleichermaßen, weshalb auf eine Indizierung der Parameter verzichtet werden kann.

Die Funktion  $K_5$  besitzt bezüglich aller drei Steifigkeits- bzw. Vorspannungsparameter kein Minimum und somit ist die jeweilige Wirkung von  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  eindeutig. Für den Parameter der Biegesteifigkeit  $\delta$  ist die Funktion stets steigend und somit begünstigen große  $\delta$  superkritische Bifurkationen. Für den Bettungssteifigkeitsparameter  $\gamma$  verhält es sich genau umgekehrt, denn hier begünstigen große Werte eine subkritische Bifurkation. Diese beiden Aussagen stimmen mit denen aus dem Modell ohne Fluidträgheit überein. Für  $\beta$  kann die Steigung je nach Verhältnis der anderen Parameter zueinander steigend oder fallend sein. Sowohl die Wellenzahl  $k$  als auch das Massenverhältnis  $\alpha$  besitzen Extrema und Nullstellen und somit ist ihr Einfluss nicht eindeutig und auch von den anderen Parametern abhängig. Hier empfiehlt sich die Betrachtung eines speziellen Falles, was mit den ermittelten analytischen Ausdrücken möglich ist.

## 6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das Modell  $C$  eines schlanken Kanals mit inkompressibler Strömung untersucht. Im Gegensatz zum zuvor betrachteten Modell  $B$  sind bei der Mittelung über die Kanalhöhe einige Näherungen, beispielsweise für den Reibungseinfluss des Fluids, nötig, dafür ist aber die Trägheit des Fluids enthalten. Der Einfluss des Fluids auf die Struktur wird in Form des Druckes berücksichtigt.

Die Stabilität des stationären Zustandes wurde sowohl linear als auch nichtlinear untersucht. Die lineare Untersuchung ergab, dass der Grundzustand ab einer bestimmten kritischen Geschwindigkeit auch hier instabil wird. Bei vorhandener Grundströmungsgeschwindigkeit sind die Verläufe der Eigenwerte aufgrund der Fluidträgheit nicht mehr symmetrisch zur horizontalen Achse, was mit dem Modell  $A$  übereinstimmt. Die Steifigkeits- bzw. Vorspannungsparameter wirken stets stabilisierend, das heißt die kritische Geschwindigkeit wird durch Erhöhung der Parameter ebenfalls angehoben. Bei den Dämpfungsparametern kommt es, wie bereits in Modell  $A$ , auf das Verhältnis zueinander an. Zunächst wirkt eine Erhöhung des Verhältnisses von äußerer zu innerer Dämpfung stabilisierend, ab einem bestimmten Wert jedoch destabilisierend.

Ein Vergleich mit den anderen Modellen zeigt, dass sich die Dispersionsgleichungen für sehr kleine Kopplungsparameter  $\alpha$  ähneln. Die Modelle unterscheiden sich durch die Art der Fluidmodellierung und der Kopplungsparameter beschreibt den Einfluss des Fluids im Vergleich zu dem der Struktur. Für  $\alpha \ll 1$  ist der Einfluss des Fluids sehr gering, daher unterscheiden sich die Modelle dann nur noch minimal.

Ein Vergleich der linearen Gleichungen der Modelle  $B$  und  $C$  zeigte, dass diese für eine verschwindende Reynoldszahl, was einer vernachlässigbaren Fluidträgheit entspricht, nicht übereinstimmen. Beim Modell  $B$  wird durch die von Beginn an vernachlässigte Fluidträgheit nicht berücksichtigt, dass die zugehörigen Terme auch die Strukturauslenkungen beeinflussen können. Nur wenn die Beschleunigung der Struktur ebenfalls sehr klein ist, stimmen die Dispersionsgleichungen der zwei Modelle für verschwindende Reynoldszahlen überein. Das Modell ohne Fluidträgheit ist somit nur in bestimmten Fällen zulässig. Es konnte gezeigt werden, dass sowohl die kritischen Geschwindigkeiten als auch die Reynoldszahlen der beiden Modelle für ein bestimmtes Verhältnis der Wellenzahl und der Dämpfungs- und Kopplungsparameter übereinstimmen. Es gilt jedoch im konkreten Fall zu überprüfen, ob

dabei die Modellrestriktionen des Modells  $B$  eingehalten werden können.

Der Vergleich des Modells  $C$  mit dem inkompressiblen Fall des Modells  $A$  zeigte, dass die Dispersionsgleichungen und daher auch die Eigenwerte für kleine Wellenzahlen und somit große Wellenlängen übereinstimmen.

Bei der nichtlinearen Untersuchung wurde auch beim Modell  $C$  die Verschiebung der Grenzfläche zwischen Fluid und elastischer Wand berücksichtigt. Zur Berechnung der nichtlinearen Lösungen wurde die *Multiple-Scales*-Methode verwendet und mit den Ergebnissen der Harmonische-Balance-Methode abgeglichen. Die Ergebnisse stimmen für kleine Störungsparameter gut überein. Es können sowohl sub- als auch superkritische Bifurkationen beobachtet werden. Dieses hängt vom Verhältnis der Parameter zueinander und der betrachteten Wellenzahl ab. Unter der Annahme einer elastischen Bettung haben die Steifigkeitsparameter einen eindeutigen Einfluss. Während der Parameter der Biegesteifigkeit superkritische Bifurkationen begünstigt, sind es beim Bettungssteifigkeitsparameter die subkritischen Bifurkationen. Welche der Bifurkationen vom Vorspannungsparameter begünstigt wird, hängt vom Verhältnis aller Parameter zueinander ab. Sowohl die Wellenzahl als auch der Kopplungsparameter haben keinen eindeutigen Einfluss, sondern können je nach Verhältnis zu den anderen Parametern zu einer sub- oder superkritischen Bifurkation führen. Für den konkreten Fall kann der Amplitudenverlauf anhand der hergeleiteten analytischen Ausdrücke bestimmt werden.



# 7 Zusammenfassung und Ausblick

## 7.1 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die Anregungsmechanismen der selbsterregten Schwingungen eines durchströmten elastischen Kanals zu identifizieren und das Auftreten von periodischen Lösungen zu untersuchen. Dazu war die Erstellung eines geeigneten Modells erforderlich, welches einerseits für nichtlineare analytische Untersuchungen zugänglich ist und andererseits die wesentlichen Aspekte der Fluid-Struktur-Wechselwirkung abbildet. Des Weiteren galt es, eine geeignete Vorgehensweise zur Untersuchung der nichtlinearen Gleichungen mithilfe der Störungsrechnung zu erarbeiten.

In der vorliegenden Arbeit wurden drei Modelle eines durchströmten Kanals eingeführt, untersucht und miteinander verglichen. Modell *A* enthält eine inkompressible oder kompressible Potentialströmung und eine Näherung zur Berücksichtigung des Reibungseinflusses durch die Viskosität. Beim Modell *B* wird von einem schlanken Kanal und einer Schleichströmung ausgegangen. Modell *C* enthält ebenfalls die Annahme eines schlanken Kanals, hier wird jedoch die Fluidträgheit unter Verwendung einiger Näherungen berücksichtigt. Im Folgenden werden die Ergebnisse der Untersuchungen und Vergleiche in Hinblick auf die Zielsetzung der Arbeit zusammengefasst.

Anhand des Modells *A* wurde der Unterschied zwischen den Eigenwerten eines Kanals mit kompressiblem und inkompressiblem Fluid untersucht. Hierbei ist der Kopplungsparameter  $\alpha$  wichtig. Im Falle eines kompressiblen Fluids können für den entkoppelten Fall mit  $\alpha = 0$  sowohl Struktur- als auch Fluidmoden identifiziert werden. Die zugehörigen Eigenkreisfrequenzen interagieren für  $\alpha > 0$  miteinander, wodurch das sogenannte *Curve-veering* und Veränderungen des Stabilitätsverhaltens auftreten. Bei Betrachtung des inkompressiblen Fluids existieren für  $\alpha = 0$  lediglich Strukturmoden und für  $\alpha > 0$  kann ein *Added-Mass*-Effekt, d. h. eine Absenkung der Eigenwerte des gekoppelten Systems gegenüber denen für  $\alpha = 0$ , beobachtet werden.

Für sehr kleine Werte von  $\alpha$  ist der Unterschied zwischen den drei Modellen *A*, *B* und *C* gering. Das liegt daran, dass der Parameter  $\alpha$  den Einfluss des Fluids gegenüber dem der Struktur beschreibt. Für kleine Werte ist die Struktur dominierend, daher fallen Unterschiede in der Modellierung des Fluids kaum ins Gewicht.

Die lineare Stabilitätsanalyse wurde anhand der Dispersionsgleichung durchgeführt, welche sich durch Einsetzen des Wellenansatzes in die linearisierten Gleichungen der Fluktuationen ergibt. Aus der Dispersionsgleichung können die Eigenkreisfrequenzen in Abhängigkeit der verschiedenen Systemparameter und der Wellenzahl ermittelt werden.

Die Grundströmung stellt die Energiequelle für die selbsterregten Schwingungen dar. Es konnte gezeigt werden, dass dem System für eine bestimmte Phasenverschiebung zwischen

Strukturauslenkung und Druck des Fluids durch die Strömung über einen Zyklus Energie zugeführt wird, was zu einem Stabilitätsverlust des stationären Zustandes führt. Somit ist der Grundströmungsparameter  $U_0$  entscheidend für die Stabilität des stationären Zustandes: Ab einer bestimmten Geschwindigkeit  $U_0 = U_{krit}$  wird der stationäre Zustand instabil. Aufgrund des verwendeten Ansatzes wird der stationäre Zustand für negative Imaginärteile der Eigenkreisfrequenzen instabil. Die kritische Geschwindigkeit  $U_{krit}$  beschreibt den Zustand, für den der Imaginärteil der Eigenkreisfrequenz der instabil werdenden Welle gerade noch null ist. Diese Geschwindigkeit hängt unter anderem von der Wellenzahl, den Steifigkeitsparametern und den Dämpfungsparametern ab:

- Der Zusammenhang zwischen  $U_{krit}$  und der Wellenzahl ist nichtlinear und somit kann keine eindeutige Aussage gemacht werden. Für viele Parameterkonstellationen kann jedoch eine Wellenzahl gefunden werden, für die  $U_{krit}$  minimal ist.
- Die Steifigkeitsparameter  $\gamma$ ,  $\delta$  und der Vorspannungsparameter  $\beta$  wirken stabilisierend, da ihre Erhöhung eine Anhebung der kritischen Geschwindigkeit  $U_{krit}$  bewirkt.
- Die Parameter  $\zeta$  und  $\vartheta$  der äußeren und der inneren Dämpfung wirken einzeln betrachtet destabilisierend. Existieren beide Dämpfungsanteile, so kommt es auf das Verhältnis zueinander an.

Für schlanke Kanäle konnte gezeigt werden, dass sowohl der Einfluss der Kopplung, d.h. der Unterschied zwischen den Eigenwerten des ge- und entkoppelten Systems, als auch der Einfluss der Viskosität am größten ist. Außerdem sind die kritischen Geschwindigkeiten für schlanke Kanäle besonders klein.

Die lineare Untersuchung der drei Modelle lieferte für die betrachteten Testfälle realisierbare kritische Geschwindigkeiten und somit ist es empfehlenswert, eine mögliche Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur bei Untersuchungen von durchströmten elastischen Systemen zu berücksichtigen.

Die Untersuchungen der nichtlinearen Gleichungen der Fluktuationen wurden anhand der Modelle  $B$  und  $C$  durchgeführt. Modell  $A$  liefert wertvolle Einblicke in die Physik des Problems, ist jedoch für nichtlineare analytische Untersuchungen nur schwer zugänglich. Es wurde eine Vorgehensweise zur Untersuchung des postkritischen Verhaltens anhand der nichtlinearen Gleichungen erarbeitet. Hierzu wurde eine Störungsrechnung mit drei Zeitskalen angewendet. Anhand dessen konnte gezeigt werden, dass sich periodische Lösungen mit konstanter Amplitude einstellen. Als Störungsparameter wurde die Wurzel der Abweichung der Grundströmungsgeschwindigkeit vom Bifurkationspunkt  $U_{krit}$  verwendet. Bei Abweichungen der Geschwindigkeit von diesem Punkt wurde eine Korrektur der Schwingungsfrequenz beobachtet. Die Ergebnisse wurden durch die Methode der Harmonischen Balance verifiziert.

Mithilfe der Störungsrechnung wurden analytische Ausdrücke für den Verlauf der Schwingungsamplituden hergeleitet. Ob sich sub- oder superkritische Bifurkationen einstellen, hängt von der Wellenzahl, den verschiedenen Parametern und ihrem Verhältnis zueinander ab. Da nun analytische Ausdrücke vorliegen, können die Einflüsse der einzelnen Parameter auf das Bifurkationsverhalten im konkreten Anwendungsfall bestimmt werden. Unter der

Annahme einer elastischen Bettung können für die Biegesteifigkeitsparameter  $\delta$  und den Bettungssteifigkeitsparameter  $\gamma$  folgende Aussagen getroffen werden: Große Werte von  $\delta$  bzw.  $\gamma$  begünstigen super- bzw. subkritische Bifurkationen.

Ein Vergleich der Dispersionsgleichungen der Modelle  $A$  und  $C$  ergab, dass sich diese für kleine Wellenzahlen gleichen. Der Vergleich der linearisierten Gleichungen der Modelle  $B$  und  $C$  zeigte, dass diese im Grenzfall der verschwindenden Reynoldszahlen nur für kleine Strukturbeschleunigungen gute Übereinstimmungen aufweisen. Beim Modell  $B$  wird durch die von Beginn an vernachlässigte Fluidträgheit nicht berücksichtigt, dass die zugehörigen Terme auch die Strukturauslenkungen beeinflussen können. Das Modell  $B$  ist somit nur in bestimmten Fällen zulässig.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden verschiedene Modelle untersucht und verglichen. Modell  $C$  erfüllt die anfangs formulierten Forderungen: Es ermöglicht analytische nichtlineare Untersuchungen und bildet die wesentlichen Aspekte der Fluid-Struktur-Wechselwirkung ab. Die Anregungsmechanismen konnten identifiziert und das Auftreten zeitperiodischer Lösungen nachgewiesen und untersucht werden.

## 7.2 Ausblick

Aus den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit geht eine Vielzahl weiterführender Fragen und Ideen für nachfolgende Untersuchungen hervor. Im Folgenden werden einige Beispiele genannt.

In den nichtlinearen Untersuchungen dieser Arbeit wurden die Amplitudenverläufe der periodischen Lösungen untersucht, eine Stabilitätsuntersuchung dieser Lösungen steht jedoch noch aus (siehe [37], [85]).

Die Strömung wurde in der vorliegenden Arbeit bisher laminar modelliert. Durch Verwendung von turbulenten Näherungen für den Einfluss der Fluidreibung könnten auch höhere Strömungsgeschwindigkeiten untersucht werden [43].

In der Arbeit von Prince et al. [83] wird die Strömung entlang mehrerer paralleler Platten betrachtet. Durch die mehrfachen Eigenwerte ergeben sich sekundäre Bifurkationen. In Kapitel 4 wurde gezeigt, dass sich bei einer kompressiblen Strömung ebenfalls mehrere Eigenwerte ergeben und die zugehörigen Moden interagieren. Möglicherweise könnte es daher bei der nichtlinearen Untersuchung eines Kanals mit kompressibler Strömung zu ähnlichen Effekten kommen.

Bei der Schleichströmung in Kapitel 5 wurden die Trägheitsterme in der Fluidgleichung des schlanken Kanals vernachlässigt. Reinhardt und Lund [84] führen bei der Modellierung von Gleitlagern eine dimensionslose Schreibweise ein, durch welche lediglich vor den angesprochenen Trägheitstermen ein kleiner Parameter steht. Dadurch kann die Fluidträgheit im Rahmen einer Störungsrechnung im Form einer Störung berücksichtigt werden. Bei einem elastischen durchströmten Kanal steht bei Einführung einer entsprechenden dimensionslosen Schreibweise auch vor der höchsten Zeitableitung in der Strukturgleichung dieser

kleine Parameter, was die Durchführung einer singulären Störungsrechnung erforderlich macht (siehe z. B. [46]).

Die Struktur wurde in dieser Arbeit als Kirchhoff-Platte modelliert. Durch Einführung einer von Kármán-Plattengleichung könnten strukturelle Nichtlinearitäten berücksichtigt werden (siehe [1], [37]). Des Weiteren ist eine Untersuchung des Einflusses einer Materialdämpfung sinnvoll. Jurisits und Steindl [53] zeigen beispielsweise, dass sich diese Dämpfung stark auf das Stabilitätsverhalten von durchströmten Schläuchen auswirkt.

Die Annahme unendlich ausgedehnter Strukturen stellt eine Vereinfachung dar. Daher ist es von praktischem Interesse, in weiteren Untersuchungen auch einen endlich langen Kanal zu betrachten. Hierzu könnten beispielsweise die Arbeiten von Doaré und de Langre [22] oder Peake [79] zur Untersuchung des Einflusses endlicher Längen bei durch- bzw. überströmten Strukturen auf den durchströmten Kanal übertragen werden.

Im Hinblick auf eine geschlossene numerische Untersuchung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen wäre es auch interessant, mit direkten Methoden der Variationsrechnung ein geeignetes Näherungsverfahren für das gekoppelte Problem des durchströmten Kanals zu entwickeln und semianalytisch auszuwerten, siehe z. B. [113].

Des Weiteren ist ein Abgleich mit detaillierten numerischen Simulationen oder Experimenten sinnvoll. Dadurch könnten weitere wichtige Parameter oder notwendige Erweiterungen des aktuellen Modells identifiziert werden.

# Anhang



## A Methode der Harmonischen Balance

An dieser Stelle werden exemplarisch anhand des Modells  $B$  einige Zwischenergebnisse der, in Kapitel 5.3.2 skizzierten, Methode der Harmonischen Balance angegeben.

Nach Einsetzen der Ansätze (5.55) und (5.56) in die nichtlinearen Gleichungen (5.13) und (5.14) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 N_1 = & -12Q_1 \sin(\theta) \omega - 24Q_{c,2} \sin(2\theta) \omega + 24Q_{s,2} \cos(2\theta) \omega \\
 & + \left( P_{c,1} \cos(\theta) k^2 + P_{s,1} \sin(\theta) k^2 + 4P_{c,2} \cos(2\theta) k^2 + 4P_{s,2} \sin(2\theta) k^2 \right) \\
 & \left( Q_1 \cos(\theta) + Q_{c,2} \cos(2\theta) + Q_{s,2} \sin(2\theta) - 1 \right)^3 \\
 & + 3 \left( 12U_{0,3} + P_{c,1} \sin(\theta) k - P_{s,1} \cos(\theta) k + 2P_{c,2} \sin(2\theta) k - 2P_{s,2} \cos(2\theta) k \right) \\
 & \left( -Q_1 \sin(\theta) k - 2Q_{c,2} \sin(2\theta) k + 2Q_{s,2} \cos(2\theta) k \right) \\
 & \left( Q_1 \cos(\theta) + Q_{c,2} \cos(2\theta) + Q_{s,2} \sin(2\theta) - 1 \right)^2, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_2 = & -Q_1 \cos(\theta) \omega^2 - 4Q_{c,2} \cos(2\theta) \omega^2 - 4Q_{s,2} \sin(2\theta) \omega^2 \\
 & + \delta_3 \left( Q_1 \cos(\theta) k^4 + 16Q_{c,2} \cos(2\theta) k^4 + 16Q_{s,2} \sin(2\theta) k^4 \right) \\
 & - \beta_3 \left( -Q_1 \cos(\theta) k^2 - 4Q_{c,2} \cos(2\theta) k^2 - 4Q_{s,2} \sin(2\theta) k^2 \right) \\
 & + \gamma_3 \left( Q_1 \cos(\theta) + Q_{c,2} \cos(2\theta) + Q_{s,2} \sin(2\theta) \right) \\
 & + \zeta_3 \left( -Q_1 \sin(\theta) \omega - 2Q_{c,2} \sin(2\theta) \omega + 2Q_{s,2} \cos(2\theta) \omega \right) \\
 & + \alpha_3 \left( P_{c,1} \cos(\theta) + P_{s,1} \sin(\theta) + P_{c,2} \cos(2\theta) + P_{s,2} \sin(2\theta) \right) \\
 & + \alpha_3 \left( 12U_{0,3} + P_{c,1} \sin(\theta) k - P_{s,1} \cos(\theta) k + 2P_{c,2} \sin(2\theta) k - 2P_{s,2} \cos(2\theta) k \right) \\
 & \left( -Q_1 \sin(\theta) k - 2Q_{c,2} \sin(2\theta) k + 2Q_{s,2} \cos(2\theta) k \right) \\
 & \left( Q_1 \cos(\theta) + Q_{c,2} \cos(2\theta) + Q_{s,2} \sin(2\theta) - 1 \right). \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

Damit werden die Fourierkoeffizienten gemäß der Gleichungen (5.57)-(5.60) bestimmt:

$$\begin{aligned}
 a_{1,1} = & -\frac{1}{8} k \left( 6kP_{c,1}Q_1^2 + 12kP_{c,1}Q_{s,2}^2 + 3kP_{c,1}Q_{c,2}^3 + 12kP_{s,1}Q_{s,2} - 3kP_{c,1}Q_{c,2}Q_{s,2}^2 \right. \\
 & - 12kP_{c,1}Q_{c,2}^2 - 12kP_{c,1}Q_{c,2} + 4kP_{c,2}Q_1^3 + 24kP_{c,2}Q_1 - 3kP_{s,1}Q_{s,2}^3 \\
 & - 12kP_{s,2}Q_1Q_{c,2}Q_{s,2} - 288U_{0,3}Q_1Q_{s,2} + 6kP_{c,2}Q_1Q_{c,2}^2 \\
 & \left. - 6kP_{s,1}Q_1^2Q_{s,2} + 18kP_{c,2}Q_1Q_{s,2}^2 - 3kP_{s,1}Q_{c,2}^2Q_{s,2} - 8P_{c,1}k \right), \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,2} = & \gamma_3 Q_1 - Q_1 \omega^2 + \alpha_3 P_{c,1} + \beta_3 Q_1 k^2 + \delta_3 Q_1 k^4 - \frac{1}{4} \alpha_3 P_{c,1} k^2 Q_1^2 \\
& - 2\alpha_3 P_{c,2} k^2 Q_1 Q_{c,2} - 2\alpha_3 P_{s,2} k^2 Q_1 Q_{s,2} + 6\alpha_3 U_{0,3} Q_1 k Q_{s,2} \\
& + \alpha_3 P_{s,1} k^2 Q_{s,2} + \alpha_3 P_{c,2} k^2 Q_1 + \alpha_3 P_{c,1} k^2 Q_{c,2}, \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,1} = & 6k^2 P_{s,1} Q_1 Q_{s,2} + \frac{3}{4} k^2 P_{c,1} Q_1 Q_{c,2}^2 + \frac{9}{4} k^2 P_{c,1} Q_1 Q_{s,2}^2 + 72k U_{0,3} Q_{s,2} + 3k^2 P_{c,1} Q_1 \\
& - \frac{3}{2} k^2 P_{s,2} Q_1^2 Q_{s,2} + \frac{3}{2} k^2 P_{c,2} Q_1^2 Q_{c,2} + 36k U_{0,3} Q_{s,2} Q_1^2 + 18k U_{0,3} Q_{s,2}^3 \\
& + 18k U_{0,3} Q_{c,2}^2 Q_{s,2} + 6k^2 P_{s,2} Q_{c,2} Q_{s,2} + 24Q_{s,2} \omega - 4P_{c,2} k^2 - 6k^2 P_{c,2} Q_1^2 \\
& - \frac{3}{2} k^2 P_{s,1} Q_1 Q_{c,2} Q_{s,2} + \frac{1}{2} k^2 P_{c,1} Q_1^3 - 3k^2 P_{c,2} Q_{c,2}^2 - 9k^2 P_{c,2} Q_{s,2}^2, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,2} = & -\frac{1}{2} \alpha_3 Q_{c,1} k^2 Q_1 - \frac{1}{2} \alpha_3 Q_{c,1} k^2 Q_1 Q_{c,2} - \alpha_3 Q_{s,1} k^2 Q_{s,2} Q_1 - 24\alpha_3 U_{0,3} Q_{s,2} k \\
& + \alpha_3 Q_{c,2} k^2 Q_{s,2}^2 - \alpha_3 Q_{c,2} k^2 Q_{c,2}^2 + 16\delta_3 Q_{c,2} k^4 + 4\beta_3 Q_{c,2} k^2 \\
& + \alpha_3 Q_{c,2} - 4Q_{c,2} \omega^2 + \gamma_3 Q_{c,2} - 2\alpha_3 Q_{s,2} k^2 Q_{c,2} Q_{s,2} + 2\zeta_3 Q_{s,2} \omega, \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{1,1} = & -12Q_1 \omega - \frac{9}{4} k^2 P_{s,1} Q_1^2 - \frac{3}{8} k^2 P_{c,1} Q_{s,2}^3 + \frac{3}{2} k^2 P_{s,1} Q_{c,2} - P_{s,1} k^2 \\
& + k^2 P_{s,2} Q_1^3 + 3k^2 P_{s,2} Q_1 - \frac{3}{2} k^2 P_{c,1} Q_{s,2} - \frac{3}{2} k^2 P_{s,1} Q_{c,2}^2 - \frac{3}{2} k^2 P_{s,1} Q_{s,2}^2 \\
& + \frac{3}{8} k^2 P_{s,1} Q_{c,2}^3 - 36k U_{0,3} Q_1 - 18k U_{0,3} Q_1 Q_{c,2}^2 + 36k U_{0,3} Q_1 Q_{c,2} \\
& - \frac{3}{4} k^2 P_{c,1} Q_1^2 Q_{s,2} + \frac{3}{2} k^2 P_{s,1} Q_1^2 Q_{c,2} - 6k^2 P_{s,2} Q_1 Q_{c,2} + \frac{9}{4} k^2 P_{s,2} Q_1 Q_{c,2}^2 \\
& + \frac{3}{8} k^2 P_{s,1} Q_{c,2} Q_{s,2}^2 + 6k^2 P_{c,2} Q_1 Q_{s,2} - \frac{3}{2} k^2 P_{c,2} Q_1 Q_{c,2} Q_{s,2} - 18k U_{0,3} Q_1 Q_{s,2}^2 \\
& - 9k U_{0,3} Q_1^3 + \frac{3}{4} k^2 P_{s,2} Q_1 Q_{s,2}^2 - \frac{3}{8} k^2 P_{c,1} Q_{c,2}^2 Q_{s,2}, \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{1,2} = & 12\alpha_3 k U_{0,3} Q_1 - \alpha_3 k^2 P_{s,1} Q_{c,2} + \alpha_3 k^2 P_{s,2} Q_1 - 6\alpha_3 k U_{0,3} Q_1 Q_{c,2} + \alpha_3 k^2 P_{s,2} Q_1 Q_{c,2} \\
& + \alpha_3 k^2 P_{c,1} Q_{s,2} + \frac{1}{4} \alpha_3 k^2 P_{s,1} Q_1^2 + \alpha_3 P_{s,1} - \zeta_3 Q_1 \omega - \alpha_3 k^2 P_{c,2} Q_1 Q_{s,2}, \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{2,1} = & -\frac{3}{2} k^2 P_{c,1} Q_1 Q_{c,2} Q_{s,2} - 3k^2 P_{s,2} Q_{s,2}^2 - 9k^2 P_{s,2} Q_{c,2}^2 \\
& + k^2 P_{s,1} Q_1^3 - 72k U_{0,3} Q_{c,2} + 36k U_{0,3} Q_1^2 + 3k^2 P_{s,1} Q_1 - 6k^2 P_{s,2} Q_1^2 \\
& - 18k U_{0,3} Q_{c,2}^3 - 24Q_{c,2} \omega - 4P_{s,2} k^2 - 36k U_{0,3} Q_{c,2} Q_1^2 - 18k U_{0,3} Q_{s,2}^2 Q_{c,2} \\
& - 6k^2 P_{s,1} Q_1 Q_{c,2} + \frac{9}{4} k^2 P_{s,1} Q_1 Q_{c,2}^2 + 6k^2 P_{c,2} Q_{c,2} Q_{s,2} + \frac{9}{2} k^2 P_{s,2} Q_1^2 Q_{c,2} \\
& + \frac{3}{4} k^2 P_{s,1} Q_1 Q_{s,2}^2 - \frac{3}{2} k^2 P_{c,2} Q_1^2 Q_{s,2}, \tag{A.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{2,2} = & -2\zeta_3 Q_{c,2} \omega + 16\delta_3 Q_{s,2} k^4 + 4\beta_3 Q_{s,2} k^2 - \frac{1}{2} \alpha_3 k^2 P_{s,1} Q_1 + \gamma_3 Q_{s,2} + \alpha_3 P_{s,2} \\
& + 24\alpha_3 k U_{0,3} Q_{c,2} - \alpha_3 k^2 P_{s,2} Q_{s,2}^2 + \alpha_3 k^2 P_{s,2} Q_{c,2}^2 - 6\alpha_3 k Q_1^2 \\
& - 2\alpha_3 k^2 P_{c,2} Q_{c,2} Q_{s,2} - \frac{1}{2} \alpha_3 k^2 P_{c,1} Q_1 Q_{s,2} + \alpha_3 k^2 P_{s,1} Q_1 Q_{c,2} - 4Q_{s,2} \omega^2. \tag{A.10}
\end{aligned}$$

## B Fluidgleichung des Modells C

Im Folgenden wird die Gleichung (6.4) aus Kapitel 6 im Detail hergeleitet. Dafür wird die Kontinuitätsgleichung (3.24) mit  $\hat{u}_F$  multipliziert und mit der, durch  $\hat{\rho}_F$  dividierten, Gleichung (3.25) addiert:

$$\frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{t}} + \underbrace{2\hat{u}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{x}}}_{\frac{\partial(\hat{u}_F^2)}{\partial \hat{x}}} + \underbrace{\hat{u}_F \frac{\partial \hat{v}_F}{\partial \hat{y}} + \hat{v}_F \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}}}_{\frac{\partial(\hat{u}_F \hat{v}_F)}{\partial \hat{y}}} = -\frac{1}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} + \frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial^2 \hat{u}_F}{\partial \hat{y}^2}. \quad (\text{B.1})$$

Anschließend wird über die Kanalhöhe von  $\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0$  bis  $\hat{y} = H_0$  integriert:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{t}} d\hat{y} + \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial(\hat{u}_F^2)}{\partial \hat{x}} d\hat{y} + \underbrace{\int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial(\hat{u}_F \hat{v}_F)}{\partial \hat{y}} d\hat{y}}_{\hat{u}_F \hat{v}_F|_{\hat{y}=H_0} - \hat{u}_F \hat{v}_F|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0}} = \\ -\frac{1}{\hat{\rho}_F} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} d\hat{y} + \frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F} \underbrace{\int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial^2 \hat{u}_F}{\partial \hat{y}^2} d\hat{y}}_{\frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=H_0} - \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Für die ersten beiden Terme wird die Leibniz'schen Integrationsregel (siehe Kapitel 5.1.1) angewendet und sowohl die Übergangsbedingungen (3.45) und (3.46) als auch, die in Gleichung (3.29) definierte, gemittelte Geschwindigkeit  $\hat{U}_F$  eingesetzt:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{t}} d\hat{y} &= \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \hat{u}_F d\hat{y} - \underbrace{\hat{u}_F(\hat{y} = H_0)}_{=0} \frac{\partial H_0}{\partial \hat{t}} + \underbrace{\hat{u}_F(\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0)}_{=0} \frac{\partial(\hat{q}_S - \hat{q}_0)}{\partial \hat{t}} \\ &= \frac{\partial \left( (H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{U}_F \right)}{\partial \hat{t}}, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial \hat{u}_F^2}{\partial \hat{x}} d\hat{y} &= \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} (\hat{u}_F^2) d\hat{y} - \underbrace{\hat{u}_F(\hat{y} = H_0)^2}_{=0} \frac{\partial H_0}{\partial \hat{t}} + \underbrace{\hat{u}_F(\hat{y} = \hat{q}_S - \hat{q}_0)^2}_{=0} \frac{\partial(\hat{q}_S - \hat{q}_0)}{\partial \hat{t}} \\ &= \frac{\partial \left( (H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \hat{U}_F^2 \right)}{\partial \hat{x}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Der dritte Term aus Gleichung (B.2) entfällt nach Einsetzen der Übergangsbedingungen (3.45) und (3.46). Gleichung (3.26) lieferte  $\hat{p}_F = \hat{p}_F(\hat{x}, \hat{t})$ , wodurch der vierte Term zu

$$-\frac{1}{\hat{\rho}_F} \int_{\hat{q}_S - \hat{q}_0}^{H_0} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} d\hat{y} = -\frac{1}{\hat{\rho}_F} \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \hat{x}} (H_0 - \hat{q}_S + \hat{q}_0) \quad (\text{B.5})$$

umgeformt werden kann. Mit der Näherung (3.32) lautet der letzte Term:

$$\frac{\mu_F}{\hat{\rho}_F} \left( \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=H_0} - \frac{\partial \hat{u}_F}{\partial \hat{y}} \Big|_{\hat{y}=\hat{q}_S - \hat{q}_0} \right) = -\frac{1}{4} \lambda_V \hat{U}_F^2 \quad (\text{B.6})$$

Nach Einsetzen der hergeleiteten Zwischenergebnisse wird aus Gleichung (B.2) die zweite Fluidgleichung (6.4) des Modells C.

## Literaturverzeichnis

- [1] ALTENBACH, H. ; ALTENBACH, J. ; NAUMENKO, K. : *Ebene Flächentragwerke*. Springer, 1998
- [2] BACH, K. ; HETZLER, H. ; SEEMANN, W. : Dynamic stability of a steady flow in a planar channel. In: *Vibration Problems ICOVP* Bd. 139, Springer Proceedings in Physics, 2011, S. 773–778
- [3] BACH, K. ; HETZLER, H. ; SEEMANN, W. : On stability and self-excited vibrations in fluid-structure-interaction. In: *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics* 11 (2011), S. 309–310
- [4] BACH, K. ; HETZLER, H. ; SEEMANN, W. : Oscillations of a channel with a flexible wall conveying viscous flow. In: *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics* 12 (2012), S. 245 – 246
- [5] BENJAMIN, T. : Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability. In: *Fluid Mechanics* 9 (1960), S. 513–532
- [6] BENJAMIN, T. : Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid, I. Theory. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 261 A (1961), S. 457–486
- [7] BENJAMIN, T. : The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows. In: *Journal of Fluid Mechanics* 16 (1963), S. 436–450
- [8] ÜBERHUBER, C. : *Computer-Numerik: Band 2*. Springer, 1995
- [9] BERTRAM, C. : Flow-induced oscillation of collapsed tubes and airway structures. In: *Respiratory Physiology & Neurobiology* 163 (2008), S. 256–265
- [10] BÖGE, A. (Hrsg.): *Handbuch Maschinenbau*. Springer Vieweg, 2013
- [11] BILLINGHAM, J. ; KING, A. : *Wave Motion*. Cambridge University Press, 2006
- [12] BOYACI, A. : *Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern*, Karlsruher Institut für Technologie, Diss., 2012
- [13] BÜRGER, K. H.: Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung. In: *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik*. Ruhr-Universität Bochum, 1985
- [14] BRONSTEIN, I. ; SEMENDJAJEW, K. : *Taschenbuch der Mathematik*. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1979

- [15] BRONSTEIN, I. ; SEMENDJAJEW, K. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H. : *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2006
- [16] CARPENTER, P. (Hrsg.) ; PEDLEY, T. (Hrsg.) ; IUTAM Symposium (Veranst.): *Flow past highly compliant boundaries and in collapsible tubes*. Kluwer Academic Publishers, 2003
- [17] CHOKSHI, P. ; KUMARAN, V. : Weakly nonlinear stability analysis of a flow past a neo-Hookean solid at arbitrary Reynolds numbers. In: *Physics of Fluids* 20 (2008), S. 094109–1–16
- [18] CRAWFORD (JR.), F. : *Schwingungen und Wellen*. Vieweg & Sohn, 1974
- [19] CRIGHTON, D. ; OSWELL, J. : Fluid loading with mean flow. I. Response of an elastic plate to localized excitation. In: *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering* 335 (1991), S. 557–592
- [20] DAVIES, C. ; CARPENTER, P. : Instabilities in a plane channel flow between compliant walls. In: *Journal of Fluid Mechanics* 352 (1997), S. 205–243
- [21] DELANGRE, E. : Absolutely unstable waves in inviscid hydroelastic systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 256 (2002), S. 299–317
- [22] DOARÉ, O. ; DELANGRE, E. : Local and global instabilities of fluid-conveying pipes on elastic foundations. In: *Journal of fluids and structures* 16 (2002), S. 1–14
- [23] DOARÉ, O. ; MICHELIN, S. : Piezoelectric coupling in energy-harvesting fluttering flexible plates: linear stability analysis and conversion efficiency. In: *Journal of Fluids and Structures* 27 (2011), S. 1357–1375
- [24] DOWELL, E. H.: Flutter of infinitely long plates and shells. Part I: Plate. In: *AIAA Journal* 4 (1966), S. 1370–1377
- [25] ENZ, S. : *Factors affecting coriolis flowmeter accuracy, precision, and robustness*, Technical University of Denmark, Department of Mechanical Engineering, Diss., 2010
- [26] FISCHER, P. : *Stabilitätsanalyse eines durchströmten Kanals unter Verwendung einer FEM-Software*, Institut für Technische Mechanik (ITM), Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Studienarbeit, 2012
- [27] GAJJAR, J. ; SIBANDA, P. : The hydrodynamic stability of channel flow with compliant boundaries. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 8 (1996), S. 105–129
- [28] GASCH, R. ; NORDMANN, R. ; PFÜTZNER, H. : *Rotordynamik*. Springer-Verlag, 2006
- [29] GAURAV ; SHANKAR, V. : Stability of pressure-driven flow in a deformable neo-Hookean channel. In: *Journal of Fluid Mechanics* 659 (2010), S. 318–350

- 
- [30] GAVRIELY, N. ; SHEE, T. ; CUGELL, D. ; GROTEBERG, J. : Flutter in flow-limited collapsible tubes: a mechanism for generation of wheezes. In: *Journal of Applied Physiology* 66 (1989), S. 2251–2261
- [31] GREEN, C. ; ELLEN, C. : The stability of plane poiseuille flow between flexible walls. In: *Journal of Fluid Mechanics* 51 (1972), S. 403–416
- [32] GREGORY ; PAÏDOUSSIS: Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid, Part I. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 293 (1966), S. 512–527
- [33] GRONINGER, R. ; KANE, J. : Flow induced deflections of parallel flat plates. In: *Nuclear Science and Engineering* 16 (1963), S. 218–226
- [34] GROTEBERG, J. ; DAVIS, S. : Fluid-dynamic flapping of a collapsible channel: Sound generation and flow limitation. In: *Journal of Biomechanics* 13 (1980), S. 219–230
- [35] GROTEBERG, J. ; GAVRIELY, N. : Flutter in collapsible tubes: A theoretical model of wheezes. In: *Journal of Applied Physiology* 66 (1989), S. 2262–2273
- [36] GROTEBERG, J. ; JENSEN, O. : Biofluidmechanics in flexible tubes. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 36 (2004), S. 121–147
- [37] GROTEBERG, J. ; REISS, E. : Subsonic flapping flutter. In: *Journal of Sound and Vibration* 92 (1984), S. 349–361
- [38] GROTEBERG, J. ; SHEE, T. : Compressible-flow channel flutter. In: *Journal of Fluid Mechanics* 159 (1985), S. 175–193
- [39] GUCKENHEIMER, J. ; HOLMES, P. : *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 2002
- [40] HAGEDORN, P. : *Technische Schwingungslehre, Band 2*. Springer-Verlag, 1989
- [41] HAINS, F. ; PRICE, J. : Effect of a Flexible Wall on the Stability of Poiseuille Flow. In: *Physics of Fluids* 5 (1962), S. 365
- [42] HEIL, M. : The stability of cylindrical shells conveying viscous flow. In: *Journal of Fluids and Structures* 10 (1996), S. 173–196
- [43] HERWIG, H. : *Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, 2006
- [44] HERWIG, H. : *Strömungsmechanik*. Vieweg + Teubner, 2008
- [45] HETZLER, H. : *Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2008
- [46] HOLMES, M. : *Introduction to Perturbation Methods*. Springer-Verlag, 1995
- [47] HORÁČEK, J. ; ZOLOTAREV, I. : Acoustic-structural coupling of vibrating cylindrical shells with flowing fluid. In: *Journal of Fluids and Structures* 5 (1991), S. 487–501

- [48] HORÁČEK, J. ; ZOLOTAREV, I. : Frequency-modal characteristics of cylindrical shell with annular flow of a light fluid. In: *Eighth IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, 1991
- [49] HOUSNER, G. W.: Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid. In: *ASME Journal of Applied Mechanics* 19 (1952), S. 205–208
- [50] HUANG, L. : Reversal of the bernoulli effect and channel flutter. In: *Journal of Fluids and Structures* 12 (1998), S. 131–151
- [51] HUANG, L. : Viscous flutter of a finite elastic membrane in poiseuille flow. In: *Journal of Fluids and Structures* 15 (2001), S. 1061–1088
- [52] INADA, F. ; HAYAMA, S. : A study on leakage-flow-induced vibrations. Part I. In: *Journal of Fluids and Structures* 4 (1990), S. 395–412
- [53] JURISITS, R. ; STEINDL, A. : Low order resonance of an elastic fluid-conveying tube. In: *Flow-induced Vibration*, 2012, S. 7–13
- [54] KABUS, K. : *Mechanik und Festigkeitslehre: Aufgaben*. Carl Hanser Verlag, 2003
- [55] KANEKO, S. ; NAKAMURA, T. ; INADA, F. ; KATO, M. : *Flow-Induced-Vibrations*. Elsevier, 2008
- [56] KATZ, A. ; CHEN, Y. ; MORENO, A. : Flow trough a collapsible tube: Experimental analysis and mathematical model. In: *Biophysical Journal* 9 (1969), S. 1261–1279
- [57] KECECIOGLU, I. ; McCLURKEN, M. ; KAMM, R. ; SHAPIRO, A. : Steady, supercritical flow in collapsible tubes. Part 1. Experimental observations. In: *Journal of Fluid Mechanics* 109 (1981), S. 367–389
- [58] KNEUBÜHL, F. : *Lineare und nichtlineare Schwingungen und Wellen*. Teubner, 1995
- [59] KORNECKI, A. : Static and dynamic instability of panels and cylindrical shells in subsonic potential flow. In: *Journal of Sound and Vibration* 32 (1974), S. 251–263
- [60] KORNECKI, A. : Aeroelastic and hydroelastic instabilities of infinitely long plates I. In: *SM Archives* 3 (1978), S. 381–440
- [61] KORNECKI, A. : Aeroelastic and hydroelastic instabilities of infinitely long plates II. In: *SM Archives* 4 (1979), S. 241–345
- [62] KRAUSE, W. : *Grundlagen der Konstruktion*. Carl Hanser Verlag, 2012
- [63] KUDOU, G. ; WATANABE, M. ; HARA, K. : Flow-induced wave generated on a thin film in a narrow gap. In: *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems and Manufacturing* 4 (2010), S. 257–268
- [64] LANDAHL, M. : On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface. In: *Journal of Fluid Mechanics* 13 (1962), S. 609–632

- 
- [65] LEIPHOLZ, H. : *Stability Theory*. B.G. Teubner and John Wiley & Sons, 1987
- [66] LEUTE, U. : *Physik und ihre Anwendungen in Technik und Umwelt*. Carl Hanser Verlag, 2004
- [67] MAGNUS, K. ; POPP, K. ; SEXTRO, W. : *Schwingungen*. Vieweg + Teubner, 2008
- [68] MILES, J. : On the aerodynamic instability of thin panels. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 1 (1956), S. 771–780
- [69] MILLER, D. : Critical flow velocities for collapse of reactor parallel-plate fuel assemblies. In: *Journal of Engineering for Power* 1 (1960), S. 83–95
- [70] MULCAHY, T. : A review of leakage-flow-induced vibrations of reactor components / Argonne National Laboratory. 1983. – Forschungsbericht
- [71] NAGATA, M. ; COLE, T. : On the stability of plane poiseuille flow between compliant boundaries. In: *Transactions on Modelling and Simulation* 21 (1999), S. 231–240
- [72] NAYFEH, A. : *Perturbation Methods*. John Wiley & Sons, 2000
- [73] NAYFEH, A. ; MOOK, D. : *Nonlinear Oscillations*. WILEY -VCH Verlag, 2004
- [74] OERTEL (JR.), H. ; BÖHLE, M. ; REVIOL, T. : *Strömungsmechanik*. Vieweg+Teubner, 2011
- [75] PAÏDOUSSIS, M. : *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow Volume 1*. Academic Press, 1998
- [76] PAÏDOUSSIS, M. : *Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow Volume 2*. Elsevier Academic Press, 2004
- [77] PAÏDOUSSIS, M. ; LI, G. : Pipes conveying fluid: A model dynamical problem. In: *Journal of Fluids and Structures* 7 (1993), S. 137–204
- [78] PAÏDOUSSIS, M. ; PRICE, S. ; DELANGRE, E. : *Fluid Structure Interactions: Cross-Flow-Induced Instabilities*. Cambridge University Press, 2011
- [79] PEAKE, N. : On the unsteady motion of a long fluid-loaded elastic plate with mean flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 507 (2004), S. 335–366
- [80] PIERUCCI, M. ; MORALES, P. : Effect of finite thickness flexible boundary upon the stability of a poiseuille flow. In: *Journal of Applied Mechanics* 57 (1990), S. 1056–1060
- [81] POPP, K. : Modelling and control of friction-induced vibrations. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 11 (2005), S. 345–369
- [82] PRESS, W. (Hrsg.): *Numerical recipes: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2007

- [83] PRINCE, A. ; GROTEBERG, J. ; REISS, E. : Primary and secondary flutter of leakage flow channels. In: *Journal of Sound and Vibration* 161 (1993), S. 89–107
- [84] REINHARDT, E. ; LUND, J. : The influence of fluid inertia on the dynamic properties of journal bearings. In: *Journal of Lubrication Technology* 97 (1975), S. 159–165
- [85] RIEMER, M. ; WAUER, J. ; WEDIG, W. : *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik*. Springer-Lehrbuch, 1993
- [86] ROTENBERRY, J. : Finite amplitude shear waves in a channel with compliant boundaries. In: *Physics of Fluids A* 4 (1992), S. 270–276
- [87] ROTENBERRY, J. ; SAFFMAN, P. : Effect of compliant boundaries on weakly nonlinear shear waves in channel flow. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 50 (1990), S. 361–394
- [88] SCHADE, H. ; KUNZ, E. : *Strömungslehre*. de Gruyter, 2007
- [89] SCHMIDT, E. ; STEPHAN, K. ; MAYINGER, F. : *Technische Thermodynamik*. Springer-Verlag, 1984
- [90] SEELINGER, P. : *Dynamische Fluid-Festkörper-Wechselwirkung*, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Technische Mechanik, Dissertation, 1987
- [91] SEEMANN, W. ; WAUER, J. : Fluid-structural coupling of vibrating bodies in a surrounding confined liquid. In: *ZAMM* 76 (1996), S. 67–79
- [92] SHAPIRO, A. : Steady flow in collapsible tubes. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 99 (1977), S. 126–148
- [93] SIBANDA, P. ; MOTSA, S. ; SHATEYI, S. : Linear stability of two-dimensional flow to three-dimensional perturbations in a channel with a flexible wall. In: *Archives of Mechanics* 56 (2004), S. 293–311
- [94] SIMON, M. : *Wellenausbreitung in einer kompressiblen Fluidschicht mit einseitig elastischer Berandung*, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Technische Mechanik, Diplomarbeit, 1998
- [95] SMITH, F. : Instability of flow through pipes of general cross-section. In: *Mathematika* 26 (1979), S. 187–210
- [96] SOROKIN, S. ; CHUBINSKIJ, A. : On the role of fluid viscosity in wave propagation in elastic plates under heavy fluid loading. In: *Journal of Sound and Vibration* 311 (2008), S. 1020–1038
- [97] SPURK, J. ; AKSEL, N. : *Strömungslehre*. Springer, 2010
- [98] SQUIRE, H. : On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 142 (1933), S. 621–628

- 
- [99] STEINDL, A. ; TROGER, H. : Nonlinear three-dimensional oscillations of elastically constrained fluid conveying viscoelastic tubes with perfect and broken  $O(2)$ -symmetry. In: *Nonlinear Dynamics* 7 (1995), S. 165–193
- [100] STEWART, P. ; WATERS, S. ; JENSEN, O. : Local and global instabilities of flow in a flexible-walled channel. In: *European Journal of Mechanics B/Fluids* 28 (2009), S. 541–557
- [101] STEWART, P. ; WATERS, S. ; JENSEN, O. : Local instabilities of flow in a flexible channel: Asymmetric flutter driven by a weak critical layer. In: *Physics of Fluids* 22 (2010), S. 031902–1–18
- [102] STEWARTSON, K. ; STUART, J. : A non-linear instability theory for a wave system in plane poiseuille flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 48 (1971), S. 529–545
- [103] STROGATZ, S. : *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Westview Press, 2000
- [104] SUNDARARAJAN, V. : Effect of a rigid boundary on the flutter of a thin panel. In: *Journal of Sound and Vibration* 19 (1971), S. 147–152
- [105] SZERI, A. : *Fluid Film Lubrication*. Cambridge University Press, 1998
- [106] THOMSEN, J. : *Vibrations and Stability*. Springer Verlag, 2003
- [107] THRONE, J. ; BEINE, J. : *Thermoformen*. Hanser, 1999
- [108] TROGER, H. ; STEINDL, A. : *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1991
- [109] WAINBERG, M. ; TRENIGIN, W. : *Theorie der Lösungsverzweigung bei nichtlinearen Gleichungen*. Akademie-Verlag, 1973
- [110] WALSH, C. : Flutter in one-dimensional collapsible tubes. In: *Journal of Fluids and Structures* 9 (1995), S. 393–408
- [111] WAMBSGANSS, M. : Second-order effects as related to critical coolant flow velocities and reactor parallel plate fuel assemblies. In: *Nuclear Engineering and Design* 5 (1967), S. 268–276
- [112] WAUER, J. : Nonlinear waves in a fluid-filled planar duct with a flexible wall. In: *IUTAM Symposium on Recent developments in non-linear oscillations of mechanical systems*, 2000, S. 321–332
- [113] WAUER, J. : *Kontinuumsschwingungen*. Vieweg+Teubner, 2008
- [114] WEAVER, D. ; PAÏDOUSSIS, M. : On collapse and flutter phenomena in thin tubes conveying fluid. In: *Journal of Sound and Vibration* 50 (1977), S. 117–132

- [115] WEBER, W. : Theorie der durch Wasser oder andere incompressibele Flüssigkeiten in elastischen Röhren fortgepflanzten Wellen. In: *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* 18 (1866), S. 353–357
- [116] WEBSTER, P. : Wall motion in expiratory flow limitation: Choke and flutter. In: *The American Physiological Society* 1 (1985), S. 1304–1312
- [117] WIBEL, W. : *Untersuchungen zu laminarer, transitioneller und turbulenter Strömung in rechteckigen Mikrokanälen*, Forschungszentrum Karlsruhe, Diss., 2009
- [118] WIGGINS, S. : *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, 2003
- [119] ZIEREP, J. ; BÜHLER, K. : *Grundzüge der Strömungslehre*. Vieweg+Teubner, 2010