

Elektroschwache Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion am LHC

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Anastasiya Bierweiler
aus Duschanbe, Tadschikistan

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Mai 2014
Referent: Prof. Dr. J. H. Kühn
Korreferent: Prof. Dr. M. Steinhauser

Die wissenschaftliche Einstellung ist gewiß eine der größten Errungenschaften der letzten fünfhundert Jahre. Sie bedeutet eine Haltung der Objektivität. Sie war eine menschliche Einstellung, bei der es um Bescheidenheit ging und um die Stärke, die Welt objektiv zu betrachten, das heißt, sie so zu sehen, wie sie ist, und nicht entstellt durch unsere eigenen Wünsche, Ängste und Vorstellungen. Man musste den Mut haben, zu sehen und zu überprüfen, ob die gefundenen Daten unsere Vorstellung bestätigten oder widerlegten, und man musste den Mut haben, eine Theorie zu ändern, wenn die Ergebnisse die Theorie nicht bewiesen. Das war das Wesen wissenschaftlichen Denkens. Es hat tatsächlich mit der Fähigkeit zu tun, sich von etwas überraschen zu lassen und sich zu wundern. Die meisten großen wissenschaftlichen Entdeckungen haben ihren Ausgang von einem Punkt genommen, an dem ein einzelner das als nicht mehr gegeben ansah, was für alle bisher unzweifelhaft war. An einem Punkt war er erstaunt, war er überrascht – und dies ist die wissenschaftliche Entdeckung. Der sich daran anschließende Prozeß ist sekundär. Er forscht, überprüft, testet und macht alle möglichen Dinge, doch der wirkliche Geist der Entdeckung ist nicht in all der sich anschließenden sogenannten wissenschaftlichen Forschung. Die tatsächliche Quelle der wissenschaftlichen Entdeckung war jener Augenblick, indem er fähig war, sich über etwas zu wundern, worüber sich bisher noch nie jemand gewundert hatte.

Erich Fromm

“Die Pathologie der Normalität – Zur Wissenschaft vom Menschen”

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Theoretische Grundlagen	5
1.1 Das Standardmodell	5
1.1.1 Die elektroschwache Wechselwirkung	5
1.1.2 Die starke Wechselwirkung	11
1.2 Das Parton-Modell	12
1.2.1 Integrierter hadronischer Wirkungsquerschnitt	14
1.2.2 Phasenraumschnitte	16
1.2.3 Differentieller hadronischer Wirkungsquerschnitt	18
2 Strahlungskorrekturen, Infrarot- und kollineare Divergenzen	23
2.1 Renormierung und Regularisierung	25
2.1.1 Dimensionale Regularisierung	25
2.1.2 On-Shell Renormierung	26
2.2 Behandlung der infraroten und kollinearen Singularitäten	32
2.2.1 Massensingularitäten	32
2.2.2 Integration über den Phasenraum des Bremsstrahlungs-Photons	35
2.2.3 Infrarote Bremsstrahlung des Photons	41
2.2.4 Kollineare Abstrahlung des Bremsstrahlungs-Photons	42
2.2.5 Faktorisierung der Anfangszustandssingularitäten in der QED	44
2.3 Sudakov-Logarithmen	49
3 Software-Implementierung	53
3.1 Analytische Berechnung	53
3.2 Numerische Berechnung	54
3.3 Konsistenz der Rechnung	55
4 Elektroschwache Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion	57
4.1 Motivation	58
4.2 Bornsche Näherung	62
4.2.1 Annahmen und Näherungen	64
4.2.2 Eingabeparameter	66
4.2.3 Wirkungsquerschnitte in Bornscher Näherung	68
4.3 Strahlungskorrekturen	75
4.3.1 Abhängigkeit von Slicing-Parameter ΔE und $\Delta\Theta$	77
4.4 Numerische Resultate	79
4.4.1 Integrierte Wirkungsquerschnitte	79

4.4.2	Differentielle Wirkungsquerschnitte	83
4.5	Vergleich der Rechnungen	89
4.6	Vergleich der numerischen Ergebnisse	94
5	Zusammenfassung	97
A	Anhang	99
A.1	Mathematische Hilfsmittel	99
A.1.1	Dilogarithmen	99
A.1.2	Plus- Distribution	100
B	Anhang	101
B.1	Parametrisierung des Phasenraums	101
B.1.1	Zwei-Teilchen-Phasenraum	102
B.1.2	Drei-Teilchen-Phasenraum	103
B.1.3	Numerische Parametrisierung des Phasenraums	107
C	Anhang	113
C.1	Bremsstrahlung des Infrarotphotons	114
C.1.1	Matrizelement in Eikonal-Näherung	114
C.1.2	Wirkungsquerschnitt in der Eikonal-Näherung	116
C.2	Abspaltung der kollinearen Massensingularitäten der einlaufenden Fermionen	126
C.2.1	Matrizelement für Photonemission im Anfangszustand	126
C.2.2	Kollinearer Wirkungsquerschnitt für die Photonemission im Anfangszustand	132
D	Anhang	139
D.1	Definition	139
D.2	Symmetrien der N -Punkt-Funktionen	143
D.3	UV-divergenter Anteil der skalaren N -Punkt-Funktionen	144
E	Anhang	147
	Literaturverzeichnis	160

Einleitung

Die Frage nach den fundamentalen Eigenschaften der Natur und ihren Gesetzen ist eine Hauptmotivation in der Physik. Auf der Suche nach der Antwort sind die Physiker zu immer kleineren, schließlich nicht mehr teilbaren Bestandteilen der Materie vorgedrungen, die untereinander über eine oder mehrere fundamentale Wechselwirkungen interagieren. Bereits im 19. Jahrhundert wurde erkannt, dass die Materie aus Atomen besteht. Mit der Zeit wurde festgestellt, dass die Atome eine innere Struktur besitzen und aus einer Elektronenwolke und einem dichten Kern bestehen. Der Kern wiederum setzt sich aus Protonen und Neutronen zusammen, die ebenfalls aus noch kleineren Teilchen, den Quarks, aufgebaut sind. Bisher wurde keine innere Struktur der Quarks gefunden, weshalb sie als fundamental angesehen werden. Die Bestandteile der Kernmaterie ließen sich nicht mehr durch die bis dahin bekannten Gesetze der Physik beschreiben, so dass eine neue Theorie entwickelt werden musste.

Die Elementarteilchenphysik versucht, die Bausteine der Materie, ihre Eigenschaften und ihr Verhalten zu bestimmen sowie ihre Wechselwirkung zu erforschen. Dazu werden die bekannten und neu postulierten Elementarteilchen und Wechselwirkungen in eine mathematische Beschreibung eingefügt, die kontinuierlich erweitert wird, um die experimentellen Ergebnisse zu reproduzieren, neue Vorhersagen zu liefern oder eine theoretisch vollständige Formulierung der Modelle zu erreichen. In diesem Zusammenhang ist der Begriff der Symmetrie von zentraler Bedeutung und wird als Fundament für die Modelle verwendet. Ein von der Mathematikerin Emmy Noether im Jahr 1918 formuliertes Theorem besagt, dass aus der Invarianz eines physikalischen Systems unter einer kontinuierlichen Transformation eine Erhaltungsgröße resultiert. Bereits in der klassischen Physik lässt sich das Noether-Theorem anwenden: Aus der Homogenität der Zeit folgt Energieerhaltung, aus der Homogenität des Raumes ergibt sich Impulserhaltung, und die Drehimpulserhaltung ist die Konsequenz der Isotropie des Raumes. Eine besondere Rolle für die Physik der Elementarteilchen spielen hingegen lokale Eichsymmetrien. Dabei handelt es sich um eine Invarianz einer physikalischen Größe unter einer lokalen Symmetrietransformation, welche gewährleistet, dass physikalische Größen nicht von der Wahl einer speziellen Eichung abhängen. Diese Eichinvarianz tauchte erstmal in der Elektrodynamik auf und legt die Gestalt der Wechselwirkung zwischen den Teilchen fest und stellt das wichtigste Konstruktionsprinzip des Standardmodells der Elementarteilchenphysik dar.

Aus der Beobachtungen der Natur sind derzeit vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt. Zwei dieser Wechselwirkungen sind die makroskopisch direkt zugängliche Kräfte des Elektromagnetismus und der Gravitation, die anderen beiden sind die nur mikroskopisch erfassbare starke und schwache Wechselwirkung. Ihr Verhalten sowie das Verhalten der elementaren Bausteine der Materie wird durch das Standardmodell der Elementarteilchenphysik beschrieben. Das Standardmodell ist eine nichtabelsche Eichtheorie, wobei ein Teil der Symmetriegruppe spontan gebrochen ist. Eine Vorhersage von Eichtheorien ist der Austausch von Eichbosonen als Überträger der Wechselwirkungen. Die gemeinsame Beschreibung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkungen wurde dabei zuerst von Sheldon Glashow, Steven Weinberg und Abdus Salam [1–3] im Jahr 1967 formuliert¹ und später um die als Quantenchromodynamik (QCD) bekannte Theorie der starken Wechselwirkung [9–15] erweitert. Eine konsistente quantenfeldtheoretische Beschreibung der gravitativen Effekte zwischen Elementarteilchen ist bislang noch nicht bekannt.

Experimentell konnte das Standardmodell in der Vergangenheit sehr gut bestätigt werden. So konnten in den vergangenen Jahren und Jahrzehnten Präzisionsmessungen, die an Hochenergiebeschleunigern wie LEP, Tevatron und LHC gewonnen wurden, sowohl die theoretischen Vorhersagen bestätigen als auch die Parameter des Standardmodells mit beeindruckender Genauigkeit bestimmen. Als gutes Beispiel dient der erste experimentelle Nachweis der W^\pm - und Z-Bosonen an UA1 [7, 8] und die Messung ihrer Massen und Zerfallsbreiten und die Präzisionsmessungen ihrer Kopplungen an Leptonen und Quarks bei LEP [16, 17]. Ein weiterer wichtiger Parameter des Standardmodells ist die Fermi-Konstante² G_μ , die aus der Myon-Zerfallsbreite theoretisch und durch den Myon-Zerfall experimentell bestimmt wurde [18–20]. Hinzu kommt die Entdeckung des Top-Quarks am Tevatron [21, 22] und die direkte Messung seiner Masse. Die nichtabelsche Struktur der Wechselwirkung sagt Selbstkopplungen der Eichbosonen vorher, die zwar direkt aus der Eichboson-Paarproduktion extrahiert, jedoch noch nicht mit ausreichender Genauigkeit gemessen werden. Die Entdeckung des Higgs-Bosons, das als bis dahin einzige Vorhersage des Standardmodells unentdeckt blieb, vollendete die experimentelle Bestätigung aller vorhergesagten Teilchen des Standardmodells [23, 24]. Im Juli 2012 konnten die Kollaborationen ATLAS [23] und CMS [24] ein skalares Teilchen mit einer Masse von ungefähr 125 GeV nachweisen. Die Ergebnisse zu den Zerfallskanälen dieses skalaren Teilchens [25] deuten darauf hin, dass es sich um das im Standardmodell postulierte Higgs-Boson handelt, welches als Relikt der spontan gebrochenen Eichsymmetrie in Erscheinung tritt und durch den Higgs-Mechanismus allen anderen Teilchen Masse verleiht. Der aktuelle Stand der entsprechenden Präzisionsmessungen der letzten Jahre ist in Ref. [26–28] zusammengefasst.

¹Experimentell wurde die GWS-Theorie im Jahr 1973 indirekt durch die Entdeckung der neutralen Ströme in Neutrino-Reaktionen [4–6] und im Jahr 1983 direkt durch den Nachweis der W^\pm - und Z-Eichbosonen bestätigt [7, 8].

² $G_\mu = 1.16637(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ tritt als Kopplungskonstante bei den Prozessen der schwachen Wechselwirkung auf. Daher ist es enorm wichtig, die Strahlungskorrekturen zum Myon-Zerfall möglichst genau zu kennen.

Die elektroschwache Eichboson-Paarproduktion an Hochenergiebeschleunigern wie dem LHC bietet eine hervorragende Möglichkeit, den elektroschwachen Bereich des Standardmodells genau zu testen. Die Amplitude dieser Prozesse enthält eine Drei-Eichboson-Kopplung, weshalb der dazugehörige Wirkungsquerschnitt Rückschlüsse auf die nichtabelsche Struktur des elektroschwachen Standardmodells zulässt. Jegliche Abweichung der gemessenen Wirkungsquerschnitte und der kinematischen Verteilungen von den Werten, die vom Standardmodell vorhergesagt werden, kann auf die Signatur neuer Physik hinweisen, die sich durch anomale Eichboson-Wechselwirkungen manifestiert. Um diese Abweichungen vom Standardmodell eindeutig zu identifizieren und um sie klar von unbekanntem störungstheoretischen Korrekturen zu unterscheiden, sind hochpräzise Berechnungen entscheidend.

Desweiteren ist die Eichboson-Paarproduktion auch ein Untergrund für Physik jenseits des Standardmodells. Eines der „goldenen“ Signale für die Supersymmetrie bei Hadron-Beschleunigern ist die Chargino-Neutralino-Produktion, welches zu einem Signal mit drei geladenen Leptonen und fehlendem Transversalimpuls führen würde. Der wichtigste Untergrund für diese Signatur ist durch WZ-Produktion gegeben. Da in beiden Fällen die Zerfallskanäle im Detektor ähnliche Spuren hinterlassen, bildet der Standardmodell-Prozess den Untergrund für Suche nach Supersymmetrie. Ebenso können Teilchen falsch identifiziert werden oder so zerfallen, dass deren Zerfallsprodukte nicht detektiert werden oder im Strahlrohr verloren gehen, in diesem Fall spricht man von reduzierbaren Untergründen. Führen verschiedene Prozesse zur selben Signatur im Detektor, spricht man hingegen von irreduzierbaren Untergründen. Die Erzeugung von W-Paaren bei der Messung von Chargino- und Slepton-Paarproduktion, welche beide zu zwei Leptonen und fehlendem Transversalimpuls führen, ist ein Beispiel hierfür.

Das Interesse an diesen Fragen wird durch gesammelte Daten, die bei ATLAS [29, 30] und CMS [31–35] gemessen wurden, hervorgehoben, denn diese Messungen zeigen eine leichte Abweichung zwischen den gemessenen Wirkungsquerschnitten für die Eichboson-Paarproduktion und den derzeitigen theoretischen Vorhersagen im Standardmodell. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob die elektroschwachen Korrekturen einen bedeutsamen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Die Eichboson-Paarproduktion wurde bereits sowohl bei LEP als auch am Tevatron intensiv untersucht. Wie die Analysen der LEP2-Daten gezeigt haben [36], ist eine Berücksichtigung elektroschwacher Korrekturen für das Verständnis der experimentellen Ergebnisse unentbehrlich. Im Fall der Eichboson-Paarproduktion in Proton-Proton-Kollisionen können die elektroschwachen Korrekturen zur Entscheidung beitragen, ob eine eventuelle Abweichung der experimentellen Ergebnisse vom Bornschen Wirkungsquerschnitt auf Korrekturen höherer Ordnung zurückgeht oder als ein Hinweis auf neue Physik interpretiert werden kann.

Die vorliegende Arbeit enthält die Berechnung der vollständigen elektroschwachen $\mathcal{O}(\alpha)$ Strahlungskorrekturen, also störungstheoretische Korrekturen erster Ordnung, zu den Prozessen $pp \rightarrow WW, ZZ, W^\pm Z$ und $\gamma\gamma$. In Kapitel 1 werden zunächst sowohl der elektroschwache

Sektor des Standardmodells eingeführt als auch die Grundlagen der Phänomenologie hadronischer Reaktionen erläutert. Zentraler Bestandteil der Diskussion ist hierbei die als perturbative Quantenchromodynamik (QCD) bekannte störungstheoretische Formulierung der starken Wechselwirkung. Diese erlaubt eine Faktorisierung der Wirkungsquerschnitte für die hadronischen Prozesse in einen störungstheoretisch berechenbaren Anteil und die experimentell zu bestimmenden Partonverteilungen.

Aufgrund der endlichen Energie- und Winkelauflösung eines Detektors und der Masselosigkeit des Photons kann experimentell nicht exakt bestimmt werden, welcher Anteil der niederenergetischen, elektromagnetischen Energie zusätzlich freigesetzt wird. In Kapitel 2 werden die Grundlagen der Rechnung zu $\mathcal{O}(\alpha)$ Strahlungskorrekturen vorgestellt, welche demnach nicht nur aus den sogenannten virtuellen Korrekturen (also Feynman-Diagrammen mit einer Schleife) bestehen, sondern auch die Beiträge enthalten, die durch reelle Photonemission (die sogenannte Bremsstrahlung) zustandekommen. Bei den Bremsstrahlungskorrekturen wird hierbei zwischen der Emission von infraroten (niederenergetischen) und harten kollinearen bzw. harten nicht-kollinearen (hochenergetischen) Photonen unterschieden. Während die virtuellen Strahlungskorrekturen zunächst mit Hilfe der in Kapitel 3 beschriebenen Programme von Tensorintegralen auf die skalaren Integrale zurückgeführt und anschließend renormiert werden, erfordert die Berechnung der harten Bremsstrahlung eine vollständige Analyse der radiativen Prozesse $pp \rightarrow V_1 V_2 \gamma$ in niedrigster Ordnung der Störungstheorie.

In Kapitel 3 werden die Programme vorgestellt, welche teilweise im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden und die Berechnung der hadronischen Wirkungsquerschnitte und deren Verteilungen ermöglichen. Die numerischen Resultate für die Strahlungskorrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ für die unpolarisierten Wirkungsquerschnitte und deren Verteilungen werden in Kapitel 4 ausführlich besprochen. Es wird gezeigt, dass die Berücksichtigung von elektroschwachen Strahlungskorrekturen in theoretischen Vorhersagen für die Eichboson-Paarproduktion erforderlich ist, um der erreichten experimentellen Genauigkeit Rechnung zu tragen.

Eine Zusammenfassung in Kapitel 5 schließt den Hauptteil dieser Arbeit ab. In den Anhängen finden sich verwendete Definitionen der Dilogarithmen und Plus-Distribution (Anhang A), die Parametrisierung der Zwei- und Drei-Teilchen-Phasenräume (Anhang B), die Herleitung der Bremsstrahlungskorrekturen (Anhang C), die Definition der skalaren N -Punkt-Funktionen (Anhang D) und weitere numerische Ergebnisse von Prozessen (Anhang E), welche nicht in Kapitel 4 aufgeführt sind.

Kapitel 1

Theoretische Grundlagen

Die Darstellung dieses Abschnitts folgt im Wesentlichen sowohl den Lehrbüchern [37–39] als auch der Habilitationsschrift von A. Denner [40] und weiteren, dort zitierten Arbeiten.

1.1 Das Standardmodell

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik [1–3, 11, 12, 41–43] ist durch eine Quantenfeldtheorie beschrieben, die auf dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz beruht. Es beschreibt drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen: Die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung in einer einheitlichen Form. Die schwache Wechselwirkung ist z. B. für den radioaktiven β -Zerfall verantwortlich ist, wohingegen die starke Wechselwirkung die Bindung der Quarks und Gluonen in Hadronen beschreibt. Es fehlt noch eine konsistente quantenfeldtheoretische Beschreibung gravitativer Wechselwirkungen. Da aber die gravitative Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen in den Energie- und Größenbereichen, die heutzutage für die Elementarteilchenphysik relevant sind, außerordentlich schwach ist, wird im Folgenden auf sie nicht weiter eingegangen. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird die theoretische Beschreibung des elektroschwachen Sektors des Standardmodells sowie der starken Wechselwirkung kurz vorgestellt.

1.1.1 Die elektroschwache Wechselwirkung

Das Modell von Glashow, Weinberg und Salam [1–3] vereinigt die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zur elektroschwachen Wechselwirkung. Ihre Struktur ist durch eine nichtabelsche Eichsymmetrie der Gruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$ bestimmt. Die Wechselwirkungen der fundamentalen Teilchen werden dabei durch den Austausch der sogenannten Eichbosonen (Spin-1-Teilchen) vermittelt, die über lokale innere Symmetrien in die Theorie eingeführt werden. Neben der Beschreibung der Wechselwirkungen müssen auch noch die Konstituenten der Materie festgelegt werden. Die Rolle der Materiefelder übernehmen die Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, die sogenannten Fermionen. Die Materiefelder sind durch jeweils drei Generationen von links-

und rechts-chiralen Quarks und Leptonen $\Psi_{L,R}$ gegeben, welche als Eigenzustände des Chiralitäts-Operators γ_5 aufgefasst werden können,

$$\gamma_5 \Psi_{L,R} = \mp \Psi_{L,R}. \quad (1.1)$$

Zu den Leptonen gehören das Elektron, das Myon und das Tau sowie ein Neutrino in jeder Generation. Die sechs Quarks sind Up-, Down-, Charm-, Strange-, Top- und Bottom-Quark. Quarks wechselwirken sowohl elektroschwach als auch stark. Die Quarks der ersten Generation (Up und Down) bilden die Bausteine der Protonen und Neutronen. Leptonen wechselwirken dagegen ausschließlich elektroschwach.

Die links-chiralen Fermionen transformieren sich wie Dubletts unter der fundamentalen Darstellung der $SU_L(2)$

$$L_i^L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}^L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}^L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}^L \quad \text{und} \quad Q_i^L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}^L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}^L,$$

während die rechts-chiralen Fermionen

$$l_i^R = e^R, \mu^R, \tau^R, \quad u_i^R = u^R, c^R, t^R \quad \text{und} \quad d_i^R = d^R, s^R, b^R$$

$SU(2)$ -Singulets sind. Neutrinos nehmen hierbei eine Sonderrolle an. Während die experimentellen Befunde [44, 45] auf nichtverschwindende Neutrino-Massen schließen lassen, werden dennoch im Rahmen dieser Arbeit ihre Massen ($m_\nu < 2$ eV, siehe Ref. [46]) vernachlässigt. Außerdem werden den massiven Fermionen im Standardmodell vier Freiheitsgrade zugeschrieben, während die Neutrinos nur zwei Freiheitsgrade erhalten und gehen somit nur als linkshändige Teilchen in die Lagrange-Dichte des Standardmodells ein.

Das Postulat eines unterschiedlichen Transformationsverhaltens der links- und rechtschiralen Fermionen ist durch die experimentelle Beobachtung der Paritätsverletzung [47] motiviert. Die damit verbundene Quantenzahl wird als schwacher Isospin bezeichnet, der für die obere Komponente eines $SU(2)$ -Dubletts den Wert $I = +\frac{1}{2}$ und für die untere $I = -\frac{1}{2}$ hat. $SU(2)$ -Singulets werden durch $I = 0$ gekennzeichnet. Aus der experimentell bestätigten Annahme, dass die schwache Wechselwirkung die Parität, also die Symmetrie unter Raumspiegelung, maximal verletzt, ergeben sich unterschiedliche Kopplungen der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung an links- und rechtshändige Fermionen. Die Quantenzahl der $U(1)_Y$ -Symmetrie, welche die Invarianz der Lagrange-Dichte unter lokalen Phasentransformationen der Felder angibt, ist die Hyperladung Y , die mit der elektrischen Ladung Q und der dritten Komponente des schwachen Isospins I_W^3 durch die Gell-Mann-Nishijima-Relation

$$Q = I_W^3 + \frac{Y}{2} \quad (1.2)$$

zusammenhängt. Die Quantenzahlen der elektroschwachen Wechselwirkung sind in Tabel-

Notation	1. Generation	2. Generation	3. Generation	\mathbf{I}_W^3	\mathbf{Q}	\mathbf{Y}
$L_i^L =$	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}^L$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}^L$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}^L$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0 -1	-1 -1
$l_i^R =$	e^R	μ^R	τ^R	0	-1	-2
$Q_i^L =$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}^L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}^L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}^L$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{3}$ $+\frac{1}{3}$
$u_i^R =$	u^R	c^R	t^R	0	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{4}{3}$
$d_i^R =$	d^R	s^R	b^R	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Tabelle 1.1: Materieinhalt des Standardmodells.

le 1.1 dargestellt. Zudem tragen die Quarks im Gegensatz zu Leptonen zusätzlich Farbladung, welche in drei Ladungen vorkommen. Die Generatoren der elektroschwachen Wechselwirkung sind im Farbraum diagonal.

Im Folgenden wird näher auf die formale Struktur der elektroschwachen Theorie eingegangen. Ausgangspunkt für die Konstruktion des elektroschwachen Standardmodells ist die Lagrange-Dichte für freie, masselose Fermionfelder Ψ

$$\mathcal{L}_F = \sum_{\text{Fermionen}} i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi, \quad (1.3)$$

die unter einer globalen $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Transformation invariant ist. Die Forderung nach Invarianz unter einer lokalen, d. h. ortsabhängigen Transformation, lässt sich durch minimale Substitution der gewöhnlichen partiellen Ableitung ∂_μ in Gl. (1.3) durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu \Psi = \left(\partial_\mu - ig_2 I^a \mathcal{W}_\mu^a - ig_1 \frac{Y}{2} \mathcal{B}_\mu \right) \Psi \quad (1.4)$$

erzielen, wobei I^a und Y die Generatoren der jeweiligen Eichgruppe sind. Dabei bezeichnen g_2 und g_1 die Kopplungskonstanten der Gruppen $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$. Die entsprechenden Wechselwirkungen werden durch die Felder \mathcal{B}_μ und \mathcal{W}_μ^a vermittelt. Das Feld \mathcal{B}_μ ist das Eichfeld der schwachen Hyperladung $U(1)_Y$ und die Felder \mathcal{W}_μ^a gehören zur Gruppe des schwachen Isospins $SU(2)_L$. Das Transformationsverhalten dieser Felder gewährleistet die lokale $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichsymmetrie der Lagrange-Dichte.

Mit den fermionischen Materiefeldern aus Tabelle 1.1 und der kovarianten Ableitung (1.4) ergibt sich für die Lagrange-Dichte aus Gl. (1.3):

$$\mathcal{L}_F = i \bar{L}_i^L \not{D} L_i^L + i \bar{Q}_i^L \not{D} Q_i^L + i \bar{l}_i^R \not{D} l_i^R + i \bar{u}_i^R \not{D} u_i^R + i \bar{d}_i^R \not{D} d_i^R. \quad (1.5)$$

Sie beschreibt den kinetischen Anteil der Fermionen und durch die kovariante Ableitung auch die Wechselwirkung der Fermionen mit den Eichbosonen. Die Eichwechselwirkung unterscheidet dabei nicht zwischen Fermionen verschiedener Generationen.

Der kinetische Term für die Eichbosonen \mathcal{W}_μ^a und \mathcal{B}_μ lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4}\mathcal{W}_{\mu\nu}^a\mathcal{W}^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4}\mathcal{B}_{\mu\nu}\mathcal{B}^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu\mathcal{W}_\nu^a - \partial_\nu\mathcal{W}_\mu^a + g_2f^{abc}\mathcal{W}_\mu^b\mathcal{W}_\nu^c, \\ \mathcal{B}_{\mu\nu} &= \partial_\mu\mathcal{B}_\nu - \partial_\nu\mathcal{B}_\mu. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dabei bezeichnen $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ die Strukturkonstanten der Gruppe $SU(2)_L$.

Die Unzulänglichkeit des Modells liegt darin, dass die Lagrange-Dichten in Gl. (1.5) und Gl. (1.6) keine Massenterme enthalten können, da diese expliziten Massenterme für Eichbosonen und für Fermionen die Eichinvarianz brechen würden. Massenterme für die Fermionen der Form $-m\bar{\Psi}\Psi = -m(\bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R)$ würden die Invarianz unter der $SU_L(2)$ -Isospintransformation explizit brechen. In der Natur werden sowohl massive Eichbosonen W^\pm und Z als auch massive Fermionen beobachtet. Die Eichinvarianz ist jedoch eine Voraussetzung für die Renormierbarkeit der Theorie. Mit Hilfe des Higgs-Mechanismus¹ [48–53] jedoch können Massenterme in eichinvarianter Form eingefügt werden. Dabei werden die Massen der jeweiligen Teilchen über die Kopplung an ein zusätzliches Skalarfeld, das Higgs-Feld Φ , generiert.² Das Higgs-Feld ist ein komplexes skalares $SU(2)_L$ -Dublett $\Phi = (\Phi^+(x), \Phi^0(x))^T$ mit Hyperladung $Y_\Phi = 1$, dessen Potential $V(\Phi)$ die Form

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \mu^2\Phi^\dagger\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad (1.8)$$

annimmt. Damit das Potential nach unten beschränkt ist, muss $\lambda > 0$ gelten. Für $\mu^2 < 0$ folgt zudem, dass das Dublett-Feld Φ einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert

$$\langle\Phi^\dagger\Phi\rangle = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \neq 0 \quad (1.9)$$

einnimmt und um das Minimum entwickelt werden kann:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x) + i\chi(x)) \end{pmatrix}, \quad \text{mit } v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (1.10)$$

Die hier auftretenden Felder H , Φ^+ , $\Phi^- = (\Phi^+)^\dagger$ und χ haben den Vakuumerwartungswert

¹Besser: Higgs-Brout-Englert-Guralnik-Hagen-Kibble-Mechanismus.

²François Englert und Peter W. Higgs haben im Jahr 2013 den Nobelpreis für Physik für die Postulierung des Higgs Mechanismus erhalten.

Null. Das neutrale Higgs-Boson wird mit H beschrieben. Die sogenannten Goldstone-Bosonen Φ^\pm und χ können durch die Wahl der Eichung (unitäre Eichung) eliminiert und in einen zusätzlichen Freiheitsgrad der Eichbosonen überführt werden. Der Vakuumzustand selbst ist nicht mehr invariant unter $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Transformationen und führt daher zu einer spontanen Brechung der Eichsymmetrie, die auf dynamische Weise die Massen generiert.

Ungebrochen bleibt eine $U(1)$ -Symmetrie, die mit der elektromagnetischen Wechselwirkung identifiziert wird. Das dazugehörige Eichboson, das Photon, bleibt masselos, da der Generator den Vakuumerwartungswert invariant lässt. Der Generator der $U(1)_{\text{em}}$ Gruppe ist die elektrische Ladung Q , die gemäß Gl. (1.2) definiert ist, wobei die Gl. (1.2) auch als Operator-Gleichung gelesen werden kann.

Die Wechselwirkungen des Higgs-Dubletts mit den Eichbosonen \mathcal{W}_μ^a und \mathcal{B}_μ sind über den kinetischen Term $(D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi)$ durch die kovariante Ableitung (1.4) bestimmt, so dass der Vakuumerwartungswert zu Massentermen für die Eichbosonen in der Lagrange-Dichte führt:

$$\begin{aligned} |D_\mu\Phi|^2 &= \left| \left(\partial_\mu - \frac{1}{2}ig_2I^a\mathcal{W}_\mu^a - \frac{1}{2}g_1\mathcal{B}_\mu \right) \Phi \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \partial_\mu - \frac{i}{2}(g_2\mathcal{W}_\mu^3 + g_1\mathcal{B}_\mu) & -\frac{i}{2}g_2(\mathcal{W}_\mu^1 - i\mathcal{W}_\mu^2) \\ -\frac{i}{2}g_2(\mathcal{W}_\mu^1 + i\mathcal{W}_\mu^2) & \partial_\mu + \frac{i}{2}(g_2\mathcal{W}_\mu^3 - g_1\mathcal{B}_\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \right|^2 + \dots \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu H)^2 + \frac{1}{8}g_2^2(v + H)^2|\mathcal{W}_\mu^1 + i\mathcal{W}_\mu^2|^2 + \frac{1}{8}(v + H)^2|g_2\mathcal{W}_\mu^3 - g_1\mathcal{B}_\mu|^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Da das Higgs-Dublett sowohl an $SU(2)$ - als auch an $U(1)_Y$ -Eichbosonen koppelt, mischen diese. Diese Eigenschaft kann durch den elektroschwachen Mischungswinkel θ_W beschrieben werden. Die dadurch entstandenen Linearkombinationen der Felder \mathcal{W}_μ und \mathcal{B}_μ bilden die Masseneigenzustände der physikalischen Eichbosonen W_μ^\pm , Z_μ und A_μ

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{W}_\mu^1 \mp i\mathcal{W}_\mu^2) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}_\mu^3 \\ \mathcal{B}_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

die auch Eigenzustände des elektromagnetischen Ladungsoperators Q sind. Das Feld A_μ wird mit dem masselosen Photonfeld der Quantenelektrodynamik (QED) identifiziert. Der elektroschwache Mischungswinkel lässt sich aus den Eichkopplungen des Standardmodells bestimmen

$$\cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad \text{und} \quad \sin\theta_W = \sqrt{1 - \cos^2\theta_W} = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (1.13)$$

wobei dieser nicht nur die Eichbosonmassen durch

$$M_W = M_Z \cos\theta_W \quad (1.14)$$

miteinander in Beziehung setzt, sondern auch die elektromagnetische Kopplung e mit g_1 und g_2 korreliert

$$e = \sqrt{4\pi\alpha_{\text{em}}} = g_1 \cos \theta_W = g_2 \sin \theta_W = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (1.15)$$

Hierbei ist α_{em} die Feinstrukturkonstante (gelegentlich auch α_{QED} genannt).

Es fehlen noch die Massenterme für die Fermionen. Terme der Form $m\bar{\Psi}\Psi$ sind nicht eichinvariant, jedoch lassen sich die Fermionmassen durch die Yukawa-Kopplungen des Higgs-Dubletts an die Fermionfelder

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{\text{Generationen } i,j} -\bar{L}_i^L G_{ij}^l l_j^R \Phi - \bar{Q}_i^L G_{ij}^u u_j^R \tilde{\Phi} - \bar{Q}_i^L G_{ij}^d d_j^R \Phi + \text{h. c.} \quad (1.16)$$

erzeugen. Das ladungskonjugierte Higgs-Dublett $\tilde{\Phi} = i\sigma_2 \Phi^*$ ermöglicht es, auch den oberen Komponenten der Isospindubletts Masse zu geben. Die Matrix G_{ij}^f ($i, j = 1, 2, 3$) stellt die Kopplungskonstanten der Yukawa-Wechselwirkung des Higgs-Dubletts an die Fermionfelder dar und ist eine beliebige Matrix im Raum der Materiegenerationen. Solche Matrizen können durch bi-unitäre Transformationen diagonalisiert werden, so dass die physikalischen Massen durch

$$m_{f,i} = \mathcal{U}_{ij}^{f,l} G_{jk}^f \mathcal{U}_{ki}^{f,r\dagger} \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1.17)$$

gegeben sind. Hierbei werden die links- und rechtshändigen Felder unterschiedlich rotiert:

$$\tilde{\Psi}_{\kappa,i} = \mathcal{U}_{ij}^{f,\kappa} \Psi_{\kappa,j}. \quad (1.18)$$

Nach diesen Rotationen sind alle Terme der Lagrange-Dichte (1.16) diagonal in den Beiträgen der Fermionmassen. Im Wechselwirkungsterm der Quarks mit dem W-Boson wird hierdurch jedoch eine Flavour-Mischung induziert. Die Quark-Mischungsmatrix

$$V_{ij}^{\text{CKM}} = \mathcal{U}_{ik}^{u,l} \mathcal{U}_{kj}^{d,l\dagger} \quad (1.19)$$

ermöglicht Flavour-ändernde geladene Ströme. Die sogenannte CKM-Matrix V^{CKM} (benannt nach Cabibbo, Kobayashi und Maskawa) [54, 55] ist unitär und kann durch komplexwertige Einträge CP-verletzende Effekte im Rahmen des elektroschwachen Standardmodells erklären. Das leptonische Analogon, also die PMNS-Matrix (benannt nach Pontecorvo, Maki, Nakagawa und Sakata) [56–59], ist zwar experimentell vermessen, für deren theoretische Beschreibung muss jedoch das Standardmodell minimal erweitert werden. Eine weitere Eigenschaft der eichinvarianten Formulierung für die Massenterme nach dem oben beschriebenen Mechanismus ist die Renormierbarkeit wie von 't Hooft und Veltman [60–62] gezeigt.

1.1.2 Die starke Wechselwirkung

Die starke Wechselwirkung, auch Quantenchromodynamik (*griech.*: chromos, Farbe) genannt, ist ebenfalls durch eine Eichtheorie beschrieben, welche auf der Eichgruppe $SU(3)_C$ basiert. Der für die starke Wechselwirkung der Quarks verantwortliche Teil der klassischen Lagrange-Dichte des Standardmodells ist:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{n=1}^{n_f} \bar{\Psi}_{n,i} (i \not{D} - m_n)_{ij} \Psi_{n,j} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a}. \quad (1.20)$$

Dabei läuft die Summe über alle Quarks. Die Indizes $i, j = 1, \dots, 3$ stellen die Farbladungen der jeweiligen Quarks dar. Die Anzahl der beteiligten Quark-Flavours wird mit n_f bezeichnet. Die Größe $(m_n)_{ij} = m_n \delta_{ij}$ stellt die Masse der Quarks dar. Die Gluonfelder G_μ^a ($a = 1, \dots, 8$), welche mit den Feldstärkertensoren $G_{\mu\nu}^a$ nach Gl. (1.22) zusammenhängen, treten in acht Farbkombinationen auf, welche mit den acht Generatoren der nichtabelschen Gruppe $SU(3)$ $T^a = \lambda^a/2$ (in der fundamentalen Darstellung) einhergehen, wobei λ^a die sogenannten Gell-Mann-Matrizen sind. Die Generatoren T^a spannen die Lie-Algebra wie folgt auf:

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (1.21)$$

wobei f^{abc} die Strukturkonstanten der nichtabelschen Gruppe $SU(3)$ sind. Nichtabelsch bedeutet hierbei, dass die Generatoren der $SU(3)$ -Transformationen nicht vertauschen. Die Gluonen G_μ^a transformieren sich unter der adjungierten Darstellung. Aufgrund der nichtabelschen Eigenschaften zeigen sie die für Yang-Mills-Theorien [63] typische Selbstwechselwirkung der Eichbosonen,

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (1.22)$$

die durch die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ gegeben ist. Dies ist ein Unterschied zur QED, in der Photonen selbst keine elektrische Ladung tragen und es daher keine Photon-Selbstwechselwirkung gibt.

Die Kopplung der Gluonfelder an die Quarks erfolgt über die kovariante Ableitung, die ohne zusätzlichen Berücksichtigung der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Wechselwirkung die Form annimmt:

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij} \partial_\mu - i g_s T_{ij}^a G_\mu^a. \quad (1.23)$$

Die bisherigen Beschreibungen der elektroschwachen und starken Wechselwirkung sind nicht vollständig. Aufgrund der Selbstwechselwirkung der Eichbosonen können in Schleifen (je nach Eichung) nichtphysikalische Freiheitsgrade auftreten, wodurch die Unitarität der Theorie verletzt wird. Um das zu verhindern, führt man sogenannte Geistfelder ein, die diese unphysikalischen Freiheitsgrade wegheben. Da die Geistfelder für weitere phänomenologische Diskussion irrelevant sind, wird an dieser Stelle auf eine weitere Beschreibung von Geistfeldern

verzichtet. Eine ausführliche Beschreibung der Quantisierung von Eichfeldern findet man z. B. in Ref. [37, 38].

1.2 Das Parton-Modell

Die fundamentalen Teilchen der QCD, Quarks und Gluonen, kommen in der Natur nicht als freie Teilchen vor, sondern existieren nur in gebundenen Zuständen, sogenannten Hadronen. Die QCD besitzt zwei charakteristische Eigenschaften: asymptotische Freiheit [11, 43] und das sogenannte Confinement. Die asymptotische Freiheit beschreibt das Verhalten der Theorie bei kleinen Abständen bzw. großen Energien. In diesem Bereich ist die Wechselwirkung schwach, d. h. die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung wird klein zu hohen Energien hin und die Quarks verhalten sich wie freie Teilchen; sie sind also asymptotisch frei. Diese Eigenschaft rechtfertigt die störungstheoretische Behandlung der QCD bei hohen Energien. Andererseits ist bei niedrigen Energien die Kopplungskonstante so groß, dass die gebundenen Zustände gegenüber freien Quarks energetisch bevorzugt sind. Diese Eigenschaft der QCD, das sogenannte Confinement, führt dazu, dass sich Quarks nicht einzeln beobachten lassen, sondern nur in farbneutralen gebundenen Zuständen wie Mesonen und Baryonen auftreten. Die Störungsreihe bei der in der Kopplungskonstante entwickelt wird, ist wegen der Größe derselben nicht mehr konvergent, so dass die störungstheoretische Behandlung dieser Bindungszustände nicht möglich ist, da dann das „Abbrechen“ der Störungsreihe kein aussagekräftiges Resultat liefern würde.³ Die Energieskala hadronischer Bindungszustände, also Hadronen, liegt im nichtperturbativen Bereich. Zur Beschreibung hadronischer Prozesse mit perturbativen Methoden, also bei hinreichend hohen Energien, wird das sogenannte Parton-Modell [64, 65] verwendet. Eine ausführliche Beschreibung der feldtheoretischen Hintergründe findet sich z. B. in Ref. [66].

Im Parton-Modell sind die Hadronen mit Impuls P^μ aus punktförmigen Konstituenten, den sogenannten Partonen, aufgebaut. Die geladenen Partonen werden mit den Quarks und die elektrisch neutralen mit den Gluonen identifiziert. Diese werden durch ihre Wechselwirkung zusammengehalten. Die Beschreibung des Hadrons erfolgt im sogenannten „infinite momentum frame“, also unter der Annahme, dass bei hohen Energien die Massen der Hadronen und Partonen gegenüber der Energieskala Q des Prozesses vernachlässigbar sind (siehe Ref. [66]). Weiter besitzen die Partonen keine Transversalimpulse, sondern bewegen sich kollinear zum jeweiligen Hadron. Jedes an einem harten Streuprozess teilnehmende Parton trägt dann einen Impulsbruchteil xP^μ des Hadrons, wobei $x \in [0, 1]$ ist.

Die Grundidee des Parton-Modells ist, dass die Stoßprozesse zwischen den Partonen der

³Die Störungsreihe ermöglicht eine Berechnung der Wirkungsquerschnitte in zumindest theoretisch beliebiger Genauigkeit, wobei ihre Anwendbarkeit auf der Kleinheit der Kopplungskonstante basiert. Wird die Störungsreihe abgebrochen, so ist der resultierende Fehler von nächst-höherer Ordnung in der Kopplungskonstanten und dementsprechend klein.

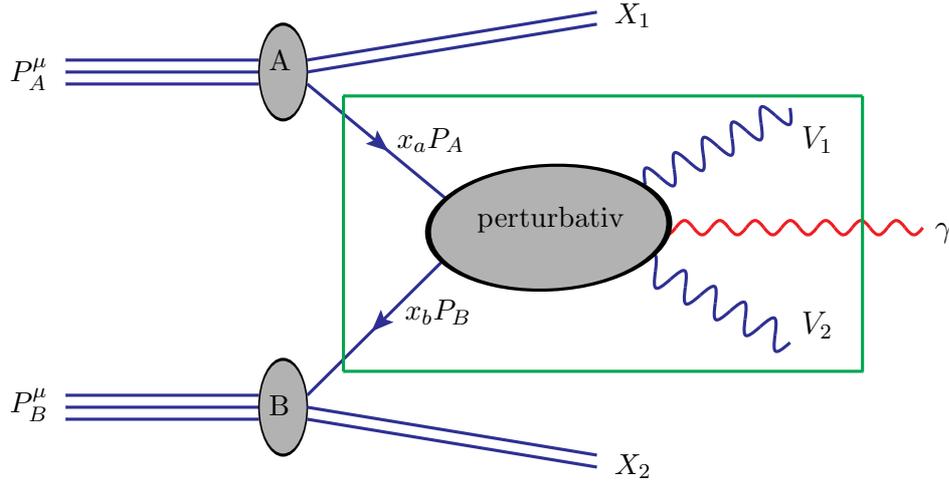


Abbildung 1.1: Diagrammatische Darstellung des Faktorisierungsprozesses für die Eichboson-Paarproduktion $AB \rightarrow V_1 V_2 + X_1 + X_2 (+\gamma)$. Zwei Hadronen A und B werden gestreut und bilden partonische Prozesse mit Endzustand $V_1 + V_2 (+\gamma)$. Der Rest der einlaufenden Hadronen wird schematisch als X_1 und X_2 bezeichnet. Der störungstheoretische Anteil wird symbolisch durch den grünen Rahmen angedeutet. Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes sind alle partonischen Prozesse zu berücksichtigen, die zum gleichen Endzustand führen.

kollidierenden Hadronen stattfinden, während die übrigen Hadron-Konstituenten unbeteiligt sind. Die Stoßpartner werden dabei als freie Teilchen angenommen, was nur dann gerechtfertigt ist, wenn die Kollisionsdauer viel kürzer als die Lebensdauer der entstehenden Zwischenzustände ist. Dies ist für die verglichen mit der hadronischen Massenskala großen Impulsüberträge der betrachteten harten Streuprozesse der Fall. Die Berechnung der partonischen Wirkungsquerschnitte kann dann störungstheoretisch erfolgen.

Um im Rahmen der Störungstheorie arbeiten zu können, wird der Zusammenhang zwischen der nichtperturbativ behandelbaren langreichweitigen Wechselwirkung und der harten Parton-Streuung durch das sogenannte Faktorisierungs-Theorem [67] (siehe Abbildung 1.1) beschrieben. Es besagt unter anderem, dass die Beiträge einer Parton-Emission mit kleinem Impulsquadrat $k^2 \ll Q^2$ als höhere Korrekturen der Partonverteilung und Beiträge mit $k^2 \sim Q^2$ als höhere Korrekturen des partonischen Wirkungsquerschnitts betrachtet werden können. Ferner kann die weiche Photon- bzw. Gluon-Bremsstrahlung als ein Teil der Partonverteilungsfunktionen angesehen werden und in diese absorbiert werden, während die harte Photon- bzw. Gluon-Bremsstrahlung als Korrektur zum partonischen Wirkungsquerschnitt beschrieben wird. Demzufolge treten die Massensingularitäten, welche der Abstrahlung der kollinearen Gluonen bzw. Photonen im Eingangszustand entsprechen, immer nur als partonspezifische, prozessunabhängige Faktoren auf. Diese Faktorisierungseigenschaft erlaubt somit, die auftretenden Singularitäten durch Redefinition der Partonverteilungsfunktionen (*engl.*: parton distribution function, PDF) zu absorbieren, da diese die Infrarotsingularitäten und kollinearen Divergenzen beinhalten.

Die korrekte Behandlung der physikalischen Größen beinhaltet nicht nur die Redefinition der Partonverteilungsfunktionen, um die Massensingularitäten im Anfangszustand aufzuheben, sondern auch die Renormierung der Massen und Kopplungen zur Absorption der Ultraviolett-Divergenzen in den Beiträgen höherer Ordnung zum partonischen Wirkungsquerschnitt. Auch die partonischen Prozesse enthalten infrarote und kollineare Singularitäten. Nach dem KLN-Theorem (benannt nach Kinoshita, Lee und Nauenberg) [68, 69] heben sich sowohl kollinearen Massensingularitäten, die aus einer Endzustandabstrahlung entstehen, als auch Infrarotsingularitäten in der Summe mit den virtuellen Korrekturen, die den Teilchenaustausch zwischen den Endzuständen beschreiben, gegenseitig weg (siehe dazu Kapitel 2.2). Die Regularisierung dieser beiden Arten von Singularitäten führt zwei neue Massenskalen ein: Die Faktorisierungsskala μ_F und die Renormierungsskala μ_R . Die Faktorisierungsskala μ_F gibt die Trennung des Prozesses in kurz- und langreichweitige Wechselwirkungen vor. Sie unterscheidet zwischen dem weichen, nicht-perturbativen Energiebereich und dem des harten Streuprozesses. Die dabei entstehende Abhängigkeit der perturbativ berechneten Observablen von der Faktorisierungsskala kann relativ groß sein: Diese liefert eine Abschätzung für die Größe des Fehlers, der gemacht wird, wenn Beiträge höherer Ordnungen vernachlässigt werden. Wird jedoch über alle Ordnungen der Störungstheorie summiert, so hängt das Ergebnis nicht mehr von der gewählten Skala ab. Da eine Summation über alle Ordnungen praktisch nicht möglich ist, sollte der Wert der Parameter μ_F und μ_R so gewählt werden, dass der typischen im Prozess vorkommenden Energieskala entspricht.

1.2.1 Integrierter hadronischer Wirkungsquerschnitt

Kollisionsexperimente an Hochenergiebeschleunigern mit hadronischen Reaktionspartnern A und B erlauben die Produktion von Eichbosonpaaren über die Reaktion $AB \rightarrow V_1 V_2 + X_1 + X_2 (+\gamma)$ mit Restzuständen X_i ($i = 1, 2$) der jeweiligen kollidierenden Protonen; die Restzustände X_i werden in unserer Rechnung außer Acht gelassen. Der hadronische Wirkungsquerschnitt zu diesem Prozess wird gemäß des Parton-Modells durch die Faltung der partonischen Wirkungsquerschnitte mit den jeweiligen Partonverteilungsfunktionen berechnet. Die partonischen Wirkungsquerschnitte ergeben sich durch die Aufsummierung aller partonischen Beiträge. Nach dem Faktorisierungs-Theorem [67] ist der hadronische Wirkungsquerschnitt $\sigma_{AB \rightarrow F+X}$ gegeben durch:

$$\sigma_{AB \rightarrow F+X} = \sum_{\{a,b\}} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b f_{a/A}(x_a, \mu_F) f_{b/B}(x_b, \mu_F) \hat{\sigma}_{ab \rightarrow F}. \quad (1.24)$$

Dabei ist $\hat{\sigma}_{ab \rightarrow F} \equiv \hat{\sigma}_{ab \rightarrow F}(x_a P_A, x_b P_B, \mu_R, \mu_F)$ der störungstheoretisch berechenbare Wirkungsquerschnitt der Partonen a und b , die durch Wechselwirkung miteinander den Endzustand F erzeugen, während P_A und P_B die Vierer-Impulse der einlaufenden Hadronen A bzw. B bezeichnen. Die Größen $f_{a/A}(x_a, \mu_F)$ [$f_{b/B}(x_b, \mu_F)$] sind die universellen Partonver-

teilungsfunktionen, die unabhängig vom betrachteten Prozess sind. Die PDF berücksichtigen alle Effekte der langreichweitigen Wechselwirkung und geben in führender Ordnung die Wahrscheinlichkeit an, Parton a [b] mit Impulsbruchteil x_a [x_b] im Hadron A [B] zu finden. Sie hängen außer vom Impulsbruchteil noch von der Faktorisierungsskala μ_F ab. Die Skalenabhängigkeit der Partonverteilungsfunktionen wird durch die DGLAP-Gleichungen (benannt nach Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli und Parisi) [70–72] beschrieben. Die PDF können nicht störungstheoretisch ermittelt werden. Sie können jedoch durch globale Fits an experimentelle Daten, unter anderem aus tiefinelastischen Streuprozessen, sowie Drell-Yan (leptonische Paarproduktion) und Jet-Produktion, bei einer speziellen Skala bestimmt werden. Mittels der DGLAP-Gleichungen kann man die Partonverteilungsfunktionen bei einer beliebigen Skala erhalten.

Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Prozess (Abbildung 1.1) kollidieren zwei Protonen $A = p$ und $B = p$ mit einer hadronischen Schwerpunktsenergie von $\sqrt{S} = 8$ TeV bzw. $\sqrt{S} = 14$ TeV miteinander. Auch für den Proton-Antiproton-Beschleuniger Tevatron werden im Rahmen dieser Arbeit Vorhersagen gemacht, wozu für die zwei Hadronen ($A = p$ und $B = \bar{p}$) eine Schwerpunktsenergie von $\sqrt{S} = 1.96$ GeV angenommen wird. Der integrierte hadronische Wirkungsquerschnitt für den inklusiven Prozess $AB \rightarrow V_1 V_2 (+\gamma)$ lässt sich durch die Faltung des partonischen Wirkungsquerschnitts $\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2 (+\gamma)}$ mit der Parton-Luminosität wie folgt parametrisieren (siehe dazu Anhang B.1.3):

$$\sigma_{AB \rightarrow V_1 V_2 (+\gamma)}(S) = \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} \hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2 (+\gamma)}(\tau S, \mu_R, \mu_F), \quad (1.25)$$

wobei $\tau = \hat{s}/S$ das Verhältnis aus dem Quadrat der partonischen und der hadronischen Schwerpunktsenergie bezeichnet.⁴ Die Parton-Luminosität gibt die Wahrscheinlichkeit an, zwei Partontypen a und b in verschiedenen Hadronen A und B mit Kombination $\tau = x_a x_b$ zu finden. Sie ist gegeben durch

$$\frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \frac{1}{1 + \delta_{ab}} \left(f_{a/A}(x, \mu_F) f_{b/B}\left(\frac{x}{\tau}, \mu_F\right) + f_{b/A}\left(\frac{x}{\tau}, \mu_F\right) f_{a/B}(x, \mu_F) \right), \quad (1.26)$$

wobei der Faktor mit δ_{ab} eine doppelte Zählung von identischen Partonen verhindert. Die Integrationsvariable τ bringt dabei die hadronische (\sqrt{S}) und die partonische ($\sqrt{\hat{s}}$) Schwerpunktsenergie durch die Relation

$$\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{(x_a P_A + x_b P_B)^2} \approx \sqrt{x_a x_b S} \equiv \sqrt{\tau S}, \quad \text{mit } S \gg P_A^2 \text{ und } S \gg P_B^2 \quad (1.27)$$

in Verbindung, gibt also den Teil der hadronischen Schwerpunktsenergie an, der für den harten Prozess zur Verfügung steht. Bei hinreichend hohen Energien lassen sich sowohl die Massen

⁴Mit dem Symbol $\hat{}$ werden in dieser Arbeit Größen im partonischen Schwerpunktsystem bezeichnet.

der Hadronen als auch die Massen der Partonen gegenüber der Energieskala des Prozesses vernachlässigen. Für verschwindenden Massen ist die Näherung (1.27) exakt. Die untere Integrationsgrenze $\tau_0 = (M_{V_1} + M_{V_2})^2/S$ legt den kinematisch relevanten Bereich fest und gewährleistet die Produktion der Eichbosonpaare erst oberhalb der Eichbosonpaar-Schwelle. Der partonische Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2 (+\gamma)}$ wird durch das quadrierte Matrixelement $|\mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2 (+\gamma)}|^2 \equiv |\mathcal{M}_{ab}|^2$ bestimmt. Dieses wird zusätzlich noch mit der Lorentz-invarianten Phasenraumdichte $d\Phi_n$

$$d\Phi_n = \prod_{f=1}^n \left(\frac{d^3 \hat{k}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \delta^{(4)} \left(\hat{p}_a + \hat{p}_b - \sum_{f=1}^n \hat{k}_f \right) \quad (1.28)$$

auslaufender Teilchen multipliziert und durch den einlaufenden Teilchenfluss $j_{\text{in}} = 4|\hat{p}_a \cdot \hat{p}_b|$ geteilt [73]. Schließlich ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem theoretisch berechenbaren Matrixelement und dem Wirkungsquerschnitt zu

$$\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2 (+\gamma)} = \mathcal{N}_{ab} \int d\Phi_n \overline{\sum} |\mathcal{M}_{ab}|^2, \quad \text{mit} \quad \mathcal{N}_{ab} = \frac{(2\pi)^4}{j_{\text{in}} N_{ab}}, \quad (1.29)$$

wobei $N_{\gamma\gamma} = 1$ und $N_{q\bar{q}'} = N_{q'\bar{q}} = N_c^2$ ($N_c = 3$ ist die Zahl der Farb-Freiheitsgrade der Quarks) der Mittelungsfaktor über die Farb-Freiheitsgrade der einlaufende Teilchen ist. $\overline{\sum} = \frac{1}{4} \sum_{\text{pol}} \sum_{\text{col}}$ beinhaltet sowohl die Summe über Polarisations- und Farb-Freiheitsgrade als auch den Mittelungsfaktor $1/4$ die Mittelung über die Spins der einlaufenden Teilchen. Das Integral über den Phasenraum $d\Phi_n$ ist für n Teilchen im Endzustand $(3n - 4)$ -dimensional.

1.2.2 Phasenraumschnitte

Bei der Berechnung integrierter hadronischer Wirkungsquerschnitte wird über den gesamten kinematisch erlaubten Phasenraumbereich integriert. Dabei treten sowohl von der experimentellen als auch von der theoretischen Seite gewisse Schwierigkeiten auf. Aus experimenteller Sicht sind die Ereignisse, bei denen Teilchen im Endzustand kollinear, d. h. in sehr kleinem Streuwinkel $\cos \hat{\theta} \rightarrow \pm 1$ zur Strahlachse abgestrahlt werden, im Detektor aufgrund seiner nicht vollen Raumwinkelabdeckung nicht nachweisbar. Aus theoretischer Sicht kommt hinzu, dass es sich bei den integrierten hadronischen Wirkungsquerschnitten, wenn im Endzustand masselose Teilchen produziert werden, wie bei $\gamma\gamma$ -Produktion der Fall, ohne weitere Einschränkungen zunächst nicht um endliche Größen handelt. In diesem Fall treten die Singularitäten zum einen für sehr kleine Streuwinkel $\cos \hat{\theta} \rightarrow \pm 1$ bereits in Bornscher Näherung und zum anderen bei der Emission von masselosen Teilchen mit verschwindender Energie $E_\gamma \rightarrow 0$ auf. Um dennoch auf der theoretischen Seite endliche Größen im Fall der $\gamma\gamma$ -Produktion zu erhalten, müssen bei der Berechnung gewisse Forderungen an den Phasenraum gestellt werden. Dafür werden künstlich sogenannte Schnitte (*engl.*: cuts) an entsprechende Observablen durchgeführt, wodurch die problematischen Phasenraumbereiche abgeschnitten werden. Dies geschieht im Laborsystem, welches für die hier betrachteten Hadron-Beschleuniger dem ha-

dronischen Schwerpunktssystem entspricht. Um die Vergleichbarkeit der theoretischen Vorhersagen der Prozesse mit experimentellen Ergebnissen zu gewährleisten, müssen auch im Fall der WW-, ZZ- und $W^\pm Z$ -Produktion die Schnitte angewandt werden, obwohl für massive Teilchen im Endzustand die oben beschriebenen Singularitäten nicht auftreten. Da die Detektoren des betrachteten Experiments nur einen Teil des Phasenraums ausmessen können, kann auch ein massives Eichboson, das mit einem kleinen Winkel zum Strahlrohr emittiert wird, nicht nachgewiesen werden. Die Berücksichtigung solcher experimentellen Gegebenheiten erfordert ebenfalls eine zusätzliche Einschränkung an den Phasenraum. Von technischer Seite her wird nach der Generierung eines Phasenraumpunktes geprüft, ob alle Forderungen erfüllt sind. Wenn dies der Fall ist, wird der dazugehörige Integrand berechnet; im anderen Fall wird er auf Null gesetzt. Fortgeschrittene Methoden streben schon in der Generierung von Phasenraumpunkten an, nur die Punkte im kinematisch erlaubten Bereich und besonders in Bereichen großer Beiträge zu erzeugen (siehe Anhang B.1.3).

Die Phasenraumschnitte werden symbolisch mittels der Funktion $\Theta(\text{cut})$ dargestellt. Der hadronische Gesamtwirkungsquerschnitt ergibt sich aus Gl. (1.25) und der Anwendung der Phasenraumschnitte $\Theta(\text{cut})$ zu

$$\sigma_{AB \rightarrow V_1 V_2}(S) = \sum_{a,b} \int_{\tau_0}^1 d\tau \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} \Theta(\text{cut}) \hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2}(\tau S, \mu_R, \mu_F). \quad (1.30)$$

Da bei den hadronischen Prozessen die Impulse der Teilchen, die an der Kollision teilnehmen, entlang der Strahlachse Lorentz-transformiert werden, bieten sich Schnitt-Parameter mit trivialem Transformationsverhalten an. Aus diesem Grund wird für die Teilchen im Endzustand ein minimaler Transversalimpuls k_{T,V_i}^{cut} gefordert, da diese Größe gegenüber Lorentz-Transformationen entlang der Strahlachse invariant ist und somit im hadronischen und partonischen Schwerpunktssystem identisch ist. Dadurch wird nicht nur sichergestellt, dass die entsprechenden Ereignisse experimentell aufgelöst werden können, sondern auch, dass die singulären Phasenraumbereiche im Fall der $\gamma\gamma$ -Produktion ausgeschnitten werden. Durch die geforderten Schnitte an die Transversalimpulse k_{T,V_i} werden jedoch nicht alle Ereignisse im Phasenraumbereich $\cos \hat{\theta} \rightarrow \pm 1$ weggeschnitten, da der Transversalimpuls nicht nur vom Streuwinkel $\hat{\theta}$, sondern auch von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{\hat{s}}$ abhängt. Somit können für signifikant große Schwerpunktsenergien ebenfalls die Werte von $\cos \hat{\theta}$ nahe an ± 1 den k_{T,V_i} -Schnitt passieren. Diese Beiträge können mittels eines zusätzlichen Schnitts auf die Rapidität y_{V_i} unterdrückt werden, welche für masselose Teilchen mit der Pseudorapidität η_{V_i} identisch ist. Man kann zusätzlich zum Schnitt an den Transversalimpuls k_{T,V_i} die invariante Masse $M_{V_1 V_2} = \sqrt{(\hat{k}_{V_1} + \hat{k}_{V_2})^2} = \sqrt{\hat{s}}$ der beiden auslaufenden Teilchen statt des Winkels zwischen den beiden auslaufenden Teilchen als Schnitt-Parameter verwenden. Damit werden die Ereignisse in singulären Phasenraumbereichen auch ausgeschlossen. Ein weiterer Vorteil der Anwendung von Schnitten ist die erhöhte Sensitivität differentieller Verteilungen auf die Abweichungen durch z. B. unbekannter Teilchen. Aufgrund dessen werden in Kapitel 4 sowohl

totale hadronische Wirkungsquerschnitte als auch differentielle Verteilungen verschiedener Observablen diskutiert.

1.2.3 Differentieller hadronischer Wirkungsquerschnitt

Das Studium der Eichboson-Paarproduktion stellt eine Möglichkeit dar, nach Effekten jenseits des Standardmodells zu suchen. Einige dieser Effekte beeinflussen insbesondere differentielle Verteilungen verschiedener Observablen, so dass sie eine direkte Suche nach neuer Physik ermöglichen. Sollten im TeV-Bereich Effekte neuer Physik auftreten, können diese in differentiellen Verteilungen beobachtet werden, da dort Phasenraumregionen ausgesucht werden können, die besonders sensitiv auf Effekte neuer Physik sind.

Im folgenden Abschnitt wird der differentielle Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von verschiedenen Observablen betrachtet. Dazu werden sowohl der Transversalimpuls k_{T,V_i} des Eichbosons als auch die invariante Masse $M_{V_1 V_2}$ des Eichbosonpaares studiert. Diese sind invariant unter Transformationen des Schwerpunktsystems der Partonen in das der Hadronen, da die beiden Parametrisierungen unabhängig vom Boost entlang der Strahlachse sind. Zusätzlich zu k_{T,V_i} und $M_{V_1 V_2}$ wird der hadronische Wirkungsquerschnitt durch die Rapiditäten y_{V_i} der auslaufenden Teilchen, die die Bewegung entlang der Strahlachse beschreiben, parametrisiert. Dabei ist zu beachten, dass der differentielle hadronische Wirkungsquerschnitt bezüglich der Rapidität bzw. Pseudorapidität der Eichbosonen keine Lorentz-invariante Größe darstellt. In diesem Fall muss jeder Vierer-Impuls explizit entlang der Strahlachse in das Laborsystem transformiert werden, das mit dem hadronischen Schwerpunktsystem der Hadronen A und B zusammenfällt. Rapiditäten verhalten sich additiv unter Lorentz-Transformation, d. h. nur deren Differenzen sind invariant.

Im Laborsystem sind die Vierer-Impulse der einlaufenden Hadronen definiert als

$$P_A^\mu = \frac{\sqrt{S}}{2}(1, 0, 0, +1) \quad \text{und} \quad P_B^\mu = \frac{\sqrt{S}}{2}(1, 0, 0, -1),$$

wobei die Masse der Hadronen vernachlässigt wird. Aus dem Zusammenhang zwischen den Impulsen auf Hadron- und Parton-Niveau folgt dementsprechend

$$p_a^\mu = x_a P_A^\mu = x_a \frac{\sqrt{S}}{2}(1, 0, 0, +1) \quad \text{und} \quad p_b^\mu = x_b P_B^\mu = x_b \frac{\sqrt{S}}{2}(1, 0, 0, -1). \quad (1.31)$$

Hierbei sind x_a und x_b die Bruchteile der Impulse P_A und P_B , die von den Partonen a und b getragen werden. Im partonischen Schwerpunktsystem sind die Impulse der einlaufenden Partonen gegeben durch

$$\hat{p}_a^\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, 0, 0, +1) \quad \text{und} \quad \hat{p}_b^\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}(1, 0, 0, -1), \quad (1.32)$$

mit $\hat{s} = x_a x_b S \equiv \tau S$.

Rapidität

Da das Ruhesystem des harten Prozesses, also des Prozesses auf Parton-Niveau, nicht identisch mit dem Laborsystem ist, werden die Vierer-Impulse der auslaufenden Teilchen, welche den Kollisionsprozess beschreiben, nicht mehr durch den Streuwinkel $\hat{\theta}$ im partonischen Schwerpunktsystem, sondern durch die Rapidität y dieser Teilchen parametrisiert

$$\hat{y} = \operatorname{artanh} \frac{\hat{k}_z}{\hat{k}^0} \equiv \frac{1}{2} \log \frac{\hat{k}^0 + \hat{k}_z}{\hat{k}^0 - \hat{k}_z} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \beta_m \cos \hat{\theta}}{1 - \beta_m \cos \hat{\theta}}, \quad (1.33)$$

mit $\beta_m^{-1} = \sqrt{1 + m^2/|\vec{k}|^2}$ und $\hat{k}_z = |\vec{k}| \cos \hat{\theta}$. Im masselosen Grenzfall wird daraus die Pseudorapidität:

$$\hat{\eta} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos \hat{\theta}}{1 - \cos \hat{\theta}}. \quad (1.34)$$

Unter Verwendung der Schwerpunktsimpulse aus (1.31) erhält man die Rapidität des partonischen Schwerpunktsystems im Laborsystem

$$y^* = \frac{1}{2} \log \frac{x_a}{x_b} = -\frac{1}{2} \log \frac{x^2}{\tau}, \quad (1.35)$$

wobei im letzten Schritt die Substitution $\tau = x_a x_b$ und $x_a = x$ durchgeführt wurde. Damit lässt sich unter Verwendung der Additionseigenschaften der Rapiditäten die Rapidität \hat{y} eines Teilchens, die im partonischen Schwerpunktsystem berechnet wurde (siehe Gl. (1.33)), in die dazugehörige Rapidität im Laborsystem $y \equiv y_{\text{lab}} = \hat{y} + y^*$ umrechnen.

Durch die Betrachtung von differentiellen Verteilungen in Abhängigkeit von den Rapiditäten der auslaufenden Teilchen und nicht in Abhängigkeit vom Streuwinkel wird der kinematisch interessante Phasenraumbereich für relativ kleine Winkel entzerrt und damit die Diskussion der Ergebnisse in diesem Bereich deutlich vereinfacht.

Ferner wird der differentielle Wirkungsquerschnitt für den $2 \rightarrow 2$ Prozess in der Rapidität y_{V_i} durch

$$\frac{d\sigma_{AB \rightarrow V_1 V_2}}{dy_{V_i}} = \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} \frac{d\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2}}{d \cos \hat{\theta}} \frac{\partial \cos \hat{\theta}}{\partial y_{V_i}} \quad (1.36)$$

parametrisiert. Zu erwähnen ist, dass die Vierer-Impulse und die Massen in diesen Relationen diejenigen des betrachteten Teilchens mit Rapidität y_{V_i} sind. Der Streuwinkel lässt sich mittels der Relationen (1.31) und (1.33) auf die Rapidität abbilden

$$\cos \hat{\theta} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{k}|^2}} \tanh \hat{y} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{k}|^2}} \tanh \left(y + \frac{1}{2} \log \frac{x^2}{\tau} \right). \quad (1.37)$$

Daraus ergibt sich die Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial \cos \hat{\theta}}{\partial y} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{|\vec{k}|^2}} \left[\cosh \left(y + \frac{1}{2} \log \frac{x^2}{\tau} \right) \right]^{-2}. \quad (1.38)$$

Transversalimpuls

In diesem Abschnitt soll der hadronische Wirkungsquerschnitt durch den Transversalimpuls eines der auslaufenden Eichbosonen $k_T = \sqrt{\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2}$ parametrisiert werden. Den entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitt erhält man, indem die Integration über k_T nicht ausgeführt wird. Für den $2 \rightarrow 2$ Prozesse ergibt sich dann die k_T -Verteilung

$$\frac{d\sigma_{AB}}{dk_T} = \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} \frac{d\hat{\sigma}_{ab}}{d\cos\hat{\theta}} \frac{\partial \cos \hat{\theta}}{\partial k_T}. \quad (1.39)$$

Aus dem Zusammenhang zwischen dem Transversalimpuls $k_T = |\vec{k}| \cos \hat{\theta}$, Longitudinalimpuls $k_L = |\vec{k}| \sin \hat{\theta}$ und dem Streuwinkel $\hat{\theta}$, wobei $\tan \hat{\theta} = k_L/k_T$ ist, folgt

$$\cos \hat{\theta}_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \frac{k_T^2}{|\vec{k}|^2}}. \quad (1.40)$$

Das positive Vorzeichen in Gl. (1.40) entspricht dabei dem Streuwinkelbereich $[0, \frac{\pi}{2}]$ und das negative Vorzeichen dem Bereich $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. Die Jacobi-Determinante lautet

$$\left| \frac{\partial \cos \hat{\theta}}{\partial k_T} \right| = \left(\frac{|\vec{k}|^4}{k_T^2} - |\vec{k}|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.41)$$

Die k_T -Verteilung für den hadronischen Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann zu:

$$\frac{d\sigma_{AB}}{dk_T} = \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} \left(\frac{d\hat{\sigma}_{ab}^+}{d\cos\hat{\theta}_+} + \frac{d\hat{\sigma}_{ab}^-}{d\cos\hat{\theta}_-} \right) \left| \frac{\partial \cos \hat{\theta}}{\partial k_T} \right|. \quad (1.42)$$

Die untere Integrationsgrenze

$$S \tau_0 = \left(\sqrt{M_{V_1}^2 + k_T^2} + \sqrt{M_{V_2}^2 + k_T^2} \right)^2 \quad (1.43)$$

stellt die Eichboson-Paarproduktion oberhalb deren Massenschwelle sicher, wobei S die hadronische Schwerpunktsenergie ist. \hat{E}_{V_i} ($i = 1, 2$) ist durch $|\vec{k}_T|^2 < |\vec{k}_{V_i}|^2 = \hat{E}_{V_i}^2 - M_{V_i}^2$ auf den physikalischen Wertebereich beschränkt. Die Terme des partonischen Wirkungsquerschnitts für die kinematischen Streuwinkelbereiche $[0, \frac{\pi}{2}]$ und $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ werden mit dem Index + und – gekennzeichnet.

Wenn zusätzlich noch Schnitte y_{cut} an die Rapidity für eines der auslaufenden Teilchen angewandt werden, so wird (1.42) zu

$$\frac{d\sigma_{AB}}{dk_T} = \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} \left| \frac{\partial \cos \hat{\theta}}{\partial k_T} \right| \times \left(\frac{d\hat{\sigma}_{ab}^+}{d \cos \hat{\theta}_+} \Theta(y_{\text{cut}} - |y_+|) + \frac{d\hat{\sigma}_{ab}^-}{d \cos \hat{\theta}_-} \Theta(y_{\text{cut}} - |y_-|) \right), \quad (1.44)$$

wobei $y_{\pm} = y(\cos \hat{\theta}_{\pm})$ die dem Winkelbereich $\hat{\theta}_{\pm}$ entsprechende Rapidity ist.

Invariante Masse

Die invariante Masse des betrachteten $2 \rightarrow 2$ Prozesses ist äquivalent zur partonischen Schwerpunktsenergie $M_{V_1 V_2} = \sqrt{(\hat{k}_{V_1} + \hat{k}_{V_2})^2} = \sqrt{\hat{s}} \equiv \sqrt{\tau S}$ des Prozesses, wobei \hat{k}_{V_1} und \hat{k}_{V_2} die Vierer-Impulse der auslaufenden Eichbosonen sind. Der zugehörige differentielle Wirkungsquerschnitt wird wie folgt parametrisiert:

$$\frac{d\sigma_{AB \rightarrow V_1 V_2}}{d\sqrt{\hat{s}}} = \frac{2}{S} \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0 S}^S d\hat{s} \frac{d\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2}}{d\hat{s}} \sqrt{\hat{s}} \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} \Big|_{\tau=\frac{\hat{s}}{S}}. \quad (1.45)$$

Kapitel 2

Strahlungskorrekturen, Infrarot- und kollineare Divergenzen

In Abschnitt 1.2 wurde diskutiert, wie der hadronische Wirkungsquerschnitt sich aus prozess-unabhängigen, nicht perturbativen Partonverteilungsfunktionen und aus störungstheoretisch berechenbaren partonischen Anteilen zusammensetzt. Um die letzteren zu berechnen, wird das quadrierte Matrixelement $|\mathcal{M}|^2$ in Ein-Schleifen-Ordnung betrachtet. So erhält man:

$$|\mathcal{M}|^2 = \left| \mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right| = \left| \mathcal{M}^{(0)} \right|^2 + 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}^{(0)*} \mathcal{M}^{(1)}) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.1)$$

Der erste Term der Entwicklung (2.1), also $|\mathcal{M}^{(0)}|^2$, beinhaltet nur Beiträge führender Ordnung. Der über die Gl. (1.29) mit dem quadrierten Matrixelement $|\mathcal{M}^{(0)}|^2$ berechenbare partonische Wirkungsquerschnitt wird im weiteren Verlauf mit $\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^0$ bezeichnet:

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^0 \equiv \hat{\sigma}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^0 \stackrel{(1.29)}{=} \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{N_{q\bar{q}'}} \int d\Phi_2 \sum_{\text{col}} \sum_{\text{spin}} \sum_{\text{pol}} \left| \mathcal{M}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^{(0)} \right|^2. \quad (2.2)$$

Der mit dem zweiten Term der Entwicklung (2.1), also $2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}^{(0)*} \mathcal{M}^{(1)})$, in Verbindung stehende virtuelle Beitrag zum partonischen Wirkungsquerschnitt ist im Allgemeinen nicht nur ultraviolett-, sondern auch infrarot- und kollinear-divergent und wird mit $\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^{\text{virt.}}$,

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^{\text{virt.}} \equiv \hat{\sigma}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^{\text{virt.}} \stackrel{(1.29)}{=} \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{N_{q\bar{q}'}} \int d\Phi_2 \sum_{\text{col}} \sum_{\text{spin}} \sum_{\text{pol}} 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{M}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^{(0)*} \mathcal{M}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^{(1)} \right\}, \quad (2.3)$$

bezeichnet, wobei $\mathcal{M}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^{(1)}$ die Ein-Schleifen-Amplitude ist. Dieser enthält alle Ein-Schleifen-Diagramme, einige davon sind in Abbildung 2.1 skizziert. Die Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ sind nicht Bestandteil der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnung und werden im weiteren Verlauf nicht betrachtet.

Die in den Ein-Schleifen-Korrekturen auftretenden ultravioletten Divergenzen werden nach der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Vorgehensweise behandelt, während die infrarot-

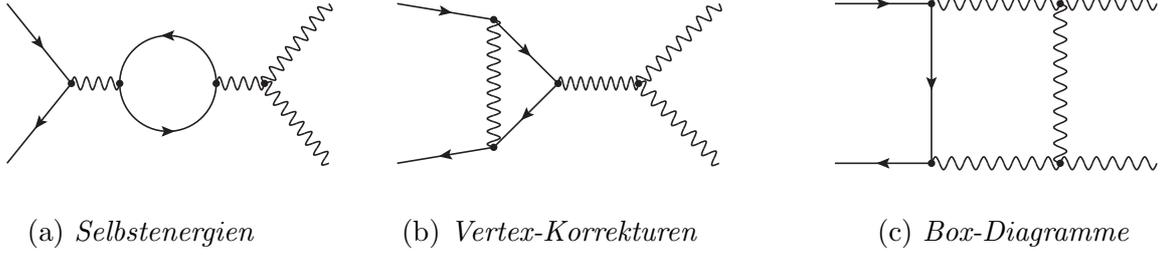


Abbildung 2.1: Beispiel der auftretenden Ein-Schleifen-Beiträgen in dieser Arbeit.

ten und kollinearen Singularitäten nach den Methoden aus Abschnitt 2.2 beseitigt werden. Zur Behandlung des letzteren Typs müssen auch reelle Bremsstrahlungs-Korrekturen durch Abstrahlung eines zusätzlichen Photons berücksichtigt werden. Der dazugehörige Wirkungsquerschnitt wird mit $\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^{\text{reell}}$ bezeichnet:

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^{\text{reell}} \equiv \hat{\sigma}_0^{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2 \gamma} \stackrel{(1.29)}{=} \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{N_{q\bar{q}'}} \int d\Phi_3 \sum_{\text{col}} \sum_{\text{spin}} \sum_{\text{pol}} |\mathcal{M}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2 \gamma}^0|^2. \quad (2.4)$$

Wird über diese Beiträge summiert, also $\hat{\sigma}^{\text{virt.}} + \hat{\sigma}^{\text{reell}}$, so bleiben nur die kollinearen Singularitäten im Anfangszustand, welche dann durch Redefinition der PDF absorbiert werden. Der entsprechende Wirkungsquerschnitt wird mit $\sigma_{q\bar{q}'}^{\text{PDF}}$ bezeichnet.

Der komplette hadronische Wirkungsquerschnitt auf nächst-führender Ordnung setzt sich somit aus den Beiträgen

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pp} \rightarrow V_1 V_2}^{\text{NLO}} = & \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \left\{ \sum_{q=u,d,c,s,b} f_{q/P}(x_a, \mu_F) f_{\bar{q}'/P}(x_b, \mu_F) \right. \\ & \times \left[\int_{\Phi_2} d\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^0 + \int_{\Phi_2} d\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^{\text{virt.}} + \int_{\Phi_3} d\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^{\text{reell}} + \int_0^1 dz \int_{\Phi_2} d\hat{\sigma}_{q\bar{q}'}^{\text{PDF}}(z) \right] + (q \leftrightarrow \bar{q}') \\ & \left. + f_{\gamma/P}(x_a, \mu_F) f_{\gamma/P}(x_b, \mu_F) \int_{\Phi_2} d\hat{\sigma}_{\gamma\gamma \rightarrow V_1 V_2}^0 \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

zusammen, die im Verlauf dieses Kapitels ausführlich diskutiert werden. Die Größe Φ_2 bzw. Φ_3 steht für den Zwei- bzw. Drei-Teilchen-Phasenraum. Das Integral $\int dz$ impliziert eine zusätzliche Faltung mit der Variable z , welche den Anteil der Energie angibt, der nach der Abstrahlung des kollinear emittierten Photons übrigbleibt.

In diesem Kapitel werden Methoden für die Berechnung der in dieser Arbeit behandelten Korrekturen in nächst-führender Ordnung Störungstheorie diskutiert. Hierzu sind in den vergangenen Jahrzehnten verschiedene Algorithmen entwickelt worden, die im Folgenden kurz erläutert werden sollen. Für eine ausführliche Beschreibung wird jedoch auf die im weiteren Verlauf angegebene Literatur verwiesen. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Berechnung von Ein-Schleifen-Integralen im elektroschwachen Standardmodell.

2.1 Renormierung und Regularisierung

In einer Quantenfeldtheorie wird ein Modell durch seine Lagrange-Dichte beschrieben. Diese enthält eine bestimmte Anzahl von freien Parametern, deren Zahlenwerte nicht durch die Theorie festgelegt sind, sondern experimentell bestimmt werden müssen. In der Bornschen Näherung, also im Grenzfall verschwindender Quantenkorrekturen, können viele freie Parameter direkt mit den physikalischen Größen, wie z. B. den Massen oder der elektrischen Ladung, identifiziert werden. Werden jedoch Quantenkorrekturen berücksichtigt, so wird der direkte Zusammenhang zwischen den freien Parametern der Lagrangedichte (den so genannten „nackten“ (*engl.*: bare) Parametern, die im Folgenden durch einen unteren Index 0 kenntlich gemacht werden) und den physikalischen Größen zerstört. Dies macht eine Redefinition, die sogenannte Renormierung, der Parameter, und auch der Felder, notwendig. Im Verlauf der Berechnung des Zusammenhangs zwischen den unphysikalischen und den physikalischen Parametern können Integrale auftreten, die in naiver vierdimensionaler Behandlung divergieren. Die Art und Weise, wie die Konvergenz dieser Integrale gesichert wird, wird durch das Verfahren der sogenannten Regularisierung festgelegt. Es ist essentiell, dass die auftretenden Divergenzen durch eine Redefinition der Theorieparameter absorbiert werden können, ohne dabei die Symmetrien der Theorie oder die Unitarität der Amplitude zu verletzen. Dies führt dazu, dass die freien Parameter der Lagrange-Dichte nicht direkt mit den Observablen identifiziert werden können, sondern dynamische, also Energie- und Skalen-abhängige, Beiträge erhalten und in jeder weiteren Ordnung der Störungstheorie erneut mit den physikalischen Größen in Verbindung gebracht werden müssen. Gelingt es, durch die Renormierung endlich viele Parameter sämtliche auftretenden UV-Divergenzen in allen Ordnungen der Störungstheorie zu beseitigen, so ist die jeweilige Theorie renormierbar. Die Renormierbarkeit des Standardmodells wurde von 't Hooft in [60, 61] bewiesen.

2.1.1 Dimensionale Regularisierung

Werden Matrixelemente berechnet, die über die niedrigste Ordnung Störungstheorie hinausgehen, so treten in den entsprechenden Feynman-Diagrammen Integrale über Schleifenimpulse q_i auf, die sich bei großen Impulsen $q_i \rightarrow \infty$ als divergent erweisen können (siehe Anhang D). Diese Singularitäten werden als Ultraviolett-, oder kurz, UV-Singularitäten bezeichnet. Physikalisch werden die UV-Divergenzen als Einfluss von Quantenkorrekturen bei relativ kleinen Abständen interpretiert.

Bevor Felder und Parameter der Lagrange-Dichte renormiert werden können, müssen zunächst die bei der Berechnung der Schleifenintegrale auftretenden Divergenzen extrahiert werden. Prinzipiell würde eine Beschränkung der Energieintegration durch eine obere Grenze (*engl.*: cut-off) Λ bereits endliche Ergebnisse liefern, jedoch zerstört eine solche Beschränkung die Lorentz-Invarianz. Ein häufig angewandtes Verfahren ist die dimensionale Regularisierung [62]. Es gewährleistet die Lorentz- und Eichinvarianz, bewahrt also die inneren Symmetrien der Theorie. Indem man die vier Dimensionen der Raumzeit formal durch $D = 4 - 2\varepsilon$

ersetzt, wobei ε ein infinitesimaler komplexer Parameter ist, werden die Schleifenintegrale so abgeändert, dass deren Divergenzen durch ε parametrisiert werden können:

$$\int d^4q \mapsto (2\pi\mu)^{4-D} \int d^Dq. \quad (2.6)$$

Das Integral wird als meromorphe Funktion in der komplexen D -Ebene analytisch fortgesetzt. Die Divergenzen von Ein-Schleifen-Integralen können sich in Form von $1/\varepsilon_{UV}$ -Polen nach der Integration äußern. Da in dieser Arbeit die infraroten und kollinearen Divergenzen mit Massenregularisierung (siehe Kapitel 2.2) behandelt werden, kommen hier nur die UV-Divergenzen als $1/\varepsilon_{UV}$ -Pole vor. Feynman-Integrale, die für $D = 4$ Raumzeitdimensionen UV-divergent sind, sind für $D < 4$ endlich. Um die Massendimension der resultierenden Integrale nicht zu ändern, werden diese mit einem Faktor $(2\pi\mu)^{4-D}$ multipliziert. Dem freien Parameter μ wird später die Bedeutung einer Renormierungsskala μ_R zugewiesen. Dieser wird in der Praxis so gewählt, dass die Effekte höherer Ordnungen Störungstheorie möglichst klein werden. In der Regel wird hierzu der Wert der Renormierungsskala in der Größenordnung der im konkreten Prozess auftretenden typischen Energieskalen gewählt. Analog zur Faktorisierungsskala dürfen die Observablen nicht von der Renormierungsskala abhängen.

2.1.2 On-Shell Renormierung

Durch die dimensionale Regularisierung werden die auftretenden Divergenzen in negativen Potenzen des Regularisierungsparameters ε isoliert. Mittels Renormierung wird dann die Abhängigkeit von diesem unphysikalischen Parameter subtrahiert und der Zusammenhang zwischen den im Modell auftretenden freien Parametern und den experimentell bestimmbaren physikalischen Größen neu festgelegt. In der Praxis werden dazu sogenannte Gegenterme (*engl.*: counterterm) verwendet, welche einen formalen und systematischen Zugang zur Renormierung bieten. Dabei werden die „nackten“ Parameter (m_0, e_0) und Felder (Φ_0) der Lagrange-Dichte mittels sogenannter Renormierungskonstanten Z_i *multiplikativ* renormiert: Die „nackten“ Objekte werden wie folgt in Z und die jeweilige renormierte Größe zerlegt,

$$m_0 = Z_m m; \quad e_0 = Z_e e; \quad \Phi_0 = \sqrt{Z_\Phi} \Phi \quad \text{mit} \quad Z_i = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta Z_i^{(n)}, \quad (2.7)$$

wobei $\delta Z_i^{(n)}$ die divergenten Counterterme darstellen und n der Schleifenindex ist. Die Counterterme selbst werden durch frei wählbare Renormierungsbedingungen festgelegt, die dann die Relationen zwischen den renormierten und den unrenormierten Parametern festlegen. Dies erlaubt es auch, das renormierte Ergebnis direkt mit den physikalischen Größen in Beziehung zu setzen und somit die endlichen Anteile der Counterterme zu fixieren. Die Abhängigkeit von der Wahl der Renormierungsbedingungen schlägt sich bei Berechnungen von physikalischen Parametern in einer bestimmten Ordnung Störungstheorie lediglich in Termen der nächst-

höheren Ordnung nieder [40].¹ Das Ergebnis einer exakten Rechnung, bei der alle Ordnungen der Störungstheorie berücksichtigt werden, wäre unabhängig davon. Die Wahl bestimmter Renormierungsbedingungen wird als Renormierungsschema bezeichnet.

Im Folgenden wird das in der elektroschwachen Phänomenologie weitverbreitete On-Shell Renormierungsschema, wie in [37, 40] definiert, qualitativ vorgestellt. Im On-Shell Schema werden die Renormierungskonstanten so gewählt, dass die renormierten Parameter der Theorie den messbaren, physikalischen Größen in allen Ordnungen Störungstheorie entsprechen. Die renormierten Massen werden gleich den physikalischen gewählt: Wenn die Masse des Teilchens On-Shell festgelegt ist, dann ist der dazugehörige Massenparameter durch den Realteil des Pols des entsprechenden Propagators inklusive Strahlungskorrekturen gegeben und kann als physikalische Masse interpretiert werden. Oberhalb der Produktionsschwelle für ein Teilchenpaar mit Massen m_1 und m_2 , also für $k^2 > (m_1 + m_2)^2$, sind sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Selbstenergie ungleich Null, der Imaginärteil liefert die Zerfallsbreiten. Unterhalb hingegen, also für $k^2 < (m_1 + m_2)^2$, verschwindet der Imaginärteil. Ferner wird gefordert, dass die Wellenfunktionsrenormierung so durchgeführt wird, dass keine Strahlungskorrekturen an den äußeren Linien von Feynman-Diagrammen betrachtet werden müssen. Demzufolge entspricht diese Forderung der Bedingung, dass der renormierte Propagator einen Pol mit Residuum $\text{Res} = 1$ bei der physikalischen Masse hat [37, 40]. Werden alle Größen im On-Shell Schema bestimmt und erfolgt die Ladungsrenormierung in Thomson-Limes, so hängt das endliche Ergebnis nicht mehr von der durch die Regularisierung eingeführten Massenskala μ_R ab. Demzufolge eliminiert das On-Shell Schema nicht nur den divergenten, sondern auch den von der Renormierungsskala μ_R abhängigen Anteil.

In der vorliegenden Arbeit werden sowohl die Massen der Eichbosonen M_W und M_Z sowie die zugehörigen Felder, als auch die Felder der Fermionen und des Photons im On-Shell Schema renormiert. Alle Fermionen außer dem Top-Quark werden in dieser Arbeit als masselos angesehen; die Renormierung der leichten Fermionmassen muss also nicht betrachtet werden. Die benötigten Renormierungskonstanten sind aus der Literatur [37, 40] bekannt, wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch auch verifiziert. Ferner wird auf die Renormierung der Ladung noch etwas näher eingegangen, welche für die in dieser Arbeit vorgestellte Rechnung besonders relevant ist.

Ladungsrenormierung

Die Messung der elektrischen Ladung erfolgt beispielsweise über Elektron-Positron-Streuung. Um die renormierte elektromagnetische Ladung mit der im Experiment gemessenen in Zusammenhang zu bringen, wird gefordert, dass die Kopplung des Photons an das Elektron

¹Die Abhängigkeit von der Renormierungsskala $\log(\mu)$ in der Ordnung der Störungstheorie n lässt sich mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung durch das gesamten Ergebnis der Ordnung $(n - 1)$ bestimmen.

(inklusive Strahlungskorrekturen zum $ee\gamma$ -Vertex) im Grenzfall eines verschwindenden Impulsübertrags, also im sogenannten Thomson-Limes, mit der klassischen Elementarladung übereinstimmt:

$$\bar{u}(p)\hat{\Gamma}_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi}(0,p,-p)u(p)|_{p^2=m_e^2} = e\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p). \quad (2.8)$$

Dabei ist $\hat{\Gamma}_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi}(0,p,-p)$ die renormierte Drei-Punkt-Funktion zum Elektron-Photon-Vertex in der QED und ist gegeben durch

$$\hat{\Gamma}_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi}(0,p,-p) = e\gamma_\mu + \Lambda_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi} + e\gamma_\mu \left[\delta Z_e + \frac{1}{2}\delta Z_{\gamma\gamma} + \delta Z_\psi \right], \quad (2.9)$$

wobei $\Lambda_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi}$ die Summe aller Ein-Teilchen-irreduziblen QED-Ein-Schleifen-Diagramme zum $ee\gamma$ -Vertex bezeichnet. $\delta Z_{\gamma\gamma}$ und δZ_ψ stehen für die Feld-Renormierungskonstanten von Photon bzw. Elektron und δZ_e ist der Ladungs-Counterterm. Aufgrund der Ward-Takahashi-Identität [74, 75] zwischen der Drei-Punkt-Funktion $\Gamma_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi}(k,p,-p-k)$ und der Zwei-Punkt-Funktion $\Gamma^{\bar{\psi}\psi}(p,-p)$ im Fall des verschwindenden Photon-Impulses

$$\Gamma_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi}(0,p,-p) = e \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Gamma^{\bar{\psi}\psi}(p,-p) \quad (2.10)$$

und unter Verwendung der Dirac-Gleichung

$$\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p) = \frac{p_\mu}{m_e} \bar{u}(p)u(p) \quad (2.11)$$

findet die Aufhebung der Beiträge der Strahlungskorrekturen zum Vertex $\Lambda_\mu^{\gamma\bar{\psi}\psi}$ und der Wellenfunktion des Elektrons bzw. des Positrons δZ_ψ statt. Der Ladungs-Counterterm δZ_e für die elektrische Ladung aus Gl. (2.7) wird durch die Bedingung an den renormierten Elektron-Photon-Vertex im Thomson-Limes (2.8) fixiert. In der QED lautet diese:

$$\delta Z_e^{\text{QED}} = -\frac{1}{2}\delta Z_{\gamma\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\Sigma_T^{\gamma\gamma}(k^2)}{k^2} \Big|_{k^2=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_T^{\gamma\gamma}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0}, \quad (2.12)$$

mit der Selbstenergie

$$\Sigma_{\mu\nu}^{VV'}(k) = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \Sigma_T^{VV'}(k^2) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \Sigma_L^{VV'}(k^2). \quad (2.13)$$

Hierbei ist Σ_T der transversale Anteil und Σ_L der longitudinale Anteil der jeweiligen unrenormierten Selbstenergie. Obwohl die Renormierungsbedingung (2.8) explizit auf den Elektron-Photon-Vertex bezogen ist, hängt der Ladungs-Counterterm (2.12) nicht vom Typ des Fermions ab, was die Universalität der elektrischen Ladung widerspiegelt [37].

Im Standardmodell müssen aufgrund der komplizierteren Eichgruppe noch die Beiträge mitberücksichtigt werden, welche die $(\gamma-Z)$ -Mischung enthalten, wodurch die Ward-Takahashi-Identitäten nicht so einfach wie in der QED sind. Das mit dem QED-Ergebnis in Gl. (2.12)

zusammenhängende Resultat lautet dann [40]:

$$\delta Z_e = -\frac{1}{2}\delta Z_{\gamma\gamma} - \frac{s_W}{2c_W}\delta Z_{Z\gamma} = \frac{1}{2}\Pi^{\gamma\gamma}(k^2)\Big|_{k^2=0} - \frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}, \quad (2.14)$$

mit der Photon-Vakuumpolarisation

$$\Pi^{\gamma\gamma}(k^2) = \frac{\Sigma_T^{\gamma\gamma}(k^2)}{k^2}. \quad (2.15)$$

Die Größe M_Z ist die Masse des Z-Bosons und $s_W \equiv \sin\theta_W$ bzw. $c_W \equiv \cos\theta_W$, mit θ_W dem elektroschwachen Mischungswinkel. Die Counterterme $\delta Z_{\gamma\gamma}$ und $\delta Z_{Z\gamma}$ sind in [40] aufgelistet. Die Renormierungsbedingung (2.8) definiert die Feinstrukturkonstante $\alpha(k^2 = 0) = e^2/(4\pi)$ bei Impulsübertrag Null.

Die durch die Ladung verursachte Polarisation des Vakuums in der Region um die Elementarladung sorgt für einen Abschirmungseffekt. Das führt dazu, dass die beobachtete Ladung keine Konstante mehr ist, sondern vom Abstand bzw. der entsprechenden Energieskala Q abhängt, bei welcher ein Prozess stattfindet. Dies wird als Laufen der Kopplung bezeichnet. In der QED nimmt die Stärke der Kopplung mit steigender Energieskala Q zu bzw. strebt im On-Shell-Schema für große Abstände gegen die in Gl. (2.8) geforderte Konstante. Die sogenannte effektive Kopplungskonstante ist dann definiert durch

$$\alpha_{\text{QED}}^{\text{eff}}(Q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Delta\alpha(Q^2)}. \quad (2.16)$$

Dabei wird die Verschiebung der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante [76] mit

$$\Delta\alpha(Q^2) \stackrel{(2.12)}{=} 2\left[\delta Z_e(0) - \delta Z_e(Q^2)\right]_{\text{QED}} \stackrel{(2.15)}{=} \Pi^{\gamma\gamma}(0) - \text{Re}\Pi^{\gamma\gamma}(Q^2) \quad (2.17)$$

bezeichnet, wobei die endliche Differenzgröße $\text{Re}\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}(Q^2) = \text{Re}\Pi^{\gamma\gamma}(Q^2) - \Pi^{\gamma\gamma}(0)$ die renormierte Vakuumpolarisation repräsentiert.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die Massen aller Fermionen m_f außer der des Top-Quarks M_t , soweit möglich vernachlässigt. Die QED Beiträge der Photon-Vakuumpolarisation (2.15) liefern jedoch Massensingularitäten² der Form $\sim \alpha \log(m_f)$, wodurch die Näherung verschwindender Fermionmassen nicht unmittelbar möglich ist. Verschwindende Fermionmassen bedeuten hier, dass alle Higgs-Kopplungen und Massen-Counterterme für die leichten Fermionen vernachlässigt werden. Schreibt man Gl. (2.17) als

$$\Delta\alpha(Q^2) = \Delta\alpha_{\text{lept}}(Q^2) + \Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(Q^2) + \Delta\alpha_t, \quad \text{mit} \quad \Delta\alpha_t = -\frac{\alpha}{\pi}Q^2\frac{1}{5}\frac{M_Z^2}{M_t^2}, \quad (2.18)$$

so kann leptonische Anteil $\Delta\alpha_{\text{lept}}$ unter Verwendung der Lepton-Massen berechnet wer-

²Massensingularitäten sind Divergenzen, die nur mit den auftretenden Massen, nicht aber mit der Richtung der Impulse zusammenhängen (vgl. Kapitel 2.2).

den [37, 40]. Die Massen der leichten Quarks sind bei niedrigen Energien aufgrund von QCD-Effekten nicht wohldefiniert, da diese in der Natur in gebundenen Zuständen und nicht als freie Teilchen auftreten. Somit stellen ihre Massen effektive Parameter dar, wodurch ihr Wert ebenfalls von den experimentellen Gegebenheiten, wie zum Beispiel der Prozessenergie, abhängt. Demzufolge macht sich ihr Beitrag zur Vakuumpolarisation $\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}$ bei ausreichend hohen Energien, bei welchen sich Quarks als freie, masselose Teilchen betrachten lassen [17], bemerkbar. Da für elektroschwache Prozesse die Masse des Z-Bosons eine natürliche Skala darstellt, kann $Q^2 = M_Z^2$ als Energieskala gewählt werden. Bei dieser lassen sich die Quarks als freie masselose Teilchen betrachten. Für die Verschiebung der Kopplungskonstante in Gl. (2.17) ergibt sich dann:

$$\Delta\alpha(M_Z^2) = \Pi^{\gamma\gamma}(0) - \text{Re} \Pi^{\gamma\gamma}(M_Z^2). \quad (2.19)$$

Diese Verschiebung ist wegen der großen Skalenänderung, die von Null bis zur Energieskala $Q = M_Z$ reicht, und wegen den vielen beitragenden Fermionarten nicht zu vernachlässigen.

Die Massen der Quarks werden durch direkt messbare Größen, wie Wirkungsquerschnitte für $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$, ersetzt. Daraus ergibt sich der hadronische Beitrag $\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}$ zu $\Delta\alpha$, der mittels der sogenannten Dispersionsrelation [77]

$$\Delta\alpha_{\text{had}}^{(5)}(M_Z^2) = -\frac{\alpha}{3\pi} M_Z^2 \text{Re} \left\{ \int_{4M_\pi^2}^{\infty} dS' \frac{\mathcal{R}^{\gamma\gamma}(S')}{S'(S' - M_Z^2 - i\varepsilon)} \right\} \quad (2.20)$$

aus dem \mathcal{R} -Verhältnis

$$\mathcal{R}^{\gamma\gamma}(S) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

bestimmt werden kann [37, 40]. Dabei ist S die Schwerpunktsenergie in e^+e^- -System.

Einige Effekte höherer Ordnung Störungstheorie werden bereits in der Definition der Kopplungskonstanten α (und somit in der Amplitude niedrigster Ordnung) berücksichtigt. Diese resultieren von den auftretenden Logarithmen in den Fermionmassen $\sim \alpha \log(m_f^2/\hat{s})$ und werden mit dem Laufen der elektromagnetischen Kopplung assoziiert. Im Fall von On-Shell Photon-Paarproduktion heben sich dank der Ward-Takahashi-Identität [74, 75] die auftretenden logarithmischen Beiträge durch den Term $\delta Z_{\gamma\gamma}$ gegenseitig auf [37], so dass die Kopplungskonstante $\alpha = \alpha(0)$ als Eingabeparameter für diesen Prozess gewählt werden kann. Für die Paarproduktion massiver Eichbosonen gilt jedoch die Ward-Takahashi-Identität der QED zum einen nicht, zum anderen besitzen die elektroschwache Eichbosonen eine Selbstkopplung, die in der laufenden Kopplung berücksichtigt werden muss. Dementsprechend wird für die numerischen Ergebnisse $\alpha = \alpha(0)$ für Photon-Paarproduktion bzw. $\alpha = \alpha_{G_\mu}$ für die Produktion massiver Eichbosonpaare benutzt. Im letzteren Fall wird der Wert der elektro-

magnetischen Kopplungskonstanten im sogenannten Fermi-Schema (G_μ -Schema) ermittelt.

Im Fermi-Schema wird der Übergang von $\alpha(0)$ bis zur Fermi-Konstante³ G_μ durch die Größe Δr bestimmt:

$$\alpha_{G_\mu} = \frac{\sqrt{2}G_\mu M_W^2 \sin^2 \theta_W}{\pi} = \alpha(0)(1 + \Delta r) + \mathcal{O}(\alpha^2(0)). \quad (2.21)$$

Dabei bezeichnet $\sin^2 \theta_W = 1 - M_W^2/M_Z^2$ den Sinus vom elektroschwachen Mischungswinkel, der in Gl. (1.13) bzw. (1.14) definiert wurde. Die Präzisionsobservable Δr hängt von allen Parametern des Standardmodells ab, insbesondere von den Massen der Eichbosonen M_Z und M_W , sowie der Masse des Top-Quarks M_t und des Higgs-Bosons M_H , also $\Delta r = \Delta r(e, M_W, M_Z, M_H, M_t)$, und fasst die entsprechende Strahlungskorrekturen zusammen. Sie ist gegeben durch [37, 40]:

$$\begin{aligned} \Delta r = & \Pi_{\gamma\gamma}(0) - \frac{c_W^2}{s_W^2} \left(\frac{\Sigma_{ZZ}^T(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Sigma_W^T(M_W^2)}{M_W^2} \right) + \frac{\Sigma_W^T(0) - \Sigma_W^T(M_W^2)}{M_W^2} \\ & + 2 \frac{c_W}{s_W} \frac{\Sigma_{\gamma Z}^T(0)}{M_Z^2} + \frac{\alpha}{4\pi s_W^2} \left(6 + \frac{7 - 4s_W^2}{2s_W^2} \log c_W^2 \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dabei lassen sich die rein schwachen Ein-Schleifen-Strahlungskorrekturen zum Myon-Zerfall auf einen Ausdruck proportional zum Born-Matrixelement zurückführen und können daher in einem Korrekturfaktor $(1 + \Delta r)$ zusammengefasst werden [37, 40]. Mittels der Umparametrisierung der elektromagnetischen Kopplungskonstanten von $\alpha(0)$ nach α_{G_μ} ändert sich die Renormierungskonstante der Ladung wie folgt:

$$\delta Z_e \Big|_{\alpha(0)} \mapsto \delta Z_e \Big|_{\alpha_{G_\mu}} = \delta Z_e \Big|_{\alpha(0)} - \frac{1}{2} \Delta r. \quad (2.23)$$

In diesem Schema sind die schwachen Korrekturen des Myon-Zerfalls Δr in der Ladungsrenormierungskonstante enthalten und die elektroschwachen Korrekturen sind somit unabhängig von den Logarithmen der leichten Fermionmassen. Da das Ein-Schleifen-Ergebnis (2.22) durch die führenden fermionischen Korrekturen dominiert wird, lässt es sich durch

$$\Delta r = \Delta\alpha(M_Z^2) - \frac{c_W^2}{s_W^2} \Delta\rho + \Delta r_{\text{rem.}} \quad (2.24)$$

zerlegen. Die Verschiebung der Feinstrukturkonstanten um $\Delta\alpha(M_Z^2)$ wird gemäß

$$\Delta\alpha(M_Z^2) = \text{Re} \left[\frac{\partial \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2)}{\partial k^2} \Big|_{k^2=0} - \Pi_{f \neq t}^{\gamma\gamma}(M_Z^2) \right], \quad (2.25)$$

³Die Fermi-Konstante G_μ ist über den Myon-Zerfall $\mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$ definiert. Werden die schwachen Schleifenkorrekturen zum Myon-Zerfall in Betracht gezogen, so werden diese in Δr parametrisiert. Diese Relation wird häufig ausgenutzt, um eine theoretische Vorhersage von M_W über die gemessene Größe G_μ zu erhalten. Die Beiträge erster Ordnung zu Δr wurden zuerst von Sirlin und Marciano [78–80] bestimmt.

durch leichte Fermionbeiträge definiert, was Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha \log(m_f))$ entspricht. Mit anderen Worten: Alle großen Logarithmen $\alpha \log(m_f)$ werden im G_μ -Schema resummiert. Die Photon-Zwei-Punkt-Funktion $\Pi_{f \neq t}^{\gamma\gamma}$ ist in Gl. (2.15) definiert, wobei $f \neq t$ bedeutet, dass nur leichte Fermionen berücksichtigt werden. Der Beitrag des Top-Quarks ist per Konvention nicht im hadronischen Anteil enthalten: Da die Masse des Top-Quarks groß genug ist, kann der unterdrückte Beitrag durch nicht-störungstheoretische QCD Effekte in $\Pi^{\gamma\gamma}(0)$ vernachlässigt werden [17, 37, 40].

Desweiteren werden die Beiträge, die sich aus dem Laufen der Kopplung von $\alpha(0)$ bis zur schwachen Skala ergeben, resummiert. Die Korrektur $\Delta\rho$ zum sogenannten ρ -Parameter⁴ liefert einen führenden Beitrag zu Δr . Dadurch werden bereits in niedrigster Ordnung die großen dominierenden universellen Korrekturen zur $SU(2)$ Eichkopplung e^2/s_W^2 durch den ρ -Parameter getragen. Der Ein-Schleifen-Beitrag $\Delta\rho$ ist $\sim 3\%$ und enthält die Beiträge $\sim G_\mu M_t^2$. Das impliziert, dass die Fermionen mit schweren Massen in G_μ -Schema resummiert werden. Alle weiteren Ein-Schleifen-Beiträge, die nicht in $\Delta\alpha$ und $\Delta\rho$ enthalten sind, insbesondere die bosonischen Korrekturen, werden in $\Delta r_{\text{rem.}}$ zusammengefasst. Diese Beiträge manifestieren sich in Logarithmen $\log(M_H^2/M_Z^2)$ und $\log(M_t^2/M_Z^2)$.

2.2 Behandlung der infraroten und kollinearen Singularitäten

Neben den UV-Divergenzen aus der Region großer Schleifenimpulse $q_i \rightarrow \infty$ (siehe Kapitel 2.1) treten in Quantenfeldtheorien außerdem sowohl innerhalb der Schleifenintegrale bei endlichen Impulsen, als auch innerhalb der Phasenraumintegrale weitere Divergenzen auf, die ihre Ursache in Polen der Propagatoren haben. Diese treten auf, wenn Impulse der Propagatoren auf ihrer Massenschale liegen und dadurch der Nenner des Propagators Null wird. Daher werden diese Singularitäten im Allgemeinen als Massensingularitäten bezeichnet, da ihr Auftreten mit dem Verschwinden der äußeren und inneren Massen verbunden ist. Weiterhin hängen diese nicht von den Richtungen der äußeren Impulse ab. Zum ersten Mal wurde die Herkunft dieser Singularitäten von Landau in Ref. [87] und anschließend für die QED von Kinoshita in Ref. [68] untersucht, eine detaillierte Diskussion hierzu findet sich in Ref. [37].

2.2.1 Massensingularitäten

Massensingularitäten treten auf, wenn masselose Teilchen in den Schleifen der N -Punkt-Funktionen laufen (die Definition der N -Punkt-Funktionen ist in Anhang D gegeben). Die Energie solcher Teilchen ist aufgrund ihrer verschwindenden Masse nicht durch eine endliche Ruheenergie nach unten beschränkt, so dass die Integration über den Schleifenimpuls des entsprechenden Propagators im Grenzfall verschwindender Energie einen divergenten Beitrag liefert. Zudem treten in einem anderen Grenzfall, in dem das jeweilige Photon in Propagationsrichtung des emittierenden Teilchens abgestrahlt wird, weitere singuläre Anteile auf. Eine

⁴Der ρ -Parameter wurde im Jahr 1975 von D. A. Ross und M. Veltman [81] durch $\rho = M_W^2/M_Z^2 \cos^2 \theta_W$ eingeführt. Die Korrekturen bis zur Drei-Schleifen-Ordnung sind in [82] angegeben. Die Korrekturen bis zur Vier-Schleifen-Ordnung finden sich in Ref. [83–86].

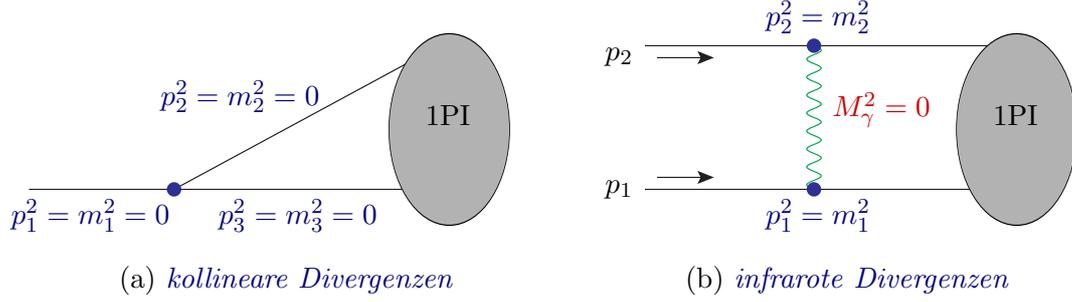


Abbildung 2.2: Massensingularitäten in Ein-Schleifen-Diagrammen: Die im Grenzfall leichter Fermionen und hoher Energien auftretenden Singularitäten werden als *kollineare Divergenzen* (a) bezeichnet. Sie stammen aus dem kollinearen Limes der Phasenraumintegration virtueller photonischer Beiträge. *Infrarote Divergenzen* (b) treten bei den Konfigurationen auf, in welchen ein masseloses Teilchen zwischen zwei On-Shell-Impulsen ausgetauscht wird und die Energie dieses masselosen Eichbosons (Photon bzw. Gluon) gegen Null strebt.

exakte Definition der Massensingularitäten der Feynman-Amplituden und eine ausführliche Diskussion wurde von Kinoshita in Ref. [68] gegeben. Er untersuchte die durch die virtuellen Korrekturen auftretenden Massensingularitäten (die Diskussion in Ref. [68] und in Ref. [88] bezieht sich auf die Quantenelektrodynamik) und zeigte, dass sich die Divergenzen dabei in die beiden Arten der infraroten und kollinearen Singularitäten unterteilen lassen (siehe Abbildung 2.2).

Die *kollinearen Singularitäten* treten bei der Konfiguration auf, bei der sich ein externes masseloses On-Shell-Teilchen in zwei masselose Teilchen aufspaltet (siehe Abbildung 2.2 (a)). Die Konfiguration, in der der Impuls des abgestrahlten Teilchens kollinear zum Impuls des äußeren Teilchens verläuft und die Impulse beider Propagatoren auf ihren Massenschalen liegen führt zu einer Singularität. Wird mindestens eine der drei Massen m_1 , m_2 und m_3 ungleich Null gewählt, so verschwinden die Singularitäten. Die Massen wirken folglich als Regulatoren der Singularitäten und liefern ein logarithmisches Verhalten $\propto \alpha \log(Q^2/m^2)$, wobei $m = \max(m_1, m_2, m_3)$ und Q eine typische Skala des betrachteten Prozesses darstellt.

Im Folgenden werden nur infrarote Divergenzen, die durch Photonen verursacht werden, berücksichtigt. Die *infraroten Singularitäten* treten beim Austausch eines masselosen Teilchens zwischen zwei On-Shell-Teilchen auf, wenn der Impulsübertrag zwischen den beiden externen Teilchen gegen Null geht (siehe Abbildung 2.2 (b)). Die Berechnung der Schleifenintegrale zeigt, dass die infraroten Singularitäten lediglich von photonischen Beiträgen stammen, wie in der Abbildung 2.2 (b) dargestellt ist. Obwohl in dieser Arbeit mit masselosen Fermionen gerechnet wird, treten keine infraroten Singularitäten beim Austausch eines solchen Fermions auf. Grund hierfür ist die im Vergleich zu dem Eichbosonpropagator $1/p^2$ um eine Potenz höhere Massendimension des Fermionpropagators $1/\not{p}$, weshalb bei elektroschwachen Korrekturen die infraroten Divergenzen von den reinen QED-Beiträgen herrühren. Demzufolge liegt die eigentliche Ursache für das Auftreten der Massensingularitäten in der QED

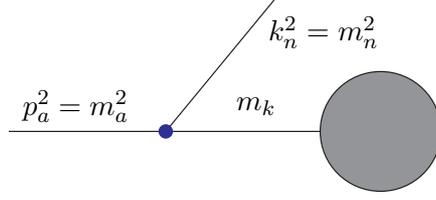


Abbildung 2.3: Veranschaulichung der Bremsstrahlungskorrekturen im Grenzfall, in dem das jeweilige Photon in Propagationsrichtung des emittierenden Teilchens abgestrahlt wird.

in der Langreichweitigkeit der Coulombkraft, oder anders gesagt, in der Masselosigkeit des Photons. Diese Singularitäten manifestieren sich mittels Verwendung einer Regulatormasse M_γ durch Logarithmen der Form $\alpha \log(Q^2/M_\gamma^2)$ [89].

Auch Überlagerung beider Arten von Divergenzen ist möglich: Wenn beispielsweise bei infraroten Singularitäten an einem Vertex alle Massen gegen Null streben, so entsteht eine zusätzliche kollineare Singularität. Dies führt zu einer doppelt-logarithmischen Struktur im Grenzfall verschwindender Massen $\propto \alpha \log(Q^2/m^2) \log(Q^2/M_\gamma^2)$.

Das Auftreten von Massensingularitäten rührt nicht ausschließlich von Schleifenintegralen her, sondern auch von Integrationen im Phasenraum der externen Teilchen. Diese führen in bestimmten Phasenraumbereichen zu Divergenzen. Die Ursache dieser Divergenzen ist analog zu den Fällen der virtuellen Korrekturen: Infrarote und kollineare Singularitäten treten dann auf, wenn von einem äußeren Teilchen a ein masseloses Teilchen n emittiert wird und der Propagator von a nach der Abstrahlung nahezu On-Shell ist (siehe Abbildung 2.3). Der Propagator liegt auf seiner Massenschale, falls die Impulse der Teilchen a und n kollinear zueinander sind, oder die Emission eines Teilchens mit sehr kleinem Impuls ($k_n \rightarrow 0$) stattfindet.

Analog zu den Fällen der virtuellen Korrekturen treten hier beide Singularitäten wieder in Form $\alpha \log(Q^2/M_\gamma^2)$ bzw. $\alpha \log(Q^2/m^2)$ auf. Die leichten Fermionmassen m_f übernehmen die Rolle des Regularisierungsparameters der kollinearen Singularitäten (also $m \equiv m_f$). Wenn dies nicht nötig ist, werden diese im Folgenden vernachlässigt. Die doppelt-logarithmische Struktur $\propto \alpha \log(Q^2/m_f^2) \log(Q^2/M_\gamma^2)$ taucht in Integrationsregionen auf, in denen der Impuls des abgestrahlten Teilchens sowohl kollinear zum einlaufenden Teilchen ($k_n \propto \alpha p_a$), als auch infrarot ($k_n \rightarrow 0$) ist. In dieser Arbeit werden die auftretenden Infrarotsingularitäten mit Hilfe der Regulatormasse M_γ und kollinearen Singularitäten durch leichten Fermionmassen m_f reguliert.

Die eigentliche Ursache für das Auftreten der Massensingularitäten im Fall der infraroten Bremsstrahlung liegt darin, dass die Zustände eines geladenen Teilchens mit einer beliebigen Anzahl von infraroten Photonen (bzw. Gluonen im Fall der QCD) aufgrund der endlichen Energieauflösung des Detektors beinahe entartet sind. Deshalb werden nur jene Photonen

wahrgenommen, deren Energien die vorgegebene Energieauflösung des Detektors übersteigen. Werden allerdings Prozesse mit einer beliebigen Anzahl an Photonen im Endzustand betrachtet, wobei deren Energiewerte unterhalb einer gewissen Energieschwelle liegen, so können diese von Prozessen ohne Bremsstrahlung nicht unterschieden werden. Im Fall kollinear divergierender Zustände führt die endliche Winkelauflösung des Detektors zu einer Entartung der Zustände. Die von den äußeren Quark- und Antiquarklinien bzw. von geladenen Teilchen im Endzustand kollinear emittierten harten Bremsstrahlungs-Photonen sind im Experiment nicht separat nachweisbar.

Bei der Berechnung einer wohldefinierten Observablen ergibt sich in jeder Ordnung der Störungstheorie eine gegenseitige Aufhebung dieser virtuellen und reellen Massensingularitäten. Diese Eigenschaft wird durch das Kinoshita-Lee-Nauenberg (KLN) Theorem [68, 69, 88] beschrieben. Als Konsequenz der Unitarität sind die Übergangsamplituden endlich, insofern über alle entarteten Anfangs- und Endzustände summiert wird.

Die in dieser Arbeit betrachteten Prozesse weisen allerdings noch eine Abhängigkeit von der kleinen Fermionmasse $\propto \alpha \log(Q^2/m_f^2)$ im Ergebnis auf, nachdem über die virtuellen und reellen Beiträge summiert wurde. Diese logarithmische Divergenzen entstehen durch Abstrahlungen von den Partonen im Anfangszustand, die nur als gebundene Zustände existieren. Für die verbliebenen Anfangszustandsingularitäten gilt das Faktorisierungstheorem der QCD (siehe Kapitel 1.2), das besagt, dass kollineare Singularitäten im Anfangszustand faktorisiert und in die nichtperturbativen PDF absorbiert werden können. Demzufolge werden diese Logarithmen in Prozessen mit hadronischen Anfangszuständen durch eine Redefinition der PDF beseitigt. Die genaue Vorgehensweise ist in Kapitel 2.2.5 beschrieben.

2.2.2 Integration über den Phasenraum des Bremsstrahlungs-Photons

Um die oben beschriebenen Singularitäten korrekt zu behandeln, müssen zusätzlich zu den virtuellen Korrekturen die assoziierten Prozesse der Abstrahlung eines reellen Photons

$$a(p_a) + b(p_b) \rightarrow V_1(k_{V_1}) + V_2(k_{V_2}) + \gamma(k_\gamma) \quad (2.26)$$

berücksichtigt werden. Hierbei sind a und b masselose Partonen ($a, b = q, \bar{q}'$) mit Impulsen p_a und p_b . Außerdem bezeichnen V_1 und V_2 die Eichbosonen im Endzustand ($V_1, V_2 = W^\pm, Z, \gamma$) mit den Impulsen k_{V_1} und k_{V_2} . γ ist ein zusätzlich abgestrahltes Photon mit Impuls k_γ . Auf Parton-Niveau ist der dazugehörigen Wirkungsquerschnitt gegeben durch

$$\hat{\sigma}^{\text{reell}} \equiv \hat{\sigma}_0^{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2 \gamma} = \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{N_{q\bar{q}'}} \int d\Phi_3 \sum_{\text{col}} \sum_{\text{spin}} \sum_{\text{pol}} \left| \mathcal{M}_0^{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2 \gamma} \right|^2 \quad (2.4)$$

in Abhängigkeit von der partonischen Schwerpunktsenergie \hat{s} , dem dazugehörigen Bremsstrahlungs-Phasenraum (siehe Gl. (B.16) bzw. Gl. (B.21)) und der Amplitude $\mathcal{M}_0^{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2 \gamma}$.

Für die Berechnung der Abstrahlung eines reellen Photons vom i -ten Teilchen wird

zunächst das Matrixelement \mathcal{M}_0 eines Prozesses $a(p_a) + b(p_b) \rightarrow V_1(k_{V_1}) + V_2(k_{V_2})$ ohne Photonabstrahlung multipliziert mit einem zusätzlichen Propagator mit dem Vierer-Impuls q betrachtet,

$$\mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma} \propto \frac{1}{q^2 - m_i^2} \times (\dots) \quad (2.27)$$

(siehe Gl. (2.39) für die vollständige Form). Dabei ist der Impuls q im Fall der Abstrahlung des Photons im Anfangszustand gegeben durch $q = p_i - k_\gamma$ und im Fall der Abstrahlung des Photons im Endzustand durch $q = k_i + k_\gamma$. Wenn die äußeren Teilchen auf ihren Massenschalen sitzen, dann vereinfacht sich beispielsweise der Propagator eines einlaufenden Quarks zu

$$\frac{1}{q^2 - m_i^2} = \frac{1}{-2p_i k_\gamma} = \left[-2E_i E_\gamma \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m_i^2}{E_i^2}} \cos \theta_{i\gamma} \right) \right]^{-1}. \quad (2.28)$$

Hierbei stellt E_i die Energie des jeweiligen Quarks dar, m_i dessen Masse und $\theta_{i\gamma}$ den Winkel, unter dem das Photon von Teilchen i abgestrahlt wird. Wie aus Gl. (2.28) ersichtlich ist, treten bei der Integration über den Bremsstrahlungs-Phasenraum (B.16) zwei singuläre Phasenraumbereiche auf. Eine Singularität im infraroten Phasenraumbereich tritt auf, wenn ein niederenergetisches Photon ($E_\gamma \rightarrow 0$) abgestrahlt wird. Desweiteren gibt es den kollinearen Bereich, in dem das Photon annähernd parallel, also unter kleinem Winkel $\cos \theta_{i\gamma} \rightarrow 1$, zum masselosen emittierenden Teilchen abgestrahlt wird. Verschwindet die Masse der emittierenden Teilchen also nicht, so wird die kollineare Divergenz, wie aus Gl. (2.28) ersichtlich ist, durch deren Masse regularisiert. Aus diesem Grund werden die unphysikalische Masse für das Photon M_γ (d. h. es gilt für oben beschriebenen Fall $q^2 = -p_i k_\gamma + M_\gamma^2$) und die leichten Quarkmassen m_f als Regulatoren dieser Divergenzen eingeführt. Sowohl die kollinearen Singularitäten als auch die Infrarotdivergenzen treten nur an externen Beinen auf, da nur dort die On-Shell-Bedingung $p_i^2 = m_i^2$ erfüllt ist.

Die sowohl bei den Schleifenkorrekturen als auch bei der Bremsstrahlung reeller Photonen auftretenden Massensingularitäten müssen in der numerischen Auswertung mit sehr großer Sorgfalt behandelt werden. Um diese Massensingularitäten von der numerischen Phasenraumintegration auszuschließen und sie dann anschließend in dem problematischen Bereich analytisch auszuwerten, haben sich zwei unterschiedliche Verfahren etabliert: *Subtraktionsmethode* [90–92] und *Phase-Space-Slicing-Methode* [93, 94]. Im Folgenden sollen diese Verfahren näher erläutert werden.

Dipol-Subtraktionsmethode

Subtraktionsmethoden wurden bereits vor lange Zeit zur Berechnung von NLO QCD Korrekturen zu e^+e^- -Prozessen entwickelt [90–92]. Als verallgemeinere Variante der Subtraktionsmethode wurde die Dipol-Subtraktion für masselose QCD [95] ausgearbeitet. Heutzutage

tage etablierte Methoden sind z. B. FKS-Subtraktion [96, 97], die sogenannte „Antennen-Subtraktion“ [98–101], sowie der Dipol-Subtraktionsformalismus, der ebenfalls für massive Fermionen in QED [102, 103] und QCD [104] anwendbar ist. Die Grundidee der Dipol-Subtraktionsmethode besteht darin, von einem divergenten Integranden $\sum_{\xi_\gamma} |\mathcal{M}_1|^2$, wobei die Summe über allen Photon-Polarisationen läuft, eine Hilfsfunktion $|\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2$ auf dem Niveau des Bremsstrahlungs-Integranden erst zu subtrahieren und in integrierter Form wieder zu addieren:

$$\int d\Phi_1 \sum_{\xi_\gamma} |\mathcal{M}_1|^2 = \int d\Phi_1 \left(\sum_{\xi_\gamma} |\mathcal{M}_1|^2 - |\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2 \right) + \int d\Phi_1 |\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2. \quad (2.29)$$

Dabei stellt $d\Phi_1$ das infinitesimale $(N + 1)$ -Teilchen-Phasenraumelement des Prozesses mit Abstrahlung dar [102, 103]. Diese Hilfsfunktion soll zwei Kriterien erfüllen. Zum einen soll $|\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2$ dasselbe singuläre Verhalten wie $\sum_{\xi_\gamma} |\mathcal{M}_1|^2$ selbst aufweisen, so dass sich die divergierenden Beiträge punktweise wegheben. Zum anderen soll sie so einfach gewählt werden, dass die infraroten und kollinearen Singularitäten in D Dimensionen über einen Ein-Teilchen-Phasenraum analytisch ausintegriert werden können. Um die auftretenden Singularitäten zu isolieren, faktorisiert man das Phasenraumintegral $\int d\Phi_1$ in einen effektiven Anteil $\int d\tilde{\Phi}_0$ und in einen effektiven Photon-Phasenraumbereich $\int [dk]$:

$$\int d\Phi_1 = \int d\tilde{\Phi}_0 \otimes \int [dk]. \quad (2.30)$$

Dabei stellt $d\tilde{\Phi}_0$ das infinitesimale N -Teilchen-Phasenraumelement des Prozesses ohne Abstrahlung dar und $[dk]$ symbolisiert den Phasenraum des Photons, der zu den infraroten und kollinearen Singularitäten führt, welche die Massensingularitäten der virtuellen Korrekturen kompensieren. Somit lässt sich Gl. (2.29) umschreiben:

$$\int d\Phi_1 \sum_{\xi_\gamma} |\mathcal{M}_1|^2 = \underbrace{\int d\Phi_1 \left(\sum_{\xi_\gamma} |\mathcal{M}_1|^2 - |\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2 \right)}_{\text{numerisch}} + \int d\tilde{\Phi}_0 \otimes \underbrace{\left(\int [dk] |\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2 \right)}_{\text{analytisch}}. \quad (2.31)$$

Die Differenz $(\sum_{\xi_\gamma} |\mathcal{M}_1|^2 - |\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2)$ ist numerisch über den kompletten Phasenraumbereich $\int d\Phi_1$ in vier Dimensionen integrierbar. Das Symbol „ \otimes “ deutet hier darauf hin, dass es sich nicht um eine einfache Multiplikation handelt, sondern impliziert Korrelationen in weiteren Quantenzahlen, sowie die Faltung der entsprechenden korrelierten Born-Matrixelemente.

Da im infrarot- und kollinear-divergenten Phasenraumbereich das quadrierte Matrixelement der reellen Photonemission $|\mathcal{M}_1(\Phi_1)|^2$ proportional zu $|\mathcal{M}_0(\Phi_0)|^2$ geschrieben werden kann, kann der Subtraktionsterm $|\mathcal{M}_{\text{sub}}(\Phi_1)|^2$ in der QED aus dem quadrierten Matrixelement führender Ordnung $|\mathcal{M}_0(\tilde{\Phi}_0)|^2$ des betrachteten Prozesses und aus der Summe verschie-

dener sogenannter Dipolbeiträge g_{IJ}^{sub} konstruiert werden [102, 103]:

$$|\mathcal{M}_{\text{sub}}(\Phi_1)|^2 = -e^2 \sum_{I \neq J} Q_I \vartheta_I Q_J \vartheta_J g_{IJ}^{\text{sub}}(P_I, P_J, k, \tau) \left| \mathcal{M}_0(\tilde{\Phi}_{0,IJ}; \tau \sigma_I) \right|^2, \quad (2.32)$$

wobei die Summation über alle geladenen Teilchen erfolgt. Hierbei bezeichnen P_I und Q_I die Impulse bzw. die Ladungen der Teilchen im Anfangs- und Endzustand. Einlaufende Teilchen bzw. auslaufende Antiteilchen werden durch den Ladungsfluss $\vartheta_I = +1$, auslaufende Teilchen bzw. einlaufende Antiteilchen durch den Ladungsfluss $\vartheta_I = -1$ charakterisiert. Weiterhin muss die Ladungserhaltung $\sum_I Q_I \vartheta_I = 0$ erfüllt sein.

Die Dipolbeiträge g_{IJ}^{sub} sind so aufgebaut, dass sie die infraroten und kollinearen Divergenzen der reellen Abstrahlung umfassen. Jeder dieser Dipole g_{IJ}^{sub} entspricht einer bestimmten kinematischen Konfiguration der $N + 1$ Partonen, die einen N -Teilchenprozess beschreibt, bei dem ein Parton in zwei Partonen zerfällt. Dabei werden die Dipole durch Angabe von zwei einander zugeordneten Partonen charakterisiert: Das Parton I , das beim Zerfall die infraroten und kollinearen Konfigurationen erzeugt, wird als *Emitter* bezeichnet. Das andere Parton J ist der Beobachter (*engl.*: *spectator*, *Spectator*), welcher die Impulsdifferenz des *Splittings* aufnimmt. Dabei führt nur die Kinematik des Emitters zu Singularitäten. Der *Spectator* gewährleistet hingegen die Energie-Impuls-Erhaltung sowie die gleichzeitige On-Shell Bedingung der äußeren Teilchen. Der Born-artige Phasenraum $\tilde{\Phi}_{0,IJ}$ ergibt sich aus dem vollen Phasenraum Φ_1 durch die festgelegten Impulse des *Emitters* und *Spectators*. Die Größe σ_I entspricht der Helizität des *Emitters* und mit $k = k_\gamma$ wird der Impuls des Photons bezeichnet. Die Summe über $\tau = \pm$ berücksichtigt den möglichen Spin-Flip aufgrund der kollinearen Photonabstrahlung. Der Subtraktionsterm $|\mathcal{M}_{\text{sub}}|^2$ in Gl. (2.32) hängt vom vollen Phasenraum Φ_1 ab, wobei die Born-Matrixelemente nur vom effektiven Phasenraum $\tilde{\Phi}_{0,IJ}$ abhängen. Die Abbildungen des vollen Phasenraums Φ_1 auf den effektiven Phasenraum $\tilde{\Phi}_0$, welche für jedes *Emitter-Spectator*-Paar IJ unterschiedlich sind (siehe hierfür Ref. [102]), stellen die richtige Faktorisierung in jedem singulären Bereich sicher.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Dipol-Subtraktionsmethode nur herangezogen, um einen Vergleich bei der W-Paarproduktion zwischen der Rechnung im Hochenergielimes und der vollständigen elektroschwachen Rechnung in nächst-führender Ordnung zu erlauben. Um diesen Vergleich zu ermöglichen, werden nur die sogenannten Endpunktsingularitäten der reellen Abstrahlung, die im Rahmen der Dipol-Subtraktionsmethode ausgewertet werden, benötigt. Die infraroten und kollinearen Singularitäten der virtuellen EW Korrekturen heben sich mit den entsprechenden Termen der reellen photonischen Bremsstrahlungskorrekturen auf, welche exakt in den Endpunktsingularitäten der Dipol-Subtraktionsfunktionen

$$d\hat{\sigma}^{\text{reell,E.}} = -\frac{\alpha}{2\pi} \sum_{I \neq J} Q_I \vartheta_I Q_J \vartheta_J G_{IJ}^{\text{sub}}(P_{IJ}, m_I, m_J) d\hat{\sigma}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^0(P_I, P_J) \quad (2.33)$$

enthalten sind. Die universellen, prozessunabhängigen Funktionen $G_{IJ}^{\text{sub}}(P_{IJ}, m_I, m_J)$ be-

zeichnen das Integral über den effektiven Photon-Phasenraum $\int[dk]$ von g_{IJ}^{sub} . Diese enthalten die entsprechenden Endpunktsingularitäten (siehe Ref. [102]). Da hier nur die Massen der leichten Quarks auf Null gesetzt werden, müssen die Dipole für massive Endzustände (*engl.*: final state, FS) und für masselose Anfangszustände (*engl.*: initial state, IS) berücksichtigt werden.

Im Fall eines masselosen IS *Emitters* a und eines masselosen IS *Spectators* b gilt $P_{ab}^2 = (p_a + p_b)^2 = \hat{s}$ und der dazugehörige Dipol lautet dann:

$$G_{ab}^{\text{sub}}(P_{ab}^2, m_f^2) = G_{ab}^{\text{sub}}(\hat{s}, m_f^2) = \mathcal{L}(\hat{s}, m_f^2) - \frac{\pi^2}{3} + 2. \quad (2.34)$$

Die Hilfsfunktion \mathcal{L} ist definiert als

$$\mathcal{L}(P^2, m^2) = \log\left(\frac{m^2}{P^2}\right) \log\left(\frac{M_\gamma^2}{P^2}\right) + \log\left(\frac{M_\gamma^2}{P^2}\right) - \frac{1}{2} \log^2\left(\frac{m^2}{P^2}\right) + \frac{1}{2} \log\left(\frac{m^2}{P^2}\right), \quad (2.35)$$

wobei infrarote Singularitäten durch die infinitesimale Photonmasse M_γ regularisiert werden. Eine kleine Quark-Masse m_f dient zur Regularisierung von kollinearen Singularitäten. Im Fall eines massiven FS *Emitters* und massiven FS *Spectators*, die z. B. im Fall der WW-Produktion beitragen, ist der Dipol $G_{ij}^{\text{sub}}(P_{ij}^2, m_i, m_j)$ gegeben durch Gl. (4.10) aus Ref. [102], wobei $P^2 = \hat{s}$ ist. Die Beiträge der Endpunktsingularitäten $G_{ai}^{\text{sub}}(P_{ai}^2, m_a, m_i)$ und $G_{ia}^{\text{sub}}(P_{ia}^2, m_i, m_a)$ für masselosen IS *Emitter* (*Spectator*) und massive FS *Spectators* (*Emitters*) finden sich in Gl. (A.4) aus Ref. [102], wobei hier $P_{ia} = p_i - p_a$. Die endlichen Terme der Beiträge der Endpunktsingularitäten Gl. (2.33), also die Terme, die nicht proportional zu $\log(M_\gamma)$ bzw. $\log(m_f)$ sind, haben keine physikalische Bedeutung. Diese sind durch die Wahl der Dipole g_{IJ}^{sub} festgelegt und können bei anderen Subtraktionsformalismen anders sein.

Phase-Space-Slicing

Im Gegensatz zur Subtraktionsmethode arbeitet die sogenannte Phase-Space-Slicing-Methode [93, 94, 105, 106] mit einer Unterteilung des Phasenraums des Photons in drei Bereiche (siehe Abbildung 2.4). Dazu müssen zunächst jedoch die sogenannten Cut-Off Parameter ΔE für die Energie E_γ des Bremsstrahlungs-Photons und $\Delta\Theta$ für den Winkel $\theta_{i\gamma}$ zwischen den räumlichen Impulsen des Photons und den emittierenden Teilchen i eingeführt werden. Die erste Unterteilung Φ^{IR} entspricht dem Grenzfall infraroter Photonen, in dem die Energie jedes infraroten Photons durch einen technischen Schnitt ΔE nach oben beschränkt ist, d. h. $E_\gamma \leq \Delta E \ll \sqrt{\hat{s}}$. Der zweite Bereich $\Phi_{\text{koll}}^{\text{hart}}$ beinhaltet die kollineare ($\theta_{i\gamma} \leq \Delta\Theta \ll 1$) Abstrahlung harter Bremsstrahlungs-Photonen ($E_\gamma > \Delta E$), während der dritte Bereich $\Phi_{\text{nicht-koll}}^{\text{hart}}$ den restlichen harten nicht-kollinearen Phasenraum des Photons abdeckt. Dadurch ergibt sich die folgende Unterteilung des Phasenraums des Photons

$$\Phi = \Phi^{\text{IR}}(\Delta E) \cup \Phi_{\text{koll}}^{\text{hart}}(\Delta E, \Delta\Theta) \cup \Phi_{\text{nicht-koll}}^{\text{hart}}(\Delta E, \Delta\Theta). \quad (2.36)$$

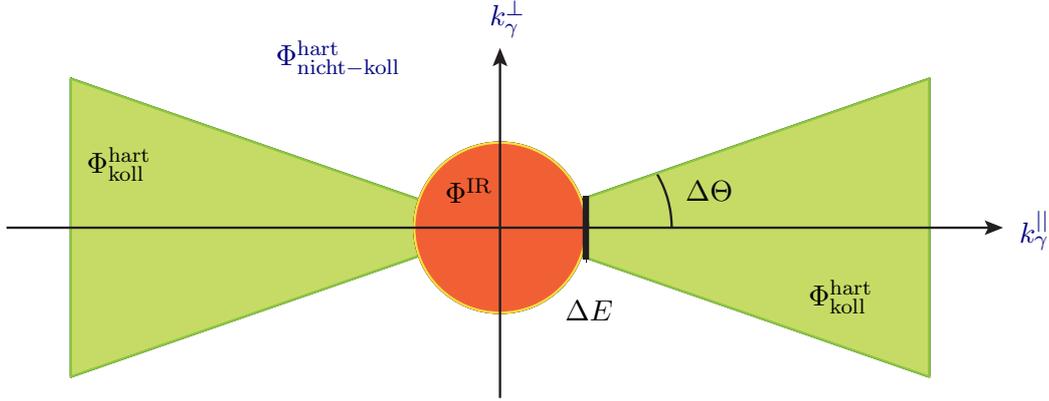


Abbildung 2.4: Eine schematische Darstellung der Aufteilung des Phasenraums in drei verschiedene Bereiche: Den *infraroten*, den *kollinearen* und den *harten nicht-kollinearen* Bereich, der einen endlichen Beitrag zu den reellen Korrekturen liefert. Die Grenzen der jeweiligen Phasenraumbereiche sind: *Infrarote Region* ($M_\gamma < E_\gamma < \Delta E$), *kollineare Region* ($E_\gamma > \Delta E$ und $0 < \theta_{i\gamma} < \Delta\Theta$), *harte nicht-kollineare Region* ($E_\gamma > \Delta E$ und $\theta_{i\gamma} > \Delta\Theta$).

Der letztgenannte Photon-Phasenraumbereich $\Phi^{\text{hart nicht-koll}}$ beschreibt die Emission von harten Photonen mit einer Energie $E_\gamma > \Delta E$ unter einem Winkel $\theta_{i\gamma} > \Delta\Theta$, die im Gegensatz zu infraroten bzw. kollinearen Photonen experimentell nachgewiesen werden können. Zur Berechnung dieses Beitrags lassen sich in der Regel numerische Integrationsmethoden anwenden, die in Anhang B beschrieben sind. Die analytische Berechnung singulärer Anteile verlangt allerdings die Verwendung eines Regularisierungsverfahrens. Im Rahmen dieser Arbeit werden die auftretenden Infrarotsingularitäten durch die Regulatormasse M_γ und kollinearen Singularitäten durch leichten Fermionmassen m_f regularisiert. Der zu berechnende Bremsstrahlungs-Wirkungsquerschnitt $\sigma_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma}$ wird entsprechend der Phasenraumregionen in folgende Anteile zerlegt

$$\sigma_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma} = \sigma^{\text{IR}}(\Delta E) + \sigma_{\text{koll}}^{\text{hart}}(\Delta E, \Delta\Theta) + \sigma_{\text{nicht-koll}}^{\text{hart}}(\Delta E, \Delta\Theta). \quad (2.37)$$

Die Abhängigkeit der physikalischen Observablen von den unphysikalischen Cut-Off Slicing-Parametern ΔE und $\Delta\Theta$ hebt sich weg sobald über alle oben erwähnten Beiträge summiert wird. Deshalb kann der genaue Wert dieser Parameter beliebig gewählt werden. Jedoch muss dieser Wert im Vergleich zu der typischen Skala des Prozesses Q genügend klein sein, weil die Ergebnisse einerseits in der sogenannten Eikonal-Näherung (*engl.*: soft photon approximation) nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Delta E/Q)$ und andererseits im Fall der kollinearen Massensingularitäten nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\Delta\Theta)$ ein korrektes Ergebnis liefern. Werden die Cut-Off Slicing-Parameter zu groß gewählt, so haben die verwendeten Näherungen keine Gültigkeit. Werden diese zu klein gewählt, ist die numerische Integration in den Bereichen nahe den Singularitäten nicht mehr stabil und der daraus resultierende Fehler zu groß.

In Ref. [102] wurde gezeigt, dass die Ergebnisse, die unter Verwendung der Dipol-Subtraktionsmethode berechnet wurden, in der Regel einen kleineren Integrationsfehler aufweisen als die Ergebnisse, die durch Anwendung der Phase-Space-Slicing-Methode erzielt wurden. Dabei wurde in beiden Fällen die gleiche Statistik verwendet. Im Gegensatz zur Phase-Space-Slicing-Methode werden im Falle der Dipol-Subtraktionsmethode zwar keine unphysikalischen Slicing-Parameter eingeführt, jedoch ist dieser Formalismus weniger intuitiv. Sind im berechneten Prozess zudem massive Teilchen involviert, so verkompliziert dies die praktische Implementierung der Methode.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Phase-Space-Slicing-Methode angewandt. Die analytischen Ergebnisse der Wirkungsquerschnitte in infraroten und kollinearen Bereichen werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt. Die explizite Rechnung dazu befindet sich in Anhang C.1 bzw. C.2.

2.2.3 Infrarote Bremsstrahlung des Photons

Um den Wirkungsquerschnitt in Eikonal-Näherung auszurechnen, wird der singuläre Anteil des Matrixelements betrachtet, der von der Emission infraroter Photonen herrührt. Unter der Annahme, dass die Abstrahlung des niederenergetischen Photons die Impulse der äußeren Teilchen unbeeinflusst lässt, faktorisiert das Matrixelement $\mathcal{M}_1(p_a, p_b \rightarrow k_{V_1}, k_{V_2}, k_\gamma) \equiv \mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma, i}^{\text{IR}}$ mit zusätzlicher niederenergetischer Photon-Emission ($k_\gamma \rightarrow 0$) vom i -ten Teilchen zur entsprechenden Übergangsamplitude $\mathcal{M}_0 \equiv \mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2}^0$ ohne Abstrahlung. Im Grenzfalle infraroter Photonen werden nur Terme berücksichtigt, die invers proportional zum Photonimpuls $\propto 1/(k_\gamma \cdot l_i)$ sind. Somit ergibt sich z. B. das Matrixelement für die einlaufenden Fermionen in der sogenannten Eikonal-Näherung

$$\mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma, i}^{\text{IR}}(\xi) = -e Q_i \frac{(\epsilon_\xi^* \cdot l_i)}{(k_\gamma \cdot l_i)} \mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2}^0, \quad (2.38)$$

wobei hier nur die Photonabstrahlung vom i -ten Teilchen mit Vierer-Impuls l_i und der Ladung Q_i betrachtet wurde. Die Größe $\epsilon_\xi^*(k_\gamma)$ stellt den Polarisationsvektor des auslaufenden Photons mit Impuls k_γ und Polarisation ξ dar. Die infrarote Singularität manifestiert sich im Propagator $\propto 1/(k_\gamma \cdot l_i)$, wie aus Gl. (2.38) ersichtlich ist. In Anhang C.1.1 wird gezeigt, dass Gl. (2.38) sowohl für externe Fermionen als auch für externe Vektorbosonen erfüllt ist. Diagramme mit Photonabstrahlung von inneren Linien geladener Teilchen führen nicht zu infraroten Singularitäten und können daher im Rahmen der Eikonal-Näherung vernachlässigt werden. Um die vollständigen Bremsstrahlungskorrekturen in erster Ordnung Störungstheorie zu erhalten, wird über alle Beiträge i summiert:

$$\mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma}^{\text{IR}}(\xi) = e \mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2}^0 \sum_i \vartheta_i Q_i \frac{(\epsilon_\xi^* \cdot l_i)}{(k_\gamma \cdot l_i)}. \quad (2.39)$$

Ein- und auslaufende Teilchen werden dann durch Ladungsfluss $\vartheta_i = +1$ bzw. $\vartheta_i = -1$ charakterisiert.

Um den differentiellen Wirkungsquerschnitt in dieser Näherung zu berechnen, wird das Matricelement $\mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma, i}^{\text{IR}}(\xi)$ aus Gl. (2.39) quadriert, über Impulse auslaufender Teilchen integriert und über Polarisationsrichtungen des Photons summiert. Unter Verwendung von Gl. (1.29) ergibt sich dann für den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei der Abstrahlung eines zusätzlichen niederenergetischen Photons

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} \right]_{\text{IR}} &= - \left[\frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} \right]_0 \times \frac{\alpha}{2\pi^2} \int_{|\vec{k}_\gamma| \leq \Delta E} \frac{d^3|\vec{k}_\gamma|}{2E_\gamma} \sum_{i,j} \vartheta_i Q_i \vartheta_j Q_j \frac{(l_i \cdot l_j)}{(l_i \cdot k_\gamma)(l_j \cdot k_\gamma)} \\ &\equiv - \left[\frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} \right]_0 \times \frac{\alpha}{\pi} \sum_{i,j} \vartheta_i Q_i \vartheta_j Q_j \mathcal{I}_{ij}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

mit der Energie des Photons $E_\gamma = \sqrt{|\vec{k}_\gamma|^2 + M_\gamma^2}$. $[d\hat{\sigma}/d\Omega]_0$ bezeichnet den zum Matricelement \mathcal{M}_0 gehörigen differentiellen Wirkungsquerschnitt auf Born-Niveau. Die verbliebenen Integrationen über den Impuls des Bremsstrahlungs-Photons in \mathcal{I}_{ij} wurden in Ref. [107–109] durchgeführt. Eine Zusammenfassung ihrer Ergebnisse ist auch in [40] bzw. in Anhang C.1 gegeben. Wie aus Gl. (2.40) ersichtlich, können die Integrationen über den Zwei-Teilchen-Phasenraum und über den Photon-Phasenraumbereich unabhängig voneinander durchgeführt werden. Außerdem sind die Resultate (2.39) und (2.40) unabhängig vom betrachteten Prozess gültig. Die explizite Darstellung der Integrale \mathcal{I}_{ij} zu den in dieser Arbeit betrachtenden Prozessen ist in Anhang C.1.2 vorgestellt. Das so erhaltene Ergebnis (2.40) hängt natürlich explizit vom Parameter ΔE ab. Ein gutes Beispiel dafür ist der partonischen Wirkungsquerschnitt zur ZZ-Produktion in der Eikonol-Näherung

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}_{q\bar{q} \rightarrow ZZ\gamma}^{\text{IR}} &= \delta^{\text{IR}} \int d\hat{\sigma}_{q\bar{q} \rightarrow ZZ}^0, \\ \delta^{\text{IR}} &= -\frac{\alpha}{\pi} Q_q^2 \left[\log\left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2}\right) \left(1 + \log\left(\frac{m_f^2}{\hat{s}}\right)\right) + \log\left(\frac{m_f^2}{\hat{s}}\right) + \frac{1}{2} \log^2\left(\frac{m_f^2}{\hat{s}}\right) + \frac{\pi^2}{3} \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Da im Rahmen dieser Arbeit die numerische Auswertung der skalaren N -Punkt-Funktionen mit Hilfe der Bibliothek `LoopTools 2.5` [110, 111] erfolgt, wird die Aufhebung der infraroten Massensingularitäten der Form $\alpha \log(M_\gamma)$ der reellen und virtuellen Korrekturen nicht analytisch dargestellt. Die gegenseitige Aufhebung dieser Massensingularitäten wurde jedoch numerisch überprüft, indem die unphysikalische Photon-Regulormasse im Bereich $10^{-50} \leq M_\gamma \leq 10^{+50}$ variiert wurde.

2.2.4 Kollineare Abstrahlung des Bremsstrahlungs-Photons

Im Rahmen der in dieser Arbeit betrachteten Prozesse treten kollineare Massensingularitäten auf, wenn von einem Anfangszustand mit Quark-Antiquark-Paar ein kollineares Photon abgestrahlt wird, wie in Abbildung 2.5 gezeigt. Analog zur Abstrahlung eines infra-

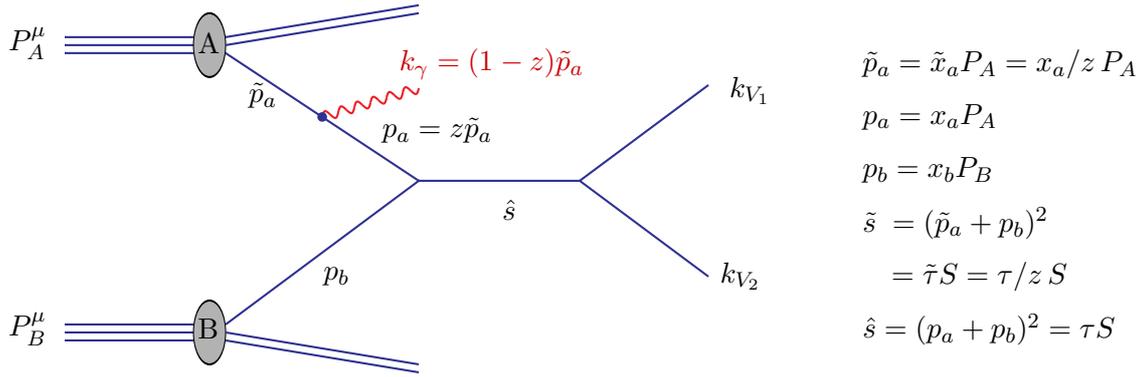


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung des Feynman-Diagramms mit kollinearer Abstrahlung des Bremsstrahlungsphotons im Anfangszustand. Das Teilchen a mit Impuls p_a strahlt ein Photon mit dem Impuls $k_\gamma = (1-z)\tilde{p}_a$ ab. Die vom Photon davongetragene Energie ist dabei $k_\gamma^0 = (1-z)\tilde{p}_a^0$ mit dem Impulsanteil $0 < z < 1$. Die Schwerpunktsenergie des partonischen Prozesses ist nun $\hat{s} = (p_a + p_b)^2 = (z\tilde{p}_a + p_b)^2 = (k_{V_1} + k_{V_2})^2 = x_a x_b z S$.

roten Photons wird im Fall kollinearer Photonabstrahlung das Matrixelement mit Photon-Emission ($\mathcal{M}_1(p_a, p_b \rightarrow k_{V_1}, k_{V_2}, k_\gamma) \equiv \mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma}^{\text{koll}}$) mit dem ohne Abstrahlung ($\mathcal{M}_0(p_a, p_b \rightarrow k_{V_1}, k_{V_2}) \equiv \mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2}^0$) in Verbindung gebracht [94]. Nach diesem Verfahren wird dem Born-Prozess ($\mathcal{M}_{ab \rightarrow V_1 V_2}^0$) aufgrund der Kollinearität des Photons in guter Näherung kein Transversalimpuls genommen, lediglich ein Energieverlust durch die Abstrahlung des Photons macht sich bemerkbar. Der harte Prozess findet also bei einer verringerten partonischen Schwerpunktsenergie $\tilde{s} = x_a x_b z S = z \hat{s}$ statt, wobei S die hadronische Schwerpunktsenergie bezeichnet. Da das kollinear emittierte Photon von Teilchen f ($f = q, \bar{q}'$) mit Energie $E_f = \sqrt{\tilde{s}}/2$ einen gewissen Anteil der partonischen Energie davonträgt, faktorisiert der kollineare Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}^{\text{koll}}(\Delta E, \Delta \Theta, m_f, p_f) \equiv \hat{\sigma}^{\text{koll}}(p_f)$ in einen Wirkungsquerschnitt mit verringerter Schwerpunktsenergie $\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2}^0(z p_f) \equiv \hat{\sigma}_0(z p_f)$ und eine kollineare Korrektur [94]. Für den Wirkungsquerschnitt mit unpolarisierten einlaufenden Fermionen erhält man dann (siehe Anhang C.2):

$$d\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma}^{\text{koll, unpol.}}(p_f) \stackrel{\theta_{f\gamma} \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\alpha}{2\pi} \sum_{f=q, \bar{q}'} Q_f^2 \int_0^{1-\frac{\Delta E}{E_f}} dz \kappa^{\text{koll}}(z) d\hat{\sigma}_0(z p_f) \quad (2.42)$$

mit dem kollinearen Faktor

$$\kappa^{\text{koll}}(z) = \left[\log \left(\frac{\hat{s} \Delta \Theta^2}{4m_f^2} \right) - \frac{2z}{1+z^2} \right] P_{ff}(z) \quad (2.43)$$

und der Quark-Quark-Splitting-Funktion [72]

$$P_{ff}(z) = \frac{1+z^2}{1-z}. \quad (2.44)$$

Hierbei bezeichnen ΔE und $\Delta\Theta$ die bereits eingeführten unphysikalischen Cut-Off Slicing-Parameter. Die kollineare Singularität tritt in jedem Prozess auf, der die Emission eines kollinearen Photons von einem (Anti-)Quark beinhaltet. Die z -Integration enthält im Integrationsbereich $[0, 1]$ die infraroten Divergenzen, wenn die Energie des emittierten Photons verschwindet, d. h. $z \rightarrow 1$. Dies stellt jedoch kein Problem dar, denn dieser singuläre Phasenraumbereich wurde bereits durch die Behandlung des infraroten Phasenraumbereichs Φ^{IR} in Abschnitt 2.2.3 berücksichtigt. Um Doppelzählung zu vermeiden, wird diese singuläre Region aus dem z -Integrationsbereich ausgeschlossen. Dies geschieht in Gl. (2.42) durch explizite z -Integration über den Bereich $z_0 < z < 1 - \Delta E/E_f$, wobei bei der unteren Integrationsgrenze der physikalisch relevante Phasenraumbereich berücksichtigt wird, deshalb werden erst ab der Produktionsschwelle $z_0 = (m_{V_1} + m_{V_2})^2/\hat{s}$ die Beiträge zum Wirkungsquerschnitt mitgenommen. Als numerisch stabiler erweist sich die Verwendung der Plus-Distribution

$$\int_0^{1-\delta_z} dz g(z) f(z) = \int_0^1 dz g(z) [f(z)]_+ + \int_0^{1-\delta_z} dy g(1) f(y) + \mathcal{O}(\delta_z), \quad (\text{A.13})$$

mit der sich das Ergebnis (2.42) durch zwei Terme ausdrücken lässt:

$$\begin{aligned} d\hat{\sigma}_{ab \rightarrow V_1 V_2 \gamma}^{\text{koll, unpol.}}(p_f) \stackrel{\theta_{f\gamma} \rightarrow 0}{\simeq} & \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \underbrace{\int_0^1 dz \left[\log\left(\frac{\hat{s} \Delta\Theta^2}{4m_f^2}\right) P_{ff}(z) - \frac{2z}{1-z} \right]_+}_{:=d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{fin}}} d\hat{\sigma}_0(zp_f) \\ & - \underbrace{\frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \left\{ \log\left(\frac{\hat{s} \Delta\Theta^2}{4m_f^2}\right) \left[\log\left(\frac{\Delta E^2}{E_f^2}\right) + \frac{3}{2} \right] - \log\left(\frac{\Delta E^2}{E_f^2}\right) - 2 \right\}}_{:=d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{reell, E.}}} d\hat{\sigma}_0(p_f) \end{aligned} \quad (\text{2.45})$$

Für die Herleitung des Wirkungsquerschnitts im kollinearen Limes siehe Anhang C.2. Der partonische Wirkungsquerschnitt in Gl. (2.45) entspricht der Emission eines kollinearen Photons vom Quark $f = q$ bzw. Anti-Quark $f = \bar{q}$.

Die Endpunktsingularität, die sich in dem Term $d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{reell, E.}}$ manifestiert, hebt sich in der Summe mit den virtuellen Korrekturen auf. Auch hier wird die Aufhebung der Massensingularitäten der Form $\alpha \log(m_f)$ nicht analytisch gezeigt, da die Evaluation der N -Punkt-Funktionen numerisch erfolgt. Die Unabhängigkeit des partonischen Wirkungsquerschnittes von den Logarithmen in den Fermionmassen kann jedoch mittels der Variation der Fermionmasse $10^{-8} \leq m_f^2 \leq 10^{-2}$ verifiziert werden. Der Term $\int d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{fin}}$ wird numerisch integriert und im nächsten Abschnitt ausführlich besprochen.

2.2.5 Faktorisierung der Anfangszustandssingularitäten in der QED

Bei der Berechnung der NLO EW Korrekturen findet nach dem KLN-Theorem [68, 69, 88] die Aufhebung der Massensingularitäten im Endzustand statt. Für Anfangszustandskorrekturen

heben sich in der Summe aus virtuellen und reellen Korrekturen die singulären Beiträge nicht vollständig gegeneinander auf. Dies führt für masselose Fermionen im Anfangszustand zu großen Korrekturen der Form $\alpha \log(m_f)$, die in dem Beitrag $d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{fin}}$ der Gl. (2.45) enthalten sind. Für Prozesse mit Quark-Antiquark-Annihilation ist dieser Beitrag durch

$$\begin{aligned}
 d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{fin}} &= \frac{\alpha}{2\pi} Q_q^2 \int_0^1 dz \left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right]_+ d\hat{\sigma}_0(zp_q) \\
 &+ \frac{\alpha}{2\pi} Q_{\bar{q}}^2 \int_0^1 dz \left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right]_+ d\hat{\sigma}_0(zp_{\bar{q}}) \\
 &\stackrel{\text{(A.13)}}{=} \frac{\alpha}{2\pi} Q_q^2 \int_0^1 dz \left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right] \left(d\hat{\sigma}_0(z\tilde{p}_q) - d\hat{\sigma}_0(\tilde{p}_q) \right) \\
 &+ \frac{\alpha}{2\pi} Q_{\bar{q}}^2 \int_0^1 dz \left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right] \left(d\hat{\sigma}_0(z\tilde{p}_{\bar{q}}) - d\hat{\sigma}_0(\tilde{p}_{\bar{q}}) \right)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_0(z\tilde{p}_q) &= \int_{\tilde{t}_-}^{\tilde{t}_+} \frac{d\tilde{t}}{16\pi} \frac{1}{(z\hat{s})^2} \left| \mathcal{M}_0(z\hat{s}) \right|^2, \quad \tilde{t}_{\pm} = -\frac{z\hat{s}}{2} \pm \frac{\sqrt{\lambda(z\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)}}{2} + \frac{m_{V_1}^2 + m_{V_2}^2}{2}, \\
 \hat{\sigma}_0(\tilde{p}_q) &= \int_{t_-}^{t_+} \frac{dt}{16\pi} \frac{1}{(\hat{s})^2} \left| \mathcal{M}_0(\hat{s}) \right|^2, \quad t_{\pm} = -\frac{\hat{s}}{2} \pm \frac{\sqrt{\lambda(\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)}}{2} + \frac{m_{V_1}^2 + m_{V_2}^2}{2}
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

gegeben, wobei $Q_q^2 = Q_{\bar{q}}^2 := Q_f^2$ gilt.

Im kollinearen Grenzfall findet der Prozess aufgrund der von dem Photon davongetragenen Energie $k_\gamma^0 = (1-z)p_q^0$ bzw. $k_\gamma^0 = (1-z)p_{\bar{q}}^0$ in einem anderen Schwerpunktsystem statt. Da die Auswertung der partonischen Wirkungsquerschnitte im Schwerpunktsystem ohne Abstrahlung stattfindet, werden die einlaufenden Vierer-Impulse p_q bzw. $p_{\bar{q}}$ vom partonischen Schwerpunktsystem ohne Photonabstrahlung in das mit transformiert, so dass für die einlaufenden Vierer-Impulse

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_q &= \sqrt{z}p_q^0(1, 0, 0, +1) = \sqrt{z}E(1, 0, 0, +1), \\
 \tilde{p}_{\bar{q}} &= \sqrt{z}p_{\bar{q}}^0(1, 0, 0, -1) = \sqrt{z}E(1, 0, 0, -1)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

gilt. Dabei treten folgenden Boostparameter auf:

$$\tilde{\beta}(zp_q) = \frac{1-z}{1+z} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\beta}(zp_{\bar{q}}) = \frac{z-1}{z+1}. \tag{2.49}$$

Die verwendete Matrix für die Lorentz-Transformation findet sich in Gl. (C.106).

Mit Hilfe von Gl. (1.25) ergibt sich aus dem partonischen Wirkungsquerschnitt $d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{fin}}$ (siehe Gl. (2.46)) der hadronische Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\text{koll}}^{\text{fin}}(P_A, P_B) &= \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \frac{1}{1 + \delta_{ab}} \\
 &\times \left[f_{a/A}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x, \mu_F^2) + f_{b/A}(x, \mu_F^2) f_{a/B}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) \right] \\
 &\times \int_0^1 dz \left[\log\left(\frac{\Delta\Theta^2 s}{4m_f^2}\right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right] \\
 &\times \left\{ \left(d\hat{\sigma}_0(z\tilde{p}_q) - d\hat{\sigma}_0(\tilde{p}_q) \right) + \left(d\hat{\sigma}_0(z\tilde{p}_{\bar{q}}) - d\hat{\sigma}_0(\tilde{p}_{\bar{q}}) \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Die hier auftretende logarithmische Abhängigkeit von der Fermionmasse wird dadurch verursacht, dass das kollineare Verhalten durch einen störungstheoretischen Ansatz beschrieben wird, obwohl die kollineare Photon-Emission bei sehr kleinen Impulsüberträgen stattfindet und in diesem Energiebereich die Störungstheorie nicht anwendbar ist (siehe Kapitel 1.2). Sieht man stattdessen die kollinear abgestrahlten Photonen im Anfangszustand als langreichweitigen Prozess, also als Prozess, welcher auftritt, bevor diese Photonen am harten Streuprozess teilnehmen, werden sie zu einem Teil der Partonverteilungsfunktionen. Die kollinearen Massensingularitäten durch Anfangszustandskorrekturen treten somit unabhängig vom harten Streuprozess auf und verlangen eine Redefinition der PDF, wodurch die hadronischen Observablen frei von solchen Massensingularitäten sind. Hierzu muss eine Faktorisierungsskala μ_F eingeführt werden, welche die störungstheoretisch zugänglichen von den nicht-perturbativen Bereichen trennt. Analog zur Renormierung physikalischer Parameter (vgl. Kapitel 2.1) wird in diesem Zusammenhang auch von der Renormierung der „nackten“ PDF gesprochen. Die durch die kollineare Photon-Emission von den einlaufenden (Anti-)Quarks verursachten Massensingularitäten in Gl. (2.45) bzw. in Gl. (2.50) werden in der QED (analog zur Vorgehensweise in der QCD) entsprechend der Redefinition der Quark-PDF in Ref. [112, 113] wie folgt absorbiert:

$$\begin{aligned}
 f_{q/\bar{q}}^H(x) &\longmapsto f_{q/\bar{q}}^H(x, \mu_F^2) + \delta f_{q/\bar{q}}^H(x, \mu_F^2) \\
 &= f_{q/\bar{q}}^H(x, \mu_F^2) - \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} f_{q/\bar{q}}^H\left(\frac{x}{z}, \mu_F^2\right) \kappa^{\text{PDF}}(z)
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

mit

$$\kappa^{\text{PDF}}(z) = \log\left(\frac{\mu_F^2}{m_f^2}\right) \left[P_{ff}(z) \right]_+ - \left[P_{ff}(z)(2\log(1-z) + 1) \right]_+ + C_{ff}(z), \tag{2.52}$$

wobei die endlichen Quark-Massen m_f die kollinearen Divergenzen regularisieren. Eine solche

Redefinition der PDF (2.51) ist prozessunabhängig, was durch das Faktorisierungstheorem (siehe Kapitel 1.2) sichergestellt wird. Diese Redefinition legt die PDF bis auf endliche Anteile, die sogenannten Koeffizienten-Funktionen $C_{ff}(z)$, fest. Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} C_{ff}^{\overline{\text{MS}}}(z) &= 0, \\ C_{ff}^{\text{DIS}}(z) &= \left[P_{ff}(z) \left(\log \left(\frac{1-z}{z} \right) - \frac{3}{4} \right) + \frac{9+5z}{4} \right]_+, \end{aligned} \quad (2.53)$$

wobei $\overline{\text{MS}}$ - bzw. DIS die Wahl des Faktorisierungsschemas bezeichnet, das die Beziehung zwischen den redefinierten Partonverteilungsfunktionen und den experimentellen Messdaten, aus denen die PDF gewonnen werden, an der Faktorisierungsskala μ_F festlegt. Bei Wahl des $\overline{\text{MS}}$ -Schemas werden lediglich diejenigen Anteile in die PDF absorbiert, die die kollinearen Divergenzen (führende logarithmische Beiträge) enthalten. Das DIS-Schema ist hingegen so definiert, dass die Nukleon-Strukturfunktion F_2 der tiefinelastischen Streuung unkorrigiert bleibt (siehe dazu Ref. [113]).

In dieser Arbeit wurden die Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha)$ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema behandelt. Der Grund hierfür ist, dass sich die QCD-Werte der Partonverteilungsfunktionen nur gering von den QED-korrigierten Werten unterscheiden [114]. Deshalb kann die Berechnung der elektroschwachen Korrekturen unter Verwendung von PDF durchgeführt werden, deren Bestimmung lediglich unter Berücksichtigung von QCD-Korrekturen erfolgte. Die hier verwendeten Partonverteilungsfunktionen enthalten keine QED-Evolution, deshalb ist die Wahl des Faktorisierungsschemas an dieser Stelle irrelevant.

Faktorisierung und hadronischer Wirkungsquerschnitt

Einsetzen der redefinierten PDF aus Gl. (2.51) in die Gl. (1.24) ergibt:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\text{CT}}^{\text{PDF}}(P_A, P_B) &= \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b f_{a/A}(x_a, \mu_F^2) f_{b/B}(x_b, \mu_F^2) d\hat{\sigma}_{ab}(x_a x_b S) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \int_{x_a}^1 \frac{dz}{z} f_{a/A}\left(\frac{x_a}{z}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x_b, \mu_F^2) \kappa^{\text{PDF}}(z) d\hat{\sigma}_{ab}(x_a x_b S) \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \int_{x_b}^1 \frac{dz}{z} f_{a/A}(x_a, \mu_F^2) f_{b/B}\left(\frac{x_b}{z}, \mu_F^2\right) \kappa^{\text{PDF}}(z) d\hat{\sigma}_{ab}(x_a x_b S). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Mit der Abbildung

$$\int_0^1 dx_i \int_{x_i}^1 \frac{dz}{z} \mapsto \int_0^1 \frac{dz}{z} \int_0^z dx_i \quad \text{mit } i = \{a, b\} \quad (2.55)$$

und der Substitution $\tilde{x}_i = x_i/z$ ergibt sich die Relation:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \int_{x_a}^1 \frac{dz}{z} f_{a/A}\left(\frac{x_a}{z}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x_b, \mu_F^2) \\
 & \stackrel{(2.55)}{\longrightarrow} \int_0^1 dx_b \int_0^1 dz \int_0^z \frac{dx_a}{z} f_{a/A}\left(\frac{x_a}{z}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x_b, \mu_F^2) \\
 & \stackrel{\tilde{x}_i = x_i/z}{=} \int_0^1 dx_b \int_0^1 dz \int_0^1 d\tilde{x}_a f_{a/A}(\tilde{x}_a, \mu_F^2) f_{b/B}(x_b, \mu_F^2).
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Der hadronische Wirkungsquerschnitt aus Gl. (2.54) lässt sich nun schreiben als

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\text{CT}}^{\text{PDF}}(P_A, P_B) &= \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b f_{a/A}(x_a, \mu_F^2) f_{b/B}(x_b, \mu_F^2) d\hat{\sigma}_{ab}(x_a x_b S) \\
 & - \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_0^1 dz \int_0^1 d\tilde{x}_a \int_0^1 dx_b f_{a/A}(\tilde{x}_a, \mu_F^2) f_{b/B}(x_b, \mu_F^2) \kappa^{\text{PDF}}(z) d\hat{\sigma}_{ab}(\tilde{x}_a x_b z S) \\
 & - \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_0^1 dz \int_0^1 dx_a \int_0^1 d\tilde{x}_b f_{a/A}(x_a, \mu_F^2) f_{b/B}(\tilde{x}_b, \mu_F^2) \kappa^{\text{PDF}}(z) d\hat{\sigma}_{ab}(x_a \tilde{x}_b z S).
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Mit der Substitution $x_i \equiv \tilde{x}_i$, der modifizierten partonischen Energie $\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{x_a x_b z S} = \sqrt{z \hat{s}}$ sowie Gl. (1.25) ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{\text{CT}}^{\text{PDF}}(P_A, P_B) &= \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \\
 & \times \frac{1}{1 + \delta_{ab}} \left[f_{a/A}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x, \mu_F^2) + f_{b/A}(x, \mu_F^2) f_{a/B}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) \right] d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \\
 & - \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \frac{1}{1 + \delta_{ab}} \left[f_{a/A}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x, \mu_F^2) + f_{b/A}(x, \mu_F^2) f_{a/B}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) \right] \\
 & \times \int_0^1 dz \left\{ \left[P_{ff}(z) \left(\log\left(\frac{\mu_F^2(z)}{m_f^2}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - \log\left(\frac{\mu_F^2(1)}{m_f^2}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(P_{ff}(z) (2 \log(1-z) + 1) - C_{ff}(z) \right) \left(d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + \left[P_{ff}(z) \left(\log\left(\frac{\mu_F^2(z)}{m_f^2}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - \log\left(\frac{\mu_F^2(1)}{m_f^2}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(P_{ff}(z) (2 \log(1-z) + 1) - C_{ff}(z) \right) \left(d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Addiert man nun den Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{\text{koll}}^{\text{fin}}$ aus Gl. (2.50) zu $d\sigma_{\text{CT}}^{\text{PDF}}$ aus Gl. (2.58), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 d\sigma^{\text{PDF}} &= d\sigma_{\text{koll}}^{\text{fin}} + d\sigma_{\text{CT}}^{\text{PDF}} \tag{2.59} \\
 &= \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \frac{1}{1 + \delta_{ab}} \left[f_{a/A}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x, \mu_F^2) + f_{b/A}(x, \mu_F^2) f_{a/B}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) \right] d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \\
 &+ \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \sum_{\{a,b\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \frac{1}{1 + \delta_{ab}} \left[f_{a/A}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) f_{b/B}(x, \mu_F^2) + f_{b/A}(x, \mu_F^2) f_{a/B}\left(\frac{\tau}{x}, \mu_F^2\right) \right] \\
 &\times \int_0^1 dz \left\{ \left[P_{ff}(z) \left(\log\left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4\mu_F^2(z)}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - \log\left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4\mu_F^2(1)}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{2z}{1-z} + P_{ff}(z)(2\log(1-z) + 1) - C_{ff}(z) \right) \left(d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[P_{ff}(z) \left(\log\left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4\mu_F^2(z)}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - \log\left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4\mu_F^2(1)}\right) d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left(\frac{2z}{1-z} + P_{ff}(z)(2\log(1-z) + 1) - C_{ff}(z) \right) \left(d\hat{\sigma}_{ab}^0(z\hat{s}) - d\hat{\sigma}_{ab}^0(\hat{s}) \right) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Der Wirkungsquerschnitt $d\sigma^{\text{PDF}}$ ist unabhängig von den kollinearen Massensingularitäten. Es tritt jedoch die Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala μ_F auf.

Der totale hadronische Wirkungsquerschnitt muss von den Slicing-Parametern ΔE und $\Delta\Theta$, die zur Trennung des Phasenraums in infraroten und kollinearen Bereiche eingeführt wurden, unabhängig sein. Der Term $d\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{E}}$ aus Gl. (2.45) entspricht der Emission eines kollinearen Photons mit der Energie ΔE durch das Quark $f = q$ bzw. Antiquark $f = \bar{q}$ und stellt somit einen Beitrag an der Grenze zwischen den infraroten und harten Bremsstrahlungsbeiträgen dar. Dieser Term weist eine Singularität für kleine Werte von $\Delta E/E_f = 2\Delta E/\sqrt{\hat{s}}$ auf, welche dann die entsprechende Singularität, welche nach der Addition der infraroten und harten Beiträge entsteht, teilweise weghebt. Für die fast vollständige Aufhebung dieser Abhängigkeit muss noch die harte nicht-kollineare Bremsstrahlung (siehe Anhang B.1.3) berücksichtigt werden. Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von $\Delta\Theta$ wird durch den Beitrag $d\sigma^{\text{koll}}(\Delta E, \Delta\Theta) + d\sigma^{\text{PDF}}(\Delta\Theta) + d\sigma_{\text{nicht-koll}}^{\text{hart}}(\Delta E, \Delta\Theta)$ aufgehoben. Die (Un-)Abhängigkeit der Wirkungsquerschnitte der hier betrachteten Prozesse von den Slicing-Parameter ΔE und $\Delta\Theta$ wird in Kapitel 4.3.1 numerisch untersucht.

2.3 Sudakov-Logarithmen

Die Teilchenphysik wird in den nächsten Jahren durch Messdaten am Hochenergiebeschleuniger LHC und dessen *Upgrades* dominiert. Bei Energien weit oberhalb der elektroschwachen Energieskala ($\sqrt{\hat{s}} \gg M_V$), wobei M_V die Eichboson-Masse ist, haben neben den QCD Kor-

rekturen auch elektroschwache Korrekturen einen großen Einfluss auf die Ergebnisse, da diese typischerweise mit der Energie anwachsen. Vor allem trägt der schwache Sektor des Standardmodells mit seinen massiven W^\pm - und Z -Eichbosonen im Hochenergielimes mit Termen bei, die den zuvor angesprochenen Massensingularitäten formal sehr ähnlich sind. Als Hochenergielimes wird der Energiebereich bezeichnet, in dem alle kinematischen Invarianten wesentlich größer als die elektroschwache Massenskala M_V sind:

$$|\hat{s}| \sim |\hat{t}| \sim |\hat{u}| \gg M_V^2 \gg M_\gamma^2. \quad (2.60)$$

Der Unterschied zu den in Abschnitt 2.2 betrachteten Singularitäten besteht im Wesentlichen darin, dass die jeweiligen Singularitäten nicht durch die Einführung eines unphysikalischen Massenregulators parametrisiert werden, sondern die Eichboson-Masse M_V bereits die Rolle des physikalischen Abschneideparameters übernimmt. Damit sind die auftretenden Infrarotdivergenzen und kollinearen Singularitäten im Hochenergielimes auf natürliche Weise reguliert. Es treten dann keine weiteren Divergenzen auf. Es entstehen jedoch große Beiträge, die logarithmisch mit der Energie anwachsen.

Eine andere Besonderheit zeigt sich zusätzlich in der reellen Abstrahlung massiver Eichbosonen. Die Prozesse ohne und mit einer solchen reellen Abstrahlung sind nun unterscheidbar. Dadurch entstehen keine entarteten Zustände, die aufsummiert werden müssen. Entsprechend können alle Prozesse mit rein virtuellen Korrekturen getrennt von reellen Korrekturen betrachtet werden. Somit liefern die Logarithmen, welche von den virtuellen Korrekturen stammen, ein endliches physikalisches Ergebnis [115]. Die Struktur der Massensingularitäten ist deshalb in allen Fällen gegeben durch die Logarithmen der Form

$$\alpha^L \log^{2L} \left(\frac{\hat{s}}{M_V^2} \right), \quad \alpha^L \log^{2L-1} \left(\frac{\hat{s}}{M_V^2} \right), \quad \dots, \quad (2.61)$$

wobei L die Anzahl der Schleifen angibt. Diese Logarithmen sind unter dem Namen *Sudakov-Logarithmen* [89, 116] bekannt. Die dominanten Terme zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ der Störungsreihe besitzen quadratische Logarithmen. Sie wurden zum ersten Mal von Sudakov [89] im Rahmen der QED untersucht, wobei die Bezeichnung Sudakov-Logarithmus nicht nur für das Ein-Schleifen-Niveau, sondern auch für Logarithmen, die aus Korrekturen höherer Ordnung stammen, verwendet wird. Die Sudakov-Logarithmen repräsentieren die dominanten Korrekturen. Die Störungsreihe jeder Amplitude \mathcal{M} kann somit durch eine Reihe von Logarithmen der Form

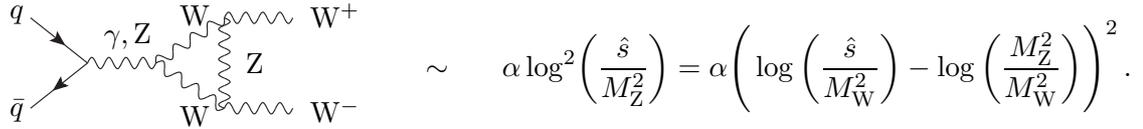
$$\mathcal{M} = \sum_{L=0}^{\infty} \alpha^L \sum_{j=0}^{2L} c_{L,j} \log^j \left(\frac{\hat{s}}{M_V^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{M_V^2}{\hat{s}} \right) \quad (2.62)$$

dargestellt werden. Die Näherung der führenden Logarithmen (*engl.*: leading logarithm, LL) umfasst in jeder Ordnung der Störungstheorie die Terme mit den höchsten Logarithmen-

Potenzen $\alpha^L \log^{2L}(\hat{s}/M_V^2)$. Die weiteren Terme schließen die nächst-führenden Logarithmen (*engl.*: next-to-leading logarithm, NLL) $\alpha^L \log^{2L-1}(\hat{s}/M_V^2)$ usw. mit ein. Da in der Hochenergienäherung die führenden Logarithmen den größten Beitrag zu Strahlungskorrekturen darstellen, nimmt die Ein-Schleifen-Amplitude die Form

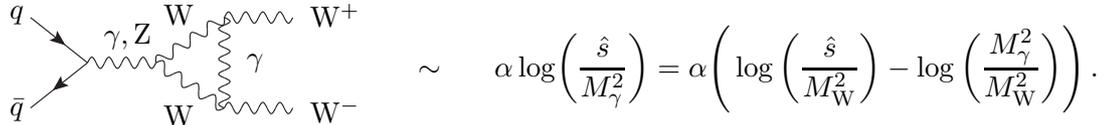
$$\mathcal{M}_1 \sim \alpha \left[\underbrace{C_2 \log^2\left(\frac{\hat{s}}{M_V^2}\right)}_{LL} + \underbrace{C_1 \log\left(\frac{\hat{s}}{M_V^2}\right)}_{NLL} + C_0 \right] + \mathcal{O}\left(\frac{M_V^2}{\hat{s}}\right) \quad (2.63)$$

an, wobei C_0 , C_1 und C_2 zu bestimmende Koeffizienten sind. Dabei werden alle Terme vernachlässigt, die mit $\frac{\text{Masse}^2}{\text{Energie}^2}$ unterdrückt sind. Unter Berücksichtigung der nächst-führenden Logarithmen kann eine partielle gegenseitige Auslöschung zwischen den LL- und NLL-Terme stattfinden, da die Koeffizienten der NLL-Termen sehr groß werden können und die NLL-Terme dadurch ungefähr die gleiche Größenordnung wie die Terme der führenden Logarithmen erhalten [117, 118]. Außerdem haben die NLL-Terme oft ein umgekehrtes Vorzeichen gegenüber den LL-Termen, was dann zur teilweisen gegenseitigen Auslöschung der Beiträge führen kann [115, 117, 118]. Die führenden Logarithmen stammen aus den Bereichen, in denen das Eichboson infrarot und kollinear zwischen den externen Teilchen ausgetauscht wird:



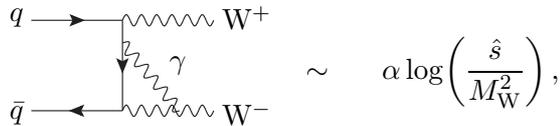
$$\sim \alpha \log^2\left(\frac{\hat{s}}{M_Z^2}\right) = \alpha \left(\log\left(\frac{\hat{s}}{M_W^2}\right) - \log\left(\frac{M_Z^2}{M_W^2}\right) \right)^2.$$

Daneben können dort auch die nächst-führenden Logarithmen auftreten:



$$\sim \alpha \log\left(\frac{\hat{s}}{M_\gamma^2}\right) = \alpha \left(\log\left(\frac{\hat{s}}{M_W^2}\right) - \log\left(\frac{M_\gamma^2}{M_W^2}\right) \right).$$

Wird jedoch ein Eichboson zwischen einer externen und internen Linie ausgetauscht,



$$\sim \alpha \log\left(\frac{\hat{s}}{M_W^2}\right),$$

so treten nur die nächst-führenden Logarithmen auf. Hierbei besitzen die infraroten, kollinearen und infrarot-kollinearen Singularitäten verschiedene Eigenschaften, welche es ermöglichen, diese Massensingularitäten voneinander zu unterscheiden. Die kollinearen und infrarot-kollinearen Massensingularitäten faktorisieren in einen Faktor \mathcal{Z} der Amplitude $\mathcal{M} = \mathcal{Z}\tilde{\mathcal{M}}$ ab, wobei $\tilde{\mathcal{M}}$ die reduzierte Amplitude darstellt, und hängen von den Eigenschaften der externen Teilchen, jedoch nicht vom betrachteten Prozess ab [119–127]. Dies ist am deutlichsten in einer Coulomb-Eichung bzw. axialen Eichung erkennbar, in der kollineare Singularitäten nur in

den Selbstenergie-Korrekturen der externen Teilchen auftreten [121, 126, 127]. Die infraroten Massensingularitäten sind dagegen prozessabhängig und sind in der reduzierten Amplitude $\tilde{\mathcal{M}}$ enthalten. Diese sind proportional zu

$$\log\left(\frac{|r|}{M_V^2}\right) = \underbrace{\log\left(\frac{\hat{s}}{M_V^2}\right)}_{\text{NLL}} - \underbrace{\log\left(\frac{\hat{s}}{|r|}\right)}_{\text{Konstante}}, \quad (2.64)$$

mit $|r| = |u|, |t|$, und führen zu winkelabhängigen Termen in C_0 der Gl. (2.63). Es treten auch Terme mit quadratisch-logarithmischer Struktur auf, die in ihren Argumenten die Invariante $|r|$ enthalten:

$$\log^2\left(\frac{|r|}{M_V^2}\right) \approx \underbrace{\log^2\left(\frac{\hat{s}}{M_V^2}\right)}_{\text{LL}} + \underbrace{2\log\left(\frac{\hat{s}}{M_V^2}\right)\log\left(\frac{|r|}{\hat{s}}\right)}_{\text{NLL+winkelabhängig}} + \underbrace{\log^2\left(\frac{|r|}{\hat{s}}\right)}_{\text{Konstante}}, \quad (2.65)$$

wobei der winkelabhängige Anteil durch Logarithmen mit $|r|$ im Argument isoliert ist und einen Beitrag zu NLL liefert.

Kapitel 3

Software-Implementierung

Ein wesentlicher Bestandteil der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eigener Programme zur Berechnung der elektroschwachen Ein-Schleifen-Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion. Diese erlauben eine unabhängige Validierung gegenüber bereits verfügbaren Programmpaketen. Die mit dieser Arbeit verbundene Implementierung ist eigenständig und unabhängig von existierenden Programmpaketen wie `Mathematica` [128], `FeynArts` [129–131], `FormCalc` [110, 132] und `FeynCalc` [133]. Sie basiert ausschließlich auf `QGraf` [134] und `FORM` [135]. Der Vorteil von `FORM`, einem Programm zur symbolischen Manipulation von algebraischen Ausdrücken, ist, dass es mit wenigen und einfachen Operationen auf lokale Terme auskommt. Die maximale Größe dieser Ausdrücke ist nicht auf den Arbeitsspeicher beschränkt, sondern kann auch den Festplattenspeicher nutzen, was es ermöglicht, mit sehr großen Ausdrücken zu operieren.

Für die numerische Auswertung der resultierenden algebraischen Ausdrücke wurde ein `FORTRAN 90`-Programm geschrieben. Die folgenden Abschnitte geben einen kurzen Überblick über die in diesem Zusammenhang entwickelten Programme.

3.1 Analytische Berechnung

Die analytische Berechnung gliedert sich in zwei Schritte. Im ersten Schritt werden die Übergangsamplituden mit Hilfe eines selbstentwickelten, auf `FORM` [135] basierenden Programms, analytisch erzeugt. Dazu werden zunächst alle Topologien mit der gegebenen Anzahl an äußeren Teilchen und in der vorgegebenen Ordnung der Störungstheorie mit `QGraf` [134] erstellt. In `QGraf` sind keine teilchenphysikalischen Modelle implementiert – die Informationen über den Teilcheninhalt sowie über die Vertices und die Propagatoren des zugrunde liegenden Modells müssen `QGraf` in einer sogenannten Modell-Datei zur Verfügung gestellt werden, welche anhand der Beispiele im `QGraf`-Handbuch speziell für diese Rechnung selbst erstellt wurde. In einer externen Datei `output.dat` werden ebenfalls die Anzahl von ein- bzw. auslaufenden Teilchen sowie die Schleifenanzahl festgelegt, wodurch alle Diagramme mit den entsprechenden Symmetriefaktoren und den entsprechenden Vorzeichen erzeugt werden. In

den so erstellten Topologien werden dann die Felder des gewünschten Modells eingesetzt, d. h. bei den vorgegebenen äußeren Teilchen werden die inneren Propagatoren mit den im Modell vorkommenden Feldern in allen Kombinationen besetzt. Im Anschluss werden alle von `QGraf` in Form von einer Text-Datei erstellten Feynman-Diagramme in `FORM` eingelesen und die zugehörigen Übergangsamplituden erzeugt. Die so erzeugte Übergangsamplitude erfordert zunächst eine weitere Behandlung wie z. B. den Aufbau enthaltenen Dirac-Struktur der Vertices und Propagatoren.

Die resultierenden tensoriellen Ausdrücke werden anschließend automatisch mit den entsprechenden Ein-Schleifen-Tensorintegralen identifiziert. Diese werden dann in UV-divergente (siehe Gl. (D.36)) und UV-endliche Anteile aufgeteilt und unabhängig voneinander berechnet. Die UV-divergenten Terme werden mit Hilfe des Renormierungsverfahrens durch Counterterme absorbiert (siehe Abschnitt 2.1.2). Die UV-endlichen Tensorintegrale werden durch eine automatisierte Passarino-Veltman-Reduktion [136] sukzessive durch skalare Ein-, Zwei-, Drei- und Vier-Punkt-Funktionen ausgedrückt. Um die Anzahl der zu berechnenden skalaren Integrale möglichst klein zu halten, werden die Symmetrien der skalaren N -Punkt-Funktionen (siehe Anhang D.2) ausgenutzt. Anschließend werden Partialbruchzerlegungen vorgenommen, durch die nicht nur der Umfang des erhaltenen Ausdrucks für das Amplitudenquadrat drastisch reduziert wird, sondern sich auch die durch die analytische Anwendung der Passarino-Veltman-Reduktion entstandenen Gram-Determinanten, die bei der numerischen Integration zu Instabilitäten führen, wegheben. Die Ausgabe erfolgt anschließend in Form von `FORTRAN 90`-Programmen zur numerischen Auswertung der bis hierhin analytischen Ausdrücke.

Das hier beschriebene Vorgehen, um von der `QGraf`-Ausgabe zum `FORTRAN`-Code zu gelangen, wurde vollständig mit Hilfe eines selbstentwickelten `FORM`-Programms durchgeführt.

3.2 Numerische Berechnung

Im letzten Schritt wird die numerische Auswertung der Ergebnisse für den hadronischen Wirkungsquerschnitt zur Eichboson-Paarproduktion mit Hilfe der Monte-Carlo-Integrationsroutine `VEGAS` [137] in einem selbstentwickelten `FORTRAN 90`-Programm implementiert. Im Detail werden dazu verschiedene Module wie das Einlesen von Parametern aus Eingabedateien (`precision.mod`), ein Phasenraumgenerator (`phasespace.f90`), Standard-Phasenraum-schnitte (`Cuts.f90`), das Einlesen der analytisch berechneten quadrierten Matrixelemente (`Prozessname.f90`), die Verwendung einer dynamischen Faktorisierungs- und Renormierungsskala (`scale.f90`) und das Erstellen von Histogrammen für differentielle Verteilungen (`histogram.F`) implementiert. Die skalaren Schleifenfunktionen werden während der Ausführung des Programms numerisch mit Hilfe der Bibliothek `LoopTools 2.5` [110, 111] ausgerechnet. Als Endergebnis erhält man ein ausführbares Programm, das die Berechnung des differentiellen oder totalen Wirkungsquerschnitts bei beliebigen Energien ermöglicht.

Die Berechnung eines hadronischen Wirkungsquerschnitts erfolgt mit Hilfe von **VEGAS**, indem eine große Schleife mit einer großen Anzahl an Durchläufen durchgeführt wird, wobei jede Iteration immer folgende Schritte durchläuft:

- Es wird eine Anzahl an Zufallszahlen, die der Dimension des Phasenraums entspricht, von der Monte-Carlo-Integrationsroutine **VEGAS** angefordert.
- Es werden die Zufallszahlen an den Phasenraumgenerator übergeben, welcher die Zufallszahlen in konkrete Impulse für die Teilchen im Anfangs- und Endzustand umrechnet. Parallel dazu erfolgt die Ermittlung der mit dieser Transformation verbundenen Jacobi-Determinante.
- Ferner wird die Einhaltung der kinematischen Schnitte durch eine Testroutine kontrolliert, die bei jedem Aufruf des totalen bzw. differentiellen Wirkungsquerschnitts die Werte der Rapidität und des Transversalimpulses der auslaufenden Eichbosonen berechnet und die Ergebnisse mit den Schranken (4.13) vergleicht. Liegt einer der beiden Werte außerhalb der erlaubten Intervalle, so werden die nachfolgenden Schritte übersprungen.
- Mit den so erhaltenen Impulsen wird die Routine `Prozessname.f90` aufgerufen. Dort werden die zuvor berechneten quadrierten Matrixelemente eingelesen und die im vorigen Punkt bestimmten Impulse eingesetzt.
- Desweiteren wird die Summe der quadrierten Matrixelemente von allen beteiligten Subprozessen berechnet. Dafür werden die Ergebnisse der einzelnen Subprozesse mit den dazugehörigen Partonverteilungsfunktionen gewichtet.
- Alle so berechneten Daten werden anschließend an die `histogram.F`-Routine weitergeleitet, die daraus Histogramme zu differentiellen Verteilungen unterschiedlicher physikalischer Observablen erstellt.
- Im letzten Schritt werden die Ergebnisse an **VEGAS** übergeben, wo die Summation über alle Beiträge zum hadronischen Wirkungsquerschnitt durchgeführt wird.

Zusammengenommen ermöglichen die hier vorgestellten Programme die Erstellung eines Programms zur numerischen Auswertung der NLO Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion. Die Laufzeit des Programms variiert zwischen drei Tagen und einer Woche je nach betrachteten Prozess für 5×10^9 generierten Ereignissen. Der Fehler aus Monte-Carlo-Integration befindet sich dann im Bereich weniger Promille.

3.3 Konsistenz der Rechnung

Bevor in Kapitel 4 die numerischen Ergebnisse präsentiert werden, ist es von großer Wichtigkeit, die einzelnen Bausteine der Rechnung auf ihre Richtigkeit zu testen. Aufgrund der

komplizierten Berechnung der Übergangsamplituden und der verhältnismäßig langen analytischen Zwischenergebnisse sind immer wieder Kontrollen erforderlich, welche sowohl die Konsistenz als auch die Fehlerfreiheit der Ergebnisse sicherstellen. Neben der hier vorgestellten Implementation wurde eine zweite Rechnung von Tobias Kasprzik¹ durchgeführt. Diese ist vollkommen unabhängig und basiert auf `FeynArts`, `FeynCalc`, `MadGraph` [138] und `FormCalc`. Zur Überprüfung wurden die Zwischenergebnisse an wichtigen Stellen verglichen. Sowohl analytisch als auch numerisch wurde eine gute Übereinstimmung mit den hier vorgestellten Resultaten gefunden (siehe hierfür Abschnitt 4.6).

Eine wichtige Kontrolle ist die Aufhebung der UV-Divergenzen durch die Counterterme, die analytisch berechnet und mit Ref. [40] verglichen wurden. Die Tatsache, dass alle UV-Divergenzen sich nach Addition der Counterterme wegheben, ist ein hervorragender Konsistenztest für die Koeffizienten vor UV-divergenten skalaren Funktionen wie A_0 , B_0 und C_0 . Auch die Kompensation der infraroten und kollinearen Singularitäten konnte numerisch für die vollständige Rechnung und analytisch für die Hochenergie-Näherung überprüft werden. Da bei der Berechnung der reellen Korrekturen die Phase-Space-Slicing-Methode verwendet wurde, ist ein wichtiger Konsistenztest die Unabhängigkeit der Ergebnisse von den Slicing-Parametern ΔE und $\Delta\Theta$, die in Abschnitt 4.3.1 untersucht wird. Es stellt sich heraus, dass für die Summe aus reellen und virtuellen Korrekturen die Ergebnisse unabhängig von den Slicing-Parametern sind. Weiterhin wurde gezeigt, dass die Resultate der vollständigen Ein-Schleifen-Rechnung ohne Berücksichtigung der harten Photonabstrahlung das erwartete Hochenergieverhalten in der nächst-führenden logarithmischen Näherung näherungsweise reproduzieren. Zu diesem Zweck wurden die skalaren Integrale im Hochenergielimes mit Hilfe von Ref. [139] analytisch ausgewertet und mit Ref. [140] verglichen.

¹Tobias Kasprzik, Institut für Theoretische Teilchenphysik, KIT, KASPRZIK@PARTICLE.UNI-KARLSRUHE.DE

Kapitel 4

Elektroschwache Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion

Im bisherigen Verlauf dieser Arbeit wurde detailliert diskutiert, wie im Rahmen des elektroschwachen Sektors des Standardmodells theoretische Vorhersagen zu Streuprozessen bei Kollisionsexperimenten erzielt werden können. Hierfür wurde sowohl das Parton-Modell als auch die Behandlung der ultravioletten und der infraroten bzw. kollinearen Singularitäten getrennt voneinander diskutiert. Um die Ergebnisse sowohl für differentielle Verteilungen als auch für die totalen Wirkungsquerschnitte dieser Prozesse vorzustellen, müssen diese beiden Aspekte kombiniert werden.

In diesem Kapitel werden die elektroschwachen $\mathcal{O}(\alpha)$ -Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion

$$p + p \rightarrow V_1 + V_2, \quad \text{mit } V_1 V_2 \in \{W^+ W^-, W^\pm Z, ZZ, \gamma\gamma\} \quad (4.1)$$

untersucht. Zu Beginn soll in Abschnitt 4.1 die Berechnung der Eichboson-Paarproduktion motiviert werden. Der Abschnitt 4.2 stellt die Prozesse (4.1) in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie vor. Hierbei wird die numerische Auswertung sowohl im Fall der totalen Wirkungsquerschnitte als auch der differentiellen Verteilungen in führender Ordnung Störungstheorie diskutiert. Die dazugehörigen Ergebnisse für LHC und Tevatron werden angegeben. In Abschnitt 4.3 werden die mit Hilfe der Methoden aus Kapitel 2 berechneten elektroschwachen Korrekturen zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ vorgestellt. Die entsprechenden numerischen Ergebnisse werden in Abschnitt 4.4 diskutiert. In Abschnitt 4.5 werden die Ein-Schleifen-Ergebnisse, in denen keine weiteren Näherungen für die kinematischen Variablen angenommen werden, mit den bereits in Ref. [117, 118] vorhandenen Rechnungen im Hochenergielimes verglichen.

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind in Ref. [141] und Ref. [142] veröffentlicht.

4.1 Motivation

Die Produktion der elektroschwachen Eichbosonpaare W^+W^- , $W^\pm Z$, ZZ und $\gamma\gamma$ am LHC ist von großem phänomenologischen Interesse. Die größte Motivation für die Untersuchung der Vektorboson-Paarproduktion ist die Bestimmung der Drei-Eichboson-Kopplungen. Diese wurden am LEP (*engl.*: Large Electron Positron Collider) im Vergleich z. B. zur Kopplung der Vektorbosonen an Fermionen, die weniger als 1% von den Standardmodellergebnissen abweichen, nur auf wenige Prozent genau gemessen [143], da aufgrund der am LEP2 erreichbaren moderaten Schwerpunktsenergien (also $\sqrt{S} = 209$ GeV) die Eichboson-Paarproduktion nicht mit ausreichender Statistik stattfinden konnte. Die jetzige Generation der Hadron-Beschleuniger wie der LHC ermöglicht Messungen bei signifikant höheren Schwerpunktsenergien bei gleichzeitig wesentlich größeren Luminositäten und damit besserer Statistik der Eichboson-Paarproduktion. Am LHC können damit die Einschränkungen an die Selbstkopplungen der elektroschwachen Eichbosonen im Vergleich zu Experimenten am Tevatron oder LEP mit höherer Präzision untersucht werden [29–35]. Die Selbstwechselwirkung der Vektorbosonen ist eine direkte Konsequenz der Formulierung des elektroschwachen Standardmodells als nichtabelsche Eichtheorie. Die Messung der Vektorboson-Kopplungen ermöglicht zudem einen Vergleich der Standardmodellresultate mit den Vorhersagen von Theorien, die modifizierte Kopplungen für Eichbosonen beinhalten [144]. Demzufolge können Modelle jenseits des Standardmodells, welche Abweichungen von diesen Selbstkopplungen bei hohen Energien vorhersagen, getestet werden. Ferner ist es möglich, mittels Eichboson-Paarproduktion die spontan gebrochene Eichsymmetrie als fundamentale mathematische Struktur zu etablieren, welche zur Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen dient.

Außerdem liefert die Eichboson-Paarerzeugung einen wichtigen Untergrund zu vielen Prozessen bei der Suche nach neuer Physik jenseits des Standardmodells. Die Signatur dieser Prozesse weist häufig einen fehlenden Transversalimpuls auf. Die Eichboson-Paarproduktion liefert, sofern mindestens eines der beiden W-Bosonen leptonisch zerfällt, Neutrinos im Endzustand, die im Detektor nicht nachgewiesen werden können und deshalb zu Signaturen mit fehlendem Transversalimpuls führen. Modelle neuer Physik sagen ebenfalls im Detektor nicht sichtbare Teilchen vorher, die zu ähnlichen Signaturen führen. Um zwischen den Modellen zu unterscheiden, ist es nötig, sowohl auf experimenteller als auch auf theoretischer Seite eine hohe Genauigkeit zu erreichen. Im Fall der W- und Z-Paarproduktion wurden sowohl von ATLAS [30] als auch von CMS [33] aktuelle Analysen zu den gemessenen Wirkungsquerschnitten vorgestellt und mit den theoretischen Vorhersagen verglichen. Die Genauigkeit der Experimente ist inzwischen so hoch, dass die theoretische Betrachtung der Prozesse in führender Ordnung (*engl.*: leading order, LO) keine hinreichend genauen Ergebnisse liefert. Um die Präzision der Vorhersagen zu erhöhen, sind Berechnungen in höheren Ordnungen der Störungsreihe nötig.

In den letzten Jahrzehnten wurde ein großer Aufwand zur Berechnung der QCD Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion $pp \rightarrow V_1 V_2$ ($V_1, V_2 \in \{W^\pm, Z, \gamma\}$) betrieben, die auf

Born-Niveau durch den Prozess der Quark-Antiquark-Paarvernichtung $q\bar{q} \rightarrow V_1 V_2$ gegeben ist. Für die On-Shell Eichboson-Paarproduktion wurden die QCD Korrekturen in nächst-führender Ordnung (*engl.*: next-to-leading order, NLO) bereits Anfang der 90er Jahre in Ref. [145–149] berechnet. Eine weitere Analyse in Ref. [150] beinhaltet auch die leptonischen Zerfälle der massiven Eichbosonen, die dann später in das Monte Carlo Programm MCFM [151] implementiert wurde. Eine neue Analyse basiert auf dem Matching der NLO QCD Korrekturen an einen Parton-Schauer, zunächst ohne [152, 153] und dann mit leptonischen Zerfällen der Eichbosonen [154–157]. Teile der QCD Korrekturen zu diesen Prozessen in nächst-zu-nächst-führender Ordnung (*engl.*: next-to-next-to-leading order, NNLO) wurden inzwischen berechnet [158, 159]. Manche Studien beinhalten ebenfalls die Effekte der Resummation infraroter Gluonen (*engl.*: soft-gluon resummation) [160], um die Vorhersagen für die bei kleinen Transversalimpulsen produzierten Vektorbosonen zu verbessern. Die Eichboson-Paarproduktion kann entweder durch Quark-Antiquark-Paarvernichtung oder durch Schleifen-induzierte Gluonfusion mit zwei Gluonen im Anfangszustand $gg \rightarrow V_1 V_2$ [161–164] erfolgen. Bei letzterer handelt es sich formal um einen QCD Effekt höherer Ordnung. Da die Gluonfusion mittels Schleifenbeiträgen vermittelt wird, ist dieser Kanal im Vergleich zur $q\bar{q}$ -Vernichtung um zwei Potenzen in α_s unterdrückt. Bei kleinen Energieverhältnissen¹ $\tau = \hat{s}/S$ überwiegt jedoch der Gluonanteil im Proton und deshalb erhöht diese Prozessklasse die Produktionsrate für Eichbosonpaare signifikant. Mit steigenden Energieverhältnissen $\tau = \hat{s}/S$ nimmt der Gluon-Gluon-Beitrag ab (siehe Abbildung 4.1) und der Wirkungsquerschnitt kommt praktisch ausschließlich von Quark-Antiquark-Annihilation. Insgesamt liefert der Gluon-induzierte Beitrag QCD Korrekturen von weniger als 10% [166] unter Berücksichtigung neuer experimenteller Phasenraumschnitte vom ATLAS Experiment [30]. Die vollständigen NLO QCD Korrekturen zur Produktion der Off-Shell Eichbosonpaare im $q\bar{q}$ -Kanal wurden kürzlich in Ref. [166] und Ref. [167] veröffentlicht. Darin wurden die NLO Rechnungen zu WW und WWj (wobei letzteres einen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt in NNLO-Näherung liefert) auf konsistente Weise kombiniert. Eine der letzten Analysen zur der Produktion von $Z\gamma$ [168] und von ZZ [169] berichtet über die erste komplette und vollständig differentielle Berechnung der Strahlungskorrekturen in NNLO QCD Störungstheorie. Hierbei wurde gezeigt, dass die Auswirkung der NNLO QCD Korrekturen auf den Wirkungsquerschnitt zwischen 4% und 15% beträgt, abhängig von den angewandten Schnitten.

Neben dem signifikanten Beitrag der QCD Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion müssen auch die elektroschwachen (EW) Korrekturen mitberücksichtigt werden. Bei Energien, die weit oberhalb der elektroschwachen Skala ($\sqrt{\hat{s}} \gg M_V$) liegen, haben auch die EW Korrekturen einen bedeutenden Einfluss auf die Ergebnisse, da diese mit der Energie logarithmisch anwachsen [170–177]. Aufgrund ihrer starken Energie- und Winkelabhängigkeit können die EW Korrekturen die theoretischen Vorhersagen für differentielle Verteilungen bei großen Transversalimpulsen der Eichbosonen oder großer invarianter Masse der Eich-

¹ $\sqrt{\hat{s}}$ ist die partonische Schwerpunktsenergie (*engl.*: center-of-mass energy, CM energy).

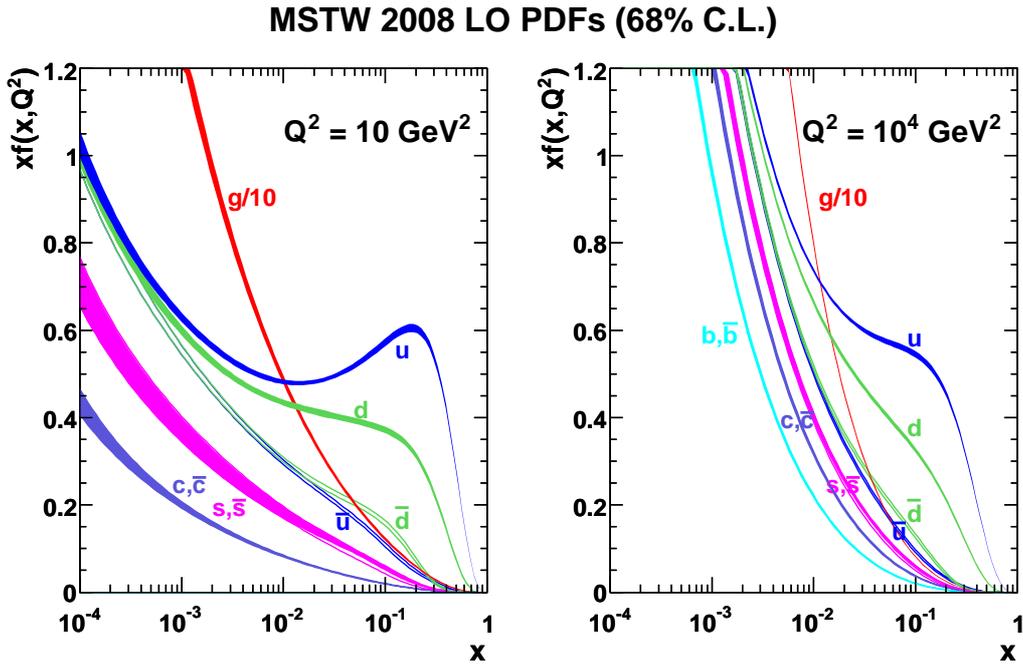


Abbildung 4.1: Typische Werte der Partonverteilungsfunktionen des Protons von MSTW2008LO [165] in führender Ordnung bei Energieskalen $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ und $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$ in Abhängigkeit des Impulsbruchteils x . Es ist gut zu erkennen, wie sich die PDF von Valenzquarks des Protons (Up- und Down-Quarks) von ihren Antiteilchen und anderen Quarks abheben. Bei allen anderen Quarktypen ist ihre Partonverteilung fast identisch mit der ihrer Antiteilchen. Im Bereich kleiner Impulsbruchteile ist die Partonverteilung des Gluons im Proton dominant. Das Top-Quark ist zu schwer, um bei diesen Skalen in den PDF Berücksichtigung zu finden. Dieser Plot wurde aus Ref. [165] entnommen.

bosonpaare deutlich beeinflussen und aufgrund dessen Signale neuer Physik imitieren. Da Hadronen-Beschleuniger wie der LHC mit seiner Schwerpunktsenergie von 14 TeV sowie zukünftige Linearbeschleuniger den Zugang zu einem neuen Energiebereich öffnen, ist die Betrachtung der verschiedenen Prozesse im Hochenergielimes ($\sqrt{\hat{s}} \gg M_V$) sinnvoll. Zur Berechnung der EW NLO Korrekturen im Hochenergielimes gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten. Zum einen kann der Hochenergielimes aus einer vollständigen Rechnung extrahiert werden. Zum anderen gibt es prozessunabhängige Methoden, um die logarithmischen Beiträge zu berechnen. So wurde z. B. in Ref. [140] für den Prozess $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ der Hochenergielimes aus der kompletten Ein-Schleifen-Rechnung bestimmt. Ein Vier-Fermionprozess $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ wurde von Beccaria *et al.* in Hochenergienäherungen für Vertex- und Boxdiagramme verwendet und verschiedene Observablen mit leichten [178] und schweren Quarks wie Bottom-Quark [179] und Top-Quark [180] im Endzustand berechnet. Unter Verwendung der universellen Methoden aus Ref. [115], welche eine allgemeine Methode zur Berechnung der führenden und nächst-führenden Logarithmen auf Ein-Schleifen-Niveau zur Verfügung

stellen, wurden in Ref. [181] die vollständigen logarithmischen Korrekturen für $W^\pm Z$ - und $W\gamma$ -Produktion am LHC berechnet. Dabei wurden sowohl die Off-Shell Effekte als auch Zerfall der Eichbosonen berücksichtigt.

Die Tatsache, dass die Existenz großer Logarithmen bei hohen Energien zu sehr großen Korrekturen in den differentiellen Verteilungen führen kann, wurde in Ref. [144, 182–184] für die Produktion von $W^\pm W^\mp$ -, $W^\pm Z$ -, ZZ -, $W^\pm \gamma$ - und $Z\gamma$ auf NLO EW in logarithmischer Näherung untersucht. In der Literatur findet man ebenso Resummationsansätze, die sich an wohlverstandenen Resummations-Theoremen der QCD orientieren, um Vorhersagen für Korrekturen höherer Ordnung zu treffen. Für den masselosen Vier-Fermion-Prozess $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ wurden die Ergebnisse bis zur nächst-nächst-führenden logarithmischen (*engl.*: next-to-next-to-leading-logarithmic, NNLL = N^2LL) Ordnung in Ref. [185] untersucht. Dazu wurden Resummationsmethoden der QCD auf eine symmetrische $SU(2) \times U(1)$ -Theorie angewandt und die elektromagnetischen Anteile über die infrarote Evolutionsgleichung (siehe Ref. [170]) mitberücksichtigt. In der Literatur findet man auch die Analysen der elektroschwachen Korrekturen unter der Verwendung der infraroten Evolutionsgleichung in der sogenannten *soft-collinear effective theory* (SCET), welche von den Autoren der Ref. [186, 187] durchgeführt wurde. Die weiteren Analysen zu dem Vier-Fermion-Prozess in NLL- (*engl.*: next-to-leading-logarithmic, NLL), N^2LL - und N^3LL -Näherung finden sich in Ref. [175, 176, 188–191]. Die Berechnung des Prozesses $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ erfolgte ebenso in nächst-nächst-führender logarithmischer Ordnung, siehe Ref. [176, 192–195]. Die Autoren in Ref. [117, 118] berechneten die nächst-nächst-führenden logarithmischen Korrekturen für W -Paarproduktion am LHC, wobei Terme der Ordnung M_V^2/\hat{s} vernachlässigt wurden. Berechnungen, die ausschließlich auf solchen logarithmischen Näherungen basieren, liefern jedoch bei kleinen Energien keine präzise Vorhersage, da diese Näherungen typischerweise nur im sogenannten Sudakov-Limes gelten. Dieser stellt allerdings nicht zwingend einen dominanten kinematischen Bereich im Hochenergielimes dar: Im Fall der W -Paarproduktion stammt der signifikante Beitrag zum Wirkungsquerschnitt nicht vom Sudakov-, sondern vom Regge-Limes. Das Regge-Regime beschreibt den kinematischen Bereich, in dem \hat{s} groß und $|\hat{t}|$ klein ist. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage nach dem Einfluss elektroschwacher Korrekturen auf die Analyse des totalen Wirkungsquerschnittes und der differentiellen Verteilungen zur Eichboson-Paarproduktion im Niederenergiebereich, in dem die Terme der Ordnung M_V^2/\hat{s} nicht mehr vernachlässigbar sind. Die Berücksichtigung der elektroschwachen Korrekturen ist also in allen kinematischen Bereichen notwendig, damit die evtl. experimentell beobachtbaren Abweichungen von QCD-korrigierten Vorhersagen des Standardmodells nicht fälschlicherweise als Signale möglicher Physik jenseits des Standardmodells interpretiert werden.

Die ersten vollständigen Berechnungen zu elektroschwachen Strahlungskorrekturen in der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ zur hadronischen Produktion der On-Shell Eichbosonpaare $pp \rightarrow V_1 V_2$ mit $V_1 V_2 \in \{W^+W^-, W^+Z, W^-Z, ZZ, \gamma\gamma\}$ wurden in Ref. [141, 142] veröffentlicht und werden in dieser Arbeit ausführlich diskutiert. Dabei wurde angenommen, dass die massiven Eichbosonen stabil sind und auf ihren Massenschalen sitzen. Unterschiedliche Prozesse führen

dabei zu signifikanten Unterschieden in der Größe der elektroschwachen Korrekturen. Ferner werden die differentiellen Verteilungen sowohl bei kleinen als auch bei großen invarianten Massen der Eichbosonpaare, bzw. kleinen und großen Transversalimpulsen und Rapiditäten der Eichbosonen untersucht. Es werden große Abweichungen beobachtet, die fälschlicherweise als anomale Eichboson-Kopplungen interpretiert werden könnten. Die volle M_V^2/\hat{s} Abhängigkeit der Ergebnisse macht es zum einen möglich, das komplette Spektrum des kinematischen Bereichs am LHC abzudecken. Zum anderen können die kinematischen Bereiche in der Nähe der Produktionsschwelle der Eichbosonen² oder bei kleinen Transversalimpulsen der Eichbosonen genauer untersucht werden. Desweiteren stellt sich heraus, dass der $\gamma\gamma$ -induzierte Beitrag relativ große Korrekturen im TeV-Bereich liefert, besonders bei Betrachtung der differentiellen Verteilungen der Rapiditätsdifferenzen der Eichbosonen.

Eine der jüngsten Analysen [196] präsentiert die vollständigen NLO-Rechnungen zur On-Shell $W^\pm W^\mp$, $W^\pm Z$ und ZZ -Paarproduktion unter Berücksichtigung sowohl der QCD als auch der elektroschwachen Effekte. Zudem werden darin auch die Photon-Quark-Beiträge ausführlich diskutiert. Diese können zu Korrekturen im zweistelligen Prozentbereich bei hohen Energien führen. Dieser Anstieg tritt jedoch in Phasenraumbereichen auf, in denen die QCD Korrekturen gegenüber den LO Beiträgen dominant sind. Als Folge davon ist der Einfluss des Photon-Quark-Kanals auf den totalen Wirkungsquerschnitt sehr klein und wird durch dieselben Schnitte unterdrückt, welche auch die großen QCD Korrekturen unterdrücken.

Der nächste Schritt bei der Berechnung der vollständigen elektroschwachen Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion ist die Berücksichtigung der off-shell Effekte und leptonischen Zerfälle der Eichbosonen $pp \rightarrow V_1 V_2 \rightarrow 4l$. Eine erste Analyse der kompletten elektroschwachen NLO Korrektur zum Prozess $pp \rightarrow W^+ W^- \rightarrow \nu_\mu \mu^+ e^- \bar{\nu}_e$ in der double-pole Näherung wurde in Ref. [197] vorgestellt.

4.2 Bornsche Näherung

In der führenden Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ lassen sich die Matrixelemente zu den verschiedenen Prozessen

$$\left. \begin{array}{l} q\bar{q} \rightarrow W^+W^- \\ q\bar{q} \rightarrow ZZ \\ q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma \end{array} \right\} \text{ mit } q = u, d, s, c, b \tag{4.2}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_i \bar{d}_j \rightarrow W^+Z \\ \bar{u}_i d_j \rightarrow W^-Z \end{array} \right\} \text{ mit } u_i = \{u, c\} \text{ und } d_j = \{d, s\}$$

²Obwohl die elektroschwachen Korrekturen bei niedrigen Transversalimpulsen klein sind, gilt das nicht mehr für die ZZ -Produktion: In diesem Fall sind die EW Korrekturen sogar -5% in der Nähe der Resonanz, für die restlichen Eichbosonpaare jedoch nur bis -1% .

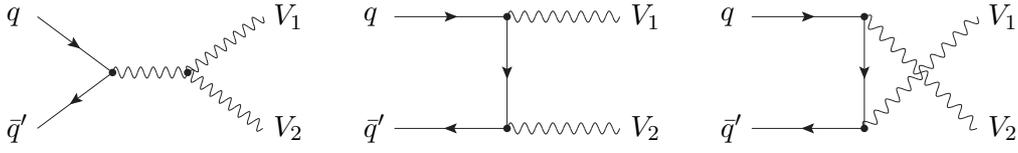


Abbildung 4.2: Die Feynman-Diagramme zum partonischen Prozess $q\bar{q} \rightarrow V_1 V_2$ zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$

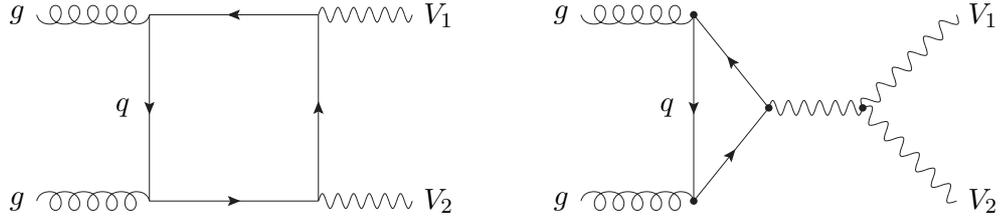


Abbildung 4.3: Die Beispiel-Diagramme zum partonischen Prozess $gg \rightarrow V_1 V_2$ zur Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2 \alpha^2)$

der Eichboson-Paarproduktion durch den Austausch intermediärer Eichbosonen W^\pm, Z, γ (je nach betrachtetem Endzustand) im \hat{s} -Kanal sowie den Austausch eines intermediären Fermions im \hat{t} - bzw. \hat{u} -Kanal beschreiben. Die Feynman-Diagramme, z. B. zum partonischen Prozess $q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2$, sind in Abbildung 4.2 dargestellt.

Die Diagramme mit einer Higgs-Fermion-Kopplung wurden hierbei nicht berücksichtigt. Die entsprechenden Beiträge zum Wirkungsquerschnitt sind durch einen Faktor m_f/M_H unterdrückt und werden deshalb im Folgenden vernachlässigt. Die Matrixelemente der Prozesse mit einlaufenden $\bar{q}q$ -Paaren wurden ausgehend von Prozessen mit dem $q\bar{q}$ -Anfangszustand berechnet, indem die Ersetzung der Impulse einlaufender Teilchen $p_q \leftrightarrow p_{\bar{q}}$ vorgenommen wurde bzw. indem die \hat{t} - und \hat{u} -Kanaldiagramme vertauscht wurden.

Die Gluon-induzierten Beiträge zur Übergangsamplitude sind in der Abbildung 4.3 dargestellt. Diese sind von der in dieser Arbeit nichtberücksichtigten Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_s^2 \alpha^2)$ und werden deshalb vernachlässigt. Diese liefern jedoch einen zusätzlichen Beitrag von ca. 10% bezogen auf den $q\bar{q} \rightarrow W^+ W^-$ LO Wirkungsquerschnitt, siehe z. B. Ref. [141, 198].

Durch die Verfügbarkeit der Photon-Verteilungsfunktionen im Proton können sowohl die Photon-Photon- (siehe Abbildung 4.4) als auch die (Anti-)Quark-Photon-induzierten Beiträge im Fall der W-Paarproduktion bereits in führender Ordnung berücksichtigt werden. Letzterer wurde bereits in Ref. [196] ausführlich diskutiert und wird deshalb im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr untersucht. Im Fall der $W^\pm Z$ -Produktion gibt es aufgrund der Ladungserhaltung keine Photon-Photon-induzierten Beiträge. Im Gegensatz zur W-Paarproduktion sind bei der ZZ- und $\gamma\gamma$ -Produktion die Photon-induzierten Beiträge die Effekte höherer Ordnung und

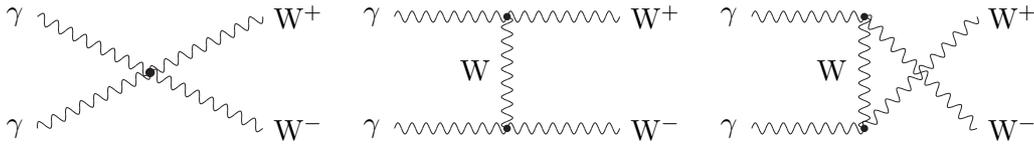


Abbildung 4.4: Die Feynman-Diagramme zum partonischen Prozess $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$.

werden somit im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls nicht berücksichtigt.

Für die numerische Berechnung des Beitrags des Prozesses $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ zum hadronischen Wirkungsquerschnitt wird das PDF-Set MSRT2004QED [199] aufgrund der vorhandenen Photon-Luminosität verwendet. Eine detaillierte Diskussion der phänomenologischen Eigenschaften dieses Prozesses an Photon-Kollidern sowohl in der führenden als auch in der nächst höheren Ordnung der elektromagnetischen Kopplungskonstanten findet sich in Ref. [200]. Die Photon-induzierten Beiträge für die W-Paarproduktion in elastischen Hadron-Hadron-Kollisionen wurden in Ref. [201, 202] ausführlich diskutiert. Im Rahmen dieser Arbeit werden die rein inelastischen Beiträge quantifiziert, die nicht getrennt vom dominanten $q\bar{q}$ -Beitrag betrachtet werden können.

4.2.1 Annahmen und Näherungen

In der hier vorgestellten Analyse werden alle Fermionmassen bis auf die Masse des Top-Quarks vernachlässigt. Dadurch entkoppeln die links- und rechtshändigen Komponenten dieser Fermionen und werden somit als separate Freiheitsgrade betrachtet. Weiterhin führt dies aufgrund der vollständigen Paritätsverletzung der W-Boson-Kopplung insbesondere zum Verschwinden einiger Beiträge zur Übergangsamplitude, da die rechtshändigen Quarks bzw. linkshändigen Antiquarks nicht an W-Bosonen koppeln. Ferner hängen nun die Übergangsamplituden nur noch vom Quark-Typ und von auftretenden Faktoren der Quark-Mischungsmatrix (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix, CKM-Matrix) [54, 55] ab.

Die Beiträge der Mischung zwischen den ersten beiden Generationen mit der dritten sind vernachlässigbar klein. Die im Fall der $W^\pm Z$ -Produktion auftretende CKM-Matrix (siehe Abbildung 4.5 rechts) wurde daher im Folgenden auf die ersten beiden Generationen reduziert, wodurch sie eine blockdiagonale Gestalt annimmt. Die Übergangswahrscheinlichkeit innerhalb der Quarks der dritten Generation ist dabei maximal, $|V_{tb}| \simeq 1$. Dadurch können die Quarks der dritten Generation im Anfangszustand bei $W^\pm Z$ -Produktion (4.2) vernachlässigt werden, weil die Beiträge des Top-Quarks im Anfangszustand stark unterdrückt sind und deshalb im Allgemeinen nicht betrachtet werden müssen. Für die nicht-verschwindenden Elemente der CKM-Matrix werden in dieser Arbeit die Werte (4.11) verwendet. Es ist wichtig, die nichtdiagonalen Elemente der CKM-Matrix zu berücksichtigen, weil diese einen nicht vernachlässigbaren Beitrag im Ergebnis liefern, der durch die Faltung der quadrierten Ma-

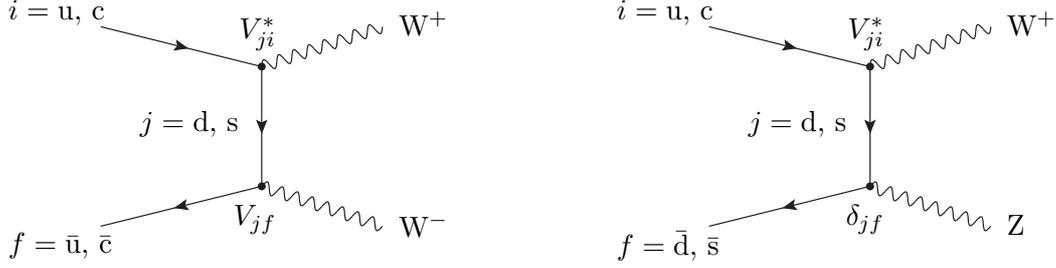


Abbildung 4.5: Zur Verdeutlichung der Diskussion sind hier die Beispiel-Diagramme für WW- und W⁺Z-Produktion skizziert.

trixelemente mit den dazugehörigen PDF

$$\begin{aligned}
 & |\mathcal{M}(q\bar{q}' \rightarrow W^+Z)|^2 \times \text{PDF} \\
 & = |\mathcal{M}_0|^2 \left[|V_{ud}|^2 f_{u/p}(x_a) f_{\bar{d}/p}(x_b) + |V_{us}|^2 f_{u/p}(x_a) f_{\bar{s}/p}(x_b) \right. \\
 & \quad \left. + |V_{cs}|^2 f_{c/p}(x_a) f_{\bar{s}/p}(x_b) + |V_{cd}|^2 f_{c/p}(x_a) f_{\bar{d}/p}(x_b) \right]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

berechnet werden kann. Für drei verschiedene Quark-Generationen wird die unitäre 3×3 CKM-Matrix durch drei Rotationswinkel und eine Phase parametrisiert [46]. Wenn jedoch die Anzahl der Generationen auf zwei begrenzt ist, wie oben beschrieben, wird die CKM-Matrix zu einer unitären 2×2 Matrix, die nur von einem reellen Parameter, dem sogenannten Cabibbo-Winkel θ_C , abhängt (abgesehen von einem in diesem Unterraum unbeobachtbaren Phasenfaktor) und somit folgendermaßen gewählt werden kann [38],

$$\mathbf{V}_C = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} \\ V_{cd} & V_{cs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Dies führt dazu, dass Gleichung (4.3) folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}
 & |\mathcal{M}(q\bar{q}' \rightarrow W^+Z)|^2 \times \text{PDF} \\
 & = |\mathcal{M}_0|^2 \left[\cos^2 \theta_C f_{u/p}(x_a) f_{\bar{d}/p}(x_b) + \sin^2 \theta_C f_{u/p}(x_a) f_{\bar{s}/p}(x_b) \right. \\
 & \quad \left. + \cos^2 \theta_C f_{c/p}(x_a) f_{\bar{s}/p}(x_b) + \sin^2 \theta_C f_{c/p}(x_a) f_{\bar{d}/p}(x_b) \right] \\
 & = |\mathcal{M}_0|^2 \left[f_{u/p}(x_a) f_{\bar{d}/p}(x_b) + f_{c/p}(x_a) f_{\bar{s}/p}(x_b) \right. \\
 & \quad \left. + \sin^2 \theta_C f_{u/p}(x_a) f_{\bar{d}/p}(x_b) \left(\frac{f_{\bar{s}/p}(x_b)}{f_{\bar{d}/p}(x_b)} - 1 \right) \left(1 - \frac{f_{c/p}(x_a)}{f_{u/p}(x_a)} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Der Beitrag, welcher von den nichtdiagonalen Elementen der CKM-Matrix stammt, ist im letzten Term der Gl. (4.5) sichtbar und liefert eine Korrektur von ca. 1% gegenüber dem Wirkungsquerschnitt ohne Berücksichtigung der CKM-Matrix. Dieser tritt dann auf, wenn

nur ein äußeres W-Boson an Quarks im Anfangszustand koppelt.

Analog zur $W^\pm Z$ -Produktion treten auch im Fall der W-Paarproduktion zum einen die Feynman-Diagramme auf, in denen die beiden W-Bosonen über ein virtuelles Photon oder Z-Boson an die Fermionlinie koppeln (siehe Abbildung 4.5 links). Da jedoch im Standardmodell keine flavour-verletzenden neutralen Ströme existieren, treten in diesem Fall ausschließlich die Beiträge mit gleichen externen Quark-Flavours auf. Zum anderen treten Diagramme auf, bei denen beide W-Bosonen an die Fermionlinie koppeln (siehe Abbildung 4.2 Mitte und rechts). Die Beiträge solcher Feynman-Diagrammen ergeben sich durch Summation über verschiedene intermediäre Quarks, die sich jedoch nur durch die in den W-Kopplungen auftretenden Koeffizienten der CKM-Matrix unterscheiden. Wird nun über alle intermediären Quarks summiert, so erhält man aufgrund der Unitarität der CKM-Matrix

$$\sum_k V_{ik} V_{kj}^* = \delta_{ij}. \quad (4.6)$$

Die CKM-Matrix kann daher hier gleich der Einheitsmatrix $V_{\text{CKM}} = \mathbb{I}$ gesetzt werden. Die Diagramme, die externe Quarks verschiedener Flavours beinhalten, tragen zur W-Paarproduktion nicht bei. Unter Vernachlässigung der Quark-Massen innerhalb der ersten zwei Quark-Generationen sind sowohl die LO- als auch die NLO-Beiträge im Fall der ZZ - und $\gamma\gamma$ -Produktion äquivalent zu denjenigen ohne Quark-Mischung. Bei diesen Prozessen werden die Beiträge, die vom $b\bar{b}$ -Anfangszustand herrühren, trotz der kleinen Bottom-Quark-PDF berücksichtigt.

4.2.2 Eingabeparameter

Bei der numerischen Auswertung der hadronischen Wirkungsquerschnitte wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit folgende experimentelle Eingabeparameter verwendet (siehe Ref. [46]):

$$\begin{aligned} M_W &= 80.398 \text{ GeV}, & M_H &= 125 \text{ GeV}, \\ M_Z &= 91.1876 \text{ GeV}, & M_t &= 173.4 \text{ GeV}, \\ G_\mu &= 1.16637 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Da bei der Berechnung der elektroschwachen Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion das On-Shell-Renormierungsschema angewandt wurde, wurde dementsprechend der Weinberg-Winkel θ_W über die On-Shell-Relation

$$\cos^2 \theta_W = \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad \text{und} \quad \sin^2 \theta_W = 1 - \cos^2 \theta_W \quad (4.8)$$

mit den Eingabeparametern aus (4.7) verwendet. Für die elektromagnetische Kopplung α wurde im Fall der $\gamma\gamma$ -Produktion (konsistent zur Renormierung der Kopplungskonstante im

Thomson-Limes) der Wert

$$\alpha(0) = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137.035999074} \quad (4.9)$$

verwendet. Im Fall der Paarproduktion der massiven Eichbosonen wurde die Feinstrukturkonstante aus den Parametern in (4.7) gemäß

$$\alpha_{G_\mu} = \frac{\sqrt{2}G_\mu M_W^2 \sin^2 \theta_W}{\pi} \quad (2.21)$$

gewonnen. Durch diese Wahl von α werden einige wesentliche Korrekturen zur elektroschwachen Kopplung aus höheren Ordnungen Störungstheorie berücksichtigt. Für den Vergleich der Rechnungen in dieser Arbeit mit den vorhandenen Ergebnissen in Ref. [117] wurde jedoch der Wert für die Feinstrukturkonstante im $\overline{\text{MS}}$ -Schema verwendet,

$$\alpha(M_Z^2) = \frac{1}{128.1}. \quad (4.10)$$

Die CKM-Matrix wurde in Abschnitt 4.2.1 ausführlich diskutiert. Im Fall der W^+W^- -, ZZ - und $\gamma\gamma$ -Produktion spielt die CKM-Matrix aufgrund ihrer Unitarität keine Rolle. Bei der $W^\pm Z$ -Produktion wurden der CKM-Matrix folgende Werte zugeordnet:

$$|V_{ud}| = |V_{cs}| = 0.974, \quad |V_{us}| = |V_{cd}| = \sqrt{1 - |V_{ud}|^2}. \quad (4.11)$$

Zur Berechnung des hadronischen Wirkungsquerschnittes der Prozesse (4.2) mit dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen wurden hierbei die benötigten Partonverteilungsfunktionen MSTW2008LO [165] für die Quark-Antiquark-Paarvernichtung und MSRT2004QED [199] für die Photon-induzierten Beiträge der Bibliothek LHAPDF [165] entnommen. Um konsistent die Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ in die Berechnung der hadronischen Wirkungsquerschnitte einzubeziehen, insbesondere die reelle Abstrahlung mit den resultierenden kollinearen Singularitäten, sollten die Partonverteilungsfunktionen im Prinzip die QED-Effekte berücksichtigen. Solche Analysen der PDF sind in Ref. [199] beschrieben. Die Effekte der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ sind jedoch klein bezogen auf ihre Auswirkung auf die Quark-Verteilung [114]. Ferner beinhalten die zurzeit verfügbaren Partonverteilungsfunktionen mit den $\mathcal{O}(\alpha)$ Korrekturen auch NLO QCD Effekte, während die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten elektroschwachen Analysen nur die führende Ordnung QCD berücksichtigen. Aus diesem Grund ist der PDF-Satz MSTW2008LO im Rahmen dieser Arbeit die Standardwahl für die Berechnung der Quark-induzierten Prozesse.

Eine bessere Annäherung der Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung Störungstheorie an das Ergebnis höherer NLO QCD Ordnung lässt sich oft durch eine geeignete Wahl der Faktorisierungsskala erreichen. Für die Prozesse aus Gl. (4.2) wird daher

$$\mu_F = \overline{M}_T = \frac{1}{2} \left(\sqrt{M_{V_1}^2 + p_{T,V_1}^2} + \sqrt{M_{V_2}^2 + p_{T,V_2}^2} \right) \quad (4.12)$$

gewählt.

Die Notwendigkeit von Phasenraum-Schnitten wurde aus der theoretischen und experimentellen Sicht bereits in Abschnitt 1.2.2 erläutert. Bei den hier betrachteten Prozessen soll durch Phasenraumschnitte ein möglichst großer Teil des Wirkungsquerschnittes erhalten bleiben. Für alle im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Prozesse, wenn nicht anders vermerkt, wurden die Standard-Phasenraumschnitte

$$k_{T,V_i} > 15 \text{ GeV}, \quad |y_{V_i}| < 2.5, \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 \quad (4.13)$$

an Transversalimpuls k_{T,V_i} und Rapidität y_{V_i} eines der Eichbosons angewandt.

Alle Wirkungsquerschnitte wurden für pp-Kollisionen am LHC mit einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14 \text{ TeV}$ bzw. $\sqrt{S} = 8 \text{ TeV}$ und für Proton-Antiproton-Kollisionen am Tevatron mit der Tevatron-Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 1.96 \text{ TeV}$ berechnet.

4.2.3 Wirkungsquerschnitte in Bornscher Näherung

Die Berechnung der hadronischen Wirkungsquerschnitte erfordert die Festlegung der Eingabeparameter. Die folgenden Rechnungen wurden mit den in Abschnitt 4.2.2 aufgelisteten Parametern und der Phasenraumschnitte durchgeführt.

Um einen Endzustand im Fall der $\gamma\gamma$ -Produktion festzulegen, müssen die Forderungen (4.13), die an die zwei sichtbaren auslaufenden Photonen gestellt worden sind, erfüllt sein. Wenn jedoch ein zusätzliches Bremsstrahlungs-Photon vorhanden ist, dann definieren nur die zwei Photonen mit dem größten Transversalimpuls k_T den Endzustand, während das dritte Photon inklusiv behandelt wird, um ein infrarotsicheres Ergebnis zu gewährleisten.

Außerdem wird bei der Berechnung differentieller Verteilungen wie $d\sigma/dk_{T,V_i}$ und $d\sigma/dy_{V_i}$ im Fall identischer Teilchen im Endzustand über beide Teilchen summiert. Jedes der beiden Teilchen führt zu einem Eintrag im entsprechenden Bin. Die Einträge müssen daher mit einem Faktor 1/2 gewichtet werden:

$$\int d\xi_V \left(\frac{1}{2} \frac{d\sigma^{\text{pp} \rightarrow VV}}{d\xi_V} \right) = \sigma^{\text{pp} \rightarrow VV}, \quad \text{für} \quad \xi = k_T \quad \text{bzw.} \quad \xi = y, \quad \text{wobei} \quad V = Z, \gamma. \quad (4.14)$$

Um die Relevanz der relativen elektroschwachen Korrekturen zu verdeutlichen, werden in den folgenden Abschnitten die integrierten Verteilungen betrachtet. Diese sind definiert als

$$\sigma(\xi > \xi^{\text{cut}}) = \int_{\xi^{\text{cut}}}^{\infty} d\xi \left(\frac{d\sigma}{d\xi} \right), \quad \text{mit} \quad \xi = k_T, M_{VV} \quad \text{und} \quad \xi^{\text{cut}} = k_T^{\text{cut}}, M_{VV}^{\text{cut}}. \quad (4.15)$$

Vor der Diskussion der elektroschwachen Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion an

Hadron-Hadron-Kollidern sollen zunächst die wichtigsten Eigenschaften zum Wirkungsquerschnitt der Prozesse (4.2) in Bornscher Näherung $\sigma_0^{\text{pp/p}\bar{\text{p}}}$ bei verschiedenen Schwerpunktsenergien am LHC und Tevatron aufgezeigt werden. Die Ergebnisse für die totale Wirkungsquerschnitte für die Prozesse $\text{pp} \rightarrow V_1 V_2(+X)$ am LHC und $\text{p}\bar{\text{p}} \rightarrow V_1 V_2(+X)$ am Tevatron in Bornscher Näherung sind in Tabelle 4.1 für die Standard-Eingabeparameter und -Schnitte aus Abschnitt 4.2.2 dargestellt.

Mit Schnitte \sqrt{S}/TeV	W^-W^+			ZZ		W^+Z		W^-Z		$\gamma\gamma$	
	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	$\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}(\%)$	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$
1.96	7.054	-0.47	0.48	0.8624	-4.92	1.023	-1.19	1.023	-1.19	19.21	0.16
8	23.99	-0.72	1.67	3.810	-4.38	5.256	-1.45	3.343	-1.25	41.38	0.24
14	42.39	-0.88	1.73	7.066	-4.48	8.677	-1.53	6.463	-1.31	62.69	0.21

Tabelle 4.1: Die dargestellten Werte entsprechen dem hadronischen Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung und den dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen unter Berücksichtigung der Eingabeparameter und der Standard-Phasenraumschnitte, die in Abschnitt 4.2.2 angegeben sind. Die Größen δ_{ew} und $\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}$ sind in Gleichung (4.17) definiert. Die ersten beiden Zeilen sind für Proton-Proton-Kollisionen am LHC, während die letzte Zeile für Proton-Antiproton-Kollision am Tevatron ist. Außerdem sind die elektroschwachen Korrekturen aufgelistet, auf die in Abschnitt 4.3 näher eingegangen wird.

Tabelle 4.2 zeigt die Ergebnisse der totalen Wirkungsquerschnitte $\sigma_{\text{pp/p}\bar{\text{p}}}$ ohne Anwendung der kinematischen Schnitte (4.13) für alle Endzustände außer der $\gamma\gamma$ -Erzeugung. Die relativen elektroschwachen Korrekturen, die im Weiteren immer als δ_{ew} bezeichnet werden, sind ebenso dargestellt und werden ausführlich in Abschnitt 4.3 behandelt. Der $\gamma\gamma$ -induzierte Kanal im Fall der W-Paarproduktion, obwohl er formal in führender Ordnung beiträgt, wird auch als relative Korrektur $\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}$ betrachtet.

Ohne Schnitte \sqrt{S}/TeV	W^-W^+			ZZ		W^+Z		W^-Z	
	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	$\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}(\%)$	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0/pb	$\delta_{\text{ew}}(\%)$
1.96	7.916	-0.16	0.47	0.9466	-4.67	1.123	-1.11	1.123	-1.11
8	35.51	-0.38	1.52	5.064	-4.14	8.273	-1.37	4.643	-1.27
14	75.02	-0.45	1.56	11.02	-4.21	17.11	-1.44	10.65	-1.36

Tabelle 4.2: Entspricht Tabelle 4.1 jedoch ohne Anwendung der Standard-Phasenraumschnitte (4.13).

Wie aus den Tabellen 4.1 und 4.2 ersichtlich, bewegen sich die Raten für ZZ- und W^-Z -Produktion sowohl beim LHC als auch beim Tevatron in der gleichen Größenordnung. Beim

LHC ist jedoch der Wirkungsquerschnitt für die W^+Z -Produktion größer als für die W^-Z -Produktion, während diese beim Tevatron notwendigerweise übereinstimmen. Die Wirkungsquerschnitte der WW -Erzeugung sind am LHC ungefähr einen Faktor 5 und beim Tevatron einen Faktor 7 größer als der für ZZ -Produktion. Für die gewählten Standard-Phasenraumschnitte ist der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von $\gamma\gamma$ größer als der für die W -Paarerzeugung als Konsequenz des singulären Verhaltens für kleine $k_{T,\gamma}$. Im Fall der $\gamma\gamma$ -Produktion divergieren die entsprechende Wirkungsquerschnitte, wenn keine Selektionschnitte (4.13) angewandt werden.

Werden nun die Ergebnisse aus Tabellen 4.1 und 4.2 im Fall der WW -Produktion verglichen, so fällt auf, dass durch die Standard-Phasenraumschnitte (4.13) die $q\bar{q}$ -induzierten Wirkungsquerschnitte in Bornscher Näherung am LHC mit der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV um 44% und am LHC mit $\sqrt{S} = 8$ TeV um 34% verringert werden, während sich die Wirkungsquerschnitte am Tevatron mit $\sqrt{S} = 1.96$ TeV kaum ändern. Die relativen elektroschwachen Korrekturen zeigen starke Änderungen, bleiben aber wie erwartet klein.

Es fällt auf, dass der totale Wirkungsquerschnitt am LHC etwa um eine Größenordnung größer als am Tevatron ist. Dies lässt sich anschaulich dadurch erklären, dass der totale Wirkungsquerschnitt zur Eichboson-Paarproduktion durch die Ereignisse dominiert wird, bei denen die partonische Schwerpunktsenergie nur wenig über der kinematischen Schwelle von $(M_{V_1} + M_{V_2})$ liegt. Da die Partonverteilungsfunktionen für kleine x größer werden (siehe Abbildung 4.1), ist zu erwarten, dass am LHC aufgrund der höheren hadronischen Schwerpunktsenergie mehr Ereignisse auftreten.

Werden jedoch zusätzliche Phasenraumschnitte sowohl auf die Transversalimpulse der auslaufenden Eichbosonen (siehe Abbildung 4.6, Tabelle 4.4 und Tabelle E.1) als auch auf ihre invariante Masse (siehe dazu Abbildung 4.7 links, Tabelle 4.5 und Tabelle E.2) angewandt, so beobachtet man einen starken Abfall der Wirkungsquerschnitte über mehrere Größenordnungen. Dieses Verhalten entspricht der Tatsache, dass die Eichboson-Paarproduktion sowohl von kleinen Streuwinkeln als auch von niederenergetischen Ereignissen dominiert wird.³ Konsequenterweise führt ein Phasenraumschnitt an einen Transversalimpuls zu einer viel größeren Verringerung als ein vergleichbarer Phasenraumschnitt an die invariante Masse, $M_{VV}^{\text{cut}} = 2k_T^{\text{cut}}$, wie aus den Tabellen 4.4 und 4.5 (siehe S. 80-81) hervorgeht. Ferner ändern sich die relativen Raten der verschiedenen Kanäle stark. Während sie für kleine k_T^{cut} vergleichbar sind, ist der Wirkungsquerschnitt für die W^-Z -Produktion dreimal kleiner als für die W^+Z -Produktion, wenn große Werte von k_T^{cut} und M_{VV}^{cut} betrachtet werden. Für große Phasenraumschnitte an einen Transversalimpuls der Eichbosonen verhält sich die ZZ -Produktion vergleichbar zur W^+Z -Produktion; für große invariante Massen sind dann die Ereignisraten ebenso vergleichbar zur W^-Z -Produktion. Im Gegensatz dazu dominiert der Wirkungsquerschnitt für $\gamma\gamma$ bei kleinen k_T und fällt rapide für hohe invariante Massen; für hohe k_T ist er vergleichbar zur

³Analoge Tabellen und Abbildungen sowohl für die pp -Kollisionen am LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV als auch für die $p\bar{p}$ -Kollisionen am Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV finden sich in Anhang E.

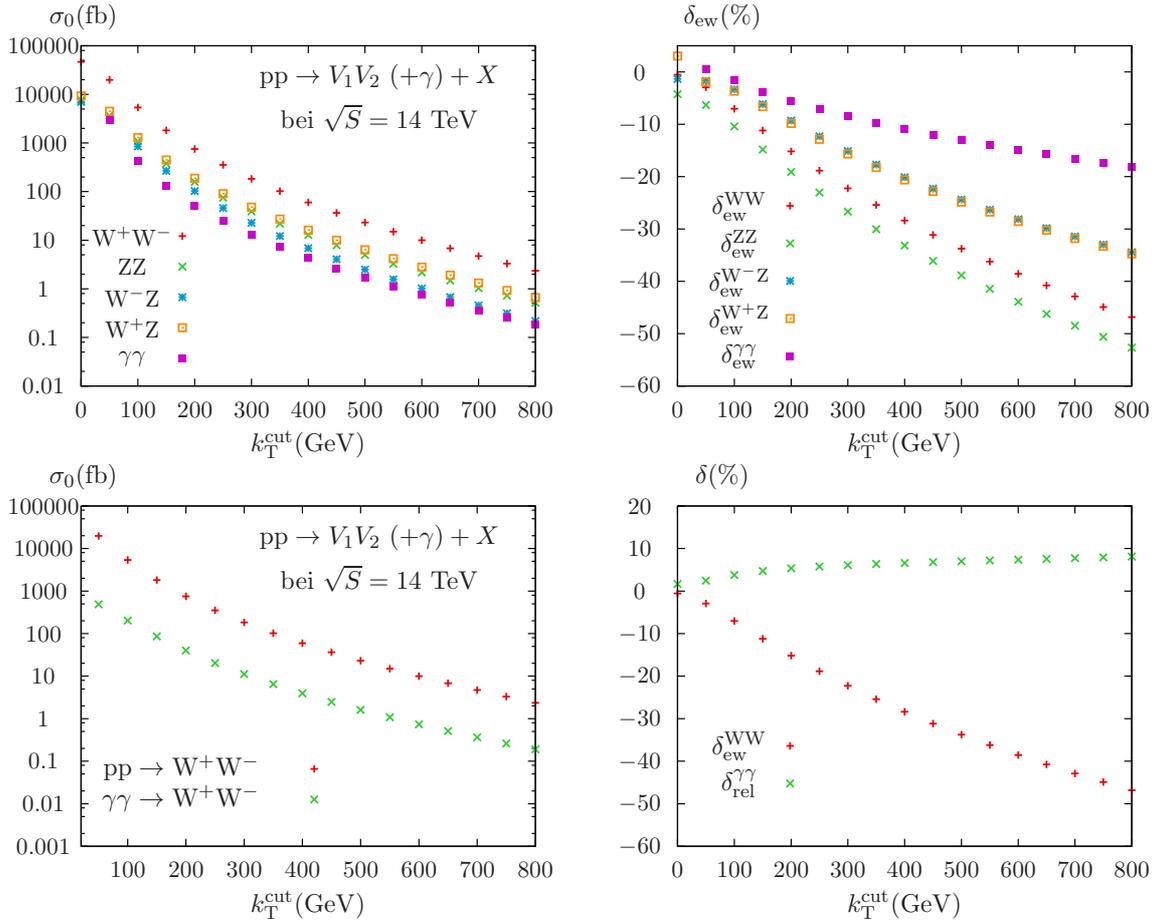


Abbildung 4.6: Gezeigt ist die integrierte k_T^{cut} -Verteilung (siehe Gl. (4.15)) in führender Ordnung (links oben und unten) und die dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. relativen Beitrag von $\gamma\gamma$ -induzierten Prozess zu W-Paarproduktion (rechts unten), die in Abschnitt 4.3 näher untersucht werden (siehe Ref. [141, 142]). Diese entspricht einem Schnitt an einem Transversalimpuls der auslaufenden Eichbosonen, wie sie bei Kollisionen am LHC bei der Schwerpunktsenergie von $\sqrt{S} = 14$ TeV auftreten sollen.

W^-Z -Produktion.

Beim Vergleich der Abhängigkeiten der Wirkungsquerschnitte zur W -Paarproduktion von $q\bar{q}$ - und $\gamma\gamma$ -induzierten Prozessen (siehe Abbildungen 4.6 und 4.7), lassen sich gewisse Unterschiede erkennen. Für große Werte von $M_{\text{WW}}^{\text{cut}}$ sind die Raten der $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesse nur noch um einen Faktor 3 niedriger, während sie beim Schnitt an einen Transversalimpuls eines der Eichbosonen immer noch um einen Faktor 10 unterdrückt sind. Es lässt sich beobachten, dass sich der relative Einfluss des Photon-induzierten Prozesses mit steigendem k_T^{cut} und noch mehr mit steigendem $M_{\text{WW}}^{\text{cut}}$ erhöht. Dieses Verhalten kann auf die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für den partonischen Subprozess $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ zurückgeführt werden, welcher einen konstanten Wert $\hat{\sigma} \sim 8\pi\alpha^2/M_W^2$ im Hochenergie-Limes erreicht (siehe Ref. [203–205]), mit extrem ausgeprägten Maxima in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung. Deshalb führt

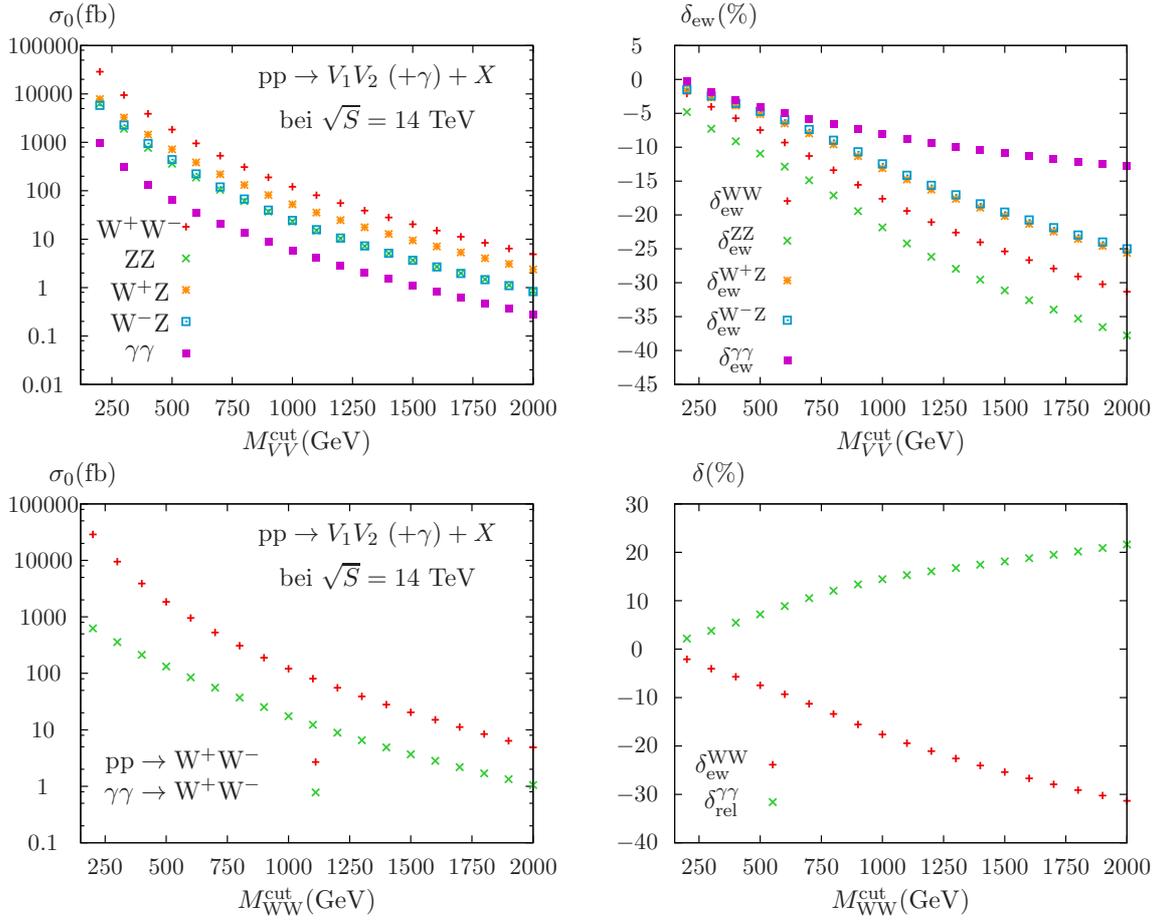


Abbildung 4.7: Entspricht Abbildung 4.6, aber für die integrierten invarianten Masse M_{VV} -Verteilung am LHC bei der Schwerpunktsenergie von $\sqrt{S} = 14$ TeV (siehe Ref. [141, 142]).

der Schnitt an den Transversalimpuls (also die Forderung nach großem k_T) zu einer signifikant niedrigeren Ereignisrate als der Schnitt an die invariante Masse (also die Forderung nach großem M_{WW}). Trotzdem verbleibt noch ein 10%-iger Anteil des Photon-induzierten Beitrags zur W -Paarproduktion für eine invariante Masse größer als 800 GeV. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich ebenfalls bei einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 8$ TeV am LHC (siehe Abbildungen E.1 und E.2), während am Tevatron mit einer Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 1.96$ TeV der $\gamma\gamma$ -induzierte Beitrag zur W -Paarproduktion vernachlässigbar klein ist (siehe Abbildungen E.3 und E.4). Weiterführend wurden in Ref. [206] die Berechnungen unter Verwendung des NNPDF2.3QED PDF-Satzes [207] betrachtet, welche auf der NNPDF HepForge-Website [208] zur Verfügung stehen. Es wurde festgestellt, dass die Photon-induzierten Korrekturen einem großen systematischen Fehler unterliegen, der von der Unkenntnis des Photonieninhalts im Proton herrührt (siehe auch dazu Ref. [209]). In Ref. [206] wurden die NNPDF2.3QED PDF verwendet, um den Fehler des Photon-induzierten Wirkungsquerschnitts abzuschätzen. Es ergab ein relativer Fehler von $\pm 50\%$ des LO Wirkungsquerschnitts bei der invarianten Masse

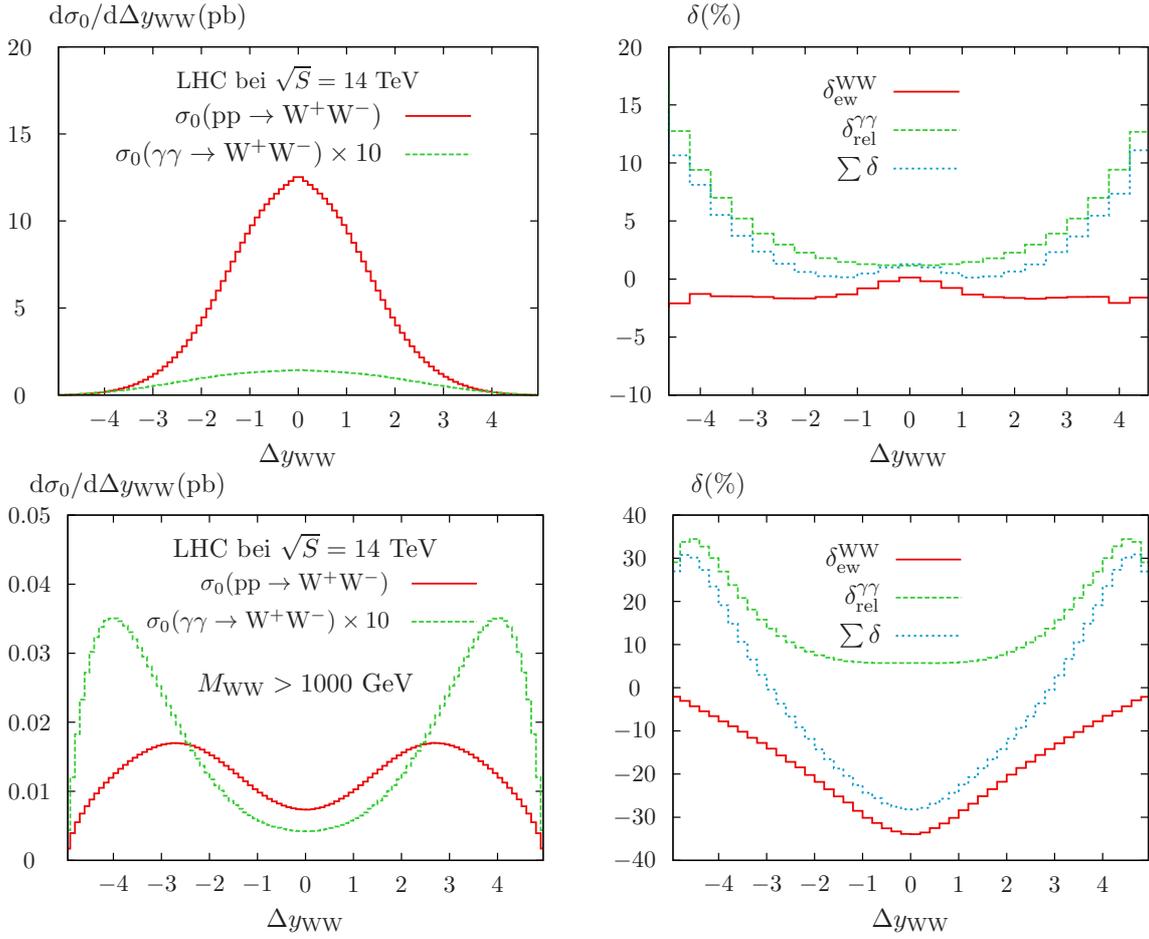


Abbildung 4.8: Differentieller Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung und relative elektroschwache Korrekturen bei W-Paarzeugung mit den Standardschnitten (4.13) (oben) und mit einer zusätzlichen Bedingung an die invariante Masse der W-Bosonen $M_{WW} > 1000$ GeV (unten) als Funktion der Rapiditätsdifferenz Δy_{WW} (siehe Ref. [141, 142]).

$M_{WW} = 1$ TeV, der alleine vom Photon-PDF-Fehler herrührt. Das heißt, dass eine signifikante Verbesserung der Bestimmung der Photon-PDF notwendig ist, um die Wirkungsquerschnitte zur Eichboson-Paarproduktion bei hohen Energien zuverlässig vorhersagen zu können.

Wie oben angedeutet kann der Unterschied der Abhängigkeiten der Wirkungsquerschnitte von k_T^{cut} und M_{VV}^{cut} auf die unterschiedlichen Winkelverteilungen der auslaufenden Eichbosonen (bezogen auf ihr Ruhesystem) zurückgeführt werden. Die Wirkungsquerschnitte für die W-Paarproduktion zeigen im Fall der $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesse ausgeprägte Maxima für die Vorwärts- und Rückwärtsrichtungen. Diese markanten Unterschiede in der Winkelverteilung sind in Abbildung 4.8 dargestellt, welche die Verteilung der Rapiditätsdifferenz $\Delta y_{WW} = y_{W^-} - y_{W^+}$ für die Intervalle $[2M_W, \infty)$ und $[1 \text{ TeV}, \infty)$ zeigt. Die Rapiditätsdifferenz entspricht für eine konstante invariante Masse M_{WW} der Winkelverteilung im Ruhesys-

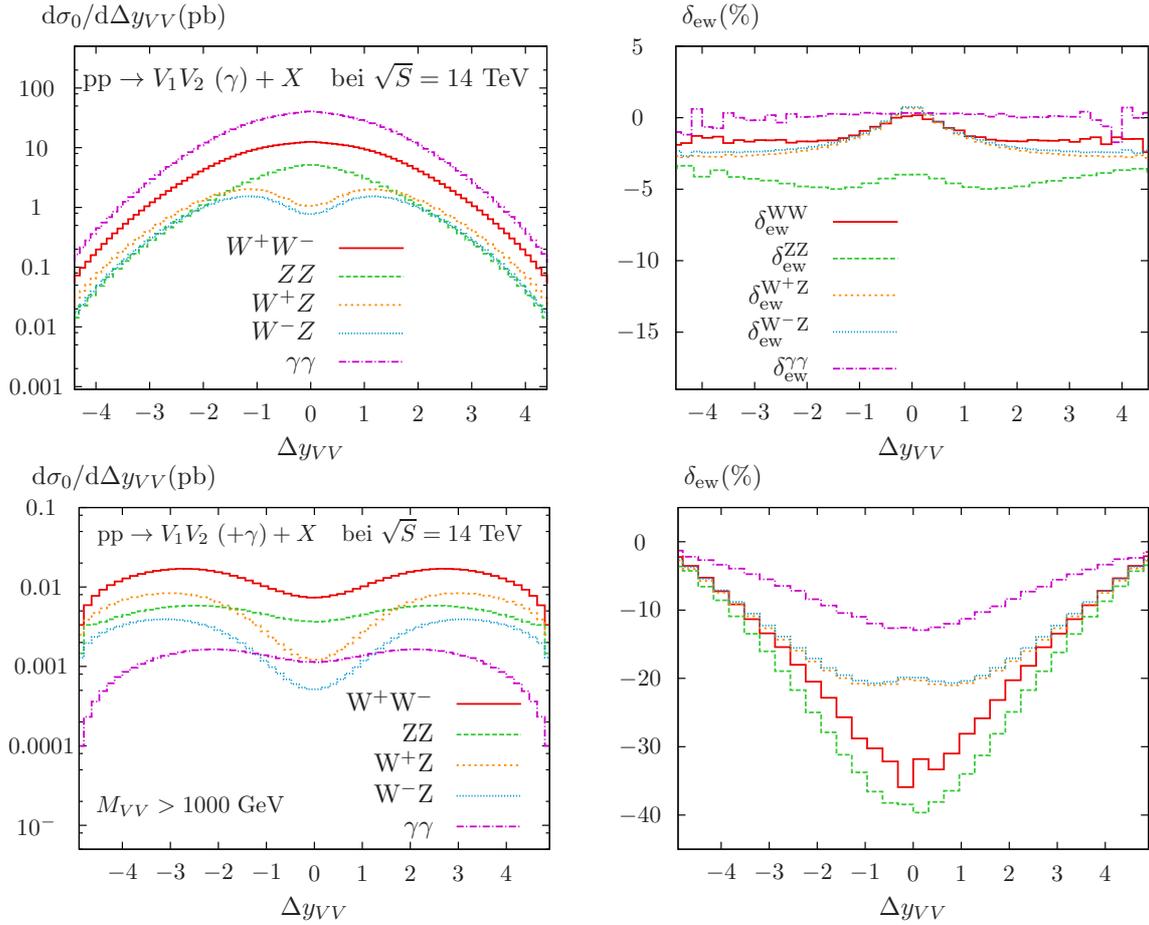


Abbildung 4.9: Rapiditysdifferenz wie in Abbildung 4.8, aber für die Erzeugung der WW^- , ZZ^- , $W^\pm Z^-$ und $\gamma\gamma$ -Eichbosonen (siehe Ref. [141, 142]).

tem der W -Paare. Im ersten Fall (Abbildung 4.8 (oben)) dominiert der Wirkungsquerschnitt für zentrale Ereignisse mit W -Paaren geringer invarianter Masse und relativ isotroper Winkelverteilung. Beide Komponenten werden für kleine Δy_{WW} maximal. Für sehr kleine Winkel ist das Verhältnis $\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}$ unerwartet groß. Betrachtet man Ereignisse mit der invarianten Masse $M_{WW} > 1000$ GeV (Abbildung 4.8 unten), so zeigt die Verteilung der beiden Komponenten ein unterschiedliches Verhalten. Wie erwartet, wird gemäß

$$M_{VV}^2 = 2k_T^2 \left(\cosh \Delta y_{VV} - \cos \Delta \Phi_{VV} \right) = 2k_T^2 \left(\cosh \Delta y_{VV} + 1 \right) \quad (4.16)$$

die W -Paarproduktion durch $q\bar{q}$ -Vernichtung mit relativ ausgeprägten Maxima in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung, also für kleine \hat{t} , dominiert. Das zeigt sich in den Maxima von Δy_{WW} bei ungefähr ± 2.5 . Der Beitrag für die $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesse bleibt groß mit ausgesprochenen Peaks bei großen Rapiditysdifferenzen (ungefähr ± 4.0), die einer starken anisotropen Winkelverteilung im Ruhesystem der WW entsprechen. Der Azimutalwinkel $\Delta \Phi_{VV}$ in Gl. (4.16) ist definiert als der Winkel zwischen den Impulsrichtungen der beiden Eichbosonen

projiziert auf die Ebene orthogonal zur Strahlachse. Die elektroschwachen Korrekturen zeigen ein völlig anderes Verhalten. Für große Δy_{WW} (also kleine \hat{t}) sind sie negativ aber kleiner als 10%. Im Sudakov-Regime (siehe Abschnitt 2.3), also wenn Δy_{WW} klein bzw. \hat{t} groß ist, gewinnt jedoch der Sudakov-Effekt an Bedeutung und negative Korrekturen von mehr als 30% können beobachtet werden. Insgesamt führt die Summe dieser Korrekturen, wie in Abbildung 4.8 unten rechts gezeigt, zu einer enormen Verzerrung der Verteilung der Rapiditätsdifferenzen $d\sigma/d\Delta y_{\text{WW}}$ mit Korrekturen zwischen +30% und -30% für große bzw. kleine $|\Delta y_{\text{WW}}|$. Solch ein Verhalten könnte leicht für ein Signal anomaler Kopplungen gehalten werden. Das Zusammenspiel logarithmischer elektroschwacher Korrekturen und anomaler trilinearere Eichboson-Kopplungen wurde in Ref. [144] für WZ- und WW-Produktion untersucht. Ein weniger ausgeprägtes, aber qualitativ zum Resultat bei $\sqrt{S} = 14$ TeV ähnliches Verhalten wird bei Proton-Proton-Kollisionen am LHC für Schwerpunktsenergien $\sqrt{S} = 8$ TeV in den Intervallen $[2M_{\text{W}}, \infty)$ und $[500 \text{ GeV}, \infty)$ beobachtet (siehe Abbildungen E.5 und E.6).

Wie oben angedeutet, sind die Maxima der Wirkungsquerschnitte für $W^{\pm}Z$ -, ZZ - und $\gamma\gamma$ -Produktion in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung ebenfalls stark ausgeprägt, wie aus den Abbildungen 4.9 und E.6 (siehe Anhang E) folgt, die ebenfalls den differentiellen Wirkungsquerschnitt als Funktion der Rapiditätsdifferenz der Bosonen $\Delta y_{VV} = y_{V_1} - y_{V_2}$ zunächst ohne Schnitt (Abbildung 4.9 oben) und dann mit einer minimalen invarianten Masse M_{VV} von 1000 GeV (Abbildung 4.9 unten) darstellen. Δy_{VV} entspricht wieder, für einen konstanten Wert der invarianten Masse der auslaufenden Eichbosonen M_{VV} , dem Streuwinkel im Ruhesystem der V_1V_2 -Bosonpaare. Bei niedrigen Energien erreicht die Verteilung ihr Maximum im Zentrum, d. h. bei kleinen Werten von $|\Delta y_{VV}|$, bei hohen invarianten Massen zeigt die Verteilung ein Maximum bei $|\Delta y_{VV}| \simeq 3$, was den ausgeprägten Maxima in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung entspricht.

4.3 Strahlungskorrekturen

Dieser Abschnitt zeigt detaillierte numerische Analysen der elektroschwachen Korrekturen zur Produktion der Eichbosonpaare am LHC bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV. Der Vollständigkeit halber werden die numerischen Ergebnisse für LHC bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 8$ TeV und für Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV in Anhang E gezeigt. Die entsprechenden Auswirkungen auf die totalen Wirkungsquerschnitte, für die integrierten differentiellen Verteilungen sowie verschiedene kinematische Bereiche werden in Abschnitt 4.4 erörtert. Desweiteren werden die elektroschwachen Korrekturen zu differentiellen Verteilungen von für den LHC relevanten Observablen vorgestellt, nämlich die Verteilungen in den Transversalimpulsen, den Rapiditäten und den invarianten Massen der auslaufenden Eichbosonen. Insbesondere wird auf die Struktur der entsprechenden Korrekturen bei höchsten Energien Wert gelegt.

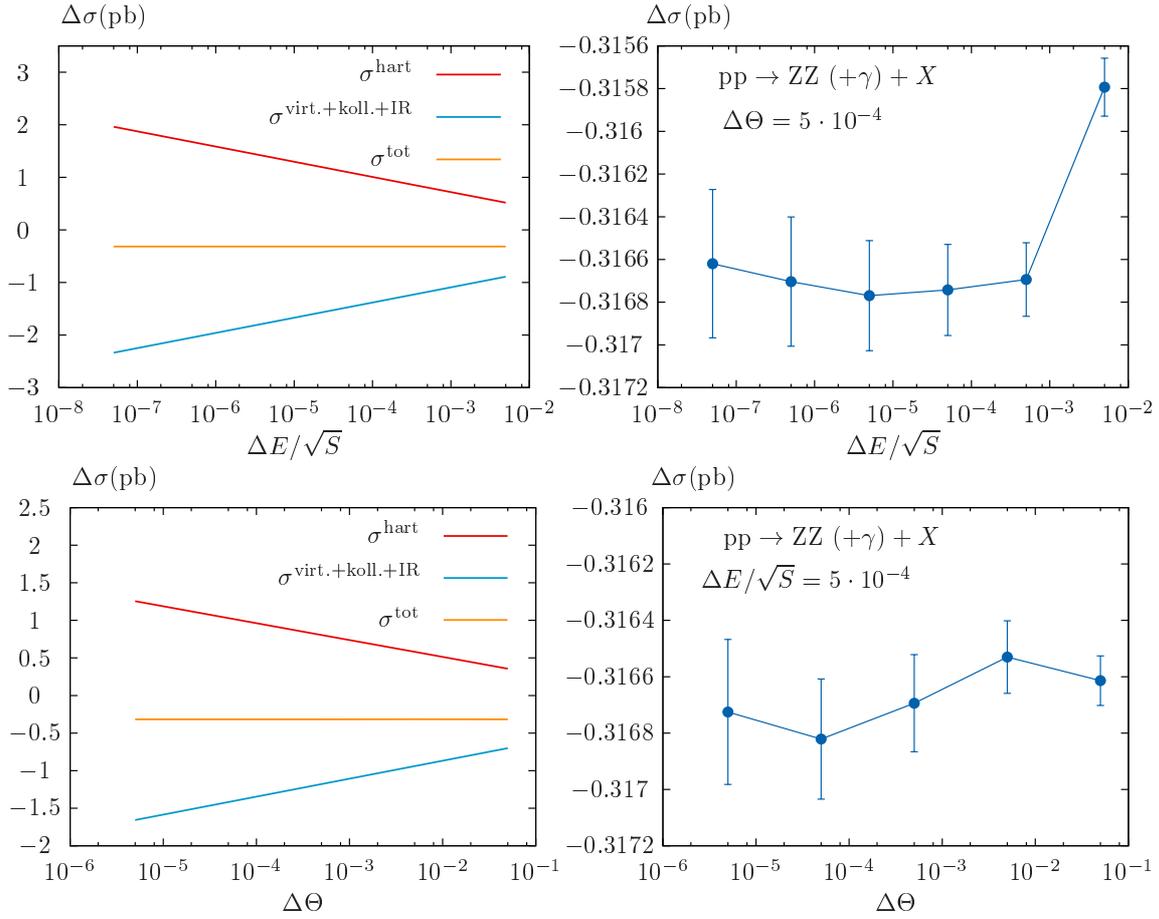


Abbildung 4.11: Entspricht den Abbildungen 4.10, aber für ZZ-Produktion.

4.3.1 Abhängigkeit von Slicing-Parameter ΔE und $\Delta\Theta$

Wie bereits in Kapitel 2.2.2 erläutert, werden die reellen Korrekturen mit der Phase-Space-Slicing-Methode berechnet. Diese im Grunde genommen einfache Methode hat einen relativ großen Nachteil. Bei der gegenseitigen Aufhebung der Beiträge aus verschiedenen Phasenraumbereichen (siehe Abbildung 2.4) gehen praktisch zwei Größenordnungen an Genauigkeit verloren. So soll zum Beispiel für einen Integrationsfehler von einem Prozent die Genauigkeit der einzelnen Beiträge im Sub-Promille-Bereich liegen. Ein weiterer Nachteil dieser Methode ist, dass sie für sehr große Werte der Slicing-Parameter⁴ ΔE und $\Delta\Theta$ ihre Gültigkeit verliert, während sie für zu kleine Werte der Slicing-Parameter zu relativ großen Integrationsfehlern führt. Um geeignete Werte für die Cut-Off Parameter ΔE und $\Delta\Theta$ zu finden, wird ein Slicing-Parameter konstant gehalten und der andere solange variiert, bis ein Plateau im Rahmen eines geringen Integrationsfehler gefunden wird. Zur Verdeutlichung ist die Abhängigkeit der Ergebnisse von Slicing-Parametern in Abbildungen 4.10, 4.11 und 4.12 sowie in Tabelle 4.3 dargestellt. Gut zu erkennen ist, dass sich bei allen hier betrachteten

⁴Technisch wird die dimensionslose Größe $\delta_s = 2\Delta E/\sqrt{s}$ als Slicing-Parameter statt ΔE verwendet.

pp $\rightarrow \gamma\gamma(+\gamma) + X$ bei $\sqrt{S} = 14$ TeV					
$\Delta E/\sqrt{S}$	$\Delta\Theta$	$\Delta\sigma$ (pb)	$\Delta E/\sqrt{S}$	$\Delta\Theta$	$\Delta\sigma$ (pb)
10^{-4}	10^{-4}	0.133(19)	10^{-3}	10^{-4}	0.133(11)
	10^{-3}	0.137(5)		10^{-3}	0.145(3)
	10^{-2}	0.140(2)		10^{-2}	0.143(2)
pp $\rightarrow W^+Z(+\gamma) + X$ bei $\sqrt{S} = 14$ TeV					
$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-6}$	-0.1330(3)	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-5}$	-0.1313(2)
	$5 \cdot 10^{-5}$	-0.1330(3)		$5 \cdot 10^{-5}$	-0.1315(2)
	$5 \cdot 10^{-4}$	-0.1331(2)		$5 \cdot 10^{-4}$	-0.1319(1)
	$5 \cdot 10^{-3}$	-0.1332(2)		$5 \cdot 10^{-3}$	-0.1322(1)
	$5 \cdot 10^{-2}$	-0.1324(1)		$5 \cdot 10^{-2}$	-0.1325(1)

Tabelle 4.3: (Un-) Abhängigkeit des hadronischen Wirkungsquerschnitts im Fall der $\gamma\gamma$ - und W^+Z -Produktion von den Slicing-Cut-Off Parametern ΔE und $\Delta\Theta$. Die Ziffer in Klammern gibt den absoluten Integrationsfehler der letzten Stelle an.

numerische Ergebnisse in diesem Bereich zu erzielen. Somit nimmt sowohl die Anzahl der dafür notwendigen Ereignisse als auch die dafür benötigte Integrationszeit rapide zu.

Das qualitativ ähnliche Verhalten zeigt sich bei der Variation des Cut-Off Parameters $\Delta\Theta$ (siehe Abbildung 4.10 unten). Die einzelnen Fehlerbalken geben die Fehlerabschätzung der verwendeten Integrationsroutine VEGAS [137] an. Sie zeigen, dass für die Slicing-Parameter $\Delta E/\sqrt{S} \leq 10^{-7}$ und für $\Delta\Theta \leq 10^{-5}$ die Integrationsroutine zunehmend instabil wird, da die Integrationsgrenze den Singularitäten des Integranden näher kommt.

Aufgrund der so gewonnenen Einsicht in die Variabilität des Wirkungsquerschnitts in Abhängigkeit der Slicing-Parameter werden $\Delta E/\sqrt{S} = 5 \cdot 10^{-4}$ und $\Delta\Theta = 5 \cdot 10^{-4}$ gewählt.

4.4 Numerische Resultate

4.4.1 Integrierte Wirkungsquerschnitte

Die elektroschwachen Korrekturen für die totalen Wirkungsquerschnitte der WW -, ZZ -, $W^\pm Z$ - und $\gamma\gamma$ -Erzeugung sind unter Verwendung der Standard-Schnitte in Tabelle 4.1 gezeigt. Diese betragen ungefähr 1%, mit Ausnahme des ZZ -Kanals mit einer negativen Korrektur von etwa -4%. Wie weiter unten erläutert wird, tritt diese Besonderheit bereits in der Nähe der Produktionsschwelle auf und gilt deshalb sowohl für Tevatron bei der Kollisionsenergie $\sqrt{S} = 1.96$ TeV, als auch für LHC bei den Schwerpunktsenergien $\sqrt{S} = 8$ TeV und

pp $\rightarrow V_1 V_2 (+\gamma) + X$ bei $\sqrt{S} = 14$ TeV											
k_T^{cut}	W ⁻ W ⁺			ZZ		W ⁺ Z		W ⁻ Z		$\gamma\gamma$	
GeV	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	$\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$
50	19.80 pb	-2.9	2.5	3.660 pb	-6.3	4.498 pb	-1.9	3.228 pb	-1.7	2.979 pb	0.6
100	5.379 pb	-7.0	3.8	1.087 pb	-10.4	1.296 pb	-3.7	0.849 pb	-3.3	0.432 pb	-1.6
250	353.1 fb	-18.8	5.8	74.95 fb	-23.0	905.6 fb	-12.9	45.83 fb	-12.3	24.51 fb	-7.0
500	23.05 fb	-33.7	7.0	4.989 fb	-38.9	6.364 fb	-24.9	2.479 fb	-24.4	1.695 fb	-13.0
750	3.304 fb	-44.9	7.9	721.6 ab	-50.6	924.3 ab	-33.3	312.5 ab	-33.0	256.6 ab	-17.3
1000	670.4 ab	-53.8	8.9	146.0 ab	-60.1	183.5 ab	-39.8	57.32 ab	-39.6	54.91 ab	-20.6
1250	163.9 ab	-61.3	10.2	35.28 ab	-68.4	42.92 ab	-45.1	12.86 ab	-45.1	14.15 ab	-23.5
1500	44.79 ab	-67.7	11.8	9.473 ab	-75.7	10.99 ab	-49.6	3.248 ab	-49.6	4.071 ab	-25.9

Tabelle 4.4: Gezeigt sind die Zahlenwerte der integrierten k_T^{cut} -Verteilung in führender Ordnung und den dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen für die Eichboson-Paarproduktion am LHC bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV.

$\sqrt{S} = 14$ TeV. Ferner ist diese negative Korrektur des ZZ-Kanals auch in der Rapiditätsverteilung sichtbar. Desweiteren sind die Ergebnisse für totale Wirkungsquerschnitte ohne Anwendung der Selektions-Schnitte für alle Endzustände außer $\gamma\gamma$ in Tabelle 4.2 gezeigt. Für letztere divergieren die entsprechenden Wirkungsquerschnitte. Durch Vergleich der elektroschwachen Korrekturen aus Tabellen 4.1 und 4.2 wird festgestellt, dass die Größe der Strahlungskorrekturen praktisch unverändert bleibt.

Es ist nützlich auch die Vorhersagen für die Wirkungsquerschnitte zu betrachten, für die die zusätzlichen Schnitte an die Transversalimpulse der Eichbosonen oder für die invarianten Masse der Eichboson-Paare eingefügt werden. Die numerischen Ergebnisse wurden bereits in Abschnitt 4.2 gezeigt. Die Wirkungsquerschnitte und die dazugehörigen relativen Korrekturen für verschiedene Werte des Transversalimpulses der Eichbosonen sind in Tabelle 4.4 gegeben, während die Werte in Abhängigkeit der invarianten Masse der Eichboson-Paare in Tabelle 4.5 aufgelistet sind. Wie erwartet werden größer werdende negative Korrekturen mit steigendem k_T^{cut} bzw. M_{VV}^{cut} beobachtet. Die Korrekturen sind am größten für ZZ-Produktion und erreichen -50% für LHC bei $\sqrt{S} = 14$ TeV für $k_T^{\text{cut}} = 800$ GeV. Sie sind am kleinsten für die Erzeugung von $\gamma\gamma$, wo sie in allen Fällen weniger als 20% betragen. Die elektroschwachen Korrekturen am LHC fallen deutlich größer aus als am Tevatron (vgl. z. B. die Abbildungen 4.6 und E.3).

Zur Verdeutlichung werden auch die Ergebnisse für $k_T^{\text{cut}} = 1$ TeV in Tabelle 4.4 präsentiert, die mit hohen Luminositäten beobachtbar sein könnten. In diesem Fall werden Korrekturen von mehr als 40% bei der W-Paarproduktion erwartet und die Frage nach Zwei-Schleifen-Korrekturen gewinnt an Bedeutung. Für die W-Paarproduktion wurden bereits die NNLL-Korrekturen in Ref. [117, 118] diskutiert. Für die anderen Endzustände sind sie noch nicht verfügbar.

pp $\rightarrow V_1 V_2(+\gamma) + X$ bei $\sqrt{S} = 14$ TeV											
M_{VV}^{cut} GeV	W ⁻ W ⁺			ZZ		W ⁺ Z		W ⁻ Z		$\gamma\gamma$	
	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	$\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$
200	28.84 pb	-2.1	2.2	6.094 pb	-5.0	7.820 pb	-1.6	5.790 pb	-1.5	0.966 pb	-0.4
300	9.492 pb	-4.0	3.8	1.859 pb	-7.4	3.252 pb	-2.6	2.273 pb	-2.4	0.304 pb	-1.8
500	1.841 pb	-7.5	7.2	0.352 pb	-11.2	0.716 pb	-5.1	0.440 pb	-4.7	64.54 fb	-3.8
1000	120.8 fb	-17.6	14.4	23.10 fb	-22.0	52.70 fb	-13.1	24.47 fb	-12.4	5.863 fb	-8.1
1500	20.37 fb	-25.4	18.1	3.665 fb	-31.2	9.450 fb	-20.1	3.667 fb	-19.6	1.109 fb	-11.0
2000	4.879 fb	-31.3	21.6	847.5 ab	-37.8	2.373 fb	-25.6	8.287 ab	-25.0	2.825 ab	-13.4
2500	1.381 fb	-36.2	25.6	231.7 ab	-43.4	683.6 ab	-30.2	225.2 ab	-29.6	84.20 ab	-15.4
3000	429.9 ab	-40.5	30.5	69.60 ab	-48.2	210.6 ab	-34.2	67.72 ab	-33.5	27.49 ab	-17.0

Tabelle 4.5: Gezeigt sind die Zahlenwerte der integrierten M_{VV}^{cut} -Verteilung in führender Ordnung und den dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen für die Eichboson-Paarproduktion am LHC bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV.

Zur Erinnerung sei erwähnt, dass der Photon-induzierte Kanal ($\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$) bei der W-Paarzeugung zu überraschend großen relativen Beiträgen von ungefähr +20 % bei einer invarianten Masse $M_{WW} \sim 2$ TeV führt, die einen Großteil der negativen, auf die Sudakov-Logarithmen zurückzuführenden elektroschwachen Beiträge kompensieren. Dieses Verhalten kann qualitativ verstanden werden, wenn man bedenkt, dass die partonischen Wirkungsquerschnitte $\hat{\sigma}_{\gamma\gamma}$ für hinreichend große Energien durch eine Konstante, $\hat{\sigma}_{\gamma\gamma} = 8\pi\alpha^2/M_W^2 + \mathcal{O}(1/\hat{s})$ gegeben ist, mit ausgeprägten Maxima bei kleinen Winkeln, während die entsprechenden Wirkungsquerschnitte $\hat{\sigma}_{q\bar{q}}$ für große Energien \hat{s} mit $\log(\hat{s}/M_W^2)/\hat{s}$ abnehmen.

Die vergleichsweise großen negativen elektroschwachen Korrekturen im Fall der ZZ-Produktion können auf zwei voneinander völlig unabhängige physikalische Effekte zurückgeführt werden. Einerseits zeigen die elektroschwachen Korrekturen der Wirkungsquerschnitte für ZZ einen konstanten Off-Set von -4 % unabhängig von der Wahl der Schnitte im Vergleich zur WW-, $W^\pm Z$ - und $\gamma\gamma$ -Produktion. Diese Eigenschaft ist besonders deutlich in Abbildung 4.13 sichtbar, wo die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der invarianten Masse der Eichbosonen M_{VV}^{cut} ohne Einschränkungen an Rapidität und Transversalimpuls dargestellt wird, d. h. ohne Anwendung der Standard-Phasenraumschnitte (4.13). Sudakov-Logarithmen liefern dafür keine Erklärung, da die Korrektur von -4 % bereits in der Nähe der Produktionsschwelle der Z-Paare auftritt und die Korrektur kaum vom tatsächlichen Wert der Kollisionsenergie abhängt. Zusätzlich stellt sich heraus, dass die Bremsstrahlung harter Photonen, die in den Ergebnissen zusammen mit infraroten und virtuellen Photonen auftritt, besonders für die Produktion von Z-Paaren gering ausfällt, wie es in Abbildung 4.14 deutlich zu sehen ist. Unter Berücksichtigung dieser beiden Effekte sind die elektroschwachen Korrekturen für hohe Transversalimpulse k_T , welche auf große Logarithmen der elektroschwachen Korrekturen

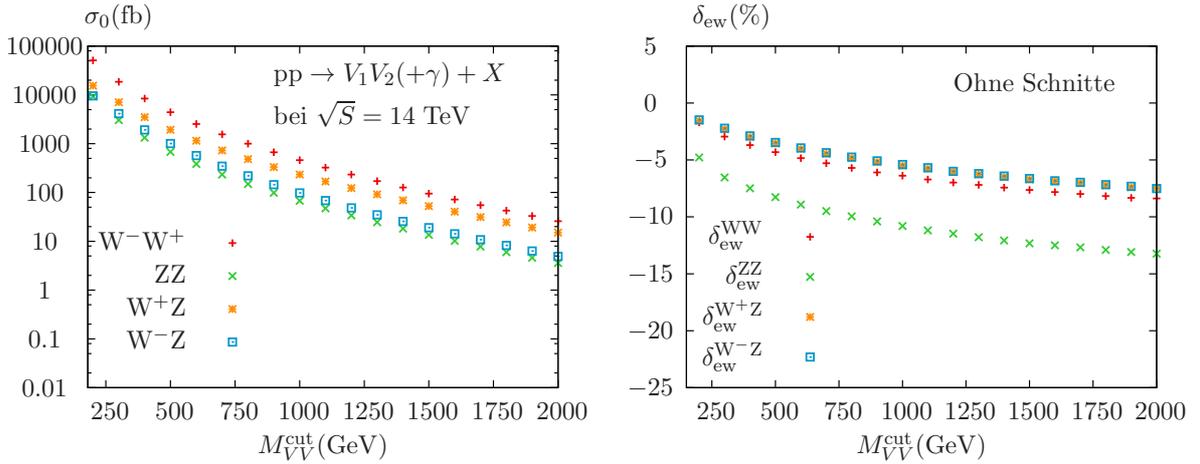


Abbildung 4.13: Hadronische Wirkungsquerschnitte in führender Ordnung (links) und die dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen (rechts) für die Eichboson-Paarproduktion in Abhängigkeit von der invarianten Masse der auslaufenden Eichbosonen M_{VV} . Bei der Berechnung wurden außer dem Schnitt an die invariante Masse M_{VV} keine Selektions-Schnitte (4.13) angewandt (siehe Ref. [141, 142]).

zurückgeführt werden können, ähnlich für die WW- und ZZ-Produktion, während sie für $W^\pm Z$ -Produktion kleiner sind.

Trotzdem sind die elektroschwachen Korrekturen auch für die $W^\pm Z$ -Produktion groß. Für LHC bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV erreichen sie bis zu -35% , wenn $k_T^{\text{cut}} = 800$ GeV angewandt wird. Die Korrekturen zur W^+Z - und W^-Z -Produktion sind nahezu identisch, da die entsprechenden unpolarisierten Wirkungsquerschnitte auf dem Parton-Niveau übereinstimmen. Kleine Abweichungen zwischen diesen beiden Produktionskanälen lassen sich auf die unterschiedlichen Parton-Luminositäten, die die reelle Abstrahlung und die virtuellen Beiträge verstärken, zurückführen. Dies führt zu unterschiedlichen relativen Korrekturen, weil die differentiellen partonischen Korrekturen $\hat{\delta}_{\text{ew}}(\hat{s}, \hat{t})$, welche offensichtlich für beide Kanäle gleich sind, die hadronischen Ergebnisse unterschiedlich stark beeinflussen.

Widmen wir uns wieder der Abbildung 4.13, wo die Ergebnisse für $\sigma_{VV}(M_{VV}^{\text{cut}})$ ohne Anwendung der Selektions-Schnitte auf Rapidität und Transversalimpuls (4.13) dargestellt sind. Es ist ersichtlich, dass die relativen elektroschwachen Korrekturen kleiner als 15% sind, sogar für große invariante Massen. Der Grund hierfür ist, dass die Vektorboson-Paarproduktion von kleinen Streuwinkeln, also von kleinen \hat{t} , dominiert wird und in dieser Region werden keine großen logarithmischen elektroschwachen Korrekturen erwartet. Überraschenderweise führen bereits schwache Selektionsschnitte an den Transversalimpuls und an die Rapidität der Eichbosonen zu recht großen relativen Korrekturen wie in Abbildung 4.7 gezeigt.

Eine weitere interessante Erkenntnis ist, dass die elektroschwachen Korrekturen im Fall der $\gamma\gamma$ -Produktion wieder deutlich kleiner sind als im Fall der massiven auslaufenden Eichbosonen mit bis zu -20% für $k_T = 1000$ GeV, was mit entsprechenden Ergebnissen aus Ref. [210] übereinstimmt. Ref. [210] stellt logarithmische Korrekturen zum Prozess $\gamma\gamma \rightarrow f\bar{f}$

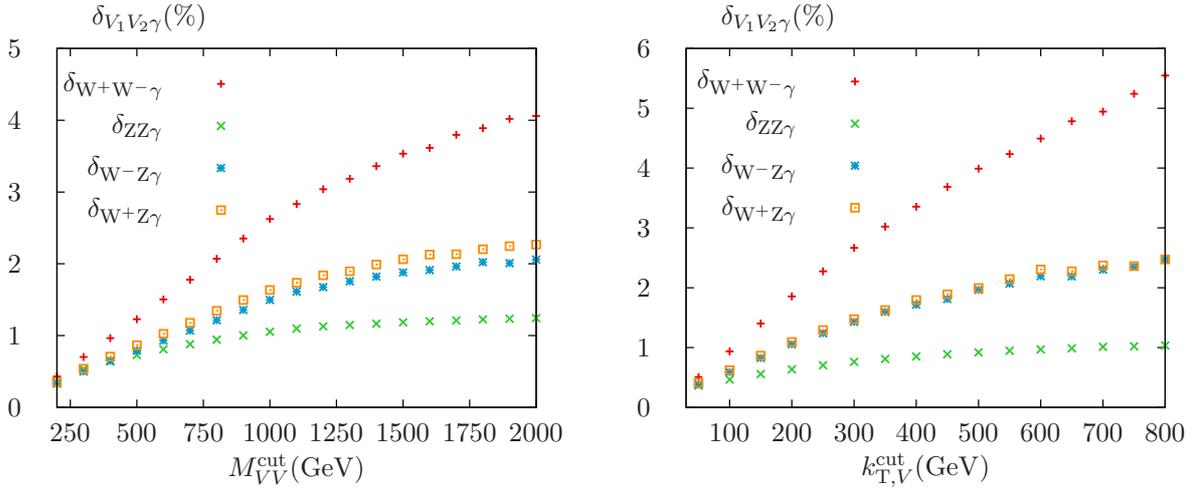


Abbildung 4.14: Die relative Korrekturen $\delta_{V_1 V_2 \gamma} = \sigma_0^{\text{pp} \rightarrow V_1 V_2 \gamma} / \sigma_0^{\text{pp} \rightarrow V_1 V_2} - 1$ zu $q\bar{q}$ -induzierten Prozessen wurden unter Verwendung der Standard-Phasenraumschnitte (4.13) in Abhängigkeit der invarianten Masse der Eichbosonen M_{VV} (links) und des Transversalimpulses k_T (rechts) berechnet. Dabei werden die Phasenraumschnitte auch an den Bremsstrahlungsphoton $k_{T,\gamma} > 15$ GeV und $|y_\gamma| < 2.5$ angebracht (siehe Ref. [141, 142]).

in der Hochenergie-Näherung vor.

4.4.2 Differentielle Wirkungsquerschnitte

Im Folgenden werden differentielle Wirkungsquerschnitte für verschiedene kinematische Szenarien untersucht. Insbesondere werden Verteilungen bezüglich der Transversalimpulse, invarianter Massen und Rapiditäten mit den Standard-Schnitten (siehe Gl. (4.13)) sowie im Weiteren mit einer expliziten Forderungen an die invariante Masse M_{VV} der Eichbosonen vorgestellt. Diese Vorgehensweise erlaubt es, die elektroschwachen Korrekturen im Bereich hoher Energien zu untersuchen, in denen Signale neuer Physik einen erkennbaren Einfluss haben könnten. Es wird gezeigt, dass signifikante Verzerrungen der Winkelverteilungen beobachtet werden können, welche leicht als Signale anomaler Kopplungen und damit neuer Physik missinterpretiert werden könnten.

Abbildungen 4.15, 4.16 und 4.17 zeigen jeweils die differentiellen Verteilungen bezüglich der Transversalimpulse k_T , bezüglich der invarianten Massen M_{VV} bzw. bezüglich der Rapidität y_V , berechnet mit der Standard-Schnitten aus Abschnitt 4.2.2. Wie bereits für die integrierten Wirkungsquerschnitte in Abschnitt 4.2.3 erwähnt, fallen diese Verteilungen schnell mit anwachsenden Werten des Transversalimpulses k_T und der invarianten Masse M_{VV} ab, entsprechend der Tatsache, dass die Eichboson-Paarproduktion im Allgemeinen durch Ereignisse mit geringen Energien $\sqrt{\hat{s}}$ dominiert wird, was eine Folge der schnell abfallenden Partonverteilungsfunktionen ist. Im Gegensatz dazu wachsen die elektroschwachen Korrekturen mit zunehmendem k_T und M_{VV} an. Sie liegen zwischen -15% für $\gamma\gamma$ - und -45%

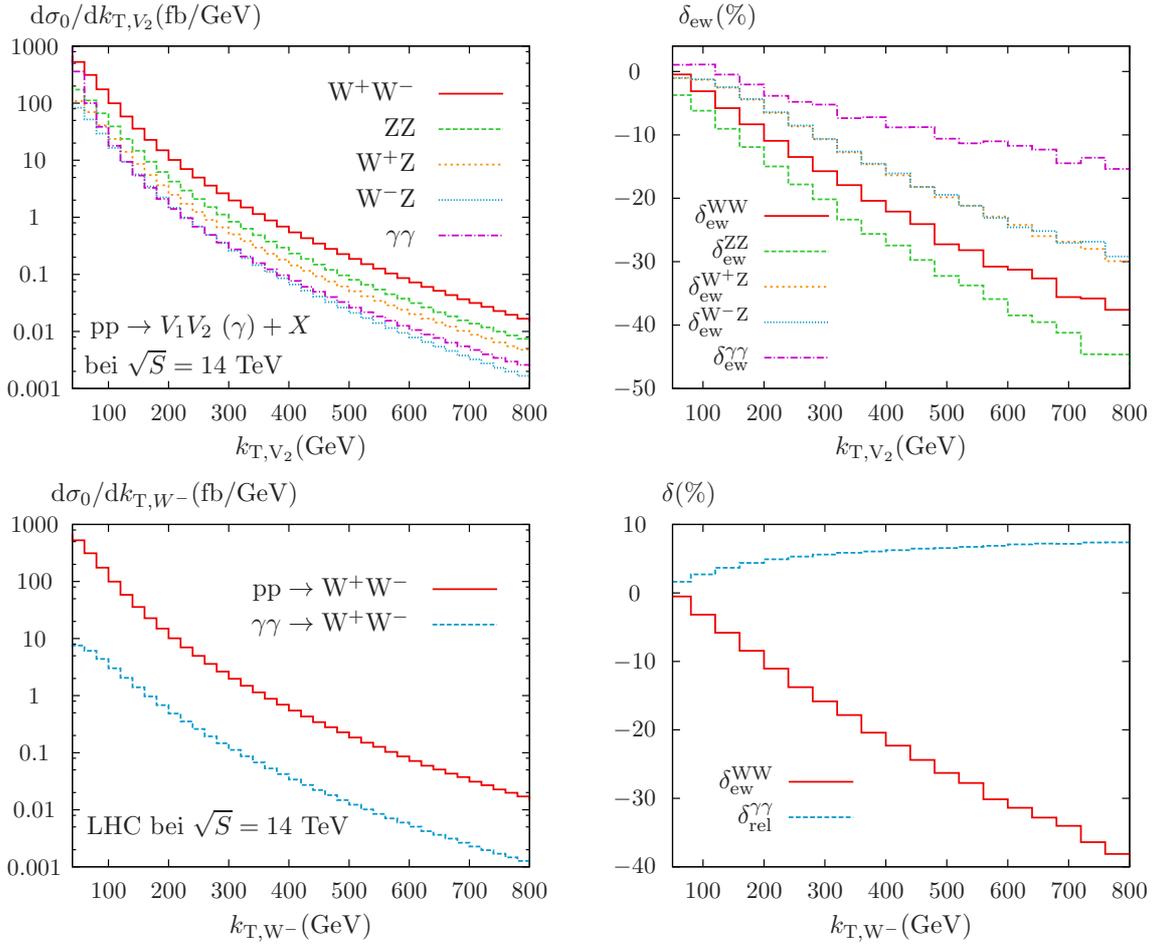


Abbildung 4.15: Differentielle Verteilung des Transversalimpuls eines auslaufenden Eichbosons k_T in der Bornschen Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. relativer Beitrag δ_{rel} von $\gamma\gamma$ -induzierten Prozess zur W^+W^- -Produktion am LHC bei $\sqrt{S} = 14$ TeV (siehe Ref. [141, 142]).

für ZZ -Erzeugung bei der Betrachtung von k_T -Werte von ungefähr 800 GeV für den LHC mit Kollisionsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV und lassen sich wieder auf die Sudakov-Logarithmen zurückführen. Die Korrekturen für die Verteilungen der invarianten Masse M_{VV} sind wieder kleiner, da die große invariante Massen auch mit kleinen Impulsüberträgen \hat{t} erzielt werden können.

Die relativen Korrekturen für die Rapiditätsverteilungen (siehe Abbildung 4.17 oben rechts) sind klein für die Produktion von WW , WZ , $\gamma\gamma$ und gleichen den Korrekturen für die integrierten Wirkungsquerschnitte aus Tabelle 4.1. Für die ZZ -Produktion ist wieder ein konstanter Off-Set der elektroschwachen Korrekturen von -4% sichtbar. Dieses Verhalten entspricht der Erwartung, da sowohl der totale Wirkungsquerschnitt als auch die Rapiditätsverteilungen von kleinen invarianten Massen M_{VV} geprägt sind. Die Rapiditätsverteilungen für W^+ und W^- sind ebenso in Abbildung 4.17 (in der Mitte für LHC und unten für Te-

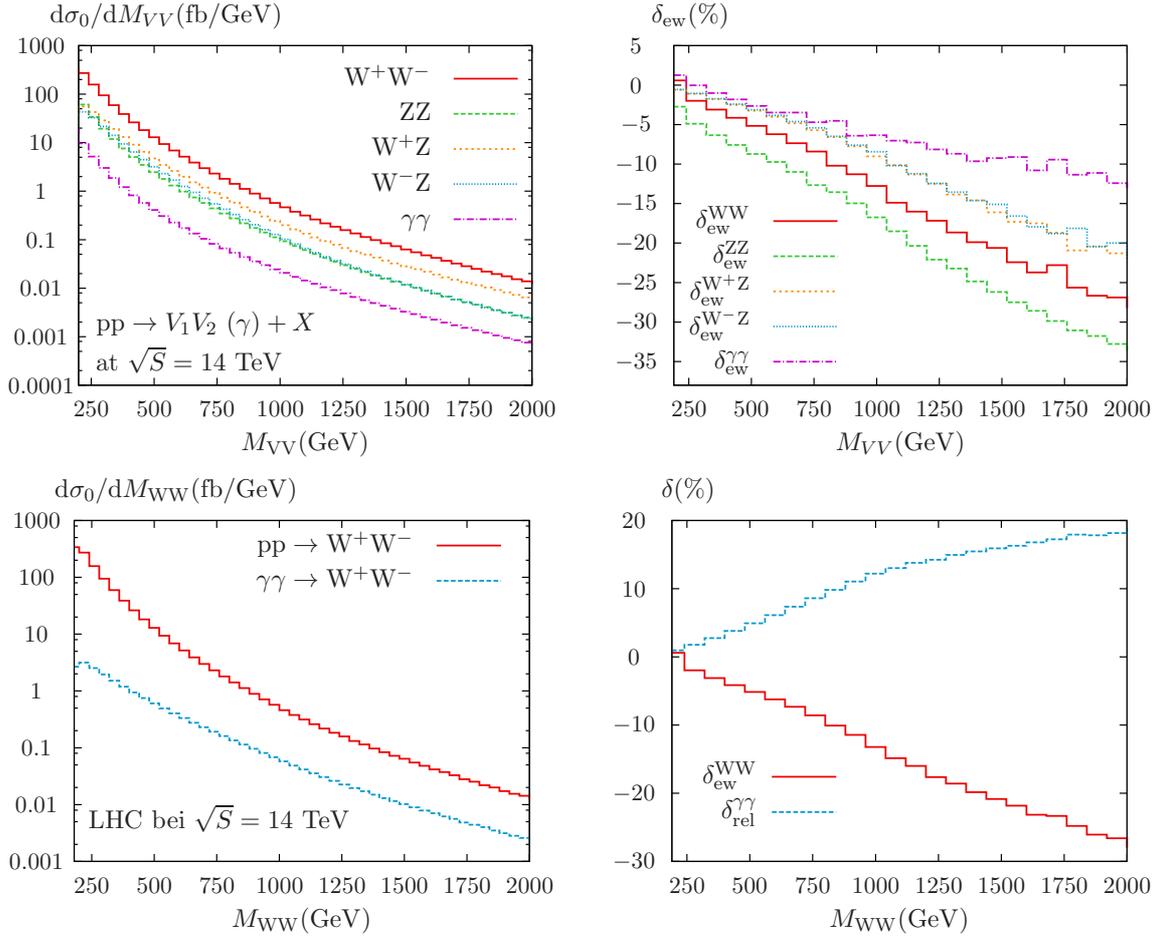


Abbildung 4.16: Entspricht Abbildung 4.15, aber für die invariante Masse M_{VV} der Eichbosonpaare (siehe Ref. [141, 142]).

vatron) gezeigt. Diese sind wegen asymmetrischer differentieller Wirkungsquerschnitte für $u\bar{u} \rightarrow W^-W^+$ und $d\bar{d} \rightarrow W^-W^+$, die aus den Unterschieden zwischen Valenz- und See-Quark-Verteilungen resultieren, am LHC unterschiedlich (siehe Abbildung 4.17 in der Mitte). Beim Tevatron sind die Wirkungsquerschnitte von W^+ und W^- spiegelsymmetrisch, $d\sigma_{W^+}(y) = d\sigma_{W^-}(-y)$ (siehe Abbildung 4.17 unten). Am LHC bei Schwerpunktsenergien $\sqrt{S} = 8$ TeV (Abbildung E.9) und $\sqrt{S} = 14$ TeV (Abbildung 4.17) führt der $\gamma\gamma$ -induzierte Prozess zu einem Anstieg der W -Paarproduktionsrate um 2 %. Die elektroschwachen Korrekturen betragen -1 %, was die kleinen Energien typischer Ereignisse und das Nichtvorhandensein großer negativer Sudakov-Logarithmen widerspiegelt. Am Tevatron können die elektroschwachen Korrekturen und Photon-induzierte Prozesse vernachlässigt werden.

Im Folgenden wird die Eichboson-Paarproduktion bei den höchsten Energien, die am LHC erreicht werden können, betrachtet. Das wird erreicht durch Beschränkung der invarianten Masse der Eichbosonen M_{VV} auf Werte größer als 500 GeV (siehe Abbildung 4.18), bzw. größer als 1000 GeV (siehe Abbildung 4.19). Bei Betrachtung der rechten Seite dieser Abbil-

4. Elektroschwache Korrekturen zur Eichboson-Paarproduktion

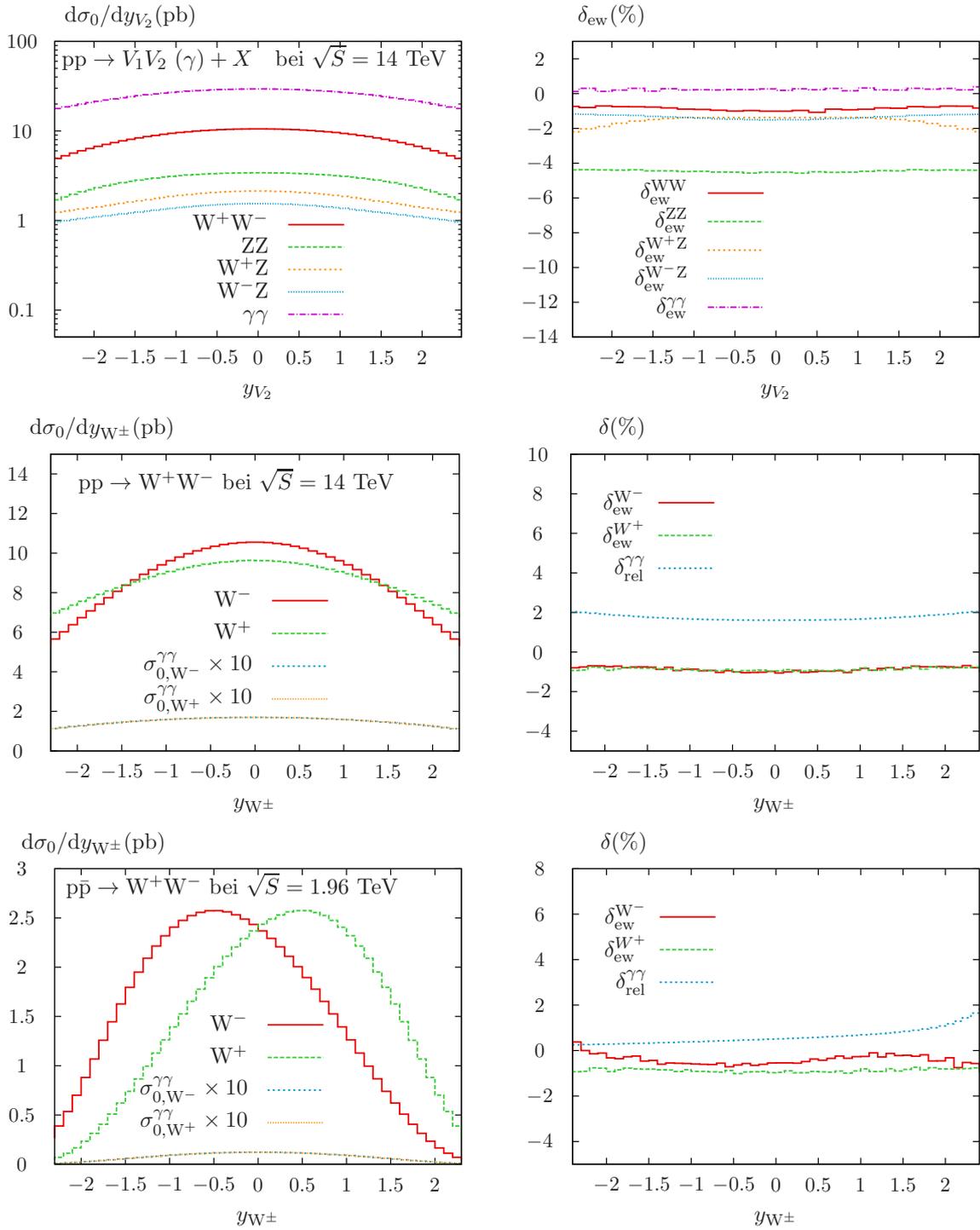


Abbildung 4.17: Differentielle Rapiditätsverteilung in der Bornschen Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. relativen Beitrag δ_{rel} von $\gamma\gamma$ -induzierten Prozess zur W^+W^- -Produktion (rechts in der Mitte) am LHC bei $\sqrt{S} = 14$ TeV sowie am Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV (unten) (siehe Ref. [141, 142]).

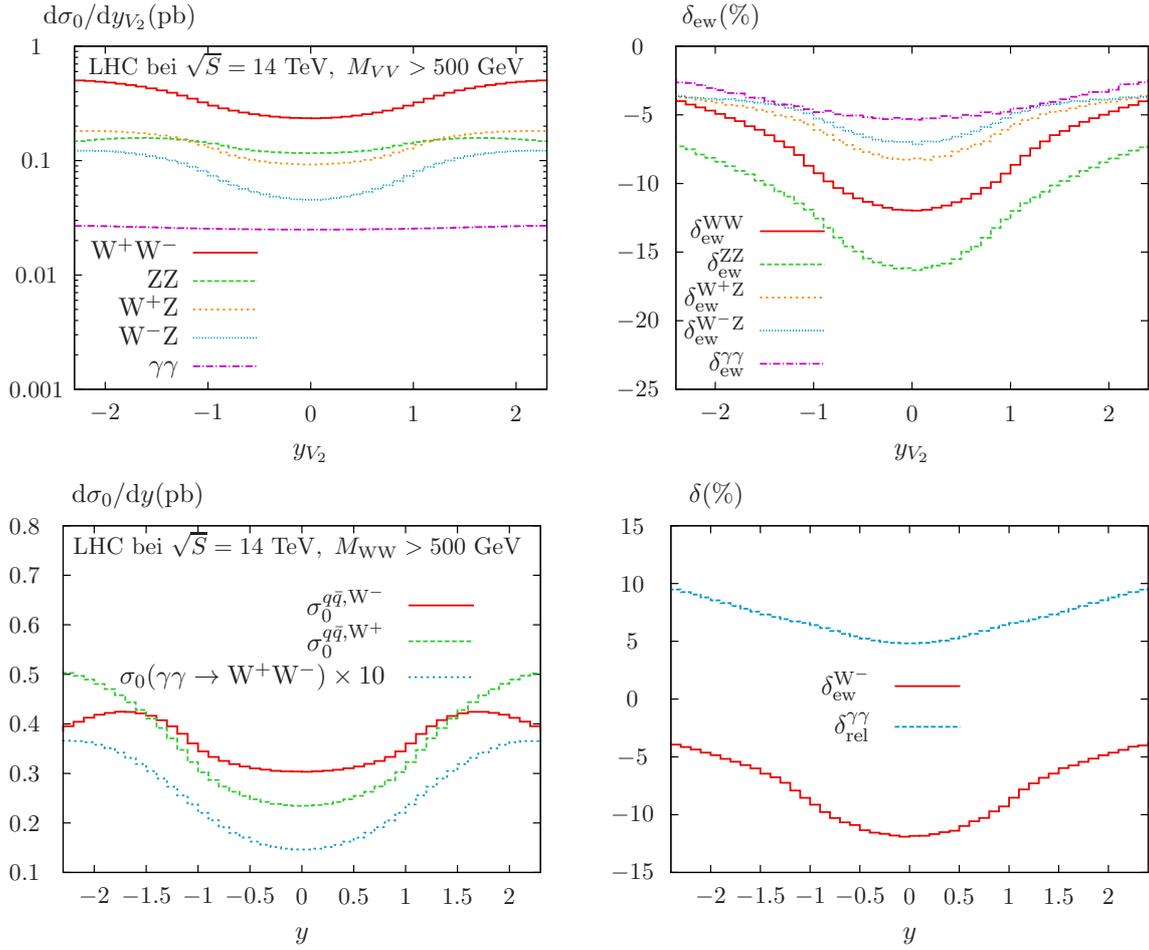


Abbildung 4.18: Differentielle Verteilung der Rapidity eines der auslaufenden Bosonen y_{V_2} in der Bornschen Näherung (links). Die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} zur Eichboson-Paarproduktion finden sich rechts oben, während der relative Beitrag δ_{rel} von $\gamma\gamma$ -induzierten Prozess zur W^+W^- -Produktion rechts unten dargestellt ist. Es wurde ein zusätzlicher Selektions-Schnitt an die invariante Masse $M_{VV} > 500$ GeV angewandt (siehe Ref. [141, 142]).

dungen können große negative elektroschwache Korrekturen für die Rapidityverteilungen der Bosonen bei kleinen Rapiditäten beobachtet werden, was zentralen Ereignissen mit hohen Transversalimpulsen (also der Sudakov-Region) entspricht. Große Rapiditäten entsprechen im Gegensatz dazu kleinen Streuwinkeln (also kleinen $|\hat{u}|$ bzw. $|\hat{t}|$) und damit auch kleinem Transversalimpuls k_T . Die elektroschwachen Korrekturen sind nur in der Sudakov-Region logarithmisch verstärkt. Für identische Schnitte an die invarianten Masse M_{VV} sind die Korrekturen am LHC bei $\sqrt{S} = 14$ TeV und bei $\sqrt{S} = 8$ TeV (siehe Anhang E) sehr ähnlich. Sie erreichen etwa -15% für $M_{VV} > 500$ GeV und -30% für $M_{VV} > 1000$ GeV.

Die entsprechenden Korrekturen für die Verteilungen der Rapiditydifferenz $\Delta y_{VV} = y_{V_1} - y_{V_2}$ wurden in Abbildung E.6 für $M_{VV} > 500$ GeV am LHC mit $\sqrt{S} = 8$ TeV und in Abbildung 4.9 für $M_{VV} > 1000$ GeV am LHC mit $\sqrt{S} = 14$ TeV vorgestellt. In diesen Fällen

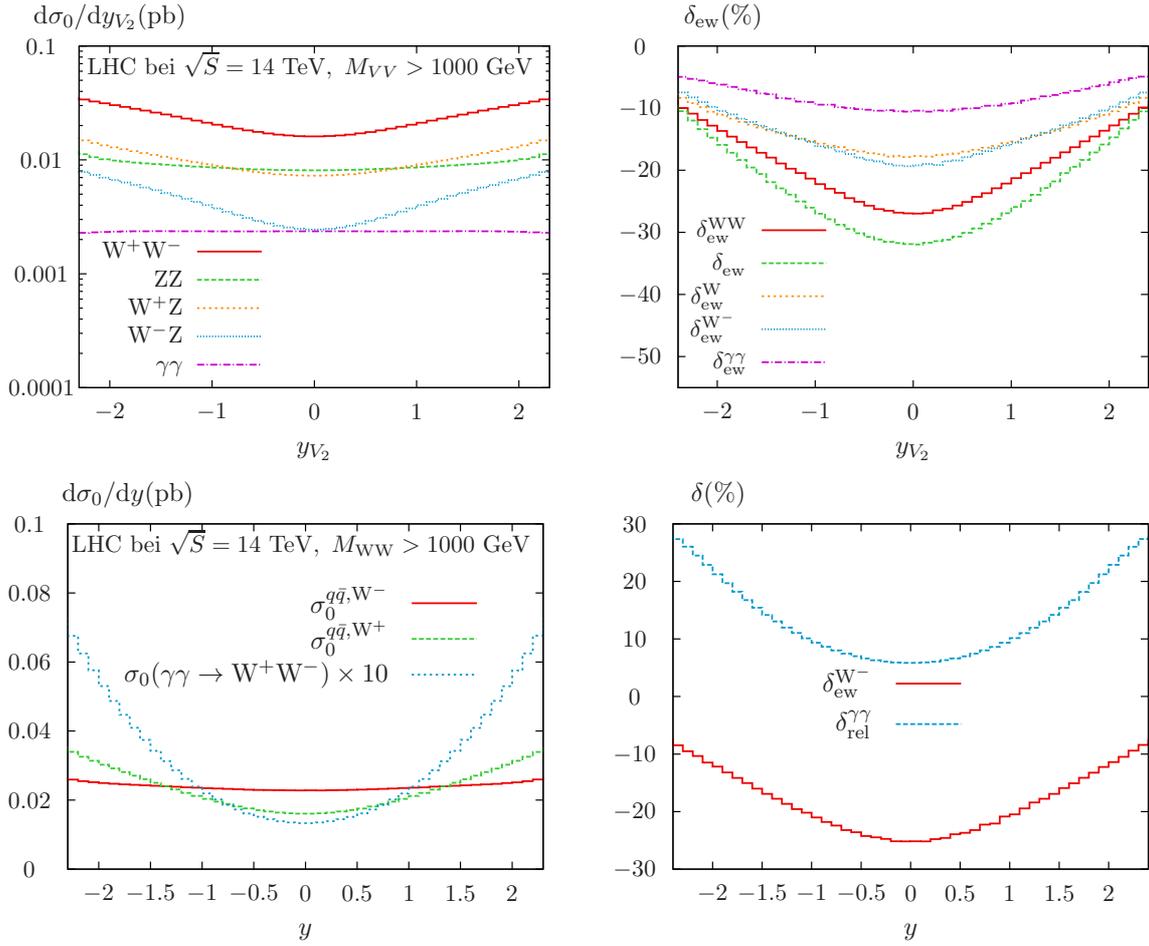


Abbildung 4.19: Identisch mit Abbildung 4.18, aber mit einem zusätzlichen Selektionschnitt an der invarianten Masse $M_{VV} > 1000$ GeV (siehe Ref. [141, 142]).

sind die elektroschwachen Korrekturen und die $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesse sehr wichtig. Große Korrekturen wurden für kleine Rapiditylücken beobachtet, welche beinahe -40% für die zentrale ZZ -Produktion am LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV und $\sqrt{S} = 14$ TeV ausmachen. Wie bereits in Abschnitt 4.2 erwähnt, können die Verteilungen der Rapiditydifferenzen für konstante M_{WW} zwischen W^+ - und W^- -Bosonen (siehe Abbildung 4.8) direkt auf die Winkelverteilungen im WW -Ruhesystem zurückgeführt werden und können deshalb für die Suche nach anomalen Kopplungen bei Energien im TeV-Bereich genutzt werden. Große Beiträge sowohl von Photon-induzierten Prozessen ($+35\%$), als auch von elektroschwachen Korrekturen (bis zu -40%) sind sichtbar, die zu einer starken Verzerrung der Verteilungen führen. Die Beiträge von Photon-induzierten Prozessen sind für Energien am Tevatron vernachlässigbar klein und werden nicht weiter betrachtet.

4.5 Vergleich der Rechnungen

Zum Schluss werden die Vorhersagen mit früheren Ergebnissen in der Hochenergie-Näherung [118] verglichen. Um diesen Vergleich zu ermöglichen, wird das PDF-Set MRST2001L0 [211] verwendet, da die Evaluation der numerische Ergebnissen in Ref. [117, 118] mit diesem PDF-Set durchgeführt wurde.

Zunächst konnten alle Ein-Schleifen-Resultate im Hochenergie-Limes, in dem die Beträge aller kinematischer Invarianten sehr viel größer als die Massen der Teilchen sind,

$$|\hat{s}| \sim |\hat{t}| \sim |\hat{u}| \gg M^2 \gg M_\gamma^2, \quad (4.18)$$

aus Ref. [117, 118] analytisch verifiziert werden. Dabei wird angenommen, dass alle massiven Teilchen wie Z-, W[±]-Eichbosonen, Higgs-Boson und das Top-Quark die gleiche Masse M besitzen. In diesem Limes ist die asymptotische Energieabhängigkeit der Amplituden von den Sudakov-Logarithmen [89, 116] dominiert und wird von den Evolutionsgleichungen [212, 213] bestimmt.⁵

Die Infrarotdivergenzen der virtuellen Korrekturen werden in der Hochenergie-Näherung durch die unphysikalische Photon-Masse M_γ reguliert. Im Grenzfall $M_\gamma^2 \ll M^2 \ll Q^2$ ist die Abhängigkeit der Übergangsamplituden vom unphysikalischen Parameter M_γ in der vollen Theorie die gleiche wie in der QED. Deshalb ist es möglich, die logarithmischen Korrekturen in einen rein elektroschwachen Sudakov-Logarithmus der Form $\log(Q^2/M^2)$ und einen QED Sudakov-Logarithmus der Form $\log(Q^2/M_\gamma^2)$ bzw. $\log(M^2/M_\gamma^2)$ zu trennen.

Um die elektroschwachen und die QED Logarithmen voneinander zu separieren, wird der Ansatz aus Ref. [170, 175] benutzt. Während die Abhängigkeit der Amplituden bei großem Impulsübertrag von der harten Evolutionsgleichung bestimmt wird (siehe Gl. (4) und Gl. (7) in Ref. [118]), ist die Abhängigkeit der Photon-Masse M_γ durch die infraroten Evolutionsgleichungen (siehe Ref. [170]) gegeben. Im Fall $M_\gamma^2 \ll M^2$ wird die singuläre Abhängigkeit der Amplituden vom IR-Regulator durch die QED-Evolutionsgleichung beschrieben (siehe Gl. (19) in Ref. [118]), die im Folgenden in der logarithmischen N²LL-Näherung in dem QED-Faktor $\mathcal{U}_{\text{QED}} \equiv \mathcal{U}$ wiedergegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \mathcal{U}_0(\alpha_e) \times & \quad (4.19) \\ \exp \left\{ \frac{\alpha_e(M_\gamma^2)}{4\pi} \left[- (Q_q^2 + 1) \ln^2 \frac{Q^2}{M_\gamma^2} + (3Q_q^2 - 4Q_q \ln \frac{\hat{u}}{\hat{t}}) \ln \frac{Q^2}{M_\gamma^2} + \ln^2 \frac{M_W^2}{M_\gamma^2} + 2 \ln \frac{M_W^2}{M_\gamma^2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\alpha_e^2(M_\gamma^2)}{(4\pi)^2} \frac{8}{9} \left[- \frac{10}{3} (Q_q^2 + 1) \ln^3 \frac{Q^2}{M_\gamma^2} + \left(\frac{95}{3} Q_q^2 + \frac{50}{3} - 20Q_q \ln \frac{\hat{u}}{\hat{t}} \right) \ln^2 \frac{Q^2}{M_\gamma^2} + \mathcal{O} \left(\ln \frac{Q^2}{M_\gamma^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\alpha_e^3) \right\}. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet Q_q die Ladung des masselosen Quarks. Die Größe α_e steht für die $\overline{\text{MS}}$ -

⁵Die Methode der Evolutionsgleichungen im Zusammenhang der elektroschwachen Korrekturen ist für den Vier-Fermion-Prozess ausführlich in Ref. [175] und für die W-Paarproduktion bei Elektron-Positron-Annihilation in Ref. [195] beschrieben.

renormierte QED Kopplungskonstante. Der Faktor \mathcal{U}_0 vor der Exponentialfunktion hängt vom Faktorisierungsschema ab und wird durch die Normierungsbedingung $\mathcal{U}(\alpha_e)|_{\hat{s}=M_\gamma^2=M^2} = 1$ fixiert. Im Gegensatz zur Wahl der Normierungsbedingung in Gl. (4.19) wird in Gl. (40) von Ref. [118] die Normierungsbedingung $\mathcal{U}(\alpha_e)|_{Q^2=M_\gamma^2=M^2} = 1$ mit $Q^2 = -\hat{s} - i0^+$ fixiert. In diesem Fall ist die Amplitude von der unphysikalischen Photon-Masse M_γ unabhängig.

Die Renormierung der Massen und der Felder in der Hochenergie-Näherung erfolgt gemäß Ref. [117, 118] im On-Shell-Renormierungsschema, während die Renormierung der Kopplung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema durchgeführt wird. Die Ein-Schleifen-Amplitude $\mathcal{M}_{\text{T/L},\mp}^{(1)}$ zur W-Paarproduktion in Hochenergie-Näherung enthält zwei unterschiedliche Dirac-Strukturen und kann durch die allgemeine Form

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\text{T},-}^{(1)} &= \bar{\psi}_{\bar{q}}(p_{\bar{q}}) [\not{\epsilon}_\kappa^* (p_q \cdot \epsilon_\kappa^*) \mathcal{A}_{\text{T},-}^{(1)} + \not{k}_W (p_q \cdot \epsilon_\kappa^*)^2 \mathcal{B}_{\text{T},-}^{(1)}] \omega_\mp \psi_q(p_q), \\ \mathcal{M}_{\text{L},\mp}^{(1)} &= \bar{\psi}_{\bar{q}}(p_{\bar{q}}) \not{k}_W \omega_\mp \psi_q(p_q) \mathcal{A}_{\text{L},\mp}^{(1)}\end{aligned}\quad (4.20)$$

dargestellt werden (siehe auch Gl. (33) von Ref. [118]). Dabei sind $\omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ die rechts- bzw. linkshändigen Projektoren. Die störungstheoretische Entwicklung der Amplitude in der Hochenergie-Näherung wird nach Potenzen von $\alpha/4\pi$ sortiert, wobei $\alpha = \alpha_{\text{em}}/\sin^2 \theta_W$ ist. $\mathcal{A}_{\text{T/L},\mp}^{(1)}$ und $\mathcal{B}_{\text{T},-}^{(1)}$ repräsentieren skalare Koeffizienten auf Ein-Schleifen-Niveau. Der Koeffizient $\mathcal{B}_{\text{T},-}^{(1)}$ hat eine relativ einfache Form und hängt nicht von den in Abschnitt 2.3 diskutierten Sudakov-Logarithmen ab, während der Koeffizient $\mathcal{A}_{\text{T/L},\mp}^{(1)}$ sowohl im Fall der transversal als auch longitudinal polarisierten Eichbosonen eine Abhängigkeit von den Sudakov-Logarithmen aufweist. $\mathcal{A}_{\text{T/L},\mp}^{(1)}$ lässt sich nach Beiträgen von den verschiedenen Kopplungen der Eichgruppen (also nach $\alpha_{\text{SU}(2)} = \alpha_{\text{em}}/\sin^2 \theta_W$, $\alpha_Y = \alpha_{\text{em}}/\cos^2 \theta_W$ und $\alpha_{\text{em}} = \alpha/4\pi$) wie folgt aufspalten:

$$\mathcal{A}_{\text{T/L},\mp}^{(1)} = \mathcal{A}_{\text{T/L},\mp,\text{SU}(2)}^{(1)} + \frac{\sin^2 \theta_W}{\cos^2 \theta_W} \mathcal{A}_{\text{T/L},\mp,\text{Y}}^{(1)} + \sin^2 \theta_W \left(\mathcal{A}_{\text{T/L},\mp,\text{QED}}^{(1)} - \mathcal{A}_{\text{T/L},\mp,\text{sub}}^{(1)} \right). \quad (4.21)$$

Der Term $\mathcal{A}_{\text{T/L},\mp,\text{sub}}^{(1)} = \mathcal{A}_{\text{sub}}^{(1)}$ entspricht der ersten Zeile der Gl. (4.19). Die auftretenden infraroten und kollinearen Singularitäten, die zur führenden Ordnung (also zu $\mathcal{A}_{\text{T/L},\mp}^{(0)} = \mathcal{A}^{(0)}$) faktorisieren, wurden gemäß

$$\mathcal{A}_{\text{sub}}^{(1)} = \left[- \left(Q_q^2 + 1 \right) \ln^2 \frac{Q^2}{M_\gamma^2} + \left(3Q_q^2 - 4Q_q \ln \frac{\hat{u}}{t} \right) \ln \frac{Q^2}{M_\gamma^2} + \ln^2 \frac{M_W^2}{M_\gamma^2} + 2 \ln \frac{M_W^2}{M_\gamma^2} \right] \mathcal{A}^{(0)} \quad (4.22)$$

behandelt (siehe Gl. (40) von Ref. [118]). Diese Vorgehensweise erlaubt, die existierenden Singularitäten von dem analytischen Ein-Schleifen-Ergebnis zu subtrahieren, was dazu führt, dass das Ergebnis bereits vor der numerischen Integration infrarot- und kollinear-endlich ist. Die in dieser Arbeit präsentierten numerischen Abschätzungen werden unter der Berücksichtigung der Normierungsbedingung $\mathcal{U}(\alpha_e)|_{Q^2=M_\gamma^2=M^2} = 1$ (mit $Q^2 = -\hat{s} - i0^+$) mit Hilfe von Gl. (4.22) berechnet. Dabei muss bei der Auswertung der Logarithmen der Form $\log(Q^2/M^2)$

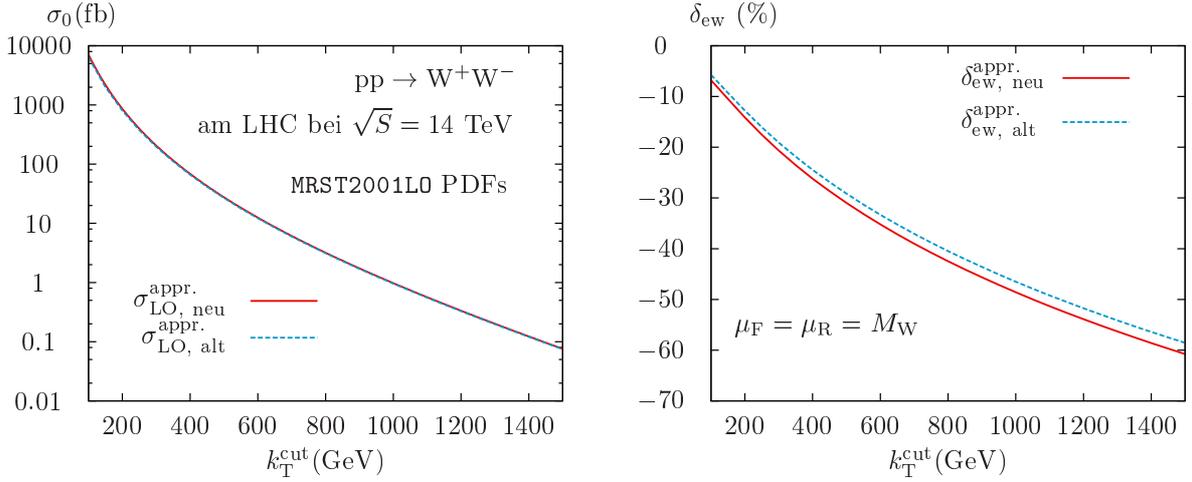


Abbildung 4.20: Integrierte k_T^{cut} -Verteilung in führender Ordnung (links) und die entsprechenden EW Korrekturen (rechts) in der Hochenergie-Näherung zur Produktion der W-Paare. Die blaue, gestrichelte Kurve stellt die numerischen Ergebnisse aus Ref. [118] dar, während die rote, durchgezogene Kurve die numerischen Ergebnisse in der Hochenergie-Näherung kennzeichnet, die im Rahmen dieser Arbeit berechnet wurde.

mit $Q^2 = -\hat{s} - i0^+$ beachtet werden, dass diese auf der negativen reellen Achse einen Verzweigungsschnitt aufweisen und dort nicht definiert sind. Mit Hilfe der Relation

$$\begin{aligned} \log(-\hat{s} - i\varepsilon) &= \log|-\hat{s} - i\varepsilon| + i \arg(-\hat{s} - i\varepsilon) \\ &= \log\sqrt{\hat{s}^2 + \varepsilon^2} + i \arg(-\hat{s} - i\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \log(\hat{s}) - i\pi \end{aligned} \quad (4.23)$$

liefern die quadratischen Sudakov-Logarithmen (siehe Abschnitt 2.3) einen endlichen π^2 -Beitrag

$$\log^2\left(\frac{Q^2}{M^2}\right) = \log^2\left(\frac{\hat{s}}{M^2}\right) - \pi^2 - 2i\pi \log\left(\frac{\hat{s}}{M^2}\right) \quad (4.24)$$

zum Wirkungsquerschnitt, der berücksichtigt werden muss. Die so entstandenen π^2 -Terme, die in Ref. [118] bei der numerischen Auswertung der Ergebnisse nicht berücksichtigt wurden, liefern somit einen Unterschied zu den im Rahmen dieser Arbeit ausgewerteten numerischen Ergebnissen in der Hochenergie-Näherung, siehe hierzu Abbildung 4.20. An dieser Stelle wird jedoch auf die Angabe der analytischen Ergebnisse verzichtet, sie können in Ref. [118] nachgeschlagen werden.

Um das Ergebnis der Hochenergie-Näherung aus Ref. [118] mit der vollständigen Rechnung zu vergleichen, wird im Gegensatz zu den bereits im Abschnitt 4.4 diskutierten Ergebnissen für die Behandlung der infraroten und kollinearen Singularitäten nicht die Phase-Space-Slicing-Methode, sondern der Dipol-Subtraktionsformalismus gewählt. Dieser Formalismus

bietet eine Möglichkeit, nur die divergenten Beiträge aus dem analytischen Ergebnis zu subtrahieren. Die verbleibenden endlichen Anteile aus der reellen Abstrahlung wurden für den Vergleich der Rechnung im Hochenergie-Limes mit der Rechnung unter der Berücksichtigung der Masseneffekte im Fall der W-Paarproduktion nicht berücksichtigt.

Wie bereits erwähnt, treten in der vorliegenden Arbeit infrarote und kollineare Singularitäten nur bei $q\bar{q}$ -induzierten Prozessen⁶ in der nächst-führenden Ordnung Störungstheorie auf. Beiträge von Endpunktsingularitäten der Dipole kompensieren die infraroten und kollinearen Singularitäten der QED, die in den virtuellen Korrekturen der unpolarisierten Eichboson-Paarproduktion auftreten. Diese sind gemäß Ref. [102] gegeben durch Gl. (2.32) bzw.

$$d\hat{\sigma}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2 \gamma}^{\text{reell,E.}} = -\frac{\alpha}{2\pi} \sum_{I \neq J} Q_I \vartheta_I Q_J \vartheta_J G_{IJ}^{\text{sub}}(P_{IJ}, m_I, m_J) d\hat{\sigma}_{q\bar{q}' \rightarrow V_1 V_2}^0(P_I, P_J). \quad (2.33)$$

Die Summe wird über alle Dipolbeiträge der geladenen externen Teilchen, also über $I, J = q, \bar{q}', W^\pm$ gebildet. Die universellen, prozessunabhängigen Funktionen $G_{IJ}^{\text{sub}}(P_{IJ}, m_I, m_J)$ beinhalten die entsprechenden Endpunktsingularitäten. Der Ladungsfluss der externen Teilchen J wird durch ϑ_J bezeichnet. Die in der vorliegenden Arbeit benötigten Dipole sind in Tabelle 4.6 aufgelistet. Die endlichen Terme der Beiträge der Endpunktsingularitäten Gl. (2.33), also die Terme, die nicht proportional zu $\log(M_\gamma)$ bzw. $\log(m_f)$ sind, haben keine physikalische Bedeutung. Sie werden so aufgestellt, dass sie bestimmte Subtraktionsbeiträge der Bremsstrahlung aufheben, welche in der sogenannten (Virtuell+Endpunktsingularität)-Näherung, also (V. + E.)-Näherung, vernachlässigt werden. Trotzdem ist dieser Ansatz sinnvoll, da die hier verwendete Näherung den QED Anteil der elektroschwachen Korrekturen nicht kontrolliert.

Abbildung 4.21 zeigt für den LHC Prozess $pp \rightarrow W^+W^- (+\gamma) + X$ bei der Kollisionsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV die niedrigste Ordnung (links) und die relativen EW Korrekturen (rechts) zur integrierten k_T -Verteilung. Die Ergebnisse der vollständigen Ein-Schleifen-Rechnung, also unter Berücksichtigung aller Masseneffekte und der reellen Abstrahlung werden mit $\delta_{\text{ew}}^{\text{full}}$ bezeichnet. Die Größe $\delta_{\text{ew}}^{(\text{V.}+\text{E.})}$ bezeichnet die Ein-Schleifen-Rechnung mit exakter Massenabhängigkeit, in der zwar die Endpunktsingularitäten abgezogen sind, jedoch keine harte reelle Abstrahlung mitgenommen wird. Weiterhin sind die Werte der logarithmischen Ein-Schleifen-Näherung im Hochenergie-Limes mit $\delta_{\text{ew}}^{\text{appr.}}$ eingezeichnet.

Die allgemeine k_T -Abhängigkeit aller relativen Korrekturen zeigt eine Zunahme mit wachsenden Werten des Transversalimpulses k_T . Dabei sind die Korrekturen negativ und liefern bei hohen Energien mit $k_T = 1500$ GeV Korrekturen bis zu -61% im Fall der Hochenergie-Näherung und bis zu -69% bei der vollständigen Ein-Schleifen-Rechnung. Außerdem zeigt der Vergleich zwischen den Ergebnissen in der Hochenergie-Näherung $\delta_{\text{ew}}^{\text{appr.}}$ und der vollständigen

⁶Die Beiträge, die von (Anti-)Quark-Photon-induzierten Prozessen stammen, wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Dipole	<i>Emitter</i>	<i>Spectator</i>	Gl.	$\tilde{\Phi}_{0,IJ}$
G_{ab}^{sub}	masseloser IS	masselose IS	(3.33)	(3.25) – (3.27)
G_{ai}^{sub}	masseloser IS	massiver FS	(A.4)	(3.12)
G_{aj}^{sub}	masseloser IS	massiver FS	(A.4)	(3.12)
G_{ba}^{sub}	masseloser IS	masseloser IS	(3.33)	(3.25) – (3.27)
G_{bi}^{sub}	masseloser IS	massiver FS	(A.4)	(3.12)
G_{bj}^{sub}	masseloser IS	massiver FS	(A.4)	(3.12)
G_{ia}^{sub}	massiver FS	masseloser IS	(A.4)	(3.12)
G_{ib}^{sub}	massiver FS	masseloser IS	(A.4)	(3.12)
G_{ij}^{sub}	massiver FS	massiver FS	(4.10)	(4.1) – (4.5)
G_{ja}^{sub}	massiver FS	masseloser IS	(A.4)	(3.12)
G_{jb}^{sub}	massiver FS	masseloser IS	(A.4)	(3.12)
G_{ji}^{sub}	massiver FS	massiver FS	(4.10)	(4.1) – (4.5)

Tabelle 4.6: Die Dipol-Subtraktionsterme aus Ref. [102], die für die Berechnung des Matrixelements \mathcal{M}_{sub} aus Gl. (2.32) bzw. des Wirkungsquerschnitts aus Gl. (2.33) verwendet werden. Die Indizes a und b stehen für die einlaufenden Quarks und i bzw. j für die auslaufenden geladenen Eichbosonen.

Rechnung $\delta_{\text{ew}}^{(\text{V.}+\text{E.})}$ in dem verfügbaren Energiebereich eine gute Übereinstimmung innerhalb weniger Prozent. Im Bereich $k_{\text{T}}^{\text{cut}} = \{1 \text{ TeV}, 1.5 \text{ TeV}\}$ der Abbildung 4.21 variiert die relative Abweichung zwischen 2.1 % und 2.3 %. Während die Rechnung in der Hochenergie-Näherung $\delta_{\text{ew}}^{\text{appr.}}$ deutlich weniger Rechenaufwand erfordert, ist der Aufwand zur Berechnung von vollständigen Ein-Schleifen-Korrekturen unter Berücksichtigung aller Masseneffekte im Fall von $\delta_{\text{ew}}^{\text{full}}$ und $\delta_{\text{ew}}^{\text{V.}+\text{E.}}$ vergleichsweise groß. Wie in Abbildung 4.21 gezeigt, führt die Berücksichtigung der harten Photonabstrahlung zu einer signifikanten Korrektur und sollte deshalb nicht vernachlässigt werden.

In naher Zukunft wird am LHC in der zweiten Messphase Eichboson-Paarproduktion mit großer invarianter Masse $M_{VV'}$ bzw. mit großem Transversalimpuls k_{T} gemessen werden. Die genaue Statistik hängt dabei vom jeweiligen Prozess und der Luminosität ab [214, 215]. Nimmt man z. B. als grobe Schätzung eine integrierte Luminosität von $\mathcal{L} = 200 \text{ fb}^{-1}$ an, so würden ungefähr 1200 W-Paare mit einem Transversalimpuls $k_{\text{T}} > 600 \text{ GeV}$ erzeugt werden. Angenommen die experimentelle Analyse basiert auf einem Endzustand mit einem W-Boson, das leptonisch zerfällt, und einem zweiten W-Boson, das hadronisch zerfällt, dann läge der beobachtbare Anteil bei ungefähr 4/9 der Paare, was zu einem nominellen statistischen Fehler von etwa 4 % führen würde [118]. Wenn die experimentellen Fehler kleiner als

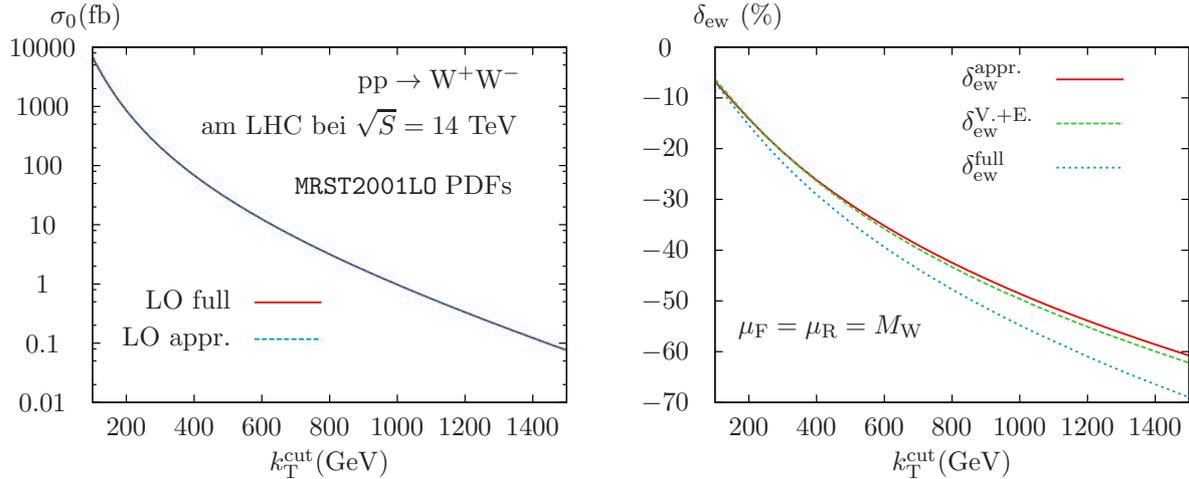


Abbildung 4.21: Integrierte k_T^{cut} -Verteilung in führender Ordnung (links) und die entsprechende EW Korrekturen (rechts) in der Hochenergie-Näherung (rot), der vollständigen Ein-Schleifen-Rechnung unter Verwendung der Subtraktionsbeitrags (grün) und der vollständigen Ein-Schleifen-Rechnung unter Berücksichtigung aller Masseneffekte (blau) zur Produktion der W-Paare.

die theoretischen Fehler zur Eichboson-Paarproduktion werden, dann werden von der theoretischen Seite Korrekturen höherer Ordnung relevant. Im Fall der W-Paarproduktion ist beispielsweise für die präzise theoretische Vorhersage der Wirkungsquerschnitte nicht nur die Kenntnis der Ein-Schleifen-Korrekturen, sondern dann auch der Korrekturen höherer Ordnung erforderlich. Mit heutigen Methoden ist es allerdings nicht möglich, eine explizite Zwei-Schleifen-Rechnung zur Eichboson-Paarproduktion durchzuführen. Einen Ausweg aus diesem Dilemma bieten sogenannten Evolutionsgleichungen. Mit ihrer Hilfe, mit den Ergebnissen der expliziten Ein-Schleifen-Rechnung in der Hochenergie-Näherung und unter Anwendung besonderer Eigenschaften der Sudakov-Logarithmen (siehe Abschnitt 2.3), die aufgrund des Austausches virtueller Bosonen sowie deren reeller Abstrahlung auftreten, ist es möglich, Vorhersagen der Beiträge bis zu N^2LL Näherung zum Wirkungsquerschnitt zu machen. Im Fall der W-Paarproduktion betragen die elektroschwachen Zwei-Schleifen-Korrekturen in N^2LL -Näherung ungefähr $+10\%$ bei $k_T = 1$ TeV (siehe hierfür Ref. [118]).

4.6 Vergleich der numerischen Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse, die mit den in Kapitel 3 vorgestellten Methoden berechnet wurden, tabellarisch dargestellt und diskutiert. Wie aus den Tabellen 4.7 und 4.8 ersichtlich, stimmen die Ergebnisse innerhalb des Integrationsfehlers überein. Die Abweichungen reichen vom Sub-Promille-Bereich bis hin zu wenigen Promille.

pp → V ₁ V ₂ (+γ) + X bei √S = 14 TeV												
k _T ^{cut}		W ⁻ W ⁺			ZZ		W ⁺ Z		W ⁻ Z		γγ	
GeV		σ ₀ / pb	δ _{ew} (%)	δ _{rel} ^{γγ} (%)	σ ₀ pb	δ _{ew} (%)	σ ₀ / pb	δ _{ew} (%)	σ ₀ / pb	δ _{ew} (%)	σ ₀ / pb	δ _{ew} (%)
50	★	19.7986(5)	-2.94(5)	2.454(3)	3.6609(4)	-6.34(4)	4.4987(1)	-1.90(4)	3.2281(1)	-1.68(3)	2.9805(4)	0.59(5)
	◆	19.7983(2)	-2.99(2)	2.454(2)	3.6611(3)	-6.47(2)	4.4990(4)	-1.86(2)	3.2282(3)	-1.67(2)	2.9798(2)	0.63(5)
100	★	5.377(5)	-7.04(3)	3.764(7)	1.0875(7)	-10.41(5)	1.2969(4)	-3.68(5)	0.8492(3)	-3.32(4)	0.4321(3)	-1.63(6)
	◆	5.378(5)	-7.10(3)	3.765(4)	1.0875(1)	-10.61(3)	1.2969(2)	-3.66(2)	0.8491(9)	-3.30(2)	0.4321(2)	-1.60(6)
250	★	0.3531(6)	-18.85(9)	5.769(4)	74.959(2) × 10 ⁻³	-23.03(6)	90.563(8) × 10 ⁻³	-12.86(6)	45.83(2) × 10 ⁻³	-12.31(6)	24.519(3) × 10 ⁻³	-7.10(6)
	◆	0.3531(3)	-18.89(2)	5.769(6)	74.960(3) × 10 ⁻³	-23.12(3)	90.556(8) × 10 ⁻³	-12.85(3)	45.83(4) × 10 ⁻³	-12.30(3)	24.515(1) × 10 ⁻³	-7.01(5)
500	★	2.3047(9) × 10 ⁻²	-33.76(6)	7.003(4)	4.989(1) × 10 ⁻³	-38.86(7)	6.364(2) × 10 ⁻³	-24.85(8)	24.795(8) × 10 ⁻⁴	-24.38(8)	16.951(2) × 10 ⁻⁴	-13.02(6)
	◆	2.3044(2) × 10 ⁻²	-33.91(6)	7.002(6)	4.989(3) × 10 ⁻³	-38.98(4)	6.365(5) × 10 ⁻³	-24.88(5)	24.797(2) × 10 ⁻⁴	-24.43(5)	16.951(7) × 10 ⁻⁴	-13.03(5)
750	★	3.3044(8) × 10 ⁻³	-44.91(1)	7.9193(6)	7.216(2) × 10 ⁻⁴	-50.61(8)	9.243(3) × 10 ⁻⁴	-33.32(9)	3.125(1) × 10 ⁻⁴	-32.99(9)	25.667(3) × 10 ⁻⁵	-17.33(6)
	◆	3.3041(2) × 10 ⁻³	-45.05(7)	7.9178(7)	7.217(4) × 10 ⁻⁴	-50.82(5)	9.244(8) × 10 ⁻⁴	-33.43(7)	3.125(3) × 10 ⁻⁴	-33.03(6)	25.669(9) × 10 ⁻⁵	-17.34(4)
1000	★	6.7041(2) × 10 ⁻⁴	-53.82(1)	8.9461(4)	1.4601(9) × 10 ⁻⁴	-60.15(9)	1.8356(1) × 10 ⁻⁴	-39.82(1)	57.327(2) × 10 ⁻⁶	-39.65(1)	54.919(5) × 10 ⁻⁶	-20.72(6)
	◆	6.7037(4) × 10 ⁻⁴	-53.94(7)	8.9430(7)	1.4601(9) × 10 ⁻⁴	-60.31(9)	1.8356(1) × 10 ⁻⁴	-39.91(6)	57.329(5) × 10 ⁻⁶	-39.74(6)	54.918(2) × 10 ⁻⁶	-20.64(5)
1250	★	1.6393(2) × 10 ⁻⁴	-61.28(1)	10.2101(4)	35.288(1) × 10 ⁻⁶	-68.35(1)	42.923(1) × 10 ⁻⁶	-45.13(1)	12.867(1) × 10 ⁻⁶	-45.05(1)	14.158(2) × 10 ⁻⁶	-23.50(7)
	◆	1.6393(1) × 10 ⁻⁴	-61.42(8)	10.2067(7)	35.288(2) × 10 ⁻⁶	-68.61(8)	42.923(3) × 10 ⁻⁶	-45.21(7)	12.867(1) × 10 ⁻⁶	-45.21(7)	14.158(5) × 10 ⁻⁶	-23.50(5)
1500	★	4.4795(1) × 10 ⁻⁵	-67.74(1)	11.7568(5)	94.739(2) × 10 ⁻⁷	-75.66(2)	10.996(1) × 10 ⁻⁶	-49.62(1)	32.485(1) × 10 ⁻⁷	-49.63(1)	40.715(1) × 10 ⁻⁷	-25.87(8)
	◆	4.4789(3) × 10 ⁻⁵	-67.83(9)	11.7546(8)	94.737(4) × 10 ⁻⁷	-75.75(6)	10.995(8) × 10 ⁻⁶	-49.75(8)	32.484(2) × 10 ⁻⁷	-49.79(8)	40.719(2) × 10 ⁻⁷	-25.91(5)

Tabelle 4.7: Vergleich der berechneten Werte der integrierten k_T^{cut} -Verteilung in führender Ordnung und den dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen für die Eichboson-Paarproduktion am LHC bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV: Es werden Resultate der in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen (bezeichnet mit ★) bzw. einer unabhängigen Rechnung (bezeichnet mit ◆) gezeigt [216].

pp $\rightarrow V_1 V_2 (+\gamma) + X$ bei $\sqrt{S} = 14$ TeV												
M_{VV}^{cut} GeV		W ⁻ W ⁺			ZZ		W ⁺ Z		W ⁻ Z		$\gamma\gamma$	
		σ_0 / pb	δ_{ew} (%)	$\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}$ (%)	σ_0 / pb	δ_{ew} (%)						
200	★	28.8356(4)	-2.09(1)	2.1715(5)	6.0944(1)	-4.92(7)	7.8202(3)	-1.65(2)	5.7904(1)	-1.49(2)	0.9669(2)	-0.34(2)
	◆	28.8370(1)	-2.14(1)	2.1713(8)	6.0948(2)	-4.97(9)	7.8205(3)	-1.58(1)	5.7902(2)	-1.45(1)	0.9669(4)	-0.35(4)
300	★	9.4926(2)	-4.04(1)	3.7658(3)	1.8600(6)	-7.42(7)	3.2528(9)	-2.66(2)	2.2733(7)	-2.43(2)	0.3047(1)	-1.80(3)
	◆	9.4921(4)	-4.10(1)	3.7665(2)	1.8599(2)	-7.44(1)	3.2529(2)	-2.62(1)	2.2732(1)	-2.39(1)	0.3047(5)	-1.82(5)
500	★	1.8410(4)	-7.46(9)	7.1821(5)	$35.227(2) \times 10^{-2}$	-11.22(5)	$71.646(3) \times 10^{-2}$	-5.13(1)	$44.077(2) \times 10^{-2}$	-4.70(1)	$64.550(1) \times 10^{-3}$	-4.02(2)
	◆	1.8410(1)	-7.53(2)	7.1825(4)	$35.229(2) \times 10^{-2}$	-11.23(2)	$71.635(4) \times 10^{-2}$	-5.11(2)	$44.076(2) \times 10^{-2}$	-4.66(2)	$64.549(2) \times 10^{-3}$	-3.82(1)
1000	★	$12.082(3) \times 10^{-2}$	-17.61(5)	14.447(3)	$23.103(1) \times 10^{-3}$	-21.95(4)	$52.706(3) \times 10^{-3}$	-13.10(8)	$24.475(1) \times 10^{-3}$	-12.46(7)	$58.635(8) \times 10^{-4}$	-8.14(5)
	◆	$12.081(7) \times 10^{-2}$	-17.67(3)	14.449(1)	$23.103(1) \times 10^{-3}$	-22.02(2)	$52.704(4) \times 10^{-3}$	-13.07(3)	$24.476(2) \times 10^{-3}$	-12.42(2)	$58.635(2) \times 10^{-4}$	-8.11(3)
1500	★	$20.367(3) \times 10^{-3}$	-25.38(4)	18.130(3)	$36.653(2) \times 10^{-4}$	-31.11(2)	$94.503(4) \times 10^{-4}$	-20.16(4)	$36.673(2) \times 10^{-4}$	-19.57(5)	$11.092(3) \times 10^{-4}$	-11.06(3)
	◆	$20.368(9) \times 10^{-3}$	-25.50(3)	18.129(1)	$36.653(2) \times 10^{-4}$	-31.16(2)	$94.502(5) \times 10^{-4}$	-20.14(3)	$36.674(2) \times 10^{-4}$	-19.58(3)	$11.092(2) \times 10^{-4}$	-11.02(3)
2000	★	$48.785(3) \times 10^{-4}$	-31.31(4)	21.621(4)	$84.754(4) \times 10^{-5}$	-37.75(3)	$23.736(5) \times 10^{-4}$	-25.60(4)	$82.874(6) \times 10^{-5}$	-24.99(4)	$28.256(7) \times 10^{-5}$	-13.38(4)
	◆	$48.784(2) \times 10^{-4}$	-31.44(3)	21.622(2)	$84.756(3) \times 10^{-5}$	-37.79(3)	$23.736(1) \times 10^{-4}$	-25.59(3)	$82.871(4) \times 10^{-5}$	-25.01(3)	$28.254(3) \times 10^{-5}$	-13.39(4)
2500	★	$13.811(2) \times 10^{-4}$	-36.28(4)	25.639(5)	$23.178(5) \times 10^{-5}$	-43.43(2)	$68.364(3) \times 10^{-5}$	-30.19(3)	$22.524(6) \times 10^{-5}$	-29.52(4)	$84.208(2) \times 10^{-6}$	-15.34(2)
	◆	$13.810(6) \times 10^{-4}$	-36.42(4)	25.639(2)	$23.177(9) \times 10^{-5}$	-43.45(3)	$68.369(3) \times 10^{-5}$	-30.20(4)	$22.526(1) \times 10^{-5}$	-29.55(3)	$84.211(2) \times 10^{-6}$	-15.35(3)
3000	★	$42.988(6) \times 10^{-5}$	-40.50(6)	30.461(6)	$69.608(2) \times 10^{-6}$	-48.26(3)	$21.064(8) \times 10^{-5}$	-34.20(3)	$67.725(3) \times 10^{-6}$	-33.45(5)	$27.498(2) \times 10^{-6}$	-16.93(2)
	◆	$42.988(2) \times 10^{-5}$	-40.63(4)	30.460(2)	$69.609(2) \times 10^{-6}$	-48.23(3)	$21.064(8) \times 10^{-5}$	-34.22(4)	$67.727(2) \times 10^{-6}$	-33.49(4)	$27.498(6) \times 10^{-6}$	-16.95(3)

Tabelle 4.8: Vergleich der berechneten Werte der integrierten M_{VV}^{cut} -Verteilung in führender Ordnung und den dazugehörigen elektroschwachen Korrekturen für die Eichboson-Paarproduktion am LHC bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV: Es werden Resultate der in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen (bezeichnet mit ★) bzw. einer unabhängigen Rechnung (bezeichnet mit ◆) gezeigt [216].

Kapitel 5

Zusammenfassung

Eichboson-Paarproduktion ist einerseits ein wichtiger Untergrund an Hadronen-Beschleunigern bei der Suche nach Physik jenseits des Standardmodells, andererseits ist sie von Bedeutung für die Etablierung der spontan gebrochenen Eichsymmetrie als fundamentale mathematische Struktur. Speziell ermöglichen diese Prozesse die direkte Analyse der Selbstkopplungen der elektroschwachen Eichbosonen. Der Vergleich zwischen dem experimentell gemessenen Wert für den Wirkungsquerschnitt und verschiedenen Verteilungen und der dazugehörigen Theorievorhersage ermöglicht die genauere Überprüfung des zugrunde liegenden Modells. Um die Präzision der theoretischen Vorhersagen voranzutreiben, müssen Korrekturen höherer Ordnung miteinbezogen werden.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung der physikalischen Observablen zur Eichboson-Paarproduktion in Quark-Anti-Quark-Vernichtung. Der Schwerpunkt liegt in der Berechnung der vollständigen elektroschwachen Strahlungskorrekturen in nächstführender Ordnung zur hadronischen On-Shell WW -, ZZ -, $W^\pm Z$ - und $\gamma\gamma$ -Produktion am LHC und Tevatron, deren Berücksichtigung unvermeidlich ist, um die geforderte Präzision zu erreichen. In Ref. [182] wurde die Signifikanz der elektroschwachen Korrekturen bezüglich der erwarteten statistischen Fehler diskutiert. Der Vergleich ergab, dass die elektroschwachen Korrekturen nicht vernachlässigt werden können.

Zum ersten Mal wurden bei der Berechnung der elektroschwachen Korrekturen zu diesen Prozessen alle Masseneffekte konsistent berücksichtigt. Die elektroschwachen Strahlungskorrekturen einer solchen Prozessklasse enthalten Beiträge von mehreren hundert Feynman-Diagrammen, was eine Berechnung der zugehörigen Übergangsamplituden recht aufwendig macht. Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb ein auf FORM basierendes Programm entwickelt. Die elektroschwachen Strahlungskorrekturen wurden zunächst auf Parton-Niveau berechnet und anschließend im Rahmen des Parton-Modells mit den nicht-perturbativen Partonverteilungsfunktionen gefaltet, um realistische hadronische Resultate zu erhalten. Bei der Berechnung der Feynman-Amplituden treten neben den sogenannte Ultraviolett- (UV) auch Infrarot- (IR) und kollineare Singularitäten auf. Deshalb werden neben den virtuellen Ein-

Schleifen-Korrekturen auch die reellen Bremsstrahlungskorrekturen, die durch die Abstrahlung eines zusätzlichen Photons verursacht werden, berücksichtigt. Dabei treten Massensingularitäten auf, die bei der numerischen Auswertung der Ergebnisse mit großer Sorgfalt behandelt werden müssen. Um diese Singularitäten vor der numerischen Phasenraum-Integration zu eliminieren und sie in den problematischen Phasenraumregionen analytisch auszuwerten, wurde die Methode der Phase-Space-Slicing verwendet. Die so erhaltenen analytischen Resultate sind in einem Monte-Carlo Programm implementiert, das es ermöglicht nicht nur den totalen Wirkungsquerschnitt, sondern auch alle für LHC und Tevatron physikalisch relevanten, differentiellen Wirkungsquerschnitte in Form von Histogrammen zu generieren. Die numerisch stabile Auswertung der Ergebnisse wurde durch die Implementierung einer „Importance Sampling“-Methode in FORTRAN 90 gewährleistet, die ebenfalls für die Integration der Wirkungsquerschnitte mit Phase-Space-Slicing optimiert ist. Alle in dieser Arbeit verwendeten Methoden wurden detailliert dokumentiert und die Ergebnisse für die unpolarisierten Wirkungsquerschnitte wurden präsentiert. Ferner sind die vorgestellten Ergebnisse nicht auf einen bestimmten kinematischen Bereich beschränkt, was eine flexible Vorhersage für den gesamten für den LHC interessanten Phasenraumbereich erlaubt.

Wie gezeigt, sind die relativen Korrekturen negativ und steigen mit wachsender Schwerpunktsenergie an. Am größten sind die Beiträge für ZZ-Produktion am LHC, die bis zu -50% erreichen, am kleinsten für $\gamma\gamma$ -Produktion. Als neue, interessante Erkenntnis findet man, dass die relativen Korrekturen nicht nur bei hohen Energien, also im Sudakov-Bereich, signifikant sind, sondern dass sie – im Fall der ZZ-Produktion – große Beiträge auch bei eher kleinen Transversalimpulsen liefern können. Als überraschendes neues Ergebnis erhält man ferner, dass die Photon-induzierten Beiträge in führender Ordnung im Fall der W-Paarproduktion bei hohen Energien und kleinen Streuwinkeln den gleichen Beitrag wie die elektroschwachen Korrekturen liefern. Deshalb dürfen sie nicht vernachlässigt werden, wenn die W-Paarproduktion bei hohen Energien vorhergesagt werden soll. Für kleine Streuwinkel dominiert der Photon-induzierte Kanal die elektroschwachen Beiträge sogar bei kleinen Energien.

Der Vergleich der Rechnungen für die W-Paarproduktion in der Näherung für den Hochenergielimes mit der exakten Rechnung, in der alle Masseneffekte sowie Bremsstrahlung von harten Photonen berücksichtigt sind, zeigt einen signifikanten Unterschied von ca. 10% , bezogen auf die Korrektur. Diese Effekte sollten deshalb nicht vernachlässigt werden.

Anhang A

A.1 Mathematische Hilfsmittel

A.1.1 Dilogarithmen

Bei der Integration der Ein-Schleifen-Integrale bzw. über die infrarot und kollinear divergenten Phasenraumbereiche treten sogenannte Dilogarithmen auf [217, 218]

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(z) &= \int_0^1 dx \frac{\log x}{x - \frac{1}{z}} = - \int_0^1 dx \frac{\log(1 - zx)}{x} \\ &= - \int_0^z dx \frac{\log(1 - x)}{x} = \frac{z}{1^2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \dots \quad \text{für } |z| \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Für spezielle Werte des Arguments ergeben sich:

$$\text{Li}_2(0) = 0, \quad \text{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{Li}_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}, \quad \text{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \log^2\left(\frac{1}{2}\right). \quad (\text{A.2})$$

Der Zusammenhang zwischen den Dilogarithmen und Logarithmen wird durch eine geeignete Substitution und partielle Integration (P.I.) hergestellt; zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \text{Li}_2(z) &= - \int_0^z dx \frac{\log(1 - x)}{x} \xrightarrow{\xi := 1 - x} \int_1^{1-z} d\xi \frac{\log \xi}{1 - \xi} \\ &\xrightarrow{\text{P.I.}} \left[-\log(1 - \xi) \log \xi \right]_1^{1-z} + \int_1^{1-z} d\xi \frac{\log(1 - \xi)}{\xi} \\ &= -\log(1 - z) \log z + \underbrace{\int_0^{1-z} d\xi \frac{\log(1 - \xi)}{\xi}}_{-\text{Li}_2(1-z)} - \underbrace{\int_0^1 d\xi \frac{\log(1 - \xi)}{\xi}}_{-\text{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}} \\ &= -\log(1 - z) \log z - \text{Li}_2(1 - z) + \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Es ergeben sich folgende linearen und quadratischen Relationen:

$$\operatorname{Li}_2(1-z) = -\operatorname{Li}_2(z) - \log(1-z) \log z + \frac{\pi^2}{6}, \quad z \notin (-\infty, 0] \cup [1, \infty), \quad (\text{A.4})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Li}_2(z) - \frac{\pi^2}{6} - \log^2(-z), \quad z \notin [0, \infty), \quad (\text{A.5})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\operatorname{Li}_2(z) - \frac{1}{2} \log^2(z-1), \quad z \notin [1, \infty), \quad (\text{A.6})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) = -\operatorname{Li}_2(z) + \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2} \log^2(z-1) + i\pi \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \quad z > 1, \quad (\text{A.7})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1-z}\right) = \operatorname{Li}_2(z) + \frac{\pi^2}{6} - \log(1-z) \log(-z) - \frac{\log^2(1-z)}{2}, \quad z \notin [0, \infty), \quad (\text{A.8})$$

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = \operatorname{Li}_2(z) + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\log^2(z)}{2} + \log(1-z) \log(z), \quad z \notin (-\infty, 0] \cup [1, \infty), \quad (\text{A.9})$$

$$\operatorname{Li}_2(-z) = -\operatorname{Li}_2(z) + \frac{1}{2} \operatorname{Li}_2(z^2), \quad z \notin (-\infty, 0] \cup [1, \infty). \quad (\text{A.10})$$

A.1.2 Plus- Distribution

Die Plus-Distribution $[f(z)]_+$ ist so definiert, dass die Faltung mit einer Funktion $g(z)$ durch

$$\int_0^1 dz g(z) [f(z)]_+ = \int_0^1 dz [g(z) - g(1)] f(z), \quad (\text{A.11})$$

bzw.

$$[f(z)]_+ = \lim_{\delta_z \rightarrow 0} \left[\Theta(1-z-\delta_z) f(z) - \delta(1-z-\delta_z) \int_0^{1-\delta_z} dy f(y) \right] \quad (\text{A.12})$$

gegeben ist [37, 66]. Ferner gilt

$$\int_0^{1-\delta_z} dz g(z) f(z) = \int_0^1 dz g(z) [f(z)]_+ + \int_0^{1-\delta_z} dy g(1) f(y) + \mathcal{O}(\delta_z). \quad (\text{A.13})$$

Eine weitere nützliche Eigenschaft der Plus-Distribution ist

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz_1 dz_2 [f(z_1)]_+ [g(z_2)]_+ h(z_1, z_2) = \\ \int_0^1 dz_1 dz_2 f(z_1) g(z_2) \left(h(z_1, z_2) - h(1, z_2) - h(z_1, 1) + h(1, 1) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Anhang B

Berechnung von Wirkungsquerschnitten

B.1 Parametrisierung des Phasenraums

In diesem Kapitel werden die benötigten Parametrisierungen des Phasenraums zur Berechnung der $2 \rightarrow 2$ und $2 \rightarrow 3$ Streuprozesse wiedergegeben. Die Parametrisierung des Prozesses¹ $ab \rightarrow F$ erfolgt im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen a und b . Die Impulsrichtung dieser Teilchen wird im Schwerpunktsystem so gelegt, dass \hat{p}_a in Richtung der positiven und \hat{p}_b in Richtung der negativen z -Achse verläuft. Für die Energiekomponenten der einlaufenden Teilchen ergibt sich:

$$\hat{p}_a^0 = \frac{s_{ab} + \hat{p}_a^2 - \hat{p}_b^2}{2\sqrt{s_{ab}}} \quad \text{und} \quad \hat{p}_b^0 = \frac{s_{ab} + \hat{p}_b^2 - \hat{p}_a^2}{2\sqrt{s_{ab}}}, \quad (\text{B.1})$$

wobei $\sqrt{s_{ab}} \equiv \sqrt{\hat{s}}$ die beim Prozess zugängliche Schwerpunktsenergie ist und $\hat{p}_{a/b}^2$ den Massen der einlaufenden Teilchen $m_{a/b}$ entsprechen. Die Beträge der räumlichen Komponenten dieser Vierer-Impulse lauten

$$|\vec{\hat{p}}_a| = |\vec{\hat{p}}_b| = \frac{\sqrt{\lambda(s_{ab}, \hat{p}_a^2, \hat{p}_b^2)}}{2\sqrt{s_{ab}}}. \quad (\text{B.2})$$

Die kinematische Källén-Funktion $\lambda(s_{ab}, \hat{p}_a^2, \hat{p}_b^2)$ ist dabei wie folgt definiert:

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc. \quad (\text{B.3})$$

Die Wurzel der Källén-Funktion $\lambda(s_{ab}, \hat{p}_a^2, \hat{p}_b^2)$ ist reell für $s_{ab} \geq (m_a + m_b)^2$, was eine minimale Schwerpunktsenergie $\sqrt{\hat{s}}$ zur Erzeugung von Eichbosonpaaren festlegt [73].

¹ F definiert einen beliebigen F -Teilchen-Endzustand.

B.1.1 Zwei-Teilchen-Phasenraum

Um die Ergebnisse für den Wirkungsquerschnitt des Prozesses $ab \rightarrow V_1 V_2$ übersichtlicher darzustellen, werden die Partonimpulse durch die kinematischen Invarianten, die sogenannten Mandelstam-Variablen \hat{s} , \hat{t} und \hat{u} parametrisiert

$$\hat{s} = (\hat{p}_a + \hat{p}_b)^2 = (\hat{k}_{V_1} + \hat{k}_{V_2})^2, \quad (\text{B.4})$$

$$\hat{t} = (\hat{p}_a - \hat{k}_{V_1})^2 = (\hat{p}_b - \hat{k}_{V_2})^2, \quad (\text{B.5})$$

$$\hat{u} = (\hat{p}_b - \hat{k}_{V_1})^2 = (\hat{p}_a - \hat{k}_{V_2})^2, \quad (\text{B.6})$$

wobei \hat{p}_a und \hat{p}_b die Vierer-Impulse der einlaufenden Partonen und \hat{k}_{V_1} und \hat{k}_{V_2} diejenigen der auslaufenden Eichbosonen sind. Unter Verwendung der Impulserhaltung kann eine der Mandelstam-Invarianten durch die Relation $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} = \sum_i m_i^2$ eliminiert werden, wobei m_i die Massen der äußeren Teilchen sind. Aus Gleichung (B.4) und der Energie- und Impulserhaltung

$$\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{|\vec{k}_{V_1}|^2 + m_{V_1}^2} + \sqrt{|\vec{k}_{V_2}|^2 + m_{V_2}^2} = E_{V_1} + E_{V_2} \quad (\text{B.7})$$

folgt, dass der Kollisionsprozess nur dann stattfindet, wenn

$$\hat{s} \geq (m_{V_1} + m_{V_2})^2 \quad (\text{B.8})$$

erfüllt ist [73]. Durch das Einsetzen der Relation (B.7) und der unteren Grenze von \hat{s} aus (B.8) ineinander werden die Energien E_{V_1} und E_{V_2} wie folgt bestimmt [73]:

$$E_{V_1} = \frac{\hat{s} + m_{V_1}^2 - m_{V_2}^2}{2\sqrt{\hat{s}}}, \quad E_{V_2} = \frac{\hat{s} + m_{V_2}^2 - m_{V_1}^2}{2\sqrt{\hat{s}}}. \quad (\text{B.9})$$

Die räumlichen Komponenten der auslaufenden Teilchen werden durch die Energie- und Impulserhaltung fixiert [73]:

$$|\vec{k}_{V_1}| = |\vec{k}_{V_2}| = \frac{\sqrt{\lambda(\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)}}{2\sqrt{\hat{s}}}. \quad (\text{B.10})$$

Die Källén-Funktion $\lambda(\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)$ wurde in Gl. (B.3) definiert. Ferner genügen für die Parametrisierung des Zwei-Teilchen-Phasenraums zwei Variablen: Der Polarwinkel $\hat{\theta}$ und der Azimutwinkel $\hat{\phi}$. Aus der Rotationssymmetrie um die Strahlachse folgt, dass der Endzustand vollständig durch den Streuwinkel $\hat{\theta}$ beschrieben wird. Das Integral über den Zwei-Teilchen-Phasenraum wird ausgedrückt durch die Phasenraumdichte (Gl. (1.28)):

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= \frac{d^3\hat{k}_{V_1}}{(2\pi)^3 2E_{V_1}} \frac{d^3\hat{k}_{V_2}}{(2\pi)^3 2E_{V_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\hat{p}_a + \hat{p}_b - \hat{k}_{V_1} - \hat{k}_{V_2}) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{\lambda(\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)}}{\hat{s}} d\cos\hat{\theta} d\hat{\phi}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

wobei die Integration über $d\hat{\varphi}$ einfach auszuführen ist und zu einem Faktor 2π führt. Die Abhängigkeit der Mandelstam-Invarianten \hat{t} vom Streuwinkel $\hat{\theta}$ und von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{\hat{s}}$ ist gegeben durch:

$$\hat{t} = m_a^2 + m_{V_1}^2 - \frac{(\hat{s} + m_a^2 - m_b^2)(\hat{s} + m_{V_1}^2 - m_{V_2}^2)}{2\hat{s}} + \frac{\sqrt{\lambda(\hat{s}, m_a^2, m_b^2)\lambda(\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)}}{2\hat{s}} \cos \hat{\theta}. \quad (\text{B.12})$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden einlaufende Teilchen als masselos betrachtet. Somit ergibt sich für die Gl. (B.12) folgende Beziehung:

$$\hat{t} = -\frac{\hat{s}}{2} + \frac{m_{V_1}^2 + m_{V_2}^2}{2} + \frac{\hat{s}}{2} \beta_m \cos \hat{\theta}, \quad (\text{B.13})$$

wobei β der Geschwindigkeit der Endzustandsteilchen entspricht:

$$\hat{\beta}_m = \sqrt{(\hat{s} - (m_{V_1} - m_{V_2})^2)(\hat{s} - (m_{V_1} + m_{V_2})^2)} \equiv \sqrt{\lambda(\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)}.$$

Der Zwei-Teilchen-Phasenraum wird dann parametrisiert durch

$$\int_{t_-}^{t_+} d\Phi_2 = \int_{t_-}^{t_+} \frac{1}{8\pi} \frac{d\hat{t}}{\lambda(\hat{s}, m_a^2, m_b^2)}, \quad (\text{B.14})$$

mit

$$\hat{t}_{\pm} = m_a^2 + m_{V_1}^2 - \frac{(\hat{s} + m_a^2 - m_b^2)(\hat{s} + m_{V_1}^2 - m_{V_2}^2)}{2\hat{s}} \pm \frac{\sqrt{\lambda(\hat{s}, m_a^2, m_b^2)\lambda(\hat{s}, m_{V_1}^2, m_{V_2}^2)}}{2\hat{s}} \quad (\text{B.15})$$

$$\text{bzw. } \hat{t}_{\pm} = -\frac{\hat{s}}{2} + \frac{m_{V_1}^2 + m_{V_2}^2}{2} \pm \frac{\hat{s}}{2} \beta_m.$$

B.1.2 Drei-Teilchen-Phasenraum

Im Gegensatz zum Zwei-Teilchen-Phasenraum ist die Situation bei $2 \rightarrow 3$ Prozessen deutlich komplizierter. Trotz der Rotationssymmetrie um die Strahlachse sind noch fünf unabhängige Variablen nötig, um den Endzustand vollständig zu beschreiben [73].² Der Lorentz-invariante Drei-Teilchen-Phasenraum wird a priori durch die Vierer-Impulse \hat{k}_{V_i} ($i = 1, 2, 3$) der auslaufenden Teilchen parametrisiert:

$$d\Phi_3 = \frac{d\hat{k}_{V_1}}{(2\pi)^3 2E_{V_1}} \frac{d\hat{k}_{V_2}}{(2\pi)^3 2E_{V_2}} \frac{d\hat{k}_{V_3}}{(2\pi)^3 2E_{V_3}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\hat{p}_a + \hat{p}_b - \hat{k}_{V_1} - \hat{k}_{V_2} - \hat{k}_{V_3}). \quad (\text{B.16})$$

²Die in diesem Abschnitt angegebenen Relationen gelten für einen beliebigen Prozess mit drei Teilchen im Endzustand $ab \rightarrow 1 + 2 + 3$. In Rahmen dieser Arbeit wird der Drei-Teilchen-Phasenraum zur Berechnung des Bremsstrahlungsprozesses $pp \rightarrow V_1 V_2 \gamma$ benötigt.

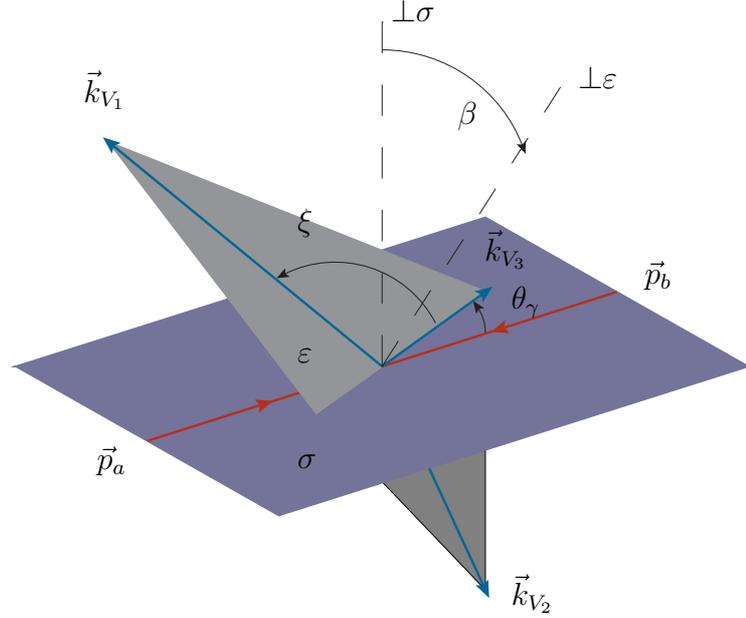


Abbildung B.1: Parametrisierung des Drei-Teilchen-Phasenraums in Abhängigkeit von fünf Parametern, den Winkeln $\xi = \angle(\vec{k}_{V_1}, \vec{k}_{V_3})$, $\theta_\gamma = \angle(\vec{p}_a, \vec{k}_{V_3})$ und $\beta = \angle(\sigma, \varepsilon)$ und den Energien $k_{V_1}^0$, $k_{V_3}^0$ der auslaufenden Teilchen. Die gestrichelte Linien zeigen die Normalenvektoren der Ebenen.

\hat{p}_a und \hat{p}_b sind die Vierer-Impulse der masselosen einlaufenden Partonen. Die Delta-Funktion garantiert die globale Vierer-Impuls-Erhaltung.

Unter Berücksichtigung der On-Shell Bedingungen und der Energie- und Impulserhaltung reduziert sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf $3 \times 3 - 4 = 5$. Demzufolge werden nur 5 freie Parameter

$$\hat{k}_{V_3}^0, \theta_\gamma, \phi_\gamma, \beta, \hat{k}_{V_1}^0 \quad (\text{B.17})$$

zur Spezifikation eines Punktes im Drei-Teilchen-Phasenraum benötigt.

Die Parametrisierung (B.17) ist besonders für die Berechnung harter Bremsstrahlung geeignet. Wird der Parameter $\hat{k}_{V_3}^0$ als Energie des Bremsstrahlungsphotons gewählt, so lassen sich im Drei-Teilchen-Phasenraum einfache Schnitte realisieren, um die auftretenden Singularitäten zu vermeiden: Zum einen verhindert die untere Integrationsgrenze des Integrals über $\hat{k}_{V_3}^0$ das Auftreten von Infrarot-Divergenzen. Zum anderen ermöglichen die untere und obere Integralgrenze für den Polarwinkel³ θ_γ den Phasenraumbereich, in dem ein Photon kollinear zu einem der einlaufenden Teilchen abgestrahlt wird, unter Kontrolle zu halten. Es wird angenommen, dass der Integrand rotationssymmetrisch um die Strahlachse und somit ϕ_γ -unabhängig ist. Die Integration über $d\phi_\gamma$ liefert einen Faktor 2π .

Die verbliebenen zwei Parameter β und $\hat{k}_{V_1}^0$ sollen die Konfiguration der Vierer-Impulse

³ θ_γ ist der Polarwinkel des Bremsstrahlungsphotons relativ zur Strahlachse.

der auslaufenden Teilchen endgültig festlegen. Da die Auswertung des Phasenraumelementes (B.16) bzw. (1.28) im partonischen Schwerpunktsystem stattfindet, gilt

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{k}_{V_1} + \vec{k}_{V_2} + \vec{k}_{V_3} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Die Vektoren \vec{k}_{V_1} , \vec{k}_{V_2} und \vec{k}_{V_3} sind also linear abhängig und spannen eine Ebene ε auf. Wird der Vektor \vec{k}_{V_3} fixiert, so ist es möglich, die σ -Ebene aufzubauen, die von den Vektoren \vec{p}_a , \vec{p}_b und \vec{k}_{V_3} aufgespannt ist und die ε -Ebene durchschneidet (siehe Abbildung B.1). Als nächster zubetrachtender freier Parameter wird der Winkel β gewählt, da dieser die relative Position der beiden Ebenen angibt.

Der letzte freie Parameter $\hat{k}_{V_1}^0$ legt die Position der Vektoren \vec{k}_{V_1} und \vec{k}_{V_2} in der ε -Ebene fest. Das folgt aus der Impulserhaltung (B.18) mit $\vec{k}_{V_1} + \vec{k}_{V_2} = -\vec{k}_{V_3}$, sowie $\vec{p}_a = -\vec{p}_b$ und aus der Energieerhaltung mit $E_{V_1} + E_{V_2} = \sqrt{\hat{s}} - E_{V_3}$. Dies sind drei Gleichungen und vier Parameter. Deshalb wird $\hat{k}_{V_1}^0$ als letzter freier Parameter gewählt, um den Drei-Teilchen-Phasenraum zu parametrisieren.

Die explizite Darstellung der Vierer-Impulse k_{V_1} und k_{V_3} , ausgedrückt durch die freien Parameter in Gl. (B.17), lautet:

$$\begin{aligned} \hat{k}_{V_3} &= \left(\hat{k}_{V_3}^0, |\vec{k}_{V_3}| \cdot \vec{e}_3 \right), & \hat{k}_{V_1} &= \left(\hat{k}_{V_1}^0, |\vec{k}_{V_1}| \cdot \vec{e}_1 \right), \\ \hat{k}_{V_2} &= \left(\sqrt{\hat{s}} - \hat{k}_{V_3}^0 - \hat{k}_{V_1}^0, -\vec{k}_{V_3} - \vec{k}_{V_1} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

mit $|\vec{k}_{V_3}| = \sqrt{(k_{V_3}^0)^2 - m_{V_3}^2}$ und den räumlichen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \sin \theta_\gamma \\ 0 \\ \cos \theta_\gamma \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta_\gamma & 0 & \sin \theta_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_\gamma & 0 & \cos \theta_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \sin \xi \\ \sin \beta \sin \xi \\ \cos \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

ξ und β sind die Polar- und Azimutwinkel der auslaufenden Teilchen relativ zum Bremsstrahlungsphoton.

Unter Berücksichtigung des aus der Umparametrisierung resultierenden Jacobi-Faktors ergibt sich eine besonders für die numerische Integration geeignete Form des Drei-Teilchen-Phasenraums:

$$d\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^5} d\Omega_\gamma d\hat{k}_{V_3}^0 d\hat{k}_{V_1}^0 d\beta, \quad (\text{B.21})$$

mit $d\Omega_\gamma = d\cos \theta_\gamma d\phi_\gamma$ und

$$\cos \xi = \frac{(\sqrt{\hat{s}} - \hat{k}_{V_1}^0 - \hat{k}_{V_3}^0)^2 - (\hat{k}_{V_1}^0)^2 - (\hat{k}_{V_3}^0)^2 + m_{V_1}^2 + m_{V_3}^2 - m_{V_2}^2}{2\sqrt{(k_{V_1}^0)^2 - m_{V_1}^2}\sqrt{(k_{V_3}^0)^2 - m_{V_3}^2}}. \quad (\text{B.22})$$

Bestimmung der Integrationsgrenzen

Die Integrationsgrenzen in (B.21) für die Winkel θ_γ , ϕ_γ und β hängen nicht voneinander ab und sind gegeben durch:

$$\phi_\gamma \in [0, 2\pi], \quad \cos \theta_\gamma \in [-1, 1], \quad \beta \in [0, 2\pi]. \quad (\text{B.23})$$

Ferner folgen die Integrationsgrenzen für $\hat{k}_{V_1}^0$ und $\hat{k}_{V_3}^0$ aus der Energieerhaltung $E_{V_1} + E_{V_2} = \sqrt{\hat{s}} - E_{V_3}$ und der On-Shell-Bedingung $\hat{k}_{V_i}^2 = m_{V_i}^2$. Wird $\hat{k}_{V_3}^0$ als äußere Integration gewählt, so sind die möglichen Werte von $\hat{k}_{V_1}^0$ durch die Bedingung

$$|\cos \xi| \leq 1, \quad (\text{B.24})$$

beschränkt, wobei $\cos \xi$ in Gl. (B.22) bereits definiert wurde. Auflösen der Ungleichung (B.24) nach $\hat{k}_{V_1}^0$ führt zur Bestimmung der kinematischen Grenzen der $\hat{k}_{V_1}^0$ -Integration:

$$\left[\hat{k}_{V_1}^0 \right]_{\min}^{\max} = \frac{1}{2\zeta} \left[\alpha (\zeta + m_+ m_-) \pm |\vec{k}_{V_3}| \sqrt{(\zeta - m_+^2)(\zeta - m_-^2)} \right], \quad (\text{B.25})$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} m_\pm &= m_{V_1} \pm m_{V_2}, & |\vec{k}_{V_3}| &= \sqrt{(\hat{k}_{V_3}^0)^2 - m_{V_3}^2}, \\ \zeta &= m_{V_3}^2 - 2\hat{k}_{V_3}^0 \sqrt{\hat{s}} + \hat{s}, & \alpha &= \sqrt{\hat{s}} - \hat{k}_{V_3}^0. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Da die Integrationsvariable $\hat{k}_{V_1}^0$ reell sein muss, führt Gl. (B.25) zur Forderung $(\zeta - m_+^2)(\zeta - m_-^2) \geq 0$ und damit auch von $\hat{k}_{V_3}^0$ direkt zum Maximalwert

$$\left[\hat{k}_{V_3}^0 \right]_{\max} = \frac{\hat{s} - (m_{V_1} + m_{V_2})^2 + m_{V_3}^2}{2\sqrt{\hat{s}}}, \quad (\text{B.27})$$

der damit der oberen Integrationsgrenze für $k_{V_3}^0$ entspricht. Die untere Integrationsgrenze von $\hat{k}_{V_3}^0$ wird durch die Forderung $\hat{k}_{V_3}^0 \geq m_{V_3}$ festgelegt. Ferner liefert die Auswertung des Phasenraumelements (B.21) folgende Darstellung des hadronischen Wirkungsquerschnittes:

$$\int d\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^4} \int_{m_{V_3}}^{[\hat{k}_{V_3}^0]_{\max}} d\hat{k}_{V_3}^0 \int_{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\min}}^{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\max}} d\hat{k}_{V_1}^0 \int_{-1}^1 d\cos \theta_\gamma \int_0^{2\pi} d\beta. \quad (\text{B.28})$$

Da im Rahmen dieser Arbeit der Drei-Teilchen-Phasenraum bei der Betrachtung der Integration über den Phasenraum des Photons benötigt wird, müssen die zwei Schnitt-Parameter ΔE_{cut} und $\Delta \theta_{\text{cut}}$ eingeführt werden (mehr dazu siehe Kapitel 2.2.2). Die Schnittparameter werden grundsätzlich so gewählt, dass die Phasenraumpunkte, in denen die reellen Korrekturen kollinear ($\cos \theta_\gamma \rightarrow \pm 1$) bzw. infrarot ($\hat{k}_{V_3}^0 = \hat{k}_\gamma^0 \rightarrow 0$) divergent sind, von den Bereichen mit endlichen Beiträgen getrennt werden. $\Delta E_{\text{cut}} \equiv \Delta E$ steht für die Energie des Bremsstrahl-

lung photons und $\Delta\theta_{\text{cut}} \equiv \Delta\theta$ für den Winkel zwischen dem Photon und dem emittierenden Teilchen. Demzufolge ergibt sich für den Drei-Teilchen-Phasenraum folgendes Phasenraumelement:

$$\int d\Phi_3 = \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\hat{k}_\gamma^0 d\hat{k}_{V_1}^0 d\cos\theta_\gamma d\phi_\gamma d\beta. \quad (\text{B.29})$$

Die untere Integrationsgrenze $[\hat{k}_\gamma^0]^{\text{min}}$ für die Energie des Bremsstrahlungsphotons wird durch die maximale Energie ΔE_{cut} der infraroten Photonen festgelegt. Die obere Grenze wird durch Gl. (B.27) im Limes $m_{V_3} \rightarrow 0$ bestimmt. Die Integrationsgrenzen für den Winkel θ_γ zwischen den räumlichen Impulsen des Photons und der emittierenden Teilchen sind wie folgt definiert:

$$\theta_\gamma \in (\Delta\theta_{\text{cut}}, \pi - \Delta\theta_{\text{cut}}). \quad (\text{B.30})$$

Die verbliebenen Integrationsgrenzen lassen sich aus Gl. (B.23), (B.25) und (B.26) bei verschwindender Photonmasse, $M_\gamma = 0$, herleiten.

B.1.3 Numerische Parametrisierung des Phasenraums

Die analytische Behandlung der mehrdimensionalen Phasenraumintegration, wie das in Gl. (1.25) gegeben, ist nicht möglich: Zum einen wächst die Dimension des Integrals stark mit der Anzahl der auslaufenden Teilchen an, wodurch die Auswertung des Integrals sehr komplex wird, zum anderen sind die PDF der einlaufenden Partonen nur numerisch bekannt. Im Allgemeinen wird bei der numerischen Berechnung auf Monte-Carlo-Methoden zurückgegriffen. Die numerische Effektivität dieses Verfahrens wird enorm verbessert, wenn bei der Parametrisierung des Phasenraums die Struktur⁴ des zu berechnenden Integranden berücksichtigt wird. Die Methode, bei der nicht mehr gleichverteilte Zufallszahlen zur Auswertung des Integrals verwendet werden, wird als „Importance Sampling“ bezeichnet. Hierbei werden in Bereichen die große Beiträge zum Integral liefern, mehr Zufallszahlen generiert. Die Realisierung dieser Methode erfolgt durch eine Variablentransformation, bei der die Phasenraumvariablen durch neue Variablen ausgedrückt werden. Die dadurch entstandene Funktionaldeterminante \mathcal{J} , die den singulären Verlauf von Integranden nachbildet, verleiht dem neuen Integranden eine glattere Struktur.

Bei der numerischen Berechnung der Wirkungsquerschnitte wird eine solche Abbildung, das sogenannte Mapping, so gewählt, dass die Integrationsvariablen auf einen Hyperwürfel mit Einheitslänge abgebildet werden

$$\int dx_a dx_b d\Phi_n \frac{|\mathcal{A}(\Phi_n)|^2}{2x_a x_b S} \mapsto \int \prod_{i=1}^{3n-2} dr_i \mathcal{J}(\mathbf{r}_i) |\mathcal{A}(\mathbf{r}_i)|^2, \quad (\text{B.31})$$

⁴Durch das Auftreten der Propagatoren und den damit verbundenen Nennern im quadrierten Matrixelement entstehen in der Nähe der Pollstellen der Propagatoren Bereiche des Phasenraums, in denen der Integrand große Beiträge liefert.

wobei \mathbf{r}_i , mit $i = 1, \dots, n$ die erzeugte Zufallszahl sind. Dabei liegen die Komponenten von \mathbf{r}_i im Intervall $[0, 1]$. Φ_n steht für die $3n - 4$ unabhängige Phasenraumvariablen, die nach der Ausnutzung der Vierer-Impulserhaltung und der On-Shell Bedingungen für die auslaufenden Teilchen übrigbleiben. \mathcal{A} bezeichnet das Matrixelement in Abhängigkeit von den Phasenraumvariablen. Der Flussfaktor masseloser einlaufender Teilchen ist $j_{\text{in}} = 4|\hat{p}_a \cdot \hat{p}_b|^2 = 2\hat{s} = 2x_a x_b S$. Die Dimension des auszuwertenden Integrals hat sich im Vergleich zu (1.29) wegen der PDF um zwei erhöht.

Der hadronische Wirkungsquerschnitt (B.31) weist bereits das singuläre Verhalten im Niederenergiebereich $x_a, x_b \rightarrow 0$ hin, in dem sowohl die PDF als auch der Flussfaktor $1/(2x_a x_b S)$ des partonischen Wirkungsquerschnitts divergieren. Diese Singularitäten können jedoch durch die Einführung eines sogenannten minimalen Schnitts $\hat{s}_{\text{min}} = (m_{V_1} + m_{V_2})^2$ an die partonische Schwerpunktsenergie vermieden werden. Findet der Prozess im kinematisch relevanten Bereich $\hat{s} \geq (m_{V_1} + m_{V_2})^2$ statt, so wird die Produktion der Eichbosonpaare gewährleistet. In anderem Fall wird Integrand auf Null gesetzt. Mit den Substitutionen

$$x_a \mapsto \tau = x_a x_b = \frac{\hat{s}}{S}, \quad x_b \mapsto x = x_b \quad (\text{B.32})$$

hängt der Wirkungsquerschnitt (B.31) von den Variablen τ, x, Φ_n und der hadronischen Schwerpunktsenergie \sqrt{S} ab und lässt sich schreiben als

$$\int_0^1 dx_a dx_b \frac{\mathcal{F}(x_a, x_b)}{2x_a x_b S} \mapsto \frac{1}{2S} \int_{\tau_0}^1 \frac{d\tau}{\tau} \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \mathcal{F}(\tau/x, x), \quad (\text{B.33})$$

wobei $\mathcal{F}(x_a, x_b) \equiv d\Phi_n \sum_{a,b} f_{a/A}(x_a) f_{b/B}(x_b) \overline{\sum} |\mathcal{A}|^2$ den Rest des hadronischen Wirkungsquerschnitts bezeichnet. Mittels der durchgeführten Substitution wurde erreicht, dass sowohl die neue Untergrenze der τ -Integration $\tau_0 = \hat{s}_{\text{min}}/S$ als auch die Abhängigkeit der PDF von den Argumenten x und τ_0/x die auftretenden Divergenzen bei $x_a = x_b = 0$ explizit ausschließen. Ferner werden die Beiträge von PDF zum Integranden im ganzen Phasenraumbereich geglättet, ohne dass irgendein Mapping dafür notwendig ist. Dies wird durch die Abhängigkeit der PDF von x und τ_0/x erreicht: Ist das Argument der ersten PDF $\tau/x = \tau_0$, so erreicht die zweite PDF ihr Minimum bei $x = 1$ und umgekehrt. Das führt zur Selbstregulierung der singulären Beiträge, die von den PDF herrühren.

Die durch die Substitution (B.32) auftretende Abhängigkeit des Integranden vom Faktor $1/(x\tau)$ führt zu großen Beiträgen in Integrationsbereichen kleiner $x\tau$. Durch ein geeignetes Mapping kann der Integrand geglättet werden. Durch Abbildung der x -Integration auf die Zufallszahl r_2

$$\int \frac{dx}{x} = \int dr_2 \frac{dx(r_2)}{dr_2} \frac{1}{x(r_2)} \quad (\text{B.34})$$

und mit der Wahl

$$\frac{dx(r_2)}{dr_2} \propto x(r_2) \quad (\text{B.35})$$

kann die $1/x$ -Singularität des Integranden geglättet werden. Die Betrachtung der Relation (B.35) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x(0) = \tau$ und $x(1) = 1$ ergibt folgende Parametrisierung für x :

$$x(r_2) = \tau^{1-r_2}, \quad \mathcal{J}(r_2) = \frac{dx(r_2)}{dr_2} = -x \log(\tau). \quad (\text{B.36})$$

Dabei wurde das Mapping der Integrationsvariable $x(r_2)$ so gewählt, dass an Stellen, an denen große Beiträge zum Integral auftreten, mehr Zufallszahlen generiert werden und der Integrationsfehler stark reduziert wird.

Bei der τ -Integration zeigt der Integrand (B.33) ein singuläres Verhalten der Form $\log(\tau)/\tau$. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $\tau(0) = \tau_0$ und $\tau(1) = 1$ kann folgende Parametrisierung der τ -Integrationsvariablen gewählt werden:

$$\tau(r_1) = \tau_0^{1-r_1}, \quad \mathcal{J}(r_1) = \frac{d\tau(r_1)}{dr_1} = -\tau \log(\tau_0). \quad (\text{B.37})$$

Damit erhält man für den Integranden

$$\frac{1}{2S} \int_{\tau_0}^1 \frac{d\tau}{\tau} \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \mathcal{F}(\tau/x, x) = \frac{1}{2S} \int_0^1 dr_1 \int_0^1 dr_2 [\log(\tau(\mathbf{r})) \log(\tau_0)] \mathcal{F}\left(\frac{\tau(r_1)}{x(r_2)}, x(r_2)\right) \quad (\text{B.38})$$

mit $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$. Eine andere Möglichkeit das singuläre Verhalten $1/(x\tau)$ des Integranden (B.33) zu glätten, bietet die folgende Parametrisierung der τ -Integration:

$$\tau(r_1) = \tau_0^{r_1} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}(r_1) = \frac{d\tau(r_1)}{dr_1} = \tau \log \tau_0, \quad (\text{B.39})$$

und der x -Integration

$$x(r_2) = \tau^{r_2} \quad \text{und} \quad \mathcal{J}(r_2) = \frac{dx(r_2)}{dr_2} = x \log \tau. \quad (\text{B.40})$$

Im Folgenden wird die Phasenraumintegration der partonischen Wirkungsquerschnitte betrachtet. Es ist allgemein bekannt, dass zu einem beliebigen quadrierten Matricelement mehrere Feynmann-Diagramme mit unterschiedlichen Topologien beitragen. Die dabei entstehende „Peak“-Struktur der Integranden ist sehr komplex und zu ihrer Behandlung müssen alle beitragenden Diagramme gleichzeitig geglättet werden. Dieses Problem wird dadurch gelöst, indem zunächst für jeden Kanal s , t oder u ein eigenes Mapping mit der dazugehörigen Jacobi-Determinante \mathcal{J} eingeführt wird. Die gleichzeitige Glättung erfolgt dann durch die Kombination der Jacobi-Determinanten der Einzelbeiträge zu einem Gesamtbeitrag. Für

die zwischen den Diagrammen entstehenden Interferenzterme wird dabei kein spezielles Mapping eingeführt, weil die größten Beiträge zur „Peak“-Struktur des Integranden von den quadrierten Matrixelementen einzelner Diagramme stammen. Dies liegt daran, dass dort die jeweiligen Propagatoren quadratisch auftreten. Mit der Abbildung der Integrationsvariablen des partonischen Phasenraums auf den Hyperwürfel mit Länge $[0, 1]$

$$\int d\Phi_n \mapsto \int_0^1 \prod_{i=1}^{3n-4} d\mathbf{r}_i \mathcal{J}(\mathbf{r}_i) \quad (\text{B.41})$$

lässt sich der Näherungswert für den partonischen Wirkungsquerschnitt wie folgt darstellen

$$\hat{\sigma} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{J}(\mathbf{r}_i) \sum_{a,b} f_{a/A}(x_a(\mathbf{r}_i)) f_{b/B}(x_b(\mathbf{r}_i)) \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2(\mathbf{r}_i). \quad (\text{B.42})$$

Dabei werden die Einträge des Vektors \mathbf{r} zufällig erzeugt, so dass die Integrationsvariablen im Bereich $r_i \in [0, 1]$ ($i = 1, \dots, 3n - 4$) liegen. Dieser Näherungswert ergibt sich also durch die Mittelung des an N Phasenraumpunkten ausgewerteten Integranden.

Im Folgenden wird die Abbildung der Integrationsvariablen auf den Hyperwürfel mit Einheitslänge explizit für den $2 \rightarrow 2$ -Prozess, dessen Kinematik bereits in Kapitel B.1.1 ausführlich diskutiert wurde, durchgeführt. Da bei der Eichboson-Paarproduktion ein t -Kanalaustausch auftritt, bietet sich die Parametrisierung des Streuwinkels $\hat{\theta}$ durch die Mandelstam-Variablen \hat{t} an; diese ist in Gl. (B.11) bzw. (B.12) dargestellt. Da für alle kinematischen Variablen des Zwei-Teilchen-Phasenraums keine besondere „Peak“-Struktur auftritt, wird ein lineares Mapping der Form $x = (x_{\max} - x_{\min})r + x_{\min}$ angewandt. Das lineare Mapping ist immer dann anzuwenden, wenn über den singulären Phasenraumbereich nicht integriert wird. Beim Auftreten von Divergenzen im Phasenraum ist das exponentielle Mapping zu bevorzugen. Das Integral des Zwei-Teilchen-Phasenraums (B.14) wird

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{t_-}^{t_+} d\hat{t} \mapsto 2\pi \int_0^1 dr_3 \mathcal{J}(r_3), \quad (\text{B.43})$$

wobei die Jacobi-Determinante durch $\mathcal{J} = (t_+ - t_-)$ gegeben ist.

Im Fall der Eichboson-Paarproduktion mit harten Photon-Bremsstrahlung, was einem $2 \rightarrow 3$ -Prozess entspricht, wird über den Drei-Teilchen-Phasenraum integriert, siehe (B.29). Ein geeignetes Mapping ist nötig, um eine numerische Integration gut durchführen zu können. Dabei werden Phasenraumpunkte, die an den Integrationsgrenzen erzeugt werden, mitgenommen, um möglichst viele Ereignisse auszuwerten. Die Infrarot-Singularitäten verursachen eine Divergenz des Integranden:

$$\int \frac{d\hat{k}_\gamma^0}{\hat{k}_\gamma^0} = \int dr_5 \frac{d\hat{k}_\gamma^0}{dr_5} \frac{1}{\hat{k}_\gamma^0}.$$

Diese $\frac{1}{\hat{k}_\gamma^0}$ -Singularität des Integranden kann durch das Mapping

$$\hat{k}_\gamma^0(r_5) = \Delta E_{\text{cut}} \left(\frac{E_{\text{max}}}{\Delta E_{\text{cut}}} \right)^{r_5}, \quad \mathcal{J}(r_5) = \frac{d\hat{k}_\gamma^0}{dr_5} = \left(\frac{E_{\text{max}}}{\Delta E_{\text{cut}}} \right)^{r_5} \log \left(\frac{E_{\text{max}}}{\Delta E_{\text{cut}}} \right) \quad (\text{B.44})$$

geglättet werden, wobei E_{max} durch die Gl. (B.27) in der Näherung $m_{V_3} \rightarrow 0$ definiert ist. Für das Integral ergibt sich dann:

$$\int_{\Delta E}^{E_{\text{max}}} d\hat{k}_\gamma^0(r_5) = \int_0^1 dr_5 \log \left(\frac{\Delta E_{\text{cut}}}{E_{\text{max}}} \right) \hat{k}_\gamma^0(r_5). \quad (\text{B.45})$$

Erfolgt die Ausbreitung des Bremsstrahlungsphotons nahezu kollinear zur Impulsrichtung des ein- bzw. auslaufenden Teilchens, von dem es abgestrahlt wurde, d. h. $\cos \theta \rightarrow \pm 1$, so treten kollineare Singularitäten auf. In diesen Phasenraumbereichen ist der Wirkungsquerschnitt proportional zu

$$\sigma \sim \frac{1}{1 \pm \cos \theta_\gamma} \quad \text{bzw.} \quad \sigma \sim \frac{1}{1 - \cos^2 \theta_\gamma}. \quad (\text{B.46})$$

Zum Glätten dieser Phasenraumbereiche wurde zunächst das Integral wie folgt substituiert

$$\int_{\Delta\theta}^{\pi-\Delta\theta} d\theta_\gamma \frac{\sin \theta_\gamma}{1 - \cos^2 \theta_\gamma} = \int_{-\cos \Delta\theta}^{\cos \Delta\theta} \frac{d \cos \theta_\gamma}{1 - \cos^2 \theta_\gamma} \xrightarrow{\cos \theta_\gamma = \tanh \xi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} d\xi, \quad (\text{B.47})$$

mit $\xi_0 = -\text{artanh}(\cos \Delta\theta) \approx -\log(2/\Delta\theta)$ und $\xi_1 = \text{artanh}(\cos \Delta\theta) \approx \log(2/\Delta\theta)$, wobei hier $\cos \Delta\theta = 1 - \Delta\theta^2/2 + \mathcal{O}(\Delta\theta^4)$ verwendet wurde. Anschließend wurde unter Verwendung des linearen Mappings geglättet

$$\xi = (\xi_1 - \xi_0) r_6 + \xi_0, \quad \mathcal{J}(r_6) = \frac{d \cos \theta_\gamma}{dr_6} = -(1 - \cos^2 \theta_\gamma) \log \left(\frac{\Delta\theta^2}{4} \right). \quad (\text{B.48})$$

Die verbliebenen Integrationsvariablen werden ebenfalls durch die Anwendung des linearen Mappings transformiert, da diese ebenfalls keine besondere „Peak“-Struktur besitzen. Demzufolge ergibt sich für den Drei-Teilchen-Phasenraum folgende Parametrisierung

$$\begin{aligned} \int d\Phi_3 &= \frac{1}{8(2\pi)^4} \int_{m_{V_3}}^{[\hat{k}_{V_3}^0]^{\text{max}}} d\hat{k}_{V_3}^0 \int_{[\hat{k}_{V_1}^0]^{\text{min}}}^{[\hat{k}_{V_1}^0]^{\text{max}}} d\hat{k}_{V_1}^0 \int_{-1}^1 d \cos \theta_\gamma \int_0^{2\pi} d\beta \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^4} \int_0^1 dr_3 dr_4 dr_5 dr_6 \mathcal{J}(r_3) \mathcal{J}(r_4) \mathcal{J}(r_5) \mathcal{J}(r_6), \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

wobei $\mathcal{J}(r_3) = 2\pi$ und $\mathcal{J}(r_4) = ([\hat{k}_{V_1}^0]^{\text{max}} - [\hat{k}_{V_1}^0]^{\text{min}})$ ist. Die Gln. (B.44) und (B.48) beschreiben $\mathcal{J}(r_5)$ und $\mathcal{J}(r_6)$.

Anhang C

Berechnung von Bremsstrahlungskorrekturen

Aus der klassischen Elektrodynamik ist bekannt, dass Teilchen beim Durchqueren von Materie durch StröÙe mit anderen Teilchen gestreut werden und dabei einen Energieverlust erleiden. Bei diesen Stößen werden die Teilchen beschleunigt und emittieren daher elektromagnetische Strahlung, die gewöhnlich als Bremsstrahlung¹ bezeichnet wird [219]. In der Quantenfeldtheorie entspricht die Bremsstrahlung einer Emission von Bremsstrahlungs-Photonen.

In diesem Kapitel beschränkt sich die Diskussion auf den im Rahmen dieser Arbeit relevanten Spezialfall eines Streuprozesses $a(p_a) + b(p_b) \rightarrow V_1(k_1) + V_2(k_2)$, wobei a und b ein Quark mit Masse m_f sowie der Ladung Q_q und b das entsprechende Antiteilchen mit der Ladung $Q_{\bar{q}}$ bezeichnen soll. V_1 und V_2 stehen für die auslaufende Eichbosonen $V_1, V_2 \in \{W^\pm, Z, \gamma\}$. In der ersten Ordnung Störungstheorie ist die Betrachtung eines zusätzlichen Photons im Endzustand notwendig, um die infraroten und die kollinearen Singularitäten zu beseitigen. Deshalb wird im Folgenden die Berechnung dieser Beträge ausführlich diskutiert.

¹Die Bremsstrahlung wurde zum ersten Mal an hochenergetischen Elektronen beobachtet, die in einem dicken Metalltarget abgebremst wurden.

Q_i und p_i sind Ladung und Vierer-Impuls des i -ten Teilchens, von dem das infrarote Photon abgestrahlt wird. Das Vorzeichen $\vartheta_i = \pm 1$ ergibt sich je nachdem, ob das Teilchen in das Diagramm einläuft oder aus dem Diagramm herausfließt.

C.1.2 Wirkungsquerschnitt in der Eikonal-Näherung

Der Ausgangspunkt folgenden Betrachtungen ist die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts zum Prozess $q(p_q) + \bar{q}(p_{\bar{q}}) \rightarrow W^+(k_{W^+}) + W^-(k_{W^-}) + \gamma(k_\gamma)$ (siehe Abbildung C.1) in der Eikonal-Näherung. Die Diagramme mit der Photonabstrahlung von inneren Linien ge-

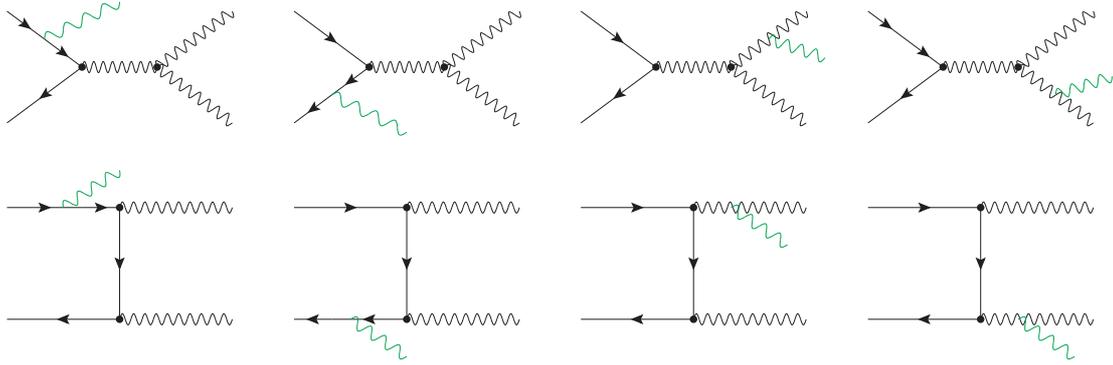


Abbildung C.1: Die Bremsstrahlung des Photons zum Prozess $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-\gamma$.

ladener Teilchen besitzen keine Infrarot-Singularitäten und werden deshalb im Rahmen der Eikonal-Näherung vernachlässigt. Das zu diesem Prozess gehörende Matrixelement ist nach Gl. (C.3) und Gl. (C.8) durch

$$\mathcal{M}_{\text{IR}}^{(1)} = e \mathcal{M}_0 \underbrace{\left[Q_W \left(-\frac{\epsilon_\xi^* \cdot k_{W^-}}{k_\gamma \cdot k_{W^-}} + \frac{\epsilon_\xi^* \cdot k_{W^+}}{k_\gamma \cdot k_{W^+}} \right) + Q_q \left(\frac{\epsilon_\xi^* \cdot p_q}{k_\gamma \cdot p_q} - \frac{\epsilon_\xi^* \cdot p_{\bar{q}}}{k_\gamma \cdot p_{\bar{q}}} \right) \right]}_{=: \mathcal{T}} \quad (\text{C.9})$$

gegeben, wobei $Q_W \equiv Q_{W^+} = -Q_{W^-}$ und $Q_q = -Q_{\bar{q}}$ ist. Wird nun dieses Matrixelement nach Gl. (1.29) quadriert und über die Impulse der auslaufenden Teilchen integriert, so ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{IR}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times (-e^2) \int_{|\vec{k}_\gamma| \leq \Delta E} \frac{d^3 k_\gamma}{(2\pi)^3 2\omega_\gamma} \mathcal{T}^2, \quad \omega_\gamma = \sqrt{|\vec{k}_\gamma|^2 + M_\gamma^2}. \quad (\text{C.10})$$

Dabei wurde unter Verwendung von

$$\sum_{\xi=1,2} \epsilon_\rho^*(k_\gamma, \xi) \epsilon_\sigma(k_\gamma, \xi) = -g_{\rho\sigma} \quad (\text{C.11})$$

über die Polarisationszustände des auslaufenden Bremsstrahlungsphotons summiert. Die Integration über den Photonimpuls in Gl. (C.10) soll dabei nur auf die infraroten Photonen be-

schränkt sein, deren Energie ω_γ durch einen detektorabhängigen Schwellenwert ΔE nach oben begrenzt ist. Um ein analytisches Ergebnis für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (C.10) zu erhalten, müssen die verbliebene Integrale der Form

$$\mathcal{I}_{ij} = \int_{|\vec{k}_\gamma| \leq \Delta E} \frac{d^3 k_\gamma}{2\omega_\gamma} \frac{2(a_i \cdot b_j)}{(a_i \cdot k_\gamma)(b_j \cdot k_\gamma)} \quad (\text{C.12})$$

berechnet werden [40], wobei a_i und b_j die Vierer-Impulse der externen Teilchen bezeichnen. Weiterhin kann der differentiellen Wirkungsquerschnitt durch die Integrale (C.12), die zum differentiellen Wirkungsquerschnitt führender Ordnung faktorisieren, wie folgt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{IR}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times \delta_{\text{IR}} \quad (\text{C.13})$$

ausgedrückt werden, wobei der Faktor δ_{IR} alle divergenten Beiträge enthält:

$$\delta_{\text{IR}} = -\frac{\alpha}{4\pi^2} \left[Q_W^2 \left(\mathcal{I}_{k_{W^-}^2} - 2\mathcal{I}_{k_{W^-} k_{W^+}} + \mathcal{I}_{k_{W^+}^2} \right) + Q_q^2 \left(\mathcal{I}_{p_q^2} - 2\mathcal{I}_{p_q p_{\bar{q}}} + \mathcal{I}_{p_{\bar{q}}^2} \right) \right. \\ \left. + 2Q_W Q_q \left(\mathcal{I}_{p_{\bar{q}} k_{W^-}} + \mathcal{I}_{p_q k_{W^+}} - \mathcal{I}_{p_q k_{W^-}} - \mathcal{I}_{p_{\bar{q}} k_{W^+}} \right) \right]. \quad (\text{C.14})$$

Berechnung der Integrale \mathcal{I}_{ij}

Die Eikonal-Näherung führt zu den Integralen des Typs (C.12):

$$\mathcal{I}_{ij} = (a_i \cdot b_j) \mathcal{K} \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} = \int_{0 \leq |\vec{k}_\gamma| \leq \Delta E} \frac{d^3 k_\gamma}{k_\gamma^0} \frac{1}{(a_i \cdot k_\gamma)(b_j \cdot k_\gamma)}. \quad (\text{C.15})$$

Um das Integral \mathcal{K} aus Gl. (C.15) auszurechnen, wird zunächst die Substitution

$$\left. \begin{array}{l} l = \bar{\alpha} a_i \\ q = b_j \end{array} \right\} \Rightarrow (l - q)^2 = (\bar{\alpha} a_i - b_j)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{C.16})$$

vorgenommen, wobei die Konstante $\bar{\alpha}$ durch die Bedingung $(l - q)^2 = 0$ fixiert ist. Unter Verwendung der Feynman-Parametrisierung (siehe z. B. Ref. [37, 38])

$$\frac{1}{A \cdot B} = \int_0^1 \frac{dx}{(A(1-x) + Bx)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(A + (B-A)x)^2} \quad (\text{C.17})$$

lässt sich das Integral \mathcal{K} wie folgt schreiben

$$\mathcal{K} = \bar{\alpha} \int_0^1 dx \int \frac{d^3 k_\gamma}{k_\gamma^0} \frac{1}{(k_\gamma(q + (l-q)x))^2}, \quad (\text{C.18})$$

wobei $x \in [0, 1]$ der Feynman-Parameter ist. Mit der Substitution $q + (l - q)x =: Q$, unter Verwendung der sphärischen Koordinaten $\int d^3 k_\gamma = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{\Delta E} d|\vec{k}_\gamma| |\vec{k}_\gamma|^2$ und

mit der Energie des Bremsstrahlungsphotons $k_\gamma^0 = \omega_\gamma = \sqrt{|\vec{k}_\gamma|^2 + M_\gamma^2}$ ergibt sich aus dem Integral (C.18)

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= 2\pi\bar{\alpha} \int_0^1 dx \int_0^{\Delta E} \frac{d|\vec{k}_\gamma| |\vec{k}_\gamma|^2}{\sqrt{|\vec{k}_\gamma|^2 + M_\gamma^2}} \int_{-1}^1 \frac{d \cos \theta}{\left(\sqrt{|\vec{k}_\gamma|^2 + M_\gamma^2} Q^0 - |\vec{k}_\gamma| |\vec{Q}| \cos \theta\right)^2} \\ &= 4\pi\bar{\alpha} \int_0^1 dx \int_0^{\Delta E} \frac{d|\vec{k}_\gamma| |\vec{k}_\gamma|^2}{\sqrt{|\vec{k}_\gamma|^2 + M_\gamma^2}} \frac{1}{(|\vec{k}_\gamma|^2 + M_\gamma^2)(Q^0)^2 - |\vec{k}_\gamma|^2 |\vec{Q}|^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Mit einer weiteren Substitution $\xi = |\vec{k}_\gamma|/M_\gamma$ wird das Integral (C.19) nicht nur vereinfacht, sondern auch der unphysikalische Parameter M_γ wird im Integranden eliminiert, Somit ergibt sich für das Integral folgendes Resultat

$$\mathcal{K} = 4\pi\bar{\alpha} \int_0^1 dx \int_0^{\Delta E/M_\gamma} \frac{\xi^2 d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} \frac{1}{\xi^2 A + B}, \quad (\text{C.20})$$

wobei $A = (Q^0)^2 - |\vec{Q}|^2$ und $B = (Q^0)^2$ sind. Das Integral (C.20) besitzt nun eine hyperbolische Struktur und lässt sich nach einer weiteren Substitution $\xi = \sinh \eta$ schreiben als

$$\mathcal{K} = 4\pi\bar{\alpha} \int_0^1 \frac{dx}{A} \left\{ \eta - \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B-A}} \operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{B}} \tanh \eta\right) \right\} \Big|_0^{\operatorname{arsinh}(\Delta E/M_\gamma)}. \quad (\text{C.21})$$

Mit der Rücksubstitution und Entwicklung um den Parameter $\Delta E/M_\gamma$,

$$\begin{aligned} \eta &= \operatorname{arsinh}\left(\frac{\Delta E}{M_\gamma}\right) = \log \left[\frac{\Delta E}{M_\gamma} + \sqrt{\left(\frac{\Delta E}{M_\gamma}\right)^2 + 1} \right] \simeq \log \left(\frac{2\Delta E}{M_\gamma} \right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta E}{M_\gamma}\right)^3\right), \\ \operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{B-A}}{\sqrt{B}} \tanh \eta\right) &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{B} + \sqrt{B-A} \tanh \eta}{\sqrt{B} - \sqrt{B-A} \tanh \eta} \right) \simeq \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{B} + \sqrt{B-A}}{\sqrt{B} - \sqrt{B-A}} \right), \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\mathcal{K} = 2\pi\bar{\alpha} \int_0^1 \frac{dx}{A} \left\{ \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B-A}} \log \left(\frac{\sqrt{B} - \sqrt{B-A}}{\sqrt{B} + \sqrt{B-A}} \right) \right\}. \quad (\text{C.22})$$

Nun werden $A = (Q^0)^2 - |\vec{Q}|^2$, $B = (Q^0)^2$ und $Q = q + (l - q)x$ in das Integral (C.22) eingesetzt

$$\mathcal{K} = 2\pi\bar{\alpha} \int_0^1 \frac{dx}{Q^2} \left\{ \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \frac{Q^0}{|\vec{Q}|} \log \left(\frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{Q^0 + |\vec{Q}|} \right) \right\} =: 2\pi\bar{\alpha} (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2). \quad (\text{C.23})$$

Die Integrale \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 müssen noch berechnet werden. Zur Berechnung des ersten Integrals wird folgende Substitution vorgenommen

$$m = l^0 - q^0 = \pm|\vec{l} - \vec{q}| \quad \text{und} \quad vm = q \cdot (l - q) = \frac{1}{2}(p^2 - q^2), \quad (\text{C.24})$$

um das Ergebnis

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \int_0^1 \frac{dx}{Q^2} \log\left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{(q + (l - q)x)^2} \log\left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2}\right) \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{q^2 + 2xvm} \log\left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2}\right) = \frac{1}{2mv} \log\left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2}\right) \log\left(\frac{q^2 + 2mv}{q^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

zu erhalten. Um das zweite Integral auszurechnen, sollen mehrere Substitutionen durchgeführt werden. Mit der Substitution (C.24) lässt sich $Q^0 = q^0 + (l^0 - q^0)x = q^0 + mx$ umschreiben, was zu folgender Form des Integrals \mathcal{R}_2

$$\mathcal{R}_2 = \int_0^1 \frac{dx}{Q^2} \frac{Q^0}{|\vec{Q}|} \log\left(\frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{Q^0 + |\vec{Q}|}\right) = \int_{q^0}^{l^0} \frac{dQ^0}{Q^2} \frac{1}{m} \frac{Q^0}{|\vec{Q}|} \log\left(\frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{Q^0 + |\vec{Q}|}\right) \quad (\text{C.26})$$

führt. Mit einer weiteren Substitution $n = Q^0 - |\vec{Q}| = Q^0 - \sqrt{(Q^0)^2 - 2Q^0v - q^2 + 2q^0v}$ ergeben sich folgende Relationen

$$\begin{aligned} Q^0 &= \frac{n^2 - va}{2(n - v)} \quad \text{mit} \quad a = 2q^0 - \frac{q^2}{v}, \\ Q^0 + |\vec{Q}| &= v \left(\frac{n - a}{n - v} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

die notwendig sind, um das Integral (C.26) zu lösen:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{2vm} \int_{q^0 - |\vec{q}|}^{l^0 - |\vec{l}|} dn \left\{ \frac{1}{n - v} \frac{n^2 - va}{n(a - n)} \log\left(\frac{n(n - v)}{v(n - a)}\right) \right\}. \quad (\text{C.28})$$

Das Integral (C.28) lässt sich mittels folgender Relationen

$$\frac{d}{dn} \log\left(\frac{n(n - v)}{v(n - a)}\right) = \frac{2}{n - v} - \frac{n^2 - va}{n(n - a)(n - v)}, \quad (\text{C.29})$$

$$\log\left(\frac{n(n - v)}{v(n - a)}\right) = \log\left(1 + \frac{n - v}{v}\right) - \log\left(1 - \frac{n - v}{v}\right) + \log\left(\frac{n - v}{v - a}\right), \quad (\text{C.30})$$

$$\int_0^1 dt \frac{\log(1 - xt)}{t} = -\text{Li}_2(x) \quad (\text{C.31})$$

lösen

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{mv} \left[\frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{n(n-v)}{v(n-a)} \right) - \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{n-v}{v-a} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{v-n}{v} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{n-v}{a-v} \right) \right]_{q^0-|\vec{q}|}^{l^0-|\vec{l}|}. \quad (\text{C.32})$$

Werden nun die Rücksubstitutionen durchgeführt und die Eigenschaften der Dilogarithmen ausgenutzt, so ergibt sich dann für das Integral \mathcal{R}_2 folgendes Ergebnis:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{vm} \left[\frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{Q^0 + |\vec{Q}|} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{v} \right) - \text{Li}_2 \left(1 + \frac{Q^0 + |\vec{Q}|}{v} \right) \right]_{Q=q}^{Q=l}. \quad (\text{C.33})$$

Für das Integral (C.23) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \mathcal{K} = \frac{2\bar{\alpha}\pi}{mv} & \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{q^2 + 2mv}{q^2} \right) \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{Q^0 + |\vec{Q}|} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{v} \right) - \text{Li}_2 \left(1 + \frac{Q^0 + |\vec{Q}|}{v} \right) \right]_{Q=q}^{Q=l} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Werden nun das Integral (C.34) und die Relationen (C.16) und (C.24) in Gl. (C.15) eingesetzt, so ergibt sich für das Integral \mathcal{I}_{ij} der allgemeine Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij} = 4\bar{\alpha}\pi \frac{a_i \cdot b_j}{(\bar{\alpha}a_i)^2 - (b_j)^2} & \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{(\bar{\alpha}a_i)^2}{(b_j)^2} \right) \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{Q^0 + |\vec{Q}|} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{Q^0 - |\vec{Q}|}{v} \right) - \text{Li}_2 \left(1 + \frac{Q^0 + |\vec{Q}|}{v} \right) \right]_{Q=b_j}^{Q=\bar{\alpha}a_i} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Das Integral (C.35) lässt sich für zwei Spezialfälle in besonders einfache Form bringen. Für den Fall, wenn die Impulse a_i und b_j gleich sind ($a_i = b_j$), ist keine Feynman-Parametrisierung (C.17) notwendig. Desweiteren gilt $\bar{\alpha} = 1$ und $Q = 1$. Somit liefert das Integral (C.23) ohne einer weiteren Integration direkt folgendes Ergebnis:

$$\mathcal{I}_{a_i^2} = 2\pi \left\{ \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \frac{a_i^0}{|\vec{a}_i|} \log \left(\frac{a_i^0 - |\vec{a}_i|}{a_i^0 + |\vec{a}_i|} \right) \right\}. \quad (\text{C.36})$$

Der zweite Fall ist, wenn die räumlichen Komponenten der Vierer-Impulse zueinander entgegengesetzt $\vec{a}_i = -\vec{b}_j \equiv \vec{u}$ sind. Zunächst wird aus Gl. (C.16) die Konstante $\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} = \frac{b_j^0 + |\vec{u}|}{a_i^0 - |\vec{u}|} \quad (\text{C.37})$$

bestimmt, die jedoch die Bedingung $\bar{\alpha}a_i^0 - b_j^0 > 0$ erfüllen soll. Jetzt können die Relationen aus Gl. (C.35) unter Verwendung von (C.37) für diesen Spezialfall bestimmt werden

$$\frac{a_i \cdot b_j}{(\bar{\alpha}a_i)^2 - (b_j)^2} = \frac{1}{2|\vec{u}|(a_i^0 + b_j^0)} \quad \text{und} \quad \frac{(\bar{\alpha}a_i)^2}{(b_j)^2} = \frac{(a_i^0 + |\vec{u}|)(b_j^0 + |\vec{u}|)}{(a_i^0 - |\vec{u}|)(b_j^0 - |\vec{u}|)}. \quad (\text{C.38})$$

Außerdem erhält man

$$v = \frac{(\bar{\alpha}a_i)^2 - b_j^2}{2(\bar{\alpha}a_i^0 - b_j^0)}. \quad (\text{C.39})$$

Nun sollen noch die Eigenschaften der Dilogarithmen

$$\text{Li}_2(z) = \begin{cases} -\text{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) - \frac{1}{2} \log^2(1-z) & z \notin (1, \infty) \\ -\text{Li}_2\left(\frac{z}{z-1}\right) - \frac{1}{2} \log^2(1-z) + \frac{\pi^2}{2} + i\pi \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) & z > 1 \end{cases}. \quad (\text{C.40})$$

ausgenutzt werden. Für den betrachteten Spezialfall lautet dann das Integral \mathcal{I}_{ij}

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{ij} = & \frac{2\pi \bar{\alpha} (a_i \cdot b_j)}{(a_i^0 + b_j^0) |\vec{u}|} \times \\ & \left\{ \frac{1}{2} \log\left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2}\right) \log\left(\frac{a_i^0 + |\vec{u}|}{a_i^0 - |\vec{u}|}\right) - \frac{1}{4} \log^2\left(\frac{a_i^0 + |\vec{u}|}{a_i^0 - |\vec{u}|}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2|\vec{u}|}{a_i^0 + |\vec{u}|}\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \log\left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2}\right) \log\left(\frac{b_j^0 + |\vec{u}|}{b_j^0 - |\vec{u}|}\right) - \frac{1}{4} \log^2\left(\frac{b_j^0 + |\vec{u}|}{b_j^0 - |\vec{u}|}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{2|\vec{u}|}{b_j^0 + |\vec{u}|}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Differentieller Wirkungsquerschnitt in der Eikonal-Näherung

Im folgenden Abschnitt werden die Integrale \mathcal{I}_{ij} vorgestellt, die notwendig sind, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt des Prozesses $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-\gamma$ in der Eikonal-Näherung (C.13) zu berechnen. Der Eikonal-Faktor δ_{IR} ist in diesem Fall gegeben durch

$$\begin{aligned} \delta_{\text{IR}} = & -\frac{\alpha}{4\pi^2} \left[Q_q^2 \left(\mathcal{I}_{p_q^2} - 2\mathcal{I}_{p_q p_{\bar{q}}} + \mathcal{I}_{p_{\bar{q}}^2} \right) + Q_W^2 \left(\mathcal{I}_{k_{W^-}^2} - 2\mathcal{I}_{k_{W^-} k_{W^+}} + \mathcal{I}_{k_{W^+}^2} \right) \right. \\ & \left. + 2Q_W Q_q \left(\mathcal{I}_{p_{\bar{q}} k_{W^-}} + \mathcal{I}_{p_q k_{W^+}} - \mathcal{I}_{p_q k_{W^-}} - \mathcal{I}_{p_{\bar{q}} k_{W^+}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

Wie aus der Gleichung (C.42) zu sehen ist, gliedert sich die Berechnung des Eikonal-Faktors in drei Schritte. Im ersten Schritt werden diejenigen Integrale berechnet, die auf der vom Anfangszustand ausgehenden infraroten Bremsstrahlung des Photons basieren. Hierzu wird angenommen, dass die einlaufenden Quarks eine sehr kleine, aber nicht verschwindende Masse m_f besitzen. Laut Gl. (B.1) und (B.2) sind die Vierer-Impulse der einlaufenden Quarks

gegeben durch

$$\begin{aligned} p_q^\mu &= (p_q^0, 0, 0, |\vec{p}_q|), \quad \text{mit } p_q^0 = p_{\bar{q}}^0 = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}, \quad \text{und } |\vec{p}_q| = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \sqrt{1 - 4m_f^2/\hat{s}}, \\ p_{\bar{q}}^\mu &= (p_q^0, 0, 0, -|\vec{p}_q|). \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

Mit den Relationen

$$\begin{aligned} \frac{p_q^0}{|\vec{p}_q|} &= \frac{\sqrt{\hat{s}}/2}{\sqrt{\hat{s}}/2 \sqrt{1 - 4m_f^2/\hat{s}}} \sim 1, & \frac{p_q \cdot p_{\bar{q}}}{|\vec{p}_q| (p_q^0 + p_{\bar{q}}^0)} &\sim 1, \\ \frac{p_q^0 - |\vec{p}_q|}{p_q^0 + |\vec{p}_q|} &= \frac{\sqrt{\hat{s}}/2(1 - \sqrt{1 - 4m_f^2/\hat{s}})}{\sqrt{\hat{s}}/2(1 + \sqrt{1 - 4m_f^2/\hat{s}})} \stackrel{(\text{C.43})}{=} \frac{m_f^2}{\hat{s}}, & \frac{2|\vec{p}_q|}{|\vec{p}_q| (p_q^0 + p_{\bar{q}}^0)} &\sim 1. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

und Gl. (C.36) und (C.41) lassen sich die ersten drei Integrale aus Gl. (C.42) berechnen:

$$\mathcal{I}_{p_q^2} = \mathcal{I}_{p_{\bar{q}}^2} = 2\pi \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) \right], \quad (\text{C.45})$$

$$\mathcal{I}_{p_q p_{\bar{q}}} = 2\pi \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) - \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) - \frac{\pi^2}{3} \right]. \quad (\text{C.46})$$

Die Näherungen in Gl. (C.44) wurden so durchgeführt, dass bei den auftretenden Logarithmen nur die führenden Terme der Entwicklung in m_f/\hat{s} berücksichtigt werden.

Im zweiten Schritt werden nur die Integrale berechnet, bei denen die Abstrahlung des Bremsstrahlungsphotons im Endzustand stattfindet. Nach Gleichungen (B.9) und (B.10) sind die Vierer-Impulse der geladenen auslaufenden Teilchen gegeben durch:

$$\begin{aligned} k_{W^+}^\mu &= (k_{W^+}^0, \vec{k}_{W^+}), & \text{mit } k_{W^+}^0 &= k_{W^-}^0 = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2}, \\ k_{W^-}^\mu &= (k_{W^-}^0, -\vec{k}_{W^+}), & \text{und } |\vec{k}_{W^+}| &= \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \sqrt{1 - \frac{4M_W^2}{\hat{s}}} \equiv \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \beta_W. \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

Werden jedoch diese Kinematik und die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{k_{W^-}^0}{|\vec{k}_{W^-}|} &\sim \frac{1}{\beta_W}, & \frac{k_{W^-} \cdot k_{W^+}}{|\vec{k}_{W^-}| (k_{W^-}^0 + k_{W^+}^0)} &\sim \frac{1 + \beta_W^2}{2\beta_W}, \\ \frac{k_{W^-}^0 - |\vec{k}_{W^-}|}{k_{W^-}^0 + |\vec{k}_{W^-}|} &= \frac{1 - \beta_W}{1 + \beta_W}, & \frac{2|\vec{k}_{W^-}|}{|\vec{k}_{W^-}| (k_{W^-}^0 + k_{W^+}^0)} &\sim \frac{2\beta_W}{1 + \beta_W} \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

in die Gl. (C.36) und (C.41) eingesetzt, so ergeben sich folgende Ergebnisse:

$$\mathcal{I}_{k_{W^-}^2} = \mathcal{I}_{k_{W^+}^2} = 2\pi \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \frac{1}{\beta_W} \log \left(\frac{1 - \beta_W}{1 + \beta_W} \right) \right], \quad (\text{C.49})$$

$$\mathcal{I}_{k_{W^-}k_{W^+}} = 2\pi \frac{1 + \beta_W^2}{2\beta_W} \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{1 + \beta_W}{1 - \beta_W} \right) - \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{1 + \beta_W}{1 - \beta_W} \right) - 2 \text{Li}_2 \left(\frac{2\beta_W}{1 + \beta_W} \right) \right]. \quad (\text{C.50})$$

Im letzten Schritt werden die verbliebenen Beiträge zum Wirkungsquerschnitt in der Eikonal-Näherung berechnet. Diese stellen die Interferenzterme zwischen den Anfangs- und Endzuständen dar. Um diese Interferenzterme berechnen zu können, wird hier von dem allgemeinen Fall (C.35) ausgegangen. Hierbei ist es ausreichend eines der Integrale, z. B. $\mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^-}}$, zu berechnen. Die restliche Integrale werden Anhand der Kinematik

$$\hat{s} = (p_q + p_{\bar{q}})^2 = (k_{W^-} + k_{W^+})^2 = 2p_q \cdot p_{\bar{q}}, \quad (\text{C.51})$$

$$\hat{u} = (p_q - k_{W^-})^2 = (p_{\bar{q}} - k_{W^+})^2 = M_W^2 - 2p_q \cdot k_{W^-}, \quad (\text{C.52})$$

$$\hat{t} = (p_q - k_{W^+})^2 = (p_{\bar{q}} - k_{W^-})^2 = M_W^2 - 2p_q \cdot k_{W^+} \quad (\text{C.53})$$

und unter der Verwendung der sogenannten *crossing Symmetrie*

$$\mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^-}} = \mathcal{I}_{p_qk_{W^+}} \stackrel{!}{=} \mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^+}}(t \rightarrow u) \stackrel{!}{=} \mathcal{I}_{p_qk_{W^-}}(t \rightarrow u) \quad (\text{C.54})$$

ausgewertet.

Zur Berechnung des Integrals $\mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^-}}$ werden unter Vernachlässigung der Fermionmassen und Verwendung der Bedingungen (C.16) und (C.39) zunächst die Konstanten

$$\bar{\alpha} = \frac{M_W^2 - \hat{t}}{m_f^2} \quad \text{und} \quad v = \frac{M_W^2 - \hat{t}}{\sqrt{\hat{s}}} \quad (\text{C.55})$$

berechnet. Weiterhin werden zur Berechnung des Integrals $\mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^-}}$ folgende Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha} p_{\bar{q}} \cdot k_{W^-}}{(\bar{\alpha} p_{\bar{q}})^2 - (k_{W^-})^2} &\stackrel{(\text{C.51}), (\text{C.55})}{=} \frac{1}{2}, & \frac{\bar{\alpha}^2 p_{\bar{q}}^2}{k_{W^-}^2} &= \frac{(M_W^2 - \hat{t})^2}{M_W^2 m_f^2} \\ \frac{\bar{\alpha} p_{\bar{q}}^0 - \bar{\alpha} |\vec{p}_{\bar{q}}|}{v} &\sim 1, & \frac{\bar{\alpha} p_{\bar{q}}^0 + \bar{\alpha} |\vec{p}_{\bar{q}}|}{v} &\sim \frac{\hat{s}}{m_f^2}, \\ \frac{k_{W^-}^0 \pm |\vec{k}_{W^-}|}{v} &= \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4M_W^2}{\hat{s}}}}{M_W^2 - \hat{t}} \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

benötigt. Somit ergibt sich für die Integrale $\mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^-}}$ und $\mathcal{I}_{p_qk_{W^+}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^-}} = \mathcal{I}_{p_qk_{W^+}} &= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{(M_W^2 - \hat{t})^2}{M_W^2 m_f^2} \right) - \log^2 \left(\frac{1 - \beta_W}{1 + \beta_W} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{m_f^2} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 - \beta_W}{M_W^2 - \hat{t}} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 + \beta_W}{M_W^2 - \hat{t}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

und für die Integrale $\mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^+}}$ und $\mathcal{I}_{p_qk_{W^-}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{p_{\bar{q}}k_{W^+}} = \mathcal{I}_{p_qk_{W^-}} &= 2\pi \left\{ \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{(M_W^2 - \hat{u})^2}{M_W^2 m_f^2} \right) - \log^2 \left(\frac{1 - \beta_W}{1 + \beta_W} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{m_f^2} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 - \beta_W}{M_W^2 - \hat{u}} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 + \beta_W}{M_W^2 - \hat{u}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Eichboson-Paarproduktion ergibt sich in der Eikonol-Näherung folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{IR}} = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times &\left\{ \right. \\ &Q_q^2 \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \left(1 + \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) \right) + \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) + \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) + \frac{\pi^2}{3} \right] \\ &+ Q_W^2 \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \frac{1}{\beta_W} \log \left(\frac{1 - \beta_W}{1 + \beta_W} \right) + \frac{1 + \beta_W^2}{\beta_W} \left(\frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{1 + \beta_W}{1 - \beta_W} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{1 - \beta_W}{1 + \beta_W} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{2\beta_W}{1 + \beta_W} \right) \right] \\ &+ 2 Q_q Q_W \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{(M_W^2 - \hat{t})^2}{(M_W^2 - \hat{u})^2} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 - \beta_W}{M_W^2 - \hat{t}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 - \beta_W}{M_W^2 - \hat{u}} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 + \beta_W}{M_W^2 - \hat{t}} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{2} \frac{1 + \beta_W}{M_W^2 - \hat{u}} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

mit $\beta_W = \sqrt{1 - 4M_W^2/\hat{s}}$.

Die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts zu Prozessen $q\bar{q} \rightarrow ZZ\gamma$ bzw. $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ erfolgt analog zum Prozess $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-\gamma$. In diesem Fall tragen die Teilchen im Endzustand keine Ladung und somit sind nur vom Anfangszustand ausgehende Bremsstrahlungsbeiträge zu betrachten. Der differentielle Wirkungsquerschnitt in der Eikonol-Näherung in diesem Fall lautet dann:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{IR}} = -\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times &\left\{ \right. \\ &Q_q^2 \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \left(1 + \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) \right) + \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) + \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) + \frac{\pi^2}{3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts in der Eikonol-Näherung zu den Prozessen $q(p_q) + \bar{q}'(p_{q'}) \rightarrow W^\pm(k_W) + Z(k_Z) + \gamma(k_\gamma)$ erfolgt ebenfalls analog zum Prozess $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-\gamma$. Hierbei unterscheidet sich jedoch die Ladung der einlaufenden Quarks voneinander, so dass $Q_q - Q_{q'} = +1$ erfüllt ist. Zudem ist nur ein geladenes Teilchen im Endzustand vorhanden, von dem ein nicht detektierbares Bremsstrahlungsphoton abgestrahlt

werden kann. Mit der Kinematik für die auslaufenden Eichbosonen

$$k_Z^\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \left(\xi_Z, -\tilde{\beta} \sin \theta, 0, -\tilde{\beta} \cos \theta \right) \quad \text{mit} \quad \xi_Z = 1 + \frac{M_Z^2 - M_W^2}{\hat{s}}, \quad (\text{C.61})$$

$$k_W^\mu = \frac{\sqrt{\hat{s}}}{2} \left(\xi_W, +\tilde{\beta} \sin \theta, 0, +\tilde{\beta} \cos \theta \right) \quad \text{mit} \quad \xi_W = 1 + \frac{M_W^2 - M_Z^2}{\hat{s}},$$

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\left(1 - \frac{(M_Z + M_W^2)^2}{\hat{s}}\right) \left(1 - \frac{(M_Z - M_W^2)^2}{\hat{s}}\right)}$$

sowie mit

$$\hat{s} = (p_q + p_{\bar{q}})^2 = 2 p_q \cdot p_{\bar{q}}, \quad (\text{C.62})$$

$$\hat{u} = (p_q - k_Z)^2 = M_Z^2 - 2 p_q \cdot k_Z \quad \text{bzw.} \quad \hat{u} = (p_{\bar{q}'} - k_W)^2 = M_W^2 - 2 p_{\bar{q}'} \cdot k_W, \quad (\text{C.63})$$

$$\hat{t} = (p_q - k_W)^2 = M_W^2 - 2 p_q \cdot k_W \quad \text{bzw.} \quad \hat{t} = (p_{\bar{q}'} - k_Z)^2 = M_Z^2 - 2 p_{\bar{q}'} \cdot k_Z \quad (\text{C.64})$$

lassen sich notwendige Relationen (analog zur W-Paarproduktion) für die Berechnung der Integrale \mathcal{I}_{ij} herleiten. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt z. B. des Prozess $q\bar{q}' \rightarrow W^+ Z \gamma$ in der Eikonal-Näherung ergibt sich somit folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{IR}} = & -\frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \times \left\{ Q_W^2 \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \frac{\xi_W}{\tilde{\beta}} \log \left(\frac{\xi_W - \tilde{\beta}}{\xi_W + \tilde{\beta}} \right) \right] \right. \\ & + Q_q^2 \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) \right] + Q_{\bar{q}'}^2 \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) + \log \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) \right] \\ & - 2 Q_q Q_{\bar{q}'} \left[\log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{\hat{s}}{m_f^2} \right) - \frac{1}{2} \log^2 \left(\frac{\hat{s}}{m_f^2} \right) - \frac{\pi^2}{3} \right] \\ & + 2 Q_{\bar{q}'} Q_W \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{(M_W^2 - \hat{t})^2}{M_W^2 m_f^2} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s} \xi_W - \tilde{\beta}}{2 M_W^2 - \hat{t}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{\xi_W - \tilde{\beta}}{\xi_W + \tilde{\beta}} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{m_f^2} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s} \xi_W + \tilde{\beta}}{2 M_W^2 - \hat{t}} \right) + \frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) \right] \\ & - 2 Q_q Q_W \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{4\Delta E^2}{M_\gamma^2} \right) \log \left(\frac{(M_W^2 - \hat{u})^2}{M_W^2 m_f^2} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s} \xi_W - \tilde{\beta}}{2 M_W^2 - \hat{u}} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{\xi_W - \tilde{\beta}}{\xi_W + \tilde{\beta}} \right) + \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s}}{m_f^2} \right) - \text{Li}_2 \left(1 - \frac{\hat{s} \xi_W + \tilde{\beta}}{2 M_W^2 - \hat{u}} \right) + \frac{1}{4} \log^2 \left(\frac{m_f^2}{\hat{s}} \right) \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{A}^\pm(p - k_\gamma) Q_f^2 \frac{i(\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f)}{2p \cdot k_\gamma} i e \not{\epsilon}_\xi^*(k_\gamma) u_\tau^\pm(p) \bar{u}_\tau^\pm(p) i e \not{\epsilon}_\xi(k_\gamma) \frac{i(\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f)}{2p \cdot k_\gamma} \overline{\mathcal{A}^\pm}(p - k_\gamma) \\
&= \mathcal{A}^\pm(p - k_\gamma) \underbrace{\frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \gamma_\mu (\not{p} + m_f) (1 + \gamma_5 \not{\beta}) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \epsilon_\xi^{\mu*} \epsilon_\xi^\nu \overline{\mathcal{A}^\pm}(p - k_\gamma)}_{\equiv \mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma)},
\end{aligned}$$

wobei der Operator $\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma) \equiv \sum_\xi \mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma, \xi)$ ist. Hierbei läuft die Summe über die Polarisationszustände des auslaufenden Photons:

$$\sum_\xi \epsilon_\xi^{\mu*}(k_\gamma) \epsilon_\xi^\nu(k_\gamma) = -g^{\mu\nu} + \frac{k_\gamma^\mu q^\nu + k_\gamma^\nu q^\mu}{q \cdot k_\gamma}, \quad (\text{C.71})$$

wobei q^μ ein lichtartiger Eichvektor mit der Eigenschaft $q \cdot q = 0$ ist. Sein räumlicher Anteil ist so definiert, dass $\vec{q} \perp \vec{p}$, was impliziert, dass im kollinearen Limes auch $\vec{q} \perp \vec{k}_\gamma$ gilt, also \vec{q} ist näherungsweise orthogonal zu \vec{p} bzw. \vec{k} .

Definition von kollinearen Limes

Der kollineare Limes wird gemäß Ref. [94] definiert. Der Photonimpuls k_γ wird durch

$$k_\gamma^\mu = x p^\mu + k_{\gamma,\perp}^\mu + k_{\gamma,\text{rem}}^\mu \quad \text{mit} \quad x := \frac{k_\gamma^0}{p^0} \quad (\text{C.72})$$

in einen Anteil proportional zu p^μ , einen transversalen Anteil $k_{\gamma,\perp}^\mu$ und einen Anteil $k_{\gamma,\text{rem}}^\mu$, dessen raumartigen Komponenten verschwinden, aufgeteilt [94]. Die vom Photon davongetragene Energie ist $k_\gamma^0 = x p^0$. Mit den Vierer-Impulsen

$$p^\mu = p^0(1, 0, 0, \beta_f) \quad (\text{C.73})$$

$$= p^0 \left[(1, 0, 0, 1) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_f}{p^0} \right)^2 (0, 0, 0, 1) + \mathcal{O} \left((m_f/p^0)^4 \right) \right],$$

$$k_\gamma^\mu = k_\gamma^0 (1, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta), \quad (\text{C.74})$$

$$k_{\gamma,\perp}^\mu = k_\gamma^0 (-\beta_f(\beta_f - \cos \theta), \cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta - \beta_f), \quad (\text{C.75})$$

$$k_{\gamma,\text{rem}}^\mu = (-k_\gamma^0 \beta_f (\cos \theta - \beta_f), 0, 0, 0), \quad (\text{C.76})$$

wobei $\beta_f = \sqrt{1 - m_f^2/(p^0)^2}$ die Geschwindigkeit ist, erhält man für die Skalarprodukte:

$$p \cdot k_\gamma \stackrel{k_\gamma^0 = x p^0}{=} \frac{x}{2} \left(m_f^2 + \theta^2 (p^0)^2 \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m_f^4}{(p^0)^2}, m_f^2 \theta^2, (p^0)^2 \theta^4 \right), \quad (\text{C.77})$$

$$p^2 = m_f^2, \quad p \cdot k_{\gamma,\perp} = 0, \quad k_\gamma^2 = 0. \quad (\text{C.78})$$

Da der lichtartigen Eichvektor q^μ so definiert ist, dass seine räumlichen Komponenten näherungsweise senkrecht auf den von p^μ und auch auf den räumlichen Anteil von k_γ^μ stehen, also

$\vec{q} \perp \vec{p}$, \vec{k}_γ , ergibt sich folgende Relation:

$$\left. \begin{aligned} q \cdot k_\gamma &= q^0 k_\gamma^0 \\ q \cdot p &= q^0 p^0 \end{aligned} \right\} \implies x \stackrel{(C.72)}{=} \frac{q \cdot k_\gamma}{q \cdot p} \quad \text{für } \theta \rightarrow 0. \quad (C.79)$$

Der Polarisationsvektor für die Helizitätszustände s_\pm^μ ist gegeben durch:

$$s_\pm^\mu = \pm \left(\frac{|\vec{p}|}{m_f}, \frac{p^0}{m_f} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right) \stackrel{(C.73)}{\approx} \pm \left(\frac{p^\mu}{m_f} - \frac{m_f q^\mu}{p \cdot q} \right), \quad (C.80)$$

wobei die räumliche Komponente des Polarisationsvektors im kollinearen Limes per Definition parallel zum räumlichen Anteil des Impulses \vec{p} des einlaufendes Fermions ist (siehe hierzu den Beweis in Anhang B der Ref. [94]).

Mit Hilfe der oben erwähnten Relationen lässt sich der Operator

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma) &= \frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} \\ &\times (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \gamma_\mu (\not{p} + m_f) (1 + \tau \gamma_5 \not{\epsilon}) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_\gamma^\mu q^\nu + k_\gamma^\nu q^\mu}{q \cdot k_\gamma} \right) \end{aligned} \quad (C.81)$$

im kollinearen Limes berechnen. Der kollineare Limes ist dadurch charakterisiert, dass der transversale Anteil des Photonimpulses $k_{\gamma,\perp}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(m_f)$ ist, während der Anteil $k_{\gamma,\text{rem}}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^2)$ ist. Ferner folgt aus Gl. (C.77), dass das Skalarprodukt $(p \cdot k_\gamma)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^2)$ ist. Durch die Festlegung der Impulse in Gl. (C.73) bzw. Gl. (C.74) ist $\not{p} \not{k}_\gamma$ von der Ordnung $\mathcal{O}(m_f)$. Im kollinearen Bereich wird das Verhalten des Projektionsoperators $\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma)$ in Gl. (C.81) für verschwindend kleine Fermionmassen (also für $m_f \rightarrow 0$) wegen des Faktors $(p \cdot k_\gamma)^2$ im Nenner, der von der Ordnung $\mathcal{O}(1/m_f^4)$ ist, bestimmt, was jedoch durch die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^2)$ im Zähler abgeschwächt wird. Alle Terme im Zähler größerer Ordnung als m_f^2 können vernachlässigt werden, da sie keinen wesentlichen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt leisten. Im Folgenden werden nur die dominanten Terme der Ordnung $\mathcal{O}(1/m_f^2)$ selektiert.

Zur Berechnung des Projektionsoperators $\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma)$ aus Gl. (C.81) wird es in zwei Anteile \mathcal{A} und \mathcal{B} aufgespalten:

$$\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma) = \quad (C.82)$$

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \gamma_\mu (\not{p} + m_f) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_\gamma^\mu q^\nu + k_\gamma^\nu q^\mu}{q \cdot k_\gamma} \right)}_{:=\mathcal{A}} \\ &+ \underbrace{\frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \gamma_\mu (\not{p} + m_f) \tau \gamma_5 \not{\epsilon} \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_\gamma^\mu q^\nu + k_\gamma^\nu q^\mu}{q \cdot k_\gamma} \right)}_{:=\mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (C.83)$$

Der Teil \mathcal{A} lässt sich neben der Dirac-Algebra auch unter Verwendung von $\not{k}_\gamma \not{k}_\gamma = 0$, sowie Gl. (C.78) berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \gamma_\mu (\not{p} + m_f) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_\gamma^\mu q^\nu + k_\gamma^\nu q^\mu}{q \cdot k_\gamma} \right) \\
 &= \frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \left[2\not{p} - 4m_f + \frac{\not{k}_\gamma \not{p} \not{q} + \not{q} \not{p} \not{k}_\gamma}{q \cdot k_\gamma} + m_f \frac{\not{k}_\gamma \not{q} + \not{q} \not{k}_\gamma}{q \cdot k_\gamma} \right] (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \\
 &\stackrel{(C.79)}{=} \frac{e^2 Q_f^2}{4(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \left[\not{q} \frac{k_\gamma \cdot p}{k_\gamma \cdot q} + \frac{\not{k}_\gamma}{x} \right] (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \\
 &\stackrel{k_\gamma^\mu \rightarrow xp^\mu}{=} \frac{e^2 Q_f^2}{4(p \cdot k_\gamma)^2} \left[4 \frac{p \cdot k_\gamma}{x} \not{p} - 2(p \cdot k_\gamma) - 2 \frac{p \cdot k_\gamma}{x} \not{k}_\gamma + 2(p \cdot k_\gamma) x \not{p} + 2m_f^2 \not{k}_\gamma \right] \\
 &= \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{x} + \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} (x - 1) \right] \not{p}. \tag{C.84}
 \end{aligned}$$

Das Teil \mathcal{B} lässt sich ebenso durch mehrfache Anwendung von Dirac-Algebra sowie von Gl. (C.80) berechnen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B} &= \frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \gamma_\mu (\not{p} + m_f) \tau \gamma_5 \not{q} \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_\gamma^\mu q^\nu + k_\gamma^\nu q^\mu}{q \cdot k_\gamma} \right) \\
 &\stackrel{(C.80)}{=} \frac{e^2 Q_f^2}{8(p \cdot k_\gamma)^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{k_\gamma^\mu q^\nu + k_\gamma^\nu q^\mu}{q \cdot k_\gamma} \right) \\
 &\quad \times (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \gamma_\mu (\not{p} + m_f) \tau \left(\frac{\not{p}}{m_f} - \frac{\not{q} m_f}{p \cdot q} \right) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) (\mp \gamma_5) \\
 &= \frac{e^2 Q_f^2}{4(p \cdot k_\gamma)^2} (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) \tau \left[\left(\not{q} \frac{p \cdot k_\gamma}{q \cdot k_\gamma} + \frac{\not{k}_\gamma}{x} - m_f \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m_f}{p \cdot q} \left(-2(p \cdot q) + m_f \not{q} + \not{q} \not{k}_\gamma \frac{q \cdot p}{q \cdot k_\gamma} \right) \right] (\not{p} - \not{k}_\gamma + m_f) (\mp \gamma_5) \\
 &= \pm \tau \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \left[\frac{-x^2 + 2x - 2}{x} + \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} (1 - x + x^2) \right] \not{p} \gamma_5. \tag{C.85}
 \end{aligned}$$

Dabei wurden alle Terme, die nicht von der Ordnung $\mathcal{O}(1/m_f^2)$ sind, unterdrückt. Außerdem wurde die Ersetzung $k_\gamma^\mu \rightarrow xp^\mu$ durchgeführt und somit alle Terme proportional zur Transversalkomponente des Photonimpulses $k_{\gamma,\perp}$, die nur einen linearen Beitrag liefert (also $k_{\gamma,\perp} = \mathcal{O}(m_f)$) vernachlässigt. Die Komponente des Photonimpulses $k_{\gamma,\text{rem}}$ trägt wegen $k_{\gamma,\text{rem}} = \mathcal{O}(m_f)$ nicht zum dominierenden singulären Anteil des Wirkungsquerschnittes bei. Streng genommen tragen aber einige Terme, die in $k_{\gamma,\perp}$ linear sind, zum dominierenden singulären Verhalten des Projektionsoperators $\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma)$ bei. Dieser Beitrag ist jedoch nur für polarisierte Teilchen von Bedeutung². Photonen, die kollinear zu den einlaufenden Teilchen abgestrahlt werden, werden nicht detektiert. Deshalb sind zwei Photonen, die jeweils mit einem sehr kleinem Winkel der Ordnung $\mathcal{O}(m_f/p^0)$ relativ zum Strahl, jedoch mit ent-

²Dabei wird angenommen, dass in den Experimenten die Polarisation der auslaufenden Teilchen nicht gemessen wird.

gegengesetzter azimuthaler Richtung emittiert werden, experimentell nicht unterscheidbar. Da in allen physikalisch relevanten Observablen über Azimutalverteilung des unbeobachtbaren kollinearen Photons integriert wird, heben sich die Anteile $-k_{\gamma,\perp}$ und $+k_{\gamma,\perp}$ so gegenseitig auf, dass ihre Abhängigkeiten von $k_{\gamma,\perp}$ in der Summe verschwindet. Deswegen ist jeder Wirkungsquerschnitt für den über den Phasenraum der nicht-detektierbaren harten Bremsstrahlung integriert wird, unabhängig von $k_{\gamma,\perp}$ im kollinearen Limes. Also können die Terme mit $k_{\gamma,\perp}$ in dem Operator \mathcal{Z}_1^\pm vernachlässigt werden. Alle verbleibenden Terme sind proportional zu $m_f^2/(p \cdot k_\gamma)$ und zeigen somit ein ausgeprägtes „Peak“-Verhalten. Eine ausführlichere Diskussion hierzu findet sich in Ref. [94].

Für den Operator $\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma)$ erhält man ein Ergebnis, das sich aus Gl. (C.84) und Gl. (C.85) wie folgt zusammensetzt:

$$\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma) = \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \times \left\{ \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{x} + \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} (x - 1) \right] \not{p} \pm \tau \left[\frac{-x^2 + 2x - 2}{x} + \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} (1 - x + x^2) \right] \not{p} \gamma_5 \right\}. \quad (\text{C.86})$$

Es besteht die Möglichkeit, den Operator $\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma)$ aus Gl. (C.86) durch den Operator $\mathcal{Z}_0^\pm(p)$ aus Gl. (C.67) mit Hilfe der Relation

$$a \pm b \gamma_5 = (a + b) \omega_\pm + (a - b) \omega_\mp \quad \text{mit} \quad \omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \quad (\text{C.87})$$

auszudrücken. Schreibt man das Ergebnis (C.86) als Kombination von Operatoren $\mathcal{Z}_0^\pm(p)$ im ultrarelativistischen Limes ($p^0 \gg m_f$) unter Verwendung von Gl. (C.87), so erhält man:

$$\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma) \approx \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \left\{ (x^2 - 2x + 2) \left[\frac{2}{x} - \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \right] \omega_\pm \not{p} + \frac{m_f^2 x^2}{p \cdot k_\gamma} \omega_\mp \not{p} \right\} \quad (\text{C.88})$$

$$\stackrel{(\text{C.67})}{=} \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \left\{ (x^2 - 2x + 2) \left[\frac{2}{x} - \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \right] \mathcal{Z}_0^\pm(p, \tau) + \frac{m_f^2 x^2}{p \cdot k_\gamma} \mathcal{Z}_0^\pm(p, -\tau) \right\}.$$

Der Anteil von $\mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma)$, der zu $\mathcal{Z}_0^\pm(p, -\tau)$ proportional ist, ist sowohl für ein Teilchen (also $\mathcal{Z}_0^+(p, -\tau)$) als auch für ein Antiteilchen (also $\mathcal{Z}_0^-(p, -\tau)$) proportional zum Term $(x^2 m_f^2)/(p \cdot k_\gamma)$ und verschwindet für verschwindenden Fermionmassen, also für $m_f \rightarrow 0$.

Für das Betragsquadrat des Matrixelements mit dem kollinear vom einlaufenden Fermion abgestrahlten Photon ergibt sich durch Einsetzen von Gl. (C.88) in Gl. (C.70):

$$\left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2 = \mathcal{A}^\pm(p - k_\gamma) \mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma) \overline{\mathcal{A}}^\mp(p - k_\gamma) \quad (\text{C.89})$$

$$\approx \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \left\{ (x^2 - 2x + 2) \left(\frac{2}{x} - \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \right) \left[\mathcal{A}^\pm(p - k_\gamma) \mathcal{Z}_0^\pm(p, \tau) \overline{\mathcal{A}}^\mp(p - k_\gamma) \right] \right.$$

$$\left. + \frac{m_f^2 x^2}{p \cdot k_\gamma} \left[\mathcal{A}^\pm(p - k_\gamma) \mathcal{Z}_0^\pm(p, -\tau) \overline{\mathcal{A}}^\mp(p - k_\gamma) \right] \right\}.$$

Mit der Substitution

$$\tilde{p}^\mu \equiv p^\mu - k_\gamma^\mu \simeq (1-x)p^\mu \quad \implies \quad p^\mu = \frac{\tilde{p}^\mu}{1-x} \quad (\text{C.90})$$

ergibt sich für den Projektionsoperator

$$\mathcal{Z}_0^\pm(p, \tau) = \frac{1 \pm \tau \gamma_5}{2} \not{p} \stackrel{(\text{C.90})}{\simeq} \frac{1 \pm \tau \gamma_5}{2} \frac{\not{\tilde{p}}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \mathcal{Z}_0^\pm(\tilde{p}, \tau) \quad (\text{C.91})$$

und für quadrierten Matrixelement:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2 &= \mathcal{A}^\pm(p - k_\gamma) \mathcal{Z}_1^\pm(p, \tau, k_\gamma) \overline{\mathcal{A}^\pm}(p - k_\gamma) \quad (\text{C.92}) \\ &\approx \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{1-x} \left(\frac{2}{x} - \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \right) \left[\mathcal{A}^\pm(\tilde{p}) \mathcal{Z}_0^\pm(\tilde{p}, \tau) \overline{\mathcal{A}^\pm}(\tilde{p}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{x^2}{1-x} \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \left[\mathcal{A}^\pm(\tilde{p}) \mathcal{Z}_0^\pm(\tilde{p}, -\tau) \overline{\mathcal{A}^\pm}(\tilde{p}) \right] \right\} \\ &\stackrel{(\text{C.66})}{\approx} \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{1-x} \left(\frac{2}{x} - \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \right) \left| \mathcal{M}_0(\tilde{p}, \tau) \right|^2 + \frac{x^2}{1-x} \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \left| \mathcal{M}_0(\tilde{p}, -\tau) \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Mit der Rücksubstitution erhält man für das polarisierte Matrixelementquadrat:

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2 &\stackrel{(\text{C.90})}{\approx} \frac{e^2 Q_f^2}{2(p \cdot k_\gamma)} \times \quad (\text{C.93}) \\ &\left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{1-x} \left(\frac{2}{x} - \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \right) \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, \tau) \right|^2 + \frac{x^2}{1-x} \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, -\tau) \right|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Mittelt man über die Helizität $\tau \in \{-1, 1\}$, so ergibt sich aus Gl. (C.93) für einen unpolarisierten Spinor im Anfangszustand:

$$\frac{1}{2} \sum_{\xi=\pm 1} \sum_{\tau=\pm 1} \left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2 \approx \frac{e^2 Q_f^2}{p \cdot k_\gamma} \left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{(1-x)x} - \frac{m_f^2}{p \cdot k_\gamma} \right\} \frac{1}{2} \sum_{\tau=\pm 1} \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, \tau) \right|^2. \quad (\text{C.94})$$

Zusammengefasst ergibt sich folgendes Bild: Der führende Term vom Betragsquadrat des Matrixelements aus Gl. (C.93) bzw. Gl. (C.94) ist für ein zur räumlichen Komponente des Fermionimpuls \vec{p} kollinear abgestrahltes Photon mit einem Propagator $(p \cdot k_\gamma)^{-1}$ behaftet. Betrachtet man diesen Term direkt bei einer kollinearen Singularität, also bei $\theta = 0$, so ergibt sich

$$\left. \frac{p^0 k^0}{p \cdot k_\gamma} \right|_{\theta=0} = \frac{1}{1-\beta_f} \approx \frac{2(p^0)^2}{m_f^2} + \mathcal{O}\left((p^0)^4/m_f^4\right), \quad (\text{C.95})$$

was impliziert, dass dieser führenden Beitrag in der Nähe der kollinearen Singularität mit

$(p^0)^2/m_f^2$ geht. Deshalb werden für die Abstrahlung der kollinearen Bremsstrahlungsfotonen von den massiven Fermionen die dominanten Beiträge anhand ihres Verhaltens bei sehr kleinen Winkeln

$$\theta \ll \frac{m_f}{p^0} \quad \text{bzw.} \quad \pi - \theta \ll \frac{m_f}{p^0} \quad (\text{C.96})$$

bestimmt. Den zweiten Beitrag, welcher in der Nähe der kollinearen Singularitäten (also bei $\theta = 0$) ein $\mathcal{O}((p^0)^2/m_f^2)$ -Verhalten aufweist, ist der Term $m_f^2/(p \cdot k_\gamma)^2$ in Gl. (C.93) bzw. Gl. (C.94):

$$\left. \frac{(k^0)^2 m_f^2}{(p \cdot k_\gamma)^2} \right|_{\theta=0} = \frac{m_f^2}{(p^0)^2 (1 - \beta_f)^2} \approx \frac{4(p^0)^2}{m_f^2} + \mathcal{O}\left(\frac{(p^0)^4}{m_f^4}\right). \quad (\text{C.97})$$

Dieser Beitrag von Ordnung $\mathcal{O}(m_f^2)$ existiert nur im Fall massiver Fermionen im Anfangszustand und tritt im Bereich außerhalb der sehr kleinen Winkeln (siehe Gl. (C.96)) nur als vernachlässigbarer Term der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^2)$ auf. Er verschwindet jedoch im Fall der masselosen Fermionen.

C.2.2 Kollinearer Wirkungsquerschnitt für die Photonemission im Anfangszustand

Der Ausgangspunkt folgender Diskussion ist die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts zum Prozess $q(p_q) + \bar{q}(p_{\bar{q}}) \rightarrow V_1(k_{V_1}) + V_2(k_{V_2}) + \gamma(k_\gamma)$ im kollinearen Limes. Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, lässt sich der Wirkungsquerschnitt im kollinearen Limes mit dem in Gl. (2.36) definiertem Phasenraumbereich (also im $\Phi_{\text{koll}}^{\text{hart}}(\Delta E, \Delta\Theta)$) wie folgt berechnen:

$$\hat{\sigma}_{\text{koll}} = \int_{\Phi_{\text{koll}}^{\text{hart}}} d\Phi \left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2. \quad (\text{C.98})$$

Mit dem in Abschnitt B.1.2 besprochenen Drei-Teilchen-Phasenraum (siehe Gl. (B.29)) lässt sich der Wirkungsquerschnitt aus Gl. (C.98) schreiben als

$$\hat{\sigma}_{\text{koll}} = \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{1}{j_{\text{in}}} \sum_{\xi=\pm 1} \int_{\Phi_{\text{koll}}^{\text{hart}}} d\hat{k}_\gamma^0 d\hat{k}_{V_1}^0 d\cos\theta_\gamma d\beta \left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2, \quad (\text{C.99})$$

wobei j_{in} der Flussfaktor aus Gl. (1.29) ist, für den sich im Limes $p^0 \gg m_f$ der Wert $j_{\text{in}} = 2\hat{s}$ ergibt; \hat{s} ist die Energie der einlaufenden Teilchen im Schwerpunktsystem. Der Winkel zwischen dem räumlichen Anteil des Photonimpulses \vec{k}_γ und dem räumlichen Anteil des ein- bzw. auslaufenden Fermions \vec{p} wird als θ_γ bezeichnet. Wie bereits in Abschnitt 2.2.2 besprochen, wird der kollineare Phasenraumbereich $\Phi_{\text{koll}}^{\text{hart}}(\Delta E, \Delta\Theta)$ wie folgt definiert:

$$0 \leq \theta_\gamma \leq \Delta\Theta \quad \text{und} \quad \frac{m_f}{p^0} \ll \Delta\Theta \ll 1. \quad (\text{C.100})$$

Die Integrationsgrenzen der θ_γ -Integration sind im kollinearen Limes über das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\zeta &\equiv p \cdot k_\gamma = p^0 k^0 \left[1 - \cos \theta_\gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{m_f}{p^0} \right)^2 \cos \theta_\gamma + \mathcal{O}((m_f/p^0)^4) \right] \\ &\approx x (p^0)^2 + x \cos \theta_\gamma \left[\frac{m_f^2}{2} - (p^0)^2 \right] + \mathcal{O}(m_f^4/(p^0)^3)\end{aligned}\quad (\text{C.101})$$

mit $x = k^0/p^0$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\zeta(0) &= x \frac{m_f^2}{2} \\ \zeta(\Delta\Theta) &= x \frac{m_f}{2} + \frac{x}{2} \Delta\Theta^2 (p^0)^2 + \mathcal{O}(\Delta\Theta^4) \stackrel{\Delta\Theta \gg m_f/p^0}{\approx} \frac{x}{2} \Delta\Theta^2 (p^0)^2.\end{aligned}\quad (\text{C.102})$$

Mit Hilfe der Substitution (C.101) und der Jacobi-Determinante

$$\frac{d\zeta}{d \cos \theta_\gamma} = -x \underbrace{\left[(p^0)^2 - \frac{m_f^2}{2} \right]}_{:=\varrho^2} = -x \varrho^2 \quad (\text{C.103})$$

kann der Wirkungsquerschnitt im kollinearen Limes berechnet werden:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{\text{koll}} &= \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{1}{j_{\text{in}}} \int_{M_\gamma}^{[\hat{k}_\gamma^0]_{\text{max}}} \int_{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{min}}}^{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{max}}} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{\theta_\gamma < \Delta\Theta} d \cos \theta_\gamma \sum_\xi \left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2 \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{1}{j_{\text{in}}} \int_{M_\gamma}^{[\hat{k}_\gamma^0]_{\text{max}}} \int_{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{min}}}^{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{max}}} \int_0^{2\pi} d\beta \int_{x m_f^2/2}^{x (p^0)^2 \Delta\Theta^2/2} \frac{d\zeta}{x \varrho^2} \sum_\xi \left| \mathcal{M}_{\text{koll}}^{(1)}(p, \tau, k_\gamma, \xi) \right|^2 \\ &\stackrel{(\text{C.93})}{=} \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{1}{j_{\text{in}}} \int_{M_\gamma}^{[\hat{k}_\gamma^0]_{\text{max}}} \int_{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{min}}}^{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{max}}} \int_0^{2\pi} d\beta \frac{1}{x \varrho^2} \int_{x m_f^2/2}^{x (p^0)^2 \Delta\Theta^2/2} d\zeta \frac{e^2 Q_f^2}{2\zeta} \\ &\quad \times \left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{1-x} \left(\frac{2}{x} - \frac{m_f^2}{\zeta} \right) \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, \tau) \right|^2 + \frac{x^2}{1-x} \frac{m_f^2}{\zeta} \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, -\tau) \right|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{1}{j_{\text{in}}} \frac{Q_f^2 e^2}{\varrho^2} \int_{M_\gamma}^{[\hat{k}_\gamma^0]_{\text{max}}} \int_{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{min}}}^{[\hat{k}_{V_1}^0]_{\text{max}}} \int_0^{2\pi} d\beta \frac{1}{1-x} \\ &\quad \times \left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} (L_m - 1) \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, \tau) \right|^2 + \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, -\tau) \right|^2 \right\},\end{aligned}\quad (\text{C.104})$$

wobei

$$L_m := \log \left(\frac{(p^0)^2 \Delta \Theta^2}{m_f^2} \right) \quad (\text{C.105})$$

ein großer Logarithmus ist, der sich im differentiellen Wirkungsquerschnitt im Fall der massiven Fermionen als Term $1/(1 \pm \beta_f \cos \theta_\gamma)$ (siehe Gl. (2.28)) im Anfangszustand zeigt. Die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(m_f^2/(p^0 \Delta \Theta^2))$ wurden hierbei vernachlässigt.

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts im kollinearen Limes $\hat{\sigma}_{\text{koll}}$ aus Gl. (C.104) erweist es sich als sinnvoll, in der Parametrisierung des Drei-Teilchen-Phasenraums (siehe hierfür Gl. (B.28)) die $\hat{k}_{V_1}^0$ -Integration durch die Integration über den Polarwinkel ξ , dem Winkel zwischen der räumlichen Komponente des Vierer-Impulses \vec{k}_{V_1} und dem des Photons \vec{k}_γ , zu ersetzen. Im kollinearen Limes sind der Winkeln ξ und β identisch mit dem Polar- bzw. dem Azimutalwinkel, so dass gilt $\int d\beta \int d \cos \xi := \int d\Omega_1$. Anstatt die entsprechende Substitution durchzuführen, ist es einfacher, sich auf das geboostete Schwerpunktsystem von $(1-x)p_q$ und $p_{\bar{q}}$ zu beziehen, wobei $\xi^{(x)}$ und $\beta^{(x)}$ die Richtung von $\vec{k}_{V_1}^{(x)}$ bestimmen. Dazu wird die Lorentz-Transformation Λ_μ^ν in z -Richtung benötigt:

$$\hat{k}_{V_1}^{(x)\nu} = \Lambda_\mu^\nu \hat{k}_{V_1}^\mu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\tilde{\beta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\tilde{\beta} & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{k}_{V_1}^0 \\ |\vec{k}_{V_1}| \cos \beta \sin \xi \\ |\vec{k}_{V_1}| \sin \beta \sin \xi \\ |\vec{k}_{V_1}| \cos \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.106})$$

Im ultrarelativistischen Limes $\hat{k}_{V_1}^0 \gg m_{V_1}$ gilt $\hat{k}_{V_1}^0 = \sqrt{|\vec{k}_{V_1}|^2 + m_{V_1}^2} \approx |\vec{k}_{V_1}|$. Für den transformierten Vierer-Vektor $\hat{k}_{V_1}^{(x)\nu}$ ergibt sich somit:

$$\hat{k}_{V_1}^{(x)\nu} = |\vec{k}_{V_1}| \begin{pmatrix} \gamma - \tilde{\beta}\gamma \cos \xi \\ \cos \beta \sin \xi \\ \sin \beta \sin \xi \\ -\tilde{\beta}\gamma + \gamma \cos \xi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \hat{k}_{V_1}^{(x)0} \\ |\vec{k}_{V_1}^{(x)}| \cos \beta \sin \xi \\ |\vec{k}_{V_1}^{(x)}| \sin \beta \sin \xi \\ |\vec{k}_{V_1}^{(x)}| \cos \xi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.107})$$

Durch den Vergleich der linken und der rechten Seite der Gl. (C.107) ergibt sich für den Azimutalwinkel:

$$\beta = \beta^{(x)}, \quad (\text{C.108})$$

und für die Energie des auslaufenden Eichbosons:

$$\left. \begin{aligned} \hat{k}_{V_1}^{(x)0} &= \hat{k}_{V_1}^0 (\gamma - \tilde{\beta} \cos \xi) \\ \hat{k}_{V_1}^{(x)0} \cos \xi^{(x)} &= \hat{k}_{V_1}^0 (-\tilde{\beta}\gamma - \gamma \cos \xi) \end{aligned} \right\} \implies \hat{k}_{V_1}^0 = \hat{k}_{V_1}^{(x)0} \gamma (1 + \tilde{\beta} \cos \xi^{(x)}). \quad (\text{C.109})$$

Nun kann die $\hat{k}_{V_1}^0$ -Integration durch die Integration über $\cos \xi^{(x)}$ ausgedrückt werden:

$$\int d\hat{k}_{V_1}^0 \stackrel{\text{(C.109)}}{=} \int d \cos \xi^{(x)} \left| \frac{\partial \hat{k}_{V_1}^0}{\partial \cos \xi^{(x)}} \right|_{\theta=0} \quad (\text{C.110})$$

mit der Jacobi-Determinante

$$\frac{\partial \hat{k}_{V_1}^0}{\partial \cos \xi^{(x)}} = \gamma \tilde{\beta} \hat{k}_{V_1}^{(x)0} = \gamma \tilde{\beta} |\vec{k}_{V_1}^{(x)}| = -\frac{|\vec{k}_{V_1}^{(x)}| x}{2\sqrt{1-x}}. \quad (\text{C.111})$$

Hierfür wurden jedoch die Definitionen verwendet:

$$\tilde{\beta} := |\vec{\beta}| = \left| \frac{(1-x)\vec{p}_q + \vec{p}_{\bar{q}}}{(1-x)p_q^0 + p_{\bar{q}}^0} \right| = \frac{-x |\vec{p}_q|}{(2-x)p_q^0} \stackrel{|\vec{p}_q|=p_q^0}{=} \frac{-x}{2-x}, \quad (\text{C.112})$$

$$\tilde{\beta}\gamma = \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{1-\tilde{\beta}^2}} = \frac{-x}{2\sqrt{1-x}}. \quad (\text{C.113})$$

Aufgrund der Kollinearität des Photons geht in guter Näherung kein Transversalimpuls verloren, so dass das betrachtete Prozess nur von dem Energieverlust durch die Abstrahlung des Bremsstrahlungsphotons betroffen sein wird. Deshalb bietet sich an, die \hat{k}_{γ}^0 -Integration durch x -Integration unter Verwendung der Relation $k_{\gamma}^0 = x p^0$ zu ersetzen. Die verbliebenen Integrationen der Gl. (C.104) lauten dann:

$$\int d\beta \int d\hat{k}_{\gamma}^0 \int d\hat{k}_{V_1}^0 \Big|_{\theta=0} = p^0 \int dx \int d\Omega_1^{(x)} \left| \frac{\partial \hat{k}_{V_1}^0}{\partial \cos \xi^{(x)}} \right|_{\theta=0} \quad (\text{C.114})$$

mit $d\Omega_1^{(x)} = d\beta^{(x)} d \cos \xi^{(x)}$ und $\beta^{(x)} \equiv \beta$. Die Integrationsgrenzen der x -Integration erhält man mit Hilfe der Gl. (B.27) im kollinearen Limes:

$$[x]^{\min} = \frac{\Delta E}{p^0} = \frac{\Delta E}{E}, \quad (\text{C.115})$$

$$[x]^{\max} = 1 - \frac{(m_{V_1} + m_{V_2})^2}{(2p^0)^2} = 1 - \frac{(m_{V_1} + m_{V_2})^2}{(2E)^2}, \quad (\text{C.116})$$

wobei die obere Grenze $[x]^{\max}$ durch die Energieschwelle $(m_{V_1} + m_{V_2})^2$ des betrachteten Prozesses und die untere Grenze $[x]^{\min}$ durch den Slicing-Cut-Off Parameter ΔE bestimmt.

Einsetzen des Betragsquadrat des Matrixelements aus Gl. (C.93) liefert dann:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\text{koll}} = & \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{1}{j_{\text{in}}} \frac{Q_f^2 e^2}{\varrho^2} \int_{M_{\gamma}}^{[\hat{k}_{\gamma}^0]^{\max}} d\hat{k}_{\gamma}^0 \int_{[\hat{k}_{V_1}^0]^{\min}}^{[\hat{k}_{V_1}^0]^{\max}} d\hat{k}_{V_1}^0 \int_0^{2\pi} d\beta \frac{1}{1-x} \\ & \times \left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} (L_m - 1) \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, \tau) \right|^2 + \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, -\tau) \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{!}{=} \frac{1}{8(2\pi)^4} \frac{1}{j_{\text{in}}} \frac{e^2 Q_f^2}{p^0} \int_{[x]^{\text{min}}}^{[x]^{\text{max}}} dx \int d\Omega_1^{(x)} \frac{|\vec{k}_{V_1}^{(x)}| x}{2\sqrt{1-x}} \frac{1}{1-x} \\
& \quad \times \left\{ \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2} (L_m - 1) \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, \tau) \right|^2 + \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, -\tau) \right|^2 \right\} \\
& \stackrel{\alpha = \frac{e^2}{4\pi}}{=} \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \left\{ (L_m - 1) \right. \\
& \quad \times \int_{[x]^{\text{min}}}^{[x]^{\text{max}}} dx \frac{x^2 - 2x + 2}{x} \underbrace{\int d\Omega_1^{(x)} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2\hat{s}} \frac{2}{\sqrt{\hat{s}}} \frac{|\vec{k}_{V_1}^{(x)}|}{2(1-x)^{3/2}} \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, \tau) \right|^2}_{:= \hat{\sigma}_0^{(x)}((1-x)p, \tau)} \\
& \quad \left. + \int_{[x]^{\text{min}}}^{[x]^{\text{max}}} dx x \underbrace{\int d\Omega_1^{(x)} \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{2\hat{s}} \frac{2}{\sqrt{\hat{s}}} \frac{|\vec{k}_{V_1}^{(x)}|}{2(1-x)^{3/2}} \left| \mathcal{M}_0((1-x)p, -\tau) \right|^2}_{:= \hat{\sigma}_0^{(x)}((1-x)p, -\tau)} \right\} \quad (\text{C.117})
\end{aligned}$$

wobei wegen $p^0 \gg m_f$ im Schwerpunktsystem $q^2 \approx (p^0)^2 \approx E = \sqrt{\hat{s}}/2$ gilt. Die Größe $\hat{\sigma}_0^{(x)}$ ist der Wirkungsquerschnitt des harten Streuprozesses, der in das geboosteten Schwerpunktsystem transformiert wurde.

Mit einer weiteren Substitution $x = 1 - z$ (bzw. $dx = -dz$) wird der Wirkungsquerschnitt in Gl. (C.117) in etwas gewöhnlicheren Form dargestellt. Die Grenzen in Gl. (C.115) lauten dann:

$$[z]^{\text{min}} = 1 - \frac{\Delta E}{E} = 1 - \frac{2\Delta E}{\sqrt{\hat{s}}}, \quad (\text{C.118})$$

$$[z]^{\text{max}} = \frac{(m_{V_1} + m_{V_2})^2}{(2E)^2} = \frac{(m_{V_1} + m_{V_2})^2}{\hat{s}}. \quad (\text{C.119})$$

Für den polarisierten Wirkungsquerschnitt in der kollinearen Näherung ergibt sich dann:

$$\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{pol.}} = \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_{\frac{(m_{V_1} + m_{V_2})^2}{\hat{s}}}^{1 - \frac{2\Delta E}{\sqrt{\hat{s}}}} dz \left\{ \left(\log \left(\frac{\Delta \Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) - 1 \right) P_{ff}(z) \hat{\sigma}_0^{(x)}(zp, \tau) + (1-z) \hat{\sigma}_0^{(x)}(zp, -\tau) \right\} \quad (\text{C.120})$$

mit der Splitting-Funktion

$$P_{ff}(z) = \frac{1+z^2}{1-z}. \quad (\text{C.121})$$

Analoge Rechnung erfolgt auch im Fall des unpolarisierten Wirkungsquerschnittes. Für das Betragsquadrat des Matrixelements in der kollinearen Näherung setzt man jedoch Gl. (C.94)

ein und erhält somit das Resultat:

$$\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{unpol.}} = \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_{\frac{(m_{V_1} + m_{V_2})^2}{\hat{s}}}^{1 - \frac{2\Delta E}{\sqrt{\hat{s}}}} dz \left(\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) - \frac{2z}{1+z^2} \right) P_{ff}(z) \hat{\sigma}_0^{(x)}(zp). \quad (\text{C.122})$$

Um den kollinear-endlichen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, werden im Rahmen dieser Arbeit die kollinearen Massensingularitäten, die in den virtuellen Korrekturen auch vorkommen, mit Hilfe der Plus-Distribution (siehe Gl. (A.13)) in die sogenannte Endpunktsingularität isoliert:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{unpol.}} &= \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_0^{1 - \frac{2\Delta E}{\sqrt{\hat{s}}}} dz \left(\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) - \frac{2z}{1+z^2} \right) P_{ff}(z) \hat{\sigma}_0(zp) \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \int_0^1 dz \left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right]_+ \hat{\sigma}_0(zp) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \hat{\sigma}_0(p) \int_0^{1 - \frac{2\Delta E}{\sqrt{\hat{s}}}} dz \left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right] \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \underbrace{\int_0^1 dz \left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \frac{1+z^2}{1-z} - \frac{2z}{1-z} \right]_+ \hat{\sigma}_0(zp)}_{:= \hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{fin}}} \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\pi} Q_f^2 \hat{\sigma}_0(p) \underbrace{\left[\log \left(\frac{\Delta\Theta^2 \hat{s}}{4m_f^2} \right) \left(\log \left(\frac{2\Delta E}{\sqrt{\hat{s}}} \right) + \frac{3}{2} \right) - \log \left(\frac{4\Delta E^2}{\hat{s}} \right) - 2 \right]}_{:= \hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{reell,E.}}}. \end{aligned} \quad (\text{C.123})$$

Der Term $\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{fin}}$ aus Gl. (C.123) ist nur numerisch integrierbar. Seine divergente Struktur führt exakt zur Aufhebung der kollinearen Divergenzen aus den Partonverteilungsfunktionen, dies wird in Abschnitt 2.2.5 diskutiert. Dagegen ist der Term $\hat{\sigma}_{\text{koll}}^{\text{reell,E.}}$ aus Gl. (C.123), der die Endpunktsingularität beschreibt, rein analytisch integrierbar. Seine divergente Struktur entspricht genau dem kollinear-divergenten Beitrag der virtuellen Korrekturen, die sich deshalb vollständig aufheben.

Anhang D

Skalare N -Punkt-Funktionen

D.1 Definition

Im Folgenden soll die Berechnung von Ein-Schleifen-Diagrammen für einen $2 \rightarrow 2$ Streuprozess erläutert werden. Die in dieser Arbeit auftretenden Diagramme lassen sich je nach Anzahl der direkt an die innere Schleife anschließenden äußeren Linien in Vakuumdiagramme, Selbstenergien, Vertex- und Boxtopologien unterteilen. Die Vakuumdiagramme sind Ein-Punkt-Funktionen, die Selbstenergien entsprechend die Zwei-Punkt-Funktionen und die Vertex- bzw. Boxtopologien enthalten Drei- bzw. Vier-Punkt-Funktionen.

Nach der dimensionalen Regularisierung (siehe Abschnitt 2.1.1) erhalten Ein-Schleifen-Integrale eine Form, die nach der Zahl N der Propagatoren im Nenner und der Zahl P der Integrationsimpulse im Zähler klassifiziert wird

$$T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{q_{\alpha_1}, \dots, q_{\alpha_P}}{D_0 D_1 \dots D_{N-1}}, \quad (\text{D.1})$$

mit den Nennern der Propagatoren

$$\begin{aligned} D_0 &= q^2 - m_0^2 + i\epsilon, \\ D_i &= (q + k_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon, \quad \text{mit } i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

wobei m_i die Masse des i -ten Feldes in der Schleife ist, welche nicht zwingend mit der des externen Feldes i übereinstimmen muss. Hier nennt man $T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N$ Tensorintegral vom Rang P . Die Integrationsergebnisse hängen von der Dimension des Integrals d und von einem unphysikalischen Parameter μ_R ab und divergieren im Grenzfall $d \rightarrow 4$ im Allgemeinen. Für den Divergenzgrad ergibt sich:

$$\mathcal{D} = 2N - (P + d) = \begin{cases} \mathcal{D} < 0 \rightarrow \text{UV-divergent,} \\ \mathcal{D} = 0 \rightarrow \text{logarithmisch UV-divergent,} \\ \mathcal{D} > 0 \rightarrow \text{UV-konvergent.} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Aus Gl. (D.3) ergibt sich, dass für $N = 1$ bzw. $N = 2$ die Integrale UV-divergent sind. Die Tensorintegrale der Drei- bzw. Vier-Punkt-Funktionen können bei mindestens zwei bzw. vier Integrationsimpulsen im Zähler divergieren, während für $P \leq 2N - 4$ alle Tensorintegrale UV-konvergent sind.

Für die Ein- ($T^1 \equiv A$), Zwei- ($T^2 \equiv B$), Drei- ($T^3 \equiv C$) und Vier-Punkt-Funktionen ($T^4 \equiv D$) werden die zugehörigen Integrale nach (D.1) alphabetisch geordnet:

$$A_0(m_0) = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{1}{D_0}, \quad (\text{D.4})$$

$$B_{\{0,\mu,\mu\nu\}}(k, m_0, m_1) = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{\{1, q_\mu, q_\mu q_\nu\}}{D_0 D_1}, \quad (\text{D.5})$$

$$C_{\{0,\mu,\mu\nu,\mu\nu\rho\}}(k_1, k_2, m_0, m_1, m_2) = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{\{1, q_\mu, q_\mu q_\nu, q_\mu q_\nu q_\rho\}}{D_0 D_1 D_2}, \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} D_{\{0,\mu,\mu\nu,\mu\nu\rho,\mu\nu\rho\sigma\}}(k_1, k_2, k_3, k_4, m_0, m_1, m_2, m_3) \\ = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{\{1, q_\mu, q_\mu q_\nu, q_\mu q_\nu q_\rho, q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma\}}{D_0 D_1 D_2 D_3} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

mit $D_0 = [q^2 - m_0^2 + i\epsilon]$ und $D_i = [(q + k_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon]$. Hierbei sind die skalaren Integrale mit Index $P = 0$ versehen. In den in dieser Arbeit betrachteten Prozessen treten die Vier-Punkt-Funktionen mit höchstens drei offenen Indizes $D_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3, k_4, m_0, m_1, m_2, m_3)$ auf.

Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Tensorintegrale in (D.1) bzw. (D.4), (D.5), (D.6), (D.7) in den Lorentz-Indizes und der Invarianz unter Permutationen der Propagatoren können diese Integrale nach der von Passarino und Veltman [136] vorgestellten Methode reduziert werden.¹ Die Vorgehensweise bei der Berechnung einer N -Punkt-Funktion mit beliebiger Lorentz-Struktur umfasst die folgende Schritte:

- Zunächst werden die skalaren N -Punkt-Funktionen berechnet.
- Danach werden die Tensorintegrale in symmetrische Kombinationen externer Impulse und des metrischen Tensors entwickelt.
- Das somit erhaltene Gleichungssystem wird mit dem metrischen Tensor und mit den äußeren Impulsen kontrahiert.
- Die Lösung des resultierenden Gleichungssystems ergibt die skalaren Koeffizienten der Entwicklung der Tensorintegrale in Abhängigkeit von skalaren N -Punkt-Funktionen und Tensorintegralen niedrigerer Stufe.

Jedes Tensorintegral lässt sich also auf skalare Ein-, Zwei-, Drei- und Vier-Punkt-Funktionen reduzieren. Eine mathematische Formulierung des Passarino-Veltman-Reduktionsverfahrens

¹Die ersten Ansätze für einen Algorithmus zur Reduktion der Tensorintegralen gehen auf Brown und Feynman [221], sowie Merlose [222] zurück. Eine systematische Vorgehensweise für $N \leq 4$ erfolgte zum ersten Mal durch von Passarino und Veltman [136] vorgestellten Reduktionsmethode.

ist in [40] gegeben. Dort sind auch die analytischen Ergebnisse für die skalare Drei-Punkt-Funktion C_0 und die skalare Vier-Punkt-Funktion D_0 zusammengefasst. Dabei besteht die skalare Drei-Punkt-Funktion aus vier und die skalare Vier-Punkt-Funktion aus sechzehn Dilogarithmen für reelle äußere Impulse. Die Tensorreduktion ist vor allem bei der Vier-Punkt-Funktion sehr aufwendig. Im Folgenden wird anhand der Drei-Punkt-Funktion $C_{\mu\nu}$ die oben beschriebene Vorgehensweise dargestellt.

Beispiel: Reduktion der Drei-Punkt-Funktion

Um die tensorielle Drei-Punkt-Funktion $C_{\mu\nu}$ zu reduzieren, wird diese sowohl mit den äußeren Impulsen k_1^μ und k_2^ν als auch mit der Metrik $g_{\mu\nu}$ multipliziert. Unter Verwendung von Identitäten²

$$\begin{aligned} q_\mu q_\nu g^{\mu\nu} &= D_0 + m_0^2, \\ q_\mu k_p^\mu &= \frac{1}{2} \left[D_p - D_0 - (k_p^2 - m_p^2 + m_0^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

und der Abkürzung $C_{\dots} = C_{\dots}(k_1, k_2, m_0, m_1, m_2)$ erhält man:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{q^2}{D_0 D_1 D_2} = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \left[\frac{1}{D_1 D_2} + \frac{m_0^2}{D_0 D_1 D_2} \right] \\ &= B_0(k_1 - k_2, m_2, m_1) + m_0^2 C_0, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} k_1^\mu &= \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{(q k_1) q_\nu}{D_0 D_1 D_2} \\ &= \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \int d^d q \frac{1}{2} \left[\frac{q_\nu}{D_0 D_2} - \frac{q_\nu}{D_1 D_2} - (k_1^2 - m_1^2 + m_0^2) \frac{q_\nu}{D_0 D_1 D_2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[B_\nu(k_2, m_0, m_2) + (B_0 k_{2\nu} - B_\nu)(k_1 - k_2, m_2, m_1) - (k_1^2 - m_1^2 + m_0^2) C_\nu \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Eine analoge Vorgehensweise gilt auch für $C_{\mu\nu} k_2^\mu$. Unter Verwendung der Tensorzerlegung

$$B_\mu = B_1 k_{1\mu} \quad \text{und} \quad C_\mu = \sum_{i=1,2} C_i k_{i,\mu} \quad (\text{D.11})$$

ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} \begin{pmatrix} k_1^\mu \\ k_2^\mu \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_2, m_0, m_2 \\ k_1, m_0, m_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B_1 & B_0 + B_1 \\ -B_1 & B_0 + B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 - k_2, m_2, m_1 \\ k_1 - k_2, m_2, m_1 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} (k_1^2 - m_1^2 + m_0^2) C_1 & (k_1^2 - m_1^2 + m_0^2) C_2 \\ (k_2^2 - m_2^2 + m_0^2) C_1 & (k_2^2 - m_2^2 + m_0^2) C_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} k_{1\nu} \\ k_{2\nu} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

²Der fehlende Imaginärteil $i\epsilon$ in Gl. (D.8) verschwindet, da das Integral später im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ auszuwerten ist.

$$C_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = B_0(k_1 - k_2, m_2, m_1) + m_0^2 C_0. \quad (\text{D.13})$$

Andererseits erhält man direkt aus der Tensorzerlegung der Drei-Punkt-Funktion $C_{\mu\nu}$ mit Hilfe von der Relation

$$C_{\mu\nu} = \sum_{i,j=1,2} k_{i\mu}k_{j\nu}C_{ij} + g_{\mu\nu}C_{00} \quad (\text{D.14})$$

folgende Gleichungssystem:

$$C_{\mu\nu} \begin{pmatrix} k_1^\mu \\ k_2^\mu \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C_{00} + \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 \cdot k_2 \\ k_1 \cdot k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} k_{1\nu} \\ k_{2\nu} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.15})$$

$$C_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = dC_{00} + \text{Sp} \left[\begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 \cdot k_2 \\ k_1 \cdot k_2 & k_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \right]. \quad (\text{D.16})$$

Dieses Gleichungssystem muss für alle Impulse $k_{1\mu}$ und $k_{2\nu}$ erfüllt sein. Wird dieses Gleichungssystem gelöst, so können die Funktionen C_{00} und C_{ij} auf die Tensorintegrale mit weniger Propagatoren (also auf B_1 bzw. B_0) oder mit weniger Indizes (also auf C_1, C_2 bzw. C_0) zurückgeführt werden. Wird diese Methode auf alle Tensorintegrale angewandt, so können diese sukzessive durch die vier skalaren Funktionen A_0, B_0, C_0 und D_0 ausgedrückt werden. Die Determinante

$$\det(\mathcal{G}) = \begin{vmatrix} k_1^2 & k_1 \cdot k_2 \\ k_1 \cdot k_2 & k_2^2 \end{vmatrix} \quad (\text{D.17})$$

wird als Gram-Determinante bezeichnet. Anschaulich gibt die Gram-Determinante das von den Vektoren aufgespannte Volumenelement wieder.

Zusammengefasst ergibt sich folgendes Bild: Durch iterative Projektion mit den äußeren Impulsen bzw. dem metrischen Tensor wird bei der Reduktion des Tensorintegrals $T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N$ ein lineares Gleichungssystem erzeugt. Durch diese Projektion entsteht auf der rechten Seite des Gleichungssystems nur die Kontraktion der Basiselemente untereinander, während sich auf der linken Seite des Gleichungssystems die Skalarprodukte zwischen den äußeren Impulsen und dem Schleifen-Impuls ergeben, die sich mit Hilfe der Identitäten in Gl. (D.8) als Propagatoren umschreiben lassen. Dies erlaubt eine Rückführung der Tensorintegrale vom Rang $P < P'$ mit $N \leq N - 1$ Propagatoren. Das zu invertierende Gleichungssystem zerfällt in mehrere Untersysteme, deren Koeffizienten-Matrix \mathcal{G}_{N-1} , auch Gram-Matrix genannt [40],

$$\mathcal{G}_{N-1} = \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 \cdot k_2 & \cdots & k_1 \cdot k_{N-1} \\ k_1 \cdot k_2 & k_2^2 & \cdots & k_2 \cdot k_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1 \cdot k_{N-1} & k_2 \cdot k_{N-1} & \cdots & k_{N-1} \cdot k_{N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{D.18})$$

Skalarprodukte zwischen allen äußeren Impulsen enthält. Zur Lösung des Gleichungssystems muss man \mathcal{G}_{N-1} invertieren und erhält somit die Determinante der Gram-Matrix im Nenner der Lösungen. Verschwindet die Gram-Determinante, so ist die Tensorreduktion auf diese Weise nicht möglich. In der Literatur existieren zahlreiche Methoden zur Lösung dieses Problems. Algebraische Methoden sind unter anderem in Ref. [222–226] beschrieben.

D.2 Symmetrien der N -Punkt-Funktionen

Um die skalare Vier- und Drei-Punkt-Funktionen auf eine eindeutige Form zu bringen, wurden explizit die Symmetrien dieser Funktionen ermittelt. Es stellt sich heraus, dass die Drei-Punkt-Funktionen $3! = 6$ Permutationen und die Vier-Punkt-Funktionen $4! = 24$ Permutationen besitzen. Um die Symmetrien der skalaren Drei- und Vier-Punkt-Funktionen darzustellen, wird die Notation der Drei- und Vier-Punkt-Funktionen wie folgt abgeändert:

$$C_0(k_1, k_2, m_0, m_1, m_2) \equiv C_0(k_1, k_2, k_{12}, m_0, m_1, m_2), \quad (\text{D.19})$$

$$D_0(k_1, k_2, k_3, k_4, m_0, m_1, m_2, m_3) \equiv D_0(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{14}, m_0, m_1, m_2, m_3), \quad (\text{D.20})$$

wobei $k_{12} = k_1 + k_2$ und $k_{14} = k_1 + k_4$ sind.

Die Permutationen der skalaren Drei-Punkt-Funktionen sind:

$$\begin{aligned} C_0(k_1, k_2, k_{12}, m_0, m_1, m_2) &= C_0(k_{12}, k_2, k_1, m_0, m_2, m_1) = \\ C_0(k_1, k_{12}, k_2, m_1, m_0, m_2) &= C_0(k_2, k_{12}, k_1, m_1, m_2, m_0) = \\ C_0(k_{12}, k_1, k_2, m_2, m_0, m_1) &= C_0(k_2, k_1, k_{12}, m_2, m_1, m_0). \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

Die Permutationen der skalaren Vier-Punkt-Funktionen lauten:

$$\begin{aligned} D_0(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{14}, m_0, m_1, m_2, m_3) &= D_0(k_1, k_{14}, k_3, k_{12}, k_4, k_2, m_0, m_1, m_3, m_2) = \\ D_0(k_{12}, k_2, k_{14}, k_4, k_1, k_3, m_0, m_2, m_1, m_3) &= D_0(k_{12}, k_3, k_{14}, k_1, k_4, k_2, m_0, m_2, m_3, m_1) = \\ D_0(k_4, k_{14}, k_2, k_{12}, k_1, k_3, m_0, m_3, m_1, m_2) &= D_0(k_4, k_3, k_2, k_1, k_{12}, k_{14}, m_0, m_3, m_2, m_1) = \\ D_0(k_1, k_{12}, k_3, k_{14}, k_2, k_4, m_1, m_0, m_2, m_3) &= D_0(k_1, k_4, k_3, k_2, k_{14}, k_{12}, m_1, m_0, m_3, m_2) = \\ D_0(k_2, k_{12}, k_4, k_{14}, k_1, k_3, m_1, m_2, m_0, m_3) &= D_0(k_2, k_3, k_4, k_1, k_{14}, k_{12}, m_1, m_2, m_3, m_0) = \\ D_0(k_{14}, k_4, k_{12}, k_2, k_1, k_3, m_1, m_3, m_0, m_2) &= D_0(k_{14}, k_3, k_{12}, k_1, k_2, k_4, m_1, m_3, m_2, m_0) = \\ D_0(k_{12}, k_1, k_{14}, k_3, k_2, k_4, m_2, m_0, m_1, m_3) &= D_0(k_{12}, k_4, k_{14}, k_2, k_3, k_1, m_2, m_0, m_3, m_1) = \\ D_0(k_2, k_1, k_4, k_3, k_{12}, k_{14}, m_2, m_1, m_0, m_3) &= D_0(k_2, k_{14}, k_4, k_{12}, k_3, k_1, m_2, m_1, m_3, m_0) = \\ D_0(k_3, k_4, k_1, k_2, k_{12}, k_{14}, m_2, m_3, m_0, m_1) &= D_0(k_3, k_{14}, k_1, k_{12}, k_2, k_4, m_2, m_3, m_1, m_0) = \\ D_0(k_4, k_1, k_2, k_3, k_{14}, k_{12}, m_3, m_0, m_1, m_2) &= D_0(k_4, k_{12}, k_2, k_{14}, k_3, k_1, m_3, m_0, m_2, m_1) = \\ D_0(k_{14}, k_1, k_{12}, k_3, k_4, k_2, m_3, m_1, m_0, m_2) &= D_0(k_{14}, k_2, k_{12}, k_4, k_3, k_1, m_3, m_1, m_2, m_0) = \\ D_0(k_3, k_{12}, k_1, k_{14}, k_4, k_2, m_3, m_2, m_0, m_1) &= D_0(k_3, k_2, k_1, k_4, k_{14}, k_{12}, m_3, m_2, m_1, m_0). \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

D.3 UV-divergenter Anteil der skalaren N -Punkt-Funktionen

Die in Abschnitt D.1 vorgestellten Tensorintegrale T^N (siehe Gl. (D.1)) sind unter anderem UV-divergent. Im Rahmen dieser Arbeit werden der UV-divergente und der UV-endliche Anteil der Tensorintegrale unabhängig voneinander berechnet, indem die Aufspaltung

$$T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N = T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N|_{\text{div.}} + T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N|_{\text{endl.}} \quad (\text{D.23})$$

vorgenommen wird. Der UV-endliche Anteil $T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N|_{\text{endl.}}$ wird durch die Passarino-Veltman-Reduktion (siehe Abschnitt D.1) und anschließende Berechnung der skalaren N -Punkt-Funktionen bestimmt. Der divergente Anteil der Tensorintegrale $T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N|_{\text{div.}}$ wird durch ihre Ableitung nach dem äußeren Impuls und expliziter Berechnung des UV-divergenten Anteils des skalaren Integrals $T_0^N|_{\text{div.}}$ berechnet. Um das Ergebnis auch für andere skalare Funktionen verwenden zu können, muss die Potenz des Propagators eine beliebige ganze Zahl N sein. Unter Verwendung der Wick-Rotation und Feynman-Parametrisierung werden die Nenner zusammengefasst zu:

$$\frac{1}{D_0 D_1 \dots D_{N-1}} = \Gamma(N) \int_0^1 \frac{dx_N}{\left(D_1 x_1 + D_2 x_2 + \dots + D_0 (1 - \sum_{i=1}^{N-1} x_i)\right)^N} \quad (\text{D.24})$$

$$\text{mit } \int_0^1 dx_N = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-\sum_{i=1}^{N-2} x_i} dx_{N-1}, \quad (\text{D.25})$$

und mit $D_0 = [q^2 - m_0^2 + i\epsilon]$ bzw. $D_i = [(q+k_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon]$. Hierbei ist $\Gamma(N)$ eine transzendente meromorphe Funktion, die sogenannte Eulersche Gamma-Funktion,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} e^{-t}, \quad x > 0 \quad (\text{D.26})$$

mit der Eigenschaft $\Gamma(N+1) = N!$ (für $N \in \mathbb{N}$). Die Größen x_i sind die Feynman-Parameter. Der Nenner in Gl. (D.24) lässt sich auf folgende Gestalt bringen:

$$q^2 + 2q \cdot K(x_i) - M^2(x_i), \quad \text{mit } K \equiv K(x_i) = - \sum_{i=1}^{N-1} k_i x_i \quad \text{und} \quad (\text{D.27})$$

$$M^2 \equiv M^2(x_i) = m_0^2 + \sum_{i=1}^{N-1} (-k_i^2 + m_i^2 - m_0^2) x_i.$$

Der UV-divergente Anteil der Gl. (D.1) lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$T_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N|_{\text{div.}} = \frac{(2\pi\mu)^{4-d}}{i\pi^2} \Gamma(N) \int dx_N \left[\mathcal{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N \right]_{\text{div.}} \quad (\text{D.28})$$

$$\text{mit } \left[\mathcal{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_P}^N \right]_{\text{div.}} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} \dots q_{\alpha_P}}{[q^2 + 2q \cdot K - M^2]^N} \Big|_{\text{div.}}. \quad (\text{D.29})$$

Man erhält für die UV-divergente Struktur des skalaren Integrals folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{H}_0^N \right]_{\text{div.}} &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2 + 2q \cdot K - M^2]^N} \\ &= \dots = (-1)^N i (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(N - \frac{d}{2})}{\Gamma(N)} (K^2 - M^2)^{\frac{d}{2} - N} \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

und durch die Ableitung des Tensorintegrals $[\mathcal{H}_{\alpha_1 \dots \alpha_N}^N]_{\text{div}}$ nach dem äußerem Impuls ergeben sich folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{H}_\alpha^N \right]_{\text{div.}} &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\alpha}{[q^2 + 2q \cdot K - M^2]^N} = -\frac{1}{2(N-1)} \frac{\partial}{\partial k_\alpha} \left(\left[\mathcal{H}_0^{N-1} \right]_{\text{div.}} \right) \\ &= \dots = -k_\alpha (-1)^N i (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(N - \frac{d}{2} - 1)}{(N-1)\Gamma(N-1)} \left(\frac{d}{2} - N + 1 \right) (K^2 - M^2)^{\frac{d}{2} - N} \\ &= -k_\alpha (-1)^N i (4\pi)^{-d/2} \frac{\Gamma(N - \frac{d}{2})}{\Gamma(N)} (K^2 - M^2)^{\frac{d}{2} - N} = -k_\alpha \underbrace{\left[\mathcal{H}_0^N \right]_{\text{div.}}}_{\stackrel{(\text{D.30})}{=} \left[\mathcal{H}_0^N \right]_{\text{div.}}}, \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{H}_{\alpha_1 \alpha_2}^N \right]_{\text{div.}} &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_{\alpha_1} q_{\alpha_2}}{[q^2 + 2q \cdot K - M^2]^N} = -\frac{1}{2(N-1)} \frac{\partial}{\partial k_{\alpha_1}} \left(\left[\mathcal{H}_{\alpha_2}^{N-1} \right]_{\text{div.}} \right) \\ &= \dots = \frac{1}{2(N-1)} g_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\mathcal{H}_0^{N-1} \right]_{\text{div.}} + k_{\alpha_1} k_{\alpha_2} \left[\mathcal{H}_0^N \right]_{\text{div.}}, \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{H}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^N \right]_{\text{div.}} &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3}}{[q^2 + 2q \cdot K - M^2]^N} = -\frac{1}{2(N-1)} \frac{\partial}{\partial k_{\alpha_1}} \left(\left[\mathcal{H}_{\alpha_2 \alpha_3}^{N-1} \right]_{\text{div.}} \right) \\ &= \dots = \frac{1}{2(N-1)} \left(g_{\alpha_2 \alpha_3} k_{\alpha_1} + g_{\alpha_1 \alpha_2} k_{\alpha_3} + g_{\alpha_1 \alpha_3} k_{\alpha_2} \right) \left[\mathcal{H}_0^{N-1} \right]_{\text{div.}} \\ &\quad - k_{\alpha_2} k_{\alpha_3} k_{\alpha_1} \left[\mathcal{H}_0^N \right]_{\text{div.}}, \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{H}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^N \right]_{\text{div.}} &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_{\alpha_1} q_{\alpha_2} q_{\alpha_3} q_{\alpha_4}}{[q^2 + 2q \cdot K - M^2]^N} = -\frac{1}{2(N-1)} \frac{\partial}{\partial k_{\alpha_1}} \left(\left[\mathcal{H}_{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{N-1} \right]_{\text{div.}} \right) \\ &= \dots = \frac{1}{2(N-2)} \left[g_{\alpha_2 \alpha_3} g_{\alpha_1 \alpha_4} + g_{\alpha_4 \alpha_2} g_{\alpha_1 \alpha_3} + g_{\alpha_4 \alpha_3} g_{\alpha_1 \alpha_2} \right] \left[\mathcal{H}_0^{N-2} \right]_{\text{div.}} \\ &\quad - \left[g_{\alpha_2 \alpha_3} k_{\alpha_4} + g_{\alpha_4 \alpha_2} k_{\alpha_3} + g_{\alpha_4 \alpha_3} k_{\alpha_2} \right] k_{\alpha_1} \left[\mathcal{H}_0^{N-1} \right]_{\text{div.}}. \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Unter Verwendung der Eigenschaften der Gamma-Funktion $\Gamma(N)$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma_E + \mathcal{O}(x), \quad \Gamma(x-1) = -\frac{1}{x} - \gamma_E + \mathcal{O}(x) \quad (\text{D.35})$$

ergeben sich folgende Ergebnisse für den UV-divergenten Anteil der skalaren N-Punkt-Funktionen:

$$\left[A_0(m_0) \right]_{\text{div.}} = m_0^2 \Delta, \quad (\text{D.36})$$

$$\left[A_{\mu\nu}(m_0) \right]_{\text{div.}} = \frac{1}{4} m_0^4 g_{\mu\nu} \Delta, \quad (\text{D.37})$$

$$\left[B_0(k, m_0, m_1) \right]_{\text{div.}} = \Delta, \quad (\text{D.38})$$

$$\left[B_\mu(k, m_0, m_1) \right]_{\text{div.}} = -\frac{1}{2} k_\mu \Delta, \quad (\text{D.39})$$

$$\left[B_{\mu\nu}(k, m_0, m_1) \right]_{\text{div.}} = \left[\frac{1}{3} k_\mu k_\nu + \frac{1}{4} \left(m_0^2 + m_1^2 - \frac{1}{3} k^2 \right) g_{\mu\nu} \right] \Delta, \quad (\text{D.40})$$

$$\left[C_{\mu\nu}(k_1, k_2, m_0, m_1, m_2) \right]_{\text{div.}} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \Delta, \quad (\text{D.41})$$

$$\left[C_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, m_0, m_1, m_2) \right]_{\text{div.}} = \frac{1}{12} \left((k_{1\mu} + k_{2\mu}) g_{\nu\rho} + (k_{1\nu} + k_{2\nu}) g_{\mu\rho} + (k_{1\rho} + k_{2\rho}) g_{\mu\nu} \right) \Delta \quad (\text{D.42})$$

mit $\Delta = \frac{1}{\epsilon_{\text{UV}}} - \gamma_E + \log(4\pi)$.

Anhang E

Numerische Ergebnisse für LHC bei $\sqrt{S} = 8 \text{ TeV}$ und für Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96 \text{ TeV}$

Hier werden sowohl die präzisen Zahlenwerte als auch die graphische Darstellung der Ergebnisse für die unpolarisierten Prozesse der hadronischen Eichboson-Paarproduktion am LHC mit der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 8 \text{ TeV}$ und am Tevatron mit der Kollisionsenergie $\sqrt{S} = 1.96 \text{ TeV}$ angegeben. Die numerische Resultaten wurden ebenfalls mit den Eingabeparametern aus Abschnitt 4.2.2 berechnet.

In den Tabellen E.1 und E.2 sind die Resultate für LHC bei den Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 8 \text{ TeV}$ aufgeführt. Dabei wurden zusätzliche Phasenraum-Schnitte an den Transversalimpuls eines auslaufendes Bosons in Tabelle E.1 und an die invarianten Masse der auslaufenden Eichbosonen in Tabelle E.2 angewandt. Die graphische Visualisierung dieser Werte ist in Abbildungen E.1 und E.2 dargestellt.

Es werden auch Vollständigkeit halber die differentielle Verteilungen in Abhängigkeit von verschiedenen Observablen, die sowohl für LHC als auch für Tevatron relevant sind, dargestellt.

pp $\rightarrow V_1 V_2 (+\gamma) + X$ bei $\sqrt{S} = 8$ TeV											
k_T^{cut}	W ⁻ W ⁺			ZZ		W ⁺ Z		W ⁻ Z		$\gamma\gamma$	
GeV	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	$\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$
50	10.78 pb	-2.71	2.4	1.913 pb	-6.2	2.651 pb	-1.8	1.610 pb	-1.5	1.843 pb	0.6
100	2.656 pb	-6.83	3.6	0.523 pb	-10.2	0.706 pb	-3.4	0.384 pb	-3.0	0.242 pb	-1.3
150	0.802 pb	-10.85	4.5	0.164 pb	-14.5	0.219 pb	-6.1	0.106 pb	-5.7	64.40 fb	-3.5
250	0.123 pb	-18.53	5.6	26.08 fb	-22.5	34.70 fb	-11.9	14.10 fb	-11.5	9.515 pb	-6.7
350	28.33 fb	-25.12	6.3	6.094 fb	-29.3	8.073 fb	-17.0	2.908 fb	-16.6	2.217 fb	-9.3
500	4.664 fb	-33.43	7.3	1.011 fb	-38.1	1.311 fb	-23.2	422.9 ab	-22.9	380.1 ab	-12.3
600	1.638 pb	-38.16	8.0	354.0 ab	-43.2	449.9 ab	-26.6	138.7 ab	-26.5	137.7 ab	-14.2
750	391.1 ab	-44.66	9.2	83.51 ab	-50.1	101.8 ab	-31.1	30.31 ab	-31.1	34.62 ab	-16.5

Tabelle E.1: Gezeigt sind die Zahlenwerte der integrierten k_T^{cut} -Verteilung in Bornscher Näherung und die dazugehörigen EW Korrekturen für LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV.

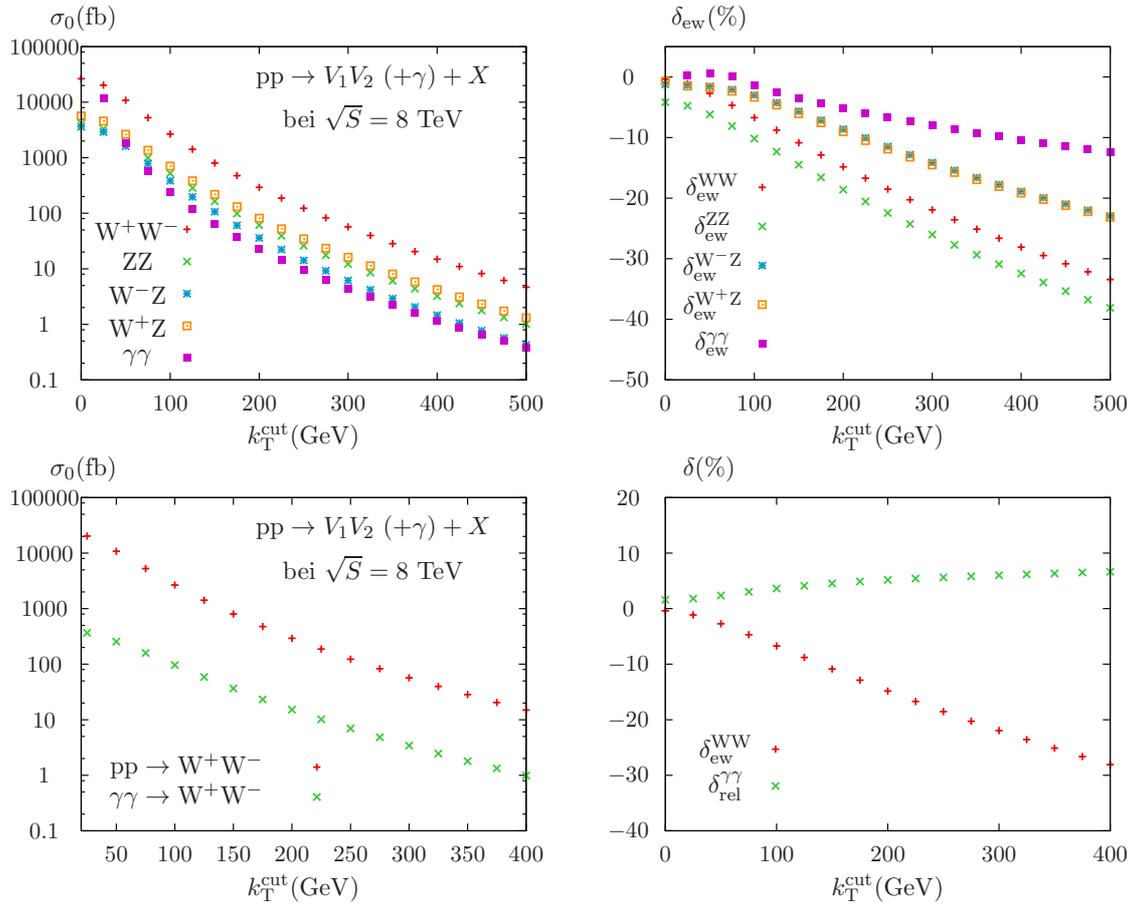


Abbildung E.1: Wie für die integrierte k_T^{cut} -Verteilung am LHC bei $\sqrt{S} = 14$ TeV.

pp $\rightarrow V_1 V_2 (+\gamma) + X$ bei $\sqrt{S} = 8$ TeV											
M_{VV}^{cut} GeV	$W^- W^+$			ZZ		$W^+ Z$		$W^- Z$		$\gamma\gamma$	
	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	$\delta_{\text{rel}}^{\gamma\gamma}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$	σ_0	$\delta_{\text{ew}}(\%)$
200	16.097 pb	-2.0	2.1	3.271 pb	-4.9	4.728 pb	-1.5	2.980 pb	-1.4	0.579 pb	-0.3
300	5.044 pb	-3.7	3.6	0.950 pb	-7.1	1.921 pb	-2.5	1.117 pb	-2.2	0.169 pb	-1.6
400	1.956 pb	-5.1	5.2	0.360 pb	-8.7	0.821 pb	-3.5	0.439 pb	-3.2	66.45 fb	-2.6
500	0.865 pb	-6.6	6.8	0.159 pb	-10.2	0.387 pb	-4.5	0.191 pb	-4.2	30.52 fb	-3.6
700	0.212 pb	-9.8	10.4	39.70 fb	-13.5	0.103 pb	-6.9	44.69 fb	-6.5	8.471 fb	-5.2
800	0.113 pb	-11.7	12.1	21.27 fb	-15.4	56.47 fb	-8.3	23.07 fb	-7.8	4.866 fb	-5.8
1000	36.04 fb	-15.7	15.5	6.700 fb	-19.5	1.835 fb	-11.5	6.807 fb	-11.0	1.791 fb	-7.1
1200	13.52 fb	-18.9	18.1	2.388 fb	-23.7	6.865 fb	-14.4	2.382 fb	-14.0	728.4 ab	-8.3
1500	3.640 fb	-23.1	22.1	613.3 ab	-28.5	1.845 fb	-18.2	606.0 ab	-17.6	212.5 ab	-9.8

Tabelle E.2: Gezeigt sind die Zahlenwerte der integrierten M_{VV}^{cut} -Verteilung in führender Ordnung und die dazugehörigen EW Korrekturen für LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV.

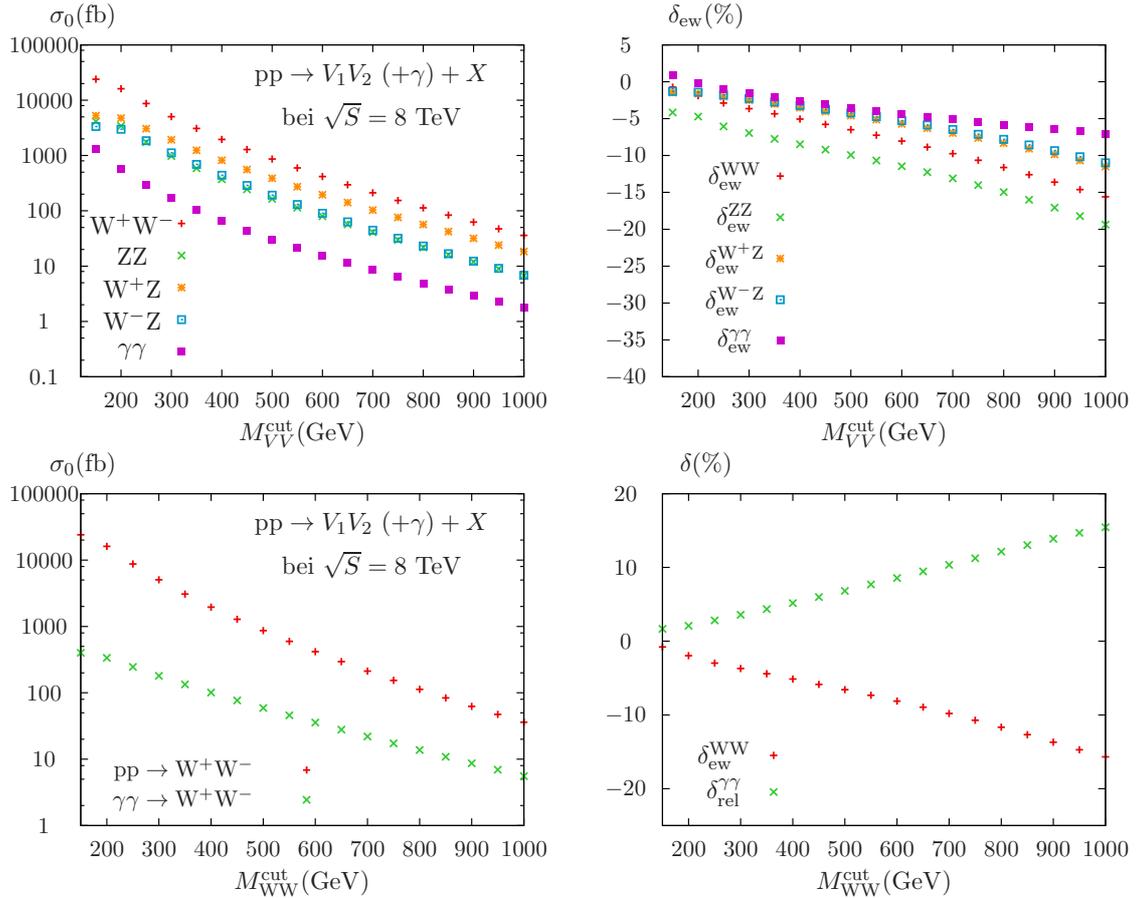


Abbildung E.2: Wie für die integrierte M_{VV}^{cut} -Verteilung am LHC bei $\sqrt{S} = 14$ TeV.

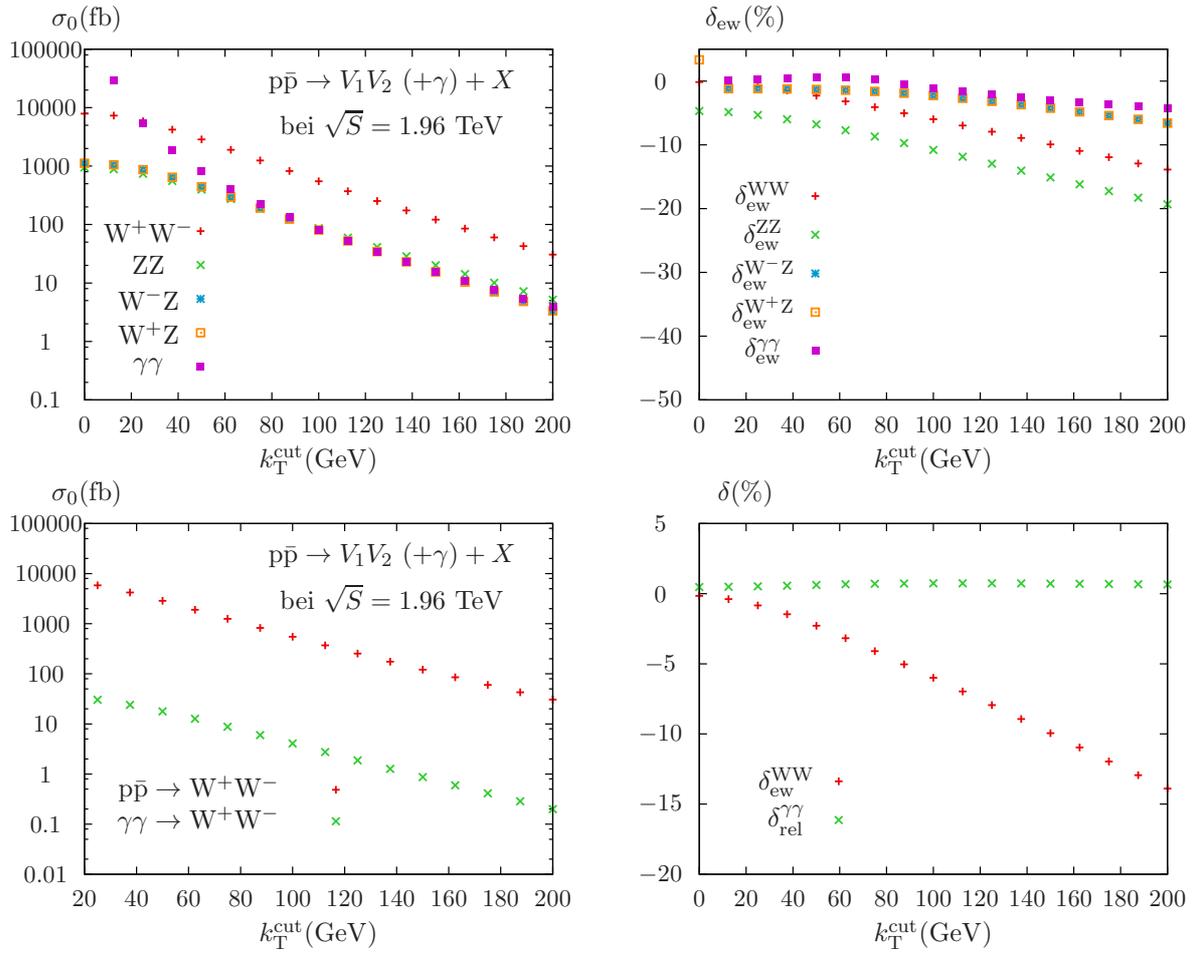


Abbildung E.3: Integrierte k_T^{cut} -Verteilungen in Bornscher Näherung (links) und die entsprechenden EW Korrekturen (rechts) am Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV. Unten rechts sind die relativen Beiträge des Photon-induzierten Prozesses zur W-Paarproduktion abgebildet.

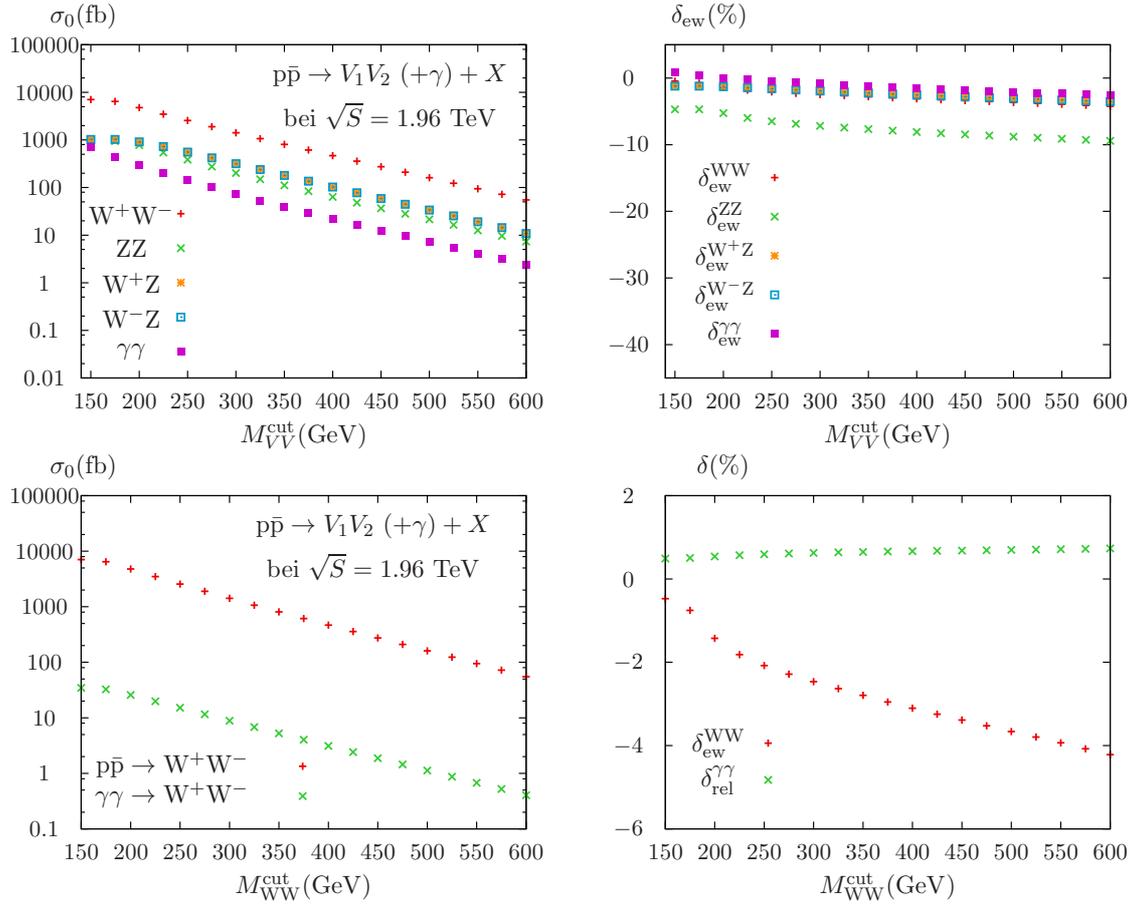


Abbildung E.4: Integrierte M_{VV}^{cut} -Verteilungen in Bornscher Näherung (links) und die entsprechenden EW Korrekturen (rechts) am Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV. Unten rechts sind die relativen Beiträge des Photon-induzierten Prozesses zur W-Paarproduktion abgebildet.

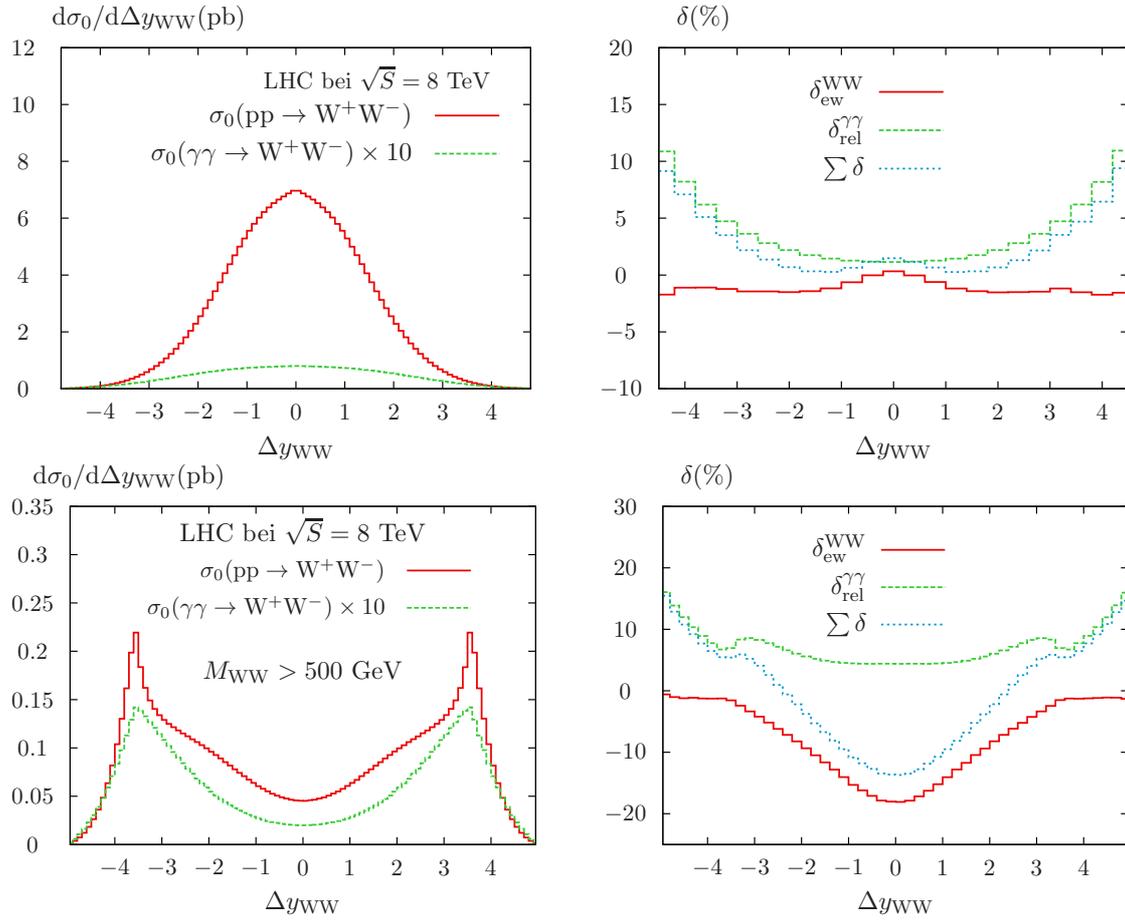


Abbildung E.5: Verteilungen über die Rapiditätsdifferenz Δy_{WW} in führender Ordnung (links) und die entsprechenden EW Korrekturen (rechts) zur Eichboson-Paarproduktion am LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV. Oben sind die Verteilungen ohne Anwendung eines zusätzlichen Selektions-Schnitts an der invarianten Masse der W-Paare gezeigt, während die Graphen unten die Ergebnisse mit einem zusätzlichen Schnitt $M_{WW} > 500$ GeV darstellen.

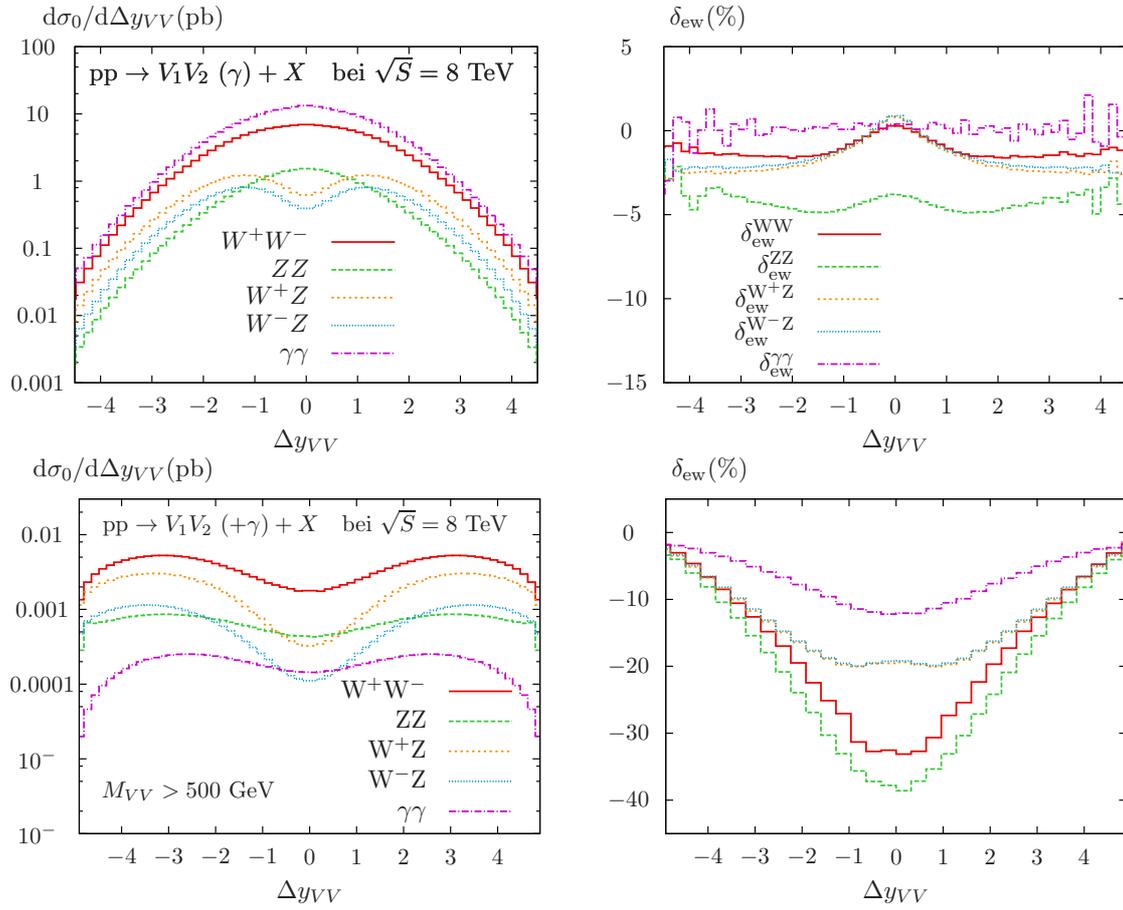


Abbildung E.6: Verteilungen über die Rapiditätsdifferenz Δy_{VV} in führender Ordnung (links) und die entsprechenden EW Korrekturen (rechts) zur Eichboson-Paarproduktion am LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV. Oben sind die Verteilungen ohne Anwendung eines zusätzlichen Selektions-Schnitts an der invarianten Masse der auslaufenden Eichbosonpaare gezeigt, während die Graphen unten die Ergebnisse mit einem zusätzlichen Schnitt $M_{VV} > 500$ GeV darstellen.

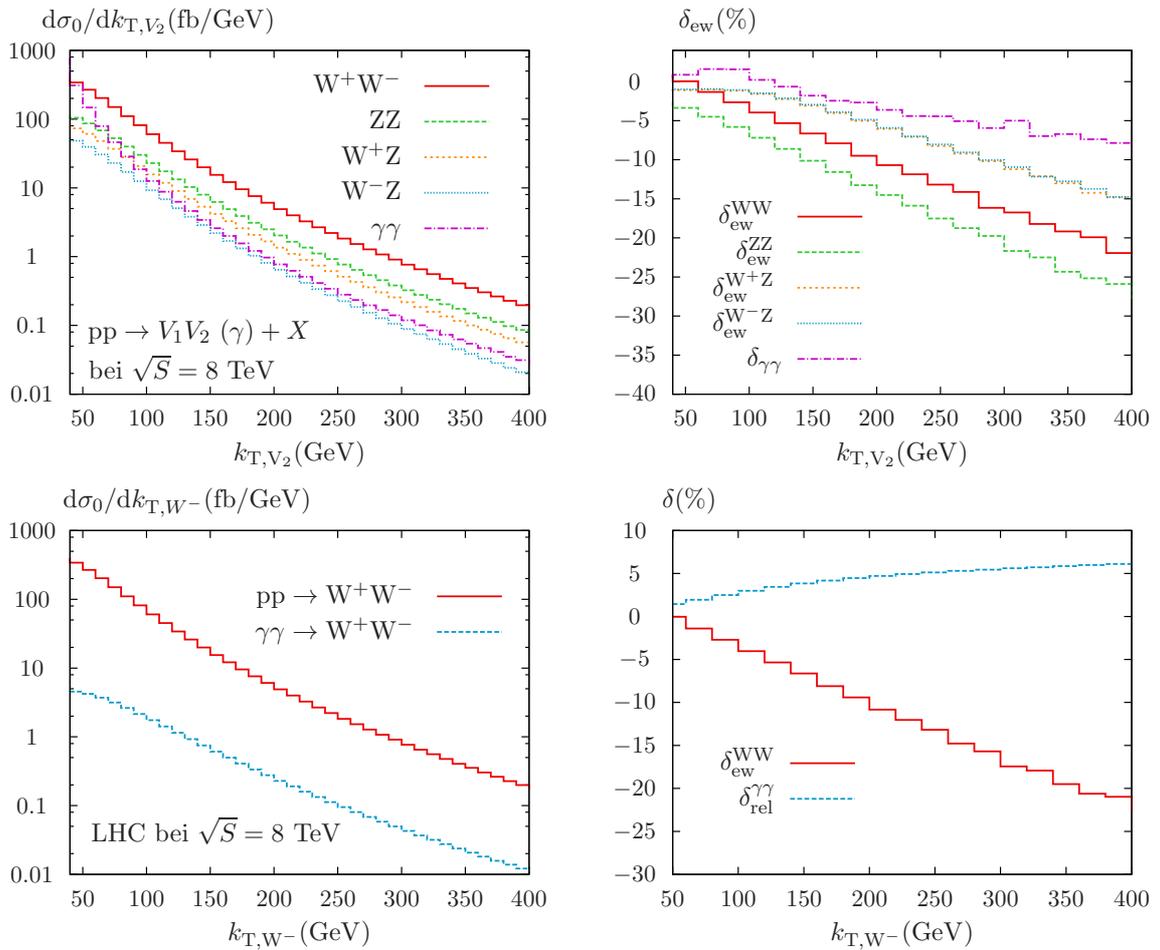


Abbildung E.7: Gezeigt ist die differentielle Verteilung im Transversalimpuls k_T eines auslaufenden Eichbosons in der Bornscher Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. der relative Beitrag δ_{rel} des $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesses zur W^+W^- -Produktion am LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV.

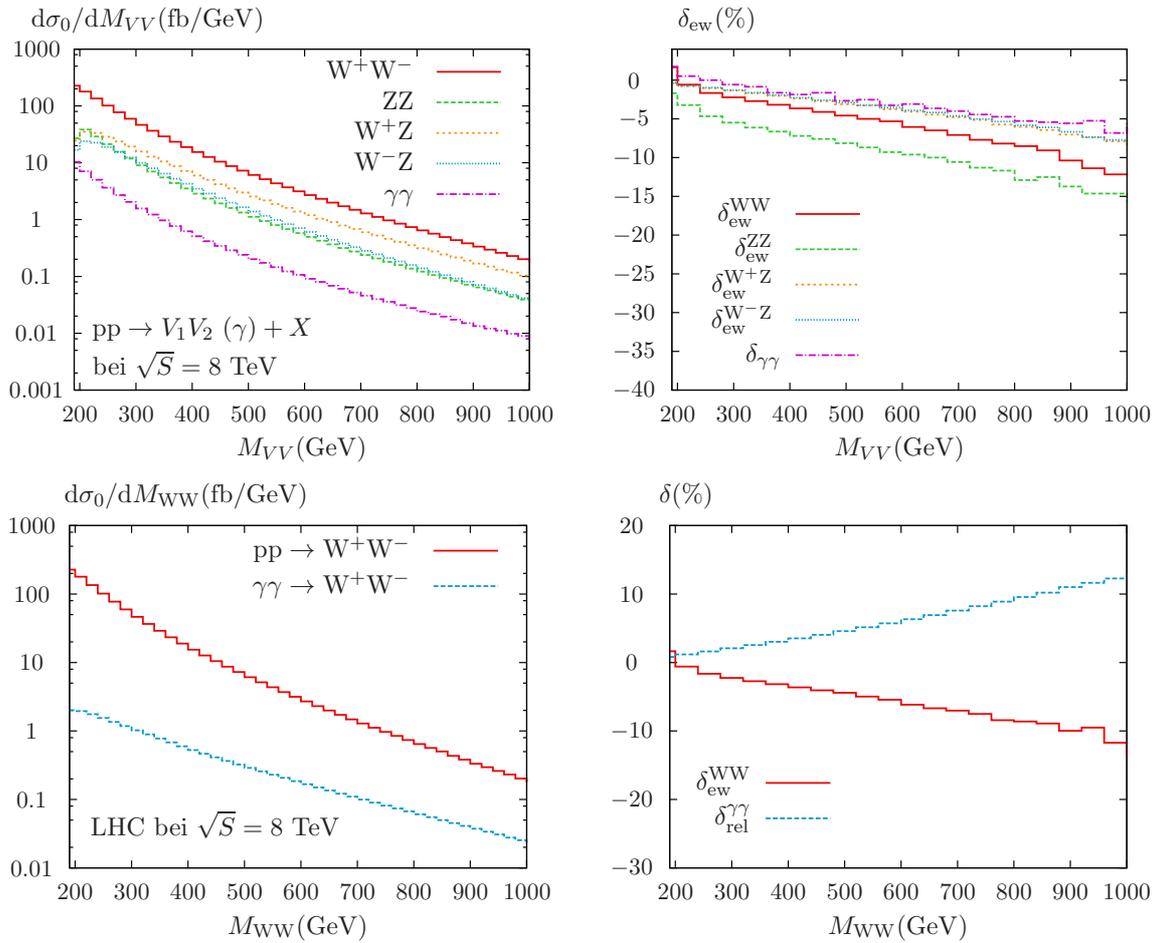


Abbildung E.8: Gezeigt ist die differentielle Verteilung in der invarianten Masse der auslaufenden Eichbosonen M_{VV} in Bornscher Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. der relative Beitrag δ_{rel} des $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesses zur W^+W^- -Produktion am LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV.

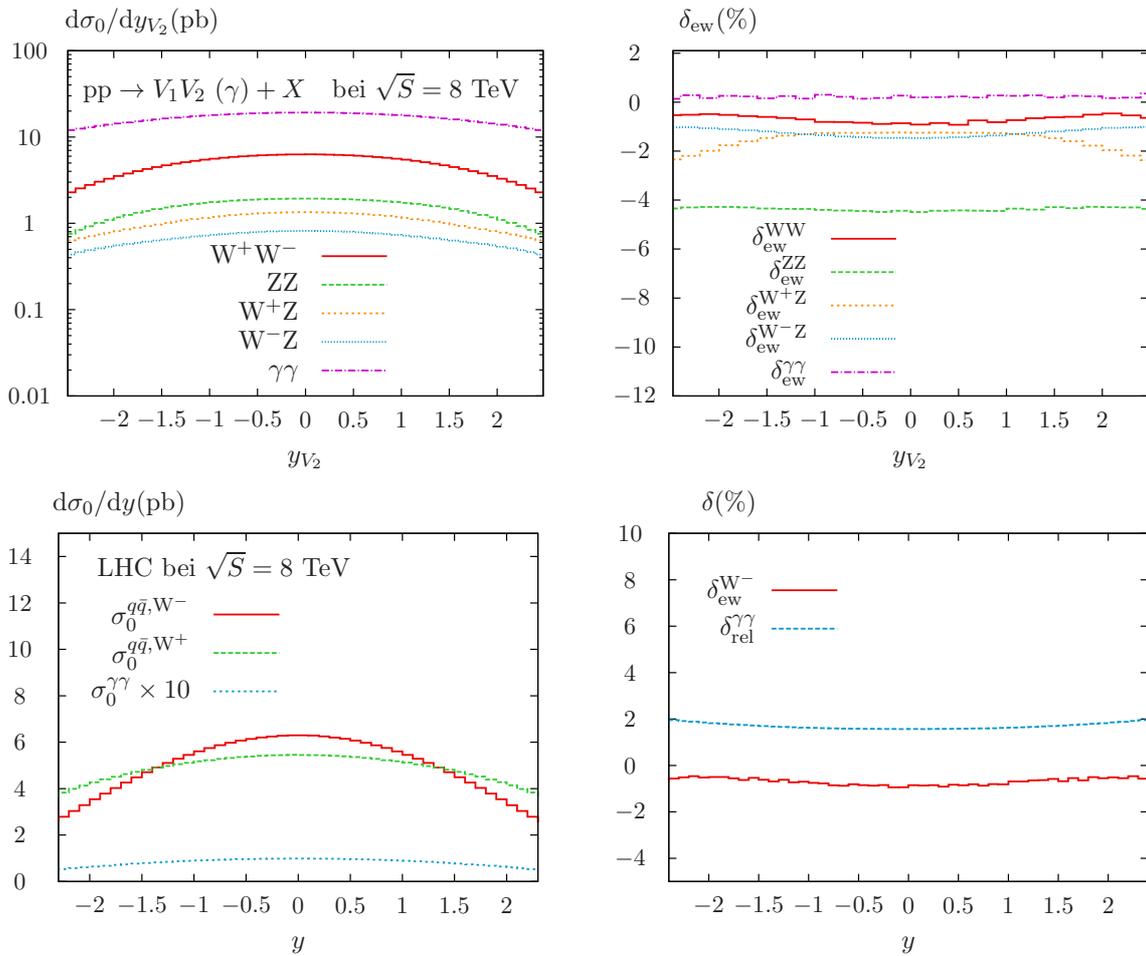


Abbildung E.9: Gezeigt ist die differentielle Rapiditätsverteilung y_{V_2} in Bornscher Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. der relative Beitrag δ_{rel} des $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesses zur W^+W^- -Produktion (rechts mitte) am LHC bei $\sqrt{S} = 8$ TeV.

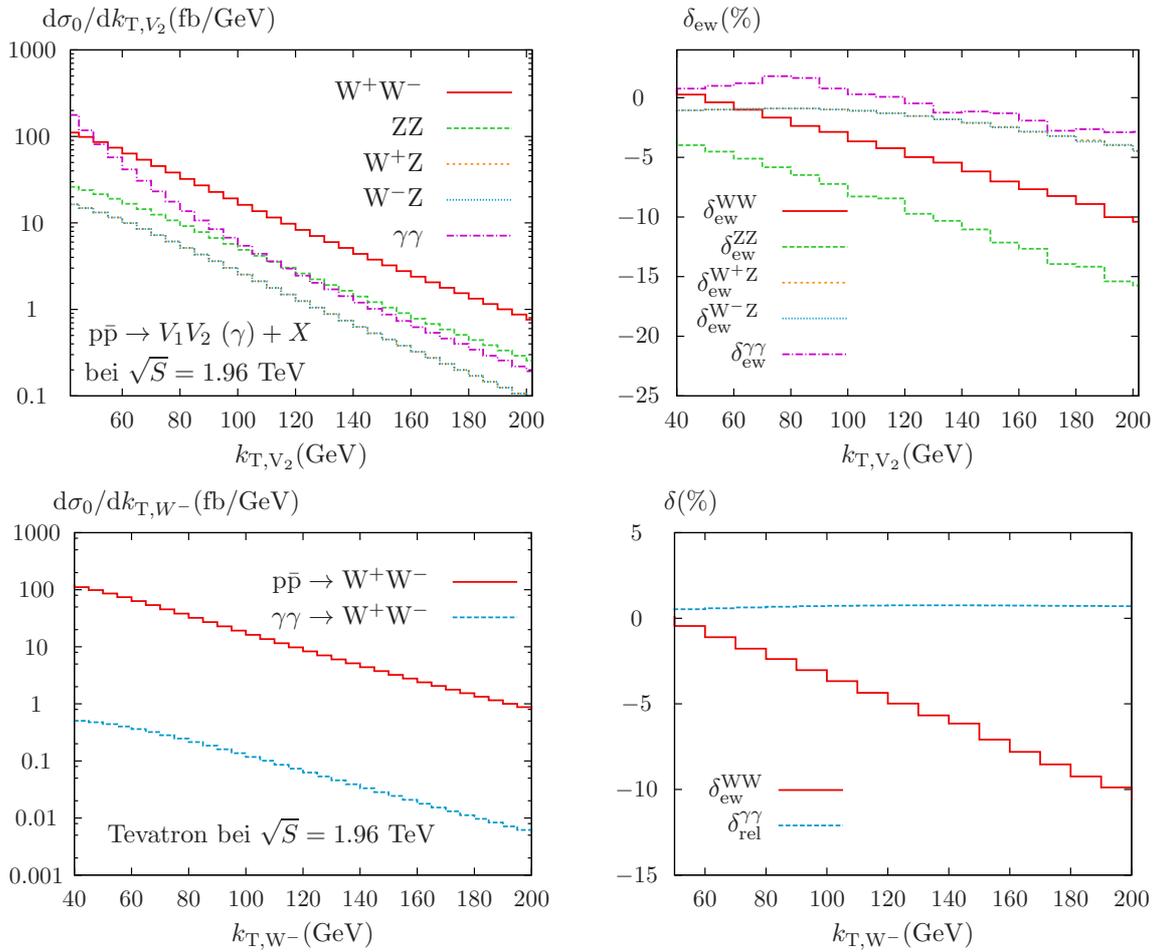


Abbildung E.10: Verteilung über den Transversalimpuls eines auslaufenden Eichbosons k_T in Bornscher Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. der relative Beitrag δ_{rel} des $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesses zur W^+W^- -Produktion am Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV.

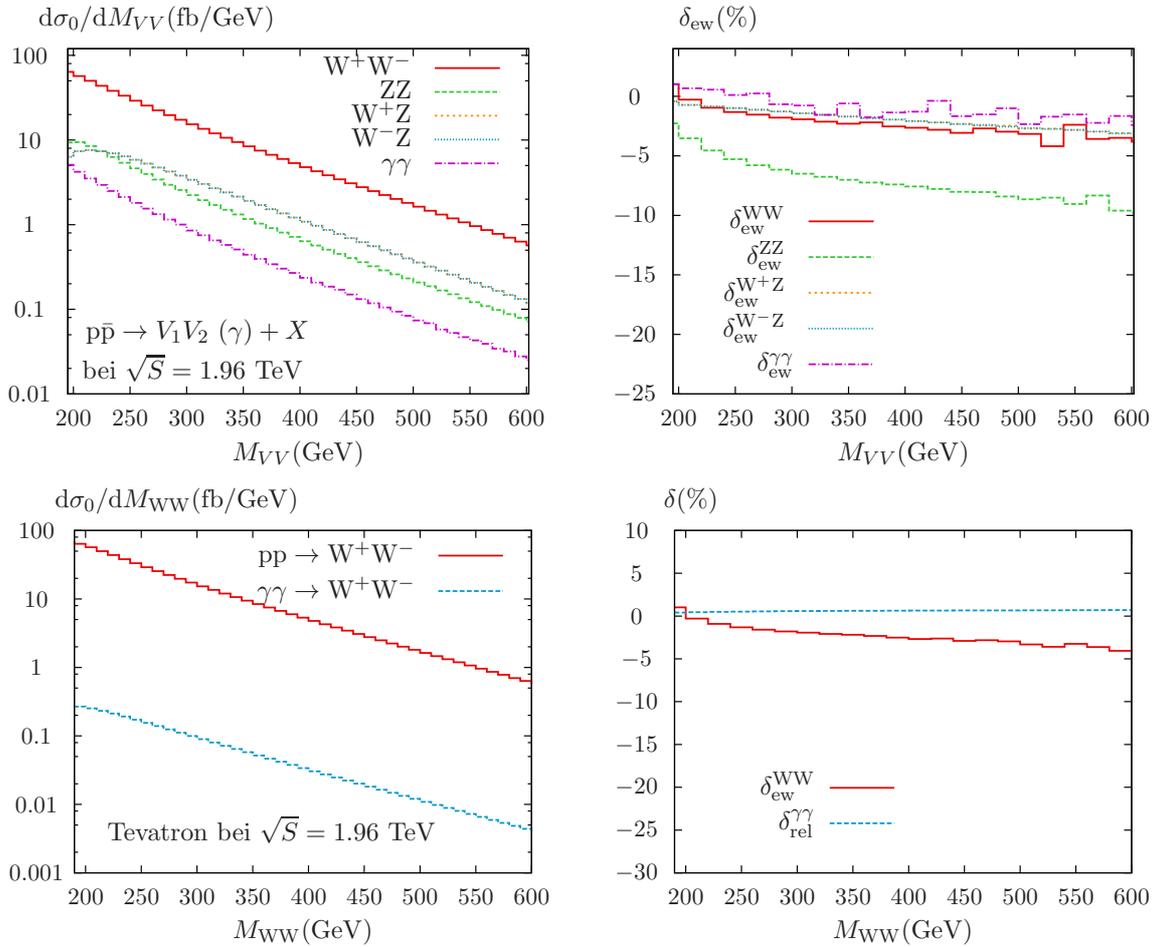


Abbildung E.11: Verteilung über die invariante Masse der auslaufenden Eichbosonen M_{VV} in Bornscher Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. der relative Beitrag δ_{rel} des $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesses zur W^+W^- -Produktion am Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV.

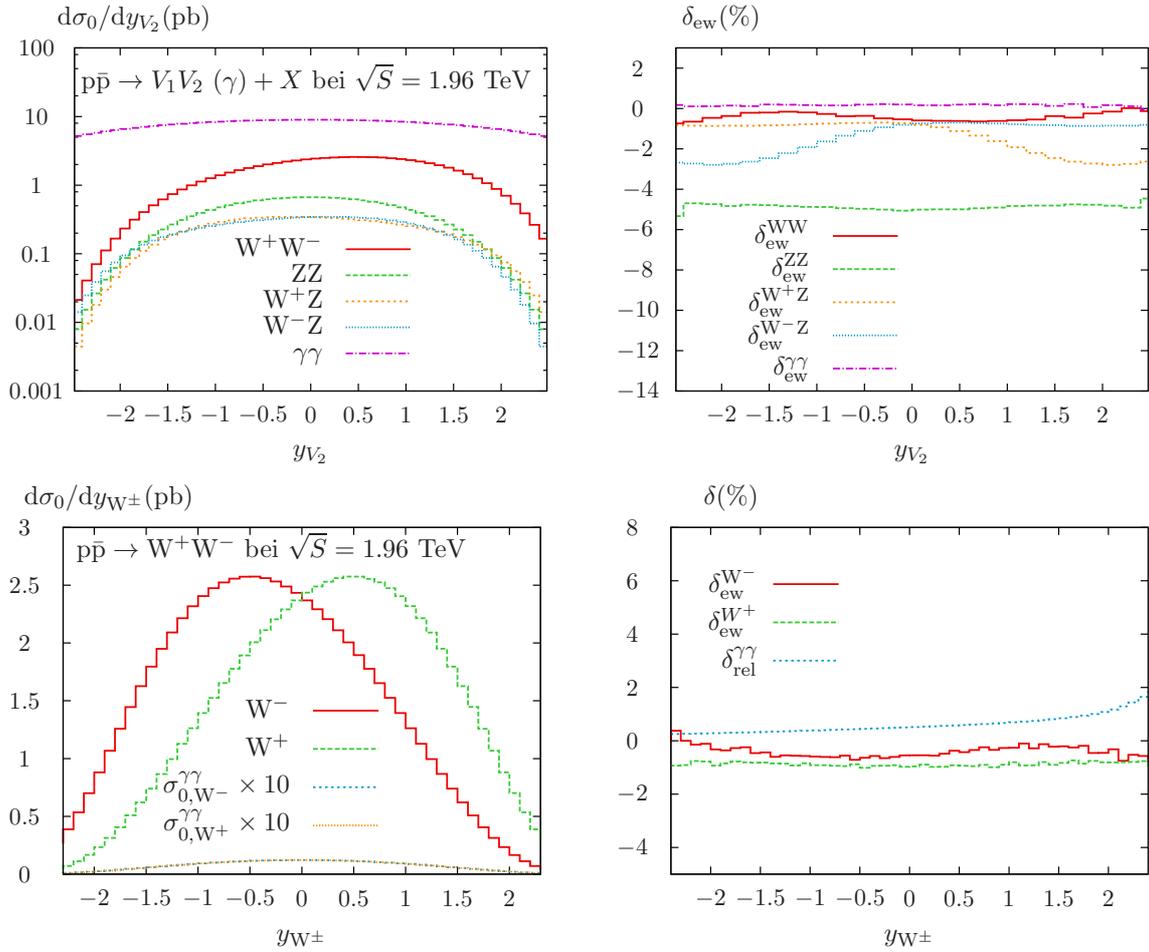


Abbildung E.12: Rapidityverteilung y_{V_2} in Bornscher Näherung (links) sowie die dazugehörigen relativen elektroschwachen Korrekturen δ_{ew} (rechts oben) zur Eichboson-Paarproduktion bzw. der relative Beitrag δ_{rel} des $\gamma\gamma$ -induzierten Prozesses zur W^+W^- -Produktion (rechts mitte) am Tevatron bei $\sqrt{S} = 1.96$ TeV.

Literaturverzeichnis

- [1] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
- [2] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
- [3] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*, Conf. Proc. C **680519** (1968) 367.
- [4] F. J. Hasert, H. Faissner, W. Krenz, J. Von Krogh, D. Lanske, J. Morfin, K. Schultze and H. Weerts *et al.*, *Search for Elastic ν_μ Electron Scattering*, Phys. Lett. B **46** (1973) 121.
- [5] F. J. Hasert *et al.* [Gargamelle Neutrino Collaboration], *Observation of Neutrino Like Interactions Without Muon Or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment*, Phys. Lett. B **46** (1973) 138.
- [6] F. J. Hasert *et al.* [Gargamelle Neutrino Collaboration], *Observation of Neutrino Like Interactions without Muon or Electron in the Gargamelle Neutrino Experiment*, Nucl. Phys. B **73**, 1 (1974).
- [7] G. Arnison *et al.* [UA1 Collaboration], *Experimental Observation of Isolated Large Transverse Energy Electrons with Associated Missing Energy at $\sqrt{s} = 540$ GeV*, Phys. Lett. B **122** (1983) 103.
- [8] M. Banner *et al.* [UA2 Collaboration], *Observation of Single Isolated Electrons of High Transverse Momentum in Events with Missing Transverse Energy at the CERN $\bar{p}p$ Collider*, Phys. Lett. B **122** (1983) 476.
- [9] G. 't Hooft and M. Veltman, *Proceedings of the Colloquium on Renormalization of Yang-Mills Fields*, Marseille, June 19-23, 1972.
- [10] G. 't Hooft, *The Birth Of Asymptotic Freedom*, Nucl. Phys. B **254** (1985) 11.
- [11] D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically Free Gauge Theories. 1*, Phys. Rev. D **8** (1973) 3633.
- [12] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.
- [13] M. Gell-Mann, *A Schematic Model of Baryons and Mesons*, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [14] G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1*, CERN-TH-401.

- [15] G. Zweig, *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2*, Developments in the Quark Theory of Hadrons, Volume 1. Edited by D. Lichtenberg and S. Rosen. pp. 22-101
- [16] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], *Review of particle physics*, J. Phys. G **33** (2006) 1.
- [17] W. Hollik and G. Duckeck, *Electroweak precision tests at LEP*, Springer Tracts Mod. Phys. **162** (2000) 1.
- [18] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Braunschweig, Vieweg (1986).
- [19] T. van Ritbergen and R. G. Stuart, *Complete two loop quantum electrodynamic contributions to the muon lifetime in the Fermi model*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 488 [hep-ph/9808283].
- [20] M. Steinhauser and T. Seidensticker, *Second order corrections to the muon lifetime and the semileptonic B decay*, Phys. Lett. B **467** (1999) 271 [hep-ph/9909436].
- [21] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], *Observation of top quark production in $\bar{p}p$ collisions*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2626 [hep-ex/9503002].
- [22] S. Abachi *et al.* [D0 Collaboration], *Observation of the top quark*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2632 [hep-ex/9503003].
- [23] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys. Lett. B **716** (2012) 1-29 [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [24] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys. Lett. B **716** (2012) 30-61 [arXiv:1207.7235 [hep-ex]].
- [25] <https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/CMSPublic/PhysicsResultsHIG>, <https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/AtlasPublic>, abgefrufen am 16. Februar 2014 um 15:01 Uhr.
- [26] S. Dittmaier *et al.* [LHC Higgs Cross Section Working Group Collaboration], *Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 1. Inclusive Observables*, arXiv:1101.0593 [hep-ph].
- [27] S. Dittmaier, C. Mariotti, G. Passarino, R. Tanaka, S. Alekhin, J. Alwall and E. A. Bagnaschi *et al.*, *Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 2. Differential Distributions*, arXiv:1201.3084 [hep-ph].
- [28] S. Heinemeyer *et al.* [LHC Higgs Cross Section Working Group Collaboration], *Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 3. Higgs Properties*, arXiv:1307.1347 [hep-ph].
- [29] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Measurement of ZZ production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV and limits on anomalous ZZZ and ZZ γ couplings with the ATLAS detector*, JHEP **1303** (2013) 128 [arXiv:1211.6096 [hep-ex]].

-
- [30] G. Aad *et al.* [ATLAS Collaboration], *Measurement of W^+W^- production in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV with the ATLAS detector and limits on anomalous WWZ and $WW\gamma$ couplings*, Phys. Rev. D **87** (2013) 112001 [arXiv:1210.2979 [hep-ex]].
- [31] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Measurement of the sum of WW and WZ production with W +dijet events in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV*, Eur. Phys. J. C **73**, 2283 (2013) [arXiv:1210.7544 [hep-ex]].
- [32] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Measurement of the W^+W^- Cross section in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV and Limits on Anomalous $WW\gamma$ and WWZ couplings*, Eur. Phys. J. C **73** (2013) 2610 [arXiv:1306.1126 [hep-ex]].
- [33] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Measurement of $W+W^-$ and ZZ production cross sections in pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV*, Phys. Lett. B **721** (2013) 190 [arXiv:1301.4698 [hep-ex]].
- [34] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Measurement of the ZZ production cross section and search for anomalous couplings in $2l2l'$ final states in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV*, JHEP **1301** (2013) 063 [arXiv:1211.4890 [hep-ex]].
- [35] S. Chatrchyan *et al.* [CMS Collaboration], *Study of exclusive two-photon production of W^+W^- in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV and constraints on anomalous quartic gauge couplings*, JHEP **1307**, 116 (2013) [arXiv:1305.5596 [hep-ex]].
- [36] G. Passarino, *Precision physics near LEP shutdown and evolutionary developments*, J. Phys. G **29** (2003) 121 [hep-ph/0101299].
- [37] M. Böhm, A. Denner and H. Joos, *Gauge theories of the strong and electroweak interaction*, Stuttgart, Germany: Teubner (2001) 784 p.
- [38] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*, Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [39] Cheng, T.P. and Li, L.F, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford, UK: Clarendon (2000).
- [40] A. Denner, *Techniques for calculation of electroweak radiative corrections at the one loop level and results for W physics at LEP-200*, Fortsch. Phys. **41** (1993) 307 [arXiv:0709.1075 [hep-ph]].
- [41] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry*, Phys. Rev. D **2**, 1285 (1970).
- [42] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, *Advantages of the Color Octet Gluon Picture*, Phys. Lett. B **47** (1973) 365.
- [43] D. J. Gross and F. Wilczek, *Asymptotically Free Gauge Theories. 2.*, Phys. Rev. D **9** (1974) 980.
- [44] B. T. Cleveland, T. Daily, R. Davis, Jr., J. R. Distel, K. Lande, C. K. Lee, P. S. Wildenhain and J. Ullman, *Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector*, Astrophys. J. **496** (1998) 505.

- [45] Q. R. Ahmad *et al.* [SNO Collaboration], *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 011301 [nucl-ex/0204008].
- [46] J. Beringer *et al.*, *Particle Data Group*, Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).
- [47] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, *Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*, Phys. Rev. **105** (1957) 1413.
- [48] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. **12** (1964) 132.
- [49] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.
- [50] P. W. Higgs, *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Phys. Rev. **145** (1966) 1156.
- [51] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [52] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, *Global Conservation Laws and Massless Particles*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 585.
- [53] T. W. B. Kibble, *Symmetry breaking in non-Abelian gauge theories*, Phys. Rev. **155**, 1554 (1967).
- [54] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*, Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531.
- [55] M. Kobayashi, H. Kondo and T. Maskawa, *Symmetry breaking of the chiral $U(3) \times U(3)$ and the quark model*, Prog. Theor. Phys. **45** (1971) 1955.
- [56] B. Pontecorvo, *Mesonium and anti-mesonium*, Sov. Phys. JETP **6** (1957) 429 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** (1957) 549].
- [57] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*, Sov. Phys. JETP **7** (1958) 172 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34** (1957) 247].
- [58] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, *Remarks on the unified model of elementary particles*, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 870.
- [59] B. Pontecorvo, *Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge*, Sov. Phys. JETP **26** (1968) 984 [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53** (1967) 1717].
- [60] G. 't Hooft, *Renormalization of Massless Yang-Mills Fields*, Nucl. Phys. B **33**, 173 (1971).
- [61] G. 't Hooft, *Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields*, Nucl. Phys. B **35** (1971) 167.
- [62] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189.
- [63] C. -N. Yang and R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96** (1954) 191.

-
- [64] R. P. Feynman, *Very high-energy collisions of hadrons*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415.
- [65] J. D. Bjorken and E. A. Paschos, *Inelastic Electron Proton and gamma Proton Scattering, and the Structure of the Nucleon*, Phys. Rev. **185** (1969) 1975.
- [66] R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R. Webber, *QCD and collider physics*, Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol. **8** (1996) 1.
- [67] J. C. Collins, D. E. Soper and G. F. Sterman, *Factorization of Hard Processes in QCD*, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5** (1988) 1 [hep-ph/0409313].
- [68] T. Kinoshita, *Mass singularities of Feynman amplitudes*, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.
- [69] T. D. Lee and M. Nauenberg, *Degenerate Systems and Mass Singularities*, Phys. Rev. **133** (1964) B1549.
- [70] V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *Deep inelastic $e p$ scattering in perturbation theory*, Sov. J. Nucl. Phys. **15**, 438 (1972) [Yad. Fiz. **15**, 781 (1972)].
- [71] L. N. Lipatov, *The parton model and perturbation theory*, Sov. J. Nucl. Phys. **20** (1975) 94 [Yad. Fiz. **20** (1974) 181].
- [72] G. Altarelli and G. Parisi, *Asymptotic Freedom in Parton Language*, Nucl. Phys. B **126** (1977) 298.
- [73] E. Byckling and K. Kajantie, *Particle Kinematics : (Chapters I-VI, X)*.
- [74] J. C. Ward, *An Identity in Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **78** (1950) 182.
- [75] Y. Takahashi, *On the generalized Ward identity*, Nuovo Cim. **6** (1957) 371.
- [76] F. Jegerlehner, *The Effective fine structure constant at TESLA energies*, In *2nd ECFA/DESY Study 1998-2001* 1851-1871 [hep-ph/0105283].
- [77] N. Cabibbo and R. Gatto, *Electron Positron Colliding Beam Experiments*, Phys. Rev. **124** (1961) 1577.
- [78] A. Sirlin, *Radiative Corrections in the $SU(2)$ - $L \times U(1)$ Theory: A Simple Renormalization Framework*, Phys. Rev. D **22**, 971 (1980).
- [79] W. J. Marciano and A. Sirlin, *Radiative Corrections to Neutrino Induced Neutral Current Phenomena in the $SU(2)$ - $L \times U(1)$ Theory*, Phys. Rev. D **22** (1980) 2695 [Erratum-ibid. D **31** (1985) 213].
- [80] A. Sirlin and W. J. Marciano, *Radiative Corrections to Muon-neutrino $N \rightarrow \mu^- X$ and their Effect on the Determination of ρ^2 and $\sin^2\text{-Theta}(W)$* , Nucl. Phys. B **189** (1981) 442.
- [81] D. A. Ross and M. J. G. Veltman, *Neutral Currents in Neutrino Experiments*, Nucl. Phys. B **95**, 135 (1975).
- [82] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn and M. Steinhauser, *Three-loop QCD corrections to $\Delta\rho$, Δr and $\Delta\kappa$* , 97-107 (1995).

- [83] Y. Schroder and M. Steinhauser, *Four-loop singlet contribution to the rho parameter*, Phys. Lett. B **622** (2005) 124 [hep-ph/0504055].
- [84] K. G. Chetyrkin, M. Faisst, J. H. Kühn, P. Maierhofer and C. Sturm, *Four-Loop QCD Corrections to the Rho Parameter*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 102003 [hep-ph/0605201].
- [85] R. Boughezal and M. Czakon, *Single scale tadpoles and $\mathcal{O}(G(Fm(t))^2\alpha(s)^3)$ corrections to the rho parameter*, Nucl. Phys. B **755**, 221 (2006) [hep-ph/0606232].
- [86] M. Faisst, P. Maierhofer and C. Sturm, *Standard and epsilon-finite Master Integrals for the rho-Parameter*, Nucl. Phys. B **766** (2007) 246 [hep-ph/0611244].
- [87] L. D. Landau, *On analytic properties of vertex parts in quantum field theory*, Nucl. Phys. **13** (1959) 181.
- [88] T. Kinoshita and A. Ukawa, *Mass Singularities of Feynman Amplitudes*, In *Kyoto 1975, Proceedings, Lecture Notes In Physics*, Berlin 1975, 55-58
- [89] V. V. Sudakov, *Vertex parts at very high-energies in quantum electrodynamics*, Sov. Phys. JETP **3**, 65 (1956) [Zh. Eksp. Teor. Fiz. **30**, 87 (1956)].
- [90] R. K. Ellis, D. A. Ross and A. E. Terrano, *The Perturbative Calculation of Jet Structure in e^+e^- Annihilation*, Nucl. Phys. B **178** (1981) 421.
- [91] M. L. Mangano, P. Nason and G. Ridolfi, *Heavy quark correlations in hadron collisions at next-to-leading order*, Nucl. Phys. B **373** (1992) 295.
- [92] S. D. Ellis, Z. Kunszt and D. E. Soper, *Jets at hadron colliders at order α_s^3 : A Look inside*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 3615 [hep-ph/9208249].
- [93] F. A. Berends, R. Kleiss, P. De Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost and T. T. Wu, *Multiple Bremsstrahlung in Gauge Theories at High-Energies. 2. Single Bremsstrahlung*, Nucl. Phys. B **206** (1982) 61.
- [94] R. Kleiss, *Hard Bremsstrahlung Amplitudes for e^+e^- Collisions With Polarized Beams at LEP / SLC Energies*, Z. Phys. C **33** (1987) 433.
- [95] S. Catani and M. H. Seymour, *A General algorithm for calculating jet cross-sections in NLO QCD*, Nucl. Phys. B **485**, 291 (1997) [Erratum-ibid. B **510**, 503 (1998)] [hep-ph/9605323].
- [96] S. Frixione, Z. Kunszt and A. Signer, *Three jet cross-sections to next-to-leading order*, Nucl. Phys. B **467** (1996) 399 [hep-ph/9512328].
- [97] R. Frederix, S. Frixione, F. Maltoni and T. Stelzer, *Automation of next-to-leading order computations in QCD: The FKS subtraction*, JHEP **0910** (2009) 003 [arXiv:0908.4272 [hep-ph]].
- [98] D. A. Kosower, *Antenna factorization of gauge theory amplitudes*, Phys. Rev. D **57**, 5410 (1998) [hep-ph/9710213].
- [99] J. M. Campbell, M. A. Cullen and E. W. N. Glover, *Four jet event shapes in electron - positron annihilation*, Eur. Phys. J. C **9** (1999) 245 [hep-ph/9809429].

-
- [100] A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann and E. W. N. Glover, *Antenna subtraction at NNLO*, JHEP **0509** (2005) 056 [hep-ph/0505111].
- [101] A. Gehrmann-De Ridder, T. Gehrmann and M. Ritzmann, *Antenna subtraction at NNLO with hadronic initial states: double real initial-initial configurations*, JHEP **1210** (2012) 047 [arXiv:1207.5779 [hep-ph]].
- [102] S. Dittmaier, *A General approach to photon radiation off fermions*, Nucl. Phys. B **565** (2000) 69 [hep-ph/9904440].
- [103] S. Dittmaier, A. Kabelschacht and T. Kasprzik, *Polarized QED splittings of massive fermions and dipole subtraction for non-collinear-safe observables*, Nucl. Phys. B **800** (2008) 146 [arXiv:0802.1405 [hep-ph]].
- [104] S. Catani, S. Dittmaier, M. H. Seymour and Z. Trocsanyi, *The Dipole formalism for next-to-leading order QCD calculations with massive partons*, Nucl. Phys. B **627** (2002) 189 [hep-ph/0201036].
- [105] K. Fabricius, I. Schmitt, G. Kramer and G. Schierholz, *Higher Order Perturbative QCD Calculation of Jet Cross-Sections in $e^+ e^-$ Annihilation*, Z. Phys. C **11** (1981) 315.
- [106] B. W. Harris and J. F. Owens, *The Two cutoff phase space slicing method*, Phys. Rev. D **65**, 094032 (2002) [hep-ph/0102128].
- [107] P. van Nieuwenhuizen, *Muon-electron scattering cross-section to order alpha-to-the-third*, Nucl. Phys. B **28** (1971) 429.
- [108] F. A. Berends, K. J. F. Gaemer and R. Gastmans, *Hard photon corrections for the process $e^+ e^- \rightarrow \mu^{+-} \mu^{-+}$* , Nucl. Phys. B **57** (1973) 381 [Erratum-ibid. B **75** (1974) 546] [Nucl. Phys. B **75** (1974) 546].
- [109] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Scalar One Loop Integrals*, Nucl. Phys. B **153** (1979) 365.
- [110] T. Hahn and M. Perez-Victoria, *Automatized one loop calculations in four-dimensions and D-dimensions*, Comput. Phys. Commun. **118** (1999) 153 [hep-ph/9807565].
- [111] G. J. van Oldenborgh and J. A. M. Vermaseren, *New Algorithms for One Loop Integrals*, Z. Phys. C **46** (1990) 425.
- [112] U. Baur, S. Keller and D. Wackerroth, *Electroweak radiative corrections to W boson production in hadronic collisions*, Phys. Rev. D **59**, 013002 (1999) [hep-ph/9807417].
- [113] K. -P. O. Diener, S. Dittmaier and W. Hollik, *Electroweak higher-order effects and theoretical uncertainties in deep-inelastic neutrino scattering*, Phys. Rev. D **72**, 093002 (2005) [hep-ph/0509084].
- [114] M. Roth and S. Weinzierl, *QED corrections to the evolution of parton distributions*, Phys. Lett. B **590** (2004) 190 [hep-ph/0403200].
- [115] A. Denner and S. Pozzorini, *One loop leading logarithms in electroweak radiative corrections. 1. Results*, Eur. Phys. J. C **18** (2001) 461 [hep-ph/0010201]; Eur. Phys. J. C **21** (2001) 63 [hep-ph/0104127].

- [116] R. Jackiw, *Dynamics at high momentum and the vertex function of spinor electrodynamics*, Annals Phys. **48** (1968) 292.
- [117] S. Uccirati, J. H. Kühn, F. Metzler and A. A. Penin, *NNLL electroweak corrections to gauge boson pair production at LHC*, PoS EPS **-HEP2009** (2009) 345.
- [118] J. H. Kühn, F. Metzler, A. A. Penin and S. Uccirati, *Next-to-Next-to-Leading Electroweak Logarithms for W-Pair Production at LHC*, JHEP **1106** (2011) 143 [arXiv:1101.2563 [hep-ph]].
- [119] J. M. Cornwall and G. Tiktopoulos, *On-Shell Asymptotics of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **35** (1975) 338.
- [120] J. M. Cornwall and G. Tiktopoulos, *Infrared Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. D **13** (1976) 3370.
- [121] J. Frenkel and J. C. Taylor, *Exponentiation of Leading Infrared Divergences in Massless Yang-Mills Theories*, Nucl. Phys. B **116** (1976) 185.
- [122] D. Amati, R. Petronzio and G. Veneziano, *Relating Hard QCD Processes Through Universality of Mass Singularities. 2.*, Nucl. Phys. B **146** (1978) 29.
- [123] A. H. Mueller, *On the Asymptotic Behavior of the Sudakov Form-factor*, Phys. Rev. D **20**, 2037 (1979).
- [124] J. C. Collins, *Algorithm to Compute Corrections to the Sudakov Form-factor*, Phys. Rev. D **22** (1980) 1478.
- [125] J. C. Collins, *Sudakov form-factors*, Adv. Ser. Direct. High Energy Phys. **5**, 573 (1989) [hep-ph/0312336].
- [126] A. Sen, *Asymptotic Behavior of the Sudakov Form-Factor in QCD*, Phys. Rev. D **24** (1981) 3281.
- [127] A. Sen, *Asymptotic Behavior of the Wide Angle On-Shell Quark Scattering Amplitudes in Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. D **28** (1983) 860.
- [128] Wolfram Research, Inc., *Mathematica* , Version 9, 2014.
- [129] J. Küblbeck, M. Böhm and A. Denner, *Feyn Arts: Computer Algebraic Generation of Feynman Graphs and Amplitudes*, Comput. Phys. Commun. **60**, 165 (1990).
- [130] H. Eck and J. Küblbeck, *Computer algebraic generation of Feynman graphs and amplitudes*, In *La Londe-les-Maures 1992, New computing techniques in physics research* 677-682.
- [131] T. Hahn, *Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3*, Comput. Phys. Commun. **140** (2001) 418 [hep-ph/0012260].
- [132] T. Hahn and C. Schappacher, *The Implementation of the minimal supersymmetric standard model in FeynArts and FormCalc*, Comput. Phys. Commun. **143** (2002) 54 [hep-ph/0105349].
- [133] R. Mertig, M. Böhm and A. Denner, *FEYN CALC: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes*, Comput. Phys. Commun. **64** (1991) 345.

-
- [134] P. Nogueira, *Automatic Feynman graph generation*, J. Comput. Phys. **105** (1993) 279.
- [135] J. A. M. Vermaseren, *New features of FORM*, math-ph/0010025.
- [136] G. Passarino and M. J. G. Veltman, *One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model*, Nucl. Phys. B **160** (1979) 151.
- [137] G. P. Lepage, *A New Algorithm for Adaptive Multidimensional Integration*, J. Comput. Phys. **27**, 192 (1978) and CLNS-80/447.
- [138] J. Alwall, P. Demin, S. de Visscher, R. Frederix, M. Herquet, F. Maltoni, T. Plehn and D. L. Rainwater *et al.*, *MadGraph/MadEvent v4: The New Web Generation*, JHEP **0709** (2007) 028 [arXiv:0706.2334 [hep-ph]].
- [139] M. Roth, *Hochenergienäherung von massiven Feynman-Integralen* Diplomarbeit.
- [140] W. Beenakker, A. Denner, S. Dittmaier, R. Mertig and T. Sack, *High-energy approximation for on-shell W pair production*, Nucl. Phys. B **410** (1993) 245.
- [141] A. Bierweiler, T. Kasprzik, H. Kühn and S. Uccirati, *Electroweak corrections to W -boson pair production at the LHC*, JHEP **1211** (2012) 093 [arXiv:1208.3147 [hep-ph]].
- [142] A. Bierweiler, T. Kasprzik and J. H. Kühn, *Vector-boson pair production at the LHC to $\mathcal{O}(\alpha^3)$ accuracy*, arXiv:1305.5402 [hep-ph].
- [143] S. Schael *et al.* [ALEPH and DELPHI and L3 and OPAL and LEP Electroweak Collaborations], *Electroweak Measurements in Electron-Positron Collisions at W -Boson-Pair Energies at LEP*, Phys. Rept. **532** (2013) 119 [arXiv:1302.3415 [hep-ex]].
- [144] E. Accomando and A. Kaiser, *Electroweak corrections and anomalous triple gauge-boson couplings in W^+W^- and $W^\pm Z$ production at the LHC*, Phys. Rev. D **73** (2006) 093006 [hep-ph/0511088].
- [145] J. Ohnemus, *An Order α_s calculation of hadronic W^-W^+ production*, Phys. Rev. D **44** (1991) 1403.
- [146] J. Ohnemus, *An Order α_s calculation of hadronic $W^\pm Z$ production*, Phys. Rev. D **44** (1991) 3477.
- [147] J. Ohnemus and J. F. Owens, *An Order α_s calculation of hadronic ZZ production*, Phys. Rev. D **43** (1991) 3626.
- [148] S. Frixione, P. Nason and G. Ridolfi, *Strong corrections to WZ production at hadron colliders*, Nucl. Phys. B **383** (1992) 3.
- [149] S. Frixione, *A Next-to-leading order calculation of the cross-section for the production of W^+W^- pairs in hadronic collisions*, Nucl. Phys. B **410** (1993) 280.
- [150] U. Baur, T. Han and J. Ohnemus, *QCD corrections and nonstandard three vector boson couplings in W^+W^- pre production at hadron colliders*, Phys. Rev. D **53** (1996) 1098 [hep-ph/9507336].
- [151] J. M. Campbell and R. K. Ellis, *An Update on vector boson pair production at hadron colliders*, Phys. Rev. D **60** (1999) 113006 [hep-ph/9905386].

- [152] S. Frixione and B. R. Webber, *Matching NLO QCD computations and parton shower simulations*, JHEP **0206** (2002) 029 [hep-ph/0204244].
- [153] P. Nason and G. Ridolfi, *A Positive-weight next-to-leading-order Monte Carlo for Z pair hadron production*, JHEP **0608** (2006) 077 [hep-ph/0606275].
- [154] K. Hamilton, *A positive-weight next-to-leading order simulation of weak boson pair production*, JHEP **1101** (2011) 009 [arXiv:1009.5391 [hep-ph]].
- [155] S. Hoche, F. Krauss, M. Schonherr and F. Siegert, *Automating the POWHEG method in Sherpa*, JHEP **1104** (2011) 024 [arXiv:1008.5399 [hep-ph]].
- [156] T. Melia, P. Nason, R. Rontsch and G. Zanderighi, *W^+W^- , WZ and ZZ production in the POWHEG BOX*, JHEP **1111** (2011) 078 [arXiv:1107.5051 [hep-ph]].
- [157] R. Frederix, S. Frixione, V. Hirschi, F. Maltoni, R. Pittau and P. Torrielli, *Four-lepton production at hadron colliders: aMC@NLO predictions with theoretical uncertainties*, JHEP **1202** (2012) 099 [arXiv:1110.4738 [hep-ph]].
- [158] G. Chachamis, M. Czakon and D. Eiras, *W-Pair Production at the LHC. I. Two-loop Corrections in the High Energy Limit*, JHEP **0812** (2008) 003 [arXiv:0802.4028 [hep-ph]].
- [159] G. Chachamis, M. Czakon and D. Eiras, *W-Pair Production at the LHC. II. One-loop Squared Corrections in the High Energy Limit*, arXiv:0806.3043 [hep-ph].
- [160] M. Grazzini, *Soft-gluon effects in WW production at hadron colliders*, JHEP **0601** (2006) 095 [hep-ph/0510337].
- [161] D. A. Dicus, C. Kao and W. W. Repko, *Gluon Production of Gauge Bosons*, Phys. Rev. D **36** (1987) 1570.
- [162] E. W. N. Glover and J. J. van der Bij, *Z-Boson Pair Production Via Gluon Fusion*, Nucl. Phys. B **321** (1989) 561.
- [163] T. Binoth, M. Ciccolini, N. Kauer and M. Kramer, *Gluon-induced WW background to Higgs boson searches at the LHC*, JHEP **0503** (2005) 065 [hep-ph/0503094].
- [164] T. Binoth, N. Kauer and P. Mertsch, *Gluon-induced QCD corrections to $pp \rightarrow ZZ \rightarrow l\bar{l}l'\bar{l}'$* , arXiv:0807.0024 [hep-ph].
- [165] A. D. Martin, W. J. Stirling, R. S. Thorne and G. Watt, *Parton distributions for the LHC*, Eur. Phys. J. C **63**, 189 (2009) [arXiv:0901.0002 [hep-ph]].
- [166] F. Cascioli, S. Hoeche, F. Krauss, P. Maierhofer, S. Pozzorini and F. Siegert, *Precise Higgs-background predictions: merging NLO QCD and squared quark-loop corrections to four-lepton + 0,1 jet production*, arXiv:1309.0500 [hep-ph].
- [167] F. Campanario, M. Rauch and S. Sapeta, *WW production at high transverse momenta beyond NLO*, arXiv:1309.7293 [hep-ph].
- [168] M. Grazzini, S. Kallweit, D. Rathlev and A. Torre, *$Z\gamma$ production at hadron colliders in NNLO QCD*, Phys. Lett. B **731** (2014) 204 [arXiv:1309.7000 [hep-ph]].

-
- [169] <https://indico.desy.de/conferenceDisplay.py?confId=8107>, abgerufen am 6. Mai 2014 um 21:54 Uhr.
- [170] V. S. Fadin, L. N. Lipatov, A. D. Martin and M. Melles, *Resummation of double logarithms in electroweak high-energy processes*, Phys. Rev. D **61** (2000) 094002 [hep-ph/9910338].
- [171] M. Ciafaloni, P. Ciafaloni and D. Comelli, *Bloch-Nordsieck violating electroweak corrections to inclusive TeV scale hard processes*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 4810 [hep-ph/0001142].
- [172] M. Hori, H. Kawamura and J. Kodaira, *Electroweak Sudakov at two loop level*, Phys. Lett. B **491** (2000) 275 [hep-ph/0007329].
- [173] M. Melles, *Resummation of angular dependent corrections in spontaneously broken gauge theories*, Eur. Phys. J. C **24** (2002) 193 [hep-ph/0108221].
- [174] W. Beenakker and A. Werthenbach, *Electroweak two loop Sudakov logarithms for on-shell fermions and bosons*, Nucl. Phys. B **630** (2002) 3 [hep-ph/0112030].
- [175] B. Jantzen, J. H. Kühn, A. A. Penin and V. A. Smirnov, *Two-loop electroweak logarithms in four-fermion processes at high energy*, Nucl. Phys. B **731** (2005) 188 [Erratum-ibid. B **752** (2006) 327] [hep-ph/0509157].
- [176] A. Denner, M. Melles and S. Pozzorini, *Two loop electroweak angular dependent logarithms at high-energies*, Nucl. Phys. B **662** (2003) 299 [hep-ph/0301241].
- [177] A. Denner, B. Jantzen and S. Pozzorini, *Two-loop electroweak next-to-leading logarithmic corrections to massless fermionic processes*, Nucl. Phys. B **761** (2007) 1 [hep-ph/0608326].
- [178] M. Beccaria, P. Ciafaloni, D. Comelli, F. M. Renard and C. Verzegnassi, *Logarithmic expansion of electroweak corrections to four-fermion processes in the TeV region*, Phys. Rev. D **61**, 073005 (2000) [hep-ph/9906319].
- [179] M. Beccaria, P. Ciafaloni, D. Comelli, F. M. Renard and C. Verzegnassi, *The Role of the top mass in b production at future lepton colliders*, Phys. Rev. D **61** (2000) 011301 [hep-ph/9907389].
- [180] M. Beccaria, F. M. Renard and C. Verzegnassi, *Top quark production at future lepton colliders in the asymptotic regime*, Phys. Rev. D **63** (2001) 053013 [hep-ph/0010205].
- [181] E. Accomando, A. Denner and S. Pozzorini, *Electroweak correction effects in gauge boson pair production at the CERN LHC*, Phys. Rev. D **65** (2002) 073003 [hep-ph/0110114].
- [182] E. Accomando, A. Denner and A. Kaiser, *Logarithmic electroweak corrections to gauge-boson pair production at the LHC*, Nucl. Phys. B **706** (2005) 325 [hep-ph/0409247].
- [183] W. Hollik and C. Meier, *Electroweak corrections to γZ production at hadron colliders*, Phys. Lett. B **590** (2004) 69 [hep-ph/0402281].
- [184] E. Accomando, A. Denner and C. Meier, *Electroweak corrections to $W\gamma$ and $Z\gamma$ production at the LHC*, Eur. Phys. J. C **47** (2006) 125 [hep-ph/0509234].

- [185] J. H. Kühn, S. Moch, A. A. Penin and V. A. Smirnov, *Next-to-next-to-leading logarithms in four fermion electroweak processes at high-energy*, Nucl. Phys. B **616** (2001) 286 [Erratum-ibid. B **648** (2003) 455] [hep-ph/0106298].
- [186] J. -y. Chiu, F. Golf, R. Kelley and A. V. Manohar, *Electroweak Sudakov corrections using effective field theory*, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 021802 [arXiv:0709.2377 [hep-ph]].
- [187] J. -y. Chiu, F. Golf, R. Kelley and A. V. Manohar, *Electroweak Corrections in High Energy Processes using Effective Field Theory*, Phys. Rev. D **77** (2008) 053004 [arXiv:0712.0396 [hep-ph]].
- [188] J. H. Kühn, A. A. Penin and V. A. Smirnov, *Summing up subleading Sudakov logarithms*, Eur. Phys. J. C **17** (2000) 97 [hep-ph/9912503].
- [189] J. H. Kühn, A. A. Penin and V. A. Smirnov, *Subleading Sudakov logarithms in electroweak processes*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89**, 94 (2000) [hep-ph/0005301].
- [190] B. Feucht, J. H. Kühn, A. A. Penin and V. A. Smirnov, *Two loop Sudakov form-factor in a theory with mass gap*, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 101802 [hep-ph/0404082].
- [191] B. Jantzen, J. H. Kühn, A. A. Penin and V. A. Smirnov, *Two-loop electroweak logarithms*, Phys. Rev. D **72** (2005) 051301 [Erratum-ibid. D **74** (2006) 019901] [hep-ph/0504111].
- [192] M. Melles, *Subleading Sudakov logarithms in electroweak high-energy processes to all orders*, Phys. Rev. D **63** (2001) 034003 [hep-ph/0004056].
- [193] M. Melles, *Resummation of Yukawa enhanced and subleading Sudakov logarithms in longitudinal gauge boson and Higgs production*, Phys. Rev. D **64** (2001) 014011 [hep-ph/0012157].
- [194] M. Beccaria, F. M. Renard and C. Verzegnassi, *Reliability of a high-energy one loop expansion of $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ in the SM and in the MSSM*, Nucl. Phys. B **663** (2003) 394 [hep-ph/0304175].
- [195] J. H. Kühn, F. Metzler and A. A. Penin, *Next-to-next-to-leading electroweak logarithms in W -pair production at ILC*, Nucl. Phys. B **795** (2008) 277 [Erratum-ibid. **818** (2009) 135] [arXiv:0709.4055 [hep-ph]].
- [196] J. Baglio, L. D. Ninh and M. M. Weber, *Massive gauge boson pair production at the LHC: a next-to-leading order story*, Phys. Rev. D **88** (2013) 113005 [arXiv:1307.4331].
- [197] M. Billoni, S. Dittmaier, B. Jäger and C. Speckner, *Next-to-leading order electroweak corrections to $pp \rightarrow W^+W^- \rightarrow 4$ leptons at the LHC in double-pole approximation*, JHEP **1312** (2013) 043 [arXiv:1310.1564 [hep-ph]].
- [198] C. Kao and D. A. Dicus, *Production of W^+W^- from gluon fusion*, Phys. Rev. D **43** (1991) 1555.
- [199] A. D. Martin, R. G. Roberts, W. J. Stirling and R. S. Thorne, *Parton distributions incorporating QED contributions*, Eur. Phys. J. C **39** (2005) 155 [hep-ph/0411040].

- [200] A. Denner, S. Dittmaier and R. Schuster, *Radiative corrections to $\gamma\gamma \rightarrow W^+W^-$ in the electroweak standard model*, Nucl. Phys. B **452** (1995) 80 [hep-ph/9503442].
- [201] J. Archibald, S. Hoeche, F. Krauss, F. Siegert, T. Gleisberg, M. Schonherr, S. Schumann and J. -C. Winter, *Simulation of photon-photon interactions in hadron collisions with SHERPA*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **179-180** (2008) 218.
- [202] T. Pierzchala and K. Piotrkowski, *Sensitivity to anomalous quartic gauge couplings in photon-photon interactions at the LHC*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **179-180**, 257 (2008) [arXiv:0807.1121 [hep-ph]].
- [203] P. D. Pesic, *Two - Photon Cross-section For W - Pair Production By Colliding Beams*, Phys. Rev. D **8** (1973) 945.
- [204] I. F. Ginzburg, G. L. Kotkin, S. L. Panfil and V. G. Serbo, *The W^+ - Boson Production on the Colliding e^+e^- , γe and $\gamma\gamma$ Beams*, Nucl. Phys. B **228** (1983) 285 [Erratum-ibid. B **243** (1984) 550].
- [205] M. Katuya, *A Survey of W Pair Productions in e^+e^- Collisions*, Phys. Lett. B **124** (1983) 421.
- [206] S. Gieseke, T. Kasprzik and J. H. Kühn, *Vector-boson pair production and electroweak corrections in HERWIG++*, arXiv:1401.3964 [hep-ph].
- [207] R. D. Ball *et al.* [NNPDF Collaboration], *Parton distributions with QED corrections*, Nucl. Phys. B **877**, no. 2, 290 (2013) [arXiv:1308.0598 [hep-ph]].
- [208] <https://nnpdf.hepforge.org/html/nnpdf23qed/nnpdf23qed.html>
- [209] J. M. Campbell, K. Hatakeyama, J. Huston, F. Petriello, J. R. Andersen, L. Barze, H. Beauchemin and T. Becher *et al.*, *Report of the Snowmass 2013 energy frontier QCD working group*, arXiv:1310.5189 [hep-ph].
- [210] J. Layssac and F. M. Renard, *High-energy behavior of $\gamma\gamma \rightarrow f\bar{f}$ processes in SM and MSSM*, Phys. Rev. D **64**, 053018 (2001) [hep-ph/0104205].
- [211] A. D. Martin, R. G. Roberts, W. J. Stirling and R. S. Thorne, *NNLO global parton analysis*, Phys. Lett. B **531**, 216 (2002) [hep-ph/0201127].
- [212] A. H. Mueller, *On the Asymptotic Behavior of the Sudakov Form-factor*, Phys. Rev. D **20** (1979) 2037.
- [213] J. C. Collins, *Algorithm to Compute Corrections to the Sudakov Form-factor*, Phys. Rev. D **22** (1980) 1478.
- [214] S. Haywood, P. R. Hobson, W. Hollik, Z. Kunszt, G. Azuelos, U. Baur, J. van der Bij and D. Bourilkov *et al.*, *Electroweak physics*, In *Geneva 1999, Standard model physics (and more) at the LHC* 117-230 [hep-ph/0003275] and references therein.
- [215] G. Altarelli and M. L. Mangano, *1999 CERN Workshop on standard model physics (and more) at the LHC, CERN, Geneva, Switzerland, 25-26 May: Proceedings*, CERN Geneva - CERN-2000-04 (00/05,rec.Jul.) 529 p.

- [216] Private Kommunikation mit Tobias Kasprzik, Institut für Theoretische Teilchenphysik, KIT, TOBIAS.KASPRZIK@KIT.EDU
- [217] Lewin, Leonard, *Polylogarithms and associated functions*, New York: North Holland, 1981; ISBN 0-444-00550-1, XVII, 359 S.
- [218] B. De Wit and J. Smith, *Field Theory In Particle Physics. Vol. 1*, Amsterdam, Netherlands: North-holland (1986) 490 P. (Personal Library).
- [219] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 3. überarbeitete Auflage – Berlin; New York: de Gruyter, 2002; ISBN 3-11-016502-3.
- [220] S. Dittmaier, *Full $\mathcal{O}(\alpha)$ radiative corrections to high-energy Compton scattering*, Nucl. Phys. B **423** (1994) 384 [hep-ph/9311363].
- [221] L. M. Brown and R. P. Feynman, *Radiative corrections to Compton scattering*, Phys. Rev. **85** (1952) 231.
- [222] D. B. Melrose, *Reduction of Feynman diagrams*, Nuovo Cim. **40** (1965) 181.
- [223] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, *Dimensionally regulated one loop integrals*, Phys. Lett. B **302** (1993) 299 [Erratum-ibid. B **318** (1993) 649] [hep-ph/9212308].
- [224] J. Fleischer, F. Jegerlehner and O. V. Tarasov, *Algebraic reduction of one loop Feynman graph amplitudes*, Nucl. Phys. B **566** (2000) 423 [hep-ph/9907327].
- [225] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich, E. Pilon and C. Schubert, *An Algebraic/numerical formalism for one-loop multi-leg amplitudes*, JHEP **0510** (2005) 015 [hep-ph/0504267].
- [226] A. Denner and S. Dittmaier, *Reduction of one loop tensor five point integrals*, Nucl. Phys. B **658** (2003) 175 [hep-ph/0212259].

Danksagung

Mein besonderer Dank geht an meinen „Doktorvater“ Prof. Dr. Johann H. Kühn, der mir eine Promotion in einem phänomenologisch interessanten Themengebiet ermöglicht hat. Durch seine ständige Unterstützung, die Entfaltungsmöglichkeiten in seiner Arbeitsgruppe und auch den gelegentlichen Ansporn wurde die Arbeit in dieser Form erst möglich.

Meinen Dank möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Matthias Steinhauser aussprechen, dass er sich für diese Arbeit als Korreferent zur Verfügung gestellt hat.

Für eine fruchtbare Zusammenarbeit möchte ich mich herzlich bei Dr. Tobias Kasprzik und Dr. Sandro Uccirati bedanken.

Dr. Peter Marquard und Dr. Michael Rauch danke ich, dass sie Zeit für Beantwortung der großen und kleinen Fragen während meiner Promotion genommen haben. Die Diskussionen mit vielen Kollegen sowohl am TTP als auch am ITP haben mich weitergebracht und somit auch zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. In diesem Zusammenhang möchte ich ebenfalls Sandro Uccirati, Tobias Kasprzik, Franziska Schissler und Wolfgang Hollik erwähnen.

Dr. Peter Marquard, Dr. Bastian Feigl, Thomas Hermann, Jens Hoff und Dr. Christian Röhr danke ich für die Administration und die Hilfe bei Problemen mit den Computer-Clustern.

Ein ganz besonderer Dank gilt unserer Sekretärin Martina Schorn, die mich jederzeit in vieler Hinsicht gerne unterstützt hat. Gerade im Umgang mit den allgegenwärtigen Formalitäten war sie eine enorme Hilfe.

Für die angenehme Atmosphäre und viele fachliche und auch erheiternde Gespräche möchte ich nicht nur meinen Bürokollegen Jörg Rittinger, Alexander Kurz und Christoph Wiegand, sondern auch den Mitarbeitern beider Institute für Theoretische Physik danken, besonders Thomas Hermann, Franziska Schissler, Ramona Gröber, Christian Hangst, Wolfgang Hollik, Bastian Feigl, Eva Popena, Jens Hoff, Alexander Kurz und Christian Röhr.

Sehr zum Dank verpflichtet bin ich auch allen Korrekturlesern meiner Arbeit. Insbesondere möchte ich mich bei Wolfgang Hollik, Michael Rauch, Tobias Kasprzik, Christian Reuschle, Matthias Kerner, Jens Hoff, Peter Marquard, Franziska Schissler, Thomas Hermann, Ramona Gröber, Christoph Wiegand und Christian Hangst für die inhaltlichen und sprachlichen Korrekturen bedanken.

Ohne der großartigen Unterstützung meiner Freunde wären die letzten Jahre nicht so schön gewesen, wie sie waren. Dafür möchte ich mich ebenfalls herzlich bedanken.

Als letzte und wichtigste Personen möchte ich meinem Mann Thomas, meinem Sohn David und meiner Tochter Katharina danken, die mir in jeder Hinsicht eine wunderbare Hilfe waren und im Laufe der Jahre manche Entbehrung haben hinnehmen müssen, um mir diese Arbeit zu ermöglichen.