

**BERICHTE**  
der  
Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine  
der Universität Fridericiana  
in Karlsruhe

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dr. sc. techn. h. c. O. Steinhardt und Prof. Dr.-Ing. K. Möhler

---

**3. FOLGE – HEFT 9**

Probleme bei der Anwendung von duroplastischen  
Kunststoffen im konstruktiven Ingenieurbau

von

Ulrich Schulz

---

Karlsruhe 1976

Probleme bei der Anwendung von duroplastischen  
Kunststoffen im konstruktiven Ingenieurbau

Zur Erlangung der venia legendi für das Fachgebiet  
„Leichtbau“  
der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen der  
Universität (TH) Karlsruhe

genehmigte  
Habilitationsschrift

von  
**Dr.-Ing. Ulrich Schulz**  
aus Allenstein/Ostpreußen

Referent: . . . . . Prof. Dr.-Ing. Dr. sc. techn. h. c. O. Steinhardt  
Korreferent: . . . . . Prof. Dr.-Ing. K. Möhler

## VORWORT

Das Geleitwort zum 1. Heft der 3. Folge (Karlsruhe 1963) weist unter anderem auch auf die Veröffentlichungen der 1. und 2. Folge hin. Im vorliegenden 9. Heft, in dem Probleme bei der Anwendung von duroplastischen Kunststoffen im konstruktiven Ingenieurbau behandelt werden, befindet sich im Anhang eine Liste aller bisheriger Hefte der 3. Folge.

Die Herausgeber

<u>Inhaltsverzeichnis</u>		Seite
I.	<u>Einleitung</u>	5
II.	<u>Eigenschaften der verschiedenen Kunststoffe</u>	7
II.1	Matrixwerkstoff	7
II.2	Verstärkungswerkstoff	8
II.3	Füllstoff	9
II.4	Verbundwerkstoff	10
III.	<u>Die Fügung von Kunststoffbauteilen</u>	12
III.1	Die Klebverbindung	12
III.1.1	Festigkeitsverhalten der Klebverbindung	15
III.1.1.1	Die Zugscherverbindung	15
III.1.1.2	Die Klebverbindung unter Zug- bzw. Biegebelastung	22
III.1.1.3	Die Klebverbindung unter Schälbeanspruchung	23
III.1.2	Die Klebverbindung bei veränderlicher Temperatur	25
III.1.3	Die Klebverbindung bei Wasserlagerung und Bewitterung	26
III.1.4	Die vorgespannte GFK-Klebverbindung	27
III.2	Die Schraubverbindung	28
III.2.1	Das Tragverhalten von GFK-Schraubverbindungen	28
III.2.2	Berechnung von Schraubverbindungen	35
III.2.2.1	Spannungen im Lochstabquerschnitt	35
III.2.2.2	Spannungen in der Lochleibung	38
III.3	Die hochfest-vorgespannte Schraubverbindung	40
III.3.1	Der Tragmechanismus	40
III.3.2	Phänomenologische Zusammenhänge der Relaxation	40
III.3.3	Optimierung der Unterlagscheibe	41
III.3.4	Relaxationsversuche	44
IV.	<u>Stabilitätsprobleme bei Schalen</u>	50
IV.1	Bezeichnungen	50
IV.2	Die Beulstabilität der anisotropen Zylinderschale	51
IV.2.1	Die Differentialgleichungen	51
IV.2.1.1	Elastostatische und geometrische Beziehungen	52
IV.2.1.2	Gleichgewichtsbedingungen	53
IV.2.1.3	Verträglichkeitsbedingungen der Deformation	54

IV.2.1.4	Die Differentialgleichungen	54
IV.2.2	Lösungen der Differentialgleichungen	55
IV.2.2.1	Lastfall: Axialdruck	55
IV.2.2.2	Lastfall: Axialdruck mit Innendruck	58
IV.2.2.3	Lastfall: Allseitiger Außendruck	59
IV.2.3	Vergleich der theoretischen und experimentellen Ergebnisse	61
IV.2.4	Beulversuche an axialgedrückten Zylinderschalen aus GFK	63
IV.2.4.1	Herstellung der Versuchszyylinder	63
IV.2.4.2	Kennwerte des verwendeten Materials	64
IV.2.4.3	Durchführung und Ergebnisse der Versuche	65
IV.3	Die Stabilität axial belasteter Zylinderschalen mit Mantelöffnungen	71
IV.3.1	Das Verformungsverhalten	72
IV.3.2	Das Spannungsverhalten	72
IV.3.3	Abfall der Beullasten	74
IV.3.4	Verstärkung des Lochrandes	75
IV.4	Die Beulstabilität der Kegelschale	86
IV.4.1	Die axial gedrückte Kegelschale	86
IV.4.2	Die durch gleichmäßigen Außendruck belastete Kegelschale	91
IV.4.3	Die durch Axial- und Außendruck belastete Kegelschale	92
V.	<u>Biegeweiche Membrantragwerke</u>	95
V.1	Materialien und Verbindungsmittel	95
V.1.1	Membranwerkstoff	95
V.1.2	Festigkeitsverhalten	96
V.1.2.1	Zugfestigkeit des beschichteten Gewebes	96
V.1.2.2	Zugfestigkeit der Nähte	98
V.1.2.3	Einfluß der Temperatur	100
V.1.2.4	Weiterreißfestigkeit	102
V.1.3	Langzeitverhalten	103
V.2	Lastannahmen und Berechnung	104
V.2.1	Lastannahmen	104
V.2.2	Schnittkräfte	108
V.2.3	Bemessung	117
V.3	Konstruktive Durchbildung	118
V.3.1	Formgebung	118
V.3.2	Konfektionierung	118

VI.	<u>Sandwichkonstruktionen</u>	123
VI.1	Berechnung von Sandwichkonstruktionen	123
VI.1.1	Biegebalken	123
VI.1.2	Zugstab	126
VI.1.3	Platte	126
VI.1.3.1	Grundgleichungen	126
VI.1.3.2	Lösungen der Differentialgleichungen	129
VI.1.3.3	Lösung für die punktförmig gestützte Platte	132
VI.2	Das Festigkeitsverhalten von Sandwichwerkstoffen	135
VI.2.1	Sandwich mit hartem Kern	138
VI.2.1.1	Abhebefestigkeit	138
VI.2.1.2	Biegefestigkeit	140
VI.2.1.3	Zugfestigkeit	141
VI.2.1.4	Scherfestigkeit	141
VI.2.1.5	Elastizitätsmoduli	143
VI.2.1.6	Langzeitverhalten	145
VI.2.2	Sandwich mit weichem Schaumkern	147
VI.2.2.1	Festigkeiten und Elastizitätsmoduli	147
VI.2.2.2	Verhalten bei höherer Temperatur	150
VII.	<u>Zusammenfassung</u>	151
VIII.	<u>Literaturverzeichnis</u>	153

## I. Einleitung

Kein Gebiet der Werkstofftechnik hat in den vergangenen Jahren eine so beschleunigte Entwicklung durchgemacht wie die Kunststofftechnik - und zwar sowohl hinsichtlich der Zahl der Stoffgruppen und deren Variationen als auch ihrer Verwendungsgebiete.

Der Begriff Kunststoff umfaßt dabei makromolekulare Werkstoffe, die durch chemische Umwandlung von Naturprodukten (Gummi, Galalith, Celluloid u.a.) oder durch Synthese aus Primärprodukten des chemischen Aufschlusses von Kohle, Erdöl und Erdgas (Polyäthylen, Polyester, Epoxid u.a.) hergestellt werden. Sie lassen sich nach der Art ihrer Struktur in Thermoplaste (fadenförmige, lineare Moleküle) und Duroplaste (räumlich, dreidimensional vernetzte Moleküle) unterteilen. Dabei besitzen die thermoplastischen Kunststoffe, die sich durch Erwärmung beliebig oft in den plastischen Zustand versetzen lassen (reversible Zustandsänderung) die wirtschaftlich wesentlich größere Bedeutung. Sie werden im Bereich der Bautechnik auf dem Gebiet der Wärme- und Schalldämmung, Bauisolierung, Leitungsbau u. a. eingesetzt. Den qualitativ besseren Werkstoff stellen dagegen wegen der relativ hohen Festigkeit die duroplastischen Kunststoffe dar. Nur sie lassen sich für tragende Bauteile verwenden, da nach dem Härtungsprozeß (räumliche Vernetzung, irreversible Zustandsänderung) ein Erweichen und der damit verbundene Festigkeitsverlust nicht mehr möglich ist. Eine weitere Verbesserung der mechanischen Eigenschaften bei den hier vorwiegend zu erörternden Duroplasten erzielt man nun durch Einbetten von Verstärkungsfasern in die Matrix (Glas-, Asbest-, Metall- und Kohlenstofffasern).

Während die Kunststoffe im Hinblick auf Werkstoffeigenschaften und Chemismus bereits in einer großen Anzahl von Arbeiten untersucht worden sind, liegen bezüglich der Verwendbarkeit im konstruktiven Ingenieurbau bisher nur sehr wenige brauchbare Ergebnisse vor. So kennt man zwar die Festigkeitskennwerte, Elastizitätsmoduli und das Fließverhalten der einzelnen Kunststoffe, fast nichts jedoch über die Tragfähigkeit einer Schraub- oder Klebverbindung, einer Sandwich- oder Membrankonstruktion und über die Beul- und Knicklast einer Schale oder Platte.

Es existiert z. B. beim glasfaserverstärkten Kunststoff (GFK) wegen der annähernd linearen Spannungsdehnungscharakteristik keine dem Stahl vergleichbare Fließneigung. Demnach können die im Bereich einer Schraubverbindung auftretenden Spannungsspitzen nicht abgebaut werden und führen zu einer Traglast-

Verminderung. Werden die Schrauben nun zusätzlich noch hochfest vorgespannt, so führt die Relaxationsneigung des Fügepartmaterial zum Abbau der Vorspannung und dadurch der Rutschlast. Ferner macht es die aus der Verstärkungsorientierung sich ergebende Anisotropie erforderlich, daß die für den Stabilitätsnachweis üblichen Nachweisformeln durch Einführen der unterschiedlichen Elastizitätsmoduli und Querkontraktionszahlen bzw. bei Sandwichkonstruktionen auch Schubmoduli in den Elastizitätsgleichungen korrigiert werden.

Um hier nun erste Bemessungs- und Konstruktionsgrundlagen zu schaffen, sind bisher in der Bundesanstalt für Materialprüfung, Berlin, dem Institut für Kunststoffverarbeitung, Aachen und auch in der hiesigen Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine in den letzten Jahren eine Reihe von experimentellen und theoretischen Untersuchungen angestellt worden. Über die vom Verfasser in Karlsruhe durchgeführten Arbeiten soll im folgenden zusammenfassend berichtet werden.



## II. Eigenschaften der verschiedenen Kunststoffe

### II.1 Matrixwerkstoff

Im Bauwesen kommen sowohl die duroplastischen als auch die thermoplastischen Kunststoffe zur Anwendung. Bei den für tragende Zwecke z. Zt. nur im Zusammenhang mit Schaumkernen eingesetzten Thermoplasten handelt es sich um einen räumlich nicht vernetzten Kunststoff. Die nebeneinanderliegenden hochmolekularen Fadenmoleküle können bei Zuführung von Wärme aneinander vorbeigleiten - der Werkstoff wird weich. Dieses Weichwerden erfolgt bei den heute am häufigsten eingesetzten Thermoplasten Polyäthylen, PVC, Polycarbonat und Polyacrylsäureester bei ca.  $140^{\circ}\text{C}$ . Den großen Vorzügen, die sich aus dieser Eigenschaft ergeben (z. B. leichtes Verarbeiten durch Extrudieren und Spritzgießen), steht als negative Eigenschaft das starke Abfallen der Festigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur und der Belastungsdauer gegenüber. PVC z.B. besitzt bei  $60^{\circ}\text{C}$  bzw. nach 10.000 Stunden Belastungszeit nur noch 50 % der bei Raumtemperatur vorhandenen Ausgangsfestigkeit.

Als duroplastische Kunststoffe (Kunstharze) können Polyesterharze, Epoxidharze, Phenolharze, Melaminharze, Silikonharze u. a. eingesetzt werden. Dabei werden jedoch wegen ihrer günstigen mechanischen Eigenschaften, ihrer guten Verarbeitbarkeit und wegen ihres niedrigen Preises heute fast ausschließlich ungesättigte Polyesterharze verwendet. Sie sind Kondensationskomponenten, die in der Regel aus zweiwertigen Alkoholen und Dikarbonsäuren bestehen, welche in einer polymerisierfähigen Flüssigkeit z.B. monomeren Styrol gelöst sind. Die Harze werden bei der Verarbeitung durch Polymerisation in feste Stoffe übergeführt. Der Übergang vom flüssigen in den festen Zustand durch die sogenannte Kopolymerisation wird entweder bei hohen Temperaturen durch Zusatz eines Katalysators, oder bei Raumtemperatur durch Zusatz eines Katalysators (z. B. Methyläthylketonperoxid) und des zugehörigen Beschleunigers (z. B. Cobaltoktoat) herbeigeführt. Als Polymerisationsvernetzer dient das im Harz selbst enthaltene Monostyrol. Die ungesättigten Stellen von Polyester und Styrol reagieren miteinander - es tritt eine Vernetzung beider Partner ein. Eingeleitet wird die Polymerisation durch Radikalbildung des Katalysators. Alle Komponenten des Harzes werden bei dem Härtingsprozeß einpolymerisiert, ohne daß flüchtige Bestandteile abgespalten werden oder enthaltende Lösungsmittel verdunsten müssen. Es liegt dann der nicht mehr lösliche und unschmelzbare Kunststoff vor.

## II.2 Verstärkungswerkstoff

Die Verstärkung von Kunststoffen kann durch Fasern unterschiedlichster Art erfolgen. Es können dabei sowohl anorganische Faserstoffe wie Glas, Asbest und Metallfasern, neuerdings auch Einkristalle, die sogenannten Whiskers, als auch organische Faserstoffe wie Natur- und Chemiefasern eingesetzt werden. Zwar besitzen z. B. die künstlich erzeugten Metallwhiskers (Einkristallfasern aus Eisen, Bor, Wolfram) und auch die Kohlenstofffasern (carbonisierte organische Fasern) Zugfestigkeiten und Elastizitätsmoduli, die um eine Größenordnung höher liegen als die des herkömmlichen Baustahls - sie können jedoch bisher nur zu einem außerordentlich hohen Preis (200 - 500 DM/kg) hergestellt werden.

Für die hier erörterten tragenden Kunststoffe kommen bisher fast ausschließlich Glasfasern zur Anwendung. Diese im Düsenziehverfahren hergestellten Fasern besitzen bei einem Durchmesser von 3 - 10  $\mu\text{m}$  eine Zugfestigkeit von ca. 100  $\text{kp/mm}^2$  und einen Elastizitätsmodul von 7500  $\text{kp/mm}^2$ . Die mit einem Haftvermittler (Schlichte) versehenen Einzelfasern werden zu Faserbündeln verwirrt und dann, je nach Bedarf, zu Geweben oder Matten weiterverarbeitet. Will man einen besonders zugfesten und biegesteifen Werkstoff erhalten, so legt man gewobene Kreuz- und Unidirektionalgewebe (Bild 1 a, 1 b) ein. Geringere Festigkeitswerte erzielt man mit der Wirrfasermatte (Bild 1 c).



Bild 1 a - 1 c: Verstärkungsmaterialien (Kreuzgewebe, Unidirektionalgewebe, Matte)

### II.3 Füllstoff

Um das Schwindmaß, die Wärmeausdehnung und vor allen Dingen den Preis der Kunststoffbauteile herabzusetzen, verwendet man bei der Verarbeitung heute in der Regel Füllstoffe. Es kommen dabei organische (z. B. Ruß) und anorganische Stoffe (z. B. Quarz, Kreide, Schwerspat) zum Einsatz. Die Menge des dem Harz zugesetzten Füllstoffes ist durch die von letzterem gebildeten Hohlräume begrenzt. Entweder trennt das Harz die Füllstoffpartikel (es ist zuviel Harz vorhanden) oder die Hohlräume zwischen den Partikeln sind nur teilweise ausgefüllt (es ist zu wenig Harz vorhanden). Werden z.B. kugelförmige Füllstoffteilchen gleichen Durchmessers verwendet, so ist die optimale Füllstoff-Harz-Konzentration von 75,5 : 24,5 Vol. % möglich. In der Regel ist diese Konzentration jedoch nicht zu erreichen - die immer vorhandenen Adhäsionskräfte und die Porosität bewirken eine zumindest teilweise Adsorption des Harzes. Die Dicke des Laminats wird also ab einem bestimmten Füllstoffgehalt (z. B. 40 %  $Al(OH)_3$ ) bei gleicher Glasverstärkung ansteigen.

Wegen des Fehlens jeglicher Festigkeitskennwerte sind für Kreide und Quarzmehl erstmals entsprechende Versuche durchgeführt worden [10]. Es zeigte sich, daß die Zug- und Biegefestigkeiten, selbst bis zu Füllstoffgehalten von 80 % einen nur geringfügigen und die Elastizitätsmoduli gar keinen Abfall aufwiesen. (z. B. Bild 2)

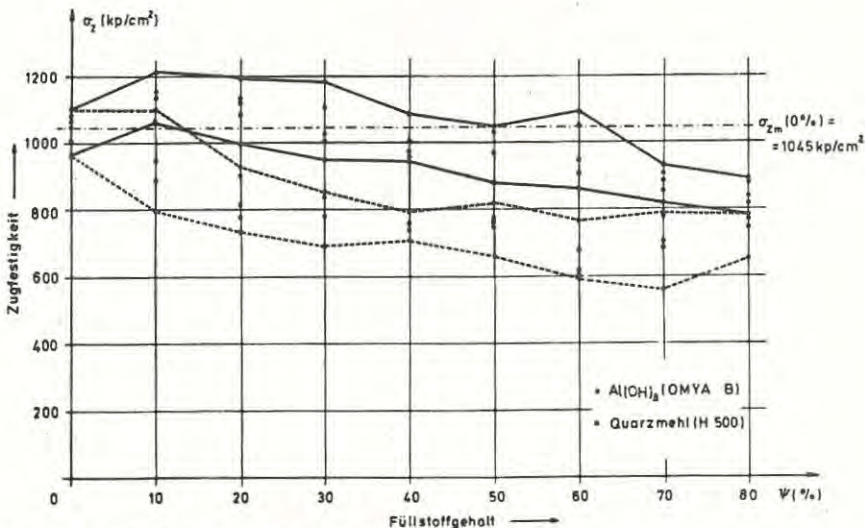


Bild 2: Zugfestigkeit in Abhängigkeit vom Füllstoffgehalt

#### II.4 Verbundwerkstoff

Der Verbundwerkstoff, der sich aus dem Kunstharz und den Verstärkungsfasern ergibt, besitzt gegenüber den herkömmlichen Werkstoffen in der Orientierungsmöglichkeit (Glasverstärkung je nach Beanspruchungsrichtung), der hohen spezifischen Festigkeit ( $\sigma/\gamma = 1000 - 2500 \text{ kp/cm}^2 // \text{ g/cm}^3$ ), der Korrosionsbeständigkeit, der guten Formbarkeit, der Transparenz und der sehr geringen Wärmeleitfähigkeit bedeutsame Vorteile. Die mechanischen Eigenschaften sind vom Spannungs-Dehnungsverhalten und vom Mengenanteil der Einzelkomponenten, sowie von der Art der Faserverstärkung abhängig. Bei dem z. B. durch Glasrovings verstärkten Polyesterharz ergibt sich bis zum Bruch ein fast geradliniger Spannungs-Dehnungsverlauf. Die Zugfestigkeit eines solchen Materials (60-70 Gew.-% Glas) beträgt  $3000 - 4000 \text{ kp/cm}^2$  bei einer Bruchdehnung von 1,5 - 2,5 %. In Querrichtung vermag ein solches Laminat jedoch nur außerordentlich kleine Kräfte zu übertragen. Die nur schwachen Harzbrücken lassen nur eine kleine Relativdehnung zu - es können leicht parallel zu den Rovingsträngen verlaufende Risse auftreten (Bild 3).



Bild 3: Risse an einem Zylinder-Wickellaminat

Ein in dieser Hinsicht günstigeres Verhalten stellt hier das durch Gewebe und Matten verstärkte Mischlaminat dar (35 - 45 Gew.-% Glas). Bei einem solchen Material läßt sich ein nur schwacher, aber doch deutlich sichtbarer Knick in der Spannungsdehnungslinie feststellen. Dieser etwa bei einem Drittel der Bruchbeanspruchung ( $\sigma_B = 1500 - 2500 \text{ kp/cm}^2$ ) liegende Knick, den man mit der

Proportionalitätsgrenze des Stahls vergleichen kann, stellt einen Punkt dar, von dem an das Harz Schädigungen durch Mikrorisse erfährt. Bei der Absicherung von Konstruktionen sollte aus diesem Grund die Spannung aus Gebrauchslast stets unterhalb dieser Schädigungsspannung liegen.

Bei der Auswahl des Harzes muß darauf geachtet werden, daß dessen Bruchdehnung mindestens ebenso groß ist wie die Bruchdehnung der Verstärkungsfasern. Ist sie kleiner, so wird die oben erwähnte Rissbildung schon früher auftreten und die relativ teuren Verstärkungsfasern werden nur unzureichend ausgenutzt.

Die im einzelnen eingesetzten Materialien werden an den entsprechenden Stellen dieser Arbeit gesondert beschrieben.

### III. Die Fügung von Kunststoffbauteilen

Wie bei den herkömmlichen Werkstoffen bieten sich auch bei Kunststoffen zur Fügung die Verschraubung, die Verschweißung und die Verklebung an. Dabei kann aus den oben erörterten Gründen die Verschweißung nur bei thermoplastischen Kunststofffügeteilen erfolgen - nur diese lassen sich durch Zuführung von Wärme erweichen und so miteinander verbinden.

Für die in den meisten Fällen bei tragenden Bauteilen zum Einsatz kommenden duroplastischen Kunststoffe bleiben demnach als Fügemöglichkeit die Verschraubung und die Verklebung. Bei der punktförmig wirkenden Schraubverbindung und teilweise auch der HV-Schraubverbindung ist jedoch nur eine unwirtschaftliche Querschnittsausnutzung möglich. Infolge des bis zum Bruch linearen Spannungs-Dehnungsverhaltens können die Spannungsspitzen im Bereich der Schraubenlöcher nicht, wie z.B. bei Stahl St 37, durch Fließen abgebaut werden - der Bruch tritt so durch die Kerbwirkung ein.

Demgegenüber wird durch die Kleb- bzw. vorgespannte Klebverbindung (VK) infolge ihrer flächenhaften Kraftübertragung zwar eine optimale Verbindung von Kunststofffügeteilen ermöglicht, sie erfordert jedoch mehr Sorgfalt und einen wesentlich größeren Arbeitsaufwand bei der Herstellung (Entfetten und Aufrauen der Klebflächen, Zusammenpressen der Verbindung).

Da man die beim Metallbau üblichen Bemessungsregeln auf die Fügung von Kunststoffbauteilen nicht einfach übertragen kann, müssen für die einzelnen Fügeteilmaterialien entsprechende Versuche durchgeführt werden. In einem ersten Schritt wurde nun das Tragverhalten von Verklebungen und Verschraubungen bei Fügeteilen aus dem zumeist eingesetzten glasfaserverstärkten Polyesterharz untersucht.

Als weitere Fügeart sei die bei den biegeweichen Membrantragwerken fast ausschließlich eingesetzte Vernähung noch erwähnt. Auch für diese Verbindung mit annähernd linienförmiger Kraftübertragung gelten kunststoffspezifische Konstruktionsgrundsätze. Über erste Versuche an vernähtem PVC-beschichtetem Polyestergerewebe soll im Kap. V berichtet werden.

#### III.1 Die Klebverbindung

Die Eigenschaften und das Verhalten einer GFK-Klebverbindung werden bestimmt durch die Eigenart des Klebers, die Gestalt und die Oberflächenbehandlung des

Fügeteils und die Scherfestigkeit der Harzdeckschicht. Als Kleber werden fast ausschließlich kaltaushärtende synthetische hochpolymere Harze verwendet, deren Eignung in erster Linie von dem zur Herstellung des GFK-Fügeteils benutzten Laminierharz abhängig ist. Im Bauwesen werden Lamine vorwiegend unter Verwendung von Polyesterharz verarbeitet. Zur Verklebung derartiger Bauteile eignen sich insbesondere Kleber auf Epoxid-, Polyester- und Polyurethanharzbasis. Die Wirkung des Klebers beruht bekanntlich auf der mechanischen und zum größeren Teil der spezifischen Adhäsion. Während die mechanische Adhäsion durch eine Verklammerung wirkt - sie ist kaum vom Material des Fügeteils, sondern fast nur von der Oberflächenrauigkeit abhängig - wird infolge der größeren Polarität des GFK gegenüber Metall eine Steigerung der durch freie Valenzkräfte wirkenden spezifischen Adhäsion erreicht. Neben der Haftfestigkeit spielen die Schichtdicke und die Eigenfestigkeit des Klebers eine wesentliche Rolle. Nimmt die Klebschichtdicke ab, so steigt die Bindefestigkeit an, da die Anzahl der Fehlstellen herabgesetzt, die Querkontraktion behindert und der Einfluß der Valenzkräfte vergrößert wird. Bei den vorliegenden Versuchen ergab sich bei einem Anpreßdruck  $p = 0,015 \text{ kp/cm}^2$  eine mittlere Klebschichtdicke  $\rho = 0,05 - 0,15 \text{ mm}$ . Bricht die Klebverbindung nicht in der Grenzschicht sondern im Kleber selbst, so ist für das Versagen seine Eigenfestigkeit maßgebend. Sie wird im wesentlichen durch die chemische Zusammensetzung, die Vernetzungskomponente und den Aushärtungsgrad bestimmt.

Für die bei den vorliegenden Untersuchungen verwendeten Kleber auf Polyesterharzbasis (Vestopal LT 400; 2 % MEKP; 1 % Co. Beschl.) und Epoxidharzbasis (Araldit AW 134 B; 40 % Härter HV 994) wurden bei annähernd linearem Spannungs-Dehnungsverhalten (Bild 4) Bruchfestigkeiten von  $\sigma_B = 610$  bzw.  $235 \text{ kp/cm}^2$  und Elastizitätsmoduli von  $E = 0,37 \cdot 10^5$  bzw.  $0,18 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$  (Tabelle 1) ermittelt.

Tabelle 1: Materialkennwerte

	Polyester (Vestopal LT 400)	Epoxid (Araldit AW 134)	GFK der Fügeteile (40 % Glas)
Dichte ( $\rho/\text{cm}^3$ )	1,17	1,29	1,73
Elastizitätsmodul E ( $\text{kp}/\text{cm}^2$ )	$0,37 \cdot 10^5$	$0,18 \cdot 10^5$	$0,75 \cdot 10^5$
Zugfestigkeit $\sigma_B$ ( $\text{kp}/\text{cm}^2$ )	610	235	1036
Kugeldruckhärte H ( $\text{kp}/\text{mm}^2$ )	16,0	11,1	12,2

Für den bei den vorliegenden Versuchen verwendeten Fügeteilwerkstoff (40 % Glasseidenmatte; Gevetex M 123-400; 60 % Harz: 1,0 GT Polyleit 41-001; 0,03 GT Monostyrol; 0,025 GT MEKP 40 %; 0,03 GT Co-Beschl. 1 %) wurde das annähernd lineare Spannungs-Dehnungsverhalten (Bild 4) und eine Bruchfestigkeit von  $\sigma_B = 1036 \text{ kp}/\text{cm}^2$  (Tabelle 1) ermittelt.

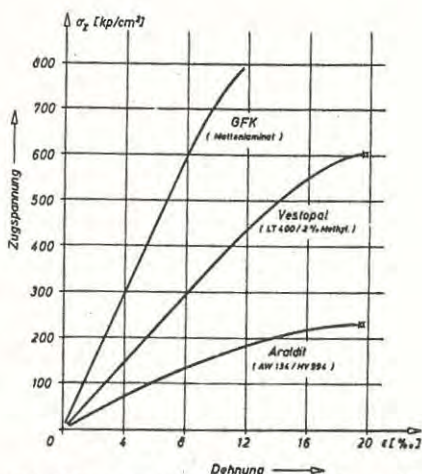


Bild 4: Spannungsdehnungslinien für Kleber und GFK



Wie schon erwähnt, ist die Adhäsion von der Beschaffenheit der zu verklebenden Oberfläche abhängig. Wird das GFK-Fügeteil ohne Oberflächenvorbehandlung verklebt, oder wird die Oberfläche vor dem Kleben nur durch ein Lösungsmittel (z. B. Aceton) gereinigt, so erreicht man nur sehr niedrige Festigkeitswerte. Schmirgeln oder das besser reproduzierbare Sandstrahlen lassen, wie die Ergebnisse der durchgeführten Versuche zeigen, die Festigkeitswerte erheblich ansteigen.

### III.1.1 Festigkeitsverhalten der Klebverbindung

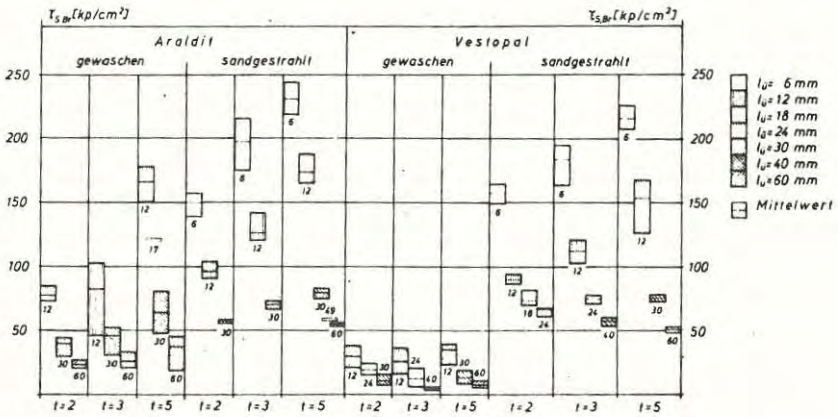
#### III.1.1.1 Die Zugscherverbindung

In der Klebtechnik wird die einschnittige Zugscherverbindung aus wirtschaftlichen und verarbeitungstechnischen Gründen am häufigsten angewendet, obwohl sie als nichtsymmetrische Verbindung gegenüber der zweisechnittigen infolge der Biegebeanspruchung zum Abschälen neigt und dadurch geringere Zugkräfte übertragen kann. Bei den vorliegenden Untersuchungen wurden aus diesem Grund ausschließlich einschnittige Zugscherverbindungen geprüft.

Um eine Aussage über den Einfluß von Überlappungslänge, Fügeteildicke, Oberflächenvorbehandlung und Klebertyp auf die Bindefestigkeit machen zu können, wurden an etwa 250 entsprechend hergestellten Körpern (Überlappungslänge:  $l_{\text{Ü}} = 6; 12; 18; 24; 30; 40; 60$  mm/Fügeteildicke:  $t = 2; 3; 5$  mm/Oberflächenvorbehandlung: sandgestrahlt mit Stahlsand-Abrasit 40/90; gewaschen mit Aceton/Kleber: Epoxidharz Araldit; Polyesterharz Vestopal) Versuche durchgeführt.

Während die verschiedenen Klebertypen keine nennenswerten Unterschiede der Bindefestigkeiten erbrachten, lagen die Festigkeitswerte der vor dem Verkleben mit Aceton gewaschenen Versuchskörper um eine Größenordnung niedriger als die der Körper mit sandgestrahltem Haftgrund (Bild 5).

Hierbei trat der Bruch bei den Prüfkörpern mit Aceton gewaschenen Fügeteilen in der Haftfläche und bei den Prüfkörpern mit sandgestrahlten Fügeteilen in der Deckschicht des Laminierharzes auf (Bild 6 a, 6 b).



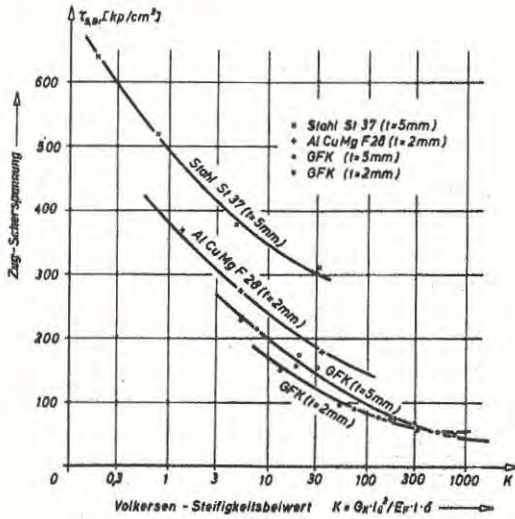
**Bild 5:** Ergebnisse der Zugscherversuche



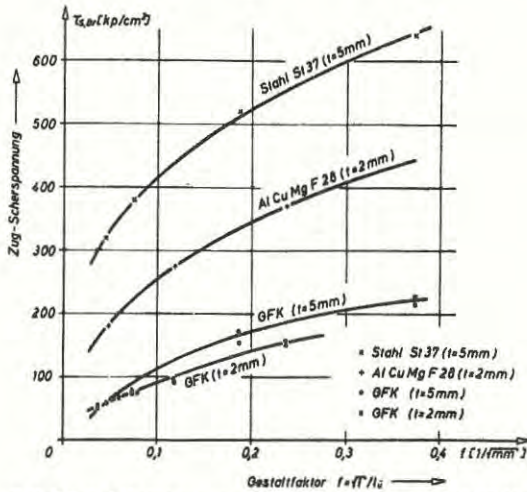
**Bild 6 a, 6 b:** Bruchflächen der Zugscherkörper  
(Vestopal - Araldit)

Die den Bruch einleitenden Spannungsspitzen am Überlappungsansatz sind in starkem Maße von der Überlappungslänge und auch von der Fügeteildicke abhängig. So wird im mittleren Bereich einer relativ langen Überlappung die Zugscherspannung annähernd Null sein und an den Enden stark ansteigen, während bei einer kurzen Überlappung die Zugscherspannungen über die gesamte Länge annähernd konstant sein werden. Infolge der geringen Steifigkeit macht sich dieser Effekt besonders bei GFK-Verbindungen bemerkbar. Bei einem 5,0 mm dicken Fügeteil mit einer Überlappungslänge von 6,0 mm fällt die mittlere, im Versuch erreichte Zugscherspannung z. B. von  $\tau_B = 220 \text{ kp/cm}^2$  auf  $\tau_B = 50 \text{ kp/cm}^2$  ab, wenn man die Überlappungslänge auf den 10-fachen Wert steigert (Bild 9, 10, 11). Ein entsprechender Abfall tritt auch bei abnehmender Fügeteildicke auf. Um eine Vergleichsmöglichkeit für die Festigkeiten von Klebverbindungen zu erhalten, bzw. eine Aussage über deren Wirtschaftlichkeit machen zu können, läßt sich bekanntlich der Volkersen-Steifigkeitsbeiwert als Quotient aus Schubsteifigkeit der Klebschicht und Zugsteifigkeit des Fügeteils, oder der Gestaltfaktor von de Bruyne verwenden, der Fügeteildicke und Überlappungslänge miteinander verknüpft. Ebenso wie Stahl und Aluminium zeigt auch GFK die Tendenz, daß bei größer werdendem Volkersen-Steifigkeitsbeiwert bzw. Gestaltfaktor die Zugscherfestigkeiten abfallen bzw. ansteigen.

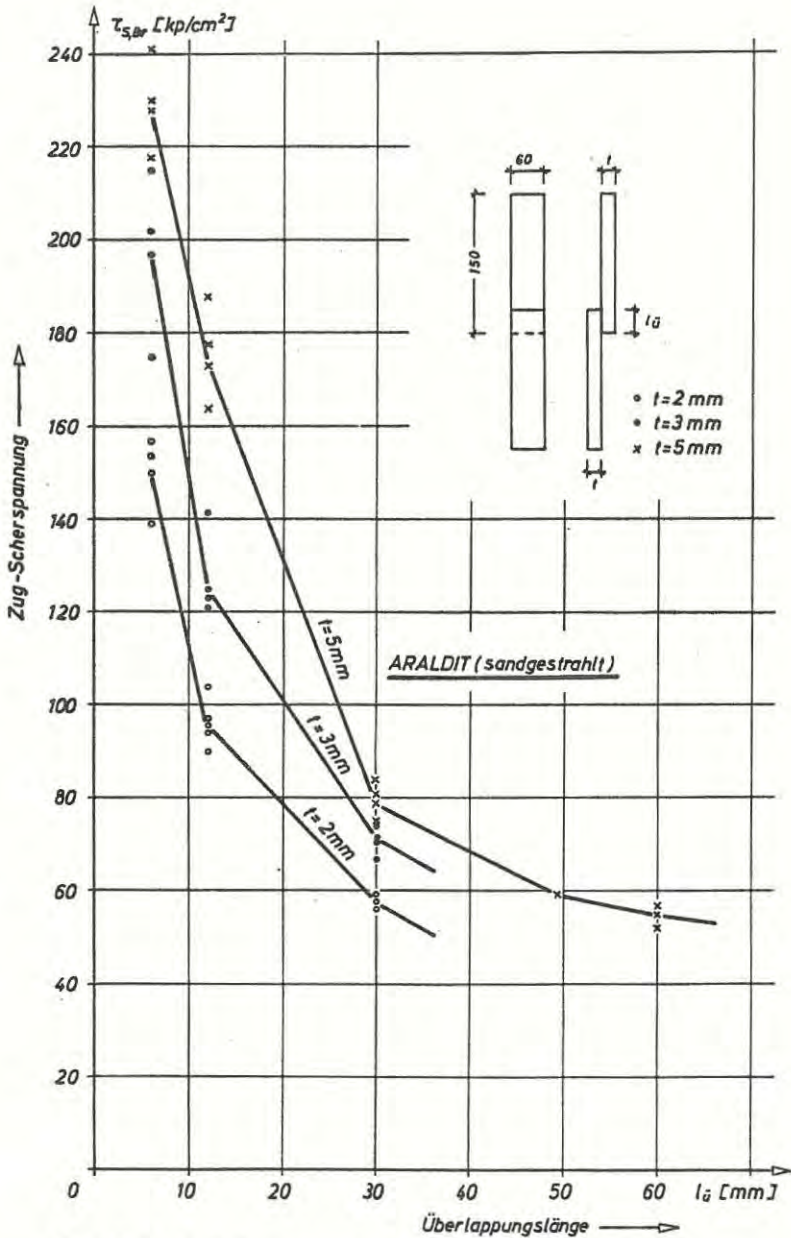
(Bild 7, 8), z. B. beträgt die Festigkeit einer einschnittigen Zugscherverbindung aus GFK bei dem Gestaltfaktor  $f = 0,2$  nur etwa ein Drittel der Festigkeit einer vergleichbaren Verbindung mit Stahlfügeteilen ( $180 \text{ kp/cm}^2 : 530 \text{ kp/cm}^2$ ).



**Bild 7:** Zug-Scherspannung in Abhängigkeit vom Volkersen Steilheitsbeiwert



**Bild 8:** Zug-Scherspannung in Abhängigkeit vom Gestaltfaktor



**Bild 9:** Zug-Scherspannung in Abhängigkeit von der Überlappungslänge (Araldit-sandgestrahlt)

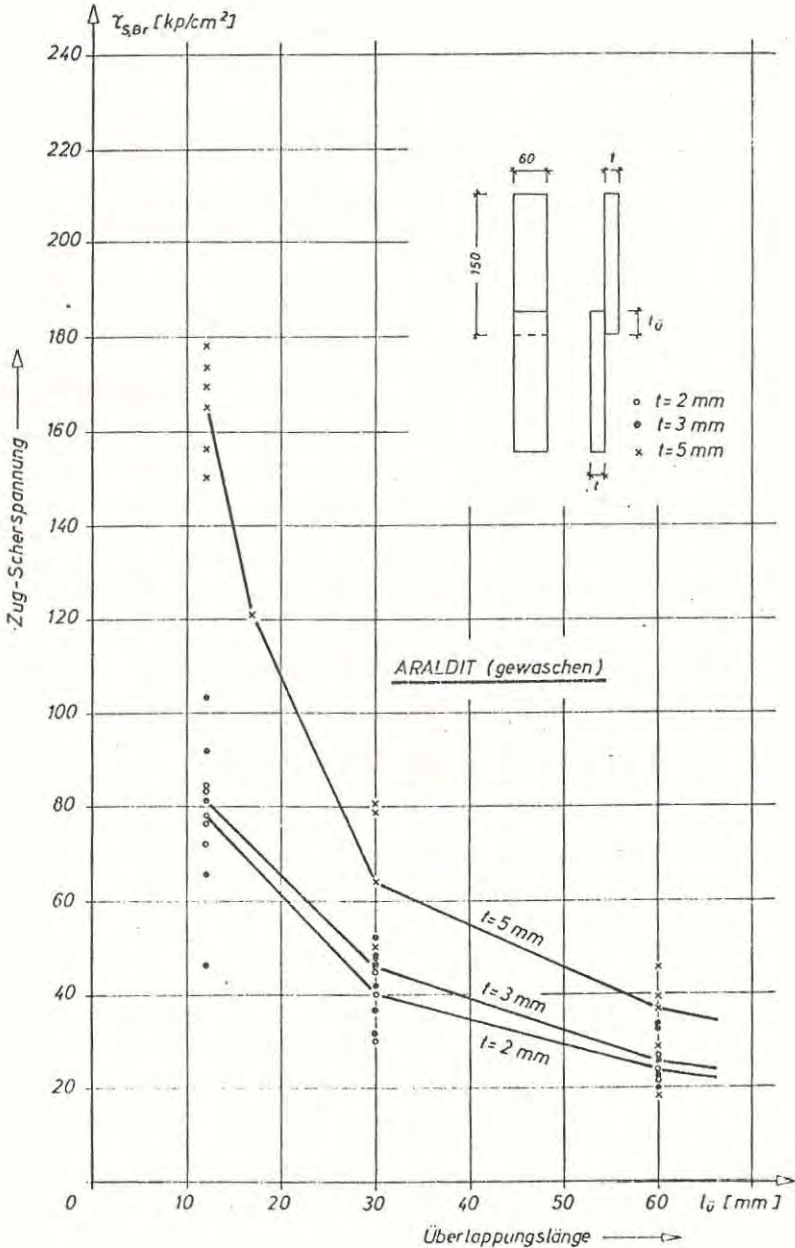


Bild 10: Zug-Scherspannung in Abhängigkeit von der Überlappungslänge (Araldit-gewaschen)

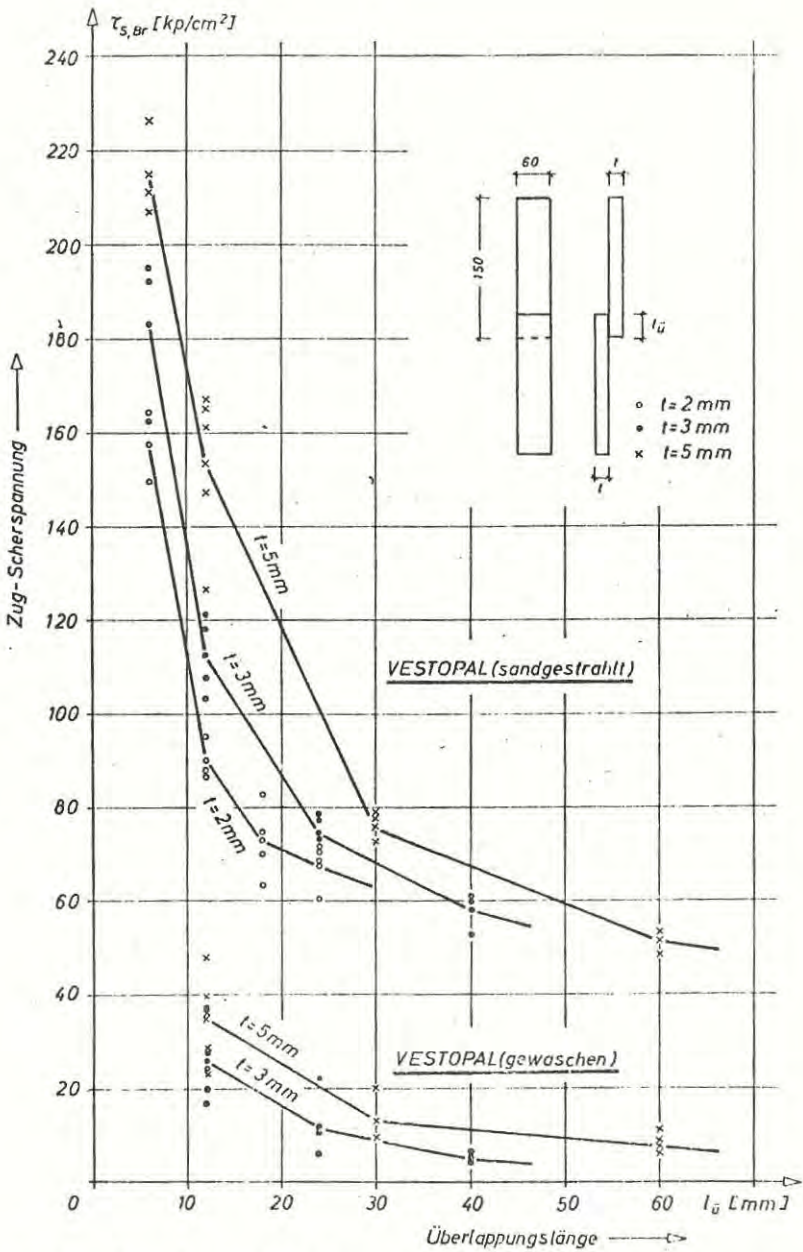


Bild 11: Zug-Scherspannung in Abhängigkeit von der Überlappungslänge (Vestopal)

### III.1.1.2 Die Klebeverbindung unter Zug- bzw. Biegebelastung

Bei der Verwendung von GFK-Teilen im Bauwesen kommt es vor, daß diese stumpf gestoßen werden müssen und die Stöße einer Zug- bzw. Biegebeanspruchung ausgesetzt sind (es wurden z. B. bei einer Hauskonstruktion die einzelnen Dachkörper aus GFK an den Stirnflächen miteinander verklebt). Das Festigkeitsverhalten derartiger Klebeverbindungen ist in starkem Maße von der Baukörperform abhängig.

Für den oben erwähnten Dachkörper sind - auch wegen des Fehlens jeglicher Versuchsergebnisse - im vorliegenden Fall jeweils etwa 50 Versuche an Zug- bzw. Biegekörpern (sie bestanden aus Stahlvierkantprofilen und mittels Agomet aufgeklebten, 3,0 mm dicken GFK-Plättchen) unter Verwendung der vorbeschriebenen Epoxid- und Polyesterharzkleber durchgeführt worden. Die Klebflächen  $F_1 = b \cdot h = 25 \cdot 25 \text{ mm}^2$ ;  $F_2 = b \cdot h = 40 \cdot 25 \text{ mm}^2$  waren auch hier vor dem Verkleben durch Waschen mit Aceton, Sandstrahlen oder Schmirgeln vorbehandelt worden.

Ebenso wie bei der oben erörterten Zugscherverbindung ist auch hier ein starker Abfall der Klebfestigkeit bei den Körpern mit gewaschener Klebfläche festzustellen (Bild 12).

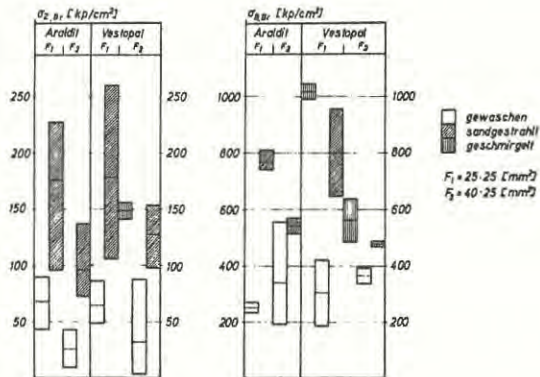


Bild 12: Ergebnisse der Zug- und Biegeversuche

Während für die beiden Klebertypen kein nennenswerter Festigkeitsunterschied ermittelt wurde, trat, wie zu erwarten war, sowohl bei den Zug- als auch den Biegekörpern mit der größeren Breite ein etwa 40 %iger Festigkeitsabfall ein. Der Bruch ist auch hier in der Haftfläche (mit Aceton gewaschen) bzw. in der Laminierharzdeckschicht (sandgestrahlt) aufgetreten. (Bild 13 a, 13 b).





Bild 13 a, 13 b: Bruchflächen der Zugkörper  
(Vestopal - Araldit)

### III.1.1.3 Die Klebverbindung unter Schälbeanspruchung

Für die Beurteilung einer Klebverbindung, ausgenommen solcher, die reiner Zug- bzw. Schubbeanspruchung ausgesetzt sind, ist der Abschälwiderstand  $p = P/b$  ein wichtiges Kriterium. Die abschälenden Kräfte wirken immer dort, wo z. B. infolge Lastexzentrizität Zugspannungen quer zur Beanspruchungsrichtung auftreten. Der Widerstand gegen diese abschälenden Kräfte ist im wesentlichen vom Abschälwinkel, dem Elastizitätsmodul und der Zugfestigkeit sowohl des Klebers als auch des Fügeiteilmaterials abhängig.

Um ein Maß für den Einfluß des hier behandelten GFK-Materials auf die Abschälfestigkeit zu erhalten, wurden etwa 60 Winkelschälversuche an rechtwinklig-gleichschenkeligen Prüfkörpern (Abkantradius  $r = 10$  mm, Dicke  $t = 2; 3; 5$  mm) mit gewaschenem bzw. sandgestrahltem Haftgrund durchgeführt. Als Anrißschälwiderstände  $p_A = P_{Br}/b$  - der Schälwiderstand  $p = P/b$  lag bei etwa 5 % dieses Wertes  $p_A$  - wurden bei diesen Versuchen sowohl für die beiden Kleber als auch für die Haftgrundvorbehandlung stark unterschiedliche Werte ermittelt (Bild 14).

Für den gegen Abschälen offensichtlich unempfindlicheren Epoxidharzkleber "Araldit" ergaben sich mit  $P_{Br}/b = 30$  kp/cm etwa doppelt so hohe Anrißschälwiderstände wie für den Polyesterharzkleber "Vestopal". Ebenso wie bei den vorherbeschriebenen Versuchen zeigte sich auch hier ein wesentlicher Abfall der Festigkeitswerte für die Versuchskörper mit gewaschenem (Aceton) Haftgrund (Bruchflächen vgl. Bild 15).

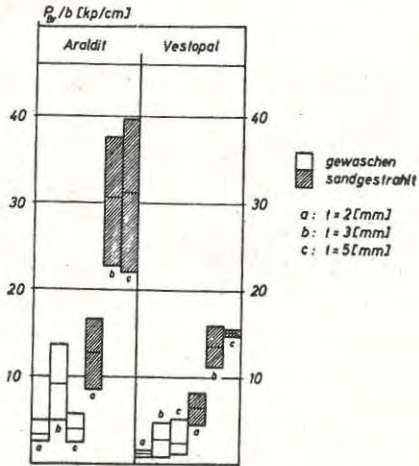


Bild 14: Ergebnisse der Winkelschälversuche

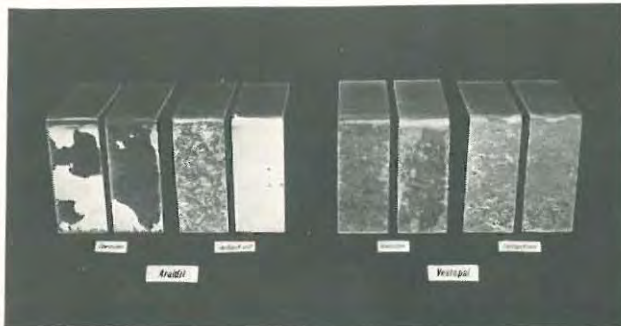


Bild 15: Bruchflächen der Winkelschälversuche

### III.1.2 Die Klebverbindung bei veränderlicher Temperatur

Ist es bei einer Klebverbindung mit Metallfügeteilen im betrachteten mittleren Temperaturbereich ( $-30^{\circ}\text{C}$  bis  $+95^{\circ}\text{C}$ ) nur der Kleber, der zum Festigkeitsabfall führt, so trägt bei der GFK-Klebung auch der Fügeteilwerkstoff zum Verlust der Festigkeit bei. Die Versprödung - sie folgt aus den unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten von Glas ( $5 \cdot 10^{-6}/\text{g}$ ) und Harz ( $100 \cdot 10^{-6}/\text{g}$ ) und den daraus resultierenden thermischen Spannungen - des Laminierharzes führt dazu, daß je nach Glasanteil die Tragfähigkeit des GFK-Fügeteils, insbesondere die der Harzdeckschicht bei  $100 - 150^{\circ}\text{C}$  (für Polyester- und Epoxidharz) erschöpft ist.

Für die hier untersuchte einschnittige Zugscherverbindung ( $l_0 = 30 \text{ mm}$ ;  $t = 3 \text{ mm}$ ) ergab sich ein stärkeres Abfallen der Zugscherfestigkeit ab einer Prüftemperatur  $T > 60^{\circ}\text{C}$  (Bild 16).

Der Bruch trat bei höheren Temperaturen ausnahmslos in der Laminierharzdeckschicht auf. Bis zu einer Temperatur von  $-20^{\circ}\text{C}$  trat kein Festigkeitsabfall ein.

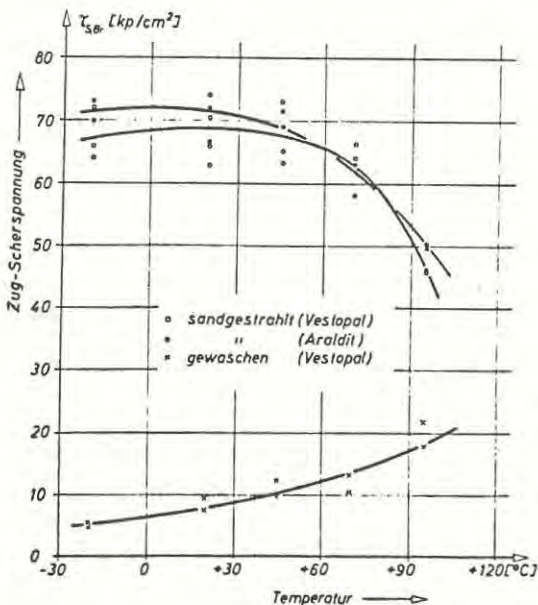


Bild 16: Zug- Scherspannungen in Abhängigkeit von der Temperatur

### III.1.3 Die Klebverbindung bei Wasserlagerung und Bewitterung

Ein Kleber oder ein GFK-Fügeteil nimmt, der Witterung oder sogar dem Wasser ausgesetzt, je nach chemischer Zusammensetzung Feuchtigkeit auf - ein Epoxidharz mit der hygroskopischen Vernetzungskomponente Polyaminoamid ist z. B. in der Lage in zehn Tagen etwa 0,5 % Wasser und ein Polyesterlaminat sogar etwa 1,6 % Wasser aufzunehmen -. Das sich im Molekülverband bzw. in Poren einlagernde Wasser setzt sowohl die mechanischen Festigkeitswerte als auch die Adhäsionswirkung zwischen Fügeteil und Kleber herab. Um den Festigkeitsabfall einer solchen, der Witterung bzw. dem Wasser ausgesetzten Klebverbindung angeben zu können, müssen die Prüfkörper über einen längeren Zeitraum in dem entsprechenden Medium gelagert und dann geprüft werden.

Um einen ersten Anhalt bezüglich der Alterung vorliegender GFK-Klebverbindung zu erhalten, wurden Zugscherkörper ( $l_0 = 30 \text{ mm}$  ;  $t = 3 \text{ mm}$ ) bis zu 48 Tage in Leitungswasser bzw. Sommerwetter (Stadtgebiet Karlsruhe) gelagert und jeweils nach 12; 24; 48 Tagen Lagerungsdauer geprüft. Ähnlich wie bei Metallklebverbindungen ist für die freibewitterten Prüfkörper kein nennenswerter Festigkeitsabfall ermittelt worden. Bei der wassergelagerten GFK-Klebverbindung wurde dagegen nach 48 Tagen ein Festigkeitsabfall von etwa 10 % festgestellt (Bild 17).

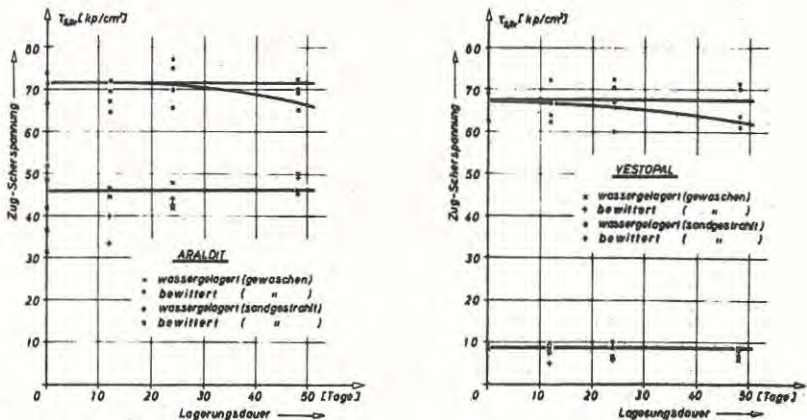


Bild 17: Zug-Scherspannung in Abhängigkeit von der Lagerungsdauer (Vestopal - Araldit)

### III.1.4 Die vorgespannte GFK-Klebverbindung (VK)

Wird die Klebfuge senkrecht zur Fügefläche mittels ausreichend zugfester Schrauben vorgespannt, so bildet sich infolge der Querpressung ein "Sekundärgerüst" aus. Das Entstehen dieses "Sekundärgerüsts" führt dazu, daß die Schälempfindlichkeit vermindert wird und daß die Übertragbaren Kräfte erheblich ansteigen. So wurde bei den vorliegenden Zugscherversuchen ( $l_0 = 60$ ;  $100 \text{ mm}$ ;  $t = 5 \text{ mm}$ ; M 12 mit  $M_a = 4,2 \text{ kpm}$ ) unter Verwendung von 1; 2; 4 Schrauben - der Haftgrund war bei den Fügeflächen auch hier mit Aceton gewaschen bzw. sandgestrahlt - Festigkeitswerte ermittelt ( $\tau_{S,Br} = 800 \text{ kp/cm}^2$ ), die um mehrere Größenordnungen höher lagen als bei Versuchskörpern mit nicht vorgespannter Klebfuge (Bild 18).

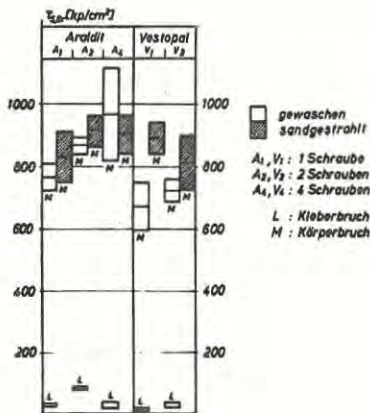


Bild 18: Ergebnisse der vorgespannten Zugscherkörper

Die VK-Verbindung bleibt, wie aus dem Bruchverhalten zu ersehen ist, dem Tragmechanismus nach eine Klebung. Die Leistungsfähigkeit dieser Verbindung ist dann erschöpft, wenn der Kleberbruch eingetreten ist. Bei der Bemessung darf also nicht angenommen werden, daß die VK-Verbindung nach dem Kleberbruch - es handelt sich dann nur noch um eine HV-Verbindung - noch eine gewisse Traglastreserve hat. Der Bruch des Fügeteils tritt infolge der oben erwähnten Spannungsspitzen meist unmittelbar nach dem Kleberbruch ein.

### III.2 Die Schraubverbindung

#### III.2.1 Das Tragverhalten von GFK-Schraubverbindungen

Für die Tragfähigkeit einer Schraubverbindung ist neben der Lochanordnung in erster Linie die Festigkeit des Fügeteilwerkstoffes von Bedeutung. Die heute vorwiegend verwendeten Kunstharze (ungesättigter Polyester, Epoxid, Phenol, Acrylat u. a.) können bekanntlich in sehr verschiedener Form durch z. B. Glasfasern, Polyesterfasern, Polyamidfasern oder Kohlenstofffasern verstärkt werden. Die Festigkeit des entstehenden Verbundwerkstoffes hängt dabei hauptsächlich vom Anteil des Verstärkungsmaterials und seiner Orientierung ab.

Für die vorliegenden Untersuchungen an den nicht vorgespannten Schraubverbindungen wurde ungesättigtes Polyesterharz (1 GT Leguval W 16/Bayer; 0,025 GT Benzoylperoxid 50 %/Oxydo; 0,0075 GT Amin-Beschl. Typ 6310/Oxydo; 0,05 GT Monostyrol) durch wechselweise aufgelegte Glasseidematten (Gevetex M 123-400; 450 g/m<sup>2</sup>) und quadratische Rovinggewebe (Vanck/Dwens-Corning P 981; 970 g/m<sup>2</sup>) verstärkt. Dieser Fügeteilwerkstoff hatte bei einem Glasgehalt von 41 % eine mittlere Zugfestigkeit von 1380 kp/cm<sup>2</sup> und eine mittlere Biegefestigkeit von 2170 kp/cm<sup>2</sup>. Als Schrauben wurden M 12/10 K; M16/10 K - DIN 7968 und als Unterscheiben A 13; A 17 - DIN 9021 verwendet.

Um eine Aussage über den Einfluß von Schnittigkeit, Randabstand, Schraubenabstand, Schraubendurchmesser und Fügeteildicke auf die Höhe der Traglast machen zu können, sind an insgesamt 97 Probestäben (1- und 2-schnittig; Randabstand:  $e_1 = 15, 30, 45, 60, 75$  mm; Schraubenabstand:  $e_2 = 45, 60, 90$  mm; Schraubendurchmesser:  $d = 12, 16$  mm; Fügeteildicke:  $t = 5, 10, 15$  mm) Versuche durchgeführt worden.

Bei allen Probestäben trat die Traglasterschöpfung durch Bruch des Fügeteils ein - die Schrauben blieben in jedem Fall unbeschädigt - . Der Fügeteilbruch (Bild 19) verlagerte sich dabei von der Lochleibung (Scherbruch bei kleineren Randabständen  $e_1 = 15, 30, 45$  mm) auf den Lochstabquerschnitt (Zugbruch bei größeren Randabständen  $e_1 > 45$  mm). Abweichend von diesem Verhalten brachen die Probestäbe mit der kleineren Dicke  $t = 5,0$  mm - durch Erreichen der Spannung  $\sigma_D = P_B/d \cdot t = 2850$  kp/cm<sup>2</sup> - auch bei dem maximalen Randabstand  $e_1 = 60$  mm in der Lochleibung (Bild 19).

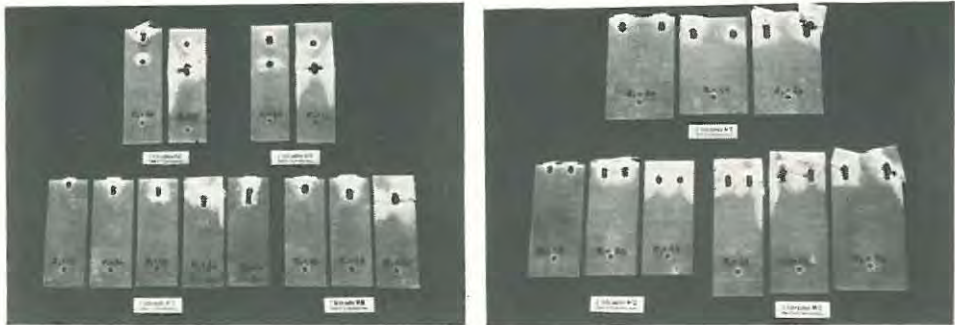


Bild 19: Bruchbilder (1 Lochreihe - 2 Lochreihen)

Auch aus den während des Versuchs mitgeschriebenen Lastverformungslinien (Bild 20) wird das sehr unterschiedliche Bruchverhalten der Verschraubungen deutlich. Während der Zugbruch im Lochquerschnitt und der Scherbruch vor dem Schraubenloch bei relativ kleiner Verformung schlagartig eintritt (Stab Nr. 24, 25), wird die maximale Tragfähigkeit bei den Stäben mit den dünneren Fügeteilen  $P_2 = 2120$  kp erst nach relativ großen Verformungen (Zerstörung der Lochleibung - Stab Nr. 117) erreicht.

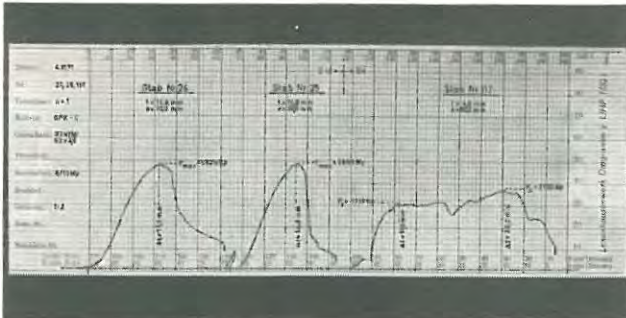
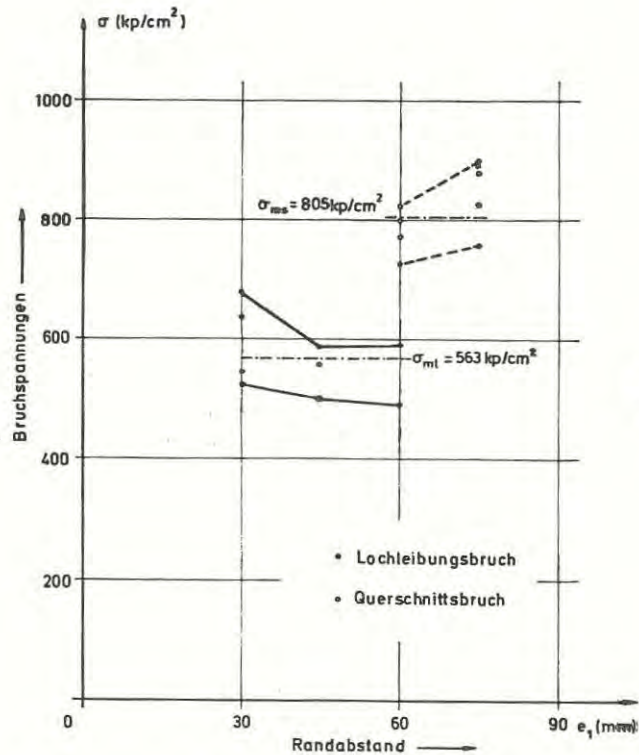
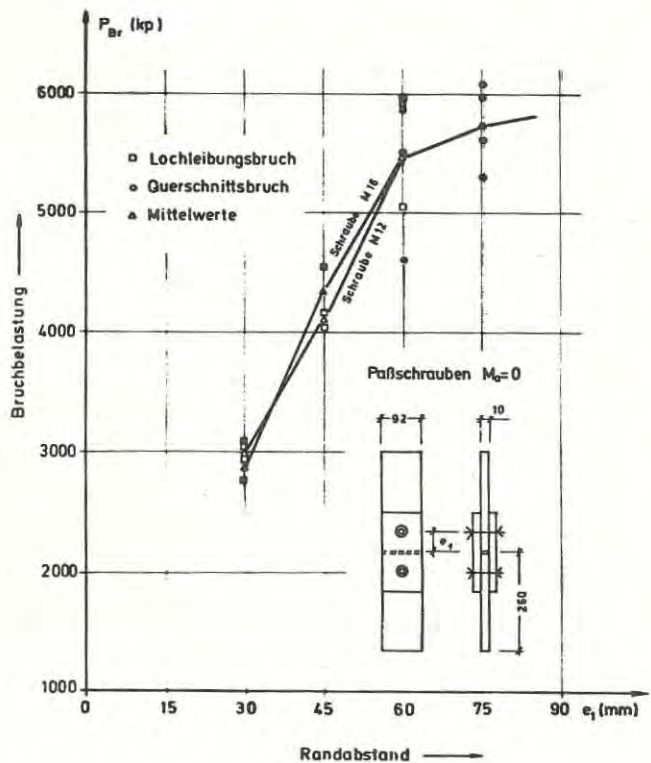


Bild 20: Last-Verformungslinien

Aus den gemessenen Bruchlasten der zweiseitigen Schraubverbindungen - sie sind offensichtlich unabhängig vom Durchmesser der verwendeten Schrauben - ergeben sich als mittlere Bruchspannungen (Bild 21 u. 22):  $\sigma_S = 571$  kp/cm<sup>2</sup> (Scherbruch vor der Schraube);  $\sigma_Z = 891$  kp/cm<sup>2</sup> (Zugbruch im Lochstabquerschnitt);  $\sigma_D = 2850$  kp/cm<sup>2</sup> (Druckbruch in der Lochleibung). Infolge der Ver-

drehung des Probestabes (exzentrische Kraftübertragung) und der Verklammerung der Füge­teile (Verschiebung der Füge­teile) traten bei den einschnittigen Verbindungen um ca. 10 - 20 % höhere Bruchlasten auf (Bild 23 u. 24). Eine weitere Steigerung der jeweiligen Bruchspannung läßt sich teilweise durch zusätzliche Verstärkungsmaßnahmen im Anschlußbereich (während des Laminierens) erzielen - z. B. Einlegen von quadratischen oder unidirektionalen Rovinggeweben.





**Bild 21:** Bruchlasten und Bruchspannungen in Abhängigkeit vom Randabstand (eine Schraube-zweischnittig)

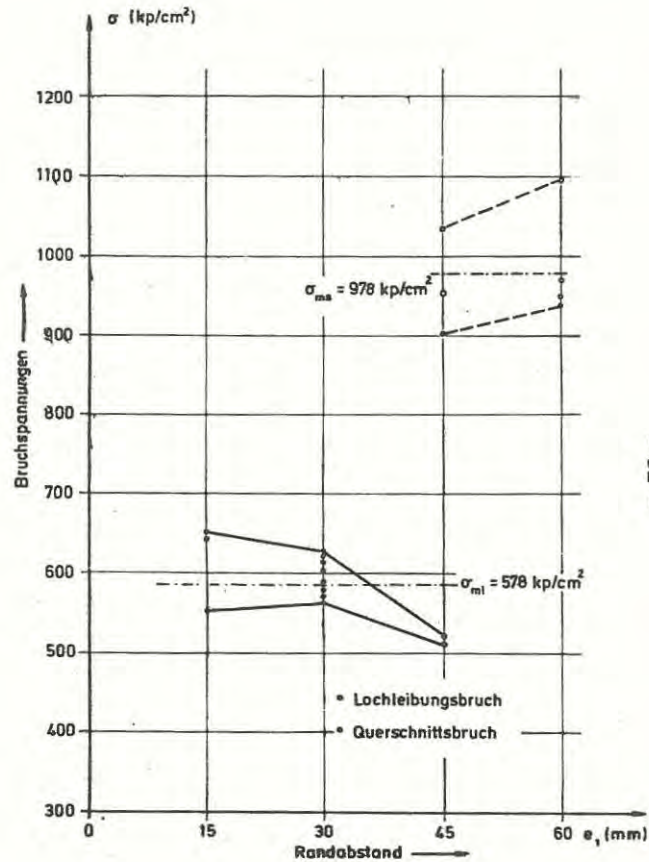
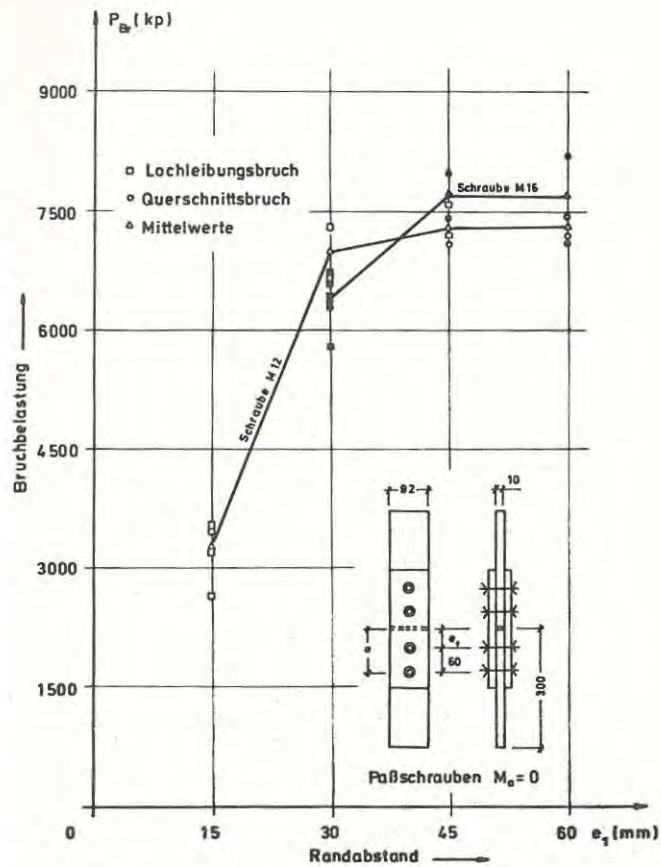


Bild 22: Bruchlasten und Bruchspannungen in Abhängigkeit vom Randabstand (zwei Schrauben-zweischnittig)

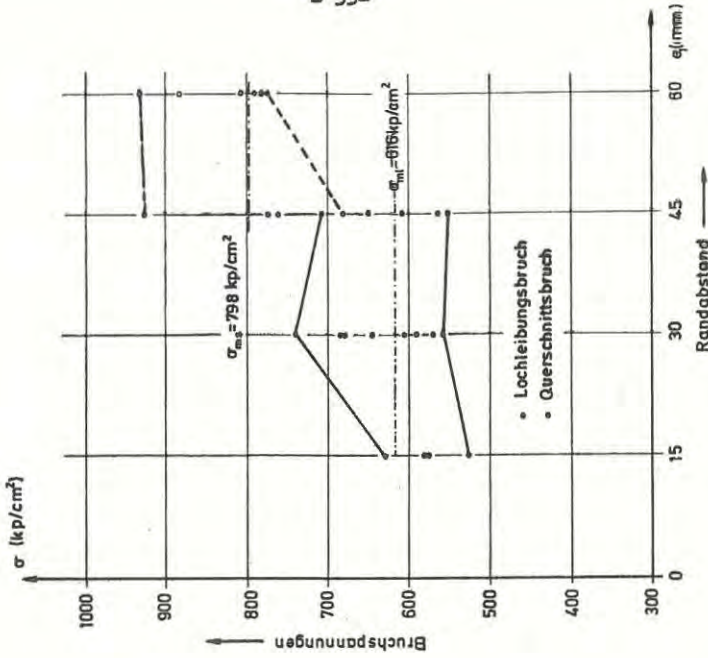
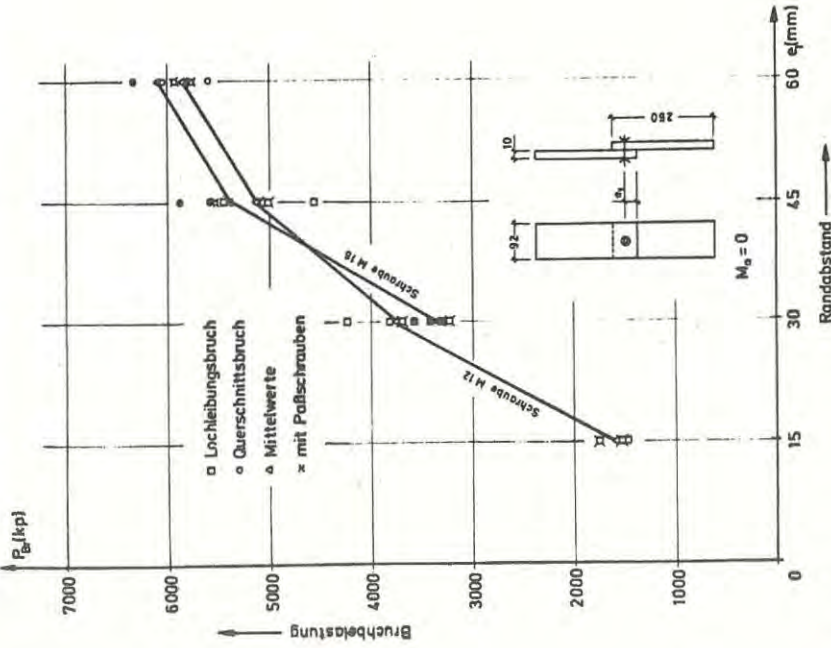


Bild 23 : Bruchlasten und Bruchspannungen in Abhängigkeit vom Randabstand (eine Schraube - einschnittig)

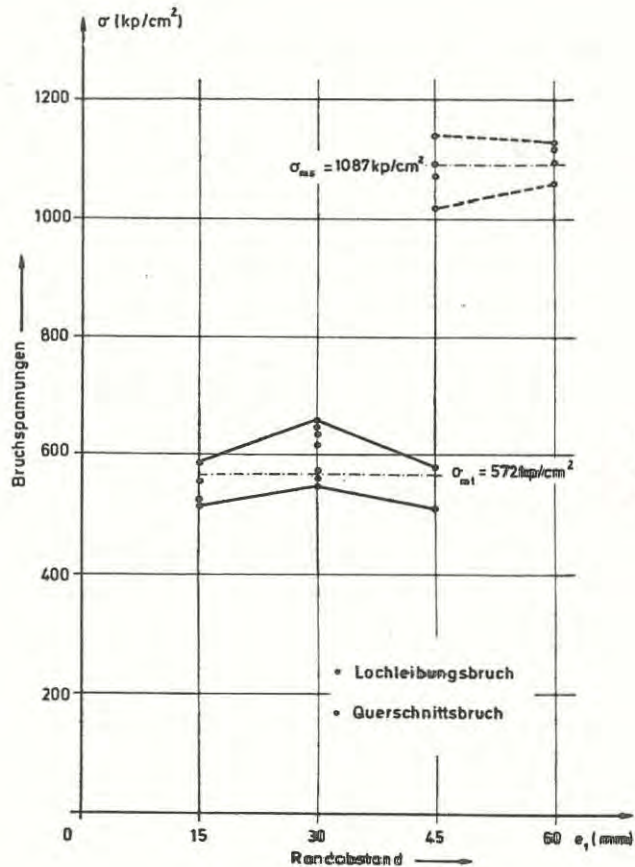
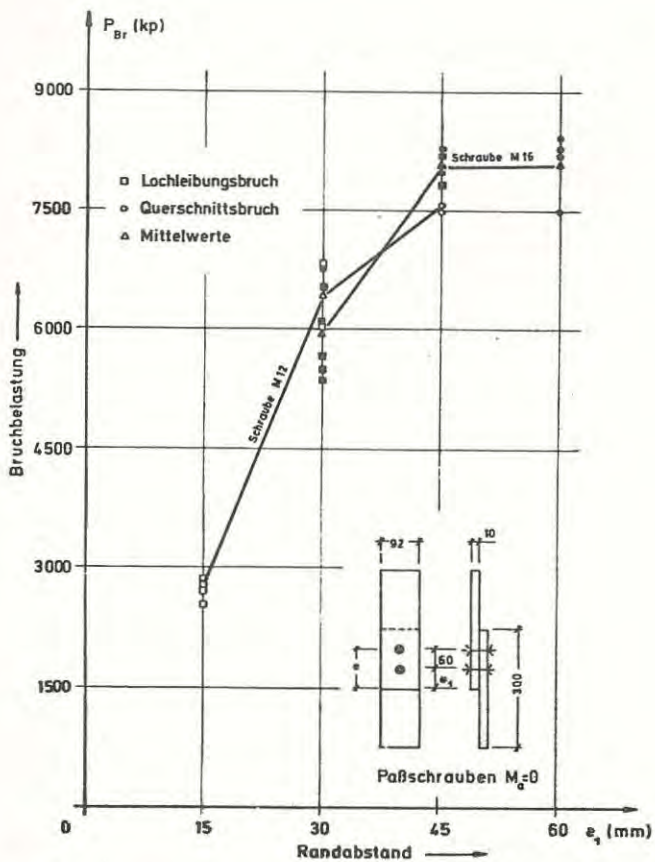


Bild 24: Bruchlasten und Bruchspannungen in Abhängigkeit vom Randabstand (zwei Schrauben-einschnittig)

### III.2.2 Berechnung von Schraubverbindungen

Aus dem Bruchverhalten bei den durchgeführten vorbeschriebenen Versuchen - Bruch im Lochstabquerschnitt bzw. in der Lochleibung - lassen sich nun einige grundlegende Regeln für die Bemessung von nicht vorgespannten GFK-Schraubverbindungen ableiten.

#### III.2.2.1 Spannungen im Lochstabquerschnitt

Infolge der starken Kerbwirkung des Schraubenloches treten bekanntlich im Füge teil - unmittelbar am Lochrand - relativ große Spannungsspitzen auf (Bild 25). Während nun diese Spannungsspitzen bei Füge teilen aus Stahl im allgemeinen durch Fließerscheinungen abgebaut werden, und damit die rechnerische Annahme einer mittleren Bemessungsspannung gerechtfertigt ist, tritt bei GFK-Füge teilen wegen der annähernd geradlinigen Spannungs-Dehnungsverhältnisse der Bruch nach Erreichen der Zugbruchspannung ( $\max \sigma_S = \sigma_{z,Br.}$ ) ein.

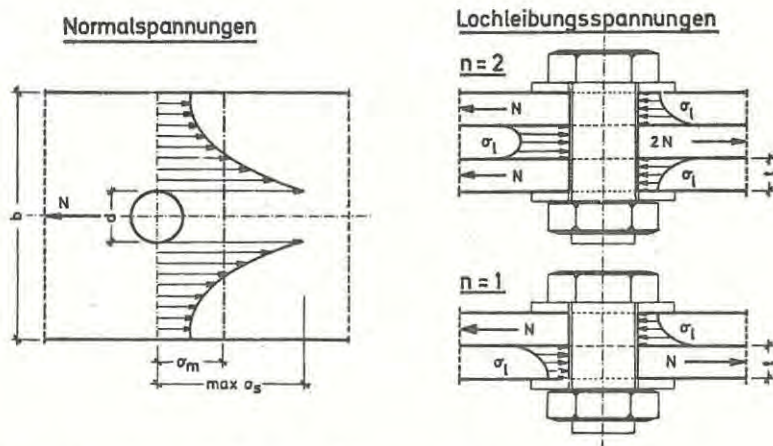


Bild 25: Spannungsverteilung am Schraubenlochrand

Beim Spannungsnachweis für den Lochquerschnitt muß also jeweils die Spannungsspitze ( $\sigma_{\max}$ ) zu Grunde gelegt werden. Für die Tragfähigkeit einer Schraube erhält man dann den Ausdruck

$$P_{B,L} = \sigma_m \cdot F_n = \frac{\sigma_{\max}}{a} \cdot (b - d) \cdot t.$$

Der Wert  $a = \sigma_{\max} / \sigma_m$  ist dabei keine Konstante (Bild 26), sondern von den Verhältnissen  $d/b$  (eine Schraube) bzw.  $d/e_2$  (zwei Schrauben - Bild 27) abhängig. Durch Approximation der jeweils ermittelten Versuchswerte ( $a = \sigma_{z, Br.} / \sigma_m$ ) erhält man die beiden Beziehungen

eine Schraube :  $a_1 = 1,05 + 0,076 \cdot b/d$

zwei Schrauben:  $a_2 = 0,40 + 0,23 \cdot e_2/d$

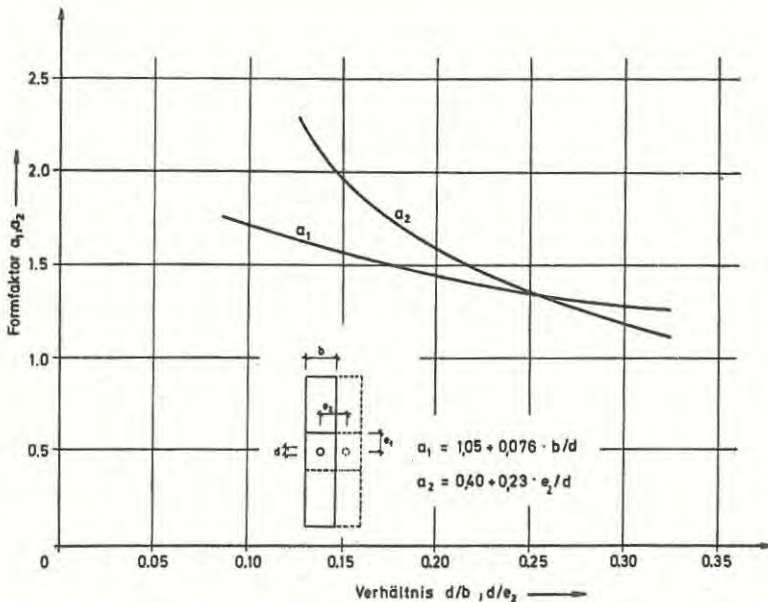
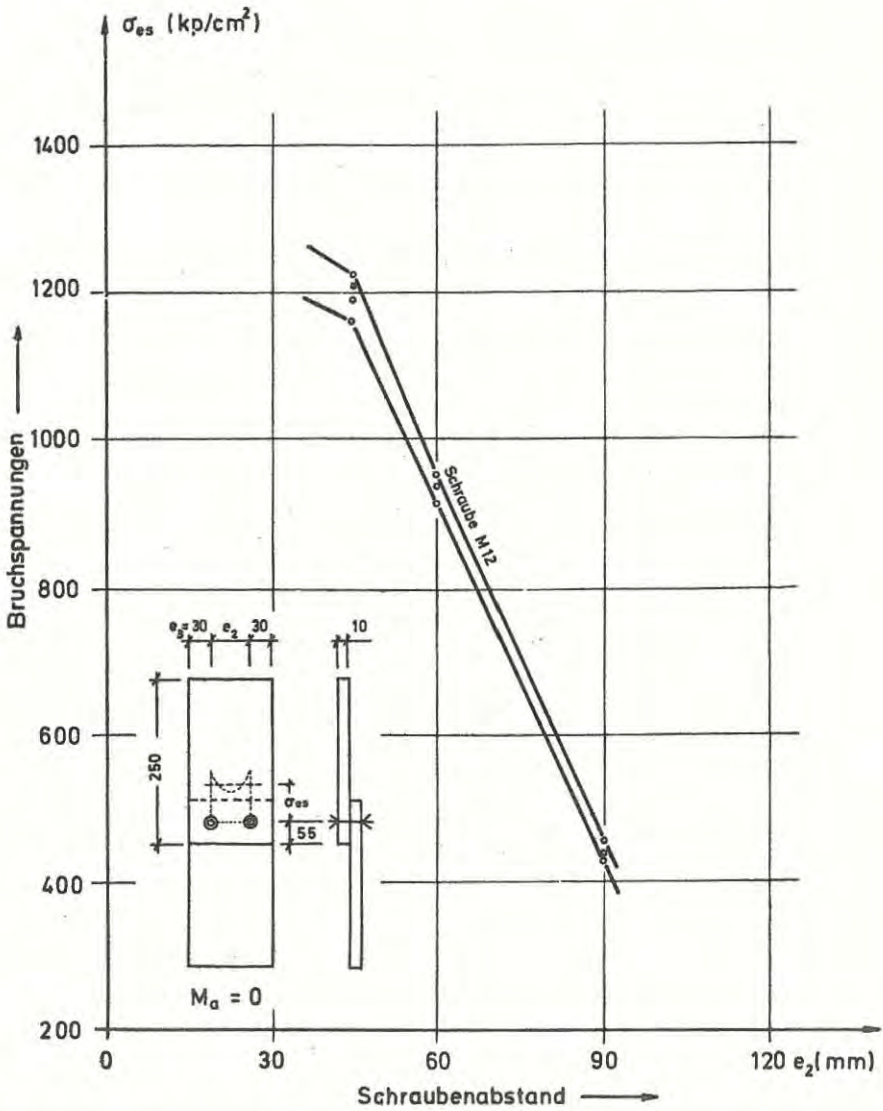


Bild 26: Formfaktoren

Bei Anordnung mehrerer Schrauben nebeneinander setzt sich die Tragfähigkeit aus den Lastanteilen der beiden Randstreifen ( $2 P_{B1}$ ) und den Mittelstreifen ( $n \cdot P_{B2}$ ) zusammen. Für eine Schraubverbindung mit z. B.  $n = 2$  Schrauben erhält man dann als Bruchlast

$$P_{B,L} = 2 \cdot P_{B1} + P_{B2} = 2 \cdot \frac{\sigma_{\max}}{a_1} \left( e_3 - \frac{d}{2} \right) \cdot t + \frac{\sigma_{\max}}{a_2} (e_2 - d) \cdot t$$



**Bild 27: Bruchspannungen in Abhängigkeit vom Schraubenabstand  $e_2$**

### III.2.2.2 Spannungen in der Lochleibung

Ähnlich wie im Lochstabquerschnitt treten auch in der Lochleibung (Bild 25) Spannungsspitzen auf. Auch hier wird - wie vorbeschrieben - der Fügeteilbruch durch diese Spannungsspitzen eingeleitet. Für den Spannungsnachweis der Lochleibung könnten hier - wegen der relativ schwierigen Ermittlung von äquivalenten Bruchfestigkeiten, und wegen der linearen Zusammenhänge von Fügeteildicke und Bruchlast (Bild 28) - die jeweils mittleren Bruchspannungen (Scherspannung:  $\sigma_{mS} = 571 \text{ kp/cm}^2$ ; Druckspannung:  $\sigma_{mD} = 2850 \text{ kp/cm}^2$ ) der entsprechenden geprüften Probestäbe herangezogen werden (Bild 21 - 24, 28). Als Bruchlasten erhält man dann

Scherbruch vor der Schraube

$$P_{B,S} = 2 \cdot \sum e \cdot t \cdot \sigma_{m,S}$$

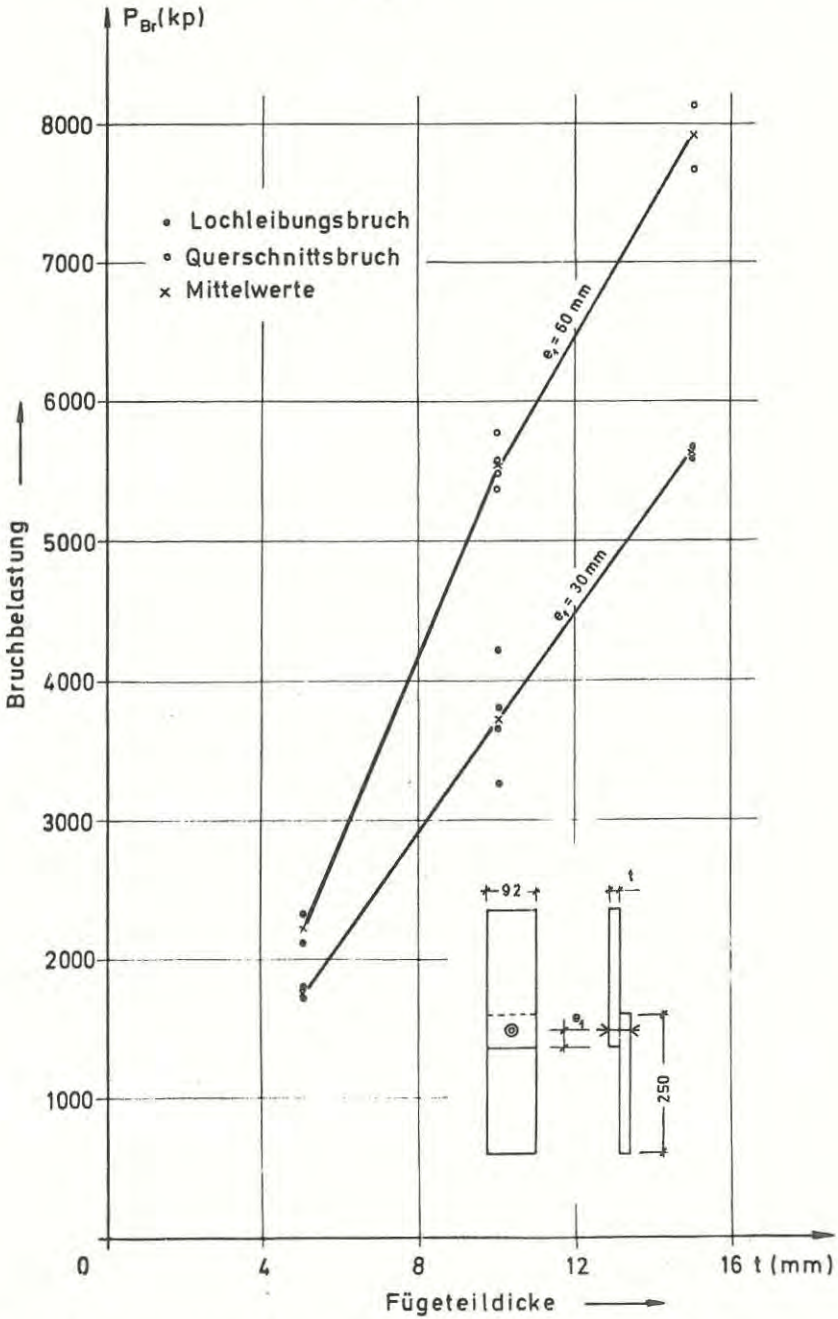
Druckbruch in der Lochleibung

$$P_{B,D} = n \cdot d \cdot t \cdot \sigma_{m,D}$$

Bei einschnittigen Verbindungen können diese Werte (vergl. Bild 23 und 24) aus den oben erwähnten Gründen um ca. 10 - 20 % höher liegen.

Bei der Anordnung von mehreren Schrauben hintereinander (in Kraftrichtung) sollte man - wegen der Gefahr der ungleichmäßigen Beanspruchung - in jedem Fall Paßschrauben verwenden.





**Bild 28:** Bruchbelastung in Abhängigkeit von der Fügeteildicke

### III.3 Die hochfest - vorgespannte Schraubverbindung

#### III.3.1 Der Tragmechanismus

Eine wesentlich günstigere Ausnutzung des Werkstoffes im Bereich der Fügung erzielt man durch den Einsatz der reibschlüssigen hochfest - vorgespannten Schraubverbindung. Bei dieser nicht mehr punkt-, sondern annähernd flächenförmigen Kraftübertragung treten die vorgenannten extremen Spannungsspitzen nicht mehr auf. Die Tragfähigkeit oder besser die Rutschlast einer solchen HV-Verbindung hängt vom Reibwert - er liegt je nach Oberflächenvorbehandlung bei  $\mu = 0,45 - 0,60$  - und der Höhe der auf die Fügeteile aufgetragenen Querpressung ab

$$P_R = \mu \cdot P_V$$

Der Querpressung (aufgebracht mittels Drehmomentenschlüssel) versucht sich nun der Kunststoff durch die ihm eigene Relaxation zu entziehen. Der sich ergebende Vorspannungsverlust führt zu der Verminderung der Rutschlast

$$\Delta P_R = \mu \cdot \Delta P_V$$

#### III.3.2 Phänomenologische Zusammenhänge der Relaxation

Das Tragverhalten der Kunststoffe unterscheidet sich von dem der Metalle im üblichen Anwendungsbereich (Temperatur, Spannung) ganz wesentlich. Während man bei den metallischen Werkstoffen (kristallin) im allgemeinen rein elastisches Verhalten (konstante Kenngrößen) zugrundelegen kann, ist dies bei fast allen Kunststoffen (amorph) infolge ihrer Viskoelastizität nicht mehr zulässig. Wird ein Kunststoffformteil z. B. durch eine Zugkraft belastet, so tritt neben der üblichen spontanen Verlängerung noch eine mit der Zeit zunehmende Längenänderung (Fließen) ein.

Die Ursache für dieses zeitabhängige viskoelastische Verhalten (elasto-viskoses Fließen) erklärt sich bei Kunststoffen aus der Länge der Makromoleküle, der Anzahl und Länge der Verzweigungen, der Vernetzungsdichte und den am Aufbau beteiligten Elementen. Bei dem für die vorliegenden Untersuchungen verwendeten duroplastischen Polyesterharz werden die mechanischen Festigkeitswerte und damit die Relaxationsneigung vorwiegend von der Vernetzungsdichte beeinflusst. Diese nimmt mit steigender Konzentration an Doppelbindungen (Molekulargewicht) zu und bewirkt damit eine Erhöhung des Komplettierungsgrades des von den Mole-

külen gebildeten Netzwerkes. Die Molekületeile zwischen den Vernetzungspunkten, die im unbelasteten Zustand in Knäuelform vorliegen, werden nun bei Beanspruchung durch eine äußere Last gestreckt - das Netzwerk orientiert sich in der Hauptbelastungsrichtung (niedrigere Entropie). Bei diesem Vorgang tritt nun durch Platzwechsel zwischen den Molekülen oder Molekülteilen zögernd eine räumliche Umordnung im Netzwerk ein, d. h. der Werkstoff relaxiert.

Mathematisch lassen sich die Relaxationsvorgänge bei Kunststoffen am Maxwell-Federmodell (Kombination von Feder und Dämpfer) darstellen. Hierbei kann die Elastizität durch Federn und das Fließverhalten durch Dämpfer ersetzt werden.

Überlagert man die beiden bei der Relaxation vorkommenden Idealfälle des Stoffverhaltens - das rein elastische Verhalten ( $\sigma = E \cdot \epsilon$ ) und das Newton'sche rein viskose Verhalten ( $\sigma = \eta \cdot \partial \epsilon / \partial t$ ) - so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{E}{\eta} \cdot \sigma = E \cdot \frac{\partial \epsilon}{\partial t}$$

Für den vorliegenden Druckrelaxationsfall mit der sprunghaft vorgegebenen Längenänderung  $\epsilon_0$  folgt aus dieser Differentialgleichung für die Spannung

$$\sigma(t) = \epsilon_0 \cdot e^{-t/t_R}$$

Der Wert  $t_R$  ist dabei die für den jeweiligen Kunststoff konstante Relaxationszeit. Dividiert man nun die sich mit der Zeit ändernde Spannung durch die konstante Anfangsdehnung, so erhält man als Maß für die Relaxation den Relaxationsmodul  $E_R = \sigma(t)/\epsilon_0$ .

### III.3.3 Optimierung der Unterlagscheibe

Die Höhe der Pressung und damit das Maß der Relaxation ist mit von den Abmessungen der Unterlagscheibe abhängig. Je kleiner der Scheibenradius und die Scheibendicke, um so höher wird bei gleichbleibender Schraubenkopfgröße die Fügeteilpressung. Die Verteilung dieser unter der Scheibe wirkenden Pressung kann bei Kenntnis der Bettungsziffer des Fügeteilmaterials (Druckelastizitätsmodul) experimentell (Messung der vertikalen Einsenkung, Bild 29 und 30) oder theoretisch (recht umständlich) ermittelt werden.

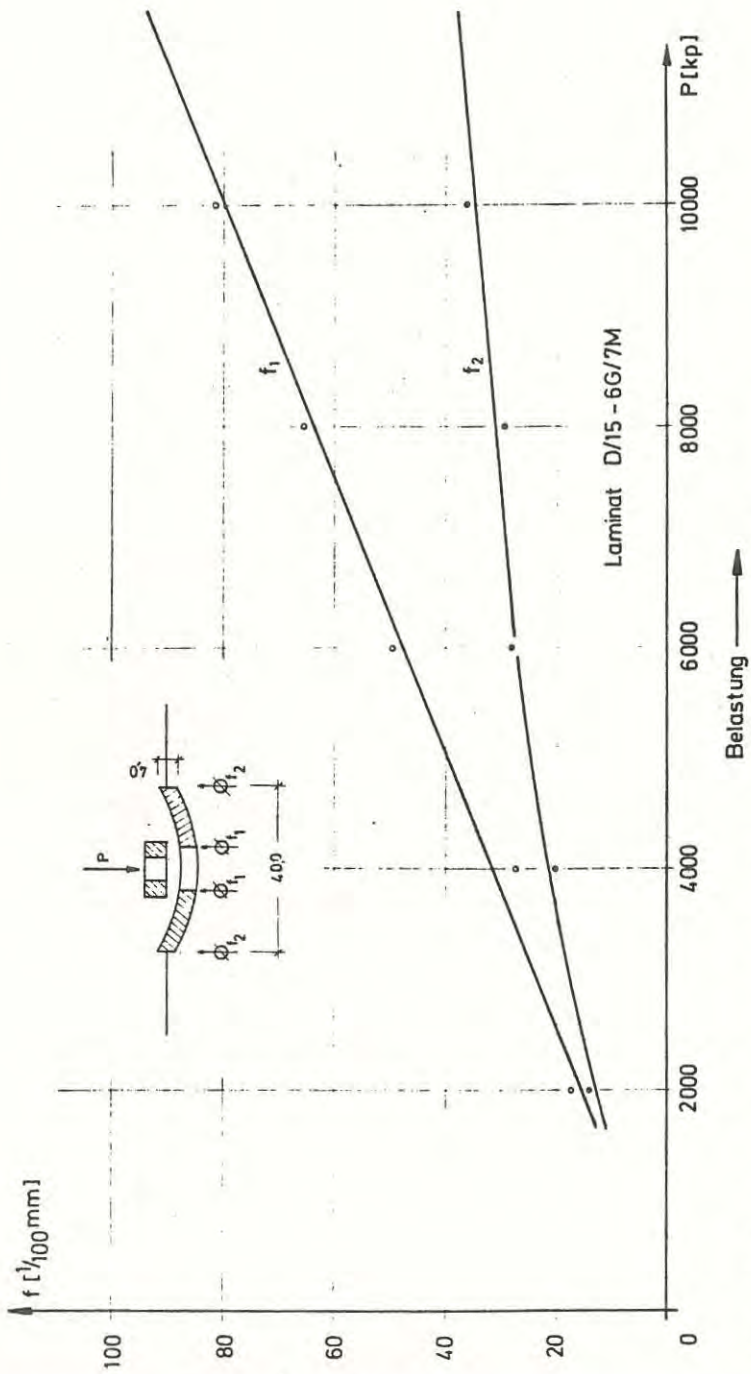
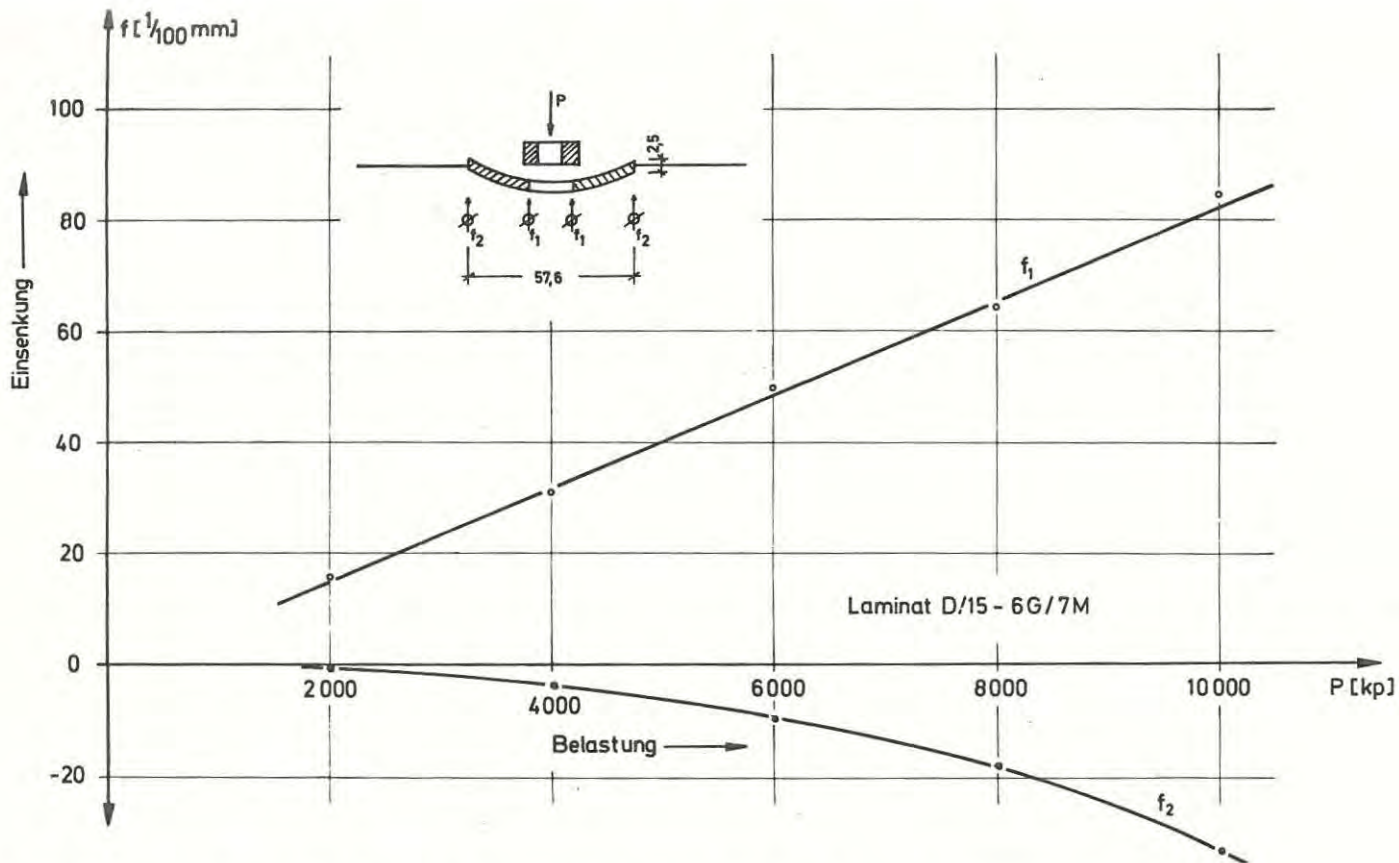


Bild 29: Vertikale Verformungen der Unterlegscheibe (Dicke  $t=4,0$  mm)



**Bild 30:** Vertikale Verformungen der Unterlegscheibe (Dicke  $t=2,5$  mm)

Bildet man nun das Mittel des Produktes aus relativer Einsenkung  $\Delta f = f_1 - f_2$  (Bild 31) und Bettungsziffer  $E_D$  und setzt eine Lasteinleitung (aus Schraubenkopf) unmittelbar am inneren Scheibenrand voraus, so erhält man den Lastfall der am Innenrand gestützten bereichsweise gleichmäßig verteilt belasteten ( $p = \Delta f \cdot E_D$ ) Kreisringplatte. Die Optimierung der Unterlagscheibe kann dann z.B. über die Lösung für das Moment

$$M_{r,t} = p(r) \cdot f(r)$$

erfolgen. Nach Einsetzen der zulässigen Stahlspannung und Berücksichtigung der Bedingung  $P_R < 0,4 \cdot \sigma_D$  ( $P_R$  = Pressung an Innenrand;  $\sigma_D$  = Druckbruchspannung) erhält man die optimalen Scheibenabmessungen. Von den hier geprüften Unterlagscheiben haben sich für das bei den Relaxationsversuchen verwendete glasfaserverstärkte Polyesterharz die Scheiben  $\phi/t = 40/4,0$  mm (M 12) und  $\phi/t = 50/5,5$  mm (M16) als optimal erwiesen.

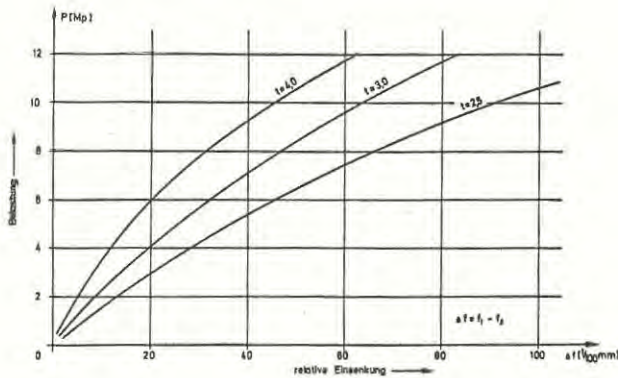


Bild 31: Relative Einsenkungen der Unterlagscheiben

### III.3.4 Relaxationsversuche

Um eine Aussage über das Maß der Relaxation und damit des Vorspannungsverlustes machen zu können, sind unter Verwendung der Schrauben M 12, M 16 (Qualität 10 K) an verschiedenen Laminaten umfangreiche Versuche durchgeführt worden.

Für die untersuchten Laminat

Laminat A: Faserspritzlaminat - Spritzrovings P 981/OCF.

Glasgehalt  $\psi_m = 27,2 \%$

Laminat B: Mattenlaminat - Matte 211 142/Silenka.

Glasgehalt  $\psi_m = 35,7 \%$

Laminat C: Gewebelaminat - Gewebe Vanck aus P 981/OCF.

Glasgehalt  $\psi_m = 54,2 \%$

Laminat D: Matten-Gewebelaminat (jeweils abwechselnd Matte und Gewebe)

Glasgehalt  $\psi_m = 48,1 \%$

Laminat E: Reines Polyesterharz - Leguval W 16/Bayer mit Benzol-

peroxid/Dxydo und Aminbeschleuniger 6310/Dxydo (100 : 2,5 : 0,75)

wurden jeweils die Materialkennwerte normenmäßig (DIN 53 395; 53 454; 53 455; 53 457 bzw. ISO R 178) ermittelt. Eine Zusammenstellung dieser Werte zeigt Tabelle 2.

Tabelle 2: Materialkennwerte des untersuchten GFK

Laminat	Dichte (p/cm <sup>3</sup> )	Glasge- halt %	Zugfestig- keit (kp/cm <sup>2</sup> )	E-Modul <sub>2</sub> (kp/cm <sup>2</sup> )
Faserspritz-Laminat (A)	1,54	27,2	915	72 100
Matten-Laminat (B)	1,58	35,7	1107	94 300
Gewebe-Laminat (C)	1,65	54,2	2115	154 000
Matten-Gewebe-Laminat (D)	1,60	48,1	1875	117 100

Die Durchführung der Relaxationsversuche erfolgte unter Verwendung eigens angefertiger Meßschrauben (Abb. 32). Die HV-Schrauben waren auf dem angeschliffenen Schaft mit Dehnungsmeßstreifen versehen und jeweils geeicht worden.



Bild 32: Geprüfte Versuchskörper

Nach dem Verschrauben der planparallelen Probeplatten (Vorspannung:  $P_V = 9,9 \text{ Mp/M } 16$  und  $P_V = 5,2 \text{ Mp/M } 12$  wie beim Stahlbau) wurden die Dehnungen (bei Normalklima  $T = 20^\circ\text{C}$ ) anfangs alle 5 Minuten, dann alle 30 Minuten und später alle 24 Stunden abgelesen. Nach Beendigung der Versuche ( $t = 1000 \text{ Std.}$ ) sind die Schrauben wieder auf volles  $P_V$  nachgezogen und ihr Dehnungsverhalten während der folgenden 1000 Stunden erneut beobachtet worden.

Die gemessenen Vorspannungsverluste können in guter Näherung durch die Funktion

$$P_V = a + b \cdot \ln t$$

approximiert werden. Während nun dabei der Ausgangswert  $a$  (bei  $t = 1,0 \text{ Std.}$ ) infolge der unterschiedlichen Oberflächenaushärtung relativ stark schwanken kann,  $M 12$ :  $a = 0,4 - 0,6$ ;  $M 16$ :  $a = 1,3 - 2,0$ ) zeigt der Steigungswert mit  $b = 0,26$  ein annähernd konstantes Verhalten (bei Reinharz wird  $b = 0,35$ ). Im einzelnen ergeben sich aus den durchgeführten Relaxationsversuchen die folgenden Erkenntnisse:

1. Der Vorspannungsverlust ist nur unwesentlich abhängig von Laminataufbau und der Laminatdicke.
2. Zwei Stunden nach Aufbringen der Schraubenvorspannung ist bereits ein Verlust von etwa 15 % ( $M 12$ ) bzw. etwa 20 % ( $M 16$ ) eingetreten.
3. Nach einer Relaxationszeit von  $t = 1000 \text{ Std.}$  treten mit etwa 27 % ( $M 12$ ) bzw. etwa 35 % ( $M 16$ ) nur etwa doppelt so hohe Vorspannungsverluste ein wie nach 2 Stunden Relaxationszeit.



4. Ein erneutes Vorspannen der HV-Schrauben 2 Stunden nach dem ersten Anziehvorgang ergibt nur etwa 40 % der Vorspannungsverluste des ungestörten Relaxationsvorgangs.

Von den insgesamt 52 durchgeführten Relaxationsversuchen (je 26 Versuche mit M 12 bzw. M 16) sind in den Bildern 33 - 34 jeweils für das Laminat D/10 (Matten-Gewebe) und das Laminat E (Reinharz) die Vorspannungsverluste in Abhängigkeit von der Zeit aufgetragen worden.

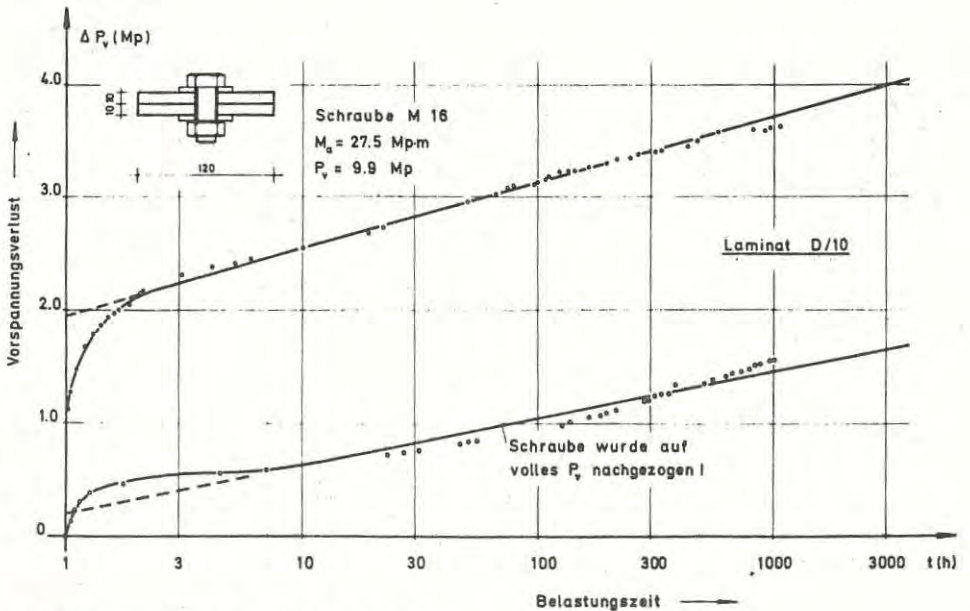
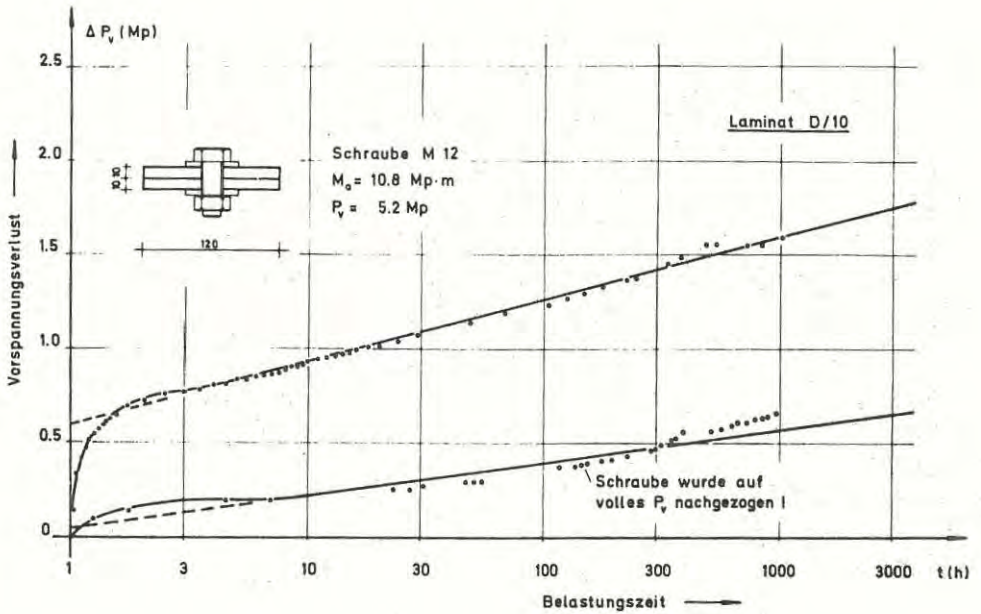


Bild 33: Vorspannungsverluste (Laminat D)

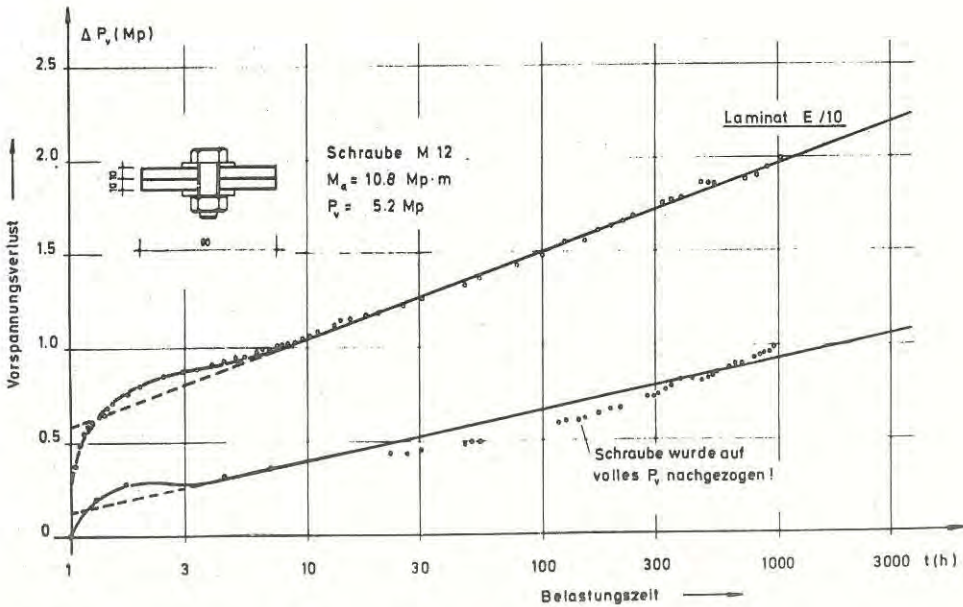
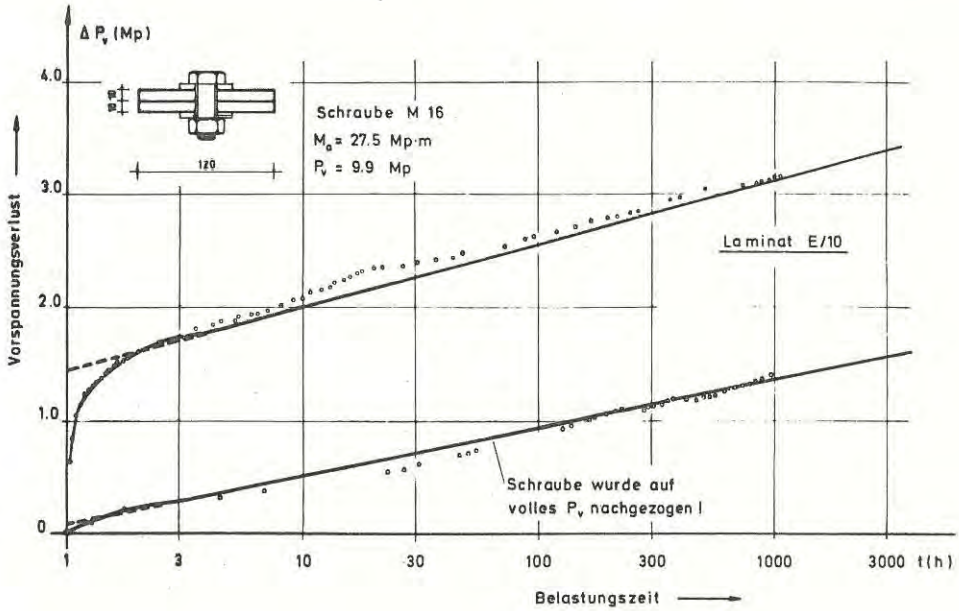


Bild 34: Vorspannungsverluste (Laminat E)

#### IV. Stabilitätsprobleme bei Schalen

Wegen des relativ niedrigen Elastizitätsmoduls ( $E = 75\ 000 - 250\ 000\ \text{kp/cm}^2$ ) neigen die meisten Kunststoffkonstruktionen in starkem Maße zum Instabilwerden. Die Stabilitätsprobleme sind somit in den meisten Fällen das für die Bemessung ausschlaggebende Kriterium. Hierbei machen die selbst im Metallbau noch weitgehend unerforschten Stabilitätsprobleme bei Schalen die größten Schwierigkeiten. Es treten nicht nur wegen der bei Kunststoff sich anbietenden guten Formbarkeit neue Schalenformen hinzu, sondern es liegt zudem in vielen Fällen noch ein anisotropes Material vor.

Aus der Vielzahl der Probleme ist das Beulverhalten der besonders wichtigen Zylinder- und Kegelschalen (Silos und Lagerbehälter) ausgewählt und näher betrachtet worden. Für die drei Lastfälle Axialdruck, Radialdruck und ihrer Kombination werden theoretische bzw. empirische Bemessungsformeln hergeleitet. Ferner wird über erste Versuche zum auch im Metallbau bisher ungeklärten Problem des Beulverhaltens der axial gedrückten Zylinderschale mit verschiedenen geformten Öffnungen berichtet.

##### IV.1 Bezeichnungen

$E_x$	Elastizitätsmodul in Längsrichtung
$E_y$	Elastizitätsmodul in Umfangsrichtung
$G_{xy}$	Schubmodul in der x/y-Ebene
H	Torsionsmomente am Schalenelement
$k_x, k_y$	Krümmungen der Schale
L	Länge der Zylinderschale
l	Länge der Kegelerzeugenden
$M_x, M_y$	Biegemomente am Schalenelement
m	Anzahl der Halbwellen in Längsrichtung
n	Anzahl der Vollwellen in Umfangsrichtung
p	Belastung in Längsrichtung
$P_{k1}$	klassische Lösung für Axialdruck
$Q_x, Q_y$	Querkräfte am Schalenelement
q	Innen- bzw. Außendruck
$q_{k1}$	Klassische Lösung für Außendruck
R	Radius der Schale
$R_1$	Radius am Kopf des Kegels

$R_2$	Radius am Fuß des Kegels
$t$	Wanddicke der Schale
$u, v, w$	Verformungen
$x, y$	Längs- bzw. Umfangskoordinate
$\gamma_{xy}$	Schubverzerrung in x/y-Ebene
$\epsilon_x, \epsilon_y$	Dehnungen in Längs- bzw. Umfangsrichtung
$\mu_{xy} = \mu_1$	Querdehnungszahl in x-Richtung (infolge $\sigma_y$ )
$\mu_{yx} = \mu_2$	Querdehnungszahl in y-Richtung (infolge $\sigma_x$ )
$\sigma_x, \sigma_y$	Spannungen in Längs- bzw. Umfangsrichtung
$\tau_{xy}$	Schubspannung in x-y-Ebene
$\alpha$	Halber Öffnungswinkel des Kegels
$\rho_1$	Krümmungsradius am Kopf des Kegels
$\rho_m$	mittlerer Krümmungsradius = $0,5 \cdot (R_1 + R_2) / \cos \alpha$
$\psi$	Geometrieparameter = $1 - R_1/R_2$

Nicht erwähnte Zeichen werden im Text dieses Kapitels an der jeweiligen Stelle erklärt.

## IV.2 Die Beulstabilität der anisotropen Zylinderschale

### IV.2.1 Die Differentialgleichungen

Ein wesentlicher Vorteil des vorliegenden Verbundwerkstoffes liegt darin begründet, daß man entsprechend der Beanspruchungsrichtung die Glasverstärkung anordnen kann. So wird man z. B. einen längsbelasteten Zylinder vorwiegend in Längsrichtung und einen auf Außen- oder Innendruck belasteten Zylinder vorwiegend in Umfangsrichtung verstärken. Diese Verfahrensweise hat zur Folge, daß ein Werkstoff entsteht, der nicht mehr isotrope, sondern in allen Richtungen unterschiedliche Eigenschaften aufweist.

Für die nachfolgende theoretische Untersuchung werden daher die Extremwerte  $E_x$  und  $E_y$  des polaren Elastizitätsdiagramms verwendet. Der Unterschied zwischen Zug- und Biege-Elastizitätsmodul ist gering und wird daher in den theoretischen Herleitungen vernachlässigt.

IV.2.1.1 Elastostatische und geometrische Beziehungen

Das Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand in einem anisotropen Material, das zwei senkrecht zueinander liegende Haupttragrichtungen besitzt, läßt sich formulieren als:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \mu_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{E_y} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \mu_{yx} \cdot \frac{\sigma_x}{E_x} \end{aligned} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} ;$$

Unter Berücksichtigung der bekannten Beziehung zwischen  $G_{xy}$  und den Elastizitätsmoduli  $E_x$  und  $E_y$  erhält man für die Spannungen:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_x (\epsilon_x + \mu_{xy} \epsilon_y) / (1 - \mu_{xy} \cdot \mu_{yx}) \\ \sigma_y &= E_y (\epsilon_y + \mu_{yx} \epsilon_x) / (1 - \mu_{xy} \cdot \mu_{yx}) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \gamma_{xy} \cdot E_x \cdot E_y / [E_y + E_x (1 + 2 \mu_{xy})] \end{aligned} \quad (1)$$

Für die Schalenmittelfläche gilt bei Beanspruchung durch Membrankräfte  $N$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{x,N} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_{y,N} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy,N} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2)$$

Für die Punkte außerhalb der Mittelfläche kommen beim Ausbeulen infolge der Biegemomente  $M$  zusätzliche Dehnungen hinzu:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x,M} &= -Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; & \epsilon_{y,M} &= -Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \\ \gamma_{xy,M} &= -2Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} ; \end{aligned} \quad (3)$$

#### IV.2.1.2 Gleichgewichtsbedingungen

Für das Gleichgewicht der Kräfte in x- und y-Richtung sowie für das Verdrehen um die x- und y-Achse gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x &= 0; & \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Unter Berücksichtigung der Krümmungen  $k_x$  und  $k_y$  ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung der Vertikalkräfte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \sigma_x \cdot t \left( k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \cdot t \left( k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ + 2\tau_{xy} \cdot t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Für die Biegemomente  $M_x$  und  $M_y$  und das Torsionsmoment  $H$  erhält man bei Einführung der Abkürzungen

$$D_x = \frac{E_x \cdot t^2}{12(1-\mu_1 \cdot \mu_2)}; \quad D_y = \frac{E_y \cdot t^2}{12(1-\mu_1 \cdot \mu_2)}; \quad C = G_{xy} \cdot \frac{t^2}{6}$$

folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} M_x &= -D_x \cdot t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_1 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_y \cdot t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ H &= -C \cdot t \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6)$$

Die Querkräfte  $Q_x$  und  $Q_y$  lassen sich damit aus Gl. 4 herleiten:

$$\begin{aligned} Q_x &= -D_x \cdot t \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \mu_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - C \cdot t \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ Q_y &= -D_y \cdot t \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \mu_2 \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - C \cdot t \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

Werden diese beiden Ausdrücke in die Gleichgewichtsbedingung der Vertikalkräfte (5) eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} D_x \cdot t \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_y \cdot t \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + (D_x \cdot \mu_1 + D_y \cdot \mu_2 + 2 C) \cdot t \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \\ = \sigma_x \cdot t \left( k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \sigma_y \cdot t \left( k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2\tau_{xy} \cdot t \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + q. \end{aligned} \quad (8)$$

#### IV.2.1.3 Verträglichkeitsbedingung der Deformation

Aus den geometrischen Beziehungen (2, 3) läßt sich bei Berücksichtigung der Verzerrungen aus den Krümmungsänderungen die Verträglichkeitsbeziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \\ = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned}$$

herleiten. Ersetzt man die Dehnungen durch die oben angegebenen Ausdrücke und berücksichtigt die bekannte Beziehung

$$\mu_1 \cdot E_x = \mu_2 \cdot E_y,$$

so erhält man die gesuchte Verträglichkeitsbedingung der Deformation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_x} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{1}{E_y} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\mu_1}{E_y} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - \\ - \frac{1}{G_{xy}} \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ - k_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (9)$$

#### IV.2.1.4 Die Differentialgleichungen

Mit der Gleichgewichtsbedingung (8) und der Verträglichkeitsbedingung (9) lassen sich bei Einführung der Airy'schen Spannungsfunktion  $F$  die beiden gesuchten Differentialgleichungen für die Kreiszylinderschale ( $k_x = 0$ ;  $k_y = 1/R$ ) angeben:



$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot D_x + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \cdot D_y + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} (\mu_1 \cdot D_x + C) = \\ & = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \left( \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{q}{t} \end{aligned} \quad (10 a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \cdot E_x + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \cdot E_y + \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} (E_x + E_y) = \\ & = E_x \cdot E_y \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (10 b)$$

#### IV.2.2 Lösungen der Differentialgleichungen

Die Lösung der Differentialgleichungen (10) liefert unter Zuhilfenahme entsprechender mehrgliedriger Lösungsansätze Nachbeulkurven. B. Almroth [33] hat nun für die isotrope Schale gezeigt, daß das absolute Nachbeulminimum - es wurde lange Zeit zur Bemessung herangezogen - bei Steigerung der Zahl der Ansatzglieder auf einen Wert absinkt ( $\sigma/\sigma_{k1} = 0,108$ ) der zu wirtschaftlich nicht mehr vertretbaren Abmessungen führt. Aus diesem Grund wird ein der klassischen Beulspannung  $\sigma_{k1} = 0,605 \cdot E \cdot t/R$  (bei  $\mu = 0,3$ ) äquivalenter Wert gesucht, der - mit statistisch ermittelten Korrekturfaktoren multipliziert - einen Anhalt zur Bemessung geben soll.

##### IV.2.2.1 Lastfall: Axialdruck

Für die Kreiszylinderschale unter Längsbelastung gilt im Anfangszustand

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -p ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Diese Bedingungen in den beiden Differentialgleichungen (10) berücksichtigt, erhält man bei Vernachlässigung der nichtlinearen Glieder im Einsetzungsverfahren die linearisierte Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
 E_x \left[ \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} \cdot D_x + \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} D_y + 2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} (\mu_1 D_x + C) + \right. \\
 \left. + p \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} \right] + E_y \left[ \frac{\partial^8 w}{\partial y^8} \cdot D_y + \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} \cdot D_x + \right. \\
 \left. + 2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} (\mu_1 D_x + C) + p \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \right] + \\
 + (E_x + E_y) \left[ \frac{\partial^8 w}{\partial x^6 \partial y^2} \cdot D_x + \frac{\partial^8 w}{\partial x^2 \partial y^6} \cdot D_y + \right. \\
 \left. + 2 \frac{\partial^8 w}{\partial x^4 \partial y^4} (\mu_1 D_x + C) + p \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \right] = \\
 = - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \cdot \frac{E_x + E_y}{R^2} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Als Lösungsansatz wird die Doppelreihe

$$w = C \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n y}{R}$$

gewählt. Diese Funktion entsprechend den Gliedern der linearisierten Differentialgleichung (11) abgeleitet und an den jeweiligen Stellen von (11) eingesetzt, ergibt die "Beulbedingung";

$$\begin{aligned}
 E_y \left[ D_x \cdot \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^4 + D_y \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^8 + 2 (\mu_1 D_x + C) \cdot \right. \\
 \left. \cdot \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^6 - p \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^4 \right] + E_x \left[ D_x \cdot \left( \frac{m\pi}{L} \right)^8 + \right. \\
 \left. + D_y \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^4 + 2 (\mu_1 D_x + C) \cdot \left( \frac{m\pi}{L} \right)^6 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^2 - \right. \\
 \left. - p \left( \frac{m\pi}{L} \right)^6 \right] + (E_x + E_y) \left[ D_x \cdot \left( \frac{m\pi}{L} \right)^6 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \right. \\
 \left. + D_y \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^6 + 2 (\mu_1 D_x + C) \cdot \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^4 - \right. \\
 \left. - p \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \cdot \left( \frac{n}{R} \right)^2 \right] = - \frac{E_x + E_y}{R^2} \cdot \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 \quad (12)
 \end{aligned}$$

Nach Einführen der dimensionslosen Parameter

$$\bar{p} = p \cdot \frac{R}{E_y \cdot t}; \quad \delta = \left(\frac{mJ}{L}\right) / \left(\frac{n}{R}\right)$$

und Auflösen nach  $\bar{p}$  erhält man die Beziehung

$$\bar{p} = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \cdot R \cdot t \cdot \frac{1}{12(E_y - E_x \cdot \mu_1^2)} [E_x \cdot \delta^2 + 2 E_x \cdot \frac{E_y (2 + \mu_1) + E_x \cdot \mu_1}{E_y + E_x (1 + 2 \mu_1)} + \frac{E_y}{\delta^2}] + \frac{1}{\left(\frac{n}{R}\right)^2 \cdot R \cdot t} \cdot \frac{E_x}{E_x \cdot \delta^2 + (E_x + E_y) + E_y \cdot \frac{1}{\delta^2}};$$

Die Annahme einer quadratischen Beulform ( $\delta = 1$ ), wie sie aufgrund zahlreicher Versuchsbeobachtungen gerechtfertigt erscheint, vereinfacht diese Gleichung unter Verwendung der Abkürzung  $\lambda^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \cdot R \cdot t$  zu folgendem Ausdruck

$$\bar{p} = \frac{\lambda^2}{12(E_y - E_x \cdot \mu_1^2)} [E_x + 2E_x \cdot \frac{E_y (2 + \mu_1) + E_x \cdot \mu_1}{E_y + E_x (1 + 2 \mu_1)} + E_y] + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{E_x}{2(E_x + E_y)} \quad (13)$$

Die für die Bemessung ausschlaggebende untere Grenze dieses Lastparameters  $\bar{p}$  erhält man durch Differenzieren nach  $\lambda$ . Der gesuchte kritische Beulwert  $\bar{p}_{kr}$  als Funktion der Querdehnungszahl  $\mu_1 = \mu_{xy}$  und des Verhältnisses der Elastizitätsmoduli  $e = E_x/E_y$  (Orthotropiezahl) wird dann

$$\bar{p}_{kr} = \left[ \frac{e}{6(1-e \mu_1^2)(1+e)} (1+e+2e \cdot \frac{(1+e)\mu_1+2}{2e\mu_1+1+e}) \right]^{1/2} \quad (14)$$

Für verschiedene Querdehnungszahlen  $\mu_1$  läßt sich  $p_{kr}$  in Abhängigkeit von der Orthotropiezahl  $e$  darstellen (Bild 35). Als kritische Beulspannung erhält man somit

$$p_{kr} = \bar{p}_{kr} \cdot E_y \cdot t/R. \quad (15)$$

IV.2.2.2 Lastfall: Axialdruck mit Innendruck

Wird die axialgedrückte Zylinderschale zusätzlich mit Innendruck belastet, so gilt im Anfangszustand

$$\frac{\partial^2 F_{\square}}{\partial y^2} = -p; \quad \frac{\partial^2 F_{\square}}{\partial x^2} = q \cdot \frac{R}{t}; \quad \frac{\partial^2 F_{\square}}{\partial x \partial y} = 0.$$

Entsprechend dem Vorgehen in 2.2.1 ergibt sich als linearisierte Differentialgleichung

$$\begin{aligned} E_x \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot D_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot D_y + 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} (D_x \cdot \mu_1 + C) + p \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q \cdot \frac{R}{t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] + \\ + E_y \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot D_x + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot D_y + 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} (D_x \cdot \mu_1 + C) + p \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \right. \\ \left. - q \cdot \frac{R}{t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + (E_x + E_y) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot D_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \cdot D_y + \right. \\ \left. + 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} (D_x \cdot \mu_1 + C) + p \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} - q \cdot \frac{R}{t} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = - \frac{E_x \cdot E_y}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (16) \end{aligned}$$

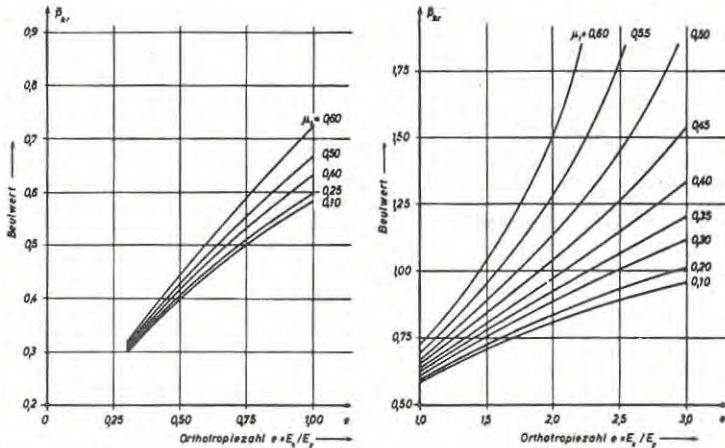


Bild 35. Abhängigkeit des Beulwertes von Orthotropiezahl und Querkontraktionszahl

Verwendet man den gleichen Lösungsansatz wie in IV.2.2.2, so wird Gl. 14 um den Ausdruck  $q \cdot R^2 / E_y \cdot t^2$  erweitert. Für diesen Lastfall erhält man demnach als kritische Beulspannung

$$P_{kR} = \bar{P}_{kR} \cdot \frac{E_y \cdot t}{R} + \frac{q \cdot R}{t} \quad (17)$$

### IV.2.2.3 Lastfall: Allseitiger Außendruck

Der Anfangszustand der Schale unter allseitigem Außendruck läßt sich beschreiben mit

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -q \cdot \frac{R}{t}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0.$$

Wie bei den beiden vorherbehandelten Lastfällen gelangt man damit über die beiden Gleichungen (1a) zur linearisierten Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} E_x \left[ \frac{\partial^B w}{\partial x^B} \cdot D_x + \frac{\partial^B w}{\partial x^4 \partial y^4} \cdot D_y + 2 \frac{\partial^B w}{\partial x^6 \partial y^2} (D_x \mu_1 + C) + q \cdot \frac{R}{t} \cdot \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} \right] + \\ + E_y \left[ \frac{\partial^B w}{\partial x^4 \partial y^4} \cdot D_x + \frac{\partial^B w}{\partial y^B} \cdot D_y + 2 \frac{\partial^B w}{\partial x^2 \partial y^6} (D_x \mu_1 + C) + q \cdot \frac{R}{t} \cdot \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \right] + \\ + (E_x + E_y) \left[ \frac{\partial^B w}{\partial x^6 \partial y^2} \cdot D_x + \frac{\partial^B w}{\partial x^2 \partial y^6} \cdot D_y + 2 \frac{\partial^B w}{\partial x^4 \partial y^4} (D_x \mu_1 + C) + \right. \\ \left. + q \cdot \frac{R}{t} \cdot \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} \right] = - \frac{E_x \cdot E_y}{R^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (18) \end{aligned}$$

Bei Verwendung des gleichen Lösungsansatzes wie unter IV.2.2.2 erhält man die entsprechenden Ableitungen und die Abkürzungen

$$\bar{q} = \frac{q}{E_y} \cdot \left(\frac{R}{t}\right)^2; \quad \delta = \left(\frac{m \cdot \pi}{L}\right) / \left(\frac{n}{R}\right)$$

in die Differentialgleichung (18) eingeführt und nach  $\bar{q}$  aufgelöst - den Ausdruck

$$\bar{q} = \left(\frac{n}{R}\right)^2 \cdot R \cdot t \cdot \frac{1}{12(E_y - E_x \mu_1^2)} [E_x \cdot \delta^4 + 2 E_x \delta^2 \cdot \left. \frac{E_x \mu_1 + E_y (2 + \mu_1)}{E_y + E_x (1 + 2 \mu_1)} + E_y \right] + \frac{1}{\left(\frac{n}{R}\right)^2 \cdot R \cdot t} \cdot \frac{E_x}{E_x + (E_x + E_y) \frac{1}{\delta^2} + E_y \cdot \frac{1}{\delta^4}} \quad (19)$$

Für  $m = 1$  (eine Baule in Längsrichtung) wird  $\bar{q}$  ein Minimum. Man kann also den Beulwert  $\bar{q}$  als Funktion der Umfangswellenzahl  $n$  darstellen

$$\bar{q} = \frac{R \cdot t}{12(1 - e \mu_1^2)} \left[ e \cdot \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 \cdot \left(\frac{R}{n}\right)^2 + 2e \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{2 + \mu_1 (1 + e)}{2e \mu_1 + 1 + e} + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \right] + \frac{e}{R \cdot t} \cdot \frac{1}{e \left(\frac{n}{R}\right)^2 + (1 + e) \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{R}\right)^4 + \left(\frac{L}{\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{n}{R}\right)^6}$$

Diese Gleichung für verschiedene Werte von  $R/t$ ;  $L/R$ ;  $e$ ;  $\mu$  mittels eines Digitalrechners ausgewertet, liefert die kritischen Beulwellenzahlen  $n_{kr}$ . Um einen für die praktische Bemessung brauchbaren geschlossenen Ausdruck für  $q_{kr}$  zu erhalten, wurden die elektronisch gewonnenen Kurven durch entsprechende Funktionen approximiert. Die Verknüpfung dieser Funktionen liefert die gesuchte Beziehung

$$\bar{q}_{kr} = \left[ 3,48 + \frac{1836,75 - 77,5 (L/R)}{R/t + 41} - 0,147 (L/R) \right] \cdot \left[ (5,08 \mu_1^2 + 0,41) \mu_1^2 + 0,804 \right] (0,334 e + 0,444) / (143,3 (L/R) - 8,13 (L/R)^2 - 31,3). \quad (20)$$

Für den kritischen Außendruck ergibt sich dann

$$q_{kr} = \bar{q}_{kr} \cdot E_y \cdot t^2 / R^2 \quad (21 a)$$

oder wenn man die Faktoren  $\bar{q}_1$ ;  $\bar{q}_2$  der graphischen Darstellung (Bild 36) benutzt

$$q_{kr} = \bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2 \cdot E_y \cdot t^2 / R^2 \quad (21 b)$$

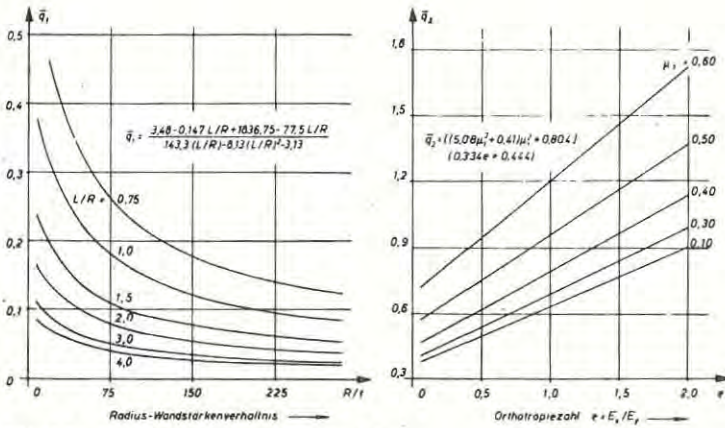


Bild 36. Graphische Darstellung der Faktoren  $\bar{q}_1, \bar{q}_2$

#### IV.2.3 Vergleich der theoretischen und experimentellen Ergebnisse; Zylinderschale unter Längsbelastung

Vergleicht man die theoretischen Werte nach Gl. 15 mit den entsprechenden Versuchswerten (IV.2.4) so zeigt sich ein relativ großer Abfall der experimentellen Werte. Aus diesem Grund soll hier ebenso wie bei isotropen Schalen ein auf statistischem Wege gefundener Korrekturfaktor verwendet werden. In [2] sind für die drei hier behandelten Lastfälle Funktionen angegeben worden (für Metallzylinder), die den Versuchsergebnissen mit 50 %- bzw. 90 %-Wahrscheinlichkeit entsprechen. Aus dem Vergleich der Beulwerte für Metall- und GFK-Zylinder (die Ergebnisse A 5; A 10; A 14; F 2; F 3; F 4 wurden aus den in IV.2.4.2 angegebenen Gründen nicht herangezogen) wird deutlich, daß diese Funktionen wahrscheinlich auch für die hier untersuchten anisotropen GFK-Zylinder als Korrekturfaktoren brauchbar sind, wenn für  $\sigma_{kl}$  der Wert  $p_{kr}$  (Gl. 15) eingeführt wird (Bild 37). Als Bemessungsformel ergibt sich dann

a) für 50 %-Wahrscheinlichkeit

$$p_{kr}^I = [(0,03 R/t)^{-1/8} - 0,39] \cdot \bar{p}_{kr} \cdot E_y \cdot t/R \quad (22 a)$$

b) für 90 %-Wahrscheinlichkeit

$$p_{kr}^I = [(R/t)^{-1/8} - 0,27] \cdot \bar{p}_{kr} \cdot E_y \cdot t/R \quad (22 b)$$

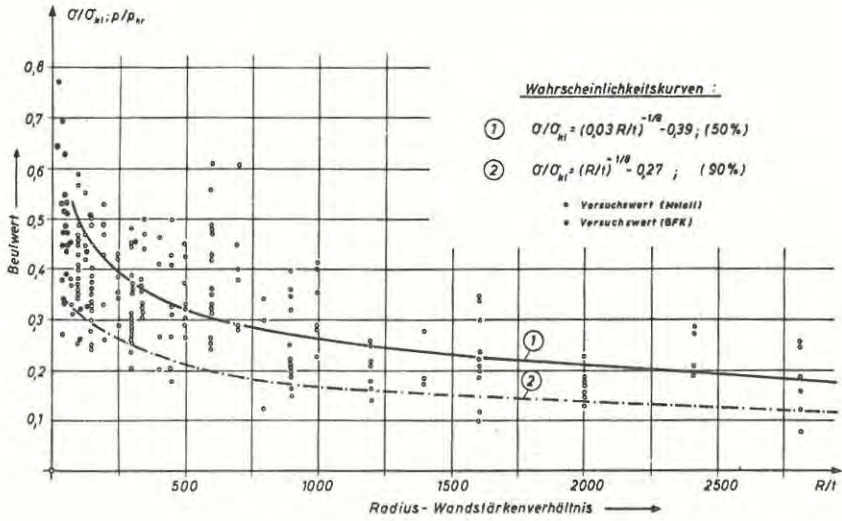


Bild 37: Beulwerte in Abhängigkeit vom  $R/t$ -Verhältnis

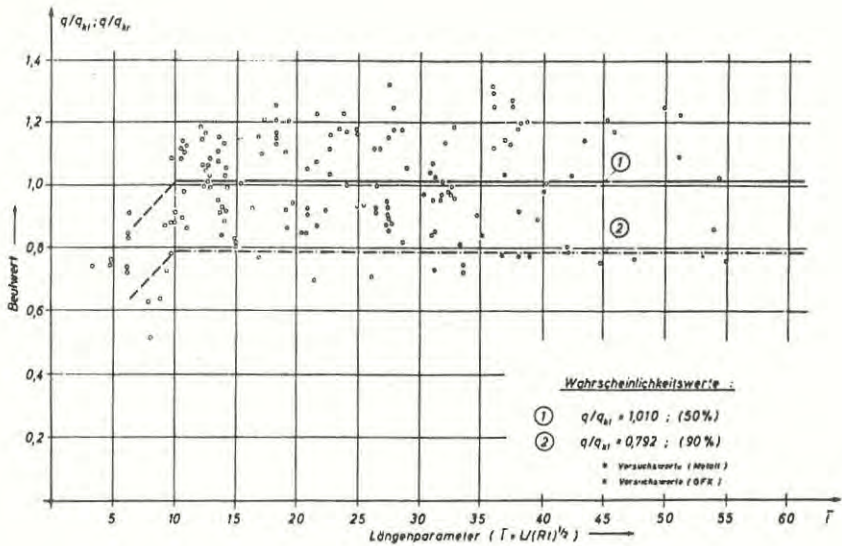


Bild 38: Beulwerte in Abhängigkeit vom Längenparameter  $\bar{\Gamma}$



Zylinderschale unter Außendruck. Vergleicht man die Ergebnisse der von H. Ebner - G. Nonhoff [35] an GFK-Schalen durchgeführten Versuche mit den Werten nach Gl. 21 und den an Metallzylindern ermittelten Werten (Bild 38), so zeigt sich, daß Gl. 21 mit 50%-Wahrscheinlichkeit zutreffende Ergebnisse liefert. Mit 90 %-Wahrscheinlichkeit erhält man für den kritischen Außendruck

$$q_{kr}^I = 0,792 \cdot \bar{q}_{kr} = E_y \cdot t^2/R^2. \quad (23)$$

#### IV.2.4 Beulversuche an axialgedrückten Zylinderschalen aus GFK

Zur Überprüfung der theoretischen Ergebnisse wurden für den Lastfall Axialdruck Versuche durchgeführt. - Versuche zum Lastfall allseitiger Außendruck siehe H. Ebner - G. Nonhoff [35] -. Bei diesen Versuchen wurden die Störeinflüsse (Vorverformungen, Harzanhäufungen, Randstörungen), die die obere kritische Beulspannung im wesentlichen beeinflussen, nicht weiter untersucht (Näheres siehe [2]).

##### IV.2.4.1 Herstellung der Versuchszyylinder

Wie oben schon erwähnt, wird bei der Herstellung von GFK-Behältern die Glasverstärkung je nach Beanspruchungsrichtung bzw. Verarbeitungsweise angeordnet. Um hier eine Aussage machen zu können, wurden sechs verschiedene Laminattypen untersucht.

- Typ A: Faserspritzlaminat - Spritzrovings 523/Silenka  
- Das Laminat wurde je nach Wanddicke in mehrere Lagen aufgespritzt und mit Solominrolle entlüftet. Glasgehalt ca. 30 %.
- Typ B: Gewebelaminat - Glasseidengewebe Nr. 379;  
300 g/m<sup>2</sup>/Wendland - Das Gewebe wurde von Hand in mehreren Lagen (Axial- bzw. Umfangsrichtung) gewickelt. Glasgehalt ca. 43 %.
- Typ C: Wickellaminat 2: 1-Wickelrovings 555/Silenka -  
Die Rovings wurden im Verhältnis 2 : 1 (Umfangsrichtung : Längsrichtung) gewickelt. Glasgehalt ca. 57 %.
- Typ D: Wie Typ C, jedoch Verhältnis 4 : 1. Glasgehalt ca. 62 %.

Typ E: Gewebelaminat ( $\alpha = 45^\circ$ ) - Feingewebe 472/5/5/Gebr. Prinz  
- Das Gewebe wurde bei einer Bandbreite von 20 cm in Schräglage von ca.  $45^\circ$  (ca. 8 Lagen gegeneinander versetzt) gewickelt. Glasgehalt ca. 42 %.

Typ F: Kombiniertes Gewebe/Mattenlaminat - Glasmatten M 113 - ES 10 - 100, 450 g/m<sup>2</sup>/Gevetex; Glasseidengewebe 6060-21, 670 g/m<sup>2</sup>/Gebr. Prinz - Der Laminataufbau bei

t = 5 mm: 2 Matten, 1 Gewebe, 2 Matten,

t = 10 mm: 2 Matten, 1 Gewebe, 4 Matten, 1 Gewebe, 2 Matten,

t = 15 mm: 2 Matten, 1 Gewebe, 9 Matten, 1 Gewebe, 2 Matten,

t = 20 mm: 2 Matten, 1 Gewebe, 14 Matten, 1 Gewebe, 2 Matten.

Glasgehalt ca. 30 %.

Als Laminierharz wurden bei den Typen A bis E Palatal P 5/BASF mit BP-Paste und Aminbeschleuniger 6310 (100:3:1,5) und bei Typ F Vestopal 150/CuH, mit AP-Paste und Kobaltbeschleuniger 49 (100:2:0,5) verwendet. Gewickelt wurden die Prüfzylinder auf abgedrehten Stahldornen, die zuvor mit Trennwachs NL 1/Oxydo und Trennfilm NL 2/Oxydo versehen worden waren (bei Typ F wurde als Trennmittel Levaform/Bayer verwendet). Nach 4 Stunden Lufttrocknung wurden die Körper bei  $80^\circ \text{C}$  4 Stunden lang getempert.

#### IV.2.4.2 Kennwerte des verwendeten Materials

Aus jeweils einem Versuchszylinder wurden Materialproben entnommen und nach DIN 53 455 (Zugfestigkeit), DIN 53 457 (Elastizitätsmodul) und DIN 53 395 (Glasgehalt) die entsprechenden Materialkennwerte ermittelt. Eine Zusammenstellung dieser Werte zeigt Tab. 3. Für die Zylinder mit größerer Wanddicke (A 5, A 10/14, F 2, F 3, F 4) war es wegen der Krümmung der Proben nicht möglich, in Umfangsrichtung den Zug-E-Modul, die Querkontraktion und die Zugfestigkeit zu bestimmen. Für sie wurde daher bei der Berechnung des theoretischen Wertes anstelle des Zug-E-Moduls der Biege-E-Modul herangezogen; die Querkontraktionszahl läßt sich dann aus der Beziehung  $\mu_1 \cdot E_x = \mu_2 \cdot E_y$  ermitteln.

#### IV.2.4.3 Durchführung und Ergebnisse der Versuche

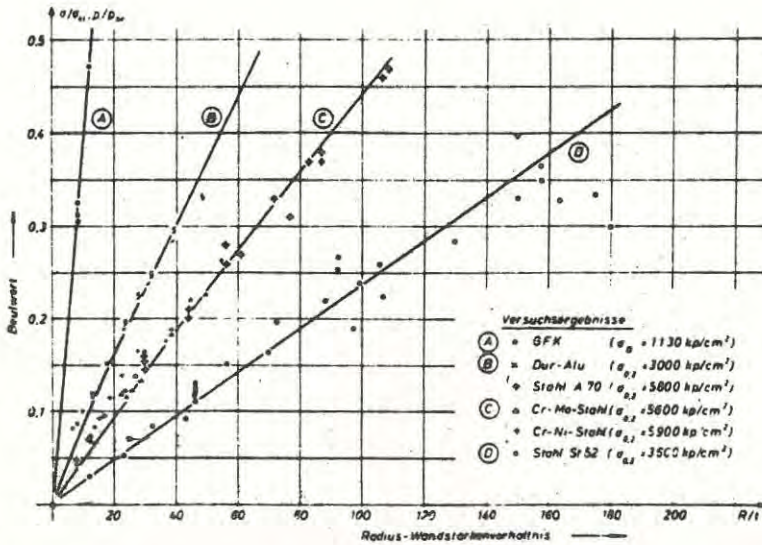
Es wurden insgesamt 30 Beulversuche an kleineren Prüfzylindern  $R = 10$  cm,  $L = 30$  cm,  $t = 0,1 - 1,4$  cm, 9 Beulversuche an größeren Prüfzylindern  $R = 70$  cm,  $L = 280$  cm,  $t = 0,5 - 2,0$  cm und 2 Großversuche  $R = 123$  cm,  $L = 500$  cm,  $t = 0,5$  bzw.  $2,0$  cm durchgeführt. Die Abmessungen, die im Kurzzeitversuch ermittelten Beulspannungen und die über Gl. 15 errechneten Beulwerte sind für alle Versuchskörper in Tab. 4 zusammengestellt.

Die Versuchszylinder wurden - an den Rändern gelenkig gelagert - über ein Kugelenk zentrisch belastet. Die Zentrierung erfolgte über die in den Viertelpunkten (bei  $L/2$ ) angeordneten Dehnungsmeßstreifen bzw. Meßbohren. Die nach dem Durchschlag sich einstellenden Beulen lagen bei den dünnwandigen Körpern alle außerhalb des Randstörbereiches.

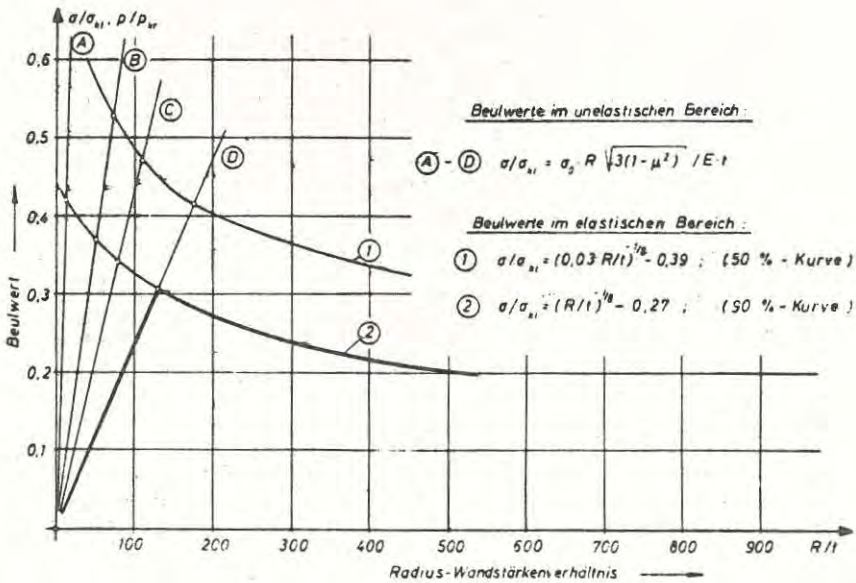


Bild 39 a - c: Die Versuchskörper F 1/2; F 2/6; F 4/8 nach dem Durchschlag

Aus den Versuchsergebnissen (Tab. 4) ersieht man, daß bei kleiner werdendem  $R/t$ -Verhältnis die Beulwerte wieder abfallen ( $R/t = 8,0 \rightarrow \sigma/\sigma_{KT} = 0,31$ ) - d. h. das Stabilitätsproblem wird zu einem Spannungsproblem -. Ähnlich wie bei Zylindern aus Metall gibt es auch hier einen gewissen Übergangsbereich, bei dem sich zwar noch ein dem rein elastischen Verhalten ähnliches Beulmuster ausbildet, jedoch eine relativ kleine radiale Verformung (vor oder während des Durchschlags) den Körper durch Abscheren zu Bruch gehen läßt (Abb. 39 a - c). Um bezüglich dieses Übergangsbereichs bzw. des Geltungsbereichs für elastisches Beulen eine Aussage machen zu können (ähnlich wie in [2] für Metallzylinder), wurden Versuche mit relativ dickwandigen Zylindern (Spritzlaminat, Typ A - quasi isotrop) durchgeführt. Das Abfallen der Beulwerte ( $\sigma_0 = 2200$  kp/cm<sup>2</sup>) ist aus Abb. 40 und die gesuchten Schnittpunkte der Wahrscheinlichkeitskurven (Bereichsgrenzen) sind aus Abb. 41 zu ersehen.



**Bild 40:** Beulwerte bei kleineren Radius-Wandstärkenverhältnissen



**Bild 41:** Der Übergangsbereich unelastisches-elastisches Beulen bei Längsbelastung

Körper- typ	mittl. Zugfestigkeit $\sigma_z$ (kp/cm <sup>2</sup> )		Querkontraktion		Zug-E-Modul $10^5$ (kp/cm <sup>2</sup> )		Biege-E-Modul $10^5$ (kp/cm <sup>2</sup> )		Gewichtsanteil Glas (%)
	axial	radial	$\mu_{yx}$	$\mu_{xy}$	axial	radial	axial	radial	
A	942	835	0,323	0,335	0,630	0,654	0,690	0,710	28,5
A 1	1068	894	0,339	0,368	0,983	1,080	0,880	0,950	28,3
A 5	910	-	0,319	-	0,830	-	0,710	0,690	28,0
A 10	1130	-	0,358	-	0,890	-	0,784	0,760	33,7
B	1356	1461	0,249	0,261	1,270	1,330	1,340	1,060	43,1
C	1784	2160	0,129	0,165	1,550	1,990	1,350	2,400	56,8
D	1663	2440	0,107	0,225	1,250	2,620	1,220	2,900	62,0
E	1597	1795	0,197	0,227	1,110	1,280	1,300	1,260	51,8
F 1	1290	-	0,365	0,311	0,907	0,772	0,805	0,792	27,6
F 2	1417	-	0,340	-	0,984	-	0,974	0,845	31,2
F 3	1502	-	0,351	-	1,010	-	0,979	0,817	30,9
F 4	1151	-	0,360	-	0,825	-	1,066	0,870	30,8

Tabelle 4a: Ergebnisse der Beulversuche

Versuchskörper		Radius	Wanddicke	Länge	$\frac{R}{t}$	$\frac{L}{R}$	Beulspannung	Beulwert
Typ	Nr.	R (cm)	t (cm)	L (cm)			$\sigma$ (kp/cm <sup>2</sup> )	$\frac{\sigma}{\sigma_{kr}}$
A	01	10,06	0,292	29,14	34,5	2,9	514,0	0,451
	02	10,06	0,252	29,38	39,9	2,9	465,0	0,473
	03	10,06	0,251	29,45	40,1	2,9	372,0	0,380
	04	10,06	0,244	29,46	41,2	2,9	662,0	0,695
	05	10,06	0,291	29,42	34,6	2,9	699,0	0,527
A 1	06	10,06	0,095	29,12	105,9	2,9	158,3	0,264
	07	10,06	0,095	29,50	105,9	2,9	194,0	0,322
A 5	08	10,06	0,538	29,50	18,7	2,9	1462,0	0,644
	09	10,06	0,489	29,50	20,6	2,9	1601,0	0,775
A 10	10	10,06	0,810	29,30	12,4	2,9	2090,0	0,545
	11	10,06	0,845	29,32	11,9	2,9	1890,0	0,474
A 14	12	11,30	1,350	30,00	8,4	2,7	1740,0	0,306
	13	11,40	1,360	29,90	8,4	2,6	1848,0	0,326
	14	11,30	1,370	30,00	8,3	2,7	1790,0	0,312
B	01	10,06	0,231	29,22	43,5	2,9	590,0	0,331
	02	10,06	0,218	29,50	46,1	2,9	796,0	0,474
	03	10,06	0,200	29,48	50,3	2,9	672,0	0,436
	04	10,06	0,199	29,48	50,6	2,9	821,0	0,535

Tabelle 4b: Ergebnisse der Beulversuche

(Fortsetzung)

Versuchskörper		Radius	Wanddicke	Länge	$\frac{R}{t}$	$\frac{L}{R}$	Beulspannung	Beulwert
Typ	Nr.	R (cm)	t (cm)	L (cm)			$\sigma$ (kp/cm <sup>2</sup> )	$\sigma/\sigma_{kr}$
C	01	10,06	0,187	29,48	53,8	2,9	740,0	0,390
	02	10,06	0,171	29,50	58,8	2,9	778,0	0,449
	03	10,06	0,172	29,50	58,5	2,9	774,0	0,443
	04	10,06	0,175	29,49	57,5	2,9	906,0	0,510
D	01	10,06	0,283	29,52	35,5	2,9	1008,0	0,337
	02	10,06	0,278	29,53	36,2	2,9	966,0	0,342
	03	10,06	0,299	29,50	33,6	2,9	826,0	0,271
	04	10,06	0,271	29,50	37,1	2,9	1045,0	0,379
E	01	10,06	0,222	29,55	45,3	2,9	976,0	0,629
	02	10,06	0,212	29,46	47,5	2,9	760,0	0,514
	03	10,06	0,211	29,50	47,7	2,9	810,0	0,547
	04	10,06	0,203	29,50	49,6	2,9	690,0	0,487
F 1	01	70,00	0,480	281,80	146,0	4,0	178,0	0,507
	02	70,00	0,550	280,00	127,0	4,0	176,0	0,436
	03	70,00	0,540	280,50	130,0	4,0	168,0	0,425
	I	122,50	0,485	499,70	300,0	4,1	78,0	0,455

Tabelle 4 c: Ergebnisse der Beulversuche

(Fortsetzung)

Versuchskörper		Radius	Wanddicke	Länge	$\frac{R}{t}$	$\frac{L}{R}$	Beulspannung $\sigma$ (kp/cm <sup>2</sup> )	Beulwert $\frac{\sigma}{\sigma_{kr}}$
Typ	Nr.	R (cm)	t (cm)	L (cm)				
F 2	04	70,0	0,980	280,0	71,5	4,0	522,0	0,669
	05	70,0	0,960	281,0	73,0	4,0	474,0	0,621
	06	70,0	0,970	281,0	72,3	4,0	484,0	0,626
	II	123,1	1,010	501,5	122,0	4,1	197,0	0,431
F 3	07	70,0	1,470	280,0	47,7	4,0	727,0	0,618
F 4	08	70,0	1,870	280,4	37,5	4,0	1030,0	0,850
	09	70,0	1,960	280,8	35,7	4,0	1090,0	0,860



#### IV.3 Die Stabilität axial belasteter Zylinderschalen mit Mantelöffnungen

Die Stabilität der Zylinderschalen wird - wie oben bereits erwähnt - ganz wesentlich von Störungen der idealen Schalenform und des Membranzustandes beeinflusst. Da, wie in [3] ausführlich dargelegt wurde, ein brauchbarer Stabilitätsnachweis über die von diesen Störeinflüssen unabhängige sogenannte untere kritische Beulspannung (Minimum der Nachbeulkurven) aus wirtschaftlichen Gründen nicht möglich ist, werden z. Zt. die die effektive Durchschlaglast herabsetzende Einflußgrößen näher untersucht.

Als wesentlichster Störeinfluß muß die Vorverformung (Abweichung von der Idealform) angesehen werden. Aus der abfallenden Tendenz der in Bild 37 aufgetragenen experimentell ermittelten Beulwerte läßt sich eine Abhängigkeit der Vorbeulempfindlichkeit vom Radius-Wanddickenverhältnis ablesen. Um eine Aussage über den Einfluß der Vorbeulgröße und -tiefe auf die Durchschlaglast machen zu können, wurden die in [3] beschriebenen Beulversuche durchgeführt. In Ergänzung dieser Arbeiten sind die nachfolgend beschriebenen Untersuchungen an Kunststoffzylindern mit verschieden geformten Mantelöffnungen angestellt worden.

Die für diese Versuche verwendeten Versuchszyylinder wurden aus glasfaserverstärktem Kunststoff im Handauflageverfahren gefertigt. Die Herstellung erfolgte auf einer Wickelmaschine mit stählernem Wickeldorn. Als Materialien sind Glasfasermatten (Typ M 900/Dwens-Corning); Polyesterharz (Leguval W 16 / Bayer) ; Beschleuniger (Typ 6310/Oxydo) und Härter (Benzolperoxid/Oxydo) verwendet worden. Die normenmäßig ermittelten Materialkennwerte des Zylinderlaminats betragen:  $\sigma_B = 1687 \text{ kp/cm}^2$  (Biegefestigkeit nach ISO R 178);  $\sigma_Z = 1085 \text{ kp/cm}^2$  (Zugfestigkeit nach DIN 53 455);  $E_B = 94 \text{ 000 kp/cm}^2$  (Biege-E-Modul nach DIN 53 457);  $E_Z = 114 \text{ 800 kp/cm}^2$  (Zug-E-Modul nach DIN 53 457);  $\psi = 32 \%$  (Glasgehalt).

Die Durchführung der Beulversuche erfolgte auf einer elektronisch gesteuerten Prüfmaschine mit oel-geschmiertem Kugeltisch. Zur Überprüfung der zentrischen Lasteinleitung waren auf jedem Zylinder innen und außen in den Viertelpunkten (bei  $L/2$ ) Dehnungsmessstreifen angeordnet worden. Die Schalenenden (gelenkig gelagert an den Pressenwiderlagern) wurden, um eine gleichmäßige Lagerung zu erhalten, jeweils mit einem Kunstharzmörtel (Araldit AW 2101 + HW 2951 + Quarzmehl) abgeglichen.

#### IV.3.1 Das Verformungsverhalten

Bei jedem Versuchskörper wurden in halber Zylinderhöhe über den Zylinderumfang und jeweils am Lochrand die radialen Verformungen gemessen (Bild 42). Für die Schale ohne Mantelöffnungen bestätigt sich aus dem Verformungsverlauf (Bild 43) die bereits an kleinen Messingzylindern [3] gefundene Tendenz, daß

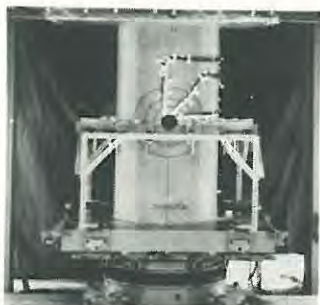


Bild 42: Versuchseinrichtung

1. bereits bei kleinen Belastungen nach innen und außen gerichtete Verformungen (Beulmuster) auftreten;
2. der Ausgangspunkt des Beulmusters offensichtlich immer bei der größten Vorverformung liegt;
3. die Verformungen in Umfangsrichtung periodisch verteilt sind.

Auch bei den Zylinderschalen mit Mantelöffnungen tritt dieses Verformungsverhalten auf. Die Mantelöffnungen haben dabei offensichtlich die Wirkung von entsprechend großen Vorbeulen mit unendlicher Vorbeultiefe. Bei kleinen Öffnungen bleibt noch die maximale irgendwo in der Schale vorhandene Vorbeule der für den Durchschlag auslösende Faktor (Bild 42 - 43). Erst bei größeren Öffnungen nimmt das beim Durchschlagen sichtbar werdende Beulmuster seinen Ausgang am Lochrand (Bild 56 - 58).

Der Lochrand selbst verformt sich, wie zu erwarten ist, jeweils an den Scheiteln nach innen und den Kämpfern nach außen. Für je einen Zylinder mit kreisförmigem (Form I) und einem mit quadratischem (Form II) Mantelausschnitt sind die Lochrandverformungen (bei  $\varnothing a = 200$  mm auch  $w$  bei  $e_y = 200$  mm) über dem Lochumfangswinkel in den Bildern 47 - 48 aufgetragen.

#### IV.3.2 Das Spannungsverhalten

Am Rand der Mantelöffnung wird - ebenso wie im Bereich einer größeren Vorverformung - der Membranspannungszustand der Schale gestört. Die maximale Spannungsspitze tritt dabei unmittelbar am Kämpferrand in Lochumfangsrichtung ein. Entsprechend durchgeführte Dehnungsmessungen (Umfangsrichtung  $\varphi = 0^\circ$ ; Axialrichtung  $\varphi = 90^\circ$ ;  $\varphi = 45^\circ$  - Messung auf der Innen- und Außenseite) an zwei

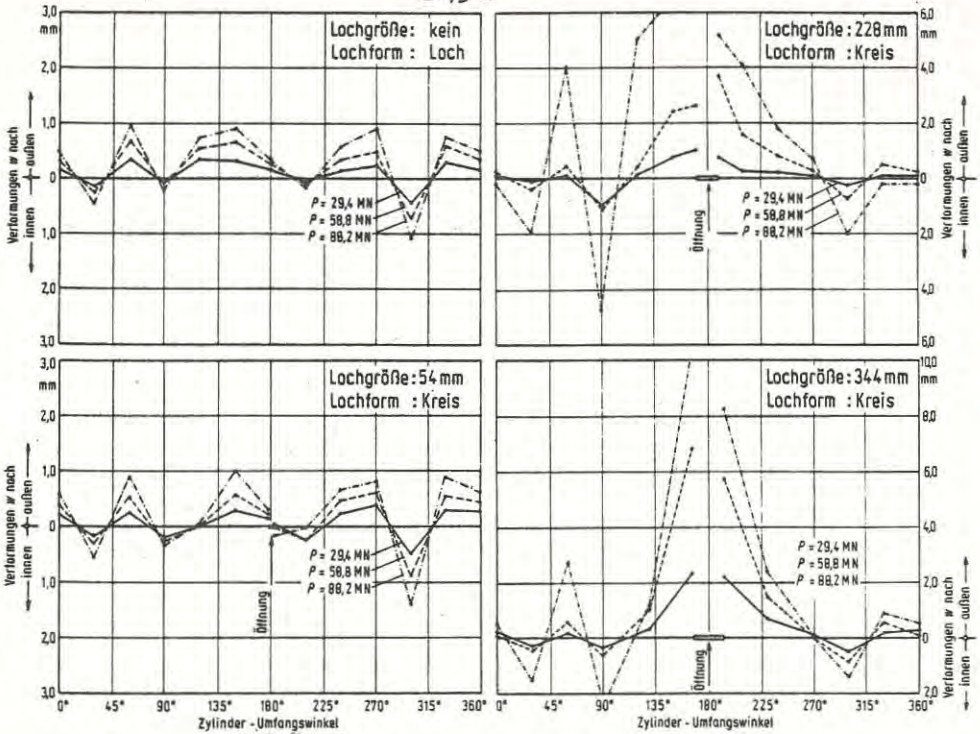


Bild 43: Radiale Zylinderverformungen (kreisförmige Öffnung)

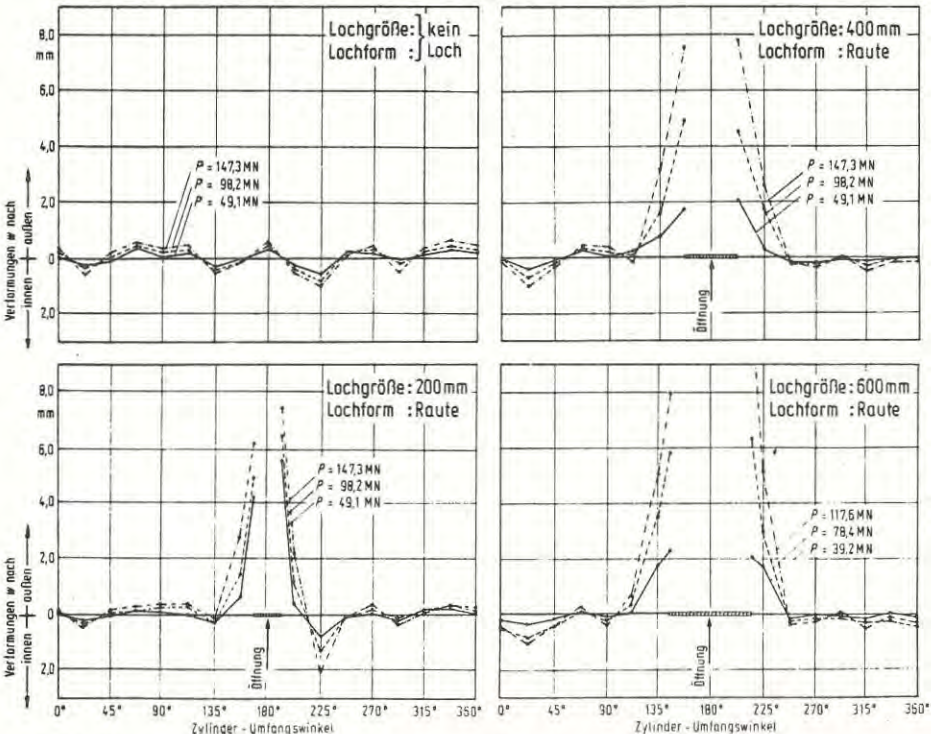


Bild 44: Radiale Zylinderverformungen (rautenförmige Öffnung)

Zylinderschalen erbrachten einen gegenüber der Membranspannung um 2,85-fach höheren (kreisförmige Öffnung) bzw. 2,05-fach höheren (rautenförmige Öffnung) Wert (Bild 45 - 46). Die bei kleiner Zylinderlängsbelastung gemessenen Dehnwerte zeigen, mit dem Biege-Elastizitätsmodul multipliziert und durch die Membranspannung  $p/t$  dividiert, etwa die gleiche bereits von Lekkerkerker [39] für dickwandigere Zylinderschalen ermittelten Spannungsverhältnisse am Lochrand. Bei größerer Belastung treten verstärkt Biegedehnungen hinzu - es ergibt sich eine uneinheitliche Tendenz.

### IV.3.3 Abfall der Beullasten

Die an den Zylinderschalen ohne Mantelöffnung experimentell bestimmten Beulwerte  $\sigma/\sigma_{kl}$  (Membranspannung/klassische Beulspannung) deuten auf eine recht gute Herstellungsqualität hin. Sie liegen mit  $\sigma/\sigma_{kl} = 0,34 - 0,46$  (Tabelle 5) etwa in dem für axialgedrückte Zylinderschalen ermittelten 50 %-Wahrscheinlichkeitsbereich (Bild 37).

Nach Feststehen der Ausgangsbeullast (ohne Öffnung) wurde in die noch unter einer geringen Längsbelastung stehende Zylinderschale die Mantelöffnung derart eingeschnitten, daß der Ausschnitt die Durchdringungsfigur von Zylinder mit Zylinder (Lochform I), mit quadratischem Quader (Lochform II u. III) und mit rechteckigem Quader (Lochform IV) darstellt. Die Schale wurde danach jeweils bis zum Durchschlag belastet - auch bei den extrem großen Öffnungen ( $a = 900$  mm) trat noch ein ausgeprägter Durchschlag auf.

Die Membranspannungen (Beullast/Schalenbruttofläche) durch die klassische Beulspannung dividiert, ergibt - über dem als Öffnungsparameter definierten Wert  $a/R$  aufgetragen - die erwartete abfallende Tendenz. Die im einzelnen ermittelten Beulwerte können in erster Näherung durch negativ geneigte Geraden approximiert werden (Bild 49 - 50). Dabei zeigt es sich, daß die Neigung dieser Geraden fast unabhängig von der Lochform ist. Als die den Abfall beschreibende Funktion könnte

$$\sigma/\sigma_{kl} = 0,38 - 0,165 \cdot a/R$$

oder wenn man die Beulspannung auf den Ausgangsbeulwert (ohne Öffnung) bezieht

$$\sigma/\sigma_0 = 1,0 - 0,44 \cdot a/R$$

gesetzt werden. Die großen Schwankungen der Beulwerte beim Zylinder ohne Mantelöffnungen rühren, wie oben bereits erwähnt, von den Vorverformungen her. Während nun bei Zylindern normaler Herstellungsgüte mit kleineren Öffnungen noch die örtlichen Vorverformungen den Ausschlag für die Höhe der Beullast geben, ist dies bei größeren Öffnungen nicht mehr der Fall. Der Beulwert wird demnach unabhängig vom Radius-Wanddickenverhältnis bei einer bestimmten Öffnung, d. h. einer örtlichen Vorbeule unendlicher Tiefe, wohl immer gleich sein. Dabei tritt dieser Effekt natürlich bei kleinen  $R/t$ -Verhältnissen ( $R/t = 200$ /Punkt A - Bild 52) früher als bei größeren  $R/t$ -Verhältnissen ( $R/t = 1500$ /Punkt B) ein - der Einfluß von  $R/t$  verliert sich mit zunehmendem  $a/R$  und damit die Streubreite des Beulwertes (Bild 52).

Der wesentlich stärkere Abfall der einzigen bisher veröffentlichten Beulwerte aus Versuchen an Zylinderschalen mit Öffnungen (Tennyson [41]) kann durch die bekannte Vorbeulempfindlichkeit von extrem sorgfältig hergestellten Schalen gedeutet werden - die dort untersuchten Schalen hätten den gleichen oder einen ähnlichen Abfall der Beulwerte gehabt, wenn die üblichen Vorbeulen vorhanden gewesen wären. Eine Bestätigung hierzu ergibt sich aus dem asymptotischen Nähern an die Mittelwertkurve der Karlsruher Versuche (Bild 51 - 52). Die Durchschlagslast einer mit Mantelöffnungen versehenen Zylinderschale der normalen Herstellungsgüte darf man demnach nicht nach den Angaben von Tennyson ermitteln.

#### IV.3.4 Verstärkung des Lochrandes

Eine Verminderung der Lochrandverformungen erzielt man durch Anordnen von Randverstärkungen. Bei den vorliegenden Versuchen wurden nach Ermittlung der jeweiligen Beullast (Zylinder mit Mantelöffnung) der Lochrand durch Aufkleben (Schnellkleber Araldit AW 2101 + HW 2951) eines oder zweier Randkragen verstärkt. Die Lochrandverformung wurde durch die Randverstärkungen teilweise erheblich vermindert (Bild 47 - 48, 53). Bei den kleineren Öffnungen verlor sich dadurch die vom Lochrand ausgehende Beulung - die üblichen Vorbeulen gaben hier wieder den Ausschlag für die Höhe der Beullast.

Die in Tabelle 5 zusammengestellten Versuchsergebnisse lassen erkennen, daß bereits eine schwache Lochrandverstärkung eine relativ starke Zunahme der Beullast zur Folge hat. Für den Zylinder mit kreisförmiger Öffnung sind die jeweils ermittelten Beulwerte durch die zwei Funktionen

$$\begin{aligned}
 J \leq J^*: \sigma/\sigma_{k1} &= (0,38 - 0,165a/R) + [0,0725(a/R)^3 \\
 &- 0,0609(a/R)^2 + 0,0288a/R + 0,035] \\
 &\cdot [J/(79,8(a/R)^2 - 103,8 \cdot a/R \\
 &+ 69,7)] (-0,148(a/R)^2 - 0,00329a/R + 0,315)
 \end{aligned}$$

$$J > J^*: \sigma/\sigma_{k1} = \sigma/\sigma_{k1}(J=J^*) + (J - J^*) \cdot e^{(-6,7-5,07a/R)}$$

$$J^* = -150,9/(a/R - 1,36)$$

$J$  = Trägheitsmoment der Verstärkung (mit Zylinderwandung)

approximiert worden (Bild 54). Wegen der wenigen bisher vorliegenden Ergebnisse kann eine umfassende Aussage (alle Öffnungsformen) über den Anstieg des Beulwerts bei stärker werdender Randverstärkung ( $\sigma/\sigma_{k1} = f(J)$ ) noch nicht gemacht werden.

Als vorläufige Bemessungshilfe kann das nachfolgend beschriebene "Ersatzträgerverfahren" dienen. - Trägt man die jeweils ermittelten Beulwerte  $\sigma_B/\sigma_0$  über dem Verhältnis aus ideeller Ringnicklast (der Lochrandverstärkung) und Schalenbelastung auf (Bild 55), so erhält man als untere Grenzkurve die Funktion

$$\sigma_B/\sigma_0 = \frac{1}{2} \log (2q_k/q_z) + 0,927$$

$$q_k = \frac{12}{4 + E \cdot J/G \cdot J_D} \cdot \frac{E \cdot J}{r_E^3}$$

$$q_z = \frac{P}{2\pi \cdot R}$$

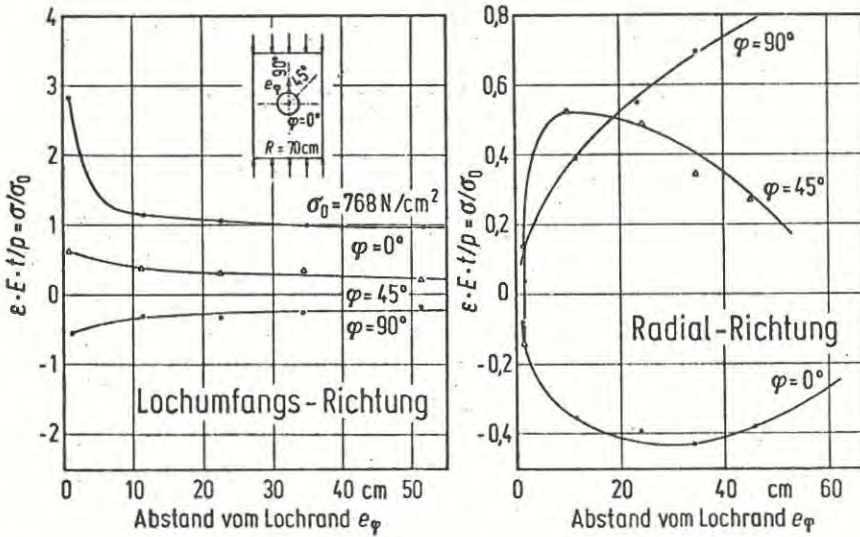
$E, G$  = Elastizitäts- und Schubmodul der Verstärkung

$J, J_D$  = Biege- und Torsionsträgheitsmoment der Verstärkung (mit Zylinderwandung)

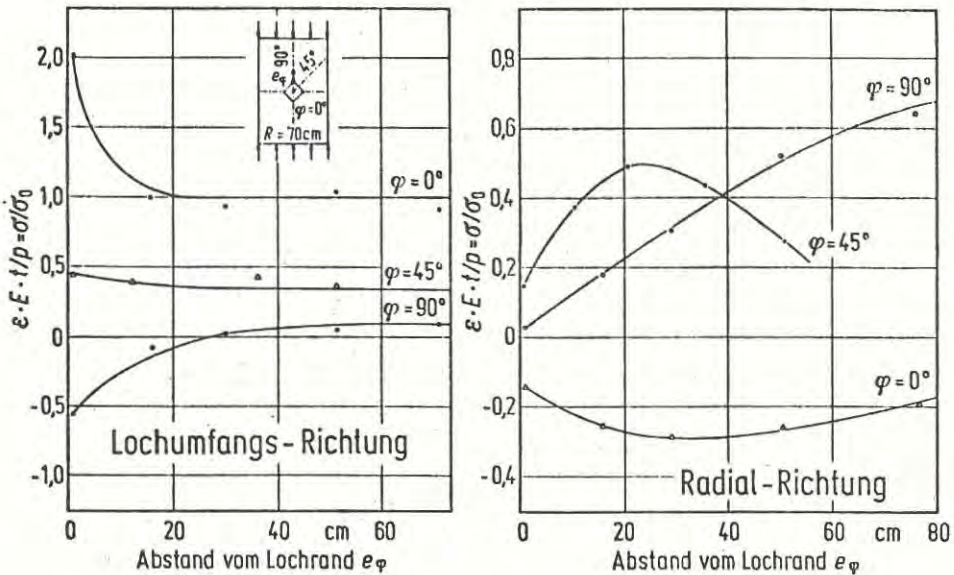
$r_E$  = Radius des Ersatzringträgers (bis Mitte Verstärkung)

$P$  = Zylinderbelastung

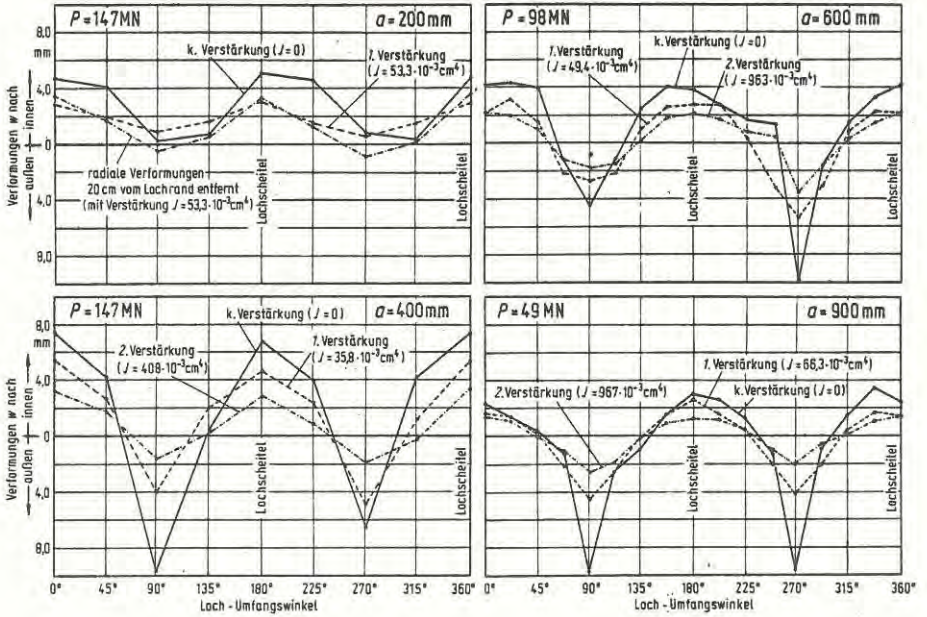
Für ein Verhältnis  $q_k/q_z > 0,7$  wird die Beullast der ungeschwächten Schale erreicht, d. h. die Öffnung bleibt ohne Einfluß auf das Stabilitätsverhalten.



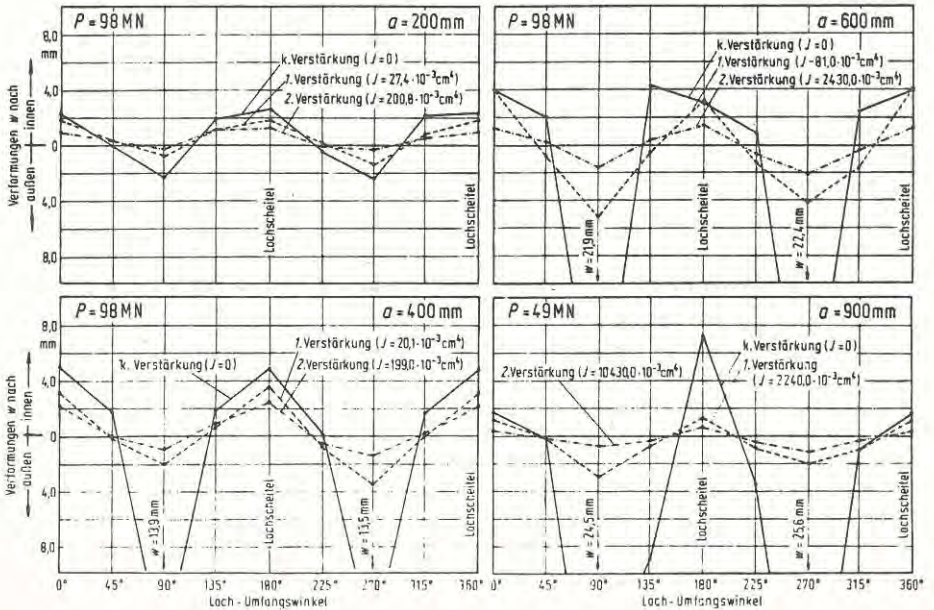
**Bild 45:** Spannungsverhältnisse am Lochrand  
(kreisförmiges Loch -  $a = 200$  mm)



**Bild 46:** Spannungsverhältnisse am Lochrand  
(rautenförmiges Loch -  $a = 200$  mm)

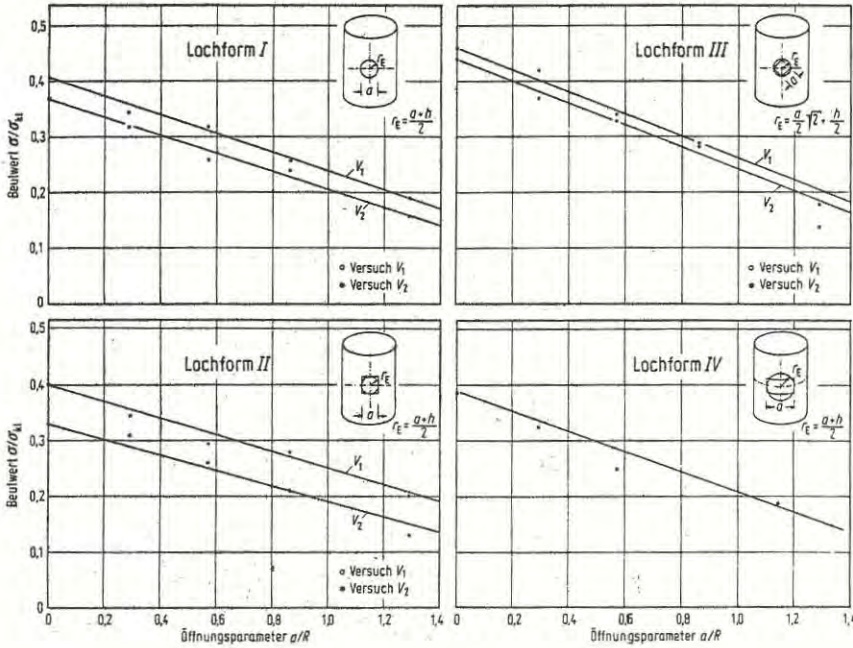


**Bild 47:** Radiale Lochrandverformungen (kreisförmige Öffnung)



**Bild 48:** Radiale Lochrandverformungen (quadratische Öffnung)

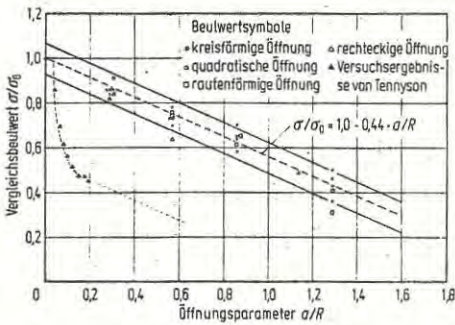




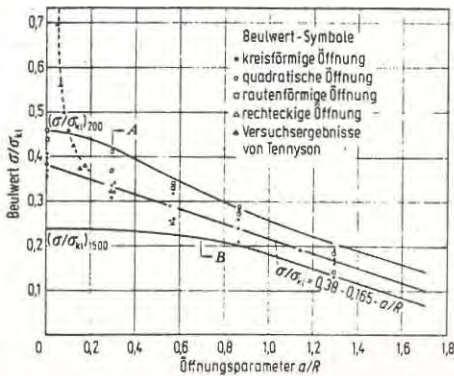
**Bild 49:**

**Bild 50:**

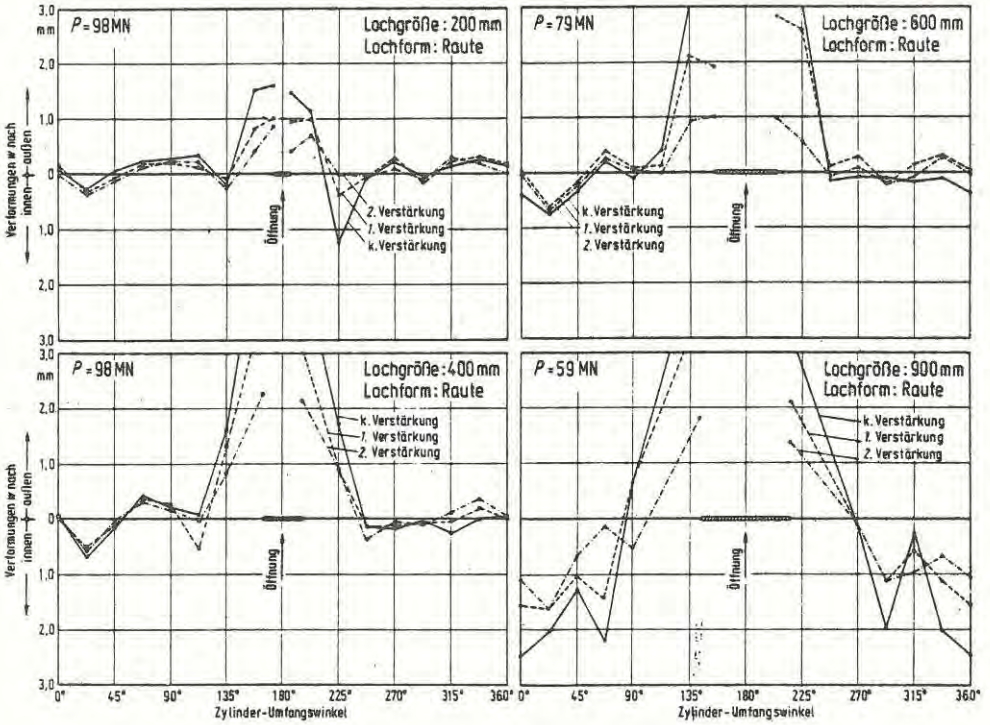
Beulwerte in Abhängigkeit vom Öffnungsparameter



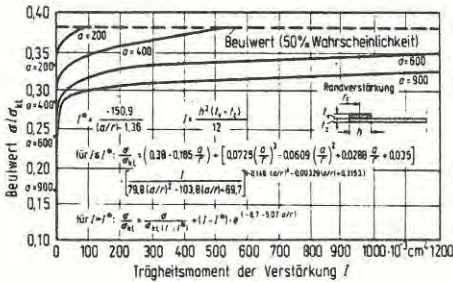
**Bild 51:** Vergleichsbeulwerte in Abhängigkeit vom Öffnungsparameter



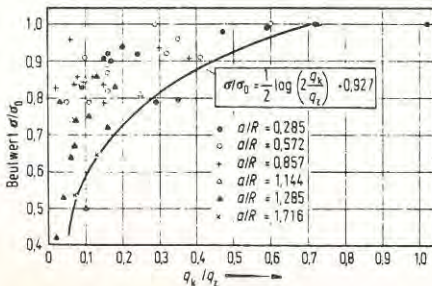
**Bild 52:** Zusammenstellung der Beulwerte



**Bild 53:** Verformungen der verstärkten und nichtverstärkten Schale



**Bild 54:** Zunahme des Beulwertes bei Verstärkung des Lochrandes (kreisförmiges Loch)



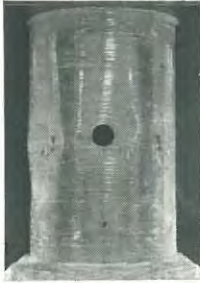
**Bild 55:** Beulwerte in Abhängigkeit von der Knicklast des Ersatzringträgers

Tabelle 5a: Zusammenstellung der an Zylinderschalen mit Mantelöffnungen durchgeführten Beulversuche

Körper Nr.	Öffnung	R (mm)	t <sub>min</sub> (mm)	t <sub>max</sub> (mm)	t <sub>m</sub> (mm)	R/t <sub>m</sub>	$\frac{a}{R}$	P <sub>B</sub> (Mp)	$\sigma_B$ (kp/cm <sup>2</sup> )	$\sigma/\sigma_{k1}$	$\sigma/\sigma_0$
1	kreisförmig	700	2,7	4,9	3,6	195	0	20,5	132	0,41	0,86
							0,285	17,7	112	0,34	
							0,572	16,3	103,5	0,32	
							0,857	13,3	84	0,26	
											0,48
2	kreisförmig	700	3,4	5,5	4,2	167	0	25,5	138	0,37	0,86
							0,285	22,5	121	0,32	
							0,572	18,5	100	0,26	
							0,857	17,0	92	0,24	
											0,43
3	quadratisch	700	2,7	4,6	3,6	195	0	18,7	118	0,36	0,86
							0,285	16,0	101	0,31	
							0,572	13,3	84	0,26	
							0,857	10,5	67	0,21	
											0,37
4	quadratisch	700	2,6	4,5	3,5	200	0	19,5	126	0,40	0,86
							0,285	16,8	108	0,34	
							0,572	14,0	90,5	0,29	
							0,857	13,5	87	0,28	
											0,50

Tabelle 5b: Zusammenstellung der an Zylinderschalen mit Mantelöffnungen durchgeführten Beulversuche

Körper Nr.	Öffnung	R (mm)	t <sub>min</sub> (mm)	t <sub>max</sub> (mm)	t <sub>m</sub> (mm)	R/t <sub>m</sub>	$\frac{a}{R}$	P <sub>B</sub> (Mp)	$\sigma_B$ (kp/cm <sup>2</sup> )	$\sigma/\sigma_{k1}$	$\sigma/\sigma_0$	
5	rautenförmig	700	2,3	4,3	3,3	201	0	17,5	132	0,44		
							0,285	14,5	109	0,37	0,84	
							0,572	13,2	100	0,33	0,75	
							0,857	11,5	87	0,29	0,66	
							1,285	7,1	53,5	0,18	0,41	
6		rautenförmig	700	2,5	4,4	3,4	206	0	21,0	140	0,46	
								0,285	19,0	127	0,42	0,91
								0,572	15,5	104	0,34	0,74
	0,857							12,9	86	0,28	0,61	
							1,285	6,4	43	0,14	0,30	
7	recht- eckig		700	3,2	6,2	4,3	163	0	28,0	148	0,39	
								0,285	24,0	127	0,32	0,86
								0,572	18,5	98	0,25	0,66
		1,144						13,7	72	0,19	0,49	



$a/R = 0,286$



$a/R = 0,572$



$a/R = 0,857$



$a/R = 1,285$

**Bild 56:** Gebeulte Zylinderschalen mit und ohne Lochrandverstärkung (kreisförmige Öffnung)



$$a/R = 0,286$$



$$a/R = 0,572$$

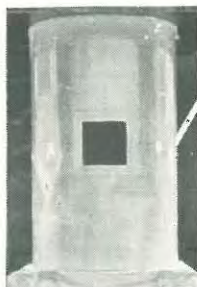


$$a/R = 0,857$$



$$a/R = 1,285$$

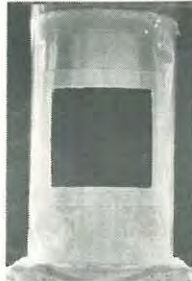
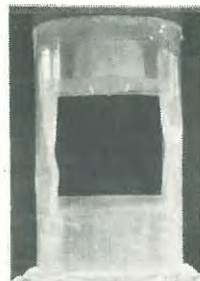
Bild 57: Gebeilte Zylinderschalen mit und ohne Lochrandverstärkung (rhombenförmige Öffnung)



$a/R = 0,572$



$a/R = 0,857$



$a/R = 1,285$

**Bild 58:** Gebeulte Zylinderschalen mit und ohne Lochrandverstärkung (quadratische Öffnung)

#### IV.4 Die Beulstabilität der Kegelschale

##### IV.4.1 Die axial gedrückte Kegelschale

Ebenso wie bei Zylinderschalen ist es bisher auch für Kegelschalen - sie werden im Bereich des Kunststoffbaues z. B. als Kegeldächer und Schüttkegel von Behältern eingesetzt - nicht möglich gewesen, die von Vorverformungen und sonstigen Störungen wesentlich beeinflusste obere kritische Beulspannung zu bestimmen. Man muß demnach auch bei ihnen die mit Korrekturfaktoren versehene sogenannte klassische Lösung der linearisierten Differentialgleichung heranziehen. Schnell [83] erhält durch Lösung der entsprechenden linearisierten Differentialgleichungen unter Verwendung eines eingliedrigen Lösungsansatzes den Ausdruck

$$\sigma_{k1,k} = E \cdot t \cdot \text{ctg} \alpha \cdot [(1+s_1/s_2) \cdot \ln(s_2/s_1) / 6(1-\mu^2) \cdot s_1^2 (1-s_1/s_2)]^{1/2}$$

Man kann nun mit recht guter Genauigkeit diese klassische Lösung auch vereinfacht schreiben

$$\sigma_{k1,k} \approx \frac{E \cdot t}{R_1} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}$$

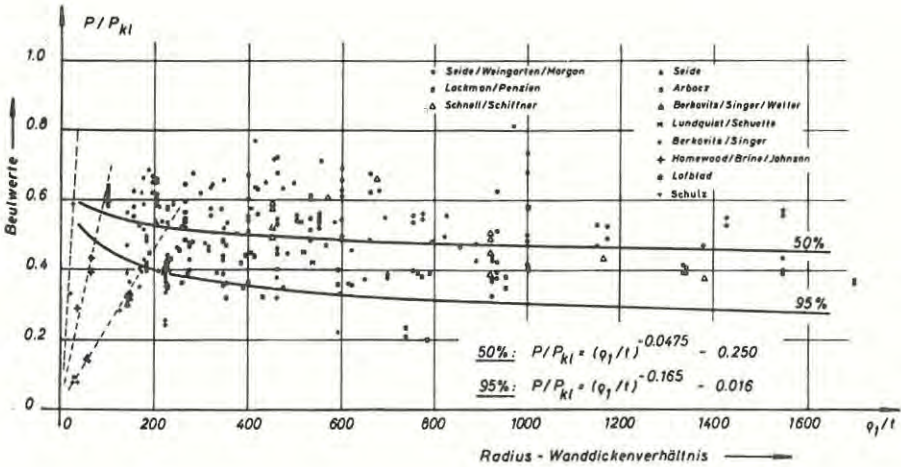
Es besteht demnach der einfache Zusammenhang zwischen den klassischen Lösungen von axial gedrücktem Kegel und Zylinder

$$\sigma_{k1,k} = \sigma_{k1,z} \cdot \cos^2 \alpha$$

Dieser Ausdruck gibt, wie oben bereits gesagt, jedoch nur den qualitativen Einfluß der geometrischen Kenngrößen und Steifigkeitsparameter auf die Beulbelastung wieder. Er muß noch mit empirisch gefundenen Korrekturfaktoren multipliziert werden, um für die Bemessung brauchbar zu sein.

Alle bisher in der internationalen Literatur veröffentlichten Versuchsergebnisse [42 - 57] über dem Radiuswanddickenverhältnis  $\rho_1/t$  aufgetragen, zeigen das auch bei Zylinderschalen beobachtete von der größeren Vorbeulempfindlichkeit besonders dünnwandiger Schalen herrührende Abfallen der Beulwerte mit größer werdendem  $\rho_1/t$  - Verhältnis (Bild 59).





**Bild 59:** Beulwerte in Abhängigkeit vom Radius-Wanddickenverhältnis

Nach Ausscheiden derjenigen Versuchswerte, die an besonders dickwandigen bzw. kurzen Kegelstümpfen ermittelt worden waren - auf ihren Einfluß soll noch weiter unten eingegangen werden - und dem Zuordnen der Versuchswerte zu einzelnen  $\rho_1/t$ -Verhältnissen ( $\rho_1/t = 100; 150; 200; 250; 300; 350; 400; 450; 500; 550; 600; 700; 800; 900; 1000; 1160; 1360; 1560$ ) wurden nach dem Kriterium der minimalen Summe der Fehlerquadrate Grenzkurven mit 50 %-und 95 %-Wahrscheinlichkeit gesucht. Unter Verwendung der im Versuchswesen üblichen statistischen Auswertungsverfahren (z. B. t-Verteilung) ergaben sich als Beulfaktoren

mit 50 % Wahrscheinlichkeit:  $\sigma/\sigma_{kl} = (\rho_1/t)^{-0,0475} - 0,250$

mit 95 % Wahrscheinlichkeit:  $\sigma/\sigma_{kl} = (\rho_1/t)^{-0,165} - 0,016$

Als Nachweisformel für den axial gedrückten Kegelstumpf könnte z. B. mit 90 %-Wahrscheinlichkeit vorläufig gesetzt werden.

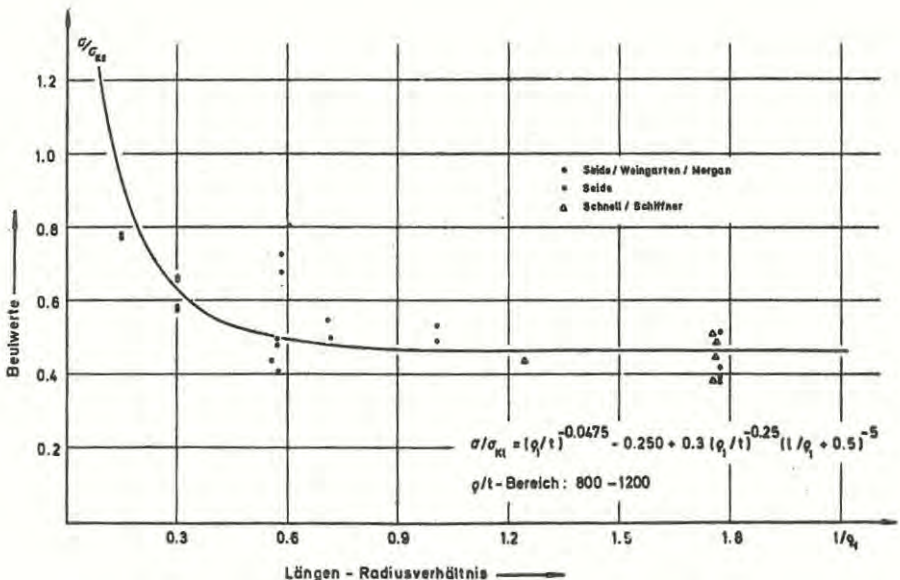
$$\sigma_{kr} = [(\rho_1/t)^{-0,165} - 0,016] \cdot E \cdot t \cdot \cos \alpha / \rho_1 \cdot \sqrt{3(1-\mu^2)}$$

In zwei Fällen liefert dieser Ausdruck jedoch unzutreffende Ergebnisse - bei kurzen Schalen steigt die Beullast an und bei dickwandigen Schalen fällt sie ab.

Eine umfassende Aussage über das aus der Randversteifung resultierende Ansteigen der Beulwerte bei kleiner werdenden Längen-Radiusverhältnissen  $l/\rho_1$  - wie z. B. für Zylinderschalen in [3] durchgeführt - läßt sich wegen der nur wenigen bisher vorliegenden Versuchsergebnisse nicht machen. Lediglich für das Radius-Wanddickenverhältnis  $\rho_1/t = 800 - 1200$  haben Seide - Weingarten - Morgan [48], Seide [49] und Schnell-Schiffner [47] einige Versuche an Kegelschalen mit kleineren Längen-Radiusverhältnissen durchgeführt. Die sich ergebende ansteigende Tendenz (Bild 60) kann - zumindest für das  $\rho_1/t = 800-1200$ -Verhältnis - durch die auch für Zylinderschalen gültige Formel

$$\sigma/\sigma_{kl} = 0,3 (\rho_1/t)^{-1/4} \cdot (l/\rho_1 + 0,5)^{-5}$$

beschrieben werden. Die Nachweisformel für kleinere  $l/\rho_1$ -Verhältnisse erhält man dann durch Multiplikation dieses Ausdruckes mit dem oben angegebenen Beulfaktor.



**Bild 60 :** Beulwerte in Abhängigkeit vom Längen - Radiusverhältnis

Wird die Kegelschale immer dickwandiger, vermindert sich also das Radius-Wand-dickenverhältnis, so steigen die Beulwerte nicht mehr an, sondern fallen ab (Bild 59). In einzelnen Bereichen der Schalenwandung wird noch vor Erreichen der Durchschlagslast die Streckgrenze überschritten. Die sich einstellende Plastizierung liegt entweder im Bereich von Vorverformungen und Inhomogenitäten oder infolge der behinderten Querdehnung bei den Schalenrändern.

Da auch hier fast keine Versuchsergebnisse vorlagen und um zumindest für den vorliegenden, besonders wichtigen Lastfall eine erste Aussage machen zu können, wurden Beulversuche an Kegelschalen aus Kunststoff (GFK), Aluminium (Al Mg 3) und Stahl (V2A) durchgeführt. Die normenmäßig ermittelten Materialkennwerte der verwendeten Werkstoffe sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

	Dichtg (g/cm <sup>3</sup> )	Glasgehalt %	Zugfestigkeit (kp/cm <sup>2</sup> )	Zug-E-Modul (kp/cm <sup>2</sup> )
G F K	1,62	35,8	945	87 000
Stahl	7,85	-	6350	2320 000
Aluminium	2,80	-	2280	910 000

Die Herstellung der GFK-Kegel erfolgte im Handauflegeverfahren auf mit Trennmittel versehenen Metallformen. Als Materialien wurden die in Kapitel VI.2 (Sandwich mit Holzkern) erwähnten Einzelkomponenten verwendet. Die Metallkegel sind aus ebenen Blechen gewalzt und dann stumpf schutzgas-geschweißt worden. Die Schalenenden waren jeweils in abgedrehte Endplatten eingelassen und dann mit dem schnell härtenden Epoxidharz-Kleber Araldit AW 2101 + Hw 2951 vergossen worden.

Die Vorverformungen wurden an einigen Schalen vor dem Versuch ausgemessen - sie betragen im Extremen etwa gleich der halben Kegelwanddicke. Die Lasteinleitung erfolgte über eine in der oberen Endplatte eingelegte Stahlkugel.

Bei den kleineren Radius-Wanddickenverhältnissen  $\rho_1/t$  trat beim Versuch rein plastisches Beulen (annähernd axialsymmetrische Verformung nach außen) bei den größeren  $\rho_1/t$ -Verhältnissen rein elastisches Beulen (schlagartiger Durchschlag) auf. Das plastisch-elastische Beulen (Körper Nr. 2, 5, 6, 12, 13) war einerseits durch das Fehlen eines ausgeprägten Durchschlags, andererseits durch ein beim elastischen Beulen zu beobachtendes Beulmuster (Bild 61) gekennzeichnet.



Bild 61 a - c: Gebeulte Kegelschalen (Körper 1, 2, 3)

Die wenigen ermittelten Beulwerte  $\sigma/\sigma_{k1}$  (Tabelle 6) über dem Radius-Wanddickenverhältnis aufgetragen zeigen zumindest für Kegel aus 2 Alu-Legierungen, Stahl und Kunststoff die abfallende Tendenz (Bild 62). Die Geraden-Funktion lauten für

$$\begin{aligned} \text{GFK} & : \sigma/\sigma_{k1} = 0,025 \cdot \rho_1/t \\ \text{Alu-Leg. 6061-T6} & : \sigma/\sigma_{k1} = 0,0065 \cdot \rho_1/t \\ \text{Stahl V2A; Al Mg 3} & : \sigma/\sigma_{k1} = 0,0022 \cdot \rho_1/t. \end{aligned}$$

Die Gültigkeitsgrenzen bis zu denen elastisches Beulen vorliegt, ergeben sich aus den Schnittpunkten der entsprechenden Wahrscheinlichkeitskurven und diesen Geraden.

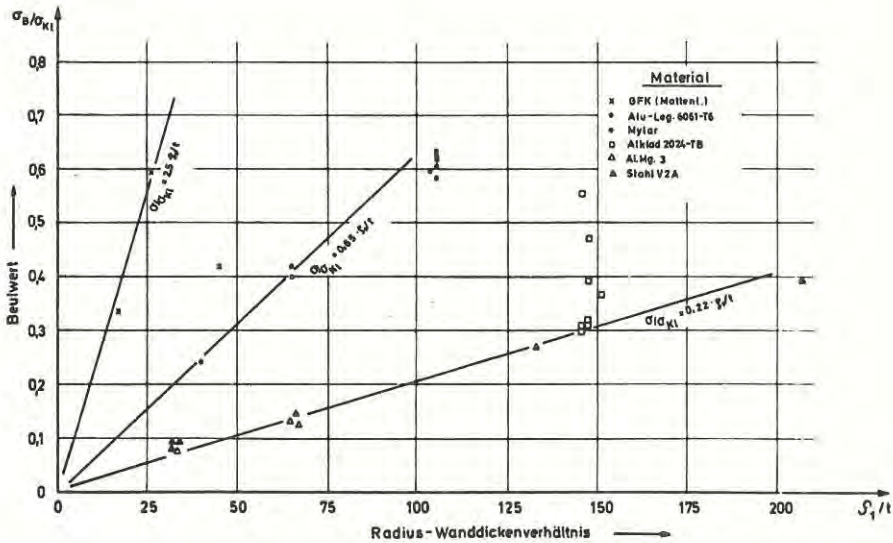


Bild 62: Beulwerte bei kleineren  $\rho_1/t$ -Werten

#### IV.4.2 Die durch gleichmäßigen Außendruck belastete Kegelschale

Ähnlich wie beim Lastfall Axialdruck läßt sich für die allseitig durch Außendruck beanspruchte Kegelschale eine klassische Beulspannung in Anlehnung an die Vorgehensweise bei der Zylinderschale herleiten. Sie lautet

$$p_{k1} = 0,918 \cdot E (\rho_m/l) (t/\rho_m)^{2,5}$$

Dieser Ausdruck beschreibt nun wegen der anders gearteten Beulfigur - meist nur eine Beulwelle in Längsrichtung - und der daraus resultierenden geringeren Vorbeulempfindlichkeit die experimentell sich ergebenden Beullasten in weit genauerm Maße, als der entsprechende Wert beim axialgedrückten Kegel.

Um auch hier eine vorläufige Nachweisformel zu erhalten, wurden - ebenso wie beim Lastfall Axialdruck - alle in der internationalen Literatur veröffentlichten Beulwerte [48 - 52; 54; 56 - 57] zusammengetragen (Bild 63) und wie vorbeschrieben statistisch ausgewertet. Die den Abfall der Beulwerte  $p/\rho_{k1}$  mit größer werdendem Radius-Wanddickenverhältnis beschreibenden Wahrscheinlichkeitskurven (Bild 63) lauten

50 % Wahrscheinlichkeit :  $p/p_{kl} = (\rho_m/t - 80)^{-0,165} + 0,707$

95 % Wahrscheinlichkeit :  $p/p_{kl} = (\rho_m/t - 80)^{-0,175} + 0,539$

Zur Frage des Ansteigens der Beulwerte bei kürzeren Kegeln und des Abfallens bei dickwandigeren Kegeln kann keine eindeutige Aussage gemacht werden, da keine bzw. zu wenig Versuchsergebnisse vorliegen (z. B. kleiner  $\rho_m/t$ -Bereich/ Bild 63)

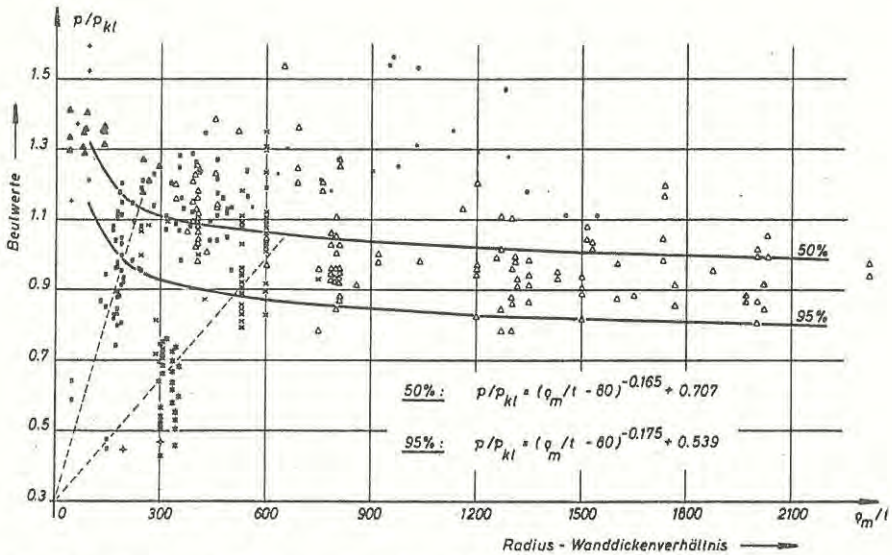


Bild 63: Beulwerte in Abhängigkeit vom Radius-Wanddickenverhältnis

#### IV.4.3 Die durch Axial- und Außendruck belastete Kegelschale

Zum Lastfall der kombinierten Beanspruchung aus Längs- und Außendruck liegen lediglich Versuchsergebnisse dreier Veröffentlichungen [43, 48, 53] vor. Da die angegebenen Versuchsergebnisse außerordentlich stark streuen (Bild 64) müssen Versuchskörper z. T. aus Materialien geringer Festigkeit (plastisch-elastisches Beulen) bzw. solche mit größeren Vorverformungen verwendet worden sein. Eine Angabe von Wahrscheinlichkeitskurven, die bereits bei den beiden vorbeschriebenen Lastfällen wegen der z. T. geringen Stichprobe problematisch war, ist hier nicht möglich. Selbst die sonst übliche geradlinige Verbindung der entsprechenden Ausgangsbeulwerte (Axialdruck, Außendruck) scheint hier nicht zulässig zu sein.

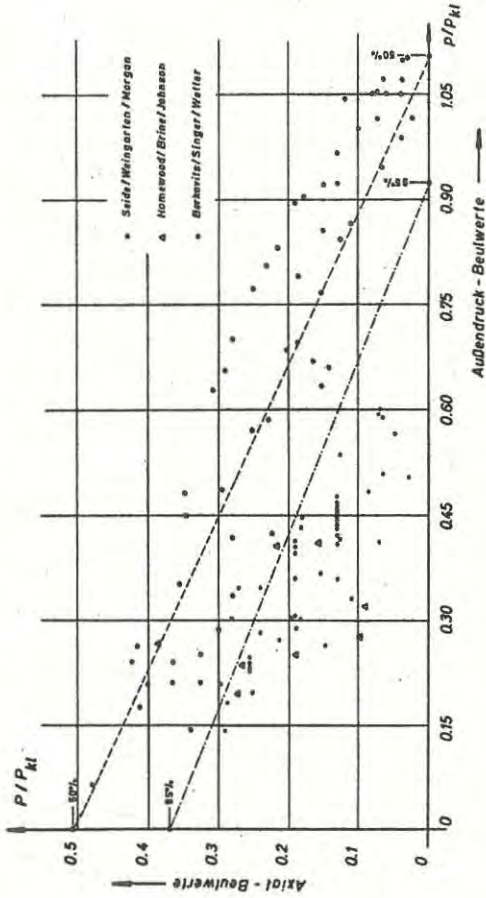


Bild 6k: Beulwerte für den kombinierten Lastfall ( $g_1/t=150-300$ )

Tabelle 6: Zusammenstellung der an Kegelschalen durchgeführten Beulversuche

Körper Nr.	GFK			Aluminium (AlMg3)					Stahl (V2 A)					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$R_1$ (mm)	119	119	119	118	119	119	119	119	118	117	119	119	119	118
$\rho_1$ (mm)	135	135	135	134	135	135	135	135	134	132	135	135	135	134
$R_2$ (mm)	281	281	281	281	282	280	280	281	281	281	283	281	282	281
$l$ (mm)	345	344	345	347	347	347	347	346	348	347	347	347	347	346
$t_{\min}$ (mm)	7,10	4,50	2,40	4,00	1,80	1,80	1,00	0,50	3,90	3,80	3,90	2,00	1,00	0,60
$t_{\max}$ (mm)	7,90	5,70	3,40	4,10	2,10	2,20	1,00	0,50	4,00	4,00	4,00	2,10	1,10	0,70
$t_m$ (mm)	7,35	5,07	2,95	4,02	2,01	2,05	1,00	0,50	3,97	3,97	3,96	2,02	1,02	0,65
$\rho_1/t_m$	18,5	26,6	45,8	33,3	67,2	65,9	135	270	33,8	33,2	34,1	66,8	132,4	206,2
$P_B$ (Mp)	46,4	39,4	9,25	31,0	14,7	15,0	5,5	2,3	85,6	90,6	95,2	40,1	19,4	11,5
$\sigma_B/\sigma_{k1}$	0,330	0,594	0,413	0,071	0,135	0,132	0,203	0,342	0,079	0,083	0,088	0,142	0,270	0,395



## V. Biegeeweiche Membrantragwerke

Unter einem Membrantragwerk soll hier eine Konstruktion verstanden werden, deren Hauptmerkmal der Einsatz eines flexiblen textilen Materials als tragender Baustoff ist. (Z. B. Traglufthalle). Solche Tragwerke werden im wesentlichen durch die Hülle, das Stabilisierungselement und die Verankerungskonstruktion gebildet.

Die Hülle stellt in jedem Fall das raumabschließende Element dar (Schutz gegen Witterungseinflüsse, Staub, Licht, Schall usw.) und besteht fast ausschließlich aus beschichtetem Kunstfasergewebe. Das Stabilisierungselement erzeugt eine den äußeren Lasten angemessene Zugvorspannung in der Hülle. Dies erreicht man durch mechanische Vorspannung (Federteller, Spannschlösser usw.), pneumatische Vorspannung (innerer Überdruck) oder durch Aufbringen von Ballast (z. B. Schüttgut). Die Ableitung der aus den Membranen herrührenden Reaktionskräfte kann über Rohrrahmen, Randseile- oder -gurte, Klemmprofile u. ä. in Druck- oder Zugverankerungsglieder (Pallungen, Ballast- oder Reibungsanker, Pfähle u. ä.) erfolgen.

Da bisher sowohl der Baustoff als auch die Konstruktion nicht normenmäßig geregelt worden war, blieb die Auswahl der Membranstoffe, die Verarbeitung und die Ausführung der Konstruktion jeweils der Erfahrung des Herstellers überlassen. In der letzten Zeit sind nun in größerem Umfang Schäden eingetreten, die auf eine nicht ausreichende Kenntnis des Langzeitverhaltens von Membranstoffen und deren Fügstellen, der auftretenden Windbeanspruchung und deren Abtragung sowie der grundlegenden Konstruktionsprinzipien zurückzuführen waren. Um hier nun einen besseren Anhalt für die Berechnung und konstruktive Durchbildung solcher Bauwerke geben zu können, sollen nachfolgend einige Angaben gemacht werden.

### V.1 Materialien und Verbindungsmittel

#### V.1.1 Membranwerkstoff

Als Membranwerkstoff wird in der Regel beschichtetes Kunstfasergewebe eingesetzt. Diese Gewebe sind anisotroporthogonale Flächengebilde, deren Qualität durch die Dicke und Anzahl der Einzelfäden sowie durch die Bindung bestimmt wird. Die Einzelfäden können hergestellt werden aus Polyacrylnitril (Dralon, Orlon, Redon), Polyamid (Perlon, Nylon), Polyester (Trevira, Diolen, Dacron, Terylen) und den Polyvinylen (PC, PCU, Rhovyl). Von diesen Typen werden heute

wegen der hohen Reißfestigkeit, des relativ guten Langzeitverhaltens und wegen der guten Maßstabilität fast ausschließlich hochverstreckte Polyesterfäden verwendet.

Die zumeist in Panama- und Leinwandbindung hergestellten dichten Gewebe werden beidseitig beschichtet (Beschichtungsdicke über den Bindungsknoten etwa 0,2 mm bis 0,3 mm) und ausgerüstet, um sie wasserundurchlässig, alterungsbeständig, fäulnis- und verrottungsfest sowie schwerentflammbar zu machen. Von den möglichen Beschichtungsmaterialien Polychloropren, Äthylen-Propylen-Kautschuk, Polyurethan, Acrylester, Polytetrafluoräthylen und Polyvinylchlorid (PVC) hat sich in den letzten Jahren PVC am besten bewährt. Der PVC - Paste (60-Gew.% PVC + 40-Gew.% Weichmacher) sind jedoch, damit die oben angeführten Anforderungen erfüllt werden können, u. a. Stabilisatoren (Ba/Cd), UV-Absorber, Antioxydantien und Antimontrioxyd beizumengen.

Um die beschichteten Gewebebahnen (Lieferbreiten  $b = 1,50 \text{ m}$  bis  $2,50 \text{ m}$ ) miteinander verbinden zu können, werden Näh-, Schweiß- und Klebenähte sowie Kombinationen von diesen ausgeführt. Größere Hautteile lassen sich auf der Baustelle zu einem Ganzen mittels des Klemmplatten-, Sägezahn-, Profil- oder Schnürstoßes zusammenfügen (Bild 76).

## V.1.2 Festigkeitsverhalten

### V.1.2.1 Zugfestigkeit des beschichteten Gewebes

Die Zugfestigkeit der heute gebräuchlichen beschichteten Polyesterweben beträgt je nach Typ (Tabelle 7)  $\sigma_z = 300 - 750 \text{ kp/5 cm}$ . Diese Werte werden im Zugversuch an 5 cm breiten und 30 cm langen Parallelproben ermittelt. Schmalere Proben lassen diese Werte ansteigen (Bild 65).

Tabelle 7: Anforderungen an Gewebekonstruktionen

	Typ I	Typ II	Typ III	Typ IV
Gewebekonstruktion (d tex)	1100	1100	1670	1670
Bindung	L 1/1	P 2/2	P 2/2	P 3/3
Einstellung K/S (Faden/cm)	9/9	12/12	10,5/10,5	14/14
Gewicht (g/m <sup>2</sup> )	750	850	1000	1250
Nennfestigkeit (kp/5 cm)	315	420	550	750
Weiterreißfestigkeit (kp)	25	40	75	110

Während beim unbeschichteten Gewebe in Kett- und Schußrichtung sich in etwa gleiches Dehnverhalten zeigt (annähernd linearer Verlauf) werden beim beschichteten Gewebe für den Schuß wesentlich größere Dehnwerte gemessen (Crimp). So liegen z.B. die Bruchdehnungen beim PVC-beschichteten Polyestergewebe in Kett-richtung bei  $\epsilon_K = 13$  bis 18 % und in Schußrichtung bei  $\epsilon_S = 18$  bis 23 %. Die entsprechenden Werte bei PVC-beschichteten Polyamidgewebe sind  $\epsilon_K = 16$  bis 23 % und  $\epsilon_S = 25$  bis 30 % (Bild 66).

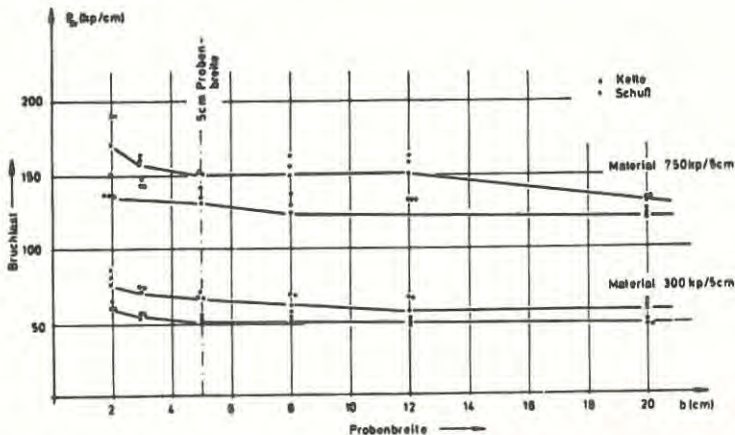


Bild 65: Tragkraft einer Nähverbindung in Abhängigkeit von der Probenbreite

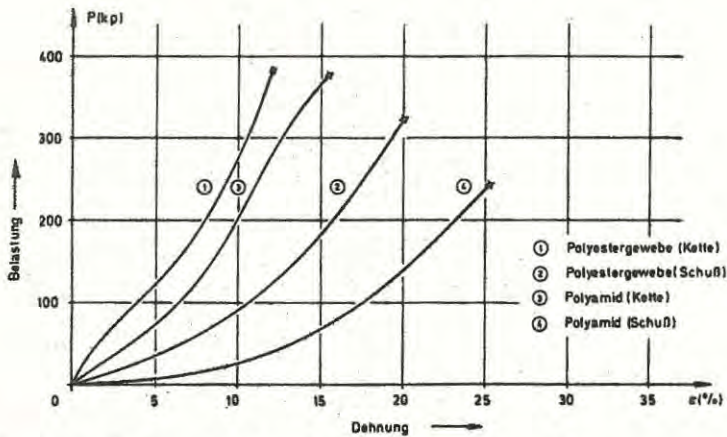


Bild 66: Last-Dehnungslinien für Polyester- und Polyamidgewebe

In der Haut der meisten Membrankonstruktionen herrscht nun ein zweiachsialer Spannungszustand. Über die Bruchlast derartig beanspruchter Membranen ist bisher wenig bekannt. P. Jagfeld [60] hat in Berstversuchen nach Annahme einer kugelförmigen Membranverformung für solche zweiachsiale Zugbeanspruchung um ca. 20 % niedrigere Bruchwerte angegeben ( $\sigma_{B,Zw.} = 0,8 \cdot \sigma_{B,Ein.}$ ). Zu ähnlichen Ergebnissen kommen aufgrund neuester Untersuchungen W. Böhmert [71] und G. Menges/B. Meffert [72].

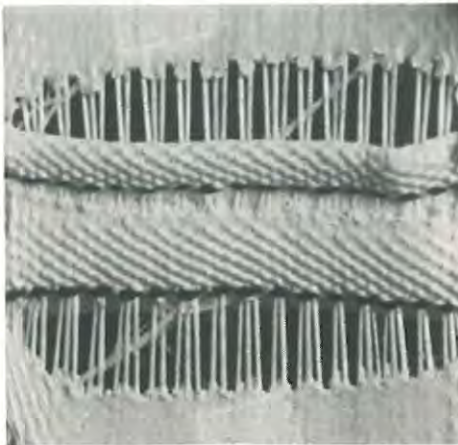
Zum unterschiedlichen Dehnverhalten in Kett- und Schußrichtung liegen dagegen bereits Ergebnisse sehr sorgfältig durchgeführter Messungen von M. Losch [62] und M. J. Petrowkin [63] vor. So ist z. B. nach Losch bei einer Beanspruchung von 50 kp/5 cm in Kett- und Schußrichtung die entsprechende Dehnung  $\epsilon_K = 0,5 \%$  und  $\epsilon_S = 5,5 \%$  bzw. unter  $45^\circ$  zur Kett- und Schußrichtung  $\epsilon_K \approx \epsilon_S = 3,0 \%$ .

#### V.1.2.2 Zugfestigkeit der Nähte

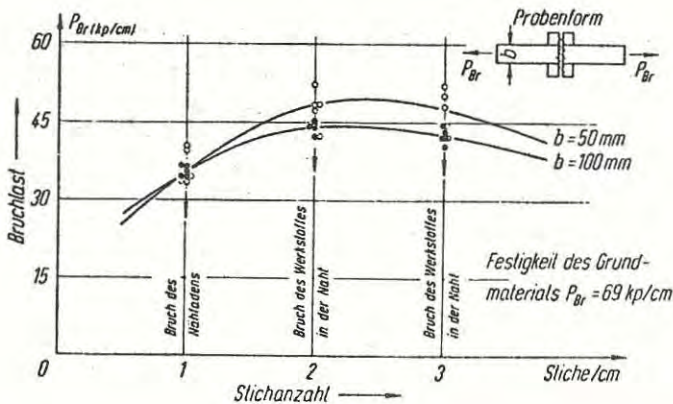
Die mit Abstand am häufigsten eingesetzten Fügearten sind die Schweiß- und Nähverbindungen. Im Hinblick auf das Kurzzeitverhalten ergibt sich für die Schweißnaht eine bessere Werkstoffausnutzung als für die Nähnaht. So ist der Festigkeitsabfall gegenüber dem Grundmaterial bei der Schweißnaht nur etwa 5 % bis 10 % (Normaltemperatur), während der entsprechende Abfall bei der Nähnaht bereits bei etwa 30 % bis 40 % liegt. Bezüglich der Reproduzierbarkeit ist jedoch die Schweißnaht wegen der vielen möglichen Störeinflüsse (Beschichtungsdicke, Stromdurchgang, Anpreßdruck u.ä.) der Nähnaht unterlegen. Es ist durchaus

möglich, daß bei nicht sorgfältiger Herstellung der Schweißnaht die Festigkeit nur noch ein Bruchteil derjenigen der sorgfältig hergestellten Naht beträgt.

Die Tragfähigkeit der Schweißverbindung, die sich aus der Haftfestigkeit (Haftung der Beschichtung auf dem Gewebe) und der Festigkeit des Beschichtungsmaterials ergibt, wird bei mehreren Schweißnähten hintereinander infolge der ungleichmäßigen Beanspruchung vermindert. Bei der Nähnaht ist für die Tragfähigkeit ein wesentliches Kriterium die Anzahl der Stiche pro Längeneinheit. Wird der Stichabstand zu groß, so tritt der Bruch nicht mehr infolge der Kerbwirkung im Gewebe (Bild 67), sondern durch Reißen des Nähfadens ein (Bild 68).



**Bild 67:** Nähnaht kurz vor dem Bruch



**Bild 68:** Bruchlasten von Nähverbindungen in Abhängigkeit von der Stichanzahl

### V.1.2.3 Einfluß der Temperatur

Wie bei den meisten Kunststoffen wird auch bei den vorliegenden Geweben die Festigkeit von der Temperatur beeinflusst. Während bei Temperaturen von  $-40^{\circ}\text{C}$  bis  $+60^{\circ}\text{C}$  diese Beeinflussung des Grundgewebes relativ gering ist (Bild 69 a), fallen die entsprechenden Festigkeitswerte bei Temperaturen über  $60^{\circ}\text{C}$  außerordentlich stark ab. Eine wesentlich stärkere Festigkeitsbeeinflussung durch die Temperatur ergibt sich natürlich im Bereich der Verbindungen. Dort wird das viel temperaturempfindlichere thermoplastische Beschichtungsmaterial zur Kraftübertragung herangezogen. Einige erste Versuche ergaben einen Festigkeitsabfall (an Schweißnähten) bei einer Prüftemperatur von  $T = 80^{\circ}\text{C}$  von  $60 - 70\%$  (Bild 69 b).

Die auf der Membranhaut tatsächlich auftretenden Temperaturen sind von der Pigmentierung bzw. dem Verschmutzungsgrad abhängig. So ergaben Messungen (Luftzirkulation war ausgeschlossen), daß an hellen und transluzenten Beschichtungen Oberflächentemperaturen von  $40^{\circ}\text{C}$  bis  $50^{\circ}\text{C}$  sowie solche an dunklen Beschichtungen von  $60^{\circ}\text{C}$  bis  $70^{\circ}\text{C}$  vorliegen.

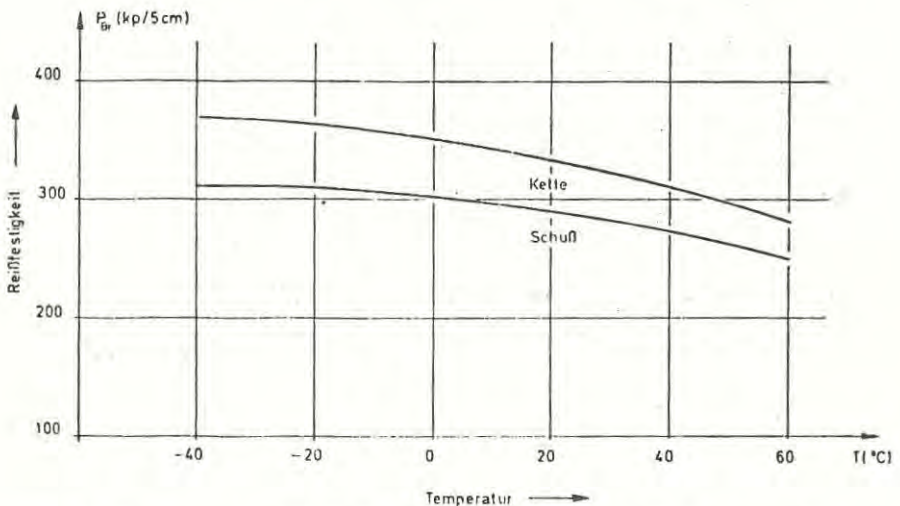
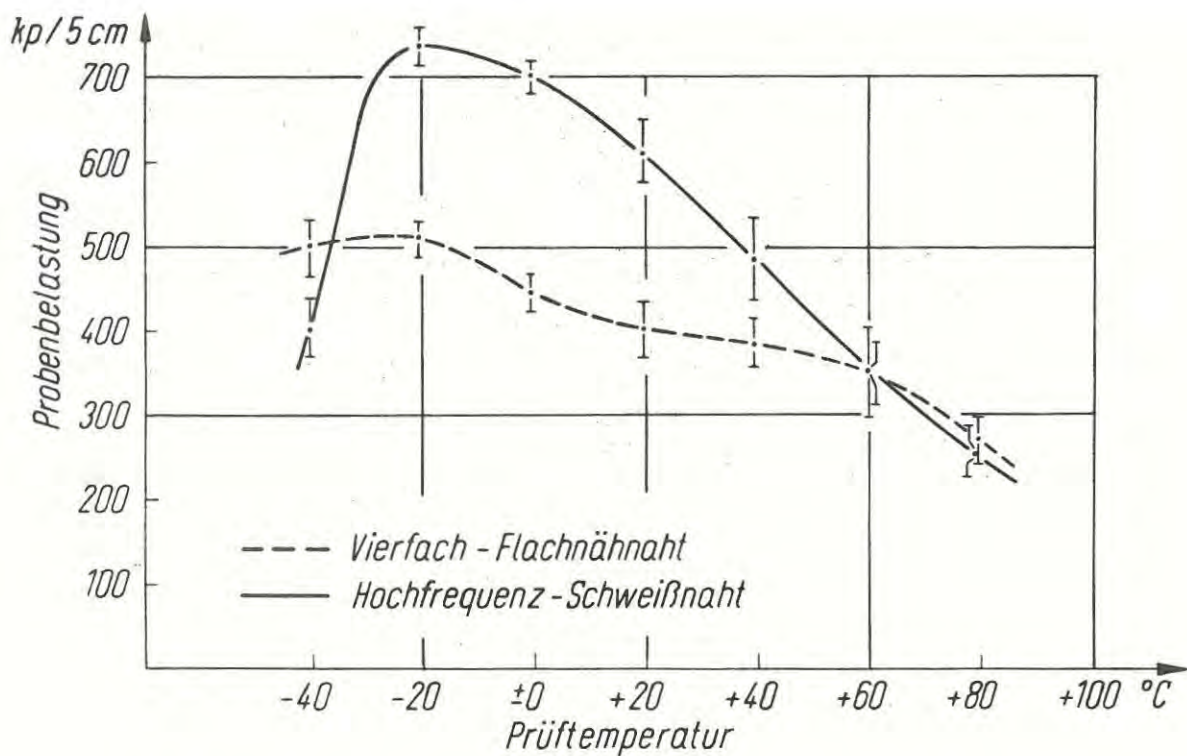


Bild 69a: Reißfestigkeit des Gewebes in Abhängigkeit von der Temperatur



**Bild 69b:** Tragfähigkeit von Nähten in Abhängigkeit von der Temperatur

#### V.1.2.4 Weiterreißfestigkeit

Wenn an einem Membrantragwerk infolge nicht immer zu vermeidender Singularitäten oder durch mechanische Einflüsse Beschädigungen auftreten, so ist das wichtigste Kriterium für den Bestand des Bauwerks die dann vorhandene Weiterreißfestigkeit. Es ist also anzustreben, Materialien zu verwenden, die eine hohe Weiterreißfestigkeit besitzen. Sie wird u.a. von der Gewebeeinstellung, Bindung, Beschichtungseinstellung, Fadendrehung und insbesondere von der Haftfestigkeit beeinflusst. Nimmt die Haftfestigkeit einen sehr hohen Wert an, wie es an sich für die Schweißnahtfestigkeit wünschenswert wäre, so fällt die Weiterreißfestigkeit außerordentlich stark ab (bei Konstanz aller anderer Einflußgrößen - Bild 70). Bei den heute üblichen Membranstoffen sollte die Haftfestigkeit bei  $P_H = 10,0 \text{ kp/5 cm}$  liegen.

Ein weiteres wichtiges Kriterium für die Höhe der Weiterreißfestigkeit ist die Nachgiebigkeit des Beschichtungsmaterials, so daß nicht einzelne Polyesterfäden allein, sondern ein ganzes Bündel von Fäden beansprucht wird. So fällt bei tiefen Temperaturen infolge der Versprödung der PCV-Beschichtung die Weiterreißfestigkeit ganz erheblich ab. E. Schnabel [64] ermittelte z. B. für solches PVC-beschichtetes Gewebe (Temperaturbereich:  $+ 20^{\circ}\text{C}$  bis  $- 20^{\circ}\text{C}$ ) eine Abnahme der Weiterreißfestigkeit um maximal 80 %.

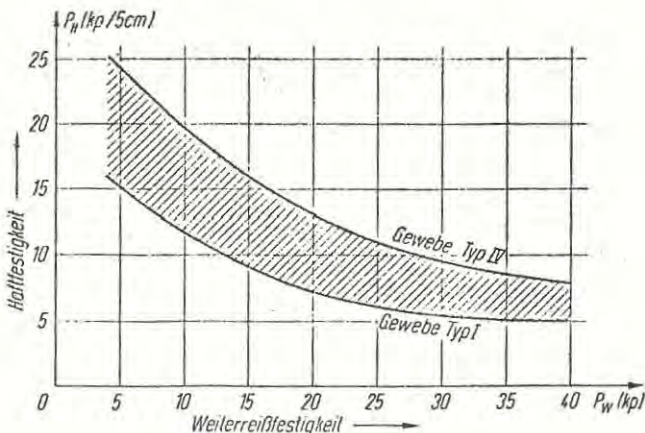


Bild 70: Haftfestigkeit in Abhängigkeit von der Weiterreißfestigkeit



### V.1.3 Langzeitverhalten

Alle beschichteten Gewebe haben, wie die meisten Kunststoffe, ein von der Zeit und den klimatischen Bedingungen abhängiges Festigkeitsverhalten. So nimmt die Dehnung der unter Last stehenden Membran zu und die nach längerer Zeit ermittelte Reißfestigkeit ab. Das Kriechmaß wird hierbei im wesentlichen davon bestimmt, in welchem Umfang UV-Strahlung und Feuchtigkeit an die tragenden Polyesterfäden gelangen können. Aus diesem Grunde sind z. B. nicht ausreichend mit UV-Absorber versehene transluzent beschichtete Gewebe besonders gefährdet.

Der Abfall der Festigkeitswerte und Bruchdehnungen ist, wie einige erste durchgeführte Versuche (Normaltemperatur) zeigen, bei weitem nicht so groß wie bei den sonst eingesetzten Thermo- und Duroplasten. Die Festigkeitsabnahme beträgt nach den bisher durchgeführten Langzeitversuchen (über 10 000 Stunden) etwa 8 - 10 % gegenüber der Kurzzeitfestigkeit (bei 50 % der Kurzzeitreißlast als Dauerlast), bzw. 1 - 2 % (bei Gebrauchslast = 5 % der Kurzzeitreißlast; Bild 71, 72).

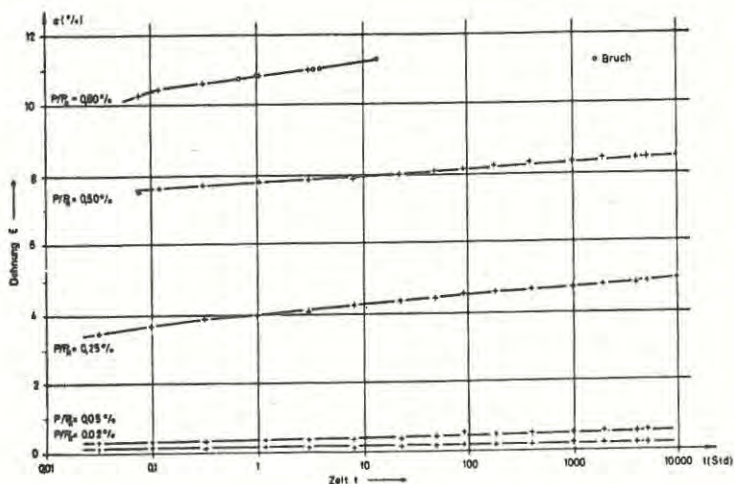


Bild 71: Zeit-Dehnungslinien für verschiedene Belastungsverhältnisse

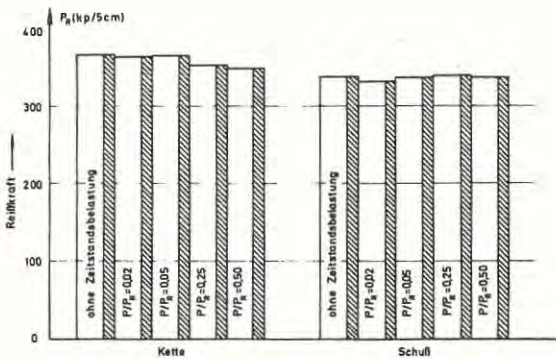


Bild 72: Restrißkräfte nach der Zeitstandsbelastung

Eine etwas stärkere Abnahme ergab sich bei Langzeitversuchen an freibewitterten Proben (Licht und Temperatur).

Dies wurde in etwa auch bestätigt durch Versuche, die an Materialien durchgeführt worden sind, welche z. B. aus der Haut des Deutschen Pavillon in Montreal (Standzeit  $T = 2$  Jahre, Festigkeitsabfall Kette/Schuß  $\Delta\sigma_K / \Delta\sigma_S = 4,1/7,5\%$ ), des Radoms der Sternwarte Bochum ( $T = 8$  Jahre,  $\Delta\sigma_K / \Delta\sigma_S = 3,0/9,0\%$ ) und von einer Traglufthalle in Norditalien ( $T = 5$  Jahre,  $\Delta\sigma_K / \Delta\sigma_S = 8,9/9,1\%$ ) entnommen worden waren. Etwa den gleichen Abfall der Resttragfähigkeit stellten H. Blumberg, W. Krummheuer, J. Nabe [ 73 ] fest. Sie zeigten jedoch, daß die Bruchdehnungen sehr viel stärker abfallen (bis zu 50 % bei einer Bewitterungszeit von 40 Wochen).

## V.2 Lastannahmen und Berechnung

### V.2.1 Lastannahmen

Als Belastungen für die Membrankonstruktionen kommen die Membranvaspannung (innerer Überdruck), Eigengewicht, Windbelastung und eventuell Schnee- und Verkehrsbelastung infrage.

#### a) Innendruck

Der innere Überdruck ergibt sich aus den Bedingungen, daß kein Einbeulen oder Flattern auftritt, d. h. an keiner Stelle der Haut dürfen bei Zusammenwirken

der äußeren Last und der Vorspannung Druckspannungen auftreten.

Allgemein läßt sich sagen, daß bei Tragluftkonstruktionen der minimale Innendruck

bei Kugelmembranen:

$$P_{\min} = \frac{v \cdot N \cdot \varphi^2}{R}$$

bei Halbzylindermembranen:

$$P_{\min} = \frac{v \cdot N \cdot \varphi}{R}$$

betragen soll. Zerna - Niemann [69] empfehlen aufgrund von durchgeführten Windkanalversuchen die in Tabelle 8 zusammengestellten Innendrucke

Tabelle 8: Erforderliche Innendrucke

Höhe der Membran (m)	Kugel ( $\varphi = 180^\circ$ ) (kp/m <sup>2</sup> )	Halbzylinder mit Endkugeln		
		rechteckig $\varphi = 150^\circ$ (kp/m <sup>2</sup> )	rechteckig $\varphi = 180^\circ$ (kp/m <sup>2</sup> )	$\varphi = 180^\circ$ (kp/m <sup>2</sup> )
$H \leq 11,0$	37	30	35	37
$H > 11,0$ $\leq 18,5$	44	35	42	44

Sofern Schneebelastung auftritt, sollte der innere Überdruck mindestens  $P_i = 1,0 \cdot S$  (Halbkugel) =  $1,6 \cdot S$  (Halbzylinder) betragen.

b) Eigengewicht

Das Eigengewicht der heute eingesetzten PVC - beschichteten Polyester - Gewebe beträgt  $750 - 1250 \text{ g/m}^2$ . Bei den selten eingesetzten Baumwollgeweben ist die mögliche Wasseraufnahme des Gewebes zu berücksichtigen.

c) Schneelast

Die Schneelast ist entsprechend der DIN 1055, Bl. 5 bzw. den Schneekarten zu entnehmen.

d) Windlast

Die Windbelastung bei den hier vorliegenden flexiblen Tragwerken ist bisher nur in Einzelfällen näher untersucht worden. Für die beiden wichtigsten Anwendungs-

fälle der halbkugel- und halbzylinderförmigen Traglufthalle wurden von Zerna-Niemann [69] Versuche im Windkanal durchgeführt (Bild 73 a - c).



Bild 73 a - c: Traglufthallenmodelle unter Windbelastung

Es zeigte sich dabei, daß für Schräganblasung die in der DIN 1055 und in den Richtlinien für den Bau und Betrieb von Tragluftbauten [70] bisher geforderten Werte unzutreffend sind. Für die halbzylinderförmige Traglufthalle könnte die in Bild 74 a vorgeschlagene Windlastverteilung zugrunde gelegt werden.

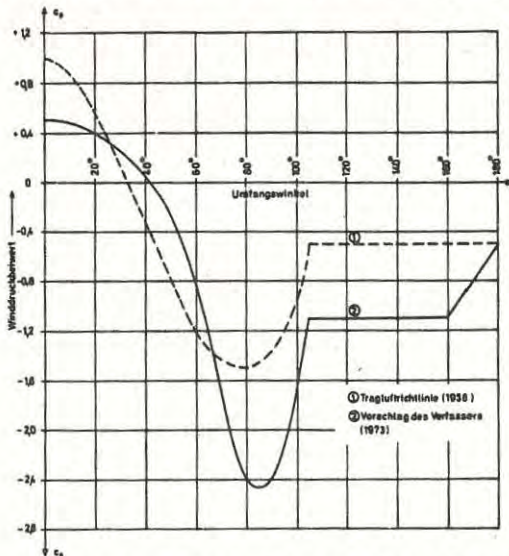


Bild 74 a: Windlastverteilung bei der halbzylinderförmigen Traglufthalle

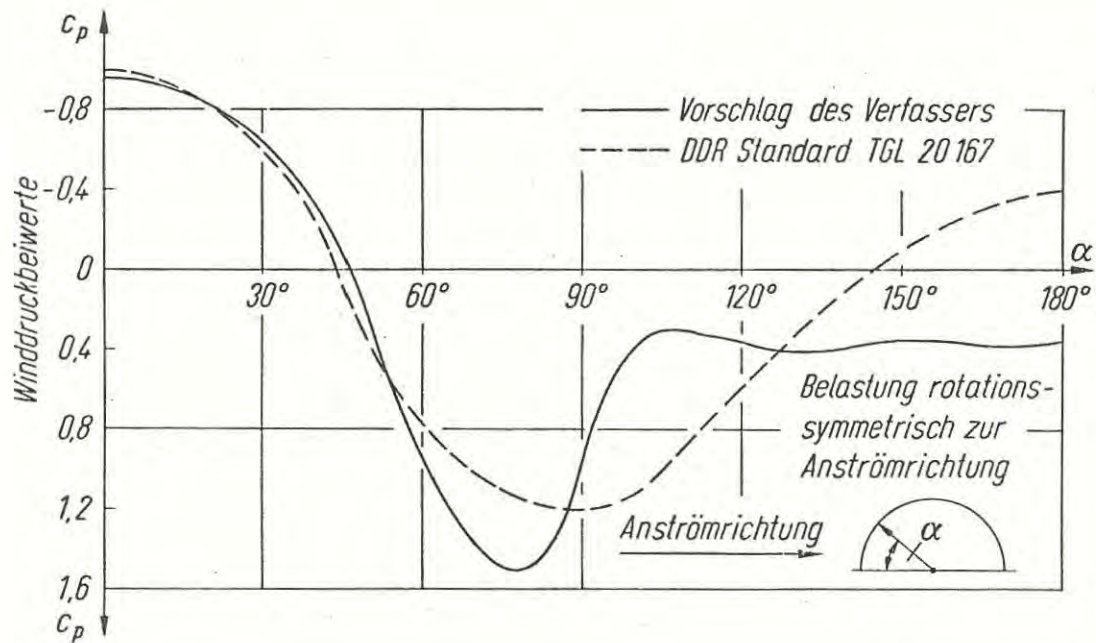


Bild 74 b: Windlastverteilung bei der kugelförmigen Traglufthalle

Für die Kugelmembran erfolgt die Schnittkraftermittlung üblicherweise nach den Angaben von W. Förster/K. H. Schlößler [68]. Die dort zugrunde gelegte Windlastverteilung basiert auf den Angaben im DDR-Standard TGL 20 167 [67]. Aus den Windkanalversuchen von W. Zerna/H. Niemann ergibt sich jedoch durch die fehlenden Druckbereiche an der windabgewandten Seite der Kugelmembran (Bild 74 b) ein wesentlicher Unterschied zu den Angaben in dem DDR-Standard. Aus diesem Grund können die Versuchsergebnisse für das zumeist infrage kommende Verhältnis Innendruck/Staudruck  $p_i/q = 0,6$  durch die Belastungsfunktion

$$p(\varphi) = q(0,306 - 0,452 \cdot \cos\varphi - 0,638 \cdot \cos 2\varphi - 0,397 \cos 3\varphi + 0,055 \cos 4\varphi + 0,338 \cos 5\varphi + 0,038 \cos 6\varphi - 0,130 \cos 7\varphi)$$

approximiert werden. Es wird hierbei davon ausgegangen, daß die Belastung rotationssymmetrisch zur Anströmrichtung auftritt.

#### V.2.2 Schnittkräfte

Im einzelnen müssen die Schnittkräfte in der Membranhaut, eventuell der Abspannung und der Verankerungskonstruktion ermittelt werden. Die Bestimmung dieser Schnittkräfte ist wie oben beschrieben wegen der großen Variabilität in der Formgebung und der Nachgiebigkeit der Konstruktion außerordentlich schwierig. Sie ist unter Berücksichtigung der z. T. großen Systemverformungen nur noch über recht umfangreiche Näherungsverfahren möglich, da sich die Deformationsbeziehungen und die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen nicht mehr geschlossen angeben lassen.

Werden durch konstruktive Maßnahmen (Seilabspannungen) oder durch einen ausreichend großen Betriebsinnendruck die Systemverformungen in Grenzen gehalten, so kann man wohl mit ausreichender Genauigkeit die Lösungen der linearen Schalentheorie verwenden.

Für die beiden am häufigsten vorkommenden Formen - die halbzylinder- und kugelförmige Membran - seien hier die wichtigsten Schnittkraftformeln (erhalten aus der linearen Theorie) angegeben:

a) Innendruck

Halbzylinder:  $N_{\varnothing} = p_i \cdot R$

Kugel:  $N_{\varnothing} = N_{\varphi} = p_i \cdot R/2$

b) Eigengewicht

$$\begin{aligned} \text{Halbzylinder:} \quad N_{\vartheta} &= -g \cdot R \cdot \cos \vartheta \\ \text{Kugel:} \quad N_{\vartheta} &= -g \cdot R/2 \cdot \cos^2 \vartheta / 2 \\ N_{\varphi} &= -g \cdot R(\cos \vartheta - 1/2 \cos^2 \vartheta / 2) \end{aligned}$$

c) Volle Schneebelastung (volle Grundrißfläche)

$$\begin{aligned} \text{Halbzylinder:} \quad N_{\vartheta} &= -S \cdot R \cdot \cos^3 \vartheta \\ \text{Kugel:} \quad N_{\vartheta} &= -S \cdot R(1 - \cos^3 \vartheta)/3 \cdot \sin^2 \vartheta \\ N_{\varphi} &= -S \cdot R[\cos^3 \vartheta - (1 - \cos^3 \vartheta)/3 \sin^2 \vartheta] \end{aligned}$$

d) Halbseitige Schneebelastung (halbe Grundrißfläche)

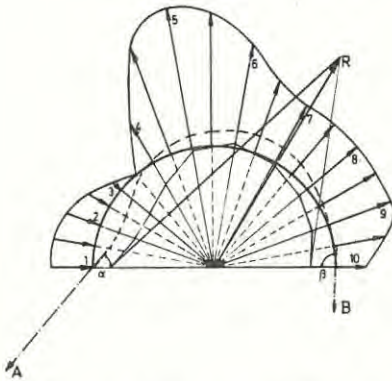
$$\begin{aligned} \text{Halbzylinder:} \quad N_{\vartheta} &= -S \cdot R \cdot \cos^3 \vartheta (1 + \sin \vartheta)/2 \\ \text{Kugel:} \quad N_{\vartheta} &= -S \cdot R[(1 - \cos^3 \vartheta)/\sin^2 \vartheta + \\ &\quad + 3(4\vartheta - \sin 4\vartheta) \cdot \cos \varphi / 32 \sin^3 \vartheta] / 6 \\ N_{\varphi} &= S \cdot R[(1 - \cos^3 \vartheta)/\sin^2 \vartheta - 3 \cos^3 \vartheta] / 6 + \\ &\quad + S \cdot R[(4\vartheta - \sin 4\vartheta)/32 \sin^3 \vartheta - \cos^3 \vartheta] / 2 \cos \varphi \\ N_{\vartheta\varphi} &= -S \cdot R \cdot \cos \vartheta (4\vartheta - \sin 4\vartheta) \sin \varphi / 64 \sin^3 \vartheta \end{aligned}$$

e) Windbelastung

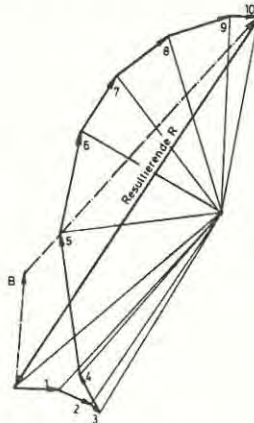
Für die Ermittlung der Schnittkräfte infolge Windbelastung bieten sich bei der Halbzylindermembran die beiden folgenden Näherungsverfahren an.

Bei kleineren Konstruktionen kann ein Ersatzunterdruck  $p_w \geq -1,15 q$  angesetzt werden. Bei der Berechnung der Verankerung und der Gründungskörper sollte man neben den vertikalen Belastungskomponenten  $w_v = P_w \cdot R$  noch eine horizontale Last von  $w_H = 1,05 \cdot q \cdot b \cdot H$  ( $H$  = Hallenhöhe,  $b$  = Hallenbreite,  $q$  = Staudruck) ansetzen.

Für größere Zylindermembrankonstruktionen können die aus der Windbelastung sich ergebenden Komponenten segmentweise über den Querschnitt aufgetragen werden. Aus ihnen läßt sich dann über einen einfachen Cremona-Plan die Resultierende nach Größe und Richtung bestimmen.



Winddruckverteilung



Cremona-Plan

Die Zerlegung dieser Resultierenden kann dann über die von W. Zerna/H. Niemann ermittelten Endtangentialwinkel am verformten System erfolgen. Diese betragen etwa  $\alpha = 55^\circ$  und  $\beta = 90^\circ$ .

Die Schnittkräfte für die windbeanspruchte Kugelmembran erhält man unter Zugrundelegung der oben angegebenen empirisch ermittelten Belastungsfunktion in gleicher Vorgehensweise wie [68] aus dem bekannten System der Gleichgewichtsbedingungen



$$\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{(\sin^2 \varphi \cdot n_{\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial n_{\vartheta} \varphi}{\partial \vartheta} = p \cdot R \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{(\sin^2 \varphi \cdot n_{\vartheta} \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \vartheta} = -R \cdot \frac{\partial p}{\partial \vartheta}$$

$$n_{\varphi} + n_{\vartheta} = R \cdot p$$

Einsetzen der Belastungsfunktion  $p = p(\varphi)$  und Durchführen der Integration führt zu den folgenden Ausdrücken für die Schnittkräfte

$$N_{\varphi} = R \cdot q \cdot \frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{(1 - \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta)^2} \cdot \left( \sum_{n=0}^7 \frac{b_n}{n+2} [1 - (\sin \varphi \cdot \cos \vartheta)^{n+2}] \right.$$

$$\left. - (1-3 \frac{\cos \vartheta}{\sin \varphi} \cdot \tan^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \cos^3 \vartheta \tan^3 \frac{\varphi}{2}) \cdot \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} \right) -$$

$$- R \cdot q \cdot \frac{\cos \varphi \cdot \sin \vartheta \cdot \sin 2\vartheta \cdot \tan^3 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta)^2} \cdot$$

$$[2(1 - \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta) + \cos^2 \varphi + 3 \cos \varphi] \cdot \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} +$$

$$+ R \cdot q \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta} \cdot \sum_{n=0}^7 b_n (\sin \varphi - \cos \vartheta)^n$$

$$N_{\vartheta} = R \cdot q \cdot \frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta}{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta} \cdot \sum_{n=0}^7 b_n (\sin \varphi \cdot \cos \vartheta)^n -$$

$$- R \cdot q \cdot \frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta}{(1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta)^2} \cdot \left( \sum_{n=0}^7 \frac{b_n}{n+2} [1 - (\sin \varphi \cos \vartheta)^{n+2}] - \right.$$

$$\left. - (1-3 \frac{\cos \vartheta}{\sin \varphi} \tan^2 \frac{\varphi}{2} + 2 \cos^3 \vartheta \tan^3 \frac{\varphi}{2}) \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} \right) +$$

$$+ R \cdot q \cdot \frac{\cos \varphi \sin \vartheta \cdot \sin 2\vartheta \tan^3 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta)^2} \cdot \frac{\sin \vartheta \tan^3 \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \varphi}$$

$$\cdot [2(1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta) + \cos^2 \varphi + 3 \cos \varphi] \cdot \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2}$$

$$\begin{aligned}
 N_{\vartheta\varphi} &= \frac{R \cdot q}{2} \frac{\cos\varphi \cdot \sin 2\vartheta}{1 - \sin^2\varphi \cos^2\vartheta} \cdot \sum_{n=0}^7 b_n (\sin\varphi \cdot \cos\vartheta)^n - \\
 &- R \cdot q \frac{\cos\varphi \sin 2\vartheta}{(1 - \sin^2\varphi \cos^2\vartheta)^2} \left( \sum_{n=0}^7 \frac{b_n}{n+2} [1 - (\sin\varphi \cos\vartheta)^{n+2}] - \right. \\
 &- \left. (1 - 3 \frac{\cos\vartheta}{\sin\varphi} \tan^2\varphi/2 + 2\cos^3\vartheta \tan^3\varphi/2) \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} \right) - \\
 &- R \cdot q \frac{\cos^2\varphi \cdot \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta}{(1 - \sin^2\varphi \cos^2\vartheta)^2} \cdot \frac{\sin\vartheta \tan^3\varphi/2}{\sin^2\varphi} \cdot \\
 &\cdot [2(1 - \sin^2\varphi \cos^2\vartheta) + \cos^2\varphi + 3\cos\varphi] \cdot \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2}
 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke besitzen allerdings in den Punkten  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta = 0$  und  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\vartheta = \pi$  Singularitäten. Eine Grenzwertbetrachtung ergibt dann

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2; \vartheta \rightarrow 0} : N_{\vartheta\varphi} &= \frac{R \cdot q}{2} \left( \sum_{n=0}^7 b_n - 3 \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} \right) \\
 : N_{\vartheta} &= \frac{R \cdot q}{2} \left( \sum_{n=0}^7 b_n + 3 \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varphi \rightarrow \pi/2; \vartheta \rightarrow \pi} : N_{\vartheta\varphi} &= 0 \\
 : N_{\vartheta\varphi} &= \frac{R \cdot q}{2} \left( \sum_{n=0}^7 b_n - 2 \sum_{n=1;3}^7 b_n + 3 \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} \right) \\
 : N_{\vartheta} &= \frac{R \cdot q}{2} \left( \sum_{n=0}^7 b_n - 2 \sum_{n=1;3}^7 b_n - 3 \sum_{n=1;3}^7 \frac{b_n}{n+2} \right) \\
 : N_{\vartheta\varphi} &= 0
 \end{aligned}$$

Die numerische Auswertung der angegebenen Ausdrücke führt zu den in Bild 75 a - 75 c dargestellten Diagrammen.

Setzt sich die mechanisch oder pneumatisch gestützte Konstruktion aus einzelnen Formabschnitten zusammen, so werden zur Übertragung der auftretenden Reaktionskräfte Hüllenverstärkungen oder, wie es in den meisten Fällen geschieht, Seile angeordnet. Die Berechnung der Seilschnittkräfte kann ent-

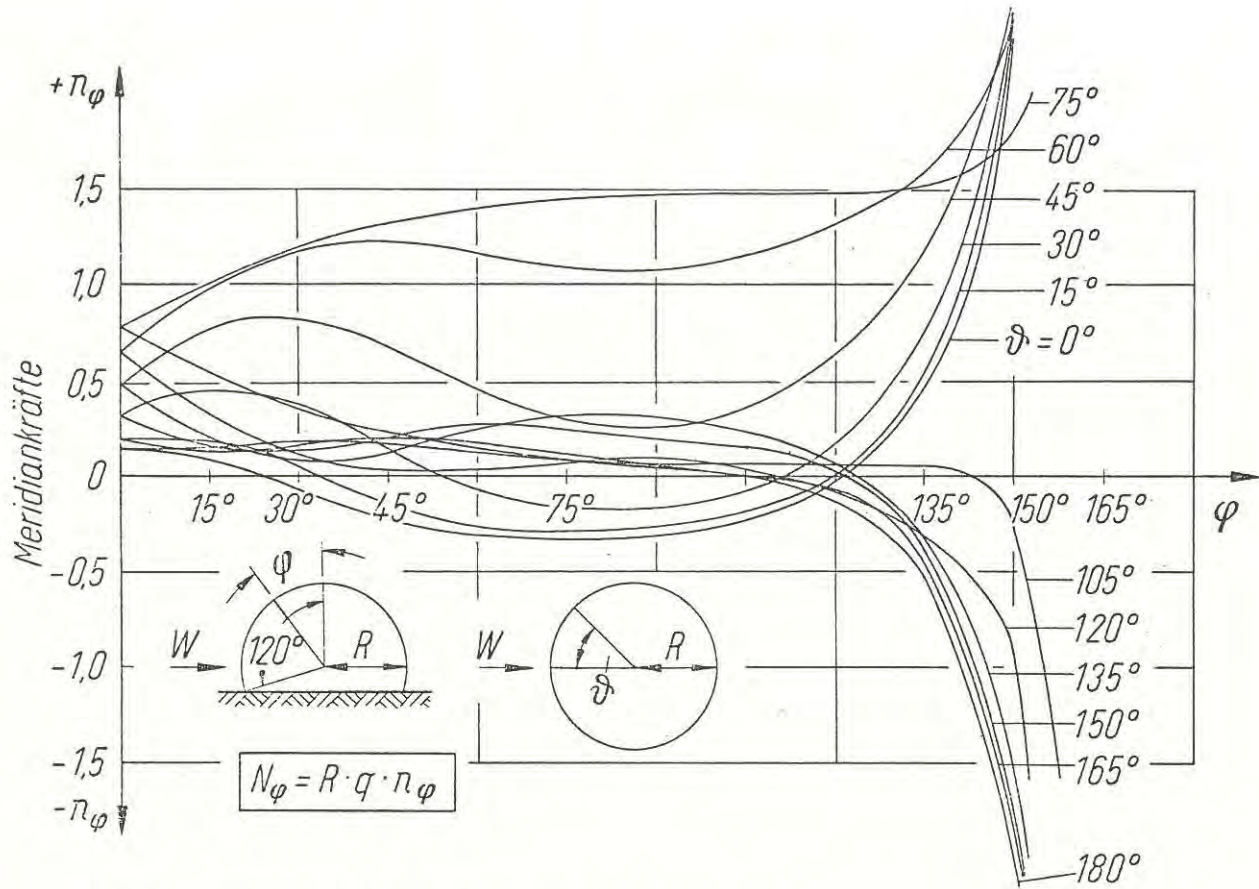


Bild 75a: Meridiantkräfte bei der windbelasteten Kugelmembran

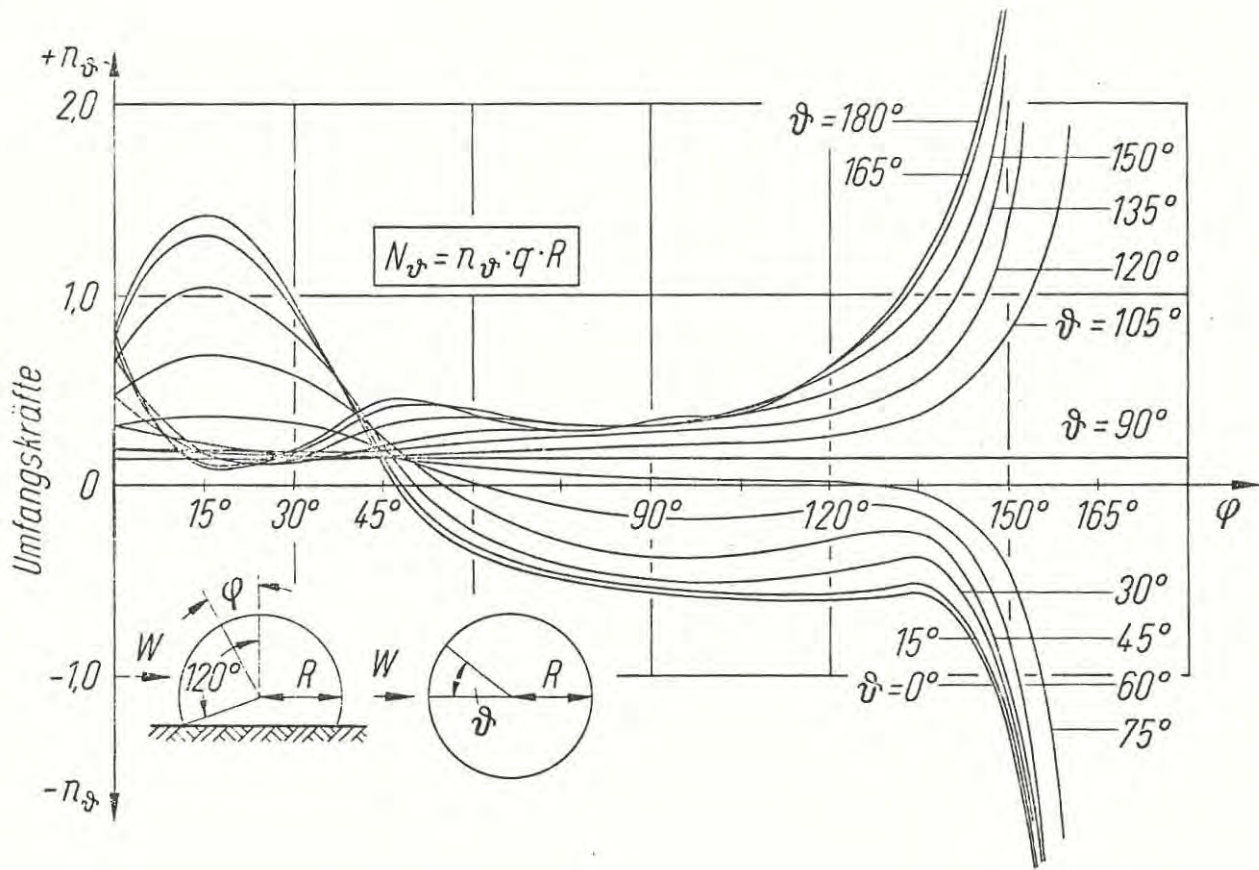


Bild 75 b: Umfangskräfte bei der windbelasteten Kugelmembran

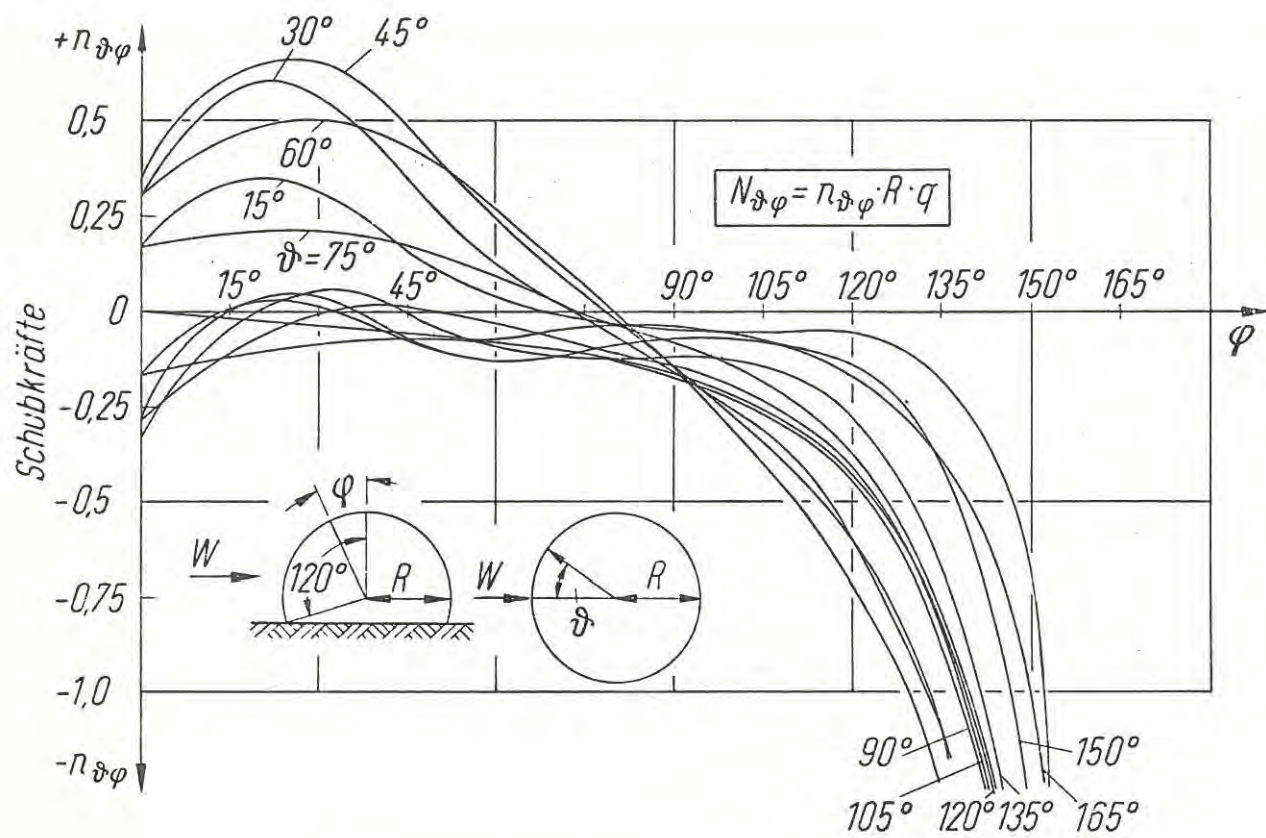
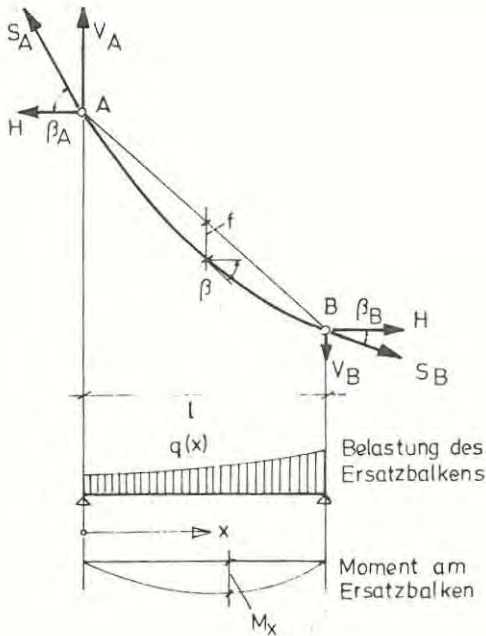


Bild 75 c: Schubkräfte bei der windbelasteten Kugelmembran

weder wie oben angegeben oder vereinfacht nach dem Ersatzbalkensystem erfolgen. Hierbei setzt man die Reaktionskräfte (aus der Membran) als Belastung auf einen Ersatzbalken und ermittelt für diesen die Momente. Die Seil- bzw. Verankerungskräfte ergeben sich dann angenähert aus



$$H = \frac{M_x}{f_x}$$

$$S = \frac{H}{\cos \beta}$$

$$V_A = H \cdot \tan \beta_A$$

$$V_B = H \cdot \tan \beta_B$$

Der Durchhang  $f_x$  ist dabei meistens aus gestalterischen Gründen vorgegeben.

### V.2.3 Bemessung

Für die Bemessung der Membranhaut, der Tragseile und der Verankerungskonstruktion werden die Schnittkräfte aus den einzelnen Lastfällen überlagert.

Als zulässige Maximalbeanspruchung für die Membranhaut ergibt sich:

$$N_{zul} = \nu \cdot N_{max}$$

Der Sicherheitsfaktor  $\nu$  sollte mit Rücksicht auf die große Unsicherheit bei der Ermittlung der Schnittkräfte (Erfassung des Einflusses von Singularitäten, Bild 7B) höher als sonst im Bauwesen üblich mit  $\nu = 2,0$  angesetzt werden.

Um nun einen mit der Kurzzeitreißlast vergleichbaren Wert zu erhalten, muß  $N_{zul}$  noch mit einem werkstoffabhängigen Abminderungsfaktor  $A$  multipliziert werden, wobei zu unterscheiden ist, ob die Kurzzeitreißlast am Grundgewebe oder an der Verbindung ermittelt wurde.

$$N_{Reiss}^G \geq A^G \cdot N_{zul}^G \quad (\text{Grundgewebe})$$

$$N_{Reiss}^V \geq A^V \cdot N_{zul}^V \quad (\text{Verbindungsbereich})$$

Der Abminderungsfaktor  $A^{G,V}$  gibt dabei die einzelnen eben erörterten Materialbeeinflussungen wieder. Man kann ihn aufgliedern in die Einzelfaktoren:

- $A_1^{G,V}$  = Zeitlicher Abfall der Kennwerte
- $A_2^{G,V}$  = Alterungseinflüsse
- $A_3^{G,V}$  = Temperatureinflüsse
- $A_4^{G,V}$  = Fertigungseinflüsse

Für das Grundgewebe lassen sich hierzu die folgenden Angaben machen:

Die zeitliche Abminderung der Festigkeit ist, wie oben gezeigt, nur sehr gering.  $A_1^G$  könnte man nach Extrapolation auf  $10^5$  Std. mit  $A_1^G = 1,1$  bis  $1,2$  ansetzen. Einen ebenso geringen Einfluß scheint die Alterung zu haben. Man könnte hier ansetzen:  $A_2^G = 1,10$  bis  $1,15$ . Demgegenüber hat die Temperatur vor allem im Hinblick auf die Weiterreißfestigkeit einen außerordentlich großen Einfluß. Man sollte daher  $A_3^G = 1,25$  bis  $1,35$  ( $T \leq 70^\circ\text{C}$ ) ansetzen. Wegen der vollmechani-

sierten Herstellung des Grundgewebes wird der fertigungsbedingte Abminderungsfaktor wohl nicht größer als  $A_4^G = 1,05$  sein.

Die entsprechenden Abminderungsfaktoren  $A^V$  für die Verbindungsbereiche können erst nach Vorliegen der Ergebnisse von z. Zt. in Karlsruhe laufenden Untersuchungen angegeben werden.

Für die Bemessung der Membranhaut, der Tragseile und der Verankerungskonstruktion werden die Schnittkräfte aus den einzelnen Lastfällen überlagert.

### V.3 Konstruktive Durchbildung

#### V.3.1 Formgebung

Eine Membrankonstruktion sollte immer so ausgebildet werden, daß an jedem Punkt gleiche Membranspannungen herrschen. Um diese Optimalform zu erhalten, kann man das Seifenblasenverfahren verwenden. Hierbei spannt sich die Seifenhaut in der gesuchten Optimalform zwischen die vorgegebenen Randglieder oder infolge des pneumatischen Drucks über den gewünschten Grundriß. Die praktische Auswertung solcher Versuche führt zu dem von Otto [ 59 ] erstmals angegebenen Bildungsgesetz, nach dem der Membranfläche immer Kugeln bzw. Kreise eingeschrieben werden sollen. Diese Kugeln und Kreise können mit sich änderndem oder gleichbleibendem Durchmesser entlang einer Geraden oder gekrümmten Achse verlaufen. Ebene Flächen sollten demnach nicht erzeugt werden.

Die praktische Ausführung dieser so erhaltenen Idealform ist aus verschiedenen Gründen (Wirtschaftlichkeit, Belastung) nicht immer möglich. Die sich ergebende ungleichmäßige Membranspannungsverteilung sollte jedoch an keiner Stelle zu Null werden, denn Druckspannungen lassen sich nicht übertragen.

#### V.3.2 Konfektionierung

Beim Herstellen (Konfektionieren) der Membrane sollten verschiedene Konstruktionsprinzipien beachtet werden. Der Zuschnitt des Membranwerkstoffes ist möglichst so zu legen, daß die Kettrichtung in Hauptspannrichtung fällt. Stöße quer dazu sind zu vermeiden oder wenn unbedingt erforderlich in Bereichen mit niedriger Beanspruchung anzuordnen.



Nähnahte

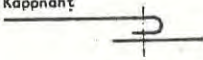
Flachnaht



Blindnaht



einfache Kappnaht



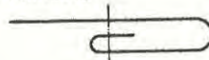
doppelte Kappnaht



einfacher Saum

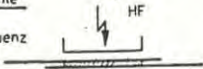


Saum mit Einschlag



Schweißnahte

Hochfrequenz



Heizkeil



Klebenaht



Klemmplottenstoß



Sägezahnstoß



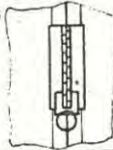
Profilstoß



Schnürstoß



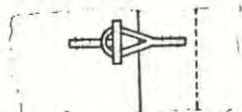
Reißverschluss



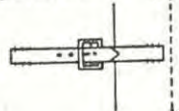
Schlaufenverbindung



Knebelverbindung



Schnallenverbindung



Ageln über Hilfsmedium



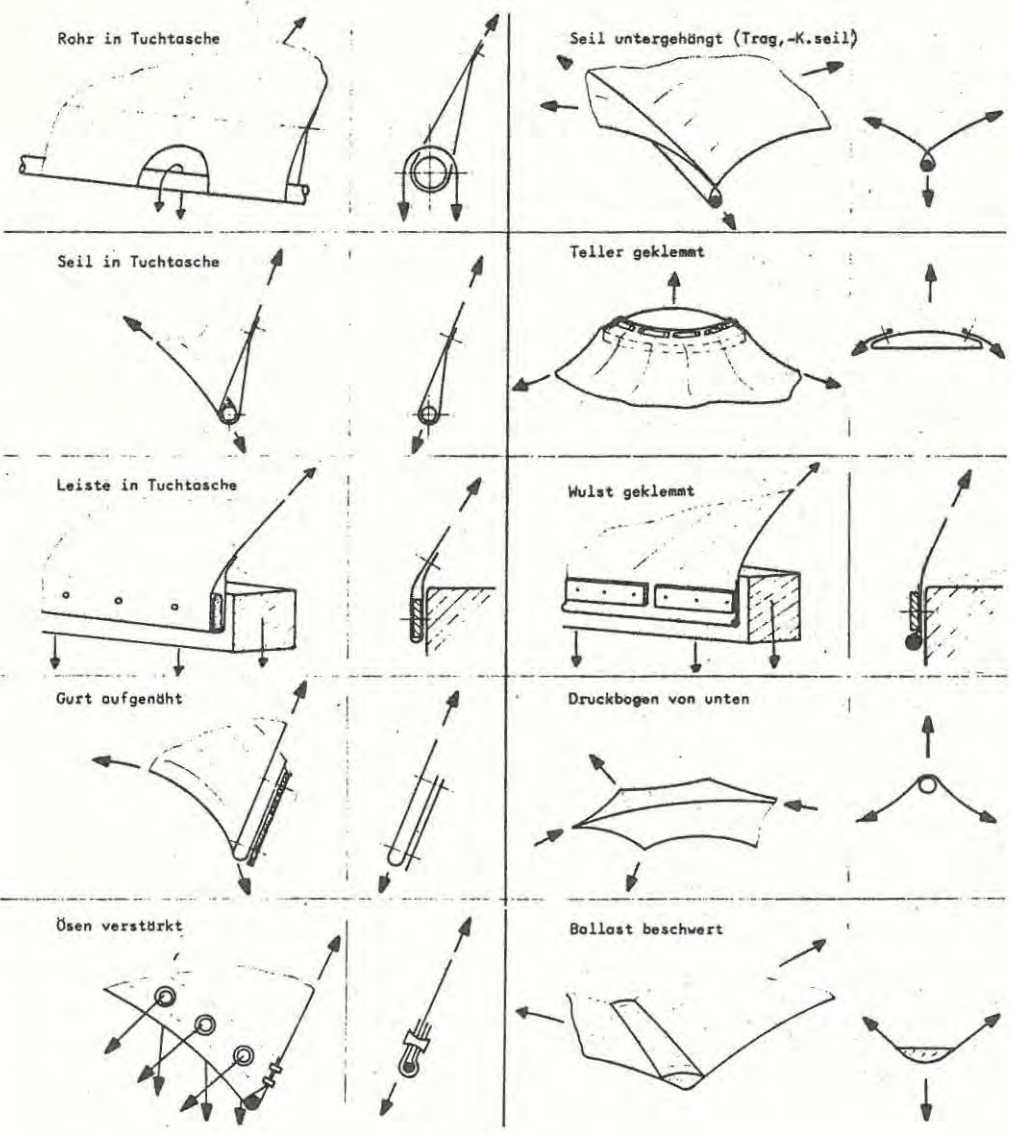


Bild 77 : Haltekonstruktionen bei Membrantragwerken

Das Verbinden der einzelnen Hautteile miteinander kann über Nähte oder Stöße erfolgen. Bei den Nähten (Verbinden der Einzelbahnen) unterscheidet man die Schweiß-, Näh-, und seltener Klebnaht. Die Nähnaht, die meistens als Flach- oder Kappnaht (Bild 76) ausgeführt wird, sollte einen Randabstand von mindestens 5 - 10 mm und einen Nahtabstand von 15 - 25 mm aufweisen. Der Stichabstand muß bei den heute üblichen Polyestergeräten 3 - 5 mm betragen (Bild 68). Zur Dichtung der Nähnähte kann eine lichtstabilisierte PVC-Folie (b = 20 - 30 mm) aufgeschweißt werden.

Zur Herstellung der Schweißnähte (Flachnaht) verwendet man heute in der Regel das Hochfrequenz- und Heizkeilverfahren. Beim Schweißvorgang sollte zur Erzielung reproduzierbarer Festigkeitswerte eine automatische Steuerung (Stromdurchfluß, Anpreßdruck, Vorschubgeschwindigkeit) vorhanden sein. Die Schweißnahtlänge ist wegen der ungleichmäßigen Spannungsverteilung beschränkt und sollte 40 - 70 mm nicht überschreiten.

Um nun die einzelnen Membranteile auf der Baustelle verbinden zu können, werden Stöße (Bild 77) verwendet. Damit hierbei eine möglichst gleichmäßige Kraftübertragung gewährleistet wird, sollten die Haltepunkte nicht zu groß und die Klemmvorrichtung möglichst gleichmäßig angeordnet werden. Ist dies nicht der Fall, so können Singularitäten (Bild 78) auftreten.



Bild 78 a - b: Singularitäten in Anschlußbereichen

Besondere Sorgfalt ist wegen der Schadensanfälligkeit auf die Rand- und Haltekonstruktion zu verwenden. Auch hier sollte man zur Vermeidung von Singularitäten und damit von Spannungsspitzen eine möglichst gleichmäßige Lastabtragung anstreben. Bei den in Bild 77 dargestellten Beispielen von Rand- und Haltekonstruktionen ist für die nicht linienförmige Lastableitung ein genügend kleiner, von der Steifigkeit des Randprofils abhängiger Schrauben- bzw. Ankerabstand zu wählen.

In bestimmten Bereichen einer Konstruktion verlaufen die maximalen Beanspruchungen nicht mehr in den Hauptspanrichtungen, d. h. es treten Schubspannungen auf. Die biegeaweiche Membran vermag nun aber in nur sehr geringem Umfang Schubspannungen aufzunehmen - es treten infolge der Schubverformung Singularitäten auf, die zum Bruch führen können (Bild 79). Aus diesem Grunde sollten zur Aufnahme der Schubkräfte in den Randbereichen Polyestergerute (Tragkraft 5 - 20 Mp) aufgenäht werden.



Bild 79: Bruch der Membranhaut im Anschlußbereich

## VI. Sandwichkonstruktionen

Ein weiteres Anwendungsgebiet der Kunststoffe sind die Sandwichkonstruktionen. Bei diesen in der Regel dreischichtigen Verbundwerkstoffen wird ein weicher Kern mit relativ festen Deckschichten versehen. Die entstehenden Werkstoffe besitzen optimale Gewichts-Festigkeitsverhältnisse und Gewichts-Stefigkeitsverhältnisse.

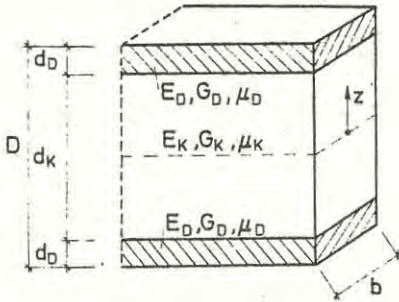
Als Sandwichdeckschichten können Stahl- und Aluminiumbleche, glasfaserverstärkte Kunststoffe und evtl. auch Asbestzement- und Holzfaserplatten eingesetzt werden. Sie besitzen i. d. R. wesentlich höhere Elastizitätsmoduli und Festigkeiten als der Kern. Während dabei nun die Festigkeiten der Stahl- und Aluminiumbleche sowie der glasfaserverstärkten Kunststoffe etwa gleich sein können, liegen die entsprechenden Elastizitätsmoduli der Kunststoffe um ca. eine Größenordnung unter denen der Metalle. Aus diesem Grund sind die Sandwichbauteile mit Kunststoffdeckschichten oft sehr knittergefährdet.

Als Kernmaterial des Sandwichs können gemagerte und ungemagerte Schäume, Metall- und Kunststoffstützkonstruktionen, sowie massive Hölzer oder Holzwerkstoffe verwendet werden. Die Herstellung der Sandwichbauteile erfolgt entweder durch Vorfertigen von Kern und Deckschicht und dann dem Zusammenfügen durch Klebung, oder durch das Ausschäumen der Deckschichtformen (mit oder ohne Füllstoff). Das Ausschäumen (Zugabe von Harz und Treibmittel) kann dabei im Drucklos- oder Niederdruckverfahren erfolgen. Als Drücke treten maximal  $2 - 3 \text{ kp/cm}^2$  auf. Ein Sonderfall im Hinblick auf das Herstellungsverfahren stellt das bei dem nachfolgend erörterten GFK-Holz sandwich verwendete Naß- zu Naßverfahren dar, bei dem die GFK-Deckschichten direkt auf den Holzkern laminiert werden.

### VI.1 Berechnung von Sandwichkonstruktionen

#### VI.1.1 Biegebalken

Die Trag- und Verformungsfähigkeit eines Biegebalkens ergibt sich bekanntlich im wesentlichen aus seiner Biegesteifigkeit. Diese setzt sich für das dreischichtige System aus drei Anteilen zusammen.



$$(E \cdot J)_S = E_K \cdot b \cdot d_K^3 / 12 + E_D \cdot 2 \cdot b \cdot d_D^3 / 12 + E_D \cdot 2 \cdot b \cdot d_D \cdot \left( \frac{D - d_D}{2} \right)^2$$

Während man das 2. Glied i. d. R. vernachlässigen kann (z. B.  $(E \cdot J)_D = 0,01 \cdot (E \cdot J)_S$  für  $d_K/d_D \geq 6,0$ ) ist dies für das 1. Glied nicht immer zulässig. Bei einem Sandwich mit z. B.  $E_D/E_K = 100$  und  $d_D/d_K = 0,017$  ist dieser Anteil ca. 10 % der Gesamtsteifigkeit (Bild 80).

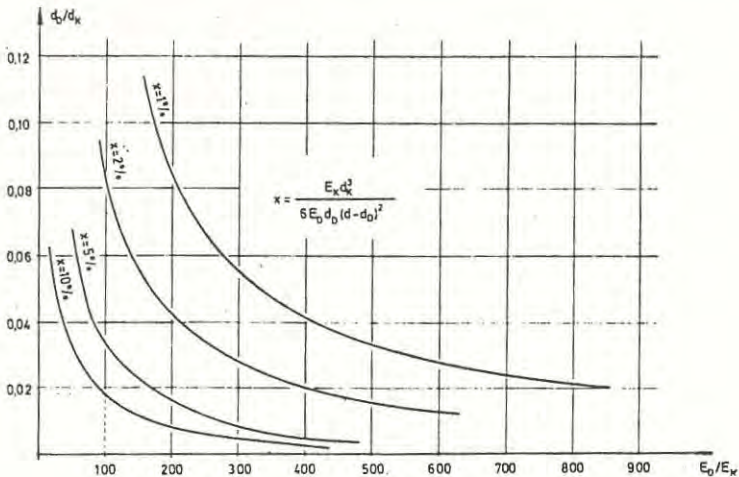


Bild 80: Prozentualer Anteil der Kernsteifigkeit

Ist das Kernmaterial relativ "leicht" ( $E_D/E_K \geq 200$ ) und die Deckschicht dünn ( $d_D/d_K \leq 0,2$ ), so ergibt sich aus den Biege- und Schubspannungsanteilen

$$\sigma_a = 2 M \cdot z / b \cdot d_D \cdot (D-d_D)^2$$

$$\tau_a = Q / b(D-d_D)$$

wegen des hier nicht mehr vernachlässigbaren Schubverformungsanteils als Verformung bei:

Einzellast: 
$$w_a = \frac{P \cdot l^3}{24 \cdot E_D \cdot b \cdot d_D (D-d_D)^2} + \frac{P \cdot l \cdot d_K}{4 \cdot G_K \cdot b (D-d_D)^2}$$

Gleichlast: 
$$w_a = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{192 \cdot E_D \cdot b \cdot d_D (D-d_D)^2} + \frac{q \cdot l^2 \cdot d_K}{8 \cdot G_K \cdot b (D-d_D)^2}$$

Beim Sandwich (z. B. GFK-Holz sandwich) mit dem relativ "steifen" Kern ( $E_D/E_K \ll 200$ ) und den dicken Deckschichten ( $d_D/d_K > 0,2$ ) müssen die vorher vernachlässigten Steifigkeitsanteile mitberücksichtigt werden. Es ergeben sich dann aus den erweiterten Biege- und Schubspannungen

$$\sigma_b = M \cdot z \cdot E_{D,K} / (E \cdot J)_s$$

$$\tau_b = Q \cdot (E_D \cdot d_D \cdot \frac{D-d_D}{2} + \frac{E_K \cdot d_K^2}{8} - \frac{E_K \cdot y^2}{2}) / (E \cdot J)_s$$

unter Berücksichtigung der nicht mehr linearen Schubspannungsverteilung durch den modifizierten Schubmodul

$$G_M = G_K / (1 + E_K \cdot d_K^2 / (6 \cdot E_D \cdot d_D (D-d_D)))$$

Als Verformung bei:

Einzellast: 
$$w_b = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot (E \cdot J)_s} + \frac{P \cdot l \cdot d_K}{4 \cdot G_M \cdot b (D-d_D)^2}$$

Gleichlast: 
$$w_b = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot (E \cdot J)_s} + \frac{q \cdot l^2 \cdot d_K}{8 \cdot G_M \cdot b (D-d_D)^2}$$

### VI.1.2 Zugstab

Die Gesamtbeanspruchung des Zugstabes setzt sich bis zum Versagen eines der beiden Verbundpartner aus den Traganteilen des Kerns und der Deckschichten ( $Z = Z_K + 2 \cdot Z_D$ ) zusammen. Über die Dehnungsbeziehung  $\epsilon_D = \epsilon_K$  ergibt sich als Traglast

$$Z = 2 \cdot b \cdot d_D \cdot \sigma_D + b \cdot d_K \cdot \sigma_D \cdot E_K / E_D$$

Da bei einem Sandwich mit weichem Kern die Deckschichten den Hauptanteil der Belastung übernehmen, kann dort i. d. R. der Kernanteil vernachlässigt werden.

### VI.1.3 Platte

#### VI.1.3.1 Grundgleichungen

Um das Zusammenwirken der verschiedenen Verbundpartner erfassen zu können, ist es notwendig, Annahmen zu treffen. Von den bei homogenen einschichtigen Platten geltenden Kirchhoff'schen Hypothesen

- a) keine Dehnungen in Richtung der Plattennormalen ( $\epsilon_z = 0$ ),
- b) keine Krümmung der Plattennormalen
- c) Senkrechtstehen der Plattennormalen auf der verformten Mittelfläche ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ ),

besitzt die 3. Annahme wegen der relativ großen Schubverformung des weichen Schaumkerns hier keine Gültigkeit ( $\tau_{xz} = \tau_{yz} \neq 0$ ). Ferner kann, da hier ein transversal-isotroper Kernaufbau vorliegt, für den weichen Kern gesetzt werden:

$$E_x = E_y = G_{xy} = 0$$

$$w_D = w_K = w_S$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_z = 0$$



Für die Verschiebungen der Mittelfläche (beim Sandwich mit weichem Kern) erhält man unter Zugrundelegung der oben gemachten Annahmen für die obere und untere Deckschicht

$$\epsilon_x^{\sigma,u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\epsilon_y^{\sigma,u} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\gamma_{xy}^{\sigma,u} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$$

Wegen der sehr kleinen Verzerrungen können die nichtlinearen Glieder vernachlässigt werden. Nach Einführen der dimensionslosen Funktionen

$$\alpha(x,y) = u/s$$

$$\beta(x,y) = v/s$$

erhält man dann als Spannungsausdrücke

$$\sigma_x = \frac{E_D \cdot d_K}{2(1-\mu_D^2)} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \mu_D \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{E_D \cdot d_K}{2(1-\mu_D^2)} \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} + \mu_D \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$$\tau_{yx} = \frac{E_D \cdot d_K}{4(1+\mu_D)} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)$$

Die entsprechenden Spannungen im Kern ergeben sich aus  $u_D = u_K$  zu

$$\tau_{xz} = G_K \left( \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = G_K \left( \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3)$$

Diese Spannungen müssen gemäß den Voraussetzungen mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht stehen. Aus der Betrachtung am Plattenelement ergibt sich für den Kern

$$p + d_K \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) = 0$$

und, weil die Kernkräfte  $\tau_{xz} \cdot dx \cdot dy$ ,  $\tau_{yz} \cdot dx \cdot dy$  mit den Kräftegradienten der Deckschichtspannungen im Gleichgewicht stehen müssen, für die Deckschicht

$$\begin{aligned} \tau_{xz} + d_D \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + d_D \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \tau_{yz} + d_D \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + d_D \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Die oben hergeleiteten Spannungsausdrücke entsprechend den Bedürfnissen abgeleitet und in die Gleichgewichtsbedingungen eingesetzt, ergibt die drei grundlegenden Gleichungen

$$\frac{p}{d_K \cdot G_K} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

$$\Delta^2 \alpha + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + (1 + \mu_D) \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} - \mu_D \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} - \frac{G_K}{E_D} \cdot \frac{4(1 - \mu_D^2)}{d_D \cdot d_K} \left( \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\Delta^2 \beta + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + (1 + \mu_D) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} - \mu_D \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \frac{G_K}{E_D} \cdot \frac{4(1 - \mu_D^2)}{d_D \cdot d_K} \left( \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0$$

Um die Gleichungen miteinander koppeln zu können, wird nun die Hilfsfunktion  $\varphi(\alpha, \beta, w)$  mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha &= L_x(\varphi) \\ \beta &= L_y(\varphi) \\ w &= L_z(\varphi) \end{aligned} \quad (6)$$

eingeführt. Die Differentialoperatoren für diese Funktion  $\varphi$  werden nun derart gewählt, daß die Gleichungen (5 b) und (5 c) identisch erfüllt sind. Die sich ergebenden Operatoren

$$L_x = C \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_y = C \cdot \frac{\partial}{\partial y}$$

$$L_z = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C$$

auf die Ausdrücke (6) angewendet und in Gleichung (5) eingesetzt, ergibt die gesuchte Differentialgleichung

$$2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = - \frac{p}{d_K G_K} \quad (7)$$

Für die Sandwichplatte mit relativ steifem Kern (Holz, Holzwerkstoffe) müssen - wie oben bereits erwähnt - die vorher vernachlässigten Steifigkeitsanteile mitberücksichtigt werden [75]. Es ergibt sich dann bei gleicher Vorgehensweise für das Sandwich mit isotropen Schichten ( $E_x = E_y$ ) als Differentialgleichung

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right) \left[ \frac{2}{3} G_K \left( D + \frac{d_K}{2} \right) \left[ \frac{1}{3} E_D \cdot d_D \left[ \frac{3}{8} \cdot d_K (D + d_K) + \frac{G_K}{G_D} \cdot d_D (0,8 \cdot D + 0,45 \cdot d_K) \right] + \frac{1}{12} \cdot E_K \cdot d_K^3 \right] + \frac{1}{3} E_D \cdot d_D^2 \left[ D + \frac{d_K}{2} - \frac{G_K}{G_D} (0,8 \cdot D + 0,45 \cdot d_K) \right] \right] = - p \quad (8)$$

### VI.1.3.2 Lösung der Differentialgleichungen

Die Lösungen für diese Differentialgleichungen erhält man nach Entwicklung der Belastung in eine einfache oder doppelte Fourier-Reihe und Einsetzen der vierten Ableitungen eines die Randbedingungen erfüllenden Lösungsansatzes für  $w$  in die Differentialgleichungen. Für die gleichmäßig belastete Rechteckplatte mit frei drehbarer Randlagerung erhält man in Anlehnung an [75, 77] unter Zugrundelegung einer einfach- oder doppelt-unendlichen Reihe z. B.  $w(x, y) = \sum_{mn} w_{mn} \cdot f(x, y)$  die Lösungen.

#### Für den weichen Kern:

Nach Einführen der allgemeinen Lösung für  $\varphi$  (Lösungsgang siehe VI.1.3.3) in die Ausdrücke (2), (3) und (6) ergeben sich als maximale Durchbiegung

$$f_{\max} = \sum_m \sum_n \frac{16 \cdot p [(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2 + 2(1 - \mu_D^2) G_K / E_D \cdot d_D \cdot d_K]}{G_K \cdot d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 [(\frac{m\pi}{l_x})^2 + (\frac{n\pi}{l_y})^2]^2} \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot (-1)^{(n-1)/2}$$

maximale Biegespannungen

$$\sigma_{x, \max} = \pm \sum_m \sum_n \frac{16 \cdot p \left[ (m\pi/l_x)^2 + \mu_D (n\pi/l_y)^2 \right]^{(m-1)/2} (-1)^{(n-1)/2}}{d_D \cdot d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \left[ (m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2 \right]^2}$$

$$\sigma_{y, \max} = \pm \sum_m \sum_n \frac{16 \cdot p \left[ (n\pi/l_y)^2 + \mu_D (m\pi/l_x)^2 \right]^{(m-1)/2} (-1)^{(n-1)/2}}{d_D \cdot d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \left[ (m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2 \right]^2}$$

maximale Schubspannungen

$$\tau_{x z, \max} = \sum_m \sum_n \frac{16 \cdot p (m\pi/l_x) (-1)^{(m-1)/2} (-1)^{(n-1)/2}}{d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \left[ (m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2 \right]}$$

$$\tau_{y z, \max} = \sum_m \sum_n \frac{16 \cdot p (n\pi/l_y) (-1)^{(m-1)/2} (-1)^{(n-1)/2}}{d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \left[ (m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2 \right]}$$

Für den harten Kern

maximale Durchbiegung

$$f_{\max} = \frac{5 \cdot p \cdot l_x^4}{48 \cdot E_D \cdot D^3} \cdot D_1 \left[ 1 - \frac{153,6}{\pi^5} \cdot \sum_m \left( \frac{m\pi l_y}{2l_x} \right) \cdot \operatorname{tgh} \frac{m\pi l_y}{2l_x} + 2 \right] /$$

$$/ \left( m^5 \cdot \cosh \frac{m\pi l_y}{2l_x} \right) + 9,6 \cdot D_2 \left( 1 - \frac{32}{\pi^3} \sum_m 1/m^3 \cdot \cosh \frac{m\pi l_y}{2l_x} \right)$$

$$m = 1, 3, 5$$

Maximale Biegespannungen

$$\sigma_{x, \max} = \pm \frac{p \cdot l_x^2}{2 \cdot D^2} \cdot D_1 \left[ 1 - \mu_D \cdot \frac{32}{\pi^3} \sum_m 1/m^3 \cosh \frac{m\pi l_y}{2l_x} - (1 - \mu_D) \frac{16}{\pi^3} \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_m \frac{m\pi l_y}{2l_x} \left( \operatorname{tgh} \frac{m\pi l_y}{2l_x} + 2 \right) / \left( m^3 \cdot \cosh \frac{m\pi l_y}{2l_x} \right) + 8 \left[ D_2 - D_3 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left( 1 - 2 \frac{d_D}{D} + \frac{4 \cdot G_K \cdot d_D}{3 \cdot G_D \cdot D} \right) \right] \cdot \left[ 1 - (1 - \mu_D) \cdot \frac{4}{\pi} \sum_m 1/m \cdot \cosh \frac{m\pi l_y}{2l_x} \right]$$

$$\sigma_{y,\max} = \pm \frac{p \cdot l_x^2}{2 D^2} \cdot D_1 \left[ \mu_D - \frac{32}{\pi^3} \sum_m \frac{1}{m^3} \cosh \frac{m\pi l_y}{2 l_x} + (1 - \mu_D) \frac{16}{\pi^3} \cdot \right. \\ \cdot \sum_m \frac{m\pi l_y}{2 l_x} \cdot \left( \operatorname{tgh} \frac{m\pi l_y}{2 l_x} + 2 \right) / (m^3 \cdot \cosh \frac{m\pi l_y}{2 l_x}) + 8 [ D_2 - D_3 \cdot \\ \cdot \left( 1 - 2 \frac{d_D}{D} + \frac{4}{3} \frac{G_K \cdot d_D}{G_D \cdot D} \right) ] \cdot \left. \left[ \mu_D + (1 - \mu_D) \frac{4}{\pi} \sum_m \frac{1}{m} \cosh \frac{m\pi l_y}{2 l_x} \right] \right]$$

$$m = 1, 3, 5 \dots$$

Maximale Schubspannungen

$$\tau_{xz,\max} = 3 \cdot p \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_m \left( \frac{1}{m^2} \cdot \cosh \frac{m\pi l_y}{2 l_x} \right) / \left( 4 \pi^2 \cdot \frac{D}{l_x} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot 0,051 \left( 3 - 2 \frac{d_D}{D} \right) \right) \right], m = 1, 2, 3$$

$$\tau_{yz,\max} = 3 \cdot p \frac{8}{\pi^2} \sum_m \left( \operatorname{tgh} \frac{m\pi l_y}{2 l_x} / m^2 \right) / \left( 4 \pi^2 \cdot \frac{D}{l_x} \cdot 0,051 \left( 3 - 2 \frac{d_D}{D} \right) \right)$$

$$m = 1, 3, 5$$

Die Steifigkeitsparameter lauten dabei:

$$D_1 = 3 \pi^2 \cdot 0,051 \left( 3 - 2 \frac{d_D}{D} \right) / \left[ \frac{2d_D}{D} \left( 3 - \frac{2d_D}{D} \right) \left[ 2 - \frac{2d_D}{D} + \left( 1 + \frac{2d_D}{D} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \mu_D)}{(1 - \mu_K)} \cdot \frac{G_K}{G_D} \cdot \left( 1 - \frac{2d_D}{D} \right)^3 \cdot \left( 3 - \frac{2d_D}{D} \right) \right]$$

$$D_2 = \left[ \frac{3d_D}{D} \left( 1 - \frac{2d_D}{D} \right) \cdot \left( 2 - \frac{2d_D}{D} \right) + \frac{G_K}{G_D} \cdot \frac{4d_D^2}{D^2} \left( 1,25 - \frac{0,90d_D}{D} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \mu_D)}{(1 - \mu_K)} \cdot \frac{G_K}{G_D} \cdot \left( 1 - \frac{2d_D}{D} \right)^3 \cdot \frac{D^2}{4 l_x^2} / (1 - \mu_D) \pi^2 \cdot \frac{G_K}{G_D} \cdot 0,051 \right. \\ \left. \cdot \left( 3 - \frac{2d_D}{D} \right) \right]$$

$$D_3 = \left[ \frac{2d_D}{D} \left( 3 - \frac{2d_D}{D} \right) \left[ 2 - \frac{2d_D}{D} + \left( 1 + \frac{2d_D}{D} \right)^2 \right] + \frac{(1-\mu_D)}{(1-\mu_K)} \cdot \frac{G_K}{G_D} \cdot \left( 1 - \frac{2d_D}{D} \right) \cdot \left( 3 - \frac{2d_D}{D} \right) \right] \cdot \frac{D^2}{4 l_x^2} / 2 \pi^4 \cdot \left( 1 - \frac{2d_D}{D} \right) \cdot \frac{G_D}{G_K} \cdot 0,0026 \cdot \left( 3 - \frac{2d_D}{D} \right)^2$$

### VI.1.3.3 Lösung für die punktförmig gestützte Platte

In vielen Fällen wird die Sandwichplatte (z. B. bei Fassadenplatten) wegen der niedrigen Kerndruckfestigkeit über im Kern eingeschäumte Drahtspinnen mit der Haltekonstruktion befestigt. Eine solche z. B. durch Wind beanspruchte Platte wird demnach punktförmig gestützt. Da eine geschlossene Lösung für den Fall der punktförmig gestützten Sandwichplatte als nicht möglich erscheint, werden die beiden Lastfälle

- a) Platte mit Einzellasten
- b) Platte mit Gleichlasten

getrennt behandelt und in den Ergebnissen superponiert.

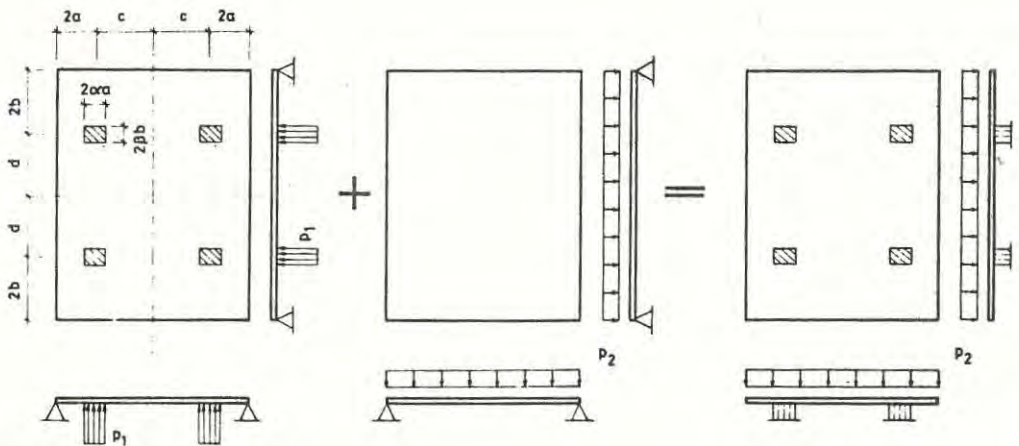


Bild 81: Lastfälle für punktförmig gestützte Platte

Lastfall 1

Die Belastung wird hier in Anlehnung an D. Lewe [78] und K. Grein [77] durch eine Fourier-Doppelreihe entwickelt

$$p(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{64 \cdot p_1}{m n \pi^2} \sin \frac{m \cdot \pi \cdot a}{2 \cdot a + c} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot \alpha \cdot a}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot b}{2 \cdot b + d} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot \beta b}{2(2b+d)} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{2(2b+d)} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots)$$

Als Lösung läßt sich nun, da die Randbedingungen für den vorliegenden Fall erfüllt sind, der gleichartige Ansatz verwenden:

$$\psi_1 = \sum_m \sum_n \psi_{mn} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{2(2b+d)} \quad (9)$$

Den Freiwert  $\psi_{mn}$  erhält man nun durch Einsetzen der entsprechenden Ableitung in die Differentialgleichung (7). Als Lösung ergibt sich dann

$$\psi_1 = - \sum_m \sum_n \frac{32 \cdot p_1}{G_K \cdot d_K \cdot \pi^2 \cdot m \cdot n} \left( \sin \frac{m \cdot \pi \cdot a}{2a+c} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot \alpha \cdot a}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot b}{2b+d} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot \beta \cdot b}{2(2b+d)} \cdot \left( \sin \frac{m \cdot \pi \cdot x}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot y}{2(2b+d)} \right) / \left[ \left( \frac{m \cdot \pi}{2(2a+c)} \right)^2 + \left( \frac{n \cdot \pi}{2(2b+d)} \right)^2 \right]^2 \right) \quad (10)$$

Mit den Abkürzungen und der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} A &= G_K \cdot d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 / 2 \\ S_{mn} &= \sin \frac{m \cdot \pi \cdot a}{2a+c} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot \alpha \cdot a}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot b}{2b+d} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot \beta \cdot b}{2(2b+d)} \\ B &= \left( \frac{m \cdot \pi}{2(2a+c)} \right)^2 + \left( \frac{n \cdot \pi}{2(2b+d)} \right)^2 \\ \bar{x} &= x + 2a + c; \quad \bar{y} = y + 2b + d \end{aligned}$$

lautet die Gleichung (10) dann

$$\psi_1 = - \sum_m \sum_n \frac{16 \cdot p_1}{A \cdot B^2} \cdot S_{mn} \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)}$$

### Lastfall 2

Die entsprechende Lösung für die gleichmäßig belastete Platte mit frei drehbaren Rändern ergibt sich analog

$$\varphi_2 = - \sum_m \sum_n \frac{4 p_2}{A \cdot B^2} (-1)^{(m-1)/2} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)} \quad (12)$$

Die Gleichgewichtsbeziehung zwischen den beiden äußeren Lasten lautet dabei

$$p_1 = p_2 \cdot (2a + c) \cdot (2b + d) / 4 \cdot \alpha \cdot a \cdot \beta \cdot b \quad (13)$$

Um nun die gesuchten Verformungs- und Spannungswerte zu erhalten, werden die gefundenen Lösungen in die Beziehungen (6) und diese dann in die Spannungsausdrücke (2,3) eingesetzt.

Nach Überlagern der Lastfälle 1 und 2 ergeben sich dann für die Durchbiegung und die Spannungen

$$\begin{aligned} w = & - \sum_m \sum_n \frac{B p_2}{A \cdot B^2} \cdot \left( \frac{s_{m\pi} \cdot (2a+c) \cdot (2b+d)}{\alpha \cdot a \cdot \beta \cdot b} - 1 \right) \left[ \left( \frac{m \cdot \pi}{2(2a+c)} \right)^2 + \left( \frac{n \cdot \pi}{2(2b+d)} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2(1 - \mu_D^2) \cdot E_K}{E_D \cdot d_D \cdot d_K} \right] \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \left( \cos \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)} \right. \\ & \left. - \cos \frac{m \cdot \pi \cdot c}{2(2a+c)} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot d}{2(2b+d)} \right) \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \pm \sum_m \sum_n \frac{16 p_2}{d_D \cdot d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \cdot B^2} \left[ \left( \frac{m \cdot \pi}{2(2a+c)} \right)^2 + \mu_D \left( \frac{n \cdot \pi}{2(2b+d)} \right)^2 \right] \cdot \\ & \cdot \left( \frac{s_{m\pi} \cdot (2a+c) \cdot (2b+d)}{\alpha \cdot a \cdot \beta \cdot b} - 1 \right) \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & \pm \sum_m \sum_n \frac{16 p_2}{d_D \cdot d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \cdot D^2} \left[ \left( \frac{n \cdot \pi}{2(2b+d)} \right)^2 + \mu_D \left( \frac{m \cdot \pi}{2(2a+c)} \right)^2 \right] \cdot \\ & \cdot \left( \frac{s_{m\pi} \cdot (2a+c) \cdot (2b+d)}{\alpha \cdot a \cdot \beta \cdot b} - 1 \right) \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)} \end{aligned}$$



$$\tau_{xy} = \sum_m \sum_n \frac{16 p_2 (1-\mu_D)}{d_K \cdot d_D \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \cdot B^2} \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{2(2a+c)} \right) \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{2(2b+d)} \right) \cdot \left( \frac{s_{mn} (2a+c)(2b+d)}{\alpha \cdot a \cdot \beta \cdot b} - 1 \right) \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)}$$

$$\tau_{xz} = \sum_m \sum_n \frac{16 p_2}{d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \cdot B} \cdot \left( \frac{m \cdot \pi}{2(2a+c)} \right) \cdot \left( \frac{s_{mn} (2a+c)(2b+d)}{\alpha \cdot a \cdot \beta \cdot b} - 1 \right) \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \sin \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)}$$

$$\tau_{yz} = \sum_m \sum_n \frac{16 p_2}{d_K \cdot m \cdot n \cdot \pi^2 \cdot B} \cdot \left( \frac{n \cdot \pi}{2(2b+d)} \right) \cdot \left( \frac{s_{mn} (2a+c)(2b+d)}{\alpha \cdot a \cdot \beta \cdot b} - 1 \right) \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot (-1)^{(n-1)/2} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi \cdot \bar{x}}{2(2a+c)} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot \bar{y}}{2(2b+d)}$$

## VI.2 Das Festigkeitsverhalten von Sandwichwerkstoffen

Wegen des Fehlens jeglicher Festigkeitskennwerte bei Kernverbunden mit hartem Kern aus Vollholz bzw. Holzwerkstoffen und weichem Kern aus gemagertem Phenolharzschaum (Bild 82) sind umfangreiche Untersuchungen angestellt worden. Als Materialien wurden dabei eingesetzt:

### Sandwich mit Holzkern

Deckschicht: Polyesterharz Leguval W 16/Bayer; Benzoylperoxid 50%/Oxydo; Aminbeschleuniger Typ 6310/Oxydo - Mischungsverhältnis 100 : 3 : 1; Glas-seidenmatten Typ M 900 / Owens-Corning bzw. Typ M 113/Gevetex - Typ A = 2 Matten: 1 M 900 + 1 M 113 ( $d_D = 1,2 - 1,9$  mm); Typ B = 3 Matten: 2 M 900 + 1 M 113 ( $d_D = 2,4 - 3,3$  mm); Typ C = 4 Matten: 2 M 900 + 2 M 113 ( $d_D = 3,0 - 4,3$  mm); Glasgewichtsanteil  $\psi = 36,5$  %.

Kern: 3 mm Holzspanplatte FPY mit der Verleimung V 20 (Harnstoffharz-Verleimung)  
 8 mm Holzspanplatte FPY mit der Verleimung V 20 (Harnstoffharz-Verleimung)  
 25 mm Holzspanplatte mit der Verleimung V 100 (Phenolharz-Verleimung)  
 7,2 mm Furnierplatte mit der Verleimung AW 100 (Phenolharz-Verleimung)  
 3-fach, 3 x 2,4 mm Bu

6,5 mm Furnierplatte mit der Verleimung Aw 100 (Phenolharz-Verleimung)  
5-fach, 5 x 1,3 mm Bu

17,3 mm Furnierplatte mit der Verleimung Aw 100 (Phenolharz-Verleimung)  
9-fach, 2,5-1,2-2,5-1,2-2,5-1,2-2,5-1,2-2,5 mm Bu.

Sandwich mit gemagertem Phenolharzschaumkern

Deckschicht: Polyesterharz Alpolit UP 366/Höchst;  
Härter Methyläthylketonperoxid 50 %/Peroxidchemie;  
Kobaltbeschleuniger COB 1 %/Peroxidchemie - Mischungsverhältnis  
100 : 2,5 : 0,5 , Typ D: 2 Glasseidenmatten Typ M 125/Gevetex

Kern: Schaumharz Phenodur/Reichold-Albert-Chemie;  
Härter Phenol 4 Sulfonsäure/KEPEC; Treibmittel Pentan 80 %/Haltermann -  
Mischungsverhältnis 100 : 13,4 : 1,02 ; Blähton Ø 10 - 18 mm/Rebaleichtton.

Die normenmäßig ermittelten Materialkennwerte der Deckschicht- und Kernwerkstoffe sind in Tabelle 9 zusammengestellt.

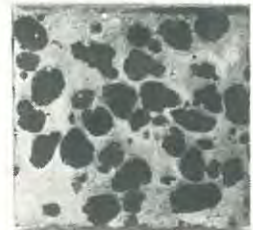
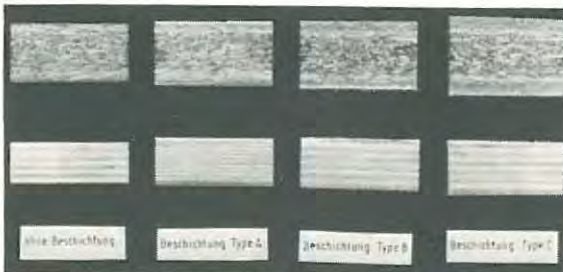


Bild 82: Untersuchte Sandwiches

Tabelle 9: Materialkennwerte von Deckschicht- und Kernwerkstoffen

		Dicke (mm)	Biegefestigkeit (kp/cm <sup>2</sup> )	Zugfestigkeit (kp/cm <sup>2</sup> )	Druckfestigkeit (kp/cm <sup>2</sup> )	Scherfestigkeit (kp/cm <sup>2</sup> )	Biege-E-Modul Mp/cm <sup>2</sup>	Zug-E-Modul Mp/cm <sup>2</sup>
Typ A - C	Deckschicht	3,0	1984	1290	-	-	64,7	79,2
Typ D		5,5	1915	1280	-	-	80,4	109,0
Spanplatte	Kern	3,0	195	83	171	75	32,9	22,0
		8,0	194	87	154	162	31,3	30,2
		25,0	215	101	140	81	34,9	24,1
Furnierplatte ⊥		6,5	558	712	340	372	43,9	76,1
		7,0	203	448	273	269	9,6	56,2
		17,0	424	420	309	142	34,8	48,7
Furnierplatte 		6,5	1057	900	403	355	120,7	110,9
		7,0	1152	638	471	291	128,3	117,6
		17,0	969	733	546	172	112,9	113,7

VI.2.1 Sandwich mit hartem Kern

VI.2.1.1 Abhebefestigkeit

Um eine Aussage über die Festigkeit des Verbundes zwischen Deckschicht und Kern machen zu können, wurde die Abhebefestigkeit (DIN 52 366) ermittelt. Dazu ist eine Deckschichtfläche mit dem Durchmesser  $D = 36$  mm über aufgeklebte Metallpilze abgerissen worden. Der Bruch trat in jedem Fall im oberen Bereich des Kernmaterials ein (Bild 83). Die Abhebefestigkeit ist demnach hier nur von der Festigkeit der oberen Kernzone und nicht von der Berührungszone oder der Deckschicht abhängig. Die erzielten Festigkeiten betragen im Mittel (aus 15 Proben):

Kern Typ	Holzspanplatten (mm)			Sperrholz (mm)		
	3	8	25	6,5	7,0	17
Abhebe- festigkeit ( $\text{kp/cm}^2$ )	23,6	10,9	15,5	21,5	24,3	28,3

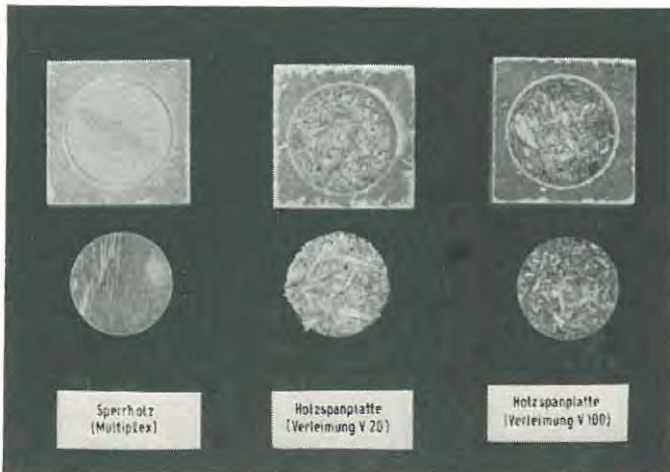


Bild 83: Versuchskörper zur Ermittlung der Abhebefestigkeit nach dem Bruch

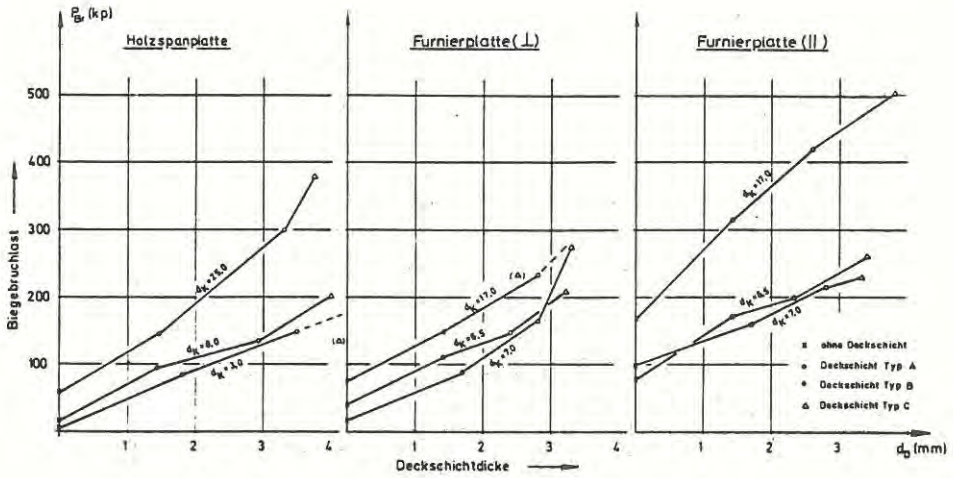


Bild 84a: Biegebruchlast in Abhängigkeit von der Deckschichtdicke

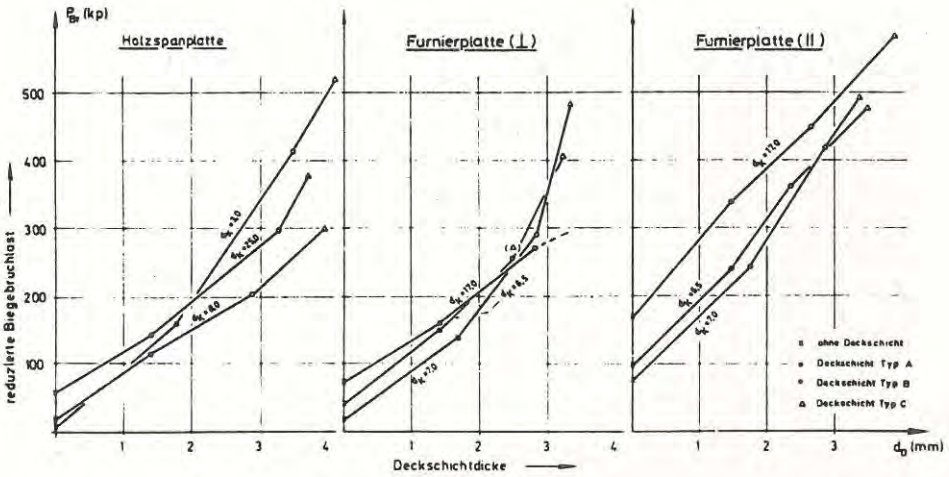


Bild 84b: reduzierte Biegebruchlast in Abhängigkeit von der Deckschichtdicke

### VI.2.1.2 Biegefestigkeit

Die wichtigste Kenngröße für die Bemessung ist die Biegefestigkeit. In Anlehnung an DIN 52 371 wurde hier im Dreipunktbiegeversuch bei einer Stützweite von ca.  $30 \times$  Probendicke die Bruchlast bestimmt (Bild 84 a). Es zeigte sich, daß durch das Aufbringen der Deckschicht die Biegebruchlasten erheblich gesteigert werden können (Bild 84 b - Versuchswert bezogen auf die Ausgangsstützweite  $P_{B,R} = P_B \cdot l/l_0$ ). So nimmt die Last (entsprechende Festigkeit ergibt sich unter Berücksichtigung der Sandwichsteifigkeit) z. B. der 3,0 mm dicken Holzspanplatte unter Zugrundelegung der Ausgangsstützweite von  $P_B = 5,2$  kp (ohne Deckschicht) auf  $P_{B,R} = 160$  kp (mit Deckschicht Typ A) zu; d.h. das Sandwich hat eine 7,0-fach höhere Bruchlast als eine Holzspanplatte derselben Abmessungen.

Für die Abhängigkeit der Deckschichtdicke von der Biegebruchlast ergibt sich ein etwa linearer Zusammenhang. Der Stabbruch trat mit Ausnahme der 8,0 mm dicken Holzspanplatte - Deckschicht Typ C (Schubbruch im Kern) - stets durch Überschreiten der Zugbruchspannung in der GFK-Deckschicht ein (Bild 85).

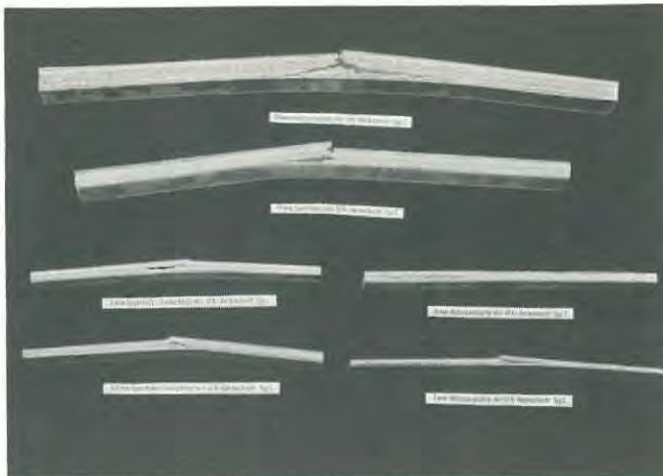


Bild 85: Gebrochene Biegeversuchskörper

### VI.2.1.3 Zugfestigkeit

In Anlehnung an DIN 52 188 ist die Zugfestigkeit des Verbundwerkstoffes bestimmt worden (wie im Holzbau üblich:  $P_{B,Z}/F_{ges}$ ). Da die Bruchdehnung beider Verbundpartner mit 2 - 3 % etwa gleich ist, ergab sich ein gleichzeitiger Bruch für Kern und Deckschicht. Während nun für die beschichtete Holzspanplatte infolge der höheren Bruchfestigkeit des Deckschichtmaterials die Zugfestigkeit um das 2-4-fache gesteigert wird (z. B. 3,0 mm Holzspanplatte:  $P_{B,Z} = 48 \text{ kp o. Decksch.}$ ;  $P_{B,Z} = 565 \text{ kp}$  mit Decksch. Typ A), ist dies beim Sandwich mit Sperrholzkernen wegen ihrer hohen Kernfestigkeit nur in geringem Maße möglich (Bild 86).

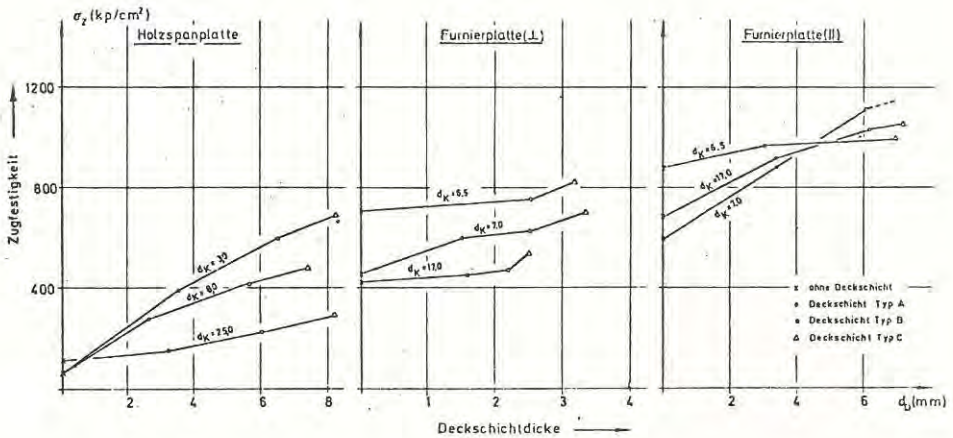
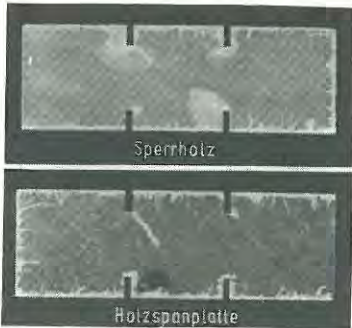


Bild 86 : Zugfestigkeit in Abhängigkeit von der Deckschichtdicke

### VI.2.1.4 Scherfestigkeit

Wird die Sandwichplatte in Plattenebene beansprucht, wie z. B. in den Stegen von Biegeträgern, so ist die Kenntnis der entsprechenden Scherfestigkeit (in Plattenebene) notwendig. Sie wird in der Regel an vierseitig geschlitzten Proben nach Möhler [84] bestimmt (Bild 87). Für die vorliegenden beschichteten Holzwerkstoffe ergab sich auch hier eine relativ starke Zunahme der Festigkeit  $\tau_s = P_{B,S}/2 \cdot F_{ges}$  (Bild 88). So wird die Scherbruchlast z. B. bei der 30 mm dicken Holzspanplatte von  $P_{B,S} = 124 \text{ kp}$  (ohne Deckschicht)



auf  $P_{B,S} = 1256 \text{ kp}$  (mit Deckschicht-Typ A) gesteigert; die Sandwichplatte hat demnach eine 4,5-fach höhere Scherbruchlast als eine Holzspanplatte derselben Abmessungen

Bild 87: Gebrochene Scherkörper

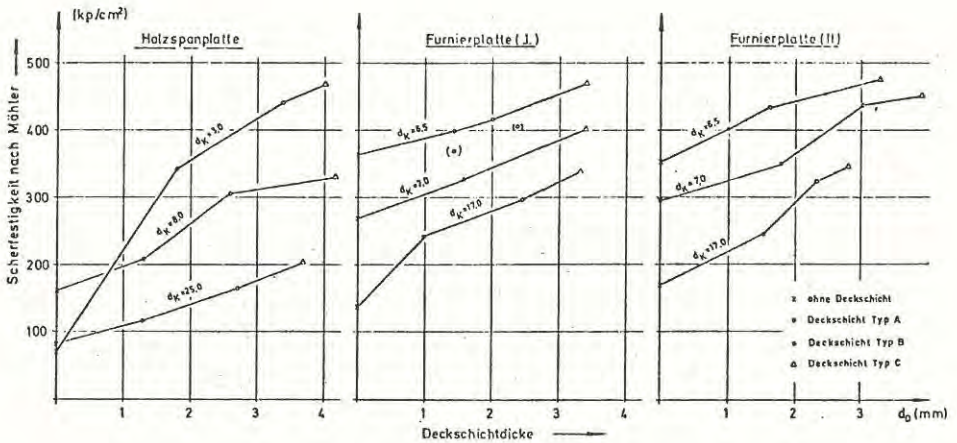
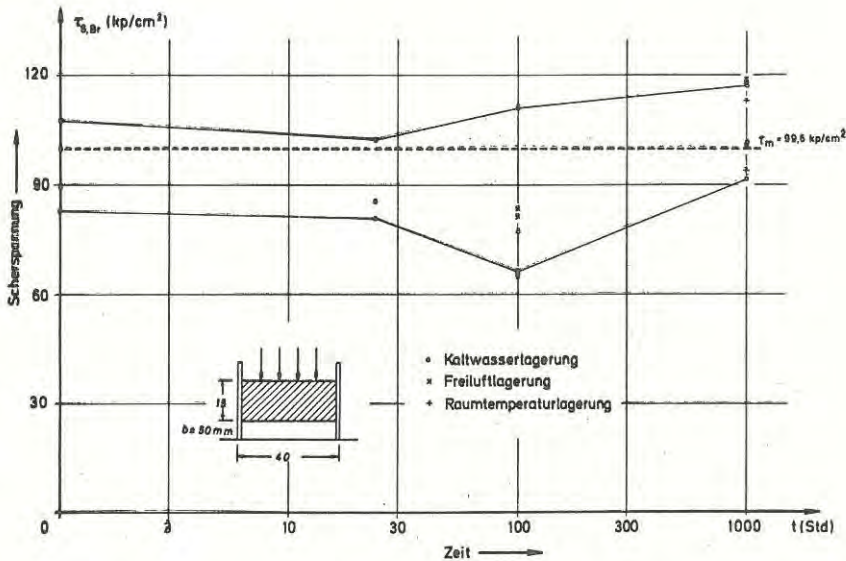


Bild 88: Scherfestigkeit (nach Möhler) in Abhängigkeit von der Deckschichtdicke

Wird die Sandwichplatte senkrecht zur Plattenebene (Biegeträger) beansprucht, so ist die Verbundfestigkeit zwischen Kern und Deckschicht von Bedeutung. Für ein Vollholzsandwich (Deckschicht Typ C/Fichtenhirnholz) wurde die entsprechende Scherfestigkeit an rechteckigen Proben (Bild 89) ermittelt. Die sich ergebenden Scherspannungen ( $\tau_m = 99,6 \text{ kp/cm}^2$ ) liegen etwa in der gleichen Größenordnung wie bei den herkömmlichen Holzleimverbindungen (DIN 68 603).



Ferner liegt auch bezüglich des Einflusses der Feuchtigkeit ein ähnliches Verhalten wie z. B. bei Phenolharzverleimungen vor (Bild 89).



**Bild 89:** Längzeitversuche an Scherproben (Vollholz)

### VI.2.1.5 Elastizitätsmoduli

Der Elastizitätsmodul einer Verbundkonstruktion ergibt sich aus den anteiligen Flächen und den Einzel-Elastizitätsmoduli. Wegen des relativ großen Unterschiedes von Zug- und Druck-E-Modul wurde daher hier nur die aus dem Biegeversuch sich ergebende Biegesteifigkeit  $(E \cdot J)_S$  bzw. die auf die Ausgangsstützweite  $l_0$  bezogene relative Biegesteifigkeit  $(E \cdot J)_{S,R}$  angegeben (Bild 90 a, 90 b).

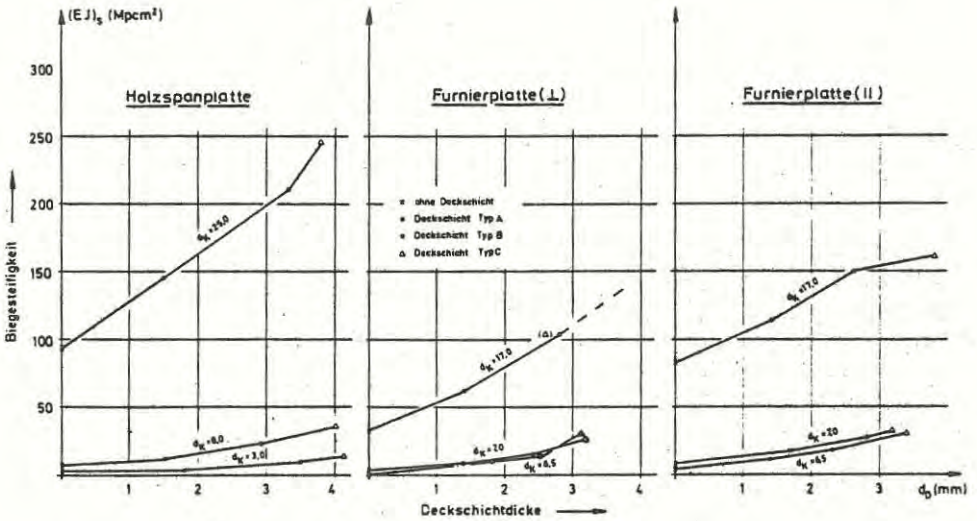


Bild 90a: Biegesteifigkeit in Abhängigkeit von der Deckschichtdicke

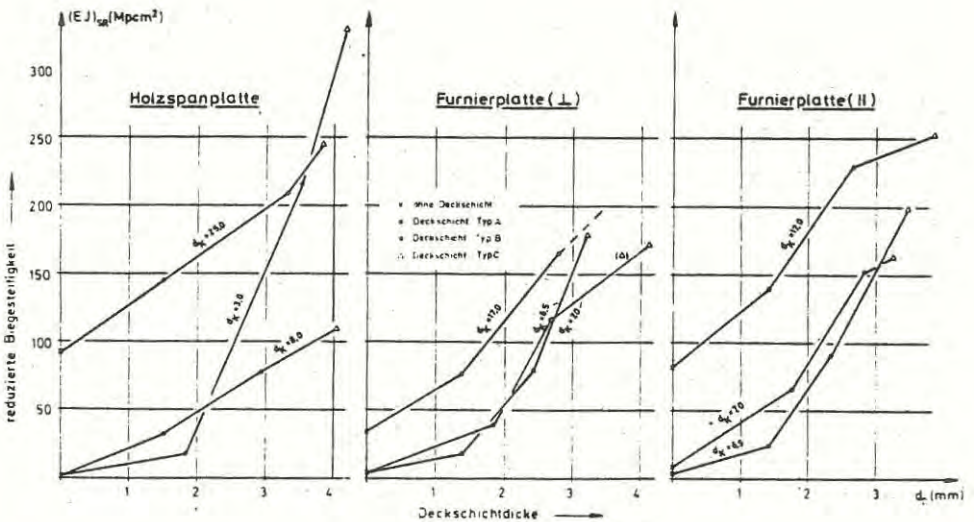


Bild 90b: reduzierte Biegesteifigkeit in Abhängigkeit von der Deckschichtdicke

Da die Zug-Elastizitätsmoduli der vorliegenden Kern- und Deckschichtmaterialien etwa gleich sind bzw. nur geringfügig voneinander abweichen, wurde hier nur der resultierende Zug-Elastizitätsmodul ( $E_{Res} = P/b \cdot d \cdot \epsilon$ ) angegeben (Bild 91).

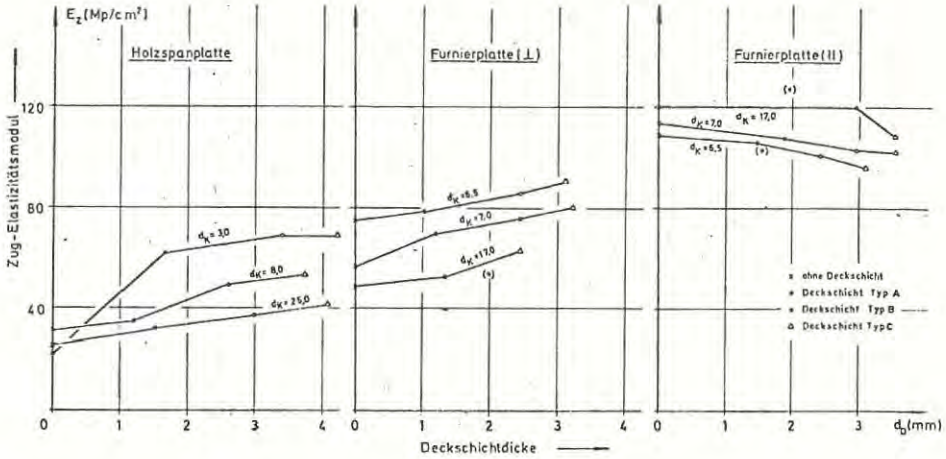


Bild 91: Zug-Elastizitätsmodul in Abhängigkeit von der Deckschichtdicke

### VI.2.1.6 Langzeitverhalten

Die unangenehme Eigenschaft der Hölzer und Holzwerkstoffe, bei Langzeitbeanspruchung zu kriechen bzw. zu relaxieren, besitzen nun leider auch die meisten Kunststoffe. Das Kriechmaß ( $f/f_0$ ) des hier verwendeten glasfaserverstärkten Polyesterharzes ist dabei wesentlich vom Anteil der verstärkenden Glasfasern abhängig. So ergibt sich als Kriechmaß (nach  $10^5$  Stunden) für ein Material mit 60 % Glasgewichtsanteil  $A_1 = 1,3 - 1,45$  und bei Verminderung des Glasanteils auf 30 % (Faserspritzverfahren) ein Kriechmaß von  $A_1 = 1,8 - 2,2$ . Bei Holz und Holzwerkstoffen und hier besonders bei Holzspanplatten liegen die entsprechenden Kriechmaße z. T. wesentlich höher ( $A_1 = 2,0 - 3,0$  Vollholz und Sperrholz;  $A_1 = 5,0 - 6,0$  Holzspanplatte). Für das vorliegende Holz-Kunststoffsandwich ergibt sich demnach ein Kriechmaß, das zwischen dem der Hölzer und dem des verstärkten Kunststoffes liegt. Wird als Kern ein relativ leichtes Holz mit geringem Elastizitätsmodul verwendet, so steigt der von den Deckschichten übertragene Lastanteil an - es nähert sich das Gesamtkriechmaß dem Kriechmaß der Deckschicht.

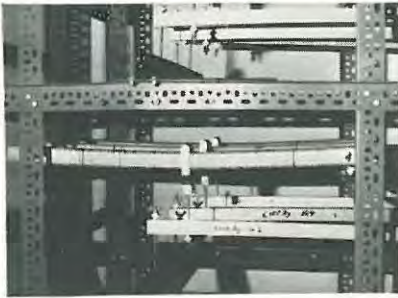


Bild 92: Versuchseinrichtung für die Kriechversuche

Aus ersten bei Außenklima durchgeführten Kriechversuchen am Vollholzsandwich (Bild 92) ergab sich nach ca. 9000 Stunden ein mittleres Kriechmaß von  $\bar{A}_1 = 1,85$ . Dabei zeigte es sich, daß die Kriechneigung wie bei Hölzern und wohl auch bei Holzwerkstoffen von den jahreszeitlichen Temperatur- und Feuchtigkeitschwankungen abhängig ist (Bild 93).

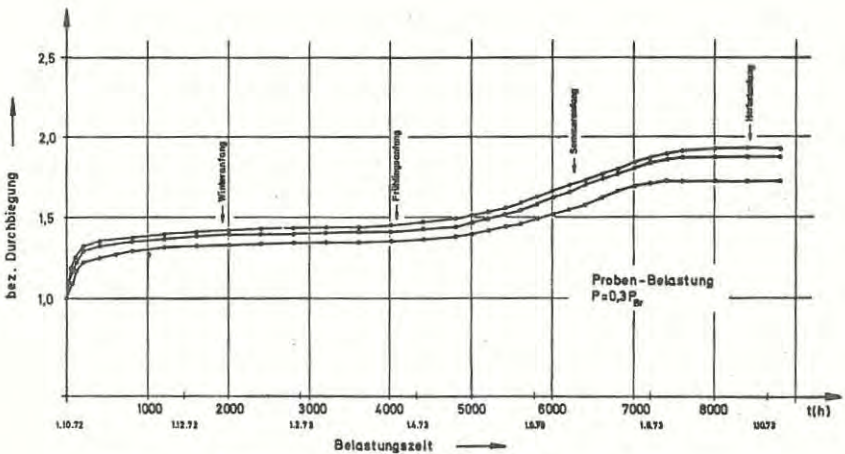
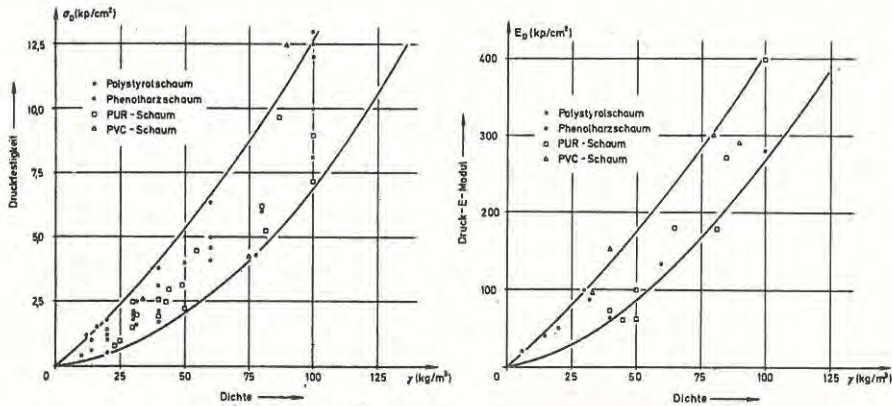


Bild 93: bezogene Durchbiegung in Abhängigkeit von der Belastungszeit

## VI.2.2 Sandwich mit weichem Schaumkern

### VI.2.2.1 Festigkeiten und Elastizitätsmoduli

Allgemein kann zu den Festigkeiten und Elastizitätseigenschaften gesagt werden, daß diese für alle Hartschäume bei gleicher Dichte in der gleichen Größenordnung liegen und mit steigender Dichte progressiv ansteigen. Bezüglich der Druckfestigkeit und des Druck-Elastizitätsmoduls hat Hintersdorf [ 76 ] entsprechende Versuchsergebnisse angegeben (Bild 94).



**Bild 94:** Druckfestigkeiten und Druckelastizitätsmoduli in Abhängigkeit von der Dichte

Den vorerwähnten Hartschäumen, vor allen Dingen Polyester-, Polyurethan- und Phenolharzschäumen, gibt man Füllstoffe wie z. B. Blähton und Blähglas ( $\varnothing = 4,0 - 25,0$  mm) zu, um das Schwindmaß zu vermindern (Vermeidung von Schwindrissen) und die Festigkeits- und Steifigkeitskennwerte zu erhöhen. Erst so erhält man für tragende Konstruktionen brauchbare Kernwerkstoffe.

Für einen Phenolharzschaum (Schaumdichte  $\gamma = 40$  kg/m<sup>3</sup>) wird durch Zugabe von Blähton ( $\varnothing 12 - 20$  mm) die Druckfestigkeit z. B. von  $\sigma_D = 1,8$  kp/cm<sup>2</sup> (Bild 94) auf  $\sigma_D = 10,5$  kp/cm<sup>2</sup> und der Elastizitätsmodul von  $E_D = 70$  kp/cm<sup>2</sup> auf  $E_D = 533$  kp/cm<sup>2</sup> gesteigert.

Eine weitere Steigerung erzielt man durch Erhöhung der Schaumdichte bzw. Verwendung von kleineren Durchmessern des Zuschlagstoffs. So steigen die entsprechenden Werte bei Erhöhung der Schaumdichte um 30 % auf  $\sigma_D = 16,6 \text{ kp/cm}^2$  bzw.  $E_D = 587 \text{ kp/cm}^2$ , und die entsprechenden Werte bei Verwendung von Bläh-tonkörnern mit  $\emptyset = 8,0 \text{ mm}$  auf  $\sigma_D = 31,9 \text{ kp/cm}^2$  bzw.  $E_D = 1730 \text{ kp/cm}^2$  an.

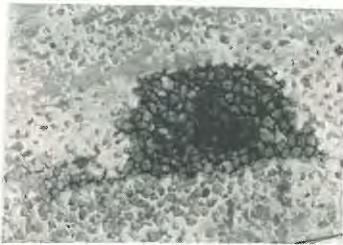


Bild 95: Fehlstelle in gemagertem Phenolharzschaumkern

Das Vermindern des Zuschlagstoffkorn-durchmessers und die damit sich erge-bende Steigerung der Materialkennwerte findet jedoch in der Ausschäumbarkeit seine Grenze - es können leicht Fehl-stellen auftreten (Bild 95). Die un-terschiedlichen Steifigkeitsverhält-nisse bei verschiedenen ( $\emptyset = 8,0$  und  $12 - 20 \text{ mm}$ ) gemagerten Phenolharz-schäumen können aus Bild 97 ersehen werden.

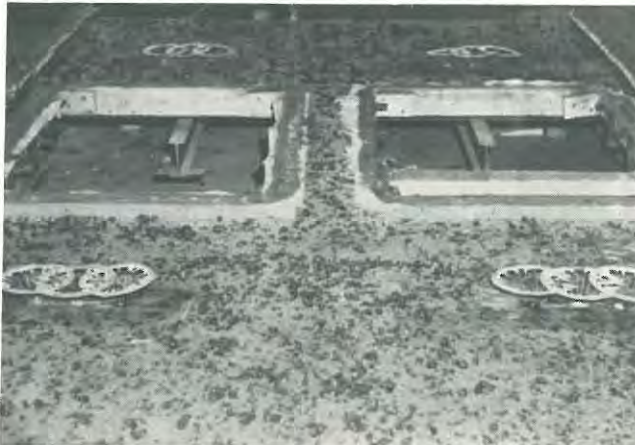
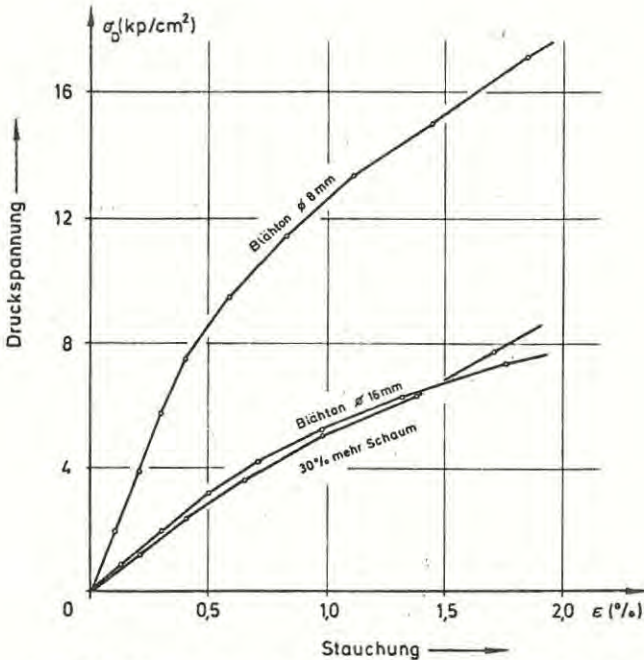


Bild 96: Fassadenplatte vor dem Anschäumen



**Bild 97:** Spannungs-Dehnungslinie von gemagerten Phenolharzschäumen

Sehr wesentlich für das Gesamttragverhalten des Verbundsystems ist die Haftfestigkeit der Deckschicht am Kern. Sie kann bei dem Sandwich mit gemagertem Schaumkern - dort ist sie stets die Schwachstelle - durch verschiedene Maßnahmen gesteigert werden. Bereits das Einstreuen von feinkörnigem Kies oder dem auch zur Magerung verwendeten Blähton in die noch nasse GFK-Deckschicht, führt zu 5 - 8 mal höheren Scherfestigkeiten. Eine weitere Steigerung erreicht man durch das Einlegen von Sisalmatten in das noch frische Laminat - sie wird beim Schäumvorgang vom Schaumharz durchdrungen. Auch aus den durchgeführten Abschälversuchen läßt sich diese Beeinflussung ablesen. Die Abschälfestigkeiten betragen im einzelnen  $p_s = 0,27 \text{ kp/cm}$  (Kies eingestreut);

$p_s = 0,93$  kp/cm (Blähton eingestreut) und  $p_s = 1,32$  kp/cm (Sisalmatte eingelegt).

### VI.2.2.2 Verhalten bei höherer Temperatur

Neben dem bereits erwähnten normalen Abfall der Festigkeiten des Schaum- und Deckschichtmaterials bei höheren Temperaturen tritt beim Sandwich meistens noch die aus den Zwängungserscheinungen (unterschiedliches thermisches Verhalten von Kern und Deckschicht) herrührende Festigkeitsverminderung auf. So ergab sich für das vorerwähnte GFK-Phenolharzschaumsandwich (GFK:  $\alpha_{th} = 17 - 37 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ; gemagerter Phenolharzschaum:  $\alpha_{th} = 3,5 - 8,9 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ ) eine Verminderung der Druck- und Schubfestigkeit bei  $100^{\circ}\text{C}$  gegenüber  $20^{\circ}\text{C}$  von 55 - 65 % (Bild 98).

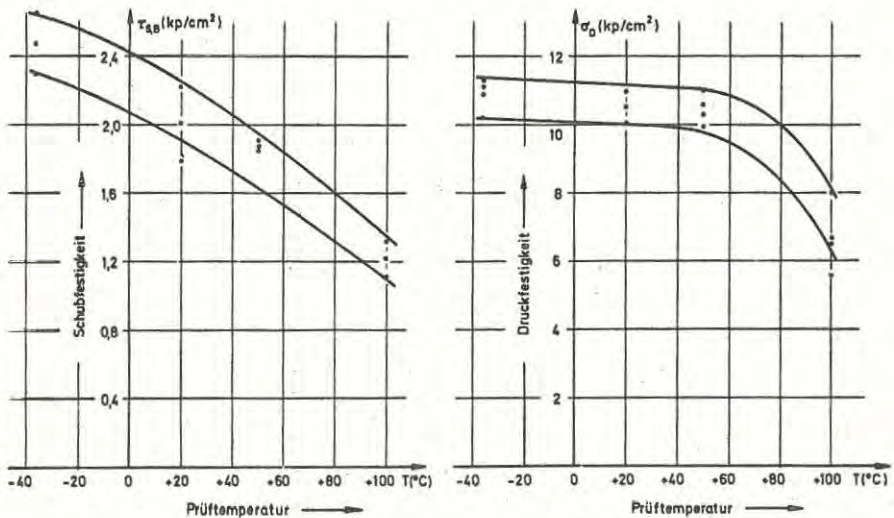


Bild 98 : Abhängigkeit der Biegeschub- bzw. der Druckfestigkeit von der Temperatur



## VII. Zusammenfassung

In der vorliegenden Habilitationsschrift sind die vom Verfasser im Rahmen seiner Tätigkeit an der "Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine" auf dem Sektor "Tragende Kunststoffkonstruktionen" durchgeführten Untersuchungen zusammengestellt worden. Zu den Problemen der Verbindungstechnik, der Stabilität, der biegeweichen Membrantragwerke und der Sandwichkonstruktionen wurden eine Reihe neuer Forschungsergebnisse mitgeteilt.

Zum Bereich der Fügetechnik sind erste Angaben über das Tragverhalten von GFK-Verklebungen bzw. GFK-Verschraubungen gemacht worden. Aus den sehr umfangreichen Klebversuchen ergab sich ein außerordentlich starker Einfluß der Oberflächenvorbehandlung auf die Zug-, Zugscher-, Biege- und Schälfestigkeit. Ferner konnte gezeigt werden, in welchem Maße die Tragfähigkeit durch die höhere Temperatur bzw. Wasserlagerung vermindert und durch das zusätzliche Vorspannen mit Stahlschrauben gesteigert wird. Bezüglich der vorgespannten und nicht vorgespannten GFK-Schraubverbindung sind aufgrund von durchgeführten Versuchen an ein- und zweiseitigen Verschraubungen erste für die Bemessung brauchbare Formeln hergeleitet worden. Dabei konnte besonders für die bei den Kunststoffen außerordentlich günstige HV-Verbindung nachgewiesen werden, in welchem Maße der für die Höhe der Rutschlast maßgebende Vorspannungsverlust (infolge Relaxation) durch mehrmaliges Nachspannen vermindert werden kann.

Zum Problem der Stabilität - sie ist bei Kunststoffkonstruktionen infolge ihrer relativ niedrigen Steifigkeitsverhältnisse von besonderer Bedeutung - wurden Untersuchungen an anisotropen Zylinderschalen, isotropen Zylinderschalen mit Mantelöffnungen und isotropen Kegelschalen angestellt. Für den Lastfall Axialdruck, Axialdruck mit Innendruck und allseitiger Außendruck sind die für anisotropes Material hergeleiteten linearen Differentialgleichungen gelöst worden.

Um diese Lösungen mit experimentellen Ergebnissen vergleichen zu können, wurden für den Lastfall Axialdruck mehrere Versuche an anisotropen GFK-Schalen durchgeführt. Die sich ergebende Diskrepanz zwischen experimentellen und theoretischen Werten ist - wie auch bei isotropen Schalen üblich - durch statistisch gefundene Faktoren korrigiert worden. Eine bisher ungelöste Frage war es, in welchem Maße die Höhe der Durchschlagslast von Mantelöffnungen beeinflusst wird. Aus den durchgeführten Untersuchungen ergibt sich

nun, daß nicht die Öffnungsform sondern nur die Öffnungsgröße einen Einfluß auf die Höhe der Beullast hat, daß ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen Beullast und Öffnungsparameter besteht und daß bereits eine relativ schwache Lochrandverstärkung zu einer wesentlich höheren Durchschlagslast führt. In Anlehnung an eine bereits vor einiger Zeit für Zylinderschalen durchgeführte statistische Auswertung aller bisher veröffentlichten Versuchsergebnisse, wurden nun auch für den durch Axialdruck und Außendruck belasteten Kegelstumpf entsprechende empirische Nachweisformeln hergeleitet. Um dort eine Aussage über die Gültigkeitsgrenzen des elastischen und des plastischen Beulbereichs machen zu können, sind entsprechende Beulversuche an Kunststoff- und Metallkegeln durchgeführt worden. Das Fehlen von umfassenden Angaben zur Auswahl von Membranwerkstoffen, zur Verarbeitung und zu den Konstruktionsprinzipien hat in der letzten Zeit zu größeren Schäden an biegeweichen Membrantragwerken geführt. Um hier einen ersten Anhalt zu geben, ist gezeigt worden, in welchem Maße die meistens verwendeten beschichteten Polyestergewebe und ihre Näh- und Schweißverbindungen durch die Herstellungsweise, die Temperatur und die Alterung in ihrem Tragverhalten beeinflußt werden. Es sind ferner einige Konstruktions- und Berechnungsprinzipien vorgeschlagen worden.

Es wurden schließlich einige Ergebnisse von theoretischen und experimentellen Arbeiten an Sandwichkonstruktionen mitgeteilt. So sind neben einer Lösung für die punktförmig gestützte Sandwichplatte, auch Ergebnisse von erstmals durchgeführten Versuchen an Sandwichproben mit steifem Holzkern angegeben.

Literaturverzeichnis

a.) Publikationen des Verfassers

1. Zur örtlichen Stegbeanspruchung zentrisch belasteter Kranbahnträger bei Verwendung elastisch gebetteter Kranschienen.  
"Der Bauingenieur", 44. Jahrg. (1969), H. 8
2. Zur Beulstabilität von Kreiszyinderschalen.  
Dissertation - Fakultät für Bauingenieurwesen der Universität Karlsruhe (27.1.1970)
3. Zum Beulverhalten von Kreiszyinderschalen.  
"Schweizerische Bauzeitung", 89. Jahrg. (1971), H.1
4. Die Beulstabilität anisotroper Zylinderschalen.  
"Berichte der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Karlsruhe", 3. Folge (1971), H. 7
5. Kleben von glasfaserverstärkten Kunststoffen.  
"Die Bautechnik", 48. Jahrg. (1971) H. 9
6. Zur Beulstabilität anisotroper Zylinderschalen aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK).  
"Der Bauingenieur", 47. Jahrg. (1972), H. 5
7. Einige Bemerkungen über Schäden an biaxialgewickelten Behältern aus glasfaserverstärktem Kunststoff.  
"Kunststoffe", 63. Jahrg. (1973)
8. Die Verschraubung von Fügeteilen aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK).  
"Die Bautechnik", 91. Jahrg. (1973) (noch nicht erschienen)
9. Zum Relaxationsverhalten von vorgespannten GFK-Schraubverbindungen.  
"Der Plastverarbeiter", 3. Jahrg. (1973)
10. Der Einfluß von Füllstoffen auf das Festigkeitsverhalten von glasfaserverstärkten Kunststoffen.  
"Kunststoff - Rundschau", 20. Jahrg. (1973)
11. Die Beulstabilität von Kegelschalen  
"Der Bauingenieur", 52. Jahrg. (1977) (noch nicht erschienen)
12. Versuch der Bemessung von tragenden Kunststoffbauteilen.  
Vortragsveröffentlichung der Informationstagung des Innenministeriums von NW für die Bauaufsicht des Landes Nordrhein-Westfalen. (1973)
13. Zur Stabilität axial belasteter Zylinderschalen mit Mantelöffnungen.  
"Der Bauingenieur", 51. Jahrg. (1976)
14. Das Tragverhalten eines neuen Holz - GFK - Sandwich.  
"Bauen mit Holz", 76. Jahrg. (1974)

15. Die punktförmig gestützte Sandwichplatte.  
"Kunststoffe", 67. Jahrg. (1977)(noch nicht erschienen)
16. Die Konstruktion und Berechnung von Membrantragwerken.  
"Die Bautechnik", 95. Jahrg. (1977) (noch nicht erschienen)

b.) weiteres Schrifttum

17. J. VANCSD SZMERCSANYI - E. VÖÖ: Wechselwirkung zwischen ungesättigten Polyesterharzen und Füllstoffen. Kunststoffe, Bd. 58 (1968)
18. K. W. SENDER: Die Anwendung von Epoxydharzen im Werkzeug-, Formen- und Modellbau. Kunststoffrundschau, Bd. 12 (1965)
19. R. REICHERTZER: Probleme der Kunststoffverarbeitung - Füllstoffe. Kunststoffrundschau, Bd. 17 (1970)
20. P. DELFOSSE: Kriterien der Eignung von Füllstoffen für Polyesterharze. Kunststoffrundschau, Bd. 8 (1961)
21. L. DIMTER: Klebstoffe für Plaste, Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie (1969)
22. H. BAUMANN: Leime und Kontaktkleber. Berlin: Springer-Verlag (1967)
23. H. SCHWARZ und H. SCHLEGEL: Metallkleben und glasfaserverstärkte Plaste in der Technik. Berlin: VEB Verlag Technik (1966)
24. P. H. SELDEN: Glasfaserverstärkte Kunststoffe. Berlin: Springer-Verlag (1967)
25. H. E. MECKELBURG: Kleben als Fügeverhalten für glasfaserverstärkte Kunststoffe. Z. Kunststoffe 54, H. 12, (1964)
26. Versuchsbericht Nr. 10 der Chemischen Werke, Hilsa. (1969)  
(nicht veröffentlicht)
27. R. GRÜNEWALD: Konstruieren mit glasfaserverstärkten Kunststoffen. Kunststoff-Berater, H. 5 u. 6 (1967)
28. Vorläufige Richtlinien für die Kennwertbestimmung, Zulassungsprüfung, Bemessung und Güteüberwachung von zulassungspflichtigen Bauteilen. Institut für Bautechnik  
(unveröffentlicht)
29. Richtlinien für Druckbehälter aus glasfaserverstärkten Kunststoffen. VdTÜV-Merkblatt
30. H. OBERST: Elastische und viskose Eigenschaften von Werkstoffen. Beuth-Vertrieb, Berlin (1963)
31. G. SCHREYER: Konstruieren mit Kunststoffen. Hanser-Verlag, München (1972)
32. O. STEINHARDT - K. MÖHLER: Versuche zur Anwendung vorgespannter Schrauben im Stahlbau (Teil I - IV). Stahlbau-Verlag (1954 - 1969)

33. B. O. ALMROTH: Postbuckling behavior of compressed circular cylinders under axial compression. AIAA-Journ. Vol. 1, No. 10 (1964)
34. L. H. DONNELL: New theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. Trans. ASME Vol. 58 (1934)
35. H. EBNER und G. NONHOFF: Stabilitätsuntersuchung an Schalen aus GFK. Der Plastverarbeiter XIII (1970)
36. B. SCHLEHÖFER: Das Beulverhalten zylindrischer GFK-Hohlkörper unter Axialdruck. Kunststoffe H. 12 (1969)
37. C. S. WANG: Longitudinal stability problems of filament wound shells. 21st Annual Meeting of the Reinforced Plastics, Chicago (1936)
38. G. N. SAWIN: Spannungserhöhung am Rande von Löchern VEB Verlag Technik, Berlin (1956)
39. I. G. LEKKERKERKER: On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole. Delft: Uitgeverij Waltman (1965)
40. I. G. LEKKERKERKER: Stress concentration around circular holes in cylindrical shells. Proc. of the 11. intern. congress of applied mechanics, München (1964)
41. R. C. TENNYSON: The effects of unreinforced circular cutouts on the buckling of circular cylindrical shells under axial compression. Journal of Engineering for Industry Nov. (1968)
42. J. ARBECZ: Buckling of Conical Shells under Axial Compression. NASA CR - 1162, (1968)
43. R. H. HOMEWOOD, A. A. BRINE, A. E. JOHNSON: Experimental Investigation of the Buckling Instability of Monocoque Shells. Exp. Mech., Vol. 1, (1961)
44. L. LACKMAN, J. PENZIEN: Buckling of Circular Cones under Axial Compression, J. App. Mech., Nr. 3, (1960)
45. R. P. LOFBLAD: Elastic Stability of Thin-Walled Cylinders and Cones with Internal Pressure under Axial Compression. Aeroplastic and Structures Res. Lab., Mass. Inst. Technol., Cambridge, Techn. Rep. Nr. 25 - 59, (1959)
46. E. E. LUNDQUIST, F. H. SCHÜTTE: Strength Tests of Thin-Wall Truncated Cones of Circular Section. NACA ARR/WR L-442, (1942)
47. W. SCHNELL, K. SCHIFFNER: Experimentelle Untersuchungen des Stabilitätsverhaltens von dünnwandigen Kegelschalen unter Axiallast und Innendruck. DVL-Bericht Nr. 243, (1962)

48. P. SEIDE, V. I. WEINGARTEN, E. J. MORGAN: Final Report on the Development of Design Criteria for Elastic Stability of Thin Shell Structures. Space Technol. Labs., Los Angeles, STL/TR 60-0000-19425, (1960)
49. P. SEIDE: On the Stability of Internally Pressurized Conical Shells under Axial Compression. Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Berkeley, (1962)
50. R. L. SENDELBECK, J. SINGER: Further Experimental Studies of Buckling of Electroformed Conical Shells. AIAA JOUR., No. 8, (1970)
51. J. SINGER, A. ECKSTEIN: Experimental Investigations of the Instability of Conical Shells under External Pressure. Bull. Res. Council of Israel, Vol. IIC, (1962)
52. J. SINGER, A. ECKSTEIN, M. BARUCH: Buckling of Conical Shells under External Pressure, Torsion and Axial Compression, TAE Rep. 19, (1962)
53. J. SINGER et.al.: "Buckling of Isotropic, Orthotropic and Ring-Stiffened Conical Shells." TAE Rep. 30, (1963)
54. J. SINGER, D. BENDAVID: Buckling of Electroformed Conical Shells under Hydrostatic Pressure. AIAA Jour., No. 12, (1968)
55. J. SINGER et.al.: Experimental and Theoretical Studies on Buckling of Conical and Cylindrical Shells under Combined Loading. TAE Rep. 48, (1966)
56. I. I. TRAPEZIN: Stability of Conical Shells Subjected to Hydrostatic Pressure. In Collection Analysis of Strength Stiffness, Stability and Vibration, Moscow, Mashgiz, (1955)
57. I. I. TRAPEZIN: Experimental Determination of the Values of Critical Pressures for Conical Shells.
58. F. HECKER: Stabilitätsuntersuchungen an einem Kegelstumpf. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1972)
59. F. OTTO, R. TROSTEL: Zugbeanspruchte Konstruktionen, Bd. 1. Ullstein-Fachverlag, Berlin (1962)
60. P. JAGFELD: Ein- und mehrachsige Zugversuche an der Dachfolie des Deutschen Pavillons auf der Weltausstellung 1967 in Montreal. Melliland Textilberichte Nr. 3 (1970)
61. Verband der Deutschen Bodenbelags-, Kunststoff-Folien- und Beschichtungs-Industrie e.V.: Verhalten von Membranen unter Dauerbelastung (unveröffentlichter Bericht)
62. M. LOSCH: Bestimmung der mechanischen Konstanten für einen zweidimensionalen, nichtlinearen, anisotropen, elastischen Stoff am Beispiel beschichteter Gewebe. Dissertation, Universität Stuttgart (1971)
63. A. GUBENKO, M. PETROVSKIN: Pneumaticeskie Stroitel'nye Konstrukcii, Moskva (1963)

64. E. SCHNABEL: Verhalten beschichteter Gewebe in der Kälte.  
Melliand Textilberichte Nr. 6 (1972)
65. H. MEWES: Beschichtete und gummierte Gewebe aus Polyesterfäden.  
Chemiefasern H. 12 (1964), H. 1 (1965)
66. Bericht Nr. 672087: Zeitstandfestigkeit von beschichteten Geweben.  
Farbwerke Hoechst (unveröffentlicht)
67. DDR - Standard TGL 20 167: Lastannahmen für Bauten
68. W. FÜRSTER, K. SCHLÜSSLER: Membranspannungszustand der windbe-  
lasteten Kugelschale. Der Bauingenieur H. 1 (1967)
69. W. ZERNA, H. NIEMANN: Windkanalversuche an aeroelastischen Modellen  
von Tragfluthallen. Versuchsbericht (1971/72, unveröffentlicht)
70. Richtlinien für den Bau und Betrieb von Tragluftbauten.  
ARGE Bauaufsicht (1971)
71. W. BÖHMERT: Tragverhalten beschichteter Gewebe unter der Wirkung  
ebener Spannungszustände. Forschungsbericht 1976 (unveröffent-  
licht)
72. G. MENGES, B. MEFFERT: Untersuchungen zum mechanischen Verhalten  
PVC-beschichteter Polyestergerewebe. Forschungsbericht 1976  
(unveröffentlicht).
73. H. BLUMBERG, W. KRUMMHEUER, J. NEBE: Zeitstandverhalten von PVC-be-  
schichteten Polyamid 66 - und Polyester-Geweben in Praxis und  
Laborprüfungen. Kunststoffe 66 (1976) H. 2.
74. A. G. ALLEN: Analysis and design of structural sandwich panels.  
Pergamon Press (1969)
75. V. DUNDROVA, V. KOVARIK, P. SLAPAK: Biegungstheorie der Sandwich-  
platten. Springer Verlag
76. G. HINTERSDORF: Tragwerke aus Platten. Deutsche Verlagsanstalt (1972)
77. K. GIRKMANN: Flächentragwerke, Springer-Verlag, Wien (1963)
78. D. LEWE: Pilzdecken, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin (1926)
79. HOESCH - Berichte aus Forschung und Entwicklung H. 3 (1968),  
H. 4 (1970)
80. H. R. JACOBI: Untersuchungen an stützstoffversteiften Verbundstäben,  
Kunststoffe, H. 11, 12 (1949)
81. O. REICH: Beitrag zum Biegeproblem der dünnen, ebenen Sandwichplatte  
mit kleiner Durchbiegung. Habilitationsschrift - Universität  
Dresden (1965)
82. C. LANGLIE: Tragfähigkeitsprobleme ausgeschäumter GFK-Hohlprofile  
bei Kurzzeitbelastung. Diss. Techn. Universität Berlin (1971)
83. K. ALBERS: Querdehnungs- und Gleitzahlen sowie Schub- und Scherfestig-  
keiten von Holzwerkstoffen. Forschungsbericht des Forschungs-  
instituts für Holzwerkstoffe und Holzleime, Karlsruhe (1970)

84. K. MÖHLER, J. EHLBECK: Kurzzeit und Dauerstandsversuche zur Ermittlung der statischen und Dauerstandsfestigkeit von Baufurnierplatten. Berichte aus der Bauforschung (in Vorbereitung)
85. P. GRESSEL: Untersuchungen über das Zeitstandbiegeverhalten von Holzwerkstoffen in Abhängigkeit von Klima und Belastung. Diss. Universität Hamburg (1971)
86. W. SCHNELL: Die dünnwandige Kegelschale unter Axial- und Innendruck. Zeitschrift für Flugwissenschaft H. 4, 5 (1962)
87. F. PLANTEMA: Sandwich construction. The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells. New York, John Wiley & Son Ltd. (1966)



Veröffentlichungen der "Versuchsanstalt"

Verzeichnis der Hefte 1 bis 9 der 3. Folge

- Heft 1            Zur Tragfähigkeit von versteiften Flachblechtafeln im Metallbau  
(Steinhardt/Abdel-Sayed). 1963
- Heft 2            Druckrohrleitungen für Wasserkraftanlagen (Neuere Entwicklungen)  
(Steinhardt). 1965
- Heft 3:            Zur Tragfähigkeit von versteiften Kugelschalen im Metallbau.  
(Steinhardt/Sawires). 1968
- Heft 4            Zur Beulstabilität von Kreiszyinderschalen.  
(Steinhardt/Schulz) 1970
- Heft 5            Die Schwingfestigkeit geschweißter Aluminiumverbindungen -  
Optimierung erweiterter Lebensdauerfunktionen mit Berücksich-  
tigung der Überlebenswahrscheinlichkeiten. (Steinhardt/Kosteas)  
1971
- Heft 6            Aktuelle Forschungsergebnisse aus dem Druckrohrleitungsbau.  
(Steinhardt/Mang) In Vorbereitung
- Heft 7            Jubiläumsausgabe anlässlich der 50-Jahrfeier der "Versuchsanstalt"  
Ansprachen, Kurzvorträge, Veröffentlichungen. 1971
- Heft 8            Voraussage des Ermüdungsverhaltens von Metallkonstruktionen.  
(Kosteas) 1975
- Heft 9            Probleme bei der Anwendung von duroplastischen Kunststoffen im  
konstruktiven Ingenieurbau (Schulz) 1976