Rationalität spezieller L-Werte

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Petra Forster
aus Wiesbaden

Tag der mündlichen Prüfung:
10. Juli 2013

Referent: Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt (Karlsruher Institut für Technologie (KIT))

Korreferent: Priv. Doz. Dr. Stefan Kühnlein (Karlsruher Institut für Technologie (KIT))

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Seien $\mathbb{A}$ der Adelring über $\mathbb{Q}$, π eine cuspidale automorphe Darstellung der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ und σ eine der $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A})$ mit $m < n$. Solch einem Paar von cuspidalen automorphen Darstellungen haben Jacquet, Piatetski-Shapiro und Shalika eine komplexe Funktion $L(s, \pi, \sigma)$, die L-Funktion, zugeordnet [JPSS83]. Diese hat, basierend auf ihrer Definition durch Zeta-Integrale, eine Integraldarstellung, die Rankin-Selberg-Faltung. Die Grundlagen der Theorie der automorphen Darstellungen und L-Funktionen werden in Kapitel 1 wiederholt.

Deligne führt in [Del79] den Begriff der kritischen Stellen für Motive ein, den man auch in die Welt der automorphen Darstellungen übersetzen kann. Allerdings ist diese Übersetzung nur sinnvoll für eine gewisse Klasse von cuspidalen automorphen Darstellungen, den kohomologischen cuspidalen Darstellungen. Das sind Darstellungen, die auch eine Realisierung in der singulären Kohomologie des Quotienten $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/ \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ haben [Clo90, S.121]. Genauer gesagt haben sie in einem gewissen Sinne eine Realisierung in der cuspidalen Kohomologie, die in die singuläre Kohomologie eingebettet ist. Auf kohomologische Darstellungen wird in Abschnitt 2.2 eingegangen, und in Abschnitt 2.3 werden die kritischen Stellen zu Paaren kohomologischer Darstellungen berechnet.

Cuspidale Kohomologie wurde zunächst nicht in der adelischen Sprache definiert, sondern als Kohomologie, die durch automorphe Formen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ definiert ist und in die singuläre Kohomologie eines lokal symmetrischen Raumes $\Gamma\backslash X^1$ für $X^1 := \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ eingebettet ist [Bor81]. Die Übersetzung vom Reellen in das adelische Setting ist durch die starke Approximationseigenschaft von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A})$ gegeben. Die cuspidale Kohomologie wird in den Abschnitten 3.1 und 4.1 diskutiert.

Sei $s_0 \in \mathbb{C}$ eine kritische Stelle für das Paar (π, σ). Man möchte nun den speziellen L-Wert $L(s_0, \pi, \sigma)$ einer L-Funktion zu einem Paar kohomologischer cuspidaler Darstellungen (π, σ) topologisch interpretieren, indem man die L-Funktion zunächst durch eine Rankin-Selberg-Faltung ausdrückt und diese dann als Bild eines bestimmten Elementes der cuspidalen Kohomologie von $\Gamma\backslash X^1$ unter dem Poincaré-Isomorphismus darstellt.

Diese Konstruktion ist motiviert durch folgende Fragestellung:

Ist $L(s_0, \pi, \sigma) \in \Omega \cdot \bar{\mathbb{Q}}$, wobei $\Omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nur von s_0 und dem Paar (π, σ) abhängt?

Aus dieser Fragestellung wird auch klar, weshalb man mit cuspidaler Kohomologie arbeitet: Eine kohomologische cuspidale Darstellungen π ist nach Waldspurger [Wal85] und Clozel [Clo90] bereits über einem Zahlkörper E definiert, so dass eine Kohomologieklasse, welche in dem entsprechenden Darstellungsraum in der cuspidalen Kohomologie liegt, bereits Werte in E annimmt. Die Ergebnisse von Waldspurger und Clozel werden in Abschnitt 4.1 diskutiert.

Seien π eine kohomologische cuspidale Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ und σ eine der $\mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{A})$. Eine kohomologische Interpretation von $L(s_0, \pi, \sigma)$ mittels Poincaré-Dualität wurden erstmals für den Fall $n = 2$ von Manin in [Man72] und von Mazur und Swinnerton-Dyer in [MSD74] angegeben und für $n = 3$ von Schmidt in [Sch93] konstruiert. Dann wurde diese Konstruktion von Kazhdan, Mazur und Schmidt in [KMS00] auf Darstellungen mit trivialem Zentralcharakter für beliebiges $n \geq 2$ erweitert und letztlich von Kasten und Schmidt in [KS13] auch für Darstellungen mit beliebigem Zentralcharakter angegeben.

Konkreter konnte man eine topologische Konstruktion von $\Omega \cdot L(s_0, \pi, \sigma)$ mit einer bestimmten Periode $\Omega \in \mathbb{C}$ angeben, die für das Paar (π, σ) eindeutig bis auf skalare Vielfache in E ist. Im Allgemeinen ist allerdings nicht bekannt, ob diese Periode von 0 verschieden ist. Das Nichtverschwinden konnte man bisher nur in den Fällen $n \in \{2, 3\}$ zeigen [Sch93], [KS13].

In dieser Arbeit habe ich die speziellen L-Werte $L(s_0, \pi, \sigma)$ des Paares (π, σ) untersucht, wobei π eine kohomologische cuspidale Darstellung der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ mit trivialem Zentralcharakter und σ die triviale Darstellung $\mathbb{1}$ ist. Durch Modifikation der Vorgehensweise in [KMS00], konnte ich $L(s_0, \pi) := L(s_0, \pi, \mathbb{1})$ topologisch darstellen, was in Kapitel 3 geschieht, und damit folgendes Resultat (Satz 4.1) zeigen:

Für $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 10, 15\}$ seien π eine kohomologische cuspidale automorphe Darstellung der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ mit trivialem Zentralcharakter und s_0 kritisch für π. Dann existieren nichttriviale, ganze Funktionen $P^{\epsilon}_{I,\infty}(s)$ und Koeffizienten $\epsilon_I \in \{0, \pm 1\}$, die bis auf $\epsilon \in \{\pm 1\}$ eindeutig durch π bestimmt sind, so dass

$$\sum_{|I|=\beta} \epsilon_I P^{\epsilon}_{I,\infty}(s_0) L(s_0, \pi) = 0.$$

Hier ist $\sum_{|I|=\beta} \epsilon_I P^{\epsilon}_{I,\infty}(s_0)$ besagte Periode Ω. Für n ungerade hat $L(s, \pi)$ die möglichen kritischen Stellen 0 und 1, ist n gerade, so ist $s_0 = \frac{1}{2}$. Wir sehen, dass folglich entweder $L(s_0, \pi)$ eine Nullstelle an s_0 hat oder die Periode $\sum_{|I|=\beta} \epsilon_I P^{\epsilon}_{I,\infty}(s_0)$ verschwindet. Nach [JS76] hat jede L-Funktion $L(s, \pi)$ einer cuspidalen automorphen Darstellung π auf der Geraden $\Re(s) = 1$ keine Nullstelle. Die L-Funktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$L(s, \pi) = \epsilon(s, \pi) L(1 - s, \check{\pi}),$$

wobei $\check{\pi}$ die kontragradiente Darstellung zu π und $\epsilon(s, \pi)$ eine ganze Funktion ist, die keine Nullstellen besitzt [Kna94, (3.7)],[JPSS81]. Somit kann jede L-Funktion auch an $s = 0$ keine Nullstelle haben. Wir sehen folglich, dass für ungerades n die Periode $\sum_{|I|=\beta} \epsilon_I P^{\epsilon}_{I,\infty}(s_0)$ im Gegensatz zu bisherigen Ergebnissen verschwindet. Der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung [IS10, 2 Conjecture A)] nach liegen die Nullstellen der L-Funktion $L(s, \pi)$ einer cuspidalen automorphen Darstellung auf der Geraden $\Re(s) = \frac{1}{2}$, so dass für gerades n die Periode noch auf Verschwinden untersucht werden muss.

1. Automorphe Formen, L-Funktionen und Rankin-Selberg Faltungen

Wesentliche Punkte für die Interpretation der L-Funktion am kritischen Wert s_0 als Poincaré-Dual einer bestimmten Kohomologieklasse sind die Fouriertransformation von cuspidalen automorphen Formen und die Integral-Darstellung der L-Funktion, die Rankin-Selberg-Faltung. Daher werden in diesem Kapitel die Grundlagen der Theorie der automorphen Darstellungen wiederholt.

1.1. Automorphe Darstellungen

Sei $K_f \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ eine kompakt-offene Untergruppe. Setze $K := K_f \times \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Weiter bezeichnen $\mathfrak{gl}_n$ die Lie-Algebra von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}})$ das Zentrum der universellen Einhüllenden $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}})$ der komplexifizierten Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}} := \mathfrak{gl}_n \otimes \mathbb{C}$ von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $Z(\mathbb{A})$ das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$.

Definition 1.1. Eine Funktion $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ heißt *cuspidale automorphe Form*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\varphi(\gamma g) = \varphi(g)$ für alle $\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ (Automorphie),
2. der von den Translaten $\{\varphi(gk) \mid k \in K\}$ aufgespannte Unterraum ist endlich-dimensional (K-Endlichkeit),
3. es gibt einen Charakter $\omega : \mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$, so dass $\varphi(zg) = \omega(z)\varphi(g)$ für jedes $z \in Z(\mathbb{A})$,
4. als Funktion auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist φ glatt, und es gibt ein Ideal $\mathcal{I} \leq \mathcal{Z}(\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}})$ von endlicher Kodimension, so dass $\mathcal{I}\varphi = 0$ ($\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}})$-Endlichkeit),
5. es gibt ein $r > 0$ und eine Konstante C, so dass $|\varphi(g)| \leq C\|g\|^r$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ ist (moderates Wachstum),
6. es gilt $\int_{U(\mathbb{Q})\backslash U(\mathbb{A})} \varphi(ug)du = 0$ für alle unipotenten Radikale U der standard-parabolischen Untergruppen in GL_n (Cuspidalität).

Der Raum der cuspidalen automorphen Formen mit *Zentralcharakter* ω wird mit $\mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ bezeichnet.

Oftmals geht man zu einem etwas größeren Raum $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega) \supseteq \mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ über. Anstelle von Bedingung 2 wird hier lediglich gefordert, dass die Funktionen φ K_f-endlich sind. Diese Bedingung kann auch folgendermaßen formuliert werden:

2'. Es gibt eine kompakt-offene Untergruppe $L \leq K_f$, so dass $\varphi(gl) = \varphi(g)$ für alle $l \in L$.

Zudem muss Bedingung 5 verstärkt werden:

5'. Es gibt ein $r > 0$, so dass für alle $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{gl}_{n,\mathbb{C}})$ eine Konstante C_X existiert mit $|X\varphi(g)| \leq C_X \|g\|^r$, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ ist (gleichmäßig moderates Wachstum).

Nach [HC68, §4, Lemma 14] implizieren die $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$-Endlichkeit und das moderate Wachstum schon gleichmäßig moderates Wachstum, so dass Bedingung 5' nicht wirklich eine Verschärfung ist.

Der Raum $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ aller Funktionen $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$, welche die Bedingungen 1,2', 3,4,5' und 6 erfüllen, heißt der Raum der *glatten cuspidalen automorphen Formen*. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ operiert durch Rechtstranslation auf $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$. Betrachtet man nur die Operation der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so ist dieser Raum ein differenzierbarer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$-Modul.

Der Unterraum $\mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ der $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$-endlichen Vektoren in $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ hingegen ist nicht invariant unter der Aktion von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Allerdings operieren $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ und $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ noch durch Rechtstranslation auf diesem Raum, sowie auch die Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n$, so dass dieser Raum mit einer $(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$-Modulstruktur ausgestattet werden kann, auf die wir in Kapitel 2.1 zurückkommen.

Definition 1.2. Eine irreduzibler $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$-Untermodul von $\mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ heißt *cuspidale automorphe Darstellungen*.

Sei $L_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ der Hilbertraum bestehend aus allen messbaren Funktionen $\varphi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ mit unitärem Zentralcharakter ω, die cuspidal sind und

$$\int_{Z(\mathbb{A})\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})} |\varphi(g)|^2 dg < \infty$$

erfüllen. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ operiert auch auf diesem Raum durch Rechtstranslation.

Definition 1.3. Sei (π, V) eine Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ in einen Hilbertraum V. Ein Vektor $v \in V$ heißt *glatt* oder *C^∞-Vektor*, wenn die Abbildung

$$\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) \longrightarrow V, \quad \Phi(g) := \pi(g)v$$

glatt ist, d.h. aufgefasst als Funktion auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ ist sie lokal konstant und als Funktion auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist sie glatt.

Bemerkung 1.1. (a) Nach [CKM04, Lecture 2 §4, S. 26] ist $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ der Unterraum der glatten Vektoren in $L_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$. Für jede kompakt-offene Untergruppe $L \leq \mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$ sei $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)^L$ der Unterraum aller Funktionen, die rechtsinvariant unter L sind. Diese Räume tragen eine Fréchet-Topologie, die durch die Halbnormen ρ_X mit $\rho_X(f) := \sup_{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})} \|g\|^{-r} |X\varphi(g)| < \infty$ gegeben ist. Da sich $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ als projektiver Limes dieser Fixräume darstellen lässt, wird nach [CKM04, Lecture 2 §4, S.24] eine Limes-Fréchet-Topologie auf dem Raum der glatten cuspidalen Formen induziert.

(b) Der Raum $L_0^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}), \omega)$ zerfällt in eine direkte Hilbert-Summe irreduzibler unitärer Unterdarstellungen (π, V_π) der Rechtsregulären Darstellung mit endlichen Vielfachheiten [Gel75, Theorem 5.1], und das induziert durch den Übergang zu den glatten Vektoren eine Zerlegung von $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ in eine direkte Summe irreduzibler (abgeschlossener) Unterdarstellung (π, V_π^∞), wobei V_π^∞ der Unterraum der glatten Vektoren in V ist. Geht man zu den $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$-endlichen Vektoren über, so erhält man eine Zerlegung von $\mathcal{A}_0(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ in eine direkte Summe (algebraisch) irreduzibler $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)\times(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$-Moduln $(\pi, V^{(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))})$, den cuspidalen automorphen Darstellungen, wobei $V^{(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))}$ den Unterraum der $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$-endlichen Vektoren in V^∞ bezeichnet [CKM04, Lecture 3 §4, S.26].

(c) Ist (π, V) eine cuspidale automorphe Darstellung mit Zentralcharakter ω, der nicht unitär ist, dann gibt es ein $t \in \mathbb{C}$, so dass $\pi \otimes |\det(\cdot)|^t$ unitären Zentralcharakter hat [CKM04, Lecture 3.4, S.26], [CPS04, S.21 unten] .

Definition 1.4. [Vog97, Definition 2.11] Seien (π, V) eine Darstellung einer topologischen Gruppe G, $K \leq G$ eine kompakte Untergruppe und $V^{(K)}$ der Unterraum der K-endlichen Vektoren in V. Weiter sei $\hat{K}$ die Menge aller Äquivalenzklassen irreduzibler endlichdimensionaler Darstellungen von K. Nach [Vog87, Chapter 2, (2.8)] lässt sich $(\pi\mid_K, V^{(K)})$ in eine direkte Summe $V^{(K)} = \bigoplus_{\rho\in\hat{K}} V(\rho)$ zerlegen, wobei $V(\rho)$ die *ρ-isotypische Komponente von $V^{(K)}$* bezeichnet, d.h. die Summe aller Kopien von ρ in V.

Die Darstellung (π, V) heißt *zulässig*, wenn jede irreduzible Darstellung $\rho \in \hat{K}$ nur mit endlicher Vielfachheit in der Zerlegung von $V^{(K)}$ auftaucht. Äquivalent dazu ist, dass jede isotypische Komponente $V(\rho)$ in dieser Zerlegung endliche Dimension hat.

Definition 1.5. [Fla79] Sei $\{W_v \mid v \in V\}$ eine Familie von Vektorräumen und sei $V_0 \subseteq V$ eine endliche Teilmenge. Für jedes $v \in V \setminus V_0$ sei x_v ein von 0 verschiedener Vektor in W_v. Weiter sei $W_S := \otimes_{v\in S} W_v$ für jede endliche Teilmenge $S \subset V$ mit $V_0 \subseteq S$, und für $S \subseteq S'$ sei $f_S : W_S \longrightarrow W_{S'}$ gegeben durch

$$\otimes_{v\in S} w_v \mapsto \otimes_{v\in S} w_v \otimes_{v\in S'\setminus S} x_v.$$

Das *eingeschränkte Tensorprodukt $W = \otimes'_{v\in V} W_v$ bezüglich der Vektoren x_v* ist definiert als der induktive Limes

$$W := \varinjlim_S W_S$$

und wird aufgespannt von den Elementen der Form $w = \otimes_{v\in V} w_v$ mit $w_v = x_v$ für fast alle v.

Ein wichtiges Resultat ist das Tensorprodukt-Theorem [Fla79]:

Satz 1.1. *Ist (π, V) eine cuspidale automorphe Darstellung, so gibt es einen irreduziblen zulässigen $(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$-Modul (π_∞, V_∞) (siehe Definition 2.2) und für jedes $p < \infty$ irreduzible zulässige Darstellungen (π_p, V_p) von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, so dass fast jede Darstellung π_p einen bis auf eine Konstante eindeutigen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-fixen Vektor e_p besitzt und π isomorph zum eingeschränk-*

ten Tensorprodukt $\otimes'_{p\leq\infty}\pi_p$ bezüglich der Vektoren e_p ist. Die Darstellungen $\pi_p, p \leq \infty$ sind eindeutig bis auf Äquivalenz.

Bemerkung 1.2. Darstellungen (π_p, V_p), deren Unterraum der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-fixen Vektoren eindimensional ist, heißen *unverzweigt*. Eine glatte cuspidale automorphe Darstellung (π, V) besitzt dann eine Faktorisierung $\pi \cong \otimes'_{p\leq\infty}\pi_p$ in irreduzible zulässige Darstellungen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, die fast alle unverzweigt sind, und eine irreduzible zulässige Darstellung (π_∞, V_∞) von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, wobei der Raum $V_\infty^{(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))}$ der $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$-endlichen Vektoren in V der $(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$-Modul an der ∞-Komponente in der Zerlegung von $(\pi, V^{(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))})$ ist [CKM04, Lecture 3, Theorem 3.43].

Definition 1.6. Seien $\psi : \mathbb{Q}\backslash\mathbb{A} \to \mathbb{C}^\times$ ein nicht-trivialer additiver Charakter und $N_n \leq \mathrm{GL}_n$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Dann definiert ψ auch einen Charakter von $N_n(\mathbb{Q})\backslash N_n(\mathbb{A})$ durch $\psi(u) := \psi(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1})$, wobei $\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}$ die Summe der Elemente der Nebendiagonalen von $u \in N_n(\mathbb{A})$ ist. Die zu $\varphi \in \mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$ assoziierte *ψ-Whittakerfunktion* ist definiert als

$$w_\varphi(g) = w_{\varphi,\psi}(g) = \int_{N_n(\mathbb{Q})\backslash N_n(\mathbb{A})} \varphi(ug)\psi^{-1}(u)du.$$

Bemerkung 1.3. Die Funktionen w_φ sind glatte Funktionen auf $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ und erfüllen $w_\varphi(ng) = \psi(n)w_\varphi(g)$ für jedes $n \in N_n(\mathbb{A})$, und nach [Sha74, Theorem 5.9] besitzt φ eine Fourierentwicklung

$$\varphi(g) = \sum_{\gamma\in N_{n-1}(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{Q})} w_\varphi\left(\begin{pmatrix}\gamma & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right).$$

Definition 1.7. Sei (π, V_π) eine (glatte) cuspidale Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, dann heißt der Raum $\mathcal{W}(\pi, \psi) := \{w_\varphi \mid \varphi \in V_\pi\}$ das *Whittaker-Modell* von π.

Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ operiert auch auf diesem Raum durch Rechtstranslation, und die Abbildung

$$\mathcal{F} : V_\pi \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}(\pi, \psi), \quad \varphi \mapsto w_\varphi,$$

gegeben durch Fouriertransformation, ist eine Äquivalenz von Darstellungen.

Für $p \leq \infty$ sei ψ_p ein nicht-trivialer Charakter von $\mathbb{Q}_p$, dann definiert ψ_p auch einen Charakter von $N(\mathbb{Q}_p)$. Sei (π_p, V_p) eine lokale Komponente einer cuspidalen automorphen Darstellung. Die Existenz des globalen Whittaker-Modelles und das Tensorprodukt-Theorem implizieren, dass es für jedes $p \leq \infty$ ein nicht-triviales [1] Funktional $\Lambda_p : V_p \to \mathbb{C}$ mit

$$\Lambda_p(\pi_p(n)\xi) = \psi_p(n)\Lambda_p(\xi), \quad \xi \in V_p, n \in N(\mathbb{Q}_p),$$

gibt. Ein solches Funktional heißt *Whittaker-Funktional*. Auf dem Raum $\mathcal{W}(\pi_p, \psi_p)$ bestehend aus den Funktionen $w_\xi(g) := \Lambda_p(\pi_p(g)\xi)$, $\xi \in V_p$, operiert $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ durch Rechtstranslation. Diese Darstellung ist äquivalent zu (π_p, V_p) und heißt das *Whittaker-Model* von π_p.

[1] Der Raum V_∞ ist der Raum der $\mathbb{C}^\infty$-Vektoren eines Hilbertraumes und trägt die Fréchet-Topologie [Wal88, 1.6]. Dann verlangt man ein stetiges Funktional.

Satz 1.2. *[Sha74, Theorem 3.1] Für $p \leq \infty$ seien ψ_p ein nicht-trivialer additiver Charakter von $\mathbb{Q}_p$. Der Raum der ψ_p-Whittaker-Funktionale einer irreduziblen, zulässigen Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, ist höchstens eindimensional. Falls ein Whittaker-Modell existiert, ist es somit eindeutig.*

Darstellungen, die ein Whittaker-Model besitzen heißen *generische Darstellungen*.

Folgerungen 1.1.

1. *Das globale Whittaker-Modell $\mathcal{W}(\pi, \psi)$ von π ist nach [Sha74, Theorem 4.5 (1)] ebenfalls eindeutig.*

2. *Sei (π, V) eine cuspidale automorphe Darstellung mit Tensorproduktzerlegung $\pi = \otimes'_{p\leq\infty}\pi_p$ in Darstellungen (π_p, V_p). Sei $\varphi \in V_\pi$ isomorph zu einem reinen Tensor $\otimes'\xi_p \in \otimes' V_p$, so haben wir nach [Sha74, Theorem 4.5 (2)] die Produktzerlegung*

$$w_\varphi(g) = \prod_p w_{\xi_p}(g_p), \ g = (g_p)_{p\leq\infty} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}).$$

Ist φ isomorph zu einem reinen Tensor in $\otimes' V_p$, so heißt φ faktorisierbar.

1.2. L-Funktionen und Rankin-Selberg-Faltungen

Definition 1.8. Seien (π, V_π) bzw. $(\pi', V_{\pi'})$ cuspidale automorphe Darstellungen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ bzw. $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A})$, $m < n$, $\varphi \in V_\pi$ und $\varphi' \in V_{\pi'}$. Weiter seien ψ ein beliebiger nicht-trivialer Charakter von $\mathbb{A}$ und $Y_{n,m} \leq \mathrm{GL}_n$ das unipotente Radikal der standard-parabolischen Untergruppe zur Partition $(m+1, 1, \ldots, 1)$. Dann ist die *Rankin-Selberg-Faltung* von φ und φ' definiert als

$$I(s, \varphi, \varphi') = \int_{\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{A})} \int_{Y_{n,m}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,m}(\mathbb{A})} \varphi\left(y\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & I_{n-m}\end{pmatrix}\right)\psi^{-1}(y)dy\ \varphi'(h)|\det(h)|^{s-(n-m)/2}dh,$$

wobei $s \in \mathbb{C}$ ist.

Seien φ und φ' zusätzlich faktorisierbar. Für jedes $p \leq \infty$ seien $\prod_p w_p \cong w_\varphi \in \mathcal{W}(\pi, \psi)$ und $\prod_p w'_p \cong w_{\varphi'} \in \mathcal{W}(\pi', \psi^{-1})$ die Whittakerfunktionen zu φ und φ'. Wir betrachten für jedes $p \leq \infty$ die Integrale

$$\Psi_p(s, w_p, w'_p) = \int_{N_m(\mathbb{Q}_p)\backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)} w_p\left(\begin{pmatrix} h_p & 0 \\ 0 & I_{n-m}\end{pmatrix}\right) w'_p(h_p)|\det(h_p)|_p^{s-(n-m)/2}dh_p,$$

die nach [JPSS83, Th.2.7] bzw. [JS81, Prop. 2.6] für $\mathrm{Re}(s) >> 0$ absolut konvergieren.

Nach [CPS04, Theorem 2.1] sind die Integrale $I(s, \varphi, \varphi')$ ganze Funktionen, beschränkt in vertikalen Streifen und erfüllen eine Funktionalgleichung. Sind φ und φ' faktorisierbar, so gilt

$$I(s,\varphi,\varphi')=\prod_p \Psi_p(s,w_p,w'_p)$$

mit absoluter und uniformer Konvergenz für $Re(s) >> 0$.

Sei nun $p<\infty$, und bezeichne $\mathcal{I}(\pi_p,\pi'_p)$ den komplex-linearen Spann aller lokalen Integrale $\Psi_p(s,w_p,w'_p)$ mit $w_p\in\mathcal{W}(\pi_p,\psi_p)$, $w'_p\in\mathcal{W}(\pi'_p,\psi_p^{-1})$. $\mathcal{I}(\pi_p,\pi'_p)$ ist ein gebrochenes $\mathbb{C}[p^s,p^{-s}]$-Ideal in $\mathbb{C}(p^s)$. Da $\mathbb{C}[p^s,p^{-s}]$ ein Hauptidealring ist, ist das Ideal von einem Element erzeugt. Dieser Erzeuger kann sogar von der Form $(P(p^{-s}))^{-1}$ mit einem Polynom $P(X)$ in $\mathbb{C}[X]$ gewählt werden, da $1\in\mathcal{I}(\pi_p,\pi'_p)$ und p^s eine Einheit ist [JPSS83, Theorem 2.7].

Definition 1.9. Normieren wir das Polynom $P(X)$ durch $P(0)=1$, so heißt dieser Erzeuger $P(p^{-s}))^{-1}$ die *lokale L-Funktion* $L(s,\pi_p,\pi'_p)$. Ist π' die triviale Darstellung, so erhalten wir die lokale L-Funktion $L(s,\pi_p)$.

Insbesondere ist die L-Funktion eine Linearkombination von Ψ-Integralen.

Bemerkung 1.4. Nach [JPSS83, (2.12)]. ist die L-Funktion unabhängig von der Wahl des nicht-trivialen Charakters ψ_p des Whittaker-Modelles. Insbesondere können wir den Charakter ψ_p so wählen, dass er trivial auf $\mathbb{Z}_p$ ist. Ein solcher Charakter heißt *unverzweigt*.

Bemerkung 1.5.

(a) Seien π_p und π'_p unverzweigt und $w_p^0\in\mathcal{W}(\pi_p,\psi_p)$, $w'^0_p\in\mathcal{W}(\pi'_p,\psi_p^{-1})$ die durch $w_p^0(e)=w'^0_p(e)=1$ normierten $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$-fixen Vektoren, so ist nach [CKM04, Theorem 7.1] $L(s,\pi_p,\pi'_p)=\Psi(s,w_p^0,w'^0_p)$. Nach dem Tensorprodukttheorem (Satz 1.1) gilt dies für fast alle lokalen Komponenten einer cuspidalen Darstellung.

(b) Die archimedische L-Funktion ist nicht durch die Integrale $\psi(s,w_\infty,w'_\infty)$ mit $w_\infty\in\mathcal{W}(\pi_\infty,\psi_\infty)$ und $w'_\infty\in\mathcal{W}(\pi'_\infty,\psi_\infty^{-1})$ definiert, sondern als Artin-Weil-L-Funktion bestimmter Darstellungen der Weil-Gruppe von $\mathbb{R}$. Sie wird ausführlich in Kapitel 2 behandelt. Allerdings sind die Quotienten $\frac{\psi(s,w_\infty,w'_\infty)}{L(s,\pi_\infty,\pi'_\infty)}$ nach [CPS04, Theorem 1.2] ganze Funktionen.

Definition 1.10. Die *globale L-Funktion* $L(s,\pi,\pi')$ ist formal definiert als Euler-Produkt

$$L(s,\pi,\pi')=\prod_{p\leq\infty} L(s,\pi_p,\pi'_p).$$

Nach [CPS04, Theorem 2.3] ist dieses Produkt absolut konvergent in einer rechten Halbebene, und lässt sich durch $I(s,\varphi,\varphi')$ für geeignete Spitzenformen φ,φ' zu einer ganzen Funktion fortsetzen. Zudem erfüllt die L-Funktion eine Funktionalgleichung, die $L(s,\pi,\pi')$ in Beziehung zu $L(1-s,\tilde{\pi},\tilde{\pi}')$ setzt, wobei $\tilde{\pi},\tilde{\pi}'$ die kontragradienten Darstellungen zu π bzw. π' sind.

Eine für uns sehr wichtige Darstellung der globalen L-Funktion, die sich aus Bemerkung (1.5) ergibt, ist die folgende: Zu jedem Paar $w_\infty\in\mathcal{W}(\pi_\infty,\psi_\infty)$, $w'_\infty\in\mathcal{W}(\pi'_\infty,\psi_\infty^{-1})$ gibt es eine ganze Funktion $P_\infty(s)$, so dass

$$P_\infty(s) \cdot L(s,\pi,\pi') =$$
$$\sum_{i=1}^{r} \int_{\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{A})} \int_{Y_{n,m}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,m}(\mathbb{A})} \varphi_i(yg)\psi^{-1}(y)dy\ \varphi_i'(g)|\det(g)|^{s-(n-m)/2}dg, \tag{1.1}$$

wobei $\varphi_i \in V_\pi \subseteq \mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$ bzw. $\varphi_i' \in V_{\pi'} \subseteq \mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$ für $i = 1, \ldots, n$ die inversen Fouriertransformierten von globalen Whittaker-Funktion mit ∞-Komponente w_∞ bzw. mit ∞-Komponente w_∞' sind.

2. Kohomologische Darstellungen und Kritische Stellen

2.1. Archimedische Langlandskorrespondenz

Um kohomologische Darstellungen zu untersuchen und die zugehörigen kritischen Stellen zu berechnen, benötigen wir die archimedische Langlandskorrespondenz. Diese beschreibt eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von halbeinfachen Darstellungen der Weilgruppe $W_{\mathbb{R}}$ und der Menge der infinitesimalen Äquivalenzklassen von irreduziblen, zulässigen Darstellungen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Seien G eine Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten, $H \leq G$ eine Lie-Untergruppe, $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G und $\mathfrak{h}$ die Lie-Algebra von H.

Definition 2.1. Ein $(\mathfrak{g}, H)$-Modul (π, V) ist ein komplexer Vektorraum V, der sowohl ein $\mathfrak{g}$-Modul als auch ein H-Modul ist, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) V ist ein lokal-endlicher H-Modul, d.h. für jedes $v \in V$ ist der Spann von $\pi(H)v$ endlichdimensional, und H operiert glatt auf diesen Unterräumen,

(2) das Differential $d\pi$ der Operation von H stimmt mit der Restriktion $\pi\mid_{\mathfrak{h}}$ der Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ überein,

(3) $\pi(k)(\pi(X)v) = \pi(\mathrm{Ad}\, k(X))(\pi(k)(v))\ \forall k \in H, X \in \mathfrak{g}$.

Definition 2.2. Sei $K \leq G$ eine maximal kompakte Untergruppe. Ein $(\mathfrak{g}, K)$-Modul (π, V) heißt zulässig, wenn jede irreduzible endlichdimensionale Darstellung $\rho \in \hat{K}$ mit endlicher Multiplizität in der Zerlegung von $(\pi\mid_K, V)$ auftaucht.

Bemerkung 2.1. (1) Seien (π, V) eine stetige Darstellung von G auf einem Hilbertraum und $V^\infty \subseteq V$ der Unterraum der C^∞-Vektoren. Weiter sei $V^{(K)} \subseteq V$ für eine maximal kompakte Untergruppe $K \leq G$ der Unterraum der K-endlichen Vektoren. Setze $V_0 := V^{(K)} \cap V^\infty$. Dann kann V_0 mit einer von π induzierten $(\mathfrak{g}, K)$-Modulstruktur ausgestattet werden und heißt *Harish-Chandra-Modul von* (π, V). Ist (π, V) eine zulässige stetige Darstellung von G auf einem Hilbertraum, so ist bereits $V^{(K)} = V_0$ [Vog97, Example 1.9].

(2) Ist (π, V) eine zulässige stetige Darstellung von G auf einem Hilbertraum, so ist π nach [Wal88, Theorem 3.4.12] genau dann irreduzibel, wenn der zugrunde liegende $(\mathfrak{g}, K)$-Modul irreduzibel ist.

(3) Zwei zulässige Darstellungen von G heißen *infinitesimal äquivalent*, wenn die unterliegen-

den $(\mathfrak{g}, K)$-Module äquivalent sind. Nach [Wal88, 3.4.10] sind irreduzible unitäre Darstellungen zulässig. Sind π und π' irreduzible unitäre Darstellungen von G auf einem Hilbertraum, so sind π und π' nach [Wal88, Theorem 3.4.11] genau dann äquivalent, wenn sie infinitesimal äquivalent sind.

(4) Jeder irreduzible zulässige $(\mathfrak{g}, K)$-Modul kann als Unterraum der K-endlichen Vektoren einer irreduziblen zulässigen Darstellung auf einem Hilbertraum dargestellt werden. [Vog87, Theorem 2.15].

Ist insbesondere (π, V) eine unitäre cuspidale Darstellung, d.h. eine irreduzible Unterdarstellung von $L^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}), \omega)$, so ist $V^{(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))} = V_0$ eine cuspidale automorphe Darstellung, d.h. ein irreduzibler $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f) \times (\mathfrak{g}, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$-Modul. Nach (2)-(4) können wir folglich anstelle einer cuspidalen automorphen Darstellung die zugehörige irreduzible Darstellung in $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$ oder in $L^2(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))$ betrachten wie bereits in Bemerkung 1.1 angemerkt.

Seien G eine reelle reduktive Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, (π, V) ein $(\mathfrak{g}, K)$-Modul und $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ das Zentrum der universell einhüllenden Algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ der komplexifizierten Lie-Algebra. Dann setzt sich π aufgrund der universellen Abbildungseigenschaft von $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ zu einer Darstellung von $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ fort. Gibt es einen Charakter $\chi : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, so dass $\pi(Z)v = \chi(Z)v$ für jedes $Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ und jedes $v \in V$, so heißt χ *infinitesimaler Charakter* von π.

Sei $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \{u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \mid \mathrm{Ad}(g)u = u\ \forall g \in G\}$. Es ist $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. Ist (π, V) ein irreduzibler zulässiger $(\mathfrak{g}, K)$-Modul, so operiert $\mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ nach [Vog87, Lemma 6.6] durch Skalare auf V. Ist G eine Gruppe mit $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}) = \mathcal{Z}_G(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, so hat π in diesem Fall einen infinitesimalen Charakter. Insbesondere haben die ∞-Komponente einer cuspidalen automorphen Darstellung der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ und jede irreduzible endlichdimensionale Darstellung der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ einen infinitesimalen Charakter.

Für $l \in \mathbb{N}$ sei D_l die diskrete Reihe-Darstellung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})^\pm$ [Kna94, (2.1a)].

Zur Klassifikation der irreduziblen, zulässigen Darstellungen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ benötigen wir als Bausteine die irreduziblen Darstellungen

$$\mathbf{1} \otimes |\cdot|^{\mathbf{t}} \quad \text{und} \quad \mathrm{sgn} \otimes |\cdot|^{\mathbf{t}}$$

von $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ mit $t \in \mathbb{C}$ und die irreduziblen Darstellungen

$$D_l \otimes |\det(\cdot)|^t$$

von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mit $l \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{C}$. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, $m_1, m_2 \in \{0, 1\}$ und μ_1, μ_2 Charaktere von $\mathbb{R}^\times$ gegeben durch

$$\mu_i(t) = |t|^{a_i} \operatorname{sgn}(t)^{m_i}$$

mit $a_1 - a_2 + 1 \equiv m_1 + m_2 \mod 2$. Seien $B \leq \mathrm{GL}_2$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $b = \begin{pmatrix} t_1 & * \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in B$. Dann ist ein Charakter auf B durch

$$\mu(b) := \mu_1(t_1)\mu_2(t_2)$$

gegeben. Seien $a_1 - a_2 = l$ und $a_1 + a_2 = 2t$, dann ist der Harish-Chandra-Modul der diskreten Reihe $D_l \otimes |\det(\cdot)|^t$ nach [Gel75, §4] ein irreduzibler Unterquotient von

$$\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})}(\mu) = \{f \in C^\infty(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \mid f(bg) = \mu_1(t_1)\mu_2(t_2)\left|\frac{t_1}{t_2}\right|^{\frac{1}{2}} f(g),\ f\ \ \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) - \text{endlich}\}.$$

Wir sehen hier, dass nach [BW80, III.3.2] $a_1 + a_2 (= 2t)$ der Zentralcharakter und (a_1, a_2) der infinitesimale Charakter in der Harish-Chandra-Parametrisierung [Wal88, 3.2] ist.

Sei $n = n_1 + \ldots + n_r$ eine Partition von n mit $n_i \in \{1, 2\}$. Für jedes $i = 1, \ldots, r$ sei eine der oben genannten Darstellungen σ_i von $\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{R})$ gegeben. Dann ist $\sigma_1 \otimes \ldots \otimes \sigma_r$ eine Darstellung der Levi-Untergruppe $M := \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(\mathbb{R})$ der parabolischen Untergruppe $Q \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ zu dieser Partition und wird auf Q fortgesetzt, indem sie auf dem unipotenten Radikal von Q trivial sein soll. Durch unitäre Induktion [Vog87, Chapter 3] erhalten wir eine Darstellung

$$I(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) := \mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(\sigma_1 \otimes \ldots \sigma_r)$$

von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Satz 2.1. *[Kna94, §2 Theorem 1]*

(a) *Erfüllen die Parameter $n_j^{-1} Re(t_j)$ von σ_j, $j = 1, \ldots, r$, die Bedingung*

$$n_1^{-1} Re(t_1) \geq \ldots \geq n_r^{-1} Re(t_r),$$

dann hat $I(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ genau einen irreduziblen Unterquotienten $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

(b) *Die Darstellungen $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ aus (a) erschöpfen alle irreduziblen zulässigen Darstellungen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bis auf infinitesimale Äquivalenz.*

(c) *Je zwei Darstellungen $J(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ und $J(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_s)$ sind genau dann infinitesimal äquivalent, wenn $r = s$ und eine Permutation τ mit $\sigma'_i = \sigma_{\tau(i)}$ für alle $i = 1, \ldots, r$ existiert.*

Bemerkung 2.2. Sei π eine cuspidale automorphe Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$, dann sind die Komponenten π_p, $p \leq \infty$, nach Kapitel 1.1 generisch. Nach [Clo90, S.83] ist die ∞-Komponente dann schon äquivalent zu einer induzierten Darstellung $I(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.

Auf der anderen Seite der Langlandskorrespondenz stehen die halbeinfachen Darstellungen der Weilgruppe $W_\mathbb{R} = \mathbb{C}^\times \cup j\mathbb{C}^\times$ von $\mathbb{R}$, wobei $j^2 = -1$ und $jzj^{-1} = \bar{z}$. Die eindimensionalen Darstellungen φ sind gegeben durch

$$\varphi(z) = |z|^t \text{ und } \varphi(j) = \pm 1,$$

wobei $z \in \mathbb{C}^\times, t \in \mathbb{C}$. Wir schreiben kurz $(+, t)$ und $(-, t)$. Die Einschränkung auf $\mathbb{C}^\times$ notieren wir auch als Charakter $\chi(z) = (z\bar{z})^a$ mit $2a = t$.

Die zweidimensionalen Darstellungen können durch $l \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{C}$ parametrisiert werden. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, so dass $l := a_1 - a_2 \in \mathbb{N}$. Setze $2t := a_1 + a_2$. Für $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times$ ist bei geeigneter Basiswahl $\{u, u'\}$ des Darstellungsraumes [Kna94, §3 (3.3)]

$$\begin{aligned} \varphi(z)u &= z^{a_1}\bar{z}^{a_2}u &= r^{2t}e^{il\theta}u \quad \text{und} \quad \varphi(j)u &= u', \\ \varphi(z)u' &= z^{a_2}\bar{z}^{a_1}u &= r^{2t}e^{-il\theta}u \quad \text{und} \quad \varphi(j)u' &= (-1)^l u. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diese Darstellungen mit (l, t). Für die Einschränkung auf $\mathbb{C}^\times$ verwenden wir auch die Notation $\chi_1 \oplus \chi_2$ mit Charakteren $\chi_1(z) = z^{a_1}\bar{z}^{a_2}$ und $\chi_2(z) = z^{a_2}\bar{z}^{a_1}$.

Bemerkung 2.3. Die endlich-dimensionalen halbeinfachen Darstellungen von $W_\mathbb{R}$ sind vollständig reduzibel, und jede irreduzible Darstellung hat Dimension 1 oder 2.

Um die Langlandskorrespondenz zu formulieren, betrachten wir folgende Zuordnung:

$$\begin{aligned} (+, t) &\mapsto \mathbf{1} \otimes |\cdot|^{\mathbf{t}}, \\ (-, t) &\mapsto \operatorname{sgn} \otimes |\cdot|^t, \\ (l, t) &\mapsto D_l \otimes |\cdot|^t. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Satz 2.2 (Archimedische Langlandskorrespondenz [Kna94, §3 Theorem 2])**.** *Sei $\varphi = \oplus_{i=1}^r \varphi_i$ eine halbeinfache, komplexe Darstellung von $W_\mathbb{R}$ mit irreduziblen Komponenten φ_i. Für jedes $i = 1, \ldots, r$ sei σ_i die wie in (2.1) zugeordnete irreduzible Darstellung von* $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ *bzw.* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$*. Dann ist die Zuordnung*

$$\varphi \mapsto \mathrm{J}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$$

eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen von n-dimensionalen, halbeinfachen Komplexen Darstellungen von $W_\mathbb{R}$ und der Menge der infinitesimalen Äquivalenzklassen der irreduziblen zulässigen Darstellungen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2.2. Kohomologische Darstellungen

In diesem Abschnitt werden wir unter Verwendung der Langlandsklassifikation für irreduzible zulässige Darstellungen die Gestalt der ∞-Komponente einer kohomologischen cuspidalen Darstellung beschreiben. Die hier angegebene Beschreibung leitet sich direkt aus Clozels Resultaten [Clo90, §3] ab.

Definition 2.3. Seien G eine Lie-Gruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten, $H \leq G$ eine Lie-Untergruppe und (π, V) ein $(\mathfrak{g}, H)$-Modul. Setze

$$C^q(\mathfrak{g}, H, V) := \mathrm{Hom}_H(\bigwedge^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}), V)$$
$$\cong (\bigwedge^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* \otimes V)^H,$$

wobei H via der adjungierten Darstellung Ad auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ operiert. $C^q(\mathfrak{g}, H, V)$ wird mit dem Differential

$$d_q\omega(X_0, \ldots, X_q) := \sum_{i=0}^{q}(-1)^i X_i \cdot \omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_q)+$$
$$\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_q)$$

ausgestattet.

Mit $H^q(\mathfrak{g}, H, V)$ bezeichnen wir die q-te Kohomologiegruppe Kern d_q/ Bild d_{q-1}.

Bemerkung 2.4. Sei G eine Lie-Gruppe mit maximal kompakter Untergruppe K. Ist (π, V) eine stetige Darstellung in einen Hilbertraum, so ist der Unterraum der glatten Vektoren $V^\infty \subseteq V$ zwar ein differenzierbarer G-Modul, aber im Allgemeinen kein $(\mathfrak{g}, K)$-Modul, da V^∞ in der Regel kein lokal-endlicher K-Modul ist. Wir können aber auch hier den Komplex $\mathrm{Hom}_K(\bigwedge^\bullet(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), V^\infty)$ definieren, und die K-Invarianz erzwingt

$$C^\bullet(\mathfrak{g}, K, V^\infty) = C^\bullet(\mathfrak{g}, K, V_0).$$

Seien T_n der maximale Torus bestehend aus den Diagonalmatrizen in GL_n, $X(T_n)$ die Menge aller algebraischen Charaktere $\alpha : T_n \to \mathbb{G}_m$ und $X^+(T_n)$ die Menge aller dominanten Gewichte. Wir identifizieren $X(T_n)$ mit $\mathbb{Z}^n$ via

$$(T_n \ni t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} t_i^{\mu_i}) \mapsto \mu = (\mu_i) \in \mathbb{Z}^n.$$

Zu $\mu \in X^+(T_n)$ sei $(\rho_\mu, M_{\mu,\mathbb{Q}})$ die bis auf Isomorphie eindeutige irreduzible endlich-dimensionale rationale Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ von Höchstgewicht μ. Nach [Clo90, p.122] ist ρ_μ bereits über $\mathbb{Q}$ definiert. Ist $K/\mathbb{Q}$ ein Erweiterungskörper, so schreiben wir $M_{\mu,K} := M_{\mu,\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K$.

Definition 2.4. Sei $\mathrm{Coh}(\mathrm{GL}_n, \mu)$ die Menge der cuspidalen automorphen Darstellung $\pi \cong \pi_\infty \otimes \pi_f$, so dass

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, Z_n(\mathbb{R})^+ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_{\mu,\mathbb{C}}) \neq 0,$$

wobei $Z_n(\mathbb{R})^+$ die Zusammenhangskomponente der Eins des Zentrums von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bezeichnet und $\check{\rho}_\mu$ die zu ρ_μ duale Darstellung ist. Solche Darstellungen bezeichnen wir auch als *kohomologische Darstellungen*.

Da $\mathrm{Ad}(Z_n(\mathbb{R})^+) = 1$, muss $Z_n(\mathbb{R})^+$ trivial auf $\pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu$ operieren, und wir sehen

$$\begin{aligned} C^\bullet(\mathfrak{gl}_n, Z_n(\mathbb{R})^+ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu) &\cong (\bigwedge^\bullet (\mathfrak{gl}_n/\mathfrak{z}_n\mathfrak{so}_n)^* \otimes \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu)^{Z_n(\mathbb{R})^+ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})} \\ &\cong C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu). \end{aligned}$$

Damit gilt auch

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, Z_n(\mathbb{R})^+ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu) \cong H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu).$$

Hier fassen wir nun π_∞ und ρ_μ durch Restriktion jeweils als irreduzible Darstellung von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})^\pm$ bzw. als irreduzible $(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$-Moduln auf. Nach Theorem 3.3 in [BW80, Chapter I] haben $\pi_\infty |_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})^\pm}$ und $\rho_\mu |_{\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})^\pm}$ denselben infinitesimalen Charakter, da die Kohomologie nicht verschwindet. Da π_∞ und ρ_μ eingeschränkt auf $Z_n(\mathbb{R})^+$ denselben Zentralcharakter haben, sind folglich auch die infinitesimalen Charaktere von π_∞ und ρ_μ identisch.

Der infinitesimale Charakter von ρ_μ ist nach [BW80, III.1.5] in der Harish-Chandra-Parametrisierung durch $\rho + \mu$ gegeben, wobei $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+(GL_n, T_n)} \alpha$ und $\Phi^+(\mathrm{GL}_n, T_n)$ die Menge der positiven Wurzeln $\{\alpha_{ij} : T_n \to \mathbb{G}_m \mid i < j, \alpha_{ij}(t) = t_i t_j^{-1}\}$ ist. Dieser ist regulär, da μ bereits dominant ist.

Sei nun $(z^{a_1}\bar{z}^{a_2}, z^{a_2}\bar{z}^{a_1}, \ldots, z^{a_{2r-1}}\bar{z}^{a_{2r}}, (z\bar{z})^{a_{2r+1}}, \ldots, (z\bar{z})^{a_n})$ die Einschränkung auf $\mathbb{C}^\times$ der Darstellung von $W_\mathbb{R}$ assoziiert zu π_∞. Der infinitesimale Charakter von π_∞ ist dann nach (2.1) in der Harish-Chandra-Parametrisierung durch den Charakter $(a_1, \ldots, a_n)$ gegeben, und es ist bis auf Permutation der Einträge

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \rho + \mu = ((n-1)/2 + \mu_1, (n-3)/2 + \mu_2, \ldots, (3-n)/2 + \mu_{n-1}, (1-n)/2 + \mu_n).$$

Die Regularität von $\rho + \mu$ impliziert dann $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$.

Da $\mu \in \mathbb{Z}^n$, sehen wir, dass die kohomologischen Darstellungen algebraisch und regulär im Sinne Clozels [Clo90, Def.1.8 und Def. 3.12] sind [1], und wir können nun seine Resultate verwenden.

Nach dem Lemme de Pureté [Clo90, Lemme 4.9] gibt es ein $w' \in \mathbb{Z}$, so dass

$$a_1 + a_2 = \ldots = a_{2r-1} + a_{2r} = 2a_{2r+1} = \ldots = 2a_n = w' + (n-1) =: w. \tag{2.2}$$

Zusammen mit der Regularität sehen wir, dass π_∞ für gerades n eine induzierte Darstellung der parabolischen Untergruppe zur Partition $(2, \ldots, 2)$ ist, und für ungerades n zur Partition $(2, \ldots, 2, 1)$.

[1] Clozel setzt voraus, dass diese Darstellungen isobar sind [Clo90, Def. 1.2]. Cuspidale Darstellung sind als generische Darstellungen isobar.

Da π algebraisch ist, gibt es ganze Zahlen $p_i, i = 1, \ldots, n$, mit $a_i = p_i + (n-1)/2$. Unter der Langlandskorrespondenz (2.1) wird der 2-dimensionalen Darstellung $(z^{a_i}\bar{z}^{a_{i+1}}, z^{a_{i+1}}\bar{z}^{a_i})$ die Darstellung $D_{l_i} \otimes |\cdot|_i^t$ mit $l_i = a_i - a_{a_{i+1}}$ und $2t_i = a_i + a_{i+1}$ zugeordnet. Für jedes ungerade $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt hier nun

$$t_i = w/2 \quad \text{und} \quad l_i + w = 2a_i = 2p_i + (n-1). \tag{2.3}$$

Ist n gerade, so ist $l_i + w \equiv 1 \mod 2$ und ist n ungerade, so ist $l_i + w \equiv 0 \mod 2$. Damit erhalten wir folgende Beschreibung der kohomologischen Darstellungen (siehe auch [Mah05][§3.1.3]):

Seien $X_0^+(T_n)$ die Wurzeln $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in X^+(T_n)$ mit $\mu_i + \mu_{n+1-i} = v$ für ein $v \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{L}_0^+(\mathrm{GL}_n)$ die Menge aller Paare $(\mathbf{l}, w)$ mit $w \in \mathbb{Z}, \mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n), l_1 > \ldots l_{\lfloor n/2 \rfloor} > 0, l_i + l_{n+1-i} = 0$ und $w + \mathbf{l} \equiv n - 1 \mod 2$. Dann gibt es eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_0^+(\mathrm{GL}_n) & \longrightarrow & X_0^+(T_n), \\ (\mathbf{l}, w) & \mapsto & \mu := \frac{1}{2}(w + \mathbf{l}) - \rho. \end{array}$$

Bezeichne $(l_i, w/2)$ die Darstellung $D_{l_i} \otimes |\det(\cdot)|^{w/2}$ von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, und sei

$$\mathrm{J}(w, \mathbf{l}) := \begin{cases} \mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{GL}_n}((l_1, w/2) \otimes \cdots \otimes (l_{n/2}, w/2)), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{GL}_n}((l_1, w/2) \otimes \cdots \otimes (l_{(n-1)/2}, w/2) \otimes (+, w/2)), & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für die ∞-Komponente einer kohomologischen Darstellung $\pi \in \mathrm{Coh}(\mathrm{GL}_n, \mu)$ gilt dann

$$\pi_\infty \cong J(w, \mathbf{l}) \otimes \mathrm{sgn}^\epsilon$$

mit $\epsilon \in \{0, 1\}$.

Da $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ von $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ normalisiert wird, operiert $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ auf

$$C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu) \cong (\bigwedge^\bullet(\mathfrak{sl}_n \backslash \mathfrak{so}_n)^* \otimes \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu)^{\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, Z_n(\mathbb{R})^+ \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu) \cong H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu)$$

und dass die infinitesimalen Charaktere von $\pi_\infty \mid_{\mathrm{SL}_n^\pm(\mathbb{R})}$ und $\rho_\mu \mid_{\mathrm{SL}_n^\pm(\mathbb{R})}$ übereinstimmen. Da $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ zusammenhängend ist, haben wir nach [BW80, I §5.1] auch

$$H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu) = H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n, \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu).$$

Da das Casimir-Element im Zentrum der universell einhüllenden Algebra $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}_{\mathfrak{n},\mathbb{C}})$ liegt, sind nach [BW80, II §3, Proposition 3.1] alle Formen in $C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu)$ harmonisch. Insbesondere ist dann schon

$$H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu) = C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu). \tag{2.4}$$

Wir sehen damit sofort, dass $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ auf $H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, Z_n(\mathbb{R})^+\,\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \pi_\infty \otimes \check{\rho}_\mu)$ operiert.

Sei zunächst n gerade. Da $D_{l_i} \otimes \mathrm{sgn} \cong D_{l_i}$, gilt auch $\pi_\infty \otimes \mathrm{sgn} \cong \pi_\infty$. Diese Äquivalenz bewirkt einen Isomorphismus der Kohomologiegruppen

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \rho_\mu) \cong H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \mathrm{sgn} \otimes \rho_\mu).$$

Da $\mathrm{sgn}\,|_{\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})} = \mathbf{1}$ ist, folgt sogar

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \rho_\mu) = H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \mathrm{sgn} \otimes \rho_\mu).$$

Für den Fixraum unter $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ gilt nach [Clo90, Lemme 3.14]

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \mathrm{sgn}^\epsilon \otimes \rho_\mu) \cong \bigwedge^{\bullet - m^2} \mathbb{C}^{m-1} \tag{2.5}$$

für $\epsilon \in \{0, 1\}$, wobei $m := n/2$. Folglich zerfällt $H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \rho_\mu)$ demnach in einen $+1$- und einen -1-Eigenraum gleicher Dimension.

Für ungerades n und $m := (n-1)/2$ ist

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \mathrm{sgn}^\epsilon \otimes \rho_\mu) \cong \bigwedge^{\bullet - m(m+1)} \mathbb{C}^m, \tag{2.6}$$

falls ϵ geeignete Parität hat [2]. Im anderen Fall verschwindet die Kohomologie. In diesem Fall operiert $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ entweder trivial und $H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \rho_\mu)$ ist der Fixraum $H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \rho_\mu)$ oder $H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \rho_\mu)$ stimmt mit $H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{O}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \pi_\infty \otimes \mathrm{sgn} \otimes \rho_\mu)$ überein (siehe auch [Mah05]).

Seien

$$b_n = \begin{cases} \frac{n^2}{4}, & n \text{ gerade,} \\ \frac{n^2-1}{4}, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

der Bottom-Grad dieser Kohomologie und

$$t_n = \begin{cases} \frac{(n+1)^2-1}{4} - 1, & n \text{ gerade,} \\ \frac{(n+1)^2-1}{4}, & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

der Top-Grad. In den Graden b_n und t_n sind diese Kohomologiegruppen eindimensional.

Bemerkung 2.5. Lemme 3.14 in [Clo90] zeigt auch, dass die regulären algebraischen Darstellungen genau die kohomologischen Darstellungen sind.

[2] Für die geeignete Wahl von ϵ siehe [Clo90, p.120]

2.3. Kritische Stellen

Sei $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ eine cuspidale automorphe Darstellung der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$. Die L-Funktion $L(s, \pi_\infty)$ ist definiert als die Weil-L-Funktion der zugehörigen Darstellung der Weilgruppe $\varphi(\pi_\infty)$ [Kna94, §3 (3.6)].

Ist φ eine irreduzible halbeinfache Darstellung von $W_{\mathbb{R}}$, so ist

$$L(s,\varphi) := \begin{cases} \pi^{-(s+t)/2}\Gamma(\frac{s+t}{2}), & \text{falls } \varphi = (+,t), \\ \pi^{-(s+t+1)/2}\Gamma(\frac{s+t+1}{2}), & \text{falls } \varphi = (-,t), \\ \pi^{-(s+t+l/2)}\Gamma(s+t+l/2), & \text{falls } \varphi = (l,t). \end{cases}$$

Ist φ reduzibel mit der Zerlegung $\varphi = \bigoplus_{i=1}^N \varphi_i$, so ist die L-Funktion gegeben durch

$$L(s,\varphi) := \prod_{i=1}^N L(s,\varphi_i).$$

Sei π bzw. σ eine cuspidale automorphe Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ bzw. $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A})$, dann ist

$$L(s,\pi_\infty,\sigma_\infty) := L(s,\varphi(\pi_\infty)\otimes\varphi(\sigma_\infty)).$$

Laut einer Vermutung [Clo90, Conj. 4.5, (4.7),(4.8)] kann jeder algebraischen cuspidalen automorphen Darstellung π der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ ein Motiv $M(\pi)$ zugeordnet werden, so dass

$$L_\infty(s, M(\pi)) = L(s + \frac{1-n}{2}, \pi_\infty).$$

Seien π, σ algebraische cuspidale automorphe Darstellungen. Unter der Voraussetzung von [Clo90, Conjecture 1.3] ist das durch

$$\pi \overset{T}{\otimes} \sigma := (\pi|\ |^{\frac{1-n}{2}} \otimes \sigma|\ |^{\frac{1-m}{2}})|\ |^{\frac{nm-1}{2}}$$

definierte Tensorprodukt wieder eine algebraische cuspidale automorphe Darstellung [Clo90, Def. 1.10]. Dann gilt

$$L_\infty(s, M(\pi \overset{T}{\otimes} \sigma)) = L(s + \frac{1-nm}{2}, (\pi \overset{T}{\otimes} \sigma)_\infty) = L(s + \frac{1-n}{2} + \frac{1-m}{2}, \pi_\infty, \sigma_\infty). \tag{2.7}$$

Die folgende Definition einer *kritischen Stelle* orientiert sich an der Definition für kritische Stellen von Motiven von Deligne [Del79, Def.1.3]. Sei M ein Motiv und $\check{M}$ das zu M duale Motiv. Dann heißt $s_0 \in \mathbb{Z}$ kritisch, wenn weder $L_\infty(s, M)$ noch $L_\infty(1-s, \check{M})$ einen Pol an s_0 haben. Beachten wir den Shift um $\frac{1-n}{2} + \frac{1-m}{2}$ in (2.7), so können wir diese Definition in die Situation der kohomologischen cuspidalen automorphen Darstellungen übersetzen:

Definition 2.5. Bezeichne $\check{\pi}$ bzw. $\check{\sigma}$ die kontragradiente Darstellung zu π bzw. σ, und sei $\kappa \equiv n + m \mod 2$. Dann heißt $s_0 \in \mathbb{C}$ *kritisch für das Paar* (π, σ), wenn $s_0 \in \frac{\kappa}{2} + \mathbb{Z}$ ist und weder $L(s, \pi_\infty, \sigma_\infty)$ noch $L(1 - s, \check{\pi}_\infty, \check{\sigma}_\infty)$ einen Pol an s_0 hat.

Seien nun $\pi_\infty \cong \mathrm{sgn}^k \otimes J(w, \mathbf{l})$ und $\sigma_\infty \cong \mathrm{sgn}^u \otimes J(v, \mathbf{h})$ mit $k, u \in \{0, 1\}$ gegeben. Um $L(s, \pi_\infty, \sigma_\infty)$ zu bestimmen müssen wir $\varphi(\pi_\infty) \otimes \varphi(\sigma_\infty)$ in irreduzible Darstellungen zerlegen. Für $l, h \in \mathbb{N}$ und $s, t \in \mathbb{C}$ gilt

$$
\begin{aligned}
(l, t) \otimes (\pm, s) &\cong (l, s + t) \\
(l, t) \otimes (h, s) &\cong (l + h, s + t) \oplus (|l - h|, s + t)
\end{aligned}
$$

mit $(0, s + t) \cong (+, s + t) \oplus (-, s + t)$ [KS13, p.214].

Wir stellen zunächst die L-Funktion an der ∞-Stelle für π und σ auf:

(1) Für m, n gerade ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&L(s, \pi_\infty, \sigma_\infty) = \\
&\prod_{i=1}^{n/2} \prod_{\substack{j=1 \\ h_j \neq l_i}}^{m/2} \pi^{-(s + \frac{w+v}{2} + \frac{l_i + h_j}{2})} \Gamma(s + \frac{w+v}{2} + \frac{l_i + h_j}{2}) \pi^{-(s + \frac{w+v}{2} + \frac{|l_i - h_j|}{2})} \Gamma(s + \frac{w+v}{2} + \frac{|l_i - h_j|}{2}) \cdot \\
&\prod_{i=1}^{n/2} \prod_{\substack{j=1 \\ h_j = l_i}}^{m/2} \pi^{-(s + \frac{w+v}{2} + \frac{l_i + h_j}{2})} \Gamma(s + \frac{w+v}{2} + \frac{l_i + h_j}{2}) \cdot \\
&\prod_{i=1}^{n/2} \prod_{\substack{j=1 \\ h_j = l_i}}^{m/2} \pi^{-(\frac{s + (w+v)/2}{2})} \Gamma(\frac{s + (w+v)/2}{2}) \pi^{-(\frac{s + (w+v)/2 + 1}{2})} \Gamma(\frac{s + (w+v)/2 + 1}{2}).
\end{aligned}
$$

Wegen (2.3) ist $w + \mathbf{l} \equiv v + \mathbf{h} \equiv 1 \mod 2$. Die Variable s ist somit in jedem der Γ-Faktoren um eine ganze Zahl verschoben.

(2) Seien m ungerade und n gerade. Wir erhalten

$$L(s,\pi_\infty,\sigma_\infty) =$$
$$\prod_{i=1}^{n/2}\prod_{\substack{j=1\\ h_j\neq l_i}}^{(m-1)/2} \pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})\pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{|l_i-h_j|}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{|l_i-h_j|}{2})\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{n/2}\prod_{\substack{j=1\\ h_j=l_i}}^{(m-1)/2} \pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{n/2}\prod_{\substack{j=1\\ h_j=l_i}}^{(m-1)/2} \pi^{-(\frac{s+(w+v)/2}{2})}\Gamma(\frac{s+(w+v)/2}{2})\pi^{-(\frac{s+(w+v)/2+1}{2})}\Gamma(\frac{s+(w+v)/2+1}{2})\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{n/2}\pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i}{2}).$$

Hier ist die Variable s in jedem Γ-Faktor um eine Zahl in $\frac{1}{2}+\mathbb{Z}$ verschoben, denn nach (2.3) gelten $w+\mathbf{l}\equiv 1 \mod 2$ und $v\equiv \mathbf{h}\equiv 0 \mod 2$.

Ist m gerade und n ungerade, so müssen die Rollen von n und m in diesem Produkt einfach getauscht werden.

(3) Sind m, n ungerade, so folgt

$$L(s,\pi_\infty,\sigma_\infty) =$$
$$\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\prod_{\substack{j=1\\ h_j\neq l_i}}^{(m-1)/2} \pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})\pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{|l_i-h_j|}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{|l_i-h_j|}{2})\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\prod_{\substack{j=1\\ h_j=l_i}}^{(m-1)/2} \pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i+h_j}{2})\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\prod_{\substack{j=1\\ h_j=l_i}}^{(m-1)/2} \pi^{-(\frac{s+(w+v)/2}{2})}\Gamma(\frac{s+(w+v)/2}{2})\pi^{-(\frac{s+(w+v)/2+1}{2})}\Gamma(\frac{s+(w+v)/2+1}{2})\cdot$$
$$\prod_{i=1}^{(n-1)/2}\pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{l_i}{2})\prod_{j=1}^{(m-1)/2}\pi^{-(s+\frac{w+v}{2}+\frac{h_j}{2})}\Gamma(s+\frac{w+v}{2}+\frac{h_j}{2})\cdot$$
$$\pi^{-(\frac{s+(w+v)/2+\epsilon}{2})}\Gamma(\frac{s+(w+v)/2+\epsilon}{2}),$$

wobei $\epsilon\equiv k+u \mod 2\in\{0,1\}$. Dann ist $w\equiv\mathbf{l}\equiv v\equiv\mathbf{h}\equiv 0 \mod 2$, und wir haben einen ganzzahligen Shift in jedem Γ-Faktor.

Die kontragradienten Darstellungen haben die Gestalt

$$\check{\pi}_\infty \cong \mathrm{sgn}^k \otimes \mathrm{J}(-w, \mathbf{l}) \quad \text{und} \quad \check{\sigma} \cong \mathrm{sgn}^u \otimes \mathrm{J}(-v, \mathbf{h}).$$

Dann ergeben sich folgende kritische Stellen:

(1) Seien m, n gerade.

Fall 1: Es gibt keine $i \neq j$ mit $l_i = h_j$.

Setzte $L := \min\{\min_{i,j}\{\frac{l_i+h_j}{2}\}, \min_{i,j}\{\frac{|l_i-h_j|}{2}\}\}$. Dann gilt wegen $L + \frac{w+v}{2} \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
&L(s, \pi_\infty, \sigma_\infty) \text{ hat keinen Pol an } s_0 \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \\
&s_0 + \frac{w+v}{2} + L \notin -\mathbb{N}_0 \Longleftrightarrow s_0 > -\frac{w+v}{2} - L, \\
&L(1-s, \check{\pi}_\infty, \check{\sigma}_\infty) \text{ hat keinen Pol an } s_0 \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \\
&1 - s_0 - \frac{w+v}{2} + L \notin -\mathbb{N}_0 \Longleftrightarrow s_0 < -\frac{w+v}{2} + 1 + L.
\end{aligned}$$

Dann ist $s_0 \in \mathbb{Z}$ folglich kritisch, wenn $-\frac{w+v}{2} - L < s_0 < -\frac{w+v}{2} + 1 + L$.

Fall 2: Es existieren $i \neq j$ mit $l_i = h_j$. Dann tauchen auch die Γ-Faktoren

$$\Gamma(\frac{s + (w+v)/2}{2}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\frac{s + (w+v)/2 + 1}{2})$$

in $L(s, \pi_\infty, \sigma_\infty)$ auf. Die L-Funktion $L(1-s, \check{\pi}_\infty, \check{\sigma}_\infty)$ besitzt zusätzlich die Faktoren

$$\Gamma(\frac{1 - s - (w+v)/2}{2}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\frac{1 - s - (w+v)/2 + 1}{2}).$$

Damit erhalten wir zum einen die Bedingung

$$\frac{s_0 + \frac{w+v}{2}}{2} \notin -\mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \frac{s_0 + \frac{w+v}{2} + 1}{2} \notin -\mathbb{N}_0.$$

Das ist äquivalent zu

$$s_0 + \frac{w+v}{2}(+1) \notin -2\mathbb{N}_0 \Longleftrightarrow s_0 + \frac{w+v}{2} \notin -2\mathbb{N}_0, -2\mathbb{N}_0 - 1.$$

Wegen $l_i = h_j$ muss dann $w \equiv v \mod 2$ gelten, so dass $\frac{w+v}{2} \in \mathbb{Z}$ ist. Eine kritische Stelle s_0 muss also zusätzlich zu der unter Fall 1 angegebenen Bedingung die Forderung $s_0 > -\frac{w+v}{2}$ erfüllen.

Zum anderen muss auch

$$\frac{1 - s_0 - \frac{w+v}{2}}{2} \notin -\mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \frac{1 - s_0 - \frac{w+v}{2} + 1}{2} \notin -\mathbb{N}_0$$

gelten, was äquivalent zu

$$1 - s_0 - \frac{w+v}{2}(+1) \notin -2\mathbb{N}_0 \iff s_0 + \frac{w+v}{2} \notin 2\mathbb{N}_0 + 1, 2\mathbb{N}_0 + 2$$

ist. Damit erhalten wir $s_0 \leq -\frac{w+v}{2}$.

Die Bedingung $-\frac{w+v}{2} \geq s_0 > -\frac{w+v}{2}$ ist aber unerfüllbar. In diesem Fall gibt es dann keine kritischen Stellen.

(2) Seien m ungerade und n gerade.

Fall 1: Es gibt keine $i \neq j$ mit $l_i = h_j$.

Setze $L := \min\{\min\limits_{i,j}\{\frac{l_i+h_j}{2}, \frac{l_i}{2}\}, \min\limits_{i,j}\{\frac{|l_i-h_j|}{2}\}\}$.

$$\begin{aligned}
&L(s, \pi_\infty, \sigma_\infty) \text{ hat keinen Pol an } s_0 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \iff \\
&s_0 + \frac{w+v}{2} + L \notin -\mathbb{N}_0 \iff s_0 > -\frac{w+v}{2} - L, \\
&L(s, \check{\pi}_\infty, \check{\sigma}_\infty) \text{ hat keinen Pol an } s_0 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \iff \\
&1 - s_0 - \frac{w+v}{2} + L \notin -\mathbb{N}_0 \iff s_0 < -\frac{w+v}{2} + 1 + L.
\end{aligned}$$

Dann ist $s_0 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ folglich kritisch, wenn $-\frac{w+v}{2} - L < s_0 < -\frac{w+v}{2} + 1 + L$.

Fall 2: Es existieren $i \neq j$ mit $l_i = h_j$. Dann muss $w \equiv 1 \mod 2$ gelten. Dann ist $\frac{w+v}{2} \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$, und ähnlich wie in (1) sind zusätzlich die Γ-Faktoren

$$\Gamma(\frac{s + (w+v)/2}{2}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\frac{s + (w+v)/2 + 1}{2})$$

von $L(s, \pi_\infty, \sigma_\infty)$ und die Faktoren

$$\Gamma(\frac{1 - s - (w+v)/2}{2}) \quad \text{und} \quad \Gamma(\frac{1 - s - (w+v)/2 + 1}{2})$$

von $L(1 - s, \check{\pi}_\infty, \check{\sigma}_\infty)$ zu berücksichtigen.

Dann ist $s_0 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$ kritisch, wenn $-\frac{w+v}{2} < s_0 < -\frac{w+v}{2} + 1$. Diese Bedingung ist nicht erfüllbar.

(3) Ist m gerade und n ungerade, so setze $L := \min\{\min\limits_{i,j}\{\frac{l_i+h_j}{2}, \frac{h_j}{2}\}, \min\limits_{i,j}\{\frac{|l_i-h_j|}{2}\}\}$. Die Rechnung ist dann identisch mit der in (2).

(4) Seien m, n ungerade.

Setze $L := \min\{\min_{i,j}\{\frac{l_i+h_j}{2}, \frac{l_i}{2}, \frac{h_j}{2}\}, \min_{i,j}\{\frac{|l_i-h_j|}{2}\}\}$.

Hier gilt zunächst ebenfalls

$$\begin{aligned} L(s,\pi_\infty,\sigma_\infty) \text{ hat keinen Pol an } s_0 \in \mathbb{Z} &\implies s_0 > -\tfrac{w+v}{2} - L \text{ und} \\ L(s,\check{\pi}_\infty,\check{\sigma}_\infty) \text{ hat keinen Pol an } s_0 \in \mathbb{Z} &\implies s_0 < -\tfrac{w+v}{2} + 1 + L. \end{aligned}$$

Gibt es i, j mit $l_i = h_j$, so gibt es auch hier keine kritischen Stellen. Tritt dieser Fall nicht auf, müssen wir noch Folgendes beachten:

Es gibt noch einen Faktor $\Gamma(\frac{s+(w+v)/2+\epsilon}{2})$ bzw. $\Gamma(\frac{1-s-(w+v)/2+\epsilon}{2})$. Das liefert die zusätzlichen Bedingungen

$$\frac{s_0 + \frac{w+v}{2} + \epsilon}{2} \notin -\mathbb{N}_0 \iff s_0 + \frac{w+v}{2} \notin -2\mathbb{N}_0 - \epsilon$$

und

$$\frac{1 - s_0 - \frac{w+v}{2} + \epsilon}{2} \notin -\mathbb{N}_0 \iff s_0 + \frac{w+v}{2} \notin 2\mathbb{N}_0 + 1 + \epsilon.$$

Ist $\epsilon = 0$, so folgt

$$\frac{w+v}{2} + s_0 \in (\mathbb{N} \cup -2\mathbb{N}_0 - 1) \cap (-\mathbb{N} \cup 2\mathbb{N}_0) = -2\mathbb{N}_0 - 1 \cup 2\mathbb{N}.$$

Ist $\epsilon = 1$, so folgt

$$\frac{w+v}{2} + s_0 \in (\mathbb{N} \cup -2\mathbb{N}_0) \cap (-\mathbb{N}_0 \cup 2\mathbb{N}_0 + 1) = -2\mathbb{N}_0 \cup 2\mathbb{N}_0 + 1.$$

Haben beide Darstellungen $\pi_\infty, \sigma_\infty$ ein triviales Koeffizientensystem, so bedeutet dies, dass $\mu = \nu = 0$, $\mathbf{l} = 2\rho_n$ und $\mathbf{h} = 2\rho_m$. Es ist

$$\frac{\mathbf{l}}{2} = \begin{cases} (\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \dots, \frac{1-n}{2}), & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ (\frac{n-1}{2}, \dots, 3, 1, 0, -1, -3, \dots, \frac{1-n}{2}), & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Darstellung von $\frac{\mathbf{h}}{2}$ ist die gleiche, nur mit m anstelle von n. Ist $1 > m \equiv n \mod 2$, so ist demnach $l_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = h_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Wir können damit aus der vorangegangenen Rechnung die folgende Proposition folgern:

Proposition 2.1. *Sind π_∞ und σ_∞ kohomologische Darstellungen mit trivialem Koeffizientensystem, so ist die Menge Crit der kritischen Stellen gegeben durch*

$$Crit = \begin{cases} \emptyset, & \textit{für } m \equiv n \mod 2 \textit{ ausgenommen } m = 1, \epsilon = 1, \\ \{\frac{1}{2}\}, & \textit{für } m \not\equiv n \mod 2, \\ \{0, 1\}, & \textit{für } 1 = m \equiv n \mod 2, \epsilon = 1. \end{cases}$$

3. Faserbündel und Kohomologie

3.1. Schnell fallende Funktionen und Spitzenformen

Im gesamten Kapitel sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ fest. Seien $K \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ eine maximale kompakte Untergruppe und θ die Cartan-Involution von $\mathfrak{sl}_n$ bezüglich K. Weiter seien $P \leq \mathrm{SL}_n$ eine parabolische $\mathbb{Q}$-Untergruppe mit unipotentem Radikal R_uP und eindeutig bestimmter θ-invarianter Levi-Untergruppe L_P. Bezeichnen $S_P := L_P \cap R_dP$ den maximalen θ-invarianten Torus im $\mathbb{Q}$-zerfallenden Radikal R_dP von P und $A_P := S_P(\mathbb{R})^0$ die Zusammenhangskomponente der Eins von $S_P(\mathbb{R})$. Setze ${}^0L_P := \bigcap_{\chi \in X_{\mathbb{Q}}(L_P)} \operatorname{Kern} \chi^2$, wobei $X_{\mathbb{Q}}(L_P)$ die Menge der über $\mathbb{Q}$ definierten Charaktere von L_P ist. Seien $M_P := {}^0L_P(\mathbb{R})$ und $N_P := R_uP(\mathbb{R})$. Wir haben dann die Zerlegung von $P(\mathbb{R})$ in ein semidirektes Produkt $P(\mathbb{R}) = N_P \rtimes (M_P \times A_P)$ und eine Zerlegung $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = N_P \cdot M_P \cdot A_P \cdot K$.

Bezeichnen weiter $\Phi_{\mathbb{Q}}(P, S_P) \subseteq X_{\mathbb{Q}}(S_P)$ die Menge der Wurzeln von P bezüglich S_P und $\Delta_{\mathbb{Q}}(P, S_P)$ die Menge der einfachen Wurzeln. Außerdem sei $X(A_P) \cong X_{\mathbb{Q}}(S_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ die Gruppe der stetigen Homomorphismen $\lambda : A_P \to \mathbb{R}^{\times}_{>0}$.

Sei nun $\omega \subset N_P M_P$ relativ kompakt, und für beliebiges $t > 0$ sei

$$A_t := \{a \in A_P \mid a^\lambda \geq t \ \forall \lambda \in \Delta_{\mathbb{Q}}(P, S_P)\}.$$

Eine Teilmenge der Form $\Sigma^P_{t,\omega} := \omega \cdot A_t \cdot K$ heißt *Siegelmenge* für $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ (bezüglich P).

Definition 3.1. Eine Funktion $f \in C^\infty(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ heißt *schnell fallend*, wenn für jede Siegelmenge $\Sigma^P_{t,\omega}$ und alle Wurzeln $\lambda \in X(A_P)$ gilt: Es gibt eine Konstante C_λ, so dass

$$|f(qak)| \leq C_\lambda a^\lambda \ \forall q \in \omega, \forall k \in K, \forall a \in A_t. \tag{3.1}$$

Sei $\Gamma \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ eine diskrete Untergruppe, und bezeichne $C^\infty(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})^\Gamma$ die glatten komplexwertigen Funktionen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, die linksinvariant unter Γ sind. Da der Quotient $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ eine eindeutige differenzierbare Struktur trägt, die durch die differenzierbare Struktur von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ induziert wird, gilt
$C^\infty(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})^\Gamma \cong C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$.

Im Folgenden sei $\Gamma \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ eine arithmetische Untergruppe, so dass der Quotient $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ nicht kompakt ist. Nach [Bor07, §5.4] ist die Bedingung (3.1) für Funktionen $f \in C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ äquivalent zu folgender Forderung: Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gibt es eine Konstante C_m, so dass

$$|f(g)| \leq C_m \|g\|^m \ \forall g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \tag{3.2}$$

wobei $\|g\|$ die Hilbert-Schmidt-Norm $\|g\| := \sqrt{\mathrm{Tr}(g^T g)}$ von $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist.

Sei $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n^2-1}\}$ eine Maurer-Cartan-Basis (linksinvarianter) Formen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Bezeichne $\Omega^k(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})^\Gamma$ die k-Formen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, die linksinvariant unter Γ sind. Dieser Komplex kann mit dem Komplex $\Omega^k(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ der k-Formen auf $\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ identifiziert werden. Jede Form $\eta \in \Omega^k(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})^\Gamma$ kann nach [BW80, VII,§2 (6)] geschrieben werden als

$$\eta = \sum_{|I|=k} f_I \omega_I,$$

wobei $\omega_I = \omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}$ und $f_I \in C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$. Dann heißt $\eta \in \Omega^\bullet(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ nach [Bor81, §3.9] schnell fallend, wenn alle Koeffizientenfunktionen von η der Bedingung (3.1) genügen. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Maurer-Cartan-Basis.

Die natürliche Projektion $\pi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) =: X^1$ induziert nach [BW80][VII, Prop. 2.5] einen Isomorphismus der Γ-invarianten Formen $\Omega^\bullet(X^1, \mathbb{C})^\Gamma$ auf X^1 mit einem Unterkomplex von $\Omega^\bullet(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$, der mit
$C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}))$ identifiziert werden kann.

Dann heißt $\eta \in \Omega^k(X^1, \mathbb{C})^\Gamma$ nach [Bor81, §3.2 bzw. Prop. 3.10] schnell fallend, wenn die Koeffizientenfunktionen f_I von

$$\eta \cong \pi^*\eta = \sum_{|I|=k} f_I \omega_I, \tag{3.3}$$

die Bedingung (3.1) erfüllen. Sei

$$\Omega_{fd}(X^1, \mathbb{C})^\Gamma := \{\eta \in \Omega(X^1, \mathbb{C})^\Gamma \mid \eta \text{ und } d\eta \text{ fallen schnell}\}$$

der Komplex der schnell fallenden Γ-invarianten Formen auf X^1.

Der Isomorphismus $\Omega^\bullet(X^1, \mathbb{C})^\Gamma \cong C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}))$ induziert einen Isomorphismus der zugehörigen Kohomologiegruppen

$$H(\Omega^\bullet(X^1, \mathbb{C})^\Gamma) \cong H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})).$$

Verkettung mit dem DeRham-Isomorphismus [Mas91, Appendix A, Theorem 3.1] [1] liefert dann einen Isomorphismus mit der Betti-Kohomologie:

$$H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})) \cong H_B^\bullet(\Gamma\backslash X^1, \mathbb{C}). \tag{3.4}$$

[1] Der DeRham-Isomorphismus ist dort nur für Kohomologie mit Werten in $\mathbb{R}$ beschrieben, er gilt aber auch für Kohomologie mit Werten in $\mathbb{C}$ (siehe Kapitel 4.2)

Bemerkung 3.1. Der Quotient $\Gamma\backslash X^1$ ist im Allgemeinen keine differenzierbare Mannigfaltigkeit, aber ausgestattet mit der Quotiententopologie ist er ein topologischer Raum.

Sei $\mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ der Raum der (nicht notwendigerweise $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$-endlichen) Spitzenformen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, die linksinvariant unter Γ sind. Dieser Raum besteht aus den Funktionen $f \in C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$, die zudem cuspidal, $\mathcal{Z}(\mathfrak{sl}_{n,\mathbb{C}})$-endlich und von uniformem moderatem Wachstum sind. Ähnlich wie im adelischen Fall ist die Cuspidalität definiert durch

$$\int_{\Gamma\cap N(\mathbb{R})\backslash N(\mathbb{R})} f(ng)dn = 0 \ \forall g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}),$$

wobei N die unipotenten Radikale aller parabolischen $\mathbb{Q}$-Untergruppen von SL_n durchläuft. Die Inklusion

$$\mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}) \hookrightarrow C^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$$

induziert eine Abbildung

$$H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})) \longrightarrow H_B^\bullet(\Gamma\backslash X^1, \mathbb{C}), \tag{3.5}$$

deren Bild mit $H_{cusp}^\bullet(\Gamma\backslash X^1, \mathbb{C})$ bezeichnet wird. Diese Kohomologie heißt dann *cuspidale Kohomologie*.

Der Raum $\mathcal{A}_0(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ der $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$-endlichen Vektoren in $\mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ zerfällt nach [Gel75, Theorem 2.6] in eine direkte Summe irreduzibler $(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))$-Moduln (π, V_π). Es ist

$$C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})) = \bigoplus_\pi C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), V_\pi).$$

Nach [BW80, II. Proposition 3.1] sind die Formen in $C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), V_\pi)$ bereits harmonisch, und folglich sind auch die Elemente in $C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}))$ harmonisch.

Bezeichne $\mathcal{H}_{fd} \subseteq \Omega^\bullet(X^1, \mathbb{C})^\Gamma$ den Unterraum der schnell fallenden harmonischen Formen. Da Spitzenformen nach Harish-Chandra [HC68, §4] schnell fallende Funktionen sind, kann $H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}))$ mit einem Unterraum von $\mathcal{H}_{fd}$ identifiziert werden. Die Abbildung (3.5) ist dann nach [Bor81, § 5.4, Theorem 5.3 bzw. Corollar 5.5] sogar injektiv [2].

3.2. Ein Faserbündel für die Rankin-Selberg-Faltung

Seien $j : \mathbb{A}^\times \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ die Einbettung, die $g \in \mathbb{A}^\times$ auf die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(g, 1, \ldots, 1)$ schickt, und $(\pi, V_\pi) \in \mathrm{Coh}(\mathrm{GL}_n, 0)$ eine kohomologische Darstellung. Wie schon in Kapitel

[2] Borel verwendet anstelle von $\mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ den Unterraum der glatten Vektoren in $L_0^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ bezüglich der rechtsregulären Darstellung. Es ist $\mathcal{A}_0^\infty(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}) = L_0^2(\Gamma\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})^\infty$ (vgl. [CKM04, Lecture 2.4])

2.2 gezeigt wurde, impliziert diese Forderung, dass $Z_n(\mathbb{R})^+$ trivial auf V_π operiert. Seien weiter $\varphi \in V_\pi$ eine Spitzenform, die rechtsinvariant unter einer kompakt-offenen Untergruppe $K_n \leq \mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$ ist, und ψ ein nicht-trivialer unverzweigter Charakter von $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}$. Wir betrachten das Rankin-Selberg-Integral

$$\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s-(n-1)/2}dg,$$

wobei das Produkt yg als $yj(g)$ zu lesen ist. Das äußere Integral über $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ ist wohldefiniert, da das innere Integral, aufgefasst als Funktion in $g \in \mathbb{A}^\times$, linksinvariant unter $j(\mathbb{Q}^\times)$ ist. Für $q \in \mathbb{Q}^\times$ gilt dann:

$$\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi(yqg)\psi^{-1}(y)dy \overset{(1)}{=} \int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi(q^{-1}yqg)\psi^{-1}(q^{-1}yq)dy \overset{(2)}{=}$$
$$\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi(yg)\psi^{-1}(y)dy,$$

wobei (1) gilt, da φ linksinvariant unter $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ ist und y und $q^{-1}yq$ dieselben Einträge auf der Nebendiagonalen haben. $Y_{n,1}(\mathbb{A})$ wird von $j(\mathbb{Q}^\times)$ normalisiert, und für $q \in \mathbb{Q}^\times$ gilt $|q| = \prod_{p\leq\infty}|q|_p = 1$, woraus sich auch der zweite Schritt ergibt.

Mittels starker Approximation für unipotente Gruppen und der Approximationseigenschaft von $\mathbb{A}^\times$ wollen wir die Integranden als Funktionen auf reellen Lie-Gruppen auffassen.

Setze

$$K_1 := j(\mathbb{A}_f^\times) \cap K_n, \tag{3.6}$$

dann ist K_1 eine kompakt-offene Untergruppe von $j(\hat{\mathbb{Z}}^\times)$. Sei $V := \{\alpha_1, \dots, \alpha_M\}$ ein Vertretersystem von $j(\hat{\mathbb{Z}}^\times)/K_1$, dann haben wir für $\mathbb{A}^\times$ die Zerlegung

$$\mathbb{A}^\times = \mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}\hat{\mathbb{Z}}^\times = \dot{\bigcup}_{i=1}^{M}\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}\alpha_i K_1,$$

und für jedes $\alpha_i \in V$ gibt es einen Homöomorphismus

$$\mathbb{R}_{>0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{Q}^\times\mathbb{R}_{>0}\alpha_i K_1/K_1,$$

wobei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ auf die Doppelnebenklasse $\mathbb{Q}^\times \cdot r\alpha_i \cdot K_1$ geschickt wird. Da φ rechtsinvariant unter K_1 ist, können wir nun das Rankin-Selberg-Integral folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s-(n-1)/2}dg = \\
&\mathrm{vol}(K_1)\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times/K_1}\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s-(n-1)/2}dg = \\
&\mathrm{vol}(K_1)\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}_{>0}}\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi^{\alpha_i}(yr)\psi^{-1}(y)dy|r|^{s-(n-1)/2}dr,
\end{aligned}$$

wobei $\varphi^{\alpha_i}(\cdot) := \varphi(\cdot\alpha_i)$ die Spitzenform ist, die durch Rechtstranslation mit α_i von φ entsteht. Diese ist dann rechtsinvariant unter der kompakt-offenen Untergruppe $\alpha_i K_n \alpha_i^{-1} \leq \mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$.

Da die unipotente Gruppe $Y_{n,1}(\mathbb{A})$ die starke Approximationseigenschaft [PR94, Lemma 5.5] erfüllt, gilt für jede offene Untergruppe $U \subseteq Y_{n,1}(\mathbb{A}_f)$:

$$Y_{n,1}(\mathbb{Q})Y_{n,1}(\mathbb{R})U = Y_{n,1}(\mathbb{A}).$$

Setze

$$K := \bigcap_{i=1}^{M}\alpha_i K_n \alpha_i^{-1} \quad \text{und} \quad K_Y := K \cap Y_{n,1}(\mathbb{A}_f). \tag{3.7}$$

Dann ist K_Y eine kompakt-offene Untergruppe von $Y_{n,1}(\hat{\mathbb{Z}})$, und wir haben einen Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_Y\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})/K_Y, \\
\Gamma_Y y_\infty & \mapsto & Y_{n,1}(\mathbb{Q})(y_\infty, 1_f)K_Y
\end{array}$$

wobei $\Gamma_Y := \{\gamma_\infty \in Y_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists\gamma_f \in K_Y \text{ mit } (\gamma_\infty, \gamma_f) \in Y_{n,1}(\mathbb{Q})\} \leq Y_{n,1}(\mathbb{Z})$. Insbesondere ist der Quotient $\Gamma_Y\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})$ kompakt. Da φ rechtsinvariant unter K_Y ist und ψ^{-1} unverzweigt gewählt ist, können wir auch die Integrale $\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi^{\alpha_i}(yg)\psi^{-1}(y)dy$ umformen:

$$\begin{aligned}
&\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi^{\alpha_i}(yr)\psi^{-1}(y)dy = \\
&\mathrm{vol}(K_Y)\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})/K_Y}\varphi^{\alpha_i}(yr)\psi^{-1}(y)dy = \\
&\mathrm{vol}(K_Y)\int_{\Gamma_Y\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})}\varphi^{\alpha_i}(yr)\psi^{-1}(y)dy.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit folgende Identität für das Rankin-Selberg-Integral:

$$\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}\varphi(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s-(n-1)/2}dg =$$
$$\operatorname{vol}(K_1)\operatorname{vol}(K_Y)\sum_{i=1}^{M}\int_{\mathbb{R}_{>0}}\int_{\Gamma_Y\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})}\varphi^{\alpha_i}(yr)\psi^{-1}(y)dy|r|^{s-(n-1)/2}dr. \tag{3.8}$$

Proposition 3.1. *Für jedes $\alpha_i \in V$ konvergiert*

$$\int_{\mathbb{R}_{>0}}\int_{\Gamma_Y\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})}\varphi^{\alpha_i}(yr))\psi^{-1}(y)dy|r|^{s-(n-1)/2}dr$$

absolut und stimmt mit

$$\int_{\Gamma_Y\backslash(\mathbb{R}_{>0}\ltimes Y_{n,1}(\mathbb{R}))}\varphi^{\alpha_i}(yr))\psi^{-1}(y)|r|^{s-(n-1)/2}dydr$$

überein [3].

Für den Beweis wollen wir zunächst einsehen, dass die Funktionen φ^{α_i} schnell fallende Funktionen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sind. Die Spitzenform φ ist rechtsinvariant unter einer kompakt-offenen Untergruppe $K_n \leq \mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$. Setze

$$K_n' := \{x \in K_n \mid j(\det(x)) \in K_1\}. \tag{3.9}$$

Dann ist auch K_n' eine kompakt-offene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$, und φ ist natürlich auch rechtsinvariant unter K_n'. Weiter ist $K_1 \leq K_n'$ mit $\det(K_1) = \det(K_n')$, so dass wir mittels starker Approximation für $\mathrm{SL}_n(\mathbb{A})$ und der Approximationseigenschaft von $\mathbb{A}^\times$ die Zerlegung

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}) = \dot{\bigcup}_{i=1}^{M}\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+\alpha_i K_n'$$

erhalten.

Das induziert einen Homöomorphismus

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K_n' \cong \dot{\bigcup}_{i=1}^{M}\Gamma_i\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+, \tag{3.10}$$

wobei $\Gamma_i = \{\gamma_\infty \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \exists\gamma_f \in \alpha_i K_n'\alpha_i^{-1} \text{ mit } (\gamma_\infty, \gamma_f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\}$. Da φ invariant unter $Z_n(\mathbb{R})^+$ ist, können wir φ mit dem Tupel

[3]Beachte, dass das Produktmaß $dydr$ zwar linksinvariant unter Γ_Y, hier aber kein linksinvariantes Maß auf $\mathbb{R}_{>0}\ltimes Y_{n,1}(\mathbb{R})$ ist.

$$(\varphi^{\alpha_1}, \dots, \varphi^{\alpha_N}) \in \prod_{i=1}^{M} \mathcal{A}_0^\infty(\Gamma_i \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \tag{3.11}$$

identifizieren. Insbesondere sind die Funktionen φ^{α_i} als Spitzenformen schnell fallende Funktionen. Seien K und K_Y wie in (3.7), dann setze

$$\Gamma := \{\gamma_\infty \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \mid \exists \gamma_f \in K \text{ mit } (\gamma_\infty, \gamma_f) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Q})\}.$$

Jedes Γ_i enthält Γ, und folglich ist auch $\Gamma_Y \leq \Gamma_i$.

Beweis. Da die Funktion φ^{α_i} schnell fällt, erfüllt sie für jedes $g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ die Bedingung (3.2): Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ gibt es eine konstante C_m, so dass

$$|\varphi^{\alpha_i}(g)| \leq C_m \|g\|^m.$$

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $\tilde{r} := j(r) \cdot \mathrm{diag}(r^{-1/n}, \dots, r^{-1/n}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Da $\mathrm{diag}(r^{-1/n}, \dots, r^{-1/n}) \in Z_n(\mathbb{R})^+$ gilt

$$\varphi^{\alpha_i}(yr) = \varphi^{\alpha_i}(y\tilde{r}).$$

Die Hilbert-Schmidt-Norm erfüllt nach [HC68, §2] folgende Eigenschaften:

1) $\|x\| \geq 1$,
2) $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$,
3) direkt aus 2) folgt auch $\|xy\| \geq \|x^{-1}\|^{-1} \|y\|$.

Insbesondere ist dann

$$|\varphi^{\alpha_i}(y\tilde{r})| \leq C_m \|y\tilde{r}\|^m \leq C_m \begin{cases} \|y\|^m \|\tilde{r}\|^m, & m \geq 0, \\ \|y^{-1}\|^{-m} \|\tilde{r}\|^m, & m < 0. \end{cases}$$

Dem Beweis zu Lemma 3.4 in [KMS00] nach ist für jedes $m < 0$

$$\|\tilde{r}\|^m \leq \min\{r^{\pm t}\}$$

mit $t := -\frac{2m}{n(n-1)}$. Für y aus einem kompakten Fundamentalbereich von $\Gamma_Y \backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})$ ist $\|y^{-1}\|$ beschränkt, so dass für $m < 0$ insgesamt die Abschätzung

$$|\varphi^{\alpha_i}(y\tilde{r})| \leq C_t \min\{r^{\pm t}\}$$

mit einer geeigneten Konstanten C_t folgt. Für unser Integral ergibt sich dann

$$\int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\Gamma_Y \backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})} |\varphi^{\alpha_i}(yr))| \, |\psi^{-1}(y)| \, |r|^{s-(n-1)/2} dydr \leq$$
$$C_t \operatorname{vol}(\Gamma_Y \backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})) \int_{\mathbb{R}_{>0}} \min\{r^{\pm t}\} r^{\Re(s)-(n-1)/2} dr.$$

Für jedes $s \in \mathbb{C}$ erhalten wir mit hinreichend großen $t \in \mathbb{R}$ die absolute Konvergenz des iterierten Integrales. Da $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der Borel-σ-Algebra ein σ-endlicher Maßraum ist, folgt mit dem Satz von Fubini das gewünschte Resultat

$$\int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{\Gamma_Y \backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})} \varphi^{\alpha_i}(yr) \psi^{-1}(y) |r|^{s-(n-1)/2} dydr =$$
$$\int_{\Gamma_Y \backslash (\mathbb{R}_{>0} \ltimes Y_{n,1}(\mathbb{R}))} \varphi^{\alpha_i}(yr) \psi^{-1}(y) |r|^{s-(n-1)/2} dydr. \tag{3.12}$$

□

Für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$\Gamma(N) := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \equiv 1 \mod N\} \tag{3.13}$$

nach [Mor03, §4.I] eine torsionsfreie Untergruppe in Γ von endlichem Index, und es besitzt $\Gamma_Y \leq Y_{n,1}(\mathbb{Z})$ die Untergruppe

$$Y(N) := \{A \in \Gamma_Y \mid A \equiv 1 \mod N\}$$

von endlichem Index. Wir können folglich für jedes $i = 1, \ldots, M$ das Integral (3.12) durch

$$\int_{Y(N) \backslash (\mathbb{R}_{>0} \ltimes Y_{n,1}(\mathbb{R}))} \varphi^{\alpha_i}(yg) \psi^{-1}(y) dy g^{s-(n-1)/2} dg \tag{3.14}$$

ersetzen. Dieses möchten wir an der kritischen Stelle $s = s_0$ nun im Wesentlichen als Poincaré-Dual einer Kohomologieklasse in der cuspidalen Kohomologie darstellen. Allerdings kann weder der additive Charakter ψ noch der Absolutbetrag $|g|^{\frac{1}{2}-(n-1)/2}$ in der cuspidalen Kohomologie interpretiert werden. Daher möchten wir ein Faserbündel (E, Π, B, F) zum Totalraum $E := Y(N) \backslash (Y_{n,1}(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0})$, Basis B und Faser F konstruieren, so dass wir das reelle Integral (3.14) in der Form $\int_B \fint_F \eta$ mit einer geeigneten Kohomologieklasse η darstellen können. Dabei soll für jedes $b \in B$ das Faserintegral $\fint_F \eta(b)$ oben genanntes Poincaré-Dual einer cuspidalen Kohomologieklasse sein. Dazu stellen wir folgende Bedingungen an die Faser F:

Sie soll Quotient einer Gruppe $S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ mit $S(\mathbb{R}) \leq Y_{n,1}(\mathbb{R})$ sein, so dass

(B1) $\dim S(\mathbb{R}) = b_n - 1$ oder $\dim S(\mathbb{R}) = t_n - 1$,

(B2) für einen kritischen Wert s_0 das Maß $|g|^{s_0 - \frac{(n-1)}{2}} ds dg$ ein linksinvariantes Maß auf dem semidirekten Produkt dieser Gruppen unter dem Isomorphismus $(s, g) \mapsto sg$ ist, wenn ds ein linksinvariantes Maß auf $S(\mathbb{R})$ und dg eines auf $\mathbb{R}_{>0}$,

(B3) der (nichttriviale) additive Charakter ψ ist trivial auf $S(\mathbb{R})$.

Zudem sollte die Basis B Quotient einer Gruppe $B(\mathbb{R}) \leq Y_{n,1}(\mathbb{R})$ sein, so dass $Y_{n,1}(\mathbb{R})$ das semidirekte Produkt von $S(\mathbb{R})$ und $B(\mathbb{R})$ ist. Bisher hatten wir $n \in \mathbb{N}_{>1}$ fixiert, doch die Bedingungen (B1)-(B3) können nur für $n = 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15$ erfüllt werden. Der Fall $n = 3$ nimmt eine Sonderstellung ein. Hier besteht $S(\mathbb{R})$ aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und $B(\mathbb{R})$ aus jenen der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gruppe $Y_{3,1}(\mathbb{R})$ ist folglich sogar direktes Produkt von $S(\mathbb{R})$ und $B(\mathbb{R})$.

Für $n = 4$ haben die Matrizen in $b \in B(\mathbb{R})$ und $s \in S(\mathbb{R})$ folgende Gestalt:

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & -z & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $n > 4$ befindet sich im Anhang A eine Liste mit geeigneten Matrizengruppen. Ist n ungerade, so gibt es nach Proposition 2.1 die kritischen Stellen $s_0 = 0, 1$. Ein geeignetes Faserbündel läßt sich für ein n allerdings entweder nur zu $s_0 = 0$ oder nur zu $s_0 = 1$ konstruieren. Diese Angaben finden sich ebenfalls im Anhang.

Für den Rest des Kapitels sei $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 10, 15\}$ fest. $B(\mathbb{R})$ und $S(\mathbb{R})$ sind Untergruppen von $Y_{n,1}(\mathbb{R})$ mit $S(\mathbb{R}) \rtimes B(\mathbb{R}) = Y_{n,1}(\mathbb{R})$. Folglich hat jede Matrix $y \in Y_{n,1}(\mathbb{R})$ eine eindeutige Darstellung $y = bsg$ mit $b \in B(\mathbb{R}), s \in S(\mathbb{R}), g \in \mathbb{R}_{>0}$. Bezeichne $S(\mathbb{Z})$ bzw. $B(\mathbb{Z})$ die Untergruppe von $S(\mathbb{R})$ bzw. $B(\mathbb{R})$ mit Einträgen in $\mathbb{Z}$. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ definiere die Untergruppen

$$B(N) := \{b \in B(\mathbb{Z}) \mid b \equiv 1 \mod N\} \leq B(\mathbb{Z})$$

und

$$S(N) := \{s \in S(\mathbb{Z}) \mid s \equiv 1 \mod N\} \leq S(\mathbb{Z}).$$

Dann ist $Y(N) = S(N) \rtimes B(N)$.

Proposition 3.2. *Sei $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 10, 15\}$ fest und $E = Y(N)\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0})$. Setze $B := B(N)\backslash B(\mathbb{R})$ und $F := S(N)\backslash(S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0})$. Dann ist (E, Π, B, F) mit der surjektiven Abbildung*

$$\Pi : E \longrightarrow B,\ Y(N) \cdot y \mapsto B(N) \cdot b \textit{ mit } y = bsg$$

ein glattes Faserbündel.

Beweis. (1) Π ist wohldefiniert. Seien dazu $y_1, y_2 \in Y_{n,1}(\mathbb{R})$ mit den eindeutigen Zerlegungen $y_i = b_i s_i$ und $y_1 \in Y(N) \cdot y_2$. Dann sei $y_N = b_N s_N \in Y(N)$ mit $s_N \in S(N), b_N \in B(N)$, so dass $y_1 = y_N y_2$. Dann folgt

$$b_1 s_1 = b_N s_N b_2 s_2 = b_N b_2 (b_2^{-1} s_N b_2) s_2 \Longrightarrow b_1 = b_N b_2,$$

da $S(\mathbb{R})$ von $B(\mathbb{R})$ normalisiert wird.

(2) Π ist differenzierbar, da $Y_{n,1}(N)\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})$ sowie $B(N)\backslash B(\mathbb{R})$ jeweils eindeutige Strukturen als Mannigfaltigkeit tragen, die durch die differenzierbare Struktur von $Y_{n,1}(\mathbb{R})$ bzw. $B(\mathbb{R})$ festgelegt ist.

Seien $Y(N)y \in Y_{n,1}(N)\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R})$ und $U(Y(n)y)$ eine Umgebung von $Y(N)y$, so dass eine offene Umgebung $U(y)$ von y in $Y_{n,1}(\mathbb{R})$ existiert, die diffeomorph zu $U(Y(N)y)$ ist. Sei $y = bs$. Dann ist $\Pi(U(Y(N)y)$ eine offene Umgebung von $B(N)b \in B(N)\backslash B$, und wir können $U(Y(N)y)$ so klein wählen, dass auch $\Pi(U(Y(N)y))$ diffeomorph zu einer offenen Umgebung $V(b)$ in $B(\mathbb{R})$ ist. Sei P die Projektion

$$P : Y_{n,1}(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R}) \times S(\mathbb{R}) \longrightarrow B(\mathbb{R}).$$

Da Π durch diese Abbildung induziert ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y_{n,1}(\mathbb{R}) \arrow[r, "P"'] \arrow[d, "\Pi_Y"] & B(\mathbb{R}) \arrow[d, "\Pi_B"'] \\ Y(N)\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R}) \arrow[r, "\Pi"'] & B(N)\backslash B(\mathbb{R}). \end{tikzcd}$$

Zudem sind die lokalen Diffeomorphismen lokale Schnitte von Π_Y bzw. Π_B, so dass $\Pi\,|_{U(Y(n)y)}$ die Komposition von differenzierbaren Abbildungen ist.

(3) Nun müssen wir noch eine Trivialisierung bestimmen. Sei $\{U_\alpha\}_\alpha$ eine offene Überdeckung von B, so dass für jedes α eine offene Teilmenge $V_\alpha \subseteq B(\mathbb{R})$ und ein Diffeomorphismus

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha,\ B(N)b \mapsto b_\alpha$$

existiert, wobei b_α ein bestimmter Vertreter der Klasse $B(N)b$ ist. Wir können nun für jedes α einen Diffeomorphismus

$$\psi_\alpha : U_\alpha \times F \longrightarrow \Pi^{-1}(U_\alpha) = \{Y(N)sbg \mid s \in S(\mathbb{R}), b \in V_\alpha, g \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

angeben:

$$\begin{array}{ccccc} U_\alpha \times F & \longrightarrow & V_\alpha \times S \times \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \{S(N)sbg \mid b \in V_\alpha, s \in S(\mathbb{R}), g \in \mathbb{R}_{>0}\} \\ (B(N)b, S(N)sg) & \mapsto & (b_\alpha, S(N)s, g) & \mapsto & S(N)sb_\alpha g, \end{array}$$

wobei $S := S(N)\backslash S(\mathbb{R})$.

Die Komposition mit dem Diffeomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \{S(N)sbg \mid b \in V_\alpha, s \in S(\mathbb{R}), g \in \mathbb{R}_{>0}\} & \longrightarrow & \Pi^{-1}(U_\alpha) \\ S(N)sbg & \mapsto & Y(N)sbg \end{array}$$

liefert dann das Gewünschte.

(4) Für jedes α gilt $\Pi \circ \psi_\alpha = \mathrm{id}_{U_\alpha}$, denn

$$\Pi \circ \psi_\alpha((B(N)b, S(N)sg)) = \Pi(Y(N)sb_\alpha g) =$$
$$\Pi(Y(N)b_\alpha \tilde{s}g) = B(N)b_\alpha = B(N)b,$$

wobei $\tilde{s} = b_\alpha^{-1} s b_\alpha$.

□

Da B kompakt ist, können wir die Überdeckung $\{U_\alpha\}_\alpha$ endlich annehmen. Sei $\{f_\alpha\}_\alpha$ eine Partition der Eins zu dieser Überdeckung. Dann ist $\{g_\alpha\}_\alpha$ mit $g_\alpha = f_\alpha \circ \Pi$ eine Partition der Eins der (endlichen) Überdeckung $\{\Pi^{-1}(U_\alpha)\}_\alpha$ von E. Sei ds ein Haarmaß auf $S(\mathbb{R})$, db eines auf $B(\mathbb{R})$, dann ist $dy = dbds$ eines auf $Y_{n,1}(\mathbb{R})$. Wir erhalten mit der eindeutigen Zerlegung $y = sb$ folgende Identität

$$\int_E \varphi(yg)\psi^{-1}(y)|g|^{s-(n-1)/2} dydg =$$
$$\sum_\alpha \int_{\pi^{-1}(U_\alpha)} g_\alpha(yg)\varphi(yg)\psi^{-1}(yg)|gy|^{s-(n-1)/2} dydg =$$
$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha \times F} g_\alpha \circ \psi_\alpha((b, sg))\ \varphi \circ \psi_\alpha(b, sg)\ \psi^{-1} \circ \psi_\alpha(b, sg)|\ \psi_\alpha(b, sg)|^{s-(n-1)/2} dsdgdb \overset{(1)}{=}$$
$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} f_\alpha(b) \int_F \varphi \circ \psi_\alpha((b, sg))\ \psi^{-1} \circ \psi_\alpha(b, sg)\ |\psi_\alpha(b, sg)|^{s-(n-1)/2} dsdgdb \overset{(2)}{=}$$
$$\int_B \int_F \varphi(sbg) g^{s-(n-1)/2} dsdg\psi^{-1}(b)db,$$

(3.15)

wobei in (1) wieder der Satz von Fubini angewandt wurde. Schritt (2) folgt, da das Faserintegral $\int_F \varphi(sbg)|g|^{s-(n-1)/2} dsdg$ wohldefiniert ist als Funktion auf B. Sei dazu $b \in B$. Für jedes Paar α, α' mit $b \in U_\alpha \cap U_{\alpha'}$ gibt es dann $b_\alpha \in U_\alpha, b_{\alpha'} \in U_{\alpha'}$, so dass $\varphi_\alpha(b) = b_\alpha$ bzw. $\varphi_{\alpha'}(b) = b_{\alpha'}$, und es gibt ein $b_N \in B(N)$ mit $b_\alpha = b_N b_{\alpha'}$.

$$\int_F \varphi \circ \psi_\alpha((b, sg))|g|^{s-(n-1)/2} dsdg = \int_F \varphi(sb_\alpha g)|g|^{s-(n-1)/2} dsdg =$$
$$\int_F \varphi(sb_N b_{\alpha'} g)|g|^{s-(n-1)/2} dsdg = \int_F \varphi(b_N(b_N^{-1} sb_N)b_{\alpha'} g)|g|^{s-(n-1)/2} dsdg =$$
$$\int_F \varphi \circ \psi_{\alpha'}((b, sg))|g|^{s-(n-1)/2} dsdg,$$

denn φ ist linksinvariant unter $B(N) \leq Y(N)$, $B(N)$ normalisiert $S(\mathbb{R})$ und es gilt $db_N^{-1} sb_N = ds$.

Da das Produktmaß $dsdg$ kein linksinvariantes Maß auf $S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ ist, müssen wir noch eine kleine Korrektur vornehmen. Zudem möchten wir eine Linksmultiplikation von $b \in B$ erzwingen. Setze daher für jedes $b \in B$

$$F_b := b^{-1} S(N) b \backslash (S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}).$$

Das ist wohldefiniert, da $S(N)$ von $B(N)$ normalisiert wird. Sei s_0 ein kritischer Wert. Die Gruppe $S(\mathbb{R})$ ist so gewählt, dass $d(s, g) := |g|^{s_0-(n-1)/2} dsdg$ ein linksinvariantes Maß auf $\mathbb{R}_{>0} \ltimes S(\mathbb{R})$ ist. Ist n gerade, so ist nach Proposition 2.1 $s_0 = \frac{1}{2}$ und das Haarmaß ist durch $|g|^{1-\frac{n}{2}} dsdg$ gegeben. Ist n ungerade, so ist $s_0 = 0$ oder $s_0 = 1$, und das Haarmaß ist entweder $|g|^{(1-n)/2} dsdg$ oder $|g|^{(3-n)/2} dsdg$. Das Faserintegral schreibt sich dann

$$\int_F \varphi(sbg)|g|^{s_0-(n-1)/2} dsdg = \int_{F_b} \varphi(bsg)|g|^{s_0-(n-1)/2} dsdg =$$
$$\int_{F_b} \varphi(bsg) d(s, g),$$

denn es ist $d(b^{-1} sb) = ds$ für jedes $b \in B(\mathbb{R})$.

Es ist $|g|^{l(s_0)} d(s, g) db$ für einen geeigneten Exponenten $l(s_0)$ ein Haarmaß auf $Y_{n,1}(\mathbb{R})$, welches wir auch als linksinvariante Differentialform interpretieren können. Damit fassen wir

$$\varphi(sbg) d(s, g) \psi^{-1}(b) db = \varphi(sbg) \psi^{-1}(b) |g|^{-l(s_0)} |g|^{l(s_0)} d(s, g) db$$

als Form auf E auf, und bezeichnen diese mit η. Sei $\Omega^\bullet(B, \mathbb{C})$ der Komplex der Differentialformen auf B mit Werten in $\mathbb{C}$. Das Faserintegral $\fint_F \eta \in \Omega^{\dim B}(B, \mathbb{C})$ ist nach [GHV76, VII.§5 7.12] glatt in b, und wir haben damit

Proposition 3.3. *Es ist*

$$\int_B (\fint_F \eta)(b) = \int_B \int_{F_b} \varphi(bsg) d(s,g) \psi^{-1}(b) db = \int_B (\int_{F_b} \varphi(bsg) d(s,g)) \wedge \psi^{-1}(b) db,$$

wobei $\int_{F_b} \varphi(bsg)d(s,g)$ *eine glatte Funktion auf* B *ist.*

gezeigt. Wir wollen nun eine Verbindung zwischen diesem Integral und cuspidaler Kohomologie herstellen.

3.3. Kohomologische Interpretation des Faserintegrals

Bezeichne $C_c^\infty(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$ die glatten Funktionen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, die linksinvariant unter Γ sind und modulo Γ kompakten Träger haben. Da die Projektion $\pi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to X^1$ eigentlich ist, kann nach [BW80, VII, Prop. 2.5] der Komplex $\Omega_c^\bullet(X^1, \mathbb{C})^\Gamma$ der Formen auf X^1, die modulo Γ kompakten Träger haben, mit dem Unterkomplex $C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), C_c^\infty(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}))$ von $C^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), C^\infty(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C}))$ identifiziert werden.

Dann kann $\eta \in \Omega_c^\bullet(X^1, \mathbb{C})^\Gamma$ wie in (3.3) geschrieben werden als

$$\eta \cong \pi^* \eta = \sum_{|I|=k} f_I \omega_I$$

mit $f_I \in C_c^\infty(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$. Für jedes $b \in B(\mathbb{R})$ betrachte die differenzierbare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} j_b : & S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ & sg & \mapsto & bs\tilde{g}, \end{array}$$

wobei $\tilde{g} := j(g) \cdot \mathrm{diag}(g^{-\frac{1}{n}}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Diese induziert eine differenzierbare Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \bar{j}_b : & F_b = b^{-1}S(N)b \backslash (S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}) & \longrightarrow & \Gamma(N) \backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \\ & b^{-1}S(N)b \cdot sg & \mapsto & \Gamma(N) \cdot bs\tilde{g}, \end{array}$$

wobei $\Gamma(N) \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ die arithmetische Untergruppe aus (3.13) ist. Diese operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf X^1, so dass der Quotient $\Gamma(N) \backslash X^1$ eine differenzierbare Struktur besitzt.

Die Abbildungen j_b sind auch für $b \in B$ wohldefiniert, da $B(N) \leq \Gamma(N)$ und $S(N)$ von $B(N)$ normalisiert wird. Durch Komposition von $\bar{j}_b$ mit der Projektion $\pi : \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow X^1$ erhalten wir dann eine Abbildung

$$\pi \circ \bar{j}_b : F_b \longrightarrow \Gamma(N) \backslash X^1.$$

Proposition 3.4. $\pi \circ \bar{j}_b$ *ist eigentlich.*

Beweis. Da $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ kompakt ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\bar{j}_b : F_b \longrightarrow \Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

eigentlich ist:

(1) Das Urbild $\bar{j}_b^{-1}(x)$ jedes Punktes $x \in \Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist kompakt:

Seien $b^{-1}S(N)b \cdot sg, b^{-1}S(N)b \cdot s'g' \in F_b$ mit

$$\bar{j}_b(b^{-1}S(N)b \cdot sg) = \bar{j}_b(b^{-1}S(N)b \cdot s'g').$$

Dann gibt es ein $\gamma \in \Gamma(N)$, so dass $\gamma bsg\,\mathrm{diag}(g^{-1/n}) = bs'g'\,\mathrm{diag}(g'^{-1/n})$.

Wir berechnen den Fall $n = 4$: Seien

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & -z & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und eine entsprechende Notation gelte für b' und s'. Dann ist

$$bsg = \begin{pmatrix} g & 0 & u & x + uz \\ 0 & 1 & v - z & y + vz \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und die folgende Identität muss erfüllt sein:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g & 0 & u & x+uz \\ 0 & 1 & v-z & y+vz \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g^{-1/4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{-1/4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{-1/4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{-1/4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}g^{3/4} & \gamma_{12}g^{-1/4} & (\gamma_{11}u+\gamma_{12}(v-z)+\gamma_{13})g^{-1/4} & (\gamma_{11}(x+uz)+\gamma_{12}(y+vz)+\gamma_{13}z+\gamma_{14})g^{-1/4} \\ \gamma_{21}g^{3/4} & \gamma_{22}g^{-1/4} & (\gamma_{21}u+\gamma_{22}(v-z)+\gamma_{23})g^{-1/4} & (\gamma_{21}(x+uz)+\gamma_{22}(y+vz)+\gamma_{23}z+\gamma_{24})g^{-1/4} \\ \gamma_{31}g^{3/4} & \gamma_{32}g^{-1/4} & (\gamma_{31}u+\gamma_{32}(v-z)+\gamma_{33})g^{-1/4} & (\gamma_{31}(x+uz)+\gamma_{32}(y+vz)+\gamma_{33}z+\gamma_{34})g^{-1/4} \\ \gamma_{41}g^{3/4} & \gamma_{42}g^{-1/4} & (\gamma_{41}u+\gamma_{42}(v-z)+\gamma_{43})g^{-1/4} & (\gamma_{41}(x+uz)+\gamma_{42}(y+vz)+\gamma_{43}z+\gamma_{44})g^{-1/4} \end{pmatrix} \overset{!}{=}$$

$$\begin{pmatrix} g'^{3/4} & 0 & ug'^{-1/4} & (x'+uz')g'^{-1/4} \\ 0 & g'^{-1/4} & (v-z')g'^{-1/4} & (y'+vz')g'^{-1/4} \\ 0 & 0 & g'^{-1/4} & z'g'^{-1/4} \\ 0 & 0 & 0 & g'^{-1/4} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \gamma_{ij} = 0 \text{ für } i > j \text{ und } \gamma_{12} = 0 \overset{\gamma\in\Gamma(N)}{\Longrightarrow} \gamma_{ii} \in \{\pm 1\}$$
$$\Longrightarrow \pm g^{1/4} = g'^{-1/4} \Longrightarrow g = g'.$$

Da $g^{-1/4}$ und $g'^{-1/4}$ positiv sind, folgt auch $\gamma_{ii} = 1$ für $i = 1, \ldots, 4$. Um die restlichen Einträge von γ, s und s' zu bestimmen, vergleichen wir zunächst die ersten beiden Einträge der zweiten Spalte:

Mit $u + \gamma_{13} = u$ folgt dann $\gamma_{13} = 0$. Aus $(v - z) + \gamma_{23} = v - z'$ und $z + \gamma_{34} = z'$ ergibt sich die Identität $\gamma_{34} = -\gamma_{23}$. Folglich liegt $\gamma \in S(N)$, was $s \in b^{-1}S(N)b \cdot s'$ impliziert. Die Abbildung $\bar{j}_b$ ist demnach injektiv, und die Behaptung folgt.

Für größere natürliche Zahlen n können wir in derselben Weise durch Vergleichen der Einträge zunächst schließen, dass $\gamma \in S(N)$ und $g = g'$ ist. Weiter sei $\gamma = \gamma_b\gamma_s$ mit $\gamma_b \in B(N), \gamma_s \in S(N)$. Dann ist

$$bs' = \gamma bs = \gamma_b\gamma_s bs = \gamma_b b(b^{-1}\gamma_s b)s.$$

Es folgt $\gamma_b = 1$ und $s' \in b^{-1}S(N)b \cdot s$.

(2) $\bar{j}_b$ ist abgeschlossen:

Wir betrachten ebenfalls erst den Fall $n = 4$. Zunächst besitzt jede Klasse $b^{-1}S(N)b \cdot sg \in b^{-1}S(N)b\backslash(S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0})$ einen Vertreter $s'g$, so dass alle Einträge von s' im Intervall $[0, N]$ liegen. Seien nun $\bar{A} \subseteq F_b$ abgeschlossen und $A \subseteq S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ ein Vertretersystem derart, dass die Einträge von $s \in S(\mathbb{R})$ eines Elementes $sg \in A$ im Intervall $[0, N]$ liegen. Dann ist

$$\bar{j}_b(\bar{A}) = \{\Gamma(N) \cdot bs\tilde{g} \mid sg \in A\} \subseteq \Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$$

genau dann abgeschlossen, wenn $\Gamma(N)j_b(A)$ abgeschlossen in $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ ist. Sei $(\gamma_n bs_n\tilde{g}_n)$ eine Folge in $\Gamma(N)j_b(A)$ mit $\gamma_n \in \Gamma(N)$ und $s_ng_n \in A$, die in $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$ konvergiert. Bezeichnen $\underline{\gamma}_{n,j}$, $j = 1, \ldots, 4$, die Spalten von γ_n, und sei

$$s_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_n \\ 0 & 1 & -z_n & y_n \\ 0 & 0 & 1 & z_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann hat $\gamma_n b s_n \tilde{g}_n$ die Spalten

$$g_n^{3/4} \underline{\gamma}_{n,1}, \quad g_n^{-1/4} \underline{\gamma}_{n,2}, \quad (\underline{\gamma}_{n,1} u + \underline{\gamma}_{n,2}(v - z_n) + \underline{\gamma}_{n,3}) g_n^{-1/4}$$
$$\text{und} \quad (\underline{\gamma}_{n,1}(x_n + u z_n) + \underline{\gamma}_{n,2}(y_n + v z_n) + \underline{\gamma}_{n,3} z + \underline{\gamma}_{n,4}) g_n^{-1/4}.$$

Sei zunächst $g_n \geq 1$ für fast alle n.

Da $(g_n^{3/4} \underline{\gamma}_{n,1})$ gegen ein $x \in \mathbb{R}^4$ konvergiert, gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$| g_n^{3/4} \underline{\gamma}_{n,1} - x | < \epsilon \Longrightarrow | \underline{\gamma}_{n,1} - x g_n^{-3/4} | < g_n^{-3/4} \epsilon \leq \epsilon.$$

Dann liegt jedes Folgenglied $\underline{\gamma}_{n,1}$ mit $n \geq N$ in einer ϵ-Umgebung von $x g_n^{-3/4}$, und da $g_n \geq 1$, liegen alle Glieder in einer kompakten Umgebung von x.

Dort besitzt $\underline{\gamma}_{n,1}$ eine konvergente Teilfolge, und wir finden eine konstante Teilfolge $\underline{\gamma}_1$. Dann besitzt aber auch g_n eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $g \in \mathbb{R}$. Da $(\gamma_n b s_n \tilde{g}_n)$ in $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ konvergiert, muss schon $g \in \mathbb{R}_{>0}$ sein. Damit sehen wir, dass auch $(\underline{\gamma}_{n,2})$ eine konstante Teilfolge $(\underline{\gamma}_2)$ besitzt.

Sind fast alle Folgenglieder g_n kleiner als 1, so finden wir in gleicher Weise zuerst eine konstante Teilfolge $(\underline{\gamma}_2)$ von $(\underline{\gamma}_{n,2})$, und schließen dann auf die Konvergenz von (g_n) und die Existenz einer konstanten Teilfolge von $(\underline{\gamma}_{n,1})$.

Da die dritte Spalte $((\underline{\gamma}_{n,1} u + \underline{\gamma}_{n,2}(v - z_n) + \underline{\gamma}_{n,3}) g_n^{-1/4})$ konvergiert und die Teilfolge $((\underline{\gamma}_1 u + \underline{\gamma}_2(v - z_n) + \underline{\gamma}_{n,3}) g^{-1/4})$ besitzt, folgt auch die Konvergenz einer Teilfolge von $(-\underline{\gamma}_2 z_n + \underline{\gamma}_{n,3})$. Nun ist (z_n) eine Folge in $[0, N]$ und besitzt daher eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert z. Daraus schließen wir auch, dass $(\underline{\gamma}_{n,3})$ eine konstante Teilfolge $(\underline{\gamma}_3)$ hat.

Zuletzt implizieren die Konvergenz der vierten Spalte und die bisherigen Resultate die Konvergenz von

$$(\underline{\gamma}_1 x_n + \underline{\gamma}_2 y_n + \underline{\gamma}_{n,4}).$$

Da auch x_n und y_n Folgen in $[0, N]$ sind und folglich konvergente Teilfolgen mit Grenzwert in $[0, N]$ besitzen, ergibt sich noch die Existenz einer konstanten Teilfolge $\underline{\gamma}_4$ von $\underline{\gamma}_{n,4}$.

Seien s der Grenzwert der konvergenten Teilfolge von (s_n) und $\gamma = (\gamma_1 \mid \gamma_2 \mid \gamma_3 \mid \gamma_4) \in \Gamma(N)$ die konstante Teilfolge von γ_n. Dann hat die konvergente Folge $(\gamma_n b s_n \tilde{g}_n)$ den Grenzwert $(\gamma b s \tilde{g})$.

Da $\bar{A} \subseteq b^{-1}S(N)b \backslash (S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0})$ abgeschlossen ist, ist auch $b^{-1}S(N)b \cdot A \subseteq S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ abgeschlossen. Wegen $(s_n g_n) \in A \subseteq b^{-1}S(N)b \cdot A$, ist folglich sg in $b^{-1}S(N)b \cdot A$. Dann ist $bs\tilde{g} = j_b(sg) \in j_b(b^{-1}S(N)b{\cdot}A) = S(N)j_b(A)$, und es folgt $\gamma bsg \in \Gamma(N)j_b(A)$, da $S(N) \leq \Gamma(N)$.

Für $n > 4$ können wir in derselben Weise verfahren. Seien $\bar{A}$ und A wie im Fall $n = 4$ definiert. Wir betrachten wieder eine Folge $(\gamma_n b s_n \tilde{g}_n) \in \Gamma(N)j_b(A)$. Aus der Konvergenz der ersten beiden Spalten schließen wir wieder mit der Fallunterscheidung $g_n \geq 1$ für fast alle n und $g_n < 1$ für fast alle n, dass $\gamma_{n,1}, \Gamma_{n,2}$ und g_n konvergente Teilfolgen besitzen. Da die Einträge von s_n nach Definition von A in einem Kompaktum liegen, besitzen diese konvergente Teilfolgen. Damit erhalten wir wie im Fall $n = 4$ induktiv konstante Teilfolgen von $(\gamma_{n,i})$ für $i > 2$, und die Behauptung folgt. $\square$

Dann induziert $\pi \circ \bar{j}_b$ eine Abbildung

$$\begin{array}{rccc} (\pi \circ \bar{j}_b)^* : & \Omega_c^\bullet(\Gamma(N)\backslash X^1, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \Omega_c^\bullet(F_b, \mathbb{C}) \\ & \eta & \mapsto & \sum_{|I|=\bullet} f_I \circ \bar{j}_b j_b^* \omega_I, \end{array}$$

wobei $\pi^*\eta = \sum_{|I|=\bullet} f_I \omega_I \in \Omega_c^\bullet(\Gamma(N)\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}), \mathbb{C})$. Nun setzt sich j_b aus einer Linksmultiplikation l_b, $b \in B(\mathbb{R}) \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, und der Abbildung $i : g \mapsto \tilde{g}$ zusammen. Da ω_I eine linksinvariante Form auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ist, gilt

$$j_b^*\omega_I = (l_b \circ i)^*\omega_I = i^*\omega_I.$$

Da $i : S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ein injektiver Lie-Gruppenhomomorphismus ist, dessen Bild bereits in der Boreluntergruppe B der oberen Dreiecksmatrizen liegt, induziert i^* eine surjektive Abbildung $\mathfrak{sl}_n^*/\mathfrak{so}_n^* \cong \tilde{\mathfrak{p}}^* \to \mathrm{Lie}(S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0})^*$, wobei $\tilde{\mathfrak{p}}$ die Lie-Algebra von B ist.

Seien $\beta := \dim F_b \in \{b_n, t_n\}$ und $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n^2-1}\}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}_n^*$ so gewählt, dass $\omega_{\beta+1}, \ldots, \omega_{n^2-1} \in \operatorname{Kern} i^*$ und $\{i^*\omega_1, \ldots, i^*\omega_\beta\}$ eine Basis von $\mathrm{Lie}(\mathbb{R}_{>0} \ltimes S(\mathbb{R}))^*$ ist. Identifizieren wir $\mathrm{Lie}(\mathbb{R}_{>0} \ltimes S(\mathbb{R}))$ mit den linksinvarianten Vektorfeldern auf $\mathbb{R}_{>0} \ltimes S(\mathbb{R})$, so sei $\omega' := i^*\omega_1 \wedge \ldots \wedge i^*\omega_\beta$ die bis auf Skalare eindeutige linksinvariante β-Form auf $\mathbb{R}_{>0} \ltimes S(\mathbb{R})$. Für $\eta \in \Omega_c^\beta(\Gamma(N)\backslash X^1, \mathbb{C})$ folgt dann

$$(\pi \circ \bar{j}_b)^*\eta = \sum_{|I|=\beta} f_I \circ \bar{j}_b\, i^*\omega_I = \sum_{|I|=\beta} \epsilon_I (f_I \circ \bar{j}_b)\omega' \in \Omega_c^\beta(F_b, \mathbb{C}), \tag{3.16}$$

wobei $\epsilon_I \in \{\pm 1, 0\}$ durch $i^*\omega_I = \epsilon_I \omega'$ festgelegt ist.

Insbesondere erhalten wir eine Abbildung zwischen den Kohomologiegruppen

$$\begin{array}{rccc} \bar{j}_b^{\#} : & H_c^\beta(\Gamma(N)\backslash X^1, \mathbb{C}) & \longrightarrow & H_c^\beta(F_b, \mathbb{C}) \\ & [\sum_{|I|=\beta} f_I \omega_I] & \mapsto & [(\sum_{|I|=\beta} \epsilon_I (f_I \circ \bar{j}_b)\omega']. \end{array}$$

Nach [GHV76, Proposition XIV §4.13] induziert die Integration über F_b eine surjektive, lineare Abbildung

$$\int_{F_b}^{\#} : H_c^{\beta}(F_b, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Da wir die linksinvariante Form ω' bis auf eine Konstante mit dem gewählten Haarmaß $d(s, g)$ auf $S(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}$ identifizieren können, ist dann

$$\int_{F_b}^{\#} [\sum_{|I|=\beta} \epsilon_I (f_I \circ \bar{j}_b)\omega'] = \sum_{|I|=\beta} \epsilon_I \int_{F_b} f_I(bsg) d(s, g). \tag{3.17}$$

Das kommt unserem Faserintegral schon recht nahe, allerdings verwenden wir hier noch Kohomologie mit kompaktem Träger und müssen nun noch den Schritt zur cuspidalen Kohomologie machen.

3.4. Stokes für schnell fallende Funktionen

Seien $\beta = \dim F_b$ wie auf Seite 39 definiert und $\epsilon \in \{\pm 1\}$. In (2.5) und (2.6) haben wir bereits gesehen, dass

$$\dim H^{\beta}(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty, \psi_\infty))_\epsilon = 1.$$

Folglich ist $H^{\beta}(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty, \psi_\infty))_\epsilon \otimes W(\pi_f, \psi_f)$ ein irreduzibler $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$-Modul. Für einen beliebigen Erzeuger

$$\eta_\infty^\epsilon := \sum_{|I|=\beta} w_{\infty,I}^\epsilon \omega_I \in H^{\beta}(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty, \psi_\infty))_\epsilon$$

betrachten wir den $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$-Modulisomorphismus

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}^{-1}(\eta_\infty^\epsilon): & W(\pi_f, \psi_f) & \longrightarrow & H^{\beta}(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, V_\pi)_\epsilon \\ & w_f & \mapsto & \eta^\epsilon := \sum_{|I|=\beta} \varphi_I^\epsilon \omega_I, \end{array} \tag{3.18}$$

wobei $\varphi_I^\epsilon := \mathcal{F}^{-1}(w_f \otimes w_{\infty,I}^\epsilon)$ die inverse Fouriertransformierte der globalen Whittakerfunktion $w_f \otimes w_{\infty,I}^\epsilon$ ist. Wir beachten, dass nach (2.4) bereits

$$H^{\beta}(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty, \psi_\infty))_\epsilon = C^{\beta}(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty, \psi_\infty))_\epsilon$$

gilt. Nach (1.1) kann $w_f \in W(\pi_f, \psi_f)$ so gewählt werden, dass eine ganze Funktion $P_{I,\infty}^\epsilon(s)$ existiert mit

$$P^{\epsilon}_{I,\infty}(s)L(s,\pi) = \int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})} \varphi^{\epsilon}_I(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s-(n-1)/2}dg. \tag{3.19}$$

Die Funktion $P^{\epsilon}_{I,\infty}(s)$ ist abhängig von der ∞-Komponente $w^{\epsilon}_{\infty,I}$ von φ^{ϵ}_I.

Sei $K_n \leq \mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$ eine kompakt offene Untergruppe derart, dass alle Spitzenformen $\varphi^{\epsilon}_I \in V_\pi$, die als Koeffizienten in η^ϵ auftauchen, rechtsinvariant unter K_n sind. Weiter seien K_1 wie in (3.6) und K'_n wie in (3.9) definiert.

Wegen (3.11) und (3.5) können wir η^ϵ mit dem Tupel

$$(\eta^{\epsilon,\alpha_i})_{i=1,\ldots,M} := (\sum_{|I|=\beta}\varphi^{\epsilon,\alpha_i}_I\omega_I)_{i=1,\ldots,N} \in \prod_{i=1}^{M} H^{\beta}_{cusp}(\Gamma_i\backslash X^1,\mathbb{C})\ ^4 \tag{3.20}$$

identifizieren. Sei $\Gamma(N)$ wie in (3.13), dann liegen die Formen η^{ϵ,α_i} auch schon in $H^{\beta}_{\mathrm{cusp}}(\Gamma(N)\backslash X^1,\mathbb{C})$. Nach Borel [Bor81, Theorem 5.2] induziert die Einbettung

$$\Omega^\bullet_c(\Gamma(N)\backslash X^1,\mathbb{C}) \hookrightarrow \Omega^\bullet_{fd}((\Gamma(N)\backslash X^1,\mathbb{C})$$

einen Isomorphismus in der Kohomologie, und wie wir bereits in Kapitel 3.1 angemerkt haben, können wir die Elemente η^{ϵ,α_i} als Formen in $\mathcal{H}^{\beta}_{fd} \subseteq \Omega^{\beta}_{fd}(\Gamma(N)\backslash X^1,\mathbb{C})$ auffassen. Folglich finden wir Formen $\eta^{\epsilon,\alpha_i}_{fd} \in \Omega^{\beta-1}_{fd}(\Gamma(N)\backslash X^1,\mathbb{C})$ mit

$$\eta^{\epsilon,\alpha_i} + d\eta^{\epsilon,\alpha_i}_{fd} = \eta^{\epsilon,\alpha_i}_c \in \Omega^{\beta}_c(\Gamma(N)\backslash X^1,\mathbb{C}). \tag{3.21}$$

Wie in (3.16) haben wir

$$\int_{F_b}\bar{j}^*_b\eta^{\epsilon,\alpha_i} = \int_{F_b}\sum_{|I|=\beta}\varphi^{\epsilon,\alpha_i}_I(bs\tilde{g})i^*\omega_I = \sum_{|I|=\beta}\epsilon_I\int_{F_b}\varphi^{\epsilon,\alpha_i}_I(bsg)d(s,g),$$

und es bleibt folgender Satz zu zeigen:

Satz 3.1. *Sei $\eta_{fd} \in \Omega^{\beta-1}_{fd}(\Gamma(N)\backslash X^1,\mathbb{C})$. Dann gilt*

$$\int_{F_b} j^*_b d\eta_{fd} = 0.$$

[4]Die Elemente η^{ϵ,α_i} liegen natürlich in der $(\mathfrak{g},K)$-Kohomologie, unter dem DeRham-Isomorphismus werden sie in die cuspidale Kohomologie abgebildet.

Beweis. Setze $S_b := b^{-1}S(N)b\backslash S(\mathbb{R})$. Es ist $\overline{\mathbb{R}_{>0}} := \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}_{>0}$ zu einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist $\overline{F_b} := \overline{\mathbb{R}_{>0}} \times S_b$ eine Kompaktifizierung mit Rand $\partial\overline{F}_b = (S_b \times \{0\}) \cup (S_b \times \{\infty\})$ von F_b.

Sei weiter $\eta_{fd} := \sum_{|I|=\beta-1} f_I\omega_I \in \Omega_{fd}^{\beta-1}(\Gamma(N)\backslash X^1, \mathbb{C})$, wobei ω_I linksinvariante $\beta-1$-Formen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sind. Nach Definition sind die Koeffizientenfunktionen f_I schnell fallend.

Dann ist $\bar{j}_b^*\eta_{fd} = \sum_{|I|=\beta-1}(f_I \circ \bar{j}_b)i^*\omega_I$, und dem Beweis zu Proposition 3.1 nach gibt es zu jedem ganzzahligen $m < 0$ ein $t > 0$ und eine Konstante C_t, so dass

$$|f_I \circ j_b(sg)| \leq C_t \min\{g^{\pm t}\}. \tag{3.22}$$

Per Definition ist auch $d\eta_{fd} := \sum_{|I|=\beta} g_I\omega_I \in \Omega_{fd}^{\beta}(\Gamma(N)\backslash X^1, \mathbb{C})$, wobei ω_I linksinvariante β-Formen auf $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und die Funktionen g_I schnell fallend sind. Es ist

$$\bar{j}_b^* d\eta_{fd} = \sum_{|I|=\beta}(g_I \circ \bar{j}_b)i^*\omega_I = \sum_{|I|=\beta} \epsilon_I(g_I \circ \bar{j}_b)\omega'$$

mit einer linksinvarianten β-Form ω' auf $S(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{>0}$ und $\epsilon_I \in \{0, \pm 1\}$.

Dann erfüllt $h := \sum_{|I|=\beta} \epsilon_I(g_I \circ \bar{j}_b)$ ebenfalls die Ungleichung (3.22). Wir betrachten zunächst die differenzierbare Struktur dieser Mannigfaltigkeit mit Rand. Sei $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ ein differenzierbarer Atlas des kompakten Quotienten S_b. Dann genügt es $\mathbb{R}_{>0}$ zu kompaktifizieren. Die Abbildung

$$\arctan : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow (0, \frac{\pi}{2})$$

ist differenzierbar, und eine Kompaktifizierung mit Rand des Intervalles ist durch $[0, \frac{\pi}{2}]$ gegeben. Die Karten $(i, [0, 1))$ und $(\frac{\pi}{2} - i, (\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}])$ bilden einen differenzierbaren Atlas, wobei i die Einbettung nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet.

Wir gehen nun in folgenden Schritten vor:

(1) $d\bar{j}_b^*\eta_{fd}$ kann durch Verschwinden auf $\partial\overline{F_b}$ stetig auf $\overline{F_b}$ fortgesetzt werden. Bezeichne diese Fortsetzung mit $\overline{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$.

(2) $\bar{j}_b^*\eta_{fd}$ kann durch Verschwinden auf $\partial\overline{F_b}$ stetig auf $\overline{F_b}$ fortgesetzt werden. Bezeichne diese Fortsetzung mit $\widetilde{\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$.

(3) Die Fortsetzung $\widetilde{\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$ ist differenzierbar, und es ist

$$d\widetilde{\bar{j}_b^*\eta_{fd}} = \overline{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}}.$$

Dann können wir den Satz von Stokes [Lee03, Theorem 14.9] auf die kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand $\overline{F_b}$ anwenden und die Behauptung des Satzes folgern:

$$\int_{F_b} d\bar{j}_b^*\eta_{fd} = \int_{\overline{F_b}} \overline{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}} = \int_{\overline{F_b}} d\widetilde{\bar{j}_b^*\eta_{fd}} = \int_{\partial\overline{F_b}} \widetilde{\bar{j}_b^*\eta_{fd}} = 0.$$

Seien $x_1, \dots, x_\beta$ Koordinatenfunktionen einer Karte $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ von S_b und r die Koordinate einer offenen Umgebung V in $\mathbb{R}_{>0}$, so dass $U^p := V \cup \{p\},\ p \in \{0, \infty\}$, eine offene Umgebung von p in $\overline{\mathbb{R}_{>0}}$ ist. Setze

$$l(f_I)^p_{\alpha,b}(x_1, \dots, x_{\beta-1}, r) := \begin{cases} f_I \circ \bar{j}_b \circ (\varphi_\alpha^{-1}, \tan \circ i^{-1})(x_1, \dots, x_{\beta_1}, r), & \text{falls } p = 0, \\ f_I \circ \bar{j}_b \circ (\varphi_\alpha^{-1}, \tan \circ (\pi/2 - i)^{-1})(x_1, \dots, x_{\beta_1}, r), & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

und

$$k(f_I)^p_{\alpha,b}(x_1, \dots, x_{\beta-1}, r) := \begin{cases} f_I \circ \bar{j}_b \circ (\varphi_\alpha^{-1}, \tan \circ i^{-1})(x_1, \dots, x_{\beta_1}, r) \cdot \frac{1}{r^{s_0-(n-1)/2}}, & \text{falls } p = 0, \\ f_I \circ \bar{j}_b \circ (\varphi_\alpha^{-1}, \tan \circ (\pi/2 - i)^{-1})(x_1, \dots, x_{\beta_1}, r) \cdot \frac{1}{r^{s_0-(n-1)/2}}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Analog ist $k(h)^p_{\alpha,b}$ definiert.

Setze $\omega_j := dx_1 \cdots dx_{j-1} \hat{dx_j} \cdots dx_{\beta-1} dr$, wobei $\hat{dx_j}$ bedeutet, dass dx_j im Wedge-Produkt weggelassen wird. Für $j = 1, \dots, \beta - 1$ ist dann $\omega'_j := \frac{1}{r^{s_0-(n-1)/2}} \omega_j$ eine linksinvariante $\beta - 1$-Form auf F_b. Weiter sei $\omega'_\beta := dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_j \cdots dx_{\beta-1}$. Auf einer offenen Umgebung $U_\alpha \times V$ in F_b schreibt sich $\bar{j}_b^*\eta_{fd}$ damit in der Form

$$\bar{j}_b^*\eta_{fd} = \sum_{|I|=\beta-1} \epsilon_I l(f_I)^p_{\alpha,b} \omega'_{j(I)},$$

wobei $j(I) \in \{1, \dots, \beta\}$, und für $\bar{j}_b^* d\eta_{fd}$ haben wir die Darstellung

$$\bar{j}_b^* d\eta_{fd} = k(h)^p_{\alpha,b}(x_1, \dots, x_{\beta-1}, r) dx_1 \dots dx_{\beta-1} dr.$$

(1) Wir setzten $k(h)^p_{\alpha,b}(x_1, \dots, x_{\beta-1}, 0) := 0$ für jeden Punkt $x := (x_1, \dots, x_{\beta-1}) \in \varphi(U_\alpha)$. Dann ist $k(f_I)^p_{\alpha,b}(x, 0)$ stetig in $(x, 0) \in U_\alpha \times \mathbb{R}_{\geq 0}$: Es gelten

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} \mid k(h)^0_{\alpha,b}(x, r) - 0 \mid &= \lim_{r\to 0} \mid h \circ (\varphi_\alpha^{-1}(x), \tan(r)) \frac{1}{r^{s_0-(n-1)/2}} \mid \\ &\leq \lim_{r\to 0} C_t \frac{|\tan(\pi/2 - r)|^t}{r^{\Re(s_0)-(n-1)/2}} = 0 \end{aligned}$$

für ein hinreichend großes t, da $\tan(r) \approx r$ für r nahe an 0, und

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \mid k(h)^{\infty}_{\alpha,b}(x,r) - 0 \mid &= \lim_{r\to 0} \mid h \circ (\varphi_\alpha^{-1}(x), \tan(\pi/2 - r))\frac{1}{r^{s_0-(n-1)/2}} \mid \\ &\leq \lim_{r\to 0} C_t \frac{|\tan(r)|^{-t}}{r^{\Re(s_0)-(n-1)/2}} = 0\end{aligned}$$

für hinreichend großes t, da $\tan(\pi/2 - r)^{-1}$ schneller gegen 0 fällt als r.

Damit kann auch die Form $d\bar{j}_b^*\eta_{fd}$ auf $\overline{F_b}$ fortgesetzt werden, so dass das Integral $\int_{\overline{F_b}} \overline{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$ existiert und mit $\int_{F_b} d\bar{j}_b^*\eta_{fd}$ übereinstimmt.

(2) Wir setzten auch $k(f_I)^p_{\alpha,b}(x_1,\dots,x_{\beta-1},0) := 0$ und $l(f_I)^p_{\alpha,b}(x_1,\dots,x_{\beta-1},0) := 0$ für jeden Punkt $x := (x_1,\dots,x_\beta) \in \varphi(U_\alpha)$. Dann sind beide Funktionen stetig in $(x,0) \in \varphi(U_\alpha) \times \mathbb{R}_{\geq 0}$:

Es gelten

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \mid l(f_I)^0_{\alpha,b}(x,r) - 0 \mid &= \lim_{r\to 0} \mid f_I \circ j_b \circ (\varphi_\alpha^{-1}(x), \tan(r)) \mid \\ &\leq \lim_{r\to 0} C_t |\tan(r)|^t = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0} \mid l(f_I)^{\infty}_{\alpha,b}(x,r) - 0 \mid &= \lim_{r\to 0} \mid f_I \circ j_b \circ (\varphi_\alpha^{-1}(x), \tan(\pi/2 - r)) \mid \\ &\leq \lim_{r\to \pi/2} C_t |\tan(r)|^{-t} = 0.\end{aligned}$$

Die Abschätzungen für $k(f_I)^p_{\alpha,b}(x,r)$ stimmen mit denen in (1) überein. Damit kann auch die Form $\bar{j}_b^*\eta_{fd}$ auf $\overline{F_b}$ fortgesetzt werden, so dass das Integral $\int_{\partial\overline{F_b}} \widetilde{\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$ existiert und den Wert 0 annimmt.

(3) Wir müssen nun noch einsehen, dass das Differential der Fortsetzung $\widetilde{\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$ existiert. Seien

$$k(f_I)^{\infty}_{\alpha,b}(x,r), l(f_I)^{\infty}_{\alpha,b}(x,r) : \varphi(U_\alpha) \times ((\pi/2 - i) \circ \arctan)(U^\infty) \to \mathbb{C}$$

wie in (2) fortgesetzt durch Verschwinden auf dem Rand.

Da $k(f_I)^p_{\alpha,b}(x,r)$ und $l(f_I)^p_{\alpha,b}(x,r)$ auf dem Rand $\varphi_\alpha(U_\alpha)\times\{0\}$ verschwinden, existieren die partiellen Ableitungen nach $x_1,\dots,x_{\beta-1}$: Sei $(x_1,\dots,x_\beta,0)$ ein Randpunkt. Wir fixieren alle Komponenten $\neq x_i$ und betrachten den Limes

$$\lim_{y\to x_i} \frac{k(f_I)^0_{\alpha,b}(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_\beta,0) - 0}{y - x_i} = \lim_{y\to x_i} 0 = 0,$$

da auch $(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_\beta, 0)$ für jedes y in einer Umgebung von x_i ein Randpunkt ist.

Die Rechnung für $l(f_I)^0_{\alpha,b}(x, r)$ ist analog.

Wir betrachten nun die partielle Ableitung in $r = 0$ für festes $x \in S(\mathbb{R})$. Da $\widetilde{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$ mit der Fortsetzung $\overline{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$ von $d\bar{j}_b^*\eta_{fd}$ übereinstimmen sollte und diese auf dem Rand verschwindet, sollten

$$\lim_{r\to 0} \frac{l(f_I)^p_{\alpha,b}(x, r) - 0}{r - 0} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{r\to 0} \frac{k(f_I)^p_{\alpha,b}(x, r) - 0}{r - 0} = 0$$

gelten. Diese Rechnungen stimmen mit denen aus (1) überein.

Insgesamt ist $(\widetilde{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}})_{(s,g)} = \overline{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}}_{(s,g)}$ für jeden Punkt $(s, g) \in \overline{F_b}$, so dass wir auch die Stetigkeit von $\widetilde{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}}$ erhalten.

Damit folgt die Identität

$$\int_{\overline{F_b}} \overline{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}} = \int_{\overline{F_b}} \widetilde{d\bar{j}_b^*\eta_{fd}},$$

und der Satz von Stokes kann nun angewendet werden.

$\square$

Können wir nun ein Faserbündel mit Faser F der Dimension b_n oder t_n konstruieren, so gilt für das Faserintegral nach (3.17) und Satz 3.1 folgende Identität:

$$\int_{F_b} \bar{j}_b^*\eta^{\epsilon,\alpha_i} = \int_{F_b} \bar{j}_b^*\eta_c^{\epsilon,\alpha_i} = \int_{F_b} \bar{j}_b^\#[\eta_c^{\epsilon,\alpha_i}], \tag{3.23}$$

wobei $[\eta_c^{\epsilon,\alpha_i}] \in H_c^\beta(\Gamma(N)\backslash X^1, \mathbb{C})$ die Kohomologieklasse von $\eta_c^{\epsilon,\alpha_i}$ ist. Wir erhalten dann folgende Darstellung für die L-Funktion $L(s, \pi)$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{vol}(K_1)\,\mathrm{vol}(K_Y)\sum_{i=1}^{M}\int_B\int_{F_b}\bar{j}_b^*\eta^{\epsilon,\alpha_i}\wedge\psi^{-1}(b)db \overset{(3.16)}{=}\\
&\sum_{|I|=\beta}\epsilon_I\,\mathrm{vol}(K_1)\,\mathrm{vol}(K_Y)\sum_{i=1}^{M}\int_B\int_{F_b}f_I^{\epsilon,\alpha_i}\circ j_b(sg)\;\omega'\wedge\psi^{-1}(b)db \overset{(3.15)}{=}\\
&\sum_{|I|=\beta}\epsilon_I\,\mathrm{vol}(K_1)\,\mathrm{vol}(K_Y)\sum_{i=1}^{M}\int_{Y(N)\backslash\mathbb{R}_{>0}\ltimes Y_{n,1}(\mathbb{R})}f_I^{\epsilon,\alpha_i}(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s_0-(n-1)/2}dg =\\
&\sum_{|I|=\beta}\epsilon_I\,\mathrm{vol}(K_1)\,\mathrm{vol}(K_Y)[\Gamma_Y : Y(N)]\sum_{i=1}^{M}\int_{\Gamma_Y\backslash\mathbb{R}_{>0}\ltimes Y_{n,1}(\mathbb{R})}f_I^{\epsilon,\alpha_i}(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s_0-(n-1)/2}dg \overset{(3.8)}{=}\\
&\sum_{|I|=\beta}\epsilon_I[\Gamma_Y : Y(N)]\int_{\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times}\int_{Y_{n,1}(\mathbb{Q})\backslash Y_{n,1}(\mathbb{A})}f_I^{\epsilon}(yg)\psi^{-1}(y)dy|g|^{s_0-(n-1)/2}dg \overset{(3.19)}{=}\\
&[\Gamma_Y : Y(N)]\sum_{|I|=\beta}\epsilon_I P_{I,\infty}^{\epsilon}(s_0)L(s_0,\pi).
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

4. Rationalität spezieller L-Werte

4.1. Rationale Strukturen und Perioden

Definition 4.1. Seien G eine Gruppe und π eine Darstellung von G in einen komplexen Vektorraum V. Zu $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ definiere eine Isomorphieklasse von Darstellungen π^σ von G folgendermaßen: Seien V_σ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\Phi_\sigma : V \to V_\sigma$ ein σ-linearer Isomorphismus. Für $g \in G$ sei $\pi^\sigma(g) \in \mathrm{Aut}(V_\sigma)$ gegeben durch

$$\pi^\sigma(g) = \Phi_\sigma \circ \pi(g) \circ \Phi_\sigma^{-1}.$$

Sei $S(\pi) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \mid \pi^\sigma \sim \pi\}$. Der Fixkörper $\mathbb{Q}(\pi) := \mathbb{C}^{S(\pi)}$ heißt *Rationalitätskörper von* π.

Sei (π_p, V_p), $p < \infty$, eine lokale Komponente einer cuspidalen automorphen Darstellung. Nach Definition 4.4 und Theorem 5.1 in [JPSS81] gibt es eine kompakt-offene Untergruppe $K \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, so dass der Fixraum V_p^K eindimensional ist. Ein Vektor $w^0 \in V_p^K$ mit der Eigenschaft $w^0(e) = 1$ heißt *essentieller Vektor* oder auch *Neuvektor* von π_p. Ist (π_p, V_p) unverzweigt, so ist sogar $\dim V_p^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)} = 1$.

Dann gilt nach [Wal85, Lemme I.1] für die lokalen Komponenten (π_p, V_p), $p < \infty$, einer cuspidalen automorphen Darstellung $\pi \cong \otimes'_p \pi_p$:

Ist $E/\mathbb{Q}(\pi_p)$ ein Erweiterungskörper, so existiert ein E-Untervektorraum V_E von V_p, so dass

1. $V \cong V_E \otimes_E \mathbb{C}$ und V_E ist stabil unter $\pi(g)$ für jedes $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$,
2. V_E ist eindeutig bis auf Homothetie.

Den Unterraum V_E nennen wir auch eine *E-Struktur von V*.

Diese Aussage gilt auch für die finite Komponente $\pi_f := \otimes'_{p<\infty} \pi_p$ einer cuspidalen automorphen Darstellung π. Die Darstellung π_f ist also bereits über ihrem Rationalitätskörper $\mathbb{Q}(\pi_f)$ definiert. Nach Proposition 3.1 in [Clo90] ist $\mathbb{Q}(\pi_f)$ das Kompositum aller $\mathbb{Q}(\pi_p)$, $p < \infty$.

Ein wichtiges Resultat, welches im Fall GL(2) von Eichler, Shimura, Harder und Waldspurger [Wal85, Theorem I.8.1, Corollary I.8.3] gezeigt wurde und auf den Fall GL_n, $n > 2$, von Clozel [Clo90, Theorem 3.13] erweitert wurde, ist das Folgende:

Sei π eine kohomologische cuspidale Darstellung der $GL_n(\mathbb{A})$. Dann gilt

1. π_f^σ ist die finite Komponente einer kohomologischen cuspidalen automorphen Darstellung π^σ, deren ∞-Typ dem von π gleicht [1],
2. $\mathbb{Q}(\pi_f)$ ist ein Zahlkörper [2].

Wir wollen zunächst die rationale Struktur des Whittaker-Models beschreiben. Sei $\mathbb{Q}(\mu_\infty)$ der von allen Einheitswurzeln erzeugte Teilkörper von $\mathbb{C}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ordnen wir $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ ein Element $T_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$ zu durch die Verkettung der Restriktion

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}) \ni \sigma \mapsto \sigma\,|_{\mathbb{Q}(\mu_\infty)} \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_\infty)/\mathbb{Q})$$

mit dem zyklotomischen Charakter

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_\infty)/\mathbb{Q}) \ni \sigma \mapsto t_\sigma = \prod_p t_{\sigma,p} \in \hat{\mathbb{Z}}^\times = \prod_p \mathbb{Z}_p^\times.$$

Für jedes $p < \infty$ setze $T_{n,\sigma,p} := \mathrm{diag}(t_{\sigma,p}^{-(n-1)}, t_{\sigma,p}^{-(n-2)}, \dots, 1)$, dann ist für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ durch

$$\cdot^\sigma : W(\pi_p, \psi_p) \longrightarrow W(\pi_p^\sigma, \psi_p),\ w_{\pi_p} \mapsto w_{\pi_p}^\sigma$$

mit $w_p^\sigma(g) = \sigma(w_p(T_{n,\sigma,p}g))$ ein $GL_n(\mathbb{Q}_p)$-äquivarianter, σ-linearer Isomorphismus gegeben. In [Wal85, Lemme I.2.4] findet man eine Beschreibung des Whittaker-Models von π_p^σ zum Charakter $\sigma \circ \psi_p$. Die Multiplikation mit $T_{n,\sigma}$, die in unserer Beschreibung auftaucht, sorgt dafür, dass w_p^σ ebenfalls eine Whittakerfunktion zum Charakter ψ_p ist (siehe auch [Mah05, 3.3 (3.18)]).

Bemerkung 4.1. Seien π_p unverzweigt und $w_{\pi_p}^0$ ein essentieller Vektor von π_p, der durch $w_{\pi_p}^0(e) = 1$ normiert ist. Dann ist ${w_{\pi_p}^0}^\sigma$ der eindeutige essentielle Vektor von π_p^σ mit ${w_{\pi_p}^0}^\sigma(e) = 1$.

Ebenso ist durch

$$\cdot^\sigma : W(\pi_f, \psi_f) \longrightarrow W(\pi_f^\sigma, \psi_f),\ w \mapsto w^\sigma$$

mit $w^\sigma(g) := \sigma(w(T_{n,\sigma}g))$ ein $GL_n(\mathbb{A}_f)$-äquivarianter, σ-linearer Isomorphismus gegeben.

Sei $E_p/\mathbb{Q}(\pi_p)$ ein Erweiterungskörper. Für jedes $p < \infty$ sei $w_{\pi_p}^0$ ein Neuvektor in $W(\pi_p, \psi_p)$ und $W(\pi_p, \psi_p)_{E_p}$ der E_p-Spann von $\{\pi_p(g)w_p^0 \mid g \in GL_n(\mathbb{Q}_p)\}$. Dem Beweis zu Lemme I.1 in [Wal85] nach ist $W(\pi_p, \psi_p)_{E_p}$ eine E_p-Struktur von $W(\pi_p, \psi_p)$. Diese Aussage gilt auch für jeden Erweiterungskörper $E/\mathbb{Q}(\pi_f)$ und das Whittaker-Model $W(\pi_f, \psi_f) = \otimes'_{p<\infty} W(\pi_p, \psi_p)$,

[1] vgl. Seite 127 in [Clo90]. Beachte auch, dass dies nicht $\pi_\infty^\sigma \sim \pi_\infty$ bedeutet.

[2] Clozel zeigt in [Clo90] lediglich, dass π_f über einem Zahlkörper definiert ist und dass π_f^σ die finite Komponente einer cuspidalen kohomologischen Darstellung ist. Man kann aber wie in [Wal85, Corollaire I.8.3] schließen, dass $\mathbb{Q}(\pi_f)$ ein Zahlkörper ist.

wobei dann der E-Spann $W(\pi_f,\psi_f)_E$ von $\{\pi_f(g)\otimes_p' w_p^0 \mid g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)\}$ eine E-Struktur von $W(\pi_f,\psi_f)$ ist.

Proposition 4.1. *Die Whittakerfunktion $w_f \in W(\pi_f,\psi_f)$ aus* (3.19) *liegt bereits in $W(\pi_f,\psi_f)_{\mathbb{Q}(\pi_f)}$.*

Diese Aussage wurde schon in anderer Literatur verwendet, allerdings habe ich keinen Beweis gefunden, daher möchte ich diesen hier angeben:

Beweis. Setze $E := \mathbb{Q}(\pi_f) \supseteq \mathbb{Q}(\pi_p)$, und seien π bzw. σ kohomologische Darstellungen der $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ bzw. $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A})$ mit $m < n$. Für $w_p \in W(\pi_p,\psi_p)_E, v_p \in W(\sigma_p,\psi_p^{-1})_E$ betrachten wir die Zeta-Integrale

$$\Psi(s,w_p,v_p) = \int_{N_m(\mathbb{Q}_p)\backslash \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)} w_p(j(g))v_p(g)|\det(g)|^{s-(n-m)/2}dg.$$

Wie in 1.9 sei $\mathcal{I}(\pi_p,\sigma_p)$ der $\mathbb{C}$-Spann aller dieser Zeta-Integrale [3]. Der E-Spann $I(\pi_p,\sigma_p)_E$ aller dieser Zeta-Integrale ist ein gebrochenes $E[p^s,p^{-s}]$-Ideal in $E(p^{-s})$, da $W(\pi_p,\psi_p)_E$ und $W(\sigma_p,\psi_p^{-1})_E$ stabil unter $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ sind. Ist $Q(\pi_p,\sigma_p)_E$ ein Erzeuger, so erzeugt dieser auch den $\mathbb{C}[p^s,p^{-s}]$-Modul $I(\pi_p,\sigma_p)$.

Wie in der Definition der lokalen L-Funktion [JPSS83, Theorem 2.7] sehen wir, dass $Q(\pi_p,\sigma_p)_E$ so normiert werden kann, dass er von der Gestalt $Q(p^{-s})^{-1}$ ist mit einem Polynom $Q(X)_{\pi_p,\sigma_p} \in E[X]$, welches $Q(0) = 1$ erfüllt.

Diese Normierung eines Erzeugers von $\mathcal{I}(\pi_p,\sigma_p)$ zeichnet aber gerade die L-Funktion aus. Folglich stimmt sie mit $Q(p^{-s})^{-1}$ überein und ist damit eine Linearkombination von Zeta-Integralen rationaler Whittakerfunktionen. □

Sei $K_f \leq \mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$ eine kompakt-offene Untergruppe. Wie in (3.10) erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K_f \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \Gamma_i\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$$

mit geeigneten arithmetischen Untergruppen $\Gamma_i \leq \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Setze

$$\begin{aligned} S(K_f) &:= \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/\,\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+K_f \\ &\cong \dot{\bigcup}_{i=1}^{r}\Gamma_i\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+/\,\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+ \cong \dot{\bigcup}_{i=1}^{r}\Gamma_i\backslash X^1 \end{aligned}$$

und $\tilde{S} := \varprojlim_{K_f} S(K_f)$. Dann liefert die Injektivität der Abbildung (3.5), durch die die cuspidale Kohomologie $H^\bullet_{cusp}(\Gamma_i\backslash X^1,\mathbb{C})$ definiert ist, die Isomorphismen

[3] In 1.9 wird der Whittakerraum $W(\pi_p,\sigma_p)$ zugrunde gelegt, allerdings erhält man mit den Whittakerfunktionen in $W(\sigma_p,\psi_p^{-1})_E$ schon $\mathcal{I}(\pi_p,\sigma_p)$.

$$\begin{aligned}
&H^\bullet_{cusp}(S(K_f),\mathbb{C}) := \bigoplus_{i=1}^{r} H^\bullet_{cusp}(\Gamma_i\backslash X^1,\mathbb{C}) \cong \\
&\bigoplus_{i=1}^{r} H^\bullet(\mathfrak{sl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathcal{A}_0^\infty(\Gamma_i\backslash \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))) \cong \\
&H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K_f)),
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})/K_f)$ den Unterraum der glatten cuspidalen automorphen Formen bezeichnet, die rechtsinvariant unter K_f sind. Weiter ist

$$\begin{aligned}
H^\bullet_{cusp}(\tilde{S},\mathbb{C}) &:= \varinjlim_{K_f} H^\bullet_{cusp}(S(K_f),\mathbb{C}) \\
&\cong H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, \mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}))).
\end{aligned}$$

Ebenso sei für $? \in \{B, c\}$

$$H^\bullet_?(\tilde{S},\mathbb{C}) := \varinjlim_{K_f} H^\bullet_?(S(K_f),\mathbb{C}),$$

wobei $H^\bullet_?(S(K_f),\mathbb{C}) := \bigoplus_{i=1}^r H^\bullet_?(\Gamma_i\backslash X^1,\mathbb{C})$. Dann haben wir nach (3.4) einen Isomorphismus

$$I_{DR} : H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, C^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}),\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_B(\tilde{S},\mathbb{C}).$$

Zudem induziert die Zerlegung $\mathcal{A}_0^\infty(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})) \cong \bigoplus_\pi V_\pi$ in irreduzible cuspidale Darstellungen (π, V_π) nach [Clo90, Lemme 3.15] eine Zerlegung

$$\begin{aligned}
H^\bullet_{cusp}(\tilde{S},\mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{\pi} H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, V_\pi) \\
&\cong \bigoplus_{\pi} H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty,\psi_\infty)) \otimes W(\pi_f,\psi_f),
\end{aligned}$$

wobei π die cuspidalen kohomologischen Darstellungen durchläuft. Der zweite Isomorphismus ist durch die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ gegeben.

Bezeichne $H^\bullet(\pi)_\epsilon$ das Bild von

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, V_\pi)_\epsilon \cong H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty,\psi_\infty))_\epsilon \otimes W(\pi_f,\psi_f)$$

in $H^\bullet_{cusp}(\tilde{S},\mathbb{C})$ für $\epsilon \in \{\pm\}$ wie in (2.5) bzw. (2.6).

Für jedes $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ ist die Rechtsmultiplikation

$$\tilde{S} \to \tilde{S}, \ s \mapsto sg$$

ein Homöomorphismus. Dadurch wird eine Operation von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ auf $H_B^\bullet(\tilde{S}, \mathbb{C})$ und $H_c^\bullet(\tilde{S}, \mathbb{C})$ induziert. Diese Darstellungen sind aufgrund der natürlichen $\mathbb{Z}$-Struktur der singulären Kohomologie bereits über $\mathbb{Q}$ definiert: Für $? \in \{B, c\}$ gilt dann

$$H_?^\bullet(\tilde{S}, \mathbb{C}) \cong H_?^\bullet(\tilde{S}, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C},$$

wobei $H_?^\bullet(\tilde{S}, \mathbb{Q})$ stabil unter der Aktion von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$ ist. Ein Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ operiert auf der Kohomologie, indem σ auf $\mathbb{C}$ operiert.

Nach Proposition 3.16 in [Clo90] und der nachfolgenden Anmerkung dort ist $H^\bullet(\pi)_\epsilon$ ein irreduzibler $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$-Untermodul von $H_B^\bullet(\tilde{S}, \mathbb{C})$ und bereits über einem Zahlkörper E definiert.

Bemerkung 4.2. Clozel folgert in [Clo90, Théorème 3.19] sogar, dass auch die cuspidale Kohomologie $H_{cusp}^\bullet(\tilde{S}, \tilde{\mathbb{C}})$ bereits über $\mathbb{Q}$ definiert ist.

Wie bereits angemerkt ist der Rationalitätskörper $\mathbb{Q}(\pi_f)$ von π_f ein Zahlkörper. Dann kann nach [RS08, 3.3 (3.3)] mit [Clo90, Lemma 3.2.1] gefolgert werden, dass $H^\bullet(\pi)_\epsilon$ bereits über $\mathbb{Q}(\pi_f)$ definiert ist mit der $\mathbb{Q}(\pi_f)$-Struktur

$$H^\bullet(\pi)_{\epsilon,\mathbb{Q}(\pi_f)} := H^\bullet(\pi)_\epsilon \cap H_B^\bullet(\tilde{S}, \mathbb{Q}(\pi_f)).$$

Der DeRham-Isomorphismus I_{DR} induziert einen Isomorphismus

$$H^\bullet(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, V_\pi)_\epsilon \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\pi)_\epsilon.$$

Sei η_∞^ϵ ein Erzeuger von $H^\beta(\mathfrak{gl}_n, \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})Z_n(\mathbb{R})^+, W(\pi_\infty, \psi_\infty))_\epsilon$, dann erhalten wir mit (3.18) einen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_f)$-Modulisomorphismus

$$I_{DR} \circ \mathcal{F}^{-1}(\eta_\infty^\epsilon) : W(\pi_f, \psi_f) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(\pi)_\epsilon.$$

In [Mah05, 3.4] finden wir folgende Aussage: Wir haben auf $W(\pi_f, \psi_f)$ und $H^\bullet(\pi)_\epsilon$ jeweils eine $\mathbb{Q}(\pi_f)$-Struktur fixiert, die bis auf Homothetie eindeutig ist. Für jede Erweiterung $E/\mathbb{Q}(\pi_f)$ wird somit $W(\pi_f, \psi_f)_E$ unter $I_{DR} \circ \mathcal{F}^{-1}(\eta_\infty^\epsilon)$ auf eine E-Struktur von $H^\bullet(\pi)_\epsilon$ abgebildet. Sei $\beta := \dim F_b$ wie bereits in Abschnitt 3.3 definiert. Es gibt folglich eine komplexe Zahl $\Omega(\pi)_\epsilon$, die nur bis auf Multiplikation mit Elementen in $\mathbb{Q}(\pi_f)^\times$ eindeutig ist, so dass

$$\Omega(\pi)_\epsilon I_{DR} \circ \mathfrak{F}^{-1}(\eta_\infty^\epsilon)(W(\pi_f, \psi_f)_E) = H^\beta(\pi)_{\epsilon,E}. \tag{4.1}$$

Wir können folglich den Erzeuger η_∞^ϵ so normieren, dass

$$I_{DR} \circ \mathfrak{F}^{-1}(\eta_\infty^\epsilon)(w_f) \in H^\beta(\pi)_{\epsilon,\mathbb{Q}(\pi_f)} \subseteq H^\beta_{cusp}(\tilde{S}, \mathbb{Q}(\pi_f))$$

für $w_f \in W(\pi_f, \psi_f)_{\mathbb{Q}(\pi_f)}$.

4.2. Rationalitätseigenschaften bestimmter Kohomologieklassen

Setze $E := \mathbb{Q}(\pi_f)$. Wähle $w_f \in W(\pi_f, \psi_f)_E$ wie in Proposition 4.1, und sei $\eta^\epsilon := \mathcal{F}^{-1}(\eta_\infty^\epsilon)(w_f)$ wie in (3.18) definiert. Ist w_f rechtsinvariant unter einer kompakt-offenen Untergruppe $K_n \leq \mathrm{GL}_n(\hat{\mathbb{Z}})$, dann ist

$$I_{DR}(\eta^\epsilon) \in H^\beta_{cusp}(\tilde{S}, E)^{K_n} \cong H^\beta_{cusp}(S(K_n), E) \subseteq H^\beta_B(S(K_n), E)$$

und kann nach (3.20) mit dem Tupel

$$(I_{DR}(\eta^{\epsilon,\alpha_i}))_{i=1,\dots,M} \in \bigoplus_{i=1}^{M} H^\beta_{cusp}(\Gamma(N)\backslash X^1, E) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{M} H^\beta_B(\Gamma(N)\backslash X^1, E) \tag{4.2}$$

identifiziert werden, wobei $\Gamma(N)$ wie in (3.13) definiert ist.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Weiter seien $\Delta_p \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Standard-p-Simplex, $C_p(M)$ die Gruppe der singulären Ketten $\sigma_p : \Delta_p \to M$ und $C_p^\infty(M)$ die Gruppe der glatten singulären Ketten σ_p, d.h Δ_p hat eine Umgebung U in $\mathbb{R}^p$, so dass σ_p eine glatte Fortsetzung auf U hat. Nach [Mas91, Appendix A §2, Corollary 2.2] induziert die Einbettung $C_P^\infty(M) \hookrightarrow C_p(M)$ einen Isomorphismus

$$H_B^{\bullet,\infty}(M, \mathbb{R}) \cong H_B^\bullet(M, \mathbb{R}) \tag{4.3}$$

der zugehörigen Kohomologiegruppen mit Werten in $\mathbb{R}$. Nach [Mas91, Appendix A §3, Theorem 3.1] induziert die Abbildung

$$\Omega^\bullet_{DR}(M, \mathbb{R}) \ni \omega \mapsto \int \omega \in \mathrm{Hom}(C_\bullet^\infty(M), \mathbb{R}), \tag{4.4}$$

wobei $\int \omega(\sigma_p) := \int_{\Delta_p} \sigma_p^* \omega$, einen Isomorphismus $H^\bullet_{DR}(M, \mathbb{R}) \cong H^\bullet_{B,\infty}(M, \mathbb{R})$.

Durch Verkettung mit dem Isomorphismus (4.3) erhalten wir den *DeRham-Isomorphismus*

$$I_{DR} : H^\bullet_{DR}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_B(M, \mathbb{R}).$$

Hat ω kompakten Träger, so erhalten wir unter der Abbildung (4.4) eine Kokette mit kompaktem Träger. Nach einer Bemerkung in [Mas91, S.417] erhält man auf diese Weise auch einen Isomorphismus

$$I_{c,DR} : H^\bullet_{c,DR}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet_{c,B}(M, \mathbb{R}).$$ [4]

Da $\mathbb{C}$ ein flacher $\mathbb{R}$-Modul ist, haben wir weiter die Isomorphismen

$$H^\bullet_?(M, \mathbb{C}) \cong H^\bullet_?(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad \text{und} \quad H^\bullet_{c,?}(M, \mathbb{C}) \cong H^\bullet_{c,?}(M, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

für $? \in \{DR, B\}$ und folgern somit auch das DeRham-Theorem für $\mathbb{C}$-wertige Differentialformen und singuläre Kohomologie mit Werten in $\mathbb{C}$.

Sei nun wieder $n = 3, 4, 5, 6, 7, 10, 15$ fest. Setze $M := \Gamma(N)\backslash X^1$ und bezeichne $\bar{j}^\#_{b,B}$ die durch $\bar{j}_b$ induzierte Abbildung in der singulären Kohomologie. Nach [Lee03, Lemma 16.11] kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^\beta_{DR}(M, \mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{j}^\#_b"'] \arrow[d, "I_{DR}"] & H^\beta_{DR}(F_b, \mathbb{C}) \arrow[d, "I_{DR}"'] \\
H^\beta_B(M, \mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{j}^\#_{b,B}"'] & H^\beta_B(F_b, \mathbb{C}).
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

Da $\bar{j}_b$ eigentlich ist, kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
H^\beta_{c,DR}(M, \mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{j}^\#_b"'] \arrow[d, "I_{c,DR}"] & H^\beta_{c,DR}(F_b, \mathbb{C}) \arrow[d, "I_{c,DR}"'] \\
H^\beta_{c,B}(M, \mathbb{C}) \arrow[r, "\bar{j}^\#_{b,B}"'] & H^\beta_{c,B}(F_b, \mathbb{C}).
\end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Proposition 4.2. *Es gilt*

$$\int_{F_b} \bar{j}^*_b \eta^{\epsilon,\alpha_i} \in E.$$

[4] Eine garbentheoretische Fassung des DeRham-Theorems findet man in [Ive86, IV §7] oder in [Dem12, (6.4)]. Dort findet man auch unter (7.8) den DeRham-Isomorphismus für Kohomologie mit kompaktem Träger.

Beweis. Zunächst haben wir eine Zerlegung

$$\eta^{\epsilon,\alpha_i} = \eta_c + d\eta_{fd}, \tag{4.7}$$

wobei $\eta_c \in \Omega^{\beta}_{c,DR}(M,\mathbb{C})$ wie in (3.21) ist. Nach (3.23) gilt schon

$$\int_{F_b} \bar{j}_b^* \eta^{\epsilon,\alpha_i} = \int_{F_b} \bar{j}_b^* \eta_c,$$

und setzten wir $\bar{j}_b^* \eta_c$ auf $\overline{F_b}$ mit 0 fort, so erhalten wir auch die Identität

$$\int_{F_b} \bar{j}_b^* \eta^{\epsilon,\alpha_i} = \int_{\overline{F_b}} \bar{j}_b^* \eta_c.$$

Die Kompaktifizierung $\overline{F_b}$ von F_b besitzt nach [Mun68, Theorem 10.6] eine glatte Triangulierung $\overline{F_b} \cong |K| = \bigcup_{\sigma\in K}\sigma$, wobei K ein endlicher Simplizialkomplex ist ([Mun68, Definition 7.1]). Nach [SZ88, Satz 11.4.11] ist jede Triangulierung von $\overline{F_b}$ orientierbar, d.h. alle β-Simplexe lassen sich kohärent orientieren, da F_b orientierbar ist. Nach [SZ88, Satz 11.2.9] besteht der Rand von $\overline{F_b}$ genau aus den $(\beta-1)$-Simplexen, die nur von einem β-Simplex Seite sind, und diese bilden einen Teilkomplex ∂K von K. Weiter gilt dann nach [SZ88, Satz 9.7.4], dass $H_\beta(\overline{F_b}, \partial\overline{F_b}, \mathbb{Z}) \cong H_\beta(K, \partial K, \mathbb{Z})$. Da $H_\beta(K, \partial K, \mathbb{Z}) = Z_\beta(K, \partial K, \mathbb{Z})$, ist nach [SZ88, Lemma 11.3.2] durch die Summe aller kohärent orientierten β-Simplexe der Triangulierung von $\overline{F_b}$ ein Erzeuger der Homologie gegeben. Das Bild dieses Erzeugers in $H_\beta(\overline{F_b}, \partial\overline{F_b}, \mathbb{Z})$ bezeichnen wir mit $\mu_{\overline{F_b}}$. Bezeichnen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ die β-Simplexe einer glatten Triangulierung. Da nach [SZ88, Satz 11.2.9 (b)] bereits $\overline{F_b} \cong \dot{\bigcup}_{i=1}^r \sigma_i$ ist, können wir das zu untersuchende Integral nun folgendermaßen darstellen:

$$\int_{\overline{F_b}} \bar{j_b}^* \eta_c = \int_{\dot{\bigcup}_{i=1}^r \sigma_i} \bar{j_b}^* \eta_c = \int_{\mu_{\overline{F_b}}} \bar{j_b}^* \eta_c. \tag{4.8}$$

Laut [Mas91, XIV §7 Corollary 7.4] ist $H^\beta_{c,B}(F_b, L) \cong H^\beta_B(\overline{F_b}, \partial\overline{F_b}, L)$ für jeden Erweiterungskörper $L/\mathbb{Q}$, und nach [Mas91, XIV §7 Theorem 7.5] haben wir den Poincaré-Isomorphismus

$$P : H^\beta(\overline{F_b}, \partial\overline{F_b}, L) \longrightarrow H_0(\overline{F_b}, L),\ x \mapsto x \cap \mu_{\overline{F_b}}.$$

Sei $\epsilon_* : H_0(\overline{F_b}, L) \longrightarrow L$ induziert durch $\epsilon : C_0(\overline{F_b}, L) \longrightarrow L$ mit $\epsilon(\sum_{i=1}^s n_i\sigma_i) = \sum_{i=1}^s n_i$. Nach [Mas91, XIII §8 und §2] ist

$$\epsilon_* \circ P(x) =< x, \mu_{\overline{F_b}} >= x'(\mu_{\overline{F_b}}),$$

wobei $x' \in \mathrm{Hom}(C_\beta(\overline{F_b}, \partial\overline{F_b}, \mathbb{Z}), E)$ ein repräsentierender Kozykel von x ist. Bezeichne $[\eta_c] \in H^\beta_{c,DR}(M,\mathbb{C})$ die Klasse von η_c. Nach Definition des DeRham-Isomorphismus ist unser Integral mithilfe des Poincaré-Isomorphismus und der Gleichung (4.8) darstellbar:

$$\int_{\overline{F_b}} \bar{j}_b^{\,*}\eta_c = \epsilon_*(I_{c,DR}(\bar{j}_b^{\,\#}[\eta_c]) \cap \mu_{\overline{F_b}}). \tag{4.9}$$

Nach Voraussetzung ist $I_{DR}(\eta^{\epsilon,\alpha_i}) \in H^{\beta}_{cusp}(M,E) \subseteq H^{\beta}_{B}(M,E)$, und durch die Zuordnung $I_{DR}(\eta^{\epsilon,\alpha_i}) \mapsto I_{c,DR}([\eta_c])$ ist nach [Clo90, p.123] eine natürliche Einbettung

$$H^{\beta}_{cusp}(M,E) \longrightarrow H^{\beta}_{c,B}(M,E)$$

gegeben. Da $j_{\bar{b},B}^{\#}$ die E-Struktur der singulären Kohomologie respektiert, ist mit (4.6) folglich auch

$$I_{c,DR}(\bar{j}_b^{\,\#}[\eta_c]) = j_{\bar{b},B}^{\#} I_{c,DR}([\eta_c]) \in H^{\beta}_{c,B}(F_b,E).$$

Nach (4.9) ist

$$\int_{F_b} \bar{j}_b^{*}\eta^{\epsilon,\alpha_i} = \epsilon_*(I_{c,DR}(\bar{j}_b^{\,\#}[\eta_c]) \cap \mu_{\overline{F_b}}) \in E.$$

Satz 4.1. *Für $n = 3,4,5,6,7,10,15$ seien $\pi \in Coh(\mathrm{GL}_n,0)$ und s_0 eine geeignete kritische Stelle für π. Dann gibt es für $\beta = b_n$ oder $\beta = t_n$ nichttriviale ganze Funktionen $P^{\epsilon}_{I,\infty}(s)$, so dass*

$$\sum_{|I|=\beta} \epsilon_I P^{\epsilon}_{I,\infty}(s_0) L(s_0,\pi) = 0.$$

wobei $\epsilon_I \in \{0,\pm\}$ ist.

Beweis. Zu jedem $n \in \{3,4,5,6,7,10,15\}$ gibt es eine kritische Stelle $s_0 \in \mathbb{C}$, die Bedingung (B2) auf Seite 31 erfüllt, so dass nach Proposition 3.2 und Gleichung (3.24) ein Faserbündel $(Y(N)\backslash Y_{n,1}(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_{>0}), \Pi, B, F)$ mit $\dim F = b_n$ oder $\dim F = t_n$ konstruiert werden kann, so dass

$$[\Gamma_Y : Y(N)] \sum_{|I|=\beta} \epsilon_I P^{\epsilon}_{I,\infty}(s_0) L(s_0,\pi) = \mathrm{vol}(K_1)\,\mathrm{vol}(K_Y) \sum_{i=1}^{M} \int_B \Big(\int_{F_b} \bar{j}_b^{*}\eta^{\epsilon,\alpha_i}\Big) \wedge \psi^{-1}(b)db.$$

Welcher Wert für s_0 und $\dim F$ jeweils in Frage kommt findet sich im Anhang A.

Für jedes $i \in \{1,\dots,M\}$ ist nach Proposition 3.3 $\int_{F_\bullet} \bar{j}_\bullet^{*}\eta^{\epsilon,\alpha_i}$ eine glatte Funktion auf der zusammenhängenden Mannigfaltigkeit B, die nach Proposition 4.2 Werte in einem Zahlkörper annimmt. Damit ist diese Funktion insbesondere konstant.

Es ist $B(\mathbb{R})$ homöomorph zu $\mathbb{R}^{\dim B(\mathbb{R})}$. Bezeichne b_{ij} die von 0 und 1 verschiedenen Koordinaten der Matrizen in $B(\mathbb{R})$, so ist das Haarmaß db das Produktmaß $\prod_{i,j} db_{ij}$. Dann ist aber

$$\int_B \Big(\int_{F_b} \bar{j}_b^* \eta^{\epsilon,\alpha_i}\Big) \wedge \psi^{-1}(b)db = Q \int_B \psi^{-1}(b)db = \underbrace{Q \int_{\mathbb{R}/N\mathbb{Z}} \cdots \int_{\mathbb{R}/N\mathbb{Z}}}_{\dim B-\text{faches iteriertes Integral}} \prod_{i=1}^{n-1} \exp(2\pi i b_{i+1,i}) \prod_{i,j} db_{ij} = 0,$$

wobei $Q \in E$ eine Konstante ist.

A. Anhang

- $n = 5, s_0 = 0, b_5 = 6, \dim F = t_5 = 8$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & z_1 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & z_2 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -z_1 - z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  oder

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -z_1 - z_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $n = 6, s_0 = 1/2, \dim F = b_6 = 9, t_6 = 11$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $n = 7, s_0 = 0, b_7 = 12, \dim F = t_7 = 15$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_7 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 & x_{10} & x_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_2 & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z_1 - z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 & u_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $n = 10, s_0 = 1/2, b_{10} = 25, \dim F = t_{10} = 29$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_{17} & x_{18} & x_{19} & x_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_{24} & x_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_2 & x_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z_1 - z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_9 & u_{10} & u_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{12} & u_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $n = 15, s_0 = 1, b_{15} = 56, \dim F = t_{15} = 63$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{19} & x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{25} & x_{26} & x_{27} & x_{28} & x_{29} & x_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} & x_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_{37} & x_{38} & x_{39} & x_{40} & x_{41} & x_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} & x_{46} & x_{47} & x_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_1 & x_{49} & x_{50} & x_{51} & x_{52} & x_{53} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x_{54} & x_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x_{56} & x_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_{58} & x_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z_2 & x_{60} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -z_1 - z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix}
1 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & u_{15} & u_{16} & u_{17} & u_{18} & u_{19} & u_{20} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_{26} & u_{27} & u_{28} & u_{29} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_{30} & u_{31} & u_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_{33} & u_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v_4 & v_5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v_6 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & v_7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Literaturverzeichnis

[Bor74] A. Borel. Stable real Cohomology of Arithmetic Groups. *Annales scientifiques de l'ENS*, 7(2):235–272, 1974.

[Bor81] A. Borel. Stable real Cohomology of Arithmetic Groups II. In *Manifolds and Lie Groups*, Progress in Mathematics; 14, pages 21–55. Birkhäuser Boston, 1981.

[Bor07] A. Borel. Automorphic Forms on Reductive Groups. In *Automorphic forms and applications*, IAS/Park City mathematics series ; 12, Providence, RI, 2007. American Mathematical Society.

[BW80] A. Borel and N. R. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*. Annals of mathematics studies ; 94. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.

[CKM04] J. W. Cogdell, H. H. Kim, and M. R. Murty. *Lectures on Automorphic L-Functions*. Fields Institute monographs ; 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Clo90] L. Clozel. Motives et Formes Automorphes: Application du Principe de Fonctorialité. In *Automorphic Forms, Shimura varieties and L-functions*, volume 1, pages 77–159. Academic Press, 1990.

[CPS04] J.W. Cogdell and I.I. Piatetski-Shapiro. Remarks on Rankin-Selberg Convolutions. In *Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory*. The Johns Hopkins University Press, 2004.

[Del79] P. Deligne. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. In *Automorphic Forms, Representations and L-Functions*, volume 33.2 of *Proc. Symp. Pure Math*, pages 313–346. AMS, 1979.

[Dem12] J.P. Demailly. Complex Analytic and Differential Geometry. `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf`, 2012.

[Els05] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer Berin Heidelberg, 2005.

[Fla79] D. Flath. Decomposition of Representations into Tensor Products. In *Automorphic Forms, Representations and L-Functions*, volume 33.1 of *Proc. Symp. Pure Math*, pages 179–183. AMS, 1979.

[Gel75] S. Gelbart. *Automorphic Forms on Adele Groups*. Annals of mathematics studies ; 83. Princeton Univ. Pr., Princeton, N.J., 1975.

[GHV76] W. Greub, S. Halperin, and R. Vanstone. *Connections,Curvature, and Cohomology I*. Academic Press, INC., 1976.

[HC68] Harish-Chandra. *Automorphic Forms on semisimple Lie Groups*. Lecture notes in mathematics ; 62. Springer, Berlin [u.a.], 1968.

[IS10] H. Iwaniec and P. Sarnak. Perspectives on the Analytic Theory of l-Functions. In *Visions in Mathematics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 705–741. Birkhäuser Basel, 2010.

[Ive86] B. Iversen. *Cohomology of Sheaves*. Springer, 1986.

[JPSS81] H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro, and J. Shalika. Conducteur du représentations du groupe linéaire. *Mathematische Annalen*, pages 199–214, 1981.

[JPSS83] H. Jacquet, I.I. Piatetskii-Shapiro, and J.A. Shalika. Rankin-Selberg convolutions. *American Journal of Mathematics*, Vol 105(2):367–464, 1983.

[JS76] H. Jacquet and J. Shalika. A non-vanishing Theorem for Zeta-Functions on GL(n). *Inventiones mathematicae*, 38:1–16, 1976.

[JS81] H. Jacquet and J.A. Shalika. On Euler Products and the Classification of Automorphic Forms II. *American Journal of Mathematics*, 103(4):777–815, 1981.

[KMS00] D. Kazhdan, B. Mazur, and C.-G. Schmidt. Relative Modular Symbols and Rankin-Selberg convolutions. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 519:97–141, 2000.

[Kna94] A.W. Knapp. Local Langlands correspondence: the Archimedean case. In *Motives*, volume 55.2 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 393–410. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[KS13] H. Kasten and C.-G. Schmidt. The critical Values of Rankin-Selberg convolutions. *International Journal of Number Theory*, 9(1):205–256, 2013.

[Lee03] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2003.

[Mah05] J. Mahnkopf. Cohomology of arithmetic Groups, parabolic Subgroups and the special values of l-Functions on GL(n). *Inst. Math. Jussieu*, 4(4):553–637, 2005.

[Man72] J. Manin. Parabolic Points and Zeta-Functions of modular Curves. *Mathematics of the USSR Izvestiya*, 6(1):19–64, 1972.

[Mas91] W.S Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Springer, 1991.

[Mor03] D.W. Morris. *Introduction to Arithmetic Groups*. Preliminary version of a book, 2003. `http://people.uleth.ca/~dave.morris/lectures/ArithGrps/Morris-ArithGrps-Feb03.pdf`.

[MSD74] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer. Arithmetic of Weil Curves. *Inventiones mathematicae*, pages 1–61, 1974.

[Mun68] James R. Munkres. *Elementary differential topology : lectures given at Massachu-*

setts Institute of Technology, fall, 1961. Annals of mathematics studies ; 54. Univ. Pr., Princeton, NJ, rev. ed., 2. print. with corr. edition, 1968.

[PR94] V. P. Platonov and A. Rapinchuk. *Algebraic Groups and Number Theory*. Pure and applied mathematics ; 139. Academic Press, Boston [u.a.], 1994.

[RS08] A. Raghuram and F. Shahidi. On Certain Period Relations for Cusp Forms on GL(n). *International Mathematics Research Notices*, 2008.

[Sch93] C.-G. Schmidt. Relative Modular Symbols and p-adic Rankin-Selberg convolutions. *Inventiones mathematicae*, pages 31–76, 1993.

[Sha74] J.A. Shalika. The Multiplicity one Theorem for GL(n). *Annals of Mathematics*, 100(2):171–193, 1974.

[SZ88] R. Stöcker and H. Zieschang. *Algebraische Topologie*. Teubner Stuttgart, 1988.

[Vog87] D.A. Vogan. *Unitary Representations of reductive Lie Groups*. Annals of mathematics studies ; 118. Princeton Univ. Pr., Princeton, NJ, 1987.

[Vog97] D.A. Vogan. Cohomology and Group representations. In *Representation Theory and Automorphic Forms*, Proceedings of symposia in pure mathematics, pages 214–243, 1997.

[Wal85] J.-L. Waldspurger. Quelques propriétés arithmétiques de certaines formes automorphes sur GL(2). *Compositio Mathematica*, 54(2):121–171, 1985.

[Wal88] N. R. Wallach. *Real Reductive Groups I*, volume 1: of *Pure and applied mathematics ; 132*. Acad. Pr., Boston, 1988.