

Dreischleifen-Betafunktionen und die Stabilität des Vakuums im Standardmodell

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
an der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-phys. Max Frederik Zoller

aus Karlsruhe-Durlach



Referent:

Prof. Dr. J. H. Kühn

Korreferent:

Prof. Dr. M. Steinhauser

Tag der mündlichen Prüfung:

27. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das Standardmodell und die Stabilität seines Grundzustands	5
2.1	Das Standardmodell der Teilchenphysik	5
2.2	Spontane Symmetriebrechung und die Erzeugung von Massen	9
2.3	Renormierung des Standardmodells	12
2.3.1	Dimensionale Regularisierung und Renormierungsschemata	12
2.3.2	Additive und multiplikative Renormierung	15
2.4	Die Renormierungsgruppe und das Laufen der Kopplungen	18
2.5	Der Higgs-Sektor des Standardmodells und die Stabilität des Vakuums	21
2.5.1	Das effektive Higgs-Potential	21
2.5.2	Vakuumstabilität und das Laufen der Higgs-Selbstkopplung	25
2.5.3	Physikalische Schwierigkeiten des effektiven Potentials	30
3	Betafunktionen im Standardmodell zur Dreischleifenordnung	35
3.1	Renormierungsgruppenfunktionen in dimensionaler Regularisierung	35
3.2	Mehrschleifenrechnungen im Standardmodell	37
3.2.1	Renormierung von Mehrschleifendiagrammen	37
3.2.2	Behandlung von γ_5 Matrizen in dimensionaler Regularisierung	38
3.2.3	Berechnung von Betafunktionen mit einer Hilfsmasse	44
3.3	Automatisierung der Rechnungen	47
3.4	Gruppenstruktur des vollen Standardmodells	50
3.5	Status der Betafunktionen im Standardmodell	52
3.6	Analytische Resultate und numerische Analyse	53
3.6.1	Dreischleifen-Betafunktionen im eichfreien Grenzfall	53
3.6.2	Anomale Dimensionen im eichfreien Grenzfall	57
3.6.3	Dreischleifen-Betafunktion für die Higgs-Selbstkopplung	60
3.6.4	Numerische Analyse an der top-Massenskala	67
4	Berechnung von $\overline{\text{MS}}$-Kopplungen aus On-shell-Parametern	73

4.1	Definitionen von Massen und die Relevanz von Tadpole-Beiträgen . . .	73
4.2	Von On-shell-Parametern zu $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen	77
4.2.1	Polmassen und die Bestimmung von \mathbf{v}	77
4.2.2	Status der Bestimmung von $\overline{\text{MS}}$ - aus On-shell-Parametern . . .	83
4.3	Berechnung von $\lambda(\mathcal{M}_t)$ und $\mathbf{y}_t(\mathcal{M}_t)$ im eichfreien Grenzfall	85
4.3.1	Implementierung der Rechnung	87
4.3.2	Diskussion der Resultate	89
5	Evolution der Higgs-Selbstkopplung in Dreischleifenordnung	95
5.1	$\overline{\text{MS}}$ -Standardmodellkopplungen zwischen top- und Planck-Skala	95
5.2	Evolution der Higgs-Selbstkopplung bis zur Planck-Skala	97
5.2.1	Einfluss der elektroschwachen Korrekturen	98
5.2.2	Vergleich der theoretischen Unsicherheiten	100
5.2.3	Vergleich der theoretischen und experimentellen Unsicherheiten	101
5.2.4	Die Stabilität des Standardmodellvakuums	105
5.2.5	top-Massenunsicherheit an zukünftigen Linearbeschleunigern . .	105
6	Fazit	107
	Anhang	109
A	Zeichenerklärung und Konventionen	109
B	Feynman-Regeln des Standardmodells	113
B.1	Das Standardmodell in der ungebrochenen Phase	113
B.2	Das Standardmodell in der gebrochenen Phase	119
	Literaturverzeichnis	127
	Danksagung	137
	Eigenständigkeitserklärung	139

KAPITEL 1

Einleitung

*“Indes sie forschten, röntgten, filmten, funkten,
entstand von selbst die köstlichste Erfindung:
der Umweg als die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.”*

Erich Kästner

Die Erforschung der elementaren Bausteine der bekannten Materie und deren Wechselwirkungen hat in den letzten Jahrzehnten zu tiefgreifenden Erkenntnissen geführt. Auf experimenteller Seite konnten an Teilchenbeschleunigern bei immer höheren Energien neue Teilchen gefunden und Beobachtungsgrößen mit immer höherer Präzision gemessen werden. Auf Seiten der Theoretischen Teilchenphysik wurden sehr erfolgreiche Modelle zur Beschreibung der beobachteten Phänomene entwickelt und durch die Anwendung störungstheoretischer Methoden in höheren Ordnungen große Präzision bei der Abbildung von Messgrößen auf die Parameter der untersuchten Theorien sowie bei Theorievorhersagen erreicht.

Die Entdeckungen des Higgs-Bosons [1,2] am *Large Hadron Collider* (LHC) hat das Standardmodell der Elementarteilchenphysik als bei den uns bisher an Beschleunigern zugänglichen Energien gültige Theorie der Materie bestätigt.

Bei diesem Modell handelt es sich um eine Quantenfeldtheorie. Teilchen werden als quantisierte Anregungen von Feldern verstanden und die möglichen Wechselwirkungen von Teilchen untereinander sind durch die Kopplungen der Felder aneinander bestimmt, wie sie in der Lagrangedichte beschrieben werden.

Diese Kopplungen sind Parameter der Theorie und müssen als solche aus experimentellen Daten bestimmt werden. Die Wechselwirkungen der Quantenfelder untereinander führen in der störungstheoretischen Berechnung physikalischer Größen durch den Austausch virtueller Teilchen zu Strahlungskorrekturen. Dies hat zur Folge, dass die effektiven Kopplungsstärken abhängig von der Energieskala sind, bei der ein bestimmter physikalischer Prozess stattfindet.

Die Evolution einer Kopplung X mit der Energieskala μ des betrachteten Prozesses wird durch die zugehörige Betafunktion

$$\beta_X := \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} X$$

beschrieben. Diese wird Ordnung für Ordnung in Störungstheorie berechnet und kann folglich als Potenzreihe in allen Kopplungen der Theorie geschrieben werden. Um die Evolution einer Kopplung zu beschreiben, werden also auch die Betafunktionen aller anderen Kopplungen benötigt.

Die Lösung des resultierenden Differentialgleichungssystems erfordert als Randbedingungen die Kenntnis der Kopplungsstärken bei einer Anfangsskala. Dies geschieht durch die Umrechnung von experimentell zugänglichen Größen, wie Wirkungsquerschnitten, Zerfallsbreiten und Teilchenmassen, in die effektiven Kopplungen der Felder aneinander bei einer an Beschleunigerexperimenten erreichbaren Energieskala, z. B. der Masse des top-Quarks. Diese Konvertierungsformeln werden ebenfalls in Störungstheorie berechnet.

Von besonderem Interesse im Standardmodell ist die Evolution der Higgs-Selbstwechselwirkung, welche im Higgs-Potential eingeführt wird. Durch die spontane Symmetriebrechung im Higgs-Sektor des Standardmodells wird ein Grundzustand, auch Vakuum genannt, im energetischen Minimum des Higgs-Potentials gewählt, welcher nicht mehr die volle $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie der Lagrangedichte besitzt. Die Position dieses Minimums legt die Skala der elektroschwachen Physik und die Massen der Elementarteilchen fest. Durch Quantenkorrekturen kann bei einer hohen Skala, z. B. in der Nähe der Planck-Skala ein zweites Minimum im effektiven Higgs-Potential [3] entstehen, welches bei entsprechender Wahl der Standardmodellparameter energetisch günstiger als das Standardmodellvakuum an der Skala der elektroschwachen Physik sein kann. In einem solchen Szenario ist der Grundzustand des Standardmodells an der elektroschwachen Skala nicht stabil, sondern kann in einen durch das zweite, globale Minimum des Higgs-Potentials definierten Zustand zerfallen.

Die Frage nach der Stabilität des Vakuumzustandes im Standardmodell ist eng verknüpft mit der Evolution der Higgs-Selbstkopplung [4–6]. Wird diese bei einer bestimmten Energieskala negativ, so tritt oberhalb dieser Skala ein zweites, globales Minimum im effektiven Higgs-Potential auf. Das Standardmodellvakuum ist also nicht stabil, wenn man die Gültigkeit der Theorie bis zu dieser Skala annimmt. Das Ziel dieser Arbeit ist eine Präzisionsberechnung der Evolution der Higgs-Selbstkopplung im Standardmodell und die Untersuchung der Vakuumstabilität für den Fall, dass dies die gültige Theorie bis zur Planck-Skala ist. Der Aufbau der Arbeit ist dabei wie folgt:

In Kapitel 2 wird die Struktur des Standardmodells und die in dieser Arbeit verwendete Notation eingeführt. Eine Erklärung der verwendeten Zeichen und Konventionen befindet sich außerdem in Anhang A. Im weiteren Verlauf von Kapitel 2 wird die spontane Symmetriebrechung im Higgs-Sektor, der Grundzustand der Theorie und die Erzeugung von Massen diskutiert. Weiter wird auf die Renormierung des Standardmodells, die Renormierungsgruppe und die Evolution der Standardmodellkopplungen eingegangen. Schließlich werden das effektive Higgs-Potential und das Vakuumstabilitätsproblem erläutert, der Zusammenhang zur Evolution der Higgs-Selbstkopplung

hergestellt und einige konzeptionelle Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem effektiven Potential, wie das Konvexitätsproblem und die Eichabhängigkeit, diskutiert.

In Kapitel 3 wird auf die Berechnung von Betafunktionen eingegangen, wobei die technischen Aspekte der Arbeit ausführlich beschrieben werden. Dies sind die Renormierung von Mehrschleifendiagrammen, die Behandlung von γ_5 -Matrizen in dimensionaler Regularisierung sowie die Vermeidung von infraroten Divergenzen durch die Einführung einer Hilfsmasse. Außerdem wird die Automatisierung der Rechnung erläutert und dabei besonders auf die Gruppenstruktur des Standardmodells eingegangen. Schließlich werden analytische Resultate für Betafunktionen von Kopplungen aus dem Higgs- und Yukawa-Sektor und anomale Dimensionen von Feldern in Dreischleifenordnung vorgestellt und numerisch untersucht. Die Betafunktionen für die top-Yukawa-Kopplung und die Higgs-Selbstkopplung stellen dabei die zentralen Resultate dieser Arbeit dar.

In Kapitel 4 wird die Berechnung von Kopplungen im $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungsschema, welches für die Betafunktionen verwendet wird, aus On-shell-Parametern, welche experimentell zugänglich sind, behandelt. Zunächst werden mögliche Massendefinitionen und die Rolle sogenannter Tadpole-Diagramme diskutiert. Weiter wird darauf eingegangen wie die Anfangswerte für die Evolution der Kopplungen aus experimentellen Daten berechnet werden. Abschließend wird eine solche Rechnung in einem vereinfachten Modell vorgestellt. Die in Kapitel 3 und 4 verwendeten Feynman-Regeln sind in Anhang B angegeben.

Kapitel 5 ist der Evolution der Higgs-Selbstkopplung unter Verwendung der Betafunktionen in Dreischleifenordnung gewidmet. Dabei werden theoretische und experimentelle Unsicherheiten sowie der Einfluss der elektroschwachen Korrekturen im Vergleich zu den QCD-, Yukawa- und Higgs-Korrekturen untersucht. Schließlich wird die Frage der Vakuumstabilität im Rahmen der erreichten Präzision diskutiert und es werden Wege zur weiteren Verbesserung der Genauigkeit aufgezeigt.

Die Resultate aus Kapitel 3 wurden in [7, 8] veröffentlicht, einige der Analysen aus Kapitel 5 wurden im Rahmen von Beiträgen zu Proceedings [9, 10] vorgestellt.

KAPITEL 2

Das Standardmodell und die Stabilität seines Grundzustands

2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Dem Standardmodell (SM) der Teilchenphysik¹ liegt eine $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie zugrunde². Dies bedeutet, dass die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{gaugefix}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\Phi} \quad (2.1)$$

invariant ist bezüglich Transformationen dieser Gruppe. Die Lagrangedichte lässt sich in Sektoren aufteilen, welche den verschiedenen Wechselwirkungen entsprechen. Hierbei wird die Stärke der einzelnen Wechselwirkungen durch die Kopplungskonstanten definiert³. Bei diesem Begriff ist allerdings zu beachten, dass nur die physikalischen Kopplungen bei einer bestimmten Energieskala bzw. die Kopplungen in der nackten Lagrangedichte konstant sind. Die effektiven Kopplungsstärken dagegen sind nicht konstant, sondern abhängig von der Energieskala eines betrachteten physikalischen Prozesses. Die Propagation der Fermionen und Eichbosonen sowie ihre Wechselwirkungen

¹Eine Zusammenfassung der Struktur des Standardmodells findet sich beispielsweise in [11, 12]. Wesentliche Beiträge bei der Entwicklung des Standardmodells waren u.a. [13–15] im Bereich der QCD, [16–18] im Elektroschwachen Sektor und für ein Modell der Leptonen, [19–25] für die Anwendung des Prinzips der Spontanen Symmetriebrechung und die Entwicklung des Higgs-Sektors sowie [26, 27] für die das Konzept der Flavour-Mischung.

²Der Index c steht für Farbe (engl. *colour*), der Index Y bezeichnet die Hyperladung, also die Quantenzahl, welche das Transformationsverhalten von Feldern bezüglich der Untergruppe $U(1)_Y$ charakterisiert. Der Index L verdeutlicht, dass nur linkshändige Fermionfelder als Dublette transformiert werden, während rechtshändige Singulette bezüglich dieser Untergruppe sind.

³Dies stimmt so in der ungebrochenen Phase des Standardmodells. Durch die spontane Symmetriebrechung im Higgs-Sektor werden die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung massiv und diese Wechselwirkung damit kurzreichweitig, was ihre namensgebende Schwäche trotz relativ großer Kopplungskonstanten ausmacht (s. Kap. 2.2).

untereinander werden beschrieben durch

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + i \sum_q \bar{q} \not{D} q + i \sum_l \bar{l} \not{D} l \quad (2.2)$$

mit den Quarkfeldern q , den Leptonfeldern l und der kovarianten Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu - ig_1 Y B^\mu - i \frac{g_2}{2} \sigma^a W^{a\mu} - ig_s T^a A^{a\mu}. \quad (2.3)$$

Die Eichfelder der $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$ werden mit A_μ^a ($a = 1, \dots, 8$), W_μ^a ($a = 1, 2, 3$) und B_μ bezeichnet. Des Weiteren ist Y die Hyperladung des Feldes, auf das die kovariante Ableitung angewandt wird. Es ist zu beachten, dass die Hyperladungen sich für die rechts- und linkshändigen Anteile von Fermionfeldern unterscheiden und beim linkshändigen Anteil zusätzlich von der $SU(2)_L$ -Konfiguration abhängen⁴. Außerdem wirken die Paulimatrizen σ^a in (2.3) nur auf linkshändige Fermionfelder. Bei der Implementierung der Feynman-Regeln im Rahmen einer Automatisierung werden daher Projektoren auf die rechts- und linkshändigen Anteile der Fermionfelder, gekennzeichnet durch ein tiefgestelltes R bzw. L , verwendet. Diese lassen sich mit Hilfe der γ_5 -Matrix

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (2.4)$$

ausdrücken als

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad \text{und} \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5). \quad (2.5)$$

Die kinetischen und Selbstwechselwirkungsterme der Eichfelder werden mit Hilfe der Feldstärketensoren

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.6)$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (2.7)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.8)$$

konstruiert. Hierin bezeichnen f^{abc} die Strukturkonstanten der Farbgruppe $SU(3)_c$, die durch

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (2.9)$$

mit den $SU(3)_c$ -Generatoren T^a definiert sind. Die Strukturkonstanten der $SU(2)_L$ mit den Paulimatrizen σ^a ($a = 1, 2, 3$) als Generatoren sind durch den total antisymmetrischen ε -Pseudotensor dritter Stufe gegeben.

Für jede Eichsymmetrie wird ein Eichfixierungsterm zur Lagrangedichte hinzugefügt:

$$\mathcal{L}_{\text{gaugefix}} = -\frac{1}{2(1-\xi)} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 - \frac{1}{2(1-\xi_W)} (\partial_\mu W^{a\mu})^2 - \frac{1}{2(1-\xi_B)} (\partial_\mu B^\mu)^2. \quad (2.10)$$

Alle Rechnungen dieser Arbeit werden in allgemeiner R_ξ -Eichung durchgeführt, also für beliebige Werte der Eichparameter ξ , ξ_W und ξ_B .

⁴Deshalb ist bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen eine Faktorisierung in einen Farbfaktor, ein Impulsraumdiagramm sowie einen $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Gruppenfaktor sinnvoll, eine weitere Aufspaltung in $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$ jedoch nicht.

Außerdem werden für die nicht-abelschen Eichgruppen noch Fadeev-Popov-Geistfelder⁵ eingeführt, welche die Transversalität der Eichbosonpropagatoren sicherstellen. Der entsprechende Teil der Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + g_s f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A^{b\mu} c^c + \partial_\mu \bar{c}_W^a \partial^\mu c_W^a + g_2 \varepsilon^{abc} \partial_\mu \bar{c}_W^a W^{b\mu} c_W^c. \quad (2.11)$$

Im sogenannten eichfreien Grenzfall (engl. *gaugeless limit*) werden die elektroschwachen Kopplungen g_1 und g_2 zu Null gesetzt. Streicht man die Felder, die nur an der elektroschwachen Wechselwirkung teilnehmen, so erhält man die Quantenchromdynamik (QCD) und (2.2), (2.10) sowie (2.11) reduzieren sich auf

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{2(1-\xi)} (\partial_\mu A^{a\mu})^2 + \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + g_s f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A^{b\mu} c^c \\ & + \sum_q \left\{ \frac{i}{2} \bar{q} \overleftrightarrow{\not{D}} q + g_s \bar{q} \not{A} T^a q \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die direkte Einführung von Dirac-Massentermen der Form $m_q \bar{q} q = m_q (\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L)$ in die Lagrangedichte würde die $SU(2)_L$ -Symmetrie verletzen, da in diesen rechts- und linkshändige Fermionfelder aneinanderkoppeln. Ebenso verletzen explizite Massenterme für Eichbosonen, z.B. $m^2 W^{a\mu} W_\mu^a$, die Eichinvarianz. Dies motiviert die Erzeugung von Massen durch spontane Symmetriebrechung in einem skalaren Sektor. Im Standardmodell wird ein komplexes Skalarfeld Φ postuliert, welches sich als $SU(2)_L$ -Doublet transformiert. Die Dynamik dieses Skalarfeldes, seine Selbstwechselwirkung sowie seine Wechselwirkung mit den elektroschwachen Eichbosonen wird durch

$$\mathcal{L}_\Phi = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \underbrace{\left(m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right)}_{\equiv V(\Phi)} \quad (2.13)$$

beschrieben. An dieser Stelle wird das klassische Higgs-Potential

$$V(\Phi) = m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.14)$$

mit der Higgs-Selbstkopplung λ und dem Massenparameter m eingeführt.

Die Wechselwirkung dieses Skalarfeldes mit den Fermionen wird im Yukawa-Sektor des Standardmodells beschrieben. Die Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & - \left[\bar{\mathbf{u}}_R \mathbf{Y}_T ((\Phi^c)^\dagger \mathbf{Q}_L) + \bar{\mathbf{d}}_R \mathbf{Y}_B (\Phi^\dagger \mathbf{Q}_L) + \bar{\mathbf{e}}_R \mathbf{Y}_L (\Phi^\dagger \mathbf{L}_L) \right. \\ & \left. + (\bar{\mathbf{Q}}_L \Phi^c) \mathbf{Y}_T^\dagger \mathbf{u}_R + (\bar{\mathbf{Q}}_L \Phi) \mathbf{Y}_B^\dagger \mathbf{d}_R + (\bar{\mathbf{L}}_L \Phi) \mathbf{Y}_L^\dagger \mathbf{e}_R \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

wird aus den $SU(2)_L$ -Dubletten

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_L \\ \mathbf{d}_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_L \\ \mathbf{e}_L \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

⁵Diese skalaren, aber antikommutierenden Felder transformieren sich unter der adjungierten Darstellung der entsprechenden Eichgruppe, haben also die Form c^a ($a = 1, \dots, 8$) für die $SU(3)_c$ und c_W^a ($a = 1, 2, 3$) für die $SU(2)_L$.

aufgebaut. Das ladungskonjugierte Skalarfeld ist durch

$$\Phi^c = i\sigma^2\Phi^* = \begin{pmatrix} \Phi_2^* \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

gegeben und transformiert sich ebenfalls als $SU(2)_L$ -Doublet. Die linkshändigen Quarkfelder $\mathbf{u}_L = (u_L, c_L, t_L)$ und $\mathbf{d}_L = (d_L, s_L, b_L)$ sowie die linkshändigen Leptonfelder $\mathbf{n}_L = (\nu_{e,L}, \nu_{\mu,L}, \nu_{\tau,L})$ und $\mathbf{e}_L = (e_L, \mu_L, \tau_L)$ werden mittels der Yukawa-Matrizen $\mathbf{Y}_T, \mathbf{Y}_B, \mathbf{Y}_L$ sowie ihrer hermitesch Konjugierten mit den rechtshändigen Quarkfeldern $\mathbf{u}_R = (u_R, c_R, t_R)$ und $\mathbf{d}_R = (d_R, s_R, b_R)$ sowie den rechtshändigen Leptonfeldern $\mathbf{e}_R = (e_R, \mu_R, \tau_R)$ verbunden. Rechtshändige Neutrinofelder sind im Standardmodell nicht vorhanden, weshalb die Neutrinos hier masselos bleiben⁶. Diese links- und rechtshändigen Felder sind Weyl-Spinoren, welche mittels der Projektoren (2.5) aus den Dirac-Spinorfeldern $u, c, t, d, s, b, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu$ und τ gewonnen werden können, also

$$u_L = P_L u, \quad u_R = P_R u, \quad \text{usw.} \quad (2.18)$$

Im Falle der Neutrinos ist

$$\nu_L = P_L \nu, \quad P_R \nu = 0. \quad (2.19)$$

Vernachlässigt man die sehr kleinen Effekte der Generationenmischung, also die Nichtdiagonalelemente der Yukawa-Matrizen, sowie die kleinen Yukawa-Kopplungen der ersten und zweiten Generation, so vereinfacht sich (2.15) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & -y_t \left\{ \bar{t}_R (\Phi^c)^\dagger Q_L + \bar{Q}_L \Phi^c t_R \right\} - y_b \left\{ \bar{b}_R \Phi^\dagger Q_L + \bar{Q}_L \Phi b_R \right\} \\ & - y_\tau \left\{ \bar{\tau}_R \Phi^\dagger L_L + \bar{L}_L \Phi \tau_R \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

mit

$$Q_L = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad L_L = \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Betrachtet man wiederum nur den Anteil des Yukawa-Sektors, der die dominante top-Yukawa-Kopplung enthält, so wird (2.20) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{y_t} = & -y_t \left\{ \bar{t}_R (\Phi^c)^\dagger Q_L + \bar{Q}_L \Phi^c t_R \right\} \\ = & -y_t \left\{ \bar{t}_R (\Phi_2, -\Phi_1) \cdot \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L + (\bar{t}, \bar{b})_L \cdot \begin{pmatrix} \Phi_2^* \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix} t_R \right\} \\ = & -y_t \left\{ (\bar{t} P_R t) \Phi_2^* + (\bar{t} P_L t) \Phi_2 - (\bar{b} P_R t) \Phi_1^* - (\bar{t} P_L b) \Phi_1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

⁶Die Existenz kleiner Neutrinomassen ist allerdings seit der Beobachtung der Oszillation solarer Neutrinos [28] experimentell gesichert, weshalb eine Erweiterung des Standardmodells notwendig ist. Im Rahmen dieser Arbeit können Neutrinos jedoch als masselos angenommen werden, da der Beitrag von Neutrinomassen zu den Betafunktionen der Standardmodellkopplungen vernachlässigbar ist.

2.2 Spontane Symmetriebrechung und die Erzeugung von Massen

Die meisten Felder des Standardmodells haben einen verschwindenden Vakuumerwartungswert

$$\langle 0|\Psi|0\rangle = 0, \quad \Psi \in \{A_\mu^a, W_\mu^a, B_\mu, c^a, c_W^a, u, d, c, s, t, b, \nu_\tau, \tau, \nu_\mu, \mu, \nu_e, e\}. \quad (2.23)$$

Physikalische Teilchen sind dann die quantisierten Anregungen der Felder. Für das Skalarfeld Φ verhält sich die Situation anders, wenn im Higgs-Potential (2.14) der Parameter m^2 negativ gewählt wird. Auf klassischem Niveau, hat dieses Potential damit die in Abb. 2.1 dargestellte Form mit einem Minimum bei

$$|\Phi| := \sqrt{\Phi^\dagger\Phi} = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}} =: \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.24)$$

Der Grundzustand, also eine Feldkonfiguration⁷, die dem energetischen Minimum entspricht, ist folglich nicht bei $|\Phi| = 0$, sondern bei $|\Phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Es gibt unendlich viele Konfigurationen für das komplexe $SU(2)_L$ -Dublett Φ , die dieser Anforderung genügen. Durch die Festlegung eines solchen Grund- oder Vakuumzustands wird die Symmetrie der ursprünglichen Lagrangedichte spontan gebrochen, d.h. der Grundzustand besitzt nicht die Symmetrie der Lagrangedichte. Um Störungstheorie bei niedrigen Energien – also beispielsweise an der Fermi-Skala⁸ – betreiben zu können, ist es sinnvoll, das Feld Φ in

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - i\chi) \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

mit dem reellen Higgs-Feld H , dem reellen Goldstone-Boson χ , dem komplexen Goldstone-Boson Φ^+ und dem klassischen Vakuumerwartungswert

$$v = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \quad (2.26)$$

aufzuteilen. Die Goldstone-Felder entsprechen Anregungen, die keine potentielle Energie kosten, also der Verschiebung des Vakuumerwartungswertes von einem willkürlich gewählten Punkt im energetischen Minimum mit $|\Phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}$ zu einem anderen Punkt mit dieser Eigenschaft. Die Quanten des Higgs-Feldes H hingegen entsprechen Anregungen aus dem energetischen Minimum hin zu Feldkonfigurationen höherer Energie, also in Abb. 2.1 links oder rechts des Minimums. Die Ersetzung (2.25) in der Lagrangedichte (2.13), wo die W - und B -Felder in der kovarianten Ableitung (2.3) an das Skalarfeld

⁷Klassisch ist eine Feldkonfiguration eine bestimmte Wahl der vier reellen Freiheitsgrade $\mathbf{Re}(\Phi_1)$, $\mathbf{Im}(\Phi_1)$, $\mathbf{Re}(\Phi_2)$ und $\mathbf{Im}(\Phi_2)$ des Skalarfeldes Φ .

⁸ Die Fermi-Skala ist die Skala, in deren Größenordnung der Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes und die Massen der elektroschwachen Eichbosonen liegen. Definiere also $M_{\text{Fermi}} \sim v^{\text{OS}}$, wobei $v^{\text{OS}} := (\sqrt{2}G_{\text{F}})^{-\frac{1}{2}} \approx 246,2 \text{ GeV}$ der aus der Fermi-Konstanten des Myon-Zerfalls $G_{\text{F}} = 1,1663787(6) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ [29] bestimmte Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes ist.

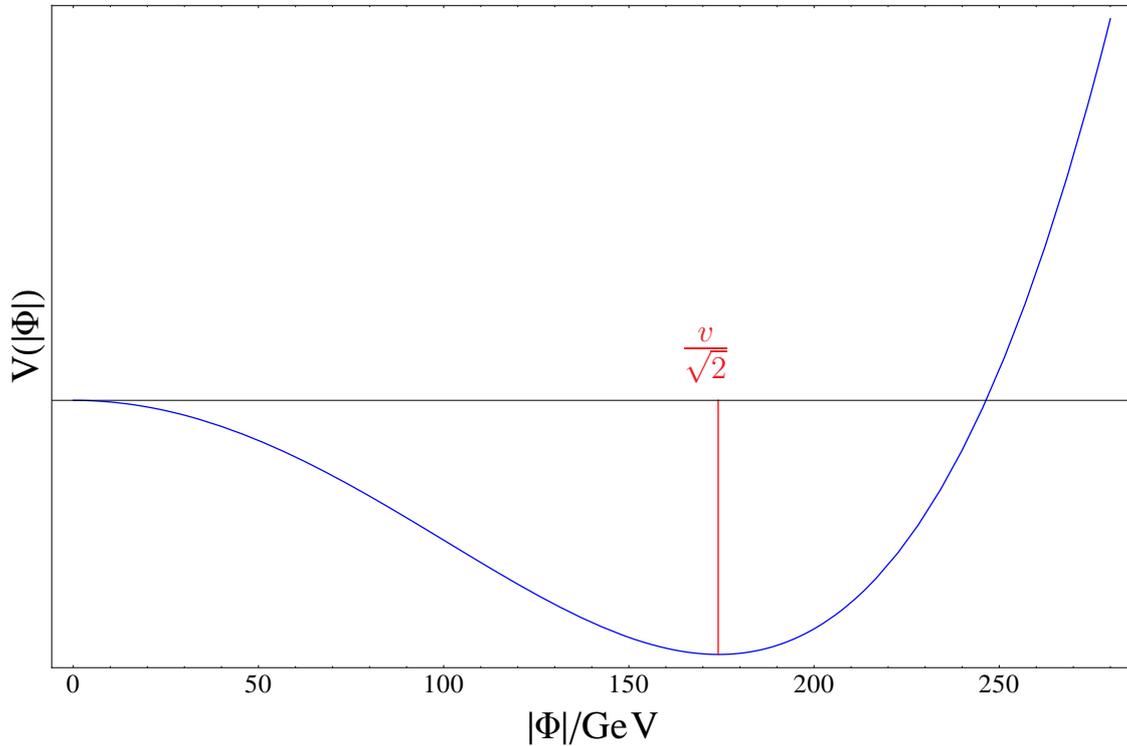


Abbildung 2.1: Das klassische Higgs-Potential im Standardmodell.

koppeln, generiert nun Massenterme der Form $m_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}$ und $\frac{m_Z^2}{2} Z^2$ für die schwachen Eichbosonen W^\pm und Z sowie Wechselwirkungsterme dieser Bosonen mit dem Higgs-Feld und den Goldstone-Bosonen. Die schwachen Eichbosonen W^\pm und Z sind Linearkombinationen der ursprünglichen Felder:

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp W_\mu^2), \\ Z_\mu &= (c_w \cdot W_\mu^3 - s_w \cdot B_\mu). \end{aligned}$$

Das Photonfeld

$$A_\mu = (c_w \cdot B_\mu + s_w \cdot W_\mu^3) \quad (2.27)$$

bleibt masselos. Hierbei wurde eine Drehung des Vektors (W_μ^3, B_μ) um den elektroschwachen Mischungswinkel θ_w vorgenommen, welcher mit den Kopplungen g_2 und g_1 bzw. der elektrischen Elementarladung e durch

$$c_w := \cos(\theta_w) := \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} = \frac{e}{g_1}, \quad (2.28)$$

$$s_w := \sin(\theta_w) := \frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} = \frac{e}{g_2}, \quad (2.29)$$

$$e := \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad (2.30)$$

zusammenhängt. Die Massen sind auf Baumgraphenniveau gegeben durch

$$m_W := \frac{g_2 v}{2}, \quad (2.31)$$

$$m_Z := \frac{\sqrt{g_2^2 + g_1^2} v}{2} = \frac{m_W}{c_W}. \quad (2.32)$$

Die Lagrangedichte (2.13) führt zu einem Massenterm $\frac{m_H^2}{2} H^2$ für das Higgs-Feld, wobei die Higgs-Masse auf Baumgraphenniveau durch

$$m_H^2 := -2m^2 = 2\lambda v^2 \quad (2.33)$$

gegeben ist. Die Goldstone-Bosonen sind naturgemäß masselos. In der Yukawa-Lagrangedichte (2.15) bzw. (2.20) führt (2.25) zu Massentermen $m_f \bar{f} f$ für die Fermionfelder f mit

$$m_f := \frac{y_f}{\sqrt{2}} v. \quad (2.34)$$

Für die allgemeine Form der Yukawa-Lagrangedichte (2.15) lassen sich durch einen Basiswechsel diagonale Massenmatrizen erreichen, welche auch proportional zu den Kopplungsmatrizen an das Higgs-Boson sind. So können die Yukawa-Matrizen \mathbf{Y}_T , \mathbf{Y}_B und \mathbf{Y}_L aus (2.15) in

$$\mathbf{Y}_T = \mathbf{H}_T \mathbf{U}_T, \quad \mathbf{Y}_B = \mathbf{H}_B \mathbf{U}_B, \quad \mathbf{Y}_L = \mathbf{H}_L \mathbf{U}_L, \quad (2.35)$$

mit hermiteschen Matrizen \mathbf{H}_i und unitären \mathbf{U}_i zerlegt werden. Die hermiteschen Matrizen lassen sich nun wiederum mittels unitärer Transformationen \mathbf{S}_i diagonalisieren:

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{U}_i = \mathbf{S}_i^\dagger \mathbf{Y}_i^{\text{diag}} \mathbf{S}_i \mathbf{U}_i, \quad i \in \{T, B, L\}. \quad (2.36)$$

Mit der Definition der Masseneigenzustände

$$\mathbf{u}_L^M = \mathbf{S}_T \mathbf{U}_T \mathbf{u}_L, \quad \mathbf{u}_R^M = \mathbf{S}_T \mathbf{u}_R, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{d}_L^M = \mathbf{S}_B \mathbf{U}_B \mathbf{d}_L, \quad \mathbf{d}_R^M = \mathbf{S}_B \mathbf{d}_R, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{e}_L^M = \mathbf{S}_L \mathbf{U}_L \mathbf{e}_L, \quad \mathbf{e}_R^M = \mathbf{S}_L \mathbf{e}_R \quad (2.39)$$

erhält man aus der Kopplung an den konstanten Anteil des Skalarfeldes

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

nun diagonale Massenterme der Form

$$\frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{\mathbf{u}}_R^M \mathbf{Y}_T^{\text{diag}} \mathbf{u}_L^M + \bar{\mathbf{u}}_L^M \mathbf{Y}_T^{\text{diag}} \mathbf{u}_R^M) \quad (2.41)$$

in der Lagrangedichte. Dies wird mit einem für die Quarks nun nicht mehr diagonalen Eichsektor bezahlt, wo Flavour-Mischungen bei Kopplung an die geladenen Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung durch die CKM Matrix [26, 27]

$$\mathbf{V} = \mathbf{S}_T \mathbf{S}_B^\dagger \quad (2.42)$$

vermittelt werden. Für Quarks sind also die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung von den Masseneigenzuständen verschieden. In Abwesenheit rechtshändiger Neutrinos und damit einer zweiten Yukawa-Matrix für die Leptonen tritt dieses Phänomen im Lepton-Sektor nicht auf. Hier sind die experimentell beobachtbaren Masseneigenzustände auch die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung.

Die Lagrangedichte des Standardmodells in der gebrochenen Phase, in der eine Wahl für den Grundzustand des skalaren $SU(2)_L$ -Dubletts getroffen worden ist, hat nun nur noch eine $SU(3)_c \times U(1)_Q$ -Symmetrie statt der ursprünglichen $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie⁹.

Bei einem perturbativen Zugang zur Quantenfeldtheorie wird die Lagrangedichte \mathcal{L} immer in einen freien Anteil $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ und einen Wechselwirkungsanteil \mathcal{L}_{int} aufgeteilt, wobei erster in der Berechnung von Matrixelementen zu den Propagatoren, also exakten Zweipunktfunktionen der wechselwirkungsfreien Theorie, führt. \mathcal{L}_{int} dagegen wird als kleine Störung aufgefasst, weshalb die in den Vertizes auftretenden Kopplungen hinreichend klein sein müssen. Für Prozesse bei sehr hohen Energien ($E \gg v$) kann mit der Lagrangedichte (2.1) des Standardmodells in der ungebrochenen Phase, also mit voller $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Symmetrie gearbeitet werden. Insbesondere ist das ultraviolette Verhalten der Theorie massenunabhängig, und damit gilt dies auch für die Renormierungskonstanten in einem minimalen Subtraktionsschema sowie für die daraus berechneten Renormierungsgruppenfunktionen (s. Kap. 2.3). Daher wird in dieser Arbeit für die Berechnung solcher Funktionen die ungebrochene Phase des Standardmodells verwendet. Bei niedrigeren Energien ($E \sim v$) sind die oben diskutierten Massenterme nicht mehr als kleine Störung aufzufassen, sondern müssen dem freien Anteil der Lagrangedichte zugerechnet werden. Dadurch werden die entsprechenden Propagatoren massiv und Rechnungen in der gebrochenen Phase im Allgemeinen herausfordernder.

2.3 Renormierung des Standardmodells

Bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen mit mindestens einer Schleife ist jeder Schleifenimpuls p über den gesamten Impulsraum zu integrieren. Dabei können Divergenzen auftreten. Zum einen können mehrere masselose Propagatoren $\sim \frac{1}{-p^2}$ bei Integration über den Ursprung $p = 0$ zu infraroten Divergenzen führen. Dies kann beispielsweise vorkommen, wenn in einem Diagramm mit mehreren äußeren Beinen externe Impulse zu Null gesetzt werden. Zum anderen können ultraviolette Divergenzen entstehen, wenn der Integrand nach der Wick-Rotation im Grenzfall $P^2 \rightarrow \infty$ für den euklidischen Impuls P nicht schnell genug abfällt.

2.3.1 Dimensionale Regularisierung und Renormierungsschemata

Der erste Schritt in der Behandlung solcher Divergenzen ist die Anwendung einer geeigneten Regularisierungsvorschrift. Die gegenwärtig gebräuchlichste ist die dimensionale

⁹Dabei ist $Q = Y + I_z$ die elektrische Ladung, definiert durch die Hyperladung Y und die z -Komponente des Isospins I_z , also den Eigenwert zum $SU(2)_L$ -Operator $\frac{\sigma^3}{2}$.

Regularisierung [30]. Der Grad der Divergenz eines Feynman-Integrals hängt von der Dimension D der Raumzeit ab. Daher wird als Regulator

$$\varepsilon := \frac{4 - D}{2} \quad (2.43)$$

verwendet. Die zu berechnenden Integrale, welche im Allgemeinen eine Tensorstruktur haben, werden durch geeignete Projektoren auf skalare Integrale abgebildet, so dass die Wirkung der D -dimensionalen Integration $I_D : f \rightarrow \int d^D p f(p)$ nur für skalare Integranden f , welche Funktionen des Schleifenimpulses p sind, definiert werden muss. Das Funktional I_D wird so definiert, dass die zentralen Eigenschaften der gewöhnlichen Integration erhalten bleiben und man für $D \in \mathbb{N}$ denselben Wert erhält [31]:

$$\begin{aligned} \triangleright \int d^D p (a f(p) + b g(p)) &= a \int d^D p f(p) + b \int d^D p g(p) && \text{(Linearität),} \\ \triangleright \int d^D p f(p + q) &= \int d^D p f(p) && \text{(Translationsinvarianz),} \\ \triangleright \int d^D p f(sp) &= s^{-D} \int d^D p f(p) && \text{(Skalengesetz),} \\ \triangleright \int d^D p \exp(-p^2) &= \pi^{D/2} && \text{(Normierung),} \end{aligned}$$

wobei $f, g : \text{Impulsraum} \rightarrow \mathbb{C}$ sowie $p, q \in \text{Impulsraum}$ und $a, b, s \in \mathbb{C}$ gilt.

Für die Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu}$ in D Dimensionen wird die Relation

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g^\mu_\mu = D \quad (2.44)$$

benötigt. Die definierenden Eigenschaften der γ -Matrizen bleiben auch in D Dimensionen erhalten:

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}, \\ \gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu &= \begin{cases} \gamma^\mu & \text{für } \mu = 0, \\ -\gamma^\mu & \text{für } \mu \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

sodass für die Kontraktionen der γ -Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= D \mathbb{1}, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= (2 - D) \gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - (4 - D) \gamma^\nu \gamma^\rho, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + (4 - D) \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma, \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (2.46)$$

gelten. Weiter definiert man die Spur über Produkte von Matrizen in D Dimensionen als lineare und zyklische Abbildung mit der Normierung¹⁰

$$\mathbf{Tr}(\mathbb{1}) = 4. \quad (2.47)$$

¹⁰Tatsächlich könnte man $\mathbf{Tr}(\mathbb{1}) = t(D)$ mit einer beliebigen, glatten Funktion mit der Randbedingung $t(D = 4) = 4$ definieren. Eine andere Wahl von $t(D)$ entspricht aber einfach einer Renormierungsgruppentransformation [31], sodass die hier verwendete, und auch allgemein übliche, komfortable Definition als Teil der Wahl eines Renormierungsschemas aufgefasst werden kann.

Um die Wirkung S auch in D Dimensionen als dimensionslose Größe zu erhalten, wird die zunächst beliebige 't Hooft-Skala μ , welche die Dimension einer Masse hat, mittels der Ersetzung

$$d^4 p \longrightarrow (\mu^2)^\varepsilon d^{4-2\varepsilon} p \quad (2.48)$$

eingeführt. Formal kann man dies so interpretieren, dass jede physikalische Kopplung g nun mit einem Skalenfaktor multipliziert wird, sodass die nackte Kopplung g_B schon auf Baumgraphenniveau die Form

$$g_B = (\mu^{2\varepsilon})^{\frac{\rho}{2}} g \quad (2.49)$$

hat, wobei¹¹

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{für Eich- und Yukawa-Kopplungen} \\ 2 & \text{für die quartische Kopplung } \lambda \end{cases}. \quad (2.50)$$

Bei der Berechnung von Feynman-Integralen mit l Schleifen können dann im Grenzfall $\varepsilon \rightarrow 0$ Terme $\propto \ln^n(\frac{\mu^2}{q^2})$ und $\propto \ln^n(\frac{\mu^2}{m^2})$ mit Massen m und externen Impulsen q auftreten, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \leq l$. Falls nur eine Massen- oder Impulsskala in der Rechnung vorkommt, lassen sich diese Logarithmen durch die Wahl $\mu^2 = -q^2$ bzw. $\mu^2 = m^2$ vollständig in die Kopplungen resumieren, welche nun effektiv von der Skala μ abhängen.

Berechnet man nun beispielsweise ein massives Einschleifendiagramm ohne externe Impulse¹² (s. Abb. 2.2), so findet man [32]

$$I(n) = \frac{\mu^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{4-2\varepsilon}} \int \frac{d^D p}{(m^2 - p^2 - i0)^n} = \frac{i(\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (m^2)^{2-\varepsilon-n} \frac{\Gamma(n-2+\varepsilon)}{\Gamma(n)}, \quad (2.51)$$

was für alle $n \in \mathbb{N}$ proportional zu

$$I(1) = -\frac{i(\mu^2)^\varepsilon}{(4\pi)^{2-\varepsilon}} (m^2)^{1-\varepsilon} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon} \quad (2.52)$$

ist. Durch Redefinition der zunächst beliebigen Skala μ können nun einzelne Faktoren, die typischerweise in jeder Schleifenordnung auftauchen, in μ absorbiert werden. Die Festlegung von μ wie in (2.51) und (2.52) entspricht der Renormierungsskala im MS-Schema ($\mu = \mu_{\text{MS}}$). Durch die Wahl der Skala

$$(\mu_{\text{MS}}^2)^\varepsilon = [\mu_{\text{MS}}^2 e^{\ln(4\pi) - \gamma_E}]^\varepsilon = (\mu_{\text{MS}}^2)^\varepsilon (4\pi)^\varepsilon \Gamma(1+\varepsilon) + O(\varepsilon^2), \quad (2.53)$$



Abbildung 2.2: Massives Einschleifenvakuumsdiagramm

¹¹Eich- und Yukawa-Kopplungen treten von einer Schleifenordnung zur nächsten als quadratische Faktoren (g_s^2, y_t^2, \dots) auf, λ dagegen in einfacher Potenz.

¹²Diagramme ohne externe Impulse nennt man Vakuums- oder Tadpole-Diagramme. Falls sie keine Massenskala enthalten, werden sie in dimensionaler Regularisierung zu Null gesetzt.

werden Terme $\propto \ln(4\pi)$ und $\propto \gamma_E$ in μ absorbiert. Im Folgenden wird stets das $\overline{\text{MS}}$ -Schema [33] mit $\mu = \mu_{\overline{\text{MS}}}$ verwendet.

2.3.2 Additive und multiplikative Renormierung

Um lokale, d.h. in externen Impulsen polynomielle¹³, ultraviolette Divergenzen zu eliminieren wird zu jedem Term der ursprünglichen Lagrangedichte, welche im Folgenden als renormierte Lagrangedichte bezeichnet wird, ein Counterterm aufgestellt¹⁴. Dieser Counterterm hat die gleiche Struktur in den Feldern und deren Ableitungen wie der entsprechende Term der renormierten Lagrangedichte. In dimensionaler Regularisierung manifestieren sich Divergenzen durch Potenzen von $\frac{1}{\varepsilon}$, wobei $D = 4 - 2\varepsilon$ die Dimension der Raumzeit ist. Das $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungsschema mit der Renormierungsskala aus (2.53) beruht auf minimaler Subtraktion, d.h. in den Countertermen tauchen nur Terme proportional zu $\frac{1}{\varepsilon^n}$, $n \in \mathbb{N}$ auf. Der Counterterm für ein Produkt aus Feldern und Ableitungen von Feldern Γ hat daher die Form

$$\delta Z_\Gamma \Gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\{g_i\})}{\varepsilon^n} \Gamma, \quad (2.54)$$

wobei $c_n(\{g_i\})$ Potenzreihen in allen berücksichtigten Kopplungen g_i sind. Für den QCD-Anteil des Standardmodells in der ungebrochenen Phase, also ohne Massenterme, erhält man beispielsweise

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{4} \delta Z_3^{(2g)} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 - \frac{1}{2} \delta Z_1^{(3g)} g_s f^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c \\ & - \frac{1}{4} \delta Z_1^{(4g)} g_s^2 (f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 + \delta Z_3^{(2c)} \partial_\mu \bar{c}^a \partial^\mu c^a + \delta Z_1^{(ccg)} g_s f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a A^{b\mu} c^c \\ & + \sum_q \left\{ \frac{i}{2} \bar{q} \overleftrightarrow{\not{D}} \left[\delta Z_{2,L}^{(2q)} P_L + \delta Z_{2,R}^{(2q)} P_R \right] q + g_s \bar{q} A^a T^a \left[\delta Z_{1,L}^{(qq)} P_L + \delta Z_{1,R}^{(qq)} P_R \right] q \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Man beachte, dass für rechts- und linkshändige Felder im Allgemeinen verschiedene Counterterme auftreten, wenn Wechselwirkungen berücksichtigt werden, deren Feynman-Regeln die Projektoren $P_{L,R}$ aus (2.5) enthalten. Dies ist beispielsweise im elektroschwachen und Yukawa-Sektor der Fall.

Nun lassen sich Renormierungskonstanten der Form $Z = 1 + \delta Z$ definieren, mit deren Hilfe sich die Terme der renormierten Lagrangedichte (2.12) und der Counterterm-Lagrangedichte (2.55) zur nackten¹⁵ Lagrangedichte zusammenfassen lassen, welche die gleiche Struktur wie die renormierte Lagrangedichte hat. Dabei werden alle Counterterme in die Renormierung der Felder, Kopplungen und Eichparameter absorbiert. Dies

¹³Polynomielle Divergenzen sind beispielsweise $\propto 1, \not{q}, q^2$ mit einem äußeren Impuls q , wohingegen nicht-polynomielle Divergenzen $\propto \frac{1}{q^2}, \ln\left(\frac{-q^2}{\mu^2}\right), \dots$ nicht durch Renormierung behoben werden können.

¹⁴Eine Einführung in die Konzepte der Renormierung findet sich z.B. in [12, 31, 32].

¹⁵engl. *bare*, daher werden nackte Größen mit einem Index B gekennzeichnet.

führt auf die nackte Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD,B}} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu,B}^a G_B^{a\mu\nu} - \frac{1}{2(1-\xi_B)} (\partial_\mu A_B^{a\mu})^2 + \partial_\mu \bar{c}_B^a \partial^\mu c_B^a + g_{s,B} f^{abc} \partial_\mu \bar{c}_B^a A_B^{b\mu} c_B^c \\ & + \sum_q \left\{ \frac{i}{2} \left(\bar{q}_{B,L} \overleftrightarrow{\not{D}} q_{B,L} + \bar{q}_{B,R} \overleftrightarrow{\not{D}} q_{B,R} \right) + g_{s,B} \left(\bar{q}_{B,L} A_B^a T^a q_{B,L} + \bar{q}_{B,R} A_B^a T^a q_{B,R} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.56)$$

in der die nackten Parameter und Felder mit den renormierten durch multiplikative Renormierungskonstanten zusammenhängen:

$$A_B^{a\mu} = \sqrt{1 + \delta Z_3^{(2g)}} A^{a\mu} = \sqrt{Z_3^{(2g)}} A^{a\mu}, \quad (2.57)$$

$$c_B = \sqrt{1 + \delta Z_2^{(2c)}} c = \sqrt{Z_2^{(2c)}} c, \quad (2.58)$$

$$q_{B,L} = \sqrt{1 + \delta Z_{2,L}^{(2q)}} q_L = \sqrt{Z_{2,L}^{(2q)}} q_L, \quad (2.59)$$

$$q_{B,R} = \sqrt{1 + \delta Z_{2,R}^{(2q)}} q_R = \sqrt{Z_{2,R}^{(2q)}} q_R, \quad (2.60)$$

$$(1 - \xi_B) = Z_3^{(2g)} (1 - \xi), \quad (2.61)$$

$$g_{s,B} = \left(\mu^{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \delta Z_{g_s}) g_s = \left(\mu^{2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} Z_{g_s} g_s. \quad (2.62)$$

Die Renormierungskonstante für die Kopplung g_s lässt sich auf verschiedene Arten berechnen, beispielsweise aus dem top-top-Gluon-Vertex¹⁶ oder dem Drei- bzw. Vier-Gluonen-Vertex, wobei jeweils der Counterterm für den entsprechenden Vertex als auch die Wurzel aus der Feldstärkerenormierungskonstanten für jedes der beteiligten Felder benötigt wird.

$$Z_{g_s} = \frac{Z_{1,L}^{(tg)}}{Z_{2,L}^{(2t)} \sqrt{Z_3^{(2g)}}} = \frac{Z_{1,R}^{(tg)}}{Z_{2,R}^{(2t)} \sqrt{Z_3^{(2g)}}} = \frac{Z_1^{(3g)}}{\left(Z_3^{(2g)} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Z_1^{(4g)}}{\left(Z_3^{(2g)} \right)^2} \quad (2.63)$$

Analog stellt sich die Situation im Yukawa-Sektor dar, wo im vereinfachten Fall von (2.22) die Counterterm-Lagrangedichte

$$\delta \mathcal{L}_{y_t} = -\delta Z_1^{(tb\Phi)} y_t \left\{ (\bar{t} P_R t) \Phi_2^* + (\bar{t} P_L t) \Phi_2 - (\bar{b} P_R t) \Phi_1^* - (\bar{t} P_L b) \Phi_1 \right\} \quad (2.64)$$

definiert werden kann. Dann kann die Renormierungskonstante für die top-Yukawa-Kopplung aus

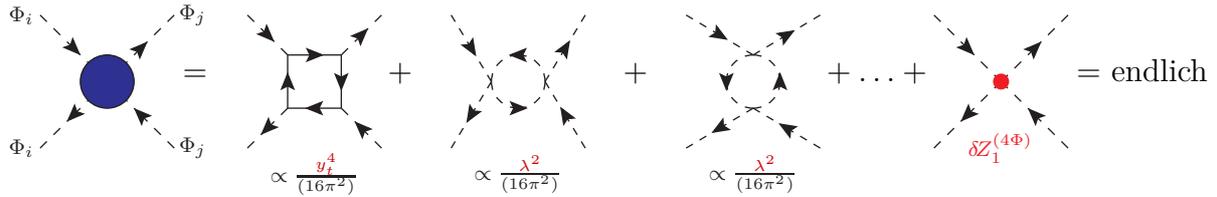
$$Z_{y_t} = \frac{Z_1^{(tt\Phi)}}{\sqrt{Z_{2,L}^{(2t)} Z_{2,R}^{(2t)} Z_2^{(2\Phi)}}} \quad (2.65)$$

errechnet werden.

Im Higgs-Sektor dagegen, wo die Counterterm-Lagrangedichte die Gestalt

$$\delta \mathcal{L}_\Phi = \delta Z_2^{(2\Phi)} \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \delta Z_{\Phi^2} \Phi^\dagger \Phi + \delta Z_1^{(4\Phi)} \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^2 \quad (2.66)$$

¹⁶Hier muss man zwischen links- und rechtshändigen top-Quarks unterscheiden.

Abbildung 2.3: Renormierung des Vier- Φ -Vertex auf Einschleifenniveau ($i, j \in \{1, 2\}$)

besitzt, tritt der Spezialfall auf, dass der Counterterm $\delta Z_1^{(4\Phi)}$ aufgrund des Beitrags der Yukawa-Wechselwirkung nicht proportional zur Kopplung λ ist, die in der renormierten Lagrangedichte (2.13) vor der Feldkombination $(\Phi^\dagger \Phi)^2$ steht. Daher wird die Higgs-Selbstkopplung nicht multiplikativ sondern additiv renormiert. So ist beispielsweise das erste Boxdiagramm in Abb. 2.3 proportional zu y_t^4 , aber nicht zu λ .

Der blaue Kreis auf der linken Seite symbolisiert die Summe aller Einteilchen-irreduziblen Diagramme (1PI)¹⁷, die mit Hilfe der Feynman-Regeln konstruiert werden können. Der Term für die Vier- Φ -Kopplung in der nackten Lagrangedichte ergibt sich aus (2.13) und (2.66) zu

$$\mathcal{L}_{4\Phi} = (-\lambda + \delta Z_1^{(4\Phi)}) (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (2.67)$$

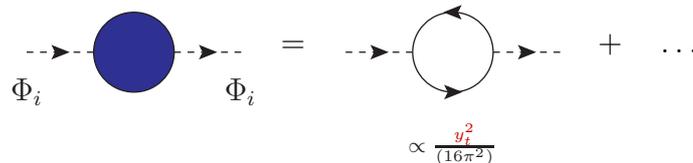
$$= -(\mu^{-2\epsilon}) \lambda_B [\Phi_B^\dagger \Phi_B]^2 = -(\lambda + \delta Z_\lambda) [Z_2^{(2\Phi)} \Phi^\dagger \Phi]^2. \quad (2.68)$$

Durch Vergleich von (2.67) und (2.68) folgt

$$\delta Z_\lambda = (Z_2^{(2\Phi)})^{-2} (\lambda - \delta Z_1^{(4\Phi)}) - \lambda \quad (2.69)$$

Neben den 1PI-Diagrammen mit vier externen Φ -Feldern benötigt man also auch die 1PI-Diagramme mit zwei externen Φ -Feldern (s. Abb. 2.4), deren UV-divergenter Anteil die Feldstärkerenormierungskonstante $Z_2^{(2\Phi)}$ liefert.

Da im $\overline{\text{MS}}$ -Schema, welches auf minimaler Subtraktion der UV-Divergenzen beruht, Renormierungskonstanten nicht von Massen abhängen, kann bei der Berechnung derselben der Massenparameter m^2 im Higgs-Potential zu Null gesetzt werden. Die Renormierungskonstante Z_{Φ^2} , welche in (2.66) für den Term $\propto \Phi^\dagger \Phi$ definiert wird, ist aber eine Funktion der dimensionslosen Kopplungen des Standardmodells. Daher lässt sie

Abbildung 2.4: Φ -Selbstenergie ($i \in \{1, 2\}$)

¹⁷engl. *one-particle irreducible*, daher die Abkürzung 1PI.

sich trotzdem die Renormierungskonstante Z_{m^2} für m^2 mit Hilfe des lokalen Operators

$$O_{2\Phi}(x) := \Phi^\dagger(x)\Phi(x) \quad (2.70)$$

berechnen. Der zugehörige renormierte Operator

$$[O_{2\Phi}] = Z_{\Phi^2} O_{2\Phi} = Z_{\Phi^2} \Phi^\dagger \Phi \quad (2.71)$$

führt bei Einsetzung in Greensfunktionen (s. Abb. 2.5) zu endlichen Resultaten. Der Anteil der nackten Lagrangedichte, der quadratisch in den skalaren Feldern ist, lässt sich als

$$\mathcal{L}_{m^2}^B = m_B^2 \Phi_B^\dagger \Phi_B \quad (2.72)$$

mit der nackten Masse

$$m_B^2 = Z_{m^2} m^2 \quad (2.73)$$

schreiben. Da m^2 ein endlicher Parameter ist, folgt unmittelbar

$$[O_{2\Phi}] = Z_{m^2} \Phi_B^\dagger \Phi_B = Z_{m^2} Z_2^{(2\Phi)} \Phi^\dagger \Phi \quad (2.74)$$

und schließlich

$$Z_{m^2} = \left(Z_2^{(2\Phi)} \right)^{-1} Z_{\Phi^2}. \quad (2.75)$$

2.4 Die Renormierungsgruppe und das Laufen der Kopplungen

Die Renormierung mittels dimensionaler Regularisierung und minimaler Subtraktion ist mit der Einführung der Renormierungsskala μ verbunden, die kontinuierlich variiert werden kann. Die Transformationen

$$\mu \rightarrow \mu' = z \cdot \mu, \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.76)$$

bilden eine Lie-Gruppe, die Renormierungsgruppe. Mittels solcher Transformationen lassen sich alle Renormierungsschemata, die auf minimaler Subtraktion beruhen ineinander überführen. Wird ein bestimmtes Renormierungsschema ausgezeichnet, so lässt sich die Reskalierung von μ als Wahl einer neuen charakteristischen Energieskala interpretieren. Jede Schleifenintegration in einem Feynman-Diagramm ist mit einem

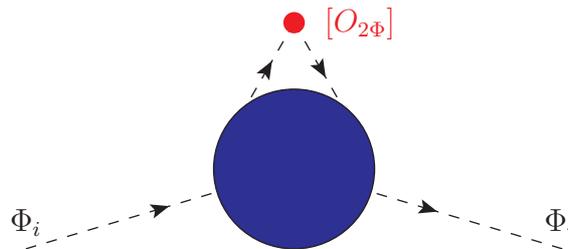


Abbildung 2.5: $[O_{2\Phi}]$ eingesetzt in eine skalare Zweipunktfunktion ($i \in \{1, 2\}$)

Faktor $\propto \left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)^\varepsilon$ bzw. $\propto \left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)^\varepsilon$ verbunden. Die Entwicklung dieser Terme in ε und die Multiplikation mit Polen $\frac{1}{\varepsilon^n}$ führt auf Logarithmen der Form $\ln^n\left(\frac{\mu^2}{-q^2}\right)$ bzw. $\ln^n\left(\frac{\mu^2}{m^2}\right)$. Gibt es nur eine Massenskala m oder Impulsskala q im betrachteten Prozess, so ist die Wahl $\mu^2 = -q^2$ bzw. $\mu^2 = m^2$ sinnvoll, um die Logarithmen zu resumieren. Alle Kopplungen g_i , welche Funktionen von μ sind, sind dann bei der entsprechenden Skala auszuwerten. Die Logarithmen wurden also in die laufenden, d.h. von der Energieskala μ abhängigen Kopplungen absorbiert. Nackte Kopplungen und Greensfunktionen sind unabhängig von der speziellen Wahl von μ . Für eine beliebige Greensfunktion, welche von den Kopplungen g_i abhängt und gemäß

$$\Gamma_{\text{B}} = Z_{\Gamma}^{-1}(\mu^2) \Gamma(\{g_i(\mu^2)\}, \mu^2), \quad g_{i,\text{B}} = (\mu^{2\varepsilon})^{\frac{\rho}{2}} Z_{g_i}(\mu^2) g_i(\mu^2), \quad (2.77)$$

mit ρ wie in (2.50), renormiert wird, gilt die Callan-Symanzik-Gleichung (vgl. [12, 31])

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sum_j \beta_{g_j}(\{g_i\}) \frac{\partial}{\partial g_j} + \gamma_{\Gamma}(\{g_i\}) \right) \Gamma = 0. \quad (2.78)$$

Die Betafunktion $\beta_{g_j}(\{g_i\})$ beschreibt die Evolution der Kopplung g_j in $D = 4$ Raumzeitdimensionen in Abhängigkeit von μ und ist selbst eine Funktion aller Kopplungen g_i der Theorie:

$$\beta_{g_j}(\{g_i\}) = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g_j(\mu^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(16\pi^2)^n} \beta_{g_j}^{(n)}. \quad (2.79)$$

Analog gibt die anomale Dimension γ_{Γ} die Abhängigkeit der Renormierungskonstanten Z_{Γ} von der Skala μ an:

$$\gamma_{\Gamma}(\{g_i\}) = -\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \ln Z_{\Gamma} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(16\pi^2)^n} \gamma_{\Gamma}^{(n)}. \quad (2.80)$$

Die anomale Dimension eines Feldes f wird mittels der inversen Feldstärkerenormierungskonstanten als

$$\gamma_2^f = -\mu^2 \frac{d \ln Z_f^{-1}}{d\mu^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(16\pi^2)^n} \gamma_2^{f(n)} \quad (f_{\text{B}} = \sqrt{Z_f} f) \quad (2.81)$$

definiert, während für eine Masse m oder eine N -Punktfunktion $\Gamma^{(N)}$

$$\gamma_N^{\Gamma} = -\mu^2 \frac{d \ln Z_{\Gamma}}{d\mu^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(16\pi^2)^n} \gamma_N^{\Gamma(n)} \quad (\Gamma_{N,\text{B}} = Z_{\Gamma}^{-1} \Gamma_N), \quad (2.82)$$

$$\gamma_m = -\mu^2 \frac{d \ln Z_m}{d\mu^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(16\pi^2)^n} \gamma_m^{(n)} \quad (m_{\text{B}} = Z_m m) \quad (2.83)$$

gilt. Betafunktionen und anomale Dimensionen werden Schleifenordnung für Schleifenordnung in Störungstheorie berechnet, wobei jeweils der charakteristische Faktor $\frac{1}{(16\pi^2)}$ auftritt. Aus diesem Grunde ist eine Zerlegung der Renormierungsgruppenfunktionen, d.h. der Betafunktionen (2.79) und anomalen Dimensionen (2.81), (2.82) sowie (2.83),

Tabelle 2.1: Startwerte der wichtigsten Standardmodellkopplungen für $M_t = 173,34$ GeV, $M_H = 125,9$ GeV und $\alpha_s(M_Z) = 0,1184$.

Kopplung	Wert für $\mu = M_t$
g_s	1,1666
g_2	0,6483
g_1	0,3587
λ	0,1276
y_t	0,9369
y_b	0,02
y_τ	0,01

in ihre Schleifenbeiträge (Index (n)) sinnvoll. Die laufenden Kopplungen und damit auch die Betafunktionen einer spontan gebrochenen Eichtheorie sind unabhängig von den Eichparametern ξ_i [34]. Dies gilt allerdings nicht für die anomalen Dimensionen der Felder.

Beginnt man die Evolution der Standardmodellkopplungen bei der Skala M_t , also der Masse des schwersten Teilchens der Theorie, so müssen keine Teilchen entkoppelt werden, und man kann mittels der Betafunktionen das Laufen der Kopplungen bis zur oberen Gültigkeitsgrenze Λ der Theorie bestimmen¹⁸. Es wird allgemein angenommen, dass bei der Planck-Skala $M_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{1}{G}} \approx 1,2209 \cdot 10^{19}$ GeV Gravitationseffekte die Physik grundlegend ändern, sodass das Standardmodell als Theorie nicht mehr ausreicht. In Abwesenheit von Physik jenseits des Standardmodells, wie sie etwa durch weitere Teilchen gegeben wäre, erscheint eine Untersuchung der Evolution der Kopplungen bis zu dieser Skala, also $\Lambda \sim M_{\text{Planck}} \sim 10^{19}$ GeV legitim¹⁹.

Die Betafunktionen und die zugehörigen Kopplungen werden im $\overline{\text{MS}}$ -Schema angegeben. Die korrekten Startwerte bei einer bestimmten Skala, beispielsweise $\mu = M_t$ müssen allerdings aus experimentellen Daten bestimmt werden. Die gemessenen Teilchenmassen sind (zumindest in sehr guter Näherung²⁰) als die physikalischen Polmassen gegeben. Die gemessenen Kopplungen sind ebenfalls im On-shell-Schema gegeben. Diese müssen mittels geeigneter Konvertierungsformeln ins $\overline{\text{MS}}$ -Schema übertragen werden (s. Kap. 4). Bei der Skala der top-Quarkmasse $\mu = M_t$ haben die Kopplungen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema näherungsweise die in Tab. 2.1 angegebenen Werte²¹.

Die Betafunktion einer beliebigen Standardmodellkopplung ist eine Potenzreihe in

¹⁸ Λ ist hierbei nicht als scharfe Grenze zu verstehen, sondern als ungefähre Energieskala, bei der physikalische Effekte jenseits des Standardmodells nicht mehr vernachlässigbar sind oder die Methode der Störungsrechnung versagt, weil einzelne Kopplungen zu groß werden.

¹⁹Manchmal wird in der Literatur auch die reduzierte Planck-Skala $M_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{1}{8\pi G}} \approx 2,43 \cdot 10^{18}$ GeV betrachtet.

²⁰Die Masse des top-Quarks wird an Hadronspeicherringen, wie dem LHC, indirekt durch Anpassen von Monte-Carlo-Parametern an die experimentellen Daten gemessen. An einem linearen e^+e^- -Beschleuniger, wie dem in der Planungsphase befindlichen ILC, könnte die physikalische Masse an der Produktionsschwelle der top-Quarks direkt sichtbar gemacht werden (vgl. Kap. 4.1).

²¹Die Werte für g_s, g_2, g_1, y_t und λ wurden mittels der Konvertierungsformeln (Zweischleifenkorrekturen) in [35] für $M_t = 173,34$ GeV [36], $M_H = 125,9$ GeV [37–40] und $\alpha_s(M_Z) = 0,1184$ [41] bestimmt, die kleinen Yukawa-Kopplungen wurden gemäß $y_b = \sqrt{2} \frac{m_b}{v} \approx 0,02$ und $y_\tau = \sqrt{2} \frac{m_\tau}{v} \approx 0,01$ aus

allen Kopplungen. Numerisch relevant sind allerdings nur die Beiträge der fünf Kopplungen g_s, y_t, g_2, g_1 und λ . Die kleineren Yukawa-Kopplungen und Nichtdiagonalelemente der Yukawa-Matrizen können vernachlässigt werden. Um das Laufen der Kopplungen zu berechnen muss also das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \lambda(\mu^2) = \beta_\lambda[\lambda(\mu^2), y_t(\mu^2), g_s(\mu^2), g_2(\mu^2), g_1(\mu^2)] \quad (2.84)$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} y_t(\mu^2) = \beta_{y_t}[\lambda(\mu^2), y_t(\mu^2), g_s(\mu^2), g_2(\mu^2), g_1(\mu^2)] \quad (2.85)$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g_s(\mu^2) = \beta_{g_s}[\lambda(\mu^2), y_t(\mu^2), g_s(\mu^2), g_2(\mu^2), g_1(\mu^2)] \quad (2.86)$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g_2(\mu^2) = \beta_{g_2}[\lambda(\mu^2), y_t(\mu^2), g_s(\mu^2), g_2(\mu^2), g_1(\mu^2)] \quad (2.87)$$

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g_1(\mu^2) = \beta_{g_1}[\lambda(\mu^2), y_t(\mu^2), g_s(\mu^2), g_2(\mu^2), g_1(\mu^2)] \quad (2.88)$$

mit geeigneten Anfangsbedingungen für jede Kopplung gelöst werden.

Die in Tab. 2.1 angegebenen Werte für die Standardmodellkopplungen lassen erwarten, dass zumindest im Bereich niedriger Energien die dominanten Beiträge von g_s und y_t bestimmt sind, also zumindest in der höchsten betrachteten Schleifenordnung der eichfreien Limes ($g_2, g_1 \rightarrow 0$) eine akzeptable Approximation darstellt.

2.5 Der Higgs-Sektor des Standardmodells und die Stabilität des Vakuums

In (2.14) wurde das klassische Higgs-Potential eingeführt, was in einer klassischen Feldtheorie der potentiellen Energie entspricht, welche im Skalarfeld gespeichert ist. Wie in Kap. 2.2 gezeigt, ist die Feldstärke niedrigster Energie, also der Grund- oder Vakuumzustand der klassischen Theorie nicht bei $|\Phi| = 0$ sondern bei $|\Phi| = \frac{v}{\sqrt{2}}$ mit $v \approx 246$ GeV. In einer Quantenfeldtheorie ändern sich konzeptionell zwei Dinge. Zum einen ist ein Quantenfeld aus Operatoren aufgebaut, sodass eine neue Definition der Feldstärke nötig wird, um einen Anschluss an das klassische Bild zu erhalten. Zum anderen ändert die Wechselwirkung des Skalarfeldes mit den anderen Feldern der Theorie die potentielle Energie, welche einer bestimmten Konfiguration des Skalarfeldes zugeordnet werden kann. Radiative Korrekturen verändern die effektive Stärke der Kopplungen in (2.14) bei einer bestimmten Energieskala, was sich in der Definition eines Potentials für die Quantentheorie widerspiegeln sollte.

2.5.1 Das effektive Higgs-Potential

Eine elegante Definition des effektiven Potentials in einer Quantenfeldtheorie geht auf S. Coleman und E. Weinberg zurück [3]. Diese wird im Folgenden skizziert. Ausgangs-

$v = (\sqrt{2}G_F)^{-\frac{1}{2}}$ sowie der $\overline{\text{MS}}$ -Masse $m_b = 4,18(3)$ GeV [37] und der Polmasse $M_\tau = 1776,82(16)$ MeV [37] auf Baumgraphenniveau abgeschätzt (vgl. Kap. 5.1).

punkt der Betrachtung ist das erzeugende Funktional $W[J]$, welches im Pfadintegralformalismus (vgl. z.B. [12]) über

$$Z[J] := e^{iW[J]} := \int d\Phi dA e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x), A(x), \partial_\mu A(x)) + J(x)\Phi(x)]} = \langle 0^+ | 0^- \rangle |_J. \quad (2.89)$$

eingeführt werden kann. Hierin ist $\Phi(x)$ das Multipllett aller Skalarfelder, welches in der Exponentialfunktion mit dem externen Strommultipllett $J(x)$ gleicher Dimension skalar multipliziert wird. $A(x)$ steht für alle übrigen Felder. Das Funktional $Z[J]$ beschreibt die Übergangsamplitude vom Vakuumzustand $|0^- \rangle$ für $t \rightarrow -\infty$ zum Vakuumzustand $|0^+ \rangle$ für $t \rightarrow +\infty$ in Anwesenheit der externen Quelle $J(x)$ [42–44].

Das erzeugende Funktional lässt sich gemäß

$$W[J] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad (2.90)$$

durch die verbundenen n -Punkt-Greensfunktionen $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ ausdrücken. Somit lassen sich die verbundenen n -Punkt-Greensfunktionen als n -fache Funktionalableitungen von W nach dem externen Feld $J(x)$ mit anschließendem Nullsetzen aller $J(x)$ gewinnen. Die klassische Feldstärke $\Phi_{\text{cl}}(x)$ wird nun als Erwartungswert des Quantenfeldes $\Phi(x)$ definiert:

$$\Phi_{\text{cl}}(x) := \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \left. \frac{\langle 0^+ | \Phi(x) | 0^- \rangle}{\langle 0^+ | 0^- \rangle} \right|_J. \quad (2.91)$$

Dies ermöglicht den eingangs erwähnten Vergleich mit der klassischen Theorie. Durch eine funktionale Legendre-Transformation lässt sich die Abhängigkeit vom externen Strom $J(x)$ gegen eine Abhängigkeit von der klassischen Feldstärke $\Phi_{\text{cl}}(x)$ eintauschen. Durch

$$\Gamma[\Phi_{\text{cl}}] = W[J] - \int d^4x J(x) \Phi_{\text{cl}}(x) \quad (2.92)$$

wird die effektive Wirkung $\Gamma[\Phi_{\text{cl}}]$ definiert. Eine wichtige Eigenschaft der Legendre-Transformation ist, dass sie nur für konvexe Funktionen wohldefiniert ist und in diesem Fall wieder auf konvexe Funktionen führt. Die Legendre-Transformation ist dann ihre eigene inverse Transformation. Für nicht-konvexe Funktionen führt die Legendre-Transformation auf mehrere Zweige von Werten. Nimmt man einen davon und wendet erneut eine Legendre-Transformation an, so führt dies zur konvexen Einhüllenden der ursprünglichen Funktion (vgl. z.B. [45]). Diese Einschränkung der Legendre-Transformation führt auf eine Besonderheit bei der Interpretation des in diesem Kapitel eingeführten effektiven Potentials, welche in Kap. 2.5.3 besprochen wird.

Die effektive Wirkung (2.92) lässt sich als Entwicklung im klassischen Feld $\Phi_{\text{cl}}(x)$ mit den Einteilchen-irreduziblen (1PI) n -Punkt-Greensfunktionen $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ als Koeffizienten schreiben, falls diese Entwicklung eine konvexe Funktion ergibt:²²

$$\Gamma[\Phi_{\text{cl}}] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \Phi_{\text{cl}}(x_1) \dots \Phi_{\text{cl}}(x_n), \quad (2.93)$$

²²Einen Beweis dafür, dass die $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ in dieser Entwicklung tatsächlich die 1PI n -Punkt-Greensfunktionen sind, findet man beispielsweise in [42, 43, 46].

Alternativ lässt sich die effektive Wirkung auch in Potenzen der Ableitungen $\partial_\mu \Phi_{\text{cl}}$ um den Punkt $\Phi_{\text{cl}}(x) = \text{konst.}$ entwickeln. Dies ist äquivalent zu einer Entwicklung in Potenzen der externen Impulse der Fourier-transformierten $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$. In dieser Entwicklung

$$\Gamma[\Phi_{\text{cl}}] = \int d^4x \left(-V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}}) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_{\text{cl}})^2 Z(\Phi_{\text{cl}}) + \dots \right) \quad (2.94)$$

wird das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ definiert. Die Fourier-Transformation von (2.93)

$$\begin{aligned} \Gamma[\Phi_{\text{cl}}] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\int \prod_{j=1}^n d^4x_j \underbrace{\int \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}_{\text{cl}}(p_j) e^{ip_j x_j}}_{\equiv \Phi_{\text{cl}}(x_j)} \right. \\ &\quad \left. \underbrace{\prod_{l=1}^n \int \frac{d^4k_l}{(2\pi)^4} e^{-ik_l x_l} \Gamma^{(n)}(k_1, \dots, k_n) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + \dots + k_n)}_{\equiv \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)} \right] \quad (2.95) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\int \prod_{j=1}^n \frac{d^4p_j}{(2\pi)^4} \bar{\Phi}_{\text{cl}}(p_j) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + \dots + p_n) \right] \end{aligned}$$

mit der Fourier-transformierten klassischen Feldstärke $\bar{\Phi}_{\text{cl}}(p_j)$ und den 1PI n -Punkt-Greensfunktionen im Impulsraum $\Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ führt durch Vergleich mit (2.94) auf die Berechnungsvorschrift (vgl. z.B. [47])

$$V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Phi_{\text{cl}}^n \Gamma^{(n)}(p_1 = \dots = p_n = 0) \quad (2.96)$$

für das effektive Potential, welches eine Funktion des klassischen Feldes Φ_{cl} ist.

Offenbar erhält man durch n -faches Ableiten nach Φ_{cl} und anschließendes Nullsetzen des klassischen Feldes²³ die effektive n -Punkt-Wechselwirkung, also z.B.

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\Phi_{\text{cl}}^2} = m_{\text{eff}}^2 \quad (2.97)$$

und

$$\frac{d^4 V_{\text{eff}}}{d\Phi_{\text{cl}}^4} = \lambda_{\text{eff}}, \quad (2.98)$$

wobei auf Baumgraphenniveau $m_{\text{eff}}^2 = m^2$ und $\lambda_{\text{eff}} = \lambda$ gilt und V_{eff} in diesem Fall einfach dem klassischen Potential (2.14) entspricht.

Spontane Symmetriebrechung, also ein nicht verschwindender Wert von Φ_{cl} in Abwesenheit der externen Quelle J tritt auf, falls

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi_{\text{cl}}} = 0 \quad (2.99)$$

²³ Je nach Renormierungsschema kann auch ein anderer Wert von Φ_{cl} als Auswertungspunkt gewählt werden [47].

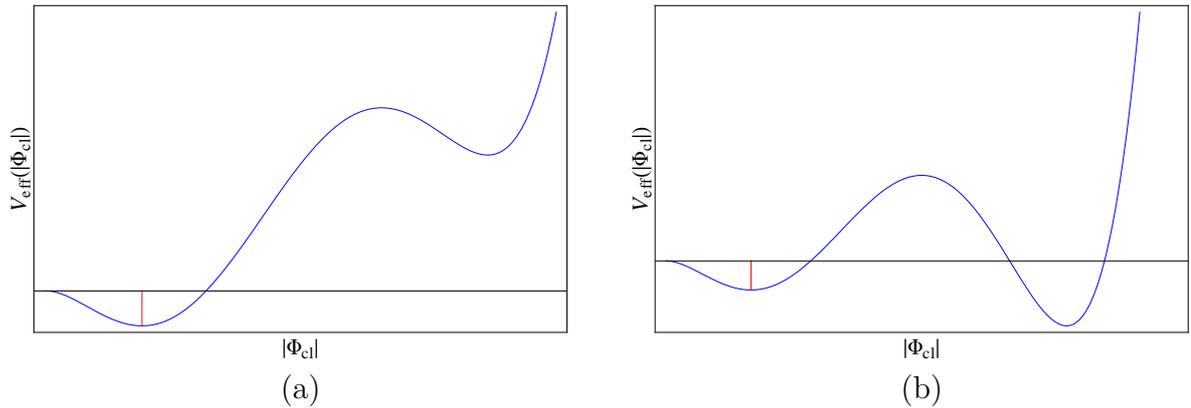


Abbildung 2.6: Effektives Higgs-Potential: Stabiles (a) und instabiles bzw. metastabiles (b) Szenario. Die senkrechte rote Linie markiert das Minimum $\frac{v}{\sqrt{2}}$ an der elektroschwachen Skala.

von Null verschiedene Lösungen besitzt. Da wir davon ausgehen, dass der Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes translationsinvariant ist, also die Impulserhaltung nicht spontan gebrochen wird, ist dies nach (2.94) äquivalent zu [3]

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \Phi_{\text{cl}}} = 0. \quad (2.100)$$

Das in (2.96) definierte effektive Potential enthält also zwei wichtige Informationen:

- In V_{eff} ist die Information über die effektive Stärke aller n -Punkt-Wechselwirkungen enthalten.
- Mittels (2.100) lassen sich alle Kandidaten für den Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes, sprich die möglichen Werte von $\Phi_{\text{cl}} = \langle 0|\Phi|0\rangle$ für $J = 0$, als die lokalen Minima, des effektiven Potentials finden²⁴.

Die Gestalt des effektiven Potentials V_{eff} aus (2.96) im Standardmodell ist abhängig von den Parametern der Theorie. In Abb. 2.6 ist V_{eff} als Funktion von Φ_{cl} für verschiedene Werte der Higgs-Masse M_H qualitativ gezeigt (vgl. auch [48]).

Bei hohen Feldstärken Φ_{cl} tritt ein zweites Minimum im effektiven Higgs-Potential auf. Man beachte allerdings, dass dieses Potential in Störungstheorie berechnet wird. Die Aussage über die Existenz eines zweiten Minimums bei der Feldstärke $\Phi_{\text{cl}}^{\text{min}}$ ist folglich mit der Einschränkung verbunden, dass eine störungstheoretische Betrachtung bis zu einer Energieskala $\mu \sim \Phi_{\text{cl}}^{\text{min}}$ möglich ist. Dies ist nicht der Fall, wenn eine der Kopplungen, von denen das effektive Potential abhängt, bei einer Energieskala $\mu \lesssim \Phi_{\text{cl}}^{\text{min}}$ zu groß wird oder sogar divergiert.

Ist M_H größer als ein kritischer Wert m_{min} , die sogenannte minimale Stabilitätsgrenze, so handelt es sich hierbei nur um ein lokales Minimum zusätzlich zum globalen Minimum an der Fermi-Skala bei $|\Phi_{\text{cl}}| = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Damit ist der Grundzustand des Standardmodells stabil. Variiert man nun die Higgs-Masse zu niedrigeren Werten hin, so sinkt

²⁴Aufgrund der oben angesprochenen Einschränkung der Legendre-Transformation auf konvexe Funktionen ergibt sich allerdings eine Schwierigkeit bei der Interpretation von $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ als potentielle Energiedichte, welche in Kap. 2.5.3 diskutiert wird.

das zweite Minimum bis es schließlich für $M_H = m_{\min}$ auf gleicher Höhe wie das erste liegt. Für noch kleinere Werte von M_H ist die energetisch günstigste Feldkonfiguration beim zweiten Minimum. Durch quantenmechanisches Tunneln durch die Potentialbarriere kann nun der lokale Grundzustand des Standardmodells an der Fermi-Skala in dieses absolute Minimum zerfallen. Dies entspricht einem Phasenübergang erster Ordnung, bei dem der Ordnungsparameter Φ_{cl} einen Sprung vollzieht. In diesem Fall ist das Standardmodellvakuum nicht stabil. Man unterscheidet nun noch zwischen dem instabilen Fall, in dem das zweite Minimum so tief liegt, dass der Phasenübergang schon aufgetreten sein müsste, und dem metastabilen Szenario, in dem die Lebensdauer des Standardmodellvakuums größer als das Alter des Universums ist, und der Phasenübergang deshalb zwar prinzipiell möglich, aber noch nicht aufgetreten ist. Wäre das Standardmodellvakuum instabil mit einem globalen Minimum des effektiven Potentials unterhalb der Planck-Skala, so wäre dies ein klarer Indikator für neue Physik zwischen Fermi- und Planck-Skala, die diesen Widerspruch mit den experimentellen Beobachtungen beheben müsste. Das Vakuumstabilitätsproblem wird in der Literatur an vielen Stellen besprochen. Wichtige erste Untersuchungen finden sich z.B. in [49–52].

Die Untergrenze für ein stabiles Standardmodellvakuum bis zur Planck-Skala lässt sich direkt aus dem effektiven Higgs-Potential gewinnen, indem man dieses in einer bestimmten Schleifenordnung berechnet und dann die auftretenden großen Logarithmen der Form $\ln\left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2}\right)$ unter Verwendung von Renormierungsgruppenfunktionen resumiert (vgl. z.B. [47]). Dabei ist μ_0 die Skala, bei der die Startwerte der Kopplungen bestimmt werden, z.B. $\mu_0 = M_t$. Die Bedingung, dass für $\Phi_{\text{cl}} < \Lambda$ kein tieferes Minimum als das Standardmodellvakuum auftritt, legt dann m_{\min} fest, wobei $\Lambda = M_{\text{Planck}}$ die untersuchte Gültigkeitsgrenze der Theorie ist.

Es gibt aber auch einen einfacheren Weg, das Standardmodellvakuum auf Stabilität zu untersuchen, nämlich mit Hilfe der laufenden Higgs-Selbstkopplung. Dieser Weg wird im Folgenden aufgezeigt.

2.5.2 Vakuumstabilität und das Laufen der Higgs-Selbstkopplung

Unter der Annahme, dass das zweite Minimum des effektiven Higgs-Potentials bei Feldstärken $\Phi_{\text{cl}} \gg M_Z$, also deutlich größer als die elektroschwache Skala, liegt, lässt sich zeigen [4,5], dass die Bedingung der Vakuumstabilität bis zur Skala Λ in sehr guter Näherung äquivalent zu der Bedingung

$$\lambda(\mu) > 0 \quad \forall \mu < \Lambda \quad (2.101)$$

ist. Für große Feldstärken $\Phi_{\text{cl}} \sim \Lambda \gg M_Z$ lässt sich das effektive Potential durch das Renormierungsgruppenpotential

$$V_{\text{RG}}(\Phi_{\text{cl}}) := \lambda(\Phi_{\text{cl}})\Phi_{\text{cl}}^4(\Phi_{\text{cl}}) := \lambda(t) \left(\Phi_{\text{cl}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_0^t dt' \gamma_{\Phi}(\{g_i(t')\})} \right)^4 \quad (2.102)$$

mit $t := \ln\left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2}\right)$ approximieren²⁵ [4, 5, 47, 53, 54].

Dieses erhält man, indem im klassischen Potential $V(\Phi_{\text{cl}})$ aus (2.14) sowohl die Kopplung λ als auch das Feld $\Phi_{\text{cl}} = \langle 0|\Phi|0\rangle$ durch die effektiven Größen $\lambda(\mu)$ und $\Phi_{\text{cl}}(\mu) := \langle 0|\Phi|0\rangle \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t dt' \gamma_\Phi(\{g_i(t')\})\right\}$ mit $t := \ln\left(\frac{\mu^2}{\mu_0^2}\right)$ an der Skala $\mu = \Phi_{\text{cl}}$ ersetzt werden. Im Limes großer Φ_{cl} kann der im Skalarfeld quadratische Ausdruck $\propto m^2$ vernachlässigt werden.

Zur Motivation der Näherung (2.102) wird im Folgenden explizit gezeigt, dass $V_{\text{RG}}(\Phi_{\text{cl}})$ und $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ in Einschleifenordnung für große Φ_{cl} asymptotisch übereinstimmen. Die Argumentation und Notation folgen hierbei den Arbeiten [6, 47].

Laut [3, 6, 47] ist das effektive Potential in Einschleifennäherung durch²⁶

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}^{(1 \text{ loop})} = & m^2(\mu_0)\Phi_{\text{cl}}^2 + \lambda(\mu_0)\Phi_{\text{cl}}^4 + \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{1}{4} H^2 \left(\ln \left[\frac{H}{\mu_0^2} \right] - 3/2 \right) \right. \\ & + \frac{3}{4} G^2 \left(\ln \left[\frac{G}{\mu_0^2} \right] - 3/2 \right) + \frac{3}{2} W^2 \left(\ln \left[\frac{W}{\mu_0^2} \right] - 5/6 \right) \\ & \left. + \frac{3}{4} Z^2 \left(\ln \left[\frac{Z}{\mu_0^2} \right] - 5/6 \right) - 3 T^2 \left(\ln \left[\frac{T}{\mu_0^2} \right] - 3/2 \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.103)$$

mit

$$H := m^2(\mu_0) + 6 \lambda(\mu_0)\Phi_{\text{cl}}^2 \quad (2.104)$$

$$G := m^2(\mu_0) + 2 \lambda(\mu_0)\Phi_{\text{cl}}^2 \quad (2.105)$$

$$W := g_2^2(\mu_0) \frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{2} \quad (2.106)$$

$$Z := (g_1^2(\mu_0) + g_2^2(\mu_0)) \frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{2} \quad (2.107)$$

$$T := y_t^2(\mu_0)\Phi_{\text{cl}}^2 \quad (2.108)$$

gegeben. Für große Φ_{cl} sind die Terme $\propto m^2(\mu_0)\Phi_{\text{cl}}^2$ in (2.103) vernachlässigbar und

²⁵Der Faktor $\frac{1}{2}$ in der Exponentialfunktion folgt aus der Definition (2.81) für die anomale Dimension, die das Laufen von $\Phi^\dagger\Phi$ beschreibt. In anderen Arbeiten, z.B. [6], beschreibt γ_Φ direkt das Laufen von Φ , sodass dort der Faktor $\frac{1}{2}$ nicht steht. In [6] wird also implizit die Definition

$$\gamma_\Phi := -\mu^2 \frac{d \ln(Z_2^{(2\Phi)})^{-\frac{1}{2}}}{d\mu^2}$$
 verwendet.

Außerdem sind in der Literatur auch die Definitionen $t := \ln\left(\frac{\Phi_{\text{cl}}}{\mu_0}\right)$, $\beta_{g_i} := \mu \frac{dg_i}{d\mu}$ und

$$\gamma_\Phi := -\mu \frac{d \ln(Z_2^{(2\Phi)})^{-\frac{1}{2}}}{d\mu}$$
 zu finden, welche mit den in dieser Arbeit verwendeten über Faktoren von $\frac{1}{2}$ zusammenhängen, z.B. $\mu \frac{dg_i}{d\mu} = \frac{1}{2} \mu^2 \frac{dg_i}{d\mu^2}$.

²⁶Die Notation von [6] erhält man durch die Ersetzungen $\lambda \rightarrow \frac{\lambda_0}{6}$, $m^2 \rightarrow -m_0^2$ und $\Phi_{\text{cl}} \rightarrow \frac{\Phi}{\sqrt{2}}$. Es wird die Landau-Eichung verwendet.

man erhält

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{(1 \text{ loop})} = & \lambda(\mu_0) \Phi_{\text{cl}}^4 \\
& + \frac{\Phi_{\text{cl}}^4}{16\pi^2} \left\{ \lambda^2 \left(12 \ln(\lambda) - 18 + 9 \ln(6) + 3 \ln(2) + 12 \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \right) \right. \\
& + g_2^4 \left(\frac{3}{16} \ln(g_1^2 + g_2^2) + \frac{3 \ln(g_2)}{4} - \frac{15}{32} - \frac{9 \ln(2)}{16} + \frac{9}{16} \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \right) \\
& + g_1^2 g_2^2 \left(\frac{3}{8} \ln(g_1^2 + g_2^2) - \frac{5}{16} - \frac{3 \ln(2)}{8} + \frac{3}{8} \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \right) \\
& + g_1^4 \left(\frac{3}{16} \ln(g_1^2 + g_2^2) - \frac{5}{32} - \frac{3 \ln(2)}{16} + \frac{3}{16} \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \right) \\
& \left. + y_t^4 \left(-6 \ln(y_t) + \frac{9}{2} - 3 \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \right) \right\}_{\mu=\mu_0} + \mathcal{O}(m^2(\mu_0) \Phi_{\text{cl}}^2). \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Im Grenzfall großer Φ_{cl} sind außerdem die Terme $\propto \Phi_{\text{cl}}^4 \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right)$ in (2.109) dominant²⁷ und man erhält das asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}^{(1 \text{ loop})} \simeq & \lambda(\mu_0) \Phi_{\text{cl}}^4 + \frac{\Phi_{\text{cl}}^4}{16\pi^2} \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \left\{ \lambda^2 12 + g_2^4 \frac{9}{16} + g_1^2 g_2^2 \frac{3}{8} + g_1^4 \frac{3}{16} - y_t^4 3 \right\}_{\mu=\mu_0} \\
= & \lambda(\mu_0) \Phi_{\text{cl}}^4 + \frac{\Phi_{\text{cl}}^4}{16\pi^2} \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \left\{ \beta_\lambda^{(1)} - 2\lambda \gamma_\Phi^{(1)} \right\}_{\mu=\mu_0} \\
= & \lambda(t) \cdot \left(\Phi_{\text{cl}} e^{-\frac{1}{2} \int_0^t dt' \gamma_\Phi(\{g_i(t')\})} \right)^4 + \mathcal{O}(t^2) \\
& + \mathcal{O}(\text{höhere Potenzen der Kopplungen}), \tag{2.110}
\end{aligned}$$

also gerade die ersten beiden Terme in der Taylor-Entwicklung von V_{RG} aus (2.102) in $t := \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right)$. Dabei wurden die Einschleifen-Renormierungsgruppenfunktionen [55–58]

$$\beta_\lambda^{(1)} = \frac{3g_1^4}{16} + \frac{3}{8} g_1^2 g_2^2 - \frac{3}{2} g_1^2 \lambda + \frac{9g_2^4}{16} - \frac{9}{2} g_2^2 \lambda + 12\lambda^2 + 6\lambda y_t^2 - 3y_t^4 \tag{2.111}$$

und

$$\gamma_\Phi^{(1)} = -\frac{3g_1^2}{4} - \frac{9g_2^2}{4} + 3y_t^2 \tag{2.112}$$

verwendet. Die Gültigkeit dieser Approximation wurde auch explizit für das effektive Higgs-Potential auf Zweischleifenniveau [58] und partiell²⁸ auf Dreischleifenniveau [59] gezeigt.

²⁷ Für $\Phi_{\text{cl}} = 10^{10}$ (10^{19}) GeV und $\mu_0 = M_t$ findet man $\ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \approx 35,8$ (77,2). Damit ergibt sich beispielsweise für die Terme $\propto \lambda^2$ numerisch $(12 \ln(\lambda(\mu_0)) - 18 + 9 \ln(6) + 3 \ln(2)) \approx -24$ gegenüber $12 \ln \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}^2}{\mu_0^2} \right) \approx 430$ (926), was die Gültigkeit der Näherung für $\Phi_{\text{cl}} \gg \mu_0$ zeigt. Für die anderen Terme in (2.109) ist das Verhältnis ähnlich.

²⁸In Dreischleifenordnung wurden in [59] nur die Kopplungen g_s , y_t und λ berücksichtigt.

Den Zusammenhang zwischen dem effektiven Potential und den Renormierungsgruppenfunktionen sieht man auch, wenn man die Renormierungsgruppengleichung für das effektive Potential betrachtet (vgl. [5, 47]).

Definiert man das effektive Potential zunächst als Funktion der nackten Feldstärke $\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}$ und in Abhängigkeit der nackten Parameter der Theorie, so ist es offensichtlich unabhängig von μ , es gilt also

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} V_{\text{eff}}^{\text{B}}(\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}) = 0. \quad (2.113)$$

Die Funktionsgleichung für das renormierte Potential $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ erhält man nun, indem man alle nackten Größen durch renormierte Größen und Renormierungskonstanten ausdrückt, welche dann die μ -Abhängigkeit enthalten. Da V_{eff} nun als Funktion der renormierten Feldstärke Φ_{cl} definiert wird, sind sowohl $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ als auch Φ_{cl} abhängig von μ . Damit erhält man für das effektive Potential die Callan-Symanzik-Gleichung²⁹

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sum_i \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} - \frac{1}{2} \gamma_{\Phi} \Phi_{\text{cl}} \frac{\partial}{\partial \Phi_{\text{cl}}} \right) V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}}) = 0, \quad (2.114)$$

welche in Zweischleifenordnung [58] und partiell in Dreischleifenordnung [59] explizit verifiziert wurde.

In dieser Arbeit wird für die Untersuchung der Vakuumstabilität das Kriterium (2.101) zugrunde gelegt. Eine der ersten Arbeiten, in der dieser Zugang gewählt wurde ist [53]. Zahlreiche Arbeiten neueren Datums zur Vakuumstabilität im Standardmodell [8, 9, 35, 48, 60–64] gehen ebenfalls nach der hier beschriebenen Methode vor.

Unter Verwendung von Zweischleifen-Betafunktionen [55–58, 65–75] und Einschleifenkorrekturen für die Konvertierung von $\overline{\text{MS}}$ - zu On-shell-Parametern [76–78] wurden bereits vor der Entdeckung des Higgs-Bosons [1, 2] die Abschätzungen $m_{\text{min}} = (129 \pm 3)$ GeV für die Untergrenze, bis zu der das Standardmodellvakuum bis zur Planck-Skala stabil ist, und $M_H > (111 \pm 3)$ GeV als Bedingung dafür das wenigstens Metastabilität bis zu Planck-Skala gewährleistet ist, getroffen [62]³⁰. Mit der nun gefundenen Higgs-Masse $M_H \approx 125,9$ GeV [37–40] ist ein vollständig instabiles Standardmodellvakuum zwar nicht wahrscheinlich, die Frage, ob Stabilität vorliegt oder nicht, dafür aber umso interessanter³¹.

Zur Illustration der aktuellen Bedeutung dieser Betrachtung ist in Abb. 2.7 die

²⁹Mit der Definition (2.81) für die anomale Dimension des Skalarfeldes gilt $\mu^2 \frac{d\Phi}{d\mu^2} = -\frac{1}{2} \gamma_{\Phi} \Phi$.

³⁰Ähnliche Grenzen finden sich auch in [79]. Neuere Untersuchungen, die bereits die Ergebnisse dieser Arbeit einbeziehen, kommen unter Verwendung von Dreischleifen-Betafunktionen [7, 8, 80–84] und Zweischleifen-Konvertierung von $\overline{\text{MS}}$ - zu On-shell-Parametern [35] zu einer ähnlichen Stabilitätsgrenze, allerdings mit kleinerer Unsicherheit, z.B. $m_{\text{min}} = (129,1 \pm 1,5)$ GeV in [35].

³¹Tatsächlich kann man auch umgekehrt vorgehen und postulieren, dass die Natur ein Gleichgewicht von zwei Phasen, also Vakuumerwartungswerten des Skalarfeldes, anstrebt, welche durch eine fundamentale Skala getrennt sein sollen. Eine naheliegende Wahl für die Separationsskala zwischen den beiden Minima des effektiven Potentials ist die Planck-Skala. Aus diesen beiden Forderungen wurden bereits 1995 von Froggatt und Nielsen die Higgs- und top-Massen mit $M_H = 135 \pm 9$ GeV und $M_t = 173 \pm 5$ GeV nahe der experimentellen Werte abgeschätzt [85]. Ähnlich wurden Higgs- und top-Masse später aus den Forderungen $\lambda(M_{\text{Planck}}) = 0$ und $\beta_{\lambda}(M_{\text{Planck}}) = 0$ bestimmt [64].

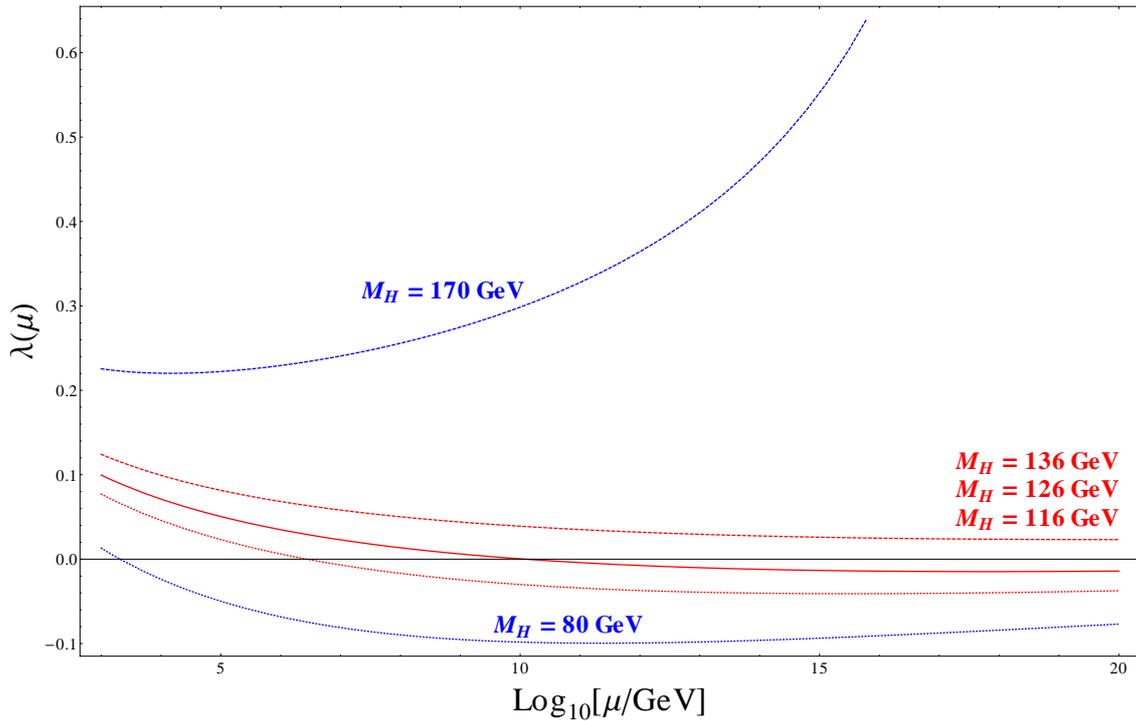


Abbildung 2.7: Evolution von $\lambda(\mu)$ für verschiedene Werte von M_H bei festem $M_t = 173,34$ GeV und $\alpha_s(M_Z) = 0,1184$.

Evolution der Higgs-Selbstkopplung für verschiedene Werte der Higgs-Masse M_H gezeigt³².

Im Falle einer zu kleinen Higgs-Masse (hier 80 GeV) wird λ schon bei niedrigen Skalen negativ und das Standardmodellvakuum ist nicht mehr stabil. Für eine große Higgs-Masse (hier 170 GeV) wächst λ stark an. Tatsächlich resultiert aus der Forderung, dass λ bis zur Planck-Skala nicht divergieren soll³³ in einer Obergrenze für die Higgs-Masse, welche ungefähr auf $m_{\max} \approx 175$ GeV abgeschätzt wurde [4, 86–88]³⁴. Interessant ist vor allem der Bereich um 126 GeV, also im Bereich der beobachteten

³²Für dieses Schaubild wurden Zweischleifen-Betafunktionen verwendet [55–58, 65–75] sowie Einschleifenkorrekturen für die Konvertierung von $\overline{\text{MS}}$ - zu On-shell-Parametern [48, 76–78]. Ein ähnliches Schaubild wurde auch in meiner Arbeit [9] veröffentlicht.

³³Auf Einschleifenniveau spricht man in diesem Fall von einem Landau-Pol, in höheren Schleifenordnungen von einem ultravioletten Fixpunkt, in dessen Nähe λ keine schwache Kopplung ist, sodass die Theorie hier nicht mehr perturbativ behandelt werden kann.

³⁴Extrapoliert man die Evolution von λ deutlich über die Planck-Skala hinaus, wobei man naiv die Standardmodell-Betafunktionen weiterverwendet, so wird in allen in Abb. 2.7 gezeigten Fällen λ wieder positiv und divergiert schließlich. Der Grund hierfür ist, dass die Kopplungen g_s und y_t , die bei niedrigeren Skalen dominieren, bei ca. 10^{16} GeV von der gleichen Größenordnung wie die elektroschwachen Kopplungen sind. Danach wird die $U(1)$ -Kopplung g_1 dominant, welche selbst jenseits der Planck-Skala divergiert. Das effektive Potential ist damit auch in der Näherung (2.102) stets formal nach unten begrenzt, allerdings macht eine solche Betrachtung über die Planck-Skala hinaus keine physikalische Aussage, da hier Gravitationseffekte zu berücksichtigen sind. Außerdem ist ein Bereich, in dem Kopplungen divergieren nicht perturbativ zugänglich.

Higgs-Masse. Gerade hier kommt λ bei der Planck-Skala Null sehr nahe, so dass die Frage nach der Gültigkeit der Vakuumstabilitätsbedingung (2.101) eine Präzisionsanalyse erfordert. Dies dient als eine der wesentlichen Motivationen für die Untersuchung der Evolution von λ in höheren Schleifenordnungen.

2.5.3 Physikalische Schwierigkeiten des effektiven Potentials

Im Zusammenhang mit dem in Kap. 2.5.1 eingeführten effektiven Potential treten verschiedene physikalische Subtilitäten auf, die im Folgenden diskutiert werden.

Konvexität des effektiven Potentials

In Kap. 2.5.1 wurde die effektive Wirkung zunächst als Legendre-Transformierte (2.92) des erzeugenden Funktionals (2.90) definiert, welche aufgrund der Konvexitätseigenschaft dieser Transformation in (2.94) auf ein konvexes effektives Potential führen müsste. Das gemäß (2.96) aus den 1PI-Greensfunktionen berechnete effektive Potential hat aber in den meisten interessanten Quantenfeldtheorien, und so auch im Standardmodell (s. Abb. 2.6), nicht diese Eigenschaft.

In den Bereichen, wo $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ konvex ist, hat es die Bedeutung einer Energiedichte. Tatsächlich beschreibt ein konvexes $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ die Energiedichte des mit der Quantenfeldtheorie beschriebenen Systems im Zustand $|\Psi\rangle$, für den der Erwartungswert des Hamilton-Operators $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$ mit der Randbedingung $\langle\Psi|\Phi(x)|\Psi\rangle = \Phi_{\text{cl}}$ minimal wird [47]. Ist $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ nicht konvex, so bedeutet dies, dass sich zwischen zwei lokalen Minima Φ_1 und Φ_2 eine Potentialbarriere befindet. Die dazwischenliegenden Werte der Feldstärke $\Phi_1 < \Phi_{\text{cl}} < \Phi_2$ kann man für $\langle\Psi|\Phi(x)|\Psi\rangle = \Phi_{\text{cl}}$ auch erreichen, indem man den Zustand $|\Psi\rangle$ des Systems als Superposition von Zuständen mit Feldstärken Φ_1 und Φ_2 aufbaut, also

$$\Phi_{\text{cl}} = \kappa\Phi_1 + (1 - \kappa)\Phi_2, \quad (0 < \kappa < 1). \quad (2.115)$$

Damit ist anschaulich klar, dass die Energiedichte durch die konvexe Einhüllende $V_c(\Phi_{\text{cl}})$ von $V_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}})$ gegeben ist (s. Abb. 2.6). Somit ist die Energiedichte gerade die doppelte Legendre-Transformierte des effektiven Potentials V_{eff} aus (2.96). Dies bedeutet, dass man analog zur Interpretation der Maxwell-Konstruktion in der Thermodynamik, zwischen den beiden lokalen Minima eine Koexistenz zweier Phasen hat.

Trifft man die zusätzliche Einschränkung, dass keine solche Phasenkoexistenz in einem Punkt x auftritt, also die Feldstärke des Skalarfeldes im Zustand $|\Psi\rangle$ bei genau einem festen Wert Φ_{cl} liegt, so beschreibt V_{eff} in führender Ordnung die Energiedichte des Systems mit dieser zusätzlichen Randbedingung [47]³⁵. Eine solche homogene Feldkonfiguration wird im Standardmodell beispielsweise um den Wert $|\Phi_{\text{cl}}| = \frac{v}{\sqrt{2}}$ angenommen, ebenso wie in vielen Analysen, welche aus der Form der Potentialbarriere in V_{eff} mit Hilfe semiklassischer Analogieüberlegungen auf die Lebensdauer eines metastabilen Standardmodellvakuums schließen (vgl. z.B. [35, 48, 61, 62]).

³⁵In dem Bereich, wo V_{eff} nicht konvex ist, ergibt die Berechnung nach (2.96) einen Imaginärteil, welcher die Tatsache reflektiert, dass hier keine stabilen Feldkonfigurationen liegen [47].

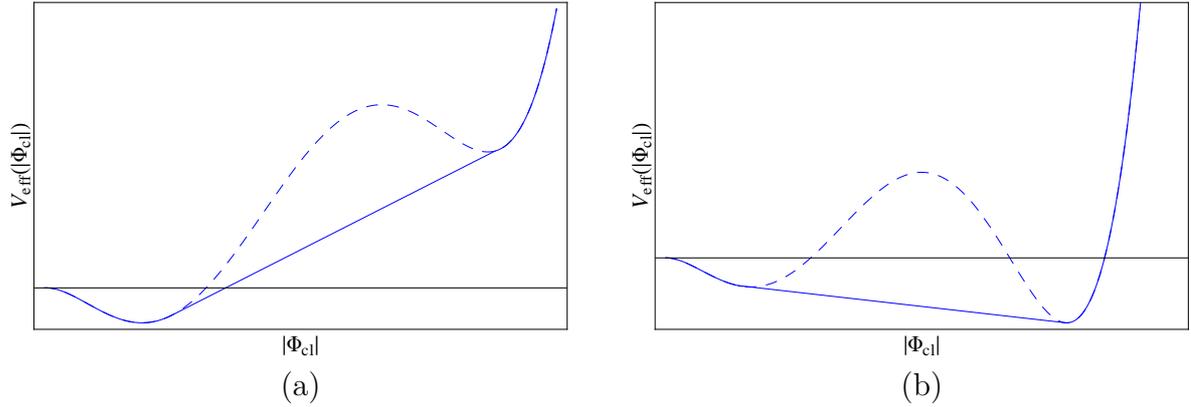


Abbildung 2.8: Effektives konvexes Higgs-Potential V_c für die beiden Szenarien aus Abb. 2.6. Das effektive Potential V_{eff} ist gestrichelt eingezeichnet.

Eichabhängigkeit des effektiven Potentials

Ein Problem stellt auf den ersten Blick auch die Tatsache dar, dass das effektive Potential (2.96) ebenso wie die Näherung (2.102) von den Eichparametern ξ , ξ_W und ξ_B abhängen³⁶. Dies darf andererseits auch nicht verwundern, da das renormierte Quantenfeld $\Phi(\mu)$ ebenfalls eine eichabhängige Größe ist, wenn man eine Theorie mit Eichsektor betrachtet, der direkt oder indirekt über Fermionen an das Skalarfeld koppelt. Welche Bedeutung darf man aber nun der Position der Minima eines solchen Potentials beimessen, wenn diese von der Wahl unphysikalischer Parameter abhängt?

Diese Problematik wurde bereits 1974 von R. Jackiw festgestellt [89] und in diversen Arbeiten weiter untersucht [90–93]. Der Argumentation von [93] folgend, wird im Folgenden gezeigt, wie ein eichinvariantes effektives Potential für einen eichabhängigen Ordnungsparameter konstruiert werden kann und daraus eichunabhängige physikalische Aussagen getroffen werden können.

Anhand der Renormierungsgruppengleichung für das effektive Potential (2.114) ist ersichtlich, dass die gesamte Abhängigkeit des effektiven Potentials von den Eichparametern durch die anomale Dimension des Skalarfeldes ausgedrückt werden kann, da die Betafunktionen nicht von diesen abhängen. Für die folgende Betrachtung ist es sinnvoll das dimensionslose Potential $V'_{\text{eff}} := \frac{V_{\text{eff}}}{\mu^4}$ einzuführen, welches nur vom Verhältnis $\frac{\Phi_{cl}}{\mu}$ abhängt. Damit erhält man die Callan-Symanzik-Gleichung [3, 93]

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sum_i \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} - \frac{1}{2} \gamma_{\Phi} \Phi_{cl} \frac{\partial}{\partial \Phi_{cl}} + 2 \right) V'_{\text{eff}} \left(\frac{\Phi_{cl}}{\mu}, \{g_i\}, \xi, \xi_W, \xi_B \right) = 0, \quad (2.116)$$

welche mit $t := \ln \left(\frac{\Phi_{cl}^2}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{1+\gamma_{\Phi}}}$ als

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} + 2 \right) V'_{\text{eff}} \left(\frac{\Phi_{cl}}{\mu}, \{g_i\}, \xi, \xi_W, \xi_B \right) = 0 \quad (2.117)$$

³⁶Die Abhängigkeit von den Eichparametern in einer allgemeinen R_{ξ} -Eichung wird im Folgenden kurz als Eichabhängigkeit bezeichnet.

geschrieben werden kann. Dadurch wird die gesamte Eichabhängigkeit in t absorbiert. Die Lösung dieser Differentialgleichung hat die Gestalt [93, 94]

$$V'_{\text{eff}} = \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}}{\mu} \right)^{\frac{4}{1+\gamma_\Phi}} f(\{g_i\}) = e^{2t} f(\{g_i\}), \quad (2.118)$$

wobei die Funktion f die Differentialgleichung

$$\sum_i \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} f(\{g_i\}) = 0 \quad (2.119)$$

erfüllt und somit nicht von den Eichparametern abhängt. Dies bedeutet, dass das eichabhängige Feld $\tilde{\Phi}_{\text{cl}} := \left(\frac{\Phi_{\text{cl}}}{\mu} \right)^{\frac{2}{1+\gamma_\Phi}}$ ein geeigneter Ordnungsparameter für die Symmetriebrechung des betrachteten System ist und dass das effektive Potential für diesen keine weitere Abhängigkeit von den Eichparametern besitzt³⁷.

Eine äquivalente Möglichkeit einen Ordnungsparameter zu konstruieren ist in der Herleitung der Renormierungsgruppengleichung (2.114) für das effektive Potential Φ_{cl} durch

$$\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}} = \sqrt{Z_2^{(2\Phi)}} \Phi_{\text{cl}} \quad (2.120)$$

zu ersetzen. Hierin ist die klassische Feldstärke Φ_{cl} eichunabhängig und die Renormierungskonstante $\sqrt{Z_2^{(2\Phi)}}$ eichabhängig. Dies führt auf

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sum_i \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} + \mu^2 \underbrace{\frac{d\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}}{d\mu^2}}_{\equiv 0} \frac{\partial}{\partial \Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}} \right) \bar{V}_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}, \{g_i\}) = 0, \quad (2.121)$$

also

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sum_i \beta_{g_i} \frac{\partial}{\partial g_i} \right) \bar{V}_{\text{eff}}(\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}, \{g_i\}) = 0 \quad (2.122)$$

mit dem effektiven Potential \bar{V}_{eff} für das nackte Feld $\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}$. Auch hier wurde die Eichabhängigkeit des effektiven Potentials in das Skalarfeld, genauer gesagt seine Renormierungskonstante, absorbiert. In [93] wird auf Einschleifenniveau explizit gezeigt, dass das effektive Potential ausgedrückt durch $\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}$ eichunabhängig ist. Für die Näherung des effektiven Potentials durch das Renormierungsgruppenpotential (2.102) ist dies offensichtlich.

Man kann nun weiter zeigen, dass die Stationaritätsbedingungen

$$\left[\frac{dV_{\text{eff}}}{d\Phi_{\text{cl}}} \right]_{\Phi_{\text{cl}}=\mu} = 0, \quad (2.123)$$

$$\left[\frac{dV'_{\text{eff}}}{d\tilde{\Phi}_{\text{cl}}} \right]_{\tilde{\Phi}_{\text{cl}}=1} = 0, \quad (2.124)$$

$$\left[\frac{d\bar{V}_{\text{eff}}}{d\Phi_{\text{cl}}^{\text{B}}} \right]_{\Phi_{\text{cl}}=\mu} = 0 \quad (2.125)$$

³⁷Die Eichparameterkonfigurationen mit $\gamma_\Phi = -1$ sind allerdings auszunehmen. Diese stellen im Eichparameterraum eine Nullmenge dar.

äquivalent sind und weiter, dass die Vorzeichen der zweiten Ableitungen gleich sind, z.B.

$$\left[\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\Phi_{\text{cl}}^2} \right]_{\Phi_{\text{cl}}=\mu} = \underbrace{\mu^2 \left(\frac{2}{1 + \gamma_\Phi} \right)^2}_{>0} \left[\frac{d^2 V'_{\text{eff}}}{d\tilde{\Phi}_{\text{cl}}^2} \right]_{\tilde{\Phi}_{\text{cl}}=1}. \quad (2.126)$$

Damit ist die Anzahl und Art der Extrema des effektiven Potentials nicht von der Wahl der Eichparameter abhängig. An der Näherung durch das Renormierungsgruppenpotential (2.102) sieht man, dass die Lage eines zweiten Minimums des effektiven Higgs-Potentials im Standardmodell durch die Nulldurchgänge von λ begrenzt sind, welche durch die eichunabhängige Evolution von λ gegeben sind. Falls λ nicht negativ wird, tritt auch kein tieferes Minimum als das an der Fermi-Skala auf. Falls λ negativ wird, so treten im Standardmodell genau zwei Nulldurchgänge auf. Durch Variation der Eichparameter ist zwar eine Verschiebung des zweiten Minimums zwischen diesen Nulldurchgängen möglich, jedoch nicht darüber hinaus. In diesem Fall liegt das zweite Minimum stets tiefer als das erste an der Fermi-Skala.

Eine ausführliche Diskussion der Eichabhängigkeit des effektiven Potentials wurde in [95] vorgestellt. Darin wird explizit gezeigt, dass die minimale Stabilitätsgrenze m_{min} , also die kritische Masse des Higgs-Bosons, eichunabhängig ist, die Lage der Minima des effektiven Potentials hingegen nicht.

Die Frage, ob das Standardmodellvakuum stabil ist oder nicht, lässt sich also eichunabhängig beantworten. Die genaue Lage des zweiten Minimums und damit der Vakuumerwartungswert $\langle \Phi \rangle$ ist allerdings sowohl von der Eichung als auch von der Wahl eines Renormierungsschemas abhängig. Das ist kein Problem, da Felder keine Observablen sind und somit auch ihr Vakuumerwartungswert nicht. Physikalische Beobachtungsgrößen sind beispielsweise Polmassen oder die Lebensdauer eines Teilchens oder Zustandes. Diese Größen dürfen in allen sinnvollen Rechnungen nicht von der Wahl der Eichparameter abhängen.

Das effektive Potential hingegen ist ein Hilfsobjekt zur Untersuchung der spontanen Symmetriebrechung. Es ist also legitim seine Berechnungen in einem bestimmten Renormierungsschema und einer bestimmten Eichung durchzuführen. Üblicherweise werden das $\overline{\text{MS}}$ -Schema und die Landau Eichung $\xi = \xi_W = \xi_B = 0$ verwendet. In dieser Eichung konvergiert die Störungsreihe für die Berechnung des effektiven Potentials gut. Es ist klar, dass man dann auch nur in diesem Renormierungsschema und in dieser Eichung eine Aussage für den Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes erhält. Die grundlegende Feststellung, ob das Standardmodellvakuum stabil ist oder nicht, ist aber eichunabhängig und sollte als physikalische Aussage auch nicht von der Wahl eines Renormierungsschemas abhängen³⁸.

In Kap. 5 wird anhand der eichunabhängigen Bedingung (2.101) genau diese Frage, nämlich die nach der Stabilität des Grundzustands des Standardmodells, untersucht.

³⁸Da alle Untersuchungen zu diesem Thema im $\overline{\text{MS}}$ -Schema vorgenommen werden, ist die letzte Aussage aber nicht explizit überprüfbar.

Betafunktionen im Standardmodell zur Dreischleifenordnung

3.1 Renormierungsgruppenfunktionen in dimensionaler Regularisierung

Ausgangspunkt für die Berechnung von Betafunktionen und anomalen Dimensionen ist die Tatsache, dass die nackten Kopplungen, Massen und Felder nicht von der Renormierungsskala μ abhängen. Für eine beliebige Kopplung g_x an einem Vertex mit N Beinchen gilt

$$g_{x,B} = (\mu^\varepsilon)^{\rho_x} \left(g_x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(\{g_j\})}{\varepsilon^i} \right), \quad (3.1)$$

wobei $\rho_x = N - 2$. Es gilt also wie in (2.50)

$$\rho_x = \begin{cases} 0 & \text{für } N = 2 \text{ (Massen, z.B. } m^2) \\ 1 & \text{für } N = 3 \text{ (Eich- und Yukawa-Kopplungen)} \\ 2 & \text{für } N = 4 \text{ (Higgs-Selbskopplung } \lambda) \end{cases} \quad (3.2)$$

und die a_i Potenzreihen in allen Kopplungen $\{g_j\}$ der Theorie sind. Die Anwendung der Operation $(\mu^2 \frac{d}{d\mu^2})$ auf (3.1) führt auf

$$0 = \frac{\rho_x}{2} \varepsilon g_x + \beta_{g_x}^{[D=4-2\varepsilon]} + \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(\{g_j\})}{\varepsilon^i} \right) + \frac{\rho_x}{2} \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(\{g_j\})}{\varepsilon^i} \right), \quad (3.3)$$

wobei

$$\beta_{g_x}^{[D=4-2\varepsilon]} = d\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} g_x \quad (3.4)$$

die Betafunktion in $D = 4 - 2\varepsilon$ Raumzeitdimensionen ist.

Schon auf Baumgraphenniveau, also für $a_i \equiv 0$ unterscheiden sich die Betafunktion in $D = 4$ und $D = 4 - 2\varepsilon$.

$$\beta_{g_x}^{[D=4]} \equiv \beta_{g_x} = \frac{\rho_x}{2} \varepsilon g_x + \beta_{g_x}^{[D=4-2\varepsilon]} \quad (3.5)$$

Die beiden Reihen $\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(\{g_j\})}{\varepsilon^i} \right)$ und $\frac{\rho_x}{2} \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(\{g_j\})}{\varepsilon^i} \right)$ in (3.3) enthalten offensichtlich keine Terme $\propto \varepsilon$. Daher gilt (3.5) in allen Ordnungen der Störungstheorie. Es folgt daher

$$0 = \beta_{g_x} + \sum_i \left(\beta_{g_i} - \frac{\rho_i \varepsilon}{2} g_i \right) \frac{\partial}{\partial g_i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\varepsilon^n} + \frac{\rho_x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\varepsilon^{n-1}}, \quad (3.6)$$

also eine Beziehung zwischen den Betafunktionen und den Funktionen a_i in Form einer Reihe in $\frac{1}{\varepsilon}$. Ein Vergleich der Koeffizienten zu $\frac{1}{\varepsilon^0}$ in (3.6) führt auf

$$\beta_{g_x} = \frac{1}{2} \left[\sum_i \rho_i g_i \frac{\partial}{\partial g_i} - \rho_x \right] a_1(\{g_j\}), \quad (3.7)$$

was zeigt, dass die Betafunktionen allein durch die $\frac{1}{\varepsilon}$ -Pole der Renormierungskonstanten gegeben sind. Weitere Koeffizientenvergleiche zu $\frac{1}{\varepsilon^n}$ mit $n > 0$ in (3.6) zeigen, dass die a_n mit $n > 1$ nicht unabhängig, sondern durch a_1 und die Betafunktionen aller Kopplungen bestimmt sind.

Analog kann man die Betafunktion für den Massenparameter m^2 im Higgs-Potential (2.14) berechnen. Hier fehlt allerdings der Faktor $(\mu^\varepsilon)^\rho$, da $\rho = 0$ ist, sodass man mit

$$m_B^2 = m^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i(\{g_j\})}{\varepsilon^i} \right) \quad (3.8)$$

die Berechnungsvorschrift

$$\beta_{m^2} = \frac{1}{2} \left[\sum_i \rho_i g_i \frac{\partial}{\partial g_i} \right] b_1(\{g_j\}), \quad (3.9)$$

findet. Für die anomale Dimension γ_Γ einer Renormierungskonstanten

$$Z_\Gamma = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i(\{g_j\})}{\varepsilon^i} \quad (3.10)$$

lässt sich analog die Formel

$$\gamma_\Gamma = -\frac{d \ln Z_\Gamma}{d \ln \mu^2} = -\frac{\mu^2}{Z_\Gamma} \frac{d Z_\Gamma}{d \mu^2} = \frac{1}{2} \left[\sum_i \rho_i g_i \frac{\partial}{\partial g_i} \right] c_1(\{g_j\}), \quad (3.11)$$

herleiten.

3.2 Mehrschleifenrechnungen im Standardmodell

3.2.1 Renormierung von Mehrschleifendiagrammen

In Kap. 2.3.2 wurde beschrieben, wie ultraviolette Divergenzen mittels lokaler Counterterme absorbiert werden können, was zu einer Renormierung der Parameter und Felder der Theorie führt. Dies bedeutet, dass auch nur lokale, also maximal polynomiell von äußeren Impulsen abhängige, Divergenzen in Countertermen absorbiert werden können. In Mehrschleifendiagrammen treten aber auch Subdivergenzen auf, welche daher rühren, dass bei der Integration über alle Schleifenimpulse für den Betrag eines euklidischen Impulses $|P| \rightarrow \infty$ gilt, für einen anderen jedoch nicht. In Abb. 3.1 wird dies an einem Beispiel verdeutlicht.

In Diagramm (a) muss über die Schleifen 1, 2 und 3 integriert werden. Diagramm (b) ist ein Zweischleifendiagramm, in das ein Einschleifencounterterm eingesetzt wird, um die Subdivergenz in (a) zu absorbieren, die auftritt, wenn Impuls 3 gegen Unendlich strebt, aber die Impulse 1 und 2 endlich sind. Analog absorbiert Diagramm (c) die Subdivergenz, die auftritt, wenn Impuls 1 gegen Unendlich strebt und die Impulse 2 und 3 endlich bleiben. Schleife 2 ist für sich allein UV-endlich, wie ein naives Abzählen der Potenzen von p in den Propagatoren zeigt. Eine weitere Subdivergenz entsteht aber noch von der Region des Integrationsgebietes, in der die Impulse 1 und 3 gegen Unendlich streben. Diese wird von Diagramm (d) aufgehoben, einem Einschleifendiagramm mit zwei Einsetzungen von Einschleifencountertermen. Die Summe der Diagramme (a),(b),(c) und (d) besitzt nur noch eine im Ortsraum lokale Divergenz, welche in den Dreischleifenanteil des Counterterms $\delta Z_1^{(4\Phi)}$ eingeht.

Diese Methode der Renormierung von Mehrschleifendiagrammen mittels Countertermen ist äquivalent zur sogenannten R-Operation, welche in [96] definiert wird. Dort wird auch für den Fall dimensionaler Regularisierung bewiesen, dass dieses Vorgehen für alle Diagramme in allen Schleifenordnungen funktioniert.

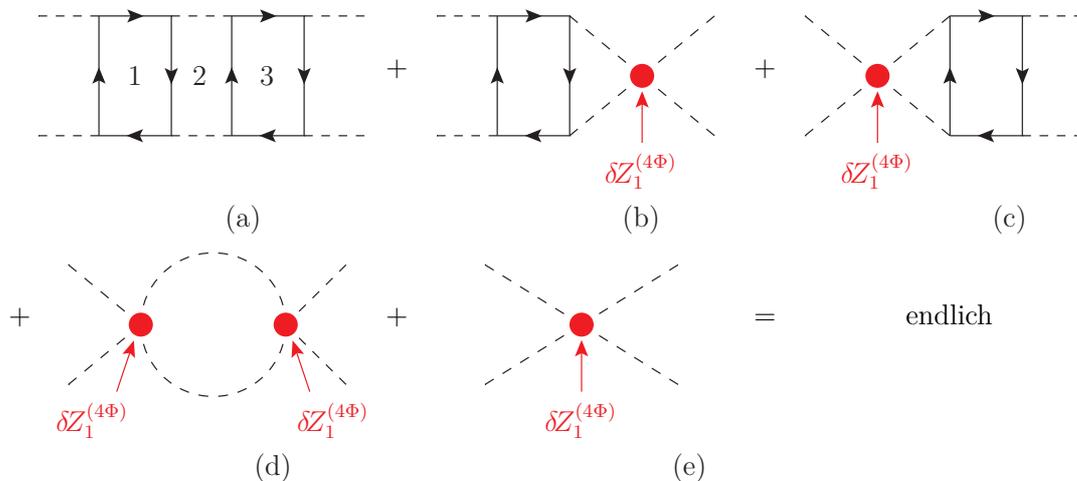


Abbildung 3.1: Renormierung von Mehrschleifendiagrammen

Um alle Dreischleifendiagramme für einen bestimmten Prozess, z.B. die Vier- Φ -Wechselwirkung renormieren zu können, werden also alle anderen Counterterme der Theorie in Ein- und Zweischleifenordnung benötigt. Aus diesem Grunde wurden für diese Arbeit stets zunächst alle Einschleifencounterterme bestimmt, dann alle Zweischleifencounterterme und schließlich die benötigten Dreischleifencounterterme.

Bei der praktischen Implementierung der Feynman-Regeln am Computer wird daher jeder Vertex in Ein- und Zweischleifendiagrammen mit einer additiven Variablen als Platzhalter für den entsprechenden Counterterm versehen. Der Vier- Φ -Vertex beispielsweise wird als $(-\lambda + h \cdot \delta Z_1^{(4\Phi)})$ eingesetzt. Jeder Propagator wird ersetzt durch eine Summe aus dem Propagator und dem Propagator mit einer bzw. mit zwei Countertermeinsetzungen:

$$----- \rightarrow ----- + h \cdot \left(\text{---} \overset{\delta Z}{\bullet} \text{---} \right) + h^2 \cdot \left(\text{---} \overset{\delta Z}{\bullet} \text{---} \overset{\delta Z}{\bullet} \text{---} \right) \quad (3.12)$$

Dabei kann δZ im Fall von Vektor- und Skalarfeldern sowohl Anteile proportional zum Impuls p^2 als auch proportional zur Hilfsmasse M^2 (vgl. Kap. 3.2.3) enthalten. Im Fall von Fermionfeldern wird δZ gemäß

$$\delta Z \rightarrow (P_L \delta Z_L + P_R \delta Z_R) \quad (3.13)$$

in einen links- und rechtshändigen Anteil zerlegt, wobei P_L und P_R die Projektoren aus (2.5) sind. Die Hilfsvariable h dient hier der Buchführung. Für eine Dreischleifenrechnung müssen in die Einschleifendiagramme maximal zwei Counterterme eingesetzt werden und in die Zweischleifendiagramme maximal ein Counterterm. Wir multiplizieren jedes Diagramm mit h^L , wobei L die Schleifenordnung ist und verwerfen dann alle Terme in denen h mit einer höheren Potenz als 3 auftritt.

Zunächst werden die Einschleifencounterterme berechnet. Hierfür können alle Terme mit h^2 und h^3 ignoriert werden, also alle Countertermvariablen. Um Zweischleifencounterterme zu berechnen werden dann nur noch die Terme mit h^3 ignoriert, womit in Einschleifendiagrammen Variablen δZ stehen bleiben, für die nun die Einschleifencounterterme eingesetzt werden. Schließlich werden die Dreischleifenrenormierungskonstanten bestimmt. Dafür werden die zuvor berechneten Ein- und Zweischleifencounterterme für die Platzhalter in den Ein- und Zweischleifendiagrammen eingesetzt.

3.2.2 Behandlung von γ_5 Matrizen in dimensionaler Regularisierung

Eine der Herausforderungen einer Mehrschleifenrechnung im Standardmodell ist der korrekte Umgang mit der in den Projektoren P_L und P_R aus (2.5) verwendeten γ_5 -Matrix. Diese ist in $D = 4$ Raumzeitdimensionen definiert als

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \quad (3.14)$$

mit dem Levi-Civita-Pseudotensor vierter Stufe, der gemäß

$$\varepsilon_{0123} = 1 = -\varepsilon^{0123} \quad (3.15)$$

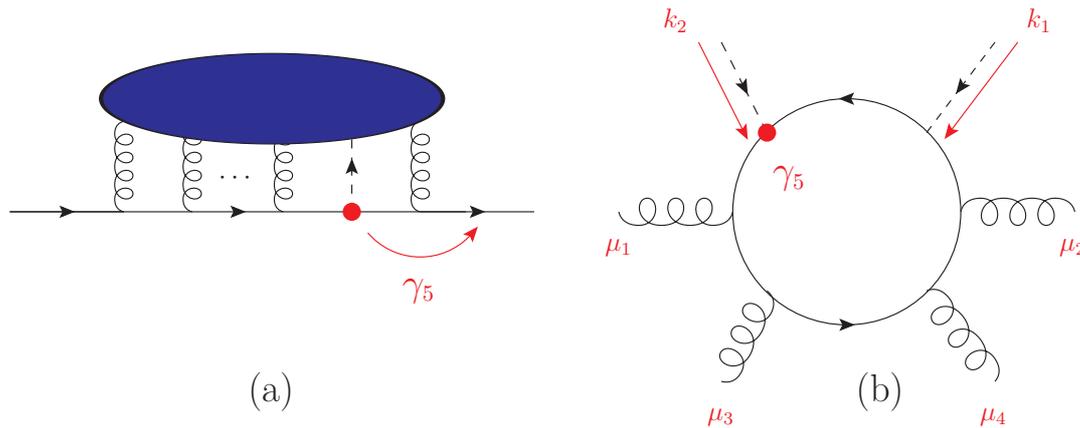


Abbildung 3.2: Umgang mit γ_5 auf externen (a) und internen/geschlossenen (b) Fermionlinien: In (a) kann γ_5 aus den Schleifen herausgezogen werden. In (b) ist die Spur über die Fermionschleife proportional zu $(\dots)\varepsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + (\dots)\varepsilon_{\mu_1\mu_2\alpha\beta}k_1^\alpha k_2^\beta + \dots$

normiert wird. In $D = 4$ gilt weiter

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (3.16)$$

und

$$\gamma_5^2 = 1. \quad (3.17)$$

Die Definition 3.14 ist nicht ohne Weiteres in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen übertragbar, da kein ε -Pseudotensor mit $4 - 2\varepsilon$ Indizes konstruiert werden kann. Die mathematische Formulierung des betrachteten Prozesses erfolgt also zunächst in $D = 4$. Die dimensionale Regularisierung erfüllt nun den Zweck, Divergenzen zu charakterisieren, die dann durch Renormierungskonstanten behoben werden, worauf der Übergang zurück zu $D = 4$ erfolgt.

Befindet sich eine γ_5 -Matrix auf einer externen, d.h. nicht geschlossenen Fermionlinie, so kann diese noch vor der Regularisierung, also in vier Dimensionen, mittels (3.16) an ein Ende der Fermionlinie antikommutiert werden (s. Abb. 3.2 (a)) und damit formal aus den zu regularisierenden Schleifen herausgezogen werden. Nun werden die Renormierungskonstanten für die Schleifen bestimmt, in denen kein γ_5 mehr steht (s. Abb. 3.2). Mehrere γ_5 -Matrizen können mit der Relation (3.17) immer auf genau ein oder kein γ_5 reduziert werden. Dieses Vorgehen hat Grenzen, z.B. wenn man den endlichen Teil eines physikalischen Prozesses berechnet und die Amplitude bzw. deren Quadrat über einen D -dimensionalen Phasenraum integriert. In diesem Fall gibt es kein Ende der Fermionlinie, welches außerhalb aller Integrationen liegt.

Problematischer ist der Umgang mit γ_5 -Matrizen in geschlossenen Fermionschleifen. Betrachten wir eine solche Schleife zunächst in $D = 4$, so können wir mittels (3.16) und (3.17) erreichen, dass nur noch maximal eine γ_5 -Matrix auf der Fermionlinie vorkommt. Dann faktorisieren wir den ε -Pseudotensor zunächst ab und bilden die Spur über alle γ -Matrizen auf der Linie, einschließlich der vier aus der Definition von γ_5 . Diese

Spur lässt sich ausdrücken durch metrische Tensoren $g^{\mu\nu}$ des Minkowski-Raums und die Impulse, die in die Fermionschleife hineingehen. Vom Schleifenimpuls selbst wird das Ergebnis nach der Integration¹ nicht mehr abhängen. Schließlich wird das Ergebnis wieder mit dem ε -Pseudotensor kontrahiert. Es ist klar, dass nur dann ein von Null verschiedenes Ergebnis auftreten kann, wenn dem minimalen Subdiagramm, welches diese Fermionschleife enthält, vier unabhängige Lorentz-Indizes oder externe Impulse zur Verfügung stehen (s. Abb. 3.2 (b)). Da $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungskonstanten, welche durch das UV-Verhalten eines Feynman-Diagramms bestimmt sind, nicht von externen Impulsen abhängen, können diese zu Null gesetzt werden². Bei den externen Impulsen zur betrachteten Fermionschleife handelt es sich folglich um die internen Impulse anderer Schleifen, über die integriert werden muss.

Stehen nicht genügend Indizes bzw. Impulse zur Verfügung um einen nicht-verschwindenden ε -Tensor zu tragen, so muss der Beitrag proportional zu γ_5 Null sein. Die Strategie bei den folgenden Rechnungen ist also stets, die Diagrammtypen zu identifizieren, bei denen ein nichtverschwindender γ_5 -Beitrag möglich ist und bei allen anderen eine *naive* γ_5 -Behandlung zu implementieren, d.h. Matrizenprodukte mit einem γ_5 zu Null zu setzen.

Counterterme in der Lagrangedichte bestehen zum einen aus einem Faktor aus Feldern, Ableitungen von Feldern und γ -Matrizen, zum anderen aus einem skalaren Faktor, der eine Potenzreihe in den Kopplungen der Theorie sowie $\frac{1}{\varepsilon}$ ist. Einen nicht-naiven γ_5 -Beitrag kann man also erhalten, wenn der erste dieser Faktoren des zu berechnenden Counterterms eine γ_5 -Matrix enthält, wobei die relevanten Feynman-Diagramme dann eine Fermionschleife mit genügend Indizes und externen Impulsen sowie eine externe Fermionlinie enthalten.

Dies tritt beispielsweise bei Strahlungskorrekturen zu Yukawa-Vertizes auf. In Abb. 3.3 sind einige Beispieldiagramme für Korrekturen zur Kopplung des top-Quarks an das Skalarfeld Φ_2 gegeben. Bei den Diagrammen (a),(b),(c) und (d) gibt es nicht genügend externe Indizes und Schleifenimpulse für einen γ_5 -Beitrag. Da das Diagramm (c) auf Zweischleifenniveau dasjenige mit den meisten Indizes ist, gibt es in dieser Schleifenordnung keine γ_5 -Beiträge. Diagramm (e) enthält zwar drei Lorentz-Indizes von den Gluonlinien und zwei Schleifenimpulse l_1 und l_2 , allerdings enthält hier die masselose Fermionschleife eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen, sodass die Spur über diese Null ergibt. Einige Diagramme, wie z.B. (b) sind außerdem aufgrund der Farbstruktur Null.

Als einzig problematischer Diagrammtyp bleibt daher (f) übrig, wo zwei Indizes und die beiden Impulse l_1 und l_2 den ε -Pseudotensor tragen können. Um ein skalares Integral berechnen zu können, wenden wir einen Projektor auf die äußere Fermionlinie an. Da der entsprechende Counterterm proportional zu P_L ist, können wir als Projektor

¹Man könnte an dieser Stelle statt dimensionaler Regularisierung z.B. Pauli-Villars-Regularisierung oder ein anderes Schema in $D = 4$ verwenden, in dem γ_5 problemlos definierbar ist. Dies wäre aber mit deutlich komplizierteren Masterintegralen verbunden, weshalb dieser Weg für die Dreischleifenrechnung nicht praktikabel erscheint.

²Bei Selbstenergiendiagrammen mit zwei externen Linien muss zunächst die durch die Ableitungsterme der Lagrangedichte vorgegebene Impulsstruktur abfaktorisiert werden, z.B. $q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu$ für die masselosen Eichbosonen.

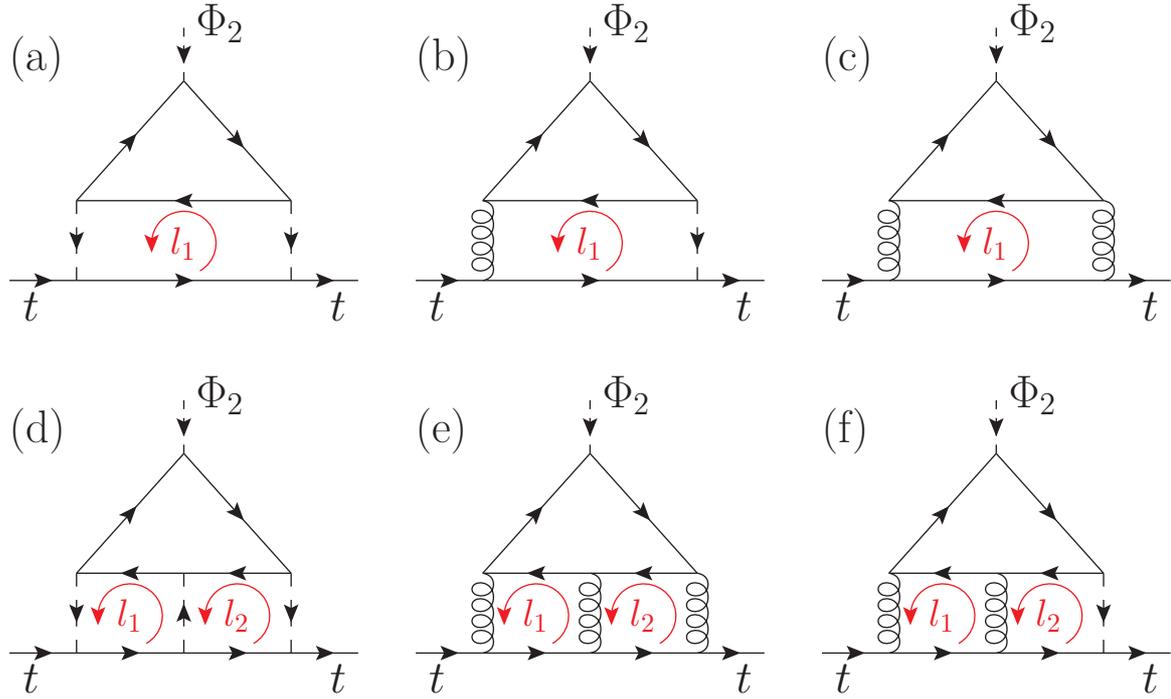


Abbildung 3.3: Beispieldiagramme zur Berechnung von $\delta Z_1^{(tb\Phi)}$. In Rot sind die im Bezug auf die Fermionschleife externen Schleifenimpulse angegeben.

beispielsweise

$$\mathbf{P}_{\mathbf{P}_L} := -\frac{1}{2} \mathbf{Spur} (\gamma_5 [\dots]) \quad (3.18)$$

verwenden, wobei für $[\dots]$ das Diagramm eingesetzt werden muss und die Spur über die externe Fermionlinie zu bilden ist. Für diesen Projektor gilt

$$\mathbf{P}_{\mathbf{P}_L} := -\frac{1}{2} \mathbf{Spur} (\gamma_5 [P_L]) = 1. \quad (3.19)$$

Nun wird die γ_5 -Behandlung nach 't Hooft und Veltman angewandt [97]. Die γ_5 -Matrix in diesem Projektor wird nun genau wie die γ_5 -Matrix in der Fermionschleife, wie in (3.14) definiert, durch vier γ -Matrizen und einen Levi-Civita-Pseudotensor ersetzt. In vier Raumzeitdimensionen lassen sich diese beiden Pseudotensoren nun durch metrische Tensoren gemäß

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = -g_{\nu_1}^{[\mu_1} g_{\nu_2}^{\mu_2} g_{\nu_3}^{\mu_3} g_{\nu_4}^{\mu_4]} \quad (3.20)$$

ausdrücken, wobei $[\dots]$ bedeutet, dass in den oberen Indizes total antisymmetrisiert werden muss. Diese metrischen Tensoren lassen sich nun in $D = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen übertragen. Da (3.20) in $D = 4 - 2\varepsilon$ allerdings nicht mehr gilt, ist dieses Vorgehen mit einem Fehler von $\mathcal{O}(\varepsilon)$ im Zwischenergebnis nach der Bildung aller Spuren, aber vor der Integration über die Schleifenimpulse verbunden. Glücklicherweise treten, wie im Rahmen dieser Arbeit explizit getestet wurde, in den Masterintegralen der relevanten Diagramme nur $\frac{1}{\varepsilon}$ -Pole auf, sodass der endliche Anteil des Ergebnisse zwar verfälscht

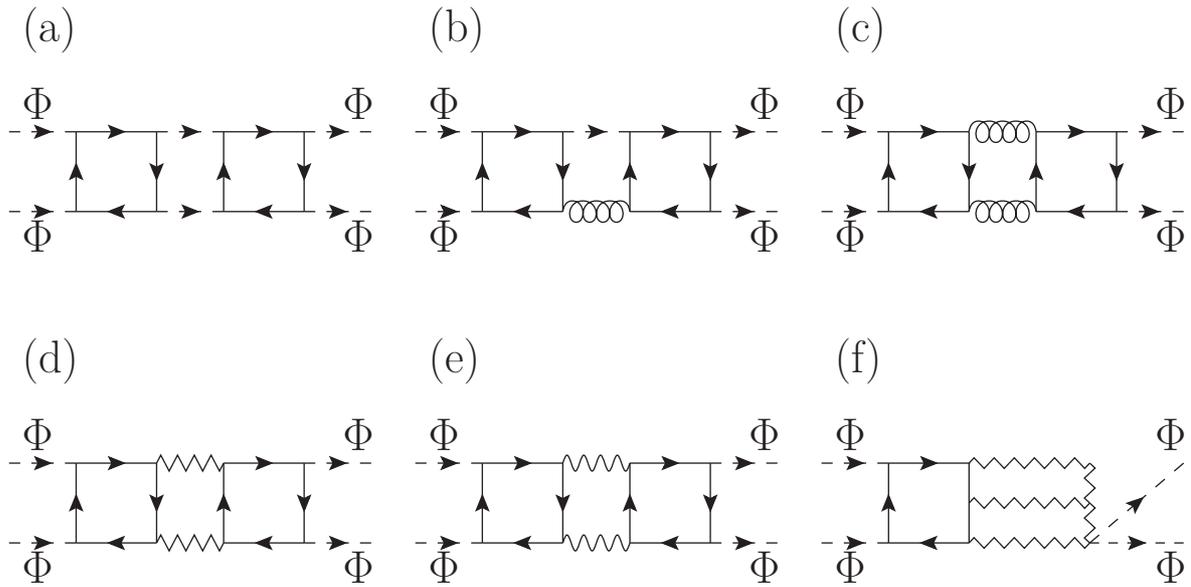


Abbildung 3.4: Beispieldiagramme mit vier externen Skalarfeldern zur Berechnung von $\delta Z_1^{(4\Phi)}$

wird, der Anteil proportional zu $\frac{1}{\varepsilon}$, welcher für die Renormierungskonstante benötigt wird jedoch nicht³.

Eine weitere Möglichkeit nicht-naive γ_5 -Beiträge auch in Diagrammen ohne externe Fermionlinie zu erhalten, ist gegeben, wenn zwei Fermionschleifen mit γ_5 auftreten, die beide genügend externe Indizes bzw. Impulse aufweisen, um einen ε -Pseudotensor vierter Stufe zu tragen. In diesem Fall können die beiden Pseudotensoren aus (3.14) ebenfalls mittels (3.20) in dimensionale Regularisierung übertragen werden, was ebenfalls mit einem Fehler von $\mathcal{O}(\varepsilon)$ verbunden ist, sodass dann die gleiche Argumentation wie oben gilt.

In Abb. 3.4 sind einige Beispieldiagramme gezeigt, welche in die Berechnung des Vier- Φ -Counterterms $\delta Z_1^{(4\Phi)}$ eingehen. Die einlaufenden Impulse auf den externen Beinchen werden zu Null gesetzt. Man sieht beispielsweise an Diagramm (c), dass auf Dreischleifenniveau mit zwei Fermionschleifen dann keine vier Indizes bzw. Impulse zur Verfügung stehen, sondern maximal zwei Indizes von den Eichbosonlinien und ein Schleifenimpuls von der mittleren Schleife.

Berücksichtigt man auch elektroschwache Korrekturen dann treten Diagramme der Form (f) auf, wo genügend Indizes und Impulse zur Verfügung stehen, aber keine zweite Fermionschleife. Da im skalaren Endergebnis kein ε -Pseudotensor stehen kann, muss der γ_5 -Beitrag dieses Diagrammtyps ebenfalls Null sein. Für die Higgs-Selbstwechselwirkung auf Dreischleifenniveau ist also eine naive γ_5 -Behandlung gerechtfertigt.

Bei den in Abb. 3.5 und Abb. 3.6 gezeigten Gluon- bzw. Skalarfeldselbstenergien

³ Es ist nicht anzunehmen, dass dies auch für alle Diagramme in Vierschleifenordnung gilt, was das größte technische Hindernis bei der Berechnung der entsprechenden Vierschleifen-Betafunktionen darstellen dürfte.

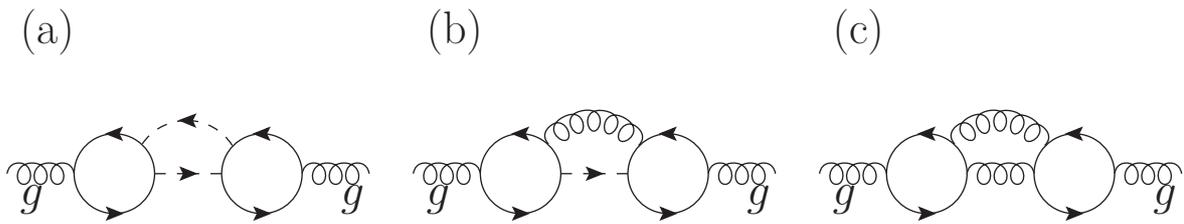


Abbildung 3.5: Beispieldiagramm zur Berechnung der Gluonselfenergie und damit von $\delta Z_3^{(2g)}$

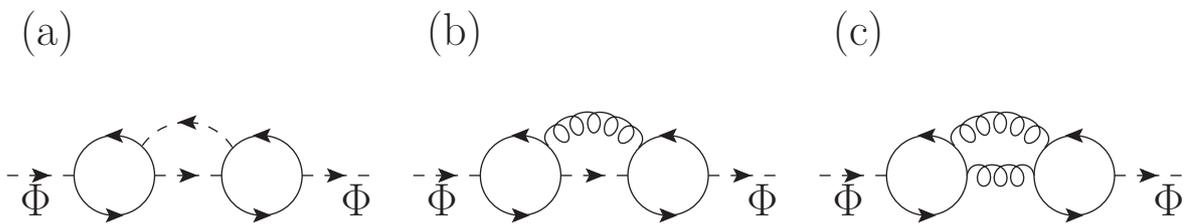


Abbildung 3.6: Beispieldiagramme zur Berechnung der Selbstenergie des Skalarfeldes und damit von $\delta Z_2^{(2\Phi)}$

kann man analog ebenfalls ausschließen, dass nicht-naive γ_5 -Beiträge zu berücksichtigen wären. Lediglich in Diagramm 3.5 (c) stehen genügend Indizes und ein Schleifenimpuls zur Verfügung, da es sich aber um ein reines QCD-Diagramm handelt, tritt hier kein γ_5 auf.

Will man die Renormierungskonstanten der elektroschwachen Kopplungen bestimmen, so treten auf Dreischleifenniveau Propagator- und Vertexdiagramme auf, bei denen diese Argumentation nicht ausreicht. Da der Eichsektor des Standardmodells anomaliefrei ist (s. z.B. [11, 12]), müssen sich die γ_5 -Beiträge hier beim Summieren über alle Feynman-Diagramme aufheben. In den Arbeiten [80, 81, 98] zur Berechnung der Dreischleifen-Betafunktionen für die Eichkopplungen wurde dies explizit überprüft, indem die entsprechenden Korrekturen einmal naiv und einmal mit der semi-naiven γ_5 -Behandlung nach 't Hooft und Veltman [97] berechnet wurden, wobei beide Methoden zum gleichen Ergebnis führten.

Die Untersuchung der Selbstenergiediagramme für Fermionen, also beispielsweise für das top-Quark, zeigt, dass hier ebenfalls eine naive γ_5 -Behandlung möglich ist. In Abb. 3.7 sind einige mögliche Diagramme gezeigt. Diagramm (a) verfügt nicht über genügend Indizes bzw. Impulse an der Fermionschleife. Die Diagramme (b) und (c) dagegen schon, allerdings ist bei allen gezeigten Diagrammen eine ungerade Anzahl γ -Matrizen in der Spur über die Fermionschleife, weshalb diese Diagramme Null ergeben.

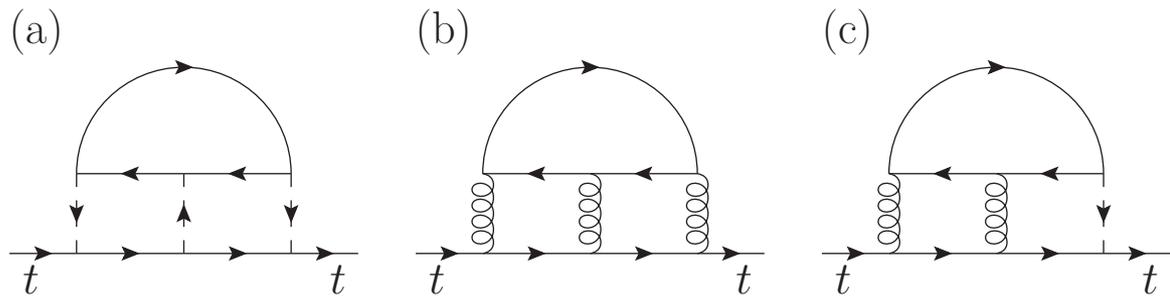


Abbildung 3.7: Beispieldiagramme zur Berechnung der top-Selbstenergie und damit von $\delta Z_{2,L/R}^{(2t)}$

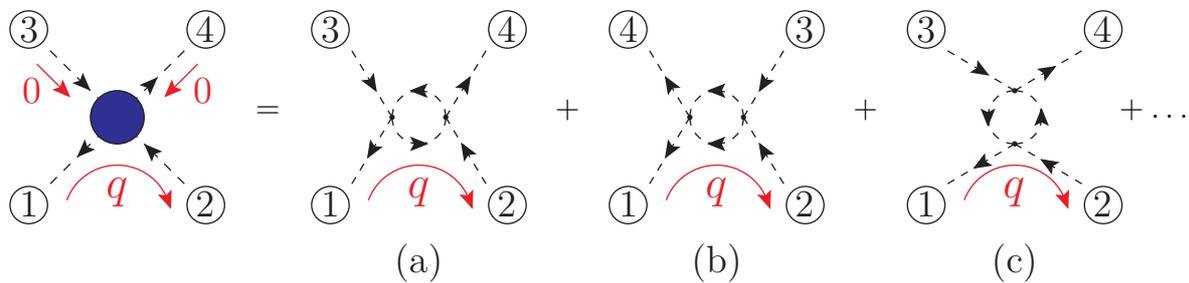


Abbildung 3.8: Das Infrarotproblem des Vier- Φ -Vertex auf Einschleifenniveau: Die Impulse der externen Beinen 3 und 4 werden Null gewählt, ein euklidischer Impuls q fließt von Beinchen 1 zu Beinchen 2. Hier tritt in Diagramm (c) eine infrarote Divergenz auf.

3.2.3 Berechnung von Betafunktionen mit einer Hilfsmasse

Es gibt verschiedene Verfahren, den UV-divergenten Anteil quantenfeldtheoretischer Prozesse und damit die Renormierungskonstanten einer Theorie zu bestimmen, da diese in Renormierungsschemata, die auf minimaler Subtraktion basieren, weder von externen Impulsen noch von Massen abhängen. Einen bequemen Satz von Masterintegralen erhält man, wenn man alle äußeren Impulse bis auf zwei zu Null setzt. Man hat also einen einlaufenden und wieder auslaufenden Impuls q in allen Feynman-Diagrammen, welcher in der euklidischen Region gewählt werden kann, also $q^2 < 0$. Die resultierenden skalaren, propagatorartigen Diagramme lassen sich mit dem FORM [99] Paket MINCER [100] bis zur Dreischleifenordnung lösen, welches auf partieller Integration [101, 102] beruht. Die Methode der partiellen Integration wurde auch schon auf vier Schleifen angewandt [101, 102]. Die Masterintegrale auf Vierschleifenniveau sind ebenfalls bekannt [103, 104].

Die meisten Renormierungskonstanten im Standardmodell, nämlich diejenigen, welche aus Zwei- und Dreipunktfunktionen berechnet werden können, lassen sich so ermitteln. Im Falle der Higgs-Selbstwechselwirkung λ ist die Situation jedoch anders. Bei der Berechnung der Korrekturen zum Vier- Φ -Vertex treten mit dieser Methode bereits in Einschleifenordnung infrarote Divergenzen auf, wie man in Abb. 3.8 sehen

kann. Die Diagramme (a), (b) und (c) zeigen die drei Kombinationen der externen Felder, welche mit 1 bis 4 durchnummeriert sind, mit zwei skalaren Propagatoren in der Schleife.

Werden die Impulse der externen Beinchen 3 und 4 Null gewählt und ein euklidischer Impuls q von 1 nach 2 festgelegt, so sind (a) und (b) einfache propagatorartige Diagramme. Hier treten lediglich UV-Divergenzen auf, welche sich in dimensionaler Regularisierung als Pole $\propto \frac{1}{\epsilon}$ manifestieren und entsprechend mit umgekehrtem Vorzeichen in den Counterterm $\delta Z_1^{(4\Phi)}$ zum Vier- Φ -Vertex eingehen. Das Diagramm (c) ist ein masseloser Tadpol und damit in dimensionaler Regularisierung Null, da hier sowohl eine UV-Divergenz als auch eine IR-Divergenz ebenso großen Betrages, aber mit umgekehrtem Vorzeichen auftreten, die sich gegenseitig kompensieren. In dimensionaler Regularisierung sind diese beiden Arten von Divergenzen nicht unterscheidbar, da beide sich als Pole der Form $\frac{1}{\epsilon}$ zeigen.

Die infrarote Singularität rührt aber von der Wahl der äußeren Impulse und würde nicht auftreten, wenn beispielsweise einer der externen Impulse 3 und 4 von Null verschieden gewählt würde. Dies würde aber wiederum zu deutlich komplizierteren Integralen mit zwei verschiedenen Skalen führen. Der UV-divergente Anteil dieses Diagramms hingegen ist unabhängig von der Wahl der externen Impulse und wird für die Renormierungskonstante benötigt.

Wir suchen also nach einer Methode, bei der zum Einen nur eine Skala in der Rechnung auftritt, um das analytische Lösen der auftretenden Integrale zu ermöglichen, bei der aber zum Anderen keine infraroten Divergenzen auftreten können. Eine solche Methode wurde in [105] vorgeschlagen und in [106] im Rahmen einer expliziten Dreischleifenrechnung weiter ausgeführt. Die Idee ist, die Nenner aller Propagatoren, ungeachtet zu welchem Feld gehörig, mit der gleichen quadrierten Hilfsmasse M^2 zu versehen, wodurch keine infraroten Divergenzen mehr auftreten können.

In den externen Impulsen wird nun so weit wie nötig eine naive Taylor-Entwicklung durchgeführt⁴. Bei Zweipunktfunktionen ist soweit zu entwickeln, dass die äußere Impulsstruktur q^2 , \not{q} bzw. $(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)$ abgespalten werden kann. Im Falle derjenigen Vertexkorrekturen, bei denen keine Ableitungen von Feldern in der Lagrangedichte stehen, genügt die nullte Ordnung der Entwicklung und die externen Impulse können direkt auf Null festgesetzt werden.

Um dieses Vorgehen zu motivieren, betrachten wir die exakte Zerlegung des ursprünglichen masselosen Propagatorenenners

$$\frac{1}{(l+q)^2} = \frac{1}{l^2 - M^2} + \frac{-q^2 - 2l \cdot q - M^2}{l^2 - M^2} \frac{1}{(l+q)^2}, \quad (3.21)$$

wobei l eine Linearkombination von Schleifenimpulsen und q von äußeren Impulsen ist. Wiederholte rekursive Anwendung der Formel (3.21) führt schließlich dazu, dass der letzte Term, welcher noch externe Impulse im Nenner enthält, aufgrund der mit jeder Rekursion erhöhten Potenz von $\frac{1}{(l^2 - M^2)}$ in diesem Term endlich ist und somit nicht

⁴Naiv bedeutet hier, dass keine asymptotische Entwicklung [107] notwendig ist, da keine zusätzlichen Divergenzen durch die Entwicklung generiert werden. Im Falle einer massiven Theorie kann in den physikalischen Massen ebenfalls eine Taylor-Entwicklung durchgeführt werden.

mehr zur Bestimmung der Renormierungskonstante beiträgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(l+q)^2} &= \frac{1}{l^2 - M^2} + \frac{-q^2 - 2l \cdot q}{(l^2 - M^2)^2} + \frac{(-q^2 - 2l \cdot q)^2}{(l^2 - M^2)^3} - \frac{M^2}{(l^2 - M^2)^2} \\ &+ \frac{M^2(M^2 + 2q^2 + 4l \cdot q)}{(l^2 - M^2)^3} + \frac{(-q^2 - 2l \cdot q - M^2)^3}{(l^2 - M^2)^3} \frac{1}{(l+q)^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Das Endergebnis des Feynman-Integrals wird nicht von M^2 abhängen, da die Zerlegung (3.21) exakt ist. Die Vernachlässigung des letzten Termes in (3.22) verfälscht nur den endlichen Anteil des Feynman-Integrals, an dem wir bei der Bestimmung von Renormierungskonstanten ohnehin nicht interessiert sind. Es ist aber wichtig festzuhalten, dass bei der hier beschriebenen Methode der endliche Anteil grundsätzlich verworfen werden muss.

Vernachlässigen wir in (3.22) auch die beiden vorletzten Terme $\propto M^2$, so erzielen wir genau den gleichen Effekt, wie wenn wir in den ursprünglichen Propagator die Hilfsmasse eingesetzt und dann in den externen Impulsen q eine Taylorentwicklung durchgeführt hätten:

$$\frac{1}{(l+q)^2} \rightarrow \frac{1}{(l+q)^2 - M^2} = \frac{1}{l^2 - M^2} \frac{-q^2 - 2l \cdot q}{(l^2 - M^2)^2} + \frac{(-q^2 - 2l \cdot q)^2}{(l^2 - M^2)^3} + \dots \quad (3.23)$$

Das Streichen der Terme $\propto M^2$ in (3.22) hat zur Folge, dass im Ergebnis des Feynman-Integrals nun Terme $\propto M^2$ stehen, die in der exakten Zerlegung, welche wegen der Identität (3.21) unabhängig von M^2 ist, nicht auftauchen. Auf Einschleifenniveau bleiben die Terme unabhängig von M^2 davon unberührt und liefern somit die korrekte Renormierungskonstante.

In Diagrammen mit mehreren Schleifen kann es aber beispielsweise vorkommen, dass ein Subdiagramm einen divergenten Beitrag $\propto M^2$ liefert und der endliche Anteil des Restdiagramms einen Beitrag $\propto \frac{1}{M^2}$ (s. Abb. 3.9), was im Gesamtergebnis zu einer M^2 -unabhängigen Divergenz führt. Hätte man die volle Zerlegung (3.22) zugrunde gelegt, dann wäre die Divergenz $\propto M^2$ in besagtem Subdiagramm aber nicht aufgetreten, weil sie sich gerade mit den Beiträgen mit Termen $\propto M^2$ aus (3.22) aufgehoben hätte.

Dieser Fehler kann ausgeglichen werden, indem man alle möglichen Counterterme $\propto M^2$ so konstruiert, dass sie in jeder Ordnung aller möglichen Prozesse die Beiträge $\propto M^2$ kompensieren. Damit rekonstruiert man, zumindest im divergenten Anteil des Feynman-Integrals, effektiv die vernachlässigten Terme der exakten Zerlegung (3.22) Ordnung für Ordnung in der Störungsreihe.

Da die Terme der Lagrangedichte Massendimension vier haben, sind nur Counterterme $\propto M^2$ denkbar, die aus zwei Feldern der Massendimension eins bestehen, also

$$\begin{aligned} &\frac{M^2}{2} \delta Z_{M^2}^{(2g)} A_\mu^a A^{a\mu}, \\ &\frac{M^2}{2} \delta Z_{M^2}^{(2W)} W_\mu^a W^{a\mu}, \\ &\frac{M^2}{2} \delta Z_{M^2}^{(2B)} B_\mu B^\mu \end{aligned} \quad (3.24)$$

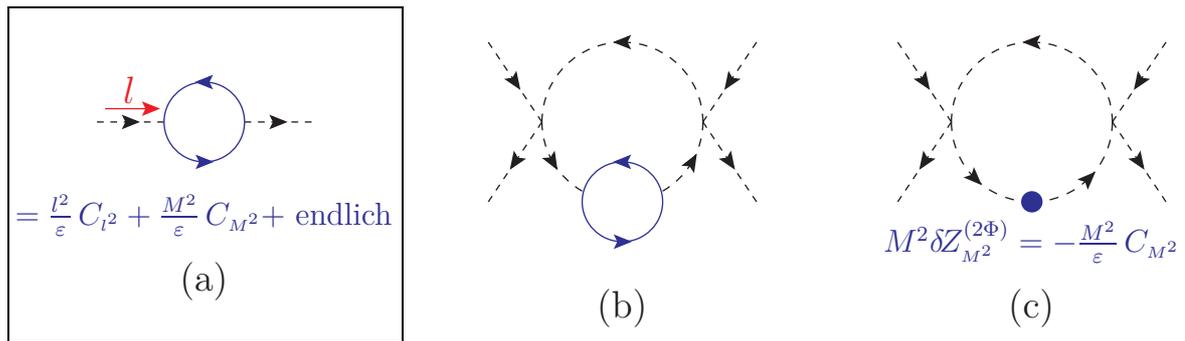


Abbildung 3.9: Ein divergentes Subdiagramm (a) mit Anteilen $\propto M^2$ und $\propto l^2$ führt in (b) zu einer M^2 -unabhängigen Divergenz, da das Restdiagramm einen endlichen Anteil $\propto \frac{1}{M^2}$ besitzt. Diese Divergenz muss durch Einsetzen eines Massencounterterms (c) behoben werden.

für die Eichbosonen und

$$M^2 \delta Z_{M^2}^{(2\Phi)} \Phi^\dagger \Phi \quad (3.25)$$

für die Skalarfelder. Für Fermionen gibt es keine solchen Counterterme, da Terme mit M in einfacher Potenz nicht vorkommen. Geistpropagatoren koppeln immer an Geist-Eichboson-Vertizes, welche proportional zum Impuls des auslaufenden Geistfeldes sind. Daher können zu einem Geistpropagator nur kinetische Counterterme $\propto (\partial_\mu \bar{c}^a)(\partial^\mu c^a)$ auftreten, kein Counterterm der Form $M^2 \bar{c}^a c^a$.

Dieses Vorgehen ist als mathematischer Trick zu verstehen, um mit einer einzigen Massenskala und einer naiven Taylorentwicklung auszukommen. Sowohl die Hilfsmasse als auch die Massencounterterme werden auf Ebene der Feynman-Integrale im Nachhinein eingesetzt und sind nicht Bestandteil der Theorie. Deshalb spielt es auch keine Rolle, dass die Counterterme (3.24) nicht eichinvariant sind.

Zusammenfassend gehen wir also so vor, dass zunächst mittels geeigneter Projektoren skalare Integrale erzeugt werden. Daraufhin wird in den Nenner jedes Propagators in jedem Feynman-Diagramm die quadrierte Hilfsmasse M^2 eingesetzt und dann in den äußeren Impulsen soweit eine Taylorentwicklung durchgeführt, wie man diese für die Impulsstruktur des zu berechnenden Prozesses benötigt (vgl. (3.23)). Schließlich sind also nur noch skalare Feynman-Integrale ohne äußere Impulse (Tadpole-Diagramme) mit einer Massenskala M zu berechnen. Die Berechnung solcher Integrale bis zur Dreischleifenordnung ist im FORM-Paket [99] MATAD [108] implementiert, welches für diese Arbeit verwendet wurde.

Bei denjenigen Prozessen im eichfreien Limes (s. Kap. 3.6.1), wo dies möglich war, wurde als unabhängiger Test auch die zuerst beschriebene Methode mit MINCER [100] angewandt.

3.3 Automatisierung der Rechnungen

Bei der Berechnung der Renormierungskonstanten im Standardmodell in Dreischleifenordnung tragen zu jeder 1PI-Greensfunktion eine große Zahl von Feynman-Diagrammen

Tabelle 3.1: Physikalische Felder in QGRAF im vereinfachten Modell mit den Kopplungen g_s, y_t und λ . Alle anderen Standardmodellkopplungen werden zu Null genähert. [...,+] definiert kommutierende und [...,-] antikommutierende Felder.

Antifeld, Feld in QGRAF	Bedeutung	Propagator in QGRAF
Tq, tq	top-Quark t	[Tq, tq, -]
Bq, bq	bottom-Quark b	[Bq, bq, -]
Qu, qu	leichtes Quark $q \in \{u, d, c, s\}$	[Qu, qu, -]
g	SU(3) _c -Eichbosonen A_μ^a (Gluonen, $a \in \{1, \dots, 8\}$)	[g, g, +]
C, c	Geistfelder c^a (SU(3) _c)	[C, c, -]
Ph1, ph1	Skalarfeld Φ_1	[Ph1, ph1, +]
Ph2, ph2	Skalarfeld Φ_2	[Ph2, ph2, +]

bei, die alle zu addieren sind. Für die Diskussion in diesem Abschnitt werden die 1PI-Greensfunktionen kurz als Prozesse bezeichnet, die durch Angabe der externen Felder spezifiziert werden, z.B. $\langle A^{a\mu} A^{b\nu} \rangle$.

Der erste Schritt für jeden betrachteten Prozess ist das Aufstellen aller nach den Feynman-Regeln der Theorie möglichen Feynman-Diagramme. Hierfür wird das Computerprogramm QGRAF [109] verwendet. In den Tabellen 3.5, 3.6, 3.7 und 3.8 ist die Zahl der generierten Diagramme für die benötigten Prozesse angegeben.

QGRAF bekommt hierfür eine Modelldatei, in der alle Felder des betrachteten Modells als Propagatoren und in den möglichen Kombinationen der Vertizes angegeben werden. Im eichfreien Grenzfall unter Vernachlässigung aller Yukawa-Kopplungen bis auf y_t verwenden wir die in Tab. 3.1 angegebenen physikalischen Felder. Daraufhin wird die Topologie eines jeden Diagramms ermittelt, welche für MINCER [100] und MATAD [108] benötigt wird. Dies geschieht mittels eines Mathematica⁵-Codes im Rahmen des Automatisierungspaketes GEFICOM⁶, welches seit langer Zeit am Institut für Theoretische Teilchenphysik des KIT hauptsächlich von Dr. K. G. Chetyrkin entwickelt wird. Die folgenden Schritte von GEFICOM wurden im Rahmen dieser Arbeit in großem Umfang an die Erfordernisse der zu lösenden Aufgaben angepasst.

Zunächst wird die Liste der Diagramme aufgespalten und in Blöcke von üblicherweise 500, 1000 oder 2000 Diagrammen aufgeteilt, die dann als separate Jobs auf dem Computercluster des Instituts für Theoretische Teilchenphysik bearbeitet werden. Ein wichtiger Teil der Automatisierung ist das Aufspalten der Diagramme in Faktoren, die getrennt berechnet werden können. Im eichfreien Grenzfall wird die QCD-Gruppenstruktur von der Impuls- und Spinorstruktur im Minkowskiraum abfaktoriert.

Nun werden die Ausgangsausdrücke für jeden dieser Diagrammfaktoren produziert. Hierzu werden in einer Mathematica-Routine die von QGRAF generierten Vertex- und Propagatorfunktionen `Vrtx[QGRAF-Felder,QGRAF-Indizes]`

⁵<http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>

⁶nicht publiziert

und `Prop[QGRAF-Feld,QGRAF-Indizes]` auf FORM-Funktionen abgebildet, z.B. `Prop[g,1,2] → Dg(mu1,mu2)` für das Impulsraumdiagramm und `Prop[g,1,2] → d_(j1,j2)` für das Farbraumdiagramm, wobei die Lorentz-Indizes `mu1, mu2, ...` und Gruppenindizes `j1, j2, ...` fortlaufend aus den QGRAF-Indizes generiert werden.

Das Farbraumdiagramm kann nach Anwendung eines geeigneten Projektors, der freie Farbindizes verbindet und somit ein skalares Diagramm erzeugt, mit dem FORM-Paket COLOR [110] berechnet werden. Farbprojektoren werden aus Kronecker-Deltas für die Farbindizes sowie den Erzeugern T_{ij}^a der Gruppe oder den Strukturkonstanten f^{abc} gebildet.

Bei dem Impulsraumdiagramm wird zunächst ein Projektor angewandt um ein skalares Integral zu erzeugen. Ein solcher Projektor wird im Falle freier Lorentz-Indizes aus externen Impulsen und der Minkowski-Metrik konstruiert, im Falle offener Fermionlinien aus externen Impulsen und γ -Matrizen verbunden mit der Vorschrift, dass nach der Multiplikation mit diesen zusätzlichen γ -Matrizen die Spur über die externe Fermionlinie zu bilden ist.

Nun werden sämtliche Propagatoren gemäß (3.12) in eine Summe aus einem freien Propagator und Propagatoren mit ein bzw. zwei Countertermeinsetzungen aufgeteilt, z.B. `Dg(mu1,mu2) → Dg0(mu1,mu2)+h*Dg1(mu1,mu2)+h^2*Dg2(mu1,mu2)`, wobei `h` die in Kap. 3.2.1 beschriebene Buchhaltungsvariable für die Schleifenordnung ist. Mittels der Definition `Symbol h(:3)`; in FORM wird sichergestellt, dass Terme mit Potenzen von `h` größer als drei nach jedem durch den Befehl `.sort` abgeschlossenen FORM-Modul verworfen werden. Für die Vertizes und Propagatoren werden nun die expliziten Feynman-Regeln, wie sie in Anhang B.1 angegeben sind, eingesetzt.

Nachdem nun die Behandlung der γ_5 -Matrizen wie in Kap. 3.2.2 beschrieben durchgeführt und die fermionischen Counterterme eingesetzt wurden (vgl. Kap. 3.2.1), ist die Spurbildung über die γ -Matrizenprodukte aller Fermionlinien der nächste Schritt in GEFICOM. Es folgt das Einsetzen der Counterterme in die bosonischen und Geisterpropagatoren sowie die Taylorentwicklung in den externen Impulsen, welche nach dem Abspalten der externen Impulsstruktur des zu berechnenden Prozesses zu Null gesetzt werden (vgl. Kap. 3.2.3). Daraufhin wird das resultierende skalare Tadpole-Integral mit einer Massenskala M an MATAD [108] übergeben und ausgewertet.

Alternativ kann auf die Hilfsmasse und die Taylorentwicklung in den externen Impulsen verzichtet werden und ein externer Impuls q als Skala genommen werden. Die resultierenden propagatorartigen Impulsraumdiagramme werden dann mit MINCER [100] berechnet. GEFICOM liegt in zwei Versionen vor, um entlang der oben beschriebenen Schritte sowohl die Ausgangsnotation für MINCER als auch die für MATAD generieren zu können.

Die Faktoren $(1 + h \cdot \delta Z)$, welche mit der Renormierung eines jeden Vertex verbunden sind, werden gesondert berechnet und am Ende zusammen mit dem Farbfaktor an das Impulsraumdiagramm multipliziert. Diese Aufteilung des Diagramms in einen Farbraumfaktor, einen Impulsraumfaktor und einen Faktor aus Konstanten dient der Minimierung der auftretenden Summandenzahl in den Zwischenergebnissen der Rechnung.

Für die Arbeit [98], in der die Dreischleifen-Betafunktionen für die Eichkopplungen

des Standardmodells berechnet wurden, kommen teilweise die gleichen Programme, beispielsweise QGRAF, MINCER und MATAD zum Einsatz. Die Implementierung der Feynman-Regeln, der Renormierung sowie der problemspezifischen Methoden, wie der γ_5 -Behandlung und der Methode mit einer Hilfsmasse (s. Kap. 3.2.3) erfolgte hier jedoch unabhängig. In [98] wurde auch nicht GEFICOM, sondern Q2E und EXP [111, 112] verwendet. Als Test für die Automatisierung der in der vorliegenden Dissertation vorgestellten Projekte wurden alle Zweischleifenrenormierungskonstanten des jeweils betrachteten Modells nochmals unabhängig berechnet und mit der Literatur verglichen.

3.4 Gruppenstruktur des vollen Standardmodells

Zunächst wurden im Rahmen dieser Arbeit in einem vereinfachten Modell, das nur die drei Kopplungen g_s, y_t und λ enthält, Betafunktionen (s. Kap. 3.6.1) und anomale Dimensionen (s. Kap. 3.6.2) berechnet. In einem zweiten Schritt wurden für den Higgs-Sektor zusätzlich noch β_{m^2} und β_λ im Standardmodell unter Einbeziehung der elektroschwachen Kopplungen g_2 und g_1 sowie der Yukawa-Kopplungen y_b und y_τ der dritten Teilchengeneration zusätzlich zu den drei Kopplungen g_s, y_t und λ im berechnet (s. Kap. 3.6.3). In Tab. 3.2 wird ein möglicher Satz physikalischen Felder (dieser sei im folgenden als Satz A bezeichnet) angegeben, mit dem sich dieses Modell in QGRAF implementieren lässt. Wie auch schon im eichfreien Grenzfall werden hier die $SU(2)_L$ -Freiheitsgrade sowohl bei den Fermionfeldern als auch bei den Eichbosonen und Geistern als separate QGRAF-Felder definiert, während die $SU(3)_c$ -Freiheitsgrade in ein Quarkfeld bzw. ein Gluonfeld zusammengefasst werden. Der Farbanteil wird abgespalten und als separates Farbraumdiagramm berechnet.

Im $SU(2)_L$ -Sektor ist die Situation anders, da sowohl die fermionischen Counterterme als auch die $U(1)_Y$ -Hyperladungen der Quarks und Leptonen von der $SU(2)_L$ -Konfiguration der Fermiondoublette abhängen. Auf Ein- und Zweischleifenniveau, wo Counterterme in die Diagramme einzusetzen sind, sind die Felder aus Satz A daher naheliegend. Allerdings werden auf Dreischleifenniveau, insbesondere für die Vier- Φ -Vertexkorrekturen sehr viele Diagramme generiert, was mit einer hohen Rechenzeit verbunden ist.

Dies ist nicht notwendig, da viele dieser Diagramme dieselbe Struktur im Impulsraum haben, wenn man die volle $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Gruppenstruktur abfaktoriert. In dieser Schleifenordnung sind auch keine Counterterme einzusetzen. Es bietet sich also an einen kleineren Satz von Feldern (Satz B) zu verwenden, wie er in Tab. 3.3 angegeben ist. Die $SU(3)_c$ -Farbstruktur lässt sich wie oben abfaktorisieren und mit COLOR berechnen. Ebenso werden Konstanten weiterhin in einem separaten Faktor gesammelt. Der Impulsraumanteil wird wie oben beschrieben berechnet, allerdings werden fortlaufend durchnummerierte Label für rechts- und linkshändige Anteile der Fermionlinien eingesetzt, da sich die $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Gruppenfaktoren für diese unterscheiden. Ebenso treten beim Vier- W -Vertex drei verschiedene $SU(2)_L$ -Gruppenfaktoren auf, sodass für den Impulsraumanteil dieses Vertex ebenfalls drei Label für die drei Summanden zum Einsatz kommen.

Das $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Gruppendiagramm wird dann in einer separaten Mathematica-

Tabelle 3.2: Physikalische Felder in QGRAF im Standardmodell mit den Kopplungen $g_s, g_2, g_1 y_t, y_b, y_\tau$ und λ (Satz A). $[\dots, +]$ definiert kommutierende und $[\dots, -]$ antikommutierende Felder.

Antifeld, Feld in QGRAF	Bedeutung	Propagator in QGRAF
Tq, tq	top-Quark t	[Tq, tq, -]
Bq, bq	bottom/beauty-Quark b	[Bq, bq, -]
Uq, uq	leichtes Quark (u, c)	[Uq, uq, -]
Dq, dq	leichtes Quark (d, s)	[Dq, dq, -]
Ntau, ntau	τ -Neutrino ν_τ	[Ntau, ntau, -]
Tau, tau	τ -Lepton	[Tau, tau, -]
Nel, nel	Neutrinos (ν_e, ν_μ)	[Nel, nel, -]
El, el	leichtes Lepton (e, μ)	[El, el, -]
g	SU(3) _c -Eichbosonen A_μ^a (Gluonen, $a \in \{1, \dots, 8\}$)	[g, g, +]
W1	SU(2) _L -Eichboson W_μ^1	[W1, W1, +]
W2	SU(2) _L -Eichboson W_μ^2	[W2, W2, +]
W3	SU(2) _L -Eichboson W_μ^3	[W3, W3, +]
B	U(1) _Y -Eichboson	[B, B, +]
C, c	Geistfelder c^a (SU(3) _c)	[C, c, -]
CW1, cW1	Geistfelder c_W^1 (SU(2) _L)	[CW1, cW1, -]
CW2, cW2	Geistfelder c_W^2 (SU(2) _L)	[CW2, cW2, -]
CW3, cW3	Geistfelder c_W^3 (SU(2) _L)	[CW3, cW3, -]
Ph1, ph1	Skalarfeld Φ_1	[Ph1, ph1, +]
Ph2, ph2	Skalarfeld Φ_2	[Ph2, ph2, +]

Routine berechnet, welche für diese Arbeit programmiert wurde. Hier wird jedes Quarkfeld q_i mit einem Isospinindex ($i = 1, 2$) angenommen, der beim linkshändigen Anteil gerade den SU(2)_L-Konfigurationen entspricht und beim rechtshändigen die beiden unabhängigen Felder markiert, was in der dritten Generation $q_{1,R} = t_R$ und $q_{2,R} = b_R$ bedeutet. In Fermionlinien mit Yukawa-Kopplungen wird nur die dritte Generation angenommen, Fermionschleifen ohne Yukawa-Wechselwirkungen werden mit einem Faktor N_g (Anzahl der Generationen, also im Standardmodell $N_g = 3$ multipliziert. Für Leptonen l_i wird analog verfahren, mit dem einzigen Unterschied, dass diese nicht an Gluonen koppeln und andere U(1)_Y-Hyperladungen haben.

Da die U(1)_Y-Hyperladung eines Feldes (vgl. Tab. 3.4) von der Isospinkonfiguration desselben abhängt, werden SU(2)_L und U(1)_Y nicht in verschiedene Faktoren des Feynman-Diagramms getrennt und die Evaluation erfolgt durch explizites Summieren über alle Indizes und Einsetzen der Komponenten der Paulimatrizen, SU(2)_L-Strukturkonstanten und Hyperladungen. Da hierbei sehr lange Summen von Termen entstehen, werden die einzelnen Terme als Einträge in Mathematica-Listen verwaltet und die Evaluation durch aufeinanderfolgende Ersetzungsregeln (Mathematica-Befehl ReplaceAll) vorgenommen.

Bei der Berechnung der SU(2)_L \times U(1)_Y-Gruppendiagramme werden die gleichen

Tabelle 3.3: Physikalische Felder in QGRAF im Standardmodell mit den Kopplungen $g_s, g_2, g_1 y_l, y_b, y_\tau$ und λ (Satz B). [..., +] definiert kommutierende und [..., -] antikommutierende Felder.

Antifeld, Feld in QGRAF	Bedeutung	Propagator in QGRAF
Qu, qu	Quark q_i ($i = 1: u, c, t; i = 2: d, s, b$)	[Qu, qu, -]
Lep, lep	Lepton l_i ($i = 1: \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau; i = 2: e, \mu, \tau$)	[Lep, lep, -]
g	SU(3) _c -Eichbosonen A_μ^a (Gluonen, $a \in \{1, \dots, 8\}$)	[g, g, +]
W	SU(2) _L -Eichbosonen W_μ^b ($b \in \{1, \dots, 3\}$)	[W, W, +]
B	U(1) _Y -Eichboson	[B, B, +]
C, c	Geistfelder c^a (SU(3) _c)	[C, c, -]
CW, cW	Geistfelder c_W^b (SU(2) _L)	[CW, cW3, -]
Ph, ph	Skalarfeld Φ_i ($i = 1, 2$)	[Ph, ph, +]

Label mit denselben Nummern wie in den Impulsraumdiagrammen verwendet. Am Schluss werden dann die vier Faktoren - Impulsraumdiagramm, SU(2)_L × U(1)_Y-Gruppendiagramm, SU(3)_c-Gruppendiagramm (Farbfaktor) und Konstanten - multipliziert, wobei Produkte des gleichen Labels auf Eins und Produkte verschiedener Label auf Null gesetzt werden.

3.5 Status der Betafunktionen im Standardmodell

In Ein- und Zweischleifenordnung sind die Betafunktionen des Standardmodells seit längerer Zeit bekannt. Die QCD-Betafunktion auf Einschleifenniveau [65, 66] zeigen,

Tabelle 3.4: Hyperladungen Y_f , welche das Transformationsverhalten der Felder f bzgl. der U(1)_Y beschreiben. Die Isospinkomponente I_z gibt bei links-händigen (lh.) Feldern f_L die SU(2)_L-Konfiguration an. Rechtsändige (rh.) Felder f_R sind SU(2)_L-Singulette, sodass hier der Index $i = 1, 2$ einfach der Kennzeichnung des Fermiontyps entspricht - (u, c, t) für $i = 1$ und (d, s, b bzw. e, μ, τ) für $i = 2$.

Feld f	Beschreibung	$Y_{f,L}$ für lh. Feld f_R	$Y_{f,R}$ für rh. Feld f_L
q_1	Quark mit $I_z = +\frac{1}{2}$ (u, c, t)	$+\frac{1}{6}$	$+\frac{2}{3}$
q_2	Quark mit $I_z = -\frac{1}{2}$ (d, s, b)	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
l_1	Lepton mit $I_z = +\frac{1}{2}$ (ν_e, ν_μ, ν_τ)	$-\frac{1}{2}$	0
l_2	Lepton mit $I_z = -\frac{1}{2}$ (e, μ, τ)	$-\frac{1}{2}$	-1

Φ	Skalardoublett	$Y_\Phi = +\frac{1}{2}$
--------	----------------	-------------------------

dass Quarks asymptotisch frei sind, die Kopplung $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ also für hohe Energieskalen gegen Null strebt. Für die Eichkopplungen g_s, g_2 und g_1 wurden die Zweischleifen-Betafunktionen in den Arbeiten [56–58, 67–72, 74] berechnet. Die Betafunktionen für die Yukawa-Kopplungen in Zweischleifenordnung wurden in [56, 57, 73, 75] berechnet. Die Betafunktionen für die Higgs-Selbstkopplung und den Massenparameter m^2 aus dem Higgs-Potential (2.14) zur Zweischleifenordnung wurden in [55–58] berechnet. In [57] sind alle Zweischleifen-Betafunktionen des Standardmodells mit komplexen Yukawa-Matrizen angegeben.

Auf Dreischleifenniveau wurden zuerst die Betafunktionen für die Eichkopplungen g_s, g_1 und g_2 im vollen Standardmodell⁷ berechnet [80, 81, 98]. Dieses Resultat konnte in einer unabhängigen Arbeit [83] bestätigt werden.

Für die top-Yukawa-Kopplung und die Parameter λ und m^2 des Higgs-Potentials wurden die Betafunktionen im Rahmen dieser Arbeit zunächst im eichfreien Limes ($g_2, g_1 \rightarrow 0$) unter Vernachlässigung der übrigen Yukawa-Kopplungen berechnet [8]. Das Resultat für β_{y_t} wurde in [82] unabhängig bestätigt und um Terme mit den Kopplungen g_2, g_1, y_b und y_τ erweitert. Außerdem wurden hier auch β_{y_b} und β_{y_τ} berechnet.

Für die Betafunktionen der Higgs-Selbstkopplung λ und des Parameters m^2 wurde eine Rechnung unter Einbeziehung der elektroschwachen Korrekturen und der kleineren Yukawa-Kopplungen der dritten Generation y_b und y_τ im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt [7]. Diese Resultate konnten ebenfalls von einer anderen Arbeitsgruppe unabhängig bestätigt werden [84]. Die numerisch sehr kleinen zusätzlichen Korrekturen durch Einbeziehung komplexer Yukawa-Matrizen wurden in [120] publiziert.

Auf Vierschleifenniveau sind die reine QCD-Betafunktion für g_s bzw. α_s bekannt [121, 122] sowie die Anteile der Betafunktion für λ , welche von den Skalarfeldern herrühren [123–125].

3.6 Analytische Resultate und numerische Analyse

Im Folgenden werden die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse zu den Renormierungsgruppenfunktionen im Standardmodell vorgestellt. Um die Effekte der neuen Dreischleifenterme einschätzen zu können werden außerdem für die Betafunktionen jeweils die wichtigsten Terme an der Skala der top-Quarkmasse $\mu = M_t$ numerisch ausgewertet und diskutiert.

3.6.1 Dreischleifen-Betafunktionen im eichfreien Grenzfall

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Rechnungen im eichfreien Grenzfall unter Vernachlässigung kleiner Yukawa-Kopplungen vorgestellt. Das hier verwendete vereinfachte Modell enthält also nur die bei niedrigen Energien dominanten Kopplungen g_s und y_i sowie die Parameter λ und m^2 , wobei letzterer keinen Einfluss auf das UV-Verhalten von Prozessen und damit auf Betafunktionen und anomale Dimensionen hat

⁷Partielle Resultate für Dreischleifen-Betafunktionen, welche wichtige Vergleiche für die volle Rechnung liefern, finden sich in [113–119].

und somit in der Rechnung vernachlässigt werden kann. Diese Ergebnisse entstanden im Rahmen dieser Dissertation und wurden in [8] veröffentlicht.

In Tab. 3.5 sind die Prozesse, zu denen Schleifenkorrekturen berechnet wurden, zusammen mit der Anzahl an jeweils von QGRAF generierten Diagrammen angegeben⁸.

Der erste Abschnitt dieser Tabelle zeigt die berechneten Selbstenergien, die zu den Wellenfunktionsrenormierungskonstanten führen. Im zweiten Abschnitt sind die Vertexkorrekturen aufgeführt, von denen jede zusammen mit den Wellenfunktionsrenormierungskonstanten der externen Felder eine Kopplungsrenormierungskonstante und damit eine Betafunktion liefert. Es wurden hier für jede Kopplung mehrere Prozesse benutzt, um einen gründlichen Test für die verwendeten Rechenmethoden, Computer-routinen und die Implementierung der Feynman-Regeln sicherzustellen.

Die Ergebnisse werden mit allgemeiner Struktur für die QCD-Eichgruppe unter Verwendung der Casimirooperatoren C_F und C_A der fundamentalen und adjungierten Gruppendarstellung angegeben (s. Anhang A). Hierbei ist d_R die Dimension der fundamentalen Darstellung und T_F ist der mit Hilfe der Generatoren T^a so definiert, dass $T_F \delta^{ab} = \mathbf{Tr}(T^a T^b)$. Im Fall einer $SU(N_c)$ gilt $d_R = N_c$, $C_A = 2T_F N_c$ und $C_F = T_F(N_c - \frac{1}{N_c})$, im Standardmodell ist $N_c = 3$ und damit $C_F = \frac{4}{3}$, $C_A = 3$ sowie $T_F = \frac{1}{2}$.

Die Anzahl der Quarkfelder wird mit n_f bezeichnet, wobei neben dem top-Quark noch $n_l = n_f - 1$ leichte Quarks beitragen. Im Standardmodell ist $n_f = 6$ zu wählen. Die Beiträge der einzelnen Schleifenordnungen werden im Folgenden gemäß (2.79) dargestellt.

Für die Higgs-Selbstwechselwirkung λ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda^{(1)} &= 12\lambda^2 + 2d_R y_t^2 \lambda - d_R y_t^4, \\
\beta_\lambda^{(2)} &= -156\lambda^3 - 24d_R y_t^2 \lambda^2 - \frac{1}{2}d_R y_t^4 \lambda + 5d_R y_t^6 \\
&\quad + 10C_F d_R g_s^2 y_t^2 \lambda - 4C_F d_R g_s^2 y_t^4, \\
\beta_\lambda^{(3)} &= \lambda^4 (3588 + 2016\zeta_3) + 291d_R y_t^2 \lambda^3 + y_t^4 \lambda^2 \left(\frac{789}{2}d_R + 252\zeta_3 d_R - 36d_R^2 \right) \\
&\quad + y_t^6 \lambda \left(-\frac{1881}{8}d_R - 66\zeta_3 d_R + 80d_R^2 \right) + y_t^8 \left(\frac{13}{2}d_R - 12\zeta_3 d_R - \frac{195}{8}d_R^2 \right) \\
&\quad + g_s^2 y_t^2 \lambda^2 (-306C_F d_R + 288\zeta_3 C_F d_R) + g_s^2 y_t^4 \lambda \left(\frac{895}{4}C_F d_R - 324\zeta_3 C_F d_R \right) \\
&\quad + g_s^2 y_t^6 \left(-\frac{19}{2}C_F d_R + 60\zeta_3 C_F d_R \right) + g_s^4 y_t^2 \lambda \left(-\frac{119}{2}C_F^2 d_R + 77C_A C_F d_R \right. \\
&\quad \left. - 16n_f T_F C_F d_R + 72\zeta_3 C_F^2 d_R - 36\zeta_3 C_A C_F d_R \right) + g_s^4 y_t^4 \left(\frac{131}{2}C_F^2 d_R \right. \\
&\quad \left. + 48T_F C_F d_R - \frac{109}{2}C_A C_F d_R + 10n_f T_F C_F d_R - 48\zeta_3 C_F^2 d_R + 24\zeta_3 C_A C_F d_R \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

⁸Es werden in der ersten Spalte die externen Felder der zu berechnenden Greensfunktion angegeben. Es sei daran erinnert, dass $O_{2\Phi} = \Phi^\dagger \Phi$ der in (2.70) definierte Operator zur Berechnung von Z_{m^2} aus (2.75) und damit von β_{m^2} ist.

Tabelle 3.5: Anzahl der von QGRAF generierten Einteilchen-irreduziblen Feynman-Diagramme im eichfreien Grenzfall.

Prozess	1 Schleife	2 Schleifen	3 Schleifen	benötigt für
$A_\mu^a A_\nu^b$	6	53	1293	$Z_3^{(2g)}$
$\bar{t}t$	4	47	1133	$Z_2^{(2t)}$
$\bar{b}b$	2	19	375	$Z_2^{(2b)}$
$\bar{q}q$	1	9	172	$Z_2^{(2q)}$
$\bar{c}^a c^b$	1	9	172	$Z_3^{(2c)}$
$\Phi_1^* \Phi_1$	3	15	215	$Z_2^{(2\Phi)}$
$\Phi_2^* \Phi_2$	3	19	354	$Z_2^{(2\Phi)}$
$[O_{2\Phi}] \Phi_1^* \Phi_1$	2	25	473	Z_{m^2}
$[O_{2\Phi}] \Phi_2^* \Phi_2$	2	29	709	Z_{m^2}
$\Phi_1^* \Phi_1^* \Phi_1 \Phi_1$	7	122	3386	Z_λ
$\Phi_1^* \Phi_2^* \Phi_1 \Phi_2$	6	128	4291	Z_λ
$\Phi_2^* \Phi_2^* \Phi_2 \Phi_2$	11	302	13049	Z_λ
$\bar{c}^a c^b A_\mu^c$	2	51	1620	Z_{g_s}
$\bar{t}t A_\mu^a$	5	169	7103	Z_{g_s}
$\bar{b}t \Phi_1^*$	1	36	1293	Z_{y_t}
$\bar{t}b \Phi_1$	1	36	1293	Z_{y_t}
$\bar{t}t \Phi_2^*$	3	107	4447	Z_{y_t}
$\bar{t}t \Phi_2$	3	107	4447	Z_{y_t}

Der Ein- und Zweischleifenanteil sind im Fall einer SU(3)-Eichgruppe in Übereinstimmung mit [55, 57], der rein skalare Anteil ($g_s, y_t \rightarrow 0$) lässt sich mit [123–125] vergleichen.

Für den Massenparameter m^2 des Higgs-Potentials findet man durch Einsetzen des Operators $O_{2\Phi}$ aus (2.70) in eine Greensfunktion mit zwei externen Skalarfeldern

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{m^2}^{(1)}}{m^2} &= 6\lambda + d_R y_t^2, \\
\frac{\beta_{m^2}^{(2)}}{m^2} &= -30\lambda^2 - 12d_R y_t^2 \lambda - \frac{9}{4}d_R y_t^4 + 5C_F d_R g_s^2 y_t^2, \\
\frac{\beta_{m^2}^{(3)}}{m^2} &= 1026\lambda^3 + \frac{99}{2}d_R y_t^2 \lambda^2 + y_t^4 \lambda \left(\frac{333}{4}d_R - 18d_R^2 + 72\zeta_3 d_R \right) \\
&\quad + y_t^6 \left(-\frac{617}{16}d_R + 24d_R^2 + 15\zeta_3 d_R \right) \\
&\quad + g_s^2 y_t^2 \lambda \left(-153C_F d_R + 144\zeta_3 C_F d_R \right) \\
&\quad + g_s^2 y_t^4 \left(\frac{447}{8}C_F d_R - 90\zeta_3 C_F d_R \right) \\
&\quad + g_s^4 y_t^2 \left(-\frac{119}{4}C_F^2 d_R + \frac{77}{2}C_A C_F d_R - 8n_f T_F C_F d_R + 36\zeta_3 C_F^2 d_R - 18\zeta_3 C_A C_F d_R \right),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

was in Ein- und Zweischleifenordnung mit den bekannten Ergebnissen aus [57] übereinstimmt. Die reinen λ -Terme können wieder mit [123–125] verglichen werden.

Die Betafunktion der top-Yukawa-Kopplung y_t wird in diesem Modell zu

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{y_t}^{(1)}}{y_t} &= y_t^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} d_R \right) - 3C_F g_s^2, \\
\frac{\beta_{y_t}^{(2)}}{y_t} &= 3\lambda^2 - 6y_t^2 \lambda + y_t^4 \left(\frac{3}{4} - \frac{9}{4} d_R \right) \\
&\quad + g_s^2 y_t^2 \left(6C_F + \frac{5}{2} C_F d_R \right) + g_s^4 \left(-\frac{3}{2} C_F^2 - \frac{97}{6} C_A C_F + \frac{10}{3} n_f T_F C_F \right), \\
\frac{\beta_{y_t}^{(3)}}{y_t} &= -18\lambda^3 + y_t^2 \lambda^2 \left(\frac{285}{8} - \frac{45}{4} d_R \right) + y_t^4 \lambda \left(\frac{63}{2} + \frac{45}{2} d_R \right) \\
&\quad + y_t^6 \left(-\frac{345}{32} + \frac{9}{4} \zeta_3 + \frac{107}{32} d_R + \frac{3}{2} \zeta_3 d_R + \frac{39}{16} d_R^2 \right) \\
&\quad + 6C_F g_s^2 y_t^2 \lambda - g_s^2 y_t^4 \left(\frac{57}{2} C_F + \frac{81}{8} C_F d_R \right) \\
&\quad + g_s^4 y_t^2 \left(\frac{471}{16} C_F^2 - \frac{119}{8} C_F^2 d_R + 25T_F C_F + \frac{717}{16} C_A C_F + \frac{77}{4} C_A C_F d_R \right. \\
&\quad \left. - \frac{33}{4} n_f T_F C_F - 4n_f T_F C_F d_R - 27\zeta_3 C_F^2 + 18\zeta_3 C_F^2 d_R - \frac{27}{2} \zeta_3 C_A C_F \right. \\
&\quad \left. - 9\zeta_3 C_A C_F d_R \right) + g_s^6 \left(-\frac{129}{2} C_F^3 + \frac{129}{4} C_A C_F^2 - \frac{11413}{108} C_A^2 C_F + 46n_f T_F C_F^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{556}{27} n_f C_A T_F C_F + \frac{140}{27} n_f^2 T_F^2 C_F - 48\zeta_3 n_f T_F C_F^2 + 48\zeta_3 n_f C_A T_F C_F \right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

berechnet. Die Ein- und Zweischleifenresultate sind für den Fall einer $SU(3)$ -Eichgruppe wiederum in Übereinstimmung mit den bekannten Ergebnissen aus [57, 75]. Die Terme der Ordnung g_s^2 , g_s^4 , $y_t^2 g_s^2$ und $g_s^4 y_t$ zur Renormierungskonstanten Z_{y_t} lassen sich mit der Arbeit [118] vergleichen, wo die Renormierungskonstante Z_{m_t} für die gemäß (2.34) definierte top-Quarkmasse $m_t = \frac{v}{\sqrt{2}} y_t$ in der gebrochenen Phase des Standardmodells in Abhängigkeit von m_t und α_s berechnet wurde. Hier ist $\frac{v}{\sqrt{2}}$, wie in (2.25) definiert, ein konstanter Anteil des Skalarfelds Φ_2 . Terme im Wechselwirkungsteil der Lagrangedichte \mathcal{L}_{int} , die v enthalten, werden aus dieser herausgenommen und der freien Lagrangedichte zugerechnet. Die top-Quarkmasse wird also wie das Produkt $y_t (\Phi_2 + \Phi_2^*)$ renormiert. Mit der Definition

$$Z_{m_t} = Z_{y_t} Z_2^{(2\Phi)} = \frac{Z_1^{(tb\Phi)}}{\sqrt{Z_{2,L}^{(2t)} Z_{2,R}^{(2t)}}} \tag{3.29}$$

konnten die Terme aus [118] reproduziert werden.

Schließlich lässt sich in diesem Modell auch die Betafunktion für die starke Wech-

selwirkung zu

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{g_s}^{(1)}}{g_s} &= g_s^2 \left(-\frac{11}{6} C_A + \frac{2}{3} n_f T_F \right), \\
\frac{\beta_{g_s}^{(2)}}{g_s} &= -2T_F g_s^2 y_t^2 + g_s^4 \left(-\frac{17}{3} C_A^2 + 2n_f T_F C_F + \frac{10}{3} n_f C_A T_F \right), \\
\frac{\beta_{g_s}^{(3)}}{g_s} &= +g_s^2 y_t^4 \left(\frac{9}{2} T_F + \frac{7}{2} T_F d_R \right) - g_s^4 y_t^2 (3T_F C_F + 12C_A T_F) \\
&\quad + g_s^6 \left(-\frac{2857}{108} C_A^3 - n_f T_F C_F^2 + \frac{205}{18} n_f C_A T_F C_F + \frac{1415}{54} n_f C_A^2 T_F \right. \\
&\quad \left. - \frac{22}{9} n_f^2 T_F^2 C_F - \frac{79}{27} n_f^2 C_A T_F^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

berechnen. Bis zur Dreischleifenordnung treten keine Terme mit λ auf. Für $y_t = 0$ wird so das reine QCD-Resultat [116, 117] reproduziert. Die Ein- und Zweischleifenanteile sind aus [56, 65, 66, 71, 73, 74] bekannt, der Term proportional zu $g_s^4 y_t^2$ stimmt mit [118] überein und die restlichen Terme lassen sich für eine SU(3)-Eichgruppe mit der Berechnung im vollen Standardmodell [80, 81] vergleichen.

Auf <http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/Progdata/ttp12/ttp12-012/> sind alle diese Ergebnisse auch in maschinenlesbarer Form verfügbar.

3.6.2 Anomale Dimensionen im eichfreien Grenzfall

Aus den Renormierungskonstanten für die Felder lassen sich mittels (3.11) die in Kap. 2.4 definierten anomalen Dimensionen der Felder berechnen. Besonders die anomale Dimension des Skalarfeldes spielt bei der Approximation des effektiven Higgs-Potentials für hohe Skalen (2.101) eine wichtige Rolle.

Die Wellenfunktionsrenormierungskonstanten für Φ_1 und Φ_2 stimmen aufgrund der SU(2)-Symmetrie der Theorie überein, was damit auch für die anomalen Dimensionen gilt. Unter Vernachlässigung der Kopplungen g_2 und g_1 wird der links- und rechtshändige Anteil der Quarks, die nicht an der Yukawa-Wechselwirkung teilnehmen, gleich renormiert. Dies gilt aber nicht für top-Quarks und linkshändige bottom-Quarks, sodass sich für diese Quarktypen verschiedene rechts- und linkshändige anomale Dimensionen ergeben. Die linkshändigen Renormierungskonstanten und damit auch anomalen Dimensionen des top- und bottom-Quarks müssen aber wiederum aufgrund der SU(2)-Symmetrie dieselben sein. Alle diese von der Theorie verlangten Übereinstimmungen

$$\gamma_2^\Phi := \gamma_2^{\Phi_1} \stackrel{!}{=} \gamma_2^{\Phi_2}, \tag{3.31}$$

$$\gamma_{2,L}^t \stackrel{!}{=} \gamma_{2,L}^b, \tag{3.32}$$

$$\gamma_2^q := \gamma_{2,L}^q \stackrel{!}{=} \gamma_{2,R}^q \stackrel{!}{=} \gamma_{2,R}^b \tag{3.33}$$

wurden auf Dreischleifenniveau im Zuge dieser Rechnung explizit getestet. Die Ergeb-

nisse wurden in [8] publiziert.

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{q(1)} &= g_s^2 C_F (1 - \xi), \\
\gamma_2^{q(2)} &= g_s^4 \left(-\frac{3}{2} C_F^2 + \frac{17}{2} C_A C_F - 2n_f T_F C_F - \frac{5}{2} \xi C_A C_F + \frac{1}{4} \xi^2 C_A C_F \right), \\
\gamma_2^{q(3)} &= 6T_F C_F g_s^4 y_t^2 + g_s^6 \left(\frac{3}{2} C_F^3 - \frac{143}{4} C_A C_F^2 + \frac{10559}{144} C_A^2 C_F + 3n_f T_F C_F^2 \right. \\
&\quad - \frac{1301}{36} n_f C_A T_F C_F + \frac{20}{9} n_f^2 T_F^2 C_F + 12\zeta_3 C_A C_F^2 - \frac{15}{2} \zeta_3 C_A^2 C_F - \frac{371}{32} \xi C_A^2 C_F \\
&\quad \left. + \frac{17}{4} \xi n_f C_A T_F C_F - \frac{3}{2} \xi \zeta_3 C_A^2 C_F + \frac{69}{32} \xi^2 C_A^2 C_F + \frac{3}{8} \xi^2 \zeta_3 C_A^2 C_F - \frac{5}{16} \xi^3 C_A^2 C_F \right). \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Im Grenzfall $y_t \rightarrow 0$ ist dies einfach das bekannte Ergebnis aus der QCD [117]. Die Feldstärkerenormierungskonstanten für top-, bottom- und leichte Quarks lassen sich bis zur Ordnung g_s^6 und $g_s^4 y_t^2$ mit den Ergebnissen aus [118] vergleichen, welche in der gebrochenen Phase des Standardmodells berechnet wurden. Für linkshändige top- und bottom-Quarks sowie rechtshändige top-Quarks findet man wegen der Yukawa-Wechselwirkung zusätzliche Terme:

$$\begin{aligned}
\gamma_{2,L}^{t(1)} &= \gamma_2^{q(1)} + \frac{1}{2} y_t^2, \\
\gamma_{2,L}^{t(2)} &= \gamma_2^{q(2)} - y_t^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} d_R \right) - 2C_F g_s^2 y_t^2, \\
\gamma_{2,L}^{t(3)} &= \gamma_2^{q(3)} - \frac{33}{4} y_t^2 \lambda^2 + 6 y_t^4 \lambda + y_t^6 \left(-\frac{3}{2} + \frac{29}{8} d_R - \frac{3}{8} d_R^2 + \frac{3}{2} \zeta_3 \right) \\
&\quad + g_s^2 y_t^4 \left(\frac{13}{2} C_F + \frac{5}{8} C_F d_R + 6\zeta_3 C_F d_R \right) \\
&\quad + g_s^4 y_t^2 \left(-\frac{51}{8} C_F^2 + \frac{31}{8} C_A C_F - \frac{3}{2} n_f T_F C_F + 6\zeta_3 C_F^2 - 15\zeta_3 C_A C_F \right), \tag{3.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{2,R}^{t(1)} &= \gamma_2^{q(1)} + y_t^2, \\
\gamma_{2,R}^{t(2)} &= \gamma_2^{q(2)} - y_t^4 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} d_R \right) - 4C_F g_s^2 y_t^2, \\
\gamma_{2,R}^{t(3)} &= \gamma_2^{q(3)} - \frac{33}{2} y_t^2 \lambda^2 + 12 y_t^4 \lambda + y_t^6 \left(-\frac{33}{16} + \frac{53}{8} d_R - \frac{3}{4} d_R^2 + 3\zeta_3 \right) \\
&\quad + g_s^2 y_t^4 \left(5C_F + \frac{5}{4} C_F d_R + 12\zeta_3 C_F d_R \right) \\
&\quad + g_s^4 y_t^2 \left(-\frac{51}{4} C_F^2 + \frac{31}{4} C_A C_F - 3n_f T_F C_F + 12\zeta_3 C_F^2 - 30\zeta_3 C_A C_F \right). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Die anomale Dimension der Skalarfelder wird zu

$$\begin{aligned}
\gamma_2^{\Phi(1)} &= d_R y_t^2, \\
\gamma_2^{\Phi(2)} &= 6\lambda^2 - \frac{9}{4}d_R y_t^4 + 5C_F d_R g_s^2 y_t^2, \\
\gamma_2^{\Phi(3)} &= -36\lambda^3 - \frac{45}{2}d_R y_t^2 \lambda^2 + 15d_R y_t^4 \lambda \\
&\quad + y_t^6 \left(-\frac{25}{16}d_R + 6d_R^2 + 3\zeta_3 d_R \right) + g_s^2 y_t^4 \left(\frac{15}{8}C_F d_R - 18\zeta_3 C_F d_R \right) \\
&\quad + g_s^4 y_t^2 \left(-\frac{119}{4}C_F^2 d_R + \frac{77}{2}C_A C_F d_R - 8n_f T_F C_F d_R + 36\zeta_3 C_F^2 d_R - 18\zeta_3 C_A C_F d_R \right)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

berechnet. Die Terme in (3.37), die nur λ als Kopplung enthalten, wurden bereits in [123, 124] vorgestellt.

Schließlich findet man für die anomale Dimension des Gluonfeldes

$$\begin{aligned}
\gamma_2^g(1) &= g_s^2 \left(-\frac{5}{3}C_A + \frac{4}{3}n_f T_F - \frac{1}{2}\xi C_A \right), \\
\gamma_2^g(2) &= -4T_F g_s^2 y_t^2 + g_s^4 \left(-\frac{23}{4}C_A^2 + 4n_f T_F C_F + 5n_f C_A T_F - \frac{15}{8}\xi C_A^2 + \frac{1}{4}\xi^2 C_A^2 \right), \\
\gamma_2^g(3) &= g_s^2 y_t^4 (9T_F + 7T_F d_R) - g_s^4 y_t^2 \left(6T_F C_F + \frac{25}{2}C_A T_F \right) \\
&\quad + g_s^6 \left(-\frac{4051}{144}C_A^3 - 2n_f T_F C_F^2 + \frac{5}{18}n_f C_A T_F C_F + \frac{875}{18}n_f C_A^2 T_F - \frac{44}{9}n_f^2 T_F^2 C_F \right. \\
&\quad - \frac{76}{9}n_f^2 C_A T_F^2 + \frac{3}{2}\zeta_3 C_A^3 + 24\zeta_3 n_f C_A T_F C_F - 18\zeta_3 n_f C_A^2 T_F - \frac{127}{16}\xi C_A^3 \\
&\quad \left. + 2\xi n_f C_A^2 T_F - \frac{9}{8}\xi \zeta_3 C_A^3 + \frac{27}{16}\xi^2 C_A^3 + \frac{3}{16}\xi^2 \zeta_3 C_A^3 - \frac{7}{32}\xi^3 C_A^3 \right),
\end{aligned} \tag{3.38}$$

was für $y_t \rightarrow 0$ mit [117] und für $y_t, \xi \rightarrow 0$ mit [116] übereinstimmt.

Auf <http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/Progdata/ttp12/ttp12-012/> sind diese Ergebnisse ebenfalls in maschinenlesbarer Form verfügbar.

Tabelle 3.6: Selbstenergien im Standardmodell (unter Vernachlässigung der Yukawa-Kopplungen der ersten und zweiten Generation sowie der nichtdiagonalen): Anzahl der von QGRAF generierten Einteilchen-irreduziblen Feynman-Diagramme (Feldersatz A).

Prozess	1 Schleife	2 Schleifen	3 Schleifen	benötigt für
$A_\mu^a A_\nu^b$	7	114	-	$Z_3^{(2g)}$
$W_\mu^1 W_\nu^1$	17	372	-	$Z_3^{(2W)}$
$W_\mu^2 W_\nu^2$	17	372	-	$Z_3^{(2W)}$
$W_\mu^3 W_\nu^3$	17	383	-	$Z_3^{(2W)}$
$B_\mu B_\nu$	12	285	-	$Z_3^{(2B)}$
$\bar{t} t$	8	374	-	$Z_2^{(2t)}$
$\bar{b} b$	8	374	-	$Z_2^{(2b)}$
$\bar{u} u$	5	187	-	$Z_2^{(2u)}$
$\bar{d} d$	5	187	-	$Z_2^{(2d)}$
$\bar{\nu}_\tau \nu_\tau$	5	194	-	$Z_2^{(2\nu_\tau)}$
$\bar{\tau} \tau$	7	290	-	$Z_2^{(2\tau)}$
$\bar{\nu}_e \nu_e$	4	145	-	$Z_2^{(2\nu_e)}$
$\bar{e} e$	4	145	-	$Z_2^{(2e)}$
$\bar{c}^a c^b$	1	10	-	$Z_3^{(2c)}$
$\bar{c}_W^1 c_W^1$	2	42	-	$Z_3^{(2c_W)}$
$\bar{c}_W^2 c_W^2$	2	42	-	$Z_3^{(2c_W)}$
$\bar{c}_W^3 c_W^3$	2	42	-	$Z_3^{(2c_W)}$
$\Phi_1^* \Phi_1$	12	380	28383	$Z_2^{(2\Phi)}$
$\Phi_2^* \Phi_2$	13	419	(32436)	$Z_2^{(2\Phi)}$

3.6.3 Dreischleifen-Betafunktion für die Higgs-Selbstkopplung

In Tab. 3.6 und Tab. 3.7 sind die Prozesse aufgelistet, die im vollen Standardmodell, unter Vernachlässigung der Yukawa-Kopplungen der ersten beiden Generationen und der nichtdiagonalen Elemente der Yukawa-Matrizen, bzw. der CKM-Matrix, unter Verwendung des Feldersatzes A (s. Tab. 3.2) generiert und berechnet wurden. Bei einigen Prozessen wurden so viele Diagramme generiert, dass eine Berechnung mit dem Feldersatz B (s. Tab. 3.3) erheblich effizienter war. Die Anzahlen der entsprechenden Diagramme sind in Tab. 3.8 gegeben.

Die Anzahlen an Diagrammen, die für den Feldersatz A zwar generiert, aber nicht berechnet wurden, sind in Klammern gesetzt. Man sieht, dass sich durch Verwendung des Satzes B die Anzahl der Diagramme für den Vier- Φ -Vertex um einen Faktor von etwa 4 von ca. $2,3 \cdot 10^6$ auf ca. $5,7 \cdot 10^5$ und für den $([O_{2\Phi}] \Phi^* \Phi)$ -Vertex um einen Faktor von ungefähr 6 reduziert. Für den Feldersatz B wurden zu Testzwecken einige Ein- und Zweischleifenkorrekturen erneut berechnet und mit der Rechnung für den Satz A verglichen. Außerdem wurde die Φ -Selbstenergie auf Dreischleifenniveau mit beiden Sätzen

Tabelle 3.7: Vertexkorrekturen im Standardmodell (unter Vernachlässigung der Yukawa-Kopplungen der ersten und zweiten Generation sowie der nicht-diagonalen): Anzahl der von QGRAF generierten Einteilchen-irreduziblen Feynman-Diagramme (Feldersatz A).

Prozess	1 Schleife	2 Schleifen	3 Schleifen	benötigt für
$[O_{2\Phi}] \Phi_1^* \Phi_1$	6	567	(69002)	Z_{m^2}
$[O_{2\Phi}] \Phi_2^* \Phi_2$	6	589	(73933)	Z_{m^2}
$\Phi_1^* \Phi_1^* \Phi_1 \Phi_1$	95	13811	(2273186)	Z_λ
$\Phi_1^* \Phi_2^* \Phi_1 \Phi_2$	91	13818	(2352247)	Z_λ
$\Phi_2^* \Phi_2^* \Phi_2 \Phi_2$	109	16250	(2829184)	Z_λ
$B_\mu B_\nu B_\rho$	26	1380	-	Test: $\langle BBB \rangle = 0$
$\bar{c}^a c^b A_\mu^c$	2	56	-	Z_{g_s}
$\bar{c}_W^3 c_W^1 W_\mu^2$	2	99	-	Z_{g_2}
$\bar{\nu}_\tau \tau \Phi_1$	8	811	-	Z_{y_τ}
$\bar{\tau} \tau \Phi_2$	10	1068	-	Z_{y_τ}
$\bar{\nu}_\tau \tau W_\mu^1$	7	843	-	Z_{g_2}
$\bar{\nu}_\tau \tau W_\mu^2$	7	843	-	Z_{g_2}
$\bar{\tau} \tau W_\mu^3$	12	1226	-	Z_{g_2}
$\bar{\tau} \tau B_\mu$	10	1062	-	Z_{g_1}
$\bar{t} b \Phi_1$	13	1410	-	Z_{y_t}, Z_{y_b}
$\bar{t} t \Phi_2$	14	1568	-	Z_{y_t}
$\bar{b} b \Phi_2$	14	1568	-	Z_{y_b}
$\bar{t} t A_\mu^a$	9	920	-	Z_{g_s}
$\bar{t} b W_\mu^1$	11	1371	-	Z_{g_2}
$\bar{t} t B_\mu$	11	1359	-	Z_{g_1}

Tabelle 3.8: Schleifenkorrekturen im Standardmodell (unter Vernachlässigung der Yukawa-Kopplungen der ersten und zweiten Generation sowie der nicht-diagonalen): Anzahl der von QGRAF generierten Einteilchen-irreduziblen Feynman-Diagramme (Feldersatz B).

Prozess	1 Schleife	2 Schleifen	3 Schleifen	benötigt für
$\Phi_1^* \Phi_1^* \Phi_1 \Phi_1$	65	5568	573692	Z_λ
$\Phi_1^* \Phi_1$	7	125	5634	$Z_2^{(2\Phi)}$
$[O_{2\Phi}] \Phi_1^* \Phi_1$	3	174	12902	Z_{m^2}
$[O_{2\Phi}] \Phi_2^* \Phi_2$	3	174	12902	Z_{m^2}
$\bar{c}^a c^b A_\mu^c$	2	52	-	Z_{g_s}
$W_\mu^1 W_\nu^1$	7	103	-	$Z_3^{(2W)}$
$\bar{c}_W^1 c_W^1$	1	10	-	$Z_3^{(2cW)}$

berechnet, was einen wichtigen Test für die Implementierung der Gruppenstruktur des vollen Standardmodells (s. Kap. 3.4) darstellt.

Mittels der in den Tabellen 3.6 und 3.7 aufgezählten Prozesse wurden alle

Standardmodell-Counterterme in Zweischleifenordnung bestimmt, wobei zu Testzwecken jede Kopplungsrenormierungskonstante auf mehrere Arten berechnet wurde.

Für die Betafunktion der Higgs-Selbstkopplung λ zur Zweischleifenordnung wurde in Übereinstimmung mit [55, 57, 58]

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda^{(1)} &= -y_\tau^4 - y_b^4 3 + g_2^4 \frac{9}{16} + g_1^2 g_2^2 \frac{3}{8} + g_1^4 \frac{3}{16} + \lambda y_\tau^2 2 + \lambda y_b^2 6 - \lambda g_2^2 \frac{9}{2} - \lambda g_1^2 \frac{3}{2} \\
&\quad + \lambda^2 12 + y_t^2 \lambda 6 - y_t^4 3, \\
\beta_\lambda^{(2)} &= y_\tau^6 5 + y_b^6 15 - g_2^4 y_\tau^2 \frac{3}{8} - g_2^4 y_b^2 \frac{9}{8} + g_2^6 \left(\frac{497}{32} - 2N_g \right) - g_1^2 y_\tau^4 2 + g_1^2 y_b^4 \frac{2}{3} \\
&\quad + g_1^2 g_2^2 y_\tau^2 \frac{11}{4} + g_1^2 g_2^2 y_b^2 \frac{9}{4} - g_1^2 g_2^4 \left(\frac{97}{96} + \frac{2}{3} N_g \right) - g_1^4 y_\tau^2 \frac{25}{8} + g_1^4 y_b^2 \frac{5}{8} \\
&\quad - g_1^4 g_2^2 \left(\frac{239}{96} + \frac{10}{9} N_g \right) - g_1^6 \left(\frac{59}{96} + \frac{10}{9} N_g \right) - \lambda y_\tau^4 \frac{1}{2} - \lambda y_b^4 \frac{3}{2} \\
&\quad + \lambda g_2^2 y_\tau^2 \frac{15}{4} + \lambda g_2^2 y_b^2 \frac{45}{4} + \lambda g_2^4 \left(-\frac{313}{16} + 5N_g \right) + \lambda g_1^2 y_\tau^2 \frac{25}{4} + \lambda g_1^2 y_b^2 \frac{25}{12} \\
&\quad + \lambda g_1^2 g_2^2 \frac{39}{8} + \lambda g_1^4 \left(\frac{229}{48} + \frac{25}{9} N_g \right) - \lambda^2 y_\tau^2 24 - \lambda^2 y_b^2 72 + \lambda^2 g_2^2 54 \\
&\quad + \lambda^2 g_1^2 18 - \lambda^3 156 - y_t^2 y_b^4 3 - y_t^2 g_2^4 \frac{9}{8} + y_t^2 g_1^2 g_2^2 \frac{21}{4} - y_t^2 g_1^4 \frac{19}{8} \\
&\quad - y_t^2 \lambda y_b^2 21 + y_t^2 \lambda g_2^2 \frac{45}{4} + y_t^2 \lambda g_1^2 \frac{85}{12} - y_t^2 \lambda^2 72 - y_t^4 y_b^2 3 - y_t^4 g_1^2 \frac{4}{3} \\
&\quad - y_t^4 \lambda \frac{3}{2} + y_t^6 15 - g_s^2 y_b^4 16 + g_s^2 \lambda y_b^2 40 + g_s^2 y_t^2 \lambda 40 - g_s^2 y_t^4 16
\end{aligned} \tag{3.39}$$

gefunden. Der Dreischleifenbeitrag lautet

$$\begin{aligned}
\beta_\lambda^{(3)} &= y_\tau^8 \left(-\frac{143}{8} - 12\zeta_3 \right) - y_b^2 y_\tau^6 \frac{297}{8} - y_b^4 y_\tau^4 72 - y_b^6 y_\tau^2 \frac{297}{8} + y_b^8 \left(-\frac{1599}{8} - 36\zeta_3 \right) \\
&\quad + g_2^2 y_\tau^6 \left(\frac{1137}{32} - 9\zeta_3 \right) + g_2^2 y_b^6 \left(\frac{3411}{32} - 27\zeta_3 \right) + g_2^4 y_\tau^4 \left(\frac{4503}{128} - \frac{273}{16} \zeta_3 - \frac{13}{4} N_g \right) \\
&\quad + g_2^4 y_b^2 y_\tau^2 \frac{9}{8} + g_2^4 y_b^4 \left(\frac{13653}{128} - \frac{819}{16} \zeta_3 - \frac{39}{4} N_g \right) + g_2^6 y_\tau^2 \left(-\frac{5739}{256} + \frac{99}{4} \zeta_3 + \frac{9}{2} N_g \right) \\
&\quad + g_2^6 y_b^2 \left(-\frac{17217}{256} + \frac{297}{4} \zeta_3 + \frac{27}{2} N_g \right) + g_2^8 \left(\frac{982291}{3072} - \frac{2781}{128} \zeta_3 - \frac{14749}{192} N_g \right. \\
&\quad \left. - 45N_g \zeta_3 - \frac{5}{3} N_g^2 \right) + g_1^2 y_\tau^6 \left(\frac{135}{32} + 33\zeta_3 \right) + g_1^2 y_b^6 \left(\frac{5111}{96} - 25\zeta_3 \right) \\
&\quad + g_1^2 g_2^2 y_\tau^4 \left(-\frac{15}{64} - \frac{381}{8} \zeta_3 \right) - g_1^2 g_2^2 y_b^2 y_\tau^2 \frac{5}{4} + g_1^2 g_2^2 y_b^4 \left(-\frac{3239}{192} - \frac{311}{8} \zeta_3 \right) \\
&\quad + g_1^2 g_2^4 y_\tau^2 \left(\frac{1833}{256} - \frac{3}{2} \zeta_3 - \frac{1}{2} N_g \right) + g_1^2 g_2^4 y_b^2 \left(\frac{4179}{256} + 9\zeta_3 + \frac{5}{2} N_g \right) \\
&\quad + g_1^2 g_2^6 \left(-\frac{54053}{3456} - \frac{405}{32} \zeta_3 - \frac{8341}{864} N_g - \frac{10}{27} N_g^2 \right) + g_1^4 y_\tau^4 \left(\frac{5697}{128} + \frac{375}{16} \zeta_3 + \frac{65}{12} N_g \right) \\
&\quad + g_1^4 y_b^2 y_\tau^2 \frac{41}{24} + g_1^4 y_b^4 \left(\frac{15137}{3456} - \frac{2035}{144} \zeta_3 - \frac{415}{36} N_g \right) + g_1^4 g_2^2 y_\tau^2 \left(\frac{6657}{256} - \frac{15}{2} \zeta_3 - \frac{5}{6} N_g \right) \\
&\quad + g_1^4 g_2^2 y_b^2 \left(\frac{4403}{256} + \frac{9}{2} \zeta_3 + \frac{25}{6} N_g \right) + g_1^4 g_2^4 \left(-\frac{64693}{3456} + \frac{873}{64} \zeta_3 + \frac{149}{648} N_g + 7N_g \zeta_3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{50}{81}N_g^2) + g_1^6 y_\tau^2 \left(\frac{3929}{256} - \frac{15}{4}\zeta_3 + \frac{55}{6}N_g \right) + g_1^6 y_b^2 \left(\frac{12043}{2304} + \frac{5}{4}\zeta_3 + \frac{95}{18}N_g \right) \\
& + g_1^6 g_2^2 \left(-\frac{29779}{6912} + \frac{75}{32}\zeta_3 - \frac{18001}{2592}N_g + \frac{61}{9}N_g \zeta_3 - \frac{250}{243}N_g^2 \right) \\
& + g_1^8 \left(-\frac{6845}{9216} + \frac{99}{128}\zeta_3 - \frac{20735}{1728}N_g + \frac{95}{9}N_g \zeta_3 - \frac{125}{81}N_g^2 \right) + \lambda y_\tau^6 \left(-\frac{1241}{8} - 66\zeta_3 \right) \\
& + \lambda y_b^2 y_\tau^4 240 + \lambda y_b^4 y_\tau^2 240 + \lambda y_b^6 \left(\frac{117}{8} - 198\zeta_3 \right) + \lambda g_2^2 y_\tau^4 \left(-\frac{1587}{8} + 171\zeta_3 \right) \\
& - \lambda g_2^2 y_b^2 y_\tau^2 27 + \lambda g_2^2 y_b^4 \left(-\frac{4977}{8} + 513\zeta_3 \right) + \lambda g_2^4 y_\tau^2 \left(-\frac{1311}{64} - \frac{117}{2}\zeta_3 - \frac{21}{4}N_g \right) \\
& + \lambda g_2^4 y_b^2 \left(-\frac{3933}{64} - \frac{351}{2}\zeta_3 - \frac{63}{4}N_g \right) + \lambda g_2^6 \left(-\frac{46489}{288} + \frac{2259}{8}\zeta_3 + \frac{3515}{36}N_g \right. \\
& \left. + 90N_g \zeta_3 + \frac{70}{9}N_g^2 \right) + \lambda g_1^2 y_\tau^4 \left(\frac{507}{8} - 117\zeta_3 \right) - \lambda g_1^2 y_b^2 y_\tau^2 9 + \lambda g_1^2 y_b^4 \left(-\frac{5737}{24} \right. \\
& \left. + 249\zeta_3 \right) + \lambda g_1^2 g_2^2 y_\tau^2 \left(-\frac{3771}{32} + 126\zeta_3 \right) + \lambda g_1^2 g_2^2 y_b^2 \left(-\frac{3009}{32} + 12\zeta_3 \right) \\
& + \lambda g_1^2 g_2^4 \left(\frac{4553}{32} - \frac{249}{8}\zeta_3 + \frac{33}{2}N_g - 6N_g \zeta_3 \right) + \lambda g_1^4 y_\tau^2 \left(-\frac{1783}{64} - \frac{123}{2}\zeta_3 - \frac{65}{4}N_g \right) \\
& + \lambda g_1^4 y_b^2 \left(-\frac{127303}{1728} - \frac{47}{6}\zeta_3 - \frac{155}{36}N_g \right) + \lambda g_1^4 g_2^2 \left(\frac{979}{8} - \frac{3}{8}\zeta_3 + \frac{95}{4}N_g - 6N_g \zeta_3 \right) \\
& + \lambda g_1^6 \left(\frac{12679}{432} + \frac{9}{8}\zeta_3 + \frac{5995}{162}N_g - \frac{190}{9}N_g \zeta_3 + \frac{1750}{243}N_g^2 \right) + \lambda^2 y_\tau^4 \left(\frac{717}{2} + 252\zeta_3 \right) \\
& - \lambda^2 y_b^2 y_\tau^2 216 + \lambda^2 y_b^4 \left(\frac{1719}{2} + 756\zeta_3 \right) + \lambda^2 g_2^2 y_\tau^2 \left(\frac{213}{4} - 144\zeta_3 \right) + \lambda^2 g_2^2 y_b^2 \left(\frac{639}{4} \right. \\
& \left. - 432\zeta_3 \right) + \lambda^2 g_2^4 \left(\frac{1995}{8} - 513\zeta_3 - 141N_g \right) + \lambda^2 g_1^2 y_\tau^2 \left(-\frac{541}{4} + 96\zeta_3 \right) \\
& + \lambda^2 g_1^2 y_b^2 \left(\frac{417}{4} - 192\zeta_3 \right) + \lambda^2 g_1^2 g_2^2 (-333 - 162\zeta_3) + \lambda^2 g_1^4 (-183 - 81\zeta_3 \\
& - \frac{235}{3}N_g) + \lambda^3 y_\tau^2 291 + \lambda^3 y_b^2 873 + \lambda^3 g_2^2 (-474 + 72\zeta_3) + \lambda^3 g_1^2 (-158 + 24\zeta_3) \\
& + \lambda^4 (3588 + 2016\zeta_3) + y_t^2 y_\tau^6 \left(-\frac{297}{8} \right) + y_t^2 y_b^2 y_\tau^4 12 + y_t^2 y_b^4 y_\tau^2 \frac{45}{8} + y_t^2 y_b^6 \left(-\frac{717}{8} \right. \\
& \left. - 36\zeta_3 \right) + y_t^2 g_2^2 y_b^4 \frac{477}{32} + y_t^2 g_2^4 y_\tau^2 \frac{9}{8} + y_t^2 g_2^4 y_b^2 \left(-\frac{351}{64} + \frac{117}{2}\zeta_3 - 12N_g \right) \\
& + y_t^2 g_2^6 \left(-\frac{17217}{256} + \frac{297}{4}\zeta_3 + \frac{27}{2}N_g \right) + y_t^2 g_1^2 y_b^4 \left(-\frac{2299}{96} + 26\zeta_3 \right) \\
& + y_t^2 g_1^2 g_2^2 y_\tau^2 \frac{29}{4} + y_t^2 g_1^2 g_2^2 y_b^2 \left(\frac{1001}{96} + \frac{31}{2}\zeta_3 \right) + y_t^2 g_1^2 g_2^4 \left(\frac{3103}{256} + \frac{27}{4}\zeta_3 + \frac{1}{2}N_g \right) \\
& + y_t^2 g_1^4 y_\tau^2 \frac{701}{24} + y_t^2 g_1^4 y_b^2 \left(-\frac{709}{64} - \zeta_3 \right) + y_t^2 g_1^4 g_2^2 \left(\frac{23521}{768} - 3\zeta_3 + \frac{5}{6}N_g \right) \\
& + y_t^2 g_1^6 \left(\frac{42943}{2304} - \frac{5}{2}\zeta_3 + \frac{215}{18}N_g \right) + y_t^2 \lambda y_\tau^4 240 + y_t^2 \lambda y_b^2 y_\tau^2 21 \\
& + y_t^2 \lambda y_b^4 \left(\frac{6399}{8} + 144\zeta_3 \right) - y_t^2 \lambda g_2^2 y_\tau^2 27 + y_t^2 \lambda g_2^2 y_b^2 \left(-\frac{531}{4} + 54\zeta_3 \right) \\
& + y_t^2 \lambda g_2^4 \left(-\frac{3933}{64} - \frac{351}{2}\zeta_3 - \frac{63}{4}N_g \right) - y_t^2 \lambda g_1^2 y_\tau^2 9 + y_t^2 \lambda g_1^2 y_b^2 \left(-\frac{929}{12} - 2\zeta_3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y_t^2 \lambda g_1^2 g_2^2 \left(-\frac{6509}{32} + 177\zeta_3 \right) + y_t^2 \lambda g_1^4 \left(-\frac{112447}{1728} - \frac{449}{6}\zeta_3 - \frac{635}{36}N_g \right) \\
& - y_t^2 \lambda^2 y_\tau^2 216 + y_t^2 \lambda^2 y_b^2 (117 - 864\zeta_3) + y_t^2 \lambda^2 g_2^2 \left(\frac{639}{4} - 432\zeta_3 \right) \\
& + y_t^2 \lambda^2 g_1^2 \left(-\frac{195}{4} - 48\zeta_3 \right) + y_t^2 \lambda^3 873 - y_t^4 y_\tau^4 72 + y_t^4 y_b^2 y_\tau^2 \frac{45}{8} + y_t^4 y_b^4 72\zeta_3 \\
& + y_t^4 g_2^2 y_b^2 \frac{477}{32} + y_t^4 g_2^4 \left(\frac{13653}{128} - \frac{819}{16}\zeta_3 - \frac{39}{4}N_g \right) + y_t^4 g_1^2 y_b^2 \left(\frac{1337}{96} - 28\zeta_3 \right) \\
& + y_t^4 g_1^2 g_2^2 \left(-\frac{1079}{192} - \frac{743}{8}\zeta_3 \right) + y_t^4 g_1^4 \left(\frac{100913}{3456} + \frac{2957}{144}\zeta_3 - \frac{115}{36}N_g \right) \\
& + y_t^4 \lambda y_\tau^2 240 + y_t^4 \lambda y_b^2 \left(\frac{6399}{8} + 144\zeta_3 \right) + y_t^4 \lambda g_2^2 \left(-\frac{4977}{8} + 513\zeta_3 \right) \\
& + y_t^4 \lambda g_1^2 \left(-\frac{2485}{24} + 57\zeta_3 \right) + y_t^4 \lambda^2 \left(\frac{1719}{2} + 756\zeta_3 \right) - y_t^6 y_\tau^2 \frac{297}{8} \\
& + y_t^6 y_b^2 \left(-\frac{717}{8} - 36\zeta_3 \right) + y_t^6 g_2^2 \left(\frac{3411}{32} - 27\zeta_3 \right) + y_t^6 g_1^2 \left(\frac{3467}{96} + 17\zeta_3 \right) \\
& + y_t^6 \lambda \left(\frac{117}{8} - 198\zeta_3 \right) + y_t^8 \left(-\frac{1599}{8} - 36\zeta_3 \right) + g_s^2 y_b^6 (-38 + 240\zeta_3) \\
& + g_s^2 g_2^2 y_b^4 \left(-\frac{31}{2} + 24\zeta_3 \right) + g_s^2 g_2^4 y_b^2 \left(\frac{651}{8} - 54\zeta_3 \right) + g_s^2 g_2^6 \left(-\frac{153}{8}N_g + 18N_g\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 g_1^2 y_b^4 \left(-\frac{641}{18} + \frac{136}{3}\zeta_3 \right) + g_s^2 g_1^2 g_2^2 y_b^2 \left(\frac{233}{4} - 36\zeta_3 \right) + g_s^2 g_1^2 g_2^4 \left(-\frac{51}{8}N_g + 6N_g\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 g_1^4 y_b^2 \left(\frac{683}{24} - 18\zeta_3 \right) + g_s^2 g_1^4 g_2^2 \left(-\frac{187}{24}N_g + \frac{22}{3}N_g\zeta_3 \right) + g_s^2 g_1^6 \left(-\frac{187}{24}N_g \right. \\
& \left. + \frac{22}{3}N_g\zeta_3 \right) + g_s^2 \lambda y_b^4 (895 - 1296\zeta_3) + g_s^2 \lambda g_2^2 y_b^2 \left(-\frac{489}{2} + 216\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 \lambda g_2^4 \left(\frac{135}{2}N_g - 72N_g\zeta_3 \right) + g_s^2 \lambda g_1^2 y_b^2 \left(-\frac{991}{18} + 40\zeta_3 \right) + g_s^2 \lambda g_1^4 \left(\frac{55}{2}N_g \right. \\
& \left. - \frac{88}{3}N_g\zeta_3 \right) + g_s^2 \lambda^2 y_b^2 (-1224 + 1152\zeta_3) + g_s^2 y_t^2 y_b^4 (-2 - 48\zeta_3) \\
& + g_s^2 y_t^2 g_2^2 y_b^2 (-8 + 96\zeta_3) + g_s^2 y_t^2 g_2^4 \left(\frac{651}{8} - 54\zeta_3 \right) + g_s^2 y_t^2 g_1^2 g_2^2 \left(\frac{249}{4} - 36\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 y_t^2 g_1^4 \left(\frac{587}{24} - 18\zeta_3 \right) + g_s^2 y_t^2 \lambda y_b^2 (82 - 96\zeta_3) + g_s^2 y_t^2 \lambda g_2^2 \left(-\frac{489}{2} + 216\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 y_t^2 \lambda g_1^2 \left(-\frac{2419}{18} + 136\zeta_3 \right) + g_s^2 y_t^2 \lambda^2 (-1224 + 1152\zeta_3) + g_s^2 y_t^4 y_b^2 (-2 - 48\zeta_3) \\
& + g_s^2 y_t^4 g_2^2 \left(-\frac{31}{2} + 24\zeta_3 \right) + g_s^2 y_t^4 g_1^2 \left(\frac{931}{18} - \frac{56}{3}\zeta_3 \right) + g_s^2 y_t^4 \lambda (895 - 1296\zeta_3) \\
& + g_s^2 y_t^6 (-38 + 240\zeta_3) + g_s^4 y_b^4 \left(-\frac{626}{3} + 32\zeta_3 + 40N_g \right) + g_s^4 \lambda y_b^2 \left(\frac{1820}{3} \right. \\
& \left. - 48\zeta_3 - 64N_g \right) + g_s^4 y_t^2 y_b^2 192 + g_s^4 y_t^2 \lambda \left(\frac{1820}{3} - 48\zeta_3 - 64N_g \right) \\
& + g_s^4 y_t^4 \left(-\frac{626}{3} + 32\zeta_3 + 40N_g \right). \tag{3.40}
\end{aligned}$$

Im Grenzfall $g_1, g_2, y_b, y_\tau \rightarrow 0$ wird das Resultat (3.26) reproduziert.

Auf <http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/Progdata/ttp13/ttp13-008/> findet sich dieses Ergebnis in maschinenlesbarer Form. Dort sind auch die allgemeine QCD-Gruppenfaktoren ausgedrückt durch C_F , C_A , d_R und T_F zu finden. Zum Zweck der besseren Lesbarkeit wurden hier direkt die Werte $C_F = \frac{4}{3}$, $C_A = 3$, $d_R = 3$ und $T_F = \frac{1}{2}$ eingesetzt.

Die Anzahl der Standardmodellgenerationen N_g hingegen wurde als freier Parameter belassen, wodurch gekennzeichnet ist, dass die entsprechenden Beiträge von Fermionschleifen stammen. Nach dem Ausschluss einer vierten Standardmodellgeneration [126] darf jedoch $N_g = 3$ als sicher gelten und wird in den folgenden numerischen Analysen verwendet.

Analog findet man für den Parameter m^2 des Higgs-Potentials

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{m^2}^{(1)}}{m^2} &= y_\tau^2 + y_b^2 3 - g_2^2 \frac{9}{4} - g_1^2 \frac{3}{4} + \lambda 6 + y_t^2 3, \\
\frac{\beta_{m^2}^{(2)}}{m^2} &= -y_\tau^4 \frac{9}{4} - y_b^4 \frac{27}{4} + g_2^2 y_\tau^2 \frac{15}{8} + g_2^2 y_b^2 \frac{45}{8} \\
&\quad + g_2^4 \left(-\frac{385}{32} + \frac{5}{2} N_g \right) + g_1^2 y_\tau^2 \frac{25}{8} + g_1^2 y_b^2 \frac{25}{24} + g_1^2 g_2^2 \frac{15}{16} \\
&\quad + g_1^4 \left(+\frac{157}{96} + \frac{25}{18} N_g \right) - \lambda y_\tau^2 12 - \lambda y_b^2 36 + \lambda g_2^2 36 + \lambda g_1^2 12 \\
&\quad - \lambda^2 30 - y_t^2 y_b^2 \frac{21}{2} + y_t^2 g_2^2 \frac{45}{8} + y_t^2 g_1^2 \frac{85}{24} - y_t^2 \lambda 36 \\
&\quad - y_t^4 \frac{27}{4} + g_s^2 y_b^2 20 + g_s^2 y_t^2 20,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{m^2}^{(3)}}{m^2} = & y_\tau^6 \left(-\frac{233}{16} + 15\zeta_3 \right) + y_b^2 y_\tau^4 72 + y_b^4 y_\tau^2 72 + y_b^6 \left(\frac{1605}{16} + 45\zeta_3 \right) \\
& + g_2^2 y_\tau^4 \left(-\frac{987}{16} + 54\zeta_3 \right) - g_2^2 y_b^2 y_\tau^2 \frac{27}{2} + g_2^2 y_b^4 \left(-\frac{3177}{16} + 162\zeta_3 \right) \\
& + g_2^4 y_\tau^2 \left(-\frac{255}{128} - \frac{81}{4}\zeta_3 - \frac{21}{8}N_g \right) + g_2^4 y_b^2 \left(-\frac{765}{128} - \frac{243}{4}\zeta_3 - \frac{63}{8}N_g \right) \\
& + g_2^6 \left(-\frac{39415}{576} + \frac{711}{16}\zeta_3 + \frac{2867}{72}N_g + 45N_g\zeta_3 + \frac{35}{9}N_g^2 \right) + g_1^2 y_\tau^4 \left(\frac{291}{16} - 36\zeta_3 \right) \\
& - g_1^2 y_b^2 y_\tau^2 \frac{9}{2} + g_1^2 y_b^4 \left(-\frac{1067}{16} + 72\zeta_3 \right) + g_1^2 g_2^2 y_\tau^2 \left(-\frac{2331}{64} + 45\zeta_3 \right) - g_1^2 g_2^2 y_b^2 \frac{865}{64} \\
& + g_1^2 g_2^4 \left(\frac{2691}{64} - \frac{405}{16}\zeta_3 + \frac{21}{4}N_g - 3N_g\zeta_3 \right) + g_1^4 y_\tau^2 \left(-\frac{3607}{128} - \frac{15}{4}\zeta_3 - \frac{65}{8}N_g \right) \\
& + g_1^4 y_b^2 \left(-\frac{79207}{3456} - \frac{35}{12}\zeta_3 - \frac{155}{72}N_g \right) + g_1^4 g_2^2 \left(\frac{1053}{32} - \frac{207}{16}\zeta_3 + \frac{55}{8}N_g - 3N_g\zeta_3 \right) \\
& + g_1^6 \left(\frac{839}{108} - \frac{51}{16}\zeta_3 + \frac{4375}{324}N_g - \frac{95}{9}N_g\zeta_3 + \frac{875}{243}N_g^2 \right) + \lambda y_\tau^4 \left(\frac{261}{4} + 72\zeta_3 \right) \\
& - \lambda y_b^2 y_\tau^2 108 + \lambda y_b^4 \left(\frac{351}{4} + 216\zeta_3 \right) + \lambda g_2^2 y_\tau^2 \left(\frac{189}{8} - 108\zeta_3 \right) + \lambda g_2^2 y_b^2 \left(\frac{567}{8} - 324\zeta_3 \right) \\
& + \lambda g_2^4 \left(\frac{11511}{32} - 162\zeta_3 - \frac{153}{2}N_g \right) + \lambda g_1^2 y_\tau^2 \left(-\frac{549}{8} + 36\zeta_3 \right) + \lambda g_1^2 y_b^2 \left(\frac{393}{8} - 132\zeta_3 \right) \\
& + \lambda g_1^2 g_2^2 \left(-\frac{1701}{16} + 36\zeta_3 \right) + \lambda g_1^4 \left(-\frac{1077}{32} - 18\zeta_3 - \frac{85}{2}N_g \right) + \lambda^2 y_\tau^2 \frac{99}{2} + \lambda^2 y_b^2 \frac{297}{2} \\
& + \lambda^2 g_2^2 (-63 - 108\zeta_3) + \lambda^2 g_1^2 (-21 - 36\zeta_3) + \lambda^3 1026 + y_t^2 y_\tau^4 72 + y_t^2 y_b^2 y_\tau^2 \frac{21}{2} \\
& + y_t^2 y_b^4 \left(\frac{4047}{16} + 36\zeta_3 \right) + y_t^2 g_2^2 y_\tau^2 \left(-\frac{27}{2} \right) + y_t^2 g_2^2 y_b^2 \left(-\frac{243}{8} - 27\zeta_3 \right) \\
& + y_t^2 g_2^4 \left(-\frac{765}{128} - \frac{243}{4}\zeta_3 - \frac{63}{8}N_g \right) - y_t^2 g_1^2 y_\tau^2 \frac{9}{2} + y_t^2 g_1^2 y_b^2 \left(-\frac{929}{24} - \zeta_3 \right) \\
& + y_t^2 g_1^2 g_2^2 \left(-\frac{3277}{64} + \frac{117}{2}\zeta_3 \right) + y_t^2 g_1^4 \left(-\frac{123103}{3456} - \frac{149}{12}\zeta_3 - \frac{635}{72}N_g \right) - y_t^2 \lambda y_\tau^2 108 \\
& + y_t^2 \lambda y_b^2 \left(-\frac{315}{2} - 216\zeta_3 \right) + y_t^2 \lambda g_2^2 \left(\frac{567}{8} - 324\zeta_3 \right) + y_t^2 \lambda g_1^2 \left(-\frac{219}{8} - 60\zeta_3 \right) \\
& + y_t^2 \lambda^2 \frac{297}{2} + y_t^4 y_\tau^2 72 + y_t^4 y_b^2 \left(\frac{4047}{16} + 36\zeta_3 \right) + y_t^4 g_2^2 \left(-\frac{3177}{16} + 162\zeta_3 \right) \\
& + y_t^4 g_1^2 \left(-\frac{431}{16} + 12\zeta_3 \right) + y_t^4 \lambda \left(\frac{351}{4} + 216\zeta_3 \right) + y_t^6 \left(\frac{1605}{16} + 45\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 y_b^4 \left(\frac{447}{2} - 360\zeta_3 \right) + g_s^2 g_2^2 y_b^2 \left(-\frac{489}{4} + 108\zeta_3 \right) + g_s^2 g_2^4 \left(\frac{135}{4}N_g - 36N_g\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 g_1^2 y_b^2 \left(-\frac{991}{36} + 20\zeta_3 \right) + g_s^2 g_1^4 \left(\frac{55}{4}N_g - \frac{44}{3}N_g\zeta_3 \right) + g_s^2 \lambda y_b^2 (-612 + 576\zeta_3) \\
& + g_s^2 y_t^2 y_b^2 (41 - 48\zeta_3) + g_s^2 y_t^2 g_2^2 \left(-\frac{489}{4} + 108\zeta_3 \right) + g_s^2 y_t^2 g_1^2 \left(-\frac{2419}{36} + 68\zeta_3 \right) \\
& + g_s^2 y_t^2 \lambda (-612 + 576\zeta_3) + g_s^2 y_t^4 \left(\frac{447}{2} - 360\zeta_3 \right) \\
& + g_s^4 y_b^2 \left(\frac{910}{3} - 24\zeta_3 - 32N_g \right) + g_s^4 y_t^2 \left(\frac{910}{3} - 24\zeta_3 - 32N_g \right).
\end{aligned}
\tag{3.42}$$

Wieder stimmen die Ein- und Zweischleifenterme mit [57, 58] überein und für $g_1, g_2, y_b, y_\tau \rightarrow 0$ findet man das Resultat (3.27) wieder.

3.6.4 Numerische Analyse an der top-Massenskala

Mit den in Tab. 2.1 gegebenen Zahlenwerten für die Kopplungen lassen sich die Betafunktionen an der Skala der top-Quarkmasse $\mu = M_t$ auswerten. Dies dient einer Abschätzung, welche Relevanz einzelne Terme bei niedrigen Energieskalen haben. Zu jedem Term wird unter der geschweiften Klammer angegeben, von welchen Kopplungen dieser herrührt.

Für $\beta_\lambda(\mu = M_t)$ in Einschleifenordnung findet man

$$\begin{aligned} \frac{\beta_\lambda^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)} = & \underbrace{-1,5 \times 10^{-2}}_{y_t^4} + \underbrace{4,3 \times 10^{-3}}_{\lambda y_t^2} - \underbrace{1,5 \times 10^{-3}}_{g_2^2 \lambda} + \underbrace{1,2 \times 10^{-3}}_{\lambda^2} \\ & + \underbrace{6,3 \times 10^{-4}}_{g_2^4} - \underbrace{1,6 \times 10^{-4}}_{\lambda g_1^2} + \underbrace{1,3 \times 10^{-4}}_{g_2^2 g_1^2} + \underbrace{2,0 \times 10^{-5}}_{g_1^4} \\ & + \underbrace{1,9 \times 10^{-6}}_{\lambda y_b^2} + \underbrace{1,6 \times 10^{-7}}_{\lambda y_\tau^2} - \underbrace{3,0 \times 10^{-9}}_{y_b^4} - \underbrace{6,3 \times 10^{-11}}_{y_\tau^4}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Man sieht, dass der wichtigste Term, derjenige $\propto y_t^4$ mit negativem Vorzeichen ist. Dieser Term ist auch hauptsächlich dafür verantwortlich, dass λ mit steigendem μ abnimmt, und zwar umso stärker, je größer die top-Quarkmasse M_t ist. Andererseits sieht man an den nächstgrößeren Termen $\propto \lambda$, dass mit einer größeren Higgs-Masse M_H die Higgs-Selbstkopplung langsamer fällt, bzw. für eine sehr große Higgs-Masse von ~ 170 GeV sogar steigen würde. Offensichtlich sind die Beiträge mit y_b und y_τ vernachlässigbar klein, was einerseits rechtfertigt, dass wir die noch kleineren Yukawa-Beiträge in der Berechnung der Betafunktionen nicht berücksichtigt hatten, andererseits sollen diese Terme nun ab der Zweischleifenordnung, wo der größte Beitrag mit y_b von $\mathcal{O}(10^{-7})$ und der größte mit y_τ von $\mathcal{O}(10^{-9})$ ist, ignoriert werden. Damit finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\beta_\lambda^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2} = & \underbrace{-6,7 \times 10^{-4}}_{g_s^2 y_t^4} + \underbrace{4,1 \times 10^{-4}}_{y_t^6} + \underbrace{2,4 \times 10^{-4}}_{g_s^2 \lambda y_t^2} - \underbrace{4,1 \times 10^{-5}}_{\lambda^2 y_t^2} \\ & + \underbrace{2,8 \times 10^{-5}}_{g_2^6} + \underbrace{2,1 \times 10^{-5}}_{g_2^2 \lambda y_t^2} + \underbrace{1,5 \times 10^{-5}}_{g_2^2 \lambda^2} - \underbrace{1,3 \times 10^{-5}}_{\lambda^3} \\ & + \underbrace{1,0 \times 10^{-5}}_{g_2^2 y_t^2 g_1^2} - \underbrace{7,0 \times 10^{-6}}_{g_2^4 y_t^2} - \underbrace{5,9 \times 10^{-6}}_{\lambda y_t^4} - \underbrace{5,3 \times 10^{-6}}_{y_t^4 g_1^2} \\ & - \underbrace{4,1 \times 10^{-6}}_{g_2^4 \lambda} + \underbrace{4,1 \times 10^{-6}}_{\lambda y_t^2 g_1^2} - \underbrace{2,7 \times 10^{-6}}_{g_2^4 g_1^2} - \underbrace{1,6 \times 10^{-6}}_{g_2^2 g_1^4} \\ & + \underbrace{1,5 \times 10^{-6}}_{\lambda^2 g_1^2} - \underbrace{1,4 \times 10^{-6}}_{y_t^2 g_1^4} + \underbrace{1,3 \times 10^{-6}}_{g_2^2 \lambda g_1^2} + \underbrace{1,1 \times 10^{-6}}_{\lambda g_1^4} \\ & - \underbrace{3,4 \times 10^{-7}}_{g_1^6} + (\text{Terme} \propto y_b^2, y_\tau^2). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Auffällig ist, dass die drei numerisch dominanten Beiträge von $\mathcal{O}(10^{-4})$ zwar im eichfreien Grenzfall produziert werden, sich aber untereinander fast aufheben. Daraus resultiert ein mit

$$\frac{\beta_\lambda^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2} = -2,2 \times 10^{-5} \quad (3.45)$$

sehr kleiner Zweischleifenbeitrag insgesamt im Vergleich zum Einschleifenresultat

$$\frac{\beta_\lambda^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)} = -1,0 \times 10^{-2}. \quad (3.46)$$

Im eichfreien Grenzfall ($g_2, g_1 \rightarrow 0$) unter Vernachlässigung aller Yukawa-Kopplungen außer y_t findet man ein ähnliches Verhalten. Hier sind der Zweischleifenbeitrag

$$\left. \frac{\beta_\lambda^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2} \right|_{g_2, g_1 \rightarrow 0} = -8,2 \times 10^{-5} \quad (3.47)$$

und der Einschleifenbeitrag

$$\left. \frac{\beta_\lambda^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)} \right|_{g_2, g_1 \rightarrow 0} = -9,1 \times 10^{-3} \quad (3.48)$$

nahe am vollen Resultat. Dabei unterscheiden sich die Zweischleifenbeiträge mit und ohne Berücksichtigung der elektroschwachen Eichkopplungen zwar um einen Faktor 3,7, sind aber sehr klein gegenüber den Einschleifenkorrekturen. Der eichfreie Grenzfall ist also zur Abschätzung der Größenordnung der Zweischleifenkorrekturen eine gute Näherung, was auch die Untersuchung der Dreischleifen-Betafunktionen zunächst im vereinfachten Modell mit den Kopplungen g_s, y_t sowie λ (s. Kap. 3.6.1) motiviert.

Auf Dreischleifenniveau betrachten wir nun die wichtigsten Terme bis $\mathcal{O}(10^{-7})$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_\lambda^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3} = & \underbrace{5,9 \times 10^{-5}}_{g_s^2 y_t^6} \underbrace{-3,7 \times 10^{-5}}_{y_t^8} \underbrace{-2,3 \times 10^{-5}}_{g_s^2 \lambda y_t^4} \underbrace{+1,9 \times 10^{-5}}_{g_s^4 \lambda y_t^2} \\ & \underbrace{-1,8 \times 10^{-5}}_{g_s^4 y_t^4} \underbrace{+5,6 \times 10^{-6}}_{\lambda^2 y_t^4} \underbrace{+5,4 \times 10^{-6}}_{g_2^2 y_t^6} \underbrace{-4,9 \times 10^{-6}}_{\lambda y_t^6} \\ & \underbrace{+2,1 \times 10^{-6}}_{g_2^6 \lambda} \underbrace{-1,6 \times 10^{-6}}_{g_2^4 \lambda y_t^2} \underbrace{+1,5 \times 10^{-6}}_{g_2^2 g_s^2 y_t^4} \underbrace{+1,2 \times 10^{-6}}_{y_t^6 g_1^2} \\ & \underbrace{-1,2 \times 10^{-6}}_{g_2^2 y_t^4 g_1^2} \underbrace{+1,0 \times 10^{-6}}_{g_2^6 y_t^2} \underbrace{+1,0 \times 10^{-6}}_{g_s^2 y_t^4 g_1^2} \underbrace{-9,0 \times 10^{-7}}_{g_2^8} \\ & \underbrace{+8,8 \times 10^{-7}}_{g_2^4 g_s^2 y_t^2} \underbrace{+7,9 \times 10^{-7}}_{g_2^2 \lambda^2 y_t^2} \underbrace{-5,8 \times 10^{-7}}_{g_2^4 \lambda^2} \underbrace{+5,5 \times 10^{-7}}_{g_2^4 y_t^4} \\ & \underbrace{-4,5 \times 10^{-7}}_{g_2^4 g_s^2 \lambda} \underbrace{+4,0 \times 10^{-7}}_{\lambda^4} \underbrace{+4,0 \times 10^{-7}}_{\lambda^3 y_t^2} + \text{kleinere Terme.} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Auch hier sind die dominanten Terme nur durch die Kopplungen g_s, y_t und λ gegeben, was die erste Berechnung der Dreischleifen-Betafunktion im eichfreien Limes zu

rechtfertigen scheint. Hier addieren sich die Terme von $\mathcal{O}(10^{-5})$ aber praktisch zu Null, sodass im eichfreien Grenzfall ohne y_τ, y_b das Gesamtergebnis

$$\left. \frac{\beta_\lambda^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3} \right|_{g_2, g_1 \rightarrow 0} = 2,3 \times 10^{-6} \quad (3.50)$$

einen Faktor 26 kleiner ausfällt als der größte individuelle Beitrag. Das Resultat im Standardmodell unter Berücksichtigung der elektroschwachen Kopplungen g_2 und g_1 ist gegeben durch

$$\frac{\beta_\lambda^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3} = 1,1 \times 10^{-5}, \quad (3.51)$$

was einen Faktor 5 größer ausfällt als im eichfreien Grenzfall. Dies bedeutet, dass die Differenz zwischen der laufenden Higgs-Selbstkopplung $\lambda(\mu)$ in Dreischleifenordnung und $\lambda(\mu)$ in Zweischleifenordnung an der top-Skala im vollen Standardmodell fünf mal so stark wächst wie im eichfreien Grenzfall. Bemerkenswert ist hierbei, dass die Dreischleifenkorrekturen zu β_λ an der top-Massenskala von derselben Größenordnung wie die Zweischleifenkorrekturen, aber mit umgekehrtem Vorzeichen, sind. Damit ist an dieser Skala der Beitrag höherer Ordnungen als der führenden zur Betafunktion sehr klein. Bei niedrigen Skalen sind in einer Präzisionsberechnung des Laufens von λ die elektroschwachen Beiträge gegenüber den übrigen Beiträgen auf Dreischleifenniveau also nicht zu vernachlässigen. Eine Untersuchung der Evolution von λ bis zur Planck-Skala zeigt allerdings, dass bei höheren Skalen der eichfreie Limes für die Dreischleifen-Beiträge eine gute Approximation wird und somit für die Untersuchung des Vakuumstabilitätsproblems im Standardmodell den dominanten Anteil liefert (s. Kap. 5.2.1).

Für $\beta_{m^2}(\mu = M_t)$ findet man in Einschleifenordnung

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{m^2}^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)m^2} = & \underbrace{1,7 \times 10^{-2}}_{y_t^2} \underbrace{-6,0 \times 10^{-3}}_{g_2^2} \underbrace{+4,8 \times 10^{-3}}_{\lambda} \underbrace{-6,1 \times 10^{-4}}_{g_1^2} \\ & \underbrace{+7,6 \times 10^{-6}}_{y_b^2} \underbrace{+6,3 \times 10^{-7}}_{y_\tau^2}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

In Zweischleifenordnung ergibt sich unter Vernachlässigung von Termen mit y_b und y_τ

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{m^2}^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2 m^2} = & \underbrace{9,6 \times 10^{-4}}_{g_2^2 y_t^2} \underbrace{-2,1 \times 10^{-4}}_{y_t^4} \underbrace{-1,6 \times 10^{-4}}_{\lambda y_t^2} \underbrace{+8,3 \times 10^{-5}}_{g_2^2 y_t^2} \\ & \underbrace{+7,7 \times 10^{-5}}_{g_2^2 \lambda} \underbrace{-3,2 \times 10^{-5}}_{g_2^4} \underbrace{-2,0 \times 10^{-5}}_{\lambda^2} \underbrace{+1,6 \times 10^{-5}}_{y_t^2 g_1^2} \\ & \underbrace{+7,9 \times 10^{-6}}_{\lambda g_1^2} \underbrace{+3,9 \times 10^{-6}}_{g_1^4} \underbrace{+2,0 \times 10^{-6}}_{g_2^2 g_1^2} + (\text{Terme} \propto y_b^2, y_\tau^2). \end{aligned} \quad (3.53)$$

In Dreischleifenordnung vernachlässigen wir wieder kleine Beiträge ab $\mathcal{O}(10^{-7})$, was zu

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{m^2}^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3 m^2} = & \underbrace{+7,4 \times 10^{-5}}_{g_s^4 y_t^2} \underbrace{-5,6 \times 10^{-5}}_{g_s^2 y_t^4} \underbrace{+2,7 \times 10^{-5}}_{y_t^6} \underbrace{+8,7 \times 10^{-6}}_{\lambda y_t^4} \\
& \underbrace{+5,7 \times 10^{-6}}_{g_2^6} \underbrace{-4,0 \times 10^{-6}}_{g_2^4 y_t^2} \underbrace{-3,8 \times 10^{-6}}_{g_2^2 \lambda y_t^2} \underbrace{+3,1 \times 10^{-6}}_{g_s^2 \lambda y_t^2} \\
& \underbrace{-1,7 \times 10^{-6}}_{g_2^4 g_s^2} \underbrace{+9,7 \times 10^{-7}}_{g_2^2 g_s^2 y_t^2} \underbrace{+5,7 \times 10^{-7}}_{g_s^2 y_t^2 g_1^2} \underbrace{+5,4 \times 10^{-7}}_{\lambda^3} \\
& \underbrace{+5,4 \times 10^{-7}}_{\lambda^2 y_t^2} + \text{kleinere Terme}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

führt. Die starke gegenseitige Aufhebung von Termen, wie wir sie bei β_λ vorfanden, ist hier nicht gegeben, sodass der Gesamteffekt der Betafunktion von der gleichen Größenordnung ist wie die größten individuellen Beiträge. Der eichfreie Limes in der höchsten betrachteten Schleifenordnung scheint auch hier eine gute Näherung zu sein. Auf Dreischleifenniveau fällt allerdings auf, dass der Term $\propto g_2^6$ nur eine Größenordnung kleiner als die drei dominanten Beiträge ist und somit die Berechnung der elektroschwachen Korrekturen durchaus eine sinnvolle Verbesserung darstellt.

Im vollen Standardmodell findet man

$$\frac{\beta_{m^2}^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)m^2} = 1,5 \times 10^{-2}, \tag{3.55}$$

$$\frac{\beta_{m^2}^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2 m^2} = 7,3 \times 10^{-4} \tag{3.56}$$

und

$$\frac{\beta_{m^2}^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3 m^2} = 5,3 \times 10^{-5} \tag{3.57}$$

als Gesamtergebnis an der top-Skala. Im eichfreien Grenzfall und ohne y_τ, y_b ergeben sich mit

$$\frac{\beta_{m^2}^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)m^2} = 2,2 \times 10^{-2}, \tag{3.58}$$

$$\frac{\beta_{m^2}^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2 m^2} = 5,7 \times 10^{-4} \tag{3.59}$$

und

$$\frac{\beta_{m^2}^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3 m^2} = 5,7 \times 10^{-5} \tag{3.60}$$

sehr ähnliche Werte. Insbesondere in Dreischleifenordnung unterscheiden sich die Resultate nur um 4×10^{-6} , was zeigt, dass der eichfreie Grenzfall hier eine gute Näherung darstellt.

Abschließend soll noch das Ergebnis (3.28) für die top-Yukawa-Kopplung im vereinfachten Modell mit den Kopplungen g_s , y_t und λ untersucht werden. Auf Einschleifeniveau findet man die Beiträge

$$\frac{\beta_{y_t}^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)} = \underbrace{-3,2 \times 10^{-2}}_{g_s^2 y_t} + \underbrace{1,2 \times 10^{-2}}_{y_t^3}, \quad (3.61)$$

was zeigt, dass der größte Effekt von der QCD stammt. Dies setzt sich auch in Zweischleifenordnung fort, wo

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{y_t}^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2} = & \underbrace{-3,8 \times 10^{-3}}_{g_s^4 y_t} + \underbrace{8,1 \times 10^{-4}}_{g_s^2 y_t^3} - \underbrace{1,7 \times 10^{-4}}_{y_t^5} - \underbrace{2,5 \times 10^{-5}}_{\lambda y_t^3} \\ & + \underbrace{1,8 \times 10^{-6}}_{\lambda^2 y_t} \end{aligned} \quad (3.62)$$

gilt. In Dreischleifenordnung sind ebenfalls die QCD-Beiträge dominant und da keine allzu starke Aufhebung zwischen den individuellen Beiträgen zu beobachten ist, kann davon ausgegangen werden, dass hier die Approximation $g_2, g_1 \rightarrow 0$ gerechtfertigt ist:

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{y_t}^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3} = & \underbrace{-1,9 \times 10^{-4}}_{g_s^6 y_t} + \underbrace{7,0 \times 10^{-5}}_{g_s^4 y_t^3} - \underbrace{2,0 \times 10^{-5}}_{g_s^2 y_t^5} + \underbrace{4,7 \times 10^{-6}}_{y_t^7} \\ & + \underbrace{2,3 \times 10^{-6}}_{\lambda y_t^5} + \underbrace{2,9 \times 10^{-7}}_{g_s^2 \lambda y_t^3} - \underbrace{8,9 \times 10^{-9}}_{\lambda^3 y_t} + \underbrace{6,4 \times 10^{-9}}_{\lambda^2 y_t^3}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Für die Gesamteffekte der einzelnen Schleifenordnungen erhält man

$$\frac{\beta_{y_t}^{(1)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)} = -2,1 \times 10^{-2}, \quad (3.64)$$

$$\frac{\beta_{y_t}^{(2)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^2} = -3,1 \times 10^{-3} \quad (3.65)$$

und

$$\frac{\beta_{y_t}^{(3)}(\mu = M_t)}{(16\pi^2)^3} = -1,3 \times 10^{-4}, \quad (3.66)$$

was demonstriert, dass hier jede Schleifenordnung die Genauigkeit des Ergebnisses um ungefähr eine Größenordnung verbessert.

Berechnung von $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen aus On-shell-Parametern

4.1 Definitionen von Massen und die Relevanz von Tadpole-Beiträgen

In Kap. 2.2 wurde die Erzeugung von Massen im Standardmodell durch den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung im Higgs-Sektor eingeführt. Entscheidend ist, dass die nicht-verschwindende klassische Feldstärke

$$|\Phi_{\text{cl}}| = |\langle 0|\Phi|0\rangle| = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (4.1)$$

dazu führt, dass die Wechselwirkung der übrigen Felder mit dem skalaren Dublett $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ nicht als kleine Störung zur wechselwirkungsfreien Theorie aufgefasst werden kann. Daher trennt man das Skalarfeld gemäß (2.25) in

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - i\chi) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

auf und rechnet die Terme, welche v enthalten, der freien Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{free}}$ und nicht der Wechselwirkungs-Lagrangedichte \mathcal{L}_{int} zu. Die Wechselwirkungen mit dem Higgs-Feld und den Goldstone-Bosonen sind dann wieder kleine Störungen, weshalb nicht Φ_1 und Φ_2 , sondern H, χ und Φ^+ quantisiert werden und folglich Operatoren sind. Der Vakuumerwartungswert v hingegen ist eine klassische Größe mit Massendimension Eins. Die Einführung von Massen in die freie Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{free}}$ führt zu massiven Propagatoren und damit dazu, dass massive Tadpole-Diagramme, also solche Diagramme, in die kein äußerer Impuls fließt, nicht wie im masselosen Fall Null sind. Sowohl der Vakuumerwartungswert v als auch die daraus entstehenden Massen müssen

renormiert werden, um weiterhin UV-endliche Ergebnisse zu erhalten. Die Definition des Parameters v in (4.2) und damit die Aufteilung in $\mathcal{L}_{\text{free}}$ und \mathcal{L}_{int} ist aber nicht eindeutig. Im Folgenden werden drei mögliche Feldaufteilungen vorgestellt:

- 1) Eine mögliche Definition von v im $\overline{\text{MS}}$ -Schema ist

$$v := \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \quad (4.3)$$

wie auf Baumgraphenniveau mit den $\overline{\text{MS}}$ -Parametern m^2 und λ . Das effektive v bei einer bestimmten Skala μ ist damit durch die Evolution von m^2 und λ festgelegt. Man kann also von der Lagrangedichte (2.1) des Standardmodells in der ungebrochenen Phase ausgehen und den Parameter m^2 gemäß (4.3) ersetzen, wobei alle Counterterme, die in der ungebrochenen Phase berechnet wurden beibehalten werden. Die Feynman-Regeln ergeben sich dann, indem den Definitionen (2.33) und (2.34) folgend die Ersetzungen

$$\lambda v^2 \rightarrow \frac{m_H^2}{2}, \quad (4.4)$$

$$y_t v \rightarrow \sqrt{2} m_t \quad (4.5)$$

vorgenommen werden. Die leichteren Quarks sollen in diesem Kapitel vernachlässigt werden. Ausgehend davon, dass diese Counterterme für die Betafunktionen (Kap. 3) bereits berechnet wurden, ist dies ein naheliegendes Vorgehen und soll für die Rechnungen im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden. Der Preis für diese einfache Definition und die Übertragung der Feynman-Regeln und Counterterme aus der ungebrochenen Phase des Standardmodells ist die Notwendigkeit Tadpole-Diagramme zu berücksichtigen. Daher stimmt mit der Definition (4.3) die Gleichung (4.1) nur noch auf Baumgraphenniveau. In höheren Ordnungen gilt

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \left(\begin{array}{c} \langle 0|\Phi^+|0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \langle 0|H|0\rangle - i\langle 0|\chi|0\rangle) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \langle 0|H|0\rangle) \end{array} \right) \quad (4.6)$$

und damit

$$|\Phi_{\text{cl}}\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} + \frac{\langle 0|H|0\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (4.7)$$

Die Beiträge zu $\langle 0|H|0\rangle$ in Einschleifenordnung sind in Abb. 4.1 gezeigt. Durch Einsetzen von (4.2) in die Lagrangedichte (2.13) für den skalaren Sektor sowie die zugehörige Counterterm-Lagrangedichte (2.66) erhält man einen Term $\propto H v^3$, welcher auf die Feynman-Regel

$$\delta Z_H = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \end{array} = (\lambda \delta Z_{\Phi^2} + \delta Z_1^{(4\Phi)}) v^3 \quad (4.8)$$

mit den Renormierungskonstanten aus (2.66) führt.

- 2) Eine Möglichkeit (4.1) zu erhalten wäre eine zusätzliche endliche Verschiebung des Parameters v aus (4.3) um einen Wert δv . So kann man beispielsweise die Zerlegung

$$\Phi = \left(\begin{array}{c} \Phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v - \delta v + H - i\chi) \end{array} \right) \quad (4.9)$$

$$\langle 0|H|0\rangle = \text{1PI} = \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} + \text{Diagramm 3} =: \delta Z_H$$

Abbildung 4.1: Feynman-Diagramme zur Berechnung von $\langle 0|H|0\rangle$ in Einschleifenordnung. Der gelbe Kreis steht für die Summe aller möglichen Einteilchen-irreduziblen (1PI) Diagramme. δZ_H enthält die Einschleifencounterterme zu den beiden ersten Diagrammen.

statt (4.2) definieren, wobei $v_0 := v - \delta v$ zur freien Lagrangedichte gezählt wird und δv Ordnung für Ordnung in Störungstheorie so bestimmt wird, dass die Summe aller Tadpole-Beiträge Null ist, also $\langle 0|H|0\rangle = 0$ gilt. Dabei ist der Tadpole-Counterterm (s. Abb. 4.1), der sich aus der Ersetzungen (4.9) in (2.13) und (2.66) ergibt

$$\delta Z_H = \lambda v^2 \delta v - 3\lambda v \delta v^2 + \lambda \delta v^3 + \lambda v^2 \delta Z_{\Phi^2}(v - \delta v) + \delta Z_1^{(4\Phi)}(v - \delta v)^3 \quad (4.10)$$

zu verwenden.

Hat man aus dieser Bedingung δv bis zur benötigten Schleifenordnungen bestimmt, so kann man bei der Berechnung aller weiteren Greensfunktionen die Tadpole-Diagramme ignorieren, muss aber δv in den Feynman-Regeln berücksichtigen. Man beachte, dass man auf diese Art in höheren Schleifenordnungen andere $\overline{\text{MS}}$ -Massen als in (4.4) und (4.5), nämlich

$$m_H^2 = \lambda (2v^2 - 6\delta v v + 3\delta v^2), \quad (4.11)$$

$$m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}}(v - \delta v), \quad (4.12)$$

erhält. Außerdem treten auch Massencounterterme proportional zu δv auf, sowohl für das Higgs-Boson und top-Quark als auch für die auf Baumgraphenniveau masselosen Goldstone-Bosonen. Dies ist offensichtlich, wenn man (4.9) in die Lagrangedichten für den Higgs- und Yukawa-Sektor (2.13) und (2.22) samt der zugehörigen Counterterm-Lagrangedichten (2.13) und (2.64) einsetzt. Eine solche Massendefinition wird z.B. in [77, 78, 127] für die Konvertierung von $\overline{\text{MS}}$ - in On-shell-Parameter verwendet. Außerdem bietet sich diese $\overline{\text{MS}}$ -Massendefinition an, wenn nicht von der ungebrochenen Phase des Standardmodells ausgegangen wird, sondern die gebrochene Phase mit Massentermen die Ausgangsposition ist und auch alle Renormierungskonstanten für die entsprechende Lagrangedichte berechnet werden. Dies ist z.B. in [118, 128, 129] der Fall.

3) Eine dritte Möglichkeit wäre δv so zu wählen, dass in jeder Ordnung

$$v^{\text{os}} := v - \delta v = \left(\sqrt{2}G_F\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

mit der Fermi-Konstanten G_F des Myon-Zerfalls erreicht wird. Damit würde sich z.B. die top-Quarkmasse

$$m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}}(v - \delta v) = \frac{y_t}{\sqrt{2}}v^{\text{os}} \quad (4.14)$$

unter Renormierungsgruppentransformationen wie die top-Yukawa-Kopplung verhalten. Eine solche Definition wird beispielsweise in [130] vorgeschlagen.

Man sieht, dass die Definition einer Masse im $\overline{\text{MS}}$ -Schema nicht eindeutig ist. Jede $\overline{\text{MS}}$ -Masse korrespondiert hierbei zu einer Festlegung von v bzw. $v_0 := v - \delta v$.¹ Dies ist unproblematisch, da weder v noch $\overline{\text{MS}}$ -Massen Beobachtungsgrößen sind. Die dimensionslosen Kopplungskonstanten des Standardmodells, wie z.B. λ oder y_t hingegen sind im $\overline{\text{MS}}$ -Schema eindeutig festgelegt.

Der lineare Zusammenhang zwischen m_t und v_0 in (4.12) lässt erwarten, dass zumindest auf Einschleifenniveau y_t unabhängig von δv ist. Tatsächlich wird sich im Folgenden zeigen, dass sich die Tadpole-Beiträge zur Berechnung der $\overline{\text{MS}}$ -top-Masse aus der Polmasse und die Tadpole-Beiträge zur Berechnung von v aus G_F gerade kompensieren. In (4.11) ist dies nicht der Fall, da sich dieser Massenterm aus den beiden Termen $m^2 \frac{H^2}{2}$ und $6 \lambda (v - \delta v)^2 \frac{H^2}{4}$ ergibt, welche aus (4.9) in (2.13) folgen. Damit ist m_H nicht proportional zu v_0 . In höheren Schleifenordnungen ist der Einfluss von δv bzw. der Beitrag von Tadpole-Diagrammen nicht trivial, da δv nicht nur in die Massenterme und den Tadpole-Term der Lagrangedichte eingeht, sondern beispielsweise auch in die Feynman-Regel für den Drei-Higgs-Vertex.

Tadpole-Beiträge können also durch die Definition einer entsprechenden $\overline{\text{MS}}$ -Masse ausgenommen und so lange ignoriert werden, wie der Parameter v nicht explizit benötigt wird. Dies ist beispielsweise in der massiven QCD mit den Parametern m_f und α_s der Fall. In der QCD gibt es auch keine weiteren Feynman-Regeln, in denen δv steht. Möchte man aber die dimensionslosen Kopplungen λ , y_t , usw. extrahieren, gehen Tadpole-Beiträge entweder direkt oder mittelbar über δv in die Rechnung ein.

Für den Rest dieses Kapitels wird das Standardmodell in der gebrochenen Phase mit der ersten Definition (4.2) sowie (4.3) für die Aufspaltung des Skalarfeldes verwendet.

Experimentell zugängliche Beobachtungsgrößen sind Wirkungsquerschnitte und Zerfallsbreiten. Für freie Teilchen korrespondiert die Polmasse zur Lage einer Resonanz in solchen Größen, kann also selbst als Observable gelten. Quarks lassen sich nur in gebundenen Farb-Singulett-Zuständen beobachten, weshalb die Massen dieser Hadronen Observablen sind, nicht aber die der einzelnen Quarks. Da das top-Quark nicht hadronisiert, sondern zuvor zerfällt, lässt es sich in Rechnungen als freies Teilchen mit kurzer Lebensdauer, welches durch seine Polmasse und Zerfallsbreite charakterisiert ist, beschreiben. Diese Approximation ist allerdings mit einer intrinsischen Unsicherheit verbunden, da die Selbstenergie des top-Quarks auch Beiträge enthält, welche aus der nicht perturbativ beschreibbaren Impulsraumregion mit $|p| \lesssim \Lambda_{\text{QCD}} \sim 200 \text{ MeV}$ stammen. Diese sogenannten Renormalon-Beiträge verursachen eine Ungenauigkeit der Polmasse von der Größenordnung Λ_{QCD} , wenn man diese zu den Parametern der Lagrangedichte in Beziehung setzen möchte [131–134]. Da die experimentelle Unsicherheit bei Messungen der top-Quarkmasse allerdings gegenwärtig deutlich größer ist, $\sigma_{M_t} = 0,76 \text{ GeV}$ bei einer kombinierten Analyse von ATLAS, CMS und D0 [36], ist eine Berechnung der $\overline{\text{MS}}$ -top-Yukawa-Kopplung aus der top-Polmasse eine gute Ap-

¹ In der massiven QCD, wo Fermionmassen und die starke Kopplung als Parameter der Theorie auftauchen wird diese Festlegung implizit durch eine Behandlungsvorschrift für Tadpole-Diagramme getroffen.

proximation.

Zukünftig soll die top-Quarkmasse an einem linearen e^+e^- -Beschleuniger deutlich präziser gemessen werden. In diesem Fall sind die PS-Masse (potential subtracted) [134] oder die Masse der $t\bar{t}$ -Resonanz an der Produktionsschwelle (1S-Masse) [135] geeignetere Definitionen, da sie nicht von der Unsicherheit durch Renormalonen beeinflusst sind.

4.2 Von On-shell-Parametern zu $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen

Die Bestimmung der $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen bei einer bestimmten Skala, hier der top-Polmasse, erfolgt durch perturbative Berechnung von Beobachtungsgrößen, wie Polmassen und Wirkungsquerschnitten, unter Verwendung der Feynman-Regeln, welche aus der Lagrangedichte (2.1) mit der Ersetzung (4.2) resultieren. Für jede Messgröße erhält man so eine Gleichung, welche neben der Beobachtungsgröße die $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen und v aus (4.2) als Parameter enthält. Berücksichtigt man N Kopplungen, werden also $N + 1$ Bestimmungsgleichungen benötigt.

Betrachten wir im Folgenden ein vereinfachtes Modell, in dem die elektroschwachen Kopplungen sowie alle Yukawa-Kopplungen außer y_t vernachlässigt werden, so enthält die Lagrangedichte in der gebrochenen Phase des Standardmodells die Parameter g_s, y_t, λ und v oder alternativ g_s, m_t, m_H und v . Da $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ direkt im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bestimmt wird [41], können wir g_s als bekannt voraussetzen. y_t und λ hingegen werden aus der Polmasse des top-Quarks und der des Higgs-Bosons bestimmt. Um den verbleibenden Parameter v zu eliminieren, kann die Zerfallskonstante G_F des Myon-Zerfalls herangezogen werden.

4.2.1 Polmassen und die Bestimmung von v

Für freie Teilchen ist die physikalische Masse der Realteil des Pols des vollen Propagators einschließlich aller Quantenkorrekturen. Dieser lässt sich mit Hilfe der Selbstenergie des entsprechenden Feldes zu den Parametern der Lagrangedichte in Beziehung setzen. Für ein skalares Teilchen, wie beispielsweise das Higgs-Boson, ist der volle Propagator gegeben durch

$$\begin{aligned}
 iS_H(p) &:= \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | H(x) H(0) | 0 \rangle \\
 &= \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \quad (4.15) \\
 &= \frac{i}{p^2 - m_H^2 - \Pi_H(p^2, m_H^2, \{g_i\}, \{m_i\})}
 \end{aligned}$$

mit der Selbstenergie

$$-i\Pi_H(p^2, m_H^2, \{g_i\}, \{m_i\}) = \text{---} \circ \text{---}, \quad (4.16)$$

welche bis zur Zweischleifenordnung aus den in Abb. 4.2 gezeigten Einteilchen-irreduziblen (1PI) und Tadpole-Beiträgen besteht und von allen Kopplungen $\{g_i\}$ und

allen übrigen Massen $\{m_i\}$ der Theorie abhängt. Der freie Higgs-Propagator in der gebrochenen Phase des Standardmodells hat die Gestalt

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \text{---} \end{array} = \frac{i}{p^2 - m_H^2} \quad (4.17)$$

mit der $\overline{\text{MS}}$ -Higgs-Masse $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ (vgl. (2.33)). Alternativ kann man den Nenner des vollen Propagators auch durch die zugehörige nackte Masse $m_{H,B}$ oder direkt durch die Polmasse M_H ausdrücken:

$$\begin{aligned} S_H^{-1}(p) &= p^2 - m_H^2 - \Pi_H(p^2, m_H^2, \{g_i\}, \{m_i\}) \\ &= p^2 - m_{H,B}^2 - \Pi_H^B(p^2, m_B^2, \{g_{i,B}\}, \{m_{i,B}\}) \\ &= p^2 - M_H^2 - \Pi_H^{\text{OS}}(p^2, M_H^2, \{g_i\}, \{m_i\}), \end{aligned} \quad (4.18)$$

wodurch die nackte Selbstenergie Π^B und die On-shell-Selbstenergie Π^{OS} definiert werden. Bei $p^2 = M_H^2$ hat der Realteil des Propagatorennenners (4.18) eine Nullstelle. Der Imaginärteil von (4.18) gibt die Zerfallsbreite Γ_H des Teilchens an:

$$m_H^2 + \Pi_H(p^2 = M_H^2, m_H^2, \{g_i\}, \{m_i\}) = M_H^2 - i\Gamma_H. \quad (4.19)$$

Die drei in (4.18) verwendeten Massen und damit auch die Selbstenergien hängen durch die Renormierungsvorschrift

$$m_{H,B} = Z_{m_H}^{\overline{\text{MS}}} m_H = Z_{M_H}^{\text{OS}} M_H \quad (4.20)$$

zusammen. Da sowohl die $\overline{\text{MS}}$ -Masse m_H als auch die Polmasse M_H endlich sind, ist es auch ihr Verhältnis

$$Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} := \frac{m_H}{M_H} = \frac{Z_{M_H}^{\text{OS}}}{Z_{m_H}^{\overline{\text{MS}}}}. \quad (4.21)$$

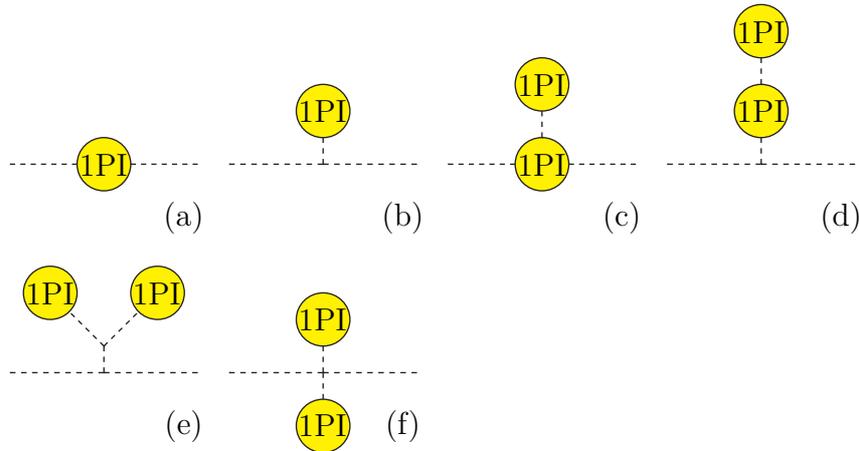


Abbildung 4.2: Feynman-Diagramme für die Higgs-Selbstenergie bis zur Zweischleifenordnung

Damit kann durch die Relation

$$m_H = Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} M_H = \left(1 + \delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}\right) M_H \quad (4.22)$$

die $\overline{\text{MS}}$ -Masse in der Rechnung zugunsten der Polmasse eliminiert werden, um dann $\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ aus der Bedingung (4.19) bzw.

$$\Pi_H^{\text{OS}}(p^2 = M_H^2) = 0 \quad (4.23)$$

mit

$$\Pi_H^{\text{OS}}(p^2 = M_H^2) = \Pi_H(p^2 = M_H^2) + \left[2\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} + \left(\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}\right)^2\right] M_H^2 \quad (4.24)$$

Ordnung für Ordnung in Störungstheorie zu bestimmen. Die Einschleifenbeiträge zu δZ_H müssen in Einschleifendiagramme eingesetzt werden, um die im $\overline{\text{MS}}$ -Schema in einigen Zweischleifendiagrammen auftretenden infraroten Divergenzen zu kompensieren. Tatsächlich liefert die Bedingung (4.23) ein komplexes $\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$, wobei nur der Realteil zum Verhältnis $\frac{m_H}{M_H}$ beiträgt und der Imaginärteil eingesetzt in Einschleifendiagramme zu einem IR-endlichen Imaginärteil der Zweischleifendiagramme führt. Zur Berechnung von $\frac{m_H}{M_H}$ wäre statt (4.23) auch die schwächere Bedingung

$$\text{Re} \left[\Pi_H^{\text{OS}}(p^2 = M_H^2) \right] = 0 \quad (4.25)$$

ausreichend.

Für Fermionen, wie beispielsweise das top-Quark, ergibt sich analog der volle Propagator

$$\begin{aligned} iS_t(p) &:= \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | \bar{t}(x) t(0) | 0 \rangle \\ &= \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m_t - \Sigma_t(\not{p}, m_t, \{g_i\}, \{m_i\})}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

worin die Selbstenergie

$$-i\Sigma_t(\not{p}, m_t, \{g_i\}, \{m_i\}) = \text{---} \overset{p}{\circ} \text{---} \quad (4.27)$$

und der freie Propagator

$$\text{---} \overset{p}{\longrightarrow} \text{---} = \frac{i}{\not{p} - m_t} \quad (4.28)$$

mit der $\overline{\text{MS}}$ -top-Masse $m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}}v$ (vgl. (2.34)) verwendet werden. Die relevanten Diagrammtypen zur Berechnung von Σ_t bis zur Zweischleifenordnung sind in Abb. 4.3 dargestellt. Auch hier kann analog zu (4.18) der Nenner des vollen Propagators durch nackten Größen $m_{t,B}$ und Σ_t^B bzw. durch die Polmasse M_t und die On-shell-Selbstenergie Σ_t^{OS} ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} S_t^{-1}(p) &= \not{p} - m_t - \Sigma_t(\not{p}, m_t, \{g_i\}, \{m_i\}) \\ &= \not{p} - m_{t,B} - \Sigma_t^B(\not{p}, m_{t,B}, \{g_{i,B}\}, \{m_{i,B}\}) \\ &= \not{p} - M_t - \Sigma_t^{\text{OS}}(\not{p}, M_t, \{g_i\}, \{m_i\}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Polmasse M_t wird dadurch definiert, dass für $\not{p} = M_t$ der Realteil von (4.29) Null wird. Der Imaginärteil von (4.29) lässt sich wiederum als Zerfallsbreite Γ_t des Fermions interpretieren:

$$m_t + \Sigma_t(\not{p} = M_t, m_t, \{g_i, m_i\}) = M_t - i\Gamma_t. \quad (4.30)$$

Auch im Falle der Fermionen sind die drei in (4.29) verwendeten Massen und folglich auch die Selbstenergien durch

$$m_{t,B} = Z_{m_t}^{\overline{\text{MS}}} m_t = Z_{M_t}^{\text{OS}} M_t \quad (4.31)$$

verknüpft und wir können die endliche Renormierungskonstante

$$Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} := \frac{m_t}{M_t} = \frac{Z_{M_t}^{\text{OS}}}{Z_{m_t}^{\overline{\text{MS}}}}. \quad (4.32)$$

definieren, mittels derer die $\overline{\text{MS}}$ -Masse durch die Polmasse ausgedrückt werden kann:

$$m_t = Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} M_t = \left(1 + \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}\right) M_t, \quad (4.33)$$

woraus mit (4.29) unmittelbar

$$\Sigma_t^{\text{OS}} = \Sigma_t + \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} M_t \quad (4.34)$$

folgt. Aus der Bedingung (4.30) wird $\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ Ordnung für Ordnung in Störungstheorie bestimmt.

Wie im Fall des Higgs-Bosons wird diese zusätzliche Renormierungskonstante in höheren Schleifenordnungen benötigt, um zusammen mit den bereits in der ungebrochenen Phase des Standardmodells bestimmten UV-Renormierungskonstanten endliche Ergebnisse zu erhalten. Der Grund dafür, dass die ab der Zweischleifenordnung auftretenden IR-Divergenzen so aufgehoben werden können liegt darin, dass Polmassen IR-endlich sind. Außerdem sind sie Renormierungsgruppen-invariant (RGI), hängen also nicht von der Renormierungsskala μ ab. Dies wurde für den Fermionpropagator in Theorien ohne γ_5 , also beispielsweise für die QCD, in [136] bewiesen. Die Idee ist zu zeigen, dass die Polmasse zum einen vollständig durch renormierte Größen ausgedrückt werden kann, womit sie endlich ist, zum anderen aber auch vollständig durch nackte Größen beschrieben werden kann, woraus die RGI-Eigenschaft folgt. Für das komplette Standardmodell wurde die Eichunabhängigkeit und IR-Endlichkeit der Polmassen in [137] gezeigt. Für die Higgs- und die top-Quark-Selbstenergie im eichfreien Limes wurde im Rahmen dieser Arbeit in Zweischleifenordnung explizit gezeigt, dass auf diese Art endliche Ergebnisse erzielt werden (vgl. Kap. 4.3).

Für skalare Teilchen ist die Selbstenergie ebenfalls ein Skalar. Im Fall des top-Quarks lässt sich die im Spinorraum matrixwertige Selbstenergie in

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{\text{OS}}(\not{p}, m_t, \{g_i, m_i\}) &= M_t \Sigma_S(p^2, m_t, \{g_i, m_i\}) + \not{p} \Sigma_V(p^2, m_t, \{g_i, m_i\}) \\ &\quad + \not{p} \gamma_5 \Sigma_A(p^2, m_t, \{g_i, m_i\}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

mit den skalaren Funktionen Σ_S , Σ_V und Σ_A aufteilen. Neben dem skalaren (S), vektoriellen (V) und axialen (A) Anteil, wäre im Allgemeinen auch ein pseudoskalarer

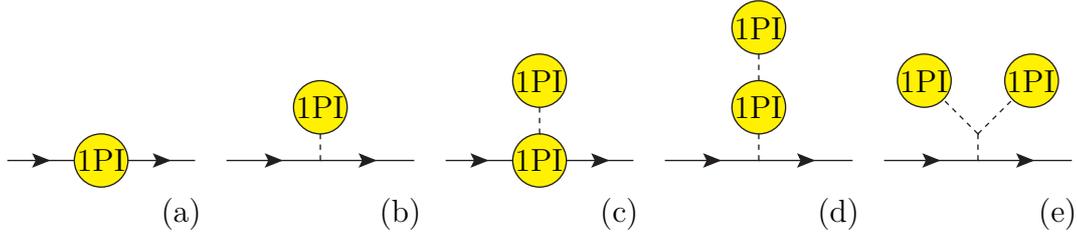


Abbildung 4.3: Feynman-Diagramme für die top-Quark-Selbstenergie bis zur Zweischleifenordnung

(PS) Term denkbar, der die Form $M_t \gamma_5 \Sigma_{\text{PS}}$ hätte. Beim top-Quark im Standardmodell tritt ein solcher Term allerdings nicht auf, was in der Rechnung in Kap. 4.3 für den eichfreien Limes in Zweischleifenordnung explizit überprüft wurde.

In [138] wurde für den allgemeineren Fall $\Sigma_{\text{PS}} \neq 0$ die γ_5 -Struktur des vollen Propagators abgespalten, was auf eine effektive Selbstenergie Σ_{eff} zur Berechnung des Pols führt. Für $\Sigma_{\text{PS}} = 0$ vereinfacht sich diese Formel zu

$$\frac{i}{\not{p} - M_t - \Sigma^{\text{OS}}} = \frac{i}{\not{p} - M_t - \Sigma_{\text{eff}}} \left[1 - \frac{\not{p} \Sigma_{\text{A}}}{\not{p} - (\not{p} \Sigma_{\text{V}} + M_t \Sigma_{\text{S}}) + M_t (1 + 2 \Sigma_{\text{S}})} \gamma_5 \right] \quad (4.36)$$

mit der effektiven Selbstenergie

$$\Sigma_{\text{eff}}(\not{p}) = \not{p} \Sigma_{\text{V}} + M_t \Sigma_{\text{S}} + \frac{p^2 \Sigma_{\text{A}}^2}{\not{p} - (\not{p} \Sigma_{\text{V}} + M_t \Sigma_{\text{S}}) + M_t (1 + 2 \Sigma_{\text{S}})}, \quad (4.37)$$

welche kein γ_5 mehr enthält. Am Punkt $\not{p} = M_t$ gilt damit

$$\Sigma_{\text{eff}}(\not{p} = M_t) = M_t \left\{ \Sigma_{\text{V}}(p^2 = M_t^2) + \Sigma_{\text{S}}(p^2 = M_t^2) + \frac{\Sigma_{\text{A}}^2(p^2 = M_t^2)}{2 - \Sigma_{\text{V}} + \Sigma_{\text{S}}} \right\} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.38)$$

Durch Entwicklung bis zur Zweischleifenordnung folgt die Bedingung

$$0 = \Sigma_{\text{V}}(p^2 = M_t^2) + \Sigma_{\text{S}}(p^2 = M_t^2) + \frac{\Sigma_{\text{A}}^2(p^2 = M_t^2)}{2}, \quad (4.39)$$

aus der sich die Ein- und Zweischleifenbeiträge zu $\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ berechnen lassen.

Schließlich ist noch die Konstante v zu bestimmen. Hierfür benötigen wir die Selbstenergie des W^\pm -Propagators

$$\begin{aligned} i\Pi_W^{\mu\nu}(p^2, m_W^2, \{g_i\}, \{m_i\}) &= \text{Diagramm} \\ &= i \left[g^{\mu\nu} \frac{g_2^2}{4} \Pi_W + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \Pi_W^{\text{long}} \right] \end{aligned} \quad (4.40)$$

mit der $\overline{\text{MS}}$ -Masse $m_W = \frac{g_2 v}{2}$ (vgl. (2.31)).

Die Funktion Π_W^{long} ist von der Wahl der Eichparameter abhängig und ihr Einfluss auf Matrixelemente abhängig von der Polarisation des W -Bosons. Zerfällt das W schließlich aber in leichte Fermionen, koppelt also an einen fermionischen Strom

$$j^\nu = \bar{f}_1 \gamma^\nu f_2, \quad (4.41)$$

so gilt aufgrund der Bewegungsgleichungen

$$p^\nu j_\nu = 0, \quad (4.42)$$

wenn man die entstehenden Fermionen f_1 und f_2 als masselos annimmt.²

Unter Vernachlässigung des Anteils $\propto p^\mu p^\nu$ gilt damit für den vollen W -Propagator

$$\begin{aligned} iS_W(p) &:= \int d^4x e^{-ipx} \langle 0 | W^+(x) W^-(0) | 0 \rangle \\ &= \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{blue circle} \text{---} \text{wavy line} + \text{wavy line} \text{---} \text{blue circle} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \text{blue circle} \text{---} \text{wavy line} + \dots \\ &= \frac{-i g^{\mu\nu}}{p^2 - m_W^2 - \Pi_W(p^2, m_W^2, \{g_i\}, \{m_i\})}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

mit dem freien Propagator im $\overline{\text{MS}}$ -Schema

$$\text{wavy line} \xrightarrow{p} \text{wavy line} = \frac{-i g^{\mu\nu}}{p^2 - m_W^2}. \quad (4.44)$$

Die Selbstenergie (4.40) wird aus den Diagrammtypen in Abb. 4.4 berechnet.

Für den Myon-Zerfall gilt dann auf Baumgraphenniveau

$$\begin{array}{c} \bar{\nu}_\mu \\ \mu^- \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{wavy line} \text{---} \\ \sim \frac{1}{m_W^2} \\ \text{---} \text{wavy line} \text{---} \\ \sim \frac{g_2^2}{2} \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{c} e^- \\ \nu_e \end{array} \quad \sim \frac{1}{v^2} = \sqrt{2} G_F, \quad (4.45)$$

wobei $p^2 = M_{\text{Myon}}^2 \approx 0$ genähert wird. Unter Einbeziehung der Quantenkorrekturen aus (4.43) folgt als Bestimmungsgleichung für v :

$$v^2 = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-1} - \Pi_W(p^2 = 0). \quad (4.46)$$

Analog erhält man die Polmasse des W -Bosons zu

$$M_W = \frac{g_2^2}{4} \left(v^2 + \Pi_W(p^2 = M_W^2) \right). \quad (4.47)$$

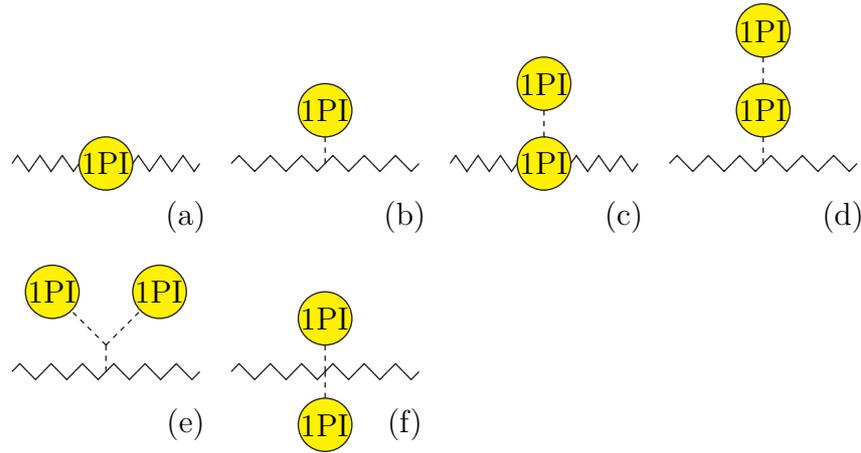


Abbildung 4.4: Feynman-Diagramme für die W^\pm -Selbstenergie bis zur Zweischleifenordnung

Im eichfreien Limes genügen die Gleichungen (4.19), (4.39) und (4.46), um y_t , λ und v aus M_t , M_H und G_F zu bestimmen, sowie eine Vorschrift zur Bestimmung von g_s aus experimentellen Daten. Man beachte, dass die Funktion Π_W im eichfreien Grenzfall nicht von g_2 abhängt. Im vollen Standardmodell müssen zusätzlich g_2 und g_1 bestimmt werden, was beispielsweise aus den Polmassen der W^\pm - und Z -Bosonen und der Feinstrukturkonstanten α geschehen kann.

4.2.2 Status der Bestimmung von $\overline{\text{MS}}$ - aus On-shell-Parametern

In [136] wurde bereits 1980 auf Einschleifenniveau die Beziehung zwischen der $\overline{\text{MS}}$ -Masse und der Polmasse eines Fermions in reiner QCD berechnet.

Eine der ersten Umrechnungen von On-shell- in $\overline{\text{MS}}$ -Parameter einschließlich der elektroschwachen Korrekturen wurde 1986 in [78] veröffentlicht, wo die Higgs-Selbstkopplung λ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema in Einschleifenordnung aus der Polmasse M_H und der Myon-Zerfallskonstanten G_F bestimmt wurde. Auf Einschleifenniveau tritt die starke Kopplung g_s nicht auf und die top-Yukawa-Kopplung wurde noch nicht berücksichtigt.

In [77] wurde analog und ebenfalls auf Einschleifenniveau die $\overline{\text{MS}}$ -Yukawa-Kopplung eines Fermions zu seiner Polmasse in Beziehung gesetzt. In beiden Arbeiten wurden die Tadpole-Beiträge explizit berechnet und die $\overline{\text{MS}}$ -Massen so definiert, dass Tadpole-Beiträge nicht ignoriert werden. In [77] wurde festgestellt, dass man die $\overline{\text{MS}}$ -Masse für Fermionen auch so definieren kann, dass die Tadpole-Diagramme aus der Relation zwischen $\overline{\text{MS}}$ - und Polmasse ausgenommen werden, man in diesem Fall aber eine von den Eichparametern ξ_W und ξ_B abhängige $\overline{\text{MS}}$ -Masse erhält.

Die Zweischleifenbeziehung zwischen $\overline{\text{MS}}$ - und Polmasse für Fermionen in reiner QCD wurden in [127] vorgestellt, die Dreischleifenbeiträge in [139–141]. Die Vierschleifenbeiträge von Diagrammen mit zwei und drei masselosen, geschlossenen Fermionenschleifen finden sich in [142]. In der QCD treten keine Tadpole auf, sodass hier die Definition der $\overline{\text{MS}}$ -Masse eindeutig ist.

²Eine ähnliche Argumentation wird z.B. auch in [12] verwendet.

Im Zusammenhang mit der Berechnung des ρ -Parameters³ wurde in [128] die Relation zwischen $\overline{\text{MS}}$ - und Polmasse des top-Quarks auf Zweischleifenniveau bestimmt, wobei neben QCD-Beiträgen auch die Abhängigkeit von der Higgs-Masse M_H in verschiedenen Hierarchieszenarien, z.B. $M_H \ll M_t$ und $M_H \approx M_t$, berechnet wurde. Die $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Korrekturen in der Beziehung zwischen Polmasse und $\overline{\text{MS}}$ -Masse von Fermionen wurden unabhängig in [143] berechnet, wobei im Unterschied zu [128] die Tadpole-Beiträge in die Rechnung einbezogen wurden. Die $\mathcal{O}(\alpha_s)$ -Korrekturen wurden unabhängig auch in [144] berechnet. Abgesehen von der Differenz, welche auf den beiden unterschiedlichen Definitionen einer $\overline{\text{MS}}$ -Masse mit bzw. ohne Tadpole-Diagrammen beruht, stimmen die Ergebnisse aus [128] und [143] jedoch überein, wie in [129] festgestellt wurde. In [145] wird die Feststellung getroffen, dass die elektroschwachen Korrekturen von $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha_s)$ in der Differenz $m_t - M_t$ den größten Teil der QCD-Korrekturen von $\mathcal{O}(\alpha_s)$, $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ kompensieren. Der größte Anteil der elektroschwachen Korrekturen stammt jedoch von den Tadpole-Diagrammen, sodass diese Aussage nur bei entsprechender Definition der $\overline{\text{MS}}$ -Masse stimmt.

Es sei in diesem Zusammenhang bemerkt, dass zwar mehrere Definitionen einer $\overline{\text{MS}}$ -Masse möglich sind (vgl. Kap. 4.1), die $\overline{\text{MS}}$ -Yukawa-Kopplung jedoch unabhängig davon ist, da jede Definition einer $\overline{\text{MS}}$ -Masse auch einer Definition der Konstanten v in der Aufteilung des Skalarfeldes Φ entspricht, welche in Störungstheorie von der Wechselwirkungs-Lagrangedichte in die freie Lagrangedichte gezogen wird. Werden bei der Berechnung von $m_t - M_t$ die Tadpolediagramme ignoriert, so ist impliziert, dass bei der Aufteilung des Skalarfeldes ein zusätzlicher Counterterm δv eingeführt wurde, der die Tadpole-Beiträge absorbiert. In Einschleifenordnung stellt sich außerdem heraus, dass sich die Tadpole-Beiträge zur Bestimmung von y_t aus

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{\sqrt{2}} &= \frac{m_t}{v} = \frac{M_t(1 + \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}})}{\left[(\sqrt{2} G_F)^{-1} - \Pi_W(p^2 = 0) \right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{M_t}{(\sqrt{2} G_F)^{-1}} \left(1 + \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} + \frac{\Pi_W(p^2 = 0)}{2(\sqrt{2} G_F)^{-1}} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (4.48)$$

zwischen $\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ und $\Pi_W(p^2 = 0)$ gerade kompensieren. Für die Berechnung der top-Yukawa-Kopplung sind also die QCD-Effekte dominant. Dies wird in Kap. 4.3 im eichfreien Limes explizit gezeigt. Der Grund dafür ist, dass der gleiche Tadpole-Beitrag in $\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ (Diagrammtyp (b) in Abb. 4.3) und in $\Pi_W(p^2 = 0)$ eingeht. Auf Zweischleifenniveau kompensieren sich die Tadpole-Beiträge jedoch nicht vollständig, wie in Kapitel 4.3.2 gezeigt wird. Im Fall der Berechnung von λ aus $\Pi_H(p^2 = M_H)$ und $\Pi_W(p^2 = 0)$ fallen die Tadpole-Beiträge schon auf Einschleifenniveau nicht heraus.

Die Zweischleifenkorrekturen der Relation zwischen $\overline{\text{MS}}$ - und Polmasse der elektroschwachen Eichbosonen wurde in [146, 147] berechnet.

Eine vollständige Berechnung bzw. Reproduktion aller Korrekturen zu λ und y_t im $\overline{\text{MS}}$ -Schema in Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha_s)$ wurde in [48] durchgeführt. Eine nu-

³Der ρ -Parameter ist als Verhältnis des neutralen und des geladenen Stroms im schwachen Sektor des Standardmodells bei Impulsübertrag Null definiert, also $\rho = \frac{J_{\text{neutral}}(0)}{J_{\text{geladen}}(0)}$ [128].

merische Berechnung aller Zweischleifenkorrekturen, einschließlich $\mathcal{O}(\alpha^2)$, für die $\overline{\text{MS}}$ -Parameter g_s, g_1, g_2, y_t und λ wurde in [35] veröffentlicht. Eine analytische Berechnung der Zweischleifenbeziehung zwischen M_t und m_t (einschließlich Tadpole-Diagrammen) und zwischen M_t und y_t im eichfreien Limes findet sich in [130].

4.3 Berechnung von $\lambda(M_t)$ und $y_t(M_t)$ im eichfreien Grenzfall

In diesem Kapitel wird die Berechnung der $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen $\lambda(M_t)$ und $y_t(M_t)$ im eichfreien Grenzfall des Standardmodells vorgestellt. Es werden die Feynman-Regeln zugrunde gelegt, welche sich aus den Bestandteilen QCD (2.12), Skalarfeldsektor (2.13) und top-Yukawa-Sektor (2.22) der Standardmodell-Lagrangedichte sowie den zugehörigen UV-Countertermen (2.55), (2.66) und (2.64) mit der Ersetzung (4.2) für das Skalarfeld ergeben. In einem Zwischenschritt werden $\overline{\text{MS}}$ -Massen m_H und m_t gemäß (4.4) und (4.5) definiert. Die so erhaltenen Feynman-Regeln finden sich in Anhang B.2. Die $\overline{\text{MS}}$ -Massen werden dann mittels der endlichen Renormierungskonstanten $\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ und $\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ aus (4.21) und (4.32) durch die Polmassen M_H und M_t ausgedrückt.

Die in den Counterterm-Lagrangedichten (2.55), (2.66) und (2.64) definierten Renormierungskonstanten wurden bereits im Rahmen der in Kap. 3 vorgestellten Rechnungen in der ungebrochenen Phase des Standardmodells ermittelt und können hier wiederverwendet werden. Die Renormierungskonstanten $\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ und $\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ werden zunächst in Einschleifenordnung aus (4.23) und (4.39) bestimmt und dann neben den UV-Renormierungskonstanten in Einschleifendiagramme eingesetzt, was einen Beitrag zum Zweischleifenresultat liefert. Aus diesem Grund, werden alle in Einschleifendiagrammen verwendeten Feynman-Regeln bis zur ersten Ordnung in $\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ und $\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ entwickelt, bzw. in Baumgraphen bis zur zweiten Ordnung.

Eine Schwierigkeit der Rechnung ist das Auftreten zweier unterschiedlicher Skalen, M_H und M_t , wobei M_H nicht gegen M_t vernachlässigbar ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird bei der Berechnung der top-Quark-Selbstenergie auf der Massenschale, also für $p^2 = M_t^2$ die Higgs-Masse mittels

$$M_H = M_t(1 - \Delta) \tag{4.49}$$

eliminiert und dann die Integranden im Parameter

$$\Delta := \frac{M_t - M_H}{M_t} \approx \frac{1}{4} \tag{4.50}$$

in eine Taylor-Reihe entwickelt. Für den Higgs-Propagator im $\overline{\text{MS}}$ -Schema findet man

so

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i} \frac{1}{m_H^2 - p^2} &= \frac{1}{i} \frac{1}{M_t^2(1 - \Delta)^2(1 + \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}})^2 - p^2} \\
&= \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{M_t^2 - p^2} - 2 \left(\frac{1}{M_t^2 - p^2} \right)^2 \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} M_t^2 + \right. \\
&\quad \Delta \left[2 \left(\frac{1}{M_t^2 - p^2} \right)^2 M_t^2 + 4 \left(\frac{1}{M_t^2 - p^2} \right)^2 \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} M_t^2 \right. \\
&\quad \left. \left. - 8 \left(\frac{1}{M_t^2 - p^2} \right)^3 \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}} M_t^4 \right] + \mathcal{O} \left((\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}})^2, \Delta^2 \right) \right\}. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Higgs-Selbstenergie mit $p^2 = M_H^2$ hingegen wird durch (4.49) die top-Quarkmasse durch die Higgs-Masse ausgedrückt und im selben Parameter Δ entwickelt. In einer Rechnung im vollen Standardmodell hätte man mit M_W und M_Z noch zwei weitere Massen. Da nicht alle On-shell-Masterintegrale mit zwei oder mehr Skalen in Zweischleifenordnung analytisch bekannt sind, erscheinen hier weitere Entwicklungen oder das numerische Lösen der Integrale, wie z.B. in [35], sinnvoll.

Ein Problem des hier beschriebenen Vorgehens ist, dass die gewöhnliche Taylor-Entwicklung in der Variablen Δ in höheren Ordnungen ungültig werden kann. Dieses Problem wird in [130, 147] untersucht. Wie in [130] erklärt wird, tritt dieses Phänomen in Diagrammen der top-Quark-Selbstenergie auf, in denen ein Unitaritätsschnitt⁴ durch eine Higgs-Linie und eine oder zwei masselose Linien vorgenommen werden kann. Es wird ausgeführt, dass für einen äußere Impuls p , der nicht auf der Massenschale ($p^2 \neq M_t^2$) liegt, in diesen Diagrammen (s. Abb. 4.5) Terme der Form

$$(p^2 - M_H^2)^n \log(p^2 - M_H^2), \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.52}$$

auftreten. Auf der Higgs-Massenschale, also für $p^2 \rightarrow M_H^2$ würden diese Terme verschwinden. Eine gewöhnliche Taylor-Entwicklung des Integranden in $(p^2 - M_H^2)$ wird also ungültig, wenn bis zur Ordnung n entwickelt wird. Auf der Massenschale mit $(p^2 = M_t^2)$ entspricht dies gerade der Entwicklung in $(M_t^2 - M_H^2) = (M_t - M_H)(M_t + M_H)$, also äquivalent in Δ , um den Punkt $\Delta = 0$ bzw. $M_H = M_t$. In diesem Fall sollte ein exaktes Ergebnis mit den beiden Skalen M_t und M_t für die betreffenden Diagramme berechnet werden. Dies wurde für die top-Yukawa-Kopplung in [130] vorgestellt. In [130, 147] wird festgestellt, dass die Δ -Entwicklung bis einschließlich Ordnung Δ^5 das korrekte Resultat wiedergibt und ab $\mathcal{O}(\Delta^6)$ nicht mehr. Dies wird durch Pole in $\frac{1}{\epsilon}$ sichtbar, welche nicht durch die UV- und Massenrenormierungskonstanten behoben werden. In der im nächsten Abschnitt vorgestellten Rechnung bestätigt sich dies, weshalb hier nur bis Δ^5 entwickelt wird.⁵

⁴Die Regeln, nach denen im Zusammenhang mit dem optischen Theorem Schnitte in Feynman-Diagrammen vorgenommen werden, wurden in [148] aufgestellt und untersucht.

⁵Genauer gesagt taucht das Problem wie erwartet bei der Berechnung der Higgs- und top-Quark-Selbstenergie auf der jeweiligen Massenschale auf, jedoch nicht bei der Berechnung der Tadpole-Diagramme und der W^\pm -Selbstenergie mit externem Impuls Null.

4.3.1 Implementierung der Rechnung

Es werden vier Bausteine für dieses Projekt benötigt:

- 1) Die 1PI-Higgs-Selbstenergie für $p^2 = M_H^2$ auf Ein- und Zweischleifenniveau (Abb. 4.2 (a)) sowie derselbe Prozess auf Einschleifenniveau mit einem weiteren externen Higgs-Bein mit Impuls Null (für Abb. 4.2 (c)).
- 2) Die 1PI-top-Quark-Selbstenergie für $p^2 = M_t^2$ auf Ein- und Zweischleifenniveau (Abb. 4.3 (a)) sowie derselbe Prozess auf Einschleifenniveau mit einem weiteren externen Higgs-Bein mit Impuls Null (für Abb. 4.3 (c)).
- 3) Die 1PI- W^\pm -Selbstenergie für $p^2 = 0$ auf Ein- und Zweischleifenniveau (Abb. 4.4 (a)) sowie derselbe Prozess auf Einschleifenniveau mit einem weiteren externen Higgs-Bein mit Impuls Null (für Abb. 4.4 (c)).
- 4) Die 1-PI-Tadpole-Diagramme mit einem externen Higgs-Bein mit Impuls Null auf Einschleifenniveau zur Einsetzung in die aus mehreren 1-PI-Subdiagrammen zusammengesetzten Diagramme in Abb. 4.2 (c), (e), (f), Abb. 4.3 (c), (e) und Abb. 4.4 (c), (e), (f). Bis zur Zweischleifenordnung braucht man die 1-PI-Tadpole für die zusammengesetzten Diagramme in Abb. 4.2 (b), Abb. 4.3 (b) und Abb. 4.4 (b). Außerdem wird der Einteilchen-reduzible Tadpole-Beitrag aus zwei Einschleifen-1PI-Diagrammen für die zusammengesetzten Diagramme Abb. 4.2 (d), Abb. 4.3 (d) und Abb. 4.4 (d) benötigt.

Die Feynman-Diagramme für diese Bausteine wurden mit QGRAF [109] generiert. Zunächst wurden alle vier Teile auf massive Tadpole-Integrale mit einer Skala zurück-

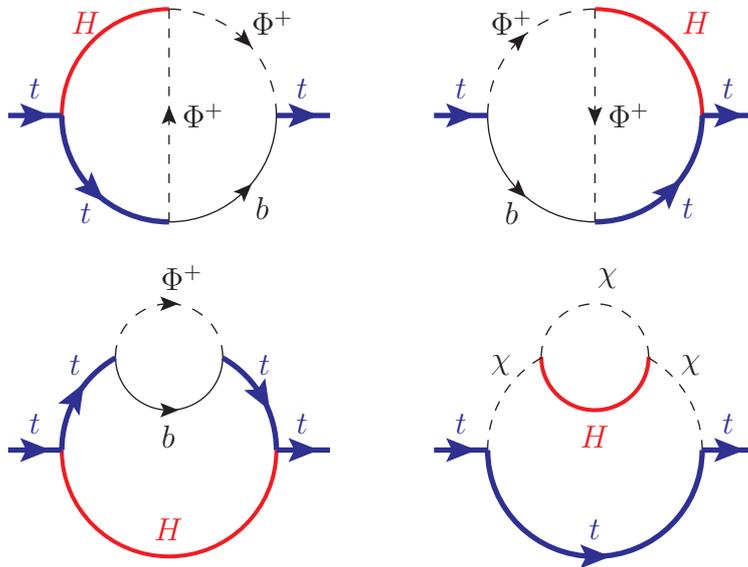


Abbildung 4.5: Feynman-Diagramme zur Berechnung der top-Quark-Selbstenergie, bei denen Schwellensingularitäten in der Δ -Entwicklung auftreten können. Rote Linien haben Masse M_H , blaue Linien M_t und schwarze sind masselos.

geführt, wobei die Selbstenergien in 1) und 2) nicht auf der Massenschale, sondern in einer asymptotischen Entwicklung [107] von p^2 um die Massenskala M_H bzw. M_t berechnet wurden. Hierbei treten keine infraroten Divergenzen auf, sodass erfolgreich überprüft werden konnte, dass die in der ungebrochenen Phase des Standardmodells berechneten Renormierungskonstanten eingesetzt in die in Anhang B.2 beschriebenen Feynman-Regeln tatsächlich zu endlichen Ergebnissen führen.

Die Identifizierung der Topologien der Diagramme erfolgte mit dem Programm Q2E, die asymptotische Entwicklung mittels des Programms EXP [111, 112]. Das Einsetzen der Feynman-Regeln und Counterterme, die Bildung der Spuren entlang Fermionlinien, sowie das Zusammensetzen der einzelnen Komponenten des Ergebnisses wurde mit FORM und TFORM [99, 149] durchgeführt. Die skalaren Funktionen Σ_V , Σ_S , Σ_A und Σ_{PS} gewinnt man aus der Fermionselfstenergie durch Anwendung geeigneter Projektoren.⁶ Die QCD-Farbfaktoren wurden mit dem FORM-Paket COLOR [110] berechnet und die massiven Tadpole-Diagramme mit MATAD [108] gelöst.

Dies liefert die benötigten Ergebnisse für die Bestandteile 3) und 4), ist für 1) und 2) jedoch nur ein Test für die UV-Endlichkeit. Die Berechnung der Selbstenergien auf der jeweiligen Massenschale erfordert eine Abänderung des beschriebenen Automatisierungssystems. Zunächst wurde eine neue Topologie-Datei zur Identifizierung der On-shell-Topologien für Q2E angefertigt. Diese haben die in Abb. 4.6 gezeigte graphischen Darstellungen, wobei die drei Einschleifen- und 14 Zweischleifentopologien sich dadurch unterscheiden, welche Propagatoren massiv mit der Masse M sind und welche masselos.⁷

Die Einschleifenintegrale werden als

$$O_{i_1 i_2}(n_1, n_2) := \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{(i_1 M^2 - p_1^2)^{n_1}} \frac{1}{(i_2 M^2 - p_2^2)^{n_2}} \quad (4.53)$$

notiert. In Anlehnung an die Notation von [150] werden die auftretenden Zweischleifenintegrale mit

$$F_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) := \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \prod_{j=1}^5 \frac{1}{(i_j M^2 - p_j^2)^{n_j}} \quad (4.54)$$

bezeichnet. In beiden Fällen gibt $i_j \in \{0, 1\}$ an, ob die j . Linie massiv ist, und $n_j \in \mathbb{Z}$ die Potenz des j . Propagators. Es wird dimensionale Regularisierung mit der Raumzeitdimension $D = 4 - 2\varepsilon$ verwendet. Die drei verschiedenen Einschleifentopologien sind

$$O_{11}, O_{10}, O_{00}, \quad (4.55)$$

die 14 unterschiedlichen Zweischleifentopologien sind

$$\begin{aligned} &F_{111111}, F_{011111}, F_{111110}, F_{001111}, F_{101011}, F_{101110}, F_{011101}, \\ &F_{011100}, F_{001101}, F_{101100}, F_{001110}, F_{001100}, F_{000011}, F_{000000}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

⁶ Es gilt $\Sigma_V = \frac{1}{p^2} \mathbf{Spur}(\not{p} \Sigma_t^{\text{OS}})$, $\Sigma_S = \frac{1}{M_t} \mathbf{Spur}(\Sigma_t^{\text{OS}})$, $\Sigma_A = \frac{1}{p^2} \mathbf{Spur}(\gamma_5 \not{p} \Sigma_t^{\text{OS}})$ und $\Sigma_{\text{PS}} = \frac{1}{M_t} \mathbf{Spur}(\gamma_5 \Sigma_t^{\text{OS}})$, wobei für den pseudoskalaren Anteil explizit $\Sigma_{\text{PS}} = 0$ festgestellt wurde.

⁷Bei der Berechnung der Higgs-Selbstenergie wird $M = M_H$ gesetzt, für die top-Selbstenergie wählt man $M = M_t$.

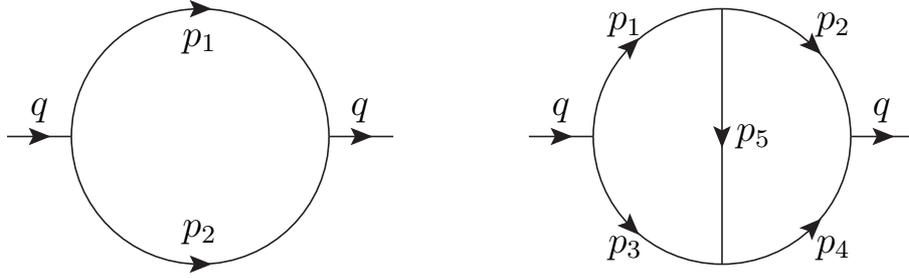


Abbildung 4.6: Ein- und Zweischleifentopologien für propagatorartige On-shell-Diagramme: Die Propagatoren können massiv mit Masse M oder masselos sein. Die Impulse p_i sind Linearkombinationen der Schleifenimpulse k_1 bzw. k_1, k_2 und des externen Impulses q . Es gilt die Randbedingung $q^2 = M^2$.

Die auftretenden Integrale werden mittels des Mathematica-Programms FIRE [151,152], einer Implementierung des Laporta-Algorithmus [153], welcher auf durch partielle Integration gewonnen Integralbeziehungen [101,102] beruht, auf einen Satz von Masterintegralen reduziert.

Die Einschleifen-Masterintegrale wurden für diese Arbeit mittels Feynman-Parametern mit Hilfe von Mathematica berechnet. Die Zweischleifen-Masterintegrale wurden bereits in [154,155] berechnet und in [150] gesammelt vorgestellt. Als Masterintegrale werden $F_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}(1, 1, 1, 1, 1)$, $F_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}(0, 1, 1, 1, 1)$ und $F_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}(0, 1, 1, 0, 1)$ mit $i_j \in \{0, 1\}$ verwendet⁸. So werden analytische Ergebnisse berechnet. Als Konsistenztest können die auftretenden Integrale auch numerisch mit dem Programm FIESTA [156,157] gelöst werden, was innerhalb der Genauigkeit der numerischen Resultate zu übereinstimmenden Ergebnissen führt.

4.3.2 Diskussion der Resultate

Die so erhaltenen analytischen Ergebnisse werden in diesem Abschnitt mit Hilfe von Mathematica numerisch ausgewertet. Alle Resultate wurden in Abhängigkeit der Parameter M_H , M_t , $v(\mu)$ und $g_s(\mu)$ ermittelt und der Wert der Renormierungsskala anschließend auf $\mu = M_t$ gesetzt. Für die numerische Auswertung werden die aktuellen experimentellen Bestwerte (vgl. Kap. 5.1)

$$M_H = 125,9 \text{ GeV} \quad [37-40] \quad (4.57)$$

$$M_t = 173,34 \text{ GeV} \quad [36] \quad (4.58)$$

$$G_F = 1,1663787 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad [29] \quad (4.59)$$

$$\alpha_s(M_Z) = 0,1184 \quad [41] \Rightarrow g_s(M_t) = 1,1666 \quad (4.60)$$

⁸In der Notation von [150] gilt

$F_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = F\{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5\}(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$,
 $F_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}(0, n_2, n_3, n_4, n_5) = V\{i_2 i_3 i_4 i_5\}(n_2, n_3, n_5, n_4)$ und
 $F_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5}(0, n_2, n_3, 0, n_5) = J\{i_5 i_2 i_3\}(n_5, n_2, n_3)$.

zugrunde gelegt. Um die Konvergenz der Entwicklung in Δ aus (4.49) beurteilen zu können, führen wir die Ersetzung

$$\Delta \rightarrow \frac{M_t - M_H}{M_t} \delta \approx 0,2737 \delta \quad (4.61)$$

durch. Jede Schleife erhält außerdem einen Buchhaltungsfaktor h , sodass ein Faktor h^L im Ergebnis den L -Schleifenbeitrag markiert. Das korrekte numerische Resultat erhält man dann für $\delta = 1$ und $h = 1$.

Zunächst wird die Summe aller Tadpole-Diagramme berechnet, welche über eine Higgs-Linie mit dem Rest der zu berechnenden Selbstenergiendiagramme verbunden ist:

$$i T = i \left\{ \frac{1}{(16\pi^2)} \frac{M_t^4}{v} T_1 + \frac{1}{(16\pi^2)^2} \frac{M_t^6}{v^3} T_2 \right\} = \begin{array}{c} \text{1PI} \\ \vdots \end{array} + \begin{array}{c} \text{1PI} \\ \vdots \\ \text{1PI} \end{array} + \begin{array}{c} \text{1PI} \quad \text{1PI} \\ \vdots \quad \vdots \end{array} \quad (4.62)$$

mit den dimensionslosen Größen T_1 und T_2 . Die Tadpole Beiträge sind nach dem Einsetzen der UV-Counterterme endlich. Für die Einsetzung der Tadpole in die Diagramme aus Abb. 4.2 (c), Abb. 4.3 (c), Abb. 4.4 (c) werden außerdem die Terme der Ordnung ε benötigt. Die Werte für M_t und M_H werden im Folgenden eingesetzt, g_s jedoch bleibt zunächst variabel, um die QCD-Beiträge identifizieren zu können. Für den Einschleifenbeitrag ergibt sich

$$\begin{aligned} T_1 = & -10,5000 - 19,1359 \varepsilon + (-0,8211 - 2,1716 \varepsilon) \delta \\ & + (-0,1124 + 0,6668 \varepsilon) \delta^2 + (0,1435 - 0,1422 \varepsilon) \delta^3 \\ & + (-0,0266 + 0,0294 \varepsilon) \delta^4 + (0,0009 - 0,0029 \varepsilon) \delta^5 \\ & \xrightarrow{\delta=1} -11,3156 - 20,7564 \varepsilon \end{aligned} \quad (4.63)$$

Hier zeigt sich eine gute Konvergenz der Δ -Entwicklung, vor allem in Ordnung ε^0 , wo man eine Genauigkeit von etwa drei Nachkommastellen erreicht. In Ordnung ε^1 beschränkt sich die Genauigkeit auf zwei Nachkommastellen. QCD-Beiträge treten nicht auf. Auf Zweischleifenniveau findet man

$$\begin{aligned} T_2 = & -220,1701 - 64,5651 g_s^2 - 296,0288 \varepsilon + (-171,0495 - 284,9775 \varepsilon) \delta \\ & + (-122,0535 - 219,2226 \varepsilon) \delta^2 + (-7,1761 - 9,2938 \varepsilon) \delta^3 \\ & + (-10,5628 - 13,2182 \varepsilon) \delta^4 + (-2,3840 - 7,6497 \varepsilon) \delta^5 \\ & \xrightarrow{\delta=1} -533,396 - 64,5651 g_s^2 - 830,391 \varepsilon \end{aligned} \quad (4.64)$$

In der Δ -Entwicklung sind die ersten drei Terme dominant, danach ist aber keine starke Konvergenz sichtbar. Führt man die Entwicklung in der Berechnung von T_2 zu höheren Ordnungen fort, findet man die Terme

$$(-1,7165 + 0,5557\varepsilon) \delta^6 + (-0,3681 - 0,0454\varepsilon) \delta^7 + (0,3718 + 0,0005\varepsilon) \delta^8, \quad (4.65)$$

was diesen Eindruck weiter bestätigt.

Für den Anteil des Skalarfeldes v , der in die $\overline{\text{MS}}$ -Massen eingeht, findet man in Zweischleifenordnung

$$\begin{aligned}
\frac{v}{\text{GeV}} &= 246,2197 \\
&+ h \left(6,7618 + 5,1816 \delta + 2,2429 \delta^2 + 0,7445 \delta^3 + 0,2590 \delta^4 + 0,0853 \delta^5 \right) \\
&+ h^2 \left(\left(-1,0183 + 0,0791 g_s^2 \right) + \left(-0,3069 + 0,0857 g_s^2 \right) \delta \right. \\
&+ \left(0,0890 + 0,0352 g_s^2 \right) \delta^2 + \left(0,0552 + 0,0128 g_s^2 \right) \delta^3 \\
&+ \left. \left(-0,0223 + 0,0044 g_s^2 \right) \delta^4 + \left(-0,0498 + 0,0014 g_s^2 \right) \delta^5 \right) \\
&= 246,2197 + 15,2735 h - 0,9555 h^2 \quad \text{für } \delta = 1, g_s = 1,1666
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Aus der schwachen Konvergenz der Entwicklung in Δ ist ersichtlich, dass dieses Ergebnis nur auf eine Nachkommastelle, bzw. in $\mathcal{O}(g_s^2)$ auf zwei Nachkommastellen, genau ist. Schon hier wird klar, dass die Genauigkeit der in [35] vorgestellten vollnumerischen Rechnung nur durch eine deutlich tiefere Entwicklung in Δ erreicht werden könnte, was aber wie oben beschrieben für die Higgs- und top-Quark-Selbstenergien zumindest mit einer Taylor-Entwicklung des Integranden nicht funktioniert.

Interessant ist auch, welchen Einfluss die Tadpole-Beiträge auf das Ergebnis (4.66) haben. An der Darstellung

$$\begin{aligned}
\frac{v}{\text{GeV}} &= 246,2197 + (-1,2611 - 1,4616 T_1) h \\
&+ \left(-0,0309 - 0,0775 g_s^2 - 0,1163 T_1 - 0,0390 T_1^2 - 0,0046 T_2^2 \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\frac{0,0137 + 0,0012 T_1}{\varepsilon}}_{=0} \right) h^2 \\
&= 246,2197 + \left(-1,2611 + \underbrace{16,5364}_{(T_1)\text{-Term}} \right) h \\
&+ \left(0,0309 - 0,0775 g_s^2 \underbrace{+1,3450}_{(T_1)\text{-Term}} \underbrace{-4,9831}_{(T_1^2)\text{-Term}} \underbrace{+2,4159}_{(T_2)\text{-Term}} \right) h^2
\end{aligned} \tag{4.67}$$

sieht man zunächst, dass Tadpole-Beiträge benötigt werden, um ein endliches Ergebnis zu erhalten.⁹ Außerdem wird deutlich, dass der größte Anteil der Strahlungskorrekturen zu v von Tadpolen stammt. Diese Terme sind wesentlich dafür verantwortlich, dass die Δ -Entwicklung bis zur fünften Ordnung keine präzisen Ergebnisse liefert.

Als nächstes betrachten wir die top-Yukawa-Kopplung $y_t(M_t)$, bei der sowohl reine QCD-Korrekturen als auch reine Higgs- und Yukawa-Korrekturen sowie in Zweischlei-

⁹Die Beiträge $\propto \frac{T_i}{\varepsilon}$ stammen von Diagrammen der in Abb. 4.4 (c) gezeigten Form.

fenordnung auch gemischte Korrekturen auftreten:

$$\begin{aligned}
y_t(M_t) &= \frac{\sqrt{2}M_t}{v} \left(1 + \delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}\right) \\
&= 0,99561 + \frac{h}{(16\pi^2)} \left(1,4862 - 5,3099 g_s^2\right) \\
&\quad + \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(-2,61 + 0,16 T_1 + 0,47 T_1^2 + -12,38 g_s^2 - 145,37 g_s^4\right) \\
&= 0,99561 + \frac{h}{(16\pi^2)} \left(1,4862 - 5,3099 g_s^2\right) \\
&\quad + \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(-2,61 \underbrace{+3,19}_{(T_1)\text{-Term}} \underbrace{+60,43}_{(T_1^2)\text{-Term}} -12,38 g_s^2 - 145,37 g_s^4\right) \\
&= 0,99561 + \frac{h}{(16\pi^2)} \left(1,4862 - 5,3099 g_s^2\right) \\
&\quad + \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(61,01 - 12,38 g_s^2 - 145,37 g_s^4\right).
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Man bemerke, dass die Tadpole-Beiträge zur top-Quark-Selbstenergie und zur W^\pm -Selbstenergie sich auf Einschleifenniveau auch analytisch exakt kompensieren, ebenso auf Zweischleifenniveau im Term $\propto g_s^2$, aber nicht im Term $\propto g_s^0$. Dieser Sachverhalt wurde auch in [130] festgestellt. Weiter sieht man, dass der Beitrag von T_2 im Zweischleifenergebnis ebenfalls herausfällt. Die Einschleifenresultate können mit [77] verglichen werden, die reinen QCD-Beiträge sind in Übereinstimmung mit [127]. Vergleicht man die Zweischleifenkorrektur mit dem Resultat aus [35], welches für $M_H = 125,9$ GeV und $M_t = 173,34$ GeV

$$y_t(M_t) = \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(5,262 - 7,527 g_s^2 - 145,37 g_s^4\right) \tag{4.69}$$

lautet, so stellt man exakte Übereinstimmung im g_s^4 -Term fest. Die Abweichung im g_s^2 -Term ist dadurch erklärbar, dass in [35] auch die Kopplungen g_2 und g_1 berücksichtigt wurden. In [130] wird dagegen eine Korrektur von $(-0,0009) \approx \left[\frac{-g_s^2}{(16\pi^2)^2} 16,5\right]$ gefunden und die Schwierigkeit eines zuverlässigen numerischen Vergleichs mit [35] aufgezeigt, da die Korrekturen sehr klein seien. Der hier gefundene Wert von $\left[\frac{-g_s^2}{(16\pi^2)^2} 12,38\right]$ liegt daher in vertretbarer Nähe zu den Resultaten aus [35] und [130].

Der g_s^0 -Term hingegen weicht sehr stark von dem in (4.69) angegebenen Wert aus [35] ab, ebenso von dem in [130] gefundenen Wert von $0,0003 \approx \left[\frac{g_s^2}{(16\pi^2)^2} 5,5\right]$. Um dies

zu erklären, betrachten wir wieder die Entwicklung in Δ :

$$\begin{aligned}
y_t(M_t) = & 0,99561 + \frac{h}{(16\pi^2)} \left(1,2481 + 0,2026 \delta + 0,03244 \delta^2 + 0,0027 \delta^3 \right. \\
& \left. + 0,0004 \delta^4 + 0,00005 \delta^5 - 5,3099 g_s^2 \right) \\
& + \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(124,73 + 33,30 \delta - 31,53 \delta^2 - 37,97 \delta^3 - 20,22 \delta^4 - 7,31 \delta^5 \right. \\
& \left. + g_s^2 \left(-7,72 - 4,33 \delta - 0,30 \delta^2 - 0,03 \delta^3 - 0,004 \delta^4 + 0,0006 \delta^5 \right) \right. \\
& \left. - 145,37 g_s^4 \right)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Die Konvergenz der Entwicklung in Einschleifenordnung ist hervorragend, die in Zweischleifenordnung für die g_s^2 -Terme ebenfalls. Die Konvergenz in den g_s^0 -Zweischleifentermen dagegen ist vergleichsweise schwach. Eine genauere Untersuchung zeigt, dass dies hauptsächlich für die Anteile gilt, in denen Tadpole-Beiträge stehen. Für die aus Tadpole- und anderen Beiträgen zusammengesetzten Diagramme ist die Entwicklung in Δ also nicht tief genug.

Ein ähnliches Bild zeigt sich auch bei der Berechnung der Higgs-Selbstkopplung $\lambda(M_t)$. Hier kommt erschwerend hinzu, dass die Tadpole-Beiträge sich auf Einschleifeniveau nicht kompensieren und QCD-Korrekturen erst in Zweischleifenordnung auftreten. Die Einschleifenkorrektur im eichfreien Limes ist also physikalisch nicht aussagekräftig, da der numerisch wichtige g_2 -Beitrag fehlt. In Zweischleifenordnung jedoch sollten in der hier verwendeten Näherung die dominanten Beiträge bestimmt werden können. Aus

$$\begin{aligned}
\lambda(M_t) = & \frac{M_H^2}{2v^2} \left(1 + \delta Z_H^{\text{OSMS}} \right)^2 \\
= & 0,13073 + \frac{h}{(16\pi^2)} \left(-1,2307 \underbrace{+0,2451 T_1}_{\text{aus } \Pi_W} \underbrace{-0,3685 T_1}_{\text{aus } \Pi_H} \right) \\
& + \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(-18,77 - 24,69 g_s^2 - 1,07 T_1 - 0,36 T_1^2 - 0,06 T_2 \right) \\
= & 0,13073 + \frac{h}{(16\pi^2)} 0,1657 + \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(-16,60 - 20,75 g_s^2 \right) \\
= & 0,13073 + 0,00105 h - 0,00180 h^2 \quad \text{für } g_s = 1,1666
\end{aligned} \tag{4.71}$$

liest man ab, dass auch hier die numerisch größten Korrekturen von Tadpole-Beiträgen stammen. Die Δ -Entwicklung bis zur fünften Ordnung

$$\begin{aligned}
\lambda(M_t) = & 0,13073 + \frac{h}{(16\pi^2)} \left(1,9009 - 1,3197 \delta - 0,4797 \delta^2 - 0,0832 \delta^3 \right. \\
& \left. + 0,0834 \delta^4 + 0,0641 \delta^5 \right) \\
& + \frac{h^2}{(16\pi^2)^2} \left(-28,54 - 8,36 \delta + 11,19 \delta^2 + 3,95 \delta^3 + 3,92 \delta^4 + 1,24 \delta^5 \right. \\
& \left. + g_s^2 \left(11,47 - 5,21 \delta - 8,89 \delta^2 - 8,57 \delta^3 - 6,03 \delta^4 - 3,51 \delta^5 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

konvergiert zwar besser als im Fall von y_t , eine tiefere Entwicklung wäre jedoch besonders bei den g_s^2 -Termen wünschenswert. Dennoch liegt der gefundene Wert $-0,0018 h^2$ für die Zweischleifenkorrektur in (4.71) sehr Nahe an dem in [35] angegebenen¹⁰ $-0,0017 h^2$, welcher auch die kleinen elektroschwachen Zweischleifenkorrekturen einschließt.

Abschließend kann gesagt werden, dass in dieser Rechnung die dominanten Zweischleifenkorrekturen zur Berechnung von $y_t(M_t)$ und $\lambda(M_t)$ reproduziert wurden. Für eine ausreichende Präzision bei einigen Beiträgen wäre aber eine tiefere Entwicklung in Δ nötig, welche nicht als gewöhnliche Taylor-Reihe erfolgen kann. Eine Alternative bildet das analytische Lösen einzelner Feynman-Integrale mit zwei Massenskalen wie in [130] oder die vollständige numerische Berechnung der Konvertierungsformeln von On-shell- zu $\overline{\text{MS}}$ -Parametern wie in [35]. Im folgenden Kapitel werden die Formeln aus [35] verwendet, da diese auch die elektroschwachen Korrekturen einschließen und damit die höchste gegenwärtig verfügbare Genauigkeit bieten.

¹⁰Dieser Wert wurde als Differenz des NLO- und NNLO-Resultats in Tabelle 3 in [35] berechnet.

Evolution der Higgs-Selbstkopplung in Dreischleifenordnung

5.1 $\overline{\text{MS}}$ -Standardmodellkopplungen zwischen top- und Planck-Skala

Mit der Entdeckung des Higgs-Bosons [1, 2] und der Bestimmung seiner Masse zu

$$M_H = (125,9 \pm 0,4) \text{ GeV [37–40]} \quad (5.1)$$

wurde der letzte noch fehlende Parameter im Standardmodell bestimmt, der für eine Untersuchung des Vakuumstabilitätsproblems benötigt wird. Außerdem sind die Werte der starken Kopplung

$$\alpha_s(M_Z) = 0,1184 \pm 0,0007 \text{ [41]} \quad (5.2)$$

im $\overline{\text{MS}}$ -Schema und der Polmasse des top-Quarks entscheidend. Letztere wurde aus einer Kombination der Daten von ATLAS, CMS und D0 zu

$$M_t = (173,34 \pm 0,27(\text{stat}) \pm 0,71(\text{syst})) \text{ GeV [36]} \quad (5.3)$$

bestimmt, woraus sich mittels quadratischer Fehlerfortpflanzung eine totale Unsicherheit von $\sigma_{M_t} = 0,76 \text{ GeV}$ ergibt. Des weiteren gehen in die Bestimmung der Startwerte für die $\overline{\text{MS}}$ -Parameter die Polmassen der elektroschwachen Eichbosonen

$$M_W = (80,385 \pm 0,015) \text{ GeV [37]} \quad (5.4)$$

und

$$M_Z (91,1876 \pm 0,0021) \text{ GeV [37]} \quad (5.5)$$

sowie die Fermi-Konstante des Myon-Zerfalls

$$G_F = (1,1663787 \pm 0,0000006) 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \text{ [29]} \quad (5.6)$$

Tabelle 5.1: Startwerte der wichtigsten Standardmodellkopplungen für $M_t = 173,34$ GeV, $M_H = 125,9$ GeV und $\alpha_s(M_Z) = 0,1184$. Für λ und y_t sind außerdem die theoretischen Unsicherheiten angegeben, die von der Konvertierung von On-shell- zu $\overline{\text{MS}}$ -Parametern stammen [35].

Kopplung	Wert für $\mu = M_t$
g_s	1,1666
g_2	0,6483
g_1	0,3587
λ	$0,12759 \pm 0,00030_{(\text{th,match})}$
y_t	$0,93692 \pm 0,00050_{(\text{th,match})}$
y_b	0,02
y_τ	0,01

ein. Hiermit lassen sich die numerisch wichtigsten $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen g_s, y_t, g_2, g_1 und λ bestimmen, welche in der folgenden Analyse verwendet werden sollen. Mittels der Konvertierungsformeln von On-shell- zu $\overline{\text{MS}}$ -Parametern aus [35] findet man die in Tab. 5.1 angegebenen Werte für diese Parameter. Für λ und y_t ist die theoretische Unsicherheit, die von der Konvertierung von on-shell- zu $\overline{\text{MS}}$ -Parametern herrührt, am größten und wie in [35] abgeschätzt angegeben. Verschiebt man einen Eingabeparameter um eine Standardabweichung, so beeinflusst dies im Allgemeinen mehrere $\overline{\text{MS}}$ -Parameter. So hängt $\lambda(M_t)$ hauptsächlich von M_H und M_t ab, während $y_t(M_t)$ und $g_s(M_t)$ vor allem sensitiv auf Verschiebungen von M_t und $\alpha_s(M_Z)$ sind. In [35] findet man die Formeln

$$\lambda(M_t) = 0,12710 + 0,00206 \left(\frac{M_H}{\text{GeV}} - 125,66 \right) - 0,00004 \left(\frac{M_t}{\text{GeV}} - 173,35 \right), \quad (5.7)$$

$$y_t(M_t) = 0,93697 + 0,00550 \left(\frac{M_t}{\text{GeV}} - 173,35 \right) - 0,00042 \left(\frac{\alpha_s(M_Z) - 0,1184}{0,0007} \right), \quad (5.8)$$

$$g_s(M_t) = 1,1666 + 0,00314 \left(\frac{\alpha_s(M_Z) - 0,1184}{0,0007} \right) - 0,00046 \left(\frac{M_t}{\text{GeV}} - 173,35 \right), \quad (5.9)$$

mittels derer auch die Auswirkungen der experimentellen Unsicherheiten auf die Evolution der $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen untersucht werden können. Mit Hilfe der Massen der beiden nächstschwereren Fermionen, $m_b(m_b) \approx 4,163 \pm 0,016$ GeV [158] für das bottom-Quark und $M_\tau \approx 1776,82 \pm 0,16$ MeV [37] für das τ -Lepton, lassen sich die Yukawa-Kopplungen $y_b \approx \sqrt{2} \frac{m_b}{v} \approx 0,02$ und $y_\tau \approx \sqrt{2} \frac{M_\tau}{v} \approx 0,01$ auf Baumgraphenniveau abschätzen, woraus ersichtlich ist, dass diese im Vergleich zu den oben genannten Kopplungen, insbesondere y_t , vernachlässigbar klein sind.

Unter Verwendung der Betafunktionen für die Kopplungen g_s, y_t, g_2, g_1 und λ in Abhängigkeit ebendieser $\overline{\text{MS}}$ -Parameter zur Dreischleifenordnung (Referenzen siehe Kap. 3.5) findet man das in Abb. 5.1 gezeigte Verhalten der effektiven Kopplungsstärken von der Fermi- bis zur Planck-Skala. Während g_s und y_t stark abnehmen, verringert sich die Kopplungsstärke g_2 nur geringfügig. Die an der Fermi-Skala zunächst kleinste Eichkopplung g_1 hingegen wächst, sodass alle drei Eichkopplungen an der Planck-Skala einen vergleichbar großen Wert in der Nähe von $\frac{1}{2}$ haben. Die top-Yukawa-Kopplung

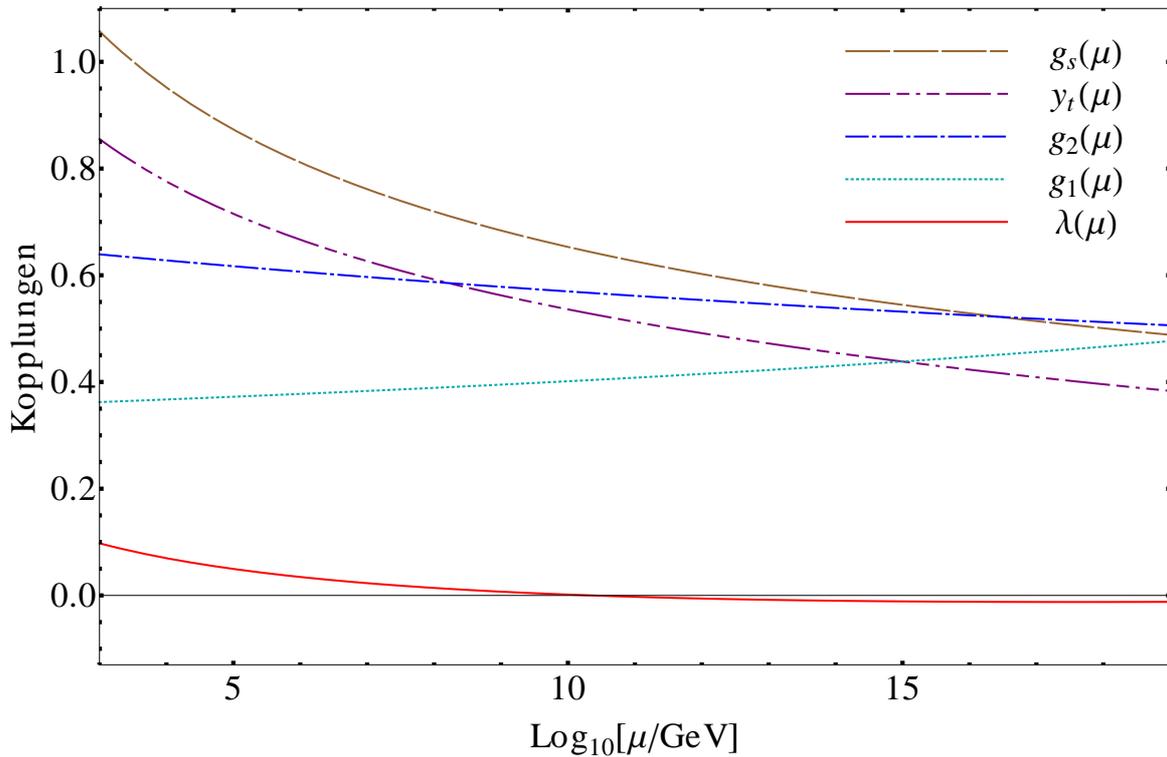


Abbildung 5.1: Evolution der Standardmodellkopplungen unter Verwendung von Dreischleifen-Betafunktionen bis zur Planck-Skala $M_{\text{Planck}} \sim 10^{19}$ GeV.

fällt prozentual gesehen etwas schwächer ab als die starke Kopplung und erreicht an der Planck-Skala einen Wert von etwa 0,4. Die Higgs-Selbstkopplung hingegen nimmt eine Sonderrolle ein, da sie zum einen bei einer Skala $\text{Log}_{10}\left(\frac{\mu}{\text{GeV}}\right) \approx 10,36$ negativ wird (s. Abb. 5.1 und Abb. 5.2, bzw. für eine genaue Ablesung Abb. 5.9 unten), zum anderen aber sehr nahe bei Null bleibt und die Steigung der Kurve und damit die Betafunktion an der Planck-Skala ebenfalls nahe an Null liegt. Im Folgenden soll daher diese Kopplung und die Präzision, mit der wir eine Aussage über ihre Entwicklung treffen können untersucht werden, um daraus Rückschlüsse auf die Stabilität des Standardmodellvakuums bis zur Planck-Skala ziehen zu können.

5.2 Evolution der Higgs-Selbstkopplung bis zur Planck-Skala

In Abb. 5.2 ist die Evolution der Higgs-Selbstkopplung $\lambda(\mu)$ für $10^4 \text{ GeV} \leq \mu \leq 10^{19} \text{ GeV}$ für Approximationen der Betafunktionen in unterschiedlichen Schleifenordnungen dargestellt. Für die braun gestrichelte Kurve wurden nur die Einschleifenbeiträge zu allen Betafunktionen verwendet, die blaue und rote Kurve zeigen die Zwei- und Dreischleifennäherung. Auffällig ist, wie dicht die Zwei- und Dreischleifenkurven zusammenliegen. Die Differenz dieser beiden Kurven kann als

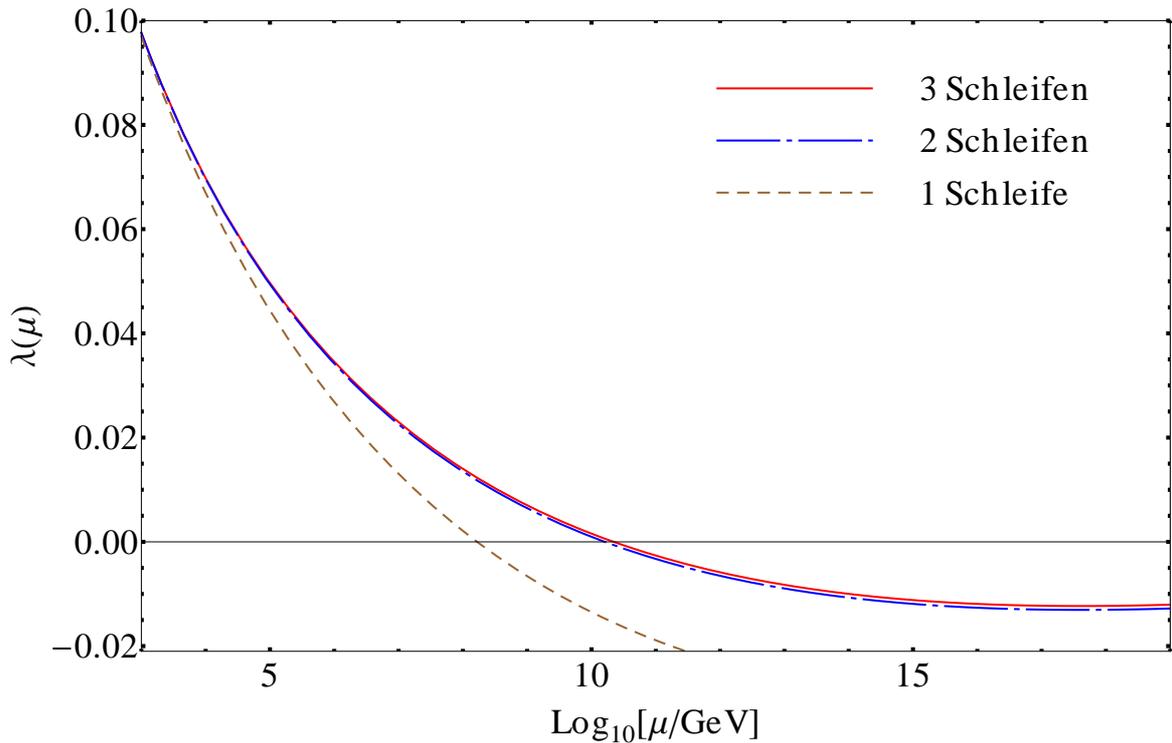


Abbildung 5.2: Evolution der Higgs-Selbstkopplung λ bis zur Planck-Skala unter Verwendung von Ein-, Zwei- und Dreischleifen-Betafunktionen.

Maß für die theoretische Unsicherheit, welche durch das Abbrechen der Störungsreihe bei der Berechnung der Betafunktionen entsteht, gesehen werden.¹ Während der Unterschied zwischen den Ein- und Zweischleifenresultaten noch sehr groß ist und damit in Zweischleifennäherung auch eine entsprechend große theoretische Unsicherheit vorliegt, führt die Berücksichtigung der Dreischleifenterme zu einer hohen Genauigkeit, was auch im Folgenden durch Vergleich mit den anderen experimentellen und theoretischen Unsicherheiten deutlich wird. Damit ist unmittelbar ersichtlich, wie wichtig der Beitrag der Dreischleifen-Betafunktionen für eine Präzisionsanalyse des Vakuumstabilitätsproblems ist.

5.2.1 Einfluss der elektroschwachen Korrekturen

In diesem Abschnitt soll der Einfluss der elektroschwachen Beiträge zu den Betafunktionen auf Dreischleifenordnung und damit die Gültigkeit des in Kap. 3.6.1 verwendeten eichfreien Grenzfalles ($g_2, g_1 \rightarrow 0$) untersucht werden. In Ein- und Zweischleifenordnung werden aber immer alle Kopplungen g_s, y_t, g_2, g_1 und λ berücksichtigt.

Bei der numerischen Analyse in Kap. 3.6.4 wurde bereits festgestellt, dass sich an der Skala $\mu = M_t$ die Beiträge zu β_λ , die nur von den Kopplungen g_s, y_t und λ abhängen, in Dreischleifenordnung stark kompensieren, sodass der Gesamtbeitrag aller

¹Hierbei wird die Konvergenz der Störungsreihe vorausgesetzt.

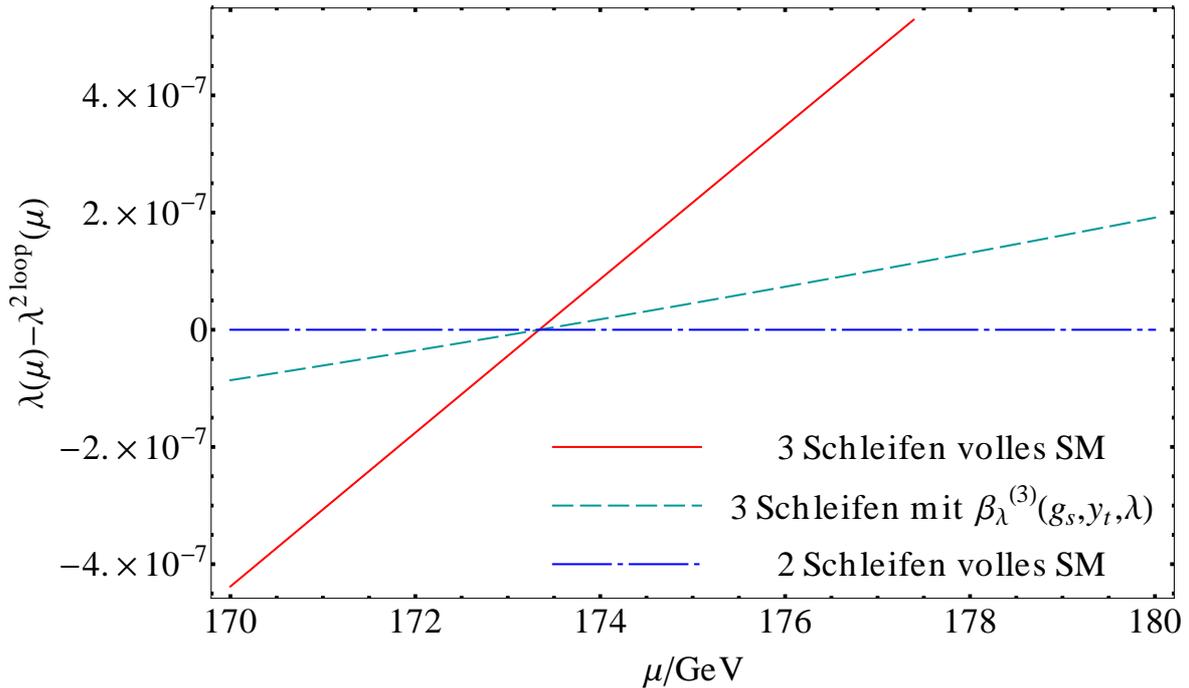


Abbildung 5.3: Einfluss der Dreischleifenbeiträge zu den Betafunktionen auf die Evolution der Higgs-Selbstkopplung λ an der top-Massenskala: Gezeigt wird $\lambda(\mu) - \lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})}$, wobei $\lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})}$ mit Zweischleifen-Betafunktionen läuft und $\lambda(\mu)$ wie in der Legende beschrieben.

dieser Terme etwa 26 mal kleiner ist als der größte Beitrag eines solchen Terms. Andererseits wurde festgestellt, dass der Dreischleifenbeitrag zu β_λ im Grenzfall $g_2, g_1 \rightarrow 0$ fünf mal kleiner ausfällt, als bei Berücksichtigung der beiden elektroschwachen Kopplungen. In Abb. 5.3 ist dieser Sachverhalt deutlich sichtbar. Hier wird die Hilfsgröße $\lambda(\mu) - \lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})}$ im Bereich $\mu \sim M_t$ dargestellt, wobei $\lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})}$ die laufende Higgs-Selbstkopplung in der Zweischleifenapproximation für die Betafunktionen ist und $\lambda(\mu)$ in verschiedenen Näherungen für die Betafunktionen betrachtet wird. In Zweischleifenordnung ist offensichtlich $\lambda(\mu) - \lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})} \equiv 0$ (blaue Linie). Die Kurve für das volle Standardmodell (rote Linie) hat tatsächlich in $\mu = M_t$ eine etwa fünf mal stärkere Steigung als die, bei der in $\beta_\lambda^{(3)}$ die beiden elektroschwachen Kopplungen zu Null gesetzt werden (türkis gestrichelte Linie). Betrachtet man allerdings die Evolution dieser Hilfsgröße bis zur Planck-Skala, wie in Abb. 5.4 gezeigt, so stellt sich heraus, dass bei hohen Skalen die Differenz zwischen den Dreischleifenkurven mit $\beta_\lambda^{(3)}(g_s, y_t, g_2, g_1, \lambda)$ und $\beta_\lambda^{(3)}(g_s, y_t, \lambda)$ im Vergleich zur Differenz dieser beiden Kurven zur waagerechten Zweischleifenlinie relativ klein ist. Dies liegt daran, dass die angesprochene gegenseitige Auslöschung von Dreischleifentermen in β_λ nur bei $\mu \sim M_t$ so stark ausgeprägt ist und bei höheren Skalen die Beiträge von y_t und g_s dominieren. In diesem Schaubild ist außerdem gezeigt, wie $\lambda(\mu) - \lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})}$ sich entwickelt, wenn man die Dreischleifenbeiträge aller beteiligten Betafunktionen, nicht nur in β_λ , im eichfreien Grenzfall betrachtet (orange gepunktete Linie), welche sogar noch näher am vollen Dreischlei-

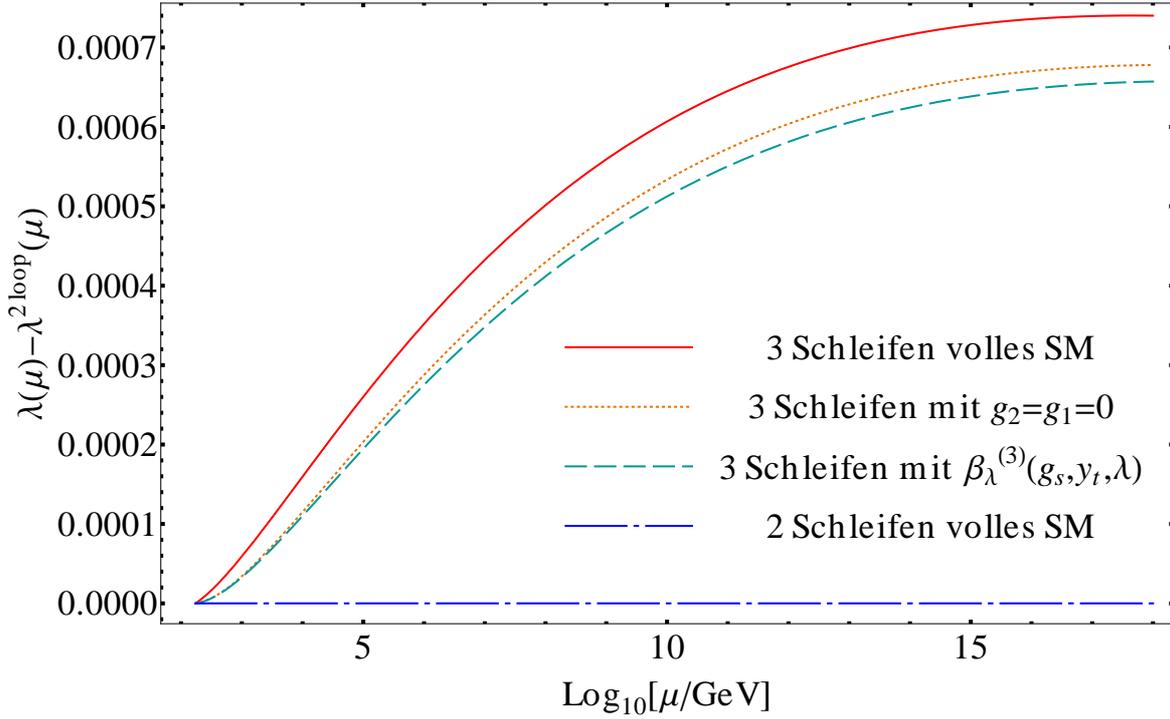


Abbildung 5.4: Einfluss der Dreischleifenbeiträge zu den Betafunktionen auf die Evolution der Higgs-Selbstkopplung λ : gezeigt wird $\lambda(\mu) - \lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})}$, wobei $\lambda(\mu)^{(2 \text{ loop})}$ mit Zweischleifen-Betafunktionen läuft und $\lambda(\mu)$ wie in der Legende beschrieben.

fenresultat liegt als diejenige, bei der nur in $\beta_\lambda^{(3)}$ die elektroschwachen Kopplungen zu Null gesetzt werden.

Insgesamt kann gesagt werden, dass der eichfreie Grenzfall für die Dreischleifenbeiträge nahe der top-Massenskala zwar keine gute Approximation ist, für die Evolution der Higgs-Selbstkopplung bei hohen Skalen hingegen beschreibt sie das Verhalten offenbar gut. Lässt man die Higgs-Selbstkopplung von der top-Massenskala bis zur Planck-Skala laufen, so sind die Beiträge, welche nur von den Kopplungen g_s, y_t und λ abhängen für etwa 90% der Differenz zwischen dem vollen Zweischleifen- und dem vollen Dreischleifenergebnis verantwortlich. Eine Diskussion des Einflusses der elektroschwachen Dreischleifenkorrekturen auf die Evolution von λ wurde auch in [7] publiziert.

5.2.2 Vergleich der theoretischen Unsicherheiten

Neben der theoretischen Unsicherheit, welche vom Abbrechen der Störungsreihe bei der Berechnung der Betafunktionen bis zu einer bestimmten Schleifenordnung herührt, gibt es noch eine zweite theoretische Unsicherheit bei der Abbildung experimenteller Beobachtungsgrößen auf $\overline{\text{MS}}$ -Parameter. Hier werden die Konvertierungsformeln aus [35] angewandt, welche durch numerisches Lösen von Zweischleifenintegralen unter Berücksichtigung der in Kap. 5.1 genannten Messgrößen die fünf Parameter g_s, g_1, g_2, y_t

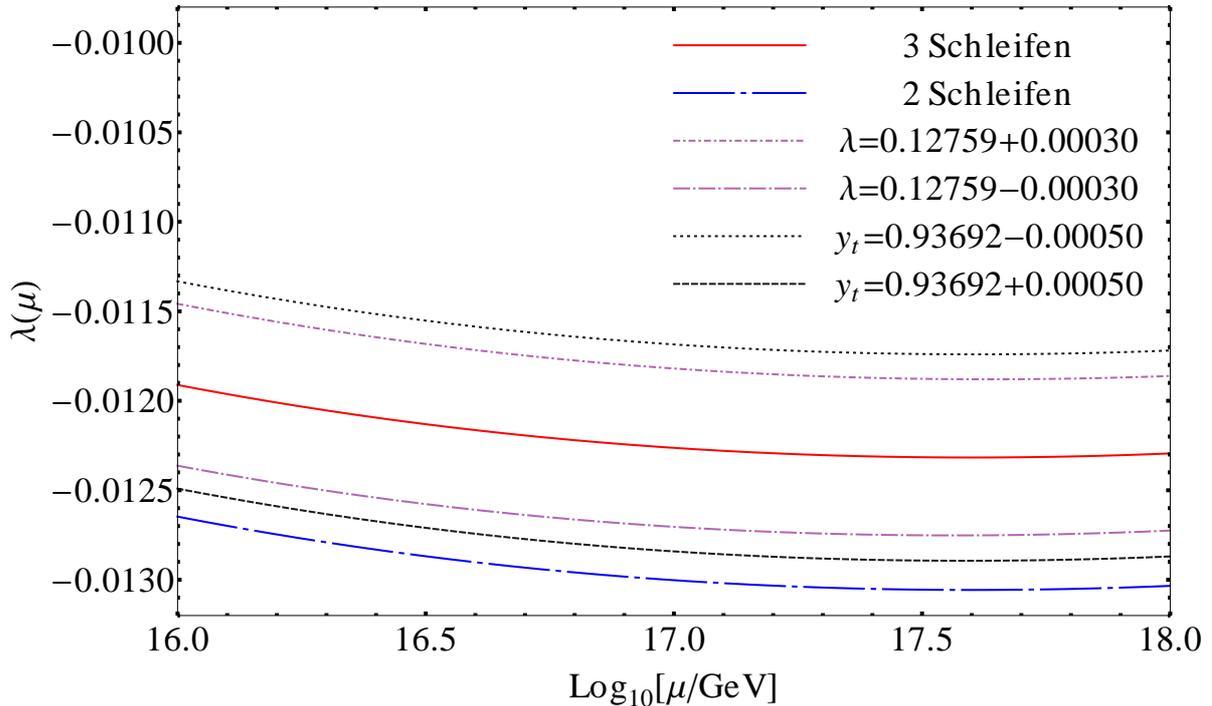


Abbildung 5.5: Ausschnitt aus der Evolution der Higgs-Selbstkopplung λ : Vergleich der wichtigsten theoretischen Unsicherheiten.

und λ bestimmen. Als die beiden größten Unsicherheiten werden die auf die Bestimmung von $y_t(M_t)$ und $\lambda(M_t)$ genannt, die in Tab. 5.1 angegeben sind. In Abb. 5.5 wird der Einfluss einer Verschiebung der Startwerte für diese beiden Parameter um die entsprechende Unsicherheit untersucht.

Die Unsicherheit, welche auf die Bestimmung von $\lambda(M_t)$ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema zurückgeht, ist etwas kleiner als die aus der Berechnung von $y_t(M_t)$, aber beide sind von der selben Größenordnung wie die von den Betafunktionen stammende Unsicherheit. Ein Vergleich der beiden theoretischen Unsicherheitsquellen findet sich auch in [10].

5.2.3 Vergleich der theoretischen und experimentellen Unsicherheiten

Nachdem nun das Verhalten von λ bis zur Planck-Skala beschrieben und der Einfluss der theoretischen Unsicherheiten untersucht wurde, ist ein Vergleich mit den experimentellen Unsicherheiten angebracht. Meine bisherigen Untersuchungen zu diesem Thema wurden in [8–10] veröffentlicht. Ähnliche Analysen neueren Datums findet man in [35, 48, 61, 62].

In Abb. 5.6 ist das Laufen der Higgs-Selbstkopplung λ bis zur Planck-Skala unter Verwendung von Zwei- und Dreischleifen-Betafunktionen gezeigt, sowie die verschobene Dreischleifenkurven für einen in den Gleichungen (5.8) und (5.9) um $\sigma_{\alpha_s} = 0,0007$ erhöhten oder verringerten Wert von $\alpha_s(M_Z)$. Abb. 5.7 zeigt den analogen Vergleich

für eine in (5.7) um $\sigma_{M_H} = 0,4$ GeV erhöhte oder verringerte Higgs-Masse M_H .

Der dritte Parameter, dessen Messunsicherheit einen wichtigen Einfluss auf die Evolution der Higgs-Selbstkopplung hat, ist die top-Quarkmasse M_t , für deren Erhöhung bzw. Verringerung um $\sigma_{M_t} = 0,76$ GeV in den Bestimmungsgleichungen (5.7), (5.8) und (5.9) die Dreischleifenkurven in Abb. 5.8 gezeigt werden. In Abb. 5.9 sind zum direkten Vergleich nochmals alle Kurven für die um eine Standardabweichung verschobenen Parameter $\alpha_s(M_Z)$, M_H und M_t gezeigt.

Um die Unsicherheiten besser vergleichen zu können, wird in Abb. 5.9 auch eine Großaufnahme der Situation an der Skala gezeigt, bei der λ für die Wahl der Parameter nach Tab. 5.1 negativ wird. Die experimentellen Unsicherheiten der Parameter, welche von $\alpha_s(M_Z)$ und M_H stammen, sind an dieser Skala, ebenso wie an der Planck-Skala etwa gleich groß und ungefähr doppelt so groß wie die von den Betafunktionen stammende theoretische Unsicherheit, nachdem die Resultate dieser Dissertation für β_λ und β_{y_t} verwendet werden. Die experimentelle Unsicherheit von der Bestimmung der top-Quarkmasse hingegen ist deutlich größer, etwa sechs mal so groß wie die von den Betafunktionen im Bereich ab $\mu \sim 10^{10}$ GeV bis hin zur Planck-Skala.

Höhere Werte von α_s und M_H begünstigen die Stabilität des Standardmodells, während höhere Werte der top-Quarkmasse M_t das Standardmodell instabiler machen. Dies ist hauptsächlich dem Einschleifenterm $\propto (-y_t^4)$ in der Betafunktion β_λ (s. (3.39)) geschuldet, der bei niedrigen Skalen die Evolution von λ dominiert.

Damit ist die top-Quarkmasse der limitierende Parameter für eine zuverlässige Beantwortung der Frage, ob das Standardmodell bis zur Planck-Skala stabil sein

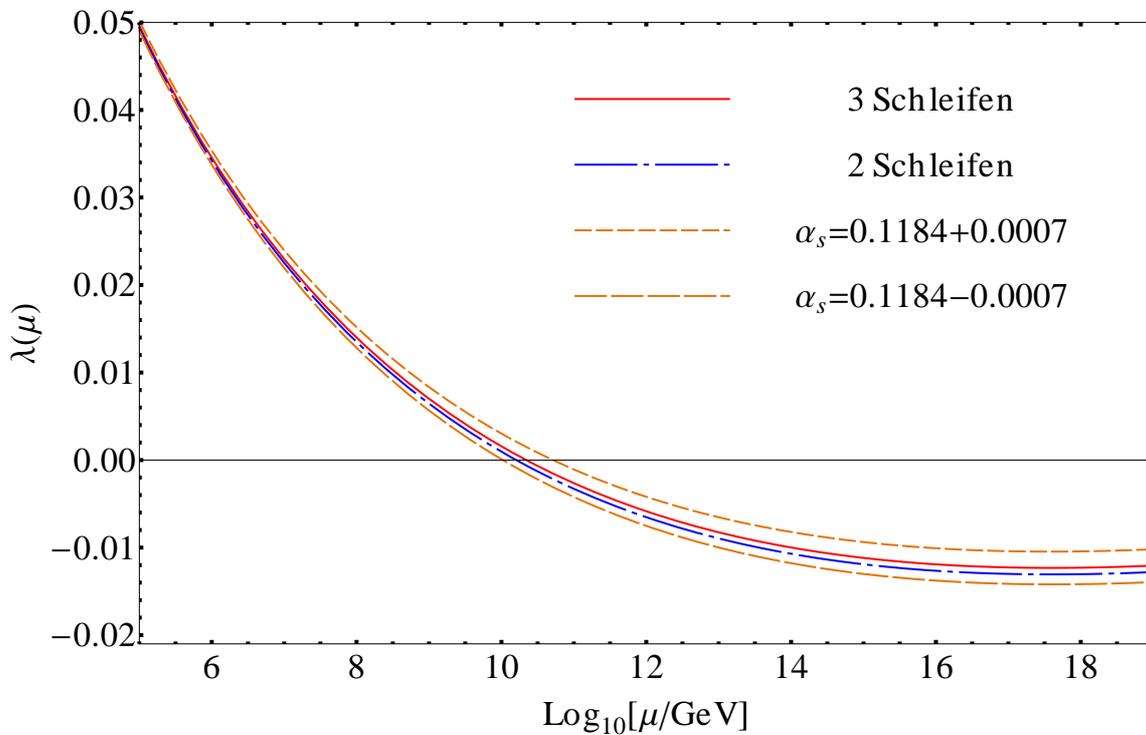
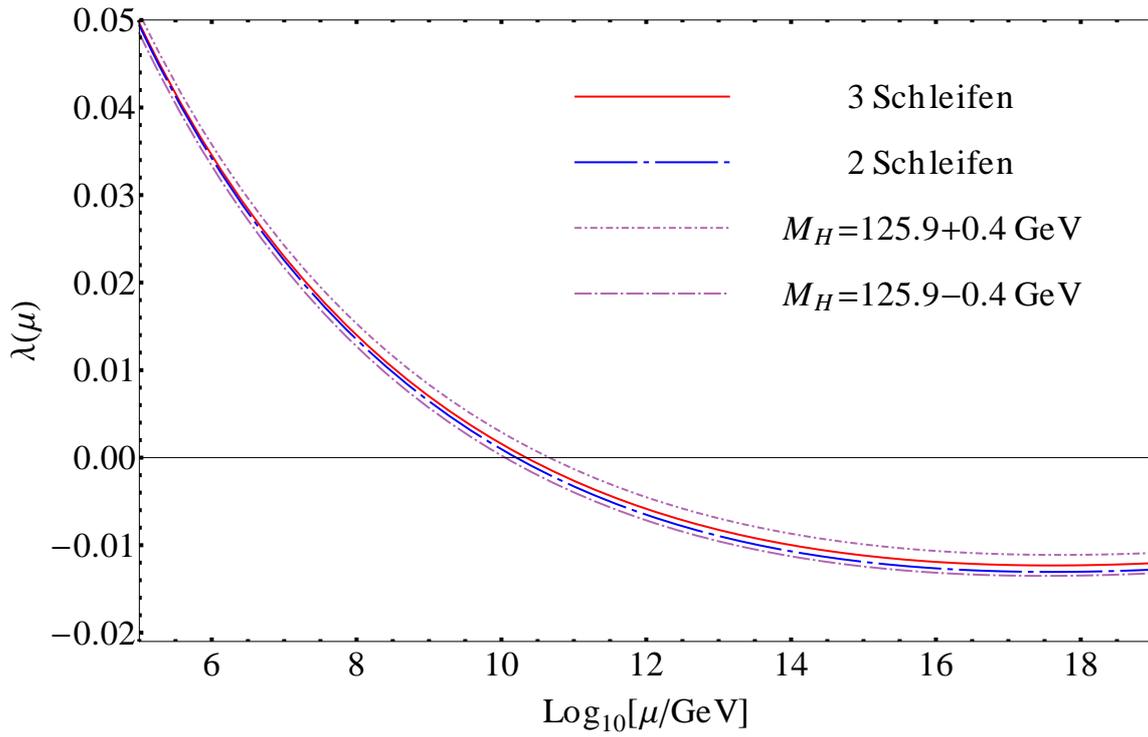
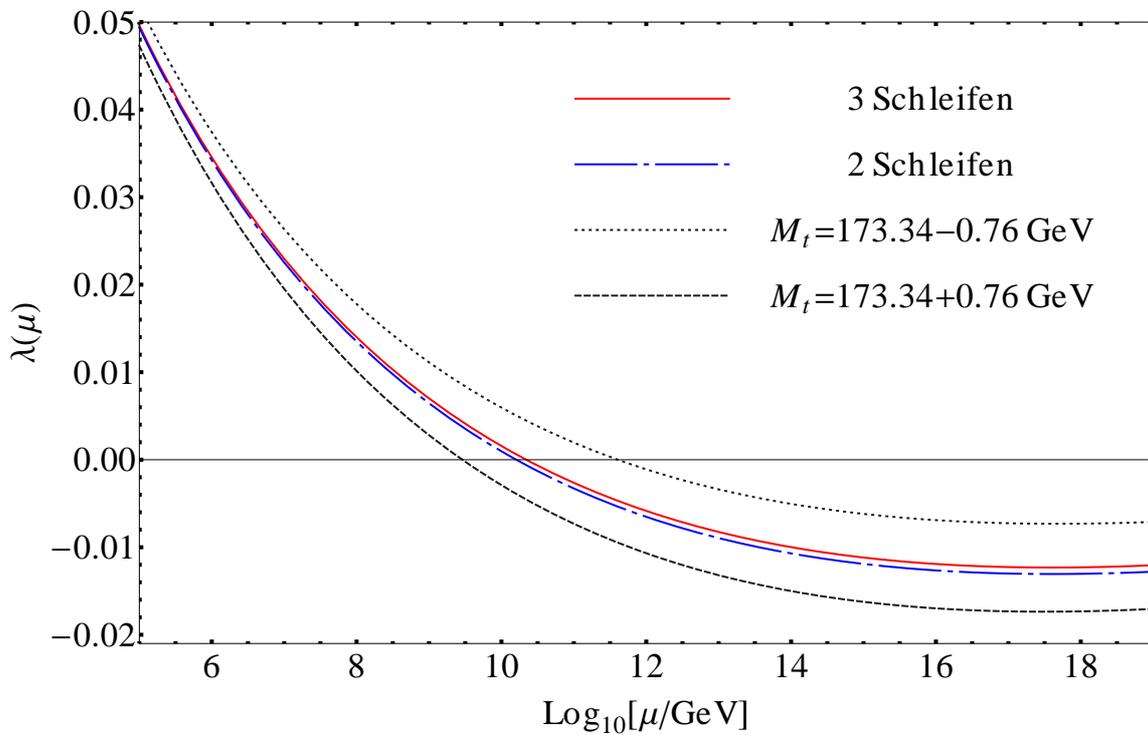


Abbildung 5.6: Einfluss der Verschiebung von $\alpha_s(M_Z)$ um $\sigma_{\alpha_s} = 0,0007$ auf $\lambda(\mu)$.

Abbildung 5.7: Einfluss der Verschiebung von M_H um $\sigma_{M_H} = 0,4 \text{ GeV}$ auf $\lambda(\mu)$.Abbildung 5.8: Einfluss der Verschiebung von M_t um $\sigma_{M_t} = 0,76 \text{ GeV}$ auf $\lambda(\mu)$.

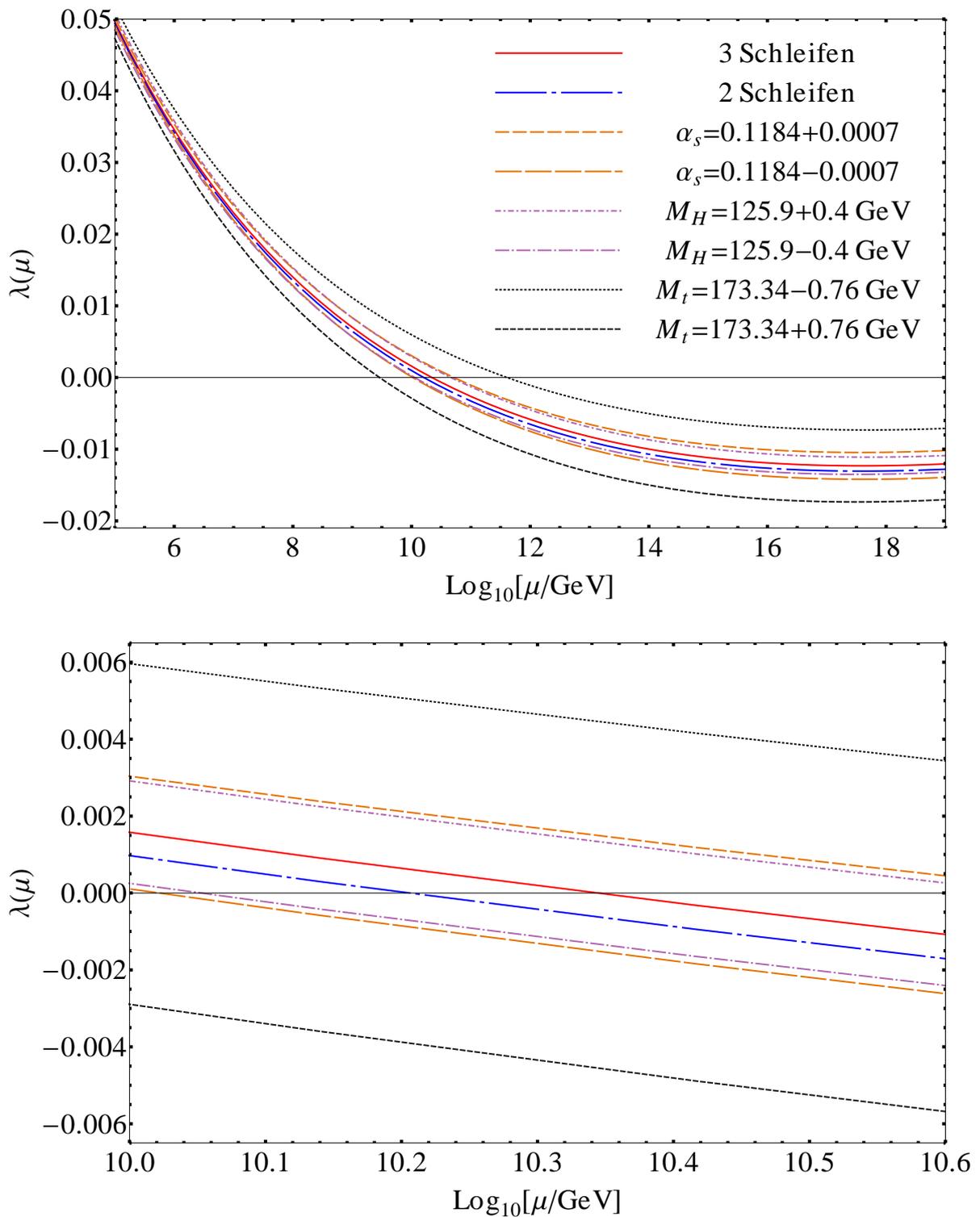


Abbildung 5.9: Evolution der Higgs-Selbstkopplung λ bis zur Planck-Skala: Vergleich der wichtigsten experimentellen Unsicherheiten.

kann. Tatsächlich wäre für ein um $(2 - 3) \sigma_{M_t}$ kleinere top-Quarkmasse die Higgs-Selbstkopplung $\lambda > 0$ bis zur Planck-Skala.

5.2.4 Die Stabilität des Standardmodellvakuums

Insgesamt ist damit ein stabiles Standardmodellvakuum bis zur Planck-Skala zum gegenwärtigen Zeitpunkt unwahrscheinlich, aber nicht auszuschließen. Legt man die aktuellen experimentellen Bestwerte für die Parameter aus Tab. 5.1 sowie die Dreischleifen-Betafunktionen und die Konvertierungsformeln von On-shell- zu $\overline{\text{MS}}$ -Parametern auf Zweischleifenniveau zugrunde, so ergibt sich

$$\lambda(\mu) < 0 \text{ für } \text{Log}_{10} \left(\frac{\mu}{\text{GeV}} \right) \gtrsim 10,36. \quad (5.10)$$

Wegen der für diesen Zweck vergleichsweise hohen Unsicherheit bei der Bestimmung der top-Quarkmasse, ist dieser Wert aber mit einer Unsicherheit von über einer Größenordnung belegt. Darüber hinaus bleibt aufgrund der genannten Unsicherheiten und der Nähe der effektiven Higgs-Selbstkopplung λ zum Wert Null im Bereich hoher Skalen, $10^{10} \lesssim \mu \lesssim 10^{19}$ GeV, die Frage der Stabilität des Grundzustands im Standardmodell einstweilen offen.

5.2.5 top-Massenunsicherheit an zukünftigen Linearbeschleunigern

Interessant ist in diesem Zusammenhang die Perspektive auf die Konstruktion eines linearen e^+e^- -Beschleunigers, der eine Schwerpunktsenergie erreicht, bei der in großer Menge $t\bar{t}$ -Paare an der Produktionsschwelle erzeugt werden. Der *Technical Design Report, Vol. 2* für den *International Linear Collider* (ILC) nennt eine mögliche Unsicherheit bei der top-Massenbestimmung² von $\Delta M_t \approx 19 - 34$ MeV [159]. Wesentliche Simulationen zur Ermittlung dieser Werte wurden in [160] präsentiert. In einer Studie für den Linearbeschleuniger CLIC wurde ebenfalls festgestellt, dass Werte von $\Delta M_t < 100$ MeV erreichbar sind [161].

Das Schaubild in Abb. 5.10 zeigt daher ein Zukunftsszenario, in dem eine top-Massenunsicherheit von 30 MeV zugrunde gelegt wird.³ Ein solch präziser Wert würde die Situation zwischen experimenteller und theoretischer Genauigkeit gerade umkehren und motivieren, dass die theoretischen Fehler durch Vierschleifen-Betafunktionen und Dreischleifen-Konvertierungsformeln erneut reduziert werden.

²Hierbei handelt es sich um die 1S-Masse, nicht um die Polmasse (vgl. Kap. 4.1).

³Da für die Konvertierung der 1S-Masse in die $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungen noch keine Formeln verfügbar sind, werden hier die Konvertierungsformeln für die Polmasse des top-Quarks verwendet. Genauere Konvertierungsformeln unter Einbeziehung der 1S-Masse könnten eine leichte Verschiebung aller Kurven in Abb. 5.10 bewirken, allerdings erwarten wir keine nennenswerten Verschiebungen der Kurven relativ zueinander.

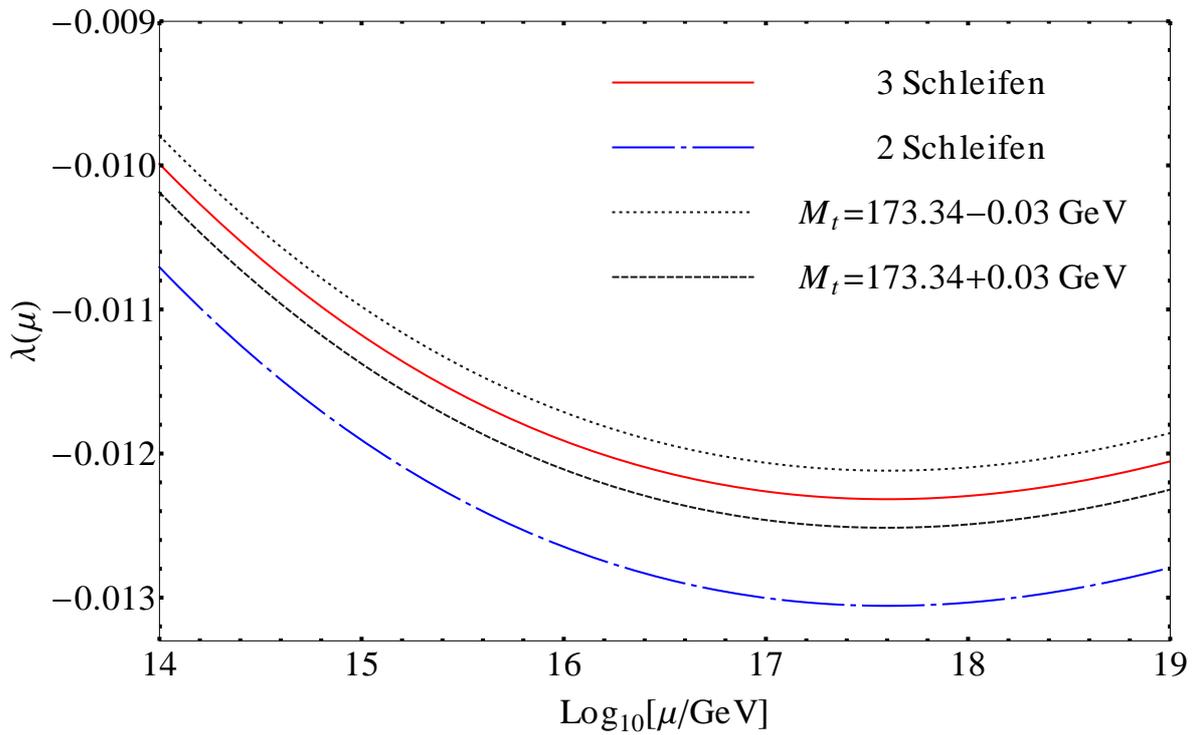


Abbildung 5.10: Evolution der Higgs-Selbstkopplung λ bis zur Planck-Skala unter Verwendung von Zwei- und Dreischleifen-Betafunktionen sowie unter Verwendung der Dreischleifen-Betafunktionen mit Startwerten für die Kopplungen für ein um $\sigma_{M_t}^{\text{L.C.}} = 30 \text{ MeV}$ verschobenes M_t .

KAPITEL 6

Fazit

Im Rahmen dieser Dissertation wurden Renormierungsgruppenfunktionen des Standardmodells in Dreischleifenordnung berechnet. Die Betafunktionen der Higgs-Selbstkopplung λ und des Massenparameters m^2 im Higgs-Potential in Abhängigkeit der Eichkopplungen g_s , g_1 und g_2 , der Yukawa-Kopplungen y_t , y_b und y_τ sowie von λ selbst sind zentrale Ergebnisse dieser Arbeit. Außerdem wurde die Betafunktion für die top-Yukawa-Kopplung y_t in Abhängigkeit der Kopplungen g_s , y_t und λ bestimmt, ebenso wie die anomalen Dimensionen der Felder, die über diese drei Kopplungen wechselwirken.

Diese Resultate sind von Bedeutung für eine Präzisionsanalyse der Stabilität des Vakuumzustands im Standardmodell. Zu Beginn dieser Arbeit wurde die Struktur des Standardmodells als Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen beschrieben, der Grund- bzw. Vakuumzustand definiert und das Problem der Stabilität dieses Zustands beleuchtet. Es wurde die enge Verbindung zwischen der Vakuumstabilität und der Evolution der Higgs-Selbstkopplung λ aufgezeigt. Eine negative Kopplung λ ab einer bestimmten Energieskala bedeutet, dass das Standardmodell oberhalb dieser Skala keine Theorie mit stabilem Grundzustand ist.

Im Folgenden wurde die Berechnung von Renormierungsgruppenfunktionen erläutert und die technischen Herausforderungen, wie die Behandlung von γ_5 -Matrizen in dimensionaler Regularisierung, die Vermeidung von infraroten Divergenzen sowie die Gruppenstruktur des Standardmodells diskutiert.

Um die Evolution der Kopplungen im Standardmodell zu beschreiben, werden neben den zugehörigen Betafunktionen auch Anfangswerte benötigt, welche mittels Konvertierungsformeln aus experimentell zugänglichen Größen bestimmt werden. In dieser Arbeit wurde beschrieben, wie solche Formeln in Störungstheorie berechnet werden und auftretende technische Fragen hierzu erörtert.

Schließlich wurden Schaubilder vorgestellt, die das Laufen der Higgs-Selbstkopplung bis zur Planck-Skala zeigen. Die Bedeutung der wichtigsten experimentellen und theoretischen Unsicherheiten wurde herausgearbeitet und festgestellt,

dass die theoretische Unsicherheit, welche von der störungstheoretischen Berechnung der Betafunktionen herrührt, durch die Ergebnisse dieser Arbeit stark reduziert werden konnte.

Damit sind die wichtigsten Unsicherheiten bei der Klärung der Frage, ob das Standardmodell eine Theorie mit stabilem Vakuumzustand bis zur Planck-Skala ist, die experimentellen Unsicherheiten in der starken Kopplung $\alpha_s(M_Z)$, der Higgs-Masse M_H und insbesondere der top-Quarkmasse M_t . Legt man die aktuellen experimentellen Bestwerte für diese physikalischen Größen zugrunde, so wird λ bei einer Skala von $\mu \approx 10^{10,36}$ GeV negativ. Damit ist ein nicht stabiler Grundzustand das wahrscheinlichste Szenario unter der Annahme, dass das Standardmodell die Physik bis zu dieser Energieskala und darüber hinaus beschreibt.

Eine abschließende Klärung der Frage der Vakuumstabilität erfordert jedoch eine weitere Reduktion der oben genannten experimentellen Unsicherheiten, vor allem eine deutlich präzisere Bestimmung der top-Quarkmasse, wie sie an zukünftigen linearen e^+e^- -Beschleunigern vorgenommen werden könnte. Auch die physikalische Bedeutung eines instabilen oder metastabilen Vakuums bzw. eines effektiven Higgs-Potentials mit zwei energetischen Minima auf fast gleichem Niveau bleibt ein interessanter Forschungsgegenstand, der möglicherweise noch tiefere Erkenntnisse auf dem Weg zum Verständnis der spontanen Symmetriebrechung in Quantenfeldtheorien bereithält.

Ich denke, dass diese Fragen auch in Zukunft spannend bleiben und hoffe, dass die hier vorgestellten Ergebnisse auch bei künftigen Untersuchungen auf diesem Themengebiet einen wichtigen Beitrag leisten werden.

Zeichenerklärung und Konventionen

Verschiedenes

B	Index zur Markierung nackter Größen, z.B. $\mathcal{L}_B, y_{t,B}$
L, R	Indizes zur Markierung links- und rechtshändiger Objekte, z.B. t_L, t_R
$D = 4 - 2\epsilon$	Dimension der Raumzeit
γ_E	Euler-Konstante $\gamma_E \approx 0,5772$
$\Gamma(x)$	Gammafunktion: $\Gamma(x) = \int_0^\infty dy y^{x-1} e^{-y}$
$\zeta(x)$ ζ_n	Riemannsches Zetafunktion: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(x) > 1$ Abkürzung: $\zeta_n = \zeta(n)$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
$g^{\mu\nu}$ q, p, k, \dots Q, P, K, \dots	Metrik im Minkowski-Raum: $g^{\mu\nu} = [\text{diag}(1, -1, -1, -1)]^{\mu\nu}$ Vierer-Impulse im Minkowski-Raum Vierer-Impulse im Euklidischen Raum
n_f N_g	Anzahl der Fermionflavour (im Standardmodell $n_f = 6$) Anzahl der Fermiongenerationen (im Standardmodell $N_g = \frac{n_f}{2} = 3$)
m_i M_i	kleingeschriebene Massen sind $\overline{\text{MS}}$ -Massen großgeschriebene Massen sind Polmassen
γ^μ	γ -Matrix in der Bjorken-Drell-Metrik, d. h. $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = g_{\mu\nu}$ und $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu = \begin{cases} \gamma^\mu & \text{falls } \mu = 0 \\ -\gamma^\mu & \text{falls } \mu \geq 1 \end{cases}$
ξ ξ_W ξ_B	Eichparameter für die $SU(3)_c$ Eichparameter für die $SU(2)_L$ Eichparameter für die $U(1)_Y$
μ^2	Renormierungsskala, i.d.R. $\mu^2 = \mu_{\overline{\text{MS}}}^2$
G_F G	Fermi-Konstante des Myon-Zerfalls $G_F = 1,1663787(6) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ [29] Gravitationskonstante $G = 6,70837(80) \times 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$ [37]
Λ M_{Planck} M_{Fermi}	obere Gültigkeitsgrenze der betrachteten Theorie Planck-Skala $M_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{1}{G}} \approx 1,2209 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$ Fermi-Skala $M_{\text{Fermi}} \sim (\sqrt{2}G_F)^{-\frac{1}{2}} \approx 246,2 \text{ GeV}$

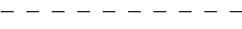
Einheiten

In dieser Arbeit werden natürliche Einheiten verwendet, d.h. $\boxed{\hbar = c = 1}$.

Kopplungen

g_s	starke Kopplung (SU(3) _c -Eichkopplung)
g_2	elektroschwache Kopplung (SU(2) _L -Eichkopplung)
g_1	elektroschwache Kopplung (U(1) _Y -Eichkopplung)
y_t	top-Yukawa-Kopplung
y_b	bottom-Yukawa-Kopplung
y_τ	τ -Yukawa-Kopplung
λ	Higgs-Selbstkopplung
m^2	Massenparameter im Higgs-Potential (2.14)
$\mathbf{Y}_T, \mathbf{Y}_B, \mathbf{Y}_L$	Yukawa-Matrizen aus (2.15)

Felder und Darstellung von Propagatoren

\bar{f}, f : (Anti)Fermion \bar{q}, q : (Anti)Quark \bar{l}, l : (Anti)Lepton	
$A^{a\mu}$: SU(3) _c -Eichboson (Gluon)	
$W^{a\mu}$: SU(2) _L -Eichboson	
B^μ : U(1) _Y -Eichboson	
\bar{c}^a, c^a : (Anti)Geist (SU(3) _c) \bar{c}_W^a, c_W^a : (Anti)Geist (SU(2) _L)	
Φ_1, Φ_2, Φ^\pm : komplexes Skalarfeld	
H, χ : reelles Skalarfeld	

Quarks: t (top), b (bottom), c (charm), s (strange), u (up), d (down)
Leptonen: τ , μ , e (Elektron) und zugehörige Neutrinos ν_τ , ν_μ , ν_e

Indizes und Gruppenstrukturen

a, b, c, \dots	Gruppenindizes der adjungierten Darstellung,	SU(3) _c : $a = 1, \dots, 8$ SU(2) _L : $a = 1, 2, 3$
i, j, k, \dots	Gruppenindizes der fundamentalen Darstellung,	SU(3) _c : $i = 1, 2, 3$ SU(2) _L : $i = 1, 2$
μ, ν, \dots	Lorentz-Indizes,	$\mu = 0, 1, 2, 3$
N_c	Anzahl der Farben (QCD: $N_c = 3$)	$N_c = \delta^{ii}$
n_g	Anzahl der Gluonen (QCD: $n_g = 8$)	$n_g = \delta^{aa} = N_c^2 - 1$
T_{ij}^a	Generatoren der SU(N_c) _c	
f^{abc}	Strukturkonstanten der SU(N_c) _c	$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$
T_F	Spur zweier SU(N_c) _c -Generatoren:	$T_F \delta^{ab} = \mathbf{Tr} (T^a T^b)$
C_A	adjungierter Casimir-Operator der SU(N_c) _c :	$f^{acd} f^{bcd} = C_A \delta^{ab}$, $C_A = 2T_F N_c$
C_F	fundamentaler Casimir-Operator der SU(N_c) _c :	$T_{ik}^a T_{kj}^a = C_F \delta^{ij}$, $T_F (N_c - \frac{1}{N_c})$
σ_{ij}^a	Generatoren der SU(2) _L (Pauli-Matrizen)	
ε^{abc}	Strukturkonstanten der SU(2) _L	$[\sigma^a, \sigma^b] = i \varepsilon^{abc} \sigma^c$
Y_f	Hyperladung (U(1) _Y) des Feldes f	

Anmerkungen:

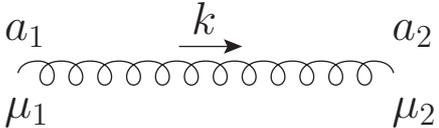
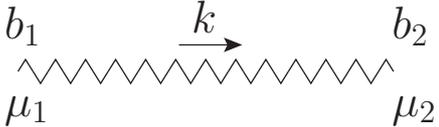
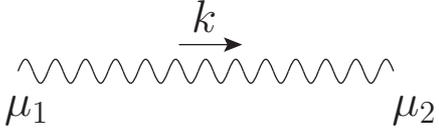
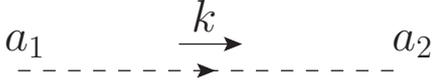
- Alle in dieser Arbeit gezeigten Feynman-Diagramme wurden mit dem Latex-Paket *Axodraw* [162] erstellt.
- Die gezeigten Schaubilder wurden mit Mathematica¹ erstellt. Für die Schaubildlegenden in Kap. 5 wurde ein nicht veröffentlichtes Mathematica-Skript von Dr. Nikolai Zerf verwendet.

¹<http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>

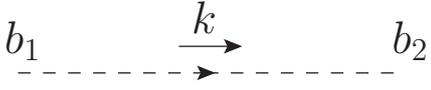
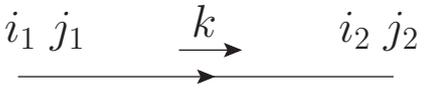
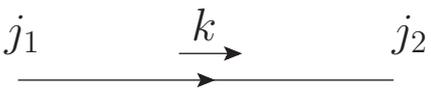
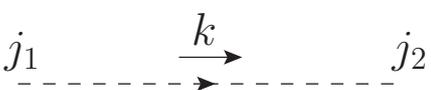
Feynman-Regeln des Standardmodells

B.1 Das Standardmodell in der ungebrochenen Phase

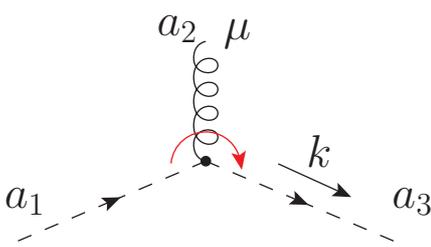
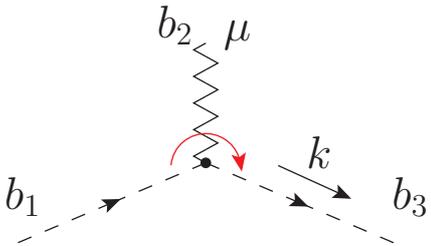
Aus der Lagrangedichte (2.1) mit den Bestandteilen (2.2), (2.10), (2.11), (2.13) und (2.20) ergeben sich für das Standardmodell in der ungebrochenen Phase die folgenden Feynman-Regeln:¹

	<p>Gluonpropagator (SU(3)_c: $a_{1,2} \in \{1, \dots, 8\}$)</p> $\delta^{a_1 a_2} \frac{1}{i} \left[\frac{-g^{\mu_1 \mu_2}}{-k^2} - \xi \frac{k^\mu k^\nu}{(-k^2)^2} \right]$
	<p>W-Propagator (SU(2)_L: $b_{1,2} \in \{1, 2, 3\}$)</p> $\delta^{b_1 b_2} \frac{1}{i} \left[\frac{-g^{\mu_1 \mu_2}}{-k^2} - \xi_W \frac{k^\mu k^\nu}{(-k^2)^2} \right]$
	<p>B-Propagator (U(1)_Y)</p> $\frac{1}{i} \left[\frac{-g^{\mu_1 \mu_2}}{-k^2} - \xi_B \frac{k^\mu k^\nu}{(-k^2)^2} \right]$
	<p>Geistpropagator (SU(3)_c: $a_{1,2} \in \{1, \dots, 8\}$)</p> $\delta^{a_1 a_2} \frac{1}{i} \frac{1}{-k^2}$

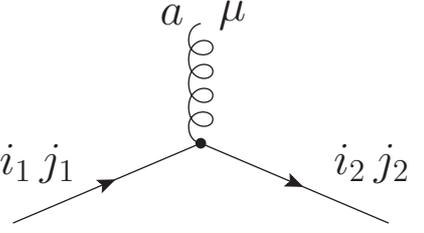
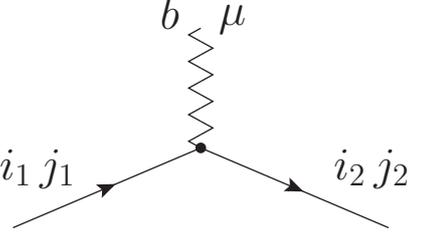
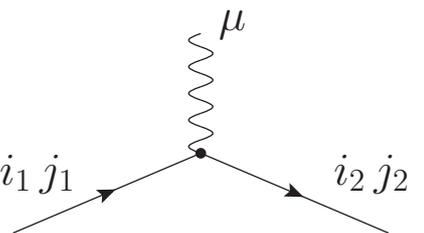
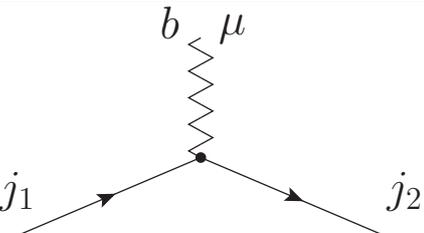
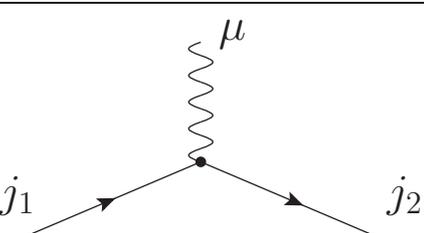
¹Diese wurden im Rahmen dieser Arbeit unabhängig aus der Lagrangedichte (2.1) abgeleitet und sind in Übereinstimmung mit [12, 32] und nicht publizierten Aufzeichnungen von K. G. Chetyrkin.

	Geistpropagator (SU(2) _L : $b_{1,2} \in \{1, 2, 3\}$) $\delta^{b_1 b_2} \frac{1}{i - k^2}$
	Quarkpropagator (SU(3) _c : $i_{1,2} \in \{1, 2, 3\}$; SU(2) _L : $j_{1,2} \in \{1, 2\}$) $\delta^{i_1 i_2} \delta^{j_1 j_2} \frac{1}{i - k^2}$
	Leptonpropagator (SU(2) _L : $j_{1,2} \in \{1, 2\}$) $\delta^{j_1 j_2} \frac{1}{i - k^2}$
	Φ-Propagator (SU(2) _L : $j_{1,2} \in \{1, 2\}$) $\delta^{j_1 j_2} \frac{1}{i - k^2}$

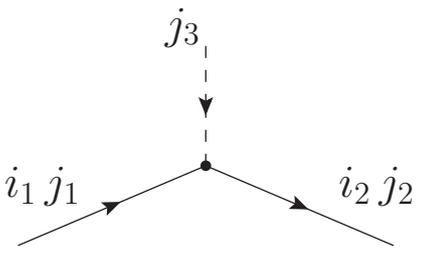
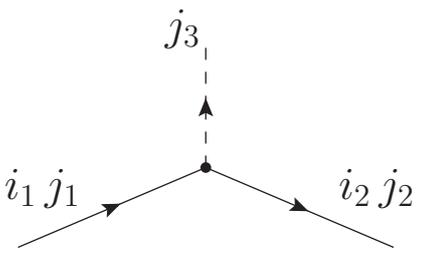
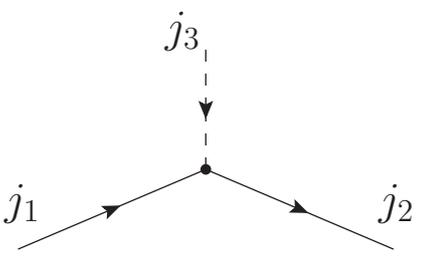
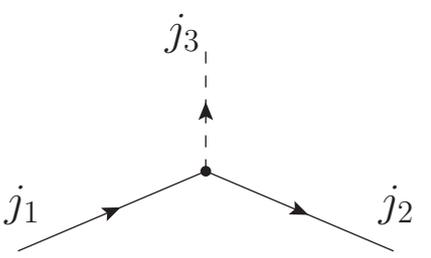
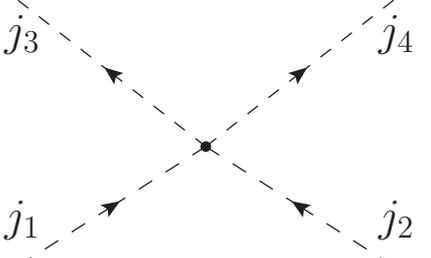
Bei den Fermionpropagatoren werden die Spinorindizes aus Gründen der Lesbarkeit unterdrückt. Diese werden auch für die Implementierung in GEFICOM nicht explizit benötigt. Stattdessen werden Fermionlinien in Feynman-Diagrammen als Produkte nicht-vertauschender Funktionen in FORM implementiert. Da in den Rechnungen dieser Arbeit nur die dritte Generation der Fermionen an der Yukawa-Wechselwirkung teilnimmt, also nur y_i, y_b und y_τ berücksichtigt werden, müssen keine Indizes verwendet werden, welche die Fermiongeneration markieren. Dies wäre nötig, wenn man die vollen Yukawa-Matrizen $\mathbf{Y}_T, \mathbf{Y}_B, \mathbf{Y}_L$ aus (2.15) verwenden würde. Hier werden alle Fermionlinien, an denen mindestens ein Yukawa-Vertex vorkommt, als zur dritten Generation gehörend gewertet und alle übrigen mit N_g multipliziert.

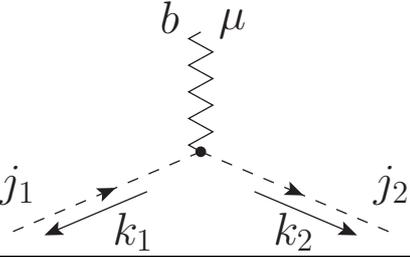
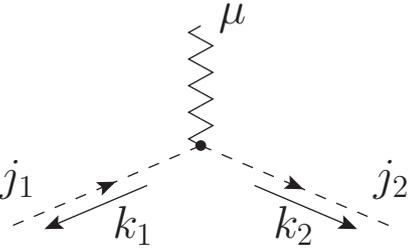
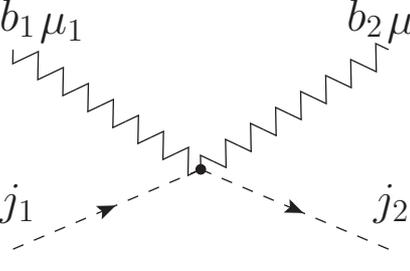
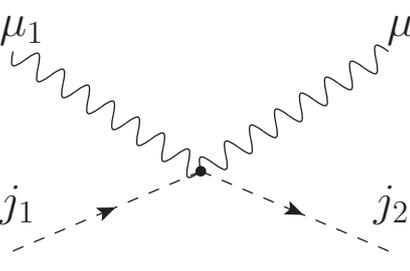
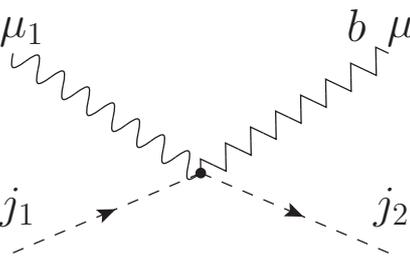
	Geist-Gluonvertex (SU(3) _c : $a_{1,2,3} \in \{1, \dots, 8\}$) $(i g_s) (-i f^{a_1 a_2 a_3}) k^\mu$
	Geist-W-Vertex (SU(2) _L : $b_{1,2,3} \in \{1, 2, 3\}$) $(i g_2) (-i \varepsilon^{b_1 b_2 b_3}) k^\mu$

Für Fermionlinien werden in diesem Kapitel $SU(2)_L$ -Indizes der fundamentalen Darstellung $j_{1,2} \in \{1, 2\}$ angegeben. Dies bezieht sich genau genommen nur auf links-händige Quarks und Leptonen. Für den rechtshändigen Anteil der Fermionlinie unterscheidet der Index in der dritten Generation zwischen den $SU(2)_L$ -Singulett-Feldern $q_{1,R} = t_R$ und $q_{2,R} = b_R$ für Quarks bzw. $l_{1,R} = 0$ und $l_{2,R} = \tau_R$ für Leptonen. Die Hyperladungen für die Kopplungen der Fermionen und Skalarfelder an das B -Feld finden sich in Tab. 3.4 in Kap. 3.4.

	<p>Quark-Gluonvertex ($SU(3)_c$: $a \in \{1, \dots, 8\}$; $i_{1,2} \in \{1, 2, 3\}$; $SU(2)_L$: $j_{1,2} \in \{1, 2\}$)</p> $(i g_s) (T^a)_{i_2 i_1} (\delta^{j_1 j_2}) \gamma^\mu$
	<p>Quark-W-Vertex ($SU(2)_L$: $b \in \{1, 2, 3\}$; $j_{1,2} \in \{1, 2\}$; $SU(3)_c$: $i_{1,2} \in \{1, 2, 3\}$)</p> $(i \frac{g_2}{2}) (\delta^{i_1 i_2}) (\sigma^a)_{j_2 j_1} \gamma^\mu$
	<p>Quark-B-Vertex ($SU(2)_L$: $j_{1,2} \in \{1, 2\}$; $SU(3)_c$: $i_{1,2} \in \{1, 2, 3\}$; $U(1)_Y$-Hyperladung: $Y_{q,L}, Y_{q,R}$) für links- und rechtshändiges Feld</p> $(i g_1) (Y_{q,L} P_L + Y_{q,R} P_R) (\delta^{i_1 i_2}) (\delta^{j_1 j_2}) \gamma^\mu$
	<p>Lepton-W-Vertex ($SU(2)_L$: $b \in \{1, 2, 3\}$; $j_{1,2} \in \{1, 2\}$)</p> $(i \frac{g_2}{2}) (\sigma^a)_{j_2 j_1} \gamma^\mu$
	<p>Lepton-B-Vertex ($SU(2)_L$: $j_{1,2} \in \{1, 2\}$; $U(1)_Y$-Hyperladungen: $Y_{l,L}, Y_{l,R}$) für links- und rechtshändiges Feld</p> $(i g_1) (Y_{q,L} P_L + Y_{q,R} P_R) (\delta^{j_1 j_2}) \gamma^\mu$

	<p>Drei-Gluonenvertex ($SU(3)_c: a_{1,2,3} \in \{1, \dots, 8\}$)</p> $(i g_s) (-i f^{a_1 a_2 a_3}) [(k_3 - k_2)^{\mu_1} g^{\mu_2 \mu_3} + (k_1 - k_3)^{\mu_2} g^{\mu_1 \mu_3} + (k_2 - k_1)^{\mu_3} g^{\mu_1 \mu_2}]$
	<p>Vier-Gluonenvertex ($SU(3)_c: a_{1,\dots,4}, c \in \{1, \dots, 8\}$)</p> $(i g_s^2) \{ (-i f^{c a_1 a_2}) (-i f^{c a_3 a_4}) [g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}] + (-i f^{c a_1 a_3}) (-i f^{c a_2 a_4}) [g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}] + (-i f^{c a_1 a_4}) (-i f^{c a_2 a_3}) [g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4}] \}$
	<p>Drei-W-Vertex ($SU(2)_L: b_{1,2,3} \in \{1, 2, 3\}$)</p> $(i g_2) (-i \varepsilon^{b_1 b_2 b_3}) [(k_3 - k_2)^{\mu_1} g^{\mu_2 \mu_3} + (k_1 - k_3)^{\mu_2} g^{\mu_1 \mu_3} + (k_2 - k_1)^{\mu_3} g^{\mu_1 \mu_2}]$
	<p>Vier-W-Vertex ($SU(2)_L: b_{1,\dots,4}, c \in \{1, 2, 3\}$)</p> $(i g_2^2) \{ (-i \varepsilon^{c b_1 b_2}) (-i \varepsilon^{c b_3 b_4}) [g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}] + (-i \varepsilon^{c b_1 b_3}) (-i \varepsilon^{c b_2 b_4}) [g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}] + (-i \varepsilon^{c b_1 b_4}) (-i \varepsilon^{c b_2 b_3}) [g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4}] \}$

	<p>Quark-Φ-Vertex ($SU(3)_c: i_{1,2} \in \{1, 2, 3\};$ $SU(2)_L: j_{1,2,3} \in \{1, 2\}$)</p> $\left\{ (-i y_t) P_L (i \sigma_{j_1 j_3}^2 \delta^{j_2 1}) + \right. \\ \left. + (-i y_b) P_R (\delta^{j_2 j_3} \delta^{j_1 2}) \right\} \delta^{i_1 i_2}$
	<p>Quark-Φ^*-Vertex ($SU(3)_c: i_{1,2} \in \{1, 2, 3\};$ $SU(2)_L: j_{1,2,3} \in \{1, 2\}$)</p> $\left\{ (-i y_t) P_R (i \sigma_{j_2 j_3}^2 \delta^{j_1 1}) + \right. \\ \left. + (-i y_b) P_L (\delta^{j_1 j_3} \delta^{j_2 2}) \right\} \delta^{i_1 i_2}$
	<p>Lepton-Φ-Vertex ($SU(2)_L: j_{1,2,3} \in \{1, 2\}$)</p> $(-i y_\tau) P_R (\delta^{j_2 j_3} \delta^{j_1 2})$
	<p>Lepton-Φ^*-Vertex ($SU(2)_L: j_{1,2,3} \in \{1, 2\}$)</p> $(-i y_\tau) P_L (\delta^{j_1 j_3} \delta^{j_2 2})$
	<p>Lepton-Φ^*-Vertex ($SU(2)_L: j_{1,2,3} \in \{1, 2\}$)</p> $(-i \lambda) 2 (\delta^{j_1 j_3} \delta^{j_2 j_4} + \delta^{j_1 j_4} \delta^{j_2 j_3})$

	<p>W-Φ-Vertex ($SU(2)_L$: $b \in \{1, 2, 3\}$ $j_{1,2} \in \{1, 2\}$)</p> $\left(i\frac{g_2}{2}\right) (k_2 - k_1)^\mu \sigma_{j_2 j_1}^b$
	<p>B-Φ-Vertex ($SU(2)_L$: $j_{1,2} \in \{1, 2\}$) $U(1)_Y$-Hyperladung: Y_Φ)</p> $(ig_1 Y_\Phi) (k_2 - k_1)^\mu \sigma_{j_2 j_1}^b$
	<p>Zwei-W-Φ-Vertex ($SU(2)_L$: $b_{1,2} \in \{1, 2, 3\}$; $j_{1,2} \in \{1, 2\}$)</p> $(ig_2^2) g^{\mu_1 \mu_2} \delta^{b_1 b_2} \delta^{j_1 j_2}$
	<p>Zwei-B-Φ-Vertex ($SU(2)_L$: $j_{1,2} \in \{1, 2\}$; $U(1)_Y$-Hyperladung: Y_Φ)</p> $(ig_1^2 Y_\Phi^2) g^{\mu_1 \mu_2} \delta^{j_1 j_2}$
	<p>B-W-Φ-Vertex ($SU(2)_L$: $b \in \{1, 2, 3\}$; $j_{1,2} \in \{1, 2\}$; $U(1)_Y$-Hyperladung: Y_Φ)</p> $(ig_1 g_2 Y_\Phi) g^{\mu_1 \mu_2} \sigma_{j_1 j_2}^b$

B.2 Das Standardmodell in der gebrochenen Phase

Aus dem in (2.13) definierten Higgs-Potential mit den in (2.66) definierten Countertermen folgt durch die Aufteilung des Skaldoublets in den konstanten Anteil v sowie die quantisierten Felder H , Φ^\pm und χ gemäß (vgl. (2.25))

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H - i\chi) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

mit den Massendefinitionen (vgl. (2.33), (2.34))

$$m_H = \sqrt{2\lambda}v = \sqrt{-2m^2}, \quad (\text{B.2})$$

$$m_t = \frac{y_t}{\sqrt{2}}v \quad (\text{B.3})$$

das Potential in der gebrochenen Phase des Standardmodells:

$$\begin{aligned} -V = & -\left(\lambda - \delta Z_1^{(4\Phi)}\right) \left[(\Phi^-)^2 (\Phi^+)^2 + \Phi^- \Phi^+ \chi^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\chi^4 + \frac{1}{4}H^4 + H^2 \Phi^- \Phi^+ + \frac{1}{2}H^2 \chi^2 \right] \\ & + H^3 \left[m_H \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \left(\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} - 1 \right) + m_t \sqrt{2} y_t^3 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right] \\ & + H \Phi^- \Phi^+ 2 \left[m_H \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \left(\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} - 1 \right) + m_t \sqrt{2} y_t^3 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right] \\ & + H \chi^2 \left[m_H \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \left(\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} - 1 \right) + m_t \sqrt{2} y_t^3 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right] \\ & - H^2 \frac{m_H^2}{2} + H^2 \frac{m_H^2}{2} \left[\frac{3\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)}}{2} + \frac{\lambda \delta Z_{\Phi^2,\lambda}}{2} + \frac{y_t^4 \delta Z_{\Phi^2,y_t}}{2} \right] + H^2 \frac{m_t^2}{2} \left(6y_t^2 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right) \\ & + \Phi^- \Phi^+ m_H^2 \left[\frac{\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)}}{2} + \frac{\lambda \delta Z_{\Phi^2,\lambda}}{2} + \frac{y_t^4 \delta Z_{\Phi^2,y_t}}{2} \right] + \Phi^- \Phi^+ m_t^2 \left(2y_t^2 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right) \\ & + \chi^2 \frac{m_H^2}{2} \left[\frac{\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)}}{2} + \frac{\lambda \delta Z_{\Phi^2,\lambda}}{2} + \frac{y_t^4 \delta Z_{\Phi^2,y_t}}{2} \right] + \chi^2 \frac{m_t^2}{2} \left(2y_t^2 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right) \\ & + H \left[m_H^3 \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} \left(\delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} + \delta Z_{\Phi^2,\lambda} \right) + \frac{m_H^2 m_t y_t^3 \delta Z_{\Phi^2,y_t}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} m_t^3 y_t \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right] \\ & + \text{konst.} (\propto v^4) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Für die top-Yukawa-Lagrangedichte (2.22) ergibt sich analog

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{y_t} &= -y_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) \left\{ \bar{t}_L \Phi^{\dagger c} Q_L + \bar{Q}_L \Phi^c t_R \right\} \\
&= -y_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) \left\{ (\bar{t} P_R t) \Phi_2 + (\bar{t} P_L t) \Phi_2 - (\bar{b} P_R t) \Phi_1 - (\bar{t} P_L b) \Phi_1 \right\} \\
&= y_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) \left[\Phi^+ (\bar{t} P_L b) + \Phi^- (\bar{b} P_R t) \right] \\
&\quad - \frac{y_t}{\sqrt{2}}(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) H (\bar{t} t) - \frac{i y_t}{\sqrt{2}}(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) \chi (\bar{t} [P_R - P_L] t) \\
&\quad - m_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) (\bar{t} t).
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Daraus lassen sich die $\overline{\text{MS}}$ -Massenrenormierungskonstanten

$$Z_{m_t}^{\overline{\text{MS}}} = \frac{1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}}{Z_2^{(2t)}}, \tag{B.6}$$

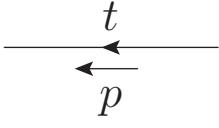
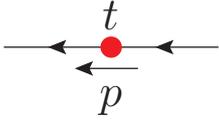
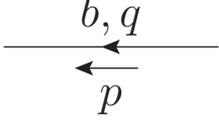
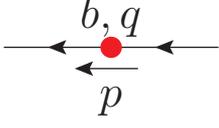
$$Z_{m_H}^{\overline{\text{MS}}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\delta Z_{\Phi^2}}{2} - \frac{3\delta Z_1^{(4\Phi)}}{2\lambda}}}{\sqrt{Z_2^{(2\Phi)}}} \tag{B.7}$$

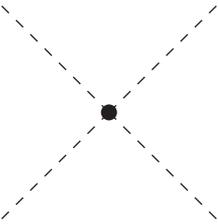
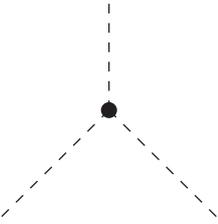
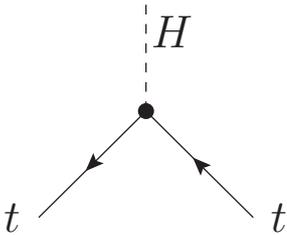
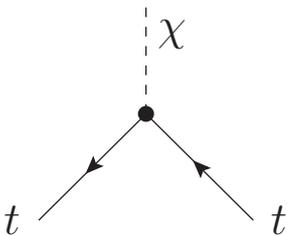
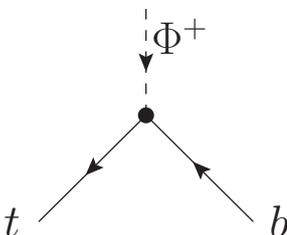
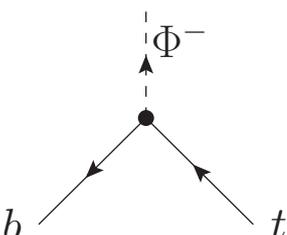
ablesen. Aus der Kenntnis von $\delta Z_H^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ und $\delta Z_t^{\text{OS}\overline{\text{MS}}}$ lassen sich im Prinzip mittels (4.21) und (4.32) die On-shell-Renormierungskonstanten für die Higgs- und top-Quarkmasse gewinnen, welche aber hier nicht benötigt werden.

Die Feynman-Regeln für die Gluon- und Geistpropagatoren der QCD sowie alle Vertizes mit mindestens einem Gluon können unverändert aus der ungebrochenen Phase des Standardmodells übernommen werden. Darüber hinaus ergeben sich die folgenden Feynman-Regeln:

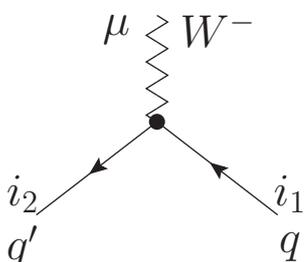
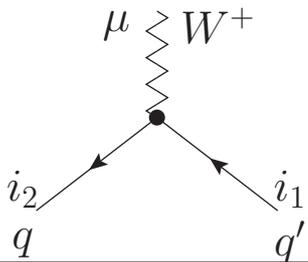
	$ \begin{aligned} (i) & \left[m_H^3 \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{2}} (\delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} + \delta Z_{\Phi^2,\lambda}) \right. \\ & \left. + \frac{m_H^2 m_t y_t^3 \delta Z_{\Phi^2,y_t}}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} m_t^3 y_t \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right] \end{aligned} $
---	--

$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \frac{H}{\overrightarrow{p}}$	$\frac{1}{i} \frac{1}{m_H^2 - p^2 - i0}$
$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \frac{H}{\overrightarrow{p}} \bullet$	$(i) \left\{ p^2 \delta Z_2^{(2\Phi)} + m_H^2 \left[\frac{3\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} + \lambda \delta Z_{\Phi^2,\lambda} + y_t^4 \delta Z_{\Phi^2,y_t}}{2} \right] + m_t^2 6 y_t^2 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right\}$
$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \frac{\chi, \Phi^\pm}{\overrightarrow{p}}$	$\frac{1}{i} \frac{1}{-p^2 - i0}$
$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \frac{\chi, \Phi^\pm}{\overrightarrow{p}} \bullet$	$(i) \left\{ p^2 \delta Z_2^{(2\Phi)} + m_H^2 \left[\frac{\lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} + \lambda \delta Z_{\Phi^2,\lambda} + y_t^4 \delta Z_{\Phi^2,y_t}}{2} \right] + m_t^2 2 y_t^2 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right\}$

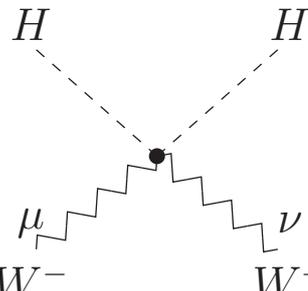
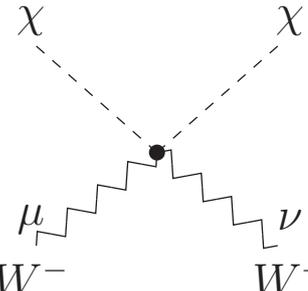
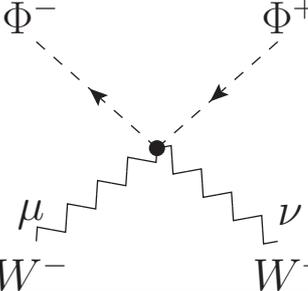
	$\frac{1}{i} \frac{\not{p} + m_t}{m_t^2 - p^2 - i0}$
	$(i) \left\{ \not{p} \left[P_L \delta Z_{2,L}^{(2t)} + P_R \delta Z_{2,R}^{(2t)} \right] - m_t \delta Z_1^{(tb\Phi)} \right\}$
	$\frac{1}{i} \frac{\not{p}}{-p^2 - i0}$
	$(i) \left\{ \not{p} \left[P_L \delta Z_{2,L}^{(2b/2q)} + P_R \delta Z_{2,R}^{(2b/2q)} \right] \right\}$

	$(-i)(\lambda - \delta Z_1^{(4\Phi)}) \begin{cases} 6 & \text{für } H^4, \chi^4 \\ 4 & \text{für } (\Phi^+\Phi^-)^2 \\ 2 & \text{für } H^2(\Phi^+\Phi^-), \chi^2(\Phi^+\Phi^-), H^2\chi^2 \end{cases}$
	$(-i) \left\{ m_H \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} - \left[m_H \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}} \lambda \delta Z_{1,\lambda}^{(4\Phi)} + m_t \sqrt{2} y_t^3 \delta Z_{1,y_t}^{(4\Phi)} \right] \right\}$ $\begin{cases} 6 & \text{für } H^3 \\ 2 & \text{für } H(\Phi^+\Phi^-) \\ 2 & \text{für } H\chi^2 \end{cases}$
	$(-i)y_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
	$(-i)y_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \gamma_5 \right)$
	$(-i)y_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) (-P_L)$
	$(-i)y_t(1 + \delta Z_1^{(tb\Phi)}) (-P_R)$

Für die Berechnung der W^{pm} -Selbstenergie werden noch die folgenden Feynman-Regeln benötigt, welche sich aus der Ersetzung (2.25) in (2.2) und (2.13) sowie den zugehörigen Counterterm-Lagrangedichten ergeben:

	$(i \frac{g_2}{\sqrt{2}}) \gamma^\mu (1 + \delta Z^{qq'W}) \delta^{i_1 i_2}$
	$(i \frac{g_2}{\sqrt{2}}) \gamma^\mu (1 + \delta Z^{q'qW}) \delta^{i_1 i_2}$

$SU(3)_c: i_{1,2} \in \{1, 2, 3\}; q \in b, d; q' \in t, u$

	$(i \frac{g_2^2}{2}) g^{\mu\nu} (1 + \delta Z^{WW\Phi})$
	$(i \frac{g_2^2}{2}) g^{\mu\nu} (1 + \delta Z^{WW\Phi})$
	$(i \frac{g_2^2}{2}) g^{\mu\nu} (1 + \delta Z^{WW\Phi})$

	$(i \frac{g_2^2 v}{2}) g^{\mu\nu} (1 + \delta Z^{WW\Phi})$
	$(i \frac{g_2}{2}) (k_1 - k_2)^\mu (1 + \delta Z^{W\Phi\Phi})$
	$(i \frac{g_2}{2}) (k_2 - k_1)^\mu (1 + \delta Z^{W\Phi\Phi})$
	$(i \frac{g_2}{2}) i (k_1 - k_2)^\mu (1 + \delta Z^{W\Phi\Phi})$
	$(i \frac{g_2}{2}) i (k_1 - k_2)^\mu (1 + \delta Z^{W\Phi\Phi})$

Literaturverzeichnis

- [1] S. Chatrchyan *et al.*, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*. Physics Letters B **716** (2012) no. 1, 30 – 61.
- [2] G. Aad *et al.*, *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*. Physics Letters B **716** (2012) no. 1, 1 – 29.
- [3] S. Coleman and E. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*. Phys. Rev. D **7** (1973) 1888–1910.
- [4] N. Cabibbo, L. Maiani, G. Parisi, and R. Petronzio, *Bounds on the Fermions and Higgs Boson Masses in Grand Unified Theories*. Nucl. Phys. **B158** (1979) 295–305.
- [5] C. Ford, D. Jones, P. Stephenson, and M. Einhorn, *The Effective potential and the renormalization group*. Nucl. Phys. **B395** (1993) 17–34, [arXiv:hep-lat/9210033](#) [[hep-lat](#)].
- [6] G. Altarelli and G. Isidori, *Lower limit on the Higgs mass in the standard model: An update*. Physics Letters B **337** (1994) no. 1-2, 141–144.
- [7] K. Chetyrkin and M. Zoller, *β -function for the Higgs self-interaction in the Standard Model at three-loop level*. JHEP **1304** (2013) 091, [arXiv:1303.2890](#) [[hep-ph](#)].
- [8] K. Chetyrkin and M. Zoller, *Three-loop β -functions for top-Yukawa and the Higgs self-interaction in the Standard Model*. JHEP **1206** (2012) 033, [arXiv:1205.2892](#) [[hep-ph](#)].
- [9] M. Zoller, *Vacuum stability in the SM and the three-loop β -function for the Higgs self-interaction*. [arXiv:1209.5609](#) [[hep-ph](#)].
- [10] M. Zoller, *Beta-function for the Higgs self-interaction in the Standard Model at three-loop level*. PoS ([EPS-HEP 2013](#)) 322, [arXiv:1311.5085](#) [[hep-ph](#)].
- [11] A. Pich, *The Standard model of electroweak interactions*. [arXiv:hep-ph/9412274](#) [[hep-ph](#)].
- [12] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*. The advanced book program. Westview Pr., Boulder, Colo., 2006.
- [13] R. Feynman and M. Gell-Mann, *Theory of Fermi interaction*.

- Phys.Rev. **109** (1958) 193–198.
- [14] M. Gell-Mann, *Symmetries of baryons and mesons*. Phys.Rev. **125** (1962) 1067–1084.
- [15] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, *Advantages of the Color Octet Gluon Picture*. Phys.Lett. **B47** (1973) 365–368.
- [16] S. L. Glashow, *Partial-symmetries of weak interactions*. Nuclear Physics **22** (1961) no. 4, 579 – 588.
- [17] S. Weinberg, *A Model of Leptons*. Phys.Rev.Lett. **19** (1967) 1264–1266.
- [18] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*. Conf.Proc. **C680519** (1968) 367–377.
- [19] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Broken Symmetries*. Phys.Rev. **127** (1962) 965–970.
- [20] G. Guralnik, C. Hagen, and T. Kibble, *Global Conservation Laws and Massless Particles*. Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 585–587.
- [21] F. Englert and R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*. Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 321–323.
- [22] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*. Phys.Lett. **12** (1964) 132–133.
- [23] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*. Phys.Rev.Lett. **13** (1964) 508–509.
- [24] P. W. Higgs, *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*. Phys.Rev. **145** (1966) 1156–1163.
- [25] S. Weinberg, *Implications of Dynamical Symmetry Breaking*. Phys.Rev. **D13** (1976) 974–996.
- [26] N. Cabibbo, *Unitary Symmetry and Leptonic Decays*. Phys.Rev.Lett. **10** (1963) 531–533.
- [27] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*. Prog.Theor.Phys. **49** (1973) 652–657.
- [28] B. Cleveland, T. Daily, J. Davis, Raymond, J. R. Distel, K. Lande, *et al.*, *Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector*. Astrophys.J. **496** (1998) 505–526.
- [29] **MuLan** Collaboration, V. Tishchenko *et al.*, *Detailed Report of the MuLan Measurement of the Positive Muon Lifetime and Determination of the Fermi Constant*. Phys.Rev. **D87** (2013) no. 5, 052003, [arXiv:1211.0960 \[hep-ex\]](#).
- [30] G. 't Hooft and M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*. Nucl. Phys. B **44** (1972) no. 1, 189–213.
- [31] J. C. Collins, *Renormalization : an introduction to renormalization, the renormalization group, and the operator-product expansion*. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge Univ. Pr., Cambridge, 1984.
- [32] A. G. Grozin, *Lectures on QED and QCD : practical calculations and renormalization of one- and multi-loop Feynman diagrams*. World Scientific, New Jersey, NJ[u.a.], 2007. Includes bibliographical references and index.
- [33] W. A. Bardeen, A. Buras, D. Duke, and T. Muta, *Deep Inelastic Scattering Beyond the Leading Order in Asymptotically Free Gauge Theories*. Phys.Rev. **D18** (1978) 3998.

- [34] N. Nielsen, *On the gauge dependence of spontaneous symmetry breaking in gauge theories*. Nuclear Physics B **101** (1975) no. 1, 173 – 188.
- [35] D. Buttazzo, G. Degrassi, P. P. Giardino, G. F. Giudice, F. Sala, *et al.*, *Investigating the near-criticality of the Higgs boson*. [arXiv:1307.3536](#) [hep-ph].
- [36] ATLAS, CDF, CMS, D0 Collaboration, *First combination of Tevatron and LHC measurements of the top-quark mass*. [arXiv:1403.4427](#) [hep-ex].
- [37] J. Behringer and others (Particle Data Group), *The review of particle physics*. Phys. Rev. D (2012) no. 86, 010001.
- [38] ATLAS Collaboration, G. Aad *et al.*, *Combined search for the Standard Model Higgs boson using up to 4.9 fb⁻¹ of pp collision data at sqrt(s) = 7 TeV with the ATLAS detector at the LHC*. Phys. Lett. **B710** (2012) 49–66, [arXiv:1202.1408](#) [hep-ex].
- [39] CMS Collaboration, S. Chatrchyan *et al.*, *Combined results of searches for the standard model Higgs boson in pp collisions at sqrt(s) = 7 TeV*. Phys.Lett. **B710** (2012) 26–48, [arXiv:1202.1488](#) [hep-ex].
- [40] TEVNP (Tevatron New Phenomena and Higgs Working Group) Collaboration, *Combined CDF and D0 Search for Standard Model Higgs Boson Production with up to 10.0 fb⁻¹ of Data*. [arXiv:1203.3774](#) [hep-ex].
- [41] S. Bethke, *World Summary of alpha_s (2012)*. Nucl.Phys.Proc.Suppl. **234** (2013) 229–234, [arXiv:1210.0325](#) [hep-ex].
- [42] C. Itzykson and J. Zuber, *Quantum field theory*. 1980.
- [43] L. Ryder, *Quantum field theory*. 1985.
- [44] N. Bogolyubov and D. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*. Intersci.Monogr.Phys.Astron. **3** (1959) 1–720.
- [45] R. K. P. Zia, E. F. Redish, and S. R. McKay, *Making sense of the Legendre transform*. American Journal of Physics **77** (2009) 614–622, [arXiv:0806.1147](#) [physics.ed-ph].
- [46] R. H. Brandenberger, *Quantum Field Theory Methods and Inflationary Universe Models*. Rev.Mod.Phys. **57** (1985) 1.
- [47] M. Sher, *Electroweak Higgs Potentials and Vacuum Stability*. Phys.Rept. **179** (1989) 273–418.
- [48] F. Bezrukov, M. Y. Kalmykov, B. A. Kniehl, and M. Shaposhnikov, *Higgs Boson Mass and New Physics*. JHEP **1210** (2012) 140, [arXiv:1205.2893](#) [hep-ph].
- [49] I. Krive and A. D. Linde, *On the Vacuum Stability Problem in Gauge Theories*. Nucl.Phys. **B117** (1976) 265.
- [50] P. Q. Hung, *Vacuum Instability and New Constraints on Fermion Masses*. Phys. Rev. Lett. **42** (1979) 873.
- [51] N. Krasnikov, *Restriction of the Fermion Mass in Gauge Theories of Weak and Electromagnetic Interactions*. Yad. Fiz. **28** (1978) 549–551.
- [52] H. D. Politzer and S. Wolfram, *Bounds on Particle Masses in the Weinberg-Salam Model*. Phys. Lett. **B82** (1979) 242–246.
- [53] M. Lindner, M. Sher, and H. W. Zaglauer, *Probing Vacuum Stability Bounds at the Fermilab Collider*. Phys.Lett. **B228** (1989) 139.

- [54] M. Sher, *Precise vacuum stability bound in the standard model*. Phys.Lett. **B317** (1993) 159–163, [arXiv:hep-ph/9307342](#) [hep-ph].
- [55] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, *Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory: (III). Scalar quartic couplings*. Nucl. Phys. B **249** (1985) no. 1, 70–92.
- [56] I. Jack and H. Osborn, *General background field calculations with fermion fields*. Nucl. Phys. B **249** (1985) no. 3, 472–506.
- [57] M.-x. Luo and Y. Xiao, *Two loop renormalization group equations in the standard model*. Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 011601, [arXiv:hep-ph/0207271](#) [hep-ph].
- [58] C. Ford, I. Jack, and D. Jones, *The Standard model effective potential at two loops*. Nucl.Phys. **B387** (1992) 373–390, [arXiv:hep-ph/0111190](#) [hep-ph].
- [59] S. P. Martin, *Three-loop Standard Model effective potential at leading order in strong and top Yukawa couplings*. Phys.Rev. **D89** (2014) 013003, [arXiv:1310.7553](#) [hep-ph].
- [60] I. Masina, *Higgs boson and top quark masses as tests of electroweak vacuum stability*. Phys.Rev. **D87** (2013) no. 5, 053001, [arXiv:1209.0393](#) [hep-ph].
- [61] G. Degrandi, S. Di Vita, J. Elias-Miro, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, *et al.*, *Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO*. JHEP **1208** (2012) 098, [arXiv:1205.6497](#) [hep-ph].
- [62] J. Elias-Miro, J. R. Espinosa, G. F. Giudice, G. Isidori, A. Riotto, *et al.*, *Higgs mass implications on the stability of the electroweak vacuum*. Phys. Lett. **B709** (2012) 222–228, [arXiv:1112.3022](#) [hep-ph].
- [63] Z.-z. Xing, H. Zhang, and S. Zhou, *Impacts of the Higgs mass on vacuum stability, running fermion masses and two-body Higgs decays*. [arXiv:1112.3112](#) [hep-ph].
- [64] M. Holthausen, K. S. Lim, and M. Lindner, *Planck scale Boundary Conditions and the Higgs Mass*. JHEP **1202** (2012) 037, [arXiv:1112.2415](#) [hep-ph].
- [65] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*. Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343–1346.
- [66] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?* Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346–1349.
- [67] D. Jones, *Two-loop diagrams in Yang-Mills theory*. Nuclear Physics B **75** (1974) no. 3, 531–538.
- [68] O. Tarasov and A. Vladimirov, *Two Loop Renormalization of the Yang-Mills Theory in an Arbitrary Gauge*. Sov.J.Nucl.Phys. **25** (1977) 585.
- [69] W. E. Caswell, *Asymptotic Behavior of Non-Abelian Gauge Theories to Two-Loop Order*. Phys.Rev.Lett. **33** (1974) 244–246.
- [70] E. Egorian and O. Tarasov, *Two loop renormalization of the QCD in an arbitrary gauge*. Teor.Mat.Fiz. **41** (1979) 26–32.
- [71] D. R. T. Jones, *Two-loop β function for a $G_1 \times G_2$ gauge theory*. Phys. Rev. D **25** (1982) 581–582.
- [72] M. S. Fischler and C. T. Hill, *Effects of Large Mass Fermions on M_X and $\sin^2 \theta_W$* . Nucl.Phys. **B193** (1981) 53.
- [73] M. Fischler and J. Oliensis, *Two-loop corrections to the beta function for the*

- Higgs-Yukawa coupling constant.* Phys. Lett. B **119** (1982) no. 4, 385–386.
- [74] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, *Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory: (I). Wave function renormalization.* Nucl. Phys. B **222** (1983) no. 1, 83–103.
- [75] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, *Two-loop renormalization group equations in a general quantum field theory (II). Yukawa couplings.* Nucl. Phys. B **236** (1984) no. 1, 221–232.
- [76] J. Espinosa, G. Giudice, and A. Riotto, *Cosmological implications of the Higgs mass measurement.* JCAP **0805** (2008) 002, [arXiv:0710.2484 \[hep-ph\]](#).
- [77] R. Hempfling and B. A. Kniehl, *On the relation between the fermion pole mass and \overline{MS} Yukawa coupling in the standard model.* Phys.Rev. **D51** (1995) 1386–1394, [arXiv:hep-ph/9408313 \[hep-ph\]](#).
- [78] A. Sirlin and R. Zucchini, *Dependence of the Higgs coupling $hMS(M)$ on mH and the possible onset of new physics.* Nucl. Phys. B **266** (1986) no. 2, 389–409.
- [79] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *Standard Model Higgs boson mass from inflation: two loop analysis.* JHEP **07** (2009) 089, [arXiv:0904.1537 \[hep-ph\]](#).
- [80] L. N. Mihaila, J. Salomon, and M. Steinhauser, *Gauge coupling beta functions in the standard model to three loops.* Phys. Rev. Lett. **108** (2012) 151602.
- [81] L. N. Mihaila, J. Salomon, and M. Steinhauser, *Renormalization constants and beta functions for the gauge couplings of the Standard Model to three-loop order.* Phys. Rev. D **86** (2012) 096008, [arXiv:1208.3357 \[hep-ph\]](#).
- [82] A. Bednyakov, A. Pikelner, and V. Velizhanin, *Yukawa coupling beta-functions in the Standard Model at three loops.* Phys.Lett. **B722** (2013) 336–340, [arXiv:1212.6829](#).
- [83] A. Bednyakov, A. Pikelner, and V. Velizhanin, *Anomalous dimensions of gauge fields and gauge coupling beta-functions in the Standard Model at three loops.* JHEP **1301** (2013) 017, [arXiv:1210.6873 \[hep-ph\]](#).
- [84] A. Bednyakov, A. Pikelner, and V. Velizhanin, *Higgs self-coupling beta-function in the Standard Model at three loops.* Nucl.Phys. **B875** (2013) 552–565, [arXiv:1303.4364](#).
- [85] C. Froggatt and H. B. Nielsen, *Standard model criticality prediction: Top mass 173 ± 5 -GeV and Higgs mass 135 ± 9 -GeV.* Phys.Lett. **B368** (1996) 96–102, [arXiv:hep-ph/9511371 \[hep-ph\]](#).
- [86] L. Maiani, G. Parisi, and R. Petronzio, *Bounds on the Number and Masses of Quarks and Leptons.* Nucl. Phys. **B136** (1978) 115.
- [87] M. Lindner, *Implications of Triviality for the Standard Model.* Z. Phys. **C31** (1986) 295.
- [88] T. Hambye and K. Riesselmann, *Matching conditions and Higgs mass upper bounds revisited.* Phys.Rev. **D55** (1997) 7255–7262, [arXiv:hep-ph/9610272 \[hep-ph\]](#).
- [89] R. Jackiw, *Functional evaluation of the effective potential.* Phys.Rev. **D9** (1974) 1686.
- [90] L. Dolan and R. Jackiw, *Gauge Invariant Signal for Gauge Symmetry Breaking.* Phys.Rev. **D9** (1974) 2904.
- [91] J. Kang, *Gauge Invariance of the Scalar-Vector Mass Ratio in the*

- Coleman-Weinberg Model*. Phys.Rev. **D10** (1974) 3455.
- [92] W. Fischler and R. Brout, *Gauge Invariance in Spontaneously Broken Symmetry*. Phys.Rev. **D11** (1975) 905.
- [93] J.-M. Frere and P. Nicoletopoulos, *Gauge Invariant Content of the Effective Potential*. Phys.Rev. **D11** (1975) 2332.
- [94] S. Coleman, *Properties of the fundamental interactions*. Proceedings of the International Summer School 'Ettore Majorana', Erice, Italy (1971) .
- [95] L. Di Luzio and L. Mihaila, *On the gauge dependence of the Standard Model vacuum instability scale*. [arXiv:1404.7450](#) [[hep-ph](#)].
- [96] W. E. Caswell and A. D. Kennedy, *Simple approach to renormalization theory*. Phys. Rev. D **25** (1982) no. 2, 392–408.
- [97] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*. Nucl. Phys. **B44** (1972) 189–213.
- [98] J. Salomon, *Das Laufen und die Vereinigung der Eichkopplungen des Standardmodells zur Drei-Schleifen-Ordnung*, 2012 (Dissertation).
- [99] J. A. M. Vermaseren, *New features of FORM*. [arXiv:math-ph/0010025](#).
- [100] S. G. Gorishnii, S. A. Larin, L. R. Surguladze, and F. V. Tkachov, *MINCER: Program for multiloop calculations in quantum field theory for the SCHOONSCHIP system*. Comput. Phys. Commun. **55** (1989) 381–408.
- [101] K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov, *Integration by parts: The algorithm to calculate [beta]-functions in 4 loops*. Nucl. Phys. B **192** (1981) no. 1, 159–204.
- [102] F. V. Tkachov, *A theorem on analytical calculability of 4-loop renormalization group functions*. Phys. Lett. B **100** (1981) no. 1, 65–68.
- [103] P. A. Baikov and K. G. Chetyrkin, *Four Loop Massless Propagators: an Algebraic Evaluation of All Master Integrals*. Nucl. Phys. **B837** (2010) 186–220, [arXiv:1004.1153](#) [[hep-ph](#)].
- [104] A. Smirnov and M. Tentyukov, *Four Loop Massless Propagators: a Numerical Evaluation of All Master Integrals*. Nucl.Phys. **B837** (2010) 40–49, [arXiv:1004.1149](#) [[hep-ph](#)].
- [105] M. Misiak and M. Münz, *Two loop mixing of dimension five flavor changing operators*. Phys. Lett. **B344** (1995) 308–318, [arXiv:hep-ph/9409454](#).
- [106] K. G. Chetyrkin, M. Misiak, and M. Münz, *Beta functions and anomalous dimensions up to three loops*. Nucl. Phys. **B518** (1998) 473–494, [arXiv:hep-ph/9711266](#) [[hep-ph](#)].
- [107] V. A. Smirnov, *Asymptotic expansions in momenta and masses and calculation of Feynman diagrams*. Mod.Phys. Lett. **A10** (1995) 1485–1500, [arXiv:hep-th/9412063](#) [[hep-th](#)].
- [108] M. Steinhauser, *MATAD: A program package for the computation of massive tadpoles*. Comput. Phys. Commun. **134** (2001) 335–364, [arXiv:hep-ph/0009029](#).
- [109] P. Nogueira, *Automatic Feynman graph generation*. J. Comput. Phys. **105** (1993) 279–289.
- [110] T. Van Ritbergen, A. Schellekens, and J. Vermaseren, *Group theory factors for Feynman diagrams*. International Journal of Modern Physics A **14** (1999) no. 1, 41–96.

- [111] T. Seidensticker, *Automatic application of successive asymptotic expansions of Feynman diagrams*. [arXiv:hep-ph/9905298](#) [[hep-ph](#)].
- [112] R. Harlander, T. Seidensticker, and M. Steinhauser, *Complete corrections of Order α_s to the decay of the Z boson into bottom quarks*. *Phys.Lett.* **B426** (1998) 125–132, [arXiv:hep-ph/9712228](#) [[hep-ph](#)].
- [113] T. Curtright, *Three loop charge renormalization effects due to quartic scalar selfinteractions*. *Phys.Rev.* **D21** (1980) 1543.
- [114] D. Jones, *Comment on the charge renormalization effects of quartic scalar selfinteractions*. *Phys.Rev.* **D22** (1980) 3140–3141.
- [115] O. Tarasov, A. Vladimirov, and A. Y. Zharkov, *The Gell-Mann-Low Function of QCD in the Three Loop Approximation*. *Phys.Lett.* **B93** (1980) 429–432.
- [116] O. Tarasov, A. Vladimirov, and A. Zharkov, *The gell-mann-low function of QCD in the three-loop approximation*. *Physics Letters B* **93** (1980) no. 4, 429 – 432.
- [117] S. Larin and J. Vermaseren, *The Three loop QCD Beta function and anomalous dimensions*. *Phys. Lett.* **B303** (1993) 334–336, [arXiv:hep-ph/9302208](#) [[hep-ph](#)].
- [118] M. Steinhauser, *Higgs decay into gluons up to $O(\alpha_s^3(s) G(F)m^2(t))$* . *Phys.Rev.* **D59** (1999) 054005, [arXiv:hep-ph/9809507](#) [[hep-ph](#)].
- [119] A. Pickering, J. Gracey, and D. Jones, *Three loop gauge beta function for the most general single gauge coupling theory*. *Phys.Lett.* **B510** (2001) 347–354, [arXiv:hep-ph/0104247](#) [[hep-ph](#)].
- [120] A. Bednyakov, A. Pikelner, and V. Velizhanin, *Three-loop Higgs self-coupling beta-function in the Standard Model with complex Yukawa matrices*. [arXiv:1310.3806](#) [[hep-ph](#)].
- [121] T. van Ritbergen, J. Vermaseren, and S. Larin, *The Four loop beta function in quantum chromodynamics*. *Phys. Lett.* **B400** (1997) 379–384, [arXiv:hep-ph/9701390](#) [[hep-ph](#)].
- [122] M. Czakon, *The Four-loop QCD beta-function and anomalous dimensions*. *Nucl.Phys.* **B710** (2005) 485–498, [arXiv:hep-ph/0411261](#) [[hep-ph](#)].
- [123] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin, and B. G. Nickel, *Higher order contributions to critical exponents*. *Phys. Lett.* **44A** (1973) 227–228.
- [124] E. Brezin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin, *Addendum to wilson’s theory of critical phenomena and callan-symanzik equations in 4-epsilon dimensions*. *Phys. Rev.* **D9** (1974) 1121–1124.
- [125] D. I. Kazakov, O. V. Tarasov, and A. A. Vladimirov, *Calculation Of Critical Exponents By Quantum Field Theory Methods*. *Sov.Phys. JETP* **50** (1979) 521.
- [126] O. Eberhardt, G. Herbert, H. Lacker, A. Lenz, A. Menzel, *et al.*, *Impact of a Higgs boson at a mass of 126 GeV on the standard model with three and four fermion generations*. *Phys.Rev.Lett.* **109** (2012) 241802, [arXiv:1209.1101](#) [[hep-ph](#)].
- [127] N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe, and K. Schilcher, *Three Loop Relation of Quark (Modified) M_s and Pole Masses*. *Z.Phys.* **C48** (1990) 673–680.
- [128] M. Faisst, J. H. Kühn, T. Seidensticker, and O. Veretin, *Three loop top quark contributions to the rho parameter*. *Nucl.Phys.* **B665** (2003) 649–662,

- [arXiv:hep-ph/0302275](#) [hep-ph].
- [129] M. Faisst, J. H. Kühn, and O. Veretin, *Pole versus \overline{MS} mass definitions in the electroweak theory*. Phys.Lett. **B589** (2004) 35–38, [arXiv:hep-ph/0403026](#) [hep-ph].
- [130] B. A. Kniehl and O. L. Veretin, *Two-loop electroweak threshold corrections to the bottom and top Yukawa couplings*. [arXiv:1401.1844](#) [hep-ph].
- [131] I. I. Bigi, M. A. Shifman, N. Uraltsev, and A. Vainshtein, *The Pole mass of the heavy quark. Perturbation theory and beyond*. Phys.Rev. **D50** (1994) 2234–2246, [arXiv:hep-ph/9402360](#) [hep-ph].
- [132] M. Beneke and V. M. Braun, *Heavy quark effective theory beyond perturbation theory: Renormalons, the pole mass and the residual mass term*. Nucl.Phys. **B426** (1994) 301–343, [arXiv:hep-ph/9402364](#) [hep-ph].
- [133] M. C. Smith and S. S. Willenbrock, *Top quark pole mass*. Phys.Rev.Lett. **79** (1997) 3825–3828, [arXiv:hep-ph/9612329](#) [hep-ph].
- [134] M. Beneke, *Renormalons*. Phys.Rept. **317** (1999) 1–142, [arXiv:hep-ph/9807443](#) [hep-ph].
- [135] A. Hoang and T. Teubner, *Top quark pair production close to threshold: Top mass, width and momentum distribution*. Phys.Rev. **D60** (1999) 114027, [arXiv:hep-ph/9904468](#) [hep-ph].
- [136] R. Tarrach, *The Pole Mass in Perturbative QCD*. Nucl.Phys. **B183** (1981) 384.
- [137] P. Gambino and P. A. Grassi, *The Nielsen identities of the SM and the definition of mass*. Phys.Rev. **D62** (2000) 076002, [arXiv:hep-ph/9907254](#) [hep-ph].
- [138] B. A. Kniehl and A. Sirlin, *Pole Mass, Width, and Propagators of Unstable Fermions*. Phys.Rev. **D77** (2008) 116012, [arXiv:0801.0669](#) [hep-th].
- [139] K. Chetyrkin and M. Steinhauser, *The Relation between the \overline{MS} -bar and the on-shell quark mass at order $\alpha(s)^{**3}$* . Nucl.Phys. **B573** (2000) 617–651, [arXiv:hep-ph/9911434](#) [hep-ph].
- [140] K. Melnikov and T. v. Ritbergen, *The Three loop relation between the \overline{MS} -bar and the pole quark masses*. Phys.Lett. **B482** (2000) 99–108, [arXiv:hep-ph/9912391](#) [hep-ph].
- [141] P. Marquard, L. Mihaila, J. Piclum, and M. Steinhauser, *Relation between the pole and the minimally subtracted mass in dimensional regularization and dimensional reduction to three-loop order*. Nucl.Phys. **B773** (2007) 1–18, [arXiv:hep-ph/0702185](#) [hep-ph].
- [142] R. Lee, P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov, and M. Steinhauser, *Four-loop corrections with two closed fermion loops to fermion self energies and the lepton anomalous magnetic moment*. JHEP **1303** (2013) 162, [arXiv:1301.6481](#) [hep-ph].
- [143] F. Jegerlehner and M. Y. Kalmykov, *$O(\alpha \alpha(s))$ correction to the pole mass of the t quark within the standard model*. Nucl.Phys. **B676** (2004) 365–389, [arXiv:hep-ph/0308216](#) [hep-ph].
- [144] D. Eiras and M. Steinhauser, *Two-loop $O(\alpha \alpha(s))$ corrections to the on-shell fermion propagator in the standard model*. JHEP **0602** (2006) 010, [arXiv:hep-ph/0512099](#) [hep-ph].

- [145] F. Jegerlehner, M. Y. Kalmykov, and B. A. Kniehl, *On the difference between the pole and the \overline{MS} masses of the top quark at the electroweak scale.* Phys.Lett. **B722** (2013) 123–129, [arXiv:1212.4319 \[hep-ph\]](#).
- [146] F. Jegerlehner, M. Y. Kalmykov, and O. Veretin, *\overline{MS} versus pole masses of gauge bosons: Electroweak bosonic two loop corrections.* Nucl.Phys. **B641** (2002) 285–326, [arXiv:hep-ph/0105304 \[hep-ph\]](#).
- [147] F. Jegerlehner, M. Y. Kalmykov, and O. Veretin, *\overline{MS} -bar versus pole masses of gauge bosons. 2. Two loop electroweak fermion corrections.* Nucl.Phys. **B658** (2003) 49–112, [arXiv:hep-ph/0212319 \[hep-ph\]](#).
- [148] R. Cutkosky, *Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes.* J.Math.Phys. **1** (1960) 429–433.
- [149] M. Tentyukov and J. A. M. Vermaseren, *The multithreaded version of FORM.* [arXiv:hep-ph/0702279](#).
- [150] J. Fleischer and M. Y. Kalmykov, *ON-SHELL2: FORM based package for the calculation of two loop selfenergy single scale Feynman diagrams occurring in the standard model.* Comput.Phys.Commun. **128** (2000) 531–549, [arXiv:hep-ph/9907431 \[hep-ph\]](#).
- [151] A. Smirnov, *Algorithm FIRE – Feynman Integral REduction.* JHEP **0810** (2008) 107, [arXiv:0807.3243 \[hep-ph\]](#).
- [152] A. Smirnov and V. Smirnov, *FIRE4, LiteRed and accompanying tools to solve integration by parts relations.* Comput.Phys.Commun. **184** (2013) 2820–2827, [arXiv:1302.5885 \[hep-ph\]](#).
- [153] S. Laporta, *High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations.* Int.J.Mod.Phys. **A15** (2000) 5087–5159, [arXiv:hep-ph/0102033 \[hep-ph\]](#).
- [154] J. Fleischer, M. Y. Kalmykov, and A. Kotikov, *Two loop selfenergy master integrals on-shell.* Phys.Lett. **B462** (1999) 169–177, [arXiv:hep-ph/9905249 \[hep-ph\]](#).
- [155] J. Fleischer, M. Y. Kalmykov, and A. Kotikov, *Recursion relations for two loop selfenergy diagrams on-shell.* [arXiv:hep-ph/9905379 \[hep-ph\]](#).
- [156] A. Smirnov and M. Tentyukov, *Feynman Integral Evaluation by a Sector decomposition Approach (FIESTA).* Comput.Phys.Commun. **180** (2009) 735–746, [arXiv:0807.4129 \[hep-ph\]](#).
- [157] A. V. Smirnov, *FIESTA 3: cluster-parallelizable multiloop numerical calculations in physical regions.* [arXiv:1312.3186 \[hep-ph\]](#).
- [158] K. Chetyrkin, J. Kuhn, A. Maier, P. Maierhofer, P. Marquard, *et al.*, *Charm and Bottom Quark Masses: An Update.* Phys.Rev. **D80** (2009) 074010, [arXiv:0907.2110 \[hep-ph\]](#).
- [159] H. Baer, T. Barklow, K. Fujii, Y. Gao, A. Hoang, *et al.*, *The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 2: Physics.* [arXiv:1306.6352 \[hep-ph\]](#).
- [160] M. Martinez and R. Miquel, *Multiparameter fits to the t anti- t threshold observables at a future $e^+ e^-$ linear collider.* Eur.Phys.J. **C27** (2003) 49–55, [arXiv:hep-ph/0207315 \[hep-ph\]](#).
- [161] K. Seidel, F. Simon, M. Tesar, and S. Poss, *Top quark mass measurements at*

- and above threshold at CLIC*. Eur.Phys.J. **C73** (2013) 2530,
arXiv:1303.3758 [hep-ex].
- [162] J. A. M. Vermaseren, *Axodraw*. Comput. Phys. Commun. **83** (1994) 45–58.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich den Menschen danken, die durch ihre Unterstützung diese Arbeit möglich gemacht haben.

Mein herzlicher Dank gilt Prof. Dr. Johann Kühn, der mir die Möglichkeit eröffnet hat, nach meiner Diplomarbeit weiter in seiner Arbeitsgruppe an interessanten und herausfordernden Projekten zu forschen. Dabei war er stets offen für Gespräche, die mir geholfen haben, über die unmittelbaren technischen Tagesaufgaben hinaus die größeren physikalischen Zusammenhänge zu sehen und meine Arbeit in diese einzuordnen. Seine Unterstützung, nicht zuletzt durch die Möglichkeit meine Ergebnisse auf zahlreichen Schulen und Konferenzen vorzustellen, hat wesentlich zu meiner Entwicklung als Wissenschaftler beigetragen.

Außerdem danke ich Prof. Dr. Matthias Steinhauser für die freundliche Übernahme des Korreferats und hilfreiche Fragen und Anmerkungen zu meiner Arbeit während meiner Zeit am Institut für Theoretische Teilchenphysik.

Es ist mir ein Anliegen, besonders Dr. Konstantin Chetyrkin zu danken, der während meiner gesamten Zeit als Diplomand und Doktorand für zahlreiche Fragen und ausgedehnte Diskussionen zur Verfügung stand. Mit großer Geduld und Sorgfalt hat er mich in die Geheimnisse der Quantenfeldtheorie eingeführt, eines der schönsten und faszinierendsten Gedankengebäude, welches Menschen sich ausgedacht haben. Seine motivierende Art, seine Expertise sowie seine Beiträge zu drei gemeinsamen Publikationen haben in hohem Maße zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ich danke den Mitgliedern des Instituts für Theoretische Teilchenphysik für die angenehme Arbeitsatmosphäre, insbesondere meinem Bürokollegen Maik Höschele, der sowohl fachlich als auch menschlich mein Leben in den letzten Jahren begleitet und bereichert hat. Für hilfreiche Diskussionen zu meiner Arbeit und angenehme Unternehmungen darüber hinaus möchte ich insbesondere auch Jens Hoff und Wolfgang Hollik jr. danken.

Zu einem angenehmen Arbeitsleben in Karlsruhe hat außerdem mein Mittagspausenkollege Tim Collet beigetragen.

Besonders hervorzuheben sind die IT-Administratoren der beiden Theoretischen Teilchenphysik Institute, Johannes Bellm, Dr. Otto Eberhardt, Dr. Bastian Feigl,

Dr. Thomas Hermann, Jens Hoff, David Kunz, Dr. Peter Marquard, Dr. Christian Röhr und Robin Roth, die in den letzten Jahren für eine funktionierende Arbeitsinfrastruktur gesorgt haben.

Für das Korrekturlesen von Entwürfen dieser Dissertation sowie viele hilfreiche Anregungen möchte ich Jonathan Grigo, Jens Hoff, Wolfgang Hollik jr. und Maik Höschele sehr herzlich danken. Ihrem sorgfältigen Lektorat sind zahlreiche Tipp- und Schönheitsfehler sowie die eine oder andere Ungenauigkeit zum Opfer gefallen. Außerdem danke ich Carolin Heidt für das Auffinden von Tippfehlern und wertvolle Ratschläge zur optischen Gestaltung der Arbeit.

Die freundliche Hilfe von Martina Schorn beim Ausfüllen von Reiseanträgen sowie bei der Bewältigung anderer Verwaltungsaufgaben bleibt unvergessen, vielen Dank.

Schließlich möchte ich die Gelegenheit nutzen, den Menschen zu danken, die mich immer unterstützen, die mich als meine Familie und Freunde begleiten und denen ich verdanke, aus einem oft auch herausfordernden Lebensabschnitt zufrieden und gestärkt hervorzugehen. Dies sind Annette und Bruno Zoller, Udo und Waltraud Lauther, Lisa-Marie Zoller, Christopher Blundell und Ewa Holt.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorgelegte Dissertation “Dreischleifen-Betafunktionen und die Stabilität des Vakuums im Standardmodell” selbstständig verfasst und dabei keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Alle verwendeten Beiträge und Ergebnisse anderer Personen und Arbeiten sind nach bestem Wissen explizit zugeordnet und zitiert.

Ich versichere außerdem, dass dies mein erstes Promotionsverfahren ist und ich an keinem anderen Promotionsverfahren beteiligt war oder bin.

Karlsruhe, den 10.04.2014

Max F. Zoller