

Rationale Elliptizität, Krümmung und Kohomologie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Math. Martin Herrmann
aus Eckernförde

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Juli 2014

Referent: Prof. Dr. Wilderich Tuschmann

Korreferent: Prof. Dr. Anand Dessai

Korreferent: Prof. Dr. Enrico Leuzinger

Danksagung

Zuerst möchte ich Professor Dr. Wilderich Tuschmann für die Betreuung dieser Arbeit herzlich danken. Er hat es stets verstanden, mir sowohl sehr gute und hilfreiche Anregungen, als auch die Freiheit zu eigenen Ansätzen zu geben und sich immer die Zeit genommen mit mir über Mathematik zu reden. Auch für die vielen Ratschläge zu „life and work in academia“ möchte ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Großer Dank gebührt auch Professor Dr. Anand Dessai für die vielen hilf- und lehrreichen Diskussionen während meines Aufenthaltes an der Universität Fribourg im Frühjahr 2012 sowie für sein Interesse an meiner Arbeit, das ein großer Ansporn für mich war.

Für die Übernahme des Korreferates bedanke ich mich bei Professor Dr. Enrico Leuzinger.

Für das Finden vieler Rechtschreibfehler und seltsamer Formulierungen in dieser Arbeit danke ich Dr. Sebastian Gensing, Sandra Lenz, Dr. Johannes Riesterer und meiner Mutter.

Für die ständige Hilfsbereitschaft danke ich auch den anderen aktuellen und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Differentialgeometrie, Dr. Sebastian Gensing, Sandra Lenz, Malte Kliemann, Dr. Michael Wiemeler und Dr. Fernando Galaz-Garcia.

Für die vielen anregenden Gespräche, insbesondere zur rationalen Homotopietheorie, bedanke ich mich bei Dr. Johannes Riesterer.

Für die schöne Zeit in und außerhalb der Fakultät für Mathematik des KIT möchte ich mich – neben den bereits Genannten – auch bei dem ganzen Flur 4A, Tobias Columbus, Marvin Karsunky, Jan-Bernhard Kordaß, Manuel Krannich, Professor Dr. Tobias Lamm, Dr. Malte Röer, den an der Fakultätsband „Faculty Gang“ Beteiligten und allen, die ich an dieser Stelle vergessen habe, bedanken.

Für die freundliche Aufnahme in Fribourg im Frühjahr 2012 möchte ich mich beim Departement für Mathematik der Universität Fribourg bedanken, insbesondere neben Professor Dr. Anand Dessai auch bei Lev Kiwi (*Merci beaucoup, Lev*) und Nicolas Weisskopf sowie Bram Petri (*Dankjewell, Bram*) und Federica Fanoni (*Grazie mille, Federica*).

Für die anhaltende Freundschaft trotz der großen Entfernung und seltenen Besuche danke ich meinen Freunden in Kiel.

Nicht zuletzt möchte ich auch meinen Eltern Dr. Marie-Luise Herrmann und Knut Köster-Herrmann für ihren Rat und ihre Unterstützung in allen Lebenslagen danken!

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	ix
I. Grundlagen	1
1. Rationale Homotopietheorie	3
1.1. Kommutative differentielle graduierte Algebren und minimale Modelle	3
1.2. Minimale Modelle von Räumen, rationaler Homotopietyp und Realisierung	7
1.3. Rationale Elliptizität	11
1.3.1. Reine Modelle	13
1.3.2. Exponenten einer rational elliptischen cdga	14
1.3.3. Reguläre Sequenzen	15
1.4. Formalität	18
1.5. Beispiele	19
2. Einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeiten	23
2.1. Klassifikation	23
2.2. Kubische Formen und rationaler Kohomologiering	24
2.3. Biquotienten kompakter Liegruppen	25
3. S^1-Prinzipalbündel	27
II. Rationale Elliptizität	31
4. Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimension 5 und kleiner	33
4.1. Rational elliptische 2- und 3-Mannigfaltigkeiten	33
4.2. Rational elliptische 4-Mannigfaltigkeiten	33
4.3. Rational elliptische 5-Mannigfaltigkeiten	34
5. Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimension 6	37
5.1. Rationale Homotopietypen	37
5.1.1. Charakterisierung	37
5.1.2. Mögliche Exponenten	38

5.1.3.	Minimale Modelle mit $b_2 = 2$ und $b_3 = 0$	40
5.1.4.	Binäre kubischen Formen über den rationalen Zahlen	44
5.1.5.	Beweis der Charakterisierung	47
5.2.	Reelle Homotopietypen	49
5.2.1.	Kubische Formen	49
5.2.2.	Eine unendliche Familie mit verschiedenem reellem Homotopietyp	51
5.2.3.	Klassifikation für $b_2 \leq 2$	53
5.2.4.	Teilweise Klassifikation für $b_2 = 3$	54
6.	Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimension 7	59
6.1.	Rationale Homotopietypen	59
6.1.1.	Mögliche Exponenten	59
6.1.2.	Beispiele mit den Exponenten von $S^2 \times S^2 \times S^3$	61
6.1.3.	Klassifikation in Dimension 7	63
6.1.4.	Die Mannigfaltigkeiten M_σ^7 und N^7	64
6.2.	Reelle und komplexe Homotopietypen	67
7.	Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimensionen 8 und höher	69
7.1.	Rational elliptische 8-Mannigfaltigkeiten	69
7.2.	Rational elliptische 9-Mannigfaltigkeiten	72
7.3.	Dimension 10 und höher	74
III.	Krümmung und Kohomologiering	77
8.	Fast nichtnegativer Krümmungsoperator	79
9.	Eine homogene Beispielfamilie	83
9.1.	Definition der Beispiele und ihr Kohomologiering	83
9.2.	Metriken auf den 22-dimensionalen Beispielen	90
9.2.1.	Die Torusbündel als homogene Räume	90
9.2.2.	Homogene Metriken	91
9.2.3.	Zusammenhangsformen und -metriken	92
9.3.	Krümmung der Metriken	93
Anhänge		101
A.	Exponenten in Dimensionen 10 und höher	103
B.	Mathematicacode zur Berechnung der möglichen Exponenten	117
Literaturverzeichnis		121

Tabellenverzeichnis

5.1. Exponenten rational elliptischer 6-Mannigfaltigkeiten	39
5.2. Binäre kubische Formen und Mannigfaltigkeiten, zu denen sie gehören	53
5.3. Ternäre kubische Formen über \mathbb{R} und zugehörige Sequenz homogener Polynome vom Grad 2	55
5.4. Ternäre kubische Formen und Mannigfaltigkeiten zu denen sie gehören	56
6.1. Exponenten rational elliptischer 7-Mannigfaltigkeiten	59
7.1. Exponenten rational elliptischer 8-Mannigfaltigkeiten	69
7.2. Exponenten rational elliptischer 9-Mannigfaltigkeiten	72
7.3. Anzahl der möglichen Exponenten in Dimensionen 8 bis 22	75
A.1. Exponenten rational elliptischer 10-Mannigfaltigkeiten	103
A.2. Exponenten rational elliptischer 11-Mannigfaltigkeiten	104
A.3. Exponenten rational elliptischer 12-Mannigfaltigkeiten	105
A.4. Exponenten rational elliptischer 13-Mannigfaltigkeiten	107
A.5. Exponenten rational elliptischer 14-Mannigfaltigkeiten	108
A.6. Exponenten rational elliptischer 15-Mannigfaltigkeiten	110
A.7. Exponenten rational elliptischer 16-Mannigfaltigkeiten	112

Einleitung

In der Riemannschen Geometrie hat es eine lange Tradition, die Zusammenhänge zwischen der Geometrie und der Topologie einer Mannigfaltigkeit zu erforschen. Als ein frühes Beispiel für ein solches Resultat sei der Satz von Gauß-Bonnet genannt, der besagt, dass sich die Eulercharakteristik einer kompakten Fläche als Vielfaches des Integrals ihrer Gaußkrümmung berechnen lässt. Damit folgt beispielsweise, dass die Sphäre S^2 und der Torus T^2 die einzigen kompakten, orientierbaren Flächen sind, auf denen eine Metrik nichtnegativer Krümmung existiert. Nimmt man normiertes Volumen an, so folgt aus dem Satz von Gauß-Bonnet, dass eine untere Schranke an die Gaußkrümmung einer kompakten Fläche eine untere Schranke an ihre Eulercharakteristik impliziert.

Ein neueres Resultat, das diese Zusammenhänge beleuchtet, ist der Bettizahlensatz von Gromov. Als topologische Invariante werden in diesem die Bettizahlen $b_k(M; \mathbb{K})$ einer Mannigfaltigkeit M betrachtet, welche als Dimension der k -ten Homologiegruppe mit Koeffizienten in einem Körper \mathbb{K} definiert sind.

Satz (Gromov, [Gro81]):

Es sei \mathbb{K} ein Körper. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C(n)$, so dass gilt: Ist M eine vollständige Riemannsche n -Mannigfaltigkeit mit Durchmesser $\text{diam}(M) \leq D$ für ein $D > 0$ und Schnittkrümmung $\text{sec}_M \geq -\kappa^2$ für ein $\kappa > 0$, so gilt

$$\sum_{k=0}^n b_k(M; \mathbb{K}) \leq C(n)^{1+\kappa D}.$$

Insbesondere ist damit die Summe der Bettizahlen einer Mannigfaltigkeit, die fast nichtnegative Schnittkrümmung zulässt, d.h. eine kompakte Mannigfaltigkeit M , auf der zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Riemannsche Metrik g_ε mit $\text{sec}_{(M, g_\varepsilon)}(\text{diam}(M, g_\varepsilon))^2 > -\varepsilon$ existiert, durch eine nur von der Dimension abhängende Konstante nach oben beschränkt.

Weiter folgt aus dem Bettizahlensatz, dass es unter den rationalen Kohomologierungen von kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit $\text{sec} \geq -\kappa^2$ und $\text{diam} \leq D$ nur endlich viele Isomorphietypen von graduierten Vektorräumen gibt. Die Frage, ob dies auch unter Berücksichtigung der Ringstruktur so ist, lässt sich zur folgenden Frage verschärfen.

Frage (Grove, [Gro93]):

Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $c \in \mathbb{R}$ und $D > 0$. Gibt es nur endlich viele rationale Homotopietypen¹ von kompakten, einfach zusammenhängenden Riemannschen n -Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $\text{sec} \geq c$ und Durchmesser $\text{diam} \leq D$?

Die Frage wurde von Fang und Rong in [FR01] negativ beantwortet. Sie haben für jedes $n \geq 22$ eine unendliche Familie von einfach zusammenhängenden, kompakten n -Mannigfaltigkeiten gefunden, auf denen Metriken existieren mit $c \leq \text{sec} \leq C$ und $\text{diam} \leq D$ für gewisse Konstanten $c, C \in \mathbb{R}$ und $D > 0$, die unabhängig von der konkreten Mannigfaltigkeit aus der Familie gewählt werden können, und deren rationale Kohomologieringe paarweise nicht isomorph sind.² Sie haben damit insbesondere paarweise verschiedene rationale Homotopietypen.

In [Tot03] hat Totaro in kleineren Dimensionen solche Beispielfamilien gefunden, die sogar zusätzlich nichtnegative Krümmung besitzen. Genauer hat er gezeigt, dass $C, D > 0$ existieren, für welche es unendlich viele verschiedene Isomorphietypen von rationalen Kohomologierungen von kompakten, einfach zusammenhängenden

- 9-Mannigfaltigkeiten mit $0 \leq \text{sec} \leq C$ und $\text{diam} \leq D$,
- 7-Mannigfaltigkeiten mit $-1 \leq \text{sec} \leq C$ und $\text{diam} \leq D$ und
- 6-Mannigfaltigkeiten mit $0 \leq \text{sec}$ und $\text{diam} \leq D$

gibt. Die von Totaro zum Beweis der Aussagen in den Dimensionen 6 und 9 betrachteten Familien von Mannigfaltigkeiten sind durch Biquotienten gegeben, die sich als Quotienten von Toruswirkungen auf $(S^3)^3$ bzw. $(S^3)^4$ ergeben. Die Mannigfaltigkeiten in Dimension 6 können aufgrund von [Tus02] keine gemeinsame obere Krümmungsschranke haben und die Beispiele in Dimension 7 sind damit in Hinsicht auf die Dimension optimal. Ebenso sind auch die sechsdimensionalen Mannigfaltigkeiten in Hinsicht auf die Dimension optimal, da in kleineren Dimensionen der rationale Kohomologiering durch die Bettizahlen schon bis auf endlich viele Möglichkeiten bestimmt wird.

In dieser Arbeit beweisen wir das folgende Resultat, für das wir einfach zusammenhängende, prinzipale Torusbündel über einem Produkt von komplex-projektiven Räumen betrachten.

¹Zwei Mannigfaltigkeiten M und N haben denselben rationalen Homotopietyp, wenn es Räume und Abbildungen $M \leftarrow Z_0 \rightarrow Z_1 \leftarrow \cdots \rightarrow N$ gibt, so dass alle Abbildungen Isomorphismen der rationalen Kohomologierungen induzieren. Insbesondere haben M und N also isomorphe rationale Kohomologieringe.

²Ihr Beweis zeigt, dass sogar die komplexen Kohomologieringe paarweise nicht isomorph sind.

Satz:

Es existieren $C, D > 0$, so dass in Dimension 22 und jeder Dimension ≥ 24 unendlich viele kompakte, einfach zusammenhängende, homogene Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $0 \leq \text{sec} \leq C$, Riccikrümmung $\text{Ric} > 0$, Durchmesser $\text{diam} \leq D$ und paarweise nichtisomorphen komplexen Kohomologieringen existieren.

Dies verallgemeinert die Beispiele von Totaro zum einen auf homogene Mannigfaltigkeiten³ und zum anderen vom rationalen auf den komplexen Kohomologiering. Die Beispiele von Fang und Rong werden in Hinsicht auf Homogenität und nichtnegative Schnittkrümmung verallgemeinert.

Eine weitere Krümmungsgröße ist der Krümmungsoperator einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, welcher ein durch den Riemannschen Krümmungstensor gegebener symmetrischer Operator auf der zweiten äußeren Potenz der Tangentialräume $\Lambda^2 T_p M$ ist. Schranken an den Krümmungsoperator einer Mannigfaltigkeiten, d.h. Schranken an seine Eigenwerte, implizieren die gleichen Schranken an die Schnittkrümmung. Der Krümmungsoperator ist also ein stärkerer Krümmungsbegriff als die Schnittkrümmung und einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator wurden klassifiziert. Es gibt insbesondere in jeder Dimension nur endlich viele Diffeomorphietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, die nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen.

Definition:

Eine kompakte Mannigfaltigkeit M lässt *fast nichtnegativen Krümmungsoperator* zu, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Riemannsche Metrik g_ε auf M gibt, so dass für den Krümmungsoperator \hat{R}^ε von (M, g_ε) in allen $p \in M$ gilt

$$\hat{R}_p^\varepsilon \cdot (\text{diam}(M, g_\varepsilon))^2 > -\varepsilon.$$

Auf den homogenen Beispielen des obigen Satzes lassen sich mit den Ergebnissen von [HST13], die in Kapitel 8 zusammengefasst werden, Metriken mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator finden. Von diesen Metriken zeigen wir in dieser Arbeit, dass sie auch nichtnegative Schnitt- und positive Riccikrümmung besitzen und homogen gewählt werden können, womit dann gilt:

³Von den Beispielen in [Tot03] sind höchstens endlich viele homogen: In [Kla88] wurden alle kompakten, einfach zusammenhängenden homogenen Räume bis zur Dimension 9 klassifiziert. Insbesondere gibt es nur endlich viele Diffeomorphietypen von homogenen Räumen der Dimension ≤ 6 . Die siebendimensionalen Beispiele können aufgrund ihrer zu großen zweiten Bettizahl nicht homogen sein und von den neundimensionalen homogenen Räumen sind die einzigen anhand der Bettizahlen in Frage kommenden Räume S^1 -Prinzipalbündel über $(S^2)^4$. Von diesen gibt es nur endlich viele rationale Homotopietypen.

Satz:

Es existieren unendlich viele kompakte, einfach zusammenhängende, homogene 22-Mannigfaltigkeiten E_α mit paarweise nichtisomorphen komplexen Kohomologierungen, auf denen Familien $(g_t)_{t \in (0,1]}$ von homogenen Riemannschen Metriken existieren, so dass (E_α, g_t) fast nichtnegativen Krümmungsoperator für $t \rightarrow 0$ und für alle $t \in (0, 1]$ nichtnegative Schnitt- und positive Riccikrümmung hat.

Durch Produkte mit Sphären erhält man auch hier entsprechende Beispielfamilien in allen Dimensionen ≥ 24 . Dies sind die ersten bekannten Beispielfamilien von kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten fester Dimension, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen und paarweise verschiedene rationale Homotopietypen haben.

In einem weiteren Teil dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Klassifikation von rational elliptischen Mannigfaltigkeiten in kleinen Dimensionen.

Definition:

Ein einfach zusammenhängender Raum X mit $\dim H^*(X; \mathbb{Q}) < \infty$ heißt rational elliptisch, wenn $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} = \sum_{k \geq 2} \dim \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$.

Sämtliche bekannten Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung sind rational elliptisch, wobei man für den nicht einfach zusammenhängenden Fall eine erweiterte Definition von rationaler Elliptizität benötigt, auf die wir an dieser Stelle nicht eingehen wollen. Mit den Ergebnissen von [KPT10] lässt sich ferner der allgemeine auf den einfach zusammenhängenden Fall für eine verallgemeinerte Definition von fast nichtnegativer Schnittkrümmung zurückführen.

Vermutung (Verallgemeinerte Bott-Vermutung):

Eine kompakte Mannigfaltigkeit fast nichtnegativer Schnittkrümmung ist rational elliptisch.

Die kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen Mannigfaltigkeiten sind also, wenn man an die Vermutung glaubt, die möglichen Kandidaten für kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit (fast) nichtnegativer Schnittkrümmung.

Ein Beweis der Vermutung würde auch weitere Vermutungen über Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativer Schnittkrümmung beweisen. So wurde zum Beispiel von

Gromov vermutet, dass die Konstante $C(n)$ im oben zitierten Bettizahlensatz durch 2^n gegeben ist. Für rational elliptische Räume ist dies bekannt.⁴

Die Klassifikation einfach zusammenhängender, rational elliptischer Mannigfaltigkeiten von Dimension ≤ 5 ist wohlbekannt. Eine solche ist diffeomorph zu S^2 oder S^3 , homöomorph zu S^4 , $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ oder $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ oder rational homotopieäquivalent zu S^5 oder $S^2 \times S^3$.

In dieser Arbeit charakterisieren wir einfach zusammenhängende, rational elliptische Mannigfaltigkeiten von Dimension sechs über ihren rationalen Kohomologiering.

Satz:

Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit. Dann ist M genau dann rational elliptisch, wenn einer der folgenden Fälle gilt:

- (a) $b_2(M) = b_3(M) = 0$, d.h. M ist eine rationale Homologiesphäre;
- (b) $b_2(M) = 0$ und $b_3(M) = 2$, d.h. $M = (S^3 \times S^3) \# N$ mit einer rationalen Homologiesphäre N , und damit hat M den rationalen Kohomologiering von $S^3 \times S^3$;
- (c) $b_2(M) = 1$ und $b_3(M) = 0$, d.h. M hat den rationalen Kohomologiering von $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ oder von $S^2 \times S^4$;
- (d) $b_2(M) = 2$, $b_3(M) = 0$ und $H^*(M; \mathbb{Q})$ wird von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt;
- (e) $b_2(M) = 3$, $b_3(M) = 0$, $H^*(M; \mathbb{Q})$ wird von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt und es existiert eine Basis x_1, x_2, x_3 von $H^2(M; \mathbb{Q})$, so dass der Kern der Einschränkung des Homomorphismus $\mathbb{Q}[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3] \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$, $\tilde{x}_i \mapsto x_i$ auf homogene Polynome vom Grad 2 eine reguläre Sequenz als Basis hat.

Der rationale oder reelle Kohomologiering einer kompakten, einfach zusammenhängenden 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_3(M) = 0$ wird durch eine kubische Form bestimmt.

Im reellen Fall benutzen wir eine bekannte Klassifikation binärer und ternärer kubischer Formen über \mathbb{R} um die reellen Homotopietypen kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 6-Mannigfaltigkeiten teilweise zu klassifizieren.

Für $b_2(M) \leq 2$ können wir die reellen Homotopietypen sogar vollständig klassifizieren.

⁴Siehe [FH79]. In [Pav02] wird der Beweis genauer ausgeführt und eine Verschärfung für einfach zusammenhängende Räume bewiesen.

Proposition:

Jede kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_2(M) \leq 2$ ist reell homotopieäquivalent zu genau einer der folgenden: S^6 , $S^3 \times S^3$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$, $S^2 \times S^4$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^2$, $SU(3)/T^2$ oder $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3$.

Im Fall $b_2(M) = 3$ beweisen wir das folgende Resultat, welches kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeiten mit $b_2(M) = 3$ und $b_3(M) = 0$ anhand ihres reellen Kohomologierings charakterisiert.

Proposition:

Eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_2(M) = 3$ und $b_3(M) = 0$ ist genau dann rational elliptisch, wenn die durch ihren reellen Kohomologiering bestimmte kubische Form zu einer der folgenden Formen äquivalent ist: xyz , $z(x^2 + y^2)$, $z(x^2 + y^2 - z^2)$, $x(x^2 + y^2 - z^2)$, $x(x^2 + y^2 + z^2)$, $x^3 + 3x^2z - 3y^2z$, $x^3 - 3x^2z - 3y^2z$, oder $x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz$, für $\sigma \neq 0, 1, -\frac{1}{2}$.

Für einige der kubischen Formen geben wir konkrete Beispiele an. Es lassen sich hierbei alle kubischen Formen, die nicht zur durch $\sigma \in \mathbb{R}$ parametrisierten Familie gehören, realisieren. Für $\sigma \in \mathbb{Q}$ lassen sich auch die kubischen Formen der Familie realisieren, was die folgende Proposition ergibt, die einen Kontrast zur Situation im siebendimensionalen Fall darstellt.

Proposition:

Es gibt unendlich viele verschiedene reelle Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeiten.

Kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 7-Mannigfaltigkeiten klassifizieren wir bis auf rationale, reelle und komplexe Homotopieäquivalenz. Insbesondere gibt es nur endlich viele reelle und komplexe, aber unendlich viele rationale Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeiten.

Satz:

Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 7-Mannigfaltigkeit. Dann hat M

- *den rationalen Homotopietyp von genau einer der Mannigfaltigkeiten S^7 , $S^2 \times S^5$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^3$, $S^3 \times S^4$, N^7 oder M_σ^7 für ein $\sigma \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$.*

- *den reellen Homotopietyp von genau einer der Mannigfaltigkeiten S^7 , $S^2 \times S^5$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^3$, $S^3 \times S^4$, N^7 , $S^2 \times S^2 \times S^3$ oder $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \times S^3$.*
- *den komplexen Homotopietyp von genau einer der Mannigfaltigkeiten S^7 , $S^2 \times S^5$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^3$, $S^3 \times S^4$, N^7 , oder $S^2 \times S^2 \times S^3$.*

Hierbei ist die Mannigfaltigkeit N^7 rational homotopieäquivalent zu einem homogenen Raum der Form $(\mathrm{SU}(2))^3/\mathrm{T}^2$. Für die Mannigfaltigkeiten M_σ kann $M_{[-1]}^7 = S^2 \times S^2 \times S^3$ und $M_{[1]}^7 = (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \times S^3$ gewählt werden. Für $\sigma \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ mit $\sigma \notin \{[1], [-1]\}$ erhalten wir M_σ^7 aus einem Realisierungsergebnis von Sullivan.

Zum Aufbau dieser Arbeit

Im ersten Teil der Arbeit werden bekannte Resultate dargelegt, die in den späteren Teilen benötigt werden. Das erste Kapitel ist einem schnellen Einstieg in die rationale Homotopietheorie gewidmet, wobei insbesondere auf die später benötigten Resultate Wert gelegt wurde. Das zweite Kapitel gibt die Klassifikation kompakter, einfach zusammenhängender 6-Mannigfaltigkeiten im benötigten Umfang wieder, geht auf den Zusammenhang zwischen kubischen Formen und dem Kohomologieren einfach zusammenhängender 6-Mannigfaltigkeiten ein und gibt einige Beispiele in Form von Biquotienten, welche von DeVito unter anderem im 6-dimensionalen Fall in [DeV11] klassifiziert wurden. Im dritten Kapitel gehen wir auf die Klassifikation von prinzipalen S^1 -Bündeln sowie auf die Frage, wann diese einfach zusammenhängend sind, und die Berechnung ihres Kohomologierings ein.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Klassifikation kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer Mannigfaltigkeiten in kleinen Dimensionen. Im Kapitel 4 wird eine Übersicht über die bekannte Klassifikation in Dimensionen ≤ 5 gegeben. Im fünften Kapitel wird die Charakterisierung der rationalen Homotopietypen und teilweise Klassifikation der reellen Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeiten formuliert und bewiesen. Im sechsten Kapitel werden kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 7-Mannigfaltigkeiten bis auf rationale, reelle und komplexe Homotopieäquivalenz klassifiziert. Das Kapitel 7 enthält weitere Resultate in höheren Dimensionen.

Der dritte Teil behandelt die oben erwähnte 22-dimensionale Beispielfamilie. In Kapitel 8 werden die Ergebnisse von [HST13] und einige andere Resultate zum Krümmungsoperator zusammengefasst. Das Kapitel 9 ist der Konstruktion der Beispiele, ihrer topologischen Untersuchung sowie der Konstruktion von Metriken auf ihnen gewidmet.

In den Anhängen sind Tabellen der möglichen Exponenten einfach zusammenhängender rational elliptischer Räume der Dimensionen 10 bis 16 sowie der zu ihrer Berechnung verwendete Mathematicacode aufgeführt.

Generalvoraussetzungen

- Alle auftretenden Mannigfaltigkeiten und topologischen Räume werden als zusammenhängend vorausgesetzt.
- Der Begriff „Mannigfaltigkeit“ bedeutet bei uns glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand und wir fordern das zweite Abzählbarkeitsaxiom in der Definition einer Mannigfaltigkeit.

Teil I.

Grundlagen

1. Rationale Homotopietheorie

Im Folgenden wollen wir die Grundzüge der rationalen Homotopietheorie, die wir benötigen, zusammenfassen. Die Darstellung basiert auf [FHT01] und [FOT08], wo auch die meisten Beweise der hier aufgeführten Aussagen gefunden werden können.

1.1. Kommutative differentielle graduierte Algebren und minimale Modelle

In diesem Abschnitt sei \mathbb{K} ein Körper der Charakteristik 0.

Definition 1.1:

Eine *kommutative differentielle graduierte Algebra* (kurz cdga) (A, d) über \mathbb{K} ist eine graduierte Algebra A (d.h. ein graduierter Vektorraum $A = \bigoplus_{k \geq 0} A^k$ auf dem eine Multiplikation definiert ist, die A zu einer assoziativen \mathbb{K} -Algebra macht und $xy \in A^{k+l}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$, $x \in A^k$ und $y \in A^l$ erfüllt), die graduiert kommutativ ist (d.h. $xy = (-1)^{kl}yx$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$, $x \in A^k$ und $y \in A^l$) zusammen mit einem Differential d , d.h. einer linearen Abbildung $d : A \rightarrow A$, so dass gilt

$$d \circ d = 0, \quad d(A^k) \subseteq A^{k+1} \quad \text{und} \quad d(xy) = d(x)y + (-1)^k xdy$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $x \in A^k$ und $y \in A$.

Die Kohomologie von (A, d) ist die kommutative graduierte Algebra

$$H^*(A, d) := \ker(d) / \text{Bild}(d).$$

Die *formale Dimension* einer cdga (A, d) ist die größte natürliche Zahl n , so dass $H^n(A, d) \neq 0$ gilt; falls keine solche existiert, so wird sie als ∞ definiert.

Beispiel 1.2: Das grundlegende Beispiel, das im nächsten Abschnitt auch (in gewisser Weise) für andere Körper verallgemeinert werden soll, ist die \mathbb{R} -cdga $(\Omega(M), d)$ der

Differentialformen auf einer glatten Mannigfaltigkeit mit der äußeren Ableitung als Differential.

Der singuläre Kokettenkomplex ist dagegen im Allgemeinen *keine* cdga. Das Cup-Produkt ist auf Kokettenniveau im Allgemeinen nicht graduiert kommutativ, sondern erst nach Übergang zur Kohomologie.

Bemerkung 1.3: Wir werden häufig immer denselben Buchstaben d für Differentiale auch auf verschiedenen graduierten Algebren benutzen. Damit ist allerdings keinesfalls gemeint, dass diese Differentiale übereinstimmen.

Definition 1.4:

Die *freie kommutative graduierte Algebra* ΛV über einem graduierten Vektorraum V ist definiert als $\Lambda V := TV/I$, wobei TV die Tensoralgebra über V und I das Ideal ist, das von den Elementen

$$x_k \otimes x_l - (-1)^{kl} x_l \otimes x_k, \quad k, l \in \mathbb{N}_0, x_k \in V^k, x_l \in V^l$$

erzeugt wird.

Bemerkung 1.5: Da $TV = \bigoplus_{k \geq 0} \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}}$ gilt, ist insbesondere stets $\mathbb{K} \subset (\Lambda V)^0$. Die Graduierung ist definiert durch

$$(\Lambda V)^k = \text{span} \left\{ v_1 \otimes \dots \otimes v_l \mid l \in \mathbb{N}_0, v_i \in V^{k_i}, \sum k_i = k \right\}.$$

Definition 1.6:

Eine *Sullivan-Algebra* ist eine freie cdga $(\Lambda V, d)$ mit $V = V^{\geq 1}$, so dass V eine Basis $\{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ besitzt, die durch eine wohlgeordnete Menge I indiziert ist und für die $d(x_\alpha) \in \Lambda(x_\beta)_{\beta < \alpha}$ gilt.

Bemerkung 1.7: Ist $V = V^{\geq 2}$, so ist $(\Lambda V, d)$ (für beliebiges Differential d) eine Sullivan-Algebra.

Notation 1.8:

Es sei V ein graduirter Vektorraum. Wir verwenden die folgende Notation:

- $V^{\geq n} = \bigoplus_{k \geq n} V^k$, $V^{\text{odd}} = \bigoplus_{k \geq 0} V^{2k+1}$, $V^{\text{even}} = \bigoplus_{k \geq 0} V^{2k}$;

- $\Lambda^k V$ bzw. $\Lambda^{\geq k} V$ bzw. $\Lambda^{\leq k} V$ ist der von Produkten aus Elementen von V der Länge k bzw. $\geq k$ bzw. $\leq k$ erzeugte Teilraum von ΛV ;
- $\Lambda V^{\geq k} = \Lambda(V^{\geq k})$ und analog für die anderen oben eingeführten Schreibweisen.
- Ist x_1, \dots, x_n eine Basis von V , so schreiben wir $\Lambda(x_1, \dots, x_n) = \Lambda V$.
- Ist A eine graduierte Algebra, so schreiben wir auch $|x| = k$ für $x \in A^k$.

Definition 1.9:

Ein *Homomorphismus* $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$ von cdgas ist ein Algebren-Homomorphismus, der die Graduierung erhält und mit den Differentialen kommutiert.

Ein *Quasi-Isomorphismus* ist ein Homomorphismus, dessen induzierte Abbildung $H^*(f) : H^*(A, d) \rightarrow H^*(B, d)$ ein Isomorphismus ist.

Definition 1.10:

Eine *minimale Sullivan-Algebra* ist eine Sullivan-Algebra $(\Lambda V, d)$ mit der Eigenschaft $d(V) \subset \Lambda^{\geq 2} V$. Das *minimale Modell* einer cdga (A, d) ist eine minimale Sullivan-Algebra $(\Lambda V, d)$ zusammen mit einem Quasi-Isomorphismus $\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$.

Die Benennung als *das* minimale Modell werden wir in Satz 1.12 rechtfertigen. Wir benötigen dafür noch einen Begriff von Homotopie für cdga-Homomorphismen. Es sei dazu $(\Lambda(t, dt), d)$ die Sullivan-Algebra mit $|t| = 0$, $|dt| = 1$, $d(t) = dt$ sowie $d(dt) = 0$. Dann sind die Abbildungen $p_i : (\Lambda(t, dt), d) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$, $i \in \{0, 1\}$, mit $p_i(t) = i$ und $p_i(dt) = 0$ Quasi-Isomorphismen.

Definition 1.11:

Zwei Homomorphismen $f, g : (A, d) \rightarrow (B, d)$ heißen *homotop* (in Zeichen: $f \simeq g$), wenn es einen Homomorphismus $H : (A, d) \rightarrow (B, d) \otimes (\Lambda(t, dt), d)$ gibt, so dass $f = (\text{id} \otimes p_0) \circ H$ und $g = (\text{id} \otimes p_1) \circ H$ ist.

Satz 1.12:

Es sei (A, d) eine cdga mit $H^0(A, d) = \mathbb{K}$. Dann existiert ein minimales Modell von (A, d) . Sind $\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$ und $\psi : (\Lambda W, d) \rightarrow (A, d)$ minimale Modelle von (A, d) , so existiert ein Isomorphismus $f : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda W, d)$, so dass φ und $\psi \circ f$ homotop sind.

Zum Beweis der Existenz verwendet man im einfach zusammenhängenden Fall, d.h. wenn $H^1(A, d) = \{0\}$ gilt, den folgenden Algorithmus.

Algorithmus 1.13: Wir definieren induktiv einen graduierten Vektorraum V , ein Differential d auf ΛV und Abbildungen $\varphi_n : (\Lambda V^{\leq n}, d) \rightarrow (A, d)$ mit $\varphi_{n+1}|_{\Lambda V^{\leq n}} = \varphi_n$, so dass $H^{\leq n}(\varphi_n)$ ein Isomorphismus und $H^{n+1}(\varphi_n)$ injektiv ist.

Es sei $V^0 = \{0\}$, $d = 0$ auf ΛV^0 und $\varphi_0(1) \in A^0$ ein Repräsentant eines Erzeugers von $H^0(A, d) \cong \mathbb{K}$. Hierbei ist $1 \in \mathbb{K} = (\Lambda V^0)^0$.

Haben wir $V^{\leq n}$, φ_n und das Differential auf $\Lambda V^{\leq n}$ bereits definiert, so seien $V_1^{n+1} \cong \text{coker}(H^{n+1}(\varphi_n))$ und $V_2^{n+1} \cong \ker(H^{n+2}(\varphi_n))$. Es sei $V^{n+1} = V_1^{n+1} \oplus V_2^{n+1}$.

Es sei $x_i, i \in I_1$, eine Basis von V_1^{n+1} und $\alpha_i, i \in I_1$, eine Basis von $\text{coker}(H^{n+1}(\varphi_n))$. Dann existieren $a_i \in A^{n+1}$, $i \in I_1$ mit $\alpha_i = [a_i]$. Weiter sei $y_j, j \in I_2$ eine Basis von V_2^{n+1} und $\beta_j, j \in I_2$, eine Basis von $\ker H^{n+2}(\varphi_n)$. Wähle Repräsentanten $b_j \in \Lambda V$ von β . Dann existieren $c_j \in A^{n+1}$ mit $dc_j = \varphi_n(b_j)$.

Definiere nun d durch $d|_{V_1^{n+1}} = 0$ und $d(y_j) = b_j$ sowie φ_{n+1} durch $\varphi_{n+1}(x_i) = a_i$ und $\varphi_{n+1}(y_j) = c_j$. Nach Konstruktion gilt dann $\varphi_{n+1} \circ d = d \circ \varphi_{n+1}$, $H^{\leq n+1}(\varphi_{n+1})$ ist ein Isomorphismus und $H^{n+1}(\varphi)$ ist injektiv.

Bemerkung 1.14: Ist $H^1(A, d) \neq \{0\}$, so ist notwendig $V^1 \neq \{0\}$ und man erhält in jedem Schritt zusätzliche geschlossene Formen in $V^1 \cdot V_1^n$, weswegen der Algorithmus in diesem Fall nicht anwendbar ist.

Die Eindeutigkeit im Satz 1.12 folgt aus der folgenden Proposition

Proposition 1.15 ([FHT01, Proposition 12.9 und Theorem 14.11]):

Es seien $(\Lambda V, d)$ und $(\Lambda W, d)$ minimale Sullivan-Algebren und (A, d) und (B, d) cdgas.

- (a) *Ist $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$ ein Quasi-Isomorphismus und $\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow (B, d)$ ein Homomorphismus, so existiert ein Homomorphismus $\psi : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$, so dass φ und $f \circ \psi$ homotop sind.*
- (b) *Ist $\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda W, d)$ ein Quasi-Isomorphismus, so ist φ ein Isomorphismus.*

Auch Homomorphismen besitzen ein (bis auf Homotopie eindeutiges) minimales Modell, es gilt

Proposition 1.16 ([FOT08, Proposition 2.26]):

Ist $f : (A, d) \rightarrow (B, d)$ ein Homomorphismus und sind $\varphi_A : (\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$ und $\varphi_B : (\Lambda W, d) \rightarrow (B, d)$ die minimalen Modelle, so existiert ein bis auf Homotopie eindeutiger Homomorphismus $\psi : (\Lambda V, d) \rightarrow (\Lambda W, d)$ mit $\varphi_B \circ \psi \simeq f \circ \varphi_A$.

1.2. Minimale Modelle von Räumen, rationaler Homotopietyp und Realisierung

Nun wollen wir die algebraischen Definitionen auf topologische Räume und insbesondere Mannigfaltigkeiten übersetzen. Im Folgenden seien X und Y stets nilpotente, wegzusammenhängende Räume mit endlichen Bettizahlen. Ein Raum X heißt hierbei nilpotent, wenn $\pi_1(X)$ nilpotent ist und nilpotent auf den höheren Homotopiegruppen operiert.

Definition 1.17:

X und Y haben denselben *rationalen Homotopietyp* (in Zeichen: $X \simeq_{\mathbb{Q}} Y$), wenn Räume Z_1, \dots, Z_n und Abbildungen f_0, \dots, f_n der Form

$$X \xleftarrow{f_0} Z_1 \xrightarrow{f_1} Z_2 \xleftarrow{f_2} Z_3 \xrightarrow{f_3} \dots \xleftarrow{f_{n-1}} Z_n \xrightarrow{f_n} Y$$

existieren, so dass jedes f_i einen Isomorphismus der rationalen Kohomologieringe induziert.

Bemerkung 1.18: Die Forderung, dass die Abbildungen f_i Isomorphismen auf der Kohomologie induzieren, erklärt sich wie folgt: Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sind äquivalent:

- (i) $\pi_*(f) \otimes \mathbb{Q} : \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q}$ ist ein Isomorphismus;
- (ii) $H_*(f; \mathbb{Q}) : H_*(X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(Y; \mathbb{Q})$ ist ein Isomorphismus;
- (iii) $H^*(f; \mathbb{Q}) : H^*(Y; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ ist ein Isomorphismus.

Dies folgt aus einem Satz von Whitehead-Serre (siehe z.B. [FHT01, Theorem 8.6]).

Wir wollen nun X eine cdga $A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K})$ zuordnen, so dass wir die Ergebnisse des letzten Abschnitts auch auf Räume anwenden können. Die Idee hierbei ist es, auf den singulären Simplizes in X Formen mit Koeffizienten in \mathbb{K} zu definieren.

Dazu sei zunächst A_{PL} die folgende Algebra: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$(A_{\text{PL}})_n = \left(\Lambda(t_0, \dots, t_n, dt_0, \dots, dt_n) \Big/ \left(\sum_{i=0}^n t_i - 1, \sum_{i=0}^n dt_i \right), d \right),$$

wobei t_i Grad 0 und dt_i Grad 1 habe und für das Differential $d(t_i) = dt_i$ gelte. Dann lässt sich $(A_{\text{PL}})_n$ interpretieren als Menge der Einschränkungen von Differentialformen auf dem \mathbb{R}^{n+1} auf den Standardsimplex $\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum t_i = 1\}$, deren Koeffizienten Polynome über \mathbb{K} sind.

Weiter sei $S_n(X) = \{\sigma : \Delta^n \rightarrow X \text{ stetig}\}$ die Menge der singulären n -Simplizes in X . Dann gibt es für $i, j = 0, \dots, n$ auf $S_n(X)$ die Rand- und Degenerationsabbildungen $\partial_i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ (für $n \geq 1$) und $s_j : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ (für $n \geq 0$), definiert durch

$$\partial_i(\sigma)(t_0, \dots, t_{n-1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$$

und

$$s_j(\sigma)(t_0, \dots, t_{n+1}) = \sigma(t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{n+1}),$$

welche $S_*(X)$ zu einer simplizialen Menge machen.

Ähnlich lassen sich auf $(A_{\text{PL}})_n$ cdga-Homomorphismen $\partial_i : (A_{\text{PL}})_n \rightarrow (A_{\text{PL}})_{n-1}$ definieren, die eine Form auf den i -ten Rand (gegeben durch $t_i = 0$) einschränken, also

$$\partial_i(t_k) = \begin{cases} t_k & k < i \\ 0 & k = i \\ t_{k-1} & k > i \end{cases} \quad \text{und} \quad \partial_i(dt_k) = d(\partial_i(t_k)),$$

sowie cdga-Homomorphismen $s_j : (A_{\text{PL}})_n \rightarrow (A_{\text{PL}})_{n+1}$ durch

$$s_j(t_k) = \begin{cases} t_k & k < j \\ t_j + t_{j+1} & k = j \\ t_{k+1} & k > j \end{cases} \quad \text{und} \quad s_j(dt_k) = d(s_j(t_k)).$$

Definition 1.19:

Nun können wir $A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K})$ wie folgt definieren: $(A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K}))^k$ sei die Menge aller Abbildungen $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n(X) \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (A_{\text{PL}})_n^k$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jeden singulären n -Simplex $\sigma \in S_n(X)$ gilt, dass $\omega(\sigma) \in (A_{\text{PL}})_n^k$, $\omega(\partial_i(\sigma)) = \partial_i(\omega(\sigma))$ und $\omega(s_j(\sigma)) = s_j(\omega(\sigma))$.

Das Differential auf $A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K})$ ist dann definiert durch $(d\omega)(\sigma) = d(\omega(\sigma))$.

Bemerkung 1.20: Eine (stetige) Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert in natürlicher Weise einen Homomorphismus $A_{\text{PL}}(f; \mathbb{K}) : A_{\text{PL}}(Y; \mathbb{K}) \rightarrow A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K})$, in anderen Worten: $A_{\text{PL}}(\cdot; \mathbb{K})$ ist ein kontravarianter Funktor.

Satz 1.21 ([FHT01, Korollar 10.10]):

Es gibt eine Kette von Quasi-Isomorphismen, die $A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K})$ und den singulären Kettenkomplex $C^(X; \mathbb{K})$ verbinden. Insbesondere ist $H^*(X; \mathbb{K}) \cong H^*(A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K}))$.*

Definition 1.22:

Das (\mathbb{K} -)minimale Modell eines topologischen Raums X ist das minimale Modell von $A_{\text{PL}}(X; \mathbb{K})$.

Bemerkung 1.23: Sind $\varphi_X : (\Lambda V_X, d) \rightarrow A_{\text{PL}}(X)$ und $\varphi_Y : (\Lambda V_Y, d) \rightarrow A_{\text{PL}}(Y)$ die minimalen Modelle von X und Y und ist $f : X \rightarrow Y$, so gibt es nach 1.16 ein (bis auf Homotopie eindeutiges) minimales Modell von f , d.h. ein Homomorphismus $\psi : (\Lambda V_Y, d) \rightarrow (\Lambda V_X, d)$ mit $A_{\text{PL}}(f) \circ \varphi_X \simeq \varphi_Y \circ \psi$.

Mit Proposition 1.15 folgt nun:

Proposition 1.24:

X und Y haben genau dann denselben rationalen Homotopietyp, wenn ihre rationalen minimalen Modelle isomorph sind.

Dies legt die folgende Definition nahe:

Definition 1.25:

X und Y haben denselben \mathbb{K} -Homotopietyp, wenn ihre \mathbb{K} -minimalen Modelle isomorph sind.

Die minimalen Modelle über einem Erweiterungskörper von \mathbb{Q} lassen sich einfach aus dem rationalen minimalen Modell bestimmen, es gilt:

Proposition 1.26 ([FHT01, S. 156]):

Ist $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell von X über \mathbb{Q} und \mathbb{K} eine Erweiterungskörper von \mathbb{Q} , so ist $(\Lambda V, d) \otimes \mathbb{K}$ das minimale Modell von X über \mathbb{K} .

Für den Rest des Abschnitts betrachten wir nur noch den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen den rationalen Homotopiegruppen und minimalen Modellen her.

Satz 1.27 ([FOT08, Theorem 2.50 und Proposition 2.53]):

Ist $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell von X , so gibt es für $n \geq 2$ Isomorphismen

$$V^n \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q}) = \text{Hom}(\pi_n(X), \mathbb{Q}).$$

Für $n = 1$ gilt $\text{rank}(\pi_1(X)) = \dim V^1$.

Minimale Sullivan-Algebren über \mathbb{Q} lassen sich als Raum realisieren. Genauer gilt:

Satz 1.28 ([FHT01, Theorem 17.10]):

Es sei $(\Lambda V, d)$ eine (nicht notwendigerweise minimale) rationale Sullivan-Algebra mit $H^1(\Lambda V, d) = \{0\}$ und $\dim H^k(\Lambda V, d) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann existiert ein einfach zusammenhängender Raum $|\Lambda V, d|$ und ein Quasi-Isomorphismus $\varphi : (\Lambda V, d) \rightarrow A_{\text{PL}}(|\Lambda V, d|)$. Insbesondere ist $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell von $|\Lambda V, d|$, wenn $(\Lambda V, d)$ minimal ist.

Bemerkung 1.29: Der Raum $|\Lambda V, d|$ ist gegeben als Milnor-Realisierung der simplizialen Menge, die gegeben ist durch:

- Die n -Simplizes sind die Homomorphismen $(\Lambda V, d) \rightarrow (A_{\text{PL}})_n$.
- Die Rand- und Degenerationsabbildungen für einen Simplex $\sigma : (\Lambda V, d) \rightarrow (A_{\text{PL}})_n$ sind durch die entsprechenden Abbildungen auf $(A_{\text{PL}})_n$ gegeben, also $\partial_i(\sigma) = \partial_i \circ \sigma$ und $s_j(\sigma) = s_j \circ \sigma$.

Genauso wichtig ist es allerdings für uns zu wissen, wann ein minimales Modell das minimale Modell einer kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist. Der folgende Satz von Sullivan beantwortet dies vollständig.

Satz 1.30 (Sullivan-Barge, [Sul77]):

Es sei $(\Lambda V, d)$ ein minimales Modell über \mathbb{Q} mit $V^1 = 0$, so dass $H^(\Lambda V, d)$ Poincaré-Dualität der Dimension n erfüllt. Ferner sei $p_i \in H^{4i}(\Lambda V, d)$ für alle $i \leq \frac{n}{4}$ gegeben. Dann gilt:*

- (a) Ist n nicht durch 4 teilbar, so existiert eine kompakte, einfach zusammenhängende n -Mannigfaltigkeit, die $(\Lambda V, d)$ als minimales Modell und die p_i als rationale Pontryagin-Klassen hat.
- (b) Ist $n = 4k$, so existiert eine kompakte, einfach zusammenhängende n -Mannigfaltigkeit, die $(\Lambda V, d)$ als minimales Modell und die p_i als rationale Pontryagin-Klassen hat genau dann, wenn es ein $0 \neq \mu \in \text{Hom}(H^n(\Lambda V, d), \mathbb{Q})$ gibt, so dass
- die Schnittform $H^{2k}(\Lambda V, d) \times H^{2k}(\Lambda V, d) \rightarrow \mathbb{Q}$, $(\alpha, \beta) \mapsto \mu(\alpha\beta)$ über \mathbb{Q} diagonalisierbar mit Diagonaleinträgen in $\{-1, 1\}$ ist,
 - die Signatur der Schnittform mit $\mu(L_k(p_1, \dots, p_k))$ übereinstimmt, wobei L_k das k -te L -Polynom ist, und
 - es eine kompakte Mannigfaltigkeit N gibt, so dass

$$\mu(p_{i_1} \cdots p_{i_r}) = \langle p_{i_1}(N) \cdots p_{i_r}(N), [N] \rangle$$

für alle Partitionen i_1, \dots, i_r von k gilt.

In [Su14] wird ein ausführlicherer Beweis des Resultats gegeben.

1.3. Rationale Elliptizität

Definition 1.31:

Ein nilpotenter Raum mit endlich-dimensionaler rationaler Kohomologie heißt *rational elliptisch*, wenn $\sum_{p \geq 2} \dim \pi_p(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$ und *rational hyperbolisch*, wenn dies nicht gilt.

Der folgende Satz übersetzt diese Definition in die Sprache der minimalen Modelle:

Satz 1.32:

Es sei X ein nilpotenter Raum mit endlichen Bettizahlen und rationalem minimalem Modell $(\Lambda V, d)$. Dann gilt für $k \geq 2$, dass

$$V^k \cong \text{Hom}(\pi_k(X) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q}).$$

Für $k = 1$ gilt

$$\dim V^1 = \text{rank } \pi_1(X).$$

Wir wollen nun auch für minimale Modelle rationale Elliptizität definieren.

Definition 1.33:

Ein minimales Modell $(\Lambda V, d)$ über \mathbb{Q} heißt *rational elliptisch*, falls V und $H^*(\Lambda V, d)$ endlich-dimensional sind.

Damit ist X genau dann rational elliptisch, wenn sein (rationales) minimales Modell dies ist. Mit Proposition 1.26 ist für einen Raum rationale Elliptizität unabhängig von dem betrachteten Grundkörper (der Charakteristik 0).

Beispiele 1.34: *Beispiele für rational elliptische Räume sind*

- *Sphären, komplex-projektive Räume, quaternional-projektive Räume (siehe Abschnitt 1.5)*
- *allgemeiner kompakte Liegruppen (siehe Abschnitt 1.5) und deren homogene Räume*
- *Biquotienten kompakter Liegruppen*
- *Kohomogenität-1-Mannigfaltigkeiten ([GH87])*

Für homogene Räume und Biquotienten sieht man dies mit der folgenden allgemeineren Überlegung (und der rationalen Elliptizität von kompakten Liegruppen):

Ist $F \rightarrow E \rightarrow B$ ein Faserbündel mit Räumen endlich-dimensionaler Kohomologie, so folgt aus der langen exakten Homotopiesequenz $\cdots \rightarrow \pi_k(F) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_k(E) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_k(B) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \pi_{k-1}(F) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \dots$, dass, wenn zwei der drei Räume F , E und B rational elliptisch sind, auch der dritte Raum rational elliptisch ist.

Sehr wichtig für uns ist der folgende Satz:

Satz 1.35 ([Hal77, Theorem 3]):

Der rationale Kohomologiering eines rational elliptischen minimalen Modells erfüllt Poincaré-Dualität.

Mit Satz 1.30 folgt hieraus, dass jede einfach zusammenhängende, rational elliptische minimale Sullivan-Algebra von formaler Dimension $n \neq 4k$ durch eine Mannigfaltigkeit realisiert wird, d.h. das minimale Modell einer kompakten, einfach zusammenhängenden n -Mannigfaltigkeit ist.

1.3.1. Reine Modelle

Im Folgenden arbeiten wir wieder über einem Körper \mathbb{K} der Charakteristik 0.

Definition 1.36:

Ein Sullivan-Algebra $(\Lambda V, d)$ heißt *rein*, falls V endlich-dimensional, $d(V^{\text{even}}) = 0$ und $d(V^{\text{odd}}) \subset \Lambda V^{\text{even}}$ gilt.

Definition 1.37 (untere Graduierung):

Für eine reine Sullivan-Algebra $(\Lambda V, d)$ lässt sich das Differential als Abbildung in folgendem Kettenkomplex auffassen:

$$0 \xleftarrow{d} \Lambda V^{\text{even}} \xleftarrow{d} \Lambda V^{\text{even}} \otimes \Lambda^1 V^{\text{odd}} \xleftarrow{d} \Lambda V^{\text{even}} \otimes \Lambda^2 V^{\text{odd}} \xleftarrow{d} \dots$$

Es sei $H_k(\Lambda V, d)$ dann die k -te Homologie dieses Kettenkomplexes.

Bemerkung 1.38: Es gilt $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} H_k(\Lambda V, d) = H(\Lambda V, d)$.

Bemerkung 1.39: Auf einer minimalen Sullivan-Algebra $(\Lambda V, d)$ mit $\dim V < \infty$ und $V = V^{\geq 2}$ lässt sich ein weiteres Differential definieren, das rein ist, und bezüglich dessen die Kohomologie genau dann endlich-dimensional ist, wenn die von $(\Lambda V, d)$ dies ist. Damit lassen sich einige Resultate zu reinen Sullivan-Algebren auch auf einfach zusammenhängende, rational elliptische, minimale Sullivan-Algebren, die nicht notwendigerweise rein sind, übertragen.

Im Zusammenhang mit unseren Resultaten sind auch folgende Propositionen interessant, die im Beweis von Proposition 1.52 benötigt werden.

Proposition 1.40 ([FHT01, Proposition 32.1]):

Es sei $(\Lambda V, d)$ eine reine Sullivan-Algebra. Dann ist $H^(\Lambda V, d)$ endlich-dimensional genau dann, wenn $H_0(\Lambda V, d)$ endlich-dimensional ist.*

Proposition 1.41 ([FHT01, Proposition 32.2(ii)):

Es sei $(\Lambda V, d)$ eine reine Sullivan-Algebra, so dass $H^(\Lambda V, d)$ endlich-dimensional ist und k sei maximal mit $H_k(\Lambda V, d) \neq \{0\}$. Dann gilt $k = \dim V^{\text{odd}} - \dim V^{\text{even}}$.*

Weiter lassen sich geschlossene Erzeuger von ungeradem Grad als Produkt abspalten.

Satz 1.42 ([FOT08, Theorem 2.77]):

Es sei $(\Lambda V, d)$ eine reine cdga und $V^{\text{odd}} = W_1 \oplus W_2$ mit $d(W_2) = 0$. Dann gilt

$$(\Lambda V, d) \cong (\Lambda(V^{\text{even}} \oplus W_1), d) \otimes (\Lambda W_2, 0).$$

1.3.2. Exponenten einer rational elliptischen cdga

Definition 1.43:

Es sei ΛV eine freie graduiert kommutative \mathbb{K} -Algebra mit $q = \dim V^{\text{odd}} < \infty$ und $r = \dim V^{\text{even}} < \infty$. Dann heißen $a \in \mathbb{N}^r$ und $b \in \mathbb{N}^q$ die *Exponenten* von ΛV , wenn es eine Basis $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_q$ von V gibt mit $|v_i| = 2a_i$ und $|w_j| = 2b_j - 1$. Ferner nennen wir a die *geraden Exponenten* und b die *ungeraden Exponenten*.

Satz 1.44 ([FH79]):

Es sei $(\Lambda V, d)$ eine rational elliptische, minimale Sullivan-Algebra von formaler Dimension n mit Exponenten $a \in \mathbb{N}^r$ und $b \in \mathbb{N}^q$. Dann gelten:

- (a) $\dim V^{\text{even}} = r \leq q = \dim V^{\text{odd}}$;
- (b) $\sum_{i=1}^r 2a_i \leq n$;
- (c) $\sum_{j=1}^q (2b_j - 1) \leq 2n - 1$;
- (d) $n = 2 \left(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^r a_i \right) - (q - r)$.

Bemerkung 1.45: Der Beweis des Satzes benutzt unter anderem die Charakterisierung der Exponenten aus Satz 1.47.

Die Aussagen über die Exponenten lassen sich in Aussagen über die rationalen Homotopiegruppen eines einfach zusammenhängenden, rational elliptischen Raumes X von formaler Dimension n überführen. Es gilt dann:

- (b') $\sum_{k \geq 1} 2k \dim(\pi_{2k}(X) \otimes \mathbb{Q}) \leq n$;
- (c') $\sum_{k \geq 2} (2k - 1) \dim(\pi_{2k-1}(X) \otimes \mathbb{Q}) \leq 2n - 1$;
- (d') $n = \sum_{k \geq 2} (2k - 1) \dim(\pi_{2k-1}(X) \otimes \mathbb{Q}) - \sum_{k \geq 1} (2k - 1) \dim(\pi_{2k}(X) \otimes \mathbb{Q})$.

Die Tupel a, b , die als Exponenten einer rational elliptischen minimalen Sullivan-Algebra auftreten, lassen sich charakterisieren. Dafür benötigen wir die folgende Definition aus [FH79].

Definition 1.46:

Es seien $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}_{>0}^r$ und $b = b_1, \dots, b_q \in \mathbb{N}_{>0}^q$ endliche Folgen. Dann erfüllen a und b die Bedingung SAC („strong arithmetic condition“), wenn es zu jeder Teilfolge a_{i_1}, \dots, a_{i_s} von a eine Teilfolge b_{j_1}, \dots, b_{j_s} gibt, so dass nichtnegative $\gamma_{kl} \in \mathbb{N}_0$ existieren mit

$$(i) \quad b_{j_k} = \sum_{l=1}^s \gamma_{kl} a_{i_l}$$

$$(ii) \quad \sum_{l=1}^s \gamma_{kl} \geq 2$$

jeweils für alle $k = 1, \dots, s$.

Satz 1.47 ([FH79]):

Es seien $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{N}_{>0}^r$ und $b = b_1, \dots, b_q \in \mathbb{N}_{>0}^q$ endliche Folgen und es gelte $b_j \geq 2$ für $j = 1, \dots, q$. Dann sind äquivalent:

- (i) a und b sind die Exponenten eines einfach zusammenhängenden rational elliptischen Raums.
- (ii) a und b erfüllen die Bedingung SAC.

Bemerkung 1.48: Streicht man die Voraussetzung, dass $b_j \geq 2$, so gilt der Satz unter Streichung von „einfach zusammenhängend“ in Teil (i) ebenfalls.

1.3.3. Reguläre Sequenzen

Die folgende Definition werden wir im Falle eines Polynomringes (in mehreren Variablen) über einem Körper benötigen.

Definition 1.49:

Es sei R ein Ring und $r_1, \dots, r_n \in R$. Dann heißt r_1, \dots, r_n eine *reguläre Sequenz*, wenn $(r_1, \dots, r_n)R \neq R$ gilt, und für jedes i die Restklasse von r_i in $R/(r_1, \dots, r_{i-1})$ kein Nullteiler ist.

Beispiele: Im Fall $R = K[x_1, \dots, x_n]$ für einen Körper K gilt:

- Die Sequenzen x_1^k, \dots, x_n^k sind für $k \geq 1$ regulär.
- Im Fall $n \geq 2$ ist $x_1^2, x_1 x_2$ nicht regulär, denn $x_1 x_2$ ist ein Nullteiler in $R/(x_1^2)$.

Die folgende Proposition stellt nun einen Zusammenhang zwischen regulären Sequenzen und der unteren Graduierung her. Seien dazu $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ homogen und $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), d)$, wobei die x_i Grad 2 haben und $dy_i = u_i$ gilt.

Proposition 1.50 ([FHT01, Proposition 32.3]):

Es ist $H_{>0}(\Lambda V, d) = \{0\}$ genau dann, wenn die Sequenz u_1, \dots, u_n regulär ist.

Für eine graduierte K -Algebra $A = \bigoplus_{i \geq 0} A^i$ sei $F(A, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (\dim_K A^i) \lambda^i$. Diese Reihe wird *Poincaré-Reihe* genannt.

Der folgende Satz von Stanley bringt diese Reihe in Verbindung mit regulären Sequenzen von homogenen Elementen.

Satz 1.51 ([Sta78, Korollar 3.2]):

Es sei A eine Noethersche, graduierte, kommutative (im herkömmlichen Sinne) K -Algebra mit $A^0 = K$. Es seien $\theta_1, \dots, \theta_r \in A \setminus \{0\}$ homogen mit $\theta_i \in A^{d_i}$, $d_i > 0$. Es sei $I = (\theta_1, \dots, \theta_r)$. Dann gilt

$$F(A, \lambda) \leq \frac{F(A/I, \lambda)}{\prod_{i=1}^r (1 - \lambda^{d_i})}.$$

Ferner gilt Gleichheit genau dann, wenn $\theta_1, \dots, \theta_r$ eine reguläre Sequenz ist.

(Die Ungleichung für formale Potenzreihen ist hier als Ungleichung für die Koeffizienten der Potenzreihen zu verstehen.)

Folgende Charakterisierung regulärer Sequenzen werden wir bei der Untersuchung kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 6-Mannigfaltigkeiten benötigen. Sie scheint in der algebraischen Geometrie wohlbekannt zu sein, wir konnten sie in der Literatur jedoch nur schwer finden. Wir geben hier einen Beweis an, der aus der algebraischen Geometrie nur Hilberts Nullstellensatz (siehe z.B. [KR00, Theorem 2.6.16]) als Hilfsmittel benötigt.

Proposition 1.52:

Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ homogene Polynome. Dann gelten:

- (a) $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(u_1, \dots, u_n)$ ist endlich-dimensional genau dann, wenn die Sequenz u_1, \dots, u_n regulär ist.

(b) Gilt $\{z \in \mathbb{C}^n \mid u_1(z) = \cdots = u_n(z) = 0\} = \{(0, \dots, 0)\}$, so ist u_1, \dots, u_n eine reguläre Sequenz.

Beweis. Wir betrachten im Folgenden wieder das Modell

$$(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), d),$$

wobei die x_i Grad 2 haben und $dy_i = u_i$ gilt. Dann ist

$$H_0(\Lambda V, d) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(u_1, \dots, u_n).$$

Ferner sei d_i der Grad von u_i in $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$, so dass y_i Grad $2d_i - 1$ hat.

Zu (a): Es sei zunächst $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(u_1, \dots, u_n) = H_0(\Lambda V, d)$ endlich-dimensional. Nach Proposition 1.40 ist dann auch $H^*(\Lambda V, d)$ endlich-dimensional, woraus mit Proposition 1.41 dann $H^*(\Lambda V, d) = H_0(\Lambda V, d)$, also $H_{>0}(\Lambda V, d) = \{0\}$ folgt. Nach Proposition 1.50 ist dann u_1, \dots, u_n regulär.

Ist nun umgekehrt u_1, \dots, u_n regulär, so folgt mit 1.50, dass $H^*(\Lambda V, d) = H_0(\Lambda V, d)$ ist. Nach Satz 1.51 ist dann $H^*(\Lambda V, d) = H_0(\Lambda V, d) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(u_1, \dots, u_n)$ endlich-dimensional, denn

$$F(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(u_1, \dots, u_n), \lambda) = \prod_{i=0}^n \frac{1-\lambda^{d_i}}{1-\lambda} = \prod_{i=0}^n (1 + \lambda + \cdots + \lambda^{d_i-1}).$$

Zu (b): Nach Hilberts Nullstellensatz existieren $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ mit

$$x_i^{r_i} \in (u_1, \dots, u_n)\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

Nach [KR00, Proposition 2.6.12] gilt dann auch $x_i^{r_i} \in (u_1, \dots, u_n)$. Sei $r = \max_i r_i$. Sind dann $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{N}$ mit $s_1 + \cdots + s_n \geq nr$, so existiert ein i mit $s_i \geq r_i$, also ist $x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n} \in (u_1, \dots, u_n)$. Damit ist $(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n])^s \subset (u_1, \dots, u_n)$ für alle $s \geq nr$ und somit ist mit (a) dann u_1, \dots, u_n regulär. \square

Korollar 1.53:

Es sei $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k), d)$ ein minimale Sullivan-Algebra mit $|x_i| = 2$ und $|y_i| = 3$. Genau dann ist $(\Lambda V, d)$ formal $2k$ -dimensional und $H^(\Lambda V, d)$ erfüllt Poincaré-Dualität, wenn dy_1, \dots, dy_k eine reguläre Sequenz in $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$ ist.*

Gilt ferner $2 \nmid k$, so ist dies ebenfalls äquivalent dazu, dass $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell einer kompakten, einfach zusammenhängenden $2k$ -Mannigfaltigkeit ist.

Beweis. Nach den Propositionen 1.40 und 1.52 ist genau dann $\dim H^*(\Lambda V, d) < \infty$, wenn dy_1, \dots, dy_k regulär ist. Satz 1.35 liefert die Poincaré-Dualität.

Gilt $2 \nmid k$, so ist die formale Dimension nicht durch 4 teilbar und Satz 1.30 gibt eine Realisierung als minimales Modell einer kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit. \square

1.4. Formalität

Definition 1.54:

Ein einfach zusammenhängender topologischer Raum X heißt *formal*, wenn sein minimales Modell auch ein minimales Modell für die cdga $(H^*(X; \mathbb{Q}), 0)$ ist.

Bemerkung 1.55: Zwei formale Räume haben den gleichen rationalen Homotopietyp genau dann, wenn ihre rationalen Kohomologieringe isomorph sind.

Beispiele 1.56: *Folgendes sind Beispiele für formale Mannigfaltigkeiten*

- *Sphären, komplex-projektive Räume (siehe Abschnitt 1.5)*
- *kompakte Kählermannigfaltigkeiten (Deligne-Griffiths-Morgan-Sullivan)*

Ein Beispiel für eine nichtformale Mannigfaltigkeit, das auch schon in [FOT08] betrachtet wurde, werden wir in Abschnitt 6.1 betrachten.

Weitere Beispiele liefert

Proposition 1.57 ([FOT08, Proposition 2.99]):

Es sei $p \geq 2$. Ein $(p - 1)$ -zusammenhängender Raum von (formaler) Dimension $\leq 3p - 2$ ist formal.

Insbesondere sind also alle einfach zusammenhängenden Räume von formaler Dimension ≤ 4 formal.

Für Mannigfaltigkeiten gibt es ein besseres Resultat.

Satz 1.58 ([Mil79]):

Es sei $k \geq 2$. Jede kompakte $(k - 1)$ -zusammenhängende Mannigfaltigkeit von Dimen-

sion $\leq 4k - 2$ ist formal. Insbesondere ist jede kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 6 formal.

1.5. Beispiele

Beispiel 1.59 (Sphären): Wir verfahren nach dem Algorithmus 1.13 um das minimale Modell von S^n zu bestimmen. Da $H^i(S^n; \mathbb{Q}) = \{0\}$ für $0 < i < n$, wird der erste Erzeuger im Grad n hinzugefügt. Wir erhalten $(\Lambda(x), 0)$ mit $|x| = n$ und $\varphi(x)$ ist ein geschlossenes, aber nicht exaktes Element von $A_{\text{PL}}(S^n)^n$. Ist n ungerade, so ist φ ein Quasi-Isomorphismus, da dann $x^2 = 0$ gilt. Ist n gerade, so ist der nächste Erzeuger y vom Grad $2n - 1$ mit $dy = x^2$. Da $H^{2n}(S^n; \mathbb{Q}) = \{0\}$, existiert ein Element $\varphi(y) \in A_{\text{PL}}(S^n)$ mit $d\varphi(y) = \varphi(x)^2$. Da $H^*(\Lambda(x, y), d) \cong H^*(S^n; \mathbb{Q})$ gilt, ist φ nach Konstruktion ein Quasi-Isomorphismus. Wir haben auch das minimale Modell von S^n , n ungerade, gefunden.

Beispiel 1.60 (komplex-projektive Räume, quaternional-projektive Räume): Analog zum Fall der Sphären lässt sich das minimale Modell von $\mathbb{C}P^n$ bestimmen zu $(\Lambda(x, y), d)$ mit $|x| = 2$, $|y| = 2n + 1$ und $dy = x^{n+1}$.

Ebenso ist das minimale Modell von $\mathbb{H}P^n$ gegeben durch $(\Lambda(x, y), d)$ mit $|x| = 4$, $|y| = 4n + 3$ und $dy = x^{n+1}$.

Beispiel 1.61 (Lieggruppen): Es sei G eine kompakte, zusammenhängende Liegruppe. Nach dem Satz von Hopf (siehe [FOT08, Theorem 1.34]) existieren dann Kohomologieklassen $x_{2k_1+1}, \dots, x_{2k_n+1}$ mit $x_{2k_i+1} \in H^{2k_i+1}(G; \mathbb{Q})$, so dass als Algebra

$$H^*(G; \mathbb{Q}) \cong \Lambda(x_{2k_1+1}, \dots, x_{2k_n+1}).$$

Es sei $a_{2k_i+1} \in A_{\text{PL}}(G)^{2k_i+1}$ geschlossen mit $[a_{2k_i+1}] = x_{2k_i+1}$. Dann ist

$$\varphi : (H^*(G; \mathbb{Q}), 0) = (\Lambda(x_{2k_1+1}, \dots, x_{2k_n+1}), 0) \rightarrow (A_{\text{PL}}(G), d)$$

mit $\varphi(x_{2k_i+1}) = a_{2k_i+1}$ ein Quasi-Isomorphismus und somit $(H^*(G; \mathbb{Q}), 0)$ das minimale Modell von G .

Beispiel 1.62 (Produkte): Es seien X und Y wegzusammenhängende, nilpotente Räume mit endlichen Bettizahlen. Sind $(\Lambda V_X, d)$ und $(\Lambda V_Y, d)$ die minimalen Modelle

von X und Y , so ist $(\Lambda V_X, d) \otimes (\Lambda V_Y, d)$ ein minimales Modell von $X \times Y$. Denn sind p_1 und p_2 die Projektionen auf X und Y , so ist die Abbildung

$$A_{\text{PL}}(p_1) \cdot A_{\text{PL}}(p_2) : A_{\text{PL}}(X) \otimes A_{\text{PL}}(Y) \rightarrow A_{\text{PL}}(X \times Y)$$

mit

$$A_{\text{PL}}(p_1) \cdot A_{\text{PL}}(p_2)(\omega \otimes \eta) = A_{\text{PL}}(p_1)(\omega) \cdot A_{\text{PL}}(p_2)(\eta)$$

nach dem Satz von Künneth ein Quasi-Isomorphismus, und $(\Lambda V_X, d) \otimes (\Lambda V_Y, d)$ ist das minimale Modell von $A_{\text{PL}}(X) \otimes A_{\text{PL}}(Y)$.

Beispiel 1.63 (Einpunktvereinigung): Es seien wie zuvor X und Y wegzusammenhängende, nilpotente Räume mit endlichen Bettizahlen und minimalen Modellen $(\Lambda V_X, d)$ bzw. $(\Lambda W, d)$. Es sei $(A, d) = (\Lambda V_X, d) \oplus_{\mathbb{Q}} (\Lambda V_Y, d)$ die cdga mit

$$A^k = (\Lambda V_X)^k \oplus (\Lambda V_Y)^k \text{ für } k > 0 \text{ und } A^0 = (\Lambda V_X)^0 \oplus (\Lambda V_Y)^0 / (1_{\Lambda V_X} = 1_{\Lambda V_Y}),$$

mit Differential $d(a \oplus b) = da \oplus db$ und deren multiplikative Struktur gegeben ist wie folgt: Die Einschränkung der Multiplikation auf $\Lambda V_X \subset A$ bzw. $\Lambda V_Y \subset A$ ist die Multiplikation auf ΛV_X bzw. ΛV_Y und für $a \in (\Lambda V_X)^{>0}$ und $b \in (\Lambda V_Y)^{>0}$ gilt $(a \oplus 0)(0 \oplus b) = 0$. Es gilt dann

$$H^*((\Lambda V_X, d) \oplus_{\mathbb{Q}} (\Lambda V_Y, d)) = H^*(\Lambda V_X, d) \oplus_{\mathbb{Q}} H^*(\Lambda V_Y, d) \cong H^*(X \vee Y; \mathbb{Q}).$$

Ist $(\Lambda W, d)$ das minimale Modell von $X \vee Y$, so induzieren die Inklusionen $\iota_X : X \hookrightarrow X \vee Y$ und $\iota_Y : Y \hookrightarrow X \vee Y$ Homomorphismen $\psi_X : (\Lambda W, d) \rightarrow (\Lambda V_X, d)$ und $\psi_Y : (\Lambda W, d) \rightarrow (\Lambda V_Y, d)$. Diese lassen sich zusammenfügen zu einem Homomorphismus $\psi : (\Lambda W, d) \rightarrow (\Lambda V_X, d) \oplus_{\mathbb{Q}} (\Lambda V_Y, d)$ mit $\psi(v) = \psi_X(v) \oplus \psi_Y(v)$ für $v \in (\Lambda W)^{>0}$ und $\psi(1) = 1$.

Da dies genau die Abbildungen sind, die bei der Berechnung des Kohomologierings von $X \vee Y$ benutzt werden, ist ψ ein Quasi-Isomorphismus. Das minimale Modell von $X \vee Y$ ist also das minimale Modell von $(\Lambda V_X, d) \oplus_{\mathbb{Q}} (\Lambda V_Y, d)$.

Beispiel 1.64 (zusammenhängende Summe): Es seien M und N kompakte, einfach zusammenhängenden n -Mannigfaltigkeiten ($n \geq 2$). Es sei $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell von $M \# N$ und $(\Lambda W, d)$ das minimale Modell von $M \vee N$. Weiter sei $q : M \# N \rightarrow M \vee N$ die Abbildung, die man durch $M \vee N \cong (M \# N) / S^{n-1}$ erhält. Es sei φ das minimale Modell dieser Abbildung. Weiter seien ω_M und ω_N Repräsentanten der Fundamentalklassen von M und N im minimalen Modell $(\Lambda W, d)$ von $M \vee N$.

Da $[\varphi(\omega_M - \omega_N)] = 0 \in H^*(M\#N; \mathbb{Q})$ gilt, existiert ein $\tilde{y} \in (\Lambda V, d)$ mit $d\tilde{y} = \varphi(\omega_M - \omega_N)$. Dann wird durch $\varphi(y) = \tilde{y}$ eine Fortsetzung von φ auf $(\Lambda W \otimes \Lambda(y), d)$ mit $dy = \omega_M - \omega_N$ definiert. Da $H^{<n}(q)$ bereits ein Isomorphismus ist, ist $H^{\leq n}(\varphi) : H^{\leq n}(\Lambda W \otimes \Lambda(y), d) \rightarrow H^{\leq n}(\Lambda V, d)$ ein Isomorphismus. Es müssen jetzt nur noch gegebenenfalls Erzeuger y_j vom Grad $\geq n$ hinzugefügt werden, so dass für $k > n$ dann $H^k(\Lambda W \otimes \Lambda(y, \{y_j\}), d) = 0$ gilt. Dann ist $(\Lambda W \otimes \Lambda(y, \{y_j\}), d)$ das minimale Modell von $M\#N$.

Wir wollen dies nun für den Spezialfall $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ausführen.

Beispiel 1.65 ($\mathbb{C}\mathbb{P}^n \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^n$): Es sei $n \geq 2$. Das minimale Modell von $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ist $(\Lambda(x, y), d)$ mit $|x| = 2$, $|y| = 2n + 1$, $dx = 0$ und $dy = x^{n+1}$. In der Standardorientierung ist x^n ein Repräsentant der Fundamentalklasse. Das minimale Modell von $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ finden wir nun wie folgt. Zunächst benötigen wir zwei Erzeuger x_1 und x_2 vom Grad 2 mit $dx_i = 0$, die den Erzeugern vom Grad 2 im minimalen Modell von $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ entsprechen. Da deren Produkt verschwinden soll, benötigen wir einen Erzeuger a vom Grad 3 mit $da = x_1x_2$. Um die Fundamentalklassen zu identifizieren, führen wir einen Erzeuger b vom Grad $2n - 1$ ein mit $db = x_1^n \mp x_2^n$. Damit ist $(\Lambda(x_1, x_2, a, b), d)$ eine reine Sullivan-Algebra. Wegen $n \geq 2$ ist sie auch minimal.

Wegen $d(x_1b \pm x_2^{n-1}a) = x_1^{n+1}$, $d(\mp x_2b \pm x_1^{n-1}a) = x_2^{n+1}$ und $d(x_1^{i-1}x_2^{n-i}a) = x_1^i x_2^{n+1-i}$ für $i \geq 1$, ist $\dim H_0(\Lambda(x_1, x_2, a, b), d) < \infty$. Mit den Propositionen 1.40 und 1.41 folgt dann $\dim H^*(\Lambda(x_1, x_2, a, b), d) < \infty$ und

$$H^*(\Lambda(x_1, x_2, a, b), d) = H_0(\Lambda(x_1, x_2, a, b), d) = H^*(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^n).$$

Somit ist $(\Lambda(x_1, x_2, a, b), d)$ das minimale Modell von $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

2. Einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeiten

2.1. Klassifikation

Der Startpunkt der Klassifikation ist der folgende Satz von Wall, der es erlaubt, sich auf den Fall $b_3(M) = 0$ zu beschränken.

Satz 2.1 ([Wal66, Theorem 1]):

Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit mit $b_3(M) = 2k > 0$. Dann existiert eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit N mit $b_3(N) = 0$, so dass M diffeomorph zu $N \# (\#_{j=1}^k (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3))$ ist.

Wall hat weiter alle kompakten, einfach zusammenhängenden 6-Mannigfaltigkeiten, die Spin^1 sind und torsionsfreie Homologie haben, klassifiziert.

Satz 2.2 ([Wal66, Theorem 5]):

Orientierte Diffeomorphieklassen von kompakten, einfach zusammenhängenden, sechsdimensionalen Spinmannigfaltigkeiten mit torsionsfreier Homologie entsprechen bijektiv den Isomorphieklassen von Tupeln (G, H, μ, p_1) , wobei G und H endlich erzeugte freie abelsche Gruppen, G von geradem Rang, $\mu : H \times H \times H \rightarrow \mathbb{Z}$ eine symmetrische trilineare Abbildung und $p_1 : H \rightarrow \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus ist, für die die Relationen

$$\mu(x, x, y) \equiv \mu(x, y, y) \pmod{2} \quad \text{für alle } x, y \in H,$$

sowie

$$p_1(x) \equiv 4\mu(x, x, x) \pmod{24} \quad \text{für alle } x \in H$$

gelten.

Die Bijektion wird realisiert durch $M \mapsto (\mathbb{H}^3(M; \mathbb{Z}), \mathbb{H}^2(M; \mathbb{Z}), \mu, p_1(M))$, wobei

$$\mu : \mathbb{H}^2(M) \times \mathbb{H}^2(M) \times \mathbb{H}^2(M) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \mu(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3)([M]).$$

¹Eine orientierbare Mannigfaltigkeit M ist *Spin*, wenn die zweite Stiefel-Whitney-Klasse $w_2(M) = 0$ erfüllt.

Die Klassifikation wurde von Jupp in [Jup73] auf kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeiten mit torsionsfreier Homologie ausgedehnt. Die Klassifikation beliebiger kompakter, einfach zusammenhängender 6-Mannigfaltigkeiten gelang schließlich Žubr² in [Zhu01] (die Ergebnisse wurden in [Zub88] angekündigt).

2.2. Kubische Formen und rationaler Kohomologiering

Im Folgenden sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Der Kohomologiering $H^*(M; \mathbb{K})$ einer kompakten, einfach zusammenhängenden 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_3(M) = 0$ ist aufgrund der Poincaré-Dualität durch die folgende kubische Form bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt:

Definition 2.3:

Für eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit M und einen Erzeuger ω von $H^6(M; \mathbb{K})$ sei $F_{M,\omega}$ die kubische Form, welche durch

$$x \cdot y \cdot z = F_{M,\omega}(x, y, z) \cdot \omega$$

für $x, y, z \in H^2(M; \mathbb{K})$ definiert wird.

Bemerkung 2.4: Eine kubische Form über \mathbb{K} lässt sich zum einen als symmetrische Trilinearform auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V und zum anderen als homogenes Polynom vom Grad 3 in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ mit $n = \dim V$ auffassen. Identifizieren lassen sich beide Darstellung nach Wahl einer Basis e_1, \dots, e_n von V , indem man für eine symmetrische Trilinearform F auf V

$$F\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \dots, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$$

betrachtet. Dass dies tatsächlich einen Isomorphismus definiert, sieht man daran, dass der Koeffizient von $x_1^{j_1} \cdot \dots \cdot x_n^{j_n}$ im obigen Polynom gerade

$$\frac{n!}{j_1! \cdot \dots \cdot j_n!} F(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{j_1\text{-mal}}, \dots, \underbrace{e_n, \dots, e_n}_{j_n\text{-mal}})$$

ist. In dieser Arbeit werden wir beide Definitionen verwenden.

Wir verwenden den folgenden Äquivalenzbegriff für kubische Formen:

²In seinen Veröffentlichungen wird teilweise auch die Transskription Zhubr verwendet.

Definition 2.5:

Es seien V und V' endlich-dimensionale Vektorräume über \mathbb{Q} . Wir nennen zwei kubische Formen $F : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$ und $F' : V' \times V' \times V' \rightarrow \mathbb{Q}$ äquivalent, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : V \rightarrow V'$ und ein $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gibt mit $q \cdot F = \varphi^* F'$.

Lemma 2.6:

Es seien M und M' kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeiten mit $b_3(M) = b_3(M') = 0$. Weiter seien ω und ω' Erzeuger von $H^6(M; \mathbb{Q})$ bzw. $H^6(M'; \mathbb{Q})$. Dann sind die rationalen Kohomologieringe von M und M' genau dann isomorph, wenn $F_{M,\omega}$ und $F_{M',\omega'}$ äquivalent sind.

Beweis. Sind $F_{M,\omega}$ und $F_{M',\omega'}$ äquivalent, so existiert ein Isomorphismus

$$\varphi_2 : H^2(M; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(M'; \mathbb{Q}).$$

Wir setzen diesen fort mittels $\varphi_6(\omega) = q\omega'$ und $\varphi_4 = q \cdot (\varphi^{-1})^*$, wobei $(\varphi^{-1})^*$ die zu φ^{-1} duale Abbildung ist. \square

Bemerkung 2.7: Jede kubische Form auf einem n -dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum lässt sich als $F_{M,\omega}$ einer einfach zusammenhängenden, geschlossen Spin-6-Mannigfaltigkeit M mit torsionsfreier Homologie und $b_3(M) = 0$ realisieren.

Beweis. Zunächst lässt sich eine Basis so wählen, dass die Komponenten der Form in dieser Basis ganzzahlig sind. Dies liefert eine symmetrische trilineare Abbildung $\mu : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$. Nach dem Satz 2.2 von Wall muss sichergestellt werden, dass die dort angegebenen Kongruenzen gelten. Wählen wir zum Beispiel p_1 trivial, so muss $\mu(x, x, x) \equiv 0 \pmod{6}$ für alle $x \in H := \mathbb{Z}^n$ gelten. Betrachte dafür einfach $\tilde{\mu} = 6\mu$. Da dann $\tilde{\mu}$ nur gerade Werte annimmt, gilt auch die erste Bedingung. \square

2.3. Biquotienten kompakter Liegruppen

In [DeV11] werden einfach zusammenhängende, kompakte Biquotienten in den Dimensionen ≤ 7 untersucht und klassifiziert. Von besonderem Interesse für uns sind Biquotienten der Form $S^3 \times S^3 \times S^3 // T^3$. Die Operation von T^3 lässt sich ausdrücken als

$$\begin{aligned} (u, v, w) \cdot ((p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2)) \\ = ((up_1, u^{a_1}v^{a_2}w^{a_3}p_2), (uq_1, u^{b_1}v^{b_2}w^{b_3}q_2), (ur_1, u^{c_1}v^{c_2}w^{c_3}r_2)). \end{aligned}$$

Sie wird also durch eine Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$ beschrieben. Neben zwölf sporadischen Fällen gibt es drei Serien von Biquotienten, welche den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & a_3 \\ 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

entsprechen. Die Biquotienten der Serien wollen wir mit B_{c_1, c_2}^1 , B_{a_3, b_3}^2 und B_{b_1, c_1, c_2}^3 bezeichnen. In [DeV11] werden auch die ganzzahligen Kohomologieringe berechnet. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^*(B_{c_1, c_2}^1; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[u, v, w]/(u^2 + 2uv, v^2 + uv, w^2 + c_1uw + c_2vw), \\ \mathrm{H}^*(B_{a_3, b_3}^2; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[u, v, w]/(u^2 + 2uv + a_3uw, v^2 + uv + b_3vw, w^2), \\ \mathrm{H}^*(B_{b_1, c_1, c_2}^3; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[u, v, w]/(u^2, v^2 + b_1uv, w^2 + c_1uw + c_2vw), \end{aligned}$$

wobei alle Erzeuger Grad 2 haben.

Unter den 12 sporadischen Fällen gibt es nach [DeV11] vier Diffeomorphietypen, welche wir mit B_1^{SP} , B_2^{SP} , B_3^{SP} , bzw. B_4^{SP} bezeichnen wollen und die durch die folgenden Matrizen gegeben sind:

$$B_1^{\mathrm{SP}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^{\mathrm{SP}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3^{\mathrm{SP}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_4^{\mathrm{SP}} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier wurden die ganzzahligen Kohomologieringe berechnet zu

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^*(B_1^{\mathrm{SP}}; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[u, v, w]/(u^2 - uw, v^2 - 2uv, w^2 - vw), \\ \mathrm{H}^*(B_2^{\mathrm{SP}}; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[u, v, w]/(u^2 + 2uv, v^2 + uv + 2vw, w^2 + uw + vw), \\ \mathrm{H}^*(B_3^{\mathrm{SP}}; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[u, v, w]/(u^2 + 2uw, v^2 + 2uv + 2vw, w^2 - uw - vw), \\ \mathrm{H}^*(B_4^{\mathrm{SP}}; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[u, v, w]/(u^2 + 2uv + 2uw, v^2 + 2vw + vu, w^2 + uw), \end{aligned}$$

wobei wieder alle Erzeuger Grad 2 haben.

3. S^1 -Prinzipalbündel

Wir werden später S^1 -Prinzipalbündel zur Konstruktion der Beispiele verwenden. Deshalb wollen wir hier kurz auf die Klassifikation von Prinzipalbündeln sowie auf die Berechnung ihres Kohomologieringes eingehen. Klassifiziert werden sie wie folgt:

Satz 3.1:

Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Zuordnung $E \mapsto c_1(E)$ induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von S^1 -Prinzipalbündeln über M und $H^2(M; \mathbb{Z})$.

Beweis. Die Menge der Homotopieklassen $[M, \mathbb{C}P^\infty]$ von Abbildungen $M \rightarrow B S^1 = \mathbb{C}P^\infty$ ist bijektiv zur Menge der Isomorphieklassen von S^1 -Prinzipalbündeln über M . Eine Bijektion ist gegeben durch $[f] \mapsto f^*\xi$, wobei ξ das universelle Bündel $S^\infty = E S^1 \rightarrow B S^1 = \mathbb{C}P^\infty$ ist. Weiter ist (siehe z.B. [Hat02, Theorem 4.57]) $[M, \mathbb{C}P^\infty]$ bijektiv zu $H^2(M; \mathbb{Z})$, wobei eine Bijektion durch $[f] \mapsto f^*\alpha$ für einen Erzeuger α von $H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ gegeben ist. Dies ist gerade eine der möglichen Definitionen der ersten Chernklasse von $f^*\xi$. \square

Da wir uns für einfach zusammenhängende Räume interessieren, benötigen wir ein Kriterium dafür, wann der Totalraum eines S^1 -Prinzipalbündels einfach zusammenhängend ist. Dies liefert das folgende wohlbekanntes Lemma.

Lemma 3.2:

Es sei E ein S^1 -Prinzipalbündel über einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M mit erster Chernklasse $c_1(E) \in H^2(M; \mathbb{Z})$. Dann ist E einfach zusammenhängend genau dann, wenn $c_1(E)$ kein Vielfaches einer anderen Kohomologiekategorie in $H^2(M; \mathbb{Z})$ ist.

Beweis. Nach der langen exakten Homotopiesequenz des Bündels ist $\pi_1(E)$ abelsch. Damit ist E einfach zusammenhängend genau dann, wenn $0 = H_1(E)$. Aus dem universellen Koeffiziententheorem folgt (siehe z.B. [Hat02, Korollar 3.3]), dass $H_1(E) \cong H^1(E)/\text{Torsion}(H^1(E)) \oplus \text{Torsion}(H^2(E))$. Die Spektralsequenz des Bündels zeigt, dass

$0 = H^1(E)/\text{Torsion}(H^1(E))$ gilt, wenn $c_1(E) \neq 0$. Wegen $0 = \text{Torsion}(H^2(M))$ ist dann $\text{Torsion}(H^2(E)) = \text{Torsion}(H^2(M)/c_1(E)) = 0$ genau dann, wenn $c_1(E)$ kein Vielfaches in $H^2(M)$ ist. \square

Der Kohomologiering eines S^1 -Prinzipalbündels mit Koeffizienten in einem Ring R lässt sich in einigen Fällen mit Hilfe der Serre-Spektralsequenz bestimmen. Wir wollen kurz daran erinnern:

Satz 3.3 (siehe z.B. [Hat04]):

Ist $F \rightarrow E \rightarrow B$ eine Faserung, so dass $\pi_1(B)$ trivial auf $H^*(F; R)$ operiert, so existiert eine Spektralsequenz $\{E_r^{p,q}, d_r\}$ mit:

(a) Die E_2 -Seite ist gegeben durch $E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; R))$.

(b) Das Differential d_r erfüllt $d_r|_{E_r^{p,q}} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ und

$$E_{r+1}^{p,q} = \ker(d_r|_{E_r^{p,q}}) / \text{Bild}(d_r|_{E_r^{p-r, q+r-1}}).$$

(c) Die stabilen Terme $E_\infty^{p, n-p}$, $p = 0, \dots, n$, sind isomorph zu den Quotienten F_p^n / F_{p+1}^n einer Filtrierung

$$0 \subset F_n^n \subset \dots \subset F_0^n = H^n(E; R)$$

von $H^n(E; R)$.

Bemerkung 3.4: Ist E ein S^1 -Prinzipalbündel und a ein Erzeuger von $E_2^{0,1} \cong H^1(S^1; \mathbb{Z})$, so ist $d_2(a) \in E_2^{0,2} \cong H^2(B; \mathbb{Z})$ die erste Chernklasse des Bündels. Dies sieht man, indem man das Bündel als Pullback des universellen S^1 -Prinzipalbündels $S^\infty \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ schreibt.

Für die multiplikative Struktur gilt:

Satz 3.5 (siehe z.B. [Hat04]):

Unter den Voraussetzungen und in der Notation des letzten Satzes gibt es bilineare Produkte $E_r^{p,q} \times E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{p+s, q+t}$ mit:

(a) Das Produkt $E_2^{p,q} \times E_2^{s,t} \rightarrow E_2^{p+s, q+t}$ ist durch $(-1)^{qs}$ mal das Cup-Produkt $H^p(B; H^q(F; R)) \times H^s(B; H^t(F; R)) \rightarrow H^{p+s}(B; H^{q+t}(F; R))$ gegeben.

(b) Für das Differential d_r gilt $d_r(xy) = d(x)y + (-1)^{p+q}xd_r(y)$ für $x \in E_r^{p,q}$ und $y \in E_r^{s,t}$, und das Produkt auf $E_{r+1}^{*,*}$ ist durch das Produkt auf $E_r^{*,*}$ induziert.

- (c) Das Cupprodukt auf $H^*(E; R)$ schränkt sich ein auf $F_p^n \times F_s^n \rightarrow F_{p+s}^{n+m}$, und das dadurch auf den Quotienten gegebene Produkt stimmt mit dem Produkt auf $E_\infty^{p,q} \times E_\infty^{s,t} \rightarrow E_\infty^{p+s,q+t}$, gegeben durch das entsprechende auf E_r für genügend großes r , überein.

Zur Bestimmung des Produkts auf $H^*(E; H^*(F; R))$ benötigen wir ein Korollar aus dem folgenden universellen Koeffiziententheorem.

Satz 3.6 ([Spa66, Theorem 10, Kapitel 5, Abschnitt 5]):

Es sei R ein Hauptidealring, C ein freier Kettenkomplex über R und G ein R -Modul, so dass $H(C)$ von endlichem Typ oder G endlich erzeugt ist. Dann gibt es eine funktorielle exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow H^q(C; R) \otimes G \xrightarrow{\mu} H^q(C; G) \longrightarrow \text{Tor}(H^{q+1}(C; R), G) \longrightarrow 0,$$

die splittet.

Hierbei ist μ induziert von der Abbildung $\tilde{\mu} : \text{Hom}(C, R) \otimes G \rightarrow \text{Hom}(C, G)$ mit $\tilde{\mu}(f \otimes g)(a) = f(a)g$.

Korollar 3.7:

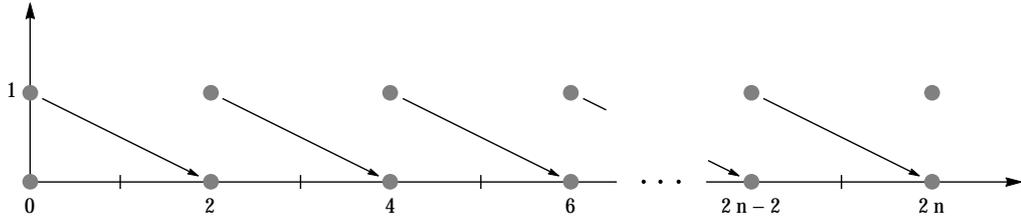
Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und M, F kompakte Mannigfaltigkeiten. Dann gilt

$$H^*(M; H^*(F; \mathbb{K})) \cong_{\mu} H^*(M; \mathbb{K}) \otimes H^*(F; \mathbb{K})$$

als Ringe.

Nun wollen wir uns der Situation zuwenden, die wir später benötigen. Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende $2n$ -Mannigfaltigkeit mit verschwindenden ungeraden Bettizahlen. Es sei $S^1 \rightarrow Y \rightarrow M$ ein S^1 -Prinzipalbündel und Y einfach zusammenhängend.

Die E_2 -Seite der Serre-Spektralsequenz (mit Koeffizienten in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) hat dann die folgende Form:



Es bezeichne $a \in H^1(S^1; \mathbb{K})$ einen Erzeuger und es sei $z := d_2(a) \in H^2(M; H^0(S^1; \mathbb{K}))$. Dann gilt für $x \otimes a \in E_2^{2k,1} \cong H^{2k}(M; \mathbb{K}) \otimes H^1(S^1; \mathbb{K})$:

$$d_2(x \otimes a) = d_2(x \cdot a) = x \cdot z = x \cup z.$$

Da $d_3 = 0$ gilt, ist $E_3 = E_\infty$. Ferner verschwindet auf jeder Diagonalen $\{E_3^{p,q}\}_{p+q=k}$ höchstens ein Eintrag nicht. Da $E_3^{p,q}$ nur für gerades p nicht verschwindet, ist die Multiplikation auf der E_3 -Seite durch das Cup-Produkt in $H^*(M; H^*(F; \mathbb{K}))$ gegeben. Somit lässt sich die Produktstruktur von $H^*(Y; \mathbb{K})$ direkt ablesen. Es ergibt sich:

Lemma 3.8:

Für die Kohomologie des S^1 -Prinzipalbündels Y mit erster Chernklasse z über einer einfach zusammenhängenden $2n$ -Mannigfaltigkeit M mit $H^{\text{odd}}(M) = 0$ gilt

$$H^{2k}(Y; \mathbb{K}) = H^{2k}(M; \mathbb{K}) / \text{Bild}(\mu_z^{2k-2}) \otimes H^0(S^1; \mathbb{K})$$

und

$$H^{2k+1}(Y; \mathbb{K}) = \ker(\mu_z^{2k}) \otimes H^1(S^1; \mathbb{K}),$$

wobei $\mu_z^i : H^i(M; \mathbb{K}) \rightarrow H^{i+2}(M; \mathbb{K})$, $y \mapsto yz$ sei. Die Ringstruktur auf $H^*(Y; \mathbb{K})$ wird von der auf $H^*(M; \mathbb{K}) \otimes H^*(S^1; \mathbb{K})$ induziert.

Teil II.

Rationale Elliptizität

4. Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimension 5 und kleiner

In diesem Kapitel legen wir die bekannte Klassifikation kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer Mannigfaltigkeiten in den Dimensionen bis fünf dar.

4.1. Rational elliptische 2- und 3-Mannigfaltigkeiten

Fakt 4.1:

Eine kompakte, einfach zusammenhängende 2- bzw. 3-Mannigfaltigkeit ist diffeomorph zu S^2 bzw. S^3 . Insbesondere ist sie somit rational elliptisch.

In Dimension 2 folgt dies aus der Klassifikation geschlossener Flächen, in Dimension 3 aus der von Perelman bewiesenen Poincaré-Vermutung. Die rationale Elliptizität von Sphären haben wir in Beispiel 1.59 gesehen.

4.2. Rational elliptische 4-Mannigfaltigkeiten

Fakt 4.2:

Eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 4-Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu einer der Mannigfaltigkeiten S^4 , $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ oder $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$.

Beweis. Die angegebenen Mannigfaltigkeiten sind nach Abschnitt 1.5 rational elliptisch. Es sei nun M eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 4-Mannigfaltigkeit und $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell von M . Es seien $a \in \mathbb{N}^r$

und $b \in \mathbb{N}^q$ die geraden und ungeraden Exponenten von $(\Delta V, d)$ (siehe Definition 1.43). Nach Satz 1.44 gilt dann $r \leq q$. Da M einfach zusammenhängend ist, gilt $a_i \geq 1$ für alle i und $b_j \geq 2$ für alle j . Damit folgt weiter, dass $3q \leq 7$, also $b_2(M) \leq r \leq q \leq 2$. Nach [Fre82, Theorem 1.5] ist eine (glatte) kompakte, einfach zusammenhängende 4-Mannigfaltigkeit bis auf Homöomorphie durch ihre Schnittform $H^2(M; \mathbb{Z}) \times H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ bestimmt. Nach [MH73, Theorem 2.2] sind die möglichen Formen für $b_2(M) \leq 2$ gerade die von S^4 , $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$. \square

Bemerkung 4.3: Bis auf $S^2 \times S^2 \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ ist dies auch die Klassifikation bis auf rationale und reelle Homotopieäquivalenz, denn der rationale Kohomologiering – und mit Satz 1.58 damit auch der rationale Homotopietyp – ist durch die Äquivalenzklasse der rationale Schnittform auf $H^2(M; \mathbb{Q})$ eindeutig bestimmt. Diese wiederum ist durch $b_2(M)$ und die Signatur gegeben, welche für $S^2 \times S^2$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ jeweils übereinstimmen.

4.3. Rational elliptische 5-Mannigfaltigkeiten

Fakt 4.4:

Eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 5-Mannigfaltigkeit hat den rationalen Homotopietyp von S^5 oder $S^2 \times S^3$.

Bemerkung 4.5: Es gibt unendlich viele Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 5-Mannigfaltigkeiten. Dies folgt aus Bardsens Klassifikation kompakter, einfach zusammenhängender 5-Mannigfaltigkeiten (siehe [Bar65]). So sind beispielsweise alle Mannigfaltigkeiten M_k (in der Notation von [Bar65]) mit $1 \leq k < \infty$ rationale Homotopiesphären, und für $1 < k < \infty$ gilt $H_2(M_k; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_k$.

Beweis von Fakt 4.4. Es seien $a \in \mathbb{N}^r$ und $b \in \mathbb{N}^q$ die Exponenten. Die Eigenschaften aus Satz 1.44 sind im fünfdimensionalen Fall:

$$(*) \quad 5 = 2 \left(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^r a_i \right) - (q - r), \quad 2 \sum_{i=1}^r a_i \leq 5, \quad 2 \sum_{j=1}^q b_j - q \leq 9.$$

Mit $a_i \geq 1$ und $b_j \geq 2$ erhalten wir $r \leq 2$ und $q \leq 3$. Ferner müssen r und q verschiedene Parität haben.

Ist $r = 0$, also $a = ()$, so folgt aus der Gleichung in (*), dass $b = (3)$ gilt. Das minimale Modell hat also nur einen Erzeuger, der vom Grad 5 ist. Damit ist es das minimale Modell von S^5 .

Ist $r = 1$, so folgt aus der ersten Ungleichung in (*), dass $a = (1)$ oder $a = (2)$ gilt. Weiter muss $q = 2$ aufgrund der verschiedenen Parität und der Ungleichungen für q gelten.

Ist $a = (2)$, so folgt aus der Gleichung in (*), dass $b = (2, 3)$ gilt. Dann erfüllen die Exponenten allerdings nicht die Bedingung SAC (siehe Definition 1.46 und Satz 1.47), ein Widerspruch.

Ist $a = (1)$ so folgt dann aus der Gleichung in (*), dass $b = (2, 2)$ gilt. Damit hat das minimale Modell die Form $(\Lambda V, d)$ mit $\dim V^2 = 1$, $\dim V^3 = 2$ und $V^i = \{0\}$ sonst. Aufgrund der Minimalität gilt $d|_{V^2} = 0$. Da die Kohomologie endlich-dimensional ist, ist $\text{rk } d|_{V^3} = 1$, und wir erhalten Isomorphie zum minimalen Modell von $S^2 \times S^3$.

Ist $r = 2$, so folgt aus der ersten Ungleichung in (*), dass $a = (1, 1)$ gilt. Wegen der Parität muss ferner $q = 3$ gelten. Die Gleichung wird dann zu $b_1 + b_2 + b_3 = 5$, ein Widerspruch zu $b_j \geq 2$ für $j = 1, 2, 3$.

□

5. Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimension 6

In diesem Kapitel behandeln wir kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeiten. Dies ist die erste Dimension, in der noch keine vollständige Klassifikation bekannt ist. Im ersten Abschnitt werden wir eine Charakterisierung der rationalen Kohomologieringe beweisen. Im zweiten Abschnitt beweisen wir die Resultate zur Klassifikation kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 6-Mannigfaltigkeiten bis auf reelle Homotopieäquivalenz. Die Klassifikation ist im Fall $b_2 \leq 2$ vollständig. Im Fall $b_3 = 3$ geben wir sämtliche möglichen kubischen Formen an.

Zu beachten ist hierbei, dass in unserer Situation aufgrund von Satz 1.58 rationale bzw. reelle Homotopieäquivalenz und Isomorphie des rationalen bzw. reellen Kohomologierings äquivalent sind.

5.1. Rationale Homotopietypen

Wir werden zunächst die Charakterisierung kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 6-Mannigfaltigkeiten in Termen ihres rationalen Kohomologierings angeben. Der Rest dieses Abschnittes ist dann dem Beweis der Charakterisierung gewidmet.

5.1.1. Charakterisierung

Satz 5.1:

Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit. Dann ist M genau dann rational elliptisch, wenn einer der folgenden Fälle gilt:

- (a) $b_2(M) = b_3(M) = 0$, d.h. M ist eine rationale Homologiesphäre;
- (b) $b_2(M) = 0$ und $b_3(M) = 2$, d.h. es gilt $M = (S^3 \times S^3) \# N$ für eine rationale Homologiesphäre N , womit M den rationalen Kohomologiering von $S^3 \times S^3$ hat;

- (c) $b_2(M) = 1$ und $b_3(M) = 0$, d.h. M hat den rationalen Kohomologiering von $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ oder von $S^2 \times S^4$;
- (d) $b_2(M) = 2$, $b_3(M) = 0$ und $H^*(M; \mathbb{Q})$ wird von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt;
- (e) $b_2(M) = 3$, $b_3(M) = 0$, $H^*(M; \mathbb{Q})$ wird von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt und es existiert eine Basis x_1, x_2, x_3 von $H^2(M; \mathbb{Q})$, so dass der Kern der Einschränkung des Homomorphismus $\mathbb{Q}[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3] \rightarrow H^*(M; \mathbb{Q})$, $\tilde{x}_i \mapsto x_i$ auf homogene Polynome vom Grad 2 eine reguläre Sequenz als Basis hat.

Bemerkung 5.2: Die 6-dimensionalen Beispiele in [Tot03] zeigen, dass es unendliche viele verschiedene rationale Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeiten mit $b_2 = 3$ gibt. In Lemma 5.8 werden wir zeigen, dass es auch unendlich viele rationale Homotopietypen solcher Mannigfaltigkeiten mit $b_2 = 2$ gibt.

Bemerkung 5.3: Im Fall (d) ist die letzte Bedingung genau dann erfüllt, wenn M nicht den rationalen Kohomologiering von $(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$ oder $(S^2 \times S^4) \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ hat.

Bemerkung 5.4: In Fall (e) existiert genau dann eine solche Basis von $H^2(M; \mathbb{Q})$, wenn für jede Basis der Kern von einer regulären Sequenz erzeugt wird. Ferner existiert auch zu jeder regulären Sequenz homogener Polynome u_1, u_2, u_3 vom Grad 2 in $\mathbb{Q}[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]$ eine einfach zusammenhängende, kompakte, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeit M , so dass der Kern (bezüglich einer Basis x_1, x_2, x_3 von $H^2(M; \mathbb{Q})$) u_1, u_2, u_3 als Basis hat. Es gilt dann $H^*(M; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3]/(u_1, u_2, u_3)$.

5.1.2. Mögliche Exponenten

Der erste Schritt im Beweis der Charakterisierung besteht darin, die möglichen Exponenten kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 6-Mannigfaltigkeiten zu finden. Dies wurde bereits in [Pav02] getan, da dort jedoch kein Beweis angegeben wurde, tun wir dies hier.

Lemma 5.5:

Die Exponenten einer kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeit sind in Tabelle 5.1 enthalten.

Tabelle 5.1.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 6-Mannigfaltigkeiten

	Exponenten	Erzeugergrade	Beispiel(e)
(6.1)	$a = (), b = (2, 2)$	3, 3	$S^3 \times S^3$
(6.2)	$a = (1), b = (4)$	2, 7	$\mathbb{C}P^3$
(6.3)	$a = (3), b = (6)$	6, 11	S^6
(6.4)	$a = (1, 1), b = (2, 3)$	2, 2, 3, 5	$S^2 \times \mathbb{C}P^2$
(6.5)	$a = (1, 2), b = (2, 4)$	2, 3, 4, 7	$S^2 \times S^4$
(6.6)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2)$	2, 2, 2, 3, 3, 3	$S^2 \times S^2 \times S^2$

Beweis. Die Eigenschaften aus Satz 1.44 sind im sechsdimensionalen Fall:

$$6 = 2 \left(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^r a_i \right) - (q - r), \quad \sum_{i=1}^r a_i \leq 3, \quad 2 \sum_{j=1}^q b_j - q \leq 11.$$

Insbesondere gilt also wegen $b_j \geq 2$, dass $r \leq q \leq 3$, und aus der ersten Formel folgt, dass r und q die gleiche Parität haben.

Ist $r = 3$, so muss also $a = (1, 1, 1)$ und $q = 3$ gelten. Dann folgt $12 = 2 \sum_{j=1}^3 b_j$, also $b = (2, 2, 2)$, was der Fall (6.6) ist.

Ist $r = 2$, so folgt $a = (1, 1)$ oder $a = (1, 2)$, und da $r \leq q \leq 3$, dass auch $q = 2$. Aus der ersten Formel folgt im Fall $a = (1, 1)$, dass $b = (2, 3)$, und im Fall $a = (1, 2)$, dass $b = (2, 4)$.

Ist $r = 1$, so gilt $a = (1)$, $a = (2)$ oder $a = (3)$ und $q = 1$ oder $q = 3$.

Gilt $a = (1)$, so folgt mit der ersten Gleichung, dass $q = 1$ und $b = (4)$.

Nehmen wir an, dass $a = (2)$. Dann besagt die erste Gleichung, dass $b_1 = 5$, falls $q = 1$, und dass $\sum_{j=1}^3 b_j = 6$, also $b = (2, 2, 2)$, falls $q = 3$. Aus der Eigenschaft SAC folgt, dass ein b_j von der Form $b_j = 2\gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist. Dies ist in beiden Fällen ein Widerspruch.

Gilt $a = (3)$, so folgt aus der Eigenschaft SAC, dass $b_j \geq 6$ für ein b_j gilt. Mit der ersten Gleichung folgt dann $b = (6)$. \square

Das folgende Lemma wurde ebenfalls schon in [Pav02] ohne Beweis angegeben. Wir geben auch hier einen Beweis.

Lemma 5.6:

In den Fällen (6.1), (6.2), (6.3) und (6.5) der Tabelle 5.1 ist das dort angegebene Beispiel jeweils bis auf rationale Homotopieäquivalenz das einzige mit diesen Exponenten.

Beweis. Im Fall (6.1) muss $d = 0$ gelten, was das minimale Modell von $S^3 \times S^3$ ergibt. Im Fall (6.2) ist der Erzeuger vom Grad 2 geschlossen und der Erzeuger vom Grad 7 muss unter d , aufgrund der Endlichdimensionalität der Kohomologie auf ein nichtverschwindendes Vielfaches des Erzeugers vom Grad 2 abgebildet werden. Reskalierung des Erzeugers liefert dann Isomorphie zum minimalen Modell von $\mathbb{C}P^3$. Im Fall (6.3) erhalten wir mit der gleichen Argumentation die Isomorphie zum minimalen Modell von S^6 .

Im Fall (6.5) hat das Modell die Form $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d)$ mit $|x_1| = 2$, $|x_2| = 4$, $|y_1| = 3$ und $|y_2| = 7$. Aufgrund der Minimalität gilt $dx_1 = 0$.

Angenommen es gilt $dy_1 = 0$. Wäre dann auch $dx_2 = 0$, so ist die Kohomologie nicht endlich-dimensional. Damit gilt dann ohne Einschränkung $dx_2 = x_1 y_1$. Aufgrund der Endlichdimensionalität muss dann weiter auch ohne Einschränkung $dy_2 = x_1^4$ gelten. Dann ist $d(x_1^3 x_2 + y_1 y_2) = 0$ und $x_1^3 x_2 + y_1 y_2$ nicht exakt. Ein Widerspruch, da $x_1^3 x_2 + y_1 y_2$ vom Grad $10 > 6$ ist.

Aufgrund der Minimalität des Modells ist dann ohne Einschränkung $dy_1 = x_1^2$. Da es keine nichttrivialen geschlossen Elemente vom Grad 5 gibt, ist $dx_2 = 0$. Damit ist $dy_2 = ax_1^4 + bx_2^2$. Wäre $b = 0$, so wäre die Kohomologie wieder nicht endlich-dimensional. Also sei ohne Einschränkung $b = 1$. Der durch $x_i \mapsto x_i$, $y_1 \mapsto y_1$ und $y_2 \mapsto \tilde{y}_2 + ax_1^2 y_1$ definierte Homomorphismus von $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d)$ in das minimale Modell $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, \tilde{y}_2), d)$ von $S^2 \times S^4$ mit $dx_i = 0$, $dy_1 = x_1^2$ und $d\tilde{y}_2 = x_2^2$ ist dann ein Isomorphismus. \square

5.1.3. Minimale Modelle mit $b_2 = 2$ und $b_3 = 0$

Wir betrachten die folgenden Modelle:

Es sei $(\Lambda\tilde{V}, d) = (\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d)$ gegeben durch $|x_i| = 2$, $|y_1| = 3$, $|y_2| = 5$ und $dx_i = 0$, $dy_1 = x_1^2 + f_2 x_2^2$ sowie $dy_2 = g_1 x_1^3 + g_2 x_1^2 x_2 + g_3 x_1 x_2^2 + g_4 x_2^3$ für rationale Zahlen $f_2, g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathbb{Q}$.

Für ein beliebiges, formal sechsdimensionales minimales Modell mit den Exponenten wie in Fall (6.4) gilt, dass das Differential des Erzeugers vom Grad 3 eine nicht verschwindende quadratische Form in den Erzeugern vom Grad zwei ist, denn wür-

de sie verschwinden, so wäre die Kohomologie nicht endlich-dimensional. Somit ist ein solches beliebiges Modell nach Wahl einer Orthogonalbasis im Grad 2 für diese quadratische Form und Skalieren des Erzeugers im Grad 3 von der Form, die wir betrachten, also isomorph zu einem der Modelle $(\Lambda\tilde{V}, d)$.

Wir leiten jetzt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür her, dass die betrachteten Modelle das minimale Modell einer kompakten, einfach zusammenhängenden 6-Mannigfaltigkeit sind.

Lemma 5.7:

Genau dann ist $(\Lambda\tilde{V}, d)$ das minimale Modell einer kompakten, einfach zusammenhängenden 6-Mannigfaltigkeit, wenn

$$(*) \quad g_4 \neq f_2 g_2 \pm \sqrt{-f_2}(f_2 g_1 - g_3)$$

gilt.

Beweis. Um zu sehen, dass die Bedingung notwendig ist, betrachten wir die Matrixdarstellung von $d_7 : (\Lambda\tilde{V})^7 \rightarrow \ker d_8$ in den Basen $y_1 x_1^2, y_1 x_1 x_2, y_1 x_2^2, y_2 x_1, y_2 x_2$ von $(\Lambda\tilde{V})^7$ und $x_1^4, x_1^3 x_2, x_1^2 x_2^2 x_1 x_2^3, x_2^4$ von $\ker d_8$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & g_2 & g_1 \\ f_2 & 0 & 1 & g_3 & g_2 \\ 0 & f_2 & 0 & g_4 & g_3 \\ 0 & 0 & f_2 & 0 & g_4 \end{pmatrix}$$

Es ist $H^8(\Lambda\tilde{V}, d) = \{0\}$ genau dann, wenn $0 \neq \det A = f_2^3 g_1^2 + f_2^2 g_2^2 - 2f_2^2 g_1 g_3 + f_2 g_3^2 - 2f_2 g_2 g_4 + g_4^2$, also genau dann, wenn $(*)$ gilt. Da dann $\ker d_7 = \{0\}$ ist, gilt ebenfalls $H^7(\Lambda\tilde{V}, d) = \{0\}$.

Es gelte nun also $(*)$. Um zu sehen, dass auch $H^k(\Lambda\tilde{V}, d) = \{0\}$ für $k \geq 9$ gilt, berechnen wir die Dimension des Bildes von d_k für $k \geq 8$.

Zunächst ist für $n \geq 4$ durch $\{x_1^i x_2^j \mid i + j = n\} \cup \{y_1 y_2 x_1^k x_2^l \mid k + l = n - 4\}$ eine Basis von $(\Lambda\tilde{V})^{2n}$ gegeben.

Für $n \geq 2$ ist $\{y_1 x_1^i x_2^j \mid i + j = n - 1\} \cup \{y_2 x_1^k x_2^l \mid k + l = n - 2\}$ eine Basis von $(\Lambda\tilde{V})^{2n+1}$.

Insbesondere ist also $\dim(\Lambda\tilde{V})^{2n} = 2n - 2$ ($n \geq 4$) und $\dim(\Lambda\tilde{V})^{2n+1} = 2n - 1$ ($n \geq 2$).

Es ist $d_{2n}(x_1^i x_2^j) = 0$ und

$$d_{2n}(y_1 y_2 x_1^k x_2^l) = y_2 x_1^{k+2} x_2^l + f_2 y_2 x_1^k x_2^{l+2} + \sum_{\nu=0}^3 g_{\nu+1} y_1 x_1^{k+3-\nu} x_2^{l+\nu}.$$

Der erste Term zeigt hierbei, dass die Einschränkung von d_{2n} auf das Aufspann der $y_1 y_2 x_1^k x_2^l$ mit $k + l = n - 4$ injektiv ist.

Damit ist $\dim(\text{Bild } d_{2n}) = n - 3$, und somit $\dim(\ker d_{2n}) = n + 1$.

Das Bild von d_{2n+1} wird aufgespannt von den Vektoren

$$v_i = d(y_1 x_1^{n-i} x_2^{i-1}) = x_1^{n-i+2} x_2^{i-1} + f_2 x_1^{n-i} x_2^{i+1}, \quad i = 1, \dots, n$$

und

$$\begin{aligned} w_j &= d(y_2 x_1^{n-1-j} x_2^{j-1}) \\ &= g_1 x_1^{n+2-j} x_2^{j-1} + g_2 x_1^{n+1-j} x_2^j + g_3 x_1^{n-j} x_2^{j+1} + g_4 x_1^{n-1-j} x_2^{j+2} \end{aligned}$$

für $j \leq n - 3$.

Wegen des ersten Terms sind die v_i linear unabhängig. Betrachten wir weiter

$$\begin{aligned} u_1 &= w_{n-4} - g_1 v_{n-2} - g_2 v_{n-1} - (g_3 - f_2 g_1) v_n \\ &= (g_4 - f_2 g_2) x_1 x_2^n - f_2 (g_3 - f_2 g_1) x_2^{n+1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_2 &= w_{n-3} - g_1 v_{n-1} - g_2 v_n \\ &= (g_3 - f_2 g_1) x_1 x_2^n + (g_4 - f_2 g_2) x_2^{n+1}. \end{aligned}$$

u_1 und u_2 sind wegen (*) linear unabhängig. Damit auch $v_1, \dots, v_n, u_1, u_2$. Es gilt also $\dim(\text{Bild } d_{2n+1}) \geq n + 2$. Wegen $\dim(\ker d_{2n+2}) = n + 2$ ist dann $\dim(\text{Bild } d_{2n+1}) = n + 2$. Also $\dim(\ker d_{2n+1}) = n - 3$. Wegen gleicher Dimension gilt also $\text{Bild } d_{2n} = \ker d_{2n+1}$ und $\text{Bild } d_{2n+1} = \ker d_{2n+2}$ für $n \geq 4$. Damit ist die Kohomologie endlichdimensional, also das Modell aufgrund der Exponenten formal sechsdimensional. Nach Satz 1.35 erfüllt die Kohomologie also Poincaré-Dualität und nach Satz 1.30 ist es damit das minimale Modell einer kompakten, einfach zusammenhängenden 6-Mannigfaltigkeit. \square

Wie bereits angekündigt zeigen wir nun, dass es unter diesen Mannigfaltigkeiten unendlich viele rationale Homotopietypen gibt, denn es gilt:

Lemma 5.8:

Die Abbildung $[\Lambda\tilde{V}, d] \mapsto [f_2] \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$, definiert auf den Isomorphieklassen solcher Modelle mit $f_2 \neq 0$, ist wohldefiniert und surjektiv.

Beweis. Es seien $(\Lambda\tilde{V}, d)$ und $(\Lambda\tilde{V}, \tilde{d})$ zwei solcher Modelle (\tilde{d} gegeben durch $\tilde{f}_2, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3, \tilde{g}_4$) und $\varphi : (\Lambda\tilde{V}, d) \rightarrow (\Lambda\tilde{V}, \tilde{d})$ ein Isomorphismus. Es seien $a_1, b_1, a_2, b_2, c \in \mathbb{Q}$ mit $\varphi(x_1) = a_1x_1 + b_1x_2$, $\varphi(x_2) = a_2x_1 + b_2x_2$ und $\varphi(y_1) = cy_1$.

Aus $\tilde{d}(\varphi(y_1)) = \varphi(dy_1)$ folgt

$$0 \neq c = a_1^2 + f_2a_2^2, \quad c\tilde{f}_2 = b_1^2 + f_2b_2^2, \quad \text{und} \quad 0 = a_1b_1 + f_2a_2b_2.$$

Im Fall $a_1 \neq 0$ folgt hieraus, dass $\tilde{f}_2 = f_2 \frac{b_2^2}{a_1^2}$, und im Fall $a_1 = 0$, dass $a_2 \neq 0$ und $\tilde{f}_2 = f_2 \frac{b_1^2}{f_2^2 a_2^2}$.

Die Surjektivität folgt, da sich zu $f_2 \in \mathbb{Q}$ stets $g_1, \dots, g_4 \in \mathbb{Q}$ finden lassen, so dass die Eigenschaft (*) aus Lemma 5.7 gilt. \square

Wir wollen nun die zugehörige kubische Form berechnen, welche wir hier und im folgenden Unterabschnitt als symmetrische Trilinearform auffassen wollen.

Lemma 5.9:

Es gelte (*). Die Äquivalenzklasse von kubischen Formen, die zu $H^*(\Lambda\tilde{V}, d)$ gehört ist gegeben durch die Form mit Komponenten

$$F_{111} = f_2\alpha_2, \quad F_{112} = -f_2\alpha_1, \quad F_{122} = -\alpha_2, \quad F_{222} = \alpha_1,$$

wobei $\alpha_1 = f_2g_1 - g_3$ und $\alpha_2 = f_2g_2 - g_4$.

Insbesondere gilt also $\alpha_2 \neq \pm\sqrt{-f_2}\alpha_1$. Umgekehrt ist jede solche Form als Form eines der formal sechsdimensionalen Modelle realisierbar.

Beweis. Es seien ω_1 und ω_2 die Kohomologieklassen von x_1 und x_2 . Dann folgt aus den Relationen, dass $\omega_1^3 = -f_2\omega_1\omega_2^2$ und $\omega_1^2\omega_2 = -f_2\omega_2^2$. Zusammen mit der anderen Relation folgt hieraus, dass

$$\alpha_1 \omega_1\omega_2^2 + \alpha_2 \omega_2^3 = -((g_3 - f_2g_1) \omega_1\omega_2^2 + (g_4 - f_2g_2) \omega_2^3) = 0.$$

Damit ist

$$0 \neq \Omega = -\alpha_2 \omega_1\omega_2^2 + \alpha_1 \omega_2^3.$$

Mit $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \omega_1 \omega_2^2 = -\alpha_2 \Omega + \alpha_1 (\alpha_1 \omega_1 \omega_2^2 + \alpha_2 \omega_2^3)$ und $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \omega_2^3 = \alpha_1 \Omega + \alpha_2 (\alpha_1 \omega_1 \omega_2^2 + \alpha_2 \omega_2^3)$, folgt die Behauptung, da wir $\frac{1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \Omega$ zur Definition der kubischen Form verwenden können.

Ist umgekehrt eine kubische Form F mit $F_{111} = f_2 \alpha_2$, $F_{112} = -f_2 \alpha_1$, $F_{122} = -\alpha_2$, $F_{222} = \alpha_1$ und $\alpha_2 \neq \pm \sqrt{-f_2} \alpha_1$ gegeben, so ist f_2 hierdurch eindeutig bestimmt. Wähle dann $g_1, \dots, g_4 \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha_1 = f_2 g_1 - g_3$ und $\alpha_2 = f_2 g_2 - g_4$. Wegen $\alpha_2 \neq \pm \sqrt{-f_2} \alpha_1$ gilt dann (*). \square

5.1.4. Binäre kubischen Formen über den rationalen Zahlen

Im Folgenden werden wir kubische Formen weiterhin als symmetrische Trilinearform interpretieren. Wir werden nun alle kubischen Formen bestimmen, die nicht die in Lemma 5.9 beschriebene Form haben. Für die dort beschriebenen kubischen Formen gilt insbesondere $F_{111} F_{222} = f_2 \alpha_1 \alpha_2 = F_{112} F_{122}$. Zu jeder Form lässt sich aber eine Basis finden, so dass dies gilt:

Lemma 5.10:

Es sei F eine kubische Form auf einem 2-dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum V . Dann gibt es eine Basis von V , in der $F_{111} F_{222} = F_{112} F_{122}$ gilt.

Beweis. Unter dem Basiswechsel $\tilde{x}_1 = x_1$, $\tilde{x}_2 = \lambda x_1 + x_2$ gilt:

$$\tilde{F}_{111} \tilde{F}_{222} - \tilde{F}_{112} \tilde{F}_{122} = F_{111} F_{222} - F_{112} F_{122} + \lambda 2(F_{111} F_{122} - F_{112}^2).$$

Für $F_{112}^2 \neq F_{111} F_{122}$ können wir also $\lambda \in \mathbb{Q}$ so wählen, dass in der neuen Basis $\tilde{F}_{111} \tilde{F}_{222} = \tilde{F}_{112} \tilde{F}_{122}$ gilt.

Sei nun also $F_{112}^2 = F_{111} F_{122}$. Bei Basiswechsel $\tilde{x}_1 = x_1 + \lambda x_2$, $\tilde{x}_2 = x_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{111} \tilde{F}_{122} - \tilde{F}_{112}^2 &= F_{111} F_{122} - F_{112}^2 + (F_{111} F_{222} - F_{112} F_{122}) \lambda + (F_{112} F_{222} - F_{122}^2) \lambda^2 \\ &= \underbrace{(F_{111} F_{222} - F_{112} F_{122})}_{\neq 0} \lambda + (F_{112} F_{222} - F_{122}^2) \lambda^2, \end{aligned}$$

so dass wir $\lambda \in \mathbb{Q}$ so wählen können, dass $\tilde{F}_{111} \tilde{F}_{122} - \tilde{F}_{112}^2 \neq 0$. \square

Bis auf eventuelle Vertauschung der Basisvektoren hat die kubische Form in einer solchen Basis dann auch eine Darstellung wie in Lemma 5.9.

Lemma 5.11:

Es seien $F_{111}, F_{112}, F_{122}, F_{222} \in \mathbb{Q}$ mit $F_{111}F_{222} = F_{112}F_{122}$. Dann gibt es $f_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, so dass

$$F_{111} = f_2\alpha_2, \quad F_{112} = -f_2\alpha_1, \quad F_{122} = -\alpha_2, \quad F_{222} = \alpha_1,$$

oder

$$F_{222} = f_2\alpha_2, \quad F_{122} = -f_2\alpha_1, \quad F_{112} = -\alpha_2, \quad F_{111} = \alpha_1,$$

gilt.

Beweis. Falls alle $F_{ijk} = 0$, setze $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ und f_2 beliebig.

Ist $F_{122} \neq 0$ oder $F_{222} \neq 0$, so setze $\alpha_1 = F_{222}$, $\alpha_2 = -F_{122}$ und $f_2 = -\frac{F_{112}}{F_{222}}$ bzw. $f_2 = -\frac{F_{111}}{F_{122}}$. Dann gilt im ersten Fall

$$f_2\alpha_2 = -\frac{F_{112}}{F_{222}}(-F_{122}) = \frac{F_{112}F_{122}}{F_{222}} = \frac{F_{111}F_{222}}{F_{222}} = F_{111}$$

und

$$-f_2\alpha_1 = \frac{F_{112}}{F_{222}}F_{222} = F_{112}.$$

Im zweiten Fall folgt dies analog.

Falls $F_{122} = F_{222} = 0$ und $F_{111} \neq 0$ oder $F_{112} \neq 0$, so setze $\alpha_1 = F_{111}$, $\alpha_2 = -F_{112}$ und $f_2 = -\frac{F_{122}}{F_{111}}$ bzw. $f_2 = -\frac{F_{222}}{F_{112}}$. \square

Korollar 5.12:

Es sei F eine kubische Form auf einem 2-dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum V . Dann gibt es eine Basis von V und $f_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, so dass

$$(**) \quad F_{111} = f_2\alpha_2, \quad F_{112} = -f_2\alpha_1, \quad F_{122} = -\alpha_2, \quad F_{222} = \alpha_1$$

gilt.

In einer solchen Basis lässt sich dann die Bedingung (*) als Bedingung an die Komponenten formulieren:

Lemma 5.13:

Es sei F eine kubische Form auf einem 2-dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum mit Basis x_1, x_2 , und es gelte $F_{111}F_{222} = F_{112}F_{122}$ sowie

$$F_{112}^2 \neq F_{122}F_{111} \quad \text{oder} \quad F_{122}^2 \neq F_{112}F_{222}.$$

Dann ist F äquivalent zu einer der Formen der obigen minimalen Modelle.

Beweis. Nach Lemma 5.11 existieren nach eventuellem Vertauschen der Basisvektoren $\alpha_1, \alpha_2, f_2 \in \mathbb{Q}$ mit

$$F_{111} = f_2\alpha_2, \quad F_{112} = -f_2\alpha_1, \quad F_{122} = -\alpha_2, \quad \text{und} \quad F_{222} = \alpha_1.$$

Angenommen, es gilt $\alpha_2 = \pm\sqrt{-f_2}\alpha_1$. Dann ist $\alpha_2^2 = -f_2\alpha_1^2$, also $F_{122}^2 = F_{112}F_{222}$. Weiter ist $-f_2\alpha_2^2 = f_2^2\alpha_1^2$, also $F_{122}F_{111} = F_{112}^2$. Dies ist ein Widerspruch.

Somit ist $\alpha_2 \neq \pm\sqrt{-f_2}\alpha_1$ und damit F realisierbar als Form einer der minimalen Modelle. □

Lemma 5.14:

Es sei F eine kubische Form auf einem 2-dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum. Dann sind äquivalent:

(i) *Es gibt eine Basis in der $F_{111}F_{222} = F_{112}F_{122}$, $F_{112}^2 = F_{122}F_{111}$ und $F_{122}^2 = F_{112}F_{222}$ gelten.*

(ii) *In jeder Basis gilt $F_{111}F_{222} = F_{112}F_{122}$, $F_{112}^2 = F_{122}F_{111}$ und $F_{122}^2 = F_{112}F_{222}$.*

Beweis. Nach Lemma 5.10 existiert eine Basis x_1, x_2 in der $F_{111}F_{222} = F_{112}F_{122}$ gilt. Betrachte nun den Basiswechsel $\tilde{x}_1 = ax_1 + bx_2$ und $\tilde{x}_2 = cx_1 + dx_2$. Dann gilt

$$\tilde{F}_{111}\tilde{F}_{222} - \tilde{F}_{112}\tilde{F}_{122} = 2(bc - ad)^2(ac(-F_{112}^2 + F_{111}F_{122}) + bd(-F_{122}^2 + F_{112}F_{222})).$$

Existiert nun eine Basis, in der $F_{111}F_{222} = F_{112}F_{122}$, $F_{112}^2 = F_{122}F_{111}$ und $F_{122}^2 = F_{112}F_{222}$ gelten, so gilt auch für jede andere Basis \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 , dass $\tilde{F}_{111}\tilde{F}_{222} - \tilde{F}_{112}\tilde{F}_{122} = 0$. Wäre nun aber $\tilde{F}_{112}^2 \neq \tilde{F}_{122}\tilde{F}_{111}$ oder $\tilde{F}_{122}^2 \neq \tilde{F}_{112}\tilde{F}_{222}$, so lässt sich nach obiger Formel eine Basis finden, in der $F_{111}F_{222} \neq F_{112}F_{122}$ gilt, ein Widerspruch. □

Proposition 5.15:

Es sei F eine kubische Form auf einem 2-dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum V , so dass eine Basis von V existiert, in der

$$F_{111}F_{222} = F_{112}F_{122} \quad \text{und} \quad F_{112}^2 = F_{122}F_{111} \quad \text{und} \quad F_{122}^2 = F_{112}F_{222}$$

gilt. Dann ist entweder $F = 0$ oder F ist äquivalent zu der Form G gegeben durch $G_{222} = 1$ und $G_{111} = G_{112} = G_{122} = 0$.

Beweis. Sei $F \neq 0$. Aus $F_{111} = F_{222} = 0$ würde mit den beiden letzten Gleichungen folgen, dass auch $F_{112} = F_{122} = 0$. Also können wir (nach eventuellem vertauschen der beiden Basisvektoren) annehmen, dass $F_{222} \neq 0$.

Setze $\lambda = -\frac{F_{122}}{F_{222}}$. Dann gilt nach Basiswechsel $\tilde{x}_1 = x_1 + \lambda x_2$, $\tilde{x}_2 = x_2$, dass $\tilde{F}_{122} = F_{122} + \lambda F_{222} = 0$.

Da auch in der neuen Basis die vorausgesetzten Gleichungen gelten, folgt mit der mittleren Gleichung, dass auch $F_{112} = 0$, und mit der ersten Gleichung, dass $\tilde{F}_{111} = 0$ (da $\tilde{F}_{222} = F_{222} \neq 0$). \square

5.1.5. Beweis der Charakterisierung

Mit den Überlegungen des letzten Teilabschnitts zu kubischen Formen lässt sich nun der Teil der Charakterisierung für 6-Mannigfaltigkeiten mit $b_3(M; \mathbb{Q}) = 0$ und $b_2(M; \mathbb{Q}) = 2$ beweisen.

Proposition 5.16:

Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $b_3(M; \mathbb{Q}) = 0$ und $b_2(M; \mathbb{Q}) = 2$. Dann ist M genau dann rational elliptisch, wenn der rationale Kohomologiering von M von den Elementen von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt wird.

Beweis. Da das minimale Modell einer einfach zusammenhängenden, kompakten, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeit mit $b_2 = 2$ und $b_3 = 0$ nur Erzeuger vom Grad 2, 3 und 5 hat und $H^3(M; \mathbb{Q}) = H^5(M; \mathbb{Q}) = \{0\}$ gilt, muss der rationale Kohomologiering von den Elementen der zweiten Kohomologiegruppe erzeugt werden.

Sei nun der Kohomologiering von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt. Angenommen, M wäre nicht rational elliptisch. Dann kann die zu M gehörende kubische Form nicht zu einer der kubischen Formen der minimalen Modelle von oben äquivalent sein, denn diese und M sind formal. Damit erfüllt die zu M gehörende kubische Form die Voraussetzungen von Proposition 5.15. Die Form ist damit äquivalent zur Form G von $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4)$ oder der Nullform, also der Form von $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4) \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4)$. Somit ist der Kohomologiering von M isomorph zu dem von $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4)$ oder $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4) \# (\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4)$, also nicht erzeugt von den Elementen von $H^2(M; \mathbb{Q})$. \square

Bemerkung 5.17: Der Beweis zeigt, dass eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $b_3(M; \mathbb{Q}) = 0$ und $b_2(M; \mathbb{Q}) = 2$ genau dann nicht rational elliptisch ist, wenn sie den gleichen rationalen Homotopietyp wie $\mathbb{C}P^3 \# (S^2 \times S^4)$ oder $(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$ hat.

Nun wollen wir uns dem Beweis der vollständigen Charakterisierung zuwenden.

Beweis von Satz 5.1. Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeit. Da aufgrund der Minimalität des minimalen Modells von M die Anzahl der Einsen unter den geraden Exponenten gerade der zweiten Bettizahl von M entspricht, gilt also nach Lemma 5.5, dass $b_2(M) \leq 3$.

Ist $b_2(M) = 0$, so hat M Exponenten wie im Fall (6.1) oder (6.3). Nach Lemma 5.6 gilt dann $M \simeq_{\mathbb{Q}} S^3 \times S^3$ bzw. $M \simeq_{\mathbb{Q}} S^6$. Somit ist $b_3(M) = 0$ oder 2 und wir befinden uns im Fall (a) oder (b).

Ist $b_2(M) = 1$, so folgt mit den Lemmata 5.5 und 5.6, dass entweder $M \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}P^3$ oder $M \simeq_{\mathbb{Q}} S^2 \times S^4$. Somit ist $b_3(M) = 0$ und wir befinden uns im Fall (c).

Ist $b_2(M) = 2$, so hat M nach Lemma 5.5 die Exponenten $a = (1, 1)$ und $b = (2, 3)$. Aufgrund der Endlichdimensionalität der Kohomologie kann somit der Erzeuger vom Grad 3 im minimalen Modell von M nicht geschlossen sein, und somit ist $b_3(M) = 0$. Nach Proposition 5.16 wird der rationale Kohomologiering von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt, wir befinden uns also im Fall (d) des Satzes.

Ist $b_2(M) = 3$, so folgt, dass M die Exponenten $a = (1, 1, 1)$ und $b = (2, 2, 2)$, also ein Modell der Form $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), d)$ mit $|x_i| = 2$ und $|y_j| = 3$ hat. Es gilt dann $dx_i = 0$ und somit $\Lambda(x_1, x_2, x_3)/(dy_1, dy_2, dy_3) = H_0(\Lambda V, d)$. Nach Proposition 1.52 ist damit dy_1, dy_2, dy_3 eine reguläre Sequenz. Diese spannt gerade den Kern der Abbildung $(\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3])^2 \rightarrow H^4(M; \mathbb{Q})$ auf, wir befinden uns also im Fall (e).

Es sei nun umgekehrt M eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit, die die Bedingungen eines der Fälle des Satzes erfüllt.

Fall (a), $b_2(M) = b_3(M) = 0$: Mit Poincaré-Dualität hat M den Kohomologiering von S^6 . Es ist also $M \simeq_{\mathbb{Q}} S^6$ rational elliptisch.

Fall (b), $b_2(M) = 0$, $b_3(M) = 2$: Mit Satz 2.1 folgt, dass $M = N\#(S^3 \times S^3)$ mit einer rationalen Homologiesphäre N . Insbesondere hat M den rationalen Kohomologiering von $S^3 \times S^3$. Es gilt also $M \simeq_{\mathbb{Q}} S^3 \times S^3$ ist rational elliptisch.

Fall (c), $b_2(M) = 1$, $b_3(M) = 0$: Es sei dann $0 \neq x \in H^2(M; \mathbb{Q})$. Ist dann $x^2 \neq 0$, so ist mit Poincaré-Dualität x^3 ein Erzeuger von $H^6(M; \mathbb{Q})$ und $H^*(M; \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathbb{C}P^3; \mathbb{Q})$, also ist $M \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}P^3$ rational elliptisch. Ist $x^2 = 0$, so ist $H^*(M; \mathbb{Q}) \cong H^*(S^2 \times S^4; \mathbb{Q})$. Somit ist $M \simeq_{\mathbb{Q}} S^2 \times S^4$ rational elliptisch.

Fall (d), $b_2(M) = 2$, $b_3(M) = 0$, $H^*(M; \mathbb{Q})$ wird von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt: Dies ist gerade Proposition 5.16.

Fall (e): Betrachte das minimale Modell $(\Lambda V, d)$ von M . Dann gilt $V^2 \cong H^2(M; \mathbb{Q})$. Es sei x_1, x_2, x_3 eine Basis von V^2 . Da der rationale Kohomologiering von M von $H^2(M; \mathbb{Q})$ erzeugt wird, ist der Kern der Abbildung $(\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3])^2 \rightarrow H^4(M; \mathbb{Q})$ dreidimensional. Es sei also u_1, u_2, u_3 eine Basis des Kerns, die eine reguläre Sequenz ist. Dann existieren $y_1, y_2, y_3 \in V^3$ mit $dy_i = u_i$. Nach den Propositionen 1.50 und 1.52 ist dann $H^*(\Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), d)$ endlich-dimensional, also ist aufgrund der Exponenten $(\Lambda(x_1, \dots, y_3), d)$ formal sechsdimensional und somit $(\Lambda(x_1, \dots, y_3), d) \hookrightarrow (\Lambda V, d)$ ein Quasi-Isomorphismus, also $(\Lambda(x_1, \dots, y_3), d)$ das minimale Modell von M . Damit ist M rational elliptisch. \square

5.2. Reelle Homotopietypen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es unendlich viele verschiedene reelle Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeiten gibt. Außerdem klassifizieren wir kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeiten im Fall, dass die zweite Bettizahl höchstens zwei ist, und geben im Fall, dass die zweite Bettizahl drei ist, eine teilweise Klassifikation an.

5.2.1. Kubische Formen

Im Gegensatz zum rationalen Fall, wo uns keine Ergebnisse zur Klassifikation kubischer Formen bekannt sind, gibt es diese im reellen Fall für binäre und ternäre kubische Formen. Eine Form heißt dabei binär bzw. ternär, wenn sie auf einem zwei- bzw. dreidimensionalen Vektorraum definiert ist. Für den Rest des Kapitels fassen wir kubische Formen als homogene Polynome vom Grad 3 auf (siehe Bemerkung 2.4). Im binären Fall gilt:

Satz 5.18 ([McK06, Lemma 3]):

Es gibt nur endlich viele Isomorphietypen von binären kubischen Formen über \mathbb{R} . Jede solche Form ist äquivalent zu genau einer der folgenden:

$$0, \frac{x^3}{6}, \frac{x^2y}{2}, \frac{x^3+y^3}{6}, \frac{x^2y-xy^2}{2}.$$

Definition 5.19:

Eine Form heißt *singulär*, wenn sie einen (komplexen) kritischen Punkt ausserhalb des Ursprungs hat.

Im binären Fall sind also die Formen 0 , $\frac{x^3}{6}$ und $\frac{x^2y}{2}$ singulär, während die anderen beiden Formen nichtsingulär sind. Im ternären Fall gilt:

Satz 5.20 ([McK06, Lemma 4]):

Es gibt nur endlich viele Isomorphietypen von singulären, ternären kubischen Formen über \mathbb{R} . Jede solche Form ist äquivalent zu genau einer der folgenden:

$$0, \frac{x^3}{6}, \frac{x^2y}{2}, \frac{x^2y-xy^2}{2}, \frac{x(x^2+y^2)}{2}, xyz, \frac{z(x^2+y^2)}{2}, \frac{x(xz-y^2)}{2}, \frac{z(x^2+y^2-z^2)}{2}, \\ \frac{x(x^2+y^2-z^2)}{2}, \frac{x(x^2+y^2+z^2)}{2}, \frac{x^3}{6} - \frac{y^2z}{2}, \frac{x^3}{6} + \frac{x^2z}{2} - \frac{y^2z}{2}, \frac{x^3}{6} - \frac{x^2z}{2} - \frac{y^2z}{2}.$$

Jede nichtsinguläre ternäre kubische Form über \mathbb{R} ist äquivalent zu genau einer der Formen $\frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz)$ mit $\sigma \neq -\frac{1}{2}$.

Bemerkung 5.21: Die Formen $\frac{x(x^2+y^2)}{2}$ und $\frac{x^3+y^3}{6}$ sind äquivalent vermöge der Basistransformation $\tilde{x} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}(x + \frac{1}{\sqrt{3}}y)$, $\tilde{y} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}(x - \frac{1}{\sqrt{3}}y)$.

Weiter ist der in der Familie nichtsingulärer Formen ausgeschlossene Fall $\sigma = -\frac{1}{2}$ singulär und äquivalent zu $\frac{z(x^2+y^2)}{2}$ vermöge der Basistransformation $\tilde{x} = x + \sqrt{3}y + \frac{1}{9}z$, $\tilde{y} = -2x + \frac{1}{9}z$ und $\tilde{z} = x - \sqrt{3}y + \frac{1}{9}z$.

Aus Satz 5.18 und aus Bemerkung 5.2 folgt

Korollar 5.22:

Es gibt unendlich viele rationale, aber nur endlich viele reelle Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeiten mit zweiter Bettizahl $b_2 = 2$.

5.2.2. Eine unendliche Familie mit verschiedenem reellem Homotopietyp

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass es für eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_2(M) \leq 2$ nur endlich viele Möglichkeiten für den reellen Homotopietyp gibt, da es nur endlich viele Äquivalenzklassen binärer kubischer Formen über \mathbb{R} gibt. Ist $b_3(M) = 3$, so gibt es die unendliche Familie $\{\frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz) \mid \sigma \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}$ ternärer kubischer Formen.

Proposition 5.23:

Es gibt unendlich viele verschiedene reelle Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeiten.

Um die Proposition zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass sich für unendlich viele σ die Form $\frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz)$ als kubische Form einer kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_2(M) = 3$ realisieren lässt.

Dazu betrachten wir die Modelle der Form

$$(\Lambda V, d_\lambda) = (\Lambda(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), d_\lambda)$$

mit

$$|x_i| = 2, \quad |y_j| = 3, \quad dx_i = 0 \quad \text{und} \quad d_\lambda y_j = x_j^2 - \lambda \frac{x_1 x_2 x_3}{x_j} \quad \text{für } j = 1, 2, 3,$$

wobei $\lambda \neq 1$.

Lemma 5.24:

Für $\lambda \neq 1$ ist $u_1 := x_1^2 - \lambda x_2 x_3$, $u_2 := x_2^2 - \lambda x_1 x_3$, $u_3 := x_3^2 - \lambda x_1 x_2$ eine reguläre Sequenz.

Beweis. Wir verwenden Proposition 1.52. Nehmen wir also an, dass es ein $z \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ mit $u_i(z) = 0$ für $i = 1, 2, 3$ gibt. Es ist also $z_1^2 = \lambda z_2 z_3$, $z_2^2 = \lambda z_1 z_3$ und $z_3^2 = \lambda z_1 z_2$, womit $z_i \neq 0$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Dann folgt

$$z_1^4 = \lambda^2 z_2^2 z_3^2 = \lambda^4 z_1^2 z_2 z_3.$$

Damit ist $\lambda^4 z_2 z_3 = z_1^2 = \lambda z_2 z_3$, also $\lambda^3 = 1$. Wegen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt also $\lambda = 1$, genau der Fall den wir ausgeschlossen hatten. \square

Damit ist $(\Lambda V, d_\lambda)$ für $\lambda \neq 1$ ein rational elliptisches minimales Modell über \mathbb{R} und erfüllt damit Poincaré-Dualität. Aufgrund der Exponenten ist es formal sechsdimensional und wir können die zu dem Kohomologiering gehörende kubische Form bestimmen.

Lemma 5.25:

Die zu $(\Lambda V, d_\lambda)$ mit $\lambda \neq 1$ gehörende kubische Form ist $\frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3 + 6\frac{1}{\lambda}xyz)$, falls $\lambda \neq 0$, und xyz , falls $\lambda = 0$.

Beweis. Zunächst gilt in $H^4(\Lambda V, d_\lambda)$, dass $[x_i^2] = \lambda[\frac{x_1x_2x_3}{x_i}]$. Somit gilt

$$[x_1^2x_2] = \lambda[x_2^2x_3] = \lambda^2[x_1x_3^2] = \lambda^3[x_1^2x_2].$$

Da $\lambda^3 \neq 1$, gilt also $[x_1^2x_2] = 0$. Analog zeigt man, dass $[x_i^2x_j] = 0$ für $i \neq j$. Somit ist

$$\begin{aligned} (x[x_1] + y[x_2] + z[x_3])^3 &= x^3[x_1^3] + y^3[x_2^3] + z^3[x_3^3] + 6xyz[x_1x_2x_3] \\ &= (\lambda(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz) [x_1x_2x_3] \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch jeweils geeignetes Skalieren des Erzeugers von $H^6(\Lambda V, d_\lambda)$ die Behauptung. \square

Für $\lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ lässt sich das minimale Modell $(\Lambda V, d_\lambda)$ auch über \mathbb{Q} definieren, es existiert also eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeit die dieses minimale Modell realisiert. Für $\sigma \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1\}$ existiert damit eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische Mannigfaltigkeit mit kubischer Form $\frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz)$. Damit haben wir Proposition 5.23 bewiesen.

Für $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist unklar, ob es eine Mannigfaltigkeit gibt, welche die kubische Form $\frac{1}{6}(x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz)$ realisiert, denn die entsprechenden Modelle $(\Lambda V, d_\lambda)$ lassen sich nicht in offensichtlicher Weise über \mathbb{Q} definieren. Falls sich die Form realisieren lässt, so ist die zugehörige Mannigfaltigkeit allerdings rational elliptisch, da wir oben das entsprechende minimale Modell über \mathbb{R} gefunden haben, und dies nur endlich viele Erzeuger benötigt.¹

Für $\sigma = 0$ gehört die kubische Form zu $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3$. Da x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 keine reguläre Sequenz in $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ ist, ist $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ nicht rational elliptisch. Für $\sigma = 1$ ist die zugehörige Mannigfaltigkeit ebenfalls nicht rational elliptisch, wie wir in Lemma 5.27 sehen werden.

¹Es lassen sich aber keinesfalls alle der singulären Formen realisieren, da es nur abzählbar viele kompakte (6-)Mannigfaltigkeiten gibt.

5.2.3. Klassifikation für $b_2 \leq 2$

Proposition 5.26:

Jede kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_2(M) \leq 2$ ist reell homotopieäquivalent zu genau einer der folgenden Mannigfaltigkeiten:

$$S^6, S^3 \times S^3, \mathbb{C}\mathbb{P}^3, S^2 \times S^4, \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^2, \text{SU}(3)/\text{T}^2 \text{ oder } \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3.$$

Jede kompakte, einfach zusammenhängende, rational hyperbolische 6-Mannigfaltigkeit M mit $b_2(M) \leq 2$ und $b_3(M) = 0$ ist reell homotopieäquivalent zu genau einer der beiden Mannigfaltigkeiten $(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# (S^2 \times S^4)$.

Beweis. Den Fall $b_2(M) \leq 1$ haben wir dies bereits im rationalen Fall betrachtet. Im Fall $b_2(M) = 2$ gilt im rational elliptischen Fall, dass $b_3(M) = 0$, im rational hyperbolischen Fall haben wir dies vorausgesetzt. Damit wird der reelle Kohomologiering und damit der reelle Homotopietyp durch die kubische Form bestimmt. Nach Satz 5.18 ist diese eine der in Tabelle 5.2 aufgeführten.

In den ersten drei Fällen sieht man leicht, dass das angegebene Beispiel tatsächlich ein Beispiel für diese Form ist. Im Fall 5 ist dies nach Bemerkung 5.21 ebenfalls klar. Der Kohomologiering von $\text{SU}(3)/\text{T}^2$ wurde in [Kla88] berechnet zu $H^*(\text{SU}(3)/\text{T}^2; \mathbb{R}) = \Lambda(x_1, x_2)/(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, x_1^2x_2 + x_1x_2^2)$ mit $|x_i| = 2$, womit $x_1^3 = x_2^3 = 0$ und $x_1^2x_2 = -x_1x_2^2$ folgt, was die angegebene Form ergibt.

In den ersten beiden Fällen der Tabelle wird der reelle Kohomologiering nicht durch $H^2(M; \mathbb{R})$ erzeugt. Nach der Charakterisierung im rationalen Fall sind diese Mannigfaltigkeiten also rational hyperbolisch. In den anderen Fällen erzeugt $H^2(M; \mathbb{R})$ den Kohomologiering, sie sind also rational elliptisch. \square

Tabelle 5.2.: Binäre kubische Formen und Mannigfaltigkeiten, zu denen sie gehören

	kubische Form	Beispiel	rational elliptisch
1	0	$(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$	Nein
2	x^3	$\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# (S^2 \times S^4)$	Nein
3	x^2y	$\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^2$	Ja
4	$x^2y - xy^2$	$\text{SU}(3)/\text{T}^2$	Ja
5	$x(x^2 + y^2)$	$\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3$	Ja

5.2.4. Teilweise Klassifikation für $b_2 = 3$

Den ternären kubischen Formen lässt sich mittels Poincaré-Dualität wie folgt ein Teilraum der homogenen Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ zuordnen:

Es sei M eine kompakte, einfach zusammenhängende 6-Mannigfaltigkeit mit kubischer Form F . Ist x_1, x_2, x_3 eine Basis von $H^2(M; \mathbb{R})$, so induziert ein homogenes Polynom $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ vom Grad 2 ein Element von $H^4(M; \mathbb{R})$, das wir ebenfalls f nennen wollen. Aufgrund der Poincaré-Dualität ist dann $f = 0$ in $H^4(M; \mathbb{R})$ genau dann, wenn $x_1 f = x_2 f = x_3 f = 0$ in $H^6(M; \mathbb{R})$. Diese Bedingung lässt sich an der kubischen Form F ablesen.

Wählt man nun noch eine Basis dieses Teilraums, so erhält man eine Sequenz homogener Polynome vom Grad 2 in $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$. Ist diese Sequenz regulär, so ist M rational elliptisch. Ist sie nicht regulär, so ist sie es nach der Klassifikation der möglichen Exponenten in Dimension 6 und Proposition 1.52 nicht.

Lemma 5.27:

Den ternären kubischen Formen werden die in Tabelle 5.3 angegebenen Sequenzen homogener Polynome vom Grad 2 zugeordnet. In den Fällen 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14 und 15.σ für $\sigma \neq 0, 1$ der Tabelle sind die Sequenzen regulär, in den anderen Fällen nicht.

Beweis. Die Berechnung der zugehörigen Sequenz verläuft in allen Fällen ähnlich, weswegen wir uns hier auf den Fall 4 der Tabelle beschränken wollen. Aufgrund der kubischen Form gilt in diesem Fall, dass alle Monome vom Grad 3 in den x_i bis auf $x_1^2 x_2$ und $x_1 x_2^2$ in $H^6(M; \mathbb{R})$ verschwinden und ferner $x_1^2 x_2 = -x_1 x_2^2$ gilt. Ein Element

$$\omega = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_1 x_3 + dx_2^2 + ex_2 x_3 + fx_3^2 \in H^2(M; \mathbb{R})$$

verschwindet also genau dann, wenn

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 \omega = bx_1^2 x_2 + dx_1 x_2^2 = (b - d)x_1^2 x_2 \\ 0 &= x_2 \omega = ax_1^2 x_2 + bx_1 x_2^2 = (a - b)x_1^2 x_2 \\ 0 &= x_3 \omega = 0, \end{aligned}$$

also genau dann, wenn $a = b = d$. Dies liefert gerade den von der angegebenen Basis erzeugten Teilraum.

Die Regularität der Sequenzen in den angegebenen Fällen sieht man leicht mit Proposition 1.52 (b).

Außer in den Fällen 8 und 15.1 enthalten alle nichtregulären Sequenzen der Tabelle jeweils zwei Elemente der Form $x_i x_j$ und $x_i x_k$ mit $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Diese sind

Tabelle 5.3.: Ternäre kubische Formen über \mathbb{R} und zugehörige Sequenz homogener Polynome vom Grad 2

	kubische Form	Sequenz	regulär
1	0	$x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$	Nein
2	x^3	$x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3$	Nein
3	x^2y	$x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2$	Nein
4	$x^2y - xy^2$	$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2$	Nein
5	$x(x^2 + y^2) \sim x^3 + y^3$	$x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3^2$	Nein
6	xyz	x_1^2, x_2^2, x_3^2	Ja
7	$z(x^2 + y^2)$	$x_1x_2, x_1^2 - x_2^2, x_3^2$	Ja
8	$x(xz - y^2)$	$x_2^2 + x_1x_3, x_3^2, x_2x_3$	Nein
9	$z(x^2 + y^2 - z^2)$ $\sim z(3x^2 + 3y^2 - z^2)$	$x_1x_2, x_1^2 + x_3^2, x_2^2 + x_3^2$	Ja
10	$x(x^2 + y^2 - z^2)$ $\sim x(x^2 + 3y^2 - 3z^2)$	$x_2x_3, x_1^2 - x_2^2, x_1^2 + x_3^2$	Ja
11	$x(x^2 + y^2 + z^2)$ $\sim x(x^2 + 3y^2 + 3z^2)$	$x_2x_3, x_1^2 - x_2^2, x_1^2 - x_3^2$	Ja
12	$x^3 - 3y^2z$	x_1x_2, x_1x_3, x_3^2	Nein
13	$x^3 + 3x^2z - 3y^2z$	$x_1x_2, x_3^2, x_1^2 - x_1x_3 + x_2^2$	Ja
14	$x^3 - 3x^2z - 3y^2z$	$x_1x_2, x_3^2, x_1^2 + x_1x_3 - x_2^2$	Ja
15. σ	$x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz,$ $\sigma \neq -\frac{1}{2}$	$\sigma x_1^2 - x_2x_3, \sigma x_2^2 - x_1x_3, \sigma x_3^2 - x_1x_2$	$\sigma \in \{0, 1\}$: Nein $\sigma \neq 0, 1$: Ja

wegen $x_i x_j \cdot x_k \in (x_i x_k)$ nicht regulär. Im Fall 8 erlaubten x_3^2 und $x_2 x_3$ eine analoge Konstruktion, weswegen die Sequenz nicht regulär ist. Im Fall 15.1 gilt zum Beispiel $x_2(x_1^2 - x_2 x_3) = (-x_1)(x_3^2 - x_1 x_2)$ und wir erhalten die Nichtregulärität. \square

In einigen der Fälle können wir konkret eine Mannigfaltigkeit angeben, die die entsprechende kubische Form realisiert.

Tabelle 5.4.: Ternäre kubische Formen und Mannigfaltigkeiten zu denen sie gehören

	kubische Form	Beispiel	rational elliptisch
1	0	$(S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$	Nein
2	x^3	$\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# (S^2 \times S^4) \# (S^2 \times S^4)$	Nein
3	$x^2 y$	$(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^2) \# (S^2 \times S^4)$	Nein
4	$x^2 y - x y^2$	$(\mathrm{SU}(3)/\mathrm{T}^2) \# (S^2 \times S^4)$	Nein
5	$x(x^2 + y^2)$	$\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# (S^2 \times S^4)$	Nein
6	xyz	$S^2 \times S^2 \times S^2, (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}) \times S^2$	Ja
7	$z(x^2 + y^2)$	$(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \times S^2$	Ja
8	$x(xz - y^2)$		Nein
9	$z(x^2 + y^2 - z^2)$		Ja
10	$x(x^2 + y^2 - z^2)$	B_{b_1, c_1, c_2}^3 mit $c_2 \neq 0$ und $c_1 \neq \frac{b_1 c_2}{2}$	Ja
11	$x(x^2 + y^2 + z^2)$	B_{c_1, c_2}^1 , mit $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$	Ja
12	$x^3 - 3y^2 z$	$\mathbb{C}\mathbb{P}^3 \# (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^2)$	Nein
13	$x^3 + 3x^2 z - 3y^2 z$		Ja
14	$x^3 - 3x^2 z - 3y^2 z$		Ja
15.σ	$x^3 + y^3 + z^3 + 6\sigma xyz,$ $\sigma \neq -\frac{1}{2}$		$\sigma \in \{0, 1\}$: Nein $\sigma \neq 0, 1$: Ja

Proposition 5.28:

Die in Tabelle 5.4 angegebenen Beispiele realisieren tatsächlich die angegebene kubische Form.

Bemerkung 5.29: Es gibt weiter noch computerbasierte Hinweise darauf, dass zumindest einige der Biquotienten der zweiten Serie B_{a_3, b_3}^2 zu den Fällen 13 oder 14 der Tabelle gehören. Weiter zeigen Computerberechnungen, dass B_2^{SP} und B_4^{SP} zu Fall 11 und B_3^{SP} zu Fall 10 gehören.

Beweis. Die Fälle 1 bis 5 haben jeweils einen Erzeuger von $H^2(M; \mathbb{R})$, dessen Poincaré-Duales nicht im Aufspann der Produkte von Elementen in $H^2(M; \mathbb{R})$ liegt. Die zusammenhängende Summe von $S^2 \times S^4$ mit einem entsprechenden Beispiel mit $b_2 = 2$ liefert also ein Beispiel in diesen Fällen.

In den Fällen 6, 7 und 12 sieht man ebenfalls leicht, dass die angegebenen Beispiele die kubische Form realisieren. Beachte hierbei, dass $S^2 \times S^2 \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ und wähle im Fall 12 Erzeuger a und b von $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)$ bzw. $H^2(S^2)$ so, dass $-a^2b$ dual zur Fundamentalklasse ist.

Betrachte nun die Biquotienten B_{c_1, c_2}^1 . Den Kohomologiering von B_{c_1, c_2}^1 haben wir bereits in Abschnitt 2.3 angegeben:

$$H^*(B_{c_1, c_2}^1; \mathbb{R}) = \Lambda(u, v, w) / (u^2 + 2uv, v^2 + uv, w^2 + c_1uw + c_2vw),$$

wobei u, v und w Grad 2 haben.

Wir betrachten den Fall $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$. Es sei $\alpha = \sqrt{c_1^2 + (c_1 - c_2)^2} \neq 0$ und x_1, x_2, x_3 die Basis von $H^2(B_{c_1, c_2}^1; \mathbb{R})$ mit $u = -2x_3$, $v = x_2 + x_3$ und $w = -\frac{\alpha}{2}x_1 - \frac{c_2}{2}x_2 + (c_1 - \frac{c_2}{2})x_3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u^2 + 2uv &= -4u_1 \\ v^2 + uv &= -u_2 + u_3 \\ w^2 + c_1uw + c_2vw &= \frac{c_2^2}{4}u_2 + (c_1^2 - c_1c_2 + \frac{c_2^2}{4})u_3, \end{aligned}$$

wobei $u_1 = x_2x_3$, $u_2 = x_1^2 - x_2^3$ und $u_3 = x_1^2 - x_3^2$. Damit ist der erzeugte Teilraum der gleiche wie im Fall 11 der Tabelle 5.3 und mit Poincaré-Dualität realisiert B_{c_1, c_2}^1 dann die kubische Form aus Fall 11.

Die Biquotienten B_{b_1, c_1, c_2}^3 haben den folgenden Kohomologiering:

$$H^*(B_{b_1, c_1, c_2}^3; \mathbb{Z}) = \Lambda(u, v, w) / (u^2, v^2 + b_1uv, w^2 + c_1uw + c_2vw),$$

wobei u, v und w wieder Grad 2 haben. Wir betrachten nun den Fall, dass $c_2 \neq 0$ und $2c_1 \neq b_1c_2$. Es sei dann in diesem Fall x_1, x_2, x_3 die Basis von $H^2(B_{b_1, c_1, c_2}^3; \mathbb{R})$ mit $u = c_2(x_2 - x_3)$, $v = (c_1 - b_1c_2)x_2 + c_1x_3$ und $w = \frac{1}{2}c_2(b_1c_2 - 2c_1)(x_1 + x_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u^2 &= -c_2^2(2u_1 + u_2 - u_3) \\ v^2 + uv &= (2c_1^2 - 2b_1c_1c_2 + b_1^2c_2^2)u_1 + (c_1^2 - b_1c_1c_2)(-u_2 + u_3) \\ w^2 + c_1uw + c_2vw &= \frac{1}{4}c_2^2(b_1c_2 - 2c_1)^2u_2, \end{aligned}$$

wobei $u_1 = x_2x_3$, $u_2 = x_1^2 - x_2^3$ und $u_3 = x_1^2 + x_3^2$. Analog zu oben realisiert damit B_{b_1, c_1, c_2}^3 mit $c_2 \neq 0$ und $2c_1 \neq b_1c_2$ die kubische Form aus Fall 10. \square

6. Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimension 7

6.1. Rationale Homotopietypen

In diesem Abschnitt werden wir alle kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeiten bis auf rationale Homotopieäquivalenz klassifizieren.

6.1.1. Mögliche Exponenten

Zunächst werden wir wie im sechsdimensionalen Fall sämtliche möglichen Exponenten von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeiten bestimmen.

Tabelle 6.1.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 7-Mannigfaltigkeiten

	Exponenten	Erzeugergrade	Beispiel(e)
(7.1)	$a = (), b = (4)$	7	S^7
(7.2)	$a = (1), b = (2, 3)$	2, 3, 5	$S^2 \times S^5, \mathbb{C}P^2 \times S^3$
(7.3)	$a = (2), b = (2, 4)$	3, 4, 7	$S^3 \times S^4$
(7.4)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2)$	2, 2, 3, 3, 3	$S^2 \times S^2 \times S^3$

Lemma 6.1:

Die Exponenten einer kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeit sind in Tabelle 6.1 enthalten.

Beweis. Nach Satz 1.44 gilt $\sum_{i=1}^r a_i \leq \frac{7}{2}$, also $\sum_{i=1}^r a_i \leq 3$ und $\sum_{j=1}^q b_j \leq \frac{1}{2}(q + 13)$. Da $a_i \geq 1$ ist also $a = (1, 1, 1), (1, 2), (1, 1), (3), (2), (1)$ oder $()$.

Weiter gilt

$$(*) \quad 7 = 2 \left(\sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^r a_i \right) - (q - r).$$

Ist $a = ()$, so folgt $7 = 2 \sum_{j=1}^q b_j - q \geq 3q$, da $b_j \geq 2$. Somit ist $q = 0, 1$ oder 2 . Für $q = 2$ wäre $7 = 2(\sum_{j=1}^2 b_j + 1)$, ein Widerspruch. Ebenso ist $q = 0$ nicht möglich. Ist $q = 1$, so folgt mit $(*)$, dass $b = (4)$ ist. Dies ist Fall (7.1) der Tabelle.

Ist $a = (1)$, so folgt $8 = 2 \sum_{j=1}^q b_j - q \geq 3q$, also auch hier $q = 0, 1$ oder 2 . Für $q = 0$ oder 1 gibt $(*)$ einen Widerspruch. Für $q = 2$ folgt $b_1 + b_2 = 5$, also $b = (2, 3)$, also Fall (7.2).

Ist $a = (2)$, so folgt $10 = 2 \sum_{j=1}^q b_j - q$, woraus analog zu oben $b = (2, 4)$ (also Fall (7.3)) oder $b = (3, 3)$ folgt. Wir können $a = (2)$ und $b = (3, 3)$ ausschliessen, da es nicht die Bedingung SAC erfüllt.

Ist $a = (1, 1)$, so folgt $9 = 2 \sum_{j=1}^q b_j - q$, also $q \leq 3$. Wegen $(*)$ ist q ungerade und nach Satz 1.44 ist $q \geq r = 2$. Also ist $q = 3$. Dann liefert $(*)$, dass $b = (2, 2, 2)$, also Fall (7.4).

Ist $a = (1, 2)$, so folgt $11 = 2 \sum_{j=1}^q b_j - q$, also $q \leq 3$. Wieder muss also $q = 3$ gelten und mit $(*)$ dann $b = (2, 2, 3)$, was nicht die Bedingung SAC erfüllt.

Ist $a = (1, 1, 1)$, so folgt $10 = 2 \sum_{j=1}^q b_j - q$, also $q \leq 3$. Nach $(*)$ muss q gerade sein, was mit $q \geq r = 3$ einen Widerspruch ergibt. \square

Eine Tabelle mit den möglichen Dimensionen der rationalen Homotopiegruppen dieser Mannigfaltigkeiten gibt es auch in [DeV11]. Dort werden noch einige weitere Fälle aufgeführt, deren zugehörige Exponenten jedoch nicht die Bedingung SAC erfüllen, und die somit nicht für rational elliptische Räume auftreten können.

In dreien der vier Fälle haben wir in der Tabelle bereits alle rationalen Homotopietypen mit diesen Exponenten aufgeführt.

Lemma 6.2:

In den Fällen (7.1), (7.2) und (7.3) der Tabelle 6.1 sind die dort angegebenen Beispiele erschöpfend bis auf rationale Homotopieäquivalenz.

Beweis. Im Fall (7.1) ist dies offensichtlich der Fall. Im Fall (7.2) hat das minimale Modell die Form $(\Lambda(x_2, y_3, z_5), d)$, wobei die Indizes jeweils den Grad der Erzeuger

angeben. Aufgrund der Minimalität ist dann $dx_2 = 0$. Weiter können wir nach Reskalierung des Erzeugers y_3 annehmen, dass entweder $dy_3 = 0$ oder $dy_3 = x_2^2$ gilt. Analog können wir annehmen, dass $dz_5 = 0$ oder $dz_5 = x_2^3$ gilt.

Im Fall $dy_3 = 0 = dz_5$ ist die Kohomologie nicht endlich-dimensional. Im Fall $dy_3 = x_2^2$ und $dz_5 = 0$ erhalten wir das minimale Modell von $S^2 \times S^5$. Im Fall $dy_3 = 0$ und $dz_5 = x_2^3$ erhalten wir das minimale Modell von $\mathbb{C}P^2 \times S^3$. Gilt $dy_3 = x_2^2$ und $dz_5 = x_2^3$, so sei \tilde{z}_5 ein weiterer Erzeuger und definiere $d\tilde{z}_5 = 0$. Dann ist der Algebrenhomomorphismus $\varphi : (\Lambda(x_2, y_3, \tilde{z}_5), d) \rightarrow (\Lambda(x_2, y_3, z_5), d)$ mit $\varphi(x_2) = x_2$, $\varphi(y_3) = y_3$ und $\varphi(\tilde{z}_5) = z_5 - x_2 y_3$ ein Isomorphismus. Wir erhalten also wieder das minimale Modell von $S^2 \times S^5$.

Im Fall (7.3) gilt, dass die Erzeuger in den Graden 3 und 4 geschlossen sind. Ein Erzeuger im Grad 7 wird dann auf das Quadrats des Erzeugers vom Grad 4 abgebildet, da die Kohomologie sonst nicht endlich-dimensional wäre. Somit erhalten wir das minimale Modell von $S^3 \times S^4$. \square

6.1.2. Beispiele mit den Exponenten von $S^2 \times S^2 \times S^3$

Im Folgenden werden wir die minimalen Modelle mit Exponenten wie im Fall (7.4) genauer untersuchen.

Lemma 6.3:

Es sei $(\Lambda V, d)$ ein rational elliptisches, minimales Modell mit Exponenten $a = (1, 1)$ und $b = (2, 2, 2)$. Dann gilt für das Differential $d_3 : V^3 \rightarrow (\Lambda V)^4 = \Lambda^2 V^2$, dass $\text{rk}(d_3) \geq 2$.

Beweis. Ist $\text{rk}(d_3) = 0$ oder 1, so ist die Kohomologie nicht endlich-dimensional. \square

Betrachten wir nun Modelle (über \mathbb{Q}) mit

$$\Lambda V = \Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3), \text{ mit } |x_i| = 2 \text{ und } |y_j| = 3.$$

und Differentialen d_σ mit $d_\sigma(x_i) = d_\sigma(y_3) = 0$, $d_\sigma(y_1) = x_1 x_2$ und $d_\sigma(y_2) = x_1^2 - \sigma x_2^2$ mit $\sigma \in \mathbb{Q}^*$.

Lemma 6.4:

Für alle $\sigma \in \mathbb{Q}^$ ist $(\Lambda V, d_\sigma)$ formal 7-dimensional und $H^*(\Lambda V, d_\sigma)$ erfüllt Poincaré-Dualität.*

Beweis. Es gilt $(\Lambda V, d_\sigma) \cong (\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d_\sigma) \otimes (\Lambda(y_3), 0)$. Damit genügt es zu zeigen, dass $H^*(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d_\sigma)$ vierdimensional ist und Poincaré-Dualität erfüllt. Aufgrund der Formel für die formale Dimension eines rational elliptischen minimalen Modells genügt es dafür zu zeigen, dass $\dim H^*(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d_\sigma) < \infty$ gilt.

Nach Korollar 1.53 genügt es zu zeigen, dass die Sequenz $x_1^2 - \sigma x_2^2, x_1 x_2$ regulär ist.

Sei dazu $f = \sum a_{i,j} x_1^i x_2^j \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$, so dass $x_1 x_2 | (x_1^2 - \sigma x_2^2) \cdot f$. Dann ist

$$\begin{aligned} (x_1^2 - \sigma x_2^2) \cdot f &= \sum_{i \geq 2, j \geq 2} (a_{i-2,j} - \sigma a_{i,j-2}) x_1^i x_2^j + \sum_{i \geq 2} a_{i-2,1} x_1^i x_2 + \sum_{j \geq 2} a_{1,j-2} x_1 x_2^j \\ &\quad + \sum_{i \geq 2} a_{i-2,0} x_1^i + \sum_{j \geq 2} a_{0,j-2} x_2^j \\ &=: h + \sum_{i \geq 2} a_{i-2,0} x_1^i + \sum_{j \geq 2} a_{0,j-2} x_2^j. \end{aligned}$$

Da $x_1 x_2 | h$, gilt dann auch $x_1 x_2 | (x_1^2 - \sigma x_2^2) f - h$, woraus $a_{i,0} = 0 = a_{0,j}$ folgt, also $x_1 x_2 | f$. Damit ist die Sequenz regulär. \square

Lemma 6.5:

Zwei Modelle $(\Lambda V, d_\sigma)$ und $(\Lambda V, d_{\tilde{\sigma}})$ sind isomorph genau dann, wenn die Restklassen von σ und $\tilde{\sigma}$ in $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ übereinstimmen.

Beweis. Für jedes $\sigma \in \mathbb{Q}^*$ ist $H^4(\Lambda V, d_\sigma)$ eindimensional. Es sei $0 \neq \omega \in H^4(\Lambda V, d_\sigma)$. Die Multiplikation $H^2(\Lambda V, d_\sigma) \times H^2(\Lambda V, d_\sigma) \rightarrow H^4(\Lambda V, d_\sigma)$ läßt sich dann als $v \cdot w = B(v, w)\omega$ schreiben, wobei B eine symmetrische Bilinearform ist. In der Basis $[x_1], [x_2]$ von $H^2(\Lambda V, d_\sigma)$ und für $\omega = [x_2^2]$ ist B durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Restklasse der Determinante dieser Form in $\mathbb{Q}/(\mathbb{Q}^*)^2$ ist invariant unter Basiswechsel und Multiplikation mit Skalaren und somit invariant unter Isomorphismen des Kohomologierings. Somit ist die Restklasse von σ und $\tilde{\sigma}$ in $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ gleich, wenn die Modelle isomorph sind.

Ist umgekehrt $[\sigma] = [\tilde{\sigma}] \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$, so ist $\sigma/\tilde{\sigma} \in (\mathbb{Q}^*)^2$, also $\sqrt{\sigma/\tilde{\sigma}} \in \mathbb{Q}$ und damit $\varphi : (\Lambda V, d_{\tilde{\sigma}}) \rightarrow (\Lambda V, d_\sigma)$ mit $\varphi(x_1) = x_1, \varphi(x_2) = \sqrt{\sigma/\tilde{\sigma}} x_2, \varphi(y_1) = \sqrt{\sigma/\tilde{\sigma}} y_1$ und $\varphi(y_j) = y_j$ für $j = 2, 3$ ein Isomorphismus. \square

Damit gibt es nach Satz 1.30 zu jedem $\sigma \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ eine kompakte einfach zusammenhängende 7-Mannigfaltigkeit M_σ^7 , die $(\Lambda V, d_{\tilde{\sigma}})$ als minimales Modell hat ($[\tilde{\sigma}] = \sigma$).

Wir können insbesondere $M_{[-1]}^7 = S^2 \times S^2 \times S^3$ und $M_{[1]}^7 = (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \times S^3$ wählen. Allgemeiner zeigt der Beweis von Lemma 6.4, dass es einfach zusammenhängende, rational elliptische topologische Räume X_σ von formaler Dimension 4 gibt, so dass $M_\sigma^7 \simeq_{\mathbb{Q}} X_\sigma \times S^3$ ist. Aber außer für $\sigma = [1]$ oder $\sigma = [-1]$ ist X_σ nicht rational homotopieäquivalent zu einer Mannigfaltigkeit, denn die Schnittform lässt sich über \mathbb{Q} nicht auf Diagonalgestalt mit Diagonalelementen in $\{1, -1\}$ bringen.

Lemma 6.6:

Für jedes $\sigma \in \mathbb{Q}^$ hat das universelle Torusbündel¹ von $M_{[\sigma]}^7$ den rationalen Homotopietyp von $S^3 \times S^3 \times S^3$.*

Beweis. Mit der zugehörigen Spektralsequenz sieht man, dass für das universelle Torusbündel M von $M_{[\sigma]}^7$ gilt, dass $b_3(M) = 3$ und (natürlich) $b_2(M) = 0$. Als Torusbündel über einer rational elliptischen Mannigfaltigkeit ist es ebenfalls rational elliptisch. Damit hat das minimale Modell von M nach Lemma 7.5 die Form $(\Lambda(y_1, y_2, y_3), d)$. Dann ist aber $d = 0$ und somit M rational homotopieäquivalent zu $S^3 \times S^3 \times S^3$. \square

Betrachten wir nun weiter das minimale Modell $(\Lambda V, d) = (\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3), d)$ mit $d(x_i) = 0$, $d(y_1) = x_1^2$, $d(y_2) = x_2^2$ und $d(y_3) = x_1 x_2$. Nach [FOT08, Beispiel 2.91] ist $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell des Totalraums des S^3 -Bündels über $S^2 \times S^2$, das man erhält, indem man die Hopffaserung über die Abbildung $S^2 \times S^2 \rightarrow S^4 = (S^2 \times S^2)/(S^2 \vee S^2)$ zurückzieht. Wir wollen diesen Totalraum im Folgenden mit N^7 bezeichnen. In Lemma 6.10 zeigen wir, dass N^7 rational homotopieäquivalent zu einem homogenen Raum ist.

6.1.3. Klassifikation in Dimension 7

Nun können wir die Klassifikation vornehmen.

Satz 6.7:

Es sei M eine einfach zusammenhängende, kompakte, rational elliptische 7-Mannigfaltigkeit. Dann ist M rational homotopieäquivalent zu (genau) einer der Mannigfaltigkeiten S^7 , $S^2 \times S^5$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^3$, $S^3 \times S^4$, N^7 oder M_σ^7 für ein $\sigma \in \mathbb{Q}^/(\mathbb{Q}^*)^2$.*

¹Das universelle Torusbündel einer kompakten, einfach zusammenhängenden Mann ist das einfach zusammenhängende prinzipale $T^{\text{b}_2(M)}$ -Bündel E über M mit $|\pi_2(M)| < \infty$. Siehe auch [PT99].

Beweis. Nach Lemma 6.2 bleibt nur noch zu zeigen, dass eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 7-Mannigfaltigkeit M mit a - und b -Exponenten $(1, 1)$ und $(2, 2, 2)$ eines der Modelle $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3), d_\sigma)$ oder das von N^7 als minimales Modell besitzt.

Ist $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell von M (also $\dim V^2 = 2$, $\dim V^3 = 3$ und $\dim V^i = 0$ sonst), so gilt nach Lemma 6.3, dass $\text{rk}(d_3) \geq 2$.

Sei zunächst $\text{rk } d_3 = 2$. Dann folgt, dass $H^4(M; \mathbb{Q})$ eindimensional ist, da aufgrund der Minimalität bereits $d_2 = 0$ gilt. Wir können also die Multiplikation auf $H^2(M; \mathbb{Q})$ als symmetrische Bilinearform auffassen. Wähle eine Basis x_1, x_2 von V^2 , so dass die Basis $[x_1], [x_2]$ diese Bilinearform diagonalisiert. Dann ist $x_1 x_2 \in \Lambda^2 V^2$ exakt, es existiert also ein $y_1 \in V^3$ mit $d(y_1) = x_1 x_2$. Sei weiter $0 \neq y_3 \in \ker(d_3)$. Durch Ergänzung zu einer Basis von V^3 und eventueller Subtraktion eines Vielfachen von y_1 , eventuellem Vertauschen von x_1 und x_2 sowie Skalierung, erhalten wir $y_2 \in V_3$, so dass y_1, y_2, y_3 eine Basis von V^3 ist, und $d(y_2) = x_1^2 + a x_2^2$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ gilt. Wäre $a = 0$, so wäre x_2^n für jedes n geschlossen, aber nicht exakt. Damit ist $a \neq 0$.

Ist $\text{rk}(d_3) = 3$, also d_3 ein Isomorphismus, so folgt wie oben, dass $d_2 = 0$ gilt, und damit dann Isomorphie zum minimalen Modell von N^7 . \square

Korollar 6.8:

Es existieren unendlich viele verschiedene rationale Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung 6.9: Die Klassifikation zeigt, dass sich die rationalen Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeiten an ihrem rationalen Kohomologiering unterscheiden lassen, auch wenn sie nicht alle formal sind.

6.1.4. Die Mannigfaltigkeiten M_σ^7 und N^7

In diesem Abschnitt werden wir nun die Mannigfaltigkeiten N^7 und M_σ^7 genauer beleuchten. Zunächst zeigen wir, wie bereits zuvor angekündigt, dass N^7 den rationalen Homotopietyp eines homogenen Raumes hat.

Lemma 6.10:

Es sei $K = \{((\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} zw & 0 \\ 0 & z^{-1}w^{-1} \end{smallmatrix})) \mid z, w \in S^1\} \leq G := (\text{SU}(2))^3$. Dann ist N^7 rational homotopieäquivalent zu G/K .

Beweis. Für $T = \{((\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} v & 0 \\ 0 & v^{-1} \end{smallmatrix}), (\begin{smallmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{smallmatrix})) \mid u, v, w \in S^1\} \leq G$ gilt, dass $G/T = (\text{S}^2)^3$ und G/K ein S^1 -Prinzipalbündel über G/T ist. In [Kla88, S. 69 ff.] wird (in allgemeinerem Rahmen) die erste Chernklasse dieser Art Bündel bestimmt. Da die Einschränkungen des Bündels auf die S^2 -Faktoren gerade $\text{SU}(2) \cong \text{S}^3 \rightarrow \text{S}^2$ sind, erhält man für die erste Chernklasse $c_1 = s_1 + s_2 + s_3$, wobei die s_i Erzeuger der zweiten Kohomologiegruppen der S^2 -Faktoren sind. Damit erhält man, dass $b_2(G/K) = b_5(G/K) = 2$ und $b_i(G/K) = 0$ für $i = 1, 3, 4, 6$. Da G/K rational elliptisch (und aufgrund der Chernklasse auch einfach zusammenhängend) ist, und nach Satz 6.7 der einzige rationale Homotopietyp mit diesen Bettizahlen der von N^7 ist, ist G/K rational homotopieäquivalent zu N^7 . \square

Für die Mannigfaltigkeiten M_σ^7 scheint es schwierig zu sein, eine konkrete Beschreibung zu finden. Sie lassen sich allerdings als S^1 -Prinzipalbündel über 6-Mannigfaltigkeiten realisieren:

Es sei M_σ^6 eine Realisierung des rationalen Homotopietyps von $X_\sigma^4 \times \text{S}^2$ als Mannigfaltigkeit. Dann hat M_σ^7 den rationalen Homotopietyp des S^1 -Prinzipalbündels über M_σ^6 , dessen Chernklasse unter dem Isomorphismus zum Kohomologieren von $X_\sigma^4 \times \text{S}^2$ der Chernklasse der (mit der Projektion auf den S^2 -Faktor zurückgezogenen) Hopffaserung $\text{S}^3 \rightarrow \text{S}^2$ entspricht.

Mithilfe der Klassifikation rational elliptischer Mannigfaltigkeiten in kleineren Dimensionen und der Klassifikationsresultate für homogene Räume und Kohomogenität-1-Mannigfaltigkeiten von Klaus und Hoelscher, können wir zeigen, dass die Mannigfaltigkeiten M_σ^7 nicht zu verschiedenen Klassen von Mannigfaltigkeiten gehören.

Proposition 6.11:

Die Mannigfaltigkeit M_σ^7 ist für $\sigma \neq [1], [-1]$ nicht rational homotopieäquivalent zu

- a) einem Produkt von Mannigfaltigkeiten,
- b) einem Bündel über einer rational elliptischen Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 5 mit einfach zusammenhängender Faser,
- c) einem homogenen Raum,
- d) einer Kohomogenität-1-Mannigfaltigkeit,

wobei wir jeweils von kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ausgehen.

Bemerkung 6.12: Die oben definierten Räume X_σ lassen sich nach [GGKRW14, Abschnitt 6] als Torusbifaltigkeiten \mathcal{O}_{X_σ} mit nichtnegativer Krümmung realisieren. Bildet man das Produkt $\mathcal{O}_{X_\sigma} \times S^3$, so erhält man eine nichtnegativ gekrümmte Orbifaltigkeit mit dem rationalen Homotopietyp von M_σ^7 .

Beweis von Proposition 6.11. Zu a): Zunächst müssten beide Faktoren einfach zusammenhängende, kompakte, rational elliptische Mannigfaltigkeiten sein. Damit ist dann ein Faktor entweder zwei- oder dreidimensional und somit nach Fakt 4.1 eine Sphäre. Der andere Faktor ist vier- bzw. fünfdimensional. Mit den Fakten 4.2 und 4.4 und der Bedingung, dass die zweite Bettizahl des Produkts zwei ist, erhalten wir als einzige Möglichkeiten $S^2 \times S^2 \times S^3$ und $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \times S^3$, genau die beiden Fälle, die wir ausgeschlossen haben.

zu b): Nehmen wir an, dass M_σ^7 die Struktur eines solchen Bündels besitzt. Dann ist auch die Faser rational elliptisch, und wie in a) ist Basis oder Faser eine Sphäre der Dimension 2 oder 3. Über die zugehörige Spektralsequenz sieht man, dass aufgrund der Bettizahlen dann nur die folgenden Möglichkeiten in Frage kommen: Die Basis ist S^2 und die Faser $S^2 \times S^3$, die Basis ist S^3 und die Faser ist $S^2 \times S^2$ oder $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, oder einer der vorigen Fälle mit vertauschter Basis und Faser.

Bezeichnen wir nun den Totalraum des Bündels mit E . Enthält die Basis einen S^2 -Faktor, so gibt es $\alpha \in H^2(E; \mathbb{Q})$ mit $\alpha^2 = 0$. Damit hat die Bilinearform auf $H^2(E; \mathbb{Q})$ die Determinante $[-1] \in \mathbb{Q}/(\mathbb{Q}^*)^2$, was wir ausgeschlossen haben. Es bleiben noch die Fälle von S^3 -Bündeln über $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ oder $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \pm \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -Bündeln über S^3 . Die Spektralsequenz dieser Bündel zeigt, dass sie den Kohomologiering eines Produkts haben, wenn sie die richtigen Bettizahlen besitzen.

zu c): Stephan Klaus hat in seiner Diplomarbeit ([Kla88]) unter anderem alle homogenen Räume in Dimension 7 bestimmt. Die einzigen Räume die hier von den Bettizahlen in Frage kommen sind S^1 -Prinzipalbündel über $S^2 \times S^2 \times S^2$. Hier hat man wie in b) wieder Elemente in der zweiten Kohomologiegruppe, deren Quadrat verschwindet.

zu d): In [Hoe10a] hat Hoelscher alle kompakten, einfach zusammenhängenden Kohomogenität-1-Mannigfaltigkeiten in den Dimensionen 5, 6 und 7 bestimmt. In Dimension 7 gibt es neben Produkten und Symmetrischen Räumen, die wir ausgeschlossen

haben, noch die Brieskorn-Varietäten B_d^7 , welche die falschen Bettizahlen haben (siehe [Bre72, Kapitel V, Korollar 9.3]), sowie einige weitere Serien von primitiven und nichtprimitiven Wirkungen, die dort in zwei Tabellen aufgeführt und mit P_A^7, \dots, P_D^7 (für die primitiven Serien) bzw. N_A^7, \dots, N_I^7 (für die nichtprimitiven Serien) bezeichnet werden. Die nichtprimitiven Serien werden in [Hoe10b] betrachtet. Hier sieht man, dass diese entweder die falschen Bettizahlen besitzen oder als Bündel über einer einfach zusammenhängenden, rational elliptischen Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 5 geschrieben werden können und somit nach b) ausscheiden. Die primitiven Serien haben nach [GWZ08] und [Ult09] die falschen Bettizahlen. \square

6.2. Reelle und komplexe Homotopietypen

Die Klassifikation der reellen und komplexen Homotopietypen ist nun einfach. Für die reellen (bzw. komplexen) Modelle $(\Lambda V, d_\sigma) \otimes \mathbb{R}$ (bzw. $(\Lambda V, d_\sigma) \otimes \mathbb{C}$) gilt Lemma 6.5 mit analogem Beweis entsprechend, d.h. die reellen (bzw. komplexen) minimalen Modelle von $M_{[\sigma]}$ und $M_{[\tilde{\sigma}]}$ sind isomorph genau dann, wenn die Restklassen von σ und $\tilde{\sigma}$ in $\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2 = \{[1], [-1]\}$ (bzw. $\mathbb{C}^*/(\mathbb{C}^*)^2 = \{[1]\}$) übereinstimmen. Die restlichen Mannigfaltigkeiten der Klassifikation der rationalen Homotopietypen unterscheiden sich untereinander und von den M_σ schon durch die Bettizahlen, können also nicht untereinander oder zu den M_σ^7 reell oder komplex homotopieäquivalent sein. Damit haben wir die folgenden Korollare bewiesen.

Korollar 6.13:

Eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 7-Mannigfaltigkeit hat den reellen Homotopietyp von genau einer der Mannigfaltigkeiten S^7 , $S^2 \times S^5$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^3$, $S^3 \times S^4$, N^7 , $M_{[-1]} = S^2 \times S^2 \times S^3$ oder $M_{[1]} = (\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{C}\mathbb{P}^2) \times S^3$.

Korollar 6.14:

Eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 7-Mannigfaltigkeit hat den komplexen Homotopietyp von genau einer der Mannigfaltigkeiten S^7 , $S^2 \times S^5$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^3$, $S^3 \times S^4$, N^7 , oder $M_{[-1]} = S^2 \times S^2 \times S^3$.

Korollar 6.15:

Es gibt unendliche viele rationale, aber nur endlich viele reelle Homotopietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeiten.

Da N^7 nach Lemma 6.10 rational homotopieäquivalent zu einem homogenen Raum einer kompakten Liegruppe ist und somit eine Metrik nichtnegativer Schnittkrümmung zulässt, gilt ferner folgendes Korollar.

Korollar 6.16:

Jeder reelle Homotopietyp von kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 7-Mannigfaltigkeiten lässt sich durch eine Mannigfaltigkeit nichtnegativer Schnittkrümmung realisieren.

7. Rational elliptische Mannigfaltigkeiten in Dimensionen 8 und höher

7.1. Rational elliptische 8-Mannigfaltigkeiten

Tabelle 7.1.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 8-Mannigfaltigkeiten

	Exponenten	Erzeugergrade	Beispiel(e)
(8.1)	$a = (), b = (2, 3)$	3, 5	$S^3 \times S^5$
(8.2)	$a = (1), b = (5)$	2, 9	CP^4
(8.3)	$a = (2), b = (6)$	4, 11	HP^2
(8.4)	$a = (4), b = (8)$	8, 15	S^8
(8.5)	$a = (1), b = (2, 2, 2)$	2, 3, 3, 3	$S^2 \times S^3 \times S^3$
(8.6)	$a = (1, 1), b = (2, 4)$	2, 2, 3, 7	$CP^3 \times S^2$
(8.7)	$a = (1, 1), b = (3, 3)$	2, 2, 5, 5	$CP^2 \times CP^2$
(8.8)	$a = (1, 2), b = (3, 4)$	2, 4, 5, 7	$CP^2 \times S^4$
(8.9)	$a = (1, 3), b = (2, 6)$	2, 3, 6, 11	$S^2 \times S^6$
(8.10)	$a = (2, 2), b = (4, 4)$	4, 4, 7, 7	$S^4 \times S^4, HP^2 \# HP^2$
(8.11)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 3)$	2, 2, 2, 3, 3, 5	$S^2 \times S^2 \times CP^2$
(8.12)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 4)$	2, 2, 3, 3, 4, 7	$S^2 \times S^2 \times S^4, X_\sigma \times S^4$
(8.13)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3	$S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2$

Auch im achtdimensionalen Fall lassen sich unter Verwendung der Sätze 1.47 und 1.44 die möglichen Exponenten kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 8-Mannigfaltigkeiten klassifizieren. Der Beweis erfolgt mit den gleichen Mitteln wie in den vorherigen Fällen, so dass wir hier auf seine Ausführung verzichten.

Lemma 7.1:

Die Exponenten einer kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 8-Mannigfaltigkeit sind in Tabelle 7.1 enthalten.

Proposition 7.2:

In den Fällen (8.1), (8.2), (8.3), (8.4), (8.5), (8.8), (8.9) und (8.10) der Tabelle 7.1 ist jede kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 8-Mannigfaltigkeit mit den entsprechenden Exponenten rational homotopieäquivalent zu einem der angegebenen Beispiele.

Beweis. Im Fall (8.1) gilt $d = 0$. In den Fällen (8.2), (8.3) und (8.4) ist jeweils der Erzeuger vom kleineren Grad notwendig geschlossen, und aufgrund der 8-Dimensionalität muss ein Erzeuger höheren Grades jeweils von d auf die entsprechende Potenz des Erzeugers kleineren Grades abgebildet werden. Im Fall (8.5) muss $\text{rk}(d|_{V^3}) = 1$ gelten. Dadurch ist das Differential bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Im Fall (8.8) gibt es Erzeuger x_2, x_4, y_5 und y_7 , wobei die Indizes den jeweiligen Grad angeben. Dann gilt $dx_2 = 0$ und wegen der Minimalität auch $dx_4 = 0$. Dann ist dy_5 ein nichtverschwindendes Vielfaches von x_2^3 , da sonst die Kohomologie nicht endlichdimensional ist. Ohne Einschränkung können wir also $dy_5 = x_2^3$ annehmen. Ist dann $dy_7 = ax_2^4 + bx_4^2$, so gilt für $\tilde{y}_7 = y_7 - bx_2y_5$, dass $d\tilde{y}_7 = ax_4^2$ und wir können auch \tilde{y}_7 als Erzeuger im Grad 7 wählen. Aufgrund der Endlichdimensionalität der Kohomologie muss $a \neq 0$ gelten, wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $d\tilde{y}_7 = x_4^2$ gilt. Damit erhalten wir Isomorphie zum minimalen Modell von $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times \mathbb{S}^4$.

Im Fall (8.9) zeigt man analog zum Fall (8.8) Isomorphie zum minimalen Modell von $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^6$.

Im Fall (8.10) sei M eine Mannigfaltigkeit mit diesen Exponenten. Dann kann man eine Basis ω_1, ω_2 von $H^4(M; \mathbb{Q})$ wählen, so dass $\omega_1\omega_2 = 0$ und $\omega_1^2 = \varepsilon\omega_2^2$ für $\varepsilon = \pm 1$ gilt. Wähle dann im minimalen Modell $(\Lambda V, d)$ eine Basis x_1, x_2 von V^4 , so dass $\omega_i = [x_i]$ gilt. Dann existieren $y_1, y_2 \in V^7$ mit $dy_1 = x_1x_2$ und $dy_2 = x_1^2 - \varepsilon x_2^2$. Im Fall $\varepsilon = 1$ ist dann $M \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{H}\mathbb{P}^2 \# \mathbb{H}\mathbb{P}^2$, im Fall $\varepsilon = -1$ ist $M \simeq_{\mathbb{Q}} \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^4$. \square

Bemerkung 7.3: Analog zu den Räumen X_σ in Dimension 4 erhält man im Fall (8.10) unendlich viele rationale Homotopietypen von rational elliptischen Räumen, die nicht den rationalen Homotopietyp einer Mannigfaltigkeit haben, da die Schnittform sich nicht mit Diagonaleinträgen in $\{1, -1\}$ diagonalisieren lässt.

Proposition 7.4:

Die rationalen Homotopietypen von einfach zusammenhängenden, rational elliptischen Mannigfaltigkeiten, deren Exponenten zu Fall (8.12) der Tabelle 7.1 gehören, sind genau die von $X_\sigma \times S^4$ mit $\sigma \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$. Insbesondere gibt es unendlich viele verschiedene rationale Homotopietypen von einfach zusammenhängenden, rational elliptischen Mannigfaltigkeiten, deren Exponenten zu Fall (8.12) gehören.

Beweis. Es sei $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell einer solchen Mannigfaltigkeit. Es gilt also $\dim V^2 = 2$, $\dim V^3 = 2$, $\dim V^4 = \dim V^7 = 1$ und $\dim V^k = 0$ für $k \neq 2, 3, 4, 7$. Wegen der Minimalität ist dann $d|_{V^2} = 0$ und $d(V^3) \subset \Lambda^2 V^2$.

Angenommen, $d|_{V^3}$ ist nicht injektiv. Betrachte

$$\begin{aligned} (\Lambda V)^6 &= \Lambda^3 V^2 \oplus \Lambda^2 V^3 \oplus V^2 \cdot V^4, \\ (\Lambda V)^7 &= \Lambda^2 V^2 \cdot V^3 \oplus V^4 \cdot V^3 \oplus V^7, \\ (\Lambda V)^8 &= \Lambda^2 V^4 \oplus (\Lambda^2 V^2) \cdot V^4 \oplus V^2 \cdot (\Lambda^2 V^3) \oplus \Lambda^4 V^2, \\ (\Lambda V)^9 &= V^3 \cdot (\Lambda^3 V^2) \oplus V^2 \cdot V^3 \cdot V^4 \oplus V^2 \cdot V^7 \end{aligned}$$

und

$$(\Lambda V)^{10} = \Lambda^5 V^2 \oplus (\Lambda^3 V^2) \cdot V^4 \oplus V^2 \cdot (\Lambda^2 V^4) \oplus (\Lambda^2 V^3) \cdot V^4 \oplus (\Lambda^2 V^2) \cdot (\Lambda^2 V^3) \oplus V^3 \cdot V^7.$$

Ist $\text{rk}(d|_{V^3}) = 0$, so betrachte $d : (\Lambda V)^9 \rightarrow (\Lambda V)^{10}$. Es gilt $d|_{V^3 \cdot (\Lambda^3 V^2)} = 0$. Damit ist $\text{rk}(d|_{(\Lambda V)^9}) \leq \dim(V^2 \cdot V^3 \cdot V^4 \oplus V^2 \cdot V^7) = 4 + 2 = 6$. Es ist aber $d(\Lambda^5 V^2) = \{0\}$ und $d((\Lambda^2 V^2) \cdot (\Lambda^2 V^3)) = \{0\}$. Damit ist $\dim \ker d|_{(\Lambda V)^{10}} \geq \dim \Lambda^5 V^2 \oplus (\Lambda^2 V^2) \cdot (\Lambda^2 V^3) = 6 + 3 = 9$. Ein Widerspruch dazu, dass $H^{10}(\Lambda V, d) = \{0\}$.

Ist $\text{rk}(d|_{V^3}) = 1$, so existiert eine Basis y_1, y_2 von V^3 mit $dy_1 = 0$ und $0 \neq dy_2 \in \Lambda^2 V^2$. Weiter sei $0 \neq a \in V^4$. Ist $da \neq 0$, so gilt $da \in y_1 \cdot V^2$, denn sonst wäre $d^2 = 0$ verletzt. Sei also $v \in V^2$ mit $da = y_1 v$. Für $da = 0$, hat da dieselbe Darstellung mit $v = 0$.

Es gilt $d(\Lambda^3 V^2) = \{0\}$ und $d(\Lambda^2 V^3 \oplus V^2 \cdot V^4) \subset \Lambda^2 V^2 \cdot V^3$. Wegen $d(y_1 a) = y_1^2 v = 0$ ist $y_1 a$ geschlossen, aber nicht exakt. somit ist $H^7(\Lambda V, d) \neq \{0\}$, ein Widerspruch.

Es ist also $d|_{V^3}$ injektiv. Damit ist $d|_{V^4} = 0$, da es keine geschlossenen Elemente vom Grad 5 gibt. Wie im Fall der X_σ können wir nun eine Basis x_1, x_2 von V^2 und y_1, y_2 von V^3 wählen, so dass $dy_1 = x_1^2 - \sigma x_2^2$ für ein $\sigma \in \mathbb{Q}^*$ und $dy_2 = x_1 x_2$ gilt.

Ist nun a ein Erzeuger von V^4 so können wir ohne Einschränkung annehmen, dass für einen Erzeuger z von V^7 gilt, dass $dz = \lambda_1 a^2 + \lambda_2 a x_2^2$, denn x_2^4 und $a x_1 x_2$ sind

exakt, und ax_1^2 ist modulo einer exakten Form gleich ax_2^2 . Ferner gilt $\lambda_1 \neq 0$, da sonst die Potenzen von a nichttriviale Elemente in beliebig hohen Kohomologiegruppen erzeugen. Dann können wir $\tilde{a} = a + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1}x_2^2$ setzen und erhalten $dz = \lambda_1\tilde{a}^2 - \frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1}x_2^4$. Durch Addition eines Urbildes von $\frac{\lambda_2^2}{4\lambda_1}x_2^4$ unter d und Skalieren erhalten wir dann ein $\tilde{z} \in (\Lambda V)^7$ mit $d\tilde{z} = \tilde{a}^2$. Dies liefert einen Isomorphismus zum minimalen Modell von $X_\sigma \times S^4$.

Die minimalen Modelle von $X_\sigma \times S^4$ sind für verschiedene Restklassen in $\mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ nicht isomorph, da die Kohomologieringe nicht isomorph sind. Somit erhalten wir unendlich viele verschiedene rationale Homotopietypen, welche sich mit Satz 1.30 als Mannigfaltigkeiten realisieren lassen, da die Schnittform xy äquivalent zu $x^2 - y^2$ ist und somit die Signatur verschwindet, weswegen wir die Pontryaginklassen als $p_1 = p_2 = 0$ wählen können. \square

7.2. Rational elliptische 9-Mannigfaltigkeiten

Tabelle 7.2.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 9-Mannigfaltigkeiten

	Exponenten	Erzeugergrade	Beispiel(e)
(9.1)	$a = (), b = (5)$	9	S^9
(9.2)	$a = (), b = (2, 2, 2)$	3, 3, 3	$S^3 \times S^3 \times S^3$
(9.3)	$a = (1), b = (2, 4)$	2, 3, 7	$S^2 \times S^7, S^3 \times \mathbb{C}P^3$
(9.4)	$a = (1), b = (3, 3)$	2, 5, 5	$S^5 \times \mathbb{C}P^2$
(9.5)	$a = (2), b = (3, 4)$	4, 5, 7	$S^4 \times S^5$
(9.6)	$a = (3), b = (2, 6)$	3, 6, 11	$S^3 \times S^6$
(9.7)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 3)$	2, 2, 3, 3, 5	$S^2 \times S^2 \times S^5$
(9.8)	$a = (1, 2), b = (2, 2, 4)$	2, 3, 3, 4, 7	$S^2 \times S^3 \times S^4$
(9.9)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3	$S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^3$

Wie schon in den kleineren Dimensionen lassen sich wieder alle möglichen Exponenten einfach zusammenhängender, rational elliptischer 9-Mannigfaltigkeiten klassifizieren.

Lemma 7.5:

Die Exponenten einer kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 9-Mannigfaltigkeit sind in Tabelle 7.2 enthalten.

In fast allen Fällen haben wir nur endlich viele rationale Homotopietypen.

Proposition 7.6:

In den Fällen (9.1)–(9.6) und (9.8) der Tabelle 7.2 sind die dort angegebenen Beispiele bis auf rationale Homotopieäquivalenz die einzigen Beispiele mit diesen Exponenten.

Beweis. In den Fällen (9.1) und (9.2) ist das Differential die Nullabbildung.

Im Fall (9.3) hat das minimale Modell die Form $(\Lambda(x_2, y_3, y_7), d)$ und es gilt $dx_2 = 0$. Ohne Einschränkung gilt $dy_3 = 0$ oder $dy_3 = x_2^2$ sowie $dy_7 = 0$ oder $dy_7 = x_2^4$. Es können nicht beide Differentiale verschwinden, da die Kohomologie dann nicht endlich-dimensional ist. Ist $dy_3 = 0$ und $dy_7 = x_2^4$, so erhalten wir das minimale Modell von $S^3 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^3$. Ist $dy_3 = x_2^2$ und $dy_7 = 0$, so erhalten wir das minimale Modell von $S^2 \times S^7$. Sind beide Differentiale nicht Null, so ist das entstehende Modell isomorph zum vorigen vermöge $\tilde{y}_7 = y_7 - x_2^2 y_3$.

Im Fall (9.4) muss aus Dimensionsgründen der Kern von d_5 mindestens eindimensional sein. Damit erhalten wir rationale Homotopieäquivalenz zu einem Produkt mit S^5 . Die Klassifikation in Dimension 4 zeigt, dass es $S^5 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ist.

In den Fällen (9.5) bzw. (9.6) sind die Erzeuger vom Grad 5 bzw. 3 geschlossen, da die Algebra einen Grad höher trivial ist. Wir erhalten also wieder ein Produkt mit S^5 bzw. S^3 und mit der entsprechenden Klassifikation die Behauptung.

Im Fall (9.8) muss ein Erzeuger vom Grad 3 geschlossen sein. Damit ist das minimale Modell nach Satz 1.42 das minimale Modell von S^3 im Produkt mit einer rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeit mit eindimensionaler zweiter Kohomologiegruppe. Eine solche 6-Mannigfaltigkeit ist nach Satz 5.1 entweder $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ oder $S^2 \times S^4$. Die Exponenten zeigen, dass es $S^2 \times S^4$ ist. \square

Im Fall (9.7) erhalten wir nur Produkte der bereits betrachteten Räume.

Proposition 7.7:

Eine kompakte, einfach zusammenhängende 9-Mannigfaltigkeit mit den Exponenten

aus Fall (9.7) von Tabelle 7.2 hat den rationalen Homotopietyp von $X_\sigma \times S^5$ für ein $\sigma \in \mathbb{Q}^*/(\mathbb{Q}^*)^2$ oder $M^6 \times S^3$ für eine kompakte, einfach zusammenhängende, rational elliptische 6-Mannigfaltigkeit M^6 mit $b_2(M^6) = 2$.

Beweis. Es sei $(\Lambda V, d)$ das minimale Modell. Ist $\ker(d|_{V^3}) \neq \{0\}$, so erhalten wir das minimale Modell eines Produktes mit S^3 . Aufgrund der Dimension und der zweiten Bettizahl, muss es sich beim anderen Faktor um eine 6-Mannigfaltigkeit wie in der Behauptung handeln.

Ist $\ker(d|_{V^3}) = \{0\}$, so erhalten wir wie im Beweis der 7-dimensionalen Klassifikation, dass es Basen x_1, x_2 von V^2 und y_1, y_2 von V^3 sowie ein $a \in \mathbb{Q}^*$ gibt, so dass $dx_i = 0$, $dy_1 = x_1x_2$ und $dy_2 = x_1^2 - ax_2^2$ gilt. Ist nun $z \in V^5$ ein Erzeuger, so ist $dz \in \Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2)$ auch in $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d)$ exakt, da $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d)$ formale Dimension 4 hat. Damit erhalten wir einen Isomorphismus zu $(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, \tilde{z}), d)$ mit $d\tilde{z} = 0$, also zum minimalen Modell von $X_\sigma \times S^5$. \square

Im verbliebenen Fall (9.9) treten zum einen die Produkte $M_\sigma \times S^2$ und $N^7 \times S^2$ sowie Produkte von S^3 mit kompakten, einfach zusammenhängenden, rational elliptischen 6-Mannigfaltigkeiten mit $b_2 = 3$ auf. Zum anderen gibt es aber auch Beispiele, die nicht rational homotopieäquivalent zu einem Produkt sind.

Betrachte hierfür das prinzipale S^1 -Bündel Y über $S^2 \times S^2 \times S^2 \times S^2$ mit erster Chernklasse $c_1(Y) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, wobei die x_i die Erzeuger der ganzzahligen zweiten Kohomologiegruppen der S^2 Faktoren sind. Nach Lemma 3.8 ist $b_2(Y) = 3$ und $H^2(Y; \mathbb{Q})$ wird erzeugt von $[x_1]$, $[x_2]$ und $[x_3]$. Somit gehört Y zum Fall (9.9).

Da $\mu_{c_1(Y)}^2$ injektiv ist, ist $b_3(Y) = 0$. Somit ist $N^7 \times S^2$ das einzige mögliche Produkt, zu dem Y noch rational homotopieäquivalent sein könnte. Dann hätte $H^2(Y; \mathbb{Q})$ jedoch einen zweidimensionalen Teilraum, auf dem sämtliche Produkte verschwinden. Mit den Relationen $[x_i]^2 = 0$ und $[x_2x_3] = -[x_1x_2] - [x_1x_3]$, die sich mit Lemma 3.8 ergeben, rechnet man aber leicht nach, dass die einzigen Elemente von $H^2(Y; \mathbb{Q})$, deren Quadrate verschwinden, Vielfache von $[x_1]$, $[x_2]$, $[x_3]$ oder $[x_1] + [x_2] + [x_3]$ sind. Die Familie neundimensionaler Mannigfaltigkeiten in [Tot03] zeigt ferner, dass es unendlich viele rational verschiedene Beispiele im Fall (9.9) gibt, die nicht rational homotopieäquivalent zu einem Produkt sind.

7.3. Dimension 10 und höher

In Dimension 10 und höher wird eine Berechnung der möglichen Exponenten von Hand immer unpraktikabler, da die Anzahl der möglichen Exponenten stark ansteigt.

Diese lassen sich aber mit Hilfe eines Computers weiterhin berechnen. Der Quellcode einer Umsetzung der verwendeten Berechnungsmethode als Algorithmus in dem Computeralgebrasystem Mathematica findet sich in Anhang B. Damit berechnete Tabellen der möglichen Exponenten einfach zusammenhängender, rational elliptischer Mannigfaltigkeiten finden sich in Anhang A. Dort sind die möglichen Exponenten bis zur Dimension 16 aufgeführt. Tabelle 7.3 gibt einen Überblick über die Anzahl der Möglichkeiten für die Exponenten bis zur Dimension 22. Diese wurden mit dem gleichen Algorithmus berechnet.

Tabelle 7.3.: Anzahl A_n der möglichen Exponenten in Dimensionen $8 \leq n \leq 22$

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
A_n	13	9	22	17	45	32	73	58	134	103	217	173	373	297	583

Teil III.

Krümmung und Kohomologiering

8. Fast nichtnegativer Krümmungsoperator

Definition 8.1:

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der *Krümmungsoperator* \hat{R} von (M, g) ist punktweise der symmetrische Operator auf $\Lambda^2 T_p M$ definiert durch

$$\langle\langle \hat{R}_p(X \wedge Y), Z \wedge W \rangle\rangle = R_p(X, Y, W, Z),$$

wobei R der Krümmungstensor von (M, g) und das Skalarprodukt $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ auf $\Lambda^2 T_p M$ dadurch definiert ist, dass für eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n von $T_p M$ die Vektoren $e_i, \wedge e_j, i < j$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda^2 T_p M$ bilden.

Ungleichungen für den Krümmungsoperator \hat{R} sind immer als Ungleichungen an die Eigenwerte zu verstehen.

Da für die Schnittkrümmung einer Ebene $\sigma \subset T_p M$ mit Orthonormalbasis X, Y gilt, dass

$$\sec(\sigma) = R(X, Y, Y, X) = \langle\langle \hat{R}(X \wedge Y), X \wedge Y \rangle\rangle,$$

liefern Ungleichungen an den Krümmungsoperator die gleichen Ungleichungen für die Schnittkrümmung. Umgekehrt liefern beidseitige Schranken an die Schnittkrümmung auch beidseitige Schranken an den Krümmungsoperator. Hierbei hängen jedoch beide Schranken von unterer und oberer Schranke an die Schnittkrümmung ab. Siehe hierzu [BK78, Propostion 4.3].

Definition 8.2:

Eine glatte Mannigfaltigkeit lässt *fast nichtnegativen Krümmungsoperator* zu, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Metrik g_ε auf M gibt, so dass für jeden Eigenwert λ_ε des Krümmungsoperators von (M, g_ε) gilt

$$\lambda_\varepsilon \operatorname{diam}(M, g_\varepsilon)^2 > -\varepsilon.$$

Ist g_t , $t > 0$, eine Familie von Metriken auf M , so sagen wir, dass (M, g_t) *fast nichtnegativen Krümmungsoperator für $t \rightarrow 0$* hat, falls

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_{\min}(t) \operatorname{diam}(M, g_t)^2 \geq 0$$

gilt, wobei $\lambda_{\min}(t)$ den kleinsten Eigenwert des Krümmungsoperators von (M, g_t) bezeichne.

Erste Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator sind fast flache Mannigfaltigkeiten, die nach [BK78] auch fast flachen Krümmungsoperator haben. Weitere Beispiele erhält man durch den folgenden Satz.

Satz 8.3 ([HST13, Theoreme 3.1 und 3.2]):

Es sei (M, g^M) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, G eine kompakte Liegruppe, P ein G -Prinzipalbündel über M und γ eine Zusammenhangsform auf P . Betrachte die Zusammenhangsmetriken g_t bezüglich γ , g^M und t^2b , wobei b eine biinvariante Metrik auf G ist.

- (a) *Ist G abelsch und hat (M, g^M) nichtnegativen Krümmungsoperator, so hat auch der Totalraum (P, g^t) fast nichtnegativen Krümmungsoperator für $t \rightarrow 0$.*
- (b) *Es habe (M, g^M) nichtnegativen Krümmungsoperator. Dann gilt: (P, g_t) hat genau dann fast nichtnegativen Krümmungsoperator für $t \rightarrow 0$, wenn (P, g_t) lokal isometrisch zu $(P/[G, G] \times [G, G], \tilde{g}_t \times t^2b)$ für jedes t ist. Hierbei ist \tilde{g}_t die von g_t auf $P/[G, G]$ induzierte Metrik.*

Im Gegensatz zum Fall der Schnittkrümmung, der von Fukaya und Yamaguchi in [FY92] betrachtet wurde, erlaubt es der Satz nicht, auf assoziierte Bündel zu schließen, denn im Gegensatz zum Fall der Schnittkrümmung bleiben untere Schranken des Krümmungsoperators nicht unter Riemannschen Submersionen erhalten. Ein Beispiel hierfür ist der komplex-projektive Raum $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, mit der Fubini-Study-Metrik. Bezüglich dieser Metrik hat der Krümmungsoperator von $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ einen Kern, ist aber Quotient der Sphäre S^{2n+1} mit ihrer Standardmetrik, welche positiven Krümmungsoperator hat.

Dies liefert einen ersten Hinweis darauf, dass nichtnegativer Krümmungsoperator eine wesentlich restriktivere Eigenschaft als nichtnegative Krümmung ist, und tatsächlich war es möglich, Mannigfaltigkeiten mit nichtnegativem Krümmungsoperator zu klassifizieren. Hieran waren unter anderem Gallot und Meyer, Hamilton, Siu und Yau, Chow und Yang, Micallef und Moore sowie zuletzt Böhm und Wilking beteiligt (siehe die in [MN93] enthaltenen Referenzen). Es gilt

Satz 8.4 ([MN93]):

Es sei M eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtnegativem Krümmungsoperator. Dann ist M ein Riemannsches Produkt von

- *Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu Sphären,*
- *Kählermannigfaltigkeiten biholomorph zu komplex-projektiven Räumen*
- *Symmetrischen Räumen vom kompakten Typ*
- *sowie, im nichtkompakten Fall, von Mannigfaltigkeiten diffeomorph zu euklidischen Räumen.*

In [MN93] ist der Satz mit Homoömorphie im Fall der Sphäre angegeben. Die Zerlegung im Satz ist die de Rham-Zerlegung der Mannigfaltigkeit. Hierbei wird mit Hilfe des Ricci-Flusses gezeigt, dass die Faktoren mit $SO(n)$ -Holonomie auch eine Metrik mit positivem Krümmungsoperator zulassen. Mit [BW08] folgt, dass diese Faktoren diffeomorph zu Sphären sind.

Da es in jeder Dimension nur endlich viele einfach zusammenhängende symmetrische Räume vom kompakten Typ gibt (siehe z.B. [Hel78]), existieren somit in jeder Dimension auch nur endlich viele Diffeomorphietypen von kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten, die nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen. In [HST13] haben wir nun damit folgendes Korollar gezogen.

Korollar 8.5 ([HST13, Korollar 1.2]):

Es gibt in Dimension 7 und jeder Dimension ≥ 9 unendlich viele kompakte, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten von paarweise verschiedenem Homotopietyp, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator zulassen, auf denen aber keine Metrik von nichtnegativem Krümmungsoperator existiert.

Die Beispiele, die wir dort verwenden, sind S^1 -Prinzipalbündel über $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ bzw. Produkte von diesen mit Sphären geeigneter Dimension. Der Kohomologiering dieser Bündel lässt sich berechnen, siehe dazu [WZ90, Proposition 2.1]. Für das Bündel E mit Eulerklasse $kx_1 + lx_2$, wobei x_1 ein Erzeuger von $H^2(\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$, x_2 ein Erzeuger von $H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ und k und l teilerfremd sind, gilt

$$H^*(E; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x, y]/((lx)^2, x^3, x^2y, y^2), |x| = 2, |y| = 5,$$

falls $k \neq 0 \neq l$. Für $(k, l) = (1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ erhält man $S^3 \times \mathbb{C}P^3$ bzw. $\mathbb{C}P^1 \times S^5$.

Damit haben die Totalräume für $k = 1$ und $l \geq 0$ paarweise verschiedenen Homotopietyp. Nach unserer Klassifikation gibt es aufgrund von $b_2(E) = 1$ nur die beiden Möglichkeiten $S^2 \times S^5$ und $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 \times S^3$ für den rationalen Homotopietyp von E . Im nächsten Kapitel werden wir eine unendliche Serie von Beispielen mit paarweise nichtisomorphen komplexem Kohomologiering, also insbesondere paarweise verschiedenem rationalem Homotopietyp angeben.

In [KS88] wurden die betrachteten Mannigfaltigkeiten bis auf Homöomorphie und Diffeomorphie klassifiziert. Da die Klassifikationen nicht übereinstimmen, gibt es unter ihnen homöomorphe aber nicht diffeomorphe Mannigfaltigkeiten.

Korollar 8.6 ([HST13, Korollar 1.3]):

Es gibt kompakte, einfach zusammenhängende 7-Mannigfaltigkeiten mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator, die homöomorph, aber nicht diffeomorph sind.

9. Eine homogene Beispielfamilie

In diesem Kapitel werden wir eine unendliche Familie von Beispielen konstruieren, die kompakte, einfach zusammenhängende, homogene 22-Mannigfaltigkeiten sind, die fast nichtnegativen Krümmungsoperator, nichtnegative Schnitt- und positive Riccikrümmung zulassen, und die paarweise nichtisomorphe komplexe Kohomologiering haben. Die hier konstruierten Beispiele sind prinzipale 2-Torusbündel über einem Produkt von homogenen Räumen.

Wir werden sehen, dass wir sogar auf jeder dieser Mannigfaltigkeiten eine Familie $(g_t)_{t \in (0,1]}$ Riemannscher Metriken definieren können, so dass die Mannigfaltigkeiten bezüglich dieser Familie fast nichtnegativen Krümmungsoperator, und für jede Metrik g_t nichtnegative Schnitt- und positive Riccikrümmung haben. Ferner hat die Beispielfamilie auch bezüglich der (normal homogenen) Metrik g_1 eine gemeinsame obere Schranke für die Schnittkrümmung und den Durchmesser.

9.1. Definition der Beispiele und ihr Kohomologiering

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Es sei $S^1 \rightarrow \tilde{E} \rightarrow \bar{B} := (\mathbb{C}\mathbb{P}^2)^4$ das S^1 -Prinzipalbündel über $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)^4$ mit erster Chernklasse $c_1(\tilde{E}) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$, wobei die \bar{x}_i Erzeuger der ganzzahligen Kohomologie der $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -Faktoren sind. Insbesondere ist \tilde{E} nach Lemma 3.2 einfach zusammenhängend. Wir wollen nun Lemma 3.8 verwenden, um den Kohomologiering $H^*(\tilde{E}; \mathbb{K})$ zu bestimmen. Dazu sei $\tilde{x}_i = [\bar{x}_i] \in H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z}) = H^2(\bar{B}; \mathbb{Z}) / (\mathbb{Z} \cdot c_1(\tilde{E}))$ für $i = 1, \dots, 4$.

Lemma 9.1:

In den Graden ≤ 8 wird der Kohomologiering $H^{\leq 8}(\tilde{E}; \mathbb{K})$ erzeugt von $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ und es gelten nur die Relationen $\tilde{x}_i^3 = 0$, für $i = 1, 2, 3$, und

$$\tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 + \tilde{x}_1 \tilde{x}_3^2 + \tilde{x}_2^2 \tilde{x}_3 + \tilde{x}_2 \tilde{x}_3^2 = 0.$$

Die Gruppe $H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z})$ ist frei abelsch und \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 und \tilde{x}_3 ist eine Basis von $H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z})$. Ferner gilt für die Bettizahlen von \tilde{E}

$$(b^i(\tilde{E}; \mathbb{K}))_{i=0}^{17} = (1, 0, 3, 0, 6, 0, 6, 0, 3, 3, 0, 6, 0, 6, 0, 3, 0, 1).$$

Beweis. Die Aussagen zu $H^2(\tilde{E}; \mathbb{Z})$ folgen daraus, dass $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ und $c_1(\tilde{E})$ eine Basis von $H^2(\bar{B}; \mathbb{Z})$ bilden.

Es sei $z := c_1(\tilde{E}) = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4$. Nach Lemma 3.8 gilt

$$H^{2k}(\tilde{E}; \mathbb{K}) = H^{2k}(\bar{B}; \mathbb{K}) / \text{Bild}(\mu_z^{2k-2}) \quad \text{und} \quad H^{2k+1}(\tilde{E}; \mathbb{K}) = \ker(\mu_z^{2k}) \otimes H^1(S^1; \mathbb{K}),$$

wobei $\mu_z^{2k-2} : H^{2k-2}(\bar{B}; \mathbb{K}) \rightarrow H^{2k}(\bar{B}; \mathbb{K})$ die Multiplikation mit z ist.

Die Produkte $\mu_z^2(\tilde{x}_i)$ liefern die Relationen $\tilde{x}_i \tilde{x}_4 = -(\tilde{x}_i \tilde{x}_1 + \tilde{x}_i \tilde{x}_2 + \tilde{x}_i \tilde{x}_3)$, die es erlauben alle Produkte, die \tilde{x}_4 enthalten, als Linearkombinationen von Produkten in \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 und \tilde{x}_3 zu schreiben. Die Relationen sind linear unabhängig, damit ist μ_z^2 also injektiv und $H^4(\bar{B}; \mathbb{K}) / \text{Bild}(\mu_z^2)$ hat als Basis die Restklassen von den Produkten aus $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, da es $6 = 10 - 4 = \dim H^4(\bar{B}; \mathbb{K}) / \text{Bild}(\mu_z^2)$ solcher Produkte gibt. Aufgrund der Injektivität von μ_z^2 ist $H^3(\tilde{E}; \mathbb{K}) = \{0\}$.

Die Produkte $\mu_z^4(\bar{x}_i \bar{x}_j)$ erlauben es wieder Produkte, die ein \tilde{x}_4 enthalten, als Linearkombinationen von Produkten von \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 und \tilde{x}_3 zu schreiben. Allerdings ist $\bar{x}_i^3 = 0$, weswegen wir eine weitere Relation erhalten. Diese ist

$$\begin{aligned} r &:= z \cdot \frac{1}{3}(\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_3 - \bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_2\bar{x}_3 - \bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_3^2 - \bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_4^2) \\ &= \bar{x}_1^2\bar{x}_2 + \bar{x}_1^2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2^2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_3^2 + \bar{x}_2^2\bar{x}_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3^2 \end{aligned}$$

Dann sind $\mu_z^4(\bar{x}_i \bar{x}_j)$, für $1 \leq i \leq j \leq 4$ und $(i, j) \neq (4, 4)$, und r linear unabhängig und somit μ_z^4 injektiv, also $H^5(\tilde{E}; \mathbb{K}) = \{0\}$.

Betrachte nun die folgenden Elemente

$$r_1 := \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3)r = \bar{x}_1^2\bar{x}_2^2 + \bar{x}_1^2\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2^2\bar{x}_3,$$

$$r_2 := \frac{1}{2}(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3)r = \bar{x}_1^2\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1^2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3^2,$$

und

$$r_3 := \frac{1}{2}(-\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)r = \bar{x}_1\bar{x}_2^2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_2^2\bar{x}_3^2.$$

Da $r \in \text{Bild}(\mu_z^4)$, gilt $r_1, r_2, r_3 \in \text{Bild}(\mu_z^6)$. Die Elemente

$$\mu_z^6(\bar{x}_i \bar{x}_j \bar{x}_k), \quad \text{mit } 1 \leq i \leq j \leq k \leq 4, \quad \text{nicht alle gleich und } i \neq 4 \neq j,$$

erlauben es, alle nichtverschwindenden Produkte der \tilde{x}_i , die \tilde{x}_4 enthalten, mit Linearkombinationen aus Produkten von \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 und \tilde{x}_3 zu identifizieren. Ferner bilden diese Elemente zusammen mit r_1, r_2 und r_3 eine linear unabhängige Teilmenge von $\text{Bild}(\mu_z^6)$ der Mächtigkeit $13 + 3 = 16 = \dim H^6(\bar{B}; \mathbb{K})$. Somit ist auch μ_z^6 injektiv, also $H^7(\tilde{E}; \mathbb{K}) = \{0\}$ und wir haben keine zusätzliche Relation erhalten. Die Aussage über die Bettizahlen folgt mit obiger Rechnung und Poincaré-Dualität. \square

Definition 9.2:

Es sei E_α das S^1 -Prinzipalbündel über $\tilde{B} := \tilde{E} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ mit erster Chernklasse

$$c_1(E_\alpha) = \tilde{x}_1 + \alpha \tilde{x}_3 + y,$$

wobei y ein Erzeuger des ganzzahligen Kohomologierings des $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -Faktors ist und $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Da \tilde{B} einfach zusammenhängend und $c_1(E_\alpha)$ kein Vielfaches einer anderen ganzzahligen Kohomologiekategorie ist, ist nach Lemma 3.2 auch E_α einfach zusammenhängend. Weiter sei $x_i = [\tilde{x}_i] \in H^2(E_\alpha; \mathbb{K}) = H^2(\tilde{B})/(\mathbb{K} \cdot c_1(E_\alpha))$ für $i = 1, 2, 3$ und $x_4 = [y] \in H^2(E_\alpha; \mathbb{K}) = H^2(\tilde{B})/(\mathbb{K} \cdot c_1(E_\alpha))$.

Lemma 9.3:

Es ist $H^{\leq 6}(E_\alpha; \mathbb{K})$ erzeugt von x_1, x_2, x_3 mit Relationen

$$x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2, x_1^2x_3 + \alpha x_1x_3^2.$$

Beweis. Das Lemma 3.8 lässt sich zwar nicht direkt auf unsere Situation anwenden, da jedoch die ungerade Kohomologie von \tilde{B} in kleinen Graden verschwindet, gilt die Aussage des Lemmas für diese Grade analog, mit gleichem Beweis.

Es sei $z := \tilde{x}_1 + \alpha \tilde{x}_3 + y$. Man sieht wie im Beweis von Lemma 9.1 leicht, dass für $k \leq 3$ die Kohomologiegruppe $H^{2k}(E_\alpha; \mathbb{K}) = H^{2k}(\tilde{B}; \mathbb{K})/\text{Bild}(\mu_z^{2k-2})$ erzeugt wird von den Produkten von x_1, x_2 und x_3 .

Wir betrachten nun zunächst μ_z^2 . Da das Bild von μ_z^2 die Elemente enthält, die x_1x_4, x_2x_4, x_3x_4 und x_4^2 mit Produkten aus x_1, x_2, x_3 identifizieren, und $\dim H^2(\tilde{B}; \mathbb{K}) = 4$ gilt, ist es vierdimensional. Es gibt also keine weiteren Relationen und da μ_z^2 damit injektiv ist, ist $H^3(E_\alpha; \mathbb{K}) = 0$.

Wir betrachten nun μ_z^4 . Zum einen enthält das Bild wieder die Elemente, die $\tilde{x}_1^2y, \tilde{x}_1\tilde{x}_2y, \tilde{x}_1\tilde{x}_3y, \tilde{x}_1y^2, \tilde{x}_2^2y, \tilde{x}_2\tilde{x}_3y, \tilde{x}_2y^2, \tilde{x}_3^2y$ und \tilde{x}_3y^2 mit Produkten aus $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ identifizieren, und zum anderen gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\mu_z^4) \ni z \cdot \left(\frac{\tilde{x}_1^2}{\alpha} + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_3 - \frac{\tilde{x}_1y}{\alpha} + \alpha\tilde{x}_3^2 - \tilde{x}_3y + \frac{y^2}{\alpha} \right) \\ = \tilde{x}_1^2\tilde{x}_3 + \frac{\tilde{x}_1^2y}{\alpha} + 2\tilde{x}_1^2\tilde{x}_3 + 2\alpha\tilde{x}_1\tilde{x}_3^2 + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_3y - \frac{\tilde{x}_1^2y}{\alpha} - \tilde{x}_1\tilde{x}_3y \\ - \frac{\tilde{x}_1y^2}{\alpha} + \alpha\tilde{x}_1\tilde{x}_3^2 + \alpha\tilde{x}_3^2y - \tilde{x}_1\tilde{x}_3y - \alpha\tilde{x}_3^2y + \frac{\tilde{x}_1y^2}{\alpha} + \tilde{x}_3y^2 \\ = 3(\tilde{x}_1^2\tilde{x}_3 + \alpha\tilde{x}_1\tilde{x}_3^2). \end{aligned}$$

Dies ist gerade die behauptete zusätzliche Relation. Damit ist das Bild von μ_z^4 mindestens zehndimensional, was die Dimension von $H^4(\tilde{B}; \mathbb{K})$ ist. Dies ist also die einzige zusätzliche Relation und μ_z^4 ist injektiv, also ist $H^5(E_\alpha; \mathbb{K}) = 0$. \square

Lemma 9.4:

Es seien $\alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Sind die Kohomologieringe $H^*(E_\alpha; \mathbb{K})$ und $H^*(E_{\tilde{\alpha}}; \mathbb{K})$ isomorph, so gilt $\tilde{\alpha} = \alpha$ oder $\tilde{\alpha} = 1 - \alpha$.

Insbesondere sind die Kohomologieringe der E_α , $\alpha \in \mathbb{N}_{>1}$, mit Koeffizienten in \mathbb{K} paarweise nichtisomorph.

Beweis. Es sei $\varphi : H^*(E_\alpha; \mathbb{K}) \rightarrow H^*(E_{\tilde{\alpha}}; \mathbb{K})$ ein Isomorphismus. Es sei $\varphi(x_i) = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3$. Dann gilt

$$0 = \frac{1}{3}\varphi(x_i)^3 = (a_i^2 b_i - b_i c_i^2)x_1^2 x_2 + (a_i b_i^2 - b_i c_i^2)x_1 x_2^2 + 2(a_i b_i c_i - b_i c_i^2)x_1 x_2 x_3 \\ + (a_i c_i^2 - b_i c_i^2 - \tilde{\alpha}(a_i^2 c_i - b_i c_i^2))x_1 x_3^2 + (b_i^2 c_i - b_i c_i^2)x_2^2 x_3$$

Da dies eine Basisdarstellung ist, müssen die einzelnen Koeffizienten verschwinden. Hieraus folgt, dass

$$\varphi(x_i) = a_i x_1, \quad \varphi(x_i) = b_i x_2, \quad \varphi(x_i) = c_i x_3, \quad \varphi(x_i) = b_i(x_1 + x_2 + x_3) \\ \text{oder } \varphi(x_i) = a_i x_1 + \tilde{\alpha} a_i x_3,$$

jeweils mit a_i, b_i bzw. $c_i \neq 0$ gilt.

Weiter gilt

$$(1) \quad 0 = \varphi(x_1^2 x_3 + \alpha x_1 x_3^2) = \varphi(x_1)^2 \varphi(x_3) + \alpha \varphi(x_1) \varphi(x_3)^2.$$

Angenommen es ist $\varphi(x_1) = b_1 x_2$. Dann muss $\varphi(x_3) = b_3(x_1 + x_2 + x_3)$ gelten, denn sonst enthielte $\varphi(x_1)^2 \varphi(x_3)$ einen nichtverschwindenden Term mit x_2^2 , aber $\alpha \varphi(x_1) \varphi(x_3)^2$ nicht. Aus der Basisdarstellung obiger Gleichung folgt dann, dass $0 = \alpha \tilde{\alpha} b_1 b_3^2$ und damit $b_1 = 0$ oder $b_3 = 0$ gilt, ein Widerspruch. Analog führen $\varphi(x_1) = b_1(x_1 + x_2 + x_3)$, $\varphi(x_3) = b_3 x_2$ und $\varphi(x_3) = b_3(x_1 + x_2 + x_3)$ zu Widersprüchen.

Somit hat die darstellende Matrix von $\varphi|_{\mathbb{H}^2(E_\alpha; \mathbb{K})}$ eine der folgenden Formen:

$$\begin{aligned} \text{(A)} : & \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}, & \text{(B)} : & \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & \tilde{\alpha}a_3 \end{pmatrix}, & \text{(C)} : & \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ 0 & ? & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{(D)} : & \begin{pmatrix} 0 & a_3 \\ 0 & ? & 0 \\ c_1 & \tilde{\alpha}a_3 \end{pmatrix}, & \text{(E)} : & \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 0 & ? & 0 \\ \tilde{\alpha}a_1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{(F)} : & \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ \tilde{\alpha}a_1 & c_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Einsetzen der verschiedenen Fälle in (1) liefert folgende Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} \text{(A)} : c_3 &= \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}a_1, & \text{(B)} : a_1 &= -\alpha a_3, & \text{(C)} : c_1 &= \alpha \tilde{\alpha}a_3, \\ \text{(D)} : c_1 &= -\alpha \tilde{\alpha}a_3, & \text{(E)} : a_1 &= -\alpha a_3, & \text{(F)} : a_1 &= -\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}c_3. \end{aligned}$$

Da $\varphi(x_1)$ und $\varphi(x_3)$ in jedem Fall $\text{span}\{x_1, x_3\}$ erzeugen, muss $\varphi(x_2) = b_2x_2$ oder $\varphi(x_2) = b_2(x_1 + x_2 + x_3)$ gelten. Wir wollen den entsprechenden Fall dann (A1), ..., (F1) bzw. (A2), ..., (F2) nennen.

Nun können wir

$$(2) \quad \varphi(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + 2x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) = 0$$

benutzen um in den Fällen (A1), ..., (F2) Bedingungen an α und $\tilde{\alpha}$ zu finden. Mit Koeffizient ist im Folgenden stets der Koeffizient von $\varphi(x_1^2x_2 + \dots + x_2x_3^2)$ bezüglich der Basis $x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_1x_3^2, x_2^2x_3$ gemeint. Wegen (2) müssen diese alle verschwinden.

(A1): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist $2(a_1b_2c_3 - b_2c_3^2) = 2b_2c_3(a_1 - c_3)$. Mit $c_3 = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}a_1$ folgt also $\tilde{\alpha} = \alpha$.

(A2): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist

$$\begin{aligned} 2(a_1b_2c_3 + a_1b_2^2 - b_2^2c_3 - b_2c_3^2) &= 2a_1b_2\left(\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}a_1 + b_2 - \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}b_2 - \frac{\tilde{\alpha}^2}{\alpha^2}a_1\right) \\ &= 2a_1b_2\frac{\tilde{\alpha} - \alpha}{\alpha^2}(a_1\tilde{\alpha} + \alpha b_2). \end{aligned}$$

Es ist also $\tilde{\alpha} = \alpha$ oder $b_2 = -\frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}a_1$. Im ersten Fall sind wir fertig und im zweiten Fall betrachten wir den Koeffizienten von $x_1x_2^2$:

$$a_1b_2^2 - 2b_2^2c_3 - b_2c_3^2 = a_1^3\left(\frac{\tilde{\alpha}^2}{\alpha^2} - 2\frac{\tilde{\alpha}^3}{\alpha^3} + \frac{\tilde{\alpha}^3}{\alpha^3}\right) = a_1^3\frac{\tilde{\alpha}^2}{\alpha^3}(\alpha - \tilde{\alpha}),$$

es gilt also $\tilde{\alpha} = \alpha$.

(B1): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist hier

$$2(\tilde{\alpha}a_1b_2a_3 + \tilde{\alpha}a_3^2b_2 - \tilde{\alpha}^2a_3^2b_2) = 2a_3^2b_2(-\alpha\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^2) = 2a_3^2b_2(-\alpha + 1 - \tilde{\alpha}),$$

wobei wir $a_1 = -\alpha a_3$ benutzt haben. Es gilt somit $\tilde{\alpha} = 1 - \alpha$.

(B2): Der Koeffizient von $x_2^2x_3$ ist

$$-\tilde{\alpha}a_3b_2^2 - \tilde{\alpha}^2a_3^2b_2 = -\tilde{\alpha}a_3b_2(b_2 + \tilde{\alpha}a_3).$$

Es ist also $b_2 = -\tilde{\alpha}a_3$. Der Koeffizient von $x_1x_2^2$ ist

$$a_1b_2^2 + a_3b_2^2 - 2\tilde{\alpha}a_3b_2^2 - \tilde{\alpha}^2a_3^2b_2 = a_3^3(-\alpha\tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha}^2 - 2\tilde{\alpha}^3 + \tilde{\alpha}^3).$$

Wieder gilt also $\tilde{\alpha} = 1 - \alpha$.

(C1): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist

$$2(a_3b_2c_1 - b_2c_1^2) = 2a_2^2b_2\alpha\tilde{\alpha}(-1 - \alpha\tilde{\alpha}),$$

wobei wir $c_1 = -\alpha\tilde{\alpha}a_3$ verwandt haben. Es gilt also $\tilde{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$, ein Widerspruch zu unseren Voraussetzungen.

(C2): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist

$$\begin{aligned} 2(a_3b_2c_1 + a_3b_2^2 - b_2^2c_1 - b_2c_1^2) &= 2a_3b_2(-\alpha\tilde{\alpha}a_3 + b_2 + \alpha\tilde{\alpha}b_2 - \alpha^2\tilde{\alpha}^2a_3) \\ &= 2a_3b_2(1 + \alpha\tilde{\alpha})(b_2 - \alpha\tilde{\alpha}a_3) \end{aligned}$$

Es gilt also $b_2 = \alpha\tilde{\alpha}a_3$. Der Koeffizient von $x_1x_2^2$ ist

$$\begin{aligned} a_3b_2^2 - 2b_2^2c_1 - b_2c_1^2 &= a_3^3(\alpha^2\tilde{\alpha}^2 + 2\alpha^3\tilde{\alpha}^3 - \alpha^3\tilde{\alpha}^3) \\ &= a_3^3\alpha^2\tilde{\alpha}^2(1 + \alpha\tilde{\alpha}), \end{aligned}$$

erneut ein Widerspruch!

(D1): Der Koeffizient von $x_1^2x_2$ ist

$$\begin{aligned} a_3^2b_2 - b_2c_1^2 - 2\tilde{\alpha}a_3b_2c_1 - \tilde{\alpha}^2a_3^2b_2 &= a_3^2b_2(1 - \alpha^2\tilde{\alpha}^2 + 2\alpha\tilde{\alpha}^2 - \tilde{\alpha}^2) \\ &= a_3^2b_2\left(1 - (1 - \alpha)^2\tilde{\alpha}^2\right) \end{aligned}$$

wobei wir $c_1 = -\alpha\tilde{\alpha}a_3$ verwandt haben. Es gilt also $\tilde{\alpha} = \pm\frac{1}{1-\alpha}$, ein Widerspruch!

(D2): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist

$$\begin{aligned}
 & 2(a_3b_2^2 + a_3b_2c_1 - b_2^2c_1 - b_2c_1^2 + \tilde{\alpha}a_3^2b_2 - \tilde{\alpha}a_3b_2^2 - 2\tilde{\alpha}a_3b_2c_1 - \tilde{\alpha}^2a_3^2b_2) \\
 &= 2a_3b_2(b_2 - \alpha\tilde{\alpha}a_3 + \alpha\tilde{\alpha}b_2 - \alpha^2\tilde{\alpha}^2a_3 + \tilde{\alpha}a_3 - \tilde{\alpha}b_2 + 2\alpha\tilde{\alpha}^2a_3 - \tilde{\alpha}^2a_3) \\
 &= 2a_3b_2(b_2(1 + \alpha\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}) - \tilde{\alpha}a_3(\alpha + \alpha^2\tilde{\alpha} - 1 - 2\alpha\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha})) \\
 &= 2a_3b_2(b_2(1 + \alpha\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}) - \tilde{\alpha}a_3(\alpha - 1 + \alpha^2\tilde{\alpha} - \alpha\tilde{\alpha} - (\alpha\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}))) \\
 &= 2a_3b_2(1 + \tilde{\alpha}(1 - \alpha))(b_2 - \tilde{\alpha}(\alpha - 1)a_3)
 \end{aligned}$$

Damit ist $b_2 = \tilde{\alpha}(\alpha - 1)a_3$. Der Koeffizient von $x_1^2x_2$ ist

$$\begin{aligned}
 & a_3^2b_2 + 2a_3b_2^2 - 2b_2^2c_1 - b_2c_1^2 - 2\tilde{\alpha}a_3b_2^2 - 2\tilde{\alpha}a_3b_2c_1 - \tilde{\alpha}^2a_3^2b_2 \\
 &= a_3^3(\tilde{\alpha}(\alpha - 1) + 2\tilde{\alpha}^2(\alpha - 1)^2 + 2\tilde{\alpha}^3\alpha(\alpha - 1)^2 - \tilde{\alpha}^3\alpha^2(\alpha - 1) \\
 &\quad - 2\tilde{\alpha}^3(\alpha - 1)^2 + 2\tilde{\alpha}^3\alpha(\alpha - 1) - \tilde{\alpha}^3(\alpha - 1)) \\
 &= a_3^3\tilde{\alpha}(\alpha - 1)(1 + 2\tilde{\alpha}(\alpha - 1) + 2\tilde{\alpha}^2\alpha(\alpha - 1) - \tilde{\alpha}^2\alpha^2 \\
 &\quad - 2\tilde{\alpha}^2(\alpha - 1) + 2\tilde{\alpha}^2\alpha - \tilde{\alpha}^2) \\
 &= a_3^3\tilde{\alpha}(\alpha - 1)(1 + (\alpha - 1)(2\tilde{\alpha} + 2\tilde{\alpha}^2\alpha - 2\tilde{\alpha}^2) - \tilde{\alpha}^2(\alpha^2 - 2\alpha + 1)) \\
 &= a_3^3\tilde{\alpha}(\alpha - 1)(1 + 2\tilde{\alpha}(\alpha - 1)(1 + \tilde{\alpha}(\alpha - 1)) - \tilde{\alpha}^2(\alpha - 1)^2) \\
 &= a_3^3\tilde{\alpha}(\alpha - 1)(1 + 2\tilde{\alpha}(\alpha - 1) + \tilde{\alpha}^2(\alpha - 1)^2) \\
 &= a_3^3\tilde{\alpha}(\alpha - 1)(1 + \tilde{\alpha}(\alpha - 1))^2 \\
 &\neq 0,
 \end{aligned}$$

ein Widerspruch!

(E1): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist

$$\begin{aligned}
 2(\tilde{\alpha}a_1^2b_2 + \tilde{\alpha}a_1a_3b_2 - \tilde{\alpha}^2a_1^2b_2) &= 2\tilde{\alpha}a_3^2b_2(\alpha^2 - \alpha - \tilde{\alpha}\alpha^2) \\
 &= 2\alpha\tilde{\alpha}(-1 + \alpha(1 - \tilde{\alpha}))
 \end{aligned}$$

wobei wir $a_1 = -\alpha a_3$ benutzt haben. Es ist also $\alpha = \frac{1}{1-\tilde{\alpha}}$, ein Widerspruch!

(E2): Der Koeffizient von $x_2^2x_3$ ist

$$-\tilde{\alpha}a_1b_2^2 - \tilde{\alpha}^2a_1^2b_2 = -\tilde{\alpha}a_1b_2(b_2 + \tilde{\alpha}a_1),$$

also $b_2 = -\tilde{\alpha}a_1 = \alpha\tilde{\alpha}a_3$. Der Koeffizient von $x_1x_2^2$ ist

$$\begin{aligned}
 a_1b_2^2 + a_3b_2^2 - 2\tilde{\alpha}a_1b_2^2 - \tilde{\alpha}^2a_1^2b_2 &= a_3^3(-\alpha^3\tilde{\alpha}^2 + \alpha^2\tilde{\alpha}^2 + 2\alpha^3\tilde{\alpha}^3 - \alpha^3\tilde{\alpha}^3) \\
 &= a_3^3\alpha^2\tilde{\alpha}^2(1 + \alpha(\tilde{\alpha} - 1)) \neq 0,
 \end{aligned}$$

ein Widerspruch!

(F1): Der Koeffizient von $x_1x_2x_3$ ist

$$\begin{aligned}
 & 2(a_1b_2c_3 - b_2c_3^2 + \tilde{\alpha}a_1^2b_2 - 2\tilde{\alpha}a_1b_2c_3 - \tilde{\alpha}^2a_1^2b_2) \\
 &= 2b_2c_3^2\left(-\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}} - 1 + \frac{\alpha^2}{\tilde{\alpha}} + 2\alpha - \alpha^2\right) \\
 &= 2\frac{b_2c_3^2}{\tilde{\alpha}}(-\alpha - \tilde{\alpha} + \alpha^2 + 2\alpha\tilde{\alpha} - \alpha^2\tilde{\alpha}) \\
 &= 2\frac{b_2c_3^2}{\tilde{\alpha}}(\alpha\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} + \alpha^2 - \alpha + \alpha\tilde{\alpha} - \alpha^2\tilde{\alpha}) \\
 &= 2\frac{b_2c_3^2}{\tilde{\alpha}}(\alpha - 1)(\tilde{\alpha} + \alpha - \alpha\tilde{\alpha})
 \end{aligned}$$

wobei wir $a_1 = -\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}c_3$ verwendet haben. Es gilt also $0 = \tilde{\alpha} + \alpha - \alpha\tilde{\alpha}$ und somit $\alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}-1}$. Unter den Voraussetzungen folgt hieraus $\alpha = \tilde{\alpha} = 2$.

(F2): Der Koeffizient von $x_2^2x_3$ ist

$$\begin{aligned}
 -b_2^2c_3 - b_2c_3^2 - \tilde{\alpha}a_1b_2^2 - 2\tilde{\alpha}a_1b_2c_3 - \tilde{\alpha}^2a_1^2b_2 &= b_2c_3(-b_2 - c_3 + \alpha b_2 + 2\alpha c_3 - \alpha^2c_3) \\
 &= b_2c_3(\alpha - 1)(b_2 - (\alpha - 1)c_3).
 \end{aligned}$$

Es ist also $b_2 = (\alpha - 1)c_3$. Der Koeffizient von $x_1x_2^2$ ist

$$\begin{aligned}
 & a_1b_2^2 - 2b_2^2c_3 - b_2c_3^2 - 2\tilde{\alpha}a_1b_2^2 - 2\tilde{\alpha}a_1b_2c_3 - \tilde{\alpha}^2a_1^2b_2 \\
 &= c_3^3\left(-\frac{\alpha}{\tilde{\alpha}}(\alpha - 1)^2 - 2(\alpha - 1)^2 - (\alpha - 1) + 2\alpha(\alpha - 1)^2 + 2\alpha(\alpha - 1) - \alpha^2(\alpha - 1)\right) \\
 &= c_3^3\frac{\alpha - 1}{\tilde{\alpha}}(-\alpha(\alpha - 1) - 2\tilde{\alpha}(\alpha - 1) - \tilde{\alpha} + 2\alpha\tilde{\alpha}(\alpha - 1) + 2\alpha\tilde{\alpha} - \alpha^2\tilde{\alpha}) \\
 &= c_3^3\frac{(\alpha - 1)^2}{\tilde{\alpha}}(-\alpha - 2\tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} + 2\alpha\tilde{\alpha} - \alpha\tilde{\alpha}) \\
 &= c_3^3\frac{(\alpha - 1)^2}{\tilde{\alpha}}(\alpha\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} - \alpha).
 \end{aligned}$$

Es ist also $0 = \alpha\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha} - \alpha$ und somit wie oben $\tilde{\alpha} = \alpha = 2$. □

9.2. Metriken auf den 22-dimensionalen Beispielen

9.2.1. Die Torusbündel als homogene Räume

Es ist E_α ein T^2 -Prinzipalbündel über $B := (\mathbb{C}\mathbb{P}^2)^5$ (Die S^1 -Wirkung auf $\tilde{E} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ lässt sich auf E_α hochheben, siehe [HY76] und [Su63]). Da $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2)^5$ ein homogener

Raum von $\tilde{G} := \text{SU}(3)^5$ ist, lässt sich die Wirkung von \tilde{G} nach [Ste61, Theorem 4.1] zu einer mit der T^2 -Wirkung kommutierenden Wirkung auf E_α hochheben, und wir erhalten, dass E_α ein homogener Raum von $G := \tilde{G} \times \text{T}^2$ ist. Im Folgenden wollen wir die Struktur als homogener Raum genauer untersuchen und eine Familie homogener Metriken auf E_α definieren.

Es seien $K, H_1 < G$ die durch $K = (\text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2)))^5 \times \text{T}^2$ und $H_1 = (\text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2)))^5 \times \{1\}$ definierten Lieuntergruppen von G und $\pi : E_\alpha \rightarrow B = G/K$.

Es sei $H = \text{S}(\text{U}(1) \times \text{U}(2))^5 \cong \text{U}(2)^5$ und für einen Homomorphismus $\rho : H \rightarrow \text{T}^2$ sei $H_\rho := \{(h, \rho(h)) \mid h \in H\} < K$.

Lemma 9.5:

Der Stabilisator von $x \in E_\alpha$ hat die Form

$$G_x = \left\{ (g, \varphi(g)) \mid g \in \tilde{G}_{\pi(x)} \right\}$$

für einen Liegruppenhomomorphismus $\varphi : \tilde{G}_{\pi(x)} \rightarrow \text{T}^2$.

Insbesondere gilt $E_\alpha \cong G/H_\rho$ für eine der oben definierten Gruppen H_ρ .

Beweis. Ist $g \in \tilde{G}_{\pi(x)}$, so ist $\pi(x) = g\pi(x) = \pi(gx)$. Es existiert also ein $\varphi(g) = t \in \text{T}^2$ mit $x = tgx = gx = (g, t)x$. Da die Wirkungen kommutieren, ist φ ein Homomorphismus. Da Stabilisatoren abgeschlossen sind, ist φ stetig und damit auch differenzierbar. \square

Im Folgenden sei stets $\rho : H \rightarrow \text{T}^2$ ein Homomorphismus, so dass $E_\alpha = G/H_\rho$ gilt.

9.2.2. Homogene Metriken

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die biinvariante Produktmetrik bezüglich biinvarianter Metriken auf \tilde{G} und T^2 , konkret definiert durch

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^5 (-\text{Spur}(X_i Y_i)) + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

für $X = (X_1, \dots, X_5, (a_1, a_2))$, $Y = (Y_1, \dots, Y_5, (b_1, b_2)) \in \mathfrak{g} = (\bigoplus_{i=1}^5 \mathfrak{su}(3)) \oplus \mathfrak{t}^2$.

Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{k} = \mathfrak{h}_\rho \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho}$, wobei die Zerlegungen orthogonal bezüglich der oben gewählten biinvarianten Metrik auf G seien. Wir erhalten für alle $t > 0$ dann

eine linksinvariante Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ auf G , indem wir für $X, Y \in \mathfrak{g}$ setzen

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle X_{\mathfrak{m}_1}, Y_{\mathfrak{m}_1} \rangle + t^2 \langle X_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}, Y_{\mathfrak{m}_{2,\rho}} \rangle + t^2 \langle X_{\mathfrak{h}_\rho}, Y_{\mathfrak{h}_\rho} \rangle,$$

wobei die Indizes jeweils die (bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$) orthogonale Projektion auf den entsprechenden Teilraum bezeichnen. Da die Teilräume invariant unter Ad_{H_ρ} sind, induziert $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ eine Metrik auf $E_\alpha = G/H_\rho$. Da H_ρ ein Normalteiler von K ist, ist die Zerlegung auch Ad_K -invariant. Damit induziert $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ Metriken auf E_α und B , die wir mit g_t bezeichnen wollen, so dass $\pi : E_\alpha \rightarrow B$ eine Riemannsche Submersion ist. Ferner ist die Metrik auf B unabhängig vom Parameter t .

9.2.3. Zusammenhangsformen und -metriken

Im Folgenden seien für $g \in G$ und $t \in \mathbb{T}^2$ mit L_g und R_t die Links- bzw. Rechtswirkung auf E_α und mit l_g und r_g die Links bzw. Rechtsmultiplikation auf G bezeichnet.

Es ist $\iota := \iota_g := (p \circ l_g)_{*e}|_{\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho}} =: \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho} \rightarrow \text{T}_{gH_\rho} E_\alpha$ ein Isomorphismus, wobei $p : G \rightarrow G/H_\rho$ die kanonische Projektion ist und $L_g \circ p = p \circ l_g$ gilt. Im folgenden wollen wir diesen Isomorphismus nutzen um die Tangentialräume an E_α mit $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho}$ zu identifizieren. Der Vertikalraum wird dann identifiziert mit $\mathfrak{m}_{2,\rho}$, denn $\pi \circ p$ ist die kanonische Projektion $G \rightarrow G/K$.

Als Horizontalraum können wir $\mathfrak{m}_1 \cong (p \circ l_g)_{*e} \mathfrak{m}_1 =: \mathcal{H}_{gH_\rho}$ wählen, denn es gilt

$$R_{t*} \mathcal{H}_{gH_\rho} = (R_t \circ p \circ l_g)_{*e} \mathfrak{m}_1 = (p \circ r_{(e,t)} \circ l_g)_{*e} \mathfrak{m}_1 = (p \circ l_{g(e,t)})_{*e} \mathfrak{m}_1 = \mathcal{H}_{R_t(gH_\rho)}.$$

Mit ρ_*^* sei die adjungierte Abbildung von $\rho_* : \mathfrak{su}(1) \times \mathfrak{u}(4)^5 \rightarrow \mathfrak{t}^2$ bezüglich der Einschränkungen der Metrik g bezeichnet.

Lemma 9.6: (a) $\mathfrak{m}_{2,\rho} = \{(-\rho_*^* v, v) \mid v \in \mathfrak{t}^2\}$.

(b) $\iota(-\rho_*^* v, v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (gH_\rho \cdot \exp(t(v + \rho_* \rho_*^* v)))$ für alle $v \in \mathfrak{t}^2$.

Beweis. Zu (a): Für $v \in \mathfrak{t}^2$ gilt $(-\rho_*^* v, v) \in \mathfrak{k}$ und ferner

$$g((-\rho_*^* v, v), (X, \rho_* X)) = \langle -\rho_*^* v, X \rangle_{\tilde{G}} + \langle \rho_* X, v \rangle_{\mathbb{T}^2} = \langle -v, \rho_* X \rangle_{\mathbb{T}^2} + \langle \rho_* X, v \rangle_{\mathbb{T}^2} = 0.$$

Somit ist $(-\rho_*^* v, v) \in \mathfrak{m}_{2,\rho}$ und die Aussage folgt wegen Dimensionsgleichheit.

Zu (b):

$$\begin{aligned}
 \iota_g(-\rho_*^*v, v) &= (p \circ l_g)_*(-\rho_*^*v, v) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \exp(-\rho_*^*v, v) H_\rho) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \exp(-\rho_*^*v, v) \exp(\rho_*^*v, \rho_*\rho_*^*v) H_\rho) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \exp(0, v + \rho_*\rho_*^*v) H_\rho) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g(1, \exp(v + \rho_*\rho_*^*v)) H_\rho) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g H_\rho \exp(v + \rho_*\rho_*^*v))
 \end{aligned}$$

□

Nach [KN63, Proposition 3.1] wird damit durch

$$\gamma : \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho} \rightarrow \mathfrak{t}^2, \quad X + (-\rho_*^*v, v) \mapsto v + \rho_*\rho_*^*v$$

eine Zusammenhangsform auf E_α definiert.

Wir definieren nun eine neue biinvariante Metrik b auf \mathbb{T}^2 durch $b = (\gamma|_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}^{-1})^* \langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Zusammenhangsmetrik bezüglich γ , t^2b und der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf G/K induzierten Metrik ist dann gerade die Metrik g_t .

Wir haben also gezeigt

Lemma 9.7:

Die Metriken g_t sind Zusammenhangsmetriken bezüglich dem Produkt der Fubini-Study Metriken auf B und einer mit t^2 skalierten biinvarianten Metrik b auf \mathbb{T}^2 .

9.3. Krümmung der Metriken

Lemma 9.8:

Das Bild von ρ_^* ist in einer abelschen Unterliealgebra von \mathfrak{h} enthalten.*

Beweis. Der Homomorphismus $\rho : H \rightarrow \mathbb{T}^2$ lässt sich schreiben als $\rho(A_1, \dots, A_5) = \rho_1(A_1) \cdot \dots \cdot \rho_5(A_5)$ für Homomorphismen $\rho_i : S(U(1) \times U(2)) \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Weiter ist $S(U(1) \times U(2)) \cong U(2) \cong SU(2) \times U(1)$, wobei

$$U(1) = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & \\ & e^{i\varphi} \\ & & 1 \end{pmatrix} \middle| \varphi \in \mathbb{R} \right\} \subset U(2) \cong S(U(1) \times U(2)) \subset SU(3).$$

Da $SU(2)$ einfach ist, gilt $\rho_i|_{SU(2)} = 1$ und somit $\rho_{i^*}|_{\mathfrak{su}(2)} = 0$. Damit ist

$$\text{Bild}(\rho_{i^*}) \subset \ker(\rho_{i^*})^\perp \subset (\mathfrak{su}(2)^5)^\perp \subset (\mathfrak{su}(2)^\perp)^5 = \left(\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2i & \\ & i \\ & & i \end{pmatrix} \right)^5,$$

was eine abelsche Unterliealgebra ist. □

Für $r > 0$ sei $f_r : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $X_{\mathfrak{m}_1} + X_{\mathfrak{m}_{2,\rho}} + X_{\mathfrak{h}_\rho} \mapsto X_{\mathfrak{m}_1} + rX_{\mathfrak{m}_{2,\rho}} + rX_{\mathfrak{h}_\rho}$.

Lemma 9.9:

Es sei $X \in \mathfrak{g}$. Es gilt:

- (a) $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_{2,\rho}] \subseteq [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{m}_1$ und $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subseteq \mathfrak{k}$
- (b) $[\mathfrak{m}_{2,\rho}, \mathfrak{m}_{2,\rho}] = \{0\}$ und $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subseteq \mathfrak{k}$.
- (c) $\text{ad}_X^{*t} = f_{\frac{1}{t^2}} \circ \text{ad}_X^* \circ f_{t^2}$

Beweis. Zu (a): Es ist \mathfrak{m}_1 orthogonales Komplement von \mathfrak{k} bezüglich einer biinvarianten Metrik und \mathfrak{k} eine Unterliealgebra von \mathfrak{g} .

Zu (b): Ist $\tilde{\mathfrak{m}}_1$ ein orthogonales Komplement von $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(2))$ in $\mathfrak{su}(3)$, so ist $[\tilde{\mathfrak{m}}_1, \tilde{\mathfrak{m}}_1] \subseteq \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \times \mathfrak{u}(2))$ (siehe z.B. [Pet06, S. 248ff]), denn an der Darstellung $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 = SU(3)/S(U(1) \times U(2))$ lässt sich ablesen, dass $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ein symmetrischer Raum ist. Hieraus folgt wegen $\mathfrak{m}_1 = \tilde{\mathfrak{m}}_1^5 \times \{0\}$ sofort, dass $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subseteq \mathfrak{k}$. Sind $X = (\rho_{i^*}^* v, v)$, $Y = (\rho_{i^*}^* w, w) \in \mathfrak{m}_{2,\rho}$, so ist $[X, Y] = ([\rho_{i^*}^* v, \rho_{i^*}^* w], [v, w]) = (0, 0)$, da \mathfrak{t}^2 abelsch ist, und $\text{Bild}(\rho_{i^*}^*)$ in einer abelschen Unterliealgebra enthalten ist.

Zu (c): Es ist für $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \langle \text{ad}_X^{*t} Y, Z \rangle_t &= \langle Y, [X, Z] \rangle_t \\ &= \langle Y_{\mathfrak{m}_1}, [X, Z] \rangle + t^2 \langle Y_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}, [X, Z] \rangle + t^2 \langle Y_{\mathfrak{h}_\rho}, [X, Z] \rangle \\ &= \langle f_{t^2}(Y), [X, Z] \rangle \\ &= \langle \text{ad}_X^*(f_{t^2}(Y)), Z \rangle = \langle f_{1/t^2}(\text{ad}_X^*(f_{t^2}(Y))), Z \rangle_t. \end{aligned} \quad \square$$

Es seien $X^t = X_1 + \frac{1}{t}X_2$ und $Y^t = Y_1 + \frac{1}{t}Y_2$ orthonormal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_t$ mit $X_1, Y_1 \in \mathfrak{m}_1$ und $X_2, Y_2 \in \mathfrak{m}_{2,\rho}$.

Für die Schnittkrümmung eines homogenen Raums gilt die folgende Formel (siehe [CE75, Formel (3.32)]):

$$(9.1) \quad \sec_{g_t}(p_*X^t, p_*Y^t) = \|\mathrm{ad}_{X^t}^{*t} Y^t + \mathrm{ad}_{Y^t}^{*t} X^t\|_t^2 - \langle \mathrm{ad}_{X^t}^{*t} X^t, \mathrm{ad}_{Y^t}^{*t} Y^t \rangle \\ - \frac{3}{4} \|[X^t, Y^t]_{\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho}}\|_t^2 \\ - \frac{1}{2} (\langle [[X^t, Y^t], Y^t], X^t \rangle_t + \langle [[Y^t, X^t], X^t], Y^t \rangle_t).$$

Für die darin auftretenden Terme gilt

Lemma 9.10:

Es ist

$$(a) \quad \|\mathrm{ad}_{X^t}^{*t} Y^t + \mathrm{ad}_{Y^t}^{*t} X^t\|_t^2 \\ = (t - \frac{1}{t})^2 (\|[X_1, Y_2]\|^2 + \|[X_2, Y_1]\|^2 - 2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle) \\ (b) \quad \langle \mathrm{ad}_{X^t}^{*t} X^t, \mathrm{ad}_{Y^t}^{*t} Y^t \rangle_t = -(t - \frac{1}{t})^2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \\ (c) \quad \|[X^t, Y^t]_{\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho}}\|_t^2 \\ = t^2 \|[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 \\ + \frac{1}{t^2} (\|[X_1, Y_2]\|^2 + \|[X_2, Y_1]\|^2 + 2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle) \\ (d) \quad -\frac{1}{2} (\langle [[X^t, Y^t], Y^t], X^t \rangle_t + \langle [[Y^t, X^t], X^t], Y^t \rangle_t) \\ = \|[X_1, Y_1]\|^2 \\ + \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{2} (\|[X_1, Y_2]\|^2 + \|[X_2, Y_1]\|^2 + 2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle)$$

Beweis. Zu (a): Es ist

$$\mathrm{ad}_{X^t}^{*t} Y^t = \mathrm{ad}_{X_1}^{*t} Y^t + \frac{1}{t} \mathrm{ad}_{X_2}^{*t} Y^t \\ = \mathrm{ad}_{X_1}^{*t} Y_1 + \frac{1}{t} \mathrm{ad}_{X_1}^{*t} Y_2 + \frac{1}{t} \mathrm{ad}_{X_2}^{*t} Y_1 + \frac{1}{t^2} \mathrm{ad}_{X_2}^{*t} Y_2 \\ = -\left(\frac{1}{t}[X_1, Y_1] + t[X_1, Y_2] + \frac{1}{t}[X_2, Y_1] + 0\right)$$

und somit

$$\mathrm{ad}_{X^t}^{*t} Y^t + \mathrm{ad}_{Y^t}^{*t} X^t = -\left((t - \frac{1}{t})[X_1, Y_2] + \left(\frac{1}{t} - t\right)[X_2, Y_1]\right) \in \mathfrak{m}_1,$$

woraus durch Bilden der Norm die Behauptung folgt.

Zu (b): Wie in (a) ist

$$\mathrm{ad}_{X^t}^{*t} X^t = -\left(\frac{1}{t}[X_1, X_1] + t[X_1, X_2] + \frac{1}{t}[X_2, X_1]\right) = -(t - \frac{1}{t})[X_1, X_2] \in \mathfrak{m}_1,$$

also

$$\langle \text{ad}_{X^t}^* X^t, \text{ad}_{Y^t}^* Y^t \rangle_t = (t - \frac{1}{t})^2 \langle [X_1, X_2], [Y_1, Y_2] \rangle = -(t - \frac{1}{t})^2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle,$$

da

$$\begin{aligned} \langle [X_1, X_2], [Y_1, Y_2] \rangle &= \langle X_1, [X_2, [Y_1, Y_2]] \rangle \\ &= -\langle X_1, [Y_2, [X_2, Y_1]] \rangle - \langle X_1, [Y_1, [Y_2, X_2]] \rangle \\ &= -\langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle - 0. \end{aligned}$$

Zu (c): Folgt aus

$$[X^t, Y^t] = \underbrace{[X_1, Y_1]}_{\in \mathfrak{t} = \mathfrak{m}_{2,\rho} \oplus \mathfrak{h}_\rho} + \frac{1}{t} \underbrace{([X_1, Y_2] + [X_2, Y_1])}_{\in \mathfrak{m}_1}$$

Zu (d): Es ist

$$\begin{aligned} [[X^t, Y^t], Y^t] &= \underbrace{[[X_1, Y_1], Y_1]}_{\in \mathfrak{m}_1} + \frac{1}{t} \underbrace{[[X_1, Y_1], Y_2]}_{\in \mathfrak{t}} + \frac{1}{t} \underbrace{([[X_1, Y_2], Y_1] + [[X_2, Y_1], Y_1])}_{\in \mathfrak{t}} \\ &\quad + \frac{1}{t^2} \underbrace{([[X_1, Y_2], Y_2] + [[X_2, Y_1], Y_2])}_{\in \mathfrak{m}_1} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle [[X^t, Y^t], Y^t], X^t \rangle_t &= \langle [[X_1, Y_1], Y_1], X_1 \rangle + \langle [[X_1, Y_1], Y_2], X_2 \rangle \\ &\quad + \langle [[X_1, Y_2], Y_1] + [[X_2, Y_1], Y_1], X_2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{t^2} \langle [[X_1, Y_2], Y_2] + [[X_2, Y_1], Y_2], X_1 \rangle \\ &= -\| [X_1, Y_1] \|^2 - \langle [X_1, Y_1], [X_2, Y_2] \rangle \\ &\quad - \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle - \| [X_2, Y_1] \|^2 \\ &\quad - \frac{1}{t^2} \| [X_1, Y_2] \|^2 - \frac{1}{t^2} \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \\ &= -\| [X_1, Y_1] \|^2 - \| [X_2, Y_1] \|^2 - \frac{1}{t^2} \| [X_1, Y_2] \|^2 \\ &\quad - (1 + \frac{1}{t^2}) \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Hieraus folgt nun

Proposition 9.11:

Für die Krümmung von (E_α, g_t) gilt

$$\begin{aligned} \sec_{g_t}(p_*X^t, p_*Y^t) &= \|[X_1, Y_1]\|^2 - \frac{3}{4}t^2 \|[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 \\ &\quad + \left(t^2 + \frac{3}{4t^2} - \frac{3}{2}\right) \|[X_1, Y_2] - [X_2, Y_1]\|^2 \\ &\quad + t^2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \end{aligned}$$

und (E_α, g_t) hat nichtnegative Schnittkrümmung für alle $t \in (0, 1]$.

Beweis. Mit Formel 9.1 und Lemma 9.10 folgt

$$\begin{aligned} \sec_{g_t}(p_*X^t, p_*Y^t) &= \|[X_1, Y_1]\|^2 - \frac{3}{4}t^2 \|[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 \\ &\quad + \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - \frac{3}{4t^2} + \frac{1+\frac{1}{t^2}}{2} \left(\|[X_1, Y_2]\|^2 + \|[X_2, Y_1]\|^2\right) \\ &\quad + \left(-2\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 - 2\frac{3}{4t^2} + 1 + \frac{1}{t^2}\right) \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \\ &= \|[X_1, Y_1]\|^2 - \frac{3}{4}t^2 \|[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 \\ &\quad + \left(t^2 + \frac{3}{4t^2} - \frac{3}{2}\right) \left(\|[X_1, Y_2]\|^2 + \|[X_2, Y_1]\|^2\right) \\ &\quad - \left(t^2 + \frac{3}{2t^2} - 3\right) \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \\ &= \|[X_1, Y_1]\|^2 - \frac{3}{4}t^2 \|[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 \\ &\quad + \left(t^2 + \frac{3}{4t^2} - \frac{3}{2}\right) \left(\|[X_1, Y_2]\|^2 + \|[X_2, Y_1]\|^2\right. \\ &\quad \quad \left. - 2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle\right) \\ &\quad + t^2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \\ &= \|[X_1, Y_1]\|^2 - \frac{3}{4}t^2 \|[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 \\ &\quad + \left(t^2 + \frac{3}{4t^2} - \frac{3}{2}\right) \|[X_1, Y_2] - [X_2, Y_1]\|^2 \\ &\quad + t^2 \langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \end{aligned}$$

Da $\sec_{g_1}(p_*X^1, p_*Y^1) \geq 0$, ist

$$\langle [X_1, Y_2], [X_2, Y_1] \rangle \geq -\|[X_1, Y_1]\|^2 + \frac{3}{4} \|[X_1, Y_1]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 - \frac{1}{4} \|[X_1, Y_2] - [X_2, Y_1]\|^2.$$

und damit

$$\sec_{g_t}(p_*X^t, p_*Y^t) \geq (1 - t^2) \|[X_1, Y_1]\|^2 + \left(\frac{3}{4}\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - \frac{3}{2}\right) \|[X_1, Y_2] - [X_2, Y_1]\|^2 \geq 0.$$

□

Korollar 9.12:

Für alle $t \in (0, 1]$ hat (E_α, g_t) positive Riccikrümmung.

Beweis. Es sei $X^{i,t} = X_1^i + \frac{1}{t}X_2^i$, $i = 1, \dots, 22$, eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2,\rho}$ mit $X_1^i \in \mathfrak{m}_1$ und $X_2^i \in \mathfrak{m}_{2,\rho}$.

Dann ist

$$\text{Ric}_{g_t}(p_*X^{1,t}) = \sum_{i=2}^{22} \text{sec}_{g_t}(p_*X^{1,t}, p_*X^{i,t}).$$

Wir erhalten einen Ausdruck analog zu dem aus dem Beweis der Proposition. Nach Berestovskij in [Ber95] gilt zudem $\text{Ric}_{g_1}(X^{1,1}) > 0$, da g_1 normal homogen ist, und wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{22} \langle [X_1^1, X_2^i], [X_2^1, X_1^i] \rangle &> - \sum_{i=2}^{22} \|[X_1^1, X_1^i]\|^2 + \frac{3}{4} \sum_{i=2}^{22} \|[X_1^1, X_1^i]_{\mathfrak{m}_{2,\rho}}\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{22} \|[X_1^1, X_2^i] - [X_2^1, X_1^i]\|^2. \end{aligned}$$

Dies liefert analog zum Beweis des Proposition $\text{Ric}(p_*X^{1,t}) > 0$. □

Nach Satz 8.3, welchen wir aufgrund von Lemma 9.7 und der Tatsache, dass $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ nichtnegativen Krümmungsoperator hat, anwenden können, hat (E_α, g_t) fast nichtnegativen Krümmungsoperator für $t \rightarrow 0$.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 9.13:

Es existieren unendlich viele einfach zusammenhängende, kompakte, homogene 22-Mannigfaltigkeiten E_α mit paarweise nichtisomorphen komplexen Kohomologieringen, auf denen Familien $(g_t)_{t \in (0,1]}$ von homogenen Riemannschen Metriken existieren, so dass (E_α, g_t) fast nichtnegativen Krümmungsoperator für $t \rightarrow 0$ und für alle $t \in (0, 1]$ nichtnegative Schnitt- und positive Riccikrümmung hat.

Bemerkung 9.14: Durch Produktbildung mit Sphären erhalten wir auch in allen Dimensionen ≥ 24 Beispiele mit fast nichtnegativem Krümmungsoperator, nichtnegativer Schnittkrümmung und positiver Riccikrümmung.

Beweis. Für $E_\alpha \times S^n$ mit $n \geq 3$ funktioniert derselbe Beweis.

Für $n = 2$ erhalten wir einen zusätzlichen Erzeuger z in der zweiten Kohomologie. Für einen Isomorphismus $\varphi : H^2(E_\alpha \times S^2) \rightarrow H^2(E_{\tilde{\alpha}} \times S^2)$ ist $\varphi(z)$ ein Vielfaches von dem entsprechenden Erzeuger z in $H^2(E_{\tilde{\alpha}} \times S^2)$, da dies die einzigen Elemente sind, deren Quadrat verschwindet. Für die Erzeuger x_i gilt, dass $\varphi(x_i) \in \text{span}\{x_1, x_2, x_3\}$, wie man an $\varphi(x_i)^3 = 0$ und $\varphi(x_i) \notin \text{span}\{z\}$ sieht. Damit funktioniert der Beweis dann auch wie oben. \square

Weiter gilt für die Krümmung von g_1 (siehe auch [CE75, Korollar 3.33]), dass

$$\text{sec}_{(M, g_1)}(p_*X, p_*Y) = \frac{1}{4} \|[X, Y]_{\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_{2, \rho}}\|^2 + \|[X, Y]_{\mathfrak{h}_\rho}\|^2.$$

Somit ist

$$\text{sec}_{(M, g_1)} \leq \max_{\substack{X, Y \in \mathfrak{g} \\ X, Y \text{ orthonormal}}} \|[X, Y]\|^2.$$

Insbesondere ist diese obere Schranke unabhängig von α . Ebenfalls unabhängig von α lässt sich der Durchmesser von (E_α, g_1) durch $\text{diam}(G, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ abschätzen und wir erhalten folgenden Satz.

Satz 9.15:

Es existieren $C, D > 0$, so dass in Dimension 22 und jeder Dimension ≥ 24 unendlich viele kompakte, einfach zusammenhängende, homogene Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung $0 \leq \text{sec} \leq C$, Riccikrümmung $\text{Ric} > 0$, Durchmesser $\text{diam} \leq D$ und paarweise nichtisomorphen komplexen Kohomologieringen existieren.

Anhänge

A. Exponenten in Dimensionen 10 und höher

Tabelle A.1.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 10-Mannigfaltigkeiten (Computerberechnung)

	Exponenten	Erzeugergrade
(10.1)	$a = (), b = (2, 4)$	3, 7
(10.2)	$a = (), b = (3, 3)$	5, 5
(10.3)	$a = (1), b = (6)$	2, 11
(10.4)	$a = (1), b = (2, 2, 3)$	2, 3, 3, 5
(10.5)	$a = (2), b = (2, 2, 4)$	3, 3, 4, 7
(10.6)	$a = (5), b = (10)$	10, 19
(10.7)	$a = (1, 1), b = (2, 5)$	2, 2, 3, 9
(10.8)	$a = (1, 1), b = (3, 4)$	2, 2, 5, 7
(10.9)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2, 2)$	2, 2, 3, 3, 3, 3
(10.10)	$a = (1, 2), b = (2, 6)$	2, 3, 4, 11
(10.11)	$a = (1, 2), b = (4, 4)$	2, 4, 7, 7
(10.12)	$a = (1, 3), b = (3, 6)$	2, 5, 6, 11
(10.13)	$a = (1, 4), b = (2, 8)$	2, 3, 8, 15
(10.14)	$a = (2, 3), b = (4, 6)$	4, 6, 7, 11
(10.15)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 7
(10.16)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 3, 3)$	2, 2, 2, 3, 5, 5
(10.17)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 3, 4)$	2, 2, 3, 4, 5, 7
(10.18)	$a = (1, 1, 3), b = (2, 2, 6)$	2, 2, 3, 3, 6, 11
(10.19)	$a = (1, 2, 2), b = (2, 4, 4)$	2, 3, 4, 4, 7, 7
(10.20)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5
(10.21)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 7
(10.22)	$a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3

Tabelle A.2.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 11-Mannigfaltigkeiten (Computerberechnung)

	Exponenten	Erzeugergrade
(11.1)	$a = (), b = (6)$	11
(11.2)	$a = (), b = (2, 2, 3)$	3, 3, 5
(11.3)	$a = (1), b = (2, 5)$	2, 3, 9
(11.4)	$a = (1), b = (3, 4)$	2, 5, 7
(11.5)	$a = (1), b = (2, 2, 2, 2)$	2, 3, 3, 3, 3
(11.6)	$a = (2), b = (2, 6)$	3, 4, 11
(11.7)	$a = (2), b = (4, 4)$	4, 7, 7
(11.8)	$a = (3), b = (3, 6)$	5, 6, 11
(11.9)	$a = (4), b = (2, 8)$	3, 8, 15
(11.10)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 4)$	2, 2, 3, 3, 7
(11.11)	$a = (1, 1), b = (2, 3, 3)$	2, 2, 3, 5, 5
(11.12)	$a = (1, 2), b = (2, 3, 4)$	2, 3, 4, 5, 7
(11.13)	$a = (1, 3), b = (2, 2, 6)$	2, 3, 3, 6, 11
(11.14)	$a = (2, 2), b = (2, 4, 4)$	3, 4, 4, 7, 7
(11.15)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 5
(11.16)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 4)$	2, 2, 3, 3, 3, 4, 7
(11.17)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3

Tabelle A.3.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 12-Mannigfaltigkeiten (Computerberechnung)

	Exponenten	Erzeugergrade
(12.1)	$a = (), b = (2, 5)$	3, 9
(12.2)	$a = (), b = (3, 4)$	5, 7
(12.3)	$a = (), b = (2, 2, 2, 2)$	3, 3, 3, 3
(12.4)	$a = (1), b = (7)$	2, 13
(12.5)	$a = (1), b = (2, 2, 4)$	2, 3, 3, 7
(12.6)	$a = (1), b = (2, 3, 3)$	2, 3, 5, 5
(12.7)	$a = (2), b = (8)$	4, 15
(12.8)	$a = (2), b = (2, 3, 4)$	3, 4, 5, 7
(12.9)	$a = (3), b = (9)$	6, 17
(12.10)	$a = (3), b = (2, 2, 6)$	3, 3, 6, 11
(12.11)	$a = (6), b = (12)$	12, 23
(12.12)	$a = (1, 1), b = (2, 6)$	2, 2, 3, 11
(12.13)	$a = (1, 1), b = (3, 5)$	2, 2, 5, 9
(12.14)	$a = (1, 1), b = (4, 4)$	2, 2, 7, 7
(12.15)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2, 3)$	2, 2, 3, 3, 3, 5
(12.16)	$a = (1, 2), b = (3, 6)$	2, 4, 5, 11
(12.17)	$a = (1, 2), b = (4, 5)$	2, 4, 7, 9
(12.18)	$a = (1, 2), b = (2, 2, 2, 4)$	2, 3, 3, 3, 4, 7
(12.19)	$a = (1, 3), b = (4, 6)$	2, 6, 7, 11
(12.20)	$a = (1, 4), b = (3, 8)$	2, 5, 8, 15
(12.21)	$a = (1, 5), b = (2, 10)$	2, 3, 10, 19
(12.22)	$a = (2, 2), b = (4, 6)$	4, 4, 7, 11
(12.23)	$a = (2, 3), b = (5, 6)$	4, 6, 9, 11
(12.24)	$a = (2, 4), b = (4, 8)$	4, 7, 8, 15
(12.25)	$a = (3, 3), b = (6, 6)$	6, 6, 11, 11
(12.26)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 5)$	2, 2, 2, 3, 3, 9
(12.27)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 3, 4)$	2, 2, 2, 3, 5, 7
(12.28)	$a = (1, 1, 1), b = (3, 3, 3)$	2, 2, 2, 5, 5, 5
(12.29)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3
(12.30)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 6)$	2, 2, 3, 3, 4, 11
(12.31)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 4, 4)$	2, 2, 3, 4, 7, 7
(12.32)	$a = (1, 1, 2), b = (3, 3, 4)$	2, 2, 4, 5, 5, 7
(12.33)	$a = (1, 1, 3), b = (2, 3, 6)$	2, 2, 3, 5, 6, 11
(12.34)	$a = (1, 1, 4), b = (2, 2, 8)$	2, 2, 3, 3, 8, 15
(12.35)	$a = (1, 2, 2), b = (3, 4, 4)$	2, 4, 4, 5, 7, 7
(12.36)	$a = (1, 2, 3), b = (2, 4, 6)$	2, 3, 4, 6, 7, 11
(12.37)	$a = (2, 2, 2), b = (4, 4, 4)$	4, 4, 4, 7, 7, 7

wird auf nächster Seite fortgesetzt

Tabelle A.3.: (fortgesetzt)

	Exponenten	Erzeugergrade
(12.38)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 7
(12.39)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 3, 3)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5
(12.40)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 3, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 7
(12.41)	$a = (1, 1, 1, 3), b = (2, 2, 2, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 6, 11
(12.42)	$a = (1, 1, 2, 2), b = (2, 2, 4, 4)$	2, 2, 3, 3, 4, 4, 7, 7
(12.43)	$a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5
(12.44)	$a = (1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 7
(12.45)	$a = (1, 1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3

Tabelle A.4.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 13-Mannigfaltigkeiten (Computerberechnung)

	Exponenten	Erzeugergrade
(13.1)	$a = (), b = (7)$	13
(13.2)	$a = (), b = (2, 2, 4)$	3,3,7
(13.3)	$a = (), b = (2, 3, 3)$	3,5,5
(13.4)	$a = (1), b = (2, 6)$	2,3,11
(13.5)	$a = (1), b = (3, 5)$	2,5,9
(13.6)	$a = (1), b = (4, 4)$	2,7,7
(13.7)	$a = (1), b = (2, 2, 2, 3)$	2,3,3,3,5
(13.8)	$a = (2), b = (3, 6)$	4,5,11
(13.9)	$a = (2), b = (4, 5)$	4,7,9
(13.10)	$a = (2), b = (2, 2, 2, 4)$	3,3,3,4,7
(13.11)	$a = (3), b = (4, 6)$	6,7,11
(13.12)	$a = (4), b = (3, 8)$	5,8,15
(13.13)	$a = (5), b = (2, 10)$	3,10,19
(13.14)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 5)$	2,2,3,3,9
(13.15)	$a = (1, 1), b = (2, 3, 4)$	2,2,3,5,7
(13.16)	$a = (1, 1), b = (3, 3, 3)$	2,2,5,5,5
(13.17)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2)$	2,2,3,3,3,3,3
(13.18)	$a = (1, 2), b = (2, 2, 6)$	2,3,3,4,11
(13.19)	$a = (1, 2), b = (2, 4, 4)$	2,3,4,7,7
(13.20)	$a = (1, 2), b = (3, 3, 4)$	2,4,5,5,7
(13.21)	$a = (1, 3), b = (2, 3, 6)$	2,3,5,6,11
(13.22)	$a = (1, 4), b = (2, 2, 8)$	2,3,3,8,15
(13.23)	$a = (2, 2), b = (3, 4, 4)$	4,4,5,7,7
(13.24)	$a = (2, 3), b = (2, 4, 6)$	3,4,6,7,11
(13.25)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 4)$	2,2,2,3,3,3,7
(13.26)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 3, 3)$	2,2,2,3,3,5,5
(13.27)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 3, 4)$	2,2,3,3,4,5,7
(13.28)	$a = (1, 1, 3), b = (2, 2, 2, 6)$	2,2,3,3,3,6,11
(13.29)	$a = (1, 2, 2), b = (2, 2, 4, 4)$	2,3,3,4,4,7,7
(13.30)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 3)$	2,2,2,2,3,3,3,3,5
(13.31)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	2,2,2,3,3,3,3,4,7
(13.32)	$a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2,2,2,2,2,3,3,3,3,3,3

Tabelle A.5.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 14-Mannigfaltigkeiten (Computerberechnung)

	Exponenten	Erzeugergrade
(14.1)	$a = (), b = (2, 6)$	3, 11
(14.2)	$a = (), b = (3, 5)$	5, 9
(14.3)	$a = (), b = (4, 4)$	7, 7
(14.4)	$a = (), b = (2, 2, 2, 3)$	3, 3, 3, 5
(14.5)	$a = (1), b = (8)$	2, 15
(14.6)	$a = (1), b = (2, 2, 5)$	2, 3, 3, 9
(14.7)	$a = (1), b = (2, 3, 4)$	2, 3, 5, 7
(14.8)	$a = (1), b = (3, 3, 3)$	2, 5, 5, 5
(14.9)	$a = (1), b = (2, 2, 2, 2, 2)$	2, 3, 3, 3, 3, 3
(14.10)	$a = (2), b = (2, 2, 6)$	3, 3, 4, 11
(14.11)	$a = (2), b = (2, 4, 4)$	3, 4, 7, 7
(14.12)	$a = (2), b = (3, 3, 4)$	4, 5, 5, 7
(14.13)	$a = (3), b = (2, 3, 6)$	3, 5, 6, 11
(14.14)	$a = (4), b = (2, 2, 8)$	3, 3, 8, 15
(14.15)	$a = (7), b = (14)$	14, 27
(14.16)	$a = (1, 1), b = (2, 7)$	2, 2, 3, 13
(14.17)	$a = (1, 1), b = (3, 6)$	2, 2, 5, 11
(14.18)	$a = (1, 1), b = (4, 5)$	2, 2, 7, 9
(14.19)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2, 4)$	2, 2, 3, 3, 3, 7
(14.20)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 3, 3)$	2, 2, 3, 3, 5, 5
(14.21)	$a = (1, 2), b = (2, 8)$	2, 3, 4, 15
(14.22)	$a = (1, 2), b = (4, 6)$	2, 4, 7, 11
(14.23)	$a = (1, 2), b = (2, 2, 3, 4)$	2, 3, 3, 4, 5, 7
(14.24)	$a = (1, 3), b = (2, 9)$	2, 3, 6, 17
(14.25)	$a = (1, 3), b = (5, 6)$	2, 6, 9, 11
(14.26)	$a = (1, 3), b = (2, 2, 2, 6)$	2, 3, 3, 3, 6, 11
(14.27)	$a = (1, 4), b = (4, 8)$	2, 7, 8, 15
(14.28)	$a = (1, 5), b = (3, 10)$	2, 5, 10, 19
(14.29)	$a = (1, 6), b = (2, 12)$	2, 3, 12, 23
(14.30)	$a = (2, 2), b = (2, 2, 4, 4)$	3, 3, 4, 4, 7, 7
(14.31)	$a = (2, 3), b = (6, 6)$	4, 6, 11, 11
(14.32)	$a = (2, 5), b = (4, 10)$	4, 7, 10, 19
(14.33)	$a = (3, 4), b = (6, 8)$	6, 8, 11, 15
(14.34)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 11
(14.35)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 3, 5)$	2, 2, 2, 3, 5, 9
(14.36)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 4, 4)$	2, 2, 2, 3, 7, 7
(14.37)	$a = (1, 1, 1), b = (3, 3, 4)$	2, 2, 2, 5, 5, 7

wird auf nächster Seite fortgesetzt

Tabelle A.5.: (fortgesetzt)

	Exponenten	Erzeugergrade
(14.38)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5
(14.39)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 3, 6)$	2, 2, 3, 4, 5, 11
(14.40)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 4, 5)$	2, 2, 3, 4, 7, 9
(14.41)	$a = (1, 1, 2), b = (3, 4, 4)$	2, 2, 4, 5, 7, 7
(14.42)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 7
(14.43)	$a = (1, 1, 3), b = (2, 4, 6)$	2, 2, 3, 6, 7, 11
(14.44)	$a = (1, 1, 3), b = (3, 3, 6)$	2, 2, 5, 5, 6, 11
(14.45)	$a = (1, 1, 4), b = (2, 3, 8)$	2, 2, 3, 5, 8, 15
(14.46)	$a = (1, 1, 5), b = (2, 2, 10)$	2, 2, 3, 3, 10, 19
(14.47)	$a = (1, 2, 2), b = (2, 4, 6)$	2, 3, 4, 4, 7, 11
(14.48)	$a = (1, 2, 2), b = (4, 4, 4)$	2, 4, 4, 7, 7, 7
(14.49)	$a = (1, 2, 3), b = (2, 5, 6)$	2, 3, 4, 6, 9, 11
(14.50)	$a = (1, 2, 3), b = (3, 4, 6)$	2, 4, 5, 6, 7, 11
(14.51)	$a = (1, 2, 4), b = (2, 4, 8)$	2, 3, 4, 7, 8, 15
(14.52)	$a = (1, 3, 3), b = (2, 6, 6)$	2, 3, 6, 6, 11, 11
(14.53)	$a = (2, 2, 3), b = (4, 4, 6)$	4, 4, 6, 7, 7, 11
(14.54)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 5)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 9
(14.55)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 3, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7
(14.56)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 3, 3, 3)$	2, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 5
(14.57)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3
(14.58)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 11
(14.59)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 4, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 4, 7, 7
(14.60)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 3, 3, 4)$	2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 7
(14.61)	$a = (1, 1, 1, 3), b = (2, 2, 3, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 5, 6, 11
(14.62)	$a = (1, 1, 1, 4), b = (2, 2, 2, 8)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 8, 15
(14.63)	$a = (1, 1, 2, 2), b = (2, 3, 4, 4)$	2, 2, 3, 4, 4, 5, 7, 7
(14.64)	$a = (1, 1, 2, 3), b = (2, 2, 4, 6)$	2, 2, 3, 3, 4, 6, 7, 11
(14.65)	$a = (1, 2, 2, 2), b = (2, 4, 4, 4)$	2, 3, 4, 4, 4, 7, 7, 7
(14.66)	$a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 7
(14.67)	$a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 3, 3)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5
(14.68)	$a = (1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 3, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 7
(14.69)	$a = (1, 1, 1, 1, 3), b = (2, 2, 2, 2, 6)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 6, 11
(14.70)	$a = (1, 1, 1, 2, 2), b = (2, 2, 2, 4, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 7, 7
(14.71)	$a = (1, 1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5
(14.72)	$a = (1, 1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 7
(14.73)	$a = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$ $b = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3

Tabelle A.6.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 15-Mannigfaltigkeiten (Computerberechnung)

	Exponenten	Erzeugergrade
(15.1)	$a = (), b = (8)$	15
(15.2)	$a = (), b = (2, 2, 5)$	3, 3, 9
(15.3)	$a = (), b = (2, 3, 4)$	3, 5, 7
(15.4)	$a = (), b = (3, 3, 3)$	5, 5, 5
(15.5)	$a = (), b = (2, 2, 2, 2, 2)$	3, 3, 3, 3, 3
(15.6)	$a = (1), b = (2, 7)$	2, 3, 13
(15.7)	$a = (1), b = (3, 6)$	2, 5, 11
(15.8)	$a = (1), b = (4, 5)$	2, 7, 9
(15.9)	$a = (1), b = (2, 2, 2, 4)$	2, 3, 3, 3, 7
(15.10)	$a = (1), b = (2, 2, 3, 3)$	2, 3, 3, 5, 5
(15.11)	$a = (2), b = (2, 8)$	3, 4, 15
(15.12)	$a = (2), b = (4, 6)$	4, 7, 11
(15.13)	$a = (2), b = (2, 2, 3, 4)$	3, 3, 4, 5, 7
(15.14)	$a = (3), b = (2, 9)$	3, 6, 17
(15.15)	$a = (3), b = (5, 6)$	6, 9, 11
(15.16)	$a = (3), b = (2, 2, 2, 6)$	3, 3, 3, 6, 11
(15.17)	$a = (4), b = (4, 8)$	7, 8, 15
(15.18)	$a = (5), b = (3, 10)$	5, 10, 19
(15.19)	$a = (6), b = (2, 12)$	3, 12, 23
(15.20)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 6)$	2, 2, 3, 3, 11
(15.21)	$a = (1, 1), b = (2, 3, 5)$	2, 2, 3, 5, 9
(15.22)	$a = (1, 1), b = (2, 4, 4)$	2, 2, 3, 7, 7
(15.23)	$a = (1, 1), b = (3, 3, 4)$	2, 2, 5, 5, 7
(15.24)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 3)$	2, 2, 3, 3, 3, 3, 5
(15.25)	$a = (1, 2), b = (2, 3, 6)$	2, 3, 4, 5, 11
(15.26)	$a = (1, 2), b = (2, 4, 5)$	2, 3, 4, 7, 9
(15.27)	$a = (1, 2), b = (3, 4, 4)$	2, 4, 5, 7, 7
(15.28)	$a = (1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	2, 3, 3, 3, 3, 4, 7
(15.29)	$a = (1, 3), b = (2, 4, 6)$	2, 3, 6, 7, 11
(15.30)	$a = (1, 3), b = (3, 3, 6)$	2, 5, 5, 6, 11
(15.31)	$a = (1, 4), b = (2, 3, 8)$	2, 3, 5, 8, 15
(15.32)	$a = (1, 5), b = (2, 2, 10)$	2, 3, 3, 10, 19
(15.33)	$a = (2, 2), b = (2, 4, 6)$	3, 4, 4, 7, 11
(15.34)	$a = (2, 2), b = (4, 4, 4)$	4, 4, 7, 7, 7
(15.35)	$a = (2, 3), b = (2, 5, 6)$	3, 4, 6, 9, 11
(15.36)	$a = (2, 3), b = (3, 4, 6)$	4, 5, 6, 7, 11
(15.37)	$a = (2, 4), b = (2, 4, 8)$	3, 4, 7, 8, 15

wird auf nächster Seite fortgesetzt

Tabelle A.6.: (fortgesetzt)

Exponenten	Erzeugergrade
(15.38) $a = (3, 3), b = (2, 6, 6)$	3, 6, 6, 11, 11
(15.39) $a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 5)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 9
(15.40) $a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 3, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 5, 7
(15.41) $a = (1, 1, 1), b = (2, 3, 3, 3)$	2, 2, 2, 3, 5, 5, 5
(15.42) $a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3
(15.43) $a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 6)$	2, 2, 3, 3, 3, 4, 11
(15.44) $a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 4, 4)$	2, 2, 3, 3, 4, 7, 7
(15.45) $a = (1, 1, 2), b = (2, 3, 3, 4)$	2, 2, 3, 4, 5, 5, 7
(15.46) $a = (1, 1, 3), b = (2, 2, 3, 6)$	2, 2, 3, 3, 5, 6, 11
(15.47) $a = (1, 1, 4), b = (2, 2, 2, 8)$	2, 2, 3, 3, 3, 8, 15
(15.48) $a = (1, 2, 2), b = (2, 3, 4, 4)$	2, 3, 4, 4, 5, 7, 7
(15.49) $a = (1, 2, 3), b = (2, 2, 4, 6)$	2, 3, 3, 4, 6, 7, 11
(15.50) $a = (2, 2, 2), b = (2, 4, 4, 4)$	3, 4, 4, 4, 7, 7, 7
(15.51) $a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 7
(15.52) $a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 3, 3)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5
(15.53) $a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 3, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 7
(15.54) $a = (1, 1, 1, 3), b = (2, 2, 2, 2, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 6, 11
(15.55) $a = (1, 1, 2, 2), b = (2, 2, 2, 4, 4)$	2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 7, 7
(15.56) $a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5
(15.57) $a = (1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 7
(15.58) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1),$ $b = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3

Tabelle A.7.: Exponenten und Erzeugergrade kompakter, einfach zusammenhängender, rational elliptischer 16-Mannigfaltigkeiten (Computerberechnung)

	Exponenten	Erzeugergrade
(16.1)	$a = (), b = (2, 7)$	3, 13
(16.2)	$a = (), b = (3, 6)$	5, 11
(16.3)	$a = (), b = (4, 5)$	7, 9
(16.4)	$a = (), b = (2, 2, 2, 4)$	3, 3, 3, 7
(16.5)	$a = (), b = (2, 2, 3, 3)$	3, 3, 5, 5
(16.6)	$a = (1), b = (9)$	2, 17
(16.7)	$a = (1), b = (2, 2, 6)$	2, 3, 3, 11
(16.8)	$a = (1), b = (2, 3, 5)$	2, 3, 5, 9
(16.9)	$a = (1), b = (2, 4, 4)$	2, 3, 7, 7
(16.10)	$a = (1), b = (3, 3, 4)$	2, 5, 5, 7
(16.11)	$a = (1), b = (2, 2, 2, 2, 3)$	2, 3, 3, 3, 3, 5
(16.12)	$a = (2), b = (10)$	4, 19
(16.13)	$a = (2), b = (2, 3, 6)$	3, 4, 5, 11
(16.14)	$a = (2), b = (2, 4, 5)$	3, 4, 7, 9
(16.15)	$a = (2), b = (3, 4, 4)$	4, 5, 7, 7
(16.16)	$a = (2), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	3, 3, 3, 3, 4, 7
(16.17)	$a = (3), b = (2, 4, 6)$	3, 6, 7, 11
(16.18)	$a = (3), b = (3, 3, 6)$	5, 5, 6, 11
(16.19)	$a = (4), b = (12)$	8, 23
(16.20)	$a = (4), b = (2, 3, 8)$	3, 5, 8, 15
(16.21)	$a = (5), b = (2, 2, 10)$	3, 3, 10, 19
(16.22)	$a = (8), b = (16)$	16, 31
(16.23)	$a = (1, 1), b = (2, 8)$	2, 2, 3, 15
(16.24)	$a = (1, 1), b = (3, 7)$	2, 2, 5, 13
(16.25)	$a = (1, 1), b = (4, 6)$	2, 2, 7, 11
(16.26)	$a = (1, 1), b = (5, 5)$	2, 2, 9, 9
(16.27)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2, 5)$	2, 2, 3, 3, 3, 9
(16.28)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 3, 4)$	2, 2, 3, 3, 5, 7
(16.29)	$a = (1, 1), b = (2, 3, 3, 3)$	2, 2, 3, 5, 5, 5
(16.30)	$a = (1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3
(16.31)	$a = (1, 2), b = (3, 8)$	2, 4, 5, 15
(16.32)	$a = (1, 2), b = (4, 7)$	2, 4, 7, 13
(16.33)	$a = (1, 2), b = (5, 6)$	2, 4, 9, 11
(16.34)	$a = (1, 2), b = (2, 2, 2, 6)$	2, 3, 3, 3, 4, 11
(16.35)	$a = (1, 2), b = (2, 2, 4, 4)$	2, 3, 3, 4, 7, 7
(16.36)	$a = (1, 2), b = (2, 3, 3, 4)$	2, 3, 4, 5, 5, 7
(16.37)	$a = (1, 3), b = (3, 9)$	2, 5, 6, 17

wird auf nächster Seite fortgesetzt

Tabelle A.7.: (fortgesetzt)

	Exponenten	Erzeugergrade
(16.38)	$a = (1, 3), b = (6, 6)$	2, 6, 11, 11
(16.39)	$a = (1, 3), b = (2, 2, 3, 6)$	2, 3, 3, 5, 6, 11
(16.40)	$a = (1, 4), b = (5, 8)$	2, 8, 9, 15
(16.41)	$a = (1, 4), b = (2, 2, 2, 8)$	2, 3, 3, 3, 8, 15
(16.42)	$a = (1, 5), b = (4, 10)$	2, 7, 10, 19
(16.43)	$a = (1, 6), b = (3, 12)$	2, 5, 12, 23
(16.44)	$a = (1, 7), b = (2, 14)$	2, 3, 14, 27
(16.45)	$a = (2, 2), b = (4, 8)$	4, 4, 7, 15
(16.46)	$a = (2, 2), b = (6, 6)$	4, 4, 11, 11
(16.47)	$a = (2, 2), b = (2, 3, 4, 4)$	3, 4, 4, 5, 7, 7
(16.48)	$a = (2, 3), b = (4, 9)$	4, 6, 7, 17
(16.49)	$a = (2, 3), b = (6, 7)$	4, 6, 11, 13
(16.50)	$a = (2, 3), b = (2, 2, 4, 6)$	3, 3, 4, 6, 7, 11
(16.51)	$a = (2, 4), b = (6, 8)$	4, 8, 11, 15
(16.52)	$a = (2, 6), b = (4, 12)$	4, 7, 12, 23
(16.53)	$a = (3, 5), b = (6, 10)$	6, 10, 11, 19
(16.54)	$a = (4, 4), b = (8, 8)$	8, 8, 15, 15
(16.55)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 7)$	2, 2, 2, 3, 3, 13
(16.56)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 3, 6)$	2, 2, 2, 3, 5, 11
(16.57)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 4, 5)$	2, 2, 2, 3, 7, 9
(16.58)	$a = (1, 1, 1), b = (3, 3, 5)$	2, 2, 2, 5, 5, 9
(16.59)	$a = (1, 1, 1), b = (3, 4, 4)$	2, 2, 2, 5, 7, 7
(16.60)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 7
(16.61)	$a = (1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 3, 3)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5
(16.62)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 8)$	2, 2, 3, 3, 4, 15
(16.63)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 4, 6)$	2, 2, 3, 4, 7, 11
(16.64)	$a = (1, 1, 2), b = (3, 3, 6)$	2, 2, 4, 5, 5, 11
(16.65)	$a = (1, 1, 2), b = (3, 4, 5)$	2, 2, 4, 5, 7, 9
(16.66)	$a = (1, 1, 2), b = (4, 4, 4)$	2, 2, 4, 7, 7, 7
(16.67)	$a = (1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 3, 4)$	2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 7
(16.68)	$a = (1, 1, 3), b = (2, 2, 9)$	2, 2, 3, 3, 6, 17
(16.69)	$a = (1, 1, 3), b = (2, 5, 6)$	2, 2, 3, 6, 9, 11
(16.70)	$a = (1, 1, 3), b = (3, 4, 6)$	2, 2, 5, 6, 7, 11
(16.71)	$a = (1, 1, 3), b = (2, 2, 2, 2, 6)$	2, 2, 3, 3, 3, 3, 6, 11
(16.72)	$a = (1, 1, 4), b = (2, 4, 8)$	2, 2, 3, 7, 8, 15
(16.73)	$a = (1, 1, 4), b = (3, 3, 8)$	2, 2, 5, 5, 8, 15
(16.74)	$a = (1, 1, 5), b = (2, 3, 10)$	2, 2, 3, 5, 10, 19
(16.75)	$a = (1, 1, 6), b = (2, 2, 12)$	2, 2, 3, 3, 12, 23

wird auf nächster Seite fortgesetzt

Tabelle A.7.: (fortgesetzt)

	Exponenten	Erzeugergrade
(16.76)	$a = (1, 2, 2), b = (3, 4, 6)$	2, 4, 4, 5, 7, 11
(16.77)	$a = (1, 2, 2), b = (4, 4, 5)$	2, 4, 4, 7, 7, 9
(16.78)	$a = (1, 2, 2), b = (2, 2, 2, 4, 4)$	2, 3, 3, 3, 4, 4, 7, 7
(16.79)	$a = (1, 2, 3), b = (2, 6, 6)$	2, 3, 4, 6, 11, 11
(16.80)	$a = (1, 2, 3), b = (3, 5, 6)$	2, 4, 5, 6, 9, 11
(16.81)	$a = (1, 2, 3), b = (4, 4, 6)$	2, 4, 6, 7, 7, 11
(16.82)	$a = (1, 2, 4), b = (3, 4, 8)$	2, 4, 5, 7, 8, 15
(16.83)	$a = (1, 2, 5), b = (2, 4, 10)$	2, 3, 4, 7, 10, 19
(16.84)	$a = (1, 3, 3), b = (3, 6, 6)$	2, 5, 6, 6, 11, 11
(16.85)	$a = (1, 3, 4), b = (2, 6, 8)$	2, 3, 6, 8, 11, 15
(16.86)	$a = (2, 2, 2), b = (4, 4, 6)$	4, 4, 4, 7, 7, 11
(16.87)	$a = (2, 2, 3), b = (4, 5, 6)$	4, 4, 6, 7, 9, 11
(16.88)	$a = (2, 2, 4), b = (4, 4, 8)$	4, 4, 7, 7, 8, 15
(16.89)	$a = (2, 3, 3), b = (4, 6, 6)$	4, 6, 6, 7, 11, 11
(16.90)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 6)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 11
(16.91)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 3, 5)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 9
(16.92)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 4, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 7, 7
(16.93)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 3, 3, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 5, 5, 7
(16.94)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (3, 3, 3, 3)$	2, 2, 2, 2, 5, 5, 5, 5
(16.95)	$a = (1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 5
(16.96)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 3, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 11
(16.97)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 4, 5)$	2, 2, 2, 3, 3, 4, 7, 9
(16.98)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 3, 4, 4)$	2, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 7
(16.99)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (3, 3, 3, 4)$	2, 2, 2, 4, 5, 5, 5, 7
(16.100)	$a = (1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 7
(16.101)	$a = (1, 1, 1, 3), b = (2, 2, 4, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 6, 7, 11
(16.102)	$a = (1, 1, 1, 3), b = (2, 3, 3, 6)$	2, 2, 2, 3, 5, 5, 6, 11
(16.103)	$a = (1, 1, 1, 4), b = (2, 2, 3, 8)$	2, 2, 2, 3, 3, 5, 8, 15
(16.104)	$a = (1, 1, 1, 5), b = (2, 2, 2, 10)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 10, 19
(16.105)	$a = (1, 1, 2, 2), b = (2, 2, 4, 6)$	2, 2, 3, 3, 4, 4, 7, 11
(16.106)	$a = (1, 1, 2, 2), b = (2, 4, 4, 4)$	2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7
(16.107)	$a = (1, 1, 2, 2), b = (3, 3, 4, 4)$	2, 2, 4, 4, 5, 5, 7, 7
(16.108)	$a = (1, 1, 2, 3), b = (2, 2, 5, 6)$	2, 2, 3, 3, 4, 6, 9, 11
(16.109)	$a = (1, 1, 2, 3), b = (2, 3, 4, 6)$	2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11
(16.110)	$a = (1, 1, 2, 4), b = (2, 2, 4, 8)$	2, 2, 3, 3, 4, 7, 8, 15
(16.111)	$a = (1, 1, 3, 3), b = (2, 2, 6, 6)$	2, 2, 3, 3, 6, 6, 11, 11
(16.112)	$a = (1, 2, 2, 2), b = (3, 4, 4, 4)$	2, 4, 4, 4, 5, 7, 7, 7
(16.113)	$a = (1, 2, 2, 3), b = (2, 4, 4, 6)$	2, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 11

wird auf nächster Seite fortgesetzt

Tabelle A.7.: (fortgesetzt)

Exponenten	Erzeugergrade
(16.114) $a = (2, 2, 2, 2), b = (4, 4, 4, 4)$	4, 4, 4, 4, 7, 7, 7, 7
(16.115) $a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 5)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 9
(16.116) $a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 3, 4)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7
(16.117) $a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 3, 3, 3)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5
(16.118) $a = (1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
(16.119) $a = (1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 6)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 11
(16.120) $a = (1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 4, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 7, 7
(16.121) $a = (1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 3, 3, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 7
(16.122) $a = (1, 1, 1, 1, 3), b = (2, 2, 2, 3, 6)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6, 11
(16.123) $a = (1, 1, 1, 1, 4), b = (2, 2, 2, 2, 8)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 8, 15
(16.124) $a = (1, 1, 1, 2, 2), b = (2, 2, 3, 4, 4)$	2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 7, 7
(16.125) $a = (1, 1, 1, 2, 3), b = (2, 2, 2, 4, 6)$	2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 11
(16.126) $a = (1, 1, 2, 2, 2), b = (2, 2, 4, 4, 4)$	2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 7, 7, 7
(16.127) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 7
(16.128) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1), b = (2, 2, 2, 2, 3, 3)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 5, 5
(16.129) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 2), b = (2, 2, 2, 2, 3, 4)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 7
(16.130) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 3), b = (2, 2, 2, 2, 2, 6)$	2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 6, 11
(16.131) $a = (1, 1, 1, 1, 2, 2), b = (2, 2, 2, 2, 4, 4)$	2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 7, 7
(16.132) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$ $b = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 3)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5
(16.133) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2),$ $b = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 4)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 7
(16.134) $a = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1),$ $b = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$	2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3

B. Mathematicacode zur Berechnung der möglichen Exponenten

Mit dem folgenden Algorithmus wurden die Tabellen des vorigen Kapitels berechnet. Das Computeralgebrasystem Mathematica wurde dazu verwendet.

```
SubTuples[Tupel_, n_] := Union[Sort /@ Permutations[Tupel, {n}]];
SubTuples[Tupel_] :=
  Flatten[Table[SubTuples[Tupel, n], {n, 0, Length[Tupel]}], 1];
SubTuplesohneLeer[Tupel_] :=
  Flatten[Table[SubTuples[Tupel, n], {n, 1, Length[Tupel]}], 1];
SACQ[{A_, B_}] :=
  Module[{ATEiltupelmitLeer = SubTuples[A], ATeiltupel, k1,
    TeilBTeiltupel, LaengeTeilTupel, OK = False, Sol, i, j, s,
    Ausgabe = True},
    ATeiltupel = SubTuplesohneLeer[A];
    k1 = Length[ATEiltupel];
    For[i = 1, i <= k1, i++,
      OK = False;
      LaengeTeilTupel = Length[ATEiltupel[[i]]];
      TeilBTeiltupel = SubTuples[B, LaengeTeilTupel];

      For[j = 1, j <= Length[TeilBTeiltupel], j++,
        Sol = FindInstance[
          TeilBTeiltupel[[j]] ==
          Table[Subscript[x, m,
            n], {m, 1, LaengeTeilTupel}, {n, 1,
            LaengeTeilTupel}].ATEiltupel[[i]] &&

          And @@ Table[(Plus @@
            Flatten[
              Table[Subscript[x, m, n], {n, 1, LaengeTeilTupel}]]]) >=
```

```

    2, {m, 1, LaengeTeilTupel}]
    &&
    And @@ Flatten[
      Table[Subscript[x, m, n] >= 0, {m, 1, LaengeTeilTupel}, {n,
        1, LaengeTeilTupel}]],
    Flatten[Table[Subscript[x, m,
      n], {m, 1, LaengeTeilTupel}, {n, 1, LaengeTeilTupel}]],
    Integers];

    If[Length[Sol] > 0, OK = True];

    If[OK, Break];
  ];
  If[Not[OK], Break; Ausgabe = False;];

]; Return[Ausgabe]];
Dim[{A_, B_}] := 2 (Plus @@ B - (Plus @@ A)) - (Length[B] - Length[A]);
Dim[A_, B_] := 2 (Plus @@ B - (Plus @@ A)) - (Length[B] - Length[A]);
myTupel[AnzListe_] :=
  Flatten[Table[
    Table[j, {i, 1, AnzListe[[j]]}], {j, 1, Length[AnzListe]}]]
AAzahllisten[maxSumme_, Laenge_] :=
  Flatten[Table[
    Map[Append[#, k] &,
      AAzahllisten[maxSumme - k*Laenge, Laenge - 1]], {k, 0,
      maxSumme}], 1];
AAzahllisten[maxSumme_, 1] := Table[{j}, {j, 0, maxSumme}];
BAzahllisten[maxSumme_, Laenge_] :=
  Flatten[Table[
    Map[Append[#, k] &,
      BAzahllisten[maxSumme - k*Laenge, Laenge - 1]], {k, 0,
      maxSumme/Laenge}], 1];
BAzahllisten[maxSumme_, 1] := {{0}};
MoeglicheTupel[n_] :=
  Module[{ATupelalle, ATupelalle1, BTupelalle, BTupelalle1, ATupel,
    BTupel, ABTupel, ABTupeluebergeben, i, j},
    ATupel = myTupel /@ AAzahllisten[Floor[n/2], Floor[n/2]];

```

```
BTupel =
Select[myTupel /@
  BAnzahllisten[Floor[1/2 (2 n - 1 + Floor[1/3 (2 n - 1)])] , n],
  2*(Plus @@ #) - Length[#] <= 2 n - 1 &];

ABTupel =
Flatten[Table[{ATupel[[i]], BTupel[[j]]}, {i, 1,
  Length[ATupel]}, {j, 1, Length[BTupel]}], 1];

ABTupel = Union[Map[Sort, ABTupel, 2]];

ABTupeluebergeben = Select[ABTupel, Dim[#] == n &];
ClearAll[ABTupel];

ABTupel = Select[ABTupeluebergeben, SACQ];
ABTupel
];
```


Literaturverzeichnis

- [Bar65] BARDEN, D.: Simply connected five-manifolds. In: *Ann. of Math. (2)* 82 (1965), S. 365–385
- [Ber95] BERESTOVSKIJ, V.N.: Homogeneous Riemannian manifolds of positive Ricci curvature. In: *Math. Notes* 58 (1995), Nr. 3, S. 905–909; Übersetzung von *Mat. Zametki* 58 (1995), Nr. 3, S. 334–340
- [BK78] BOURGUIGNON, Jean-Pierre ; KARCHER, Hermann: Curvature operators: pinching estimates and geometric examples. In: *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 11 (1978), Nr. 1, S. 71–92
- [Bre72] BREDON, Glen E.: *Introduction to compact transformation groups*. New York : Academic Press, 1972. – xiii+459 S. – Pure and Applied Mathematics, Vol. 46
- [BW08] BÖHM, Christoph ; WILKING, Burkhard: Manifolds with positive curvature operators are space forms. In: *Ann. of Math. (2)* 167 (2008), Nr. 3, S. 1079–1097
- [CE75] CHEEGER, Jeff ; EBIN, David G.: *Comparison theorems in Riemannian geometry*. Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1975. – viii+174 S. – North-Holland Mathematical Library, Vol. 9
- [DeV11] DEVITO, Jason: *The classification of simply connected biquotients of dimension at most 7 and 3 new examples of almost positively curved manifolds*, University of Pennsylvania, Diss., 2011. <http://repository.upenn.edu/edissertations/311>
- [FH79] FRIEDLANDER, John B. ; HALPERIN, Stephen: An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces. In: *Invent. Math.* 53 (1979), Nr. 2, S. 117–133
- [FHT01] FÉLIX, Yves ; HALPERIN, Stephen ; THOMAS, Jean-Claude: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 205: *Rational homotopy theory*. New York : Springer-Verlag, 2001. – xxxiv+535 S. – ISBN 0–387–95068–0
- [FOT08] FÉLIX, Yves ; OPREA, John ; TANRÉ, Daniel: *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 17: *Algebraic models in geometry*. Oxford : Oxford University Press, 2008. – xxii+460 S. – ISBN 978–0–19–920651–3

- [FR01] FANG, Fuquan ; RONG, Xiaochun: Curvature, diameter, homotopy groups, and cohomology rings. In: *Duke Math. J.* 107 (2001), Nr. 1, S. 135–158
- [Fre82] FREEDMAN, Michael H.: The topology of four-dimensional manifolds. In: *J. Differential Geom.* 17 (1982), Nr. 3, S. 357–453
- [FY92] FUKAYA, Kenji ; YAMAGUCHI, Takao: The fundamental groups of almost non-negatively curved manifolds. In: *Ann. of Math. (2)* 136 (1992), Nr. 2, S. 253–333
- [GGKRW14] GALAZ-GARCIA, Fernando ; KERIN, Martin ; RADESCHI, Marco ; WIEMELER, Michael: *Torus orbifolds, rational ellipticity and non-negative curvature*. <http://arxiv.org/abs/1404.3903v1>. Version: 04 2014. – arXiv:1404.3903v1 [math.DG]
- [GH87] GROVE, Karsten ; HALPERIN, Stephen: Dupin hypersurfaces, group actions and the double mapping cylinder. In: *J. Differential Geom.* 26 (1987), Nr. 3, S. 429–459
- [Gro81] GROMOV, Michael: Curvature, diameter and Betti numbers. In: *Comment. Math. Helv.* 56 (1981), Nr. 2, S. 179–195
- [Gro93] GROVE, Karsten: Critical point theory for distance functions. In: *Differential geometry: Riemannian geometry (Los Angeles, CA, 1990)* Bd. 54. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, S. 357–385
- [GWZ08] GROVE, Karsten ; WILKING, Burkhard ; ZILLER, Wolfgang: Positively curved cohomogeneity one manifolds and 3-Sasakian geometry. In: *J. Differential Geom.* 78 (2008), Nr. 1, S. 33–111
- [Hal77] HALPERIN, Stephen: Finiteness in the minimal models of Sullivan. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 230 (1977), S. 173–199
- [Hat02] HATCHER, Allen: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. – xii+544 S. – ISBN 0–521–79160–X; 0–521–79540–0
- [Hat04] HATCHER, Allen: *Spectral sequences in algebraic topology*. 2004. – Buchprojekt, erhältlich unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html>
- [Hel78] HELGASON, Sigurdur: *Pure and Applied Mathematics*. Bd. 80: *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978. – xv+628 S. – ISBN 0–12–338460–5
- [Hoe10a] HOELSCHER, Corey A.: Classification of cohomogeneity one manifolds in low dimensions. In: *Pac. J. Math.* 246 (2010), Nr. 1, S. 129–185

- [Hoe10b] HOELSCHER, Corey A.: On the homology of low-dimensional cohomogeneity one manifolds. In: *Transform. Groups* 15 (2010), Nr. 1, S. 115–133
- [HST13] HERRMANN, Martin ; SEBASTIAN, Dennis ; TUSCHMANN, Wilderich: Manifolds with almost nonnegative curvature operator and principal bundles. In: *Ann. Global Anal. Geom.* 44 (2013), Nr. 4, S. 391–399
- [HY76] HATTORI, Akio ; YOSHIDA, Tomoyoshi: Lifting compact group actions in fiber bundles. In: *Japan. J. Math. (N.S.)* 2 (1976), Nr. 1, S. 13–25
- [Jup73] JUPP, P. E.: Classification of certain 6-manifolds. In: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 73 (1973), S. 293–300
- [Kla88] KLAUS, Stephan: *Einfach-zusammenhängende Kompakte Homogene Räume bis zur Dimension Neun*, Johannes Gutenberg Universität Mainz, Diplomarbeit, Juni 1988
- [KN63] KOBAYASHI, Shoshichi ; NOMIZU, Katsumi: *Foundations of differential geometry. Vol I.* Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963. – xi+329 S.
- [KPT10] KAPOVITCH, Vitali ; PETRUNIN, Anton ; TUSCHMANN, Wilderich: Nilpotency, almost nonnegative curvature, and the gradient flow on Alexandrov spaces. In: *Ann. of Math. (2)* 171 (2010), Nr. 1, S. 343–373
- [KR00] KREUZER, Martin ; ROBBIANO, Lorenzo: *Computational Commutative Algebra 1.* Springer-Verlag, Berlin, 2000. – x+321 S. – ISBN 3-540-67733-X
- [KS88] KRECK, Matthias ; STOLZ, Stephan: A diffeomorphism classification of 7-dimensional homogeneous Einstein manifolds with $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ -symmetry. In: *Ann. of Math. (2)* 127 (1988), Nr. 2, S. 373–388
- [McK06] MCKAY, Benjamin: Lagrangian submanifolds in affine symplectic geometry. In: *Differential Geom. Appl.* 24 (2006), Nr. 6, S. 670–689
- [MH73] MILNOR, John ; HUSEMOLLER, Dale: *Symmetric bilinear forms.* New York : Springer-Verlag, 1973. – viii+147 S. – Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73
- [Mil79] MILLER, Timothy J.: On the formality of $(k - 1)$ -connected compact manifolds of dimension less than or equal to $4k - 2$. In: *Illinois J. Math.* 23 (1979), Nr. 2, S. 253–258
- [MN93] MERCURI, F. ; NORONHA, M. H.: On the topology of complete Riemannian manifolds with nonnegative curvature operator. In: *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* 63 (1993), Nr. 2, S. 149–171

- [Pav02] PAVLOV, A.V.: Estimates for the Betti Numbers of Rationally Elliptic Spaces. In: *Siberian Mathematical Journal* 43 (2002), Nr. 6, S. 1080–1085
- [Pet06] PETERSEN, Peter: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 171: *Riemannian geometry*. Second. New York : Springer, 2006. – xvi+401 S. – ISBN 978-0387-29246-5; 0-387-29246-2
- [PT99] PETRUNIN, A. ; TUSCHMANN, W.: Diffeomorphism finiteness, positive pinching, and second homotopy. In: *Geom. Funct. Anal.* 9 (1999), Nr. 4, S. 736–774
- [Spa66] SPANIER, Edwin H.: *Algebraic topology*. McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1966. – xiv+528 S.
- [Sta78] STANLEY, Richard P.: Hilbert functions of graded algebras. In: *Advances in Math.* 28 (1978), Nr. 1, S. 57–83
- [Ste61] STEWART, T. E.: Lifting group actions in fibre bundles. In: *Ann. of Math. (2)* 74 (1961), S. 192–198
- [Su63] SU, J. C.: Transformation groups on cohomology projective spaces. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 106 (1963), S. 305–318
- [Su14] SU, Zhixu: Rational analogs of projective planes. In: *Algebr. Geom. Topol.* 14 (2014), Nr. 1, S. 421–438
- [Sul77] SULLIVAN, Dennis: Infinitesimal computations in topology. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 47 (1977), S. 269–331
- [Tot03] TOTARO, Burt: Curvature, diameter, and quotient manifolds. In: *Math. Res. Lett.* 10 (2003), Nr. 2-3, S. 191–203
- [Tus02] TUSCHMANN, Wilderich: Geometric diffeomorphism finiteness in low dimensions and homotopy group finiteness. In: *Math. Ann.* 322 (2002), Nr. 2, S. 413–420
- [Ult09] ULTMAN, Shari K.: *The cohomology rings of seven dimensional primitive cohomogeneity one manifolds*, Oregon State University, Diss., 2009. – 69 S. – Thesis (Ph.D.)–Oregon State University
- [Wal66] WALL, C. T. C.: Classification problems in differential topology. V. On certain 6-manifolds. In: *Invent. Math.* 1 (1966), 355–374; corrigendum, *ibid* 2 (1966), S. 306
- [WZ90] WANG, McKenzie Y. ; ZILLER, Wolfgang: Einstein metrics on principal torus bundles. In: *J. Differential Geom.* 31 (1990), Nr. 1, S. 215–248
- [Zhu01] ZHUBR, A. V.: Closed simply connected 6-manifolds: the proofs of classification theorems. In: *St. Petersburg Math. J.* 12 (2001), Nr. 4, S. 605–680; Übersetzung von Algebra i Analiz 12 (2000), Nr. 4, S. 126–230

- [Žub88] ŽUBR, A. V.: Classification of simply-connected topological 6-manifolds.
In: *Topology and geometry—Rohlin Seminar* Bd. 1346. Springer, Berlin,
1988, S. 325–339