

# Geometrische Kenngrößen und zentrale Grenzwertsätze stetiger Perkulationsmodelle

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)  
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Eva Maria Ochsenreither  
aus Karlsruhe

---

Tag der mündlichen Prüfung: 4. Juni 2014

Referent: Prof. Dr. Günter Last  
Korreferent: Prof. Dr. Daniel Hug



---

# Danksagung

---

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Stochastik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Meine Stelle wurde finanziell gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) durch die Forschergruppe „Geometry and Physics of Spatial Random Systems“ (LA 965/7-1).

Ich bedanke mich sehr herzlich bei Herrn Prof. Dr. Günter Last für die intensive Betreuung meiner Dissertation, die vielen konstruktiven Gespräche und die daraus entstandenen hilfreichen Anregungen, ohne die diese Arbeit nicht entstanden wäre. Ebenso danke ich meinem Korreferenten Herrn Prof. Dr. Daniel Hug, der mich mit bereichernden Fragen vor allem in den letzten Monaten unterstützt hat.

Ein großes Dankeschön gilt dem ganzen Institut für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die aufmunternden Worte, wann immer sie nötig waren.

Ich danke meiner Familie für die vielfältige Unterstützung und Markus Maier für seinen Rückhalt und seine Geduld in den vergangenen drei Jahren.



---

# Inhaltsverzeichnis

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Einleitung</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Notationen, Grundlagen und Modelle</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1 Notationen . . . . .  | 5         |
| 1.2 Punktprozesse und Palm-Theorie . . . . .  | 6         |
| 1.3 Gefärbte Mosaik und $(m, n)$ -Perkolation . . . . .                                 | 8         |
| 1.3.1 Das Voronoi-Mosaik . . . . .  | 13        |
| 1.3.2 Das Delaunay-Mosaik . . . . .   | 13        |
| 1.3.3 Archimedische Gitter . . . . .  | 15        |
| 1.4 Oberflächenmaße und innere Volumina . . . . .                                       | 15        |
| <b>2 Asymptotische Erwartungswerte und Kovarianzstruktur</b>                            | <b>19</b> |
| 2.1 $(m, n)$ -Perkolation auf seitentreuen Mosaiken . . . . .                           | 19        |
| 2.1.1 Asymptotische Erwartungswerte der inneren Volumina . . . . .                      | 22        |
| 2.1.2 Asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina . . . . .                    | 26        |
| 2.2 Zellenperkolation auf normalen und seitentreuen Mosaiken . . . . .                  | 35        |
| 2.2.1 Asymptotische Erwartungswerte . . . . .   | 36        |
| 2.2.2 Asymptotische Kovarianzstruktur . . . . .   | 38        |
| <b>3 Spezielle Mosaik</b>   | <b>45</b> |
| 3.1 Das Poisson-Voronoi-Mosaik . . . . .  | 45        |
| 3.1.1 Hilfsmittel . . . . .   | 45        |
| 3.1.2 Asymptotische Erwartungswerte . . . . .   | 50        |
| 3.1.3 Asymptotische Kovarianzstruktur . . . . .   | 51        |
| 3.1.4 Vergleich mit Perkulationswahrscheinlichkeiten . . . . .                          | 60        |
| 3.2 Das Poisson-Delaunay-Mosaik . . . . .   | 64        |
| 3.2.1 Hilfsmittel . . . . .   | 64        |
| 3.2.2 Asymptotische Erwartungswerte der inneren Volumina . . . . .                      | 65        |
| 3.2.3 Asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina . . . . .                    | 66        |
| 3.2.4 Vergleich mit Perkulationswahrscheinlichkeiten . . . . .                          | 72        |
| 3.3 Archimedische Gitter . . . . .  | 76        |
| 3.3.1 Hilfsmittel . . . . .   | 77        |
| 3.3.2 Asymptotische Erwartungswerte der inneren Volumina . . . . .                      | 79        |
| 3.3.3 Diskussion der asymptotischen Kovarianzstruktur der inneren<br>Volumina . . . . . | 81        |

---

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>4</b> | <b>Zentrale Grenzwertsätze</b>                                    | <b>85</b>  |
| 4.1      | Zentraler Grenzwertsatz im Poisson-Voronoi-Mosaik . . . . .       | 86         |
| 4.1.1    | Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .                              | 86         |
| 4.1.2    | Beweis des zentralen Grenzwertsatzes . . . . .                    | 87         |
| 4.1.3    | Positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrix . . . . . | 96         |
| 4.2      | Zentraler Grenzwertsatz im Poisson-Delaunay-Mosaik . . . . .      | 102        |
| 4.2.1    | Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .                              | 102        |
| 4.2.2    | Beweis des zentralen Grenzwertsatzes . . . . .                    | 103        |
| 4.2.3    | Positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrix . . . . . | 107        |
| 4.3      | Zentraler Grenzwertsatz für Skelette . . . . .                    | 111        |
| 4.3.1    | Der zentrale Grenzwertsatz . . . . .                              | 112        |
| 4.3.2    | Beweis des zentralen Grenzwertsatzes . . . . .                    | 113        |
| <b>5</b> | <b>Ausblick</b>   | <b>119</b> |
| <b>A</b> | <b>Innere Volumina approximierbarer Funktionen</b>                | <b>123</b> |
| A.1      | Definitionen nach Groemer . . . . .                               | 123        |
| A.2      | Einige Lemmata . . . . .  | 125        |
| <b>B</b> | <b>Stabilisierung und ein zentraler Grenzwertsatz</b>             | <b>129</b> |
|          | <b>Nomenklatur</b>  | <b>133</b> |

---

# Einleitung

---

Die Perkolationstheorie wurde Mitte des letzten Jahrhunderts von Simon Broadbent und John Hammersley [7] entwickelt, um das Verhalten zufälliger physikalischer Prozesse, wie den Fluss von Wasser durch ein poröses Medium, mathematisch zu untersuchen. Innerhalb kurzer Zeit interessierten sich viele Physiker und Mathematiker für dieses Gebiet, die experimentelle und heuristische Nachweise vieler bemerkenswerter Phänomene lieferten. Mathematisch exakte Beweise stellten sich jedoch als unerwartet schwierig heraus, sodass es noch immer viele unbewiesene Vermutungen gibt.

Perkolationstheorie untersucht im Allgemeinen die Struktur zufälliger Teilgraphen eines Graphen  $G$ . Man sagt, das Modell *perkoliert*, falls ein solcher zufälliger Teilgraph mit Wahrscheinlichkeit eins eine unendliche Zusammenhangskomponente enthält. Man unterscheidet *diskrete Perkolation*, bei der der zugrunde liegende Graph  $G$  deterministisch ist, und *stetige Perkolation*, bei der  $G$  schon selbst zufällig gewählt wurde. Die wohl bekanntesten Methoden einen zufälligen Teilgraph zu erhalten sind *Kantenperkolation* und *Knotenperkolation*, bei denen man die Kanten bzw. Knoten des Graphen  $G$  unabhängig voneinander mit fester Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  auswählt und den von diesen Kanten bzw. Knoten erzeugten Teilgraph betrachtet. Für viele Graphen existiert eine *kritische Wahrscheinlichkeit*  $p_c \in (0, 1)$ , sodass für  $p < p_c$  keine Perkolation auftritt und das Modell für  $p > p_c$  perkoliert. Man sagt, dass bei  $p_c$  der *Perkulationsübergang* stattfindet. In dieser Arbeit betrachten wir zufällige Mosaik und erhalten eine zufällige Teilmenge  $Z$  des Raumes, indem wir das Mosaik in Abhängigkeit von einer Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  auf eine konsistente Weise schwarz und weiß färben. Man spricht in diesem Modell von *Perkolation*, falls die schwarze Menge  $Z$  mit Wahrscheinlichkeit eins eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente besitzt. Da sich physikalische Eigenschaften zufälliger Materialien ober- und unterhalb des Perkulationsübergangs stark unterscheiden, ist die Kenntnis der genauen Perkulationsgrenze  $p_c$  in der Materialforschung von großer Bedeutung.

Das wohl erste untersuchte Modell der diskreten Perkolation ist Kantenperkolation auf dem Quadratgitter, für das Theodore Harris [11] schon im Jahre 1960 bewiesen hat, dass  $1/2$  eine untere Schranke für die kritische Wahrscheinlichkeit ist. Erst zwanzig Jahre später gelang es Harry Kesten [19] zu beweisen, dass  $1/2$  auch eine obere Schranke ist und somit die kritische Wahrscheinlichkeit exakt bei  $1/2$  liegt. Ein sehr bekanntes Modell der stetigen Perkolation ist Knotenperkolation auf dem planaren Poisson-Delaunay-Mosaik. Da ein Poisson-Prozess zugrunde liegt, für den viele theoretische Resultate vorliegen und der außerdem starke Unabhängigkeitseigenschaften besitzt, würde man vermuten, dass die kritische Wahrscheinlichkeit recht einfach zu bestimmen ist, doch erst im Jahr 2006 gelang es Béla Bollobás und Oliver Riordan in einer umfangreichen und technischen Arbeit [5] die schon lange bestehende und durch Simulationen gestützte Vermutung, dass die kritische Wahrscheinlichkeit  $1/2$  ist, nachzuweisen.

Wie bereits beschrieben, haben sich mathematisch exakte Bestimmungen der kritischen Wahrscheinlichkeiten als schwierig erwiesen. Außerdem sind Simulationen sehr zeitaufwändig, weshalb man an einfach zu bestimmenden Schätzwerten für die Perkolationsgrenze interessiert ist. Da die Euler-Charakteristik globale Aspekte zufälliger Materialien gut beschreibt, ist zu erwarten, dass sie ein gutes Werkzeug für das Schätzen von Perkolationsgrenzen ist. Richard Neher, Klaus Mecke und Herbert Wagner stellten in [34] schon fest, dass die nicht-triviale Nullstelle der mittleren Euler-Charakteristik der zufälligen schwarzen Menge für viele Gitter eine gute Approximation für die kritische Wahrscheinlichkeit liefert. Diesen Ansatz wollen wir hier verallgemeinern, indem wir stationäre Mosaik und Größen erster und zweiter Ordnung aller inneren Volumina betrachten.

Ein in der Stochastischen Geometrie viel untersuchtes Modell, das in dieser Arbeit aber nicht behandelt wird, ist das Boolesche Modell, für das Daniel Hug, Günter Last und Matthias Schulte in [14] schon die asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina untersucht haben. Das *Boolesche Modell* ist die Vereinigungsmenge von um Poisson-Punkte verschobene zufällige zentrierte kompakte Mengen, sogenannte *Körner*. In diesem Modell definiert man als Perkolationsgrenze eine *kritische Intensität*  $\gamma_c > 0$  des zugrunde liegenden Poisson-Prozesses, sodass das Boolesche Modell für Intensitäten  $\gamma > \gamma_c$  mit Wahrscheinlichkeit eins eine unbeschränkte Zusammenhangskomponente besitzt und im Fall  $\gamma < \gamma_c$  mit Wahrscheinlichkeit null. Sind die Körner in einem einfachen Fall gerade die Einheitskugel, so ist die kritische Intensität  $\gamma_c$  positiv und endlich und man hat festgestellt, dass das lokale Minimum der asymptotischen Kovarianz von Volumen und Euler-Charakteristik nur weniger als 9/1000 von der in [31] simulierten kritischen Intensität entfernt ist.

Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir in einigen Modellen, denen ein Poisson-Prozess zugrunde liegt, zentrale Grenzwertsätze mit Hilfe der Stabilisierungstheorie beweisen. Das Konzept der Stabilisierung wurde in der heutigen Form von Mathew Penrose und Joseph Yukich eingeführt, vergleiche [39–41], wobei schon in der Arbeit [20] von Harry Kesten und Sungchul Lee und in [28] von Sungchul Lee erste Ansätze veröffentlicht wurden. Grob gesprochen stabilisiert ein in Abhängigkeit von einer Punktmenge definiertes geometrisches Funktional in einem Punkt  $x$ , wenn sein Verhalten in  $x$  nur lokal bestimmt ist, das heißt, Änderungen der zugrunde liegenden Punktmenge außerhalb eines Kreises um  $x$  von endlichem aber möglicherweise zufälligem Radius verändern das Funktional in  $x$  nicht. Für solche stabilisierenden Funktionale, denen ein Poisson-Prozess zugrunde liegt, gibt es Gesetze großer Zahlen, zentrale Grenzwertsätze sowie Resultate über moderate und große Abweichungen. Einige dieser Resultate bleiben auch für Binomialprozesse richtig. Da wir in dieser Arbeit gefärbte Mosaik betrachten und deswegen Stabilisierungsergebnisse für markierte Punktprozesse benötigen, verwenden wir die Arbeit [42] von Mathew Penrose und Joseph Yukich, wobei wir deren Resultat etwas verallgemeinern müssen um die hier zu untersuchenden Funktionale behandeln zu können.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden wir benötigte Grundlagen aus der Punktprozessentheorie und wichtige Funktionale der Konvexgeometrie, die inneren Volumina  $V_i$ ,  $i \in \{0, \dots, d\}$ , und die Oberflächenmaße  $\Psi_i$ ,  $i \in \{0, \dots, d-1\}$ , einführen. Außerdem werden die in dieser Arbeit betrachteten Perkolationsmodelle vorgestellt. Für ein stationäres und seitentreues zufälliges Mosaik  $X$  in  $\mathbb{R}^d$  ist eine  $(m, n)$ -Perkolation auf  $X$  mit Parameter  $p \in [0, 1]$  für  $m, n \in \{0, \dots, d\}$ ,  $m \leq n$ , eine wie folgt definierte Färbung des Mosaiks  $X$ . Die  $m$ -Seiten von  $X$  färben wir unabhängig voneinander

mit Wahrscheinlichkeit  $p$  schwarz und weiß sonst. Weiter färben wir höherdimensionale Seiten bis zur Dimension  $n$  schwarz, falls alle darin enthaltenen  $m$ -Seiten schwarz sind. Die Vereinigung aller schwarzen Seiten des Mosaiks  $X$  bezeichnen wir mit  $Z$ . Für  $m = n = d$  heißt  $(m, n)$ -Perkolation auch *Zellenperkolation* und für  $m = 0, n = d$  *Knotenperkolation*.

Im zweiten Kapitel werden in Theorem 2.1.1 und Theorem 2.1.4 unter einigen Voraussetzungen Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte

$$\delta_i(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z \cap W_t)]$$

und die asymptotischen Kovarianzen

$$\sigma_{i,j}(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(V_i(Z \cap W_t), V_j(Z \cap W_t))$$

der inneren Volumina bei  $(m, n)$ -Perkolation hergeleitet, wobei  $W_t := t^{1/d}W$  gesetzt wird und  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  kompakt und konvex ist, den Ursprung im Inneren enthält und Volumen eins hat. Setzt man zusätzlich voraus, dass das Mosaik *normal* ist, das heißt, jede  $k$ -Seite liegt in genau  $d - k + 1$  Zellen des Mosaiks, so vereinfachen sich diese Formeln für Zellenperkolation deutlich, vergleiche Theorem 2.2.1 und Theorem 2.2.3, und es kann ein Zusammenhang zwischen  $\delta_i(p)$  und  $\delta_i(1 - p)$  bzw.  $\sigma_{i,j}(p)$  und  $\sigma_{i,j}(1 - p)$  hergestellt werden. Außerdem können statt der inneren Volumina nun auch andere Funktionale, zum Beispiel die Oberflächenmaße, betrachtet und entsprechende Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotische Kovarianzstruktur angegeben werden.

In Kapitel drei werden wir nachweisen, dass im Poisson-Voronoi- und im Poisson-Delaunay-Mosaik alle Voraussetzungen für die Formeln der asymptotischen Erwartungswerte und der asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina erfüllt sind. Da das Poisson-Voronoi-Mosaik *normal* ist, wird außerdem gezeigt, dass auch die entsprechenden Voraussetzungen für die Formeln der asymptotischen Erwartungswerte und der asymptotischen Kovarianzen der Oberflächenmaße gelten. Weiter werden wir nachrechnen, dass auch in randomisierten Archimedischen Gittern die asymptotischen Erwartungswerte der inneren Volumina existieren, und geben explizite Formeln an. Zum Abschluss werden wir charakteristische Größen des asymptotischen Erwartungswertes der Euler-Charakteristik und der asymptotischen Kovarianzstruktur der inneren Volumina mit bekannten kritischen Wahrscheinlichkeiten vergleichen. In [34] haben Richard Neher, Klaus Mecke und Herbert Wagner bereits festgestellt, dass die nicht-triviale Nullstelle des asymptotischen Erwartungswertes der Euler-Charakteristik in planaren Gittern meist eine gute Näherung der kritischen Wahrscheinlichkeit liefert. Außerdem werden wir feststellen, dass in der Nähe der kritischen Wahrscheinlichkeit auch ein lokales Maximum der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik und ein lokales Minimum der asymptotischen Kovarianz von Euler-Charakteristik und Volumen liegt.

Spezialfälle der Ergebnisse aus Kapitel zwei und drei wurden bereits in [23] veröffentlicht.

Im zweiten Teil der Arbeit beweisen wir mit der Stabilisierungstheorie multivariate zentrale Grenzwertsätze für entsprechend skalierte innere Volumina und Oberflächenmaße der schwarzen Vereinigungsmenge  $Z$  bei Zellenperkolation auf dem Poisson-Voronoi-Mosaik, vergleiche Theorem 4.1.1. Entsprechend werden wir im Poisson-Delaunay-Mosaik einen multivariaten zentralen Grenzwertsatz für die inneren Volumina von  $Z$  bei  $(0, n)$ -Perkolation zeigen. In beiden Modellen können wir die positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrizen nachweisen. Weiter lassen sich mit diesen

Mitteln auch zentrale Grenzwertsätze für die inneren Volumina der Vereinigung der  $k$ -Seiten, die sogenannten  $k$ -*Skelette*, im Poisson-Voronoi- und Poisson-Delaunay-Mosaik beweisen.

Im Anhang werden die inneren Volumina wie in [9] von Helmut Groemer auf sogenannte *approximierbare Funktionen* erweitert und einige Lemmata für diese verallgemeinerten inneren Volumina bewiesen. Wir benötigen die Definition der inneren Volumina auf dieser größeren Klasse um die Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina von  $Z$  bei  $(m, n)$ -Perkolation bestimmen und die dafür benötigten Voraussetzungen definieren zu können. Die Formeln selbst enthalten nur die herkömmlichen inneren Volumina. Außerdem wird ein Resultat der Stabilisierungstheorie [42, Theorem 2.1] verallgemeinert, sodass mit diesem modifizierten Theorem zentrale Grenzwertsätze für die hier untersuchten Modelle bewiesen werden können.

---

# Kapitel 1

## Notationen, Grundlagen und Modelle

---

In diesem Kapitel führen wir häufig verwendete Notationen ein und stellen einige Grundlagen aus der Punktprozessentheorie bereit. Danach werden die hier untersuchten Perkulationsmodelle vorgestellt und wir geben einige wichtige Beispiele solcher Perkulationsmodelle und zugrunde liegender Mosaike an. Zuletzt führen wir die hier betrachteten Funktionale aus der Konvexgeometrie, die Oberflächenmaße und die inneren Volumina, ein.

### 1.1 Notationen

Da einige Bezeichnungen in dieser Arbeit häufig verwendet werden, sollen sie zu Beginn bereitgestellt werden. Es seien  $\mathbb{R}$  die Menge der *reellen Zahlen*,  $\mathbb{C}$  die *komplexen Zahlen*,  $\mathbb{N}$  die Menge der *natürlichen Zahlen* und wir definieren  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Für eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $k \in \mathbb{N}$  bezeichnet  $A^k := A \times \dots \times A$  das  $k$ -fache *kartesische Produkt* und  $|\cdot|$  sei die *Kardinalität* einer Menge. Ist  $\mathbb{X}$  ein topologischer Raum, so ist  $\mathcal{B}(\mathbb{X})$  die  $\sigma$ -Algebra der *Borelmengen* von  $\mathbb{X}$ . Weiter seien  $\lambda_d$  das *Lebesguemaß* auf  $\mathbb{R}^d$  und  $\mathcal{H}^k$  das  $k$ -dimensionale *Hausdorffmaß*. Die *Supremumsnorm* in  $\mathbb{R}^d$  bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|_\infty$ , die *Euklidische Norm* mit  $\|\cdot\|$  und das zugehörige *Standardskalarprodukt* mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Weiter ist  $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq r\}$  die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt  $x \in \mathbb{R}^d$  und Radius  $r \geq 0$ . Dann ist  $B(0, 1)$  die  $d$ -dimensionale *Einheitskugel* und  $\kappa_d$  bezeichnet deren Volumen. Die *Einheitssphäre*  $\mathbb{S}^{d-1}$  in  $\mathbb{R}^d$  ist die Menge aller Vektoren mit Norm eins und das durch

$$\sigma_{d-1}(U) := d \lambda_d(\{ru : u \in U, r \in [0, 1]\}), \quad U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}),$$

definierte Maß heißt *sphärisches Lebesguemaß* auf  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Für den *Abstand* eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^d$  zu einer Menge  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  schreiben wir

$$d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

und den *Durchmesser* von  $A$  definieren wir durch

$$\text{diam}(A) := \sup\{\|x - y\| : x, y \in A\}.$$

Weiter bezeichnet  $\text{conv}(B)$  die *konvexe Hülle* einer Menge  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $\overset{\circ}{B} = \text{int}(B)$ ,  $\partial B$ ,  $\text{relint}(B)$ ,  $\text{relbd}(B)$ ,  $\bar{B}$  und  $B^c$  das *Innere*, den *Rand*, das *relative Innere*, den *relativen Rand*, den *Abschluss* und das *Komplement* von  $B$ . Wir definieren den *Umkugelradius* einer Borelmenge  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  durch

$$R(B) := \inf\{r > 0 : \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ mit } B \subseteq B(x, r)\}.$$

Für  $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$  seien  $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$  die *Minkowski-Summe* von  $A$  und  $B$  und  $A - B := A + (-B)$ , wobei  $-A := \{-a : a \in A\}$  gesetzt wird. Weiter definieren wir  $A + b = b + A := A + \{b\}$  für  $b \in \mathbb{R}^d$  und  $\alpha A := \{\alpha a : a \in A\}$  für  $\alpha \geq 0$ .

Ein *Polytop* ist ein beschränkter und nicht-leerer Schnitt von endlich vielen Halbräumen und die Menge der Polytope in  $\mathbb{R}^d$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}^d$ . Ein *Polygon* ist ein zweidimensionales Polytop. Weiter ist ein *konvexer Körper* eine konvexe und kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  und die Menge der konvexen Körper in  $\mathbb{R}^d$  sei  $\mathcal{K}^d$ . Offensichtlich gilt  $\mathcal{P}^d \subseteq \mathcal{K}^d$ . Die Menge aller endlichen Vereinigungen konvexer Körper heißt *Konvexring*.

Für  $x \in \mathbb{R}^d$  bezeichne  $\delta_x(\cdot) := \mathbf{1}\{x \in \cdot\}$  das *Dirac-Maß* auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ . Analog bezeichnet  $\delta_{(x,m)}(\cdot) := \mathbf{1}\{(x,m) \in \cdot\}$  für  $(x,m) \in \mathbb{R}^d \times \{0,1\}$  das Dirac-Maß auf der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{P}(\{0,1\})$ , wobei  $\mathcal{P}(\{0,1\})$  die Potenzmenge von  $\{0,1\}$  sei.

Schließlich bezeichnet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  einen Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem alle zufälligen Objekte definiert seien. Den Erwartungswert bezüglich  $\mathbb{P}$  bezeichnen wir mit  $\mathbb{E}$ .

## 1.2 Punktprozesse und Palm-Theorie

Wir nehmen an, dass der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  wie in [22, 27] für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  mit einem *messbaren Fluss*  $\theta_x : \Omega \rightarrow \Omega$  versehen ist, das heißt,  $(\omega, x) \mapsto \theta_x \omega$  ist messbar, für  $x, y \in \mathbb{R}^d$  gilt  $\theta_{x+y} = \theta_x \circ \theta_y$  und  $\theta_0$  ist die Identität auf  $\Omega$ . Weiter sei  $\mathbb{P}$  *stationär*, das heißt, es gilt  $\mathbb{P} \circ \theta_x = \mathbb{P}$  für  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dabei bezeichnet  $\circ$  die Komposition.

Ein *Zählmaß* auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ist ein Maß  $\chi$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , das nur Werte in  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  annimmt. Es heißt *einfach*, falls  $\chi(\{x\}) \leq 1$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt. Ein *zufälliges Maß*  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  ist ein Kern von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^d$ , sodass  $\mu(\omega, \cdot)$  für alle  $\omega \in \Omega$  *lokal-endlich* ist, das heißt,  $\mu(\omega, \cdot)$  ist für kompakte Mengen endlich. Ist  $\mu(\omega, \cdot)$  zusätzlich ein Zählmaß, so heißt  $\mu$  *Punktprozess* in  $\mathbb{R}^d$  und ein Punktprozess  $\mu$  heißt *einfach*, falls  $\mu$   $\mathbb{P}$ -fast sicher einfach ist. Die Menge aller einfachen, lokal-endlichen Zählmaße in  $\mathbb{R}^d$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{N}$ . Weiter sei  $\mathcal{N}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbf{N}$ , bezüglich der die Abbildungen  $\chi \mapsto \chi(B)$  von  $\mathbf{N}$  nach  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  für alle Borelmengen  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  messbar sind. Wir werden einfache Punktprozesse  $\mu$  im Folgenden mit ihrem *Träger*  $\{x \in \mathbb{R}^d : \mu(\{x\}) > 0\}$  identifizieren und können  $\mu$  damit auch als zufällige Punktmenge in  $\mathbb{R}^d$  auffassen.

Weiter heißt ein zufälliges Maß  $\mu$  *invariant*, falls

$$\mu(\theta_x \omega, B - x) = \mu(\omega, B), \quad x \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega,$$

für alle Borelmengen  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  gilt. Daraus folgt, dass  $\mu$  *stationär* ist, das heißt, die Verteilung des zufälligen Maßes  $B \mapsto \mu(\cdot, B + x)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , ist unabhängig von  $x \in \mathbb{R}^d$ . Ist  $\mu$  invariant, so heißt die Zahl  $\gamma_\mu := \mathbb{E}[\mu([0,1]^d)]$  *Intensität* von  $\mu$ . Gilt weiter  $0 < \gamma_\mu < \infty$ , so können wir das *Palmsche Wahrscheinlichkeitsmaß* von  $\mu$  durch

$$\mathbb{P}_\mu^0(A) := \frac{1}{\gamma_\mu} \iint \mathbf{1}_A(\theta_x \omega) \mathbf{1}\{x \in [0,1]^d\} \mu(\omega, dx) \mathbb{P}(d\omega), \quad A \in \mathcal{A},$$

definieren. Für dieses Maß gilt die folgende Proposition, das sogenannte *verfeinerte Theorem von Campbell*, vergleiche [22, Theorem 3.6].

**Proposition 1.2.1** *Sei  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  messbar. Dann gilt für ein invariantes zufälliges Maß  $\mu$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit positiver und endlicher Intensität*

$$\mathbb{E} \left[ \int f(\theta_x, x) \mu(dx) \right] = \gamma_\mu \mathbb{E}_\mu^0 \left[ \int f(\theta_0, x) dx \right], \quad (1.1)$$

wobei  $\mathbb{E}_\mu^0$  den Erwartungswert bezüglich  $\mathbb{P}_\mu^0$  bezeichnet.

Weiter werden wir die häufig verwendete *Austauschformel von Neveu* formulieren, vergleiche [27].

**Proposition 1.2.2** *Seien  $\mu$  und  $\tilde{\mu}$  invariante zufällige Maße auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  mit positiven und endlichen Intensitäten und sei  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$  messbar. Dann gilt*

$$\gamma_\mu \mathbb{E}_\mu^0 \left[ \int f(\theta_x, -x) \tilde{\mu}(dx) \right] = \gamma_{\tilde{\mu}} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}}^0 \left[ \int f(\theta_0, x) \mu(dx) \right].$$

Ein stationärer Punktprozess  $\mu$  mit Intensität  $\gamma_\mu$  heißt *Poisson-Prozess* in  $\mathbb{R}^d$ , falls  $\mu(\cdot, B)$  für alle  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\gamma_\mu \lambda_d(B)$  ist, das heißt, es gilt

$$\mathbb{P}(\mu(B) = n) = e^{-\gamma_\mu \lambda_d(B)} \frac{(\gamma_\mu \lambda_d(B))^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und  $\mu$  *unabhängige Zuwächse* besitzt, das heißt, für  $n \in \mathbb{N}$  und paarweise disjunkte Mengen  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  sind die Zufallsvariablen  $\mu(\cdot, B_1), \dots, \mu(\cdot, B_n)$  unabhängig. Weiter gilt für das Palm'sche Wahrscheinlichkeitsmaß eines Poisson-Prozesses  $\mu$  nach dem *Theorem von Slivnyak*

$$\mathbb{P}_\mu^0(\mu \in N) = \mathbb{P}(\mu \cup \{0\} \in N), \quad N \in \mathcal{N}, \quad (1.2)$$

vergleiche [44, Theorem 3.3.5].

Ist  $(\mathbf{M}, \mathcal{M})$  ein lokal-kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis und Borelscher  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M}$ , dann ist ein *markierter Punktprozess*  $\mu'$  ein Kern von  $\Omega$  nach  $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$ , für den  $\mu'(\omega, \cdot)$  für alle  $\omega \in \Omega$  lokal-endlich ist und  $\mu'(\omega, B') \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  für alle Borelmengen  $B' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})$  gilt. Den zugehörigen *unmarkierten Punktprozess*  $\mu$  auf  $\mathbb{R}^d$  definieren wir durch  $\mu := \mu'(\cdot \times \mathbf{M})$ . Der markierte Punktprozess  $\mu'$  heißt *invariant*, falls der Punktprozess  $\mu'(\cdot \times B)$  für alle  $B \in \mathcal{M}$  invariant ist. Für einen invarianten markierten Punktprozess  $\mu'$  gibt es, vergleiche [22, Lemma 3.11], einen invarianten stochastischen Kern  $\kappa$  von  $\Omega \times \mathbb{R}^d$  nach  $\mathbf{M}$ , sodass  $\mathbb{P}$ -fast sicher

$$\mu' = \iint \mathbf{1}\{(x, m) \in \cdot\} \kappa(x, dm) \mu(dx)$$

gilt. Gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_\mathbf{M}$  auf  $\mathcal{M}$  mit  $\kappa(x, \cdot) = \mathbb{P}_\mathbf{M}$ , so heißt  $\mu'$  *unabhängig markierter Punktprozess* mit *Markenverteilung*  $\mathbb{P}_\mathbf{M}$ .

Ist  $\mu'$  ein invarianter markierter Punktprozess und gilt  $0 < \gamma_\mu < \infty$  für die Intensität  $\gamma_\mu$  des zugehörigen unmarkierten Punktprozesses, so ist das *Palm'sche Wahrscheinlichkeitsmaß* von  $\mu'$  durch

$$\mathbb{P}_{\mu'}^0(A) := \frac{1}{\gamma_\mu} \iint \mathbf{1}_A(\theta_x \omega, m) \mathbf{1}\{x \in [0, 1]^d\} \mu'(\omega, d(x, m)) \mathbb{P}(d\omega), \quad A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{M},$$

definiert. Es kann wieder ein verfeinertes Theorem von Campbell, vergleiche (3.26) in [22], formuliert werden.

**Proposition 1.2.3** *Seien  $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbf{M} \rightarrow [0, \infty)$  messbar und  $\mu'$  ein invarianter markierter Punktprozess, sodass die Intensität  $\gamma_\mu$  des zugehörigen unmarkierten Punktprozesses positiv und endlich ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \left[ \int f(\theta_x, x, m) \mu'(d(x, m)) \right] = \gamma_\mu \iint f(\omega, x, m) dx \mathbb{P}_{\mu'}^0(d(\omega, m)).$$

Nun werden wir Partikelprozesse konvexer Partikel über markierte Punktprozesse in  $\mathbb{R}^d$  mit Marken in  $\mathcal{K}^d$  definieren. Für  $K \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$  definieren wir den *Steiner-Punkt* von  $K$  durch

$$s(K) := \frac{1}{\kappa_d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h(K, u) u \sigma_{d-1}(du),$$

wobei  $h(K, \cdot) := \sup_{x \in K} \langle x, \cdot \rangle$  die *Stützfunktion* von  $K$  bezeichnet. Der Steiner-Punkt ist translationskovariant, das heißt, für  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt  $s(K + x) = s(K) + x$ , vergleiche [44, S. 613], und weiter gilt nach (1.7.6) in [43], dass der Steiner-Punkt eines konvexen Körpers  $K \in \mathcal{K}^d$  im relativen Inneren von  $K$  enthalten ist. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{K}_0^d$  die Menge der nicht-leeren konvexen Körper in  $\mathbb{R}^d$ , deren Steiner-Punkt im Ursprung liegt.

Wir versehen  $\mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$  mit der *Hausdorffmetrik*  $d_H$ , die durch

$$d_H(K, L) := \inf\{\varepsilon > 0 : K \subseteq L + B(0, \varepsilon), L \subseteq K + B(0, \varepsilon)\}, \quad K, L \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\},$$

definiert ist. Somit erfüllt  $(\mathcal{K}_0^d, \mathcal{B}(\mathcal{K}_0^d))$  alle Voraussetzungen an den Raum  $(\mathbf{M}, \mathcal{M})$ , vergleiche [44], und  $\mu'$  bezeichne im Rest des Abschnitts einen markierten Punktprozess in  $\mathbb{R}^d$  mit Marken in  $\mathcal{K}_0^d$ . Definiert man  $\Phi((x, K)) := x + K$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $K \in \mathcal{K}_0^d \setminus \{\emptyset\}$ , so heißt

$$\Phi(\mu') := \sum_{(x, K) \in \mu'} \delta_{\Phi((x, K))}$$

der zu  $\mu'$  gehörende *Partikelprozess konvexer Partikel*, wobei  $\delta_K(\cdot) = \mathbf{1}\{K \in \cdot\}$  für  $K \in \mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\}$  das *Dirac-Maß* auf  $\mathcal{B}(\mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\})$  bezeichnet. Das Maß  $\mathbb{E}[\Phi(\mu')(\cdot)]$  auf  $\mathcal{B}(\mathcal{K}^d \setminus \{\emptyset\})$  heißt *Intensitätsmaß* des Partikelprozesses  $\Phi(\mu')$  und  $\Phi(\mu')$  heißt *stationär*, falls  $\mu'$  invariant ist. Ist  $\Phi(\mu')$  ein stationärer Partikelprozess konvexer Partikel, so gilt für das Intensitätsmaß nach dem verfeinerten Theorem von Campbell für markierte Punktprozesse

$$\mathbb{E}[\Phi(\mu')] = \gamma_{\mu'} \Phi(\lambda_d \otimes \mathbb{P}_{\mu'}^0(\Omega \times \cdot)),$$

vergleiche auch Theorem 4.1.1 in [44]. Ein zufälliges Element in  $\mathcal{K}_0^d$  mit Verteilung  $\mathbb{P}_{\mu'}^0(\Omega \times \cdot)$  heißt *typisches Korn* von  $\Phi(\mu')$ .

Im Folgenden sei  $\mathcal{P}(\{0, 1\})$  die Potenzmenge von  $\{0, 1\}$ . Wir bezeichnen in dieser Arbeit mit  $\mathbf{N}_{\{0, 1\}}$  die Menge aller lokal-endlichen Zählmaße  $\chi'$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{P}(\{0, 1\})$ , für die  $\chi'(\cdot \times \{0, 1\})$  einfach ist, und  $\mathcal{N}_{\{0, 1\}}$  sei die analog zu  $\mathcal{N}$  definierte  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbf{N}_{\{0, 1\}}$ . Weiter sei  $\eta'$  ein unabhängig markierter Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}^d$  mit Markenraum  $\mathbf{M} = \{0, 1\}$ , Intensität  $\gamma > 0$  und Markenverteilung  $\mathbb{P}_{\mathbf{M}} = \text{Bern}(p)$  für festes  $p \in [0, 1]$ . Den zugehörigen unmarkierten Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}^d$  der Intensität  $\gamma > 0$  bezeichnen wir mit  $\eta$ . Für eine (deterministische oder zufällige) lokal-endliche Menge  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  setzen wir  $\chi^x := \chi \cup \{x\}$  und  $\chi^{x, y} := \chi \cup \{x, y\}$  für  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

### 1.3 Gefärbte Mosaike und $(m, n)$ -Perkolation

Ein *Mosaik* in  $\mathbb{R}^d$  ist ein abzählbares System  $\varphi$   $d$ -dimensionaler Polytope, sogenannter *Zellen*, sodass die Zellen den ganzen Raum überdecken, paarweise disjunktes Inneres haben und jede beschränkte Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$  nur von endlich vielen Zellen geschnitten wird. Für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und ein Polytop  $C \in \mathcal{P}^d$  ist eine *k-Seite* von  $C$  ein  $k$ -dimensionaler Schnitt von  $C$  mit einer Stützhyper ebene von  $C$ . Die 0-Seiten heißen *Ecken* oder *Knoten*, wobei wir eine Ecke  $\{x\}$  mit  $x$  identifizieren werden, und die 1-Seiten heißen *Kanten*. Wir bezeichnen die Menge aller  $k$ -Seiten eines Polytops  $C$  mit  $\mathcal{F}_k(C)$  und setzen  $\mathcal{F}_d(C) := \{C\}$ , falls  $C$   $d$ -dimensional ist, und  $\mathcal{F}_d(C) := \emptyset$  sonst.

Die Menge aller *Seiten* von  $C$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}(C) := \bigcup_{k=0}^d \mathcal{F}_k(C)$ . Ein Mosaik  $\varphi$  heißt *seitentreu*, falls für alle Zellen  $C, C' \in \varphi$  der Schnitt  $C \cap C'$  entweder leer oder eine Seite von  $C$  und  $C'$  ist. Bezeichne mit  $\mathbf{T}$  die Menge aller seitentreuen Mosaik und definiere das System der  $k$ -Seiten von  $\varphi \in \mathbf{T}$  und das System aller Seiten von  $\varphi$  durch

$$\mathcal{F}_k(\varphi) := \bigcup_{C \in \varphi} \mathcal{F}_k(C) \quad \text{und} \quad \mathcal{F}(\varphi) := \bigcup_{C \in \varphi} \mathcal{F}(C).$$

Man beachte, dass  $\mathcal{F}_d(\varphi) = \varphi$  gilt.

Ein *gefärbtes Mosaik* definieren wir als Tupel  $\psi = (\varphi, \varphi_0, \dots, \varphi_d)$ , wobei  $\varphi$  ein seitentreues Mosaik ist und  $\varphi_k \subseteq \mathcal{F}_k(\varphi)$  für  $k \in \{0, \dots, d\}$ , sodass  $\mathcal{F}_{k-1}(S) \subseteq \varphi_{k-1}$  für  $k \geq 1$  und  $S \in \varphi_k$  gilt. Jede Seite in  $\bigcup_{k=0}^d \varphi_k$  wird *schwarz* genannt und alle anderen Seiten von  $\varphi$  heißen *weiß*. Ist  $S \in \mathcal{F}(\varphi)$  schwarz, so sind nach Definition also alle Seiten von  $S$  schwarz. Wir schreiben  $X(\psi) := \varphi$  und  $X_k^1(\psi) := \varphi_k$  und bezeichnen mit  $\mathbf{T}_c$  den Raum aller gefärbten Mosaik.

Seien  $\psi = (\varphi, \varphi_0, \dots, \varphi_d) \in \mathbf{T}_c$  ein gefärbtes Mosaik und  $x \in \mathbb{R}^d$ . Da  $\varphi$  seitentreu ist, gibt es eine eindeutige Seite  $S \in \mathcal{F}(\varphi)$ , die  $x$  in ihrem relativen Inneren enthält. Für diese Seite schreiben wir  $S(x, \psi) := S(x, \varphi) := S$ . Um die lokale Nachbarschaft eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^d$  zu beschreiben führen wir für  $l \in \{0, \dots, d\}$  die Menge  $\mathcal{S}_l(x, \psi) := \mathcal{S}_l(x, \varphi)$  wie folgt ein. Sei  $k$  die Dimension von  $S(x, \psi)$ . Im Fall  $l \geq k$  (bzw.  $l < k$ ) sei  $\mathcal{S}_l(x, \psi)$  die Menge aller Seiten  $G \in \mathcal{F}_l(\varphi)$ , sodass  $S(x, \psi) \subseteq G$  (bzw.  $G \subseteq S(x, \psi)$ ) gilt. Die Menge  $\mathcal{S}_l(x, \psi)$  wird auch *Seitenstern* genannt, vergleiche [44], und besteht also aus allen  $l$ -Seiten, die  $S(x, \psi)$  enthalten oder in  $S(x, \psi)$  enthalten sind.

Es sei  $\mathcal{T}_c$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbf{T}_c$ , sodass die Zahlen

$$|\{C \in X(\psi) : C \in H\}|, |\{C \in X_0^1(\psi) : C \in H\}|, \dots, |\{C \in X_k^1(\psi) : C \in H\}|$$

für alle messbaren  $H \subseteq \mathcal{P}^d$  eine messbare Funktion von  $\psi \in \mathbf{T}_c$  sind. Analog definiert man die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{T}$  auf  $\mathbf{T}$ .

Ein *zufälliges gefärbtes Mosaik*  $\Psi$  ist eine messbare Abbildung von dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  nach  $(\mathbf{T}_c, \mathcal{T}_c)$ . Wir interessieren uns für die Vereinigung

$$Z := Z(\Psi) := \bigcup_{k=0}^d \bigcup_{S \in X_k^1(\Psi)} S$$

aller schwarzen Seiten. Wir werden im Folgenden annehmen, dass  $\Psi$  stationär ist, das heißt

$$\Psi + x \stackrel{d}{=} \Psi, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.3)$$

wobei man  $\psi + x := (\varphi + x, \varphi_0 + x, \dots, \varphi_d + x)$  für  $\psi = (\varphi, \varphi_0, \dots, \varphi_d) \in \mathbf{T}_c$  und  $H + x := \{S + x : S \in H\}$  für  $H \subseteq \mathcal{K}^d$  setzt. In diesem Fall ist  $Z$  ebenfalls stationär, das heißt  $Z + x \stackrel{d}{=} Z$  für  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Um das Konzept der  $(m, n)$ -Perkolation,  $m \leq n$ , einzuführen betrachten wir ein zufälliges seitentreues Mosaik  $X$ , also ein zufälliges Element aus  $\mathbf{T}$ . Weiter nehmen wir an, dass  $X$  stationär ist, das heißt, die Verteilung von  $X + x$  ist unabhängig von  $x \in \mathbb{R}^d$ . Ein gefärbtes Mosaik  $\Psi$  ist eine  $(m, n)$ -Perkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf  $X$ , falls  $X(\Psi) = X$ ,  $X_m^1(\Psi)$  eine  $p$ -Ausdünnung von  $\mathcal{F}_m(X)$  ist, das heißt, bei gegebenem  $X$  werden die  $m$ -Seiten von  $X$  unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit  $p$  zu  $X_m^1(\Psi)$  hinzugefügt, und  $X_0^1(\Psi), \dots, X_d^1(\Psi)$  die folgenden Eigenschaften haben: Für

$k < m$  ist das System  $X_k^1(\Psi)$  die Vereinigung aller  $\mathcal{F}_k(S)$  für  $S \in X_m^1(\Psi)$  und für  $m < k \leq n$  wird  $X_k^1(\Psi)$  als die Menge aller  $S \in \mathcal{F}_k(X)$  mit  $\mathcal{F}_m(S) \subseteq X_m^1(\Psi)$  definiert. Für  $k > n$  ist  $X_k^1(\Psi)$  leer. Da das zugrunde liegende Mosaik  $X$  zufällig und stationär ist, ist also  $\Psi$  ein stationäres zufälliges gefärbtes Mosaik. Im Fall  $m = n = d$  sprechen wir von *Zellenperkolation* und im Fall  $m = 0$  und  $n = d$  von *Knotenperkolation*. Betrachtet man ein planares Mosaik, so spricht man außerdem für  $m = 1$  und  $n = 2$  von *Kantenperkolation*.

Wir fixieren nun ein zufälliges gefärbtes Mosaik  $\Psi$ , sodass

$$\Psi(\theta_x \omega) = \Psi(\omega) - x, \quad \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d, \quad (1.4)$$

erfüllt ist. Mit der Stationarität von  $\mathbb{P}$  folgt, dass  $\Psi$  stationär im Sinne von (1.3) ist. Weiter können wir im Folgenden auch auf dem kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbf{T}_c, \mathcal{T}_c, \mathbb{P} \circ \Psi^{-1})$  arbeiten. Wir werden die Abkürzungen

$$X := X(\Psi), \quad X_k := \mathcal{F}_k(X), \quad X_k^1 := X_k^1(\Psi), \quad k \in \{0, \dots, d\},$$

verwenden. Die Invarianzannahme (1.4) impliziert für  $\omega \in \Omega$  und  $x \in \mathbb{R}^d$

$$(X(\theta_x \omega), X_k(\theta_x \omega), X_k^1(\theta_x \omega)) = (X(\omega) - x, X_k(\omega) - x, X_k^1(\omega) - x).$$

Für  $k \in \{0, \dots, d\}$  definieren wir den Punktprozess der Steiner-Punkte der  $k$ -Seiten durch

$$\eta^{(k)} := \{s(S) : S \in X_k\}.$$

Insbesondere gilt  $\eta^{(0)} = X_0$ . Wegen der Translationskovarianz des Steiner-Punktes impliziert die Invarianzannahme (1.4), dass  $\eta^{(k)}$  invariant ist. Nach Voraussetzung an  $X$  enthält  $\eta^{(k)}$  unendlich viele Punkte, sodass die Intensität

$$\gamma_k := \gamma_{\eta^{(k)}} = \mathbb{E}[\eta^{(k)}([0, 1]^d)]$$

positiv ist. Wir nehmen  $\gamma_k < \infty$  an, sodass das Palm'sche Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_k^0 := \mathbb{P}_{\eta^{(k)}}^0$  wohldefiniert ist. Den Erwartungswert bezüglich  $\mathbb{P}_k^0$  bezeichnen wir mit  $\mathbb{E}_k^0$ . Man beachte, dass der Ursprung unter  $\mathbb{P}_k^0$  fast sicher im relativen Inneren einer  $k$ -dimensionalen Seite liegt.

Wir verwenden für  $x \in \mathbb{R}^d$  und ein Polytop  $P \in \mathcal{P}^d$  die Abkürzungen

$$(S(x), \mathcal{S}_l(x), \mathcal{S}_l(P)) := (S(x, \Psi), \mathcal{S}_l(x, \Psi), \mathcal{S}_l(s(P), \Psi)).$$

Wegen  $S(x, \Psi) = S(0, \Psi - x) + x$  erhalten wir aus (1.4), dass

$$\mathbb{P}_k^0(S(0) \in \cdot) = \frac{1}{\gamma_k} \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}\{x \in [0, 1]^d, S(x) - x \in \cdot\} \eta^{(k)}(dx) \right]$$

die Verteilung des typischen Kornes des Partikelprozesses  $X_k$  ist, das wir im Folgenden als *typische  $k$ -Seite* bezeichnen; vergleiche die Definition des typischen Kornes im vorherigen Abschnitt. Man beachte dabei, dass  $X_k$  der zu  $\tilde{\eta}^{(k)} := \{(s(S), S - s(S)) : S \in X_k\}$  gehörende Partikelprozess konvexer Partikel  $\Phi(\tilde{\eta}^{(k)})$  ist.

Wir werden nun zwei Seitensternbeziehungen formulieren, die jeweils einfache Folgerungen aus der Austauschformel von Neveu sind.

**Proposition 1.3.1** *Seien  $k, l \in \{0, \dots, d\}$  und  $f : \mathcal{P}^d \times \mathcal{P}^d \rightarrow [0, \infty)$  eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \sum_{T \in \mathcal{S}_l(0)} f(S(0), T - s(T)) \right] = \gamma_l \mathbb{E}_l^0 \left[ \sum_{T \in \mathcal{S}_k(0)} f(T - s(T), S(0)) \right].$$

Definiere für  $x \in \mathbb{R}^d$  mit  $\dim(S(x)) = k$  eine modifizierte Version des Systems  $\mathcal{S}_l(x)$  durch

$$\tilde{\mathcal{S}}_l(x, \Psi) := \tilde{\mathcal{S}}_l(x) := \{T \in \mathcal{F}_k(X) : T \cap S(x) \neq \emptyset\}$$

Somit ist  $\tilde{\mathcal{S}}_l(x)$  die Menge aller  $l$ -Seiten, die nicht-leeren Schnitt mit der  $k$ -Seite  $S(x)$  haben. Für dieses modifizierte System gilt eine analoge Seitensternbeziehung.

**Proposition 1.3.2** *Seien  $k, l \in \{0, \dots, d\}$  und  $f : \mathcal{P}^d \times \mathcal{P}^d \rightarrow [0, \infty)$  eine messbare Funktion. Dann gilt*

$$\gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \sum_{T \in \tilde{\mathcal{S}}_l(0)} f(S(0), T - s(T)) \right] = \gamma_l \mathbb{E}_l^0 \left[ \sum_{T \in \tilde{\mathcal{S}}_k(0)} f(T - s(T), S(0)) \right].$$

Die beiden folgenden Theoreme werden in dieser Arbeit benötigt um eine Indikatorfunktion, die die Farben gewisser Seiten abfragt, als Färbewahrscheinlichkeit dieser Seiten bei gegebenem Mosaik aus dem Erwartungswert ziehen zu können.

**Lemma 1.3.3** *Seien  $X$  ein stationäres zufälliges seitentreues Mosaik und  $\Psi$  eine  $(m, n)$ -Perkolations auf  $X$ . Weiter seien  $\mu$  ein  $\sigma(X)$ -messbarer Punktprozess mit endlicher Intensität  $\gamma$  und  $f : \mathbf{T} \times \mathbf{T}_c \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  messbar. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \left[ \int f(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] = \mathbb{E} \left[ \int \mathbb{E}[f(X, \Psi, x) | X] \mu(dx) \right]. \quad (1.5)$$

*Beweis:* Für  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$\mathcal{M}_n := \{S \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_c \otimes \mathcal{B}(B(0, n)) : \text{für } f := \mathbf{1}_S \text{ gilt (1.5)}\}$$

und

$$\mathcal{Q}_n := (\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_c) \times \mathcal{B}(B(0, n)).$$

Ist  $T \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_c$  und  $B \in \mathcal{B}(B(0, n))$ , so gilt für  $f(X, \Psi, x) := \mathbf{1}_T(X, \Psi) \mathbf{1}_B(x)$  mit iterierter Erwartungswertbildung

$$\mathbb{E} \left[ \int f(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_T(X, \Psi) \mu(B)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{1}_T(X, \Psi) \mu(B) | X]].$$

Da  $\mu$  ein  $\sigma(X)$ -messbarer Punktprozess ist, folgt mit der Linearität des Integrals und des bedingten Erwartungswerts

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int f(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] &= \mathbb{E}[\mu(B) \mathbb{E}[\mathbf{1}_T(X, \Psi) | X]] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_B(x) \mathbb{E}[\mathbf{1}_T(X, \Psi) | X] \mu(dx) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int \mathbb{E}[\mathbf{1}_T(X, \Psi) \mathbf{1}_B(x) | X] \mu(dx) \right]. \end{aligned}$$

Somit ist (1.5) für diese Indikatorfunktionen erfüllt und es folgt  $\mathcal{Q}_n \subseteq \mathcal{M}_n$ . Weiter ist  $\mathcal{Q}_n$  durchschnittsstabil. Ist  $\mathcal{M}_n$  ein Dynkin-System und bezeichnet  $\delta(\mathcal{M})$  das von einem Mengensystem  $\mathcal{M}$  erzeugte Dynkin-System, so folgt mit dem monotonen Klassensatz

$$\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_c \otimes \mathcal{B}(B(0, n)) = \sigma(\mathcal{Q}_n) = \delta(\mathcal{Q}_n) \subseteq \delta(\mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_c \otimes \mathcal{B}(B(0, n)),$$

also  $\mathcal{M}_n = \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_c \otimes \mathcal{B}(B(0, n))$ . Definiert man für  $S \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}_c \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$S_n := S \cap (\mathbf{T} \times \mathbf{T}_c \times B(0, n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

so liegt  $S_n$  in der Menge  $\mathcal{M}_n$  und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt, dass auch die Indikatorfunktion von  $S$  als monotoner Grenzwert der Indikatorfunktionen der  $S_n$  Gleichung (1.5) erfüllt. Mit algebraischer Induktion folgt nun die Behauptung. Also bleibt zu zeigen, dass  $\mathcal{M}_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ein Dynkin-System ist.

Zunächst liegt  $\mathbf{T} \times \mathbf{T}_c \times B(0, n)$  in  $\mathcal{Q}_n$  und damit insbesondere in  $\mathcal{M}_n$ . Weiter ist für  $S \in \mathcal{M}_n$  der Erwartungswert auf der linken Seite von (1.5) endlich, denn es gilt

$$\mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_S(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] \leq \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_{B(0, n)}(x) \mu(dx) \right] = \gamma \lambda_d(B(0, n)).$$

Damit sind alle im Folgenden auftretenden Erwartungswerte endlich.

Seien nun  $R, S \in \mathcal{M}_n$  mit  $R \subseteq S$ , so gilt

$$\mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_{S \setminus R}(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] = \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_S(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] - \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_R(X, \Psi, x) \mu(dx) \right].$$

Da  $R, S \in \mathcal{M}_n$  gilt und somit (1.5) für die Indikatorfunktionen von  $R$  und  $S$  erfüllt ist, folgt mit der Linearität des Erwartungswerts, des Integrals und des bedingten Erwartungswerts

$$\mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_{S \setminus R}(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] = \mathbb{E} \left[ \int \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S \setminus R}(X, \Psi, x) | X] \mu(dx) \right]$$

und damit  $S \setminus R \in \mathcal{M}_n$ .

Seien nun  $S_k \in \mathcal{M}_n$  für  $k \in \mathbb{N}$  paarweise disjunkt. Dann erhält man mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_{\cup S_k}(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] &= \mathbb{E} \left[ \int \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{S_k}(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_{S_k}(X, \Psi, x) \mu(dx) \right]. \end{aligned}$$

Wegen  $S_k \in \mathcal{M}_n$  ist (1.5) für  $\mathbf{1}_{S_k}$  erfüllt und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}_{S_k}(X, \Psi, x) \mu(dx) \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[ \int \mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_k}(X, \Psi, x) | X] \mu(dx) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \int \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\cup S_k}(X, \Psi, x) | X] \mu(dx) \right]. \end{aligned}$$

Somit ist  $\mathcal{M}_n$  für  $n \in \mathbb{N}$  ein Dynkin-System und die Behauptung folgt.  $\square$

Analog lässt sich das folgende Theorem beweisen.

**Lemma 1.3.4** *Seien  $X$  ein stationäres zufälliges seitentreues Mosaik und  $\Psi$  eine  $(m, n)$ -Perkolaton auf  $X$ . Weiter seien  $\mu_1, \mu_2$   $\sigma(X)$ -messbare Punktprozesse mit endlichen Intensitäten und  $f : \mathbf{T} \times \mathbf{T}_c \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  messbar. Dann gilt*

$$\mathbb{E} \iint f(X, \Psi, x, y) \mu_1(dx) \mu_2(dy) = \mathbb{E} \iint \mathbb{E}[f(X, \Psi, x, y) | X] \mu_1(dx) \mu_2(dy). \quad (1.6)$$

### 1.3.1 Das Voronoi-Mosaik

Dem Voronoi-Mosaik liegt eine lokal-endliche und nicht-leere Punktmenge  $\chi$  des  $\mathbb{R}^d$  zugrunde. Man definiert die *Voronoi-Zelle* eines Punktes  $x \in \chi$  bezüglich der Punktmenge  $\chi$  durch

$$C(x, \chi) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| \leq \|z - y\| \text{ für alle } y \in \chi\},$$

das heißt,  $C(x, \chi)$  besteht aus allen Punkten des  $\mathbb{R}^d$ , für die es in  $\chi$  keinen näheren Punkt als  $x$  gibt. Ist  $C(x, \chi)$  für alle Punkte  $x \in \chi$  beschränkt, so ist das System aller Voronoi-Zellen bezüglich  $\chi$  ein seitentreues Mosaik, vergleiche [44, Theorem 10.2.1]. Dieses Mosaik heißt *Voronoi-Mosaik* bezüglich  $\chi$  und wir schreiben dafür  $C(\chi)$ .

Solche Mosaik kann man randomisieren, indem man statt einer deterministischen Punktmenge eine zufällige Punktmenge, also einen einfachen Punktprozess, zugrunde legt. Der hierzu am häufigsten verwendete Punktprozess ist der Poisson-Prozess. Das zugehörige Voronoi-Mosaik bezeichnet man dann als *Poisson-Voronoi-Mosaik*. In dieser Arbeit betrachten wir Voronoi-Mosaik bezüglich des Poisson-Prozesses  $\eta$  der Intensität  $\gamma > 0$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Da  $\eta$  stationär ist, ist auch das zugehörige Poisson-Voronoi-Mosaik stationär, vergleiche [44, Theorem 10.2.2]. Weiter ist dieses Mosaik nach Theorem 10.2.3 in [44] *normal*, das heißt, jede  $k$ -Seite liegt in genau  $d - k + 1$  Zellen. Daraus folgt, dass jede  $l$ -Seite für  $k \geq l$  in genau  $\binom{d-l+1}{k-l}$   $k$ -Seiten enthalten ist.

Da das Poisson-Voronoi-Mosaik starke Unabhängigkeitseigenschaften besitzt, ist es ein einfach zu behandelndes Beispiel für das in dieser Arbeit eingeführte Konzept der  $(m, n)$ -Perkolation. Außerdem haben Belá Bollobás und Oliver Riordan in [5] nachgewiesen, dass die kritische Wahrscheinlichkeit bei Zellenperkolation auf dem planaren Poisson-Voronoi-Mosaik  $1/2$  ist, vergleiche Abbildung 1.1, sodass wir später markante Stellen der Kovarianzstruktur mit der kritischen Wahrscheinlichkeit vergleichen können.

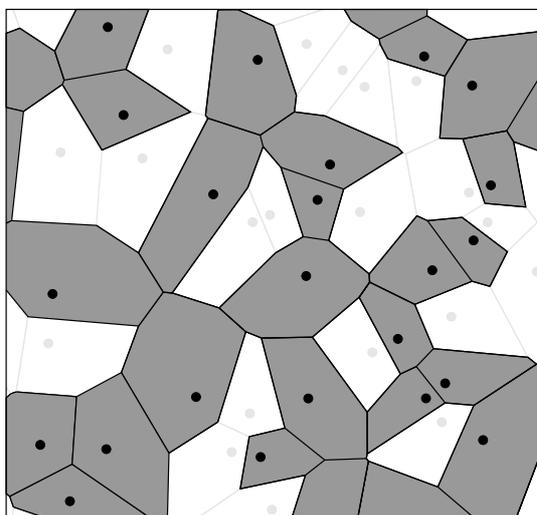


Abbildung 1.1: Zellenperkolation auf einem Poisson-Voronoi-Mosaik

### 1.3.2 Das Delaunay-Mosaik

Das Delaunay-Mosaik ist das zu dem bereits eingeführten Voronoi-Mosaik duale Mosaik. Dabei definiert man für ein planares Mosaik  $G$  das zugehörige *duale Mosaik*  $\bar{G}$ , indem man in jede Zelle von  $G$  einen Knoten von  $\bar{G}$  legt und zwei Knoten genau dann

mit einer Kante von  $\bar{G}$  verbindet, wenn die zugehörigen Zellen in  $G$  eine gemeinsame Kante haben.

Sei wieder  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  eine nicht-leere und lokal-endliche Punktmenge, deren konvexe Hülle außerdem den ganzen Raum überdeckt. Ist  $e$  eine Ecke des Voronoi-Mosaiks bezüglich  $\chi$ , das heißt, gibt es ein  $x \in \chi$  mit  $e \in \mathcal{F}_0(C(x, \chi))$ , so definieren wir die *Delaunay-Zelle* von  $e$  bezüglich  $\chi$  durch

$$\begin{aligned} D(e, \chi) &:= \text{conv}(\{z \in \chi : e \in \mathcal{F}_0(C(z, \chi))\}) \\ &= \text{conv}(\{z \in \chi : \|z - e\| = \|x - e\|\}). \end{aligned}$$

Das System aller Delaunay-Zellen bezüglich  $\chi$  bildet ein seitentreues Mosaik, vergleiche [44, Theorem 10.2.6]. Dieses Mosaik heißt *Delaunay-Mosaik* bezüglich  $\chi$  und wir schreiben dafür  $D(\chi)$ . Die Eckenmenge von  $D(\chi)$  ist gerade die Menge  $\chi$ .

Analog zum Voronoi-Mosaik lässt sich auch das Delaunay-Mosaik randomisieren, indem man einen einfachen Punktprozess zugrunde legt. Ist der zugrunde liegende Punktprozess stationär, so ist auch das zugehörige Delaunay-Mosaik stationär. Ist der zugrunde liegende Punktprozess ein Poisson-Prozess, so heißt das Delaunay-Mosaik *Poisson-Delaunay-Mosaik* und ist *simplicial*, das heißt, jede  $k$ -Seite ist ein  $k$ -Simplex und enthält deshalb genau  $k + 1$  Poisson-Punkte, vergleiche [44, Theorem 10.2.7]. Man beachte, dass das planare Poisson-Delaunay-Mosaik eine Triangulierung der Ebene ist.

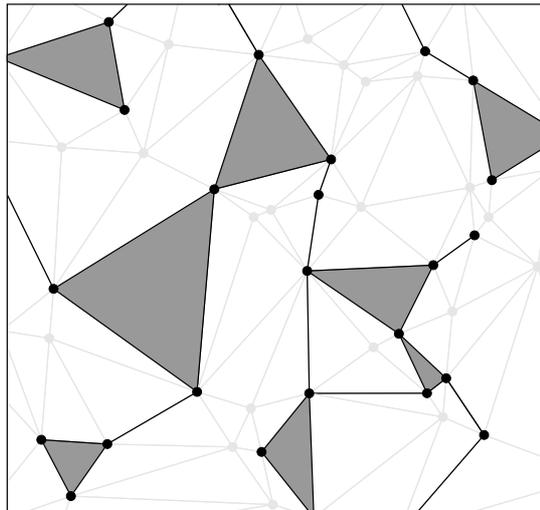


Abbildung 1.2: Knotenperkolation auf einem Poisson-Delaunay-Mosaik

In Abbildung 1.2 ist Knotenperkolation auf einem planaren Poisson-Delaunay-Mosaik zu sehen. Die zugrunde liegende Punktmenge ist dabei die gleiche Realisierung des Poisson-Prozesses (inklusive Färbung), bezüglich der auch das Poisson-Voronoi-Mosaik in Abbildung 1.1 gebildet wurde. Man beachte, dass zwei schwarze Punkte genau dann in der gleichen schwarzen Zusammenhangskomponente des Poisson-Voronoi-Mosaiks liegen, wenn sie auch in der gleichen schwarzen Zusammenhangskomponente des Poisson-Delaunay-Mosaiks liegen, das heißt, die kritischen Wahrscheinlichkeiten bei Knotenperkolation auf dem planaren Poisson-Delaunay-Mosaik und bei Zellenperkolation auf dem planaren Poisson-Voronoi-Mosaik sind gleich und damit beide  $1/2$ .

Da es für zwei schwarze Knoten, die durch einen schwarzen Weg über eine schwarze Zelle verbunden sind, auch immer einen schwarzen Weg entlang schwarzer Kanten

gibt, muss die kritische Wahrscheinlichkeit bei  $(0, 1)$ -Perkolation im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik wie bei Knotenperkolation  $1/2$  sein.

### 1.3.3 Archimedische Gitter

Ein Polygon heißt *regulär*, wenn alle Kanten gleich lang und die Innenwinkel identisch sind. Ein *Archimedisches Gitter* ist ein seitentreues planares Mosaik  $\varphi$  bestehend aus regulären Polygonen, sodass alle Knoten äquivalent sind, das heißt, für je zwei Knoten  $x$  und  $y$  von  $\varphi$  gibt es einen Graphenautomorphismus, der  $x$  auf  $y$  abbildet. Dabei ist ein *Graphenautomorphismus* eine bijektive Abbildung  $A$  auf  $\mathcal{F}_0(\varphi)$ , sodass je zwei Knoten  $x, y \in \mathcal{F}_0(\varphi)$  genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn das auch für  $A(x)$  und  $A(y)$  gilt. Es gibt bis auf Isomorphie elf verschiedene Archimedische Gitter, siehe Abbildung 1.3. Die Bezeichnung der Archimedischen Gitter mit  $(n_1, \dots, n_z)$  geht auf Branko Grünbaum und Geoffrey Shephard [10] zurück, wobei  $z$  der *Grad* eines Knotens eines Archimedischen Gitters ist, also die Anzahl der ihn enthaltenden Polygone, und  $n_1, \dots, n_z$  die Anzahl der Kanten dieser Polygone. Da alle Knoten äquivalent sind, sind diese Zahlen für alle Knoten eines Archimedischen Gitters gleich.

Man kann diese deterministischen Gitter nun randomisieren, sodass man ein stationäres Gitter erhält, indem man sie um einen in einer Fundamentalzelle gleichverteilten Zufallsvektor verschiebt. Dabei ist eine *Fundamentalzelle* ein Ausschnitt des Mosaiks, sodass das Mosaik durch disjunkte Vereinigungen geeigneter Translate der Fundamentalzelle zusammengesetzt werden kann.

## 1.4 Oberflächenmaße und innere Volumina

Innere Volumina und deren lokale Versionen, die Oberflächenmaße, sind als fundamentale Kenngrößen konvexer Körper wichtige Funktionale in der Konvexgeometrie. Bei deren Einführung orientieren wir uns an dem Buch [43] von Rolf Schneider, in dem auch die hier nicht gegebenen Beweise nachgelesen werden können.

Für  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$  bezeichnet  $p_K(x)$  die *Orthogonalprojektion* von  $x$  auf  $K$  und man definiert den *äußeren Normalenvektor* von  $K$  in  $p_K(x)$  durch

$$u(K, x) := \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|},$$

das heißt,  $u(K, x)$  zeigt von  $p_K(x)$  in Richtung  $x$ . Definiert man für  $U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  und  $\varepsilon > 0$  die *lokale Parallelmeng*e von  $K$  durch

$$M_\varepsilon(K, U) := \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < d(x, K) \leq \varepsilon \text{ und } u(K, x) \in U\},$$

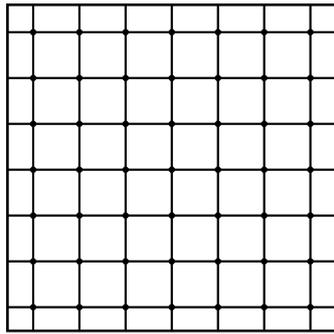
so ist  $M_\varepsilon(K, U)$  messbar und es gilt folgende *lokale Steiner-Formel*.

**Theorem 1.4.1** *Sei  $K \in \mathcal{K}^d$  ein nicht-leerer konvexer Körper. Dann existieren endliche und positive Maße  $\Psi_0(K, \cdot), \dots, \Psi_{d-1}(K, \cdot)$  auf  $\mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ , sodass für  $U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  und  $\varepsilon > 0$*

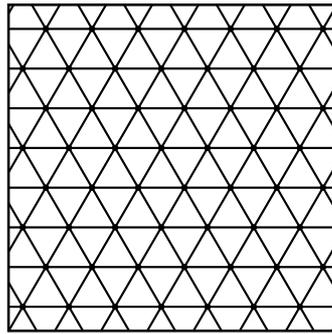
$$\lambda_d(M_\varepsilon(K, U)) = \sum_{i=0}^{d-1} \varepsilon^{d-i} \kappa_{d-i} \Psi_i(K, U)$$

*gilt. Die Abbildung  $K \mapsto \Psi_i(K, \cdot)$  ist additiv, das heißt, für  $K, L, K \cup L \in \mathcal{K}^d$  gilt*

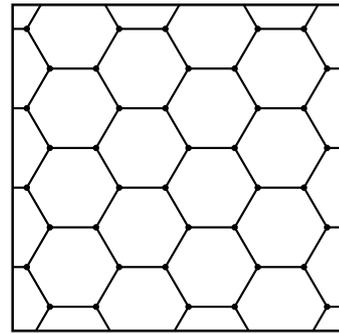
$$\Psi_i(K \cup L, \cdot) = \Psi_i(K, \cdot) + \Psi_i(L, \cdot) - \Psi_i(K \cap L, \cdot),$$



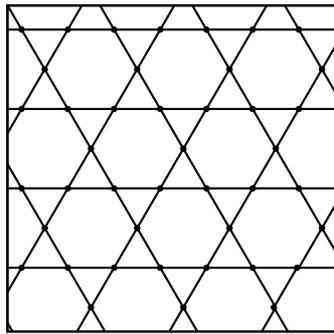
$$(4^4) = (4, 4, 4, 4)$$



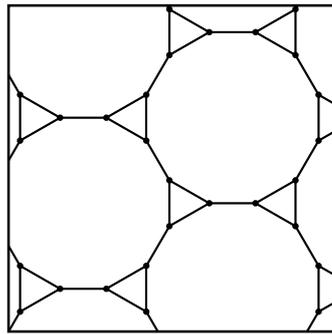
$$(3^6) = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$$



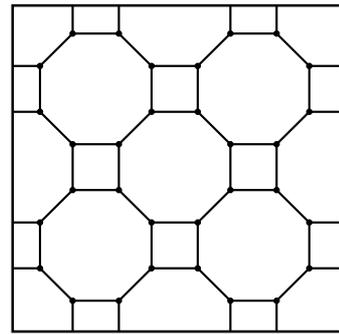
$$(6^3) = (6, 6, 6)$$



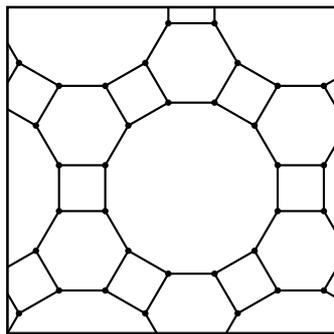
$$(3, 6, 3, 6)$$



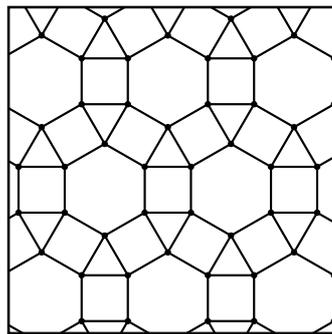
$$(3, 12^2) = (3, 12, 12)$$



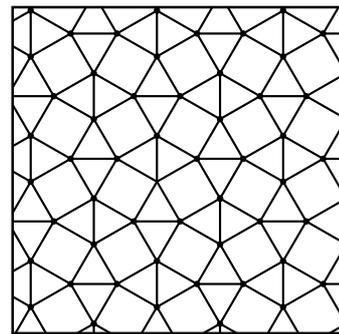
$$(4, 8^2) = (4, 8, 8)$$



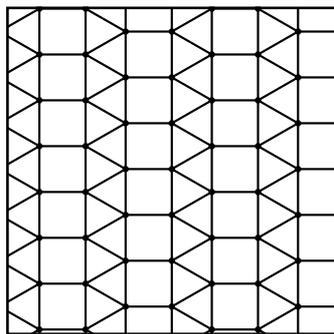
$$(4, 6, 12)$$



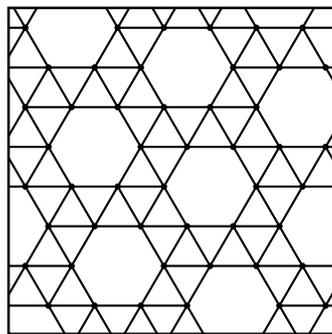
$$(3, 4, 6, 4)$$



$$(3^2, 4, 3, 4) = (3, 3, 4, 3, 4)$$



$$(3^3, 4^2) = (3, 3, 3, 4, 4)$$



$$(3^4, 6) = (3, 3, 3, 3, 6)$$

Abbildung 1.3: Die elf Archimedischen Gitter

und schwach stetig, das heißt, für  $(K_n) \subseteq \mathcal{K}^d$  mit  $K_n \rightarrow K$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(u) \Psi_i(K_n, du) = \int f(u) \Psi_i(K, du)$$

für alle beschränkten und stetigen Funktionen  $f : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Für jedes  $U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  ist die Funktion  $\Psi_i(\cdot, U) : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$  messbar.

Das Maß  $\Psi_i(K, \cdot)$  heißt  $i$ -tes *Oberflächenmaß* von  $K$  und wir erweitern die Definition, indem wir

$$\Psi_i(\emptyset, \cdot) := 0$$

für  $i \in \{0, \dots, d-1\}$  setzen. Das  $d$ -te *Oberflächenmaß*  $\Psi_d(K, \cdot)$  eines konvexen Körpers  $K$  definieren wir durch

$$\Psi_d(K, U) := \lambda_d(K) \frac{\sigma_{d-1}(U)}{\sigma_{d-1}(\mathbb{S}^{d-1})}, \quad U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}). \quad (1.7)$$

Damit ist  $\Psi_d(K, \cdot)$  ein Maß auf  $\mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  und  $K \mapsto \Psi_d(K, \cdot)$  ist additiv und stetig. Diese Definition eines  $d$ -ten Oberflächenmaßes ist zwar unüblich, wird sich aber in dieser Arbeit als zweckmäßig erweisen.

Aus der Definition der Oberflächenmaße folgt, dass sie translationsinvariant sind, das heißt, für  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt  $\Psi_i(K+x, \cdot) = \Psi_i(K, \cdot)$ . Weiter können sie additiv auf den Konvexring fortgesetzt werden und diese Fortsetzung ist eindeutig. Außerdem sind die Oberflächenmaße rotationsinvariant und homogen, das heißt, für eine Rotation  $g$  und  $s > 0$  gilt

$$\Psi_i(gK, gU) = \Psi_i(K, U), \quad \Psi_i(sK, U) = s^i \Psi_i(K, U)$$

für  $i \in \{0, \dots, d\}$ ,  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ .

Für  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $x \in K$  bezeichnet

$$N(K, x) := p_K^{-1}(x) - x$$

den *Normalenkegel* von  $K$  in  $x$ . Er enthält alle Punkte, die unter  $p_{K-x}$  auf den Ursprung abgebildet werden. Ist nun speziell  $P \in \mathcal{P}^d$  und  $S \in \mathcal{F}(P)$  eine Seite von  $P$  mit  $\dim(S) < d$ , so hängt  $N(P, x)$  für  $x \in \text{relint}(S)$  nicht von  $x$  ab und wir schreiben einfach  $N(P, S)$ . Für das Oberflächenmaß eines Polytops  $P$  gilt mit diesen Bezeichnungen für  $i \in \{0, \dots, d-1\}$

$$\Psi_i(P, U) = \sum_{S \in \mathcal{F}_i(P)} \frac{\sigma_{d-i-1}(N(P, S) \cap U)}{(d-i) \kappa_{d-i}} \lambda_i(S), \quad (1.8)$$

wobei  $\sigma_{d-i-1}$  das sphärische Lebesguemaß im  $\mathbb{R}^{d-i}$  bezeichnet.

Die *inneren Volumina* eines konvexen Körpers  $K$  lassen sich mit Hilfe der Oberflächenmaße nun durch

$$V_i(K) := \Psi_i(K, \mathbb{S}^{d-1})$$

definieren. Sie sind additiv, homogen und translationsinvariant auf dem Konvexring und außerdem monoton unter Mengeninklusion und nicht-negativ auf  $\mathcal{K}^d$ . Da die Oberflächenmaße additiv auf den Konvexring fortgesetzt werden können, existiert also auch eine Fortsetzung der inneren Volumina. Für  $\varepsilon > 0$  gilt die *Steiner-Formel*

$$\lambda_d(K + B(0, \varepsilon)) = \sum_{i=0}^d \varepsilon^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(K), \quad K \in \mathcal{K}^d. \quad (1.9)$$

Analog zu den Oberflächenmaßen können die inneren Volumina auch über die Steiner-Formel definiert werden.

Die inneren Volumina sind unabhängig von der Dimension des umgebenden Raumes. Bettet man also einen konvexen Körper  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $\dim(K) < i$  in den  $\mathbb{R}^i$  ein, so gilt für das  $i$ -te innere Volumen  $V_i(K) = \lambda_i(K) = 0$ .

Einige innere Volumina haben eine einfache geometrische Interpretation. So ist beispielsweise das  $d$ -te innere Volumen  $V_d$  das Lebesguemaß und für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt

$$V_{d-1}(K) = \mathbf{1}\{\text{int}(K) \neq \emptyset\} \mathcal{H}^{d-1}(\partial K)/2 + \mathbf{1}\{\text{int}(K) = \emptyset\} \mathcal{H}^{d-1}(K), \quad (1.10)$$

vergleiche [44, S. 601], das heißt, für ein Element  $K$  aus dem Konvexring mit  $K = \overline{\text{int}(K)}$  liefert  $2V_{d-1}(K)$  die Oberfläche von  $K$ . Weiter ist  $V_0$  die Euler-Charakteristik und für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt  $V_0(K) = \mathbf{1}\{K \neq \emptyset\}$ . In  $\mathbb{R}^2$  berechnet sich die Euler-Charakteristik durch

$$V_0(K) = (\text{Anzahl der Zusammenhangskomponenten von } K) \\ - (\text{Anzahl der Löcher in } K)$$

für ein Element  $K$  aus dem Konvexring.

---

## Kapitel 2

# Asymptotische Erwartungswerte und Kovarianzstruktur

---

In diesem Kapitel untersuchen wir asymptotische Erwartungswerte und asymptotische Kovarianzen einiger Funktionale der schwarzen Teilmenge  $Z$  von stationären und seitentreuen zufälligen gefärbten Mosaiken. Im ersten Teil dieses Kapitels betrachten wir die inneren Volumina von  $Z$  bei  $(m, n)$ -Perkolation. Im zweiten Teil beschränken wir uns auf Zellenperkolation und fordern zusätzlich, dass das Mosaik normal ist. In diesem Fall vereinfachen sich die Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und Kovarianzen deutlich und es können außerdem additive und translationsinvariante Funktionale betrachtet werden, deren Betrag nach oben gegen translationsinvariante und monotone Funktionale abgeschätzt werden kann.

### 2.1 $(m, n)$ -Perkolation auf seitentreuen Mosaiken

In diesem Abschnitt betrachten wir für feste  $m, n \in \{0, \dots, d\}$  mit  $m \leq n$  eine  $(m, n)$ -Perkolation  $\Psi$  auf einem stationären zufälligen seitentreuen Mosaik  $X$  in  $\mathbb{R}^d$ , für das die Intensitäten  $\gamma_k$  der  $k$ -Seitenprozesse endlich sind. Dabei wird jede  $m$ -Seite unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  schwarz gefärbt und weiß sonst, das heißt, die Menge  $X_m^1$  der schwarzen  $m$ -Seiten ist eine  $p$ -Verdünnung der Menge  $X_m$  der  $m$ -Seiten von  $X$ . Wir färben eine  $k$ -Seite für  $k < m$  schwarz, falls sie in einer schwarzen  $m$ -Seite liegt. Weiter ist eine  $k$ -Seite,  $m \leq k \leq n$ , schwarz, falls alle darin enthaltenen  $m$ -Seiten schwarz sind. Die Seiten der Dimension  $k$  mit  $k > n$  sind alle weiß. Die Vereinigung aller schwarzen Seiten bezeichnen wir mit  $Z$ . In diesem Modell werden nun die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina von  $Z$  in einem skalierten Beobachtungsfenster  $W_t := t^{1/d}W$  normiert mit dem Volumen von  $W_t$  für  $t \rightarrow \infty$  berechnet. Dabei ist  $W$  ein konvexer Körper mit Volumen eins, der den Ursprung im Inneren enthält und uns im Folgenden als Beobachtungsfenster dient. Die Skalierung wurde dabei so gewählt, dass  $\lambda_d(W_t) = t$  gilt.

Zunächst wird eine Darstellung für die inneren Volumina von  $Z \cap W_t$  entwickelt, wozu eine Verallgemeinerung der inneren Volumina auf sogenannte *approximierbare Funktionen* verwendet wird, die auf Groemer [9] zurückgeht. Üblicherweise werden die inneren Volumina mit Hilfe der Steiner-Formel für konvexe Körper definiert und können dann wegen ihrer Stetigkeit und Additivität mit dem Fortsetzungssatz von Groemer, vergleiche [44, Theorem 14.4.2], additiv auf den Konvexring erweitert werden. In [9] verallgemeinert Groemer das Konzept der inneren Volumina und definiert sie auf der größeren Klasse der approximierbaren Funktionen, vergleiche Anhang A. Identifiziert

man eine Menge mit ihrer Indikatorfunktion, so stimmen diese verallgemeinerten inneren Volumina auf den konvexen Körpern und dem Konvexring mit den herkömmlichen inneren Volumina überein und sie sind immer noch additiv und bewegungsinvariant. Im Anhang wird gezeigt, dass die Indikatorfunktionen aller im Folgenden verwendeten Funktionen approximierbar sind. Insbesondere ist das relative Innere eines konvexen Körpers approximierbar und für die verallgemeinerten inneren Volumina gilt

$$V_i(\text{relint}(K)) = (-1)^{i+\dim(K)} V_i(K), \quad K \in \mathcal{K}^d. \quad (2.1)$$

Weiter werden in Lemma A.2.3 obere und untere Schranken der inneren Volumina gewisser Funktionen angegeben, die allerdings schlechter sind als die Abschätzungen, die aus der Monotonie für die herkömmlichen inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  folgen.

Wir werden nun (2.1) nutzen um eine Formel für die inneren Volumina von  $Z \cap W_t$  für festes  $t \geq 1$  herzuleiten. Zunächst gilt

$$Z \cap W_t = (Z \cap \mathring{W}_t) \cup (Z \cap \partial W_t). \quad (2.2)$$

Die schwarze Teilmenge  $Z$  kann man disjunkt zerlegen in das relative Innere der schwarzen Seiten. Damit ergibt sich die disjunkte Zerlegung

$$Z \cap \mathring{W}_t = \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{S \in X_k^1} (\text{relint}(S) \cap \mathring{W}_t). \quad (2.3)$$

Da die in dieser Arbeit betrachteten Mosaik als stationär vorausgesetzt werden, schneidet eine Seite  $S$  des Mosaiks  $X$  das Beobachtungsfenster  $W_t$  mit Wahrscheinlichkeit null nur im Rand, denn für  $k \in \{0, \dots, d\}$  gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists S \in X_k : S \cap W_t \neq \emptyset, S \cap \mathring{W}_t = \emptyset) \\ & \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \mathbf{1}\{S \cap W_t \neq \emptyset, S \cap \mathring{W}_t = \emptyset\} \right] \\ & = \mathbb{E} \left[ \int \mathbf{1}\{S(x, \Psi) \cap W_t \neq \emptyset, S(x, \Psi) \cap \mathring{W}_t = \emptyset\} \eta^{(k)}(dx) \right] \end{aligned}$$

und aus dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1), der Invarianzannahme (1.4), der Translationskovarianz von  $S(\cdot, \cdot)$  und der Konvexität von  $W_t$  und  $S(0)$  folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists S \in X_k : S \cap W_t \neq \emptyset, S \cap \mathring{W}_t = \emptyset) \\ & \leq \gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \int \mathbf{1}\{S(x, \Psi(\theta_{-x})) \cap W_t \neq \emptyset, S(x, \Psi(\theta_{-x})) \cap \mathring{W}_t = \emptyset\} dx \right] \\ & = \gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \int \mathbf{1}\{x \in W_t - S(0), x \notin \mathring{W}_t - S(0)\} dx \right] \\ & = \gamma_k \mathbb{E}_k^0[\lambda_d(\partial(W_t - S(0)))] = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Somit gilt fast sicher  $\text{relint}(S) \cap \mathring{W}_t = \text{relint}(S \cap W_t)$  für alle Seiten  $S$  des Mosaiks. Außerdem gilt für  $S \in X_k$  im Fall  $S \cap W_t \neq \emptyset$  fast sicher  $\dim(S \cap W_t) = k$ , denn andernfalls würde  $S$  das Beobachtungsfenster  $W_t$  nur im Rand schneiden und diese Wahrscheinlichkeit ist nach (2.4) null. Zusammen mit (2.1), der disjunkten Zerlegung in (2.3) und der Additivität der inneren Volumina folgt aus diesen Überlegungen die

fast sichere Gleichheit

$$V_i(Z \cap \overset{\circ}{W}_t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{i+k} \sum_{S \in X_k^1} V_i(S \cap W_t). \quad (2.5)$$

Diese Darstellung wird im Folgenden verwendet um Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina herzuleiten. Dabei ist der Randterm  $V_i(Z \cap \partial W_t)$  bei der Berechnung der asymptotischen Erwartungswerte wegen der Linearität des Erwartungswerts vernachlässigbar, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z \cap \partial W_t)] = 0 \quad (2.6)$$

gilt. Ebenso werden wir sehen, dass der Randterm wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung bei der Berechnung der asymptotischen Kovarianzen vernachlässigbar ist, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(V_i(Z \cap \partial W_t)) = 0 \quad (2.7)$$

erfüllt ist. Da  $Z \cap \partial W_t$  im Allgemeinen nicht im Konvexring liegt, müssen hier die verallgemeinerten inneren Volumina betrachtet werden. Ist das verwendete Beobachtungsfenster  $W$  ein Polytop, so können mit den herkömmlichen inneren Volumina hinreichende Bedingungen für die Erfüllung dieser beiden Voraussetzungen formuliert werden, indem man  $\partial W$  als disjunkte Vereinigung der relativen Inneren der niederdimensionalen Seiten von  $W$  schreibt. Setzt man  $U_t := t^{1/d}U$  für  $U \subseteq \mathbb{R}^d$ , so gilt fast sicher die disjunkte Zerlegung

$$\begin{aligned} Z \cap \partial W_t &= \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{S \in X_k^1} \text{relint}(S) \cap \bigcup_{l=0}^{d-1} \bigcup_{U \in \mathcal{F}_l(W)} \text{relint}(U_t) \\ &= \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{l=0}^{d-1} \bigcup_{U \in \mathcal{F}_l(W)} \bigcup_{S \in X_k^1} \text{relint}(S \cap U_t), \end{aligned}$$

da eine Seite  $S$  das Polytop  $U_t$  wegen der Stationarität von  $X$  fast sicher nicht nur im relativen Rand von  $U_t$  schneidet, vergleiche die Argumentation in (2.4). Verwendet man nun (2.1), so folgt mit dieser Zerlegung und der Additivität der inneren Volumina fast sicher

$$V_i(Z \cap \partial W_t) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{U \in \mathcal{F}_l(W)} \sum_{S \in X_k^1} (-1)^{i+\dim(S \cap U_t)} V_i(S \cap U_t). \quad (2.8)$$

Im Folgenden benötigen wir noch einige Bezeichnungen, die sich auf die benachbarten  $m$ -Seiten einer Seite beziehen. Zunächst definieren wir den  $m$ -Grad eines Polytops  $P$  durch  $|\mathcal{S}_m(P)|$ . Wir setzen

$$X_{k,r} := \{S \in X_k : |\mathcal{S}_m(S)| = r\}, \quad k \in \{0, \dots, d\}, r \in \mathbb{N},$$

das heißt,  $X_{k,r}$  ist die Menge der  $k$ -Seiten mit  $m$ -Grad  $r$ , und wir bezeichnen mit  $X_{k,r}^1$  die Menge der schwarzen Seiten in  $X_{k,r}$ . Um die Färbewahrscheinlichkeiten angeben zu können, ist es außerdem hilfreich die Menge  $\mathcal{S}_l(S)$  für eine Seite  $S$  in Abhängigkeit vom  $m$ -Grad der enthaltenen  $l$ -Seiten zu zerlegen, das heißt, wir definieren

$$\mathcal{S}_{l,s}(S) := \{T \in \mathcal{S}_l(S) : |\mathcal{S}_m(T)| = s\}, \quad l \in \{0, \dots, d\}, s \in \mathbb{N}.$$

Weiter bezeichnen wir das System der  $l$ -Seiten, die  $o$  benachbarte  $m$ -Seiten mit  $S \in X_k$  gemeinsam haben, mit

$$\mathcal{S}_l^o(S) := \{T \in X_l : |\mathcal{S}_m(S) \cap \mathcal{S}_m(T)| = o\}, \quad o \in \mathbb{N}, l \in \{0, \dots, d\},$$

und für die Menge der Seiten in  $\mathcal{S}_l^o(S)$ , die zusätzlich  $m$ -Grad  $s \in \mathbb{N}$  haben, schreiben wir

$$\mathcal{S}_{l,s}^o(S) := \mathcal{S}_l^o(S) \cap X_{l,s}.$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir nun Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina bei  $(m, n)$ -Perkolation bestimmen.

### 2.1.1 Asymptotische Erwartungswerte der inneren Volumina

Wir definieren für  $i \in \{0, \dots, d\}$  das *mittlere  $i$ -te innere Volumen* oder die *Dichte des  $i$ -ten inneren Volumens* von  $Z$  durch

$$\delta_i(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z \cap W_t)], \quad (2.9)$$

falls der Grenzwert existiert. Man beachte, dass  $\delta_i$  für  $i > n$  null ist.

Da die Intensitäten  $\gamma_k$  der  $k$ -Seitenprozesse als endlich vorausgesetzt wurden, sind die Palmschen Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathbb{P}_k^0$  wohldefiniert. Wir werden zeigen, dass die mittleren inneren Volumina existieren und eine Potenzreihe in der Färbewahrscheinlichkeit  $p$  sind, falls für das Mosaik  $X$  die Voraussetzung

$$\sum_{i,k=0}^n \mathbb{E}_k^0 \left[ \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0))^2 \right] < \infty \quad (2.10)$$

erfüllt ist. Ist das Beobachtungsfenster  $W$  ein Polytop, so kann (2.10) durch die schwächere Voraussetzung

$$\sum_{i,k=0}^n \mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0))^2] < \infty \quad (2.11)$$

ersetzt werden.

**Theorem 2.1.1** *Sei  $i \in \{0, \dots, n\}$  und es gelte (2.10) (bzw. (2.11)) für  $W \in \mathcal{P}^d$ . Dann existiert der Grenzwert (2.9) für  $(m, n)$ -Perkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf  $X$  und es gilt*

$$\begin{aligned} \delta_i(p) &= \sum_{k=i}^{m-1} (-1)^{i+k} \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [(1 - (1-p)^{|\mathcal{S}_m(0)|}) V_i(S(0))] \\ &\quad + \sum_{k=m}^n (-1)^{i+k} \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [p^{|\mathcal{S}_m(0)|} V_i(S(0))]. \end{aligned}$$

*Insbesondere gilt für Zellenperkolation ( $(d, d)$ -Perkolation)*

$$\delta_i(p) = \begin{cases} \sum_{k=i}^d (-1)^{i+k+1} \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [(1-p)^{|\mathcal{S}_d(0)|} V_i(S(0))], & i < d, \\ p, & i = d. \end{cases}$$

Für  $p = 1$  ist  $Z$  gerade die Vereinigung aller  $n$ -Seiten des Mosaiks, das sogenannte  $n$ -Skelett. In diesem Fall vereinfacht sich das mittlere  $i$ -te innere Volumen für  $i \leq n$  zu

$$\delta_i(1) = \sum_{k=i}^n (-1)^{i+k} \gamma_k \mathbb{E}_k^0[V_i(S(0))].$$

Die mittlere Euler-Charakteristik des  $n$ -Skeletts, also  $\delta_0(1)$  bei  $(m, n)$ -Perkolation, berechnet sich somit als alternierende Summe der Intensitäten der  $k$ -Seitenprozesse. Dieser Spezialfall wird in Theorem 10.1.8 in [44] für den Einheitswürfel als Beobachtungsfenster gezeigt. In [29] findet sich ebenfalls ein Beweis für diese Mittelwertformel für die Euler-Charakteristik des  $n$ -Skeletts. Ebenso wird dort eine Mittelwertformel für die Euler-Charakteristik der Vereinigung der benachbarten  $l$ -Seiten der typischen  $k$ -Seite gezeigt, wobei eine  $l$ -Seite  $T$  zur  $k$ -Seite  $S$  benachbart ist, falls  $T \in \mathcal{S}_l(S)$  gilt.

In [52] haben Wolfgang Weil und John Wieacker bereits Dichten additiver und translationsinvarianter Funktionale  $\varphi$  auf dem Konvexring untersucht, die auf  $\mathcal{K}^d$  lokal beschränkt und messbar sind. Dabei bedeutet *lokal beschränkt*, dass  $\varphi$  für jedes  $K \in \mathcal{K}^d$  auf der Menge  $\{L \in \mathcal{K}^d : L \subseteq K\}$  beschränkt ist. Weiter sei  $Y$  eine stationäre zufällige Menge, sodass  $Y \cap K$  für  $K \in \mathcal{K}^d$  im Konvexring liegt und die Integrierbarkeitsvoraussetzung

$$\mathbb{E}[2^{N(Y \cap K)}] < \infty$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet  $N(Y \cap K)$  die kleinste natürliche Zahl  $n$ , sodass  $Y \cap K$  als Vereinigung von  $n$  konvexen Körpern geschrieben werden kann. Diese Endlichkeitsvoraussetzung kann durch die schwächere Forderung  $\mathbb{E}[2^{N(Y \cap [0,1]^d)}]$  ersetzt werden, vergleiche [44, Theorem 9.2.1]. Unter diesen Voraussetzungen existiert die Dichte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[\varphi(Y \cap W_t)]$$

und sie hängt nur von einer lokalen Größe ab, vergleiche Theorem 5 in [52]. Da die  $n$ -Skelette stationärer Mosaik ebene ebenfalls stationär sind, kann mit diesem Resultat eine Formel für die Dichte der inneren Volumina der  $n$ -Skelette der hier betrachteten Mosaik angegeben werden. Allerdings ist die geforderte Integrierbarkeitsvoraussetzung von einem stärkeren Typ als die hier benötigte.

*Beweis von Theorem 2.1.1:* Zunächst zeigen wir, dass der Randterm  $V_i(Z \cap \partial W_t)$  asymptotisch vernachlässigbar ist, das heißt, (2.6) gilt. Für  $W \in \mathcal{K}^d$  folgt aus der disjunkten Zerlegung

$$Z \cap \partial W_t = \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{S \in X_k^1} \text{relint}(S) \cap \partial W_t, \quad (2.12)$$

der Additivität der inneren Volumina und  $V_i(\emptyset) = 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_i(Z \cap \partial W_t)] &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k^1} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k^1} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Für  $P \in \mathcal{P}^d$  gilt mit  $V_i(\emptyset) = 0$

$$V_i(\text{relint}(P) \cap \dot{W}_t) = V_i(\text{relint}(P \cap W_t)) \mathbf{1}\{\text{relint}(P) \cap \dot{W}_t \neq \emptyset\}$$

und mit der Additivität der inneren Volumina, Lemma A.2.3, Formel (2.1) und der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  folgt

$$\begin{aligned} |V_i(\text{relint}(P) \cap \partial W_t)| &\leq |V_i(\text{relint}(P) \cap W_t)| + |V_i(\text{relint}(P) \cap \dot{W}_t)| \\ &\leq 2 \left( \sum_{l=0}^{\dim(P)} |\mathcal{F}_l(P)| \right)^{\dim(P)-1} V_i(P). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Wegen  $X_k^1 \subseteq X_k$  folgt mit dieser Überlegung aus (2.13)

$$|\mathbb{E}[V_i(Z \cap \partial W_t)]| \leq \sum_{k=0}^n \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} 2 \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right].$$

Verwendet man nun das verfeinerte Theorem von Campbell (1.1), so erhält man

$$\frac{1}{t} |\mathbb{E}[V_i(Z \cap \partial W_t)]| \leq \sum_{k=0}^n 2\gamma_k \mathbb{E}_k^0 \left[ \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0)) \lambda_d(\partial W - t^{-1/d} S(0)) \right].$$

Die rechte Seite konvergiert wegen  $\lambda_d(\partial W - t^{-1/d} K) \rightarrow \lambda_d(\partial W) = 0$  für  $t \rightarrow \infty$  und  $K \in \mathcal{K}^d$ , vergleiche den Beweis von Theorem 4.1.3 in [44], nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen null, wobei

$$\left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0)) \lambda_d(B(0, R(W)) + S(0))$$

für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majorante folgt nach Verwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Voraussetzung (2.10).

Nun zeigen wir in dem Spezialfall eines Polytops als Beobachtungsfenster, dass (2.6) unter der schwächeren Voraussetzung (2.11) erfüllt ist. Wegen der Darstellung (2.8) genügt es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k^1} (-1)^{i+\dim(S \cap U_t)} V_i(S \cap U_t) \right] = 0 \quad (2.15)$$

für  $k \in \{0, \dots, n\}$  und  $U \in \mathcal{F}(W)$  mit  $\dim(U) < d$  zu zeigen. Wegen  $X_k^1 \subseteq X_k$ , der Monotonie und Nichtnegativität der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  und  $V_i(\emptyset) = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k^1} (-1)^{i+\dim(S \cap U_t)} V_i(S \cap U_t) \right] \right| &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} V_i(S \cap U_t) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} V_i(S) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right]. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass diese obere Schranke asymptotisch null ist, dass also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} V_i(S) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right] = 0, \quad k \in \{0, \dots, n\}, \quad (2.16)$$

gilt. Mit dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1) und der Translationsinvarianz der inneren Volumina folgt

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} V_i(S) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right] = \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0)) \lambda_d(\partial W - t^{-1/d} S(0))]$$

und das konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen null. Dabei ist

$$\mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0)) \lambda_d(B(0, R(W)) + S(0))]$$

wegen der Steiner-Formel (1.9), der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Voraussetzung (2.11) eine integrierbare Majorante.

Da nun (2.6) nachgewiesen ist, gilt wegen der Additivität der inneren Volumina und der Linearität des Erwartungswertes

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z \cap W_t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z \cap \mathring{W}_t)]$$

und es genügt die rechte Seite zu bestimmen. Mit (2.5), der disjunkten Zerlegung  $X_k^1 = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} X_{k,r}^1$  und dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\mathbb{E}[V_i(Z \cap \mathring{W}_t)] = \sum_{k=0}^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{i+k} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \text{ ist schwarz}\} \right].$$

Mit Lemma 1.3.3 erhält man nun

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V_i(Z \cap \mathring{W}_t)] \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{i+k} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(S \cap W_t) (\mathbf{1}\{k < m\} \mathbb{P}(\mathcal{S}_m(S) \cap X_m^1 \neq \emptyset \mid X) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n\} \mathbb{P}(\mathcal{S}_m(S) \subseteq X_m^1 \mid X)) \right]. \end{aligned}$$

Nach Definition von  $(m, n)$ -Perkolation ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass  $S \in X_{k,r}$  bei gegebenem Mosaik  $X$  schwarz gefärbt wird,  $1 - (1-p)^r$  für  $k < m$  und  $p^r$  im Fall  $m \leq k \leq n$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[V_i(Z \cap \mathring{W}_t)] &= \sum_{k=0}^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{i+k} (\mathbf{1}\{k < m\} (1 - (1-p)^r) + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n\} p^r) \\ & \qquad \qquad \qquad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(S \cap W_t) \right]. \end{aligned}$$

Da die inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  monoton und nicht-negativ sind, gilt für  $S \in X_k$

$$|V_i(S \cap W_t) - V_i(S) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\}| \leq V_i(S) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\}$$

und mit der Dreiecksungleichung,  $|\mathbf{1}\{k < m\} (1 - (1-p)^r) + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n\} p^r| \leq 1$  und

dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left| \sum_{k=0}^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{i+k} (\mathbf{1}\{k < m\} (1 - (1-p)^r) + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n\} p^r) \right. \\
& \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(S \cap W_t) \right] \\
& \quad - \sum_{k=0}^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{i+k} (\mathbf{1}\{k < m\} (1 - (1-p)^r) + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n\} p^r) \\
& \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(S) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\} \right] \Big| \\
& \leq \sum_{k=0}^n \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} V_i(S) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right].
\end{aligned}$$

Somit impliziert (2.16)

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}[V_i(Z \cap \overset{\circ}{W}_t)] \\
& = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{i+k} (\mathbf{1}\{k < m\} (1 - (1-p)^r) + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n\} p^r) \\
& \quad \times \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} V_i(S) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t, |\mathcal{S}_m(S)| = r\} \right].
\end{aligned}$$

Wegen  $V_i(K) = 0$  für  $K \in \mathcal{K}^d$  mit  $\dim(K) < i$ , kann erst ab  $k = i$  summiert werden. Das verfeinerte Theorem von Campbell (1.1) liefert schließlich

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} V_i(S) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t, |\mathcal{S}_m(S)| = r\} \right] = \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0)) \mathbf{1}\{|\mathcal{S}_m(0)| = r\}]$$

und damit folgt der erste Teil der Behauptung mit dem Satz von der monotonen Konvergenz.

Setzt man nun  $m = n = d$ , betrachtet also Zellenperkolation, so erhält man

$$\delta_i(p) = \sum_{k=i}^d (-1)^{i+k} \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [(1 - (1-p)^{|\mathcal{S}_d(0)|}) V_i(S(0))].$$

Wendet man nun Theorem 10.1.4 in [44] an, so erhält man den zweiten Teil der Behauptung für  $i < d$ . Im Fall  $i = d$  ist klar, dass  $\delta_d(p)$  den Volumenanteil  $p$  der schwarzen Zellen angibt, und formal gilt

$$\delta_d(p) = (1 - (1-p)^1) \gamma_d \mathbb{E}_d^0 [V_d(S(0))] = p$$

wegen  $\gamma_d \mathbb{E}_d^0 [V_d(S(0))] = 1$ , vergleiche (10.4) in [44].  $\square$

### 2.1.2 Asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina

In diesem Unterabschnitt geben wir Voraussetzungen an, unter denen die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina von  $Z$

$$\sigma_{i,j}(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(V_i(Z \cap W_t), V_j(Z \cap W_t)), \quad i, j \in \{0, \dots, d\},$$

bei  $(m, n)$ -Perkolation existieren, und bestimmen in diesem Fall explizite Formeln. Man beachte, dass die asymptotischen Kovarianzen im Allgemeinen vom Beobachtungsfenster  $W$  abhängen können und  $\sigma_{i,j}(p)$  null ist, falls  $\max(i, j) > n$  gilt.

Es ist leicht zu sehen, dass die  $\sigma_{i,j}$  Potenzreihen in der Färbewahrscheinlichkeit  $p$  sein müssen. Die zugehörigen Koeffizienten werden sowohl durch die (vom Beobachtungsfenster  $W$  unabhängige) lokale Geometrie von  $X$  bestimmt als auch durch die globale Fluktuation der inneren Volumina innerhalb der Seitenprozesse  $X_{0,r_0}, \dots, X_{d,r_d}$  für  $r_0, \dots, r_d \in \mathbb{N}$ , die von  $W$  abhängen kann, wie wir später exemplarisch belegen. Ist das Beobachtungsfenster  $W$  ein Polytop, so können alle Voraussetzungen mit den herkömmlichen inneren Volumina formuliert werden und einige von ihnen können gegenüber den Voraussetzungen für beliebige konvexe Körper als Beobachtungsfenster sogar abgeschwächt werden.

Wir definieren abkürzend die Polynome

$$\begin{aligned} f_{m,n}^{k,r}(p) &:= \mathbf{1}\{k < m\}(1 - (1-p)^r) + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n\}p^r, \\ g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) &:= \mathbf{1}\{k, l < m\}(1-p)^{r+s-o}(1 - (1-p)^o) \\ &\quad + \mathbf{1}\{k < m, m \leq l \leq n, o \geq 1\}(1-p)^r p^s \\ &\quad + \mathbf{1}\{m \leq k \leq n, l < m, o \geq 1\}p^r(1-p)^s + \mathbf{1}\{m \leq k, l \leq n\}p^{r+s-o}(1-p^o) \end{aligned}$$

für  $k, l \in \{0, \dots, n\}$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$  und  $o \in \{0, \dots, \min(r, s)\}$ . Weiter setzen wir die Existenz der Grenzwerte

$$\rho_{i,j}^{k,l}(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k,|S_m(S)|}(p), \sum_{T \in X_l} V_j(T \cap W_t) f_{m,n}^{l,|S_m(T)|}(p) \right) \quad (2.17)$$

für  $i, j, k, l \in \{0, \dots, n\}$  voraus, die im Allgemeinen von dem Beobachtungsfenster  $W$  abhängen können. Außerdem fordern wir

$$\sum_{i,j,k=0}^n \mathbb{E}_m^0 \left[ \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] < \infty, \quad (2.18)$$

wobei für jedes endliche System  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}^d$  konvexer Körper

$$V_i(\mathcal{S}) := \sum_{S \in \mathcal{S}} V_i(S)$$

als das totale  $i$ -te innere Volumen der Elemente von  $\mathcal{S}$  definiert wird. Ist das Beobachtungsfenster ein Polytop, so kann Voraussetzung (2.18) durch die schwächere Voraussetzung

$$\sum_{i,j,k=0}^d \mathbb{E}_m^0 \left[ V_i(\mathcal{S}_k(0))^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] < \infty \quad (2.19)$$

ersetzt werden.

Weiter sollen die Randterme vernachlässigbar sein, das heißt, (2.7) soll gelten, wozu wir für ein beliebiges konvexes Beobachtungsfenster

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right)} = 0 \quad (2.20)$$

für  $i, k \in \{0, \dots, n\}$  voraussetzen. Ist das Beobachtungsfenster  $W$  ein Polytop, so genügt es stattdessen zu fordern, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{S \in X_{k,r}} (-1)^{\dim(S \cap U_t)} V_i(S \cap U_t) \right)} = 0 \quad (2.21)$$

für alle  $i, k \in \{0, \dots, n\}$  und alle Seiten  $U \in \mathcal{F}(W)$  mit  $\dim(U) < d$  gilt. Man beachte, dass in (2.21) nur die herkömmlichen inneren Volumina auftreten.

Mit diesen Annahmen kann in der nächsten Proposition die Vernachlässigbarkeit der Randeffekte gezeigt werden. Danach werden wir mit der Darstellung (2.5) eine Formel für die asymptotische Kovarianzstruktur berechnen.

**Proposition 2.1.2** *Ist das Beobachtungsfenster  $W$  ein beliebiger konvexer Körper, so folgt (2.7) aus (2.18) und (2.20). Ist  $W$  ein Polytop, so folgt (2.7) aus den schwächeren Voraussetzungen (2.19) und (2.21).*

*Beweis:* Für  $W \in \mathcal{K}^d \setminus \mathcal{P}^d$  genügt es wegen (2.12), der Additivität der inneren Volumina, der Bilinearität der Kovarianz, der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Stetigkeit der Wurzelfunktion

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{S \in X_k^1} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right) = 0$$

für  $k \in \{0, \dots, n\}$  zu zeigen. Zunächst bestimmen wir eine Formel für diese Varianz. Mit der disjunkten Zerlegung  $X_k^1 = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} X_{k,r}^1$ , dem Satz von der monotonen Konvergenz und der Definition der  $(m, n)$ -Perkolation erhält man

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k^1} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right] = \sum_{r=1}^{\infty} f_{m,n}^{k,r}(p) \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right].$$

Nun untersuchen wir das zweite Moment dieses Funktionals. Mit den disjunkten Zerlegungen  $X_k^1 = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} X_{k,r}^1$  und  $X_{k,s} = \bigcup_{o=0}^{\min(r,s)} \mathcal{S}_{k,s}^o(S)$  für  $S \in X_{k,r}$  und dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{S \in X_k^1} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=0}^{\min(r,s)} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}^1} \sum_{T \in X_{k,s}^1} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)\} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t) \right]. \end{aligned}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass  $S \in X_{k,r}$  und  $T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $o \in \{0, \dots, \min(r, s)\}$ , bei gegebenem Mosaik  $X$  schwarz sind, ist für  $k < m$

$$1 - (1-p)^o + (1-p)^o (1 - (1-p)^{r-o}) (1 - (1-p)^{s-o}),$$

denn entweder ist eine der  $o$  gemeinsamen benachbarten  $m$ -Seiten schwarz (dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit  $1 - (1-p)^o$ ) oder alle gemeinsamen benachbarten  $m$ -Seiten sind weiß und von den übrigen benachbarten  $m$ -Seiten gibt es jeweils eine schwarze benachbarte  $m$ -Seite von  $S$  und von  $T$  (dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit

$(1-p)^o(1-(1-p)^{r-o})(1-(1-p)^{s-o})$ . Im Fall  $m \leq k \leq n$  sind  $S$  und  $T$  mit Wahrscheinlichkeit  $p^{r+s-o}$  schwarz, da dazu alle benachbarten  $m$ -Seiten von  $S$  und  $T$  schwarz sein müssen. Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeit, dass  $S \in X_{k,r}$  und  $T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)$  bei gegebenem Mosaik  $X$  schwarz sind, also gerade  $g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p) + f_{m,n}^{k,r}(p) f_{m,n}^{k,s}(p)$  ist. Somit gilt für das zweite Moment mit Lemma 1.3.4

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{S \in X_k^1} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right)^2 \right] \\
 &= \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=0}^{\min(r,s)} (g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p) + f_{m,n}^{k,r}(p) f_{m,n}^{k,s}(p)) \\
 & \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in X_{k,s}} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_k^o(S)\} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t) \right].
 \end{aligned}$$

Beachtet man  $\mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_k^o(S)\} = 1 - \sum_{o=1}^{\min(r,s)} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_k^o(S)\}$  und  $g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p) = 0$  für  $o = 0$ , so folgt für die Varianz

$$\begin{aligned}
 & \text{Var} \left( \sum_{S \in X_k^1} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right) \\
 &= \sum_{r,s=1}^{\infty} f_{m,n}^{k,r}(p) f_{m,n}^{k,s}(p) \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t), \sum_{T \in X_{k,s}} V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t) \right) \\
 & \quad + \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p) \\
 & \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t) \right].
 \end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert wegen  $|f_{m,n}^{k,r}(p) f_{m,n}^{k,s}(p)| \leq 1$ , der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Voraussetzung (2.20) nach Teilen durch  $t$  gegen null. Also bleibt noch zu zeigen, dass der zweite Summand nach Teilen durch  $t$  gegen null konvergiert. Wegen  $|g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p)| \leq 1$  und der Zerlegungen  $\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{1}\{S \in X_{k,r}\} = \mathbf{1}\{S \in X_k\}$  und  $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)\} = \mathbf{1}\{T \in X_k, \mathcal{S}_m(S) \cap \mathcal{S}_m(T) \neq \emptyset\}$  für  $S \in X_k$  folgt nach Anwenden der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p) \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t) \right] \right| \\
 & \leq \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in X_k} |V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t)| \mathbf{1}\{\mathcal{S}_m(S) \cap \mathcal{S}_m(T) \neq \emptyset\} \right] \\
 & \leq \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{H \in X_m} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(H)} \sum_{T \in \mathcal{S}_k(H)} |V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t)| \right].
 \end{aligned}$$

Mit (2.14),  $V_i(\emptyset) = 0$ ,  $S \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(H)} C$  für  $S \in \mathcal{S}_k(H)$  und  $H \in X_m$  und dem verfeiner-

ten Theorem von Campbell (1.1) erhält man nun

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p) \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) V_i(\text{relint}(T) \cap \partial W_t) \right] \right| \\
& \leq \frac{4}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{H \in X_m} \mathbf{1} \left\{ \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(H)} C \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(H)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 \right] \\
& = 4\gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(0)} C \right) \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 \right],
\end{aligned}$$

wobei auch die Translationsinvarianz von  $|\mathcal{S}_l(\cdot)|$  und die der inneren Volumina verwendet wurde. Dieser Ausdruck konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen null für  $t \rightarrow \infty$ , wobei

$$\sum_{C \in \mathcal{S}_d(0)} \lambda_d(B(0, R(W)) + C) \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2$$

als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majorante folgt nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) aus Voraussetzung (2.18).

Nun weisen wir (2.7) für ein Polytop  $W$  als Beobachtungsfenster nach. Wegen der Darstellung (2.8) der inneren Volumina von  $Z$  auf dem Rand des Beobachtungsfensters und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genügt es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{S \in X_k^1} (-1)^{i+\dim(S \cap U_t)} V_i(S \cap U_t) \right) = 0$$

für  $i, k \in \{0, \dots, n\}$  und  $U \in \mathcal{F}(W)$  mit  $\dim(U) < d$  zu zeigen. Analog zu dem Fall eines beliebigen konvexen Körpers als Beobachtungsfenster erhält man

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left( \sum_{S \in X_k^1} (-1)^{i+\dim(S \cap U_t)} V_i(S \cap U_t) \right) \\
& = \sum_{r,s=1}^{\infty} f_{m,n}^{k,r}(p) f_{m,n}^{k,s}(p) \\
& \quad \times \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_{k,r}} (-1)^{i+\dim(S \cap U_t)} V_i(S \cap U_t), \sum_{T \in X_{k,s}} (-1)^{i+\dim(T \cap U_t)} V_i(T \cap U_t) \right) \\
& \quad + \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,k,r,s}(p) \\
& \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{k,s}^o(S)} (-1)^{\dim(S \cap U_t) + \dim(T \cap U_t)} V_i(S \cap U_t) V_i(T \cap U_t) \right].
\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert wegen  $|f_{m,n}^{k,r}(p) f_{m,n}^{k,s}(p)| \leq 1$ , der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Voraussetzung (2.21) nach Teilen durch  $t$  gegen null. Analog zum Fall beliebiger konvexer Körper als Beobachtungsfenster konvergiert auch der zweite

Summand nach Teilen durch  $t$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen null, wobei statt (2.14) die Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  verwendet werden kann und somit für die Integrierbarkeit der Majorante die schwächere Voraussetzung (2.19) anstatt (2.18) genügt.  $\square$

Um zu zeigen, dass aus diesem Theorem nun die Vernachlässigbarkeit der Randeffekte gefolgert werden kann, das heißt

$$\sigma_{i,j}(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(V_i(Z \cap \overset{\circ}{W}_t), V_j(Z \cap \overset{\circ}{W}_t)),$$

benötigen wir eine einfache Folgerung aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die in dieser Arbeit häufig verwendet wird.

**Lemma 2.1.3** *Seien  $(X_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  für  $i \in \{0, \dots, d\}$  Folgen reellwertiger Zufallsvariablen, für die  $(\text{Var}(Y_n^{(i)}))_{n \in \mathbb{N}}$  für  $i \in \{0, \dots, d\}$  beschränkt ist und*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(X_n^{(i)} - Y_n^{(i)}) = 0, \quad i \in \{0, \dots, d\},$$

*gilt, so folgt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(X_n^{(i)}, X_n^{(j)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cov}(Y_n^{(i)}, Y_n^{(j)}), \quad i, j \in \{0, \dots, d\},$$

*falls einer der beiden Grenzwerte existiert.*

*Beweis:* Wegen der Bilinearität der Kovarianz gilt

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(X_n^{(i)}, X_n^{(j)}) - \text{Cov}(Y_n^{(i)}, Y_n^{(j)}) \\ &= \text{Cov}(X_n^{(i)} - Y_n^{(i)}, Y_n^{(j)}) + \text{Cov}(X_n^{(i)} - Y_n^{(i)}, X_n^{(j)} - Y_n^{(j)}) + \text{Cov}(Y_n^{(i)}, X_n^{(j)} - Y_n^{(j)}). \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man damit

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\text{Cov}(X_n^{(i)}, X_n^{(j)}) - \text{Cov}(Y_n^{(i)}, Y_n^{(j)})| \\ &\leq |\text{Cov}(X_n^{(i)} - Y_n^{(i)}, Y_n^{(j)})| + |\text{Cov}(X_n^{(i)} - Y_n^{(i)}, X_n^{(j)} - Y_n^{(j)})| \\ &\quad + |\text{Cov}(Y_n^{(i)}, X_n^{(j)} - Y_n^{(j)})| \\ &\leq \sqrt{\text{Var}(X_n^{(i)} - Y_n^{(i)})} \sqrt{\text{Var}(Y_n^{(j)})} + \sqrt{\text{Var}(X_n^{(i)} - Y_n^{(i)})} \sqrt{\text{Var}(X_n^{(j)} - Y_n^{(j)})} \\ &\quad + \sqrt{\text{Var}(Y_n^{(i)})} \sqrt{\text{Var}(X_n^{(j)} - Y_n^{(j)})}. \end{aligned}$$

Da die Folge  $(\text{Var}(Y_n^{(i)}))_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $i$  beschränkt ist, konvergiert dies gegen null.  $\square$

Nun können wir zeigen, dass die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{i,j}$  unter den hier gemachten Voraussetzungen existieren und eine Formel für diese angeben.

**Theorem 2.1.4** *Existieren die Grenzwerte in (2.17) und sind (2.18) und (2.20) (bzw. (2.19) und (2.21) für  $W \in \mathcal{P}^d$ ) erfüllt, so existieren bei  $(m, n)$ -Perkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf  $X$  die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{i,j}(p)$  und es gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}(p) &= \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} \left( \rho_{i,j}^{k,l}(p) + \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) \right. \\ &\quad \left. \times \gamma_k \mathbb{E}_k^0[V_i(\mathcal{S}(0))V_j(\mathcal{S}_{l,s}^o(0))\mathbf{1}\{|\mathcal{S}_m(0)| = r\}] \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

für  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ .

*Beweis:* Wegen Proposition 2.1.2, Lemma 2.1.3 und der Additivität der inneren Volumina gilt

$$\sigma_{i,j}(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(V_i(Z \cap \dot{W}_t), V_j(Z \cap \dot{W}_t)).$$

Für den Erwartungswert von  $V_i(Z \cap \dot{W}_t)$  gilt nach (2.5), der disjunkten Zerlegung  $X_k^1 = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} X_{k,r}^1$ , dem Satz von der monotonen Konvergenz, der Definition der  $(m, n)$ -Perkolation und Lemma 1.3.3

$$\mathbb{E}[V_i(Z \cap \dot{W}_t)] = \sum_{k=i}^n (-1)^{i+k} \sum_{r=1}^{\infty} f_{m,n}^{k,r}(p) \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(S \cap W_t) \right].$$

Für den gemischten Erwartungswert erhält man mit (2.5) und den disjunkten Zerlegungen  $X_k^1 = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} X_{k,r}^1$  und  $X_l^1 = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \bigcup_{o=0}^{\min(r,s)} (\mathcal{S}_l^o(S) \cap X_{l,s}^1)$  für  $S \in X_{k,r}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V_i(Z \cap \dot{W}_t) V_j(Z \cap \dot{W}_t)] \\ &= \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=0}^{\min(r,s)} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}^1} \sum_{T \in \mathcal{S}_l^o(S) \cap X_{l,s}^1} V_i(S \cap W_t) V_j(T \cap W_t) \right]. \end{aligned}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass  $S \in X_{k,r}$  und  $T \in \mathcal{S}_l^o(S)$  bei gegebenem Mosaik schwarz sind, ist  $1 - (1-p)^o + (1-p)^o(1 - (1-p)^{r-o})(1 - (1-p)^{s-o})$  für  $k, l < m$  und  $p^{r+s-o}$  für  $m \leq k, l \leq n$ , wie im Beweis von Proposition 2.1.2 schon gezeigt wurde. Für  $k < m$  und  $m \leq l \leq n$  ist diese Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{1}\{o=0\}(1 - (1-p)^r)p^s + \mathbf{1}\{o \neq 0\}p^s,$$

da mindestens eine der benachbarten  $m$ -Seiten von  $S$  schwarz sein muss und alle benachbarten  $m$ -Seiten von  $T$ . Für  $m \leq k \leq n$  und  $l < m$  ist diese Wahrscheinlichkeit entsprechend  $\mathbf{1}\{o=0\}p^r(1 - (1-p)^s) + \mathbf{1}\{o \neq 0\}p^r$ . Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $S \in X_{k,r}$  und  $T \in \mathcal{S}_l^o(S)$  bei gegebenem Mosaik schwarz sind,  $g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) + f_{m,n}^{k,r}(p)f_{m,n}^{l,s}(p)$  und mit Lemma 1.3.4 folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V_i(Z \cap \dot{W}_t) V_j(Z \cap \dot{W}_t)] \\ &= \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=0}^{\min(r,s)} (g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) + f_{m,n}^{k,r}(p)f_{m,n}^{l,s}(p)) \\ & \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in X_{l,s}} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_l^o(S)\} V_i(S \cap W_t) V_j(T \cap W_t) \right]. \end{aligned}$$

Da  $g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p)$  für  $o=0$  null ist, folgt mit  $\mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_l^o(S)\} = 1 - \sum_{o=1}^{\min(r,s)} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_l^o(S)\}$

für die Kovarianz

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}(V_i(Z \cap \dot{W}_t), V_j(Z \cap \dot{W}_t)) \\
 &= \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} \sum_{r,s=1}^{\infty} f_{m,n}^{k,r}(p) f_{m,n}^{l,s}(p) \\
 & \quad \times \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(S \cap W_t), \sum_{T \in X_{l,s}} V_j(T \cap W_t) \right) \\
 &+ \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) \\
 & \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{l,s}^o(S)} V_i(S \cap W_t) V_j(T \cap W_t) \right].
 \end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert nach Teilen durch  $t$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen den ersten Summanden in (2.22), wobei  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  nach Voraussetzung existiert. Nun ist noch die Asymptotik des zweiten Summanden zu bestimmen. Wegen  $|g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p)| \leq 1$  folgt

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) \frac{1}{t} \left( \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{l,s}^o(S)} V_i(S \cap W_t) V_j(T \cap W_t) \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{l,s}^o(S)} V_i(S) V_j(T) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\} \right] \right) \right| \\
 & \leq \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{l,s}^o(S)} |V_i(S \cap W_t) V_j(T \cap W_t) - V_i(S) V_j(T) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\}| \right].
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Da der Betrag auf der rechten Seite von (2.23) nur für  $(S \cup T) \cap \partial W_t \neq \emptyset$  positiv sein kann, lässt sich dies mit den Zerlegungen  $\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{1}\{S \in X_{k,r}\} = \mathbf{1}\{S \in X_k\}$  und  $\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_{l,s}^o(S)\} = \mathbf{1}\{T \in X_l, \mathcal{S}_m(S) \cap \mathcal{S}_m(T) \neq \emptyset\}$  für  $S \in X_k$  und der Monotonie und der Nichtnegativität der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  gegen

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{H \in X_m} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(H)} \sum_{T \in \mathcal{S}_l(H)} V_i(S) V_j(T) \mathbf{1} \left\{ \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(H)} C \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} \right]$$

abschätzen, denn für  $S \in \mathcal{S}_k(H)$ ,  $T \in \mathcal{S}_l(H)$  gilt  $S \cup T \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(H)} C$ . Wegen des verfeinerten Theorems von Campbell (1.1) und der Translationsinvarianz der inneren Volumina ist dies gleich

$$\gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(0)} C \right) V_i(\mathcal{S}_k(0)) V_j(\mathcal{S}_l(0)) \right]$$

und dies konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen null, da

$$\sum_{C \in \mathcal{S}_d(0)} \lambda_d(B(0, R(W)) + C) V_i(\mathcal{S}_k(0)) V_j(\mathcal{S}_l(0))$$

als Majorante gewählt werden kann, die wegen der Steiner-Formel (1.9), der Hölder-Ungleichung und Voraussetzung (2.19) integrierbar ist. Damit folgt mit dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1)

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{l,s}^o(S)} V_i(S \cap W_t) V_j(T \cap W_t) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_{k,r}} \sum_{T \in \mathcal{S}_{l,s}^o(S)} V_i(S) V_j(T) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\} \right] \\ &= \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0)) V_j(\mathcal{S}_{l,s}^o(0)) \mathbf{1}\{|\mathcal{S}_m(0)| = r\}] \end{aligned}$$

und somit die Behauptung.  $\square$

Im Fall  $p = 0$  sollten die asymptotischen Kovarianzen bei  $(m, n)$ -Perkolation null sein, da in diesem Fall das gesamte Mosaik weiß gefärbt und deswegen  $V_i(Z \cap W_t) = 0$  deterministisch ist. Wegen  $g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(0) = f_{m,n}^{k,r}(0) = 0$  stimmt dies mit den Ergebnissen aus Theorem 2.1.4 überein. Im Fall  $p = 1$  sollten die asymptotischen Kovarianzen bei  $(m, d)$ -Perkolation ebenfalls null sein, da dann das Mosaik komplett schwarz gefärbt und  $V_i(Z \cap W_t) = V_i(W_t)$  wieder deterministisch ist. Es gilt  $g_{m,d,o}^{k,l,r,s}(1) = 0$  und  $f_{m,d}^{k,r}(1) = 1$ , womit sich

$$\sigma_{i,j}(1) = \sum_{k=i}^d \sum_{l=j}^d (-1)^{i+j+k+l} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t), \sum_{T \in X_l} V_j(T \cap W_t) \right)$$

ergibt. Wegen  $Z = \mathbb{R}^d$  gilt nach (2.5)

$$V_i(\dot{W}_t) = \sum_{k=i}^d (-1)^{i+k} \sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t)$$

und somit folgt  $\sigma_{i,j}(1) = 0$ .

Betrachtet man nun Zellenperkolation, so vereinfachen sich die Formeln für die asymptotischen Kovarianzen des Volumens deutlich.

**Korollar 2.1.5** *Für  $j \in \{0, \dots, d\}$  gilt unter den Voraussetzungen von Theorem 2.1.4 bei Zellenperkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf  $X$*

$$\sigma_{d,j}(p) = \sum_{l=j}^d \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{j+l} p(1-p)^s \gamma_d \mathbb{E}_d^0 [V_d(S(0)) V_j(\mathcal{S}_{l,s}^0(0))]. \quad (2.24)$$

*Insbesondere gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_{d,d}(p) &= p(1-p) \gamma_d \mathbb{E}_d^0 [V_d(S(0))^2], \\ \sigma_{d,d-1}(p) &= p(1-p)(1-2p) \gamma_d \mathbb{E}_d^0 [V_d(S(0)) V_{d-1}(S(0))]. \end{aligned}$$

*Beweis:* Wegen

$$\rho_{d,j}^{d,l}(p) = p \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( V_d(W_t), \sum_{T \in X_l} V_j(T \cap W_t) f_{d,d}^{l,|\mathcal{S}_d(T)|}(p) \right) = 0$$

für  $j, l \in \{0, \dots, d\}$  folgt Gleichung (2.24) aus Theorem 2.1.4. Die Formel für  $\sigma_{d,d}(p)$  folgt nun direkt aus (2.24), da  $\mathcal{S}_{d,s}(0)$  für  $0 \in \eta^{(d)}$  nur im Fall  $s = 1$  nicht leer ist und in diesem Fall  $\mathcal{S}_{d,1}(0) = S(0)$  gilt. Mit (1.10) folgt

$$\mathbb{E}_d^0[V_d(S(0))V_{d-1}(\mathcal{S}_{d-1}(0))] = 2 \mathbb{E}_d^0[V_d(S(0))V_{d-1}(S(0))]$$

und wegen  $\mathcal{S}_{d-1,s}(0) = \mathbf{1}\{s = 1\} \mathcal{S}_{d-1}(0)$  für  $0 \in \eta^{(d)}$  erhält man zusammen mit (2.24) auch die Formel für  $\sigma_{d,d-1}(p)$ .  $\square$

## 2.2 Zellenperkolation auf normalen und seitentreuen Mosaiken

In diesem Abschnitt setzen wir zusätzlich voraus, dass das betrachtete Mosaik *normal* ist, das heißt, jede  $k$ -Seite ist in  $d - k + 1$  Zellen enthalten. Dies impliziert, dass jede  $k$ -Seite in genau  $\binom{d-k+1}{d-m+1} = \binom{d-k+1}{m-k}$  Seiten der Dimension  $m \geq k$  enthalten ist. Da die Anzahl der  $m$ -Seiten einer  $k$ -Seite im Fall  $m < k$  aber nicht deterministisch sein muss, vereinfachen sich die Formeln für die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{i,j}(p)$  nur für Zellenperkolation deutlich. Außerdem ermöglicht die Normalität mit Hilfe der Inklusions-Exklusions-Formel, vergleiche [44, (14.47)], eine andere Darstellung der inneren Volumina von  $Z \cap W_t$ , mit der Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina unter schwächeren Voraussetzungen bestimmt werden können. Weiter verschärfen sich die Voraussetzungen nicht, wenn man beliebige konvexe Körper statt Polytope als Beobachtungsfenster betrachtet. Außerdem kann mit diesem Zugang über die Inklusions-Exklusions-Formel eine größere Klasse additiver Funktionale als die inneren Volumina betrachtet werden.

Seien  $X$  ein zufälliges stationäres normales und seitentreues Mosaik in  $\mathbb{R}^d$ , für das die Intensitäten  $\gamma_k$  endlich sind, und  $\Psi$  eine Zellenperkolation auf  $X$ . Wir bezeichnen mit  $X_k^* := X_k^*(\Psi)$  die Menge aller  $k$ -Seiten von  $X$ , die in  $d - k + 1$  schwarzen Zellen enthalten sind. Man beachte, dass  $X_d^* = X_d^1$  und  $X_k^* \subseteq X_k^1$  für  $k < d$  gilt. Weiter bezeichnet man wie bisher mit  $Z$  die Vereinigung aller schwarzen Zellen. Wir betrachten in diesem Abschnitt additive und translationsinvariante Funktionale  $\varphi$  auf  $\mathcal{K}^d$ , die auf den Konvexring fortgesetzt werden können und für die ein translationsinvariantes und monotoneres Funktional  $\tilde{\varphi}$  auf  $\mathcal{K}^d$  mit  $|\varphi| \leq \tilde{\varphi}$  existiert. Ist  $\varphi$  monoton und nicht-negativ auf  $\mathcal{K}^d$ , so kann  $\tilde{\varphi} = \varphi$  gewählt werden.

Funktionale, die die Voraussetzungen an  $\varphi$  erfüllen, sind zum Beispiel die Oberflächenmaße oder die inneren Volumina, wobei die inneren Volumina als obere Schranke  $\tilde{\varphi}$  der Oberflächenmaße gewählt werden können. Ist  $h : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  messbar und beschränkt, so ist auch

$$\varphi(K) := \int_{\mathbb{S}^{d-1}} h(u) \Psi_i(K, du), \quad K \in \mathcal{K}^d,$$

für  $i \in \{0, \dots, d\}$  ein additives und translationsinvariantes Funktional, dessen Betrag gegen das monotone und translationsinvariante Funktional

$$\tilde{\varphi}(K) := \|h\|_\infty V_i(K), \quad K \in \mathcal{K}^d,$$

abgeschätzt werden kann. Da die Oberflächenmaße additiv auf den Konvexring fortgesetzt werden können, existiert auch eine additive Fortsetzung von  $\varphi$  auf den Konvexring. Weiter ist

$$\varphi(K) := h(K - s(K), u), \quad K \in \mathcal{K}^d,$$

für festes  $u \in \mathbb{S}^{d-1}$  additiv und translationsinvariant, wobei  $h(K, \cdot)$  die Stützfunktion von  $K$  bezeichnet und  $s(K)$  den Steiner-Punkt. Da die Abbildung  $K \mapsto h(K, \cdot)$  und der Steiner-Punkt stetig sind, vergleiche Abschnitt 5.4 in [43], existiert nach dem Fortsetzungssatz von Groemer, vergleiche [44, Theorem 14.4.2], eine additive Fortsetzung auf den Konvexring. Als monotone und translationsinvariante obere Schranke kann das Funktional

$$\tilde{\varphi}(K) := 2R(K), \quad K \in \mathcal{K}^d,$$

gewählt werden, wobei  $R(\cdot)$  den Umkugelradius bezeichnet.

### 2.2.1 Asymptotische Erwartungswerte

In diesem Unterabschnitt wird eine Formel für die asymptotischen Erwartungswerte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[\varphi(Z \cap W_t)] \quad (2.25)$$

bestimmt, wobei wir für die Existenz dieses Grenzwerts die Voraussetzung

$$\sum_{i,k=0}^d \mathbb{E}_k^0[\tilde{\varphi}(S(0)) V_i(S(0))] < \infty \quad (2.26)$$

benötigen.

**Theorem 2.2.1** *Ist (2.26) erfüllt, so existiert der Grenzwert (2.25) für Zellenperkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem normalen Mosaik  $X$  und es gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[\varphi(Z \cap W_t)] = \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} p^{d-k+1} \gamma_k \mathbb{E}_k^0[\varphi(S(0))]. \quad (2.27)$$

*Beweis:* Da  $\varphi$  additiv ist und auf den Konvexring fortgesetzt werden kann, folgt mit der Inklusions-Exklusions-Formel, vergleiche (14.47) in [44],

$$\varphi(Z \cap W_t) = \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} \sum_{S \in X_k^*} \varphi(S \cap W_t) \quad (2.28)$$

und nach Definition der Zellenperkolation gilt

$$\mathbb{E}[\varphi(Z \cap W_t)] = \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} p^{d-k+1} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \varphi(S \cap W_t) \right], \quad (2.29)$$

da jede  $k$ -Seite wegen der Normalität von  $X$  in genau  $d - k + 1$  Zellen enthalten ist. Nun ist noch die Asymptotik der Erwartungswerte auf der rechten Seite von (2.29) zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \varphi(S \cap W_t) \right] - \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \varphi(S) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\} \right] \right| \\ & \leq \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} |\varphi(S \cap W_t) - \varphi(S) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\}| \right]. \end{aligned}$$

Da der Betrag auf der rechten Seite für  $S \cap \partial W_t = \emptyset$  null ist, folgt mit  $|\varphi| \leq \tilde{\varphi}$ , der Monotonie und Translationsinvarianz von  $\tilde{\varphi}$  und dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1)

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \varphi(S \cap W_t) \right] - \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \varphi(S) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\} \right] \right| \\ & \leq \frac{2}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \tilde{\varphi}(S) \mathbf{1}\{S \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right] \\ & = 2 \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [\tilde{\varphi}(S(0)) \lambda_d(\partial W - t^{-1/d} S(0))]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen null, wobei

$$\tilde{\varphi}(S(0)) \lambda_d(B(0, 2R(W)) + S(0))$$

als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majorante folgt mit der Steiner-Formel (1.9) und Voraussetzung (2.26).  $\square$

Bei Zellenperkolations auf einem normalen Mosaik lässt sich nun ein Zusammenhang zwischen  $\delta_i(p)$  und  $\delta_i(1-p)$ ,  $i \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$ , herstellen, wobei die mittleren inneren Volumina  $\delta_i$  in (2.9) definiert wurden.

**Theorem 2.2.2** *Sei  $i \in \{0, \dots, d\}$  und es gelte (2.10) (bzw. (2.11)) für  $W \in \mathcal{P}^d$ . Dann gilt für Zellenperkolations auf dem normalen Mosaik  $X$  die Beziehung*

$$\delta_i(p) = \begin{cases} (-1)^{d+i+1} \delta_i(1-p), & i < d \\ 1 - \delta_d(1-p), & i = d \end{cases}$$

für  $p \in [0, 1]$ .

*Beweis:* Seien  $i \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$ . Wegen Theorem 2.1.1 existieren die Grenzwerte  $\delta_i(p)$  und  $\delta_i(1-p)$ . Um die Abhängigkeit von der Färbewahrscheinlichkeit  $p$  deutlich zu machen, schreiben wir in diesem Beweis  $Z(p)$  und  $X_k^1(p)$  anstatt  $Z$  und  $X_k^1$ . Mit der disjunkten Zerlegung

$$Z(p) \cap W_t = (\dot{W}_t \setminus (Z(p)^c \cap \dot{W}_t)) \cup (Z(p) \cap \partial W_t),$$

der Additivität der inneren Volumina und (2.1) folgt

$$\mathbb{E}[V_i(Z(p) \cap W_t)] = (-1)^{d+i} V_i(W_t) - \mathbb{E}[V_i(Z(p)^c \cap \dot{W}_t)] + \mathbb{E}[V_i(Z(p) \cap \partial W_t)].$$

Da  $\mathbb{E}[V_i(Z(p) \cap \partial W_t)]$  wegen (2.16) nach Teilen durch  $t$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen null konvergiert und das  $i$ -te innere Volumen homogen vom Grad  $i$  ist, folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z(p) \cap W_t)] = \mathbf{1}\{i = d\} - \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \mathbb{E}[V_i(Z(p)^c \cap \dot{W}_t)]. \quad (2.30)$$

Definiert man die *weißen  $k$ -Seiten* von  $X$  durch  $X_k^0(p) := X_k \setminus X_k^1(p)$ ,  $k \in \{0, \dots, d\}$ , so kann man  $Z(p)^c$  als disjunkte Vereinigung der relativen Inneren der weißen Seiten darstellen und erhält somit wegen der Additivität der inneren Volumina für  $t \geq 1$

$$V_i(Z(p)^c \cap \dot{W}_t) = V_i \left( \bigcup_{k=0}^d \bigcup_{S \in X_k^0(p)} \text{relint}(S) \cap \dot{W}_t \right) = \sum_{k=0}^d \sum_{S \in X_k^0(p)} V_i(\text{relint}(S) \cap \dot{W}_t).$$

Wegen der Stationarität des Mosaiks gilt fast sicher  $\text{relint}(S) \cap \overset{\circ}{W}_t = \text{relint}(S \cap W_t)$ , vergleiche (2.4). Ebenso gilt wegen der Stationarität fast sicher  $\dim(S \cap W_t) = \dim(S)$ , falls  $S \cap W_t \neq \emptyset$ . Zusammen mit der Formel (2.1) erhält man

$$V_i(Z(p)^c \cap \overset{\circ}{W}_t) = \sum_{k=0}^d (-1)^{i+k} \sum_{S \in X_k^0(p)} V_i(S \cap W_t)$$

fast sicher. Da das Mosaik normal ist, liegt jede  $k$ -Seite in  $d - k + 1$  Zellen und es folgt mit der Inklusions-Exklusions-Formel die fast sichere Gleichheit

$$V_i(Z(p)^c \cap \overset{\circ}{W}_t) = (-1)^{d+i} \sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} \sum_{S \in X_k^0(p)} V_i(S \cap W_t) = (-1)^{d+i} V_i(\overline{Z(p)^c} \cap W_t),$$

wobei  $\bar{B}$  den Abschluss einer Borelmenge  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  bezeichnet. Da wegen der Symmetrie des Modells

$$\overline{Z(p)^c} \stackrel{d}{=} Z(1-p)$$

gilt, folgt die Behauptung mit (2.30).  $\square$

### 2.2.2 Asymptotische Kovarianzstruktur

In diesem Unterabschnitt seien  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  additive und translationsinvariante Funktionale, die auf den Konvexring fortgesetzt werden können und für die translationsinvariante und monotone Funktionale  $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$  auf  $\mathcal{K}^d$  mit  $|\varphi_1| \leq \tilde{\varphi}_1, |\varphi_2| \leq \tilde{\varphi}_2$  existieren. Wir interessieren uns dafür, unter welchen Voraussetzungen deren asymptotische Kovarianz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\varphi_1(Z \cap W_t), \varphi_2(Z \cap W_t)) \quad (2.31)$$

existiert und eine Formel für sie bestimmt werden kann. Im Fall  $\varphi_1 = V_i, \varphi_2 = V_j$  wurde diese asymptotische Kovarianz im vorherigen Abschnitt bereits untersucht.

Wir setzen voraus, dass die Grenzwerte

$$\tau^{k,l} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_k} \varphi_1(S \cap W_t), \sum_{T \in X_l} \varphi_2(T \cap W_t) \right) \quad (2.32)$$

existieren und die Integrierbarkeitsbedingung

$$\sum_{i,k,l=0}^d \mathbb{E}_d^0[V_i(S(0)) \tilde{\varphi}_1(\mathcal{S}_k(0)) \tilde{\varphi}_2(\mathcal{S}_l(0))] < \infty \quad (2.33)$$

erfüllt ist.

**Theorem 2.2.3** *Ist (2.33) erfüllt und existieren die Grenzwerte in (2.32), so existiert der Grenzwert (2.31) bei Zellenperkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem normalen Mosaik  $X$  und es gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\varphi_1(Z \cap W_t), \varphi_2(Z \cap W_t)) &= \sum_{k,l=0}^d (-1)^{k+l} p^{2d-k-l+2} \tau^{k,l} \\ &+ \sum_{k,l=0}^d (-1)^{k+l} \sum_{o=1}^{d-\max(k,l)+1} p^{2d-k-l+2-o} (1-p^o) \gamma_k \mathbb{E}_k^0[\varphi_1(S(0)) \varphi_2(\mathcal{S}_l^o(0))]. \end{aligned}$$

*Beweis:* Verwendet man die aus der Inklusions-Exklusions-Formel folgende Darstellung (2.28) für  $\varphi = \varphi_1$  bzw.  $\varphi = \varphi_2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\varphi_1(Z \cap W_t) \varphi_2(Z \cap W_t)] \\ &= \sum_{k,l=0}^d (-1)^{k+l} \sum_{o=0}^{d-\max(k,l)+1} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k^*} \sum_{T \in X_l^*} \varphi_1(S \cap W_t) \varphi_2(T \cap W_t) \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_l^o(S)\} \right]. \end{aligned}$$

Für  $S \in X_k$ ,  $T \in \mathcal{S}_l^o(S)$  ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $\{S \in X_k^*, T \in X_l^*\}$  bei gegebenem normalen Mosaik  $X$  nach Definition der Zellenperkolations  $p^{2d-k-l+2-o}$ . Zusammen mit Lemma 1.3.4 erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi_1(Z \cap W_t) \varphi_2(Z \cap W_t)] &= \sum_{k,l=0}^d (-1)^{k+l} \sum_{o=0}^{d-\max(k,l)+1} p^{2d-k-l+2-o} \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in X_l} \varphi_1(S \cap W_t) \varphi_2(T \cap W_t) \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_l^o(S)\} \right]. \end{aligned}$$

Wegen  $\mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_l^o(S)\} = 1 - \sum_{o=1}^{d-\max(k,l)+1} \mathbf{1}\{T \in \mathcal{S}_l^o(S)\}$  folgt zusammen mit (2.29) für  $\varphi = \varphi_1$  bzw.  $\varphi = \varphi_2$  für die asymptotische Kovarianz

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\varphi_1(Z \cap W_t), \varphi_2(Z \cap W_t)) \\ &= \sum_{k,l=0}^d (-1)^{k+l} p^{2d-k-l+2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_k} \varphi_1(S \cap W_t), \sum_{T \in X_l} \varphi_2(T \cap W_t) \right) \\ &\quad + \sum_{k,l=0}^d (-1)^{k+l} \sum_{o=1}^{d-\max(k,l)+1} p^{2d-k-l+2-o} (1-p^o) \\ &\quad \quad \times \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in \mathcal{S}_l^o(S)} \varphi_1(S \cap W_t) \varphi_2(T \cap W_t) \right]. \end{aligned}$$

Die Kovarianzen im ersten Summanden konvergieren nach Voraussetzung gegen  $\tau^{k,l}$ . Für die Erwartungswerte im zweiten Summanden gilt für  $o \geq 1$  wegen  $|\varphi_i| \leq \tilde{\varphi}_i$  und der Monotonie der Funktionale  $\tilde{\varphi}_i$  analog zu (2.23) und der dort folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \left| \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in \mathcal{S}_l^o(S)} \varphi_1(S \cap W_t) \varphi_2(T \cap W_t) \right] \right. \\ & \quad \left. - \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in \mathcal{S}_l^o(S)} \varphi_1(S) \varphi_2(T) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\} \right] \right| \\ & \leq \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in \mathcal{S}_l^o(S)} |\varphi_1(S \cap W_t) \varphi_2(T \cap W_t) - \varphi_1(S) \varphi_2(T) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\}| \right] \\ & \leq \frac{2}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{C \in X} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(C)} \sum_{T \in \mathcal{S}_l(C)} \tilde{\varphi}_1(S) \tilde{\varphi}_2(T) \mathbf{1}\{C \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \right]. \end{aligned}$$

Verwendet man nun das verfeinerte Theorem von Campbell (1.1) und die Translationsinvarianz der Funktionale  $\tilde{\varphi}_1$  und  $\tilde{\varphi}_2$ , so ist dieser Ausdruck gleich

$$2\gamma_d \mathbb{E}_d^0[\tilde{\varphi}_1(\mathcal{S}_k(0)) \tilde{\varphi}_2(\mathcal{S}_l(0)) \lambda_d(\partial W - t^{-1/d} S(0))].$$

Dies konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen null, wobei  $\lambda_d(B(0, 2R(W)) + S(0)) \tilde{\varphi}_1(\mathcal{S}_k(0)) \tilde{\varphi}_2(\mathcal{S}_l(0))$  für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit dieser Majorante folgt aus der Steiner-Formel (1.9) und (2.33). Damit folgt mit dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1)

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in \mathcal{S}_l^o(S)} \varphi_1(S \cap W_t) \varphi_2(T \cap W_t) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \sum_{T \in \mathcal{S}_l^o(S)} \varphi_1(S) \varphi_2(T) \mathbf{1}\{s(S) \in W_t\} \right] = \gamma_k \mathbb{E}_k^0[\varphi_1(S(0)) \varphi_2(\mathcal{S}_l^o(0))]. \end{aligned}$$

□

Für  $p \in \{0, 1\}$  sind die asymptotischen Kovarianzen in (2.31) null, da dann das gesamte Mosaik komplett weiß oder komplett schwarz gefärbt ist und somit  $Z$  deterministisch ist. Im Fall  $p = 0$  sieht man dies auch direkt an Theorem 2.2.3 und im Fall  $p = 1$  erhält man

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\varphi_1(Z \cap W_t), \varphi_2(Z \cap W_t)) = \sum_{k,l=0}^d (-1)^{k+l} \tau^{k,l}.$$

Da nach der Inklusions-Exklusions-Formel

$$\sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} \sum_{S \in X_k} \varphi_1(S \cap W_t) = \varphi_1(W_t)$$

gilt, folgt  $\sum_{k=0}^d (-1)^{d-k} \tau^{k,l} = 0$  und die asymptotische Kovarianz in (2.31) ist für  $p = 1$  null.

Mit Theorem 2.1.4 und Theorem 2.2.3 lässt sich nun wieder ein Zusammenhang zwischen  $\sigma_{i,j}(p)$  und  $\sigma_{i,j}(1-p)$  für Zellenperkolation auf normalen und seitentreuen Mosaiken herstellen. Definiert man

$$\tau_{i,j}^{k,l} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t), \sum_{T \in X_l} V_j(T \cap W_t) \right), \quad (2.34)$$

so gilt  $\rho_{i,j}^{k,l}(p) = (1 - (1-p)^{d-k+1})(1 - (1-p)^{d-l+1}) \tau_{i,j}^{k,l}$  und die Existenz der Grenzwerte  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  in (2.17) ist äquivalent zur Existenz der Grenzwerte  $\tau_{i,j}^{k,l}$ .

**Theorem 2.2.4** *Existieren die Grenzwerte in (2.17) oder (2.34) und ist die Integrierbarkeitsvoraussetzung (2.19) erfüllt, so gilt bei Zellenperkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem normalen Mosaik  $X$  für  $i, j \in \{0, \dots, d\}$*

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}(p) &= \sum_{k=i}^d \sum_{l=j}^d (-1)^{k+l} \left( p^{2d-k-l+2} \tau_{i,j}^{k,l} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{o=1}^{d-\max(k,l)+1} p^{2d-k-l+2-o} (1-p)^o \gamma_k \mathbb{E}_k^0[V_i(S(0)) V_j(\mathcal{S}_l^o(0))] \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (2.18) und (2.20) (bzw. (2.21) für  $W \in \mathcal{P}^d$ ) erhält man die weitere Darstellung

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}(p) = & \sum_{k=i}^d \sum_{l=j}^d (-1)^{i+j+k+l} \left( (1 - (1-p)^{d-k+1})(1 - (1-p)^{d-l+1}) \tau_{i,j}^{k,l} \right. \\ & \left. + \sum_{o=1}^{d-\max(k,l)+1} (1-p)^{2d-k-l+2-o} (1 - (1-p)^o) \gamma_k \mathbb{E}_k^0[V_i(S(0))V_j(\mathcal{S}_l^o(0))] \right) \end{aligned}$$

und die Beziehung

$$\sigma_{i,j}(p) = (-1)^{i+j} \sigma_{i,j}(1-p), \quad p \in [0, 1].$$

*Beweis:* Die Formeln für die asymptotischen Kovarianzen folgen direkt aus Theorem 2.1.4 und Theorem 2.2.3. Den Zusammenhang zwischen  $\sigma_{i,j}(p)$  und  $\sigma_{i,j}(1-p)$  erhält man durch Gleichsetzen der beiden Darstellungen von  $\sigma_{i,j}(p)$ , wenn man berücksichtigt, dass nach der Inklusions-Exklusions-Formel

$$\sum_{k=i}^d (-1)^{d-k} \sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t) = V_i(W_t)$$

gilt und damit

$$\sum_{k=i}^d (-1)^k \tau_{i,j}^{k,l} = \sum_{l=j}^d (-1)^l \tau_{i,j}^{k,l} = 0$$

folgt. □

Ist das Mosaik  $X$  nun zusätzlich planar, so lassen sich die Formeln für  $\sigma_{i,j}(p)$  mit Hilfe der Euler-Formel für planare Graphen, vergleiche [35, Theorem 4.1.1], noch weiter vereinfachen. Dazu werden wir im Rest dieses Abschnitts

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(\varepsilon_t) = 0 \tag{2.36}$$

voraussetzen, wobei

$$\varepsilon_t := \sum_{S \in X_1} V_0(S \cap \partial W_t), \quad t \geq 1,$$

gesetzt wird. Man beachte, dass diese Voraussetzung gerade (2.20) für  $i = 0$ ,  $k = 1$  und  $r = 2$  ist.

**Theorem 2.2.5** *Existieren die Grenzwerte in (2.17) oder (2.34) und sind die Voraussetzungen (2.19) und (2.36) erfüllt, so erhält man bei Zellenperkolations mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem planaren und normalen Mosaik  $X$*

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2}(p) &= p(1-p) \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))^2], \\ \sigma_{2,1}(p) &= p(1-p)(1-2p) \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))V_1(S(0))], \\ \sigma_{2,0}(p) &= p(1-p) - p^2(1-p)^2 \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)|], \\ \sigma_{1,1}(p) &= p^2(1-p)^2 (\tau_{1,1}^{2,2} + \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))^2]) + p(1-p)(1-2p)^2 \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))^2], \\ \sigma_{1,0}(p) &= p^2(1-p)^2(1-2p)(\tau_{1,0}^{2,2} - \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)|]) \\ &\quad + p(1-p)(1-2p)(1+p-p^2) \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))], \\ \sigma_{0,0}(p) &= p^3(1-p)^3 \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2] + \gamma_2 p(1-p)(1-9p-p^2+20p^3-10p^4) \\ &\quad + p^2(1-p)^2(1-2p)^2 \tau_{0,0}^{2,2}. \end{aligned}$$

*Beweis:* Die Formeln für  $\sigma_{2,2}$ ,  $\sigma_{2,1}$  und  $\sigma_{2,0}$  folgen direkt aus Gleichung (2.35) in Theorem 2.2.4, wenn man  $\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))] = 1$  und  $\tau_{2,j}^{2,l} = 0$  berücksichtigt.

Nun behandeln wir  $\sigma_{1,1}$ . Mit (1.10) folgt

$$\sum_{S \in X_1} V_1(S \cap W_t) = \sum_{S \in X_2} V_1(S \cap W_t) - \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\partial W_t)$$

und somit

$$\tau_{1,1}^{1,1} = \tau_{1,1}^{1,2} = \tau_{1,1}^{2,2}.$$

Mit Proposition 1.3.1 folgt außerdem

$$\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0)) V_1(\mathcal{S}_2^1(0))] = \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0)) V_1(\mathcal{S}_1^1(0))] = 2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))^2]$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0)) V_1(\mathcal{S}_1^1(0))] &= \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0)) (2V_1(\mathcal{S}_2^1(0)) - 2V_1(S(0)))] \\ &= 4\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))^2] - 2\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))^2]. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ergebnisse in die Formel aus Theorem 2.2.4 ein, so erhält man die behauptete Formel für  $\sigma_{1,1}$  nach einer einfachen Rechnung.

Um die verbleibenden Kovarianzen  $\sigma_{1,0}$  und  $\sigma_{0,0}$  zu bestimmen, definiert man

$$X_k^t := \{S \in X_k : S \cap W_t \neq \emptyset\}, \quad t \geq 1.$$

Damit folgt einerseits aus der Normalität des Mosaiks

$$2(|X_1^t| + \varepsilon_t) = 3(|X_0^t| + \varepsilon_t)$$

und andererseits aus der Euler-Formel für planare Graphen, vergleiche [35, Theorem 4.1.1],

$$(|X_0^t| + \varepsilon_t) + (|X_2^t| + 1) = (|X_1^t| + \varepsilon_t) + 2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nun

$$|X_0^t| = 2|X_2^t| - \varepsilon_t - 2 \quad \text{und} \quad |X_1^t| = 3|X_2^t| - \varepsilon_t - 3, \quad (2.37)$$

was wir zur Bestimmung von  $\tau_{1,0}^{k,l}$  und  $\tau_{0,0}^{k,l}$  verwenden werden.

Zunächst bestimmen wir die Kovarianz  $\sigma_{1,0}$ . Verwendet man (2.37) und Voraussetzung (2.36), so erhält man mit Lemma 2.1.3

$$\tau_{1,0}^{1,0} = \tau_{1,0}^{2,0} = 2\tau_{1,0}^{2,2}, \quad \tau_{1,0}^{1,1} = \tau_{1,0}^{2,1} = 3\tau_{1,0}^{2,2}, \quad \tau_{1,0}^{1,2} = \tau_{1,0}^{2,2}.$$

Außerdem erhält man wieder mit Proposition 1.3.1

$$\begin{aligned} \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0)) | \mathcal{S}_0^1(0)|] &= 2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)|] - 4\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))], \\ \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0)) | \mathcal{S}_1^1(0)|] &= 2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)|] - 2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))], \\ \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))] &= \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))]. \end{aligned}$$

Zusammen mit Theorem 2.2.4 liefert dies nach einer einfachen Rechnung die behauptete Formel für  $\sigma_{1,0}$ .

Nun bestimmen wir  $\sigma_{0,0}$ . Nach Theorem 2.2.4 gilt im planaren Fall

$$\sigma_{0,0}(p) = \sum_{k,l=0}^2 (-1)^{k+l} \left( p^{6-k-l} \tau_{0,0}^{k,l} + \sum_{o=1}^{3-\max(k,l)} p^{6-k-l-o} (1-p^o) \gamma_k \mathbb{E}_k^0[|\mathcal{S}_l^o(0)|] \right). \quad (2.38)$$

Mit Gleichung (2.37) und der Voraussetzung (2.36) an die Varianz von  $\varepsilon_t$  erhält man wieder mit Lemma 2.1.3

$$\tau_{0,0}^{0,0} = 4\tau_{0,0}^{2,2}, \quad \tau_{0,0}^{1,1} = 9\tau_{0,0}^{2,2}, \quad \tau_{0,0}^{1,0} = 6\tau_{0,0}^{2,2}, \quad \tau_{0,0}^{2,0} = 2\tau_{0,0}^{2,2}, \quad \tau_{0,0}^{2,1} = 3\tau_{0,0}^{2,2}$$

und es folgt für den ersten Summanden in (2.38)

$$\sum_{k,l=0}^2 (-1)^{k+l} p^{6-k-l} \tau_{0,0}^{k,l} = p^2(1-p)^2(1-2p)^2 \tau_{0,0}^{2,2}.$$

Betrachte nun den zweiten Summanden in (2.38). Setze dazu

$$f(k, l, o) := \gamma_k \mathbb{E}_k^0[|\mathcal{S}_l^o(0)|]$$

und untersuche diesen Ausdruck für alle auftretenden Kombinationen von  $k, l$  und  $o$ . Mit

$$\alpha := \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2]$$

gilt nach mehrfachem Anwenden von Proposition 1.3.1

$$f(0, 0, 1) = \gamma_0 \mathbb{E}_0^0 \left[ \sum_{T \in \mathcal{S}_2(0)} |\mathcal{S}_0(T)| - 9 \right] = \alpha - 9\gamma_0,$$

$$f(0, 1, 1) = \gamma_0 \mathbb{E}_0^0 \left[ \sum_{T \in \mathcal{S}_2(0)} |\mathcal{S}_0(T)| - 6 \right] = \alpha - 6\gamma_0,$$

$$f(1, 0, 1) = \gamma_1 \mathbb{E}_1^0 \left[ \sum_{T \in \mathcal{S}_2(0)} |\mathcal{S}_0(T)| - 4 \right] = \alpha - 4\gamma_1,$$

$$f(1, 1, 1) = \gamma_1 \mathbb{E}_1^0 \left[ \sum_{T \in \mathcal{S}_2(0)} |\mathcal{S}_1(T)| - 2 \right] = \alpha - 2\gamma_1,$$

$$f(0, 0, 2) = f(0, 1, 2) = f(0, 2, 1) = f(2, 0, 1) = f(2, 1, 1) = 3\gamma_0,$$

$$f(1, 0, 2) = f(1, 2, 1) = 2\gamma_1,$$

$$f(0, 0, 3) = \gamma_0,$$

$$f(1, 1, 2) = \gamma_1,$$

$$f(2, 2, 1) = \gamma_2.$$

Verwendet man  $\gamma_0 = 2\gamma_2$  und  $\gamma_1 = 3\gamma_2$ , vergleiche Theorem 10.1.6 in [44], so folgt die Formel der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik nach einer einfachen Rechnung.  $\square$



---

## Kapitel 3

# Spezielle Mosaik

---

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die in Theorem 2.1.1 und Theorem 2.1.4 hergeleiteten Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina auf das Poisson-Voronoi- und das Poisson-Delaunay-Mosaik anwendbar sind. Das Poisson-Voronoi- und das Poisson-Delaunay-Mosaik sind seitentreu und stationär, wobei die Stationarität vom zugrunde liegenden Poisson-Prozess geerbt wird, vergleiche [44, Kapitel 10].

Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, vergleiche [44, Theorem 10.2.3], können für dieses Mosaik im Fall von Zellenperkolatation auch Theorem 2.2.1 und Theorem 2.2.3 auf die Oberflächenmaße angewendet werden. Es lässt sich zeigen, dass die Oberflächenmaße die Voraussetzungen dieser Theoreme erfüllen, wobei die inneren Volumina als die geforderten oberen Schranken der Oberflächenmaße gewählt werden können.

Auch die Archimedischen Gitter sind seitentreu. Randomisiert man sie, indem man sie um einen in einer Fundamentalzelle gleichverteilten Zufallsvektor verschiebt, so erhält man stationäre Gitter, die die Voraussetzung von Theorem 2.1.1 erfüllen. Weiter werden wir zeigen, dass die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina für manche Beobachtungsfenster divergieren.

### 3.1 Das Poisson-Voronoi-Mosaik

In diesem Abschnitt bezeichne  $X := C(\eta)$  das Poisson-Voronoi-Mosaik bezüglich  $\eta$ . Zunächst zeigen wir einige Hilfsmittel, die für den anschließenden Nachweis der Voraussetzungen von Theorem 2.1.1, Theorem 2.1.4, Theorem 2.2.1 und Theorem 2.2.3 hilfreich sind. Zuletzt vergleichen wir bekannte kritische Wahrscheinlichkeiten mit markanten Punkten der mittleren Euler-Charakteristik und der asymptotischen Kovarianzstruktur der inneren Volumina.

#### 3.1.1 Hilfsmittel

Das folgende Lemma ist ein Spezialfall von Theorem 2 in [15] von Daniel Hug und Rolf Schneider und besagt, dass der Durchmesser und die inneren Volumina der typischen Poisson-Voronoi-Zelle exponentiell fallenden Tail besitzen. Man beachte dabei, dass  $C(0, \eta^0)$  nach dem Theorem von Slivnyak (1.2) dieselbe Verteilung wie die typische Zelle des Poisson-Voronoi-Mosaiks bezüglich  $\eta$  besitzt.

**Lemma 3.1.1** *Es gibt Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $i \in \{0, \dots, d\}$*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{diam}(C(0, \eta^0)) \geq n) &\leq c_1 \exp(-c_2 n), \\ \mathbb{P}(V_i(C(0, \eta^0)) \geq n) &\leq c_1 \exp(-c_2 n)\end{aligned}$$

*gilt.*

*Beweis:* Theorem 2 in [15] liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-r/k} \log \mathbb{P}(\Sigma(Z_0) \geq n) = -c.$$

Dabei sei  $\Sigma : \{K \in \mathcal{K}^d : 0 \in K\} \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges Funktional, das nicht identisch null, homogen vom Grad  $k$  und monoton bezüglich Mengeninklusion ist. Der Durchmesser und die inneren Volumina besitzen diese Eigenschaften. Weiter bezeichnet  $Z_0$  die Nullzelle des dort betrachteten Hyperebenenprozesses der Intensität  $\lambda$ . Für  $r = d$  und geeignetes  $\lambda > 0$  hat  $Z_0$  die gleiche Verteilung wie die typische Zelle eines Poisson-Voronoi-Mosaiks mit Intensität eins und es gilt  $c > 0$ .

Für  $\varepsilon \in (0, c)$  gibt es also ein  $n_0$ , sodass für alle  $n > n_0$

$$|n^{-d/k} \log \mathbb{P}(\Sigma(Z_0) \geq n) + c| \leq \varepsilon$$

gilt und daraus folgt

$$\mathbb{P}(\Sigma(Z_0) \geq n) \leq e^{(\varepsilon-c)n^{d/k}} \leq e^{(\varepsilon-c)n}$$

für  $n > n_0$ , da die inneren Volumina und der Durchmesser homogen von höchstens Grad  $d$  sind. Setzt man  $c_2 := c - \varepsilon$ , so folgt die Behauptung für genügend großes  $c_1$ .  $\square$

Insbesondere lässt sich damit zeigen, dass alle Momente des Durchmessers und der inneren Volumina der typischen Poisson-Voronoi-Zelle existieren.

**Lemma 3.1.2** *Es gilt für alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $i \in \{0, \dots, d\}$*

$$\mathbb{E}[\text{diam}(C(0, \eta^0))^m] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[V_i(C(0, \eta^0))^m] < \infty.$$

*Beweis:* Für  $m \in \mathbb{N}$  gilt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{diam}(C(0, \eta^0))^m] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}\{n \leq \text{diam}(C(0, \eta^0)) < (n+1)\} \text{diam}(C(0, \eta^0))^m \right] \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^m \mathbb{P}(\text{diam}(C(0, \eta^0)) \geq n). \end{aligned}$$

Die Konvergenz dieser Reihe ist nun eine einfache Folgerung aus Lemma 3.1.1.

Analog lässt sich zeigen, dass die Momente der inneren Volumina der typischen Poisson-Voronoi-Zelle endlich sind.  $\square$

Definiert man für eine lokal-endliche Punktmenge  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  die (*Voronoi-*)*Nachbarn* eines Punktes  $x \in \chi$  bezüglich  $\chi$  durch

$$N(x, \chi) := \{y \in \chi \setminus \{x\} : C(x, \chi) \cap C(y, \chi) \neq \emptyset\}$$

und die (*Voronoi-*)*Nachbarn zweiter Ordnung* eines Punktes  $x \in \chi$  bezüglich  $\chi$  durch

$$N_2(x, \chi) := \{z \in \chi : \exists y \in N(x, \chi) \text{ mit } z \in N(y, \chi)\},$$

so lässt sich zeigen, dass alle Momente der Nachbarzahl zweiter Ordnung des typischen Poisson-Punktes existieren. Wegen  $N(x, \chi) \subseteq N_2(x, \chi)$  existieren damit auch die Momente der Nachbarzahl des typischen Poisson-Punktes.

**Lemma 3.1.3** *Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt*

$$\mathbb{E}[|N_2(0, \eta^0)|^m] < \infty.$$

*Beweis:* Wie in Lemma 3.1.2 erhält man für  $m \in \mathbb{N}$  mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\mathbb{E}[|N_2(0, \eta^0)|^m] \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^m \mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq n), \quad (3.1)$$

das heißt, es genügt eine geeignete obere Schranke von  $\mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq n)$  zu bestimmen.

Seien nun  $|N_2(0, \eta^0)| \geq n$  und  $x_1, x_2, \dots$  eine Abzählung der Punkte aus  $\eta$ , sodass  $0 < \|x_1\| < \|x_2\| < \dots$  gilt. Dann gibt es ein  $x \in N_2(0, \eta^0)$  mit  $\|x\| \geq \|x_n\| =: t$ . Man überlegt sich leicht, dass  $x \in \eta$  genau dann Voronoi-Nachbar zweiter Ordnung von 0 bezüglich  $\eta^0$  ist, wenn es ein  $y \in \eta$  und Kugeln  $B(x)$  und  $B'(x)$  mit  $0, y \in \partial B(x)$ ,  $x, y \in \partial B'(x)$ ,  $\overset{\circ}{B}(x) \cap \eta = \emptyset$  und  $\overset{\circ}{B}'(x) \cap \eta = \emptyset$  gibt. Wegen  $\|x\| \geq t$  gilt  $\text{diam}(\tilde{B}) \geq t/2$  und  $\tilde{B} \cap B(0, t/2) \neq \emptyset$  entweder für  $\tilde{B} = B(x)$  oder  $\tilde{B} = B'(x)$ .

Wir werden nun zeigen, dass es Kugeln  $B_1, \dots, B_l \subseteq B(0, t)$  mit Durchmesser  $t/8$  gibt, sodass jede Kugel  $\tilde{B}$  mit Durchmesser mindestens  $t/2$  und  $\tilde{B} \cap B(0, t/2) \neq \emptyset$  mindestens eine dieser Kugeln enthält. Die Zahl  $l$  kann dabei unabhängig von  $t$  gewählt werden, wie man mit einem Saklierungsargument leicht sieht. Seien  $B_1, \dots, B_l \subseteq B(0, t)$  eine maximale Anzahl disjunkter Kugeln mit Durchmesser  $t/8$ , das heißt, es kann keine weitere Kugel mit Durchmesser  $t/8$  in  $B(0, t)$  gelegt werden, die disjunkt zu  $B_1, \dots, B_l$  ist. Da jede Kugel mit Durchmesser mindestens  $t/2$ , die  $B(0, t/2)$  schneidet, eine Kugel mit Durchmesser genau  $t/2$  enthält, die  $B(0, t/2)$  schneidet, genügt es nun zu zeigen, dass jede Kugel  $\tilde{B}$  mit Durchmesser genau  $t/2$ , die  $B(0, t/2)$  schneidet, eine der Kugeln  $B_1, \dots, B_l$  enthält. Also gilt  $\tilde{B} = B(x, t/4)$  mit  $x \in B(0, 3t/4)$ . Weiter hat die Kugel  $B(x, t/16)$  Durchmesser  $t/8$  und ist in  $B(0, t) \cap \tilde{B}$  enthalten. Da  $l$  maximal ist, gibt es eine Kugel  $\bar{B} \in \{B_1, \dots, B_l\}$ , die  $B(x, t/16)$  schneidet, und für diese Kugel gilt  $\bar{B} \subseteq \tilde{B}$ .

Aus  $|N_2(0, \eta^0)| \geq n$  folgt also  $\eta(B_i) = 0$  für mindestens ein  $i \in \{1, \dots, l\}$ . Wegen der Binomialeigenschaft des Poisson-Prozesses gilt

$$\mathbb{P}(\eta(B_1) = 0 \mid \|x_n\| = t) = \left(1 - \frac{\kappa_d (t/16)^d}{\kappa_d t^d}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{16^d}\right)^{n-1}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der Kugeln  $B_i$  keinen Punkt aus  $\eta$  enthält, ist also maximal  $l(1 - 1/16^d)^{n-1}$ . Bezeichnet man die Dichte von  $\|x_n\|$  mit  $f_n$ , so ergibt sich

$$\mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq n) = \int \mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq n \mid \|x_n\| = t) f_n(t) dt \leq l \left(1 - \frac{1}{16^d}\right)^{n-1}. \quad (3.2)$$

Zusammen mit (3.1) folgt für die Momente der typischen Nachbarzahl zweiter Ordnung

$$\mathbb{E}[|N_2(0, \eta^0)|^m] \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^m l(1 - 1/16^d)^{n-1}$$

und diese Reihe konvergiert. □

Mit diesen Lemmata lässt sich nun zeigen, dass die Intensitäten  $\gamma_k$  der  $k$ -Seitenprozesse des Poisson-Voronoi-Mosaiks endlich und die Palmschen Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathbb{P}_k^0$  somit wohldefiniert sind.

**Lemma 3.1.4** *Im Poisson-Voronoi-Mosaik gilt  $\gamma_k < \infty$  für  $k \in \{0, \dots, d\}$ .*

*Beweis:* Da der Steiner-Punkt eines konvexen Körpers  $K$  im relativen Inneren von  $K$  enthalten ist, gilt nach Definition von  $\gamma_k$

$$\gamma_k \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_k} \mathbf{1}\{S \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{C \in X} \mathbf{1}\{C \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\} |\mathcal{F}_k(C)| \right].$$

Mit dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1), dem Theorem von Slivnyak (1.2) und der Translationskovarianz von  $C(\cdot, \cdot)$  und  $\mathcal{F}_k(\cdot)$  folgt

$$\begin{aligned} \gamma_k &\leq \gamma \mathbb{E}[\lambda_d([0, 1]^d - C(0, \eta^0)) |\mathcal{F}_k(C(0, \eta^0))|] \\ &\leq \gamma \mathbb{E}[\lambda_d(B(0, \sqrt{d}) + C(0, \eta^0)) |\mathcal{F}_k(C(0, \eta^0))|]. \end{aligned}$$

Da das Voronoi-Mosaik bezüglich  $\eta^0$  fast sicher normal ist und die Anzahl der  $k$ -Seiten einer Zelle wegen der Normalität gegen die  $(d - k)$ -te Potenz der Nachbarzahl abgeschätzt werden kann, folgt die Endlichkeit dieses Ausdrucks nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3.  $\square$

Wir definieren für eine lokal-endliche Punktmenge  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  den *Umkugelradius zweiter Ordnung* eines Punktes  $x \in \chi$  durch

$$R_2(x, \chi) := R \left( \bigcup_{y \in N(x, \chi) \cup \{x\}} C(y, \chi) \right),$$

wobei  $R(\cdot)$  wie bisher den Umkugelradius bezeichnet. Somit enthält  $B(x, 2R_2(x, \chi))$  die Voronoi-Zelle von  $x$  und aller Nachbarn von  $x$ . Für einen Poisson-Prozess existieren die Momente des Umkugelradius zweiter Ordnung des typischen Punktes, wie das folgende Lemma besagt.

**Lemma 3.1.5** *Es gilt für  $m \in \mathbb{N}$*

$$\mathbb{E}[R_2(0, \eta^0)^m] < \infty.$$

*Beweis:* Für  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$(a + b)^m \leq (2 \max(a, b))^m \leq 2^m(a^m + b^m), \quad a, b \geq 0,$$

und damit folgt für den Umkugelradius zweiter Ordnung des typischen Poisson-Punktes

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_2(0, \eta^0)^m] &\leq \mathbb{E} \left[ \left( \text{diam}(C(0, \eta^0)) + \max_{y \in N(0, \eta^0)} \text{diam}(C(y, \eta^0)) \right)^m \right] \\ &\leq 2^m \left( \mathbb{E}[\text{diam}(C(0, \eta^0))^m] + \mathbb{E} \left[ \max_{y \in N(0, \eta^0)} \text{diam}(C(y, \eta^0))^m \right] \right). \end{aligned}$$

Mit Proposition 1.3.2 erhält man nun

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\text{diam}(C(0, \eta^0))^m] + \mathbb{E} \left[ \max_{y \in N(0, \eta^0)} \text{diam}(C(y, \eta^0))^m \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} \text{diam}(C(y, \eta^0))^m \right] = \mathbb{E}_d^0 \left[ \sum_{S \in \tilde{\mathcal{S}}_d(0)} \text{diam}(S)^m \right] \\ &= \mathbb{E}_d^0[|\tilde{\mathcal{S}}_d(0)| \text{diam}(S(0))^m] = \mathbb{E}[ (|N(0, \eta^0)| + 1) \text{diam}(C(0, \eta^0))^m ]. \end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck nach Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung wegen Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3 endlich ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Für eine lokal-endliche Punktmenge  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  definieren wir die *Voronoi-Flower* eines Punktes  $x \in \chi$  bezüglich  $\chi$  durch

$$F(x, \chi) := \bigcup_{y \in C(x, \chi)} B(y, \|x - y\|). \quad (3.3)$$

Wegen des nächsten Lemmas stellt die Voronoi-Flower ein wichtiges Hilfsmittel bei der Berechnung der asymptotischen Varianzen im Poisson-Voronoi- und Poisson-Delaunay-Mosaik dar.

**Lemma 3.1.6** *Seien  $\chi, \tilde{\chi} \subseteq \mathbb{R}^d$  lokal-endliche Punktmenge und  $x \in \chi$ . Stimmen  $\chi$  und  $\tilde{\chi}$  auf  $F(x, \chi)$  überein, so gilt*

$$C(x, \chi) = C(x, \tilde{\chi}) \quad \text{und} \quad F(x, \chi) = F(x, \tilde{\chi}).$$

Weiter ist  $x$  der einzige Punkt aus  $\chi$  im Inneren von  $F(x, \chi)$  und die Punkte aus  $\chi$  auf dem Rand von  $F(x, \chi)$  sind genau die Nachbarn von  $x$ .

*Beweis:* Da nach Definition der Voronoi-Flower  $C(x, \chi) \subseteq F(x, \chi)$  gilt und  $x$  im Inneren von  $C(x, \chi)$  enthalten ist, folgt  $x \in \text{int}(F(x, \chi))$ . Sei nun  $y \in (\chi \setminus \{x\}) \cap F(x, \chi)$ . Liegt  $y$  im Inneren von  $F(x, \chi)$ , so gibt es ein  $z \in C(x, \chi)$  mit  $\|y - z\| < \|x - z\|$  und dies ist ein Widerspruch zu  $z \in C(x, \chi)$ . Liegt  $y$  auf dem Rand von  $F(x, \chi)$ , so gibt es ein  $z \in C(x, \chi)$  mit  $y \in \partial B(z, \|x - z\|)$ . Somit liegt  $z$  auch in  $C(y, \chi)$  und  $x$  und  $y$  sind Nachbarn. Ist umgekehrt  $y$  ein Nachbar von  $x$ , so gibt es ein  $z \in C(x, \chi) \cap C(y, \chi)$  mit  $\|x - z\| = \|y - z\|$ . Damit gilt  $y \in B(x, \|x - z\|) \subseteq F(x, \chi)$ . Da  $y$  nicht im Inneren von  $F(x, \chi)$  liegen kann, liegt  $y$  auf dem Rand.

Nun zeigen wir, dass das Hinzufügen einer lokal-endlichen Menge  $\nu \subseteq \mathbb{R}^d \setminus F(x, \chi)$  zu  $\chi$  die Zelle  $C(x, \chi)$  nicht verändert. Dazu nehmen wir  $C(x, \chi) \neq C(x, \chi \cup \nu)$  an. Da die Zelle von  $x$  durch das Hinzufügen von  $\nu$  zu  $\chi$  nicht größer werden kann, folgt also  $C(x, \chi \cup \nu) \subsetneq C(x, \chi)$ , das heißt, es gibt ein  $y \in \nu$  und ein  $z \in C(x, \chi)$  mit  $\|y - z\| < \|x - z\|$ . Dann liegt  $y$  aber in der Kugel um  $z$  durch  $x$  und somit in  $F(x, \chi)$ .

Auch das Entfernen von Punkten aus  $\chi$  außerhalb von  $F(x, \chi)$  verändert die Zelle  $C(x, \chi)$  nicht, denn  $C(x, \chi)$  kann nur durch das Entfernen der Nachbarn vergrößert werden und diese liegen auf dem Rand von  $F(x, \chi)$ , also insbesondere in  $F(x, \chi)$ .

Da die Voronoi-Flower von  $x$  nach Definition aus der zugehörigen Voronoi-Zelle konstruiert werden kann, folgt  $F(x, \chi) = F(x, \tilde{\chi})$ .  $\square$

Die Voronoi-Flower wird also durch die in ihr enthaltenen Punkte bestimmt. Mengen mit solchen Eigenschaften bezeichnet man auch als *Stoppmengen*, vergleiche [54].

Das nächste Lemma besagt, dass für die Konstruktion der Voronoi-Flower nur Kugeln um die Zellenecken berücksichtigt werden müssen.

**Lemma 3.1.7** *Sei  $P \in \mathcal{P}^d$  ein Polytop mit  $0 \in \text{int}(P)$  und  $y_1, \dots, y_n$  bezeichne die Ecken von  $P$ . Dann gilt*

$$\bigcup_{x \in P} B(x, \|x\|) = \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \|y_i\|).$$

*Beweis:* Da die Ecken von  $P$  insbesondere in  $P$  liegen, bleibt nur zu zeigen, dass die linke Seite eine Teilmenge der rechten ist. Seien also  $x \in P$  und  $z \in B(x, \|x\|)$ .

Es ist zu zeigen, dass es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $z \in B(y_i, \|y_i\|)$  gibt. Nehme dazu an, dass  $\|z - y_i\| > \|y_i\|$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt. Dies ist wegen  $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$  und

der Bilinearität des Skalarprodukts äquivalent zu  $2\langle z, y_i \rangle < \langle z, z \rangle$  für  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Da  $P$  die konvexe Hülle seiner Ecken ist, gibt es  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  und  $x = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$  und es folgt mit der Annahme

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \langle z, z \rangle - 2\langle z, x \rangle + \langle x, x \rangle = \langle z, z \rangle - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle z, y_i \rangle + \langle x, x \rangle \\ &> \langle z, z \rangle - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle z, z \rangle + \langle x, x \rangle = \|x\|^2, \end{aligned}$$

was ein Widerspruch zu der Wahl von  $z$  ist.  $\square$

### 3.1.2 Asymptotische Erwartungswerte

Mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln lässt sich nun leicht zeigen, dass die Voraussetzungen aus Theorem 2.1.1 für die Existenz der mittleren inneren Volumina bei  $(m, n)$ -Perkolation auf dem Poisson-Voronoi-Mosaik bezüglich  $\eta$  erfüllt sind. Damit kann man außerdem nachweisen, dass die asymptotischen Erwartungswerte der Oberflächenmaße bei Zellenperkolation existieren und Gleichung (2.27) genügen.

**Theorem 3.1.8** *Im Poisson-Voronoi-Mosaik ist die Voraussetzung (2.10) erfüllt.*

*Beweis:* Für  $i, k \in \{0, \dots, d\}$  folgt aus der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks und Proposition 1.3.1

$$\begin{aligned} &(d - k + 1) \mathbb{E}_k^0 \left[ \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0))^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_k^0 \left[ \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0))^2 \sum_{S \in \mathcal{S}_d(0)} V_0(S) \right] \\ &= \frac{\gamma_d}{\gamma_k} \mathbb{E}_d^0 \left[ \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S)^2 \right]. \end{aligned}$$

Da die inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  monoton sind und die Anzahl der  $k$ -Seiten einer Zelle wegen der Normalität durch die  $(d - k)$ -te Potenz der Nachbarzahl beschränkt ist, folgt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_k^0 \left[ \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0))^2 \right] \\ &\leq \frac{\gamma_d}{\gamma_k(d - k + 1)} \mathbb{E}_d^0 \left[ |\mathcal{S}_k(0)| \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0))^2 \right] \\ &\leq \frac{\gamma_d}{\gamma_k(d - k + 1)} \mathbb{E}[|N(0, \eta^0)|^{d-k} ((k + 1) |N(0, \eta^0)|^d)^{k-1} V_i(C(0, \eta^0))^2]. \end{aligned}$$

Verwendet man nun die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, so folgt die Endlichkeit wegen  $|N(0, \eta^0)| \leq |N_2(0, \eta^0)|$  aus Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3.  $\square$

Mit Theorem 3.1.8 folgt nun, dass die Oberflächenmaße die Voraussetzung von Theorem 2.2.1 erfüllen.

**Korollar 3.1.9** *Seien  $i \in \{0, \dots, d\}$  und  $U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ . Dann existiert bei Zellenperkolation auf dem Poisson-Voronoi-Mosaik der Grenzwert (2.25) für  $\varphi = \Psi_i(\cdot, U)$  und es gilt Gleichung (2.27).*

*Beweis:* Setzt man  $\tilde{\varphi} := V_i$ , so folgt (2.26) mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus (2.11), was eine direkte Konsequenz von dem in Theorem 3.1.8 gezeigten (2.10) ist. Die Behauptung folgt nun mit Theorem 2.2.1.  $\square$

### 3.1.3 Asymptotische Kovarianzstruktur

Hier zeigen wir, dass die in dem vorherigen Kapitel berechneten Formeln für die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina bei  $(m, n)$ -Perkolation auf das Poisson-Voronoi-Mosaik angewendet werden können. Insbesondere sind die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  vom Beobachtungsfenster  $W$  unabhängig und wir können eine explizite Darstellung angeben, deren Form für asymptotische Varianzen stabilisierender Funktionale eines Poisson-Prozesses typisch ist, vergleiche [37, (2.13) und (2.14)]. Für  $i = j = k = l = d - 1$  und  $p = 1$  wurde die asymptotische Kovarianz  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  schon in [37] behandelt.

Außerdem zeigen wir in Theorem 3.1.11, dass die Oberflächenmaße die Voraussetzungen von Theorem 2.2.3 erfüllen. Somit existieren deren asymptotischen Kovarianzen bei Zellenperkolation und sie genügen der Formel in Theorem 2.2.3. Die (2.32) entsprechenden asymptotischen Kovarianzen sind wieder unabhängig von  $W$  und es kann eine explizite Darstellung angegeben werden.

Zunächst betrachten wir  $(m, n)$ -Perkolation für festes  $m, n \in \{0, \dots, d\}$  mit  $m \leq n$  und definieren dazu abkürzend

$$\begin{aligned} V_i^{(k)}(x, p) &:= \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, C(\eta^x))} V_i(S) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p), \\ V_i^{(k)}(x, y, p) &:= \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, C(\eta^{x,y}))} V_i(S) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p) \end{aligned}$$

für  $i, k \in \{0, \dots, d\}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$  und  $p \in [0, 1]$ .

**Theorem 3.1.10** *Im Poisson-Voronoi-Mosaik sind die Voraussetzungen (2.18), (2.20) und (2.21) erfüllt. Weiter existieren die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  für alle  $i, j, k, l \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$  und es gilt*

$$\begin{aligned} (d - k + 1)(d - l + 1)\rho_{i,j}^{k,l}(p) &= \gamma \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)V_j^{(l)}(0, p)] \\ &+ \gamma^2 \int \mathbb{E}[V_i^{(k)}(x, 0, p)V_j^{(l)}(0, x, p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)]\mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] dx. \end{aligned}$$

*Beweis:* Zunächst zeigen wir die Voraussetzung (2.18). Wegen des verfeinerten Theorems von Campbell (1.1) und der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks, erhält man

für  $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$

$$\begin{aligned}
& \gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_m} \left( \sum_{T \in \mathcal{S}_k(S)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(T)| \right)^{k-1} V_i(T) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(S)) \mathbf{1}\{s(S) \in [0, 1]^d\} \right] \\
&= \frac{1}{d-m+1} \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_m(x)} \left( \sum_{T \in \mathcal{S}_k(S)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(T)| \right)^{k-1} V_i(T) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. \times V_j(\mathcal{S}_d(S)) \mathbf{1}\{s(S) \in [0, 1]^d\} \right].
\end{aligned}$$

Da  $\mathcal{S}_l(\cdot)$  translationskovariant ist und die inneren Volumina translationsinvariant, folgt mit dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1) und dem Theorem von Slivnyak (1.2)

$$\begin{aligned}
& \gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] \\
&= \frac{\gamma}{d-m+1} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in \mathcal{S}_m(0, C(\eta^0))} \left( \sum_{T \in \mathcal{S}_k(S, C(\eta^0))} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(T, C(\eta^0))| \right)^{k-1} V_i(T) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. \times V_j(\mathcal{S}_d(S, C(\eta^0))) \right].
\end{aligned}$$

Aus der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks folgt  $|\mathcal{S}_m(0, C(\eta^0))| \leq |N(0, \eta^0)|^{d-m}$ . Ist  $S \in \mathcal{S}_m(0, C(\eta^0))$ , so liegt jedes  $T \in \mathcal{S}_k(S, C(\eta^0))$  nur in Nachbarzellen des Ursprungs, weshalb  $T \subseteq B(0, 2R_2(0, \eta^0))$  folgt und mit der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks  $|\mathcal{S}_k(S, C(\eta^0))| \leq |N(0, \eta^0)|^{d-k+1}$ . Weiter gilt wegen der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks  $|\mathcal{S}_l(T, C(\eta^0))| \leq |N_2(0, \eta^0)|^{d-l+1}$  für  $l \in \{0, \dots, k\}$ , da jedes  $T \in \mathcal{S}_k(S, C(\eta^0))$  nur Nachbarzellen zweiter Ordnung des Ursprungs schneidet. Für  $S \in \mathcal{S}_m(0, C(\eta^0))$  gilt  $C \subseteq B(0, 2R_2(0, \eta^0))$  für  $C \in \mathcal{S}_d(S, C(\eta^0))$  und wegen der Normalität  $|\mathcal{S}_d(S, C(\eta^0))| = d-m+1$ . Zusammen mit der Translationsinvarianz und der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  folgt aus diesen Überlegungen

$$\begin{aligned}
& \gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] \\
&\leq \gamma \mathbb{E} \left[ |N(0, \eta^0)|^{d-m} |N(0, \eta^0)|^{2(d-k+1)} ((k+1) |N_2(0, \eta^0)|^{d+1})^{2(k-1)} \right. \\
&\quad \left. \times V_i(B(0, 2R_2(0, \eta^0)))^2 V_j(B(0, 2R_2(0, \eta^0))) \right].
\end{aligned}$$

Die Endlichkeit folgt nun wegen  $|N(\cdot, \cdot)| \leq |N_2(\cdot, \cdot)|$  nach Anwenden der Hölder-Ungleichung aus der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5.

Nun zeigen wir die Voraussetzung (2.20). Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, gilt für  $i, k \in \{0, \dots, d\}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  und  $t \geq 1$

$$\sum_{S \in X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) = \frac{1}{d-k+1} \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t)$$

und (2.20) ist somit äquivalent zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right)} = 0. \quad (3.4)$$

Definiert man für festes  $i, k \in \{0, \dots, d\}$  abkürzend

$$h_r(\chi, B) := \sum_{x \in \chi} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, C(\chi)) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap B)$$

für  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\chi \in \mathbf{N}$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , so erhält man mit der Poincaré-Ungleichung, vergleiche [53, Remark 1.4] und [26, (1.8)],

$$\frac{1}{t} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t)) \leq \frac{\gamma}{t} \mathbb{E} \left[ \int (h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t))^2 dx \right]. \quad (3.5)$$

Nun werden wir eine obere Schranke für  $|h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)|$  finden. Man beachte, dass sowohl das Voronoi-Mosaik bezüglich  $\eta$  als auch das bezüglich  $\eta^x$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  fast sicher normal ist. Ist  $\chi \in \mathbf{N}$ , sodass das Voronoi-Mosaik bezüglich  $\chi$  normal ist, so ist jede  $k$ -Seite für  $k \leq m$  wegen der Normalität in  $\binom{d-k+1}{m-k}$   $m$ -Seiten enthalten und deshalb gilt für  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$h_r(\chi, B) = h_r(\chi, B) \mathbf{1} \left\{ r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\}.$$

Für  $k > m$  impliziert die Normalität des Voronoi-Mosaiks bezüglich  $\chi$ , dass jede  $m$ -Seite von  $S \in \mathcal{S}_k(x, C(\chi))$  für  $x \in \chi$  in  $C(x, \chi)$  und  $d-m$  Nachbarzellen von  $x$  enthalten ist. Gilt nun  $|\mathcal{S}_m(S, C(\chi))| = r$ , so muss es mindestens  $r$  Möglichkeiten geben  $d-m$  Zellen aus den Nachbarzellen von  $x$  zu wählen und dies impliziert  $|N(x, \chi)| \geq r^{1/(d-m)}$ . Da das Hinzufügen eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^d$  zu  $\eta$  nur die Zellen der Punkte  $y \in \eta$  verändert, die Nachbarn von  $x$  bezüglich  $\eta^x$  sind, folgt mit diesen Überlegungen

$$\begin{aligned} & |h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)| \\ &= \left| \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, C(\eta^x)) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right. \\ &\quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\} + \mathbf{1} \left\{ k > m, |N(x, \eta^x)| \geq r^{1/(d-m)} \right\} \right) \\ &\quad + \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, C(\eta^x)) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \\ &\quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\} + \mathbf{1} \left\{ k > m, |N(y, \eta^x)| \geq r^{1/(d-m)} \right\} \right) \\ &\quad - \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, C(\eta)) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \\ &\quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\} + \mathbf{1} \left\{ k > m, |N(y, \eta)| \geq r^{1/(d-m)} \right\} \right) \Big|. \end{aligned}$$

Wegen  $V_i(\emptyset) = 0$  kann  $|h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)|$  nur dann positiv sein, wenn

$$\bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} C(y, \eta^x) \cap \partial W_t \neq \emptyset$$

gilt, und es folgt mit (2.14) und  $\max(|N(x, \eta^x)|, |N(y, \eta^x)|, |N(y, \eta)|) \leq |N_2(x, \eta^x)|$  für  $y \in N(x, \eta^x)$

$$\begin{aligned} & |h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)| \\ & \leq \mathbf{1} \left\{ \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} C(y, \eta^x) \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} f(x, \eta^x) \\ & \quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\} + \mathbf{1} \{k > m, |N_2(x, \eta^x)| \geq r^{1/(d-m)}\} \right), \end{aligned}$$

wobei für  $x \in \chi \in \mathbf{N}$  und festes  $i, k \in \{0, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} f(x, \chi) := & 2 \left[ \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, C(\chi))} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right. \\ & + \sum_{y \in N(x, \chi)} \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, C(\chi))} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right. \\ & \left. \left. + \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, C(\chi \setminus \{x\}))} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right) \right] \end{aligned}$$

gesetzt wurde. Man beachte, dass wegen der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks, der Homogenität und der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$ , Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5 alle Momente von  $f(0, \eta^0)$  existieren. Verwendet man die Translationskovarianz von  $C(\cdot, \cdot)$  und  $\mathcal{S}_k(\cdot, \cdot)$ , die Stationarität von  $\eta$ , die Translationsinvarianz der inneren Volumina und der Anzahl der Nachbarn zweiter Ordnung und den Satz von Fubini, so folgt mit (3.5)

$$\begin{aligned} & t^{-1} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t)) \\ & \leq \frac{\gamma}{t} \mathbb{E} \int \mathbf{1} \left\{ \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} C(y, \eta^x) \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} f(x, \eta^x)^2 \\ & \quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\} + \mathbf{1} \{k > m, |N_2(x, \eta^x)| \geq r^{1/(d-m)}\} \right) dx \\ & = \frac{\gamma}{t} \mathbb{E} \int \mathbf{1} \left\{ \left( \bigcup_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} C(y, \eta^0) + x \right) \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} f(0, \eta^0)^2 \\ & \quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\} + \mathbf{1} \{k > m, |N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/(d-m)}\} \right) dx \\ & = \mathbf{1} \left\{ k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k} \right\} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} C(y, \eta^0) \right) f(0, \eta^0)^2 \right] \\ & \quad + \mathbf{1} \{k > m\} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} C(y, \eta^0) \right) f(0, \eta^0)^2 \right. \\ & \quad \left. \times \mathbf{1} \{|N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/(d-m)}\} \right]. \end{aligned}$$

Wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf den zweiten Summanden an, so

erhält man

$$\begin{aligned}
 & t^{-1} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t)) \\
 & \leq \mathbf{1}\left\{k \leq m, r = \binom{d-k+1}{m-k}\right\} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} C(y, \eta^0) \right) f(0, \eta^0)^2 \right] \\
 & \quad + \mathbf{1}\{k > m\} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} C(y, \eta^0) \right)^2 f(0, \eta^0)^4 \right]^{1/2} \\
 & \quad \times \mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/(d-m)})^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Die Erwartungswerte in beiden Summanden konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  gegen null nach dem Satz von der dominierten Konvergenz, wobei

$$\sum_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} \lambda_d(W + C(y, \eta^0)) f(0, \eta^0)^2$$

bzw. das Quadrat hiervon für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majoranten folgt wegen  $\bigcup_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} C(y, \eta^0) \subseteq B(0, 2R_2(0, \eta^0))$  nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Hölder-Ungleichung aus Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5, da alle Momente von  $f(0, \eta^0)$  existieren. Damit erhalten wir für  $k \leq m$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{t^{-1} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^{-1} \text{Var}(h_{\binom{d-k+1}{m-k}}(\eta, \partial W_t))} = 0$$

und für  $k > m$

$$\begin{aligned}
 0 & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{t^{-1} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t))} \\
 & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{y \in N(0, \eta^0) \cup \{0\}} C(y, \eta^0) \right)^2 f(0, \eta^0)^4 \right]^{1/4} \\
 & \quad \times \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/(d-n)})^{1/4} = 0,
 \end{aligned}$$

denn die Reihe konvergiert wegen des exponentiellen Abfallens der Nachbarzahl zweiter Ordnung des typischen Punktes, vergleiche (3.2). Somit ist (2.20) gezeigt und die Voraussetzung (2.21) lässt sich analog zeigen.

Zuletzt ist noch nachzuweisen, dass die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  für  $i, j, k, l \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$  existieren. Dabei gehen wir in zwei Schritten vor. Im ersten Schritt berechnen wir eine asymptotische Kovarianz, die ähnlich zu  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  ist, das heißt, wir werden zeigen, dass

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \int V_i^{(k)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx), \int V_j^{(l)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right) \\
 & = \gamma \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p) V_j^{(l)}(0, p)] \\
 & \quad + \gamma^2 \int \mathbb{E}[V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] dx
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

gilt und diese asymptotische Kovarianz endlich ist. Im zweiten Schritt werden wir zeigen, dass die asymptotische Kovarianz in (3.6) (bis auf eine Konstante) gleich  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  ist, also

$$\begin{aligned} & (d-k+1)(d-l+1)\rho_{i,j}^{k,l}(p) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \int V_i^{(k)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx), \int V_j^{(l)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mit der Mecke-Formel, vergleiche [44, Corollary 3.2.3], erhält man

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left( \int V_i^{(k)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx), \int V_j^{(l)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right) \\ &= \mathbb{E} \left[ \int V_i^{(k)}(x,p) V_j^{(l)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \iint V_i^{(k)}(x,p) V_j^{(l)}(y,p) \mathbf{1}\{x \neq y\} \mathbf{1}\{x,y \in W_t\} \eta(dx) \eta(dy) \right] \\ &- \mathbb{E} \left[ \int V_i^{(k)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right] \mathbb{E} \left[ \int V_j^{(l)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right] \\ &= \gamma \int \mathbb{E}[V_i^{(k)}(x,p) V_j^{(l)}(x,p)] \mathbf{1}\{x \in W_t\} dx \\ &+ \gamma^2 \iint (\mathbb{E}[V_i^{(k)}(x,y,p) V_j^{(l)}(y,x,p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(x,p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(y,p)]) \\ &\quad \times \mathbf{1}\{x,y \in W_t\} dx dy. \end{aligned}$$

Aus der Translationskovarianz von  $\mathcal{S}_k(\cdot, \cdot)$ , der Translationsinvarianz der inneren Volumina, der Stationarität von  $\eta$ , einer Variablensubstitution und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \int V_i^{(k)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx), \int V_j^{(l)}(x,p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right) \\ &= \gamma \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0,p) V_j^{(l)}(0,p)] \\ &+ \frac{\gamma^2}{t} \iint (\mathbb{E}[V_i^{(k)}(x,0,p) V_j^{(l)}(0,x,p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0,p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0,p)]) \\ &\quad \times \mathbf{1}\{x+y, y \in W_t\} dx dy \\ &= \gamma \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0,p) V_j^{(l)}(0,p)] \\ &+ \gamma^2 \int (\mathbb{E}[V_i^{(k)}(x,0,p) V_j^{(l)}(0,x,p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0,p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0,p)]) \\ &\quad \times \frac{\lambda_d(W_t \cap (W_t - x))}{t} dx. \end{aligned}$$

Dies konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz für  $t \rightarrow \infty$  gegen die rechte Seite von (3.6), wobei

$$|\mathbb{E}[V_i^{(k)}(x,0,p) V_j^{(l)}(0,x,p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0,p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0,p)]| \quad (3.8)$$

wegen  $\lambda_d(W_t \cap (W_t - x))/t \leq 1$  eine Majorante ist, deren Integrierbarkeit wir im Folgenden zeigen werden.

Man erinnere sich an die Definition (3.3) der Voronoi-Flower und setze

$$I_1 := \int \left| \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(x, \eta^{0,x}) \subseteq B \left( x, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(x, 0, p) \right. \right. \\ \left. \left. \times \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^{0,x}) \subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_j^{(l)}(0, x, p) \right] \right. \\ \left. - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] \right| dx$$

und

$$I_2 := \int \left| \mathbb{E} \left[ \left( \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^{0,x}) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} + \mathbf{1} \left\{ F(x, \eta^{0,x}) \not\subseteq B \left( x, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^{0,x}) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right), F(x, \eta^{0,x}) \not\subseteq B \left( x, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \times V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p) \right] \right| dx. \quad (3.9)$$

Mit diesen Definitionen erhält man für die Majorante in (3.8) mit der Dreiecksungleichung

$$\int \left| \mathbb{E}[V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] \right| dx \leq I_1 + I_2. \quad (3.10)$$

Um zu zeigen, dass die rechte Seite von (3.10) endlich ist, benötigen wir für  $x \neq 0$

$$\mathbf{1} \left\{ F(x, \eta^{0,x}) \subseteq B \left( x, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} = \mathbf{1} \left\{ F(x, \eta^x) \subseteq B \left( x, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\}, \quad (3.11)$$

das sich wie folgt nachweisen lässt. Im Fall  $F(x, \eta^{0,x}) \subseteq B(x, \|x\|/3)$  kann der Ursprung nicht in  $F(x, \eta^{0,x})$  liegen und mit Lemma 3.1.6 gilt  $F(x, \eta^x) = F(x, \eta^{0,x}) \subseteq B(x, \|x\|/3)$ . Im Fall  $F(x, \eta^{0,x}) \not\subseteq B(x, \|x\|/3)$  gilt auch  $F(x, \eta^x) \not\subseteq B(x, \|x\|/3)$ , denn die Voronoi-Flower kann durch das Entfernen eines Punktes aus dem Punktprozess nicht kleiner werden.

Nun zeigen wir, dass  $I_1$  endlich ist, und verwenden dazu die Stoppmengeneigenschaft der Voronoi-Flower  $F(x, \eta^x)$  und der Voronoi-Flower  $F(0, \eta^0)$ , vergleiche [54] und Lemma 3.1.6. Da die Voronoi-Zelle und die zugehörige Voronoi-Flower nach Lemma 3.1.6 durch die Einschränkung des Punktprozesses auf die Voronoi-Flower bestimmt sind, sind auch die Zufallsvariablen

$$\mathbf{1} \left\{ F(x, \eta^x) \subseteq B \left( x, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(x, 0, p), \quad \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_j^{(l)}(0, x, p)$$

durch die Einschränkung von  $\eta$  auf  $B(x, \|x\|/3)$  bzw.  $B(0, \|x\|/3)$  bestimmt. Verwendet man nun (3.11), ein analoges Resultat für die Voronoi-Flower des Ursprungs, die Disjunktheit von  $B(x, \|x\|/3)$  und  $B(0, \|x\|/3)$  und die Tatsache, dass Einschränkungen eines Poisson-Prozesses auf disjunkte Mengen unabhängig sind, so folgt

$$I_1 = \int \left| \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(x, \eta^x) \subseteq B \left( x, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(x, p) \right] \right. \\ \left. \times \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_j^{(l)}(0, p) \right] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] \right| dx.$$

Also folgt mit der Stationarität von  $\eta$ , der Translationskovarianz von  $\mathcal{S}_k(\cdot, \cdot)$  und der Translationsinvarianz der inneren Volumina

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \left| \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(0, p) \right] \right. \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_j^{(l)}(0, p) \right] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] \left. \right| dx \\
&= \int \left| \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(0, p) \right] \right. \\
&\quad \times \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_j^{(l)}(0, p) \right] \\
&\quad - \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(0, p) \right] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] \\
&\quad \left. - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_j^{(l)}(0, p) \right] \right| dx.
\end{aligned}$$

Nach Anwenden der Dreiecksungleichung ist der erste Summand auf der rechten Seite kleiner als der zweite und der dritte, die sich nur durch ihre Parameter unterscheiden. Somit genügt es die Endlichkeit des zweiten Summanden zu zeigen. Da nach Definition der Voronoi-Flower  $F(0, \eta^0) \subseteq B(0, 2 \operatorname{diam}(C(0, \eta^0)))$  gilt, folgt mit der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks, der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  und der Abschätzung  $|f_{m,n}^{k,r}(p)| \leq 1$

$$\begin{aligned}
&\int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(0, p) \right] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] dx \\
&\leq \int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ 2 \operatorname{diam}(C(0, \eta^0)) > \frac{\|x\|}{3} \right\} |N(0, \eta^0)|^{d-k} V_i(C(0, \eta^0)) \right] \\
&\quad \times \mathbb{E}[|N(0, \eta^0)|^{d-l} V_j(C(0, \eta^0))] dx.
\end{aligned}$$

Dies ist nach Anwenden der Hölder-Ungleichung wegen Lemma 3.1.1, Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3 endlich.

Um zu zeigen, dass  $I_2 < \infty$  gilt, genügt es wieder zu zeigen, dass nach Anwenden der Dreiecksungleichung der erste Summand in (3.9) endlich ist. Wegen  $F(0, \eta^{0,x}) \subseteq B(0, 2 \operatorname{diam}(C(0, \eta^{0,x})))$ , der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks, der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  und  $|f_{m,n}^{k,r}(p)| \leq 1$  folgt

$$\begin{aligned}
&\int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^{0,x}) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p) \right] dx \\
&\leq \int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ 2 \operatorname{diam}(C(0, \eta^{0,x})) > \frac{\|x\|}{3} \right\} \right. \\
&\quad \left. \times |N(x, \eta^{0,x})|^{d-k} V_i(C(x, \eta^{0,x})) |N(0, \eta^{0,x})|^{d-l} V_j(C(0, \eta^{0,x})) \right] dx.
\end{aligned}$$

Wegen  $\operatorname{diam}(C(0, \eta^{0,x})) \leq \operatorname{diam}(C(0, \eta^0))$ ,  $|N(0, \eta^{0,x})| \leq |N(0, \eta^0)| + 1$ ,  $C(0, \eta^{0,x}) \subseteq C(0, \eta^0)$ ,  $|N(x, \eta^{0,x})| \leq |N(x, \eta^x)| + 1$ ,  $C(x, \eta^{0,x}) \subseteq C(x, \eta^x)$  und der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  ist dies nach der Hölder-Ungleichung, der Stationarität von  $\eta$ , Lemma 3.1.1, Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3 endlich. Somit ist die Majorante in (3.8) integrierbar und der zweite Summand auf der rechten Seite von (3.6) endlich.

Nun zeigen wir, dass auch der erste Summand auf der rechten Seite von (3.6) endlich ist. Verwendet man die Normalität des Mosaiks, die Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  und  $|f_{m,n}^{k,r}(p)| \leq 1$ , so erhält man

$$\mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p) V_j^{(l)}(0, p)] \leq \mathbb{E}[|N(0, \eta^0)|^{d-k} V_i(C(0, \eta^0)) |N(0, \eta^0)|^{d-l} V_j(C(0, \eta^0))].$$

Dies ist nach Anwenden der Hölder-Ungleichung wegen Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3 endlich und somit ist die rechte Seite von (3.6) endlich.

Der nächste Schritt ist nun (3.7) zu beweisen. Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, gilt

$$\sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p) = \frac{1}{d-k+1} \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x)} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p)$$

und (3.7) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \int \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x)} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p) \eta(dx), \right. \\ & \quad \left. \int \sum_{T \in \mathcal{S}_l(x)} V_j(T \cap W_t) f_{m,n}^{l, |S_m(T)|}(p) \eta(dx) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \int V_i^{(k)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx), \int V_j^{(l)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Analog zu (3.4) kann man mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \int \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x)} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p) - V_i^{(k)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right) = 0$$

zeigen. Mit Lemma 2.1.3 folgt nun (3.12) und damit die Behauptung.  $\square$

Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, kann mit Theorem 2.2.3 auch eine Formel für die asymptotischen Kovarianzen der Oberflächenmaße der schwarzen Teilmenge bei Zellenperkolatation angegeben werden. Dafür benötigt man für festes  $U_0, \dots, U_d \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  und  $U := (U_0, \dots, U_d)$  die (2.32) entsprechende Existenz der asymptotischen Kovarianzen

$$\psi_{i,j}^{k,l}(U) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_k} \Psi_i(S \cap W_t, U_i), \sum_{T \in X_l} \Psi_j(T \cap W_t, U_j) \right)$$

für  $i, j, k, l \in \{0, \dots, d\}$ , wobei das  $d$ -te Oberflächenmaß wie in (1.7) definiert ist. Im Folgenden werden wir die Abkürzung

$$\Psi_i(\mathcal{S}, U_i) := \sum_{S \in \mathcal{S}} \Psi_i(S, U_i)$$

für ein endliches System  $\mathcal{S}$  konvexer Körper verwenden.

**Theorem 3.1.11** *Seien  $i, j, k, l \in \{0, \dots, d\}$ . Dann existieren die asymptotischen Kovarianzen  $\psi_{i,j}^{k,l}(U)$  und es gilt*

$$\begin{aligned} (d-k+1)(d-l+1)\psi_{i,j}^{k,l}(U) &= \gamma \mathbb{E}[\Psi_i(\mathcal{S}_k(0, C(\eta^0)), U_i) \Psi_j(\mathcal{S}_l(0, C(\eta^0)), U_j)] \\ &\quad + \gamma^2 \int \mathbb{E}[\Psi_i(\mathcal{S}_k(x, C(\eta^{0,x})), U_i) \Psi_j(\mathcal{S}_l(0, C(\eta^{0,x})), U_j)] \\ &\quad - \mathbb{E}[\Psi_i(\mathcal{S}_k(0, C(\eta^0)), U_i)] \mathbb{E}[\Psi_j(\mathcal{S}_l(0, C(\eta^0)), U_j)] dx. \end{aligned}$$

Weiter existiert bei Zellenperkolations auf dem Poisson-Voronoi-Mosaik der Grenzwert (2.32) für  $\varphi_1 = \Psi_i(\cdot, U_i)$ ,  $\varphi_2 = \Psi_j(\cdot, U_j)$  und es gilt die Formel in Theorem 2.2.3.

*Beweis:* Wir setzen  $\tilde{\varphi}_1 := V_i$  und  $\tilde{\varphi}_2 := V_j$ . Dann folgt die Voraussetzung (2.33) nach Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus (2.19) und das ist eine schwächere Voraussetzung als (2.18), deren Gültigkeit schon in Theorem 3.1.10 gezeigt wurde. Die Existenz, Endlichkeit und Darstellungsformel von  $\psi_{i,j}^{k,l}(U)$  erhält man analog zu den Untersuchungen von  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$ . Schließlich folgt die Behauptung aus Theorem 2.2.3.  $\square$

### 3.1.4 Vergleich der Ergebnisse mit bekannten Perkolationswahrscheinlichkeiten

Da die Euler-Charakteristik das globale Verhalten von räumlichen Mustern gut beschreibt, ist zu erwarten, dass sie für das Schätzen kritischer Wahrscheinlichkeiten geeignet ist. Richard Neher, Klaus Mecke und Herbert Wagner haben schon in [34] die nicht-triviale Nullstelle der mittleren Euler-Charakteristik planarer Perkolationsmodelle als Schätzer für die kritische Wahrscheinlichkeit  $p_c$  untersucht. Durch den Vergleich mit bekannten kritischen Wahrscheinlichkeiten hat man festgestellt, dass diese Nullstelle oft nur etwas größer als  $p_c$  ist. Diesen Ansatz wollen wir nun verallgemeinern, indem wir auch Größen zweiter Ordnung und beliebige innere Volumina betrachten.

Da sich beim Perkolationsübergang die globale Struktur der schwarzen Komponenten stark verändert, liegt die Vermutung nahe, dass die asymptotische Varianz der Euler-Charakteristik nahe der kritischen Wahrscheinlichkeit ein lokales Maximum besitzt. Außerdem hat man in anderen Modellen, vergleiche [14], schon festgestellt, dass die asymptotische Kovarianz zwischen Volumen und Euler-Charakteristik nahe der kritischen Wahrscheinlichkeit ein lokales Minimum hat. Da sich die Euler-Charakteristik im planaren Fall durch die Anzahl der schwarzen Zusammenhangskomponenten minus der Anzahl ihrer weißen Löcher berechnet, lässt sich dies so erklären, dass das Anwachsen des Volumens in der Nähe der kritischen Wahrscheinlichkeit zur Folge hat, dass die Euler-Charakteristik abnimmt, denn es werden schwarze Komponenten miteinander verbunden und es entstehen mehr Löcher in den schwarzen Zusammenhangskomponenten. Es werden zwar auch Löcher schwarz gefärbt, was die Euler-Charakteristik erhöht, doch überwiegen die beiden ersten Phänomene. Auch die durch

$$\rho_{2,0}(p) := \frac{\sigma_{2,0}(p)}{\sqrt{\sigma_{2,2}(p) \sigma_{0,0}(p)}}, \quad p \in [0, 1],$$

definierte asymptotische Korrelation der Euler-Charakteristik und des Volumens kann Aufschluss über die kritische Wahrscheinlichkeit geben.

Béla Bollobás und Oliver Riordan haben im planaren Poisson-Voronoi-Mosaik gezeigt, dass die kritische Wahrscheinlichkeit bei Zellenperkolations 1/2 ist, vergleiche [5].

Da für höhere Dimensionen keine exakten kritischen Wahrscheinlichkeiten bekannt sind, konzentrieren wir uns hier auf den planaren Fall. In Theorem 2.2.5 wurde gezeigt, dass für die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina bei Zellenperkolatation auf planaren und normalen Mosaiken  $\sigma_{i,j}(p) = (-1)^{i+j}\sigma_{i,j}(1-p)$  gilt. Somit liegen bei der kritischen Wahrscheinlichkeit  $1/2$  Nullstellen, Wendestellen, lokale Maxima oder lokale Minima der asymptotischen Kovarianzen. Im Folgenden untersuchen wir die mittlere Euler-Charakteristik, die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{0,0}$ ,  $\sigma_{1,0}$  und  $\sigma_{2,0}$  und die asymptotische Korrelation  $\rho_{2,0}$  der Euler-Charakteristik und des Volumens genauer, da dies auch die Funktionen sind, mit denen man in anderen Modellen gute Näherungen für die kritische Wahrscheinlichkeit erhält.

**Proposition 3.1.12** *Für Zellenperkolatation im planaren Poisson-Voronoi-Mosaik gilt*

$$\delta_0(p) = \gamma_2 p(1-p)(1-2p)$$

und

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2}(p) &= p(1-p)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))^2], \\ \sigma_{2,0}(p) &= p(1-p) - p^2(1-p)^2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)], \\ \sigma_{1,0}(p) &= p^2(1-p)^2(1-2p)(\tau_{1,0}^{2,2} - \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)]) \\ &\quad + p(1-p)(1-2p)(1+p-p^2)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))], \\ \sigma_{0,0}(p) &= p^3(1-p)^3\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2] + \gamma_2 p(1-p)(1-8p-6p^2+28p^3-14p^4). \end{aligned}$$

Weiter liegt bei der kritischen Wahrscheinlichkeit  $1/2$  eine Nullstelle von  $\delta_0$ , ein lokales Maximum von  $\sigma_{0,0}$ , eine Wendestelle von  $\sigma_{1,0}$ , ein lokales Minimum von  $\sigma_{2,0}$  und es gilt  $\rho'_{2,0}(1/2) = 0$ .

*Beweis:* Nach Theorem 3.1.8 können wir Theorem 2.2.1 anwenden und die Formel für die mittlere Euler-Charakteristik folgt mit  $\gamma_0 = 2\gamma_2$  und  $\gamma_1 = 3\gamma_2$ , vergleiche [44, Theorem 10.1.6]. Dass bei  $1/2$  eine Nullstelle von  $\delta_0$  liegt, lässt sich direkt ablesen.

Nach Theorem 3.1.10 können wir Theorem 2.2.5 anwenden und man erhält direkt die behaupteten Formeln für  $\sigma_{2,2}$ ,  $\sigma_{2,0}$  und  $\sigma_{1,0}$ . Nach Theorem 3.1.11 gilt

$$\tau_{0,0}^{2,2} = \psi_{0,0}^{2,2}(\mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{S}^{d-1}) = \gamma$$

und mit  $\gamma_2 = \gamma$  folgt die behauptete Formel für  $\sigma_{0,0}$  ebenfalls aus Theorem 2.2.5.

Nun bestimmen wir die lokalen Extrema. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma'_{0,0}(p) &= 3p^2(1-2p)(1-2p+p^2)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2] \\ &\quad + \gamma_2(1-2p)(1-16p-26p^2+84p^3-42p^4), \\ \sigma''_{0,0}(p) &= 6p(1-6p+10p^2-5p^3)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2] + 6\gamma_2(-3+2p+68p^2-140p^3+70p^4). \end{aligned}$$

Somit erhält man  $\sigma'_{0,0}(1/2) = 0$  und  $\sigma''_{0,0}(1/2) = -\frac{3}{8}\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2] + \frac{45}{4}\gamma_2$ . Da in einem normalen und planaren Mosaik  $\mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|] = 6$  gilt, vergleiche Theorem 10.1.6 in [44], folgt mit der Jensen-Ungleichung

$$\mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2] \geq (\mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|])^2 = 36$$

und man erhält  $\sigma''_{0,0}(1/2) < 0$ , d.h. bei  $1/2$  liegt ein lokales Maximum der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik.

Für die Ableitungen von  $\sigma_{2,0}(p)$  gilt

$$\begin{aligned}\sigma'_{2,0}(p) &= (1 - 2p) - 2p(1 - p)(1 - 2p)\gamma_2\mathbb{E}_2^0[V_2(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)], \\ \sigma''_{2,0}(p) &= -2 - 2(1 - 6p + 6p^2)\gamma_2\mathbb{E}_2^0[V_2(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)].\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $\sigma'_{2,0}(1/2) = 0$  und wegen

$$\gamma_2\mathbb{E}_2^0[V_2(0) | \mathcal{S}_0(0)] \geq \gamma_2\mathbb{E}_2^0[V_2(S(0)) | 3] = 3$$

gilt  $\sigma''_{2,0}(1/2) = -2 + \gamma_2\mathbb{E}_2^0[V_2(0) | \mathcal{S}_0(0)] > 0$ , d.h. bei  $1/2$  liegt eine lokale Minimalstelle von  $\sigma_{2,0}$ .

Für die zweite Ableitung von  $\sigma_{1,0}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}\sigma''_{1,0}(p) &= (1 - 2p)(20p^2 - 20p + 2)(\tau_{1,0}^{2,2} - \gamma_2\mathbb{E}_2^0[V_1(S(0)) | \mathcal{S}_0(0)]) \\ &\quad + (1 - 2p)(20p^2 - 20p - 4)\gamma_2\mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))].\end{aligned}$$

Also gilt  $\sigma''_{1,0}(1/2) = 0$  und bei  $1/2$  liegt eine Wendestelle von  $\sigma_{1,0}$ .

Mit den in Proposition 3.1.12 gegebenen Formeln für  $\sigma_{2,2}$ ,  $\sigma_{2,0}$  und  $\sigma_{0,0}$ , lässt sich eine Formel für  $\rho_{2,0}$  angeben und mit einer einfachen Rechnung folgt

$$\rho'_{2,0}(p) = \frac{2\sigma'_{2,0}(p)\sigma_{2,2}(p)\sigma_{0,0}(p) - \sigma_{2,0}(p)\sigma'_{2,2}(p)\sigma_{0,0}(p) - \sigma_{2,0}(p)\sigma_{2,2}(p)\sigma'_{0,0}(p)}{2(\sigma_{2,2}(p)\sigma_{0,0}(p))^{3/2}}.$$

Mit den bereits gezeigten Ergebnissen erhält man  $\rho'_{2,0}(1/2) = 0$ . □

In der Arbeit [13] wurden von Lothar Heinrich und Lutz Muche Integralausdrücke für  $\mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2]$  entwickelt und numerische Integration liefert  $\mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_0(0)|^2] \approx 37,78$ . Alle weiteren Größen des planaren Poisson-Voronoi-Mosaiks, die für das Erstellen der Abbildungen 3.1 und 3.2 benötigt wurden, wurden mit dem Statistikprogramm R simuliert. An diesen Abbildungen sieht man nun leicht, dass die lokalen Maxima und Minima aus Proposition 3.1.12 sogar globale sind und bei  $1/2$  ein lokales Minimum von  $\rho_{2,0}$  liegt.

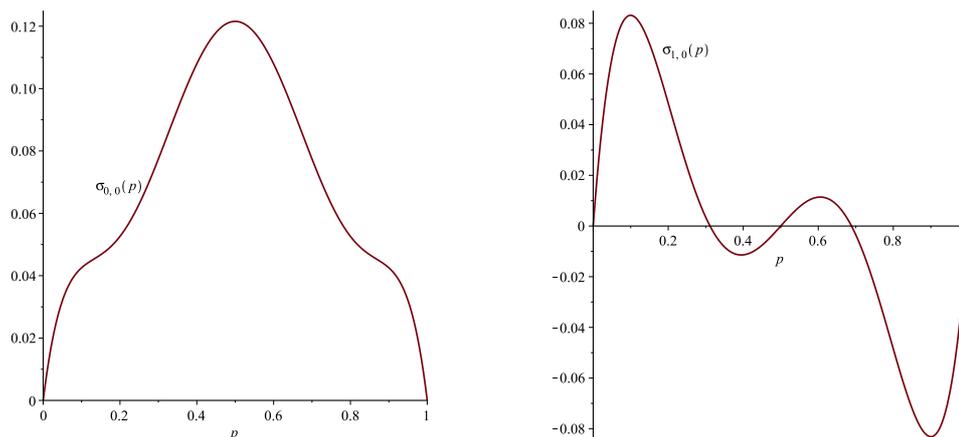


Abbildung 3.1: Die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{0,0}$  und  $\sigma_{1,0}$  bei Zellenperkolations im planaren Poisson-Voronoi-Mosaik mit Intensität  $\gamma = 1$

Da die Korrelation  $\rho_{2,0}$  ein Maß für die lineare Abhängigkeit zwischen der Euler-Charakteristik und dem Volumen ist, könnte man vermuten, dass  $\rho_{2,0}(0) = 1$  gilt, denn für kleine  $p$  vergrößert das Schwärzen einer Zelle sowohl das Volumen als auch

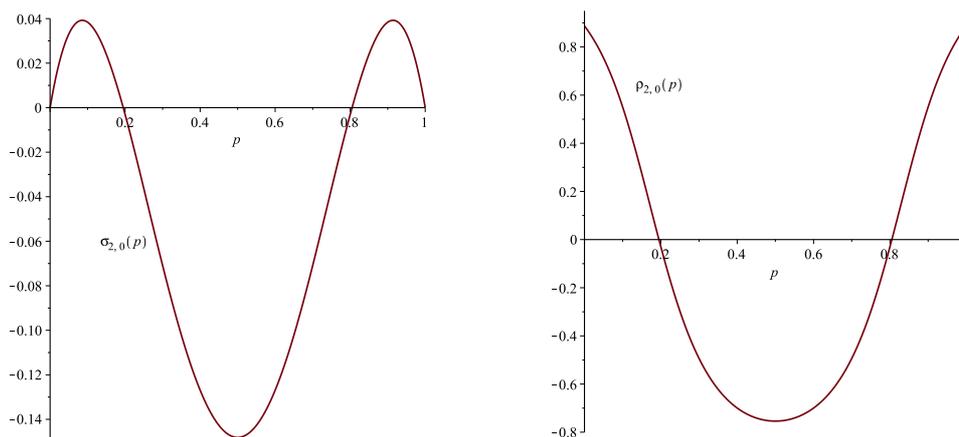


Abbildung 3.2: Die asymptotische Kovarianz  $\sigma_{2,0}$  und die zugehörige asymptotische Korrelation  $\rho_{2,0}$  bei Zellenperkolations im planaren Poisson-Voronoi-Mosaik mit Intensität  $\gamma = 1$

die Euler-Charakteristik, da das Mosaik bis auf wenige Zellen weiß ist. Ebenso könnte man vermuten, dass  $\rho_{2,0}(1) = 1$  gilt, denn für große Werte von  $p$  bestehen die Löcher in der schwarzen Zusammenhangskomponente nur aus einzelnen Zellen, sodass das Färben dieser schwarzen Zellen sowohl die Euler-Charakteristik als auch das Volumen gleichermaßen vergrößert. Jedoch gilt  $\rho_{2,0}(0) = \rho_{2,0}(1) \approx 0,8874$ , das heißt, die Korrelation ist zwar sehr stark, aber nicht eins. Dies liegt daran, dass das Volumen der Zellen unterschiedlich ist und deshalb das Volumen der schwarzen Teilmenge nicht linear mit der Anzahl der schwarzen Zellen wächst. Die Euler-Charakteristik dagegen wächst für kleines  $p$  beinahe linear mit der Anzahl der schwarzen Zellen, da fast alle schwarzen Zusammenhangskomponenten aus nur einer schwarzen Zelle bestehen. Ebenso wächst die Euler-Charakteristik für großes  $p$  beinahe linear mit der Anzahl der Zellen, die schwarz gefärbt werden, da fast alle weißen Löcher aus einer Zelle bestehen, und deshalb das Schwärzen jeder Zelle die Euler-Charakteristik um eins erhöht.

Im planaren Booleschen Modell mit dem Einheitskreis als Korn, macht man eine entsprechende Feststellung für die Korrelation zwischen Euler-Charakteristik und Volumen, vergleiche die Arbeit [14] von Daniel Hug, Günter Last und Matthias Schulte. In diesem Modell sind die Körner deterministisch, sodass das Volumen und die Euler-Charakteristik für sehr kleine Intensitäten mit großer Wahrscheinlichkeit linear mit der Anzahl der Körner wächst. Dies stimmt damit überein, dass die Korrelation bei Intensität null eins ist. Für sehr große Intensitäten des Booleschen Modells lassen Simulationen vermuten, dass die Korrelation gegen einen Wert zwischen 0,4 und 0,5 konvergiert, wobei eine sehr große Intensität im Booleschen Modell in den hier betrachteten Modellen einem Wert von  $p$  nahe bei eins entspricht. Dies lässt sich so erklären, dass es für sehr große Intensitäten nur noch sehr kleine Löcher gibt, deren Volumen sich aber unterscheidet. Werden sie durch ein Korn überdeckt, so vergrößert sich die Euler-Charakteristik unabhängig von der Größe des Lochs um eins. Das Volumen wächst aber in Abhängigkeit von der Größe des Loches, sodass man keine lineare Abhängigkeit erhält.

## 3.2 Das Poisson-Delaunay-Mosaik

Ebenso wie im Poisson-Voronoi-Mosaik existieren auch im Poisson-Delaunay-Mosaik die asymptotischen Erwartungswerte und Kovarianzen der inneren Volumina der schwarzen Teilmenge bei  $(m, n)$ -Perkolation und die Formeln aus Theorem 2.1.1 und Theorem 2.1.4 sind gültig, wie wir hier zeigen werden. Da das Poisson-Delaunay-Mosaik aber nicht normal ist, können Theorem 2.2.1 und Theorem 2.2.3 nicht angewendet werden.

Wir bezeichnen das Poisson-Delaunay-Mosaik  $D(\eta)$  bezüglich  $\eta$  in diesem Abschnitt mit  $X$ . Da das Poisson-Delaunay-Mosaik zu dem Poisson-Voronoi-Mosaik dual ist, ist die Intensität  $\gamma_k$  des  $k$ -Seitenprozesses im Poisson-Delaunay-Mosaik gleich der Intensität des  $(d - k)$ -Seitenprozesses im Poisson-Voronoi-Mosaik, vergleiche [44, Theorem 10.2.8]. Somit folgt aus Lemma 3.1.4, dass die Intensitäten  $\gamma_k$  im Poisson-Delaunay-Mosaik endlich sind. Weiter folgt aus der Dualität auch eine Beziehung zwischen den kritischen Wahrscheinlichkeiten dieser Mosaik. So ist zum Beispiel die kritische Wahrscheinlichkeit bei Zellenperkolation im Poisson-Voronoi-Mosaik gleich der bei Knotenperkolation im Poisson-Delaunay-Mosaik. Diesen Zusammenhang werden wir am Ende dieses Abschnitts verwenden um im planaren Fall die Ergebnisse aus der asymptotischen Kovarianzstruktur mit bekannten kritischen Wahrscheinlichkeiten zu vergleichen.

### 3.2.1 Hilfsmittel

Da das Delaunay-Mosaik dual zum Voronoi-Mosaik ist, können einige bereits gezeigte Ergebnisse über Poisson-Voronoi-Mosaik verwendet werden und es werden nur zwei weitere Hilfsmittel benötigt. Zunächst werden wir zeigen, dass die Momente des Umkugelradius der typischen  $k$ -Seite des Poisson-Delaunay-Mosaiks bezüglich  $\eta$  existieren.

**Lemma 3.2.1** Für  $k \in \{0, \dots, d\}$  und  $m \in \mathbb{N}$  gilt

$$\mathbb{E}_k^0[R(S(0))^m] < \infty.$$

*Beweis:* Wir verwenden nun Proposition 1.3.1 um einen Zusammenhang zwischen dem  $m$ -ten Moment des Umkugelradius der typischen  $k$ -Seite und dem  $m$ -ten Moment des Umkugelradius der typischen Zelle herzustellen. Es gilt

$$\gamma_k \mathbb{E}_k^0[R(S(0))^m] \leq \gamma_k \mathbb{E}_k^0[R(S(0))^m | \mathcal{S}_d(0)] = \gamma_d \mathbb{E}_d^0 \left[ \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} R(S)^m \right].$$

Da die typische Delaunay-Zelle fast sicher ein  $d$ -Simplex ist und deswegen genau  $\binom{d+1}{k+1}$   $k$ -Seiten enthält, folgt mit  $R(S) \leq R(S(0))$  für  $S \in \mathcal{S}_k(0)$  und  $0 \in \eta^{(d)}$

$$\gamma_k \mathbb{E}_k^0[R(S(0))^m] \leq \gamma_d \binom{d+1}{k+1} \mathbb{E}_d^0[R(S(0))^m].$$

Nach Theorem 1.1 (ii) aus [4] von Volker Baumstark und Günter Last ist die  $d$ -te Potenz des Umkugelradius der typischen Delaunay-Zelle bezüglich eines Poisson-Prozesses der Intensität  $\gamma$  Gamma-verteilt mit Formparameter  $d$  und Skalierungsparameter  $\gamma \kappa_d$ . Ist nun  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  eine Zufallsvariable, so erhält man für beliebiges  $c > 0$  mit einer Variablensubstitution

$$\mathbb{E}[X^c] = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{c+\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^{c+\alpha}} \int_0^\infty e^{-s} s^{c+\alpha-1} ds = \frac{\Gamma(c+\alpha)}{\Gamma(\alpha) \beta^c}.$$

Zusammen folgt aus diesen Überlegungen

$$\gamma_k \mathbb{E}_k^0 [R(S(0))^m] \leq \gamma_d \binom{d+1}{k+1} \mathbb{E}_d^0 [(R(S(0))^d)^{m/d}] = \gamma_d \binom{d+1}{k+1} \frac{\Gamma(m/d + d)}{\Gamma(d)} (\gamma \kappa_d)^{m/d}$$

und dieser Ausdruck ist endlich.  $\square$

**Lemma 3.2.2** *Seien  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  eine lokal-endliche Punktmenge und  $x \in \chi$ . Dann gilt im Delaunay-Mosaik bezüglich  $\chi$*

$$\bigcup_{S \in \mathcal{S}_d(x, D(x))} S \subseteq F(x, \chi) \quad \text{und} \quad \bigcup_{S \in \mathcal{S}_d(x, D(x))} S \subseteq B(x, 2R_2(x, \chi)).$$

*Beweis:* Sei  $e \in \mathcal{F}_0(C(x, \chi))$  das Zentrum einer Delaunay-Zelle  $D(e, \chi) \in \mathcal{S}_d(x, D(x))$  mit Ecken  $x, y_1, \dots, y_d$ . Da nach Definition der Delaunay-Zelle  $\|y_i - e\| = \|x - e\|$  für  $i \in \{0, \dots, d\}$  gilt, erhält man  $\{x, y_1, \dots, y_d\} \subseteq B(e, \|x - e\|)$  und es folgt

$$D(e, \chi) = \text{conv}(\{x, y_1, \dots, y_d\}) \subseteq B(e, \|x - e\|).$$

Wegen  $e \in C(x, \chi)$  gilt  $B(e, \|x - e\|) \subseteq F(x, \chi)$ , also ist die Vereinigung aller  $x$  enthaltenden Delaunay-Zellen in der Voronoi-Flower von  $x$  enthalten.

Da  $B(x, 2R_2(x, \chi))$  die Voronoi-Zellen der Nachbarn von  $x$  und damit insbesondere die Nachbarn von  $x$  enthält, gilt

$$D(e, \chi) = \text{conv}(\{x, y_1, \dots, y_d\}) \subseteq B(x, 2R_2(x, \chi)),$$

denn die  $y_i$  sind nach Definition Nachbarn von  $x$ .  $\square$

### 3.2.2 Asymptotische Erwartungswerte der inneren Volumina

In diesem Unterabschnitt werden wir zeigen, dass die Voraussetzung von Theorem 2.1.1 im Poisson-Delaunay-Mosaik bezüglich  $\eta$  erfüllt ist. Damit existieren die asymptotischen Erwartungswerte der inneren Volumina der schwarzen Teilmenge  $Z$  bei  $(m, n)$ -Perkolation und sie genügen der Formel in Theorem 2.1.1.

**Theorem 3.2.3** *Im Poisson-Delaunay-Mosaik ist Voraussetzung (2.10) erfüllt.*

*Beweis:* Seien  $i, k \in \{0, \dots, d\}$ . Da alle  $k$ -Seiten des Poisson-Delaunay-Mosaiks fast sicher  $k$ -Simplizes sind und deshalb für  $l \leq k$  genau  $\binom{k+1}{l+1}$   $l$ -Seiten enthalten, gilt

$$\mathbb{E}_k^0 \left[ \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0))^2 \right] = \left( \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \right)^{k-1} \mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0))^2].$$

Da die inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  monoton und homogen sind und nach Lemma 3.2.1 alle Momente des Umkugelradius der typischen  $k$ -Seite existieren, folgt die Endlichkeit.  $\square$

Bei  $(0, n)$ -Perkolation auf dem Poisson-Delaunay-Mosaik, einem Modell, das wir später genauer untersuchen werden, vereinfachen sich die Formeln für die mittleren inneren Volumina, da das Poisson-Delaunay-Mosaik simplizial ist.

**Korollar 3.2.4** *Für die mittleren inneren Volumina bei  $(0, n)$ -Perkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem Poisson-Delaunay-Mosaik gilt*

$$\delta_i(p) = \sum_{k=i}^n (-1)^{i+k} p^{k+1} \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0))], \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

### 3.2.3 Asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina

In diesem Unterabschnitt zeigen wir, dass die in dem vorherigen Kapitel berechneten Formeln für die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina auf das Poisson-Delaunay-Mosaik angewendet werden können. Dafür definieren wir abkürzend

$$V_i^{(k)}(x, p) := \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^x))} V_i(S) f_{m,n}^{k, |\mathcal{S}_m(S)|}(p),$$

$$V_i^{(k)}(x, y, p) := \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^{x,y}))} V_i(S) f_{m,n}^{k, |\mathcal{S}_m(S)|}(p)$$

für  $i, k \in \{0, \dots, d\}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$  und  $p \in [0, 1]$ .

**Theorem 3.2.5** *Im Poisson-Delaunay-Mosaik sind die Voraussetzungen (2.18), (2.20) und (2.21) erfüllt. Weiter existieren für  $i, j, k, l \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$  die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  und es gilt*

$$(k+1)(l+1) \rho_{i,j}^{k,l}(p) = \gamma \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p) V_j^{(l)}(0, p)] \quad (3.13)$$

$$+ \gamma^2 \int \mathbb{E}[V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] dx.$$

*Beweis:* Zunächst zeigen wir die Integrabilitätsbedingung (2.18). Da das Poisson-Delaunay-Mosaik simplizial ist, enthält jede  $k$ -Seite genau  $\binom{k+1}{l+1}$   $l$ -Seiten für  $l \leq k$ . Insbesondere enthält jede  $m$ -Seite genau  $m+1$  Poisson-Punkte und mit dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1) gilt für  $i, j, k \in \{0, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} & \gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] \\ &= \left( \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \right)^{2k-2} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in X_m} \left( \sum_{T \in \mathcal{S}_k(S)} V_i(T) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(S)) \mathbf{1}\{s(S) \in [0, 1]^d\} \right] \\ &= \frac{1}{m+1} \left( \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \right)^{2k-2} \\ & \quad \times \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_m(x)} \left( \sum_{T \in \mathcal{S}_k(S)} V_i(T) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(S)) \mathbf{1}\{s(S) \in [0, 1]^d\} \right]. \end{aligned}$$

Da  $\mathcal{S}_l(\cdot)$  translationskovariant ist und die inneren Volumina translationsinvariant, folgt mit dem verfeinerten Theorem von Campbell (1.1) und dem Theorem von Slivnyak (1.2)

$$\begin{aligned} & \gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] \\ &= \frac{\gamma}{m+1} \left( \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \right)^{2k-2} \mathbb{E} \left[ \sum_{S \in \mathcal{S}_m(0, D(\eta^0))} \left( \sum_{T \in \mathcal{S}_k(S, D(\eta^0))} V_i(T) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(S, D(\eta^0))) \right]. \end{aligned}$$

Da jede  $m$ -Seite des Poisson-Delaunay-Mosaiks genau  $m+1$  Poisson-Punkte enthält, die im Voronoi-Mosaik paarweise benachbart sind, gilt  $|\mathcal{S}_m(0, D(\eta^0))| \leq |N(0, \eta^0)|^m$ . Ist

$S \in \mathcal{S}_m(0, D(\eta^0))$ , so enthalten alle  $T \in \mathcal{S}_k(S, D(\eta^0))$  nur Nachbarn des Ursprungs und es folgt  $T \subseteq \text{conv}(N(0, \eta^0)) \subseteq B(0, 2R_2(0, \eta^0))$  und  $|\mathcal{S}_k(S, D(\eta^0))| \leq |N(0, \eta^0)|^{k+1}$ , da das Poisson-Delaunay-Mosaik simplizial ist. Zusammen mit der Translationsinvarianz und der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  folgt aus diesen Überlegungen

$$\begin{aligned}
 & \gamma_m \mathbb{E}_m^0 \left[ \left( \sum_{S \in \mathcal{S}_k(0)} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right)^2 V_j(\mathcal{S}_d(0)) \right] \\
 & \leq \frac{\gamma}{m+1} \left( \sum_{l=0}^k \binom{k+1}{l+1} \right)^{2k-2} \mathbb{E}[|N(0, \eta^0)|^m |N(0, \eta^0)|^{2k+2} |N(0, \eta^0)|^{d+1} \\
 & \quad \times V_i(B(0, 2R_2(0, \eta^0)))^2 V_j(B(0, 2R_2(0, \eta^0)))].
 \end{aligned}$$

Die Endlichkeit folgt nun nach Anwenden der Hölder-Ungleichung aus der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5.

Nun zeigen wir die Voraussetzung (2.20), das heißt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{S \in X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right)} = 0.$$

Da jede  $k$ -Seite des Poisson-Delaunay-Mosaiks genau  $k+1$  Poisson-Punkte enthält, gilt für  $i, k \in \{0, \dots, d\}$  und  $r \in \mathbb{N}$

$$\sum_{S \in X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) = \frac{1}{k+1} \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t)$$

und die Voraussetzung (2.20) ist äquivalent zu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta)) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right)} = 0. \quad (3.14)$$

Definiert man für festes  $i, k \in \{0, \dots, d\}$  abkürzend

$$h_r(\chi, B) := \sum_{x \in \chi} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\chi)) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap B)$$

für  $r \in \mathbb{N}$ ,  $\chi \in \mathbb{N}$  und  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , so erhält man mit der Poincaré-Ungleichung

$$\frac{1}{t} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t)) \leq \frac{\gamma}{t} \mathbb{E} \int (h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t))^2 dx. \quad (3.15)$$

Nun werden wir eine obere Schranke für  $|h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)|$  finden. Man beachte, dass sowohl das Delaunay-Mosaik bezüglich  $\eta$  als auch das bezüglich  $\eta^x$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  fast sicher simplizial ist. Ist  $\chi \in \mathbb{N}$ , sodass das Delaunay-Mosaik bezüglich  $\chi$  simplizial ist, so enthält für  $k \geq m$  jede  $k$ -Seite  $\binom{k+1}{m+1}$   $m$ -Seiten. Für  $k < m$  gilt wieder  $|\mathcal{S}_m(S, D(\chi))| \leq |N(x, \chi)|^m$  für  $S \in \mathcal{S}_k(x, D(\chi))$ . Gilt also  $|\mathcal{S}_m(S, D(\chi))| = r$ , so folgt  $|N(x, \chi)| \geq r^{1/m}$ . Da das Hinzufügen eines Punktes  $x \in \mathbb{R}^d$  zu  $\eta$  das Delaunay-Mosaik nur innerhalb  $\text{int}(\bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\eta^x))} C)$  verändert und jede Seite des Delaunay-Mosaiks

bezüglich  $\eta^x$ , deren relatives Inneres in  $\text{int}(\bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\eta^x))} C)$  liegt, den Punkt  $x$  enthält, folgt mit diesen Überlegungen

$$\begin{aligned}
& |h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)| \\
&= \left| (k+1) \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^x)) \cap X_{k,r}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \right. \\
&\quad \times \left( \mathbf{1}\left\{k \geq m, r = \binom{k+1}{m+1}\right\} + \mathbf{1}\{k < m, |N(x, \eta^x)| \geq r^{1/m}\} \right) \\
&\quad - \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta)) \cap X_{k,r}, \\ \text{relint}(S) \subseteq \text{int}(\bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\eta^x))} C)}} V_i(\text{relint}(S) \cap \partial W_t) \\
&\quad \left. \times \left( \mathbf{1}\left\{k \geq m, r = \binom{k+1}{m+1}\right\} + \mathbf{1}\{k < m, |N(y, \eta)| \geq r^{1/m}\} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Wegen  $V_i(\emptyset) = 0$  kann  $|h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)|$  nur dann positiv sein, wenn

$$\bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\eta^x))} C \cap \partial W_t \neq \emptyset$$

gilt. Deshalb folgt mit (2.14) und  $\max(|N(x, \eta^x)|, |N(y, \eta^x)|, |N(y, \eta)|) \leq |N_2(x, \eta^x)|$  für  $y \in N(x, \eta^x)$

$$\begin{aligned}
& |h_r(\eta^x, \partial W_t) - h_r(\eta, \partial W_t)| \\
&\leq \mathbf{1}\left\{ \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\eta^x))} C \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} f(x, \eta^x) \\
&\quad \times \left( \mathbf{1}\left\{k \geq m, r = \binom{k+1}{m+1}\right\} + \mathbf{1}\{k < m, |N_2(x, \eta^x)| \geq r^{1/m}\} \right),
\end{aligned}$$

wobei für  $x \in \chi \in \mathbf{N}$  und festes  $i, k \in \{0, \dots, d\}$

$$\begin{aligned}
f(x, \chi) := & 2 \left[ (k+1) \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\chi))} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right. \\
& \left. + \sum_{y \in N(x, \chi)} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\chi \setminus \{x\})), \\ \text{relint}(S) \subseteq \text{int}(\bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\chi))} C)}} \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S)| \right)^{k-1} V_i(S) \right]
\end{aligned}$$

gesetzt wurde. Da das Poisson-Delaunay-Mosaik fast sicher simplizial ist, existieren alle Momente von  $f(0, \eta^0)$  wegen der Hölder-Ungleichung, der Monotonie und Homogenität der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$ , Lemma 3.2.2, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5. Verwendet man (3.15), die Translationskovarianz von  $\mathcal{S}_k(\cdot, \cdot)$ , die Stationarität von  $\eta$  und die

Translationsinvarianz der inneren Volumina und der Anzahl der Nachbarn, so folgt

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{t} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t)) \\
 & \leq \frac{\gamma}{t} \mathbb{E} \int \mathbf{1} \left\{ \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\eta^x))} C \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} f(x, \eta^x)^2 \\
 & \quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \geq m, r = \binom{k+1}{m+1} \right\} + \mathbf{1} \{ k < m, |N_2(x, \eta^x)| \geq r^{1/m} \} \right) dx \\
 & = \frac{\gamma}{t} \mathbb{E} \int \mathbf{1} \left\{ \left( \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))} C + x \right) \cap \partial W_t \neq \emptyset \right\} f(0, \eta^0)^2 \\
 & \quad \times \left( \mathbf{1} \left\{ k \geq m, r = \binom{k+1}{m+1} \right\} + \mathbf{1} \{ k < m, |N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/m} \} \right) dx \\
 & = \mathbf{1} \left\{ k \geq m, r = \binom{k+1}{m+1} \right\} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))} C \right) f(0, \eta^0)^2 \right] \\
 & \quad + \mathbf{1} \{ k < m \} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))} C \right) f(0, \eta^0)^2 \mathbf{1} \{ |N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/m} \} \right].
 \end{aligned}$$

Wendet man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf den zweiten Summanden an, so erhält man

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{t} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t)) \\
 & \leq \mathbf{1} \left\{ k \geq m, r = \binom{k+1}{m+1} \right\} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))} C \right) f(0, \eta^0)^2 \right] \\
 & \quad + \mathbf{1} \{ k < m \} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))} C \right)^2 f(0, \eta^0)^4 \right]^{1/2} \mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/m})^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Die Erwartungswerte in beiden Summanden konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  gegen null nach dem Satz von der dominierten Konvergenz, wobei

$$\sum_{C \in \mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))} \lambda_d(W + C) f(0, \eta^0)^2$$

bzw. das Quadrat hiervon für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Da nach Lemma 3.2.2 alle Zellen aus  $\mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))$  in  $B(0, 2R_2(0, \eta^0))$  enthalten sind, folgt die Integrierbarkeit der Majoranten nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Hölder-Ungleichung wegen  $|\mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))| \leq |N(0, \eta^0)|^d$  aus Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5, da alle Momente von  $f(0, \eta^0)$  existieren. Damit erhalten wir für  $k \geq m$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{t^{-1} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t))} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t^{-1} \text{Var}(h_{\binom{k+1}{m+1}}(\eta, \partial W_t))} = 0$$

und für  $k < m$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{t^{-1} \text{Var}(h_r(\eta, \partial W_t))} \\ & \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma \mathbb{E} \left[ \lambda_d \left( \partial W - t^{-1/d} \bigcup_{S \in \mathcal{S}_d(0, D(\eta^0))} S \right)^2 f(0, \eta^0)^4 \right]^{1/4} \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}(|N_2(0, \eta^0)| \geq r^{1/m})^{1/4} \\ & = 0, \end{aligned}$$

denn die Reihe konvergiert wegen des exponentiell fallenden Tails der Nachbarzahl zweiter Ordnung des typischen Punktes, vergleiche (3.2). Somit ist (2.20) gezeigt und die Voraussetzung (2.21) kann analog nachgewiesen werden.

Nun bleibt noch zu zeigen, dass die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  für alle  $i, j, k, l \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$  existieren und der Formel (3.13) genügen. Da jede  $k$ -Seite des Poisson-Delaunay-Mosaiks genau  $k + 1$  Poisson-Punkte enthält, gilt

$$\sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p) = \frac{1}{k+1} \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x)} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p).$$

Weiter kann man analog zu (3.14) mit Hilfe der Poincaré-Ungleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \int \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x)} V_i(S \cap W_t) f_{m,n}^{k, |S_m(S)|}(p) - V_i^{(k)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right) = 0$$

beweisen und zusammen folgt mit Lemma 2.1.3

$$\begin{aligned} & (k+1)(l+1) \rho_{i,j}^{k,l}(p) \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \int V_i^{(k)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx), \int V_j^{(l)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right). \end{aligned}$$

Ebenfalls analog zu den Berechnungen im Poisson-Voronoi-Mosaik erhält man mit der Mecke-Formel und dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned} & \text{Cov} \left( \int V_i^{(k)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx), \int V_j^{(l)}(x, p) \mathbf{1}\{x \in W_t\} \eta(dx) \right) \\ & = \gamma \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p) V_j^{(l)}(0, p)] \\ & \quad + \gamma^2 \int \mathbb{E}[V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] dx \end{aligned}$$

und somit (3.13), wobei die Integrierbarkeit der Majorante

$$|\mathbb{E}[V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p)] - \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)]|$$

noch zu zeigen ist. Wie bei der Rechnung im Poisson-Voronoi-Mosaik genügt es hierfür

$$\begin{aligned} A_1 & := \int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(0, p) \right] \mathbb{E}[V_j^{(l)}(0, p)] dx < \infty, \\ A_2 & := \int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ F(0, \eta^0) \not\subseteq B \left( 0, \frac{\|x\|}{3} \right) \right\} V_i^{(k)}(x, 0, p) V_j^{(l)}(0, x, p) \right] dx < \infty \end{aligned}$$

zu zeigen. Zunächst stellt man fest, dass  $\mathbf{1}\{F(0, \eta^0) \not\subseteq B(0, \|x\|/3)\}$  nach oben durch  $\mathbf{1}\{2\text{diam}(C(0, \eta^0)) > \|x\|/3\}$  abgeschätzt werden kann. Weiter gilt  $|f_{m,n}^{k,r}(p)| \leq 1$  und für die Anzahl der  $k$ -Seiten, die  $x$  enthalten, erhält man  $|\mathcal{S}_k(x, D(\eta^x))| \leq |N(x, \eta^x)|^k$  und  $|\mathcal{S}_k(x, D(\eta^{x,y}))| \leq |N(x, \eta^{x,y})|^k \leq (|N(x, \eta^x)| + 1)^k$ . Da  $\eta$  stationär ist, die inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  monoton und translationsinvariant sind, der Umkugelradius zweiter Ordnung translationsinvariant ist und  $S \subseteq B(x, 2R_2(x, \eta^x))$  für  $S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^x)) \cup \mathcal{S}_k(x, D(\eta^{x,y}))$  gilt, folgt mit diesen Überlegungen und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \max(A_1, A_2) \\ & \leq \int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1} \left\{ 2 \text{diam}(C(0, \eta^0)) > \frac{\|x\|}{3} \right\} (|N(0, \eta^0)| + 1)^{2k} V_i(B(0, 2R_2(0, \eta^0)))^2 \right]^{1/2} \\ & \quad \times \mathbb{E} [ (|N(0, \eta^0)| + 1)^{2l} V_j(B(0, 2R_2(0, \eta^0)))^2 ]^{1/2} dx. \end{aligned}$$

Nach Anwenden der Hölder-Ungleichung folgt die Endlichkeit (und damit auch die Endlichkeit des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (3.13)) aus der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.1, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5. Dass auch der erste Summand auf der rechten Seite von (3.13) endlich ist, folgt wegen

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[V_i^{(k)}(0, p)V_j^{(l)}(0, p)] \\ & \leq \mathbb{E}[|N(x, \eta^x)|^k V_i(B(0, 2R_2(x, \eta^x))) |N(0, \eta^0)|^l V_j(B(0, 2R_2(0, \eta^0)))] \end{aligned}$$

nach Anwenden der Hölder-Ungleichung aus der Translationsinvarianz von  $R_2(\cdot, \cdot)$  und  $|N(\cdot, \cdot)|$ , der Stationarität von  $\eta$ , der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5.  $\square$

Nun betrachten wir die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina bei  $(0, n)$ -Perkolation, deren Existenz in Kapitel vier bei dem Beweis eines multivariaten zentralen Grenzwertsatzes benötigt wird. Definiere dazu

$$\tau_{i,j}^{k,l} := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Cov} \left( \sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t), \sum_{T \in X_l} V_j(T \cap W_t) \right).$$

**Korollar 3.2.6** *Für die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina bei  $(0, n)$ -Perkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem Poisson-Delaunay-Mosaik gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j}(p) &= \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} p^{k+l+2} \tau_{i,j}^{k,l} \\ &+ \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} \sum_{o=1}^{\min(k,l)+1} p^{k+l+2-o} (1-p^o) \gamma_k \mathbb{E}_k^0 [V_i(S(0))V_j(\mathcal{S}_l^o(0))]. \end{aligned}$$

*Beweis:* Da nach Theorem 3.2.5 die Voraussetzungen (2.18), (2.20) und (2.21) erfüllt sind, kann die Formel aus Theorem 2.1.4 für ein beliebiges Beobachtungsfenster angewendet werden. Für  $S \in X_k$  gilt weiter  $|\mathcal{S}_0(S)| = k + 1$ , da die  $k$ -Seiten des Poisson-Delaunay-Mosaiks  $k$ -Simplexes sind. Damit vereinfacht sich die Formel aus Theorem 2.1.4 zu der oben angegebenen.  $\square$

### 3.2.4 Vergleich der Ergebnisse mit bekannten Perkulationswahrscheinlichkeiten

Da das Delaunay- und das Voronoi-Mosaik dual zueinander sind, gibt es bei Knotenperkulation im Poisson-Delaunay-Mosaik genau dann eine unbeschränkte schwarze Zusammenhangskomponente, wenn im zugehörigen Poisson-Voronoi-Mosaik eine unbeschränkte schwarze Zusammenhangskomponente bei Zellenperkulation existiert. Da die kritische Wahrscheinlichkeit bei Zellenperkulation im planaren Poisson-Voronoi-Mosaik  $1/2$  ist, ist somit auch die kritische Wahrscheinlichkeit bei Knotenperkulation im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik  $1/2$ . Da es für zwei schwarze Knoten, die durch einen schwarzen Weg über eine schwarze Zelle verbunden sind, auch immer einen schwarzen Weg entlang schwarzer Kanten gibt, muss die kritische Wahrscheinlichkeit bei  $(0, 1)$ -Perkulation im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik wie bei Knotenperkulation  $1/2$  sein.

Wir geben nun die Kovarianzstruktur bei Knotenperkulation und  $(0, 1)$ -Perkulation im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik in einer möglichst einfachen Form an, wozu wir das nächste Lemma benötigen, und untersuchen, ob in der Nähe der kritischen Wahrscheinlichkeit lokale Maxima, lokale Minima, Wende- oder Nullstellen der asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina liegen.

Definiere für  $k \in \{0, 1, 2\}$  und  $t \geq 1$

$$X_k^t := \{S \in X_k : S \cap W_t \neq \emptyset\}.$$

Im nächsten Lemma werden wir zeigen, dass sich die asymptotischen Varianzen von  $|X_1^t|$  und  $|X_2^t|$  im planaren Fall nur um eine Konstante unterscheiden.

**Lemma 3.2.7** *Im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(3|X_2^t| - 2|X_1^t|) = 0.$$

*Beweis:* Für  $\chi \in \mathbf{N}$  und  $k \in \{0, 1, 2\}$  bezeichne  $X_k(\chi)$  die Menge der  $k$ -Seiten des Delaunay-Mosaiks bezüglich  $\chi$ . Definiere für  $t \geq 1$ ,  $i \in \{1, 2\}$  und  $\chi \in \mathbf{N}$

$$\varepsilon_{t,i}(\chi) := |\{S \in X_2(\chi) : |\{T \in \mathcal{F}_1(S) : T \cap W_t \neq \emptyset\}| = i\}|,$$

das heißt,  $\varepsilon_{t,i}(\chi)$  ist die Anzahl der Zellen im Delaunay-Mosaik bezüglich  $\chi$ , für die genau  $i$  ihrer Kanten nicht-leeren Schnitt mit  $W_t$  haben. Da jede Poisson-Delaunay-Zelle fast sicher genau drei Kanten besitzt und jede Kante in genau zwei Zellen enthalten ist, folgt damit fast sicher

$$3|X_2^t| - 2\varepsilon_{t,1}(\eta) - \varepsilon_{t,2}(\eta) = 2|X_1^t|.$$

Zeigt man nun, dass die asymptotischen Varianzen von  $\varepsilon_{t,i}(\eta)$  für  $i \in \{1, 2\}$  null sind, so folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(3|X_2^t| - 2|X_1^t|) = 0.$$

Sei  $i \in \{1, 2\}$ . Da das Hinzufügen eines Punktes  $x$  zu  $\eta$  das Delaunay-Mosaik nur in  $D := \bigcup_{C \in \mathcal{S}_2(x, D(\eta^x))} C$  verändert und jede in  $D$  enthaltene Zelle bezüglich  $\eta$  bzw.  $\eta^x$  genau drei Punkte aus  $N(x, \eta^x) \cup \{x\}$  enthält, gilt

$$|\varepsilon_{t,i}(\eta^x) - \varepsilon_{t,i}(\eta)| \leq 2(|N(x, \eta^x)| + 1)^3.$$

Außerdem kann diese Differenz nur dann ungleich null sein, falls  $D$  den Rand von  $W_t$  schneidet, denn  $\varepsilon_{t,i}$  betrachtet nur Zellen, die  $\partial W_t$  schneiden. Mit diesen Überlegungen und der Poincaré-Ungleichung folgt also

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \text{Var}(\varepsilon_{t,i}(\eta)) &\leq \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \int (\varepsilon_{t,i}(\eta^x) - \varepsilon_{t,i}(\eta))^2 dx \right] \\ &\leq \frac{1}{t} \mathbb{E} \left[ \int 4(|N(x, \eta^x)| + 1)^6 \mathbf{1}\{D \cap \partial W_t \neq \emptyset\} dx \right]. \end{aligned}$$

Da  $D \subseteq B(x, 2R_2(x, \eta^x))$  nach Lemma 3.2.2 gilt, folgt mit der Translationskovarianz von  $N(\cdot, \cdot)$  und  $\mathcal{S}_2(\cdot, \cdot)$  sowie der Translationsinvarianz des Umkugelradius zweiter Ordnung

$$t^{-1} \text{Var}(\varepsilon_{t,i}(\eta)) \leq 4 \mathbb{E}[ (|N(0, \eta^0)| + 1)^6 \lambda_d(\partial W - t^{-1/2} B(0, 2R_2(0, \eta^0))) ].$$

Dies konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz für  $t \rightarrow \infty$  gegen null, wobei

$$4 (|N(0, \eta^0)| + 1)^6 \lambda_d(W + B(0, 2R_2(0, \eta^0)))$$

für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majorante folgt nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5.  $\square$

**Theorem 3.2.8** *Für die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina bei Knotenperkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem planaren Poisson-Delaunay-Mosaik gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_{2,2}(p) &= p^5(1-p)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))V_2(\mathcal{S}_2^1(0))] + p^4(1-p^2)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))V_2(\mathcal{S}_2^2(0))] \\ &\quad + p^3(1-p^3)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))^2], \\ \sigma_{2,1}(p) &= p^3(1-p)(1+p-p^2)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))V_1(S(0))] \\ &\quad + p^4(1-p)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))V_1(\mathcal{S}_1^1(0))] - p^5(1-p)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))V_1(\mathcal{S}_2^1(0))] \\ &\quad - p^4(1-p^2)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))V_1(\mathcal{S}_2^2(0))], \\ \sigma_{2,0}(p) &= p^3(1-p)(4p^2 - 2p + 1) - p^4(1-p)^2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))|\mathcal{S}_2^1(0)|], \\ \sigma_{1,1}(p) &= p^4(1-p)^2\tau_{1,1}^{2,2} + p^3(1-p)\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_1^1(0))] \\ &\quad + p^2(1-p^2)\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))^2] - 2p^4(1-p)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_1^1(0))] \\ &\quad + p^5(1-p)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_2^1(0))] \\ &\quad + p^4(1-p^2)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_2^2(0))] \\ &\quad + p^3(1-p)(p^2 - 3p - 3)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))^2], \\ \sigma_{1,0}(p) &= p^3(1-p)^2(1-2p)\tau_{1,0}^{2,0} + p^2(1-p)(-4p^3 + 2p^2 + 1)\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))] \\ &\quad - p^3(1-p)^2\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))|\mathcal{S}_1^1(0)|] \\ &\quad + p^4(1-p)^2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))|\mathcal{S}_2^1(0)|], \\ \sigma_{0,0}(p) &= \gamma_0 p(1-p)(4p^4 - 8p^3 + 12p^2 - 8p + 1) + p^3(1-p)^3\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_2^1(0)|]. \end{aligned}$$

*Beweis:* Mit (1.10) erhält man  $V_1(\mathcal{S}_1^2(0)) = 2V_1(S(0))$  für  $0 \in \eta^{(2)}$ . Zusammen mit  $\tau_{2,j}^{2,l} = 0$  und  $\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_2(S(0))] = 1$  folgen die Formeln für  $\sigma_{2,2}$ ,  $\sigma_{2,1}$  und  $\sigma_{2,0}$  direkt aus Korollar 3.2.6, wenn man berücksichtigt, dass  $|\mathcal{S}_1^1(0)| = |\mathcal{S}_2^1(0)| + 3$  für  $0 \in \eta^{(2)}$  gilt.

Nun behandeln wir  $\sigma_{1,1}$ . Da jede Kante in genau zwei Zellen liegt, folgt mit (1.10)

$$\sum_{S \in X_1} V_1(S \cap W_t) = \sum_{S \in X_2} V_1(S \cap W_t) - \frac{1}{2} \mathcal{H}^1(\partial W_t) \quad (3.16)$$

und somit

$$\tau_{1,1}^{1,1} = \tau_{1,1}^{1,2} = \tau_{1,1}^{2,2}.$$

Außerdem folgt mit Proposition 1.3.1 und Proposition 1.3.2

$$\begin{aligned} \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_2^1(0))] &= \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))V_1(\tilde{\mathcal{S}}_2(0))] - \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_2(0))] \\ &= \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))V_1(\tilde{\mathcal{S}}_1(0))] - \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_1(0))] \\ &= \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_1^1(0))] \end{aligned}$$

und mit Proposition 1.3.1 und (1.10) erhält man

$$\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_2^2(0))] = \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))V_1(\mathcal{S}_2(0))] = 2\gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))^2].$$

Setzt man diese Ergebnisse nun in die Formel in Korollar 3.2.6 ein, so erhält man die behauptete Formel für  $\sigma_{1,1}$  nach einer einfachen Rechnung.

Um die verbleibenden Kovarianzen  $\sigma_{1,0}$  und  $\sigma_{0,0}$  zu bestimmen, verwenden wir die Größen  $\varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_{t,1}(\eta)$  und  $\varepsilon_{t,2}(\eta)$ , die vor Theorem 2.2.5 und im Beweis von Lemma 3.2.7 definiert wurden. Da die Zellen des Mosaiks fast sicher Dreiecke sind und jede Kante in zwei Zellen liegt, folgt

$$2|X_1^t| = 3|X_2^t| - 2\varepsilon_{t,1}(\eta) - \varepsilon_{t,2}(\eta)$$

und aus der Euler-Formel für planare Graphen, vergleiche Theorem 4.1.1 in [35], folgt

$$(|X_0^t| + \varepsilon_t) + (|X_2^t| + 1) = (|X_1^t| + \varepsilon_t) + 2.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich nun

$$|X_2^t| = 2|X_0^t| + 2\varepsilon_{t,1}(\eta) + \varepsilon_{t,2}(\eta) - 2 \quad \text{und} \quad |X_1^t| = 3|X_0^t| + 2\varepsilon_{t,1}(\eta) + \varepsilon_{t,2}(\eta) - 3. \quad (3.17)$$

Da die asymptotischen Varianzen von  $\varepsilon_{t,1}(\eta)$  und  $\varepsilon_{t,2}(\eta)$ , wie im Beweis von Lemma 3.2.7 gezeigt, null sind, folgt aus (3.17) mit der Hölder-Ungleichung, Lemma 2.1.3 und (3.16)

$$\tau_{1,0}^{1,0} = \tau_{1,0}^{2,0}, \quad \tau_{1,0}^{1,1} = \tau_{1,0}^{2,1} = 3\tau_{1,0}^{2,0}, \quad \tau_{1,0}^{1,2} = \tau_{1,0}^{2,2} = 2\tau_{1,0}^{2,0}$$

und

$$\tau_{0,0}^{1,0} = 3\tau_{0,0}^{0,0}, \quad \tau_{0,0}^{2,0} = 2\tau_{0,0}^{0,0}, \quad \tau_{0,0}^{1,1} = 9\tau_{0,0}^{0,0}, \quad \tau_{0,0}^{2,1} = 6\tau_{0,0}^{0,0}, \quad \tau_{0,0}^{2,2} = 4\tau_{0,0}^{0,0}.$$

Damit folgt

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{l=0}^2 (-1)^{k+l+1} p^{k+l+2} \tau_{1,0}^{k,l} = p^3(1-p)^2(1-2p)\tau_{1,0}^{2,0}$$

und

$$\sum_{k,l=0}^2 (-1)^{k+l} p^{k+l+2} \tau_{0,0}^{k,l} = p^2(1-p)^2(1-2p)^2 \tau_{0,0}^{0,0}.$$

Mit Proposition 1.3.1 erhält man  $\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))] = \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[V_1(S(0))]$  und wegen  $|\mathcal{S}_2^1(0)| = |\mathcal{S}_1^1(0)| - 2$  für  $0 \in \eta^{(1)}$  und  $|\mathcal{S}_1^1(0)| = |\mathcal{S}_2^1(0)| + 3$  für  $0 \in \eta^{(2)}$  folgt die behauptete Formel für  $\sigma_{1,0}$  nach einer einfachen Rechnung.

Nun bestimmen wir die Formel für  $\sigma_{0,0}$ . Es gilt

$$\gamma_1 \mathbb{E}_1^0[|\mathcal{S}_1^1(0)|] = \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[|\mathcal{S}_2^1(0)|] + 2\gamma_1$$

und mit Proposition 1.3.2 erhält man

$$\begin{aligned} \gamma_0 \mathbb{E}_0^0[|\mathcal{S}_1^1(0)|] &= \gamma_0 \mathbb{E}_0^0[|\tilde{\mathcal{S}}_1(0)|] = \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[|\tilde{\mathcal{S}}_0(0)|] = 2\gamma_1, \\ \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[|\mathcal{S}_2^1(0)|] &= \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[|\tilde{\mathcal{S}}_2(0)|] - \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[|\mathcal{S}_2^2(0)|] = \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\tilde{\mathcal{S}}_1(0)|] - 2\gamma_1 = \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_1^1(0)|] \\ &= \gamma_2 \mathbb{E}_2^0[|\mathcal{S}_2^1(0)|] + 3\gamma_2. \end{aligned}$$

Wegen  $p^2 \tau_{0,0}^{0,0} = \rho_{0,0}^{0,0}(p)$  folgt  $\tau_{0,0}^{0,0} = \gamma_0$  aus (3.13) und die behauptete Formel von  $\sigma_{0,0}$  lässt sich leicht nachrechnen.  $\square$

Als nächstes geben wir die asymptotischen Kovarianzen für  $(0, 1)$ -Perkolation an, wobei der Beweis analog zu dem von Theorem 3.2.8 geführt werden kann. Man beachte, dass für  $(0, 1)$ -Perkolation  $V_2(Z \cap W_t) = 0$  gilt und deswegen  $\sigma_{2,j} = 0$  für  $j \in \{0, 1, 2\}$  folgt.

**Theorem 3.2.9** *Für die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina bei  $(0, 1)$ -Perkolation mit Parameter  $p \in [0, 1]$  auf dem planaren Poisson-Delaunay-Mosaik gilt*

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}(p) &= p^4 \tau_{1,1}^{1,1} + p^3(1-p) \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0)) V_1(\mathcal{S}_1^1(0))] + p^2(1-p^2) \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))^2], \\ \sigma_{1,0}(p) &= p^3(1-3p) \tau_{1,0}^{1,0} + p^2(1-p)^2 \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0))] \\ &\quad - p^3(1-p) \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[V_1(S(0)) |\mathcal{S}_1^1(0)|], \\ \sigma_{0,0}(p) &= p(6p^3 + 6p^2 - 9p + 1) \gamma_0 + p^3(1-p) \gamma_1 \mathbb{E}_1^0[|\mathcal{S}_1^1(0)|]. \end{aligned}$$

Da in [34] die nicht-triviale Nullstelle der mittleren Euler-Charakteristik ein guter Schätzer für die kritische Wahrscheinlichkeit ist, wollen wir auch die mittlere Euler-Charakteristik für Knotenperkolation und  $(0, 1)$ -Perkolation auf dem planaren Poisson-Delaunay-Mosaik bestimmen.

**Proposition 3.2.10** *Im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik gilt bei Knotenperkolation*

$$\delta_0(p) = \gamma_0 p(1-p)(1-2p), \quad p \in [0, 1],$$

und bei  $(0, 1)$ -Perkolation

$$\delta_0(p) = \gamma_0 p(1-3p), \quad p \in [0, 1].$$

Die Formeln für  $\delta_0$  folgen direkt aus Theorem 2.1.1. Man sieht sofort, dass  $1/2$  eine Nullstelle von  $\delta_0$  bei Knotenperkolation ist und die mittlere Euler-Charakteristik außerdem mit der bei Zellenperkolation auf dem planaren Poisson-Voronoi-Mosaik übereinstimmt. Bei  $(0, 1)$ -Perkolation ist die nicht-triviale Nullstelle der mittleren Euler-Charakteristik  $1/3$  und somit kein guter Schätzer für die kritische Wahrscheinlichkeit.

Bisher lieferten das lokale Maximum der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik, das lokale Minimum der asymptotischen Kovarianz von Volumen und Euler-Charakteristik und eine Wendestelle der asymptotischen Kovarianz von Oberfläche und Euler-Charakteristik gute Schätzungen der kritischen Wahrscheinlichkeit. Deshalb

werden wir uns im Folgenden auf diese asymptotischen Kovarianzen beschränken. Wir betrachten zunächst Knotenperkolation. Exakt bei der kritischen Wahrscheinlichkeit  $1/2$  liegt ein lokales Maximum der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik, wie mit einer einfachen Rechnung aus der Formel von  $\sigma_{0,0}$  in Theorem 3.2.8 folgt, vergleiche Abbildung 3.3. Die asymptotische Kovarianz von Euler-Charakteristik und Oberfläche besitzt eine Wendestelle bei ungefähr  $0,6155$ , wobei auch hier die benötigten Größen mit dem Statistikprogramm simuliert wurden. Weiter ergab eine Simulation mit dem Statistikprogramm R für ein Poisson-Delaunay-Mosaik bezüglich  $\eta$  der Intensität eins  $\mathbb{E}_2^0[V_2(S(0)) | \mathcal{S}_2^1(0)] \approx 5,40$ , womit  $\sigma_{2,0}$  ein lokales Minimum bei ungefähr  $0,5747$  besitzt. Somit liefert das lokale Maximum der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik die beste Schätzung der kritischen Wahrscheinlichkeit. Die Abweichungen des lokalen Minimums von  $\sigma_{2,0}$  und der Wendestelle von  $\sigma_{1,0}$  von der kritischen Wahrscheinlichkeit kann auch durch ungenaue Simulationswerte zustande kommen.

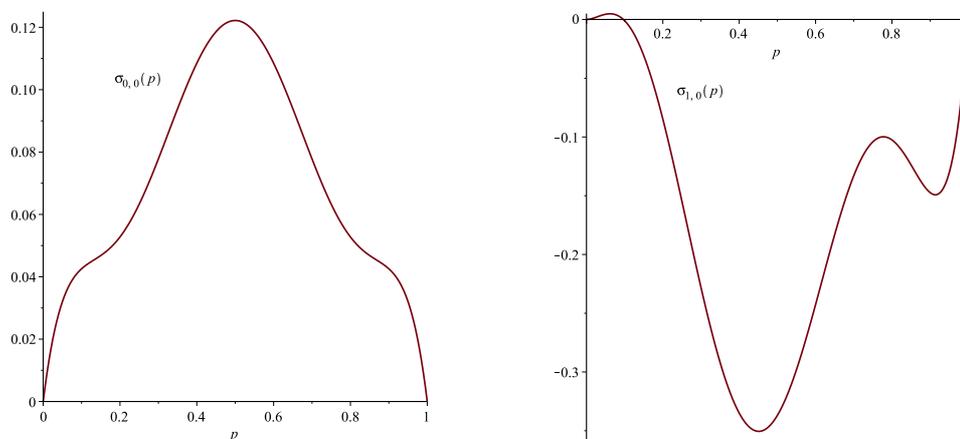


Abbildung 3.3: Die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{0,0}$  und  $\sigma_{1,0}$  bei Knotenperkolation im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik mit Intensität  $\gamma = 1$

Die asymptotische Korrelation

$$\rho_{2,0}(p) := \frac{\sigma_{2,0}(p)}{\sqrt{\sigma_{2,2}(p) \sigma_{0,0}(p)}}, \quad p \in [0, 1],$$

zwischen Volumen und Euler-Charakteristik hat bei etwa  $0,4681$  ein lokales Minimum und liefert somit eine untere Schranke für die kritische Wahrscheinlichkeit, vergleiche Abbildung 3.4.

Nun untersuchen wir die asymptotische Varianz der Euler-Charakteristik bei  $(0, 1)$ -Perkolation. Mit den simulierten Größen liegt das lokale Maximum der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik bei etwa  $0,9207$  und ist weit von der kritischen Wahrscheinlichkeit  $1/2$  entfernt, vergleiche Abbildung 3.5.

### 3.3 Archimedische Gitter

Wir randomisieren die in Kapitel eins eingeführten deterministischen Archimedischen Gitter, indem wir sie um einen in einer Fundamentalzelle gleichverteilten Zufallsvektor  $\xi$  verschieben. Dabei ist eine *Fundamentalzelle* ein Ausschnitt des Mosaiks, sodass das Mosaik durch disjunkte Vereinigungen geeigneter Translate der Fundamentalzelle

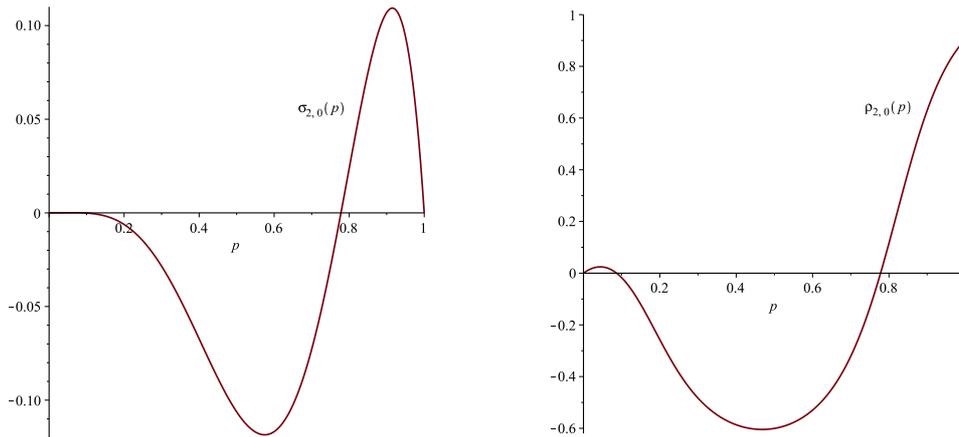


Abbildung 3.4: Die asymptotische Kovarianz  $\sigma_{2,0}$  und die zugehörige Korrelation  $\rho_{2,0}$  bei Knotenperkolation im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik mit Intensität  $\gamma = 1$

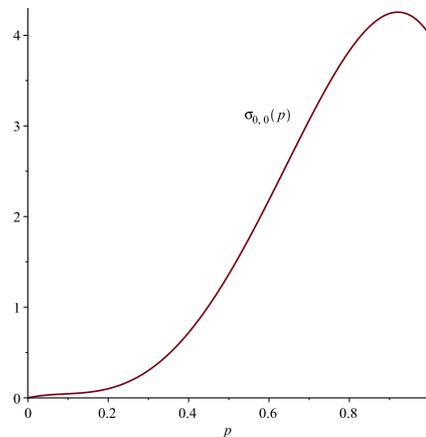


Abbildung 3.5: Die asymptotische Kovarianz  $\sigma_{0,0}$  bei  $(0,1)$ -Perkolations im planaren Poisson-Delaunay-Mosaik mit Intensität  $\gamma = 1$

zusammengesetzt werden kann. Die so erhaltenen zufälligen Mosaike sind stationär. Ohne Einschränkung nehmen wir in dieser Arbeit an, dass die Archimedischen Gitter so skaliert und rotiert sind, dass alle Kanten Länge eins haben und sie wie in Abbildung 1.3 orientiert sind, das heißt, die Kanten sind entweder senkrecht oder haben Steigung  $0, \pm\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}$  oder  $\pm 1$ .

Die Archimedischen Gitter sind bekannte und viel untersuchte Perkolationsmodelle. Einige ihrer kritischen Wahrscheinlichkeiten sind mathematisch exakt bekannt, vergleiche [11, 19, 49, 50] und [6] für einen Überblick, für die restlichen existieren recht genaue Simulationen, vergleiche [16, 49].

### 3.3.1 Hilfsmittel

Da die Archimedischen Gitter eine periodische Struktur haben, wird sich die Fourier-Reihen-Darstellung als nützlich erweisen. Ist  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ein Hilbertraum mit einer abzählbaren Orthonormalbasis  $B$ , so gilt für  $f \in H$  die *Fourier-Reihen-Darstellung*

$$f = \sum_{b \in B} \langle f, b \rangle_H b \quad (3.18)$$

und die Skalare  $\langle f, b \rangle_H$  werden *Fourier-Koeffizienten* von  $f$  genannt, vergleiche [1, Theorem 3.4.8]. Diese Reihe konvergiert nach Theorem 3.6.2 in [1] *unbedingt*, das heißt, der Reihenwert bleibt beim Verändern der Summationsreihenfolge erhalten. Außerdem wird die *Parsevalsche Gleichung*

$$\langle f, f \rangle_H = \sum_{b \in B} |\langle f, b \rangle_H|^2, \quad (3.19)$$

vergleiche [1, Theorem 3.4.5], bei der Berechnung von Varianzen ein geeignetes Hilfsmittel sein.

Hier verwenden wir den Hilbertraum  $H = L_2([0, 1]^2)$  der quadratisch integrierbaren komplexwertigen Funktionen auf  $[0, 1]^2$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L_2} := \int_{[0,1]^2} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

wobei  $\bar{z}$  die zu  $z \in \mathbb{C}$  komplex konjugierte Zahl bezeichnet, und der Orthonormalbasis  $B := \{e^{2\pi i \langle z, \cdot \rangle} : z \in \mathbb{Z}^2\}$ , vergleiche [51, S. 235].

Seien nun  $G$  ein planares Gitter und  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine Matrix, sodass  $A[0, 1]^2$  eine Fundamentalzelle von  $G$  ist. Dabei setzen wir für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^2$

$$AM := \{Ax : x \in M\}.$$

Im Folgenden betrachten wir nur Gitter, für die die konvexe Hülle der Gitterpunkte den ganzen Raum überdeckt. Dies ist äquivalent zur Invertierbarkeit von  $A$ . Ist  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $A\mathbb{Z}^2$ -periodische Funktion, das heißt

$$g(x) = g(x + Az), \quad x \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{Z}^2,$$

so kann  $g$  auch als Funktion auf  $A[0, 1]^2$  aufgefasst werden. Gilt zusätzlich

$$\int_{A[0,1]^2} g(x) \overline{g(x)} dx < \infty,$$

kann man wie folgt eine Fourier-Reihen-Darstellung von  $g$  angeben. Definiert man  $f(x) := g(Ax)$ ,  $x \in [0, 1]^2$ , so ist  $f \in L_2([0, 1]^2)$  und man erhält mit (3.18) die Fourier-Reihen-Darstellung der  $A\mathbb{Z}^2$ -periodischen Funktion  $g$

$$\begin{aligned} g(x) = f(A^{-1}x) &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \langle f, e^{2\pi i \langle z, \cdot \rangle} \rangle_{L_2} e^{2\pi i \langle z, A^{-1}x \rangle} \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \int_{[0,1]^2} g(Ay) e^{-2\pi i \langle z, y \rangle} dy e^{2\pi i \langle z, A^{-1}x \rangle}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Wir werden diese Fourier-Reihen-Darstellung verwenden um auf einem Gitter periodische Funktionen zu untersuchen.

Wir wählen zu jedem Archimedischen Gitter eine Fundamentalzelle der Form  $A[0, 1]^2$  mit

$$A = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $s_1, s_2 > 0$  in Abhängigkeit des jeweiligen Archimedischen Gitters geeignet zu wählen sind. Wegen der vorausgesetzten Orientierung der Gitter existieren solche  $s_1, s_2$  und können wie in Tabelle 3.1 gewählt werden.

| Archimedisches Gitter | $s_1$            | $s_2$            |
|-----------------------|------------------|------------------|
| $(4^4)$               | 1                | 1                |
| $(3^6)$               | 1                | $\sqrt{3}$       |
| $(6^3)$               | 3                | $\sqrt{3}$       |
| $(3, 6, 3, 6)$        | 2                | $2\sqrt{3}$      |
| $(3, 12^2)$           | $3 + 2\sqrt{3}$  | $2 + \sqrt{3}$   |
| $(4, 8^2)$            | $2 + 2/\sqrt{2}$ | $2 + 2/\sqrt{2}$ |
| $(4, 6, 12)$          | $3 + \sqrt{3}$   | $3 + 3\sqrt{3}$  |
| $(3, 4, 6, 4)$        | $1 + \sqrt{3}$   | $3 + \sqrt{3}$   |
| $(3^2, 4, 3, 4)$      | $1 + \sqrt{3}$   | $1 + \sqrt{3}$   |
| $(3^3, 4^2)$          | $2 + \sqrt{3}$   | 1                |
| $(3^4, 6)$            | 7                | $15\sqrt{3}/2$   |

Tabelle 3.1: Einträge  $s_1, s_2$  der Diagonalmatrix  $A$ , die die hier verwendete Fundamentalzelle der Archimedisches Gitter bestimmt

Wir bezeichnen die Menge der  $k$ -Seiten,  $k \in \{0, 1, 2\}$ , eines nicht randomisierten Archimedisches Gitters mit  $Y_k$  und für einen auf der Fundamentalzelle  $A[0, 1]^2$  gleichverteilten Zufallsvektor  $\xi$  setzen wir  $X_k := Y_k + \xi$ , das heißt,  $X_k$  ist die Menge der  $k$ -Seiten des stationären zufälligen Gitters. Im Folgenden werden wir verschiedene Typen von Zellen, Kanten und Knoten unterscheiden. Dabei sind zwei  $k$ -Seiten  $S_1, S_2$  vom gleichen Typ, wenn es ein  $z \in \mathbb{Z}^2$  gibt mit  $S_1 = S_2 + Az$ . Insbesondere gilt dann  $|\mathcal{S}_m(S_1)| = |\mathcal{S}_m(S_2)|$ , die Umkehrung ist aber im Allgemeinen falsch. Die Abbildung, die einer  $k$ -Seite ihren Typ zuordnet, bezeichnen wir im Folgenden mit  $T$ . Wegen der Periodizität des Gitters und der Definition des Typs existiert zu jedem Typ  $\tau \in T(Y_k)$  genau eine  $k$ -Seite  $S$  mit  $T(S) = \tau$  und  $s(S) \in A[0, 1]^2$ . Mit dieser  $k$ -Seite  $S$  definieren wir die typische Seite  $S_\tau$  vom Typ  $\tau$  durch  $S_\tau := S - s(S)$  und wir setzen  $v_\tau := s(S)$ . Mit diesen Bezeichnungen folgt nun

$$\{S \in Y_k : T(S) = \tau\} = \{S_\tau + v_\tau + Al : l \in \mathbb{Z}^2\} \quad (3.21)$$

für  $k \in \{0, 1, 2\}$  und  $\tau \in T(Y_k)$ .

Die Intensität  $\gamma_k$  berechnet sich durch die Anzahl der Zentren von  $k$ -Seiten in der Fundamentalzelle geteilt durch das Volumen der Fundamentalzelle. Da die Fundamentalzelle beschränkt ist, können nach den definierenden Eigenschaften eines Mosaiks nur endlich viele  $k$ -Seiten die Fundamentalzelle schneiden und die Intensitäten sind somit endlich. Weiter gibt es für  $\tau \in T(Y_k)$  in jeder Fundamentalzelle genau ein Zentrum einer  $k$ -Seite von Typ  $\tau$ . Damit folgt, dass es nur endlich viele unterschiedliche Typen von  $k$ -Seiten geben kann.

### 3.3.2 Asymptotische Erwartungswerte der inneren Volumina

Hier werden wir nun zeigen, dass die Archimedisches Gitter die Voraussetzung aus Theorem 2.1.1 für beliebige Beobachtungsfenster erfüllen und die mittleren inneren Volumina der schwarzen Teilmenge bei  $(m, n)$ -Perkolation somit existieren.

**Theorem 3.3.1** *Alle Archimedisches Gitter erfüllen die Voraussetzung (2.10).*

*Beweis:* Seien  $i, k \in \{0, 1, 2\}$ . Setzt man im deterministischen Archimedisches Gitter

für  $\tau \in T(Y_k)$

$$E_\tau := \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(S_\tau + v_\tau)| \right)^{k-1} V_i(S_\tau)^2,$$

so ist  $E_\tau$  für alle  $\tau \in T(Y_k)$  endlich und es gilt im randomisierten Archimedischen Gitter

$$\mathbb{E}_k^0 \left[ \left( \sum_{l=0}^k |\mathcal{S}_l(0)| \right)^{k-1} V_i(S(0))^2 \right] = \sum_{\tau \in T(Y_k)} |T(Y_k)|^{-1} E_\tau,$$

denn die Nachbarschaften von  $k$ -Seiten des gleichen Typs sind identisch und die inneren Volumina sind translationsinvariant. Da es nur endlich viele Typen von  $k$ -Seiten gibt, ist dieser Ausdruck wohldefiniert und endlich.  $\square$

Nun kann mit Theorem 2.1.1 die mittlere Euler-Charakteristik bei Zellen-, Knoten- und Kantenperkolation bestimmt werden.

**Korollar 3.3.2** *Für ein Archimedisches Gitter  $(n_1, \dots, n_z)$  gilt bei Zellenperkolation*

$$\delta_0(p) = -\gamma_0 \frac{z}{2} p(1-p) + \gamma_0(1-p) - \gamma_0(1-p^z),$$

bei Kantenperkolation

$$\delta_0(p) = \gamma_0 - \gamma_0 \frac{z}{2} p - \gamma_0(1-p)^z + \gamma_0 \sum_{i=1}^z \frac{p^{n_i}}{n_i}$$

und bei Knotenperkolation

$$\delta_0(p) = \gamma_0 p - \gamma_0 \frac{z}{2} p^2 + \gamma_0 \sum_{i=1}^z \frac{p^{n_i}}{n_i}.$$

*Beweis:* Setzt man

$$p_{k,m}(r) := \mathbb{P}_k^0(|\mathcal{S}_m(0)| = r), \quad k \in \{0, \dots, d\}, r \in \mathbb{N},$$

so sieht man leicht, dass  $p_{0,2}(r) = \mathbf{1}\{r = z\}$  und

$$\gamma_2 p_{2,0}(r) = \gamma_0 \sum_{i=1}^z \mathbf{1}\{n_i = r\} \frac{1}{n_i}, \quad r \in \mathbb{N},$$

gilt. Da die Archimedischen Gitter planar sind, erhält man außerdem  $p_{0,1}(r) = p_{0,2}(r)$  und  $p_{2,1}(r) = p_{2,0}(r)$  für  $r \in \mathbb{N}$ . Weiter gilt nach Theorem 10.1.6 in [44]  $\gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_2$  und

$$\mathbb{E}_0^0[|\mathcal{S}_2(0)|] = 2 + 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_0}.$$

Da nach Definition der Archimedischen Gitter  $\mathbb{E}_0^0[|\mathcal{S}_2(0)|] = z$  gilt, folgt mit diesen Überlegungen

$$\gamma_2 = \gamma_0 \frac{z-2}{2} \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_2 = \gamma_0 \frac{z}{2}.$$

Mit einfachen Rechnungen folgen aus Theorem 2.1.1 nun die Formeln für die mittlere Euler-Charakteristik.  $\square$

### 3.3.3 Diskussion der asymptotischen Kovarianzstruktur der inneren Volumina

In diesem Unterabschnitt werden wir die Voraussetzungen von Theorem 2.1.4 und die vom Beobachtungsfenster abhängigen asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  für verschiedene Beobachtungsfenster diskutieren. Die Voraussetzung (2.18) kann analog zur Endlichkeitsvoraussetzung (2.10) gezeigt werden und ist somit für alle Beobachtungsfenster erfüllt. Die verbleibenden Voraussetzungen, (2.20) und die Existenz der asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$ , sind im Allgemeinen nicht einfach nachzurechnen. Dennoch vermuten wir, dass die Archimedischen Gitter die Voraussetzungen von Theorem 2.1.4 erfüllen und die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  sogar null sind.

Wir werden nun die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  und insbesondere  $\rho_{0,0}^{0,0}(p)$  etwas genauer untersuchen. Dazu sei im Folgenden die Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(s_1, s_2)$  wie in Tabelle 3.1 gewählt, sodass  $A[0, 1]^2$  eine Fundamentalzelle des betrachteten Archimedischen Gitters ist. Weiter seien  $j, k \in \{0, 1, 2\}$ ,  $\tau \in T(Y_k)$ ,  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $\zeta \in A[0, 1]^2$ . Definiert man

$$N_{j,k}^\tau(K, \zeta) := \sum_{S \in Y_k} V_j(S) \mathbf{1}\{s(S) + \zeta \in K\} \mathbf{1}\{T(S) = \tau\}$$

und

$$R_{j,k}^\tau(K, \zeta) := \left( \sum_{S \in Y_k} V_j((S + \zeta) \cap K) \mathbf{1}\{T(S) = \tau\} \right) - N_{j,k}^\tau(K, \zeta),$$

so gilt

$$\sum_{S \in Y_k} V_j((S + \zeta) \cap K) = \sum_{\tau \in T(Y_k)} (N_{j,k}^\tau(K, \zeta) + R_{j,k}^\tau(K, \zeta)).$$

Da  $R_{j,k}^\tau(K, \cdot)$  nur  $k$ -Seiten betrachtet, die den Rand von  $K$  schneiden, können wir  $R_{j,k}^\tau$  als Randeffekt interpretieren. Insbesondere gilt  $R_{0,0}^\tau(\cdot, \cdot) = 0$ .

Für einen auf der Fundamentalzelle  $A[0, 1]^2$  gleichverteilten Zufallsvektor  $\xi$  werden wir die asymptotische Varianz der Funktionale  $N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)$  nach Teilen durch  $t$  nun für einige Beobachtungsfenster  $W$  berechnen. Dabei werden wir sowohl auf Beobachtungsfenster stoßen, für die diese Varianz null ist, als auch auf welche, für die sie divergiert. Ist diese Varianz für  $\tau \in T(Y_k)$  null, so folgt aus der Hölder-Ungleichung  $\rho_{i,j}^{k,l}(p) = 0$ , falls die asymptotische Varianzen der Randeffekte ebenfalls null sind, das heißt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(R_{j,k}^\tau(W_t, \xi)) = 0, \quad \tau \in T(Y_k),$$

da das Polynom  $f_{m,n}^{k,|S_m(S)|}$  bei gegebenem Typ  $\tau$  der  $k$ -Seite  $S$  deterministisch ist. Wegen  $R_{0,0}^\tau(\cdot, \cdot) = 0$  ist die asymptotische Varianz von  $R_{0,0}^\tau$  immer null und es folgt insbesondere  $\rho_{0,0}^{0,0}(p) = 0$ , falls die Varianz von  $N_{0,0}^\tau(W_t, \xi)$  nach Teilen durch  $t$  gegen null konvergiert.

Wir untersuchen die asymptotischen Varianzen von  $N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)$  zunächst für das Beobachtungsfenster  $W := B(0, 1/\sqrt{\pi})$ , also einen Kreis mit Volumen eins. David Kendall und Robert Rankin haben bereits in [18] gezeigt, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)) = 0$$

gilt, vergleiche auch [17]. Um einen Eindruck von den dort verwendeten Methoden zu bekommen, werden wir die Rechnung nun skizzieren. Wegen (3.21),  $s(S_\tau) = 0$ , der Translationskovarianz des Steiner-Punktes und der Translationsinvarianz der inneren Volumina gilt

$$N_{j,k}^\tau(W_t, \zeta) = V_j(S_\tau) \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}\{v_\tau + Al + \zeta \in W_t\}.$$

Weiter ist die Funktion  $N_{j,k}^\tau(W_t, \cdot)$   $A\mathbb{Z}^2$ -periodisch und man erhält mit (3.20) die Fourier-Reihen-Darstellung

$$N_{j,k}^\tau(W_t, \zeta) = V_j(S_\tau) \sum_{z \in \mathbb{Z}^2} a_{j,k}^\tau(z) e^{2\pi i \langle z, A^{-1}\zeta \rangle}, \quad \zeta \in A[0, 1)^2,$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{j,k}^\tau(z) &:= \int_{[0,1]^2} N_{j,k}^\tau(W_t, Ax) e^{-2\pi i \langle z, x \rangle} dx \\ &= V_j(S_\tau) \int_{[0,1]^2} \sum_{l \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{1}\{v_\tau + A(l+x) \in W_t\} e^{-2\pi i \langle z, x \rangle} dx \\ &= V_j(S_\tau) \int \mathbf{1}\{v_\tau + Ax \in W_t\} e^{-2\pi i \langle z, x \rangle} dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ist  $\xi$  ein auf der Fundamentalzelle  $A[0, 1)^2$  gleichverteilter Zufallsvektor, so folgt mit dem Transformationsatz

$$\mathbb{E}[N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)] = \frac{1}{\lambda_2(A[0, 1)^2)} \int_{A[0,1]^2} N_{j,k}^\tau(W_t, \zeta) d\zeta = \int_{[0,1]^2} N_{j,k}^\tau(W_t, Ax) dx = a_{j,k}^\tau(0)$$

und für die Varianz von  $N_{j,k}^\tau(W_t, \cdot)$  folgt mit dessen Fourier-Reihen-Darstellung und dem Transformationsatz

$$\begin{aligned} \text{Var}(N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)) &= \mathbb{E}[|N_{j,k}^\tau(W_t, \xi) - \mathbb{E}[N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)]|^2] \\ &= \frac{1}{\lambda_2(A[0, 1)^2)} \int_{A[0,1]^2} \left| \sum_{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a_{j,k}^\tau(z) e^{2\pi i \langle z, A^{-1}\zeta \rangle} \right|^2 d\zeta \\ &= \int_{[0,1]^2} \left| \sum_{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a_{j,k}^\tau(z) e^{2\pi i \langle z, \zeta \rangle} \right|^2 d\zeta \\ &= \left\langle \sum_{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a_{j,k}^\tau(z) e^{2\pi i \langle z, \cdot \rangle}, \sum_{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} a_{j,k}^\tau(z) e^{2\pi i \langle z, \cdot \rangle} \right\rangle_{L_2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun mit der Parseval-Gleichung (3.19) und der Orthonormalität des Systems  $\{e^{2\pi i \langle z, \cdot \rangle} : z \in \mathbb{Z}^2\}$

$$\text{Var}(N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} |a_{j,k}^\tau(z)|^2. \quad (3.23)$$

Nun werden wir die Fourier-Koeffizienten  $a_{j,k}^\tau(z)$  für  $z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  berechnen. Substituiert

man in (3.22)  $v_\tau + Ax$  durch  $y$ , so erhält man mit der Euler-Formel

$$\begin{aligned} a_{j,k}^\tau(z) &= V_j(S_\tau) \frac{e^{2\pi i \langle z, A^{-1}v_\tau \rangle}}{\det(A)} \int \mathbf{1}\{\|y\|^2 \leq t/\pi\} e^{-2\pi i \langle z, A^{-1}y \rangle} dy \\ &= V_j(S_\tau) \frac{e^{2\pi i \langle z, A^{-1}v_\tau \rangle}}{\det(A)} \int \mathbf{1}\{\|y\|^2 \leq t/\pi\} (\cos(2\pi z^\top A^{-1}y) - i \sin(2\pi z^\top A^{-1}y)) dy, \end{aligned}$$

wobei  $\top$  Transposition bezeichnet. Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, integriert sich der Imaginärteil des Integranden zu null. Wendet man Satz 502 in [21] auf den Realteil an, so ergibt sich

$$a_{j,k}^\tau(z) = V_j(S_\tau) \frac{e^{2\pi i \langle z, A^{-1}v_\tau \rangle}}{\det(A)} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{z^\top A^{-1}(A^{-1})^\top z}} J_1(2\pi\sqrt{t}\sqrt{z^\top A^{-1}(A^{-1})^\top z}), \quad (3.24)$$

wobei

$$J_z(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+z}}{\Gamma(z+m+1) m!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

für  $z \in \mathbb{Z}$  die *Bessel-Funktionen erster Gattung* bezeichnet und  $\Gamma(\cdot)$  die Gammafunktion. Weiter existiert nach Satz 516 in [21] ein  $c > 0$  mit

$$|J_1(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{|\cos(x - 3\pi/4)|}{\sqrt{x}} + cx^{-3/2} \leq (1+c)x^{-1/2}, \quad x \geq 1. \quad (3.25)$$

Da  $A = \text{diag}(s_1, s_2)$  eine Diagonalmatrix ist, gilt  $z^\top A^{-1}(A^{-1})^\top z = \left(\frac{z_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{s_2}\right)^2$  für  $z = (z_1, z_2)^\top$  und es folgt mit (3.23), (3.24) und (3.25) für genügend großes  $t$

$$\frac{1}{t} \text{Var}(N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)) \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{V_j(S_\tau)^2 (1+c)^2}{\det(A)^2 2\pi} \sum_{z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{\left(\left(\frac{z_1}{s_1}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{s_2}\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Für diese Koeffizienten ist die Reihe die Epsteinsche Zetafunktion an der Stelle  $3/2$  und somit konvergent, vergleiche [33]. Damit ist der Grenzwert für  $t \rightarrow \infty$  null und wir haben insbesondere gezeigt, dass die asymptotische Varianz  $\rho_{0,0}^{0,0}(p)$  für einen Kreis als Beobachtungsfenster nicht nur existiert, sondern für alle Archimedischen Gittern sogar null ist.

Bezeichnet nun  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine Matrix mit  $\det(B) = 1/4$ , so betrachten wir im Folgenden das Beobachtungsfenster  $W := B[-1, 1]^2$ . Mit zum Kreisfall analogen Berechnungen erhält man, dass die Varianz von  $N_{j,k}^\tau(W_t, \xi)$  für einen auf der Fundamentalzelle  $A[0, 1]^2$  gleichverteilten Zufallsvektor  $\xi$  die Gleichung (3.23) mit

$$a_{j,k}^\tau(z) = V_j(S_\tau) \int \mathbf{1}\{v_\tau + Ax \in W_t\} e^{-2\pi i \langle z, x \rangle} dx$$

erfüllt. Substituiert man  $B^{-1}(v_\tau + Ax)$  durch  $y$  und setzt  $u = (u_1, u_2)^\top := (A^{-1}B)^\top z$

für  $z \in \mathbb{Z}^2$ , so folgt mit einer einfachen Integration und der Euler-Formel

$$\begin{aligned} a_{j,k}^\tau(z) &= V_j(S_\tau) \frac{e^{2\pi i \langle z, A^{-1} v_\tau \rangle}}{\det(B^{-1}A)} \int \mathbf{1}\{y \in [-\sqrt{t}, \sqrt{t}]^2\} e^{-2\pi i \langle z, A^{-1} B y \rangle} dy \\ &= V_j(S_\tau) \frac{e^{2\pi i \langle z, A^{-1} v_\tau \rangle}}{\det(B^{-1}A)} \left( \mathbf{1}\{u_1 = u_2 = 0\} 4t \right. \\ &\quad + \mathbf{1}\{u_1 = 0, u_2 \neq 0\} \frac{2\sqrt{t}}{\pi u_2} \sin(2\pi u_2 \sqrt{t}) \\ &\quad + \mathbf{1}\{u_1 \neq 0, u_2 = 0\} \frac{2\sqrt{t}}{\pi u_1} \sin(2\pi u_1 \sqrt{t}) \\ &\quad \left. + \mathbf{1}\{u_1, u_2 \neq 0\} \frac{1}{\pi^2 u_1 u_2} \sin(2\pi u_1 \sqrt{t}) \sin(2\pi u_2 \sqrt{t}) \right). \end{aligned}$$

Zusammen mit (3.23) folgt, dass die asymptotische Varianz von  $N_{j,k}^\tau$  divergiert, falls  $u_1$  oder  $u_2$  null werden können. Gilt  $u_1, u_2 \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ , so wird die Doppelreihe wegen der Sinusterme im Zähler vermutlich konvergieren.

Ist  $B = \text{diag}(1/2, 1/2)$  die entsprechend normierte Einheitsmatrix, so können  $u_1 = z_1/(2s_1)$  und  $u_2 = z_2/(2s_2)$  null werden und die asymptotische Varianz von  $N_{j,k}^\tau$  divergiert also. Da diese asymptotischen Varianzen für einen Kreis als Beobachtungsfenster gegen null konvergieren, hängt  $\rho_{0,0}^{0,0}(p)$  also insbesondere von der Form des Beobachtungsfensters ab.

Die Funktionale  $R_{j,k}^\tau(W_t, \cdot)$  sind schwieriger zu bestimmen. Da sie für beliebiges Beobachtungsfenster  $W$   $A\mathbb{Z}^2$ -periodisch sind, kann man wieder eine Fourier-Reihendarstellung verwenden und erhält eine zu (3.23) analoge Darstellungsform der Varianz von  $R_{j,k}^\tau(W_t, \xi)$  mit zugehörigen Fourier-Koeffizienten. Für festes  $j$  und  $k$  lassen sich die Funktionale  $R_{j,k}^\tau(W_t, \cdot)$  und damit auch die zugehörigen Fourier-Koeffizienten mit Hilfe der Inklusions-Exklusions-Formel explizit angeben. Allerdings lassen sich die Fourierkoeffizienten der Randeffekte für keines der hier betrachteten Beobachtungsfenster leicht geeignet abschätzen um die Konvergenz der Doppelreihe in (3.23) zu zeigen.

Die Varianz in Voraussetzung (2.20) kann man wieder mit einer Fourier-Reihendarstellung in der Form (3.23) schreiben. Die Fourier-Koeffizienten sind dabei von ähnlicher Form wie die von  $R_{j,k}^\tau(W_t, \cdot)$  und können ebenfalls nicht leicht geeignet abgeschätzt werden.

Wir vermuten dennoch, dass die Voraussetzungen aus Theorem 2.1.4 für geeignete Beobachtungsfenster erfüllt sind. Dabei könnte ein „geeignetes Beobachtungsfenster“ ein Kreis sein oder ein Polytop der Form  $B[-1, 1]^2$ , wobei die Matrix  $B$  so zu wählen ist, dass für  $z \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$  keine Komponente von  $u$  null werden kann. Eine Matrix mit irrationalen Einträgen, zum Beispiel

$$B = \frac{1}{2\sqrt{e^2 - 1}} \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix},$$

kann dies erfüllen. Weiter vermuten wir, dass die asymptotischen Kovarianzen  $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$  null sind, falls sie existieren. In diesem Fall hängt die asymptotische Kovarianzstruktur der inneren Volumina bei  $(m, n)$ -Perkolation auf den Archimedischen Gittern nur von Größen der lokalen Nachbarschaft der typischen  $k$ -Seiten ab, die durch einfaches Abzählen bestimmt werden können.

---

## Kapitel 4

# Zentrale Grenzwertsätze

---

Zentrale Grenzwertsätze wurden in der stochastischen Geometrie für viele Modelle mit unterschiedlichen Methoden bewiesen, von denen wir hier nur einige nennen wollen. Mit der Steinschen Methode kann man eine obere Schranke für den Abstand zweier Verteilungen bezüglich einer Metrik für Wahrscheinlichkeitsmaße erhalten. Sie geht auf Charles Stein [47] zurück, der 1972 eine Schranke für den Kolmogorov-Abstand zwischen der Verteilung einer Summe von  $m$ -abhängigen Zufallsvariablen und der Standardnormalverteilung erhalten und damit Konvergenzraten bestimmt und einen zentralen Grenzwertsatz gezeigt hat. Aufbauend auf dieser Arbeit und einer zweiten [48] haben Pierre Baldi und Yosef Rinott [2] einen zentralen Grenzwertsatz für Abhängigkeitsgraphen entwickelt. Solche zentralen Grenzwertsätze für Abhängigkeitsgraphen bildeten dann die Grundlage für die Stabilisierungstheorie, die in dieser Arbeit verwendet wird.

Die Stabilisierungstheorie in der heutigen Form geht auf Mathew Penrose und Joseph Yukich zurück, vergleiche [39–41]. Bezeichnet  $\mu \subseteq \mathbb{R}^d$  eine zufällige lokal-endliche Punktmenge und ist  $\xi : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion, so stabilisiert das Funktional  $\xi$ , falls es für  $x \in \mathbb{R}^d$  einen endlichen aber möglicherweise zufälligen Radius  $R = R(x)$  gibt, sodass Änderungen von  $\mu$  außerhalb von  $B(x, R)$  den Wert von  $\xi(x, \mu)$  nicht beeinflussen. Man unterscheidet verschiedene Arten von Stabilisierung, zum Beispiel exponentielle und polynomielle Stabilisierung, bei denen die Wahrscheinlichkeit, dass der Stabilisierungsradius  $R$  größer als  $r$  ist, exponentiell bzw. polynomiell in  $r$  fällt. Mit dieser Methode wurden viele (auch multivariate) zentrale Grenzwertsätze bewiesen, falls die Punktmenge  $\mu$  ein (inhomogener markierter) Poisson-Prozess oder ein Binomialprozess ist, vergleiche die Arbeiten [39–42] von Mathew Penrose und Joseph Yukich, [36, 37] von Mathew Penrose, [38] von Mathew Penrose und Andrew Wade und [3] von Yuliy Baryshnikov und Joseph Yukich.

In diesem Kapitel zeigen wir mit Mitteln der Stabilisierungstheorie verschiedene multivariate zentrale Grenzwertsätze. Dazu verallgemeinern wir Theorem 2.1 aus der Arbeit [42] von Mathew Penrose und Joseph Yukich, dem ein Resultat von Louis Chen und Qi-Man Shao [8] über Normalapproximation auf Abhängigkeitsgraphen zugrunde liegt. Diese Verallgemeinerung ist Theorem B.3. Im ersten Abschnitt betrachten wir die Oberflächenmaße der schwarzen Teilmenge  $Z$  bei Zellenperkolaton auf dem Poisson-Voronoi-Mosaik und im zweiten Abschnitt untersuchen wir die inneren Volumina der schwarzen Teilmenge  $Z$  bei  $(0, n)$ -Perkolaton auf dem Poisson-Delaunay-Mosaik. Zuletzt zeigen wir einen multivariaten zentralen Grenzwertsatz im ungefärbten Poisson-Voronoi-Mosaik, wobei für die Beweise Resultate aus dem ersten Abschnitt über Zellenperkolaton auf dem Poisson-Voronoi-Mosaik verwendet werden können.

## 4.1 Ein multivariater zentraler Grenzwertsatz für Zellenperkolations auf dem Poisson-Voronoi-Mosaik

In diesem Abschnitt wird ein multivariater zentraler Grenzwertsatz für die Oberflächenmaße der schwarzen Teilmenge  $Z$  bei Zellenperkolations auf einem Poisson-Voronoi-Mosaik in  $\mathbb{R}^d$  bewiesen. Dazu werden wir Theorem B.3 verwenden, das die bereits gezeigte Existenz der asymptotischen Kovarianzen der Oberflächenmaße voraussetzt. Weiter wird gezeigt, dass die asymptotische Kovarianzmatrix unter schwachen Voraussetzungen positiv definit ist. Da wir das  $d$ -te Oberflächenmaß wie in (1.7) definieren, werden in diesen Resultaten insbesondere auch die inneren Volumina behandelt.

### 4.1.1 Der zentrale Grenzwertsatz

Bei Zellenperkolations werden die Zellen unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  schwarz gefärbt und weiß sonst. Da es eine Bijektion zwischen den Voronoi-Zellen und den Punkten des Punktprozesses gibt, legen wir einen unabhängig markierten Punktprozess mit Markenraum  $(\mathbf{M}, \mathcal{M}, \mathbb{P}_{\mathbf{M}}) := (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}), \text{Bern}(p))$  zugrunde, wobei  $\mathcal{P}(\{0, 1\})$  die Potenzmenge von  $\{0, 1\}$  bezeichnet und  $\text{Bern}(p)$  die Bernoulli-Verteilung mit Parameter  $p$ . Zellen, deren Zentren Marke eins haben, werden schwarz gefärbt und die Zellen der Punkte mit Marke null weiß. Weiter bezeichne  $Z$  wie bisher die Vereinigung der schwarzen Zellen des Mosaiks. Wie in den vorherigen Abschnitten sei  $W \in \mathcal{K}^d$  ein konvexer Körper mit Volumen eins, der den Ursprung im Inneren enthält, und wir setzen  $W_t := t^{1/d}W$  für  $t \geq 1$ .

Da sich Poisson-Prozesse verschiedener Intensitäten nur durch eine Skalierung unterscheiden und die Oberflächenmaße homogen sind, sei im Folgenden ohne Einschränkung  $\eta'$  ein unabhängig markierter Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität eins, Markenraum  $(\mathbf{M}, \mathcal{M})$  und Markenverteilung  $\mathbb{P}_{\mathbf{M}}$  und  $\eta$  sei die Projektion von  $\eta'$  auf die erste Komponente, also der zugehörige unmarkierte Poisson-Prozess. Im Folgenden verwenden wir für  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  die Bezeichnung  $B' := B \times \mathbf{M}$ .

In diesem Abschnitt seien  $U_0, \dots, U_d \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  fixiert und wir definieren den Vektor  $U := (U_0, \dots, U_d)$ . Wegen Theorem 2.2.3 und Theorem 3.1.11 existieren die asymptotischen Kovarianzen

$$\sigma_{i,j}^U(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\Psi_i(Z \cap W_t, U_i), \Psi_j(Z \cap W_t, U_j))$$

für  $i, j \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$ . Die zugehörige Kovarianzmatrix wird mit

$$\Sigma^U := (\sigma_{i,j}^U(p))_{i,j \in \{0, \dots, d\}}$$

bezeichnet. Mit den eingeführten Bezeichnungen lässt sich nun ein multivariater zentraler Grenzwertsatz für die Oberflächenmaße formulieren, wobei  $\mathcal{N}(v, A)$  für einen Vektor  $v$  und eine symmetrische und positiv-semidefinite Matrix  $A$  die multivariate Normalverteilung mit Erwartungswertvektor  $v$  und Kovarianzmatrix  $A$  sei und  $\xrightarrow{d}$  Konvergenz in Verteilung bedeutet.

**Theorem 4.1.1** *Setzt man für  $K \in \mathcal{K}^d$*

$$\Psi(Z \cap K, U) := (\Psi_0(Z \cap K, U_0), \dots, \Psi_d(Z \cap K, U_d))^\top,$$

*so gilt für  $t \rightarrow \infty$  der multivariate zentrale Grenzwertsatz*

$$\frac{\Psi(Z \cap W_t, U) - \mathbb{E}[\Psi(Z \cap W_t, U)]}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma^U).$$

Statt der Oberflächenmaße von  $Z$  in einem Beobachtungsfenster  $W_t$  kann man für  $i, k \in \{0, \dots, d\}$  auch die Funktionale

$$\sum_{S \in X_k^1} \Psi_i(S \cap W_t, U_i)$$

betrachten. Für diese Funktionale kann ganz analog ein multivariater zentraler Grenzwertsatz gezeigt werden, wobei der Beweis sogar etwas einfacher wird.

#### 4.1.2 Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Zunächst mache man sich klar, dass es keinen Unterschied macht, ob man einen Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}^d$  der Intensität eins erzeugt und ihn dann mit dem Beobachtungsfenster  $W_t$  schneidet oder einen Poisson-Prozess mit Intensität  $t$  in dem festen Beobachtungsfenster  $W$  erzeugt und ihn dann mit  $t^{1/d}$  skaliert. Betrachtet man allerdings die zugehörigen Voronoi-Mosaik, so macht es einen Unterschied, ob man ein Mosaik bezüglich eines Poisson-Prozesses der Intensität eins auf dem ganzen Raum erzeugt und dann mit dem Beobachtungsfenster  $W_t$  schneidet oder ob man ein Mosaik bezüglich eines auf dem Beobachtungsfenster  $W$  konzentrierten Punktprozesses der Intensität  $t$  bildet, es mit  $W$  schneidet und dann skaliert. Diese Unterschiede liegen nur am Rand des Beobachtungsfensters, sodass der Anteil der Zellen an dem Oberflächenmaß von  $Z$ , die „genügend weit“ vom Rand entfernt sind, in beiden Modellen gleich ist. Da Theorem 2.1 in der Arbeit [42] von Mathew Penrose und Joseph Yukich Funktionale eines auf dem Beobachtungsfenster  $W$  konzentrierten markierten Poisson-Prozesses der Intensität  $t$  behandelt, betrachten wir zunächst nur schwarze Zellen, die „genügend weit“ vom Rand entfernt sind. Die dabei nicht berücksichtigten Randeffekte werden getrennt untersucht.

Eine Zelle ist „genügend weit“ vom Rand des Beobachtungsfensters entfernt, wenn die in (3.3) definierte Voronoi-Flower komplett im Beobachtungsfenster enthalten ist. Wegen Lemma 3.1.6 gibt es bei solchen Zellen keine Randeffekte. Um zu überprüfen, ob die Voronoi-Flower im Beobachtungsfenster enthalten ist, müssen die Funktionale in Theorem 2.1 in [42] um ein weiteres Argument, nämlich das Beobachtungsfenster, erweitert werden. Das hier benötigte allgemeinere Theorem ist Theorem B.3, das im Anhang formuliert ist. Der Beweis kann ganz analog zu dem von Theorem 2.1 in [42] geführt werden.

Im Folgenden sei  $\chi' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  eine lokal-endliche Menge und  $\chi$  bezeichne die Projektion von  $\chi'$  auf die erste Komponente, also die zugehörige unmarkierte Punktmenge. Weiter sei  $X_k^*(\chi')$  die Menge aller  $k$ -Seiten des Voronoi-Mosaiks bezüglich  $\chi$ , die nur in schwarzen Zellen liegen.

Da man für die Anwendung von Theorem B.3 das Oberflächenmaß von  $Z$  in die Anteile der einzelnen Punkte des zugrunde liegenden Punktprozesses aufspalten muss, definieren wir nun Funktionale  $\xi^i$ ,  $i \in \{0, \dots, d\}$ , die diesen Anteil eines Punktes an dem Oberflächenmaß von  $Z$  beschreiben, falls die Voronoi-Flower des betrachteten Punktes im Beobachtungsfenster enthalten ist. Für  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  und  $K \in \mathcal{K}^d$  definieren wir

$$\begin{aligned} \xi^i((x, m), \chi', K) := & \sum_{k=i}^d \frac{(-1)^{d-k}}{d-k+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_k(C(x, \chi^x))} \Psi_i(S, U_i) \mathbf{1}\{S \in X_k^*(\chi' \cup \{(x, m)\})\} \\ & \times \mathbf{1}\{F(x, \chi^x) \subseteq K\}. \end{aligned}$$

Die so definierten Funktionale  $\xi^i$  sind wegen der Translationskovarianz von  $\mathcal{F}_k(\cdot)$ ,  $C(\cdot, \cdot)$  und  $F(\cdot, \cdot)$  und der Translationsinvarianz der Oberflächenmaße  $\Psi_i(\cdot, U_i)$  translationsinvariant, das heißt, es gilt

$$\xi^i((x, m), \chi', K) = \xi^i((x + y, m), \chi' + y, K + y)$$

für  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  und  $K \in \mathcal{K}^d$ . Dabei beziehen sich Translationen von Punkten aus  $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  nur auf die erste Komponente. Definiere nun für  $i \in \{0, \dots, d\}$  und  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\Xi^i(\chi', K) := \sum_{(x, m) \in \chi'} \xi^i((x, m), \chi', K) \quad (4.1)$$

und bezeichne die asymptotischen Kovarianzen dieses Funktionals für einen Poisson-Prozess auf dem skalierten Beobachtungsfenster  $W_t$  mit

$$\tilde{\sigma}_{i,j}^U(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\Xi^i(\eta' \cap W_t', W_t), \Xi^j(\eta' \cap W_t', W_t))$$

für  $i, j \in \{0, \dots, d\}$  und  $p \in [0, 1]$ .

Definiert man für  $i \in \{0, \dots, d\}$ ,  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  und einen konvexen Körper  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\zeta^i((x, m), \chi', K) := \sum_{k=0}^d \frac{(-1)^{d-k}}{d-k+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_k(C(x, \chi^x))} \Psi_i(S \cap K, U_i) \mathbf{1}\{S \in X_k^*(\chi' \cup \{(x, m)\})\}$$

und

$$Z^i(\chi', K) := \sum_{(x, m) \in \chi'} \zeta^i((x, m), \chi', K), \quad (4.2)$$

so erhält man mit der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks, der Additivität der Oberflächenmaße und der Inklusions-Exklusions-Formel

$$\Psi_i(Z \cap W_t, U_i) = Z^i(\eta', W_t).$$

In dieser Darstellung kann man leicht sehen, dass  $\Psi_i(Z \cap W_t, U_i)$  und  $\Xi^i(\eta' \cap W_t', W_t)$  bis auf Randeffekte übereinstimmen, die wir nun beschreiben werden.

Wir definieren für einen konvexen Körper  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $i \in \{0, \dots, d\}$

$$X^i(\chi', K) := Z^i(\chi', K) - \Xi^i(\chi' \cap K', K). \quad (4.3)$$

Es ist leicht zu sehen, dass alle Summanden von  $\Xi^i(\chi' \cap K', K)$  auch in  $Z^i(\chi', K)$  vorkommen. Die restlichen Summanden von  $Z^i(\chi', K)$  sind genau die der Punkte in

$$H(\chi, K) := \{x \in \chi \cap K : F(x, \chi \cap K) \cap K^c \neq \emptyset\} \cup \{x \in \chi \cap K^c : C(x, \chi) \cap K \neq \emptyset\}.$$

Damit kann man die Randeffekte  $X^i$  schreiben als

$$X^i(\chi', K) = \sum_{(x, m) \in \chi'} \zeta^i((x, m), \chi', K) \mathbf{1}_{H(\chi, K)}(x). \quad (4.4)$$

Wir zeigen nun einige Lemmata, die das Anwenden von Theorem B.3 auf die Funktionale  $\xi^i$  und den Nachweis, dass die Randeffekte vernachlässigbar sind, erleichtern werden.

**Lemma 4.1.2** Für  $i \in \{0, \dots, d\}$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(X^i(\eta', W_t)) = 0.$$

*Beweis:* Zunächst bestimmen wir eine geeignete Obermenge von  $H$ . Hat die Voronoi-Flower eines Punktes  $x \in \chi \cap K$  bezüglich  $\chi \cap K$  nicht-leeren Schnitt mit  $K^c$ , so hat auch die Voronoi-Flower von  $x$  bezüglich  $\chi$  nicht-leeren Schnitt mit  $K^c$ , denn durch das Hinzufügen der Punkte aus  $\chi \cap K^c$  kann die Voronoi-Flower zwar kleiner werden, aber dann muss die Zelle  $C(x, \chi)$  Nachbarn in  $\chi \cap K^c$  besitzen. Da die Nachbarn in der Voronoi-Flower enthalten sind, hat also auch die Voronoi-Flower von  $x$  bezüglich  $\chi$  nicht-leeren Schnitt mit  $K^c$ . Außerdem ist die Voronoi-Zelle in der Voronoi-Flower enthalten und zusammen folgt, dass  $H(\chi, K)$  eine Teilmenge von

$$H^+(\chi, K) := \{x \in \chi : F(x, \chi) \cap \partial K \neq \emptyset\} \quad (4.5)$$

ist.

Mit der Poincaré-Ungleichung, vergleiche [53, Remark 1.4], erhält man

$$\text{Var}(X^i(\eta', W_t)) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbf{M}} \mathbb{E}[(X^i(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - X^i(\eta', W_t))^2] \mathbb{P}_{\mathbf{M}}(dm) dx. \quad (4.6)$$

Für  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  ergibt sich mit (4.4) für den Differenzenoperator im Integranden

$$\begin{aligned} X^i(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - X^i(\eta', W_t) &= \zeta^i((x, m), \eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(x) \\ &\quad + \sum_{(y,w) \in \eta'} \zeta^i((y, w), \eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(y) \\ &\quad - \sum_{(y,w) \in \eta'} \zeta^i((y, w), \eta', W_t) \mathbf{1}_{H(\eta, W_t)}(y). \end{aligned}$$

Da die Voronoi-Flower eine Stoppmenge ist, vergleiche Lemma 3.1.6, und die Funktion  $\zeta^i$  an der Stelle  $(y, w) \in \eta'$  sowie die Indikatorfunktion der Menge  $H$  an der Stelle  $y \in \eta$  nur von der Einschränkung des Punktprozesses auf die Voronoi-Flower von  $y$  abhängt, gilt für  $(y, w) \in \eta'$  mit  $x \notin F(y, \eta)$

$$\zeta^i((y, w), \eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(y) = \zeta^i((y, w), \eta', W_t) \mathbf{1}_{H(\eta, W_t)}(y).$$

Da  $x \in F(y, \eta)$  äquivalent zu  $y \in N(x, \eta^x)$  ist, folgt

$$\begin{aligned} &X^i(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - X^i(\eta', W_t) \\ &= \sum_{k=i}^d \frac{(-1)^{d-k}}{d-k+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_k(C(x, \eta^x))} \Psi_i(S \cap W_t, U_i) \mathbf{1}\{S \in X_k^*(\eta' + \delta_{(x,m)})\} \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(x) \\ &\quad + \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{k=i}^d \frac{(-1)^{d-k}}{d-k+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_k(C(y, \eta^x))} \Psi_i(S \cap W_t, U_i) \mathbf{1}\{S \in X_k^*(\eta' + \delta_{(x,m)})\} \\ &\quad \quad \quad \times \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(y) \\ &\quad - \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{k=i}^d \frac{(-1)^{d-k}}{d-k+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_k(C(y, \eta))} \Psi_i(S \cap W_t, U_i) \mathbf{1}\{S \in X_k^*(\eta')\} \mathbf{1}_{H(\eta, W_t)}(y). \end{aligned}$$

Für den Betrag hiervon werden wir nun eine obere Schranke angeben, indem wir die Dreiecksungleichung anwenden und die Oberflächenmaße gegen die auf  $\mathcal{K}^d$  monotonen inneren Volumina abschätzen. Weiter sind die Zellen aller hier betrachteten Punkte in  $\bigcup_{y \in N(x, \eta^x)} C(y, \eta) = \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} C(y, \eta^x) \subseteq B(x, 2R_2(x, \eta^x))$  enthalten und deshalb sind alle Nachbarn dieser Punkte Nachbarn zweiter Ordnung von  $x$  bezüglich  $\eta^x$ . Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, lässt sich die Anzahl der  $k$ -Seiten einer Zelle gegen die  $(d-k)$ -te Potenz der Nachbarzahl abschätzen. Mit diesen Überlegungen folgt

$$\begin{aligned} & |X^i(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - X^i(\eta', W_t)| \\ & \leq f^i(x, \eta^x) \mathbf{1}\{x \in H^+(\eta^x, W_t) \cup N(H^+(\eta^x, W_t), \eta^x) \cup N(H^+(\eta, W_t), \eta^x)\}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei wir für  $x \in \chi$  und  $i \in \{0, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} f^i(x, \chi) & := \sum_{k=i}^d |N(x, \chi)|^{d-k} V_i(C(x, \chi)) \\ & \quad + 2 |N(x, \chi)| \sum_{k=i}^d |N_2(x, \chi)|^{d-k+1} V_i(B(x, 2R_2(x, \chi))) \end{aligned}$$

setzen und die *Voronoi-Nachbarschaft* einer Menge  $L \subseteq \chi$  durch

$$N(L, \chi) := \bigcup_{x \in L} N(x, \chi)$$

definieren. Nun werden wir die Indikatorfunktion auf der rechten Seite von (4.7) abschätzen. Wegen  $\bigcup_{y \in N(x, \eta^x)} C(y, \eta) = \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} C(y, \eta^x) \subseteq B(x, 2R_2(x, \eta^x))$  folgt  $\bigcup_{y \in N(x, \eta^x)} F(y, \eta) = \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} F(y, \eta^x) \subseteq B(x, 6R_2(x, \eta^x))$  und man erhält mit der Definition (4.5) von  $H^+$

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}\{x \in H^+(\eta^x, W_t) \cup N(H^+(\eta^x, W_t), \eta^x) \cup N(H^+(\eta, W_t), \eta^x)\} \\ & \leq \mathbf{1}\{B(x, 6R_2(x, \eta^x)) \cap \partial W_t \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Mit dieser Überlegung, (4.6) und (4.7) folgt nun

$$\frac{1}{t} \text{Var}(X^i(\eta', W_t)) \leq \frac{1}{t} \int \mathbb{E}[f^i(x, \eta^x)^2 \mathbf{1}\{B(x, 6R_2(x, \eta^x)) \cap \partial W_t \neq \emptyset\}] dx.$$

Verwendet man die Translationsinvarianz von  $R_2(\cdot, \cdot)$ ,  $N(\cdot, \cdot)$ ,  $N_2(\cdot, \cdot)$ , die Translationsinvarianz der inneren Volumina und die Stationarität von  $\eta$ , so erhält man mit dem Satz von Fubini

$$\frac{1}{t} \text{Var}(X^i(\eta', W_t)) \leq \mathbb{E}[f^i(0, \eta^0)^2 \lambda_d(\partial W - t^{-1/d} B(0, 6R_2(0, \eta^0)))].$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz für  $t \rightarrow \infty$  gegen null, wobei

$$f^i(0, \eta^0)^2 \lambda_d(W + B(0, 6R_2(0, \eta^0)))$$

für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majorante folgt nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Hölder-Ungleichung aus der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5.  $\square$

Da die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{i,j}(p)$  wegen Theorem 2.2.3 und Theorem 3.1.11 existieren, folgt hieraus zusammen mit Lemma 2.1.3

$$\tilde{\sigma}_{i,j}^U(p) = \sigma_{i,j}^U(p) \quad (4.8)$$

für  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  und  $p \in [0, 1]$ .

Nun werden wir zeigen, dass die oben definierten Funktionale  $\xi^i$  exponentiell stabilisierend sind, vergleiche Definition B.1. Dazu benötigen wir das folgende geometrische Lemma, dessen Beweis nach Lemma 2.5 in der Arbeit [25] von Günter Last und Mathew Penrose zu finden ist.

**Lemma 4.1.3** *Es gibt eine nur von  $W$  abhängige Konstante  $c = c(W) > 0$ , sodass*

$$\lambda_d(W_t \cap B(x, r)) \geq cr^d$$

für  $t \geq 1$ ,  $x \in W_t$  und  $r \in (0, \text{diam}(W_t)]$  gilt.

**Lemma 4.1.4** *Die Funktionale  $\xi^i$  sind für  $i \in \{0, \dots, d\}$  exponentiell stabilisierend.*

*Beweis:* Wir gehen hier ganz ähnlich zu dem Nachweis der exponentiellen Stabilisierung in Abschnitt 6.3 aus [37] vor. Seien  $K_j$ ,  $j \in \{1, \dots, J\}$ , eine endliche Anzahl unbeschränkter abgeschlossener Kreiskegel in  $\mathbb{R}^d$  mit Öffnungswinkel  $\pi/6$  und Spitze im Ursprung, die den ganzen Raum überdecken. Die Zahl  $J$  hängt dabei von der Dimension  $d$  des Raumes ab. Für  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $j \in \{1, \dots, J\}$  sei weiter

$$K_j(x) := K_j + x$$

und  $K_j^+(x)$  bezeichne den abgeschlossenen, zu  $K_j(x)$  konzentrischen Kreiskegel mit Öffnungswinkel  $\pi/3$  und Spitze in  $x$ .

Für  $x \in W_t$  werden wir nun eine obere Schranke für den in Definition B.1 eingeführten Stabilisierungsradius  $R(t^{-1/d}x, t, W)$  definieren. Setze für  $j \in \{1, \dots, J\}$

$$R^j(x, \eta \cap W_t, W_t) := \min\{\|x - y\| : y \in \eta \cap W_t \cap K_j^+(x) \setminus \{x\}\},$$

falls in  $K_j^+(x) \cap W_t$  ein von  $x$  verschiedener Punkt aus  $\eta$  liegt, und andernfalls

$$R^j(x, \eta \cap W_t, W_t) := \text{diam}(K_j(x) \cap W_t).$$

Definiere weiter

$$R^+(x, \eta \cap W_t, W_t) := \max_{j \in \{1, \dots, J\}} R^j(x, \eta \cap W_t, W_t).$$

Nun werden wir mit Hilfe elementarer Geometrie nachrechnen, dass

$$C(x, \eta^x \cap W_t) \cap K_j(x) \subseteq B(x, \|y - x\|) \quad (4.9)$$

für alle  $y \in K_j^+(x) \cap \eta \cap W_t$  mit  $y \neq x$  gilt. Dazu sei  $z \in C(x, \eta^x \cap W_t) \cap K_j(x)$  und wir betrachten die Ebene, die  $x$ ,  $y$  und  $z$  enthält. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $z$  auf der Mittelsenkrechten zwischen  $x$  und  $y$  liegt. Weiter sei  $\delta$  der Winkel zwischen  $y$  und  $z$  am Punkt  $x$ , vergleiche Abbildung 4.1. Da  $y$  insbesondere in  $K_j^+(x)$  liegt, ist  $\delta$  höchstens  $\pi/4$  und man erhält

$$\|x - z\| = \frac{\|x - y\|/2}{\cos(\delta)} \leq \|x - y\|,$$

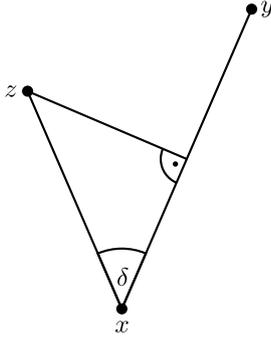


Abbildung 4.1: Skizze zum Nachweis von (4.9)

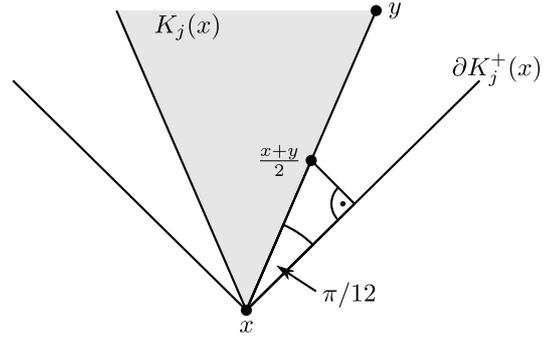


Abbildung 4.2: Skizze zum Nachweis von (4.13)

also (4.9). Damit folgt

$$C(x, \eta^x \cap W_t) \cap W_t \cap K_j(x) \subseteq B(x, R^j(x, \eta \cap W_t, W_t)),$$

also insbesondere

$$C(x, \eta^x \cap W_t) \cap W_t \subseteq B(x, R^+(x, \eta \cap W_t, W_t)). \quad (4.10)$$

Somit können alle Änderungen von  $\eta \cap W_t$  außerhalb von  $B(x, 2R^+(x, \eta \cap W_t, W_t))$  die Zelle  $C(x, \eta^x \cap W_t)$  höchstens außerhalb von  $B(x, R^+(x, \eta \cap W_t, W_t))$  verändern und  $C(x, \eta^x \cap W_t) \cap W_t$  bleibt also unverändert. Damit beeinflussen Änderungen von  $\eta \cap W_t$  außerhalb von  $B(x, 2R^+(x, \eta \cap W_t, W_t))$  die Funktionale  $\xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)$  für eine von  $\eta' \cap W'_t$  unabhängige Zufallsvariable  $M$  mit Verteilung  $\mathbb{P}_M$  nicht und wir können als Stabilisierungsradius

$$R(t^{-1/d}x, t, W) := \lceil 2R^+(x, \eta \cap W_t, W_t) \rceil, \quad x \in W_t, t \geq 1,$$

wählen. Dabei bezeichnet  $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\}$  die *obere Gaußklammer* von  $x \in \mathbb{R}$ . Es bleibt zu zeigen, dass dieser Stabilisierungsradius exponentiell fallenden Tail besitzt.

Mit der Subadditivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes gilt für  $r > 1$

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{P}(R(t^{-1/d}x, t, W) > r) &\leq \sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{P}\left(R^+(x, \eta \cap W_t, W_t) > \frac{r-1}{2}\right) \\ &\leq \sup_{t \geq 1, x \in W_t} \sum_{j=1}^J \mathbb{P}\left(R^j(x, \eta \cap W_t, W_t) > \frac{r-1}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Für den Nachweis der exponentiellen Stabilisierung benötigen wir nun für  $s > 0$  eine geeignete Abschätzung der Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(R^j(x, \eta \cap W_t, W_t) > s) \quad (4.12)$$

für  $j \in \{1, \dots, J\}$ , wozu wir eine Fallunterscheidung vornehmen. Ist der Durchmesser von  $K_j(x) \cap W_t$  höchstens  $s$ , so ist die Wahrscheinlichkeit in (4.12) null. Im Fall  $\text{diam}(K_j(x) \cap W_t) \geq s$  wählen wir ein  $y \in K_j(x) \cap W_t$  mit  $\|y - x\| = s$ . Wegen der Konvexität von  $K_j(x) \cap W_t$  gilt  $(x+y)/2 \in K_j(x) \cap W_t$ . Für  $u := \sin(\pi/12)/2$  werden wir nun

$$B\left(\frac{x+y}{2}, us\right) \subseteq K_j^+(x) \quad (4.13)$$

zeigen. Der Abstand von  $(x+y)/2$  zu dem Rand von  $K_j^+(x)$  ist am kleinsten, wenn  $(x+y)/2$  und damit auch  $y$  auf dem Rand von  $K_j(x)$  liegen, vergleiche Abbildung 4.2. In diesem Fall gilt

$$\sin(\pi/12) = \frac{d((x+y)/2, \partial K_j^+(x))}{s/2}$$

und damit (4.13). Hier nehmen wir eine weitere Fallunterscheidung vor. Enthält die Kugel  $B((x+y)/2, us)$  Punkte aus  $\eta \cap W_t$ , so gilt nach Definition von  $R^j$

$$R^j(x, \eta \cap W_t, W_t) \leq s.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit in (4.12) wieder null. Enthält  $B((x+y)/2, us)$  keine Punkte aus  $\eta \cap W_t$ , so gibt es wegen  $s \leq \text{diam}(K_j(x) \cap W_t)$  und  $u \in (0, 1)$  nach Lemma 4.1.3 eine Konstante  $c > 0$ , die nur von  $W$  abhängt und

$$\lambda_d \left( W_t \cap B \left( \frac{x+y}{2}, us \right) \right) \geq cs^d$$

erfüllt. Damit folgt in diesem Fall für die Wahrscheinlichkeit in (4.12) wegen der Poisson-Eigenschaft von  $\eta$

$$\mathbb{P}(R^j(x, \eta \cap W_t, W_t) > s) \leq \mathbb{P} \left( \eta \cap W_t \cap B \left( \frac{x+y}{2}, us \right) = \emptyset \right) \leq \exp(-cs^d).$$

Zusammen mit (4.11) folgt für  $r > 1$  in allen Fällen

$$\sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{P}(R(t^{-1/d}x, t, W) > r) \leq J \exp \left( -c \left( \frac{r-1}{2} \right)^d \right)$$

und somit ist  $\xi^i$  für alle  $i \in \{0, \dots, d\}$  exponentiell stabilisierend.  $\square$

Zuletzt zeigen wir, dass die Funktionale  $\xi^i$  ein Moment der Ordnung drei besitzen.

**Lemma 4.1.5** *Für  $i \in \{0, \dots, d\}$  hat das Funktional  $\xi^i$  ein Moment der Ordnung drei, das heißt, für eine von  $\eta' \cap W'_t$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariable  $M$  mit Parameter  $p$  gilt*

$$\sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{E}[|\xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3] < \infty.$$

*Beweis:* Seien  $t \geq 1$  und  $x \in W_t$ . Da die Voronoi-Flower eine Stoppmenge ist, sind die Voronoi-Zelle und die Voronoi-Flower von  $x$  bezüglich  $\eta^x \cap W_t$  und bezüglich  $\eta^x$  im Fall  $F(x, \eta^x \cap W_t) \subseteq W_t$  identisch, vergleiche Lemma 3.1.6. Somit erhält man mit der Dreiecksungleichung und elementaren Abschätzungen

$$\mathbb{E}[|\xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3] \leq \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=i}^d \sum_{S \in \mathcal{F}_k(C(x, \eta^x))} \Psi_i(S, U_i) \right)^3 \right].$$

Die Oberflächenmaße  $\Psi_i(S, U_i)$ ,  $S \in \mathcal{F}_k(C(x, \eta^x))$ , können jeweils gegen  $V_i(C(x, \eta^x))$  abgeschätzt werden. Wegen der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks lässt sich die Anzahl der  $k$ -Seiten einer Zelle gegen die  $(d-k)$ -te Potenz der Nachbarzahl abschätzen und man erhält

$$\mathbb{E}[|\xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3] \leq \sum_{k_1, k_2, k_3=i}^d \mathbb{E}[|N(x, \eta^x)|^{3d-k_1-k_2-k_3} V_i(C(x, \eta^x))^3].$$

Da  $C(\cdot, \cdot)$  translationskovariant ist und die inneren Volumina und  $|N(\cdot, \cdot)|$  translationsinvariant, erhält man mit der Stationarität von  $\eta$ , der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3 eine von  $x$  und  $t$  unabhängige endliche obere Schranke und die Momentenbedingung ist erfüllt.  $\square$

Nun können wir den multivariaten zentralen Grenzwertsatz mit der Cramér-Wold-Technik, Theorem B.3 und der eben gezeigten Lemmata beweisen.

*Beweis von Theorem 4.1.1:* Sei  $a = (a_0, \dots, a_d)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$ . Dann genügt es wegen der Cramér-Wold-Technik für den Nachweis von Theorem 4.1.1

$$\sum_{i=0}^d a_i \frac{Z^i(\eta', W_t) - \mathbb{E}[Z^i(\eta', W_t)]}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, a^\top \Sigma^U a) \quad (4.14)$$

für  $t \rightarrow \infty$  zu zeigen. Mit der Definition (4.3) von  $X^i$  gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^d a_i \frac{Z^i(\eta', W_t) - \mathbb{E}[Z^i(\eta', W_t)]}{\sqrt{t}} &= \sum_{i=0}^d a_i \frac{\Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t) - \mathbb{E}[\Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t)]}{\sqrt{t}} \\ &\quad + \sum_{i=0}^d a_i \frac{X^i(\eta', W_t) - \mathbb{E}[X^i(\eta', W_t)]}{\sqrt{t}}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Wir werden nun zeigen, dass der erste Summand auf der rechten Seite in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert null und Varianz  $a^\top \Sigma^U a$  konvergiert und der zweite Summand stochastisch gegen null konvergiert. Mit dem Lemma von Slutsky folgt dann (4.14) und somit Theorem 4.1.1.

Zunächst untersuchen wir die Konvergenz des ersten Summanden auf der rechten Seite von (4.15), wozu wir Theorem B.3 auf das Funktional  $\sum_{i=0}^d a_i \xi^i$  anwenden. Wir definieren eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf  $\mathbb{R}^d$  durch  $\kappa := \mathbf{1}_W$ , die offensichtlich Träger  $W$  hat und  $\|\kappa\|_\infty = 1 < \infty$  erfüllt. Damit ist  $t^{-1/d} \eta' \cap W'$  ein inhomogener, unabhängig markierter Poisson-Prozess mit Intensitätsmaß  $(t\kappa(x) dx) \otimes \mathbb{P}_M(dm)$ . Die Mengen  $A_t$  für  $t \geq 1$  aus Definition B.1 der exponentiellen Stabilisierung setzen wir gleich  $W$ . Da nach Lemma 4.1.4 die Funktionale  $\xi^i$  exponentiell stabilisierend sind, ist klar, dass auch die hier betrachtete Linearkombination der Funktionale  $\xi^i$  exponentiell stabilisiert.

Betrachte nun die Momentenbedingung, siehe Definition B.2. Für eine von  $\eta' \cap W'_t$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariable  $M$  mit Parameter  $p$  muss

$$\sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=0}^d a_i \xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t) \right|^3 \right] < \infty$$

gezeigt werden. Verwendet man die Dreiecksungleichung, die Linearität des Erwar-

ungswertes und die Hölder-Ungleichung, so gilt für  $t \geq 1$  und  $x \in W_t$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=0}^d a_i \xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t) \right|^3 \right] \\
& \leq \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^d |a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}| \mathbb{E}[|\xi^{i_1}((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)| |\xi^{i_2}((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)| \\
& \quad \times |\xi^{i_3}((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|] \\
& \leq \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^d |a_{i_1} a_{i_2} a_{i_3}| (\mathbb{E}[|\xi^{i_1}((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3])^{1/3} \\
& \quad \times (\mathbb{E}[|\xi^{i_2}((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3])^{1/3} (\mathbb{E}[|\xi^{i_3}((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3])^{1/3}.
\end{aligned}$$

Für die nun hier stehenden Erwartungswerte existiert nach Lemma 4.1.5 jeweils eine von  $x$  und  $t$  unabhängige endliche obere Schranke und die Momentenbedingung ist gezeigt.

Nun bleibt nur noch die Existenz und Endlichkeit der asymptotischen Varianz von  $\sum_{i=0}^d a_i \Xi^i$  zu zeigen. Nach (4.8) gilt  $\tilde{\sigma}_{i,j}^U(p) = \sigma_{i,j}^U(p)$  für  $i, j \in \{0, \dots, d\}$  und die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{i,j}^U(p)$  existieren nach Theorem 2.2.3 und Theorem 3.1.11. Damit folgt wegen der Bilinearität der Kovarianz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{i=0}^d a_i \Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t) \right) = \sum_{i,j=0}^d a_i a_j \tilde{\sigma}_{i,j}^U = a^\top \Sigma^U a < \infty.$$

Somit sind alle Voraussetzungen von Theorem B.3 nachgewiesen und es folgt

$$\sum_{i=0}^d a_i \Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, a^\top \Sigma^U a).$$

Nun untersuchen wir die stochastische Konvergenz des zweiten Summanden auf der rechten Seite von (4.15). Wendet man die Tschebychev-Ungleichung an, so erhält man für  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \left| \sum_{i=0}^d a_i (X^i(\eta', W_t) - \mathbb{E}[X^i(\eta', W_t)]) \right| \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{t\varepsilon^2} \text{Var} \left( \sum_{i=0}^d a_i X^i(\eta', W_t) \right).$$

Wegen der Bilinearität der Kovarianz und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{i=0}^d a_i X^i(\eta', W_t) \right) \right| &= \left| \sum_{i,j=0}^d \frac{a_i a_j}{t} \text{Cov}(X^i(\eta', W_t), X^j(\eta', W_t)) \right| \\
&\leq \sum_{i,j=0}^d a_i a_j \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var}(X^i(\eta', W_t))} \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var}(X^j(\eta', W_t))}.
\end{aligned}$$

Da nach Lemma 4.1.2 die Varianz von  $t^{-1/2} X^i(\eta', W_t)$  für  $t \rightarrow \infty$  gegen null konvergiert, konvergiert der zweite Summand auf der rechten Seite von (4.15) stochastisch gegen null und mit dem Lemma von Slutsky folgt die Behauptung.  $\square$

### 4.1.3 Positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrix

In diesem Unterabschnitt werden wir unter schwachen Voraussetzungen die positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrix der Oberflächenmaße der schwarzen Teilmenge  $Z$  nachweisen. Für eine lokal-endliche Menge  $\chi' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  schreiben wir in diesem Unterabschnitt  $Z(\chi')$  anstatt  $Z$  für die Vereinigung aller schwarzen Zellen des Voronoi-Mosaiks bezüglich  $\chi$ , wobei  $\chi$  die Projektion von  $\chi'$  auf die erste Komponente bezeichnet und die Zellen der Punkte mit Marke eins schwarz gefärbt werden.

Wir überlegen uns zunächst, wann das in (4.1) definierte Funktional  $\Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t)$  für  $i \in \{0, \dots, d\}$  fast sicher null ist, denn dann sind die entsprechenden asymptotischen Kovarianzen  $\tilde{\sigma}_{i,j}^U(p)$  ebenfalls null. Da die asymptotischen Kovarianzen  $\tilde{\sigma}_{i,j}^U(p)$  und  $\sigma_{i,j}^U(p)$  gleich sind, ist die asymptotische Kovarianzmatrix  $\Sigma^U$  in diesem Fall die Nullmatrix und damit insbesondere nicht positiv definit.

**Lemma 4.1.6** *Sei  $i \in \{0, \dots, d\}$ . Gilt  $\sigma_{d-1}(U_i) = 0$ , so ist  $\Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t)$  fast sicher null.*

*Beweis:* Für  $i = d$  folgt dies direkt aus der Definition (1.7) des  $d$ -ten Oberflächenmaßes. Betrachte im Folgenden also den Fall  $i < d$ . Ist  $k \in \{i, \dots, d\}$ ,  $P$  ein  $k$ -dimensionales Polytop und  $S \in \mathcal{F}_i(P)$  eine  $i$ -Seite von  $P$ , so gilt für den Normalenkegel in  $S$

$$N(P, S) \subseteq N(S, S) = S^\perp,$$

wobei  $S^\perp$  den zur affinen Hülle von  $S$  orthogonalen Unterraum bezeichnet. Nach (1.8) und der Definition (4.1) von  $\Xi^i$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t) \neq 0) &\leq \mathbb{P}(\exists x \in \eta^{(i)} \cap W_t \text{ mit } \sigma_{d-i-1}(S(x)^\perp \cap U_i) > 0) \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sum_{x \in \eta^{(i)}} \mathbf{1}\{x \in W_t\} \mathbf{1}\{\sigma_{d-i-1}(S(x)^\perp \cap U_i) > 0\} \right]. \end{aligned}$$

Verwendet man nun die Stationarität von  $\eta^{(i)}$ , die aus der Stationarität von  $\eta$  folgt, und das verfeinerte Theorem von Campbell (1.1), so erhält man

$$\mathbb{P}(\Xi^i(\eta' \cap W'_t, W_t) \neq 0) \leq t \gamma_i \mathbb{P}_i^0(\sigma_{d-i-1}(S(0)^\perp \cap U_i) > 0).$$

Da eine nichtnegative Zufallsvariable genau dann fast sicher null ist, wenn ihr Erwartungswert null ist, betrachten wir

$$\nu_i(U) := \mathbb{E}_i^0[\sigma_{d-i-1}(S(0)^\perp \cap U)], \quad U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Da  $\sigma_{d-i-1}$  ein rotationsinvariantes Maß ist und mit dem Poisson-Prozess auch die typische  $i$ -Seite des Poisson-Voronoi-Mosaiks isotrop ist, ist  $\nu_i$  ein rotationsinvariantes Maß auf  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Nach [44, S. 584] ist  $\sigma_{d-1}$  bis auf eine multiplikative Konstante das einzige rotationsinvariante Maß auf  $\mathbb{S}^{d-1}$  und somit folgt die Behauptung.  $\square$

Für  $p \in \{0, 1\}$  ist das Mosaik entweder komplett weiß oder komplett schwarz gefärbt und deswegen gilt  $\Psi_i(Z(\eta') \cap W_t, U_i) = 0$  beziehungsweise  $\Psi_i(Z(\eta') \cap W_t, U_i) = \Psi_i(W_t, U_i)$ . In beiden Fällen ist  $\Psi_i(Z(\eta') \cap W_t, U_i)$  deterministisch und somit ist für  $p \in \{0, 1\}$  die asymptotische Kovarianzmatrix  $\Sigma^U$  singular. Im nächsten Theorem zeigen wir, dass die asymptotische Kovarianzmatrix  $\Sigma^U$  in den restlichen Fällen unter einer zusätzlichen schwachen Voraussetzung positiv definit ist.

Für  $U \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  heißt ein Punkt  $u \in U$  *innerer Punkt* von  $U$ , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit  $B(u, \varepsilon) \cap \mathbb{S}^{d-1} \subseteq U$ . Die Menge aller inneren Punkte von  $U$  bezeichnen wir mit  $\text{int}(U)$ . Borelmengen der Sphäre mit nicht-leerem Inneren haben insbesondere positives sphärisches Lebesguemaß. Das folgende Theorem behandelt nun den Fall  $p \in (0, 1)$  und  $U_0, \dots, U_d \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  mit  $\text{int}(U_j) \neq \emptyset$ . Gilt  $\sigma_{d-1}(U_j) > 0$  für alle  $j \in \{0, \dots, d\}$ , aber gibt es ein  $j_0$  mit  $\text{int}(U_{j_0}) = \emptyset$ , so können wir keine Aussage über die positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrix der Oberflächenmaße machen.

**Theorem 4.1.7** *Seien  $p \in (0, 1)$  und  $U_0, \dots, U_d \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  mit nicht-leerem Inneren. Dann ist die asymptotische Kovarianzmatrix  $\Sigma^U$  positiv definit.*

Im ungefärbten Poisson-Voronoi-Mosaik wurde von Günter Last, Giovanni Peccati und Matthias Schulte als Anwendung ihrer Ergebnisse bereits eine positive untere Schranke für die asymptotischen Varianzen der Funktionale

$$\sum_{S \in X_k} V_i(S \cap W_t),$$

$i \in \{0, \dots, d-1\}$ ,  $k \in \{i, \dots, d\}$ , angegeben, vergleiche Lemma 7.6 in [24]. Allerdings werden in dieser Arbeit keine Formeln für diese asymptotischen Varianzen angegeben und es wird auch keine Aussage über deren Existenz gemacht.

Für den Beweis von Theorem 4.1.7 wird ähnlich wie in Lemma 7.6 aus [24] das folgende Lemma verwendet, das ein Spezialfall von Theorem 5.2 aus der Arbeit [24] von Günter Last, Giovanni Peccati und Matthias Schulte ist. Dafür bezeichnen wir mit  $L_{\eta'}^2$  den Raum aller bezüglich  $\mathbb{P}$  quadratisch integrierbarer Zufallsvariablen  $F$ , sodass  $\mathbb{P}$ -fast sicher  $F = f(\eta')$  gilt. Dabei ist  $f : \mathbf{N}_{\{0,1\}} \rightarrow \mathbb{R}$  eine messbare Funktion, die bis auf  $\mathbb{P}$ -Nullmengen eindeutig durch  $F$  bestimmt ist und im Folgenden *Vertreter* von  $F$  genannt wird. Weiter definieren wir  $\lambda := \lambda_d \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{M}}$  als das Produktmaß des Lebesguemaßes und der Markenverteilung.

**Lemma 4.1.8** *Seien  $F \in L_{\eta'}^2$  und  $f : \mathbf{N}_{\{0,1\}} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Vertreter von  $F$ . Weiter seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $I_1, I_2 \subseteq \{1, \dots, k\}$  mit  $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, k\}$ ,  $B \subseteq (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^k$  messbar und  $c > 0$ , sodass*

$$\left| \mathbb{E} \left[ f \left( \eta' + \sum_{i \in I_1} \delta_{(x_i, m_i)} \right) - f \left( \eta' + \sum_{i \in I_2} \delta_{(x_i, m_i)} \right) \right] \right| \geq c \quad (4.16)$$

für  $\lambda^k$ -fast alle  $((x_1, m_1), \dots, (x_k, m_k)) \in B$  erfüllt ist. Dann gilt

$$\text{Var}(F) \geq \frac{c^2}{4^{k+1}k!} \min_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, k\}} \inf_{\substack{A \subseteq B \\ \lambda^k(A) \geq \lambda^k(B)/2^{k+1}}} \lambda^{|J|}(\Pi_J(A)), \quad (4.17)$$

wobei  $\Pi_J$  die Projektion auf die Komponenten mit Indizes in  $J$  bezeichnet.

*Beweis von Theorem 4.1.7:* Nach Definition ist die asymptotische Kovarianzmatrix  $\Sigma^U$  der Oberflächenmaße genau dann positiv definit, wenn für alle Vektoren  $v = (v_0, \dots, v_d)^\top \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$

$$v^\top \Sigma^U v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{j=0}^d v_j \Psi_j(Z(\eta') \cap W_t, U_j) \right) > 0 \quad (4.18)$$

gilt. Dies werden wir mit Lemma 4.1.8 nachweisen.

Sei  $v = (v_0, \dots, v_d)^\top \in \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$  und setze  $j_0 := \min\{j \in \{0, \dots, d\} : v_j \neq 0\}$ . Weiter definieren wir für  $t \geq 1$  eine messbare Funktion  $f_t : \mathbf{N}_{\{0,1\}} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_t(\cdot) := \sum_{j=0}^d v_j \Psi_j(Z(\cdot) \cap W_t, U_j).$$

Wir werden mit Lemma 4.1.8 die Varianz von  $f_t(\eta')$  geeignet abschätzen. Dazu bestimmen wir zunächst für  $k = d + 2$  eine Teilmenge von  $(\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^k$  in Abhängigkeit von  $v$ , die die Voraussetzungen aus Lemma 4.1.8 erfüllt. Dabei besteht die Schwierigkeit darin, die Existenz eines  $c > 0$  nachzuweisen, für das (4.16) gilt. Dass der Grenzwert der mit Lemma 4.1.8 erhaltenen Schranke (4.17) nach Teilen durch  $t$  für  $t$  gegen unendlich positiv ist, lässt sich dann leicht zeigen.

Seien  $\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^d$ , sodass die Voronoi-Flower des Ursprungs bezüglich der Menge  $\{0, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k\}$  beschränkt ist und die Punkte  $0, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k$  in allgemeiner quadratischer Lage liegen. Dabei liegen die Punkte einer Menge  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  in *allgemeiner quadratischer Lage*, wenn keine  $d + 2$  Punkte aus  $\chi$  auf dem Rand einer Kugel liegen und keine Auswahl von  $l \in \{2, \dots, d + 1\}$  Punkten aus  $\chi$  in einer  $(l - 2)$ -dimensionalen Ebene enthalten ist. Da die Mengen  $U_j$  nach Voraussetzung nicht-leeres Inneres haben, gibt es für  $u \in \text{int}(U_{j_0})$  ein  $\delta > 0$  mit  $B(u, 2\delta) \cap \mathbb{S}^{d-1} \subseteq U_{j_0}$ . Setzt man  $\tilde{U}_{j_0} := B(u, \delta) \cap \mathbb{S}^{d-1}$ , so gilt  $(\tilde{U}_{j_0} + B(0, \delta)) \cap \mathbb{S}^{d-1} \subseteq U_{j_0}$ . Insbesondere besitzt  $\tilde{U}_{j_0}$  innere Punkte. Nun drehen wir die Punkte  $\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k$  so um den Ursprung, dass der Normalenkegel einer  $j_0$ -Seite von  $C(0, \{0, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k\})$  das Innere von  $\tilde{U}_{j_0}$  schneidet. Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  legen wir Kugeln  $K_2, \dots, K_k$  mit Volumen  $\varepsilon$  um die Punkte  $\hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k$ , sodass

$$\Psi_{j_0}(C(0, \{0, x_2, \dots, x_k\}), \tilde{U}_{j_0}) > 0 \quad (4.19)$$

für alle  $x_2 \in K_2, \dots, x_k \in K_k$  gilt. Weiter sei  $R > 0$  so gewählt, dass die Voronoi-Flower des Ursprungs bezüglich  $\{0, x_2, \dots, x_k\}$  für alle  $x_2 \in K_2, \dots, x_k \in K_k$  in  $B(0, R)$  enthalten ist. Mit einer genügend kleinen Skalierung kann eine solche Konfiguration von Kugeln für jedes  $R > 0$  gefunden werden, weshalb wir ohne Einschränkung

$$(2R)^d \kappa_d < 1 \quad (4.20)$$

fordern können.

Definiere nun  $B_1 := (W_t \setminus (\partial W_t + B(0, R))) \times \{1\}$ ,  $B_i := K_i \times \{0\}$  für  $i \in \{2, \dots, k\}$  und

$$B^s := \{((sx_1, m_1), \dots, (sx_k, m_k)) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^k : (x_1, m_1) \in B_1, \\ (x_i - x_1, m_i) \in B_i \text{ für } i = 2, \dots, k\}$$

für  $s \in (0, 1]$ . Für genügend großes  $t$  ist  $B^s$  nicht leer. Weiter setzen wir  $I_1 := \{1, \dots, k\}$  und  $I_2 := \{2, \dots, k\}$ .

Nun zeigen wir, dass die Menge  $B^{s_0}$  für genügend kleines  $s_0 \in (0, 1]$  die Voraussetzung (4.16) für ein geeignetes  $c > 0$  erfüllt. Seien dazu  $((x_1, m_1), \dots, (x_k, m_k)) \in B^1$ . Im Folgenden verwenden wir für  $s \in (0, 1]$  die Abkürzungen

$$\vartheta'_{1,s} := \sum_{i \in I_1} \delta_{(sx_i, m_i)}, \quad \vartheta'_{2,s} := \sum_{i \in I_2} \delta_{(sx_i, m_i)}$$

und die zugehörigen unmarkierten Punktmaße bezeichnen wir mit  $\vartheta_{1,s}$  und  $\vartheta_{2,s}$ . Mit diesen Bezeichnungen und der Dreiecksungleichung erhält man für das Funktional  $f_t$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})]| \\ & \geq |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) = \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & \quad - |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) \neq \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]|. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Liegen keine Punkte von  $\eta$  in  $B(sx_1, sR)$ , so ist  $f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})$  deterministisch und wegen der speziellen Position und Färbung der Punkte in  $\vartheta'_{1,s}$  erhält man mit der Homogenität der Oberflächenmaße und der Monotonie und Translationsinvarianz der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) = \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & = \left| \sum_{j=0}^d v_j \Psi_j(C(sx_1, \vartheta_{1,s}), U_j) \right| e^{-\kappa_d(sR)^d} \\ & \geq \left( |v_{j_0}| s^{j_0} \Psi_{j_0}(C(x_1, \vartheta_{1,1}), U_{j_0}) - \sum_{j=j_0+1}^d |v_j| s^j V_j(B(0, R)) \right) e^{-\kappa_d(sR)^d}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nun werden wir eine obere Schranke für den zweiten Summanden in (4.21) bestimmen. Mit einer Fallunterscheidung bezüglich der Anzahl der Punkte aus  $\eta$  in  $B(sx_1, sR)$  und dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) \neq \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}\{|\eta \cap B(sx_1, sR)| = m\} |f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})|]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da die Punkte  $sx_1, \dots, sx_k$  sowie die Punkte des Poisson-Prozesses in allgemeiner quadratischer Lage liegen, folgt aus der Poisson-Eigenschaft, dass auch die Punkte in  $\eta + \vartheta_{1,s}$  in allgemeiner quadratischer Lage liegen und das zugehörige Voronoi-Mosaik somit normal ist, vergleiche [44, S. 473]. Ist  $\chi' \in \mathbf{N}_{\{0,1\}}$ , sodass das Voronoi-Mosaik bezüglich der Projektion von  $\chi'$  auf die erste Komponente normal ist, so gilt  $\Psi_j(Z(\chi') \cap W_t, U_j) = Z^j(\chi', W_t) = \sum_{(y,w) \in \chi'} \zeta^j((y, w), \chi', W_t)$ , vergleiche die Definition (4.2) von  $Z^j$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} F := |f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})| & = \left| \sum_{j=0}^d v_j \zeta^j((sx_1, m_1), \eta' + \vartheta'_{1,s}, W_t) \right. \\ & \quad + \sum_{(y,w) \in \eta' + \vartheta'_{2,s}} \sum_{j=0}^d v_j \zeta^j((y, w), \eta' + \vartheta'_{1,s}, W_t) \\ & \quad \left. - \sum_{(y,w) \in \eta' + \vartheta'_{2,s}} \sum_{j=0}^d v_j \zeta^j((y, w), \eta' + \vartheta'_{2,s}, W_t) \right|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Für  $S \in \mathcal{S}_l(y, C(\eta + \vartheta_{2,s}))$  mit  $y \in \eta + \vartheta_{2,s}$  gilt mit der Inklusions-Exklusions-Formel

$$\begin{aligned} \Psi_j(S \cap W_t, U_j) &= \Psi_j(S \cap \overline{C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})^c} \cap W_t, U_j) \\ &\quad + \Psi_j(S \cap C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s}) \cap W_t, U_j) \\ &\quad - \Psi_j(S \cap \partial C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s}) \cap W_t, U_j), \end{aligned}$$

wobei  $B^c$  und  $\bar{B}$  das Komplement und den Abschluss von  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  bezeichnet. Da sich das Voronoi-Mosaik durch das Hinzufügen von  $sx_1$  nur in  $C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})$  verändert, ist  $S \cap \overline{C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})^c}$  für  $S \in \mathcal{S}_l(y, C(\eta + \vartheta_{2,s}))$  auch ein Element von  $\mathcal{S}_l(y, C(\eta + \vartheta_{1,s}))$ , das zudem die gleiche Farbe wie  $S$  besitzt, und diese Anteile an dem Oberflächenmaß heben sich weg. Insbesondere sind nur Seiten der Nachbarn von  $sx_1$  zu betrachten, da alle anderen nicht-leeren Schnitt mit  $C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})$  haben. Die neuen Seiten der Nachbarn von  $sx_1$ , die den Rand von  $C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})$  bilden, werden im Folgenden bei dem Anteil von  $sx_1$  zum Oberflächenmaß von  $Z$  berücksichtigt, also zum ersten Summanden auf der rechten Seite von (4.24) hinzugefügt. Mit diesen Überlegungen folgt aus (4.24)

$$\begin{aligned} F &= \left| \sum_{l=0}^d (-1)^{d-l} \sum_{S \in \mathcal{S}_l(sx_1, C(\eta + \vartheta_{1,s}))} \mathbf{1}\{S \in X_l^*(\eta' + \vartheta'_{1,s})\} \sum_{j=0}^d v_j \Psi_j(S \cap W_t, U_j) \right. \\ &\quad - \sum_{l=0}^d \frac{(-1)^{d-l}}{d-l+1} \sum_{y \in N(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})} \sum_{S \in \mathcal{S}_l(y, C(\eta + \vartheta_{2,s}))} \mathbf{1}\{S \in X_l^*(\eta' + \vartheta'_{2,s})\} \\ &\quad \quad \quad \times \sum_{j=0}^d v_j \Psi_j(S \cap C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s}) \cap W_t, U_j) \\ &\quad + \sum_{l=0}^d \frac{(-1)^{d-l}}{d-l+1} \sum_{y \in N(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})} \sum_{S \in \mathcal{S}_l(y, C(\eta + \vartheta_{2,s}))} \mathbf{1}\{S \in X_l^*(\eta' + \vartheta'_{2,s})\} \\ &\quad \quad \quad \times \left. \sum_{j=0}^d v_j \Psi_j(S \cap \partial C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s}) \cap W_t, U_j) \right|. \end{aligned}$$

Alle hier zu berücksichtigenden Seiten haben nicht-leeren Schnitt mit der Voronoi-Zelle von  $sx_1$  und sind somit nur in Zellen der Nachbarn von  $sx_1$  enthalten. Da die Voronoi-Flower von  $sx_1$  bezüglich  $\eta + \vartheta_{1,s}$  nach Konstruktion der Menge  $B^s$  in  $B(sx_1, sR)$  enthalten ist und alle Nachbarn in der Voronoi-Flower liegen, kann  $sx_1$  im Fall  $|\eta \cap B(sx_1, sR)| = m$  höchstens  $k + m$  Nachbarn haben. Weiter ist  $S \cap \partial C(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})$  für  $S \in \mathcal{S}_l(y, C(\eta + \vartheta_{2,s}))$  und  $y \in N(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})$  wegen der Seitentreue des Mosaiks konvex. Schätzt man die Oberflächenmaße gegen die auf  $\mathcal{K}^d$  monotonen, translationsinvarianten und homogenen inneren Volumina ab, so erhält man mit diesen Überlegungen

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}\{|\eta \cap B(sx_1, sR)| = m\} F \\ &\leq \mathbf{1}\{|\eta \cap B(sx_1, sR)| = m\} \left( \sum_{j=0}^d |v_j| s^j V_j(B(0, R)) \right) 3(d+1)(k+m)^{d+2}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.23) und der Poisson-Eigenschaft von  $\eta$  folgt

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) \neq \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & \leq \left( \sum_{j=0}^d |v_j| s^j V_j(B(0, R)) \right) 3(d+1) \sum_{m=1}^{\infty} (k+m)^{d+2} e^{-\kappa_d R^d} \frac{(\kappa_d (sR)^d)^m}{m!}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{m=1}^{\infty} (k+m)^b \frac{a^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{b \log(k+m)} \frac{a^m}{m!} \leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{b(k+m)} \frac{a^m}{m!} = e^{bk} (e^{e^b a} - 1) \quad (4.25)$$

für  $a, b > 0$  folgt schließlich zusammen mit (4.21) und (4.22)

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})]| \\ & \geq s^{j_0} e^{-\kappa_d (sR)^d} \left[ |v_{j_0}| \Psi_{j_0}(C(x_1, \vartheta_{1,1}), U_{j_0}) \right. \\ & \quad - |v_{j_0}| V_{j_0}(B(0, R)) 3(d+1) e^{(d+2)k} (e^{e^{d+2} \kappa_d (sR)^d} - 1) \\ & \quad \left. - \sum_{j=j_0+1}^d s^{j-j_0} |v_j| V_j(B(0, R)) (1 + 3(d+1) e^{(d+2)k} (e^{e^{d+2} \kappa_d (sR)^d} - 1)) \right]. \end{aligned}$$

Gibt es ein  $\tilde{c} > 0$ , sodass  $\Psi_{j_0}(C(0, \{0, x_2, \dots, x_k\}), U_{j_0}) \geq \tilde{c}$  für alle  $(x_2, \dots, x_k) \in K_2 \times \dots \times K_k$  gilt, so existiert wegen der Translationsinvarianz der Oberflächenmaße für genügend kleines  $s_0 \in (0, 1]$  ein  $c > 0$ , sodass die Menge  $B^{s_0}$  Voraussetzung (4.16) erfüllt. Wir zeigen nun die Existenz eines solchen  $\tilde{c}$ .

Definiere die Abbildung  $h : K_2 \times \dots \times K_k \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$h(x_2, \dots, x_k) := \Psi_{j_0}(C(0, \{0, x_2, \dots, x_k\}), U_{j_0})$$

und setze

$$\tilde{c} := \inf_{x_2 \in K_2, \dots, x_k \in K_k} h(x_2, \dots, x_k).$$

Somit gibt es eine Folge  $(x_{2,n}, \dots, x_{k,n}) \in K_2 \times \dots \times K_k$  für  $n \in \mathbb{N}$  mit  $h(x_{2,n}, \dots, x_{k,n}) \rightarrow \tilde{c}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $K_2 \times \dots \times K_k$  kompakt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $(x_{2,n}, \dots, x_{k,n})$  gegen ein  $(x_2, \dots, x_k) \in K_2 \times \dots \times K_k$  konvergiert. Weiter sei  $g : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow [0, 1]$  eine stetige und beschränkte Abbildung, die auf  $\tilde{U}_{j_0}$  eins ist und auf  $\mathbb{S}^{d-1} \setminus (\tilde{U}_{j_0} + B(0, \delta))$  null. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{c} & \leftarrow h(x_{2,n}, \dots, x_{k,n}) = \int \mathbf{1}_{U_{j_0}}(u) \Psi_{j_0}(C(0, \{0, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}), du) \\ & \geq \int g(u) \Psi_{j_0}(C(0, \{0, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}), du). \end{aligned}$$

Da die Oberflächenmaße nach Theorem 1.4.1 schwach stetig sind und die Funktion  $g$  stetig und beschränkt ist, konvergiert dies für  $n \rightarrow \infty$  gegen

$$\int g(u) \Psi_{j_0}(C(0, \{0, x_2, \dots, x_k\}), du) \geq \Psi_{j_0}(C(0, \{0, x_2, \dots, x_k\}), \tilde{U}_{j_0})$$

und dies ist nach (4.19) positiv. Damit folgt  $\tilde{c} > 0$  und Voraussetzung (4.16) ist für die Menge  $B^{s_0}$  mit einem genügend kleinen  $s_0 \in (0, 1]$  erfüllt.

Nun schätzen wir die untere Schranke der Varianz von  $f_t(\eta')$  in (4.17) wie im Beweis von Theorem 5.3 in [24] geeignet ab. Nach Definition der Menge  $B_1$  gilt für  $t \geq 1$

$$\lambda(B_1) \geq p(V_d(W_t) - 2R V_{d-1}(W_t)) = p(t - t^{(d-1)/d} 2R V_{d-1}(W))$$

und somit nach Definition von  $B^{s_0}$

$$\lambda^k(B^{s_0}) \geq s_0^{dk} p(1-p)^{k-1} \varepsilon^{k-1} (t - t^{(d-1)/d} 2R V_{d-1}(W)). \quad (4.26)$$

Als nächstes werden wir eine untere Schranke für  $\lambda^{|J|}(\Pi_J(A))$  für  $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, k\}$  und  $A \subseteq B^{s_0}$  angeben. Definiere dazu  $z_J := \Pi_J(z)$  für  $z \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^k$  und im Folgenden sei  $(\cdot, \cdot)_J$  das so geordnete  $k$ -Tupel, sodass  $(z_J, z_{J^c})_J = z$  gilt. Nach Definition der Menge  $B^{s_0}$  gilt für  $((x_1, m_1), \dots, (x_k, m_k)) \in B^{s_0}$

$$\|x_i - x_j\| \leq 2s_0 R, \quad i, j \in \{1, \dots, k\},$$

und zusammen mit  $p \in (0, 1)$  und (4.20) folgt für  $z_1 \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^{|J|}$

$$\lambda^{k-|J|}(\{z_2 \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^{k-|J|} : (z_1, z_2)_J \in B^{s_0}\}) \leq ((2s_0 R)^d \kappa_d)^{k-|J|} \leq 1.$$

Es folgt für alle  $A \subseteq B^{s_0}$

$$\begin{aligned} \lambda^k(A) &\leq \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbf{1}\{z_J \in \Pi_J(A)\} \mathbf{1}\{z \in B^{s_0}\} \lambda^k(dz) \\ &\leq \int_{(\mathbb{R}^d)^{|J|}} \mathbf{1}\{z_J \in \Pi_J(A)\} \lambda^{|J|}(dz_J) = \lambda^{|J|}(\Pi_J(A)). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Nach Lemma 4.1.8 zusammen mit (4.26) und (4.27) ergibt sich nun für  $t \geq 1$

$$\text{Var}(f_t(\eta')) \geq s_0^{dk} p(1-p)^{k-1} \frac{c^2}{8^{k+1} k!} \varepsilon^{k-1} (t - t^{(d-1)/d} 2R V_{d-1}(W))$$

und somit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var}(f_t(\eta')) \geq s_0^{dk} p(1-p)^{k-1} \frac{c^2}{8^{k+1} k!} \varepsilon^{k-1} > 0$$

für  $p \in (0, 1)$ . Dies beweist (4.18) und damit die positive Definitheit von  $\Sigma^U$ .  $\square$

## 4.2 Ein multivariater zentraler Grenzwertsatz für $(0, n)$ -Perkolation auf dem Poisson-Delaunay-Mosaik

In diesem Abschnitt wird ein multivariater zentraler Grenzwertsatz für die inneren Volumina der schwarzen Teilmenge  $Z$  bei  $(0, n)$ -Perkolation auf einem Poisson-Delaunay-Mosaik in  $\mathbb{R}^d$  für festes  $n \in \{0, \dots, d\}$  bewiesen. Dazu werden wir Theorem B.3 verwenden, das die bereits gezeigte Existenz der asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina von  $Z$  voraussetzt. Weiter wird gezeigt, dass die asymptotische Kovarianzmatrix positiv definit ist.

### 4.2.1 Der zentrale Grenzwertsatz

Da wir bei den hier verwendeten Methoden der Stabilisierung nur die Poisson-Punkte mit Marken versehen und nicht etwa auch die Ecken der Poisson-Voronoi-Zellen unabhängig voneinander schwarz färben können, betrachten wir im Poisson-Delaunay-Mosaik keine Zellenperkolation wie im vorherigen Abschnitt über das Poisson-Voronoi-Mosaik sondern  $(0, n)$ -Perkolation für festes  $n \in \{0, \dots, d\}$ , das heißt, wir färben die

0-Seiten des Poisson-Delaunay-Mosaiks, also die Poisson-Punkte, unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  schwarz und weiß sonst. Weiter färben wir eine  $k$ -Seite des Mosaiks für  $k \leq n$  schwarz, falls alle Ecken dieser  $k$ -Seite schwarz sind. Wie bisher bezeichnen wir die Vereinigung aller schwarzen Seiten mit  $Z$  und wir setzen  $W_t := t^{1/d}W$  für einen konvexen Körper  $W \in \mathcal{K}^d$  mit Volumen eins, der den Ursprung im Inneren enthält.

Da sich Poisson-Prozesse verschiedener Intensitäten nur durch eine Skalierung unterscheiden und die inneren Volumina homogen sind, sei im Folgenden ohne Einschränkung  $\eta'$  ein unabhängig markierter Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität eins und Markenraum  $(\mathbf{M}, \mathcal{M}, \mathbb{P}_{\mathbf{M}}) := (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}), \text{Bern}(p))$ . Den zugehörigen unmarkierten Poisson-Prozess bezeichnen wir mit  $\eta$ .

Bezeichne die asymptotische Kovarianzmatrix mit

$$\Sigma := (\sigma_{i,j}(p))_{i,j \in \{0, \dots, n\}},$$

wobei

$$\sigma_{i,j}(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(V_i(Z \cap W_t), V_j(Z \cap W_t)), \quad i, j \in \{0, \dots, n\},$$

wie bisher die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina sind. Nach Theorem 2.1.4 und Theorem 3.2.5 existieren die Grenzwerte  $\sigma_{i,j}$  und eine explizite Darstellung findet sich in Korollar 3.2.6. Da bei  $(0, n)$ -Perkolation nur Seiten bis zur Dimension  $n$  gefärbt werden, ist  $V_i(Z \cap W_t)$  für  $i > n$  null und wir betrachten deshalb nur die inneren Volumina bis zum Grad  $n$ .

**Theorem 4.2.1** *Setzt man für  $K \in \mathcal{K}^d$*

$$V(Z \cap K) := (V_0(Z \cap K), \dots, V_n(Z \cap K))^{\top},$$

*so gilt für  $t \rightarrow \infty$  der multivariate zentrale Grenzwertsatz*

$$\frac{V(Z \cap W_t) - \mathbb{E}[V(Z \cap W_t)]}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma).$$

Der Beweis wird analog zum Voronoi-Fall mit der Cramér-Wold-Technik und Theorem B.3 geführt.

#### 4.2.2 Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Im Folgenden sei  $\chi' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  eine beliebige lokal-endliche Menge und  $\chi$  bezeichne die Projektion von  $\chi'$  auf die erste Komponente, also die zugehörige unmarkierte Punktmenge. Weiter bezeichne  $X_k^1(\chi')$  bzw.  $Z(\chi')$  die Menge aller schwarzen  $k$ -Seiten bzw. die Vereinigung aller schwarzen Seiten des Delaunay-Mosaiks bezüglich  $\chi$ .

Da man für die Anwendung von Theorem B.3 die inneren Volumina von  $Z \cap W_t$  in die Anteile der einzelnen Poisson-Punkte aufspalten muss, definieren wir zunächst für  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  und  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\begin{aligned} \xi^i((x, m), \chi', K) := & \sum_{k=i}^n \frac{(-1)^{i+k}}{k+1} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\chi^x))} V_i(S) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\chi' \cup \{(x, m)\})\} \\ & \times \mathbf{1}\{F(x, \chi^x) \subseteq K\}. \end{aligned}$$

Die so definierten Funktionale sind wegen der Translationskovarianz von  $\mathcal{S}_k(\cdot, \cdot)$  und  $F(\cdot, \cdot)$  und der Translationsinvarianz der inneren Volumina translationsinvariant. Setze

für  $i \in \{0, \dots, n\}$

$$\Xi^i(\chi', K) := \sum_{(x,m) \in \chi'} \xi^i((x,m), \chi', K)$$

und definiere die asymptotischen Kovarianzen dieses Funktionals für einen Poisson-Prozess auf dem Beobachtungsfenster  $W_t$  durch

$$\tilde{\sigma}_{i,j}(p) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\Xi^i(\eta' \cap W_t', W_t), \Xi^j(\eta' \cap W_t', W_t))$$

für  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  und  $p \in [0, 1]$ .

Definiert man für  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  und einen konvexen Körper  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\zeta^i((x, m), \chi', K) := \sum_{k=i}^n \frac{(-1)^{i+k}}{k+1} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\chi^x))} V_i(S \cap K) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\chi' \cup \{(x, m)\})\},$$

und

$$Z^i(\chi', K) := \sum_{(x,m) \in \chi'} \zeta^i((x, m), \chi', K), \quad (4.28)$$

so erhält man mit (2.2), (2.5) und der Additivität der inneren Volumina

$$V_i(Z(\eta') \cap W_t) = Z^i(\eta', W_t) + V_i(Z(\eta') \cap \partial W_t),$$

da jede  $k$ -Seite des Poisson-Delaunay-Mosaiks genau  $k+1$  Poisson-Punkte enthält. In dieser Darstellung kann man leicht sehen, dass  $V_i(Z(\eta') \cap W_t)$  und  $\Xi^i(\eta' \cap W_t', W_t)$  bis auf Randeffekte übereinstimmen, die wir nun beschreiben werden.

Wir definieren für einen konvexen Körper  $K \in \mathcal{K}^d$  und  $i \in \{0, \dots, n\}$

$$X^i(\chi', K) := V_i(Z(\chi') \cap \partial K) + Z^i(\chi', K) - \Xi^i(\chi' \cap K', K)$$

Es ist leicht zu sehen, dass alle Summanden von  $\Xi^i(\chi' \cap K', K)$  auch in  $Z^i(\chi', K)$  vorkommen. Die restlichen Summanden von  $Z^i(\chi', K)$  sind genau die der Punkte in

$$\begin{aligned} H(\chi, K) := & \{x \in \chi \cap K : F(x, \chi \cap K) \cap K^c \neq \emptyset\} \\ & \cup \{x \in \chi \cap K^c : \exists S \in \mathcal{S}_d(x, D(\chi)) \text{ mit } S \cap K \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Damit lässt sich  $X^i$  schreiben als

$$X^i(\chi', K) = V_i(Z(\chi') \cap \partial K) + \sum_{(x,m) \in \chi'} \zeta^i((x, m), \chi', K) \mathbf{1}_{H(\chi, K)}(x). \quad (4.29)$$

Nun zeigen wir einige Lemmata, die das Anwenden von Theorem B.3 auf die Funktionale  $\xi^i$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , und den Nachweis, dass die Randeffekte vernachlässigbar sind, erleichtern werden.

**Lemma 4.2.2** *Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(X^i(\eta', W_t)) = 0.$$

*Beweis:* Zunächst geben wir eine geeignete Obermenge von  $H$  an. Hat die Voronoi-Flower eines Punktes  $x \in \chi \cap K$  nicht-leeren Schnitt mit  $K^c$ , so hat auch die Voronoi-Flower von  $x$  bezüglich  $\chi$  nicht-leeren Schnitt mit  $K^c$ , denn durch das Hinzufügen der Punkte aus  $\chi \cap K^c$  kann die Voronoi-Flower zwar kleiner werden, aber dann muss die Zelle  $C(x, \chi)$  Nachbarn in  $\chi \cap K^c$  besitzen. Da die Nachbarn in der Voronoi-Flower enthalten sind, hat also auch die Voronoi-Flower von  $x$  bezüglich  $\chi$  nicht-leeren Schnitt mit  $K^c$ . Außerdem sind die Delaunay-Zellen bezüglich  $\chi$ , die den Punkt  $x \in \chi$  enthalten, nach Lemma 3.2.2 in der Voronoi-Flower von  $x$  bezüglich  $\chi$  enthalten und man erhält, dass

$$H^+(\chi, K) := \{x \in \chi : F(x, \chi) \cap \partial K \neq \emptyset\}$$

eine Obermenge von  $H(\chi, K)$  ist.

Wir können die Varianz der beiden Summanden von  $X^i(\eta', W_t)$  in (4.29) wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung getrennt untersuchen. Nach Theorem 3.2.5 gilt (2.18) und (2.20) und nach Proposition 2.1.2 folgt damit (2.7), also geht die Varianz des ersten Summanden in (4.29) nach Teilen durch  $t$  gegen null. Nun zeigen wir, dass die Varianz des zweiten Summanden nach Teilen durch  $t$  gegen null konvergiert. Wegen der Bilinearität der Kovarianz und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genügt es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{x \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x)} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta')\} \mathbf{1}\{x \in H(\eta, W_t)\} \right) = 0 \quad (4.30)$$

für  $i \in \{0, \dots, n\}$  und  $k \in \{i, \dots, n\}$  zu zeigen. Definiert man abkürzend

$$h(\chi', B) := \sum_{x \in \chi} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x)} V_i(S \cap B) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\chi')\} \mathbf{1}\{x \in H(\chi, B)\}$$

für  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , so erhält man mit der Poincaré-Ungleichung

$$\text{Var}(h(\eta', W_t)) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbf{M}} \mathbb{E}[(h(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - h(\eta', W_t))^2] \mathbb{P}_{\mathbf{M}}(dm) dx. \quad (4.31)$$

Für  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  ergibt sich für den Differenzenoperator im Integranden

$$\begin{aligned} & h(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - h(\eta', W_t) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^x))} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta' + \delta_{(x,m)})\} \mathbf{1}\{x \in H(\eta^x, W_t)\} \\ &+ \sum_{y \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta^x))} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta' + \delta_{(x,m)})\} \mathbf{1}\{y \in H(\eta^x, W_t)\} \\ &- \sum_{y \in \eta} \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta))} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta')\} \mathbf{1}\{y \in H(\eta, W_t)\}. \end{aligned}$$

Da die Delaunay-Zellen und damit insbesondere die  $k$ -Seiten, die einen Punkt  $y$  enthalten, nach Lemma 3.2.2 in der Voronoi-Flower von  $y$  enthalten ist, die Indikatorfunktion von  $H$  an der Stelle  $y$  nur von der Einschränkung des Punktprozesses auf die Voronoi-Flower von  $y$  abhängt und die Voronoi-Flower eine Stoppmenge ist, gilt für  $x \notin F(y, \eta)$

$$\begin{aligned} & \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta^x))} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta' + \delta_{(x,m)})\} \mathbf{1}\{y \in H(\eta^x, W_t)\} \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta))} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta')\} \mathbf{1}\{y \in H(\eta, W_t)\}. \end{aligned}$$

Weiter ist  $x \in F(y, \eta)$  äquivalent zu  $y \in N(x, \eta^x)$ . Setzt man  $D := \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(x, D(\eta^x))} C$ , so liegt  $x$  in keiner  $k$ -Seite  $S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta^x))$ , die nicht in  $D$  enthalten ist, und es folgt, dass eine solche  $k$ -Seite  $S$  auch ein Element von  $\mathcal{S}_k(y, D(\eta))$  ist. Mit diesen Überlegungen erhält man

$$\begin{aligned} & h(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - h(\eta', W_t) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^x))} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta' + \delta_{(x,m)})\} \mathbf{1}\{x \in H(\eta^x, W_t)\} \\ &+ \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta^x)), \\ S \subseteq D}} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta' + \delta_{(x,m)})\} \mathbf{1}\{y \in H(\eta^x, W_t)\} \\ &- \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_k(y, D(\eta)), \\ S \subseteq D}} V_i(S \cap W_t) \mathbf{1}\{S \in X_k^1(\eta')\} \mathbf{1}\{y \in H(\eta, W_t)\}. \end{aligned}$$

Für den Betrag hiervon werden wir nun eine obere Schranke angeben, indem wir die Dreiecksungleichung anwenden und die Summanden abschätzen. Jede  $k$ -Seite des Delaunay-Mosaiks enthält genau  $k+1$  Poisson-Punkte, die paarweise benachbart sind. Damit erhält man  $|\mathcal{S}_k(x, D(\eta^x))| \leq |N(x, \eta^x)|^k$  und für  $y \in N(x, \eta^x)$  gibt es höchstens  $|N(x, \eta^x)|^{k+1}$  Seiten in  $\mathcal{S}_k(y, D(\eta^x))$  bzw. in  $\mathcal{S}_k(y, D(\eta))$ , die in  $D$  enthalten sind. Schließlich sind die Voronoi-Zellen der Nachbarn von  $x$  in  $B(x, 2R_2(x, \eta^x))$  enthalten und somit liegen die Voronoi-Flowern der Nachbarn von  $x$  in  $B(x, 6R_2(x, \eta^x))$ . Mit  $H \subseteq H^+$  und der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$  folgt analog zum Voronoi-Fall

$$|h(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - h(\eta', W_t)| \leq f^i(x, \eta^x) \mathbf{1}\{B(x, 6R_2(x, \eta^x)) \cap \partial W_t \neq \emptyset\},$$

wobei

$$f^i(x, \chi) := 3 |N(x, \chi)|^{k+2} V_i(B(x, 6R_2(x, \chi)))$$

für  $x \in \chi$  gesetzt wurde. Wegen der Translationsinvarianz von  $|N(\cdot, \cdot)|$ ,  $R_2(\cdot, \cdot)$  und der inneren Volumina ist  $f^i$  translationsinvariant. Zusammen mit (4.31), der Stationarität von  $\eta$  und dem Satz von Fubini folgt nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \text{Var}(h(\eta, W_t)) &\leq \frac{1}{t} \int \mathbb{E}[f^i(x, \eta^x)^2 \mathbf{1}\{B(x, 6R_2(x, \eta^x)) \cap \partial W_t \neq \emptyset\}] dx \\ &= \mathbb{E}[f^i(0, \eta^0)^2 \lambda_d(\partial W - t^{-1/d} B(0, 6R_2(0, \eta^0)))]. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz gegen null, wobei

$$f^i(0, \eta^0)^2 \lambda_d(W + B(0, 6R_2(0, \eta^0)))$$

für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majorante folgt nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Hölder-Ungleichung aus der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5. Damit ist (4.30) und somit Lemma 4.2.2 gezeigt.  $\square$

Da die asymptotischen Kovarianzen  $\sigma_{i,j}(p)$  wegen Theorem 2.1.4 und Theorem 3.2.5 existieren, folgt hieraus zusammen mit Lemma 2.1.3

$$\tilde{\sigma}_{i,j}(p) = \sigma_{i,j}(p)$$

für  $i, j \in \{0, \dots, n\}$  und  $p \in [0, 1]$ .

**Lemma 4.2.3** *Die Funktionale  $\xi^i$  sind für  $i \in \{0, \dots, n\}$  exponentiell stabilisierend.*

*Beweis:* Da  $\xi^i$  nur Seiten betrachtet, die in der Voronoi-Flower enthalten sind, und die Voronoi-Flower eine Stoppmenge ist, bleiben die Funktionale  $\xi^i$  unverändert, falls der Punktprozess in der Voronoi-Flower nicht verändert wird. Nach (4.10) gilt für  $x \in W_t$

$$C(x, \eta^x \cap W_t) \cap W_t \subseteq B(x, R^+(x, \eta \cap W_t, W_t))$$

und somit folgt insbesondere

$$F(x, \eta^x \cap W_t) \cap W_t \subseteq B(x, 2R^+(x, \eta \cap W_t, W_t)).$$

Also kann man hier denselben Stabilisierungsradius wie im Beweis von Lemma 4.1.4 wählen und die  $\xi^i$  sind exponentiell stabilisierend.  $\square$

**Lemma 4.2.4** *Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  besitzt  $\xi^i$  ein Moment der Ordnung drei, das heißt, für eine von allen anderen zufälligen Objekten unabhängige Bern( $p$ )-verteilte Zufallsvariable  $M$  gilt*

$$\sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{E}[|\xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3] < \infty.$$

*Beweis:* Seien  $t \geq 1$  und  $x \in W_t$ . Da die Voronoi-Flower eine Stoppmenge ist, sind die Voronoi-Zelle und die Voronoi-Flower von  $x$  bezüglich  $\eta^x \cap W_t$  und bezüglich  $\eta^x$  im Fall  $F(x, \eta^x \cap W_t) \subseteq W_t$  identisch, vergleiche Lemma 3.1.6. Somit erhält man mit der Dreiecksungleichung und elementaren Abschätzungen

$$\mathbb{E}[|\xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3] \leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=i}^n \sum_{S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^x))} V_i(S)\right)^3\right].$$

Da jede  $k$ -Seite des Delaunay-Mosaiks genau  $k + 1$  Poisson-Punkte enthält, die paarweise benachbart sind, folgt  $\mathcal{S}_k(x, D(\eta^x)) \leq |N(x, \eta^x)|^k$ . Weiter liegt jede  $k$ -Seite  $S \in \mathcal{S}_k(x, D(\eta^x))$  in  $B(x, 2R_2(x, \eta^x))$ . Damit folgt mit der Monotonie der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$

$$\mathbb{E}[|\xi^i((x, M), \eta' \cap W'_t, W_t)|^3] \leq (n - i + 1)^3 \mathbb{E}[|N(x, \eta^x)|^{3d} V_i(B(x, 2R_2(x, \eta^x)))^3].$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, der Translationsinvarianz von  $|N(\cdot, \cdot)|$ ,  $R_2(\cdot, \cdot)$  und der inneren Volumina, der Stationarität von  $\eta$ , der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5 erhält man eine (von  $x$  und  $t$  unabhängige) endliche Schranke. Somit ist die Momentenbedingung erfüllt.  $\square$

Der multivariate zentrale Grenzwertsatz Theorem 4.2.1 lässt sich nun mit der Cramér-Wold-Technik, Theorem B.3 und den bereits gezeigten Lemmata ganz analog zu dem multivariaten zentralen Grenzwertsatz Theorem 4.1.1 im Poisson-Voronoi-Mosaik zeigen.

### 4.2.3 Positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrix

In diesem Unterabschnitt wird die positive Definitheit der eben betrachteten asymptotischen Kovarianzmatrix der inneren Volumina gezeigt. Dazu sei  $\lambda := \lambda_d \otimes \mathbb{P}_{\mathbf{M}}$  das Produktmaß des Lebesguemaßes und der Markenverteilung  $\mathbb{P}_{\mathbf{M}}$ . Für eine lokal-endliche Punktmenge  $\chi' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  schreiben wir in diesem Unterabschnitt  $Z(\chi')$  anstatt  $Z$  für die Vereinigung aller schwarzen Seiten des Delaunay-Mosaiks bezüglich der Projektion

$\chi$  von  $\chi'$  auf die erste Komponente, wobei eine Seite schwarz gefärbt wird, wenn alle in ihr enthaltenen Punkte aus  $\chi$  Marke eins tragen. Um die positive Definitheit zu zeigen, verwenden wir wieder Lemma 4.1.8.

**Theorem 4.2.5** *Sei  $p \in (0, 1)$ . Dann ist die asymptotische Kovarianzmatrix  $\Sigma$  positiv definit.*

*Beweis:* Nach Definition ist  $\Sigma$  genau dann positiv definit, wenn für alle Vektoren  $v = (v_0, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$v^\top \Sigma v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{j=0}^n v_j V_j(Z(\eta') \cap W_t) \right) > 0$$

gilt. Dies werden wir mit Lemma 4.1.8 zeigen.

Sei  $v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  und setze  $j_0 := \min\{j \in \{0, \dots, n\} : v_j \neq 0\}$ . Für  $t \geq 1$  definieren wir eine messbare Funktion  $f_t : \mathbf{N}_{\{0,1\}} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$f_t(\cdot) := \sum_{j=0}^n v_j V_j(Z(\cdot) \cap W_t).$$

Nun bestimmen wir für  $k = (d+1)^2$  eine Teilmenge von  $(\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^k$  in Abhängigkeit von  $v$ , die die Voraussetzungen aus Lemma 4.1.8 erfüllt.

Seien  $K_2, \dots, K_k$  geeignet positionierte Kugeln mit genügend kleinem Volumen  $\varepsilon > 0$ , sodass die folgenden Bedingungen erfüllt sind. Die Kugeln  $K_2, \dots, K_{d+2}$  werden so um den Ursprung positioniert, dass für alle  $x_i \in K_i$ ,  $i \in \{2, \dots, d+2\}$ , die Voronoi-Zelle des Ursprungs bezüglich  $\{0, x_2, \dots, x_{d+2}\}$  beschränkt ist und die Vereinigung der Delaunay-Zellen, die den Ursprung enthalten, eine Kugel mit genügend kleinem Radius  $r > 0$  um den Ursprung enthält und konvex ist. Die restlichen Kugeln werden nun so positioniert, dass für alle  $x_i \in K_i$ ,  $i \in \{2, \dots, k\}$ , die Voronoi-Zellen von  $x_2, \dots, x_{d+2}$  bezüglich  $\{0, x_2, \dots, x_k\}$  beschränkt sind und  $0, x_2, \dots, x_k$  in allgemeiner quadratischer Lage liegen. Weiter werde  $R > 0$  so gewählt, dass für alle  $x_2 \in K_2, \dots, x_k \in K_k$

$$\bigcup_{j=2}^{d+2} F(x_j, \{0, x_2, \dots, x_k\}) \subseteq B(0, R)$$

gilt. Mit einer genügend kleinen Skalierung kann eine solche Konfiguration von Kugeln für jedes  $R > 0$  gefunden werden, weshalb wir ohne Einschränkung

$$(2R)^d \kappa_d < 1 \tag{4.32}$$

fordern können.

Definiere nun  $B_1 := (W_t \setminus (\partial W_t + B(0, R))) \times \{0\}$ ,  $B_i := K_i \times \{1\}$  für  $i \in \{2, \dots, d+2\}$  und  $B_i := K_i \times \{0\}$  für  $i \in \{d+3, \dots, k\}$ . Weiter setzen wir für  $s \in (0, 1]$

$$B^s := \{((sx_1, m_1), \dots, (sx_k, m_k)) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^k : (x_1, m_1) \in B_1, \\ (x_i - x_1, m_i) \in B_i \text{ für } i = 2, \dots, k\}$$

und schließlich  $I_1 := \{1, \dots, k\}$  und  $I_2 := \{2, \dots, k\}$ .

Nun zeigen wir, dass die Menge  $B^{s_0}$  für genügend kleines  $s_0 \in (0, 1]$  die Voraussetzung (4.16) für ein geeignetes  $c > 0$  erfüllt. Seien dazu  $((x_1, m_1), \dots, (x_k, m_k)) \in B^1$ .

Im Folgenden verwenden wir für  $s \in (0, 1]$  die Abkürzungen

$$\vartheta'_{1,s} := \sum_{i \in I_1} \delta_{(sx_i, m_i)}, \quad \vartheta'_{2,s} := \sum_{i \in I_2} \delta_{(sx_i, m_i)}$$

und die zugehörigen unmarkierten Punktmaße bezeichnen wir mit  $\vartheta_{1,s}$  und  $\vartheta_{2,s}$ . Mit diesen Bezeichnungen erhält man für das Funktional  $f_t$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})]| \\ & \geq |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) = \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & \quad - |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) \neq \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]|. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Liegen keine Punkte von  $\eta$  in  $B(sx_1, sR)$ , so ist  $f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})$  deterministisch und wegen der speziellen Position und Färbung der Punkte in  $\vartheta'_{1,s}$  erhält man mit der Monotonie und Homogenität der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) = \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & = \left| \sum_{j=0}^n v_j V_j \left( \bigcup_{S \in \mathcal{S}_d(sx_1, D(\vartheta'_{1,s}))} S \right) \right| e^{-\kappa_d(sR)^d} \\ & \geq \left( |v_{j_0}| s^{j_0} V_{j_0}(B(0, r)) - \sum_{j=j_0+1}^n |v_j| s^j V_j(B(0, R)) \right) e^{-\kappa_d(sR)^d}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Nun werden wir eine obere Schranke für den zweiten Summanden in (4.33) bestimmen. Mit einer Fallunterscheidung bezüglich der Anzahl der Punkte aus  $\eta$  in  $B(sx_1, sR)$  und dem Satz von der monotonen Konvergenz erhält man

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) \neq \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}\{|\eta \cap B(sx_1, sR)| = m\} |f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})|]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Da die Punkte  $sx_1, \dots, sx_k$  sowie die Punkte des Poisson-Prozesses in allgemeiner quadratischer Lage liegen, folgt aus der Poisson-Eigenschaft, dass auch die Punkte in  $\eta + \vartheta_{1,s}$  in allgemeiner quadratischer Lage liegen. Somit ist das zugehörige Delaunay-Mosaik simplizial, vergleiche [44, S. 478]. Ist  $\chi' \in \mathbf{N}_{\{0,1\}}$ , sodass das Delaunay-Mosaik bezüglich der Projektion von  $\chi'$  auf die erste Komponente simplizial ist, so gilt  $V_j(Z(\chi') \cap W_t) = Z^j(\chi', W_t) + V_j(Z(\chi') \cap \partial W_t)$ , vergleiche die Definition (4.28) von  $Z^j$ . Damit erhält man

$$\begin{aligned} F & := |f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})| \\ & = \left| \sum_{j=0}^n v_j \zeta^j((sx_1, m_1), \eta' + \vartheta'_{1,s}, W_t) \right. \\ & \quad + \sum_{(y, m_y) \in \eta' + \vartheta'_{2,s}} \sum_{j=0}^n v_j \zeta^j((y, m_y), \eta' + \vartheta'_{1,s}, W_t) \\ & \quad - \sum_{(y, m_y) \in \eta' + \vartheta'_{2,s}} \sum_{j=0}^n v_j \zeta^j((y, m_y), \eta' + \vartheta'_{2,s}, W_t) \\ & \quad \left. + V_i(Z(\eta' + \vartheta'_{1,s}, W_t) \cap \partial W_t) - V_i(Z(\eta' + \vartheta'_{2,s}, W_t) \cap \partial W_t) \right|. \end{aligned}$$

Das Hinzufügen von  $sx_1$  zu  $\eta + \vartheta_{2,s}$  kann nur die Seiten des Delaunay-Mosaiks verändern, deren relatives Inneres im Inneren von  $D^s := \bigcup_{C \in \mathcal{S}_d(sx_1, D(\eta + \vartheta_{1,s}))} C$  enthalten ist, und mit Lemma 3.2.2 und der Konstruktion der Menge  $B^s$  folgt  $D^s \subseteq B(sx_1, sR) \subseteq W_t$ . Damit erhält man

$$V_i(Z(\eta' + \vartheta'_{1,s}, W_t) \cap \partial W_t) = V_i(Z(\eta' + \vartheta'_{1,s}, W_t) \cap \partial W_t)$$

und

$$\{S \in \mathcal{S}_l(y, D(\eta + \vartheta_{1,s})) : \text{relint}(S) \not\subseteq \mathring{D}^s\} = \{S \in \mathcal{S}_l(y, D(\eta + \vartheta_{2,s})) : \text{relint}(S) \not\subseteq \mathring{D}^s\}.$$

Mit diesen Überlegungen folgt

$$\begin{aligned} F = & \left[ \sum_{l=0}^d \sum_{S \in \mathcal{S}_l(sx_1, D(\eta + \vartheta_{1,s}))} \mathbf{1}\{S \in X_l^1(\eta + \vartheta_{1,s})\} \sum_{j=0}^n v_j (-1)^{j+l} V_j(S \cap W_t) \right. \\ & - \sum_{l=0}^d \frac{1}{l+1} \sum_{y \in N(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s})} \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}_l(y, D(\eta + \vartheta_{2,s})) \\ \text{relint}(S) \subseteq \text{int}(D^s)}} \mathbf{1}\{S \in X_l^1(\eta + \vartheta_{1,s})\} \\ & \left. \times \sum_{j=0}^n v_j (-1)^{j+l} V_j(S \cap W_t) \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Diesen Ausdruck werden wir nun geeignet abschätzen. Da die Vereinigung der  $sx_1$  enthaltenden Delaunay-Zellen bezüglich  $\vartheta_{1,s}$  nach Wahl der Menge  $B^s$  konvex ist, erhält man für eine  $l$ -Seite  $S$ , deren relatives Inneres in  $\text{int}(D^s)$  enthalten ist, mit der Monotonie und Translationsinvarianz der inneren Volumina auf  $\mathcal{K}^d$

$$\left| \sum_{j=0}^n |v_j| (-1)^{j+l} V_j(S \cap W_t) \right| \leq \sum_{j=0}^n |v_j| V_j(S) \leq \sum_{j=0}^n |v_j| s^j V_j(B(0, R)), \quad (4.37)$$

denn  $D^s$  liegt nach Lemma 3.2.2 in  $F(sx_1, \eta + \vartheta_{1,s}) \subseteq F(sx_1, \vartheta_{1,s})$  und die Voronoi-Flower von  $sx_1$  bezüglich  $\vartheta_{1,s}$  ist nach Konstruktion von  $B^s$  in  $B(sx_1, sR)$  enthalten. Da die Punkte aus  $\eta + \vartheta_{1,s}$  und aus  $\eta + \vartheta_{2,s}$  in allgemeiner quadratischer Lage liegen, ist das zugehörige Poisson-Delaunay-Mosaik simplizial, vergleiche [44, S. 478], und jede  $l$ -Seite enthält genau  $l+1$  Punkte aus  $\eta + \vartheta_{1,s}$  bzw.  $\eta + \vartheta_{2,s}$ , die paarweise benachbart sind. Weiter kann  $sx_1$  im Fall  $|\eta \cap B(sx_1, sR)| = m$  höchstens  $k+m$  Nachbarn haben, denn die Voronoi-Flower von  $sx_1$  ist in  $B(sx_1, sR)$  enthalten. Mit diesen Überlegungen, (4.37) und der Poisson-Eigenschaft von  $\eta$  folgt aus (4.35) und (4.36)

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[\mathbf{1}\{\eta \cap B(sx_1, sR) \neq \emptyset\} (f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s}))]| \\ & \leq 2(d+1) e^{-\kappa_d(sR)^d} \left( \sum_{j=0}^n |v_j| s^j V_j(B(0, R)) \right) \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\kappa_d(sR)^d)^m}{m!} (k+m)^{d+2} \right). \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.25), (4.33) und (4.34) folgt schließlich

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}[f_t(\eta' + \vartheta'_{1,s}) - f_t(\eta' + \vartheta'_{2,s})]| \\ & \geq s^{j_0} e^{-\kappa_d(sR)^d} \left[ |v_{j_0}| V_{j_0}(B(0, r)) - |v_{j_0}| V_{j_0}(B(0, R)) 2(d+1) e^{(d+2)k} (e^{e^{d+2}\kappa_d(sR)^d} - 1) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=j_0+1}^n s^{j-j_0} (1 + 2(d+1) e^{(d+2)k} (e^{e^{d+2}\kappa_d(sR)^d} - 1)) |v_j| V_j(B(0, R)) \right] \end{aligned}$$

und für genügend kleines  $s_0 \in (0, 1]$  existiert ein  $c > 0$ , sodass dies größer  $c$  ist. Somit ist Voraussetzung (4.16) für die Menge  $B^{s_0}$  erfüllt.

Nun schätzen wir die untere Schranke der Varianz von  $f_t(\eta')$  in (4.17) wie im Beweis von Theorem 5.3 in [24] geeignet ab. Nach Definition der Menge  $B_1$  gilt für  $t \geq 1$

$$\lambda(B_1) \geq (1-p)(V_d(W_t) - 2RV_{d-1}(W_t)) = (1-p)(t - t^{(d-1)/d}2RV_{d-1}(W))$$

und somit

$$\lambda^k(B^{s_0}) \geq s_0^{dk} p^{d+1} (1-p)^{k-d-1} \varepsilon^{k-1} (t - t^{(d-1)/d} 2RV_{d-1}(W)). \quad (4.38)$$

Weiter werden wir eine untere Schranke für  $\lambda^{|J|}(\Pi_J(A))$  für  $\emptyset \neq J \subseteq \{1, \dots, k\}$  und  $A \subseteq B^{s_0}$  angeben. Definiere dazu  $z_J := \Pi_J(z)$  für  $z \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^k$  und im Folgenden sei  $(\cdot, \cdot)_J$  das so geordnete  $k$ -Tupel, sodass  $(z_J, z_{J^c})_J = z$  gilt. Nach Definition der Menge  $B^{s_0}$  gilt für  $((x_1, m_1), \dots, (x_k, m_k)) \in B^{s_0}$

$$\|x_i - x_j\| \leq 2s_0R, \quad i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Zusammen mit  $p \in (0, 1)$  und (4.32) erhält man für  $z_1 \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^{|J|}$

$$\lambda^{k-|J|}(\{z_2 \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M})^{k-|J|} : (z_1, z_2)_J \in B^{s_0}\}) \leq ((2s_0R)^d \kappa_d)^{k-|J|} \leq 1.$$

Es folgt für alle  $A \subseteq B^{s_0}$

$$\lambda^k(A) \leq \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \mathbf{1}\{z_J \in \Pi_J(A)\} \mathbf{1}\{z \in B^{s_0}\} \lambda^k(dz) \leq \lambda^{|J|}(\Pi_J(A)). \quad (4.39)$$

Aus Lemma 4.1.8 zusammen mit (4.38) und (4.39) ergibt sich nun

$$\text{Var}(f_t(\eta')) \geq \frac{c^2}{8^{k+1}k!} s_0^{dk} p^{d+1} (1-p)^{k-d-1} \varepsilon^{k-1} (t - t^{(d-1)/d} 2RV_{d-1}(W))$$

und somit folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(f_t(\eta'))}{t} \geq \frac{c^2}{8^{k+1}k!} s_0^{dk} p^{d+1} (1-p)^{k-d-1} \varepsilon^{k-1}.$$

Für  $p \in (0, 1)$  ist dieser Ausdruck positiv und somit  $\Sigma$  positiv definit.  $\square$

### 4.3 Ein multivariater zentraler Grenzwertsatz für Skelette

Das  $k$ -Skelett eines Mosaiks  $\varphi \in \mathbf{T}$  bezeichnet die Vereinigung aller  $k$ -Seiten des Mosaiks  $\varphi$ . Da das  $d$ -Skelett den ganzen Raum überdeckt und deshalb deterministisch ist, betrachten wir im Folgenden nur niederdimensionale Skelette.

Zunächst stellt man fest, dass  $Z$  bei  $(0, k)$ -Perkolation mit Parameter  $p = 1$  gerade das  $k$ -Skelett ist. Somit wurde in Theorem 4.2.1 bereits ein multivariater zentraler Grenzwertsatz für die inneren Volumina des  $k$ -Skeletts eines Poisson-Delaunay-Mosaiks gezeigt. Da im Poisson-Voronoi-Mosaik bislang nur zentrale Grenzwertsätze bei Zellenperkolation betrachtet und die  $k$ -Skelette somit noch nicht behandelt wurden, werden wir hier einen zentralen Grenzwertsatz für die Oberflächenmaße des  $k$ -Skeletts im Poisson-Voronoi-Mosaik zeigen.

### 4.3.1 Der zentrale Grenzwertsatz

Definiere das  $k$ -Skelett des Voronoi-Mosaiks bezüglich einer lokal-endlichen Punktmenge  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  durch

$$Y^k(\chi) := \bigcup_{S \in X_k(\chi)} S, \quad k \in \{0, \dots, d\},$$

wobei  $X_k(\chi)$  die Menge der  $k$ -Seiten des Voronoi-Mosaiks bezüglich  $\chi$  bezeichnet. Für  $U_0, \dots, U_{d-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$  und  $U := (U_0, \dots, U_{d-1})$  bezeichnen wir die asymptotischen Kovarianzen der Oberflächenmaße der Skelette im Poisson-Voronoi-Mosaik mit

$$\psi_{i,j}^k(U) := \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i), \Psi_j(Y^k(\eta) \cap W_t, U_j))$$

für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ ,  $i, j \in \{0, \dots, k\}$  und die asymptotische Kovarianzmatrix mit

$$\Sigma^k(U) := (\psi_{i,j}^k(U))_{i,j \in \{0, \dots, k\}}$$

für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ . Dann lässt sich für die Oberflächenmaße des  $k$ -Skeletts ein multivariater zentraler Grenzwertsatz zeigen.

**Theorem 4.3.1** *Setzt man für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $K \in \mathcal{K}^d$*

$$O^k(K, U) := (\Psi_0(Y^k(\eta) \cap K, U_0), \dots, \Psi_k(Y^k(\eta) \cap K, U_k))^\top,$$

*so gilt für  $t \rightarrow \infty$  der multivariate zentrale Grenzwertsatz*

$$\frac{O^k(W_t, U) - \mathbb{E}[O^k(W_t, U)]}{\sqrt{t}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma^k(U)).$$

Analog gelten im Poisson-Voronoi- und im Poisson-Delaunay-Mosaik multivariate zentrale Grenzwertsätze, bei denen das  $i$ -te Oberflächenmaß bzw. das  $i$ -te innere Volumen fixiert ist und man die verschiedenen Skelette betrachtet. Da die Beweise ganz analog geführt werden können, werden wir hier nur Theorem 4.3.1 beweisen.

Statt der Oberflächenmaße der  $k$ -Skelette kann man mit den im Beweis verwendeten Methoden auch die Summe des  $i$ -ten Oberflächenmaßes der  $k$ -Seiten betrachten, das heißt, man untersucht die Funktionale

$$\sum_{S \in X_k(\eta)} \Psi_i(S \cap W_t, U_i).$$

Im Fall  $i = k$  sind diese Funktionale gerade die Oberflächenmaße der  $k$ -Skelette. Günter Last, Giovanni Peccati und Matthias Schulte haben in [24] mit Malliavin-Operatoren und der Steinschen Methode einen zentralen Grenzwertsatz für die Summe des  $i$ -ten inneren Volumens der  $k$ -Seiten eines Poisson-Voronoi-Mosaiks gezeigt. Weiter kann man mit diesen Methoden Konvergenzraten bezüglich des Kolmogorov-Abstandes angeben, vergleiche [24, Theorem 7.5].

In [37, Theorem 6.3] hat Mathew Penrose einen zentralen Grenzwertsatz für das  $(d-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß des  $(d-1)$ -Skeletts eines Poisson-Voronoi-Mosaiks gezeigt.

Auch für die sogenannten *STIT-Mosaik*e, die auf Joseph Mecke, Werner Nagel und Viola Weiss zurückgehen, vergleiche [30, 32], gibt es zentrale Grenzwertsätze der Skelette. Diesem Mosaik liegt ein Beobachtungsfenster  $W \in \mathcal{K}^d$  zugrunde, das mit einer

exponentialverteilten Lebenszeit versehen ist. Nach Ablauf der Lebenszeit wird die Zelle  $W$  durch eine zufällige Hyperebene geteilt und die beiden neuen Zellen werden wieder mit einer exponentialverteilten Lebenszeit versehen. Diese Konstruktion lässt sich nun rekursiv und unabhängig in den beiden Unterzellen fortsetzen bis eine deterministische Zeit  $t > 0$  erreicht ist. Man bezeichnet mit  $X(t, W)$  das so entstandene zufällige Mosaik.

Tomasz Schreiber und Christoph Thäle haben einen zentralen Grenzwertsatz für das eindimensionale Hausdorffmaß des 1-Skeletts in einem planaren STIT-Mosaik gezeigt, vergleiche [46, Theorem 2]. Sie zeigen außerdem, dass das  $(d-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß der  $(d-1)$ -Seiten für  $d > 2$  im Allgemeinen nicht gegen eine Gaußsche Zufallsvariable konvergiert, vergleiche [46, Theorem 3]. Bezeichnet man die Zellen-teilenden Kanten des planaren STIT-Mosaiks als *maximale Kanten*, so genügen außerdem die geeignet reskalierte totale Länge der maximalen Kanten und die geeignet reskalierte totale Anzahl der maximalen Kanten einem multivariaten zentralen Grenzwertsatz, vergleiche [45, Theorem 4].

### 4.3.2 Beweis des zentralen Grenzwertsatzes

Zunächst stellen wir einige Überlegungen und Lemmata voran, die den Beweis von Theorem 4.3.1, der mit der Cramér-Wold-Technik und Theorem B.3 geführt wird, vereinfachen werden.

Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, folgt mit der Additivität der Oberflächenmaße und der Inklusions-Exklusions-Formel

$$\Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i) = \sum_{m=i}^k (-1)^{k-m} \sum_{S \in X_m(\eta)} \Psi_i(S \cap W_t, U_i) \quad (4.40)$$

für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $i \in \{0, \dots, k\}$ . Mit der Bilinearität der Kovarianz und Theorem 3.1.11 erhält man nun die Existenz der asymptotischen Kovarianz  $\psi_{i,j}^k(U)$  sowie eine explizite Darstellung.

Da für die Anwendung von Theorem B.3 das Funktional  $\Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i)$  in die Anteile der einzelnen Poisson-Punkte zum Oberflächenmaß zerlegt werden muss, definieren wir für  $x \in \mathbb{R}^d$ , eine lokal-endliche Punktmenge  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\xi_i^k(x, \chi, K) := \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^{k-m}}{d-m+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_m(C(x, \chi^x))} \Psi_i(S, U_i) \mathbf{1}\{F(x, \chi^x) \subseteq K\}$$

und

$$\Xi_i^k(\chi, K) := \sum_{x \in \chi} \xi_i^k(x, \chi, K)$$

für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $i \in \{0, \dots, k\}$ .

Definiere nun für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ ,  $i \in \{0, \dots, k\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  lokal-endlich und einen konvexen Körper  $K \in \mathcal{K}^d$

$$\zeta_i^k(x, \chi, K) := \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^{k-m}}{d-m+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_m(C(x, \chi))} \Psi_i(S \cap K, U_i)$$

und

$$Z_i^k(\chi, K) := \sum_{x \in \chi} \zeta_i^k(x, \chi, K).$$

Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, liegt jede  $m$ -Seite in genau  $d - m + 1$  Zellen und zusammen mit (4.40) folgt für das  $i$ -te Oberflächenmaß des  $k$ -Skeletts des Poisson-Voronoi-Mosaiks in einem Beobachtungsfenster  $W_t$

$$\Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i) = \sum_{x \in \eta} \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^{k-m}}{d-m+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_m(C(x, \eta))} \Psi_i(S \cap W_t, U_i) = Z_i^k(\eta, W_t).$$

In dieser Darstellung kann man nun leicht erkennen, dass  $\Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i)$  und das Funktional  $\Xi_i^k(\eta \cap W_t, W_t)$  bis auf Randeffekte übereinstimmen, die wir nun beschreiben werden.

Wir definieren für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ ,  $i \in \{0, \dots, k\}$ , lokal-endliches  $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  und  $K \in \mathcal{K}^d$

$$X_i^k(\chi, K) := Z_i^k(\chi, K) - \Xi_i^k(\chi \cap K, K).$$

Es ist leicht zu sehen, dass alle Summanden von  $\Xi_i^k(\chi \cap K, K)$  auch in  $Z_i^k(\chi, K)$  vorkommen. Definiert man die Menge  $H(\chi, K)$  wie in Abschnitt 4.1 durch

$$H(\chi, K) := \{x \in \chi \cap K : F(x, \chi) \cap K^c \neq \emptyset\} \cup \{x \in \chi \cap K^c : C(x, \chi) \cap K \neq \emptyset\},$$

so sind die restlichen Summanden von  $Z_i^k$  die der Punkte in  $H$  und es folgt

$$X_i^k(\chi, K) = \sum_{x \in \chi} \zeta_i^k(x, \chi, K) \mathbf{1}_{H(\chi, K)}(x). \quad (4.41)$$

Wie in Abschnitt 4.1 bereits gezeigt, ist

$$H^+(\chi, K) := \{x \in \chi : F(x, \chi) \cap \partial K\}$$

eine Obermenge von  $H(\chi, K)$ .

Wir werden nun einige Lemmata beweisen, die das Anwenden von Theorem B.3 auf die Funktionale  $\zeta_i^k$  und den Nachweis, dass die Randeffekte im Poisson-Fall vernachlässigbar sind, erleichtern werden.

**Lemma 4.3.2** *Für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $i \in \{0, \dots, k\}$  gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var}(X_i^k(\eta, W_t)) = 0. \quad (4.42)$$

*Beweis:* Mit der Poincaré-Ungleichung erhält man

$$\text{Var}(X_i^k(\eta, W_t)) \leq \int \mathbb{E}[(X_i^k(\eta^x, W_t) - X_i^k(\eta, W_t))^2] dx \quad (4.43)$$

und mit (4.41) folgt für den Differenzenoperator im Integranden

$$\begin{aligned} X_i^k(\eta^x, W_t) - X_i^k(\eta, W_t) &= \zeta_i^k(x, \eta^x, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(x) + \sum_{y \in \eta} \zeta_i^k(y, \eta^x, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(y) \\ &\quad - \sum_{y \in \eta} \zeta_i^k(y, \eta, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta, W_t)}(y). \end{aligned}$$

Da die Voronoi-Flower eine Stoppmenge ist, vergleiche Lemma 3.1.6, und die Funktion  $\zeta_i^k$  an der Stelle  $y \in \eta$  sowie die Indikatorfunktion der Menge  $H$  an der Stelle  $y \in \eta$  nur von der Einschränkung des Punktprozesses auf die Voronoi-Flower von  $y$  abhängt, gilt für  $y \in \eta$  mit  $x \notin F(y, \eta)$

$$\zeta_i^k(y, \eta^x, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(y) = \zeta_i^k(y, \eta, W_t) \mathbf{1}_{H(\eta, W_t)}(y).$$

Da  $x \in F(y, \eta)$  äquivalent zu  $y \in N(x, \eta^x)$  ist, folgt

$$\begin{aligned} & X_i^k(\eta^x, W_t) - X_i^k(\eta, W_t) \\ &= \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^{k-m}}{d-m+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_m(C(x, \eta^x))} \Psi_i(S \cap K, U_i) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(x) \\ &+ \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^{k-m}}{d-m+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_m(C(y, \eta^x))} \Psi_i(S \cap K, U_i) \mathbf{1}_{H(\eta^x, W_t)}(y) \\ &- \sum_{y \in N(x, \eta^x)} \sum_{m=i}^k \frac{(-1)^{k-m}}{d-m+1} \sum_{S \in \mathcal{F}_m(C(y, \eta))} \Psi_i(S \cap K, U_i) \mathbf{1}_{H(\eta, W_t)}(y). \end{aligned}$$

Für den Betrag hiervon werden wir nun eine obere Schranke angeben, indem wir die Dreiecksungleichung anwenden und die Oberflächenmaße gegen die auf  $\mathcal{K}^d$  monotonen inneren Volumina abschätzen. Weiter sind die Zellen aller hier betrachteten Punkte in  $\bigcup_{y \in N(x, \eta^x)} C(y, \eta) = \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} C(y, \eta^x) \subseteq B(x, 2R_2(x, \eta^x))$  enthalten und deshalb sind alle Nachbarn dieser Punkte Nachbarn zweiter Ordnung von  $x$  bezüglich  $\eta^x$ . Da das Poisson-Voronoi-Mosaik normal ist, lässt sich die Anzahl der  $k$ -Seiten einer Zelle gegen die  $(d-k)$ -te Potenz der Nachbarzahl abschätzen. Mit diesen Überlegungen folgt

$$\begin{aligned} & |X_i^k(\eta' + \delta_{(x,m)}, W_t) - X_i^k(\eta', W_t)| \\ & \leq f_i^k(x, \eta^x) \mathbf{1}\{x \in H^+(\eta^x, W_t) \cup N(H^+(\eta^x, W_t), \eta^x) \cup N(H^+(\eta, W_t), \eta^x)\}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

wobei wir für  $x \in \chi \in \mathbf{N}$  und  $i \in \{0, \dots, d\}$

$$\begin{aligned} f_i^k(x, \chi) &:= \sum_{m=i}^k |N(x, \chi)|^{d-k} V_i(C(x, \chi)) \\ &+ 2 |N(x, \chi)| \sum_{m=i}^k |N_2(x, \chi)|^{d-k+1} V_i(B(x, 2R_2(x, \chi))) \end{aligned}$$

setzen und die *Voronoi-Nachbarschaft* einer Menge  $L \subseteq \chi \in \mathbf{N}$  durch

$$N(L, \chi) := \bigcup_{x \in L} N(x, \chi)$$

definieren. Nun werden wir die Indikatorfunktion auf der rechten Seite von (4.44) abschätzen. Wegen  $\bigcup_{y \in N(x, \eta^x)} C(y, \eta) = \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} C(y, \eta^x) \subseteq B(x, 2R_2(x, \eta^x))$  folgt  $\bigcup_{y \in N(x, \eta^x)} F(y, \eta) = \bigcup_{y \in N(x, \eta^x) \cup \{x\}} F(y, \eta^x) \subseteq B(x, 6R_2(x, \eta^x))$  und man erhält mit der Definition (4.5) von  $H^+$

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}\{x \in H^+(\eta^x, W_t) \cup N(H^+(\eta^x, W_t), \eta^x) \cup N(H^+(\eta, W_t), \eta^x)\} \\ & \leq \mathbf{1}\{B(x, 6R_2(x, \eta^x)) \cap \partial W_t \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Mit dieser Überlegung, (4.43) und (4.44) folgt nun

$$\frac{1}{t} \text{Var}(X_i^k(\eta', W_t)) \leq \frac{1}{t} \int \mathbb{E}[f_i^k(x, \eta^x)^2 \mathbf{1}\{B(x, 6R_2(x, \eta^x)) \cap \partial W_t \neq \emptyset\}] dx.$$

Verwendet man die Translationsinvarianz von  $R_2(\cdot, \cdot)$ ,  $|N(\cdot, \cdot)|$ ,  $|N_2(\cdot, \cdot)|$ , die Translationsinvarianz der inneren Volumina und die Stationarität von  $\eta$ , so erhält man mit dem Satz von Fubini

$$\frac{1}{t} \text{Var}(X_i^k(\eta', W_t)) \leq \mathbb{E}[f_i^k(0, \eta^0)^2 \lambda_d(\partial W - t^{-1/d} B(0, 6R_2(0, \eta^0)))].$$

Dieser Ausdruck konvergiert nach dem Satz von der dominierten Konvergenz für  $t \rightarrow \infty$  gegen null, wobei

$$f_i^k(0, \eta^0)^2 \lambda_d(W + B(0, 6R_2(0, \eta^0)))$$

für  $t \geq 1$  als Majorante gewählt werden kann. Die Integrierbarkeit der Majorante folgt nach Anwenden der Steiner-Formel (1.9) und der Hölder-Ungleichung aus der Homogenität der inneren Volumina, Lemma 3.1.3 und Lemma 3.1.5.  $\square$

Wegen (4.42) und der Existenz und Endlichkeit von  $\psi_{i,j}^k(U)$  folgt

$$\psi_{i,j}^k(U) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Cov}(\Xi_i^k(\eta \cap W_t, W_t), \Xi_j^k(\eta \cap W_t, W_t)) \quad (4.45)$$

aus Lemma 2.1.3.

Nun werden wir die Momentenbedingung von Ordnung drei nachweisen.

**Lemma 4.3.3** *Für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $i \in \{0, \dots, k\}$  besitzt das Funktional  $\xi_i^k$  ein Moment der Ordnung drei.*

*Beweis:* Für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $i \in \{0, \dots, k\}$  ist zu zeigen, dass

$$\sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{E}[|\xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)|^3] < \infty \quad (4.46)$$

gilt, vergleiche Definition B.2. Seien  $t \geq 1$  und  $x \in W_t$ . Da die Voronoi-Flower eine Stoppmenge ist, vergleiche Lemma 3.1.6, ist die Voronoi-Zelle von  $x$  bezüglich  $\eta^x \cap W_t$  bzw.  $\eta^x$  im Fall  $F(x, \eta^x \cap W_t) \subseteq W_t$  gleich. Weiter ist  $\xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)$  durch die Voronoi-Zelle von  $x$  bezüglich  $\eta^x \cap W_t$  bestimmt und es folgt mit elementaren Abschätzungen und der Normalität des Poisson-Voronoi-Mosaiks

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)|^3] &\leq \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{m=i}^k |\mathcal{F}_m(C(x, \eta^x))| V_i(C(x, \eta^x)) \right)^3 \right] \\ &\leq (k-i+1)^3 \mathbb{E}[|N(x, \eta^x)|^{3d-3i} V_i(C(x, \eta^x))^3]. \end{aligned}$$

Wegen der Stationarität von  $\eta$ , Lemma 3.1.2 und Lemma 3.1.3 kann hierfür mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung eine von  $x$  und  $t$  unabhängige obere Schranke angegeben werden, womit (4.46) gezeigt ist.  $\square$

Nun werden wir Theorem 4.3.1 mit Hilfe der Cramér-Wold-Technik und des Theorems B.3 beweisen.

*Beweis von Theorem 4.3.1:* Seien  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $i \in \{0, \dots, k\}$ . Nach der Cramér-Wold-Technik genügt es für den Nachweis von Theorem 4.3.1 für alle  $a =$

$(a_0, \dots, a_k)^\top \in \mathbb{R}^{k+1}$

$$\sum_{i=0}^k a_i \Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, a^\top \Sigma^k(U) a) \quad (4.47)$$

für  $t \rightarrow \infty$  zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^k a_i \frac{\Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i) - \mathbb{E}[\Psi_i(Y^k(\eta) \cap W_t, U_i)]}{\sqrt{t}} \\ &= \sum_{i=0}^k a_i \frac{\Xi_i^k(\eta \cap W_t, W_t) - \mathbb{E}[\Xi_i^k(\eta \cap W_t, W_t)]}{\sqrt{t}} + \sum_{i=0}^k a_i \frac{X_i^k(\eta, W_t) - \mathbb{E}[X_i^k(\eta, W_t)]}{\sqrt{t}}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Wir werden nun zeigen, dass der erste Summand auf der rechten Seite in Verteilung gegen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert null und Varianz  $a^\top \Sigma^k(U) a$  konvergiert und der zweite Summand stochastisch gegen null konvergiert. Mit dem Lemma von Slutsky folgt dann (4.47) und somit Theorem 4.3.1.

Zunächst untersuchen wir die Konvergenz des ersten Summanden auf der rechten Seite von (4.48), wozu wir Theorem B.3 verwenden. Mit  $\kappa := \mathbf{1}_W$  gilt offensichtlich  $\|\kappa\|_\infty = 1 < \infty$  und  $\kappa$  hat Träger  $W$ . Die Mengen  $A_t$ ,  $t \geq 1$ , aus Definition B.1 der exponentiellen Stabilisierung setzen wir gleich  $W$ .

Als nächstes weisen wir die Existenz und Endlichkeit der asymptotischen Varianz nach. Wegen (4.45) gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Var} \left( \sum_{i=0}^k a_i \Xi_i^k(\eta \cap W_t, W_t) \right) = \sum_{i,j=0}^k a_i a_j \psi_{i,j}^k(U) = a^\top \Sigma^k(U) a$$

und dieser Ausdruck ist wegen der Endlichkeit der  $\psi_{i,j}^k(U)$  endlich.

Da die Funktionale  $\xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)$  für alle  $k \in \{0, \dots, d-1\}$  und  $i \in \{0, \dots, k\}$  durch  $C(x, \eta^x \cap W_t)$  bestimmt sind, kann für die Funktionale  $\xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)$  und damit auch für deren Linearkombination  $\sum_{i=0}^k a_i \xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)$ , die hier zu untersuchen ist, der gleiche exponentielle Stabilisierungsradius wie im gefärbten Poisson-Voronoi-Mosaik gewählt werden.

Zuletzt muss die Momentenbedingung dritter Ordnung gezeigt werden, die ebenfalls wieder aus der Momentenbedingung (4.46) folgt. Es gilt mit der Dreiecksungleichung, der Linearität des Erwartungswertes und der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=0}^k a_i \xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t) \right|^3 \right] \\ & \leq \sum_{h,i,j=0}^k |a_h| |a_i| |a_j| \mathbb{E}[|\xi_h^k(x, \eta \cap W_t, W_t)| |\xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)| |\xi_j^k(x, \eta \cap W_t, W_t)|] \\ & \leq \sum_{h,i,j=0}^k |a_h| |a_i| |a_j| (\mathbb{E}[|\xi_h^k(x, \eta \cap W_t, W_t)|^3] \mathbb{E}[|\xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t)|^3] \\ & \quad \times \mathbb{E}[|\xi_j^k(x, \eta \cap W_t, W_t)|^3])^{1/3}. \end{aligned}$$

Da die Momente in (4.46) von  $x$  und  $t$  unabhängige obere Schranken besitzen, besitzt auch das hier zu untersuchende Moment eine von  $x$  und  $t$  unabhängige obere Schranke

und die geforderte Momentenbedingung

$$\sup_{t \geq 1, x \in W_t} \mathbb{E} \left[ \left| \sum_{i=0}^k a_i \xi_i^k(x, \eta \cap W_t, W_t) \right|^3 \right] < \infty$$

ist somit erfüllt. Damit sind alle Voraussetzungen für die Anwendbarkeit von Theorem B.3 nachgewiesen und der erste Summand auf der rechten Seite von (4.48) konvergiert gegen eine Normalverteilung mit Erwartungswert null und Varianz  $a^\top \Sigma^k(U) a$ .

Nun zeigen wir, dass der zweite Summand auf der rechten Seite von (4.48) stochastisch gegen null konvergiert, das heißt, die Randeffekte sind vernachlässigbar. Mit der Tschebyschev-Ungleichung, der Bilinearität der Kovarianz und der Hölder-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \left| \sum_{i=0}^k a_i (X_i^k(\eta, W_t) - \mathbb{E}[X_i^k(\eta, W_t)]) \right| \geq \varepsilon \right) \\ & \leq \frac{\text{Var}(\sum_{i=0}^k a_i X_i^k(\eta, W_t))}{t \varepsilon^2} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i,j=0}^k a_i a_j \sqrt{\frac{\text{Var}(X_i^k(\eta, W_t))}{t} \frac{\text{Var}(X_j^k(\eta, W_t))}{t}} \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert für  $t \rightarrow \infty$  gegen null nach (4.42). □

---

## Kapitel 5

# Ausblick

---

In Kapitel zwei haben wir unter gewissen Voraussetzungen Formeln für die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina der schwarzen Teilmenge  $Z$  gefunden. Dabei verschärfen sich die Voraussetzungen teils deutlich, wenn man einen beliebigen konvexen Körper statt eines Polytops als Beobachtungsfenster verwendet. Wünschenswert wären Voraussetzungen, die für alle konvexen Körper als Beobachtungsfenster gleich stark sind. Um solche Voraussetzungen zu erhalten, muss man die Schranke in Lemma A.2.3 verbessern.

Wie in Kapitel drei geschildert, vermuten wir, dass die Voraussetzungen für die Existenz der asymptotischen Kovarianzstruktur der inneren Volumina von  $Z$  für  $(m, n)$ -Perkolation auf randomisierten Archimedischen Gittern bei einer geeigneten Wahl des Beobachtungsfensters erfüllt sind und  $\rho_{i,j}^{k,l}(p) = 0$  gilt. Wir setzen für  $i, j \in \{0, 1, 2\}$  und  $p \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{i,j}(p) := & \sum_{k=i}^n \sum_{l=j}^n (-1)^{i+j+k+l} \sum_{r,s=1}^{\infty} \sum_{o=1}^{\min(r,s)} g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p) \\ & \times \gamma_k \mathbb{E}_k^0[V_i(S(0)) V_j(\mathcal{S}_{l,s}^o(0)) \mathbf{1}\{|\mathcal{S}_m(0)| = r\}]. \end{aligned}$$

Ist unsere Vermutung richtig, so gilt  $\sigma_{i,j}(p) = \bar{\sigma}_{i,j}(p)$  und die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina hängen nur von lokalen Größen ab, die sich leicht bestimmen lassen. Da die Archimedischen Gitter gut untersuchte Perkulationsmodelle sind, sind viele kritische Wahrscheinlichkeiten exakt bekannt und für die restlichen existieren recht genaue Approximationen, mit denen man charakteristische Stellen der mittleren Euler-Charakteristik  $\delta_0$  und  $\bar{\sigma}_{i,j}$  vergleichen kann. Wie wir bereits im Poisson-Voronoi- und Poisson-Delaunay-Mosaik festgestellt haben, liegt in der Nähe der kritischen Wahrscheinlichkeit meist eine Nullstelle der mittleren Euler-Charakteristik, ein lokales Maximum der asymptotischen Varianz der Euler-Charakteristik, eine Wendestelle der asymptotischen Kovarianz von Oberfläche und Euler-Charakteristik und ein lokales Minimum der asymptotischen Kovarianz von Volumen und Euler-Charakteristik. Außerdem wurde die Korrelation der Euler-Charakteristik und des Volumens mit der kritischen Wahrscheinlichkeit verglichen. Wir definieren nun

$$\bar{\rho}_{2,0}(p) := \frac{\bar{\sigma}_{2,0}(p)}{\sqrt{\bar{\sigma}_{0,0}(p) \bar{\sigma}_{2,2}(p)}}$$

und vergleichen in einigen Archimedischen Gittern die entsprechenden charakteristischen Stellen der Größen  $\delta_0$ ,  $\bar{\sigma}_{j,0}$  und  $\bar{\rho}_{2,0}$  mit den kritischen Wahrscheinlichkeiten, vergleiche Tabelle 5.

Mit Ausnahme des Gitters  $(3, 4, 6, 4)$  ist die Nullstelle von  $\delta_0$  für  $p_c \leq 1/2$  bzw.  $p_c \geq 1/2$  eine untere bzw. obere Schranke der kritischen Wahrscheinlichkeit. Das lokale

| Gitter         | Perkolationmodell | Nullstelle von $\delta_0$ | Maximum von $\bar{\sigma}_{0,0}$ | Wendestelle von $\bar{\sigma}_{1,0}$ | Minimum von $\bar{\sigma}_{2,0}$ | Minimum von $\bar{\rho}_{2,0}$ | $p_c$  |
|----------------|-------------------|---------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--|
| $(4^4)$        | Kantenp.          | 1/2                       | 1/2                              | 0,5817                               | 0,5588                           | 0,4746                         | 1/2  |
| $(4^4)$        | Knotenp.          | 0,6180                    | 0,5368                           | 0,6487                               | 0,6317                           | 0,5361                         | $\approx 0,5927$                                 |
| $(3^6)$        | Kantenp.          | 0,3244                    | 0,4202                           | 0,5046                               | 0,4417                           | 0,3463                         | $2 \sin(\pi/18)$<br>$\approx 0,3473$             |
| $(3^6)$        | Knotenp.          | 1/2                       | 0,5000                           | 0,5991                               | 0,5559                           | 0,4279                         | 1/2  |
| $(6^3)$        | Zellenp.          | 1/2                       | 1/2                              | 1/2                                  | 1/2                              | 1/2                            | 1/2  |
| $(6^3)$        | Kantenp.          | 0,6756                    | 0,5798                           | 0,6698                               | 0,6865                           | 0,6284                         | $1 - \sin(\pi/18)$<br>$\approx 0,6527$           |
| $(3, 4, 6, 4)$ | Kantenp.          | 0,5134                    | 0,5141                           | 0,5999                               | 0,5831                           | 0,4884                         | $\approx 0,6218$                                 |
| $(3, 6, 3, 6)$ | Knotenp.          | 0,6756                    | 0,5798                           | 0,6867                               | 0,6728                           | 0,4868                         | $1 - 2 \sin(\pi/18)$<br>$\approx 0,6527$         |
| $(3, 12^2)$    | Knotenp.          | 0,8395                    | 0,6892                           | 0,8018                               | 0,8225                           | 0,7692                         | $(1 - 2 \sin(\pi/18))^{1/2}$<br>$\approx 0,8079$ |

Tabelle 5.1: Kritische Wahrscheinlichkeiten und markante Stellen der mittleren Euler-Charakteristik,  $\bar{\sigma}_{j,0}$  und  $\bar{\rho}_{2,0}$  einiger Archimedischer Gitter

Maximum von  $\bar{\sigma}_{0,0}$  liefert für  $p_c \leq 1/2$  bzw.  $p_c \geq 1/2$  eine obere bzw. untere Schranke. Eine Wendestelle von  $\bar{\sigma}_{1,0}$  ist mit Ausnahme der Gitter  $(3, 4, 6, 4)$  und  $(3, 12^2)$  eine obere Schranke von  $p_c$  und das lokale Minimum von  $\bar{\sigma}_{2,0}$  ist mit Ausnahme des Gitters  $(3, 4, 6, 4)$  ebenfalls eine obere Schranke. Für alle hier betrachteten Gitter ist das lokale Minimum von  $\bar{\rho}_{2,0}$  eine untere Schranke der kritischen Wahrscheinlichkeit.

Man stellt fest, dass die Schätzungen der kritischen Wahrscheinlichkeiten durch das lokale Maximum von  $\bar{\sigma}_{0,0}$  schlechter werden, je weiter die kritische Wahrscheinlichkeit von  $1/2$  entfernt liegt. Dies kann damit zusammenhängen, dass  $\bar{\sigma}_{0,0}$  den Faktor  $p(1-p)$  enthält. Dieser Faktor ist gerade die Varianz einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariable mit Parameter  $p$ , also die Varianz der Markenverteilung. Für  $p = 1/2$  wird diese Varianz maximal und kann somit dafür sorgen, dass das lokale Maximum von  $\bar{\sigma}_{0,0}$  in Richtung  $1/2$  verschoben wird. Deshalb untersuchen wir in Perkulationsmodellen mit  $p_c \neq 1/2$ , wie sich  $\bar{\sigma}_{0,0}/(p(1-p))$  verhält, vergleiche Tabelle 5.2.

| Gitter         | Perkulationsmodell | Maximum von $\bar{\sigma}_{0,0}$ | Maximum von $\bar{\sigma}_{0,0}(p)/(p(1-p))$ | $p_c$                                       |
|----------------|--------------------|----------------------------------|--|---|
| $(4^4)$        | Knotenperk.        | 0,5368                           | 0,5506                                       | $\approx 0,5927$                            |
| $(3^6)$        | Kantenperk.        | 0,4202                           | 0,3915                                       | $2 \sin(\pi/18) \approx 0,3473$             |
| $(6^3)$        | Kantenperk.        | 0,5798                           | 0,6085                                       | $1 - \sin(\pi/18) \approx 0,6527$           |
| $(3, 4, 6, 4)$ | Kantenperk.        | 0,5141                           | 0,5198                                       | $\approx 0,6218$                            |
| $(3, 6, 3, 6)$ | Knotenperk.        | 0,5798                           | 0,6085                                       | $1 - 2 \sin(\pi/18) \approx 0,6527$         |
| $(3, 12^2)$    | Knotenperk.        | 0,6892                           | 0,7512                                       | $(1 - 2 \sin(\pi/18))^{1/2} \approx 0,8079$ |

Tabelle 5.2: Kritische Wahrscheinlichkeiten und lokales Maximum von  $\bar{\sigma}_{0,0}$  und  $\bar{\sigma}_{0,0}(p)/(p(1-p))$  einiger Archimedischer Gitter mit  $p_c \neq 1/2$

An Tabelle 5.2 lässt sich leicht ablesen, dass das lokale Maximum von  $\bar{\sigma}_{0,0}/(p(1-p))$  näher an der kritischen Wahrscheinlichkeit liegt, als das lokale Maximum von  $\bar{\sigma}_{0,0}$ .

Wie bereits in Abschnitt 3.2 geschildert, ist die kritische Wahrscheinlichkeit bei  $(0, 1)$ -Perkulation die gleiche wie bei Knotenperkulation, aber die asymptotischen Erwartungswerte und die asymptotischen Kovarianzen der inneren Volumina können sich stark unterscheiden, wie wir für das planare Poisson-Delaunay-Mosaik in Kapitel drei

gesehen haben. Somit stellt sich die Frage, ob die hier verwendeten Funktionale bzw. die hier verwendeten Momente optimal sind.

In Kapitel vier haben wir multivariate zentrale Grenzwertsätze für das Poisson-Voronoi- und das Poisson-Delaunay-Mosaik gezeigt. Da diesen Theoremen ein Stabilisierungsergebnis für markierte Poisson-Prozesse zugrunde liegt, haben wir im Voronoi-Fall nur Zellenperkolat und im Delaunay-Fall nur  $(0, n)$ -Perkolat betrachtet. Wir gehen davon aus, dass analoge multivariate zentrale Grenzwertsätze auch für beliebige  $(m, n)$ -Perkolat gelten. Um dies zu beweisen, benötigt man ein Stabilisierungsergebnis, in dem beliebige  $k$ -Tupel von Poisson-Punkten unabhängig voneinander mit einer Bernoulli-verteilter Marke versehen werden können. Solche Resultate liegen bisher keine vor. Da die Stabilisierungstheorie auf Resultaten über Abhängigkeitsgraphen gründet, ist es denkbar, dass man zentrale Grenzwertsätze bei  $(m, n)$ -Perkolat mit Aussagen über Abhängigkeitsgraphen unter Zuhilfenahme der von Lothar Heinrich nachgewiesenen Mischungseigenschaften des Poisson-Voronoi-Mosaiks, vergleiche [12], zeigen kann.

Weiter wurden in Kapitel vier multivariate zentrale Grenzwertsätze für die Skelette im Poisson-Voronoi- und Poisson-Delaunay-Mosaik gezeigt ohne auf die positive Definitheit der asymptotischen Kovarianzmatrix einzugehen. In diesen Modellen liegt nun keine Färbung vor, die in den Beweisen von Theorem 4.1.7 und Theorem 4.2.5 genutzt wurde, weshalb man andere Methoden benötigt. Da im Poisson-Delaunay-Mosaik nur die stetigen inneren Volumina als Funktionale betrachtet werden, kann man die positive Definitheit vermutlich ähnlich zu Lemma 7.6 in [24] zeigen. Im Poisson-Voronoi-Mosaik dagegen betrachtet man Oberflächenmaße, die nur noch schwach stetig sind, und benötigt also andere Argumente.



---

## Kapitel A

# Innere Volumina approximierbarer Funktionen

---

Üblicherweise werden innere Volumina mit Hilfe der Steiner-Formel für konvexe Körper definiert und mit dem Erweiterungssatz von Groemer [44, Theorem 14.4.2] können sie eindeutig auf den Konvexring fortgesetzt werden. Ausgehend von einer Verallgemeinerung des Begriffs der Orthogonalprojektion, bei der jedem Punkt der Projektion eine gewisse Multiplizität zugeordnet wird, hat Helmut Groemer in [9] die inneren Volumina für die größere Klasse der sogenannten *approximierbaren Funktionen* definiert und fundamentale Eigenschaften hergeleitet. Diese Verallgemeinerung ist für diese Arbeit sehr nützlich, da die inneren Volumina nun auch auf dem relativen Inneren und dem relativen Rand von konvexen Körpern geschnitten mit einer Vereinigung endlich vieler Polytope definiert werden können. Dabei identifizieren wir eine Menge  $K$  mit ihrer Indikatorfunktion  $\mathbf{1}_K$ .

### A.1 Definitionen nach Groemer

Helmut Groemer definiert die inneren Volumina ausgehend von einer Charakteristik für reellwertige Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$ . Zunächst definieren wir diese *Charakteristik*  $V_0$  für reellwertige Funktionen auf  $\mathbb{R}^0$  und  $\mathbb{R}$ . Für  $f : \mathbb{R}^0 \rightarrow \mathbb{R}$  setzt man einfach  $V_0(f) := f$ . In  $\mathbb{R}$  definiert man die Charakteristik für beschränkte Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen, für die in jedem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert  $f^+(x)$  und  $f^-(x)$  existieren, durch

$$V_0(f) := \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) - \frac{1}{2}(f^+(x) + f^-(x)),$$

wobei der Summand nur für Unstetigkeitsstellen von  $f$  ungleich null ist. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass die Menge aller Funktionen mit diesen Eigenschaften einen linearen Raum bildet. Ist  $f$  nun speziell die charakteristische Funktion eines Intervalls  $I \subseteq \mathbb{R}$ , so erhält man für die Charakteristik von  $f$

$$V_0(f) = \begin{cases} 1, & \text{falls } I \text{ abgeschlossen,} \\ 0, & \text{falls } I \text{ halboffen,} \\ -1, & \text{falls } I \text{ offen.} \end{cases}$$

Mit dieser Charakteristik definieren wir nun eine Projektion für Funktionen. Seien  $H$  eine Hyperebene des  $\mathbb{R}^d$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$  und  $H^\perp(x)$  die zu  $H$  senkrechte Gerade, die  $x$  enthält. Dann definieren wir eine *Punktprojektion*  $p_H : \mathbb{R}^d \rightarrow H$  durch

$$p_H(x) := H \cap H^\perp(x).$$

Für  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  und  $M \subseteq \mathbb{R}^d$  bezeichnet  $f \wedge M$  die *Einschränkung* von  $f$  auf  $M$ , das heißt diejenige Funktion, die auf  $M$  gleich  $f$  ist und außerhalb von  $M$  nicht definiert ist. Sei nun  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, sodass  $f \wedge p_H^{-1}(x)$  für jedes  $x \in H$  beschränkt ist, nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt und deren rechts- und linksseitiger Grenzwert in jedem Punkt existieren. Dann definiert man durch

$$(\pi_H f)(x) := V_0(f \wedge p_H^{-1}(x))$$

eine *Funktionsprojektion*  $\pi_H f$ .

Bevor wir die approximierbaren Funktionen definieren können, führen wir induktiv eine größere Klasse, die sogenannten *normierbaren Funktionen*, ein. Im  $\mathbb{R}^0$  sei jede reellwertige Funktion normierbar und die Norm  $\|f\|_0$  einer Funktion  $f$  im  $\mathbb{R}^0$  sei durch  $\|f\|_0 := |f|$  festgelegt. Ist im  $\mathbb{R}^{k-1}$  bereits eine Norm und die Klasse der normierbaren Funktionen definiert, die von dem im  $\mathbb{R}^{k-1}$  gewählten Koordinatensystem unabhängig ist, so heiße eine im  $\mathbb{R}^k$  definierte Funktion  $f$  *normierbar*, wenn gilt:

- (i) Die Funktion  $f$  sei beschränkt, Lebesgue-messbar und habe kompakten Träger.
- (ii) Für jede  $(k-1)$ -Ebene  $H$  existiert die Projektion  $\pi_H f$  und  $\pi_H f$  sei (als Funktion im  $\mathbb{R}^{k-1}$  aufgefasst) wieder normierbar.
- (iii) Definiert man im  $\mathbb{R}^k$  durch

$$\|f\|_k := \max \left( \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)| \lambda_k(dx), \sup_H \|\pi_H f\|_{k-1} \right)$$

eine Halbnorm, wobei sich das angeführte Supremum über alle  $(k-1)$ -Ebenen  $H$  des  $\mathbb{R}^k$  erstreckt, so sei  $\|f\|_k < \infty$ .

Eine normierbare Funktion  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *approximierbar*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Für  $k = 0$  ist jede Funktion approximierbar.
- (ii) Für  $k > 0$  existiert eine Folge  $(p_i)$  bewerteter Polytope des  $\mathbb{R}^k$ , sodass in der oben definierten Norm  $p_i \rightarrow f$  gilt. Dabei ist ein *bewertetes Polytop* eine Linearkombination von Indikatorfunktionen von Polytopen. Außerdem sei die Einschränkung  $f \wedge H$  von  $f$  auf jede beliebige  $(k-1)$ -Ebene  $H$  des  $\mathbb{R}^k$  wieder approximierbar, wobei  $H$  als  $\mathbb{R}^{k-1}$  aufgefasst wird.

Die Menge aller approximierbaren Funktionen in  $\mathbb{R}^d$  werde mit  $\mathbf{A}$  bezeichnet. Man sieht leicht, dass  $\mathbf{A}$  ein linearer Funktionenraum ist. Wie in [9] gezeigt wird, sind die Indikatorfunktionen des relativen Inneren und des relativen Randes eines konvexen Körpers approximierbar.

Die Charakteristik  $V_0$ , die bisher nur für Funktionen auf  $\mathbb{R}^0$  oder  $\mathbb{R}^1$  definiert wurde, lässt sich nun auf höherdimensionale Räume fortsetzen.

**Theorem A.1.1** *Auf dem Raum  $\mathbf{A}$  der approximierbaren Funktionen gibt es genau ein stetiges lineares Funktional  $V_0$ , sodass für jedes nicht-leere Polytop  $P$*

$$V_0(P) = 1$$

*gilt. Ist  $H$  eine Hyperebene und  $f \in \mathbf{A}$ , so gilt außerdem*

$$V_0(\pi_H f) = V_0(f).$$

Für approximierbare Funktionen auf  $\mathbb{R}^0$  und  $\mathbb{R}$  stimmt dieses Funktional mit der bereits definierten Charakteristik  $V_0$  überein.

Mit dieser Charakteristik kann man nun eine Funktionenprojektion auf beliebige Ebenen einführen. Sei  $H$  eine  $k$ -Ebene, so lässt sich durch  $p_H(x) := H^\perp(x) \cap H$  eine orthogonale Projektion des  $\mathbb{R}^d$  auf  $H$  definieren, wobei  $H^\perp(x)$  die zu  $H$  orthogonale  $(d-k)$ -Ebene durch den Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$  bezeichnet. Für eine approximierbare Funktion  $f$  definieren wir durch

$$(\pi_H f)(x) := V_0(f \wedge p_H^{-1}(x))$$

eine *Funktionenprojektion*.

Auf der Menge der approximierbaren Funktionen können nun induktiv die inneren Volumina fortgesetzt werden, sodass diese Erweiterungen stetig, linear und invariant unter isometrischen Transformationen sind. Bezeichnet  $V_i^{(k)}$  für  $i \in \{0, \dots, k\}$  die inneren Volumina im  $\mathbb{R}^k$  und  $\mathbf{A}^k$  die approximierbaren Funktionen im  $\mathbb{R}^k$ , so definieren wir im  $\mathbb{R}^0$  für  $f \in \mathbf{A}^0$

$$V_0^{(0)}(f) := V_0(f).$$

Sind die Funktionale  $V_0^{(k)}, \dots, V_k^{(k)}$  auf  $\mathbf{A}^k$  schon definiert, so definieren wir für eine approximierbare Funktion  $f \in \mathbf{A}^{k+1}$

$$V_{k+1}^{(k+1)}(f) := \int f(x) \lambda_{k+1}(dx)$$

und für  $i \in \{0, \dots, k\}$

$$V_i^{(k+1)}(f) := \frac{1}{(k-i+1)} \frac{\kappa_{k-i}}{\kappa_k \kappa_{k-i+1}} \int V_i^{(k)}(\pi_{H(u)} f) \sigma_k(du),$$

wobei  $\sigma_k$  das sphärische Lebesguemaß auf der Sphäre  $\mathbb{S}^k$  des  $\mathbb{R}^{k+1}$  bezeichnet und  $H(u)$  die zu dem Vektor  $u \in \mathbb{S}^k$  orthogonale  $k$ -Ebene durch den Ursprung. Diese verallgemeinerten inneren Volumina sind zwar nicht mehr monoton bezüglich der Teilmengenrelation, aber man kann auf der Menge der approximierbaren Funktionen wie folgt eine Halbordnung  $\lesssim$  definieren, sodass die inneren Volumina bezüglich dieser Halbordnung monoton sind. Für  $f, g \in \mathbf{A}$  sei  $f \lesssim g$ , falls für jede  $k$ -Ebene  $H$  des  $\mathbb{R}^d$ ,  $k \in \{0, \dots, d\}$ ,

$$\pi_H f \leq \pi_H g$$

gilt.

## A.2 Einige Lemmata

Wir werden nun zeigen, dass die inneren Volumina für alle in dieser Arbeit benötigten Mengen definiert sind. Wir wissen bereits, dass die Indikatorfunktion des relativen Inneren eines konvexen Körpers approximierbar ist und die Menge der approximierbaren Funktionen einen linearen Raum bildet. Außerdem benötigen wir, dass der Schnitt des Randes eines konvexen Körpers  $W \in \mathcal{K}^d$  mit einer endlichen Vereinigung  $Z$  von Polytopen  $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{P}^d$ , die paarweise disjunktes Inneres haben, approximierbar ist. Definiert man die  $k$ -Seiten von  $Z$  durch

$$\mathcal{F}_k(Z) := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{F}_k(P_i),$$

so kann  $Z \cap \partial W$  wie folgt disjunkt zerlegt werden:

$$\begin{aligned} Z \cap \partial W &= \bigcup_{k=0}^d \bigcup_{S \in \mathcal{F}_k(Z)} \operatorname{relint}(S) \cap \partial W \\ &= \left( \bigcup_{k=0}^d \bigcup_{S \in \mathcal{F}_k(Z)} \operatorname{relint}(S) \cap W \right) \setminus \left( \bigcup_{k=0}^d \bigcup_{S \in \mathcal{F}_k(Z)} \operatorname{relint}(S) \cap \operatorname{relint}(W) \right). \end{aligned}$$

Da  $\operatorname{relint}(S) \cap \operatorname{relint}(W)$  entweder leer oder das relative Innere von  $S \cap W$  ist,  $\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(K)}$  für  $K \in \mathcal{K}^d$  approximierbar und  $\mathbf{A}$  ein linearer Raum ist, genügt es zu zeigen, dass der Schnitt des relativen Inneren eines Polytops mit einem konvexen Körper approximierbar ist.

**Lemma A.2.1** *Ist  $S \in \mathcal{P}^d$  und  $W \in \mathcal{K}^d$ , so ist*

$$\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W} \in \mathbf{A},$$

*also eine approximierbare Funktion.*

*Beweis:* Führe eine Induktion über  $k = \dim(S)$  durch. Für  $k = 1$  ist  $\operatorname{relint}(S) \cap W$  ein Intervall (offen, halboffen oder abgeschlossen) und somit ist  $\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W}$  approximierbar. Ist nun  $k > 1$ , so lässt sich  $S \cap W$  disjunkt zerlegen in

$$\begin{aligned} S \cap W &= (\operatorname{relint}(S) \cap W) \cup (\operatorname{relbd}(S) \cap W) \\ &= (\operatorname{relint}(S) \cap W) \cup \bigcup_{l=0}^{\dim(S)-1} \bigcup_{T \in \mathcal{F}_l(S)} (\operatorname{relint}(T) \cap W) \end{aligned}$$

und man erhält für die zugehörigen Indikatorfunktionen

$$\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W} = \mathbf{1}_{S \cap W} - \sum_{l=0}^{\dim(S)-1} \sum_{T \in \mathcal{F}_l(S)} \mathbf{1}_{\operatorname{relint}(T) \cap W}.$$

Da  $S \cap W$  ein konvexer Körper ist, ist  $\mathbf{1}_{S \cap W}$  approximierbar. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt nun, dass auch  $\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W}$  als Summe approximierbarer Funktionen approximierbar ist.  $\square$

Da die verallgemeinerten inneren Volumina nach Groemer bezüglich der Halbordnung  $\lesssim$  monoton sind, werden wir nun bezüglich dieser Halbordnung eine obere und untere Schranke von  $\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W}$  bestimmen. Vorbereitend geben wir zunächst eine obere Schranke des Betrags der Charakteristik dieser Funktion an.

**Lemma A.2.2** *Für  $S \in \mathcal{P}^d$  und  $W \in \mathcal{K}^d$  gilt*

$$|V_0(\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W})| \leq \left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1}.$$

*Beweis:* Es wird wieder eine Induktion über  $k = \dim(S)$  geführt. Für  $k = 1$  gilt  $V_0(\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W}) \in \{-1, 0, 1\}$ , abhängig davon, ob  $\operatorname{relint}(S) \cap W$  ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall ist. Damit folgt

$$|V_0(\mathbf{1}_{\operatorname{relint}(S) \cap W})| \leq 1 = \left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1}.$$

Sei nun  $k > 1$ . Da die Charakteristik  $V_0$  linear,  $S \cap W$  ein konvexer Körper ist und  $V_0(\mathbf{1}_K) = 1$  für  $K \in \mathcal{K}^d$  gilt, erhält man

$$V_0(\mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap W}) = V_0(\mathbf{1}_{S \cap W}) - V_0(\mathbf{1}_{\text{relbd}(S) \cap W}) = 1 - \sum_{l=0}^{\dim(S)-1} \sum_{T \in \mathcal{F}_l(S)} V_0(\mathbf{1}_{\text{relint}(T) \cap W}).$$

Damit, der Dreiecksungleichung und der Induktionsvoraussetzung folgt

$$|V_0(\mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap W})| \leq 1 + \sum_{l=0}^{\dim(S)-1} \sum_{T \in \mathcal{F}_l(S)} \left( \sum_{m=0}^l |\mathcal{F}_m(T)| \right)^{l-1}.$$

Zusammen mit

$$1 \leq \left( \sum_{m=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_m(S)| \right)^{\dim(S)-2} \quad \text{und} \quad \left( \sum_{m=0}^l |\mathcal{F}_m(T)| \right)^{l-1} \leq \left( \sum_{m=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_m(S)| \right)^{\dim(S)-2}$$

für  $T \in \mathcal{F}_l(S)$  folgt die Behauptung.  $\square$

Nun können wir obere und untere Schranken der inneren Volumina von  $\mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap W}$  bestimmen.

**Lemma A.2.3** Für  $S \in \mathcal{P}^d$ ,  $W \in \mathcal{K}^d$  und  $i \in \{0, \dots, d\}$  gilt

$$|V_i(\mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap W})| \leq \left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1} V_i(\mathbf{1}_S).$$

*Beweis:* Wegen der Monotonie der inneren Volumina bezüglich der Halbordnung  $\lesssim$  genügt es

$$-\left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1} \mathbf{1}_S \lesssim \mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap W} \lesssim \left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1} \mathbf{1}_S$$

zu zeigen, das heißt, für alle  $k$ -Ebenen  $H$  des  $\mathbb{R}^d$ ,  $k \in \{0, \dots, d\}$ , und alle  $x \in H$  gilt

$$\begin{aligned} -\left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1} V_0(\mathbf{1}_{S \cap H^\perp(x)}) &\leq V_0(\mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap W \cap H^\perp(x)}) \\ &\leq \left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1} V_0(\mathbf{1}_{S \cap H^\perp(x)}), \end{aligned}$$

wobei  $H^\perp(x)$  die zu  $H$  orthogonale  $(d-k)$ -Ebene durch  $x$  bezeichnet.

Da die Charakteristik  $V_0$  linear ist, gilt  $V_0(\mathbf{1}_\emptyset) = 0$  und im Fall  $\text{relint}(S) \cap H^\perp(x) = \emptyset$  ist nichts zu zeigen. Ist  $\text{relint}(S) \cap H^\perp(x)$  nicht leer, so gilt  $V_0(\mathbf{1}_{S \cap H^\perp(x)}) = 1$  und die Behauptung des Lemmas ist äquivalent zu

$$|V_0(\mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap W \cap H^\perp(x)})| \leq \left( \sum_{l=0}^{\dim(S)} |\mathcal{F}_l(S)| \right)^{\dim(S)-1}. \quad (\text{A.1})$$

Wegen  $\text{relint}(S) \cap H^\perp(x) \neq \emptyset$  folgt  $\text{relint}(S) \cap H^\perp(x) = \text{relint}(S \cap H^\perp(x))$  und somit nach Lemma A.2.2

$$|V_0(\mathbf{1}_{\text{relint}(S) \cap H^\perp(x)})| \leq \left( \sum_{l=0}^{\dim(S \cap H^\perp(x))} |\mathcal{F}_l(S \cap H^\perp(x))| \right)^{\dim(S \cap H^\perp(x))-1}.$$

Da beim Schneiden von  $S$  mit  $H^\perp(x)$  die Anzahl der Seiten von  $S$  und die Dimension von  $S$  nicht größer werden können, folgt (A.1) und somit die Behauptung.  $\square$

---

## Kapitel B

# Stabilisierung und ein zentraler Grenzwertsatz

---

Hier wird der zentrale Grenzwertsatz Theorem 2.1 aus der Arbeit [42] von Mathew Penrose und Joseph Yukich, der auf der Stabilisierungstheorie basiert, etwas verallgemeinert. Zunächst geben wir die benötigten Definitionen an um die in dieser Arbeit mehrmals verwendete verallgemeinerte Version des zentralen Grenzwertsatzes formulieren zu können. Der Beweis dieser verallgemeinerten Version kann analog zu dem Beweis von Theorem 2.1 in [42] geführt werden.

Sei  $(\mathbf{M}, \mathcal{M}, \mathbb{P}_{\mathbf{M}})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, der sogenannte *Markenraum*. Weiter sei  $\xi((x, m), \chi')$  wie in [42] eine messbare  $\mathbb{R}$ -wertige Funktion, die für alle endlichen Mengen  $\chi' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  und für alle  $(x, m) \in \chi'$  definiert ist. Wir erweitern die Funktionale  $\xi((x, m), \chi')$  um ein weiteres Argument, indem wir für eine Borelmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\xi((x, m), \chi', W) := \xi((x, m), \chi') \mathbf{1}\{F(x, \chi') \subseteq W\}$$

setzen. Diese Funktion ist wieder messbar. Gilt  $(x, m) \in (\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}) \setminus \chi'$ , so definieren wir

$$\xi((x, m), \chi', W) := \xi((x, m), \chi' \cup \{(x, m)\}, W).$$

Für gegebenes  $\chi' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$ ,  $a > 0$  und  $y \in \mathbb{R}^d$  setzen wir

$$\begin{aligned} a\chi' &:= \{(ax, m) : (x, m) \in \chi'\}, \\ \chi' + y &:= y + \chi' := \{(y + x, m) : (x, m) \in \chi'\}, \end{aligned}$$

das heißt, Skalarmultiplikation und Translation auf  $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  beziehen sich nur auf die erste Komponente. Wir nennen  $\xi$  *translationsinvariant*, falls

$$\xi((y + x, m), y + \chi', y + W) = \xi((x, m), \chi', W)$$

für  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $(x, m) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$ , endliches  $\chi' \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  und  $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  gilt.

Für  $t > 0$  setzen wir

$$\xi_t((x, m), \chi', W) := \xi((x, m), x + t^{1/d}(-x + \chi'), x + t^{1/d}(-x + W)).$$

Ist  $\xi$  translationsinvariant, so vereinfacht sich dies zu

$$\xi_t((x, m), \chi', W) = \xi((t^{1/d}x, m), t^{1/d}\chi', t^{1/d}W).$$

Im Folgenden sei  $\kappa$  eine beschränkte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf  $\mathbb{R}^d$  mit kompaktem Träger  $A \subseteq \mathbb{R}^d$ . Das Supremum von  $\kappa$  bezeichnen wir mit  $\|\kappa\|_{\infty}$ . Für alle  $t \geq 1$  sei  $\mathcal{P}_t$  ein Poisson-Prozess in  $\mathbb{R}^d \times \mathbf{M}$  mit Intensitätsmaß  $(t\kappa(x)dx) \times \mathbb{P}_{\mathbf{M}}(dm)$ .

Weiter sei  $(A_t)_{t \geq 1}$  eine Familie von Borelschen Teilmengen der Menge  $A$ . Im einfachsten Fall gilt  $A_t = A$  für alle  $t$ .

Im restlichen Abschnitt bezeichne  $M$  eine Zufallsvariable in  $\mathbf{M}$  mit Verteilung  $\mathbb{P}_{\mathbf{M}}$ , die unabhängig von  $\mathcal{P}_t$  ist. Nun definieren wir exponentielle Stabilisierung.

**Definition B.1** Das Funktional  $\xi$  heißt *exponentiell stabilisierend* (bezüglich  $\kappa$  und  $(A_t)_{t \geq 1}$ ), falls die folgenden Punkte erfüllt sind:

- (i) Sei  $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  eine Borelmenge. Für alle  $t \geq 1$  und alle  $x \in A_t$  existiert eine fast sicher endliche Zufallsvariable  $R := R(x, t, W)$ , sodass für alle endlichen Mengen  $\chi' \subseteq (A \setminus B(x, t^{-1/d}R)) \times \mathbf{M}$

$$\begin{aligned} & \xi_t((x, M), [\mathcal{P}_t \cap (B(x, t^{-1/d}R) \times \mathbf{M})] \cup \chi', W) \\ &= \xi_t((x, M), \mathcal{P}_t \cap (B(x, t^{-1/d}R) \times \mathbf{M}), W) \end{aligned}$$

gilt.

- (ii) Definiert man die *Tailwahrscheinlichkeit* durch

$$\tau(s) := \sup_{t \geq 1, x \in A_t} \mathbb{P}(R(x, t, W) > s), \quad s > 0,$$

so gilt

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} s^{-1} \log \tau(s) < 0.$$

Die Zufallsvariable  $R(x, t, W)$  heißt dann *Stabilisierungsradius* von  $\xi$  in  $x$ .

Außerdem benötigen wir die folgende Definition.

**Definition B.2** Das Funktional  $\xi$  hat ein *Moment der Ordnung*  $p > 0$  (bzgl.  $\kappa$  und  $(A_t)_{t \geq 1}$ ), falls

$$\sup_{t \geq 1, x \in A_t} \mathbb{E}[|\xi_t((x, M), \mathcal{P}_t, W)|^p] < \infty$$

gilt.

Für  $t > 0$  und eine Borelmenge  $W \subseteq \mathbb{R}^d$  definieren wir das zufällige gewichtete Punktmaß  $\Xi_{t,W}$  auf  $\mathbb{R}^d$  durch

$$\Xi_{t,W}(\cdot) := \sum_{(x,m) \in \mathcal{P}_t \cap (A_t \times \mathbf{M})} \xi_t((x, m), \mathcal{P}_t, W) \delta_x(\cdot)$$

und dessen zentrierte Version  $\bar{\Xi}_{t,W} := \Xi_{t,W} - \mathbb{E}[\Xi_{t,W}]$ . Bezeichnet man mit  $\mathcal{B}_b(A)$  die Menge aller beschränkten Borel-messbaren Funktionen auf  $A$ , so setzen wir für  $f \in \mathcal{B}_b(A)$

$$\langle f, \Xi_{t,W} \rangle := \int_A f d\Xi_{t,W} \quad \text{und} \quad \langle f, \bar{\Xi}_{t,W} \rangle := \int_A f d\bar{\Xi}_{t,W}.$$

Im Folgenden bezeichnet  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

**Theorem B.3** *Es sei  $\|\kappa\|_\infty < \infty$ . Weiter sei  $\xi$  exponentiell stabilisierend und habe ein Moment der Ordnung  $p$  für ein  $p > 2$ . Sei  $q \in (2, 3]$  mit  $q < p$ . Sei  $f \in \mathcal{B}_b(A)$  und setze  $T_t := \langle f, \Xi_{t,W} \rangle$ . Dann existiert eine endliche Konstante  $C$ , die von  $d, \xi, \kappa, p, q, f$  und  $W$  abhängen kann, sodass für alle  $t \geq 2$*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P} \left( \frac{T_t - \mathbb{E}T_t}{\text{Var}(T_t)^{1/2}} \leq s \right) - \Phi(s) \right| \leq C(\log t)^{dq} \text{Var}(T_t)^{-q/2}$$

gilt. Gibt es nun zusätzlich eine Konstante  $\sigma^2(f, \xi, \kappa, W) \geq 0$  mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{Var} \langle f, \Xi_{t,W} \rangle = \sigma^2(f, \xi, \kappa, W),$$

so folgt

$$\langle f, t^{-1/2} \bar{\Xi}_{t,W} \rangle \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, \sigma^2(f, \xi, \kappa, W)).$$

Dabei bezeichnet  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  die zentrierte Normalverteilung mit Varianz  $\sigma^2$ , falls  $\sigma^2$  positiv ist, und die Einpunktverteilung mit Masse in 0, falls  $\sigma^2 = 0$  gilt.

Der Beweis kann ganz analog zu dem Beweis von Theorem 2.1 in [42] geführt werden.



---

# Nomenklatur

---

|   |   |    |
|---|---|----|
| $A[0, 1]^2$                                   | Fundamentalzelle der Archimedischen Gitter  | 78 |
| $\mathcal{B}(\mathbb{X})$                     | Borelmengen eines topologischen Raumes $\mathbb{X}$   | 5  |
| $B(x, r)$                                     | abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $x$ und Radius $r$   | 5  |
| $B^c$   | Komplement der Menge $B$  | 5  |
| $B'$  | kartesisches Produkt von $B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\{0, 1\}$  | 86 |
| $\mathbb{C}$                                  | Menge der komplexen Zahlen  | 5  |
| $\text{conv}(\cdot)$                          | konvexe Hülle   | 5  |
| $C(x, \chi)$                                  | Voronoi-Zelle von $x$ bezüglich $\chi$  | 13 |
| $C(\chi)$                                     | Voronoi-Mosaik bezüglich $\chi$   | 13 |
| $\chi^x, \chi^{x,y}$                          | $\chi \cup \{x\}$ und $\chi \cup \{x, y\}$ für lokal-endliches $\chi \subseteq \mathbb{R}^d$  | 8  |
| $d(x, A)$                                     | Abstand von $x$ zu der Menge $A$  | 5  |
| $D(e, \chi)$                                  | Delaunay-Zelle mit Zentrum $e$ bezüglich $\chi$   | 14 |
| $D(\chi)$                                     | Delaunay-Mosaik bezüglich $\chi$  | 14 |
| $\text{diam}(\cdot)$                          | Durchmesser   | 5  |
| $\partial B$                                  | Rand der Menge $B$  | 5  |
| $\delta_x$                                    | Diracmaß in $x$   | 6  |
| $\mathbb{E}$                                  | Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}$   | 6  |
| $\mathbb{E}_k^0$                              | Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}_k^0$   | 10 |
| $\eta', \eta$                                 | unabhängig markierter und zugehöriger unmarkierter Poisson-Prozess der Intensität $\gamma > 0$ (Kapitel 1-3) bzw. der Intensität eins (Kapitel 4) | 8  |
| $\eta^{(k)}$                                  | Punktprozess der Steiner-Punkte der $k$ -Seiten von $X$   | 10 |
| $\mathcal{F}_k(\cdot)$                        | Menge der $k$ -Seiten eines Polytops  | 8  |
| $\mathcal{F}(\cdot)$                          | Menge der Seiten eines Polytops   | 8  |
| $F(x, \chi)$                                  | Voronoi-Flower von $x$ bezüglich $\chi$   | 49 |
| $f_{m,n}^{k,r}(p), g_{m,n,o}^{k,l,r,s}(p)$    | Polynome, die gewisse Färbewahrscheinlichkeiten bei $(m, n)$ -Perkolation angeben   | 27 |
| $\gamma_k$                                    | Intensität von $\eta^{(k)}$   | 10 |
| $\mathcal{H}^k$                               | $k$ -dimensionales Hausdorffmaß   | 5  |
| $h(K, \cdot)$                                 | Stützfunktion des konvexen Körpers $K$  | 8  |
| $\text{int}(B) = \overset{\circ}{B}$          | Inneres einer Menge $B$   | 5  |
| $\kappa_d$                                    | Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$   | 5  |
| $\mathcal{K}^d$                               | Menge der konvexen Körper   | 6  |
| $\lambda_d$                                   | $d$ -dimensionales Lebesguemaß  | 5  |
| $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$                    | Menge der natürlichen Zahlen (vereinigt mit der Null)   | 5  |
| $\mathbb{N}, \mathcal{N}$                     | Menge der einfachen, lokal-endlichen Zählmaße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und zugehörige $\sigma$ -Algebra                                    | 6  |
| $\mathbb{N}_{\{0,1\}}, \mathcal{N}_{\{0,1\}}$ | Menge der einfachen, lokal-endlichen Zählmaße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{P}(\{0, 1\})$ und zugehörige $\sigma$ -Algebra      | 8  |

|   |   |     |
|---|---|-----|
| $N(K, x)$                                   | Normalenkegel von $K \in \mathcal{K}^d$ in $x$  | 17  |
| $N(P, S)$                                   | Normalenkegel eines Polytops $P$ in einer Seite $S$ von $P$   | 17  |
| $N(x, \chi), N_2(x, \chi)$                  | (Voronoi-)Nachbarn bzw. (Voronoi-)Nachbarn zweiter Ordnung von $x$ bezüglich $\chi$   | 46  |
| $\mathcal{N}(v, \Sigma)$                    | Nomalverteilung mit Erwartungswertvektor $v$ und Kovarianzmatrix $\Sigma$   | 86  |
| $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$         | zugrunde liegender Wahrscheinlichkeitsraum  | 6   |
| $\mathcal{P}^d$                             | Menge der Polytope  | 6   |
| $\mathcal{P}(\{0, 1\})$                     | Potenzmenge von $\{0, 1\}$  | 8   |
| $p$   | Färbewahrscheinlichkeit der $m$ -Seiten   | 19  |
| $\mathbb{P}_k^0$                            | Palmsches Wahrscheinlichkeitsmaß von $\eta^{(k)}$   | 10  |
| $\Psi_0, \dots, \Psi_d$                     | Oberflächenmaße   | 15  |
| $\psi_{i,j}^{k,l}(U)$                       | asymptotische Kovarianz der Oberflächenmaße $\Psi_i, \Psi_j$ innerhalb der Seitenprozesse $X_k, X_l$ des Poisson-Voronoi-Mosaiks          | 59  |
| $\psi_{i,j}^k(U)$                           | asymptotische Kovarianz der Oberflächenmaße $\Psi_i, \Psi_j$ des $k$ -Skeletts im Poisson-Voronoi-Mosaik                                  | 112 |
| $\mathbb{R}$                                | Menge der reellen Zahlen  | 5   |
| $\text{relint}(\cdot), \text{relbd}(\cdot)$ | relatives Inneres und relativer Rand  | 5   |
| $R(\cdot)$                                  | Umkugelradius   | 5   |
| $R_2(x, \chi)$                              | Umkugelradius zweiter Ordnung von $x$ bezüglich $\chi$  | 48  |
| $\rho_{i,j}^{k,l}(p)$                       | asymptotische Kovarianz der mit Färbewahrscheinlichkeiten gewichteten inneren Volumina $V_i, V_j$ innerhalb der Seitenprozesse $X_k, X_l$ | 27  |
| $\mathbb{S}^{d-1}$                          | Einheitssphäre in $\mathbb{R}^d$  | 5   |
| $s(\cdot)$                                  | Steiner-Punkt   | 8   |
| $S(x)$                                      | die $x \in \mathbb{R}^d$ im relativen Inneren enthaltende Seite von $X$   | 10  |
| $\mathcal{S}_l(x)$                          | zu $S(x)$ benachbarte $l$ -Seiten   | 10  |
| $\tilde{\mathcal{S}}_l(x)$                  | $l$ -Seiten, die $S(x)$ schneiden   | 11  |
| $\mathcal{S}_{l,s}(S)$                      | zu $S$ benachbarte $l$ -Seiten von $m$ -Grad $s$  | 21  |
| $\mathcal{S}_l^o(S)$                        | $l$ -Seiten, die genau $o$ gemeinsame benachbarte $m$ -Seiten mit der Seite $S$ haben   | 22  |
| $\mathcal{S}_{l,s}^o(S)$                    | Schnitt von $\mathcal{S}_l^o(S)$ und $X_{l,s}$  | 22  |
| $S_\tau$                                    | typische Seite vom Typ $\tau$   | 79  |
| $\sigma_{d-1}(\cdot)$                       | sphärisches Lebesguemaß auf $\mathbb{S}^{d-1}$  | 5   |
| $\sigma_{i,j}(p)$                           | asymptotische Kovarianz der inneren Volumina der schwarzen Teilmenge $Z$ bei Färbewahrscheinlichkeit $p$                                  | 26  |
| $\sigma_{i,j}^U(p)$                         | asymptotische Kovarianz der Oberflächenmaße $\Psi_i, \Psi_j$ von $Z$ im Poisson-Voronoi-Mosaik  | 86  |
| $\tilde{\sigma}_{i,j}^U(p)$                 | asymptotische Kovarianz von $\Xi^i, \Xi^j$ im Poisson-Voronoi-Mosaik  | 88  |
| $\tilde{\sigma}_{i,j}(p)$                   | asymptotische Kovarianz von $\Xi^i, \Xi^j$ im Poisson-Delaunay-Mosaik   | 104 |
| $T$   | Abbildung, die einer $k$ -Seite im Archimedischen Gitter ihren Typ zuordnet   | 79  |
| $\tau^{k,l}$                                | asymptotische Kovarianz von $\varphi_1, \varphi_2$ innerhalb der Seitenprozesse $X_k, X_l$ eines normalen Mosaiks                         | 38  |

|                                       |  |        |
|---------------------------------------|--|--------|
| $\tau_{i,j}^{k,l}$                    | asymptotische Kovarianz der inneren Volumina $V_i, V_j$ innerhalb der Seitenprozesse $X_k, X_l$              | 40, 71 |
| $\theta_x$                            | messbarer Fluss  | 6      |
| $V_0, \dots, V_d$                     | innere Volumina  | 17     |
| $V_i^{(k)}(x, p), V_i^{(k)}(x, y, p)$ | mit Färbewahrscheinlichkeit gewichtetes absolutes $i$ -tes inneres Volumen von $\mathcal{S}_k(x)$            | 51     |
| $v_\tau$                              | Verschiebungsvektor, sodass $S_\tau + v_\tau$ eine Seite des nicht randomisierten Archimedischen Gitters ist | 79     |
| $W, W_t$                              | Beobachtungsfenster und skaliertes Beobachtungsfenster   | 19     |
| $X$                                   | zufälliges stationäres Mosaik  | 10     |
| $X_k$                                 | $k$ -Seiten von $X$  | 10     |
| $X_k^1$                               | schwarze $k$ -Seiten von $X$   | 10     |
| $X_k^*$                               | $k$ -Seiten von $X$ , die nur in schwarzen Zellen liegen   | 35     |
| $X_{k,r}$                             | $k$ -Seiten von $X$ mit $m$ -Grad $r$  | 21     |
| $Y_k$                                 | $k$ -Seiten der nicht randomisierten Archimedischen Gitter   | 79     |
| $Y^k(\chi)$                           | $k$ -Skelett des Voronoi-Mosaiks bezüglich $\chi$  | 112    |
| $Z$                                   | Vereinigung der schwarzen Seiten in einem gefärbten Mosaik   | 9      |
| $\ \cdot\ , \ \cdot\ _\infty$         | Euklidische und Supremumsnorm  | 5      |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$        | Standardskalarprodukt  | 5      |



---

# Literaturverzeichnis

---

- [1] Bachman, George, Narici, Lawrence und Beckenstein, Edward (2000). *Fourier and Wavelet Analysis*. Springer-Verlag, New York.
- [2] Baldi, Pierre und Rinott, Yosef (1989). On normal approximation of distributions in terms of dependency graphs. *Annals of Probability*, **17**, 1646-1650.
- [3] Baryshnikov, Yuliy und Yukich, Joseph E. (2005). Central Limit Theorems for Random Measures in Geometric Probability. *Annals of Applied Probability*, **15**(1A), 213–253.
- [4] Baumstark, Volker und Last, Günter (2006). Some distributional results for Poisson Voronoi tessellations. *Advances in Applied Probability*, **39**, 16-40.
- [5] Bollobás, Béla und Riordan, Oliver (2006). The critical probability for random Voronoi percolation in the plane is  $1/2$ . *Probability Theory and Related Fields*, **136**, 417-468.
- [6] Bollobás, Béla und Riordan, Oliver (2006). *Percolation*. Cambridge University Press, New York.
- [7] Broadbent, Simon R. und Hammersley, John M. (1957). Percolation processes I. Crystals and mazes. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **53**, 629–641.
- [8] Chen, Louis H.Y. und Shao, Qi-Man (2004). Normal approximation under local dependence. *Annals of Probability*, **32**(3A), 1985–2028.
- [9] Groemer, Helmut (1972). Eulersche Charakteristik, Projektionen und Quermaßintegrale. *Mathematische Annalen*, **198**(1), 23-56.
- [10] Grünbaum, Branko und Shephard, Geoffrey C. (1987). *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman and Company, New York.
- [11] Harris, Theodore E. (1960). A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **56**, 13-20.
- [12] Heinrich, Lothar (1994). Normal approximation for some mean value estimates of absolutely regular tessellations. *Mathematical Methods of Statistics*, **3**, 1–24.
- [13] Heinrich, Lothar und Muche, Lutz (2008). Second-order properties of the point process of nodes in a stationary Voronoi tessellation. *Mathematische Nachrichten*, **281**, 350-375.

- [14] Hug, Daniel, Last, Günter und Schulte, Matthias (2013). Second order properties and central limit theorems for geometric functionals of Boolean models. arXiv:1308.6519.
- [15] Hug, Daniel und Schneider, Rolf (2007). Asymptotic shapes of large cells in random tessellations. *Geometric and Functional Analysis*, **17**, 156-191.
- [16] Jacobsen, Jesper L. (2014). High-precision percolation thresholds and Potts-model critical manifolds from graph polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **47**, 135001.
- [17] Kendall, David G. (1948). On the number of lattice points inside a random oval. *Quarterly Journal of Mathematics (Oxford)*, **19**, 1-26.
- [18] Kendall, David G. und Rankin, Robert A. (1952). On the number of lattice points of a given lattice in a random hypersphere. *Quarterly Journal of Mathematics (Oxford)(2)*, **4**, 178-189.
- [19] Kesten, Harry (1980). The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$ . *Communications in Mathematical Physics*, **74**, 41-59.
- [20] Kesten, Harry und Lee, Sungchul. (1996). The central limit theorem for weighted minimal spanning trees on random points. *Annals of Applied Probability*, **6**, 495-527.
- [21] Landau, Edmund (1927). *Vorlesungen über Zahlentheorie, Band 2*. Verlag von S. Hirzel, Leipzig.
- [22] Last, Günter (2010). Modern random measures: Palm theory and related models. in: *New Perspectives in Stochastic Geometry*. (eds. Kendall, Wilfrid S. und Molchanov, Ilya). Oxford University Press.
- [23] Last, Günter und Ochsenreither, Eva (2014). Percolation on stationary tessellations: models, mean values and second order structure. Angenommen bei *Journal of Applied Probability*, **51A**.
- [24] Last, Günter, Peccati, Giovanni und Schulte, Matthias (2014). Normal approximation on Poisson spaces: Mehler's formula, second order Poincaré inequalities and stabilization. arXiv:1401.7568
- [25] Last, Günter und Penrose, Mathew D. (2011). Percolation and limit theory for the Poisson lilypond model. *Random Structures Algorithms*, **42**, 226–249.
- [26] Last, Günter und Penrose, Mathew D. (2011). Poisson process Fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities. *Probability Theory and Related Fields*, **150**, 663-690.
- [27] Last, Günter und Thorisson, Hermann (2009). Invariant transports of stationary random measures and mass-stationarity. *Annals of Probability*, **7(2)**, 790–813.
- [28] Lee, Sungchul (1997). The central limit theorem for euclidean minimum spanning trees. *Annals of Probability*, **7**, 996-1020.
- [29] Leistritz, Lutz und Zähle, Martina (1992). Topological Mean Value Relations for Random Cell Complexes. *Mathematische Nachrichten*, **155**, 57-72.

- [30] Mecke, Joseph, Nagel, Werner und Weiss, Viola (2008). A global construction of homogeneous random planar tessellations that are stable under iteration. *Stochastics*, **80**, 51–67.
- [31] Mertens, Stephan und Moore, Christopher (2012). Continuum percolation thresholds in two dimensions. *Physical Review E*, **76**(5), 051115.
- [32] Nagel, Werner und Weiss, Viola (2005). Crack STIT tessellations: characterization of stationary random tessellations stable with respect to iteration. *Advances in Applied Probability*, **37**, 859-883.
- [33] Nan-Yue, Zhang und Williams, Kenneth S. (1995). On the Epstein zeta funktion. *Tamkang Journal of Mathematics*, **26**(2), 165-176.
- [34] Neher, Richard A., Mecke, Klaus und Wagner, Herbert (2008). Topological estimation of percolation thresholds. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, P01011.
- [35] Ore, Øystein (1967). *The Four-Color problem*. Academic Press, New York.
- [36] Penrose, Mathew D. (2005). Multivariate spatial central limit theorems with applications to percolation and spatial graphs. *Annals of Probability*, **33**, 1945-1991.
- [37] Penrose, Mathew D. (2007). Gaussian limits for random geometric measures. *Electronic Journal of Probability*, **12**, 989-1035.
- [38] Penrose, Mathew D. und Wade, Andrew R. (2008) Multivariate normal approximation in geometric probability. *Journal of Statistical Theory and Practice*, **2**, 293-326.
- [39] Penrose, Mathew D. und Yukich, Joseph E. (2001). Central limit theorems for some graphs in computational geometry. *Annals of Applied Probability*, **11**, 1005-1041.
- [40] Penrose, Mathew D. und Yukich, Joseph E. (2002). Limit theory for random sequential packing and deposition. *Annals of Applied Probability*, **12**, 272-301.
- [41] Penrose, Mathew D. und Yukich, Joseph E. (2003). Weak laws of large numbers in geometric probability. *Annals of Applied Probability*, **13**, 277-303.
- [42] Penrose, Mathew D. und Yukich, Joseph E. (2004). Normal Approximation in Geometric Probability. In *Proceedings of the Workshop 'Stein's Method and Applications', Lecture Notes Series*, **5**, pp. 37-58. Institute for Mathematical Sciences: World Scientific, Singapore.
- [43] Schneider, Rolf (1993). *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University Press.
- [44] Schneider, Rolf und Weil, Wolfgang (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, Heidelberg.
- [45] Schreiber, Tomasz und Thäle, Christoph (2010). Second-order properties and central limit theory for the vertex process of iteration infinitely divisible and iteration stable random tessellations in the plane. *Advances in Applied Probability*, **42**, 913-935.

- 
- [46] Schreiber, Tomasz und Thäle, Christoph (2013). Limit theorems for iteration stable tessellations. *The Annals of Probability*, **41**, 2261-2278.
- [47] Stein, Charles (1972). A bound for the error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables. *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **2**, 583–602. Univ. California Press, Berkeley.
- [48] Stein, Charles (1986). *Approximate Computation of Expectations*. IMS, Hayward, Calif.
- [49] Suding, Paul N. und Ziff, Robert M. (1999). Site percolation thresholds for Archimedean lattices. *Physical Review E*, **60(1)**, 275–283.
- [50] Sykes, M. F. und Essam, J. W. (1964). Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, **5(8)**, 1117–1127.
- [51] Vretblad, Anders (2003). *Fourier Analysis and Its Applications*. Springer-Verlag, New York.
- [52] Weil, Wolfgang und Wieacker, John A. (1984). Densities for stationary random sets and point processes. *Advances in Applied Probability*, **16**, 324-346.
- [53] Wu, Liming (2000). A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications. *Probability Theory Related Fields*, **118**, 427-438.
- [54] Zuyev, Sergei (1999). Stopping sets: Gamma-type results and hitting properties. *Advances in Applied Probability*, **31(2)**, 355-366.