

Benjamin Hessenauer

**Ansätze zum methodischen Systemleichtbau  
und dessen Unterstützung durch numerische  
Topologieoptimierung bei dynamischer Belastung**

Approaches for methodological lightweight system  
design and its support by numerical topology  
optimization in dynamic loading conditions

Band 73

Systeme Methoden Prozesse

Hrsg.: o. Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. A. Albers



Forschungsberichte



Benjamin Hessenauer

**Ansätze zum methodischen Systemleichtbau und dessen Unterstützung durch numerische Topologieoptimierung bei dynamischer Belastung**

Approaches for methodological lightweight system design and its support by numerical topology optimization in dynamic loading conditions

Band 73

Herausgeber: o. Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. A. Albers

Copyright: IPEK – Institut für Produktentwicklung, 2014  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Universität des Landes Baden-Württemberg und  
nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft

Alle Rechte vorbehalten

Satz: Benjamin Hessenauer

ISSN 1615-8113

# **Ansätze zum methodischen Systemleichtbau und dessen Unterstützung durch numerische Topologieoptimierung bei dynamischer Belastung**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
**Doktors der Ingenieurwissenschaften**  
von der Fakultät für Maschinenbau des  
Karlsruher Institutes für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**  
von

Dipl.-Ing. Benjamin Hessenauer  
aus Leimen/Baden-Württemberg

Tag der mündlichen Prüfung: 27. März 2014

Hauptreferent o. Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Albert Albers

Korreferent Prof. Dr.-Ing. Frank Henning



# Vorwort des Herausgebers

Wissen ist einer der entscheidenden Faktoren in den Volkswirtschaften unserer Zeit. Der Unternehmenserfolg wird in der Zukunft mehr denn je davon abhängen, wie schnell ein Unternehmen neues Wissen aufnehmen, zugänglich machen und verwerten kann. Die Aufgabe eines Universitätsinstitutes ist es, hier einen wesentlichen Beitrag zu leisten. In den Forschungsarbeiten wird ständig Wissen generiert. Dieses kann aber nur wirksam und für die Gemeinschaft nutzbar werden, wenn es in geeigneter Form kommuniziert wird. Diese Schriftenreihe dient als eine Plattform zum Transfer und macht damit das Wissenspotenzial aus aktuellen Forschungsarbeiten am IPEK - Institut für Produktentwicklung Karlsruhe<sup>1</sup> am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) verfügbar.

Die Forschungsfelder des Institutes sind die methodische Entwicklung und das Entwicklungsmanagement, die rechnergestützte Optimierung von Strukturen und Systemen, die Antriebstechnik mit einem Schwerpunkt auf den Gebieten Antriebsstrang-Engineering und Tribologie und Monitoring von Lager- und Funktionsreibsystemen, die NVH mit dem Fokus auf Schwingungen und Akustik an Komponenten und am Gesamtfahrzeug, die Mikrosystemtechnik mit dem Fokus auf die zugehörigen Entwicklungsprozesse sowie die Mechatronik. Die Forschungsberichte werden aus allen diesen Gebieten Beiträge zur wissenschaftlichen Fortentwicklung des Wissens und der zugehörigen Anwendung – sowohl den auf diesen Gebieten tätigen Forschern als auch ganz besonders der anwendenden Industrie – zur Verfügung stellen. Ziel ist es, qualifizierte Beiträge zum Produktentwicklungsprozess zu leisten.

Albert Albers

---

<sup>1</sup>Eh.: Institut für Maschinenkonstruktionslehre und Kraftfahrzeugbau, Universität Karlsruhe (TH)





# Vorwort zu Band 73

Die Herausforderungen in der heutigen Produktentwicklung ergeben sich aus der Berücksichtigung umfangreicher gesellschaftlicher Randbedingungen. So müssen innovative Produkte Kundennutzen stiften, Begeisterungsmerkmale erfüllen, aber auch der Herausforderung eines nachhaltigen Umgangs mit der Umwelt genügen. Eine große Herausforderung ist in diesem Zusammenhang der steigende CO<sub>2</sub>-Gehalt in der Atmosphäre, der wiederum zur Erderwärmung führt. Eine Möglichkeit, hier mit technischen Produkten Lösungen darzustellen, ist eine konsequente Realisierung von hochenergieeffizienten technischen Systemen. Energieeffizienz in der Nutzung führt dabei zu einer Reduzierung des Primärenergieverbrauchs und gleichzeitig mit diesem auch zu einer Reduzierung des CO<sub>2</sub>-Ausstoßes. Energieeffizienz kann durch unterschiedlichste Ansätze berücksichtigt werden.

Ein zentraler Ansatz ist dabei aber der Leichtbau. Da eine Reduzierung der bewegten Massen immer auch zu einer Reduzierung der zur Bewegung notwendigen Energie führt, können hier direkte Verbesserungen der CO<sub>2</sub>-Bilanz auf Leichtbau ausgerichteter Produkte realisiert und nachgewiesen werden. Leichtbau unterscheidet sich dabei in drei Kategorien. Der Stoff-Leichtbau versucht, durch die Verwendung neuer Materialien mit niedriger Dichte oder gezielt verstärkter Materialien die Masse zu reduzieren. Ein zweiter Bereich des Leichtbaus ist der sogenannte Form- und Konzept-Leichtbau, bei dem durch geeignete Formgebung leichte und gleichzeitig steife Strukturen erzeugt werden.

Eine dritte große und wichtige Gruppe des Leichtbaus ist der sogenannte System-Leichtbau. Hierbei handelt es sich um einen ganzheitlichen Ansatz, bei dem das komplette technische System des Produktes auf seine Leichtbaupotenziale hin optimiert wird. Ein Beispiel für diese ganzheitliche Systemsicht ist z. B. eine elektronische Lastbegrenzung in Antriebssträngen, die dazu führt, dass die Komponenten und Elemente deutlich weniger beansprucht und damit leichter gestaltet werden können, da Lastspitzen oder Missbrauch systemisch verhindert werden und so mit niedrigen Sicherheitsfaktoren dimensioniert werden kann. Die Herausforderung beim Leichtbau ist die konsequente Integration in den Produktentstehungsprozess der Produktgenerationsentwicklung.

An dieser Stelle setzt die Arbeit von Herrn Dr.-Ing. Benjamin Hessenauer an. Er hat sich zum Ziel gesetzt, Ansätze für einen methodischen System-Leichtbau zu erforschen. Er führt mit seiner Arbeit die System-Leichtbau-Aktivitäten exemplarisch neu in einen Entwicklungsprozess-Ansatz – das integrierte Produktentstehungsmodell iPeM – ein, um so die übliche Trennung von Methoden, Werkstoffen und Fertigung aufzuheben. Ferner untersucht Herr Dr.-Ing. Hessenauer mit Hilfe des Topologieoptimierungsprozesses und dessen Integration in eine systematische Vorgehensmethodik am Beispiel der Schallabstrahlung von Komponenten diese Methode auf ihr Potenzial zum strukturierten Design von Leichtbaulösungen. Ziel ist es, den System-Leichtbau durch die strukturierte Einbindung konkreter Methoden und Algorithmen zur numerischen Optimierung der dynamischen Eigenschaften von Bauteilen zu unterstützen. Herr Dr.-Ing. Benjamin Hessenauer leistet mit seiner Arbeit einen wichtigen Beitrag zur weiteren Nutzung des Potenzials von gezieltem Leichtbau in der Produktkonstruktion.

März 2014

Albert Albers

**Leichtbau ist eine Geisteshaltung**

---

*(Heinrich Timm)*



# Kurzfassung

In dieser Arbeit werden die Herausforderungen für den Leichtbau im Gesamtsystem im Allgemeinen sowie für das Spannungsfeld von Leichtbau und Verbesserung der Akustik im Speziellen analysiert und neue Ansätze vorgestellt, um diesen Problemen auf beiden Abstraktionsebenen zu begegnen. Es wird aufgezeigt, dass ein konsequenter Leichtbaugedanke im Gesamtsystem für den Erfolg von Leichtbauentwicklungsprozessen unerlässlich ist. Ein Ansatz zu einer neuen Darstellung der Leichtbauaktivitäten wird vorgestellt, um bisherige Darstellungsformen um die Komplexität und Wirkzusammenhänge im Gesamtsystem zu erweitern. Diese Darstellung hebt die übliche Trennung von Methoden, Werkstoffen und Fertigung auf, und rückt das Gesamtsystem weiter in den Mittelpunkt der Betrachtungsweise.

Für die Bewältigung des Leichtbauproduktentwicklungsprozesses bedarf es außerdem neuer, rechnergestützter Methoden, die den Produktentwickler in seinen Aufgaben unterstützen. Der Zielkonflikt zwischen Gewichtsreduzierung und Komforthöhung ist dabei insbesondere in der Automobilindustrie von außerordentlicher Wichtigkeit, da diese beiden Ziele gegenläufig zueinander sind. Deshalb werden neue Ansätze mithilfe der Strukturoptimierung vorgestellt, die die beiden Ziele in Einklang bringen. Die Topologieoptimierung wird verwendet, um das Frequenzspektrum eines Bauteils unter harmonischer Last zu homogenisieren, da dies ein höheres Komfortempfinden für den Kunden bzw. Nutzer erzeugt. Dazu wird eine Zielfunktion mit entsprechenden analytischen Ableitungen vorgestellt, die den Frequenzgang einer Oberfläche unter harmonischer Last über einen gewissen Frequenzbereich darstellt. Zusätzlich werden Stabilisierungsmöglichkeiten des Optimierungsprozesses aufgezeigt und analysiert.

Im nächsten Schritt wird die erwähnte Zielfunktion erweitert, um mit andersartigen Problemstellungen umzugehen. Es werden die Unterschiede zwischen den beiden Problemarten und deren möglicher Einsatz in realen Anwendungsfällen aufgezeigt. Dazu müssen der Topologieoptimierungsprozess angepasst und neue Berechnungsschritte eingeführt werden.



# Abstract

In this work the problems of lightweight design in an overall system in general, and the conflicting goals of reducing weight and improving the acoustics in particular are analyzed and new approaches to overcome these problems on both levels of abstraction are introduced. It is shown that a consistent lightweight design approach in the overall system is essential for the success of a lightweight development process. An approach for a new representation of lightweight activities is presented in order to extend existing displays of lightweight design classifications with the complexity and interdependency of technical systems. This representation avoids the usual separation of methods, materials and manufacturing, and focusses on the consideration of the total system in the lightweight design process.

The lightweight product development process also requires new, computer-based methods to support the product developer in fulfilling their duties. Among others, the trade-off between weight reduction and the increase of comfort is of particular importance because these two goals are contradictory. Accordingly, new approaches using the structural optimization are presented, which help to bring these two conflicting objectives in line. Topology optimization is used to homogenize the frequency spectrum of a component under harmonic load, and the homogenization generates a higher sense of comfort for the user. This objective function is presented with the corresponding analytical derivatives representing the frequency response of a surface under a harmonic load over a range of frequencies. In addition, stabilization measures for the optimization process are shown and analyzed.

In the next step, the aforementioned objective function is extended to deal with another type of problems. The differences between both types and their possible use in real applications are discussed as well. To this end, the topology optimization process has to be adapted and new computational steps are introduced.





# Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn o. Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Albert Albers, der mit seiner Führung und wissenschaftlichen Diskussion diese Arbeit erst möglich gemacht hat. Durch seine Forderung und Förderung, aber vor allem auch durch die Gewährung von Freiheiten in der wissenschaftlichen Arbeit hat er maßgeblich die Stoßrichtung dieser Arbeit mitgestaltet. Mein zusätzlicher Dank geht an Herrn Prof. Dr.-Ing. Frank Henning vom Lehrstuhl für Leichtbautechnologie am Institut für Fahrzeugsystemtechnik für die Übernahme des Korreferats.

Zuletzt danke ich allen Kollegen am Institut für die außergewöhnliche, lehrreiche, sympathische, spannende, geistreiche, abwechslungsreiche, kurzweilige, und vor allem hervorragende, gemeinsame Zeit. Dies gilt insbesondere für die Kollegen des Projekts *iuvaris* und der Forschungsgruppe *CAE/Optimierung*.



# Inhalt

<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>1</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>3</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Forschung</b>	<b>7</b>
2.1 Leichtbau . . . . .	7
2.1.1 Produktentwicklungsprozess . . . . .	7
2.1.2 Systemleichtbau und Leichtbaustrategien . . . . .	11
2.1.3 Systemverifikation und -validierung . . . . .	14
2.1.4 Begriffsdefinitionen . . . . .	15
2.2 Numerische Strukturoptimierung . . . . .	17
2.2.1 Finite-Elemente-Methode . . . . .	22
Frequenzganganalyse . . . . .	22
Dämpfung . . . . .	25
2.2.2 Topologieoptimierung . . . . .	28
Formulierung des Optimierungsproblems . . . . .	30
Zielfunktion . . . . .	32
Restriktionen . . . . .	33
Material-Interpolation . . . . .	33
Sensitivitätsanalyse . . . . .	37
Methode der bewegten Asymptoten . . . . .	42
2.3 Noise, Vibration, Harshness . . . . .	43
2.3.1 Fluidtheorie . . . . .	45
2.3.2 Schallintensität . . . . .	47
2.3.3 Schalleistungspegel . . . . .	48
2.3.4 Fluid-Struktur-Kopplung . . . . .	49
<b>3 Zielsetzung</b>	<b>51</b>

<b>4</b>	<b>Leichtbau im Gesamtsystem</b>	<b>53</b>
4.1	Problembeschreibung . . . . .	53
4.2	Leichtbauentwicklungsprozess . . . . .	57
4.2.1	Potenzialanalyse im Gesamtsystem . . . . .	60
4.2.2	Systemdesign . . . . .	61
4.2.3	Strukturoptimierung . . . . .	62
4.2.4	Systemvalidierung . . . . .	63
4.3	Leichtbau als Entwicklungsstrategie . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Methode zur Optimierung der Schallabstrahlung von Bauteilen</b>	<b>67</b>
5.1	Theorie der Methode . . . . .	70
5.1.1	Zielfunktion . . . . .	70
	Min-Max-Formulierung . . . . .	71
5.1.2	Sensitivitäten . . . . .	73
	Formulierung der Dämpfung . . . . .	75
5.2	Erweiterung auf sich ändernde Oberflächen . . . . .	77
5.2.1	Definition Zielfunktion . . . . .	80
5.2.2	Analytische Bestimmung der Sensitivitäten . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Prozessanpassung</b>	<b>83</b>
6.1	Prozess der Topologieoptimierung . . . . .	83
6.2	Implementierung . . . . .	87
6.2.1	Pseudolastfälle . . . . .	87
6.2.2	Dämpfungsschema . . . . .	88
6.2.3	Zielfunktion . . . . .	90
6.2.4	Sensitivitäten . . . . .	91
6.2.5	Überlagerte Normalenvektoren . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Untersuchung und Validierung</b>	<b>93</b>
7.1	Numerisches Beispiel . . . . .	93
7.1.1	Modell für Standardmethode . . . . .	93
7.1.2	Modell für die Erweiterungsmethode . . . . .	96
7.2	Ergebnisse . . . . .	98
7.2.1	Ergebnisse der Optimierung . . . . .	98
	Szenario 1 . . . . .	98
	Szenario 2 . . . . .	107
	Szenario 3 . . . . .	120
7.2.2	Ergebnisse der Erweiterung der Optimierung . . . . .	129
	Akademisches Beispiel . . . . .	131

---

Dreidimensionale Erweiterung . . . . .	131
<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>135</b>
<b>A Anhang</b>	<b>139</b>
A.1 Modelle . . . . .	139
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>
<b>Betreute Studien-, Diplom-, Bachelor- und Masterarbeiten</b>	<b>151</b>
<b>Weitere Studien-, Diplom-, Bachelor- und Masterarbeiten</b>	<b>151</b>



# Abkürzungsverzeichnis

**BEM** Boundary Element Method (deutsch: Randelement-Methode)

**C & C<sup>2</sup>-Ansatz** Contact & Channel und Connector-Ansatz

**CAE** Computer Aided Engineering

**CFK** Carbon-faserverstärkter Kunststoff

**ERP** Equivalent radiated Power (deutsch: äquivalent abgestrahlte Leistung)

**FEM** Finite Elemente Methode

**FVK** faserverstärkte Kunststoffe

**iPeM** integriertes Produktentstehungsmodell

**MMA** Method of Moving Asymptotes

**NexHoS** Next Generation Hochvolt-Speicher

**NVH** noise, vibration, harshness (Geräusch, Vibration, Rauigkeit)

**PDG** partielle Differentialgleichung

**RAMP** Rational Approximation of Material Properties

**SIMP** Solid Isotropic Material with Penalization

**SPALTEN** Problemlösungsprozess

**XiL** X-in-the-Loop





# Symbolverzeichnis

Notation	Einheit	Beschreibung
$a$	-	Volumenanteil
$A_l$	-	Oberfläche des betrachteten, diskretisierten Elements
$\alpha$	-	Dämpfungskoeffizient
$b$	-	Koeffizient für die Steigung im Übergangsbereich der Gewichtungsfunktion
$\beta$	-	Dämpfungskoeffizient
$c$	-	Schallgeschwindigkeit
$c_0$	-	Charakteristische Schallgeschwindigkeit des Fluids
<b>D</b>	-	Gesamtdämpfungsmatrix
$de$	-	Skalierungsfaktor für die Ableitung der Dämpfung
$\mathbf{d}_{ei}$	-	Vektor vom Mittelpunkt des Elements $e$ zum zugehörigen Knoten $i$
$E_{ijkl}$	-	Elastizitätstensor
$E$	-	Elastizitätsmodul
$E_e$	-	Elementelastizitätsmodul
<b>F</b>	-	Kraftvektor
<b>f</b>	-	Vektor der äußeren Kräfte
$f_i$	-	Einzelkraft
$G$	-	Gesamtdämpfungskoeffizient
$G_E$	-	Elementdämpfungskoeffizient
$g(\rho_e)$	-	Gewichtungsfunktion
$\gamma_I$	-	Imaginärteil des Berechnungsfaktors
$\gamma_R$	-	Realteil des Berechnungsfaktors

$I$	-	Schallintensität
$\mathbf{I}$	-	Schalleistungspegel in drei Dimensionen
$\mathbf{K}_E$	-	Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}$	-	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_e$	-	Elementsteifigkeitsmatrix
$k_j$	-	Einzelsteifigkeit
$\lambda$	-	Lagrange-Vektor des adjungierten Optimierungsproblems
$\lambda^*$	-	Vorläufiger Lagrange-Vektor des adjungierten Optimierungsproblems als Ergebnis aus der Pseudolastfallberechnung
$M$	-	Funktion für die Masse
$\mathbf{M}$	-	Gesamtmassenmatrix
$m_j$	-	Masse
$N$	-	Anzahl der betrachteten Knoten
$\mathbf{n}$	-	Normalenvektor auf die betrachtete Oberfläche
$\omega$	-	Frequenz
$\Omega_{\text{mat}}$	-	Während der Optimierung betrachtete, strukturelle Domäne
$\Omega_R$	-	Übergeordnete Referenzdomäne in der Topologieoptimierung
$p$	-	Druck
$\rho$	-	Penalisierungs- bzw. Bestrafungsfaktor
$p_0$	-	Anfangsdruck des Fluids
$\rho(t)$	-	Schalldruck
$\Phi_0$	-	Zielfunktion
$\Phi_i$	-	Eigenvektor
$q$	-	Bestrafungsfaktor für die Dämpfung
$\mathbb{R}^2$	-	Zwei-dimensionaler Raum der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^3$	-	Drei-dimensionaler Raum der reellen Zahlen
$\rho_0$	-	Anfangsdichte des Fluids
$\rho$	-	Dichte

$\rho_a$	-	Grenze zwischen <i>Material</i> und <i>kein Material</i> in der Gewichtungsfunktion
$\rho$	-	Vektor der Designvariablen
<b>S</b>	-	Dynamische System- oder Steifigkeitsmatrix
$T$	-	Zykluszeit
$t$	-	Zeit
<b>U</b>	-	Amplitudenvektor der harmonischen Verschiebung
<b>u</b>	-	Verschiebungsvektor
$\bar{\mathbf{u}}$	-	Komplexer Verschiebungsvektor
$\hat{u}_I$	-	Imaginärteil Gesamtvibration
$\hat{u}_R$	-	Realteil Gesamtvibration
$\mathbf{u}_I$	-	Imaginärteil des komplexen Verschiebungsvektors
$\mathbf{u}_{R,i}(\Omega, \rho)$	-	Imaginärteil des Verschiebungsvektors am betrachteten Knoten
$\mathbf{u}_R$	-	Realteil des komplexen Verschiebungsvektors
$\mathbf{u}_{R,i}(\Omega, \rho)$	-	Realteil des Verschiebungsvektors am betrachteten Knoten
$V$	-	Restriktion für das Volumen des Designraums
$v$	-	Geschwindigkeit
$V^0$	-	Ausgangsvolumen des Designraums
$v_n^l$	-	Geschwindigkeit der Oberflächennormalen des betrachteten, diskretisierten Elements
$v(t)$	-	Schallgeschwindigkeit
$\xi$	-	Dämpfungsverhältnis



# 1 Einleitung

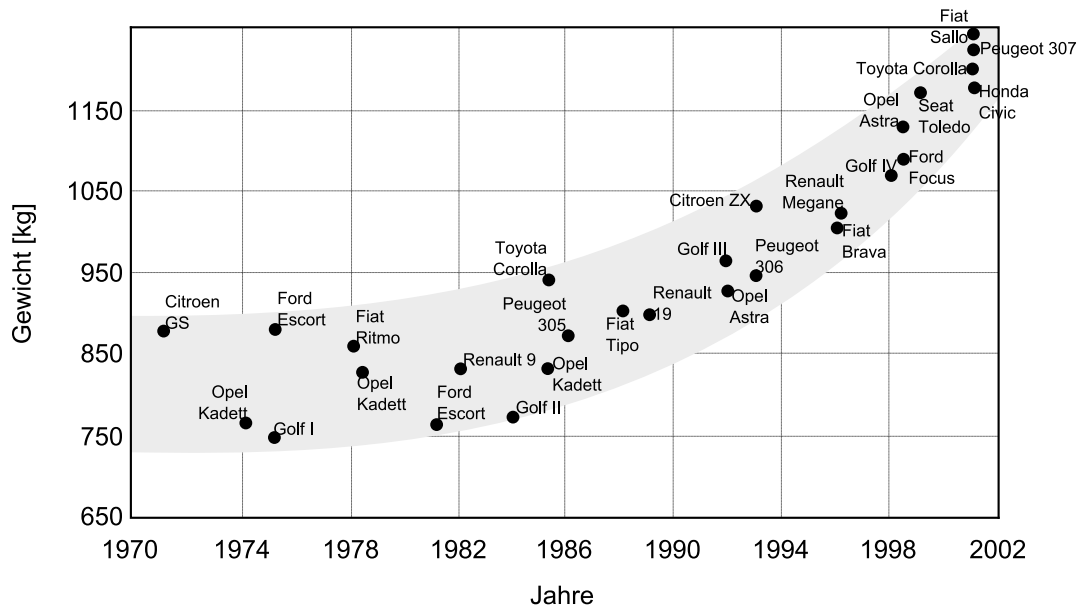
Leichtbau ist die Umsetzung einer Entwicklungsstrategie, die darauf ausgerichtet ist, unter vorgegebenen technischen Randbedingungen die geforderte Funktion durch ein System minimaler Masse zu realisieren<sup>2</sup>. Dies bedeutet, dass Leichtbau an sich keinen Selbstzweck darstellt, sondern immer an andere Entwicklungsziele gebunden ist. Leichtbau ist ein vielschichtiges und wichtiges Thema in allen Bereichen des Maschinenbaus. Er wird in allen Bereichen gefordert und ist ein wichtiges Mittel, um die immer stärker eingrenzenden Restriktionen der Ressourcenschonung überhaupt umsetzen zu können. Gerade die Einführung der selbstgesteckten Ziele Deutschlands zur Verringerung der CO<sub>2</sub>-Emissionen, um die Effekte der globalen Erwärmung zu verringern, macht eine konsequente Ausnutzung aller zur Verfügung stehenden Mittel und Methoden notwendig. Das Ziel der Bundesregierung ist klar gesteckt: Bis zum Jahr 2020 soll der Ausstoß des Treibhausgases CO<sub>2</sub> um 40% gegenüber 1990 verringert werden. Dies trifft natürlich im Besonderen die Automobilindustrie, da hier die komplette Technologie in den letzten hundert Jahren rund um die Verbrennungskraftmaschine aufgebaut wurde. Wenn man sich den in dieser Branche sehr stark ausgeprägten Trend zu einem immer höheren Komfort- und Sicherheitsbedarf des Kunden vor Augen führt, wird der Zielkonflikt in diesem Bereich extrem deutlich: Zusatzkomponenten zur Crashesicherheit und zum Komfort führten in den letzten Jahrzehnten zu einer erheblichen Zunahme der Fahrzeuggewichte (siehe Abbildung 1.1 für einen Vergleich von Fahrzeuggewichten der Kompaktklasse).

Gleichzeitig müssen harte Klimaziele erfüllt werden, auch wenn sie bereits in der aktuellen Diskussion für möglicherweise nicht erfüllbar gehalten werden. Den einzigen Ausweg aus dieser Situation stellt ein radikaler Umdenkprozess in allen Entwicklungsbereichen von – in diesem Fall – automobilen Anwendungen dar. Es müssen alle Maßnahmen ausgeschöpft werden, um eine bessere Funktionsausnutzung erlauben. Unter anderem bedeutet dies einen konsequenten Einsatz von Leichtbau-Methoden im Gesamtsystem. In der realen Vorgehensweise wird hier häufig in eindimensionalen Kategorien vorgegangen, wie z. B. einer reinen Ersetzung von Material – zumeist Stahl

---

<sup>2</sup>vgl. Moeller und Henning (2011)

<sup>3</sup>vgl. Wbcisd (2004)



**Abbildung 1.1** Entwicklung Fahrzeuggewichte von Kompaktwagen<sup>3</sup>

durch Aluminium oder faserverstärkte Kunststoffe (FVK)<sup>4</sup>. Für ein Gesamtoptimum des betrachteten Systems ist dies jedoch meist nicht zielführend und teilweise sogar kontraproduktiv, da hier nicht die Materialeigenschaften in der Konstruktion sowie die Rückwirkung auf das Gesamtsystem mit in die Betrachtung einbezogen werden müssen. Zusätzlich hat dabei auch die numerische Optimierung eine sehr große Bedeutung, deren Einsatz ein erhebliches Potenzial zur absoluten Ausnutzung jedes Leichtbaupotenzials im Gesamtsystem bietet. Der Einsatz der numerischen Optimierung kann dabei auf verschiedenen Abstraktionsstufen mit unterschiedlichen Auswirkungen erfolgen. Der Fokus dieser Arbeit soll deshalb auf dem Einsatz von Leichtbaumethoden im Gesamtsystem im Allgemeinen sowie dem Einsatz von numerischen Optimierungsmethoden zur Erreichung von spezifischen Leichtbauzielen im Speziellen liegen.

In einem besonderen Spannungsfeld ist hier die Kombination von Leichtbauzielen mit dem Ziel *geringer Geräusentwicklung* – im Allgemeinen unter dem Begriff noise, vibration, harshness (Geräusch, Vibration, Rauheit) (NVH) zusammengefasst – unter vorherrschenden Betriebslasten zu sehen. Das Ziel *geringe Geräusentwicklung* bedeutet eine Betrachtung der dynamischen Eigenschaften von Systemen und Komponenten. Hier stößt jedoch der *Ingenieursverstand* schnell an die Grenzen, da die Komplexität eines dynamischen Systems nicht mehr einfach zu erfassen ist. Deshalb ist insbesondere in diesem Bereich die Unterstützung durch numerische Methoden von großer Bedeutung, gleichzeitig aber auch immer noch nicht stark genug ausgeprägt.

<sup>4</sup>sog. Black-Metal-Design

Aus diesem Grund wird im Weiteren eine Methode zur numerischen Optimierung von Komponenten unter dynamischer Last vorgestellt. Das Ziel ist dabei die Verbesserung des Abstrahlverhaltens von Komponenten. Für die Methode bedeutet dies konkret, eine Möglichkeit zu bieten, den von einem Bauteil durch Schwingungen abgestrahlten Schalldruck zu minimieren oder zu homogenisieren. Dabei muss zwischen zwei unterschiedlichen Problemstellungen unterschieden werden:

- Die Oberfläche, von der die Schallabstrahlung erfolgt, soll sich durch die Optimierung nicht ändern und bildet eine geschlossene Oberfläche. Beispielsweise ist bei einer Motorhaube die Oberseite die interessante Abstrahloberfläche, welche den Schall an die Umgebung abgibt. Dagegen kann die Unterseite der Motorhaube relativ frei gestaltet werden, z. B. durch eine geeignete Verrippung, um ein gewünschtes Verhalten des Bauteils zu erzeugen.
- Die Oberfläche, von der die Schallabstrahlung erfolgt, ist Teil des Designraums der Optimierung und kann sich durch den eigentlichen Optimierungsprozess ändern. Beispielsweise sind Pumpen- oder Getriebegehäuse zumeist nur an ihrer inneren Oberfläche durch ihre Funktion definiert. Hier befinden sich die Wirkflächenpaare mit den Lagerstellen bzw. die notwendigen Begrenzungsflächen, um die Mechanik des Systems aufzunehmen. Die äußere Oberfläche des Systems hingegen ist im Rahmen des Packaging des übergeordneten Gesamtsystems relativ frei gestaltbar und somit für die Optimierung ein wichtiger Designraum.

Diese beiden Anwendungsfälle werden durch zwei unterschiedliche Zielfunktionen für die Optimierung bzw. deren algorithmische Implementierung unterschieden. Die Methode nutzt damit die bekannte Methode der Topologieoptimierung<sup>5</sup> als Unterform der numerischen Strukturoptimierung. Die Umsetzung dieser Methode erfolgt in einem selbsterstellten Matlab-Programm<sup>6</sup> zur Topologieoptimierung sowie in der Topologieoptimierungssoftware TOSCA<sup>7</sup>. TOSCA ist eine Software, die von FE-Design speziell für Aufgaben der Topologie-, Gestalt- und Dickenoptimierung in frühen Phasen der Produktentwicklung entworfen wurde. Das Grundkonzept der Topologieoptimierung wurde zuerst von Bendsøe und Kikuchi<sup>8</sup> eingeführt und dann für viele Problemstellungen weiterentwickelt. Kurz gesagt definiert sie die optimale räumliche Verteilung von Material in einem vordefinierten Designraum unter vorgegebenen Beanspruchungen.

Produkt-Lebenszyklen sind heutzutage kürzer als in der Vergangenheit, vor allem in der Konsumgüterindustrie. Dies bedeutet natürlich zugleich eine drastisch reduzierte

---

<sup>5</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>6</sup>vgl. The Mathworks Inc. (2012)

<sup>7</sup>vgl. FE-DESIGN GmbH (2011)

<sup>8</sup>vgl. Bendsøe und Kikuchi (1988)

Time-to-market-Periode, in der die Entwicklung des Produktes zu erfolgen hat. Daher müssen Unternehmen auf moderne Projektmanagement-Methoden wie Simultaneous Engineering<sup>9</sup> zurückgreifen. Simultaneous Engineering meistert das Problem der kurzen Entwicklungszyklen durch eine stringente Nutzung paralleler Aufgaben. Zusätzlich wird dabei eine gute Kenntnis der Eigenschaften des Produkts in den frühen Stadien des Entwicklungszyklus erforderlich. Dies umfasst auch das in dieser Arbeit betrachtete strukturelle Verhalten von Bauteilen.

Um die Kosten auf ein Minimum zu reduzieren, sollte es vermieden werden, viele Prototypen in einem Trial-and-error-Prozess herzustellen. Daher ist der Einsatz von Methoden des Computer Aided Engineering (CAE) und numerischen Simulationen eine Voraussetzung für jeden innovativen Produktentwicklungsprozess.

In diesem Zusammenhang ist die Berücksichtigung von NVH ein wichtiges Thema. NVH beschreibt die Phänomene unerwünschter Geräusche vor allem im Automotive-Bereich. Komponenten, die dynamischen Betriebslasten ausgesetzt sind, senden ungewollte Geräusche durch die Vibration von Oberflächen aus. Beispielsweise ist ein Auto gewissen frequenzabhängigen Lasten ausgesetzt. Diese können sich zum einen aus den Betriebslasten der Motoranregung oder sonstigen Komponenten ergeben, zum anderen auch aus äußeren Lasten auf das Fahrzeug selbst, wie z. B. Bodenunebenheiten. Diese Schwingungen breiten sich dann durch das komplette Fahrzeug aus. Dabei werden sie teilweise gedämpft, beispielsweise durch die Strukturdämpfung oder Kontaktstellen. Den Rest der Schwingung erfahren dann die Passagiere oder auch umstehende Personen als Geräusch oder auch als gefühlte Vibrationen. Dies ist natürlich dem Komfort der Passagiere sehr abträglich. Üblicherweise begegnet man solchen Problemen mit dem nachträglichen Einbau von Dämpfungsmaßnahmen (Dämpfungsmatten etc.), die aber einem Leichtbauziel nicht zuträglich sind.

Noch deutlicher tritt dieser Zielkonflikt in den *traditionellen* Maßnahmen zur Verbesserung der akustischen Eigenschaften zutage. Hier wird gemäß der allgemein bekannten Formel  $\omega = \sqrt{c/m}$  mit einer Erhöhung der Steifigkeit  $c$  die Erhöhung der ersten Eigenfrequenz erwirkt. Dies ist insbesondere im Bereich der stationären Anlagen ein beliebtes Mittel, um die Eigenfrequenzen möglichst oberhalb der Anregungsfrequenz zu halten. Die Einhaltung von Gewichtszielen bei gleichzeitiger Verbesserung der akustischen Eigenschaften ist somit ein klassischer Zielkonflikt ohne triviale Lösung.

Eine Möglichkeit, um ein solches multidisziplinäres Optimierungsproblem anzugehen, bietet der Einsatz der Methode der Topologieoptimierung. Diese wurde ursprünglich dominiert durch den Einsatz von Optimierungsalgorithmen, die auf Optimalitätskriterien

---

<sup>9</sup>vgl. Ehrlenspiel (2006)



basieren. Beispielhaft für ein optimalitätsbasiertes Optimierungsverfahren sei hier die ursprüngliche Form der Steifigkeitsoptimierung genannt. Dieses Optimierungsverfahren erlaubt sehr schnelle Konvergenzen, ist aber nur auf bestimmte Problemstellungen anwendbar. Dies sind Problemstellungen, bei denen A-priori-Wissen über eine Verbesserungsstrategie bereits vorhanden ist. Bei der ursprünglichen Steifigkeitsoptimierung wurde z. B. das Wissen über die Verbesserung der Steifigkeit bei Anlagerung von Material genutzt.

Durch die Weiterentwicklung der Topologieoptimierung weg von der optimalitätskriterienbasierten hin zur sensitivitätsbasierten Optimierung sind auch Lösungen für komplexere Problemstellungen möglich geworden. Die Einschränkung bei diesem Verfahren ist jedoch das Erfordernis einer analytischen Ableitung der aufzustellenden Zielfunktion, die nicht immer in sinnvoller Rechenzeit möglich ist. Auf der anderen Seite kann jedoch bei Vorhandensein einer Zielfunktion und ihrer analytischen Ableitungen jegliche Art von Problem optimiert werden.



## 2 Stand der Forschung

Dieses Kapitel ist inhaltlich in zwei Teile gegliedert. Auf einer übergeordneten Abstraktionsebene wird der Stand der Forschung im Bereich der Produktentwicklungsprozesse kurz näher beleuchtet. Dies dient im weiteren Verlauf dieser Arbeit als Einstiegspunkt für die Ableitung der Charakteristika des Leichtbauentwicklungsprozesses. Außerdem werden kurz die üblichen Darstellungen und Klassierungen von Leichtbauaktivitäten dargelegt und deren Grenzen aufgezeigt. Dies führt dann im weiteren Verlauf zu einer angepassten Klassierung und Darstellung der Leichtbauaktivitäten.

Der zweite Teil dieses Kapitels beschäftigt sich detaillierter und intensiver mit dem Stand der Forschung zur Strukturoptimierung und der allgemeinen Theorie der Topologieoptimierung und des dynamischen Verhaltens von Strukturen und Fluiden. Aus dieser Theorie werden im weiteren Verlauf der Arbeit mathematische Zielfunktionen und deren zugehörige analytische Ableitungen entwickelt, die eine Optimierung des dynamischen Abstrahlverhaltens von Komponenten ermöglichen.

### 2.1 Leichtbau

#### 2.1.1 Produktentwicklungsprozess

Die Zielsetzung eines produzierenden Unternehmens ist die Entwicklung und Herstellung sowie der Vertrieb marktfähiger Produkte mit dem Zweck der Gewinnmaximierung<sup>10</sup>. Unerheblich, ob es sich dabei um Neuentwicklungen oder um Verbesserungen bestehender Produkte handelt, erfolgt die Produktentstehung in weiten Teilen immer nach wiederkehrenden Abläufen und Mustern. Diese Handlungsabläufe und die Elemente, die zu ihrer Organisation und Management notwendig sind, werden in Modellen von Produktentstehungsprozessen (PEP) beschrieben. Gerade im Leichtbau ist die systematische Betrachtung der Produktentstehung im ganzheitlichen Zusammenhang von höchster Bedeutung, um z. B. Fertigungsrestriktionen bereits bei der Gestaltmodellierung gerecht zu werden.

---

<sup>10</sup>vgl. Albers und Braun (2011)

Der Lebenszyklus eines Produkts umfasst den gesamten Prozess von seiner Entwicklung und Einführung bis hin zu seiner Herausnahme aus dem Markt. Die Produktentwicklung umfasst die Entwicklung (auch Vorentwicklung und Konstruktion) und die Validierung eines Produkts. Wesentliche Aufgaben sind hierbei das Klären der Aufgabenstellung, das Konzipieren, Entwerfen sowie Ausarbeiten<sup>11</sup>. Die Produktentstehung schließt die Produktentwicklung ein und beinhaltet darüber hinaus noch die Produktionsvorbereitung und die Produktion sowie alle Tätigkeiten, die mit der Vermarktung in Zusammenhang stehen. Die Produktentstehung steht somit am Beginn des Produktlebenszyklus. Sie hat einen immensen Einfluss auf spätere Lebenszyklusphasen<sup>12</sup>.

Das integrierte Produktentstehungsmodell (iPeM) ist ein Ansatz, mit dem diese Aspekte in einem konsistenten Metamodell mit generischem Charakter zusammengeführt werden, und enthält alle Elemente, um daraus an individuelle Problemstellungen angepasste Modelle abzuleiten<sup>13</sup>. Fünf Hypothesen liegen diesem Meta-Modell zugrunde<sup>14</sup>:

- 1. Hypothese: Individualität von Produktentstehungsprozessen** Jeder Produktentstehungsprozess ist einzigartig und individuell. Kein Entstehungsprozess wird je exakt gleich wiederholt werden.
- 2. Hypothese: System der Produktentstehung** Auf den Grundlagen der Systemtheorie lässt sich eine Produktentstehung als die Transformation eines anfangs vagen Zielsystems in ein konkretes Ziel- und Objektsystem durch ein Handlungssystem beschreiben (siehe Abbildung 2.1).
- 3. Hypothese: Validierung** Die Validierung ist die zentrale Aktivität im Produktentstehungsprozess.
- 4. Hypothese: Zielbeschreibung in der Problemlösung** Die Transformation von Zielen in Objekte kann als Problemlösungsprozess betrachtet werden. Dabei gibt es einen Ist-Zustand, der in einen geplanten Soll-Zustand überführt werden soll.
- 5. Hypothese: Beschreibung von Funktionen** Eine technische Funktion benötigt immer mindestens zwei Wirkflächenpaare und sie verbindende Leitstützstrukturen. Die Wirkflächenpaare sind jeweils an einen Connector gekoppelt. Jeder Connector beinhaltet sowohl Modelle der relevanten Systemumgebung als auch eine Schnittstelle (Wirkfläche) zur assoziierten Wirkfläche des Produkts. Eine solche Konfiguration wird *Wirknetz*<sup>15</sup> genannt.

---

<sup>11</sup>vgl. Pahl et al. (2006)

<sup>12</sup>vgl. Albers und Braun (2011)

<sup>13</sup>vgl. Meboldt (2008)

<sup>14</sup>vgl. Albers (2010)

<sup>15</sup>vgl. Albers und Sadowski (2013)

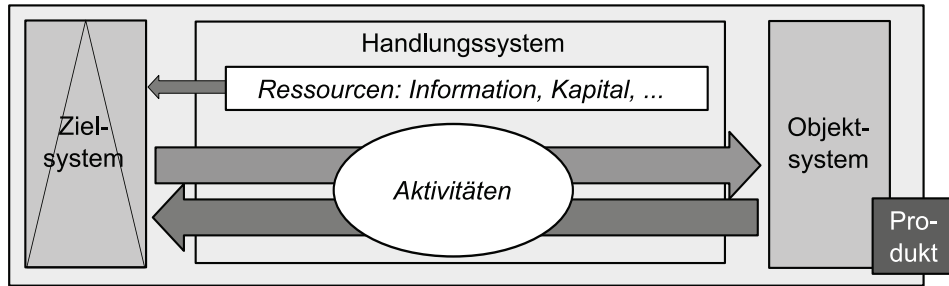


Abbildung 2.1 Das System der Produktentstehung<sup>16</sup>

Das Metamodell integriertes Produktentstehungsmodell (iPeM) enthält die allgemeinen Beschreibungen von Elementen und deren Beziehungen, die für den Aufbau spezifischer Modelle benötigt werden (siehe Abbildung 2.2). Es enthält das Ziel-, Handlungs- und Objektsystem. Das Handlungssystem wird durch die Aktivitäten der Produktentstehung und der Problemlösung gebildet. Außerdem enthält es ein System von Ressourcen und eine Darstellung des zeitlichen Bezugs der Aktivitäten, in dem dynamisch jeder Entwicklungsprozess individuell abgebildet werden kann.

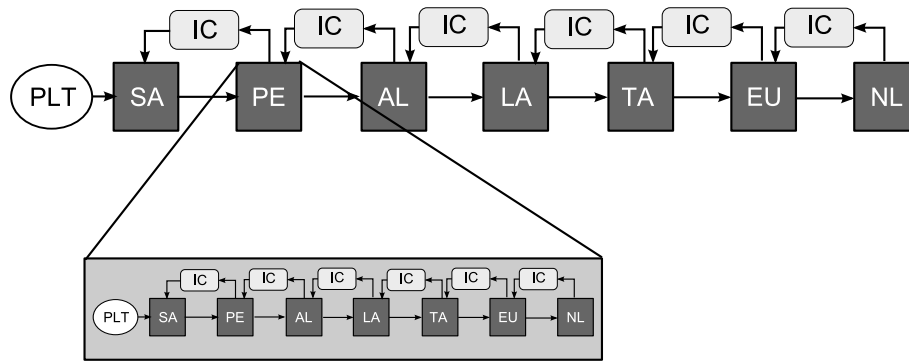
iPeM - Integriertes Produktentstehungsmodell					
Ziel-system	Handlungssystem				Objekt-system
	Aktivitäten der Produktentstehung	Aktivitäten der Problemlösung S P A L T E N	Ressourcen-System	Phasenmodell	
Zielsystem	Projektierung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <b>Referenzmodelle</b> speichern Information und Wissen aus ähnlichen Projekten in Mustern</li> <li>▪ <b>Implementierungsmodelle</b> werden benutzt, um Projekte im Voraus (Zeit, Ressourcen, etc.) zu planen</li> <li>▪ <b>Applikationsmodelle</b> speichern ein laufendes Projekt und visualisieren die entsprechenden Phasen (Cluster von Aktivitäten)</li> </ul>
	Profilfindung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Ideenfindung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Modellierung von Prinzip und Gestalt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Validierung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Produktionsumsetzung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Produktion	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Einführung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Nutzungsanalyse	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
	Abbauanalyse	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
		Mitarbeiter - Informationen - Kapital - Material - Energie			Objektsystem

Abbildung 2.2 Integriertes Produktentstehungsmodell (iPeM)<sup>17</sup>

Eine wichtige Komponente des iPeM ist die Aktivitätenmatrix mit dem Problemlösungsprozess (SPALTEN) (siehe Abbildung 2.3).

<sup>16</sup>vgl. Albers und Braun (2011)

<sup>17</sup>vgl. Albers (2010)



**Abbildung 2.3** Problemlösungsprozess SPALTEN<sup>18</sup>

Dieser Problemlösungsprozess beschreibt die Transformation von Zielsystemelementen in Objektsystemelemente innerhalb der Aktivitäten. Das Akronym SPALTEN steht für einen Zyklus von Problemlösungsaktivitäten in einer bestimmten Struktur bzw. Reihenfolge. Die SPALTEN-Schritte sind<sup>19</sup>:

1. Situationsanalyse
2. Problemeingrenzung
3. Alternative Lösungssuche
4. Lösungsauswahl
5. Tragweitenanalyse
6. Entscheiden und Umsetzen
7. Nachbereiten und Lernen.

Die Anwendung eines solchen Metamodells zur Beschreibung von Produktentwicklungsprozessen ist vor allem im Leichtbau von enormer Wichtigkeit. Die Struktur des Metamodells iPeM ermöglicht die verknüpfte Repräsentation von Ziel-, Handlungs- und Objektsystem sowie der Aktivitätenmatrix, die eine Syntax für die inhaltliche und zeitliche Abfolge der Tätigkeiten in der Produktentstehung bildet. Dies ermöglicht auch eine zielgerichtete und an individuelle Problemstellungen angepasste methodische Unterstützung sowohl der Entwicklerteams als auch des Controllings.

Wie in weiteren Kapiteln gezeigt wird, ist insbesondere die Ausschöpfung aller zur Verfügung stehenden Mittel und Methoden zur Unterstützung des Leichtbauentwicklers notwendig, um die Komplexität der notwendigen Systembetrachtung zu organisieren. Dennoch gibt es für den Leichtbauentwicklungsprozess noch einige Charakteristika, die

<sup>18</sup>vgl. Albers und Braun (2011)

<sup>19</sup>vgl. Albers und Braun (2011)

hier von besonderer Bedeutung sind. Diese werden im weiteren Verlauf herausgearbeitet und vorgestellt.

## 2.1.2 Systemleichtbau und Leichtbaustrategien

Eine Definition des Systemleichtbaus findet sich bei Rieg und Steinhilper<sup>20</sup>: „Und schließlich gibt es den *Systemleichtbau*, worunter man das Prinzip versteht, dass ein Produkt neben den reinen lastabtragenden Aufgaben noch andere übernimmt. Damit werden die Bauteile multifunktional und es wird eine möglichst umfassende Funktionsintegration verfolgt.“<sup>21</sup>

Dies ist allerdings nicht der Ansatz für den Systemleichtbau, der in dieser Arbeit verfolgt wird. Hier wird unter dem Begriff Systemleichtbau eher eine übergeordnete Betrachtungsweise auf verschiedenste Disziplinen und die sinnhafte Anwendung von Leichtbaumaßnahmen im Gesamtsystem verstanden. Dies wird in späteren Kapiteln noch genauer ausgeführt.

Nach Albers<sup>22</sup> ist die Entwicklung eines technischen Produkts üblicherweise keine komplette Neuentwicklung, sondern auf Basis von Vorgängerlösungen im Sinne einer Produktgenerationsentwicklung zu verstehen. Damit ist üblicherweise in jedem Produktentstehungsprozess Vorwissen vorhanden, welches für die aktuelle Entwicklungsgeneration verwendet werden kann. Henning<sup>23</sup> klassiert und ordnet die Aktivitäten im Leichtbau in das Tripel *Methoden, Werkstoffe und Fertigung*<sup>24</sup>. Dieses Tripel umfasst bereits teilweise die hohe Komplexität gerade im Leichtbau und die damit verbundenen integrierenden Aktivitäten in dieser Klassierung. Einige Aspekte der komplexen Aktivitäten und Wechselwirkungen der Systembetrachtung sind jedoch für das Finden eines Gesamtoptimums eines Leichtbausystems zusätzlich zu berücksichtigen. Hier sind vor allem die übliche Vorgehensweise bei der Produktentwicklung von Leichtbausystemen und die aus der Produktgenerationsentwicklung entstehenden Eigenheiten zu nennen.

Eine große Herausforderung für Produktentwickler besteht darin, leichte und dabei zuverlässige Produkte zu gestalten, wobei die Anforderungen hoch und zahlreich sind<sup>25</sup>, wie am Beispiel des Fahrzeugbaus sehr gut zu erkennen ist (siehe Abbildung 2.4).

---

<sup>20</sup>vgl. Steinhilper (2012)

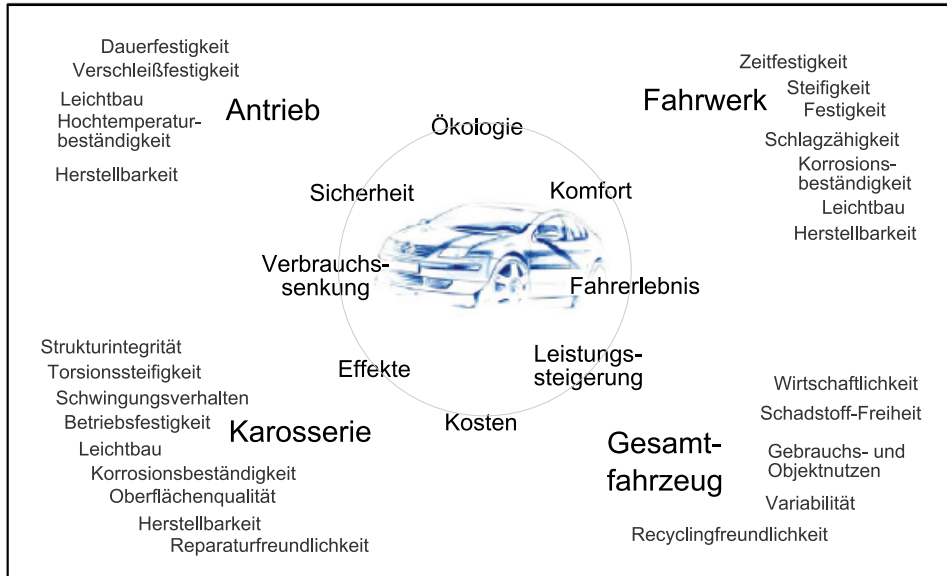
<sup>21</sup>vgl. Krause (2012)

<sup>22</sup>vgl. Albers und Sadowski (2013)

<sup>23</sup>vgl. Moeller und Henning (2011)

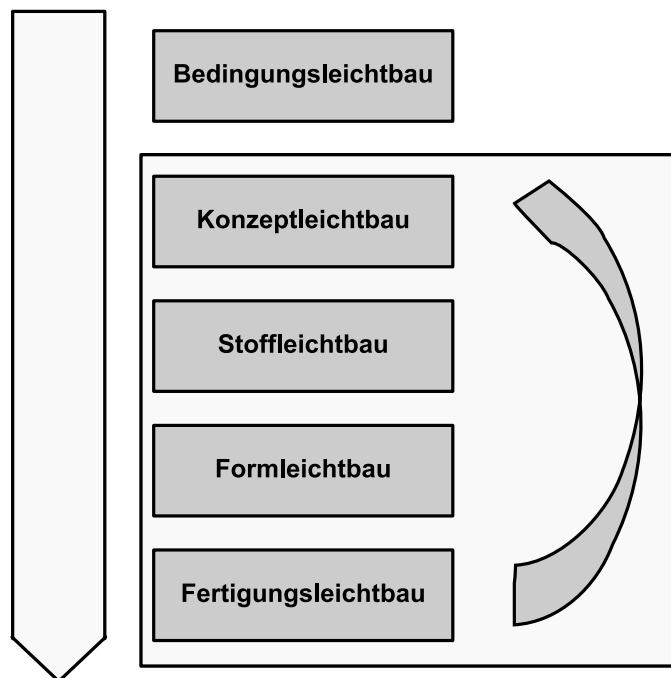
<sup>24</sup>teilweise auch Produktion

<sup>25</sup>vgl. Kopp et al. (2011)



**Abbildung 2.4** Anforderungen im Leichtbau<sup>26</sup>

Um diesen Herausforderungen mit der Betrachtung vieler Randbedingungen zu begegnen, sind strukturierte Vorgehensmodelle notwendig. Hierfür gibt es in der Literatur Leichtbaustrategien, die grob die üblichen Vorgehensweisen im Produktentwicklungsprozess zusammenfassen und für den Leichtbauentwicklungsprozess spezifizieren (siehe Abbildung 2.5).



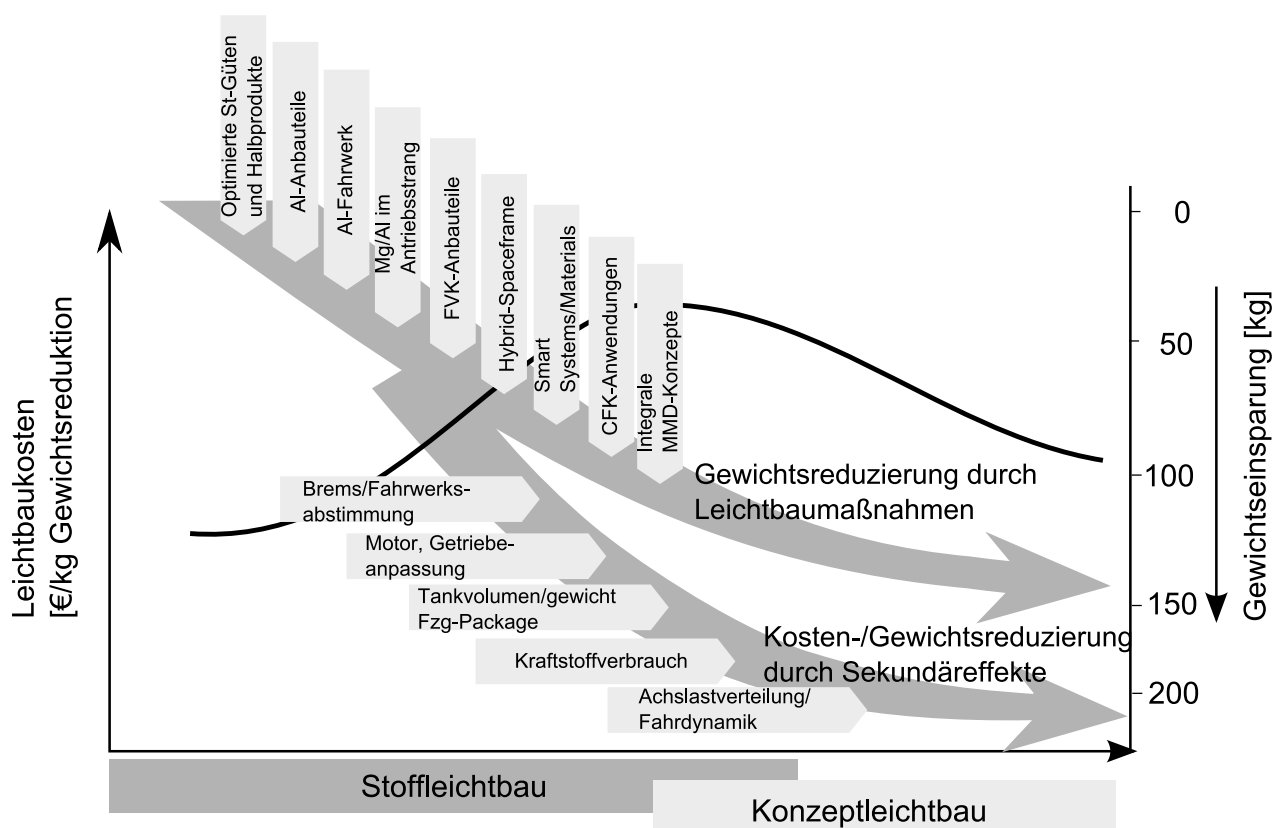
**Abbildung 2.5** Leichtbaustrategien und vorgeschlagener Ablauf im Produktentstehungsprozess<sup>27</sup>

<sup>26</sup>vgl. Braess und Seiffert (2007)



Der Konzeptleichtbau, teilweise auch als Systemleichtbau bezeichnet, zeichnet sich durch die Betrachtung des Gesamt- bzw. Teilsystems aus. Durch die systematische Betrachtung geeigneter Strukturbauteile, Komponenten und Module und deren Anpassung an das Gesamt- bzw. Teilsystem wird das Gewicht des Gesamtsystems gesenkt. Die Betrachtung der Funktion bleibt an dieser Stelle oftmals außen vor.

In Abbildung 2.6 ist dabei das Nutzen-/Kostenverhältnis von verschiedenen Maßnahmen gegeneinander aufgetragen. Es ist der erhebliche Einfluss integraler Multi-Material-Design-Konzepte bei relativ geringen Aufwänden zu erkennen. Die Unterstützung dieser Strategie muss also oberste Priorität erhalten. Diese Strategie kann durch den Einsatz verschiedener Maßnahmen effektiv unterstützt werden, z. B. durch Anisotropieanalysen<sup>28</sup> im Gesamtsystem oder durch die Nutzung der Strukturoptimierung zur Lastpfad- und Tragstrukturermittlung<sup>29</sup>. Der Ausbau dieser Strategie wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit behandelt.



**Abbildung 2.6** Nutzen von Leichtbaumaßnahmen gegenüber Kosten am Beispiel des Fahrzeugbaus<sup>30</sup>

<sup>27</sup>vgl. Kopp et al. (2011)

<sup>28</sup>vgl. Albers et al. (2011)

<sup>29</sup>vgl. Wagner et al. (2013a)

<sup>30</sup>vgl. Friedrich et al. (2003)

Eine Variante der konkreten Umsetzung der integrierten Betrachtung eines komplexen Gesamtsystems und der konsequenten Anwendung von Leichtbaumethoden findet sich im *Sonderforschungsbereich 588: Humanoide Roboter* wieder. Hier werden verschiedenste Disziplinen, darunter die Mechanik, die Regelung und die Dynamik, mittels numerischer Co-Simulationsmethoden integriert betrachtet und letztlich auch numerisch optimiert<sup>31</sup>

### 2.1.3 Systemverifikation und -validierung

Die zentrale Aktivität im Produktentwicklungsprozess ist die Validierung<sup>32</sup>. Im Unterschied zur Verifizierung, bei der überprüft wird, ob ein System richtig entwickelt wurde, wird bei der Validierung überprüft, ob das richtige System entwickelt wurde. Die Darstellung des ausgereiften und vollständigen Produkts ist in frühen Aktivitäten der Produktentstehung nicht möglich. So kommen sowohl experimentelle als auch modellbasierte Methoden bei der Validierung und Verifikation zum Einsatz. Dabei werden virtuelle Methoden, etwa Simulationen, mit dem physischen Test integriert betrachtet, wie z. B. im X-in-the-Loop-Ansatz nach Albers<sup>33</sup>.

Besonders im Leichtbau spielt natürlich der numerische Teil der Validierung eine große Rolle, da hier hauptsächlich die Struktureigenschaften von Bauteilen, wie z. B. Spannungen, Verformungen und Dehnungen, eine wichtige Größe für die Bewertung spielen. Diese sind durch physische Versuche relativ aufwändig zu erfassen, aber relativ einfach durch virtuelle Versuche.

Mit dem X-in-the-Loop (XiL)-Ansatz<sup>34</sup> wurde hier ein Framework eingeführt, um diese Integration von virtuellen und physischen Versuchen auf verschiedenen Abstraktionsstufen weiter zu integrieren.

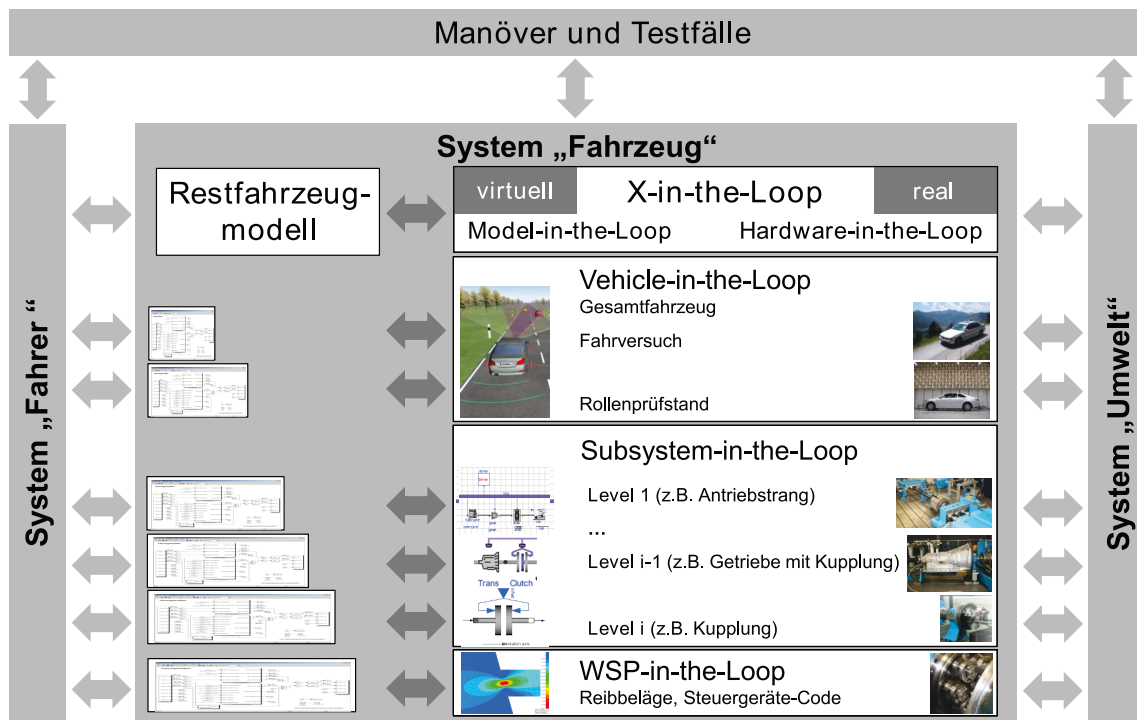
---

<sup>31</sup>vgl. Albers und Ottnad (2010); Ottnad (2009)

<sup>32</sup>vgl. Albers (2010)

<sup>33</sup>vgl. Albers et al. (2010a); Albers und Düser (2011)

<sup>34</sup>vgl. Albers et al. (2010b); Düser (2010)



**Abbildung 2.7** Darstellung des XiL-Framework zur integrativen Betrachtung von virtuellen und physischen Versuchen<sup>35</sup>

Für den Leichtbau ist hier insbesondere die Robustheitsbetrachtung hervorzuheben. Wie in späteren Kapiteln gezeigt wird, bedeutet Leichtbau eine Reduzierung der Sicherheit und damit eine Erhöhung der Anfälligkeit des Systems gegenüber schwankenden Werten. Dies muss in der Validierung von Leichtbausystemen besondere Beachtung finden, wird in dieser Arbeit aber nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

## 2.1.4 Begriffsdefinitionen

In diesem Abschnitt werden einige wichtige in dieser Arbeit verwendete Begriffe allgemeingültig definiert. Diese Begriffe werden im nächsten Kapitel auf ihre Anwendbarkeit in der Numerik dieser Arbeit erweitert. Sie sind zum größten Teil aus der üblichen Fachliteratur übernommen und dienen hauptsächlich der Orientierung in den weiteren Kapiteln.

**Designvariablen** sind diejenigen Parameter des technischen Systems bzw. Produkts, die vom Entwickler in Grenzen frei festlegbar sind.

**Designraum** ist der von den annehmbaren Werten der Designvariablen umspannte Raum.

<sup>35</sup>vgl. Düser (2010)

**Modell** besitzt nach Stachowiak<sup>36</sup> eine Doppelbedeutung: 1. Modell als a) Abbild von etwas sowie als b) Vorbild für etwas, 2. Modell als c) Repräsentation eines bestimmten Originals.

„Ohne heuristisch-methodologische Exploration seien die Hauptergebnisse der Begriffsanalyse umgangssprachlich angegeben:

**Abbildungsmerkmal** Modelle sind stets Modelle von etwas, nämlich Abbildungen, Repräsentationen natürlicher oder künstlicher Originale, die selbst wieder Modelle sein können.

**Verkürzungsmerkmal** Modelle erfassen im allgemeinen *nicht* alle Attribute des durch sie repräsentierten Originals, sondern nur solche, die den jeweiligen Modellerschaffern und/oder Modellbenutzern relevant scheinen.

**Pragmatisches Merkmal** Modelle sind ihren Originalen nicht per se eindeutig zugeordnet. Sie erfüllen ihre Ersetzungsfunktion a) für bestimmte – erkennende und/oder handelnde, modellbenutzende – Subjekte, b) innerhalb bestimmter Zeitintervalle und c) unter Einschränkung auf bestimmte gedankliche oder tatsächliche Operationen.

Über die abbildungsmäßige Originalbezogenheit hinaus ist mithin der allgemeine Modellbegriff dreifach pragmatisch zu relativieren. Modelle sind nicht nur Modelle von etwas. Sie sind auch Modelle für jemanden, einen Menschen oder einen künstlichen Modellbenutzer. Sie erfüllen dabei ihre Funktionen in der Zeit, innerhalb eines Zeitintervalls. Und sie sind schließlich Modelle zu einem bestimmten Zweck. Man könnte diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Eine pragmatisch vollständige Bestimmung des Modellbegriffs hat nicht nur die Frage zu berücksichtigen, wovon etwas Modell ist, sondern auch, für wen, wann und wozu bezüglich seiner je spezifischen Funktionen es Modell ist.“<sup>37</sup>

**Optimum** Unter einem Optimum (lateinisch optimum, Neutrum von optimus = Bester, Hervorragendster, Superlativ von bonus ‚gut‘) versteht man das beste erreichbare Resultat im Sinne eines Kompromisses zwischen verschiedenen Parametern oder Eigenschaften unter dem Aspekt einer Anwendung, einer Nutzung oder eines Zieles.<sup>38</sup> Im Gegensatz dazu steht das Ideal, womit das beste Denkbare bezeichnet wird. Die Suche nach dem Optimum unter gegebenen Voraus- und Zielsetzungen nennt man Optimierung.

<sup>36</sup>vgl. Stachowiak (1973)

<sup>37</sup>vgl. (Stachowiak 1973), S. 131ff

<sup>38</sup>vgl. Duden Verlag (2013)

## 2.2 Numerische Strukturoptimierung

Zu Beginn dieses Kapitels werden einige wichtige Begriffe der numerischen Optimierung definiert. Diese Begriffe wurden im vorhergehenden Kapitel in ihrer allgemeingültigen Form definiert und werden hier um ihre Verwendbarkeit in der Numerik erweitert. Sie sind zum größten Teil aus der üblichen Fachliteratur übernommen und dienen hauptsächlich der Orientierung in den weiteren Kapiteln. Anhand dieser Begriffe werden auch wichtige Konzepte der numerischen Optimierung erläutert.

Grundsätzlich ist zwischen drei verschiedenen Klassen der Strukturoptimierung zu unterscheiden. Allen dreien ist die grundsätzliche Optimierungslogik gemein. Die allgemeinste geläufige Unterscheidung ist die zwischen parameterfreier und nicht-parameterfreier Optimierung. Parameter meint in diesem Fall Geometrieparameter, die während der Optimierung entweder zufällig oder sinnvollerweise zielgerichtet variiert werden. Die in dieser Arbeit verwendete Topologieoptimierung gehört dabei zu den parameterfreien Optimierungsverfahren (siehe Abschnitt 2.2.2).

**Designvariablen** sind die Variablen, die während der Optimierung variiert werden. Bei der Parameteroptimierung sind dies die definierten geometrischen Parameter, wie z. B. Radien, Wandstärken, Faserrichtungen etc. Die Übergänge zur parameterfreien Optimierung sind hier aber fließend. So werden bei der Topologieoptimierung die Dichten jedes einzelnen finiten Elements zu Designvariablen; bei der parameterfreien Formoptimierung sind hingegen die Knotenkoordinaten die zu variierenden Designvariablen.

**Designraum** ist der im numerischen Modell abgebildete, für die Optimierung zur Verfügung stehende Teil des Modells. In einer physischen Repräsentation ist der Designraum der für eine Komponente zur Verfügung stehende Platz unter den Restriktionen des Gesamtsystems, wie z. B. benachbarten Komponenten, Kinematiken etc. In der Sprache des Contact & Channel und Connector-Ansatz ( $C$  &  $C^2$ -Ansatz) ist dies der geometrische Raum zwischen mindestens zwei Wirkflächenpaaren.

**(Numerisches) Modell** ist nach Stachowiak<sup>39</sup> im hier verwendeten Kontext als ein Abbild von etwas zu verstehen. Das numerische Modell ist die Basis für die numerische Optimierung und die Repräsentation der physischen Komponente. Es kann dabei in verschiedenen Ausprägungen und Abstraktionsstufen vorhanden sein. Bei der Topologieoptimierung wird die Geometrie der zu optimierenden Komponente (und evtl. weiterer notwendiger, in Beziehung zu ihr stehender Komponenten)

---

<sup>39</sup>vgl. Stachowiak (1973)

in finite Elemente diskretisiert und in einem Finite-Elemente-Modell dargestellt. Das numerische Modell wird in jeder Iteration der Optimierung verändert und neu berechnet. Von ihm hängt also maßgeblich die Gesamtrechenzeit der Optimierung ab.

**Optimierungsalgorithmus** ist der eigentliche Prozess der Optimierung. Es gibt dabei verschiedene Arten von Optimierungsalgorithmen. Die für eine Topologieoptimierung in Frage kommenden Arten sind optimalitätskriterienbasierte und sensitivitätsbasierte Algorithmen. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Optimierungsansätze kommen nur sensitivitätsbasierte Algorithmen in Frage, weshalb die Arbeit im weiteren Verlauf auf diese beschränkt bleibt.

**Sensitivitätsbasierter Optimierungsalgorithmen** ist eine auf Gradienten basierende Klasse von Optimierungsalgorithmen, siehe als einfachstes Beispiel das Newton-Verfahren.

**Zielfunktion** ist die mathematische Repräsentation des Optimierungsziels (z. B. Steifigkeit der Komponente). Die Zielfunktion muss im Falle der Topologieoptimierung über die aus dem FE-Solver gelieferten Ergebnisse gebildet werden und im Falle eines sensitivitätsbasierten Optimierungsalgorithmus nach den Designvariablen differenzierbar sein.

**Optimum** ist der angestrebte Endwert für die Zielfunktion. Das globale Optimum kann mit keinem der vorgestellten Optimierungsalgorithmen garantiert erreicht werden. Sensitivitätsbasierte Optimierungsverfahren sind außerdem abhängig vom Startwert.

**Weißes/schwarzes Material** bezeichnet die Verteilung des Materials im Designraum während/nach der Optimierung. Schwarzes Material ist dabei voll gefülltes Material, das nach Abschluss der Optimierung die optimale Gestalt darstellt. Weißes Material ist der bei der Optimierung entstehende *leere* Raum, der nach Abschluss der Optimierung nicht Teil der optimalen Gestalt ist.

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Varianten der Strukturoptimierung abgegrenzt und ihre Bedeutung im Produktentstehungsprozess erläutert.

**Topologieoptimierung** Die Topologieoptimierung kann relativ früh im Produktentstehungsprozess zum Einsatz kommen. Sie ist dafür geeignet, in einem zur Verfügung stehenden Bauraum und unter den vorgegebenen Randbedingungen für eine Komponente die optimale Materialverteilung zu finden. Dies macht sie zu einem idealen Werkzeug für die Findung der Grobgestalt. Im Unterschied zu den

---

<sup>40</sup>vgl. Enkler (2010)

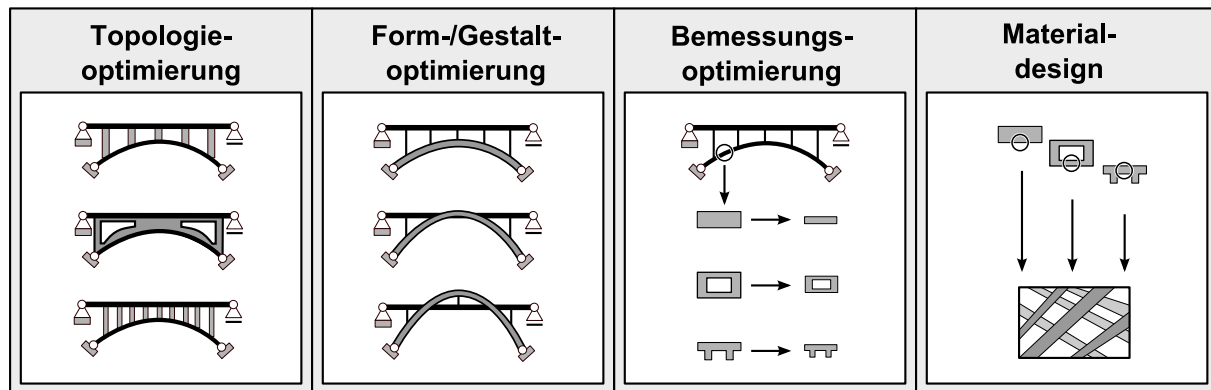


Abbildung 2.8 Arten der Strukturoptimierung<sup>40</sup>

anderen Optimierungsarten kann dabei eine unbegrenzte Anzahl von „Löchern“ erzeugt werden. Dies erlaubt ein hohes Maß an Freiraum für den Optimierungsalgorithmus, um eine optimale Lösung zu finden. Aktuelle Ansätze testen den Einsatz der Topologieoptimierung in einem System, um die optimale Platzierung von Bauteilen zu finden.

**Form-/Gestaltoptimierung** Die Form- bzw. Gestaltoptimierung ist für eine spätere Phase im Produktentwicklungsprozess geeignet. Mit der Gestaltoptimierung können einzelne Geometrie-Eigenschaften effizient verändert werden (z. B. Radien oder Übergänge), um etwa eine homogenisierte Spannungsverteilung zu erreichen.

**Parameteroptimierung** Bei der Parameteroptimierung werden einzelne geometrische Attribute (Radien, Blechdicken etc.) parametrisiert und variiert. Auch der Einsatz der Parameteroptimierung ist erst bei relativ genauer Kenntnis einer Konstruktion möglich.

In dieser Arbeit liegt der Fokus auf der Nutzung der Topologieoptimierung. Deshalb wird hier genauer auf ihre theoretischen Grundlagen eingegangen.

Die Topologieoptimierung ist heute schon ein Standard-Werkzeug in CAE-Umgebungen<sup>41</sup>. Im Laufe der letzten 20 Jahre hat sich die Topologieoptimierung als äußerst nützlich bei der Optimierung von Problemen hinsichtlich der Reduzierung des Gewichts oder der Maximierung der Steifigkeit von Komponenten erwiesen. In den letzten Jahren wurde die Topologieoptimierung erweitert, um Probleme in dynamisch belasteten Strukturen, insbesondere das Problem der Maximierung der Eigenfrequenzen zu bewältigen. Dies stellt eine erste grundlegend wichtige Maßnahme zur dynamischen Verbesserung von Komponenten dar. Somit können Probleme mit harmonischer Betriebslast wirksam durch die Verschiebung der unerwünschten Eigenfrequenzen aus dem Bereich der

<sup>41</sup>vgl. Albers et al. (2009)

Anregung angegangen werden. Dieses Thema wurde zuerst von Díaz<sup>42</sup> eingeführt und war seitdem Gegenstand mehrerer Optimierungsansätze<sup>43</sup>. Diese Verfahren beschränken sich jedoch auf die Verschiebung der ersten Eigenfrequenz. Die Erweiterung auf mehrere Eigenfrequenzen erfolgte dann durch Du<sup>44</sup>.

In diesem Zusammenhang stehen auch Untersuchungen zur Maximierung der Bandlücken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Eigenfrequenzen einer Mindlin-Platte unter Verwendung der Topologieoptimierung<sup>45</sup> oder phononischer Bandlücken in Kristallen<sup>46</sup> zur Verbesserung der lichtleitenden Eigenschaften. Diese Verfahren nutzen alle die Topologieoptimierung und erweitern sie.

Außerdem existieren erste Ansätze, um eine Topologieoptimierung mit zwei verschiedenen Materialkomponenten durchzuführen. Diese Ansätze erlauben die Gestaltung von Multimaterialsystemen. Jensen<sup>47</sup> beschreibt in diesem Zusammenhang einen Algorithmus zur Maximierung einer Frequenzlücke zwischen zwei benachbarten Eigenfrequenzen.

Um einen generellen Überblick über verschiedene Zielfunktionen in dynamischen Topologieoptimierungen zu erhalten, sei an dieser Stelle auf Olhoffs Übersicht verwiesen<sup>48</sup>.

Ein großes Problem bei der Findung und Aufstellung von Zielfunktionen für die sensitivitätsbasierte Topologieoptimierung ist die Ableitung der Zielfunktion hinsichtlich der Designvariablen. Ein allgemein gültiges Verfahren zur Ableitung der Zielfunktion in dynamischen Systeme unter harmonischer Anregung wurde von Jensen<sup>49</sup> vorgestellt und ist in dieser Arbeit eine wichtige Grundlage.

Eine Studie zur Optimierung von Kontinuumsstrukturen unter dynamischer Belastung und dynamischen Restriktionsfunktionen auf einen bestimmten Punkt der Struktur wurde von Calvel<sup>50</sup> durchgeführt. In dieser Studie wurde ein Ansatz aufgezeigt, um solche Restriktionsfunktionen in das Optimierungsproblem zu integrieren. Es wird eine Min-Max-Formulierung eingeführt und durch die  $l_q$ -Norm angenähert<sup>51</sup>. Der Ansatz der Nutzung einer Min-Max-Formulierung und einer Annäherung durch die  $l_q$ -Norm werden auch in dieser Arbeit verfolgt.

---

<sup>42</sup>vgl. Díaz und Kikuchi (1992)

<sup>43</sup>vgl. Du und Olhoff (2007b); Pedersen (2000)

<sup>44</sup>vgl. Du und Olhoff (2005)

<sup>45</sup>vgl. Halkjær et al. (2006)

<sup>46</sup>vgl. Jensen (2003); Sigmund und Jensen (2003)

<sup>47</sup>vgl. Jensen und Pedersen (2006)

<sup>48</sup>vgl. Olhoff und Du (2005)

<sup>49</sup>vgl. Jensen (2007a)

<sup>50</sup>vgl. Calvel und Mongeau (2007)

<sup>51</sup>vgl. Jensen und Pedersen (2006)



Andere Untersuchungen beschäftigten sich auch mit der Minimierung der Schwingung einer Struktur unter einer gegebenen harmonischen Last mittels einer Topologieoptimierung auf Basis von Frequency-Response-Analysen<sup>52</sup>. Um eine Frequenzantwort über ein breites Spektrum effizient anzunähern, wurden Padé-Approximanten<sup>53</sup> genutzt. Mit dieser angenäherten Funktion kann dann das Frequenzspektrum als rationale Funktion mittels einer Topologieoptimierung minimiert werden.

Probleme der strukturell-akustischen Kopplungen werden analysiert und bewertet von Christensen<sup>54</sup>, wo auch ein Verfahren vorgeschlagen wird, das zur Umgehung der expliziten Darstellung des Rands in einer fluidstrukturgekoppelten Umgebung eine gemischte Finite-Elemente-Formulierung mit Verschiebungen und Druck als primären Variablen<sup>55</sup> nutzt.

Topologieoptimierung in Bezug auf NVH wurde mittels der Festlegung eines Ziels für das Geschwindigkeitsspektrum<sup>56</sup> der Struktur untersucht. Eine Minimierung der Schallabstrahlung von schwingenden Strukturen mit zwei Materialien mittels Topologieoptimierung wurde von Du<sup>57</sup> vorgestellt.

Die Methode der Topologieoptimierung begann in ihrer heutigen Form mit der Einführung des Homogenisierungsansatzes durch Bendsøe und Sigmund<sup>58</sup>. Zu Beginn war dadurch die Lösung von statischen Steifigkeitsproblemen möglich, und zwar durch den Einsatz des optimalitätskriterienbasierten Algorithmus. Mit der Weiterentwicklung hin zu sensitivitätsbasierten Algorithmen wurden auch komplexere Problemstellungen möglich. Heute ist der Einsatz der Topologieoptimierung für dynamische Problemstellungen bereits Standard. Damit können mehrere bereits vorhandene Konzepte und Ansätze für die in dieser Arbeit betrachtete Fragestellung herangezogen werden, die eine effiziente Behandlung des Problems erlauben.

Viele der vorher angesprochenen Aspekte zur theoretischen Vorgehensweise und Entwicklung der Methode der Topologieoptimierung sind auch in der Software *TOSCA.structure*<sup>59</sup> zu finden. Diese Software wurde in dieser Arbeit teilweise verwendet. Des Weiteren wurde der kommerzielle FE-Solver *Nastran*<sup>60</sup> verwendet, um die benötigte Finite-Elemente-Berechnung durchzuführen. Die Software zur Berechnung mathema-

---

<sup>52</sup>vgl. Soto et al. (1996); Olhoff und Du (2005)

<sup>53</sup>vgl. Jensen (2007b); Jensen und Pedersen (2006)

<sup>54</sup>vgl. Christensen et al. (1998a, b)

<sup>55</sup>vgl. Yoon et al. (2007)

<sup>56</sup>vgl. Soto (1997)

<sup>57</sup>vgl. Du und Olhoff (2007a)

<sup>58</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>59</sup>vgl. FE-DESIGN GmbH (2011)

<sup>60</sup>vgl. MSC.Software Corporation (2011)

tischer Probleme *Matlab*<sup>61</sup> wird zur Berechnung des Topologieoptimierungsproblems verwendet. Zur Übertragung der Ergebnisse des FE-Solvers in Matlab wird die kommerzielle Toolbox *IMAT*<sup>62</sup> verwendet. Der genaue Arbeitsprozess und das Zusammenspiel der einzelnen kommerziellen Softwarepakete und des selbstimplementierten Programms sind in Abschnitt 5 und 6 beschrieben.

### 2.2.1 Finite-Elemente-Methode

Um den Ablaufprozess der Topologieoptimierung zu verstehen, muss zunächst der Rahmen eingeführt werden, auf dem sie basiert. Mittels der Topologieoptimierung wird eine optimale Materialverteilung innerhalb einer vorgegebenen strukturellen Domäne  $\Omega$  und unter vorgegebenen Randbedingungen ermittelt (vgl. Abschnitt 2.2). Diese strukturelle Domäne muss dementsprechend in einer mathematischen Formulierung fixiert werden, um in der Topologieoptimierung erfasst werden zu können. Die Finite Elemente Methode (FEM) bietet einen gut etablierten Rahmen für mathematische Formulierung. Sie stellt ein numerisches Näherungsverfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen (PDE) sowie Integralgleichungen dar, die normalerweise keine geschlossene Lösung besitzen. Dabei ist die FEM sehr nützlich für die Lösung komplexer Fragestellungen, wie z. B. die Analyse der strukturellen Domäne einer Komponente bezüglich Spannungen, Verformungen oder ähnlichem. Der wichtigste Aspekt der FEM ist die Diskretisierung der komplexen strukturellen Domäne in kleinere (finite) Elemente<sup>63</sup>, für die eine einfache Näherungslösung gefunden werden kann. Typischerweise sind die verwendeten Elementtypen Balken für eindimensionale Probleme, Schalen für zweidimensionale Probleme und Tetraeder- oder Hexaeder-Elemente für dreidimensionale Probleme.

## Frequenzganganalyse

Die Frequency-Response-Analyse<sup>64</sup> (deutsch: Frequenzantwort-Analyse) ist eine Methode, um Systeme auf ihr Verhalten in einem stationären Zustand mit harmonischer Anregung zu beschreiben und zu untersuchen. Ein solcher Zustand ist bei Systemen mit einer rotierenden Unwucht zu finden. Bei der Untersuchung solcher Systeme ist vor allem das Verhalten einzelner physikalischer Größen (Verformungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen von einzelnen Punkten des Kontinuums sowie die Kräfte und Belastungen) in einem bestimmten Frequenzbereich von Interesse. Das Verhalten

---

<sup>61</sup>vgl. The Mathworks Inc. (2012)

<sup>62</sup>vgl. ATA Engineering Inc. (2011)

<sup>63</sup>vgl. Knothe und Wessels (2008)

<sup>64</sup>vgl. Zienkiewicz et al. (2005); Knothe und Wessels (2008)

für einzelne physikalische Größen ist dann dem Frequenzspektrum aufgetragen (siehe Abbildung 2.9).

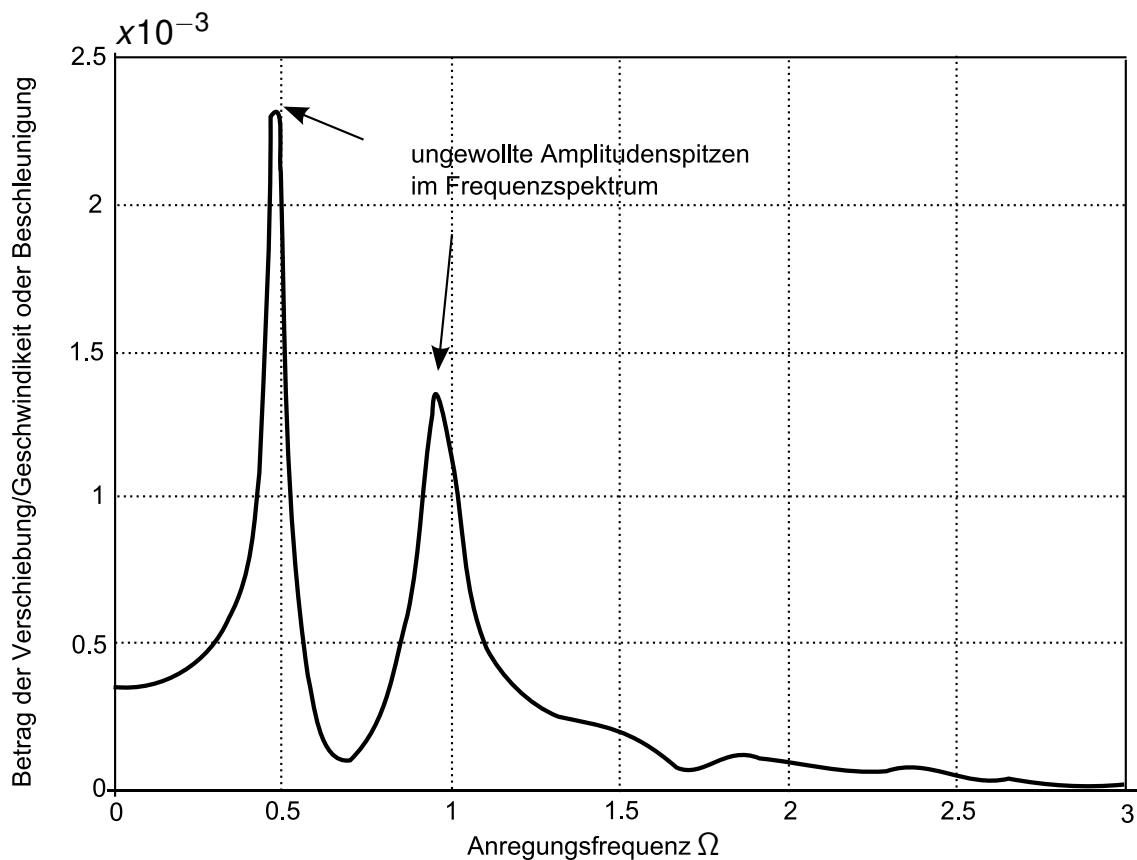


Abbildung 2.9 Frequenzgang: Amplitude<sup>65</sup>

In den meisten FE-Solvern gibt es für solche dynamischen Probleme 2.1 zwei mögliche Varianten der Lösungsgenerierung. Im direkten Lösungsverfahren wird die Antwort der Struktur direkt durch Lösen des komplexen Gleichungssystems 2.5 mit komplexer Algebra berechnet, und zwar mit der komplexen, harmonischen Anregung  $f = F(\Omega)e^{j\Omega t}$ :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

mit den Matrizen für Steifigkeit ( $\mathbf{K}$ ), Masse ( $\mathbf{M}$ ), und Dämpfung ( $\mathbf{D}$ ) sowie der Verschiebung  $\mathbf{u}$  und der äußeren Kraft  $\mathbf{F}$  jeweils in vektorieller Schreibweise und abhängig von der Zeit  $t$ . Hierbei ist ein üblicher Ansatz der rechten Seite für solche Differentialgleichungen<sup>66</sup> mit:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(\Omega)e^{j\Omega t} \quad (2.2)$$

<sup>65</sup>vgl. Hessenauer et al. (2007)

<sup>66</sup>vgl. Zienkiewicz et al. (2005)

wobei  $\bar{\mathbf{u}}$  einen komplexen Verschiebungsvektor darstellt. Die Zeitableitungen ergeben sich dann zu

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = i\Omega \bar{\mathbf{u}}(\Omega) e^{i\Omega t} \quad (2.3)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\Omega^2 \bar{\mathbf{u}}(\Omega) e^{i\Omega t} \quad (2.4)$$

Beide Ableitungen in Gleichung 2.1 eingesetzt, ergibt sich die vom FE-Solver zu lösende Gleichung<sup>67</sup>:

$$\left(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{D} + \mathbf{K}\right) \bar{\mathbf{u}}(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega) \quad (2.5)$$

Dies ist bei üblicher Einbeziehung der Dämpfung in die Betrachtung ein Gleichungssystem mit komplexen Koeffizienten. Der betrachtete Frequenzbereich wird dann in einzelne Frequenzen diskretisiert, für die jeweils das statische Gleichgewicht bei jeder Anregungsfrequenz  $\Omega$  gelöst wird. Der rechnerische Aufwand steigt damit mehr oder weniger linear mit der Anzahl der betrachteten Frequenzen.

Ein alternativer Ansatz zum Berechnen der Frequenzantwort einer Struktur ist die modale Frequenzganganalyse. Diese Methode verwendet die Eigenformen der Struktur, um die Anzahl der Freiheitsgrade extrem zu reduzieren und die Bewegungsgleichungen voneinander zu entkoppeln (wenn keine Dämpfung verwendet wird). Daher skaliert die numerische Effizienz dieses Verfahren weitaus besser als das direkte Verfahren.

Für die Anwendung der modalen Frequenzganganalyse werden die physikalischen Größen in modale Koordinaten  $\mathbf{u}(\Omega)$  überführt, und zwar unter Verwendung der Transformation in Gleichung 2.6.

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\xi}(\Omega) e^{i\Omega t} \quad (2.6)$$

2.6 repräsentiert eine Gleichheit, wenn alle Moden berücksichtigt werden. Dies ist für akzeptable Ergebnisse meist nicht notwendig und die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert sich erheblich. In diesem Fall stellt Gleichung 2.6 eine gute Näherung dar. Einsetzen von Gleichung 2.6 in Gleichung 2.1 und Multiplikation mit  $\boldsymbol{\phi}^T$  ergibt dann:

$$-\Omega^2 \underbrace{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}}_{\mathbf{I}} \boldsymbol{\xi}(\Omega) + i\Omega \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\phi} \boldsymbol{\xi}(\Omega) + \underbrace{\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}}_{\omega^2} \boldsymbol{\xi}(\Omega) = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{F}(\Omega) \quad (2.7)$$

Wenn man eine verschwindend geringe Dämpfung annimmt – wie dies bei reinen Komponenten-Betrachtungen oftmals zulässig ist – können die Bewegungsgleichungen

<sup>67</sup>vgl. Zienkiewicz et al. (2005)

auf ein System entkoppelter Gleichungen mit jeweils einem einzigen Freiheitsgrad reduziert werden:

$$-\Omega^2 m_i \xi_i(\Omega) + k_i \xi_i(\Omega) = f_i(\Omega) \quad (2.8)$$

Hier sind  $m_i$ ,  $k_i$  und  $f_i$  jeweils die  $i$ -te modale Masse, modale Steifigkeit und modale Kraft. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist numerisch sehr viel effizienter als die direkte Formulierung, da hier nur einzelne Gleichungen ungekoppelt zu lösen sind.

In der Topologieoptimierung ist jedoch die numerische Stabilität eines Systems für die Findung einer konvergenten Lösung sehr wichtig. Numerische Stabilität bedeutet in diesem Zusammenhang z. B. die Breite und Höhe der Ausschläge im Frequenzspektrum (englisch: Peaks), die direkt von der Dämpfung abhängen. Aus diesem Grund muss die Dämpfung im Fall der Topologieoptimierung zwingend mitbetrachtet werden. In diesem Fall ist die Orthogonalitätseigenschaft der einzelnen Moden nicht gegeben. Darum verwendet der benutzte FE-Solver das direkte Frequenzgangverfahren in Kombination mit modalen Koordinaten<sup>68</sup>. Da hierbei die Anzahl der Freiheitsgrade durch den Einsatz der modalen Koordinaten erheblich reduziert wird, ist dieser Ansatz trotzdem numerisch weitaus effektiver als das direkte Frequenzgangverfahren.

Wie viele Eigenformen in der Modaltransformation betrachtet werden müssen, hängt hauptsächlich vom interessierenden Frequenzbereich ab. Es sollten mindestens alle Moden mit Frequenzen im Bereich der betrachteten Anregungen mitbetrachtet werden. Für genauere Ergebnisse sollten jedoch mindestens zwei- bis dreimal so viele Moden genutzt werden.

## Dämpfung

Das physikalische Phänomen *Dämpfung* beschreibt die Wirkung der Energiedissipation in einer Struktur aufgrund der komplexen Mechanismen innerhalb der Mikrostruktur der Domäne. Für die numerische Untersuchung einer solchen Domäne ist die Bestimmung des Dämpfungskoeffizienten<sup>69</sup> oder – im Falle der FEM – die Bestimmung der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  in der Praxis oftmals schwierig, da diese Effekte teilweise immer noch nicht gut verstanden und mathematisch nur über Approximationen zu beschreiben sind. Der Einfachheit halber wird daher oft angenommen, dass die Dämpfungsmatrix eine lineare Kombination der Steifigkeits- und Masse-Matrizen darstellt:

<sup>68</sup>vgl. MSC.Software Corporation (2004)

<sup>69</sup>vgl. Zienkiewicz et al. (2005)

$$\mathbf{D}_v = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (2.9)$$

Diese Formulierung wird als *Viskose* oder *Rayleigh-Dämpfung* bezeichnet. Hierbei werden die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  experimentell bestimmt.

*Rayleigh-Dämpfung*: Dämpfung, die proportional zu einer linearen Kombination der Steifigkeit und Masse ist. Diese Annahme entbehrt einer physikalischen Grundlage, ist aber aus mathematischer Sicht relativ praktisch, wenn genaue Dämpfungswerte nicht bekannt sind.<sup>70</sup>

In diesem Zusammenhang markiert die kritische Dämpfung (bei der das Dämpfungsverhältnis  $\xi$  zu 1 wird) den Übergang zwischen oszillatorischem und nicht-oszillatorischem Schwingungsverhalten. Die Beziehung zwischen den Dämpfungskoeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  und dem Verhältnis der kritischen Dämpfung bei der Frequenz  $\omega$  ist gegeben durch:

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \alpha \omega + \frac{\beta}{\omega} \right) \quad (2.10)$$

Die Dämpfungskoeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  werden durch die Auswahl der Verhältnisse der kritischen Dämpfung ( $\xi_1$  und  $\xi_2$ ) bei zwei unterschiedlichen Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bestimmt:

$$\alpha = 2 \frac{\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \beta = 2 \omega_1 \omega_2 \frac{\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (2.11)$$

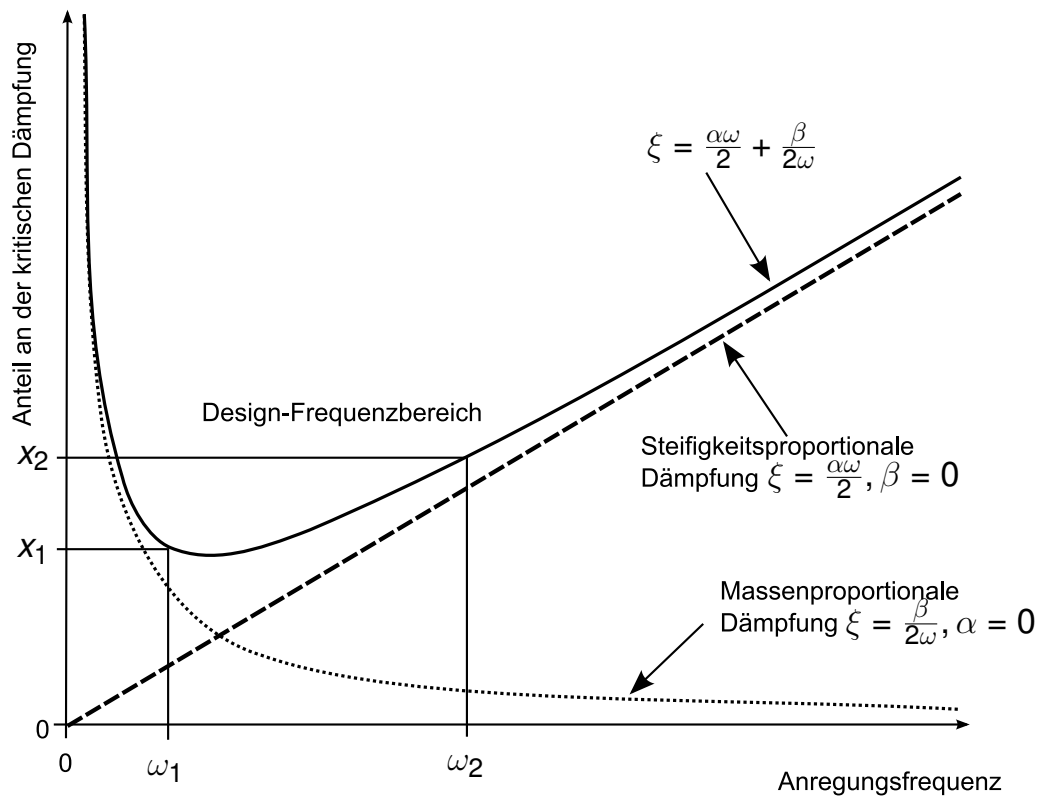
Die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  werden in der Regel zur Begrenzung des Design-Spektrums gewählt. So wird  $\omega_1$  als die niedrigste natürliche Eigenfrequenz der Struktur angenommen und  $\omega_2$  als die maximale Frequenz, die in der Betrachtung von Interesse ist. In Abbildung 2.10 ist das Verhältnis der kritischen Dämpfung über der Frequenz aufgetragen.

Wie man leicht erkennen kann, ist der Einfluss der steifigkeits- und massen-proportionalen Dämpfung auf die Gesamtdämpfung abhängig von der Anregungsfrequenz. Für niedrigere Frequenzen hat die massenproportionale Dämpfung einen großen Einfluss auf die Dämpfung und sollte daher mit Vorsicht behandelt werden. Positive Werte kleiner als 0,1 pro Zeiteinheit sind normalerweise akzeptabel (siehe Cook<sup>72</sup>).

<sup>70</sup>vgl. MSC.Software Corporation (2004)

<sup>71</sup>vgl. MSC.Software Corporation (2004)

<sup>72</sup>vgl. Cook et al. (2001)



**Abbildung 2.10** Beitrag der Steifigkeit und Masse zur gesamten Dämpfung<sup>71</sup>

Eine andere Form der Dämpfung ist die sogenannte *Strukturdämpfung*. Diese ist im Gegensatz zur viskosen Dämpfung, die proportional zur Geschwindigkeit ist, proportional zur Verschiebung  $\mathbf{u}$ <sup>73</sup>

$$\mathbf{F}_S = i\alpha\mathbf{K}\mathbf{u} \quad (2.12)$$

wobei  $\alpha$  der strukturelle Dämpfungskoeffizient und  $i$  die imaginäre Einheit ist, die einen Phasensprung von  $\pi/2$  impliziert. Damit muss die Dämpfung nicht mehr getrennt betrachtet werden, sondern kann in eine imaginäre Steifigkeitsmatrix eingebettet werden.

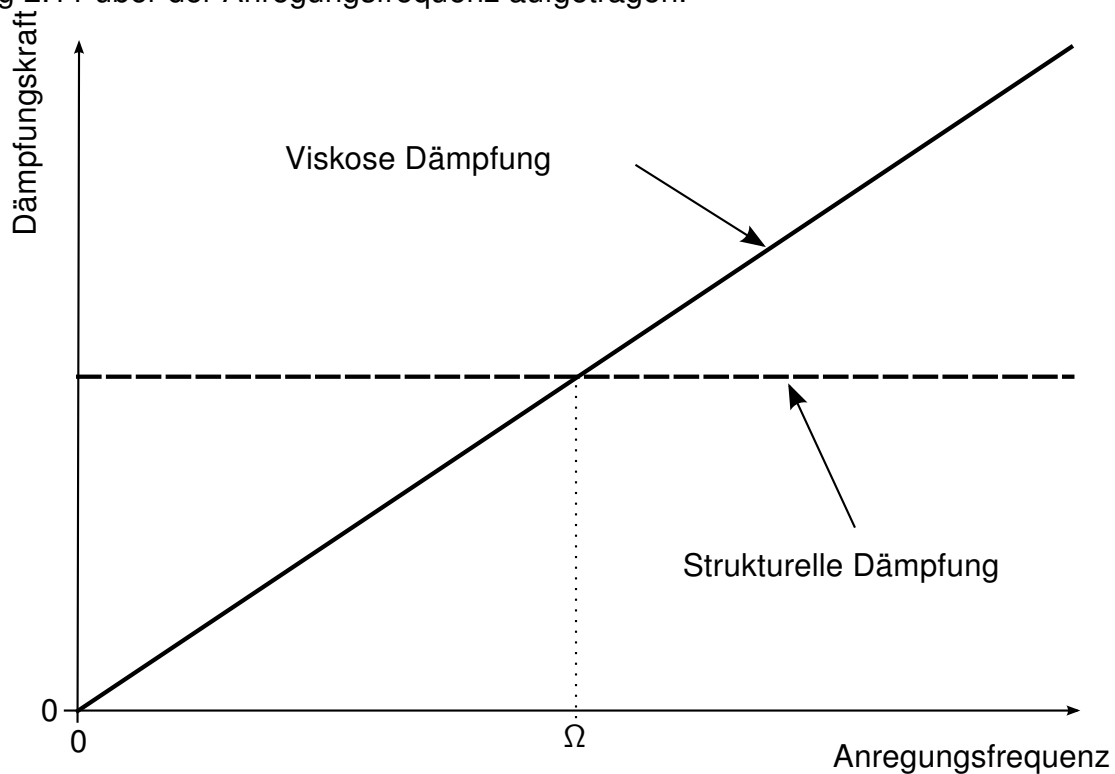
$$\bar{\mathbf{K}} = (1 + i\alpha)\mathbf{K} \quad (2.13)$$

Dies ist der einzige Weg im FE-Solver, der in dieser Arbeit verwendet wird, um Dämpfung in einer Frequenzganganalyse in das System einzubringen. Andere FE-Solver können teilweise eine Überlagerung der Massen- und Steifigkeitsmatrix als Strukturdämpfung betrachten:

$$\mathbf{D}_S = \frac{\alpha}{\omega}\mathbf{K} + \frac{\beta}{\omega}\mathbf{M} \quad (2.14)$$

<sup>73</sup>vgl. Zienkiewicz et al. (2005)

Der Unterschied der viskosen Kräfte gegenüber Strukturdämpfungskräften ist in Abbildung 2.11 über der Anregungsfrequenz aufgetragen.



**Abbildung 2.11** Kraft durch Dämpfungsformulierungen in Abhängigkeit der Frequenz<sup>74</sup>

Hier sind die strukturellen und viskosen Dämpfungskräfte gleich für eine konstante Amplitude der sinusförmigen Bewegung bei der Frequenz  $\bar{\omega}$ .

Wie schon erwähnt, ist die Einbeziehung der Dämpfung entscheidend für einen erfolgreichen Topologieoptimierungsprozess. Dies liegt am Verhalten des numerischen Systems ohne Dämpfung – die Spitzen im Spektrum sind theoretisch unendlich hoch. Deshalb sollte allein schon aus praktischen Gründen die Dämpfung beim Ausführen einer dynamischen Topologieoptimierung mit in die Betrachtung einbezogen werden. Außerdem sollte der verwendete Wert der Dämpfungskonstanten (in diesem Fall:  $\alpha$ ) deutlich höher sein, als es in der Realität der Fall ist. Damit werden die numerischen Spitzen im Frequenzgang geglättet. Aus diesen Gründen wird in dieser Arbeit – falls nicht anders erwähnt – ein Wert von  $\alpha = 0.1$  verwendet.

## 2.2.2 Topologieoptimierung

Das grundlegende Ziel der Topologieoptimierung ist die Festlegung einer optimalen Gestalt (Topologie) einer Struktur in Bezug auf unterschiedliche Ziele und Nebenbedin-

<sup>74</sup>vgl. MSC.Software Corporation (2004)



ungen<sup>75</sup>. Diese Ziele können eine maximale Steifigkeit (oder minimale Nachgiebigkeit) in einem statischen Fall oder eine minimale dynamische Nachgiebigkeit in einem dynamischen Fall umfassen. Außerdem sind die Verschiebung der fundamentalen Eigenfrequenz in höhere Frequenzbereiche oder die Maximierung einer Lücke zwischen aufeinander folgenden Eigenfrequenzen gut etabliert.

Für die Entwicklung einer Zielfunktion zur Optimierung der Schallabstrahlung einer geschlossenen Struktur müssen die Grundlagen der Topologieoptimierung und die verwendeten Formeln erläutert werden. Dies erfolgt in diesem Kapitel für allgemeine Topologieoptimierungsprobleme und im weiteren Verlauf (Abschnitt 5) wird darauf Bezug genommen.

Ein allgemeines Optimierungsproblem<sup>76</sup> (siehe Gleichung 2.15) besteht aus einem Funktional  $F(\mathbf{X})$  als Zielfunktion, das für die Designvariablen  $\mathbf{X}$  minimiert (oder maximiert) werden soll, sowie multiplen Nebenbedingungen, die entweder als Gleichheitsnebenbedingungen ( $h_j(\mathbf{X})$ ) oder Ungleichheitsnebenbedingungen ( $g_k(\mathbf{X})$ ) formuliert sein können.

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{X}}{\text{minimiere}} && F(\mathbf{X}) \\ \text{u. d. N.}^{77} && g_j(\mathbf{X}) \leq 0, && j = 1 \dots n_g \\ && h_k(\mathbf{X}) = 0, && k = 1 \dots n_h \\ && X_i^l \leq X_i \leq X_i^u, && \mathbf{X} \in V \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die einfachste Zielfunktion im Rahmen der Topologieoptimierung ist dabei die Minimierung der statischen Nachgiebigkeit (Maximierung der Steifigkeit) einer gegebenen Struktur. Physikalisch gesehen ist die am wenigsten nachgiebige (bzw. steifste) Struktur die mit der größtmöglichen Menge an Material. Dies ergibt sich direkt aus der Abhängigkeit der Steifigkeit von der Dichte. Deshalb muss in der Optimierungsformulierung zu dieser Zielfunktion eine Restriktion des Endvolumens der Optimierung erfolgen, so dass Ergebnisse mit 100 % vermieden werden.

Für die weitere Erläuterung wird ein mechanischer Körper mit seiner strukturellen Domäne  $\Omega_{\text{mat}}$  betrachtet, der Teil einer übergeordneten Referenzdomäne  $\Omega_{\text{R}}$  in  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  ist. Die Referenzdomäne wird so gewählt, dass die Applikation von Kräften und Verschiebungen auf der Struktur ermöglicht wird, und stellt somit die betrachtete Systemgrenze dar.

<sup>75</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>76</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>77</sup>unter den Nebenbedingungen

<sup>78</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

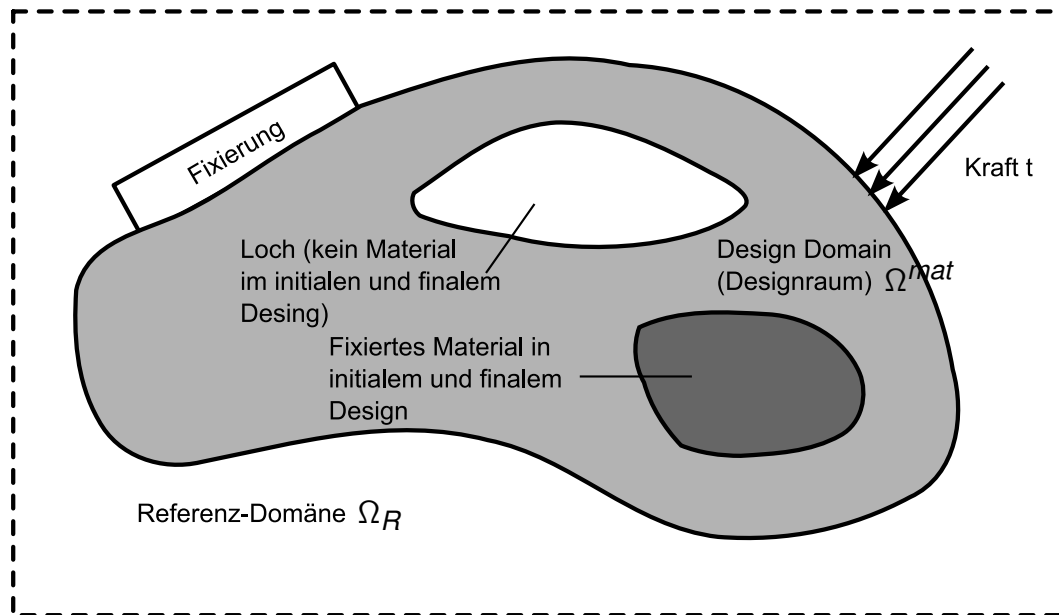


Abbildung 2.12 Generalisiertes Topologieoptimierungsproblem<sup>78</sup>

Das Ziel des Topologieoptimierungsprozesses ist dann die Wahl eines optimalen Elastizitätstensors  $E_{ijkl}(X)$ , der über die Domäne hinweg variabel ist.

## Formulierung des Optimierungsproblems

Für die Optimierung gibt es verschiedene Aspekte, auf welche die Struktur optimiert werden kann. Wie zuvor erläutert, gibt es die Möglichkeit für statische und dynamische Untersuchungen wie der Nachgiebigkeit (statisch und dynamisch) sowie die Verschiebung der grundlegenden Eigenfrequenz einer Struktur und Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Eigenfrequenzen<sup>79</sup>. Für diese Optimierungsziele muss dann ein geeignetes Maß gefunden werden, das während der Optimierung ausgewertet werden kann. Bei geometrischen Optimierungszielen muss damit ein Punkt der Auswertung definiert werden. Da die Topologieoptimierung die FEM nutzt, ist es naheliegend, das Leistungsmaß auf die kinematischen Größen der FE-Diskretisierung zu definieren, wie die Verschiebung, Geschwindigkeit oder Beschleunigung von einzelnen Knoten.

Beispielsweise wird bei einer Optimierung einer statisch belasteten Struktur die gesamte Dehnungsenergie der Domäne minimiert oder äquivalent dazu die statische Nachgiebigkeit. Der beschreibende Elastizitätstensor ist definiert durch:

$$E_{ijkl} = 1_{\Omega_{\text{mat}}} \cdot E_{ijkl}^0 \quad (2.16)$$

<sup>79</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

mit

$$1_{\Omega_{mat}} = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega_{mat} \\ 0 & \text{für } x \in \{\Omega \mid \Omega \notin \Omega_{mat}\} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\int_{\Omega_R} 1_{\Omega_{mat}} d\Omega_R = \text{Vol}(\Omega_{mat}) \leq V \quad (2.18)$$

Diese Definition des Elastizitätstensors  $E_{ijkl}$  impliziert eine diskrete 0/1-Definition der Elastizitätsverteilung im Designraum  $\Omega_{mat}$ .  $E_{ijkl}^0$  repräsentiert den Elastizitätstensor für das gegebene, isotrope Ausgangsmaterial. Somit ergibt sich ein Ausdruck für einen diskreten Elastizitätstensor, der entweder den Wert des ursprünglichen Elastizitätstensors an Stellen mit hoher Dehnungsenergie oder Null an Stellen mit niedriger Energie ergibt.

Dies ist die eigentlich gewünschte mathematische Formulierung der Topologieoptimierung, um garantiert für jedes Element im Designraum festlegen zu können, ob es Material oder kein Material beinhaltet. Das Problem bei einer solchen Formulierung liegt in der numerischen Anwendung der nicht-kontinuierlichen Formulierung. Damit können keine gradientenbasierten Optimierungsverfahren eingesetzt werden, da diese darauf beruhen, kontinuierliche Werte annehmen zu können. Dadurch wird das Verfahren numerisch extrem aufwändig, da jede mögliche Kombination von Material/Nicht-Material berechnet und ausgewertet werden muss.

Ein Ansatz zur Lösung dieses Problems ist die Verwendung eines Material-Interpolationsschemas. Dabei wird die Steifigkeitsmatrix durch eine Funktion berechnet, die abhängig von der Dichte des Materials ist. Das Material-Interpolationsschema muss dann eine Form besitzen, bei dem eine Material/Nicht-Material-Lösung noch möglich und vor allem angestrebt wird<sup>80</sup>. Dies wird detaillierter in Abschnitt 2.2.2 erläutert werden.

$V$  bezeichnet den vordefinierten Grenzwert für das Volumen des Designraums, das in der Regel als Anteil  $\alpha$  des Ausgangsvolumens  $V^0$  ausgedrückt wird.

$$V = \alpha \cdot V^0 \quad (2.19)$$

---

<sup>80</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

## Zielfunktion

Die FEM ist eine effektive Methode, um mit strukturellen Problemen umzugehen, wie sie bei der Topologieoptimierung üblicherweise vorherrschen. Bei der Anwendung der FEM wird die kontinuierliche Strukturdomäne  $\Omega_{\text{mat}}$  in eine diskretisierte Strukturdomäne überführt. Dies geschieht in Form eines Netzes, wobei jedes Element unter anderem durch ein konstantes Elastizitätsmodul  $E$  sowie die Verschiebungen jedes Knotens beschrieben wird.

Mit Hilfe der Finite-Elemente-Diskretisierung kann die Optimierungsaufgabe für die Minimierung der statischen Nachgiebigkeit in einer diskreten Form definiert werden<sup>81</sup>:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimiere } \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
 & \quad \mathbf{u}, \mathbf{E}_e \\
 & \text{u. d. N. } \quad \mathbf{K}(\mathbf{E}_e) \mathbf{u} = \mathbf{f} \\
 & \quad \mathbf{E}_e \in \mathbf{E}_{\text{ad}} \\
 & \quad E_{ijkl} = 1_{\Omega_{\text{mat}}} \cdot E_{ijkl}^0 \quad (2.20) \\
 & \quad 1_{\Omega_{\text{mat}}} = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \Omega_{\text{mat}} \\ 0 & \text{für } x \in \{\Omega \mid \Omega \notin \Omega_{\text{mat}}\} \end{cases} \\
 & \quad \int_{\Omega_R} 1_{\Omega_{\text{mat}}} \, d\Omega_R = \text{Vol}(\Omega_{\text{mat}}) \leq V
 \end{aligned}$$

Hier repräsentiert  $\mathbf{f}$  den äußeren Lastvektor und  $\mathbf{u}$  den Verschiebungsvektor für alle Freiheitsgrade. Die globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  wird aus den einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_e$  zusammengesetzt, die jeweils abhängig von den Elementelastizitätsmodulen  $E_e$  sind.

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e(E_e) \quad (2.21)$$

Die Zielfunktion repräsentiert die zu optimierende physikalische Größe (maximiert oder minimiert). In diesem Fall ist dies die statische Nachgiebigkeit. Bei der Maximierung der ersten fundamentalen Eigenfrequenz einer Struktur ist die Formulierung der Zielfunktion die folgende<sup>82</sup>:

<sup>81</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>82</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

$$\begin{aligned}
& \underset{\rho}{\text{minimiere}} \quad \left( \lambda_{\min} = \min_{i=1 \dots N_{\text{FHG}}} \lambda_i \right) \\
& \text{u. d. N.} \quad (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\Phi}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{FHG}} \\
& \quad \quad \quad \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V \\
& \quad \quad \quad 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \\
& \quad \quad \quad e = 1, \dots, N
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Wobei  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  den Steifigkeits- und Massenmatrizen des Systems entsprechen.  $\boldsymbol{\Phi}_i$  ist der dem  $i$ -ten Eigenwert zugeordnete Eigenvektor.

## Restriktionen

Wie in vorigen Abschnitten erläutert, müssen für jedes Optimierungsproblem Restriktionen definiert werden. Diese Einschränkungen sind aufgrund der physikalischen Abhängigkeiten des betrachteten Problems notwendig. Im formulierten Optimierungsproblem 2.20 ist z. B. eine Beschränkung des Volumens der Struktur als Anteil des Ausgangsvolumens notwendig. Dies ist erforderlich, da physikalisch gesehen diejenige Struktur die höchste Steifigkeit (minimale Nachgiebigkeit) besitzt, die maximal mit Material gefüllt ist. Der Optimierer wird deshalb in diesem Fall immer die komplette Struktur mit Material füllen, was natürlich nicht zielführend ist.

Das Problem der Maximierung der fundamentalen Eigenfrequenz in Formulierung 2.22 führt ohne Volumenrestriktion zu einer vollständigen Entfernung der Struktur. Dies ist begründet durch die Tatsache, dass keine Struktur eine unendlich hohe Eigenfrequenz besitzt<sup>83</sup>. Eine Möglichkeit, dies zu vermeiden, ist die Festlegung einer fixierten Struktur (englisch: frozen elements) innerhalb des Designraums, die während des Optimierungsprozesses erhalten bleibt. Eine andere Möglichkeit ist die Einführung einer Punktmasse innerhalb der Struktur, was zum gleichen Ergebnis führt.

## Material-Interpolation

Die gewünschte Formulierung des Optimierungsproblems in Gleichung 2.20 impliziert eine reine 0/1-Materialverteilung<sup>84</sup>. Allerdings ist diese Formulierung numerisch nicht in akzeptabler Zeit realisierbar.

<sup>83</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>84</sup>Elementdichten und -elastizitätsmodule können entweder 0 oder 100 % als Werte annehmen

Ein Ansatz, um dieses Problem zu umgehen, ist die Einführung eines Material-Interpolationsschemas. Die Steifigkeit der Struktur wird in einem solchen Schema als eine Funktion der *Dichte* des Materials beschrieben. Dies ermöglicht eine kontinuierliche Formulierung des Optimierungsproblems.

Ein solches Material-Interpolationsschema muss einige anwendungsspezifische Charakteristika aufweisen. Für eine erfolgreiche Optimierung muss die Funktion für die Dichte  $C^1$  kontinuierlich<sup>85</sup> im Intervall  $\rho = [0, 1]$  sein<sup>86</sup>. Darüber hinaus muss das Schema mittlere Werte für die Dichte, d. h. ein *verschmiertes* Material bestrafen, so dass der Optimierungsalgorithmus immer zu den Grenzwerten 0 oder 1 strebt. Verschmiertes Material sollte hohe *Materialkosten* bei niedrigem *Steifigkeitsgewinn* verursachen.

Zu unterscheiden ist hierbei zwischen zwei üblicherweise verwendeten Material-Interpolationsschemata – dem SIMP- und dem RAMP-Interpolationsschema. Beide haben eigene Charakteristika und bieten damit Vor- und Nachteile je nach Anwendungsfall, die im Folgenden kurz ausgeführt werden.

## SIMP

Das SIMP-Interpolationsschema wurde erstmalig auf Basis der Beobachtung eingeführt, dass die Beziehung zwischen der homogenisierten Steifigkeit und der Dichte des Materials<sup>87</sup> die Eigenschaften einer rationalen Funktion hat. SIMP steht dabei für Solid Isotropic Material with Penalization (deutsch: massives isotropes Material mit Penalisierung<sup>88</sup>). Es definiert eine rationale Abhängigkeit zwischen der Elastizität  $E_{ijkl}$  und der Dichte  $\rho$ . Gleichzeitig ist der Zusammenhang zwischen Masse  $M$  und Dichte linear.

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(\rho) &= \rho^p(x) \cdot E_{ijkl}^0 \\ M(\rho) &= M^0 \cdot \rho \\ 0 &< \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \\ p &> 1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Der Penalisierungsfaktor  $p$  ist so zu wählen, dass die Zwischenwerte für  $\rho$  effektiv benachteiligt werden, d. h. das vorher erwähnte *verschmierte* Material nach dem Optimierungsprozess möglichst gering vorhanden ist. Nach Bendsøe erfüllt ein Wert von

<sup>85</sup>stetige Funktion

<sup>86</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>87</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (1999)

<sup>88</sup>Bzw. Bestrafung

$\rho > 3$  die Hashin-Shtrikman-Grenzen für ein Poisson-Verhältnis von  $\nu = 1/3$ <sup>89</sup> und ist daher das Limit einer physikalisch möglichen isotropen Materialeigenschaft, die durch die Zusammensetzung zweier linear elastischer isotroper Materialien erreicht werden kann<sup>90</sup>. In der Praxis hat sich ein Wert von mindestens 2 bis 3<sup>91</sup> in den meisten Fällen als numerisch ausreichend und nützlich erwiesen.

In Abbildung 2.13 ist das Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP)-Interpolationsschema mit einem Penalisierungsfaktor von  $p = 3$  aufgetragen. Zu sehen sind hier jeweils die Elastizität und die Masse eines Elements über der Dichte  $\rho$ .

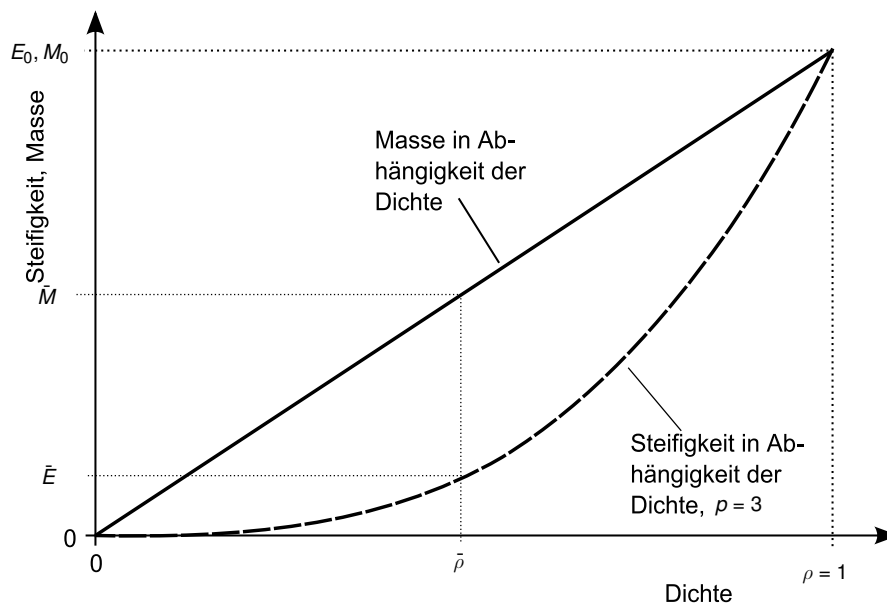


Abbildung 2.13 SIMP Material-Interpolationsschema<sup>92</sup>

Aus Abbildung 2.13 wird ersichtlich, dass ein Zwischenwert  $\bar{\rho}$  mit relativ hohen Kosten (hohe Masse  $\bar{M}$ ), aber dafür einem relativ geringen Wert der Steifigkeit  $\bar{E}$  einhergeht. Daher werden Lösungen mit Werten der Dichte von  $\rho = 0$  oder  $\rho = 1$  durch den Optimierungsalgorithmus bevorzugt, die trotz Annahme einer kontinuierlichen Dichteverteilung zu den gewünschten 0/1-Lösungen führen.

Mit diesem Ansatz existiert also ein kontinuierliches Design-Problem innerhalb des betrachteten Bereichs  $\rho = [0, 1]$ , und gradientenbasierte numerische Optimierungsverfahren sind einsetzbar.

Die Steigung der Funktion für die Elastizität verschwindet für  $\rho \rightarrow 0$ . Dies führt zu lokalen Moden in Bereichen mit niedriger Dichte in dynamisch angeregten Systemen<sup>93</sup>.

<sup>89</sup>Bendsøe und Sigmund (1999)

<sup>90</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>91</sup>Üblicherweise 3

<sup>92</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (1999)

<sup>93</sup>vgl. Tcherniak (2002)

Der Grund ist die hohe Elastizität dieser Bereiche verglichen mit Bereichen mit voller Dichte. Diese Bereiche beeinflussen dann die niedrigsten Eigenmoden des betrachteten Systems<sup>94</sup>. Da sich dies nachteilig auf den Optimierungsprozess auswirkt, wird in einem solchen Fall ein anderes Material-Interpolationsschema erforderlich.

### RAMP-Interpolationsschema

Wie zuvor erläutert, ist das SIMP-Interpolationsschema nicht sehr gut geeignet, um das Auftreten von lokalen Moden bei dynamischen Problemen zu umgehen. Zu diesem Zweck wurde das RAMP-Interpolationsschema eingeführt<sup>95</sup>. RAMP ist die Kurzform für Rational Approximation of Material Properties. Es baut auf dem SIMP-Interpolationsschema auf und erweitert es, so dass die Steigung der Elastizitätsfunktion für  $\rho \rightarrow 0$  nicht verschwindet.

Dies geschieht durch Einführung der folgenden Abhängigkeit zwischen der Elastizität  $E$  und der Dichte  $\rho$ :

$$\begin{aligned} E(\rho) &= E^{\min} + \frac{\rho}{1 + q(1 - \rho)} \cdot (E^0 - E^{\min}) \\ M(\rho) &= M^0 \cdot \rho + (1 - \rho) \cdot M^{\min} \\ 0 &\leq \rho \leq 1 \\ q &> 1 \end{aligned} \tag{2.24}$$

In Abbildung 2.14 sind jeweils die Elastizitäten von SIMP und Rational Approximation of Material Properties (RAMP) gegenüber der Dichte  $\rho$  aufgetragen. Die konzeptionelle Idee der Bestrafung von Zwischenwerten von  $\rho$  hinter beiden Schemata ist immer noch die gleiche. Allerdings ist hier nun die Steigung des Interpolationsschemas ungleich Null für  $\rho = 0$ . Dies ermöglicht ein besseres Verhalten in dynamischen Optimierungsproblemen.

97

Dieses Modell zeigt dann ein gutes Verhalten für dynamische Probleme, wie z. B. die Optimierung der ersten fundamentalen Eigenfrequenz oder die Vergrößerung der Lücke von benachbarten Eigenfrequenzen. Allerdings ist, wie in Abschnitt 7 beschrieben, auch diese Formulierung für das im Weiteren betrachtete Optimierungsproblem nur bedingt geeignet. Mit dem hier vorgestellten Optimierungsproblem ist es möglich, ein breites

<sup>94</sup>vgl. Pedersen (2000)

<sup>95</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

<sup>97</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)



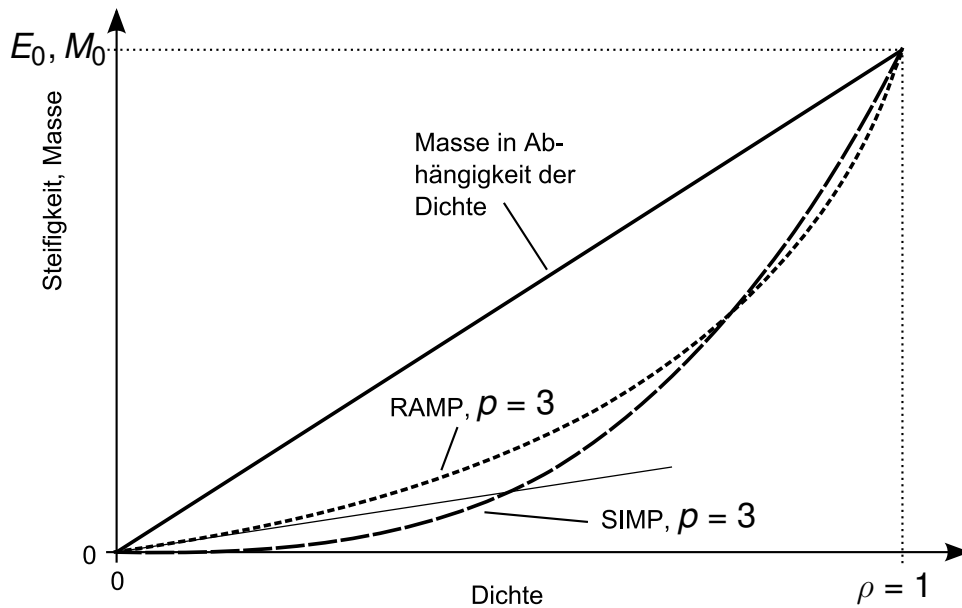


Abbildung 2.14 Vergleich von SIMP und RAMP Material-Interpolationsschema<sup>96</sup>

Frequenzspektrum mit einer Vielzahl von Eigenfrequenzen der Struktur abzudecken. In diesem Fall bewirkt auch das RAMP-Interpolationsschema lokale Eigenmoden in der Struktur. Diese lokalen Moden verschlechtern das Optimierungsergebnis und ihnen muss entweder durch Änderung des Material-Interpolationsschemas oder durch andere numerische Mittel begegnet werden.

## Sensitivitätsanalyse

In jedem Optimierungsproblem ist es notwendig, einen Optimierungsalgorithmus zu verwenden, der effizient die Designvariablen verändert, so dass mit möglichst wenig Iterationen ein Minimum erreicht wird<sup>98</sup>. Dies ist besonders wichtig für die Topologieoptimierung, da hier die einzelnen Iterationen bereits eine hohe Rechendauer aufweisen.

Einer der ersten verwendeten Algorithmen war die so genannte *Optimalitätskriterien-Methode*<sup>99</sup>. Sie stellt ein äußerst effizientes Verfahren für eine eingeschränkte Klasse von Topologieoptimierungsproblemen dar.

Die Optimalitätskriterien-Methode erfordert die physikalische Definition einer Optimalität für eine mechanische Struktur unter Last. Der Algorithmus ändert dann die Designvariablen mit Hilfe der durch die FEM berechneten Verschiebungen. Dabei wird jedes Element der Struktur unabhängig von den anderen betrachtet. Grundsätzlich folgt der Algorithmus dabei der Vorgabe, Material in Bereichen hoher Dehnungsenergie anzulagern

<sup>98</sup>Globale Minima können dabei nicht garantiert werden.

<sup>99</sup>vgl. Bendsøe und Kikuchi (1988)

und in Bereichen geringer Dehnungsenergien zu entfernen. Dies ist ein heuristischer Algorithmus, der nur für eine kleine Klasse von Optimierungsproblemen effektiv funktioniert, für diese Klasse jedoch sehr effektiv. Die Effektivität des Algorithmus entsteht dabei durch die unabhängige Änderung der Designvariablen.

Bei vielen Optimierungsproblemen ist ein wie zuvor beschriebener physikalischer Zusammenhang zwischen Materialanlagerung und Optimalität jedoch nicht vorhanden. Dann bleibt nur der Einsatz der mathematischen Programmierung. Sie ist ein allgemeiner Ansatz für Optimierungsprobleme aller Art und die Lösung daher in der Regel rechnerisch aufwändiger. Mit der richtigen Wahl der Optimierungsparameter kann sie jedoch ähnlich effizient wie die Optimalitätskriterien-Methode sein.

Der Einsatz von Algorithmen der mathematischen Programmierung zur Lösung struktureller Optimierungsprobleme ist gut untersucht und etabliert<sup>100</sup>. Hierbei wird die Zielfunktion der Optimierung als Funktion der Designvariablen (im Fall der Topologieoptimierung als Funktion der Elementdichten) formuliert (vgl. Abschnitt 2.2.2). Das Verschiebungsfeld der Struktur wird dann als eine Funktion dieser Designvariablen implizit durch das bekannte FEM-Gleichgewicht berechnet. Die Bestimmung der Ableitung der Zielfunktion heißt *Sensitivitätsanalyse* und ist notwendige Bedingung für den Einsatz der mathematischen Programmierung bzw. der gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen.

### Sensitivitäten für Probleme der statischen Nachgiebigkeit

Eine Betrachtung des Optimierungsproblems der statischen Nachgiebigkeit wie in Abschnitt 2.2.2 führt mit der Nutzung des SIMP-Interpolationsschema zu:

$$\begin{aligned}
 & \underset{\rho}{\text{minimiere}} && \Phi(\rho_e) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \\
 & \text{u. d. N.} && \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \\
 & && \mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \rho_e^\rho \mathbf{K}_e \\
 & && \sum_{e=1}^N \rho_e V_e \leq V \\
 & && 0 < \rho_{\min} \leq \rho \leq 1 \\
 & && e = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

<sup>100</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

Um die Ableitungen des Optimierungsproblems in Gleichung 2.25 zu bestimmen, erweist sich die Verwendung des Adjungierten-Verfahrens als hilfreich. Damit wird die Zielfunktion aus Gleichung 2.25 mit einer Null-Funktion – dem bekannten FEM-Gleichgewicht – addiert:

$$\Phi(\rho_e) = \mathbf{f}^T \mathbf{u} - \lambda(\mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}) \quad (2.26)$$

Hier ist  $\lambda$  ein beliebiger, aber fixer Lagrange-Vektor. Damit kann Gleichung 2.26 in Bezug auf die Designvariablen abgeleitet werden:

$$\frac{d\Phi}{d\rho} = (\mathbf{f}^T - \lambda^T \mathbf{K}) \frac{d\mathbf{u}}{d\rho_e} - \lambda^T \frac{d\mathbf{K}}{d\rho_e} \mathbf{u} \quad (2.27)$$

Der Term  $\frac{d\mathbf{u}}{d\rho_e}$  in Gleichung 2.27 kann numerisch nicht bestimmt werden und muss deshalb zu Null werden. Daher muss der Lagrange-Vektor  $\lambda$  so gewählt werden, dass er die Adjungierten-Gleichung

$$\mathbf{f}^T - \lambda^T \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

erfüllt. Gleichung 2.28 entspricht dem bekannten FEM-Gleichgewicht, und damit gilt:

$$\lambda^T = \mathbf{u}^T \quad (2.29)$$

Ein solches Problem heißt selbst-adjungiert. Die Ableitung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  bezogen auf die Dichte  $\rho$  ist bestimmt durch:

$$\frac{d\mathbf{K}}{d\rho_e} = \rho \cdot \rho_e^{\rho-1} \cdot \mathbf{K}_e \quad (2.30)$$

Daraus ergibt sich die analytische Lösung der Ableitungen, von der alle Komponenten bekannt sind und damit berechnet werden können.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = -\rho \cdot \rho_e^{\rho-1} \cdot \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e \mathbf{u} \quad (2.31)$$

Diese Einfachheit ist natürlich nicht allgemein gültig. Das Optimierungsproblem statische Nachgiebigkeit ist selbst-adjungiert<sup>101</sup> und daher numerisch sehr effektiv, weil der Lagrange-Vektor nicht separat berechnet werden muss. Dies ist nicht der Fall für nicht selbst-adjungierte Probleme wie etwa die meisten dynamischen Probleme.

<sup>101</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)

## Sensitivitäten für dynamisch stationäre Probleme

In dieser Arbeit werden lineare dynamische Probleme betrachtet. Für solche Probleme hat Jensen eine allgemeingültige Vorgehensweise für die Bestimmung der Ableitungen vorgestellt<sup>102</sup>.

$$\mathbf{M}(\rho)\ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{C}(\rho)\dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{K}(\rho)\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{P} \quad (2.32)$$

Hier werden die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen durch  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{K}$  in Abhängigkeit von der Dichte  $\rho$  repräsentiert.  $\bar{\mathbf{u}}$  ist ein komplexer Vektor der Verschiebungen. Die Designvariablen werden durch den Vektor  $\rho$  bestimmt. Die reale Verschiebung kann dann durch den Realteil des komplexen Verschiebungsvektors gewonnen werden.

$$\mathbf{u} = \text{Re}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (2.33)$$

Der Lastvektor  $\mathbf{F}$  beschreibt die dynamische Belastung

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}e^{i\Omega t} \quad (2.34)$$

mit der Anregungsfrequenz  $\Omega$ .

Die allgemeine stationäre Lösung für das System in Gleichung 2.32 kann in folgender Form geschrieben werden (vgl. Abschnitt 2.2.1):

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{U}e^{i\Omega t} \quad (2.35)$$

Hier stellt  $\mathbf{U}$  den in der Regel komplexen Amplitudenvektor dar. Dieser kann durch seinen Real- ( $\mathbf{u}_R$ ) und Imaginärteil ( $\mathbf{u}_I$ ) ersetzt werden. Einsetzen von Gleichung 2.34 und 2.35 in 2.32 ergibt:

$$\left[ -\Omega^2 \mathbf{M}(\rho) + i\Omega \mathbf{C}(\rho) + \mathbf{K}(\rho) \right] \mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (2.36)$$

Durch die Einführung einer System-Matrix (oder dynamischen Steifigkeitsmatrix)  $\mathbf{S}$  erhält man:

$$\mathbf{S}(\rho)\mathbf{U} = \mathbf{f} \quad (2.37)$$

---

<sup>102</sup>vgl. Jensen (2007a)

Dann erhält man die realen Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigung durch:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(t) &= \operatorname{Re}(\mathbf{U}e^{i\Omega t}) = \mathbf{u}_R \cos(\Omega t) - \mathbf{u}_I \sin(\Omega t) = |\mathbf{U}| \cos(\Omega t + \phi) \\
 \dot{\mathbf{u}}(t) &= -\Omega \left[ \mathbf{u}_R \sin(\Omega t) - \mathbf{u}_I \cos(\Omega t) \right] \\
 \ddot{\mathbf{u}}(t) &= -\Omega^2 \left[ \mathbf{u}_R \cos(\Omega t) - \mathbf{u}_I \sin(\Omega t) \right]
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Oder alternativ die jeweiligen Betragsgrößen von Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{U}(\Omega)| &= \sqrt{\mathbf{u}_R^2 + \mathbf{u}_I^2} \\
 |\dot{\mathbf{U}}(\Omega)| &= \Omega \sqrt{\mathbf{u}_R^2 + \mathbf{u}_I^2} \\
 |\ddot{\mathbf{U}}(\Omega)| &= \Omega^2 \sqrt{\mathbf{u}_R^2 + \mathbf{u}_I^2}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

In dieser Arbeit wird eine Zielfunktion der allgemeinen Form betrachtet:

$$\Phi = \Phi_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) \tag{2.40}$$

Durch die Addition von zwei zusätzlichen Null-Termen zu Gleichung 2.40 erhält man:

$$\Phi = \Phi_0(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I) + \boldsymbol{\lambda}_1^T (\mathbf{S}\mathbf{u} - \mathbf{f}) + \boldsymbol{\lambda}_2^T (\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{f}}) \tag{2.41}$$

Die beiden zusätzlichen Bedingungen sind nach Gleichung 2.41 Null, und  $\boldsymbol{\lambda}_1$  und  $\boldsymbol{\lambda}_2$  sind zwei unterschiedliche Lagrange-Vektoren. Die Balken-Notation bezeichnet die konjugiert komplexen der Lagrange-Vektoren. Wie üblich beim Adjungierten-Verfahren wird die Ableitung von Gleichung 2.41 in Bezug auf die Designvariablen gebildet. Eine Umordnung der Terme ergibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{d\rho_i} &= \frac{\partial\Phi_0}{\partial\rho_i} + \boldsymbol{\lambda}_1^T \left( \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\rho_i} \mathbf{u} - \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\rho_i} \right) + \boldsymbol{\lambda}_2^T \left( \frac{\partial\bar{\mathbf{S}}}{\partial\rho_i} \bar{\mathbf{u}} - \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}}{\partial\rho_i} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathbf{u}_R} + \boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{S} + \boldsymbol{\lambda}_2^T \bar{\mathbf{S}} \right) \frac{\partial\mathbf{u}_R}{\partial\rho_i} \\
 &\quad + \left( \frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathbf{u}_I} + i\boldsymbol{\lambda}_1^T \mathbf{S} + i\boldsymbol{\lambda}_2^T \bar{\mathbf{S}} \right) \frac{\partial\mathbf{u}_I}{\partial\rho_i}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Um die nicht berechenbaren Terme  $\frac{\partial \mathbf{u}_R}{\partial \rho_i}$  bzw.  $\frac{\partial \mathbf{u}_I}{\partial \rho_i}$  zu eliminieren, müssen die letzten beiden Klammerausdrücke verschwinden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}_R} + \lambda_1^T \mathbf{S} + \lambda_2^T \bar{\mathbf{S}} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}_I} + i\lambda_1^T \mathbf{S} + i\lambda_2^T \bar{\mathbf{S}} &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Durch Elimination erhält man  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . Dadurch ergibt sich die Gesamtableitung zu:

$$\frac{d\Phi}{d\rho_i} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_i} + 2\text{Re} \left( \lambda^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \rho_i} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \rho_i} \right) \right) \quad (2.44)$$

wobei  $\lambda$  die Lösung zu

$$\mathbf{S}^T \lambda = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}_R} + i \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}_I} \right)^T \quad (2.45)$$

darstellt. Nimmt man eine Rayleigh-Dämpfung oder Strukturdämpfung im betrachteten System (vgl. Abschnitt 2.2.1) an, ist  $\mathbf{S}$  symmetrisch und Gleichung 2.45 vereinfacht sich zu:

$$\underbrace{\mathbf{S}}_{\cong \mathbf{K}} \underbrace{\lambda}_{\cong \mathbf{u}} = -\frac{1}{2} \underbrace{\left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}_R} + i \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{u}_I} \right)^T}_{\cong \mathbf{f}} \quad (2.46)$$

Diese Gleichung ist wiederum äquivalent zum bekannten FEM-Gleichgewicht. Dieses Gleichgewicht kann dann mit einem FE-Solver berechnet werden, wenn man die rechte Seite der Gleichung 2.46 dem FE-Solver als äußere Kräfte übergibt. Die rechte Seite wird üblicherweise *Pseudolast* (englisch: *Pseudoload*) genannt.

## Methode der bewegten Asymptoten

Wie zuvor erwähnt, wird für jede numerische Optimierung ein geeigneter Optimierungsalgorithmus benötigt. Für die Topologieoptimierung muss dieser Algorithmus mit besonders wenigen Iterationen konvergieren. Deshalb ist der Einsatz eines gradientenbasierten Algorithmus zwingend notwendig.

Der Algorithmus Methode der bewegten Asymptoten – Method of Moving Asymptotes (MMA) ist ein solcher Algorithmus der mathematischen Programmierung und wurde zuerst von Svanberg<sup>103</sup> vorgestellt. Er präsentierte auch einen erweiterten Algorithmus, der besser zu einem globalen Optimum konvergiert (MGCMMA)<sup>104</sup>.

<sup>103</sup>vgl. Svanberg (1987)

<sup>104</sup>vgl. Svanberg (2002)

Seine Funktionsweise basiert auf einer asymptotischen Approximation der Ziel- und Restriktionsfunktionen. Das Verfahren funktioniert wie folgt: es wird ein explizit konvexes Subproblem gebildet, welches das implizite, nicht-lineare Problem annähert. Da das Subproblem separabel und konvex ist, kann ein Dual-Ansatz oder eine primal-duale Innere-Punkt-Methode verwendet werden, um es zu lösen. Das Problem wird durch Hyperbelfunktionen mit oberen und unteren Asymptoten approximiert, die in jeder Iteration des Subproblems bewegt werden und sich dabei immer weiter dem globalen Minimum des Problems annähern. Eine detaillierte Erläuterung und Analyse dieser Methode ist bei Svanberg und Zuo zu finden<sup>105</sup>.

Der MMA-Algorithmus ist der Quasi-Standard für die Topologieoptimierung und wird in dieser Arbeit für alle Optimierungsaufgaben eingesetzt. Er ist gut geeignet, um mit einer großen Zahl von Optimierungsproblemen umzugehen. Der Nachteil dieser allgemeinen Verwendbarkeit in allen Arten von Optimierungsaufgaben ist eine erhöhte Anzahl an Iterationen bis zur Konvergenz und somit ein höherer Berechnungsaufwand.

## 2.3 Noise, Vibration, Harshness

Vor allem im Fahrzeugbau ist das Thema Fahrkomfort mittlerweile eine die Produktentwicklung prägende Eigenschaft und steht immer mehr im Vordergrund. Ein wichtiger Teil des Fahrkomforts ist das Thema NVH (deutsch: Geräusch, Vibrationen und Rauheit). Unter diesem Sammelbegriff versteht man alle als Geräusch hörbaren bzw. als Vibration spürbaren, meist im Fahrzeug auftretenden Schwingungen. Diese Schwingungen beeinflussen stark das Komfortempfinden des Anwenders (Passagiers). Die übliche Aufteilung in die Bereiche *vibration*, *harshness* und *noise* des Frequenzspektrums ist dabei in Abbildung 2.15 gegeben.

Ein wichtiger Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit der Fragestellung, wie man den von schwingenden Strukturen abgestrahlten Schall minimieren kann. Dazu müssen kurz die theoretischen Grundlagen zur Schallabstrahlung betrachtet werden.

Das Frequenzspektrum eines schwingenden Systems kann dazu verwendet werden, die vorher beschriebenen Phänomene objektiv zu beschreiben. Das Frequenzspektrum beschreibt das Verhalten eines Systems bzw. einer Komponente unter dem Einfluss einer harmonischen Anregung. Es wird eine während der Optimierung auszuwertende Systemantwort bestimmt. Dies können bei einer Fluid-Struktur-Kopplung z. B. Schalldrücke oder Schallleistungen sein. Im Falle der hier vorgestellten Methode wird sich

<sup>105</sup>vgl. Svanberg (1987, 2002); Zuo et al. (2006)

<sup>106</sup>vgl. Heißing und Ersoy (2007)

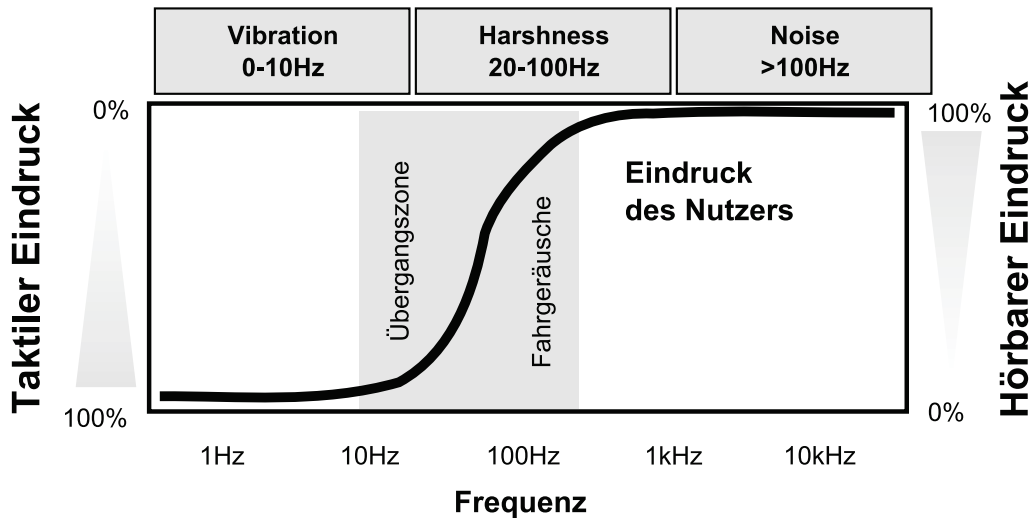


Abbildung 2.15 Aufteilung des Frequenzspektrums<sup>106</sup>

auf die reine Betrachtung der Struktur ohne angekoppeltes Fluid beschränkt. Damit stehen z. B. Verschiebungen oder Geschwindigkeiten zur Verfügung, die als Funktion der Anregungsfrequenz aufgetragen werden.

Die Maximalamplituden (engl. Peaks) im Spektrum beinhalten dabei natürlich den größten Energieinhalt und sind deshalb besonders wahrnehmbar. Um diesen Effekt zu vermindern, ist ein ausgeglichenes, homogenisiertes Spektrum über einen großen Frequenzbereich anzustreben. Dabei wird sich das Grundniveau der Amplituden im Spektrum nach oben verschieben, um den vorhandenen Energieinhalt auf alle Frequenzen zu verteilen.

Eine Möglichkeit, um Strukturbauteile komfortabler für das menschliche Ohr zu machen, ist, die grundlegende Eigenfrequenz zu höheren Frequenzen zu verschieben. Dies ist eine beliebte Methode, um solchen Problemen zu begegnen, da hier der relativ einfache Zusammenhang  $\omega = \sqrt{c/m}$  gilt. Somit können Verbesserungen erzielt werden, indem entweder die Steifigkeit erhöht oder die Masse verringert wird. Üblicherweise wird dies mit dem Einsatz von Materialien mit höherer Steifigkeit und kleinerer Dichte erreicht (siehe FVK gegenüber Stahl). Dies führt jedoch oftmals zu hohen Kosten für die Entwicklung eines Systems. Sollen weiterhin isotrope Standardwerkstoffe wie Stahl oder Aluminium eingesetzt werden, sind die zu treffenden Leichtbaumaßnahmen meist dem Komfortempfinden gegenläufig.

Beispielsweise wäre eine Leichtbaumaßnahme, bei einem Blech die Wandstärke zu verringern. Dabei nimmt die Masse linear mit der Blechdicke ab. Die für die Eigenfrequenzen von Blechen besonders relevante Biegesteifigkeit hängt jedoch von der Blechdicke in der 4. Potenz ab und hat somit einen stärkeren Einfluss als die Massenabnahme.



Eine Möglichkeit zur Nutzung der Topologieoptimierung, um bei isotropen Werkstoffen durch geeignete Wahl einer Gestaltung die Eigenfrequenzen nach oben zu verschieben, wurde bereits entwickelt (siehe Abschnitt 2.2).

Jedoch nimmt das menschliche Ohr Geräusche in einem Frequenzbereich von 0 bis 20 000 Hz wahr<sup>107</sup>. Der Frequenzbereich der fundamentalen Eigenfrequenz von üblichen NVH-Problemen reicht von wenigen bis etwa 1000 Hz. Es ist nicht möglich, die Eigenfrequenzen durch ein solches Verfahren in einem solch großen Frequenzbereich zu bewegen. Daher ist dieses Verfahren nur bedingt effektiv für übliche NVH-Probleme. Stattdessen soll ein ausgeglichener (homogenisierter) Frequenzgang über den gesamten Frequenzbereich erreicht werden. Dabei ist ein insgesamt höheres Niveau der Basis des Frequenzgangs vorzuziehen, wenn dafür die Maximalamplituden im Frequenzgang geglättet werden (siehe 2.16).

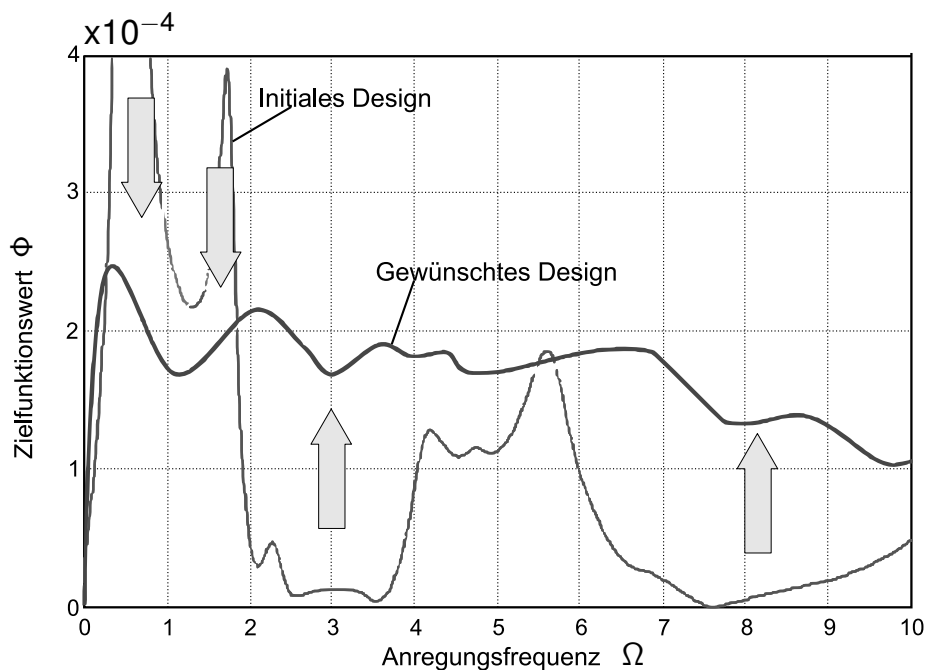


Abbildung 2.16 Frequenzgang für Ausgangs- und End-Design<sup>108</sup>

### 2.3.1 Fluidtheorie

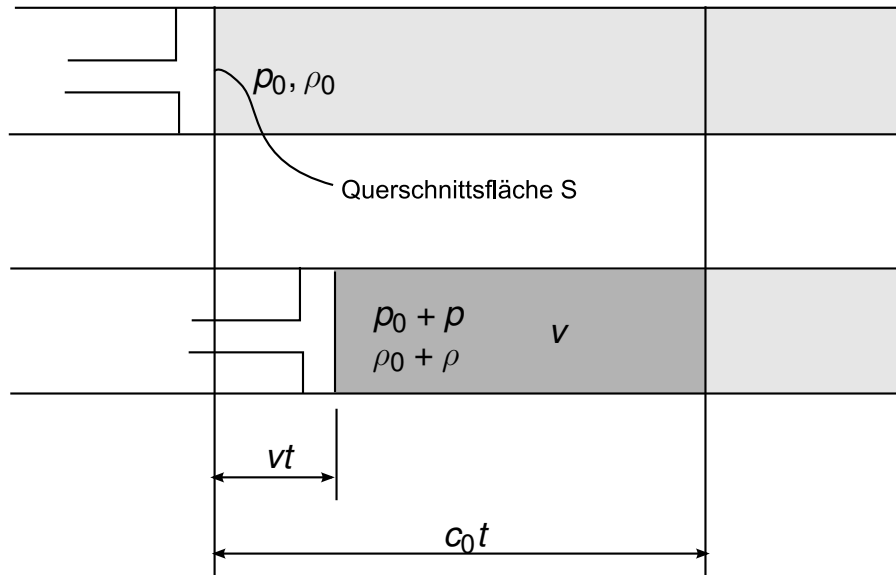
Zur Einführung der akustischen Betrachtungen und zur Darstellung der weiterhin entwickelten Zielfunktion dieser Arbeit wird hier ein einfaches Beispiel<sup>109</sup> eines Kolbens in einer halb-unendlichen Röhre verwendet. Die Röhre ist mit einem Fluid mit der Anfangsdichte  $\rho_0$  und dem Startdruck  $p_0$  gefüllt. Hierbei ist dann die Bewegung des

<sup>107</sup>vgl. Fahy (1998)

<sup>108</sup>vgl. Hessenauer et al. (2007)

<sup>109</sup>vgl. Fahy (1998)

Kolbens mit der Geschwindigkeit  $v$  innerhalb der Zeit  $t$  von Interesse. Die Kompression breitet sich dabei mit der dem Fluid charakteristischen Schallgeschwindigkeit  $c_0$  aus. Die Dichteänderung während der Ausbreitung wird als alleinig abhängig vom Druck  $p$  angenommen.



**Abbildung 2.17** Stationäre Kompression eines Fluidvolumens vor dem Kolben

Die auf das betrachtete Element wirkende Kraft<sup>110</sup> beträgt:

$$pS = \frac{d}{dt}(\rho_0 c_0 t S v) \quad (2.47)$$

mit der Gesamtmasse der Flüssigkeit ( $\rho_0 c_0 t S$ ) im unkomprimierten Element (siehe Abbildung 2.17). Wird Linearität angenommen, gilt für den Druck:

$$p = \rho_0 c_0 v \quad (2.48)$$

Der Wert  $\rho_0 c_0$  ist konstant und wird als charakteristische akustische Impedanz des fluiden Mediums bezeichnet.

Aus Gründen der Vollständigkeit wird hier noch die bekannte Helmholtz-Gleichung präsentiert. Eine detailliertere Abhandlung dieser Gleichung findet sich in Fahy<sup>111</sup>. Mit der linearisierten, eindimensionalen Massenerhaltungsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.49)$$

<sup>110</sup>vgl. Fahy (1998)

<sup>111</sup>vgl. Fahy (1998)

und der linearisierten, eindimensionalen Gleichung der Impulserhaltung

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.50)$$

wird die eindimensionale Wellengleichung für die Ausbreitung der akustischen Druckschwankungen zu:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.51)$$

durch die Differenzierung von Gleichung 2.49 in Bezug auf  $t$  und Gleichung 2.50 in Bezug auf  $x$  sowie unter der Annahme einer linearen Beziehung zwischen Druck und Dichte  $p = c_0^2 \rho$ .

Diese Gleichung beschreibt das Verhalten des akustischen Drucks in Bezug auf Raum ( $x$ ) und Zeit ( $t$ ). Lösen der Gleichung 2.51 in Bezug auf die Zeit unter Verwendung von

$$p(x, t) = \text{Re}(p(x)e^{i\omega t}) \quad (2.52)$$

ergibt die eindimensionale Helmholtz-Gleichung

$$\frac{d^2 p(x)}{dx^2} + k^2 p(x) = 0 \quad (2.53)$$

bei der  $k = \omega^2/c_0^2$  vom komplexen Druck  $p(x)$  erfüllt werden muss.

### 2.3.2 Schallintensität

Für die Ableitung einer neuen Zielfunktion für die Topologieoptimierung in dieser Arbeit ist die abgestrahlte Schallintensität  $I$  von einer Oberfläche einer Struktur von Interesse. Die physikalische Bedeutung der Schallintensität im Allgemeinen ist die über die Zeit gemittelte Geschwindigkeit, mit der die Schallenergie von einem Teil des Fluids zu einem anderen übertragen wird. Daher wird sie als das Integral über das Produkt von Schalldruck  $p(t)$  und Geschwindigkeit  $v(t)$  über eine Periode mit einem Zyklus  $T$  der harmonischen Bewegung definiert<sup>112</sup>.

$$I = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)v(t) dt \quad (2.54)$$

<sup>112</sup>vgl. Fahy (1998)

Wenn zeitliche Durchschnittswerte betrachtet werden, sind nur die Realteile von Schalldruck und Geschwindigkeit von Belang. Diese können wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(p(x)e^{i\omega t}) &= \operatorname{Re}((p_R + ip_i) \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))) \\ &= p_R \cos(\omega t) - p_i \sin(\omega t)\end{aligned}\quad (2.55)$$

und

$$\operatorname{Re}(v(x)e^{i\omega t}) = v_R \cos(\omega t) + v_i \sin(\omega t) \quad (2.56)$$

Somit ist die über die Zeit gemittelte akustische Intensität für harmonische Fluktuation in Druck und Geschwindigkeit gegeben durch:

$$I = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (p_R \cos(\omega t) - p_i \sin(\omega t))(v_R \cos(\omega t) - v_i \sin(\omega t)) dt \quad (2.57)$$

In diesem Integral werden nur die Terme mit  $(\cos(\omega t))^2$  und  $(\sin(\omega t))^2$  zu einem Wert verschieden von *Null* für den Zeitraum  $T$  führen. Damit vereinfacht sich die Schallintensität zu:

$$I = \frac{1}{2}(p_R v_R + p_i v_i) \quad (2.58)$$

die äquivalent ist zu:

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p^*(x)v(x)) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(p(x)v^*(x)) \quad (2.59)$$

wobei  $p^*(x)$  und  $v^*(x)$  die konjugiert Komplexen zu  $p(x)$  und  $v(x)$  sind.

### 2.3.3 Schalleistungspegel

Bisher war die Betrachtung auf zwei Dimensionen beschränkt. Da bei der Topologieoptimierung jedoch in den meisten Fällen drei Dimensionen berücksichtigt werden müssen, muss hier noch die akustische Leistung in drei Dimensionen erläutert werden. Wie bereits erwähnt, stellt die Schallintensität den durchschnittlichen Energiefluss von einem Teil des Fluids zu einem anderen dar. Dies gilt für den eindimensionalen Fall, bei dem andere Richtungen als die normal zu einer schallabstrahlenden Oberfläche berücksichtigt werden müssen. Demnach muss dies übertragen werden auf eine dreidimensionale

Oberfläche, über die die Schalleistung übertragen wird. Für den Schalleistungspegel gilt dann<sup>113</sup>:

$$W = \int_S \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.60)$$

Hier ist  $\mathbf{l}$  eine Erweiterung des Schalleistungspegels in Gleichung 2.54 und 2.59 in allen drei Raumrichtungen:

$$\mathbf{l} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} p(t) \mathbf{u}(t) dt = \frac{1}{2} \text{Re} (p^*(x) v(x)) = \frac{1}{2} \text{Re} (p(x) v^*(x)) \quad (2.61)$$

Durch die Erweiterung des Integrals in 2.61 um mehrere Dimensionen, die Diskretisierung für die numerische Anwendung und die Angleichung des Drucks  $p(x)$  in 2.48 erhält man die äquivalent abgestrahlte Leistung (ERP, englisch: equivalent radiated power).

$$\text{ERP} = \frac{1}{2} \rho c \sum_{i=1}^{N_{el}} |v_n^i|^2 A_i$$

Hier repräsentiert  $\rho$  die Dichte des Fluids und  $c$  die Schallausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb des Fluids.  $A_i$  und  $v_n^i$  stellen den Bereich der Oberfläche und die Geschwindigkeit der Oberflächennormalen für jedes betrachtete Element dar.

Das Maß für die abgestrahlte Schalleistung Equivalent radiated Power (deutsch: äquivalent abgestrahlte Leistung) (ERP) wird später in dieser Arbeit verwendet werden, um eine entsprechende Zielfunktion zu entwerfen. Diese Zielfunktion kann dann verwendet werden, um die Struktur durch Minimieren des Schalleistungswerts zu optimieren.

### 2.3.4 Fluid-Struktur-Kopplung

Die Kopplung von strukturellen und akustischen Formulierungen hat in den letzten Jahren mehr Aufmerksamkeit erhalten<sup>114</sup>. In dieser Arbeit wird sich auf die strukturelle Formulierung der Vibrationen einer betrachteten Oberfläche beschränkt, um der zusätzlichen Komplexität in der Topologieoptimierung mit der notwendigen Findung der analytischen Ableitungen gerecht zu werden. Deshalb stellt dieser Abschnitt nur einen kurzen Überblick über mögliche Kopplungsmethoden der strukturellen und akustischen

<sup>113</sup>vgl. Fahy (1998)

<sup>114</sup>vgl. Christensen et al. (1998a)

Formulierungen dar. Diese Probleme können durch ihre Eigenschaften in Bezug auf NVH-Themen klassiert werden:

Das Problem wird für eine optimale Verteilung der Geschwindigkeiten ohne Berücksichtigung der Rückkopplung des Schalldrucks formuliert. Dies ist die in dieser Arbeit gewählte Methode. Im Gegensatz dazu steht eine vollständig gekoppelte Formulierung. In diesem Fall müssen die Ableitungen sowohl des Schalldrucks als auch der strukturellen Geschwindigkeiten parallel im Gleichgewichtszustand des gekoppelten Systems berechnet werden.

Das Problem wird entweder als Innen- oder Außenproblem formuliert. Beim Innenproblem kann das akustische Medium in finite Elemente diskretisiert werden. Hier ist das akustische Medium von einer elastischen Struktur umgeben, die auch als finite Elemente diskretisiert wird. Beim Außenproblem wird die elastische Struktur mit finiten Elementen diskretisiert und emittiert den Schall in ein unendlich ausgedehntes akustisches Medium. Das akustische Medium kann dann entweder mit der Boundary Element Method (deutsch: Randelement-Methode) (BEM) oder FEM diskretisiert werden. Im zweiten Fall müssen jedoch insbesondere die Schallreflexionen an der nicht-unendlichen Grenze des diskretisierten Raumes berücksichtigt werden.

Eine detaillierte Übersicht der Möglichkeiten der strukturell-akustischen Kopplung und eine Diskussion der verschiedenen Zielfunktionen und Optimierungsformulierungen für diese Art von Problemen findet sich bei Christensen<sup>115</sup>.

---

<sup>115</sup>vgl. Christensen et al. (1998a)

# 3 Zielsetzung

Die durch den Stand der Forschung (siehe Kapitel 2) identifizierten Lücken teilen sich in zwei Abstraktionsebenen auf.

Es wurde der Stand der Forschung für den Leichtbau im Gesamtsystem im Allgemeinen sowie für das Spannungsfeld von Leichtbau und Verbesserung der Akustik im Speziellen eingeführt. Dabei wurde aufgezeigt, dass ein konsequenter Leichtbau-Gedanke im Gesamtsystem meist nicht umgesetzt wird, sondern sich – der Komplexität der Problematik entsprechend – meist nur für die Bearbeitung einer Disziplin aus dem Tripel *Methoden – Werkstoffe – Fertigung* entschieden wird.

Dabei ist schon die Bezeichnung des Tripels missverständlich. Der Klassierungsbegriff *Methoden* wird hier in den meisten Fällen alleinstehend aufgeführt. Dies führt jedoch zu erheblichen Problemen bei der Einordnung von Leichtbauaktivitäten. Diese Restriktion soll mit einer neuen Darstellung der Leichtbauaktivitäten überwunden werden. Eine solche Darstellung muss die übliche Trennung von Methoden, Werkstoffen und Fertigung aufheben, da die Grenzen einer solchen Trennung quasi nicht vorhanden sind. Es existieren sowohl die üblichen Produktentwicklungsmethoden und Systemgestaltungsmethoden als auch Methoden, die weitere Phasen des Produktlebenszyklus umfassen. Außerdem gibt es Methoden, die den üblichen Sparten *Werkstoffe* und *Fertigung* zuzuordnen sind. Dieser Komplexität der *Methodenwelt* muss in einer neuen Darstellung der Leichtbauaktivitäten Rechnung getragen werden. Ein erster Schritt und ein Ziel dieser Arbeit ist die für eine integrierte Betrachtungsweise notwendige überdachte Darstellung des Tripels *Methoden – Werkstoffe – Fertigung*.

Zusätzlich stellt sich die Frage nach der Wichtigkeit der Systembetrachtung im Leichtbau, die in bisherigen Leichtbauklassierungen weitgehend außen vor gelassen wurde. Deswegen wird die integrierte Systembetrachtung in der Darstellung dieser Arbeit stärker in den Fokus gerückt.

Für die Unterstützung des Leichtbau-Produktentwicklungsprozesses bedarf es außerdem neuer, rechnergestützter Methoden, die den Produktentwickler in seinen Aufgaben unterstützen. Die Rechnerunterstützung ist hierbei von besonderer Notwendigkeit, da

die Komplexität alleine durch eine *intuitive Gestaltung* nicht mehr behandelt werden kann.

Dabei ist insbesondere der Zielkonflikt zwischen Gewichtsreduzierung und Komforterhöhung von Wichtigkeit, da diese beiden Ziele gegenläufig zueinander sind. Somit sind hier neue Ansätze mit Hilfe der Strukturoptimierung zu finden, die diese beiden Zielkonflikte in Einklang bringen.

Erste Ansätze dazu werden im zweiten Teil dieser Arbeit vorgestellt. Die Topologieoptimierung wird verwendet, um das Frequenzspektrum eines Bauteils unter harmonischer Last, wie z. B. den Betriebslasten im Fahrzeug, zu homogenisieren. Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, erzeugt dies ein höheres Komfortempfinden für den Anwender.

Dazu wird eine Zielfunktion mit entsprechenden analytischen Ableitungen vorgestellt, die den Frequenzgang einer Oberfläche unter harmonischer Last über einen gewissen Frequenzbereich darstellt. Da hier sehr viele Abhängigkeiten (Oberflächendiskretisierung, Diskretisierung des Spektrums) in einen einzigen Kennwert einfließen, müssen besondere Maßnahmen zur Stabilisierung des Optimierungsprozesses getroffen werden. Diese Stabilisierung wird anhand einer Dämpfung vorgestellt und analysiert.

Im nächsten Schritt wird die angesprochene Zielfunktion erweitert, um mit einer anderen Problemart umzugehen. Es werden die Unterschiede zwischen den beiden Problemtypen und deren möglicher Einsatz in realen Anwendungsfällen erörtert. Dazu muss der Topologieoptimierungsprozess angepasst und neue Berechnungsschritte eingeführt werden. Diese neue Methode zur Optimierung der Schallabstrahlung von Komponenten unter harmonischer Last wird in Kapitel 5 vorgestellt.

Mit den vorgestellten (Teil-)Zielsetzungen und den daraus abgeleiteten Maßnahmen lässt sich somit eine Gesamtverbesserung des Systemleichtbaus schaffen. Dazu werden notwendige Vorgehensweisen definiert sowie konkrete Methoden und Algorithmen zur numerischen Optimierung der dynamischen Eigenschaften von Bauteilen vorgestellt.



# 4 Leichtbau im Gesamtsystem

## Leichtbau ist eine Geisteshaltung

---

*(Heinrich Timm<sup>116</sup>)*

In diesem Kapitel soll die Bedeutung des Leichtbaus im Gesamtsystem in einer übergeordneten Sichtweise verdeutlicht werden. Dabei wird insbesondere auf die Frage der Einbindung der Leichtbauaktivitäten in den Produktentstehungsprozess eingegangen. Dies umfasst auch die Frage, wie Problemstellungen zum Thema Leichtbau überhaupt angegangen werden sollen. In Abschnitt 2.1 wurde die übliche Klassierung der Aktivitäten im Leichtbauentwicklungsprozess dargelegt. Die Klassierung erfolgt dabei nach:

- Methoden
- Werkstoffen
- Fertigung

wobei die Abgrenzung zwischen diesen Begriffen oftmals nicht gegeben ist.

Deshalb wird in dieser Arbeit eine erweiterte Klassierung für die durchzuführenden Leichtbauaktivitäten entwickelt. Weiterhin wird ein vereinfachter Leichtbauprozess vorgestellt, der die übliche Vorgehensweise bei Leichtbauproblemen beschreibt.

## 4.1 Problembeschreibung

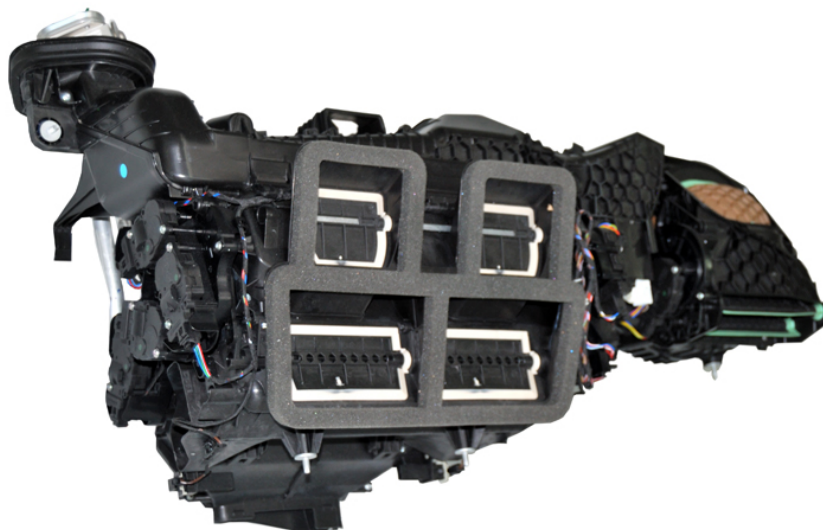
Übliche Leichtbauprobleme für den Produktentwickler haben bestimmte Charakteristika, die sich in allen Problemstellungen wiederholen. Beispielhaft werden hier zwei Aufgabenstellungen aus dem Fahrzeugbau vorgestellt, aus denen sich diese Charakteristika dann ableiten lassen kann.

---

<sup>116</sup>Geistiger Vater des Audi-Aluminium-Spaceframe, siehe Otterbach (2012)

## Klimagerät

Das Klimagerät bietet im Gesamtsystem Fahrzeug mit der Temperierung und Einstellung des Feuchtegrads der Innenraumlufte eine wichtige Komfortfunktionalität. Gleichzeitig sind aber auch die Anforderungen an das Klimagerät extrem hoch. So ist gerade in der Elektromobilität beim Wegfall des relativ lauten Verbrennerbetriebs der Kühlkompressor als Zusatzaggregat eine wichtige akustische Lärmquelle. Das komplette System wird nach Stand der Technik als Kunststoffspritzguss mit relativ dünner Wandstärke ausgeführt. Dies erhöht dann auch wegen der relativ niedrigen Steifigkeit die Problematik der Schwingungsbildung durch lokale Moden an großflächigen Strukturen. Hier müssen bereits heute Zusatzmaßnahmen, wie z. B. gezielte Verrippungen und Versteifungen, vorgenommen werden, um diesem Problem zu begegnen. Das Gesamtgewicht des Systems ohne Kühlkompressor bewegt sich bereits heute im Bereich von ca. 10 kg bei einem relativ hohen umschlossenen Volumen.



**Abbildung 4.1** Leichtbausystem Klimaanlage<sup>117</sup>

Dies macht die Aufgabe der Gewichtsreduzierung von 20 % natürlich sehr herausfordernd. Die übliche Herangehensweise der Materialsubstitution von Stahl durch Carbonfaserverstärkter Kunststoff (CFK) ist hier nicht zielführend, da die extrem niedrige spezifische Dichte des verwendeten Kunststoffes bei dem hohen zu umschließenden Volumen keine Gewichtseinsparung bringt. Hier ist zuerst eine genaue Situationsanalyse notwendig, bei der die Maßnahmen und Bauteile des Gesamtsystems zur Bearbeitung und Optimierung festgelegt werden. Der Einsatz von verschiedenen Materialien ist unumgänglich, da in jedem einzelnen Bereich des Systems entsprechend

<sup>117</sup>vgl. Valeo Group (2013)

seiner Belastung das *richtige* Material eingesetzt werden muss, also entsprechend einer Multi-Material-Strategie.

Zusätzlich ist das System relativ komplex und die Beachtung von mehreren unterschiedlichen Disziplinen ist notwendig. Dies sind in diesem Fall:

**Mechanik** beschreibt die Struktur und das entsprechende Verhalten des Systems.

**Thermodynamik** beschreibt die Temperatur- und Feuchteverhältnisse und deren Änderungen im System.

**Akustik** beschreibt das dynamische Verhalten des Systems und die Auswirkung auf den Benutzer.

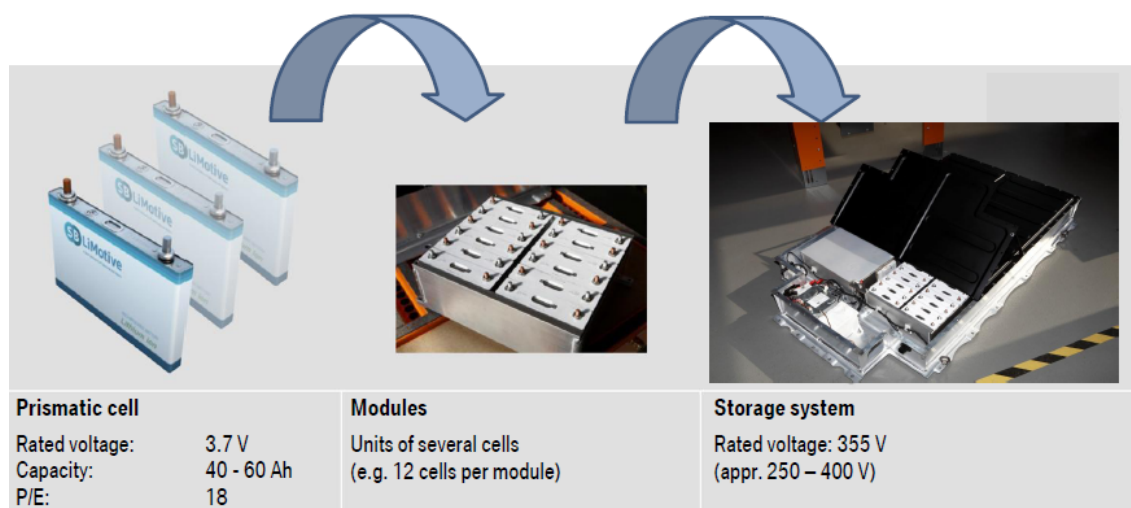
**Aerodynamik** beschreibt den Luftfluss durch das System.

**Elektronik** beschreibt die Ansteuerung aller Stellglieder im System.

### Hochvoltspeicher für Hybridfahrzeug

Der Hochvoltspeicher aus dem Forschungsprojekt Next Generation Hochvolt-Speicher (NexHoS) stellt für den Leichtbau eine besondere neue Herausforderung.

Der Hauptteil der Masse in diesem System ist zwingend notwendig für die Funktionalität, die Bereitstellung der Energie in den Zellen.



**Abbildung 4.2** Hochvoltspeicher<sup>118</sup>

<sup>118</sup>vgl. Wagner et al. (2013a)

Zusätzlich ist die Masse der Zellen im Vergleich zum Gesamtkontext Fahrzeug und zu anderen Teilsystemen sehr hoch. Außerdem werden an die Batterie als sicherheitstechnisch höchst relevantes System hohe Anforderungen bezüglich der Crash-Sicherheit gestellt. Das Vorgängermodell – im Sinne der Produktgenerationsentwicklung nach Albers<sup>119</sup> – besteht aus Aluminium-Druckguss und besitzt damit eine sehr hohe Masse.

Auch in diesem System sollen entsprechend einer Multi-Material-Strategie verschiedene Werkstoffe *richtig*, sprich: belastungsgerecht eingesetzt werden. Es ist also zwingend der Einsatz der Simulation und der numerischen Optimierung notwendig, um die entsprechenden Eigenschaften und Systemverhalten zu bestimmen.

Auch hier ist ein komplexes System zu bearbeiten und die entsprechenden Disziplinen zu berücksichtigen:

**Mechanik** beschreibt die Struktur und das entsprechende Verhalten des Systems, inklusive dem wichtigen Crashlastfall.

**Elektronik** beschreibt die elektronischen Komponenten zur Steuerung aller Subsysteme und des Batterie-Managements.

**Elektrik** beschreibt die Leistungselektrik zur Verteilung der Energie

**Wärmehaushalt** beschreibt die Kühlung/Heizung der Energiespeicher.

**Elektromagnetische Verträglichkeit (EMV)** beschreibt die Maßnahmen zur Absicherung der Komponenten gegenüber elektromagnetischen Störungen.

Die vorgestellten Disziplinen müssen in der Produktentwicklung betrachtet und ihre Auswirkungen auf das Gesamtsystem gegenübergestellt werden. Sie stehen dabei grundsätzlich im Spannungsfeld zu vorgegebenen Leichtbauzielen.

Deshalb wird an dieser Stelle genauer auf die übliche Aufgabenstellung im Leichtbau eingegangen, die Reduzierung des Gewichts eines vorhandenen Produkts um X Prozent. Es ist dabei immer ein Vorgängerprodukt<sup>120</sup> – im Sinne der Produktgenerationsentwicklung nach Albers – vorhanden, das die gewünschte Hauptfunktionalität bereits erfüllt. In den vorgestellten Beispielen sind dies die Temperierung und die Einstellung des Feuchtegrads der Luft bzw. die Speicherung und Bereitstellung der Energie. Das bedeutet, dass die Aufgabenstellung im Leichtbau niemals die komplette Neuentwicklung eines Produkts umfasst, sondern immer auf bereits vorhandenes Wissen und vorhandene Systeme zurückgegriffen werden kann. Dies gilt natürlich für die Mehrheit der Produktentstehungsprozesse. Ein Beispiel sei hier die Produktgenerationsentwicklung<sup>121</sup>

---

<sup>119</sup>vgl. Albers und Sadowski (2013)

<sup>120</sup>vgl. Wyatt et al. (2009)

<sup>121</sup>vgl. Albers und Sadowski (2013)

des Volkswagen Golf in der siebten Generation, bei der völlig veränderte Fahrzeuge entstehen, aber trotzdem auf vorhandenes Vorwissen zurückgegriffen werden kann.

Allerdings bestehen die Konstruktionen meistens, wie auch in den beiden zuvor beschriebenen Fällen, aus *gewachsenen* Strukturen. Diese folgen nicht unbedingt einer optimalen Lösung, sondern sind eher der technischen und technologischen Machbarkeit geschuldet. Allerdings sind die betrachteten Systeme dann schon so weit bzgl. ihrer Funktionalität optimiert, dass die Maßnahmen zur Gewichtsverringering schon fast komplett ausgeschöpft sind. Ein Beispiel sind hier die Wandstärken (bis etwa 1 mm) des Kunststoffspritzgusses der Klimaanlage oder die Verrippung des Aluminiumdruckgussgehäuses beim Hochvoltspeicher. Dies entspricht dann natürlich nicht dem Gedanken der Produktgenerationsentwicklung<sup>122</sup>, sondern einer Falschentwicklung mit nachträglichem *Überstülpen* von Leichtbaumaßnahmen.

Daraus lässt sich dann das intertiale Zielsystem für eine Leichtbuentwicklungsaufgabe ableiten:

- Eine Leichtbuentwicklungsaufgabe enthält eine Massenangabe als Entwicklungsziel.
- Sie umfasst immer ein Gesamtsystem, das jedoch in verschiedenen Abstraktionsstufen vorliegen kann.
- Sie ist gekennzeichnet durch einen sehr hohen Komplexitätsgrad mit mehreren zu betrachtenden Disziplinen, die sich alle in einem gewissen Grad auf das Entwicklungsziel auswirken.
- Es ist immer Vorwissen aus Vorgängerprodukten im Sinne der Produktgenerationsentwicklung nach Albers<sup>123</sup> vorhanden, das gezielt genutzt werden kann und muss.
- Das Potenzial von weiteren Gewichtseinsparungen mit herkömmlichen Methoden (*intuitive Vorgehensweise*) ist bei den Vorgängerprodukten in ihren existierenden Konzepten durch oftmals langjährige Entwicklungsschleifen meist erschöpft.

## 4.2 Leichtbuentwicklungsprozess

In diesem Abschnitt werden einzelne wichtige Phasen des Leichtbuentwicklungsprozesses vorgestellt. Diese erheben – im Gegensatz zum iPeM (siehe Abschnitt 2.1) –

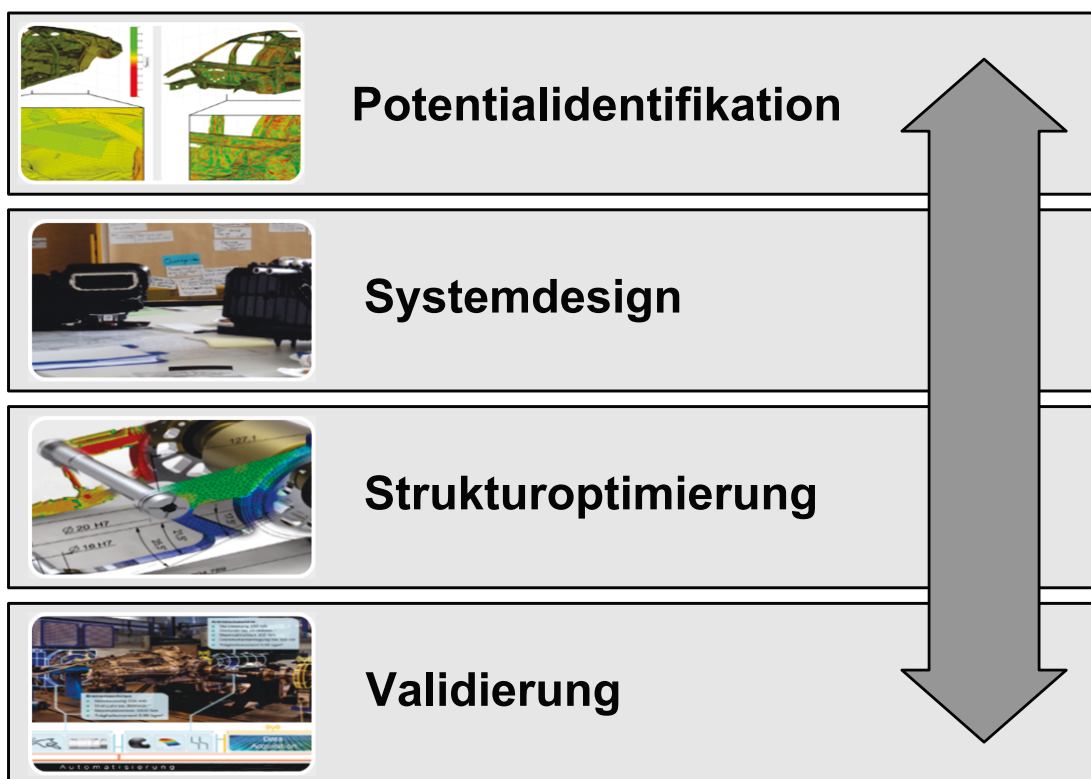
---

<sup>122</sup>vgl. Albers und Sadowski (2013)

<sup>123</sup>vgl. Albers und Sadowski (2013)

keinen Anspruch auf eine vollständige Abbildung des Produktentwicklungsprozesses, sondern sollen nur besondere Charakteristika des Leichtbauentwicklungsprozesses herausheben und definieren.

Diese wichtigen Aktivitäten (siehe Abbildung 4.3) sind allgemein die Erkennung des Potenzials für Leichtbaumaßnahmen im Gesamtsystem, die Umsetzung von Funktionen in Leichtbaukonzepten im System-Design, die Strukturoptimierung zur maximalen Ausnutzung des zur Verfügung stehenden Bauraums, die Ableitung von Materialvorschlägen im Sinne des Multi-Material-Designs und die Systemvalidierung zur Validierung der Leichtbaumaßnahmen im Gesamtsystem auf verschiedenen Abstraktionsstufen (siehe XiL).

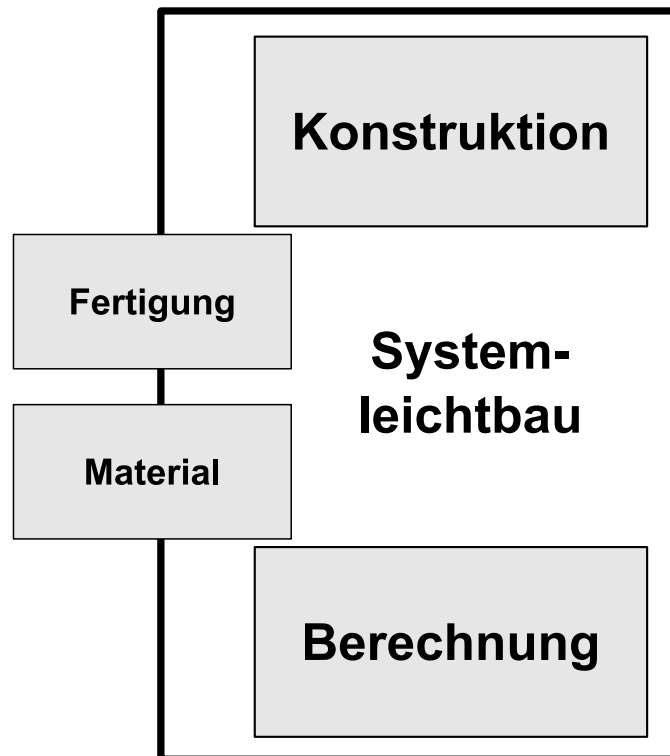


**Abbildung 4.3** Vereinfachter Leichtbauprozess

Die im vorherigen Abschnitt vorgestellten Charakteristika des Leichtbauentwicklungsprozesses führen dann zur Notwendigkeit einer gewissen Konsequenz in der Vorgehensweise während der Produktentwicklung. Die wichtigste Maßnahme zur Verbesserung jedes technischen Systems im Allgemeinen und damit jedes Leichtbausystems im Speziellen ist die enge Verzahnung von Produktentwicklung, Fertigung und Werkstoffen nach Abbildung 4.4.

In der Produktentwicklung sind dabei die zwei wichtigen Bereiche<sup>124</sup> *Konstruktion* und *Berechnung* von herausragender Bedeutung. Leichtbauaktivitäten im Produktent-

<sup>124</sup>oftmals gleichzustellen mit operativen Einheiten



**Abbildung 4.4** Zusammenspiel der Disziplinen im Leichtbau

wicklungsprozess bedeuten nichts anderes als die konsequente Herabsetzung des Sicherheitsfaktors in allen Bereichen. Die übliche Vorgehensweise des Überdeckens von Nicht-Wissen durch die Erhöhung von Sicherheitsfaktoren ist im Fall der Leichtbauentwicklung nicht mehr möglich.

Dies kann die leichtbaurelevanten Sicherheitsfaktoren wie Wanddicken oder ähnliches betreffen, aber auch die Festlegung von Maßnahmen, die üblicherweise nicht unbedingt direkt dem Leichtbau zugeordnet werden. So spielt die Größe von Streuungen und damit die Robustheit von Bauteilen eine sehr große Rolle für den Sicherheitsfaktor. Zum Beispiel kann die Wahl des Anzugsverfahrens eine erhebliche Leichtbaurelevanz erhalten, wenn damit die Streuung des Anzugsmoments reduziert werden kann<sup>125</sup>.

Diese Denk- und Vorgehensweise des *Systemleichtbaus* entspricht nicht der Sichtweise von Rieg und Steinhilper, die darunter das Prinzip verstehen, dass ein Produkt neben den reinen lastabtragenden Aufgaben noch andere übernimmt und damit multifunktionale Bauteile mit möglichst umfassender Funktionsintegration verfolgt werden.<sup>126</sup>

Dies ist nicht der Ansatz für den Systemleichtbau, der in dieser Arbeit verfolgt wird. Hier wird unter dem Begriff Systemleichtbau eher eine übergeordnete Betrachtungsweise auf verschiedenste Disziplinen und die sinnhafte Anwendung von Leichtbaumaßnahmen

<sup>125</sup>Strategiegespräch Leichtbau mit Norbert Burkardt

<sup>126</sup>vgl. Krause (2012)

im Gesamtsystem verstanden. Dies beginnt mit der Festlegung der wesentlichen zu verwendenden Leichtbaustrategien und der darauf folgenden Analyse des Potenzials für Leichtbaumaßnahmen im Gesamtsystem.

### 4.2.1 Potenzialanalyse im Gesamtsystem

Die Potenzialanalyse im Leichtbauentwicklungsprozess stellt sozusagen den übergreifenden Begriff für die Situationsanalyse und die Problemeingrenzung nach SPALTEN dar.

Eine wichtige Rolle spielt dabei die Berechnung, mit deren Hilfe durch zugrundeliegende CAx-Methoden das erwähnte notwendige Wissen zur Reduzierung des Sicherheitsfaktors erreicht werden kann. Diese ist in ihrer Aussagekraft jedoch stark von der Modellbildung geprägt. Eine gute und ausreichende Modellbildung ist nur durch die konsequente Nutzung des bereits vorhandenen Wissens aus Vorgängerprodukten möglich.

Eine Möglichkeit zum gezielten Einsatz von vorhandenem Wissen über Vorgängerprodukte zur Potenzialanalyse für Leichtbaumaßnahmen im Gesamtsystem ist die Anisotropieanalyse<sup>127</sup>. Mit Hilfe dieser Methode wird ein vorhandenes Gesamtsystem, z. B. eine Fahrzeugrahmenstruktur, auf potentiell für anisotrope Werkstoffe geeignete Bauteile hin analysiert. Dies geschieht unter Zuhilfenahme der FEM und der Bildung von Anisotropiekennwerten, welche die Eignung jedes einzelnen Bauteils für weitere Leichtbaumaßnahmen beschreiben.

Weiterhin müssen Potenzialanalysen im vorhandenen Gesamtsystem in den ersten Phasen des Leichtbauentwicklungsprozesses den Rückhalt für die weitere Entwicklung darstellen. Hier müssen über neue Entwicklungsmethoden, wie z. B. die dem *Target Costing* angelehnte Methode des *Target Weighing*<sup>128</sup>. Beim *Target Weighing* werden die bereits vorhandenen und erfüllten Funktionen des Vorgängerprodukts erfasst und analysiert. Gleichzeitig werden die Massen der einzelnen Komponenten erfasst und die Funktionen anteilig den Komponenten zugerechnet. Damit können Funktionsmassen berechnet werden und so die gewichtstreibenden Funktionen bestimmt werden. Außerdem ergibt dies einen Ansatzpunkt für neue Konzepte zur Funktionserfüllung. Die Funktionen werden nach ihrem Gewicht gerankt und in der Bearbeitung entsprechend priorisiert.

---

<sup>127</sup>vgl. Albers et al. (2011)

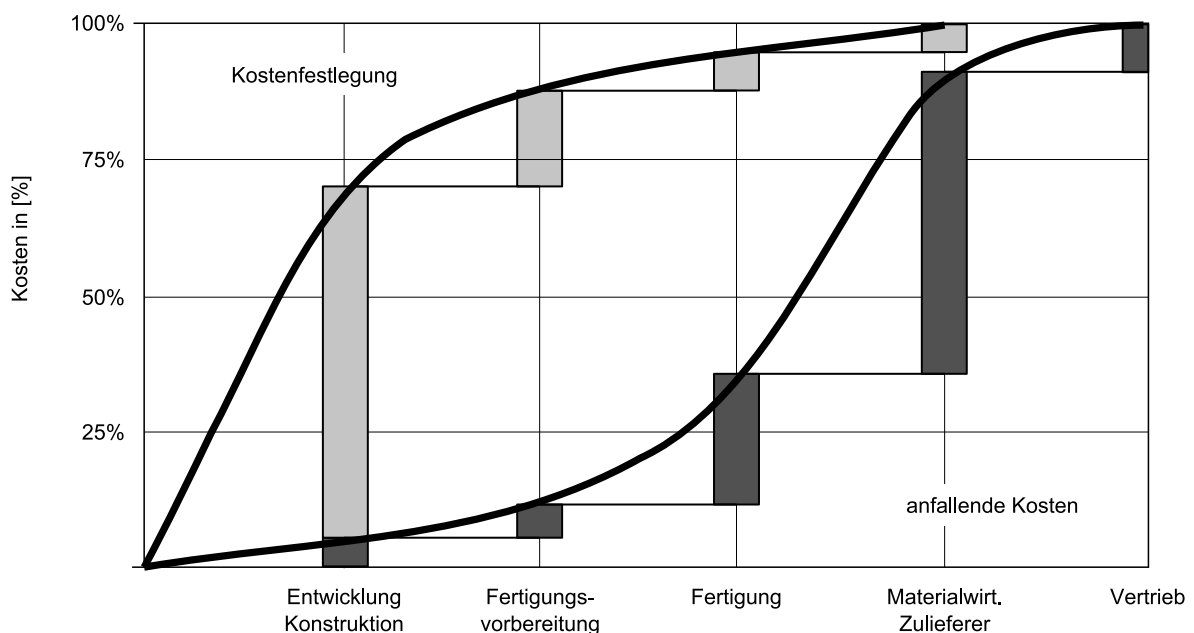
<sup>128</sup>vgl. Wagner et al. (2013b)



Die zwei vorgestellten Methoden stellen neue Ansätze zur Bearbeitung von Leichtbau-problemen dar und sind der erste Schritt zu einer konsequenten Unterstützung des Leichtbautwicklers bei der wichtigen Situationsanalyse und der Problemeingrenzung des Leichtbautwicklungsprozesses.

## 4.2.2 Systemdesign

Die nächste wichtige Phase ist das Systemdesign. Unter diesem Begriff werden alle Aktivitäten zusammengefasst, die im Produktentwicklungsprozess normalerweise unter die Tätigkeit der Konzipierung fallen. Hier wird der Begriff Konzeptionierung gewählt, da im Leichtbau eine Systembetrachtung notwendig ist, die das Leichtbaupotential einzelner, mitunter auch grundverschiedener Konzepte abdeckt. So können z. B. die Funktionen *System tragen/stützen* und *System gegen die Umwelt abschirmen* in einer integrierten Gehäusekonstruktion oder auch in einer getrennten Trag- und Schutzstruktur realisiert werden. Beide Konzepte sind in ihrer Ausprägung sehr unterschiedlich und damit nicht trivial miteinander zu vergleichen. Damit haben sie auch unterschiedliche Masseigenschaften und Gewichte und sind somit unterschiedlich gut als Leichtbau-konzepte geeignet. In diesem Sinne ist das finale Gewicht eines Leichtbausystems oder -produkts maßgeblich bereits in einer frühen Phase der Entwicklung festgelegt, wirkt sich aber erst in einer späten Phase aus, wenn nur noch wenig Möglichkeiten der Einflussnahme bestehen (vgl. hierzu auch die Gegenüberstellung der Zeitpunkte von Kostenfestlegung und Kostenverursachung in Abbildung 4.5).



**Abbildung 4.5** Kostenfestlegung und Kostenverursachung im Produktentwicklungsprozess<sup>129</sup>

Außerdem können vorgenommene Leichtbaumaßnahmen nicht erfolgreich sein, wenn nur einzelne Bauteile betrachtet werden und diese durch einfache Materialersetzung (z. B. Stahl durch CFK, *Black-Metal-Design*) gelöst werden sollen. Dies funktioniert nur unter Zuhilfenahme des Gesamtsystems, da die Rückwirkungen eine erhebliche Rolle spielen. Verändern sich die Eigenschaften eines Bauteils, müssen die anderen Bauteile entsprechend angepasst werden.

Zusätzlich sind – wie etwa in den beiden oben angegebenen Beispielen – oftmals die Leichtbaumaßnahmen in bestehenden Konzepten erschöpft. Eine Möglichkeit zur Auflösung des Konflikts ist die Darstellung von Funktionen durch andere Lösungsprinzipien, z. B. die Veränderung der Luftführung von starren, relativ schweren Kanälen zu flexiblen Leitungen im Klimagerät<sup>130</sup> oder die Änderung des massereichen Luftreduzierungssystems von Rotationsklappen hin zu Translationsklappen. Diese müssen dann geringere Biegespannungen durch das durch die Luft hervorgerufene Drehmoment aufnehmen.

Beim Beispiel des HochvoltSpeichers sah das Konzept bisher immer eine Integralbauweise vor, bei dem das Gehäuse alle Funktionen zur Aufhängung, Absicherung und Abschottung gegenüber der Außenwelt inne hatte. Diese Funktionsintegration wurde aufgelöst<sup>131</sup>, was so die Spezialisierung einzelner Komponenten auf einzelne Funktionen erlaubt. Die prominentesten Änderungen sind nun eine sehr steife Tragstruktur zur Abstützung im Gesamtsystem sowie ein sehr leichtes Gehäuse zur Abschirmung gegenüber der Außenwelt.

### 4.2.3 Strukturoptimierung

Gerade die Auflösung von Integralbauweisen in Tragstruktur und umgebende Hülle sind besonders vielversprechend, da hier ein effektiver Einsatz der Topologieoptimierung zur Ermittlung der lasttragenden Bereiche und damit des optimalen Tragwerks erfolgen kann. Dieses Tragwerk bietet sich außerdem als Grundlage für eine CFK-Mischbauweise an, da die Topologieoptimierung immer Zug- und Druckstäben – also einer Belastungsanisotropie – den Vorzug geben wird, für die vor allem endlosfaserverstärkte Kunststoffe, wie z. B. *UD-Tapes*, mit der anisotropen Ausrichtung ihrer Eigenschaften hervorragend geeignet sind.

Ganz allgemein ist die Strukturoptimierung in allen Ausprägungen (siehe Abschnitt 2.2) von extremer Wichtigkeit für alle Leichtbaumaßnahmen. Die Absenkung des Sicherheitsfaktors ist das wichtigste Ziel des Leichtbaus. Dies kann ohne den Einsatz numerischer

---

<sup>129</sup>vgl. (Ehrlenspiel 1991)

<sup>130</sup>vgl. Wagner et al. (2013b)

<sup>131</sup>vgl. Wagner et al. (2013a)

Optimierungsverfahren, mit denen auch multi-kriterielle und multi-disziplinäre Optimierungen möglich sind, nicht erreicht werden. Vor allem die Multi-Kriterialität und die Multi-Disziplinarität sorgen für eine Komplexität, die für den *Ingenieursverstand* nicht mehr überschaubar und vor allem nicht optimierbar ist. Dieser Konflikt kann durch den Einsatz der Strukturoptimierung aufgehoben werden. Ein Beispiel hierzu wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit gegeben, wobei Ansätze zur Vereinigung der zwei kaum zu vereinbarenden Entwicklungsziele *Leichtbau* und *Akustik* mit Hilfe der Topologieoptimierung aufgezeigt werden.

#### 4.2.4 Systemvalidierung

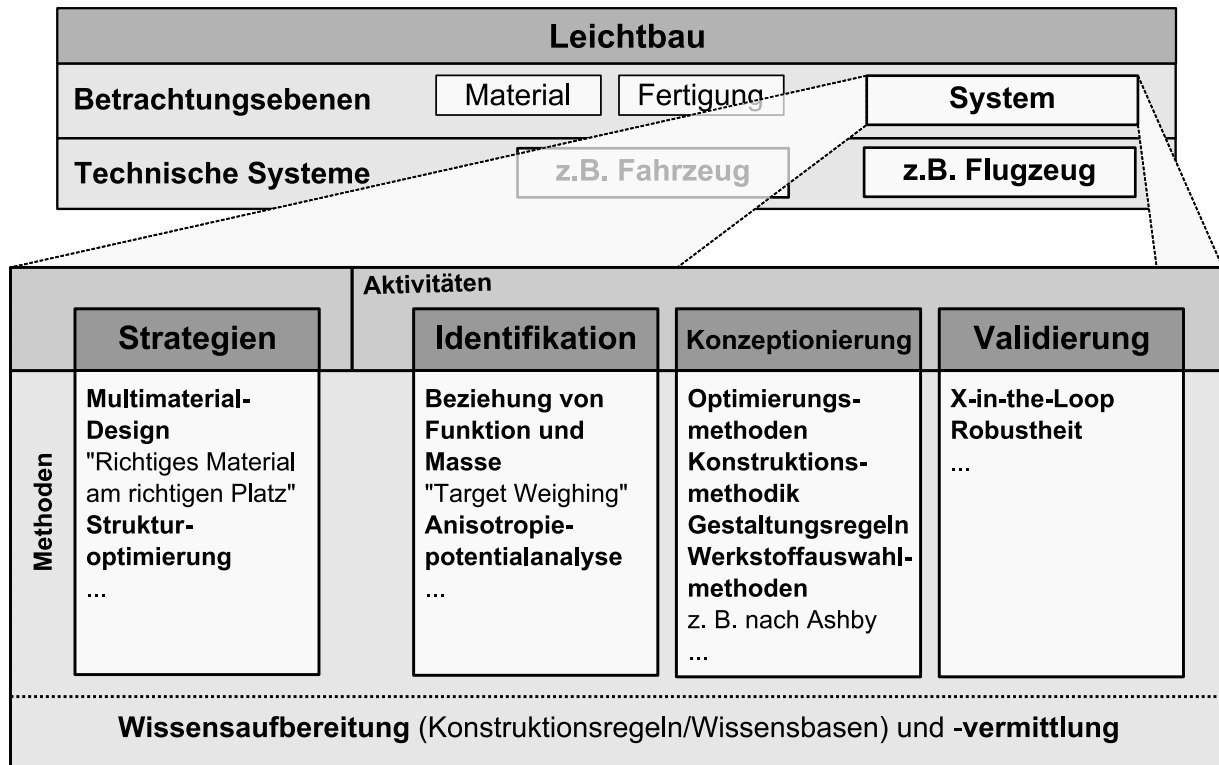
Zum Thema der Systemvalidierung existiert mit dem XiL-Framework ein relativ neuer Ansatz zur integrierten Betrachtung von technischen Systemen (siehe 2.1.3). Für den Leichtbauentwicklungsprozess gelten jedoch die zuvor beschriebenen spezifischen Charakteristika, die bisher noch wenig in der Validierung erschlossen sind. Üblicherweise wird im Validierungsprozess untersucht, ob die gewünschten Funktionalitäten erfüllt werden. Für den Leichtbauprozess müssen die Komponenten auf ihre Leichtbautaughkeit überprüft werden. Dies bedeutet unter der Annahme eines reduzierten Sicherheitsfaktors die verstärkte Überprüfung der Robustheit der einzelnen Bauteile und des Gesamtsystems unter den Schwankungen der Eingangsgrößen. Dies ist nicht Thema dieser Arbeit, aber sicherlich ein wichtiges Feld zur weiteren Verbesserung von Leichtbauentwicklungsprozessen.

### 4.3 Leichtbau als Entwicklungsstrategie

Dieses Kapitel soll mit der Analyse einer Klassierung der Leichtbauaktivitäten im vereinfachten Leichtbauentwicklungsprozess abgeschlossen werden. Dies soll als Leitfaden für eine weitere Entwicklung der Leichtbauaktivitäten und -strategien im Methodenbereich dienen. Mit dem Zitat zu Beginn des Kapitels hat *Heinrich Timm* die richtige Wortwahl getroffen. Leichtbau bedeutet nicht die Anwendung neuer Materialien, den Einsatz neuer Fertigungstechnologien oder auch neuer Entwicklungsmethoden. Dies sind natürlich alles wichtige Komponenten eines erfolgreichen Leichtbaus, die nicht außer Acht gelassen werden dürfen.

Das übliche Leichtbau-Tripel *Methoden – Werkstoffe – Fertigung* ist deshalb missverständlich. Zum einen sind Methoden natürlich auch im Werkstoff- und im Fertigungsbe-  
reich vertreten, z. B. in der Materialcharakterisierung, und damit nicht von den beiden

anderen Begriffen zu trennen. Zum anderen fehlt das Thema Systementwicklung bzw. -betrachtung. Dies soll mit der Klassierung und Darstellung in Abbildung 4.6 korrigiert werden.



**Abbildung 4.6** Klassierung und Darstellung der Leichtbauaktivitäten im Produktentstehungsprozess

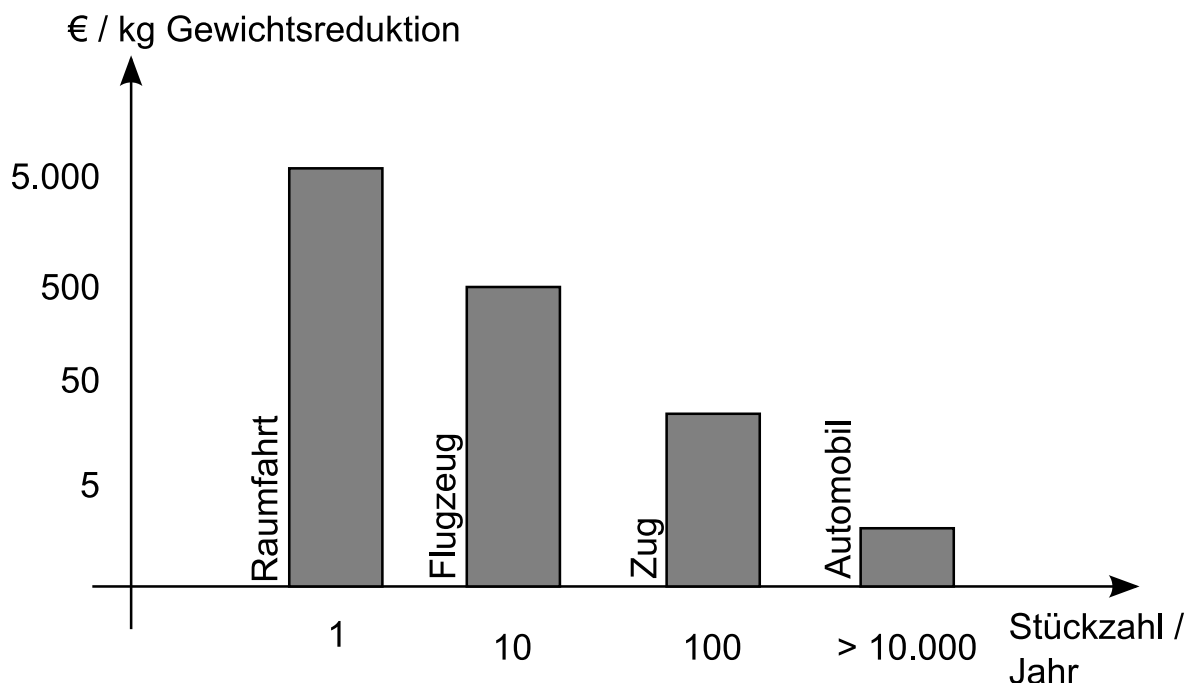
In dieser Abbildung sind die Komponenten für den systemischen oder den Produktentwicklungsbereich des Leichtbaus gegeben.

Der obere Teil stellt eine neue Klassierung der Leichtbauaktivitäten in Betrachtungsebenen dar. Der Bereich *Methoden* ist hier durch die Betrachtungsebene *System* ersetzt, da Methoden in allen vorgestellten Betrachtungsebenen vorkommen (können). Konkretisiert wird an dieser Stelle nur die Systembetrachtungsebene; für die Betrachtungsebenen *Material* und *Fertigung* muss dies durch entsprechende Spezialisten geschehen. Deshalb ist hier beispielhaft die Aufstellung einer möglichen Klassierung für den Leichtbau in der systemischen Betrachtungsebene gegeben.

Im unteren Teil ist dann die Betrachtungsebene *System* hereingezoomt und eingeteilt in Aktivitäten und zugehörige Methoden, wobei die *Strategien* übergreifend oder herausgelöst zu betrachten sind. Dies sind übergeordnete Strategien, die im Produktentwicklungsprozess Anwendung finden müssen, um ein möglichst optimales Ergebnis zu erreichen. Besonders vielversprechend sind hier entsprechend der angesprochenen

Konsequenz die Multi-Material-Strategie sowie die Strategie der numerischen Optimierung. Mit der Anwendung beider Strategien wird das Maximum aller zur Verfügung stehenden Ressourcen erreicht, seien es natürliche Ressourcen oder bei der numerischen Optimierung die Ressource *Mensch*.

Zusätzlich sind aber auch die zu bearbeitenden Leichtbausysteme aufgeführt. Die Methoden des Leichtbaus sind zwar allgemeingültig, ihre Anwendung ist aber natürlich sehr stark vom betrachteten System abhängig. Alle Methoden und Vorgehensweisen sind mit einem bestimmten Ressourcenbedarf und damit Kosten verknüpft. Welche Kosten pro eingespartem Kilogramm zugelassen werden, hängt jedoch direkt vom betrachteten System bzw. Produkt ab (siehe Abbildung).



**Abbildung 4.7** Leichtbaukosten pro eingespartem Kilogramm, die vom Kunden akzeptiert werden<sup>132</sup>

Vor allem die eigentliche Systembetrachtung mit der Darstellung der Funktionalität in unterschiedlichen Konzepten (siehe Abschnitt 4.2.2) bringt dabei das größte Leichtbaupotenzial. Damit kann der Leichtbau niemals für sich alleine betrachtet werden, sondern immer in Abhängigkeit des verwendeten Systems. Dies soll durch die Klassierung und Darstellung in Abbildung 4.6 erreicht werden.

Einen wirklichen Erfolg bei Leichtbauaufgaben kann es jedoch nur in der Kombination aller Faktoren geben. Wie schon erwähnt, bedeutet Leichtbau für die Entwicklung die Reduzierung des Sicherheitsfaktors. Um dies zu erreichen, muss jedoch ein Umdenken im Produktentwicklungsprozess stattfinden. Bei einem Leichtbauprodukt muss nicht

<sup>132</sup>vgl. Friedrich und Kopp (2008)

notwendigerweise das Entwicklungsziel geändert werden. Es muss weiterhin die Funktion im Vordergrund stehen, da der Leichtbau für sich gesehen keinen Selbstzweck darstellt.

Allerdings muss die Konsequenz in der Umsetzung der Funktionalität stark erhöht werden. Dies bedeutet die Überwindung des Sicherheitsdenkens und der Einsatz aller zur Verfügung stehenden Mittel und Methoden zur Verbesserung jeder einzelnen Komponente. Gleichzeitig bedeutet es aber auch, dass möglichst früh im Produktentwicklungsprozess der Einsatz der numerischen Optimierung erfolgen muss, sei es der Strukturoptimierung oder anderer Optimierungsverfahren. Mit den weiteren Kapiteln dieser Arbeit soll dazu ein Beitrag geleistet werden.

# 5 Methode zur Optimierung der Schallabstrahlung von Bauteilen

In diesem Kapitel wird eine neue Methode vorgestellt, wie mit Hilfe der Topologieoptimierung die Schallabstrahlung einer Komponente unter harmonischer Last reduziert werden kann. Dabei werden zwei verschiedene Anwendungsszenarien betrachtet, in denen die Methode einsetzbar sein soll. Dementsprechend ist dieses Kapitel in zwei Teile gegliedert.

Im ersten Teil wird die Schallabstrahlung einer fixierten Oberfläche betrachtet. Fixiert heißt in diesem Zusammenhang, dass die schallabstrahlende Oberfläche nicht Teil des Designraums der Optimierung ist, sondern während des Optimierungsprozesses stets fixiert bleibt. Dies ist bei Anwendungen der Fall, bei der die schallabstrahlende Oberfläche gleichzeitig auch eine ästhetische Funktion übernimmt.

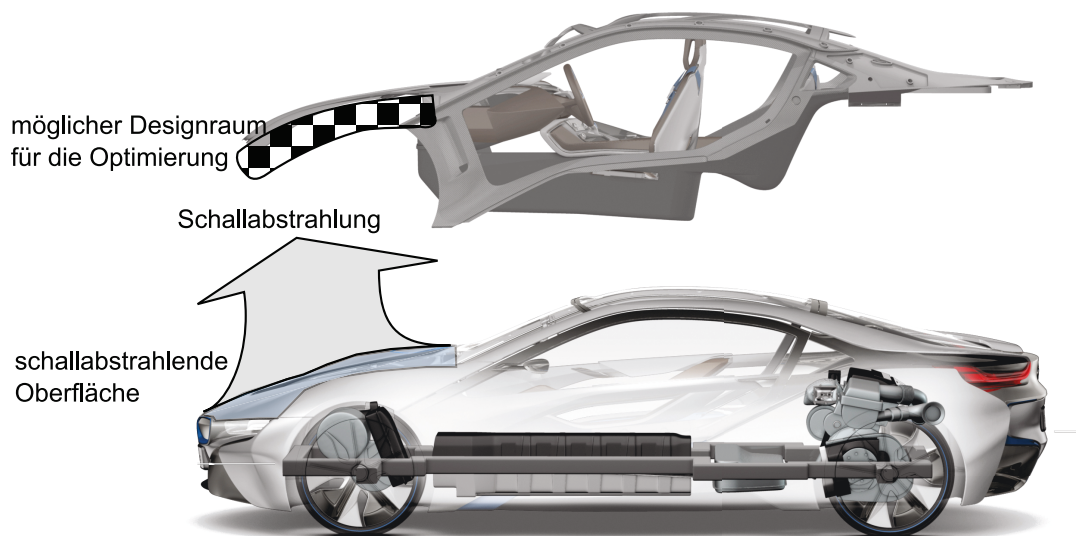
Beispielhaft sei hier eine Motorhaube genannt, bei der die Verrippung zur Motorraumseite hin so gestaltet werden soll, dass eine Schallabstrahlung nach außen, wo beispielsweise ein Fußgänger die Schallabstrahlung aufnehmen kann, möglichst verringert wird. Für eine solche Problemstellung wird eine Zielfunktion vorgestellt, in der die Knoten auf der diskretisierten Oberfläche der Motorhaube als schallabstrahlende Knoten definiert werden. Diese dürfen gemäß der Aufgabenstellung nicht verändert werden, da die Motorhaube nach außen natürlich geschlossen bleiben muss.

Weitere mögliche Anwendungsszenarien sind alle möglichen Fahrzeugaußenstrukturen, die eine Ästhetik-Funktion auf ihrer schallabstrahlenden Seite besitzen und auf der anderen Seite in Grenzen frei gestaltbar sind.

Für Aufgabenstellungen, bei denen sich die Vorgaben aus dem Zielsystem gegenüber dem oben genannten Beispiel jedoch umdrehen, d. h. die schallabstrahlende Oberfläche auch gleichzeitig einen Designraum für die Optimierung darstellt und sich über den Topologieoptimierungsprozess hinweg ändert, ist eine andere Formulierung der Zielfunktion notwendig.

---

<sup>133</sup>in Anlehnung an BMW Group (2013)



**Abbildung 5.1** Anwendungsszenario Motorhaube, Optimierung der Schallabstrahlung von geschlossenen Oberflächen<sup>133</sup>

Deshalb werden im zweiten Teil dieses Kapitels auch dafür eine entsprechende Zielfunktion und die zugehörigen analytischen Ableitungen vorgestellt. Eine beispielhafte Anwendung ist die Optimierung eines Getriebe- oder Pumpengehäuses bezüglich der Schallabstrahlung nach außen. Normalerweise ist hier der Innenraum des Gehäuses durch die Wirkflächenpaare und die Notwendigkeit der kompakten Bauweise der Leitstützstruktur begrenzt.

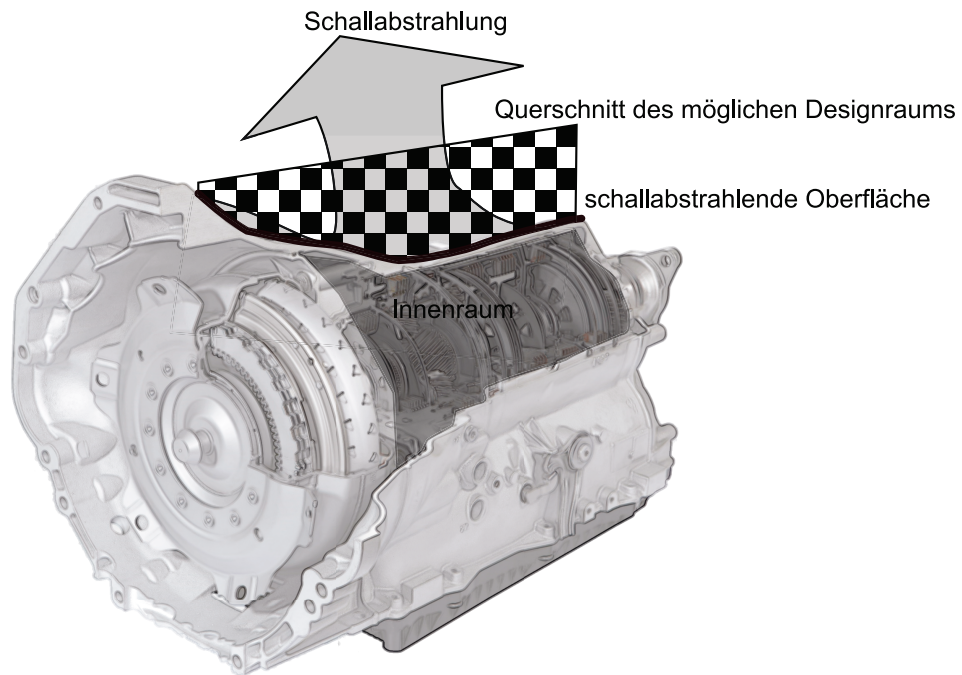
Nach außen hin ist das Getriebegehäuse dagegen relativ frei in der Gestaltung, da es im Wesentlichen bezogen auf die Anmutung vom Kunden nicht als Objekt wahrgenommen wird. Hier wird die Gestaltung nur durch die Anforderungen aus dem Gesamtsystem um das Getriebe herum restringiert. Gleichzeitig ist jedoch auch die äußere Oberfläche des Getriebegehäuses für die Schallabstrahlung von Interesse. Es muss also eine Zielfunktionsformulierung inklusive der zugehörigen algebraischen Ableitungen gefunden werden, die diese Einbeziehung der äußeren Oberfläche in den Designraum mit abbilden kann. Gleichzeitig dürfen keine Such- oder Entscheidungsalgorithmen in die Zielfunktion aufgenommen werden, da diese wegen ihres numerischen Aufwands für eine Topologieoptimierung nicht in Frage kommen. Es muss also eine Oberflächenerkennung mittels einer  $C^1$ -kontinuierlichen<sup>135</sup> Funktion in Abhängigkeit von der Dichte  $\rho$  gefunden werden, die dann auch abgeleitet werden kann.

Dazu wird eine Zielfunktion inklusive zugehöriger analytischer Ableitungen vorgestellt, die alle Knoten einer in der FEM diskretisierten Oberfläche berücksichtigt sowie das

<sup>134</sup>in Anlehnung an BMW Group (2013)

<sup>135</sup>mathematisch stetig und differenzierbar





**Abbildung 5.2** Anwendungsszenario Getriebegehäuse, Optimierung der Schallabstrahlung von Gehäusestrukturen<sup>134</sup>

Frequenzspektrum über einen gewissen Frequenzbereich in einem Kennwert zusammenfasst, auf den dann letztendlich optimiert wird.

## 5.1 Theorie der Methode

### 5.1.1 Zielfunktion

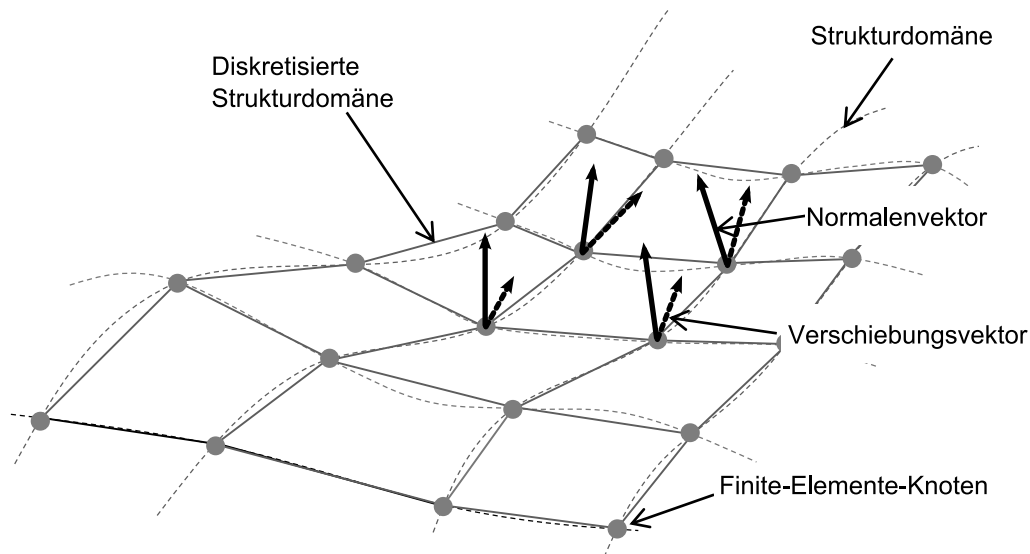
Die weitere Vorgehensweise leitet sich ab aus der Zielsetzung der Entwicklung einer Methode zur Optimierung der Schallabstrahlung in Kapitel 3. In Kapitel 2 wurde mit dem ERP-Wert aus Abschnitt 2.3.3 eine mögliche Zielfunktion in diskretisierter Form für die Schallabstrahlung vorgestellt. Die direkte Nutzung des ERP-Wertes als Leistungsmaß für eine Optimierung erweist sich aber als schwierig. Durch die Implementierung dieser Art von Zielfunktion in der Topologieoptimierung müssen Ableitungen berechnet werden, die abhängig von der Verschiebung der einzelnen Knoten sind. Damit können die Pseudolast und somit der Lagrange-Multiplikator (siehe Abschnitt 2.2.2) nicht a priori zu der Finite-Elemente-Berechnung berechnet werden. Deshalb kann der Lagrange-Multiplikator nicht durch lineare Superposition skaliert werden und in jeder Iteration ist eine zusätzliche Finite-Elemente-Berechnung für den Lagrange-Multiplikator notwendig. Um dies zu vermeiden, wird der folgende – durch den ERP-Wert inspirierte – Leistungskennwert eingeführt. Die zusätzlichen Parameter  $\rho$  (Dichte) und  $c$  (Schallgeschwindigkeit des Mediums) in Gleichung 2.3.3 stellen einfache Skalierungsfaktoren dar und sind damit für die Optimierung nicht von Belang. Sie werden deswegen im Weiteren vernachlässigt.

Um eine Zielfunktion mit einer Menge von  $N$  Knoten statt nur einem Knoten einzuführen, wird ein Schwingungskennwert in einer realen und komplexen Form benutzt. Die Gesamtvibrationen in realer  $\hat{u}_R$  und komplexer  $\hat{u}_I$  Form repräsentieren die Schwingungsamplituden in der Richtung normal zu einer betrachteten Oberfläche durch Auswertung des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  an dem spezifisch betrachteten Knoten (siehe Abbildung 5.3):

$$\begin{aligned}\hat{u}_R(\Omega, \rho) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{R,i}(\Omega, \rho) \cdot \mathbf{n}_i \\ \hat{u}_I(\Omega, \rho) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{I,i}(\Omega, \rho) \cdot \mathbf{n}_i\end{aligned}\tag{5.1}$$

$\mathbf{u}_{R,i}(\Omega, \rho)$  und  $\mathbf{u}_{I,i}(\Omega, \rho)$  bezeichnen den realen und imaginären Teil des Verschiebungsvektors des Knotens  $i$ .  $\mathbf{n}_i$  bezeichnet den Normalvektor der Oberfläche am Knoten.

Die Zielfunktion wird dann als *Betrag* der Geschwindigkeit der Gesamtvibration gebildet, entsprechend des bereits vorhandenen Leistungsmaßes eines Knotens:



**Abbildung 5.3** Diskretisierte Strukturdomäne

$$\Phi_0^*(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I, \rho, \Omega_j) = \Omega_j \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)} \quad (5.2)$$

oder, für einen Satz von  $N_f$  diskretisierten Frequenzen:

$$\Phi_0^*(\mathbf{u}_R, \mathbf{u}_I, \rho, \Omega_j) = \sum_{j=1}^{N_f} \left( \Omega_j \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)} \right) \quad (5.3)$$

In dieser Formulierung wird der quasi-statische Fall für  $\Omega = 0$  nicht berücksichtigt. Dies ist auf die Skalierung mit der Anregungsfrequenz zurückzuführen, die im statischen Fall offensichtlich Null ist. Daher müssen geeignete Maßnahmen zur Erlangung einer realisierbaren Struktur nach dem Ende der Optimierung getroffen werden. Zum Beispiel könnte eine Restriktion für die statische Nachgiebigkeit der Struktur implementiert werden. Eine andere Möglichkeit wäre die Modellierung einer *versteiften* Struktur für die Topologieoptimierung, was die in dieser Arbeit gewählte Modellierung ist. Es wird eine Struktur mit einem vordefinierten Rahmen definiert, der bei der Optimierung nicht berücksichtigt wird. Diese Struktur wird dann durch die Topologieoptimierung verstärkt (siehe Kapitel 7)

## Min-Max-Formulierung

Das Ziel der vorgestellten Zielfunktion ist die Reduzierung oder Minimierung der Amplitudenspitzen auf den Resonanzstellen im Frequenzgang einer Struktur. Hierbei wird

eine Erhöhung des Grundniveaus zu höheren Werten in Kauf genommen (siehe auch Abschnitt 2.3).

Dies bedeutet auch, dass nur die höchsten Spitzen des Frequenzgangs von Interesse sind, da diese jeweils minimiert werden müssen. Die gewünschte Formulierung der Optimierungsaufgabe nennt sich in diesem Fall Min-Max-Formulierung: *Minimiere* den *maximalen* Wert aus einem vorgegebenen Werte-Set.

$$\min_{\rho} \left( \max_{\Omega} \left( \sqrt{\hat{u}_R^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_I^2(\Omega, \rho)} \right) \right) \quad (5.4)$$

Diese Formulierung ist wegen der Prüfung und der Suche nach dem aktuellen Maximum numerisch sehr aufwendig. Zusätzlich ist eine algebraische Ableitung einer solchen Suche kaum möglich. Daher wird auf eine globale Näherung dieser Formulierung zurückgegriffen, die durch die *p-Norm* oder dem *p-Mittelwert* für ein Set von *M* Proben jeweils gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum Y^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \max(Y) \\ \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{M} \sum Y^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \max(Y) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Für ein eindimensionales Einfreiheitsgradsystem kann bewiesen werden, dass diese beiden Formulierungen die Min-Max-Formulierung von oben und unten<sup>136</sup> approximieren.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{M} \sum Y^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \max(Y) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \left( \sum Y^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.6)$$

Eine frühere Studie<sup>137</sup> zeigte eine gute Approximation an die Min-Max-Formulierung für einen Wert von  $p = 6$ . Niedrigere Werte führen zu weniger genauen Ergebnissen bei der Angleichung an den Max-Wert. Höhere Werte von  $p$  können zu numerischen Instabilitäten aufgrund der begrenzten Genauigkeit der Variablen führen.

Die Zielfunktion wird dann formuliert als:

$$\Phi_0 = \left( \sum_{j=1}^{M_{\Omega}} \left( \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2 + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.7)$$

<sup>136</sup>vgl. Alexeev et al. (1987); Duysinx und Sigmund (1998)

<sup>137</sup>vgl. Hessenauer et al. (2007)

oder

$$\Phi_0 = \left( \frac{1}{M_\Omega} \sum_{j=1}^{M_\Omega} \left( \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2 + \hat{u}_{I,j}(\Omega, \rho)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5.8)$$

Der  $p$ -Mittelwert stellt die engere Approximation an das vorgestellte Min-Max-Problem dar. Daher werden die weiteren Formulierungen darauf basieren.

Die komplette Formulierung des Optimierungsproblems kann dann folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{aligned} & \underset{\rho}{\text{minimiere}} \quad \Phi_0 \\ & \text{u. d. N.} \quad \Phi_0 = \left( \frac{1}{M_\Omega} \sum_{j=1}^{M_\Omega} \left( \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2 + \hat{u}_{I,j}(\Omega, \rho)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \hat{u}_R(\Omega, \rho) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{R,i}(\Omega, \rho) \cdot \mathbf{n}_i \\ & \hat{u}_I(\Omega, \rho) = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_{I,i}(\Omega, \rho) \cdot \mathbf{n}_i \\ & (-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{D} + \mathbf{K}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & \sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \\ & e = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (5.9)$$

### 5.1.2 Sensitivitäten

Zum Ableiten der Sensitivitäten der Zielfunktion, gegeben in Gleichung 5.9 in Abschnitt 5.1.1, wird die in Abschnitt 2.2.2 vorgestellte Methode von Jensen<sup>138</sup> verwendet. Wie aus Gleichung 2.44 und 2.46 ersichtlich, werden für die Ableitung in Bezug auf die Dichte  $\rho$  die Ableitungen der Zielfunktion  $\Phi_0$  in Bezug auf den realen und komplexen Teil

<sup>138</sup>vgl. Jensen (2007a)

der Verschiebungen  $\mathbf{u}_R$  und  $\mathbf{u}_I$  benötigt, um den Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  zu berechnen. Diese Ableitungen erhält man über:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_0}{d\mathbf{u}_R} &= \underbrace{\left( \frac{1}{M_\Omega} \sum_{j=1}^{M_\Omega} \left( \Omega_j \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)} \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}-1}}_{\gamma_{R,1}} \\ &\quad \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{M_\Omega} \left( \Omega_j \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)} \right)^{\rho-1}}_{\gamma_{R,2}} \\ &\quad \cdot \underbrace{\frac{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho)}{\sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)}}}_{\gamma_{R,3}} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{d\Phi_0}{d\mathbf{u}_I} &= \underbrace{\left( \frac{1}{M_\Omega} \sum_{j=1}^{M_\Omega} \left( \Omega_j \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)} \right)^\rho \right)^{\frac{1}{\rho}-1}}_{\gamma_{I,1}} \\ &\quad \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{M_\Omega} \left( \Omega_j \sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)} \right)^{\rho-1}}_{\gamma_{I,2}} \\ &\quad \cdot \underbrace{\frac{\hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)}{\sqrt{\hat{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \hat{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)}}}_{\gamma_{I,3}} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\gamma_R = \gamma_{R,1} \cdot \gamma_{R,2} \cdot \gamma_{R,3}$$

$$\gamma_I = \gamma_{I,1} \cdot \gamma_{I,2} \cdot \gamma_{I,3}$$

Hier ist  $\mathbf{n}$  äquivalent zum Pseudolastvektor, der in der Finite-Elemente-Berechnung als zusätzliche äußere Last verwendet wird, um den vorläufigen Lagrange-Multiplikator  $\lambda^*$  wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben zu berechnen. Die übrigen Faktoren  $\gamma_R$  und  $\gamma_I$  werden nach der Finite-Elemente-Berechnung verwendet, um die Ableitungen mit dem vorläufigen Lagrange-Multiplikator  $\lambda^*$  zu skalieren. In diesem Fall können die Faktoren  $\gamma_{R,1}$  und  $\gamma_{I,1}$  zweckmäßigerweise mit Hilfe des Zielfunktionswerts berechnet werden:

$$\gamma_{R,1} = \gamma_{I,1} = (\Phi_0)^{1-\rho} \quad (5.11)$$

## Formulierung der Dämpfung

Bei der Auswertung der Zielfunktion aus dem vorherigen Abschnitt werden Probleme mit der numerischen Stabilität deutlich. Dies kann auch bereits in einem analytischen Beispiel (siehe Hessenauer vgl. <sup>139</sup>) und in einfachen akademischen Beispielen (siehe Kapitel 7) gesehen werden. Daher wird eine neue Formulierung für die Dämpfung notwendig, die den Optimierungsprozess stabilisieren soll. Dies ist legitim, da die üblichen Dämpfungsformulierungen sowieso keine physikalische Basis besitzen (siehe Abschnitt 2.2.1). Unter Berücksichtigung der Restriktionen im verwendeten Solver Nastran für die verwendete Strukturdämpfung werden mögliche Dämpfungsformulierungen mit ähnlichen Eigenschaften untersucht. Darüber hinaus wird eine untere Schranke für die Dämpfung für  $\rho \rightarrow 0$  eingeführt, um übermäßig hohe Werte der Zielfunktion zu vermeiden.

Die vorgeschlagenen Dämpfungsformulierungen sind:

### Lineare Dämpfung

Diese Dämpfungsformulierung beschreibt eine lineare Abhängigkeit zwischen Dämpfung  $d$  und Dichte  $\rho$ .

$$d_{AI}(\omega, \rho) = \frac{\alpha_A}{\omega} [\rho \cdot k(\rho = 1) + (1 - \rho) \cdot k_{\min}] \quad (5.12)$$

Hier repräsentiert  $\alpha_A$  den Dämpfungskoeffizient für lineare Dämpfungsformulierung;  $k(\rho = 1)$  repräsentiert die Steifigkeit für den Anfangszustand des Designs und wird auf  $k(\rho = 1) = 1$  skaliert werden. Der Faktor  $k_{\min}$  stellt die untere Steifigkeitsschranke dar und bestimmt somit die untere Schranke für die Dämpfung. Der Wert  $k_{\min} = 0,02$ <sup>140</sup> hat sich als geeigneter Wert erwiesen.

### Polinomiale Dämpfung

Diese Formulierung beschreibt eine Abhängigkeit zwischen der Dämpfung  $d$  und Dichte  $\rho$ , die einen polinomialen Bestrafungsfaktor ähnlich den Materialinterpolationsschemata SIMP und RAMP beinhaltet.

$$d_{AII}(\omega, \rho) = \frac{\alpha}{\omega} [\rho^q \cdot k(\rho = 1) + (1 - \rho^q) \cdot k_{\min}] \quad (5.13)$$

Die Parameter in dieser Formulierung sind die gleichen wie in der linearen Dämpfungsformulierung. Darüber hinaus wird der Bestrafungsfaktor  $q$  eingeführt. Hier bietet sich  $q = 2$  als angemessener Wert an.

<sup>139</sup>Hessenauer et al. (2007)

<sup>140</sup>im Falle eines skalierten Werts von  $k(\rho = 1) = 1$

### Strukturdämpfung mit Limit

Diese Formulierung beschreibt die standardmäßige Strukturdämpfung mit einer unteren Grenze in Form eines konstanten Werts für die Dämpfung unterhalb einer bestimmten Dichte.

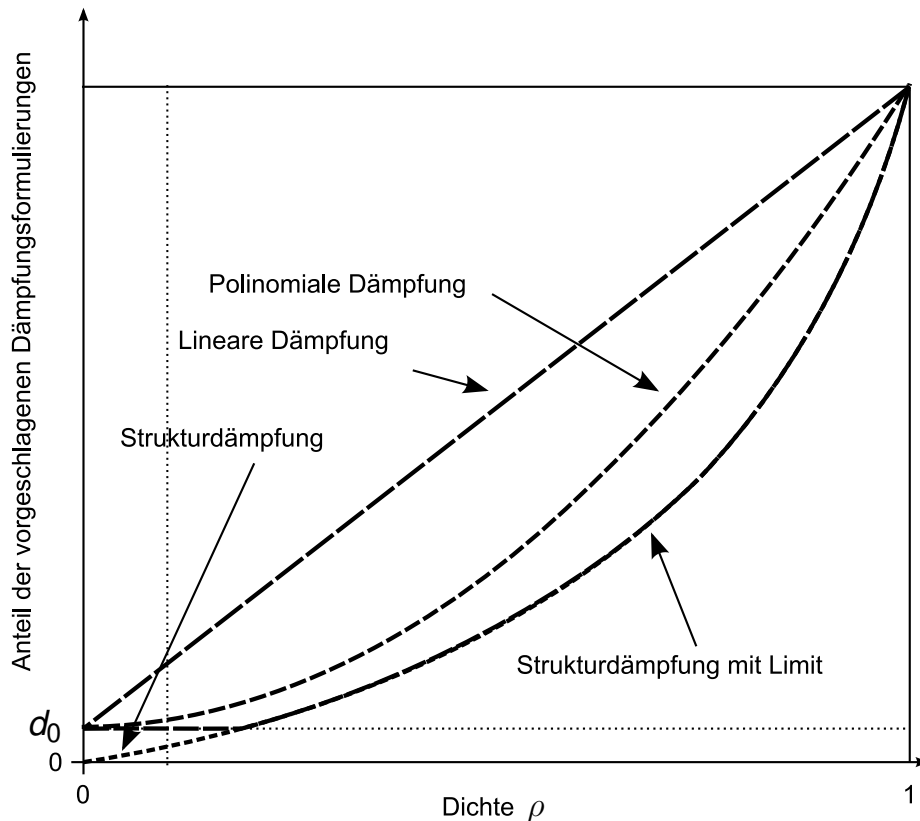
$$d_{AIII}(\omega, \rho) = \begin{cases} \frac{\alpha_A}{\omega} k(\rho) & \text{für } \rho > \rho_{\text{cut}} \\ \frac{d_{\text{min}}}{\omega} = \frac{\alpha_A}{\omega} k(\rho_{\text{cut}}) & \text{für } \rho \leq \rho_{\text{cut}} \end{cases} \quad (5.14)$$

Diese Formulierung folgt genau der standardmäßigen Strukturdämpfung. Unter dem Wert  $\rho = \rho_{\text{cut}}$  wird die Dämpfung auf den Wert  $\frac{\alpha_A}{\omega} k(\rho_{\text{cut}})$  bei  $\rho_{\text{cut}}$  festgesetzt. Daher ist diese Formulierung  $C^0$ -kontinuierlich, aber nicht  $C^1$ -kontinuierlich bei  $\rho_{\text{cut}}$ .

Abbildung 5.4 zeigt die drei verschiedenen Dämpfungsformulierungen im Vergleich. In diesem Diagramm ist die Abhängigkeit der Dämpfung von der Anregungsfrequenz  $\omega$  durch Festlegung auf  $\omega = 1$  entfernt. Man erkennt die drei unterschiedlichen Charakteristika der betrachteten Dämpfungsformulierungen. Die Formulierung der *Linearen Dämpfung* ist eine lineare Funktion und daher nicht sehr nahe an der Standard-*Strukturdämpfung* für mittlere Werte der Dichte  $\rho$ . Die *Polinomiale Dämpfung* zeigt eine Charakteristik, die viel ähnlicher zur standardmäßigen *Strukturdämpfung* ist. Ein Wert von  $q = 3$  für den Bestrafungsfaktor wäre in der Tat noch näher an den Eigenschaften der Standard-Formulierung. Dies liegt am Bestrafungsfaktor im RAMP-Interpolationsschema (siehe Abschnitt 2.2.2). Das würde jedoch zu einer Kennlinie für die *polinomiale Dämpfung* führen, die in gewissen Bereichen der Dichte  $\rho$  und des gewählten Parameters  $k_{\text{min}}$  unterhalb der Standard-Formulierung liegt. Dies ist in der aktuellen Implementierung nicht gültig, da die Standard-Formulierung im Nastran Input Deck mitbenutzt wird und die Differenz zu den anderen Dämpfungsformulierungen als Zusatzdämpfung in die Nastran Materialkarten aufgenommen wird.

Diese drei Dämpfungsformulierungen werden berechnet und in einem Benchmark der standardmäßigen Strukturdämpfung in Kapitel 7 gegenübergestellt. Als Ergebnis sei vorweg genommen, dass nur die polinomiale Dämpfungsformulierung adäquate Ergebnisse liefert.



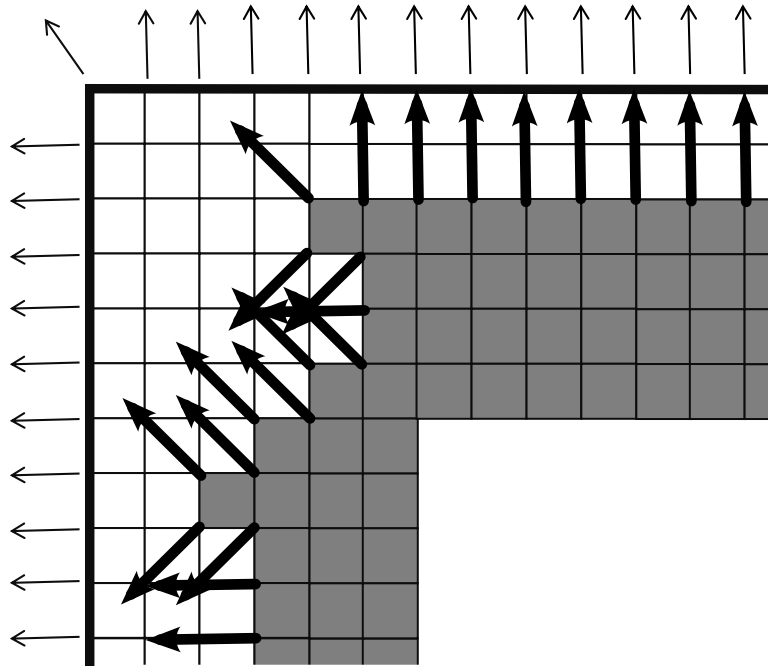


**Abbildung 5.4** Einfluss des Dämpfungsfaktors auf die Steifigkeit der verschiedenen Dämpfungsformulierungen

## 5.2 Erweiterung auf sich ändernde Oberflächen

Die in Abschnitt 5.1.1 vorgestellte Zielfunktion funktioniert nur, wenn sich die schallabstrahlende Oberfläche während der Iterationen der Topologieoptimierung nicht ändert. Dies liegt an der fixen Formulierung der schallabstrahlenden Knoten und ist gut geeignet für Probleme, bei denen die schallabstrahlende Oberfläche sowieso erhalten bleiben soll. Für eine solche Problemstellung ist die aufgestellte Zielfunktion gut geeignet. Hier werden die Knoten auf der diskretisierten Oberfläche der Motorhaube als schallabstrahlende Knoten definiert.

Nun soll jedoch die Problemstellung betrachtet werden, bei der die schallabstrahlende Oberfläche Teil des Designraums ist. Eine beispielhafte Anwendung ist die Optimierung eines Getriebe- oder Pumpengehäuses bezüglich der Schallabstrahlung nach außen. Dies bedeutet, dass während der Optimierung die schallabstrahlende Oberfläche erkannt und die Normalenvektoren auf diese Oberfläche bestimmt werden müssen. Schematisch ist dies in Abbildung 5.5 dargestellt. Die schallabstrahlende Oberfläche ist gekennzeichnet durch den Übergang zwischen weißem und schwarzem Material im Designraum.



**Abbildung 5.5** Schematische Erkennung des Randes der aktuellen Optimierungsite-  
ration

Dieser Übergang wird in diesem Fall durch eine kontinuierlich angenäherte Sprungfunktion approximiert. Dies ist notwendig, da ein vergleichender Algorithmus den Einsatz eines gradientenbasierten Optimierungsalgorithmus unmöglich machen würde. Aufgrund des numerischen Aufwands für die Topologieoptimierung ist dies nicht zielführend.

Der durch eine schwingende Oberfläche abgestrahlte Schall kann wie vorher durch den ERP-Wert ermittelt werden. Dieser ist nach Gleichung 2.3.3 in seiner diskretisierten, multidimensionalen Form gegeben durch:

$$\text{ERP} = \frac{1}{2} \rho c \sum_{i=1}^{N_{el}} |v_n^i|^2 A_i \quad (5.15)$$

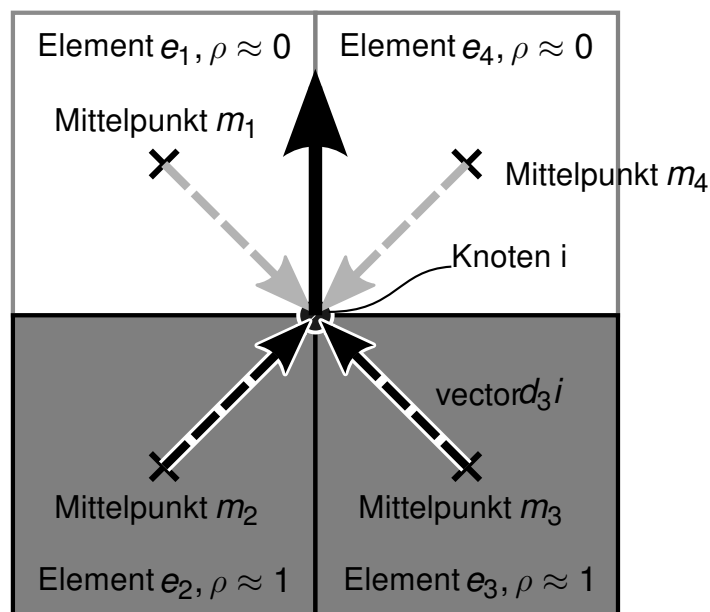
Hier repräsentiert  $\rho$  die Dichte des Fluids und  $c$  die Schallgeschwindigkeit innerhalb des Fluids.  $A_i$  und  $v_n^i$  stellen die Oberfläche und die Geschwindigkeit normal zu der Oberfläche für jedes betrachtete Element dar.

Im Gegensatz zu Abschnitt 5.1 wird der tatsächliche ERP-Wert für die Optimierungsformulierung verwendet. Das heißt, es wird tatsächlich das Quadrat der Verschiebung  $\mathbf{u}$  benutzt, was zwar einen erheblichen Mehraufwand im Optimierungsprozess, jedoch auch eine bessere Abbildung der physikalischen Verhältnisse bedeutet. Weiterhin ist zur Erzielung einer kompakten Bauweise, wie beispielsweise in Gehäusestrukturen, eine

neue Formulierung für die Zielfunktion der Optimierung notwendig. Um eine kompakte Struktur zu erreichen, darf die schallabstrahlende Oberfläche während der Iterationen der Optimierung nicht fixiert werden. Das Konzept kann in folgenden Punkten formuliert werden:

- Alle Knoten der diskretisierten Design-Domäne müssen in der Zielfunktionsformulierung berücksichtigt werden.
- Ein Normalenvektor wird für jeden Knoten berechnet als eine Überlagerung der Vektoren von den Mittelpunkten jedes zu dem Knoten gehörenden Elements.
- Die Vektoren vom Mittelpunkt eines Elements zum betrachteten Knoten werden durch eine geeignete Funktion  $g(\rho_e)$  gewichtet, die abhängig von der jeweiligen Dichte des Elements ist.

Mit dieser Vorgehensweise wird jeder Normalenvektor an einem Knoten, der sich innerhalb eines *vollen* oder *leeren* Materialbereichs befindet, auf Null gesetzt und hat keinerlei Einfluss auf die Zielfunktion der aktuellen Iteration. Die Bildung und Berechnung des Normalenvektors ist in Abbildung 5.6 dargestellt. Die vier Vektoren von den Elementzentren zu dem betrachteten Knoten werden mit der zugehörigen Elementdichte gewichtet, so dass der Betrag der Vektoren von *weißen* Elementen zu Null wird und der Betrag der Vektoren von *schwarzen* Elementen zu 1. Dies ist in Abbildung 5.6 durch die Farbintensität der Vektorenpfeile angedeutet.



**Abbildung 5.6** Überlagerung des Normalenvektors für jeden Knoten

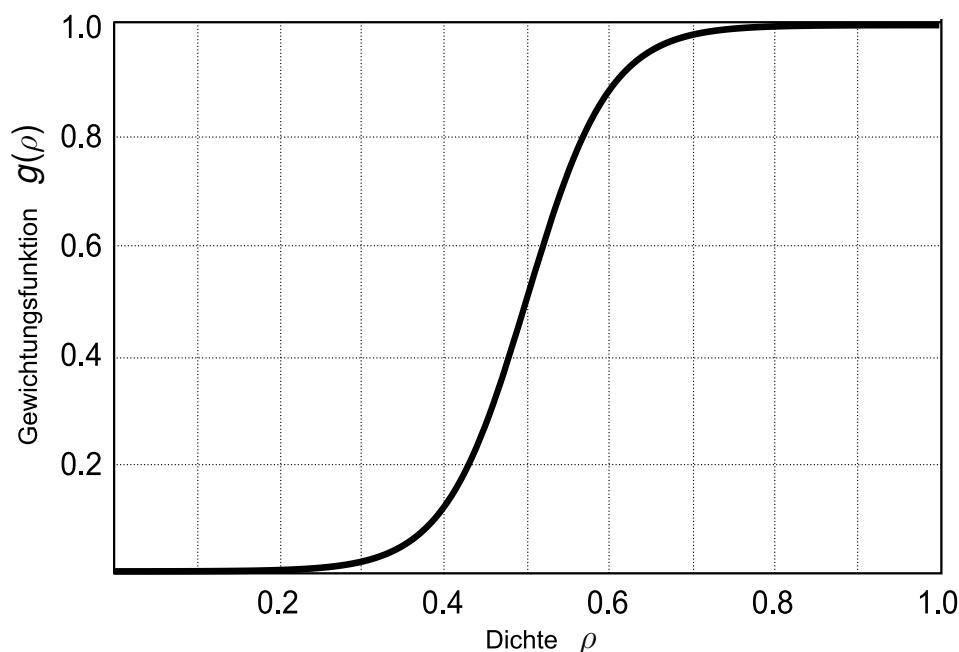
Der Normalenvektor berechnet sich wie folgt:

$$\mathbf{n}_i(\rho_E) = \sum_{e=1}^E \mathbf{d}_{ei} \cdot g(\rho_e) \quad (5.16)$$

wobei  $E$  die Anzahl der umgebenden Elemente ist und  $\mathbf{d}_{ei}$  der Vektor vom Mittelpunkt des Elements zum Knoten. Die Gewichtungsfunktion  $g(\rho_e)$  nähert eine Sprungfunktion kontinuierlich an:

$$g(\rho) = \frac{1}{2} (1 + \tanh(b(\rho - \rho_a))) \quad (5.17)$$

Hier ist  $\rho_a$  der Wert für die Dichte, welche die Grenze zwischen *Material* und *kein Material* (hier  $\rho_a = 0,5$ ) festlegt. Der Koeffizient  $b$  muss ausreichend hoch eingestellt werden, um eine gute Annäherung der Sprungfunktion (hier  $b = 10$ ) zu erhalten. Die Charakteristik der Gewichtungsfunktion ist in Abbildung 5.7 dargestellt.



**Abbildung 5.7** Charakteristik der Gewichtungsfunktion

### 5.2.1 Definition Zielfunktion

Das Ziel dieses Teils der Arbeit ist die Minimierung der Spitzen der Resonanzstellen im Frequenzgang der Struktur. Dabei wird eine Anhebung des gesamten Niveaus des Frequenzgangs zu höheren Werten (vgl. Kapitel 2) akzeptiert. Dies bedeutet auch, dass nur die höchsten Spitzen des Frequenzgangs für die aktuelle Iteration von Interesse sind. Somit ist das Ziel, die Werte der höchsten Peaks zu minimieren. Dies kann – wie

im vorhergehenden Abschnitt 5.1.1 – als ein Min-Max-Problem formuliert werden. Die Optimierungsformulierung kann dann folgendermaßen angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \text{minimiere}_{\rho} \quad \Phi_0 &= \left( \frac{1}{M_{\Omega}} \sum_{j=1}^{M_{\Omega}} \left( \sum_{i=1}^N \Omega_j^2 \cdot (\mathbf{u}_{R,j}^2 + \mathbf{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)) \cdot \mathbf{n}_i^2(\rho) \right)^{\rho} \right)^{\frac{1}{\rho}} \\
 \text{u. d. N.} \quad &(-\Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{D} + \mathbf{K}) \mathbf{U} = \mathbf{F} \\
 &\sum_{e=1}^N v_e \rho_e \leq V \\
 &0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1 \\
 &e = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Dabei definieren  $\mathbf{M}(\rho)$ ,  $\mathbf{D}(\rho)$ ,  $\mathbf{K}(\rho)$  die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix.  $\mathbf{F}(\Omega)$  definiert die harmonische Belastung der Struktur.  $v_e$  und  $\rho_e$  definieren das Volumen und die Dichte der einzelnen Elemente.

## 5.2.2 Analytische Bestimmung der Sensitivitäten

Um die Sensitivitäten der Zielfunktion in Gleichung 5.18 analytisch abzuleiten, wird auch hier wieder das von Jensen vorgeschlagene Verfahren<sup>141</sup> verwendet. Für die Sensitivitäten in Bezug auf die Dichte werden die Ableitungen der Zielfunktion  $\Phi_0$  nach den reellen und komplexen Teilen der Verschiebungen benötigt, um den Lagrange-Multiplikator auszuwerten.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi_0}{d\mathbf{u}_R} &= \Phi_0^{(1-q)} \cdot \left( \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^N \Omega_j^2 \cdot (\mathbf{u}_{R,j}^2(\Omega, \rho) + \mathbf{u}_{I,j}^2(\Omega, \rho)) \cdot \mathbf{n}_i^2(\rho) \right)^{q-1} \right. \\
 &\quad \left. \cdot 2 \cdot \Omega_j^2 \cdot \mathbf{u}_{R,i}(\Omega, \rho) \cdot \mathbf{n}_i^2(\rho) \right) \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Die Ableitung der Zielfunktion nach dem komplexen Teil der Verschiebungen ist äquivalent zum Ersetzen von  $\mathbf{u}_R$  mit  $\mathbf{u}_I$  in Gleichung 5.19. Zusätzlich wird die Ableitung nach  $\rho$  benötigt:

<sup>141</sup>vgl. Jensen (2007a)

$$\frac{d\phi_0}{d\rho} = \phi_0^{1-q} \cdot \left( \frac{1}{M} \cdot \sum_{j=1}^M \left( \sum_{i=1}^N \Omega_j^2 \cdot (\mathbf{u}_{R,i}^2(\Omega, \rho) + \mathbf{u}_{I,i}^2(\Omega, \rho)) \cdot \mathbf{n}_i^2(\rho) \right)^{q-1} \right. \\ \left. \cdot 2\Omega_j^2 \cdot (\mathbf{u}_{R,i}^2(\Omega, \rho) + \mathbf{u}_{I,i}^2(\Omega, \rho)) \cdot \mathbf{n}_i^2(\rho) \cdot \frac{d\mathbf{n}_i}{d\rho} \right) \quad (5.20)$$

## 6 Prozessanpassung

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die neuen Zielfunktionen, die Berechnung der Sensitivitäten und die Dämpfungsformulierungen im in dieser Arbeit entwickelten Topologieoptimierungsprogramm implementiert sind. Das Topologieoptimierungsprogramm ist in Matlab<sup>142</sup> implementiert. Die Berechnung des Finite-Elemente-Gleichgewichts erfolgt in Nastran<sup>143</sup>. Das Einlesen der Finite-Elemente-Ergebnisse geschieht mit Hilfe der Matlab-Toolbox IMAT<sup>144</sup>.

Im Allgemeinen wird der – in der Regel automatisierte – Topologieoptimierungsworkflow in drei Aktivitäten aufgeteilt.

- Vorverarbeitung der vorgegebenen FEM-Daten und der Finite-Elemente-Berechnung.
- Finite-Elemente-Berechnung: erfolgt nicht durch das Topologieoptimierungsprogramm selbst, sondern mit einem kommerziell erhältlichen Solver.
- Nachbearbeitung der FEM-Ergebnisse und Berechnung der Werte für die Zielfunktion und die Sensitivitäten. Gradientenbasierte Optimierung der Designvariablen durch Verwendung der Methode der bewegten Asymptoten (MMA, siehe Abschnitt 2.2.2).

Dieser Vorgang wiederholt sich in jeder Iteration, bis die Änderung des Wertes der Zielfunktion im Vergleich zur vorherigen Iteration nur noch klein ist. Damit ist ein Minimum der Zielfunktion bezüglich der Designvariablen erreicht.

### 6.1 Prozess der Topologieoptimierung

Der detaillierte Prozess der Topologieoptimierung ist in Abbildung 6.1 beschrieben.

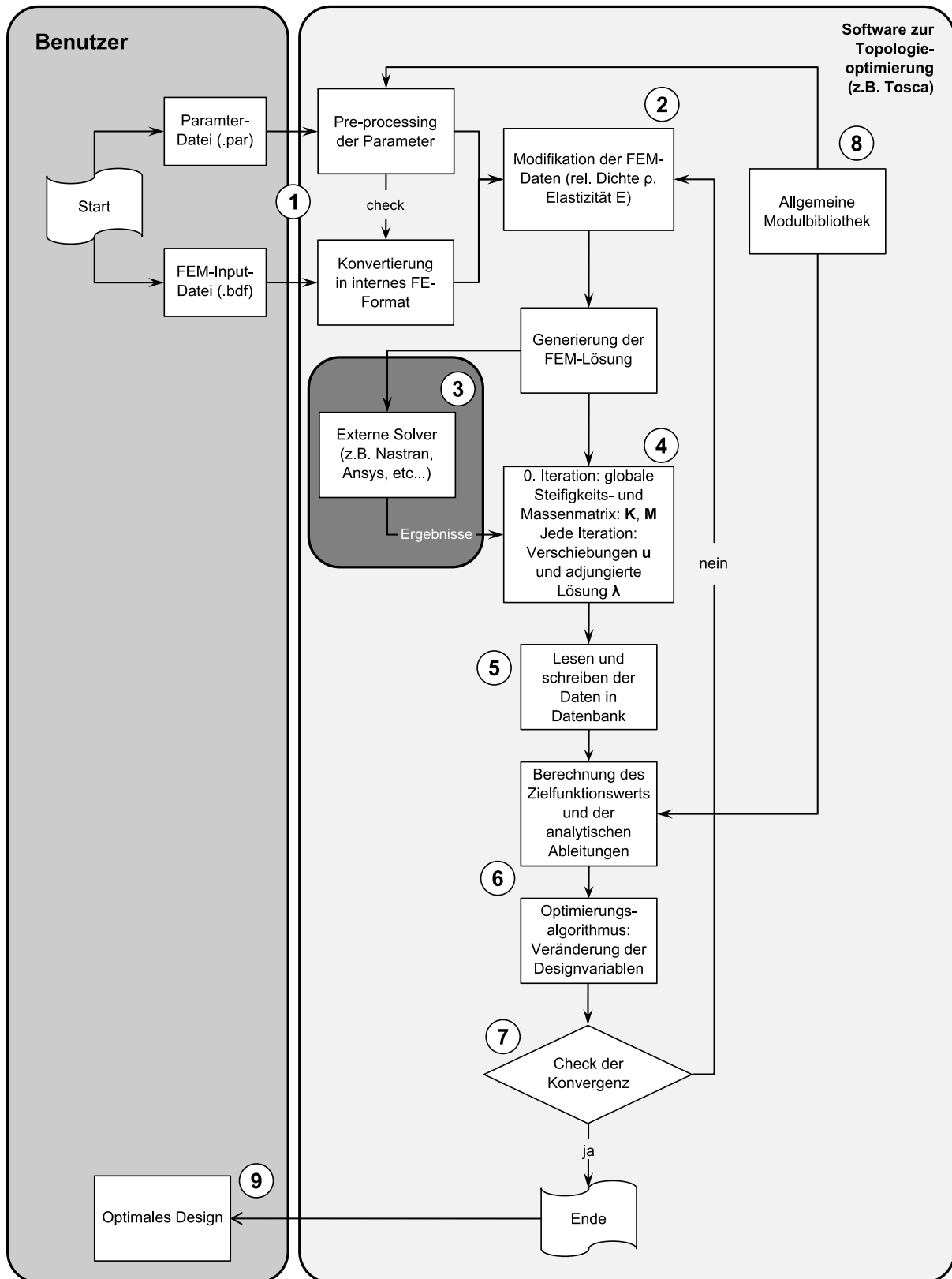
---

<sup>142</sup>vgl. The Mathworks Inc. (2012)

<sup>143</sup>vgl. MSC.Software Corporation (2011)

<sup>144</sup>vgl. ATA Engineering Inc. (2011)

<sup>145</sup>vgl. Hessenauer et al. (2007)

Abbildung 6.1 Prozess der Topologieoptimierung<sup>145</sup>



- ① Der Nutzer erzeugt als Eingabe die geometrischen Informationen in Finite-Elemente-Form für handelsübliche Solver (im Falle von Nastran als bdf-Input-Deck). In der Parameter-Datei definiert der Anwender die Optimierungsaufgabe.
- ② Im nächsten Schritt werden die FEM-Daten für die erste Iteration der Optimierung modifiziert. In diesem Fall werden die Werte für die Dichte  $\rho_e$  so eingestellt, dass die Volumenrestriktion erfüllt ist. Zusätzlich wird eine Pseudolast definiert, welche die Lösung für den Lagrange-Multiplikator des adjungierten Optimierungsproblems mit Hilfe des FE-Solvers berechnet (siehe 2.2).
- ③ Für die Finite-Elemente-Berechnung wird ein externer Solver eingesetzt (in diesem Fall Nastran).
- ④ Die Finite-Elemente-Berechnung ergibt die benötigte Lösung für die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und den Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  des adjungierten Problems. Zusätzlich werden in der initialen Iteration die Steifigkeits- und Massenmatrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  der Finite-Elemente-Ergebnisdatei hinzugefügt, damit sie in der Berechnung der Zielfunktion und der Sensitivitäten verwendet werden zu können.
- ⑤ Dann werden die Ergebnisdaten intern gespeichert.
- ⑥ Im nächsten Schritt werden die Werte für die Zielfunktion und die Sensitivitäten für jedes Element berechnet. Die Designvariablen werden dem Optimierungsalgorithmus entsprechend angepasst (in diesem Fall MMA, siehe Abschnitt 2.2.2).
- ⑦ Ab der vierten Iteration wird eine Konvergenzprüfung nach jeder Iteration durchgeführt. Dies dient der Kontrolle, ob das Optimum bereits erreicht wurde. Wenn die Änderung des Zielfunktionswerts der aktuellen Iteration im Vergleich zur vorherigen Iteration gering ist, ist ein (lokales) Optimum erreicht, und die Optimierung wird beendet. Ist dies nicht der Fall, beginnt die Schleife von Neuem und es wird ein neues FE-Input-Deck mit den aktualisierten Designvariablen erzeugt.
- ⑧ Zum Abschluss des Prozesses kann die optimale Materialverteilung des Designs nachbearbeitet und geglättet werden und als Grundlage für eine weitere Konstruktion verwendet werden.

Für die Variante *variable Abstrahloberfläche* muss eine Erweiterung des oben dargestellten Topologieoptimierungs-Workflows erfolgen. Die Zielfunktion ist in diesem Fall eng an den ERP-Wert angelehnt, so dass hier die Verschiebung  $\mathbf{u}$  quadratisch in die Zielfunktion eingeht. Dies bedeutet jedoch auch eine Abhängigkeit der Sensitivitäten von den Verschiebungen  $\mathbf{u}$ .

---

<sup>146</sup>vgl. Hessenauer und Albers (2012)

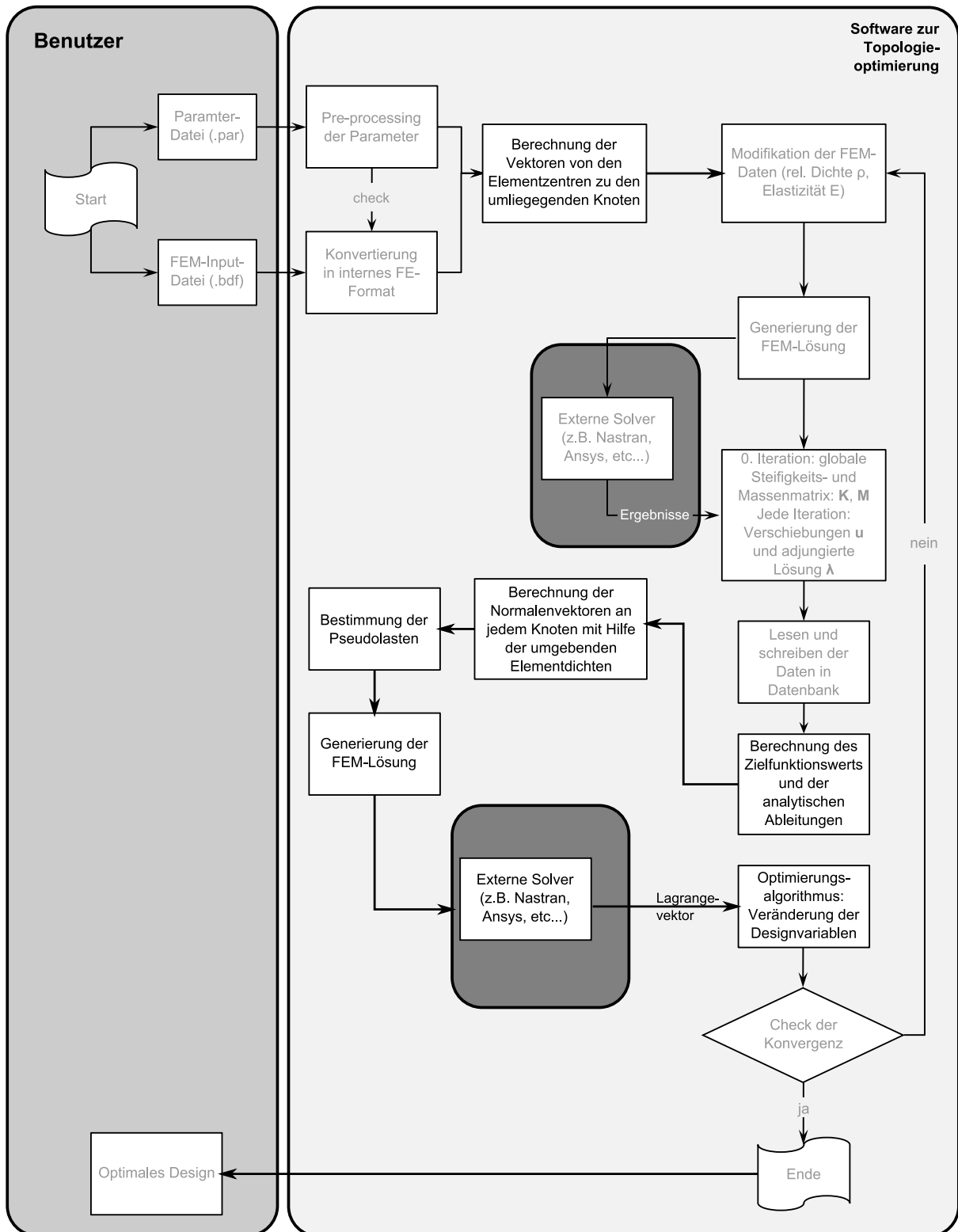


Abbildung 6.2 Erweiterter Prozess der Topologieoptimierung<sup>146</sup>

Wegen der Abhängigkeit der Sensitivitäten von den Verschiebungen (siehe Gleichung 5.18 und 5.19) ist es nicht möglich, den Lagrange-Vektor parallel zu den Verschiebungen in der gleichen Finite-Elemente-Rechnung zu bestimmen. Daher wird eine zusätzliche Finite-Elemente-Berechnung in jeder Iteration benötigt.

Hier wurden mehrere Zusatzberechnungen gegenüber dem Standard-Topologieoptimierungs-Workflow (siehe 6.1) eingeführt. Dieser Standard-Topologieoptimierungs-Workflow wurde von Doki-Thonon in Matlab abgebildetvgl. <sup>147</sup> Dies beinhaltet die folgenden Punkte:

- Bestimmung der geometrischen Zentren jedes Elements. Hier wird das geometrische Zentrum jedes Elements durch einfache geometrische Überlegungen berechnet. Dies ist die Ausgangsbasis für die Berechnung der überlagerten und skalierten Normalenvektoren auf jedem Knoten. De Conihoutvgl. <sup>148</sup> erweiterte diese Methode für dreidimensionale Volumenelemente.
- Bestimmung der Vektoren vom Elementmittelpunkt zu Eckknoten. Hier wird die Entfernung jedes Knotens zu jedem Elementmittelpunkt bestimmt. Auch dies ist notwendig, um später die überlagerten Normalenvektoren zu bilden.
- Bestimmung des Zielfunktionswerts. Die abgestrahlte Energie wird hier zu einem Zielfunktionswert zusammengefasst.
- Bestimmung der Pseudolast. Die Pseudolast ist in diesem Fall direkt abhängig von den berechneten Verschiebungen. Deshalb muss vorher eine FE-Rechnung erfolgen, um die Verschiebungen zu bestimmen. Danach muss eine zweite FE-Rechnung erfolgen, die mittels der Pseudolasten den Lagrange-Vektor bestimmt.

## 6.2 Implementierung

Die Implementierung der in Abschnitt 5.1 und 5.2 vorgestellten Zielfunktionen, Sensitivitäten und sonstigen Algorithmen erfolgte in Matlab mit einer Aufteilung in mehrere Module. Die Beschreibung der Module erfolgt in diesem Abschnitt.

### 6.2.1 Pseudolastfälle

In diesem Modul werden die Pseudolasten generiert. In dieser Subroutine werden durch den Aufruf der Funktion *normalOnBoundarySurface* die Normalenvektoren auf die

---

<sup>147</sup>Doki-Thonon et al. (2009)

<sup>148</sup>de Conihout et al. (2013)

Knoten der schallabstrahlenden Oberfläche ermittelt. Dies geschieht in Abhängigkeit der Problemstellung (zwei- oder drei-dimensional) auf unterschiedliche Weise. Für jeden betrachteten Knoten wird dann eine Pseudolast (*force*) auf den skalierten Normalenvektor gesetzt.

---

#### Prozedur 6.2.1.0.1 Pseudolasten

---

**Voraussetzung:** Vektor der Normalen zu allen Knoten der Oberfläche

```

1: if type == solid then
2:   vecNormalNode = normalOnBoundarySurface
3: else if type == shell then
4:   vecNormalNode = normalOnBoundaryEdge
5: end if
6: for node = 1 to lastNodeOfSurface do
7:   force(node, x) =  $-0,5 \cdot \textit{vecNormalNode}(\textit{x})$ 
8:   force(node, y) =  $-0,5 \cdot \textit{vecNormalNode}(\textit{y})$ 
9:   force(node, z) =  $-0,5 \cdot \textit{vecNormalNode}(\textit{z})$ 
10: end for

```

---

Die Pseudolast wird dann im FE-Input-Deck als zusätzliche Last in einem zusätzlichen Lastfall eingefügt. Die resultierenden Verschiebungen aus diesem Lastfall repräsentieren den gesuchten Lagrange-Multiplikator, der zur Berechnung der Sensitivitäten benötigt wird.

## 6.2.2 Dämpfungsschema

Der Wert der Dämpfung wird für jedes Element berechnet, da in der Topologieoptimierung jedes Element eine eigene Dichte  $\rho$  besitzt. Dabei wird die standardmäßige Strukturdämpfungsformulierung von Nastran benutzt und die Differenz für jedes Element hinzuaddiert. Dies ist eine Beschränkung im Solver und nicht anders zu realisieren. Die Dämpfungsmatrix im Solver wird dann berechnet durch die Summe der Gesamtdämpfung und der überlagerten Einzeldämpfungen.

$$\mathbf{D} = \mathit{IGK} + \sum G_E \mathbf{K}_E \quad (6.1)$$

Hier repräsentiert  $G$  den Gesamtdämpfungskoeffizienten und  $G_E$  den Element-Dämpfungskoeffizienten;  $\mathbf{K}$  bzw.  $\mathbf{K}_E$  sind die Gesamtsteifigkeitsmatrix bzw. die Elementsteifigkeitsmatrizen.

---

**Prozedur 6.2.2.0.2** Dämpfung

---

**Voraussetzung:** Dämpfungskonstante  $PARAM, G$ 

```

1:  $eps = PARAM, G$ 
2: if  $damping == linear$  then
3:    $e = eps \cdot (KMax \cdot density + KMin \cdot (1, 0 - density)) - eps$ 
4: else if  $damping == polinomial$  then
5:    $e = eps \cdot (KMax \cdot density^{penalty} + KMin \cdot (1, 0 - density^{penalty})) - eps$ 
6: else if  $damping == cutOff$  then
7:   if  $density > densityCut$  then
8:      $e = eps \cdot K(densityCut) - eps$ 
9:   else
10:     $e = 0, 0$ 
11:   end if
12: end if

```

---

Der Skalierungsfaktor  $de$  für die Ableitungen der jeweiligen Dämpfungsformulierung wird mit folgender Subroutine berechnet:

---

**Prozedur 6.2.2.0.3** Dämpfung, Skalierungsfaktor Sensitivitäten

---

**Voraussetzung:** Dämpfungskonstante  $eps$ 

```

1: if  $damping == artificial1$  then
2:    $de = eps \cdot (KMax - KMin)$ 
3: else if  $damping == artificial2$  then
4:    $de = eps \cdot (penalty \cdot KMax \cdot density^{(penalty-1)} - KMin \cdot density^{(penalty-1)}) - eps$ 
5: else if  $damping == artificial3$  then
6:   if  $density > densityCut$  then
7:      $de = eps$ 
8:   else
9:      $de = 0.0$ 
10:  end if
11: end if

```

---

Der Skalierungsfaktor wird dann verwendet, um die Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}$  sowie deren partielle Ableitung  $\partial S / \partial \rho$  zu berechnen.

### 6.2.3 Zielfunktion

---

#### Prozedur 6.2.3.0.4 Design Response

---

**Voraussetzung:** Verschiebungen aus FEM

```

1: for loadCase = 1 to lastLoadCase do
2:   for frequency = 1 to lastFrequency do
3:     displ = getDisplacementsFromFE
4:     for node = 1 to lastNode do
5:       vibr = vibr + displ · vecNormalNode
6:     end for
7:     saveVibr
8:     mag = MagnitudeOfVibr
9:     sumFreq = sumFreq + ( $\Omega^2 \cdot mag$ )(QFactor/2)
10:    dresp = (1/nrlncrements · sumFreq)(1/QFactor)
11:    saveDresp
12:  end for
13: end for

```

---

Die Zielfunktion wird im Modul *NVH\_Energy* bzw. *NVH\_Energy\_All* berechnet. Für jedes Inkrement der Anregungsfrequenz wird die Gesamtvibration *vibr* (siehe Abschnitt 5.1.1) mit Hilfe der berechneten Verschiebungen und Normalen für jeden betrachteten Knoten bestimmt. Hier wird auch wieder – wie in der Berechnung der Pseudolast zur Berechnung des Normalenvektors – zwischen dem zwei- und dreidimensionalen Problem unterschieden. Der Wert dieser Gesamtvibration wird für jede Frequenz gespeichert, um später erneut für die Berechnung der Sensitivitäten verwendet werden zu können.

Der Betrag der Gesamtvibration wird dann verwendet, um die Zielfunktion zu berechnen. Um die Min-Max-Formulierung (siehe Abschnitt 5.1.1) zu approximieren, wird der p-Mittelwert verwendet. Dieser ist numerisch stabiler und liefert eine gute Näherung.

## 6.2.4 Sensitivitäten

---

### Prozedur 6.2.4.0.5 Sensitivitäten

---

**Voraussetzung:** Lagrange-Vektor  $\lambda^*$  aus FEM

```
1: for loadCase = 1 to lastLoadCase do  
2:   for element = 1 to lastElement do  
3:     for frequency = 1 to lastFrequency do  
4:       vibr = getVibrFromDatabase  
5:       mag = magnitude(vibr)  
6:       dresp = getDrespFromDatabase  
7:       gamma = dresp^(1 - QFactor)  
8:         *(Omega * mag)^(QFactor - 1)  
9:         *vibr / mag  
10:      partial_total = getPartialTotalFormDB  
11:      pre_sen = getPreSensitivities(partial_total)  
12:      sen = gamma * pre_sen  
13:    end for  
14:  end for  
15: end for
```

---

In dieser Subroutine werden die Sensitivitäten für jedes Element berechnet. Diese Berechnung wird für jedes Frequenzinkrement durchgeführt und die Sensitivitäten anschließend aufsummiert, um daraus die Sensitivität zu berechnen. Der vorher bestimmte Wert für die Gesamtvibration wird dann für die weitere Kalkulation benutzt. Die partielle Ableitung der Gesamtsteifigkeitsmatrix wird durch Skalierung der initialen Gesamtsteifigkeitsmatrix berechnet. Mit diesen Werten und mit dem mittels der FEM berechneten Lagrange-Multiplikator werden die vorläufigen Sensitivitäten bestimmt. Danach müssen die vorläufigen Sensitivitäten mit dem Faktor Gamma skaliert werden, siehe Abschnitt 5.1.2. Der berechnete Wert für die Zielfunktion und die Sensitivitäten werden dann an den Optimierungsalgorithmus übergeben, um die neuen Werte für die Designvariablen zu berechnen.

## 6.2.5 Überlagerte Normalenvektoren

---

### Prozedur 6.2.5.0.6 Überlagerter Normalenvektor

---

**Voraussetzung:** Geometrie-Zentren für jedes Element

**Voraussetzung:** Vektoren vom Elementzentrum zu den Eckknoten

```
1: for node = 1 to lastNode do  
2:   for element = 1 to ElementOnCurrentNodes do  
3:      $vecNormal = \sum_{element} VectorToNode * g$   
4:   end for  
5: end for
```

---

Für die Erweiterung der Methode hin zu einer sich ändernden Oberfläche müssen die Normalenvektoren auf dieser Oberfläche in jeder Iteration berechnet werden. Dies erfolgt in der Subroutine *Normals\_Density*. Hier werden der vorher berechnete Wert für die Elementzentren, die Abstände der Zentren und die Gewichtungsfunktion 5.17 zu den jeweiligen Knoten benutzt, um die Normalenvektoren zu überlagern.



# 7 Untersuchung und Validierung

## 7.1 Numerisches Beispiel

### 7.1.1 Modell für Standardmethode

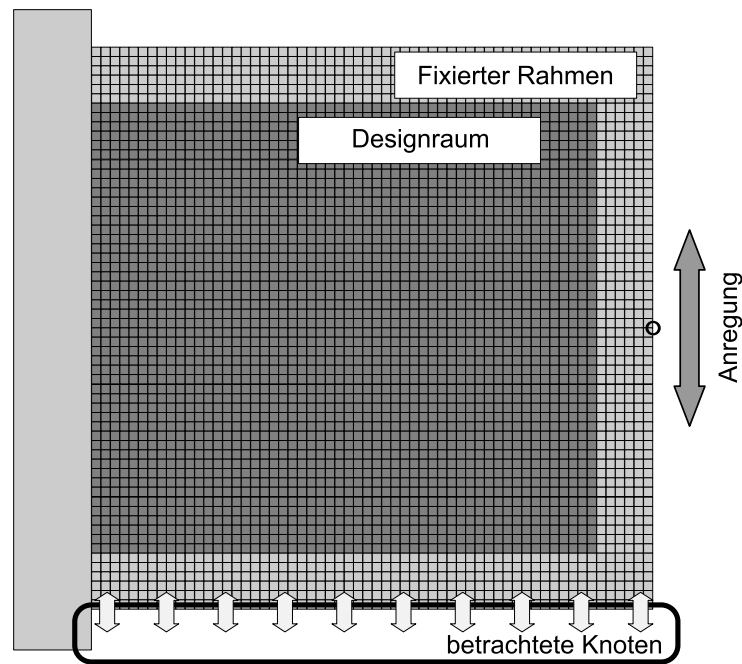
Das in dieser Arbeit verwendete Modell, um die Zielfunktion für das Anwendungsszenario *Optimierung einer geschlossenen, schallabstrahlenden Oberfläche* und die zugehörigen Dämpfungsformulierungen zu testen, ist ein zweidimensionaler Kragträger. Diese Struktur ist ein Standardbeispiel der Topologieoptimierung und wurde auch bei Bendsøe<sup>149</sup> als Beispiel für freie Schwingungen und Eigenwertprobleme verwendet. Die Struktur besteht aus 60 mal 60 zweidimensionalen Elementen und 3878 Knoten mit 11634 Freiheitsgraden.

Die Struktur besitzt eine quadratische Form mit einer Kantenlänge von 0,03, und jedes Element besitzt die globale Kantenlänge 0,005. Die linksseitige Begrenzung der Struktur ist in allen translatorischen und rotatorischen Freiheitsgraden fixiert. Um die Rechenzeit zu reduzieren, werden alle Freiheitsgrade, die der dritten Dimension zugeordnet sind, ebenfalls fixiert. Um die statische Nachgiebigkeit zu berücksichtigen (siehe Abschnitt 5.1.1) wird ein Rahmen entlang der Grenze der Struktur definiert. Die Elemente innerhalb dieser Rahmenstruktur sind nicht Teil des Designraums und werden daher im Gegensatz zu *frozen elements* nicht bei der Berechnung der Volumenrestriktion berücksichtigt.

Die Anregung wird auf den mittleren Knoten der rechten Kante der Struktur aufgebracht. Sie wirkt dabei in der globalen  $y$ -Richtung der Domäne. Die untere Kante der Struktur stellt die zweidimensionale Abstrahloberfläche dar, und alle Knoten an dieser Kante sind Teil der Zielfunktion. Daher haben in diesem Fall die Normalen jedes Knotens die negative  $y$ -Richtung, bis auf den äußerst rechten Knoten, der in einem  $45^\circ$ -Winkel nach rechts unten absteht. Insgesamt werden mit dieser Konfiguration 61 Knoten in der Zielfunktion abgedeckt.

---

<sup>149</sup>vgl. Bendsøe und Sigmund (2002)



**Abbildung 7.1** Modell

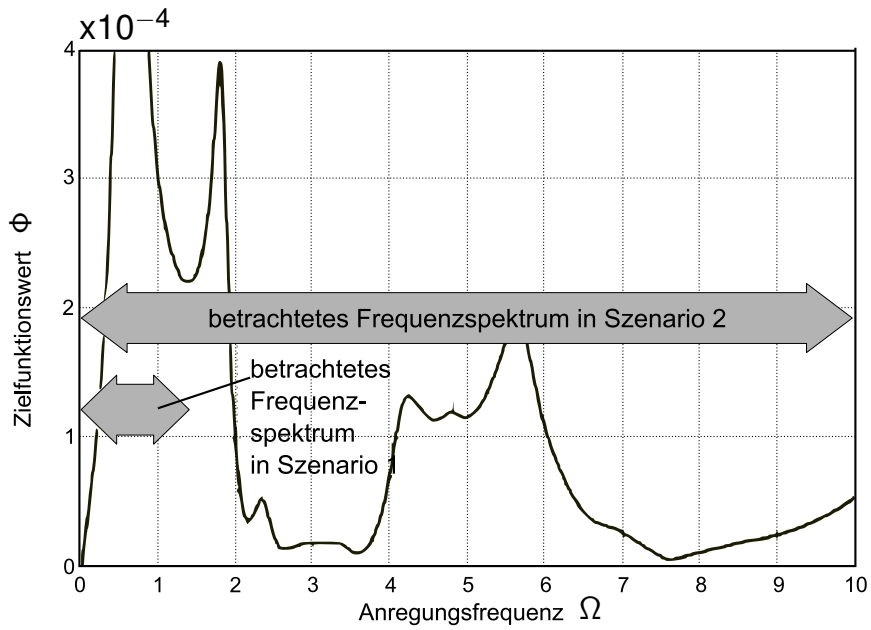
Selbst dieses relativ einfache Modell erfordert einen erheblichen Rechenaufwand. Insbesondere die direkte Berechnungsvariante (*SOL 108* in Nastran, siehe Abschnitt 2.2.1) erweist sich – wie erwartet – als sehr ressourcenintensiv. Dies liegt an der Berechnung eines gekoppelten Systems von Gleichungen für jedes Frequenzinkrement. Mit der modalen Berechnungsvariante (*SOL 111* in Nastran) kann der Rechenaufwand erheblich reduziert werden<sup>150</sup>. Daher werden alle folgenden Beispiele in Abschnitt 7.2.1 und 7.2.2 mittels der modalen Berechnungsvariante angegangen. Die in dieser Arbeit verwendete FE-Input-Datei findet sich im Anhang<sup>151</sup>.

Es wurden drei verschiedene Szenarien festgelegt:

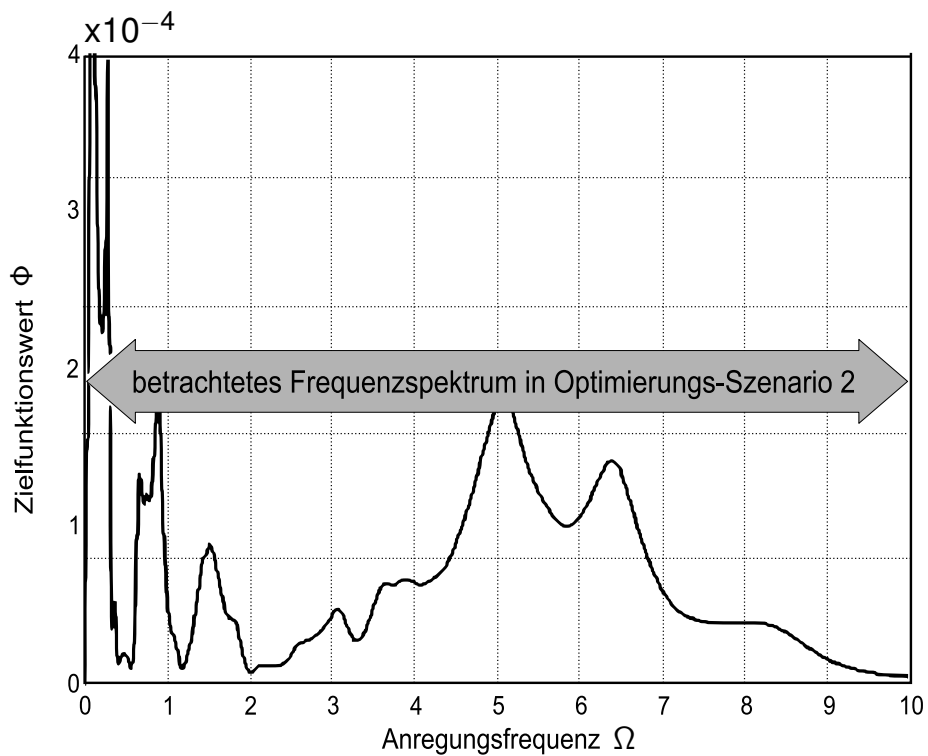
1. Betrachtung eines Frequenzbereichs für die Zielfunktion, der die erste Eigenfrequenz des initialen Systems umfasst. Dies bedeutet in diesem Fall einen Frequenzbereich von  $\Omega = [0, 0; 1, 4]$  mit einem Frequenzinkrement von  $\Delta_{\Omega} = 0, 01$
2. Betrachtung eines Frequenzbereichs über die ersten sieben Eigenfrequenzen des initialen Systems. Der Frequenzbereich ist dann  $\Omega = [0, 0; 10, 0]$  mit einem Frequenzinkrement  $\Delta_{\Omega} = 0, 01$

<sup>150</sup>bei diesem Beispiel bis zu einem Faktor von 15

<sup>151</sup>Bulk Data wurde größtenteils gelöscht, kann aber einfach wiederhergestellt werden



**Abbildung 7.2** Frequenzantwort für Initialdesign des Testmodells, Frequenzbänder für die Szenarien eins und zwei



**Abbildung 7.3** Frequenzband für das Szenario drei

3. Betrachtung eines Frequenzbereichs für ein breites Spektrum von mehreren Eigenfrequenzen des initialen Systems. Dies wird durch eine Skalierung der Steifigkeit und Dichte des vorgestellten Modells erzielt. Dadurch verschieben sich die Eigenfrequenzen zu niedrigeren Werten von  $\Omega$ . In diesem Fall bleibt der Frequenzbereich  $\Omega = [0, 0; 10, 0]$  wie in Szenario 2. Das in diesem Szenario verwendete Frequenzinkrement ist dann:

a)  $\Delta\Omega = 0,005$

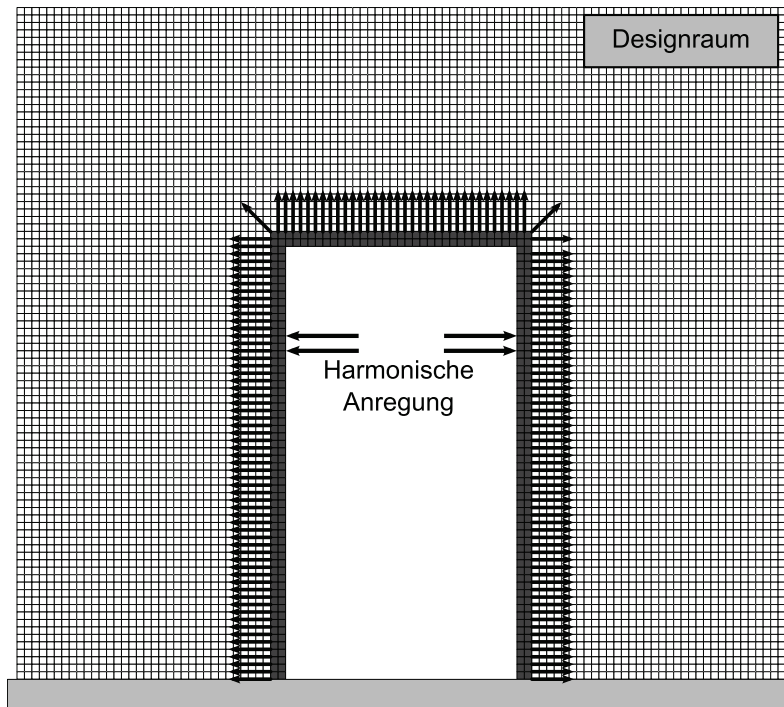
b)  $\Delta\Omega = 0,002$

Die Szenarien 2 und 3 stellen eine Situation dar, die realistisch für NVH-Probleme ist: eine mittlere bis hohe Anzahl von Eigenfrequenzen in einem betrachteten Frequenzbereich.

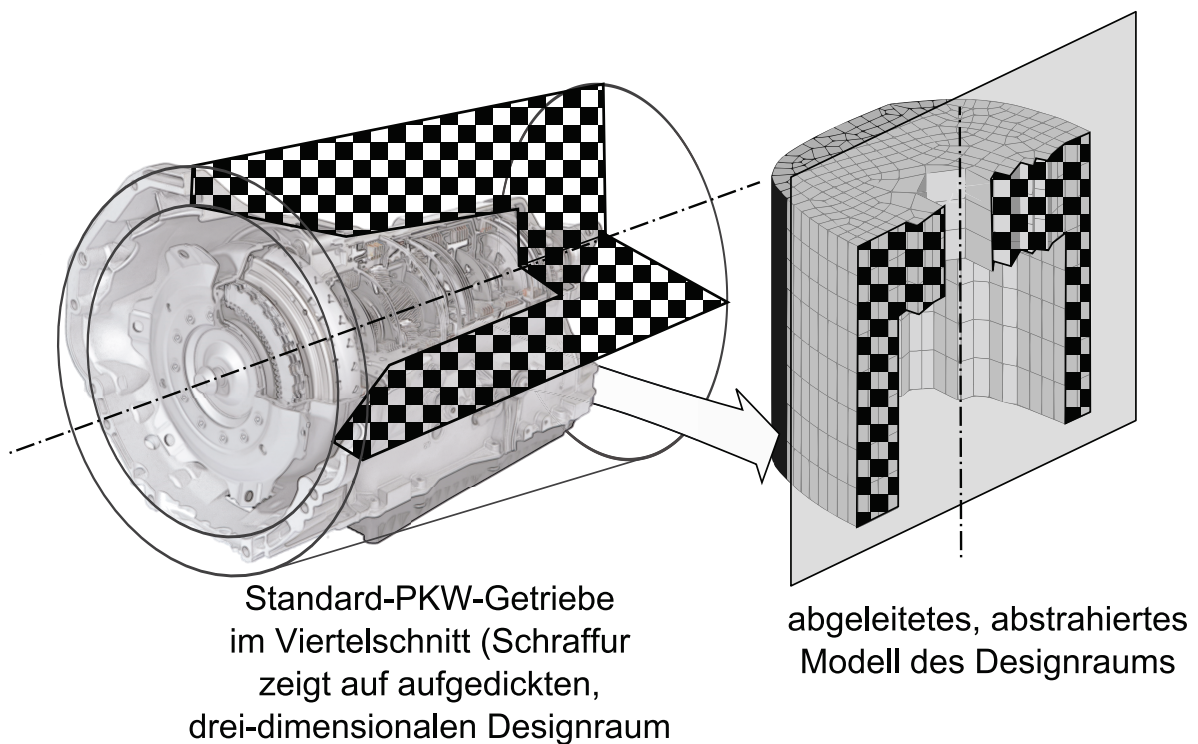
### 7.1.2 Modell für die Erweiterungsmethode

Aufgrund von Einschränkungen der Matlab-Rechenleistung sind nur sehr eingeschränkte Modelle und nur kleine Frequenzbereiche möglich. Diese Einschränkungen sind hauptsächlich informationstechnischer Natur. So ist der vorhandene Arbeitsspeicher für größere Modelle zu gering. Eine Möglichkeit, dies zu umgehen, wäre die temporäre Auslagerung von Daten, was aber einen erheblichen Aufwand in der Umgestaltung der Architektur der prototypischen Software verursachen würde. Das in dieser Arbeit verwendete Modell stellt deshalb eine einfache abstrahierte Form dar, die die Querschnittsfläche eines Pumpengehäuses (siehe Abbildung 7.4) abbilden soll. Hier symbolisiert der weiße Bereich den inneren Hohlraum des Gehäuses, in dem sich der Mechanismus der Pumpe befindet. Es wird eine harmonische Anregung aufgebracht, die z. B. eine Anregung des Gehäuses über die Lagerstellen simuliert. Das Modell wird am unteren Ende befestigt. Der graue Bereich ist die Design-Domäne, und der schwarze Rahmen wird eingefroren (immer als *schwarzes* Material gesetzt). Die Pfeile stellen die durch den Algorithmus erkannten Normalenvektoren auf die aktuelle schallabstrahlende Oberfläche in der 0. Iteration dar.

Zusätzlich wurde ein einfaches dreidimensionales Modell aufgebaut, um die Erweiterung auf dreidimensionale Probleme zu testen. Auch dieses Modell ist aufgrund der numerischen Restriktionen der prototypischen Implementierung sehr einfach gehalten. Es repräsentiert ein Getriebe mit aufgedickter Wand als Designraum. Die Geometrie wurde dabei stark vereinfacht.



**Abbildung 7.4** Akademisches Modell für die Validierung der Erweiterungsmethode



**Abbildung 7.5** Vereinfachtes dreidimensionales Modell für die Validierung der Erweiterungsmethode, Darstellung einer Hälfte

Das überprüfte Frequenzspektrum deckt dabei die erste Eigenfrequenz ab. Für ein breiteres Frequenzspektrum wird mit den numerischen Restriktionen die Frequenzauflösung zu gering für eine sinnvolle Optimierung.

## 7.2 Ergebnisse

### 7.2.1 Ergebnisse der Optimierung

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse für die drei Szenarien aus Abschnitt 7.1 präsentiert. Für jedes Szenario wird die Konvergenz der Zielfunktion über der Iterationszahl gezeigt. Der Frequenzgang der Zielfunktion wird als Referenz für die initiale Gestaltung angegeben. Der Lösung der standardmäßigen Strukturdämpfung werden als Referenz der Frequenzgang der letzten Iteration und der Frequenzgang einer Struktur gegenübergestellt, von der die zusätzliche Dämpfung aus Abschnitt 5.1.2 entfernt wurde.

Wie in Abschnitt 6.2 erläutert, wird die zusätzliche Dämpfung zur standardmäßigen Strukturdämpfung durch zusätzliche Materialkarten in Nastran addiert. Daher muss die zusätzliche Dämpfung von allen Elementen entfernt werden, um vergleichbare Strukturen zu erhalten. Besonders die *weißen* Elemente besitzen noch eine geringe Steifigkeit durch den vorher angenommenen Minimalwert der Dämpfung.

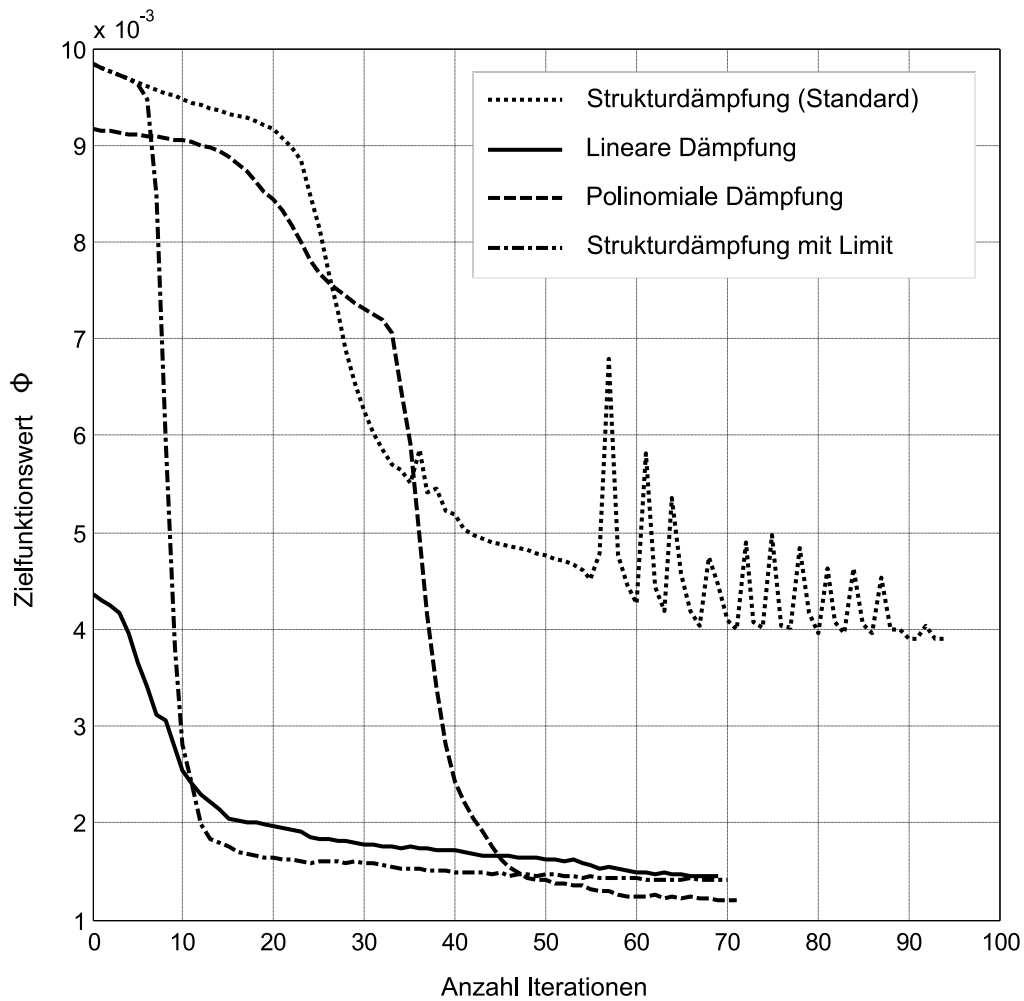
Eine erfolgreiche Optimierung sollte ein Ergebnis für die Frequenzoptimierung wie in Abbildung 2.16 liefern. In diesem Diagramm ist das Grundniveau des Frequenzgangs beim Enddesign höher bei gleichzeitiger Verringerung der Frequenzspitzen. Der Betrag der Geschwindigkeit ist gleichmäßiger über das Frequenzspektrum verteilt. Dies führt zu mehr Geräuschkomfort für das menschliche Ohr als bei einem Frequenzspektrum mit einem niedrigeren Grundniveau und ein paar hohen Amplitudenspitzen bei bestimmten Frequenzen.

### Szenario 1

#### Konvergenz

Die Konvergenz in Abbildung 7.6 des Optimierungsprozesses benötigt mit der zusätzlichen Dämpfung etwa die gleiche Anzahl von Iterationen für jede Dämpfungsformulierung. Man bemerkt die Nähe der Zielfunktionswerte der Formulierungen der *Strukturdämpfung* [S], *Linearen Dämpfung* [1] und *Polinomialen Dämpfung* [2] für die ersten paar Iterationen. Dies deutet auf eine enge Nachbarschaft der Dämpfungsformulierungen hin. Im Falle der *Strukturdämpfung mit Limit* ist die relative Dichte noch nahe an der anfänglichen relativen Dichte  $\rho_{rel} = 0,3^{152}$ . Das heißt, dass hier das Limit der Dichte noch nicht

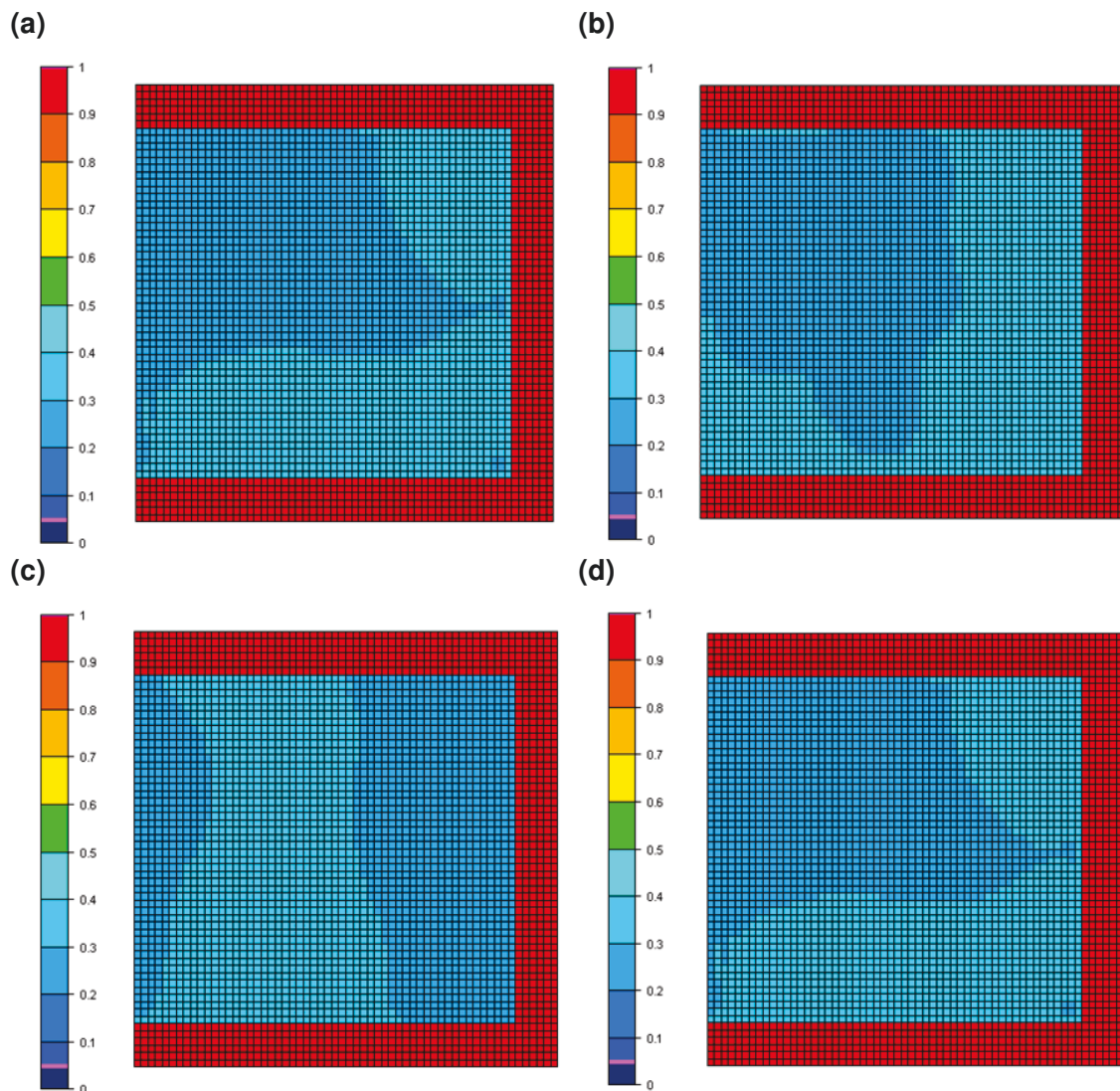
<sup>152</sup>Aus der Volumen-Nebenbedingung:  $V^* = 0,3 \cdot V^0$



**Abbildung 7.6** Vergleich der Konvergenz jedes Dämpfungsschemas

erreicht ist und die Dämpfungsformulierung der standardmäßigen Strukturdämpfung entspricht.

Allerdings beginnt die *Strukturdämpfung mit Limit* mit einem Zielfunktionswert, der mehr als 50 % von der *Strukturdämpfung* entfernt ist. In Abbildung 5.4 ist ein großer Unterschied beim Einfluss der Dämpfung vor allem für mittlere Werte der Dichte  $\rho$  zu erkennen. Die strukturelle Steifigkeit wird durch diese Dämpfungsformulierung stark erhöht. Diese Differenz ist auch in den Topologien nach der ersten Iteration zu erkennen (Abbildung 7.6).

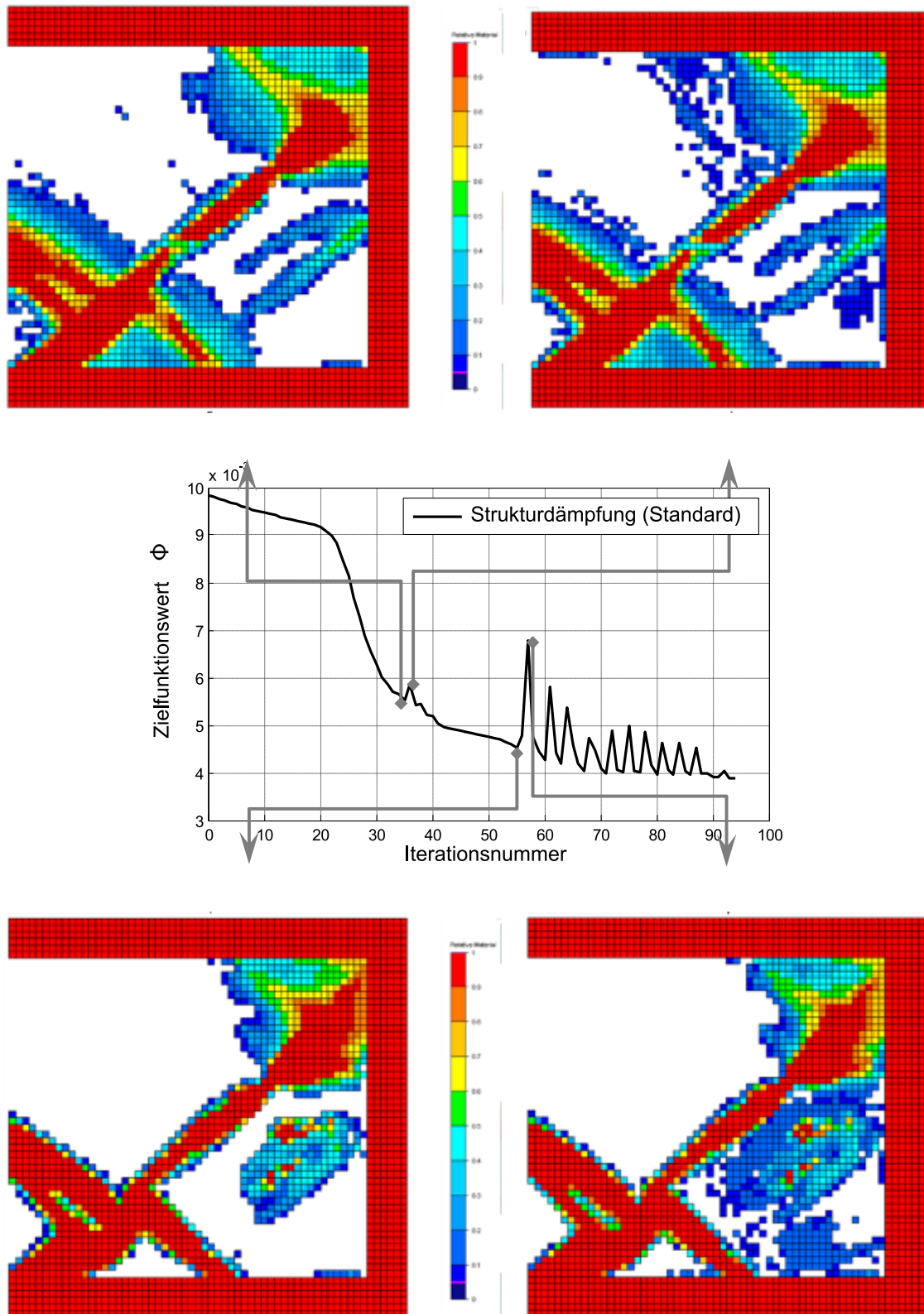


**Abbildung 7.7** Topologien nach der ersten Iteration für: (a) Strukturelle Dämpfung, (b) Lineare Dämpfung, (c) Polinomiale Dämpfung und (d) Strukturdämpfung mit Limit

Eine weitere Auffälligkeit ist das sprunghafte Verhalten der Zielfunktion bei Iteration 35 und 36, und dann wieder – noch ausgeprägter – nach Iteration 55 (siehe Abbildung 7.8).

Hier erkennt man Bereiche der Topologie, die in ihrer Materialverteilung über die Iterationen hinweg sehr stark schwanken. Dies deutet auf plötzlich erhöhte Vibrationen in diesen Bereichen und damit die Erzeugung von lokalen Moden in diesen Bereichen hin. Dieses Verhalten wird mit dem Einsatz einer der zusätzlichen Dämpfungsformulierungen unterdrückt, wenn auch nicht komplett verhindert.





**Abbildung 7.8** Strukturelles Dämpfungsschema, sprunghaftes Verhalten der Zielfunktion

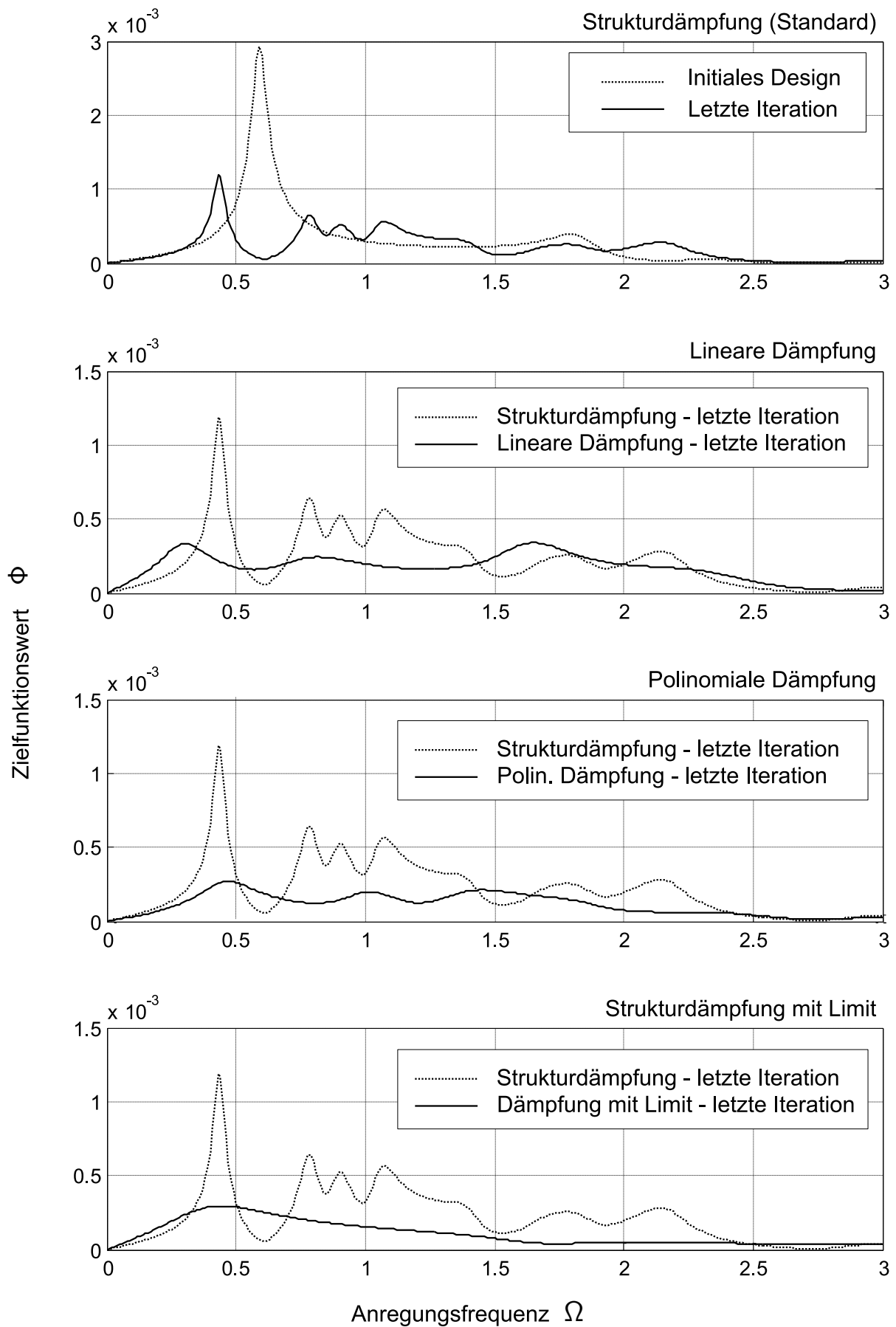
## Frequenzgang

Die Diagramme der Frequenzgänge der Zielfunktion für jede Dämpfungsformulierung finden sich in Abbildung 7.9. Die letzte Iteration der standardmäßigen Strukturdämpfung wird mit dem initialen Design verglichen. Anschließend werden alle anderen Dämpfungsformulierungen mit dieser Referenzlösung verglichen. Im Falle der standardmäßigen Strukturdämpfung erhält man ein Enddesign mit zugehörigem Frequenzgang, das mehr abdeckt als die ursprüngliche alleinige erste Eigenfrequenz (siehe Abschnitt 7.1) im Frequenzbereich  $\Omega = [0.0; 1.5]$ .

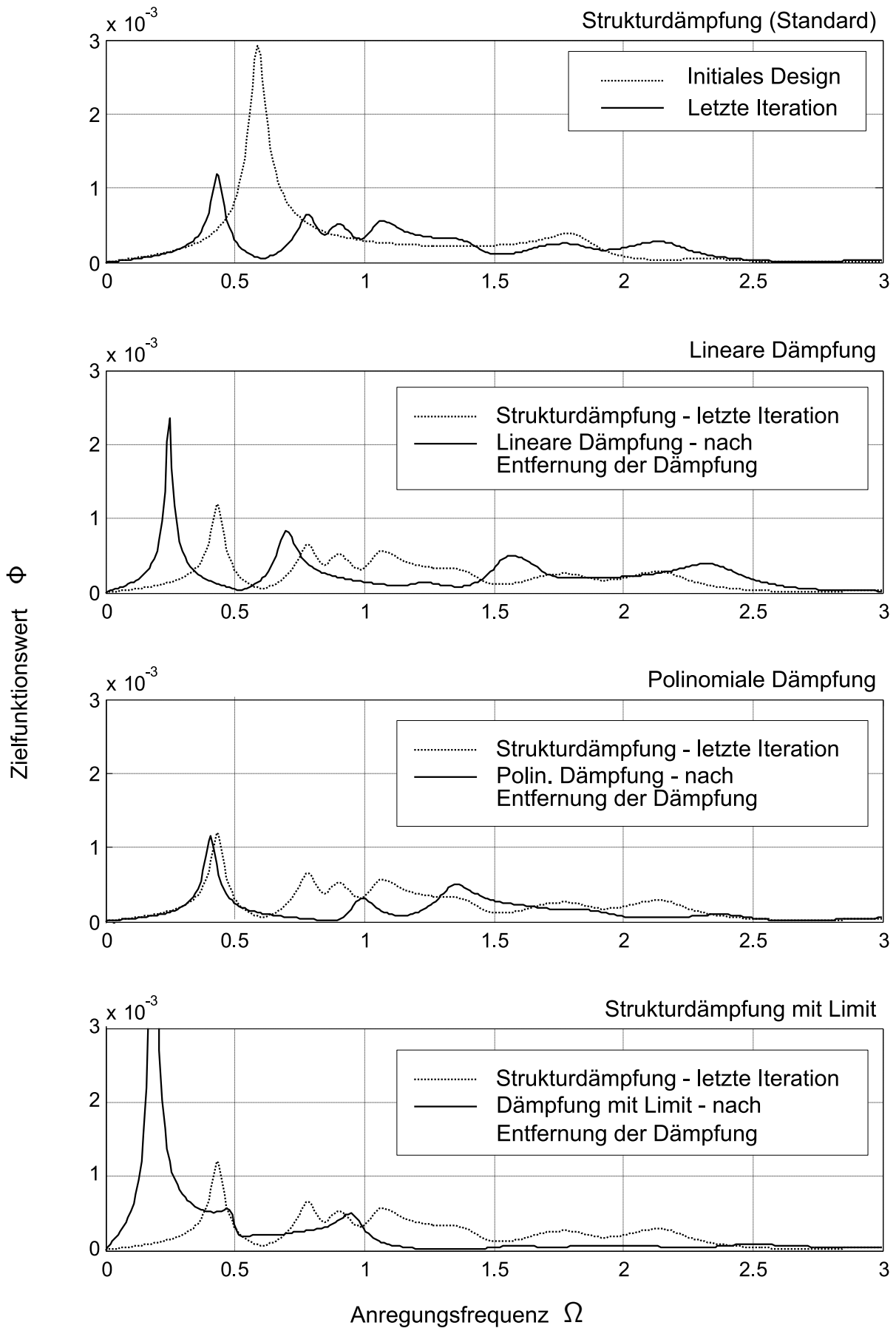
Die zusätzlichen Dämpfungsformulierungen führen zu einem relativ ausgeglichenen Frequenzgang. Zusätzlich führen sie zu einer mittleren Verringerung des Frequenzgangs. Die *Strukturdämpfung mit Limit* zeigt sogar nur eine – eher niedrige – Eigenfrequenz des Enddesigns im betrachteten Frequenzbereich.

Die Dämpfungen müssen natürlich noch aus dem Design der letzten Iteration entfernt werden. Die Berechnung dieser Modelle führt zu den Frequenzgängen in Abbildung 7.10.

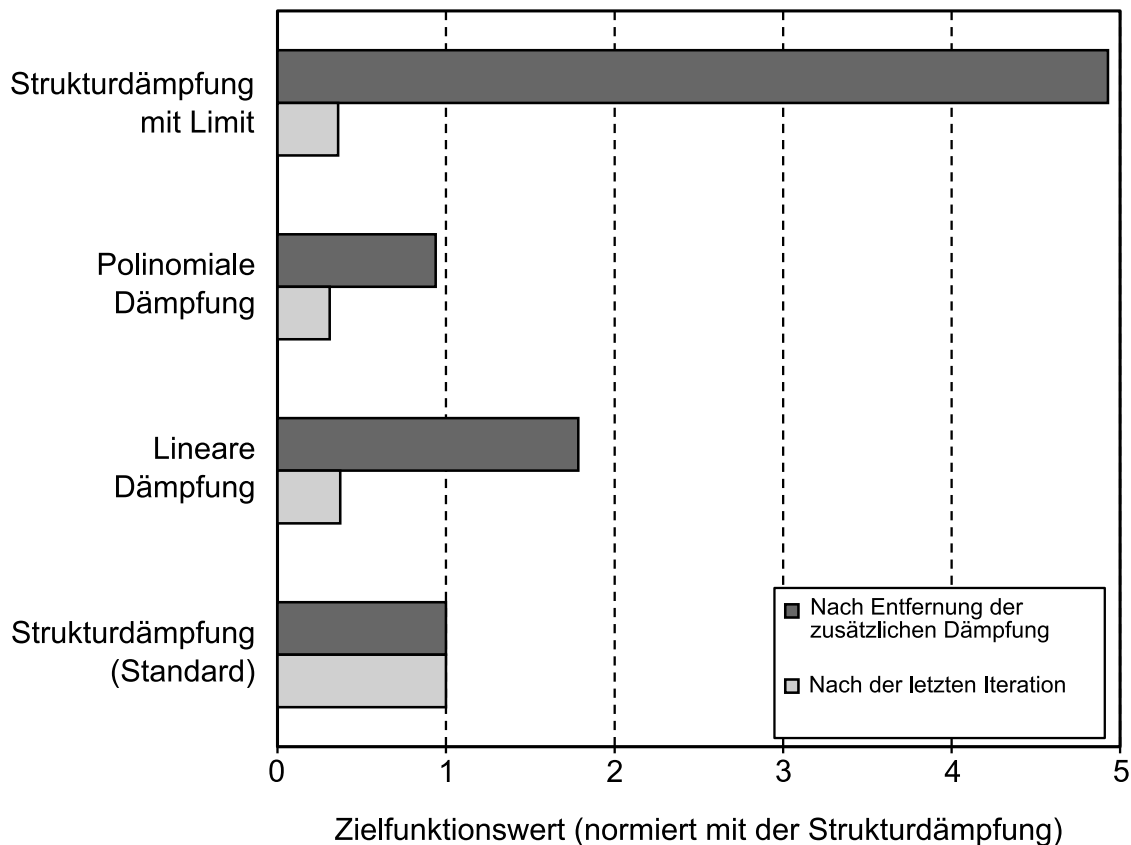
Das erste Diagramm stellt aus Gründen der Vergleichbarkeit den gleichen Zusammenhang wie Abbildung 7.9 dar. Man kann eine erhebliche Veränderung des Frequenzgangs im Vergleich zu den gedämpften Modellen (Abbildung 7.9) erkennen. Auch die Eigenfrequenzen sind leicht (*Polinomiale Dämpfung*) bzw. deutlich (*Strukturdämpfung mit Limit*) verschoben. Allerdings produziert die *Polinomiale Dämpfung* ähnliche und sogar leicht bessere Ergebnisse als die Strukturdämpfung. Die fundamentalen Eigenfrequenzen sind nahezu identisch und die folgenden Eigenfrequenzen liegen weiter auseinander als bei der Strukturdämpfung. Betrachtet man die Zielfunktionswerte nach der letzten Iteration und nach dem Entfernen der Dämpfung in Abbildung 7.10, erkennt man ein gutes Ergebnis für die *Polinomiale Dämpfung* gegenüber den anderen Dämpfungsformulierungen, einschließlich der standardmäßigen Strukturdämpfung.



**Abbildung 7.9** Frequenzgang mit Vergleich der letzten Iteration zum initialen Design



**Abbildung 7.10** Frequenzgang mit Vergleich der letzten Iteration ohne Dämpfung zum initialen Design



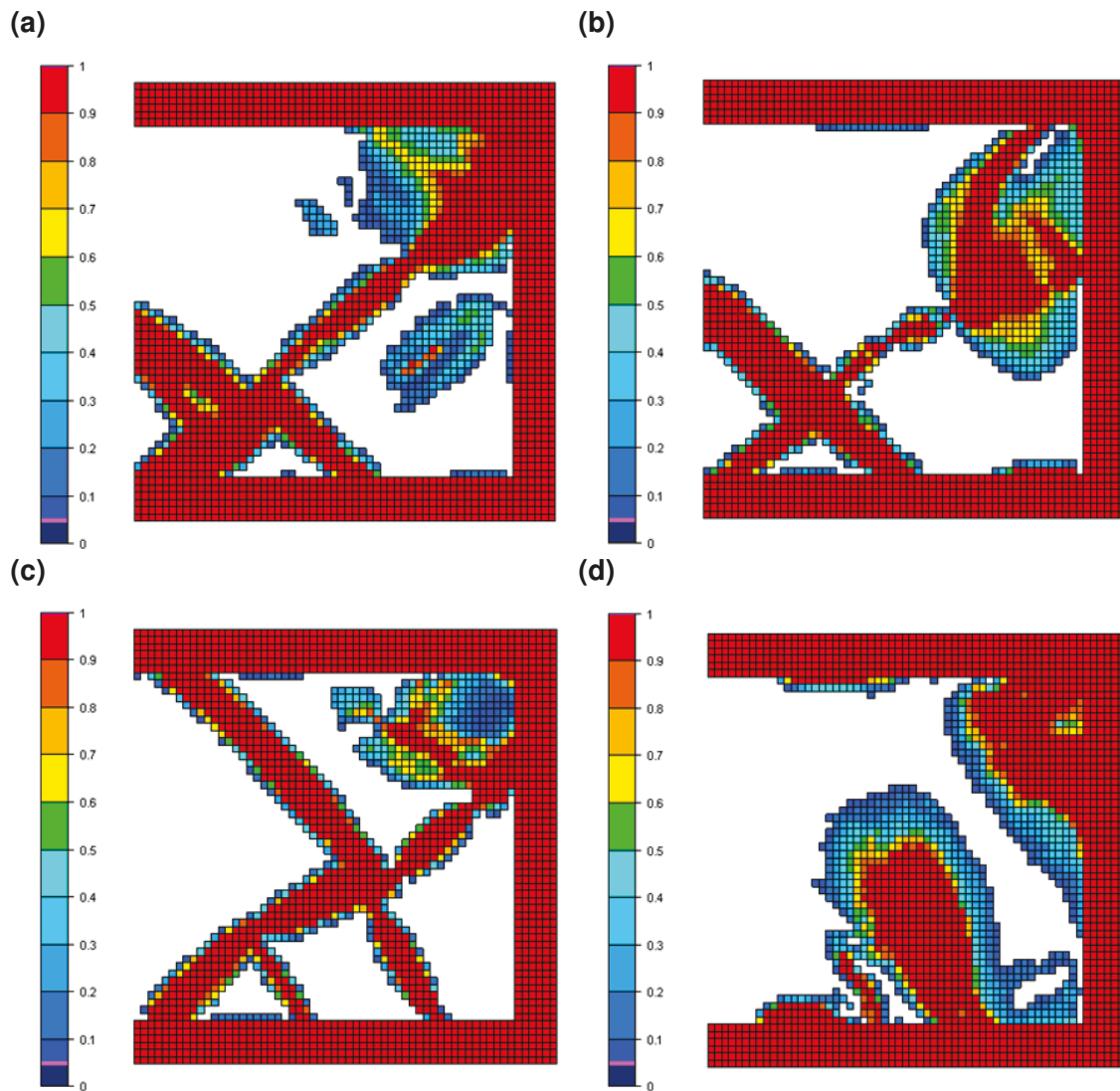
**Abbildung 7.11** Vergleich der Zielfunktionswerte für untersuchte Dämpfungsschemata

## Topologien

Die Topologien nach der letzten Iteration für die unterschiedlichen Dämpfungsformulierungen sind in Abbildung 7.12 gegeben. Bei der Strukturdämpfung (a) kann man eine akzeptable Materialverteilung mit relativ gut abgegrenzten Schwarz/Weiß-Bereichen der Dichte erkennen. Es gibt jedoch noch einige Bereiche mit Zwischenmaterial nahe am Punkt der Anregung und eine Ansammlung von Material in der oberen rechten Ecke, die als eine Art von Tilgergewicht zu wirken scheint. Die Materialverteilung für die *Lineare Dämpfung* (b) sieht ähnlich wie das Strukturdämpfungsergebnis aus. Jedoch ist die Materialanhäufung auf der rechten Seite in diesem Fall noch ausgeprägter.

Die *Polinomiale Dämpfung* (c) erzeugt eine Fachwerkstruktur mit einer kleineren Materialakkumulation in der oberen rechten Ecke.

Die Topologie der *Strukturdämpfung mit Limit* (d) besteht hauptsächlich aus zwei großen Materialanhäufungen in der oberen rechten Ecke und der unteren Mitte. Alle Formulierungen erzeugen ein Tilgergewicht in der oberen rechten Ecke.



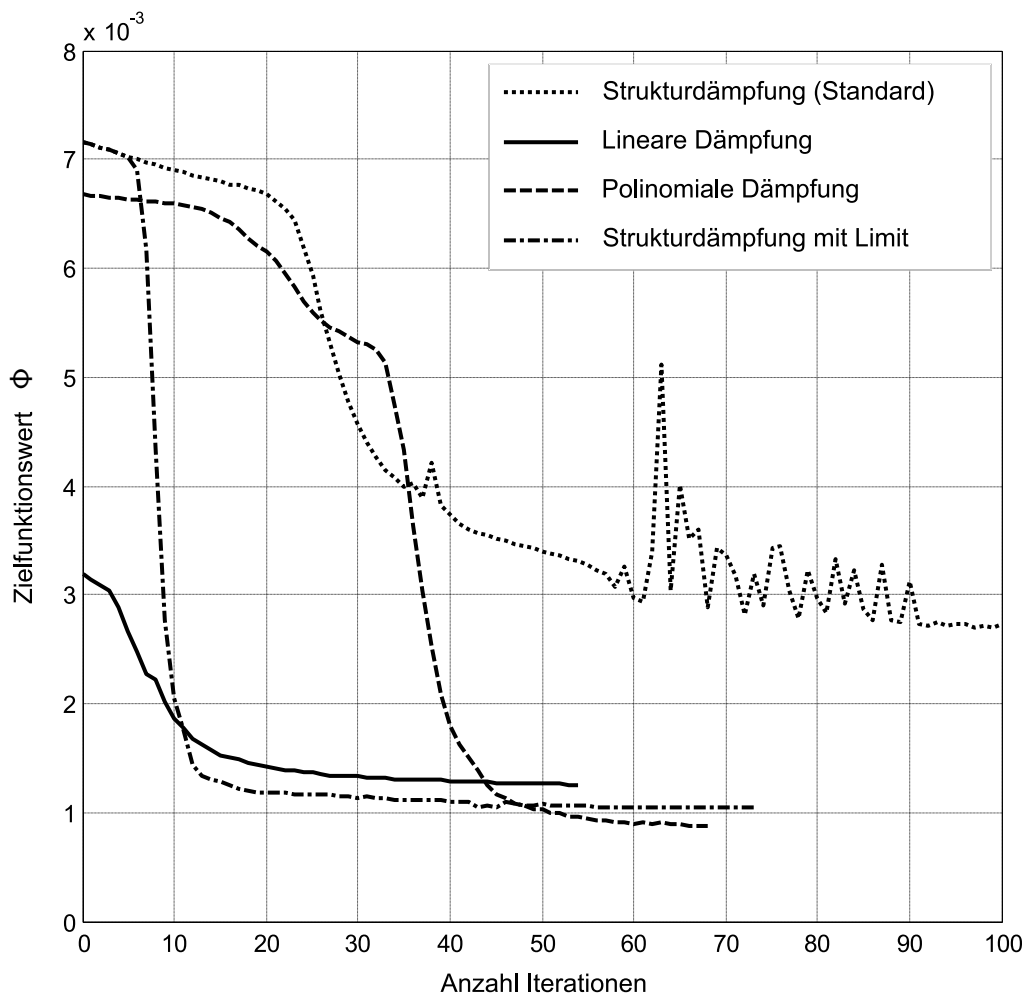
**Abbildung 7.12** Topologien nach der letzten Iteration für: (a) Strukturelle Dämpfung, (b) Lineare Dämpfung, (c) Polinomiale Dämpfung und (d) Künstliche Dämpfung 3

## Szenario 2

In diesem Abschnitt wird das Problem in Szenario 2 näher untersucht. Hierbei wird ein breiterer Frequenzbereich mit mehreren Eigenfrequenzen betrachtet.

### Konvergenz

Die Konvergenz dieses Szenarios (siehe Abbildung 7.13) sieht der von Szenario 1 sehr ähnlich (Abbildung 7.6). Die Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz unterscheidet sich jedoch.



**Abbildung 7.13** Vergleich der Konvergenz jedes Dämpfungsschemas

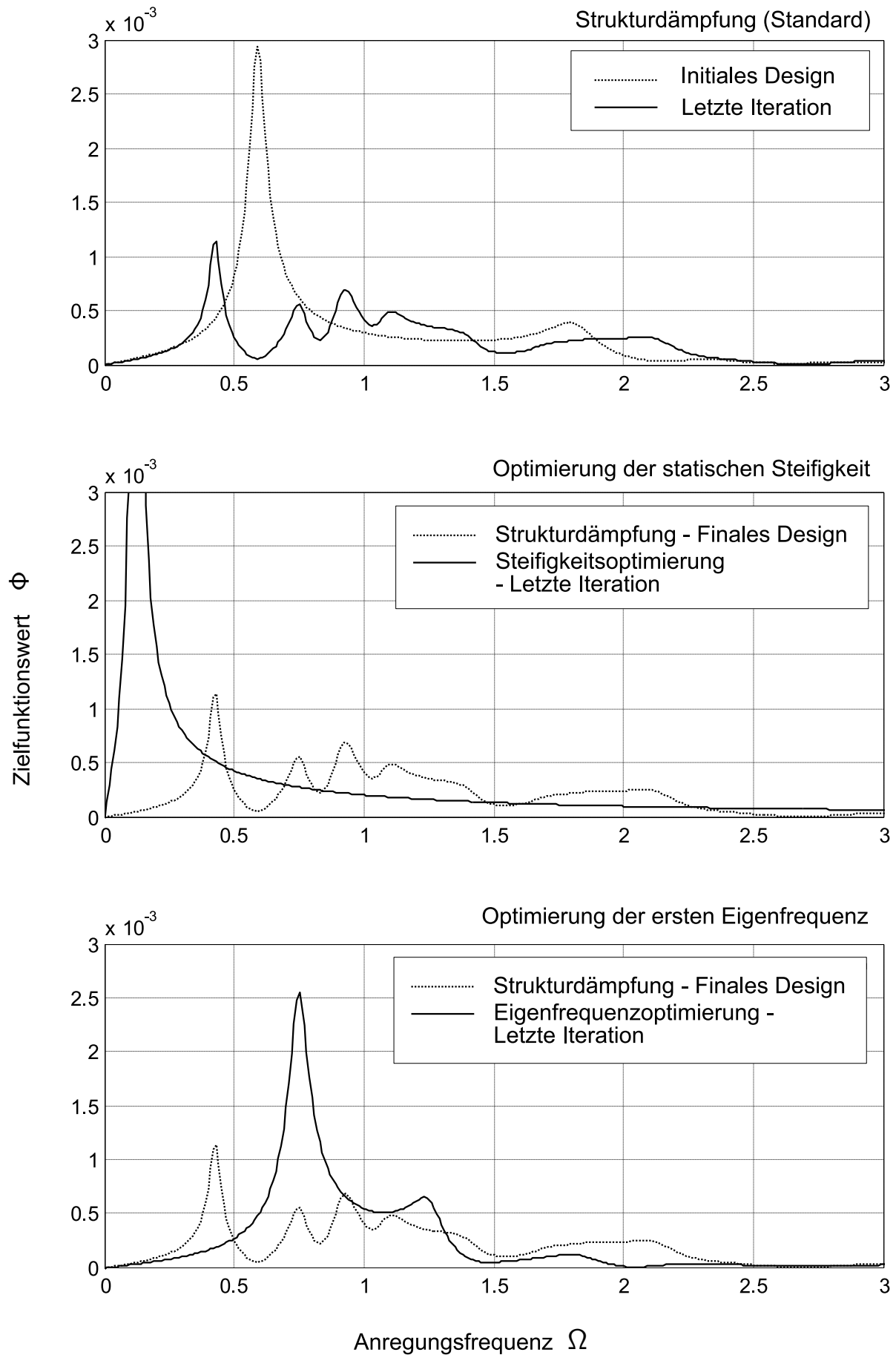
Die allgemeine Qualität der Konvergenz ist dennoch fast gleich. Dies liegt an der Verwendung einer Min-Max-Formulierung für die Zielfunktion (siehe Abschnitt 5.1.1). Die erste Eigenfrequenz dieses Designs ist sehr dominant (siehe Abbildung 7.14). Daher konzentriert sich die Optimierung im Wesentlichen auf die erste Eigenfrequenz, woraus sich der ähnliche Verlauf der Optimierung ergibt. Auch hier ist wieder das unruhige

Verhalten der Konvergenz der standardmäßigen Strukturdämpfung bei den Iterationen 38 und 58 zu erkennen. Dies liegt begründet in der zunehmenden Vibration in lokalen Bereichen mit niedrigen Dichten der Struktur und der damit verbundenen Ausbildung lokaler Moden.

### **Frequenzgang**

Bei diesem Szenario werden die Ergebnisse auch mit Topologien verglichen, die durch eine statische Nachgiebigkeitsoptimierung bzw. eine Eigenfrequenzoptimierung berechnet wurden. Die Designs der standardmäßigen Strukturdämpfung erzeugen einen gleichmäßig verteilten Frequenzgang mit mehreren, wenn auch niedrigeren Spitzen im betrachteten Frequenzbereich (siehe Abbildung 7.14). Die statische Nachgiebigkeitsoptimierung erzeugt ein Design mit einer sehr hohen Frequenzspitze, die zusätzlich zu niedrigeren Frequenzen verschoben ist. Dies ist für die hier zu bearbeitenden Probleme vollkommen ungeeignet. Das Design der Eigenfrequenzoptimierung führt zu einem Frequenzgang mit einer Eigenfrequenz, die zu höheren Werten verschoben ist und eine wesentlich höhere Spitzenamplitude besitzt.





**Abbildung 7.14** Frequenzgang mit Vergleich von statischer Nachgiebigkeitsoptimierung und Eigenfrequenzoptimierung

Betrachtet man den Frequenzgang der letzten Iteration für die zusätzlichen Dämpfungsformulierungen in Abbildung 7.15, sind die Frequenzgänge der zusätzlichen Dämpfung relativ gut homogenisiert im Vergleich zur Strukturdämpfung.

Allerdings besitzen diese Modelle wieder eine etwas zu hohe Steifigkeit durch die Zusatzdämpfung. Deshalb muss diese noch entfernt werden. Die Ergebnisse dazu sind in Abbildung 7.16 dargestellt.

Dabei werden vor allem die lineare Dämpfung und die polinomiale Dämpfung sehr viel schlechter. Da nun die zusätzliche Steifigkeit vor allem in den weißen Elementen entfernt ist, sind die Spitzen in diesen beiden Kurven sehr hoch. Im Gegensatz dazu zeigt die Strukturdämpfung mit Limit eine relativ enge Charakteristik zur standardmäßigen Strukturdämpfung. Die grundlegende Eigenfrequenz ist fast die gleiche, und die nächsten Eigenfrequenzen liegen weiter auseinander.

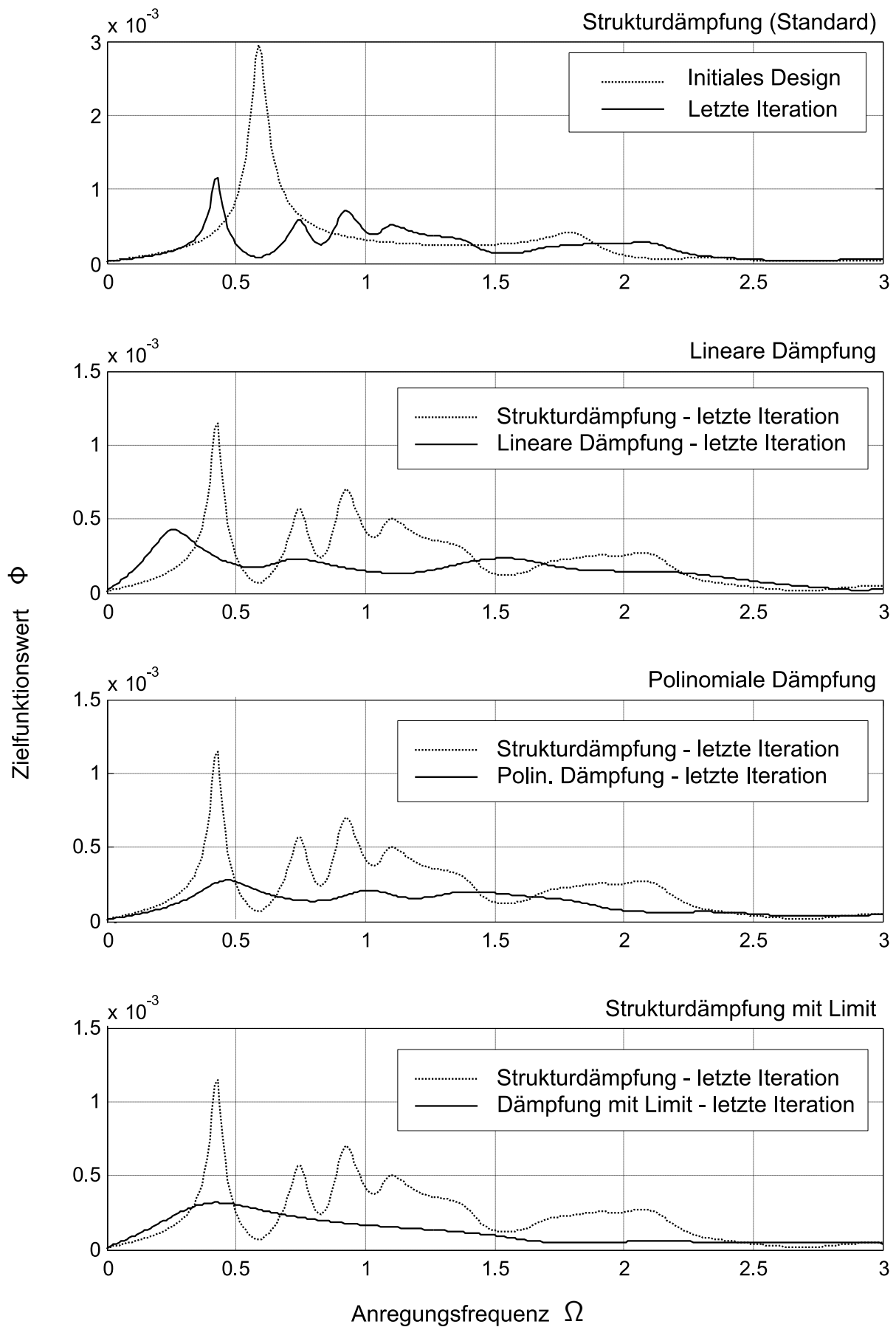
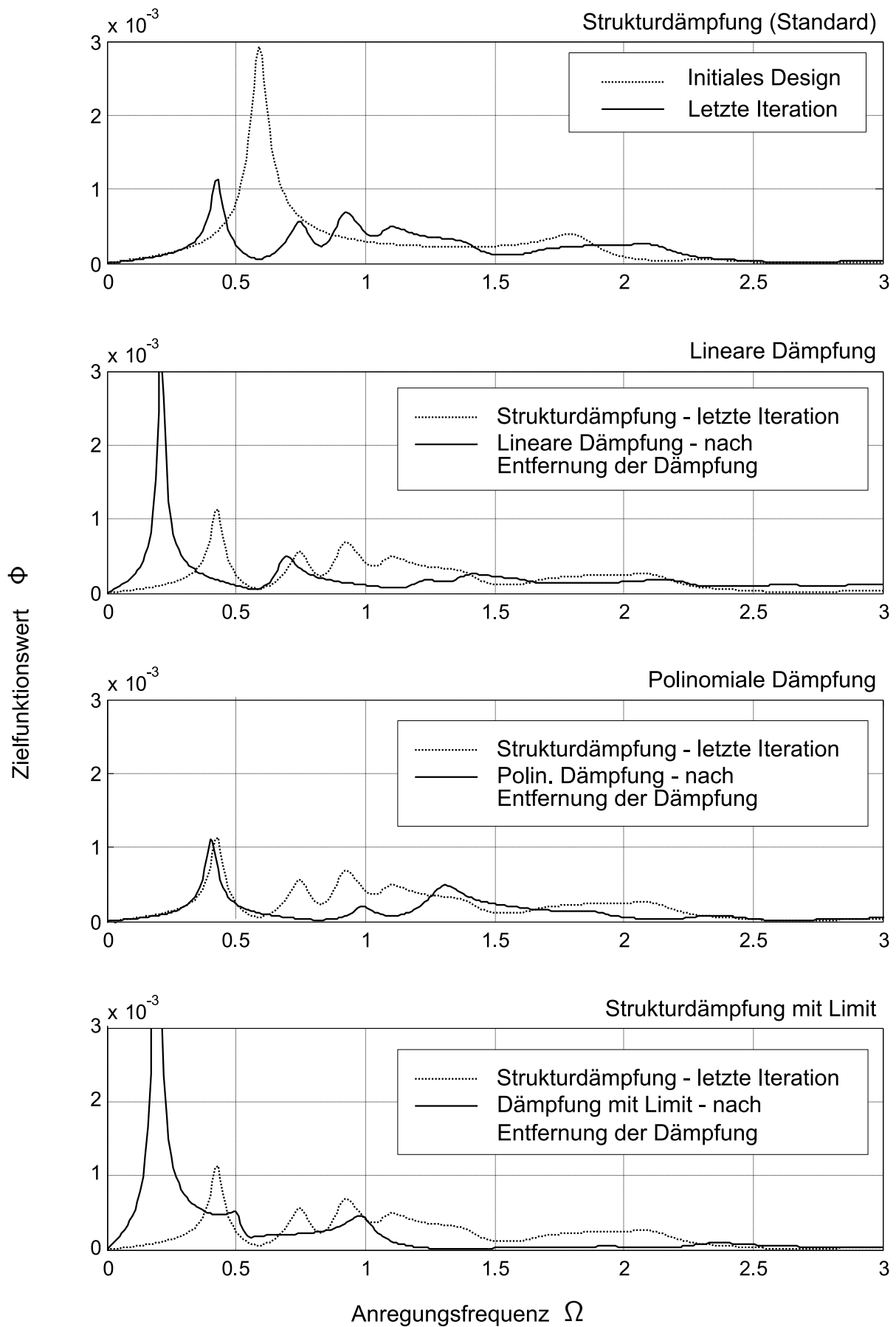


Abbildung 7.15 Frequenzgang mit Vergleich der Dämpfungsformulierungen



**Abbildung 7.16** Frequenzgang mit Vergleich der Dämpfungsformulierungen mit entfernter Zusatzdämpfung

In diesem Szenario wurde ein weiterer Test zur Validierung der Leistungsfähigkeit durchgeführt. Ein Glättungsfilter wird verwendet, um eine vollständige Schwarz/Weiß-Lösung ohne Zwischenwerte der Dichte zu erreichen. Dies ist das bevorzugte Verfahren für die Weiterverwendung der Ergebnisse einer Topologieoptimierung im Produktentwicklungszyklus. Die geglättete Topologie dient als Basis für weitere Gestaltungsentwürfe und kann problemlos in bestehende CAD-/CAM-Systeme integriert werden.

Die Ergebnisse dieses Tests sind in Abbildung 7.17 und 7.18 gegeben. Die Strukturdämpfung zeigt im Vergleich zum nicht-geglätteten Modell eine etwas andere Charakteristik im Frequenzgang. Jedoch sind die ersten Eigenfrequenzen beider Modelle nahe beieinander, so dass das allgemeine Verhalten des Designs ähnlich sein sollte.

Die Eigenschaften des Designs aus der statischen Nachgiebigkeitsoptimierung haben sich völlig verändert (vgl. Abbildung 7.14 und Abbildung 7.17). Die erste Eigenfrequenz wird nach oben verschoben und ihre Amplitude ist erheblich geringer. Die Merkmale des Designs der Eigenfrequenzoptimierung ändern sich nicht besonders; die Eigenfrequenzen sind ähnlich. Allerdings ist das Niveau des Frequenzgangs höher als das Niveau des ungeglätteten Modells.

Die Merkmale der Frequenzgänge für die zusätzlichen Dämpfungsformulierungen sind sehr nahe an den ungeglätteten Modellen, von denen die Dämpfung entfernt wurde (vgl. dazu Abbildung 7.16 und Abbildung 7.18).

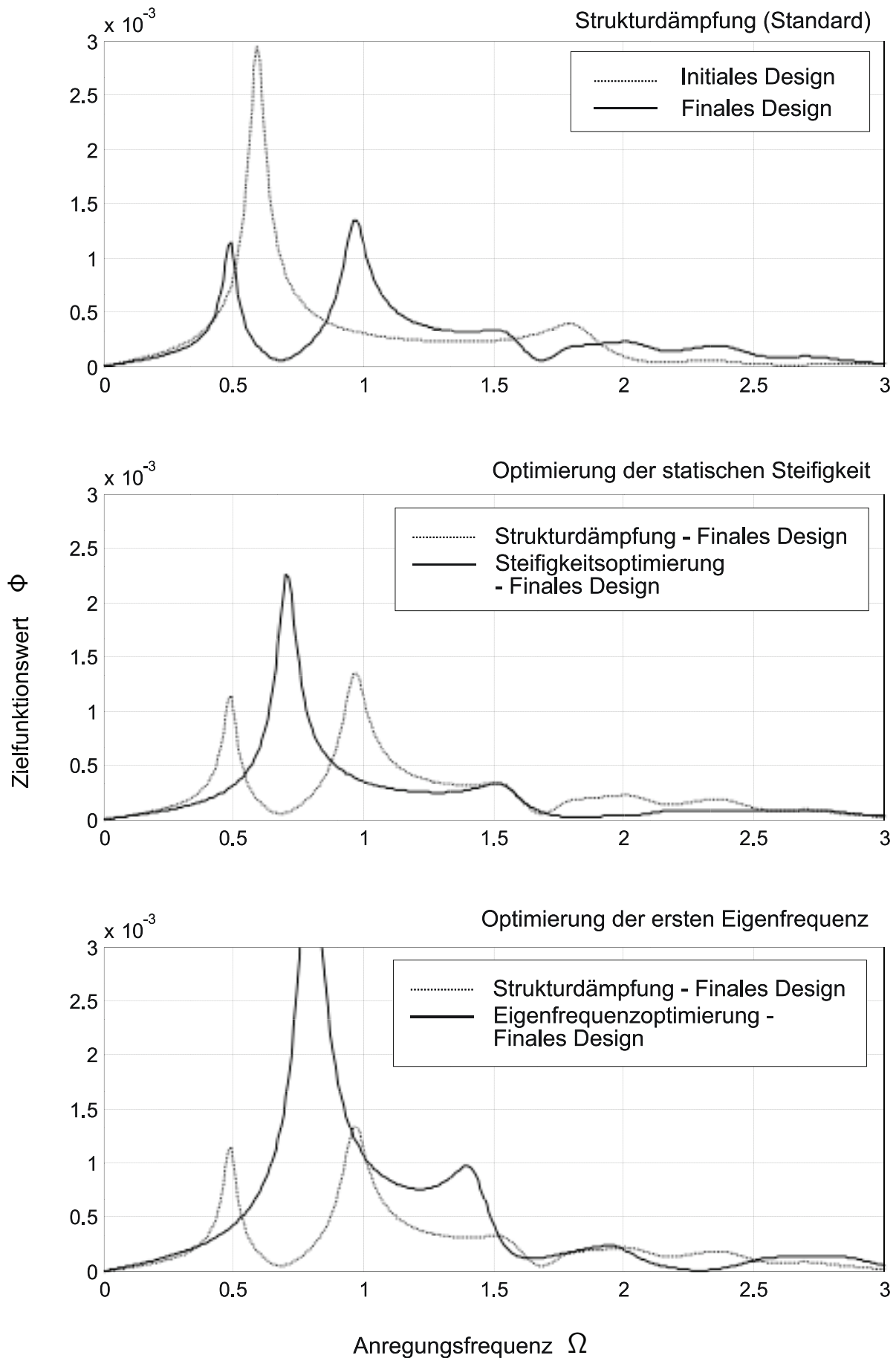
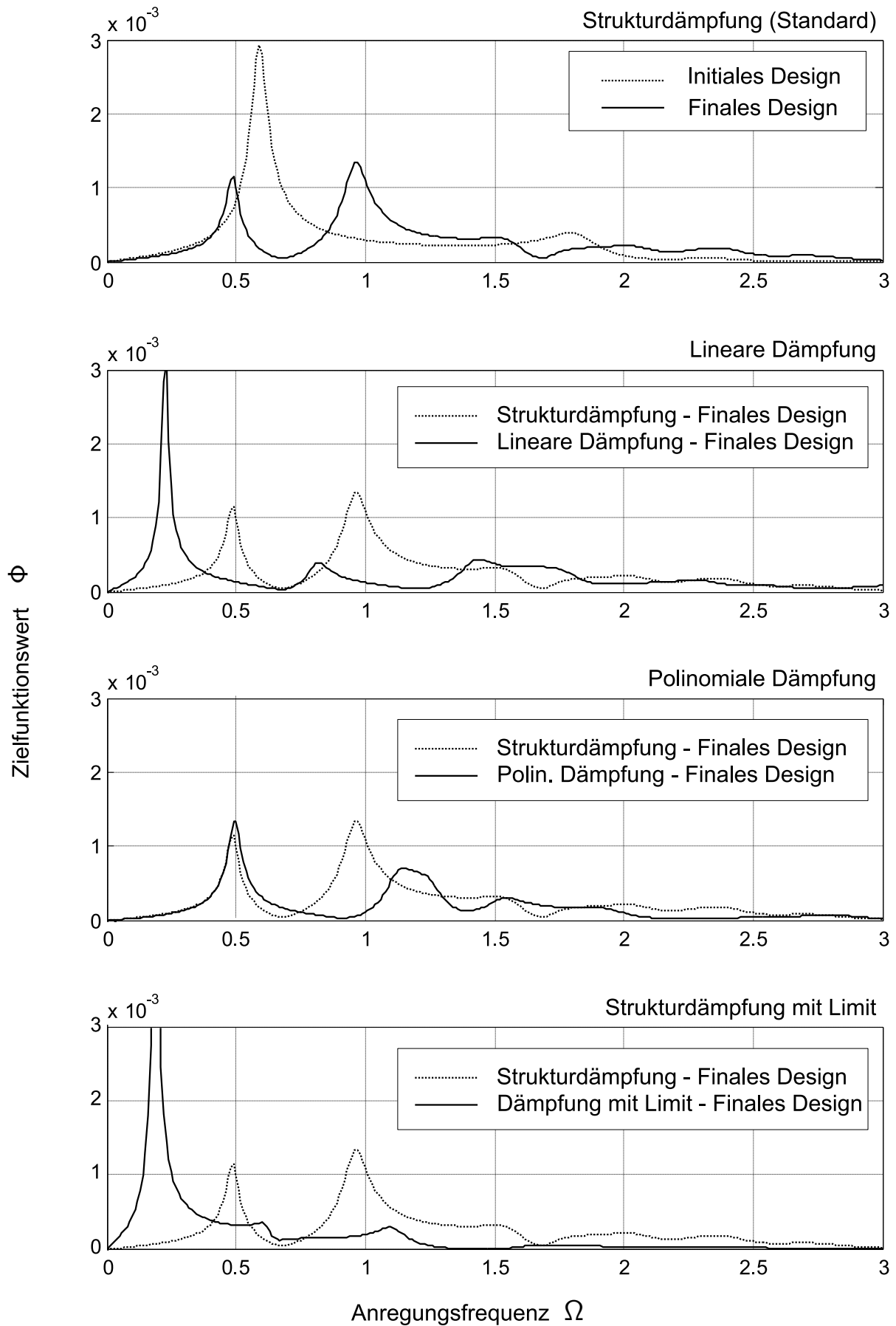
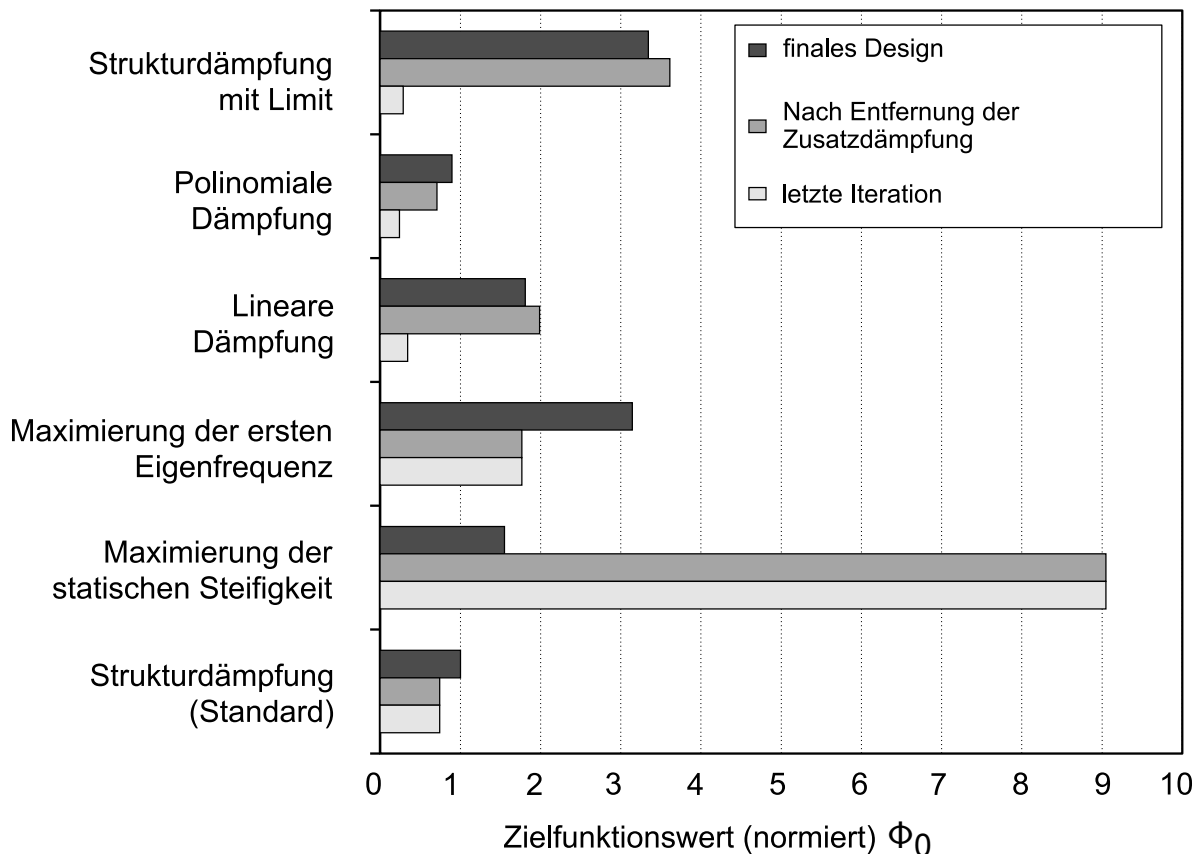


Abbildung 7.17 Frequenzganga mit Vergleich von statischer Nachgiebigkeitsoptimie-



**Abbildung 7.18** Frequenzgang mit Vergleich der Dämpfungsformulierungen der geglätteten Ergebnisse



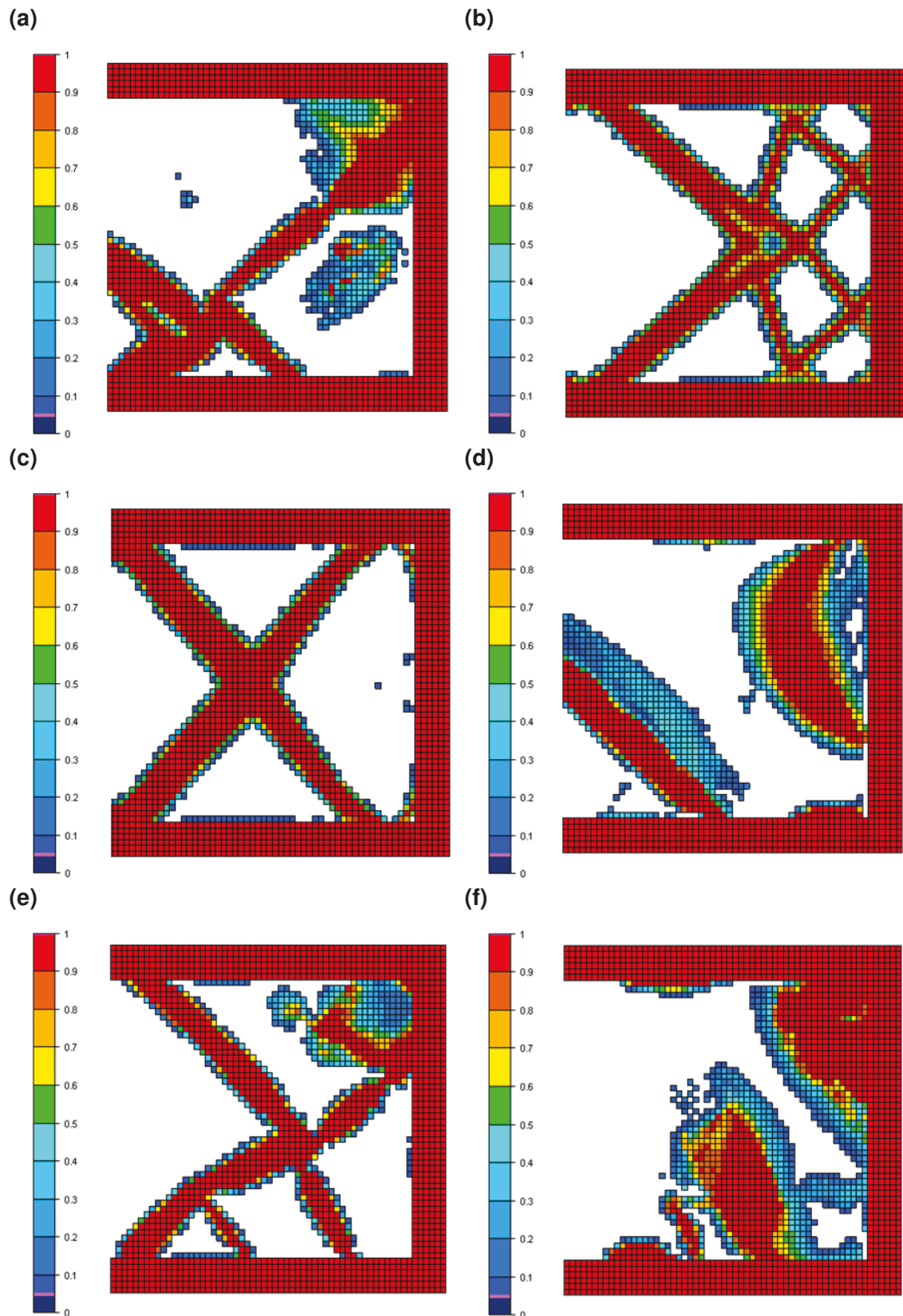
**Abbildung 7.19** Zielfunktionswerte für jede Optimierung, skaliert auf das finale Design der standardmäßigen Strukturdämpfung

In Abbildung 7.19 werden die Zielfunktionswerte aller Optimierungen nach dem Entfernen der zusätzlichen Dämpfung und in ihrem geglätteten Design verglichen. Dies zeigt die *Polinomiale Dämpfung* Formulierung nahe an der und sogar ein wenig besser als die standardmäßige Strukturdämpfung. Alle anderen Formulierungen sind weit entfernt von diesen Werten, obwohl die Werte für die letzte Iteration jeweils niedrig sind. Ein interessanter Punkt ist der Wert für das geglättete Design der statischen Nachgiebigkeitsoptimierung. Diese ergibt ein sehr gutes Ergebnis im Vergleich zum ungeglätteten Modell.

## Topologien

Die Topologien nach der letzten Iteration für die unterschiedlichen Dämpfungsformulierungen sind in Abbildung 7.20 (d)-(f) gegeben. Auch hier sind Ähnlichkeiten zu Szenario 1 aufgrund der Dominanz der ersten Eigenfrequenz zu erkennen. Für die Strukturdämpfung (a) kann man eine akzeptable Materialverteilung erkennen. Es gibt jedoch noch einiges Zwischenmaterial nahe am Punkt der Anregung und eine Ansammlung von Material in der oberen rechten Ecke, die als eine Art von Tilger zu wirken scheint.



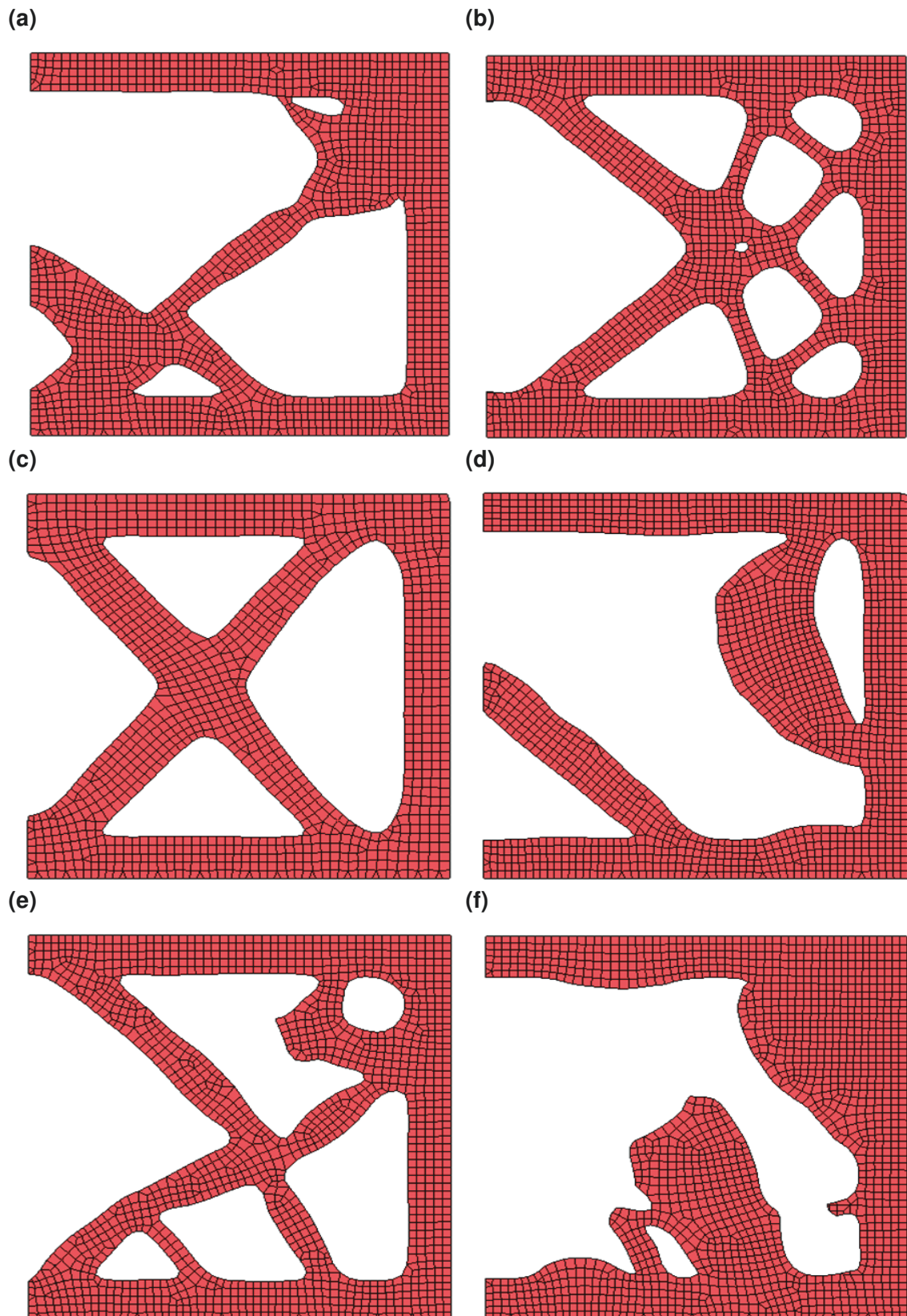


**Abbildung 7.20** Topologien nach der letzten Iteration für: (a) Strukturdämpfung, (b) statische Nachgiebigkeitsoptimierung, (c) Eigenfrequenzoptimierung, (d) Lineare Dämpfung, (e) Polinomiale Dämpfung und (f) Strukturdämpfung mit Limit

Die Designs aus der statischen Nachgiebigkeitsoptimierung (b) und Eigenfrequenzoptimierung (b) sind die bekannten Ergebnisse für derartige Optimierungen. Die Materialverteilung für die *Lineare Dämpfung* (d) zeigt einige Unterschiede zu der in Szenario 1. Das Design besteht hauptsächlich aus einer großen Verstärkungstraverse auf der unteren linken Seite und einer Materialanhäufung auf der oberen rechten Seite. Die *Polinomiale Dämpfung* (e) erzeugt ein Fachwerk mit einer leichten Materialanhäufung in der oberen rechten Ecke.

Die Topologie der *Strukturdämpfung mit Limit* (f) besteht hauptsächlich aus zwei großen Materialanhäufungen in der oberen rechten Ecke und der unteren Mitte. Alle Formulierungen erzeugen ein Tilgergewicht in der oberen rechten Ecke.

Nach dem Entfernen aller weißen Elemente, der Filterung von Elementen mit Zwischendichte und der Glättung der neuen resultierenden Topologie erhält man die Designs für jede Optimierung wie in Abbildung 7.21.

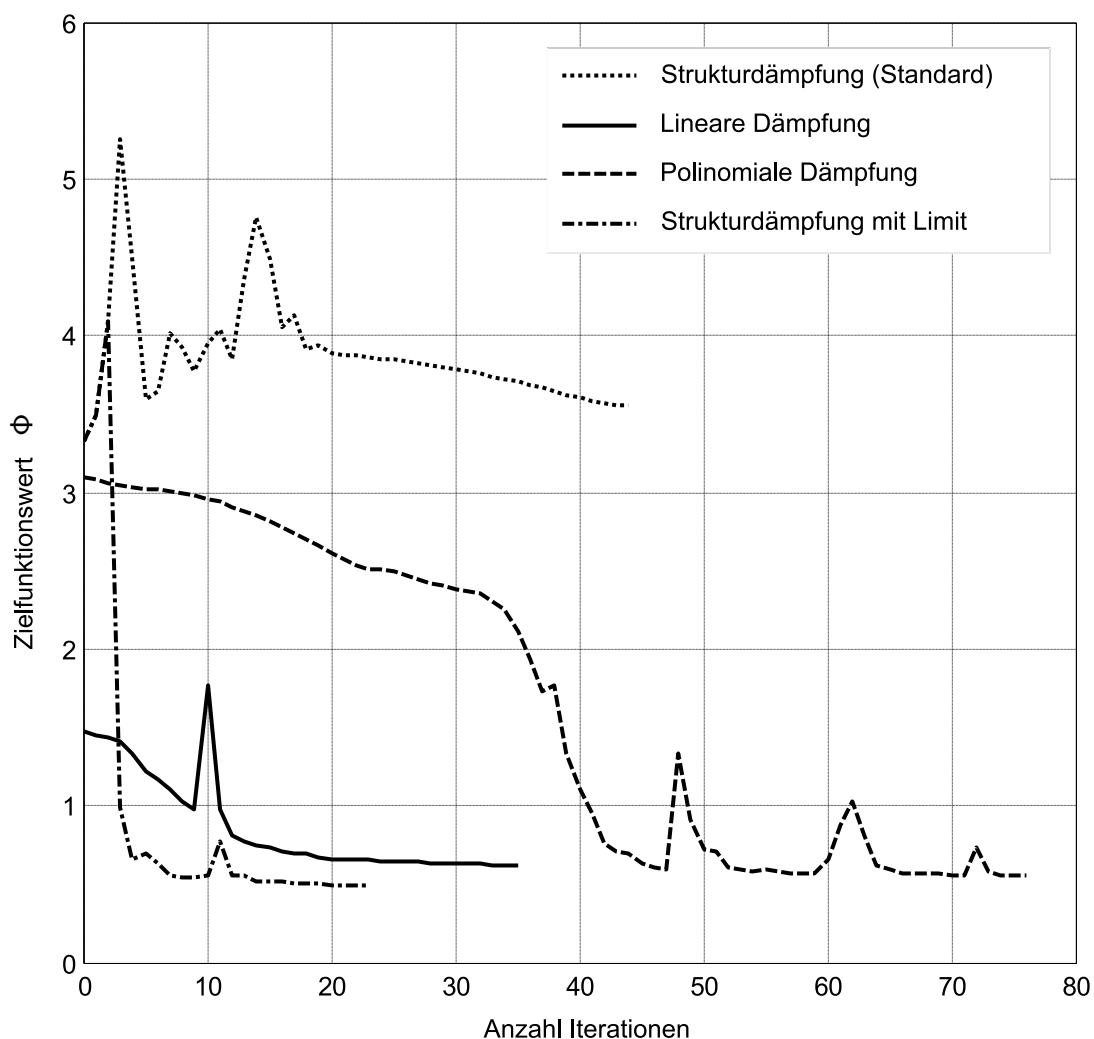


**Abbildung 7.21** Geglättete Topologien für: (a) Strukturdämpfung, (b) statische Nachgiebigkeitsoptimierung, (c) Eigenfrequenzoptimierung, (d) Lineare Dämpfung, (e) Polinomiale Dämpfung und (f) Strukturdämpfung mit Limit

## Szenario 3

### Niedrige Frequenzauflösung

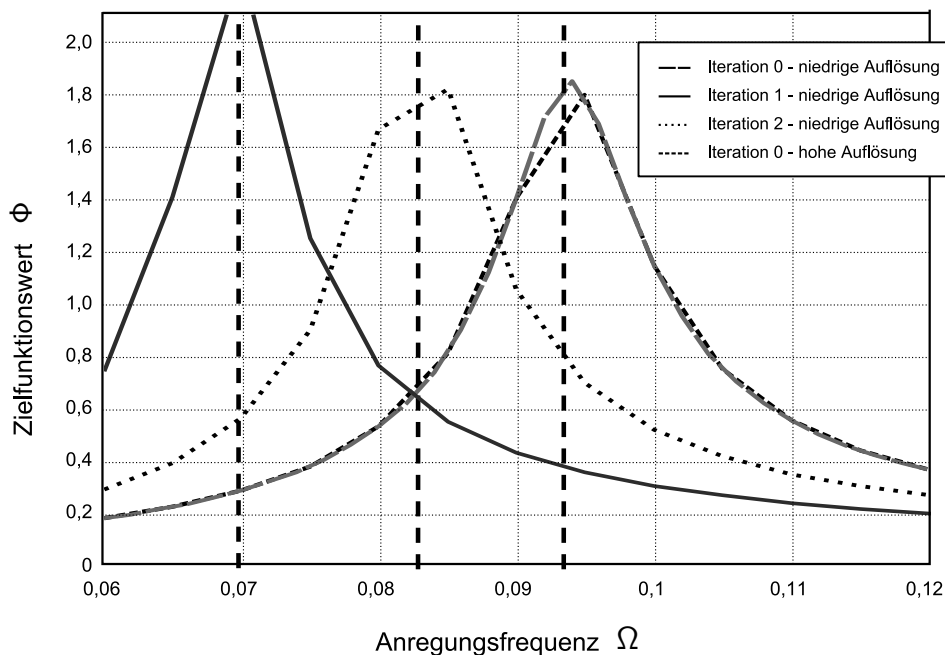
Für dieses Szenario wurde eine relativ geringe Auflösung der Frequenzinkremente im Vergleich zur Anzahl von Eigenfrequenzen im betrachteten Frequenzbereich verwendet, um die Grenzen der vorgestellten Methode auszutesten. Aus Sicht des numerischen Aufwands ist das Ziel der geringsten Frequenzauflösung natürlich sehr wichtig für reale Problemstellungen. Allerdings kann eine zu geringe Auflösung zu einigen Problemen führen, wie im Konvergenzdiagramm in Abbildung 7.22 zu sehen ist.



**Abbildung 7.22** Vergleich der Konvergenz jedes Dämpfungsschemas

Die Zielfunktion der *Strukturdämpfung* und der *Strukturdämpfung mit Limit* laufen hier direkt nach der ersten Iteration nach oben anstatt nach unten. Der Grund wird ersichtlich mit Blick auf die Frequenzgangdiagramme um die erste Eigenfrequenz der ersten paar Iterationen der *Strukturdämpfung* in Abbildung 7.23. Die niedrige Auflösung führt zu

einem Fehler bei der Abbildung der höchsten Frequenzspitzen. Ein Vergleich mit einer hohen Auflösung zeigt einen genaueren Treffer der höchsten Frequenzspitzen. Daher berechnet der Optimierungsalgorithmus ein verbessertes Design in einem schlechten Modell und der Wert der Zielfunktion ist nach der nächsten Iteration höher. Dieses Problem geht sogar so weit, dass das Ergebnis der Optimierung mit einem höheren Wert für die Zielfunktion als die anfängliche Gestaltung endet.



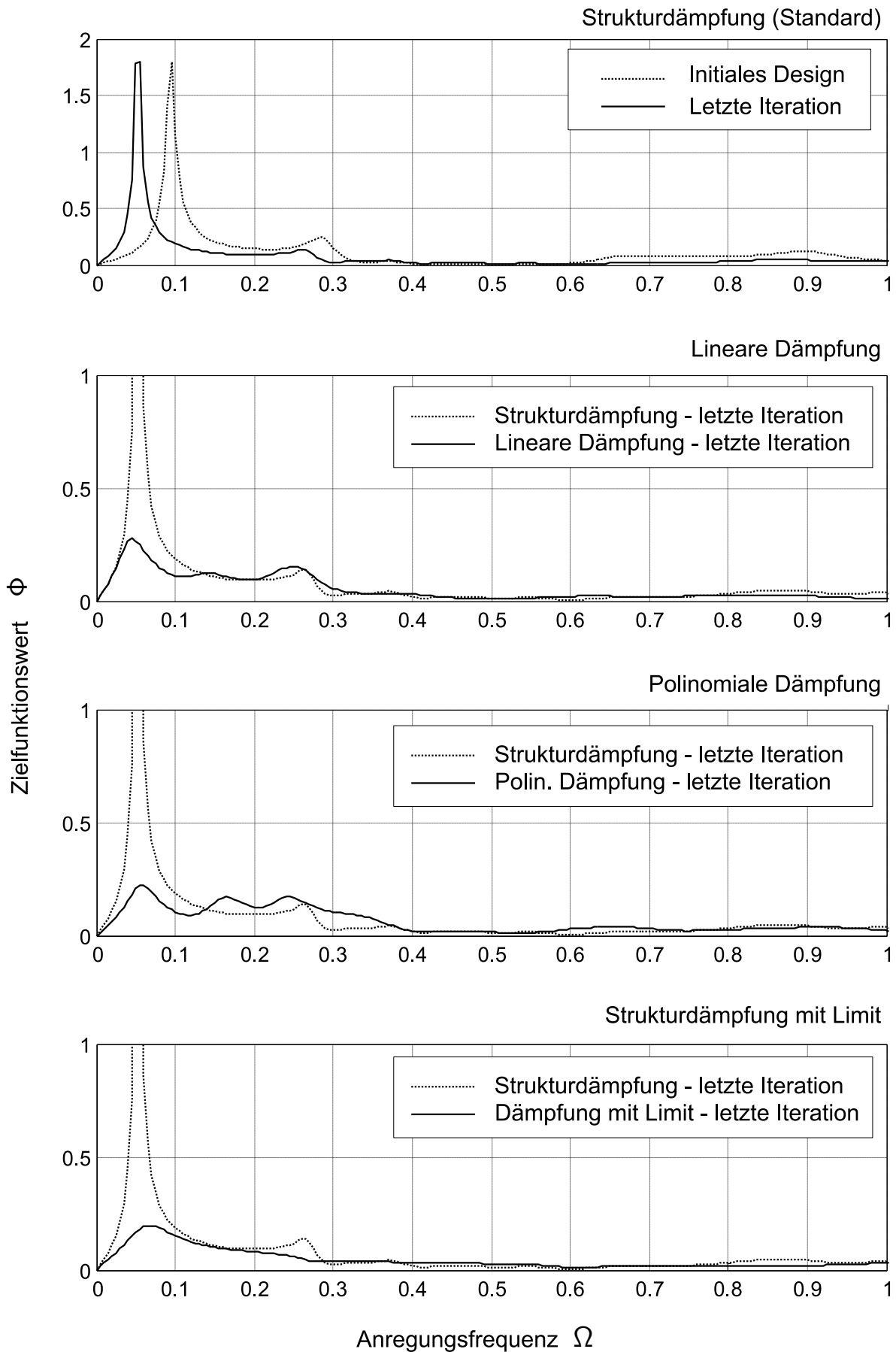
**Abbildung 7.23** Vergleich der Konvergenz jedes Dämpfungsschemas

Die *Lineare Strukturdämpfung* und *Polinomiale Dämpfung* scheinen dieses Problem besser zu bewältigen, auch mit der geringeren Anzahl von Frequenzinkrementen. Aber auch diese Dämpfungen sind nicht ohne Probleme und zeigen ein paar Spitzen nach Iteration 9 und Iteration 48. Diese Spitzen sind aber nicht in der geringeren Frequenzauflösung begründet, sondern wiederum in der Bildung lokaler Moden in Bereichen niedriger Dichte.

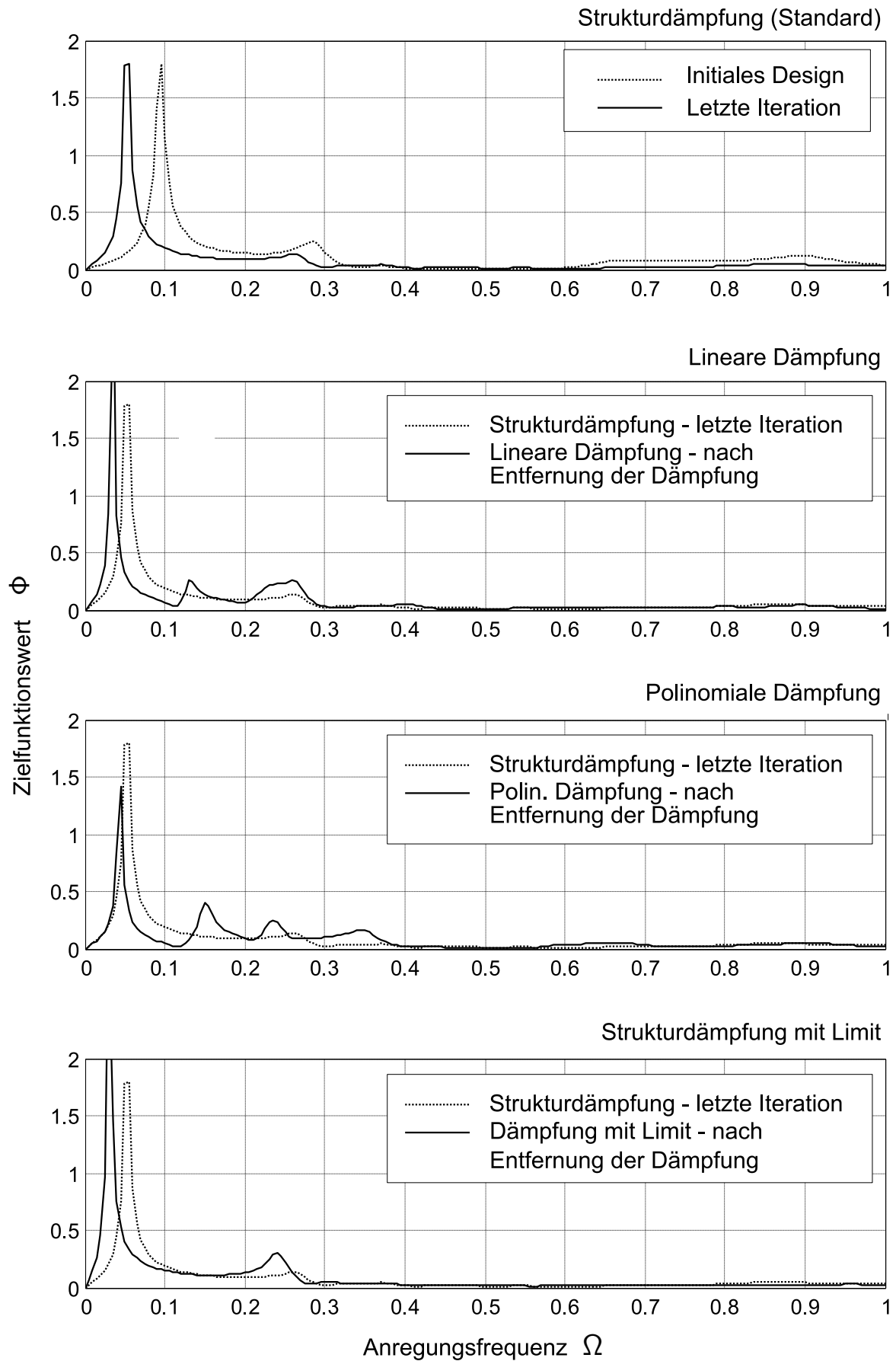
Der Frequenzgang der standardmäßigen *Strukturdämpfung* (Abbildung 7.24) zeigt somit keine Verbesserung der resultierenden Designs gegenüber dem ursprünglichen Entwurf. Wiederum zeigen die zusätzlichen Dämpfungsformulierungen ein gutes Ergebnis in der letzten Iteration.

Dennoch müssen für eine Vergleichbarkeit die Ergebnisse mit entfernten zusätzlichen Dämpfungen angeschaut werden (siehe Abbildung 7.25).

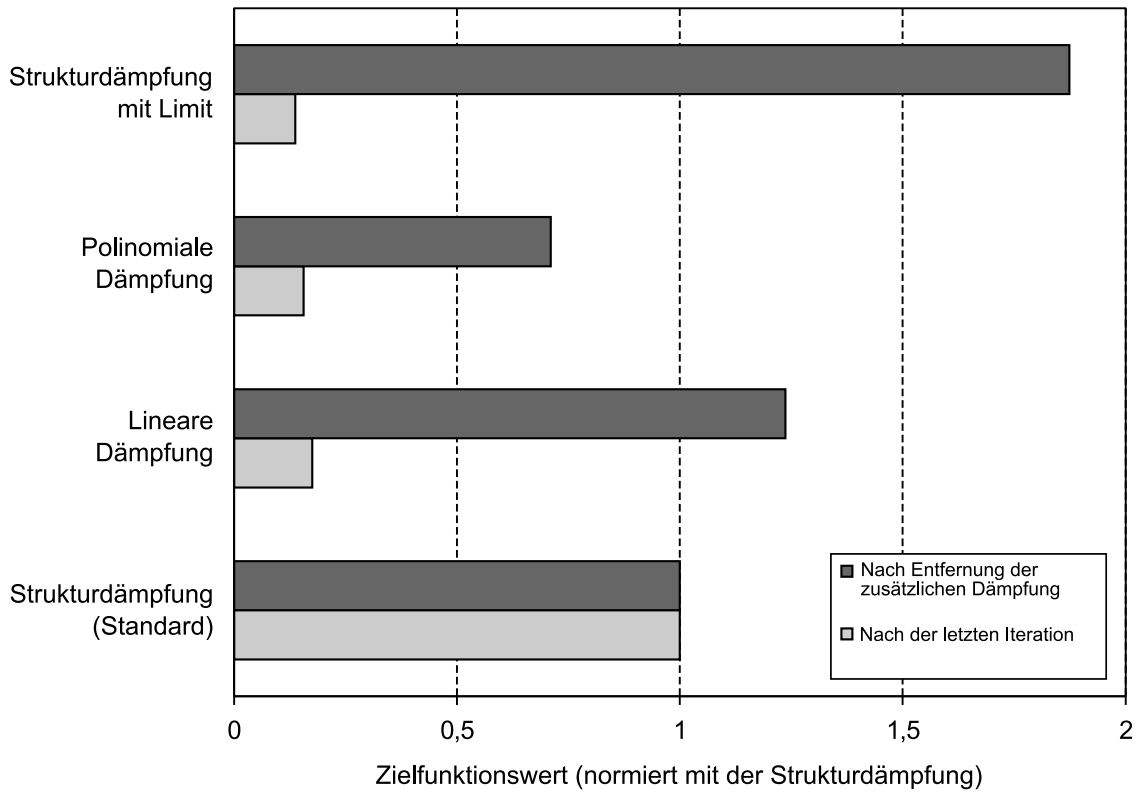
Hier kommen die Ergebnisse nahe an die der *Strukturdämpfung*. Nur die *Strukturdämpfung mit Limit* zeigt eine viel höhere Spitze. Die *Polinomiale Dämpfung* liefert die



**Abbildung 7.24** Frequenzgang mit Vergleich der letzten Iteration zum initialen Design



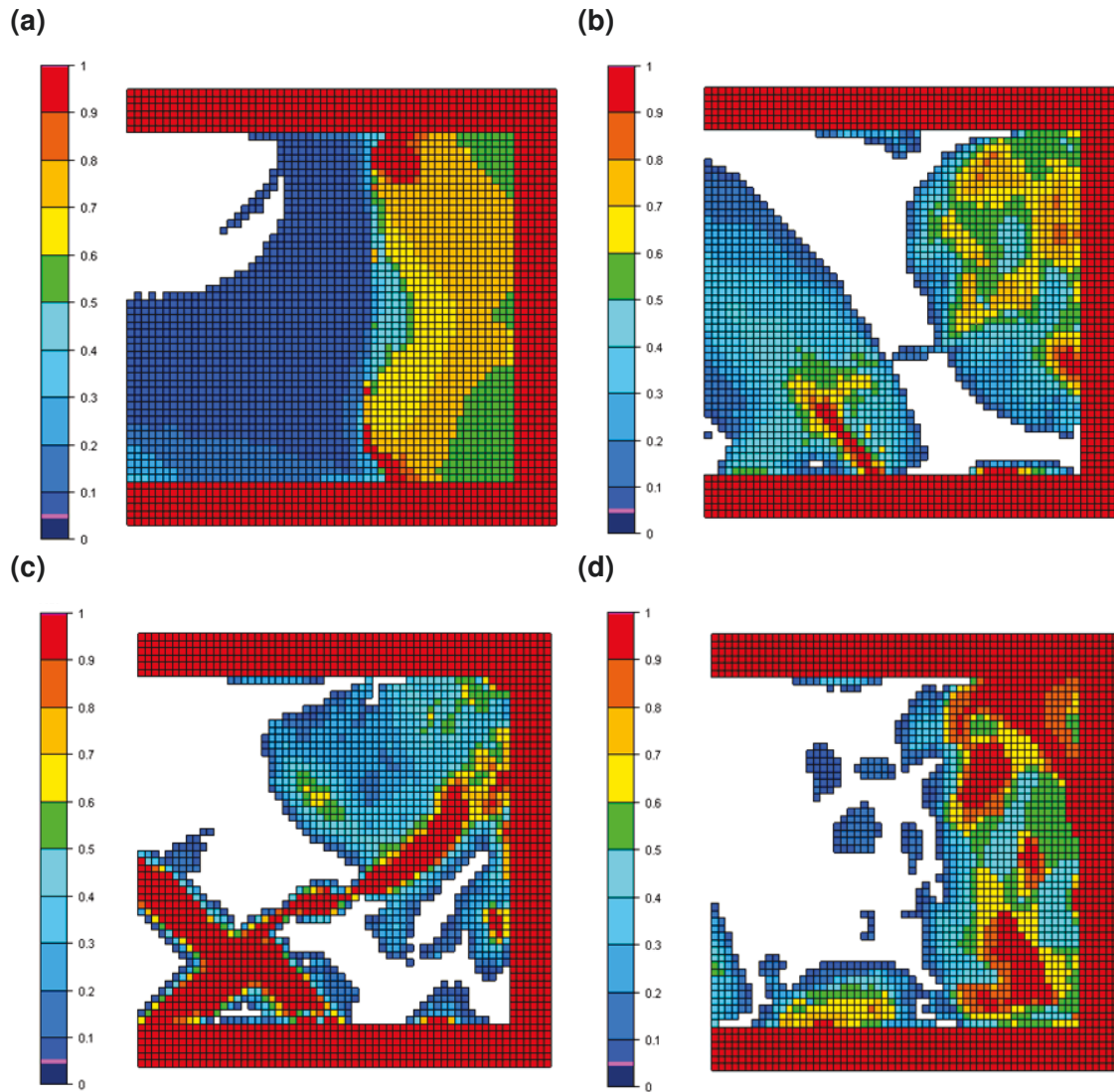
**Abbildung 7.25** Frequenzgang mit Vergleich der letzten Iteration zum initialen Design



**Abbildung 7.26** Zielfunktionswerte für jede Dämpfungsformulierung, skaliert auf die letzte Iteration der *Strukturdämpfung*

besten Ergebnisse in diesem Szenario. Dies kann auch durch Abbildung 7.26 bestätigt werden.





**Abbildung 7.27** Topologien nach der letzten Iteration für: (a) Strukturdämpfung, (b) Lineare Dämpfung, (c) Polinomiale Dämpfung und (d) Strukturdämpfung mit Limit

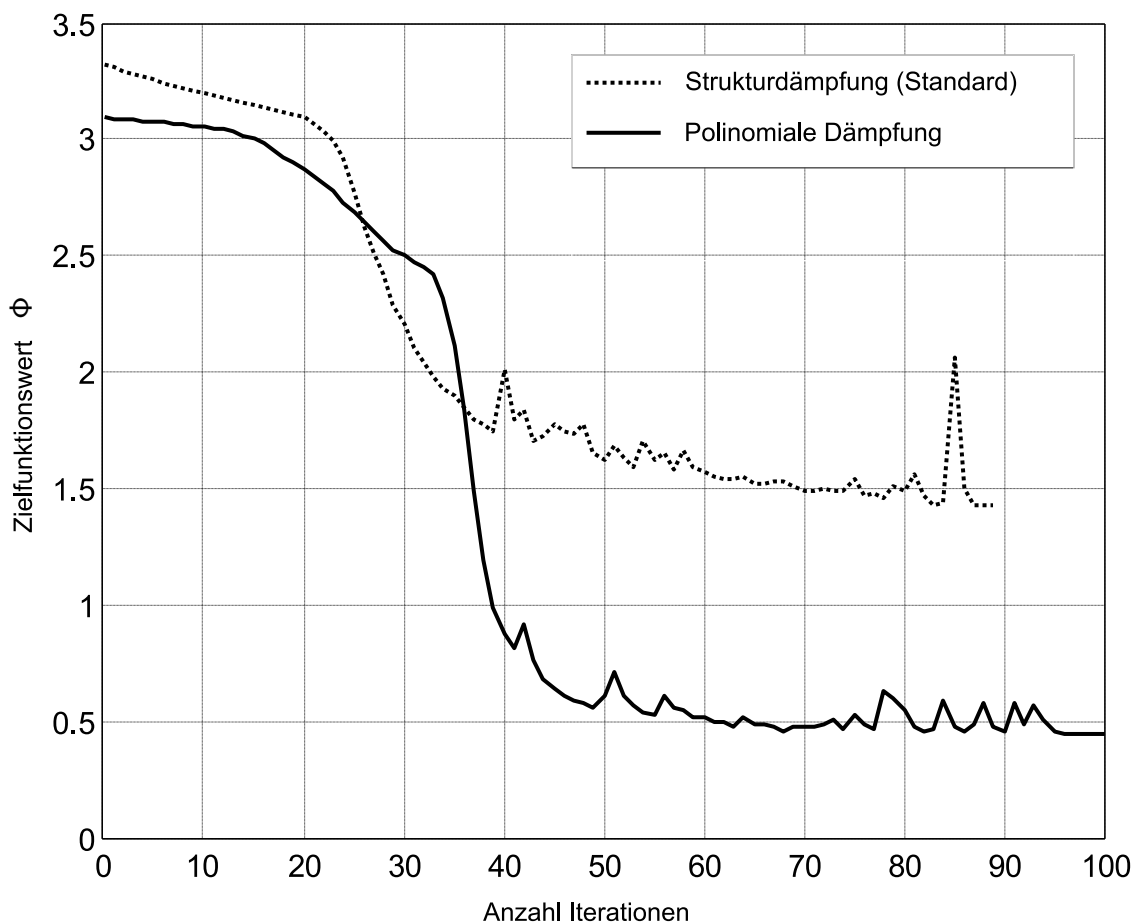
Ein Blick auf die Topologien für jede Dämpfungsformulierung in Abbildung 7.27 zeigt jedoch mittelmäßige bis schlechte Ergebnisse für die Designs mit einer Menge von Elementen mit mittleren Dichten. Nur die *Polinomiale Dämpfung* endet in einem angemessenen Design. Dieses hat immer noch eine Menge Elemente mit Zwischenwerten der Dichte. Es ist aber eine ausgebildete Struktur mit Verstärkungen in der unteren linken Ecke und in der Mitte sowie eine Materialanhäufung in der rechten oberen Ecke zu erkennen. Dies ist natürlich nicht zufriedenstellend für einen Einsatz bei realen Problemstellungen.

Eine Möglichkeit, dieser Problematik zu begegnen, ist der Einsatz des üblichen Glättungsalgorithmus nach der Optimierung. Damit können solche Bereiche noch weiter aufgelöst und ein fertigbares Ergebnis erzielt werden. Dieses wird natürlich in seinen

Eigenschaften wieder etwas vom Optimum abweichen, aber dennoch ein gutes Ergebnis darstellen.

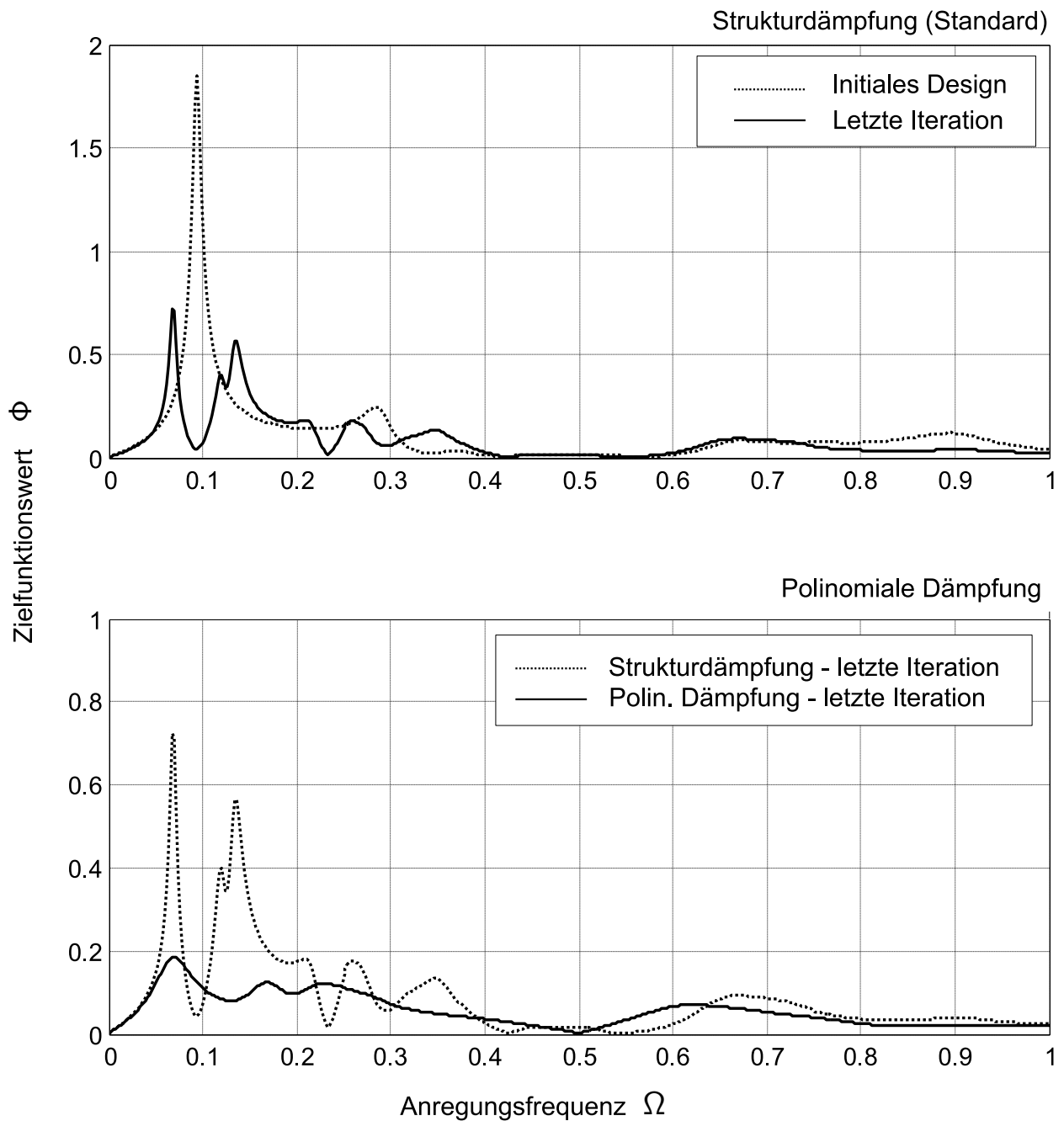
### Hohe Frequenzauflösung

Dieses Szenario ist das gleiche wie das Szenario zuvor, jedoch mit einer erhöhten Frequenzinkrementauflösung. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, werden jetzt nur die *Strukturdämpfung* und die *Polinomiale Dämpfung* miteinander verglichen, die nachweislich gute Ergebnisse in den vorangegangenen Szenarien geliefert haben. Wie in Abbildung 7.28 zu erkennen ist, gibt es immer noch Probleme mit lokalen Moden in Bereichen mit niedriger Dichte. Jedoch ist das fehlerhafte Verhalten viel weniger ausgeprägt als bei den zuvor vorgestellten Ergebnissen. Auch das zuvor aufgetretene Problem der nicht getroffenen Frequenzspitzen, das zu schlechten Konvergenzen führt, scheint hier nicht aufzutreten.

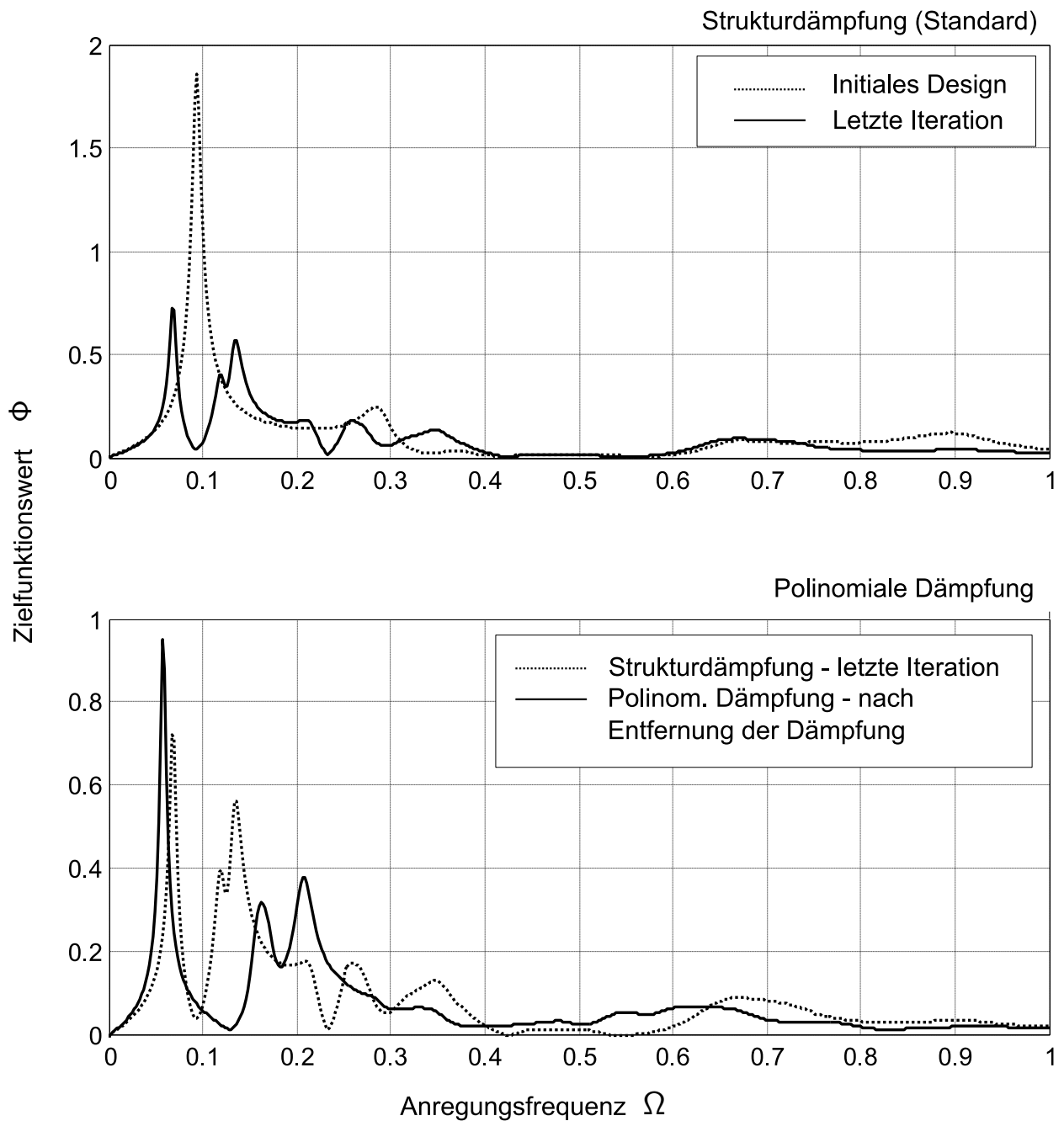


**Abbildung 7.28** Vergleich der Konvergenz jedes Dämpfungsschemas

Das Ergebnis der *Strukturdämpfung* erzeugt einen gleichmäßig homogenisierten Frequenzgang mit mehreren, aber niedrigeren Spitzen im betrachteten Frequenzbereich



**Abbildung 7.29** Frequenzgang mit Vergleich der letzten Iteration zum initialen Design

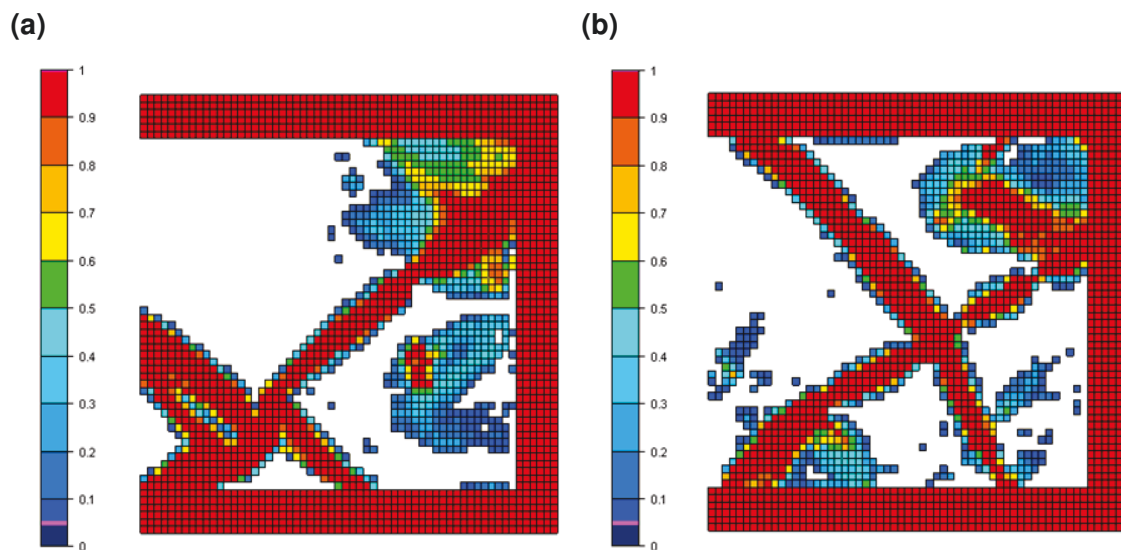


**Abbildung 7.30** Frequenzgang mit Vergleich der letzten Iteration zum initialen Design

(siehe Abbildung 7.29). Die *Polinomiale Dämpfung* zeigt eine sehr schöne Verteilung des Frequenzgangs im Vergleich zur *Strukturdämpfung*.

Allerdings müssen auch hier die zusätzlichen Dämpfungen aus den Modellen entfernt werden. Die Ergebnisse hierzu sind in Abbildung 7.30 zu sehen.

Trotzdem erhält man ein ähnliches Ergebnis bei der *Strukturdämpfung* mit einem nur geringfügig höheren Spitzenwert bei der ersten Eigenfrequenz.



**Abbildung 7.31** Topologien nach der letzten Iteration für: (a) Strukturdämpfung und (b) Polinomiale Dämpfung

Die Topologien beider Optimierungen zeigen große Ähnlichkeiten mit den entsprechenden Formulierungen in Szenario 1 und 2 (vgl. Abbildung 7.12a und 7.12c, Abbildung 7.20a und 7.20e sowie Abbildung 7.31). Dies deutet auf eine dominierende erste Eigenfrequenz hin. Allerdings besitzen diese Topologien mehr Elemente mit mittleren Dichtewerten. Dies weist auf eine Auflösung der Frequenzinkremente hin, die noch nicht hoch genug ist.

## 7.2.2 Ergebnisse der Erweiterung der Optimierung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der erweiterten Methode vorgestellt. Die Ergebnisse wurden auf Basis des vereinfachten akademischen Modells aus Abschnitt 7.1 erzeugt.

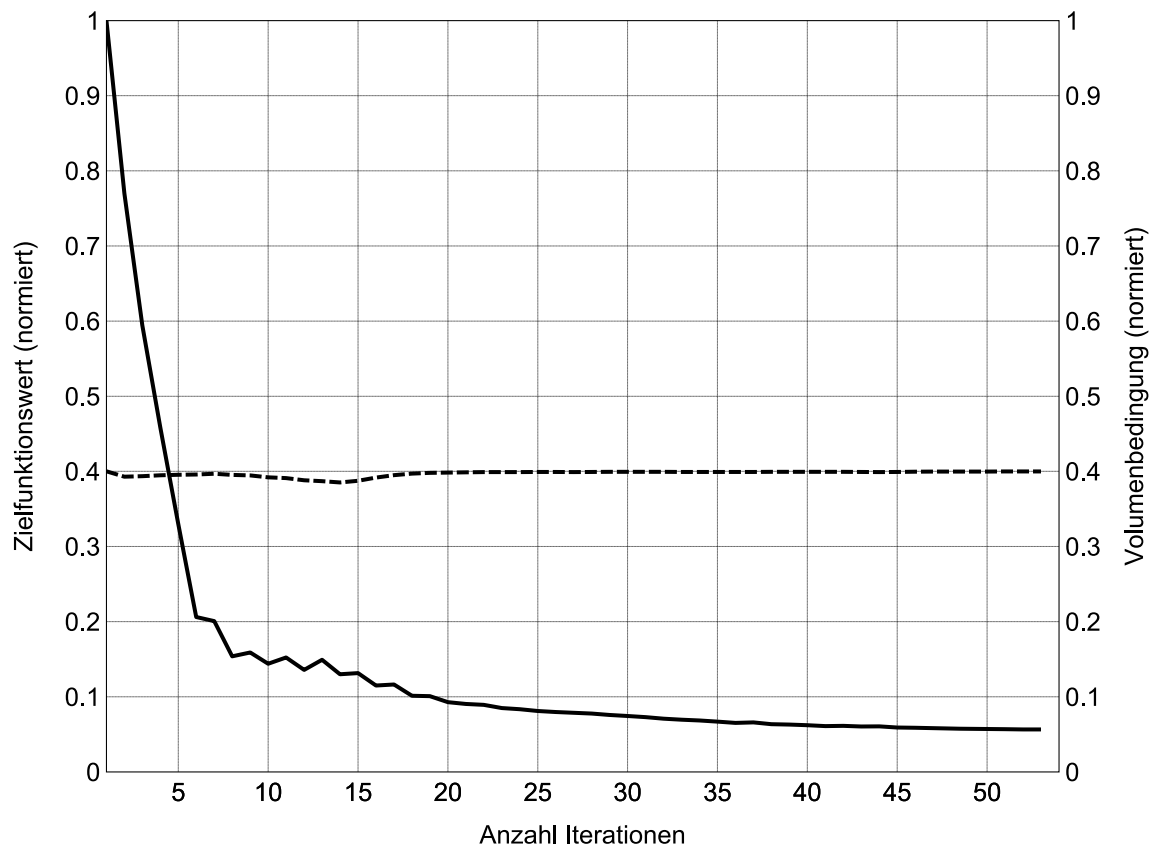


Abbildung 7.32 Konvergenz

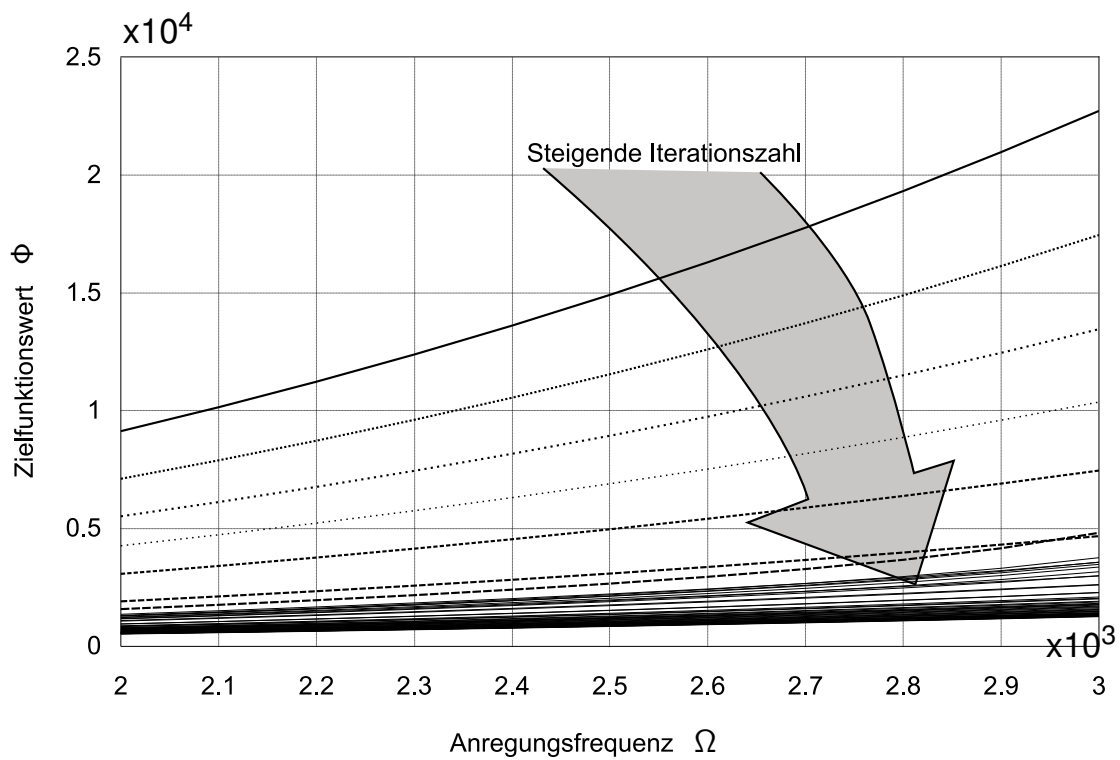


Abbildung 7.33 Frequenzgang

## Akademisches Beispiel

Ein wichtiger Indikator für den Optimierungserfolg ist das Konvergenzverhalten der Zielfunktion. Diese sollte im Bestfall eine stetig monoton fallende Funktion abbilden. Bei der Betrachtung von zehn Frequenzinkrementen in Abbildung 7.32 ist die Konvergenz nahezu perfekt, wenn auch viele Iterationen benötigt wurden. Die hohe Anzahl der Iterationen ist im Hinblick auf den Einsatz bei realen Anwendungen natürlich unerwünscht, da hier jede einzelne Iteration bereits eine lange Berechnungszeit benötigt.

In Abbildung 7.33 ist der Frequenzgang für diese Optimierung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Betrachtungsbereich hier noch unterhalb der ersten Eigenfrequenz liegt. Weiterhin erkennt man das sinkende Niveau des Frequenzgangs mit steigender Iterationszahl. Dies stellt ein gewünschtes Ergebnis dar.

Die Ergebnisse der Materialverteilung für verschiedene Iterationen sind in Abbildung 7.34 dargestellt.

Aus den Ergebnissen lässt sich eine deutliche Topologie ablesen. Die Oberflächendetektion durch die Gewichtung der Normalenvektoren führt zu guten Ergebnissen (durch Pfeile dargestellt). Allerdings gibt es immer noch Bereiche mit mittlerer Dichte, die während der Optimierung nicht vollständig verschwinden. Weiterhin ist die sich ergebende Struktur nur bedingt kompakt und es existieren Bereiche ohne Material, die als Löcher im Inneren der Struktur interpretiert werden können. Diese Probleme können durch die Umsetzung der vorgestellten Methodik in TOSCA.structure gelöst werden, einer Topologie-Optimierungs-Software der Firma FE-DESIGN GmbH, die mit zusätzlichen Restriktionen (z. B. Auszugsrichtungen, minimalen Strukturgrößen etc.) umgehen kann. Dieser Schritt wird auch die Modellgrößengrenze durch die Verwendung von Matlab überwinden und damit die Anwendung auf größere und reale Modelle erlauben.

## Dreidimensionale Erweiterung

In diesem Abschnitt werden als Ausblick noch die Ergebnisse des dreidimensionalen Modells aufgezeigt. Die Konvergenz ist in Abbildung 7.35 gegeben. Wie zu erkennen, sind sehr große Sprünge in der Konvergenz vorhanden. Dies liegt hauptsächlich an der eingeschränkten Frequenzauflösung des Modells. Zusätzlich ist die Auflösung der Geometriediskretisierung sehr gering, was den Optimierungsprozess sehr unrobust macht. Dennoch ist eine eindeutige Konvergenz zu erkennen. Zusätzlich ist in Abbildung 7.36 deutlich eine Verbesserung im Frequenzspektrum im Verlauf der Iterationen zu erkennen.

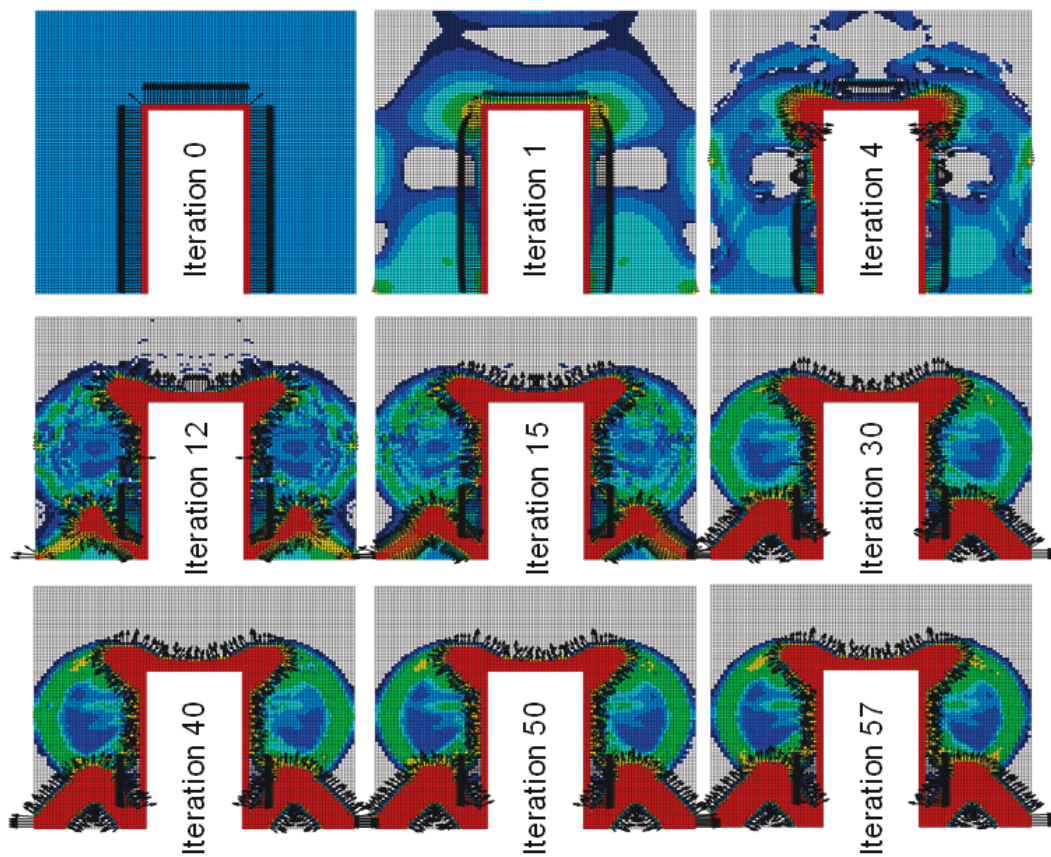


Abbildung 7.34 Konvergenz

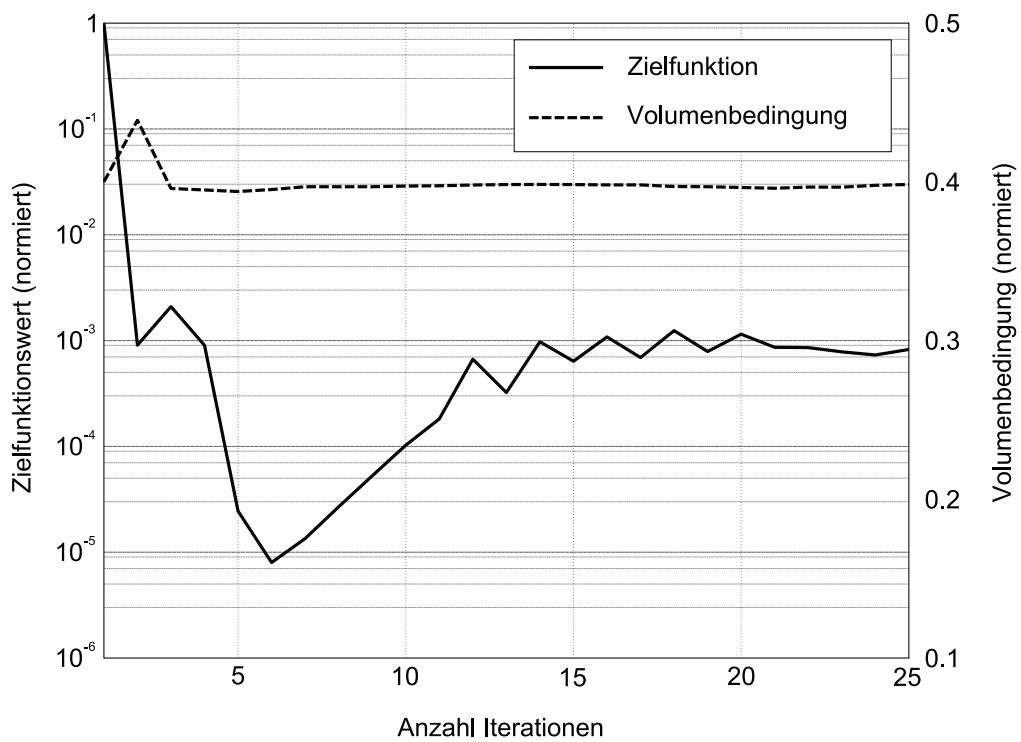
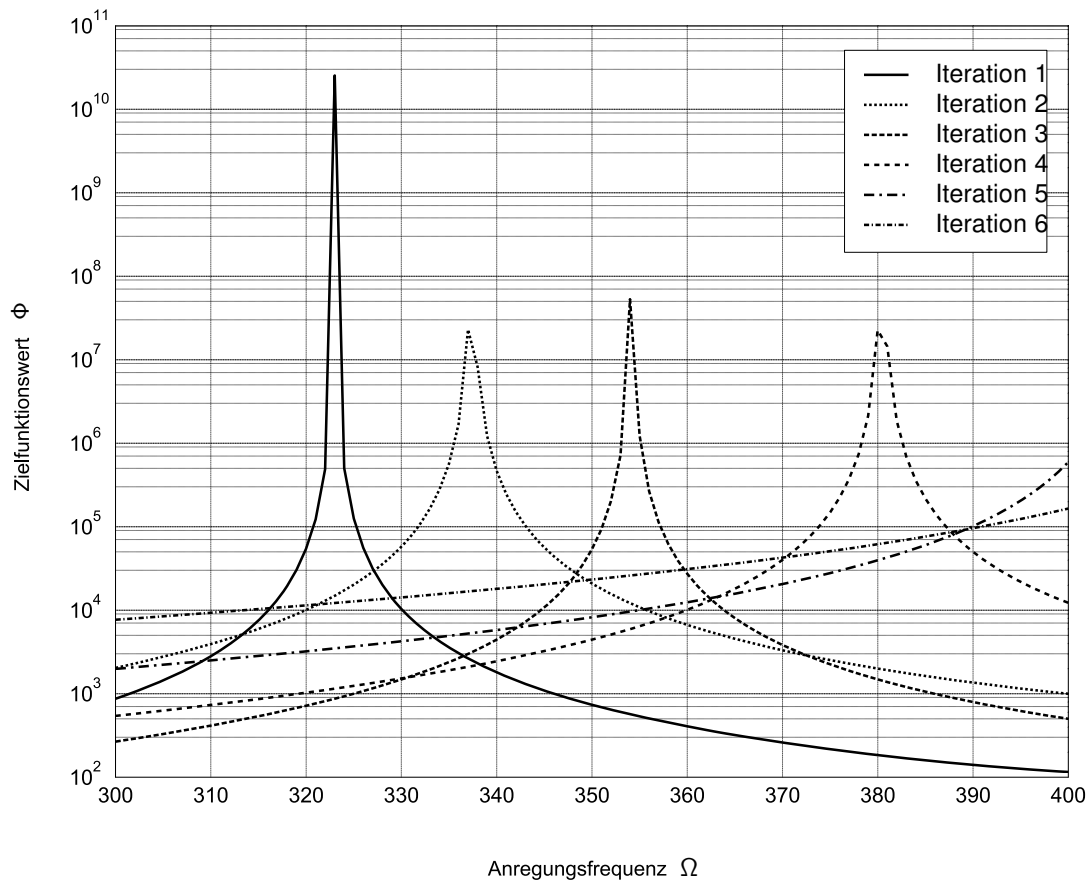


Abbildung 7.35 Konvergenz





**Abbildung 7.36** Frequenzgang

Deshalb ist mit einer verbesserten Implementierung und der Optimierung von sehr viel stärker aufgelösten Modellen eine starke Verbesserung des Optimierungsverhaltens zu erwarten. Dies führt jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, da hier detaillierte informationstechnische Grundlagen von Nöten sind, um diese Performance-Steigerung zu erreichen.



## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Der erste Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit der allgemeinen Strategie zur Entwicklung von Leichtbausystemen. Den Problemen bei der Einordnung von Leichtbauaktivitäten wurde mit einer neuen Darstellung dieser Aktivitäten begegnet. Die Darstellung hebt die übliche Trennung von Methoden, Werkstoffen und Fertigung auf und stellt die Komplexität der *Methodenwelt* dar. Außerdem wird damit die Wichtigkeit der Systembetrachtung im Leichtbau herausgehoben. Diese wurde in bisherigen Leichtbauklassierungen weitgehend außen vor gelassen.

In dieser Arbeit wurde nicht auf die spezifischen Charakteristika der Systemvalidierung im Leichtbauentwicklungsprozess eingegangen. Hier müssen neue Ansätze Anwendung finden, vor allem für die Validierung von Strukturoptimierungsergebnissen zur Absicherung der Robustheit.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde die abstrahierte Vorgehensweise aus dem ersten Teil konkreter fokussiert. Dies wurde anhand des sehr ausgeprägten Zielkonflikts von Leichtbau und Akustik dargestellt. Beide Entwicklungsziele sind meist gegenläufig und müssen deshalb üblicherweise besonders gegeneinander abgewogen werden. In dieser Arbeit wird deshalb eine Methode zur numerischen Optimierung des Schallabstrahlungsverhaltens von Bauteilen vorgestellt, womit solche multi-kriteriellen Optimierungsziele – die sich meist der *intuitiven Anschauung* verschließen – effektiv angegangen werden können. In dieser Arbeit wurde deshalb eine Zielfunktion eingeführt und die entsprechenden Sensitivitäten abgeleitet, sodass die Funktion die Schallabstrahlung erfassen und konsequent optimieren kann (siehe Kapitel 5). Diese Zielfunktion und die analytischen Sensitivitäten wurden in einer entwickelten Software in Matlab implementiert.

Um Problemen der numerischen Stabilität zu begegnen, die durch die Betrachtung eines großen Bereiches von Frequenzen und der damit verbundenen Abdeckung mehrerer Eigenfrequenzen herrühren, wurden drei Dämpfungsformulierungen vorgestellt (siehe Abschnitt 5.1.2). Jede Formulierung beinhaltet einen Minimalwert der Dichte und stabilisiert somit das numerische Verfahren durch die Vermeidung von sehr großen Werten im Frequenzgang bei kleinen Dichtewerten. Diese Dämpfungsformulierungen wurden mit den Ergebnissen der standardmäßigen *Strukturdämpfung* verglichen.

Das Problem der *Strukturdämpfung* ist die zunehmende Vibration in lokalen Bereichen der Struktur mit niedrigen Dichten und die damit verbundene Ausbildung lokaler Moden (siehe Abschnitt 7.2.1). Dies kann auch beobachtet werden, wenn die Auflösung der Frequenzinkremente nicht hoch genug ist (siehe Abschnitt 7.2.1). Das Problem in diesem Fall ist die richtige Abtastung des Frequenzgangs (siehe Abschnitt 7.2.1). Wenn ein Abtastpunkt nicht nahe genug an einer Eigenfrequenz liegt, berechnet der Optimierungsalgorithmus ein aktualisiertes Design mit einem falschen Modell und der Wert der Zielfunktion ist nach der nächsten Iteration höher als zuvor. Eine Lösung für dieses Problem ist natürlich die Verwendung eines höheren Frequenzinkrements, das aber nur mit entsprechenden Rechenressourcen angegangen werden kann.

Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung der vorgestellten Dämpfungsformulierungen. Diese erzeugen in allen Fällen ein besseres Verhalten im Optimierungsprozess als die standardmäßige *Strukturdämpfung* (siehe Kapitel 7). Dennoch gibt es einige Nachteile bei diesen Formulierungen. Das Verhalten dieser Dämpfungsformulierungen ist anders als bei der etablierten *Strukturdämpfung* und sie haben keine physikalische Bedeutung. Sie sind rein mathematischer Natur, um die Numerik der Optimierung zu stabilisieren. Andererseits ist die physikalische Erklärung der Dämpfung in Strukturen auch immer noch nicht wirklich verstanden und daher sind alle Dämpfungsformulierungen phänomenbasiert. Insbesondere die Dämpfungsformulierungen, die üblicherweise in der Numerik verwendet werden (Rayleigh-Dämpfung oder *Strukturdämpfung*) stellen zu allererst eine bequeme Möglichkeit dar, Dämpfungen mathematisch zu behandeln.

Dennoch haben sich diese Formulierungen bisher als gute Approximation der Dämpfung in einer physikalischen Struktur erwiesen. Daher sind sie eine gute Referenz für die hier vorgestellten Formulierungen.

Unter dieser Prämisse ist die *Polinomiale Dämpfung* die beste Wahl. Sie liefert Ergebnisse, die nahe an der standardmäßigen *Strukturdämpfung* sind und in Szenario 1 und 2 auch noch besser. Die fundamentalen Eigenfrequenzen der Zielfunktion in den resultierenden Designs sind sehr nahe an denen der *Strukturdämpfung*. Darüber hinaus stabilisiert die *Polinomiale Dämpfung* den Prozess der Optimierung und führt daher schneller zu Ergebnissen, wenn eine ausreichende Auflösung der Frequenzinkremente verwendet wird (siehe Abschnitt 7.2.1). Im Falle von unzureichenden Auflösungen gelingt es damit immer noch, brauchbare Topologien zu erzeugen (siehe Abschnitt 7.2.1).

Die anderen Formulierungen liefern gute Ergebnisse im Optimierungsprozess. Sie sind schnell und weniger anfällig für schwingendes Verhalten der Konvergenz der Optimierung. Diese Formulierungen nutzen aber den Vorteil zusätzlicher Steifigkeit für

Zwischenwerte der Dichte zu stark aus. Dies ist nach dem Entfernen der zusätzlichen Dämpfung in der erheblichen Veränderung der Eigenfrequenzen und der Spitzenwerte im Frequenzgang (siehe Abschnitt 7.2.1) zu erkennen.

Anzumerken ist, dass Optimierungen mit Standardzielfunktion, wie z. B. die Optimierung der statischen Nachgiebigkeit und Maximierung der ersten Eigenfrequenz, nicht zu guten Ergebnissen für Schallabstrahlungsprobleme führen (siehe 7.2.1).

Als Schlussfolgerung kann die Verwendung der *Polinomialen Dämpfung* in Kombination mit vorgestellten Zielfunktion verwendet werden, um numerische Probleme im Optimierungsprozess zu überwinden.

Aufgrund der prototypischen Umsetzung in Matlab und der damit verbundenen Beschränkungen können im Moment nur akademische Beispiele mit dieser neuen Methode berechnet und optimiert werden.

Zusätzlich wurde die Methode erweitert, um mit Problemen der Abstrahlung von Oberflächen umzugehen, die sich während der Optimierung ändern. Diese Methode wurde auch auf dreidimensionale Probleme erweitert. In seiner jetzigen prototypischen Umsetzung ist dieser Optimierungsprozess aber noch sehr unrobust. Dies liegt vor allem in der niedrigen möglichen Auflösung der Geometrie und der Frequenzinkremente des betrachteten Frequenzbereichs. Eine verbesserte Implementierung mit der Möglichkeit, mit großen Modellen umzugehen, verspricht hier eine deutliche Verbesserung der Robustheit des Optimierungsprozesses.

Der nächste Schritt bei der Validierung der vorgestellten Methode ist die Ausweitung zu Problemen in realen Anwendungen. Dazu müssen die Beschränkungen von Matlab überwunden werden. Dies ist teilweise schon mit der Implementierung der ersten vorgestellten Zielfunktion in die Topologieoptimierungssoftware TOSCA.structure durch die Firma FE-DESIGN GmbH geschehen. Für eine weitere Validierung sollten die mit der vorgestellten Methode gewonnenen Designs in physische Komponenten umgesetzt und in physischen Tests validiert werden. Die Ergebnisse dieser physischen Validierung können dann zur weiteren Verbesserung des Optimierungsprozesses genutzt werden.

Die vorgestellten Zielfunktionen umfassen eine rein strukturelle Betrachtung der Schallabstrahlung. Dabei spielen Eigenschaften des umgebenden Fluids oder Hindernisse auf dem Schallpfad von der betrachteten Komponente zum Ohr des Benutzers keine Rolle. Eine weitere Verbesserung wäre deshalb die Berücksichtigung des umgebenden Fluids mittels einer vollständigen Kopplung der strukturellen und fluidischen Domänen in einer Simulation.

In einer solchen kombinierten Topologieoptimierung interagiert die strukturelle Domäne mit der fluidischen Domäne. Durch die Anregung der strukturellen Domäne wird über die Struktur in das Fluid übertragen und kann dann an einem bestimmten Punkt – dem Ohr des Benutzers – als Schalldruck ausgewertet und optimiert werden. Derzeit gibt es zwei Möglichkeiten der Kopplung der strukturellen und fluidischen Domäne in der numerischen Mechanik: die Kopplung unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) und die Kopplung unter Verwendung der Boundary-Element-Methode (BEM).

Die vollständig gekoppelte Formulierung hat den Vorteil der Beachtung der zusätzlichen physikalischen Eigenschaften des Fluids. Das Fluid hat z. B. eine geringe Steifigkeit und eine relativ hohe Dämpfung. Durch Auswertung des Schalldruck in einem Punkt der fluidischen Domäne ist zu erwarten, dass der Frequenzgang glatter wird und daher einfacher im Optimierungsprozess handzuhaben ist.

# A Anhang

## A.1 Modelle

Die folgenden *Nastran input decks* wurden zur Erzeugung der Ergebnisse in Abschnitt 7 für die entsprechenden Modelle in diesem Abschnitt verwendet. Die geometrischen Informationsdaten sind hier fast gänzlich entfernt, können aber durch einen FE-Prä-Prozessor wieder hergestellt werden.

Die Geometrie des Modells in Abbildung 7.1 ist ein Quadrat mit einer Kantenlänge von 0,3. Jedes Element hat eine Kantenlänge von 0,005. Der äußere Rahmen besteht aus sechs Elementreihen.

```
[lineskip={-6.0pt}]
SOL 111
CEND
SEALL = ALL
SUPER = ALL
ECHO = NONE
SUBCASE 1
$DISPLACEMENT(SORT1,PRINT)=ALL
$ frequency response
  METHOD = 1
  SPC = 2
  DLOAD = 3
  FREQUENCY = 1
  DISPLACEMENT(SORT1,PLOT,REAL)=ALL
$
BEGIN BULK
PARAM    POST    -1
PARAM    AUTOSPC YES
PARAM    PRTMAXIM YES
```

```

$
$ interval of frequency
EIGRL      1              30      0
FREQ1     1      0.      0.01  1000
$
$ Elements and Element Properties for region : outer_prop
PSHELL    1      1      .9
$ Pset: "outer_prop" will be imported as: "pshell.1"
CQUADR    1      1      3      349  348  1
CQUADR    2      1      4      350  349  3
...
CQUADR   1007    1      1018  1021  1022  1017
CQUADR   1008    1      1018  1019  1020  1021
$ Elements and Element Properties for region : inner_prop
PSHELL    2      1      .9      1      1
$ Pset: "inner_prop" will be imported as: "pshell.2"
CQUADR   1009    2      241  1388  243  188
CQUADR   1010    2      240  1389  1388  241
...
CQUADR   3599    2      3869  3872  3873  3868
CQUADR   3600    2      3869  3870  3871  3872
$ Material Record : outer_matr
$ Description of Material :
MAT1      1      2.10      .3      25.55-2      .0
$ Material Record : inner_matr
$ Description of Material :
MAT1      2      2.10      .3      25.55-2      .0
$ Nodes of the Entire Model
GRID*     1              2.7089-9      2.24452-9
*         0.
GRID*     2              .3              1.59614-9
*         0.
...
GRID      3877              .125  .15  0.
GRID      3878              .12  .15  0.
$
$      SID      EXCITED DELAY  PHASE  TC      TD
RLOAD1   5      6      0.8  0.0  44

```



```

DAREA    6      92      2      -1-6
$ Constant Load Table
TABLED1  44
          0.     1.     1000.   1.     ENDT
$
DLOAD    3      1.      1.      5
$
$ Loads for Load Case : Default
SPCADD   2      1
$ Displacement Constraints of Load Set : left_supports
SPC1     1      123456  1      122    182    183    184    185
          186    187    290    344    345    346    347    348
SPC1     1      123456  1240   THRU   1286
SPC1     1      345     1      THRU   3878
$ Referenced Coordinate Frames
ENDDATA  a95e1202

```

Die Geometrie des Modells in Abbildung 7.4 ist ein Quadrat mit einer Kantenlänge von 10,0. Jedes Element hat eine Kantenlänge von 0,1. Der innere Rahmen besteht aus zwei Elementreihen.

```

[lineskip={-6.0pt}]
SOL 108
CEND
$HMNAME LOADSTEP          1"freq_resp"
SUBCASE      1
  LABEL=    freq_resp
  SPC =      5
  FREQUENCY =      1
  DLOAD =    2
  DISPLACEMENT(PLOT) = ALL
$
BEGIN BULK
PARAM,POST,-4
PARAM,G,0.1
$$ GRID Data
GRID        1      3.5    6.5    0.0
GRID        2      3.6    6.5    0.0

```

```

...
GRID      8315      9.6    5.6    0.0
GRID      8316      9.7    5.6    0.0
$ CQUAD4 Elements
CQUAD4    1        1    387    388    384    385
CQUAD4    2        1    388    381    382    384
...
CQUAD4    8049     2    159    8133   8145   158
CQUAD4    8050     2    8133   8132   8143   8145
$ Property Data
PSHELL    1        11.0      -1
PSHELL    2        11.0      -1
$ Material Data
MAT1      1210000.0      0.3    7.8-9
FREQ1     1        0.0    500.0    100
RLOAD1    3        6                                4    0
TABLED1   4    LINEAR  LINEAR
+         0.0    1.0  1000.0    1.0ENDT
DLOAD     21.0      1.0    3
SPC       5    4011  1234560.0
...
SPC       5    6287  1234560.0
DAREA    6    156    11.00
...
DAREA    6    32    1-1.00
$
ENDDATA

```

# Literaturverzeichnis

- Albers et al. 2009** Albers, A. ; Majic, N. ; Otnad, J. ; Spickenheuer, A. ; Uhlig, K. ; Heinrich, G.: 3-D topology optimisation in combination with fibre alignment for composite structures manufactured by tailored fibre placement. In: 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-8), June 1-5 2009, Lisbon, Portugal (Hrsg.): *Proceedings of 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-8)*. Lisboa, Portugal : WCSMO, Juni 2009
- Albers et al. 2010a** Albers, A. ; Ott, S. ; Behrendt, M. ; Merkel, P. ; Geier, M.: Validation as knowledgebase for future mobility systems. In: *9. Internationales CTI Symposium*, 2010
- Albers und Otnad 2010** Albers, A ; Otnad, J: Integrated Structural and Controller Optimization in Dynamic Mechatronic Systems. In: *Journal of Mechanical Design* 132 (2010), Nr. 4
- Albers und Sadowski 2013** Albers, A ; Sadowski, E ; Chakrabarti, A (Hrsg.) ; Blessing, L (Hrsg.) ; IWMT Bangalore 2013 (Hrsg.): *The Contact and Channel Approach (C&C<sup>2</sup> – A) – relating a system's physical structure to its functionality*. Springer, 2013
- Albers 2010** Albers, Albert: *Five Hypotheses about Engineering Processes and their Consequences*. 2010
- Albers und Braun 2011** Albers, Albert ; Braun, Andreas: Der Prozess der Produktentstehung. In: *Handbuch Leichtbau - Methoden, Werkstoffe, Fertigung*. Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, Mai 2011, S. 1–30. – ISBN 978-3-446-42267-4
- Albers und Düser 2011** Albers, Albert ; Düser, Tobias: Validierung im Produktentstehungsprozess. In: *Handbuch Leichtbau - Methoden, Werkstoffe, Fertigung*. Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, Mai 2011, S. 1–30. – ISBN 978-3-446-42267-4
- Albers et al. 2011** Albers, Albert ; Schmid, Andreas ; Zhang, Qi ; Grönheim, Onno: A CAE-based approach for an automatic identification of lightweight design

structures in entire systems. In: NAFEMS Seminar "The Role of CAE in System Simulation" Wiesbaden 08.11-09.11.2011 (Hrsg.): *NAFEMS Seminar "The Role of CAE in System Simulation"*, NAFEMS, 2011

**Albers et al. 2010b** Albers, Prof Dr-Ing Dr H. C. A. ; Düser, Dipl-Ing T. ; Sander, Dipl-Ing O. ; Roth, Dipl-Ing C. ; Henning, Dipl-Ing J.: X-in-the-Loop-Framework für Fahrzeuge, Steuergeräte und Kommunikationssysteme. In: *ATZelektronik* 5 (2010), Oktober, Nr. 5, S. 60–65. – ISSN 1862-1791, 2192-8878

**Alexeev et al. 1987** Alexeev, V. ; Galéev, E. ; Tikhomirov, V.: *Recueil de problèmes d'optimisation*. Mir, 1987

**ATA Engineering Inc. 2011** ATA Engineering Inc., (Hrsgb.): *IMAT+FEA*. 2011. – Version 4

**Bendsøe und Sigmund 1999** Bendsøe, M. P. ; Sigmund, O.: Material interpolation schemes in topology optimization. In: *Archive of Applied Mechanics* 69 (1999), November, Nr. 9-10, S. 635–654. – ISSN 0939-1533, 1432-0681

**Bendsøe und Sigmund 2002** Bendsøe, M. P. ; Sigmund, O.: *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. 2nd ed. 2003. Corr. 2nd printing 2003. Springer, Oktober 2002. – ISBN 3540429921

**Bendsøe und Kikuchi 1988** Bendsøe, Martin P. ; Kikuchi, Noboru: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 71 (1988), November, Nr. 2, S. 197–224. – ISSN 00457825

### **BMW Group 2013**

**Braess und Seiffert 2007** Braess, Hans-Hermann ; Seiffert, Ulrich: *Vieweg Handbuch Kraftfahrzeugtechnik*. 5, überarb. u. erw. Aufl. 2007. Vieweg+Teubner Verlag, September 2007. – ISBN 3834802220

**Calvel und Mongeau 2007** Calvel, Sonia ; Mongeau, Marcel: Black-box structural optimization of a mechanical component. In: *Computers & Industrial Engineering* 53 (2007), Nr. 3, S. 514–530. – ISSN 0360-8352

**Christensen et al. 1998a** Christensen, S. T. ; Sorokin, S. V. ; Olhoff, N.: On analysis and optimization in structural acoustics — Part I: Problem formulation and solution techniques. In: *Structural optimization* 16 (1998), Oktober, Nr. 2-3, S. 83–95. – ISSN 0934-4373, 1615-1488

- Christensen et al. 1998b** Christensen, S. T. ; Sorokin, S. V. ; Olhoff, N.: On analysis and optimization in structural acoustics — Part II: Exemplifications for axisymmetric structures. In: *Structural optimization* 16 (1998), Oktober, Nr. 2-3, S. 96–107. – ISSN 0934-4373, 1615-1488
- Cook et al. 2001** Cook, Robert D. ; Malkus, David S. ; Plesha, Michael E. ; Witt, Robert J.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4th Edition*. 4. Wiley, Oktober 2001. – ISBN 0471356050
- Díaz und Kikuchi 1992** Díaz, Alejandro R. ; Kikuchi, Noboru: Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 35 (1992), Nr. 7, S. 1487–1502. – ISSN 1097-0207
- Düser 2010** Düser, Tobias: *X-in-the-Loop: ein durchgängiges Validierungsframework für die Fahrzeugentwicklung am Beispiel von Antriebsstrangfunktionen und Fahrerassistenzsystemen*. Karlsruhe : IPEK - Institut für Produktentwicklung, 2010 (Forschungsberichte)
- Du und Olhoff 2005** Du, J. ; Olhoff, N.: Topology optimization of continuum structures with respect to simple and multiple eigenfrequencies. In: *6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro, Brazil* (2005)
- Du und Olhoff 2007a** Du, Jianbin ; Olhoff, Niels: Minimization of sound radiation from vibrating bi-material structures using topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 33 (2007), April, Nr. 4-5, S. 305–321. – ISSN 1615-147X, 1615-1488
- Du und Olhoff 2007b** Du, Jianbin ; Olhoff, Niels: Topological design of freely vibrating continuum structures for maximum values of simple and multiple eigenfrequencies and frequency gaps. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 34 (2007), August, Nr. 2, S. 91–110. – ISSN 1615-147X, 1615-1488
- Duden Verlag 2013** Duden Verlag: *Duden Wörterbuch - Optimum*. Oktober 2013
- Duysinx und Sigmund 1998** Duysinx, Pierre ; Sigmund, Ole: *New Developments in Handling Stress Constraints in Optimal Material Distributions*. 1998
- Ehrlenspiel 1991** Ehrlenspiel, K.: Integrierte Produkterstellung Organisation — Methoden — Hilfsmittel. In: Milberg, Joachim (Hrsg.): *Wettbewerbsfaktor Zeit in Produktionsunternehmen* Bd. 1991. Springer Berlin Heidelberg, 1991, S. 113–131. – ISBN 978-3-540-53694-9

- Ehrlenspiel 2006** Ehrlenspiel, Klaus: *Integrierte Produktentwicklung: Denkabläufe, Methodeneinsatz, Zusammenarbeit*. 3. Auflage. Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG, Oktober 2006. – ISBN 3446407332
- Enkler 2010** Enkler, H.-G.: *Rechnergestützter Entwurf von Bauteilen mit stark streuenden Leitstützstrukturen am Beispiel hochbelastbarer urgeformter mikromechanischer Systeme*. Karlsruhe, Ipek, Dissertation, 2010. – Cited by 0001
- Fahy 1998** Fahy, Frank: *Fundamentals of Noise and Vibration*. Taylor & Francis, 1998. – ISBN 9780419241805
- FE-DESIGN GmbH 2011** FE-DESIGN GmbH, (Hrsg.): *TOSCA structure*. 2011. – Version 7.0
- Friedrich et al. 2003** Friedrich, H. E. ; Goede, M. F. ; Krusche, T.: Bauweisen für neue Fahrzeugkonzepte im Spannungsfeld von Leichtbau und Kostenattraktivität. In: *Tag der Karosserie*. Aachen, Juni 2003
- Friedrich und Kopp 2008** Friedrich, H. E. ; Kopp, Gundolf: Bauweisen-Konzepte für neue Entwicklungen im Fahrzeugbau. VDA, Frankfurt, 2008
- Halkjær et al. 2006** Halkjær, Søren ; Sigmund, Ole ; Jensen, Jakob S.: Maximizing band gaps in plate structures. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 32 (2006), Oktober, Nr. 4, S. 263–275. – ISSN 1615-147X, 1615-1488
- Heißing und Ersoy 2007** Heißing, Bernhard ; Ersoy, Metin: *Fahrwerkhandbuch: Grundlagen, Fahrdynamik, Komponenten, Systeme, Mechatronik, Perspektiven*. 2007. Vieweg+Teubner Verlag, Mai 2007. – ISBN 3834801054
- Hessenauer und Albers 2012** Hessenauer, Benjamin ; Albers, Albert: Anpassung dynamischer Eigenschaften von Bauteilen durch Numerische Optimierung. In: *Maschinenakustik 2012 Karlsruhe 13.11.-14.11.2012* (Hrsg.): *Maschinenakustik 2012*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 2012 (VDI-Berichte)
- Jensen 2007a** Jensen, Jakob S.: *A note on sensitivity analysis of linear dynamic systems with harmonic excitation*. 2007
- Jensen 2007b** Jensen, Jakob S.: Topology optimization of dynamics problems with Padé approximants. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 72 (2007), Nr. 13, S. 1605–1630. – ISSN 1097-0207
- Jensen und Pedersen 2006** Jensen, Jakob S. ; Pedersen, Niels L.: On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: the 1D and 2D scalar cases. In: *Journal of Sound and Vibration* 289 (2006), Februar, Nr. 4–5, S. 967–986. – ISSN 0022-460X

- Jensen 2003** Jensen, J.S.: Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass–spring structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 266 (2003), Nr. 5, S. 1053–1078. – ISSN 0022-460X
- Knothe und Wessels 2008** Knothe, Klaus ; Wessels, Heribert: *Finite Elemente: Eine Einführung für Ingenieure*. 4., erw. Aufl. 2008. Springer, Mai 2008. – ISBN 3540721886
- Kopp et al. 2011** Kopp, Gundolf ; Burkardt, Norbert ; Majic, Neven: Leichtbaustrategien und Bauweisen. In: *Handbuch Leichtbau - Methoden, Werkstoffe, Fertigung*. Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, Mai 2011, S. 1–30. – ISBN 978-3-446-42267-4
- Krause 2012** Krause, Dieter: Leichtbau. In: *Handbuch Konstruktion*. München : Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2012, S. 465–484. – ISBN 978-3-446-43000-6
- Meboldt 2008** Meboldt, Mirko: *Mentale und formale Modellbildung in der Produktentstehung - als Beitrag zum integrierten Produktentstehungs-Modell (iPeM)*. *Mental and formal modelling, a contribution to the integrated product development model (iPeM) [Elektronische Ressource] / Mirko Meboldt. Betreuer: A. Albers*. Karlsruhe : KIT-Bibliothek, 2008
- Moeller und Henning 2011** Moeller, Elvira ; Henning, Frank: *Handbuch Leichtbau: Methoden, Werkstoffe, Fertigung*. Carl Hanser Verlag GmbH & CO. KG, Mai 2011. – ISBN 3446422676
- MSC.Software Corporation 2004** MSC.Software Corporation, (Hrsgb.): *Basic Dynamic Analysis User's Guide*. 68. Santa Ana, California, USA: , 2004
- MSC.Software Corporation 2011** MSC.Software Corporation, (Hrsgb.): *Nastran*. 2011. – Version 2011
- Olhoff und Du 2005** Olhoff, N. ; Du, J.: Topological design of continuum structures subjected to forced vibration. In: *6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO, 2005*
- Otterbach 2012** Otterbach, Bernd: „Leichtbau ist eine Geisteshaltung“. März 2012
- Ottad 2009** Ottad, J.: *Topologieoptimierung von Bauteilen in dynamischen und geregelten Systemen*, IPEK - Institut für Produktentwicklung am Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Dissertation, 2009
- Pahl et al. 2006** Pahl, Gerhard ; Beitz, Wolfgang ; Feldhusen, Jörg ; Grote, Karl-Heinrich: *Pahl/Beitz Konstruktionslehre: Grundlagen erfolgreicher Produktentwicklung. Methoden und Anwendung*. 7. Aufl. 2007. Springer, Oktober 2006. – ISBN 3540340602

- Pedersen 2000** Pedersen, N. L.: Maximization of eigenvalues using topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 20 (2000), August, Nr. 1, S. 2–11. – ISSN 1615-147X, 1615-1488
- Sigmund und Jensen 2003** Sigmund, Ole ; Jensen, Jakob S.: Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 361 (2003), Mai, Nr. 1806, S. 1001–1019. – ISSN 1364-503X, 1471-2962
- Soto 1997** Soto, Ciro A.: Structural topology optimization for tactile response improvement in the automotive industry. In: *Proceedings*. Chicago, Illinois, USA, 1997
- Soto et al. 1996** Soto, Ciro A. ; Yang, R.J. ; DeVries, R.: Structural topology optimization for forced frequency vibrations. Irvine, California, USA, 1996
- Stachowiak 1973** Stachowiak, Herbert: *Allgemeine Modelltheorie*. Wien : Springer Verlag, 1973. – Cited by 1056. – ISBN 3211811060
- Steinhilper 2012** Steinhilper, Rolf: *Handbuch Konstruktion*. München : Hanser, 2012. – ISBN 9783446430006 3446430008 9783446434035 3446434038
- Svanberg 1987** Svanberg, Krister: The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24 (1987), Nr. 2, S. 359–373. – ISSN 1097-0207
- Svanberg 2002** Svanberg, Krister: A Class of Globally Convergent Optimization Methods Based on Conservative Convex Separable Approximations. In: *SIAM Journal on Optimization* 12 (2002), Januar, Nr. 2, S. 555–573. – ISSN 1052-6234, 1095-7189
- Tcherniak 2002** Tcherniak, Dmitri: Topology optimization of resonating structures using SIMP method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), Nr. 11, S. 1605–1622. – ISSN 1097-0207
- The Mathworks Inc. 2012** The Mathworks Inc., (Hrsgb.): *Matlab*. 2012. – Version 2012a
- Valeo Group 2013**
- Wagner et al. 2013a** Wagner, Daniel ; Albers, Albert ; Klingler, Simon ; Majic, Neven ; Munker, Florian: Next generation electric energy storage systems - Systematic design approaches. In: *6. Grazer Symposium Virtuelles Fahrzeug*. Graz, Österreich, Mai 2013



- Wagner et al. 2013b** Wagner, Daniel ; Ruckpaul, Anne ; Hessenauer, Benjamin ; Burkardt, Norbert ; Matthiesen, Sven: Target Weighing - A new approach for conceptual lightweight design in early phases of complex systems development. In: *Proceedings of 19th International Conference on Engineering Design (ICED13)*. Seoul, Südkorea, August 2013
- Wbcds 2004** Wbcds: Mobilität 2030: Die Herausforderungen der Nachhaltigkeit meistern / World Business Council for Sustainable Development. 2004. – Forschungsbericht
- Wyatt et al. 2009** Wyatt, D. F. ; Eckert, C. M. ; Clarkson, P. J.: Design of product architectures in incrementally developed complex products. Stanford, CA, 2009
- Yoon et al. 2007** Yoon, Gil H. ; Jensen, Jakob S. ; Sigmund, Ole: Topology optimization of acoustic–structure interaction problems using a mixed finite element formulation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70 (2007), Nr. 9, S. 1049–1075. – ISSN 1097-0207
- Zienkiewicz et al. 2005** Zienkiewicz, O. C. ; Taylor, R. L. ; Zhu, J. Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth Edition*. 6. Butterworth-Heinemann, Mai 2005. – ISBN 0750663200
- Zuo et al. 2006** Zuo, Kong-Tian ; Chen, Li-Ping ; Zhang, Yun-Qing ; Yang, Jingzhou: Study of key algorithms in topology optimization. In: *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 32 (2006), März, Nr. 7-8, S. 787–796. – ISSN 0268-3768, 1433-3015



# Betreute Studien-, Diplom-, Bachelor- und Masterarbeiten

**de Conihout et al. 2013** Conihout, Arthur de ; Co-Betreuer: Hessenauer, Benjamin ; Betreuer: Albers, Albert: *Erweiterung einer Matlab-Implementierung zur Optimierung der akustischen Eigenschaften von Bauteilen von 2D auf 3D*, IPEK, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diplomarbeit, 2013

**Doki-Thonon et al. 2009** Doki-Thonon, Thomas ; Co-Betreuer: Hessenauer, Benjamin ; Betreuer: Albers, Albert: *Implementierung einer Topologieoptimierungsumgebung*, IPEK, Universität Karlsruhe, Diplomarbeit, 2009

# Weitere Studien-, Diplom-, Bachelor- und Masterarbeiten

**Hessenauer et al. 2007** Hessenauer, Benjamin ; Co-Betreuer: Maier, Thomas ; Betreuer: Albers, Albert: *Topology optimization of dynamically loaded structures with respect to issues of noise, vibration and harshness (NVH)*, IPEK, Universität Karlsruhe, Diplomarbeit, 2007

