

Lokales Verhalten konvexer Körper und Approximation

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

(Dr. rer. nat.)

von der Fakultät für Mathematik
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Ines Ziebarth geb. Türk
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Dezember 2014

Referent: Prof. Dr. Daniel Hug

Korreferent: Prof. Dr. Wolfgang Weil

Danksagung

Und das, was du allein nicht schaffst, das schaffen wir vereint.

Kindermutmachlied

Natürlich konnte mir das Verfassen dieser Dissertation niemand abnehmen, aber es gab zahlreiche Menschen, die mich während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) begleitet haben, mir stets mit Rat und Tat zur Seite standen und Mut machten, wenn ich einmal zweifelte. All denjenigen möchte ich an dieser Stelle danken.

Meinen beiden Referenten Herrn Prof. Dr. Daniel Hug und Herrn Prof. Dr. Wolfgang Weil danke ich dafür, dass sie mir die Möglichkeit zur Promotion gaben. Auch für die stete Betreuung, die vielen konstruktiven Gespräche und wertvollen Hinweise bin ich ihnen dankbar.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) förderte meine Tätigkeit im Rahmen des deutsch-tschechischen Kooperationsprojekts „Krümmungsmaße und Integralgeometrie“ (WE1613/2-1 und HU1874/4-2).

Allen Kollegen des Instituts für Stochastik danke ich für die angenehme und fröhliche Arbeitsatmosphäre, in der ich mich immer sehr wohl gefühlt habe. Vor allem bin ich Dr. Julia Hörmann für wertvolle Gespräche und das geduldige Korrekturlesen dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Meiner Familie und meinen Freunden, allen voran meiner Mutter und meinem Ehemann Mathias, danke ich für unzählige aufbauende Worte, ihre fortwährende Unterstützung und Liebe. Danke, dass ihr immer da seid!

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
1. Einleitung	1
2. Grundlegende Definitionen	5
2.1. Allgemeine Grundlagen	5
2.2. Grundlagen aus der Konvexen Geometrie	6
2.3. Grundlagen aus der Multilinearen Algebra	9
2.4. Krümmungen	10
I. Fahnenmaße	15
3. Stützmaße	17
3.1. Stützmaße als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel	17
3.2. Stützmaße und Krümmungen	25
4. Fahnenmaße	29
4.1. Fahnenmaße als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel	29
4.2. Fahnenmaße und Krümmungen	32
4.3. Fahnenmaße als Projektionsmittel	34
4.4. Eigenschaften der Fahnenmaße	41
5. Fahnenmaße für Zonoide	55
6. Gemischte Maße und gemischte Volumina	67
6.1. Totale gemischte Maße	68
6.2. Gemischte Maße	72
6.3. Gemischte Volumina von Projektionen	77
7. Die Stützfunktion	81
7.1. Darstellung der Stützfunktion durch Fahnenmaße	81
7.2. Berechnung der Funktion $\varphi^{1,d-1}(u, U, v, \{o\})$	88
II. Zufällige Polytope	95
8. Einführung	97

9. Konvexe Hüllen von Punkten in einem konvexen Körper	103
9.1. Gewichtete Differenz der mittleren Breiten	103
9.2. Polarität und zufällige polyedrische Mengen	112
9.3. Varianzabschätzungen	118
9.4. Starke Gesetze der großen Zahlen	123
10. Konvexe Hüllen von Punkten auf dem Rand eines konvexen Körpers	125
10.1. Gewichtete Volumendifferenz	126
10.2. Berührende polyedrische Mengen	129
Literaturverzeichnis	137

Abbildungsverzeichnis

2.1. Stützfunktion	7
3.1. Parallelmenge und Stützelement	17
3.2. Lokale Parallelmenge	18
4.1. Nächste Punkte von K und E	30
4.2. Beispiel 1 für die Abbildung g	35
4.3. Beispiel 2 für die Abbildung g	35
4.4. Zusammenhang zwischen Seiten und äußeren Normalen des Polytops P und der Projektion $P L^\perp$	36
8.1. Frei rollende Kugel	101
8.2. Kappe von K	101
9.1. Zufälliges Polytop	103
9.2. Skizze zur Abschätzung des Kappenvolumens	106
9.3. Skizze zur Abschätzung des Kappenvolumens	109
9.4. Ausschnitt aus Abbildung 9.3	109
9.5. Zufällige polyedrische Menge	114
10.1. Zufälliges Polytop	125

1. Einleitung

Ein zentraler Aspekt der Brunn-Minkowski Theorie, die Ende des 19. Jahrhunderts von H. Brunn und H. Minkowski begründet wurde, ist die Verbindung der Minkowski-Addition mit dem Begriff des Volumens. Ein konvexer Körper ist eine kompakte, konvexe Menge mit nichtleerem Inneren im d -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^d . Das Volumen $V(\varrho_1 K_1 + \dots + \varrho_k K_k)$ einer Minkowski-Summe konvexer Körper K_1, \dots, K_k mit nichtnegativen Koeffizienten $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ ist ein Polynom in $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ und die Koeffizienten dieses Polynoms werden gemischte Volumina $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_d})$ mit $i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, k\}$ genannt.

Eine ebenfalls grundlegende Klasse von Funktionalen konvexer Körper erhalten wir hieraus als Spezialfall. Betrachten wir die Minkowski-Summe eines konvexen Körpers K und eines Vielfachen der Einheitskugel B^d , so gelangen wir zur Steinerformel

$$V(K + \varrho B^d) = \sum_{i=0}^d \varrho^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(K),$$

wobei $\varrho \geq 0$ ist und κ_{d-i} das Volumen der $(d-i)$ -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Die Koeffizienten $V_0(K), \dots, V_d(K)$ der Steinerformel sind die inneren Volumina des konvexen Körpers K . Sie besitzen einfache geometrische Interpretationen. Insbesondere ist V_d das Volumen, V_{d-1} die halbe Oberfläche und V_1 ist proportional zur mittleren Breite. Lokale Varianten dieser Funktionale sind die auf der Einheitssphäre S^{d-1} definierten Oberflächenmaße $\Psi_0(K, \cdot), \dots, \Psi_{d-1}(K, \cdot)$, die unabhängig voneinander 1937/38 von W. Fenchel und B. Jessen [27] beziehungsweise A. D. Aleksandrov [1] eingeführt wurden. Im Jahr 1959 folgten H. Federers Krümmungsmaße auf \mathbb{R}^d [25] und später die Stützmaße auf $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$, die durch R. Schneider [63] erklärt wurden. Die Oberflächen- und Krümmungsmaße liefern hierbei Informationen über den Rand des konvexen Körpers, da sie in gewisser Weise Eigenschaften von Randstücken des konvexen Körpers beschreiben. Eine ausführliche Herleitung und Definition all dieser Maße und Funktionale findet sich in Abschnitt 3.2.

Die Oberflächen- und Krümmungsmaße gehen unter geeigneten Projektionen als Bildmaße aus den Stützmaßen hervor. In ähnlicher Weise stellen die im ersten Teil dieser Dissertation betrachteten Fahnenmaße eine Verallgemeinerung der Stützmaße dar. Im Unterschied zu den Stützmaßen berücksichtigen die Fahnenmaße auch noch die den konvexen Körper berührenden, affinen Unterräume des \mathbb{R}^d . Zum ersten Mal in Erscheinung getreten sind Maße dieser Art in einer Arbeit von W. J. Firey [29], in der er eine integralgeometrische Interpretation der Oberflächenmaße $\Psi_i(K, \cdot)$ ($i \in \{0, \dots, d-1\}$) liefert. Sie können als Maß aller $(d-1-i)$ -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^d (auch $(d-1-i)$ -Ebenen genannt) angesehen werden, die den konvexen Körper K berühren und in einer Stützhyperebene von K liegen, deren äußere Normale ein Element der Borelmenge ist, in der das Maß ausgewertet wird. Eine analoge Interpretation der Krümmungsmaße geht zurück auf R. Schneider [62].

Zur Motivation der Fahnenmaße geben wir nun zwei Anwendungsbeispiele an. Ein Ziel der konvexen Geometrie ist es, lokale Informationen über konvexe Körper zu erhalten, indem eine Verbindung zwischen globalen geometrischen Funktionalen wie zum Beispiel gemischten Volumina und lokal definierten Größen hergestellt wird. Ein bekanntes Beispiel

hierfür ist die Darstellung

$$V(K[1], M[d-1]) = V(K, M, \dots, M) = \frac{2}{d} \int_{S^{d-1}} h(K, u) \Psi_{d-1}(M, du)$$

des gemischten Volumens $V(K[1], M[d-1])$ zweier beliebiger konvexer Körper K und M . Die Funktion $h(K, \cdot)$ bezeichnet hierbei die Stützfunktion des konvexen Körpers K . Eine Verallgemeinerung dieser Formel auf gemischte Volumina der Form $V(K[m], M[d-m])$ für $m \in \{2, \dots, d-2\}$ war bisher nur unter geeigneten Voraussetzungen an die konvexen Körper möglich. Es handelt sich dabei um Integraldarstellungen, bei denen über lineare Graßmann-Mannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^d integriert wird. Diese Integration macht es notwendig, dass einer der konvexen Körper K, M zentralsymmetrisch, das heißt punktsymmetrisch zu einem Zentrum, und ausreichend oft differenzierbar ist. Mit Hilfe von Fahnenmaßen ist es D. Hug, J. Rataj und W. Weil [41] gelungen, diese Einschränkung fallen zu lassen. Es wird nun nur noch benötigt, dass die konvexen Körper in allgemeiner Lage sind.

Unter ähnlichen Voraussetzungen bewies W. Hinderer [35] ebenfalls mit Hilfe von Fahnenmaßen Integralformeln für die Projektionsfunktionen $L \mapsto V_i(K|L)$, $1 \leq i \leq j \leq d-1$, also für das i -te innere Volumen der Orthogonalprojektion eines konvexen Körpers K auf einen j -dimensionalen linearen Unterraum L .

Diese beiden Beispiele geben Anlass zur Hoffnung, dass auch weitere Funktionale mittels Integration über Fahnenmannigfaltigkeiten dargestellt werden können. Neben der Einführung von Fahnenmaßen als Projektionsmittel und der Zusammenstellung ihrer Eigenschaften besteht ein Ziel dieser Dissertation darin, einen weiteren Beitrag in dieser Hinsicht zu leisten. So leiten wir zum Beispiel Darstellungen gemischter Maße und der Stützfunktion eines konvexen Körpers durch Fahnen-Oberflächenmaße her.

Nun kommen wir noch einmal zum historischen Hintergrund der Fahnenmaße. Maße, die direkt auf dem Raum der j -Ebenen ($j \in \{0, \dots, d-1\}$) definiert sind, die einen konvexen Körper berühren, wurden von W. Weil [77] und von R. Kropp [47] untersucht. Sie konstruierten Maße auf Paaren von Randpunkten und der Menge der den konvexen Körper in diesem Randpunkt berührenden j -Ebenen beziehungsweise äußeren Normalen und der Menge der j -Ebenen orthogonal zu diesen Normalenvektoren. Die Krümmungs- beziehungsweise Oberflächenmaße gehen durch Projektionen aus ihnen hervor. R. Kropp [47] führt diese beiden Maße außerdem zusammen und präsentiert erstmals Maße $\tilde{\Xi}_{d-k-1}^{(k)}(K, \cdot)$ ($k \in \{0, \dots, d-1\}$) auf Tripeln von Randpunkten des konvexen Körpers K , äußeren Normalen und dazu orthogonalen linearen Unterräumen. Wie R. Kropp führen wir die Fahnenmaße als Projektionsmittel ein. Allerdings leiten wir unsere Darstellung der Fahnenmaße aus einer expliziten Formel für Polytope her und erhalten im Unterschied zu R. Kropp Fahnenmaße $\Xi_m^{(k)}(K, \cdot)$ für jedes $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$. Die in dieser Dissertation betrachteten Fahnenmaße unterscheiden sich außerdem durch eine andere Normierung von denen in [47].

Über einen anderen Ansatz gelangt W. Hinderer [35] zu den Fahnenmaßen. Sein Startpunkt sind lokale Parallelmengen, das heißt Mengen von j -Ebenen, deren Abstand zum konvexen Körper kleiner als $\varrho > 0$ ist. Die Fahnenmaße tauchen dann als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel auf. Seine Vorgehensweise wird in Abschnitt 4.1 ausführlich erläutert. Wie zuvor erwähnt, ist das Hauptresultat seiner Arbeit eine Integralformel für Projektionsfunktionen.

Wiederum einen anderen Weg die Fahnenmaße einzuführen wählen W. Rother und M. Zähle in [61] (beziehungsweise [83]). Für Mengen positiver Reichweite führen sie die Fahnenmaße auf dem verallgemeinerten Normalenbündel als Integrale bezüglich der zugehörigen Hausdorffmaße ein. Dieser Zugang verwendet Krümmungen und wird in Abschnitt 4.2

genauer dargestellt.

Die eingangs erwähnten inneren Volumina spielen auch im zweiten Teil dieser Dissertation eine wichtige Rolle, wenn wir uns mit der Approximation konvexer Körper durch zufällige Polytope beschäftigen. Ein zufälliges Polytop $K_{(n)}$ ist die konvexe Hülle von n unabhängigen, zufällig in einem konvexen Körper K gewählten Punkten. Am einfachsten ist es, von gleichverteilten Punkten auszugehen. Allgemeiner ist es auch möglich anzunehmen, dass eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung der Punkte vorliegt. Diesen Fall betrachten wir in dieser Dissertation.

Wächst die Anzahl n der zufälligen Punkte, so ist plausibel, dass das zufällige Polytop sich dem konvexen Körper mit wachsender Genauigkeit annähert. Die Güte dieser Approximation des konvexen Körpers durch das zufällige Polytop wollen wir untersuchen. Der Fehler dieser Approximation kann gemessen werden, indem der Erwartungswert der Differenz $F(K) - F(K_{(n)})$ für ein auf der Menge der konvexen Körper definiertes Funktional F betrachtet wird. Da explizite Formeln kaum zu berechnen sind, zeigen wir asymptotische Formeln für wachsendes n . Außerdem werden wir die Varianz abschätzen und mit Hilfe der oberen Abschätzung ein starkes Gesetz der großen Zahlen beweisen. Das betrachtete Funktional F wird bei uns entweder das Volumen oder die mittlere Breite sein. Die Breite eines konvexen Körpers K in eine Richtung $u \in S^{d-1}$ ist der Abstand der beiden Stützhyperebenen von K orthogonal zu u . Durch Mittelung über alle Richtungen erhalten wir die mittlere Breite von K .

Da die Form des konvexen Körpers und insbesondere die Beschaffenheit des Randes bei der Approximation durch Polytope eine wichtige Rolle spielt, werden in den Resultaten und Beweisen die aus dem ersten Teil der Dissertation bekannten Krümmungen auftreten.

Während zufällige Polytope den konvexen Körper von innen approximieren, ist eine Approximation von außen durch den Schnitt von zufälligen Halbräumen, die den konvexen Körper enthalten, möglich. Ein solcher Schnitt von zufälligen Halbräumen wird zufällige polyedrische Menge genannt. Auch mit dieser zu obiger Fragestellung dualen Situation beschäftigen wir uns in der vorliegenden Arbeit. Als Funktionale betrachten wir in diesem Fall ebenfalls das Volumen und die mittlere Breite. Wir werden sehen, dass sich asymptotische Formeln für Erwartungswerte, Varianzabschätzungen und starke Gesetze der großen Zahlen für zufällige polyedrische Mengen mittels Polarität aus denen für die zufälligen Polytope herleiten lassen.

Die Dissertation ist folgendermaßen gegliedert: Nachdem wir in Kapitel 2 allgemeine Grundlagen aus der konvexen Geometrie, multilinearen Algebra und über Krümmungen, wie sie zum Beispiel in den Büchern von R. Schneider [67] und H. Federer [26] nachgelesen werden können, bereitgestellt haben, gliedert sich diese Arbeit in zwei Teile. Im ersten Teil befassen wir uns mit Fahnenmaßen und somit mit dem lokalen Verhalten konvexer Körper. Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit der Approximation konvexer Körper durch zufällige Polytope.

Um Fahnenmaße besser verstehen zu können, führen wir in Kapitel 3 zunächst Stützmaße wie in [67] und [82] ein, geben eine Übersicht über ihre Eigenschaften und betrachten die hiervon abgeleiteten Krümmungsmaße und Oberflächenmaße. Auch der Zusammenhang zu den inneren Volumina wird hier ausführlich erläutert. In Kapitel 4 begegnen uns zum ersten Mal die Fahnenmaße. In den Abschnitten 4.1 und 4.2 werden zunächst die beiden zuvor erwähnten aus der Literatur bekannten Herleitungen der Fahnenmaße als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel (siehe [35]) und mittels Krümmungen (siehe [41] und [61]) vorgestellt. In Abschnitt 4.3 wird eine dritte Möglichkeit die Fahnenmaße einzuführen

dargestellt, nämlich die Darstellung der Fahnenmaße als Projektionsmittel. In Abschnitt 4.4 werden grundlegende Eigenschaften der Fahnenmaße gezeigt. Zahlreiche dieser Eigenschaften werden in den Beweisen in den folgenden Kapiteln benötigt. Aus der in Abschnitt 4.3 hergeleiteten Darstellung der Fahnenmaße geht hervor, dass sie eine Verallgemeinerung der Stützmaße sind. Daher ist es nicht verwunderlich, dass hier viele Eigenschaften der Stützmaße wieder auftreten. Für eine spezielle Klasse von konvexen Körpern, die sogenannten Zonoide, ist bekannt, dass sich die (gemischten) Oberflächenmaße als Integrale bezüglich der erzeugenden Maße der Zonoide darstellen lassen. In Kapitel 5 werden wir sehen, dass eine solche Darstellung auch für (gemischte) Fahnen-Oberflächenmaße möglich ist. Die restlichen Kapitel des ersten Teils dieser Dissertation sind nun wie oben erwähnt dem Ziel gewidmet, Integraldarstellungen geometrischer Funktionale mit Hilfe der Fahnenmaße zu beweisen. So betrachten wir in Kapitel 6 gemischte Volumina beziehungsweise allgemeiner gemischte Maße und zeigen, dass wir diese mit Hilfe von Fahnen-Oberflächenmaßen darstellen können. Dies ist auch für innere Volumina und gemischte Volumina von Projektionen konvexer Körper auf einen linearen Unterraum der Fall, wie wir in Abschnitt 6.3 sehen werden. Das abschließende Kapitel des ersten Teils, Kapitel 7, widmet sich der Herleitung einer Darstellung der Stützfunktion eines konvexen Körpers durch Fahnen-Oberflächenmaße.

Der zweite Teil dieser Dissertation befasst sich mit der Approximation konvexer Körper durch zufällige Polytope. In Kapitel 8 geben wir eine Einführung und einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung. Wir betrachten zwei unterschiedliche Modelle von zufälligen Polytopen. Der Unterschied der beiden Modelle besteht darin, dass die zufälligen Punkte in Kapitel 9 überall in dem konvexen Körper gewählt werden können und in Kapitel 10 ausschließlich auf dem Rand des konvexen Körpers. In Abschnitt 9.1 beweisen wir eine asymptotische Formel für den Erwartungswert der gewichteten Differenz der mittleren Breiten des konvexen Körpers und des zufälligen Polytops. In Abschnitt 9.2 sehen wir dann, wie sich mittels Polarität und des Ergebnisses aus Abschnitt 9.1 eine Formel für den Erwartungswert der gewichteten Volumendifferenz einer zufälligen polyedrischen Menge und des konvexen Körpers ableiten lässt. In den restlichen Abschnitten von Kapitel 9 werden Varianzabschätzungen zu den obigen Größen gegeben und daraus mit Hilfe der oberen Schranken starke Gesetze der großen Zahlen abgeleitet. Im letzten Kapitel dieser Arbeit gehen wir in ähnlicher Weise wie in Kapitel 9 auf das zweite Modell zufälliger Polytope ein. In diesem Fall beweisen wir eine asymptotische Formel für den Erwartungswert der gewichteten Volumendifferenz des konvexen Körpers und des zufälligen Polytops. Daraus leiten wir wieder mittels Polarität und des zuvor bewiesenen Resultats eine Formel für den Erwartungswert der Differenz der mittleren Breiten einer den konvexen Körper berührenden zufälligen polyedrischen Menge und des konvexen Körpers selbst ab.

2. Grundlegende Definitionen

In diesem Kapitel soll die verwendete Notation erläutert sowie die wichtigsten Definitionen aus der konvexen Geometrie und der multilinearen Algebra bereitgestellt werden, die im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder benötigt werden. Abschließend werden Krümmungen eingeführt. Soweit nicht anders erwähnt, können alle Informationen im Buch von Schneider [67] nachgelesen und vertieft werden.

2.1. Allgemeine Grundlagen

Wie üblich bezeichnen wir mit \mathbb{N} , \mathbb{Z} und \mathbb{R} die natürlichen, ganzen und reellen Zahlen. Der Betrag einer Zahl ist $|\cdot|$ und für ganze Zahlen $r, s \in \mathbb{Z}$ sei $r \wedge s := \min\{r, s\}$ die kleinere der beiden Zahlen. Ebenfalls mit $|\cdot|$ bezeichnen wir die Kardinalität einer Teilmenge der natürlichen Zahlen. Aus dem Kontext wird immer klar sein, was gemeint ist. Das Komplement einer Menge $I \subset \mathbb{N}$ ist I^c . Das Inklusionszeichen \subset verwenden wir stets in der Bedeutung \subseteq .

Zu einer Aussage C ist $\mathbf{1}\{C\}$ die Indikatorfunktion. Sie ist genau dann eins, wenn die Aussage erfüllt ist und ansonsten null. Ist E ein topologischer Raum, so ist $\mathcal{B}(E)$ die σ -Algebra der *Borelmengen* von E .

Wir arbeiten im Folgenden im d -dimensionalen reellen euklidischen Raum \mathbb{R}^d mit Ursprung o . Dort bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm.

Die lineare beziehungsweise affine Hülle einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^d$ wird mit $\text{lin}(A)$ beziehungsweise $\text{aff}(A)$ bezeichnet. Weiter sind ∂A und $\text{int}(A)$ der Rand und das Innere von A sowie $\text{relbd}(A)$ und $\text{relint}(A)$ der relative Rand und das relative Innere, das heißt der Rand und das Innere bezüglich der affinen Hülle. Die Dimension von A bezeichnen wir mit $\dim(A)$. Sie ist die Dimension der affinen Hülle von A .

Die Graßmann-Mannigfaltigkeit der k -dimensionalen linearen Unterräume des \mathbb{R}^d für $k \in \{0, \dots, d\}$ ist $G(d, k)$ und die Menge der k -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^d ist $A(d, k)$. Ihre Elemente werden im Folgenden auch *lineare (affine) k -Ebenen* genannt. Der *Orthogonalraum* eines linearen Unterraums L wird mit L^\perp bezeichnet und für die Orthogonalprojektion einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ auf L schreiben wir $A|L$. Weiter benutzen wir die Schreibweise $u \perp L$, falls ein Vektor $u \in \mathbb{R}^d$ orthogonal zu L ist. Zwei lineare Unterräume L_1 und L_2 heißen *parallel*, wenn $L_1 \subset L_2$ oder $L_2 \subset L_1$ und wir schreiben $L_1 \parallel L_2$. In ähnlicher Weise heißen zwei affine Unterräume $E_1 = x_1 + L_1$ und $E_2 = x_2 + L_2$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ *parallel*, wenn die linearen Unterräume L_1 und L_2 parallel sind. Ist E eine affine k -Ebene, so ist $L(E)$ der k -dimensionale lineare Unterraum parallel zu E .

Für $A, B \subset \mathbb{R}^d$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Minkowski-Summe*

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

sowie die Mengen

$$A \setminus B := \{a \in A : a \notin B\}$$

und

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Für zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist $\|x - y\|$ der *Abstand* von x und y . Der *Abstand* eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$ zu einer kompakten Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ wird definiert durch

$$d(A, x) := \min\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

Analog definieren wir den Abstand einer kompakten Menge A zu einer affinen Ebene $E \in A(d, k)$, $k \in \{0, \dots, d\}$, durch

$$d(A, E) := \min\{\|x - y\| : x \in A, y \in E\}.$$

Die Menge

$$B(x, \varrho) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq \varrho\}$$

ist die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^d$ und Radius $\varrho > 0$. Die d -dimensionale *Einheitskugel* $B(o, 1)$ wird auch mit B^d bezeichnet. Ihr Rand, die *Einheitssphäre*, ist $S^{d-1} := \{u \in \mathbb{R}^d : \|u\| = 1\}$.

Mit λ_j , $0 \leq j \leq d$, wird das j -dimensionale *Lebesguemaß* und mit \mathcal{H}^j das j -dimensionale *Hausdorffmaß* auf \mathbb{R}^d bezeichnet sowie mit $\mathcal{H}^j \llcorner A$ die Einschränkung von \mathcal{H}^j auf eine Menge A . Da das Hausdorffmaß $\mathcal{H}^j(\omega)$ einer Borelteilmenge ω einer affinen j -Ebene E (j -dimensionalen Sphäre S^j) in \mathbb{R}^d mit dem Lebesguemaß λ_j von ω berechnet in E (sphärischen Lebesguemaß berechnet in S^j) übereinstimmt, können Integrationen bezüglich des Lebesguemaßes durch das Hausdorffmaß ausgedrückt werden. Dies werden wir in dieser Arbeit häufig ausnutzen. Das *sphärische Lebesguemaß* auf S^{d-1} bezeichnen wir mit σ .

Insbesondere wird das d -dimensionale Maß, das heißt das *Volumen*, mit V bezeichnet. Das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel ist

$$\kappa_d := V(B^d) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}$$

und ihre Oberfläche ist

$$\omega_d := \mathcal{H}^{d-1}(S^{d-1}) = d\kappa_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})},$$

wobei $\Gamma(\cdot)$ die *Gammafunktion* bezeichnet. Für Berechnungen, in denen diese Konstanten auftreten, benötigen wir häufig die *Verdopplungsformel von Legendre*

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}} \Gamma(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die Gruppe der eigentlichen Bewegungen in \mathbb{R}^d bezeichnen wir mit $G(d)$ und die Gruppe der eigentlichen Drehungen in \mathbb{R}^d ist $SO(d)$. Jede Bewegung kann als Komposition einer Drehung und einer Translation dargestellt werden. Sowohl diese Mengen als auch $A(d, k)$ und $G(d, k)$ werden mit ihren üblichen Topologien versehen. Im Folgenden bezeichnen wir mit ν , μ , ν_k und μ_k Haarsche Maße auf $SO(d)$, $G(d)$, $G(d, k)$ beziehungsweise $A(d, k)$. Hierbei sind ν und ν_k so normiert, dass $\nu(SO(d)) = 1$ und $\nu_k(G(d, k)) = 1$. Für die Normierung der Maße μ und μ_k verweisen wir auf Abschnitt 4.4 in [67].

2.2. Grundlagen aus der Konvexen Geometrie

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält, das heißt genau dann, wenn

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A \quad \text{für } x, y \in A, \lambda \in [0, 1].$$

Hieraus ergibt sich, dass Durchschnitte konvexer Mengen ebenfalls konvex sind genauso wie die Minkowski-Summe zweier konvexer Mengen.

Ein *konvexer Kegel* ist eine nichtleere konvexe Menge $A \subset \mathbb{R}^d$, für die mit jedem Punkt $x \in A$ auch der Strahl λx mit $\lambda \geq 0$ in A enthalten ist.

Die *konvexe Hülle* $\text{conv}(A)$ von $A \subset \mathbb{R}^d$ ist der Durchschnitt aller konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^d , die A enthalten. Analog ist die *positive Hülle* der Durchschnitt aller konvexen Kegel, die A enthalten.

Eine kompakte und konvexe Menge K mit nichtleerem Inneren heißt *konvexer Körper*. Die Menge aller konvexen Körper in \mathbb{R}^d ist \mathcal{K}^d . Zusammen mit der *Hausdorffmetrik*

$$\delta(K, L) := \min\{\varrho \geq 0 : K \subset L + \varrho B^d, L \subset K + \varrho B^d\}, \quad K, L \in \mathcal{K}^d,$$

bildet die Menge \mathcal{K}^d einen metrischen Raum. Die Menge $K + \varrho B^d$ nennen wir auch *Parallelmenge* von K im Abstand $\varrho \geq 0$.

Sei K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d . Für $u \in S^{d-1}$ und $t \in \mathbb{R}$ definieren wir die Hyperebene $H(u, t) := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u, y \rangle = t\}$ sowie die zugehörigen abgeschlossenen Halbräume $H^+(u, t) := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u, y \rangle \geq t\}$ und $H^-(u, t) := \{y \in \mathbb{R}^d : \langle u, y \rangle \leq t\}$. Falls $x \in K \cap H(u, t)$ und $K \subset H^+(u, t)$ oder $K \subset H^-(u, t)$, so heißt $H(u, t)$ *Stützhyperebene* von K in $x \in \partial K$ und der Halbraum, in dem K liegt, wird *Stützhalbraum* genannt. Im Fall $K \subset H^-(u, t)$ ist u ein *äußerer Normalenvektor* oder kurz eine *äußere Normale* von K im Randpunkt x , andernfalls ist $-u$ eine äußere Normale. Nach Theorem 1.3.2 in [67] besitzt ein konvexer Körper in jedem Randpunkt eine Stützhyperebene und zu jeder Richtung $u \in S^{d-1}$ existiert eine Stützhyperebene mit äußerer Normale u .

Da jeder konvexe Körper der Durchschnitt seiner Stützhalbräume ist (siehe [67], Corollary 1.3.5), ist er durch seine Stützhyperebenen eindeutig bestimmt. Eine Stützhyperebene eines konvexen Körpers K mit äußerer Normale $u \in S^{d-1}$ ist wiederum eindeutig durch den Wert der *Stützfunktion* $h_K(u) = h(K, u)$ bestimmt. Sie ist definiert durch (vergleiche Abbildung 2.1)

$$h_K(u) := \max\{\langle u, x \rangle : x \in K\}, \quad u \in \mathbb{R}^d.$$

Somit ist $H(K, u) := H(u, h_K(u))$ eine Stützhyperebene mit äußerer Normale $u \in \mathbb{R}^d$

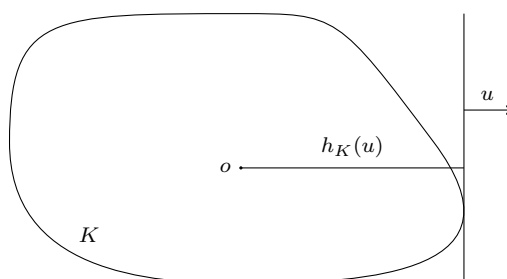


Abbildung 2.1.: Stützfunktion von K in Richtung u

und $H^-(K, u) := H^-(u, h_K(u))$ ist der zugehörige Stützhalbraum. Die Menge $F(K, u) := H(K, u) \cap K$ heißt *Stützmenge* von K . Gilt $\dim(F(K, u)) = 0$ für alle $u \in S^{d-1}$, so enthält der Rand des konvexen Körpers keine Strecken und K wird *strikt konvex* genannt. Die Stützfunktion ist genau dann differenzierbar in $u \in S^{d-1} \setminus \{o\}$, wenn die Stützmenge $F(K, u)$ nur ein Element x enthält (siehe [67], Corollary 1.7.3). In diesem Fall gilt für den Gradienten der Stützfunktion $\nabla h_K(u) = x$.

Die Stützfunktion $h_K(u)$ gibt also den Abstand der Stützhyperebene mit äußerer Normale $u \in S^{d-1}$ zum Ursprung an. Somit ist die *Breite* w_K eines konvexen Körpers K in Richtung $u \in S^{d-1}$ gegeben durch

$$w_K(u) := h_K(u) + h_K(-u),$$

das heißt sie ist der Abstand der zwei Stützhyperebenen von K , die orthogonal zu u sind. Der Mittelwert der Breite von K über die Einheitskugel S^{d-1} heißt *mittlere Breite* von K und ist definiert als

$$W(K) := \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} w_K(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) = \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} h_K(u) \mathcal{H}^{d-1}(du).$$

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir uns immer wieder mit der Struktur des Randes eines konvexen Körpers beschäftigen und versuchen diese zu beschreiben. Daher wollen wir nun noch auf Randpunkte eingehen, die besondere Eigenschaften haben. Ein konvexer Körper K besitzt zwar in jedem Randpunkt x eine Stützhyperebene, allerdings muss diese nicht eindeutig sein. Ist die Stützhyperebene von K in x eindeutig (und somit auch die äußere Normale), so heißt x ein *regulärer* oder *glatter* Randpunkt von K . Die Menge aller regulären Randpunkte von K wird mit $\text{reg}(K)$ bezeichnet. Ein konvexer Körper ist *glatt*, wenn all seine Randpunkte regulär sind. In diesem Fall ist sein Rand eine \mathcal{C}^1 -Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d (siehe [67], Theorem 2.2.4).

Die Menge aller äußeren Einheitsnormalen von K in einem Randpunkt x bildet einen abgeschlossenen Kegel, den sogenannten *Einheitsnormalenkegel*

$$n(K, x) := \{u \in S^{d-1} : x \in H(K, u)\}.$$

Da die Menge aller nicht regulären Randpunkte von K eine Nullmenge bezüglich des $(d-1)$ -dimensionalen Hausdorffmaßes ist (folgt aus Theorem 2.2.5 in [67]), gibt es in \mathcal{H}^{d-1} -fast allen Randpunkten x einen eindeutigen äußeren Normalenvektor. Die *Gauß-Abbildung* $\sigma_K : \text{reg}(K) \rightarrow S^{d-1}$ ordnet jedem regulären Randpunkt x von K seine eindeutige äußere Einheitsnormale $\sigma_K(x)$ zu.

Eine besondere Klasse von konvexen Körpern sind die Polytope mit inneren Punkten. Daher betrachten wir die Eigenschaften von Polytopen nun genauer.

Ein *Polytop* P ist definiert als die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten des \mathbb{R}^d , also

$$P := \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\}), \quad x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Menge aller Polytope in \mathbb{R}^d bezeichnen wir mit \mathcal{P}^d . Sie ist eine dichte Teilmenge der Menge der kompakten und konvexen Mengen im \mathbb{R}^d (folgt mit Theorem 1.8.16 in [67]). Diese Tatsache bildet die Grundlage für eine wichtige Beweismethode. Ist $F : K \mapsto \mathbb{R}$ ein Funktional über \mathcal{K}^d , das stetig von K abhängt, so lassen sich Eigenschaften von F nachweisen, indem sie erst für Polytope gezeigt werden und dann durch Approximation auf beliebige konvexe Körper übertragen werden.

Wie wir vorhin gesehen haben, besitzt ein konvexer Körper in jedem Randpunkt eine Stützhyperebene. Ist H eine Stützhyperebene des Polytops $P = \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})$, so ist die zugehörige Stützmenge gegeben durch $H \cap P = \text{conv}(H \cap \{x_1, \dots, x_k\})$. Insbesondere zeigt uns das, dass jede Stützmenge eines Polytops ebenfalls ein Polytop ist.

Die Stützmenge eines Polytops werden auch *Seiten* genannt, genauer werden die k -dimensionalen Stützmenge für $k \in \{0, \dots, d\}$ als k -Seiten des Polytops bezeichnet. Insbesondere werden die 0-Seiten von P *Ecken* und die $(d-1)$ -Seiten *Facetten* genannt. Die Menge aller k -Seiten eines Polytops P wird mit $\mathcal{F}_k(P)$ bezeichnet. Die *eigentlichen*

Seiten sind alle Seiten außer der leeren Menge und P selbst. Sie sind jeweils in einer Facette des Polytops enthalten (siehe [67], Theorem 2.4.7).

Ist F eine Facette eines Polytops $P \in \mathcal{P}^d$, so gibt es eine Hyperebene $H(u, t)$ mit geeigneten $u \in S^{d-1}$ und $t \in \mathbb{R}$, sodass $F = P \cap H(u, t)$. In diesem Fall sagen wir, dass $u \in S^{d-1}$ die *äußere Normale* der Facette F ist. Den Einheitsnormalenkegel $n(P, F)$ einer Seite F von P definieren wir durch $n(P, F) := n(P, x)$, wobei x ein beliebiger Punkt aus dem relativen Inneren der Seite F ist. Zwischen den Stützmengen und den Einheitsnormalenkegeln lässt sich ein Zusammenhang feststellen. Für $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{o\}$ gilt

$$F = F(P, v) \iff v \in \text{relint}(n(P, F)). \quad (2.1)$$

Alternativ lassen sich Polytope als Durchschnitte von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen charakterisieren (vergleiche [67], Theorem 2.4.3 und Theorem 2.4.6). Insbesondere ist ein Polytop P auch der Durchschnitt seiner Stützhalbräume (siehe [67], Corollary 2.4.4), das heißt

$$P = \bigcap_{i=1}^k H^-(P, u_i),$$

wobei k die Anzahl der Facetten von P ist und u_i , $1 \leq i \leq k$, die äußeren Facettennormalen von P sind. Die Werte $h(P, u_1), \dots, h(P, u_k)$ bestimmen das Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ hierbei eindeutig.

Wir bezeichnen mit $\sigma(P, \beta)$ das *sphärische Bild*, das heißt die Menge aller äußeren Normaleneinheitsvektoren von P in Punkten aus β in \mathbb{R}^d . Zum Schluss definieren wir noch den *äußeren Winkel* eines Polytops $P \in \mathcal{P}^d$ an einer Seite $F \in \mathcal{F}_k(P)$, $k = 1, \dots, d-1$, durch

$$\gamma(F, P) := \frac{1}{\omega_{d-k}} \mathcal{H}^{d-k-1}(n(P, F)) = \frac{1}{\omega_{d-k}} \mathcal{H}^{d-k-1}(\sigma(P, \text{relint}(F)))$$

und

$$\gamma(F, P) := 1 \quad \text{für } k = d.$$

Besonders zu bemerken ist, dass der äußere Winkel $\gamma(F, P)$ den gleichen Wert hat, wenn er in einem affinen Unterraum berechnet wird, der das Polytop P enthält, falls die Dimension von P kleiner als d ist.

2.3. Grundlagen aus der Multilinearen Algebra

In diesem Abschnitt wollen wir die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen der multilinearen Algebra einführen. Diese und mehr Informationen lassen sich zum Beispiel in Kapitel 1 im Buch von Federer [26] nachlesen.

Für $m \in \{0, \dots, d\}$ bezeichnet $\bigwedge_m \mathbb{R}^d$ den linearen Raum der m -Vektoren in \mathbb{R}^d . Er ist $\binom{d}{m}$ -dimensional und ist der Vektorraum, der durch Produkte $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ von Vektoren $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^d$ aufgespannt wird. Insbesondere gilt $\bigwedge_0 \mathbb{R}^d = \mathbb{R}$ und $\bigwedge_1 \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d$, das heißt die reellen Zahlen können als 0-Vektoren und die Elemente des \mathbb{R}^d als 1-Vektoren aufgefasst werden. Bilden die Vektoren u_1, \dots, u_d eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^d , so bilden die m -Vektoren $u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_m}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq d$ eine Orthonormalbasis von $\bigwedge_m \mathbb{R}^d$.

Ein Element ξ aus $\bigwedge_m \mathbb{R}^d$ heißt *einfach*, wenn es das Produkt von m Vektoren u_1, \dots, u_m aus \mathbb{R}^d ist. Also wenn es eine Darstellung $\xi = u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ besitzt. Dieses Produkt ist genau dann null, wenn die Vektoren u_1, \dots, u_m linear abhängig sind.

Ein enger Zusammenhang besteht zwischen den einfachen m -Vektoren und den m -dimensionalen linearen Unterräumen des \mathbb{R}^d , denn jeder einfache m -Vektor ξ repräsentiert eine m -Ebene, die den Ursprung enthält. Genauer gesagt wird mit ξ der lineare Unterraum $T = \{x \in \mathbb{R}^d : x \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge u_m = o\}$ assoziiert, das heißt der m -dimensionale Unterraum, der von u_1, \dots, u_m aufgespannt wird. Umgekehrt kann man zu einem m -dimensionalen linearen Unterraum T eine Orthonormalbasis u_1, \dots, u_m wählen. Dann ist T der zum einfachen m -Vektor $u_1 \wedge \cdots \wedge u_m$ assoziierte Unterraum.

Die zu zwei einfachen m -Vektoren ξ und η ($\xi \neq o \neq \eta$) assoziierten Unterräume sind genau dann gleich, wenn für eine reelle Konstante $c \neq 0$ gilt $\xi = c \cdot \eta$.

Ein Skalarprodukt für einfache m -Vektoren wird definiert durch

$$\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_m, v_1 \wedge \cdots \wedge v_m \rangle := \det \left((\langle u_i, v_j \rangle)_{i,j=1}^m \right),$$

wobei $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^d$ und \det für die Determinante steht. Durch bilineare Fortsetzung erhalten wir ein Skalarprodukt auf $\bigwedge_m \mathbb{R}^d$. Die hierdurch induzierte Norm auf $\bigwedge_m \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|$. Da wir die Elemente des \mathbb{R}^d auch als 1-Vektoren ansehen können, ist diese Notation konsistent mit der Notation für Elemente des \mathbb{R}^d .

Ist einer der Multivektoren $\xi \in \bigwedge_m \mathbb{R}^d$ oder $\eta \in \bigwedge_l \mathbb{R}^d$ einfach, so gilt für die Norm von $\xi \wedge \eta$ die Abschätzung (siehe [26], S. 32)

$$\|\xi \wedge \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|. \quad (2.2)$$

Sind beide Multivektoren einfach und ungleich null, so gilt Gleichheit genau dann, wenn die zu η und ξ assoziierten Unterräume orthogonal sind.

2.4. Krümmungen

In Abschnitt 2.2 haben wir gesehen, dass es sehr einfach ist, den Rand eines Polytops durch seine Seiten zu beschreiben. In diesem Abschnitt wollen wir die Randstruktur von beliebigen konvexen Körpern betrachten und sie mit Hilfe von Krümmungen beschreiben. Bevor wir uns an allgemeine konvexe Körper wagen, betrachten wir zunächst konvexe Körper, deren Ränder geeignete Differenzierbarkeitseigenschaften erfüllen, sodass sie im Sinne der Differentialgeometrie reguläre Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^d sind.

Was wir unter Krümmung verstehen, wird im Folgenden genauer erläutert. Hierzu sei $K \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper sowie $x \in \partial K$ ein glatter Randpunkt von K , das heißt in x gibt es eine eindeutige Stützhyperebene $H(K, \sigma_K(x))$ mit eindeutiger äußerer Einheitsnormale $\sigma_K(x)$. Mit $T_x K := H(K, \sigma_K(x)) - x$ wird der *Tangententialraum* von K in x bezeichnet. Er ist der zu $\sigma_K(x)$ orthogonale lineare Unterraum des \mathbb{R}^d .

Da x ein glatter Randpunkt ist, kann der Rand von K in einer Umgebung $U(\epsilon)$, $\epsilon > 0$, um x durch eine nichtnegative konvexe Funktion $f : T_x K \cap B(o, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(o) = 0$ dargestellt werden, sodass gilt

$$U(\epsilon) \cap \partial K := \{x + t - f(t) \sigma_K(x) : t \in T_x K \cap B(o, \epsilon)\}.$$

Ein konvexer Körper heißt *von der Klasse \mathcal{C}^k* , $k \in \mathbb{N}$, falls seine Randhyperfläche k -mal stetig differenzierbar ist. Aus Theorem 2.2.4 in [67] folgt, dass ein glatter konvexer Körper K von der Klasse \mathcal{C}^1 ist. Ist K von der Klasse \mathcal{C}^2 , so können wir die Gauß-Abbildung σ_K auf dem ganzen Rand von K definieren, das heißt sie ordnet jedem Randpunkt x von K seine eindeutige äußere Einheitsnormale $\sigma_K(x)$ zu. Die Gauß-Abbildung ist von der Klasse \mathcal{C}^1 (siehe [67], S. 113) und ihre Ableitung, die *Weingartenabbildung*, $W_x :=$

$D\sigma_K(x) : T_x\partial K \rightarrow T_{\sigma_K(x)}S^{d-1}$ ist eine selbstadjungierte, lineare Abbildung mit reellen Eigenwerten $k_1(K; x), \dots, k_{d-1}(K; x)$, den sogenannten *Hauptkrümmungen* von K in x . Sie können als Funktionen auf ∂K interpretiert werden. Ist f die konvexe Funktion, die in einer Umgebung von x den Rand von K beschreibt, so sind die Hauptkrümmungen in x gerade die Eigenwerte der Hessematrix von f , woraus mit Theorem 1.5.13 in [67] folgt, dass sie nichtnegativ sind.

Die j -te *normalisierte elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen* von K in $x \in \partial K$ ist für $j = 1, \dots, d-1$ definiert als (vergleiche [67], Formel (2.36))

$$\begin{aligned} H_0(K; x) &:= 1 \\ H_j(K; x) &:= \binom{d-1}{j}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq d-1} k_{i_1}(K; x) \cdots k_{i_j}(K; x) \\ &= \binom{d-1}{j}^{-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=j}} \prod_{i \in I} k_i(K; x). \end{aligned}$$

Insbesondere wird $\kappa(x) := H_{d-1}(K; x) = \prod_{i=1}^{d-1} k_i(K; x)$ *Gauß-Kronecker-Krümmung* und $H_1(K; x)$ *mittlere Krümmung* genannt.

Wir haben die Hauptkrümmungen eines konvexen Körpers K also als Funktionen auf dem Rand von K definiert. In ähnlicher Weise wollen wir nun die sogenannten Hauptkrümmungsradien als Funktionen der äußeren Einheitsnormalenvektoren von K definieren.

Ein konvexer Körper K ist *von der Klasse \mathcal{C}_+^k* , $k \geq 2$, falls K von der Klasse \mathcal{C}^k ist und die Gauß-Kronecker-Krümmung κ positiv ist. Da die Hauptkrümmungen nichtnegativ sind, besagt die letzte Bedingung insbesondere, dass keine der Hauptkrümmungen null ist.

Im Folgenden sei $K \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper von der Klasse \mathcal{C}_+^2 . Insbesondere ist dann die Stützfunktion von K zweimal stetig differenzierbar (siehe [67], S. 115).

Die Umkehrfunktion der Gauß-Abbildung x_K bildet von S^{d-1} nach ∂K ab. Der *Tangentenraum* von S^{d-1} in $u \in S^{d-1}$ ist $T_u = u^\perp$. Nun definieren wir die *inverse Weingartenabbildung*

$$\bar{W}_u := Dx_K(u) : T_u \rightarrow T_u.$$

Ihre Eigenwerte $r_1(K; u), \dots, r_{d-1}(K; u)$ werden *Hauptkrümmungsradien* von K in u genannt. Sie sind nichtnegativ und können als Funktionen des äußeren Einheitsnormalenvektors, das heißt als Funktionen auf dem sphärischen Bild, aufgefasst werden.

Analog zu den elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen definieren wir für $j = 1, \dots, d-1$ die j -te *normalisierte elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungsradien* von K in Richtung $u \in S^{d-1}$ (vergleiche [67], Formel (2.43)) durch

$$\begin{aligned} s_j(K; u) &:= \binom{d-1}{j}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq d-1} r_{i_1}(K; u) \cdots r_{i_j}(K; u) \\ &= \binom{d-1}{j}^{-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=j}} \prod_{i \in I} r_i(K; u). \end{aligned}$$

Da wir voraussetzen, dass K von der Klasse \mathcal{C}_+^2 ist, gilt $x_K(u) = \nabla h_K(u)$ und somit für jede integrierbare Funktion $f : \partial K \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_{\partial K} f(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) = \int_{S^{d-1}} f(x_K(u)) s_{d-1}(K; u) \mathcal{H}^{d-1}(du)$$

und für jede integrierbare Funktion $g : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{S^{d-1}} g(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) = \int_{\partial K} g(\sigma_K(x)) \kappa(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx). \quad (2.3)$$

In Lemma 8.1 in Kapitel 8 werden wir zeigen, dass letztere Gleichung auch unter schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an den konvexen Körper gilt.

Nun nutzen wir die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsradien, um ein lokales Parallelvolumen zu berechnen, das uns in Abschnitt 3.1 in verallgemeinerter Form wiederbegegnet wird. Für $\varrho > 0$ und eine relativ offene Borelmenge $\beta \subset \partial K$ definieren wir die lokale Parallelmenge $A_\varrho(K, \beta)$ aller Punkte $x \in \mathbb{R}^d$, deren Abstand zu K höchstens ϱ beträgt und deren nächster Punkt $p(K, x)$ in K in der Menge β liegt, durch

$$A_\varrho(K, \beta) := \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < d(K, x) \leq \varrho \text{ und } p(K, x) \in \beta\}.$$

Zum anderen definieren wir für eine offene Menge $\omega \subset S^{d-1}$ die lokale Parallelmenge $B_\varrho(K, \omega)$ als die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^d$, deren Abstand zu K höchstens ϱ beträgt und für die die äußere Einheitsnormale $u(K, x)$ in der Menge ω liegt, das heißt

$$B_\varrho(K, \omega) := \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < d(K, x) \leq \varrho \text{ und } u(K, x) \in \omega\}.$$

Berechnen wir für $\omega = \sigma_K(\beta)$ oder $\beta = x_K(\omega)$ das Lebesgue-Maß obiger Mengen, so erhalten wir (siehe [67], Formel (2.63))

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^d(A_\varrho(K, \beta)) &= \mathcal{H}^d(B_\varrho(K, \omega)) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \varrho^{d-m} \binom{d}{m} \int_{\omega} s_m(K; u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \varrho^{d-m} \binom{d}{m} \int_{\beta} H_{d-1-m}(K; x) \mathcal{H}^{d-1}(dx). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bisher haben wir nur konvexe Körper mit geeigneten Differenzierbarkeitseigenschaften betrachtet. Diese Einschränkungen wollen wir nun fallen lassen und uns allgemeinen konvexen Körpern zuwenden. Sei daher im Folgenden $K \in \mathcal{K}^d$ beliebig. Des Weiteren sei x ein glatter Randpunkt von K und $u \in S^{d-1}$ die äußere Einheitsnormale an K in x . Wir sagen K ist im Randpunkt x *zweimal differenzierbar* im verallgemeinerten Sinn, falls ein Koordinatensystem gewählt werden kann, sodass es eine quadratische Form Q auf \mathbb{R}^{d-1} gibt, die folgende Eigenschaft hat: Liegt K so, dass $x = o$ gilt und \mathbb{R}^{d-1} eine Stützhyperebene von K in x ist, dann ist ∂K in einer Umgebung von o der Graph einer konvexen Funktion f , die auf einer $(d-1)$ -dimensionalen Kugel um o in \mathbb{R}^{d-1} definiert ist und

$$f(z) = \frac{1}{2}Q(z) + o(\|z\|^2)$$

für $z \rightarrow o$ erfüllt. Mit $o(\cdot)$ wird hierbei das Landau-Symbol bezeichnet. In diesem Fall wird x ein *normaler Randpunkt* von K genannt und Q die *zweite verallgemeinerte Fundamentalform* von ∂K in x . Sie kann als eine Funktion in $T_x K$ beziehungsweise u^\perp aufgefasst werden.

Ist v_1, \dots, v_{d-1} eine geeignete Orthonormalbasis von $T_x K$, so gilt

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{d-1} k_i(K; x) z_i^2,$$

wobei $z_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq d-1$, durch die Gleichung $z = z_1 v_1 + \cdots + z_{d-1} v_{d-1}$ definiert sind. Die Menge

$$D = \{z \in T_x K : Q(z) \leq 1\} \quad (2.5)$$

wird (*Dupinsche*) *Indikatrix* von K in x genannt. Durch diese Darstellung sind die Hauptkrümmungen $k_1(K; x), \dots, k_{d-1}(K; x)$ definiert. Da D stets eine konvexe Menge ist, sind die Hauptkrümmungen nichtnegativ. Weiterhin ist die Gauß-Kronecker-Krümmung für normale Randpunkte x definiert und es gilt $\kappa(x) = \det Q$.

Ein Satz von Aleksandrov (siehe [34], Theorem 5.4 oder [67], Theorem 2.6.1) besagt, dass \mathcal{H}^{d-1} -fast alle Randpunkte eines konvexen Körpers normal sind. Trotz dieser Aussage können wichtige Informationen zur Gestalt eines konvexen Körpers in den Randpunkten enthalten sein, die nicht normal sind. Dies ist zum Beispiel bei Polytopen der Fall.

In diesem Abschnitt haben wir die Krümmungen als Funktionen auf dem Rand des konvexen Körpers definiert. Eine weitere Möglichkeit ist, sie auf dem Einheitsnormalenbündel zu definieren. Darauf werden wir in Abschnitt 3.2 genauer eingehen.

Teil I.

Fahnenmaße

3. Stützmaße

In diesem Kapitel führen wir die Stützmaße eines konvexen Körpers auf zwei verschiedene Arten ein. Einerseits als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel und andererseits mittels der Krümmungen des konvexen Körpers. In Kapitel 4 führen wir dann in analoger Art und Weise die Fahnenmaße ein.

3.1. Stützmaße als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel

In diesem Abschnitt führen wir die Stützmaße eines konvexen Körpers K in \mathbb{R}^d als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel ein. Genauer gesagt betrachten wir das Volumen geeigneter lokaler Parallelmengen, deren Abstand zum konvexen Körper maximal $\varrho > 0$ beträgt (vergleiche [67], Kapitel 4). Das Wachstum des Volumens dieser Mengen in Abhängigkeit von ϱ reflektiert dann Krümmungseigenschaften des konvexen Körpers.

Im Folgenden sei K stets ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d . Die *metrische Projektion* eines Punktes auf den konvexen Körper K ist eine Abbildung $p(K, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow K$. Dabei ist $p(K, x)$ der eindeutige Punkt y in K , der $x \in \mathbb{R}^d$ am nächsten ist, das heißt für den $d(K, x) = \|y - x\|$ gilt. Für $x \notin K$ sei die Richtung $u(K, x)$ gegeben durch

$$u(K, x) := \frac{x - p(K, x)}{\|x - p(K, x)\|}.$$

Da $u(K, x)$ in diesem Fall eine äußere Einheitsnormale an K im Randpunkt $p(K, x)$ ist, wird das Tupel $(p(K, x), u(K, x))$ auch ein *Stützelement* von K genannt. Die Menge aller Stützelemente, das sogenannte *Einheitsnormalenbündel* von K , wird mit $\text{Nor}(K)$ bezeichnet.

Obige Definitionen sind in Abbildung 3.1 veranschaulicht. Dort ist außerdem die Parallelmenge K_ϱ von K im Abstand $\varrho > 0$ eingezeichnet.

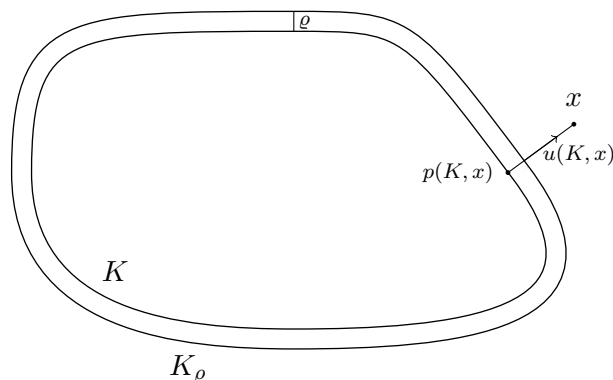


Abbildung 3.1.: Parallelmenge K_ϱ und Stützelement $(p(K, x), u(K, x))$

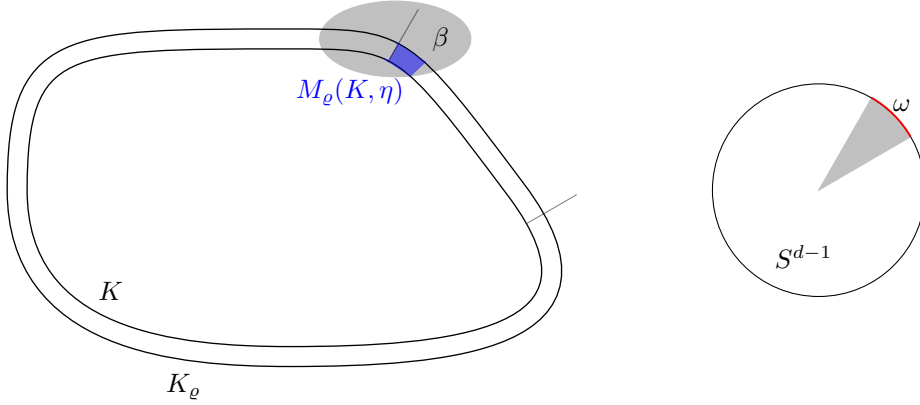


Abbildung 3.2.: Lokale Parallelmengensatz $M_\varrho(K, \eta)$ mit $\eta = \beta \times \omega$

Für eine Borelmengensatz $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ und $\varrho > 0$ wird nun die *lokale Parallelmengensatz* $M_\varrho(K, \eta)$ definiert durch (vergleiche Abbildung 3.2)

$$M_\varrho(K, \eta) := \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < d(K, x) \leq \varrho, (p(K, x), u(K, x)) \in \eta\}. \quad (3.1)$$

Sie ist eine Borelmengensatz, da sowohl $p(K, \cdot)$ als auch $u(K, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^d \setminus K$ stetig sind. Außerdem gilt folgende *lokale Steinerformel*.

Satz 3.1. *Sei K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d . Dann existieren endliche, positive Maße $\Xi_0(K, \cdot), \dots, \Xi_{d-1}(K, \cdot)$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ derart, dass*

$$\lambda_d(M_\varrho(K, \eta)) = \sum_{m=0}^{d-1} \varrho^{d-m} \kappa_{d-m} \Xi_m(K, \eta) \quad (3.2)$$

für alle $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ und $\varrho > 0$ gilt.

Beweis. Die Aussage entspricht Satz 4.2.1 in [67]. □

Für ein Polytop $P \in \mathcal{P}^d$ lassen sich die Koeffizienten der lokalen Steinerformel (3.2) über die Seiten des Polytops darstellen. Für $m = 0, \dots, d-1$ gilt (siehe [67], Formel (4.21))

$$\Xi_m(P, \cdot) = \frac{1}{\omega_{d-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_F \int_{n(P, F)} \mathbf{1}\{(x, u) \in \cdot\} \mathcal{H}^{d-1-m}(du) \mathcal{H}^m(dx). \quad (3.3)$$

Die Maße $\Xi_0(K, \cdot), \dots, \Xi_{d-1}(K, \cdot)$ heißen *Stützmaße*. Ihre wichtigsten Eigenschaften sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3.2. *Sei K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d und $m \in \{0, \dots, d-1\}$.*

- 1) *Die Abbildung $K \mapsto \Xi_m(K, \cdot)$ ist schwach stetig, das heißt für $(K_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^d$ mit $K_j \rightarrow K$ ($j \rightarrow \infty$) gilt*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(x, u) \Xi_m(K_j, d(x, u)) = \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(x, u) \Xi_m(K, d(x, u))$$

für alle stetigen und beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$, und additiv, das heißt

$$\Xi_m(K_1 \cup K_2, \cdot) + \Xi_m(K_1 \cap K_2, \cdot) = \Xi_m(K_1, \cdot) + \Xi_m(K_2, \cdot)$$

für konvexe Körper K_1, K_2 mit $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}^d$.

2) Die Abbildung $\Xi_m(\cdot, \eta) : \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist für alle $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ messbar.

3) $\Xi_m(K, \eta)$ ist konzentriert auf dem Einheitsnormalenbündel $\text{Nor}(K)$ von K , das heißt

$$\Xi_m(K, \eta) = \Xi_m(K, \eta \cap \text{Nor}(K))$$

für $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$.

4) $\Xi_m(K, \cdot)$ ist homogen vom Grad m , das heißt

$$\Xi_m(\lambda K, \lambda \eta) = \lambda^m \Xi_m(K, \eta)$$

für $\lambda > 0$, $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ und $\lambda \eta := \{(\lambda x, u) : (x, u) \in \eta\}$.

5) $\Xi_m(K, \cdot)$ ist bewegungskovariant, das heißt

$$\Xi_m(\sigma K, \sigma \eta) = \Xi_m(K, \eta)$$

für alle Bewegungen $\sigma \in G(d)$, wobei σ_0 die zugehörige Rotation ist, $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ und $\sigma \eta := \{(\sigma x, \sigma_0 u) : (x, u) \in \eta\}$.

Beweis.

1),2) Siehe Theorem 4.2.1 in [67].

3) Siehe Formel (4.7) in [67].

4),5) Siehe Theorem 14.2.2 in [68]. □

Nun können wir auch die Namensgebung der Stützmaße verstehen, denn aus der dritten Eigenschaft geht hervor, dass sie auf der Menge der Stützelemente des konvexen Körpers konzentriert sind.

Unter *singulären* Randpunkten eines konvexen Körpers K verstehen wir Randpunkte, die nicht regulär sind und unter *singulären* äußeren Normalen verstehen wir Normalenvektoren $u \in S^{d-1}$, für die die Stützmenge $F(K, u)$ eine Strecke enthält. Da ein konvexer Körper sowohl singuläre Randpunkte als auch singuläre äußere Normalenvektoren besitzen kann, ist es nützlich, auch die Projektion der Stützmaße auf die erste beziehungsweise zweite Komponente zu betrachten. Dadurch erhalten wir zum einen Maße, die auf Mengen von Randpunkten definiert sind, und zum anderen Maße, die auf Mengen von Normalenvektoren definiert sind. Für $m = 0, \dots, d-1$ heißt $\Phi_m(K, \cdot) := \Xi_m(K, \cdot \times S^{d-1})$ das m -te *Krümmungsmaß* von K und $\Psi_m(K, \cdot) := \Xi_m(K, \mathbb{R}^d \times \cdot)$ das m -te *Oberflächenmaß* von K . Bei den Krümmungsmaßen können wir diese Definition durch $\Phi_d(K, \cdot) := \mathcal{H}^d(K \cap \cdot)$ ergänzen.

Für Polytope kann aus der Formel (3.3) für Stützmaße jeweils eine entsprechende Darstellung für Oberflächen- und Krümmungsmaße abgeleitet werden (vergleiche auch [67], Formeln (4.24) und (4.22)), nämlich

$$\Psi_m(P, \omega) = \frac{1}{\omega_{d-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \mathcal{H}^{d-1-m}(n(P, F) \cap \omega) \mathcal{H}^m(F) \quad (3.4)$$

und

$$\Phi_m(P, \beta) = \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \gamma(F, P) \mathcal{H}^m(F \cap \beta) \quad (3.5)$$

für $P \in \mathcal{P}^d$, $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\omega \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $m = 0, \dots, d$. Anhand dieser Darstellung ist leicht zu erkennen, dass das Krümmungsmaß nur vom Polytop P und der Borelmenge β abhängt und nicht von der Dimension des umgebenden Raumes, in dem es berechnet wird. Es kann also in jedem affinen Unterraum berechnet werden, der das Polytop P enthält.

Die Eigenschaften der Stützmaße aus Satz 3.2 lassen sich natürlich für die Krümmungs- und Oberflächenmaße entsprechend ableiten. Die Krümmungsmaße sind außerdem *lokal definiert* in dem Sinne, dass für eine offene Menge $\beta \subset \mathbb{R}^n$ und konvexe Körper $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$, die $K_1 \cap \beta = K_2 \cap \beta$ erfüllen,

$$\Phi_m(K_1, \beta') = \Phi_m(K_2, \beta')$$

für alle Borelmengen $\beta' \subset \beta$ gilt (vergleiche [67], S. 215). Für die Oberflächenmaße gilt Ähnliches, nur diesmal in dem Sinne, dass für eine Borelmenge $\omega \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und konvexe Körper $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$, die $\tau(K_1, \omega) = \tau(K_2, \omega)$ erfüllen,

$$\Psi_m(K_1, \omega) = \Psi_m(K_2, \omega)$$

gilt, wobei $\tau(K, \omega)$ die Menge aller Randpunkte von K bezeichnet, in denen eine zu ω gehörige äußere Normale an K existiert (vergleiche [67], S. 215).

In der Literatur (zum Beispiel in [67]) wird teilweise eine andere Normalisierung verwendet. Dabei sind die Maße $\Theta_m(K, \cdot)$, $C_m(K, \cdot)$ und $S_m(K, \cdot)$ für $m = 0, \dots, d-1$ gegeben durch

$$d\kappa_{d-m} \Xi_m(K, \cdot) = \binom{d}{m} \Theta_m(K, \cdot), \quad (3.6)$$

$$d\kappa_{d-m} \Phi_m(K, \cdot) = \binom{d}{m} C_m(K, \cdot), \quad (3.7)$$

$$d\kappa_{d-m} \Psi_m(K, \cdot) = \binom{d}{m} S_m(K, \cdot). \quad (3.8)$$

Betrachten wir spezielle Krümmungs- oder Oberflächenmaße, so erhalten wir zum Beispiel

$$\Phi_{d-1}(K, \cdot) = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\partial K \cap \cdot), & \text{falls } \dim(K) \neq d-1, \\ \mathcal{H}^{d-1}(\partial K \cap \cdot), & \text{falls } \dim(K) = d-1, \end{cases}$$

und

$$\Psi_{d-1}(K, \cdot) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\tau(K, \cdot)), \quad \text{falls } \dim(K) \neq d-1, \quad (3.9)$$

sowie

$$\Phi_0(K, \cdot) = \frac{1}{\omega_d} \mathcal{H}^{d-1}(\sigma(K, \cdot)), \quad \Psi_0(K, \cdot) = \frac{1}{\omega_d} \mathcal{H}^{d-1}(\cdot).$$

Einen besonderen Stellenwert hat das $(d-1)$ -te Oberflächenmaß $S_{d-1}(K, \cdot)$. Denn Aufgrund des Existenzsatzes von Minkowski (siehe [67], Theorem 8.5.5) wissen wir, dass ein volldimensionaler konvexer Körper durch $S_{d-1}(K, \cdot)$ bis auf Translation festgelegt ist. Neben der Stützfunktion ist dies also eine weitere Möglichkeit einen konvexen Körper zu charakterisieren.

Anhand von Formel (3.9) sehen wir, dass das $(d-1)$ -te Oberflächenmaß der halben Oberfläche der Menge $\tau(K, \cdot)$ entspricht. Dadurch ist es zu seinem Namen gekommen. Alle anderen Maße ergeben sich daraus durch die Steinerformel (siehe [67], Formel (4.27))

$$\Psi_{d-1}(K + \varrho B^d, \cdot) = \sum_{m=0}^{d-1} \varrho^{d-1-m} \frac{\omega_{d-m}}{2} \Psi_m(K, \cdot).$$

Sei nun K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d , der von der Klasse \mathcal{C}_+^2 ist. Nach (2.4) und (3.1) gilt dann für das m -te Krümmungsmaß folgende Darstellung (vergleiche auch [67], Formel (4.25))

$$\Phi_m(K, \beta) = \frac{\binom{d}{m}}{d\kappa_{d-m}} \int_{\partial K \cap \beta} H_{d-1-m}(K; x) \mathcal{H}^{d-1}(dx)$$

und für das m -te Oberflächenmaß (vergleiche auch [67], Formel (4.26))

$$\Psi_m(K, \omega) = \frac{\binom{d}{m}}{d\kappa_{d-m}} \int_{\omega} s_m(K; u) \mathcal{H}^{d-1}(du)$$

für $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\omega \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $m = 1, \dots, d-1$. Für beliebige konvexe Körper können die Krümmungsmaße als Ersatz für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen betrachtet werden, die nur für konvexe Körper der Klasse \mathcal{C}_+^2 definiert sind. Dies erklärt woher sie ihren Namen erhalten haben.

Nun sei K wieder ein beliebiger konvexer Körper in \mathbb{R}^d . Betrachten wir die totalen Maße, so erhalten wir einerseits die *Quermaßintegrale*

$$W_m(K) := \frac{1}{d} \Theta_{d-m}(K, \mathbb{R}^d \times S^{d-1}), \quad m = 1, \dots, d,$$

$$W_0(K) := V_d(K)$$

und andererseits die *inneren Volumina*

$$V_m(K) := \Phi_m(K, \mathbb{R}^d) = \Psi_m(K, S^{d-1}), \quad m = 0, \dots, d,$$

die unabhängig von der Dimension des umgebenden Raumes sind. Insbesondere gilt

$$V_m(K) = \frac{\binom{d}{m}}{\kappa_{d-m}} W_{d-m}(K), \quad m = 0, \dots, d, \quad (3.10)$$

und wegen (3.5) für ein Polytop P , dass

$$V_m(P) = \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \gamma(F, P) \mathcal{H}^m(F).$$

Die inneren Volumina tauchen auch als Koeffizienten der *Steinerformel*

$$V(K + \varrho B^d) = \sum_{j=0}^d \varrho^{d-j} \kappa_{d-j} V_j(K) = \sum_{i=0}^d \varrho^i \binom{n}{i} W_i(K), \quad \varrho \geq 0,$$

auf, die besagt, dass das Volumen des Parallelkörpers von K im Abstand ϱ als ein Polynom vom Grad d in ϱ dargestellt werden kann. Die inneren Volumina haben außerdem geometrische Interpretationen. So entspricht zum Beispiel $V_d(K)$ dem Volumen von K und $V_{d-1}(K)$ ist die halbe Oberfläche. Weiter ist $V_1(K)$ bis auf einen von der Dimension von

K abhängenden Faktor die mittlere Breite von K und $V_0(K)$ ist immer eins.

Wie wir gesehen haben, gehen die Stützmaße aus einer lokalen Betrachtung der Minkowski-Summe $K + \varrho B^d$ hervor. Daher ist es naheliegend zu vermuten, dass sie auch auf allgemeine Kombinationen $\varrho_1 K_1 + \dots + \varrho_k K_k$ erweitert werden können, wobei $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}^d$ und $\varrho_1, \dots, \varrho_k \geq 0$ ($k \in \mathbb{N}$) sind. Für die Oberflächen- und die Krümmungsmaße (siehe [46]) ist dies bekannt (siehe auch [31] und [40] für Spezialfälle). Im folgenden Satz sehen wir, dass auch eine multilineare Entwicklung des Maßes $\Xi_m(\varrho_1 K_1 + \dots + \varrho_k K_k, \cdot)$ möglich ist, falls die konvexen Körper K_1, \dots, K_k in *allgemeiner Lage* sind. Diese Bedingung bedeutet, dass die Stützmenge $F(K_1 + \dots + K_k, u) = F(K_1, u) + \dots + F(K_k, u)$ für jede Richtung $u \in S^{d-1}$ die Gleichung $\dim(F(K_1 + \dots + K_k, u)) = \dim(F(K_1, u)) + \dots + \dim(F(K_k, u))$ erfüllt. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn K_1, \dots, K_k strikt konvex sind.

Sind $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}^d$ in allgemeiner Lage, so ist die Summe $\beta_1 + \dots + \beta_k \subset \mathbb{R}^d$ von Borelmengen $\beta_1, \dots, \beta_k \subset \mathbb{R}^d$ mit $\beta_i \subset K_i$ für $i = 1, \dots, k$ im Allgemeinen keine Borelmenge. Nach Lemma 3.2 in [46] ist allerdings $(\beta_1 + \dots + \beta_k) \cap \partial(K_1 + \dots + K_k)$ eine Borelmenge. Da die Stützmaße auf dem Einheitsnormalenbündel konzentriert sind und somit für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^d$ die Gleichung $\Xi_m(K, \cdot) = \Xi_m(K, \cdot \cap (\partial K \times S^{d-1}))$ gilt, ist die linke Seite der unten stehenden Gleichung (3.11) wohldefiniert.

Im Folgenden bedeutet die Notation $K[r]$, dass der Eintrag K in dem Ausdruck r -mal wiederholt wird, und $(A)^r$ bezeichnet das r -fache kartesische Produkt einer Menge A .

Satz 3.3. *Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\varrho_1, \dots, \varrho_k \geq 0$, $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}^d$ konvexe Körper in allgemeiner Lage sowie $\beta_1, \dots, \beta_k \subset \mathbb{R}^d$ Borelmengen mit $\beta_i \subset K_i$ und $\gamma \subset S^{d-1}$ eine Borelmenge.*

- 1) *Für $m \in \{0, \dots, d-1\}$ und $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, m\}$ mit $i_1 + \dots + i_k = m$ gibt es Maße $\Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \cdot)$ auf $(\mathbb{R}^d)^k \times S^{d-1}$, die auf $\partial K_1 \times \dots \times \partial K_k \times S^{d-1}$ konzentriert sind, sodass*

$$\begin{aligned} & \Xi_m \left(\sum_{i=1}^k \varrho_i K_i, \left(\sum_{i=1}^k \varrho_i \beta_i \right) \times \gamma \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_k} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_k^{i_k} \Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \dots \times \beta_k \times \gamma). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Das Maß $\Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \cdot)$ hängt schwach stetig von K_1, \dots, K_k in allgemeiner Lage ab und ist symmetrisch in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \dots \times \beta_k \times \gamma) \\ &= \Xi_{i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(k)}}(K_{\pi(1)}, \dots, K_{\pi(k)}, \beta_{\pi(1)} \times \dots \times \beta_{\pi(k)} \times \gamma) \end{aligned}$$

für alle Permutationen π von $1, \dots, k$. Für $i_1 = 0$ gilt

$$\Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \partial K_1 \times \cdot) = \Xi_{i_2, \dots, i_k}(K_2, \dots, K_k, \cdot).$$

Für $i_1 \neq 0$ ist $\Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \cdot)$ translationskovariant und homogen vom Grad i_1 in der ersten Komponente, das heißt

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, i_2, \dots, i_k}(\lambda K_1 + x, K_2, \dots, K_k, (\lambda \beta_1 + x) \times \beta_2 \times \dots \times \beta_k \times \gamma) \\ &= \lambda^{i_1} \Xi_{i_1, i_2, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \dots \times \beta_k \times \gamma) \end{aligned}$$

für $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Des Weiteren hat $\Xi_{i_1, i_2, \dots, i_k}(\cdot, K_2, \dots, K_k, \cdot \times \beta_2 \times \dots \times \beta_k \times \gamma)$ eine Polynomentwicklung.

- 2) Seien $m \in \{1, \dots, d-1\}$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ so, dass $i_1 + \dots + i_k = m$. Sind $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}^d$ strikt konvexe Körper, so gilt

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \dots \times \beta_k \times \gamma) \\ &= \Xi_{1, \dots, 1}(K_1[i_1], \dots, K_k[i_k], (\beta_1)^{i_1} \times \dots \times (\beta_k)^{i_k} \times \gamma), \end{aligned}$$

wobei der untere Index 1 auf der rechten Seite m -mal auftritt.

- 3) Für $m \in \{0, \dots, d-1\}$, $r \in \{0, \dots, m\}$, einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^d$ und Borelmengen $\beta \subset K$, $\gamma \subset S^{d-1}$ gilt

$$\Xi_r(K, \beta \times \gamma) = \frac{\binom{d}{r} \kappa_{d-m}}{\binom{d}{m} \kappa_{d-r}} \Xi_{r, m-r}(K, B^d, \beta \times S^{d-1} \times \gamma).$$

Für konvexe Körper $K_1, \dots, K_s \in \mathcal{K}^d$ in allgemeiner Lage und Borelmengen $\gamma \subset S^{d-1}$, $\beta_1, \dots, \beta_s \subset \mathbb{R}^d$ mit $\beta_i \subset K_i$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, \dots, i_s}(K_1, \dots, K_s, \beta_1 \times \dots \times \beta_s \times \gamma) \\ &= \frac{\binom{d}{r} \kappa_{d-m}}{\binom{d}{m} \kappa_{d-r}} \Xi_{i_1, \dots, i_s, m-r}(K_1, \dots, K_s, B^d, \beta_1 \times \dots \times \beta_s \times S^{d-1} \times \gamma), \end{aligned}$$

wobei $i_1, \dots, i_s \in \{0, \dots, r\}$ mit $i_1 + \dots + i_s = r$.

Beweis.

- 1) Aus (5.16) in [46] und wegen (3.6) erhalten wir die Polynomentwicklung (3.11) mit Koeffizienten-Maßen Ξ_{i_1, \dots, i_k} , die durch diese Entwicklung festgelegt sind. Die weiteren Eigenschaften dieser gemischten Maße folgen nun aus der Formel auf S. 328 in [46] sowie aus den Eigenschaften, die in Theorem 5.6 und Corollary 3.6 in [46] angegeben werden.
- 2) Seien $m \in \{1, \dots, d-1\}$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$ mit $m = i_1 + \dots + i_k$. Seien $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}^d$ strikt konvex. Wir betrachten $\varrho_{11}, \dots, \varrho_{1i_1}, \dots, \varrho_{k1}, \dots, \varrho_{ki_k} \geq 0$ sowie Borelmengen $\beta_i \subset \mathbb{R}^d$ mit $\beta_i \subset K_i$ für $i = 1, \dots, k$ und $\gamma \subset S^{d-1}$. Dann ist der Koeffizient von $\varrho_{11} \cdots \varrho_{ki_k}$ in der Entwicklung von

$$\Xi_m \left(\sum_{r=1}^k \sum_{s_r=1}^{i_r} \varrho_{rs_r} K_r, \left(\sum_{r=1}^k \sum_{s_r=1}^{i_r} \varrho_{rs_r} \beta_r \right) \times \gamma \right) \quad (3.12)$$

nach (3.11)

$$m! \Xi_{1, \dots, 1}(K_1[i_1], \dots, K_k[i_k], (\beta_1)^{i_1} \times \dots \times (\beta_k)^{i_k} \times \gamma).$$

Der Index 1 im Maß $\Xi_{1, \dots, 1}$ tritt hier m -mal auf. Nutzen wir andererseits aus, dass K_r strikt konvex ist und $\beta_r \subset K_r$, so gilt

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{r=1}^k \sum_{s_r=1}^{i_r} \varrho_{rs_r} \beta_r \right) \cap \partial \left(\sum_{r=1}^k \sum_{s_r=1}^{i_r} \varrho_{rs_r} K_r \right) \\ &= \left[\sum_{r=1}^k \left(\sum_{s_r=1}^{i_r} \varrho_{rs_r} \right) \beta_r \right] \cap \partial \left[\sum_{r=1}^k \left(\sum_{s_r=1}^{i_r} \varrho_{rs_r} \right) K_r \right]. \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass (3.12) das Gleiche sein muss wie

$$\Xi_m((\varrho_{11} + \cdots + \varrho_{1i_1})K_1 + \cdots + (\varrho_{k1} + \cdots + \varrho_{ki_k})K_k, \\ [(\varrho_{11} + \cdots + \varrho_{1i_1})\beta_1 + \cdots + (\varrho_{k1} + \cdots + \varrho_{ki_k})\beta_k] \times \gamma).$$

Entwickeln wir dies mit (3.11), so erhalten wir

$$\sum_{r_1, \dots, r_k=0}^m \binom{m}{r_1, \dots, r_k} (\varrho_{11} + \cdots + \varrho_{1i_1})^{r_1} \cdots (\varrho_{k1} + \cdots + \varrho_{ki_k})^{r_k} \\ \times \Xi_{r_1, \dots, r_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \cdots \times \beta_k \times \gamma).$$

Entwicklung der k Terme $(\dots)^{r_m}$, $m = 1, \dots, k$, liefert schließlich ein Polynom in $\varrho_{11}, \dots, \varrho_{ki_k}$, das homogen vom Grad m ist. Das Monom $\varrho_{11} \cdots \varrho_{1i_1} \cdots \varrho_{k1} \cdots \varrho_{ki_k}$ taucht nur in der Entwicklung von $r_1 = i_1, \dots, r_k = i_k$ auf und dort mit Vielfachheit $\binom{i_1}{1, \dots, 1} \cdots \binom{i_k}{1, \dots, 1}$. Daher ist der Koeffizient dieses Monoms

$$\binom{m}{i_1, \dots, i_k} \binom{i_1}{1, \dots, 1} \cdots \binom{i_k}{1, \dots, 1} \Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \cdots \times \beta_k \times \gamma) \\ = m! \Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \cdots \times \beta_k \times \gamma).$$

Ein Koeffizientenvergleich zeigt nun, dass

$$\Xi_{1, \dots, 1}(K_1[i_1], \dots, K_k[i_k], (\beta_1)^{i_1} \times \cdots \times (\beta_k)^{i_k} \times \gamma) \\ = \Xi_{i_1, \dots, i_k}(K_1, \dots, K_k, \beta_1 \times \cdots \times \beta_k \times \gamma).$$

3) Für $K \in \mathcal{K}^d$ folgt aus 1), dass

$$\Xi_m(K + \varrho B^d, (\beta + \varrho B^d) \times \gamma) = \sum_{r=0}^m \varrho^{m-r} \binom{m}{r} \Xi_{r, m-r}(K, B^d, \beta \times S^{d-1} \times \gamma).$$

Sei $T_\varrho(x, u) = (x + \varrho u, u)$ für $(x, u) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1}$. Wegen

$$\Xi_m(K + \varrho B^d, (\beta + \varrho B^d) \times \gamma) = \Xi_m(K + \varrho B^d, [(\beta + \varrho B^d) \times \gamma] \cap \text{Nor}(K + \varrho B^d)) \\ = \Xi_m(K + \varrho B^d, T_\varrho(\beta \times \gamma))$$

und unter Verwendung der Polynomentwicklung für Stützmaße (siehe [67], Theorem 4.2.7)

$$\Xi_m(K + \varrho B^d, T_\varrho(\beta \times \gamma)) = \sum_{r=0}^m \varrho^{m-r} \binom{d-r}{m-r} \frac{\kappa_{d-r}}{\kappa_{d-m}} \Xi_r(K, \beta \times \gamma) \quad (3.13)$$

folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\Xi_r(K, \beta \times \gamma) = \frac{\binom{d}{r}}{\binom{d}{m}} \frac{\kappa_{d-m}}{\kappa_{d-r}} \Xi_{r, m-r}(K, B^d, \beta \times S^{d-1} \times \gamma).$$

Ersetzen wir K durch eine Minkowski-Kombination $\varrho_1 K_1 + \cdots + \varrho_s K_s$ mit konvexen Körpern $K_1, \dots, K_s \in \mathcal{K}^d$ in allgemeiner Lage und β durch eine Minkowski-Kombination $\varrho_1 \beta_1 + \cdots + \varrho_s \beta_s$, entwickeln beide Seiten und vergleichen die Koeffizienten, so erhalten wir

$$\Xi_{i_1, \dots, i_s}(K_1, \dots, K_s, \beta_1 \times \cdots \times \beta_s \times \gamma) \\ = \frac{\binom{d}{r}}{\binom{d}{m}} \frac{\kappa_{d-m}}{\kappa_{d-r}} \Xi_{i_1, \dots, i_s, m-r}(K_1, \dots, K_s, B^d, \beta_1 \times \cdots \times \beta_s \times S^{d-1} \times \gamma),$$

wobei $i_1 + \cdots + i_s = r$. □

Bemerkung 3.4.

- 1) Die strikte Konvexität benötigen wir, da die i_1 Kopien von K_1 etc. in allgemeiner Lage sein müssen. Auf diese Voraussetzung kann verzichtet werden, wenn die Projektion der gemischten Maße auf die letzte (sphärische) Komponente betrachtet wird. In diesem Fall vereinfacht sich die Darstellung zur klassischen Multilinearität gemischter Oberflächenmaße (vergleiche [67], Kapitel 5.1).
- 2) Im Folgenden schreiben wir abkürzend $\Xi(K_1, \dots, K_m, \cdot)$ für $\Xi_{1, \dots, 1}(K_1, \dots, K_m, \cdot)$, da hier aus dem Kontext hervorgeht, dass der untere Index 1 m -mal auftritt.

3.2. Stützmaße und Krümmungen

In diesem Abschnitt führen wir die Stützmaße mittels der Krümmungen des konvexen Körpers ein und erhalten somit eine andere Darstellung für sie. Zu diesem Zweck betrachten wir die Krümmungen nicht wie in Abschnitt 2.4 als Funktionen des Randes des konvexen Körpers, sondern als Funktionen auf dem Einheitsnormalenbündel. Was genau damit gemeint ist, wird nun erläutert. Als Referenzen wurden [67], Kapitel 2.6 und [82] genutzt.

Sei $K \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d und $\varrho > 0$. Der Parallelkörper K_ϱ von K besitzt nur reguläre Randpunkte und sein Rand ∂K_ϱ ist nach Theorem 2.2.4 in [67] eine $(d-1)$ -dimensionale $\mathcal{C}^{1,1}$ -Fläche, das heißt eine \mathcal{C}^1 -Hyperfläche, deren Normalenabbildung Lipschitz-stetig ist (vergleiche auch [25], Theorem 4.8).

Die Abbildung

$$\partial K_\varrho \rightarrow \text{Nor}(K), \quad z \mapsto (p(K, z), u(K, z))$$

ist bijektiv und bi-Lipschitz, da die metrische Projektion nach Theorem 1.2.1 in [67] eine Kontraktion ist und die Umkehrabbildung

$$\text{Nor}(K) \rightarrow \partial K_\varrho, \quad (x, u) \mapsto x + \varrho u$$

lautet. Mit analytischen Argumenten (vergleiche [67]) lässt sich zeigen, dass eine Menge $\mathcal{D}_K^* \subset \text{Nor}(K)$ mit $\mathcal{H}^{d-1}(\text{Nor}(K) \setminus \mathcal{D}_K^*) = 0$ existiert, sodass $u(K, \cdot)$ für alle $(x, u) \in \mathcal{D}_K^*$ und alle $\varrho > 0$ im Punkt $x + \varrho u$ differenzierbar ist und die Ableitung $Du(K, x + \varrho u) : u^\perp \rightarrow u^\perp$ in diesem Punkt reelle Eigenwerte $k_1(K; x + \varrho u), \dots, k_{d-1}(K; x + \varrho u) \geq 0$ hat. Die zugehörigen Eigenvektoren $a_1(K; x, u), \dots, a_{d-1}(K; x, u)$ werden *Hauptkrümmungsrichtungen* genannt. Sie sind paarweise orthogonal, bilden eine Orthonormalbasis von u^\perp und können unabhängig von ϱ gewählt werden (siehe [82], S. 559 oben).

Die *verallgemeinerten Hauptkrümmungen* sind für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $(x, u) \in \text{Nor}(K)$ und alle $\varrho > 0$ definiert durch (siehe [82], Formel (3))

$$\begin{aligned} k_i(K; x, u) &:= \lim_{t \searrow 0} \frac{k_i(K; x + \varrho u)}{1 + (t - \varrho) k_i(K; x + \varrho u)} \\ &= \begin{cases} \frac{k_i(K; x + \varrho u)}{1 - \varrho k_i(K; x + \varrho u)}, & \text{falls } k_i(K; x + \varrho u) < \varrho^{-1}, \\ \infty, & \text{falls } k_i(K; x + \varrho u) = \varrho^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

für $i \in \{1, \dots, d-1\}$. Hieraus erhalten wir für $i \in \{1, \dots, d-1\}$ durch Umformen

$$k_i(K; x + \varrho u) = \begin{cases} \frac{k_i(K; x, u)}{1 + \varrho k_i(K; x, u)}, & \text{falls } k_i(K; x, u) < \infty, \\ \varrho^{-1}, & \text{falls } k_i(K; x, u) = \infty. \end{cases}$$

Zu den in Abschnitt 2.4 eingeführten Krümmungen, die auf dem Rand eines konvexen Körpers definiert sind, besteht folgender Zusammenhang. Ist x ein normaler Randpunkt von K , so ist $x + \varrho \sigma_K(x)$ für alle $\varrho > 0$ ein normaler Randpunkt des Parallelkörpers K_ϱ . Daher entsprechen nach Lemma 3.1 in [39] die verallgemeinerten Hauptkrümmungen $k_i(K; x, \sigma_K(x))$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ den Hauptkrümmungen $k_i(K; x)$ von K in x , $i = 1, \dots, d-1$. Des Weiteren sind nach Lemma 3.4 in [39] die Werte $k_1(K; x_K(u), u)^{-1}, \dots, k_{d-1}(K; x_K(u), u)^{-1}$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ die Hauptkrümmungsradien von K in u .

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass die verallgemeinerten Hauptkrümmungen geordnet sind, das heißt

$$0 \leq k_1(K; x, u) \leq \dots \leq k_{d-1}(K; x, u) \leq \infty.$$

Mit Hilfe der Hauptkrümmungsrichtungen kann eine spezielle Orthonormalbasis des Tangentialraums von $\text{Nor}(K)$ in (x, u) konstruiert werden. Die Basis dieses $(d-1)$ -dimensionalen Unterraums von $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ ist dann gegeben durch

$$\left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1 + k_i(K; x, u)^2}} a_i(K; x, u), \frac{k_i(K; x, u)}{\sqrt{1 + k_i(K; x, u)^2}} a_i(K; x, u) \right) : i = 1, \dots, d-1 \right\}.$$

Definieren wir die bijektive bi-Lipschitz Abbildung F durch

$$\begin{aligned} F : \text{Nor}(K) \times (0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^d \setminus K \\ (x, u, t) &\mapsto x + tu, \end{aligned}$$

so gilt für die lokale Parallelmenge (3.1)

$$\begin{aligned} M_\varrho(K, \eta) &= \{x \in K_\varrho \setminus K : (p(K, x), u(K, x)) \in \eta\} \\ &= F(\{(x, u, t) \in \text{Nor}(K) \times (0, \varrho] : (x, u) \in \eta\}), \end{aligned}$$

wobei $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$.

Wie im letzten Abschnitt sind wir nun an dem Lebesgue-Maß dieser Menge interessiert. Dieses wird in [82] mit Hilfe obiger Orthonormalbasis, der Koflächenformel (siehe [26], Theorem 3.2.12) und der Jacobi-Determinante der Funktion F , die durch

$$\begin{aligned} JF(x, u, t) &= \prod_{i=1}^{d-1} \frac{1 + tk_i(K; x, u)}{\sqrt{1 + k_i(K; x, u)^2}} \\ &= \sum_{m=0}^{d-1} t^{d-m-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=d-m-1}} \frac{\prod_{i \in I} k_i(K; x, u)}{\prod_{i=1}^{d-1} \sqrt{1 + k_i(K; x, u)^2}} \end{aligned}$$

gegeben ist, berechnet. Wir beschränken uns hier darauf, das Ergebnis anzugeben. Es gilt

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}^d(M_\varrho(K, \eta)) \\ &= \int_{\text{Nor}(K) \times (0, \varrho]} \mathbf{1}\{(x, u) \in \eta\} JF(x, u, t) \mathcal{H}^d(d(x, u, t)) \\ &= \int_{\text{Nor}(K) \cap \eta} \int_0^\varrho JF(x, u, t) dt \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \\ &= \sum_{m=0}^{d-1} \frac{1}{d-m} \varrho^{d-m} \int_{\text{Nor}(K) \cap \eta} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=d-m-1}} \frac{\prod_{i \in I} k_i(K; x, u)}{\prod_{i=1}^{d-1} \sqrt{1 + k_i(K; x, u)^2}} \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)). \end{aligned}$$

In obigem Produkt verwenden wir die Konvention $\frac{k_i(K;x,u)}{\sqrt{1+k_i(K;x,u)^2}} = 1$ beziehungsweise $\frac{1}{\sqrt{1+k_i(K;x,u)^2}} = 0$, falls die verallgemeinerte Hauptkrümmung $k_i(K;x,u)$ den Wert unendlich annimmt.

Die Stützmaße sind dann nach Theorem 3 in [82] für $m \in \{0, \dots, d-1\}$ gegeben durch

$$\Xi_m(K, \eta) = \frac{1}{\omega_{d-m}} \int_{\text{Nor}(K) \cap \eta} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=d-m-1}} \frac{\prod_{i \in I} k_i(K;x,u)}{\prod_{i=1}^{d-1} \sqrt{1+k_i(K;x,u)^2}} \mathcal{H}^{d-1}(d(x,u)). \quad (3.14)$$

Bemerkung 3.5. Satz 3.3 dieses Kapitels ist in der gemeinsamen Veröffentlichung [44] mit D. Hug und W. Weil enthalten.

4. Fahnenmaße

Dieses Kapitel ist eine ausführliche Einführung in die Fahnenmaße eines konvexen Körpers, die uns schon in der Einleitung begegnet sind. Wir stellen im Folgenden drei Möglichkeiten vor sie zu definieren. Da die Fahnenmaße eine Verallgemeinerung der Stützmaße darstellen, orientieren wir uns an der Reihenfolge des letzten Kapitels und leiten die Fahnenmaße zunächst wie in [35] als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel her. Im darauffolgenden Abschnitt 4.2 zeigen wir, wie die Fahnenmaße mittels der Krümmungen des konvexen Körpers ausgedrückt werden können (vergleiche [41] und [61]). Abschnitt 4.3 enthält die dritte Möglichkeit Fahnenmaße zu definieren. Hier nutzen wir den Zusammenhang der Fahnenmaße zu den Stützmaßen aus, um sie als Projektionsmittel darzustellen. Ausgehend von dieser Definition zeigen wir dann in Abschnitt 4.4 zahlreiche Eigenschaften der Fahnenmaße.

4.1. Fahnenmaße als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel

In diesem Abschnitt führen wir die Fahnenmaße als Koeffizienten einer lokalen Steinerformel ein. Erstmals bewiesen wurde diese Darstellung von Hinderer in Kapitel 4 seiner Dissertation [35]. Das Vorgehen ist dabei sehr ähnlich zur Herleitung der im letzten Kapitel vorgestellten Stützmaße. In diesem Fall werden allerdings anstatt der lokalen Parallelmengen von Punkten in \mathbb{R}^d mit Abstand kleiner $\varrho > 0$ zum konvexen Körper K lokale Parallelmengen von k -Ebenen E betrachtet, für deren Abstand zu K ebenfalls $d(K, E) < \varrho$ gilt.

Sei K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d , $\varrho > 0$ und $0 \leq k < d$. Mit $l(K, E) \in E$ bezeichnen wir den eindeutigen nächsten Punkt einer affinen k -Ebene $E \in A(d, k)$ zu K , falls dieser existiert. Außerdem bezeichnen wir in diesem Fall mit $p(K, E) \in K$ die metrische Projektion von $l(K, E)$ auf K und somit ist $p(K, E)$ der eindeutige nächste Punkt von K zu E , das heißt es gilt $d(K, E) = \|p(K, E) - l(K, E)\|$.

Die Menge aller affinen k -Ebenen E , die einen eindeutigen nächsten Punkt zu K haben, K aber nicht schneiden, nennen wir $K^{(k)}$. Bis auf eine μ_k -Nullmenge sind darin alle k -Ebenen enthalten, die K nicht schneiden (siehe [35], Lemma 21).

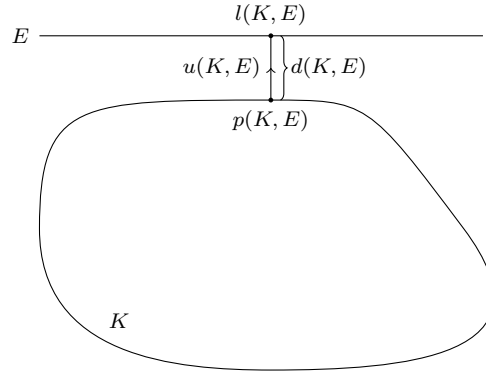
Für $E \in K^{(k)}$ wird die Richtung $u(K, E)$ des kürzesten Vektors, der K und E beziehungsweise genauer gesagt $p(K, E)$ und $l(K, E)$ verbindet, definiert durch

$$u(K, E) := \frac{l(K, E) - p(K, E)}{d(K, E)}.$$

Die hier verwendeten Funktionen $p(K, \cdot), l(K, \cdot), u(K, \cdot) : K^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}^d$ sowie $d(\cdot, \cdot) : \mathcal{K}^d \times G(d, k) \rightarrow \mathbb{R}^d$ sind nach Lemma 23 in [35] alle stetig. Zur Veranschaulichung sind sie in Abbildung 4.1 graphisch dargestellt.

Nun wird zum einen die Menge $K_\varrho^{(k)}$ von k -Ebenen, deren Abstand zu K maximal ϱ ist, durch

$$K_\varrho^{(k)} := \{E \in K^{(k)} : 0 < d(K, E) \leq \varrho\}$$

Abbildung 4.1.: Nächste Punkte von K und E

definiert. Andererseits definieren wir die *lokale Parallelmengensammlung von k -Ebenen*

$$M_\varrho^{(k)}(K, \eta) := \{E \in K_\varrho^{(k)} : (p(K, E), u(K, E), L(E)) \in \eta\}$$

für eine Borelmengensammlung $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$. Definieren wir außerdem

$$\mu_\varrho^{(k)}(K, \cdot) := \mu_k(M_\varrho^{(k)}(K, \cdot)), \quad (4.1)$$

so erhalten wir ein endliches Borelmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$, da $\mu_\varrho^{(k)}(K, \cdot)$ das Bildmaß von μ_k unter der stetigen Abbildung $f_\varrho^{(k)} : K_\varrho^{(k)} \rightarrow \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$, $E \mapsto (p(K, E), u(K, E), L(E))$ ist. Einige Eigenschaften dieses Maßes fassen wir im folgenden Satz zusammen.

Satz 4.1. *Sei $K \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper und $\varrho > 0$. Dann gilt:*

- 1) *Die Abbildung $K \mapsto \mu_\varrho^{(k)}(K, \cdot)$ ist schwach stetig und additiv.*
- 2) *Die Abbildung $\mu_\varrho^{(k)}(\cdot, \eta)$ ist messbar für alle $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$.*

Beweis.

- 1) Das sind die Aussagen von Lemma 26 und Lemma 28 in [35].
- 2) Das ist die Aussage von Lemma 27 in [35]. □

Ist $P \in \mathcal{K}^d$ ein Polytop, so besitzt das Maß $\mu_\varrho^{(k)}(P, \cdot)$ eine Polynomdarstellung in ϱ (siehe [35], Kapitel 4.2)

$$\mu_\varrho^{(k)}(P, \cdot) = \sum_{m=0}^{d-k-1} \varrho^{d-k-m} \kappa_{d-k-m} \Xi_m^{(k)}(P, \cdot). \quad (4.2)$$

Die Koeffizienten $\Xi_m^{(k)}(P, \cdot)$ sind endliche Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$ und besitzen für $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$ die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} \Xi_m^{(k)}(P, \eta) &= \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \int_{G(d, k)} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_{F|L^\perp} \int_{L^\perp \cap m(P, F)} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(p(F, L+x), u, L) \in \eta\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dx) \nu_k(dL). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nach Theorem 29 in [35] lässt sich die Polynomdarstellung (4.2) aufgrund der schwachen Stetigkeit von $\mu_\varrho^{(k)}(P, \cdot)$ mit Hilfe von Eigenschaft 1) aus dem folgenden Satz 4.2 auf beliebige konvexe Körper $K \in \mathcal{K}^d$ erweitern. Für $K \in \mathcal{K}^d$, $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $\varrho > 0$ erhalten wir

$$\mu_\varrho^{(k)}(K, \cdot) = \sum_{m=0}^{d-k-1} \varrho^{d-k-m} \kappa_{d-k-m} \Xi_m^{(k)}(K, \cdot). \quad (4.4)$$

Die hierdurch definierten Maße $\Xi_m^{(k)}(K, \cdot)$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$, heißen *Fahnenmaße* von K beziehungsweise genauer *Fahnen-Stützmaße von Typ (k, m)* . Sie sind nichtnegativ und die Abbildung $K \mapsto \Xi_m^{(k)}(K, \eta)$ ist für alle $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$ messbar (vergleiche [35], Theorem 29). Für die Fahnenmaße gilt der folgende Satz. Hierbei bezeichnet $\text{Nor}_k(K)$ für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ das *k-te verallgemeinerte Normalenbündel* von $K \in \mathcal{K}^d$

$$\text{Nor}_k(K) := \{(x, u, L) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) : (x, u) \in \text{Nor}(K), L \perp u\}.$$

Satz 4.2. *Sei $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$.*

- 1) *Die Fahnenmaße $\Xi_m^{(k)}$ erfüllen eine umgekehrte lokale Steinerformel, das heißt für $K \in \mathcal{K}^d$ existiert eine Darstellung*

$$\Xi_m^{(k)}(K, \cdot) = \sum_{j=1}^{d-k} c(d, k, m, j) \mu_j^{(k)}(K, \cdot),$$

wobei die Konstanten $c(d, k, m, j) \in \mathbb{R}$ nur von d, k, m und j abhängen.

- 2) *Die Fahnenmaße sind lokal definiert, das heißt es gilt*

$$\Xi_m^{(k)}(K_1, \eta) = \Xi_m^{(k)}(K_2, \eta)$$

für alle konvexen Körper $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ und alle Borelmengen $\eta \subset \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$ mit $\eta \cap \text{Nor}_k(K_1) = \eta \cap \text{Nor}_k(K_2)$.

Beweis.

- 1) Sei zunächst $P \in \mathcal{P}^d$ ein Polytop und $\eta \subset \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$ eine feste Borelmenge. Setzen wir in (4.2) für ϱ die Werte $1, \dots, d-k$ ein, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $\Xi_0^{(k)}(P, \eta), \dots, \Xi_{d-k-1}^{(k)}(P, \eta)$. Da die zugehörige Determinante eine Vandermonde-Determinante ist, ist dieses lineare Gleichungssystem invertierbar. Also erhalten wir $\Xi_m^{(k)}(P, \eta)$ als eine Linearkombination der Werte $\mu_1^{(k)}(P, \eta), \dots, \mu_{d-k}^{(k)}(P, \eta)$, das heißt

$$\Xi_m^{(k)}(P, \eta) = \sum_{j=1}^{d-k} c(d, k, m, j) \mu_j^{(k)}(P, \eta)$$

mit reellen Konstanten $c(d, k, m, j)$, die von d, k, m und j abhängen, aber nicht von P und η . Wegen Satz 4.1 1) lässt sich dies durch Approximation auf beliebige konvexe Körper $K \in \mathcal{K}^d$ erweitern.

- 2) Seien K_1, K_2 konvexe Körper in \mathbb{R}^d und $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$ eine Borelmenge, für die $\eta \cap \text{Nor}_k(K_1) = \eta \cap \text{Nor}_k(K_2)$ erfüllt ist.

Für eine affine k -Ebene $E \in M_\varrho^{(k)}(K_1, \eta)$ gilt nach Definition der lokalen Parallelmenge $(p(K_1, E), u(K_1, E), L(E)) \in \eta \cap \text{Nor}_k(K_1)$. Wegen $\eta \cap \text{Nor}_k(K_1) = \eta \cap \text{Nor}_k(K_2)$ gilt also auch $(p(K_1, E), u(K_1, E), L(E)) \in \eta \cap \text{Nor}_k(K_2) \subset \text{Nor}_k(K_2)$ und somit insbesondere $(p(K_1, E), u(K_1, E)) \in \text{Nor}(K_2)$. Also gilt μ_k -fast sicher $p(K_1, E) = p(K_2, E)$ und $E \cap K_2 = \emptyset$. Hieraus folgt $u(K_1, E) = u(K_2, E)$ und somit $E \in M_\varrho^{(k)}(K_2, \eta)$. Durch analoges Vorgehen mit vertauschten Rollen für K_1 und K_2 erhalten wir

$$M_\varrho^{(k)}(K_1, \eta) = M_\varrho^{(k)}(K_2, \eta)$$

bis auf eine μ_k -Nullmenge affiner k -Ebenen. Dies impliziert wiederum $\mu_\varrho^{(k)}(K_1, \eta) = \mu_\varrho^{(k)}(K_2, \eta)$. Durch invertieren der linearen Gleichungssysteme wie in 1) folgt schließlich

$$\Xi_m^{(k)}(K_1, \eta) = \Xi_m^{(k)}(K_2, \eta). \quad \square$$

Bemerkung 4.3. In [44] wird folgende andere Definition der lokalen Definiertheit gewählt. Falls es für konvexe Körper $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ eine offene Menge X gibt mit $X \cap K_1 = X \cap K_2$, so wird die Gleichheit der Fahnenmaße auf allen Borelmengen $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$ mit $\{x \in \mathbb{R}^d : (x, u, L) \in \eta\} \subset X$ gefordert. Wenn Fahnenmaße im dortigen Sinn lokal definiert sind, dann sind sie es auch in dem hier betrachteten Sinn. Denn ist X eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^d mit $X \cap K_1 = X \cap K_2$ und $\{x \in \mathbb{R}^d : (x, u, L) \in \eta\} \subset X$, so ist auch $\eta \cap \text{Nor}_k(K_1) = \eta \cap \text{Nor}_k(K_2)$ erfüllt.

4.2. Fahnenmaße und Krümmungen

Ähnlich wie die Stützmaße (siehe Abschnitt 3.2) besitzen auch die Fahnenmaße eine Darstellung als Integral über das Einheitsnormalenbündel $\text{Nor}(K)$ eines konvexen Körpers K . Diese werden wir in diesem Abschnitt wie in [41] beziehungsweise [61] herleiten. Für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ entsprechen die so definierten Maße den Fahnenmaßen $\Xi_{d-k-1}^{(k)}(K, \cdot \times G(d, k))$ aus dem vorangegangenen Abschnitt. Interpretieren können wir sie als Maße der Menge der k -Ebenen, die den konvexen Körper K in einer gegebenen Teilmenge von $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ berühren.

In Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, dass die verallgemeinerten Hauptkrümmungen $k_i(K; x, u) \in [0, \infty]$ von K in $(x, u) \in \text{Nor}(K)$ sowie die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen $a_i(K; x, u) \in S^{d-1}$, $i = 1, \dots, d-1$, für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $(x, u) \in \text{Nor}(K)$ definiert sind. Für sie definieren wir nun zum einen

$$\mathbb{K}_I(K; x, u) := \frac{\prod_{i \in I} k_i(K; x, u)}{\prod_{i=1}^{d-1} \sqrt{1 + k_i(K; x, u)^2}}, \quad (4.5)$$

wobei ein Produkt über eine leere Indexmenge 1 ist. Falls $k_i(K; x, u) = \infty$ für ein $i \in \{1, \dots, d-1\}$, so wird $\mathbb{K}_I(K; x, u)$ als Grenzwert für $k_i(K; x, u) \rightarrow \infty$ berechnet. Insbesondere bedeutet dies $\frac{1}{\sqrt{1+\infty^2}} = 0$ und $\frac{\infty}{\sqrt{1+\infty^2}} = 1$. Zum anderen bezeichnen wir mit

$$A_I(K; x, u) := \text{lin}(\{a_i(K; x, u) : i \in I\})$$

den linearen Unterraum, der von den Hauptkrümmungsrichtungen aufgespannt wird. Teilweise wird es nützlich sein, ihn als Multivektor aufzufassen, das heißt

$$A_I(K; x, u) = \bigwedge_{i \in I} a_i(K; x, u). \quad (4.6)$$

Hierbei gilt $A_I(K; x, u) = \{o\}$ beziehungsweise $A_I(K; x, u) = 1 \in \bigwedge_0 \mathbb{R}^d$, falls $I = \emptyset$. Für die benötigten Grundlagen aus der multilinearen Algebra verweisen wir auf Abschnitt 2.3.

Für $m \in \mathbb{N}$ sei $m^* := d - m - 1$. Für das Stützmaß gilt dann nach (3.14)

$$\Xi_m(K, \cdot) = \frac{1}{\omega_{d-m}} \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{(x, u) \in \cdot\} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=m^*}} \mathbb{K}_I(K; x, u) \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)).$$

Um eine entsprechende Darstellung für die Fahnenmaße herzuleiten, definieren wir auf dem k -ten verallgemeinerten Normalenbündel von K die Projektionsabbildung

$$f : (x, u, L) \mapsto (x|L^\perp, L).$$

Sei $k \in \{0, \dots, d-1\}$. Das k -te Fahnenmaß $\Xi_k^{(k^*)}(K, \cdot)$ ist ein Maß auf $\mathbb{R}^d \times \{(u, L) \in S^{d-1} \times G(d, k^*) : u \perp L\}$ und als solches definiert durch (vergleiche [41], S. 638)

$$\begin{aligned} & \int g(x, u, L) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, L)) \\ &= \frac{\tilde{\gamma}(d, k)}{c(d, k)} \int_{G(d, k^*)} \int_{\partial(K|L^\perp)} \left(\sum_{(x, u, L) \in f^{-1}\{(z, L)\}} g(x, u, L) \right) \mathcal{H}^k(dz) \nu_{k^*}(dL), \end{aligned}$$

wobei g eine beliebige messbare und beschränkte Abbildung auf $\mathbb{R}^d \times \{(u, L) \in S^{d-1} \times G(d, k^*) : u \perp L\}$ ist. Die Konstanten $\tilde{\gamma}(d, k)$ und $c(d, k)$ sind hier gegeben durch

$$\tilde{\gamma}(d, k) := \frac{1}{2} \binom{d-1}{k} \frac{\Gamma(\frac{d-k}{2}) \Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{d}{2})}$$

und

$$c(d, k) := \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{k+2}{2}) \Gamma(\frac{d-k+1}{2})}.$$

Die Menge $f^{-1}\{(z, L)\}$ ist für ν_{k^*} -fast alle $L \in G(d, k^*)$ und \mathcal{H}^k -fast alle $z \in \partial(K|L^\perp)$ einelementig. Dies folgt aus dem Theorem auf S. 103 in [67] mit $s = 1$ (vergleiche auch [81], Theorem B).

Obige Darstellung kann durch mehrmaliges Anwenden der Koflächenformel (siehe [26], Theorem 3.2.12) und durch Berechnung diverser Jacobi-Determinanten (siehe [61] oder [41] für die Details) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} & \int g(x, u, L) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, L)) \\ &= \frac{\gamma(d, k)}{c(d, k)} \int_{\text{Nor}(K)} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=k^*}} \mathbb{K}_I(K; x, u) \int_{G^{u^\perp}(d-1, k^*)} g(x, u, L) \\ & \quad \times \langle L, A_I(K; x, u) \rangle^2 \nu_{k^*}(dL) \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei

$$\gamma(d, k) := \frac{\binom{d-1}{k}}{\mathcal{H}^{k^*}(S^{k^*})} = \frac{\binom{d-1}{k}}{\omega_{d-k}}$$

und $G^{u^\perp}(d-1, k^*)$ die Graßmann-Mannigfaltigkeit der k^* -dimensionalen linearen Unterräume von u^\perp , $u \in S^{d-1}$, bezeichnet. Unter Beachtung der unterschiedlichen Notationen entspricht dies Formel (5) in [41] beziehungsweise Formel (4) in [61].

Somit haben wir unser Ziel erreicht, für das k -te Fahnenmaß eine Darstellung als Integral über das Einheitsnormalenbündel herzuleiten, nämlich

$$\begin{aligned} \Xi_k^{(k^*)}(K, \cdot) &= \frac{\gamma(d, k)}{c(d, k)} \int_{\text{Nor}(K)} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, d-1\} \\ |I|=k^*}} \mathbb{K}_I(K; x, u) \int_{G^{u^\perp(d-1, k^*)}} \mathbf{1}\{(x, u, L) \in \cdot\} \\ &\quad \times \langle L, A_I(K; x, u) \rangle^2 \nu_{k^*}(dL) \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)). \end{aligned}$$

Hieraus geht auch direkt hervor, dass die Projektion $\pi : \text{Nor}_k(K) \rightarrow \text{Nor}(K)$, $(x, u, L) \mapsto (x, u)$ das Fahnenmaß $\Xi_k^{(k^*)}(K, \cdot)$ (bis auf eine Konstante) auf das Stützmaß $\Xi_k(K, \cdot)$ abbildet (vergleiche Proposition 4.11).

4.3. Fahnenmaße als Projektionsmittel

In Abschnitt 4.1 haben wir gesehen, dass das Fahnenmaß eines Polytops P in \mathbb{R}^d eine explizite Darstellung als Summe über die m -Seiten von P besitzt, die auf Hinderer [35] zurückgeht, nämlich

$$\begin{aligned} \Xi_m^{(k)}(P, \cdot) &= \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \int_{G(d, k)} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_{F|L^\perp} \int_{L^\perp \cap n(P, F)} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(p(F, L+x), u, L) \in \cdot\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dx) \nu_k(dL) \end{aligned} \quad (4.8)$$

für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$.

In diesem Abschnitt zeigen wir einen alternativen Zugang zu den Fahnenmaßen auf. Wir nehmen obige Formel als Definition des Fahnenmaßes $\Xi_m^{(k)}(P, \cdot)$ und zeigen, dass es sich schwach stetig auf beliebige konvexe Körper fortsetzen lässt und einer lokalen Steinerformel genügt.

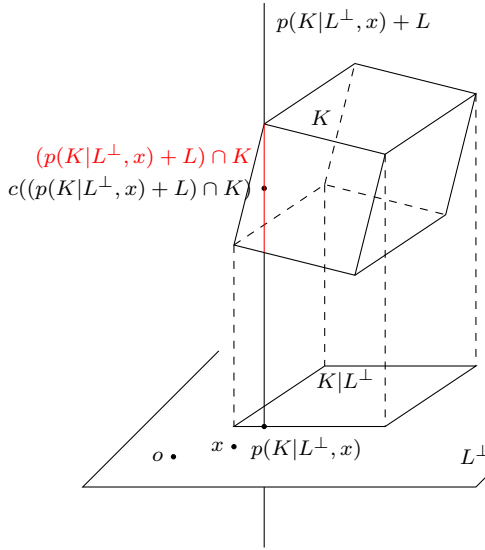
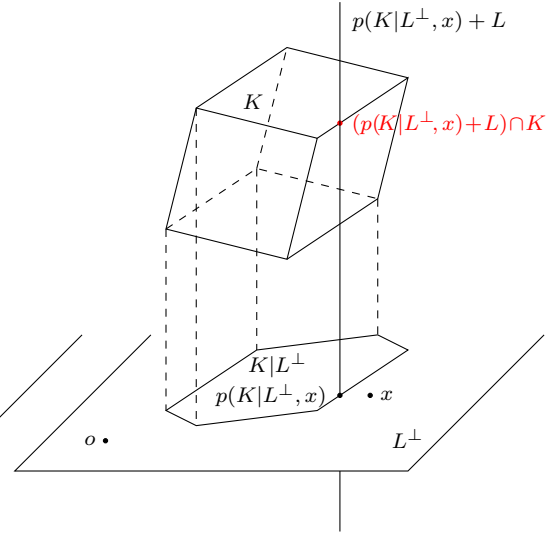
Unser erstes Ziel ist es daher, die rechte Seite von Gleichung (4.8) so umzuformen, dass wir sie später auf allgemeine konvexe Körper erweitern können. Aus diesem Grund ersetzen wir zunächst den Ausdruck $p(F, L+x)$, der für ν_k -fast alle Unterräume $L \in G(d, k)$ das eindeutig bestimmte Element der Menge $(x+L) \cap P$ ist, durch eine allgemeinere Funktion. Hierzu erklären wir die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^d \times G(d, k) \times \mathcal{K}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad (x, L, K) \mapsto c\left((p(K|L^\perp, x) + L) \cap K\right),$$

wobei $c(M)$ den Mittelpunkt der Umkugel um einen konvexen Körper $M \in \mathcal{K}^d$ bezeichnet. In Lemma 4.6 werden wir sehen, dass diese Funktion geeignete Stetigkeitseigenschaften besitzt. Die Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen zwei Beispiele der Abbildung g .

Für eine Seite $F \in \mathcal{F}_m(P)$ gilt dann $p(F, L+x) = g(x, L, P)$ für ν_k -fast alle linearen Unterräume $L \in G(d, k)$ mit $L^\perp \cap n(P, F) \neq \emptyset$ und alle $x \in F|L^\perp$ (vergleiche [67], Corollary 2.3.11) und somit folgt

$$\begin{aligned} \Xi_m^{(k)}(P, \eta) &= \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \int_{G(d, k)} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_{F|L^\perp} \int_{L^\perp \cap n(P, F)} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(g(x, L, P), u, L) \in \eta\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dx) \nu_k(dL). \end{aligned} \quad (4.9)$$


 Abbildung 4.2.: Beispiel 1 für $g(x)$

 Abbildung 4.3.: Beispiel 2 für $g(x)$

Nun wollen wir das innere Integral durch das Stützmaß $\Xi_m^{L^\perp}(P|L^\perp, \cdot)$ von $P|L^\perp$ in L^\perp , $L \in G(d, k)$, ausdrücken. Aus (3.3) erhalten wir für dieses Stützmaß die Darstellung

$$\begin{aligned} \Xi_m^{L^\perp}(P|L^\perp, \cdot) &= \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \sum_{G \in \mathcal{F}_m(P|L^\perp)} \int_G \int_{n_{L^\perp}(P|L^\perp, G)} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(y, u) \in \cdot\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dy). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Hier und im Folgenden bedeutet der Index L^\perp beziehungsweise ein hochgestelltes L^\perp stets, dass wir die entsprechende Größe im Unterraum L^\perp betrachten.

Um den Zusammenhang zwischen dem inneren Teil von Formel (4.9) und Formel (4.10) einsehen zu können, benötigen wir die folgenden beiden Hilfsaussagen, die Seiten von $P|L^\perp$ mit Seiten von P in Verbindung bringen. Wir verwenden hierbei die folgenden Sprechweisen. Zwei lineare Unterräume L_1 und L_2 des \mathbb{R}^d sind *in allgemeiner Lage*, wenn $\text{lin}(L_1 \cup L_2) = \mathbb{R}^d$ oder $L_1 \cap L_2 = \{o\}$. Eine Seite F eines Polytops in \mathbb{R}^d und ein linearer Unterraum L sind *in allgemeiner Lage*, falls der lineare Unterraum $L(F)$ parallel zu $\text{aff}(F)$ und L in allgemeiner Lage sind. Schließlich sind ein Polytop P und ein linearer Unterraum L *in allgemeiner Lage*, wenn F und L für jede Seite F von P in allgemeiner Lage sind.

Lemma 4.4. *Seien P ein Polytop in \mathbb{R}^d , $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ sowie $F \in \mathcal{F}_m(P)$ und $L \in G(d, k)$. Sind F und L in allgemeiner Lage und $u \in L^\perp \cap \text{relint}(n(P, F))$, dann gilt*

$$F|L^\perp \in \mathcal{F}_m(P|L^\perp) \quad \text{und} \quad u \in \text{relint}(n_{L^\perp}(P|L^\perp, F|L^\perp)).$$

Beweis. Seien $P \in \mathcal{P}^d$, $F \in \mathcal{F}_m(P)$ in allgemeiner Lage zu $L \in G(d, k)$ sowie $u \in L^\perp \cap \text{relint}(n(P, F))$ (vergleiche auch Abbildung 4.4). Wir erinnern daran, dass $H(P, u)$

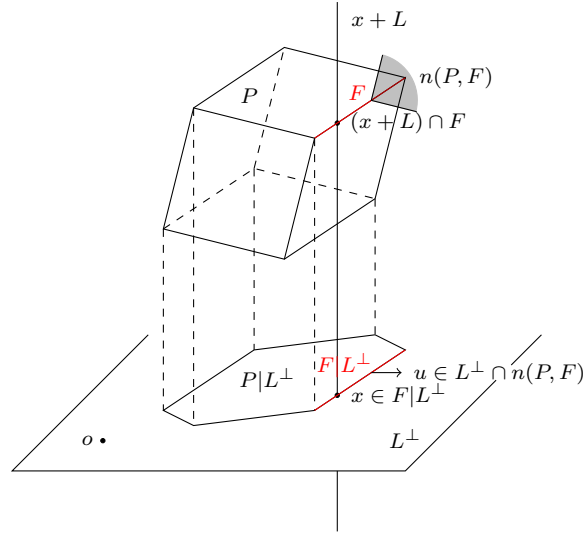


Abbildung 4.4.: Zusammenhang zwischen Seiten und äußeren Normalen des Polytops P und der Projektion $P|L^\perp$

die Stützhyperebene von P mit äußerem Einheitsnormalenvektor u bezeichnet und $F(P, u)$ die zugehörige Stützmenge. Da $u \in \text{relint}(n(P, F))$, gilt nach (2.1), dass $F = F(P, u) = H(P, u) \cap P$. Wegen $u \in L^\perp$ ist $H(P, u) \cap L^\perp$ eine Stützhyperebene von $P|L^\perp$ mit äußerem Normaleneinheitsvektor u und $(P|L^\perp) \cap H(P, u) \cap L^\perp = F|L^\perp$. Insbesondere ist $F|L^\perp = F_{L^\perp}(P|L^\perp, u)$ eine Seite von $P|L^\perp$. Da L und F in allgemeiner Lage sind, gilt $L \cap L(F) = \{o\}$ und daher $\dim(F|L^\perp) = m$, also ist $F|L^\perp \in \mathcal{F}_m(P|L^\perp)$. Aufgrund von (2.1) haben wir nun gezeigt, dass $u \in \text{relint}(n_{L^\perp}(P|L^\perp, F|L^\perp))$. \square

Lemma 4.5. Sei P ein Polytop in \mathbb{R}^d , $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $L \in G(d, k)$ so, dass P und L in allgemeiner Lage sind. Ist $G \in \mathcal{F}_m(P|L^\perp)$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$, und $u \in \text{relint}(n_{L^\perp}(P|L^\perp, G))$, so existiert eine eindeutige Seite $F \in \mathcal{F}_m(P)$ mit $F|L^\perp = G$ und $u \in \text{relint}(n(P, F))$.

Beweis. Sei $P \in \mathcal{P}^d$ in allgemeiner Lage zu $L \in G(d, k)$ sowie $G \in \mathcal{F}_m(P|L^\perp)$ und $u \in \text{relint}(n_{L^\perp}(P|L^\perp, G))$ (vergleiche auch Abbildung 4.4). Nach (2.1) gilt $F_{L^\perp}(P|L^\perp, u) = G$. Ferner ist $F := F(P, u)$ eine Seite von P mit $F|L^\perp = G$ und als solche eindeutig. Da P und L in allgemeiner Lage sind, ist $\dim(F) = \dim(G) = m$, das heißt $F \in \mathcal{F}_m(P)$ mit $G = F|L^\perp$ und $u \in \text{relint}(n(P, F))$, wobei zuletzt wieder (2.1) verwendet wurde. \square

Seien nachfolgend das Polytop P und der Unterraum $L \in G(d, k)$ in allgemeiner Lage. Da sich $n_{L^\perp}(P|L^\perp, G)$ und $\text{relint}(n_{L^\perp}(P|L^\perp, G))$ nur um eine $\mathcal{H}^{d-k-m-1}$ -Nullmenge unterscheiden, gilt

$$\begin{aligned} \Xi_m^{L^\perp}(P|L^\perp, \cdot) &= \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \sum_{G \in \mathcal{F}_m(P|L^\perp)} \int_G \int_{\text{relint}(n_{L^\perp}(P|L^\perp, G))} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(y, u) \in \cdot\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dy). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 4.4 und Lemma 4.5 folgt nun

$$\begin{aligned} \Xi_m^{L^\perp}(P|L^\perp, \cdot) &= \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_{F|L^\perp} \int_{L^\perp \cap \text{relint}(n(P,F))} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(y, u) \in \cdot\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dy). \end{aligned}$$

Für eine (beliebige) Seite $F \in \mathcal{F}_m(P)$ von P ist der Einheitsnormalenkegel $n(P, F)$ der Durchschnitt der Einheitssphäre mit einem $(d-m)$ -dimensionalen polyedrischen Kegel, dem sogenannten *Normalenkegel* $N(P, F)$, dessen relativer Rand in einer endlichen Vereinigung von $(d-m-1)$ -dimensionalen Untervektorräumen enthalten ist. Indem wir eine ν_k -Nullmenge von Unterräumen $L \in G(d, k)$ ausschließen, können wir voraussetzen, dass L^\perp und jeder der $N(P, F)$ begrenzenden Unterräume in allgemeiner Lage sind. Dies impliziert $\mathcal{H}^{d-k-m-1}(L^\perp \cap \text{relbd}(n(P, F))) = 0$, und somit ist

$$\begin{aligned} \Xi_m^{L^\perp}(P|L^\perp, \cdot) &= \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_{F|L^\perp} \int_{L^\perp \cap n(P,F)} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(y, u) \in \cdot\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dy). \end{aligned}$$

Die vorangehenden Argumente zeigen nun

$$\begin{aligned} \Xi_m^{(k)}(P, \cdot) &= \int_{G(d,k)} \frac{1}{\omega_{d-k-m}} \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \int_{F|L^\perp} \int_{L^\perp \cap n(P,F)} \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(g(x, L, P), u, L) \in \cdot\} \mathcal{H}^{d-k-m-1}(du) \mathcal{H}^m(dx) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, P), u, L) \in \cdot\} \Xi_m^{L^\perp}(P|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Das Fahnenmaß kann also als eine Mischung von Stützmaßen von Projektionen des gegebenen Polytops ausgedrückt werden. Dies ist unsere angestrebte Umformung von Formel (4.8).

Sei nun $K \in \mathcal{K}^d$ ein beliebiger konvexer Körper und $\Xi_m^{(k)}(K, \cdot)$ für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ definiert durch (4.11).

Wir sagen $L \in G(d, k)$ hat die eindeutige Stützeigenschaft bezüglich K und schreiben, dass $L \in \text{USP}(K)$, falls jede zu L parallele k -Ebene, die K stützt, genau einen Punkt mit K gemeinsam hat. Für einen fest gewählten Unterraum $L \in G(d, k)$ schreiben wir im Folgenden auch $g_L(x, K)$ anstelle von $g(x, L, K)$. Die Stetigkeitseigenschaften von g_L untersuchen wir im folgenden Lemma.

Lemma 4.6. *Für $i \in \mathbb{N}_0$ seien $K_i \in \mathcal{K}^d$ konvexe Körper und $x_i \in \mathbb{R}^d$ mit $K_i \rightarrow K_0$, $x_i \rightarrow x_0$ für $i \rightarrow \infty$. Sei $L \in G(d, k) \cap \text{USP}(K_0)$. Dann gilt*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} g_L(x_i, K_i) = g_L(x_0, K_0).$$

Insbesondere gilt:

- 1) $x \mapsto g_L(x, K_0)$ ist stetig;
- 2) $g_L(\cdot, K_i) \rightarrow g_L(\cdot, K_0)$ konvergiert (für $i \rightarrow \infty$) gleichmäßig auf kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d .

Beweis. Seien $K_i \in \mathcal{K}^d$, $x_i \in \mathbb{R}^d$ ($i \in \mathbb{N}_0$) mit $K_i \rightarrow K_0$, $x_i \rightarrow x_0$ für $i \rightarrow \infty$. Außerdem sei $L \in G(d, k) \cap \text{USP}(K_0)$. Aufgrund der Stetigkeit der metrischen Projektion $p(\cdot, \cdot)$ (siehe [67], Lemma 1.8.11), folgt aus Theorem 12.3.5 in [68], dass

$$p(K_i|L^\perp, x_i) + L \rightarrow p(K_0|L^\perp, x_0) + L$$

für $i \rightarrow \infty$.

Fall 1: $p(K_0|L^\perp, x_0) + L$ und K_0 lassen sich nicht durch eine Hyperebene trennen.

Der Beweis von Theorem 1.8.10 in [67] (wobei Theorem 1.8.8 in [67] durch Theorem 12.2.2 in [68] zu ersetzen ist) zeigt, dass in \mathcal{K}^d für $i \rightarrow \infty$ gilt

$$(p(K_i|L^\perp, x_i) + L) \cap K_i \rightarrow (p(K_0|L^\perp, x_0) + L) \cap K_0.$$

Da die Abbildung $c : \mathcal{C}' \rightarrow \mathbb{R}^d$ nach Lemma 4.1.1 in [68] stetig ist, folgt die Behauptung.

Fall 2: $p(K_0|L^\perp, x_0) + L$ und K_0 lassen sich durch eine Hyperebene trennen.

Aus der Voraussetzung $L \in \text{USP}(K_0)$ folgt

$$(p(K_0|L^\perp, x_0) + L) \cap K_0 = \{z_0\}$$

für ein $z_0 \in \mathbb{R}^d$. Wir zeigen nun, dass $(p(K_i|L^\perp, x_i) + L) \cap K_i \rightarrow \{z_0\}$, woraus die Behauptung folgt.

Sei $(j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge in \mathbb{N} mit $j_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ und $y_{j_k} \in (p(K_{j_k}|L^\perp, x_{j_k}) + L) \cap K_{j_k}$ mit $y_{j_k} \rightarrow y_0$ für $k \rightarrow \infty$. Wegen $K_{j_k} \rightarrow K_0$ und $y_{j_k} \in K_{j_k}$ folgt mit Theorem 12.2.2 in [68], dass $y_0 \in K_0$. Da ferner $y_{j_k} \in p(K_{j_k}|L^\perp, x_{j_k}) + L \rightarrow p(K_0|L^\perp, x_0) + L$ gilt, folgt nach Theorem 12.2.2 in [68] auch $y_0 \in p(K_0|L^\perp, x_0) + L$. Also $y_0 \in (p(K_0|L^\perp, x_0) + L) \cap K_0$. Insbesondere gilt also $y_0 \in \{z_0\}$, das heißt $y_0 = z_0$.

Wähle nun Punkte $y_i \in (p(K_i|L^\perp, x_i) + L) \cap K_i \neq \emptyset$ beliebig. Nach dem vorherigen Argument muss jede konvergente Teilfolge von y_i gegen z_0 konvergieren. Da $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt somit $y_i \rightarrow z_0$. Aus Theorem 12.2.2 in [68] erhalten wir so die behauptete Konvergenzaussage. Die restlichen Aussagen sind klar. \square

Nun können wir zeigen, dass die Abbildung $K \mapsto \Xi_m^{(k)}(K, \cdot)$ schwach stetig auf \mathcal{K}^d ist.

Satz 4.7. *Sei $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge konvexer Körper in \mathbb{R}^d und $K_0 \in \mathcal{K}^d$ mit $K_i \rightarrow K_0$ für $i \rightarrow \infty$. Dann gilt*

$$\Xi_m^{(k)}(K_i, \cdot) \xrightarrow{w} \Xi_m^{(k)}(K_0, \cdot).$$

Beweis. Sei F eine nichtnegative, stetige Funktion auf $\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$. Wir müssen zeigen, dass

$$K \mapsto \int_{G(d, k)} \int F(g(x, L, K), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL)$$

stetig auf \mathcal{K}^d ist. Seien dafür $K_0, K_i \in \mathcal{K}^d$, $i \in \mathbb{N}$, mit $K_i \rightarrow K_0$ für $i \rightarrow \infty$. Nun zeigen wir

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \int F(g_L(x, K_i), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, d(x, u)) \\ &= \int F(g_L(x, K_0), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_0|L^\perp, d(x, u)) \end{aligned}$$

für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$. Die Behauptung folgt dann aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

Nach Korollar 2.3.11 in [67] gilt $L \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} \text{USP}(K_i)$ für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$. Für ein so gewähltes L folgt

$$\begin{aligned}
& \left| \int F(g_L(x, K_i), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, d(x, u)) - \int F(g_L(x, K_0), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_0|L^\perp, d(x, u)) \right| \\
&= \left| \int F(g_L(x, K_i), u, L) - F(g_L(x, K_0), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, d(x, u)) \right. \\
&\quad \left. + \int F(g_L(x, K_0), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, d(x, u)) \right. \\
&\quad \left. - \int F(g_L(x, K_0), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_0|L^\perp, d(x, u)) \right| \\
&\leq \int \left| F(g_L(x, K_i), u, L) - F(g_L(x, K_0), u, L) \right| \Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, d(x, u)) \\
&\quad + \left| \int F(g_L(x, K_0), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, d(x, u)) \right. \\
&\quad \left. - \int F(g_L(x, K_0), u, L) \Xi_m^{L^\perp}(K_0|L^\perp, d(x, u)) \right|. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Da $K_i \rightarrow K_0$ und daher $K_i|L^\perp \rightarrow K_0|L^\perp$, ist der Träger der Maße $\Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, \cdot)$, $i \in \mathbb{N}_0$ für ein geeignet großes $R > 0$ enthalten in $RB^d \times S^{d-1}$. Außerdem gibt es nach Lemma 4.6 zu $\epsilon > 0$ ein $i_0(\epsilon)$, sodass für $i \geq i_0(\epsilon)$ gilt

$$|F(g_L(x, K_i), u, L) - F(g_L(x, K_0), u, L)| \leq \epsilon$$

für alle $(x, u) \in RB^d \times S^{d-1}$. Ferner ist $\left(\Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, L^\perp \times (S^{d-1} \cap L^\perp)) \right)_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt und somit kann der erste Summand in (4.12) als kleiner als ϵ abgeschätzt werden.

Da ebenfalls nach Lemma 4.6 die Abbildung

$$(x, u) \mapsto F(g_L(x, K_0), u, L)$$

stetig und beschränkt auf $RB^d \times S^{d-1}$ ist und nach Satz 3.2 1) für $i \rightarrow \infty$ gilt, dass

$$\Xi_m^{L^\perp}(K_i|L^\perp, \cdot) \xrightarrow{w} \Xi_m^{L^\perp}(K_0|L^\perp, \cdot),$$

gibt es ein $i_1(\epsilon)$, sodass für $i \geq i_1(\epsilon)$ auch der zweite Summand in (4.12) kleiner gleich ϵ ist. Somit folgt die Behauptung. \square

Aufgrund der schwachen Stetigkeit kann Formel (4.11) auf beliebige konvexe Körper fortgesetzt werden. Somit haben wir gezeigt, dass das Fahnenmaß eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^d$ die Darstellung

$$\Xi_m^{(k)}(K, \cdot) = \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K), u, L) \in \cdot\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \tag{4.13}$$

hat, wobei $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ und $\eta \subset \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$ eine Borelmenge ist. Die Projektion dieses Maßes auf die zweite und dritte Komponente hat dementsprechend eine Darstellung durch das Oberflächenmaß $\Psi_m^{L^\perp}$ im Raum L^\perp . Für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ setzen wir

$$\Psi_m^{(k)}(K, \cdot) := \Xi_m^{(k)}(K, \mathbb{R}^d \times \cdot)$$

und erhalten so

$$\Psi_m^{(k)}(K, \omega) = \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(u, L) \in \omega\} \Psi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, du) \nu_k(dL)$$

für $\omega \in \mathcal{B}(S^{d-1} \times G(d, k))$. Die Maße $\Psi_m^{(k)}(K, \cdot)$ werden *Fahnen-Oberflächenmaße von Typ (k, m)* genannt. Analog erhalten wir auch *Fahnen-Krümmungsmaße $\Phi_m^{(k)}(P, \cdot)$* .

Da die Fahnen-Oberflächenmaße beziehungsweise die Fahnen-Krümmungsmaße Bildmaße der Fahnen-Stützmaße sind, können alle im folgenden Abschnitt gezeigten Eigenschaften auch für sie hergeleitet werden.

Bevor wir im nächsten Abschnitt auf die Eigenschaften der Fahnenmaße eingehen, wollen wir hier noch zeigen, dass sie die Koeffizienten einer lokalen Steinerformel sind und somit, dass sie mit den Maßen von Hinderer aus Abschnitt 4.1 übereinstimmen. In (4.1) wurde das Maß der lokalen Parallelmenge von k -Ebenen definiert, nämlich

$$\mu_\varrho^{(k)}(K, \eta) = \mu_k(M_\varrho^{(k)}(K, \eta))$$

für $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ und eine Borelmenge $\eta \subset \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$. Es sei $T(L)$ die Menge aller Punkte x aus L^\perp , für die $L+x$ in der lokalen Parallelmenge von k -Ebenen liegt, das heißt

$$T(L) := \{x \in L^\perp : L+x \in M_\varrho^{(k)}(K, \eta)\}.$$

Nach der Definition des Maßes μ_k gilt dann

$$\mu_\varrho^{(k)}(K, \eta) = \int_{G(d,k)} \mathcal{H}^{d-k}(T(L)) \nu_k(dL).$$

Die lokale Parallelmenge von k -Ebenen wurde in Abschnitt 4.1 definiert als

$$M_\varrho^{(k)}(K, \eta) = \{E \in K^{(k)} : 0 < d(K, E) \leq \varrho, (p(K, E), u(K, E), L(E)) \in \eta\}.$$

Deshalb ist die Bedingung $L+x \in M_\varrho^{(k)}(K, \eta)$ für ν_k -fast alle linearen Unterräume $L \in G(d, k)$ und für $x \in L^\perp$ äquivalent zu

$$0 < d(K|L^\perp, x) \leq \varrho \quad \text{und} \quad (g(x, L, K), u(K|L^\perp, x), L) \in \eta.$$

Mit der Bezeichnung

$$\eta(L) := \{(x|L^\perp, u) \in L^\perp \times (S^{d-1} \cap L^\perp) : (x, u, L) \in \eta\}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \mu_\varrho^{(k)}(K, \eta) &= \int_{G(d,k)} \mathcal{H}^{d-k}(T(L)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \mathcal{H}^{d-k}(\{x \in L^\perp : 0 < d(K|L^\perp, x) \leq \varrho, (g(x, L, K), u(K|L^\perp, x), L) \in \eta\}) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \int_{L^\perp} \mathbf{1}\{0 < d(K|L^\perp, x) \leq \varrho, (p(K|L^\perp, x), u(K|L^\perp, x)) \in \eta(L)\} \mathcal{H}^{d-k}(dx) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \mathcal{H}^{d-k}(M_\varrho^{L^\perp}(K|L^\perp, \eta(L))) \nu_k(dL), \end{aligned}$$

wobei $M_\varrho^{L^\perp}(K|L^\perp, \eta(L))$ eine lokale Parallelmengende von $K|L^\perp$ in L^\perp bezeichnet (vergleiche (3.1)). Hierauf können wir wegen $\mathcal{H}^{d-k}(M_\varrho^{L^\perp}(K|L^\perp, \eta(L))) = \mu_\varrho(K|L^\perp, \eta(L))$ die lokale Steinerformel (3.2) der Stützmaße anwenden und erhalten

$$\mu_\varrho^{(k)}(K, \eta) = \sum_{m=0}^{d-k-1} \varrho^{d-k-m} \kappa_{d-k-m} \int_{G(d,k)} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, \eta(L)) \nu_k(dL).$$

Für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$, für $x \in L^\perp$ und $u \in S^{d-1} \cap L^\perp$ gilt $(g(x, L, K), u, L) \in \eta$ genau dann, wenn $(x, u) \in \eta(L)$. Also folgt aus (4.13), dass

$$\int_{G(d,k)} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, \eta(L)) \nu_k(dL) = \Xi_m^{(k)}(K, \eta)$$

und somit sind die Fahnenmaße $\Xi_m^{(k)}(K, \eta)$ die Koeffizienten der lokalen Steinerformel

$$\mu_\varrho^{(k)}(K, \eta) = \sum_{m=0}^{d-k-1} \varrho^{d-k-m} \kappa_{d-k-m} \Xi_m^{(k)}(K, \eta).$$

Ein Vergleich mit Formel (4.2) zeigt, dass die in diesem Abschnitt als Projektionsmittel definierten Fahnenmaße mit denen aus Abschnitt 4.1 übereinstimmen.

4.4. Eigenschaften der Fahnenmaße

Aufgrund der Darstellung (4.13) der Fahnenmaße, ist es naheliegend zu vermuten, dass sie ähnliche Eigenschaften wie die Stützmaße besitzen. Dies werden wir in diesem Abschnitt untersuchen. Außerdem werden wir in Proposition 4.11 zeigen, welcher Zusammenhang zwischen den Fahnenmaßen und den Stützmaßen besteht. Auch weitere Darstellungen und gemischte Maße werden betrachtet.

Im folgenden Satz sind einige wichtige Eigenschaften der Fahnenmaße zusammengefasst.

Satz 4.8. *Sei $K \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper und $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$. Die Fahnenmaße $\Xi_m^{(k)}(K, \cdot)$ haben für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ folgende Eigenschaften:*

- 1) *Sie sind bewegungskovariant, das heißt*

$$\Xi_m^{(k)}(\sigma K, \sigma \eta) = \Xi_m^{(k)}(K, \eta)$$

für alle Bewegungen $\sigma \in G(d)$ mit zugehöriger Rotation $\sigma_0 \in SO(d)$, wobei $\sigma \eta := \{(\sigma x, \sigma_0 u, \sigma_0 L) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) : (x, u, L) \in \eta\}$.

- 2) *Sie sind homogen vom Grad m , das heißt für $\lambda > 0$ gilt*

$$\Xi_m^{(k)}(\lambda K, \lambda \eta) = \lambda^m \Xi_m^{(k)}(K, \eta),$$

wobei $\lambda \eta := \{(\lambda x, u, L) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) : (x, u, L) \in \eta\}$.

- 3) *Sie sind konzentriert auf dem k -ten verallgemeinerten Normalenbündel*

$$\text{Nor}_k(K) = \{(x, u, L) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) : (x, u) \in \text{Nor}(K), L \perp u\}$$

von K , das heißt

$$\Xi_m^{(k)}(K, \eta) = \Xi_m^{(k)}(K, \eta \cap \text{Nor}_k(K)).$$

4) Sie sind additiv, das heißt für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ mit $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}^d$ gilt

$$\Xi_m^{(k)}(K_1 \cup K_2, \cdot) + \Xi_m^{(k)}(K_1 \cap K_2, \cdot) = \Xi_m^{(k)}(K_1, \cdot) + \Xi_m^{(k)}(K_2, \cdot).$$

5) Sie sind lokal definiert, das heißt

$$\Xi_m^{(k)}(K_1, \eta) = \Xi_m^{(k)}(K_2, \eta)$$

für alle konvexen Körper $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ und alle Borelmengen $\eta \subset \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$ mit $\eta \cap \text{Nor}_k(K_1) = \eta \cap \text{Nor}_k(K_2)$.

Beweis. Sei $K \in \mathcal{K}^d$ ein konvexer Körper, $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ und η eine Borelmenge in $\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$.

1) Die Bewegung $\sigma \in G(d)$ sei gegeben durch die Rotation σ_0 und die Translation um den Vektor $y \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt wegen (4.13) aufgrund von $(\sigma K)|L^\perp = (\sigma_0 K)|L^\perp + y|L^\perp$ und der Translationskovarianz der Stützmaße (siehe Satz 3.2 5))

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(k)}(\sigma K, \sigma \eta) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, \sigma K), u, L) \in \sigma \eta\} \Xi_m^{L^\perp}((\sigma K)|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x + y|L^\perp, L, \sigma K), u, L) \in \sigma \eta\} \Xi_m^{L^\perp}((\sigma_0 K)|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, \sigma_0 K) + y, u, L) \in \sigma \eta\} \Xi_m^{L^\perp}((\sigma_0 K)|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

Die Gleichheit im letzten Schritt gilt, da aufgrund der Translationskovarianz von $c(\cdot)$ für die Funktion g gilt

$$\begin{aligned} g(x + y|L^\perp, L, \sigma K) &= c\left(\left(p((\sigma K)|L^\perp, x + y|L^\perp) + L\right) \cap (\sigma K)\right) \\ &= c\left(\left(p((\sigma_0 K)|L^\perp, x) + y|L^\perp + L\right) \cap (\sigma_0 K + y)\right) \\ &= c\left(\left(p((\sigma_0 K)|L^\perp, x) + L\right) \cap (\sigma_0 K)\right) + y \\ &= c\left(\left(p((\sigma_0 K)|L^\perp, x) + L\right) \cap (\sigma_0 K)\right) + y \\ &= g(x, L, \sigma_0 K) + y. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun nacheinander, dass ν_k rotationsinvariant ist sowie, dass die Identität $(\sigma_0 K)|(\sigma_0 L)^\perp = \sigma_0(K|L^\perp)$ gilt, und dass die Stützmaße nach Satz 3.2 5)

drehkovariant sind, so folgt weiter

$$\begin{aligned}
& \Xi_m^{(k)}(\sigma K, \sigma \eta) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, \sigma_0 L, \sigma_0 K) + y, u, \sigma_0 L) \in \sigma \eta\} \Xi_m^{(\sigma_0 L)^\perp}((\sigma_0 K) | (\sigma_0 L)^\perp, d(x, u)) \\
&\quad \times \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(\sigma_0 x, \sigma_0 L, \sigma_0 K) + y, \sigma_0 u, \sigma_0 L) \in \sigma \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K | L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(\sigma_0 g(x, L, K) + y, \sigma_0 u, \sigma_0 L) \in \sigma \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K | L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K | L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \Xi_m^{(k)}(K, \eta).
\end{aligned}$$

Im drittletzten Schritt haben wir die Gleichheit $g(\sigma_0 x, \sigma_0 L, \sigma_0 K) = \sigma_0 g(x, L, K)$ verwendet. Diese gilt, da

$$\begin{aligned}
g(\sigma_0 x, \sigma_0 L, \sigma_0 K) &= c\left((p(\sigma_0(K | L^\perp), \sigma_0 x) + \sigma_0 L) \cap (\sigma_0 K)\right) \\
&= c\left((\sigma_0 p(K | L^\perp, x) + \sigma_0 L) \cap (\sigma_0 K)\right) \\
&= c\left(\sigma_0((p(K | L^\perp, x) + L) \cap K)\right) \\
&= \sigma_0 c\left((p(K | L^\perp, x) + L) \cap K\right) \\
&= \sigma_0 g(x, L, K).
\end{aligned}$$

2) Für $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
& \Xi_m^{(k)}(\lambda K, \lambda \eta) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, \lambda K), u, L) \in \lambda \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(\lambda K | L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, \lambda K), u, L) \in \lambda \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(\lambda(K | L^\perp), d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(\lambda x, L, \lambda K), u, L) \in \lambda \eta\} \lambda^m \Xi_m^{L^\perp}(K | L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \lambda^m \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(\lambda g(x, L, K), u, L) \in \lambda \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K | L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \lambda^m \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K | L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\
&= \lambda^m \Xi_m^{(k)}(K, \eta),
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\lambda K | L^\perp = \lambda(K | L^\perp)$, das Stützmaß $\Xi_m^{L^\perp}$ nach Satz 3.2

4) homogen vom Grad m ist und $g(\lambda x, L, \lambda K) = \lambda g(x, L, K)$. Letzteres gilt wegen

$$\begin{aligned} g(\lambda x, L, \lambda K) &= c((p(\lambda K|L^\perp, \lambda x) + L) \cap \lambda K) \\ &= c((\lambda p(K|L^\perp, x) + L) \cap \lambda K) \\ &= c(\lambda((p(K|L^\perp, x) + L) \cap K)) \\ &= \lambda c((p(K|L^\perp, x) + L) \cap K) \\ &= \lambda g(x, L, K). \end{aligned}$$

3) Aufgrund von Gleichung (4.13) gilt

$$\Xi_m^{(k)}(K, \cdot) = \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K), u, L) \in \cdot\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL).$$

Da außerdem der Träger eines Stützmaßes eines konvexen Körpers im Normalenbündel des Körpers enthalten ist, ist der Träger von $\Xi_m^{(k)}(K, \cdot)$ enthalten in

$$\begin{aligned} &\{(z, u, L) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) : z = g(x, L, K), (x, u) \in \text{Nor}_{L^\perp}(K|L^\perp)\} \\ &\subset \{(z, u, L) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) : (z, u) \in \text{Nor}(K), u \in L^\perp\}, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt.

4) Für den Beweis der Additivität der Fahnenmaße wird zunächst das folgende Lemma gezeigt:

Lemma 4.9. *Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ mit $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}^d$ und $L \in G(d, k)$. Dann gilt*

- 1) $(K_1 \cup K_2)|L^\perp = K_1|L^\perp \cup K_2|L^\perp$,
- 2) $(K_1 \cap K_2)|L^\perp = K_1|L^\perp \cap K_2|L^\perp$.

Beweis des Lemmas. Für eine beliebige Abbildung $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ gilt stets $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$ und $h(A \cap B) \subset h(A) \cap h(B)$. Es bleibt daher lediglich die Inklusion „ \supset “ für 2) zu zeigen.

Sei hierzu $x \in K_1|L^\perp \cap K_2|L^\perp$. Dann existiert ein $y \in K_1$ mit $x = y|L^\perp$ und ein $z \in K_2$ mit $x = z|L^\perp$. Da $K_1 \cup K_2$ nach Voraussetzung konvex ist, gibt es ein $w \in \text{conv}(\{y, z\})$, das heißt $w = (1 - \alpha)y + \alpha z$ mit $\alpha \in [0, 1]$, und $w \in K_1 \cap K_2$. Es folgt $w|L^\perp = (1 - \alpha)(y|L^\perp) + \alpha(z|L^\perp) = x$. Also gilt $x = w|L^\perp \in (K_1 \cap K_2)|L^\perp$. \square

Nun wird die Additivität der Fahnenmaße bewiesen. Seien $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ konvexe Körper, deren Vereinigung $K_1 \cup K_2$ ebenfalls ein konvexer Körper ist. Dann gilt mit (4.13) und Lemma 4.9, dass

$$\begin{aligned} &\Xi_m^{(k)}(K_1 \cup K_2, \eta) + \Xi_m^{(k)}(K_1 \cap K_2, \eta) \\ &= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_1 \cup K_2), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}((K_1 \cup K_2)|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\ &\quad + \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_1 \cap K_2), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}((K_1 \cap K_2)|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \left(\int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_1 \cup K_2), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp \cup K_2|L^\perp, d(x, u)) \right. \\ &\quad \left. + \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_1 \cap K_2), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp \cap K_2|L^\perp, d(x, u)) \right) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

Im Folgenden betrachten wir nur die Summe der inneren Integrale und wählen $L \in G(d, k)$ so, dass L mit K_1, K_2 und $K_1 \cup K_2$ in allgemeiner Lage ist. Wir definieren eine Funktion $h_L : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch

$$h_L(x, u) := \begin{cases} g_L(x, K_1), & (x, u) \in \text{Nor}_{L^\perp}(K_1|L^\perp), \\ g_L(x, K_2), & (x, u) \in \text{Nor}_{L^\perp}(K_2|L^\perp), \\ o, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abhängigkeit von K_1, K_2 wird durch die Notation nicht angezeigt. Die Funktion h_L ist messbar und eindeutig definiert, da für $(x, u) \in \text{Nor}_{L^\perp}(K_1|L^\perp) \cap \text{Nor}_{L^\perp}(K_2|L^\perp)$ aufgrund der vorausgesetzten eindeutigen Stützeigenschaft $g(x, L, K_1) = g(x, L, K_2)$ gilt. Der Beweis von Theorem 4.1.3 in [67] zeigt, dass

$$\text{Nor}(A \cup B) \cup \text{Nor}(A \cap B) = \text{Nor}(A) \cup \text{Nor}(B) \quad (4.14)$$

für konvexe Körper A, B , für die auch $A \cup B$ konvex ist. Wegen Lemma 4.9, der vorausgesetzten eindeutigen Stützeigenschaft und (4.14) erhalten wir für $(x, u) \in \text{Nor}_{L^\perp}((K_1|L^\perp) \cup (K_2|L^\perp))$, dass $h_L(x, u) = g(x, L, K_1 \cup K_2)$. Ist dagegen $(x, u) \in \text{Nor}_{L^\perp}((K_1|L^\perp) \cap (K_2|L^\perp))$, so ist $h_L(x, u) = g(x, L, K_1 \cap K_2)$. Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_1 \cup K_2), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp \cup K_2|L^\perp, d(x, u)) \\ & \quad + \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_1 \cap K_2), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp \cap K_2|L^\perp, d(x, u)) \\ & = \int \mathbf{1}\{(h_L(x, u), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp \cup K_2|L^\perp, d(x, u)) \\ & \quad + \int \mathbf{1}\{(h_L(x, u), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp \cap K_2|L^\perp, d(x, u)) \\ & = \int \mathbf{1}\{(h_L(x, u), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp, d(x, u)) \\ & \quad + \int \mathbf{1}\{(h_L(x, u), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_2|L^\perp, d(x, u)) \\ & = \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_1), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_1|L^\perp, d(x, u)) \\ & \quad + \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K_2), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K_2|L^\perp, d(x, u)). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Additivität der Stützmaße in L^\perp (siehe Satz 3.2 1)) und dann die Definition der Funktion h_L verwendet. Integration über $L \in G(d, k)$ ergibt schließlich die Behauptung.

5) Gilt nach Satz 4.2 2). □

Bemerkung 4.10. Analoge Aussagen können für die Fahnen-Oberflächenmaße $\Psi_m^{(k)}(K, \cdot)$ abgeleitet werden. Diese sind konzentriert auf der *Fahnenmannigfaltigkeit*

$$F^\perp(d, k) := \{(u, L) \in S^{d-1} \times G(d, k) : L \perp u\}.$$

In den Vorüberlegungen zu Satz 3.3 war es wichtig, wann die Summe von Borelmengen wieder eine Borelmenge ist, da dies im Allgemeinen nicht der Fall ist. Eine ähnliche

Überlegung benötigen wir nun für Projektionen, denn auch die Orthogonalprojektion einer Borelmenge $\beta \subset \mathbb{R}^d$ auf einen Unterraum muss keine Borelmenge sein. Im Fall $K \in \mathcal{K}^d$ und $\beta \subset K$ ist allerdings der Durchschnitt $(\beta|L) \cap \partial_L(K|L)$ für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$ eine Borelmenge, wobei ∂_L den Rand in L bezeichnet (siehe Beweis von Theorem 6.2.1 in [68]). Diese Tatsache werden wir in der folgenden Proposition und anschließend immer wieder benötigen. Die nächste Proposition zeigt, welcher Zusammenhang zwischen den Fahnenmaßen und den Stützmaßen besteht.

Proposition 4.11. *Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$. Dann gilt*

$$\Xi_m^{(k)}(K, \cdot \times G(d, k)) = \alpha(d, k, m) \Xi_m(K, \cdot)$$

mit

$$\alpha(d, k, m) = \frac{\Gamma(\frac{d-k+1}{2}) \Gamma(\frac{d-m+1}{2})}{\Gamma(\frac{d+1}{2}) \Gamma(\frac{d-k-m+1}{2})}.$$

Beweis. Seien $\beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $\gamma \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Zunächst betrachten wir den Fall $k = 0$. Hier gilt

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(0)}(K, \beta \times \gamma \times G(d, 0)) \\ &= \int_{G(d, 0)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K), u, L) \in \beta \times \gamma \times G(d, 0)\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, d(x, u)) \nu_0(dL) \\ &= \int_{G(d, 0)} \mathbf{1}\{L \in G(d, 0)\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, (\beta|L^\perp) \times (\gamma \cap L^\perp)) \nu_0(dL) \\ &= \Xi_m(K, \beta \times \gamma) \end{aligned}$$

sowie $\alpha(d, 0, m) = 1$. Sei nun $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Theorem 4.4.10 in [67] liefert (unter Verwendung der Umrechnung (3.6))

$$\int_{G(d, k)} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, (\beta|L^\perp) \times (\gamma \cap L^\perp)) \nu_k(dL) = \frac{\binom{d-k}{m} \kappa_{d-m} \kappa_{d-k}}{\binom{d}{m} \kappa_{d-k-m} \kappa_d} \Xi_m(K, \beta \times \gamma).$$

Damit folgt die Behauptung, denn

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(k)}(K, \beta \times \gamma \times G(d, k)) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K), u, L) \in \beta \times \gamma \times G(d, k)\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \mathbf{1}\{L \in G(d, k)\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, (\beta|L^\perp) \times (\gamma \cap L^\perp)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp, (\beta|L^\perp) \times (\gamma \cap L^\perp)) \nu_k(dL) \\ &= \frac{\binom{d-k}{m} \kappa_{d-m} \kappa_{d-k}}{\binom{d}{m} \kappa_{d-k-m} \kappa_d} \Xi_m(K, \beta \times \gamma) \\ &= \alpha(d, k, m) \Xi_m(K, \beta \times \gamma). \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 4.12. Insbesondere gilt also

$$\Xi_m^{(0)}(K, \cdot \times G(d, 0)) = \Xi_m(K, \cdot)$$

für $K \in \mathcal{K}^d$ und $m \in \{0, \dots, d-1\}$.

Wie wir gezeigt haben, sind die Fahnenmaße die Koeffizienten einer lokalen Steinerformel. Daher liegt die Frage nahe, ob auch für sie selbst eine Polynomentwicklung möglich ist, wenn $\Xi_m^{(k)}(K + \varrho B^d, \cdot)$ für $\varrho > 0$ betrachtet wird. Die folgende Proposition liefert uns eine Antwort auf diese Frage.

Proposition 4.13. *Seien K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d , $\varrho > 0$, $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ und $\eta \subset \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$ eine Borelmenge. Außerdem sei die Abbildung $t_\varrho : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) \rightarrow \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k)$ gegeben durch $t_\varrho(x, u, L) := (x + \varrho u, u, L)$. Dann gilt*

$$\Xi_m^{(k)}(K + \varrho B^d, t_\varrho \eta) = \sum_{j=0}^m \varrho^j \binom{d-k+j-m}{j} \frac{\kappa_{d-k+j-m}}{\kappa_{d-k-m}} \Xi_{m-j}^{(k)}(K, \eta).$$

Beweis. Seien $K \in \mathcal{K}^d$, $\varrho > 0$, $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k))$. Wie wir sehen werden, leitet sich dieses Resultat von der entsprechenden Formel für Stützmaße (3.13) ab, die wir im Beweis zu Satz 3.3 verwendet haben.

Zunächst verwenden wir, dass $(K + \varrho B^d)|L^\perp = K|L^\perp + \varrho B^d|L^\perp$ für alle $L \in G(d, k)$ gilt sowie $g(x, L, K + \varrho B^d) = g(x - \varrho u, L, K) + \varrho u$ für (x, u) in $\text{Nor}(K + \varrho B^d)$ und erhalten

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(k)}(K + \varrho B^d, t_\varrho \eta) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K + \varrho B^d), u, L) \in t_\varrho \eta\} \Xi_m^{L^\perp}((K + \varrho B^d)|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x - \varrho u, L, K) + \varrho u, u, L) \in t_\varrho \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp + \varrho B^d|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(x - \varrho u, L, K), u, L) \in \eta\} \Xi_m^{L^\perp}(K|L^\perp + \varrho B^d|L^\perp, d(x, u)) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

Mit Formel (3.13) folgt nun

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(k)}(K + \varrho B^d, t_\varrho \eta) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1}\{(g(z, L, K), u, L) \in \eta\} \\ & \quad \times \sum_{j=0}^m \varrho^j \binom{d-k+j-m}{j} \frac{\kappa_{d-k+j-m}}{\kappa_{d-k-m}} \Xi_{m-j}^{L^\perp}(K|L^\perp, d(z, u)) \nu_k(dL) \\ &= \sum_{j=0}^m \varrho^j \binom{d-k+j-m}{j} \frac{\kappa_{d-k+j-m}}{\kappa_{d-k-m}} \Xi_{m-j}^{(k)}(K, \eta). \quad \square \end{aligned}$$

Wie für die Stützmaße gibt es auch für die Fahnenmaße eine multilineare Entwicklung, für die Proposition 4.13 einen Spezialfall darstellt. Um diese zeigen zu können, müssen wir überprüfen, ob die Bedingung der allgemeinen Lage unter Projektionen erhalten bleibt. Dies liefert das folgende Lemma.

Lemma 4.14. *Seien K_1, K_2 konvexe Körper in allgemeiner Lage im \mathbb{R}^d . Sei der lineare Unterraum $L \in G(d, k)$ für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ so, dass es keine k -dimensionale Stützhyperebene von $K_1 + K_2$ parallel zu L gibt, die eine 1-dimensionale konvexe Teilmenge von $K_1 + K_2$ enthält. Dann sind $K_1|L^\perp$ und $K_2|L^\perp$ in allgemeiner Lage in L^\perp .*

Beweis. Für $k \in \{0, d-1\}$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $L \in G(d, k)$ mit $1 \leq k \leq d-2$ ein linearer Unterraum, der die Voraussetzungen des Lemmas erfülle.

Angenommen $K_1|L^\perp$ und $K_2|L^\perp$ sind nicht in allgemeiner Lage in L^\perp . Dann gibt es einen Einheitsvektor $v \in L^\perp$ und parallele Strecken $\tilde{S}_i \subset F(K_i|L^\perp, v)$, $i = 1, 2$. Also gibt es Strecken $S_i \subset F(K_i, v)$ mit $\tilde{S}_i = S_i|L^\perp$, $i = 1, 2$. Da K_1 und K_2 in allgemeiner Lage in \mathbb{R}^d sind, sind die Strecken S_1, S_2 nicht parallel, und daher folgt $\dim(S_1 + S_2) = 2$. Allerdings enthält dann $S_1 + S_2$ eine Strecke S parallel zu L und $S + L \subset H(K_1 + K_2, v)$ ist eine k -dimensionale Stützhyperebene von $K_1 + K_2$ parallel zu L , die eine 1-dimensionale Teilmenge von $K_1 + K_2$ enthält. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von L , also sind $K_1|L^\perp$ und $K_2|L^\perp$ in allgemeiner Lage in L^\perp . \square

Nun können wir die multilineare Entwicklung der Fahnenmaße beweisen.

Satz 4.15. Für $l \in \mathbb{N}$ seien $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ konvexe Körper in allgemeiner Lage sowie $\varrho_1, \dots, \varrho_l \geq 0$ und β_1, \dots, β_l Borelmengen in \mathbb{R}^d mit $\beta_i \subset K_i$. Des Weiteren sei $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $\gamma \subset S^{d-1} \times G(d, k)$ eine Borelmenge.

- 1) Für $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$ und $i_1, \dots, i_l \in \{0, \dots, m\}$ mit $i_1 + \dots + i_l = m$ gibt es Maße $\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \cdot)$ auf $(\mathbb{R}^d)^l \times S^{d-1} \times G(d, k)$, die auf $\partial K_1 \times \dots \times \partial K_l \times S^{d-1} \times G(d, k)$ konzentriert sind, sodass

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(k)} \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i, \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i \right) \times \gamma \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_l^{i_l} \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \dots \times \beta_l \times \gamma). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Das Maß $\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \cdot)$ hängt schwach stetig von K_1, \dots, K_l in allgemeiner Lage ab und ist symmetrisch in dem Sinne, dass

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \dots \times \beta_l \times \gamma) \\ &= \Xi_{i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(l)}}^{(k)}(K_{\pi(1)}, \dots, K_{\pi(l)}, \beta_{\pi(1)} \times \dots \times \beta_{\pi(l)} \times \gamma) \end{aligned}$$

für alle Permutationen π von $1, \dots, l$. Für $i_1 = 0$ gilt

$$\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \partial K_1 \times \cdot) = \Xi_{i_2, \dots, i_l}^{(k)}(K_2, \dots, K_l, \cdot).$$

Für $i_1 \neq 0$ ist $\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \cdot)$ translationskovariant und homogen vom Grad i_1 in der ersten Komponente, das heißt

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{(k)}(\lambda K_1 + x, K_2, \dots, K_l, (\lambda \beta_1 + x) \times \beta_2 \times \dots \times \beta_l \times \gamma) \\ &= \lambda^{i_1} \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \dots \times \beta_l \times \gamma) \end{aligned}$$

für $\lambda > 0$ und $x \in \mathbb{R}^d$. Des Weiteren hat $\Xi_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{(k)}(\cdot, K_2, \dots, K_l, \cdot \times \beta_2 \times \dots \times \beta_l \times \gamma)$ eine Polynomentwicklung.

- 2) Seien $m \in \{1, \dots, d-k-1\}$ und $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, m\}$ so, dass $i_1 + \dots + i_l = m$. Sind $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ strikt konvexe Körper, so gilt

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \dots \times \beta_l \times \gamma) \\ &= \Xi_{1, \dots, 1}^{(k)}(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], (\beta_1)^{i_1} \times \dots \times (\beta_l)^{i_l} \times \gamma), \end{aligned}$$

wobei der untere Index 1 auf der rechten Seite m -mal auftritt.

- 3) Für $m \in \{0, \dots, d-k-1\}$, $r \in \{0, \dots, m\}$, einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^d$ und Borelmengen $\beta \subset K$, $\gamma \subset S^{d-1} \times G(d, k)$ gilt

$$\Xi_r^{(k)}(K, \beta \times \gamma) = \frac{\binom{d-k}{r} \kappa_{d-k-m}}{\binom{d-k}{m} \kappa_{d-k-r}} \Xi_{r, m-r}^{(k)}(K, B^d, \beta \times S^{d-1} \times \gamma).$$

Für konvexe Körper $K_1, \dots, K_s \in \mathcal{K}^d$ in allgemeiner Lage und Borelmengen $\gamma \subset S^{d-1} \times G(d, k)$, $\beta_1, \dots, \beta_s \subset \mathbb{R}^d$ mit $\beta_i \subset K_i$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, \dots, i_s}^{(k)}(K_1, \dots, K_s, \beta_1 \times \dots \times \beta_s \times \gamma) \\ &= \frac{\binom{d-k}{r} \kappa_{d-k-m}}{\binom{d-k}{m} \kappa_{d-k-r}} \Xi_{i_1, \dots, i_s, m-r}^{(k)}(K_1, \dots, K_s, B^d, \beta_1 \times \dots \times \beta_s \times S^{d-1} \times \gamma), \end{aligned}$$

wobei $i_1, \dots, i_s \in \{0, \dots, r\}$ mit $i_1 + \dots + i_s = r$.

Beweis. Für $l \in \mathbb{N}$ seien $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ in allgemeiner Lage sowie $\varrho_1, \dots, \varrho_l \geq 0$ und β_1, \dots, β_l Borelmengen in \mathbb{R}^d mit $\beta_i \subset K_i$. Des Weiteren sei $k \in \{0, \dots, d-1\}$ und $\gamma \subset S^{d-1} \times G(d, k)$ eine Borelmenge.

- 1) Wir können annehmen, dass $\gamma = \omega \times A$ mit Borelmengen $\omega \subset S^{d-1}$ und $A \subset G(d, k)$. In unserer Darstellung des Fahnenmaßes als Projektionsmittel (4.13) tritt das Stützmaß der Projektion des konvexen Körpers auf einen Unterraum auf. Daher möchten wir im Folgenden Satz 3.3 für Stützmaße anwenden. Damit dessen Voraussetzungen erfüllt sind, müssen wir erst zeigen, dass die Projektionen $K_1|L^\perp, \dots, K_l|L^\perp$ der konvexen Körper auf einen Unterraum für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$ ebenfalls in allgemeiner Lage sind. Dazu kombinieren wir Lemma 4.14 mit einem Resultat von Zalgaller (siehe den Fall $s = 1$ und $r = k$ des Theorems in „Notes for Section 2.3“ in [67], S. 103), um zu zeigen, dass für zwei konvexe Körper K_1 und K_2 , die in allgemeiner Lage in \mathbb{R}^d sind, folgt, dass $K_1|L^\perp$ und $K_2|L^\perp$ für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$ in allgemeiner Lage in L^\perp sind. Durch Induktion erhalten wir die Erweiterung dieses Resultats auf endlich viele konvexe Körper in allgemeiner Lage.

Aus (4.13) und (3.11) folgt dann

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(k)} \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i, \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i \right) \times \gamma \right) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1} \left\{ \left(g \left(x, L, \sum_{i=1}^l \varrho_i K_i \right), u, L \right) \in \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i \right) \times \gamma \right\} \\ & \quad \times \Xi_m^{L^\perp} \left(\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i \right) | L^\perp, d(x, u) \right) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \int \mathbf{1} \left\{ \left(g \left(x, L, \sum_{i=1}^l \varrho_i K_i \right), u, L \right) \in \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i \right) \times \gamma \right\} \\ & \quad \times \Xi_m^{L^\perp} \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i (K_i | L^\perp), d(x, u) \right) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d, k)} \mathbf{1} \{ L \in A \} \Xi_m^{L^\perp} \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i (K_i | L^\perp), \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i (\beta_i | L^\perp) \right) \times (\omega \cap L^\perp) \right) \nu_k(dL) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \int_{G(d,k)} \mathbf{1}\{L \in A\} \\
&\quad \times \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{L^\perp}(K_1|L^\perp, \dots, K_l|L^\perp, (\beta_1|L^\perp) \times \cdots \times (\beta_l|L^\perp) \times (\omega \cap L^\perp)) \nu_k(dL) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \cdots \times \beta_l \times \gamma).
\end{aligned}$$

Das gemischte Stützmaß der konvexen Körper $K_1|L^\perp, \dots, K_l|L^\perp$ in L^\perp wird hier mit $\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{L^\perp}(K_1|L^\perp, \dots, K_l|L^\perp, \cdot)$ bezeichnet.

Das gemischte Fahnenmaß $\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \cdot)$ definieren wir durch

$$\begin{aligned}
&\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(k)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \cdots \times \beta_l \times \omega \times A) \\
&:= \int_{G(d,k)} \mathbf{1}\{L \in A\} \\
&\quad \times \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{L^\perp}(K_1|L^\perp, \dots, K_l|L^\perp, (\beta_1|L^\perp) \times \cdots \times (\beta_l|L^\perp) \times (\omega \cap L^\perp)) \nu_k(dL).
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Die restlichen Aussagen von 1) folgen aus (4.15), (4.16) und den entsprechenden Eigenschaften von gemischten Stützmaßen in Satz 3.3 1).

2),3) Diese Aussagen folgen aus (4.16) und Satz 3.3 2) und 3). \square

Bemerkung 4.16.

- 1) Im Folgenden wird $\Xi^{(k)}(K_1, \dots, K_m, \cdot)$ für $\Xi_{1, \dots, 1}^{(k)}(K_1, \dots, K_m, \cdot)$ geschrieben, wobei $m \in \{1, \dots, d-k-1\}$ und der Index 1 m -mal im Maß $\Xi_{1, \dots, 1}^{(k)}$ auftritt.
- 2) Zwei Spezialfälle des vorangegangenen Satzes sind:

Sind $m = d-k-1$ und $r \in \{0, \dots, d-k-1\}$ in Satz 4.15 3), so gilt für $K \in \mathcal{K}^d$

$$\Xi_r^{(k)}(K, \beta \times \gamma) = \frac{2^{\binom{d-k}{r}}}{(d-k)\kappa_{d-k-r}} \Xi_{r, d-1-k-r}^{(k)}(K, B^d, \beta \times S^{d-1} \times \gamma).$$

Seien $m = d-k-1 \geq 1$ und $r \in \{0, \dots, d-k-1\}$. Ist $K \in \mathcal{K}^d$ strikt konvex, so implizieren Satz 4.15 2) und 3), dass

$$\Xi_r^{(k)}(K, \beta \times \gamma) = \frac{2^{\binom{d-k}{r}}}{(d-k)\kappa_{d-k-r}} \Xi_{1, \dots, 1}^{(k)}(K[r], B^d[d-k-1-r], (\beta)^r \times (S^{d-1})^{d-1-k-r} \times \gamma).$$

In Bemerkung 3.4 haben wir gesehen, dass die allgemeine Lage der konvexen Körper und somit die strikte Konvexität für die multilineare Entwicklung der Oberflächenmaße keine notwendige Bedingung ist. Dies überträgt sich auch auf die Fahnen-Oberflächenmaße. Einige der Formeln, die somit aus Satz 4.15 für allgemeine konvexe Körper folgen, listen wir nun auf. Die Notation für die gemischten Fahnen-Oberflächenmaße wählen wir nach dem gleichen Prinzip wie für die gemischten Fahnen-Stützmaße. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Psi_m^{(k)}(\varrho_1 K_1 + \cdots + \varrho_l K_l, \cdot) &= \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \Psi^{(k)}(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], \cdot) \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_m=1}^l \varrho_{j_1} \cdots \varrho_{j_m} \Psi^{(k)}(K_{j_1}, \dots, K_{j_m}, \cdot),
\end{aligned}$$

$$\Psi_m^{(k)}(K, \cdot) = \frac{2^{\binom{d-k}{m}}}{(d-k)\kappa_{d-k-m}} \Psi^{(k)}(K[m], B^d[d-1-k-m], \cdot) \quad (4.17)$$

und

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(k)}(K + \varrho B^d, \cdot) &= \sum_{r=0}^m \varrho^r \binom{m}{r} \Psi^{(k)}(K[m-r], B^d[r], \cdot) \\ &= \sum_{r=0}^m \varrho^r \binom{m}{r} \Psi_{m-r,r}^{(k)}(K, B^d, \cdot) \\ &= \sum_{r=0}^m \varrho^{m-r} \binom{d-k-r}{d-k-m} \frac{\kappa_{d-k-r}}{\kappa_{d-k-m}} \Psi_r^{(k)}(K, \cdot). \end{aligned}$$

Die unterste Formel folgt auch direkt aus Proposition 4.13.

Abschließend untersuchen wir in diesem Kapitel Zusammenhänge der Fahnenmaße $\Xi_m^{(k)}(K, \cdot)$ mit festem m , aber unterschiedlichen k . Der folgende Satz 4.17 zeigt, dass zwischen diesen Maßen eine Integralformel gilt. Hierfür bezeichnen wir mit $\Xi_m^{L^\perp, (r-k)}(K|L^\perp, \cdot)$ das für $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $r \in \{k, \dots, d-1\}$, $m \in \{0, \dots, d-r-1\}$ und $L \in G(d, k)$ in L^\perp berechnete Fahnen-Stützmaß von Typ $(r-k, m)$ des konvexen Körpers $K|L^\perp$. Analog verfahren wir mit g^{L^\perp} . Der Spezialfall $r=k$ des folgenden Satzes liefert wieder (4.13).

Satz 4.17. *Für einen konvexen Körper K in \mathbb{R}^d , $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $r \in \{k, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-r-1\}$ gilt*

$$\Xi_m^{(r)}(K, \cdot) = \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{(g(x, L, K), u, V+L) \in \cdot\} \Xi_m^{L^\perp, (r-k)}(K|L^\perp, d(x, u, V)) \nu_k(dL). \quad (4.18)$$

Beweis. Sei $K \in \mathcal{K}^d$, $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $r \in \{k, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-r-1\}$. Für einen Unterraum $V \in G(d, k)$ des \mathbb{R}^d bezeichnen wir im Folgenden mit $G(V, l)$ die Menge der linearen Unterräume $W \in G(d, l)$ mit $W \subset V$, falls $l \in \{0, \dots, k\}$. Gilt $l \in \{k, \dots, d\}$, so ist $G(V, l)$ die Menge aller $W \in G(d, l)$ mit $V \subset W$. In beiden Fällen wird das Haarsche Wahrscheinlichkeitsmaß auf $G(V, l)$ mit ν_l^V bezeichnet. Sei $f : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times G(d, k) \rightarrow [0, \infty)$ messbar. Wird (4.13) in L^\perp angewendet, so gilt

$$\begin{aligned} &\int_{G(d,k)} \int f(g(x, L, K), u, V+L) \Xi_m^{L^\perp, (r-k)}(K|L^\perp, d(x, u, V)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \int_{G(L^\perp, r-k)} \int f\left(g\left(g^{L^\perp}(z, W, K|L^\perp), L, K\right), w, W+L\right) \\ &\quad \times \Xi_m^{L^\perp \cap W^\perp}\left((K|L^\perp)|(L^\perp \cap W^\perp), d(z, w)\right) \nu_{r-k}^{L^\perp}(dW) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \int_{G(L^\perp, r-k)} \int f(g(z, W+L, K), w, W+L) \\ &\quad \times \Xi_m^{(W+L)^\perp}\left(K|(W+L)^\perp, d(z, w)\right) \nu_{r-k}^{L^\perp}(dW) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \int_{G(L,r)} \int f(g(z, U, K), w, U) \Xi_m^{U^\perp}\left(K|U^\perp, d(z, w)\right) \nu_r^L(dU) \nu_k(dL), \end{aligned}$$

wobei $U := W + L$ gesetzt wird. Mit Theorem 7.1.1 aus [68] und nochmaliger Anwendung von (4.13) folgt schließlich

$$\begin{aligned} & \int_{G(d,k)} \int f(g(x, L, K), u, V + L) \Xi_m^{L^\perp, (r-k)}(K|L^\perp, d(x, u, V)) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,r)} \int f(g(z, U, K), u, U) \Xi_m^{U^\perp}(K|U^\perp, d(z, u)) \nu_r(dU) \\ &= \int f(z, u, U) \Xi_m^{(r)}(K, d(z, u, U)). \end{aligned} \quad \square$$

Hieraus können wir durch das gleiche Vorgehen wie im Beweis zu Satz 4.15 eine Erweiterung auf gemischte Maße erhalten.

Satz 4.18. Für $l \in \mathbb{N}$ seien $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ konvexe Körper in allgemeiner Lage und $\beta_1, \dots, \beta_l \subset \mathbb{R}^d$ Borelmengen mit $\beta_i \subset K_i$, $i = 1, \dots, l$. Zusätzlich seien $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $r \in \{k, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-r-1\}$ sowie $\omega \subset S^{d-1}$ und $A \subset G(d, r)$ Borelmengen. Für $i_1, \dots, i_l \in \{0, \dots, m\}$ mit $i_1 + \dots + i_l = m$ gilt dann

$$\begin{aligned} & \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(r)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \dots \times \beta_l \times \omega \times A) \\ &= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\{V + L \in A\} \\ & \quad \times \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{L^\perp, (r-k)}(K_1|L^\perp, \dots, K_l|L^\perp, (\beta_1|L^\perp) \times \dots \times (\beta_l|L^\perp) \times (\omega \cap L^\perp) \times dV) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

Beweis. Für $l \in \mathbb{N}$ seien $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ in allgemeiner Lage und $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\beta_i \subset K_i$, $i = 1, \dots, l$. Seien $k \in \{0, \dots, d-1\}$, $r \in \{k, \dots, d-1\}$ und $m \in \{0, \dots, d-r-1\}$ sowie $\gamma \subset S^{d-1}$ und $A \subset G(d, r)$ Borelmengen. Des Weiteren seien $\varrho_1, \dots, \varrho_l \geq 0$ und $i_1, \dots, i_l \in \{0, \dots, m\}$ mit $i_1 + \dots + i_l = m$.

Nach Satz 4.15 1) (Formel (4.15)) gilt zum einen

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(r)}\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i, \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i\right) \times \omega \times A\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_l^{i_l} \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(r)}(K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \dots \times \beta_l \times \omega \times A). \end{aligned}$$

Andererseits gilt mit Satz 4.17 und wiederum Satz 4.15 1), dass

$$\begin{aligned} & \Xi_m^{(r)}\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i, \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i\right) \times \omega \times A\right) \\ &= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1}\left\{g\left(x, L, \sum_{i=1}^l \varrho_i K_i\right), u, V + L\right\} \in \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i\right) \times \omega \times A \\ & \quad \times \Xi_m^{L^\perp, (r-k)}\left(\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i\right) \Big| L^\perp, d(x, u, V)\right) \nu_k(dL) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1} \left\{ \left(g \left(x, L, \sum_{i=1}^l \varrho_i K_i \right), u, V + L \right) \in \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i \beta_i \right) \times \omega \times A \right\} \\
&\quad \times \Xi_m^{L^\perp, (r-k)} \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i (K_i | L^\perp), d(x, u, V) \right) \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1} \{ V + L \in A \} \\
&\quad \times \Xi_m^{L^\perp, (r-k)} \left(\sum_{i=1}^l \varrho_i (K_i | L^\perp), \sum_{i=1}^l \varrho_i (\beta_i | L^\perp) \times (\omega \cap L^\perp) \times dV \right) \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1} \{ V + L \in A \} \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \\
&\quad \times \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{L^\perp, (r-k)} (K_1 | L^\perp, \dots, K_l | L^\perp, (\beta_1 | L^\perp) \times \cdots \times (\beta_l | L^\perp) \times (\omega \cap L^\perp) \times dV) \nu_k(dL).
\end{aligned}$$

Demnach gilt also

$$\begin{aligned}
&\sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(r)} (K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \cdots \times \beta_l \times \omega \times A) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1} \{ V + L \in A \} \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^m \binom{m}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \\
&\quad \times \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{L^\perp, (r-k)} (K_1 | L^\perp, \dots, K_l | L^\perp, (\beta_1 | L^\perp) \times \cdots \times (\beta_l | L^\perp) \times (\omega \cap L^\perp) \times dV) \nu_k(dL).
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt letztlich zu

$$\begin{aligned}
&\Xi_{i_1, \dots, i_l}^{(r)} (K_1, \dots, K_l, \beta_1 \times \cdots \times \beta_l \times \omega \times A) \\
&= \int_{G(d,k)} \int \mathbf{1} \{ V + L \in A \} \\
&\quad \times \Xi_{i_1, \dots, i_l}^{L^\perp, (r-k)} (K_1 | L^\perp, \dots, K_l | L^\perp, (\beta_1 | L^\perp) \times \cdots \times (\beta_l | L^\perp) \times (\omega \cap L^\perp) \times dV) \nu_k(dL).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 4.19. Bis auf Abschnitt 4.2 und Satz 4.18 sind sämtliche Resultate dieses Kapitels (teilweise ohne beziehungsweise mit anderem Beweis) in der gemeinsamen Veröffentlichung [44] mit D. Hug und W. Weil enthalten.

5. Fahnenmaße für Zonoide

Eine besondere Klasse von konvexen Körpern sind die Zonoide, da sie (in der Hausdorffmetrik) durch endliche Summen von Strecken, sogenannte Zonotope, approximiert werden können. Ein konvexer Körper K heißt (zentriertes) *Zonoid*, wenn es ein gerades Borelmaß $\rho(K, \cdot)$ auf S^{d-1} gibt, sodass die Stützfunktion von K in der Form

$$h(K, u) = \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \rho(K, dv), \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

dargestellt werden kann (siehe [67], Theorem 3.5.3). Ein *verallgemeinertes Zonoid* ist ein konvexer Körper $Z \in \mathcal{K}^d$ (oder eine Parallelverschiebung von Z), dessen Stützfunktion die Darstellung (5.1) mit einem geraden signierten Borelmaß auf S^{d-1} hat. Das Maß $\rho(Z, \cdot)$ wird *erzeugendes Maß* von Z genannt.

Da wir das signierte Maß $\rho(Z, \cdot)$ mit Hilfe der Hahn-Jordan-Zerlegung als Differenz zweier Maße schreiben können, gibt es zwei Zonoide K_1 und K_2 , sodass $Z + K_1 = K_2$. Gilt andersherum eine solche Gleichung für $Z \in \mathcal{K}^d$, so ist Z ein verallgemeinertes Zonoid.

Aufgrund der Translationsinvarianz der Fahnenmaße wird im Folgenden angenommen, dass das Zentrum des verallgemeinerten Zonoids Z im Ursprung liegt. Das Maß $\rho(Z, \cdot)$ ist dann durch Z eindeutig bestimmt (siehe [67], Theorem 3.5.4).

Sind Z, Z_1, \dots, Z_d verallgemeinerte Zonoide, so können mittels ihrer erzeugenden Maße die inneren Volumina $V_j(Z)$ ($j = 0, \dots, d$), die gemischten Volumina $V(Z_1, \dots, Z_d)$, die Oberflächenmaße $\Psi_j(Z, \cdot)$ ($j = 1, \dots, d-1$) sowie die gemischten Oberflächenmaße $\Psi(Z_1, \dots, Z_{d-1}, \cdot)$ ausgedrückt werden (siehe Satz 5.2). Für Krümmungsmaße sind keine solchen Formeln bekannt. In diesem Kapitel leiten wir entsprechende Resultate für Fahnen-Oberflächenmaße her.

Mit $E(u_1, \dots, u_k)$ bezeichnen wir die lineare Hülle der Vektoren $u_1, \dots, u_k \neq o$, insofern diese k -dimensional ist. Andernfalls setzen wir $E(u_1, \dots, u_k) = E_0$ mit einem festen Unterraum $E_0 \in G(d, k)$. Mit $D_k(u_1, \dots, u_k)$, $k = 1, \dots, d-1$, wird das k -dimensionale Volumen des von $u_1, \dots, u_k \in S^{d-1}$ aufgespannten Parallelepipeds bezeichnet, das heißt

$$D_k(u_1, \dots, u_k) = V_k(\text{conv}(\{o, u_1\}) + \dots + \text{conv}(\{o, u_k\})) = |\det(u_1, \dots, u_k)|,$$

falls $D_k(u_1, \dots, u_k) \geq 0$. Für einen Unterraum $M \in G(d, m)$ und $k + m \leq d$ definieren wir $D_{k+m}(u_1, \dots, u_k, M)$ durch $D_{k+m}(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m)$, wobei v_1, \dots, v_m eine Orthonormalbasis von M ist. Diese Bezeichnung ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Wir möchten noch einmal daran erinnern, dass in der Literatur (zum Beispiel in [67]) manchmal eine andere Normalisierung der (gemischten) Oberflächenmaße verwendet wird. Der Zusammenhang zu der in dieser Arbeit verwendeten Normalisierung besteht durch

$$2\Psi(K_1, \dots, K_{d-1}, \cdot) = S(K_1, \dots, K_{d-1}, \cdot)$$

und (siehe (3.8))

$$\Psi_j(K, \cdot) = \frac{\binom{d}{j}}{d\kappa_{d-j}} S_j(K, \cdot).$$

Aufgrund von $S_j(K) = S(K[j], B^d[d-1-j], \cdot)$ erhalten wir außerdem (vergleiche (4.17))

$$\Psi_j(K, \cdot) = \frac{2^{\binom{d}{j}}}{d\kappa_{d-j}} \Psi(K[j], B^d[d-1-j], \cdot).$$

Für einen späteren Beweis wird zunächst folgende Darstellung des gemischten Oberflächenmaßes von verallgemeinerten Zonoiden und konvexen Körpern bereitgestellt.

Satz 5.1. *Für $k \in \{1, \dots, d-2\}$ seien Z_1, \dots, Z_k verallgemeinerte Zonoide mit erzeugenden Maßen $\rho(Z_1, \cdot), \dots, \rho(Z_k, \cdot)$ sowie $K_{k+1}, \dots, K_{d-1} \in \mathcal{K}^d$ konvexe Körper. Dann gilt für $\omega \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, dass*

$$\begin{aligned} & \Psi(Z_1, \dots, Z_k, K_{k+1}, \dots, K_{d-1}, \omega) \\ &= \frac{2^k}{k! \binom{d-1}{k}} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_k(u_1, \dots, u_k) \\ & \quad \times \Psi^{E^\perp}(K_{k+1}|E^\perp, \dots, K_{d-1}|E^\perp, \omega \cap E^\perp) \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_k, du_k) \end{aligned}$$

mit $E = E(u_1, \dots, u_k)$.

Ist die Dimension des Unterraumes E kleiner als k , so ist $\Psi^{E^\perp}(\dots)$ nicht definiert. Allerdings ist in diesem Fall $D_k(u_1, \dots, u_k) = 0$ und somit ist es konsistent, den Integranden als null zu definieren. Ähnliche Konventionen werden auch im Folgenden übernommen.

Beweis. Die Beweisidee ist analog zu der von Proposition 3.7 aus [65].

Für eine Borelmenge $\omega \subset S^{d-1}$ definieren wir ein Maß μ durch

$$\begin{aligned} \mu(\omega) &:= \frac{2^k}{k! \binom{d-1}{k}} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_k(u_1, \dots, u_k) \\ & \quad \times \Psi^{E^\perp}(K_{k+1}|E^\perp, \dots, K_{d-1}|E^\perp, \omega \cap E^\perp) \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_k, du_k). \end{aligned}$$

Sei $M \in \mathcal{K}^d$ beliebig. Mit Theorem 5.1.7 in [67] und Formel (31) aus [66] folgt dann

$$\begin{aligned} & \int_{S^{d-1}} h(M, v) \mu(dv) \\ &= \frac{2^k}{k! \binom{d-1}{k}} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1} \cap E^\perp} D_k(u_1, \dots, u_k) h(M, v) \\ & \quad \times \Psi^{E^\perp}(K_{k+1}|E^\perp, \dots, K_{d-1}|E^\perp, dv) \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_k, du_k) \\ &= \frac{2^k(d-k)}{2k! \binom{d-1}{k}} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_k(u_1, \dots, u_k) \\ & \quad \times V^{E^\perp}(K_{k+1}|E^\perp, \dots, K_{d-1}|E^\perp, M|E^\perp) \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_k, du_k) \\ &= \frac{2^k(d-k)}{2k! \binom{d-1}{k}} \frac{k! \binom{d}{k}}{2^k} V(K_{k+1}, \dots, K_{d-1}, M, Z_1, \dots, Z_k) \\ &= \frac{d}{2} V(M, K_{k+1}, \dots, K_{d-1}, Z_1, \dots, Z_k) \\ &= \int_{S^{d-1}} h(M, v) \Psi(Z_1, \dots, Z_k, K_{k+1}, \dots, K_{d-1}, dv). \end{aligned}$$

Da M ein beliebiger konvexer Körper war und Differenzen von Stützfunktionen dicht im Banachraum der stetigen Funktionen auf S^{d-1} liegen, folgt daraus schließlich

$$\mu(\cdot) = \Psi(Z_1, \dots, Z_k, K_{k+1}, \dots, K_{d-1}, \cdot). \quad \square$$

Für $k = d-1$ gehen in obigen Satz keine konvexen Körper K_{k+1}, \dots, K_{d-1} ein. In diesem Fall interpretieren wir $\Psi^{E^\perp}(K_{k+1}|E^\perp, \dots, K_{d-1}|E^\perp, \cdot)$ als $\frac{1}{2}\mathcal{H}^0 \llcorner (E^\perp \cap S^{d-1})$. Der Beweis geht dann ebenso und es folgt

$$\begin{aligned} \Psi(Z_1, \dots, Z_{d-1}, \omega) &= \frac{2^{d-1}}{(d-1)!} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_{d-1}(u_1, \dots, u_{d-1}) \\ &\quad \times \frac{1}{2} \mathcal{H}^0(\omega \cap E^\perp) \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_{d-1}, du_{d-1}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit $E = E(u_1, \dots, u_{d-1})$.

Diese Formel wurde in anderer Darstellung schon von Weil in [76] bewiesen. Um dies einzusehen, sei eine messbare Abbildung T gegeben durch

$$\begin{aligned} T &: (S^{d-1})^{d-1} \rightarrow S^{d-1} \\ T(u_1, \dots, u_{d-1}) &= u_d, \end{aligned}$$

wobei die Vektoren u_1, \dots, u_{d-1} linear unabhängig sind, $u_d \in E(u_1, \dots, u_{d-1})^\perp$ und u_1, \dots, u_{d-1}, u_d bezüglich einer festen Vergleichsbasis positiv orientiert sind. Für linear abhängige u_1, \dots, u_{d-1} wird $u_d := u_0$ gewählt mit $u_0 \in S^{d-1}$ fest. Mit $T\rho$ bezeichnen wir nun das Bildmaß auf S^{d-1} eines (signierten) Maßes ρ auf $(S^{d-1})^{d-1}$ unter T . Insbesondere ist dann das Bildmaß des uneigentlichen Integrals $\int D_{d-1} d\rho$ unter T wohldefiniert durch

$$T \left[\int D_{d-1} d\rho \right] (\omega) := \int_{T^{-1}(\omega)} D_{d-1} d\rho, \quad \omega \in \mathcal{B}(S^{d-1}),$$

und für eine stetige, reelle Funktion f auf S^{d-1} gilt nach [67], dass

$$\begin{aligned} \int_{S^{d-1}} f(u) T \left[\int D_{d-1} d\rho \right] (du) \\ = \int_{(S^{d-1})^{d-1}} f(T(u_1, \dots, u_{d-1})) D_{d-1}(u_1, \dots, u_{d-1}) \rho(d(u_1, \dots, u_{d-1})). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Der Integrand in dieser Formel ist stetig auf $(S^{d-1})^{d-1}$.

Ist $L \in G(d, k)$ ein linearer Unterraum, so wird mit T^L die entsprechende Abbildung $T^L : (S^{d-1} \cap L)^{k-1} \rightarrow S^{d-1} \cap L$ bezeichnet. In diesem Fall verbinden wir mit jedem $L \in G(d, k)$ auf messbare Weise eine Orientierung. Des Weiteren werden die Abbildungen T und T^L in Verbindung mit einem Unterraum $M \in G(d, m)$ benutzt, mit dem wir auf messbare Weise eine Orientierung verbinden und im Fall von T^L voraussetzen, dass $M \subset L$, $M \neq L$. Genauer ist $T(u_1, \dots, u_{d-m-1}, M)$ für linear unabhängige Einheitsvektoren u_1, \dots, u_{d-m-1} definiert als $T(u_1, \dots, u_{d-m-1}, v_1, \dots, v_m)$, wobei die Vektoren v_1, \dots, v_m eine positiv orientierte Orthonormalbasis von M bilden. Ebenso ist $T^L(u_1, \dots, u_{k-m-1}, M)$ definiert. Da wir nur bezüglich gerader Maße integrieren, ist die genaue Wahl der Orientierung nicht von Belang.

Formel (5.2) lässt sich nun umformen zur ersten Aussage des folgenden Satzes. Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall von Satz 5.1. Der folgende Satz entspricht den Sätzen 3, 4 und 6 in [76].

Satz 5.2. Seien Z, Z_1, \dots, Z_d verallgemeinerte Zonoide mit erzeugenden Maßen $\rho(Z, \cdot), \rho(Z_1, \cdot), \dots, \rho(Z_d, \cdot)$. Dann gilt für das gemischte Oberflächenmaß

$$\Psi(Z_1, \dots, Z_{d-1}, \cdot) = \frac{2^{d-1}}{(d-1)!} T \left[\int_{(\cdot)} D_{d-1} d(\rho(Z_1, \cdot) \times \dots \times \rho(Z_{d-1}, \cdot)) \right].$$

Für das j -te Oberflächenmaß, $j = 1, \dots, d-1$, gilt

$$\Psi_j(Z, \cdot) = \frac{2^{j+1} \binom{d}{j}}{d! \kappa_{d-1}^{d-j-1} \kappa_{d-j}} T \left[\int_{(\cdot)} D_{d-1} d(\rho(Z, \cdot)^j \times (\mathcal{H}^{d-1})^{d-j-1}) \right].$$

Des Weiteren gilt für das gemischte Volumen und die inneren Volumina

$$V(Z_1, \dots, Z_d) = \frac{2^d}{d!} \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} D_d(u_1, \dots, u_d) \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_d, du_d)$$

und

$$V_j(Z) = \frac{2^j}{j!} \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} D_j(u_1, \dots, u_j) \rho(Z, du_1) \dots \rho(Z, du_j)$$

für $j = 0, \dots, d$.

Die erste Formel ist wie erwähnt eine Umformung von Formel (5.2). Die zweite folgt aus der ersten, da die Einheitskugel B^d ein verallgemeinertes Zonoid ist mit erzeugendem Maß (siehe [76], Satz 3)

$$\rho(B^d, \cdot) = \frac{1}{2\kappa_{d-1}} \mathcal{H}^{d-1} \llcorner S^{d-1}.$$

Das Resultat für das gemischte Volumen folgt wegen (siehe [67], Formel (5.19))

$$V(K_1, \dots, K_d) = \frac{2}{d} \int_{S^{d-1}} h(K_d, u) \Psi(K_1, \dots, K_{d-1}, du)$$

für $K_1, \dots, K_d \in \mathcal{K}^d$.

Da die Orthogonalprojektion $Z|L^\perp$ eines verallgemeinerten Zonoide Z auf einen Unterraum L^\perp , $L \in G(d, k)$, nach Satz 4.1 in [78] wiederum ein verallgemeinertes Zonoid (in L^\perp) ist, lassen sich ähnliche Darstellungen wie in Satz 5.2 auch für gemischte Fahnen-Oberflächenmaße herleiten. Hierzu wenden wir einen Spezialfall der Projektionsformel (4.16) an, nämlich

$$\begin{aligned} \Psi^{(k)}(K_1, \dots, K_{d-k-1}, \cdot) \\ = \int_{G(d, k)} \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \Psi^{L^\perp}(K_1|L^\perp, \dots, K_{d-k-1}|L^\perp, du) \nu_k(dL) \end{aligned} \quad (5.4)$$

für $k \in \{0, \dots, d-2\}$ und konvexe Körper $K_1, \dots, K_{d-k-1} \in \mathcal{K}^d$.

Das erzeugende Maß von $Z|L^\perp$ können wir mittels der *sphärischen Projektion* Π_{L^\perp} beschreiben. Diese ist für einen linearen Unterraum $L \in G(d, k)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \Pi_{L^\perp} : S^{d-1} \setminus L &\rightarrow S^{d-1} \cap L^\perp \\ u &\mapsto \frac{u|L^\perp}{\|u|L^\perp\|}. \end{aligned}$$

Für das erzeugende Maß von $Z|L^\perp$ gilt dann nach Satz 4.1 in [78]

$$\rho(Z|L^\perp, \cdot) = \int_{S^{d-1} \setminus L} \mathbf{1}\{\Pi_{L^\perp} u \in \cdot\} \|u|L^\perp\| \rho(Z, du).$$

Der Integrationsbereich $S^{d-1} \setminus L$ kann hier auf S^{d-1} erweitert werden, da $\|u|L^\perp\| = 0$ für $u \in L$ gilt, woraufhin der Integrand null ist.

Für eine nichtnegative, messbare Funktion f auf $S^{d-1} \cap L^\perp$ gilt somit

$$\int_{S^{d-1} \cap L^\perp} f(u) \rho(Z|L^\perp, du) = \int_{S^{d-1}} f(\Pi_{L^\perp} u) \|u|L^\perp\| \rho(Z, du). \quad (5.5)$$

Aufgrund der Definition der sphärischen Projektion gilt außerdem

$$\begin{aligned} & D_{d-k-1}(\Pi_{L^\perp} u_1, \dots, \Pi_{L^\perp} u_m, u_{m+1}, \dots, u_{d-k-1}) \\ &= D_{d-k-1}\left(\frac{u_1|L^\perp}{\|u_1|L^\perp\|}, \dots, \frac{u_m|L^\perp}{\|u_m|L^\perp\|}, u_{m+1}, \dots, u_{d-k-1}\right) \\ &= \frac{1}{\|u_1|L^\perp\| \cdots \|u_m|L^\perp\|} D_{d-k-1}(u_1|L^\perp, \dots, u_m|L^\perp, u_{m+1}, \dots, u_{d-k-1}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Nun können wir Satz 5.1 auf gemischte Fahren-Oberflächenmaße erweitern.

Satz 5.3. Für $k \in \{0, \dots, d-3\}$ und $l \in \{1, \dots, d-k-2\}$ seien Z_1, \dots, Z_l verallgemeinerte Zonoide mit erzeugenden Maßen $\rho(Z_1, \cdot), \dots, \rho(Z_l, \cdot)$. Des Weiteren seien $K_{l+1}, \dots, K_{d-k-1} \in \mathcal{K}^d$ konvexe Körper. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_l, K_{l+1}, \dots, K_{d-k-1}, \cdot) \\ &= \frac{2^l}{l! \binom{d-k-1}{l}} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap E^\perp \cap L^\perp} D_l(v_1|L^\perp, \dots, v_l|L^\perp) \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \\ & \quad \times \Psi^{E^\perp \cap L^\perp}(K_{l+1}|(E^\perp \cap L^\perp), \dots, K_{d-k-1}|(E^\perp \cap L^\perp), du) \\ & \quad \times \nu_k(dL) \rho(Z_1, dv_1) \dots \rho(Z_l, dv_l) \end{aligned}$$

mit $E = E(v_1|L^\perp, \dots, v_l|L^\perp)$.

Beweis. Aus (5.4) und mit Satz 5.1 angewendet in L^\perp folgt

$$\begin{aligned} & \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_l, K_{l+1}, \dots, K_{d-k-1}, \cdot) \\ &= \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \\ & \quad \times \Psi^{L^\perp}(Z_1|L^\perp, \dots, Z_l|L^\perp, K_{l+1}|L^\perp, \dots, K_{d-k-1}|L^\perp, du) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \frac{2^l}{l! \binom{d-k-1}{l}} \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \cdots \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \int_{(S^{d-1} \cap L^\perp) \cap E^\perp \cap L^\perp} D_l(v_1, \dots, v_l) \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \\ & \quad \times \Psi^{E^\perp \cap L^\perp}((K_{l+1}|L^\perp)|(E^\perp \cap L^\perp), \dots, (K_{d-k-1}|L^\perp)|(E^\perp \cap L^\perp), du) \\ & \quad \times \rho(Z_1|L^\perp, dv_1) \dots \rho(Z_l|L^\perp, dv_l) \nu_k(dL) \\ &= \frac{2^l}{l! \binom{d-k-1}{l}} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \cdots \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \int_{S^{d-1} \cap E^\perp \cap L^\perp} D_l(v_1, \dots, v_l) \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \\ & \quad \times \Psi^{E^\perp \cap L^\perp}(K_{l+1}|(E^\perp \cap L^\perp), \dots, K_{d-k-1}|(E^\perp \cap L^\perp), du) \\ & \quad \times \rho(Z_1|L^\perp, dv_1) \dots \rho(Z_l|L^\perp, dv_l) \nu_k(dL) \end{aligned}$$

mit $E = E(v_1, \dots, v_l)$. Mit (5.5), (5.6) und dem Satz von Fubini gilt dann

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_l, K_{l+1}, \dots, K_{d-k-1}, \cdot) \\
&= \frac{2^l}{l! \binom{d-k-1}{l}} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1} \cap E^\perp \cap L^\perp} D_l(\Pi_{L^\perp} v_1, \dots, \Pi_{L^\perp} v_l) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \|v_1|L^\perp\| \cdots \|v_l|L^\perp\| \\
&\quad \times \Psi^{E^\perp \cap L^\perp}(K_{l+1}|(E^\perp \cap L^\perp), \dots, K_{d-k-1}|(E^\perp \cap L^\perp), du) \\
&\quad \times \rho(Z_1, dv_1) \cdots \rho(Z_l, dv_l) \nu_k(dL) \\
&= \frac{2^l}{l! \binom{d-k-1}{l}} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1} \cap E^\perp \cap L^\perp} D_l(v_1|L^\perp, \dots, v_l|L^\perp) \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \\
&\quad \times \Psi^{E^\perp \cap L^\perp}(K_{l+1}|(E^\perp \cap L^\perp), \dots, K_{d-k-1}|(E^\perp \cap L^\perp), du) \\
&\quad \times \rho(Z_1, dv_1) \cdots \rho(Z_l, dv_l) \nu_k(dL) \\
&= \frac{2^l}{l! \binom{d-k-1}{l}} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap E^\perp \cap L^\perp} D_l(v_1|L^\perp, \dots, v_l|L^\perp) \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \\
&\quad \times \Psi^{E^\perp \cap L^\perp}(K_{l+1}|(E^\perp \cap L^\perp), \dots, K_{d-k-1}|(E^\perp \cap L^\perp), du) \\
&\quad \times \nu_k(dL) \rho(Z_1, dv_1) \cdots \rho(Z_l, dv_l)
\end{aligned}$$

mit $E = E(v_1|L^\perp, \dots, v_l|L^\perp)$. □

Der Fall $k \in \{0, \dots, d-2\}$ und $l = d-k-1$, bei dem keine konvexen Körper $K_{l+1}, \dots, K_{d-k-1}$ auftreten, kann genauso bewiesen werden, wenn Satz 5.2 anstatt von Satz 5.1 verwendet wird. Dadurch erhalten wir

Korollar 5.4. *Für $k \in \{0, \dots, d-2\}$ seien Z_1, \dots, Z_{d-k-1} verallgemeinerte Zonoide mit erzeugenden Maßen $\rho(Z_1, \cdot), \dots, \rho(Z_{d-k-1}, \cdot)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_{d-k-1}, \cdot) \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d,k)} D_{d-k-1}(u_1|L^\perp, \dots, u_{d-k-1}|L^\perp) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^{L^\perp}(\Pi_{L^\perp} u_1, \dots, \Pi_{L^\perp} u_{d-k-1}), L) \in \cdot\} \nu_k(dL) \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_{d-k-1}, du_{d-k-1}) \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d,d-k)} D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_{d-k-1}|L) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_{d-k-1}), L^\perp) \in \cdot\} \nu_{d-k}(dL) \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_{d-k-1}, du_{d-k-1}).
\end{aligned}$$

Beweis. Aus (5.4) und mit Satz 5.2 angewendet in L^\perp folgt

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_{d-k-1}, \cdot) \\
&= \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \Psi^{L^\perp}(Z_1|L^\perp, \dots, Z_{d-k-1}|L^\perp, du) \nu_k(dL) \\
&= \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \\
&\quad \times T^{L^\perp} \left[\int D_{d-k-1} d(\rho(Z_1|L^\perp, \cdot) \times \cdots \times \rho(Z_{d-k-1}|L^\perp, \cdot)) \right] (du) \nu_k(dL).
\end{aligned}$$

Aus (5.3), (5.5) und (5.6) und mit dem Satz von Fubini folgt dann

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_{d-k-1}, \cdot) \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} \cdots \int_{S^{d-1} \cap L^\perp} D_{d-k-1}(u_1, \dots, u_{d-k-1}) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^{L^\perp}(u_1, \dots, u_{d-k-1}), L) \in \cdot\} \rho(Z_1|L^\perp, du_1) \cdots \rho(Z_{d-k-1}|L^\perp, du_{d-k-1}) \nu_k(dL) \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_{d-k-1}(\Pi_{L^\perp} u_1, \dots, \Pi_{L^\perp} u_{d-k-1}) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^{L^\perp}(\Pi_{L^\perp} u_1, \dots, \Pi_{L^\perp} u_{d-k-1}), L) \in \cdot\} \|u_1|L^\perp\| \cdots \|u_{d-k-1}|L^\perp\| \\
&\quad \times \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_{d-k-1}, du_{d-k-1}) \nu_k(dL) \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_{d-k-1}(u_1|L^\perp, \dots, u_{d-k-1}|L^\perp) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^{L^\perp}(\Pi_{L^\perp} u_1, \dots, \Pi_{L^\perp} u_{d-k-1}), L) \in \cdot\} \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_{d-k-1}, du_{d-k-1}) \nu_k(dL) \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d,k)} D_{d-k-1}(u_1|L^\perp, \dots, u_{d-k-1}|L^\perp) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^{L^\perp}(\Pi_{L^\perp} u_1, \dots, \Pi_{L^\perp} u_{d-k-1}), L) \in \cdot\} \nu_k(dL) \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_{d-k-1}, du_{d-k-1}).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.5. Eine andere Formel für $\Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_{d-k-1}, \cdot)$, $k \in \{0, \dots, d-3\}$, erhalten wir, wenn die konvexen Körper $K_{l+1}, \dots, K_{d-k-1}$, $l \in \{1, \dots, d-k-2\}$, in Satz 5.3 ebenfalls Zonoide Z_i mit erzeugenden Maßen $\rho(Z_i, \cdot)$, $i = l+1, \dots, d-k-1$, sind. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_{d-k-1}, \cdot) \\
&= \frac{2^l}{l! \binom{d-k-1}{l}} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \cap E^\perp \cap L^\perp} D_l(v_1|L^\perp, \dots, v_l|L^\perp) \mathbf{1}\{(u, L) \in \cdot\} \\
&\quad \times \Psi^{E^\perp \cap L^\perp}(Z_{l+1}|(E^\perp \cap L^\perp), \dots, Z_{d-k-1}|(E^\perp \cap L^\perp), du) \\
&\quad \times \nu_k(dL) \rho(Z_1, dv_1) \cdots \rho(Z_l, dv_l)
\end{aligned}$$

mit $E = E(v_1|L^\perp, \dots, v_l|L^\perp)$.

Einen weiteren interessanten Spezialfall erhalten wir, wenn es sich bei einigen der verallgemeinerten Zonoide um die Einheitskugel handelt, das heißt $Z_{l+1} = \dots = Z_{d-k-1} = B^d$. In diesem Fall können wir folgendes Resultat zeigen.

Satz 5.6. Für $k \in \{1, \dots, d-2\}$ und $l \in \{1, \dots, d-k-1\}$ seien Z_1, \dots, Z_l verallgemeinerte Zonoide mit erzeugenden Maßen $\rho(Z_1, \cdot), \dots, \rho(Z_l, \cdot)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_l, B^d[d-k-l-1], \cdot) \\
&= c(d, k, l) \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d, d-k)} \int_{G(L, d-k-l-1)} D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_l|L, U) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_l, U), L^\perp) \in \cdot\} \nu_{d-k-l-1}^L(dU) \nu_{d-k}(dL) \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_l, du_l)
\end{aligned}$$

mit

$$c(d, k, l) := \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \pi^{d-k-l-1} \frac{\omega_{l+2}}{\omega_{d-k+1}}.$$

Beweis. Für $l = d - k - 1$ folgt die Behauptung aus Korollar 5.4. Daher wird im Folgenden $k \leq d - 3$ und $l < d - k - 1$ angenommen. Sei $L \in G(d, d - k)$. Wegen

$$\rho(B^d|L, \cdot) = \frac{1}{2\kappa_{d-k-1}} \mathcal{H}^{d-k-1} \llcorner (S^{d-1} \cap L)$$

gilt für eine nichtnegative, messbare Funktion f auf $S^{d-1} \cap L$, dass

$$\int_{S^{d-1} \cap L} f(u) \rho(B^d|L, du) = \frac{1}{2\kappa_{d-k-1}} \int_{S^{d-1} \cap L} f(u) \mathcal{H}^{d-k-1}(du).$$

Andererseits gilt nach (5.5), dass

$$\int_{S^{d-1} \cap L} f(u) \rho(B^d|L, du) = \int_{S^{d-1}} f(\Pi_L u) \|u|L\| \rho(B^d, du)$$

und somit

$$\int_{S^{d-1}} f(\Pi_L u) \|u|L\| \rho(B^d, du) = \frac{1}{2\kappa_{d-k-1}} \int_{S^{d-1} \cap L} f(u) \mathcal{H}^{d-k-1}(du). \quad (5.7)$$

Aus Korollar 5.4 und mit (5.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_l, B^d[d - k - l - 1], \cdot) \\ &= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \int_{G(d, d-k)} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_{d-k-1}|L) \\ & \quad \times \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_{d-k-1}), L^\perp) \in \cdot\} \\ & \quad \times \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_l, du_l) \rho(B^d, du_{l+1}) \cdots \rho(B^d, du_{d-k-1}) \nu_{d-k}(dL) \\ &= a(d, k, l) \int_{G(d, d-k)} \int_{S^{d-1} \cap L} \cdots \int_{S^{d-1} \cap L} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \\ & \quad \times D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_l|L, u_{l+1}, \dots, u_{d-k-1}) \\ & \quad \times \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_l, u_{l+1}, \dots, u_{d-k-1}), L^\perp) \in \cdot\} \\ & \quad \times \rho(Z_1, du_1) \cdots \rho(Z_l, du_l) \mathcal{H}^{d-k-1}(du_{l+1}) \cdots \mathcal{H}^{d-k-1}(du_{d-k-1}) \nu_{d-k}(dL), \end{aligned}$$

wobei $a(d, k, l) := \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \left(\frac{1}{2\kappa_{d-k-1}} \right)^{d-k-l-1}$.

Sind $u_{l+1}, \dots, u_{d-k-1}$ linear unabhängig, so spannen sie einen $(d - k - l - 1)$ -dimensionalen linearen Unterraum $U \subset L$ auf und es gilt

$$\begin{aligned} & D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_l|L, u_{l+1}, \dots, u_{d-k-1}) \\ &= D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_l|L, U) \cdot D_{d-k-l-1}(u_{l+1}, \dots, u_{d-k-1}). \end{aligned}$$

Durch Anwenden eines Spezialfalls von Theorem 1 in [2] auf das $(d - k - l - 1)$ -fache

Integral über $S^{d-1} \cap L$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_l, B^d[d-k-l-1], \cdot) \\
&= a(d, k, l) \mathcal{H}^{(l+1)(d-k-l-1)}(G(L, d-k-l-1)) \\
&\quad \times \int_{G(d, d-k)} \int_{G(L, d-k-l-1)} \int_{S^{d-1} \cap U} \cdots \int_{S^{d-1} \cap U} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \\
&\quad \times D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_l|L, U) D_{d-k-l-1}(v_1, \dots, v_{d-k-l-1})^{l+2} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_l, U), L^\perp) \in \cdot\} \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_l, du_l) \\
&\quad \times \mathcal{H}^{d-k-l-2}(dv_1) \dots \mathcal{H}^{d-k-l-2}(dv_{d-k-l-1}) \nu_{d-k-l-1}^L(dU) \nu_{d-k}(dL).
\end{aligned}$$

Einige der Integrale können wir nun durch Einführen von Polarkoordinaten berechnen. Denn aus Theorem 8.2.2 in [68] folgt

$$\begin{aligned}
b(d, k, l) &:= \int_{S^{d-1} \cap U} \cdots \int_{S^{d-1} \cap U} D_{d-k-l-1}(v_1, \dots, v_{d-k-l-1})^{l+2} \\
&\quad \times \mathcal{H}^{d-k-l-2}(dv_1) \dots \mathcal{H}^{d-k-l-2}(dv_{d-k-l-1}) \\
&= \omega_{d-k+1}^{d-k-l-1} \prod_{j=0}^{d-k-l-2} \frac{\omega_{d-k-l-1-j}}{\omega_{d-k+1-j}}.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
& \Psi^{(k)}(Z_1, \dots, Z_l, B^d[d-k-l-1], \cdot) \\
&= c(d, k, l) \int_{G(d, d-k)} \int_{G(L, d-k-l-1)} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_l|L, U) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_l, U), L^\perp) \in \cdot\} \\
&\quad \times \rho(Z_1, du_1) \dots \rho(Z_l, du_l) \nu_{d-k-l-1}^L(dU) \nu_{d-k}(dL),
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
c(d, k, l) &= a(d, k, l) \cdot \mathcal{H}^{(l+1)(d-k-l-1)}(G(L, d-k-l-1)) \cdot b(d, k, l) \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \pi^{d-k-l-1} \frac{\omega_{d-k} \cdots \omega_{d-k-l}}{\omega_1 \cdots \omega_{l+1}} \prod_{j=0}^{d-k-l-2} \frac{\omega_{d-k-l-1-j}}{\omega_{d-k+1-j}} \\
&= \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \pi^{d-k-l-1} \frac{\omega_{l+2}}{\omega_{d-k+1}}.
\end{aligned}$$

Dies folgt, da für das Hausdorffmaß der Graßmann-Mannigfaltigkeit gilt (siehe [26], S. 267), dass

$$\mathcal{H}^{m(n-m)}(G(n, m)) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^{m(n-m)} \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(\frac{j}{2})}{\Gamma(\frac{n-j+1}{2})}$$

mit $m = l + 1$ und $n = d - k$. □

Die Wahl $Z_1 = \dots = Z_l = Z$ führt mit (4.17) und Satz 5.6 schließlich auf eine Formel für das Fahren-Oberflächenmaß $\Psi_l^{(k)}(Z, \cdot)$ eines verallgemeinerten Zonoids Z .

Korollar 5.7. Sei Z ein verallgemeinertes Zonoid mit erzeugendem Maß $\rho(Z, \cdot)$. Seien $k \in \{1, \dots, d-2\}$ und $l \in \{1, \dots, d-k-1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi_l^{(k)}(Z, \cdot) &= \frac{2^{\binom{d-k}{l}}}{(d-k)\kappa_{d-k-l}} \cdot c(d, k, l) \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d, d-k)} \int_{G(L, d-k-l-1)} \\ &\quad \times D_{d-k-1}(u_1|L, \dots, u_l|L, U) \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_l, U), L^\perp) \in \cdot\} \\ &\quad \times \nu_{d-k-l-1}^L(dU) \nu_{d-k}(dL) \rho(Z, du_1) \dots \rho(Z, du_l), \end{aligned}$$

$$\text{wobei } c(d, k, l) = \frac{2^{d-k-1}}{(d-k-1)!} \pi^{d-k-l-1} \frac{\omega_{l+2}}{\omega_{d-k+1}}.$$

Aus Formel (4.17) und Korollar 5.4 erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 5.8. Sei Z ein verallgemeinertes Zonoid mit erzeugendem Maß $\rho(Z, \cdot)$ und sei $k \in \{0, \dots, d-2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Psi_k^{(d-k-1)}(Z, \cdot) &= \frac{2^k}{k!} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d, k+1)} D_k(u_1|L, \dots, u_k|L) \\ &\quad \times \mathbf{1}\{(T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_k), L^\perp) \in \cdot\} \nu_{k+1}(dL) \rho(Z, du_1) \dots \rho(Z, du_k). \end{aligned}$$

Aus Proposition 4.11 erhalten wir

$$\Psi_k(Z, \cdot) = \alpha(d, d-k-1, k)^{-1} \Psi_k^{(d-k-1)}(Z, \cdot \times G(d, d-k-1)).$$

Bemerkung 5.8 impliziert dann

$$\begin{aligned} \Psi_k(Z, \cdot) &= \alpha(d, d-k-1, k)^{-1} \frac{2^k}{k!} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} \int_{G(d, k+1)} D_k(u_1|L, \dots, u_k|L) \\ &\quad \times \mathbf{1}\{T^L(\Pi_L u_1, \dots, \Pi_L u_k) \in \cdot\} \nu_{k+1}(dL) \rho(Z, du_1) \dots \rho(Z, du_k). \quad (5.8) \end{aligned}$$

Diese Formel scheint in der Literatur noch nicht vorhanden zu sein, allerdings könnten wir sie auch auf einem direkteren Weg erhalten.

Berechnen wir hiervon das totale Maß, so erhalten wir eine bekannte Formel (siehe Satz 5.2) für die inneren Volumina beziehungsweise wegen (3.10) für die Quermaßintegrale verallgemeinerter Zonoide, nämlich

$$W_{d-k}(Z) = \frac{2^k (d-k)! \kappa_{d-k}}{d!} \int_{S^{d-1}} \cdots \int_{S^{d-1}} D_k(u_1, \dots, u_k) \rho(Z, du_1) \dots \rho(Z, du_k).$$

Um diese Formel aus (5.8) zu erhalten, nutzen wir aus, dass

$$D_k(u_1|L, \dots, u_k|L) = D_k(u_1, \dots, u_k) \cdot D_k(\xi_1|L, \dots, \xi_k|L),$$

wobei ξ_1, \dots, ξ_k ein beliebiges Orthonormalsystem mit derselben linearen Hülle wie der von (den als linear unabhängig angenommenen) u_1, \dots, u_k ist. Außerdem wenden wir die Formel in der Mitte von S. 139 in [26] (mit $t = 1$, $m = k$ und $k = d - k - 1$) an, um

$$\int_{G(d, k+1)} D_k(\xi_1|L, \dots, \xi_k|L) \nu_{k+1}(dL) = \frac{\beta_1(d, k)}{\beta_1(k+1, k)} = \alpha(d, d-k-1, k)$$

zu erhalten, wobei die Konstante

$$\beta_1(n, m) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \text{für } 1 \leq m \leq n$$

aus Abschnitt 3.2.13 in [26] stammt.

Bemerkung 5.9. Sämtliche Resultate dieses Kapitels sind (teilweise ohne Beweis) in der gemeinsamen Veröffentlichung [44] mit D. Hug und W. Weil enthalten.

6. Gemischte Maße und gemischte Volumina

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit gemischten Maßen der translativen Integralgeometrie, die in einem engen Zusammenhang mit den gemischten Volumina stehen. Nachdem wir die gemischten Maße eingeführt haben, verallgemeinern wir ein Resultat von Hug et al. [41] für die totalen gemischten Maße von zwei auf endlich viele konvexe Körper. Im Anschluss leiten wir eine lokale Version dieses Resultats her. Im letzten Abschnitt beschäftigen wir uns dann mit gemischten Volumina von Projektionen von konvexen Körpern.

Die in diesem Kapitel benötigten Grundlagen aus der multilinearen Algebra wurden in Abschnitt 2.3 eingeführt. Die Notation wurde größtenteils aus [41] übernommen.

Seien K, L konvexe Körper in \mathbb{R}^d und $1 \leq k, l \leq d-1$ mit $k+l=d$. Mit $\Phi_{k,l}(K, L, \cdot)$ werden die *gemischten Maße* der translativen Integralgeometrie bezeichnet (siehe [50] oder [79]). Diese sind endliche Borelmaße auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ und für Polytope P, Q und Borelmengen $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definiert durch (siehe [68], Theorem 5.2.2)

$$\Phi_{k,l}(P, Q, \alpha \times \beta) := \sum_{F \in \mathcal{F}_k(P)} \sum_{G \in \mathcal{F}_l(Q)} \gamma(F, P; G, Q) [F, G] \lambda_k(\alpha) \lambda_l(\beta).$$

Hierbei ist $\gamma(F, P; G, Q)$ der *gemeinsame äußere Winkel*

$$\gamma(F, P; G, Q) := \frac{\mathcal{H}^{2d-1-k-l}(n(F \cap (G+x), P \cap (Q+x)))}{\omega_{2d-k-l}},$$

wobei $x \in \mathbb{R}^d$ so gewählt ist, dass $\text{relint}(F) \cap \text{relint}(G+x) \neq \emptyset$ ist. Mit $[F, G]$ bezeichnen wir die *Unterraumdeterminante* (vergleiche [68], Section 14.1). Wählen wir in $L(\text{aff}(F))$ und in $L(\text{aff}(G))$ je eine Orthonormalbasis, so ist $[F, G] := [L(\text{aff}(F)), L(\text{aff}(G))]$ das Volumen des Parallelepipedes, das von der Vereinigung dieser Basisvektoren aufgespannt wird.

Ein Zusammenhang zu den Krümmungsmaßen besteht für $j \in \{0, \dots, d\}$ durch (siehe [68], Theorem 5.2.3 oder [50], Formel (3))

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi_j(K \cap (L+x), \alpha \cap (\beta+x)) \lambda_d(dx) = \sum_{\substack{k+l=d+j \\ k,l \geq 0}} \Phi_{k,l}(K, L, \alpha \times \beta).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ sei $k^* := d - k - 1$. Die Konstanten $\gamma(d, k)$ und $c(d, k)$ sind für $d, k \in \mathbb{N}$ wie in Abschnitt 4.2 gegeben durch

$$\gamma(d, k) = \frac{\binom{d-1}{k}}{\mathcal{H}^{k^*}(S^{k^*})} = \frac{\binom{d-1}{k}}{\omega_{d-k}} \quad (6.1)$$

und

$$c(d, k) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{k+2}{2})\Gamma(\frac{d-k+1}{2})}. \quad (6.2)$$

Insbesondere gilt also

$$c(d, 1) = \frac{2\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{d}{2})} \quad \text{und} \quad c(d, d-1) = 1.$$

Für einen Winkel $\Theta \in [0, \pi)$ sei

$$F_{k,l}(\Theta) := \frac{1}{\omega_{2d-k-l}} \frac{\Theta}{\sin \Theta} \int_0^1 \left(\frac{\sin t\Theta}{\sin \Theta} \right)^{k^*} \left(\frac{\sin(1-t)\Theta}{\sin \Theta} \right)^{l^*} dt.$$

Wenn Θ gegen π strebt, geht $F_{k,l}(\Theta)$ gegen unendlich. Daher wurde in [41] die beschränkte Approximation

$$F_{k,l}^{(\epsilon)}(\Theta) := F_{k,l}(\Theta) \mathbf{1}\{0 \leq \Theta \leq \pi - \epsilon\}, \quad \epsilon > 0, \quad (6.3)$$

eingeführt. Für sie gilt $F_{k,l}^{(\epsilon)} \nearrow F_{k,l}$ für $\epsilon \searrow 0$, wobei die Pfeile andeuten, ob der Grenzwert durch eine wachsende oder fallende Folge erreicht wird.

Der kleinere Winkel zwischen zwei Einheitsvektoren $u, v \in S^{d-1}$ wird mit $\angle(u, v) \in [0, \pi]$ bezeichnet. Insbesondere gilt für $\angle(u, v) \in [0, \pi)$ die Gleichung

$$F_{1,d-1}(\angle(u, v)) = \frac{1}{\omega_d \sin^{d-1} \angle(u, v)} \int_0^1 (\sin t \angle(u, v))^{d-2} dt.$$

6.1. Totale gemischte Maße

Wie wir in Abschnitt 3.1 gesehen haben, sind die totalen Krümmungsmaße die inneren Volumina. Ein ähnlicher Zusammenhang besteht auch zwischen den gemischten Maßen und den gemischten Volumina

$$V_{k,l}(K, L) := \binom{d}{k} V(K[k], -L[l]) = \Phi_{k,l}(K, L, \mathbb{R}^{2d}) \quad (6.4)$$

für konvexe Körper K, L in \mathbb{R}^d und $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k + l = d$.

In [41] zeigten Hug et al., dass sich das gemischte Volumen $V_{k,l}(K, L)$ unter gewissen Voraussetzungen an K und L durch Fahnen-Oberflächenmaße darstellen lässt (siehe Satz 6.1). Ausgehend von diesem Resultat zeigen wir nun, dass diese Darstellung nicht auf zwei konvexe Körper beschränkt ist, sondern auf mehrere konvexe Körper erweitert werden kann. Im nächsten Abschnitt wird dann außerdem eine lokale Version dieses Satzes bewiesen.

In [41] wird eine andere Normierung der Fahnen-Oberflächenmaße verwendet. Der Zusammenhang mit den Fahnen-Oberflächenmaße in der vorliegenden Arbeit ist

$$\Omega_k(K, \cdot) = c(d, k) \Psi_k^{(k^*)}(K, \cdot), \quad K \in \mathcal{K}^d,$$

wobei $c(d, k)$ die Konstante aus (6.2) ist. Die Fahnenmannigfaltigkeit $F^\perp(d, k) = \{(u, L) \in S^{d-1} \times G(d, k) : L \perp u\}$ wurde in Bemerkung 4.10 definiert. Theorem 2 in [41] lautet dann folgendermaßen.

Satz 6.1. *Seien K und L konvexe Körper in \mathbb{R}^d sowie $k, l \in \{1, \dots, d-1\}$ mit $k + l = d$. Dann existiert eine stetige Funktion $\varphi^{k,l}$ auf $F^\perp(d, k^*) \times F^\perp(d, l^*)$, sodass*

$$\begin{aligned} V_{k,l}(K, L) &= c(d, k) c(d, l) \int_{F^\perp(d, k^*)} \int_{F^\perp(d, l^*)} F_{k,l}(\angle(u, v)) \\ &\quad \times \varphi^{k,l}(u, U, v, V) \Psi_l^{(l^*)}(L, d(v, V)) \Psi_k^{(k^*)}(K, d(u, U)) \end{aligned}$$

gilt,

- (a) falls K und L Polytope in allgemeiner Lage sind, das heißt $L(\text{aff}(F)) \cap L(\text{aff}(G)) = \{o\}$, wenn $F \in \mathcal{F}_i(K)$, $G \in \mathcal{F}_j(L)$ und $i, j \in \{1, \dots, d-1\}$ mit $i + j = d$;
- (b) falls die Stützfunktion von K oder L von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$ ist;
- (c) für K und ρL für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$.

Nach (17) in [41] ist die Funktion $\varphi^{k,l}$ definiert durch

$$\varphi^{k,l} = \sum_{p=0}^{k \wedge k^*} \sum_{q=0}^{l \wedge l^*} \alpha_{p,q} \varphi_{p,q}^{k,l} \quad (6.5)$$

mit Koeffizienten $\alpha_{p,q} \in \mathbb{R}$, die explizit berechnet werden können. Die Funktionen $\varphi_{p,q}^{k,l}$ auf $F^\perp(d, k^*) \times F^\perp(d, l^*)$ sind hierbei für $0 \leq p \leq k \wedge k^*$ und $0 \leq q \leq l \wedge l^*$ gegeben durch (siehe [41], S. 651)

$$\varphi_{p,q}^{k,l}(u, U, v, V) = \sum_{\substack{|I|=k^* \\ |I \cap I_0|=k^*-p}} \sum_{\substack{|J|=l^* \\ |J \cap J_0|=l^*-q}} \left\| \bigwedge_{i \in I} u_i \wedge u \wedge \bigwedge_{j \in J} v_j \wedge v \right\|^2, \quad (6.6)$$

wobei u_1, \dots, u_d sowie v_1, \dots, v_d Orthonormalbasen des \mathbb{R}^d sind mit $u_d = u$ und $v_d = v$. Die linearen Unterräume U und V sind die linearen Hüllen $U = \text{lin}(\{u_i : i \in I_0\})$ und $V = \text{lin}(\{v_j : j \in J_0\})$, wobei die Mengen I_0 und J_0 feste k^* - beziehungsweise l^* -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, d-1\}$ sind. Summiert wird hier und im Folgenden über alle Teilmengen $I, J \subset \{1, \dots, d-1\}$ mit der entsprechenden Kardinalität.

Ausgehend von Satz 6.1 zeigen wir nun

Satz 6.2. Für $k \in \{1, \dots, d-1\}$ und $r, s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq k$, $1 \leq s \leq d-k$ seien $K_1, \dots, K_r, L_1, \dots, L_s$ konvexe Körper in \mathbb{R}^d . Des Weiteren seien $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \geq 0$ mit $\sum_{q=1}^r i_q = k$ und $\sum_{q=1}^s j_q = d-k$. Außerdem definieren wir die Konstanten $k^* := d-1-k$ und $c_{d,k} := \binom{d}{k}^{-1} \frac{\pi(d-k)!k!}{2^d \Gamma(\frac{d+1}{2})^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & V(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], -L_1[j_1], \dots, -L_s[j_s]) \\ &= c_{d,k} \int_{F^\perp(d, k^*)} \int_{F^\perp(d, (d-k)^*)} F_{k, d-k}(\angle(u, v)) \varphi^{k, d-k}(u, U, v, V) \\ & \quad \times \Psi^{((d-k)^*)}(L_1[j_1], \dots, L_s[j_s], d(v, V)) \Psi^{(k^*)}(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], d(u, U)), \end{aligned}$$

falls

- (a) $K_1, \dots, K_r, L_1, \dots, L_s$ Polytope sind, für die die Polytope $\sum_{i=1}^r K_i$ und $\sum_{j=1}^s L_j$ in allgemeiner Lage sind, oder
- (b) falls die Stützfunktionen von K_1, \dots, K_r oder von L_1, \dots, L_s von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$ sind oder
- (c) für K_1, \dots, K_r und $\rho L_1, \dots, \rho L_s$ für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$.

Beweis. Zu $k \in \{1, \dots, d-1\}$ seien $r \in \{1, \dots, k\}$ und $s \in \{1, \dots, d-k\}$. Weiter seien $K_1, \dots, K_r, L_1, \dots, L_s$ konvexe Körper in \mathbb{R}^d , $\varrho_1, \dots, \varrho_r, \sigma_1, \dots, \sigma_s > 0$ sowie $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \geq 0$ mit $\sum_{q=1}^r i_q = k$ und $\sum_{q=1}^s j_q = d-k$.

Wir zeigen zunächst, dass für $K = \sum_{i=1}^r \varrho_i K_i$ und $L = \sum_{j=1}^s \sigma_j L_j$ eine der Voraussetzungen (a) – (c) aus Satz 6.1 erfüllt ist und wir diesen somit anwenden können.

Sei zunächst Voraussetzung (a) dieses Satzes erfüllt, das heißt seien $K_1, \dots, K_r, L_1, \dots, L_s$ Polytope, für die die Polytope $\sum_{i=1}^r K_i$ und $\sum_{j=1}^s L_j$ in allgemeiner Lage sind. Dann sind auch K und L Polytope. Durch Skalierung ändert sich der lineare Unterraum, der parallel zu einer Seite eines Polytops ist, nicht. Außerdem gilt für die Dimension einer Stützmenge von K (beziehungsweise L), dass

$$\dim(F(K, \cdot)) = \dim\left(F\left(\sum_{i=1}^r \varrho_i K_i, \cdot\right)\right) = \dim\left(F\left(\sum_{i=1}^r K_i, \cdot\right)\right).$$

Da die Stützungen eines Polytops seine Seiten sind, folgt daher, dass K und L in allgemeiner Lage sind und in diesem Fall Voraussetzung (a) von Satz 6.1 erfüllt ist.

Gilt Voraussetzung (b) dieses Satzes, das heißt sind zum Beispiel die Stützfunktionen von K_1, \dots, K_r von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$, so ist auch die Stützfunktion von K von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$, denn: Für die Stützfunktion von K gilt

$$h(K, \cdot) = h\left(\sum_{i=1}^r \varrho_i K_i, \cdot\right) = \varrho_1 h(K_1, \cdot) + \dots + \varrho_r h(K_r, \cdot).$$

Als Summe von differenzierbaren Funktionen ist die Stützfunktion von K also ebenfalls differenzierbar. Ähnliches gilt für den Gradienten, der als Summe von Lipschitz-Abbildungen ebenfalls eine Lipschitz-Abbildung ist.

Wegen $\rho L = \rho\left(\sum_{j=1}^s \sigma_j L_j\right) = \sum_{j=1}^s \sigma_j (\rho L_j)$ können wir auch im Fall von Voraussetzung (c) Satz 6.1 anwenden.

Wegen (6.4) und Satz 6.1 gilt nun einerseits

$$\begin{aligned} & V(K[k], -L[d-k]) \\ &= V\left(\left(\sum_{i=1}^r \varrho_i K_i\right)[k], \left(-\sum_{j=1}^s \sigma_j L_j\right)[d-k]\right) \\ &= \binom{d}{k}^{-1} c(d, k) c(d, d-k) \int_{F^\perp(d, k^*)} \int_{F^\perp(d, (d-k)^*)} F_{k, d-k}(\angle(u, v)) \varphi^{k, d-k}(u, U, v, V) \\ &\quad \times \Psi_{d-k}^{((d-k)^*)}\left(\sum_{j=1}^s \sigma_j L_j, d(v, V)\right) \Psi_k^{(k^*)}\left(\sum_{i=1}^r \varrho_i K_i, d(u, U)\right). \end{aligned}$$

Mit der Verdopplungsformel von Legendre berechnen wir die Konstante

$$c_{d,k} := \binom{d}{k}^{-1} c(d, k) c(d, d-k) = \binom{d}{k}^{-1} \frac{\pi(d-k)! k!}{2^d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^2}.$$

Mit (4.15) erhalten wir

$$\begin{aligned}
& V(K[k], -L[d-k]) \\
&= c_{d,k} \int_{F^\perp(d,k^*)} \int_{F^\perp(d,(d-k)^*)} F_{k,d-k}(\angle(u,v)) \varphi^{k,d-k}(u,U,v,V) \\
&\quad \times \sum_{j_1, \dots, j_s=0}^{d-k} \binom{d-k}{j_1, \dots, j_s} \sigma_1^{j_1} \dots \sigma_s^{j_s} \Psi^{((d-k)^*)}(L_1[j_1], \dots, L_s[j_s], d(v,V)) \\
&\quad \times \sum_{i_1, \dots, i_r=0}^k \binom{k}{i_1, \dots, i_r} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_r^{i_r} \Psi^{(k^*)}(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], d(u,U)).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt nach (5.29), (5.26) und wiederum (5.29) in [67], dass

$$\begin{aligned}
& V(K[k], -L[d-k]) \\
&= V\left(\left(\sum_{i=1}^r \varrho_i K_i\right)[k], \left(-\sum_{j=1}^s \sigma_j L_j\right)[d-k]\right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_r=0}^k \binom{k}{i_1, \dots, i_r} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_r^{i_r} V\left(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], \left(-\sum_{j=1}^s \sigma_j L_j\right)[d-k]\right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_r=0}^k \binom{k}{i_1, \dots, i_r} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_r^{i_r} V\left(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], \left(\sum_{j=1}^s \sigma_j (-L_j)\right)[d-k]\right) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_r=0}^k \binom{k}{i_1, \dots, i_r} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_r^{i_r} \sum_{j_1, \dots, j_s=0}^{d-k} \binom{d-k}{j_1, \dots, j_s} \sigma_1^{j_1} \dots \sigma_s^{j_s} \\
&\quad \times V(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], -L_1[j_1], \dots, -L_s[j_s]).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{j_1, \dots, j_s=0}^{d-k} \binom{d-k}{j_1, \dots, j_s} \sigma_1^{j_1} \dots \sigma_s^{j_s} \sum_{i_1, \dots, i_r=0}^k \binom{k}{i_1, \dots, i_r} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_r^{i_r} \\
&\quad \times c_{d,k} \int_{F^\perp(d,k^*)} \int_{F^\perp(d,(d-k)^*)} F_{k,d-k}(\angle(u,v)) \varphi^{k,d-k}(u,U,v,V) \\
&\quad \times \Psi^{((d-k)^*)}(L_1[j_1], \dots, L_s[j_s], d(v,V)) \Psi^{(k^*)}(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], d(u,U)) \\
&= \sum_{i_1, \dots, i_r=0}^k \binom{k}{i_1, \dots, i_r} \varrho_1^{i_1} \dots \varrho_r^{i_r} \sum_{j_1, \dots, j_s=0}^{d-k} \binom{d-k}{j_1, \dots, j_s} \sigma_1^{j_1} \dots \sigma_s^{j_s} \\
&\quad \times V(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], -L_1[j_1], \dots, -L_s[j_s]).
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
& V(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], -L_1[j_1], \dots, -L_s[j_s]) \\
&= c_{d,k} \int_{F^\perp(d,k^*)} \int_{F^\perp(d,(d-k)^*)} F_{k,d-k}(\angle(u,v)) \varphi^{k,d-k}(u,U,v,V) \\
&\quad \times \Psi^{((d-k)^*)}(L_1[j_1], \dots, L_s[j_s], d(v,V)) \Psi^{(k^*)}(K_1[i_1], \dots, K_r[i_r], d(u,U))
\end{aligned}$$

mit $\sum_{q=1}^r i_q = k$ und $\sum_{q=1}^s j_q = d-k$. □

6.2. Gemischte Maße

In diesem Abschnitt wird eine Darstellung der gemischten Maße $\Phi_{k,l}(K, L, \cdot)$ durch Fahnenmaße hergeleitet. Die Herleitung basiert auf der in Abschnitt 6.1 erwähnten Arbeit von Hug et al. [41]. Allerdings wurden dort nur die totalen Maße $V_{k,l}(K, L) = \Phi_{k,l}(K, L, \mathbb{R}^{2d})$ für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k + l = d$ und konvexe Körper K, L betrachtet.

Nach Theorem 2 in [50] gilt für jede Borelmenge $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$, dass

$$\begin{aligned} & \Phi_{k,l}(K, L, \eta) \\ &= \int_{\text{Nor}(K) \times \text{Nor}(L)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \sum_{|J|=l^*} \frac{\prod_{i \in I} k_i(K; x, u)}{\prod_{i=1}^{d-1} \sqrt{1 + k_i(K; x, u)^2}} \\ & \quad \times \frac{\prod_{j \in J} k_j(L; y, v)}{\prod_{j=1}^{d-1} \sqrt{1 + k_j(L; y, v)^2}} [\bigwedge_{i \in I^c} a_i(K; x, u), \bigwedge_{j \in J^c} a_j(L; y, v)]^2 \mathcal{H}^{2d-2}(d(x, u, y, v)), \end{aligned}$$

wobei $[\cdot, \cdot]$ für Multivektoren in \mathbb{R}^d wie in [50] definiert ist. Diese Notation ist konsistent mit der der Unterraumdeterminante, wenn wir anstatt der Multivektoren die zu ihnen assoziierten Unterräume betrachten. Wir erinnern daran, dass die Summation über alle Teilmengen $I, J \subset \{1, \dots, d-1\}$ der entsprechenden Kardinalität erfolgt.

Mit den Definitionen von $\mathbb{K}_I(\cdot)$ in (4.5) und $A_I(\cdot)$ in (4.6) lässt sich die Schreibweise der rechten Seite erheblich verkürzen. Außerdem wenden wir Lemma 1 in [50] an und erhalten

$$\begin{aligned} & \Phi_{k,l}(K, L, \eta) \\ &= \int_{\text{Nor}(K) \times \text{Nor}(L)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \sum_{|J|=l^*} \mathbb{K}_I(K; x, u) \mathbb{K}_J(L; y, v) \\ & \quad \times [A_{I^c}(K; x, u), A_{J^c}(L; y, v)]^2 \mathcal{H}^{2d-2}(d(x, u, y, v)) \\ &= \int_{\text{Nor}(K) \times \text{Nor}(L)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \sum_{|J|=l^*} \mathbb{K}_I(K; x, u) \mathbb{K}_J(L; y, v) \\ & \quad \times [A_I(K; x, u) \wedge u, A_J(L; y, v) \wedge v]^2 \mathcal{H}^{2d-2}(d(x, u, y, v)) \\ &= \int_{\text{Nor}(L)} \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \sum_{|J|=l^*} \mathbb{K}_I(K; x, u) \mathbb{K}_J(L; y, v) \\ & \quad \times \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge A_J(L; y, v) \wedge v\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \mathcal{H}^{d-1}(d(y, v)). \end{aligned}$$

Den Fall $\angle(u, v) = \pi$, das heißt $u = -v$, müssen wir nicht gesondert betrachten, da in diesem Fall $\|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge A_J(L; y, v) \wedge v\|^2 = 0$ gilt und somit der Integrand null ist.

Mittels der beschränkten Approximation $F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v))$ führen wir nun

$$\begin{aligned} & \Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \cdot) \\ &:= \int_{\text{Nor}(L)} \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \cdot\} F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \sum_{|J|=l^*} \mathbb{K}_I(K; x, u) \mathbb{K}_J(L; y, v) \\ & \quad \times \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge A_J(L; y, v) \wedge v\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \mathcal{H}^{d-1}(d(y, v)) \end{aligned}$$

ein. Es gilt $\Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \cdot) \nearrow \Phi_{k,l}(K, L, \cdot)$ für $\epsilon \searrow 0$.

Der folgende Satz liefert eine Darstellung von $\Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \cdot)$ durch Fahnenmaße. Die Funktion $\varphi^{k,l}$ auf $F^\perp(d, k^*) \times F^\perp(d, l^*)$ ist in (6.5) definiert.

Satz 6.3. Seien K, L konvexe Körper in \mathbb{R}^d , $\epsilon > 0$ sowie $1 \leq k, l \leq d-1$ mit $k+l=d$. Für jede Borelmenge $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \eta) &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})^2}{\Gamma(\frac{k+2}{2})\Gamma(\frac{d-k+1}{2})\Gamma(\frac{l+2}{2})\Gamma(\frac{d-l+1}{2})} \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \\ &\quad \times \varphi^{k,l}(u, U, v, V) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_l^{(l^*)}(L, d(y, v, V)) \\ &= \frac{\pi(d-k)!k!}{2^d \Gamma(\frac{d+1}{2})^2} \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,d-k}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \varphi^{k,d-k}(u, U, v, V) \\ &\quad \times \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_{d-k}^{(k-1)}(L, d(y, v, V)). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Beweis. Mit $G^{u^\perp}(d-1, j)$ bezeichnen wir die Graßmann-Mannigfaltigkeit der j -dimensionalen linearen Unterräume von u^\perp , $u \in S^{d-1}$. Nach Proposition 2 in [41] gilt, dass

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \eta) &= \int_{\text{Nor}(L)} \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \sum_{|J|=l^*} \mathbb{K}_I(K; x, u) \mathbb{K}_J(L; y, v) \\ &\quad \times \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge A_J(L; y, v) \wedge v\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \mathcal{H}^{d-1}(d(y, v)) \\ &= \int_{\text{Nor}(L)} \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \sum_{|J|=l^*} \mathbb{K}_I(K; x, u) \mathbb{K}_J(L; y, v) \\ &\quad \times \gamma(d, k) \gamma(d, l) \int_{G^{u^\perp}(d-1, k^*)} \int_{G^{v^\perp}(d-1, l^*)} \langle A_I(K; x, u), U \rangle^2 \varphi^{k,l}(u, U, v, V) \\ &\quad \times \langle V, A_J(L; y, v) \rangle^2 \nu_{k^*}(dV) \nu_{l^*}(dU) \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \mathcal{H}^{d-1}(d(y, v)). \end{aligned}$$

Durch zweimaliges Anwenden von Formel (4.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \eta) &= c(d, l) \int \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=k^*} \mathbb{K}_I(K; x, u) \gamma(d, k) \int_{G^{u^\perp}(d-1, k^*)} \\ &\quad \times \langle A_I(K; x, u), U \rangle^2 \varphi^{k,l}(u, U, v, V) \nu_{k^*}(dU) \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \Xi_l^{(l^*)}(L, d(y, v, V)) \\ &= c(d, k) c(d, l) \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \varphi^{k,l}(u, U, v, V) \\ &\quad \times \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_l^{(l^*)}(L, d(y, v, V)). \end{aligned}$$

Nach (6.2) gilt für die Konstante

$$c(d, k) c(d, l) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})^2}{\Gamma(\frac{k+2}{2})\Gamma(\frac{d-k+1}{2})\Gamma(\frac{l+2}{2})\Gamma(\frac{d-l+1}{2})}.$$

Formen wir die Voraussetzung $k+l=d$ um zu $l=d-k$ und setzen dies in obige Formel ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \eta) &= \frac{\pi(d-k)!k!}{2^d \Gamma(\frac{d+1}{2})^2} \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,d-k}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \varphi^{k,d-k}(u, U, v, V) \\ &\quad \times \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_{d-k}^{(k-1)}(L, d(y, v, V)), \end{aligned}$$

wobei bei der Berechnung der Konstanten die Verdopplungsformel von Legendre angewendet wurde. \square

Satz 6.3 impliziert

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}(K, L, \eta) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \Phi_{k,l}^{(\epsilon)}(K, L, \eta) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})^2}{\Gamma(\frac{k+2}{2})\Gamma(\frac{d-k+1}{2})\Gamma(\frac{l+2}{2})\Gamma(\frac{d-l+1}{2})} \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \\ &\quad \times \varphi^{k,l}(u, U, v, V) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_l^{(l^*)}(L, d(y, v, V)). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Wie in [41] stellt sich uns nun die Frage, ob beziehungsweise in welchen Fällen Integration und Grenzwertbildung vertauscht werden können.

Satz 6.4. *Seien K, L konvexe Körper in \mathbb{R}^d sowie $1 \leq k, l \leq d-1$ mit $k+l=d$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$ eine Borelmenge. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \Phi_{k,l}(K, L, \eta) &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})^2}{\Gamma(\frac{k+2}{2})\Gamma(\frac{d-k+1}{2})\Gamma(\frac{l+2}{2})\Gamma(\frac{d-l+1}{2})} \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} F_{k,l}(\angle(u, v)) \\ &\quad \times \varphi^{k,l}(u, U, v, V) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_l^{(l^*)}(L, d(y, v, V)), \end{aligned}$$

- (a) für K und ρL für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$,
- (b) wenn die Stützfunktion von K oder L von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$ ist,
- (c) wenn K und L Polytope in allgemeiner Lage sind.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 2 in [41].

Seien $K, L \in \mathcal{K}^d$ sowie $k, l \in \{1, \dots, d-1\}$ mit $k+l=d$ und $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$. Des Weiteren seien $\Theta \in [0, \pi)$, $\epsilon > 0$ und $(u, U, v, V) \in F^\perp(d, k^*) \times F^\perp(d, l^*)$. Im Folgenden werden mit c stets nicht genauer angegebene positive, endliche Konstanten bezeichnet, die unter anderem auch von K und L abhängen können. Für den Winkel Θ gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq F_{k,l}^{(\epsilon)}(\Theta) &\leq F_{k,l}(\Theta) = \sin^{1-d} \Theta \frac{\Theta}{\omega_d} \int_0^1 (\sin t\Theta)^{k^*} (\sin(1-t)\Theta)^{l^*} dt \\ &\leq c \cdot \sin^{1-d} \Theta. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definitionen (6.5) und (6.6) von $\varphi^{k,l}$ und $\varphi_{p,q}^{k,l}$ erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} |\varphi^{k,l}(u, U, v, V)| &= \sum_{p=0}^{k \wedge k^*} \sum_{q=0}^{l \wedge l^*} |\alpha_{p,q} \varphi_{p,q}^{k,l}(u, U, v, V)| \\ &= \sum_{p=0}^{k \wedge k^*} \sum_{q=0}^{l \wedge l^*} |\alpha_{p,q} \sum_{\substack{|I|=k^* \\ |I \cap I_0|=k^*-p}} \sum_{\substack{|J|=l^* \\ |J \cap J_0|=l^*-q}} \left\| \bigwedge_{i \in I} u_i \wedge u \wedge \bigwedge_{j \in J} v_j \wedge v \right\|^2| \\ &= \sum_{p=0}^{k \wedge k^*} \sum_{q=0}^{l \wedge l^*} |\alpha_{p,q} \sum_{\substack{|I|=k^* \\ |I \cap I_0|=k^*-p}} \sum_{\substack{|J|=l^* \\ |J \cap J_0|=l^*-q}} \left\| \bigwedge_{i \in I} u_i \wedge \bigwedge_{j \in J} v_j \wedge u \wedge v \right\|^2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{p=0}^{k \wedge k^*} \sum_{q=0}^{l \wedge l^*} \left| \alpha_{p,q} \sum_{\substack{|I|=k^* \\ |I \cap I_0|=k^*-p}} \sum_{\substack{|J|=l^* \\ |J \cap J_0|=l^*-q}} \left\| \bigwedge_{i \in I} u_i \wedge \bigwedge_{j \in J} v_j \right\|^2 \cdot \|u \wedge v\|^2 \right| \\
&\leq c \cdot \|u \wedge v\|^2 \\
&= c \cdot |\sin \angle(u, v)|^2,
\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass für einfache Multivektoren ξ und η Abschätzung (2.2) gilt, das heißt $\|\xi \wedge \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|$.

Zusammengefasst folgt

$$\begin{aligned}
F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) |\varphi^{k,l}(u, U, v, V)| &\leq c \cdot \sin^{1-d} \angle(u, v) \cdot |\sin \angle(u, v)|^2 \\
&= c \cdot \sin^{3-d} \angle(u, v).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass in den drei Fällen (a)-(c) der Satz von der majorisierten Konvergenz anwendbar ist. Die Behauptung folgt dann wegen $F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, v)) \nearrow F_{k,l}(\angle(u, v))$ für $\epsilon \searrow 0$ aus (6.8).

(a) Sei $\rho \in O(d)$. Wegen (6.9) bleibt zu zeigen, dass für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$ gilt, dass

$$\int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_l^{(l^*)}(\rho L, d(y, v, V)) < \infty.$$

Die Stützmaße beziehungsweise Oberflächenmaße sind bis auf eine Konstante Bildmaße der Fahnenmaße beziehungsweise Stützmaße (siehe Proposition 4.11 bzw. Kapitel 3.1). Somit folgt mit dem Satz von Fubini und aufgrund der $O(d)$ -Kovarianz der Stützmaße (siehe Satz 3.2 5)), dass

$$\begin{aligned}
&\int_{SO(d)} \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \\
&\quad \times \Xi_l^{(l^*)}(\rho L, d(y, v, V)) \nu_d(d\rho) \\
&\leq c \cdot \int_{SO(d)} \int \int \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k(K, d(x, u)) \Xi_l(\rho L, d(y, v)) \nu_d(d\rho) \\
&\leq c \cdot \int \int \int_{SO(d)} \sin^{3-d} \angle(u, \rho v) \nu_d(d\rho) \Xi_k(K, d(x, u)) \Xi_l(L, d(y, v)) \\
&= c \cdot \int \int \int_{S^{d-1}} \sin^{3-d} \angle(u, w) \mathcal{H}^{d-1}(dw) \Xi_k(K, d(x, u)) \Xi_l(L, d(y, v)) \\
&\leq c \cdot \int \int \int_{S^{d-1}} \sin^{3-d} \angle(u, w) \mathcal{H}^{d-1}(dw) \Psi_k(K, du) \Psi_l(L, dv).
\end{aligned}$$

Für das innere Integral gilt

$$\int_{S^{d-1}} \sin^{3-d} \angle(u, w) \mathcal{H}^{d-1}(dw) = \mathcal{H}^{d-2}(S^{d-2}) \cdot \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = 2\omega_{d-1}.$$

Da dies eine von $u \in S^{d-1}$ unabhängige endliche Konstante ist, folgt

$$\begin{aligned}
&c \cdot \int \int \int_{S^{d-1}} \sin^{3-d} \angle(u, w) \mathcal{H}^{d-1}(dw) \Psi_k(K, du) \Psi_l(L, dv) \\
&\leq c \cdot \int \int 2\omega_{d-1} \Psi_k(K, du) \Psi_l(L, dv) \\
&\leq c \cdot S(K) S(L) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

wobei mit $S(K)$ und $S(L)$ die Oberfläche von K beziehungsweise L bezeichnet wird. Hiermit ist gezeigt, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden kann.

- (b) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Stützfunktion von K von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$. Dann sind alle Oberflächenmaße von K absolut stetig mit beschränkter Dichte (siehe [41], Lemma 1 und [75], Satz 4.7), das heißt

$$\Psi_k(K, \cdot) \leq c \cdot \mathcal{H}^{d-1} \llcorner S^{d-1}, \quad k = 1, \dots, d-1.$$

Wegen (6.9) zeigt die zu Fall (a) teilweise analoge Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_l^{(l^*)}(L, d(y, v, V)) \\ & \leq c \cdot \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k(K, d(x, u)) \Xi_l(L, d(y, v)) \\ & \leq c \cdot \int \int \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k(K, d(x, u)) \Xi_l(L, d(y, v)) \\ & \leq c \cdot \int \int \sin^{3-d} \angle(u, v) \Psi_k(K, du) \Psi_l(L, dv) \\ & \leq c \cdot \int \int_{S^{d-1}} \sin^{3-d} \angle(u, v) \mathcal{H}^{d-1}(du) \Psi_l(L, dv) \\ & \leq c \cdot S(L) \\ & < \infty, \end{aligned}$$

dass wieder der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden kann.

- (c) Seien K und L Polytope in allgemeiner Lage. Des Weiteren sei F eine k -Seite von K und G eine l -Seite des Polytops L . Außerdem definieren wir $N(F) := L(F)^\perp$ sowie $N(G) := L(G)^\perp$. Wegen

$$(L(F) \cap L(G))^\perp = (L(F)^\perp + L(G)^\perp)^{\perp\perp} = N(F) + N(G)$$

und $k + l = d$ folgt

$$\begin{aligned} \dim(N(F) \cap N(G)) &= \dim(N(F)) + \dim(N(G)) - (d - \dim(L(F) \cap L(G))) \\ &= \dim(L(F) \cap L(G)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

woraus wiederum $n(K, F) \cap \pm n(L, G) = \emptyset$ folgt.

Für die Oberflächenmaße eines Polytops K gilt nach (3.4), dass

$$\Psi_k(K, \cdot) = \omega_{d-k}^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_k(K)} \mathcal{H}^k(F) \mathcal{H}^{d-k-1}(n(K, F) \cap \cdot)$$

für $k = 0, \dots, d-1$.

Mittels eines Kompaktheitsarguments folgt nun, dass $\angle(u, v) \in [\delta, \pi - \delta]$ für eine Konstante $\delta \in (0, \pi)$ und alle Einheitsvektoren $u, v \in S^{d-1}$ aus dem Träger von

$\Psi_k(K, \cdot)$ beziehungsweise $\Psi_l(L, \cdot)$. Somit ist $|\sin \angle(u, v)|$ für alle betrachteten u, v von unten durch eine positive Konstante beschränkt. Also gilt

$$\begin{aligned} & \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k^{(k^*)}(K, d(x, u, U)) \Xi_l^{(l^*)}(L, d(y, v, V)) \\ & \leq c \cdot \int \int \mathbf{1}\{(x, y) \in \eta\} \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k(K, d(x, u)) \Xi_l(L, d(y, v)) \\ & \leq c \cdot \int \int \sin^{3-d} \angle(u, v) \Xi_k(K, d(x, u)) \Xi_l(L, d(y, v)) \\ & \leq c \cdot \int \int \sin^{3-d} \angle(u, v) \Psi_k(K, du) \Psi_l(L, dv) \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun wiederum aus (6.9) und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz. \square

6.3. Gemischte Volumina von Projektionen

Am Ende dieses Kapitels wollen wir noch einmal auf die gemischten Volumina zurückkommen. In seiner Dissertation [35] zeigte Hinderer, dass sich das j -te innere Volumen der Projektion eines konvexen Körpers K auf einen linearen Unterraum $L \in G(d, k)$ ($0 \leq j < k \leq d-1$) mit Hilfe von Fahren-Oberflächenmaßen berechnen lässt.

Nach Theorem 58 in [35] existiert für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$ eine messbare Funktion $g : G(d, k) \times S^{d-1} \times G(d, d-k-1) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass gilt

$$\begin{aligned} V_j(K|L) &= \frac{\binom{d}{j}}{\kappa_{k-j}} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) S_j^{(d-k-1)}(K, d(u, U)) \\ &= \frac{\omega_{k-j+1}}{\kappa_{k-j}} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \Psi_j^{(d-k-1)}(K, d(u, U)). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Diese Formel gilt insbesondere für alle Polytope K in allgemeiner Lage zu L .

Wir werden ein entsprechendes Resultat zunächst für gemischte Volumina von Projektionen beweisen und danach aus obigem Satz von Hinderer noch eine weitere Formel für gemischte Volumina von Projektionen herleiten.

Satz 6.5. *Seien K_1, \dots, K_l konvexe Körper in \mathbb{R}^d . Außerdem seien $i_1, \dots, i_l \geq 0$ gegeben mit $\sum_{q=1}^l i_q = j$ für $0 \leq j \leq k \leq d-1$. Dann existiert eine messbare Funktion g auf $G(d, k) \times S^{d-1} \times G(d, d-k-1)$, sodass für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$ gilt*

$$\begin{aligned} & V(K_1|L[i_1], \dots, K_l|L[i_l], B^d|L[k-j]) \\ &= \frac{\omega_{k-j+1}}{\binom{d}{j}} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \Psi^{(d-k-1)}(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], d(u, U)). \end{aligned}$$

Beweis. Seien $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ sowie $K = \sum_{i=1}^l \varrho_i K_i$ mit $\varrho_1, \dots, \varrho_l \geq 0$. Nach Theorem 58 in [35] existiert eine messbare Funktion g auf $G(d, k) \times S^{d-1} \times G(d, d-k-1)$, sodass

mit Satz 4.15 1) für ν_k -fast alle $L \in G(d, k)$ gilt

$$\begin{aligned}
V_j(K|L) &= V_j\left(\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i\right)|L\right) \\
&= \frac{\omega_{k-j+1}}{\kappa_{k-j}} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \Psi_j^{(d-k-1)}\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i, d(u, U)\right) \\
&= \frac{\omega_{k-j+1}}{\kappa_{k-j}} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^j \binom{j}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \\
&\quad \times \Psi^{(d-k-1)}(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], d(u, U)).
\end{aligned}$$

Andererseits gilt nach den Formeln (4.9), (5.53) und (5.29) in [67], dass

$$\begin{aligned}
V_j(K|L) &= \frac{\binom{k}{j}}{\kappa_{k-j}} V(K|L[j], \dots, B^d|L[k-j]) \\
&= \frac{\binom{k}{j}}{\kappa_{k-j}} V\left(\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i\right)|L[j], \dots, B^d|L[k-j]\right) \\
&= \frac{\binom{k}{j}}{\kappa_{k-j}} V\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i (K_i|L)[j], \dots, B^d|L[k-j]\right) \\
&= \frac{\binom{k}{j}}{\kappa_{k-j}} \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^j \binom{j}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} V(K_1|L[i_1], \dots, K_l|L[i_l], B^d|L[k-j]).
\end{aligned}$$

Zusammengefasst gilt also

$$\begin{aligned}
&\frac{\omega_{k-j+1}}{\kappa_{k-j}} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^j \binom{j}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} \\
&\quad \times \Psi^{(d-k-1)}(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], d(u, U)) \\
&= \frac{\binom{k}{j}}{\kappa_{k-j}} \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^j \binom{j}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} V(K_1|L[i_1], \dots, K_l|L[i_l], B^d|L[k-j]).
\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
&V(K_1|L[i_1], \dots, K_l|L[i_l], B^d|L[k-j]) \\
&= \frac{\omega_{k-j+1}}{\binom{k}{j}} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \Psi^{(d-k-1)}(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], d(u, U)). \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 6.6.

1) Im Spezialfall $k = l = j$ gilt $i_1 = \dots = i_l = 1$ und somit folgt

$$\begin{aligned}
&V(K_1|L, \dots, K_k|L) \\
&= 2 \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \Psi^{(d-k-1)}(K_1, \dots, K_k, d(u, U)). \quad (6.11)
\end{aligned}$$

2) Im Fall $k = j = d - 1$ gilt zum einen nach (6.10), dass

$$\begin{aligned} V_{d-1}(K|L) &= \int_{S^{d-1} \times G(d,0)} g(L, u, U) S_{d-1}^{(0)}(K, d(u, U)) \\ &= \int_{S^{d-1}} g(L, u, \{o\}) S_{d-1}(K, du) \end{aligned}$$

und zum anderen

$$V_{d-1}(K|L) = \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle x, L^\perp \rangle| S_{d-1}(K, dx).$$

Also folgt, dass in diesem Fall $g(L, u, \{o\}) = \frac{1}{2} |\langle u, L^\perp \rangle|$ eine Möglichkeit zur Definition der Funktion g ist.

Mit Hilfe von Kubotas Integralrekursion können wir aus (6.10) eine Formel für die inneren Volumina eines konvexen Körpers herleiten.

Proposition 6.7. *Seien $K \in \mathcal{K}^d$ und $0 \leq j < k \leq d - 1$. Dann existiert eine messbare Funktion g auf $G(d, k) \times S^{d-1} \times G(d, d - k - 1)$, sodass*

$$\int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \times G(d,d-k-1)} g(L, u, U) \Psi_j^{(d-k-1)}(K, d(u, U)) \nu_k(dL) = \beta_{dj k} V_j(K),$$

$$\text{wobei } \beta_{dj k} = \frac{\binom{k}{j} \kappa_k \kappa_{d-j}}{\binom{d}{j} \kappa_d \omega_{k-j+1}}.$$

Beweis. Mit der Integralrekursion von Kubota (siehe [67], Formel (5.72) zusammen mit [67], Formel (4.9)) und nach Formel (6.10) existiert eine messbare Funktion g auf $G(d, k) \times S^{d-1} \times G(d, d - k - 1)$, sodass

$$\begin{aligned} &\frac{\binom{k}{j} \kappa_k \kappa_{d-j}}{\binom{d}{j} \kappa_d \kappa_{k-j}} V_j(K) \\ &= \int_{G(d,k)} V_j(K|L) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} \frac{\omega_{k-j+1}}{\kappa_{k-j}} \int_{S^{d-1} \times G(d,d-k-1)} g(L, u, U) \Psi_j^{(d-k-1)}(K, d(u, U)) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

Durch Umformen folgt hieraus die Behauptung. □

Für gemischte Volumina gilt außerdem folgende Proposition.

Proposition 6.8. *Seien $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ und $0 \leq j < k \leq d - 1$. Außerdem seien $i_1, \dots, i_l \geq 0$ gegeben mit $\sum_{q=1}^l i_q = j$. Dann gilt*

$$\int_{G(d,k)} V(K_1|L[i_1], \dots, K_l|L[i_l], B^d|L[k-j]) \nu_k(dL) = \frac{\kappa_k \kappa_{d-j}}{\binom{d}{j} \kappa_d} V(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], B^d[d-j]).$$

Beweis. Seien $0 \leq j < k \leq d-1$ und $K_1, \dots, K_l \in \mathcal{K}^d$ sowie $\varrho_1, \dots, \varrho_l \geq 0$ mit $K = \sum_{i=1}^l \varrho_i K_i$. Einerseits gilt (vergleiche Beweis zu Satz 6.5)

$$\begin{aligned} & \int_{G(d,k)} V_j(K|L) \nu_k(dL) \\ &= \frac{\binom{k}{j}}{\kappa_{k-j}} \int_{G(d,k)} \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^j \binom{j}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} V(K_1|L[i_1], \dots, K_l|L[i_l], B^d|L[k-j]) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir mit der Integralrekursion von Kubota (siehe [67], Formel (5.72) zusammen mit [67], Formel (4.9)), dass

$$\begin{aligned} & \int_{G(d,k)} V_j(K|L) \nu_k(dL) \\ &= \frac{\binom{k}{j} \kappa_k \kappa_{d-j}}{\binom{d}{j} \kappa_d \kappa_{k-j}} V_j\left(\sum_{i=1}^l \varrho_i K_i\right) \\ &= \frac{\binom{k}{j} \kappa_k \kappa_{d-j}}{\binom{d}{j} \kappa_d \kappa_{k-j}} \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^j \binom{j}{i_1, \dots, i_l} \varrho_1^{i_1} \cdots \varrho_l^{i_l} V(K_1[i_1], \dots, K_l[i_l], B^d[d-j]). \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 6.9. Insbesondere folgt für $l = k = j$, dass $i_1 = \dots = i_l = 1$ und somit

$$\int_{G(d,k)} V(K_1|L, \dots, K_k|L) \nu_k(dL) = \frac{\kappa_k \kappa_{d-k}}{\binom{d}{k} \kappa_d} V(K_1, \dots, K_k, B^d[d-k]).$$

Zusammen mit Formel (6.11) folgt hiermit, dass eine messbare Funktion g auf $G(d, k) \times S^{d-1} \times G(d, d-k-1)$ existiert, sodass

$$\begin{aligned} & \frac{\kappa_k \kappa_{d-k}}{\binom{d}{k} \kappa_d} V(K_1, \dots, K_k, B^d[d-k]) \\ &= \int_{G(d,k)} V(K_1|L, \dots, K_k|L) \nu_k(dL) \\ &= \int_{G(d,k)} 2 \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \Psi^{(d-k-1)}(K_1, \dots, K_k, d(u, U)) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

Dies führt schließlich zu

$$\begin{aligned} & V(K_1, \dots, K_k, B^d[d-k]) \\ &= \frac{2 \binom{d}{k} \kappa_d}{\kappa_k \kappa_{d-k}} \int_{G(d,k)} \int_{S^{d-1} \times G(d, d-k-1)} g(L, u, U) \Psi^{(d-k-1)}(K_1, \dots, K_k, d(u, U)) \nu_k(dL). \end{aligned}$$

7. Die Stützfunktion

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass die Stützfunktion eines konvexen Körpers eine Darstellung durch Fahren-Oberflächenmaße besitzt. Dies geschieht im folgenden Abschnitt. Für die Herleitung ist es notwendig, die Funktion $\varphi^{1,d-1}$ aus Kapitel 6 explizit zu berechnen. Da diese Berechnung relativ lang ist, wird sie in Abschnitt 7.2 durchgeführt.

7.1. Darstellung der Stützfunktion durch Fahrenmaße

Unser Ziel ist es, die Stützfunktion $h(K, \cdot)$ eines konvexen Körpers K durch Fahren-Oberflächenmaße darzustellen. Eine Möglichkeit, dies zu tun, ist auszunutzen, dass für zentrierte Funktionen $f, g \in \mathcal{C}(S^{d-1})$ aus

$$\int_{S^{d-1}} f(u) S_{d-1}(L, du) = \int_{S^{d-1}} g(u) S_{d-1}(L, du) \quad \text{für alle } L \in \mathcal{K}^d$$

die Gleichheit

$$f = g \tag{7.1}$$

folgt (siehe [79], S. 93).

Eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(S^{d-1})$ heißt *zentriert*, wenn

$$\int_{S^{d-1}} u f(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) = 0$$

erfüllt ist. Insbesondere ist die *zentrierte Stützfunktion* $h^*(K, \cdot)$ gegeben durch

$$h^*(K, \cdot) = h(K - s(K), \cdot) = h(K, \cdot) - \langle s(K), \cdot \rangle,$$

wobei $s(K) := \frac{1}{\kappa_d} \int_{S^{d-1}} h(K, u) u \mathcal{H}^{d-1}(du)$ den *Steinerpunkt* bezeichnet.

Lemma 7.1. *Die zentrierte Stützfunktion $h^*(K, \cdot)$ eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^d$ ist zentriert.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\int_{S^{d-1}} u h^*(K, u) \mathcal{H}^{d-1}(du) = 0$.

Nach den Definitionen der zentrierten Stützfunktion und des Steinerpunktes sowie Formel (1.33) in [67] gilt

$$\begin{aligned} & \int_{S^{d-1}} u h^*(K, u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \int_{S^{d-1}} u h(K - s(K), u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \int_{S^{d-1}} u h(K, u) - u \langle s(K), u \rangle \mathcal{H}^{d-1}(du) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa_{dS}(K) - \int_{S^{d-1}} u \langle s(K), u \rangle \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&= \kappa_{dS}(K) - \kappa_{dS}(K) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Seien K und L konvexe Körper in \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, für die Satz 6.1 gilt. Dies ist zum Beispiel der Fall,

- (a) falls K und L Polytope in allgemeiner Lage sind oder
- (b) falls die Stützfunktion von K oder L von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$ ist oder
- (c) für K und ρL für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$.

Aufgrund der Bewegungskovarianz des Oberflächenmaßes sowie Formel (5.19) in [67] gilt

$$\begin{aligned}
\int_{S^{d-1}} h(K, -v) S_{d-1}(L, dv) &= \int_{S^{d-1}} h(K, v) S_{d-1}(-L, dv) \\
&= dV(K, -L[d-1]) \\
&= V_{1,d-1}(K, L).
\end{aligned}$$

Nach Satz 6.1 existiert eine stetige Funktion $\varphi^{1,d-1}$ auf $F^\perp(d, d-2) \times F^\perp(d, 0)$, sodass

$$\begin{aligned}
V_{1,d-1}(K, L) &= c(d, 1) c(d, d-1) \int_{F^\perp(d,0)} \int_{F^\perp(d,d-2)} F_{1,d-1}(\angle(u, v)) \varphi^{1,d-1}(u, U, v, V) \\
&\quad \times \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)) \Psi_{d-1}^{(0)}(L, d(v, V)) \\
&= \frac{c(d, 1)}{2} \int_{S^{d-1}} \int_{F^\perp(d,d-2)} F_{1,d-1}(\angle(u, v)) \varphi^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) \\
&\quad \times \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)) S_{d-1}(L, dv),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass nach Bemerkung 4.12 für eine messbare Funktion g gilt

$$\begin{aligned}
\int_{F^\perp(d,0)} g(v, V) \Psi_{d-1}^{(0)}(K, d(v, V)) &= \int_{S^{d-1}} g(v, \{o\}) \Psi_{d-1}(K, dv) \\
&= \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} g(v, \{o\}) S_{d-1}(K, dv).
\end{aligned}$$

Um eine explizite Darstellung von $V_{1,d-1}(K, L)$ zu erhalten, müssen wir die Funktion $\varphi^{1,d-1}$ berechnen. Da diese Berechnung relativ lang ist, wird sie hier nicht direkt durchgeführt, sondern in den nächsten Abschnitt 7.2 ausgelagert.

Das Ergebnis dort liefert uns

$$\varphi^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) = \frac{2\Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} (d - (d+1)\|v|U\|^2 - d\langle u, v \rangle^2). \quad (7.2)$$

Das heißt

$$\begin{aligned}
& \int_{S^{d-1}} h(K, -v) S_{d-1}(L, dv) \\
&= \frac{c(d, 1)}{2} \int_{S^{d-1}} \int_{F^\perp(d, d-2)} F_{1, d-1}(\angle(u, v)) \varphi^{1, d-1}(u, U, v, \{o\}) \\
&\quad \times \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)) S_{d-1}(L, dv) \\
&= \frac{(d-1) \Gamma(\frac{1}{2})^{d-2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_{S^{d-1}} \int_{F^\perp(d, d-2)} F_{1, d-1}(\angle(u, v)) (d - (d+1) \|v|U\|^2 - d\langle u, v \rangle^2) \\
&\quad \times \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)) S_{d-1}(L, dv).
\end{aligned}$$

Wollen wir nun mit Hilfe der am Anfang des Abschnitts beschriebenen Vorgehensweise (7.1) die Darstellung der Stützfunktion ableiten, müssen wir zeigen, dass die Funktion

$$g(v) := \frac{c(d, 1)}{2} \int_{F^\perp(d, d-2)} F_{1, d-1}(\angle(u, v)) \varphi^{1, d-1}(u, U, v, \{o\}) \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)) \quad (7.3)$$

zentriert und stetig auf S^{d-1} ist. Dies ist aufgrund der in der Funktion g vorkommenden Winkel bisher nicht auf direktem Wege gelungen und wir müssen daher einen Umweg wählen. Auch in der Literatur finden sich Beispiele, die zeigen, dass es kompliziert sein kann, die Zentriertheit einer Funktion zu beweisen. Zum Beispiel lieferte Weil in [79] zunächst einen unvollständigen Beweis, der dann acht Jahre später von Goodey und Weil in [32] vervollständigt wurde.

Im Folgenden bestimmen wir zunächst die zentrierte Stützfunktion eines konvexen Körpers K über die gemischten Maße und leiten davon die Darstellung der Stützfunktion ab.

Satz 7.2. *Sind K ein konvexer Körper im \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ und $w \in S^{d-1}$, so gilt für die zentrierte Stützfunktion*

$$\begin{aligned}
h^*(K, -w) &= \frac{(d-1) \Gamma(\frac{1}{2})^{d-2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{F^\perp(d, d-2)} F_{1, d-1}^{(\epsilon)}(\angle(u, w)) \\
&\quad \times (d - (d+1) \|w|U\|^2 - d\langle u, w \rangle^2) \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)),
\end{aligned}$$

wobei $F_{1, d-1}^{(\epsilon)}(\cdot)$ in (6.3) definiert ist.

Beweis. Zu einer Richtung $w \in S^{d-1}$ seien die abgeschlossenen Halbräume

$$w^- := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, w \rangle \leq 0\} \quad \text{und} \quad w^+ := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, w \rangle \geq 0\} = (-w)^-$$

gegeben sowie ihr Rand, das heißt die Hyperebene

$$w^\perp := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, w \rangle = 0\}.$$

Des Weiteren sei $\beta(w)$ eine Borelmenge in w^\perp mit $\mathcal{H}^{d-1}(\beta(w)) = 1$.

Nach (2.3) in [32] und Theorem 2 in [50] gilt für die zentrierte Stützfunktion

$$\begin{aligned}
h^*(K, -w) &= \Phi_{1,d-1}(K, w^-, \mathbb{R}^d \times \beta(w)) \\
&= \int_{\text{Nor}(K) \times \text{Nor}(w^-)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \beta(w)\} F_{1,d-1}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=d-2} \sum_{|J|=0} \mathbb{K}_I(K; x, u) \\
&\quad \times \mathbb{K}_J(w^-; y, v) \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge A_J(w^-; y, v) \wedge v\|^2 \mathcal{H}^{2d-2}(d(x, u, y, v)).
\end{aligned}$$

Da die Indexmenge J leer ist, gilt $A_J(w^-; y, v) = 1$. Außerdem folgt

$$\mathbb{K}_J(w^-; y, v) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{d-1} \sqrt{1 + k_j(w^-; y, v)^2}} = 1,$$

da die verallgemeinerten Hauptkrümmungen eines Halbraumes null sind. Somit gilt mit $\|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge 1 \wedge v\|^2 = \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge v\|^2$, dass

$$\begin{aligned}
h^*(K, -w) &= \int_{\text{Nor}(w^-)} \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \beta(w)\} F_{1,d-1}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \\
&\quad \times \frac{1}{\prod_{j=1}^{d-1} \sqrt{1 + k_j(w^-; y, v)^2}} \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge 1 \wedge v\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \mathcal{H}^{d-1}(d(y, v)) \\
&= \int_{\text{Nor}(w^-)} \int_{\text{Nor}(K)} \mathbf{1}\{y \in \beta(w)\} F_{1,d-1}(\angle(u, v)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \\
&\quad \times \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge v\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \mathcal{H}^{d-1}(d(y, v)).
\end{aligned}$$

Das Normalenbündel von w^- ist die Menge

$$\text{Nor}(w^-) = \{(y, v) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1} : y \in w^\perp = \partial w^-, v = w\} = \{(y, w) : y \in w^\perp\}.$$

Weiteres Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
h^*(K, -w) &= \int_{\beta(w)} \int_{\text{Nor}(K)} F_{1,d-1}(\angle(u, w)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \\
&\quad \times \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge w\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \mathcal{H}^{d-1}(dy) \\
&= \int_{\text{Nor}(K)} F_{1,d-1}(\angle(u, w)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge w\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \\
&\quad \times \mathcal{H}^{d-1}(\beta(w)) \\
&= \int_{\text{Nor}(K)} F_{1,d-1}(\angle(u, w)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge w\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)),
\end{aligned}$$

wobei die Voraussetzung $\mathcal{H}^{d-1}(\beta(w)) = 1$ verwendet wurde.

Wie in Abschnitt 6.2 betrachten wir nun die beschränkte Approximation $F_{1,d-1}^{(\epsilon)}(\angle(u, w))$.

Mit Proposition 2 aus [41] und (4.7) sowie der Formel für $\varphi^{1,d-1}$ (siehe (7.2)) folgt dann

$$\begin{aligned}
& h^*(K, -w) \\
&= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\text{Nor}(K)} F_{1,d-1}^{(\epsilon)}(\angle(u, w)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \frac{\gamma(d, 1)}{2} \\
&\quad \times \int_{G^{u^\perp}(d-1, d-2)} \langle A_I(K; x, u), U \rangle^2 \varphi^{1,d-1}(u, U, w, \{o\}) \nu_{d-2}(dU) \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \\
&= \frac{c(d, 1)}{2} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int F_{1,d-1}^{(\epsilon)}(\angle(u, w)) \varphi^{1,d-1}(u, U, w, \{o\}) \Xi_1^{(d-2)}(K, d(x, u, U)) \\
&= \frac{c(d, 1)}{2} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{F^\perp(d, d-2)} F_{1,d-1}^{(\epsilon)}(\angle(u, w)) \varphi^{1,d-1}(u, U, w, \{o\}) \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)) \\
&= \frac{(d-1) \Gamma(\frac{1}{2})^{d-2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{F^\perp(d, d-2)} F_{1,d-1}^{(\epsilon)}(\angle(u, w)) \\
&\quad \times (d - (d+1) \|w\|U\|^2 - d\langle u, w \rangle^2) \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)). \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 7.3. Eine weitere Darstellung der zentrierten Stützfunktion über Krümmungen erhalten wir, wenn wir anstatt Proposition 2 aus [41] und (4.7) zu verwenden, die Norm $\|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge w\|^2$ direkt berechnen. Wir nutzen die Definition des Skalarprodukts für einfache k -Vektoren und entwickeln die entstehende Determinante, um

$$\|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge w\|^2 = \sum_{i \in I^c} \langle w, a_i(K; x, u) \rangle^2$$

zu erhalten. Setzen wir dies ein, so erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
& h^*(K, -w) \\
&= \int_{\text{Nor}(K)} F_{1,d-1}(\angle(u, w)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge w\|^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)) \\
&= \int_{\text{Nor}(K)} F_{1,d-1}(\angle(u, w)) \sum_{|I|=d-2} \mathbb{K}_I(K; x, u) \sum_{i \in I^c} \langle w, a_i(K; x, u) \rangle^2 \mathcal{H}^{d-1}(d(x, u)).
\end{aligned}$$

Für konvexe Körper in der Ebene erhalten wir folgende Darstellung der zentrierten Stützfunktion.

Proposition 7.4. *Sind K ein konvexer Körper im \mathbb{R}^2 und $w \in S^{d-1}$, so gilt für die zentrierte Stützfunktion*

$$h^*(K, -w) = \frac{1}{\pi} \int_{S^{d-1}} \angle(u, w) \cdot \sin \angle(u, w) \Psi_1(K, du).$$

Beweis. Im Beweis von Satz 7.2 geht die Bedingung $d \geq 3$ erst ein, wenn die Funktion $\varphi^{1,d-1}$ eingesetzt wird. Daher gilt die Formel aus Bemerkung 7.3 auch für $d = 2$ und wir erhalten

$$h^*(K, -w) = \int_{\text{Nor}(K)} F_{1,1}(\angle(u, w)) \sum_{|I|=0} \mathbb{K}_I(K; x, u) \|A_I(K; x, u) \wedge u \wedge w\|^2 \mathcal{H}^1(d(x, u)).$$

Die Indexmenge I ist also die leere Menge. Nutzen wir dies aus, setzen die Formel für $F_{1,1}$ (siehe Kapitel 6) ein und berechnen die Norm, so vereinfacht sich obige Formel zu

$$\begin{aligned} h^*(K, -w) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Nor}(K)} \angle(u, w) \cdot \sin \angle(u, w) (\sqrt{1 + k_1(K; x, u)^2})^{-1} \mathcal{H}^1(d(x, u)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int \angle(u, w) \cdot \sin \angle(u, w) \Xi_1(K, d(x, u)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{S^1} \angle(u, w) \cdot \sin \angle(u, w) \Psi_1(K, du), \end{aligned}$$

wobei in den letzten beiden Schritten zum einen Formel (3.14) verwendet wurde und zum anderen, dass die Oberflächenmaße Bildmaße der Stützmaße sind. \square

Bemerkung 7.5.

- 1) Diese Darstellung der zentrierten Stützfunktion ist gleich der Formel von Berg [9] (vergleiche auch [67], Formel (8.35)). Er zeigte, dass

$$h^*(K, -w) = \int_{S^1} g_2(\langle u, -w \rangle) \Psi_1(K, du),$$

wobei

$$g_2(t) := \frac{1}{\pi} (\pi - \arccos(t)) \sqrt{1 - t^2} - \frac{1}{2\pi} t, \quad t \in [-1, 1].$$

- 2) Die Darstellung der zentrierten Stützfunktion aus dem folgenden Satz 7.6 ist für $d = 2$ gleich der Formel aus Proposition 7.4.

In welchen Fällen in Satz 7.2 Grenzwertbildung und Integration vertauscht werden kann, zeigt der folgende Satz.

Satz 7.6. *Sind K ein konvexer Körper im \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ und $w \in S^{d-1}$, so gilt für die zentrierte Stützfunktion*

$$\begin{aligned} h^*(K, -w) &= \frac{(d-1) \Gamma(\frac{1}{2})^{d-2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_{F^\perp(d, d-2)} F_{1, d-1}(\angle(u, w)) \\ &\quad \times (d - (d+1) \|w|U\|^2 - d \langle u, w \rangle^2) \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)), \end{aligned}$$

- (a) für w und ρK für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$,
- (b) wenn die Stützfunktion von K von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$ ist,
- (c) wenn K ein Polytop ist und keine Seite von K parallel zu w^\perp ist.

Beweis. Wir können wie im Beweis zu Satz 6.4 vorgehen.

Im Folgenden werden mit c stets nicht genauer angegebene positive, endliche Konstanten bezeichnet, die unter anderem von K abhängen können. Für $\epsilon > 0$, $(u, U) \in F^\perp(d, d-2)$ und $w \in S^{d-1}$ erhalten wir wie im Beweis zu Satz 6.4, dass

$$F_{1, d-1}^{(\epsilon)}(\angle(u, w)) |\varphi^{1, d-1}(u, U, w, \{o\})| \leq c \cdot \sin^{3-d} \angle(u, w).$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass in den drei Fällen (a)-(c) der Satz von der majorisierten Konvergenz anwendbar ist. Die Behauptung folgt dann wegen $F_{k,l}^{(\epsilon)}(\angle(u, w)) \nearrow F_{k,l}(\angle(u, w))$ für $\epsilon \searrow 0$ aus Satz 7.2.

Wir zeigen zunächst Fall (a). Sei $\rho \in O(d)$. Wegen obiger Abschätzung bleibt zu zeigen, dass für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$ gilt, dass

$$\int_{F^\perp(d,d-2)} \sin^{3-d} \angle(u, w) \Psi_1^{(d-2)}(\rho K, d(u, U)) < \infty.$$

Da die Oberflächenmaße bis auf eine Konstante Bildmaße der Fahnen-Oberflächenmaße sind, folgt mit dem Satz von Fubini und aufgrund der $O(d)$ -Kovarianz der Stützmaße (siehe Satz 3.2 5)), dass

$$\begin{aligned} & \int_{SO(d)} \int_{F^\perp(d,d-2)} \sin^{3-d} \angle(u, w) \Psi_1^{(d-2)}(\rho K, d(u, U)) \nu_d(d\rho) \\ & \leq c \cdot \int \int_{SO(d)} \sin^{3-d} \angle(\rho u, w) \nu_d(d\rho) \Psi_1(K, du) \\ & = c \cdot \int \int_{S^{d-1}} \sin^{3-d} \angle(z, w) \mathcal{H}^{d-1}(dz) \Psi_1(K, du) \\ & \leq c \cdot \int 2\omega_{d-1} \Psi_1(K, du) \\ & \leq c \cdot S(K) \\ & < \infty, \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass für das innere Integral die Identität

$$\int_{S^{d-1}} \sin^{3-d} \angle(z, w) \mathcal{H}^{d-1}(dz) = \mathcal{H}^{d-2}(S^{d-2}) \cdot \int_0^\pi \sin \alpha \, d\alpha = 2\omega_{d-1}$$

gilt und mit $S(K)$ die Oberfläche von K bezeichnet wird.

Hiermit ist gezeigt, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden kann.

In den Fällen (b) und (c) kann ebenfalls analog zum Beweis von Satz 6.4 gezeigt werden, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden kann. \square

Unsere Darstellung der zentrierten Stützfunktion aus Satz 7.6 stimmt mit der Funktion g aus (7.3) überein. Da die zentrierte Stützfunktion nach Lemma 7.1 zentriert ist, ist dies also auch für g der Fall. Hätten wir die Eigenschaft der Zentriertheit für g direkt nachweisen können, so hätten wir Satz 7.6 mittels des Arguments (7.1) beweisen können.

Da die zentrierte Stützfunktion eines konvexen Körpers K gegeben ist durch $h^*(K, \cdot) = h(K, \cdot) - \langle s(K), \cdot \rangle$, folgt schließlich aus Satz 7.6 folgende Darstellung der Stützfunktion von K .

Korollar 7.7. *Sind K ein konvexer Körper im \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ und $w \in S^{d-1}$, so gilt für die Stützfunktion*

$$\begin{aligned} h(K, -w) &= \frac{(d-1)}{2\pi} \int_{F^\perp(d,d-2)} \frac{\angle(u, w)}{\sin^{d-1} \angle(u, w)} \int_0^1 (\sin t \angle(u, w))^{d-2} dt \\ & \quad \times (d - (d+1)\|w|U\|^2 - d\langle u, w \rangle^2) \Psi_1^{(d-2)}(K, d(u, U)) + \langle s(K), -w \rangle, \end{aligned}$$

- (a) für w und ρK für ν_d -fast alle $\rho \in O(d)$,
- (b) wenn die Stützfunktion von K von der Klasse $\mathcal{C}^{1,1}$ ist,
- (c) wenn K ein Polytop ist und keine Seite von K parallel zu w^\perp ist.

Bemerkung 7.8. Formen wir dies mit der Formel auf S. 639 in [41] weiter um, so erhalten wir mit $\frac{\tilde{\gamma}(d,1)}{c(d,1)} = \frac{1}{2}$ außerdem die Formel

$$h(K, -w) = \frac{(d-1)}{4\pi} \int_{G(d,d-2)} \int_{S^{d-1} \cap U^\perp} \frac{\angle(u, w)}{\sin^{d-1} \angle(u, w)} \int_0^1 (\sin t \angle(u, w))^{d-2} dt \\ \times (d - (d+1)\|w|U\|^2 - d\langle u, w \rangle^2) S_1^{U^\perp}(K|U^\perp, du) \nu_{d-2}(dU) + \langle s(K), -w \rangle.$$

7.2. Berechnung der Funktion $\varphi^{1,d-1}(u, U, v, \{o\})$

In diesem Abschnitt berechnen wir die Funktion $\varphi^{1,d-1}(u, U, v, \{o\})$ aus dem vorangegangenen Unterkapitel. Das Ergebnis dieser Berechnung wurde dort schon zur Berechnung der Stützfunktion verwendet.

Seien $u, v \in S^{d-1}$ und $U \in G(d, d-2)$ mit $d \geq 3$. Nach (6.5) gilt

$$\varphi^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) = \sum_{p=0}^{1 \wedge (d-2)} \sum_{q=0}^{(d-1) \wedge 0} \alpha_{p,q} \varphi_{p,q}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) \\ = \alpha_{0,0} \varphi_{0,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) + \alpha_{1,0} \varphi_{1,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}).$$

Berechnung von $\alpha_{0,0}$ und $\alpha_{1,0}$

Nach [41] erhalten wir die Konstanten $\alpha_{0,0}$ und $\alpha_{1,0}$ aus

$$(\alpha_{0,0}, \alpha_{1,0}) (D(d-1, d-2) \otimes D(d-1, 0)) = ((\gamma(d, 1)\gamma(d, d-1))^{-1}, 0) \\ \iff (\alpha_{0,0}, \alpha_{1,0}) = ((\gamma(d, 1)\gamma(d, d-1))^{-1}, 0) (D(d-1, d-2) \otimes D(d-1, 0))^{-1}.$$

Hierbei sind die Konstanten $\gamma(d, 1)$ und $\gamma(d, d-1)$ gegeben durch (vergleiche (6.1))

$$\gamma(d, 1) = \frac{1}{2} \binom{d-1}{1} \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}} = \frac{1}{2} (d-1) \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}$$

sowie

$$\gamma(d, d-1) = \frac{1}{2} \binom{d-1}{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2},$$

das heißt

$$(\gamma(d, 1)\gamma(d, d-1))^{-1} = \frac{4}{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}.$$

Weiter gilt nach der Bemerkung auf S. 649 in [41], dass

$$D(d-1, k) = \left(d_{i,j}^{d-1,k} \right)_{i,j=0}^{k \wedge (d-1-k)}$$

mit

$$d_{i,j}^{d-1,k} = \sum_{m=0}^{k \wedge (d-1-k)} c_{k,m}^{d-1} \sum_{l=0}^k \binom{k-j}{l} \binom{j}{k-i-l} \binom{j}{k-m-l} \binom{d-1-k-j}{m+l+i-k}.$$

In unserem Fall gilt somit

$$\begin{aligned} D(d-1, 0) &= d_{0,0}^{d-1,0} = \sum_{m=0}^0 c_{0,m}^{d-1} \sum_{l=0}^0 \binom{0}{l} \binom{0}{-l} \binom{0}{-m-l} \binom{d-1}{m+l} \\ &= c_{0,0}^{d-1} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} D(d-1, d-2) &= \begin{pmatrix} d_{0,0}^{d-1,d-2} & d_{0,1}^{d-1,d-2} \\ d_{1,0}^{d-1,d-2} & d_{1,1}^{d-1,d-2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{d-2,0}^{d-1} & c_{d-2,1}^{d-1} \\ (d-2)c_{d-2,1}^{d-1} & c_{d-2,0}^{d-1} + (d-3)c_{d-2,1}^{d-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um $\alpha_{0,0}$ und $\alpha_{1,0}$ zu erhalten, müssen also noch die Konstanten $c_{0,0}^{d-1}$, $c_{d-2,0}^{d-1}$ und $c_{d-2,1}^{d-1}$ berechnet werden. Dies geschieht im Folgenden.

Nach Lemma 3 in [41] existiert eine positive Konstante $c_{0,0}^{d-1}$, sodass für lineare Unterräume $A, B \in G(d-1, 0)$ gilt, dass

$$\int_{G(d-1,0)} \langle A, V \rangle^2 \langle V, B \rangle^2 \nu_0^{d-1}(dV) = c_{0,0}^{d-1} \langle A, B \rangle^2. \quad (7.4)$$

Wegen $\langle A, B \rangle^2 = 1$ für $A, B \in G(d-1, 0)$, folgt

$$\int_{G(d-1,0)} \langle A, V \rangle^2 \langle V, B \rangle^2 \nu_0^{d-1}(dV) = \int_{G(d-1,0)} 1 \nu_0^{d-1}(dV) = 1$$

und somit aus (7.4), dass

$$c_{0,0}^{d-1} = 1.$$

Für die anderen Konstanten gilt Ähnliches:

Nach Lemma 3 in [41] existieren positive Konstanten $c_{d-2,0}^{d-1}$ und $c_{d-2,1}^{d-1}$, sodass für $A, B \in G(d-1, d-2)$ gilt

$$\int_{G(d-1,d-2)} \langle A, V \rangle^2 \langle V, B \rangle^2 \nu_{d-2}^{d-1}(dV) = c_{d-2,0}^{d-1} \langle A, B \rangle^2 + c_{d-2,1}^{d-1} \langle A, B \rangle_1^2.$$

Andererseits gilt

$$\int_{G(d-1,d-2)} \langle A, V \rangle^2 \langle V, B \rangle^2 \nu_{d-2}^{d-1}(dV) = \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2}} \langle a, v \rangle^2 \langle v, b \rangle^2 \mathcal{H}^{d-2}(dv)$$

mit $a, b \in S^{d-2}$.

Gilt $A = B$, so folgt daraus

$$\begin{aligned} \int_{G(d-1,d-2)} \langle A, V \rangle^4 \nu_{d-2}^{d-1}(dV) &= c_{d-2,0}^{d-1} \langle A, A \rangle^2 + c_{d-2,1}^{d-1} \langle A, A \rangle_1^2 \\ &= \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2}} \langle a, v \rangle^4 \mathcal{H}^{d-2}(dv). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Wegen $\langle A, A \rangle_1 = 0$ und $\langle A, A \rangle = 1$, gilt somit

$$\begin{aligned} c_{d-2,0}^{d-1} &= \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2}} \langle a, v \rangle^4 \mathcal{H}^{d-2}(dv) \\ &= \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2} \cap v^\perp} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{d-4}{2}} t^4 dt \mathcal{H}^{d-3}(dv) \\ &= \frac{\omega_{d-2}}{\omega_{d-1}} 2 \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{d-4}{2}} t^4 dt. \end{aligned}$$

Die Substitution $t^2 = s$ sowie die Definition der Betafunktion

$$B(x, y) = \int_0^1 (1-s)^{x-1} s^{y-1} ds = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

führen zu

$$\begin{aligned} c_{d-2,0}^{d-1} &= \frac{\omega_{d-2}}{\omega_{d-1}} 2 \int_0^1 (1-s)^{\frac{d-4}{2}} s^2 \frac{1}{2s^{\frac{1}{2}}} ds \\ &= \frac{\omega_{d-2}}{\omega_{d-1}} \int_0^1 (1-s)^{\frac{d-2}{2}-1} s^{\frac{5}{2}-1} ds \\ &= \frac{\omega_{d-2}}{\omega_{d-1}} \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{d+3}{2})} \\ &= \frac{3}{(d-1)(d+1)}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (7.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{G(d-1, d-2)} \langle A, V \rangle^2 \langle V, B \rangle^2 \nu_{d-2}^{d-1}(dV) &= \frac{3}{(d-1)(d+1)} \langle A, B \rangle^2 + c_{d-2,1}^{d-1} \langle A, B \rangle_1^2 \\ &= \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2}} \langle a, v \rangle^2 \langle v, b \rangle^2 \mathcal{H}^{d-2}(dv). \end{aligned}$$

Sei nun $A \neq B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\int_{G(d-1, d-2)} \langle A, V \rangle^2 \langle V, B \rangle^2 \nu_{d-2}^{d-1}(dV) \\ &= \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2}} \langle a, v \rangle^2 \langle v, b \rangle^2 \mathcal{H}^{d-2}(dv) \\ &= \frac{1}{\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2}} \langle a, v \rangle^2 \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} \langle v, b_i \rangle^2 \mathcal{H}^{d-2}(dv). \end{aligned}$$

Da die b_i eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^{d-1} bilden gilt $\sum_{i=1}^{d-1} \langle v, b_i \rangle^2 = \|v\|^2 = 1$. Außerdem kann mit [67], S. 50 (oder durch Berechnung wie oben) vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} &\int_{G(d-1, d-2)} \langle A, V \rangle^2 \langle V, B \rangle^2 \nu_{d-2}^{d-1}(dV) \\ &= \frac{1}{(d-1)\omega_{d-1}} \int_{S^{d-2}} \langle a, v \rangle^2 \mathcal{H}^{d-2}(dv) \\ &= \frac{1}{(d-1)^2}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{(d-1)(d+1)} \langle a, b \rangle^2 + c_{d-2,1}^{d-1} \langle a, b \rangle_1^2 \\
&= \frac{3}{(d-1)^2(d+1)} \sum_{i=1}^{d-1} \langle a, b_i \rangle^2 + c_{d-2,1}^{d-1} \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} \langle a, b_i \rangle_1^2 \\
&= \frac{3}{(d-1)^2(d+1)} \sum_{i=1}^{d-1} \langle a, b_i \rangle^2 + c_{d-2,1}^{d-1} \frac{1}{d-1} \sum_{i=1}^{d-1} (1 - \langle a, b_i \rangle^2) \\
&= \frac{3}{(d-1)^2(d+1)} + c_{d-2,1}^{d-1} \frac{d-2}{d-1}.
\end{aligned}$$

Durch Zusammenfügen beider Identitäten, erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{(d-1)^2(d+1)} + c_{d-2,1}^{d-1} \frac{d-2}{d-1} = \frac{1}{(d-1)^2} \\
& \iff \frac{3}{(d-1)(d+1)} + c_{d-2,1}^{d-1} (d-2) = \frac{1}{d-1}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
c_{d-2,1}^{d-1} &= \left(\frac{1}{d-1} - \frac{3}{(d-1)(d+1)} \right) \frac{1}{d-2} \\
&= \frac{1}{(d-1)(d+1)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt bedeutet das

$$D(d-1, d-2) = \frac{1}{(d-1)(d+1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ d-2 & d \end{pmatrix}$$

und

$$D(d-1, d-2) \otimes D(d-1, 0) = \frac{1}{(d-1)(d+1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ d-2 & d \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned}
(D(d-1, d-2) \otimes D(d-1, 0))^{-1} &= \frac{(d-1)(d+1)}{2(d+1)} \begin{pmatrix} d & -1 \\ -(d-2) & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{(d-1)}{2} \begin{pmatrix} d & -1 \\ -(d-2) & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
(\alpha_{0,0}, \alpha_{1,0}) &= ((\gamma(d, 1)\gamma(d, d-1))^{-1}, 0) (D(d-1, d-2) \otimes D(d-1, 0))^{-1} \\
&= \left(\frac{4}{d-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}, 0 \right) \frac{(d-1)}{2} \begin{pmatrix} d & -1 \\ -(d-2) & 3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{2d\Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}, \frac{-2\Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \right).
\end{aligned}$$

Berechnung von $\varphi_{0,0}^{1,d-1}$ und $\varphi_{1,0}^{1,d-1}$

Nach der Definition (6.6) von $\varphi_{p,q}^{1,d-1}$ gilt für $0 \leq p \leq 1$ und $q = 0$, dass

$$\varphi_{p,0}^{1,d-1}(u, U, v, V) = \sum_{\substack{|I|=d-2 \\ |I \cap I_0|=d-2-p}} \sum_{\substack{|J|=0 \\ |J \cap J_0|=0}} \left\| \bigwedge_{i \in I} u_i \wedge u \wedge \bigwedge_{j \in J} v_j \wedge v \right\|^2.$$

Hierbei gilt $|I_0| = d - 2$ sowie $|J_0| = 0$, das heißt $J_0 = \emptyset$ und daher $V = \{o\}$.

Wähle Einheitsvektoren u_1, \dots, u_{d-1} und v_1, \dots, v_{d-1} so, dass u_1, \dots, u_{d-1}, u beziehungsweise v_1, \dots, v_{d-1}, v Orthonormalbasen des \mathbb{R}^d sind und $U = \text{lin}(\{u_1, \dots, u_{d-2}\})$, das heißt $I_0 = \{1, \dots, d-2\}$.

Dann gilt nach obiger Formel

$$\varphi_{0,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) = \left\| \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-2\}} u_i \wedge u \wedge 1 \wedge v \right\|^2 = \|U \wedge u \wedge 1 \wedge v\|^2$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) &= \sum_{\substack{|I|=d-2 \\ |I \cap I_0|=d-3}} \left\| \bigwedge_{i \in I} u_i \wedge u \wedge 1 \wedge v \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d-2} \left\| \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-1\} \setminus j} u_i \wedge u \wedge 1 \wedge v \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d-2} \|u_1 \wedge \dots \wedge u_{j-1} \wedge u_{j+1} \wedge \dots \wedge u_{d-2} \wedge u_{d-1} \wedge u \wedge 1 \wedge v\|^2. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) + \varphi_{1,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) &= \sum_{j=1}^{d-1} \left\| \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-1\} \setminus j} u_i \wedge u \wedge 1 \wedge v \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d-1} \left\| \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-1\} \setminus j} u_i \wedge u \wedge v \right\|^2. \end{aligned}$$

Nach der Definition des Skalarprodukts für einfache k -Vektoren gilt

$$\begin{aligned} &\varphi_{0,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) \\ &= \left\| \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-2\}} u_i \wedge u \wedge v \right\|^2 \\ &= \left\langle \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-2\}} u_i \wedge u \wedge v, \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-2\}} u_i \wedge u \wedge v \right\rangle \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \langle u_1, v \rangle \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & \langle u_2, v \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 & \langle u_{d-2}, v \rangle \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u_1 \rangle & \langle v, u_2 \rangle & \dots & \langle v, u_{d-2} \rangle & \langle v, u \rangle & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da $u_1, \dots, u_{d-1}, u = u_d$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^d bilden und somit $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$ gilt.

Durch Entwicklung dieser Determinante erhalten wir

$$\begin{aligned}\varphi_{0,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) &= 1 - \langle v, u \rangle^2 - (-1)^{4d-8} \langle v, u_1 \rangle^2 - (-1)^{4d-12} \langle v, u_2 \rangle^2 \\ &\quad - (-1)^{4d-16} \langle v, u_3 \rangle^2 - \dots - (-1)^4 \langle v, u_{d-2} \rangle^2 \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{d-2} \langle v, u_i \rangle^2 - \langle v, u \rangle^2 \\ &= 1 - \|v|U\|^2 - \langle v, u \rangle^2,\end{aligned}$$

da $U = \text{lin}(\{u_1, \dots, u_{d-2}\})$.

Für $\varphi_{1,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\})$ ergibt sich analog zur vorherigen Rechnung, dass

$$\begin{aligned}\varphi_{1,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) &= \sum_{j=1}^{d-2} \left\| \bigwedge_{i \in \{1, \dots, d-1\} \setminus j} u_i \wedge u \wedge 1 \wedge v \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d-2} \langle v, u_j \rangle^2 \\ &= \|v|U\|^2.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned}\varphi^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) &= \alpha_{0,0} \varphi_{0,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) + \alpha_{1,0} \varphi_{1,0}^{1,d-1}(u, U, v, \{o\}) \\ &= \frac{2d \Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} (1 - \|v|U\|^2 - \langle v, u \rangle^2) - \frac{2 \Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \|v|U\|^2 \\ &= \frac{2 \Gamma(\frac{1}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} (d - (d+1) \|v|U\|^2 - d \langle u, v \rangle^2).\end{aligned}$$

Teil II.

Zufällige Polytope

8. Einführung

Spätestens seit J. J. Sylvester im Jahr 1864 sein bekanntes Vier-Punkte-Problem (siehe [72]) formulierte, werden zufällige Polytope, das heißt die konvexe Hülle von unabhängigen zufälligen Punkten in einem konvexen Körper, ausgiebig erforscht. Sylvester fragte damals nach der Wahrscheinlichkeit, dass die konvexe Hülle von vier zufälligen unabhängigen gleichverteilten Punkten in einem ebenen konvexen Körper ein Dreieck bildet. Schon bei dieser einfach anmutenden Fragestellung zeigt sich, dass die Antwort von der Form des konvexen Körpers, besonders der Beschaffenheit des Randes, abhängt. So ist die Wahrscheinlichkeit minimal, wenn die Punkte in einer Ellipse gewählt werden und maximal, wenn der konvexe Körper selbst ein Dreieck ist (siehe [11]).

Möchte man Sylvesters Problem in höheren Dimensionen betrachten, kann man zum Beispiel nach der mittleren Eckenzahl des zufälligen Polytops $K_{(n)}$ fragen, das als konvexe Hülle von n zufälligen Punkten in einem konvexen Körper K entsteht. Noch allgemeiner ist die Frage nach der erwarteten Anzahl an k -dimensionalen Seiten f_k ($k = 0, \dots, d-1$) des zufälligen Polytops $K_{(n)}$. Erste Ergebnisse in dieser Hinsicht lieferten Rényi und Sulanke [57], allerdings nach wie vor im \mathbb{R}^2 . Danach folgten zwar auch Resultate für den d -dimensionalen Raum, lange Zeit beschränkten sie sich jedoch auf die erwartete Ecken- und Facettenzahl (teils mit unterschiedlichen Fehlertermen) für konvexe Körper K von der Klasse \mathcal{C}_+^3 und in K gleichverteilte Punkte (siehe [80], [3], [4], [70]). Schließlich gelang es Reitzner [56] für den Erwartungswert der Anzahl der k -Seiten, genauer gesagt für den Erwartungswert des f -Vektors $f(K_{(n)}) = (f_0(K_{(n)}), \dots, f_{d-1}(K_{(n)}))$, die Formel

$$\mathbb{E}f(K_{(n)}) = \bar{c}_1(d) n^{\frac{d-1}{d+1}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) + o(n^{\frac{d-1}{d+1}})$$

für $n \rightarrow \infty$ zu zeigen und die Varianz abzuschätzen

$$\text{Var}(f_k(K_{(n)})) \leq c_1(d, k, K) n^{\frac{d-1}{d+1}}, \quad k = 0, \dots, d-1.$$

Hieraus leitete er ab, dass

$$f(K_{(n)}) n^{-\frac{d-1}{d+1}} \rightarrow \bar{c}_1(d) \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx)$$

in Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$ gilt. Hierbei ist K ein konvexer Körper von der Klasse \mathcal{C}_+^2 und die zufälligen Punkte sind gleichverteilt in K . Die exakten Einträge des konstanten Vektors $\bar{c}_1(d) \in \mathbb{R}^d$ und die Werte der Konstanten $c_1(d, k, K)$ konnten von Reitzner nicht berechnet werden. Hier und im Folgenden bezeichnet $c_i(\cdot)$ stets positive Konstanten, die nur von den Größen in der Klammer abhängen. Ebenso verfahren wir mit Vektoren $\bar{c}_i(\cdot) \in \mathbb{R}^d$.

Handelt es sich bei dem konvexen Körper K selbst auch um ein Polytop, so nimmt Reitzners Ergebnis eine andere Form an. Dann gilt

$$\mathbb{E}(f(K_{(n)}))(\ln n)^{-(d-1)} \rightarrow \bar{c}_2(d) T(K) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei $T(K)$ die Anzahl der Fahnen des Polytops K bezeichnet. Hierbei wird ein Tupel (F_0, \dots, F_{d-1}) aus Seiten $F_k \in \mathcal{F}_k(K)$, $0 \leq k \leq d-1$, als Fahne von K bezeichnet, falls

$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{d-1}$ gilt. Die zugehörigen Varianzabschätzungen lieferten Bárány und Reitzner [7]

$$\text{Var}(f_k(K_{(n)})) \leq c_2(d, K) (\log n)^{d-1}, \quad k = 0, \dots, d-1.$$

Aus diesen Abschätzungen folgen starke Gesetze der großen Zahlen. Außerdem zeigten Bárány und Reitzner, dass es für die Varianz untere Schranken von gleicher Ordnung gibt.

Neben diesen kombinatorischen Funktionalen wird auch die Güte der Approximation des konvexen Körpers durch das zufällige Polytop untersucht. Wächst die Anzahl n der zufälligen Punkte, so ist plausibel, dass das zufällige Polytop sich dem konvexen Körper mit wachsender Genauigkeit annähert. Der Fehler dieser Approximation kann gemessen werden, indem der Erwartungswert der Differenz $F(K) - F(K_{(n)})$ für ein auf der Menge der konvexen Körper definiertes Funktional F betrachtet wird. Explizite Formeln hierfür sind kaum zu berechnen, daher werden scharfe Schranken, zum Beispiel durch asymptotische Formeln für wachsendes n , gesucht. Als das Funktional F werden häufig das Volumen, die Oberfläche oder die mittlere Breite gewählt, da die Berechnungen hier einfacher durchführbar sind als beispielsweise bei anderen der inneren Volumina. Von diesen dreien ist das Volumen besonders interessant, da das erwartete Volumen von K ohne $K_{(n)}$ gleich der symmetrischen Differenz, einer Metrik auf \mathcal{K}^d , ist. Sie ist gegeben durch (vergleiche [67], S. 71)

$$\delta^S(K, L) := \mathcal{H}^d((K \setminus L) \cup (L \setminus K)) \quad \text{für } K, L \in \mathcal{K}^d.$$

Die meisten bekannten Resultate behandeln das asymptotische Verhalten der konvexen Hülle gleichverteilter Punkte in K . Auch im Folgenden ist hiervon auszugehen, insofern nicht explizit auf eine andere Verteilung hingewiesen wird. Die ersten Ergebnisse zu Flächeninhalt und Länge des Umfangs in der Ebene stammen abermals von Rényi und Sulanke [58]. Sie berechneten explizite Formeln für den Erwartungswert des Flächeninhalts und der Länge des Umfangs für konvexe Körper der Klasse \mathcal{C}_+^2 und für Quadrate. Weitere asymptotische Formeln für die Volumendifferenz wurden von Bárány [4], Reitzner [54] und Schütt [70] veröffentlicht. Die allgemeinste jedoch ist die von Böröczky et al. [12], da keine Voraussetzungen an den konvexen Körper K gestellt werden,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_\varrho \left(\int_{K \setminus K_{(n)}} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) = c_3(d) \int_{\partial K} \varrho(x)^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(x) \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx), \quad (8.1)$$

wobei ϱ eine geeignete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf K ist und λ eine geeignete integrierbare Funktion. Wählt man die Gewichtungsfunktion $\lambda \equiv 1$, so erhält man die Volumendifferenz, und ist ϱ konstant, so betrachtet man gleichverteilte zufällige Punkte in K . Die Konstante $c_3(d)$ wird in [12] explizit angegeben. Im Fall von gleichverteilten zufälligen Punkten in einem konvexen Körper K von der Klasse \mathcal{C}_+^2 gelangen Reitzner in [53, 55] Varianzabschätzungen der Form

$$c_4(K) n^{-\frac{d+3}{d+1}} \leq \text{Var}(V(K_{(n)})) \leq c'_4(K) n^{-\frac{d+3}{d+1}}.$$

Eine asymptotische Formel für die Varianz lieferten Calka und Yukich [22]. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{d+3}{d+1}} \text{Var}(V(K_{(n)})) = c_5(d, V(K)) \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx),$$

wobei die zufälligen Punkte gleichverteilt in einem konvexen Körper K der Klasse \mathcal{C}_+^{d+6} sind.

Mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen Eckenanzahl und Volumen

$$\mathbb{E}_\varrho(f_0(K_{(n)})) = n \mathbb{E}_\varrho \left(\int_{K \setminus K_{(n-1)}} \varrho(x) \mathcal{H}^d(dx) \right),$$

der auf Efron (siehe [24], Dimension $d = 2, 3$) zurückgeht, wird in [12] aus (8.1) gefolgert, dass für die erwartete Eckenanzahl gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{d-1}{d+1}} \mathbb{E}_\varrho(f_0(K_{(n)})) = c_3(d) \int_{\partial K} \varrho(x)^{\frac{d-1}{d+1}} \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx).$$

Sind die zufälligen Punkte gleichverteilt in einem Polytop K , so zeigten Bárány und Buchta [5], dass die Volumendifferenz

$$V(K) - \mathbb{E}(V(K_{(n)})) = T(K) \frac{n^{-1}(\ln n)^{d-1}}{(d+1)^{d-1}(d-1)!} + O(n^{-1}(\ln n)^{d-2} \ln \ln n)$$

erfüllt. Bárány und Reitzner [7] schätzten die Varianz unter der Voraussetzung $V(K) = 1$ ab

$$\text{Var}(V(K_{(n)})) \leq c_6(d, K) \frac{(\log n)^{d-1}}{n^2}$$

und folgerten daraus ein starkes Gesetz der großen Zahlen. Eine untere Schranke für die Varianz von gleicher Ordnung existiert ebenfalls.

Befasst man sich mit dem Volumenfunktional, so liegt die Frage nahe, ob ähnliche Resultate für die anderen inneren Volumina gelten. Böröczky et al. [15] verallgemeinerten Bárány's [4] und Reitzner's [54] Resultate zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{V(K)} \right)^{\frac{2}{d+1}} (V_i(K) - \mathbb{E}(V_i(K_{(n)}))) = c_7(d, i) \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} H_{d-i}(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx),$$

$i = 1, \dots, d-1$, für konvexe Körper, in denen eine Kugel frei rollt. Varianzabschätzungen gibt es bisher nur für konvexe Körper von der Klasse \mathcal{C}_+^2 . Den Beweis führten Bárány et al. [6] zwar nur für den Fall einer Kugel mit Hilfe einer Kappenüberdeckungstechnik durch, geben aber die Idee an, wie sich der Beweis auf glatte konvexe Körper verallgemeinern lässt. Aus ihrer Abschätzung

$$c_8(K) n^{-\frac{d+3}{d+1}} < \text{Var}(V_i(K_{(n)})) < c'_8(K) n^{-\frac{d+3}{d+1}}$$

für die Varianz folgerten Bárány et al. [6] dann ein starkes Gesetz der großen Zahlen.

Die asymptotische Formel

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{\frac{d+3}{d+1}} \text{Var}(V_i(K_\lambda)) = \sigma_{V_i}^2$$

für die Varianz stammt in diesem Fall von Calka et al. [21]. Hierbei ist K_λ die konvexe Hülle von Punkten eines Poissonpunktprozesses im \mathbb{R}^d mit Intensität λ , die in einem konvexen Körper der Klasse \mathcal{C}_+^3 liegen, und $\sigma_{V_i}^2$ wird mit Hilfe von zwei bestimmten Prozessen in $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ beschrieben (siehe [21] für Details).

Da wir uns im Folgenden mit der mittleren Breite befassen werden, wollen wir die hierzu bekannten Resultate genauer betrachten. In [14] zeigen Böröczky et al. die asymptotische Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} (W(K) - \mathbb{E}(W(K_{(n)}))) = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right)}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} \omega_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \quad (8.2)$$

für alle konvexen Körper K mit Volumen eins, in denen eine Kugel frei rollt. Ihr Beweis enthält eine Lücke, die wir mit dem später folgenden Lemma 8.1 schließen. Schon vor Böröczky et al. bewiesen Schneider und Wieacker [69] und Reitzner [54] dieses Resultat unter stärkeren Voraussetzungen an den konvexen Körper K . In der Arbeit [14] wird außerdem die Varianz abgeschätzt. Es gilt

$$c_9(K) n^{-\frac{d+3}{d+1}} < \text{Var}(W(K_{(n)})) < c'_9(K) n^{-\frac{d+3}{d+1}}.$$

Mit Hilfe der Abschätzung nach oben, der Tschebyscheff-Ungleichung und dem Borel-Cantelli-Lemma wird dann schließlich ein starkes Gesetz der großen Zahlen für die Differenz der mittleren Breiten von K und $K_{(n)}$ hergeleitet.

Ein entsprechendes Resultat für ein Polytop K bewies Schneider [64]. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W(K) - \mathbb{E}(W(K_{(n)}))) n^{\frac{1}{d}} = c_{10}(K),$$

wobei die von Schneider angegebene Konstante $c_{10}(K)$ nur von der Form des Polytops K in der Nähe seiner Ecken abhängt.

Die ersten zentralen Grenzwertsätze stammen von Groeneboom [33] (siehe auch Finch und Hueter [28]) und Hsing [36] (siehe auch Buchta [19]), sie gelten allerdings nur in der Ebene. Ein Durchbruch in höheren Dimensionen gelang wiederum Reitzner [55], der einen zentralen Grenzwertsatz für die Anzahl der k -Seiten $f_k(\Pi_n)$, $k = 0, \dots, d-1$, und das Volumen $V(\Pi_n)$ bewies. Das zufällige Polytop Π_n ist hier die konvexe Hülle von Punkten eines Poissonpunktprozesses der Intensität n , die in einem konvexen Körpers K der Klasse \mathcal{C}_+^2 liegen. Analoge zentrale Grenzwertsätze für den Fall, dass K selbst ein Polytop ist, bewiesen Bárány und Reitzner [8]. Vu [74] gelang es, Reitzners [55] Resultate auf zufällige Polytope $K_{(n)}$ zu übertragen. Vu merkt an, dass seine Methode auch anwendbar ist, wenn K ein Polytop ist. Der zentrale Grenzwertsatz von Bárány und Reitzner [8] stand ihm damals allerdings noch nicht zur Verfügung.

Vereinzelt wurden auch andere Funktionale wie der Hausdorffabstand von K und $K_{(n)}$ (siehe [10] und [23]) oder der Unterschied der Durchmesser (siehe [49] und [48]) betrachtet. In einer jüngeren Arbeit betrachten Hug und Schneider [42] den Hausdorffabstand bei einer Approximation eines konvexen Körpers K von außen durch eine zufällige polyedrische Menge. Diese ist der Schnitt von abgeschlossenen Halbräumen, die durch Hyperebenen eines stationären Poisson-Hyperebenen-Prozesses begrenzt sind und K enthalten.

Im folgenden Kapitel 9 verallgemeinern wir die asymptotische Formel (8.2) der erwarteten Differenz der mittleren Breiten. In der Diplomarbeit der Autorin [73] wurde ein entsprechendes Resultat für die gewichtete mittlere Breite erzielt. Ausgehend davon betrachten wir nun die konvexe Hülle von Punkten, die gemäß einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ϱ in K gewählt werden. Das heißt die zufälligen Punkte sind nun nicht wie in [14] gleichverteilt in K . Außerdem werden wir obere und untere Abschätzungen für die Varianz beweisen, die ein starkes Gesetz der großen Zahlen implizieren. In Kapitel 10 betrachten wir dann ein weiteres Modell eines zufälligen Polytops, das als konvexe Hülle von zufälligen Punkten auf dem Rand eines konvexen Körpers entsteht. In diesem Fall betrachten wir die Volumendifferenz und beweisen eine analoge Formel zu (8.1). In beiden Kapiteln nutzen wir Dualität aus, um Resultate für zufällige polyedrische Mengen, das heißt Schnitte von zufälligen Halbräumen, die einen konvexen Körper enthalten, herzuleiten. Die konkret betrachteten Modelle werden in den Abschnitten eingeführt, in denen sie benötigt werden.

Zusätzlich zu der schon bekannten Notation aus den vorangegangenen Kapiteln, werden wir noch einige weitere Bezeichnungen benötigen.

Mit K wird weiterhin ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d bezeichnet. Entgegen der Notation in den vorangegangenen Kapiteln wird die konvexe Hülle von Teilmengen $X_1, \dots, X_r \subset \mathbb{R}^d$ und Punkten $x_1, \dots, x_s \in \mathbb{R}^d$ nun mit $[X_1, \dots, X_r, x_1, \dots, x_s]$ bezeichnet.

Wir werden im Folgenden voraussetzen, dass eine Kugel vom Radius $r(K) > 0$ *frei in K rollt*, das heißt, dass jeder Randpunkt $x \in \partial K$ auf dem Rand einer Kugel $B \subset K$ vom Radius $r(K)$ liegt (vergleiche Abbildung 8.1). In diesem Fall ist K also glatt, da alle Stützhyperebenen an K eindeutig sind. Das Vorhandensein einer rollenden Kugel ist

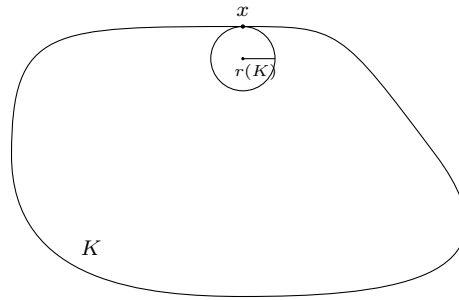


Abbildung 8.1.: Kugel mit Radius $r(K) > 0$ rollt frei in K

äquivalent dazu, dass die Gauß-Abbildung σ_K eine Lipschitzfunktion auf ∂K ist (vergleiche [40] oder [43], Lemma 3.3).

Des Weiteren definieren wir die Mengen

$$D_K := \{(t, u) \in [0, \infty) \times S^{d-1} : t = h_K(u)\}$$

und

$$C(u, t) := K \cap H^+(u, t).$$

Seien $x \in \partial K$ und $t \in (0, h_K(\sigma_K(x)))$. Dann nennen wir $C(\sigma_K(x), h_K(\sigma_K(x)) - t)$ eine *Kappe* der Höhe t in $x \in \partial K$ (vergleiche Abbildung 8.2).

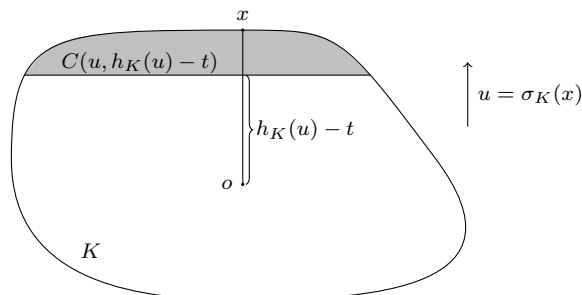


Abbildung 8.2.: Kappe von K

Ist $f : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, so kann ein Integral über die Sphäre mit Hilfe der Koflächenformel von Federer (siehe [26], Theorem 3.2.12) und der Gauß-Abbildung σ_K in ein Integral über den Rand eines konvexen Körpers K , in dem eine Kugel frei rollt, umgewandelt werden. Dies sehen wir im nächsten Lemma, das somit auch eine Lücke im

Beweis zu Theorem 1.1 in [14] (vergleiche Formel (8.2)) schließt. In dem Beweis in [14] wurde die uns aus Abschnitt 2.4 bekannte Formel (2.3) angewendet, die allerdings nur für konvexe Körper der Klasse \mathcal{C}_+^2 gilt.

Lemma 8.1. *Sei K ein konvexer Körper \mathbb{R}^d , in dem eine Kugel frei rollt, und f eine messbare Funktion auf S^{d-1} . Dann gilt*

$$\int_{S^{d-1}} f(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) = \int_{\partial K} f(\sigma_K(x)) \kappa(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx).$$

Beweis. Da eine Kugel in K frei rollt, ist die Gauß-Abbildung σ_K überall auf ∂K definiert und Lipschitz-stetig (siehe [43], Lemma 3.3). Des Weiteren liefert Lemma 2.3 in [37], dass die (approximative) Jacobi-Determinante von σ_K für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ gegeben ist durch

$$\text{apJ}_{d-1}\sigma_K(x) = \kappa(x).$$

Mit der Kofflächenformel von Federer (siehe [26], Theorem 3.2.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(\sigma_K(x)) \kappa(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) &= \int_{\partial K} f(\sigma_K(x)) \text{apJ}_{d-1}\sigma_K(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &= \int_{S^{d-1}} \int_{\sigma_K^{-1}(\{u\})} f(\sigma_K(x)) \mathcal{H}^0(dx) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \int_{S^{d-1}} f(u) \mathcal{H}^{d-1}(du), \end{aligned}$$

wobei wir ausnutzen, dass es für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ genau ein $x \in \partial K$ gibt mit $u = \sigma_K(x)$ (siehe [67], Theorem 2.2.11). \square

Seien f und g reelle Funktionen, die auf demselben Raum $I \subset \mathbb{R}$ definiert sind. Wir schreiben $f \ll g$ oder $f = O(g)$, falls es eine positive Konstante γ gibt, die von K , g und g abhängen kann, sodass $|f| \leq \gamma \cdot g$ auf I . Des Weiteren schreiben wir $f \sim g$, falls $I = \mathbb{N}$ und $f(n)/g(n) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$, $n \in I$.

Schließlich zitieren wir noch ein Lemma, das ursprünglich aus [14] stammt. In den folgenden Beweisen werden wir es mehrfach benötigen, allerdings teilweise in einer allgemeineren Form. Daher formulieren wir es etwas anders als in [14].

Lemma 8.2. *Seien $\beta \geq 0$, $\omega > 0$ und $\alpha = \frac{2(\beta+1)}{d+1}$. Sei $\mu : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t) = 1$. Falls $g(n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $g(n) \geq \left(\frac{2(\alpha+1) \ln n}{\omega}\right)^{\frac{2}{d+1}}$ für große n , so gilt*

$$\int_0^{g(n)} t^\beta (1 - \mu(t) \omega t^{\frac{d+1}{2}})^n dt \sim \frac{2}{(d+1)\omega^{\frac{2(\beta+1)}{d+1}}} \cdot \Gamma\left(\frac{2(\beta+1)}{d+1}\right) n^{-\frac{2(\beta+1)}{d+1}}.$$

Bemerkung 8.3. Lemma 8.1 dieses Kapitels ist in der gemeinsamen Arbeit [30] mit F. Fodor und D. Hug enthalten.

9. Konvexe Hüllen von Punkten in einem konvexen Körper

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst das bekannteste Modell eines zufälligen Polytops, nämlich die konvexe Hülle von zufälligen identisch verteilten Punkten in einem gegebenen konvexen Körper K . Da K konvex ist, ist das zufällige Polytop komplett in K enthalten. Die Eckpunkte des Polytops müssen hierbei aber nicht wie später in Kapitel 10 auf dem Rand des konvexen Körpers liegen.

Das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmodell wird im Folgenden beschrieben (vergleiche auch [12]). Sei ϱ eine beschränkte nichtnegative messbare Funktion auf K und $\int_K \varrho(x) \mathcal{H}^d(dx) = 1$. Nun wählen wir zufällige Punkte aus K gemäß dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_{\varrho, K}$, das die Dichte ϱ bezüglich $\mathcal{H}^d \llcorner K$ hat. Den Erwartungswert bezüglich $\mathbb{P}_{\varrho, K}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{E}_{\varrho, K}$. Falls K klar aus dem Kontext hervorgeht, verwenden wir die Abkürzungen \mathbb{P}_{ϱ} und \mathbb{E}_{ϱ} . Außerdem verwenden wir häufig die vereinfachte Notation \mathbb{P}_{ϱ} anstelle von $\mathbb{P}_{\varrho}^{\otimes n}$.

Sei $X_n := \{x_1, \dots, x_n\}$ eine zufällige Stichprobe von n unabhängigen zufälligen Punkten aus K , die gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{P}_{\varrho, K}$ gewählt wurden. Ihre konvexe Hülle

$$K_{(n)} := [X_n] = [x_1, \dots, x_n]$$

ist dann ein *zufälliges Polytop* in K .

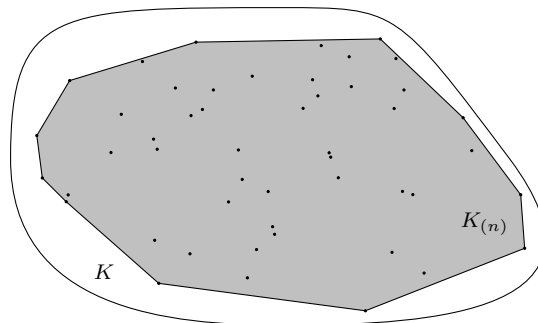


Abbildung 9.1.: Zufälliges Polytop $K_{(n)}$

9.1. Gewichtete Differenz der mittleren Breiten

In diesem Abschnitt beweisen wir eine asymptotische Formel für die erwartete Differenz der gewichteten mittleren Breite eines konvexen Körpers K und eines zufälligen Polytops $K_{(n)}$. Ein erster Beweisansatz ist in der Diplomarbeit der Autorin [73] zu finden. In der vorliegenden Arbeit führen wir nun einen vollständigen Beweis. Im Vergleich zum entsprechenden Resultat in [73] beweisen wir die Formel in größerer Allgemeinheit.

Mit Hilfe einer messbaren *Gewichtsfunktion* $q : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ definieren wir die *gewichtete mittlere Breite* von K als

$$W_q(K) := \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} q(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du).$$

Zudem nennen wir q *lokal integrierbar*, falls das Integral

$$\int_{S^{d-1}} \int_C q(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du)$$

für alle kompakten Teilmengen C in \mathbb{R} endlich ist.

Satz 9.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $o \in \text{int}(K)$, in dem eine Kugel frei rollt. Sei ϱ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf K und $q : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine lokal integrierbare Funktion. Ist ϱ positiv und stetig in jedem Randpunkt von K und q stetig in jedem Punkt der Menge D_K , dann gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_\varrho (W_q(K) - W_q(K_{(n)})) \\ &= \frac{2 \Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right)}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} \omega_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \varrho(x)^{-\frac{2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx). \end{aligned}$$

Bemerkung 9.2. Aufgrund der Voraussetzung, dass eine Kugel vom Radius $r(K) > 0$ in K frei rollt, ist die Gauß-Kronecker-Krümmung $\kappa(x)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ durch $r(K)^{-(d-1)}$ von oben beschränkt. Dadurch ist die Endlichkeit des Integrals auf der rechten Seite obiger Gleichung gewährleistet.

Beweis von Satz 9.1. Wir beginnen den Beweis von Satz 9.1 damit, auf das Ereignis zu “bedingen”, dass der Ursprung in $K_{(n)}$ enthalten ist. Also

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\varrho (W_q(K) - W_q(K_{(n)})) \\ &= \mathbb{E}_\varrho \left(\frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(u)}^{h_K(u)} q(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \right) \\ &= \frac{2}{\omega_d} \int_{K^n} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(u)}^{h_K(u)} q(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \mathbb{P}_\varrho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \frac{2}{\omega_d} \int_{K^n} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(u)}^{h_K(u)} q(s, u) \mathbf{1}\{o \in K_{(n)}\} ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \mathbb{P}_\varrho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ &\quad + \frac{2}{\omega_d} \int_{K^n} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(u)}^{h_K(u)} q(s, u) \mathbf{1}\{o \notin K_{(n)}\} ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \mathbb{P}_\varrho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass der zweite Summand in obiger Formel vernachlässigbar ist. Dafür benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 9.3. *Es gibt eine Konstante $0 < \gamma_1 < 1$, die nur von K und ϱ abhängt, sodass*

$$\mathbb{P}_\varrho(o \notin K_{(n)}) \leq 2^d (1 - \gamma_1)^n.$$

Beweis. Es sei eine feste Orthonormalbasis des \mathbb{R}^d gegeben. Dieser wird durch die zugehörigen $(d-1)$ -dimensionalen Koordinaten-Hyperebenen in 2^d konvexe Kegel geteilt, die sogenannten Koordinatenkegel Θ_i , $i = 1, \dots, 2^d$. Gilt $o \notin K_{(n)}$, so werden die zufälligen Punkte x_1, \dots, x_n durch eine Hyperebene H strikt von o getrennt. Also existiert ein Koordinatenkegel, zum Beispiel Θ_j , der strikt von den zufälligen Punkten x_1, \dots, x_n getrennt ist. Der minimale Wahrscheinlichkeitsinhalt eines Koordinatenkegels sei mit $\gamma_1 > 0$ bezeichnet. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\varrho(o \notin K_{(n)}) \leq 2^d(1 - \gamma_1)^n. \quad \square$$

Hiermit folgt wegen $h_{K_{(n)}}(u) \geq -h_K(-u)$ für alle $u \in S^{d-1}$ und der lokalen Integrierbarkeit von q , dass

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\omega_d} \int_{K^n} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(u)}^{h_K(u)} q(s, u) \mathbf{1}\{o \notin K_{(n)}\} ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \mathbb{P}_\varrho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ & \leq \frac{2}{\omega_d} \int_{K^n} \int_{S^{d-1}} \int_{-h_K(-u)}^{h_K(u)} q(s, u) \mathbf{1}\{o \notin K_{(n)}\} ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \mathbb{P}_\varrho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ & = \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_{-h_K(-u)}^{h_K(u)} q(s, u) \mathbb{P}_\varrho(o \notin K_{(n)}) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & \leq \frac{2^{d+1}}{\omega_d} (1 - \gamma_1)^n \int_{S^{d-1}} \int_{-h_K(-u)}^{h_K(u)} q(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & = O(e^{-\gamma_1 n}). \end{aligned}$$

Daher werden wir im Folgenden den Term, der zum Ereignis $o \notin K_{(n)}$ gehört, vernachlässigen.

Mit $r(K)$ bezeichnen wir den Radius der Kugel, die in K frei rollt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $r(K) < 1$ annehmen. Nach Voraussetzung ist ϱ stetig und positiv in jedem Randpunkt x von K . Also existiert um jedes $x \in \partial K$ eine offene Umgebung $U(x)$, in der ϱ positiv ist, und diese Umgebungen überdecken ∂K . Da der Rand des konvexen Körpers K kompakt ist, enthält diese offene Überdeckung nach dem Satz von Heine-Borel eine endliche Teilüberdeckung. Also gibt es ein $\epsilon_0 > 0$, sodass ϱ in der ϵ_0 -Umgebung U von ∂K positiv sowie durch die positiven Konstanten $c_0 := \inf_{x \in U} \varrho(x)$ und $\sup_{x \in U} \varrho(x)$ von unten und von oben beschränkt ist. Sei $\gamma_2 := (\frac{3d}{c_0 \kappa_{d-1}})^{\frac{1}{d}}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass für alle $n > n_0$ die folgenden Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & r(K) \geq \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}, \\ \text{b)} \quad & \varrho \geq c_0 \text{ in } C\left(u, h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}\right) \text{ für alle } u \in S^{d-1}, \\ \text{c)} \quad & \left(\frac{3(d+2)}{2c_0 \kappa_{d-1} r(K)^{\frac{d-1}{2}}} \frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{2}{d+1}} \leq \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Von nun an nehmen wir $n > n_0$ an. Mit dem Satz von Fubini und Lemma 9.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\omega_d} \int_{K^n} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(u)}^{h_K(u)} q(s, u) \mathbf{1}\{o \in K_{(n)}\} ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \mathbb{P}_\varrho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ & = \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} q(s, u) \\ & \quad \times \int_{K^n} \mathbf{1}\{h_{K_{(n)}}(u) < s\} \mathbf{1}\{o \in K_{(n)}\} \mathbb{P}_\varrho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} q(s, u) \\
&\quad \times \int_{K^n} \mathbf{1}\{X_n \subset K \setminus C(u, s)\} (1 - \mathbf{1}\{o \notin K_{(n)}\}) \mathbb{P}_\rho^{\otimes n}(d(x_1, \dots, x_n)) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&= \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} q(s, u) \mathbb{P}_\rho(X_n \subset K \setminus C(u, s)) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(e^{-\gamma_1 n}) \\
&= \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} q(s, u) (1 - \mathbb{P}_\rho(x_1 \in C(u, s)))^n ds \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(e^{-\gamma_1 n}).
\end{aligned}$$

Wir zerlegen das innere Integral und erhalten

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} q(s, u) (1 - \mathbb{P}_\rho(x_1 \in C(u, s)))^n ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&= \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} q(s, u) (1 - \mathbb{P}_\rho(x_1 \in C(u, s)))^n ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\quad + \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}}^{h_K(u)} q(s, u) (1 - \mathbb{P}_\rho(x_1 \in C(u, s)))^n ds \mathcal{H}^{d-1}(du).
\end{aligned}$$

Der erste Summand kann vernachlässigt werden. Um dies zu zeigen, schätzen wir zunächst den Integranden ab. Wegen (9.1a) ist der Radius $r(K)$ der in K frei rollenden Kugel größer als die Höhe der Kappe $C\left(u, h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}\right)$. Somit können wir deren Volumen gegen das eines Kreiskegels der Höhe $\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}$ abschätzen (vergleiche Abbildung 9.2). Bezeichnet

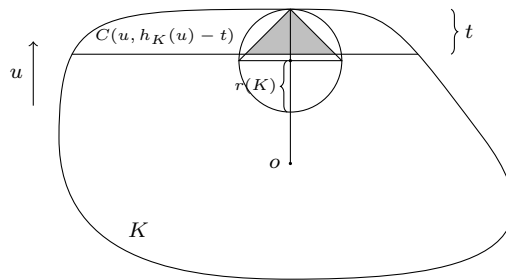


Abbildung 9.2.: Skizze zur Abschätzung des Kappenvolumens

$A(t)$ einen Kreiskegel mit Höhe t und Radius t , der in einer Halbkugel mit Radius $r(K)$ enthalten ist, so gilt für $t \leq r(K)$, dass

$$V(C(u, h_K(u) - t)) \geq V(A(t)) = \frac{1}{d} \kappa_{d-1} t^d.$$

Aus (9.1b) und der Wahl von γ_2 folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\varrho \left(x_1 \in C \left(u, h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}} \right) \right) &= \int_{C \left(u, h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}} \right)} \varrho(x) \mathcal{H}^d(dx) \\
&\geq c_0 V \left(C \left(u, h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}} \right) \right) \\
&\geq c_0 \frac{1}{d} \kappa_{d-1} \gamma_2^d \frac{\ln n}{n} \\
&= \frac{3 \ln n}{n}.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Diese Ungleichung gilt auch für größere Kappen $C(u, s)$ mit $s \in [0, h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}]$. Unter Verwendung der Ungleichung $\left(1 - \frac{3 \ln n}{n}\right)^n \leq e^{-3 \ln n} = n^{-3}$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}} q(s, u) \left(1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in C(u, s))\right)^n ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\leq \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}} q(s, u) \left(1 - \frac{3 \ln n}{n}\right)^n ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\leq \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}} q(s, u) n^{-3} ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\ll n^{-3}.
\end{aligned}$$

Wir definieren $\tilde{C}(u, t) := C(u, h_K(u) - t)$ und substituieren $s = h_K(u) - t$. Dann gilt für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}}^{h_K(u)} q(s, u) \left(1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in C(u, s))\right)^n ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&= \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}} q(h_K(u) - t, u) \left(1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in \tilde{C}(u, t))\right)^n dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&= \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}} q(h_K(u), u) \left(1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in \tilde{C}(u, t))\right)^n dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\quad + \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}} \{q(h_K(u) - t, u) - q(h_K(u), u)\} \\
&\quad \times \left(1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in \tilde{C}(u, t))\right)^n dt \mathcal{H}^{d-1}(du).
\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall ist der zweite Summand vernachlässigbar. Dies zeigen wir im Folgenden. Sei $\varepsilon > 0$ fest gewählt. Nach Voraussetzung ist q in jedem Punkt der Menge D_K stetig. Daher gilt für ausreichend großes n die Ungleichung

$$|q(h_K(u) - t, u) - q(h_K(u), u)| \leq \varepsilon$$

für alle $t \in \left[0, \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n} \right)^{\frac{1}{d}}\right]$ und für alle $u \in S^{d-1}$, denn: Sei $(t_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ eine Nullfolge.

Angenommen die Ungleichung ist nicht für alle $u \in S^{d-1}$ erfüllt. Dann existiert für alle $i \in \mathbb{N}$ ein $u_i \in S^{d-1}$, sodass

$$|q(h_K(u_i) - t_i, u_i) - q(h_K(u_i), u_i)| > \varepsilon. \tag{9.3}$$

Da die Einheitssphäre S^{d-1} kompakt ist, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset S^{d-1}$ konvergent mit Grenzwert $u_0 \in S^{d-1}$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} & |q(h_K(u_i) - t_i, u_i) - q(h_K(u_i), u_i)| \\ & \leq |q(h_K(u_i) - t_i, u_i) - q(h_K(u_0), u_0)| + |q(h_K(u_0), u_0) - q(h_K(u_i), u_i)|. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von q auf D_K konvergiert dies für $i \rightarrow \infty$ gegen null, was im Widerspruch zu (9.3) steht.

Somit gilt, falls n groß genug ist, die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} |q(h_K(u) - t, u) - q(h_K(u), u)| \\ & \quad \times \left(1 - \mathbb{P}_\varrho \left(x_1 \in \tilde{C}(u, t)\right)\right)^n dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & \leq \varepsilon \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \left(1 - \mathbb{P}_\varrho \left(x_1 \in \tilde{C}(u, t)\right)\right)^n dt \mathcal{H}^{d-1}(du). \end{aligned}$$

Aus (9.1a) und (9.1b) folgt für ausreichend großes n , dass

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\varrho \left(x_1 \in \tilde{C}(u, t)\right) &= \int_{C(u, h_K(u) - t)} \varrho(x) \mathcal{H}^d(dx) \\ &\geq c_0 V(C(u, h_K(u) - t)) \\ &\geq \frac{2c_0 \kappa_{d-1} r(K)^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{d+1}{2}}}{d+1}. \end{aligned} \tag{9.4}$$

In diesem Fall wurde das Volumen der Kappe durch das der in ihr enthaltenen Kugelkappe der Höhe t wie folgt abgeschätzt (vergleiche Abbildungen 9.3 und 9.4). Bezeichnet $C_{r(K)}(t)$ die Kappe der Höhe t einer Kugel mit Radius $r(K)$, so gilt für $0 \leq t \leq r(K)$, dass

$$V(C(u, h_K(u) - t)) \geq V(C_{r(K)}(t)) = \int_0^t \kappa_{d-1} R(s)^{d-1} ds = \int_0^t \kappa_{d-1} \sqrt{s(2r(K) - s)}^{d-1} ds,$$

wobei $R(s)$ wie in Abbildung 9.4 eingezeichnet definiert ist und verwendet wurde, dass nach dem Höhensatz $R(s)^2 = s(2r(K) - s)$ gilt. Für $s \in [0, r(K)]$ ist außerdem $2r(K) - s \geq r(K)$ und somit

$$V(C(u, h_K(u) - t)) \geq \int_0^t \kappa_{d-1} \sqrt{s r(K)}^{d-1} ds = \kappa_{d-1} r(K)^{\frac{d-1}{2}} \frac{2}{d+1} t^{\frac{d+1}{2}}.$$

Für jedes feste $u \in S^{d-1}$ erhalten wir nun mit Hilfe von Lemma 8.2 mit $\beta = 0$ und (9.1c), dass

$$\begin{aligned} & \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \left(1 - \mathbb{P}_\varrho \left(x_1 \in \tilde{C}(u, t)\right)\right)^n dt \\ & \leq \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \left(1 - \frac{2c_0 \kappa_{d-1} r(K)^{\frac{d-1}{2}} t^{\frac{d+1}{2}}}{d+1}\right)^n dt \\ & \ll \frac{2^{\frac{d-1}{d+1}}}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} c_0^{\frac{2}{d+1}} \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}} r(K)^{\frac{d-1}{d+1}}} \Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right) n^{-\frac{2}{d+1}} \end{aligned} \tag{9.5}$$

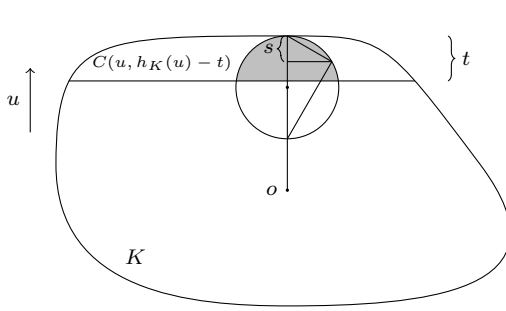


Abbildung 9.3.: Skizze zur Abschätzung des Kappenvolumens

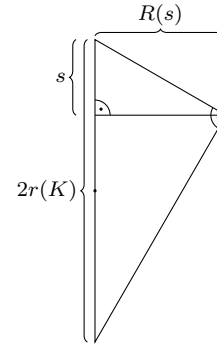


Abbildung 9.4.: Ausschnitt aus Abb. 9.3

und somit

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} |q(h_K(u) - t, u) - q(h_K(u), u)| \\ & \quad \times \left(1 - \mathbb{P}_\rho \left(x_1 \in \tilde{C}(u, t)\right)\right)^n dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & \ll \varepsilon \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \frac{2^{\frac{d-1}{d+1}}}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} c_0^{\frac{2}{d+1}} \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}} r(K)^{\frac{d-1}{d+1}}} \Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right) n^{-\frac{2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & \ll \varepsilon n^{-\frac{2}{d+1}}. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\rho \left(W_q(K) - W_q(K_{(n)})\right) \\ & = \frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} q(h_K(u), u) \left(1 - \mathbb{P}_\rho \left(x_1 \in \tilde{C}(u, t)\right)\right)^n dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & \quad + O\left(\varepsilon n^{-\frac{2}{d+1}}\right) + O(n^{-3}) + O(e^{-\gamma_1 n}). \end{aligned}$$

Für $u \in S^{d-1}$ sei

$$\Theta_n(u) := n^{\frac{2}{d+1}} \frac{2}{\omega_d} q(h_K(u), u) \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \left(1 - \mathbb{P}_\rho \left(x_1 \in \tilde{C}(u, t)\right)\right)^n dt.$$

Aus (9.5) folgt dann

$$\Theta_n(u) \ll \frac{2}{\omega_d} q(h_K(u), u) \frac{2^{\frac{d-1}{d+1}}}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} c_0^{\frac{2}{d+1}} \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}} r(K)^{\frac{d-1}{d+1}}} \Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right).$$

Das heißt, es gilt $\Theta_n(u) < \gamma$ für alle $u \in S^{d-1}$ und eine geeignete Konstante $\gamma > 0$. Des Weiteren ist die Gauss-Kronecker-Krümmung $\kappa(x)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ ebenfalls von oben beschränkt durch die Konstante $r(K)^{-(d-1)}$. Deswegen folgt aus Lemma 8.1 und dem

Satz von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_\varrho (W_q(K) - W_q(K_{(n)})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S^{d-1}} \Theta_n(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial K} \Theta_n(\sigma_K(x)) \kappa(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &= \int_{\partial K} \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(\sigma_K(x)) \kappa(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx). \end{aligned}$$

Es bleibt also der Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(\sigma_K(x)) &= \frac{2}{\omega_d} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \\ &\times \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} (1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in C(\sigma_K(x), h_K(\sigma_K(x)) - t)))^n dt \end{aligned}$$

für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ zu berechnen. Nach Aleksandrov sind fast alle Randpunkte normal (siehe [67], Theorem 2.6.1), daher genügt es, diese zu betrachten.

Lemma 9.4. *Sei $x \in \partial K$ ein normaler Randpunkt von K mit $\kappa(x) = 0$ und $u = \sigma_K(x)$. Dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(u) = 0.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass für jedes gegebene $\varepsilon > 0$ die Abschätzung

$$n^{\frac{2}{d+1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \left(1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in \tilde{C}(u, t))\right)^n dt \ll \varepsilon \quad (9.6)$$

für ausreichend großes n erfüllt ist. Da ϱ in einer Umgebung von x positiv ist (siehe (9.1b)), gilt

$$\mathbb{P}_\varrho(x_1 \in \tilde{C}(u, t)) = \int_{\tilde{C}(u, t)} \varrho(y) \mathcal{H}^d(dy) \gg V(\tilde{C}(u, t))$$

für ausreichend großes n und $t \in \left(0, \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}\right)$.

Nach der Voraussetzung $\kappa(x) = 0$ ist eine Hauptkrümmung von ∂K in x null und daher insbesondere kleiner als $\varepsilon^{d+1} r(K)^{d-2}$. Da x ein normaler Randpunkt ist, gilt daher

$$\mathcal{H}^{d-1}(K \cap H(u, h_K(u) - t)) \gg \sqrt{t \varepsilon^{-(d+1)} r(K)^{-(d-2)}} \cdot \sqrt{tr(K)}^{d-2}.$$

Dies impliziert

$$V(\tilde{C}(u, t)) \gg \varepsilon^{-\frac{d+1}{2}} t^{\frac{d+1}{2}}.$$

Die Behauptung (9.6) folgt nun aus Lemma 8.2 mit $\beta = 0$. \square

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass $x \in \partial K$ ein normaler Randpunkt mit $\kappa(x) > 0$ ist. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir wieder $u = \sigma_K(x)$. Mit Q bezeichnen wir die zweite Fundamentalform von ∂K aufgefasst als eine Funktion im Orthogonalraum u^\perp von u in \mathbb{R}^d . Sei

$$D = \{z \in u^\perp : Q(z) \leq 1\}$$

die Indikatrix von ∂K im normalen Randpunkt x (vergleiche (2.5)). Sind die Vektoren v_1, \dots, v_{d-1} eine Orthonormalbasis von u^\perp aus Hauptkrümmungsrichtungen von ∂K in x , so ist bekannt, dass $Q(z)$ berechnet werden kann durch

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{d-1} k_i(K; x) z_i^2,$$

wobei $z_i \in \mathbb{R}$ mit $z = z_1 v_1 + \dots + z_{d-1} v_{d-1}$. Es gibt eine nichtfallende Funktion $\mu : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{r \rightarrow 0^+} \mu(r) = 1$, sodass

$$\frac{\mu(r)^{-1}}{\sqrt{2r}} (\tilde{K}(u, r) + ru - x) \subset D \subset \frac{\mu(r)}{\sqrt{2r}} (\tilde{K}(u, r) + ru - x), \quad (9.7)$$

wobei $\tilde{K}(u, r) := K \cap H(u, h_K(u) - r)$.

Da für das $(d-1)$ -dimensionale Volumen von D gilt

$$V_{d-1}(D) = \kappa_{d-1} \left(\prod_{i=1}^{d-1} k_i(x) \right)^{-\frac{1}{2}} = \kappa_{d-1} \kappa(x)^{-\frac{1}{2}},$$

folgt aus (9.7), dass

$$\begin{aligned} V(C(u, h_K(u) - r)) &= V(K \cap H^+(u, h_K(u) - r)) = \int_0^r V_{d-1}(\tilde{K}(u, s)) ds \\ &\leq \int_0^r \left(\sqrt{2s} \mu(s) \right)^{d-1} V_{d-1}(D) ds = \frac{2^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1}}{\kappa(x)^{\frac{1}{2}}} \int_0^r s^{\frac{d-1}{2}} \mu(s)^{d-1} ds. \end{aligned}$$

Da μ monoton wachsend ist, lässt sich dies weiter abschätzen zu

$$V(C(u, h_K(u) - r)) \leq \frac{2^{\frac{d-1}{2}} \kappa_{d-1}}{\kappa(x)^{\frac{1}{2}}} \mu(r)^{d-1} \int_0^r s^{\frac{d-1}{2}} ds = \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \kappa_{d-1}}{(d+1) \kappa(x)^{\frac{1}{2}}} \mu(r)^{d-1} r^{\frac{d+1}{2}}.$$

Durch eine analoge Vorgehensweise erhalten wir die Abschätzung

$$V(C(u, h_K(u) - r)) \geq \frac{2^{\frac{d+1}{2}} \kappa_{d-1}}{(d+1) \kappa(x)^{\frac{1}{2}}} \mu(r)^{-(d-1)} r^{\frac{d+1}{2}}.$$

Zusammengefasst gilt also

$$V(C(u, h_K(u) - r)) = \mu_1(r) \frac{(2r)^{\frac{d+1}{2}}}{d+1} \kappa_{d-1} \kappa(x)^{-\frac{1}{2}},$$

wobei $\mu_1 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim_{r \rightarrow 0^+} \mu_1(r) = 1$ bezeichnet. Aufgrund der

Stetigkeit von ϱ in x und mit Hilfe von Lemma 8.2 mit $\beta = 0$ erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(\sigma_K(x)) \\
&= \frac{2}{\omega_d} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \\
&\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} (1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in C(\sigma_K(x), h_K(\sigma_K(x)) - t)))^n dt \\
&= \frac{2}{\omega_d} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \\
&\quad \times \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \left(1 - \mu_1(t) \frac{(2t)^{\frac{d+1}{2}}}{d+1} \kappa_{d-1} \kappa(x)^{-\frac{1}{2}} \varrho(x)\right)^n dt \\
&= \frac{2 \Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right)}{\omega_d (d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}} \varrho(x)^{-\frac{2}{d+1}}
\end{aligned}$$

und daher schließlich

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_\varrho(W_q(K) - W_q(K_{(n)})) \\
&= \int_{\partial K} \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_n(\sigma_K(x)) \kappa(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\
&= \frac{2 \Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right)}{\omega_d (d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}} \varrho(x)^{-\frac{2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx),
\end{aligned}$$

was den Beweis von Satz 9.1 beendet. \square

9.2. Polarität und zufällige polyedrische Mengen

In diesem Abschnitt werden wir die Dualität zwischen Punkten und Hyperebenen, sowie konvexen Hüllen und Durchschnitten von Halbräumen ausnutzen, um mit Satz 9.1 eine asymptotische Formel für die erwartete Volumendifferenz einer zufälligen polyedrischen Menge $K^{(n)}$ und eines in dieser enthaltenen konvexen Körpers K zu zeigen. Wir können also die mittlere Breite von zufälligen Polytopen mit dem Volumen von zufälligen polyedrischen Mengen in Zusammenhang bringen. Dabei folgen wir einer ähnlichen Argumentationsweise wie in [12].

Zufällige polyedrische Mengen wurden in der Vergangenheit nicht so intensiv untersucht wie zufällige Polytope, obwohl die gleichen kombinatorischen und asymptotischen Größen betrachtet werden können. Die Anfänge gehen abermals zurück auf Rényi und Sulanke [59], die das asymptotische Verhalten der erwarteten Eckenzahl einer zufälligen polyedrischen Menge in der Ebene unter verschiedenen Voraussetzungen an den konvexen Körper K bestimmten. Kaltenbach [45] zeigte, dass für einen konvexen Körper K von der Klasse \mathcal{C}_+^3 gilt

$$\mathbb{E}(V(K^{(n)} \cap K_1)) - V(K) = c(d, K) n^{-\frac{2}{d+1}} + o(n^{-\frac{2}{d+1}}).$$

Hierbei (und auch im Folgenden) ist es nötig, den Schnitt von $K^{(n)}$ mit dem Parallelkörper K_1 von K im Abstand eins zu betrachten, da der Schnitt von zufälligen Halbräumen und somit die zufällige polyedrische Menge unbeschränkt sein kann. Anstatt des Parallelkörpers

könnten wir auch einen anderen konvexen Körper benutzen, der K enthält. Dies würde nur das Anpassen einiger Konstanten erfordern.

Ist K selbst ein Polytop, so zeigte Kaltenbach

$$\mathbb{E}(V(K^{(n)} \cap K_1)) - V(K) = c(d, K) n^{-\frac{1}{d}} + o(n^{-\frac{1}{d}}).$$

Über die Dualität konnten Böröczky et al. [12] aus (8.1) folgende asymptotische Formel für die erwartete Differenz der mittleren Breiten von $K^{(n)}$ und K herleiten

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} \left(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K) \right) \\ &= c(d) \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{-\frac{2}{d+1}} \kappa(x)^{\frac{d}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx). \end{aligned}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass K den Ursprung enthält, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung μ_q sowie die Funktion q sind wie im Anschluss folgend definiert.

Für die erwartete Facettenzahl der zufälligen polyedrischen Menge ergibt sich hieraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{d-1}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} \left(f_{d-1}(K^{(n)}) \right) = c(d) \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{\frac{d-1}{d+1}} \kappa(x)^{\frac{d}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx).$$

Nun führen wir das Wahrscheinlichkeitsmodell, mit dem die polyedrische Menge $K^{(n)}$ konstruiert wird, ein und geben die verwendete Notation an.

Ein wichtiges Werkzeug im Beweis wird der *Polarkörper* K^* eines konvexen Körpers K sein. Er ist gegeben durch

$$K^* = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in K\}.$$

Ist $o \in \text{int}(K)$, so ist K^* ebenfalls ein konvexer Körper mit $o \in \text{int}(K^*)$ und $K^{**} = K$ (siehe [67], Theorem 1.6.1). Außerdem folgt aus Lemma 2.4.5 in [67], dass der Polarkörper eines Polytops ebenfalls ein Polytop ist.

Zusätzlich benötigen wir die *Radiusfunktion* $\rho(K, \cdot)$ eines konvexen Körpers K , der den Ursprung im Inneren enthält. Sie ist gegeben durch

$$\rho(K, x) := \max\{r \geq 0 : rx \in K\}, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{o\}.$$

Von besonderem Interesse ist für uns der Zusammenhang zwischen Radiusfunktion und Stützfunktion des Polarkörpers. Es gilt (vergleiche [67], Formel (1.52))

$$\rho(K, \cdot) = h_{K^*}^{-1}.$$

Der Parallelkörper von K im Abstand eins wird mit $K_1 := K + B^d$ bezeichnet. Ist $\mathcal{H} := A(d, d-1)$ der Raum der Hyperebenen in \mathbb{R}^d , so bezeichnet \mathcal{H}_K die Teilmenge von \mathcal{H} , deren Elemente K_1 schneiden, aber nicht das Innere von K . Für $H \in \mathcal{H}_K$ sei H^- der abgeschlossene Halbraum, der K enthält. Mit μ wird das (eindeutige) bewegungsinvariante Borelmaß auf \mathcal{H} bezeichnet, das so normalisiert ist, dass $\mu\{H \in \mathcal{H} : H \cap M \neq \emptyset\}$ für alle konvexen Körper M in \mathbb{R}^d die mittlere Breite von M ist. Sei $2\mu_K$ die Einschränkung des Maßes μ auf \mathcal{H}_K . Dann ist μ_K wegen

$$\mu(\mathcal{H}_K) = W(K + B^d) - W(K) = W(B^d) = 2$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{H}_K . Seien H_1, \dots, H_n unabhängige zufällige Hyperebenen in \mathbb{R}^d , das heißt unabhängige \mathcal{H} -wertige Zufallsvariablen mit Verteilung μ_K auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Der Durchschnitt

$$K^{(n)} := \bigcap_{i=1}^n H_i^-$$

mit $H_i \in \mathcal{H}_K$ für $i = 1, \dots, n$ ist eine zufällige polyedrische Menge, die K enthält. Zu beachten ist, dass $K^{(n)}$ unbeschränkt sein kann.

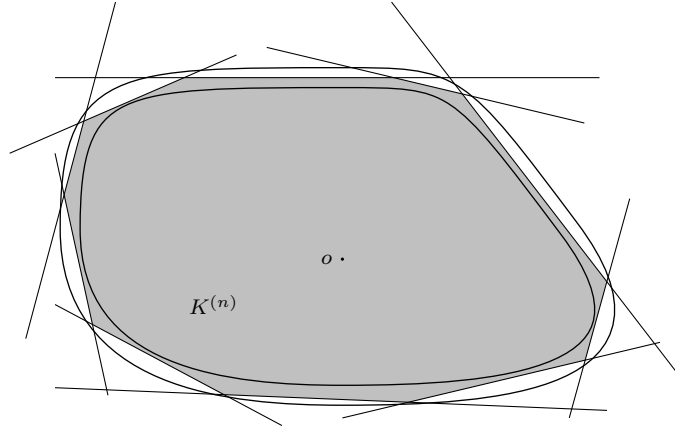


Abbildung 9.5.: Zufällige polyedrische Menge $K^{(n)}$

Dieses Modell wollen wir nun noch etwas allgemeiner angeben. Dazu sei ein konvexer Körper K mit $o \in \text{int}(K)$ fest gewählt. Wie in [12] sei $q : [0, \infty) \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine lokal integrierbare Funktion und

$$\mu_q := \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}\{H(u, t) \in \cdot\} q(t, u) dt \mathcal{H}^{d-1}(du). \quad (9.8)$$

Die Funktion q habe zusätzlich die folgenden Eigenschaften:

- i) Sie ist konzentriert auf der Menge $D_K^1 := \{(t, u) \in [0, \infty) \times S^{d-1} : h_K(u) \leq t \leq h_{K_1}(u)\}$;
 - ii) sie ist positiv und stetig in jedem Punkt der Menge D_K in D_K^1 ;
 - iii) $\mu_q(\mathcal{H}_K) = 1$.
- (9.9)

Dann ist μ_q eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Raum der Hyperebenen, die auf \mathcal{H}_K konzentriert ist. Wie oben seien H_1, \dots, H_n unabhängige zufällige Hyperebenen mit Verteilung μ_q und der Durchschnitt der Halbräume, die K enthalten, wird mit $K^{(n)}$ bezeichnet.

Wir sagen, dass ein konvexer Körper K *frei in einer Kugel B rollt*, wenn es zu jedem Randpunkt x der Kugel einen Translationsvektor $t \in \mathbb{R}^d$ gibt, sodass $x \in K + t$ und $K + t \subset B$ (vergleiche [67], S. 156).

Schließlich definieren wir das *gewichtete Volumen* von K mit $o \in \text{int}(K)$ wie folgt

$$V_\lambda(K) := \int_{S^{d-1}} \int_0^{\rho(K, u)} t^{d-1} \lambda(t, u) dt \mathcal{H}^{d-1}(du),$$

wobei $\lambda : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion ist. Für $\lambda \equiv 1$ entspricht dies dem Volumen von K , denn dann gilt

$$V_\lambda(K) = \int_{S^{d-1}} \int_0^{\rho(K, u)} t^{d-1} dt \mathcal{H}^{d-1}(du) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} \rho(K, u)^d \mathcal{H}^{d-1}(du) = V(K).$$

Wir nennen die Funktion λ *lokal integrierbar*, falls sämtliche gewichtete Volumina von konvexen Körpern, die den Ursprung im Inneren enthalten, endlich sind.

Der folgende Satz stellt eine Verallgemeinerung eines Satzes in [73] dar, in dem das Volumen eines konvexen Körpers, das heißt der Fall $\lambda \equiv 1$, betrachtet wird. Der Beweis erfolgt analog.

Satz 9.5. *Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $o \in \text{int}(K)$, der frei in einer Kugel rollt. Die Funktion $q : [0, \infty) \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ erfülle die Eigenschaften i), ii) und iii) aus (9.9). Sei $\lambda : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine lokal integrierbare Funktion, die in jedem Punkt der Menge $\{(\rho(K, u), u) : u \in S^{d-1}\}$ stetig ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q}(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\ &= c_d \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\|x\|, \|x\|^{-1}x) \kappa(x)^{-\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx), \end{aligned}$$

wobei

$$c_d := \frac{(\omega_d)^{\frac{2}{d+1}} \Gamma(\frac{2}{d+1})}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}}.$$

Bemerkung 9.6. Aufgrund der Voraussetzung, dass der konvexe Körper K frei in einer Kugel vom Radius $R(K) > 0$ rollt, ist die Gauß-Kronecker-Krümmung $\kappa(x)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ durch $R(K)^{-(d-1)}$ von unten beschränkt (siehe Formel (9.11) im Beweis für weitere Details). Dadurch ist die Endlichkeit des Integrals auf der rechten Seite obiger Gleichung gewährleistet.

Beweis von Satz 9.5. Für polyedrische Mengen P in \mathbb{R}^d definieren wir das nichtnegative messbare Funktional

$$F_\lambda(P) := \mathbf{1}\{P \subset K_1\}(V_\lambda(P) - V_\lambda(K)).$$

Für $x_1, \dots, x_n \in K^* \setminus (K_1)^*$ gilt $K \subset [x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1$. Deshalb folgt aus $o \in \text{int}(K)$, dass $o \in \text{int}([x_1, \dots, x_n]^*)$. Durch die Substitution $s = \frac{1}{t}$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} & F_\lambda([x_1, \dots, x_n]^*) \\ &= \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\}(V_\lambda([x_1, \dots, x_n]^*) - V_\lambda(K)) \\ &= \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} \int_{S^{d-1}} \int_{\rho(K, u)}^{\rho([x_1, \dots, x_n]^*, u)} t^{d-1} \lambda(t, u) dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{K^*}(u)^{-1}}^{h_{[x_1, \dots, x_n]^*}(u)^{-1}} t^{d-1} \lambda(t, u) dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} \int_{S^{d-1}} \int_{h_{[x_1, \dots, x_n]^*}(u)}^{h_{K^*}(u)} \tilde{\lambda}(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du), \end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{\lambda}(s, u) := \begin{cases} \mathbf{1}\{s \geq h_{(K_1)^*}(u)\} s^{-(d+1)} \lambda(s^{-1}, u), & s > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In [17] wird gezeigt, dass $\mathbb{P}_{\mu_q}(K^{(n)} \not\subset K_1) \ll \alpha^n$ für eine reelle Konstante $\alpha \in (0, 1)$, die nur von K und der Dichte q abhängt. Da außerdem die zufälligen polyedrischen Mengen $K^{(n)}$ (basierend auf Hyperebenen um K mit Verteilung μ_q) und $(K_{(n)}^*)^* := ((K^*)_{(n)})^*$ (basierend auf zufälligen Punkten in K^* mit Dichte ϱ) in Verteilung gleich sind (siehe [12], Proposition 5.1), folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mu_q}(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\ &= \mathbb{E}_{\mu_q}(\mathbf{1}\{K^{(n)} \subset K_1\}(V_\lambda(K^{(n)}) - V_\lambda(K))) + O(\alpha^n) \\ &= \mathbb{E}_{\varrho, K^*}(\mathbf{1}\{(K_{(n)}^*)^* \subset K_1\}(V_\lambda((K_{(n)}^*)^*) - V_\lambda(K))) + O(\alpha^n) \\ &= \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\int_{S^{d-1}} \int_{h_{[x_1, \dots, x_n]}(u)}^{h_{K^*}(u)} \tilde{\lambda}(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \right) + O(\alpha^n), \end{aligned}$$

wobei ϱ wie in [12] auf S. 516 definiert ist, das heißt

$$\varrho(x) := \begin{cases} \omega_d^{-1} \tilde{q}(x) \|x\|^{-(d+1)}, & x \in K^* \setminus (K_1)^*, \\ 0, & x \in (K_1)^* \end{cases}$$

und

$$\tilde{q}(x) := q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1}x), \quad x \in K^* \setminus \{o\}.$$

Nun prüfen wir, ob die Voraussetzungen von Satz 9.1 erfüllt sind, um diesen anwenden zu können. Nach Proposition 5.3 in [30] rollt in K^* eine Kugel frei. Dass oben definierte Funktion ϱ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf K^* ist, sehen wir unter Verwendung von Polarkoordinaten und der Substitution $t = \frac{1}{s}$ ein. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{K^*} \varrho(x) \mathcal{H}^d(dx) &= \frac{1}{\omega_d} \int_{K^* \setminus (K_1)^*} q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1}x) \|x\|^{-(d+1)} \mathcal{H}^d(dx) \\ &= \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_{\rho((K_1)^*, u)}^{\rho(K^*, u)} s^{-2} q(s^{-1}, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_{h_K(u)}^{h_{K_1}(u)} q(t, u) dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \mu_q(\mathcal{H}_K) = 1. \end{aligned}$$

Auch dass ϱ positiv und stetig in jedem Randpunkt von K^* ist, kann auf die Eigenschaften der Funktion q zurückgeführt werden. Für einen Randpunkt x von K^* gilt nämlich wegen $o \in \text{int}(K^*)$, dass

$$\|x\|^{-1} = \rho(K^*, \|x\|^{-1}x)^{-1} = h_K(\|x\|^{-1}x)$$

und somit

$$q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1}x) = q(h_K(\|x\|^{-1}x), \|x\|^{-1}x).$$

Da $(h_K(\|x\|^{-1}x), \|x\|^{-1}x)$ ein Element der Menge D_K ist, folgen die behaupteten Eigenschaften von ϱ . Sei nun $u \in S^{d-1}$. Dann gilt wegen $o \in \text{int}(K^*)$ für $(h_{K^*}(u), u) \in D_{K^*}$, dass

$$\tilde{\lambda}(h_{K^*}(u), u) = h_{K^*}(u)^{-(d+1)} \lambda(\rho(K, u), u).$$

Da λ nach Voraussetzung stetig in jedem Punkt der Menge $\{(\rho(K, u), u) : u \in S^{d-1}\}$ ist, folgt daraus, dass $\tilde{\lambda}$ stetig in jedem Punkt der Menge D_{K^*} ist. Schließlich können wir durch

Abschätzen aus der lokalen Integrierbarkeit von λ auf die lokale Integrierbarkeit von $\tilde{\lambda}$ schließen. Also können wir Satz 9.1 anwenden und es folgt

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} (V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\int_{S^{d-1}} \int_{h_{[x_1, \dots, x_n]}(u)}^{h_{K^*}(u)} \tilde{\lambda}(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \right) \\
&= c_d (\omega_d)^{-\frac{2}{d+1}} \int_{\partial K^*} \tilde{\lambda}(h_{K^*}(\sigma_{K^*}(x)), \sigma_{K^*}(x)) \varrho(x)^{-\frac{2}{d+1}} \kappa^*(x)^{\frac{d+2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\
&= c_d \int_{\partial K^*} (h_{K^*}(\sigma_{K^*}(x)))^{-(d+1)} \lambda(h_{K^*}(\sigma_{K^*}(x))^{-1}, \sigma_{K^*}(x)) \tilde{q}(x)^{-\frac{2}{d+1}} \|x\|^2 \\
&\quad \times \kappa^*(x)^{\frac{d+2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx),
\end{aligned}$$

wobei $\kappa^*(x)$ die Gauß-Kronecker-Krümmung des Polarkörpers K^* in x bezeichnet. Mit Lemma 6.1 aus [12] erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} (V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\
&= c_d \int_{S^{d-1}} \rho(K, \sigma_{K^*}(\nabla h_{K^*}(u)))^{d+1} \tilde{q}(\nabla h_{K^*}(u))^{-\frac{2}{d+1}} \|\nabla h_{K^*}(u)\|^2 \\
&\quad \times \lambda(\rho(K, \sigma_{K^*}(\nabla h_{K^*}(u))), \sigma_{K^*}(\nabla h_{K^*}(u))) \kappa^*(\nabla h_{K^*}(u)) D_{d-1} h_{K^*}(u)^{\frac{d}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(du).
\end{aligned}$$

Für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ bezeichnet $D_{d-1} h_{K^*}(u)$ hierbei das Produkt der Hauptkrümmungsradien von K^* in Richtung u . Dieses ist aufgrund der in K^* frei rollenden Kugel vom Radius $r(K^*) > 0$ von unten durch $r(K^*)^{d-1}$ beschränkt.

Da eine Kugel frei in K^* rollt, gilt für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$, dass $\sigma_{K^*}(\nabla h_{K^*}(u)) = u$. Außerdem ist die Stützfunktion h_{K^*} von K^* nach Lemma 2.6 in [37] für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ zweimal differenzierbar in u , der Gradient $\nabla h_{K^*}(u)$ von h_{K^*} ist ein normaler Randpunkt von K^* und es gilt $\kappa^*(\nabla h_{K^*}(u)) D_{d-1} h_{K^*}(u) = 1$. Nach Lemma 3.1 und Lemma 3.4 in [39] sind die betreffenden Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsradien für diese u endlich und ≥ 0 . Somit folgt

$$\kappa^*(\nabla h_{K^*}(u)) = D_{d-1} h_{K^*}(u)^{-1} \in (0, \infty)$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} (V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\
&= c_d \int_{S^{d-1}} \rho(K, u)^{d+1} \tilde{q}(\nabla h_{K^*}(u))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\rho(K, u), u) \|\nabla h_{K^*}(u)\|^2 \\
&\quad \times D_{d-1} h_{K^*}(u)^{-\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(du).
\end{aligned}$$

Nach Theorem 2.2 in [38] gilt für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$, dass die Stützfunktion von K^* in u zweimal differenzierbar ist und der Punkt $x = \rho(K, u)u \in \partial K$ ein normaler Randpunkt von K ist. Des Weiteren gilt nach Theorem 2.2 in [38] für diese $u \in S^{d-1}$

$$D_{d-1} h_{K^*}(u)^{\frac{1}{d+1}} \langle u, \sigma_K(x) \rangle = \kappa(x)^{\frac{1}{d+1}}. \quad (9.10)$$

Da $D_{d-1} h_{K^*}(u)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ von unten durch $r(K^*)^{d-1}$ beschränkt ist, können wir aus Gleichung (9.10) folgern, dass die Gauß-Kronecker-Krümmung $\kappa(x)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ von unten beschränkt ist. Denn es gilt

$$\kappa(x) \geq \langle u, \sigma_K(x) \rangle^{d+1} r(K^*)^{d-1} \geq r_0^{d+1} r(K^*)^{d-1} > 0, \quad (9.11)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\langle u, \sigma_K(x) \rangle = h_K(\sigma_K(x)) \geq r_0$ für ein $r_0 > 0$ gilt. Bezeichnet $R(K)$ den Radius der Kugel, in der K frei rollt, so wissen wir wegen Proposition 5.3 in [30] außerdem, dass $r(K^*) = R(K)^{-1}$ gilt.

Mit (9.10) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} (V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\ &= c_d \int_{S^{d-1}} \rho(K, u)^{d+1} \tilde{q}(\nabla h_{K^*}(u))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\rho(K, u), u) \|\nabla h_{K^*}(u)\|^2 \kappa(\rho(K, u)u)^{-\frac{1}{d+1}} \\ & \quad \times \langle u, \sigma_K(\rho(K, u)u) \rangle \mathcal{H}^{d-1}(du). \end{aligned}$$

Die Funktion $T : S^{d-1} \rightarrow \partial K$, $u \rightarrow \rho(K, u)u$ ist bijektiv und bi-Lipschitz und ihre Jacobi-Determinante ist für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ (vergleiche [38], Beweis zu Lemma 2.4) gegeben durch

$$JT(u) = \frac{\|\nabla h_{K^*}(u)\|}{h_{K^*}(u)^d}.$$

Damit folgt unter Verwendung der Homogenität der einzelnen Funktionen und der Definition von \tilde{q} , dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} (V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\ &= c_d \int_{\partial K} \rho(K, \|x\|^{-1}x)^{d+1} \tilde{q}(\nabla h_{K^*}(\|x\|^{-1}x))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\rho(K, \|x\|^{-1}x), \|x\|^{-1}x) \\ & \quad \times \|\nabla h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)\| \kappa(x)^{-\frac{1}{d+1}} \langle \|x\|^{-1}x, \sigma_K(x) \rangle h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)^d \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &= c_d \int_{\partial K} \tilde{q}(\nabla h_{K^*}(x))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\|x\|, \|x\|^{-1}x) \|\nabla h_{K^*}(x)\| \kappa(x)^{-\frac{1}{d+1}} \langle x, \sigma_K(x) \rangle \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &= c_d \int_{\partial K} q(\|\nabla h_{K^*}(x)\|^{-1}, \|\nabla h_{K^*}(x)\|^{-1} \nabla h_{K^*}(x))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\|x\|, \|x\|^{-1}x) \|\nabla h_{K^*}(x)\| \\ & \quad \times \kappa(x)^{-\frac{1}{d+1}} \langle x, \sigma_K(x) \rangle \mathcal{H}^{d-1}(dx). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.6 in [37] ist $\nabla h_{K^*}(x)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ ein normaler Randpunkt von K^* , das heißt der eindeutige Randpunkt von K^* mit äußerer Normale x . Hieraus folgt, dass

$$\|\nabla h_{K^*}(x)\|^{-1} = \langle x, \sigma_K(x) \rangle$$

sowie

$$\frac{\nabla h_{K^*}(x)}{\|\nabla h_{K^*}(x)\|} = \sigma_K(x)$$

für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ gilt und wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d+1}} \mathbb{E}_{\mu_q} (V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)) \\ &= c_d \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\|x\|, \|x\|^{-1}x) \kappa(x)^{-\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx). \quad \square \end{aligned}$$

9.3. Varianzabschätzungen

In diesem Abschnitt zeigen wir zunächst asymptotische Schranken für die Varianz der gewichteten mittleren Breite des zufälligen Polytops $K_{(n)}$ in K , das heißt $\text{Var}_q W_q(K_{(n)})$. Anschließend folgern wir hieraus wieder mittels Polarität eine obere Schranke für die Varianz des gewichteten Volumens $\text{Var}_{\mu_q}(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1))$.

Satz 9.7. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $o \in \text{int}(K)$, in dem eine Kugel frei rollt. Ist ϱ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf K und $q : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine lokal integrierbare Funktion, sodass ϱ positiv und stetig in jedem Randpunkt von K ist und q stetig in jedem Punkt der Menge D_K ist, dann gilt

$$c_1 \cdot n^{-\frac{d+3}{d+1}} < \text{Var}_\varrho(W_q(K_{(n)})) < c_2 \cdot n^{-\frac{d+3}{d+1}},$$

wobei die positiven Konstanten c_1, c_2 nur von K, q und ϱ abhängen.

Beweis. Die untere Schranke kann mit der gleichen Argumentation wie bei Böröczky et al. in [14] erhalten werden. Daher führen wir diesen Beweis hier nicht aus. Die Idee des Beweises besteht darin, dass die Varianz der gewichteten mittleren Breite mindestens die Summe der Varianzen in geeignet konstruierten unabhängigen Kappen ist.

Um die obere Schranke zu zeigen, ist unser Vorgehen ebenfalls ähnlich zu dem aus [14]. Das Hauptwerkzeug ist die Efron-Stein-Jackknife-Ungleichung (siehe Reitzner [53]), die besagt, dass

$$\text{Var}_\varrho W_q(K_{(n)}) \leq (n+1) \mathbb{E}_\varrho(W_q(K_{(n+1)}) - W_q(K_{(n)}))^2. \quad (9.12)$$

Mit (9.12) und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} & \text{Var}_\varrho(W_q(K_{(n)})) \\ & \ll n \int_{K^{n+1}} \left(\int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(u)}^{h_{K_{(n+1)}}(u)} q(s, u) ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \right) \\ & \quad \times \left(\int_{S^{d-1}} \int_{h_{K_{(n)}}(v)}^{h_{K_{(n+1)}}(v)} q(t, v) dt \mathcal{H}^{d-1}(dv) \right) \mathbb{P}_\varrho^{\otimes(n+1)}(dX_{n+1}) \\ & = n \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} \int_0^{h_K(v)} q(s, u) q(t, v) \int_{K^{n+1}} \mathbf{1}\{h_{K_{(n)}}(u) \leq s \leq h_{K_{(n+1)}}(u)\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{h_{K_{(n)}}(v) \leq t \leq h_{K_{(n+1)}}(v)\} \mathbf{1}\{o \in K_{(n)}\} \\ & \quad \times \mathbb{P}_\varrho^{\otimes(n+1)}(dX_{n+1}) dt ds \mathcal{H}^{d-1}(dv) \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma n}). \end{aligned}$$

Hierbei wird der Erwartungswert in zwei Summanden zerlegt und der Summand, der den Term $\mathbf{1}\{o \notin K_{(n)}\}$ enthält, aufgrund der lokalen Integrierbarkeit der Funktion q und mit Hilfe von Lemma 9.3 abgeschätzt. Dabei wird ausgenutzt, dass wegen $o \in \text{int}(K)$ die Ungleichungen $h_K(u) \geq h_{K_{(n+1)}}(u) \geq h_{K_{(n)}}(u) \geq -h_K(-u)$ für alle $u \in S^{d-1}$ erfüllt sind.

Durch weiteres Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} & \text{Var}_\varrho(W_q(K_{(n)})) \\ & = n \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} \int_0^{h_K(v)} q(s, u) q(t, v) \int_{K^{n+1}} \mathbf{1}\{x_{n+1} \in C(u, s) \cap C(v, t)\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{X_n \subset K \setminus (C(u, s) \cup C(v, t))\} (1 - \mathbf{1}\{o \notin K_{(n)}\}) \\ & \quad \times \mathbb{P}_\varrho^{\otimes(n+1)}(dX_{n+1}) dt ds \mathcal{H}^{d-1}(dv) \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma n}) \\ & = n \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} \int_0^{h_K(v)} q(s, u) q(t, v) \mathbb{P}_\varrho(x_{n+1} \in C(u, s) \cap C(v, t)) \\ & \quad \times (1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in C(u, s) \cup C(v, t)))^n dt ds \mathcal{H}^{d-1}(dv) \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma n}), \end{aligned}$$

wobei der Summand, der den Term $\mathbf{1}\{o \notin K_{(n)}\}$ enthält, wieder aufgrund der lokalen Integrierbarkeit der Funktion q und mit Hilfe von Lemma 9.3 abgeschätzt wird.

Nun definieren wir für $b \geq 0$, $0 \leq s \leq h_K(u)$ und $u \in S^{d-1}$ die Menge

$$\Sigma(u, s; b) = \{v \in S^{d-1} : C(u, s) \cap \tilde{C}(v, b) \neq \emptyset\}$$

und für $v \in \Sigma(u, s; b)$ sei

$$\mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b) = \max\{\mathbb{P}_\varrho(x_1 \in C(u, s)), \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in \tilde{C}(v, b))\}.$$

Sei γ_2 definiert wie im Beweis zu Satz 9.1. Aufgrund der Symmetrie können wir $s \leq t$ annehmen. Dann erhalten wir durch die Substitution $b = h_K(v) - t$ und durch Zerlegen des Integrals über s , dass

$$\begin{aligned} & \text{Var}_\varrho(W_q(K_{(n)})) \\ & \ll n \int_{S^{d-1}} \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} \int_s^{h_K(v)} q(s, u) q(t, v) \mathbb{P}_\varrho(x_{n+1} \in C(u, s) \cap C(v, t)) \\ & \quad \times (1 - \mathbb{P}_\varrho(x_1 \in C(u, s) \cup C(v, t)))^n dt ds \mathcal{H}^{d-1}(dv) \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}) \\ & \ll n \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)} \int_0^{h_K(u)-s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b) \\ & \quad \times (1 - \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b))^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}) \\ & = n \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)-\gamma_2(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} \int_0^{h_K(u)-s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b) \\ & \quad \times (1 - \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b))^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & \quad + n \int_{S^{d-1}} \int_{h_K(u)-\gamma_2(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}}^{h_K(u)} \int_0^{h_K(u)-s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b) \\ & \quad \times (1 - \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b))^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}). \end{aligned}$$

Im Folgenden schätzen wir zunächst den ersten Summanden mit Hilfe folgender Abschätzung ab. Ist $\alpha \in [0, 1]$, dann gilt

$$\frac{(1 - \frac{2\alpha}{3})^n}{(1 - \alpha)^n} \geq \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)^n \geq \frac{\alpha n}{3},$$

woraus

$$\alpha(1 - \alpha)^n \leq \frac{3}{n} \left(1 - \frac{2\alpha}{3}\right)^n \quad (9.13)$$

folgt. Aus (9.13) und (9.2) folgt dann, dass

$$\begin{aligned} & n \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)-\gamma_2(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} \int_0^{h_K(u)-s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b) \\ & \quad \times (1 - \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b))^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ & \leq n \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u)-\gamma_2(\frac{\ln n}{n})^{\frac{1}{d}}} \int_0^{h_K(u)-s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \\ & \quad \times \frac{3}{n} \left(1 - \frac{2}{3} \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b)\right)^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{S^{d-1}} \int_0^{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \int_0^{h_K(u) - s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \\
&\quad \times 3 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{3 \ln n}{n}\right)^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\ll n^{-2}.
\end{aligned}$$

Dies, zusammen mit (9.13) und der Substitution $a = h_K(u) - s$ impliziert

$$\begin{aligned}
&\text{Var}_\varrho(W_q(K_{(n)})) \\
&\ll n \int_{S^{d-1}} \int_{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}}^{h_K(u)} \int_0^{h_K(u) - s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b) \\
&\quad \times \left(1 - \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b)\right)^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}) + O(n^{-2}) \\
&\leq n \int_{S^{d-1}} \int_{h_K(u) - \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}}^{h_K(u)} \int_0^{h_K(u) - s} \int_{\Sigma(u, s; b)} q(s, u) q(h_K(v) - b, v) \\
&\quad \times \frac{3}{n} \left(1 - \frac{2}{3} \mathbb{P}_\varrho^+(u, s; v, b)\right)^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db ds \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}) + O(n^{-2}) \\
&\ll \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \int_0^a \int_{\Sigma(u, h_K(u) - a; b)} q(h_K(u) - a, u) q(h_K(v) - b, v) \\
&\quad \times \left(1 - \frac{2}{3} \mathbb{P}_\varrho^+(u, h_K(u) - a; v, b)\right)^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) db da \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\quad + O(ne^{-\gamma_1 n}) + O(n^{-2}).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von q in jedem Punkt von D_K können wir annehmen, dass $q(h_K(u) - a, u)$ für ausreichend großes n für alle $a \in [0, \gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}]$ und für alle $u \in S^{d-1}$ beschränkt ist. Aus [14] (siehe Beweis der oberen Schranke in Theorem 1.2, S. 2291) folgt, dass das $(d-1)$ -dimensionale Hausdorffmaß von $\Sigma(u, h_K(u) - a; b)$ höchstens $\gamma a^{\frac{d-1}{2}}$ beträgt, wobei die Konstante $\gamma > 0$ von d abhängt. Daher erhalten wir unter Verwendung von (9.4) und Lemma 8.2 mit $\beta = \frac{d+1}{2}$, dass

$$\begin{aligned}
&\text{Var}_\varrho(W_q(K_{(n)})) \\
&\ll \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \int_0^a \int_{\Sigma(u, h_K(u) - a; b)} \left(1 - \frac{2}{3} \mathbb{P}_\varrho^+(u, h_K(u) - a; v, b)\right)^n \mathcal{H}^{d-1}(dv) \\
&\quad \times db da \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}) + O(n^{-2}) \\
&\ll \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} \int_0^a a^{\frac{d-1}{2}} \left(1 - \frac{4c_0 \kappa_{d-1} r(K)^{\frac{d-1}{2}}}{3(d+1)} a^{\frac{d+1}{2}}\right)^n db \\
&\quad \times da \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}) + O(n^{-2}) \\
&= \int_{S^{d-1}} \int_0^{\gamma_2 \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{d}}} a^{\frac{d+1}{2}} \left(1 - \frac{4c_0 \kappa_{d-1} r(K)^{\frac{d-1}{2}}}{3(d+1)} a^{\frac{d+1}{2}}\right)^n da \mathcal{H}^{d-1}(du) \\
&\quad + O(ne^{-\gamma_1 n}) + O(n^{-2}) \\
&\ll \int_{S^{d-1}} n^{-\frac{d+3}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(du) + O(ne^{-\gamma_1 n}) + O(n^{-2}) \\
&\ll n^{-\frac{d+3}{d+1}}.
\end{aligned}$$

Somit ist die asymptotische obere Schranke in Satz 9.7 gezeigt. \square

Aus der oberen Abschätzung für die Varianz der gewichteten mittleren Breite eines zufälligen Polytops $K_{(n)}$ in K folgern wir nun mit Hilfe des Polarkörpers eine obere Abschätzung für die Varianz $\text{Var}_{\mu_q}(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1))$.

Satz 9.8. *Sei K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d mit $o \in \text{int}(K)$, der frei in einer Kugel rollt. Die Funktion $q : [0, \infty) \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ erfülle die Eigenschaften i), ii) und iii) aus (9.9). Sei $\lambda : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine lokal integrierbare Funktion, die in jedem Punkt der Menge $\{(\rho(K, u), u) : u \in S^{d-1}\}$ stetig ist. Dann gilt*

$$\text{Var}_{\mu_q}(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1)) < c_3 \cdot n^{-\frac{d+3}{d+1}},$$

wobei die positive Konstante c_3 nur von K , λ und q abhängt.

Beweis. Wegen der Efron-Stein-Jackknife-Ungleichung (vergleiche [53]) gilt

$$\begin{aligned} & \text{Var}_{\mu_q}(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1)) \\ & \leq (n+1) \mathbb{E}_{\mu_q} \left(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K^{(n+1)} \cap K_1) \right)^2 \\ & \ll n \mathbb{E}_{\mu_q} \left(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K^{(n+1)} \cap K_1) \right)^2. \end{aligned}$$

Wir gehen nun genauso vor wie im Beweis zu Satz 9.5. Da $\mathbb{P}_{\mu_q}(K^{(n)} \not\subset K_1) \ll \alpha^n$ für ein von K und q abhängiges $\alpha \in (0, 1)$ gilt (vergleiche [17]) und aufgrund der Verteilungsgleichheit der zufälligen polyedrischen Mengen $K^{(n)}$ und $(K_{(n)}^*)^*$ (siehe [12], Proposition 5.1), folgt

$$\begin{aligned} & \text{Var}_{\mu_q}(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1)) \\ & \ll n \left(\mathbb{E}_{\mu_q} \left(\mathbf{1}\{K^{(n)} \subset K_1\} (V_\lambda(K^{(n)}) - V_\lambda(K^{(n+1)}))^2 \right) + O(\alpha^n) \right) \\ & = n \left(\mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\mathbf{1}\{(K_{(n)}^*)^* \subset K_1\} (V_\lambda((K_{(n)}^*)^*) - V_\lambda((K_{(n+1)}^*)^*))^2 \right) + O(\alpha^n) \right) \\ & = n \left(\mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\int_{S^{d-1}} \int_{h_{[x_1, \dots, x_n]}(u)}^{h_{[x_1, \dots, x_{n+1}]}(u)} \tilde{\lambda}(s, u) \, ds \, \mathcal{H}^{d-1}(du) \right)^2 + O(\alpha^n) \right) \\ & \ll n \left(\mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(W_{\tilde{\lambda}}(K_{(n+1)}^*) - W_{\tilde{\lambda}}(K_{(n)}^*) \right)^2 + O(\alpha^n) \right), \end{aligned}$$

wobei $x_1, \dots, x_{n+1} \in K^* \setminus K_1^*$ unabhängig identisch verteilte Zufallspunkte mit Verteilung ϱ sind. Die Funktion $\tilde{\lambda}$ ist gegeben durch

$$\tilde{\lambda}(s, u) := \begin{cases} \mathbf{1}\{s \geq h_{(K_1)^*}(u)\} s^{-(d+1)} \lambda(s^{-1}, u), & s > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $\tilde{\lambda}$ ist also wie im Beweis von Satz 9.5 definiert.

Nach Proposition 5.3 in [30] rollt in K^* eine Kugel frei. Somit liefert Satz 9.7 die obere Schranke der Varianz. \square

9.4. Starke Gesetze der großen Zahlen

Die oberen Schranken für die Varianzen implizieren starke Gesetze der großen Zahlen für $W_q(K_{(n)})$ und $V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1)$.

Satz 9.9. *Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $o \in \text{int}(K)$, in dem eine Kugel frei rollt. Ist ϱ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf K und $q: \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine lokal integrierbare Funktion, sodass ϱ positiv und stetig in jedem Randpunkt von K ist und q stetig in jedem Punkt der Menge D_K , dann gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (W_q(K) - W_q(K_{(n)})) \cdot n^{\frac{2}{d+1}} \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right)}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} \omega_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \varrho(x)^{-\frac{2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

Beweis. Dieser Beweis folgt der Argumentation von Theorem 1.3 in [14].

Für $\varepsilon > 0$ gilt mit der Tschebyscheff-Ungleichung und Satz 9.7, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\varrho \left(|W_q(K) - W_q(K_{(n)}) - \mathbb{E}_\varrho(W_q(K) - W_q(K_{(n)}))| \cdot n^{\frac{2}{d+1}} \geq \varepsilon \right) \\ & \leq \left(\varepsilon n^{-\frac{2}{d+1}} \right)^{-2} \text{Var}_\varrho(W_q(K_{(n)})) \\ & \ll \varepsilon^{-2} n^{\frac{4}{d+1}} n^{-\frac{d+3}{d+1}} \\ & \ll n^{-\frac{d-1}{d+1}}. \end{aligned}$$

Die Summe $\sum_{k=2}^{\infty} n_k^{-\frac{d-1}{d+1}}$ ist für $n_k = k^4$ endlich. Daher ist auch die Summe der Wahrscheinlichkeiten

$$\sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}_\varrho \left(|W_q(K) - W_q(K_{(n_k)}) - \mathbb{E}_\varrho(W_q(K) - W_q(K_{(n_k)}))| \cdot n_k^{\frac{2}{d+1}} \geq \varepsilon \right)$$

endlich.

Aus dem Borel-Cantelli-Lemma und Satz 9.1 folgt, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (W_q(K) - W_q(K_{(n_k)})) \cdot n_k^{\frac{2}{d+1}} \\ &= \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{d+1}\right)}{(d+1)^{\frac{d-1}{d+1}} \omega_d \kappa_{d-1}^{\frac{2}{d+1}}} \int_{\partial K} \kappa(x)^{\frac{d+2}{d+1}} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x)) \varrho(x)^{-\frac{2}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \end{aligned} \quad (9.14)$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

Da $W_q(K) - W_q(K_{(n)})$ monoton fallend in n ist, gilt für $n_{k-1} \leq n \leq n_k$, dass

$$(W_q(K) - W_q(K_{(n_{k-1})})) n_{k-1}^{\frac{2}{d+1}} \leq (W_q(K) - W_q(K_{(n)})) n^{\frac{2}{d+1}} \leq (W_q(K) - W_q(K_{(n_k)})) n_k^{\frac{2}{d+1}}.$$

Der Grenzwert von $\frac{n_k}{n_{k-1}}$ für k gegen unendlich ist eins, daher folgt die Behauptung aus dem Grenzwert der Teilfolge (9.14). \square

Analog zu diesem Beweis kann man auch folgendes starke Gesetz der großen Zahlen für das gewichtete Volumen zeigen. In diesem Fall wird die Monotonie von $V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K)$ bezüglich n ausgenutzt.

Satz 9.10. *Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $o \in \text{int}(K)$, der frei in einer Kugel rollt. Die Funktion $q : [0, \infty) \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ erfülle die Eigenschaften i), ii) und iii) aus (9.9). Sei $\lambda : \mathbb{R} \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine lokal integrierbare Funktion, die in jedem Punkt der Menge $\{(\rho(K, u), u) : u \in S^{d-1}\}$ stetig ist. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_\lambda(K^{(n)} \cap K_1) - V_\lambda(K) \right) \cdot n^{\frac{2}{d+1}} \\ &= c_d \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{-\frac{2}{d+1}} \lambda(\|x\|, \|x\|^{-1} x) \kappa(x)^{-\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \end{aligned}$$

mit Wahrscheinlichkeit 1.

Hierbei ist die Konstante c_d definiert wie in Satz 9.5.

Bemerkung 9.11. Die Sätze dieses Kapitels sind in der gemeinsamen Arbeit [30] mit F. Fodor und D. Hug enthalten.

10. Konvexe Hüllen von Punkten auf dem Rand eines konvexen Körpers

In diesem Kapitel betrachten wir im Unterschied zu den vorangegangenen Kapiteln ein anderes Wahrscheinlichkeitsmodell. Die Punkte x_1, \dots, x_n werden nun gemäß einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung zufällig und identisch auf dem Rand eines konvexen Körpers K gewählt. Die konvexe Hülle $K_{(n)} = [x_1, \dots, x_n]$ dieser Punkte ist dann wiederum ein in K enthaltenes zufälliges Polytop. Alle in diesem Abschnitt verwendeten Definitionen und Bezeichnungen werden aus den vorangegangenen Kapiteln entsprechend übernommen.

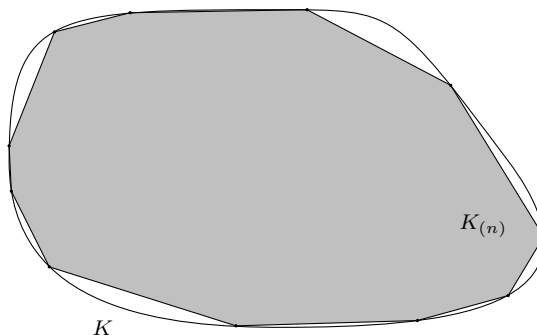


Abbildung 10.1.: Zufälliges Polytop $K_{(n)}$

Obwohl sich die Approximation des konvexen Körpers K durch zufällige Polytope verbessert, wenn die Punkte auf dem Rand von K anstatt im Inneren gewählt werden, da fast jeder Punkt ein Eckpunkt der konvexen Hülle ist, wurde dieses Modell bisher vergleichsweise wenig untersucht. Zwar berechneten Buchta et al. [20] 1985 explizite Formeln für die erwartete Oberfläche, mittlere Breite und Facettenzahl, wobei die Punkte gleichverteilt auf dem Rand der Einheitskugel gewählt wurden beziehungsweise im Fall der erwarteten mittleren Breite auf dem Rand eines konvexen Körpers von der Klasse \mathcal{C}_+^3 , Verallgemeinerungen dieser Resultate oder Formeln für andere Funktionale blieben zunächst jedoch aus. Erst im Jahre 2002 bewies Reitzner [51] asymptotische Formeln für die erwartete Differenz der inneren Volumina von K und $K_{(n)}$ von der Form

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} (V_i(K) - \mathbb{E}_\varrho(V_i(K_{(n)}))) = c^{(i,d)} \int_{\partial K} \varrho(x)^{-\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{1}{d-1}} H_{d-i}(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx)$$

für $i = 1, \dots, d$ unter der Annahme, dass der konvexe Körper K von der Klasse \mathcal{C}_+^2 ist. Die Konstante $c^{(i,d)}$ hängt nur von i und der Dimension d ab. Er betrachtete dabei Verteilungen der Punkte, die eine stetige positive Dichte ϱ besitzen. Im Fall des Volumenfunctionals gelang es Schütt und Werner [71] die Voraussetzungen dahingehend abzuschwächen, dass der konvexe Körper in einer Kugel frei rollt und außerdem eine Kugel im konvexen Körper frei rollt. Des Weiteren berechneten sie die auch im folgenden Satz vorkommende Konstante

$c^{(d,d)}$ explizit. In [13] wurde Reitzners Resultat von Böröczky et al. schließlich für alle konvexen Körper, in denen eine Kugel frei rollt, bewiesen.

Eine obere Abschätzung für die Varianz des Volumens wurde von Reitzner [53] gezeigt. Die untere Abschätzung der gleichen Ordnung bewiesen Richardson et al. [60]. Ist der konvexe Körper K von der Klasse \mathcal{C}_+^2 und werden die zufälligen Punkte gleichverteilt (in [60]) beziehungsweise gemäß einer positiven stetigen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ϱ (in [53]) auf dem Rand von K gewählt, so gilt

$$c(K) n^{-\frac{d+3}{d-1}} < \text{Var}(V(K_{(n)})) < c'(K, \varrho) n^{-\frac{d+3}{d-1}},$$

wobei die positiven Konstanten $c(K)$ und $c'(K, \varrho)$ von K beziehungsweise von K und ϱ abhängen.

Die Methoden, die Reitzner in [56] benutzt, um die erwarteten Seitenanzahlen, das heißt den f -Vektor, zu bestimmen, können auch für dieses Wahrscheinlichkeitsmodell angewendet werden. Insofern stellen sie also eine Verallgemeinerung der Formeln von Buchta et al. auf alle konvexen Körper von der Klasse \mathcal{C}_+^2 dar.

10.1. Gewichtete Volumendifferenz

Bisher wurden noch keine Gewichtungsfunktionen betrachtet. Daher berechnen wir nun aufbauend auf der Arbeit von Böröczky et al. [13] die erwartete gewichtete Volumendifferenz von K und $K_{(n)}$. Die Voraussetzungen an die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ϱ konnten hierbei abgeschwächt werden. Entsprechende Resultate für das in Kapitel 9 betrachtete Modell eines zufälligen Polytops wurden von Böröczky et al. in [12] bewiesen.

Satz 10.1. *Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper mit $o \in \text{int}(K)$, in dem eine Kugel frei rollt. Seien $\lambda : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion sowie ϱ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf ∂K . Sind λ und ϱ in jedem Randpunkt von K stetig und ist ϱ positiv, so gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_\varrho \left(\int_{K \setminus K_{(n)}} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) = c^{(d,d)} \int_{\partial K} \varrho(x)^{-\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{1}{d-1}} \lambda(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx),$$

wobei

$$c^{(d,d)} := \frac{(d-1)^{\frac{d+1}{d-1}} \Gamma(d+1 + \frac{2}{d-1})}{2(d+1)! \omega_{d-1}^{\frac{2}{d-1}}}.$$

Beweis. Der Beweis folgt der Idee des Beweises von Theorem 1.2 in [13]. Für $t \in (0, 1)$ sei $K_{[t]} := (1-t)K$ und für $x \in \partial K$ sei $x_{[t]} := (1-t)x$. Insbesondere sei $t_n := n^{-\frac{1}{d-1}}$. Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\varrho \left(\int_{K \setminus K_{(n)}} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) \\ &= \int_{(\partial K)^n} \int_{K \setminus K_{(n)}} \lambda(x) \prod_{i=1}^n \varrho(x_i) \mathcal{H}^d(dx) \mathcal{H}^{d-1}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \int_K \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \\ &= \int_{K \setminus K_{[t_n]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) + \int_{K_{[t_n]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx). \end{aligned}$$

Diese beiden Summanden schätzen wir nun einzeln ab. Hierfür sei $\delta > 0$ so gewählt, dass es die Voraussetzungen von Lemma 2.1 in [13] erfüllt. Wir nehmen im Folgenden an, dass n so groß ist, dass $t_n < \delta$ erfüllt ist. Nach Lemma 2.2 in [13] gilt dann für den ersten Summanden

$$\begin{aligned} & \int_{K \setminus K_{[t_n]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \\ &= \int_{\partial K} \int_0^{t_n} \mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \lambda(x_{[t]}) (1-t)^{d-1} \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \mathcal{H}^{d-1}(dx). \end{aligned}$$

Da wir später den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden wollen, schätzen wir das innere Integral weiter ab. Hierzu benötigen wir folgendes Hilfsmittel. Für $c > 0$ mit $c \delta^{\frac{d-1}{2}} < 1$ folgt durch die Substitution $s = c t^{\frac{d-1}{2}}$ und wegen $(1-s)^n \leq e^{-ns}$ für $s \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \int_0^\delta (1 - c t^{\frac{d-1}{2}})^n dt &= \frac{2}{d-1} c^{-\frac{2}{d-1}} \int_0^{c \delta^{\frac{d-1}{2}}} s^{\frac{2}{d-1}-1} (1-s)^n ds \\ &\leq \frac{2}{d-1} c^{-\frac{2}{d-1}} \int_0^{c \delta^{\frac{d-1}{2}}} s^{\frac{2}{d-1}-1} e^{-ns} ds \\ &\ll c^{-\frac{2}{d-1}} n^{-\frac{2}{d-1}}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Wir können für den Rest des Beweises davon ausgehen, dass λ eine nichtnegative lokal integrierbare Funktion ist, da wir sie in ihren positiven und negativen Teil zerlegen können. Da λ in jedem Randpunkt von K stetig ist, ist λ für hinreichend kleines t beschränkt in $x_{[t]}$. Nach Lemma 2.1 in [13] existiert außerdem eine von K und ϱ abhängige Konstante $\gamma_1 \in (0, 1)$, sodass mit (10.1) für ausreichend großes n folgt, dass

$$\begin{aligned} & n^{\frac{2}{d-1}} \int_0^{t_n} \mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \lambda(x_{[t]}) (1-t)^{d-1} \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \\ &\ll n^{\frac{2}{d-1}} \int_0^{t_n} \left(1 - \gamma_1 t^{\frac{d-1}{2}}\right)^n \lambda(x_{[t]}) (1-t)^{d-1} \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \\ &\ll n^{\frac{2}{d-1}} \gamma n^{-\frac{2}{d-1}} \\ &= \gamma, \end{aligned}$$

wobei die Konstante $\gamma > 0$ abhängig von K , λ und ϱ ist. Diese Abschätzung werden wir später benötigen, um den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden zu können.

Der zweite Summand kann wie folgt abgeschätzt werden. Sei zunächst $x \in K_{[\delta]}$. Dann gilt

$$\mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \leq 2^d (1 - \gamma_2)^n$$

für ein $\gamma_2 > 0$. Dies sieht man analog zum Beweis von Lemma 9.3 wie folgt ein: Es sei eine feste Orthonormalbasis des \mathbb{R}^d gegeben. Dieser wird durch die zugehörigen $(d-1)$ -dimensionalen Koordinaten-Hyperebenen in 2^d konvexe Kegel geteilt, die sogenannten Koordinatenkegel Θ_i , $i = 1, \dots, 2^d$. Mit $\Theta'_i := x + \Theta_i$, $i = 1, \dots, 2^d$, bezeichnen wir die nach x verschobenen Koordinatenkegel. Wegen $x \in K_{[\delta]}$ mit $\delta > 0$ folgt $x \in \text{int}(K)$ und aufgrund der Konvexität von K enthält jeder Koordinatenkegel Θ'_i einen Teil des Randes von K . Die Konstante γ_2 sei der minimale Wahrscheinlichkeitsinhalt eines Teilstücks des Randes von K , das in einem Koordinatenkegel Θ'_i enthalten ist. Gilt $x \notin K_{(n)}$, so kann x durch

eine Hyperebene H strikt von $K_{(n)}$ getrennt werden. Also gibt es einen Koordinatenkegel Θ'_i , der durch H strikt von $K_{(n)}$ getrennt ist. Hieraus folgt die Behauptung.

Sei nun $x \in \partial K$ und $t \in (t_n, \delta)$. Nach Lemma 2.1 in [13] existiert ein $\gamma_3 \in (0, 1)$, sodass

$$\mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \ll (1 - \gamma_3 t^{\frac{d-1}{2}})^n.$$

Mit diesen beiden Abschätzungen sowie mit Lemma 2.2 aus [13] gilt

$$\begin{aligned} & \int_{K_{[t_n]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \\ &= \int_{K_{[t_n]} \setminus K_{[\delta]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) + \int_{K_{[\delta]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \\ &\leq \int_{\partial K} \int_{t_n}^{\delta} \mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \lambda(x_{[t]}) (1-t)^{d-1} \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &\quad + \int_{K_{[\delta]}} 2^d (1 - \gamma_2)^n \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \\ &\ll \int_{\partial K} \int_{t_n}^{\delta} (1 - \gamma_3 t^{\frac{d-1}{2}})^n \lambda(x_{[t]}) (1-t)^{d-1} \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &\quad + 2^d (1 - \gamma_2)^n \int_{K_{[\delta]}} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx). \end{aligned}$$

Für $t \in (t_n, \delta)$ gilt

$$(1 - \gamma_3 t^{\frac{d-1}{2}})^n \leq (1 - \gamma_3 n^{-\frac{1}{2}})^n < e^{-\gamma_3 n^{\frac{1}{2}}} \ll n^{-\frac{3}{d-1}}.$$

Da λ lokal integrierbar ist, folgt somit, dass

$$\int_{K_{[t_n]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) = o\left(n^{-\frac{2}{d-1}}\right).$$

Zusammengefasst folgt also mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz und der Stetigkeit von λ für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_\varrho \left(\int_{K \setminus K_{(n)}} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \left(\int_{K \setminus K_{[t_n]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) + \int_{K_{[t_n]}} \mathbb{P}_\varrho(x \notin K_{(n)}) \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \left(\int_{\partial K} \int_0^{t_n} \mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \lambda(x_{[t]}) (1-t)^{d-1} \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \mathcal{H}^{d-1}(dx) \right. \\ &\quad \left. + o\left(n^{-\frac{2}{d-1}}\right) \right) \\ &= \int_{\partial K} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \lambda(x_{[t]}) (1-t)^{d-1} \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &= \int_{\partial K} \lambda(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &= \int_{\partial K} \lambda(x) J_\varrho(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx), \end{aligned}$$

wobei

$$J_\varrho(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t_n} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{P}_\varrho(x_{[t]} \notin K_{(n)}) \langle x, \sigma_K(x) \rangle dt.$$

Wie im Beweis zu Satz 9.1 genügt es, aufgrund eines Satzes von Aleksandrov (siehe [67], Theorem 2.6.1), den Grenzwert für normale Randpunkte zu bestimmen. Nach Lemma 2.4 und der Formel auf Seite 806 in [13] gilt für einen normalen Randpunkt $x \in \partial K$ mit nichtnegativer Gauß-Kronecker-Krümmung, dass

$$J_\varrho(x) = \varrho(x)^{-\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{1}{d-1}} c^{(d,d)}.$$

Hiermit folgt schließlich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_\varrho \left(\int_{K \setminus K_{(n)}} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) &= \int_{\partial K} \lambda(x) J_\varrho(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\ &= c^{(d,d)} \int_{\partial K} \lambda(x) \varrho(x)^{-\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{1}{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \end{aligned}$$

und die Behauptung ist gezeigt. \square

Bemerkung 10.2. In [13] wird die Differenz aller inneren Volumina betrachtet. Das Problem einer Verallgemeinerung des obigen Satzes auf die gewichtete Differenz aller inneren Volumina liegt darin, dass die Definition eines gewichteten inneren Volumens im Allgemeinen nicht klar ist.

10.2. Berührende polyedrische Mengen

In diesem Abschnitt wird in ähnlicher Weise wie in Abschnitt 9.2 mit Hilfe des Polarkörpers und der Dualität zwischen polyedrischen Mengen und Polytopen die erwartete Differenz der mittleren Breite der zufälligen polyedrischen Menge $K^{(n)}$ und eines konvexen Körpers K mit $o \in \text{int}(K)$ berechnet. Im Unterschied zum vorangegangenen Kapitel werden die Hyperebenen nun so gewählt, dass sie K berühren und das Innere von K nicht schneiden, das heißt es handelt sich um Stützhyperebenen. Wie im vorangegangenen Kapitel ist \mathcal{H} der Raum der Hyperebenen in \mathbb{R}^d . Mit $\mathcal{H}_{K,s}$ bezeichnen wir die Teilmenge der Stützhyperebenen von K . Die zufällige polyedrische Menge $K^{(n)}$ entsteht als Durchschnitt von n Halbräumen H_i^- , die den Ursprung o enthalten und von n zufälligen, unabhängig gewählten Stützhyperebenen $H_i \in \mathcal{H}_{K,s}$ von K berandet werden, also

$$K^{(n)} = \bigcap_{i=1}^n H_i^-.$$

Wie im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, wurde dieses Modell bisher wenig erforscht. Bekannte Resultate gibt es von Buchta [18], der die erwartete Eckenzahl des Durchschnitts von Halbräumen berechnete, die die Einheitskugel berühren. Böröczky und Reitzner [16] betrachteten die erwartete Differenz des Volumens, der Oberfläche und der mittleren Breite für einen konvexen Körper von der Klasse \mathcal{C}^2 . Für die Volumendifferenz gelang es Reitzner [52] die Varianz abzuschätzen und dadurch ein starkes Gesetz der großen Zahlen zu beweisen.

Bevor wir unseren Satz formulieren und beweisen, benötigen wir einige Grundlagen. Analog zu Abschnitt 9.2 definieren wir μ_q für eine lokal integrierbare Funktion $q : [0, \infty) \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\mu_q := \frac{1}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \mathbf{1}\{H(u, h_K(u)) \in \cdot\} q(h_K(u), u) \mathcal{H}^{d-1}(du).$$

Zusätzlich soll die Funktion q folgende Eigenschaften erfüllen:

- i) Sie ist konzentriert auf der Menge D_K ;
 - ii) sie ist positiv und stetig in jedem Punkt der Menge D_K ;
 - iii) $\mu_q(\mathcal{H}_{K,s}) = 1$.
- (10.2)

Dann ist μ_q eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Raum der Hyperebenen, die auf $\mathcal{H}_{K,s}$ konzentriert ist. Die zufälligen Hyperebenen, die wie oben beschrieben die zufällige polyedrische Menge $K^{(n)}$ erzeugen, sollen nun die Verteilung μ_q haben.

Das folgende Lemma stellt einen Zusammenhang zwischen den polyedrischen Mengen $K^{(n)}$ und $(K_{(n)}^*)^* = ((K^*)_{(n)})^*$ her und wird später im Beweis ein wichtiges Werkzeug sein.

Lemma 10.3. *Sei K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d mit $o \in \text{int}(K)$, der frei in einer Kugel rollt. Sei q eine lokal integrierbare Funktion, die die Eigenschaften i), ii) und iii) aus (10.2) erfülle, sowie ϱ gegeben durch*

$$\varrho(x) := \frac{1}{\omega_d} q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1} x) \|x\|^{-d} \langle x, \sigma_{K^*}(x) \rangle, \quad x \in \partial K^*.$$

Dann sind die zufälligen polyedrischen Mengen $K^{(n)}$ (basierend auf Stützhyperebenen von K mit Verteilung μ_q) und $(K_{(n)}^)^*$ (basierend auf zufälligen Punkten aus ∂K^* mit Dichte ϱ) in Verteilung gleich.*

Beweis. Sei F ein nichtnegatives messbares Funktional konvexer polyedrischer Mengen im \mathbb{R}^d . Nach der Definition von μ_q und wegen

$$\bigcap_{i=1}^n H_i^-(u_i, h_K(u_i)) = [h_K(u_1)^{-1}u_1, \dots, h_K(u_n)^{-1}u_n]^*$$

gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mu_q} \left(F(K^{(n)}) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_d^n} \int_{(S^{d-1})^n} F \left(\bigcap_{i=1}^n H_i^-(u_i, h_K(u_i)) \right) \prod_{i=1}^n q(h_K(u_i), u_i) \mathcal{H}^{d-1}(d(u_1, \dots, u_n)) \\ &= \frac{1}{\omega_d^n} \int_{(S^{d-1})^n} F([h_K(u_1)^{-1}u_1, \dots, h_K(u_n)^{-1}u_n]^*) \prod_{i=1}^n q(h_K(u_i), u_i) \mathcal{H}^{d-1}(d(u_1, \dots, u_n)) \\ &= \frac{1}{\omega_d^n} \int_{(S^{d-1})^n} F([\rho(K^*, u_1)u_1, \dots, \rho(K^*, u_n)u_n]^*) \prod_{i=1}^n q(h_K(u_i), u_i) \mathcal{H}^{d-1}(d(u_1, \dots, u_n)). \end{aligned}$$

Wie im Beweis zu Satz 9.5 nutzen wir nun die bijektive bi-Lipschitz Funktion $T : S^{d-1} \rightarrow \partial K^*$, $u \mapsto \rho(K^*, u)u$ und ihre Jacobi-Determinante (vergleiche [38], Beweis zu Lemma 2.4)

$$JT(u) = \frac{\|\nabla h_K(u)\|}{h_K(u)^d}$$

und erhalten wegen der Homogenität der Stützfunktion und ihres Gradienten, dass

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mu_q} \left(F(K^{(n)}) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_d^n} \int_{(\partial K^*)^n} F([x_1, \dots, x_n]^*) \\ & \quad \times \prod_{i=1}^n \left[q(h_K(\|x_i\|^{-1} x_i), \|x_i\|^{-1} x_i) \frac{h_{K^*}(\|x_i\|^{-1} x_i)^d}{\|\nabla h_{K^*}(\|x_i\|^{-1} x_i)\|} \right] \mathcal{H}^{d-1}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \frac{1}{\omega_d^n} \int_{(\partial K^*)^n} F([x_1, \dots, x_n]^*) \\ & \quad \times \prod_{i=1}^n \left[q(\|x_i\|^{-1} h_K(x_i), \|x_i\|^{-1} x_i) \frac{\|x_i\|^{-d}}{\|\nabla h_{K^*}(x_i)\|} \right] \mathcal{H}^{d-1}(d(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\text{Nor}(K^*) \rightarrow \text{Nor}(K)$, $(x, u) \mapsto (\frac{u}{\langle x, u \rangle}, \frac{x}{\|x\|})$ ist bijektiv. Ist $(x, u) \in \text{Nor}(K^*)$, so ist also $\frac{u}{\langle x, u \rangle}$ ein Randpunkt von K mit äußerer Normale x . Da K in einer Kugel frei rollt, ist K strikt konvex und somit gilt $\nabla h_K(x) = \frac{u}{\langle x, u \rangle}$. Also folgt für fast alle $x \in \partial K^*$ die Identität $\|\nabla h_K(x)\|^{-1} = \langle x, \sigma_{K^*}(x) \rangle$ und obige Formel vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mu_q} \left(F(K^{(n)}) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_d^n} \int_{(\partial K^*)^n} F([x_1, \dots, x_n]^*) \\ & \quad \times \prod_{i=1}^n \left[q(\|x_i\|^{-1}, \|x_i\|^{-1} x_i) \|x_i\|^{-d} \langle x_i, \sigma_{K^*}(x_i) \rangle \right] \mathcal{H}^{d-1}(d(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Für $n = 1$ und $F \equiv 1$ gilt daher

$$1 = \frac{1}{\omega_d} \int_{\partial K^*} q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1} x) \|x\|^{-d} \langle x, \sigma_{K^*}(x) \rangle \mathcal{H}^{d-1}(dx).$$

Also ist

$$\varrho(x) := \frac{1}{\omega_d} q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1} x) \|x\|^{-d} \langle x, \sigma_{K^*}(x) \rangle, \quad x \in \partial K^*,$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich $\mathcal{H}^d \llcorner \partial K^*$. Außerdem ist ϱ positiv und stetig in jedem Randpunkt von K^* . Dies folgt aus den Eigenschaften von q : Ist x ein Randpunkt von K^* , so gilt

$$\|x\|^{-1} = \rho(K^*, \|x\|^{-1} x)^{-1} = h_K(\|x\|^{-1} x)$$

und somit

$$q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1} x) = q(h_K(\|x\|^{-1} x), \|x\|^{-1} x).$$

Da $(h_K(\|x\|^{-1} x), \|x\|^{-1} x)$ ein Element der Menge D_K ist, ist q nach (10.2 ii)) positiv und stetig.

Mit dieser Definition von ϱ erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_q} \left(F(K^{(n)}) \right) &= \int_{(\partial K^*)^n} F([x_1, \dots, x_n]^*) \prod_{i=1}^n \varrho(x_i) \mathcal{H}^{d-1}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(F \left((K_{(n)}^*)^* \right) \right).\end{aligned}$$

Also sind $K^{(n)}$ und $(K_{(n)}^*)^*$ in Verteilung gleich. \square

Nun können wir eine asymptotische Formel für die erwartete Differenz der mittleren Breiten der polyedrischen Menge $K^{(n)}$ und K beweisen.

Satz 10.4. *Sei K ein konvexer Körper in \mathbb{R}^d mit $o \in \text{int}(K)$, der frei in einer Kugel rollt. Sei q eine lokal integrierbare Funktion, die die Eigenschaften i), ii) und iii) aus (10.2) erfüllt. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_{\mu_q} \left(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K) \right) \\ = \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{-\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{d-2}{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx),\end{aligned}$$

wobei $c^{(d,d)}$ die in Satz 10.1 definierte Konstante ist.

Beweis. Das Vorgehen im Beweis ist ähnlich zu dem im Beweis von Satz 9.5. Für eine polyedrische Menge $P \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$F(P) := \mathbf{1}\{P \subset K_1\} (W(P) - W(K)).$$

Für $x_1, \dots, x_n \in \partial K^*$ gilt $K \subset [x_1, \dots, x_n]^*$. Also gilt $o \in \text{int}([x_1, \dots, x_n])$, da $o \in \text{int}(K)$ ist. Durch die Substitution $s = \frac{1}{t}$ und mit Polarkoordinaten erhalten wir

$$\begin{aligned}F([x_1, \dots, x_n]^*) &= \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} (W([x_1, \dots, x_n]^*) - W(K)) \\ &= \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} \left(\frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} h_{[x_1, \dots, x_n]^*}(u) - h_K(u) \mathcal{H}^{d-1}(du) \right) \\ &= \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} \left(\frac{2}{\omega_d} \int_{S^{d-1}} \int_{\rho(K^*, u)^{-1}}^{\rho([x_1, \dots, x_n], u)^{-1}} 1 dt \mathcal{H}^{d-1}(du) \right) \\ &= 2 \cdot \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} \int_{K^* \setminus [x_1, \dots, x_n]} \frac{1}{\omega_d} \|x\|^{-(d+1)} \mathcal{H}^d(dx) \\ &= 2 \cdot \mathbf{1}\{[x_1, \dots, x_n]^* \subset K_1\} \int_{K^* \setminus [x_1, \dots, x_n]} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx),\end{aligned}$$

wobei $\lambda(x) := \begin{cases} \omega_d^{-1} \|x\|^{-(d+1)}, & x \in K^* \setminus \{o\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgrund von $\mathbb{P}_{\mu_q}(K^{(n)} \not\subset K_1) \ll \alpha^n$ für ein $\alpha \in (0, 1)$, das von K und q abhängt (siehe [17]), und der in Lemma 10.3 gezeigten Verteilungsgleichheit der Mengen $K^{(n)}$ und $(K_{(n)}^*)^*$

folgt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\mu_q} \left(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K) \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mu_q} \left(\mathbf{1}\{K^{(n)} \subset K_1\} (W(K^{(n)}) - W(K)) \right) \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu_q} \left(\mathbf{1}\{K^{(n)} \not\subset K_1\} (W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K)) \right) \\
&= \mathbb{E}_{\mu_q} \left(\mathbf{1}\{K^{(n)} \subset K_1\} (W(K^{(n)}) - W(K)) \right) + O(\alpha^n) \\
&= \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\mathbf{1}\{(K_{(n)}^*)^* \subset K_1\} (W((K_{(n)}^*)^*) - W(K)) \right) + O(\alpha^n) \\
&= \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(2 \cdot \mathbf{1}\{(K_{(n)}^*)^* \subset K_1\} \int_{K^* \setminus K_{(n)}^*} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) + O(\alpha^n) \\
&= 2 \cdot \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\int_{K^* \setminus K_{(n)}^*} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) + O(\alpha^n).
\end{aligned}$$

Da K frei in einer Kugel rollt, rollt nach Proposition 5.3 in [30] eine Kugel frei in K^* und wegen $o \in \text{int}(K)$ gilt auch $o \in \text{int}(K^*)$. Aus dem Beweis von Lemma 10.3 geht hervor, dass ϱ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf ∂K^* ist, die positiv und stetig in jedem Randpunkt ist. Außerdem ist die oben definierte Funktion λ stetig in jedem Randpunkt von K^* und aufgrund der Kompaktheit von K^* integrierbar. Also gilt mit Satz 10.1 für den Grenzwert

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_{\mu_q} \left(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \left(2 \cdot \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\int_{K^* \setminus K_{(n)}^*} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) + O(\alpha^n) \right) \\
&= 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_{\varrho, K^*} \left(\int_{K^* \setminus K_{(n)}^*} \lambda(x) \mathcal{H}^d(dx) \right) \\
&= 2 c^{(d,d)} \int_{\partial K^*} \varrho(x)^{-\frac{2}{d-1}} \kappa^*(x)^{\frac{1}{d-1}} \lambda(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx),
\end{aligned}$$

wobei $\kappa^*(x)$ wieder die Gauß-Kronecker-Krümmung des Polarkörpers K^* in x bezeichnet.

Setzen wir obige Definitionen von ϱ und λ ein und nutzen für $x \in \partial K^*$ die Gleichungen

$$\langle x, \sigma_{K^*}(x) \rangle = h_{K^*}(\sigma_{K^*}(x)) = \rho(K, \sigma_{K^*}(x))^{-1},$$

so erhalten wir mit Lemma 6.1 aus [12], dass

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_{\mu_q} \left(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K) \right) \\
&= \frac{2 c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K^*} q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1} x)^{-\frac{2}{d-1}} \langle x, \sigma_{K^*}(x) \rangle^{-\frac{2}{d-1}} \kappa^*(x)^{\frac{1}{d-1}} \|x\|^{\frac{2d}{d-1} - (d+1)} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\
&= \frac{2 c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K^*} q(\|x\|^{-1}, \|x\|^{-1} x)^{-\frac{2}{d-1}} \rho(K, \sigma_{K^*}(x))^{\frac{2}{d-1}} \|x\|^{\frac{2d}{d-1} - (d+1)} \\
&\quad \times \kappa^*(x)^{\frac{2}{d^2-1}} \kappa^*(x)^{\frac{1}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\
&= \frac{2 c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{S^{d-1}} q \left(\|\nabla h_{K^*}(u)\|^{-1}, \frac{\nabla h_{K^*}(u)}{\|\nabla h_{K^*}(u)\|} \right)^{-\frac{2}{d-1}} \rho(K, u)^{\frac{2}{d-1}} \|\nabla h_{K^*}(u)\|^{\frac{2d}{d-1} - (d+1)} \\
&\quad \times \kappa^*(\nabla h_{K^*}(u))^{\frac{2}{d^2-1}} D_{d-1} h_{K^*}(u)^{\frac{d}{d+1}} \mathcal{H}^{d-1}(du),
\end{aligned}$$

wobei $\sigma_{K^*}(\nabla h_{K^*}(u)) = u$ für fast alle $u \in S^{d-1}$ verwendet wurde.

Wie im Beweis zu Satz 9.5 bezeichnet $D_{d-1}h_{K^*}(u)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien von K^* in Richtung u . Dieses ist aufgrund der in K^* frei rollenden Kugel vom Radius $r(K^*) > 0$ von unten durch $r(K^*)^{d-1}$ beschränkt.

Da eine Kugel frei in K^* rollt, folgt ebenso wie im Beweis zu Satz 9.5 aus Lemma 2.6 in [37] sowie Lemma 3.1 und Lemma 3.4 in [39], dass

$$\kappa^*(\nabla h_{K^*}(u)) = D_{d-1}h_{K^*}(u)^{-1} \in (0, \infty).$$

Außerdem gilt nach Theorem 2.2 in [38] für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$, dass die Stützfunktion von K^* in u zweimal differenzierbar ist und der Punkt $x = \rho(K, u)u \in \partial K$ ein normaler Randpunkt von K ist. Für solch ein $u \in S^{d-1}$ gilt dann

$$D_{d-1}h_{K^*}(u) \langle u, \sigma_K(x) \rangle^{d+1} = \kappa(x).$$

Hiermit folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_{\mu_q} \left(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K) \right) \\ &= \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{S^{d-1}} q \left(\|\nabla h_{K^*}(u)\|^{-1}, \frac{\nabla h_{K^*}(u)}{\|\nabla h_{K^*}(u)\|} \right)^{-\frac{2}{d-1}} \|\nabla h_{K^*}(u)\|^{\frac{2d}{d-1} - (d+1)} \rho(K, u)^{\frac{2}{d-1}} \\ & \quad \times D_{d-1}h_{K^*}(u)^{\frac{d-2}{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(du) \\ &= \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{S^{d-1}} q \left(\|\nabla h_{K^*}(u)\|^{-1}, \frac{\nabla h_{K^*}(u)}{\|\nabla h_{K^*}(u)\|} \right)^{-\frac{2}{d-1}} \|\nabla h_{K^*}(u)\|^{\frac{2d}{d-1} - (d+1)} \rho(K, u)^{\frac{2}{d-1}} \\ & \quad \times \kappa(\rho(K, u)u)^{\frac{d-2}{d-1}} \langle u, \sigma_K(\rho(K, u)u) \rangle^{-\frac{(d+1)(d-2)}{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(du). \end{aligned}$$

Wie im vorangegangenen Beweis nutzen wir die Funktion $T : S^{d-1} \rightarrow \partial K$, $u \mapsto \rho(K, u)u$ und deren Jacobi-Determinante (vergleiche [38], Beweis zu Lemma 2.4)

$$JT(u) = \frac{\|\nabla h_{K^*}(u)\|}{h_{K^*}(u)^d}.$$

Da außerdem

$$\|\nabla h_{K^*}(x)\|^{-1} = \langle x, \sigma_K(x) \rangle = h_K(\sigma_K(x))$$

sowie

$$\frac{\nabla h_{K^*}(x)}{\|\nabla h_{K^*}(x)\|} = \sigma_K(x)$$

für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \partial K$ gilt, erhalten wir schließlich aufgrund der Homogenität der einzelnen Funktionen

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{2}{d-1}} \mathbb{E}_{\mu_q} \left(W(K^{(n)} \cap K_1) - W(K) \right) \\ &= \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K} q \left(\|\nabla h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)\|^{-1}, \frac{\nabla h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)}{\|\nabla h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)\|} \right)^{-\frac{2}{d-1}} \|\nabla h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)\|^{\frac{2d}{d-1} - (d+1)} \\ & \quad \times \rho(K, \|x\|^{-1}x)^{\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{d-2}{d-1}} \langle \|x\|^{-1}x, \sigma_K(x) \rangle^{-\frac{(d+1)(d-2)}{d-1}} \frac{h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)^d}{\|\nabla h_{K^*}(\|x\|^{-1}x)\|} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K} q \left(\|\nabla h_{K^*}(x)\|^{-1}, \frac{\nabla h_{K^*}(x)}{\|\nabla h_{K^*}(x)\|} \right)^{-\frac{2}{d-1}} \|\nabla h_{K^*}(x)\|^{\frac{2d}{d-1}-(d+1)} \|x\|^{\frac{2}{d-1}} \\
&\quad \times \rho(K, x)^{\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{d-2}{d-1}} \|x\|^{\frac{(d+1)(d-2)}{d-1}} \langle x, \sigma_K(x) \rangle^{-\frac{(d+1)(d-2)}{d-1}} \frac{\|x\|^{-d} \rho(K, x)^{-d}}{\|\nabla h_{K^*}(x)\|} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\
&= \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K} q \left(\|\nabla h_{K^*}(x)\|^{-1}, \frac{\nabla h_{K^*}(x)}{\|\nabla h_{K^*}(x)\|} \right)^{-\frac{2}{d-1}} \|\nabla h_{K^*}(x)\|^{\frac{2d}{d-1}-(d+2)} \kappa(x)^{\frac{d-2}{d-1}} \\
&\quad \times \langle x, \sigma_K(x) \rangle^{-\frac{(d+1)(d-2)}{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\
&= \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{-\frac{2}{d-1}} h_K(\sigma_K(x))^{-\frac{2d}{d-1}+(d+2)} \kappa(x)^{\frac{d-2}{d-1}} \\
&\quad \times h_K(\sigma_K(x))^{-\frac{(d+1)(d-2)}{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx) \\
&= \frac{2c^{(d,d)}}{\omega_d^{\frac{d-3}{d-1}}} \int_{\partial K} q(h_K(\sigma_K(x)), \sigma_K(x))^{-\frac{2}{d-1}} \kappa(x)^{\frac{d-2}{d-1}} \mathcal{H}^{d-1}(dx).
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung gezeigt. □

Literaturverzeichnis

- [1] A. D. Aleksandrov. Zur Theorie der gemischten Volumina von konvexen Körpern. - I: Verallgemeinerung einiger Begriffe der Theorie von konvexen Körpern (Russisch). *Mat. Sbornik, N.S.*, 2(5):947–972, 1937.
- [2] E. Arbeiter and M. Zähle. Kinematic relations for Hausdorff moment measures in spherical spaces. *Mathematische Nachrichten*, 153(1):333–348, 1991.
- [3] I. Bárány. Intrinsic volumes and f -vectors of random polytopes. *Mathematische Annalen*, 285:671–699, 1989.
- [4] I. Bárány. Random polytopes in smooth convex bodies. *Mathematika*, 39(01):81–92, 1992.
- [5] I. Bárány and C. Buchta. Random polytopes in a convex polytope, independence of shape, and concentration of vertices. *Mathematische Annalen*, 297(1):467–497, 1993.
- [6] I. Bárány, F. Fodor, and V. Vígh. Intrinsic volumes of inscribed random polytopes in smooth convex bodies. *Advances in Applied Probability*, 42(3):605–619, 2010.
- [7] I. Bárány and M. Reitzner. On the variance of random polytopes. *Advances in Mathematics*, 225(4):1986–2001, 2010.
- [8] I. Bárány and M. Reitzner. Poisson polytopes. *The Annals of Probability*, 38(4):1507–1531, 2010.
- [9] Christian Berg. *Corps convexes et potentiels sphériques*. Matematisk-fysiske meddelelser ; 37,6. Munksgaard, København, 1969.
- [10] N. H. Bingham, H. Bräker, and T. Hsing. On the Hausdorff distance between a convex set and an interior random convex hull. *Advances in Applied Probability*, 30(2):295–316, 1998.
- [11] W. Blaschke. Über affine Geometrie XI: Lösung des “Vierpunktproblems” von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. *Leipziger Berichte*, 69:436–453, 1917.
- [12] K. J. Böröczky, F. Fodor, and D. Hug. The mean width of random polytopes circumscribed around a convex body. *Journal of the London Mathematical Society*, 81(2):499–523, 2010.
- [13] K. J. Böröczky, F. Fodor, and D. Hug. Intrinsic volumes of random polytopes with vertices on the boundary of a convex body. *Transactions of the American Mathematical Society*, 365(2):785–809, 2013.
- [14] K. J. Böröczky, F. Fodor, M. Reitzner, and V. Vígh. Mean width of random polytopes in a reasonably smooth convex body. *Journal of Multivariate Analysis*, 100:2287–2295, 2009.

-
- [15] K. J. Böröczky Jr., L. M. Hoffmann, and D. Hug. Expectation of intrinsic volumes of random polytopes. *Periodica Mathematica Hungarica*, 57(2):143–164, 2008.
- [16] K. Böröczky Jr. and M. Reitzner. Approximation of smooth convex bodies by random circumscribed polytopes. *Annals of Applied Probability*, 14:239–273, 2004.
- [17] K. J. Böröczky and R. Schneider. The mean width of circumscribed random polytopes. *Canadian Mathematical Bulletin*, 53:614–628, 2010.
- [18] C. Buchta. On the number of vertices of random polyhedra with a given number of facets. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 8(1):85–92, 1987.
- [19] C. Buchta. An identity relating moments of functionals of convex hulls. *Discrete and Computational Geometry*, 33(1):125–142, 2005.
- [20] C. Buchta, J. Müller, and R. F. Tichy. Stochastic approximation of convex bodies. *Mathematische Annalen*, 271(2):225–235, 1985.
- [21] P. Calka, T. Schreiber, and J. E. Yukich. Brownian limits, local limits and variance asymptotics for convex hulls in the ball. *The Annals of Probability*, 41(1):50–108, 01 2013.
- [22] P. Calka and J. E. Yukich. Variance asymptotics for random polytopes in smooth convex bodies. *Probability Theory and Related Fields*, 158(1-2):435–463, 2014.
- [23] L. Dümbgen and G. Walther. Rates of convergence for random approximations of convex sets. *Advances in Applied Probability (SGSA)*, 28:384–393, 1996.
- [24] B. Efron. The convex hull of a random set of points. *Biometrika*, 52(3-4):331–343, 1965.
- [25] H. Federer. Curvature measures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 93:418–491, 1959.
- [26] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin, 1969.
- [27] W. Fenchel and B. Jessen. *Mengenfunktionen und konvexe Körper*. Matematisk-fysiske meddelelser; 16,3. Levin & Munksgaard, København, 1938.
- [28] S. Finch and I. Hueter. Random convex hulls: a variance revisited. *Advances in Applied Probability*, 36(4):981–986, 2004.
- [29] W. J. Firey. An integral-geometric meaning for lower order area functions of convex bodies. *Mathematika*, 19:205–212, 1972.
- [30] F. Fodor, D. Hug, and I. Ziebarth. The volume of random polytopes circumscribed around a convex body. submitted.
- [31] S. Glasauer. Kinematic formulae for support measures of convex bodies. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 40(1):113–124, 1999.
- [32] P. Goodey and W. Weil. Translative and kinematic integral formulae for support functions II. *Geometriae Dedicata*, 99:103–125, 2003.
- [33] P. Groeneboom. Limit theorems for convex hulls. *Probability Theory and Related Fields*, 79(3):327–368, 1988.

- [34] P. M. Gruber. *Convex and Discrete Geometry*. Springer, Berlin, 2007.
- [35] W. Hinderer. *Integral representations of projection functions*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2002.
- [36] T. Hsing. On the asymptotic distribution of the area outside a random convex hull in a disk. *The Annals of Applied Probability*, 4(2):478–493, 1994.
- [37] D. Hug. Contributions to affine surface area. *Manuscripta Mathematica*, 91(1):283–301, 1996.
- [38] D. Hug. Curvature relations and affine surface area for a general convex body and its polar. *Resultate der Mathematik - Results in Mathematics*, 29(3):233–248, 1996.
- [39] D. Hug. Absolute continuity for curvature measures of convex sets I. *Mathematische Nachrichten*, 195(1):139–158, 1998.
- [40] D. Hug and G. Last. On support measures in Minkowski spaces and contact distributions in stochastic geometry. *The Annals of Probability*, 28(2):796–850, 2000.
- [41] D. Hug, J. Rataj, and W. Weil. A product integral representation of mixed volumes of two convex bodies. *Advances in Geometry*, 13(4):633–662, 2013.
- [42] D. Hug and R. Schneider. Approximation properties of random polytopes associated with Poisson hyperplane processes. *Advances in Applied Probability*, 46(4):919–936, 2014.
- [43] D. Hug and R. Schneider. Hölder continuity of normal cycles and of support measures of convex bodies. submitted.
- [44] D. Hug, I. Türk, and W. Weil. Flag measures for convex bodies. In M. Ludwig, V. D. Milman, V. Pestov, and N. Tomczak-Jaegermann, editors, *Asymptotic Geometric Analysis: Proceedings of the Fall 2010 Fields Institute Thematic Program*, volume 68 of *Fields Institute Communications Series*, pages 145–187. Springer New York, 2013.
- [45] F. J. Kaltenbach. *Asymptotisches Verhalten zufälliger konvexer Polyeder*. PhD thesis, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, 1990.
- [46] M. Kiderlen and W. Weil. Measure-valued valuations and mixed curvature measures of convex bodies. *Geometriae Dedicata*, 76:291–329, 1999.
- [47] R. Kropp. Erweiterte Oberflächenmaße für konvexe Körper. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 1989/90.
- [48] M. Mayer. *Random diameters and other U-Max-Statistics*. PhD thesis, Bern, 2008.
- [49] M. Mayer and I. Molchanov. Limit theorems for the diameter of a random sample in the unit ball. *Extremes*, 10(3):129–150, 2007.
- [50] J. Rataj and M. Zähle. Mixed curvature measures for sets of positive reach and a translative integral formula. *Geometriae Dedicata*, 57:259–283, 1995.
- [51] M. Reitzner. Random points on the boundary of smooth convex bodies. *Transactions of the American Mathematical Society*, 354(6):2243–2278, 2002.

- [52] M. Reitzner. Random polytopes are nearly best-approximating. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Supplemento*, 70:263–278, 2002.
- [53] M. Reitzner. Random polytopes and the Efron-Stein jackknife inequality. *The Annals of Probability*, 31(4):2136–2166, 2003.
- [54] M. Reitzner. Stochastic approximation of smooth convex bodies. *Mathematika*, 51(1-2):11–29, 2004.
- [55] M. Reitzner. Central limit theorems for random polytopes. *Probability Theory and Related Fields*, 133:483–507, 2005.
- [56] M. Reitzner. The combinatorial structure of random polytopes. *Advances in Mathematics*, 191(1):178–208, 2005.
- [57] A. Rényi and R. Sulanke. Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 2(1):75–84, 1963.
- [58] A. Rényi and R. Sulanke. Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten II. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 3:138–147, 1964.
- [59] A. Rényi and R. Sulanke. Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 9:146–157, 1968.
- [60] R. M. Richardson, V. H. Vu, and L. Wu. Random inscribing polytopes. *European Journal of Combinatorics*, 28(8):2057–2071, 2007.
- [61] W. Rother and M. Zähle. Absolute curvature measures, II. *Geometriae Dedicata*, 41:229–240, 1992.
- [62] R. Schneider. Curvature measures of convex bodies. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 116:101–134, 1978.
- [63] R. Schneider. Bestimmung konvexer Körper durch Krümmungsmaße. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 54:42–60, 1979.
- [64] R. Schneider. Approximation of convex bodies by random polytopes. *Aequationes Mathematicae*, 32(1):304–310, 1987.
- [65] R. Schneider. On the Aleksandrov-Fenchel inequality involving zonoids. *Geometriae Dedicata*, 27:113–126, 1988.
- [66] R. Schneider. Intrinsic volumes in Minkowski spaces. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Serie II, Supplemento(50):355–373, 1997.
- [67] R. Schneider. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Encyclopedia of mathematics and its applications 151. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2. expanded edition, 2014.
- [68] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Probability and its applications. Springer, Berlin, 2008.
- [69] R. Schneider and J. A. Wieacker. Random polytopes in a convex body. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 52(1):69–73, 1980.

- [70] C. Schütt. Random polytopes and affine surface area. *Mathematische Nachrichten*, 170(1):227–249, 1994.
- [71] C. Schütt and E. Werner. Polytopes with vertices chosen randomly from the boundary of a convex body. In V. Milman and G. Schechtman, editors, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, volume 1807 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 241–422. Springer Berlin / Heidelberg, 2003.
- [72] J. J. Sylvester. Problem 1491. *The Educational Times*, 1864.
- [73] I. Türk. *Zufällige Polytope und polyedrische Mengen*. Diplomarbeit, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2010.
- [74] V. Vu. Central limit theorems for random polytopes in a smooth convex set. *Advances in Mathematics*, 207(1):221–243, 2006.
- [75] W. Weil. Ein Approximationssatz für konvexe Körper. *Manuscripta Mathematica*, 8:335–362, 1973.
- [76] W. Weil. Kontinuierliche Linearkombination von Strecken. *Mathematische Zeitschrift*, 148:71–84, 1976.
- [77] W. Weil. Zufällige Berührung konvexer Körper durch q -dimensionale Ebenen. *Resultate der Mathematik*, 4:84–101, 1981.
- [78] W. Weil. Zonoide und verwandte Klassen konvexer Körper. *Monatshefte für Mathematik*, 94:73–84, 1982.
- [79] W. Weil. Translative and kinematic integral formulae for support functions. *Geometriae Dedicata*, 57:91–103, 1995.
- [80] J. A. Wieacker. *Einige Probleme der polyedrischen Approximation*. Diplomarbeit, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, 1978.
- [81] V. A. Zalgaller. K -dimensional directions singular for a convex body F in \mathbb{R}^n . *Journal of Soviet Mathematics*, 3(4):437–441, 1975.
- [82] M. Zähle. Integral and current representation of Federer’s curvature measures. *Archiv der Mathematik*, 46:557–567, 1986.
- [83] M. Zähle. Absolute curvature measures. *Mathematische Nachrichten*, 140(1):83–90, 1989.