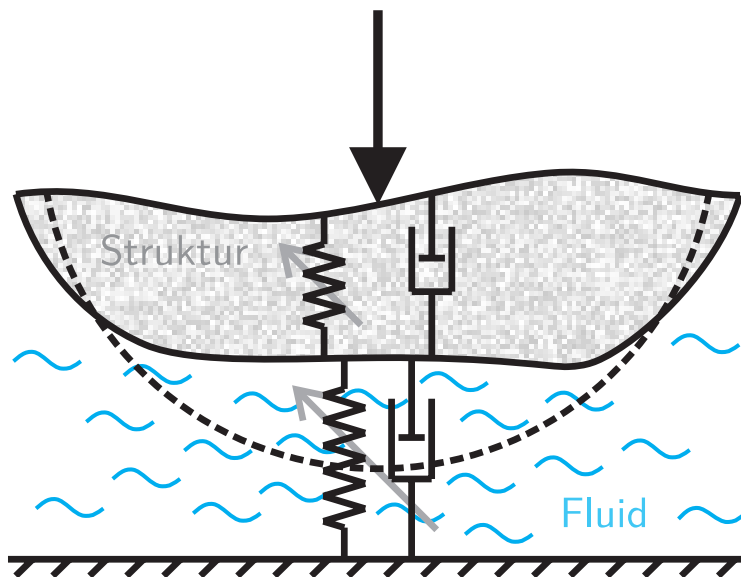


BENEDIKT WIEGERT

## Nichtlineare Schwingungen von Systemen mit elastohydrodynamischen Linienkontakten





Benedikt Wiegert

**Nichtlineare Schwingungen von Systemen  
mit elastohydrodynamischen Linienkontakten**

**Karlsruher Institut für Technologie**  
**Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik**

Band 25

Eine Übersicht aller bisher in dieser Schriftenreihe erschienenen  
Bände finden Sie am Ende des Buchs.



# **Nichtlineare Schwingungen von Systemen mit elastohydrodynamischen Linienkontakten**

von  
Benedikt Wiegert

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Fakultät für Maschinenbau  
Tag der mündlichen Prüfung: 17. Oktober 2014

**Abbildung auf der Titelseite:**  
Schwingungssystem mit EHD-Kontakt

#### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark of Karlsruhe  
Institute of Technology. Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding the cover – is licensed under the  
Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 DE License  
(CC BY-SA 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>*



*The cover page is licensed under the Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 3.0 DE License (CC BY-ND 3.0 DE):  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/de/>*

Print on Demand 2015

ISSN 1614-3914

ISBN 978-3-7315-0350-7

DOI 10.5445/KSP/1000045952





# Nichtlineare Schwingungen von Systemen mit elastohydrodynamischen Linienkontakten

---

Zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor der Ingenieurwissenschaften**

der  
Fakultät für Maschinenbau  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Benedikt Wiegert**  
aus Oberkirch

---

Tag der mündlichen Prüfung:  
Hauptreferent:  
Korreferent:  
Korreferent:

17. Oktober 2014  
Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann  
Prof. Dr.-Ing. Hartmut Hetzler  
Prof. Dr.-Ing. Adrian Rienäcker



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik, Bereich Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Ich bedanke mich sehr herzlich bei Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann für die fachliche und uneingeschränkte persönliche Unterstützung. Hervorheben möchte ich das mir entgegengebrachte Vertrauen und die wissenschaftliche Freiheit während meiner Zeit als Doktorand. Ich möchte mich ganz besonders bei Prof. Dr.-Ing. Hartmut Hetzler bedanken, der maßgeblich bei der Themenfindung beteiligt war und letztendlich die „Betreuung im Alltag“ übernommen hat. Neben vielen fachlichen Ratschlägen waren auch aufbauende Worte bei Problemen und Rückschlägen hilfreich. Prof. Hetzler war als Postdoc am KIT tätig und nahm kurz vor der Fertigstellung meiner Arbeit einen Ruf an die Universität Kassel an. Dadurch wurde es möglich, dass er Korreferent der vorliegenden Dissertation sein kann, was mich persönlich sehr freut.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Adrian Rienäcker (Universität Kassel, Lehrstuhl für Maschinenelemente und Tribologie) danke ich für die Übernahme des Korreferats und die wertvollen sowie konstruktiven Anmerkungen zu meiner Arbeit.

Ich danke Prof. Dr.-Ing. Jörg Wauer für die inhaltliche Korrektur der Dissertation sowie weiterer Veröffentlichungen. Ich habe mich sehr gefreut, dass er aktiv an den Institutsseminaren teilgenommen und sich für meine Arbeit interessiert hat.

Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin danke ich für zahlreiche Diskussionen und Vorschläge zu Teilproblemen.

Allen Kollegen des Bereichs Dynamik/Mechatronik danke ich für die kollegiale Atmosphäre und die Unterstützung meiner Forschungsarbeiten. Besonders bedanke ich mich bei Karolina Bach, Aydin Boyaci, Jens Deppler und Dominik Kern. Darüber hinaus gilt mein Dank meinen Diplom-, Studien- und Bachelorarbeitern sowie meinen studentischen Mitarbeitern. Hervorheben möchte ich die Leistungen von Kai Becker, Jens Deppler, Georg Jehle, Markus Klug und Andreas Reiter, deren Engagement und Kreativität in hohem Maße zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Ein besonderer Dank gilt meiner Familie: Meine Eltern haben mir letztendlich die Schulbildung und damit das Studium ermöglicht und mich auch außerschulisch sehr gefördert. Meine Frau Jana hat mir besonders im vergangenen Jahr den Rücken freigehalten, sodass ich mich ganz meiner Arbeit widmen konnte. Des Weiteren danke ich ihr für viele Korrekturvorschläge und für die vielen Stunden, die für die Vorbereitung des Promotionsvortrags notwendig waren.

Karlsruhe, Oktober 2014  
Benedikt Wiegert





# Kurzfassung

In dieser Arbeit wird der Einfluss von elastohydrodynamischen Kontakten (EHD) auf das nichtlineare Schwingungsverhalten von Systemen untersucht. Im Bereich der Tribologie sind diese Kontakte bereits detailliert untersucht und verstanden. Ihr Einfluss auf das Schwingungsverhalten wurde bisher nur unzureichend betrachtet und ist Gegenstand dieser Arbeit.

Eine nichtlineare Schwingungsanalyse erfordert recheneffiziente Kontaktmodelle. Daher ist eine numerische Auswertung des vollständigen EHD-Problems nicht möglich und es müssen vereinfachte Kontaktmodelle herangezogen werden. Bisher existiert in der Literatur kein für diesen Zweck geeignetes Modell, sodass im ersten Teil dieser Arbeit ein neues Modell für EHD-Linienkontakte entwickelt und validiert wird. Dieses neue EHD-Kontaktmodell besteht aus einer Reihenschaltung von Hertz'schem Kraftelement und hydrodynamischem Kontakt. Bei letzterem wird von starren Kontaktpartnern sowie von konstanter Viskosität und konstanter Dichte ausgegangen.

Die durch die elastohydrodynamischen Kontakte induzierten nichtlinearen Schwingungsphänomene werden zunächst an Modellbeispielen demonstriert. Hierzu wird ein Einmassenschwinger mit einem Kontakt betrachtet und durch die äußere Kraft, den Fußpunkt oder die Parameter reduzierter Kontaktradius beziehungsweise hydrodynamische Geschwindigkeit erregt. Dabei treten sub- und superharmonische Resonanzen, instabile Lösungen und Amplitudensprünge auf. Der Amplitudenverlauf in der Nähe der Hauptresonanz ist stets nach links gekrümmt (degressives Verhalten). Wird ein zweiter Kontakt hinzugefügt, sodass ein symmetrischer Aufbau entsteht, dann treten auch nach rechts gekrümmte Amplitudenverläufe (progressive Kennlinie) auf. Die nichtlinearen Schwingungsuntersuchungen erfolgen mithilfe der numerischen Pfadverfolgung.

Ein Rotor in Zylinderrollenlagern wird abschließend untersucht. Dabei wird einerseits die Anwendbarkeit des vereinfachten EHD-Kontaktmodells und andererseits der Einfluss der EHD-Kontakte auf das nichtlineare Schwingungsverhalten gezeigt: Neben den bereits beschriebenen Schwingungsphänomenen treten zusätzlich quasiperiodische und chaotische Lösungen auf. Das Lager weist eine periodische Gesamtsteifigkeit auf, da die Kontaktstellen mit dem Käfig wandern. Die damit vorliegende Parametererregung führt in Verbindung mit einer konstanten Vorlast zu Fremderregung. Daher sind sowohl klassische Resonanzen als auch Parameterinstabilitäten zu beobachten.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Literaturübersicht . . . . .	1
1.1.1	Geschichtliche Entwicklung . . . . .	1
1.1.2	Numerische Lösungen . . . . .	2
1.1.3	Analytische Lösungen und Regressionsformeln . . . . .	3
1.1.4	Systeme mit elasto-hydrodynamischen Kontakten . . . . .	4
1.1.5	Experimentelle Untersuchungen . . . . .	6
1.2	Ziele der Arbeit . . . . .	6
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>I</b>	<b>Modellierung von Kontakten</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Elastohydrodynamischer Kontakt</b>	<b>11</b>
2.1	Reynoldsgleichung . . . . .	12
2.1.1	Herleitung . . . . .	13
2.1.2	Gültigkeit der Reynoldsgleichung . . . . .	16
2.1.3	Randbedingungen . . . . .	16
2.2	Elastostatik . . . . .	18
2.3	Viskosität, Dichte und Kräftegleichgewicht . . . . .	18
2.4	Dimensionslose Notation . . . . .	19
2.4.1	Reynoldsgleichung, Elastostatik und Kräftegleichgewicht . . . . .	20
2.4.2	Neue dimensionslose Formulierung von Viskosität und Dichte . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Hydrodynamischer Kontakt</b>	<b>25</b>
3.1	Annäherung ohne Tangentialgeschwindigkeit . . . . .	25
3.2	Gümbel-Randbedingungen . . . . .	26
3.3	Reynolds-Randbedingungen . . . . .	26
3.3.1	Semi-analytische Lösung . . . . .	26
3.3.2	Neue Regressionsformel für transiente Normalkraft . . . . .	28
3.3.3	Zeitabhängige Parameter . . . . .	29
3.3.4	Linearisierung der Kontaktkraft . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Kontakt zweier elastischer Körper – Hertz'sche Pressung</b>	<b>33</b>
4.1	Hertz'scher Druck . . . . .	33
4.2	Elastische Deformation und Annäherung . . . . .	34
4.3	Lineare Näherung . . . . .	37

<b>5</b>	<b>Numerische Implementierung des EHD-Kontaktproblems</b>	<b>39</b>
5.1	Konvektions-Diffusionsgleichung . . . . .	39
5.1.1	Stabilität einer linearen Konvektions-Diffusionsgleichung . . . . .	40
5.1.2	Variationsformulierung . . . . .	42
5.1.3	Reynoldsgleichung als Konvektions-Diffusionsgleichung . . . . .	44
5.2	Dimensionslose Notation der Implementierung . . . . .	45
5.3	Numerische Lösung mittels FEM . . . . .	46
5.3.1	Startwerte des Drucks für iterative Lösungsverfahren . . . . .	47
5.4	Ausgewählte numerische Lösungen . . . . .	48
5.4.1	Statische Last . . . . .	48
5.4.2	Harmonische Belastung . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Vereinfachte Modelle für EHD-Kontakte</b>	<b>53</b>
6.1	Dynamisches Fluid-Struktur-Modell . . . . .	54
6.2	Nichtlineares Kelvin-Voigt-Modell . . . . .	55
6.3	Validierung des vereinfachten Kontaktmodells . . . . .	58
6.3.1	Statische Validierung . . . . .	58
6.3.2	Dynamische Validierung . . . . .	60
6.3.3	Zusammenfassung der Validierung . . . . .	65
<b>II</b>	<b>Schwingungsfähige Systeme mit EHD-Kontakten</b>	<b>67</b>
<b>7</b>	<b>Grundlagen dynamischer Systeme</b>	<b>69</b>
7.1	Charakteristische Lösungen . . . . .	69
7.2	Poincaré-Abbildungen . . . . .	70
7.3	Stabilität von Lösungen . . . . .	71
7.3.1	Definition . . . . .	71
7.3.2	Stabilität periodischer Lösungen, Floquet-Theorie . . . . .	72
7.4	Bifurkationen periodischer Lösungen . . . . .	74
7.4.1	Periodenverdopplung . . . . .	74
7.4.2	Sattelknoten-Bifurkation . . . . .	75
7.4.3	Torus-Bifurkation . . . . .	75
7.5	Chaotische Bewegungen . . . . .	75
7.5.1	Lyapunov-Exponent . . . . .	76
7.6	Bifurkationsdiagramme . . . . .	77
7.6.1	Brute-Force-Methode . . . . .	78
7.6.2	Pfadverfolgung . . . . .	78
<b>8</b>	<b>Einmassenschwinger mit einem Kontakt</b>	<b>79</b>
8.1	Differentialgleichungssystem . . . . .	79
8.2	Ergebnisse . . . . .	80
8.2.1	Krafterregung . . . . .	81
8.2.2	Fußpunkt- und Parametererregung . . . . .	84

8.3	Validierung . . . . .	87
8.3.1	Krafterregung . . . . .	87
8.3.2	Fußpunkt- und Parametererregung . . . . .	88
<b>9</b>	<b>Einmassenschwinger mit zwei Kontakten</b>	<b>91</b>
9.1	Differentialgleichungssystem . . . . .	92
9.2	Ergebnisse . . . . .	92
<b>10</b>	<b>Rotor in Zylinderrollenlager</b>	<b>97</b>
10.1	Geometrie und Kinematik . . . . .	97
10.2	Differentialgleichungssystem . . . . .	99
10.3	Rotor- und Lagerdaten . . . . .	100
10.4	Lastverteilung . . . . .	101
10.5	Abschätzung der Eigenkreisfrequenzen . . . . .	102
10.5.1	Rotor in Lagern mit verschwindender Wälzkörpermasse . . . . .	102
10.5.2	Einfluss der Wälzkörper . . . . .	105
10.6	Amplitudenverläufe . . . . .	105
10.6.1	Resonanzen und Parameterinstabilitäten . . . . .	106
10.6.2	Ruhender Rotor und Sprungphänomene . . . . .	108
10.6.3	Vertikalbewegung der Welle . . . . .	111
10.7	Bereiche quasiperiodischer und chaotischer Lösungen . . . . .	112
10.7.1	Untersuchungen bei ausgewählten Rotordrehzahlen . . . . .	114
10.7.2	Kaskadendiagramm und Lyapunov-Exponent . . . . .	117
10.8	Schlussfolgerungen . . . . .	119
	 <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	 <b>121</b>
	 <b>Anhang</b>	 <b>123</b>
<b>A</b>	<b>Elastischer Halbraum</b>	<b>125</b>
A.1	Elastische Deformation durch eine Linienlast . . . . .	125
A.1.1	Kinematik und Materialgesetz . . . . .	126
A.1.2	Ebener Verzerrungszustand . . . . .	126
A.1.3	Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	127
A.1.4	Kompatibilitätsbedingungen . . . . .	127
A.1.5	Airy'sche Spannungsfunktion . . . . .	127
A.1.6	Verschiebungen . . . . .	128
A.2	Elastische Deformation unter Hertz'schem Druck . . . . .	129
A.3	Validierung . . . . .	131
A.3.1	Vergleich mit FEM-Modell . . . . .	131
A.3.2	Entdimensionierung mit Hertz'scher Kontaktbreite . . . . .	132
A.3.3	Spezielle Lösungen aus der Literatur . . . . .	134
A.4	Strukturen unterschiedlicher Abmessungen . . . . .	134

<b>B EHD-Modelle für Wälzlager</b>	<b>137</b>
B.1 EHD-Modelle mit Wälzkörper . . . . .	137
B.2 Vereinfachtes EHD-Modell ohne Wälzkörper . . . . .	138
B.3 Hertz'sche Kontakte und Strukturdämpfung . . . . .	139
<b>C Inhomogene Mathieu-Gleichung</b>	<b>141</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>143</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>147</b>

# 1 Einleitung

In vielen technischen Anwendungen sind Wälzlager oder Getriebe zu finden, die akustische Geräusche oder spürbare Vibrationen hervorrufen. Während Geräusche oft „nur“ störend sind, können Schwingungen zum katastrophalen Ausfall des Systems führen. Um schon in frühen Entwicklungsstadien eines Produkts möglichst genaue Vorhersagen treffen zu können, sind tiefgehendes Verständnis aller Komponenten und geeignete Simulationswerkzeuge notwendig.

## 1.1 Literaturübersicht

Im Rahmen dieser Arbeit werden vollgeschmierte Linienkontakte mit glatten Kontaktflächen behandelt und mit trockenen Hertz'schen Kontakten verglichen. Dabei wird der Einfluss der Kontaktnormalkraft auf das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems untersucht. Die Reibungseinflüsse in Tangentialrichtung werden nicht berücksichtigt. Die im Folgenden dargestellte Literatur ist mit Bezug auf diese Annahmen ausgewählt.

### 1.1.1 Geschichtliche Entwicklung

Grundlegende Untersuchungen zu trockenen Kontakten wurden bereits 1882 von Hertz durchgeführt und haben bis heute große Bedeutung [46, 47]. Dabei wurde das Kraftgesetz für den Punktkontakt angegeben, jedoch nicht für den Linienkontakt. Die Deformation des Linienkontakts hängt unter anderem von der Geometrie der konkreten Problemstellung ab und kann für den allgemeinen Fall nur in Abhängigkeit einer unbekanntenen Konstanten angegeben werden. In der Formulierung von Tripp wurde diese so gewählt, dass sie eine physikalische Bedeutung erhält [118]: Die Konstante stellt den Abstand zwischen der Oberfläche und einer Stelle unterhalb des Kontaktzentrums dar, an der die Verschiebung verschwindet.

Tower untersuchte 1883 die Reibung in ölgeschmierten Kontakten am Beispiel des Gleitlagers [115, 116]. Dabei entdeckte er zufällig einen hydrodynamischen Druckaufbau, dessen Verlauf er genauer untersuchte [117]. Diesen Druckaufbau beschrieb Reynolds 1886 mit einer partiellen Differentialgleichung [87]. Die nach ihm benannte Reynoldsgleichung ist bis heute die zentrale Gleichung der Hydrodynamik (HD) und der Elastohydrodynamik (EHD). Schon Reynolds hatte einen möglichen Einfluss der elastischen Deformation auf den Druckaufbau angesprochen, der jedoch erst viele Jahre später berücksichtigt wurde. Von Barus wurde erkannt, dass die Viskosität näherungsweise exponentiell mit dem Druck ansteigt [3]. Diese sogenannte Piezoviskosität wurde durch Roelands insbesondere für hohe Drücke korrigiert [90]. Dennoch findet die Formel von Barus aufgrund ihrer Einfachheit immer noch Verwendung.

Gümbel [37] und Martin [70] haben zeitgleich geschmierte Kontakte zwischen Zahnrädern mithilfe der zuvor entwickelten hydrodynamischen Theorie untersucht. Unter der Annahme konstanter Viskosität beschrieben sie den Zusammenhang zwischen Kraft und Verschiebung mit einfachen Formeln. Sie unterschätzten die Schmierfilmhöhe bei hohen Lasten um Größenordnungen und sagten sie im Bereich der Oberflächenrauheit voraus. Dies liegt daran, dass im Gegensatz zu konformen Kontakten in Gleitlagern die Kontaktstellen bei Zahnrädern nicht-konform sind. Dadurch entstehen bei der Übertragung hoher Kräfte lokal sehr hohe Drücke, sodass zum einen die Kontaktpartner deformiert werden und zum anderen die Viskosität stark zunimmt. Das damit entstandene elastohydrodynamische Problem – bestehend aus Reynoldsgleichung, Elastostatik und Piezoviskosität – hat erstmals Ertel formuliert und näherungsweise analytisch gelöst. Seine Arbeit wurde von Grubin [36] veröffentlicht [14].

Detaillierte Ausführungen über die Historie der Elastohydrodynamik sind in [27, 28, 68, 97, 104] zu finden.

### 1.1.2 Numerische Lösungen

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Entwicklungsschritte der numerischen Verfahren zur Lösung des EHD-Problems dargestellt. Die Entwicklung dieser Verfahren wird beispielsweise in [40, 66, 119] ausführlich diskutiert.

Die ersten numerischen Lösungen konnte Petrusevich mit einem iterativen Algorithmus berechnen [82]. Dabei bestimmte er ausgehend von einem Startdruck die elastische Deformation, wodurch sich ein neuer Druck einstellte. Sobald eine vorgegebene Schmierfilmdicke im Kontaktzentrum erreicht wurde, erfolgte der Abbruch der Iteration.

Kurze Zeit später gelang es Dowson und Higginson mit einem inversen Ansatz, Lösungen für eine Vielzahl an Parametern zu berechnen [25]. Dabei wurde die Deformation zunächst so bestimmt, dass sie für ein gegebenes Druckprofil die Reynoldsgleichung erfüllt. Anschließend berechneten Dowson und Higginson die Deformation der Struktur, die sich infolge des vorgegebenen Druckprofils einstellen würde. Der Druckverlauf wurde solange variiert, bis beide Berechnungsmethoden die gleiche Deformation ergaben.

Das von Brandt eingeführte Mehrgitterverfahren führte zu einer drastischen Reduktion der Rechenzeit [11]. Dieses Verfahren wurde erstmals von Lubrecht et al. [67] auf das EHD-Problem angewandt und von Venner [119] entscheidend weiterentwickelt. Aufgrund der Rechenzeitreduktion konnten transiente Vorgänge hochbelasteter Kontakte berechnet werden. Das Mehrgitterverfahren zeichnet sich durch geringen Speicherbedarf und Rechenaufwand pro Iteration aus. Es handelt sich jedoch um einen schwach gekoppelten iterativen Algorithmus, wodurch nur langsame Konvergenzraten erzielt werden [39].

Die Diskretisierung wurde bisher meist mittels Finiter Differenzen (FD) durchgeführt. Dabei traten bei der Verwendung von zentralen Differenzenquotienten oszillierende Lösungen auf, deren Ursprung in der Diskretisierung begründet liegt. Die Oszillationen konnten mithilfe von unsymmetrischen Differenzenquotienten (*streamline upwind stabilization*) unterdrückt werden. Die elastische Deformation wurde mithilfe der sogenannten Halb-raumlösung bestimmt, wodurch die dazugehörige Jacobi-Matrix vollbesetzt war und deren Invertierung einen entsprechenden Rechenaufwand erforderte.



In jüngerer Vergangenheit wurde mehr und mehr auf Finite-Elemente-Methoden (FEM) zurückgegriffen. Dabei wurde die elastische Deformation nicht wie zuvor mithilfe der sogenannten Halbraumlösung, sondern durch eine Diskretisierung des gesamten elastischen Körpers berechnet. Die nicht mehr vollbesetzte Jacobi-Matrix führte trotz der Einführung neuer Freiheitsgrade zu einer effizienteren Lösung. Ein Vergleich zwischen der benötigten Anzahl an Iterationen eines Mehrgitteralgorithmus und der eines Standard FE-Verfahrens wurde von Habchi et al. dargestellt [39], wobei sich die FE-Methode als vorteilhaft erwies. Eine Diskretisierung, die numerisch stabile Gleichungen erzeugt, ergibt sich bei Verwendung von unsymmetrischen Gewichtsfunktionen. Diese sogenannte *Stabilisierung* des Standard-Galerkin-Verfahrens wurde beispielsweise mittels Streamline Upwind Petrov-Galerkin oder Galerkin Least Squares umgesetzt [13, 17, 32, 39].

### 1.1.3 Analytische Lösungen und Regressionsformeln

Seit der Entdeckung der Hydrodynamik wurden einfache Formeln entwickelt, um die konstruktive Auslegung von geschmierten Kontakten zu erleichtern. Für hydrodynamische Schmierung, das heißt isoviskoses Fluid und starre Kontaktpartner, wurden 1916 zwei verschiedene Lösungen von Gümbel [37] und Martin [70] veröffentlicht: Beide nahmen eine konstante Relativbewegung der glatten Kontaktpartner ausschließlich in Tangentialrichtung an, sodass der zeitabhängige Term der Reynoldsgleichung verschwindet und das Problem als *statisch* bezeichnet werden kann.

Gümbel konnte ein analytisches Kraftgesetz unter Berücksichtigung der sogenannten Gümbel-Randbedingungen – auch Halb-Sommerfeld-Randbedingungen genannt – angeben [37].

Martin legte Reynolds-Randbedingungen zugrunde [70]. Sie wurden erstmals von Reynolds [87] erwähnt und von Swift [108] und Stieber [106] mathematisch formuliert [26]. Diese zeigen gute Übereinstimmung mit Experimenten und erfüllen im Gegensatz zu den Gümbel-Randbedingungen die Kontinuitätsgleichung – sowohl im statischen als auch unter bestimmten Voraussetzungen im transienten Fall [80, 109, 125]. Die Reynoldsgleichung ergibt mit Reynolds-Randbedingungen ein freies Randwertproblem, da die Stelle des Filmaufrisses a priori nicht bekannt ist und daher mitberechnet werden muss. Die Lösung kann nur in semi-analytischer Form gefunden werden. Die numerische Auswertung führt nach einer Regressionsrechnung auf ein Ergebnis, das sich um einen konstanten Faktor minimal von der Gümbel-Lösung unterscheidet.

Christensen fand für eine Relativbewegung der Kontaktpartner ausschließlich in Normalenrichtung unter hydrodynamischen Bedingungen eine geschlossene Lösung [16]. Diese hängt natürlicherweise unter anderem von der Annäherungsgeschwindigkeit ab und impliziert die zeitabhängigen Terme der Reynoldsgleichung.

Werden Relativgeschwindigkeiten sowohl in Tangential- als auch in Normalenrichtung zugelassen, so ist unter Beachtung der Reynolds-Randbedingungen aufgrund des freien Randes nur eine semi-analytische Lösung möglich. Eine Superposition der Lösungen bei Relativbewegungen in Tangential- beziehungsweise Normalenrichtung scheint auf den

ersten Blick möglich, da die Reynoldsgleichung im Druck linear ist. Jedoch ist dieser Ansatz mathematisch nicht zulässig, da unterschiedliche Randbedingungen zugrunde liegen. Sasaki et al. überlagerten dennoch beide Ansätze. Sie setzten negative Drücke zu null und gelangten zu einem sehr genauen Ergebnis [93]. Rahnejat ließ nach der Superposition negative Drücke zu und formulierte eine Näherung, welche der bezüglich der Annäherungsgeschwindigkeit linearisierten Formel von Sasaki ähnlich ist [84].

Ertel fand 1945 für das statische elastoelastohydrodynamische Problem eine semi-analytische Näherung [14, 36]. Sie liefert neben einer guten Approximation des Druckverlaufes – insbesondere auch der Druckspitze – Näherungen für die Schmier-spalthöhe hochbelasteter Kontakte.

Für EHD-Kontakte unter transienten Bedingungen ist bisher kein analytischer Ansatz zur Bestimmung des Kraftgesetzes bekannt. Da besonders bei dynamischer Betrachtung von Systemen mit vielen EHD-Kontakten die numerische Auswertung aufgrund des hohen Rechenaufwandes nicht praktikabel ist, hat eine Vielzahl an Autoren Näherungsformeln entwickelt [23, 74, 78, 91, 120, 125]. Meist wird die Verschiebung in Abhängigkeit der Kraft dargestellt, was im Rahmen von Mehrkörpersimulationen nachteilig ist. Die Mehrzahl der Näherungen gelten ausschließlich für hochbelastete Kontakte. Sie sind für nicht-lineare Schwingungsanalysen bei schwachen und mäßigen Lasten ungeeignet. Die meisten Näherungen wurden mittels Regression aus numerischen Lösungen bestimmt und erlauben daher nur begrenzten Einblick in die zugrunde liegende Physik.

### 1.1.4 Systeme mit elastoelastohydrodynamischen Kontakten

Systeme mit EHD-Kontakten wurden in vielen Arbeiten untersucht: Wälzlager [23, 27, 85, 92, 121, 124], Getriebe mit Zahnrädern [60, 99], Gleitlager [7, 49, 89], Ventilsteuerungen mit Nocken-Stößel-Kontakten [5, 24] und einfache Einmassenschwinger [123, 126]. Der Fokus lag dabei fast ausschließlich auf tribologischen Aspekten: Druckverlauf, Schmier-spalthöhe, Reibung, Temperaturverteilung, maximaler Druck und minimale Spalthöhe. Das Verhalten des Gesamtsystems wurde nur wenig betrachtet – insbesondere nichtlineare Schwingungseffekte, die durch EHD-Kontakte induziert werden, sind bisher kaum untersucht worden. In diesem Abschnitt werden ausgewählten Veröffentlichungen vorgestellt, in denen über Systeme mit EHD-Kontakten berichtet wird. Diese können mit den im Rahmen dieser Dissertation entwickelten Modelle erweitert werden, um das Systemverhalten umfassender zu analysieren.

Dowson et al. untersuchten Nocken-Stößel-Kontakte und bewerteten dabei besonders die minimale Spalthöhe, den korrespondierenden maximalen Hertz'schen Druck und die Reibungsverluste [24]. Die Belastung der Kontakte wurde aus kinematischen Zusammenhängen unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte bestimmt. Damit lässt sich zwar das Verhalten des Kontaktes abschätzen, nicht aber das Verhalten des gesamten Systems.

Wijnant und Venner untersuchten einen einzelnen Wälzkörper mit EHD-Kontakt beziehungsweise Hertz'schem Kontakt [126]. Die zeitliche Entwicklung von Druck, Schmierpalt und Wälzkörperposition wurde dargestellt. Sie kamen zu dem Schluss, dass die Periodendauern beziehungsweise die Frequenzen der freien Schwingungen für die gewählten Parameter beider Varianten gleich sind. Dies erscheint für hohe Lasten plausibel, da die elastische Deformation die Starrkörperverschiebung dominiert und der EHD-Druck dem Hertz'schen nahe kommt. Die Kraftverläufe von EHD- und Hertz-Kontakt unterscheiden sich bei schwachen und mäßigen Lasten signifikant, was auf unterschiedliche Periodendauern führt. Dies wurde in dieser Veröffentlichung nicht berücksichtigt.

Wijnant bestimmte mittels Regression aus numerischen Simulationen Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten, die ausschließlich für hohe Lasten gültig sind [125]. Damit untersuchten Wijnant et al. [124] und Wensing [120] Kugellager mit EHD-Kontakten unter axialer Vorspannung und mit flexiblem Außenring. Sie beobachteten mit steigender Drehzahl einen Anstieg bestimmter Eigenkreisfrequenzen und führten dies auf die wachsende Steifigkeit des Fluidfilms zurück. Durch die große Fluidkraft veränderte sich zudem der Kontaktwinkel, womit sie das Absinken der anderen Eigenkreisfrequenzen erklärten. Das Verhalten des Außenrings wurde eingehend untersucht, insbesondere im Hinblick auf auftretende Frequenzen. Auf unterschiedliches Lösungsverhalten, wie beispielsweise periodische oder chaotische Lösungen, sind Wijnant et al. und Wensing nicht eingegangen. Ebenfalls unberücksichtigt blieben mögliche Einflüsse von schwachbelasteten Wälzkörpern. Diese befinden sich im Wesentlichen in dem Bereich, der bei Lagern mit Hertz'schen Kontakten als *lastfreie Zone* bezeichnet wird.

Nichtlineare Schwingungsphänomene von wälzgelagerten Rotoren wurden in der Literatur ausführlich diskutiert, wobei zur Kontaktmodellierung in den Lagern stets die Hertz'sche Theorie zugrunde gelegt wurde [55, 72, 113, 114]. Ähnlich umfassende Schwingungsanalysen von Rotoren in Wälzlagern unter expliziter Berücksichtigung von EHD-Kontakten sind in der Literatur nicht zu finden.

Lastfreie Zahnräder in Getrieben, welche als Losräder bezeichnet werden, neigen zum Klappern. Diese störenden Geräusche treten auf, wenn ein Losrad innerhalb der Spielgrenze oszilliert, sodass es zu Stößen zwischen den Flanken kommt. Singh et al. nahmen einen einseitigen Kontakt mit konstanter Steifigkeit an, womit letztendlich ein trockener Hertz'scher Linienkontakt approximiert wurde [102]. Theodossiades et al. berücksichtigten die Schmierung und nahmen kleine Kräfte an [110]. Damit konnten sie von einem hydrodynamischen Flankenkontakt bei vernachlässigbarer Deformation ausgehen. Ein kontinuierlicher Übergang zwischen beiden Modellen fehlt bisher.

Das Losradkreischen wurde in einer Untersuchung von Schwarze auf selbsterregte Schwingungen zurückgeführt, deren Entstehung mit dem Fluidfilm im Wälzlager begründet wurde [99]. Die elastische Deformation wurde vernachlässigt und kann mit den in dieser Arbeit vorgestellten Modellen berücksichtigt werden.

### 1.1.5 Experimentelle Untersuchungen

Eine Vielzahl an Experimenten ist tribologischen Fragestellungen gewidmet [27, 104]. Dabei wurden beispielsweise Spalthöhe, Druckverteilung und Reibung unter statischen und transienten Bedingungen untersucht. Jedoch wurde das Schwingungsverhalten von Systemen mit EHD-Kontakten nur in wenigen experimentellen Arbeiten betrachtet:

Dareing und Johnson [21] untersuchten einen fußpunkterregten Einmassenschwinger, dessen Erregung durch Welligkeiten in der Oberfläche realisiert wurde. Damit wurde die Dämpfung des Fluids nachgewiesen, die sich mit steigender Vorlast an die Dämpfung des trockenen Kontaktes annäherte. Es wurden nur hochbelastete Kontakte untersucht, wodurch die bei kleinen und mäßigen Lasten zu erwartenden nichtlinearen Schwingungseffekte nicht beobachtet werden konnten. Die Ergebnisse wurden numerisch von Mehdigoli et al. validiert [71]. Die Amplitudengänge waren jedoch nicht vollständig – in der Nähe der Hauptresonanz wurden keine Amplituden angegeben.

Kilali et al. untersuchten einen krafterregten Einmassenschwinger [56]. Dabei wurden verschiedene Aufbauten realisiert, bei denen im Wesentlichen eine Kugel gegen eine Platte gedrückt wurde. Im trockenen Fall (Hertz'scher Kontakt) öffnete sich bei ausreichend großer Kraftamplitude der Kontakt. Dies ist in den Amplitudengängen deutlich zu erkennen. Für geschmierte Kontakte ergab sich neben der Hauptresonanz eine weitere Resonanzstelle, die wahrscheinlich eine subharmonische darstellt.

## 1.2 Ziele der Arbeit

Elastohydrodynamische Kontakte sind im Bereich der Tribologie bis zu einem hohen Detailgrad untersucht und verstanden. Jedoch wurde deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines Systems bisher nur unzureichend analysiert. Meist wurden Systeme mit hochbelasteten Kontakten mittels linearisierter Modelle betrachtet.

Aus diesem Grund besteht das Ziel dieser Arbeit darin, mit geeigneten Simulationswerkzeugen die nichtlinearen Schwingungsphänomene von Systemen mit elastohydrodynamischen Kontakten zu beschreiben. Um möglichst allgemeingültige Aussagen treffen zu können, ist die Betrachtung eines umfassenden Parameterraumes notwendig. Insbesondere soll der Lastbereich so gewählt werden, dass er sowohl hydrodynamische Bereiche ohne nennenswerte elastische Deformation als auch elastohydrodynamische Bereiche umfasst. Damit ist der Übergangsbereich zwischen beiden Lastbereichen eingeschlossen.

Das Ziel dieser Arbeit kann in zwei Unterpunkte aufgeteilt werden:

- Ein vereinfachtes EHD-Modell für Linienkontakte soll entwickelt werden. Dabei muss der Rechenaufwand des vereinfachten Modells im Vergleich zur numerischen Auswertung des vollständigen EHD-Problems um Größenordnungen kleiner sein, damit detaillierte nichtlineare Schwingungsuntersuchungen im Systemkontext durchgeführt werden können. Des Weiteren ist es im Rahmen von Mehrkörpersimulationen vorteilhaft, die Kontaktkraft in Abhängigkeit von Verschiebung und Geschwindigkeit

auszudrücken. Das neue EHD-Kontaktmodell soll mit numerischen Simulationen des vollständigen EHD-Problems validiert werden.

- Die in Systemen infolge von EHD-Kontakten auftretenden nichtlinearen Schwingungseffekte sollen aufgezeigt werden. Zunächst sollen grundlegende Untersuchungen anhand einfacher Modellprobleme durchgeführt werden. Abschließend soll ein typisches Modell eines Rotors in Wälzlagern aufgebaut und analysiert werden. Dabei sollen im Lager EHD-Kontakte angenommen werden, womit die Anwendbarkeit des neuen Modells demonstriert wird. Zusätzlich sollen Unterschiede zwischen einer Lagerung mit EHD- und einer Lagerung mit Hertz-Kontakten dargelegt werden.

## 1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist den Zielen entsprechend in zwei Teile untergliedert: Im ersten Teil werden Kontaktmodelle vorgestellt; im zweiten werden Systeme mit EHD-Kontakten hinsichtlich ihres nichtlinearen Schwingungsverhaltens untersucht.

Teil I beginnt mit der Beschreibung des EHD-Linienkontaktes (Kapitel 2). Zur kompakten Formulierung und zur Reduktion der Parameterzahl wird eine dimensionslose Schreibweise eingeführt. Aus dem EHD-Kontakt wird in Kapitel 3 der hydrodynamische Kontakt abgeleitet, was auf der Vernachlässigung der elastischen Deformation und der Annahme konstanter Viskosität und konstanter Dichte beruht. In diesem Fall können analytische Lösungen und Näherungen bestimmt werden. Dabei wird eine möglichst kleine Parameteranzahl benötigt, was durch die zuvor eingeführte dimensionslose Notation gegeben ist. Für spätere Herleitungen und Vergleiche wird der Hertz'sche Kontakt in Kapitel 4 vorgestellt. Die numerische Auswertung des EHD-Kontaktes erfolgt in Kapitel 5 sowohl für kleine als auch für große Lasten. Dabei ist unter anderem eine Skalierung der Kontaktbreite mithilfe der zuvor diskutierten Hertz- beziehungsweise HD-Kontakte notwendig. Vereinfachte EHD-Kontaktmodelle werden in Kapitel 6 entwickelt und validiert.

In Teil II werden schwingungsfähige Systeme mit EHD-Kontakten untersucht. Dazu werden in Kapitel 7 Grundlagen dynamischer Systeme zusammengefasst. Einführend werden nichtlineare Schwingungsphänomene eines Einmassenschwingers mit einem EHD-Kontakt in Kapitel 8 beschrieben. Hierfür wird das vereinfachte Kontaktmodell verwendet. Die Ergebnisse werden mithilfe einer numerischen Auswertung (Finite-Elemente-Methode) der EHD-Gleichungen validiert. Des Weiteren werden in Kapitel 9 die Besonderheiten eines Einmassenschwingers mit zwei EHD-Kontakten vorgestellt. Dies geschieht im Hinblick auf das in Kapitel 10 betrachtete Zylinderrollenlager. Hierbei treten zusätzlich zu den zuvor beobachteten nichtlinearen Phänomenen quasiperiodische und chaotische Lösungen auf, die detailliert untersucht werden.

Abschließend werden die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und weiterführende Fragestellungen vorgeschlagen.



# Teil I

## Modellierung von Kontakten

In diesem Teil werden zunächst die Grundgleichungen der Elastohydrodynamik formuliert, deren numerische Implementierung eine passende Skalierung der Kontaktbreite erfordert. Dazu werden der hydrodynamische und der Hertz'sche Kontakt benötigt, die ebenfalls vorgestellt werden.

Die numerische Auswertung des EHD-Kontakts erfordert einen hohen Rechenaufwand – insbesondere bei Systemen mit mehreren Kontakten. Eine detaillierte Untersuchung von nichtlinearen Schwingungen dieser Systeme erscheint ohne Reduktion der Rechenzeit nicht praktikabel. Daher wird ein vereinfachtes EHD-Modell eingeführt, das auf dem hydrodynamischen Kontakt mit starren Kontaktpartnern und dem trockenen Hertz'schen Kontakt basiert. Abschließend wird das vereinfachte EHD-Modell validiert.





## 2 Elastohydrodynamischer Kontakt

Die Beschreibung des EHD-Linienkontakts erfolgt anhand des in Abbildung 2.1a dargestellten Modells: Zwei Körper, die mit den Indizes  $j = 1, 2$  gekennzeichnet sind, werden mit der längenbezogenen Kraft  $F$  gegeneinander gedrückt. Die Kraft ist auf die Kontakttiefe ( $z$ -Richtung) bezogen und hat daher die Einheit N/m. Die Körper besitzen die Elastizitätsmoduln  $E_j$ , die Querkontraktionszahlen  $\nu_j$ , die Radien  $r_j$  in der Kontaktstelle und die Massen  $m_j$ . Sie sind in  $y$ -Richtung verschiebbar gelagert und bewegen sich so, dass sich bezüglich der deformierten Oberfläche die Tangentialgeschwindigkeiten  $U_j$  einstellen. Der Kontakt wird mit einem Fluid der Viskosität  $\eta$  und der Dichte  $\rho$  geschmiert, sodass

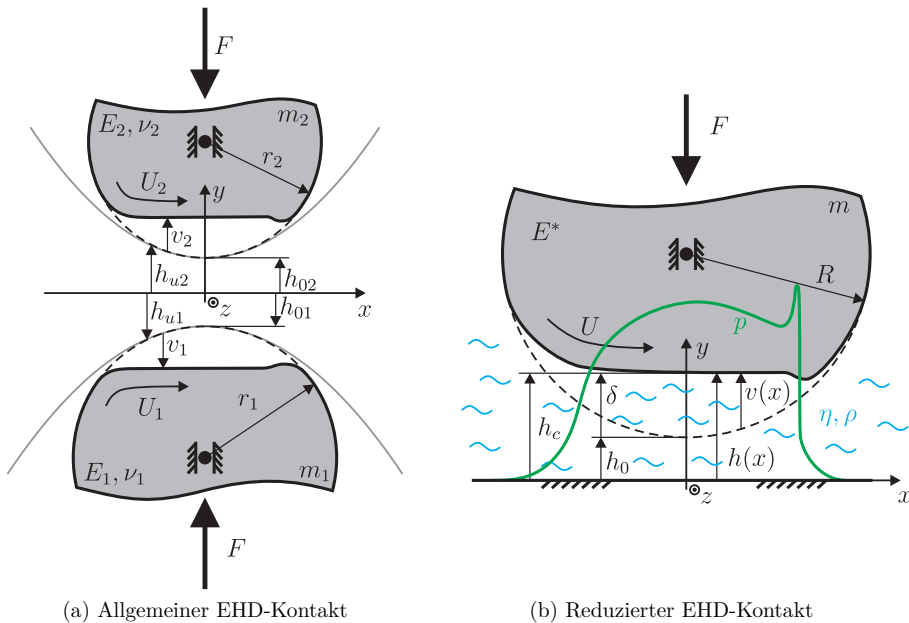


Abbildung 2.1: EHD-Kontakt. Oberfläche der Kontaktpartner:

undeformiert - - -, deformiert —, Approximation durch Parabel —

sich aufgrund der Relativbewegung der Kontaktpartner ein hydrodynamischer Schmierfilm aufbaut. Bei hohen Drücken verformen sich die Kontaktpartner, wodurch sich die Spaltgeometrie ändert. Dies hat einen entscheidenden Einfluss auf den Druckaufbau.

Die Modellierung erfolgt unter der Annahme kleiner Deformationen im Vergleich zu den Körperabmessungen. Damit beschreibt die Höhe  $h_{0j}$  in guter Näherung die Verschiebung des jeweiligen Körperschwerpunktes.

Die Schmierspalthöhe setzt sich aus der Summe der undeformierten Konturen  $h_{uj}(x)$  und der elastischen Deformationen  $v_j(x)$  zusammen. Die undeformierte Kontur mit dem Radius  $r_j$  im Kontaktpunkt kann, wie aus Abbildung 2.1a ersichtlich ist, in guter Näherung durch einen parabolischen Verlauf beschrieben werden:

$$h_{uj}(x) = h_{0j} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{r_j} . \quad (2.1)$$

Die gesamte Spalthöhe für glatte Oberflächen lautet

$$h(x) = h_{01} + h_{02} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{r_1} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{r_2} + v_1(x) + v_2(x) = h_0 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{R} + v(x) . \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet  $h_0 = h_{01} + h_{02}$  die Starrkörperposition,  $v = v_1 + v_2$  die elastische Deformation und  $R$  den reduzierten Radius. Werden zusätzlich der reduzierte Elastizitätsmodul  $E^*$  und die reduzierte Masse  $m$  eingeführt, so genügt die Betrachtung des reduzierten Modells, das in Abbildung 2.1b dargestellt und zu dem zuvor beschriebenen fast äquivalent ist.<sup>1</sup> Die reduzierten Größen sind definiert durch

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} , \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} , \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} . \quad (2.3)$$

Die Definition der reduzierte Masse lässt sich wie folgt begründen: Die Bewegungsgleichungen des in Abbildung 2.1a dargestellten Modells lauten

$$m_1 \ddot{h}_{01} - F_K = -F , \quad m_2 \ddot{h}_{02} - F_K = -F , \quad (2.4)$$

wobei mit  $F_K$  die Kontaktkraft bezeichnet wird. Mit  $h_0 = h_{01} + h_{02}$  folgt

$$\ddot{h}_0 = \ddot{h}_{01} + \ddot{h}_{02} = (F_K - F) \underbrace{\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{=1/m} = \frac{F_K - F}{m} , \quad (2.5)$$

sodass die Bedeutung der reduzierten Masse  $m$  ersichtlich wird.

## 2.1 Reynoldsgleichung

Die Reynoldsgleichung beschreibt das Verhalten des Fluids im EHD-Kontakt. Sie wird im Folgenden ausgehend von der Kontinuität, der Impulsbilanz und dem Konstitutivgesetz für inkompressible Newton'sche Fluide hergeleitet [109]. Mithilfe von geeigneten Randbedingungen und Vereinfachungen kann die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Fluids eliminiert werden, sodass die Reynoldsgleichung nur noch den Druck  $p$  als Unbekannte enthält.

---

<sup>1</sup> Die Äquivalenz muss abgeschwächt werden, da die Starrkörpermode des Systems aus Abbildung 2.1a im reduzierten System nicht abgebildet wird.

### 2.1.1 Herleitung

Die Kontinuitätsgleichung für ein kompressibles Fluid mit der Dichte  $\rho$  und der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.6)$$

Die Impulsbilanz lässt sich in lokaler Form als

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \quad (2.7)$$

schreiben. Dabei sind  $\mathbf{f}$  die Volumenkräfte,  $\boldsymbol{\sigma}$  der Cauchy'sche Spannungstensor und  $\dot{\mathbf{v}}$  die materielle Zeitableitung der Geschwindigkeit. Für ein inkompressibles Newton'sches Fluid lautet das Konstitutivgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D}, \quad (2.8)$$

wobei  $\mathbf{D}$  den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten bezeichnet:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left( \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{grad}^T \mathbf{v} \right). \quad (2.9)$$

Mithilfe der für konstante Viskosität und konstante Dichte geltenden Identität

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div} \left( -p\mathbf{I} + 2\eta\mathbf{D} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (2.10)$$

ergeben sich aus der Impulsbilanz (2.7) die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (2.11)$$

für Newton'sche und inkompressible Medien [79]. Dabei werden der Nabla-Operator  $\nabla$  und der Laplace-Operator  $\Delta$  verwendet, die in kartesischen Koordinaten in der Form

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.12)$$

geschrieben werden können.

Um von den Navier-Stokes-Gleichungen (2.11) und der Kontinuität (2.6) zur Reynoldsgleichung zu gelangen, müssen weitere Annahmen getroffen werden [87, 109]:

1. Es liegt ein schmaler Spalt mit vernachlässigbarer Krümmung vor. Daraus folgt:
  - Unter Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems (Abbildung 2.2) fällt die „Ebene des Fluidfilms“ mit der  $(x,z)$ -Ebene zusammen.
  - Das Längenverhältnis  $\epsilon = L_y/L_{xz}$  ist klein, wobei mit  $L_{xz}$  und  $L_y$  charakteristische Längen der  $(x,z)$ -Ebene beziehungsweise der Filmhöhe in  $y$ -Richtung bezeichnet werden. Für typische Anwendungen gilt  $\epsilon = \mathcal{O}(10^{-3})$ .

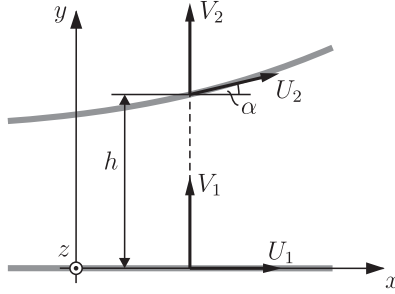


Abbildung 2.2: Geschwindigkeiten der Kontaktpartner

2. Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  und Trägheitskräfte  $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$  des Fluids sind vernachlässigbar.
3. Die Strömung ist laminar.

Damit vereinfachen sich die Navier-Stokes-Gleichungen (2.11) zu

$$\nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} , \quad (2.13)$$

wobei  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  die Geschwindigkeiten des Fluids in  $x, y$ - und  $z$ -Richtung bezeichnen. Mithilfe des kleinen Parameters  $\epsilon = L_y/L_{xz}$  kann eine dimensionslose Schreibweise eingeführt werden, womit weitere kleine und damit vernachlässigbare Terme identifiziert werden können. Die Längen  $L_{xz}$  und  $L_y$  ergeben dimensionslose Koordinaten von gleicher Größenordnung:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L_{xz}} , \quad \tilde{y} = \frac{y}{L_y} = \frac{1}{\epsilon} \frac{y}{L_{xz}} , \quad \tilde{z} = \frac{z}{L_{xz}} . \quad (2.14)$$

Analog werden die Geschwindigkeiten durch den Bezug auf  $V_{xz}$  und  $V_y$  transformiert:

$$\tilde{u} = \frac{u}{V_{xz}} , \quad \tilde{v} = \frac{v}{V_y} , \quad \tilde{w} = \frac{w}{V_{xz}} . \quad (2.15)$$

Die dimensionslosen Geschwindigkeiten sollen ebenfalls von gleicher Größenordnung sein. Hierfür wird in Verbindung mit der inkompressiblen Kontinuitätsgleichung (2.6) ein Zusammenhang zwischen  $V_{xz}$  und  $V_y$  abgeschätzt:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{V_y}{\epsilon V_{xz}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_y = \epsilon V_{xz} . \quad (2.16)$$

Die vereinfachten Navier-Stokes-Gleichungen (2.13) lauten in dimensionsloser Notation

$$\frac{\epsilon^2 \hat{p} L_{xz}}{\eta V_{xz}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = \epsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} , \quad (2.17a)$$

$$\frac{\epsilon^2 \hat{p} L_{xz}}{\eta V_{xz}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = \epsilon^4 \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2} , \quad (2.17b)$$

$$\frac{\epsilon^2 \hat{p} L_{xz}}{\eta V_{xz}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = \epsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2}, \quad (2.17c)$$

wobei mit  $\tilde{p} = p/\hat{p}$  der dimensionslose Druck definiert ist. Für  $\epsilon \rightarrow 0$  wäre  $\tilde{p}$  nicht mehr in den Gleichungen enthalten. Die drei Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuität müssten durch drei unbekannte Geschwindigkeiten erfüllt werden. Um diese Unbestimmtheit zu umgehen, wird  $\hat{p} \propto 1/\epsilon^2$  angenommen, womit sich das sinnvoll gestellte Problem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad (2.18a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.18b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (2.18c)$$

ergibt. Aus Gleichung (2.18c) folgt, dass der Druck  $p = p(x, z)$  nicht von  $y$  abhängt und somit über der Spalthöhe konstant ist. Damit können die Gleichungen (2.18b) leicht nach  $y$  integriert werden:

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + K_1^R y + K_2^R, \quad w = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + K_3^R y + K_4^R. \quad (2.19)$$

Die Integrationskonstanten  $K_1^R$  bis  $K_4^R$  werden durch die Haftbedingung an den angrenzenden Flächen bestimmt. Die Geschwindigkeiten  $U_1, V_1$  und  $U_2, V_2$  der beiden Kontaktpartner sind in Abbildung 2.2 visualisiert. Die Komponenten  $V_1$  und  $V_2$  sind parallel und zeigen in  $y$ -Richtung. Die Anteile  $U_1$  und  $U_2$  sind tangential zur betrachteten Stelle:  $U_1$  ist parallel zur  $x$ -Achse und  $U_2$  schließt mit ihr den als klein angenommenen Winkel  $\alpha$  ein ( $\alpha \approx \tan \alpha = \partial h / \partial x$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ). Daraus ergeben sich sechs Randbedingungen:

$$u(y=0) = U_1, \quad u(y=h) \approx U_2, \quad (2.20a)$$

$$v(y=0) = V_1, \quad v(y=h) \approx V_2 + U_2 \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (2.20b)$$

$$w(y=0) = 0, \quad w(y=h) = 0. \quad (2.20c)$$

Die Anpassung der Gleichungen (2.19) an die Randbedingungen (2.20a) und (2.20c) liefert die Geschwindigkeiten in  $x$ - und  $z$ -Richtung:

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - hy) + (U_2 - U_1) \frac{y}{h} + U_1, \quad w = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.21)$$

Um die Reynoldsgleichung in ihrer bekannten Form darzustellen, wird die Kontinuitätsgleichung (2.6) über die Spalthöhe gemittelt:

$$\int_0^{h(x,z,t)} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dy = 0. \quad (2.22)$$

Die Dichte wird später in Abhängigkeit des Drucks ausgedrückt und hängt daher ebenfalls nicht von  $y$  ab:  $\rho = \rho(p(t, x, z))$ . Einsetzen der Geschwindigkeiten  $u$  und  $w$  aus den Gleichungen (2.21) in die gemittelte Kontinuitätsgleichung (2.22) liefert unter Beachtung der Randbedingungen (2.20b) die Reynoldsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 6 \frac{\partial \rho h (U_1 + U_2)}{\partial x} + 12 \rho (V_2 - V_1) + 12 \frac{\partial \rho}{\partial t} h. \quad (2.23)$$

Im Folgenden wird der sogenannte Dehnungsterm  $\rho h \frac{\partial U_1 + U_2}{\partial x} \approx 0$  vernachlässigt, da von steifen Kontaktpartnern ausgegangen wird [97]. Bei der Untersuchung von Linienkontakten entfallen die Ableitungen nach  $z$ . Mit  $V_2 - V_1 = \partial h / \partial t$  und der Definition der hydrodynamischen Geschwindigkeit  $U = U_1 + U_2$  folgt die eindimensionale Reynoldsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 6U \frac{\partial \rho h}{\partial x} + 12 \frac{\partial \rho h}{\partial t}. \quad (2.24)$$

### 2.1.2 Gültigkeit der Reynoldsgleichung

Die Darstellung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.11) setzt konstante Dichte und konstante Viskosität voraus. Bei der Mittelung der Kontinuitätsgleichung (2.22) wird hingegen eine druck- beziehungsweise ortsabhängige Dichte zugelassen. Darüber hinaus wird üblicherweise bei der Berechnung des EHD-Problems in die Reynoldsgleichung (2.24) eine druckabhängige Viskosität eingesetzt.<sup>1</sup> Letztere Inkonsistenz wurde von Rajagopal und Szeri diskutiert [86]. Sie schlugen eine modifizierte Reynoldsgleichung vor – jedoch unterscheiden sich die Ergebnisse in Bezug auf den Druck von EHD-Kontakten nicht signifikant. Des Weiteren verglichen Almqvist et al. [2] Lösungen der Reynoldsgleichung mit numerischen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen im Kontext von EHD-Problemen und fanden ebenfalls exzellente Übereinstimmung, sodass in dieser Arbeit die vorgestellte und weit verbreitete Reynoldsgleichung verwendet wird.

### 2.1.3 Randbedingungen

Die Reynoldsgleichung kann als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung im Druck betrachtet werden, sodass zur vollständigen Beschreibung des Problems entsprechende Randbedingungen angegeben werden müssen, siehe [109] und Abbildung 2.3.

Ein erster Ansatz stammte von Sommerfeld [103]:

$$p(-\infty) = p(\infty) = 0. \quad (2.25)$$

Diese Randbedingungen wurden im Hinblick auf Gleitlager formuliert und geben das physikalische Verhalten nur unzureichend wieder. Sobald der Druck unter den Dampfdruck oder den Sättigungsdruck fällt, verdampft das Fluid oder werden gelöste Gase freigesetzt.

---

<sup>1</sup> Eine konsistente Herleitung der *generalisierten* Reynoldsgleichung für variable Dichte und variable Viskosität ist möglich [9, 86].

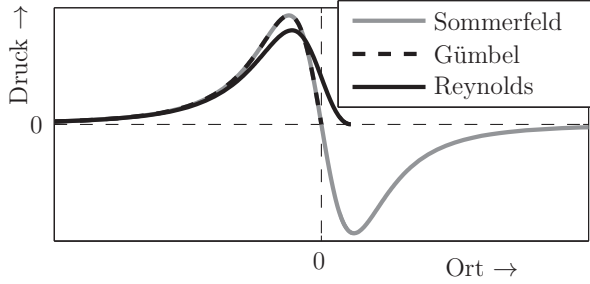


Abbildung 2.3: Randbedingungen

Die bei Sommerfeld-Randbedingungen auftretenden hohen negativen Drücke können daher nicht übertragen werden. Da Dampf- oder Sättigungsdruck  $p_{cav}$  wesentlich kleiner als die im konvergierenden Spalt üblichen Kontaktdrücke sind, kann  $p_{cav} \approx 0$  angenommen werden. Damit lässt sich eine Zwangsbedingung im Druck formulieren:

$$p \geq p_{cav} \approx 0 . \quad (2.26)$$

Werden die negativen Drücke zu null gesetzt, ergeben sich die von Gümbel [37] vorgeschlagenen Randbedingungen

$$p(-\infty) = p(0) = 0 . \quad (2.27)$$

Die Gümbel-Randbedingungen – auch Halb-Sommerfeld genannt – bilden zwar die Physik nicht exakt ab, geben aber dennoch entscheidende Einblicke, da analytische Lösungen möglich sind.

Die sogenannten Reynolds-Randbedingungen wurden von Swift [108] und Stieber [106] mathematisch formuliert:

$$p(-\infty) = 0 , \quad p(x_{fr}) = p_{cav} \approx 0 , \quad \left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x_{fr}} = 0 . \quad (2.28)$$

Dabei wird mit  $x_{fr}$  die Stelle des Filmaufrisses (engl.: *film rupture*) bezeichnet. Diese Stelle ist a priori unbekannt und führt daher auf ein freies Randwertproblem. Die Reynolds-Randbedingungen zeigen gute Übereinstimmung mit Experimenten und erfüllen, im Gegensatz zu den davor genannten, die Kontinuitätsgleichung am Austritt.

Die allgemein gültigen Jakobsson-Floberg-Olsson-Randbedingungen erfüllen die Kontinuitätsgleichung zusätzlich am Eintritt und berücksichtigen Gebiete mit Mangelschmierung [53, 80]. Sowohl im statischen als auch unter bestimmten Voraussetzungen im transienten Fall sind Jakobsson-Floberg-Olsson- und Reynolds-Randbedingungen am Austritt identisch [80, 125]. Die Reynolds-Randbedingungen sind vergleichsweise einfach zu implementieren und werden daher in dieser Arbeit verwendet.

## 2.2 Elastostatik

Zur Bestimmung der Deformation der Kontaktpartner infolge des hydrodynamischen Druckes werden die lineare Elastizitätstheorie sowie homogene und isotrope Körper angenommen. Aufgrund der Beschränkung auf Linienkontakte mit unendlicher Ausdehnung ergibt sich ein ebener Verzerrungszustand. Die Berechnung der elastischen Deformation erfolgt quasistatisch, sodass die Trägheitskräfte infolge der Deformation vernachlässigt werden.<sup>1</sup> Zur Beschreibung der Starrkörperbewegung wird, wie bereits durch Gleichung (2.5) beschrieben, die Trägheitskraft der Masse  $m$  berücksichtigt.

Zur numerischen Auswertung des EHD-Modells mittels FEM wird eine Struktur quadratischen Querschnitts mit der Kantenlänge  $\ell_{st}$  betrachtet (Abbildung 2.4). Sie wird unten fest eingespannt und oben mit dem Fluiddruck belastet. Die Deformation  $v$  in  $y$ -Richtung beeinflusst die Spalthöhe in der Reynoldsgleichung.

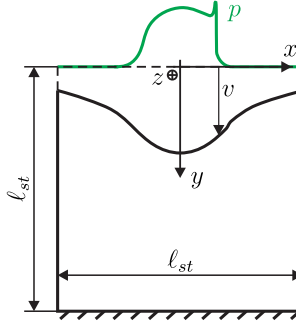


Abbildung 2.4: EHD-Modell

## 2.3 Viskosität, Dichte und Kräftegleichgewicht

Das elastohydrodynamische Problem besteht im Wesentlichen aus der Reynoldsgleichung (2.24) und den Gleichungen der Elastostatik (Abschnitt 2.2). Dabei werden stets Reynolds-Randbedingungen (2.28) zugrunde gelegt. Zusätzlich sind weitere Beziehungen notwendig: druckabhängige Dichte, druckabhängige Viskosität und Kräftegleichgewicht zwischen Druck und Kontaktkraft. Die Temperatur wird als konstant angenommen, sodass der Energieerhaltungssatz für das Fluid nicht ausgewertet werden muss.

Bei hohen Drücken muss insbesondere die Viskosität druckabhängig modelliert werden, da sich diese um mehrere Größenordnungen ändert. Das erste weit verbreitete Viskositätsgesetz wurde von Barus entwickelt [3]:

$$\eta_B = \eta_0 e^{\alpha p} . \quad (2.29)$$

<sup>1</sup> Die zugrunde liegenden Gleichungen sind in Anhang A.1 aufgeführt.



Dabei ist  $\eta_0$  die Viskosität bei Umgebungsdruck und Betriebstemperatur und  $\alpha$  ein Druck-Exponent. Das Viskositätsgesetz von Barus ist besonders einfach und führt auf eine elegante dimensionslose Schreibweise für EHD-Probleme, die in Abschnitt 2.4 vorgestellt wird. Die Formel von Barus ist nur bis zu moderaten Drücken gültig [43]. Daher wird in dieser Arbeit das exaktere Viskositätsgesetz von Roelands

$$\eta_R = \eta_0 \exp \left[ \left( \ln \frac{\eta_0}{\text{Pas}} + 9.67 \right) \left( \left\{ 1 + 5.1 \cdot 10^{-9} \frac{p}{\text{Pa}} \right\}^z - 1 \right) \right] \quad (2.30)$$

verwendet, wobei  $z$  als Druck-Viskositäts-Index bezeichnet wird [90]. Dieser liegt für gängige Öle im Bereich  $z = 0.4 \dots 1$ .

Die Druckabhängigkeit der Dichte wird mit der Beziehung von Dowson und Higginson

$$\rho = \rho_0 \frac{1 + 2.3 p/\text{GPa}}{1 + 1.7 p/\text{GPa}} \quad (2.31)$$

modelliert, wobei  $\rho_0$  die Dichte bei Umgebungsdruck und Betriebstemperatur darstellt [27]. Die Dichte variiert in der Größenordnung von 25 %, sodass nur kleine Einflüsse zu erwarten sind. Unter anderem wird die Höhe der Druckspitze reduziert, wodurch sich die numerische Auswertung vereinfacht.

Zur vollständigen Beschreibung des Kontaktproblems wird ein Kräftegleichgewicht zwischen dem Druck  $p$  und der Kontaktkraft  $F_K$  formuliert:

$$F_K = \int_{-\infty}^{\infty} p dx . \quad (2.32)$$

## 2.4 Dimensionslose Notation

Zur kompakten Darstellung des EHD-Problems und zur effizienten Validierung vereinfachter Modelle wird eine dimensionslose Notation eingeführt. Bereits 1959 konnte Blok<sup>1</sup> das EHD-Problem mit zwei Parametern charakterisieren. Auf Koets<sup>1</sup> gehen die heute üblicherweise verwendeten Größen Last  $W$  und Schmiermittelparameter  $L$  zurück:

$$W = \frac{F}{2R_0 E^*} \left( \frac{2R_0 E^*}{\eta_0 U_0} \right)^{1/2}, \quad L = 2\alpha E^* \left( \frac{2R_0 E^*}{\eta_0 U_0} \right)^{-1/4}. \quad (2.33)$$

Dabei ist  $U_0$  eine konstante Geschwindigkeit, die in Verbindung mit einer zunächst beliebig von der Zeit abhängenden Funktion  $\vartheta_U$  die hydrodynamische Geschwindigkeit  $U$  ergibt; eine analoge Formulierung gilt für den Radius:

$$U = \vartheta_U U_0, \quad R = \vartheta_R R_0. \quad (2.34)$$

---

<sup>1</sup> Die Arbeiten von Blok (*Correlational review of theoretical and experimental data on elastohydrodynamic lubrication*, Technische Hogeschol Delft, 1959) und Koets (*A Survey of the isothermal theory of elastohydrodynamic lubrication*, Univ. Technol. Rept. Delft, 1962) sind in keiner deutschen oder ausländischen Bibliothek nachgewiesen und konnten daher nicht gesichtet werden. Die entsprechenden Aussagen sind von Dowson und Higginson übernommen [27].

Moes konnte mithilfe der optimalen Ähnlichkeitsanalyse zeigen, dass mindestens zwei Parameter zur Beschreibung des Problems notwendig sind und daher keine weitere Reduktion der Parameteranzahl möglich ist [73].

Die länglichen Ausdrücke für  $W$  und  $L$  können mithilfe der dimensionslosen Größen von Dowson und Higginson übersichtlich dargestellt werden [27]. Die Geschwindigkeit  $\mathcal{U}$ , die Last  $\mathcal{W}$  und der Materialparameter  $\mathcal{G}$  wurden von Dowson und Higginson eingeführt und werden im Hinblick auf schwingende Systeme um die dimensionslose Masse  $\mathcal{M}$  ergänzt:

$$\mathcal{U} = \frac{\eta_0 U_0}{4R_0 E^*}, \quad \mathcal{W} = \frac{F}{2R_0 E^*}, \quad \mathcal{G} = 2\alpha E^*, \quad \mathcal{M} = \frac{mU_0}{R_0 \eta_0}. \quad (2.35)$$

Dabei bezeichnet  $m$  eine auf die Länge des Linienkontaktes bezogene spezifische Masse mit der Einheit kg/m. Mit den Parametern von Dowson und Higginson lassen sich  $W$  und  $L$  kompakt darstellen; zusätzlich kann eine zu  $W$  und  $L$  passende Masse  $M$  definiert werden:

$$W = \frac{\mathcal{W}}{(2\mathcal{U})^{1/2}}, \quad L = \mathcal{G} (2\mathcal{U})^{1/4}, \quad M = \mathcal{M} (2\mathcal{U})^{1/2}. \quad (2.36)$$

Zur dimensionslosen Beschreibung des EHD-Kontaktes werden Spalthöhe  $H$ , Starrkörperposition  $H_0$ , zentrale Spalthöhe  $H_c$ , Deformation  $V$ , Deformation  $\Delta$  im Kontaktzentrum, Koordinate  $X$ , Druck  $P$ , Zeit  $\tau$ , Viskosität  $\bar{\eta}$  und Dichte  $\bar{\rho}$  eingeführt:

$$\begin{aligned} H &= \frac{h}{\hat{h}}, & H_0 &= \frac{h_0}{\hat{h}}, & H_c &= \frac{h_c}{\hat{h}}, & \Delta &= \frac{\delta}{\hat{h}}, & V &= \frac{v}{\hat{h}}, \\ X &= \frac{x}{\hat{x}}, & P &= \frac{p}{\hat{p}}, & \tau &= \frac{t}{\hat{t}}, & \bar{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0}, & \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dabei gilt  $\hat{h} = R_0 (2\mathcal{U})^{1/2}$ ,  $\hat{x} = R_0 (2\mathcal{U})^{1/4}$ ,  $\hat{p} = 2E^* (2\mathcal{U})^{1/4}$  und  $\hat{t} = \hat{x}/U_0$ .

### 2.4.1 Reynoldsgleichung, Elastostatik und Kräftegleichgewicht

Die Reynoldsgleichung (2.24) und die Spalthöhe (2.2) lassen sich mit den dimensionslosen Größen des vorigen Abschnitts vereinfachen:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right] = 6\vartheta_U \frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial X} + 12 \frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial \tau}, \quad H = H_0 + \frac{X^2}{2\vartheta_R} + V. \quad (2.38)$$

Die elastische Deformation kann mithilfe der Fundamentallösung (A.17) eines mit einer Linienlast beaufschlagten Halbraums bestimmt werden. Das dabei zugrunde liegende Faltingsintegral lässt sich direkt in die dimensionslose Notation überführen. Werden hingegen die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Gleichungen der Elastostatik numerisch ausgewertet, so muss beispielsweise die Querkontraktionszahl vorgegeben werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird  $\nu = 0.3$  gewählt.

Das Kräftegleichgewicht (2.32) lautet in dimensionsloser Form

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P \, dX. \quad (2.39)$$

## 2.4.2 Neue dimensionslose Formulierung von Viskosität und Dichte

Zur vollständigen Beschreibung des EHD-Problems müssen abschließend die Viskosität und die Dichte in eine dimensionslose Form gebracht werden. Für die Viskosität nach Barus aus Gleichung (2.29) gilt

$$\bar{\eta}_B = \frac{\eta_B}{\eta_0} = e^{\alpha p} = e^{\mathbf{L}P} . \quad (2.40)$$

Die Viskosität nach Roelands aus Gleichung (2.30) lässt sich nicht ohne weitere Annahmen in eine dimensionslose Notation überführen, da die Viskosität  $\eta_0$  und der Druck  $p$  durch die entsprechenden Einheiten dividiert werden – beispielsweise im Term  $\ln(\eta_0/\text{Pas})$ . Bisherige Publikationen verzichten auf eine vollständige dimensionslose Notation. Sie müssen neben den Parametern  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{L}$  auch den Druck-Viskositäts-Index  $z$  und die dimensionsbehaftete Viskosität  $\eta_0$  zur vollständigen Charakterisierung des EHD-Problems angeben.

Im Hinblick auf spätere Validierungen erscheint eine weitere Reduktion der Parameterzahl sinnvoll. Daher wird eine neue Modifikation des Roelands-Gesetzes vorgeschlagen, sodass der Druck nur als Produkt  $\alpha p$  auftritt.

Ein Zusammenhang zwischen  $\alpha$  aus der Barus-Formel und  $\eta_0$  und  $z$  aus dem Roelands-Gesetz lässt sich mit der Forderung der gleichen Steigung  $d\eta/dp$  bei  $p = 0$  herstellen:

$$\alpha = 5.1 \cdot 10^{-9} z \left( \ln \frac{\eta_0}{\text{Pas}} + 9.67 \right) \frac{1}{\text{Pa}} . \quad (2.41)$$

Damit lautet die Viskosität nach Roelands:

$$\eta_R = \eta_0 \exp \left[ \left( \ln \frac{\eta_0}{\text{Pas}} + 9.67 \right) \left( \left\{ 1 + \frac{\alpha p}{z (\ln \eta_0 / \text{Pas} + 9.67)} \right\}^z - 1 \right) \right] . \quad (2.42)$$

Um  $\eta_0$  zu eliminieren, wird der folgende Term für den Bereich  $\eta_0 = 0.001 \dots 1$  Pas gemittelt:

$$\left( \ln \frac{\eta_0}{\text{Pas}} + 9.67 \right) \approx \frac{1}{2} \left[ \left( \ln 0.001 + 9.67 \right) + \left( \ln 1 + 9.67 \right) \right] \approx 6.2 \quad (2.43)$$

Mit der Einführung eines neuen Exponenten  $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\eta_0, z)$  folgt

$$\bar{\eta}_R \approx \exp \left[ 6.2 \left( \left\{ 1 + \frac{\mathbf{L}P}{6.2 \mathbf{Z}} \right\}^{\mathbf{Z}} - 1 \right) \right] . \quad (2.44)$$

Die Viskositäten von Roelands und Barus sind in Abbildung 2.5a exemplarisch für  $\eta_0 = 0.01$  Pas und  $z = 0.6$  dargestellt. Die neue Näherung der Roelands-Viskosität aus Gleichung (2.44) liefert mit  $\mathbf{Z} = 0.57$  ausgezeichnete Übereinstimmung. Zur Bewertung der Güte der Näherung wird der Parameterbereich  $z = 0.4 \dots 1$  und  $\eta_0 = 10^{-3} \dots 10^0$  Pas untersucht. Dabei wird die jeweils maximale Abweichung betrachtet, die zwischen der

Viskosität nach Roelands und der dimensionslosen Näherung im Bereich  $p = 0 \dots 5 \cdot 10^9$  Pa auftritt. Der relative Fehler

$$\left| \frac{\ln \eta_R^{ex} - \ln \eta_R^{approx}}{\ln \eta_R^{ex}} \right| \quad (2.45)$$

bezüglich der Logarithmen der exakten Viskosität  $\eta_R^{ex}$  und der Näherung  $\eta_R^{approx}$  ist in Abbildung 2.5b gezeigt und liegt maximal bei ungefähr 4%.

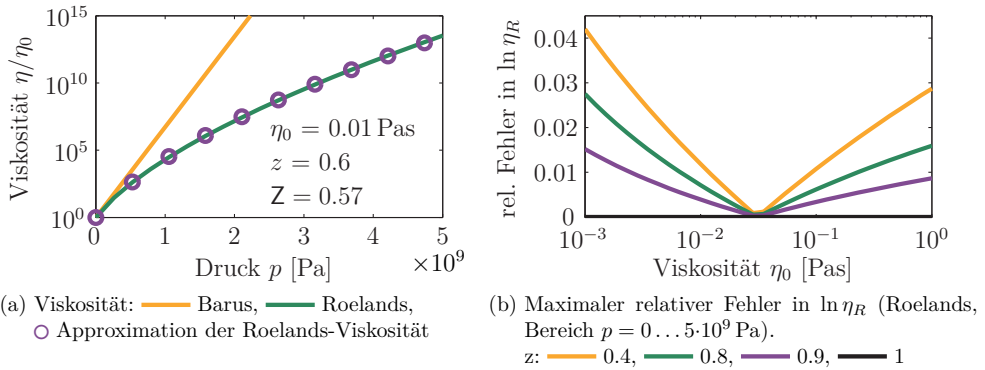


Abbildung 2.5: Vergleich der Viskositäten: Barus, Roelands und neue dimensionslose Approximation der Roelands-Viskosität

Der Zusammenhang zwischen neuem und altem Exponenten  $Z$  beziehungsweise  $z$  ist für ausgewählte  $\eta_0$  in Abbildung 2.6 gezeigt.

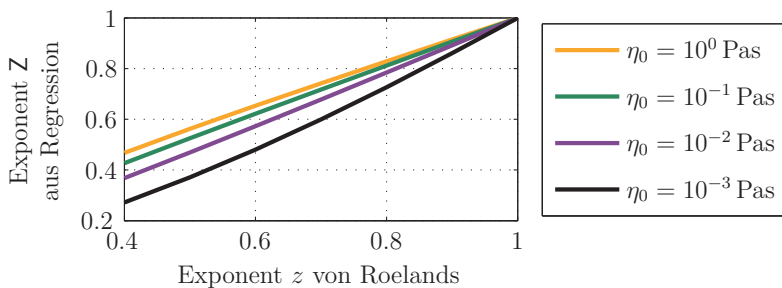


Abbildung 2.6: Zusammenhang zwischen  $\eta_0$ ,  $z$  und dem neuen Exponenten  $Z$

Für die dimensionslose Schreibweise der Dichte aus Gleichung (2.31) ergeben sich prinzipiell die gleichen Schwierigkeiten wie bei der Viskosität, weshalb ein neuer Ansatz vorgeschlagen wird:

$$\bar{\rho} = \frac{1 + \frac{2.3K_1^{\rho}}{Z} LP}{1 + \frac{1.7K_1^{\rho}}{Z} LP} = \frac{1 + 0.08\frac{1}{Z} P}{1 + 0.059\frac{1}{Z} P}. \quad (2.46)$$

Die Konstante  $K_1^{\rho}$  wird mithilfe einer Regressionsrechnung bestimmt. Zur Bewertung der Güte der genäherten Dichte wird diese in Abbildung 2.7 mit der Formulierung von Dowson und Higginson verglichen. Da das Gesetz von Dowson und Higginson empirisch ermittelt wurde, erscheint die neue dimensionslose Formulierung ausreichend genau zu sein.

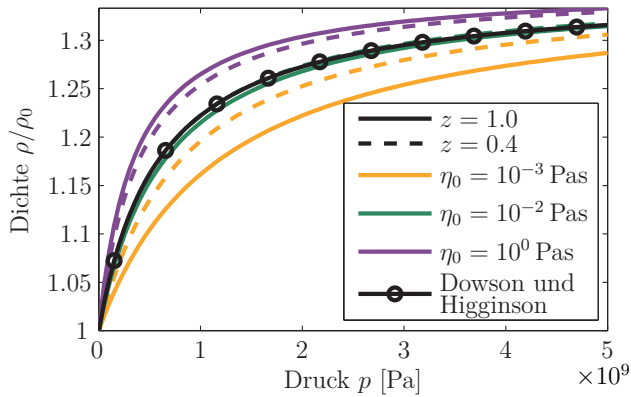


Abbildung 2.7: Vergleich der Dichte von Dowson und Higginson mit der neu entwickelten dimensionslosen Formulierung



### 3 Hydrodynamischer Kontakt

Ein Kontakt wird im Rahmen dieser Arbeit als *hydrodynamisch* (HD) bezeichnet, wenn die Kontaktpartner starr sind und das Fluid isoviskos und inkompressibel ist. Damit vereinfacht sich der Schmierspalt zu

$$H = H_c + \frac{X^2}{2\vartheta_R}, \quad (3.1)$$

wobei unter  $H_c$  die Filmhöhe im Kontaktzentrum zu verstehen ist. Mit  $\vartheta_R$  wird eine mögliche Zeitabhängigkeit des Kontaktradius beschrieben, wie sie beispielsweise zwischen Nockenwelle und Stößel auftritt. Für die Dichte und die Viskosität ergibt sich  $\bar{\eta} = \bar{\rho} = 1$ . Dadurch vereinfacht sich die Reynoldsgleichung (2.38):

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ H^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] = 6\vartheta_U \frac{\partial H}{\partial X} + 12 \frac{\partial H_c}{\partial \tau} - 6 \frac{X^2}{\vartheta_R^2} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}. \quad (3.2)$$

Hierbei gilt insbesondere  $\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial H_c}{\partial \tau} - \frac{X^2}{2\vartheta_R^2} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}$ . Im Folgenden werden Lösungen für unterschiedliche Randbedingungen vorgestellt.

#### 3.1 Annäherung ohne Tangentialgeschwindigkeit

Eine Annäherung der Kontaktpartner wird unter Vernachlässigung der Tangentialgeschwindigkeit ( $\vartheta_U = 0$ ) betrachtet. Dabei wird zusätzlich ein konstanter Radius angenommen ( $\vartheta_R = 1$ ). Es werden die Sommerfeld-Randbedingungen (2.25) zugrunde gelegt, die wegen der symmetrischen Problemstellung zu

$$P(\infty) = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_{X=0} = 0 \quad (3.3)$$

äquivalent sind [63]. Die Integration der Reynoldsgleichung (3.2) ergibt den Druckverlauf  $P_{na}$  und die Kontaktkraft  $W_{na}$  bei reiner Annäherung (engl.: *normal approach*) [16]:

$$P_{na} = -\frac{24}{(2H_c + X^2)^2} \frac{\partial H_c}{\partial \tau}, \quad W_{na} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{na} dX = -\frac{3\pi\sqrt{2}}{H_c^{3/2}} \frac{\partial H_c}{\partial \tau}. \quad (3.4)$$

Die Kraft  $W_{na}$  wird in dieser Arbeit ausschließlich zur Ableitung einer Approximation der transienten Lösung in Abschnitt 3.3.1 genutzt. Daher wird auf eine Diskussion möglicher negativer Drücke beziehungsweise Kräfte verzichtet.

## 3.2 Gümbel-Randbedingungen

Die Reynoldsgleichung kann mit Gümbel-Randbedingungen  $P(-\infty) = P(0) = 0$  analytisch gelöst werden. Im statischen Fall, das heißt konstante Last  $W$ , konstante hydrodynamische Geschwindigkeit  $U$  und konstanter Radius  $R$ , lauten die Druckverteilung und die Normalkraft

$$P = -\frac{8X}{(2H_c + X^2)^2}, \quad W = \frac{2}{H_c}. \quad (3.5)$$

Die Stelle  $X_{HD}^{max}$  des maximalen Druckes  $P_{HD}^{max}$  ergibt sich aus der Bedingung  $\partial P/\partial X = 0$ :

$$X_{HD}^{max} = -\sqrt{\frac{4}{3W}}, \quad P_{HD}^{max} = \frac{3\sqrt{3}}{16} W^{3/2}. \quad (3.6)$$

Der hydrodynamische Kontakt stellt eine Näherung von schwachbelasteten EHD-Kontakten dar. Dabei können mit  $X_{HD}^{max}$  und  $P_{HD}^{max}$  der maximale Wert und die örtliche Ausdehnung des EHD-Druckes abgeschätzt werden. Die Abschätzung wird in Kapitel 5 genutzt, um eine für die numerische Lösung geeignete Schreibweise zu formulieren.

## 3.3 Reynolds-Randbedingungen

Zur Erstellung eines vereinfachten EHD-Modells in Kapitel 6 wird das transiente hydrodynamische Kontaktproblem mit Reynolds-Randbedingungen (2.28)

$$P(-\infty) = 0, \quad P(X_{fr}) = 0, \quad \left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_{X_{fr}} = 0 \quad (3.7)$$

betrachtet, wobei mit  $X_{fr}$  die a priori unbekannte Stelle des Filmaufrisses bezeichnet wird. Damit liegt ein freies Randwertproblem vor, für das keine analytische Lösung bekannt ist. Eine semianalytische Lösung kann in Abhängigkeit der unbekanntenen Stelle  $X_{fr}$  angegeben werden. Daraus lässt sich mittels Regression eine geschlossene Approximation der Kontaktkraft ableiten [122]. Um die Rechnung übersichtlich zu halten, wird zur Herleitung  $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$  angenommen. Im Anschluss wird der allgemeine Ausdruck angegeben.

### 3.3.1 Semi-analytische Lösung

Unter Berücksichtigung der Randbedingung  $\left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_{X_{fr}} = 0$  und mit der Annahme  $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$  ergibt eine einmalige Integration der Reynoldsgleichung

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1}{H^3} \left\{ 6(H - H_{fr}) + 12 \frac{\partial H_c}{\partial \tau} (X - X_{fr}) \right\}. \quad (3.8)$$



Dabei wird mit  $H_{fr} = H(X_{fr})$  die Filmhöhe an der Stelle des Filmaufrisses bezeichnet. Eine weitere Integration und die Anpassung an die Randbedingung  $P(-\infty) = 0$  liefert den Druck

$$P(X) = \frac{3\sqrt{2}}{4H_c^{5/2}} \left[ 4H_c - 3H_{fr} - 6 \frac{\partial H_c}{\partial \tau} X_{fr} \right] \left[ \arctan \left( \frac{X}{\sqrt{2H_c}} \right) + \frac{\pi}{2} \right] - \frac{3X}{4H_c^2 H^2} \left[ H_{fr} + 2 \frac{\partial H_c}{\partial \tau} X_{fr} \right] \left[ 2H_c + 3H \right] - \frac{6}{H^2} \frac{\partial H_c}{\partial \tau} + \frac{3X}{H_c H}. \quad (3.9)$$

Mittels partieller Integration kann die Kraft in Abhängigkeit der noch unbekanntenen Stelle  $X_{fr}$  berechnet werden:

$$\begin{aligned} W &= \int_{-\infty}^{X_{fr}} P dX = \underbrace{XP \Big|_{-\infty}^{X_{fr}}}_{=0} - \int_{-\infty}^{X_{fr}} X \frac{\partial P}{\partial X} dX \\ &= \frac{3}{H_{fr}} - \frac{3}{H_c^{3/2}} \left\{ \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{X_{fr} \sqrt{H_c}}{H_{fr}} + \sqrt{2} \arctan \left( \frac{X_{fr}}{\sqrt{2H_c}} \right) \right\} \frac{\partial H_c}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Der freie Rand  $X_{fr}$  muss aus der verbleibenden Randbedingung  $P(X_{fr}) = 0$  numerisch bestimmt werden. Um dies bei dynamischen Simulationen mit vielen Kontakten zu umgehen, wird ein analytischer Ausdruck der Kraft entwickelt. In Abbildung 3.1 sind die Stelle  $X_{fr}$  des Filmaufrisses und die Kraft  $W_0$  in Abhängigkeit der zentralen Spalthöhe  $H_c$  unter statischen Bedingungen aufgetragen. Eine Regressionsrechnung bestätigt den Zusammenhang

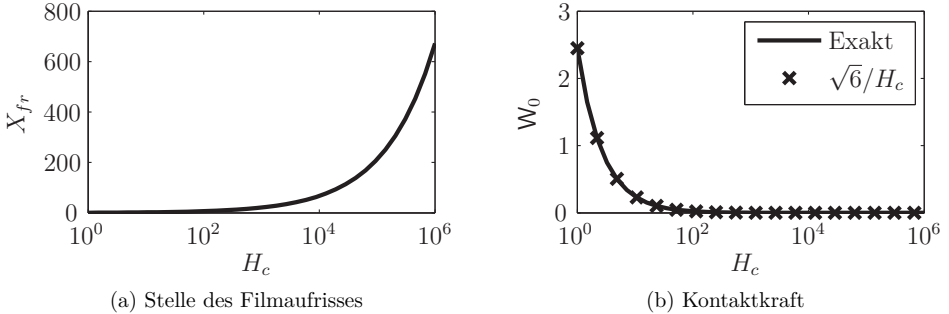


Abbildung 3.1: Hydrodynamischer Kontakt mit  $\partial H_c / \partial \tau = 0$ ,  $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$

zwischen Kraft und Verschiebung, den Martin [70] erstmals angegeben hat:

$$W_0 = \frac{\sqrt{6}}{H_c}. \quad (3.11)$$

In Abbildung 3.2 sind die Stelle des Filmaufrisses und die Normalkraft in Abhängigkeit der Verschiebung  $H_c$  und der Geschwindigkeit  $\partial H_c / \partial \tau$  gezeigt. Gesucht ist letztendlich

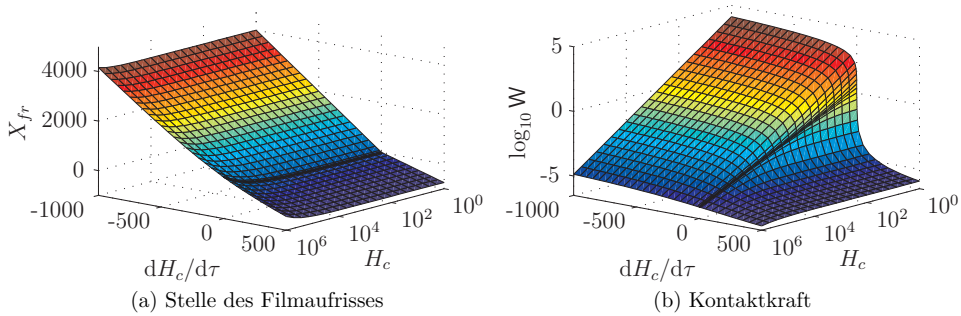


Abbildung 3.2: Transienter Hydrodynamischer Kontakt mit  $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$

ein Zusammenhang zwischen Kraft  $W$ , Verschiebung  $H_c$  und Geschwindigkeit  $\partial H_c / \partial \tau$ . Eine analytische Näherung der Stelle des Filmaufrisses  $X_{fr}$  würde diesen liefern, konnte aber nicht in zufriedenstellender Form gefunden werden. Eine Approximation der Kraft ist bisher in der Literatur nicht beschrieben und wird im Folgenden skizziert [122].

### 3.3.2 Neue Regressionsformel für transiente Normalkraft

Eine Regressionsformel für die Kontaktnormalkraft unter transienten hydrodynamischen Bedingungen ( $\partial H / \partial \tau$ ) mit der Einschränkung  $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$  wird entwickelt. Dazu wird die Differenz der transienten und der statischen Kraft aus den Gleichungen (3.10) und (3.11) betrachtet. Sie wird mit der Kraft bei Annäherung ohne Tangentialgeschwindigkeit aus Gleichung (3.4) normiert und ergibt das Kraftverhältnis

$$\Psi = \frac{W - W_0}{W_{na}} \quad (3.12)$$

Abbildung 3.3 zeigt, dass das Kraftverhältnis  $\Psi$  in guter Näherung als Funktion des Arguments  $\frac{\partial H_c}{\partial \tau} / \sqrt{H_c}$  beschrieben werden kann und einen sigmoidalen Verlauf aufweist. Mittels

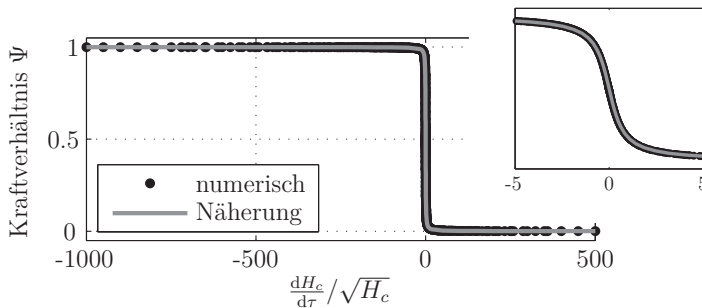


Abbildung 3.3: Kraftverhältnis  $\Psi$  im Bereich  $H_c = 1 \dots 10^6$ ,  $\frac{\partial H_c}{\partial \tau} = -1000 \dots 500$

Regression lässt sich  $\Psi$  approximieren:

$$\Psi \approx \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \sqrt{\frac{3}{H_c}} \frac{\partial H_c}{\partial \tau} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Die Genauigkeit dieser Näherung ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Der relative Fehler ist

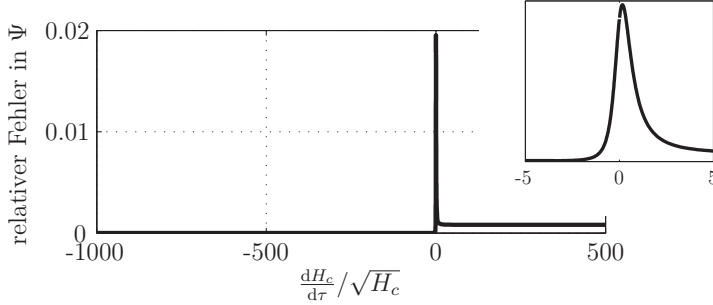


Abbildung 3.4: Relativer Fehler des Kraftverhältnisses  $\Psi$

im Bereich  $H_c = 1 \dots 10^6$  und  $\frac{\partial H_c}{\partial \tau} = -1000 \dots 500$  kleiner als 2%, sodass von einer ausreichend genauen Näherung ausgegangen werden kann.

Mit dem Kraftverhältnis (3.13) und der Kraft  $W_{na}$  aus (3.4) lautet unter der Annahme  $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$  die Normalkraft hydrodynamischer Kontakte

$$W = W_0 + \Psi W_{na} = \frac{\sqrt{6}}{H_c} - \frac{3\pi}{\sqrt{2}H_c^{3/2}} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \sqrt{\frac{3}{H_c}} \frac{\partial H_c}{\partial \tau} \right) \right] \frac{\partial H_c}{\partial \tau}. \quad (3.14)$$

### 3.3.3 Zeitabhängige Parameter

Bei allgemeinen Kontaktproblemen können sowohl die hydrodynamische Geschwindigkeit als auch der lokal im Kontakt vorliegende Radius von der Zeit abhängen. Ein technisch bedeutsames Beispiel ist der Kontakt zwischen Nockenwelle und Stößel [24].

Die Kontaktkraft lässt sich für zeitvariante Geschwindigkeiten  $U = \vartheta_U U_0$  und für konstante Radien  $R$  angeben. Dazu wird in der dimensionslosen Notation die Geschwindigkeit  $U$  anstelle von  $U_0$  und der Radius  $R$  anstelle von  $R_0$  verwendet, sodass die Regressionsrechnung aus Abschnitt 3.3 genutzt werden kann. Für beliebige  $\vartheta_U$  und  $\vartheta_R$  mit der Einschränkung  $\partial \vartheta_R / \partial \tau = 0$  folgt damit die Kontaktkraft in der Form

$$W = \frac{\sqrt{6}}{H_c} \vartheta_R \vartheta_U - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_c} \right)^{3/2} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{\sqrt{\vartheta_R}}{\vartheta_U} \sqrt{\frac{3}{H_c}} \frac{\partial H_c}{\partial \tau} \right) \right] \frac{\partial H_c}{\partial \tau}. \quad (3.15)$$

Eine Berücksichtigung eines zeitveränderlichen Radius ergibt

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial H_c}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{X^2}{\vartheta_R^2} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}. \quad (3.16)$$

Der bisher unberücksichtigte Term  $-\frac{1}{2} \frac{x^2}{R^2} \frac{\partial R}{\partial t}$  wird für  $\vartheta_U = 0$  und  $\partial H_c / \partial \tau = 0$  isoliert untersucht. Die Reynoldsgleichung lautet in diesem Fall

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ H^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] = -6 \frac{X^2}{\vartheta_R^2} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}. \quad (3.17)$$

Aufgrund der symmetrischen Problemstellung werden die Randbedingungen  $P(\infty) = 0$  und  $\frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{X=0} = 0$  aus Abschnitt 3.1 übernommen. Der Druckverlauf (Abbildung 3.5) und die Normalkraft ergeben sich zu

$$P_R = \left( \frac{4}{H} - \frac{2H_c}{H^2} + \frac{2X^4}{\vartheta_R^2 H^3} \right) \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}, \quad W_R = 6\pi \sqrt{\frac{2\vartheta_R}{H_c}} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}. \quad (3.18)$$

Eine Superposition der Kräfte aus den Gleichungen (3.15) und (3.18) ist mathematisch auf-

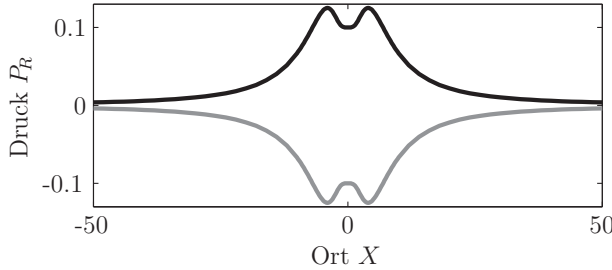


Abbildung 3.5: Druckverlauf bei zeitvariantem Radius und  $\vartheta_U = 0$ ,  $\partial h_c / \partial t = 0$ .  
 $\partial \vartheta_R / \partial \tau$ : — 0,5, — — -0,5

grund unterschiedlicher Randbedingungen nicht zulässig. Eine Addition des Anteils  $\frac{1}{2} W_R$  zu Gleichung (3.15) liefert, wie sich später zeigen wird, dennoch akzeptable Ergebnisse. Damit lautet die Kontaktkraft unter allgemeinen hydrodynamischen Bedingungen

$$W = \frac{\sqrt{6}}{H_c} \vartheta_R \vartheta_U - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_c} \right)^{\frac{3}{2}} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{1}{\vartheta_U} \sqrt{\frac{3\vartheta_R}{H_c}} \frac{\partial H_c}{\partial \tau} \right) \right] \frac{\partial H_c}{\partial \tau} + \frac{6\pi}{2} \sqrt{\frac{2\vartheta_R}{H_c}} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}. \quad (3.19)$$

Der Kraftverlauf ist für ausgewählte Radiusveränderungen  $\partial \vartheta_R / \partial \tau = -0,1 \dots 0,1$  in Abbildung 3.6 dargestellt. Ein Vergleich mit der numerischen Lösung des transienten hydrodynamischen Problems mit Reynolds-Randbedingungen zeigt unter Berücksichtigung der Annahmen akzeptable Übereinstimmung.

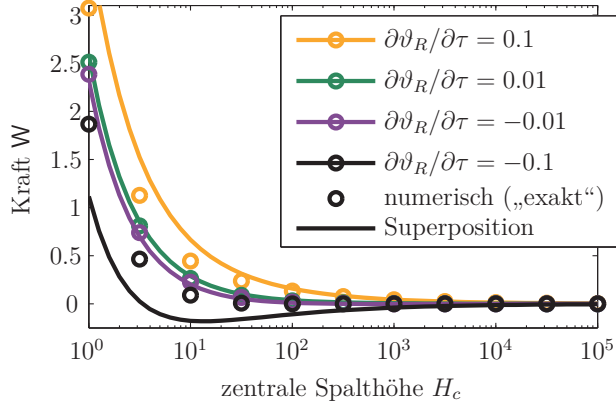


Abbildung 3.6: Kraft mit Anpassung an zeitabhängigen Radius  $\vartheta_R$  mit  $\partial H_c / \partial \tau = 0$  und  $\vartheta_U = 1$

### 3.3.4 Linearisierung der Kontaktkraft

Zur Entwicklung vereinfachter EHD-Modelle in Kapitel 6 wird eine Linearisierung der hydrodynamischen Kontaktkraft um  $\partial H_c / \partial \tau = 0$  vorgenommen:

$$W_{fl} = \frac{\sqrt{6}}{H_c} \vartheta_R \vartheta_U - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_c} \right)^{3/2} \frac{\partial H_c}{\partial \tau} + 3\pi \sqrt{\frac{2\vartheta_R}{H_c}} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}. \quad (3.20)$$

Hierfür können Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten angegeben werden:

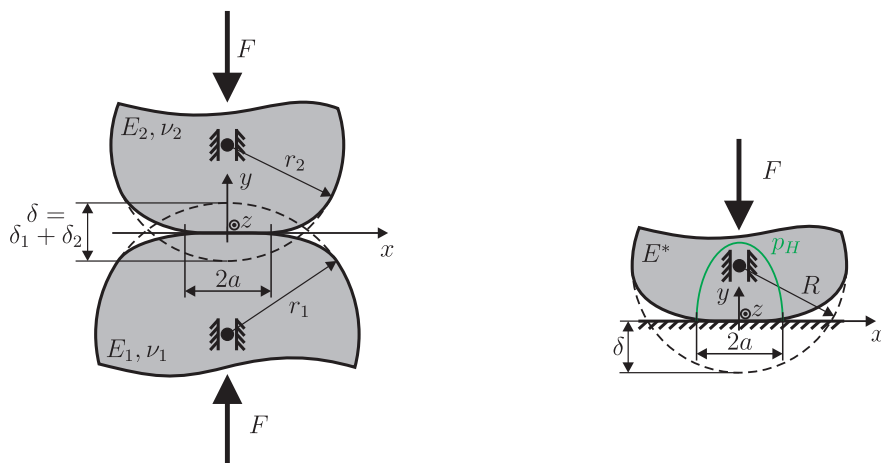
$$\begin{aligned} C_{fl} &= \frac{dW_{fl}}{dH_c} = -\frac{\sqrt{6}}{H_c^2} \vartheta_R \vartheta_U + \frac{9\pi \vartheta_R^{3/2}}{2\sqrt{2} H_c^{5/2}} \frac{\partial H_c}{\partial \tau} - \frac{3\pi \sqrt{2\vartheta_R}}{2 H_c^{3/2}} \frac{\partial \vartheta_R}{\partial \tau}, \\ D_{fl} &= \frac{dW_{fl}}{d\dot{H}_c} = -\frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_c} \right)^{3/2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dabei stellt der Index  $(\ )_{fl}$  den Bezug zum Fluid her. Die negativen Vorzeichen treten auf, da  $H_c$  und  $W_{fl}$  in entgegengesetzte Richtungen definiert sind.



## 4 Kontakt zweier elastischer Körper – Hertz'sche Pressung

In diesem Abschnitt wird die Annäherung zweier homogener, isotroper, elastischer, glatter und in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnter Körper bestimmt, die mit der Linienlast  $F$  [N/m] gegeneinander gedrückt werden (Abbildung 4.1a). Es wird ein reibungsfreier Linienkontakt angenommen. Die Körper besitzen im Kontakt lokal die Radien  $r_j$ , die Elastizitätsmoduln  $E_j$  und die Querkontraktionszahlen  $\nu_j$  ( $j = 1, 2$ ).



(a) Kontakt zwischen zwei koaxialen Zylindern

(b) Äquivalentes reduziertes Problem

Abbildung 4.1: Geometrie, Belastung und Materialkonstanten des Linienkontaktes

### 4.1 Hertz'scher Druck

Bereits 1882 konnte Hertz den sich zwischen den Kontaktpartnern einstellenden Druckverlauf angeben. Die Herleitung erfolgte für einen Punktkontakt, der eine elliptische Kontaktfläche ausbildet [46]. Den Linienkontakt zwischen zwei Körpern leitete Hertz durch einen Grenzübergang her, bei dem eine Halbachse der Kontaktellipse als unendlich angenommen wird [47]. Für den Linienkontakt lautet der Hertz'sche Druck

$$p_H(x) = p_H^{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (4.1)$$

Dabei sind die halbe Hertz'sche Kontaktbreite und der maximale Hertz-Druck mit

$$a = \sqrt{\frac{4FR}{\pi E^*}} = \frac{2p_H^{max} R}{E^*}, \quad p_H^{max} = \frac{2F}{\pi a} = \sqrt{\frac{FE^*}{\pi R}} \quad (4.2)$$

gegeben. Die reduzierten Größen Radius  $R$  und Elastizitätsmodul  $E^*$  sind in Gleichung (2.3) definiert und erlauben die Betrachtung des reduzierten Modells, das in Abbildung 4.1b dargestellt ist (vergleiche Kapitel 2).

Mit der dimensionslosen Notation aus Abschnitt 2.4 kann der Hertz'sche Kontakt durch

$$P_H = \frac{p_H}{\hat{p}} = P_H^{max} \sqrt{1 - \frac{X^2}{A^2}}, \quad P_H^{max} = \frac{p_H^{max}}{\hat{p}} = \sqrt{\frac{W}{2\pi\vartheta_R}}, \quad (4.3)$$

$$A = \frac{a}{\hat{x}} = 4\vartheta_R P_H^{max}$$

beschrieben werden.

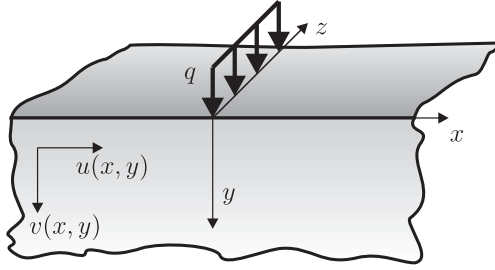
## 4.2 Elastische Deformation und Annäherung

Im Gegensatz zum Punktkontakt kann die Annäherung  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  der beiden Körper beim Linienkontakt aufgrund einer unbekanntem Integrationskonstanten nicht eindeutig bestimmt werden. In der Literatur sind Lösungen für den „Linienkontakt mit endlichen Kontaktgebieten“ und sich anschließenden elastischen Halbräumen zu finden [61, 69]. Infolge des endlichen Kontaktgebietes bleibt die Last endlich und es ergibt sich eine eindeutige Integrationskonstante. Des Weiteren existieren unterschiedliche spezielle Lösungen für Linienkontakte, bei denen die Last aufgrund der unbegrenzten Ausdehnung unendlich groß wird [6, 31, 43, 54, 118]. Als konkretes Beispiel sei die Zusammendrückung einer Walze zwischen zwei Körpern erwähnt [31, 54]. Dabei ist die Deformation der Walze aufgrund der symmetrischen Last eindeutig bestimmbar. Im Folgenden werden die Deformation und die Annäherung so dargestellt, dass die im Allgemeinen unbekanntem Integrationskonstante physikalisch interpretierbar ist und gleichzeitig einen Zusammenhang zu den speziellen Lösungen erkennen lässt. Die Deformation des  $j$ -ten Körpers wird mit der Deformation eines mit Hertz'schem Druck belasteten elastischen Halbraums angenähert.

Zunächst wird der Halbraum mit einer Linienlast  $q$  in  $y$ -Richtung beaufschlagt (Abbildung 4.2). Die sich einstellende Deformation  $v_j^q$  in vertikale Richtung wurde erstmals von Flamant angegeben [29, 54, 112]. Dabei tritt eine im Allgemeinen unbekanntem Integrationskonstante  $K_1^H$  auf, die insbesondere nicht von  $x$  abhängt. Die Deformation ist im Anhang A.1 (Gleichung (A.17)) hergeleitet und lautet

$$v_j^q = -q \frac{1 - \nu_j^2}{\pi E_j} \ln(x^2) + K_1^H. \quad (4.4)$$




 Abbildung 4.2: Elastischer Halbraum mit Linienlast in  $y$ -Richtung

Um die unbekannte Integrationskonstante  $K_1^H$  vorläufig zu umgehen, wird die Ableitung nach  $x$  bestimmt:

$$\frac{\partial v_j^q}{\partial x} = -2q \frac{1 - \nu_j^2}{\pi E_j} \frac{1}{x}. \quad (4.5)$$

Die Ableitung  $\partial v_j / \partial x$  der vertikalen Deformation bei der Belastung durch den Druck  $p_H$  soll bestimmt werden. Die Berechnung erfolgt mittels Faltung, wozu die Linienlast  $q$  durch die differentielle Last  $p_H(s) ds$  ersetzt wird:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} p_H(s) \left. \frac{\partial v_j^q}{\partial x} \right|_{x-s} ds = -2 \frac{1 - \nu_j^2}{\pi E_j} \int_{-\infty}^{\infty} p_H(s) \frac{1}{x-s} ds. \quad (4.6)$$

Im Rahmen dieser Arbeit werden stets zwei Kontaktpartner betrachtet und damit die Summe der Deformation beider Körper. Für die Summe der Ableitung der Deformationen beider Körper folgt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E^*} \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \frac{1}{x-s} ds, \quad (4.7)$$

wodurch die Definition des reduzierten Elastizitätsmoduls  $E^*$  begründet wird. Die vertikale Deformation  $v$  und deren Ableitung können für Hertz'schen Druck explizit bestimmt werden. Die an Greenwood [35] angelehnte Rechnung kann Anhang A.2 entnommen werden. Die vertikale Deformation aus Gleichung (A.24) mit der Konstanten  $K_2^H$  lautet

$$v = -\frac{1}{2R} \begin{cases} x^2 + K_2^H, & |x| < a \\ x^2 - |x|\sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \ln \left( \frac{|x|}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right) + K_2^H, & |x| > a. \end{cases} \quad (4.8)$$

$$K_2^H = -\frac{a^2}{2} \left[ 1 + \ln \left( 4 \frac{x_0^2}{a^2} \right) \right].$$

An der Stelle  $x = x_0$  gilt stets  $v(x_0) = 0$ , sodass  $x_0$  eine neue Integrationskonstante mit physikalischer Bedeutung darstellt. Durch die vorliegende Geometrie und die Randbedingungen wird  $x_0$  bestimmt.

Letztendlich ist die Annäherung  $\delta$  der Kontaktpartner von Interesse, das heißt, die Deformation an der Stelle  $x = 0$  (Gleichung (A.25)):

$$\delta = \frac{F}{\pi E^*} \left[ 1 + \ln \left( \frac{\pi E^*}{FR} x_0^2 \right) \right]. \quad (4.9)$$

Zur weiteren Behandlung des nichtlinearen Kraftgesetzes wird die dimensionslose Notation aus Abschnitt 2.4 verwendet. Damit lässt sich die Annäherung  $\Delta = \delta/\hat{h}$  kompakt in Abhängigkeit der Last  $W = \frac{\pi}{2}\Gamma$  ausdrücken:

$$\Delta = \Gamma \left[ 1 + \ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R \Gamma} \right] \quad \text{mit} \quad \Gamma = \frac{2}{\pi} W. \quad (4.10)$$

Dieser Ausdruck kann mithilfe der Lambert'schen W-Funktion nach der Last  $W$  aufgelöst werden [20]. Sie ist die in Abbildung 4.3 gezeigte Umkehrfunktion zu  $y = xe^x$ . Im Reellen

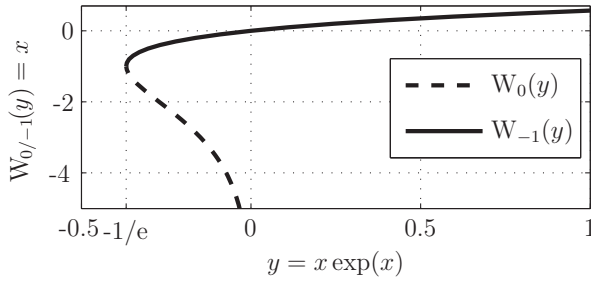


Abbildung 4.3: Reale Äste der Lambert'schen W-Funktion

treten zwei Äste auf: Der obere wird mit  $W_0(y)$  und der untere mit  $W_{-1}(y)$  bezeichnet. Aufgrund des hier vorliegenden Definitionsbereichs ist der untere Ast zu wählen. Für die Kraft folgt somit

$$W = \frac{\pi}{2} \Gamma = \frac{-\pi \Delta}{2W_{-1}(-\Delta \vartheta_R / X_0^2 e)} \quad (4.11)$$

wobei  $e \approx 2.7183$  die Euler'sche Zahl darstellt. Die Nachgiebigkeit  $S_{st}^{nl}$  der Struktur kann elegant aus Gleichung (4.10) bestimmt werden; die Steifigkeit  $C_{st}^{ml}$  aus (4.11):

$$S_{st}^{nl} = \frac{d\Delta}{dW} = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\pi X_0^2}{2\vartheta_R W}, \quad C_{st}^{ml} = \frac{dW}{d\Delta} = \frac{-\pi/2}{1 + W_{-1}(-\Delta \vartheta_R / X_0^2 e)}. \quad (4.12)$$

Dabei hängen  $S_{st}^{nl}$  und  $C_{st}^{ml}$  nichtlinear von der Kraft  $W$  beziehungsweise von der Verschiebung  $\Delta$  ab und werden deshalb mit  $( )^{nl}$  gekennzeichnet.

An dieser Stelle soll betont werden, dass die Steifigkeit für kleiner werdende Lasten beziehungsweise kleiner werdende Annäherungen gegen null geht:

$$C_{st,0}^{nl} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} C_{st}^{nl} = 0 . \quad (4.13)$$

### 4.3 Lineare Näherung

Die Kraft kann, wie in Gleichung (4.11) gezeigt, mithilfe der Lambert'schen W-Funktion in Abhängigkeit der Annäherung dargestellt werden. Dabei treten zwei Schwierigkeiten auf: Zum einen sind Umformungen, wie sie später in Abschnitt 6.2 durchgeführt werden, nicht möglich. Zum anderen ist die Lambert'sche W-Funktion nicht in allen gängigen numerischen Programmen in geeigneter Form verfügbar. Beispielsweise wird sie von MATLAB<sup>®</sup> innerhalb der symbolischen Toolbox bereitgestellt; numerische Auswertungen sind zwar möglich, aber mit langen Rechenzeiten verbunden.

Daher wird die Annäherung (4.10) der Kontaktpartner alternativ durch ein lineares Kraftgesetz  $\Delta = \chi\Gamma$  approximiert. Die Linearisierung erfolgt mittels Regression. Dazu wird das Integral der Fehlerquadrate zwischen der linearen Approximation und der exakten Annäherung über den Bereich  $\Gamma = 0 \dots \Gamma_{max}$  bestimmt:

$$\mathcal{R}^2 = \int_0^{\Gamma_{max}} (\chi\Gamma - \Delta)^2 d\Gamma = \int_0^{\Gamma_{max}} \left( \chi\Gamma - \Gamma \left[ 1 + \ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R \Gamma} \right] \right)^2 d\Gamma . \quad (4.14)$$

Das Minimum von  $\mathcal{R}^2$  folgt aus der Forderung  $\partial\mathcal{R}^2/\partial\chi = 0$  und liefert den gesuchten Parameter

$$\chi = \frac{4}{3} + \ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R} - \ln(\Gamma_{max}) . \quad (4.15)$$

Damit kann die Linearisierung der Deformation angegeben werden:

$$\Delta = \Gamma \left[ 1 + \ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R \Gamma} \right] \approx \Gamma \left( \frac{4}{3} + \ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R} - \ln(\Gamma_{max}) \right) . \quad (4.16)$$

In der Literatur werden in Bezug auf EHD-Kontakte maximale Lasten von  $W \approx 1000$  verwendet. Auf dieser Basis wird im Rahmen dieser Arbeit bei dimensionslosen Ausführungen  $\Gamma_{max} = 600$  angenommen.<sup>1</sup> Damit ergibt sich die konstante Steifigkeit der Struktur:

$$C_{st} \approx \frac{\pi/2}{\frac{4}{3} + \ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R} - \ln(\Gamma_{max})} \approx \frac{\pi/2}{\ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R} - 5} . \quad (4.17)$$

<sup>1</sup> Die Linearisierung beziehungsweise  $\chi$  hängt vom Linearisierungsbereich ab. Daher sollte beim Vergleich von dimensionsbehafteten Ergebnissen (bei unterschiedlicher Entdimensionierung) der Linearisierungsbereich nicht durch eine konstante Last  $\Gamma_{max}$  vorgegeben werden, sondern durch eine konstante dimensionsbehaftete Kraft  $F_{max}$ .

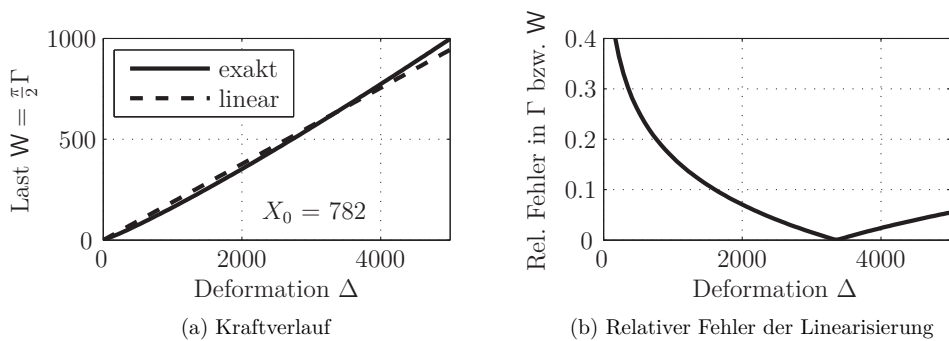


Abbildung 4.4: Vergleich von exaktem Kraftgesetz mit dessen Linearisierung

Die Qualität der linearen Näherung ist in Abbildung 4.4 dargestellt und mit der exakten Lösung aus Gleichung (4.10) verglichen. Das Kraftgesetz suggeriert ausgezeichnete Übereinstimmung (Abbildung 4.4a). Der relative Fehler bestätigt dies für große Lastbereiche (Abbildung 4.4b). Insbesondere bei hohen Lasten beziehungsweise großen Deformationen liegt der relative Fehler unter 10%. Für verschwindende Lasten beziehungsweise Deformationen geht zwar der absolute Fehler gegen null, jedoch wird aufgrund der nicht übereinstimmenden Steifigkeit der relative Fehler unendlich.

## 5 Numerische Implementierung des EHD-Kontaktproblems

Zur numerischen Auswertung des EHD-Kontaktproblems aus Kapitel 2 wird das kommerzielle FEM-Programm COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> verwendet, das simultanes Lösen von gekoppelten Mehrfeldproblemen erlaubt. Das EHD-Problem besteht aus der Reynoldsgleichung und den Gleichungen der Elastostatik, sodass eine Formulierung in den unbekanntem Größen Druck und Verschiebung nahe liegt. Auf die Implementierung des elastostatischen Teilproblems wird nicht näher eingegangen und stattdessen auf die Literatur verwiesen [4, 51].

Die Reynoldsgleichung (2.38) kann als nichtlineare Konvektions-Diffusionsgleichung aufgefasst werden. Bei diesem Gleichungstyp können für bestimmte Parameter oszillierende Lösungen (engl: *spurious oscillations*) auftreten, deren Ursprung in der Diskretisierung und nicht in der Physik liegt. Die Oszillationen lassen sich durch eine stabilisierte Diskretisierung unterdrücken. Zum besseren Verständnis der numerischen Oszillationen und der Stabilisierungsmethoden wird zunächst eine lineare Konvektions-Diffusionsgleichung betrachtet. Anschließend wird die Variationsformulierung der nichtlinearen Konvektions-Diffusionsgleichung einschließlich der Stabilisierung vorgestellt.

In dieser Arbeit werden sowohl hoch- als auch schwachbelastete EHD-Kontakte untersucht, was besondere Anforderungen an die numerische Implementierung stellt: In der Nähe der Kontaktzone ist eine feine Diskretisierung notwendig, in den verbleibenden Gebieten müssen aus Gründen der Rechendauer größere Elemente verwendet werden. Für eine adaptive Vernetzung muss die Größe des Kontaktgebietes bekannt sein, die sich bei hohen Lasten an Hertz'schen und bei kleinen Lasten an hydrodynamischen Kontakten orientiert. Zu diesem Zweck wird eine weitere dimensionslose Notation eingeführt.

### 5.1 Konvektions-Diffusionsgleichung

Die Reynoldsgleichung kann in die Form einer nichtlinearen Konvektions-Diffusionsgleichung überführt werden. Dabei treten beim Standard-Galerkin-Verfahren oder bei Finiten Differenzen-Verfahren mit zentralen Differenzenquotienten oszillierende Lösungen auf. Deren Ursprung ist nicht physikalisch sondern liegt in der Diskretisierung.

Zur Beschreibung der schwachen Formulierung der Reynoldsgleichung und deren Stabilisierung wird die nichtlineare eindimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung

$$-(KP')' + \Upsilon P' = Q, \quad X \in \Omega = (X_\ell, X_r) \quad (5.1)$$

betrachtet [13, 38]. Dabei ist  $(\cdot)' = d(\cdot)/dX$  die Ableitung nach  $X$ . Das offene Intervall mit den Grenzen  $X_\ell$  und  $X_r$  wird mit  $\Omega$  bezeichnet. Der Diffusionskoeffizient  $K$ , die Kon-

vektionsgeschwindigkeit  $\Upsilon$  und der Quellterm  $Q$  hängen im Falle der Reynoldsgleichung nichtlinear von  $X$ ,  $P$  und  $V$  ab. Den Quellterm in

$$Q = Q_1 - Q_2' \quad (5.2)$$

aufzuteilen erscheint sinnvoll, wenn dadurch eine numerische Differentiation von Teilen des Quellterms vermieden werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit genügt die Betrachtung geometrischer Randbedingungen

$$P(X) = P_\Gamma(X), \quad X \in \Gamma = \{X_\ell, X_r\}, \quad (5.3)$$

wobei die Funktion  $P_\Gamma(X)$  auf dem Rand  $\Gamma$  gegeben ist.

### 5.1.1 Stabilität einer linearen Konvektions-Diffusionsgleichung

Die Oszillationen treten bereits beim eindimensionalen linearen Konvektions-Diffusions-Problemen mit konstantem Diffusionskoeffizienten  $K$ , konstanter Konvektionsgeschwindigkeit  $\Upsilon$  und verschwindendem Quellterm  $Q = 0$  auf. Für die Randbedingungen  $P(0) = 0$  und  $P(1) = 1$  kann die analytische Lösung

$$P(X) = \frac{\exp\left(\frac{\Upsilon}{K}X\right) - 1}{\exp\left(\frac{\Upsilon}{K}\right) - 1} \quad (5.4)$$

angegeben werden, die als Referenzlösung dient. Sie ist streng monoton und kann insbesondere keine Oszillationen aufweisen.

Zur Diskretisierung von Gleichung (5.1) wird das Gebiet  $\Omega = (0, 1)$  in  $N$  äquidistante Teilgebiete der Breite  $\Delta X = 1/N$  mit den Knoten  $X_j = j \Delta X$  für  $j = 0, \dots, N$  unterteilt. Die Diskretisierung mittels zentralem Differenzenquotienten ergibt mit den Annahmen dieses Unterkapitels

$$P_{j+1}(\text{Pe} - 1) + 2P_j - P_{j-1}(\text{Pe} + 1) = 0, \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad (5.5)$$

wobei die Element-Péclet-Zahl  $\text{Pe} = \frac{\Upsilon \Delta X}{2K}$  verwendet wird. Ein Ansatz der Form  $P_j = A\lambda^j$  liefert nach der Anpassung an die Randbedingungen die analytische Lösung der diskretisierten Gleichungen:

$$P_j = \frac{1 - \left(\frac{1+\text{Pe}}{1-\text{Pe}}\right)^j}{1 - \left(\frac{1+\text{Pe}}{1-\text{Pe}}\right)^N}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (5.6)$$

Diese Lösung weist für  $|\text{Pe}| > 1$  oszillierende Lösungen auf, weshalb die mit dem zentralen Differenzenquotienten diskretisierten Gleichungen als *instabil* bezeichnet werden (Abbildung 5.1).

Eine Stabilisierung kann mittels *Streamline-Upwind* erreicht werden. Dabei wird eine veränderte Gewichtung bezüglich der Strömungsrichtung vorgenommen. Im vorliegenden ein-

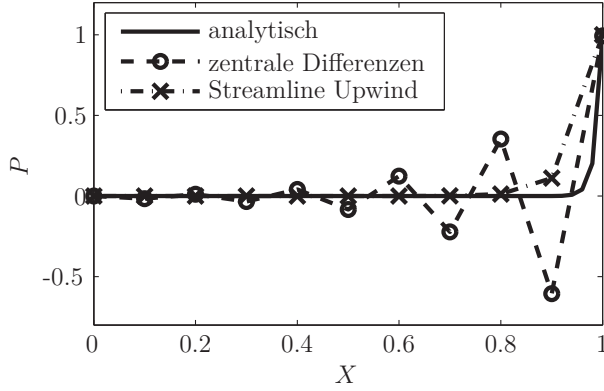


Abbildung 5.1: Lösung der linearen Konvektions-Diffusionsgleichung mit Finiten Differenzen für  $Pe = 4$ ,  $N = 10$

dimensionalen Fall führt dies auf die Verwendung von Vorwärts- beziehungsweise Rückwärts-Differenzenquotienten für den konvektiven Term:

$$\Upsilon P'_j = \begin{cases} \Upsilon \frac{P_j - P_{j-1}}{\Delta X} & \text{falls } Pe > 0, \\ \Upsilon \frac{P_{j+1} - P_j}{\Delta X} & \text{falls } Pe < 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Für  $Pe > 0$  ergibt sich unter Berücksichtigung der Stabilisierung die modifizierte Differenzgleichung

$$-P_{j+1} + 2P_j(Pe + 1) - P_{j-1}(2Pe + 1) = 0, \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad (5.8)$$

Wie zuvor kann auch in diesem Fall eine analytische Lösung der stabilisierten diskretisierten Gleichungen angegeben werden:

$$P_j = \frac{1 - (2Pe + 1)^j}{1 - (2Pe + 1)^N}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (5.9)$$

Diese Lösung ergibt unabhängig von der Péclet-Zahl  $Pe$  keine oszillierenden Lösungen und ist daher *stabil*.

Bei äquidistantem Gitter lässt sich beispielsweise die Approximation der ersten Ableitung mittels Rückwärts-Differenzenquotienten zusammensetzen aus zentralen Differenzenquotienten einer ersten und einer zweiten Ableitung:

$$\Upsilon \frac{P_j - P_{j-1}}{\Delta X} = \Upsilon \left( \frac{P_{j+1} - P_{j-1}}{2\Delta X} \right) - \frac{\Delta X}{2} \Upsilon \left( \frac{P_{j+1} - 2P_j + P_{j-1}}{\Delta X^2} \right). \quad (5.10)$$

Damit ist die Stabilisierung mittels Streamline-Upwind äquivalent zur Hinzufügung eines zusätzlichen Diffusionsterms [13].

### 5.1.2 Variationsformulierung einer Konvektions-Diffusionsgleichung

Zur Beschreibung der Variationsformulierung von Gleichung (5.1) wird der Raum

$$L_2(\Omega) = \left\{ \varphi : \int_{\Omega} \varphi^2(x) dx < \infty \right\} \quad (5.11)$$

der auf  $\Omega$  quadratisch integrierbaren Funktionen eingeführt. Damit können der Sobolev-Raum  $H^1(\Omega)$  und der Raum der Vergleichsfunktionen  $\mathcal{V}(g)$  für eine gegebene Funktion  $g$  definiert werden:

$$H^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in L_2(\Omega) : d\varphi/dx \in L_2(\Omega) \right\}, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{V}(g) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = g \text{ auf } \Gamma \right\}. \quad (5.13)$$

Dabei ist  $\Gamma$  der Rand des Gebietes  $\Omega$ . Die Variationsformulierung von Gleichung (5.1) ergibt sich durch Multiplikation mit der Testfunktion  $\delta P$  und anschließender Integration über das Gebiet  $\Omega$ , wobei entsprechende partielle Integrationen ausgeführt werden. Die Variationsformulierung lautet wie folgt: Es ist eine Funktion  $P \in \mathcal{V}(P_\Gamma)$  gesucht, die

$$\begin{aligned} a(P, \delta P) &= l(\delta P) \quad \forall \delta P \in \mathcal{V}(0) \\ \text{mit } a(P, \delta P) &= \int_{\Omega} \left( K P' \delta P' + \Upsilon P' \delta P \right) dX, \\ l(\delta P) &= \int_{\Omega} \left( Q_1 \delta P + Q_2 \delta P' \right) dX \end{aligned} \quad (5.14)$$

erfüllt. Bei dominanter Konvektion können unphysikalisch oszillierende Lösungen entstehen, wie der Druckverlauf des EHD-Problems in Abbildung 5.2 zeigt. Eine Methode zur

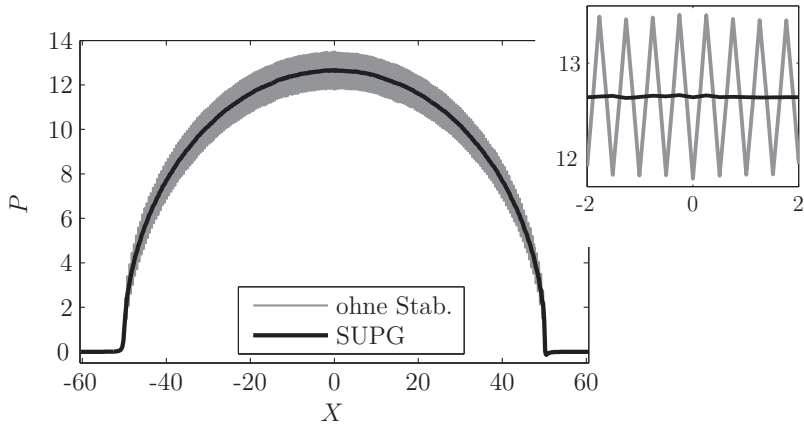


Abbildung 5.2: Einfluss der Stabilisierung ( $W = 1000, L = 5, Z = 0.6, n = 1$ )

Reduzierung oder Unterdrückung dieser Oszillationen ist das *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* (SUPG), das von Christie et al. [17] eingeführt und von Heinrich et al. [44], sowie



Brooks und Hughes [13] weiterentwickelt wurde. In dieser Arbeit wird die Formulierung von Galeão et al. [32] – erstmals von Habchi et al. [39] auf das EHD-Problem angewandt – verwendet. Die Diskretisierung von  $\Omega$  wird mit  $\{\Omega_e\}$  bezeichnet und umfasst  $N$  Teilgebiete  $\Omega_e$ . Der betrachtete Funktionenraum wird gemäß

$$\mathcal{V}_h(g) = \{\varphi \in \mathcal{V}(g); \varphi|_{\Omega_e} \in \mathcal{P}_n(\Omega_e), e = 1 \dots N\} \quad (5.15)$$

weiter eingeschränkt, wobei  $\mathcal{P}_n(\Omega_e)$  die Menge der Polynome auf  $\Omega_e$  bis zum Grad  $n$  darstellt. Die diskrete Form von Gleichung (5.14) lautet mit SUPG: Finde  $P_h \in \mathcal{V}_h(P_T)$  derart, dass

$$\begin{aligned} a(P_h, \delta P_h) + a_{SU}(P_h, \delta P_h) &= l(\delta P_h) + l_{SU}(\delta P_h) \quad \forall \delta P_h \in \mathcal{V}_h(0) \\ \text{mit } a_{SU}(P_h, \delta P_h) &= \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \tau_{SU} \Upsilon \delta P'_h \left( - (K P'_h)' + \Upsilon P'_h \right) dX, \\ l_{SU}(\delta P_h) &= \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \tau_{SU} \Upsilon \delta P'_h Q dX \end{aligned} \quad (5.16a)$$

gilt.<sup>1</sup> Der Faktor  $\tau_{SU}$  kann für Systeme mit konstanten Koeffizienten  $K$ ,  $\Upsilon$  und  $Q = 0$  optimal gewählt werden: Die Lösung der diskreten Formulierung mit linearen Ansatzfunktionen  $n = 1$  wird beispielsweise an den Knoten mit der analytischen Lösung in Übereinstimmung gebracht. Für Ansatzfunktionen beliebiger Ordnung  $n$  kann  $\tau_{SU}$  angepasst werden, jedoch ist die Lösung an den Knoten nicht mehr exakt [32]. In Abhängigkeit einer Funktion  $\xi(\text{Pe})$  und der angepassten Element-Péclet-Zahl  $\text{Pe}$  lässt sich  $\tau_{SU}$  kompakt ausdrücken:

$$\tau_{SU} = \frac{h}{2|\Upsilon|n} \xi(\text{Pe}) \quad \text{mit} \quad \xi(\text{Pe}) = \coth(\text{Pe}) - \frac{1}{\text{Pe}}, \quad \text{Pe} = \frac{|\Upsilon|h}{2Kn}. \quad (5.16b)$$

Dabei wird mit  $h$  eine charakteristische Gitterweite bezeichnet. SUPG führt bei der Anwendung auf die Reynoldsgleichung bei hohen Lasten  $W$  und hohen Schmiermittelparametern  $L$  nicht zur vollständigen Unterdrückung der Oszillationen. Dies kann durch die nicht konstanten und von der Lösung abhängenden Koeffizienten  $K$ ,  $\Upsilon$  und  $Q$  bedingt sein. Zusätzlich müssten die Gleichungen der Elastostatik zur Stabilisierung mitberücksichtigt werden. Da jedoch der Druck als Randbedingung in das elastostatische Teilproblem eingeht, ist eine Formulierung als mehrdimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung mit mehreren Unbekannten nicht zielführend [52].

Alternativ kann zur Unterdrückung der verbleibenden Oszillationen der Diffusionsterm künstlich erhöht werden [39]. Mit dieser als Isotrope Diffusion (ID) bezeichneten Stabili-

<sup>1</sup> Das Standard-Galerkin- und das Petrov-Galerkin-Verfahren besitzen unterschiedliche Gewichtungsfunktionen. Beim SUPG-Verfahren werden die Residuen bezüglich der Strömungsrichtung unsymmetrisch gewichtet. Alternativ folgt die SUPG-Formulierung, wenn zum Standard-Galerkin-Verfahren ein entsprechender Diffusionsterm, der aus der unsymmetrischen Gewichtung resultiert, hinzugefügt wird. In Abschnitt 5.1.1 werden beide prinzipiellen Herangehensweisen anhand einer Streamline-Upwind-Stabilisierung mit Finiten Differenzen erläutert.

sierung lautet die diskretisierte Variationsformulierung von Gleichung (5.1) wie folgt: Finde  $P_h \in \mathcal{V}_h(P_\Upsilon)$ , sodass

$$a(P_h, \delta P_h) + a_{SU}(P_h, \delta P_h) + a_{ID}(P_h, \delta P_h) = l(\delta P_h) + l_{SU}(\delta P_h) \quad \forall \delta P_h \in \mathcal{V}_h(0)$$

$$\text{mit} \quad a_{ID}(P_h, \delta P_h) = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} \tau_{ID} \frac{h|\Upsilon|}{2n} P'_h \delta P'_h dX \quad (5.17)$$

erfüllt ist. Unter den Voraussetzungen  $Q = 0$ , konstante Koeffizienten  $K$  und  $\Upsilon$ , lineare Ansatzfunktionen und äquidistante Gitterweite  $h$  sind SUPG und ID im eindimensionalen Fall bei einer bestimmten Wahl von  $\tau_{ID}$  äquivalent:

$$\tau_{ID} \frac{h|\Upsilon|}{2n} \stackrel{!}{=} \tau_{SU} \Upsilon^2 = \frac{h}{2|\Upsilon|n} \xi(\mathbf{Pe}) \Upsilon^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{ID} = \xi(\mathbf{Pe}) . \quad (5.18)$$

Da diese Voraussetzungen zur Äquivalenz von SUPG und ID bei der Anwendung auf die Reynoldsgleichung nicht zutreffen, können beide Stabilisierungen unterschiedlichen Einfluss haben. In der vorliegenden Arbeit wird bei Bedarf zusätzlich zu SUPG ein geringer Anteil ID mit  $\tau_{ID} = 0 \dots 0.2$  hinzugefügt. Da die Oszillationen der Lösung eine Folge der Diskretisierung sind, kann die Stabilisierung als Korrektur des dort gemachten Fehlers angesehen werden.

### 5.1.3 Reynoldsgleichung als Konvektions-Diffusionsgleichung

In diesem Abschnitt wird die Reynoldsgleichung (2.38) in die Form der Konvektions-Diffusionsgleichung (5.1) überführt und die Implementierung der Randbedingungen und der Zwangsbedingung beschrieben.

Aufgrund der Reynolds-Randbedingungen (2.28) liegt ein freies Randwertproblem vor, da die Stelle  $X_{fr}$  des Filmaufrisses a priori unbekannt ist. Zur numerischen Realisierung hat Wu eine *Penalty-Methode* vorgeschlagen, bei der zur Reynoldsgleichung (2.38) der „Strafterm“  $\Pi \min(P, 0)$  addiert wird [128]. Es kann gezeigt werden, dass für  $\Pi \rightarrow \infty$  die Reynolds-Randbedingungen am Austritt  $P(X_{fr}) = \partial P / \partial X|_{X_{fr}} = 0$  und die Zwangsbedingung  $P \geq 0$  erfüllt werden. Die Penalty-Methode von Wu ist im Vergleich zu der *Arbitrary Lagrangian-Eulerian-Methode* einfach zu implementieren und effizienter als iterative Algorithmen [59, 100, 128]. Jedoch muss der Penalty-Parameter  $\Pi$  empirisch bestimmt werden. Dabei können numerische Probleme entstehen, wenn er zu groß gewählt wird. Bei einem zu kleinen  $\Pi$  werden die Randbedingung und die Zwangsbedingung nicht ausreichend genau erfüllt.

Die Reynoldsgleichung und die verbleibenden Randbedingungen lassen sich somit in der Form

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial P}{\partial X} \right] = 6\vartheta_U \frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial X} + 12 \frac{\partial \bar{\rho} H}{\partial \tau} + \Pi \min(P, 0)$$

$$\text{mit} \quad P(X_l) = 0, \quad P(X_r) = 0 \quad (5.19)$$

darstellen, wobei die Ränder  $X_l$  (links) und  $X_r$  (rechts) ausreichend weit vom Kontaktzentrum entfernt sein müssen. Damit können die Koeffizienten der Konvektions-Diffusionsgleichung (5.1) identifiziert werden:

$$K = -\frac{\bar{\rho}H^3}{\bar{\eta}}, \quad \Upsilon = 0, \quad Q_1 = 12\frac{\partial\bar{\rho}H}{\partial\tau} + \Pi \min(P, 0), \quad Q_2 = 6\vartheta_U \bar{\rho}H. \quad (5.20)$$

Aufgrund der druckabhängigen Dichte gilt

$$\frac{\partial\bar{\rho}H}{\partial X} = H \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial X} + \bar{\rho} \frac{\partial H}{\partial X}. \quad (5.21)$$

Die stabilisierenden Terme  $a_{sU}(P, \delta P)$ ,  $l_{sU}(\delta P)$  und  $a_{tD}(P, \delta P)$  ergeben sich aus den Gleichungen (5.16) und (5.17) mit der Konvektionsgeschwindigkeit

$$\Upsilon = -6\vartheta_U H \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial P}. \quad (5.22)$$

## 5.2 Dimensionslose Notation der Implementierung

Die in der Literatur dargestellten EHD-Modelle beschränken sich in der Regel auf die Berechnung hochbelasteter Kontakte. Hierdurch liegt aufgrund der Ähnlichkeit zwischen Hertz- und EHD-Druck eine Entdimensionierung mit der Hertz'schen Kontaktbreite  $a$  und dem maximalen Hertz'schen Druck  $p_H^{max}$  nahe. Bei schwachbelasteten Kontakten – die in dieser Arbeit ebenso betrachtet werden – kann diese Entdimensionierung versagen. Dies liegt daran, dass bei kleinen Lasten  $a$  wesentlich kleiner als das Kontaktgebiet und  $p_H^{max}$  wesentlich größer als der EHD-Druck wird.

Aus diesem Grund wird eine neue dimensionslose Notation vorgeschlagen, die sich adaptiv an schwach- und an hochbelasteten Kontakten orientiert. Mithilfe eines Schaltparameters

$$\beta = \frac{\Delta^0}{\Delta^0 + H_c^0} = \frac{\frac{W_0}{C_{st}}}{\frac{W_0}{C_{st}} + \frac{\sqrt{6}}{W_0}} = \frac{W_0^2}{W_0^2 + \sqrt{6} C_{st}} \quad (5.23)$$

kann ein kontinuierlicher Zusammenhang zwischen beiden Extremfällen hergestellt werden, wobei  $\lim_{W_0 \rightarrow 0} \beta = 0$  beziehungsweise  $\lim_{W_0 \rightarrow \infty} \beta = 1$  gilt. Damit können die charakteristischen Größen  $\hat{P}$ ,  $\hat{X}$  und  $\hat{H}$  definiert werden:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= (1 - \beta) P_{HD}^{0max} + \beta P_H^{0max} = (1 - \beta) \frac{3\sqrt{3}}{16} W_0^{3/2} + \beta \sqrt{\frac{W_0}{2\pi}}, \\ \hat{X} &= 20(1 - \beta) |X_{HD}^{0max}| + \beta A = 20(1 - \beta) \sqrt{\frac{4}{3W_0}} + 4\beta \sqrt{\frac{W_0}{2\pi}}, \\ \hat{H} &= \frac{\Delta^0}{\beta} = \Delta^0 + H_c^0 = \frac{W_0}{C_{st}} + \frac{\sqrt{6}}{W_0}, \\ \hat{\tau} &= 2\hat{X}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Mit  $P_{HD}^{0max}$ ,  $P_H^{0max}$  und  $X_{HD}^{0max}$  werden die entsprechenden Ausdrücke unter statischen Bedingungen bei  $W = W_0$  bezeichnet. Der Faktor 20 vor  $|X_{HD}^{0max}|$  ist empirisch bestimmt und dient der Anpassung an die örtliche Ausdehnung des hydrodynamischen Druckes. Mit den Definitionen aus Gleichung (5.24) ergeben sich die neuen dimensionslosen Größen:

$$\bar{P} = P/\hat{P}, \quad \bar{X} = X/\hat{X}, \quad \bar{H} = H/\hat{H}, \quad \bar{\Delta} = \Delta/\hat{H}, \quad \bar{\tau} = \tau/\hat{\tau}. \quad (5.25)$$

Die Reynoldsgleichung (5.19) lautet damit

$$\frac{\partial}{\partial \bar{X}} \left[ \frac{\bar{\rho} \bar{H}^3}{\bar{\eta}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{X}} \right] = \bar{\zeta} \left( \vartheta_U \frac{\partial \bar{\rho} \bar{H}}{\partial \bar{X}} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{H}}{\partial \bar{\tau}} \right) + \bar{\Pi} \min(\bar{P}, 0) \quad \text{mit} \quad \bar{\zeta} = \frac{6 \hat{X}}{\hat{H}^2 \hat{P}}. \quad (5.26)$$

Die Koeffizienten der Konvektions-Diffusionsgleichung (5.1) ergeben sich zu

$$K = -\frac{\bar{\rho} \bar{H}^3}{\bar{\eta}}, \quad \Upsilon = 0, \quad Q_1 = \bar{\zeta} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{H}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{\Pi} \min(\bar{P}, 0), \quad Q_2 = \bar{\zeta} \vartheta_U \bar{\rho} \bar{H}. \quad (5.27)$$

Für die stabilisierenden Terme ergibt sich die Konvektion:

$$\Upsilon = -\bar{\zeta} \vartheta_U \bar{H} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{P}}. \quad (5.28)$$

### 5.3 Numerische Lösung mittels FEM

Zur numerischen Auswertung wird die FEM-Software COMSOL MULTIPHYSICS® (Version 4.3a) verwendet. Der wesentliche Vorteil dieser Software besteht darin, dass die Reynoldsgleichung in der schwachen Formulierung eingegeben werden kann. Des Weiteren werden die Reynoldsgleichung und die Gleichungen der Elastostatik simultan gelöst. Eine Ansteuerung mit MATLAB® ermöglicht umfangreiche Studien und erleichtert die Auswertung.

Für die Struktur wird ein quadratischer Querschnitt mit der Kantenlänge  $L_{st}$  gewählt (Abbildung 5.3). Zur Bestimmung der Deformation der elastischen Struktur wird das Modul *Structural Mechanics* verwendet. Die Struktur wird unten fest eingespannt und oben mit dem Druck aus der Reynoldsgleichung belastet. Die Reynoldsgleichung wird auf dem oberen Rand der Struktur definiert und als schwache Form eingegeben. Damit wird sowohl für die Reynoldsgleichung als auch für die Struktur die gleiche Vernetzung verwendet. Es wird eine unstrukturierte Dreiecksvernetzung durchgeführt, die in der Nähe der Kontaktstelle durch Geometrievorgaben gesteuert wird (Abbildung 5.3).

Das EHD-Problem wird mit steigender Last  $W$  und mit steigendem Schmiermittelparаметer  $L$  numerisch komplexer, sodass die Gitterweiten verkleinert werden müssen. Diese werden im Kontaktbereich ungefähr zwischen 0.005 und 0.001 gewählt. Um die Anzahl der Freiheitsgrade möglichst gering zu halten wird eine wesentlich gröbere Vernetzung außerhalb des Kontaktzentrums verwendet. Die Anzahl der Freiheitsgrade bewegt sich typischerweise zwischen  $10^4$  und  $3 \cdot 10^4$  und erreicht in extremen Fällen  $5 \cdot 10^4$ , wobei überwiegend lineare Ansatzfunktionen verwendet werden.

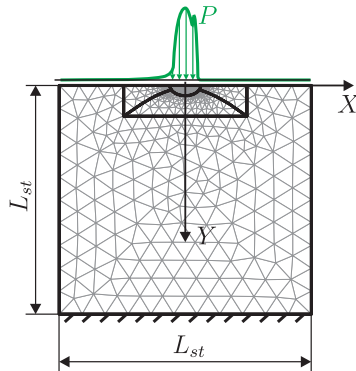


Abbildung 5.3: FEM-Modell in COMSOL MULTIPHYSICS®

Die Stabilisierung und die numerischen Lösungsverfahren sowie deren Einstellungen müssen an die jeweiligen Parameter des EHD-Problems angepasst werden: Für  $L = 0$  wird ein gedämpftes Newton-Verfahren für alle Lasten eingesetzt und die Stabilisierung entfällt wegen  $\partial\bar{\rho}/\partial P = 0$ . Bei höheren Schmiermittelparametern wird das numerische Lösungsverfahren lastabhängig gewählt. Kleine und mäßige Lasten bis  $W \approx 1$  erlauben weiterhin die Verwendung des gedämpften Newton-Verfahrens, für größere Lasten wird der *Double Dogleg*-Algorithmus verwendet. Der Double Dogleg-Algorithmus ist ein Newton-Trust-Region-Verfahren, bei dem der Korrekturschritt aus einem Newton-Schritt und einem Schritt eines Gradientenverfahrens besteht [18, 19]. Zur Stabilisierung genügt bei kleinem Schmiermittelparameter  $L$  Streamline-Upwind Petrov-Galerkin, bei größeren Werten von  $L$  muss isotrope Diffusion hinzugefügt werden.

Zur Lösung des transienten Problems wird ein BDF-Verfahren (engl.: *Backward Differentiation Formula*) eingesetzt [98]. Dabei wird aufgrund dessen Stabilität maximal die Ordnung 3 verwendet.

### 5.3.1 Startwerte des Drucks für iterative Lösungsverfahren

Zur Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme sind geeignete Startwerte für den Druck notwendig. Mithilfe des Schaltparameters (5.23) liegt die Definition

$$P_{mit} = (1 - \beta) P_{HD}^0 + \beta P_H^0 \quad (5.29)$$

nahe, die für einen großen Parameterbereich geeignet ist. Für Parameterbereiche in der Nähe von  $\beta \approx 0.5$  oder für sehr hohe Lasten hat sich gezeigt, dass eine Anpassung notwendig ist:

$$P_{mit} = \beta_1 P_{HD}^0 + \beta_2 P_H^0 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \beta_1 = 0 \dots 1, & \beta_2 = 0 & \text{für } \beta \approx 0.5 \\ \beta_1 = 0, & \beta_2 = 0 \dots 1 & \text{für hohe Lasten.} \end{cases} \quad (5.30)$$

Die unstetige Ableitung von  $P_{HD}^0$  bei  $X = 0$  führt in einige Fällen zu Problemen. Ein glatter Übergang mithilfe eines Polynoms  $\mathcal{P}_3$  dritter Ordnung im Bereich  $X = -X_{HD}^{0max} \dots X_{HD}^{0max}$  kann Abhilfe schaffen. Die Bedingungen an  $\mathcal{P}_3$  werden gemäß

$$P_{HD}^0 = \mathcal{P}_3, \quad \frac{\partial P_{HD}^0}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{P}_3}{\partial X} \quad \text{an den Stellen} \quad X = \pm X_{HD}^{0max} \quad (5.31)$$

gewählt. Damit ergibt sich für den HD-Anteil ein modifizierter Startdruck (Abbildung 5.4):

$$\tilde{P}_{HD}^0 = \begin{cases} -\frac{8X}{(4/W_0 + X^2)^2}, & X \leq X_{HD}^{0max} \\ \frac{27}{512} W_0^3 X^3 - \frac{27}{128} W_0^2 X + \frac{3}{32} \sqrt{3} W_0^{3/2}, & X_{HD}^{0max} < X \leq |X_{HD}^{0max}|. \end{cases} \quad (5.32)$$

Mit einer Glättung des Hertz'schen Anteils  $P_H^0$  konnte kein Vorteil erzielt werden.

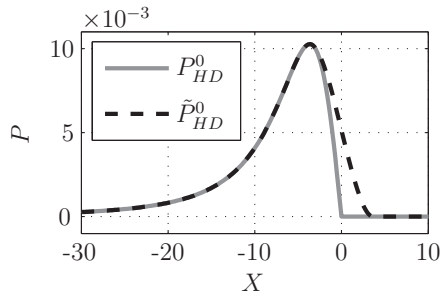


Abbildung 5.4: Startdruck für  $W = 0.1$

## 5.4 Ausgewählte numerische Lösungen

### 5.4.1 Statische Last

In Abbildung 5.5 sind Druck- und Spaltverläufe für  $L = 5$  und unterschiedliche Lasten  $W$  dargestellt ( $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$ ). Dabei ist insbesondere der Übergang zwischen schwachen und hohen Lasten zu beobachten: Bei schwachen Lasten entsteht ein HD-Druckverlauf mit parabolischem Schmierespalt beziehungsweise vernachlässigbarer Deformation. Bereits ab  $W = 2$  beginnt sich die Einschnürung am Austritt auszubilden, obwohl der Druckverlauf nach wie vor dem eines schwachbelasteten Kontaktes ähnelt. Für große Lasten sind die Ausbildung der Druckspitze und die Einschnürung der Spalthöhe am Austritt deutlich erkennbar.

Der Einfluss des Schmiermittelparameters  $L$  kann anhand von Abbildung 5.6 analysiert werden:

- Bei kleinen Lasten hat  $L$  keinen nennenswerten Einfluss. Es liegt ein HD-Druck mit parabolischem Schmierespalt vor (a).

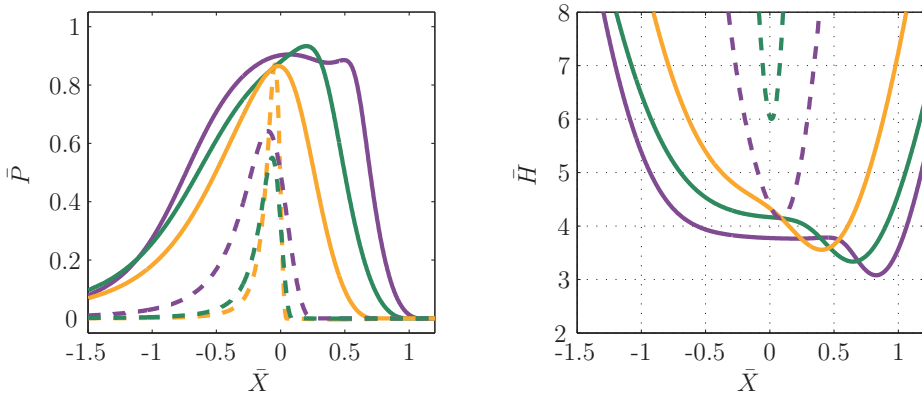


Abbildung 5.5: Statische Druck- und Spaltverläufe  $L = 5$ ,  
 $W$ : — 5, — 3, — 2, - - 1, - - 0.5, - - 0.01

- Bei großen Lasten unterscheiden sich EHD- und Hertz-Druck leicht am Ein- und Austritt, sowie in unmittelbarer Nähe der Spitze (d). Die Schmier-spalthöhe ist fast unabhängig von  $L$  und wesentlich kleiner als die Hertz'sche Deformation. Somit kann davon ausgegangen werden, dass  $L$  in Bezug auf das Verhalten von Systemen mit EHD-Kontakten bei großen Lasten keinen wesentlichen Einfluss hat.
- Im Übergangsbereich werden sowohl Druckprofil als auch Spalthöhe deutlich von  $L$  beeinflusst, (b) und (c). Wird das Verhalten eines Systems mit Hertz'schen Kontakten mit dem eines Systems mit EHD-Kontakten verglichen, so ist in diesem Lastbereich die größte Abweichung als Folge des Schmiermittelparameters zu erwarten.

## 5.4.2 Harmonische Belastung

Zur Untersuchung von transienten Effekten wird die Last gemäß  $W = (1 + \gamma_w \cos \Omega \tau) W_0$  harmonisch variiert. In Abbildung 5.7 sind die Druck- und Spaltverläufe zu verschiedenen Zeitpunkten  $\tau/\Omega$  gezeigt. Zum Vergleich sind die Verläufe unter statischen Bedingungen bei den entsprechenden Lasten hinzugefügt. Dabei sind die Abweichungen zwischen statischer und transienter Lösung klein, sodass sich der EHD-Kontakt bei kleinen Anregungsfrequenzen  $\Omega$  quasistatisch verhält.<sup>1</sup>

Mit steigender Frequenz  $\Omega$  sind bei hochbelasteten Kontakten wellige Druck- und Spaltprofile zu beobachten. Die Druck- beziehungsweise Spaltmodulationen laufen in Richtung der hydrodynamischen Geschwindigkeit  $U$  (Abbildung 5.8). Die Frequenz, ab der ein welliger Verlauf auftreten kann, wird im Folgenden abgeschätzt [125]:

Bei hochbelasteten Kontakten ist in der Hochdruckzone  $-A \lesssim X \lesssim A$  der Schmier-spalt  $H$  sehr klein, während der Druck und damit die Viskosität  $\bar{\eta}$  hoch sind. Dadurch kann der

<sup>1</sup> In Gleichung (5.36) wird das Frequenzverhältnis  $\nu_c$  zur Beschreibung der Anregungsfrequenz definiert.

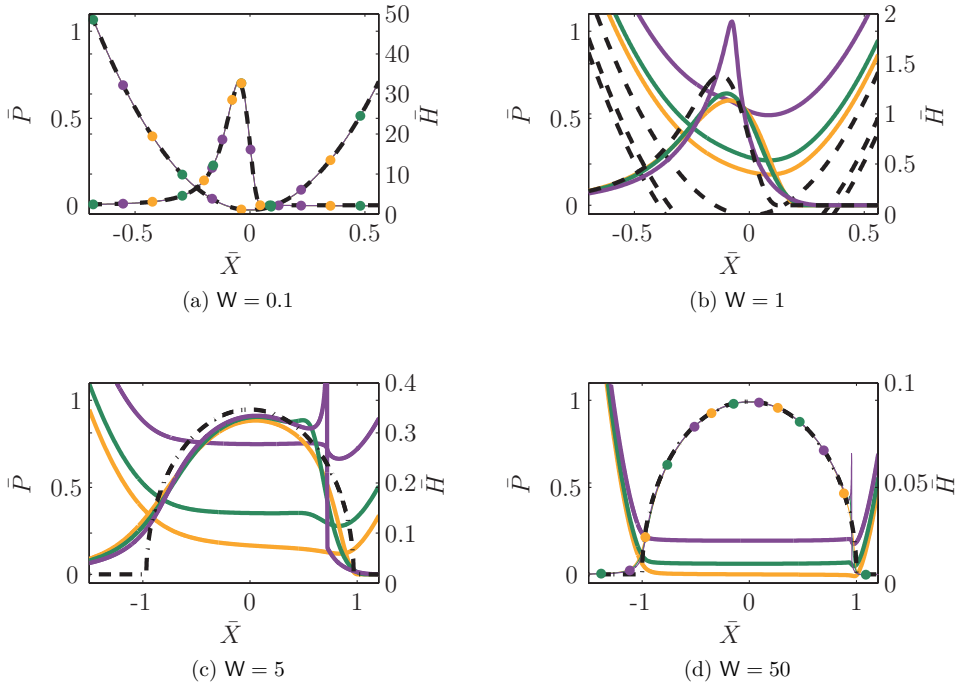


Abbildung 5.6: Statische EHD-Druck- und EHD-Spaltverläufe,  $L$ : — 0, — 5, — 20. Undeformierter Spalt: — — —, HD-Druck: — — —, Hertz-Druck: — · — · —. Fast identische Verläufe werden zusätzlich mit Punkten in der entsprechenden Farbe markiert.

linke Term der Reynoldsgleichung (2.38) vernachlässigt werden und es entsteht eine Advektionsgleichung

$$0 = 6 \frac{\partial H}{\partial X} + 12 \frac{\partial H}{\partial \tau}, \quad (5.33)$$

wobei konstante Dichte und  $\vartheta_U = \vartheta_R = 1$  angenommen werden. Mit einer beliebige Funktion  $G$  lautet die allgemeine Lösung dieser Advektionsgleichung

$$H(X, \tau) = G\left(X - \frac{1}{2}\tau\right). \quad (5.34)$$

Eine Druck- oder Spaltvariation am Eintritt der Hochdruckzone wird durch diese transportiert. Die Transportgeschwindigkeit beträgt  $\frac{1}{2}$ , sodass die Variation die Hochdruckzone in der charakteristischen Zeit  $2A/\frac{1}{2} = 4A$  durchläuft. Um später einen kontinuierlichen Übergang zu schwachbelasteten Kontakten herzustellen, wird anstelle von  $A$  die charakte-



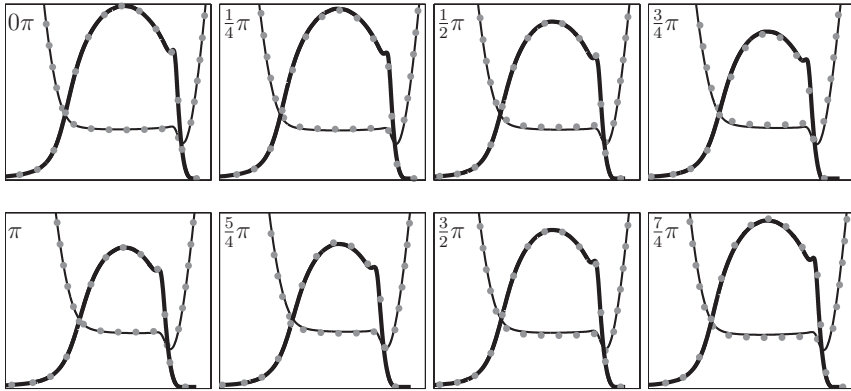


Abbildung 5.7:  $\nu_c = 0.01$ : Druck — und Schmierspalt — bei harmonischer Kraftanregung zu den Zeiten  $\tau/\Omega$  im eingeschwungenen Zustand. Zum Vergleich sind die korrespondierenden statischen Lösungen ( $\dots$ ) hinzugefügt.  $W_0 = 10$ ,  $L = 5$ ,  $Z = 0.6$ ,  $\gamma_w = 0.2$

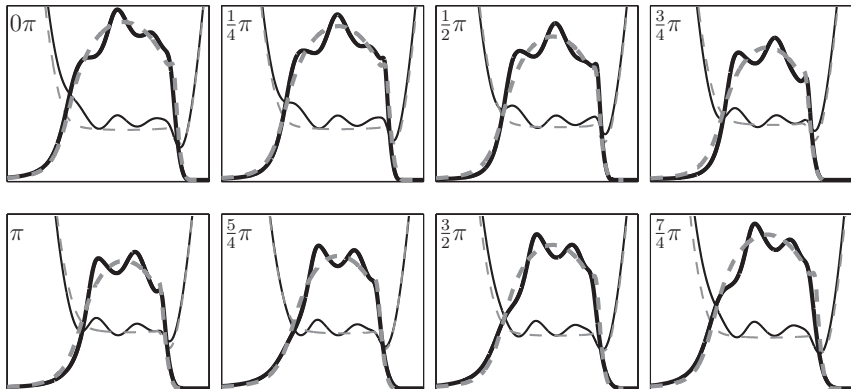


Abbildung 5.8:  $\nu_c = 3$ : Druck — und Schmierspalt — bei harmonischer Kraftanregung zu den Zeiten  $\tau/\Omega$  im eingeschwungenen Zustand. Zum Vergleich sind die korrespondierenden statischen Lösungen ( $- \cdot -$ ,  $- - -$ ) hinzugefügt.  $W_0 = 10$ ,  $L = 5$ ,  $Z = 0.6$ ,  $\gamma_w = 0.2$

ristische Länge  $\hat{X}$  aus Gleichung (5.24) verwendet. Damit ergibt sich die charakteristische Zeit

$$\tau_c = 4\hat{X} . \quad (5.35)$$

Zur späteren Validierung des Modells bietet sich ein Frequenzverhältnis

$$\nu_c = \frac{\Omega}{2\pi/\tau_c} = \frac{2}{\pi}\hat{X}\Omega \quad (5.36)$$

bezüglich der charakteristischen Zeit  $\tau_c$  an.

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich die Einflüsse der Kontaktnormalkraft auf das Schwingungsverhalten berücksichtigt. Zur Bestimmung der Kraft wird der Druck integriert, sodass kein wesentlicher Einfluss eines welligen Druckprofils auf die Starrkörperbewegungen zu erwarten ist.

## 6 Vereinfachte Modelle für EHD-Kontakte

Die numerische Auswertung des EHD-Problems ist aufwendig und im Rahmen von Mehrkörpersimulationen nicht praktikabel. Deshalb muss auf vereinfachte Modelle zurückgegriffen werden, welche für die konkrete Problemstellung eine ausreichende Genauigkeit aufweisen. In dieser Arbeit werden Systeme mit EHD-Kontakten betrachtet, die sowohl großen als auch kleinen Lasten ausgesetzt sind. Um effiziente Mehrkörpersimulationen durchführen zu können, sollte die Kraft in Abhängigkeit von Starrkörperverschiebung und -geschwindigkeit dargestellt sein. Diese Anforderungen erfüllt nach heutigem Stand keines der bekannten Modelle (vergleiche Abschnitt 1.1.3), weshalb im Folgenden ein neuer Ansatz vorgestellt wird.

Die Grundidee des neuen Modells besteht aus einer Reihenschaltung von Hertz'schem und hydrodynamischem Kontakt (Abbildung 6.1). Die Starrkörperverschiebung setzt sich aus der Spalthöhe und der elastischen Deformation im Kontaktzentrum zusammen. Bei kleinen Lasten ist die Schmier-spalthöhe, die aus dem hydrodynamischen Modell berechnet wird, wesentlich größer als die elastische Deformation. Deshalb bestimmt das hydrodynamische Kraftelement in diesem Lastbereich maßgeblich die Starrkörperverschiebung (Abbildung 5.6a). Im hochbelasteten Fall dominiert die elastische Deformation. Dies kann Abbildung 5.6d entnommen werden, wobei die Größenordnung der Spalthöhe und die dimensionslose Notation zu beachten sind. Zusätzlich sind sich Hertz- und EHD-Druckprofil ähnlich, weshalb bei hohen Lasten die Hertz'sche Deformation zugrunde gelegt wird.

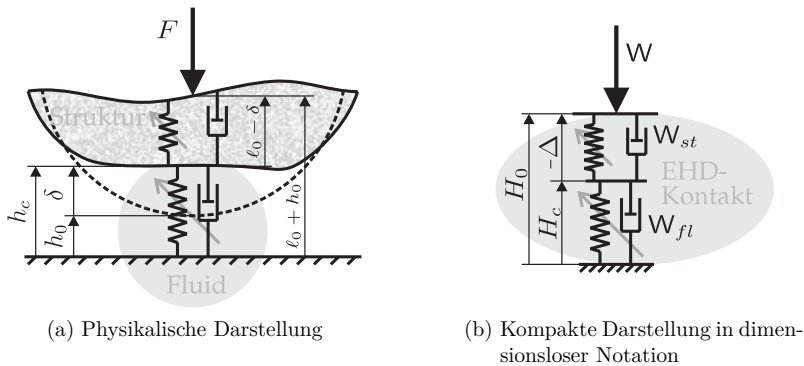


Abbildung 6.1: Vereinfachter EHD-Kontakt

Das neu entwickelte EHD-Modell ist in Abbildung 6.1a dargestellt. Das Fluid-Element wird durch das nichtlineare hydrodynamische Kraftgesetz aus Kapitel 3 definiert. Der Pfeil im Feder-Dämpfersymbol symbolisiert die Nichtlinearität. Die Strukturkraft wird mit der

Hertz'schen Annäherung aus Kapitel 4 und zusätzlicher Dämpfung beschrieben. Die Position des Schwerpunktes der Struktur ist mit  $\ell_0 + h_0$  gegeben. Mit der Annahme kleiner Deformationen ist die Länge  $\ell_0$  konstant, weshalb die Bewegung des Körpers mit  $h_0$  beschrieben wird. Im Folgenden wird  $h_0$  als Starrkörperposition oder -bewegung bezeichnet. Diese setzt sich zusammen aus der zentralen Schmierpalthöhe  $h_c$  und der elastischen Deformation  $\delta$  im Kontaktzentrum:  $h_0 = h_c - \delta$ . Gesucht ist letztendlich die Kontaktkraft  $F_K(h_0, \dot{h}_0)$  in Abhängigkeit von Starrkörperverschiebung und -geschwindigkeit.

## 6.1 Dynamisches Fluid-Struktur-Modell

Das neue Modell für EHD-Kontakte enthält aufgrund der Reihenschaltung die zentrale Schmierpalthöhe  $h_c$  als Zustandsgröße. Dadurch wird der Interaktion zwischen Fluid und Struktur Rechnung getragen, weshalb im Folgenden vom *dynamischen Fluid-Struktur-Modell* (FS) gesprochen wird. Die Herleitung erfolgt der Übersichtlichkeit wegen in der dimensionslosen Notation aus Abschnitt 2.4 (Abbildung 6.1b).

Das Fluidelement wird mit dem nichtlinearen Kraftgesetz  $W_{fl}$  des hydrodynamischen Kontaktes aus Gleichung (3.20) beschrieben. Die Strukturkraft  $W_{st}$  setzt sich aus der im Folgenden mit  $W_{st}^0$  bezeichneten Kraft aus Gleichung (4.11), welche unter der Annahme von Hertz'schem Druck in Kapitel 4 bestimmt wird, und einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung zusammen:

$$W_{st} = W_{st}^0(\Delta) + D_{st} \dot{\Delta} \quad \text{mit} \quad D_{st} = C_{st} \frac{\psi}{\Omega}. \quad (6.1)$$

Dabei ist  $\psi$  der Verlustfaktor und  $\Omega$  eine Erregerkreisfrequenz [58, 64]. Aufgrund der Annahme einer Reihenschaltung müssen Fluid- und Strukturkraft gleich sein:

$$\begin{aligned} W_{fl} &= W_{st} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{6}}{H_c} \vartheta_R \vartheta_U - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_c} \right)^{3/2} \dot{H}_c + 3\pi \sqrt{\frac{2\vartheta_R}{H_c}} \dot{\vartheta}_R &= W_{st}^0(\Delta) + C_{st} \frac{\psi}{\Omega} \dot{\Delta}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Dabei wird für die Zeitableitung die Abkürzung  $\dot{(\quad)} = \frac{\partial(\quad)}{\partial\tau}$  eingeführt. Zusätzlich gilt die kinematische Beziehung

$$H_0 = H_c - \Delta, \quad (6.3)$$

womit Gleichung (6.2) in den Größen  $H_0, \dot{H}_0, H_c$  und  $\dot{H}_c$  formuliert werden kann. Starrkörperposition  $H_0$  und -geschwindigkeit  $\dot{H}_0$  werden im Rahmen von Mehrkörpersimulationen durch entsprechende Bewegungsgleichungen beschrieben. Zur Bestimmung der zentralen Spalthöhe wird das Kräftegleichgewicht (6.2) als Differentialgleichung in  $H_c$  formuliert:

$$\dot{H}_c = \frac{\frac{\sqrt{6}}{H_c} \vartheta_R \vartheta_U + 3\pi \left( \frac{2\vartheta_R}{H_c} \right)^{1/2} \dot{\vartheta}_R - W_{st}^0(H_c - H_0) + \frac{\psi}{\Omega} C_{st} \dot{H}_0}{\frac{\psi}{\Omega} C_{st} + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_c} \right)^{3/2}}. \quad (6.4)$$

Die Kontaktsteifigkeit bezüglich einer Ruhelage ergibt sich aus einer Linearisierung:

$$C_{FS} = -\frac{C_{st}^{nl} C_{fl}}{C_{st}^{nl} - C_{fl}}. \quad (6.5)$$

Die negativen Vorzeichen sind den unterschiedlich definierten positiven Richtungen von Kraft beziehungsweise Verschiebung geschuldet.

Der Übergangsbereich zwischen kleinen und großen Lasten kann beispielsweise mithilfe der Steifigkeit  $C_{FS}$  definiert werden. Dabei werden die Steifigkeiten des Fluids und der Struktur aus den Gleichungen (3.21) und (4.12) mit der Steifigkeit des Fluid-Struktur-Modells (6.5) verglichen. Aus Abbildung 6.2a ergibt sich der Übergangsbereich  $0.1 \lesssim W \lesssim 10$ . Dieser Bereich wird durch kein bisher aus der Literatur bekanntes Modelle erfasst.

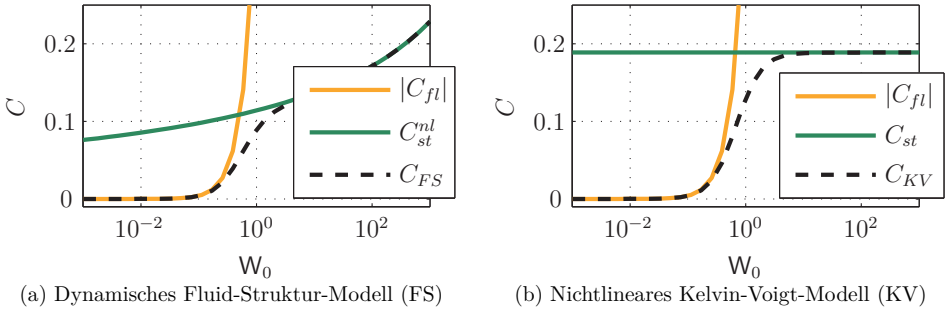


Abbildung 6.2: Steifigkeiten von Fluid, Struktur und EHD-Kontakt

## 6.2 Nichtlineares Kelvin-Voigt-Modell

Das dynamische Fluid-Struktur-Modell des vorigen Abschnitts enthält als Unbekannte die Schmierfilmhöhe  $H_c$ . Dadurch können bei Mehrkörperproblemen mit EHD-Kontakten bei Verwendung des FS-Modells steife Differentialgleichungen entstehen, was durch eine Elimination der Variablen  $H_c$  verhindert werden kann. Bei linear-elastischen Strukturen kann unter statischen Bedingungen Gleichung (6.4) nach  $H_c$  aufgelöst werden, sodass das Kraftgesetz geschlossen angegeben werden kann und damit  $H_c$  eliminiert wird.

Zunächst wird das Kräftegleichgewicht (6.2) unter statischen Bedingungen  $\dot{H}_c = \dot{\vartheta}_R = \dot{\Delta} = 0$  betrachtet:

$$W_0 = \frac{\sqrt{6}}{H_c} \vartheta_R \vartheta_U = W_{st}^0(\Delta). \quad (6.6)$$

Mit der linearen Strukturkraft aus Gleichung (4.16) kann das Kräftegleichgewicht explizit nach  $H_c$  aufgelöst werden:

$$H_c = \frac{H_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{H_0}{2}\right)^2 + \sqrt{6} \frac{\vartheta_R \vartheta_U}{C_{st}}} . \quad (6.7)$$

Da die Spalthöhe positiv sein muss, ergibt sich eine eindeutige Lösung, die zur Bestimmung der Kontaktkraft genutzt werden kann:

$$W_0 = \frac{C_{st}}{2} \left( -H_0 + \sqrt{H_0^2 + \frac{4\sqrt{6}}{C_{st}} \vartheta_R \vartheta_U} \right) . \quad (6.8)$$

Die Kontaktkraft ist in Abbildung 6.3 dargestellt, wobei für  $\vartheta_U \rightarrow 0$  ein kontinuierlicher Übergang zwischen Hertz- und EHD-Kontakt möglich ist.

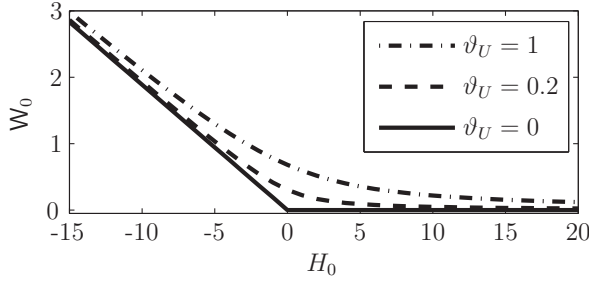


Abbildung 6.3: Kraftgesetz des KV-Modells ( $\vartheta_R = 1$ ). Kontinuierlicher Übergang zum Hertz'schen Kontakt für  $\vartheta_U \rightarrow 0$

Die Steifigkeit des Kontaktes kann in Abhängigkeit der Kraft  $W_0$  ausgedrückt werden:

$$C_{KV} = -\frac{dW_0}{dH_0} = -\frac{C_{st}}{2} \left( -1 + \frac{H_0}{\sqrt{H_0^2 + \frac{4\sqrt{6}}{C_{st}} \vartheta_R \vartheta_U}} \right) = \frac{C_{st} W_0^2}{\sqrt{6} C_{st} \vartheta_R \vartheta_U + W_0^2} . \quad (6.9)$$

Um den EHD-Kontakt möglichst realistisch abzubilden ist Dämpfung erforderlich. Dadurch entsteht ein wie in Abbildung 6.4b dargestelltes *nichtlineares Kelvin-Voigt-Modell* (KV). Dabei wird die Kraft der nichtlinearen Feder durch Gleichung (6.8) beschrieben. Das Ziel besteht darin, die Dämpfung  $D_{KV}$  so anzupassen, dass das dynamische Fluid-Struktur-Modell und das nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell im eingeschwungenen Zustand den gleichen Zusammenhang zwischen  $W$  und  $H_0$  liefern.

Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist das bezüglich  $H_c = \frac{\sqrt{6}}{W_0} \vartheta_R \vartheta_U$ ,  $\dot{H}_c = 0$  linearisierte dynamische Fluid-Struktur-Modell, wobei  $\vartheta_R$  und  $\vartheta_U$  als konstant angenommen werden (Abbildung 6.4a). Bei harmonischer Kraftanregung können sowohl eine Steifigkeit  $C_{KV}^{exakt}$  als auch eine Dämpfung  $D_{KV}^{exakt}$  gefunden werden, sodass die Frequenzgänge beider Modelle

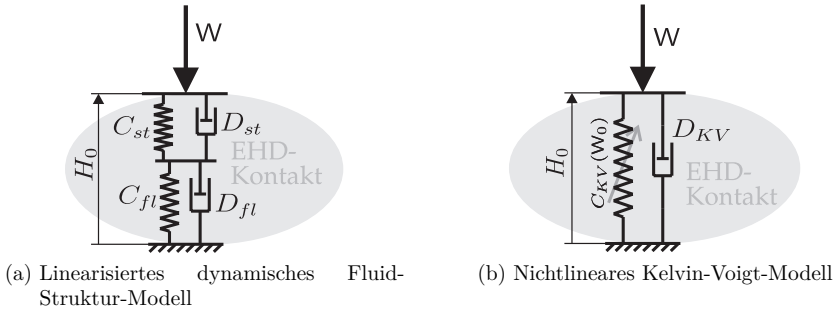


Abbildung 6.4: Übergang vom linearisierten dynamischen Fluid-Struktur-Modell auf das nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell

übereinstimmen. Dabei hängen  $C_{KV}^{exakt}$  und  $D_{KV}^{exakt}$  von der Anregungsfrequenz  $\Omega$  und der Vorlast  $W_0$  ab. Sie sind in Abbildung 6.5 mit durchgezogenen Linien dargestellt und werden als *exakt* bezeichnet.

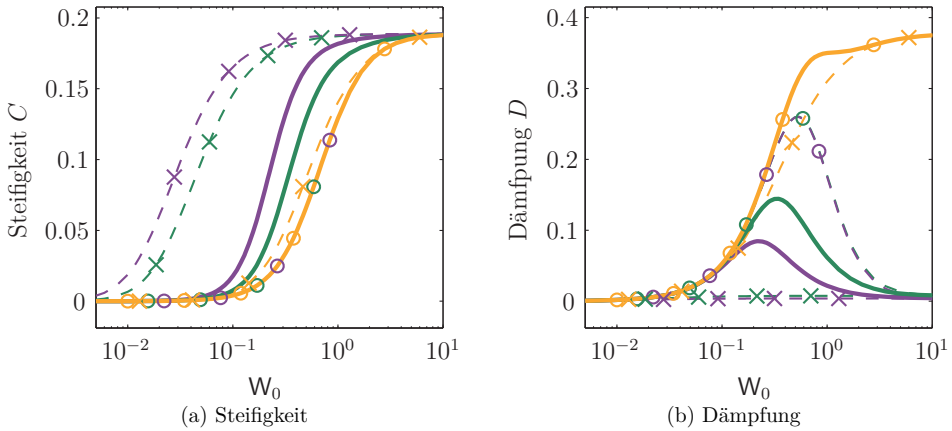


Abbildung 6.5: Steifigkeit und Dämpfung bei Erregung mit  $\Omega$ : — 0.01, — 0.5, — 1. Varianten zur Bestimmung der Steifigkeit beziehungsweise der Dämpfung: — *exakt*, -  $\ominus$ - mit  $\Omega = 0$ , -  $\times$ - mit  $\Omega \rightarrow \infty$  (jeweils für  $\Omega = 0.01, 0.5, 1$ )

Unter der Annahme  $\Omega = 0$  folgt die mit Gleichung (6.9) identische Steifigkeit

$$C_{KV} = C_{KV}^{exakt} \Big|_{\Omega=0} = -\frac{C_{st}C_{fl}}{C_{st} - C_{fl}}. \quad (6.10a)$$

Damit ergibt sich letztendlich die Kraft aus Gleichung (6.8), die ihrer Einfachheit wegen verwendet werden soll. Die Frequenzgänge können daher unabhängig von der Wahl der Dämpfung  $D_{KV}$  nicht mehr in Übereinstimmung gebracht werden. Um die auftretenden

Amplituden nicht zu unterschätzen, wird die Annahme  $\Omega \rightarrow \infty$  zur Bestimmung der Dämpfung zugrunde gelegt (Abbildung 6.5):

$$D_{KV} = D_{KV}^{exakt} \Big|_{\Omega \rightarrow \infty} = -\frac{D_{st} D_{fl}}{D_{st} - D_{fl}} . \quad (6.10b)$$

Analog lassen sich die Steifigkeit  $C_{KV}^{exakt} \Big|_{\Omega \rightarrow \infty}$  und die Dämpfung  $D_{KV}^{exakt} \Big|_{\Omega=0}$  bestimmen. Sie sind zum Vergleich in Abbildung 6.5 hinzugefügt, werden jedoch in dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt.

Die in den Gleichungen (6.10) verwendeten Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten sind für das Fluid in Gleichung (3.21) und für die Struktur in den Gleichungen (4.17) und (6.1) angegeben beziehungsweise definiert. Sie lauten für die in diesem Abschnitt getroffenen Annahmen

$$\begin{aligned} C_{fl} &= -\frac{\sqrt{6}}{H_c^2} \vartheta_R \vartheta_U = -\frac{W_0^2}{\sqrt{6} \vartheta_R \vartheta_U} , & C_{st} &= \frac{\pi/2}{\ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R} - 5} , \\ D_{fl} &= -\frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_c} \right)^{3/2} = -\pi \frac{3^{1/4}}{2^{5/4}} \left( \frac{W_0}{\vartheta_U} \right)^{3/2} , & D_{st} &= C_{st} \psi / \Omega . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Ein Vergleich der Steifigkeiten  $C_{st}$  und  $C_{fl}$  mit der Steifigkeit  $C_{KV}$  des Kelvin-Voigt-Elements ist in Abbildung 6.2b dargestellt. Dabei zeigt sich ebenfalls der Übergangsbereich zwischen schwachen und hohen Lasten.

## 6.3 Validierung des vereinfachten Kontaktmodells

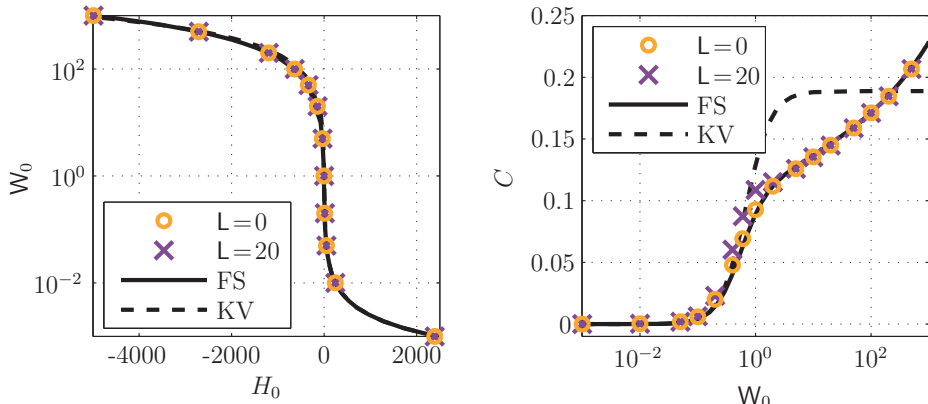
Die Validierung des vereinfachten EHD-Kontaktmodells erfolgt in zwei Abschnitten: In diesem Abschnitt wird der Kontakt unter statischen und transienten Bedingungen betrachtet. In Teil II wird das Modell am Einmassenschwinger mit EHD-Kontakt validiert.

### 6.3.1 Statische Validierung

Die Normalkraft und die Kontaktsteifigkeit des vereinfachten Modells sind in den Abbildungen 6.6 und 6.7 gezeigt. Sie werden mit der Referenzlösung, die sich aus der numerischen Auswertung des vollständigen EHD-Problems mittels FEM ergibt, für verschiedene Schmiermittelparameter  $L$  verglichen. Beide vereinfachten Modelle weisen bei der Betrachtung der Kontaktkraft über den gesamten Lastbereich eine hohe Genauigkeit auf (Abbildung 6.6a). Kleine Abweichungen treten lediglich beim nichtlinearen Kelvin-Voigt-Modell auf. Diese sind auf die Verwendung der linearisierten Strukturkraft zurückzuführen, wodurch die Kontaktsteifigkeit besonders bei hohen Lasten deutlich vom exakten Wert abweicht (Abbildung 6.6b).

In Abbildung 6.7 sind die Normalkraft und die Kontaktsteifigkeit im Übergangsbereich zwischen kleinen und großen Lasten gezeigt. Dabei stimmen beide vereinfachten Modelle für kleine Lasten mit der numerischen Lösung gut überein. Mit zunehmender Last treten

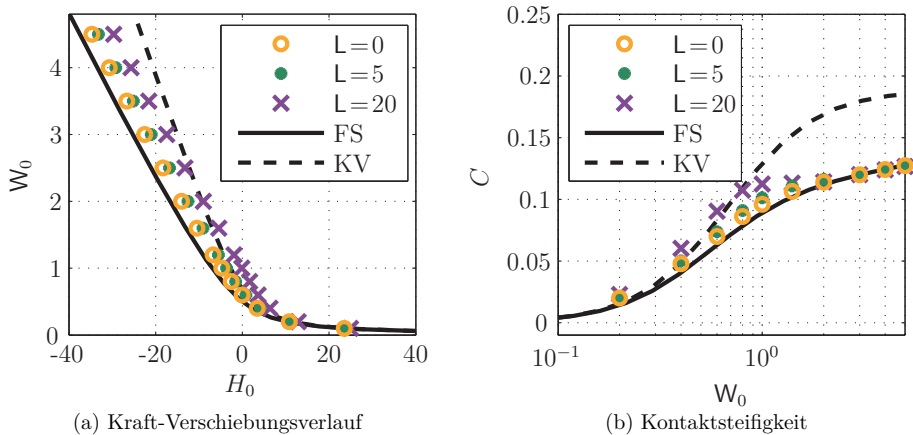




(a) Kraft-Verschiebungsverlauf. Die Verläufe von FS- und KV-Modell sind fast deckungsgleich.

(b) Kontaktsteifigkeit

Abbildung 6.6: Normalkraft und Kontaktsteifigkeit über der Starrkörperverschiebung



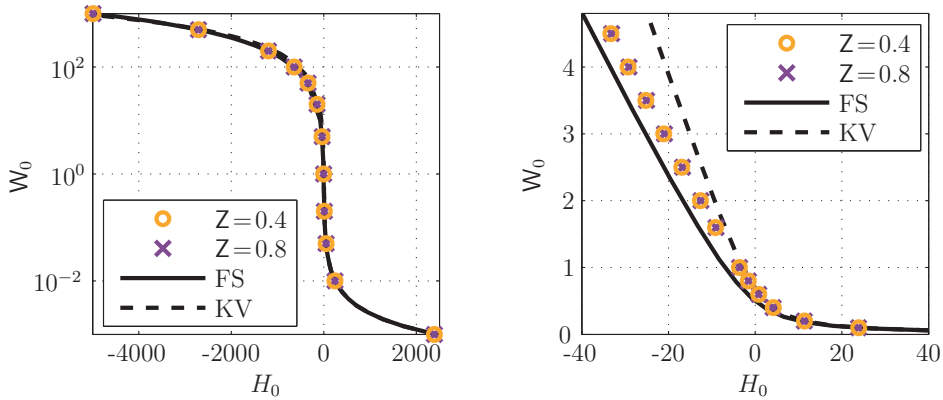
(a) Kraft-Verschiebungsverlauf

(b) Kontaktsteifigkeit

Abbildung 6.7: Normalkraft und Kontaktsteifigkeit über der Starrkörperverschiebung im Übergangsbereich zwischen kleinen und großen Lasten

Abweichungen auf. Diese lassen sich beim dynamischen Fluid-Struktur-Modell ausschließlich auf die Unterschätzung der Fluidfilmdicke zurückführen, da die Struktur nahezu exakt abgebildet wird. Beim Kelvin-Voigt-Modell kommt der Fehler durch die linearisierte Strukturkraft hinzu. Beide Modelle geben jedoch den qualitativen Verlauf der Kontaktkraft beziehungsweise der Steifigkeit wieder, sodass sie zur Vorhersage von Schwingungseffekten von Systemen mit EHD-Kontakten geeignet erscheinen.

In Abbildung 6.8 sind Kraftverläufe für unterschiedliche Viskositäts-Exponenten  $Z$  dargestellt. Dessen Einfluss ist gering und erscheint vernachlässigbar. Im Folgenden wird stets  $Z = 0.6$  verwendet.



(a) Gesamter Lastbereich. Die Verläufe von FS- und KV-Modell sind fast deckungsgleich.

(b) Übergangsbereich

Abbildung 6.8: Normalkraft über der Starrkörperverschiebung für  $Z = 0.4$  und  $0.8$ . Zum Vergleich sind die Verläufe von FS- und KV-Modell hinzugefügt.

### 6.3.2 Dynamische Validierung

Das vereinfachte EHD-Modell muss ebenso unter transienten Bedingungen validiert werden, wobei im Folgenden ausschließlich das dynamische Fluid-Struktur-Modell betrachtet wird. Dazu wird entweder für die Belastung  $W$ , die hydrodynamische Geschwindigkeit  $U$  oder den Radius  $R$  ein zeitlich harmonischer Verlauf zugrunde gelegt. Die Anregung erfolgt gemäß der Funktion

$$\vartheta_n^q = q + \gamma_n \cos \Omega \tau \quad \text{für } n \in \{W, U, R, S\}, \quad (6.12)$$

wobei der Konstantanteil mit  $q$  und die Anregungsamplitude mit  $\gamma_n$  bezeichnet werden. Die Fußpunkterregung  $S$  wird später betrachtet und ist hier der Vollständigkeit wegen aufgeführt. Ab dem Zeitpunkt  $\tau = 0$  wird der EHD-Kontakt ausgehend von der statischen

Gleichgewichtslage bei  $W = W_0$ ,  $U = U_0$ ,  $R = R_0$  angeregt. Um bei  $\tau = 0$  einen glatten Verlauf zu erzielen, wird  $\vartheta_n^q$  modifiziert (Abbildung 6.9):

$$\vartheta_n^q = \begin{cases} q + \frac{\gamma_n}{2} (\cos \Omega\tau - 1), & \Omega\tau < \pi \\ q + \gamma_n \cos \Omega\tau, & \Omega\tau \geq \pi. \end{cases} \quad (6.13)$$

Damit können die drei verschiedenen Anregungsfälle dargestellt werden, die zur Validierung

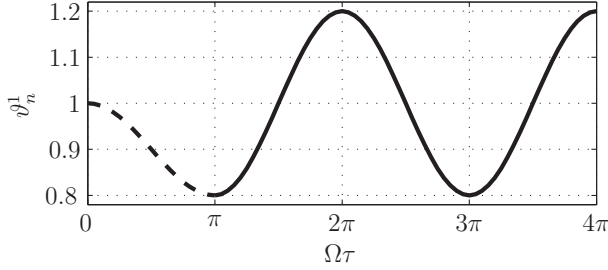


Abbildung 6.9: Anregung  $\vartheta_n^1$  mit  $\gamma_n = 0.2$

des vereinfachten Kontaktmodells herangezogen werden:

$$\begin{aligned} \text{Kraft } (\gamma_w \neq 0): & \quad W = \vartheta_w^1 W_0, \quad U = U_0, \quad R = R_0, \\ \text{Geschwindigkeit } (\gamma_U \neq 0): & \quad W = W_0, \quad U = \vartheta_U^1 U_0, \quad R = R_0, \\ \text{Radius } (\gamma_R \neq 0): & \quad W = W_0, \quad U = U_0, \quad R = \vartheta_R^1 R_0. \end{aligned}$$

## Amplitude

Die Amplitude von  $H_0$  ist in Bezug auf schwingende Systeme oftmals von entscheidender Bedeutung. Sie wird im eingeschwungenen Zustand durch

$$\text{amp } H_0 = \frac{\max H_0 - \min H_0}{2} \quad (6.14)$$

definiert. Für eine Krafterregung mit  $\gamma_w = 0.2$  ist in Abbildung 6.10a die Amplitude  $\text{amp } H_0$  über der statischen Last  $W_0$  aufgetragen. Dabei liegt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem vereinfachten und dem FEM-Modell vor. Auffallend sind die frequenzunabhängigen Amplituden bei hohen Lasten: Die Ursache liegt darin, dass die elastische Deformation die Starrkörperverschiebung  $H_0$  dominiert, der Kraftverlauf des Hertz'schen Kontaktes fast linear ist und die Strukturdämpfung vernachlässigt wird.

Die Frequenzabhängigkeit der Amplitude geht aus Abbildung 6.10b hervor: Je kleiner die statische Vorspannung, desto stärker sinkt die Amplitude bei steigender Erregerfrequenz. Es wird deutlich, dass für „kleine“ Frequenzen<sup>1</sup>  $\nu_c < 1$  die Amplituden frequenzunabhängig sind.

<sup>1</sup> Die Frequenz  $\nu_c = 1$  kann aufgrund der sehr kurzen Bezugszeit  $\tau_c$  bei technischen Anwendungen bereits sehr hoch sein.

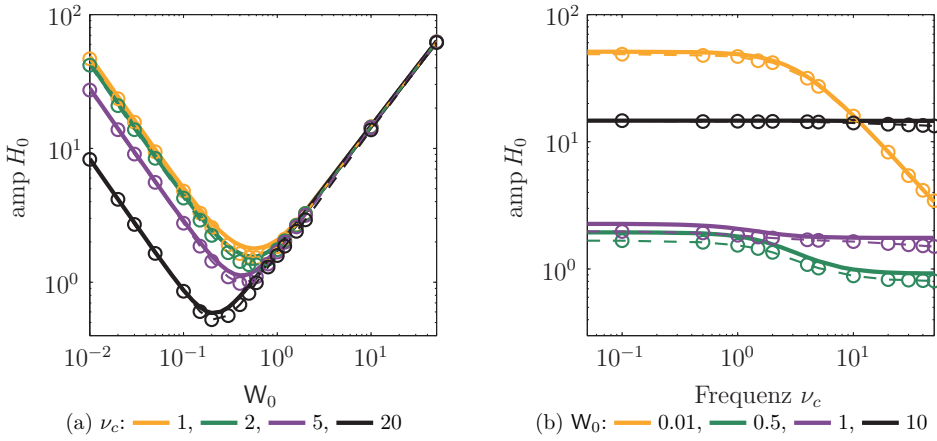


Abbildung 6.10: Amplitudenverlauf:  $\gamma_w = 0.2$ , -  $\ominus$ - FEM, — FS

Der Einfluss des Schmiermittelparameters auf die Amplitude lässt sich anhand von Abbildung 6.11 untersuchen: Kleine Abweichungen treten lediglich im Übergangsbereich  $W \approx 1$  auf. Daher wird im Folgenden  $L = 5$  angenommen und auf eine weitere Untersuchung des Schmiermittelparameters verzichtet.

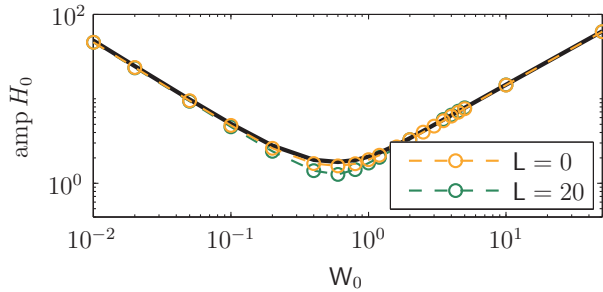


Abbildung 6.11: Amplitudenverlauf:  $\nu_c = 1$ ,  $\gamma_w = 0.2$  und  $L = 0, 20$ .  
-  $\ominus$ - FEM, — FS

Die Amplituden von  $H_0$  infolge von Parametererregungen sind in Abbildung 6.12 gezeigt. Bei Anregung durch eine variierende hydrodynamische Geschwindigkeit  $U$  müssen bei hohen Lasten Abstriche hingenommen werden. Exakte Übereinstimmung liegt bei kleinen Lasten vor; im Übergangsbereich zwischen kleinen und großen Lasten stimmen die Amplituden qualitativ überein. Ein oszillierender Radius  $R$  führt bei Frequenzen  $\nu_c \gtrsim 2$  zu deutlichen Abweichungen. Dies erscheint jedoch nicht kritisch, da dieser Frequenzbereich bei praktischen Anwendungen oftmals nicht erreicht wird. Bei kleineren Frequenzen wird die Frequenzunabhängigkeit der Amplitude durch die FEM-Rechnung bestätigt.

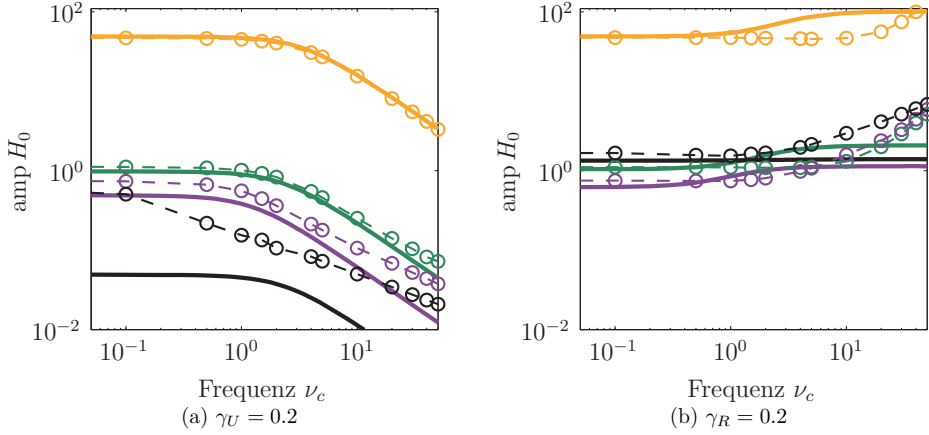


Abbildung 6.12: Amplitude  $W_0$ : — 0.01, — 0.5, — 1, — 10  
 - ○ - FEM, — FS

### Phasenverschiebung

Zur weiteren Validierung des vereinfachten Modells wird die Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  zwischen Erregung  $\vartheta_q^n$  aus Gleichung (6.12) und Antwort  $H_0$  betrachtet. Hierzu wird angenommen, dass die Verschiebung  $H_0$  durch eine harmonische Funktion

$$H_0 \approx \text{mean}(H_0) + \text{amp}(H_0) \cos(\Omega\tau - \Delta\varphi) \quad (6.15)$$

genähert werden kann, wobei mit  $\text{mean}(H_0)$  der Mittelwert bezeichnet wird. Zur Bestimmung der Phasenverschiebung wird der harmonische Verlauf mithilfe eines Least-Square-Verfahrens an die numerischen Ergebnisse angepasst.

Bei Krafterregung muss die Phasenverschiebung bei kleinen Frequenzen  $\Delta\varphi \approx \pi$  betragen, da eine steigende Last  $W$  eine sinkende Spalthöhe  $H_0$  zur Folge hat (Abbildung 6.13). Die Phasenverschiebung steigt mit sinkender Last und ändert sich bei hohen Lasten nur geringfügig ( $\Delta\varphi \approx \pi$ ). Bei mittleren Lasten liegt bei Betrachtung von Abbildung 6.13b ein Maximum vor, dabei ergibt sich sowohl bei kleinen als auch bei hohen Frequenzen  $\Delta\varphi \approx \pi$ . Die Phasenverschiebung bei kleinen Lasten steigt mit wachsender Frequenz und erreicht ungefähr  $\frac{3}{2}\pi$ .

Das vereinfachte Modell sagt bei einer Erregung durch die Geschwindigkeit eine mit der Frequenz steigende Phasenverschiebung von  $\Delta\varphi \approx 0$  bis  $\frac{\pi}{2}$  voraus (Abbildung 6.14a). Bei kleinen Lasten bestätigt das FEM-Modell die Vorhersage. Im Übergangsbereich stimmen die Verläufe bei Frequenzen bis  $\nu \approx 2$  überein und weisen erst bei höheren Frequenzen Abweichungen auf. Qualitative Unterschiede treten bei  $W = 10$  auf: Die Phasenverschiebung zeigt zwei Maxima, die das vereinfachte Modell nicht abbildet.

Bei einer Erregung durch einen harmonisch oszillierenden Kontaktradius tritt aufgrund des Terms  $\partial h/\partial t$  die zeitliche Ableitung  $\partial R/\partial t$  auf, wodurch eine negative Phasenver-

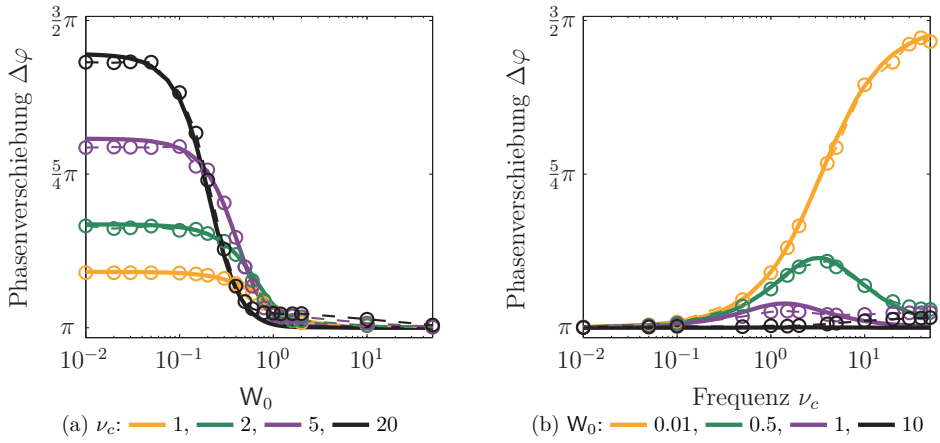


Abbildung 6.13: Phasenverschiebung:  $\gamma_w = 0.2$ , -  $\ominus$ - FEM, — FS

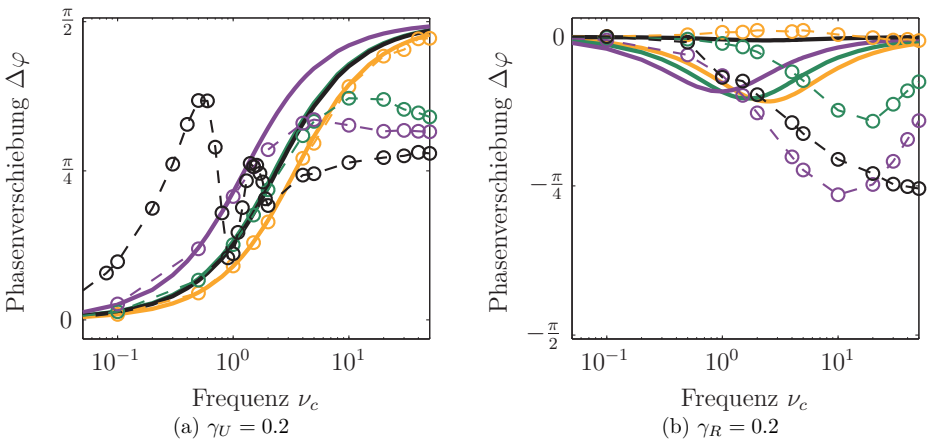


Abbildung 6.14: Phasenverschiebung  $W_0$ : 0.01, 0.5, 1, 10  
-  $\ominus$ - FEM, — FS

schiebung möglich wird (Abbildung 6.14b). Im Übergangsbereich liegen trotz deutlicher Abweichungen qualitative Ähnlichkeiten vor.

### Dämpfung

Zur Bestimmung der Dämpfung wird die dem System während einer Periode über die Erregerkraft zugeführte Energie betrachtet:

$$E_{zu} = - \oint \mathbf{W} dH_0 . \quad (6.16)$$

Die Energieabfuhr wird mit einem linear-viskosen Dämpfer  $D$  modelliert und kann unter der Annahme eines harmonischen Antwortsignals  $H_0$  angegeben werden:

$$E_{ab} = - \oint D \dot{H}_0 dH_0 = - \int_0^{2\pi/\Omega} D \dot{H}_0^2 d\tau = -\pi D \Omega (\text{amp } H_0)^2 . \quad (6.17)$$

Bei periodischen Lösungen muss über einen Zyklus  $E_{zu} + E_{ab} = 0$  gelten, sodass die Dämpferkonstante  $D$  bestimmt werden kann.

Die Betrachtung der Dämpfung ist aufgrund der Bestimmung der zugeführten Energie in Gleichung (6.16) nur für die Krafterregung sinnvoll. In diesem Fall liegt im Bereich  $W = 0.1 \dots 1$  eine hohe Dämpfung vor und geht für große beziehungsweise kleine Lasten gegen null (Abbildung 6.15). Die Dämpfung des vereinfachten Modells stimmt mit der numerischen Referenzlösung des vollständigen EHD-Problems überein.

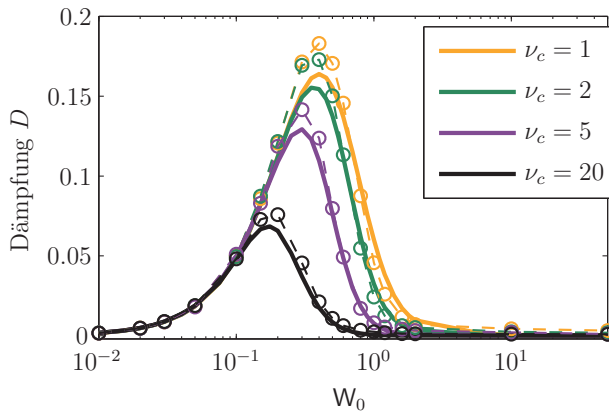


Abbildung 6.15: Dämpfung:  $\gamma_w = 0.2$  und  $\nu_c = 1, 2, 5, 20$ .  
 -  $\circ$ - FEM, — FS

### 6.3.3 Zusammenfassung der Validierung

Das Kontaktmodell zeigt über weite Parameterbereiche eine gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung, welche auf einer numerischen Auswertung des vollständigen EHD-Problems mittels FEM beruht. Es deckt einen großen Lastbereich ab: sowohl schwach- als

auch hochbelastete Kontakte werden abgebildet. Damit stellt das Modell einen kontinuierlichen Übergang zwischen hydrodynamischen Kontakten ohne elastische Deformation und EHD-Kontakten her.

Im statischen Fall liegt mit Blick auf die vorgesehene Anwendung innerhalb von Mehrkörpersimulationen eine ausgezeichnete Übereinstimmung vor.

Bei Krafterregung werden Amplitude, Phase und Dämpfung sehr genau abgebildet. Abstriche müssen bei Parameteranregung hingenommen werden.

Ein Überblick über die Anwendbarkeit des Modells ist in Tabelle 6.1 zusammengestellt: Ausgezeichnete Übereinstimmung wird mit „+“ bewertet, große Abweichungen sind durch „-“ gekennzeichnet. Zusätzlich werden die Abstufungen +/0, 0 und 0/- verwendet. Die Bewertung erfolgt getrennt für die Amplitude und die Phase. Dabei wird zwischen den verschiedenen Anregungsarten und dem Lastbereich unterschieden.

Frequenz $\nu_c$	Amplitude			Phase			
	$\lesssim 1$	$\approx 1$	$\gtrsim 1$	$\lesssim 1$	$\approx 1$	$\gtrsim 1$	
Kraft $\gamma_w$	+	+	+	+	+	+	↓ steigende Last
	+	+	+	+	+	+	
	+	+	+	+	+	+	
Geschwindigkeit $\gamma_U$	+	+	+	+	+	+	↓ steigende Last
	+	+	+/0	+	+	-	
	-	-	-	-	0	-	
Radius $\gamma_R$	+	+	+	-	-	-	↓ steigende Last
	+	+	-	-	-	-	
	+	+	-	-	-	-	

Tabelle 6.1: Bewertung des vereinfachten EHD-Kontaktmodells bei Anregung durch Kraft, Geschwindigkeit oder Radius:

- schwache Last, ● Übergangsbereich, ● hohe Last

Aus der Validierung geht hervor, dass der Einfluss des Schmiermittelparameters  $L$  und des Viskositäts-Exponenten  $Z$  vernachlässigt werden kann.



## Teil II

# Schwingungsfähige Systeme mit EHD-Kontakten

In diesem Teil wird der Einfluss von EHD-Kontakten auf das nichtlineare Schwingungsverhalten von Systemen untersucht. Dazu werden zunächst zwei Modellprobleme betrachtet:

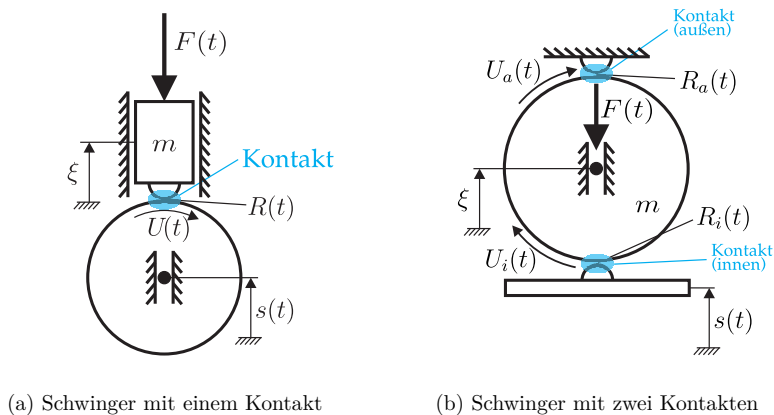


Abbildung II: Einmassenschwinger mit EHD-Kontakt

- Ein Schwinger der Masse  $m$  wird, wie in Abbildung IIa dargestellt, mit der zeitabhängigen Kraft  $F$  belastet. Der Kontakt wird unter anderem durch den lokalen reduzierten Radius  $R$  und die hydrodynamische Geschwindigkeit  $U$  charakterisiert. Beide Parameter sind im Allgemeinen zeitabhängig und können zu Parametererregung führen. Die Position  $s$  des unteren Kontaktpartners wird vorgegeben, sodass sich eine Fußpunkterregung realisieren lässt. Die verschiedenen Erregungsarten werden getrennt voneinander betrachtet und in Kapitel 8 diskutiert. Die Position der Masse wird mit  $\xi$  bezeichnet.

- Ein in Abbildung IIb gezeigter Einmassenschwinger wird zwischen zwei Kontakten eingespannt (Kapitel 9). Der untere Kontakt wird mit  $(\ )_i$  bezeichnet und entspricht bei der Betrachtung eines Wälzlagers dem *inneren* Kontakt. Der obere beziehungsweise *äußere* Kontakt wird mit  $(\ )_a$  gekennzeichnet. Die reduzierten Radien  $R_i$  und  $R_a$ , die hydrodynamischen Geschwindigkeiten  $U_i$  und  $U_a$ , die Kraft  $F$  sowie die Fußpunktposition  $s$  sind vorgegeben und führen zur Erregung des Systems.

Mithilfe des vereinfachten EHD-Kontaktmodells wird abschließend in Kapitel 10 ein Zylinderrollenlager modelliert. Die Ergebnisse werden mit denen eines Lagermodells mit Hertz'schen Kontakten verglichen.

Zur Untersuchung der auftretenden Schwingungen werden im folgenden Kapitel Grundlagen zur Stabilität und zur Bifurkationsanalyse zusammengefasst.

# 7 Grundlagen dynamischer Systeme

In diesem Kapitel werden ausgewählte Grundlagen vorgestellt, die später zur Beschreibung der dynamischen Systeme mit EHD-Kontakten benötigt werden. Dabei wird insbesondere auf das Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten periodischer Lösungen unter Beachtung der Nichtlinearitäten eingegangen. Die Nichtlinearitäten treten beispielsweise infolge der Kontaktstellen auf und haben entscheidenden Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Gesamtsystems.

Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist ein System von  $n$  autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen, die einen deterministischen Prozess beschreiben:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^n . \quad (7.1)$$

Dabei ist  $\mathbb{P}$  der zugrunde liegende Phasenraum und  $\mathbf{f} : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein ausreichend oft stetig differenzierbares Vektorfeld.

Eine Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des Systems wird durch die Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  festgelegt. Die Menge  $\gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}(t) : t \in \mathbb{R}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\}$  wird Orbit oder Trajektorie durch  $\mathbf{x}_0$  genannt [12, 81].

## 7.1 Charakteristische Lösungen

Zur Charakterisierung von dissipativen Systemen wird häufig der stationäre Zustand betrachtet, der auch eingeschwungene oder stationäre Lösung genannt wird. Ein für  $t \rightarrow \infty$  eintretender, stationärer Zustand definiert eine Menge, die unter der Annahme von Beschränktheit als *Attraktor* bezeichnet wird. Ein *Repellor* wird analog mit  $t \rightarrow -\infty$  definiert. Die Vereinigung aller Attraktoren und Repelloren eines Systems bildet die *Grenzmenge*<sup>1</sup>. Die möglichen Lösungen können in vier charakteristische Typen eingeteilt werden [81]:

- Eine Ruhelage  $\mathbf{x}_0$  liegt vor, wenn  $\gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}_0\}$  gilt. Die Grenzmenge  $\{\mathbf{x}_0\}$  besteht daher aus der Ruhelage selbst.
- Für periodische Lösungen gilt  $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dabei ist die Periode  $T > 0$  die kleinste Konstante, welche die vorige Beziehung erfüllt. Eine isolierte Lösung liegt vor, wenn in der Umgebung keine weiteren periodischen Lösungen auftreten. Die Grenzmenge ist damit eine im Phasenraum geschlossene isolierte Kurve. Bei autonomen Systemen wird sie als *Grenzzyklus* bezeichnet.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Im Folgenden wird vereinfachend ein einzelner Attraktor beziehungsweise Repellor als Grenzmenge bezeichnet.

<sup>2</sup> Nicht-autonome Systeme mit periodischen Zeitabhängigkeiten sind eingeschlossen, da sie in autonome Systeme transformiert werden können.

- Eine quasiperiodische Lösung besteht aus mindestens zwei überlagerten periodischen Bewegungen, die durch die inkommensurablen Perioden  $T_1$  und  $T_2$  charakterisiert sind.<sup>1</sup> Die sich einstellende Grenzmenge ist ein Torus, der als Überlagerung der Grenzmenge der zugrunde liegenden periodischen Lösungen interpretiert werden kann.
- Chaotische Bewegungen lassen sich keiner der zuvor genannten Lösung zuordnen. Sie weisen eine hohe Sensitivität in Bezug auf die Anfangsbedingungen auf: Zwei Lösungen mit beliebig nahen Anfangsbedingungen divergieren voneinander, wobei die Bewegungen beschränkt sind. Damit lassen sich chaotische Bewegungen nicht vorhersagen, obwohl das zugrunde liegende System deterministisch ist. Die Grenzmenge wird *seltener Attraktor* genannt und besitzt eine fraktale Dimension.

In einer Vielzahl mechanischer Probleme tritt die Zeit explizit auf – beispielsweise bei zeitabhängigen Koeffizienten oder äußerer Erregung. Die damit vorliegenden nicht-autonomen Differentialgleichungen können durch die Einführung einer zusätzlichen Zustandsvariablen, wie beispielsweise  $\theta = 2\pi t/T$ , in ein autonomes System der Art (7.1) überführt werden [81]. Daher werden im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit ausschließlich autonome Systeme diskutiert. Bei periodischen Zeitabhängigkeiten lassen sich die zuvor beschriebenen Definitionen übertragen, wenn  $0 \leq \theta < 2\pi$  vorausgesetzt wird. Im nicht-periodischen Fall ist das System wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \infty$  unbeschränkt und der für die vorigen Betrachtungen vorausgesetzte stationäre Zustand liegt nicht vor.

## 7.2 Poincaré-Abbildungen

Die Poincaré-Abbildung reduziert die Dimension eines dynamischen Systems von  $n$  auf  $n-1$  (Abbildung 7.1). Die Grenzmenge der Poincaré-Abbildung lässt sich der Grenzmenge einer charakteristischen Lösung zuordnen und stellt daher ein wichtiges Hilfsmittel dar. Die Poincaré-Abbildung  $\mathcal{P} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ , wobei  $\mathbb{H}$  eine noch näher zu spezifizierende Hyperebene darstellt, kann auf zwei grundlegend verschiedene Arten definiert werden:

1. Es wird ein System mit  $T$ -periodischen Koeffizienten oder eine Lösung mit bekannter Periode  $T$  vorausgesetzt. Dann lässt sich die Poincaré-Abbildung durch  $\mathcal{P}_{kT}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t_0 + kT)$  mit  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{H}$  definieren, wobei  $t_0$  einen beliebigen Zeitpunkt darstellt. Anschaulich kann sie als stroboskopische Betrachtung einer Lösung interpretiert werden: Die Zustände  $\{\mathbf{x}(t) : t = t_0 + kT, k \in \mathbb{N}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\}$ , die eine Teilmenge der Hyperebene  $\mathbb{H}$  bilden, werden beobachtet.
2. Bei unbekannter Periode muss zunächst eine geeignete Hyperebene  $\mathbb{H}$  definiert werden. Die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  schneidet die Hyperebene  $\mathbb{H}$  zum Zeitpunkt  $t_k$  an der Stelle  $\mathbf{x}_k^*$ . Die Poincaré-Abbildung lautet  $\mathcal{P}_{\mathbb{H}}(\mathbf{x}_k^*) = \mathbf{x}_{k+1}^*$ .

Die Grenzmenge  $\{\mathbf{x}^g \in \mathbb{H}\}$  der Poincaré-Abbildungen kann geometrisch einer charakteristischen Lösung zugeordnet werden [10, 81]:

---

<sup>1</sup> Inkommensurable Perioden  $T_1$  und  $T_2$  liegen vor, wenn diese nicht als ganzzahlige Vielfache voneinander ausgedrückt werden können:  $k_1 T_1 \neq k_2 T_2 \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ .

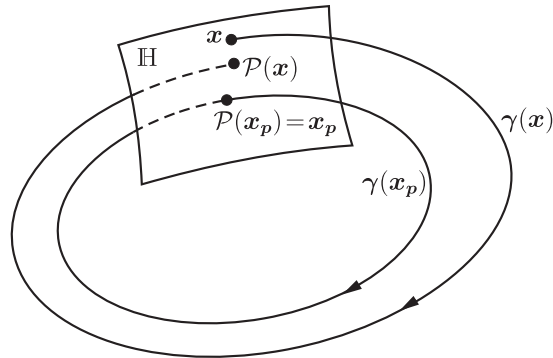


Abbildung 7.1: Darstellung der Poincaré-Abbildung. Der Punkt  $x_p \in \mathbb{H}$  des Phasenraums liegt in einem periodischen Orbit,  $x \in \mathbb{H}$  in einem nicht-periodischen.

- Bei einer endlichen Anzahl an Elementen  $x^g$  liegen periodische Lösungen vor.
- Quasiperiodische Lösungen führen zu einer Grenzmenge, die durch eine endliche Anzahl an glatten Kurven dargestellt werden kann.
- Chaotische Lösungen ergeben Strukturen mit fraktaler Dimension, die seltsame Attraktoren genannt werden.

## 7.3 Stabilität von Lösungen

Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Beurteilung der Stabilität periodischer Lösungen die Definition nach Lyapunov verwendet [83, 107].

### 7.3.1 Definition

Betrachtet wird die Lösung  $x(t)$  der Differentialgleichung (7.1) mit den Anfangsbedingungen  $x_0$  zur Zeit  $t_0$ . Eine kleine Störung  $\Delta x_0$  der Anfangsbedingungen verändert die ursprüngliche Lösung um die Störung  $\Delta x(t)$  und ergibt

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t) . \quad (7.2)$$

Eine Stabilitätsaussage über die Referenzlösung  $x(t)$  folgt entweder aus dem Vergleich zwischen  $x(t)$  und der gestörten Lösung  $\tilde{x}(t)$  oder aus der Untersuchung der Störung  $\Delta x(t)$ . Die Lösung  $x(t)$  ist im Sinne von Lyapunov *stabil*, falls zu jedem beliebig kleinen  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  mit folgender Eigenschaft existiert:<sup>1</sup>

$$\|\Delta x_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\Delta x(t)\| < \epsilon \quad \forall t > t_0 . \quad (7.3)$$

<sup>1</sup> Mit  $\|(\cdot)\|$  wird eine beliebige Norm bezeichnet.

Eine Lösung wird als *instabil* bezeichnet, falls sie nicht im Sinne Lyapunovs stabil ist.

Die Definition der Stabilität nach Lyapunov lässt zu, dass sich die ungestörte und die gestörte Lösung auch für  $t \rightarrow \infty$  unterscheiden. Diesen Fall schließt die asymptotische Stabilität aus:

Eine Lösung  $\mathbf{x}(t)$  heißt *asymptotisch stabil*, wenn sie im Sinne Lyapunovs stabil ist und zusätzlich folgende Bedingung erfüllt: Es existiert ein beliebig kleines  $\delta > 0$ , sodass für alle Anfangsbedingungen mit  $\|\Delta\mathbf{x}_0\| < \delta$  der Grenzwert der Störung verschwindet:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Delta\mathbf{x}(t)\| = 0 . \quad (7.4)$$

### 7.3.2 Stabilität periodischer Lösungen, Floquet-Theorie

Zur Untersuchung der Stabilität einer  $T$ -periodischen Lösung  $\mathbf{x}_p(t)$  des autonomen Systems (7.1) wird die Störung  $\Delta\mathbf{x}(t)$  betrachtet:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_p + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_p) = \mathbf{f}_\Delta(\Delta\mathbf{x}) . \quad (7.5)$$

Zur Untersuchung der Stabilität von  $\mathbf{x}(t)$  wird die Ruhelage  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}$  von  $\mathbf{f}_\Delta$  analysiert. Nach dem Satz von Hartman und Grobman sind unter anderem die Stabilitätsaussagen über hyperbolische Ruhelagen von nichtlinearer und linearisierter Differentialgleichung identisch [50]. Daher wird eine Linearisierung bezüglich der periodischen Lösung  $\mathbf{x}_p(t)$  vorgenommen, welche die linearisierte Differentialgleichung der Störung liefert:

$$\Delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \Delta\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}(t) = \left. \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_p} . \quad (7.6)$$

Dabei ist  $\mathbf{A}(t)$  die zeitabhängige  $T$ -periodische Jacobi-Matrix. Mithilfe der Theorie von Floquet [30] kann die Stabilität von  $\Delta\mathbf{x}(t)$  und damit letztendlich von  $\mathbf{x}_p(t)$  bestimmt werden [76].

Aus  $n$  voneinander unabhängigen Lösungen  $\phi_i(t)$  des linearen Systems (7.6) ergibt sich mit  $\phi(0) = \mathbf{I}$  die normierte zeitabhängige Fundamentalmatrix  $\phi(t) = [\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)]$ . Aufgrund der  $T$ -Periodizität von Gleichung (7.6) ist  $\tilde{\phi}(t) = \phi(t + T)$  ebenfalls eine Fundamentalmatrix und es gilt [15]

$$\tilde{\phi}(t) = \phi(t + T) = \phi(t) \phi(T) . \quad (7.7)$$

Zur weiteren Betrachtung wird die *Monodromiematrix* definiert:

$$\mathbf{M} = \phi(T) . \quad (7.8)$$

Mit der Monodromiematrix kann aus Gleichung (7.7) der Zusammenhang

$$\phi(t + kT) = \phi(t) \mathbf{M}^k \quad (7.9)$$

abgeleitet werden. Eine Lösung der Störungsgleichung (7.5) mit den Anfangsbedingungen  $\Delta \mathbf{x}(0) = \Delta \mathbf{x}_0$  lässt sich gemäß

$$\Delta \mathbf{x}(t + kT) = \phi(t + kT)\Delta \mathbf{x}_0 = \phi(t)\mathbf{M}^k\Delta \mathbf{x}_0 \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \quad (7.10)$$

darstellen. Die Stabilität der Lösung  $\mathbf{x}(t)$  hängt damit ausschließlich von  $\mathbf{M}$  ab. Zur weiteren Stabilitätsanalyse wird die Transformation  $\phi(t) = \psi(t)\mathbf{Q}^{-1}$  auf Gleichung (7.9) angewandt:

$$\psi(t + kT)\mathbf{Q}^{-1} = \psi(t)\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}^k. \quad (7.11)$$

Eine Diagonalisierung wird erreicht, wenn für  $\mathbf{Q}$  die Modalmatrix von  $\mathbf{M}$  gewählt wird.<sup>1</sup> Die Eigenwerte  $\mu_i$  von  $\mathbf{M}$  werden als *Floquet-Multiplikatoren* bezeichnet. Mit

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{Q} = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \quad (7.12)$$

kann die transformierte Lösung  $\psi(t) = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]$  dargestellt werden:

$$\psi_i(t + kT) = \mu_i^k \psi_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.13)$$

Damit ergibt sich für  $t \rightarrow \infty$  beziehungsweise  $k \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_i(t + kT) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |\mu_i| < 1 \\ \infty & \text{falls } |\mu_i| > 1 \\ \psi_i(t) & \text{falls } \mu_i = 1. \end{cases} \quad (7.14)$$

Für den Fall der hier betrachteten  $T$ -periodischen Lösungen  $\mathbf{x}_p(t)$  muss für einen Eigenwert der Monodromiematrix  $\mu_i = 1$  gelten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im Folgenden  $\mu_1 = 1$  vorausgesetzt. Die Stabilität und Charakterisierung der Lösung hängt allein von den verbleibenden  $n - 1$  Eigenwerten ab:

- Eine periodische Lösung wird als *hyperbolisch* bezeichnet, wenn nur ein Eigenwert mit  $|\mu_i| = 1$  existiert: Außer  $\mu_1 = 1$  liegt kein weiterer Floquet-Multiplikator auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene.
- Die Lösung ist asymptotisch stabil, wenn für alle verbleibenden  $n - 1$  Eigenwerte  $|\mu_i| < 1$  gilt ( $i = 2, 3, \dots, n$ ). Die Grenzmenge wird stabiler Grenzzyklus oder periodischer Attraktor genannt.
- Die Lösung ist instabil, wenn es mindestens einen Eigenwert mit  $|\mu_i| > 1$  gibt.
- Die Grenzmenge der Lösung wird periodischer Repellor genannt, wenn für alle  $n - 1$  Eigenwerte  $|\mu_i| > 1$  gilt ( $i = 2, 3, \dots, n$ ).

<sup>1</sup> Unter der Annahme von einfach auftretenden Eigenwerten ist die konstante Matrix  $\mathbf{Q}$  invertierbar. Der Fall mehrfacher Eigenwerte wird von Nayfeh und Mook behandelt [77]. Die Stabilitätsaussagen bleiben unverändert.

- Liegen zwei oder mehr Eigenwerte auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene und alle anderen innerhalb desselben, dann liegt der kritische Fall vor. Zur Bestimmung der Stabilität müssen die nichtlinearen Terme hinzugezogen werden.

## 7.4 Bifurkationen periodischer Lösungen

Für die weiteren Betrachtungen wird die autonome Differentialgleichung (7.1) um einen Parameter  $\sigma$  erweitert:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \sigma) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbb{P} \subseteq \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathbb{R}. \quad (7.15)$$

Die auftretenden Lösungstypen können nun von  $\sigma$  abhängen. Eine qualitative Änderung der Lösung an der Stelle  $\sigma$  wird *Bifurkation* oder *Verzweigung* genannt [107]. Dazu zählt beispielsweise auch eine sich ändernde Anzahl an Floquet-Multiplikatoren innerhalb beziehungsweise außerhalb des Einheitskreises. Das System ist an dieser Stelle *strukturell instabil* [81].

In dieser Arbeit werden ausschließlich Systeme mit einem veränderlichen Parameter betrachtet. Dementsprechend können Bifurkationen der Codimension 1 detektiert werden [12]. Die Variation des Parameters  $\sigma$  erfolgt quasistatisch.

Im vorigen Abschnitt wird die Stabilität periodischer Lösungen anhand von Floquet-Multiplikatoren besprochen. Dabei gilt stets  $\mu_1 = 1$ . Sobald infolge der Variation von  $\sigma$  ein weiterer Floquet-Multiplikator auf den Einheitskreis „wandert“, tritt der kritische Fall ein. Verlässt dieser Floquet-Multiplikator schließlich den Einheitskreis, dann wird die Lösung instabil. Die Unterscheidung zwischen drei charakteristischen Bifurkationsszenarien hängt von der Stelle ab, an welcher der Floquet-Multiplikator den Einheitskreis verlässt (Abbildung 7.2).

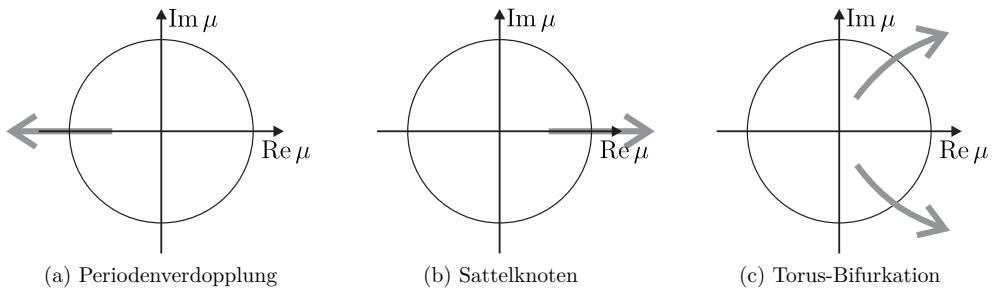


Abbildung 7.2: Bifurkationsszenarien periodischer Lösungen (Codimension 1)

### 7.4.1 Periodenverdopplung

Verlässt ein Floquet-Multiplikator den Einheitskreis bei  $\mu_i = -1$ , führt dies zu einer weiteren nicht abklingenden Lösung. Aus Gleichung (7.13) ergibt sich  $\psi_i(t + 2T) = (-1)^2 \psi_i(t)$ ,



woraus der Charakter der neuen Lösung abgeleitet werden kann: Sie ist ebenfalls periodisch, besitzt aber an der Bifurkationsstelle, das heißt bei  $\mu_i = -1$ , die doppelte Periodendauer. Diese Bifurkation wird Periodenverdopplung (PD) oder Flip-Bifurkation genannt.

### 7.4.2 Sattelknoten-Bifurkation

Eine Sattelknoten-Bifurkation wird an der Stelle  $\sigma = \sigma_c$  angenommen. Dann sind beispielsweise für  $\sigma < \sigma_c$  ein stabiler und ein instabiler Grenzzyklus vorhanden. Diese fallen bei  $\sigma_c$  zusammen und verschwinden für  $\sigma > \sigma_c$  [62]. Beim Übergang vom stabilen zum instabilen Grenzzyklus verlässt ein Floquet-Multiplikator den Einheitskreis bei  $\mu_i = 1$  (Abbildung 7.2b). Eine Sattelknoten-Bifurkation wird im Englischen als turning point, limit point, limit point cycle (LPC) oder fold bifurcation bezeichnet.

### 7.4.3 Torus-Bifurkation

Eine Torus-Bifurkation liegt vor, wenn zusätzlich zum Floquet-Multiplikator  $\mu_1 = 1$  ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar mit Betrag 1 existiert, beispielsweise

$$\mu_{2,3} = e^{\pm i\nu}, \quad |\nu| \neq 0, \pi, 2\pi, \dots \quad (7.16)$$

Bei irrationalen Verhältnissen von  $2\pi/\nu$  treten quasi-periodische Lösungen auf. Ist das Verhältnis  $2\pi/\nu$  rational, liegen periodische Lösungen vor. Sie können jedoch eine sehr lange Periodendauer aufweisen und sind oft nur schwer von den quasiperiodischen Lösungen zu unterscheiden. Die Torus-Bifurkation wird auch als Neimark-Sacker-Bifurkation, Hopf-Bifurkation periodischer Orbits, sekundäre oder generalisierte Hopf-Bifurkation bezeichnet.

## 7.5 Chaotische Bewegungen

Chaotische Bewegungen weisen eine hohe Sensitivität in Bezug auf Anfangsbedingungen oder kleine Störungen auf. Die Bewegung ist im Phasenraum beschränkt, dennoch divergieren benachbarte Lösungen exponentiell. Daher ist es nicht möglich, eine bestimmte chaotische Lösung vorherzusagen. Vielmehr ist der stationäre Zustand von Interesse, der einen seltsamen Attraktor ergibt.

Die Identifikation von chaotischen Bewegungen kann mithilfe der Poincaré-Abbildung (Abbildung 7.2) durchgeführt werden. Jedoch ist dies eine grafische Methode, die nur schwer eine automatisierte Auswertung erlaubt und meist auf einer visuellen Bewertung beruht. Ein weiteres grafisches Hilfsmittel stellt das Leistungsspektrum dar. Dabei ergeben periodische oder quasiperiodische Lösungen an diskreten Stellen von null verschiedene Werte. Hingegen zeichnen sich chaotische Lösungen durch ein breitbandiges Spektrum aus.<sup>1</sup> Da-

<sup>1</sup> Bei stochastischen Prozessen treten ebenfalls breitbandige Spektren auf. Da in dieser Arbeit ausschließlich deterministische Systeme untersucht werden, ist ein breitbandiges Spektrum ein eindeutiges Indiz für chaotisches Verhalten.

her kann chaotisches Verhalten eines Subsystems zu einer breitbandigen Anregung anderer Teilsysteme führen und unerwünschte Schwingungen hervorrufen.

### 7.5.1 Lyapunov-Exponent

Der Lyapunov-Exponent erlaubt im Gegensatz zu den zuvor genannten Kriterien eine quantitative Identifizierung chaotischer Lösungen.<sup>1</sup> Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist die zu den Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0$  gehörende Lösung  $\mathbf{x}(t)$ , für welche der größte Lyapunov-Exponent bestimmt werden soll. Wie in Abschnitt 7.3 wird die Anfangsbedingung um  $\Delta\mathbf{x}_0$  gestört, woraus sich die Lösung  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$  ergibt. Mithilfe der aus Gleichung (7.6) berechneten Störung  $\Delta\mathbf{x}(t)$  kann das Spektrum der Lyapunov-Exponenten  $\lambda_i$  definiert werden [76]:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\Delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\Delta\mathbf{x}_0\|}. \quad (7.17)$$

Für  $n$  geeignet gewählte Anfangsbedingungen  $\Delta\mathbf{x}_0$  ergeben sich theoretisch  $n$  Lyapunov-Exponenten. Bereits der maximale Lyapunov-Exponent  $\lambda_1$  liefert folgende Aussagen über die vorliegende Lösung:

$\lambda_1 < 0$	Ruhelage
$\lambda_1 = 0$	periodisch oder quasiperiodisch
$\lambda_1 > 0$	chaotisch

Bei periodischen Lösungen existiert – in Analogie zu den Floquet-Multiplikatoren – genau ein Lyapunov-Exponent mit  $\lambda_i = 0$ . Quasiperiodische Lösungen ergeben mindestens zwei verschwindende Exponenten  $\lambda_i = 0$ . Für die verbleibenden gilt in beiden Fällen  $\lambda_i < 0$ . Bei nicht-autonomen Systemen bleiben die Stabilitätsaussagen bezüglich chaotischer Lösungen unverändert, jedoch fehlen bei periodischen oder quasiperiodischen Lösungen verschwindende Lyapunov-Exponenten.

Zur numerischen Berechnung existiert ein Vielzahl verschiedener Verfahren [76, 81, 101, 127]. In dieser Arbeit wird eine Methode angewandt, die auf der Zeitintegration der gestörten und der ungestörten Lösung beruht [105]. Praktisch für alle Anfangsbedingungen  $\Delta\mathbf{x}_0$  ergibt sich damit der maximale Lyapunov-Exponent. Dies liegt daran, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit  $\Delta\mathbf{x}_0$  einen Anteil in Richtung des größten Wachstums der Störung aufweist [101]. Zusätzlich können kleinste numerische Fehler infolge der Sensitivität der chaotischen Bewegung ebenso zu einem Anteil in diese Richtung führen.

Zur Beschreibung des Verfahren werden die ungestörte und die gestörte Lösung  $\mathbf{x}^k(t)$  beziehungsweise  $\tilde{\mathbf{x}}^k(t)$  im Zeitintervall  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  mit den jeweiligen Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0^k$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_0^k$  betrachtet (Abbildung 7.3). Bei chaotischem Verhalten divergieren  $\mathbf{x}(t)$

---

<sup>1</sup> Die Realteile der Eigenwerte der Jacobi-Matrix einer Ruhelage und die Realteile der Floquet-Multiplikatoren periodischer Lösungen sind mit den Lyapunov-Exponenten identisch [81]. Damit sind auch Aussagen über Ruhelagen, periodische oder quasiperiodische Lösung möglich.

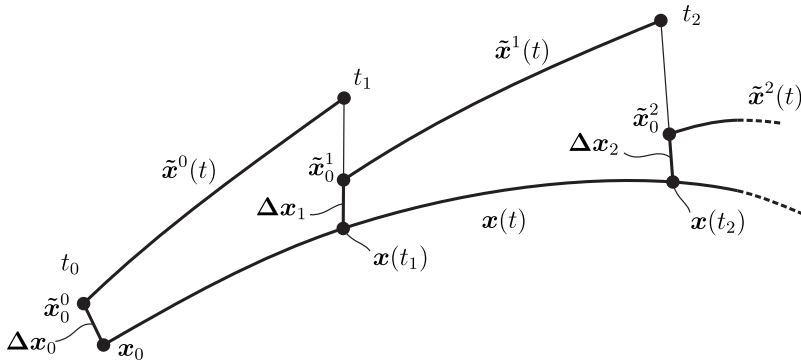


Abbildung 7.3: Bestimmung des maximalen Lyapunov-Exponenten

und  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$  exponentiell. Da der Lyapunov-Exponent ein lokales Maß darstellt, müssen die Anfangsbedingungen  $\tilde{\mathbf{x}}_0^k$  zu Beginn eines jeden Zeitintervalls normiert werden:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^k = \mathbf{x}(t_k) + \frac{\|\Delta \mathbf{x}_0\|}{\|\Delta \mathbf{x}^{k-1}(t_k)\|} \Delta \mathbf{x}^{k-1}(t_k). \quad (7.18)$$

Der maximale Lyapunov-Exponent lässt sich damit für große  $n$  nähern:

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^n \ln \frac{\|\Delta \mathbf{x}^k(t_k)\|}{\|\Delta \mathbf{x}_0\|}. \quad (7.19)$$

Zur Berechnung des gesamten Lyapunov-Spektrums müssen  $n$  Störungen mit linear unabhängigen Anfangsbedingungen betrachtet werden. Damit sie nicht alle den maximalen Lyapunov-Exponenten ergeben, muss die sogenannte Gram-Schmidt-Orthogonalisierung angewandt werden. Da in dieser Arbeit mit dem Lyapunov-Exponenten nur chaotisches Verhalten detektiert werden soll, genügt die Bestimmung des maximalen Exponenten.

## 7.6 Bifurkationsdiagramme

Die Attraktoren und Repellen der Lösungen  $\mathbf{x}(t)$  des Systems (7.15) können in *Bifurkationsdiagrammen* dargestellt werden, die einen Überblick über das Systemverhalten geben. Dabei wird eine charakteristische skalare Größe  $\text{char}(\mathbf{x})$ , die beliebig definiert werden kann, über dem Bifurkationsparameter  $\sigma$  aufgetragen. Bei periodischen Lösungen bilden sich glatte Kurven aus, sodass stabile Lösungen mit durchgezogenen und instabile mit gestrichelten Linien gekennzeichnet werden können. Im Allgemeinen ergibt die charakteristische Größe bei quasiperiodischen und chaotischen Lösungen eine Punktwolke. Damit zeigt das Bifurkationsdiagramm einen Überblick über das mögliche Systemverhalten.

In dieser Arbeit werden Amplituden oder lokale Extrema einer Komponente  $x_i$  als charakteristische Größen  $\text{char}(\mathbf{x})$  gewählt. Als Bifurkationsparameter wird in dieser Arbeit entweder die Erregerfrequenz des Einmassenschwingers oder die Winkelgeschwindigkeit

des Rotors gewählt. Zur Berechnung der Bifurkationsdiagramme existieren zwei grundlegende Varianten: Brute-Force-Methode und Pfadverfolgung. Sie werden in den folgenden beiden Abschnitten vorgestellt.

### 7.6.1 Brute-Force-Methode

Bei der Brute-Force-Methode wird ein stationärer Zustand durch die Lösung nach einer ausreichend langen Zeitintegration approximiert. Zur Erstellung eines Bifurkationsdiagramms muss dies für eine Parametermenge  $\{\sigma\}$  durchgeführt werden. Damit ist die Brute-Force-Methode besonders einfach und universell einsetzbar. Insbesondere lassen sich quasiperiodische und chaotische Lösungen untersuchen. Jedoch werden oft lange Rechenzeiten benötigt und instabile Lösungen können im Allgemeinen nicht bestimmt werden. Eine Ausnahme bilden Repellen; sie können durch Umkehrung der Zeit berechnet werden.

### 7.6.2 Pfadverfolgung

Die Pfadverfolgung ist ein effizientes Werkzeug, um Ruhelagen und periodische Lösungen (Grenzyklen) in Abhängigkeit des Parameters  $\sigma$  zu bestimmen. Die Verfolgung quasiperiodischer Lösungen ist Gegenstand aktueller Forschungsaktivität und wird aufgrund geringer Robustheit in dieser Arbeit nicht eingesetzt [10, 95]. Das Vorgehen zur Verfolgung  $T$ -periodischer Lösungen wird im Folgenden skizziert [62, 76, 101]:

Da die Periodendauer  $T$  im Allgemeinen unbekannt ist, wird eine neue Zeit  $\tau = t/T$  eingeführt, sodass bezüglich  $\tau$  die Periodendauer 1 beträgt. Aus Gleichung (7.15) folgt in Verbindung mit der Periodizitätsbedingung ein Randwertproblem:

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \sigma), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1). \quad (7.20a)$$

Zur Bestimmung der Periodendauer  $T$  wird dieses Randwertproblem auf

$$\frac{dT}{d\tau} = 0, \quad \Psi(\mathbf{x}) = 0 \quad (7.20b)$$

erweitert. Dabei ist  $\Psi(\mathbf{x}) = 0$  eine sogenannte Phasenbedingung. Die Namensgebung lässt sich leicht begründen: Falls  $\mathbf{x}(\tau)$  eine Lösung von Gleichung (7.20a) ist, dann stellt  $\mathbf{x}(\tau + \tau_0)$  für ein beliebiges  $\tau_0$  ebenfalls eine Lösung dar. Mithilfe der Phasenbedingung wird die Phasenlage der Lösung eindeutig definiert.

Die Pfadverfolgung wird in Prädiktion, Korrektur und Schrittweitensteuerung unterteilt. Die numerische Auswertung erfolgt bei vielen Implementierungen mittels Schießverfahren, Finiten Differenzen oder Kollokationsverfahren. Auftretende Bifurkationspunkte können mithilfe von Testfunktionen lokalisiert und bestimmt werden.

Es existiert eine Vielzahl an Softwarepaketen zur Pfadverfolgung, beispielsweise AUTO, BIFPACK und ALCON. In dieser Arbeit wird die MATLAB<sup>®</sup>-Toolbox MATCONT verwendet [22, 62].

# 8 Einmassenschwinger mit einem Kontakt

In diesem Kapitel wird der Einfluss eines EHD-Kontaktes auf einen Einmassenschwinger diskutiert. Abbildung 8.1 zeigt den Oszillator mit der dimensionslosen Notation aus Abschnitt 2.4 mit einem zunächst allgemeinen Kontakt (vergleiche Abbildung IIa auf Seite 67). Die Kontaktkraft  $W_K$  kann entweder mit dem hydrodynamischen, dem Hertz'schen oder dem elasto-hydrodynamischen Kontaktmodell aus Teil I bestimmt werden.

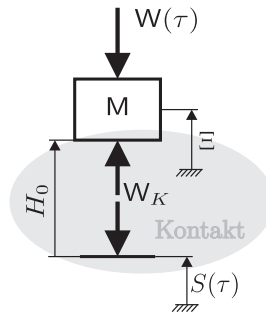


Abbildung 8.1: Einmassenschwinger mit einem Kontakt

Falls nicht anders angegeben wird zur Bestimmung der Kontaktkraft stets das dynamische Fluid-Struktur-Modell (FS) verwendet. Mit  $\Xi$  wird die Position der Masse  $M$ , mit  $S(\tau)$  die Position des Fußpunktes und mit  $W(\tau)$  die Krafterregung beschrieben.

## 8.1 Differentialgleichungssystem

Die Bewegungsgleichung des Einmassenschwingers in  $\Xi$  lautet

$$M \ddot{\Xi} - W_K = -W(\tau) . \tag{8.1}$$

Bei Verwendung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells muss zur vollständigen Beschreibung des Systems die Differentialgleichung (6.4) der inneren Variable  $H_c$  hinzugefügt werden.

Zur Darstellung wird im Folgenden die Eigenkreisfrequenz  $\Omega_0$  des Schwingers mit dynamischem Fluid-Struktur-Kontakt (FS) und damit die Steifigkeit  $C_{FS}$  aus Gleichung (6.5) verwendet. Dabei liegt eine Linearisierung des ungedämpften Systems um die Ruhelage

zugrunde. Ein Erregerfrequenzverhältnis  $\nu$  lässt sich mithilfe der Erregerfrequenz  $\Omega$  und der Eigenkreisfrequenz  $\Omega_0$  definieren:

$$\nu = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{C_{FS}}{M}}. \quad (8.2)$$

Die zur charakteristischen Zeit aus Gleichung (5.35) gehörende Kreisfrequenz  $2\pi/\tau_c$  und die Eigenkreisfrequenz  $\Omega_0$  weisen für bestimmte Parameterkombinationen die gleiche Größenordnung auf (Abbildung 8.2). In solchen Fällen muss zur Bestimmung des stationären Zustandes ein entsprechend langer Einschwingvorgang berücksichtigt werden. Die Herlei-

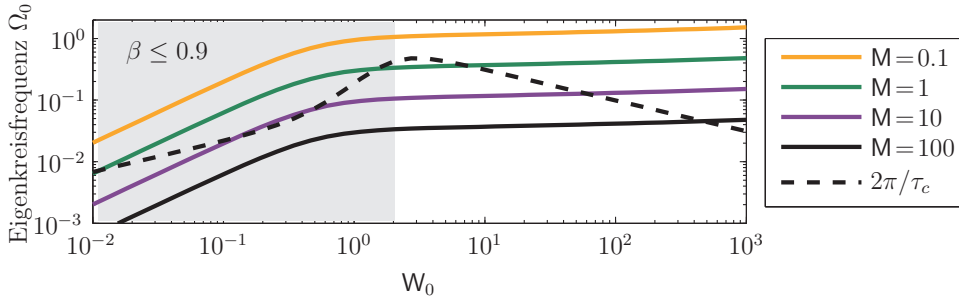


Abbildung 8.2: Eigenkreisfrequenz  $\Omega_0$  des ungedämpften und um die Ruhelage linearisierten Einmassenschwingers mit einem EHD-Kontakt (FS). Zum Vergleich ist die zur charakteristischen Zeit gehörende Kreisfrequenz  $2\pi/\tau_c$  des EHD-Kontaktes (FS) hinzugefügt.

tung der charakteristischen Zeit  $\tau_c$  ist in Abschnitt 5.4.2 ausgeführt und nur für hochbelastete Fälle gültig, das heißt  $\beta \approx 1$ . Für die Dauer des Einschwingvorgangs folgt daher: Je höher die Last  $W_0$  und je kleiner die Masse  $M$ , desto länger dauert der Einschwingvorgang – bezogen auf die Eigenkreisfrequenz  $\Omega_0$ .

Bei kleinen Lasten und hohen Massen ergibt sich ein Druckprofil, das dem des statischen Falles nahe kommt (vergleiche Abschnitt 5.4.2). Hohe Lasten oder kleine Massen führen zu welligen Druckprofilen oder zu solchen, wie sie bei Annäherung ohne Tangentialgeschwindigkeit auftreten (Abschnitt 3.1,[1, 45, 63]).

## 8.2 Ergebnisse

Das dynamische Verhalten lässt sich überwiegend anhand von Amplitudengängen diskutieren, wobei die Amplitude  $\text{amp } \bar{\Xi}$  über der Erregerfrequenz  $\nu$  aufgetragen wird. Zur Beschreibung der Amplitude wird die dimensionslose Schreibweise aus Abschnitt 5.2 genutzt. Damit entspricht  $\bar{\Xi} = 1$  ungefähr der Auslenkung unter statischen Bedingungen.

Die Ergebnisse mit den vereinfachten Kontaktmodellen werden für Kraft, Fußpunkt- und Parametererregung getrennt vorgestellt und anschließend mithilfe des FEM-Modells validiert.

### 8.2.1 Kraftherregung

Bei schwachen Lasten treten klassische nichtlineare Schwingungseffekte auf (Abbildung 8.3). Der Amplitudenverlauf in der Nähe der Hauptresonanz bei  $\nu \approx 1$  ist nach links gekrümmt, was einen Hinweis auf einen degressiven Kraftverlauf darstellt. Dadurch ergibt sich eine instabile periodische Lösung, die durch zwei Sattelpunkte (LPC) begrenzt wird. Mit der instabilen Lösung gehen Amplitudensprünge einher. Die superharmonischen Resonanzen sind für  $\nu \approx \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$  deutlich zu erkennen. Eine weitere periodische Lösung entsteht an den Periodenverdopplungen (PD) bei  $\nu \approx 2$ . Diese subharmonische Resonanz besitzt ebenfalls einen nach links gekrümmten Amplitudenverlauf, der einen Sattelpunkt und einen Bereich instabiler periodischer Lösungen aufweist.

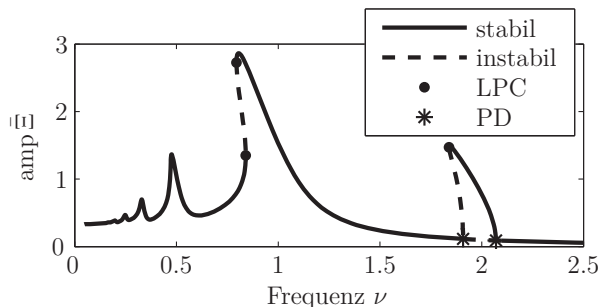


Abbildung 8.3: EHD-Kontakt (FS) bei schwacher Last  $W_0 = 0.01$  und Kraftherregung  $\gamma_w = 0.3$ ,  $M = 20$

Bei hohen Lasten ist der Kraftverschiebungsverlauf des Hertz'schen Kontaktes in guter Näherung linear. Daher kann ein Amplitudengang erwartet werden, der weder nach links noch nach rechts gekrümmt ist. Jedoch öffnet sich bei großen Amplituden ab etwa  $\text{amp} \bar{\Xi} \approx 1$  der Kontakt, wodurch der Amplitudenverlauf in der Nähe der Hauptresonanz nach links gekrümmt ist (Abbildung 8.4). Der Bereich des Abhebens ist in Abbildung 8.4 hervorgehoben und beginnt mit einem Knick der Amplitude. Infolge der Linkskrümmung treten Sattelpunkte, instabile Lösungen und Amplitudensprünge auf. EHD- und Hertz-Kontakt zeigen bei hohen Lasten qualitativ das gleiche Verhalten. Die bei schwachen Vorlasten beobachteten sub- und superharmonischen Resonanzen sind nicht mehr vorhanden.

In Abbildung 8.5 sind unter anderem die Amplitudenverläufe für zwei besondere Fälle bei Lasten im Übergangsbereich gezeigt:

- Das Verhalten bei  $W_0 = 0.1$  entspricht einem überkritisch gedämpften Einmassenschwinger, der mit einem linearen Kelvin-Voigt-Element mit der Umgebung verbunden ist.
- Bei einem linearen, gedämpften, kraftherregten Einmassenschwinger ist die Eigenkreisfrequenz kleiner als die Eigenkreisfrequenz des zugehörigen ungedämpften Systems [88]. Die Hauptresonanz des Einmassenschwingers mit EHD-Kontakt liegt jedoch für den Lastfall  $W_0 = 0.5$  bei  $\nu \approx 1.5$ . Der scheinbare Widerspruch lässt sich

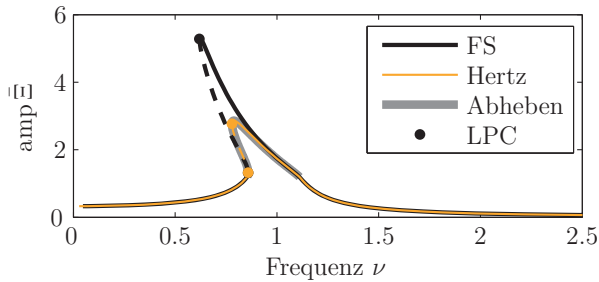


Abbildung 8.4: Abheben unter hoher Last  $W_0 = 100$  bei Krafterregung  $\gamma_w = 0.3$ ,  $M = 10$ ,  $\psi = 0.1$ , FS-Modell

durch physikalische Überlegungen auflösen: Bei kleinen Lasten ( $W_0 = 0.001$ ) wird die Steifigkeit und damit die Eigenkreisfrequenz des um die Ruhelage linearisierten Systems durch das Fluid-Element bestimmt, da  $C_{fl} \ll C_{st}$  vorliegt. Mit steigender Last erhöht sich zunächst die Dämpfung (Abbildung 6.5b), sodass das Fluid-Element „versteift“ wird. In einigen Fällen kann die Dämpfung so hoch werden, dass die Eigenkreisfrequenz trotz  $C_{fl} < C_{st}$  durch die Struktursteifigkeit dominiert wird und eine Resonanzverschiebung auftritt.

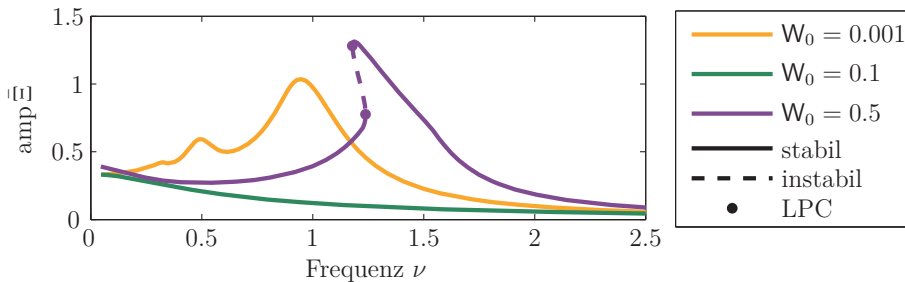


Abbildung 8.5: Besondere Ausprägungen von Amplitudenverläufen bei Krafterregung: Überkritische Dämpfung bei  $W_0 = 0.1$ , Resonanzverschiebung bei  $W_0 = 0.5$ . ( $\gamma_w = 0.3$ ,  $M = 0.1$ , FS-Modell)

Die Amplitudengänge für Krafterregung ( $\gamma_w = 0.3$ ) sind für die Lasten  $W_0 = 0.01 \dots 100$  und die Massen  $M = 0.1 \dots 100$  in Abbildung 8.6 zusammengefasst. Dabei ist die Massenunabhängigkeit der Ergebnisse bei hohen Lasten hervorzuheben (Abbildung 8.6c). Dies kann zum einen mithilfe des annähernd linearen Kraftgesetzes des Hertz’schen Kontaktes begründet werden. Zum anderen ist während des geöffneten Kontaktes das Verhalten ebenfalls massenunabhängig. Aufgrund der großen Ähnlichkeit der Ergebnisse sowie der Modelle (bei hohen Lasten) kann die Argumentation vom Hertz- auf den EHD-Kontakt übertragen werden.



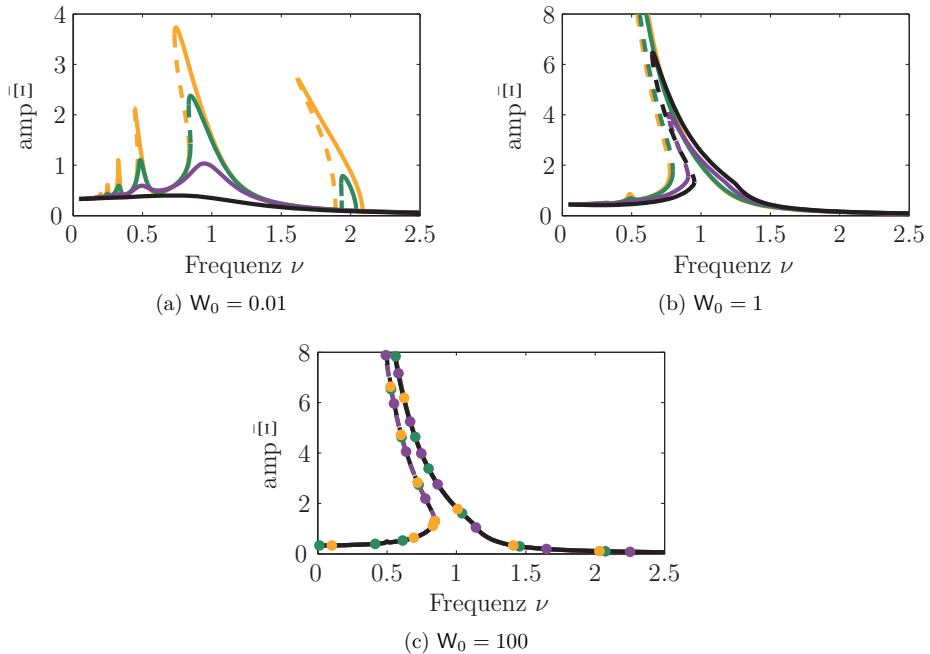


Abbildung 8.6: Parameterstudie bei Kräfteerregung  $\gamma_w = 0.3$ , FS-Modell,  $M$ : — 0.1, — 1, — 10, — 100. Fast identische Verläufe trotz unterschiedlicher Massen werden zusätzlich mit Punkten in der entsprechenden Farbe markiert.

Einer der Vorteile des neu entwickelten EHD-Kontaktmodells liegt in der Gültigkeit über einen großen Lastenbereich – insbesondere auch für kleine Lasten. Für  $W_0 = 0.01$  sind HD- und EHD-Kontakt identisch (Abbildung 8.7a). Dabei wird deutlich, dass die Modellierung mittels Hertz'scher Theorie versagt. Bei hohen Lasten sind, wie zuvor beschrieben, die Ergebnisse mit Hertz- und EHD-Kontakt identisch ( $W_0 = 10$  in Abbildung 8.7d). Erwartungsgemäß geben weder HD- noch Hertz-Kontakt das Verhalten im Übergangsbereich korrekt wieder (Abbildungen 8.7b und 8.7c).

Ausgehend vom dynamischen Fluid-Struktur-Modell wird mit zusätzlichen Annahmen das nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell in Abschnitt 6.2 hergeleitet. Der in Abbildung 8.8 gezeigte Vergleich beider Modelle ergibt, dass die wesentlichen Phänomene auch vom nichtlinearen Kelvin-Voigt-Modell abgebildet werden: Sattelpunkte, instabile Lösungen, Amplitudensprünge, sub- und superharmonische Resonanzen und Abheben. Jedoch ist im Übergangsbereich  $W_0 = 1$  eine zusätzliche subharmonische Resonanz zu finden, die bei Verwendung des FS-Modells nicht auftritt. Des Weiteren erlaubt bereits die Herleitung des KV-Modells den Schluss, dass die oben diskutierte Resonanzverschiebung (Abbildung 8.5) nicht auftreten kann.

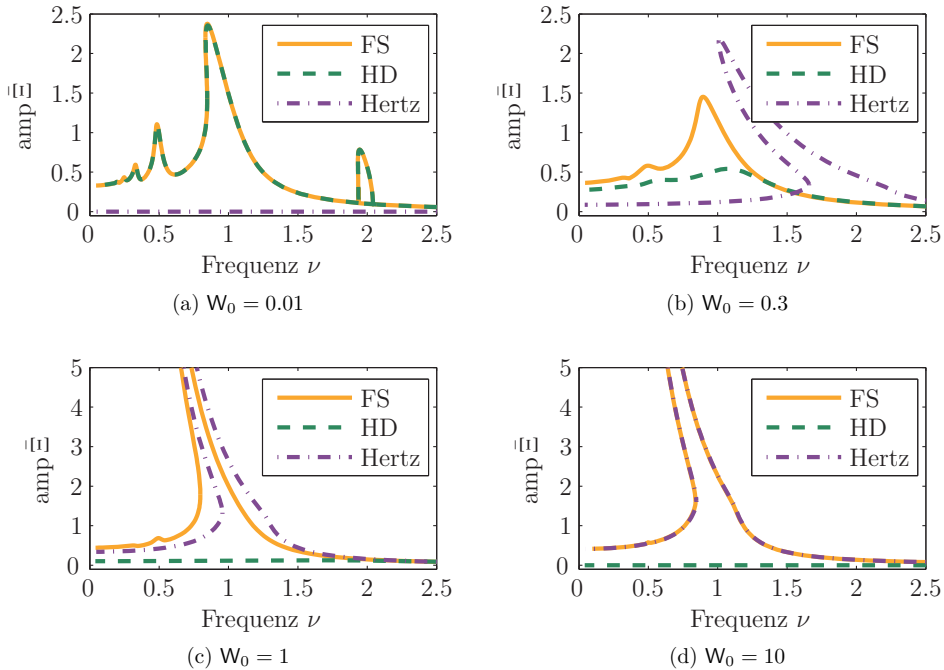


Abbildung 8.7: Vergleich von EHD- mit HD- beziehungsweise Hertz-Kontakt bei Krafterregung  $\gamma_w = 0.3$ ,  $M = 10$

## 8.2.2 Fußpunkt- und Parametererregung

Die Amplitudenverläufe bei Fußpunkterregung und Parametererregung durch den Radius beziehungsweise durch die hydrodynamische Geschwindigkeit sind in den Abbildungen 8.9, 8.10 und 8.11 gezeigt. Die Verläufe sind qualitativ ähnlich zu denjenigen bei Krafterregung in Abschnitt 8.2.1.

Bei Parametererregung durch den Radius sind im Vergleich zu Krafterregung besonders die ausgeprägten subharmonischen Resonanzen bei  $\nu \approx 2$  zu erwähnen. Diese werden üblicherweise anhand der Mathieu-Gleichung mit einem Freiheitsgrad erklärt (Anhang C). Dabei wird insbesondere bei  $\nu \approx 2$  von einer *Parameterinstabilität* gesprochen. Eine statische Vorlast entspricht einer Inhomogenität der Mathieu-Gleichung. In Anhang C wird gezeigt, dass als Folge von statischer Vorlast und Parametererregung eine Fremderregung entsteht. Aus diesem Grund können auch klassische Resonanzen gefunden werden.

Die Fußpunkterregung erfolgt mit

$$S = \vartheta_S^0 (H_c^0 + \Delta^0). \quad (8.3)$$

Für große und kleine Lasten ergibt sich die Amplitude aus dem Produkt zwischen statischer Auslenkung und  $\gamma_S$ .

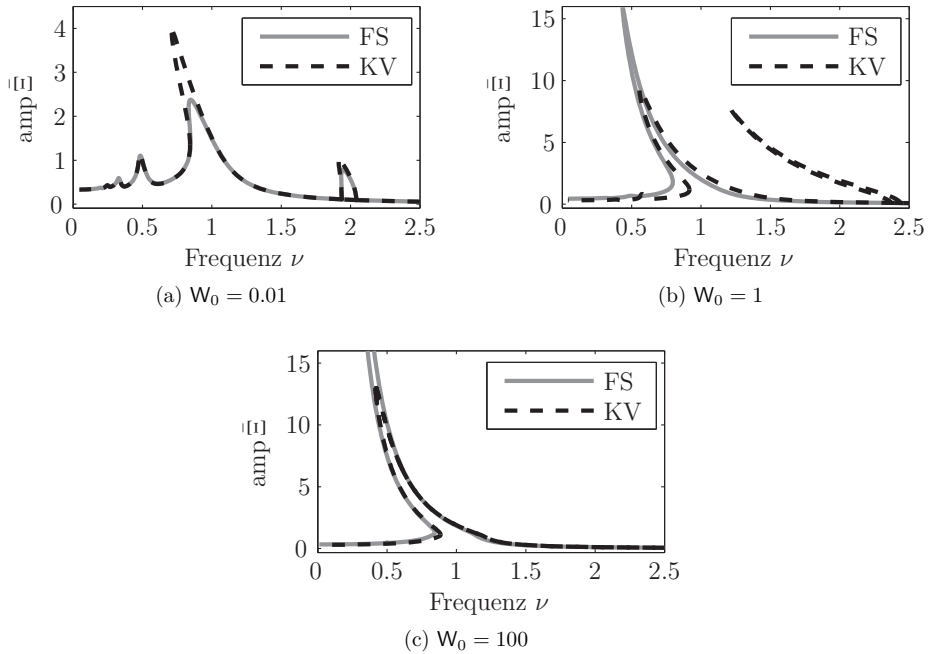


Abbildung 8.8: Vergleich zwischen dynamischem Fluid-Struktur-Modell (FS) und nichtlinearem Kelvin-Voigt-Modell (KV) bei Kräfteerregung  $\gamma_w = 0.3$ ,  $M = 10$

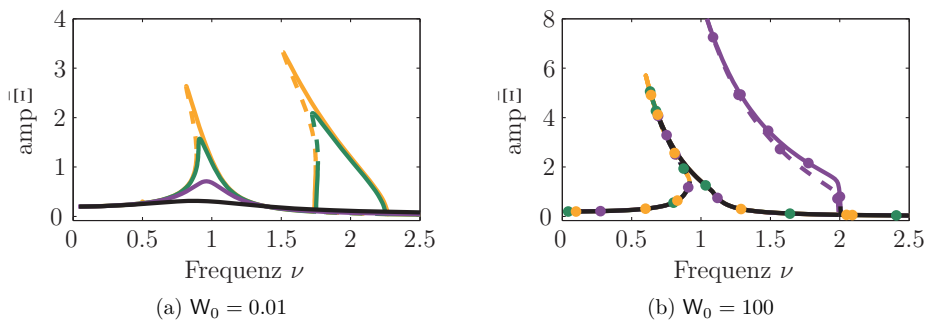


Abbildung 8.9: Fußpunkterregung  $\gamma_S = 0.2$ , FS,  $M$ : — 100, — 10, — 1, — 0.1. Fast identische Verläufe trotz unterschiedlicher Massen werden zusätzlich mit Punkten in der entsprechenden Farbe markiert.

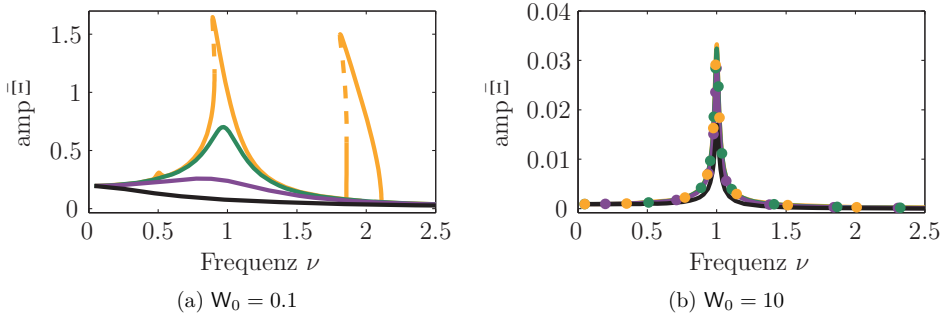


Abbildung 8.10: Parametererregung durch eine variierende hydrodynamische Geschwindigkeit  $\gamma_U = 0.2$ , FS-Modell, M: — 0.1, — 1, — 10, — 100. Fast identische Verläufe trotz unterschiedlicher Massen werden zusätzlich mit Punkten in der entsprechenden Farbe markiert.

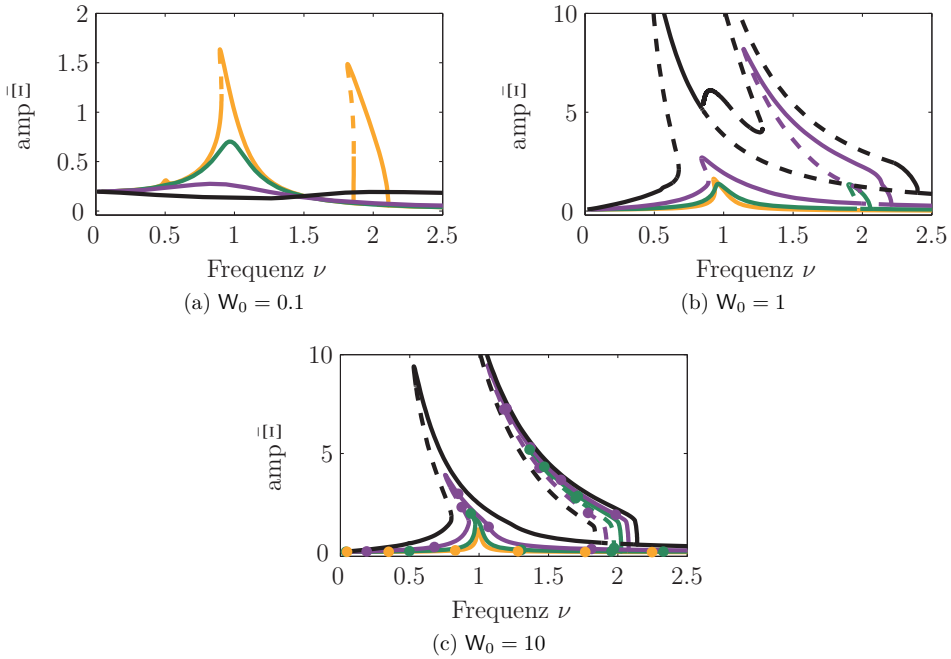


Abbildung 8.11: Parametererregung durch einen variierenden Kontaktradius  $\gamma_R = 0.2$ , FS-Modell, M: — 0.1, — 1, — 10, — 100. Fast identische Verläufe trotz unterschiedlicher Massen werden zusätzlich mit Punkten in der entsprechenden Farbe markiert.

### 8.3 Validierung

Der Schwinger mit dem vereinfachten EHD-Kontaktmodell wird mithilfe numerischer FEM-Lösungen validiert, wobei die verschiedenen Erregungsarten getrennt voneinander betrachtet werden. Der Amplitudenverlauf muss aufgrund der Komplexität des FEM-Modells mittels Zeitintegration (Brute-Force-Methode, Abschnitt 7.6.1) berechnet werden. Die Bestimmung der Amplitude setzt einen eingeschwungenen Zustand voraus, was wiederum eine ausreichend lange Zeitintegration bedingt. In der vorliegenden Arbeit werden die Amplituden an diskreten Frequenzen berechnet. Um jeweils den eingeschwungenen Zustand möglichst schnell zu erreichen, wird die stationäre Lösung mit der vorigen Frequenz als Anfangswert verwendet. Dadurch ergeben sich im Bereich von Amplitudensprüngen bei steigender beziehungsweise fallender Frequenz unterschiedliche Lösungen.<sup>1</sup>

Im Bereich der Subharmonischen wird eine besonders lange Einschwingzeit benötigt, wodurch diese Resonanz leicht übersehen werden kann. Des Weiteren kann die Subharmonische auch als Parameterinstabilität interpretiert werden. Dabei ist bekannt, dass sie nur in einem schmalen Parameterbereich existiert. Im Falle einer schlechten Frequenzauflösung der FEM-Rechnung wird die Instabilität mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht detektiert. Die Berechnung mithilfe eines vereinfachten Kontaktmodells (FS oder KV) erlaubt die Benutzung von Verfolgungsalgorithmen, und stellt damit – abgesehen von Modellungenauigkeiten – eine zuverlässige Vorhersage von subharmonischen Resonanzen dar.

#### 8.3.1 Krafterregung

Krafterregung führt – wie in Abschnitt 8.2.1 beschrieben – bei schwachen Lasten unter Verwendung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells zu sub- und superharmonischen Resonanzen. Diese werden durch eine FEM-Rechnung bestätigt (Abbildung 8.12a). Dabei

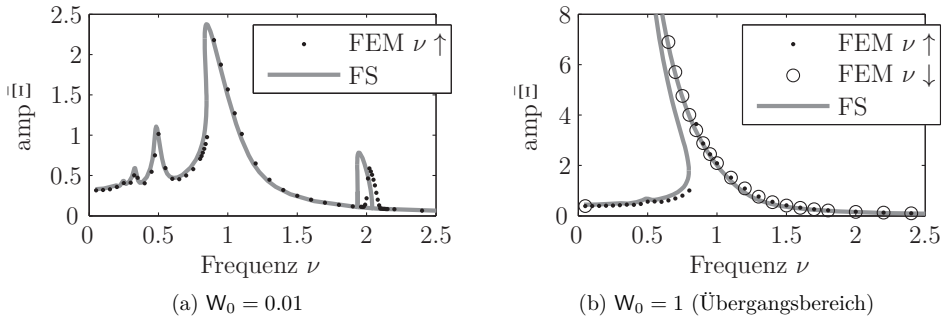


Abbildung 8.12: Validierung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells mittels FEM bei Krafterregung  $\gamma_w = 0.3$  für schwache und mittlere Lasten,  $M = 10$

<sup>1</sup> Eine Simulation mit steigender Frequenz wird als *Hochlauf* bezeichnet und in den Diagrammen mit „ $\nu \uparrow$ “ abgekürzt. Analog wird durch eine abnehmende Frequenz ein *Auslauf* charakterisiert, der mit „ $\nu \downarrow$ “ abgekürzt wird.

stimmen die Amplituden exakt überein, was auf eine genaue Modellierung der Dämpfung schließen lässt. Lediglich bei der subharmonischen Resonanz sind geringe Abweichungen zu erkennen.

Der Amplitudensprung bei der Last  $W_0 = 1$  in Abbildung 8.12b ist deutlich zu erkennen. Aufgrund der geringen Dämpfung insbesondere bei hohen Lasten ergeben sich beim Auslauf extrem hohe Amplituden, wobei die FEM-Rechnung an ihre Grenzen stößt. Daher erscheint der Sprung beim Auslauf von hohen zu niedrigen Amplituden bei  $\nu \approx 0.1$  nicht mehr vertrauenswürdig. Davon abgesehen liegt eine hohe Übereinstimmung zwischen dem vereinfachten und dem FEM-Modell vor.

Die überkritische Dämpfung und die Resonanzverschiebung werden basierend auf dem dynamischen Fluid-Struktur-Modell in Abbildung 8.5 besprochen und an dieser Stelle mit dem FEM-Modell validiert: Der überkritisch gedämpfte Fall zeigt eine exakte Übereinstimmung beider Modelle (Abbildung 8.13a). Die Resonanzverschiebung wird zwar abgebildet, jedoch differieren die Amplituden (Abbildung 8.13b). Damit geht einher, dass die durch das FS-Modell vorhergesagten Sattelpunkte, instabilen Lösungen und Amplitudensprünge nicht auftreten.

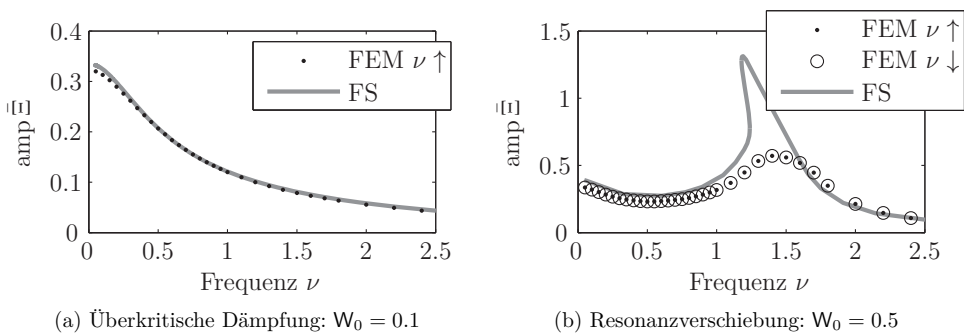


Abbildung 8.13: Überkritische Dämpfung und Resonanzverschiebung: Validierung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells mittels FEM bei Krafterregung  $\gamma_w = 0.3$ ,  $M = 0.1$

### 8.3.2 Fußpunkt- und Parametererregung

Die Amplitudenverläufe bei Fußpunkterregung werden, wie Abbildung 8.14 zeigt, vom dynamischen Fluid-Struktur-Modell mit einer hohen Güte vorhergesagt. Insbesondere werden die Hauptresonanz und die ausgeprägte subharmonische Resonanz bei  $W_0 = 0.01$  bestätigt (Abbildung 8.14a). Aus der übereinstimmenden Amplitude kann auf eine genaue Modellierung der Dämpfung geschlossen werden. Bei der hohen Last  $W_0 = 10$  treten in beiden Modellen Amplitudensprünge auf (Abbildung 8.14b). Die Stellen des Sprungs von großen zu kleinen Amplituden weichen leicht voneinander ab, sodass in diesem Bereich auch die Amplituden leicht voneinander abweichen.

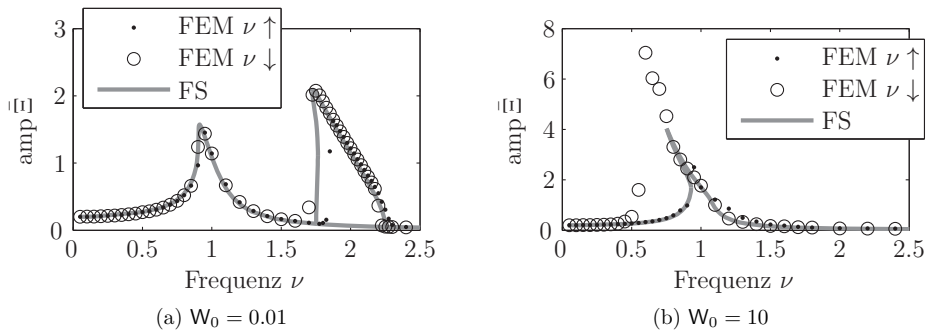


Abbildung 8.14: Validierung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells mittels FEM bei Fußpunkterregung  $\gamma_S = 0.2$ ,  $M = 10$

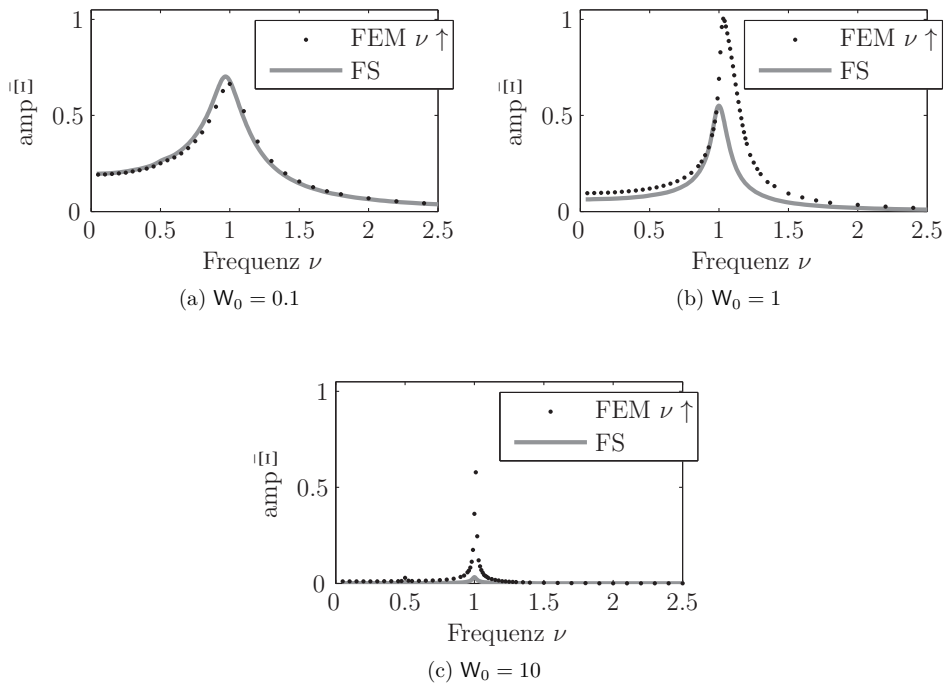


Abbildung 8.15: Validierung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells mittels FEM bei Parametererregung durch eine variierende hydrodynamische Geschwindigkeit  $\gamma_U = 0.2$ ,  $M = 10$

Bei Parametererregung durch eine schwankende hydrodynamische Geschwindigkeit stimmt bei kleinen Lasten das dynamische Fluid-Struktur-Modell mit der FEM-Rechnung überein (Abbildung 8.15a). Mit steigender Last werden die Abweichungen größer (Abbildung 8.15b). Bei hohen Lasten liefert das vereinfachte Kontaktmodell, wie bereits aus der Validierung in Abschnitt 6.3 hervorgeht, keine zuverlässige Vorhersage (Abbildung 8.15c). Das dynamische Fluid-Struktur-Modell zeigt gute Vorhersagen bei Parametererregung infolge eines veränderlichen Radius (Abbildung 8.16), obwohl die Herleitung unter besonders starken Vereinfachungen erfolgt ist (Abschnitt 3.3.3). Lediglich eine beim FS-Modell in einem sehr schmalen Parameterbereich auftretende subharmonische Resonanz wird durch das FEM-Modell nicht bestätigt.

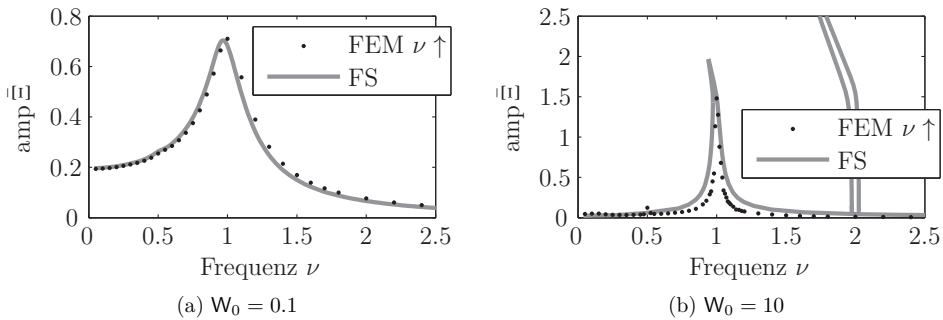


Abbildung 8.16: Validierung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells mittels FEM bei Parametererregung durch einen variierenden Kontaktradius  $\gamma_R = 0.2$ ,  $M = 10$



## 9 Einmassenschwinger mit zwei Kontakten

Bei praktischen Anwendungen treten in der Regel mehrere geschmierte Kontaktstellen auf. Dadurch entstehen Effekte, die nicht mehr mithilfe des Einmassenschwingers mit einem EHD-Kontakt erklärt werden können. Daher wird der in Abbildung 9.1 in dimensionsloser Notation gezeigte Schwinger mit zwei Kontakten untersucht (vergleiche Abbildung IIb auf Seite 67). Er besteht aus einem Körper (Masse  $M$ , Breite  $L_0$ ), dessen Schwerpunktposition mit  $\Xi$  bezeichnet wird. Der Körper wird von einem inneren und einem äußeren Kontakt eingeschlossen, die mit  $(\ )_i$  beziehungsweise  $(\ )_a$  gekennzeichnet werden.

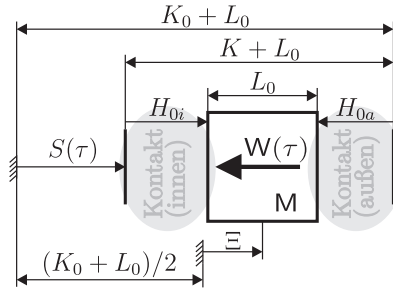


Abbildung 9.1: Einmassenschwinger mit zwei Kontakten

Vereinfachend werden – bis auf zeitabhängige Schwankungen – identische Kontakte und ein symmetrischer Aufbau vorausgesetzt. Dadurch gilt im statischen Zustand  $W(\tau) = 0$ ,  $S(\tau) = 0$ ,  $U_i = U_a = U_0$ ,  $R_i = R_a = R_0$  und  $C_{st}^i = C_{st}^a = C_{st}$ . Bei einer symmetrischen Erregung durch Schwankungen der hydrodynamischen Geschwindigkeiten  $U_i = U_a = U(t)$  beziehungsweise der Kontaktradien  $R_i = R_a = R(t)$  würde die Amplitude  $\text{amp } \Xi$  im eingeschwingenen Zustand verschwinden. Daher erfolgen Parameter- und Fußpunkterregung ausschließlich an einem Kontakt – in diesem Abschnitt am inneren.

Die Anregung lässt sich mittels  $v_n^q = q + \gamma_n \cos \Omega \tau$  aus Gleichung (6.12) darstellen:

$$\begin{aligned}
 \text{Kraft } (\gamma_w \neq 0): & \quad W = v_w^0 W_0, \\
 \text{Fußpunkt } (\gamma_S \neq 0): & \quad S = v_S^0 (H_{ci}^0 + \Delta_i^0 + H_{ca}^0 + \Delta_a^0), \\
 \text{Geschwindigkeit } (\gamma_U \neq 0): & \quad U_i = v_U^1 U_0, \quad (U_a = U_0), \\
 \text{Radius } (\gamma_R \neq 0): & \quad R_i = v_R^1 U_0, \quad (R_a = R_0).
 \end{aligned}$$

Dabei hat insbesondere die Kraft  $W$  keinen Konstantanteil.

Zur Beschreibung des Systems werden das Spiel  $K_0$ , das unter der Bedingung  $S(\tau) = 0$  vorliegt, und das momentan auftretende Spiel  $K$  eingeführt. Damit ergeben sich die kinematischen Beziehungen

$$\begin{aligned} K_0 &= K + S(\tau) = H_{0i} + H_{0a} + S(\tau) , \\ H_{0i} &= \frac{K_0}{2} + \Xi - S(\tau) , \quad \text{und} \quad H_{0a} = \frac{K_0}{2} - \Xi . \end{aligned} \quad (9.1)$$

Bei geschmierten Kontakten kann ein Zusammenhang zwischen dem Spiel  $K_0$  und der Kontaktkraft  $W_0$  unter statischen Bedingungen hergestellt werden. Bei Verwendung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells (Abschnitt 6.1) folgt

$$K_0 = H_{0i}^0 + H_{0a}^0 = H_{ci}^0 - \Delta_i^0 + H_{0a}^0 - \Delta_a^0 = 2 \frac{\sqrt{6}}{W_0} - \frac{4}{\pi} \left[ 1 + \ln \frac{\pi X_0^2}{2 W_0} \right] W_0 . \quad (9.2)$$

## 9.1 Differentialgleichungssystem

Die Bewegungsgleichung für den in Abbildung 9.1 gezeigten Einmassenschwinger mit zwei Kontakten lautet

$$M \ddot{\Xi} + W_K^a - W_K^i = -W(\tau) . \quad (9.3)$$

Dabei wird die innere Kontaktkraft mit  $W_K^i$  und die äußere mit  $W_K^a$  bezeichnet. Das Differentialgleichungssystem muss erweitert werden, falls das dynamische Fluid-Struktur-Modell verwendet wird. Zur Bestimmung der Spalthöhen  $H_{ci}$  und  $H_{ca}$  wird Gleichung (6.4) gemäß

$$\begin{aligned} \dot{H}_{ci} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{H_{ci}} \vartheta_R^1 \vartheta_U^1 + \frac{2\pi}{3} \left( \frac{2\vartheta_R^1}{H_{ci}} \right)^{1/2} \dot{\vartheta}_R^1 - W_{st}^{0i} + \frac{\psi}{\Omega} C_{st}^i \dot{H}_{0i}}{\frac{\psi}{\Omega} C_{st}^i + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R^1}{H_{ci}} \right)^{3/2}} , \\ \dot{H}_{ca} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{H_{ca}} - W_{st}^{0a} + \frac{\psi}{\Omega} C_{st}^a \dot{H}_{0a}}{\frac{\psi}{\Omega} C_{st}^a + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{H_{ca}} \right)^{3/2}} \end{aligned} \quad (9.4)$$

angepasst. Die statischen Strukturkräfte  $W_{st}^{0i} = W_{st}^{0i}(H_{ci} - H_{0i})$  und  $W_{st}^{0a} = W_{st}^{0a}(H_{ca} - H_{0a})$  sind in Gleichung (4.11) angegeben.

## 9.2 Ergebnisse

Bei der Betrachtung eines krafterregten Schwingers mit zwei EHD-Kontakten fallen im Vergleich zum Schwinger mit einem Kontakt zwei wesentliche Unterschiede auf (Abbildung 9.2):

- Die sub- und superharmonischen Resonanzen und damit auch die Periodenverdopp- lungen können in den betrachteten Beispielen nicht beobachtet werden.
- Der Amplitudenverlauf in der Nähe der Hauptresonanz ist bei schwachen Lasten nach rechts gekrümmt, wodurch in diesem Fall auf ein progressives Kraftgesetz geschlossen werden kann. Dennoch liegt bei hohen Lasten weiterhin degressives Verhalten vor.

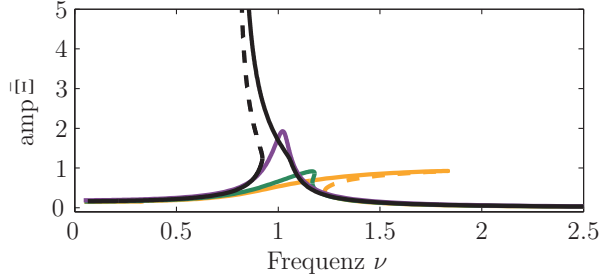


Abbildung 9.2: Kräfteerregung  $\gamma_W = 0.3$  bei gegebenem Spiel  $\bar{K}_0$  und daraus resultierender Vorspannung  $W_0$ ,  $M = 100$ , FS-Modell,  $(W_0, \bar{K}_0)$ : — (0.01, 2), — (0.2, 1.6), — (0.5, 0) — (100, -2)

Das Kraftgesetz kann bei Bewegungen in der Nähe einer Ruhelage Aufschluss geben, ob progressives oder degressives Verhalten vorliegt. Dazu wird – um eine analytische Darstellung zu erhalten – das nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell zugrunde gelegt. Die entsprechende statische Kontaktkraft ist in Gleichung (6.8) angegeben.

Unter der Annahme identischer Kontakte kann die Ruhelage  $\Xi = 0$  direkt aus Gleichung (9.1) abgelesen werden.<sup>1</sup> Die Abweichung von der Ruhelage wird mit  $\Delta\Xi$  bezeichnet, sodass sich

$$H_{0i} = \frac{K_0}{2} + \Delta\Xi, \quad H_{0a} = \frac{K_0}{2} - \Delta\Xi \quad (9.5)$$

ergibt. Die Resultierende  $W_K = W_K^a - W_K^i$  der auf die Masse wirkenden Kräfte hängt also von  $K_0$  und  $\Delta\Xi$  ab (Abbildung 9.3). Die Krümmung von  $W_K(\Delta\Xi)$  kann mithilfe der zweiten Ableitung abgeschätzt werden. Eine kurze Rechnung zeigt, dass für die Ruhelage stets  $d^2W_K/d\Delta\Xi^2|_{\Delta\Xi=0} = 0$  gilt. Deshalb kann das Vorzeichen der Krümmung in der Umgebung von  $\Delta\Xi = 0$  mit der dritten Ableitung bestimmt werden:

$$\left. \frac{d^3W_K}{d\Delta\Xi^3} \right|_{\Delta\Xi=0} = \frac{6\sqrt{6}K_0}{\left(\frac{1}{4}K_0^2 + \frac{4\sqrt{6}}{c_{st}}\right)^{5/2}} \quad \begin{array}{l} > 0 \text{ für } K_0 > 0 \rightarrow \text{progressiv} \\ < 0 \text{ für } K_0 < 0 \rightarrow \text{degressiv} \end{array} \quad (9.6)$$

Damit liegt bei positivem Spiel ( $K_0 > 0$ ) progressives und bei negativem Spiel ( $K_0 < 0$ ) degressives Verhalten vor. In Abbildung 9.3 ist bei hoher Last und negativem Spiel ( $W_0 = 100$ ,

<sup>1</sup> Eine allgemeine Herleitung ist im Anhang B.2 ausgeführt.

$\bar{K}_0 \approx -2$ ) ein Knick bei  $\Delta\bar{\Xi} \approx 1$  zu erkennen.<sup>1</sup> Dieser lässt sich anhand des Hertz'schen Kontaktes erklären, der sich bei  $\Delta\bar{\Xi} = 1$  öffnet. Dadurch wird das degressive Verhalten des EHD-Kontaktes verstärkt.

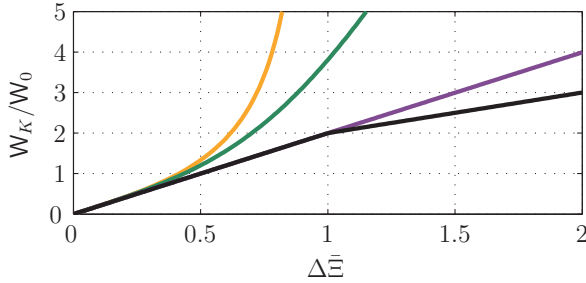


Abbildung 9.3: Resultierende Kraft  $W_K$  der beiden EHD-Kontakte (FS) in Abhängigkeit der Abweichung  $\Delta\bar{\Xi}$  von der Ruhelage, bei der Vorspannungen  $W_0$  beziehungsweise dem Spiel  $\bar{K}_0$ ,  
 $(W_0, \bar{K}_0)$ : — orange (0.01, 2), — grün (0.2, 1.6), — violett (0.5, 0) — schwarz (100, -2)

Bei Fußpunkterregung (Abbildung 9.4) ist das bereits erwähnte progressive Verhalten bei schwachen Lasten besonders ausgeprägt. Die an der Periodenverdopplung abzweigende Lösung weist selbst wieder Periodenverdopplungen auf. Es entsteht letztendlich eine Kaskade an Periodenverdopplungen. Diese ist ein Indikator, dass bei leichten Parameteränderungen chaotisches Verhalten auftritt, das hier jedoch nicht gefunden werden konnte.

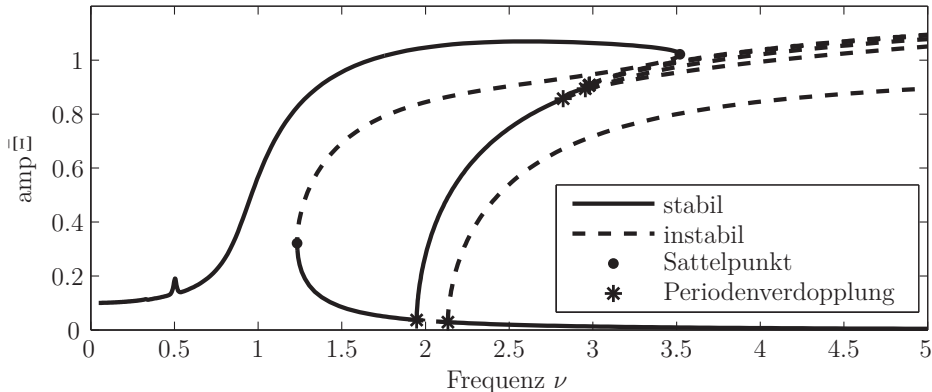


Abbildung 9.4: Fußpunkterregung  $\gamma_S = 0.2$  bei der Vorspannung  $W_0 = 0.01$ ,  $M = 100$ , FS

<sup>1</sup> Entsprechend der in Abschnitt 5.2 eingeführten dimensionslosen Schreibweise gilt  $\Delta\bar{\Xi} = \Delta\Xi/\hat{H}$ .

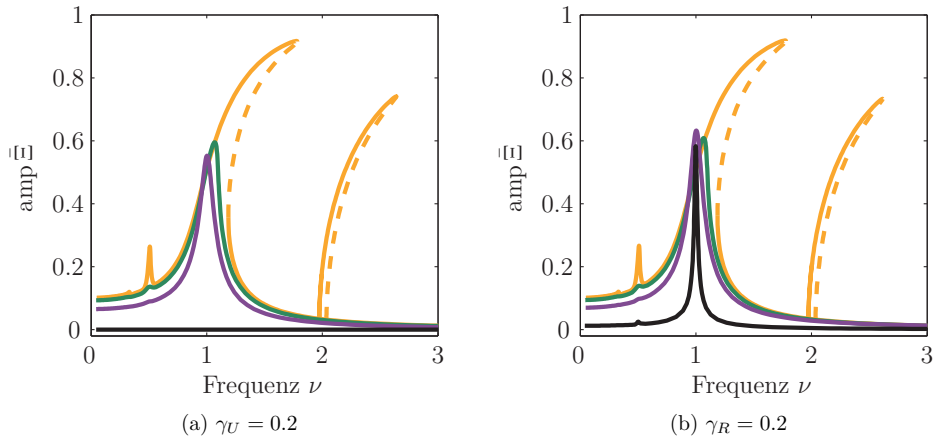


Abbildung 9.5: Parametererregung, bei der Vorspannung  $W_0$  beziehungsweise dem Spiel  $\bar{K}_0$ ,  $M = 100$ , FS-Modell  
 $(W_0, \bar{K}_0)$ : — orange (0.01, 2), — green (0.2, 1.6), — purple (0.5, 0) — black (100, -2)

In Abbildung 9.5 sind Ergebnisse bei Parametererregung durch Schwankungen der hydrodynamischen Geschwindigkeit und des Kontaktradius gezeigt. Wie bei der Kräfteerregung tritt auch hier sowohl progressives als auch degressives Verhalten auf. Bei schwachen Lasten liefert – wie schon beim Schwinger mit einem Kontakt – eine Erregung durch den Radius ähnliche Ergebnisse wie eine Erregung durch die hydrodynamische Geschwindigkeit.



# 10 Rotor in Zylinderrollenlager

In diesem Kapitel wird ein Rotormodell mit Wälzlagerung erstellt, wobei die Kontaktstellen mit dem neu entwickelten Modell für EHD-Linienkontakte aus Kapitel 6 abgebildet werden.<sup>1</sup> Damit wird einerseits die Anwendbarkeit des neuen EHD-Modells demonstriert. Andererseits wird der Einfluss der EHD-Kontakte auf das nichtlineare Schwingungsverhalten untersucht und mit einem Rotor verglichen, dessen Lager mit Hertz'schen Kontakten modelliert werden.

Exemplarisch wird ein symmetrischer Rotor in identischen Zylinderrollenlagern ohne Verkipfung betrachtet, sodass eine ebene Modellierung möglich ist. Vereinfachend wird ein feststehender Außenring und eine mit konstanter Drehzahl rotierende Welle angenommen, die mit dem Innenring fest verbunden ist.<sup>2</sup> Aufgrund der Rotation der Welle wandern die Kontaktstellen mit der Käfigdrehzahl. Bei ausgelenkter Welle – beispielsweise durch eine statische Vorlast – ändern sich die Kontaktsteifigkeiten periodisch, sodass neben Unwuchterregung auch Parametererregung mit der Überrollfrequenz der Wälzkörper auftritt. Dabei werden die qualitativen Unterschiede zwischen Lagern mit EHD- beziehungsweise Hertz-Kontakten aufgezeigt. Es werden unter anderem Lastverteilungen, Eigenkreisfrequenzen und nichtlineares Schwingungsverhalten – insbesondere chaotische Lösungen – betrachtet.

## 10.1 Geometrie und Kinematik

Für geometrische und kinematische Zusammenhänge des Zylinderrollenlagers werden spielfreie Kontakte und reines Rollen der  $N$  Wälzkörper angenommen. Die Wälzkörper mit dem Radius  $r_r$  rotieren mit der relativen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_r$  (Abbildung 10.1a). Zusätzlich bewegen sich deren Schwerpunkte mit der auf ein Inertialsystem bezogenen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_c$  des Käfigs. Der Außenring mit dem Radius  $r_a$  ist fest mit der Umgebung verbunden. Der Innenring (Radius  $r_i$ ) rotiert mit der konstanten Wellendrehzahl  $\omega$ . Die Position des  $k$ -ten Wälzkörpers wird mit dem Winkel  $\theta_k$  beschrieben, wodurch in erster Näherung auch die Positionen der entsprechenden Kontaktstellen gegeben sind.<sup>3</sup> Die Kontakte zwischen Innenring und Wälzkörper werden mit dem reduzierten Radius  $R_i$  und die Kontakte zwischen Außenring und Wälzkörper mit  $R_a$  charakterisiert. Es gelten die Beziehungen

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_r}, \quad \frac{1}{R_a} = \frac{1}{r_r} - \frac{1}{r_a}. \quad (10.1)$$

---

<sup>1</sup> Eine Anpassung des Kontaktmodells an die Besonderheiten des Wälzlagers erfolgt in Anhang B.

<sup>2</sup> Daher werden die Bezeichnungen *Innenring* und *Welle* weitgehend synonym verwendet.

<sup>3</sup> Die exakte Position der Kontakte wird durch die Verschiebung der Welle beeinflusst.

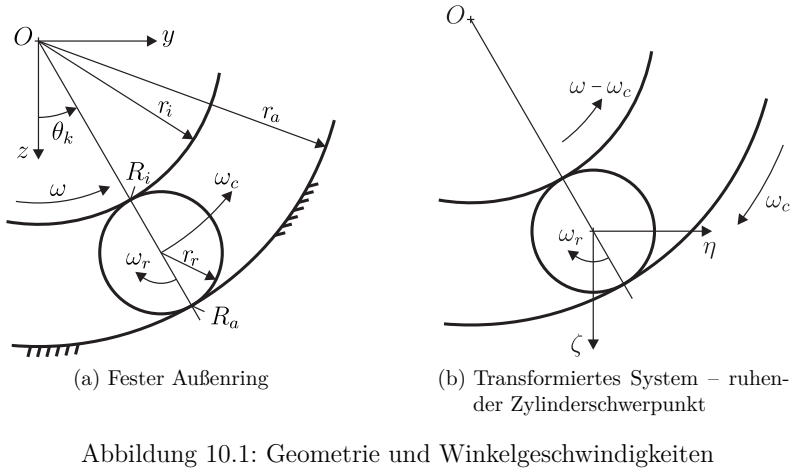


Abbildung 10.1: Geometrie und Winkelgeschwindigkeiten

Mit der Festlegung  $R_i = R_0$  wird der reduzierte Radius am Innenringkontakt als Bezugsgröße für die dimensionslose Schreibweise aus Abschnitt 2.4 gewählt. Der äußere Kontakt wird mit dem Verhältnis

$$\vartheta_R = \frac{R_a}{R_i} = \frac{r_a}{r_i} \quad (10.2)$$

beschrieben.<sup>1</sup> In Abbildung 10.1b ist ein Wälzkörper des Lagers im mitbewegten  $\eta, \zeta$ -System dargestellt. Dieses erleichtert die Formulierung der hydrodynamischen Geschwindigkeiten:  $U_i = (\omega - \omega_c)r_i + \omega_r r_r$  und  $U_a = \omega_c r_a + \omega_r r_r$ . Beide Geschwindigkeiten sind unter Beachtung der Rollbedingung  $(\omega - \omega_c)r_i = \omega_r r_r = \omega_c r_a$  identisch, sodass im Folgenden

$$U = U_i = U_a = \frac{2\vartheta_R}{\vartheta_R + 1} \omega r_i \quad (10.3)$$

verwendet wird. Aus der Rollbedingung ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit des Käfigs in Abhängigkeit der Wellendrehzahl:

$$\omega_c = \frac{\omega}{\vartheta_R + 1} \quad (10.4)$$

<sup>1</sup> Die Größe  $\vartheta_R$  wird bereits in Gleichung (2.34) definiert. Sie kann dort zeitabhängig sein und stellt den Bezug zwischen einem Referenzradius und dem aktuell vorliegenden Radius her:  $\vartheta_R = R/R_0$ . Im Falle des Wälzlagers sind die reduzierten Radien am Innen- und am Außenringkontakt zwar konstant, sie sind jedoch verschieden. Streng genommen müssten  $\vartheta_{R_i}$  und  $\vartheta_{R_a}$  eingeführt werden, sodass  $R_i = \vartheta_{R_i} R_0$  und  $R_a = \vartheta_{R_a} R_0$  gelten würde. Da jedoch als Bezugsgröße  $R_i = R_0$  gewählt wird, folgt  $\vartheta_{R_i} = 1$  und vereinfachend wird  $\vartheta_{R_a} = \vartheta_R$  gesetzt, vergleiche Anhang B.1.



Die Wälzkörperanzahl  $N$  ist in typischen Lagerkatalogen üblicherweise nicht angegeben – sie lässt sich jedoch geometrisch nach oben abschätzen:

$$N \leq \frac{2\pi(r_i + r_r)}{2r_r} = \pi \frac{\vartheta_R + 1}{\vartheta_R - 1}. \quad (10.5)$$

## 10.2 Differentialgleichungssystem

Die Bewegungsgleichungen der Wälzkörper und der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Welle werden in diesem Abschnitt formuliert. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_c$  des Käfigs wird geometrisch vorgegeben, sodass jeder Wälzkörper nur einen radialen Freiheitsgrad besitzt. Vereinfachend wird ein ebenes Rotormodell betrachtet.

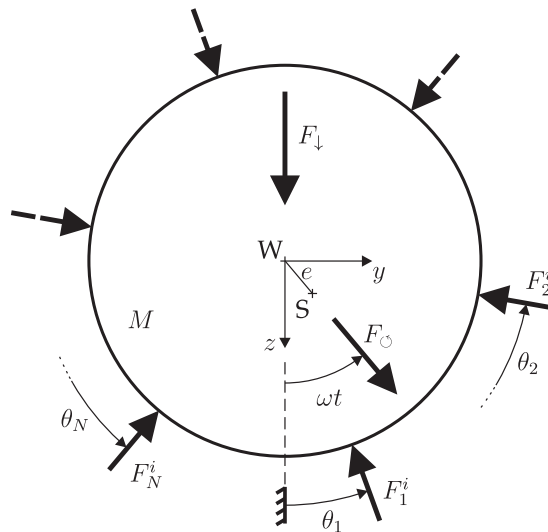


Abbildung 10.2: Innenring mit Welle

Der Innenring und die Welle bilden eine Einheit der Masse  $M$ . Die Lage des Gesamtschwerpunktes  $S$  wird mit den Koordinaten  $y$  und  $z$  beschrieben. Auf den Innenring wirken, wie in Abbildung 10.2 dargestellt, die Kontaktkräfte  $F_k^i$  ( $k = 1 \dots N$ ). Dabei ist  $F_k^i$  die Kraft zwischen dem Innenring und dem  $k$ -ten Wälzkörper. Die Angriffsstelle und damit auch die Richtung der jeweiligen Kontaktnormalkraft wird bei konstanter Wellendrehzahl in erster Näherung durch den Winkel

$$\theta_k(t) = \frac{2\pi}{N}(k-1) + \omega_c t \quad (10.6)$$

ausgedrückt. Im Kontakt wirken ausschließlich Normalkräfte in radiale Richtung; Reibungskräfte werden vernachlässigt. An der Welle greifen zusätzlich eine mitrotierende Kraft  $F_\odot$  – beispielsweise infolge einer Unwucht – und eine raumfeste Last  $F_\downarrow$  in  $z$ -Richtung

an. Erstere kann für eine reine Unwuchtanregung mithilfe der Exzentrizität  $e$ , die den Abstand zwischen Wellenschwerpunkt S und Wellendurchstoßpunkt W darstellt, ausgedrückt werden:

$$F_{\odot} = Me\omega^2 . \quad (10.7)$$

Die Summen der Kontaktkräfte in  $y$ - und  $z$ -Richtung lauten

$$F_y = - \sum_{k=1}^N F_k^i \sin \theta_k , \quad F_z = - \sum_{k=1}^N F_k^i \cos \theta_k . \quad (10.8)$$

Damit lassen sich die Bewegungsdifferentialgleichungen der Welle formulieren:

$$\begin{aligned} M\ddot{y} - F_y &= F_{\odot} \sin \omega t , \\ M\ddot{z} - F_z &= F_{\downarrow} + F_{\odot} \cos \omega t . \end{aligned} \quad (10.9)$$

Die Fußpunktverschiebung der Kontaktstellen am Innenring in radiale Richtung infolge einer Verschiebung der Welle kann durch

$$s_k = y \sin \theta_k + z \cos \theta_k \quad \text{mit} \quad \dot{s}_k = (\dot{y} - z\omega_c) \sin \theta_k + (\dot{z} + y\omega_c) \cos \theta_k \quad (10.10)$$

genähert werden. Die auf die Wälzkörper wirkende Zentrifugalkraft wird mit

$$F_{zf} = m(r_i + r_r)\omega_c^2 \quad (10.11)$$

approximiert. Damit gilt analog zu Gleichung (9.3) die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\xi}_k + F_k^a - F_k^i = F_{zf} \quad (10.12)$$

für den  $k$ -ten Wälzkörper. Dabei wird mit  $F_k^a$  die Kontaktkraft zwischen Außenring und Wälzkörper und mit  $\xi$  die radiale Position des Wälzkörpers bezeichnet. Die Verwendung des dynamischen Fluid-Struktur-Modells erfordert zusätzlich die Gleichungen (B.2) zur Bestimmung der inneren Variablen  $h_{ci}$  und  $h_{ca}$ .

Bei Vernachlässigung der Wälzkörpermasse ( $m = 0$ ) vereinfacht sich Gleichung (10.12) und die Kontaktkräfte können, wie im Anhang B.2 ausgeführt, weiter vereinfacht werden.

## 10.3 Rotor- und Lagerdaten

Das Wälzlager NU1012-M1 der Schaeffler AG [94] wird als Grundlage für die numerischen Beispiele verwendet. Es besitzt den Innendurchmesser  $d = 60$  mm und damit gemäß der Lagerluftgruppe CN nach DIN 620 eine radiale Lagerluft von  $40 \dots 70 \mu\text{m}$ . Die Länge der Wälzkörper ist nicht gegeben und wird mit der Lagerbreite  $B = 18$  mm abgeschätzt. Die dynamische Tragzahl  $C_r = 52$  kN erlaubt die maximale raumfeste Last  $\max F_{\downarrow} \approx C_r/B \approx 2.9 \cdot 10^6$  N/m. Zur Bestimmung des Wälzkörperradius wird Spielfreiheit zugrunde gelegt. Die Masse eines Wälzkörpers wird mittels der Dichte von Stahl ( $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>) mit  $m \approx 0.4$  kg/m abgeschätzt. Für den Rotor wird die Masse 180 kg

angenommen, sodass  $M \approx 5000 \text{ kg/m}$  gilt. Alle Werte für den Rotor und das Lager sind in Tabelle 10.1 aufgeführt und sind – falls nicht anders angegeben – den Simulationen zugrunde gelegt.

$r_i$	35 mm	Radius der Lauffläche am Innenring
$r_a$	43 mm	Radius der Lauffläche am Außenring
$N$	12	Wälzkörperanzahl
$\kappa_0$	0, 5, 30 $\mu\text{m}$	halbe radiale Lagerluft
$\eta_0$	0.01 Pa s	Viskosität
$\psi$	0, 0.02	Strukturdämpfung
$E$	$210 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$	Elastizitätsmodul
$\nu$	0.3	Querkontraktionszahl
$x_0^i/R_i$	0.74	Integrationskonstanten <sup>1</sup>
$x_0^a/R_a$	2	
$F_\downarrow$	$10^3 \dots 10^6 \text{ N/m}$	raumfeste Last
$e$	0, 1 $\mu\text{m}$	Exzentrizität
$m$	0.4 kg/m	Wälzkörpermasse
$M$	5000 kg/m	Rotormasse

Tabelle 10.1: Rotor- und Lagerdaten

## 10.4 Lastverteilung

Wälzlager mit EHD- beziehungsweise Hertz-Kontakten ergeben unterschiedliche Lastverteilungen (Abbildung 10.3). Der häufig vorkommende Fall von spielbehafteten Zylinderrollenlagern führt dazu, dass bei Hertz'schen Kontakten eine lastfreie Zone auftritt, sodass in diesem Bereich die Kontaktkräfte verschwinden. Hingegen wird bei vollgeschmierten EHD-Kontakten stets ein Fluidfilm aufgebaut. Dadurch treten auch in der „lastfreien“ Zone von null verschiedene Kontaktkräfte auf. Dies kann dazu führen, dass die maximale Kontaktkraft sinkt, da die Wälzkörper am Rand der „lastfreien“ Zone die Wellenlast mittragen. Jedoch kann die maximale Kontaktkraft im EHD-Lager mit anwachsender Drehzahl auch steigen und dadurch größer als die maximale Kontaktkraft im Hertz-Lager werden.

Aufgrund der mit der Käfiggeschwindigkeit wandernden Kontaktstellen variiert bei ausgelenkter Welle die Steifigkeit des Wälzlagers. Die damit vorliegende Parametererregung führt in Verbindung mit der statischen Vorlast zusätzlich zu Fremdanregung,<sup>2</sup> sodass das System keine Ruhelage besitzt (vergleiche Anhang C). Dennoch kann zu jedem beliebigen Zeitpunkt eine quasistatische Lösung gefunden werden, bei der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen null sind.

<sup>1</sup> Dem vereinfachten EHD-Kontaktmodell liegt zur Bestimmung der elastischen Deformation ein Halbraummodell zugrunde. Die dabei auftretenden *Integrationskonstanten* werden unter anderem durch die Randbedingungen am Außen- und am Innenring festgelegt (Abschnitt 4.2).

<sup>2</sup> Bei ausgelenkter Welle werden infolge der Rotation des Käfigs die Fußpunkte der Wälzkörper angeregt. Die Fußpunkterregung stellt ebenso eine Fremderregung dar, wird jedoch im Folgenden nicht mehr explizit erwähnt.

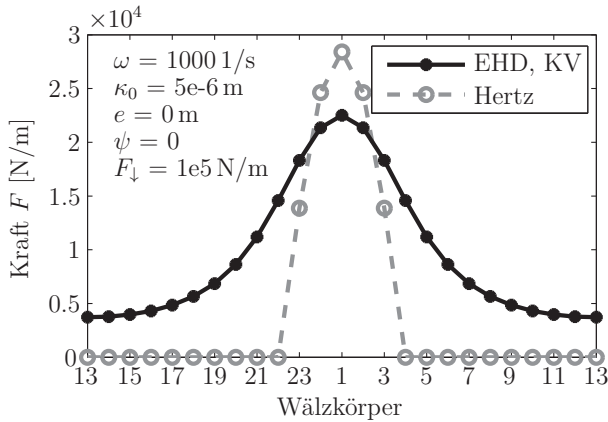


Abbildung 10.3: Lastverteilung im Wälzlager bei vorgegebener Last  $F_{\downarrow} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  und unter Vernachlässigung der Wälzkörpermasse ( $m = 0$ ),  $N = 24$

Die Lastverteilung in Abbildung 10.3 wird für eine vorgegebene Last  $F_{\downarrow} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$  bestimmt, wobei quasistatische Lösungen zugrunde liegen. Die Zentrifugalkräfte der Wälzkörper und Dämpfungseinflüsse werden vernachlässigt. Der Zeitpunkt ist dabei so gewählt, dass  $\theta_1 = 0$  gilt.

## 10.5 Abschätzung der Eigenkreisfrequenzen

Die beim wälzgelagerten Rotor auftretenden Eigenkreisfrequenzen werden durch die Kontaktmodellierung beeinflusst. Zu deren Bestimmung muss ein geeigneter Linearisierungspunkt gewählt werden. Dazu werden – wie bereits in Abschnitt 10.4 beschrieben – quasistatische Lösungen genutzt, wobei insbesondere alle Dämpfungseinflüsse vernachlässigt werden.

Des Weiteren wird die Wälzkörpermasse vernachlässigt ( $m = 0$ ), sodass zur Bestimmung der Kontaktkräfte das in Anhang B.2 beschriebene Modell verwendet werden kann. Dabei liegt letztendlich das nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell zugrunde.

Die verbleibenden Freiheitsgrade sind diejenigen der Welle, wobei die Differentialgleichungen (10.9) nur schwach gekoppelt sind. Dadurch lässt sich eine Eigenkreisfrequenz mit der  $y$ - und eine mit der  $z$ -Richtung assoziieren.

### 10.5.1 Rotor in Lagern mit verschwindender Wälzkörpermasse

Die Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{0y}$  und  $\omega_{0z}$  des Rotors sind in Abbildung 10.4 in Abhängigkeit der Vorlast  $F_{\downarrow}$  dargestellt. Dabei werden Wälzlager mit EHD- beziehungsweise Hertz-Kontakten verwendet, wobei die Wälzkörpermassen vernachlässigt werden.

Zunächst werden die Eigenkreisfrequenzen für die Wälzkörperanordnungen  $\theta_1 = 0$  und  $\theta_1 = \pi/N$  diskutiert. Der treppenartige Verlauf beim Hertz'schen Modell entsteht, da mit

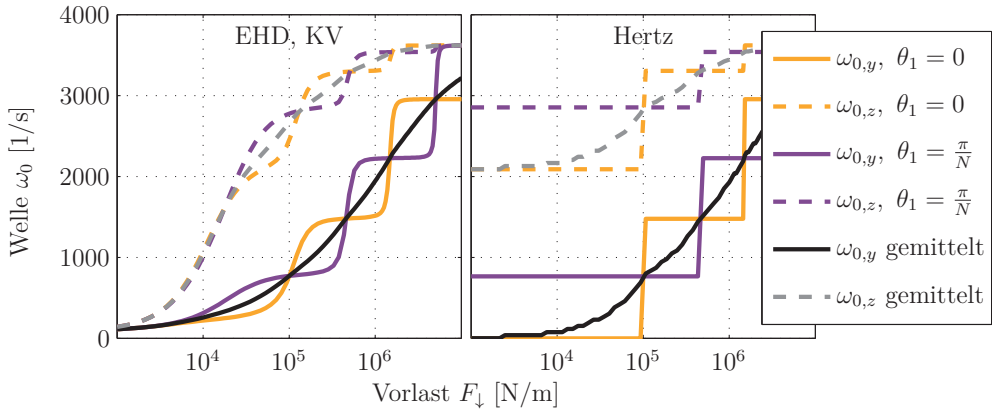


Abbildung 10.4: Eigenkreisfrequenzen des Rotors über der Vorlast,  $\omega = 1000 \text{ 1/s}$ ,  $\kappa_0 = 30 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\psi = 0$ ,  $m = 0$

zunehmender Last eine höhere Anzahl an Wälzkörpern in Kontakt kommt. Da der Abschätzung der linearisierte Hertz'sche Kontakt zugrunde liegt, treten im Allgemeinen auch für kleine Lasten deutlich von null verschiedene Eigenkreisfrequenzen auf. Eine Ausnahme liegt bei der Wälzkörperanordnung  $\theta_1 = 0$  vor: Hierbei steht für die Lasten  $F_\downarrow < 10^5 \text{ N/m}$  ausnahmslos Wälzkörper 1 in Kontakt. Dadurch verschwindet die Steifigkeit in horizontaler Richtung und damit auch die mit der horizontalen Bewegung verknüpfte Eigenkreisfrequenz.

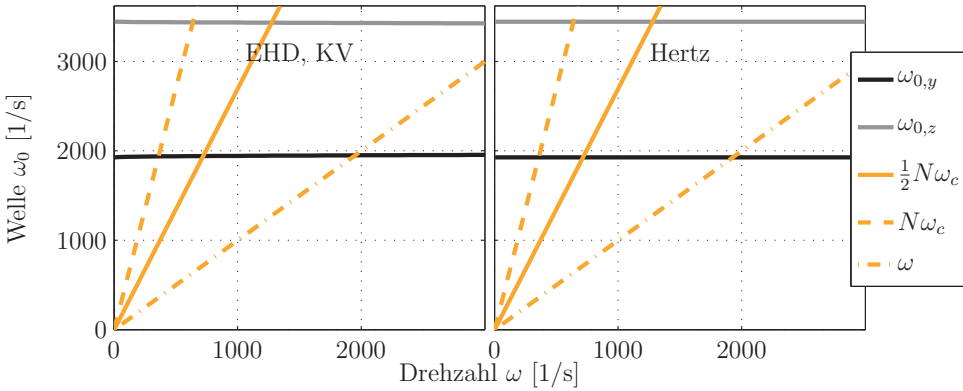
EHD-Kontakte weisen im Allgemeinen unter den in dieser Arbeit getroffenen Annahmen stets eine nicht verschwindende Kontaktkraft auf, wodurch die einzelnen Stufen geglättet werden. Bei der Last  $F_\downarrow = 0$  tritt in allen Kontakten die gleiche Kraft auf, die durch die hydrodynamische Geschwindigkeit und damit letztendlich durch die Wellendrehzahl bestimmt wird.<sup>1</sup> Die dabei auftretenden Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{0,y}$  und  $\omega_{0,z}$  sind identisch und definieren für abnehmende Lasten eine Grenzfrequenz.

Die für den Betrieb relevanten Eigenkreisfrequenzen werden zwischen den Grenzen erwartet, die mit  $\theta_1 = 0$  beziehungsweise  $\theta_1 = \pi/N$  bestimmt werden. Mittelungen der Eigenkreisfrequenzen über  $\theta = 0 \dots \pi/N$  liefern entsprechende Näherungen. Sie sind ebenfalls in Abbildung 10.4 eingezeichnet und bilden die Grundlage für folgende Diskussionen.

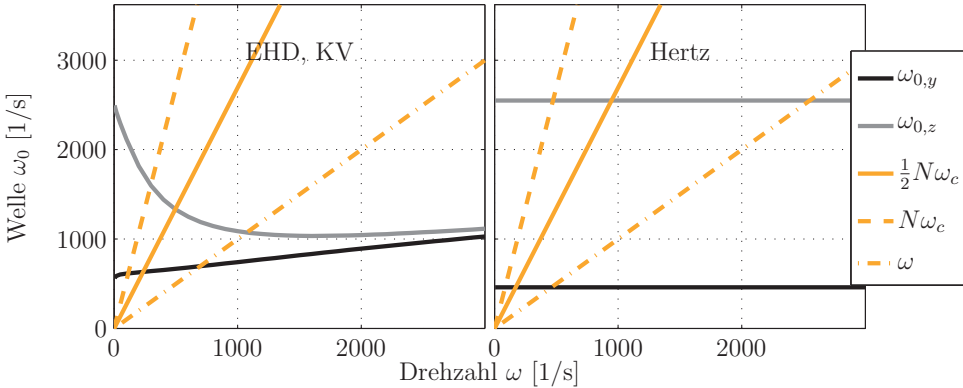
Abbildung 10.5 zeigt den Verlauf der gemittelten Eigenkreisfrequenzen als Funktion der Wellendrehzahl. Wie zu erwarten ist, ergeben Wälzlager mit EHD- beziehungsweise Hertz-Kontakten bei hohen Lasten ähnliche Eigenkreisfrequenzen (Abbildung 10.5a). Sie sind auch beim Lager mit EHD-Kontakten quasi konstant.

Bei kleinen Lasten sind – wie Abbildung 10.5b zeigt – die Eigenkreisfrequenzen bei Hertz'schen Kontakten niedriger als zuvor, da weniger Wälzkörper in Kontakt stehen. Der Einfluss der EHD-Kontakte ist hier besonders ausgeprägt: Die mit der  $z$ -Richtung

<sup>1</sup> Es gilt  $F_\odot = 0 \text{ N/m}$  und  $e = 0 \text{ m}$



(a)  $F_{\downarrow} = 10^6 \frac{N}{m}$ ,  $\kappa_0 = 30 \mu m$



(b)  $F_{\downarrow} = 10^4 \frac{N}{m}$ ,  $\kappa_0 = 5 \mu m$

Abbildung 10.5: Gemittelte Eigenkreisfrequenzen der Welle über der Drehzahl,  $\psi = 0$ ,  $m = 0$

verknüpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_{0,z}$  fällt zunächst mit steigender Drehzahl ab. Dies lässt sich anhand der abnehmenden maximale Steifigkeit beziehungsweise Kontaktkraft erklären (Abbildung 10.6). Sie kann sinken, da mit wachsender hydrodynamischer Geschwindigkeit die Normalkräfte der EHD-Kontakte außerhalb des Zentrums steigen und zunehmend die statische Vorlast mittragen. Der erneute Anstieg der Eigenkreisfrequenz  $\omega_{0,z}$  beziehungsweise der entsprechenden Steifigkeit ab  $\omega = 1600 \text{ 1/s}$  kann mit der weiteren Zunahme aller Kontaktkräfte außerhalb des Zentrums begründet werden. Erst bei sehr hohen Drehzahlen ( $\omega = 10^4 \text{ 1/s}$ ) ist auch bei Wälzkörper 1 eine leicht steigende Kontaktkraft zu beobachten. Der Anstieg von  $\omega_{0,y}$  ist auf die stets anwachsenden Kontaktkräfte in  $y$ -Richtung zurückzuführen.

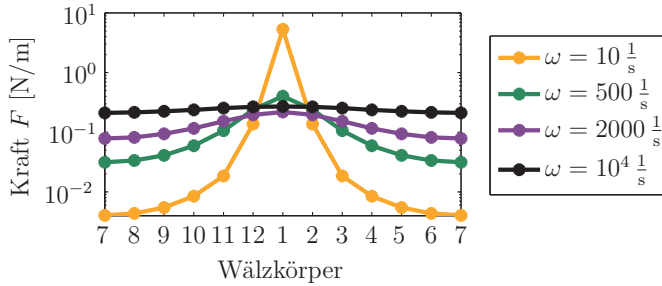


Abbildung 10.6: Lastverteilungen im Lager mit EHD-Kontakten (KV), bei unterschiedlichen Wellendrehzahlen  $\omega$ ,  $F_{\downarrow} = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $\kappa_0 = 5 \mu\text{m}$

### 10.5.2 Einfluss der Wälzkörper

Der Einfluss der Wälzkörper auf das Spektrum der Eigenkreisfrequenzen wird in diesem Abschnitt abgeschätzt. Dazu werden – wie im vorigen Abschnitt – die Kontaktkräfte des Modells aus Anhang B.2 genutzt, um quasistatische Wellenpositionen zu bestimmen. Für diese Positionen können mittels Gleichung (B.5a) die Steifigkeiten der inneren und äußeren Kontakte berechnet werden. Daraus ergeben sich für eine festgehaltene Wellenposition  $N$  Eigenkreisfrequenzen  $\Omega_{0,KV}^{WK}$  infolge der Wälzkörper:

$$\Omega_{0,KV}^{WK} = \sqrt{\frac{C_{KV}^i + C_{KV}^a}{M}}. \quad (10.13)$$

Dabei ist  $M$  die dimensionslose Masse eines Wälzkörpers. Beim Modell mit Hertz'schen Kontakten existieren ausschließlich die beiden Eigenkreisfrequenzen  $\Omega_{0,H,1}^{WK} = 0$  und  $\Omega_{0,H,2}^{WK} = \sqrt{(C_{st}^i + C_{st}^a)/M}$ . Diese sind aufgrund der Annahme einer linearen Strukturkraft drehzahl- und belastungsunabhängig. Bei EHD-Kontakten liegen die Eigenkreisfrequenzen der Wälzkörper zwischen den durch die Hertz'sche Theorie vorgegebenen Grenzen.

Mit steigender hydrodynamischer Geschwindigkeit, die proportional zur Drehzahl ist, nimmt bei gegebener Wälzkörperposition die Kraft im EHD-Kontakt zu. Dadurch erhöhen sich die Eigenkreisfrequenzen der Wälzkörper bei festgehaltener Wellenposition und, wie Abbildung 10.7 zeigt, auch bei konstanter Last  $F_{\downarrow}$ . Die in Abbildung 10.7b mit steigender Drehzahl abfallenden Eigenkreisfrequenzen können anhand der Lastverteilung aus Abbildung 10.6 erklärt werden (vergleiche Abschnitt 10.5.1).

Basierend auf dieser Analyse wird bei der Berücksichtigung von EHD-Kontakten ein breiteres Spektrum der auf die Wälzkörper zurückführbaren Eigenkreisfrequenzen erwartet.

## 10.6 Amplitudenverläufe

Hohe Auslenkungen der Welle oder der Wälzkörper können zu störenden Geräuschen oder zu Systemversagen führen. In diesem Abschnitt wird deshalb besonders auf die Amplitudenverläufe eingegangen. Dabei wird stets ein Rotor ohne Unwucht diskutiert.

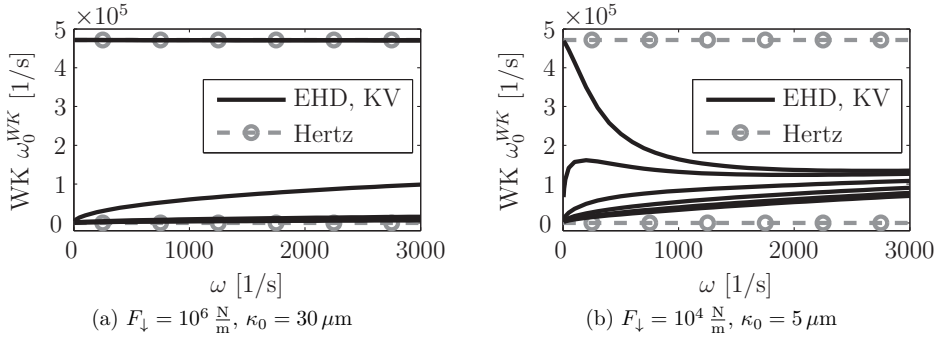


Abbildung 10.7: Eigenkreisfrequenzen  $\omega_0^{\text{WK}}$  der Wälzkörper ( $N = 12$ ) über der Wellendrehzahl  $\omega$

### 10.6.1 Resonanzen und Parameterinstabilitäten

In Abbildung 10.8 sind die extremen Ausschläge eines Rotors in EHD-Lagern gezeigt, auf den die vertikale Last  $F_{\downarrow} = 10^6 \text{ N/m}$  wirkt. Zur weiteren Diskussion ist das Campbell-Diagramm aus Abbildung 10.5a in leicht modifizierter Form hinzugefügt. Damit lassen sich die auftretenden Resonanzen und Parameterinstabilitäten des Rotors in Lagern mit EHD-Kontakten erklären:

- Zunächst werden die Schnittpunkte der halben Überrollfrequenz  $\frac{1}{2}N\omega_c$  mit den Eigenkreisfrequenzen  $\omega_{0y}$  und  $\omega_{0z}$  betrachtet, die bei  $\omega \approx 725 \text{ 1/s}$  und  $\omega \approx 1275 \text{ 1/s}$  liegen. In Analogie zum Mathieu-Schwinger (Anhang C) entsprechen diese Frequenzen den Parameterinstabilitäten erster Ordnung. Instabile Lösungen lassen sich mit der Brute-Force-Methode nicht bestimmen. Dennoch kann beispielsweise bei  $\omega \approx 725 \text{ 1/s}$  die  $y$ -Komponente der vermutlich instabilen Lösung im Amplitudengang mit hoher Wahrscheinlichkeit durch die Lösungen links und rechts von  $\omega \approx 725 \text{ 1/s}$  interpoliert werden. Daher kann an dieser Stelle von einer Parameterinstabilität ausgegangen werden.

In der Nähe der Parameterinstabilität bei  $\omega \approx 1275 \text{ 1/s}$  weist der Amplitudenverlauf auf quasiperiodische oder chaotische Lösungen hin. Diese Lösungstypen werden in Abschnitt 10.7 detailliert untersucht.

- Der Schnittpunkt zwischen  $N\omega_c$  und  $\omega_{0y} + \omega_{0z}$  liegt bei  $\omega \approx 1001 \text{ 1/s}$ . An dieser Stelle kann im Allgemeinen eine weitere Parameterinstabilität erster Ordnung auftreten, was in diesem Fall durch den Amplitudenverlauf bestätigt wird. Nayfeh et al. sprechen in diesem Zusammenhang von einer *Kombinationsresonanz* [77].
- Infolge der statischen Vorlast tritt in Verbindung mit den zeitlich veränderlichen Steifigkeiten zusätzlich zur offensichtlichen Parametererregung auch eine Krafterregung auf, obwohl ein unwuchtfreier Rotor angenommen wird. Dies wird anhand der Mathieu-Gleichung in Anhang C erklärt, wobei die statische Vorlast einer Inhomogenität der Mathieu-Gleichung entspricht. Die Frequenz der Krafterregung ist



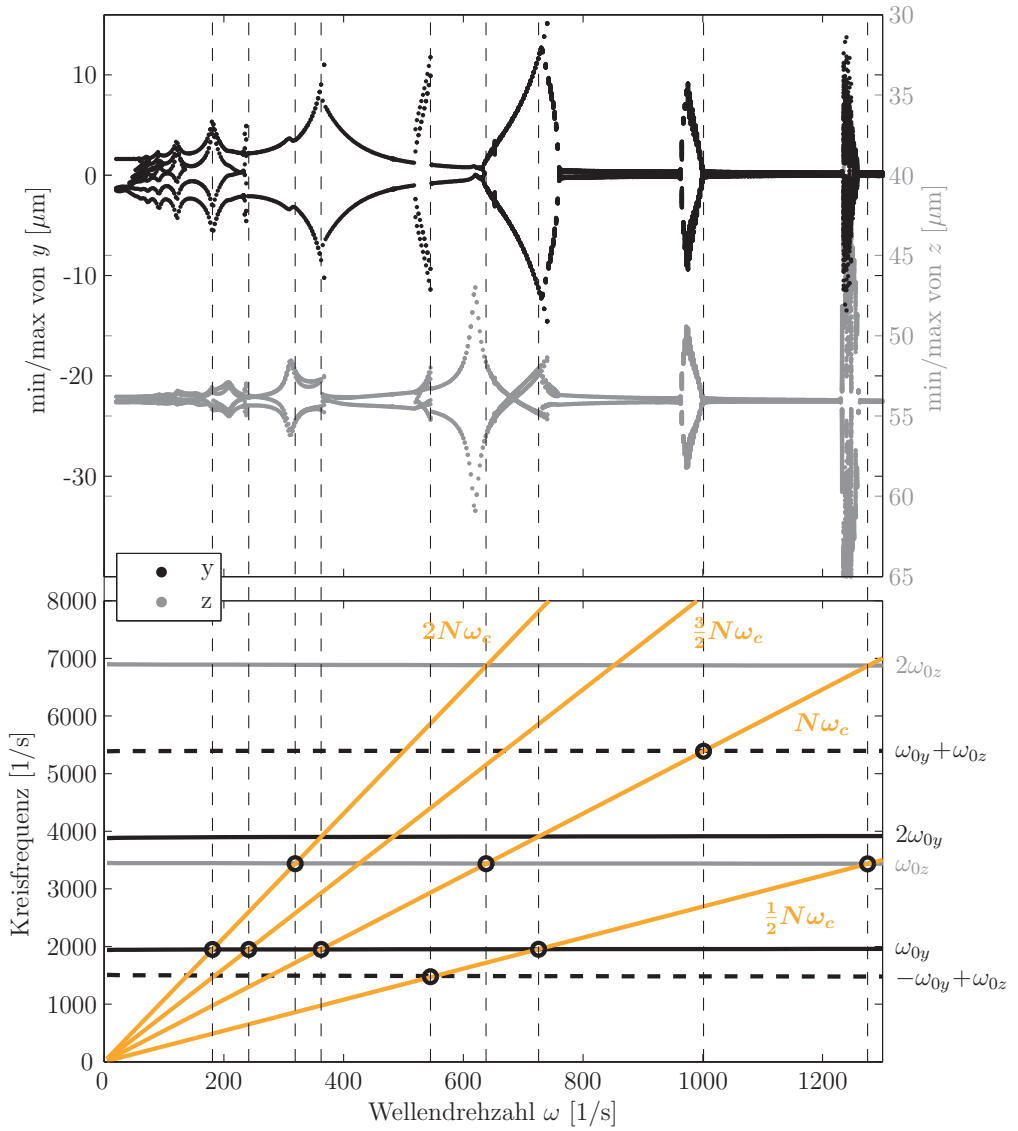


Abbildung 10.8: Auslenkungen der Welle und Campbell-Diagramm bei Lagern mit EHD-Kontakten,  $F_{\downarrow} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $e = 0$ ,  $\kappa_0 = 30 \mu\text{m}$

identisch mit der Überrollfrequenz  $N\omega_c$ . Aufgrund der Nichtlinearität sind infolge der Kraftanregung Resonanzen an den Schnittstellen von  $N\omega_c$  mit Linearkombinationen der Eigenkreisfrequenzen zu erwarten [77]. Die in Abbildung 10.5a eingezeichneten Schnittstellen liegen bei  $\omega \approx 362 \text{ 1/s}$ ,  $638 \text{ 1/s}$ ,  $1001 \text{ 1/s}$ .

Bei den Frequenzen  $\omega \approx 362 \text{ 1/s}$ ,  $638 \text{ 1/s}$  können nicht nur Resonanzen sondern ebenso Parameterinstabilitäten zweiter Ordnung auftreten. Das Gebiet einer Parameterinstabilität wird mit zunehmender Ordnung beziehungsweise steigender Dämpfung immer kleiner. Daher ist es nicht verwunderlich, dass bei  $\omega \approx 362 \text{ 1/s}$  und  $\omega \approx 638 \text{ 1/s}$  der Charakter einer klassischen Resonanz überwiegt (vergleiche Anhang C).

Wie im vorigen Punkt beschrieben, liegt bei  $\omega \approx 1001 \text{ 1/s}$  ein charakteristischer Amplitudenverlauf einer Parameterinstabilität vor. Diese Instabilität ist von erster Ordnung und dominiert offensichtlich das Rotorverhalten. Eine infolge der Krafterregung mögliche Resonanz ist nicht zu erkennen.

- Die weiteren Schnittpunkte von  $nN\omega_c$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) mit Eigenkreisfrequenzen werden als *superharmonische Resonanzen* bezeichnet. Exemplarisch sind die Schnittpunkte von  $2N\omega_c$  mit  $\omega_{0y}$  beziehungsweise  $\omega_{0z}$  eingezeichnet ( $\omega \approx 180 \text{ 1/s}$ ,  $320 \text{ 1/s}$ ). Weitere superharmonische Resonanzen sind in der  $y$ -Komponente bei  $\omega \approx 120 \text{ 1/s}$  und  $\omega \approx 90 \text{ 1/s}$  und in der  $z$ -Komponente bei  $\omega \approx 207 \text{ 1/s}$  sichtbar.
- Eine Parameterinstabilität dritter Ordnung, deren Frequenz sich mit  $\frac{3}{2}N\omega_c = \omega_{0y}$  bestimmen lässt, ist in der  $y$ -Komponente deutlich erkennbar.
- Am Schnittpunkt von  $\frac{1}{2}N\omega_c$  mit  $-\omega_{0y} + \omega_{0z}$  liegt vermutlich ebenfalls eine Parameterinstabilität vor.

Beim betrachteten Beispiel ( $F_{\downarrow} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ) liefern die Rotoren mit EHD- beziehungsweise Hertz-Kontakten über große Drehzahlbereiche vergleichbare Ergebnisse (Abbildung 10.9). Eine Modellierung der Lager nach Hertz gibt alle Resonanzen und Instabilitäten eines Modells mit EHD-Lagern wieder, liefert darüber hinaus jedoch noch weitere.

Bei kleinen Lasten ( $F_{\downarrow} = 10^4 \text{ N/m}$ ) sind die Resonanzen des Rotors mit EHD-Lager deutlich weniger ausgeprägt als zuvor (Abbildung 10.10). Die Hauptresonanzen bei  $\omega \approx 112 \text{ 1/s}$  und  $\omega \approx 282 \text{ 1/s}$  bezüglich der  $y$ - beziehungsweise  $z$ -Richtung lassen sich anhand des Campbell-Diagramms 10.5b erklären. Bei  $\omega \approx 55 \text{ 1/s}$  tritt eine superharmonische Resonanz auf. Parameterinstabilitäten sind nicht zu identifizieren. Das Lagermodell mit Hertz'schen Kontakten zeigt erwartungsgemäß ein völlig anderes Verhalten: Wesentlich höhere Amplituden und ein Vielfaches an Resonanzen werden vorhergesagt. Das Lager mit Hertz'schen Kontakten erscheint daher bei kleinen Lasten ungeeignet zur Beschreibung von geschmierten Lagern.

## 10.6.2 Ruhender Rotor und Sprungphänomene

Aufgrund der sich mit dem Käfig mitbewegenden Kontaktstellen kann im Wälzlagersystem Parametererregung auftreten. Da zusätzlich eine Vorlast aufgeprägt wird, liegt Fremderregung vor und es existiert keine Ruhelage des Gesamtsystems. Dennoch kann Abbildung

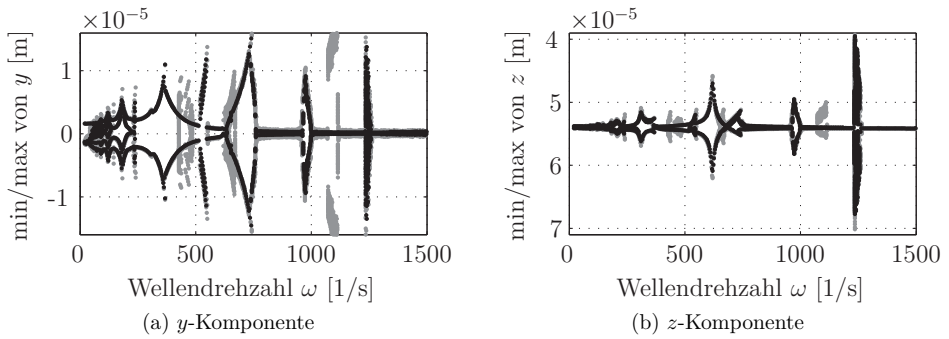


Abbildung 10.9: Vergleich der Wellenauslenkungen bei Lagern mit EHD- beziehungsweise Hertz-Kontakten,  $F_{\downarrow} = 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $e = 0$ ,  $\kappa_0 = 30 \mu\text{m}$ , ● EHD (FS), ● Hertz

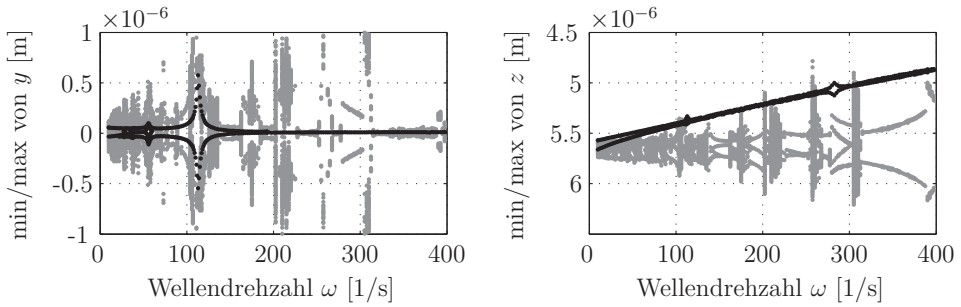


Abbildung 10.10: Auslenkungen der Welle bei kleiner Last  $F_{\downarrow} = 10^4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $e = 0$ ,  $\kappa_0 = 5 \mu\text{m}$ .  
● EHD (FS), ● Hertz

10.11 entnommen werden, dass der Rotor in EHD-Lagern bei der Last  $F_{\downarrow} = 10^3 \text{ N/m}$  und niedrigen Drehzahlen  $\omega \lesssim 350 \text{ 1/s}$  im Rahmen der numerischen Genauigkeit ruht, obwohl die Wälzkörper periodische oder quasiperiodische Bewegungen ausführen (Hochlauf in Abbildung 10.12b). Der ruhende Rotor wird durch das hier vorliegende Lagerspiel  $\kappa_0 = 0 \text{ m}$

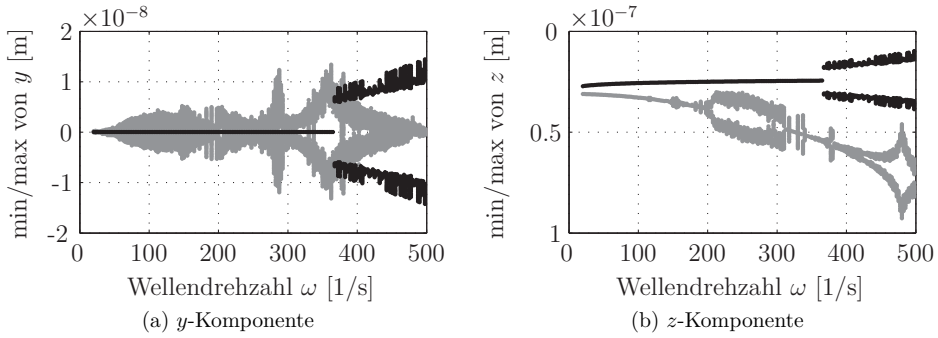


Abbildung 10.11: Ruhender Rotor bei spielfreiem Lager,  $F_{\downarrow} = 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $e = 0$ ,  $\kappa_0 = 0$ .  
 ● EHD (FS), ● Hertz

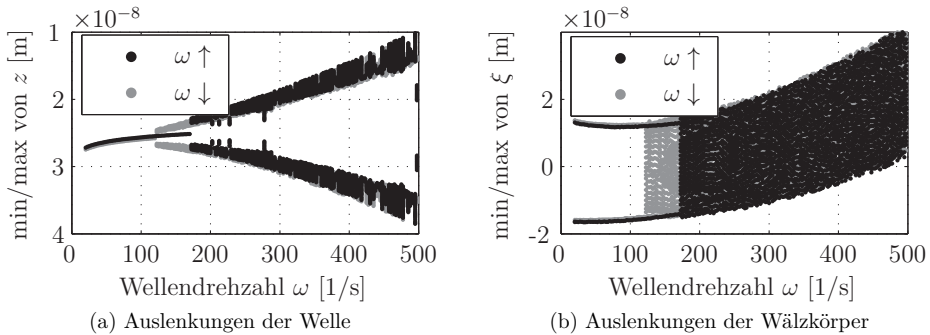


Abbildung 10.12: Hoch- und Auslauf des Rotors in EHD-Lagern und damit einhergehende Amplitudensprünge,  $F_{\downarrow} = 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $e = 0$ ,  $\kappa_0 = 0$

begünstigt: Bei kleinen Lasten  $F_{\downarrow}$  treten in allen EHD-Kontakten vergleichbare Kontaktkräfte auf, sodass eine homogene Lastverteilung vorliegt. Daher sind sowohl die Parameterals auch die daraus resultierende Kräfteerregung im Vergleich sehr klein. Zusätzlich ist die Dämpfung bei üblichen Arbeitsbedingungen im Vergleich zu trockenen Kontakten groß. Dies führt offensichtlich dazu, dass der Rotor im Rahmen der Rechengenauigkeit ruht. Der Rotor ruht bis zu einer Drehzahl von  $\omega \approx 365 \text{ 1/s}$ . Danach scheint diese Lösung instabil zu werden und kann deshalb mittels Zeitintegration nicht mehr beobachtet werden. Bei Lagern mit Hertz'schen Kontakten tritt dieses Verhalten nicht auf.

In nichtlinearen Systemen können bei gleichen Parametern mehrere Lösungen koexistieren. Die sich einstellende stationäre Lösung hängt von den Anfangsbedingungen ab. Daher kön-

nen beim Erhöhen der Wellendrehzahl (Hochlauf) andere Ergebnisse entstehen als beim Absenken (Auslauf): Beim Hochlauf ruht der Rotor bis  $\omega \approx 365 \text{ 1/s}$  und kommt beim Auslauf – wie Abbildung 10.12a entnommen werden kann – erst bei  $\omega \approx 120 \text{ 1/s}$  wieder zur Ruhe. Beim Wechsel zwischen „ruhender“ und periodischer beziehungsweise quasiperiodischer Lösung ändert sich die Amplitude stark. Obwohl der transiente Übergang zwischen den beiden Lösungen stetig ist, wird von einem *Amplitudensprung* gesprochen.

Die Grenze zwischen den Einzugsgebieten verschiedener Lösungen wird *Separatrix* genannt. Sie stellt eine instabile Lösung dar, die mithilfe von Zeitintegration ( $t \rightarrow \infty$ ) nicht gefunden werden kann. Ein mögliches Bifurkationsdiagramm, das eine Verbindung zwischen Hoch- und Auslauf herstellt, ist in Abbildung 10.13 gezeigt. Beim Stabilitätswechsel der Lösung

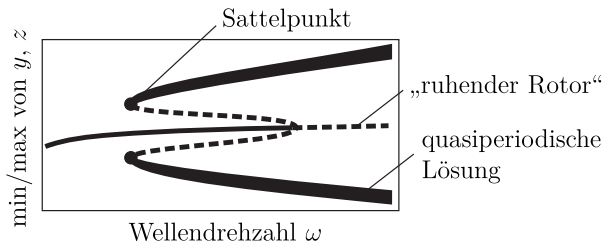


Abbildung 10.13: Ein prinzipiell vervollständigtes Bifurkationsdiagramm zu jenem aus Abbildung 10.12a. — stabil, - - - instabil

mit ruhendem Rotor entsteht eine neue quasiperiodische Lösung, die zunächst ebenfalls instabil ist. Sie wird am Sattelpunkt stabil, ist somit wieder mittels Zeitintegration bestimmbar und daher in Abbildung 10.12a sichtbar.

### 10.6.3 Vertikalbewegung der Welle

Eine Veränderung der Kontaktkraft ist – wie aus Gleichung (3.20) abgeleitet werden kann – bei festgehaltener zentraler Filmhöhe  $H_c$  proportional zur hydrodynamischen Geschwindigkeit  $U$  beziehungsweise  $\theta_U$ . Daher erfahren die Kontakte unter hoher Last, beziehungsweise die Kontakte mit kleiner zentraler Filmhöhe, bei variierender hydrodynamischer Geschwindigkeit eine größere Kraftänderung als Kontakte unter kleiner Last. Mit steigender Drehzahl nimmt daher die Schmierfilmhöhe der Kontakte im unteren Bereich des Wälzlagers, das heißt in der Lastzone, stärker zu als im oberen. Dadurch ist mit größer werdender Drehzahl bei Lagern mit EHD-Kontakten eine vertikale Aufwärtsbewegung des Rotors zu erwarten,<sup>1</sup> solange der Einfluss der Zentrifugalkräfte auf die Wälzkörper klein bleibt.

Die vertikale Aufwärtsbewegung des Rotors kann anhand Abbildung 10.14a bis  $\omega \approx 500 \text{ 1/s}$  beobachtet werden. Bei weiter steigenden Drehzahlen senkt sich der Rotor ab, was bei Lagern mit Hertz'schen Kontakten über den gesamten Drehzahlbereich geschieht.

Das Absenken erscheint insbesondere bei Lagern mit Hertz'schen Kontakten zunächst unplausibel, da der einzelne Kontakt nicht von der Drehzahl abhängt. Jedoch werden durch

<sup>1</sup> Bei periodischen, quasiperiodischen oder chaotischen Lösungen beziehen sich die Aussagen auf einen Mittelwert der  $y$ -Komponente.

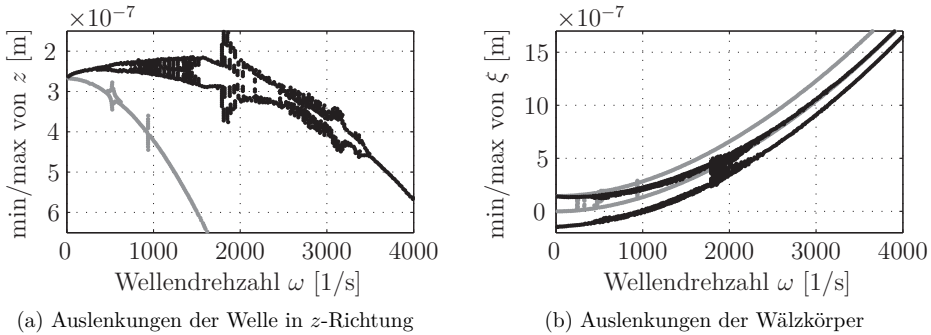


Abbildung 10.14: Vertikalbewegung der Welle,  $F_{\downarrow} = 10^4 \frac{N}{m}$ ,  $e = 0$ ,  $\kappa_0 = 0$ .

● EHD (FS), ● Hertz

den Einfluss der Zentrifugalkräfte die Wälzkörper gegen den Außenring gedrückt (Abbildung 10.14b), wodurch sich die Welle aufgrund der Vorlast  $F_{\downarrow}$  vertikal nach unten bewegt.

## 10.7 Bereiche quasiperiodischer und chaotischer Lösungen

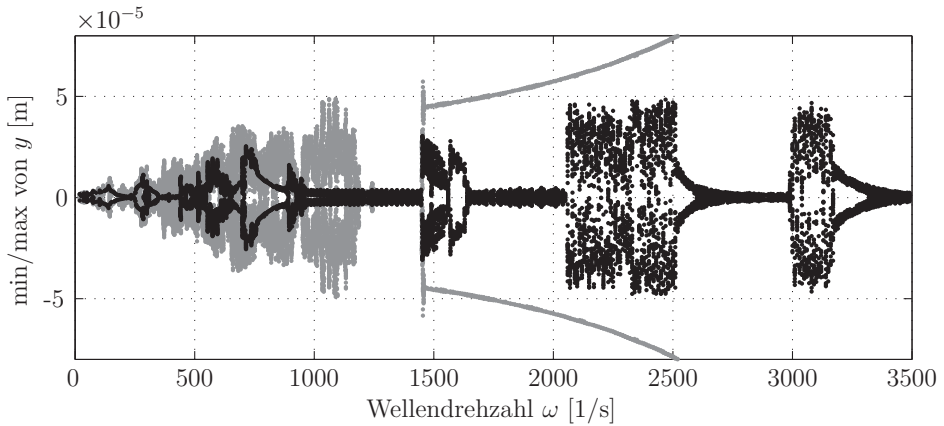
In diesem Abschnitt werden quasiperiodische beziehungsweise chaotische Lösungen eines mit der Kraft  $F_{\downarrow} = 10^5 \text{ N/m}$  belasteten Rotors untersucht. Die Unwucht des Rotors mit der Exzentrizität  $e = 1 \mu\text{m}$  wird berücksichtigt. Im Lager wird das Spiel  $\kappa_0 = 30 \mu\text{m}$  angenommen. Die im gesamten Kapitel verwendeten Lagerdaten sind in Tabelle 10.1 aufgeführt; die speziell in diesem Abschnitt zugrunde liegenden Parameter sind in Tabelle 10.2 zusammengefasst. Die Amplitudengänge dieses Systems sind in Abbildung 10.15 dargestellt. Dabei sind stellvertretend die  $y$ -Komponente der Welle und die radiale Position  $\xi$  eines Wälzkörpers ausgewählt. Bei der Betrachtung dieser Amplitudengänge liegt die Vermutung nahe, dass in unterschiedlichen Drehzahlbereichen verschiedene Lösungstypen auftreten. Im Folgenden werden die Bereiche quasiperiodischer und chaotischer Lösungen bestimmt.

$\kappa_0$	$30 \mu\text{m}$	halbe radiale Lagerluft
$\psi$	0.02	Strukturdämpfung
$F_{\downarrow}$	$10^5 \text{ N/m}$	raumfeste Last
$e$	$1 \mu\text{m}$	Exzentrizität

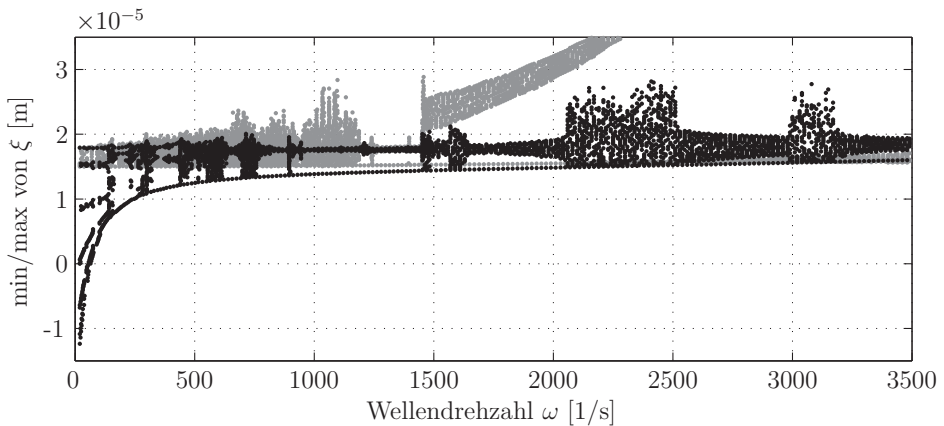
Tabelle 10.2: Rotor- und Lagerdaten

Chaotische Lösungen zeigen ein breitbandiges Spektrum. Dieses enthält mit hoher Wahrscheinlichkeit Resonanzfrequenzen anderer Systemteile, sodass hohe Amplituden oder Geräusche entstehen können. Zur Vermeidung von chaotischen Lösungen müssen diese zu-

nächst identifiziert werden, was – wie bereits in Kapitel 7 erwähnt – nicht immer eindeutig ist.



(a) Auslenkungen der Welle in  $y$ -Richtung



(b) Auslenkungen der Wälzkörper

Abbildung 10.15: Amplitudenverläufe eines Rotors mit Unwucht,  $F_{\downarrow} = 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $e = 1 \mu\text{m}$ ,  $\kappa_0 = 30 \mu\text{m}$ , ● EHD (FS), ● Hertz

Das Rotorsystem wird wie zuvor mit der Überrollfrequenz  $N\omega_c$  angeregt. Zusätzlich erfährt es infolge der Unwucht eine Anregung mit der Wellendrehzahl  $\omega$ . Gemäß Gleichung (10.4) gilt für das hier gewählte Lager  $N\omega_c = \frac{70}{13}\omega \approx 5.3846\omega$ . Daher liegt eine Periodendauer aufgrund der Anregung bei mindestens 13 Wellenumdrehungen. Jedoch müssen sich bei periodischen Lösungen die Welle und der Käfig nach einer Periode wieder in ihrer Ausgangsposition befinden: Wegen  $\omega_c = \frac{35}{78}\omega \approx 0.4487\omega$  beträgt eine Periode mindestens 78 Wellen- beziehungsweise 35 Käfigumläufe. Aufgrund der großen Perioden bei wälzge-

gerten Rotoren mit Unwucht sind periodische und quasiperiodische Lösungen kaum zu unterscheiden, weshalb stets von *quasiperiodischen* gesprochen wird.

### 10.7.1 Untersuchungen bei ausgewählten Rotordrehzahlen

Der Einfluss der Unwucht ist bei kleinen Drehzahlen gering, sodass die im vorigen Kapitel beschriebene Erregung durch die Überrollfrequenz das Systemverhalten maßgebend beeinflusst. Bei hohen Drehzahlen treten die dominierenden Schwingungseffekte infolge der Unwucht auf. Dadurch können in beiden Fällen scheinbar periodische Lösungen entstehen. In Abbildung 10.16 sind für  $\omega = 200 \text{ 1/s}$  die Wellenverlagerungsbahn und die Wälzkörperbewegung gezeigt. Um zwischen periodischen und quasiperiodischen Lösungen zu unterschei-

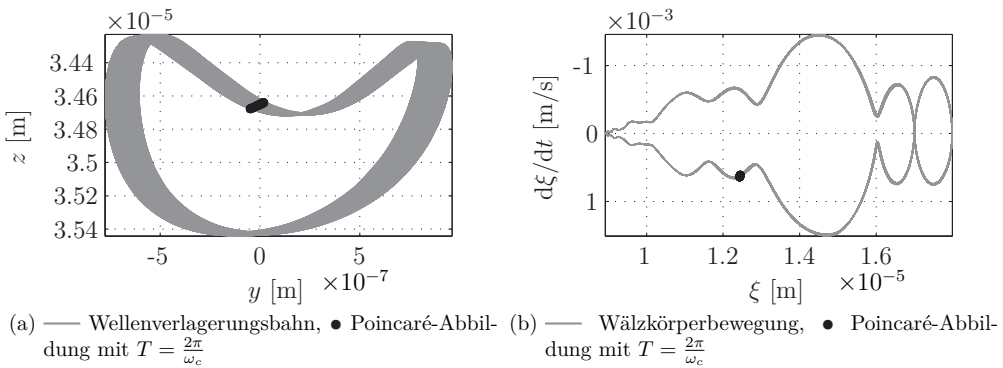


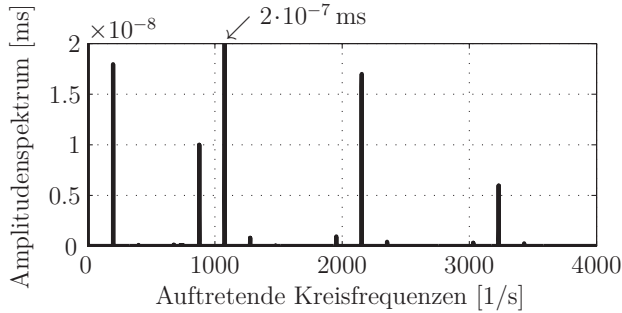
Abbildung 10.16: Ausschnitte aus dem Phasenraum und der Poincaré-Abbildung bei  $\omega = 200 \text{ 1/s}$  (EHD, FS)

den, sind die zugehörigen Ausschnitte aus der Poincaré-Abbildung hinzugefügt, wobei eine stroboskopische Darstellung mit der Periode  $T = 2\pi/\omega_c$  gewählt ist. Der Ausschnitt der Poincaré-Abbildung 10.16b, welcher die Wälzkörperbewegung enthält, reduziert sich näherungsweise zu einem Punkt. Damit liegt scheinbar eine periodische Lösung vor. Jedoch deuten die Wellenverlagerungsbahn in Abbildung 10.16a und der zugehörige Ausschnitt der Poincaré-Abbildung auf eine quasiperiodische Lösung hin. Dies wird durch das Amplitudenspektrum der  $y$ -Auslenkung der Welle in Abbildung 10.17 bestätigt. Dabei liegen unter anderem hohe Amplituden bei der Wellendrehzahl  $\omega$ , der Überrollfrequenz  $N\omega_c$  und lineare Kombinationen der beiden vor (Tabelle 10.3). Dies führt aus praktischer Sicht zu einer unendlich langen Periode, weshalb die Bezeichnung der Lösung als *quasiperiodisch* gerechtfertigt erscheint.

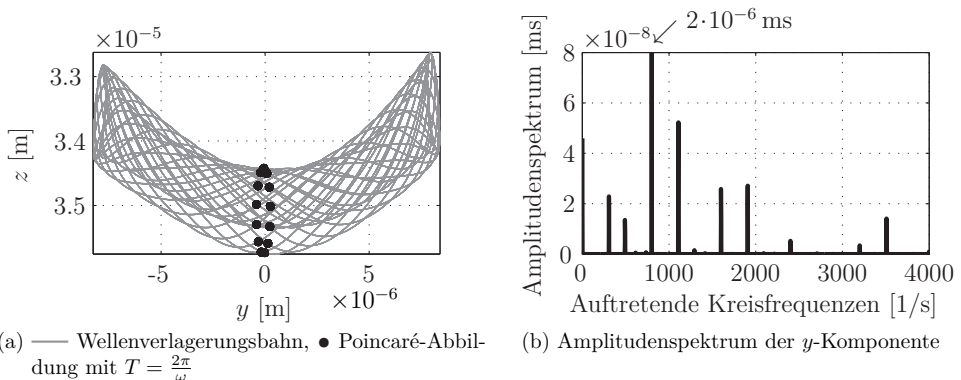
$\omega$	$N\omega_c - \omega$	$N\omega_c$	$N\omega_c + \omega$	$2N\omega_c - \omega$	$2N\omega_c$	$2N\omega_c + \omega$	...
200	877	1077	1277	1954	2154	2354	... [1/s]

Tabelle 10.3: Dominierende Frequenzen in der  $y$ -Komponente bei  $\omega = 200 \text{ 1/s}$  (EHD, FS)




 Abbildung 10.17: Amplitudenspektrum der  $y$ -Komponente bei  $\omega = 200 \text{ 1/s}$  (EHD, FS)

Die Lösung bei  $\omega = 800 \text{ 1/s}$  lässt sich anhand von Abbildung 10.18 untersuchen. Der Ausschnitt der Poincaré-Abbildung 10.18a, bei dem jetzt die Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  zugrunde gelegt ist, zeigt 13 scheinbar isolierte Punkte. Analog zum vorigen Beispiel lässt sich auch hier mithilfe des Amplitudenspektrums das Vorliegen von quasiperiodischen Lösungen belegen (Abbildung 10.18b).


 (a) — Wellenverlagerungsbahn, ● Poincaré-Abbildung mit  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 

 (b) Amplitudenspektrum der  $y$ -Komponente

 Abbildung 10.18: Wellenverlagerungsbahn mit einem Ausschnitt der Poincaré-Abbildung und Amplitudenspektrum bei  $\omega = 800 \text{ 1/s}$  (EHD, FS)

Der Amplitudengang in Abbildung 10.15 erlaubt eine erste Abschätzung der Drehzahlbereiche mit chaotischen Lösungen:

$$\omega_{\text{Chaos}} \approx 500 \dots 650 \text{ 1/s}, \quad 1450 \dots 1550 \text{ 1/s}, \quad 2050 \dots 2500 \text{ 1/s}, \quad 3000 \dots 3150 \text{ 1/s} .$$

Exemplarisch wird diese Abschätzung bei den Drehzahlen  $\omega = 200 \text{ 1/s}$ ,  $300 \text{ 1/s}$ ,  $550 \text{ 1/s}$ ,  $800 \text{ 1/s}$  und  $1500 \text{ 1/s}$  überprüft:

- Bei  $\omega = 300 \text{ 1/s}$  werden aus der Betrachtung des Amplitudenganges quasiperiodische Lösungen erwartet. Die Wellenverlagerungsbahn mit dem Poincaré-Ausschnitt und

das zugehörige Amplitudenspektrum der  $y$ -Komponente in Abbildung 10.19 weisen entgegen der Erwartung auf chaotisches Verhalten hin.

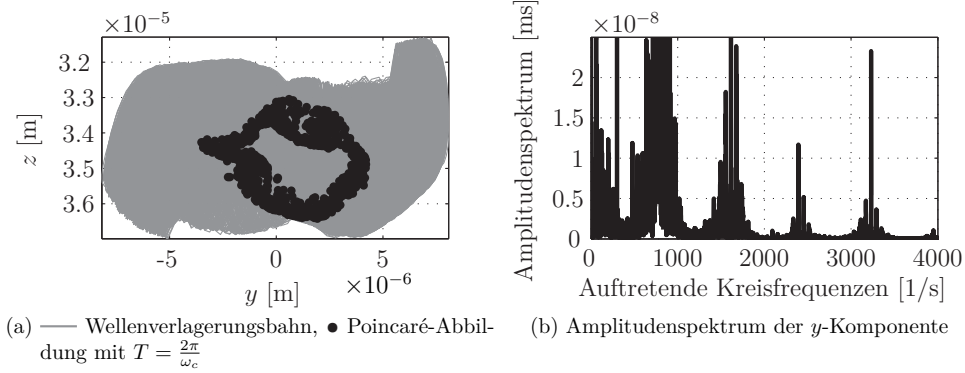


Abbildung 10.19: Chaotische Lösung bei  $\omega = 300 \text{ 1/s}$ , (EHD, FS)

- Ebenso widerlegt wird die Vermutung, dass bei  $\omega = 550 \text{ 1/s}$  chaotisches Verhalten vorliegt. Der Poincaré-Ausschnitt 10.20a zeigt eine geschlossene Kurve. Im Amplitudenspektrum 10.20b sind von null verschiedene Amplituden nur an diskreten Frequenzen zu finden. Beides stellt einen Beleg für quasiperiodische Lösungen dar.

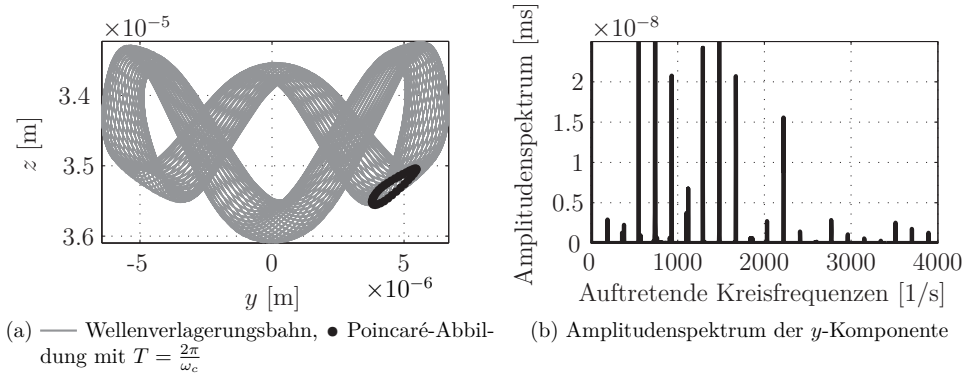
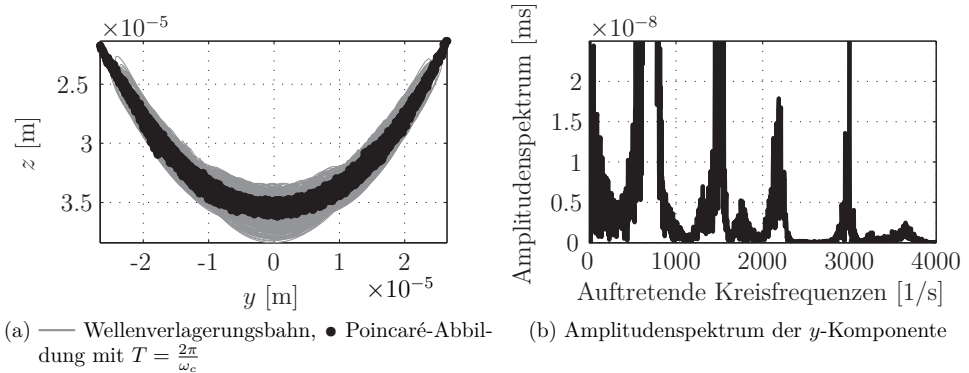


Abbildung 10.20: Quasiperiodische Lösung bei  $\omega = 550 \text{ 1/s}$  (EHD, FS)

- Aus dem Amplitudengang wird bei  $\omega = 1500 \text{ 1/s}$  chaotischen Verhalten erwartet. Dies wird durch den Poincaré-Ausschnitt und das breitbandige Amplitudenspektrum in Abbildung 10.21 bekräftigt.
- Bestätigt werden die aus dem Amplitudengang erwarteten quasiperiodischen Lösungen bei  $\omega = 200 \text{ 1/s}$  und  $800 \text{ 1/s}$  durch die Abbildungen 10.16 und 10.18.


 Abbildung 10.21: Chaotische Lösung bei  $\omega = 1500 \text{ 1/s}$  (EHD, FS)

### 10.7.2 Kaskadendiagramm und Lyapunov-Exponent

Die Beurteilung jeder einzelnen Lösung hinsichtlich ihres Lösungstyps anhand von Wellenverlagerungsbahnen, Poincaré-Ausschnitten und Amplitudenspektren ist mühsam. Stattdessen wird auf eine komprimierte Form der Amplitudenspektren zurückgegriffen: Das in Abbildung 10.22 dargestellte Kaskadendiagramm<sup>1</sup> zeigt die Amplitudenspektren der  $y$ -Komponente der Welle in Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit  $\omega$ . Die spektralen Amplituden sind dabei als Graustufen codiert: weiß entspricht einer verschwindenden Amplitude, zunehmende Grauintensität bedeutet zunehmende Amplitude. In den quasi-periodischen Bereichen treten hohe Amplituden nur an diskreten Frequenzen auf. Dies ist bei EHD-Kontakten (Abbildung 10.22a) beispielsweise im Bereich  $\omega \approx 950 \text{ 1/s} \dots 1450 \text{ 1/s}$  der Fall. Dabei sind unter anderem die Winkelgeschwindigkeit der Welle, die Überrollfrequenz, sowie ganzzahlige Kombinationen erkennbar. Zusätzlich sind die in Abschnitt 10.5 abgeschätzten Eigenkreisfrequenzen der Welle sichtbar.

Die breitbandigen Spektren korrespondieren mit chaotischen Lösungen. Beispielsweise ist das chaotische Verhalten bei  $\omega = 300 \text{ 1/s}$  im Kaskadendiagramm identifizierbar, was aus dem Amplitudengang (Abbildung 10.15) nicht zu entnehmen ist.

Beim hier untersuchten Lager mit Hertz'schen Kontakten treten bei Drehzahlen unterhalb von  $\omega \approx 1150 \text{ 1/s}$  fast ausschließlich chaotische Lösungen auf. Im Drehzahlbereich  $\omega \approx 1450 \dots 4200 \text{ 1/s}$  liegen quasiperiodische Schwingungen vor. Dabei fallen zum einen große Wellen- und Wälzkörperauslenkungen (Abbildung 10.15) auf. Zum anderen ist in der  $y$ -Komponente eine Dominanz der Wellendrehzahl (Abbildung 10.22) zu beobachten.

Eine eindeutige Detektierung von chaotischen Bereichen ist mithilfe des Lyapunov-Exponenten möglich (Abschnitt 7.5.1). Jedoch müssen bei der numerischen Bestimmung einige Parameter an das vorliegende Problem angepasst werden, sodass auch hier eine gewisse Unsicherheit vorliegt: Unter anderem müssen bei der gewählten numerischen Implementierung zur Berechnung des maximalen Lyapunov-Exponenten geeignete An-

<sup>1</sup> Beim Kaskadendiagramm wird das Amplitudenspektrum bei jeweils konstanter Drehzahl bestimmt. Das Wasserfalldiagramm entsteht aus Zeitsimulationen mit zeitabhängiger Drehzahl [33].

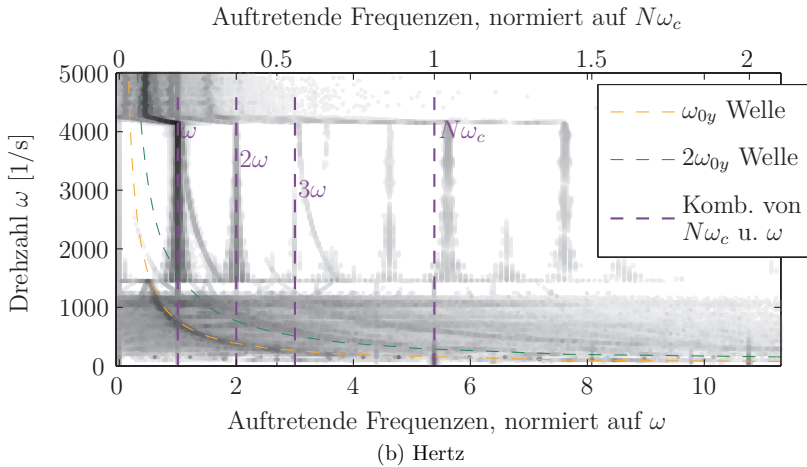
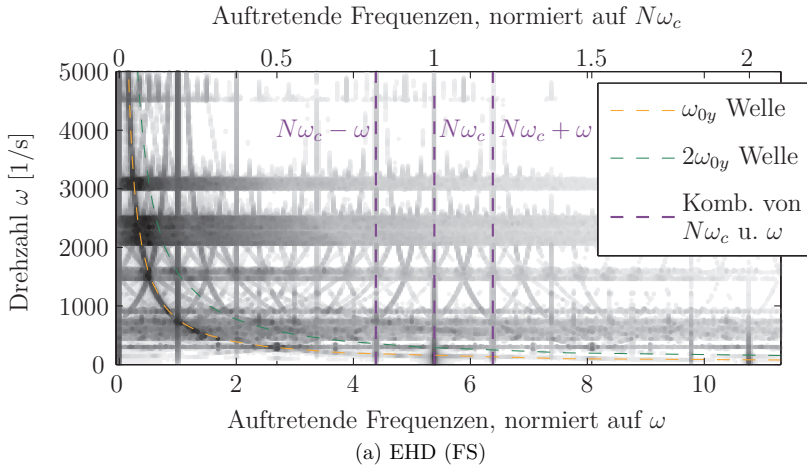


Abbildung 10.22: Kaskadendiagramme bezüglich der  $y$ -Komponente. Die auftretenden Frequenzen sind jeweils auf die Überrollfrequenz  $N\omega_c$  (obere Achse) beziehungsweise auf die Wellendrehzahl  $\omega$  (untere Achse) normiert.

fangsbedingung der Störung gewählt werden. Des Weiteren ist das Zeitintervall, nach dem die Normierung der Störung vorgenommen wird, problemabhängig festzulegen. Zur Bestimmung des Lyapunov-Exponenten wird ein stationärer Zustand vorausgesetzt, der erst nach einer unbekanntem ausreichend langen Integrationsdauer erreicht wird. Daher liefern die in Abbildung 10.23 gezeigten maximalen Lyapunov-Exponenten ebenfalls keine sichere Bestimmung von chaotischen Bereichen. Dennoch ergibt sich in Verbindung mit den Kaskadendiagrammen 10.22 eine nahezu vollständige Übersicht bezüglich quasiperiodischer und chaotischer Lösungen.

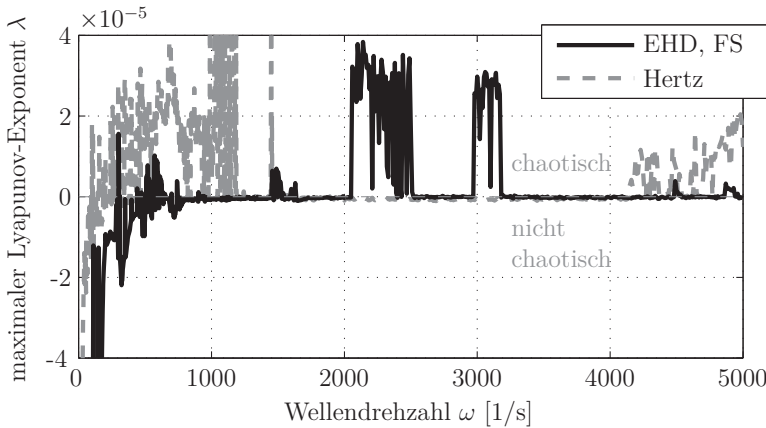


Abbildung 10.23: Maximaler Lyapunov-Exponent

Im periodischen Fall tritt bei autonomen Systemen ein Lyapunov-Exponent mit  $\lambda = 0$  auf, alle anderen sind kleiner als null. Das Wälzlagermodell ist nicht-autonom formuliert, da beispielsweise die Ausdrücke  $\sin \omega t$  und  $\cos \omega t$  in den Bewegungsgleichungen auftreten. Deshalb sind bei periodischen Lösungen alle Lyapunov-Exponenten kleiner als null und bei quasiperiodischen Lösungen kann ein Lyapunov-Exponent mit  $\lambda = 0$  auftreten. Dies muss bei der Analyse von Abbildung 10.23 berücksichtigt werden, da aufgrund numerischer Unzulänglichkeiten bei maximalem Lyapunov-Exponent mit  $0 < \lambda \ll 1$  nicht zwangsläufig Chaos vorliegt.

## 10.8 Schlussfolgerungen

Eine Modellierung der Lager mit Hertz'schen Kontakten kann bei hohen Belastungen ähnliche Ergebnisse liefern wie eine Modellierung mit EHD-Kontakten (Abbildung 10.9). Weitaus häufiger – beispielsweise bei kleinen Lasten – sind jedoch teils signifikante Unterschiede aufgrund der beiden Kontaktmodelle zu beobachten: Beispielsweise werden bei dem in Abschnitt 10.7 untersuchten Rotor unter hoher Vorlast deutlich verschiedene Amplituden und unterschiedliche Lösungstypen vorhergesagt. Bei kleinen Lasten liegen erwartungsgemäß keine vergleichbaren Ergebnisse vor. Daher wird bei geschmierten Kontakten die Modellierung mit EHD-Kontakten empfohlen.



# Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein vereinfachtes EHD-Modell entwickelt, das aufgrund seiner Effizienz besonders im Rahmen von Mehrkörpersimulationen mit vielen Kontaktstellen geeignet ist. Das Modell bildet sowohl hoch- als auch schwachbelastete vollgeschmierte EHD-Linienkontakte ab und erlaubt einen kontinuierlichen Übergang zum Hertz'schen Kontakt. Eine Validierung des vereinfachten Modells erfolgt anhand numerischer Lösungen des vollständigen EHD-Problems. Dabei zeigt sich über große Parameterbereiche ausgezeichnete Übereinstimmung. Einschränkungen müssen bei sehr hohen Lasten und zugleich zeitabhängigen Radien beziehungsweise zeitabhängigen hydrodynamischen Geschwindigkeiten hingenommen werden.

Zur Herleitung des vereinfachten EHD-Modells werden der trockene Hertz'sche Kontakt und der hydrodynamische Kontakt ohne elastische Deformation benötigt. Für letzteren wird ein neues geschlossenes Kraftgesetz bestimmt, welches die Normalkraft bei Reynolds-Randbedingungen im transienten Fall abbildet. Dabei können sowohl die Spalthöhe als auch die hydrodynamische Geschwindigkeit von der Zeit abhängen. Die Annäherung der Kontaktpartner bei trockenen Hertz'schen Linienkontakten ist nur bis auf eine problemabhängige Integrationskonstante bestimmt. Diese hängt unter anderem von den Randbedingungen und den Geometrien der Körper ab. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Konstante physikalisch interpretiert und für unendlich ausgedehnte Körper mit quadratischem Querschnitt angegeben. Das Kraftgesetz des Hertz'schen Linienkontaktes ist schwach nichtlinear. Eine Linearisierung stellt daher eine geeignete Näherung dar und erlaubt weitere Vereinfachungen: Die im *dynamischen Fluid-Struktur-Modell* auftretende innere Variable, welche oft auf steife Differentialgleichungen führt, lässt sich eliminieren, sodass das *nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell* entsteht. Dieses erlaubt unter anderem analytische Abschätzungen.

Es zeigt sich ein deutlicher Einfluss von EHD-Kontakten auf das nichtlineare Schwingungsverhalten von Mehrkörpersystemen. Bereits am Einmassenschwinger mit einem Kontakt sind bei Kraft-, Parameter- oder Fußpunktanregung ausgeprägte nichtlineare Schwingungsphänomene zu beobachten: Es treten sub- und superharmonische Resonanzen, Sprungphänomene und damit einhergehende instabile Lösungen auf. Besonders erwähnenswert ist eine Verschiebung der Hauptresonanz bei mäßigen Lasten (*Übergangsbereich*), sodass sich die Resonanzstelle nicht mehr durch die Masse sowie die Kontaktsteifigkeit des ungedämpften Systems vorhersagen lässt. Die Ergebnisse des Schwingers mit einem EHD-Kontakt sind mit einer numerischen Auswertung des vollständigen EHD-Problems mittels FEM validiert. Der Oszillator zeigt stets degressives Verhalten, sodass der Amplitudenverlauf in der Nähe der Hauptresonanz nach links gekrümmt ist. Wird ein zweiter EHD-Kontakt so hinzugefügt, dass die Masse symmetrisch von beiden Kontakten umgeben wird, dann ergibt sich abhängig vom Spiel ein degressives oder ein progressives Kraftgesetz.

Abschließend wird ein Rotor in Zylinderrollenlagern untersucht. Damit wird die Anwendbarkeit des vereinfachten EHD-Kontaktmodells demonstriert und unter anderem der Einfluss auf das nichtlineare Schwingungsverhalten beschrieben:

- Aufgrund der mit dem Käfig wandernden Kontaktstellen im Lager liegt eine periodische Gesamtsteifigkeit vor, welche zu Parameterregung führt. In Verbindung mit einer konstanten Vorlast wird das System zusätzlich fremderregt. Damit sind klassische Resonanzen und gleichzeitig Parameterinstabilitäten zu beobachten.
- Trotz der Anregung kann bei schwachen Vorlasten und verschwindendem Lagerspiel ein Betriebszustand vorliegen, bei dem der Rotor ruht. Dies ist bemerkenswert, da infolge der Auslenkung der Welle die Wälzkörper quasiperiodische Bewegungen ausführen.
- Mit steigender Drehzahl ist es möglich, dass sich der Rotor entgegen der Vorlast nach oben bewegt.
- Es treten neben quasiperiodischen auch chaotische Lösungen auf, was mittels Kaschendiagrammen und Lyapunov-Exponenten gezeigt wird.

Zum Vergleich wird ein Rotor betrachtet, bei dem im Lager trockene Hertz'sche Kontakte angenommen werden. Diese weit verbreitete Modellierung zeigt besonders bei schwachen und mittleren Vorlasten deutliche Unterschiede zum Lager mit EHD-Kontakten, sodass der geringe zusätzliche Rechenaufwand infolge der vereinfachten EHD-Kontakte gewinnbringend erscheint.

Die vorliegende Arbeit bietet viele Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen:

- In dieser Arbeit wird ausschließlich der Einfluss der Normalkraft untersucht. Ein Reibungsgesetz auf Basis der vorgestellten vereinfachten EHD-Kontaktmodelle ist denkbar, sodass ohne signifikante Rechenzeiterhöhung weitere Effekte untersucht werden können. Dazu ist jedoch die genaue Kenntnis der minimalen beziehungsweise zentralen Schmierspalthöhe notwendig, die im bisherigen Modell im Hinblick auf Reibung nicht ausreichend genau wiedergegeben wird. Zur Korrektur der Schmierspalthöhe könnte beispielsweise die analytische Lösung von Ertel oder eine Vereinfachung einer Regressionsformel von Lubrecht oder Venner verwendet werden.
- Bei Parameterregung sind Verbesserungen des vereinfachten Kontaktmodells wünschenswert. Dazu könnten die im vorigen Punkt beschriebenen Lösungen oder Formeln genutzt werden.
- Die Ergebnisse sind zwar anhand numerischer Auswertungen der EHD-Grundgleichungen validiert – dennoch könnte eine experimentelle Validierung die Ergebnisse dieser Arbeit untermauern.
- Eine Erweiterung auf den Punktkontakt würde eine Verallgemeinerung dieser Arbeit darstellen. Dabei sind insbesondere in hochbelasteten Fällen stärker ausgeprägte nichtlineare Schwingungsphänomene zu erwarten, da der Hertz'sche Punktkontakt stark nichtlinear ist.



# Anhang



# A Elastischer Halbraum

Ausgehend von der linearen Elastizitätstheorie wird die elastische Deformation des unendlich ausgedehnten Halbraums unter einer Linienlast abgeleitet. Diese sogenannte Fundamentallösung ergibt durch Faltung mit einer beliebigen Lastverteilung die sich einstellende elastische Deformation. Eine analytische Lösung der Deformation bei Hertz'schem Druck wird hergeleitet.

## A.1 Elastische Deformation durch eine Linienlast

Der Ausgangspunkt ist der in Abbildung A.1 gezeigte unendlich, ausgedehnte elastische Halbraum, der durch die Ebene bei  $y = 0$  begrenzt wird [42, 54, 109, 112]. Die Belastung erfolgt durch eine Linienlast  $q$  in  $y$ -Richtung entlang der  $z$ -Achse. Das vorliegende Problem ist eben, da die Last unabhängig von  $z$  ist und keine Komponente in  $z$ -Richtung besitzt. Es treten ausschließlich Verschiebungen  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  in  $x$ - beziehungsweise  $y$ -Richtung auf.

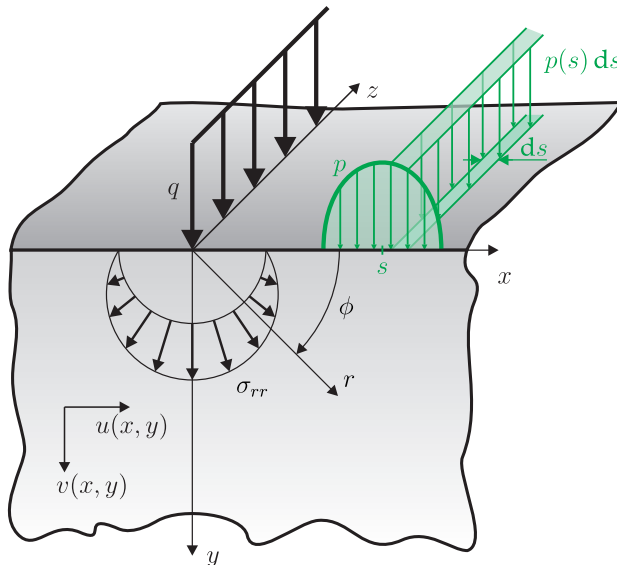


Abbildung A.1: Elastischer Halbraum mit der Linienlast  $q$  beziehungsweise der Lastverteilung  $p$  in  $y$ -Richtung

### A.1.1 Kinematik und Materialgesetz

Die Annahme kleiner Verformungen ergibt den kinematischen Zusammenhang zwischen der Verzerrung  $\epsilon$  und der Verschiebung  $\mathbf{u}$ :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( \text{grad } \mathbf{u} + \text{grad}^\top \mathbf{u} \right). \quad (\text{A.1})$$

Die technischen Konstanten Elastizitätsmodul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$  eignen sich zur Formulierung des Hooke'schen Gesetzes

$$\epsilon = \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{sp}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} \quad (\text{A.2})$$

in dehnungsexpliziter Form. Dabei ist  $\boldsymbol{\sigma}$  der Spannungs- und  $\mathbf{I}$  der Einheitstensor. Mit  $\text{sp}$  wird die Spur eines Tensors abgekürzt.

### A.1.2 Ebener Verzerrungszustand

Beim betrachteten Halbraum liegt ein ebener Verzerrungszustand vor, da ebene Querschnitte mit  $z = \text{konst.}$  auch unter Belastung eben bleiben und nicht in  $z$ -Richtung verschoben werden. Damit verschwinden alle Dehnungskomponenten in  $z$ -Richtung sowie alle Ableitung nach  $z$ :

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0, \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} = 0.$$

Das Hooke'sche Gesetz (A.2) vereinfacht sich, sodass die Verzerrungen  $\epsilon_{xx}$ ,  $\epsilon_{yy}$  und  $\epsilon_{xy}$  mit dem Zusammenhang  $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  kompakt in kartesischen Koordinaten dargestellt werden können:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \right) = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \sigma_{yy}, \quad (\text{A.3a})$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} \left( \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \right) = \frac{1 - \nu^2}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \sigma_{xx}, \quad (\text{A.3b})$$

$$2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy}. \quad (\text{A.3c})$$

Die Integration der ersten beiden Gleichungen ergibt die Verschiebung in  $x$ - beziehungsweise  $y$ -Richtung:

$$u = \frac{1 - \nu^2}{E} \int \sigma_{xx} dx - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \int \sigma_{yy} dx + K_3^H(y), \quad (\text{A.4a})$$

$$v = \frac{1 - \nu^2}{E} \int \sigma_{yy} dy - \frac{\nu(1 + \nu)}{E} \int \sigma_{xx} dy + K_4^H(x). \quad (\text{A.4b})$$

Die Integrationskonstanten  $K_3^H$  und  $K_4^H$  können von  $y$  beziehungsweise  $x$  abhängen.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Die Konstanten  $K_1^H$  und  $K_2^H$  treten wegen der Konsistenz mit Kapitel 4 erst später auf.

### A.1.3 Gleichgewichtsbedingungen

Für die Verschiebungen  $u$  und  $v$  muss eine Lösung gefunden werden, welche die Impulsbilanz (2.7) erfüllt. Die Impulsbilanz lautet unter Vernachlässigung der Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  und bei statischen Bedingungen  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ . Sie kann aufgrund des ebenen Verzerrungszustandes weiter vereinfacht werden und ergibt in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.5})$$

### A.1.4 Kompatibilitätsbedingungen

Die kinematische Beziehung (A.1) liefert im allgemeinen Fall sechs partielle Differentialgleichungen. Für gegebene Verzerrungen stehen sechs Gleichungen zur Bestimmung der drei unbekanntenen Verschiebungen zur Verfügung. Daher können die Verzerrungen nicht unabhängig voneinander sein und müssen die Kompatibilitätsbedingungen

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.6})$$

erfüllen. Im Falle des ebenen Verzerrungszustandes vereinfachen sich diese und lauten in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (\text{A.7})$$

Nach Einsetzen des Hooke'schen Gesetzes (A.3) und unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen (A.5) können die Kompatibilitätsbedingungen in den Spannungen ausgedrückt werden:

$$\Delta_{xy}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Dabei bezeichnet  $\Delta_{xy}$  den Laplace-Operator in der Form

$$\Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (\text{A.9})$$

### A.1.5 Airy'sche Spannungsfunktion

Zur Auswertung der Integrale (A.4) wird der Ansatz von Airy mit der noch zu bestimmenden Spannungsfunktion  $F$  gewählt:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (\text{A.10})$$

Der Ansatz erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen (A.5). Die in den Spannungen ausgedrückte Kompatibilitätsbedingung (A.8) ergibt

$$\Delta_{xy}^2 F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 . \quad (\text{A.11})$$

Diese Forderung wird als *Bipotentialgleichung* oder *biharmonische Gleichung* bezeichnet und definiert mit den bei  $y = 0$  vorliegenden Randbedingungen

$$\sigma_{xy} = 0 , \quad \sigma_{yy}(x \neq 0) = 0 , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy} dx = -q \quad (\text{A.12})$$

das zu lösende Problem. Bereits 1892 hat Flamant hierfür die gesuchte Airy'sche Spannungsfunktion veröffentlicht [29, 54]:

$$F = q \frac{x}{\pi} \arctan \frac{z}{x} . \quad (\text{A.13})$$

Die Spannungen ergeben sich damit in kartesischen Koordinaten zu

$$\sigma_{xx} = -q \frac{2x^2 y}{\pi(x^2 + y^2)^2} , \quad \sigma_{yy} = -q \frac{2y^3}{\pi(x^2 + y^2)^2} , \quad \sigma_{xy} = -q \frac{2y^2 x}{\pi(x^2 + y^2)^2} . \quad (\text{A.14})$$

Ausgedrückt in Polarkoordinaten wird der rein radiale Spannungszustand erkennbar:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2q}{\pi r} \sin \phi , \quad \sigma_{\phi\phi} = 0 , \quad \sigma_{r\phi} = 0 . \quad (\text{A.15})$$

### A.1.6 Verschiebungen

Die Verschiebungen können durch Auswerten der Gleichungen (A.4) mithilfe der Spannungen (A.14) bestimmt werden:

$$u(x, y) = q \frac{1 + \nu}{\pi E} \frac{xy}{x^2 + y^2} - q \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\pi E} \arctan \frac{x}{y} + K_3^H(y) , \quad (\text{A.16a})$$

$$v(x, y) = -q \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \ln(x^2 + y^2) - q \frac{1 + \nu}{\pi E} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + K_4^H(x) . \quad (\text{A.16b})$$

Aufgrund der Symmetrie muss  $-u(-x, y) = u(x, y)$  gelten, sodass sich  $K_3^H(y) = 0$  ergibt. Die Verschiebungen müssen die Schubspannung  $\sigma_{xy}$  aus Gleichung (A.14) erfüllen, weshalb  $K_4^H(x) = K_4^H$  konstant sein muss. Für die weitere Rechnung ist nur die Verschiebung  $v$  in  $y$ -Richtung an der Oberfläche  $y = 0$  von Interesse. Diese Verschiebung infolge der Streckenlast  $q$  wird Fundamentallösung genannt und lautet mit einer neuen Integrationskonstanten  $K_1^H$

$$v^q = v(x, y=0) = -q \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \ln x^2 + K_1^H . \quad (\text{A.17})$$

Liegt ein Druck  $p(s)$  vor, dann kann die Streckenlast durch  $q = p(s) ds$  ersetzt werden. Damit folgt nach einer Faltung mit  $v^q$  die Verschiebung der Oberfläche in  $y$ -Richtung:

$$v^p = -\frac{1-\nu^2}{\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} p(s) \ln(x-s)^2 ds + K_5^H . \quad (\text{A.18})$$

Die Konstante  $K_5^H$  hängt von der vorliegenden Geometrie der Kontaktpartner und den Randbedingungen ab und kann nur für Sonderfälle, wie beispielsweise symmetrisch belastete Walzen, eindeutig bestimmt werden [31, 54].

## A.2 Elastische Deformation unter Hertz'schem Druck

Ausgehend von der Fundamentallösung (A.17) des elastischen Halbraums wird die Gesamtdeformation zweier Kontaktpartner berechnet. Dabei wird eine Hertz'sche Druckverteilung angenommen. Die Rechnung orientiert sich an [35].

Der Hertz'sche Druck (4.1) eines Linienkontakts lautet

$$p_H(x) = p_H^{max} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = p_H^{max} \left( ap_0(x) - \frac{p_2(x)}{a} \right) \quad (\text{A.19})$$

mit  $p_n(x) = \frac{x^n}{(a^2 - x^2)^{1/2}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Zunächst wird, wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, die Ableitung der Summe der elastischen Deformation beider Kontaktpartner bestimmt. Diese ergibt sich aus Gleichung (4.7) zu

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a p_H(s) \frac{1}{x-s} ds = -\frac{2p_H^{max}}{\pi E^*} \left( a I_0(x) - \frac{I_2(x)}{a} \right) , \quad (\text{A.20})$$

wobei eine Abkürzung für die Integrale  $I_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) eingeführt wird:

$$I_n = \int_{-a}^a \frac{p_n(s)}{(x-s)} ds = \int_{-a}^a \frac{x s^{n-1}}{(a^2 - s^2)^{1/2} (x-s)} ds - \int_{-a}^a \frac{s^{n-1}}{(a^2 - s^2)^{1/2}} ds . \quad (\text{A.21})$$

Mithilfe der Definition

$$J_n = \int_{-a}^a \frac{s^n}{(a^2 - s^2)^{1/2}} ds = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ 0, & n = 1 \\ a^2 \frac{\pi}{2}, & n = 2 \\ \dots & \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

folgt eine rekursive Formel für  $I_n$  mit dem Startintegral  $I_0$ :

$$I_n = x I_{n-1} - J_{n-1} , \quad I_0 = \begin{cases} 0, & |x| < a \\ \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - a^2}}, & |x| > a . \end{cases}$$

Damit können die Integrale  $I_n$  berechnet werden:

$n$	$I_n$ für $ x  < a$	$I_n$ für $ x  > a$
0	0	$\frac{\pi \operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
1	$-\pi$	$\frac{\pi x \operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \pi$
2	$-\pi x$	$\frac{\pi x^2 \operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \pi x$

Die Ableitung der Deformation ergibt

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2p_H^{max}}{\pi E^*} \left( aI_0(x) - \frac{I_2(x)}{a} \right) = -\underbrace{\frac{2p_H^{max}}{aE^*}}_{=1/R} \begin{cases} x, & |x| < a \\ x - \operatorname{sgn}(x)\sqrt{x^2 - a^2}, & |x| > a. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

Eine Integration liefert die Summe der Deformationen beider Kontaktpartner:

$$v = -\frac{1}{2R} \begin{cases} x^2 + K_2^H, & |x| < a \\ x^2 - |x|\sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \ln \left( \left| \frac{x}{a} \right| + \sqrt{\left( \frac{x}{a} \right)^2 - 1} \right) + K_2^H, & |x| > a. \end{cases} \quad (\text{A.24a})$$

Die freie Konstante  $K_2^H$  soll so bestimmt werden, dass die Deformation an der Stelle  $|x| = x_0 \gg a$  verschwindet:

$$K_2^H = a^2 \left[ \frac{x_0}{a} \sqrt{\left( \frac{x_0}{a} \right)^2 - 1} - \left( \frac{x_0}{a} \right)^2 - \ln \left( \frac{x_0}{a} + \sqrt{\left( \frac{x_0}{a} \right)^2 - 1} \right) \right]. \quad (\text{A.24b})$$

Für große Werte  $x_0/a$  kann die Konstante mit

$$K_2^H \approx -\frac{a^2}{2} \left[ 1 + \ln \left( 4 \frac{x_0^2}{a^2} \right) \right] \quad (\text{A.24c})$$

angenähert werden. Dabei ist zu beachten, dass der Hertz'sche Radius  $a$  von der Last abhängt. Die Vereinfachungen von  $K_2^H$  führen zu einem relativen Fehler zwischen der exakten und der genäherten Form der Konstanten  $K_2^H$ . Wie in Abbildung A.2 dargestellt, ist der relative Fehler bereits für  $\frac{x_0}{a} \geq 7$  kleiner als 0.1%. Die daraus resultierende elastische Deformation wird deshalb im Rahmen dieser Arbeit als *exakt* bezeichnet.

Letztendlich ist die Annäherung  $\delta = v(0)$  der beiden Kontaktpartner von Interesse, die bis auf die Konstante  $x_0$  durch

$$\delta = \frac{a^2}{4R} \left[ 1 + \ln \left( 4 \frac{x_0^2}{a^2} \right) \right] = \frac{F}{\pi E^*} \left[ 1 + \ln \left( \frac{\pi E^*}{FR} x_0^2 \right) \right] \quad (\text{A.25})$$

gegeben ist. Dieser nichtlineare Zusammenhang zwischen der Annäherung  $\delta$  und der Kraft  $F$  ist experimentell validiert [57]. Die Konstante  $x_0$  ist abhängig von der konkreten



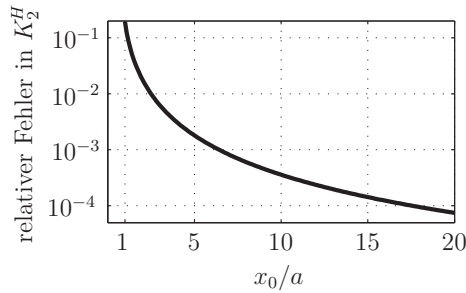


Abbildung A.2: Relativer Fehler in  $K_2^H$

Problemstellung, insbesondere von der Geometrie und den Randbedingungen. Sie lässt sich wegen  $v(x_0) = 0$  physikalisch interpretieren.

### A.3 Validierung

Die analytische Lösung der Annäherung zweier Kontaktpartner bei Hertz'schen Bedingungen aus Gleichung (4.10) wird mit der Lösung eines FEM-Modells sowie mit speziellen Lösungen aus der Literatur verglichen. Dazu wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\vartheta_R = 1$  angenommen.

#### A.3.1 Vergleich mit FEM-Modell

Das FEM-Modell, welches in Abbildung A.3a gezeigt ist, bildet einen unendlich langen Körper quadratischen Querschnitts mit der Kantenlänge  $L_{st} = \ell_{st}/\hat{x} = 1000$  ab.

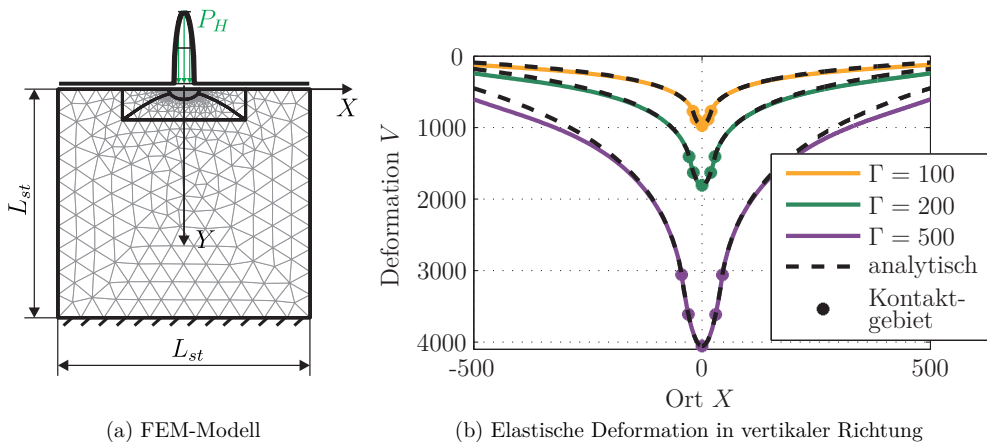


Abbildung A.3: Validierung der analytischen Ausdrücke für Deformation und Annäherung

Wie in Abschnitt 2.2 wird die Querkontraktionszahl  $\nu = 0.3$  gewählt und der Elastizitätsmodul  $E$  aus  $\frac{1}{E^*} = 2 \frac{1-\nu^2}{E}$  bestimmt, wodurch das FEM-Modell die halbe Gesamtdeformation beziehungsweise Annäherung liefert. Die Struktur wird unten fest eingespannt und oben mit Hertz'schem Druck belastet.

Die Gesamtdeformation  $V$  der analytischen Näherung aus Gleichung (A.24) beziehungsweise des FEM-Modells sind in Abbildung A.3b für ausgewählte Lasten dargestellt. Beide Lösungen stimmen im Kontaktgebiet ausgezeichnet überein. Dabei ist zu beachten, dass bei der Kantenlänge  $L_{st} = 1000$  die Integrationskonstante  $X_0 = 782$  gewählt werden muss. Eine numerische Auswertung verschiedener Strukturen mit quadratischem Querschnitt ergibt, wie in Abbildung A.4 gezeigt, einen linearen Zusammenhang zwischen der Kantenlänge und der Integrationskonstanten:

$$X_0 = 0.782 L_{st} . \tag{A.26}$$

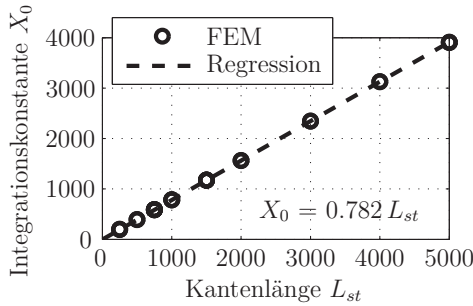
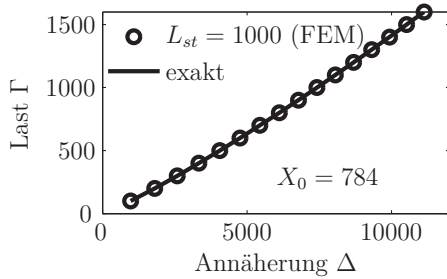


Abbildung A.4: Zusammenhang zwischen der Integrationskonstanten  $X_0$  und der Kantenlänge  $L_{st}$  bei quadratischen Strukturquerschnitten

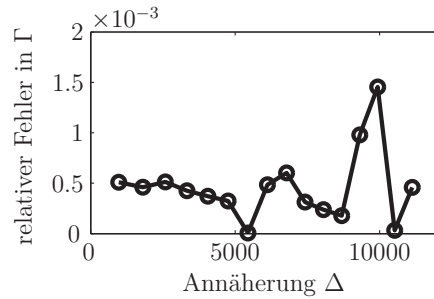
Die Annäherung der analytischen Lösung und des FEM-Modells sind in Abbildung A.5a dargestellt. Der relative Fehler zwischen beiden Varianten ist in Abbildung A.5b gezeigt und liegt unter 0.2%.

### A.3.2 Entdimensionierung mit Hertz'scher Kontaktbreite

Bei EHD-Berechnungen wird häufig zur Entdimensionierung die Hertz'sche Kontaktbreite  $a$  verwendet [38, 125]. Dadurch ergibt sich eine Struktur, deren reale Abmessungen (dimensionsbehaftet) proportional zu  $a$  sind und damit von der Last abhängen. Wird die Annäherung dieser von  $a$  abhängigen Struktur mit einem FEM-Modell abgebildet, so ergibt sich eine Annäherung, die mit der linearen Regression aus Gleichung (4.16) beschrieben werden kann (Abbildung A.6a): Für die Kantenlänge  $L_{st} = 20A$  und die Integrationskonstante  $X_0 = 1037$  sind beide Modell identisch, wie dem relativen Fehler in Abbildung A.6b entnommen werden kann.

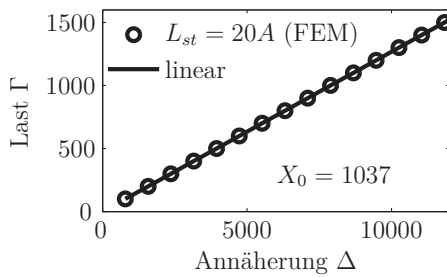


(a) Kraftverlauf

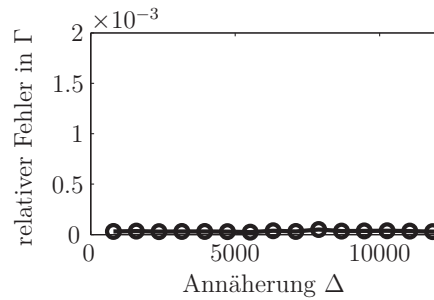


(b) relativer Fehler

Abbildung A.5: Vergleich des analytischen Kraftgesetzes aus Gleichung (4.10) mit der FEM-Rechnungen bei konstanter Strukturgröße



(a) Kraftverlauf



(b) relativer Fehler

Abbildung A.6: Vergleich des analytischen, linearisierten Kraftgesetzes aus Gleichung (4.16) mit FEM-Rechnungen bei lastabhängiger Strukturgröße (Struktur wird mit Hertz'scher Kontaktbreite skaliert)

### A.3.3 Spezielle Lösungen aus der Literatur

Die analytische Annäherung aus Gleichung (A.25) wird zur weiteren Validierung mit speziellen Lösungen aus der Literatur verglichen. Johnson gibt die Formel

$$\delta = \frac{F}{\pi E^*} \left\{ \ln \left( \frac{4R}{a_1} \right) + \ln \left( \frac{4R}{a_2} \right) - 1 \right\} \quad (\text{A.27})$$

für das Zusammendrücken eines Zylinders zwischen zwei Körpern an [54]. Bei Verwendung des gleichen Materials ergibt sich ein Ausdruck für die Annäherung, den auch Hamrock et al. angeben [43]. Der Zusammenhang zu Gleichung (A.25) kann über die Integrationskonstante hergestellt werden:

$$x_0 = 2R e^{-1} \approx 0.74R . \quad (\text{A.28})$$

Föppl leitet ebenso das Zusammendrücken eines Zylinders her [31]. Er nimmt einen parabolischen Druckverlauf an und gelangt daher zu einem leicht unterschiedlichen Ergebnis:

$$\delta = \frac{F}{\pi E^*} \left( 1.207 + \ln \frac{RE}{F} \right) \quad \Rightarrow \quad x_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi} (1 - \nu^2)} R e^{0.1035} \stackrel{\nu=0.3}{\approx} 0.84R . \quad (\text{A.29})$$

Tripp gibt eine allgemeine Lösung mit der Integrationskonstanten  $d_0$  an, die bereits vor der Faltung mit dem Druck beliebig gewählt wurde [118]. Im Gegensatz dazu wird die Integrationskonstante  $x_0$  in dieser Arbeit erst an das Endergebnis angepasst (Abschnitt 4.2). Umgeschrieben in die Notation der vorliegenden Dissertation lautet die Annäherung nach Tripp

$$\delta = \frac{F}{\pi E^*} \left[ \ln \frac{\pi R E^*}{F} + 2 \ln \frac{d_0}{R} + 1 \right] \quad \text{mit} \quad x_0 = d_0 .$$

Trotz unterschiedlicher Anpassung an die Randbedingung ergibt sich offensichtlich das gleiche Kraftgesetz, was mit großen Körperabmessungen im Vergleich zu kleinen Kontaktbreiten begründet werden kann. Tripp gibt eine weitere physikalische Interpretation der Integrationskonstanten: An der Stelle  $x = 0$ ,  $y = d_0 = x_0$ , das heißt am Kontaktzentrum unterhalb der Oberfläche, verschwindet die Deformation.

## A.4 Strukturen unterschiedlicher Abmessungen

Für Strukturen unterschiedlicher Größe ergeben sich bei gleicher Last unterschiedliche Deformationen beziehungsweise Annäherungen. Bei Parameterstudien, wie sie in den Abschnitten 6.3 und 8.3 ausgeführt werden, müsste zusätzlich die Strukturgröße und damit  $X_0$  variiert werden. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass eine Veränderung der Strukturkantenlänge  $L_{st}$  mit einer Variation des Elastizitätsmoduls  $E^*$  vergleichbar ist.

Es werden zwei Strukturen unterschiedlicher Größe betrachtet: Für die erste wird der später zu bestimmende Elastizitätsmodul  $E^*$  und die feste Kantenlänge  $L_{st} = 1000$ , das heißt  $X_0 = 782$ , gewählt. Die zweite Struktur besitzt den Elastizitätsmodul  $E_2^*$  und die

Integrationskonstante  $X_{0,2}$ . Im Folgenden wird gezeigt, dass für jede Kombination von  $E_2^*$  und  $X_{0,2}$  ein  $E^*$  existiert, womit beide Strukturen näherungsweise die gleiche Deformation ergeben. Damit ist ohne zusätzliche Variation von  $X_0$  bereits der gesamte Parameterraum überprüft.<sup>1</sup>

Die Forderung gleicher Struktursteifigkeit nach Gleichung (4.17) liefert

$$c_{st} \stackrel{!}{=} c_{st,2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi E^*}{\ln \frac{X_0^2}{\vartheta_R} - 5} = \frac{\pi E_2^*}{\ln \frac{X_{0,2}^2}{\vartheta_R} - 5} . \quad (\text{A.30})$$

Daraus ergibt sich der von  $X_{0,2}$  (beziehungsweise  $L_{st,2}$ ) und  $E_2^*$  abhängende Elastizitätsmodul

$$E^* = \frac{\ln X_0^2 - 5}{\ln X_{0,2}^2 - 5} E_2^* , \quad (\text{A.31})$$

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $\vartheta_R = 1$  gewählt wird. Durch eine Anpassung des Elastizitätsmoduls wird ausschließlich die Struktur beeinflusst. Eine Änderung des Radius hätte eine unerwünschte Änderung des hydrodynamischen Kontaktproblems zur Folge.

Die Deformation von Strukturen unterschiedlicher Kantenlänge mit angepasstem Elastizitätsmodul sind in Abbildung A.7 dargestellt. Unter Berücksichtigung der Skalierung erscheint die Genauigkeit ausreichend. Der relative Fehler der Deformation im Vergleich

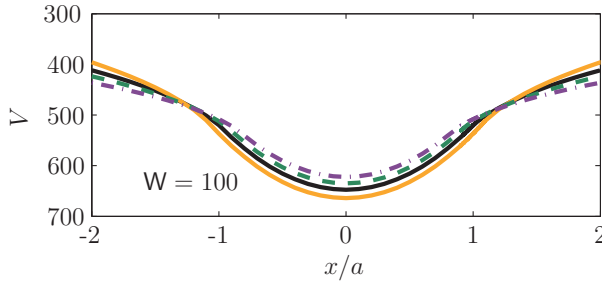


Abbildung A.7: Deformation von Strukturen mit verschiedener Kantenlänge und angepasstem Elastizitätsmodul.  $L_{st,2}$ : — 500, — 1000, - - - 2000, - - - - 5000

zur Referenzstruktur mit  $L_{st} = 1000$  ist für unterschiedliche Lasten in Abbildung A.8 gezeigt. In der Hochdruckzone  $-A \leq X \leq A$  sind die relativen Fehler meist deutlich unter 10 %. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass die in den Abschnitten 6.3 und 8.3 durchgeführten Parameterstudien ausreichend sind.

<sup>1</sup> In der Parameterstudie werden die dimensionslose Last  $W$  und der Schmiermittelparameter  $L$  variiert. Dies impliziert insbesondere die Variation des reduzierten Elastizitätsmoduls  $E^*$ .

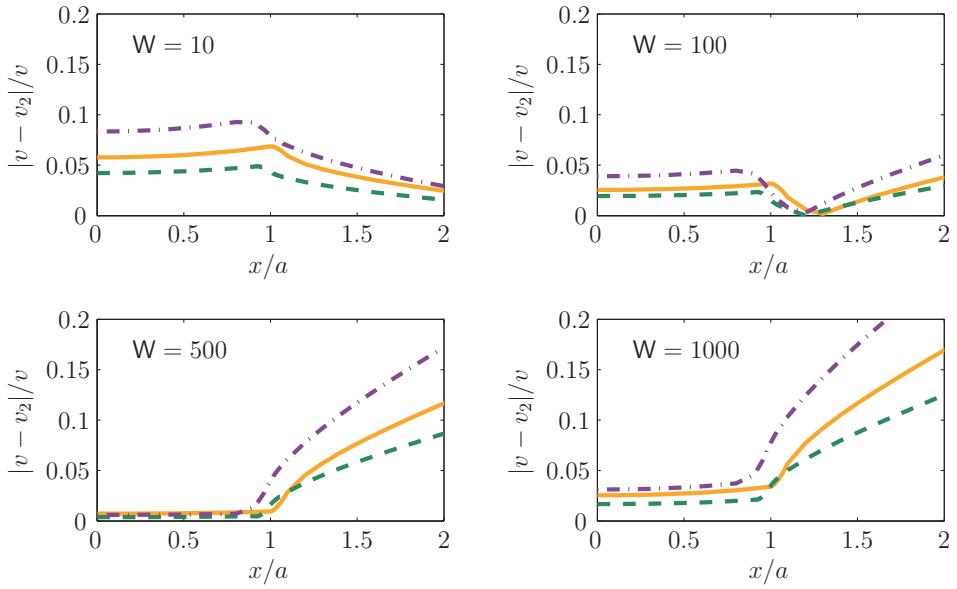


Abbildung A.8: Relativer Fehler zwischen der Deformation einer Referenzstruktur mit  $L_{st} = 1000$  und der einer zweiten Struktur mit  $L_{st,2}$ : — 500, - - - 2000, - · - · 5000

## B EHD-Modelle für Wälzlager

### B.1 EHD-Modelle mit Wälzkörper

In Zylinderrollenlagern können die Kontakte zwischen Innenring und Wälzkörper sowie zwischen Wälzkörper und Außenring mit der elasto-hydrodynamischen Theorie modelliert werden.

Für die lokalen Radien am Innen- und am Außenringkontakt müssten  $\vartheta_{R_i}$  und  $\vartheta_{R_a}$  eingeführt werden, sodass  $R_i = \vartheta_{R_i} R_0$  und  $R_a = \vartheta_{R_a} R_0$  gelten würde. Im Wälzlager sind die Kontaktradien jedoch konstant, sodass  $\dot{\vartheta}_{R_i} = \dot{\vartheta}_{R_a} = 0$  gilt. Da jedoch als Bezugsgröße  $R_i = R_0$  gewählt wird, folgt  $\vartheta_{R_i} = 1$  und vereinfachend wird  $\vartheta_{R_a} = \vartheta_R$  gesetzt. Damit kann  $\vartheta_R = R_a/R_i$  als Radienverhältnis beider Kontaktstellen bezeichnet werden. Mit den Indizes  $( )_i$  und  $( )_a$  wird die innere beziehungsweise die äußere Kontaktstelle gekennzeichnet.

Für das dynamische Fluid-Struktur-Modell können die Normalkräfte im Kontakt aus Gleichung (3.20) und die Differentialgleichungen der inneren EHD-Variablen  $H_{ci}$  und  $H_{ca}$  aus Gleichung (6.4) abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{\sqrt{6}}{H_{ci}} \vartheta_U - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{H_{ci}} \right)^{3/2} \frac{\partial H_{ci}}{\partial \tau}, \\ W_a &= \frac{\sqrt{6}}{H_{ca}} \vartheta_R \vartheta_U - \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_{ca}} \right)^{3/2} \frac{\partial H_{ca}}{\partial \tau}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{ci} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{H_{ci}} \vartheta_U - W_{st}^0 (H_{ci} - H_{0i}) + \frac{\psi}{\Omega} C_{st}^i \dot{H}_{0i}}{\frac{\psi}{\Omega} C_{st}^i + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{H_{ci}} \right)^{3/2}}, \\ \dot{H}_{ca} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{H_{ca}} \vartheta_R \vartheta_U - W_{st}^0 (H_{ca} - H_{0a}) + \frac{\psi}{\Omega} C_{st}^a \dot{H}_{0a}}{\frac{\psi}{\Omega} C_{st}^a + \frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{\vartheta_R}{H_{ca}} \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist  $W_{st}^0(\Delta)$  die Strukturkraft aus Gleichung (4.11). Die Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten unter statischen Bedingungen ergeben sich aus Gleichung (6.11):

$$\begin{aligned} C_{fl}^i &= -\frac{W_0^2}{\sqrt{6} \vartheta_U}, \quad C_{fl}^a = -\frac{W_0^2}{\sqrt{6} \vartheta_R \vartheta_U}, \quad C_{st}^i = \frac{\pi/2}{\ln X_{0i}^2 - 5}, \quad C_{st}^a = \frac{\pi/2}{\ln \frac{X_{0a}^2}{\vartheta_R} - 5}, \\ D_{fl}^i &= D_{fl}^a = -\frac{3\pi}{\sqrt{2}} \left( \frac{W_0}{\sqrt{6} \vartheta_U} \right)^{3/2}, \quad D_{st}^i = C_{st}^i \psi / \Omega, \quad D_{st}^a = C_{st}^a \psi / \Omega. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Für das nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell folgen die Kontaktkräfte aus Gleichung (6.8), die im statischen Fall

$$W_i = \frac{C_{st}^i}{2} \left( -H_{0i} + \sqrt{H_{0i}^2 + \frac{4\sqrt{6}}{C_{st}^i} \vartheta_U} \right) - D_{KV}^i \dot{H}_{0i} , \quad (\text{B.4a})$$

$$W_a = \frac{C_{st}^a}{2} \left( -H_{0a} + \sqrt{H_{0a}^2 + \frac{4\sqrt{6}}{C_{st}^a} \vartheta_R \vartheta_U} \right) - D_{KV}^a \dot{H}_{0a} \quad (\text{B.4b})$$

lauten. Dabei werden die Steifigkeits- und die Dämpfungskoeffizienten wie in Abschnitt 6.2 bestimmt:

$$C_{KV}^i = -\frac{C_{st}^i C_{fl}^i}{C_{st}^i - C_{fl}^i} , \quad C_{KV}^a = -\frac{C_{st}^a C_{fl}^a}{C_{st}^a - C_{fl}^a} , \quad (\text{B.5a})$$

$$D_{KV}^i = -\frac{D_{st}^i D_{fl}^i}{D_{st}^i - D_{fl}^i} , \quad D_{KV}^a = -\frac{D_{st}^a D_{fl}^a}{D_{st}^a - D_{fl}^a} . \quad (\text{B.5b})$$

## B.2 Vereinfachtes EHD-Modell ohne Wälzkörper

Wird der Wälzkörper beziehungsweise dessen Trägheit vernachlässigt, so kann das nichtlineare Kelvin-Voigt-Modell weiter vereinfacht werden. Das Vorgehen ist identisch mit dem Übergang vom dynamischen Fluid-Struktur-Modell zum nichtlinearen Kelvin-Voigt-Modell (vergleiche Abschnitt 6.2).

Das Kräftegleichgewicht  $W_i^0 = W_a^0$  zwischen innerer und äußerer Kontaktkraft lautet

$$\left( -H_{0i} + \sqrt{H_{0i}^2 + B} \right) = \vartheta_C \left( -H_{0a} + \sqrt{H_{0a}^2 + \frac{\vartheta_R}{\vartheta_C} B} \right) , \quad (\text{B.6})$$

wobei die Abkürzungen  $\vartheta_C = C_{st}^a / C_{st}^i$  und  $B = \frac{4\sqrt{6}}{C_{st}^i} \vartheta_U$  verwendet werden. Zwischen den Verschiebungen  $H_{0i}$  und  $H_{0a}$  gilt der kinematische Zusammenhang

$$K = H_{0i} + H_{0a} , \quad (\text{B.7})$$

der in Kapitel 10 eingeführt wird. Das Gleichungssystem B.2 wird im Folgenden nach  $H_{0i}$  aufgelöst, womit die Kontaktkraft angegeben werden kann. Dazu wird eine eindeutige und umkehrbare Transformation in zwei neuen Variablen  $u$  und  $v$  eingeführt:

$$H_{0i} = -\sqrt{B} \sinh u \quad \text{und} \quad H_{0a} = -\sqrt{\frac{\vartheta_R}{\vartheta_C} B} \sinh v . \quad (\text{B.8})$$

Einsetzen der Transformation in die Gleichungen B.2 ergibt

$$e^u = \sqrt{\vartheta_R \vartheta_C} e^v , \quad K = -\sqrt{B} \sinh u - \sqrt{\frac{\vartheta_R}{\vartheta_C} B} \sinh v . \quad (\text{B.9})$$



Mithilfe der trigonometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) , & \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1 , \\ \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) , & \sinh x + \cosh x &= e^x . \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

kann Gleichung (B.9) gelöst werden. Daraus folgt nach einer länglichen Rechnung die Verschiebung

$$H_{0i} = \frac{(2\vartheta_C + \vartheta_C\vartheta_R + 1)K - (\vartheta_C\vartheta_R - 1)\sqrt{K^2 + \frac{4\sqrt{6}}{C_{st}^i}(1 + \vartheta_R)(1 + \vartheta_C)\frac{\vartheta_U}{\vartheta_C}}}{2(1 + \vartheta_R)(1 + \vartheta_C)} . \quad (\text{B.11})$$

Die Kontaktkraft folgt durch Einsetzen von  $H_{0i}$  in Gleichung (B.4a):

$$W = \frac{C_{st}^i}{2} \left( -H_{0i} + \sqrt{H_{0i}^2 + \frac{4\sqrt{6}}{C_{st}^i}\vartheta_U} \right) - D_{KV\circ WK}^i \dot{K} . \quad (\text{B.12})$$

Die Steifigkeits- und Dämpfungskonstanten lauten

$$C_{KV\circ WK} = \frac{C_{KV}^i C_{KV}^a}{C_{KV}^i + C_{KV}^a} , \quad D_{KV\circ WK} = \frac{D_{KV}^i D_{KV}^a}{D_{KV}^i + D_{KV}^a} . \quad (\text{B.13})$$

## B.3 Hertz'sche Kontakte und Strukturdämpfung

Das Modell für Hertz'sche Kontakte ist für den statischen Fall in Kapitel 4 hergeleitet. Die Ergebnisse in Bezug auf Wälzlager werden in dimensionsbehafteter Form angegeben, um einen besseren Bezug zur Realität herstellen zu können. Da zur Berechnung unterschiedliche dimensionslose Schreibweisen zum Einsatz kommen, muss – wie bereits in Abschnitt 4.3 erwähnt – der Linearisierungsbereich für die Struktursteifigkeiten  $C_{st}^i$  und  $C_{st}^a$  angepasst werden. Ausgehend von Gleichung (4.17) lauten die Steifigkeiten

$$C_{st}^i = \frac{\pi/2}{\frac{4}{3} + \ln X_0^i{}^2 - \ln(\Gamma_{max})} , \quad C_{st}^a = \frac{\pi/2}{\frac{4}{3} + \ln \frac{X_0^a{}^2}{\vartheta_R} - \ln(\Gamma_{max})} \quad (\text{B.14})$$

Es wird stets  $F_{max} = 2 \cdot 10^6$  N/m vorgegeben, sodass  $\Gamma_{max}$  mit der dimensionslosen Schreibweise aus Abschnitt 2.4 bestimmt werden kann.

Die Strukturdämpfungskonstanten werden analog zu Abschnitt 6.1 bestimmt. Als charakteristische Frequenz wird die Überrollfrequenz gewählt:

$$D_{st}^i = C_{st}^i \frac{\psi}{N\Omega_c} , \quad D_{st}^a = C_{st}^a \frac{\psi}{N\Omega_c} . \quad (\text{B.15})$$

Da Zylinderrollenlager in der Regel Spiel besitzen, muss die Strukturkraft bei offenem Kontakt verschwinden. Damit die Kraftverläufe stetig bleiben, wird der dämpfende Term mit

einer geglätteten Sprungfunktion  $H_{gl}$  multipliziert (vergleiche Abbildung B.1 und Modell von Gonthier et al. [34]):

$$H_{gl}(\Delta_{st}^i) D_{st}^i \dot{\Delta}_{st}^i \quad \text{beziehungsweise} \quad H_{gl}(\Delta_{st}^a) D_{st}^a \dot{\Delta}_{st}^a . \quad (\text{B.16})$$

Die geglättete Sprungfunktion  $H_{gl}(\Delta)$  wird so definiert, dass zum Zeitpunkt des Öffnens bei  $\Delta = 0$  die Dämpfung bereits verschwindet. Dadurch können hochfrequente, nahezu ungedämpfte Oszillationen der Wälzkörper entstehen. Mit Blick auf die Numerik und auf weitere Reibungseinflüsse – wie beispielsweise zwischen Wälzkörper und Käfig – wird zusätzlich eine kleine zur Wälzkörpergeschwindigkeit  $\xi$  proportionale Dämpfung hinzugefügt.

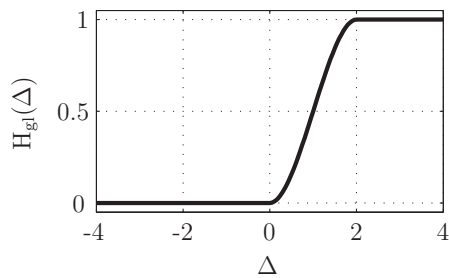


Abbildung B.1: Geglättete Sprungfunktion

## C Inhomogene Mathieu-Gleichung

Die Mathieu-Gleichung mit einem Freiheitsgrad ist ein klassisches Beispiel zur Beschreibung von Phänomenen, die durch Parametererregung auftreten [8, 41, 48, 75, 76, 77, 96, 111]. In dieser Arbeit tritt Parametererregung zum einen infolge einer variierenden hydrodynamischen Geschwindigkeit oder eines oszillierenden Kontaktradius auf. Zum anderen variiert im Wälzlager die Steifigkeit mit der Überrollfrequenz, die aufgrund der Annahme der Rollbedingung kinematisch durch die Wellendrehzahl gegeben ist [65]. Zusätzlich werden statische Vorlasten angenommen, die einer Inhomogenität in der Mathieu-Gleichung entsprechen.

Es wird daher die modifizierte Mathieu-Gleichung

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + (1 + \epsilon \cos \nu\tau) x = \hat{f} \quad (\text{C.1})$$

mit dem linearen Dämpfungskoeffizienten  $\beta < 1$ , der Parameterfrequenz  $\nu$ , der konstanten Vorlast  $\hat{f}$  und dem Parameter  $\epsilon$  betrachtet. Dabei wird die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit  $\tau$  mit  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{d\tau}$  abgekürzt. Für  $\epsilon = 0$  stellt  $x_0 = \hat{f}$  eine Ruhelage dar. Deshalb liegt eine Formulierung der Mathieu-Gleichung in der Abweichung  $\Delta x$  bezüglich  $x_0 = \hat{f}$  nahe und liefert

$$\Delta\ddot{x} + 2\beta\Delta\dot{x} + (1 + \epsilon \cos \nu\tau) \Delta x = -\epsilon\hat{f} \cos \nu\tau . \quad (\text{C.2})$$

Daraus folgt, dass eine konstante Vorlast  $\hat{f}$  in Verbindung mit Parametererregung zu Fremderregung führt. Daher liegt die Vermutung nahe, dass für  $\nu = 1$  eine klassische Resonanz auftritt. Die klassische Mathieu-Gleichung mit  $\hat{f} = 0$  besitzt eine Ruhelage  $x = 0$ , deren Stabilität üblicherweise untersucht wird. Dabei liegen bei den Frequenzen  $\nu = 2/k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) sogenannte *Parameterinstabilitäten* der  $k$ -ten Ordnung vor. Damit können bei  $\nu = 1$  die klassische Resonanz infolge der Fremderregung und die Parameterinstabilität zweiter Ordnung erwartet werden.

Beispielhaft sind in Abbildung C.1 die Amplitudenverläufe der Mathieu-Gleichung für die Dämpfungskonstanten  $\beta = 0.1$  beziehungsweise  $\beta = 0.02$  mit den Parametern  $\epsilon = 0.5$  und  $\hat{f} = 1$  gezeigt. Zur Berechnung wird der Pfadverfolgungsalgorithmus der MATLAB<sup>®</sup>-Toolbox MATCONT verwendet [22].

Die Parameterinstabilität bei  $\nu \approx 2$  ist in beiden Fällen deutlich zu erkennen. Sie führt im vorliegenden linearen System zu unendlichen Amplituden, sodass deren Amplitudenverläufe nur angedeutet sind. In Zeitsimulationen kann der oszillatorische Charakter mit exponentiell ansteigender Amplitude beobachtet werden.

Für die Dämpfung  $\beta = 0.1$  ergeben sich in der Nähe der Hauptresonanz  $\nu \approx 1$  beschränkte Amplituden (Abbildung C.1a). Ein Vergleich mit der Vergrößerungsfunktion des Systems ohne Parametererregung – jedoch mit der entsprechenden Fremderregung – zeigt einen

ähnlichen Verlauf. Die Amplituden sind anhand einer Zeitsimulation überprüft; die Auslenkungen  $x$  sind in Abbildung C.2a gezeigt.

Wird die niedrigere Dämpfung  $\beta = 0.02$  gewählt, so liegen in der Nähe von  $\nu \approx 1$  sehr große Amplituden vor (Abbildung C.1b). Die Zeitsimulation in Abbildung C.2b zeigt oszillatorisches Verhalten mit exponentiell ansteigender Amplitude – ein Hinweis auf eine Instabilität. Jedoch wird bei Parameterinstabilitäten stets eine zu untersuchende Lösung instabil, die mithilfe der Pfadverfolgung weiterhin berechnet werden kann. Bei  $\nu \approx 1$  ist dies jedoch nicht der Fall, sodass keine klassische Parameterinstabilität vorliegt. Der Amplitudenverlauf ist in der Nähe von  $\nu \approx 1$  glatt und deutet zunächst auf eine klassische Resonanz hin. Diese liegt jedoch nicht vor, da trotz positiver Dämpfung anscheinend unbeschränkte Amplituden auftreten. Damit kann bei  $\nu \approx 1$  weder von einer klassischen Resonanz eines gedämpften Systems noch von einer Parameterinstabilität im bekannten Sinne gesprochen werden.

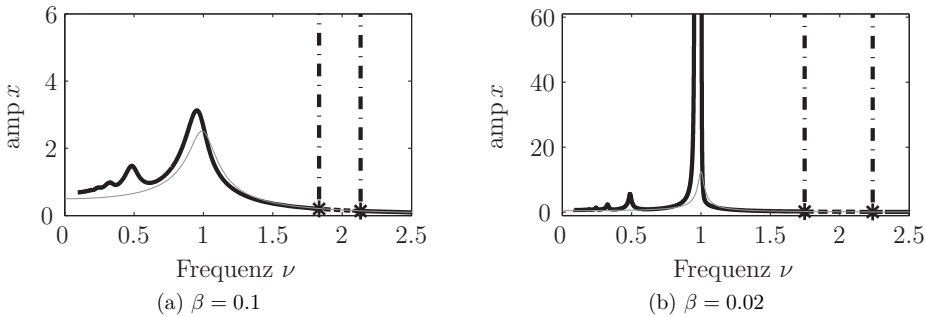


Abbildung C.1: Amplitudenverlauf der Mathieu-Gleichung mit  $\epsilon = 0.5$  und  $\hat{f} = 1$   
 — stabil, - - - instabil (bei  $\nu \approx 2$ ), \* Periodenverdopplung,  
 · · · · von der Periodenverdopplung abzweigender Verlauf,  
 — Vergrößerungsfunktion bei Kräfteerregung (ohne Parametererregung)

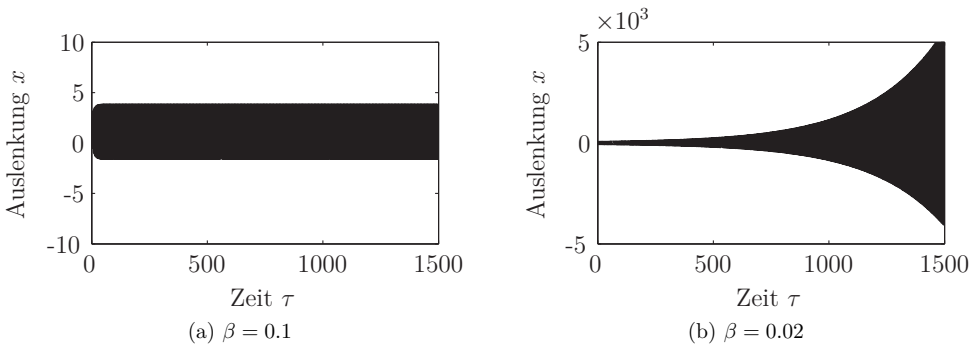


Abbildung C.2: Auslenkungen  $x$  aus Zeitsimulationen bei  $\nu = 1$  und den Dämpfungskonstanten  $\beta = 0.1$  beziehungsweise  $\beta = 0.02$  ( $\epsilon = 0.5$  und  $\hat{f} = 1$ )

# Symbolverzeichnis

Im Symbolverzeichnis werden nur die wichtigsten und häufig verwendete Symbole aufgelistet. Formelzeichen, welche ausschließlich in einzelnen Unterabschnitten verwendet werden, sind hier nicht aufgeführt. Doppelte Belegungen konnten in dieser Arbeit leider nicht vermieden werden.

## Indizes

$( )^0, ( )_0$	Ruhelage, Konstantanteil
$( )^a, ( )_a$	außen
$( )_B$	Barus (Viskosität)
$( )_{fl}$	Fluid
$( )_{fr}$	Filmaufriss (engl.: <i>film rupture</i> )
$( )_{FS}$	dynamisches Fluid-Struktur-Modell
$( )_H$	Hertz
$( )_{HD}$	Hydrodynamik
$( )^i, ( )_i$	innen
$( )_i, ( )_j, ( )_k$	Indizes zur Nummerierung
$( )_{KV}$	nichtlineares Kelvin-Voigt-Modell
$( )^{nl}$	nichtlinear
$( )_R$	Roelands (Viskosität)
$( )_{st}$	Struktur
$( )_x, ( )_y, ( )_z$	Koordinaten eines Vektors oder Tensors

## Lateinische Symbole

$a, A$	Hertzische Kontaktbreite, dimensionslos: $A = a/\hat{x}$
$c, C$	Steifigkeit, dimensionslos: $C = cR/\eta_0 U_0$
$d, D$	Dämpfung, dimensionslos: $D = d/\eta_0$

$E$	Elastizitätsmodul
$E^*$	reduzierter Elastizitätsmodul: $1/E^* = (1 - \nu_1^2)/E_1 + (1 - \nu_2^2)/E_2$
$F$	Linienlast [N/m]
$\hat{h} = R(2\mathcal{U})^{1/2}$	Bezugshöhe zur Entdimensionierung von $h, h_0, h_c, \delta$ und $\xi$
$h, H$	Schmierspalthöhe, dimensionslos: $H = h/\hat{h}$
$h_0, H_0$	Position der undeformierten Kontur im Kontaktzentrum, dimensionslos: $H_0 = h_0/\hat{h}$
$h_c, H_c$	Spalthöhe im Kontaktzentrum, dimensionslos: $H_c = h_c/\hat{h}$
$K_k^H$	Konstante $k = 1, 2, \dots$
$\ell_{st}, L_{st}$	Kantenlänge der quadratischen Struktur, dimensionslos: $L_{st} = \ell_{st}/\hat{x}$
$L = \mathcal{G}(2\mathcal{U})^{1/4}$	Schmiermittelparameter
$m$	Masse [kg/m]
$\mathcal{M} = mU_0/R_0\eta_0$	Masse (passend zu den Parametern von Dowson und Higginson)
$M = \mathcal{M}\sqrt{2\mathcal{U}}$	Masse (passend zu $W$ und $L$ )
$\hat{p} = 2E^*(2\mathcal{U})^{1/4}$	Bezugsdruck zur Entdimensionierung von $p$
$p, P$	Druck, dimensionslos: $P = p/\hat{p}$
$p_H^{max}, P_H^{max}$	maximaler Hertz'scher Druck, dimensionslos: $P_H^{max} = p_H^{max}/\hat{p}$
$P_{HD}^{max}$	maximaler hydrodynamischer Druck (Gümbel-Randbedingungen, dimensionslos)
$R$	reduzierter Radius
$\hat{t} = \hat{x}/U_0$	Bezugszeit zur Entdimensionierung von $t$ und $\omega$
$t, \tau$	Zeit, dimensionslos: $\tau = t/\hat{t}$
$U$	hydrodynamische Geschwindigkeit
$\mathcal{U} = \eta_0 U_0 / 4RE^*$	Geschwindigkeit (von Dowson und Higginson)
$v, V$	elastische Verschiebung (Deformation), dimensionslos: $V = v/\hat{h}$
$\mathcal{W} = F/2RE^*$	Last (von Dowson und Higginson)
$W = \mathcal{W}/\sqrt{2\mathcal{U}}$	Last

$\hat{x} = R(2\mathcal{U})^{1/4}$	Bezugslänge zur Entdimensionierung von $x$ und $\ell_{st}$
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$x_0, X_0$	Integrationskonstante, dimensionslos: $X_0 = x_0/\hat{x}$
$X_H^{max}, X_{HD}^{max}$	Stelle des maximalen Hertz'schen bzw. hydrodynamischen Druckes bei Gumbel-Randbedingungen (dimensionslos)
$Z$	dimensionsloser Viskositäts-Exponent
$z$	Druck-Viskositäts-Index (Roelands)

### Griechische Symbole

$\alpha$	Druck-Exponent (Barus)
$\delta, \Delta$	Annäherung durch elastische Deformation, dimensionslos: $\Delta = \delta/\hat{h}$
$\Gamma = \frac{2}{\pi}W$	Last
$\gamma_w, \gamma_U, \gamma_R, \gamma_S$	Amplitude bei harmonischer Anregung durch Kraft, Geschwindigkeit, Radius und Fußpunkt
$\eta, \bar{\eta}$	dynamische Viskosität, dimensionslos: $\bar{\eta} = \eta/\eta_0$
$\eta_0$	dynamische Viskosität bei Umgebungsdruck und Betriebstemperatur
$\kappa_0, K_0$	Spiel bei Ruhelage, dimensionslos: $K_0 = \kappa_0/\hat{h}$
$\lambda$	Lyapunov-Exponent
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\nu = \Omega/\Omega_0$	Frequenzverhältnis
$\omega, \Omega$	Anregungskreisfrequenz oder Wellendrehzahl, dimensionslos: $\Omega = \omega\hat{t}$
$\psi$	Verlustfaktor
$\rho, \bar{\rho}$	Dichte, dimensionslos: $\bar{\rho} = \rho/\rho_0$
$\rho_0$	Dichte bei Umgebungsdruck und Betriebstemperatur
$\tau = t/\hat{t}$	dimensionslose Zeit
$\tau_c$	charakteristische Zeit des EHD-Kontaktes
$\vartheta_n$	beliebige Funktion der Zeit mit $n \in \{W, U, R, S\}$
$\vartheta_n^q$	harmonische Funktion der Zeit: $\vartheta_n^q = q + \gamma_n \cos \Omega\tau$ mit $n \in \{W, U, R, S\}$ und Konstantanteil $q$





# Literaturverzeichnis

- [1] AL-SAMIEH, M. ; RAHNEJAT, H. : Physics of lubricated impact of a sphere on a plate in a narrow continuum to gaps of molecular dimensions. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 35 (2002), S. 2311–2326
- [2] ALMQVIST, T. ; ALMQVIST, A. ; LARSSON, R. : A comparison between computational fluid dynamic and Reynolds approaches for simulating transient EHL line contacts. In: *Tribology international* 37 (2004), Nr. 1, S. 61–69
- [3] BARUS, C. : Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. In: *American Journal of Science* 3 (1893), S. 87–96
- [4] BATHE, K.-J. ; ZIMMERMANN, P. : *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002
- [5] BEDEWI, M. ; DOWSON, D. ; TAYLOR, C. : Elastohydrodynamic lubrication of line contacts subjected to time dependent loading with particular reference to roller bearings and cams and followers. In: *Mechanisms and surface distress: global studies of mechanisms and local analyses of surface distress phenomena*, 1986, S. 289–304
- [6] BHUSHAN, B. : *Introduction to tribology*. Wiley, 2002
- [7] BOEDO, S. ; BOOKER, J. : A mode-based elastohydrodynamic lubrication model with elastic journal and sleeve. In: *Journal of Tribology* 122 (2000), Nr. 1, S. 94–102
- [8] BOLOTIN, V. V.: *The dynamic stability of elastic systems*. Holden-Day, 1964
- [9] BOOKER, J. : Basic equations for fluid films with variable properties. In: *Journal of tribology* 111 (1989), Nr. 3, S. 475–479
- [10] BOYACI, A. : *Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern*, Karlsruher Institut für Technologie, Diss., 2012
- [11] BRANDT, A. : Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. In: *Mathematics of Computation* 31 (1977), Nr. 138, S. 333–390
- [12] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAEV, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H. : *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch, 2005
- [13] BROOKS, A. N. ; HUGHES, T. J.: Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 32 (1982), Nr. 1-3, S. 199–259

- [14] CAMERON, A. : Righting a 40-year-old wrong: A. M. Ertel – the true author of ‘Grubin ehl’ solution. In: *Tribology International* 18 (1985), Nr. 2, S. 92
- [15] CHICONE, C. : *Ordinary differential equations with applications*. Springer, 2006
- [16] CHRISTENSEN, H. : The oil film in a closing gap. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 266 (1962), S. 312–328
- [17] CHRISTIE, I. ; GRIFFITHS, D. F. ; MITCHELL, A. R. ; ZIENKIEWICZ, O. C.: Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 10 (1976), Nr. 6, S. 1389–1396
- [18] COMSOL: COMSOL MULTIPHYSICS<sup>®</sup> *Reference Guide*. Version 4.3a, 2012
- [19] CONN, A. R. ; GOULD, N. I. M. ; TOINT, P. L.: *Trust region methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000
- [20] CORLESS, R. ; GONNET, G. ; HARE, D. ; JEFFREY, D. ; KNUTH, D. : On the LambertW function. In: *Advances in Computational mathematics* 5 (1996), Nr. 1, S. 329–359
- [21] DAREING, D. ; JOHNSON, K. : Fluid film damping of rolling contact vibrations. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 17 (1975), Nr. 4, S. 214–218
- [22] DHOOGHE, A. ; GOVAERTS, W. ; KUZNETSOV, Y. ; MESTROM, W. ; RIET, A. ; SAUTOIS, B. : *MATCONT and CL MATCONT: Continuation toolboxes in Matlab*, December 2006
- [23] DIETL, P. : *Damping and stiffness characteristics of rolling element bearings*, Technischen Universität Wien, Diss., 1997
- [24] DOWSON, D. ; HARRISON, P. ; TAYLOR, C. : The lubrication of automotive cams and followers. In: *Mechanisms and surface distress: global studies of mechanisms and local analyses of surface distress phenomena*, Butterworths, 1986, S. 305–322
- [25] DOWSON, D. ; HIGGINSON, G. R.: A numerical solution to the elasto-hydrodynamic problem. In: *Journal Mechanical Engineering Science* 1 (1959), S. 6–15
- [26] DOWSON, D. ; TAYLOR, C. M.: Cavitation in bearings. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 11 (1979), Nr. 1, S. 35–65
- [27] DOWSON, D. ; HIGGINSON, G. R.: *Elastohydrodynamic lubrication*. Pergamon Press, 1977
- [28] DOWSON, D. ; HIGGINSON, G. R.: Reflections on early studies of elasto-hydrodynamic lubrication. 134 part 1 (2006), S. 3–21
- [29] FLAMANT, M. : Sur la répartition des pressions dans un solide rectangulaire chargé transversalement. In: *Compt. Rendus, Paris* 114 (1892), S. 1465–1468

- 
- [30] FLOQUET, G. : Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In: *Annales de l'École Normale Supérieure* 12(2) (1883), S. 47–88
- [31] FÖPPL, A. : *Vorlesungen über Technische Mechanik*. Bd. [5]: Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Teubner, 1907
- [32] GALEÃO, A. ; ALMEIDA, R. ; MALTA, S. ; LOULA, A. : Finite element analysis of convection dominated reaction-diffusion problems. In: *Applied Numerical Mathematics* 48 (2004), S. 205–222
- [33] GENTA, G. : *Vibration dynamics and control*. Springer, 2009
- [34] GONTHIER, Y. ; MCPHEE, J. ; LANGE, C. ; PIEDBŒUF, J.-C. : A regularized contact model with asymmetric damping and dwell-time dependent friction. In: *Multibody System Dynamics* 11 (2004), Nr. 3, S. 209–233
- [35] GREENWOOD, J. : An extension of the Grubin theory of elastohydrodynamic lubrication. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 5 (1972), S. 2195–2211
- [36] GRUBIN, A. : Fundamentals of the hydrodynamic theory of lubrication of heavily loaded cylindrical surfaces. In: *TsNITMASH (Central Research Institute of Machine Building)* 30 (1949), S. 115–166
- [37] GÜMBEL, L. : Über geschmierte Arbeitsräder. In: *Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen* 24 (1916), S. 245–248
- [38] HABCHI, W. ; EYHERAMENDY, D. ; VERGNE, P. ; MORALES-ESPEJEL, G. : A full-system approach of the elastohydrodynamic line/point contact problem. In: *Journal of Tribology* 130 (2008), Nr. 2, S. 1–10
- [39] HABCHI, W. ; EYHERAMENDY, D. ; VERGNE, P. ; MORALES-ESPEJEL, G. : Stabilized fully-coupled finite elements for elastohydrodynamic lubrication problems. In: *Advances in Engineering Software* In Press, Corrected Proof (2010), S. 4–18
- [40] HABCHI, W. : *A full-system finite element approach to elastohydrodynamic lubrication problems: application to ultra-low-viscosity fluids*, Insa Lyon, Diss., 2008
- [41] HAGEDORN, P. : *Nichtlineare Schwingungen*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1978
- [42] HAHN, H. G. : *Elastizitätstheorie: Grundlagen der linearen Theorie und Anwendungen auf eindimensionale, ebene und räumliche Probleme*. Teubner, 1985
- [43] HAMROCK, B. ; SCHMID, S. ; JACOBSON, B. : *Fundamentals of fluid film lubrication*. CRC Press, 2004
- [44] HEINRICH, J. C. ; HUYAKORN, P. S. ; ZIENKIEWICZ, O. C. ; MITCHELL, A. R. : An 'upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 11 (1977), Nr. 1, S. 131–143

- [45] HERREBRUGH, K. : Elastohydrodynamic squeeze films between two cylinders in normal approach. In: *Journal of Tribology* 92 (1970), S. 292–302
- [46] HERTZ, H. : Über die Berührung fester elastischer Körper. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), S. 156–171
- [47] HERTZ, H. : Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte. In: *H. Hertz, Gesammelte Werke* 1 (1882), S. 174–196
- [48] HETZLER, H. : Resonance and stability of stationary solutions in linear systems of rotating machinery with periodic parameter variations and external excitation. (2010)
- [49] HIGGINSON, G. : The theoretical effects of elastic deformation of the bearing liner on journal bearing performance. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Conference Proceedings* Bd. 180 SAGE Publications, 1965, S. 31–38
- [50] HOLMES, M. J. A. ; EVANS, H. P. ; HUGHES, T. G. ; SNIDLE, R. W.: Transient elastohydrodynamic point contact analysis using a new coupled differential deflection method Part 1: theory and validation. In: *Journal of Engineering Tribology* 217 (2003), S. 289–303
- [51] HUGHES, T. : *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Dover Publications, 2000
- [52] HUGHES, T. ; MALLET, M. : A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 58 (1986), Nr. 3, S. 305–328
- [53] JAKOBSSON, B. ; FLOBERG, L. : *The finite journal bearing considering vaporization*. Elanders, 1957
- [54] JOHNSON, K. L.: *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 2003
- [55] KAHRAMAN, A. ; SINGH, R. : Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. In: *Journal of sound and vibration* 144 (1991), Nr. 3, S. 469–506
- [56] KILALI, T. E. ; PERRET-LIAUDET, J. ; MAZUYER, D. : An original setup test rig for analysing lubricated contact under dynamic normal excitation forces. In: *ASME Conference Proceedings* 2003 (2003), S. 1465–1472
- [57] KORRENN, H. ; KIRCHNER, W. ; BRAUNE, G. : Die elastische Verformung einer ebenen Stahloberfläche unter linienförmiger Belastung. In: *Werkstattstechnik* 1 (1963), S. 27–30
- [58] KRÄMER, E. : *Maschinendynamik*. Springer London, Limited, 2012

- 
- [59] KUMAR, A. ; BOOKER, J. : A finite element cavitation algorithm. In: *Journal of Tribology* 113 (1991), S. 276–286
- [60] KUMAR, A. ; BREMBLE, G. : An experimental investigation into the oil film thickness of Wildhaber/Novikov gears using a simulation machine: Part I. In: *Wear* 35 (1975), Nr. 1, S. 69–77
- [61] KUNERT, K. : Spannungsverteilung im Halbraum bei elliptischer Flächenpressungsverteilung über einer rechteckigen Druckfläche. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 27 (1961), S. 165–174
- [62] KUZNETSOV, Y. A.: *Elements of applied bifurcation theory*. Bd. 112. 2nd ed. Springer, 1998
- [63] LARSSON, R. ; HÖGLUND, E. : Numerical simulation of a ball impacting and rebounding a lubricated surface. In: *Journal of Tribology* 117 (1995), S. 94–102
- [64] LAZAN, B. J.: *Damping of materials and members in structural mechanics*. Pergamon Press, 1968
- [65] LIEW, H.-V. ; LIM, T. C.: Analysis of time-varying rolling element bearing characteristics. In: *Journal of Sound and Vibration* 283 (2005), Nr. 3, S. 1163–1179
- [66] LU, H. : *High order finite element solution of elastohydrodynamic lubrication problems*, The University of Leeds, Diss., 2006
- [67] LUBRECHT, A. A. ; NAPEL, W. E. ; BOSMA, R. : Multigrid, an alternative method for calculating film thickness and pressure profiles in elastohydrodynamically lubricated line contacts. In: *Journal of Tribology* 108(4) (1986), S. 551–556
- [68] LUGT, P. ; MORALES-ESPEJEL, G. : A review of elasto-hydrodynamic lubrication theory. In: *Tribology Transactions* 54 (2011), Nr. 3, S. 470–496
- [69] LUNDBERG, G. : Elastische Berührung zweier Halbräume. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 10 (1939), Nr. 5, S. 201–211
- [70] MARTIN, H. : Lubrication of gear teeth. In: *Engineering (London)* 102 (1916), S. 119–121
- [71] MEHDIGOLI, H. ; RAHNEJAT, H. ; GOHAR, R. : Vibration response of wavy surfaced disc in elastohydrodynamic rolling contact. In: *Wear* 139 (1990), Nr. 1, S. 1–15
- [72] MEVEL, B. ; GUYADER, J. : Routes to chaos in ball bearings. In: *Journal of Sound and Vibration* 162 (1993), Nr. 3, S. 471–487
- [73] MOES, H. : Optimum similarity analysis with applications lubrication. In: *Wear* 159 (1992), S. 57–66
- [74] MOSTOFI, A. : *Oil film thickness and pressure distribution in EHL contacts*, Imperial College of Science and Technology, University of London, Diss., 1981

- [75] NAYFEH, A. : *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, 2008
- [76] NAYFEH, A. ; BALACHANDRAN, B. : *Applied nonlinear dynamics*. Wiley, 2004
- [77] NAYFEH, A. H. ; MOOK, D. T.: *Nonlinear oscillations*. Wiley, 1979
- [78] NONATO, F. ; CAVALCA, K. : On the non-linear dynamic behavior of elasto-hydrodynamic lubricated point contact. In: *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010), S. 4656–4671
- [79] OERTEL, H. ; BÖHLE, M. : *Strömungsmechanik: Grundlagen-Grundgleichungen-Lösungsmethoden-Softwarebeispiele*. Vieweg, 2004
- [80] OLSSON, K. : *Cavitation in dynamically loaded bearings*. Scandinavian University Books, 1965
- [81] PARKER, T. S. ; CHUA, L. O.: *Practical numerical algorithms for chaotic systems*. Springer, 1989
- [82] PETRUSEVICH, A. : Principal conclusions from contact-hydrodynamic theory of lubrication. In: *Izvest. Akad. Nauk SSSR* 2 (1951), S. 209–223
- [83] PLASCHKO, P. ; BROD, K. : *Nichtlineare Dynamik, Bifurkation und chaotische Systeme*. Vieweg, 1995
- [84] RAHNEJAT, H. : *Influence of vibration on the oil film in concentrated contacts*, University of London, Diss., 1984
- [85] RAHNEJAT, H. ; GOHAR, R. : The vibrations of radial ball bearings. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 199 (1985), Nr. 3, S. 181–193
- [86] RAJAGOPAL, K. ; SZERI, A. : On an inconsistency in the derivation of the equations of elasto-hydrodynamic lubrication. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 459 (2003), S. 2771–2786
- [87] REYNOLDS, O. : On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 40 (1886), Nr. 242-245, S. 228–310
- [88] RIEMER, M. ; WAUER, J. ; WEDIG, W. : *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik*. Springer, 1993
- [89] RIENÄCKER, A. : *Instationäre Elasto-hydrodynamik von Gleitlagern mit rauhen Oberflächen und inverse Bestimmung der Warmkonturen*, RWTH Aachen, Diss., 1995
- [90] ROELANDS, C. J.: *Correlational aspects of the viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils*, TU Delft, Diss., 1966

- 
- [91] SARANGI, M. ; MAJUMDAR, B. ; SEKHAR, A. : On the dynamics of elastohydrodynamic mixed lubricated ball bearings. Part I: formulation of stiffness and damping coefficients. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 219 (2005), Nr. 6, S. 411–421
- [92] SARANGI, M. ; MAJUMDAR, B. ; SEKHAR, A. : On the dynamics of elastohydrodynamic mixed lubricated ball bearings. Part II: non-linear structural vibration. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 219 (2005), Nr. 6, S. 423–433
- [93] SASAKI, T. ; MORI, H. ; OKINO, N. : Fluid lubrication theory of roller bearing. Part I: fluid lubrication theory for two rotating cylinders in contact. In: *Journal of Basic Engineering* 84 (1962), S. 166–174
- [94] <http://www.schaeffler-gruppe.de>
- [95] SCHILDER, F. ; OSINGA, H. M. ; VOGT, W. : Continuation of quasi-periodic invariant tori. In: *SIAM J. Applied Dynamical Systems* 4 (2005), S. 459–488
- [96] SCHMIDT, G. : *Parametererregte Schwingungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975
- [97] SCHOUTEN, M. J. W. ; LEEUWEN, H. J. V.: Die Elastohydrodynamik: Geschichte und Neuentwicklungen. In: *VDI-Verlag* 1207 (1995), S. 1–47
- [98] SCHWARZ, H. R.: *Numerische Mathematik*. B. G. Teubner Stuttgart, 1997
- [99] SCHWARZE, B. : *Losradkreischen in Zahnradgetrieben*, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1996
- [100] SCHWEIZER, B. : ALE formulation of Reynolds fluid film equation. In: *ZAMM* 88 (2008), S. 716–728
- [101] SEYDEL, R. : *Practical bifurcation and stability analysis*. Springer, 2010
- [102] SINGH, R. ; XIE, H. ; COMPAIN, R. : Analysis of automotive neutral gear rattle. In: *Journal of Sound and Vibration* 131 (1989), Nr. 2, S. 177 – 196
- [103] SOMMERFELD, A. : Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 40 (1904), S. 97–155
- [104] SPIKES, H. A.: Sixty years of EHL. In: *Lubrication Science* 18 (2006), S. 265–291
- [105] SPROTT, J. : *Chaos and time-series analysis*. Bd. 69. Oxford University Press Oxford, UK:, 2003
- [106] STIEBER, W. : *Das Schwimmlager: Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers*. VDI-Verlag GmbH, 1933

- [107] STROGATZ, S. : *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Westview Press, 1994
- [108] SWIFT, H. W.: The stability of lubricating films in journal bearings. In: *Journal of the Institute of Engineering* 233(Pt.1) (1931), S. 267–288
- [109] SZERI, A. Z.: *Fluid film lubrication: theory and design*. Cambridge University Press, 2005
- [110] THEODOSSIADES, S. ; TANGASAWI, O. ; RAHNEJAT, H. : Gear teeth impacts in hydrodynamic conjunctions promoting idle gear rattle. In: *Journal of sound and vibration* 303 (2007), Nr. 3-5, S. 632–658
- [111] THOMSEN, J. : *Vibrations and stability: advanced theory, analysis, and tools*. McGraw Hill, 2003
- [112] TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N.: *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 1951
- [113] TIWARI, M. ; GUPTA, K. ; PRAKASH, O. : Dynamic response of an unbalanced rotor supported on ball bearings. In: *Journal of Sound and Vibration* 238 (2000), Nr. 5, S. 757–779
- [114] TIWARI, M. ; GUPTA, K. ; PRAKASH, O. : Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor. In: *Journal of Sound and vibration* 238 (2000), Nr. 5, S. 723–756
- [115] TOWER, B. : First report on friction experiments. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 34 (1883), S. 632–659
- [116] TOWER, B. : First report on friction experiments – adjourned discussion. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 35 (1884), Nr. 1, S. 29–35
- [117] TOWER, B. : Second report on friction experiments. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 36 (1885), S. 58–70
- [118] TRIPP, J. H.: Hertzian contact in two and three dimensions. In: *NASA Technical Paper* 2473 (1985)
- [119] VENNER, C. : *Multilevel solution of the EHL line and point contact problems*, Universiteit Twente, Diss., 1991
- [120] WENSING, J. : *On the dynamics of ball bearings*, University of Twente, Enschede, Diss., 1998
- [121] WIEGERT, B. ; HETZLER, H. ; DAMERAU, J. ; SEEMANN, W. : Untersuchung von nichtlinearen Schwingungen in Wälzlagern mithilfe eines für MKS-Systeme geeigneten EHD-Kontaktmodells. In: *VDI-Berichte* 2197 (2013), S. 155–166



- [122] WIEGERT, B. ; HETZLER, H. ; SEEMANN, W. : An analytical expression of the normal force of hydrodynamic line contacts under transient conditions. In: *Tribology International* 61 (2013), S. 32–39
- [123] WIEGERT, B. ; HETZLER, H. ; SEEMANN, W. : A simplified elastohydrodynamic contact model capturing the nonlinear vibration behaviour. In: *Tribology International* 59 (2013), S. 79–89
- [124] WIJNANT, Y. H. ; WENSING, J. A. ; NIJEN, G. C. V.: The influence of lubrication on the dynamic behaviour of ball bearings. In: *Journal of Sound and Vibration* 222(4) (1999), S. 579–596
- [125] WIJNANT, Y. : *Contact dynamics in the field of elastohydrodynamic lubrication*, University of Twente, Diss., 1998
- [126] WIJNANT, Y. ; VENNER, C. : Analysis of an EHL circular contact incorporating rolling element vibration. In: *Tribology Series* 32 (1997), S. 445–456
- [127] WOLF, A. ; SWIFT, J. ; SWINNEY, H. ; VASTANO, J. : Determining Lyapunov exponents from a time series. In: *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16 (1985), Nr. 3, S. 285–317
- [128] WU, S. R.: A penalty formulation and numerical approximation of the Reynolds-Hertz problem of elastohydrodynamic lubrication. In: *International Journal of Engineering Science* 24 (1986), S. 1001–1013



Die Bände sind unter [www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu) als PDF frei verfügbar oder als Druckausgabe zu bestellen.

- Band 1**      **Marcus Simon**  
Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer  
Anregung. 2004  
ISBN 3-937300-13-9
- Band 2**      **Clemens Reitze**  
Closed Loop, Entwicklungsplattform für mechatronische  
Fahrregelungssysteme. 2004  
ISBN 3-937300-19-8
- Band 3**      **Martin Georg Cichon**  
Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische  
Systeme. 2006  
ISBN 3-86644-003-0
- Band 4**      **Rainer Keppler**  
Zur Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen  
unter Berücksichtigung von Greifkontakt bei Robotern. 2007  
ISBN 978-3-86644-092-0
- Band 5**      **Bernd Waltersberger**  
Strukturmechanik mit ein- und zweiseitigen Bindungen  
aufgrund reibungsbehafteter Kontakte. 2007  
ISBN 978-3-86644-153-8
- Band 6**      **Rüdiger Benz**  
Fahrzeugsimulation zur Zuverlässigkeitsabsicherung  
von karosseriefesten Kfz-Komponenten. 2008  
ISBN 978-3-86644-197-2
- Band 7**      **Pierre Barthels**  
Zur Modellierung, dynamischen Simulation und  
Schwingungsunterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten  
Balkensystemen. 2008  
ISBN 978-3-86644-217-7

- Band 8**     **Hartmut Hetzler**  
Zur Stabilität von Systemen bewegter Kontinua mit Reibkontakten am Beispiel des Bremsenquietschens. 2008  
ISBN 978-3-86644-229-0
- Band 9**     **Frank Dienerowitz**  
Der Helixaktor – Zum Konzept eines vorverwundenen Biegeaktors. 2008  
ISBN 978-3-86644-232-0
- Band 10**    **Christian Rudolf**  
Piezoelektrische Self-sensing-Aktoren zur Korrektur statischer Verlagerungen. 2008  
ISBN 978-3-86644-267-2
- Band 11**    **Günther Stelzner**  
Zur Modellierung und Simulation biomechanischer Mehrkörpersysteme. 2009  
ISBN 978-3-86644-340-2
- Band 12**    **Christian Wetzel**  
Zur probabilistischen Betrachtung von Schienen- und Kraftfahrzeugsystemen unter zufälliger Windanregung. 2010  
ISBN 978-3-86644-444-7
- Band 13**    **Wolfgang Stamm**  
Modellierung und Simulation von Mehrkörpersystemen mit flächigen Reibkontakten. 2011  
ISBN 978-3-86644-605-2
- Band 14**    **Felix Fritz**  
Modellierung von Wälzlagern als generische Maschinenelemente einer Mehrkörpersimulation. 2011  
ISBN 978-3-86644-667-0

- Band 15**     **Aydin Boyaci**  
Zum Stabilitäts- und Bifurkationsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern. 2012  
ISBN 978-3-86644-780-6
- Band 16**     **Ruggeri Toni Liong**  
Application of the cohesive zone model to the analysis of rotors with a transverse crack. 2012  
ISBN 978-3-86644-791-2
- Band 17**     **Ulrich Bittner**  
Strukturakustische Optimierung von Axialkolbeneinheiten. Modellbildung, Validierung und Topologieoptimierung. 2013  
ISBN 978-3-86644-938-1
- Band 18**     **Alexander Karmazin**  
Time-efficient Simulation of Surface-excited Guided Lamb Wave Propagation in Composites. 2013  
ISBN 978-3-86644-935-0
- Band 19**     **Heike Vogt**  
Zum Einfluss von Fahrzeug- und Straßenparametern auf die Ausbildung von Straßenunebenheiten. 2013  
ISBN 978-3-7315-0023-0
- Band 20**     **Laurent Ineichen**  
Konzeptvergleich zur Bekämpfung der Torsionsschwingungen im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs. 2013  
ISBN 978-3-7315-0030-8
- Band 21**     **Sietze van Buuren**  
Modeling and simulation of porous journal bearings in multibody systems. 2013  
ISBN 978-3-7315-0084-1

- Band 22**    **Dominik Kern**  
Neuartige Drehgelenke für reibungsarme Mechanismen. 2013  
ISBN 978-3-7315-0103-9
- Band 23**    **Nicole Gaus**  
Zur Ermittlung eines stochastischen Reibwerts und dessen Einfluss  
auf reibungserregte Schwingungen. 2013  
ISBN 978-3-7315-0118-3
- Band 24**    **Fabian Bauer**  
Optimierung der Energieeffizienz zweibeiniger  
Roboter durch elastische Kopplungen. 2014  
ISBN 978-3-7315-0256-2
- Band 25**    **Benedikt Wiegert**  
Nichtlineare Schwingungen von Systemen  
mit elasto-hydrodynamischen Linienkontakten. 2015  
ISBN 978-3-7315-0350-7



Der Einfluss von elastohydrodynamischen Kontakten (EHD) auf das nichtlineare Schwingungsverhalten von Systemen wird untersucht. Aufgrund der numerischen Komplexität des vollständigen, kontinuierlich modellierten EHD-Problems müssen für nichtlineare Schwingungsanalysen vereinfachte Kontaktmodelle herangezogen werden. Bisher existiert in der Literatur kein für diesen Zweck geeignetes Modell, sodass im ersten Teil dieser Arbeit ein neues Modell für EHD-Linienkontakte entwickelt und validiert wird.

Die durch die elastohydrodynamischen Kontakte induzierten nichtlinearen Schwingungsphänomene werden an Modellbeispielen demonstriert. Hierbei werden Kraft-, Fußpunkt- und Parameterregung betrachtet, wobei letztere durch eine zeitveränderliche hydrodynamische Geschwindigkeit oder einen oszillierenden reduzierten Kontaktradius realisiert wird. Dabei treten sub- und superharmonische Resonanzen, instabile Lösungen und Amplitudensprünge auf.

Abschließend wird ein Rotor in Zylinderrollenlagern betrachtet. Dabei wird einerseits die Anwendbarkeit des vereinfachten EHD-Kontaktmodells demonstriert und andererseits der Einfluss der EHD-Kontakte auf das nichtlineare Schwingungsverhalten des Rotorsystems gezeigt.

