

Zeitdiskretisierung höherer Ordnung  
bei der Finite-Differenzen  
Simulation seismischer Wellen  
(Time-Discretization of Higher-Order in the  
Finite-Difference Simulation of Seismic Waves)

Bachelorarbeit  
von

Simon Haaga

An der Fakultät für Physik  
Geophysikalisches Institut (GPI)  
Forschungsbereich Angewandte Geophysik

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bohlen  
Zweitgutachter: Dr. André Kurzmann

Bearbeitungszeit: 7. Mai 2014 – 6. August 2014

---

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

**Karlsruhe, 24.07.2014**

.....

**(Simon Haaga)**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1. Finite-Differenzen Methode . . . . .	3
2.1.1. Anwendung auf die eindimensionale Wellengleichung . . . . .	4
2.1.2. Numerische Genauigkeit der FDM . . . . .	6
<b>3. Zwei Methoden zur Erhöhung der Konsistenzordnung der FDM</b>	<b>9</b>
3.1. Methode 1 von M. A. Dablain . . . . .	9
3.2. Methode 2 von Yang Liu und Mrinal K. Sen . . . . .	11
<b>4. Theoretische Analyse</b>	<b>15</b>
4.1. Stabilitätsanalyse . . . . .	15
4.1.1. Anwendung auf Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$ . . . . .	16
4.1.2. Anwendung auf Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$ . . . . .	18
4.1.3. Anwendung auf Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$ . . . . .	18
4.1.4. Anwendung auf Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$ . . . . .	19
4.1.5. Anwendung auf Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$ . . . . .	20
4.2. Dispersionsanalyse . . . . .	21
4.2.1. Dispersionsrelation der Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$ . . . . .	22
4.2.2. Dispersionsrelation der Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$ . . . . .	23
4.2.3. Dispersionsrelation der Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$ . . . . .	23
4.2.4. Dispersionsrelation der Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$ . . . . .	23
4.2.5. Dispersionsrelation der Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$ . . . . .	24
4.2.6. Vergleich der Dispersionsrelationen der verschiedenen Methoden . . . . .	24
<b>5. Anwendung der beiden Methoden in Matlab</b>	<b>29</b>
5.1. Beschreibung des Programms . . . . .	29
5.1.1. Implementierung der beiden Methoden . . . . .	30
5.1.2. Erhöhung des Abstands zwischen Quelle und Empfänger . . . . .	30
5.1.3. Angleichung der numerischen und analytischen Routine . . . . .	31
5.2. Ergebnisse der computergestützten Wellenausbreitung . . . . .	31
5.2.1. Variation der Courant-Zahl . . . . .	32
5.2.2. Variation des Gitterparameters $S$ . . . . .	37
<b>6. Ausblick und Transfer</b>	<b>43</b>
6.1. Anwendungsmöglichkeiten in 2 und 3 Dimensionen . . . . .	43
6.2. Einführung einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit . . . . .	45
<b>7. Zusammenfassung</b>	<b>47</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>49</b>

<b>Anhang</b>	<b>51</b>
A. Programmcode numerische Wellenausbreitung . . . . .	51
B. Programmcode analytische Wellenausbreitung . . . . .	53
C. Programmcode Ricker-Welle . . . . .	54
D. Programmcode fdakust_2ndorder_wave_equation . . . . .	54
E. Programmcode ana_akust . . . . .	56

# 1. Einleitung

Zur Erkundung geologischer Strukturen werden in der Geophysik verschiedene Verfahren verwendet, die ihre Informationen aus den unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften des Untergrunds beziehen. In der Angewandten Geophysik ist die Seismik das meist verwendete Verfahren. Es basiert auf den Ausbreitungs- und Reflexionseigenschaften seismischer Wellen in verschiedenen Materialien des Untergrunds. Das Ziel seismischer Abbildungsverfahren ist es nun, über diese Eigenschaften möglichst genaue geologische Modelle des Untergrunds zu erstellen und diese gegebenenfalls mit bekannten geologischen Strukturen zu kombinieren.

Um aus der Fülle und Komplexität der seismischen Signale die gewünschten Informationen zu extrahieren, kann die computerbasierte Modellierung seismischer Wellen sehr hilfreich sein. Es ist damit möglich verschiedene Messgeometrien vor Feldmessungen zu simulieren, um so einen optimalen Aufbau der Messgeräte zu erreichen. Außerdem können Modellannahmen bereits am Computer überprüft und entsprechend angepasst werden. Durch die Inversion ganzer seismischer Wellenfelder ist diese Anpassung dann auch bei räumlich ausgedehnten und geologisch anspruchsvollen Projekten möglich[GPI14].

Die Grundlage von, für diesen Zweck entwickelter Software ist die numerische Lösung von Wellengleichungen. Eine solche Software wird vom Forschungsbereich Angewandte Geophysik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) entwickelt. Die Programme „*SOFI*“ zur Simulation seismischer Wellen und „*DENISE*“ zur sogenannten Full Waveform Tomography (FWT)[GPI14].

Die angesprochenen Wellengleichungen werden dabei über die, in der seismischen Modellierung üblichen Finite-Differenzen Methode (FDM) gelöst[GPI14]. Die FDM ist ein numerisches Verfahren und kann daher auch keine exakten Ergebnisse liefern, sondern ausschließlich Näherungslösung bis zu einer bestimmten Genauigkeit. Ein Maß für die Genauigkeit von numerischen Verfahren ist die Konsistenzordnung, welche die Abhängigkeit zwischen den entstehenden Fehlern und der Schrittweite beschreibt [Fel14]. Eine der grundlegendsten Wellengleichungen ist die vollständig elastische Wellengleichung[Fri14]. Die einfachste FDM, die für die Lösung dieser Wellengleichung verwendet werden kann hat eine Konsistenzordnung von  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$  [Mar89]. Je höher die Ordnung der Konsistenz, desto genauer arbeitet ein numerischer Algorithmus.

In dieser Bachelorarbeit werden nun zwei Methoden untersucht, die eine Erhöhung der Konsistenzordnung des zeitlichen Gitters ermöglichen ohne die Anzahl der dazu notwendigen zeitlichen Gitterpunkte zu erhöhen. Dabei ergeben sich für die Konsistenzordnung des

räumlichen Gitters verschiedene Möglichkeiten, die in beiden Methoden verwendet werden können. Bei diesen Methoden handelt es sich um ein Verfahren von M. A. Dablain aus dem Jahre 1986 (Methode 1)[Dab86] und um ein neueres Verfahren aus dem Jahre 2009 von Yang Liu und Mrinal K. Sen (Methode 2)[YL09]. Untersucht werden in den folgenden Abschnitten drei verschiedene Ordnungen der 1. Methode von M. A. Dablain:  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$ ,  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  und  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$ . Für die 2. Methode von Yang Liu und Mrinal K. Sen. werden die Ordnungen  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  und  $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$  verwendet.

Ziel dieser Arbeit ist es nun bei sämtlichen Ordnungen beider Methoden mathematisch zu untersuchen, wie sich die Erhöhung der Konsistenzordnung im Vergleich zur ursprünglichen Ordnung ( $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$ ) auf die Stabilität und die Dispersionseigenschaften auswirkt. Dazu wird die Von-Neumann-Stabilitätsanalyse [Mar89, S. 20 ff.] und eine Dispersionsanalyse über die Fourier-Moden [Mar12, Abschn. 3.3.1] durchgeführt. Außerdem werden die theoretischen Ergebnisse in einem MATLAB-Programm numerisch überprüft und Schlussfolgerungen bezüglich der Nützlichkeit der Ergebnisse in zwei und drei Dimensionen gezogen. Die numerische Überprüfung ist im Falle der vollständig elastischen Wellengleichung für ein homogenes Medium besonders einfach, da eine analytische Lösung existiert, mit der die Ergebnisse verglichen werden können.

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1. Finite-Differenzen Methode

Wie in Abschnitt 1 kurz beschrieben handelt es sich bei der Finite-Differenzen Methode (FDM) um ein numerisches Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen. Bei der Beschreibung naturwissenschaftlicher Phänomene und im Rahmen technischer Problemstellungen treten häufig Differentialgleichungen auf, die analytisch nicht lösbar sind. Dies macht die Anwendung numerischer Verfahren, wie die FDM notwendig [WD00].

Der Kern des Finite-Differenzen Verfahrens besteht darin, Ableitungen verschiedener Ordnungen durch Ausdrücke der linearen Algebra zu approximieren. Diese Annäherung kann über die Definition der Taylorreihe hergeleitet werden [Mar89, S. 13 ff.].

Die Formulierung der Taylorreihe beinhaltet sowohl diskrete Funktionswerte  $f(x)$  und  $f(x \pm \Delta x)$  als auch Ableitungen am Punkt  $x$  bis zu einer beliebigen Ordnung. Sie ist gegeben durch

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) + \dots, \quad (2.1)$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} f''(x) - \dots. \quad (2.2)$$

Die Umstellung der Gleichung 2.1 nach  $f'(x)$  führt auf einen Ausdruck, der bis auf die Terme höherer Ableitungsordnung unserer geforderten Annäherung entspricht:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} f''(x) - \frac{\Delta x^2}{3!} f'''(x) - \dots, \quad (2.3)$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (2.4)$$

Hierbei ist anzumerken, dass der Ausdruck  $\mathcal{O}(\Delta x)$  gleichbedeutend mit  $\mathcal{O}(f''(x))$  ist, was in Gleichung 2.3 leicht nachvollzogen werden kann.

Gleichung 2.4 wird auch vorwärtiger Differenzenquotient mit der Konsistenz- oder Fehlerordnung  $\mathcal{O}(\Delta x)$  genannt [Mar89]. Um den Rückwärtigen zu erhalten, muss Gleichung 2.2

auf gleiche Weise nach  $f'(x)$  aufgelöst werden, wobei sich dadurch die Konsistenzordnung nicht verändert.

Die Fehlerordnung verändert sich jedoch wenn der zentrale Differenzenquotient gebildet wird. Hierfür muss die Differenz zwischen Gleichung 2.1 und 2.2 berechnet werden. Dabei zeigt sich schnell, dass die Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(f''(x))$  verschwinden und so der Ausdruck

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.5)$$

entsteht [Tec14]. Der zentrale Differenzenquotient besitzt also die Konsistenzordnung  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ , was, wie später zu sehen sein wird, einer höheren Genauigkeit entspricht.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Diskretisierung der akustischen Wellengleichung in zweiter Ordnung und darum ist vor allem die zweite Ableitung von Interesse. Werden die Gleichungen 2.1 und 2.2 addiert, ergibt sich der zentrale Differenzenquotient

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.6)$$

für  $f''(x)$ . Dieser Ausdruck der Konsistenzordnung  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  ist der Grundbaustein der FDM für lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie beispielsweise die akustische Wellengleichung.

Für die vollständige Formulierung der FDM muss das betrachtete Gebiet in ein diskretes Gitter unterteilt werden, damit der Größe  $\Delta x$  ein fester Wert zugeordnet werden kann. Mathematisch bedeutet das, dass jede Raumrichtung in einzelne Punkte  $x_i$  mit  $i = 1, \dots, N$  unterteilt wird, die jeweils den identischen Abstand  $\Delta x$  zum nächsten Gitterpunkt besitzen. Durch dieses Vorgehen werden aus den kontinuierlichen Funktionswerten  $f(x)$ ,  $f(x + \Delta x)$  und  $f(x - \Delta x)$ , diskrete Näherungswerte  $f_i := f(x_i)$  an den Gitterpunkten  $x_i$  [Gue10]. Die Gleichung 2.6 kann so auf die Form

$$f_i'' = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.7)$$

gebracht werden, die bei der FDM verwendet wird. Zur Lösung einer Differentialgleichung mit dieser Methode müssen noch Randbedingungen festgelegt werden. Da diese stark von der betrachteten Problemstellung abhängen, werden sie jedoch erst im nachfolgenden Abschnitt behandelt.

### 2.1.1. Anwendung auf die eindimensionale Wellengleichung

Bei der eindimensionalen akustischen Wellengleichung handelt es sich, wie bereits beschrieben, um eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.8)$$

wobei hier eine Konstante Dichte angenommen wird.

Da in dieser Arbeit die Ausbreitung seismische Wellen betrachtet wird, bezeichnet die Größe  $P(x, t)$  den Druck an der Stelle  $x$  zum Zeitpunkt  $t$ . Der Parameter  $c$  repräsentiert die materialabhängige Schallgeschwindigkeit und ist somit im Allgemeinen nicht konstant, sondern eine ortsabhängige Größe  $c = c(x)$ . Wird die Problemstellung auf die Ausbreitung in einer geologischen Schicht, d.h. einem bestimmten Material begrenzt, so verliert die Schallgeschwindigkeit ihre Ortsabhängigkeit.

Für die Anwendung der FDM auf die Wellengleichung 2.8 müssen die partiellen Ableitungen durch diskrete Funktionswerte (Gleichung 2.7) ersetzt werden [Ben08]. Dies ist erst möglich, wenn eine geeignete Diskretisierung gefunden wurde. Da  $P(x, t)$  von der Zeit und vom Ort abhängt, muss die Diskretisierung auch in diesen zwei Dimensionen erfolgen. Es entsteht so ein Gitter, dessen Gitterpunkte durch zwei Parameter eindeutig bestimmt sind (siehe Abbildung 2.1). Der Index für die Zeitdiskretisierung wird mit  $n$  und der Index für die Ortsdiskretisierung mit  $k$  bezeichnet.

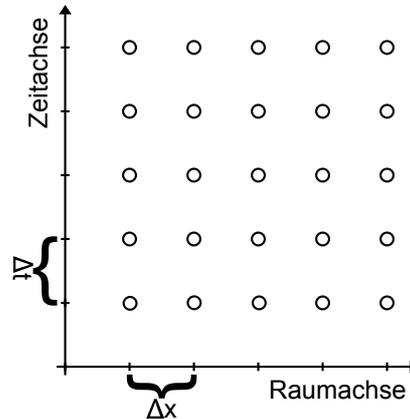


Abbildung 2.1.: Darstellung des zweidimensionalen Hintergrundgitters in Raum und Zeit.

Unter Verwendung der Zeitschritte  $\Delta t$  und des gleichen Abstands  $\Delta x$  der Ortsgitterpunkte kann durch Einsetzen von Gleichung 2.7 in 2.8 eine iterative Lösung

$$\frac{P_k^{n+1} - 2P_k^n + P_k^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = c^2 \frac{P_{k+1}^n - 2P_k^n + P_{k-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (2.9)$$

der elastischen Wellengleichung gefunden werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass sowohl  $\Delta x$  als auch  $\Delta t$  noch keine explizite Größe zugeordnet wurde.

Durch Umformung der Gleichung nach  $P_k^{n+1}$  und einer Indexverschiebung  $n \rightarrow n - 1$  ergibt sich die explizite Form der FDM [YL09]

$$P_k^n = 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (P_{k+1}^{n-1} - 2P_k^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2). \quad (2.10)$$

In Abbildung 2.2 sind die verwendeten Gitterpunkte markiert, die die FDM in der ursprünglichen Form verwendet. Die in den nachfolgenden Abschnitten beschriebenen Methoden 1 und 2 berechnen die Wellenausbreitung mit weiteren räumlichen Gitterpunkten, jedoch werden die zeitlichen Gitterpunkte nicht erweitert.

Für die Anwendung der Gleichung 2.10 müssen zusätzlich Randbedingungen bekannt sein. Bei der Modellierung seismischer Wellen ist es üblich Dirichlet-Randbedingungen zu verwenden, da damit ein Quellsignal an einem bestimmten Ort, zu einer bestimmten Zeit implementiert werden kann. Um Reflexionen bzw. Transmissionen an den Rändern eines Modells zu ermöglichen, müssen häufig noch weitere Randbedingungen, z.B. vom Typ Neumann, ins System gesteckt werden [Tec14]. In dieser Arbeit sind Randeﬀekte nicht von Interesse, sodass lediglich Dirichlet-Randbedingungen verwendet wurden (siehe Abschnitt 5).

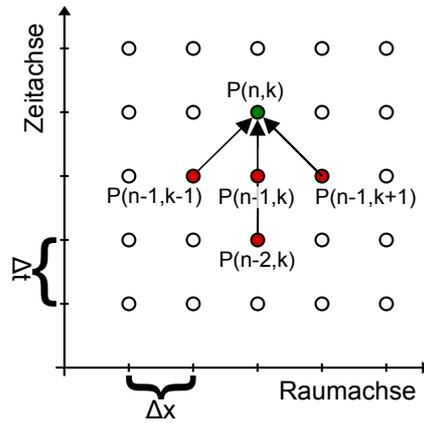


Abbildung 2.2.: Darstellung des zweidimensionalen Hintergrundgitters in Raum und Zeit mit den verwendeten Gitterpunkten der FDM zur Berechnung von  $P_k^n$ .

### 2.1.2. Numerische Genauigkeit der FDM

In Abschnitt 2.1 wurde bereits erwähnt, dass die Fehlerordnung bzw. Konsistenzordnung bereits ein gutes Maß für die Genauigkeitsbewertung eines numerischen Verfahrens ist [Mar89]. Diese Genauigkeit hängt also stark vom Abstand der einzelnen Gitterpunkte ab und damit von der Wahl von  $\Delta t$  und  $\Delta x$ . Je höher die Konsistenzordnung umso schwächer wird diese Abhängigkeit. Für große Abstände, d.h. große  $\Delta t$  und  $\Delta x$ , entstehen so mehr oder weniger schnell schwingende und instabile Ergebnisse. Dahingegen führen kleine Abstände zu genauen und stabilen Lösungen, die jedoch lange Rechenzeiten benötigen.

Instabile Ergebnisse sind unbrauchbar und müssen daher in jedem Fall vermieden werden, gleichzeitig sollten Algorithmen numerischer Methoden leistungsfähig sein und keine unnötige Rechenzeit in Anspruch nehmen [SS00]. Unter Berücksichtigung dieser Forderungen ergeben sich für die Anwendung der FDM auf die Wellengleichung einige Einschränkungen bezüglich  $\Delta t$  und  $\Delta x$ , die auf folgende zwei Kriterien zurückzuführen sind:

1. **Stabilität:** Ein Algorithmus ist stabil, wenn er unempfindlich bezüglich, durch die Diskretisierung entstehenden Rundungsfehler, ist [Mar12, Abschn. 2.3.3]. Fehler dürfen demnach im Verlauf der Berechnungen nicht unkontrolliert anwachsen.
2. **dispersionslose Wellenausbreitung:** Die Diskretisierung der Differentialgleichung durch die entsprechende Methode sollte auf eine dispersionslose Wellenausbreitung führen [Mar12, Abschn. 3.3.1].

Zur Berechnung der Stabilität könnte das von Neumannsche Stabilitätsnachweisverfahren eingesetzt werden, so wie es in Abschnitt 4.1.1 durchgeführt wird. Die FDM in der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$  ist jedoch ein sehr populäres Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen und es ist bekannt, dass die Stabilität bei Anwendung auf die elastische Wellengleichung durch die CFL-Bedingung (Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung)

$$\frac{c_{\max} \Delta t}{\Delta x} = r \leq 1 \quad (2.11)$$

begrenzt ist [Mar12, Abschn. 3.5.1]. Die Geschwindigkeit  $c_{\max}$  kann in dieser Arbeit durch  $c$  ersetzt werden, da Sie nach Definition der Problemstellung konstant ist.

Die CFL-Bedingung tritt jedoch nicht nur bei numerischen Lösungen der Wellengleichung auf, sondern stellt ein universelles Kriterium bei expliziten numerischen Verfahren dar. Es

setzt die Informations-Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\Delta x/\Delta t$  des Algorithmus mit der physikalischen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  in Beziehung [JEM10, S. 98 ff.]. Die Informationsausbreitung muss demnach mindestens die selbe Geschwindigkeit aufweisen, wie die physikalische Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . Stabile Verfahren für Werte der CFL-Bedingung größer als 1 sind Ausnahmenscheinungen, können jedoch praktisch von großem Nutzen sein, da so die Effizienz des Algorithmus gesteigert werden kann.

Ein numerisches Verfahren ist umso genauer, je kleiner das Verhältnis  $c\Delta t/\Delta x$  ist, jedoch erhöht die Verkleinerung von  $\Delta t$  den Rechenaufwand und eine Vergrößerung von  $\Delta x$  ist durch das Abtasttheorem begrenzt.

Das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem ist bei diskreten Verfahren von großer Bedeutung. Es besagt, dass zur korrekten Digitalisierung eines kontinuierlichen Signals mit der Maximalfrequenz  $f_{\max}$ , eine Abtastung mit mindestens der doppelten Maximalfrequenz  $f_{\text{Nyquist}}$  (Nyquist Frequenz) gewählt werden muss [UK08]

$$f_{\text{abtast}} \leq 2f_{\max} = f_{\text{Nyquist}}. \quad (2.12)$$

Diese Arbeit befasst sich zwar nicht direkt mit der Abtastung von Signalen, jedoch gilt das Theorem auch bei der Diskretisierung physikalischer Phänomene, wie beispielsweise der elastische Wellenausbreitung.

Bei einer minimalen Schall- bzw. Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $c_{\min} = 2\pi/\tilde{k} \cdot f_{\max}$  gilt für eine räumliche Gittermasche

$$\Delta x \cdot f_{\text{Nyquist}} \leq c_{\min}. \quad (2.13)$$

Hierbei ist  $2\pi/\tilde{k} = \lambda$  die Wellenlänge des Quellsignals mit der Wellenzahl  $\tilde{k}$ . Außerdem entspricht  $c_{\min}$ , wie bei der Diskussion der Stabilität, der konstanten Geschwindigkeit  $c$ . Damit der Wert eines jeden Gitterpunkts den Funktionswert der kontinuierlichen bzw. physikalischen Wellenausbreitung annähert, muss dieses Kriterium erfüllt sein.

Mit dem Stabilitätskriterium 2.1.2 und der Ungleichung 2.13 sind nun die Grenzen von  $\Delta t$  und  $\Delta x$  bekannt, bis zu denen die FDM stabile Lösungen liefert. Innerhalb dieser Grenzen können die beiden Gitterkonstanten variiert werden, um zwischen einer besseren Genauigkeit und der Einsparung von Rechnerressourcen zu wählen.

In der Praxis wird die Ungleichung 2.13 daher umgeschrieben zu

$$\Delta x = \frac{c_{\min}}{f_{\text{Nyquist}} \cdot S}. \quad (2.14)$$

Der Parameter  $S \in \mathbb{N}$  gibt die Anzahl der Gitterpunkte an, die innerhalb der von Ungleichung 2.13 definierten Grenze liegen. Durch Veränderung von  $S$  können so die Gitterabstände  $\Delta x$  und indirekt auch  $\Delta t$  variiert werden. Die Bedeutung von  $S$  wird erst ersichtlich bei der Durchführung einer Dispersionsanalyse, wie in Abschnitt 4.2. Für eine nicht dispersive Wellenausbreitung, wie im zweiten Kriterium gefordert, reicht die Bedingung 2.13 meist nicht aus, sondern es bedarf einer gewissen Mindestanzahl an Gitterpunkten  $S$ , die stark an das verwendete Verfahren gekoppelt ist [Dab86].

Das Dispersionsverhalten der FDM in bekannter Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$  kann über die Methode der Fourier-Moden bestimmt werden. Diese Methode wird in Abschnitt 4.2 beschrieben und auf die Differenzgleichungen höherer Ordnungen angewendet. Für das hier betrachtete FD-Schema ergibt sich mit dieser Methode folgende Dispersionsrelation [Mar12, Abschn. 3.3.2]

$$\omega(\tilde{k}) = \frac{1}{\Delta t} \arccos \left[ 1 - r^2 \left( 1 - \cos(\tilde{k} \Delta x) \right) \right]. \quad (2.15)$$

Die Größe  $r = c\Delta t/\Delta x$  ist die Courant-Zahl aus Gleichung .

Eine dispersionslose Wellenausbreitung ist für diesen Ausdruck nur für relativ kleine Werte von  $\tilde{k} \cdot \Delta x = 2\pi/\lambda \cdot \Delta x$  gegeben, was eine entsprechend große Anzahl an Gitterpunkten  $S$  erfordert. Der genaue Wert hängt auch von der Wellenlänge des Quellsignals ab und kann daher je nach Wellenlänge erheblich variieren. Ein Wert für  $S$  kleiner als 10 ist bei seismischen Wellen und unter Verwendung des FDM in zweiter Ordnung beinahe unmöglich. Ein großes Ziel der in den nächsten Abschnitten diskutierten Methoden ist es, stabile nicht dispersive Wellenausbreitungen auch für kleinere Werte von  $S$  numerisch zu realisieren. Der Ansatz dazu ist bei beiden Methoden die Erhöhung der Konsistenzordnung und insbesondere die Erhöhung der Konsistenzordnung in der Zeit.

### 3. Zwei Methoden zur Erhöhung der Konsistenzordnung der FDM

In dieser Bachelorarbeit werden nun zwei Methoden untersucht, die diese Erhöhung ermöglichen. Das Ziel beider Methoden ist es eine höhere Genauigkeit vor allem im Zeitraum zu ermöglichen, um so unter anderem auch Rechenzeit einsparen zu können.

Die Verringerung des räumlichen Fehlers ist physikalisch leichter zu realisieren als die Verringerung des Fehlers in der Zeit. Der Grund hierfür liegt in der Eigenschaft der Zeitachse, dass nur Gitterpunkte verwendet werden können, die in der Vergangenheit oder in der Gegenwart liegen. Die Differenzenquotienten höherer Ableitungsgrade beinhalten immer zusätzliche Gitterpunkte. Räumlich ist es ohne weiteres möglich alle beliebigen Punkte für die Rechnung zu verwenden. Auf der Zeitachse können jedoch nur jene Gitterpunkte verwendet werden, die nicht in der Zukunft liegen [Tho14]. Diese Tatsache verbietet zentrale Differenzenquotienten in der Zeit. In den folgenden zwei Abschnitten werden zwei Verfahren vorgestellt, die die zeitliche Genauigkeit erhöht ohne die Anzahl der zeitlichen Gitterpunkte zu verändern.

#### 3.1. Methode 1 von M. A. Dablain

Die Methode, die in einer wissenschaftlichen Publikation von M.A. Dablain im Jahre 1986 unter dem Name „The application of high-order differencing to the scalar wave equation“ [Dab86] veröffentlicht wurde, macht sich die Proportionalität zwischen  $\partial^2 P(x, t)/\partial t^2$  und  $\partial^2 P(x, t)/\partial x^2$  der elastischen Wellengleichung 2.8 zu nutze, um die linke Seite der Gleichung 2.9 in höhere Ordnungen zu entwickeln. Die Fehlerordnung der gesamten FDM kann nur erhöht werden wenn sowohl der Differenzenquotient der Zeit- als auch der der Ortsableitung auf eine höhere Genauigkeit gebracht werden. Diese Erhöhung der Genauigkeit kann bei dieser Methode bis zu einer beliebigen Ordnung im Raum erfolgen. In der Zeit wird in der Publikation jedoch höchstens die Fehlerordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$  diskutiert. Höhere Ordnungen in der Zeit sind zwar möglich, jedoch mit einem verhältnismäßig großen Aufwand verbunden. Es wird in dieser Arbeit daher auch nur die zweite und vierte Zeitordnung betrachtet.

Unter Verwendung der Taylorreihen 2.1, 2.2 und der Wellengleichung 2.8 kann Gleichung 2.9 umgeschrieben werden zu

$$\frac{P_k^{n+1} - 2P_k^n + P_k^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\partial^4 P(x, t)}{\partial t^4} \frac{\Delta t^2}{12} + \mathcal{O}(\Delta t^4) = c^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Eingesetzt in Gleichung 2.10 ergibt sich

$$P_k^n = 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + c^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\Delta t^4}{12} \frac{\partial^4 P(x, t)}{\partial t^4} + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (3.2)$$

Die Ortsgenauigkeit ist in diesem Ausdruck noch unbekannt, da die Ortsableitung noch nicht diskretisiert wurde. Ebenso wurde die vierte Ableitung in der Zeit noch nicht in eine numerisch verwertbare Form gebracht. Für diesen Schritt wird die beschriebene Proportionalität der Wellengleichung verwendet. Dieser Schritt ist sinnvoll, da, wie zu Beginn dieses Abschnitts beschrieben, räumliche Ableitungen höherer Ordnung leichter zu handhaben sind als zeitliche.

Für die praktische Umsetzung der beschriebenen Proportionalität wird die Wellengleichung 2.8 zweimal nach der Zeit abgeleitet und die zeitliche und räumliche Ableitung vertauscht

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right). \quad (3.3)$$

Wird anschließend Gleichung 2.8 ein weiteres Mal Angewandt, so kann  $\partial^4 P / \partial t^4$  durch  $\partial^4 P / \partial x^4$  ausgedrückt werden

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} = c^4 \frac{\partial^4 P}{\partial x^4}. \quad (3.4)$$

Dies ist jedoch nur möglich, da angenommen wird  $c$  hänge nicht explizit vom Ort ab. Für die Problemstellung dieser Arbeit trifft diese Annahme zu, es wird jedoch angemerkt, dass Gleichung 3.4 im Allgemeinen nicht gilt.

Gleichung 3.2 hängt jetzt ausschließlich von räumlichen Ableitungen ab

$$P_k^n = 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + c^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 P_k^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{c^4 \Delta t^4}{12} \frac{\partial^4 P_k^{n-1}}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (3.5)$$

Die Ableitungen einer diskreten Funktion  $\partial^2 P_k^{n-1} / \partial x^2$  und  $\partial^4 P_k^{n-1} / \partial x^4$  sind nicht definiert und müssen in einem nächsten Schritt ersetzt werden.

Dies erreicht M.A. Dablain, indem er für die zweite Ableitung  $\partial^2 P / \partial x^2$  unter Verwendung der beiden Taylorreihen 2.1 und 2.2 ein lineares Gleichungssystem aufstellt. Die Addition der beiden Reihen und anschließender Multiplikation mit  $1/2$  ergibt die erste Gleichung

$$\frac{P_{k+1}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}}{2} = P_k^{n-1} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 P_k^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 P_k^{n-1}}{\partial x^4} + \frac{\Delta x^6}{6!} \frac{\partial^6 P_k^{n-1}}{\partial x^6} + \dots \quad (3.6)$$

des Gleichungssystems. Für die nächsten Gleichungen werden die jeweils um ein  $\Delta x$  weiter entfernten Gitterpunkte verwendet. Der Ausdruck

$$\frac{P_{k+3}^{n-1} + P_{k-3}^{n-1}}{2} = P_k^{n-1} + \frac{(3\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 P_k^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{(3\Delta x)^4}{4!} \frac{\partial^4 P_k^{n-1}}{\partial x^4} + \frac{(3\Delta x)^6}{6!} \frac{\partial^6 P_k^{n-1}}{\partial x^6} + \dots \quad (3.7)$$

entspricht beispielsweise der dritten Gleichung des Systems. Je nach Anzahl der verwendeten Gleichungen kann eine bestimmte Fehlerordnung erreicht werden.

Wird das Gleichungssystem gelöst entsteht ein Ausdruck für die zweite Ortsableitung

$$\frac{\partial^2 P_k^{n-1}}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left[ a_0 P_k^{n-1} + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k+j}^{n-1} + P_{k-j}^{n-1} \right) \right], \quad (3.8)$$

der in der Publikation von Yang Liu und Mrinal K. Sen auch als Finite-Differenzen Formel 2Mter Ordnung bezeichnet wird. M entspricht dabei der Anzahl der verwendeten Gleichungen bzw. der Breite des Operators.

Der letzte Schritt der Methode von M. A. Dablain ist die Diskretisierung der vierten Ableitung. Hierfür wird auf den Differenzenquotient (Gleichung 2.6) zurückgegriffen und die eben berechnete zweite Ableitung eingesetzt

$$\frac{\partial^4 P_k^{n-1}}{\partial x^4} \approx \frac{1}{\Delta x^2} \left( \frac{\partial^2 P_{k+1}^{n-1}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 P_k^{n-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{k-1}^{n-1}}{\partial x^2} \right). \quad (3.9)$$

Wird sowohl Gleichung 3.8 als auch 3.9 in 3.5 eingesetzt, so ergibt sich die endgültige Formulierung dieser Methode

$$\begin{aligned} P_k^n = & 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + r^2 \left[ a_0 P_k^{n-1} + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k+j}^{n-1} + P_{k-j}^{n-1} \right) \right] \\ & + \frac{r^4}{12} \left( \left[ a_0 P_{k+1}^{n-1} + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k+1+j}^{n-1} + P_{k+1-j}^{n-1} \right) \right] - 2 \left[ a_0 P_k^{n-1} + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k+j}^{n-1} + P_{k-j}^{n-1} \right) \right] \right. \\ & \left. + \left[ a_0 P_{k-1}^{n-1} + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k-1+j}^{n-1} + P_{k-1-j}^{n-1} \right) \right] \right) + \mathcal{O}(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird Sie auch als „Methode 1“ bezeichnet.

## 3.2. Methode 2 von Yang Liu und Mrinal K. Sen

Die zweite Methode, die Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist, wurde von Yang Liu und Mrinal K. Sen in der einer Publikation aus dem Jahre 2009 vorgestellt. In „A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation“ [YL09] beschreiben Sie ein Verfahren, das, ähnlich der Methode aus Abschnitt 3.1, Gleichung 3.8 verwendet, jedoch bei der Berechnung der Koeffizienten einen komplett anderen Ansatz wählt. Die Fehlerordnung kann mit dieser Methode bis auf eine beliebigen Ordnung erhöht werden. Laut Yang Liu und Mrinal K. Sen betrifft diese Erhöhung sowohl das räumliche als auch das zeitliche Gitter und unterscheidet sich somit deutlich von der Methode 1, die in der Zeit in der Publikation von M. A. Dablain nur bis zu einer Genauigkeit von  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$  verwendet wird.

Als Grundlage dieses Verfahrens wird wieder die akustische Wellengleichung 2.8 angesetzt, die räumliche Ableitung, wie beschrieben, durch Gleichung 3.8 ersetzt und für die zeitliche Ableitung der Differenzenquotient 2.6 verwendet

$$a_0 P_k^n + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k+j}^n + P_{k-j}^n \right) \approx \frac{\Delta x^2}{c^2 \Delta t^2} \left( P_k^{n-1} - 2P_k^n + P_k^{n+1} \right). \quad (3.11)$$

Die Berechnung der Koeffizienten  $a_0$  und  $a_j$  wird nun nicht mehr über ein Gleichungssystem der räumlichen Ableitungen gelöst, sondern durch den Vergleich der beiden Seiten von

Gleichung 3.11. Der eigentliche Fehler der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  fließt bei diesem Ansatz in die Berechnung der Koeffizienten mit ein und reduziert ihn somit auf die selbe Ordnung, wie die des räumlichen Gitters. Hierfür verwenden wir den üblichen Exponentialansatz zur Lösung der elastischen Wellengleichung

$$P_k^n = e^{i[\tilde{k}(x+k\Delta x) - \omega(t+n\Delta t)]} = e^{i(\tilde{k}k\Delta x - n\omega\Delta t)} e^{i(\tilde{k}x - \omega t)}. \quad (3.12)$$

Diesen Ansatz eingesetzt in Gleichung 3.11 ergibt folgende Form:

$$a_0 + 2 \sum_{j=1}^M a_j \cos(j\tilde{k}\Delta x) \approx 2 \frac{\Delta x^2}{c^2 \Delta t^2} \left[ \cos(c\tilde{k}\Delta t) - 1 \right]. \quad (3.13)$$

Hierbei wurde verwendet, dass  $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$  gilt.

Ziel dieser Umformungen ist es einen Ausdruck zu finden, der den angestrebten Vergleich der beiden Seiten von Gleichung 3.13 möglich macht. Wird die Reihendefinition der Kosinusfunktion

$$\cos(j\tilde{k}\Delta x) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(j\tilde{k}\Delta x)^{2l}}{(2l)!} = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{(j\tilde{k}\Delta x)^{2l}}{(2l)!} \quad (3.14)$$

verwendet, ergibt sich

$$a_0 + 2 \sum_{j=1}^M a_j \left[ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{(j\tilde{k}\Delta x)^{2l}}{(2l)!} \right] \approx \frac{2}{r^2} \left[ \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{(r\tilde{k}\Delta x)^{2l}}{(2l)!} \right] \quad (3.15)$$

und der Vergleich ist möglich. Die Courant-Zahl  $r = c\Delta t/\Delta x$  wurde zur besseren Übersichtlichkeit eingeführt und hat, wie in Abschnitt 4.1 beschrieben wird, große physikalische Relevanz. Das Argument  $r\tilde{k}\Delta x$  kann mit Hilfe der Dispersionsrelation ebener Wellen  $w = \tilde{k} \cdot c$  zu  $\omega\Delta t$  umgeformt werden. Das ist für den folgenden Koeffizientenvergleich jedoch unpraktisch und  $r\tilde{k}\Delta x$  wurde daher beibehalten.

Zur Bestimmung von  $a_0$  und  $a_j$  vergleichen Yang Liu und Mrinal K. Sen die Koeffizienten von  $\tilde{k}^{2j}$  und erhalten so zwei Gleichungen

$$a_0 + 2 \sum_{j=1}^M a_j = 0 \quad \text{und} \quad (3.16a)$$

$$\sum_{j=1}^M j^{2i} a_j = r^{2i-2} \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (3.16b)$$

Gleichung 3.16b sind demnach eigentlich M Gleichungen eines Gleichungssystems, die beispielsweise durch das Gaußsche Eliminationsverfahren gelöst werden können. Zur Bestimmung des Koeffizienten  $a_0$  werden die über das Gleichungssystem erhaltenden Werte  $a_j$  in Gleichung 3.16a eingesetzt. Als Ergebnis des Koeffizientenvergleichs ergibt sich so je ein Ausdruck für ein bestimmtes  $a_j$ , der ausschließlich vom Parameter  $r$  abhängt. Gleichung 3.11, umgeformt nach  $P_k^{n+1}$ , stellt dann die explizite Form dieses Verfahrens dar

$$P_k^n = 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + r^2 \left[ a_0 P_k^{n-1} + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k+j}^{n-1} + P_{k-j}^{n-1} \right) \right]. \quad (3.17)$$

Es wurde dabei, wie schon bei Vorstellung der FDM in Abschnitt 2.1, eine Indexverschiebung  $n \rightarrow n - 1$  durchgeführt.

Diese Methode wird im folgenden dieser Arbeit auch als „Methode 2“ bezeichnet.



## 4. Theoretische Analyse

Dieser Abschnitt befasst sich mit der theoretischen Analyse der beiden Methoden aus den Abschnitten 3.1 und 3.2. Dafür müssen im Wesentlichen wieder die beiden Kriterien Stabilität und Dispersion aus Abschnitt 2.1.2 untersucht werden.

### 4.1. Stabilitätsanalyse

Zur Beurteilung der Stabilität wird in dieser Arbeit die von Neumannsche Stabilitätsanalyse verwendet. Sie eignet sich besonders für lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, wie der akustischen Wellengleichung bei konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . In diesem Fall liefert dieses Analyseverfahren Aussagen über die globale Stabilität des Algorithmus. Im Falle einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit kann mit diesem Verfahren nur die lokale Stabilität beurteilt werden [JEM10, S. 96 ff.].

Der Schwerpunkt dieser Bachelorarbeit liegt in der Anwendung der von Neumannschen Stabilitätsanalyse, daher wird die theoretische Herleitung im folgenden nur skizziert.

Sei  $\varepsilon_k^{n-1}$  der Fehler des diskreten Funktionswert  $P(t_{n-1}, x_k)$ , so gilt für die Fehlerfortpflanzung bei linearen Differentialgleichungen

$$\varepsilon_k^n = G \cdot \varepsilon_k^{n-1}. \quad (4.1)$$

$G$  ist die Verstärkungsmatrix und wird als diagonalisierbar angenommen. Damit Rundungsfehler mit der Zeit nicht unkontrolliert anwachsen, müssen sämtliche Eigenwerte  $g_\mu$  von  $G$  betragsmäßig kleiner oder gleich 1 sein [Mar12, Abschn. 3.2.1]

$$|g_\mu| \leq 1. \quad (4.2)$$

Unter Verwendung der Eigenwerte der Verstärkungsmatrix müssen auch die Eigenfunktionen bekannt sein.  $G$  kann im Allgemeinen als Linearkombination von Verschiebungsoperatoren geschrieben werden, deren Eigenvektoren bekannt sind

$$\varepsilon_k^n = e^{i\tilde{k}x_k}. \quad (4.3)$$

Diese Eigenvektoren sind somit auch Eigenvektoren der Verstärkungsmatrix [Mar12, Abschn. 3.2.1]. Aus dieser Bedingung und der Fehlerfortpflanzungsgleichung 4.1 ergibt sich

$$\varepsilon_k^n = g^n(\tilde{k}) \cdot e^{i\tilde{k}x_k} \quad (4.4)$$

für ein mehrstufiges Differenzenschema und das von Neumannsche Stabilitätskriterium [Mar89, S. 20 ff.]

$$|g(\tilde{k})| \leq 1 \quad \forall \tilde{k}. \quad (4.5)$$

Die Anwendung dieses Kriteriums erfolgt durch Einsetzen in die Gleichungen 3.5 und 3.17 der beiden Methoden. Es lässt sich so eine Bedingung für  $r = c\Delta t/\Delta x$  finden, bei der die Verfahren stabil sind. Die Frage weshalb es erlaubt ist  $\varepsilon_k^n$  anstatt von  $P_k^n$  in die beiden Gleichungen 3.5 und 3.17 einzusetzen, kann mit Hilfe deren Linearität beantwortet werden. Wird der Rundungsfehler vom Funktionswert entkoppelt

$$P_k^n = \tilde{P}_k^n + \varepsilon_k^n, \quad (4.6)$$

so lösen beide Summanden unabhängig voneinander diese linearen Gleichungen.

Die Anwendung des Stabilitätskriteriums auf die verschiedenen Ordnungen der beiden Methoden erfolgt immer nach dem gleichen Schema. Es reicht daher aus die Anwendung auf eine bestimmte Ordnung ausführlich zu beschreiben und die analogen Rechenschritte der anderen Ordnungen abzukürzen.

#### 4.1.1. Anwendung auf Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$

Die explizite Differenzengleichung der 1. Methode (3.1) bis zu einer Genauigkeit von  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  lautet

$$P_k^n = 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + \frac{r^2}{12} (16(P_{k+1}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) - 30P_k^{n-1} - (P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1})). \quad (4.7)$$

In dieses Differenzenschema wird nun Gleichung 4.4 eingesetzt und durch  $\varepsilon_k^{n-2} = g^{n-2}(\tilde{k}) \cdot e^{i\tilde{k}x_k}$  geteilt. Es entsteht so eine, zum Eigenwert  $g(\tilde{k})$  quadratische Gleichung

$$g^2 = 2g - 1 + \frac{r^2}{12} \left( 16g(e^{i\tilde{k}\Delta x} + e^{-i\tilde{k}\Delta x}) - 30g - g(e^{2i\tilde{k}\Delta x} + e^{-2i\tilde{k}\Delta x}) \right). \quad (4.8)$$

Hierbei wurde  $e^{i\tilde{k}x_{k+1} - i\tilde{k}x_k} = e^{\pm i\tilde{k}\Delta x}$  und  $e^{i\tilde{k}x_{k+2} - i\tilde{k}x_k} = e^{\pm 2i\tilde{k}\Delta x}$  verwendet.

An dieser Stelle wird, wie schon in Abschnitt 3.2, die Identität des Kosinus  $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$  eingesetzt und es entsteht

$$g^2 - 2g \underbrace{\left[ 1 + \frac{4}{3}r^2 \cos(\tilde{k}\Delta x) - \frac{5}{4}r^2 - \frac{1}{12}r^2 \cos(2\tilde{k}\Delta x) \right]}_{\beta} + 1 = 0. \quad (4.9)$$

Wird diese Form gewählt, so ergibt sich ein einfacher Ausdruck zur Berechnung von  $g$  über die bekannte Gleichung zum Lösen von quadratischen Gleichungen (a-b-c-Formel)

$$g_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}. \quad (4.10)$$

Nach dem von Neumannschen Stabilitätskriterium 4.5 muss der Verstärkungsfaktor  $g$  betragsmäßig kleiner oder gleich 1 sein, damit die Methode stabil ist. Für  $\beta^2 > 1$  ist in jedem Fall einer der beiden Werte von  $g_{1,2}$  außerhalb dieses Bereichs. Für  $\beta^2 \leq 1$  kann Gleichung 4.10 umgeschrieben werden zu

$$g_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2}. \quad (4.11)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass daraus  $|g| = |g|^2 = 1$  folgt und das Stabilitätskriterium erfüllt ist. Die Stabilitätsbedingung 4.5 führt somit unter den beschriebenen Umformungen zu einer viel eingeschränkteren Forderung

$$|\beta(\tilde{k})| \leq 1 \quad \forall \tilde{k}. \quad (4.12)$$

Um  $\beta$  besser analysieren zu können, ist es sinnvoll einige Äquivalenzumformungen vorzunehmen. Dafür wurden folgende trigonometrische Relationen sukzessive auf  $\beta$  aus Gleichung 4.9 angewendet:

$$\cos(2\tilde{k}\Delta x) = 1 - 2\sin^2(\tilde{k}\Delta x) = 2\cos^2(\tilde{k}\Delta x) - 1, \quad (4.13a)$$

$$\sin^2(\tilde{k}\Delta x) = 4\sin^2(\tilde{k}\Delta x/2)\cos^2(\tilde{k}\Delta x/2), \quad (4.13b)$$

$$\cos^2(\tilde{k}\Delta x/2) = 1 - \sin^2(\tilde{k}\Delta x/2). \quad (4.13c)$$

Relation 4.13a sollte sowohl auf  $\cos(2\tilde{k}\Delta x)$  als auch auf  $\cos(\tilde{k}\Delta x)$  angewendet werden, um auf folgende Form zu kommen

$$\beta = 1 - 2r^2\sin^2(\tilde{k}\Delta x/2)\left(1 + \frac{1}{3}\sin^2(\tilde{k}\Delta x/2)\right), \quad (4.14)$$

die für eine quantitative Auswertung des Kriteriums 4.12 geeignet ist.

Für diese Auswertung werden die beiden Fälle  $\beta \leq 1$  und  $\beta \geq -1$  betrachtet und ausgenutzt, dass diese für alle  $\tilde{k}$  gelten müssen. Als Konsequenz daraus genügt es die Extrema bezüglich  $\tilde{k}$  zu betrachten, da  $\beta(\tilde{k})$  eine glatte Funktion ist und so alle Punkte dazwischen für die Auswertung der Ungleichung unbedeutend sind.

Aus der Gleichung 4.14 ergeben sich unter Berücksichtigung der eben genannten Fälle folgende vier Ungleichungen:

$$-1 \leq 1 \quad , \quad 1 \leq 1 \quad \text{für } \sin^2(\tilde{k}\Delta x/2) \text{ minimal}, \quad (4.15a)$$

$$-1 \leq 1 - \frac{8}{3}r^2 \quad , \quad 1 - \frac{8}{3}r^2 \leq 1 \quad \text{für } \sin^2(\tilde{k}\Delta x/2) \text{ maximal}. \quad (4.15b)$$

Die Ungleichungen 4.15a gelten für alle  $r$ . Nur 4.15b ergeben folgende Einschränkung

$$r^2 \leq \frac{3}{4} \quad \implies \quad r \leq \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,866. \quad (4.16)$$

Der Folgepeil ist nur möglich, da  $r = c\Delta t/\Delta x \geq 0$ .

Gleichung 4.16 ist somit das globale Stabilitätskriterium für die Differenzengleichung der 1. Methode mit einer Genauigkeit von  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  [Mar12, Abschn. 3.2.2].

#### 4.1.2. Anwendung auf Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

Analog zum Vorgehen im letzten Abschnitt 4.1.1 wird Gleichung 4.4 in das Differenzenschema der 2. Methode, Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

$$P_k^n = 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + r^2 \left[ \frac{4-r^2}{3} (P_{k+1}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) + \frac{-5+r^2}{2} P_k^{n-1} + \frac{-1+r^2}{12} (P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1}) \right] \quad (4.17)$$

eingesetzt.

Unter Verwendung der selben Rechenschritte wie in Abschnitt 4.1.1 kann  $\beta$  berechnet werden. Die Umformung auf die Form

$$\beta = 1 - 2r^2 \sin^2(\tilde{k}\Delta x/2) \left( 1 - \frac{2r^2-2}{6} \sin^2(\tilde{k}\Delta x/2) \right) \quad (4.18)$$

erfolgt wieder über die angegebenen trigonometrischen Relationen (Gleichungen 4.13).

Wird darauf Ungleichung 4.12 angewendet, so ergibt sich das globale Stabilitätskriterium für die Differenzengleichung der 2. Methode

$$r \leq 1 \quad (4.19)$$

mit einer Genauigkeit von  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$ .

Das zweite Verfahren von Yang Liu und Mrinal K. Sen verändert somit die Stabilität der ursprünglichen FDM nicht. Gleichung 4.19 entspricht exakt der CFL-Bedingung der FDM (Gleichung 2.1.2).

#### 4.1.3. Anwendung auf Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

Für die Stabilitätsanalyse wird wieder der bekannte Ansatz 4.4 in das Differenzenschema der 1. Methode, Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

$$P_k^n = 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + \frac{r^2}{12} [16(P_{k+1}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) - 30P_k^{n-1} - (P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1})] + \frac{r^2}{144} [16(P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1}) - 30P_{k+1}^{n-1} - (P_{k+3}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) + 60P_k^{n-1} - 32(P_{k+1}^{n-1} - P_{k-1}^{n-1}) + 2(P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1}) - 30P_{k-1}^{n-1} + 16(P_k^{n-1} + P_{k-2}^{n-1}) - (P_{k+1}^{n-1} + P_{k-3}^{n-1})] \quad (4.20)$$

eingesetzt und die Umformungen aus Abschnitt 4.1.1 vorgenommen. Da in dieser Ordnung auch die Gitterpunkte  $P_{k-3}^{n-1}$  und  $P_{k+3}^{n-1}$  vorkommen, muss eine weitere trigonometrische Relation verwendet werden

$$\cos(3\tilde{k}\Delta x) = 4\cos^3(\tilde{k}\Delta x) - 3\cos(\tilde{k}\Delta x). \quad (4.21)$$

Für  $\beta$  ergibt sich so

$$\beta = 1 - 2r^2\sin^2\left(\tilde{k}\Delta x/2\right) + \frac{2}{3}(r^4 - r^2)\sin^4\left(\tilde{k}\Delta x/2\right) + \frac{2r^4}{9}\sin^6\left(\tilde{k}\Delta x/2\right). \quad (4.22)$$

Dieser Ausdruck kann durch Berücksichtigung der Bedingung 4.12 ausgewertet werden. Es entstehen dabei zwei Ungleichungen

$$1 \leq \frac{4}{3}r^2 - \frac{4}{9}r^4 \quad \text{und} \quad (4.23a)$$

$$0 \geq \frac{8}{9}r^4 - \frac{8}{3}r^2. \quad (4.23b)$$

Die erste der beiden Ungleichungen 4.23a gilt für alle  $r$  und hat somit keinen Einfluss auf die Stabilität, die zweite 4.23b stellt hingegen eine obere Schranke für  $r$  dar. Da  $c$ ,  $\Delta x$  und  $\Delta t$  größer als 0 sind kann auch  $r$  nie negativ werden und Ungleichung 4.23b kann umgeschrieben werden zu

$$r \leq \sqrt{3} \approx 1,732. \quad (4.24)$$

Überraschenderweise liegt der höchste erlaubte Wert von  $r$  hier deutlich über der, als universell beschriebenen, CFL-Bedingung aus Abschnitt 2.1.2. Ein Fehler in der Berechnung der Stabilitätsbedingung kann ausgeschlossen werden, da die Durchführung der numerischen Wellenausbreitung mit der Differenzgleichung 4.20 gerade bis hin zu  $r = 1,732$  stabile Lösungen liefert (siehe Abschnitt 5.2). Es wird also davon ausgegangen, dass es sich um eine, in Abschnitt 2.1.2 als „Ausnahme“ bezeichnete numerische Methode handelt. Diese kann für die konkrete Anwendung des Algorithmus von großem Nutzen sein, da größere Gitterabstände gewählt werden können ohne die Stabilität der Lösung zu gefährden. Die daraus resultierende Verringerung der Rechenzeit erhöht die Effizienz von Programmen, die diese Methode verwenden. Dennoch sollten weitere Untersuchungen durchgeführt werden, um zu prüfen wie sich die Stabilität in 2 oder 3 Dimensionen und bei variabler Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  verhält. Eine solche Diskussion wird in Abschnitt 6 qualitativ durchgeführt.

#### 4.1.4. Anwendung auf Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$

Das Differenzschema der Methode 1, Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$  kann aus den Koeffizienten  $a_i$   $i \in 0, 1, 2, \dots, 5$  gebildet werden, so wie es in Abschnitt 3.1 beschrieben wird. Die ausgeschriebene Differenzgleichung dieser Ordnung lautet

$$\begin{aligned} P_k^n = & 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + \frac{r^2}{25200} [42000(P_{k+1}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) - 73766P_k^{n-1} - 6000(P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1}) \\ & + 1000(P_{k+3}^{n-1} + P_{k-3}^{n-1}) - 125(P_{k+4}^{n-1} + P_{k-4}^{n-1}) + 8(P_{k+5}^{n-1} + P_{k-5}^{n-1})] \\ & + \frac{r^4}{302400} [55000(P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1}) - 163766(P_{k+1}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) - 8125(P_{k+3}^{n-1} + P_{k-3}^{n-1}) \\ & + 231532P_k^{n-1} + 1258(P_{k+4}^{n-1} + P_{k-4}^{n-1}) - 141(P_{k+5}^{n-1} + P_{k-5}^{n-1}) + 8(P_{k+6}^{n-1} + P_{k-6}^{n-1})]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Um wieder die Größe  $\beta$  zu erhalten, wird der bekannte Ansatz 4.4 gewählt. Für die Umformungen aus Abschnitt 4.1.1 mussten die trigonometrischen Relationen 4.13 erweitert werden. Da diese Beziehungen auch für die Herleitung der Dispersionsrelationen von großer Bedeutung sind, werden sie in Abschnitt 4.2.4 angegeben (siehe Gleichungen 4.43).

Für  $\beta$  ergibt sich so folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \beta = & 1 - 2r^2 \sin^2 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) + \left( \frac{2}{3} r^4 - \frac{2}{3} r^2 \right) \sin^4 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) \\ & + \left( \frac{2}{9} r^4 - \frac{16}{45} r^2 \right) \sin^6 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) + \left( \frac{16}{45} r^4 - \frac{8}{35} r^2 \right) \sin^8 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) \\ & + \left( \frac{8}{105} r^4 - \frac{256}{1575} r^2 \right) \sin^{10} \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) + \frac{256}{4725} r^{12} \sin^8 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Über die Bedingung 4.12 folgt dann analog zu Abschnitt 4.1.1 die Stabilitätsbedingung

$$r \leq \frac{1}{4} \sqrt{24 - 3\sqrt{14}} \approx 0,894 \quad (4.27)$$

für Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$  der 1. Methode.

#### 4.1.5. Anwendung auf Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$

Mit der Methode 2 von Yang Liu und Mrinal K.Sen Abschnitt 3.2 ergibt sich folgende Differenzgleichung für die höchste hier betrachtete Ordnung ( $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$ ):

$$\begin{aligned} P_k^n = & 2P_k^{n-1} - P_k^{n-2} + r^2 \left[ \frac{-21076 + 7645r^2 - 1023r^4 + 55r^6 - r^8}{7200} \cdot P_k^{n-1} \right. \\ & + \frac{14400 - 6676r^2 + 969r^4 - 54r^6 + r^8}{8640} \cdot (P_{k+1}^{n-1} + P_{k-1}^{n-1}) \\ & + \frac{-3600 + 4369r^2 - 819r^4 + 51r^6 - r^8}{15120} \cdot (P_{k+2}^{n-1} + P_{k-2}^{n-1}) \\ & + \frac{1600 - 2164r^2 + 609r^4 - 46r^6 + r^8}{40320} \cdot (P_{k+3}^{n-1} + P_{k-3}^{n-1}) \\ & + \frac{-900 + 1261r^2 - 399r^4 + 39r^6 - r^8}{181440} \cdot (P_{k+4}^{n-1} + P_{k-4}^{n-1}) \\ & \left. + \frac{576 - 820r^2 + 273r^4 - 30r^6 + r^8}{1814400} \cdot (P_{k+5}^{n-1} + P_{k-5}^{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Analog zur höchsten Ordnung der Methode von M. A. Dablain, müssen für die Berechnungen des Stabilitätskriteriums die Winkelbeziehungen 4.13, 4.21 und 4.43 angewendet werden. Es entsteht so wieder ein auswertbarer Ausdruck für die Größe  $\beta$

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{1}{14175} \left[ 14175 - 28350r^2 \sin^2 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) + 9450r^2 (-1 + r^2) \sin^4 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) \right. \\ & - 1260r^2 (4 - 5r^2 + r^4) \sin^6 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) \\ & + 90r^2 (-36 + 49r^2 - 14r^4 + r^6) \sin^8 \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) \\ & \left. - 4r^2 (576 - 820r^2 + 273r^4 - 30r^6 + r^8) \sin^{10} \left( \tilde{k} \Delta x / 2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Werden nun die Extrema von  $\beta(\tilde{k})$  betrachtet und die Bedingung 4.12 verwendet, so ergibt sich das Stabilitätskriterium nach wenigen elementaren Umformungen

$$r \leq 1. \quad (4.30)$$

Wie schon die Berechnung der Stabilität der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  ergab, verändert die zweite Methode auch in dieser höheren Ordnung die CFL-Bedingung der ursprünglichen FDM nicht.

## 4.2. Dispersionsanalyse

Es ist allgemein bekannt, dass die eindimensionale elastische Wellengleichung 2.8 eine dispersionslose Wellenausbreitung beschreibt, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  nicht von der Wellenzahl  $\tilde{k}$  abhängt. Eine numerische Lösung dieser partiellen Differentialgleichung sollte selbstverständlich das gleiche Dispersionsverhalten aufweisen. Es ist also zu prüfen wie genau die beiden Methoden in den verschiedenen Ordnungen die kurz- und langwelligen Anteile der exakten Lösung wiedergeben. Dafür wird eine Dispersionsanalyse über die Entwicklung in Fourier-Moden durchgeführt. Das Ziel dieser Methode ist es die Dispersionsrelation  $\omega(\tilde{k})$  zu berechnen und zu prüfen bis zu welcher Größenordnung von  $\Delta x$  noch von dispersionsloser Wellenausbreitung gesprochen werden kann [Mar12, Abschn. 3.3.1].

Wie schon bei der von Neumannschen Stabilitätsanalyse wird auch die Entwicklung über die Fouriertransformation nur skizziert. Die Anwendung ist in dieser Arbeit von weitaus höherer Bedeutung.

In der Fouriertransformation

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k} e^{i\tilde{k}x} \tilde{P}(\tilde{k}, t) \quad (4.31)$$

kann der zeitabhängige Anteil der Fourier-Transformierten  $\tilde{P}(\tilde{k}, t)$  entkoppelt werden

$$\tilde{P}(\tilde{k}, t) = e^{-i\omega t} \tilde{P}(\tilde{k}). \quad (4.32)$$

Die Form des zeitabhängigen Anteils  $e^{i\omega t}$  stammt aus der Fouriertransformation von  $P(x, t)$  nach der Zeit. Gleichung 4.31 kann so umgeschrieben werden zu [JEM10, S. 100 ff.]

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k} e^{i(\tilde{k}x - \omega t)} \tilde{P}(\tilde{k}). \quad (4.33)$$

Die Fourier-Transformierte  $\tilde{P}(\tilde{k})$  ist nun weder orts- noch zeitabhängig und kann durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden. Wird nun diese Fouriertransformation in die Wellengleichung 2.8 eingesetzt, so ergibt sich

$$0 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{k} \tilde{P}(\tilde{k}) \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] e^{i(\tilde{k}x - \omega t)}. \quad (4.34)$$

Da  $\tilde{P}(\tilde{k})$  nur noch von  $\tilde{k}$  abhängt, wirkt die Wellengleichung ausschließlich auf die sogenannten Fourier-Moden  $e^{i(\tilde{k}x - \omega t)}$  [Mar12, Abschn. 3.3.1].

Die Fouriertransformation 4.34 muss für alle  $x$  und  $t$  gleich 0 sein, was der Forderung gleichkommt, dass der Integrand verschwinden muss. Die Fourier-Mode muss daher als einzige in die Wellengleichung eingesetzt werden, um die Gleichung 4.34 zu lösen

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] e^{i(\tilde{k}x - \omega t)} = 0. \quad (4.35)$$

Für die diskreten Vertreter der Wellengleichung gilt diese Gleichung 4.35 selbstverständlich auch und so kann ausschließlich durch einsetzen von

$$u_k^n = e^{i(\tilde{k}x_k - \omega t_n)} \quad (4.36)$$

in die verschiedenen Differenzgleichungen der beiden Methoden von M. A. Dablain und Yang Liu bzw. Mrinal K. Sen die Dispersionsanalyse erfolgen.

Wie schon bei der Stabilitätsanalyse wird die Anwendung der Dispersionsanalyse auf die verschiedenen Differenzgleichungen immer in der gleiche Art und Weise durchgeführt. Eine ausführliche Beschreibung der angewendeten Umformungen und trigonometrischen Relationen ist daher nur an einer Methode notwendig.

#### 4.2.1. Dispersionsrelation der Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$

Der im Abschnitt zuvor hergeleitete Ansatz 4.36 wird in die Differenzgleichung 4.7 eingesetzt und durch  $e^{i\tilde{k}x_k - \omega t_{n-2}}$  geteilt. So entsteht folgender Ausdruck

$$\begin{aligned} e^{i\omega(t_{n-2} - t_n)} &= 2e^{i\omega(t_{n-2} - t_{n-1})} - 1 + \frac{r^2}{12} \left[ -30e^{i\omega(t_{n-2} - t_{n-1})} \right. \\ &\quad + 16 \left( e^{i\omega(t_{n-2} - t_{n-1}) + i\tilde{k}(x_{k+1} - x_k)} + e^{i\omega(t_{n-2} - t_{n-1}) + i\tilde{k}(x_{k-1} - x_k)} \right) \\ &\quad \left. - \left( e^{i\omega(t_{n-2} - t_{n-1}) + i\tilde{k}(x_{k+2} - x_k)} + e^{i\omega(t_{n-2} - t_{n-1}) + i\tilde{k}(x_{k-2} - x_k)} \right) \right]. \quad (4.37) \end{aligned}$$

Die Differenz zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten  $t_{n-2} - t_{n-1}$  bzw.  $x_{k+1} - x_{nk}$  ergibt gerade den Gitterabstand  $-\Delta t$  und  $\Delta x$ . Unter Berücksichtigung dieser Tatsache kann Gleichung 4.37 umgeschrieben werden zu

$$e^{-2i\omega\Delta t} + 1 = e^{-i\omega\Delta t} \left[ 2 + \frac{r^2}{12} \left[ 16 \left( e^{i\tilde{k}\Delta x} + e^{-i\tilde{k}\Delta x} \right) - 30 - \left( e^{2i\tilde{k}\Delta x} + e^{-2i\tilde{k}\Delta x} \right) \right] \right]. \quad (4.38)$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit  $e^{i\omega\Delta t}/2$  kann direkt die Identität des Kosinus  $\cos(x) = (e^x + e^{-x})/2$  verwendet werden, um folgenden Ausdruck zu erhalten

$$\cos(\omega\Delta t) = 1 + \frac{r^2}{12} \left[ 16\cos(\tilde{k}\Delta x) - 15 - \cos(2\tilde{k}\Delta x) \right]. \quad (4.39)$$

Die gesuchte Funktion  $\omega(\tilde{k})$  wird schließlich durch Anwendung des Arkuskosinus und der Winkelrelation 4.13a auf Gleichung 4.39 gebildet [JEM10, S. 101 ff.]

$$\omega(\tilde{k}) = \frac{1}{\Delta t} \arccos \left[ 1 - \frac{7}{6}r^2 + \frac{4}{3}r^2 \cos(\tilde{k}\Delta x) - \frac{1}{6}r^2 \cos^2(\tilde{k}\Delta x) \right]. \quad (4.40)$$

Im Abschnitt 4.2.6 wird die Dispersionsrelation im Vergleich mit den anderen Ordnungen und Methoden analysiert.

### 4.2.2. Dispersionsrelation der Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

Die selben Rechenschritte wie in Abschnitt 4.2.1 auf die Differenzgleichung der Methode 2, Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  angewendet, ergibt folgende Dispersionsrelation

$$\omega(\tilde{k}) = \frac{1}{\Delta t} \arccos \left[ 1 - \frac{7}{6}r^2 + \frac{1}{6}r^4 + \left( \frac{4}{3}r^2 - \frac{1}{3}r^4 \right) \cos(\tilde{k}\Delta x) + \left( \frac{1}{6}r^4 - \frac{1}{6}r^2 \right) \cos^2(\tilde{k}\Delta x) \right]. \quad (4.41)$$

### 4.2.3. Dispersionsrelation der Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$

Für die Differenzgleichung der 1. Methode bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  muss zusätzlich zu den erläuterten Rechenschritten aus Abschnitt 4.2.1 die Winkelrelation 4.21 verwendet werden.

Die Dispersionsrelation für diese Ordnung lautet dann

$$\omega(\tilde{k}) = \frac{1}{\Delta t} \arccos \left[ 1 - \frac{7}{6}r^2 + \frac{7}{36}r^4 + \left( \frac{4}{3}r^2 - \frac{5}{12}r^4 \right) \cos(\tilde{k}\Delta x) + \left( \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^2 \right) \cos^2(\tilde{k}\Delta x) - \frac{1}{36}r^4 \cos^3(\tilde{k}\Delta x) \right]. \quad (4.42)$$

### 4.2.4. Dispersionsrelation der Methode 1, $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$

Für die Herleitung der Dispersionsrelation der Methode 1 bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$  wurden weitere trigonometrische Relationen verwendet

$$\cos(4\tilde{k}\Delta x) = 8 \cos^4(\tilde{k}\Delta x) - 8 \cos^2(\tilde{k}\Delta x) + 1, \quad (4.43a)$$

$$\cos(5\tilde{k}\Delta x) = 16 \cos^5(\tilde{k}\Delta x) - 20 \cos^3(\tilde{k}\Delta x) + 5 \cos(\tilde{k}\Delta x), \quad (4.43b)$$

$$\cos(6\tilde{k}\Delta x) = 32 \cos^6(\tilde{k}\Delta x) - 48 \cos^4(\tilde{k}\Delta x) + 18 \cos^2(\tilde{k}\Delta x) - 1. \quad (4.43c)$$

Hierbei ist nochmals anzumerken, dass die Anwendung dieser Gleichungen den letzten Schritt der Umformung darstellt, die ansonsten analog zur Rechnung aus Abschnitt 4.2.1 verläuft.

Die Dispersionsrelation dieser Methode hat nach den angesprochenen Umformungen folgende Gestalt

$$\omega(\tilde{k}) = \frac{1}{\Delta t} \arccos \left[ 1 - \frac{646}{525}r^2 + \frac{323}{1575}r^4 + \left( \frac{488}{315}r^2 - \frac{4031}{18900}r^4 \right) \cos(\tilde{k}\Delta x) + \left( \frac{17}{210}r^4 - \frac{55}{126}r^2 \right) \cos^2(\tilde{k}\Delta x) + \left( \frac{16}{105}r^2 - \frac{53}{540}r^4 \right) \cos^3(\tilde{k}\Delta x) + \left( \frac{121}{3780}r^4 - \frac{5}{126}r^2 \right) \cos^4(\tilde{k}\Delta x) + \left( \frac{8}{1575}r^2 - \frac{47}{6300}r^4 \right) \cos^5(\tilde{k}\Delta x) + \frac{4}{4725}r^4 \cos^6(\tilde{k}\Delta x) \right]. \quad (4.44)$$

#### 4.2.5. Dispersionsrelation der Methode 2, $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$

Die Herleitung der Dispersionsrelation der Methode 2 in höchster Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$  erfolgt wieder analog zu den Berechnungen aus Abschnitt 4.2.1 mit dem Unterschied, dass wieder die Winkelrelationen 4.43 verwendet werden müssen. Die Dispersionsrelation nimmt schließlich folgende Form an

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{k}) = \frac{1}{\Delta t} \arccos & \left[ 1 - \frac{646}{525}r^2 + \frac{1129}{4536}r^4 - \frac{103}{5400}r^6 + \frac{1}{1512}r^8 - \frac{1}{113400}r^{10} \right. \\ & + \left( \frac{488}{315}r^2 - \frac{3481}{5670}r^4 + \frac{73}{1080}r^6 - \frac{11}{3780}r^8 + \frac{1}{22680}r^{10} \right) \cos(\tilde{k}\Delta x) \\ & + \left( -\frac{55}{126}r^2 + \frac{5923}{11340}r^4 - \frac{49}{540}r^6 + \frac{19}{3780}r^8 - \frac{1}{11340}r^{10} \right) \cos^2(\tilde{k}\Delta x) \\ & + \left( \frac{16}{105}r^2 - \frac{583}{2835}r^4 + \frac{31}{540}r^6 - \frac{4}{945}r^8 + \frac{1}{11340}r^{10} \right) \cos^3(\tilde{k}\Delta x) \\ & + \left( -\frac{5}{126}r^2 + \frac{1261}{22680}r^4 - \frac{19}{1080}r^6 + \frac{13}{7560}r^8 - \frac{1}{22680}r^{10} \right) \cos^4(\tilde{k}\Delta x) \\ & \left. + \left( \frac{8}{1575}r^2 - \frac{41}{5670}r^4 + \frac{13}{5400}r^6 - \frac{1}{3780}r^8 + \frac{1}{113400}r^{10} \right) \cos^5(\tilde{k}\Delta x) \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

#### 4.2.6. Vergleich der Dispersionsrelationen der verschiedenen Methoden

In diesem Abschnitt werde die berechneten Dispersionsrelationen untersucht, ob bzw. für welche  $\Delta x$  eine Dispersionslose Wellenausbreitung des numerischen Algorithmus vorliegt. Der Vergleich der verschiedenen Dispersionsrelationen kann anschaulich über Diagramme erfolgen. Intuitiv würde sich die Darstellung von  $\omega$  über  $\tilde{k}$  anbieten, da die Dispersionsrelation generell in dieser Form angegeben wird. Jedoch hängt die Dispersion im diskreten numerischen Raum auch von  $\Delta x$  ab und daher ist eine Auftragung über  $\tilde{k} \cdot \Delta x$  üblich. Eine geeignete Wahl der Y-Achse kann über das Abtasttheorem gefunden werden (siehe Abschnitt 2.1.2).

Wird die linke Seite von Ungleichung 2.13 als Ausbreitungsgeschwindigkeit des numerischen Verfahren  $c_{\text{FD}}$  identifiziert und das Abtasttheorem 2.12 eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{c_{\text{FD}}}{c} = \frac{\tilde{k}\Delta x}{\pi} \leq 1. \quad (4.46)$$

Für ein ideales dispersionsloses Verfahren ist  $c_{\text{FD}}/c$  für alle  $\tilde{k} \cdot \Delta x$  gleich 1. Durch Auftragung von  $c_{\text{FD}}/c$  aller Dispersionsrelationen der Abschnitte 4.2.1 bis 4.2.5 über  $\tilde{k} \cdot \Delta x$  kann somit die Abweichung von diesem idealen Verlauf sehr gut visualisiert werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ist als Teil der Problemstellung bekannt nur für  $c_{\text{FD}}$  muss noch ein geeigneter Ausdruck gefunden werden. Dies kann über die Definition der Dispersion erfolgen [YL09]

$$c_{\text{FD}} = \frac{\omega(\tilde{k})}{\tilde{k}}. \quad (4.47)$$

Die berechneten Dispersionsrelationen der letzten Abschnitte dieser Arbeit müssen somit nur durch  $\tilde{k}$  und  $c$  geteilt werden und können dann wie angesprochen über  $\tilde{k} \cdot \Delta x$  aufgetragen werden. Es muss dabei nur der Bereich  $\tilde{k} \cdot \Delta x \leq \pi$  betrachtet werden, da oberhalb dieser Grenze das Abtasttheorem verletzt ist (vgl. Ungleichung 4.46).

Beim Vergleich des Dispersionsverhaltens der beiden Methoden ergaben sich folgende Ergebnisse:

- Die Dispersion nimmt generell bei beiden Methoden in zunehmender Ordnung ab, wobei symmetrische Ordnungen in Raum und Zeit deutlich geringere Dispersion zeigen.
- Bei gleicher Ordnung in der Zeit und im Raum ergibt sich eine geringere Dispersion für Methode 2.
- Bei asymmetrischer Ordnung von Raum und Zeit zeigen Methode 1 schon bei kleinem  $\tilde{k}\Delta x$  deutliches dispersives Verhalten.

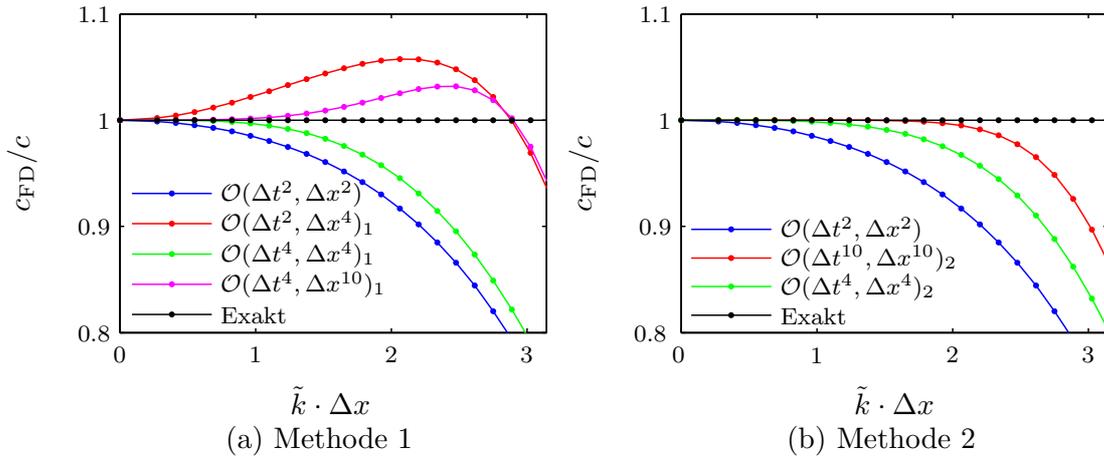


Abbildung 4.1.: Darstellung des Dispersionsverhaltens der beiden Methoden mit zunehmendem  $\tilde{k} \cdot \Delta x$ . Die Größen  $c = 5500$  m/s,  $r = 0,8$  und  $S = 20$  wurden konstant gehalten.

Methode 2 verwendet zwar die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  zur Berechnung der Differenzgleichung (siehe Abschnitt 3.2), jedoch kann durch die Anpassungen der räumlichen Koeffizienten, die selbe Genauigkeit erreicht werden, wie die der jeweiligen räumlichen Ordnung. Die Ergebnisse der Dispersionsanalyse bestätigen nun diese Aussage. In Abbildung 4.1 (b) ist zu erkennen, dass die beiden Ordnungen der Methode niemals größer als  $c_{\text{FD}}/c = 1$  werden. Im Vergleich mit den Dispersionskurven der Methode 1 (Abbildung 4.1 (a)) zeigt sich, dass gerade die symmetrischen Ordnungen solch ein Verhalten zeigen. Die Dispersionskurven der asymmetrischen Ordnungen führen immer zu einem Maximum oberhalb von  $c_{\text{FD}}/c = 1$ . In der Publikation von Yang Liu und Mrinal K. Sen werden noch weitere Ordnungen untersucht und es zeigt sich dieses immer gleiche Verhalten.

Je länger die Dispersionskurve einer Methode auf  $c_{\text{FD}}/c = 1$  liegt, desto robuster reagiert die Methode auf die Verkleinerung des Parameters  $S$  und somit auf die Vergrößerung von  $\Delta x$ . Dies ist leicht in Abbildung 4.1 nachzuvollziehen. Für eine Reduzierung der Rechenzeit ist die Vergrößerung von  $\Delta x$  entscheidend und daher sollte eine effiziente Methode möglichst lange dispersionslos bleiben.

Methode 1 in der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  behält bis ca.  $\tilde{k}\Delta x \leq 0,3$  die exakte Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_{\text{FD}} = c$ . Die selbe Methode der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  liegt bis  $\tilde{k}\Delta x \leq 0,9$  auf der exakten Dispersionskurve. Diese Tatsache zeigt noch einmal den deutlich größeren dispersionslosen Bereich der symmetrischen Ordnungen beider Methoden.

Zusätzlich zu den Dispersionsrelationen der verschiedenen Ordnungen ist auch die Empfindlichkeit dieser Relationen auf Veränderungen in der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Interesse. Wenn die Dispersionsrelation einer bestimmten Ordnung der beiden Methoden unter Veränderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit stark variiert, so kann das negative Auswirkungen auf die Auflösbarkeit von Strukturen im Untergrund haben. In dieser Arbeit sind diese Auswirkungen nicht von Bedeutung da, die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  konstant ist. Werden jedoch Mehrschichtmodelle betrachtet so ist diese Abhängigkeit zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit und Dispersion von größerem Interesse. Im folgenden werden die Ergebnisse dieser Abhängigkeit für beide Methoden präsentiert.

In Abbildung 4.2 ist sehr gut zu erkennen, dass sich die Dispersionsrelationen der verschiedenen Ordnungen beider Methoden sehr unterschiedliche entwickeln, bei einer sich ändernden Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ . Für alle symmetrischen Ordnungen, unabhängig von der Methode, scheint die Form der Dispersionskurve nicht stark variieren. Die asymmetrischen Ordnungen der 1. Methode reagieren jedoch sehr stark auf die Veränderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Je höher die Geschwindigkeit  $c$  desto mehr steigt die Dispersionskurve über den Exakten Wert. Es ist also davon auszugehen, dass Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  und  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$  für Mehrschichtmodelle nicht geeignet sind. In Abschnitt 6.2 wird auf diese Problematik noch näher eingegangen.

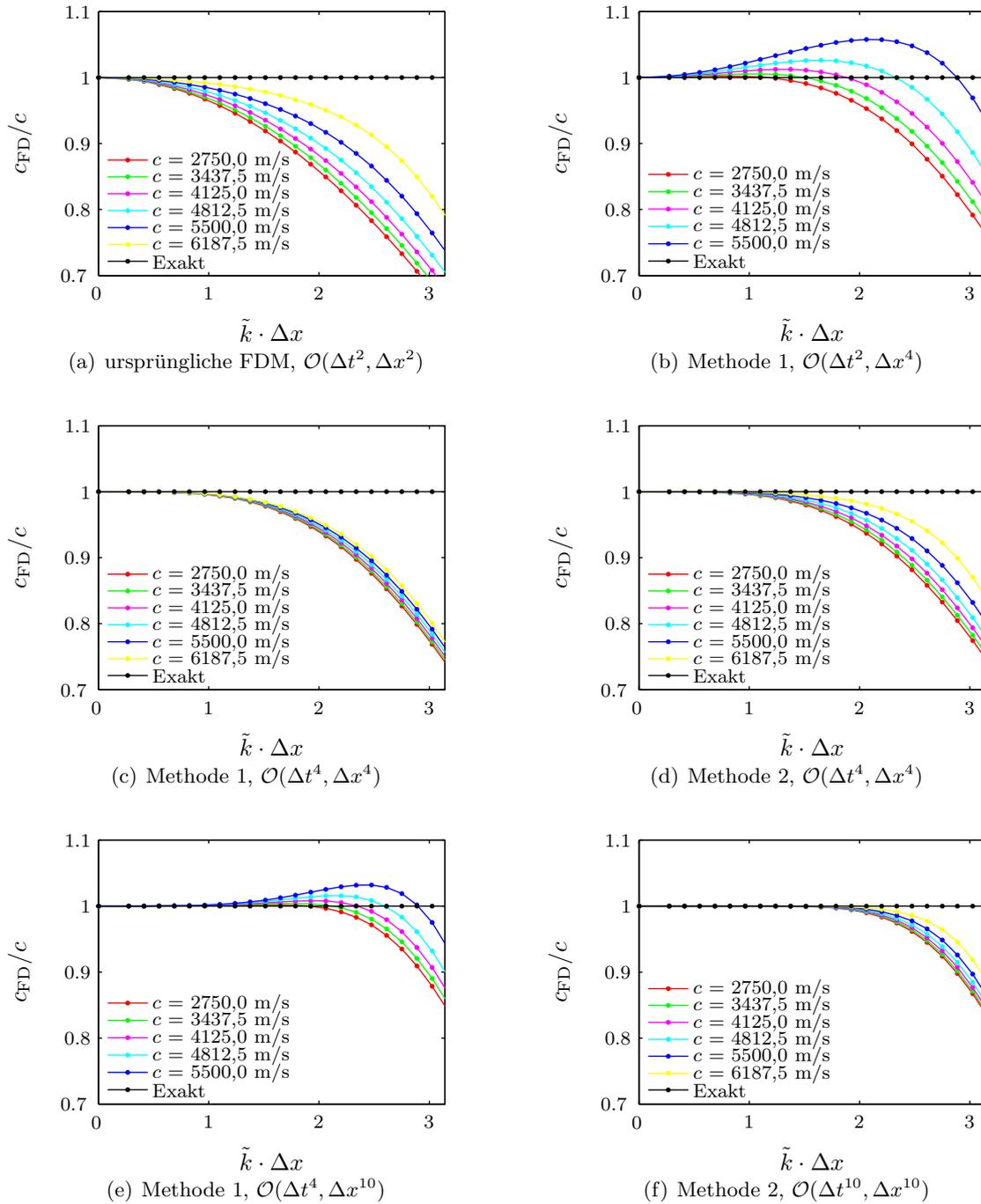


Abbildung 4.2.: Darstellung der Dispersionsrelationen in Abhängigkeit von  $c$  bzw. der Courant-Zahl  $r$  alle Ordnungen der beiden Methoden. Die Anzahl der Gitterpunkte pro halbe Wellenlänge  $S$  liegt dabei bei konstanten  $S = 20$ .



## 5. Anwendung der beiden Methoden in Matlab

Die in Abschnitt 4 hergeleiteten Stabilitätsbedingungen und Dispersionsrelationen wurden im Rahmen dieser Bachelorarbeit durch konkrete Anwendung der verschiedenen Differenzgleichungen in einem Matlab Programm überprüft. Außerdem zeigen die dadurch entstehenden Seismogramme sehr schön, welche Konsequenzen sich aus den Ergebnissen aus Abschnitt 4 auf eine konkrete Umsetzung in eine Programmroutine ergeben. Auf den folgenden Seiten wird nun das geschriebene Matlab Programm erläutert und die daraus entstandenen Ergebnisse präsentiert.

### 5.1. Beschreibung des Programms

Für die Umsetzung der beiden Methoden in Matlab wurde kein komplett neues Programm geschrieben, sondern zwei bereits existierende Routinen modifiziert. Es handelt sich dabei um zwei Algorithmen, die die vollständig elastische Wellenausbreitung in einer Dimension durchführen und die für diese Arbeit von der Arbeitsgruppe um Prof. Dr. Thomas Bohlen bereitgestellt wurden. Die Programmcodes dieser beiden Routinen können in Anhang D und E eingesehen werden.

Der erste der beiden Codes „`fdakust_2ndorder_wave_equation`“ verwendet die FDM in der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$ , so wie in Abschnitt 2 beschrieben.

Im zweiten Code „`ana_akust`“ wird die Wellenausbreitung analytisch über Fourier-Transformationen durchgeführt.

Die angesprochenen Modifikationen zielten nun darauf ab, die Stabilitäts- und Dispersionsseigenschaften der beiden Methoden möglichst deutlich darzustellen. Dafür wurden im wesentlichen folgende drei Veränderungen vorgenommen:

1. In „`fdakust_second_order_wave_equation`“ wurden die Differenzgleichungen der beiden Methoden in sämtlichen Ordnungen implementiert.
2. Der Abstand zwischen Quelle und Empfänger wurde in beiden Programmen auf ca. 50 Wellenlängen erhöht, damit selbst minimales dispersives Verhalten am Empfänger sichtbar wird.
3. Das Quellsignal und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  des numerischen und analytischen Programms wurden angeglichen, um die Vergleichbarkeit am Empfänger zu gewährleisten.

### 5.1.1. Implementierung der beiden Methoden

Die Implementierung der Methoden 1 und 2 wurde über eine switch-case Verzweigung realisiert. In Anhang A ab der Zeile 61 des Programmcodes ist diese Verzweigung zu erkennen. Es ist damit möglich nur unter Angabe der Ordnung und der Methode die Ausbreitung mit der gewünschten Differenzgleichung durchzuführen. Dafür wurde der String „def“ verwendet (vgl. Anhang A, ab Zeile 63). Die Differenzgleichungen ihrerseits wurden in der Form wie sie in Abschnitt 3 hergeleitet wurden eingesetzt. In Abschnitt 4.1 sind diese Gleichungen exakt so ausgeschrieben wie sie im Programm implementiert wurden. Hierbei muss angemerkt werden, dass die for-Schleife über alle räumlichen Gitterpunkte ebenfalls an die verwendete Methode angepasst werden musste. Die Methoden höherer Ordnung beinhalten Gitterpunkte die relativ weit (bis zu  $6\Delta x$ ) vom betrachteten Punkt selbst entfernt sind. Da keine Gitterpunkte außerhalb des Modells definiert wurden, können diese Methoden sich nicht beliebig nahe dem Rand nähern, sondern immer nur bis zum am weitesten entfernten Gitterpunkt der Methode (vgl. Anhang A, Zeilen 64 bis 129).

### 5.1.2. Erhöhung des Abstands zwischen Quelle und Empfänger

Bei der Von Neumannschen Stabilitätsanalyse ermittelte Instabilitäten treten schon nach wenigen Wellenlängen in Erscheinung, das bedeutet es ist nicht zwingend notwendig große Abstände ( $> 20\lambda$ ) bei der Programmierung eines Analyseprogramm zu verwenden. Der Grund dafür, dass in der Umsetzung dieser Arbeit ein Abstand von  $50\lambda$  angesetzt wurde, liegt daher weniger an den Stabilitätseigenschaften der Methoden als an ihrem Dispersionsverhalten.

Die Dispersion lässt sich nicht so leicht, wie beispielsweise die Stabilität, in „Schwarz“ und „Weiß“, sprich in dispersiv und dispersionslos einordnen. Es kann daher wichtig sein ein Signal über eine größere Entfernung propagieren zu lassen, um auch minimales dispersives Verhalten erkennen zu können.

Für die Simulation seismischer Wellen werden üblicherweise sogenannte „Ricker wavelets“ eingesetzt. Es handelt sich dabei um eine speziell normierte Form der zweiten Ableitung der Gauß-Funktion. Der Grund für den Einsatz dieser Elementarwelle liegt in deren Ähnlichkeit mit der wahren Partikelbewegung bei seismischer Anregung im Gestein. In dieser Arbeit wurde als Anfangssignal eine integrierte Ricker-Welle

$$A(\tau) = \left( \frac{\tau \cdot f_{rw}}{\pi} \right) \cdot e^{-((\pi+\tau)^2 - \pi^2)} \quad (5.1)$$

verwendet. Die Größe  $\tau = \pi \cdot (f_{rw}t - 1)$  beinhaltet die Zeit  $t$  und die Center-Frequenz  $f_{rw}$  der Ricker-Welle. Diese Frequenz betrug während den gesamten Berechnungen 10,0 Hz. Mit einer konstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit von  $c = 5500$  m/s ergibt sich so eine Wellenlänge von  $\lambda_{rw} = c/f_{rw} = 550$  m, die zur Implementierung der Entfernung zwischen Quelle und Empfänger herangezogen wurde. Wie bereits beschrieben wurde ein Abstand von 50 Wellenlängen gewählt, was einer Entfernung von  $50 \cdot 550$  m = 27500 m entspricht.

Die Wahl der Center-Frequenz und der Ausbreitungsgeschwindigkeit ist für die Ergebnisse dieser Arbeit nur von geringer Bedeutung. Beide Größen haben zwar Einfluss auf die Stabilitäts- bzw. Dispersionseigenschaften der Wellen, dieser ist jedoch unabhängig von der verwendeten Methode und dessen Ordnung. Der Vergleich der Methoden ist bei konsistenter Verwendung der Größen  $c$  und  $f_{rw}$  somit nicht gefährdet.

Die gewählte Druckwellengeschwindigkeit von  $c = 5500$  m/s ist typische für Gesteine der Erdkruste und auch eine Frequenz von  $f_{rw} = 10$  Hz entspricht der einer niederfrequenten seismischen Welle. Eine präzisere Spezifizierung ist für diese Arbeit nicht erforderlich.

### 5.1.3. Angleichung der numerischen und analytischen Routine

Um die Qualität der numerischen Methoden überprüfen zu können, kann im Falle der elastischen Wellengleichung auf eine analytische Lösung zurückgegriffen werden. Ein Vergleich der beiden Lösungen liefert Aussagekräftige Ergebnisse, solange die Randbedingungen für beide Arten identisch sind. Dafür musste neben der Entfernung von Quelle und Empfänger auch das eingespeiste Signal und die Ausbreitungsgeschwindigkeit angeglichen werden.

Das Angleichen der seismischen Wellengeschwindigkeit  $c$  war unproblematisch, da die Größe direkt in die analytische Berechnung eingesetzt wird und daher als Parameter frei wählbar ist (siehe Anhang B Zeile 1).

Bei der Anpassung der Entfernung zwischen Quelle und Empfänger müssen dahingegen einige Punkte beachtet werden.

Über die angestrebte Entfernung von 27500 m werden in der numerischen Lösung Gitterpunkte gelegt, über die die Wellenausbreitung berechnet wird. Nun müssen sich sowohl Quelle als auch Empfänger genau an einem Gitterpunkt befinden was die Entfernung von 27500 m um maximal  $\pm\Delta x$  verschieben kann. Der Abstand  $\Delta x$  variiert beim Vergleich der Methoden, was die Anpassung an die analytische Routine erschwert, insbesondere da die analytische Lösung nach Definition keine Gitterpunkte bei der Berechnung der Wellenausbreitung verwendet. Um verschiedene Entfernungen in den beiden Berechnungen zu vermeiden, wurde in dieser Arbeit ein pragmatischer Lösung gewählt. Der Programmcode, der in der numerischen Routine über die Gitterpunkte die gesuchte Entfernung berechnet, wurde komplett in die analytische Lösung übernommen (siehe Anhang B Zeilen 3 bis 27). Dadurch können in dieses Programm die gleichen Parameter übergeben werden wie in die numerische Routine und es wird die Entfernung zwischen Quelle und Empfänger in beiden Fällen komplett identisch berechnet.

Während der Analyse der beiden Methoden hat sich gezeigt, dass trotz identischer Berechnung der angesprochenen Entfernung die analytische Lösung immer um einige Millisekunden später am Empfänger eintraf als die numerische. Es wird nicht davon ausgegangen, dass es sich um ein Fehler in den numerischen Methoden handelt, da der Versatz unabhängig von Methode und Ordnung auftrat. Nach Absprache mit Professor Dr. Thomas Bohlen wurde die Entfernung der analytischen Routine um  $1,5\Delta x$  verringert [Tho14], was exakt dem Versatz entsprach. Warum dieser Laufzeitunterschied entsteht konnte nicht ermittelt werden, jedoch scheint dieser Wert von  $1,5\Delta x$  wirklich nicht Methoden-abhängig zu sein und beeinflusst so den Vergleich nicht. Es bleibt trotzdem anzumerken, dass die Frage des Versatzes in dieser Arbeit nicht geklärt werden konnte.

Für die Anpassung des eingespeisten Signals musste die Ricker-Welle der beiden Routinen angeglichen werden. Dafür wurde eine separate Funktion geschrieben, die eine Ricker-Welle wie in Gleichung 5.1 erzeugt (siehe Anhang C). Diese Welle wurde dann sowohl in den analytischen als auch in den numerischen Algorithmus eingebunden. Im numerischen Programm wurde das Signal dafür, im Gegensatz zur ursprünglichen Routine, direkt den Funktionswerten der Gitterpunkte zugewiesen (Siehe Anhang A Zeile 59). Die ursprüngliche Routine addierte das Signal auf die bestehenden Funktionswerte der Gitterpunkte. In dieser Arbeit stellt die Ricker-Welle das einzige Signal dar, wodurch alle Funktionswerte der Gitterpunkte vor der Einspeisung null sind. Es ist also möglich das Signal direkt den einzelnen Funktionswerten zuzuweisen.

In der analytischen Routine wurde die Einspeisung des Signals nicht verändert.

## 5.2. Ergebnisse der computergestützten Wellenausbreitung

In diesem Abschnitt werden die theoretisch berechneten Stabilitäten und Dispersionsrelationen, die im Abschnitt 5.1 beschrieben wurden, mit Hilfe der numerischen und analyti-

schen Routine überprüft.

Da die Stabilität im Wesentlichen nur von der Courant-Zahl abhängt und die Dispersion stark vom Parameter  $S$  beeinflusst wird (siehe Abschnitt 2.1.2), werden diese Größen in den folgenden Abschnitten getrennt voneinander betrachtet.

### 5.2.1. Variation der Courant-Zahl

Bei der Berechnung der Stabilitäten in Abschnitt 4.1 ergaben sich im Wesentlichen vier Courant-Zahlen, ab denen sich die Stabilitätseigenschaften mindestens einer Differenzengleichungen der beiden Methoden verändert. Diese Werte sind  $r = \sqrt{3} \approx 1,732$ ,  $r = 1$ ,  $r = 1/4\sqrt{24 - 3\sqrt{14}} \approx 0,894$  und  $r = \sqrt{3/4} \approx 0,866$ .

Für einen Wert von  $r$  unterhalb von  $r = 0,866$ , sollten alle Ordnungen der beiden Methoden stabil sein. In Abbildung 5.1 wurde die Wellenausbreitung mit einer Courant-Zahl von  $r = 0,865$  numerisch durchgeführt. Alle Lösungen sind dabei wie erwartet stabil.

Wird nun eine Courant-Zahl  $r$  gewählt, die oberhalb von  $r = 0,866$  liegt, jedoch nicht  $r = 0,894$  übersteigt, so sollte die Lösung der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  von Methode 1 divergieren. Die computergestützte Berechnung der Wellenausbreitung mit  $r = 0,867$  ergab exakt bei dieser Ordnung eine instabile Lösung der numerischen Routine. Alle anderen Ordnungen der beiden Methoden sind stabil, was sich als identisches Empfängersignal der numerischen und analytischen Lösung bemerkbar macht (siehe Abbildung 5.2).

Eine weitere Erhöhung der Courant-Zahl auf einen Wert zwischen  $r = 0,894$  und  $r = 1$  sollte nun dazu führen, dass auch die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^{10})$  der ersten Methode instabil wird. In Abbildung 5.3 ist genau das zu erkennen, d.h. die numerische Wellenausbreitung mit  $r = 0,895$  bestätigt das theoretisch hergeleitete Stabilitätskriterium für diese Ordnung der Methode 1.

Wird in einem letzten Schritt die Courant-Zahl auf über  $r = 1$  erhöht, so wird erwartet, dass lediglich Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  der ersten Methode stabil bleibt. Die Stabilität dieser Methode wurde in Abschnitt 4.1.3 als „Ausnahme“ bezeichnet, da sie bis  $r = 1,732$  bestand hat. Abbildung 5.4 zeigt das Ergebnis der berechneten Wellenausbreitung mit einer Courant-Zahl von  $r = 1,01$ . Es ist leicht zu erkennen, dass die theoretischen Ergebnisse von den numerischen Berechnungen gestützt werden.

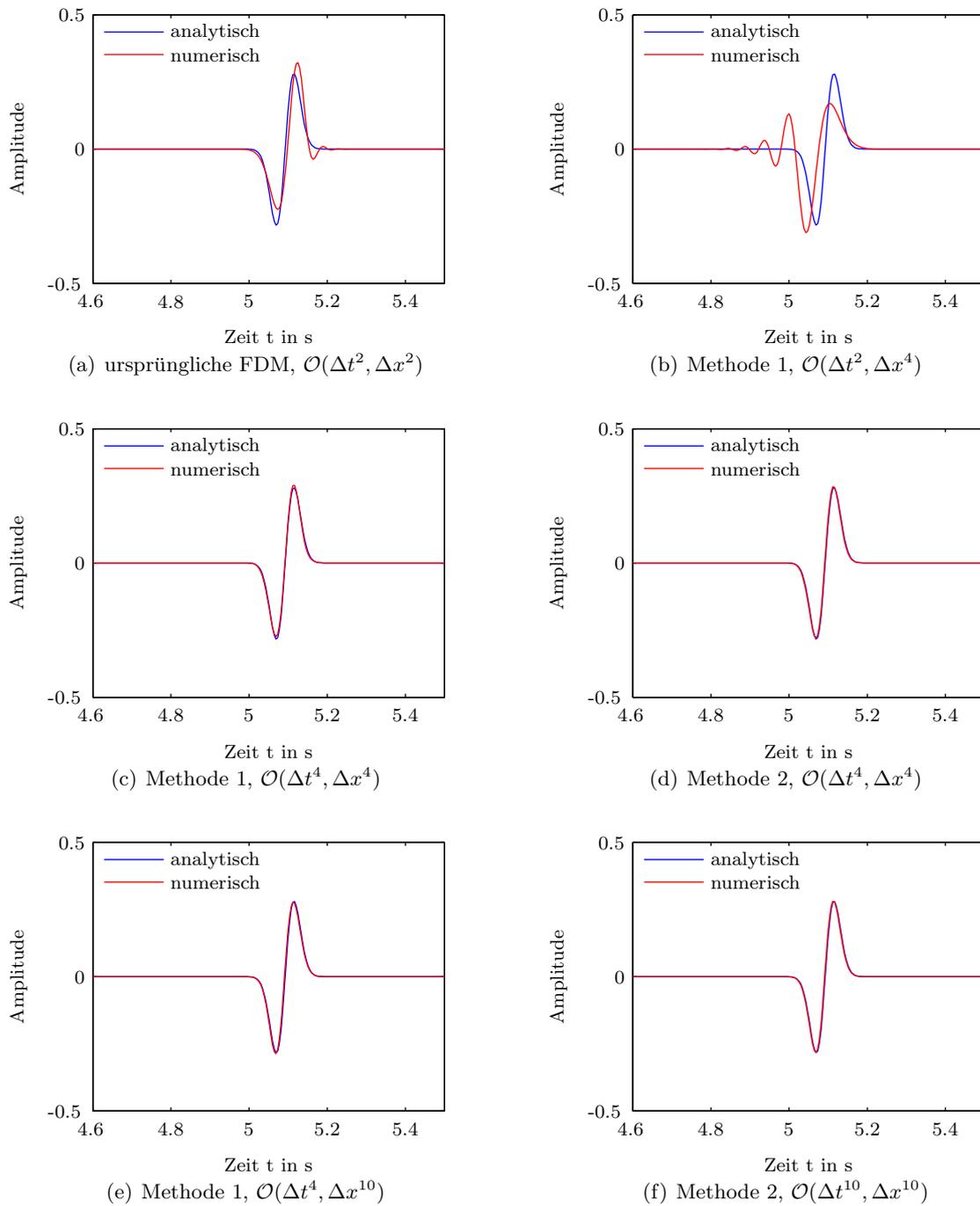


Abbildung 5.1.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit einer Courant-Zahl von  $r = 0,865$ . Die Anzahl der Gitterpunkte pro halbe Wellenlänge  $S$  liegt dabei bei konstanten  $S = 20$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

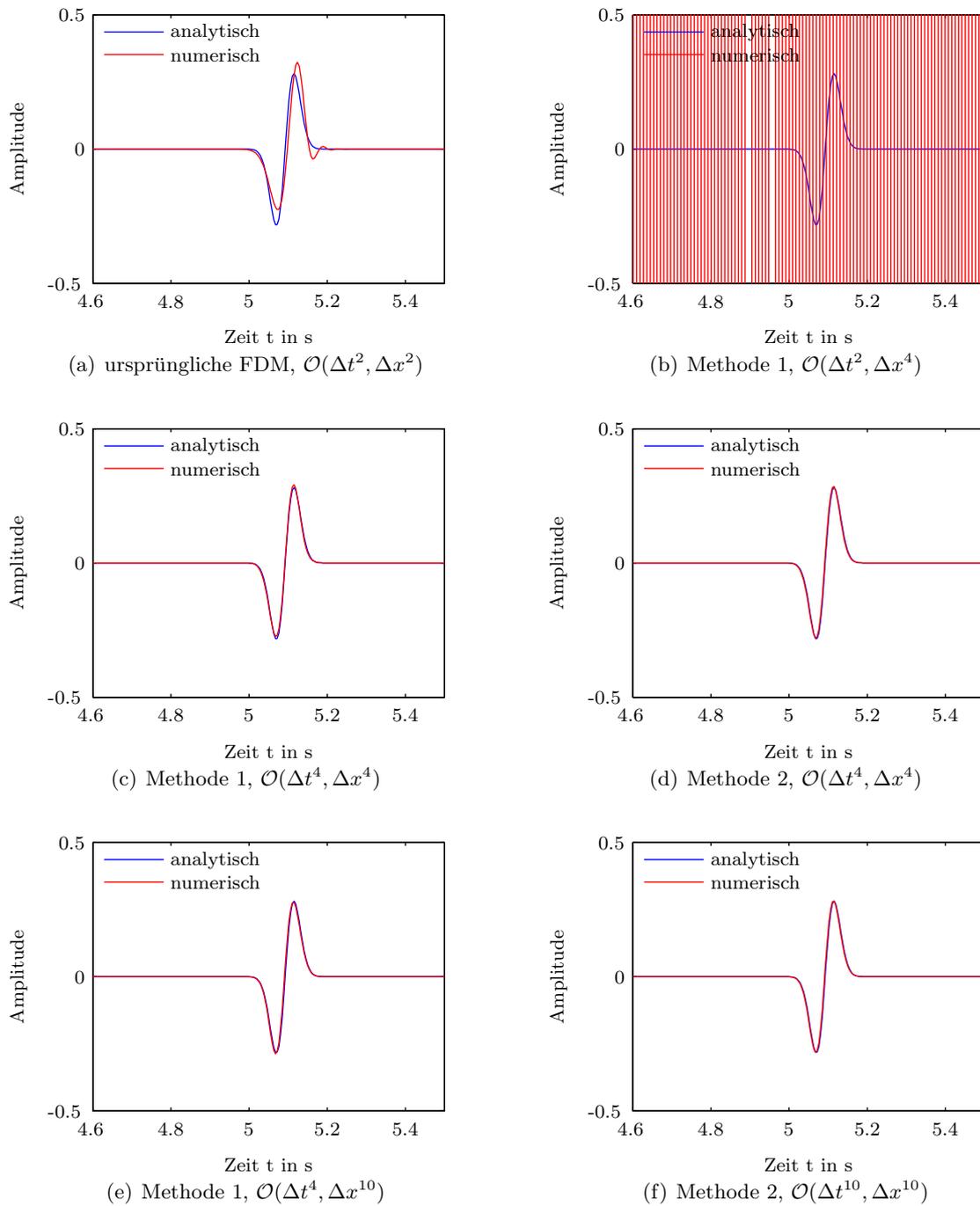


Abbildung 5.2.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit einer Courant-Zahl von  $r = 0,867$ . Die Anzahl der Gitterpunkte pro halbe Wellenlänge  $S$  liegt dabei bei konstanten  $S = 20$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

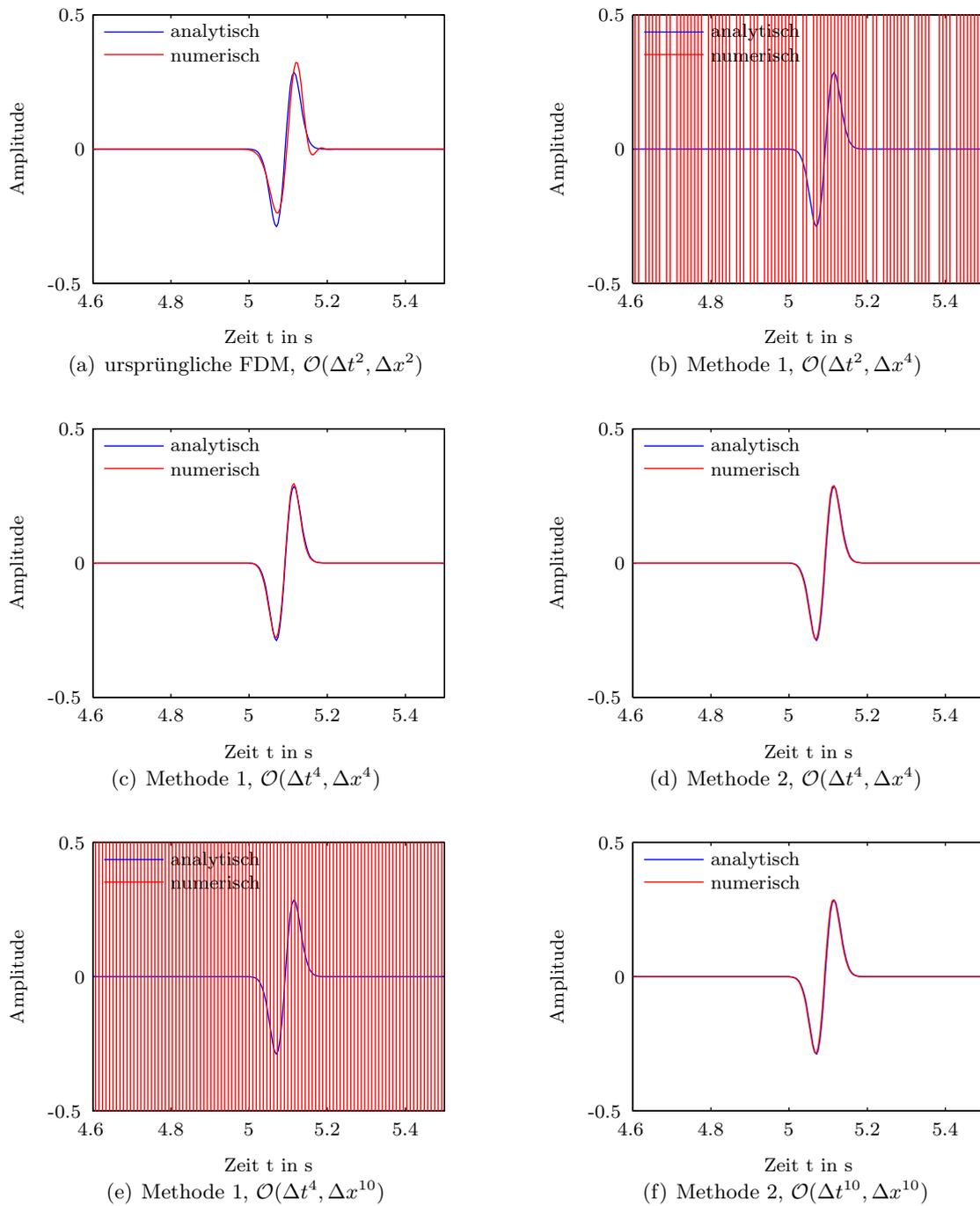


Abbildung 5.3.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit einer Courant-Zahl von  $r = 0,895$ . Die Anzahl der Gitterpunkte pro halbe Wellenlänge  $S$  liegt dabei bei konstanten  $S = 20$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

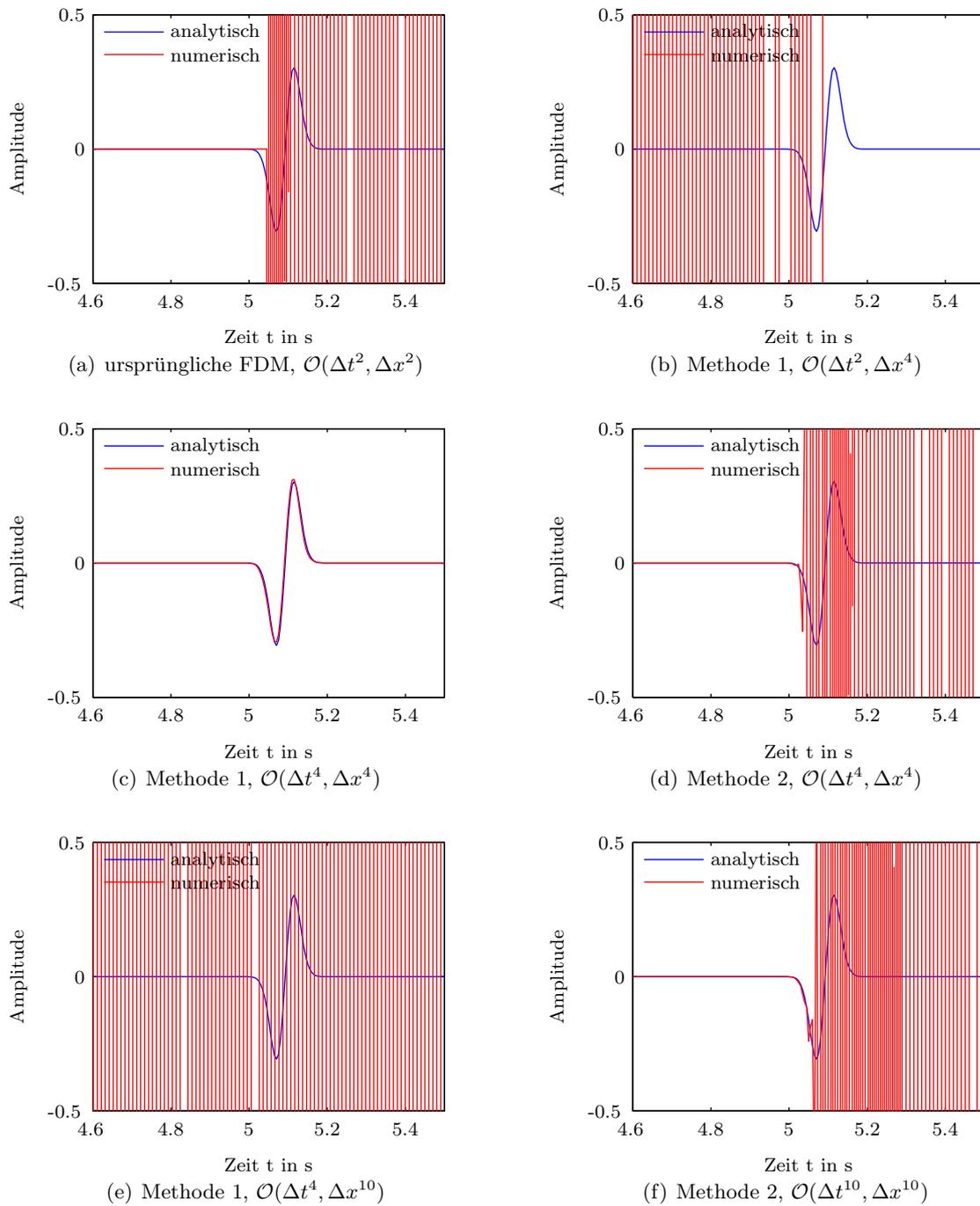


Abbildung 5.4.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit einer Courant-Zahl von  $r = 1,01$ . Die Anzahl der Gitterpunkte pro halbe Wellenlänge  $S$  liegt dabei bei konstanten  $S = 20$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

### 5.2.2. Variation des Gitterparameters $S$

Das Dispersionsverhalten der verschiedenen Differenzgleichungen lässt sich am besten untersuchen, indem der Parameter  $S$  variiert wird. Der Grund liegt in der Antiproportionalität zwischen  $S$  und  $\Delta x$  begründet (siehe Gleichung 2.14). Eine Erhöhung von  $S$  verringert den räumlichen Gitterabstand  $\Delta x$ . Die Dispersionsrelationen aus Abschnitt 4.2.6 sind nun Funktionen in Abhängigkeit von  $\tilde{k}\Delta x$ , d.h. die Veränderung des Parameters  $S$  hat direkten Einfluss auf die Dispersionsseigenschaften der verschiedenen Differenzgleichungen der Methoden 1 und 2. Selbstverständlich hat auch die Wellenzahl  $\tilde{k}$  Einfluss auf die Dispersion. Da jedoch die Frequenz bzw. die Wellenlänge des eingespeisten Signals konstant gehalten wird, verändert  $\tilde{k}$  die Dispersion in der numerischen Routine nicht, sondern geht nur als konstanter Faktor in die Berechnungen mit ein.

Im folgenden werden die Lösungen der computergestützten Wellenausbreitung mit verschiedenen  $S$  präsentiert. Dabei ist zu beachten, dass die genannten Werte für  $S$  keine Absolutwerte sind, die für andere Wellenausbreitungen übernommen werden können [Dab86]. Der ideale Wert von  $S$  hängt immer auch von der Wellenzahl  $\tilde{k}$  ab. Für die in dieser Arbeit verwendete Anregung mit einer Ricker-Welle der Frequenz  $f = 10$  Hz wurden Werte für  $S$  berechnet, die für dieses Anregungssignal gültig sind, jedoch nicht für anderen Anregungen gelten. Beispielsweise kann  $S = 10$  bei hohen Anregungsfrequenzen zu einer dispersionslosen Wellenausbreitung im betrachteten Frequenzbereich führen. Niedrigere Anregungsfrequenzen liegen möglicherweise unterhalb dieses dispersionslosen Bereichs und  $S$  muss erhöht werden.

Für die angesprochene Anregungsfrequenz von  $f = 10$  Hz ergeben sich, wie schon bei der Stabilität, einige Werte für  $S$ , an denen sich das Dispersionsverhalten einzelner Ordnungen der beiden Methoden verändert.

An dieser Stelle wird nochmals darauf hingewiesen, dass diese Veränderung, im Gegensatz zur Stabilität, nicht abrupt erfolgt. Die im Folgenden angegebenen Konstanten  $S$  stellen somit auch keine Grenzen im eigentlichen Sinne dar, sondern nur Werte an denen ein dispersives Verhalten in der numerischen Ausbreitung nicht mehr vernachlässigt werden kann.

Die numerische Analyse ergab ein dispersives Verhalten aller Ordnungen der Methoden für  $S \leq 6$ . In Abbildung 5.5 ist die Lösung der Wellenausbreitung für  $S = 6$  dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass sich die Dispersion aller Ordnungen von Methode 2 ausschließlich durch geringere Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c_{\text{FD}}$  einzelner Frequenzen bemerkbar macht. Die unsymmetrischen Ordnungen  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  und  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$  der Methode 1 weisen dagegen frühere Ankunftszeiten einzelner Frequenzen auf, was auf höhere Geschwindigkeiten  $c_{\text{FD}}$  zurückzuführen ist. Abbildung 4.1 der theoretischen Dispersionsanalyse (Abschnitt 4.2.6) zeigt genau dieses Verhalten. Die theoretische Vorhersage und die numerische Ausführung der Wellenausbreitung stimmen somit sehr gut überein.

Wird die Konstante  $S$  von dem Wert 6 auf 8 erhöht, so nimmt die Dispersion in allen Ordnungen der beiden Methoden ab und es kann die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^{10}, \Delta x^{10})$  der 2. Methode als dispersionslos angesehen werden (siehe Abbildung 5.6). Die Ankunftszeiten der einzelnen Frequenzen weisen wieder die für  $S = 6$  beschriebene Charakteristik auf.

Eine weitere Erhöhung von  $S$  auf  $S = 12$  führt dazu, dass auch die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$  der 1. Methode und die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  der 2. Methode eine dispersionslose Wellenausbreitung aufweisen. Die Lösung der numerischen Berechnungen ist in Abbildung 5.7 dargestellt.

Die Anhebung der Größe  $S$  führt neben der Abnahme der Dispersion zu einer leichten Absenkung der Amplitude von numerischer und analytischer Lösung (vgl. Abbildung 5.5

und 5.8). Dieser Effekt wird durch die Verwendung eines normierten Eingangssignal erzeugt und ist nicht auf die beiden Methoden dieser Arbeit zurückzuführen. Die Normierung des eingespeisten Signals erfolgt numerisch auf der Basis der Funktionswerte der einzelnen Gitterpunkte. Eine geringe Anzahl an räumlichen Gitterpunkten ( $S < 10$ ) führt nach der Normierung zu einer höheren Amplitude und spitzeren Peaks des Signals, da sich die Fläche unter dem Signal nicht von der höherer  $S$ -Werte unterscheiden darf.

Eine dispersionslose Wellenausbreitung für die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  der 1. Methode ergibt sich für  $S \geq 15$ , die FDM der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$  ist für  $S \geq 34$  dispersionslos und die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  der 1. Methode erreicht erst ab  $S \approx 45$  den dispersionslosen Bereich. Die Abbildung 5.8 zeigt die Ergebnisse der Wellenausbreitung aller Methoden und Ordnungen für  $S = 45$ .

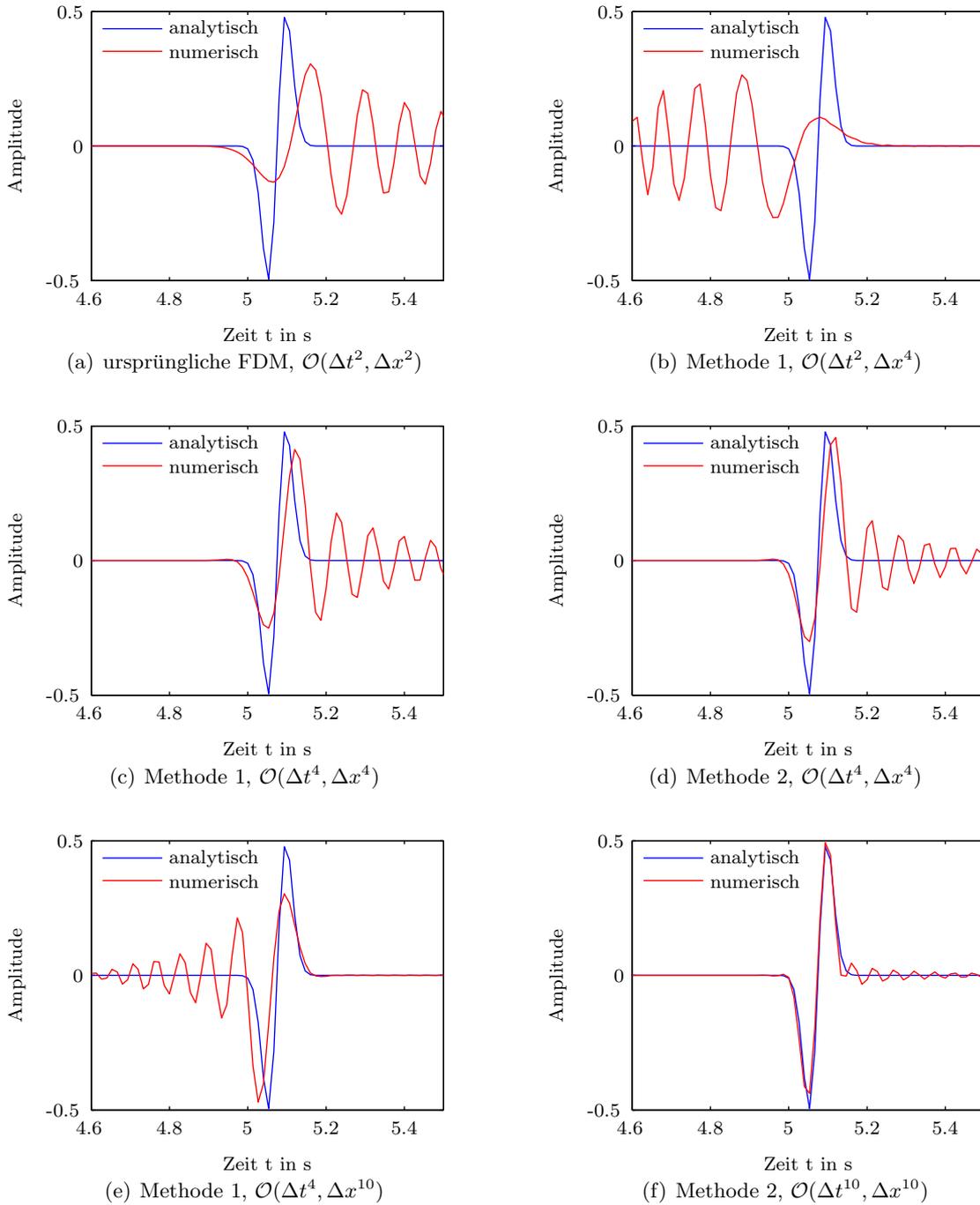


Abbildung 5.5.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit  $S = 6$ . Die Courant-Zahl  $r$  beträgt  $r = 0,8$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

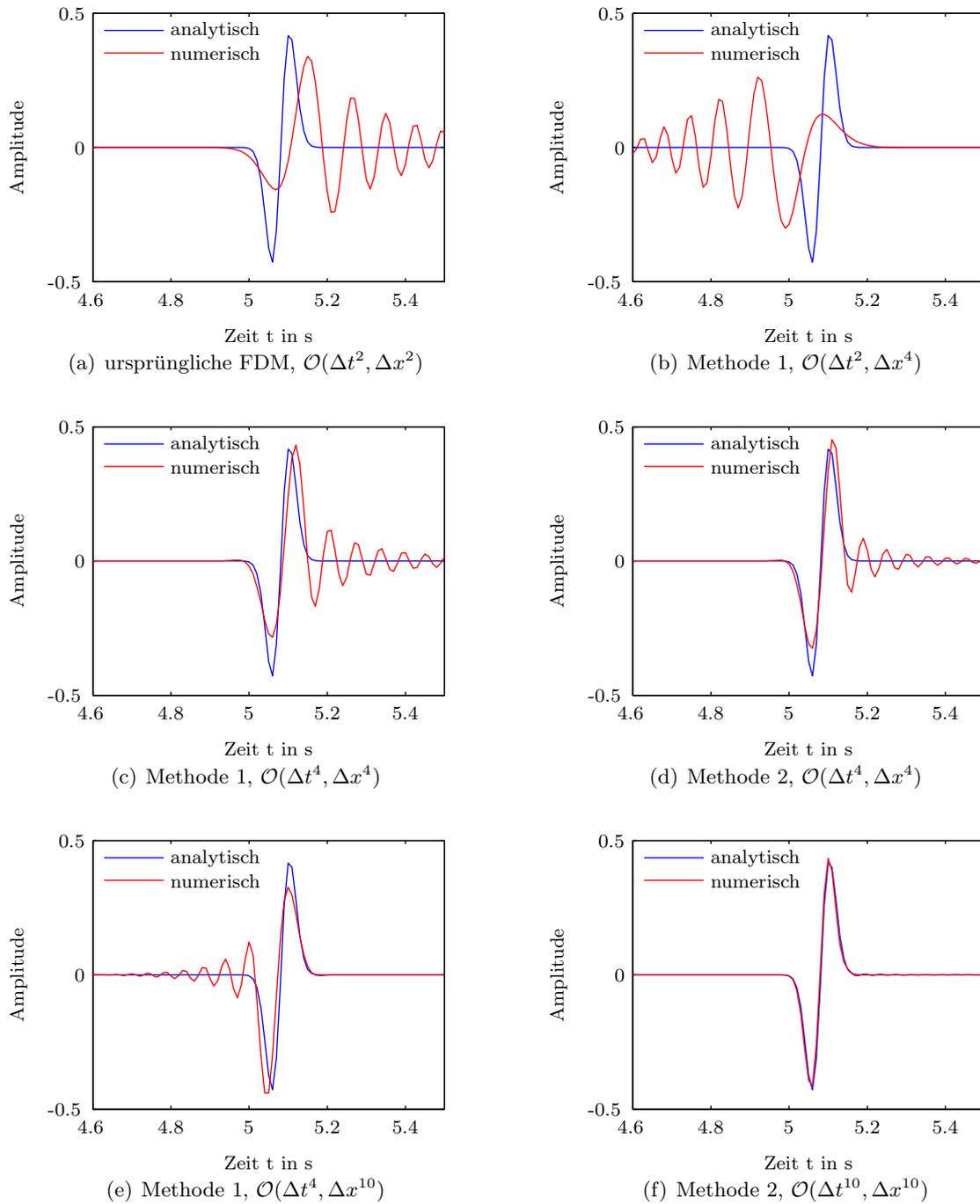


Abbildung 5.6.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit  $S = 8$ . Die Courant-Zahl  $r$  beträgt  $r = 0,8$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

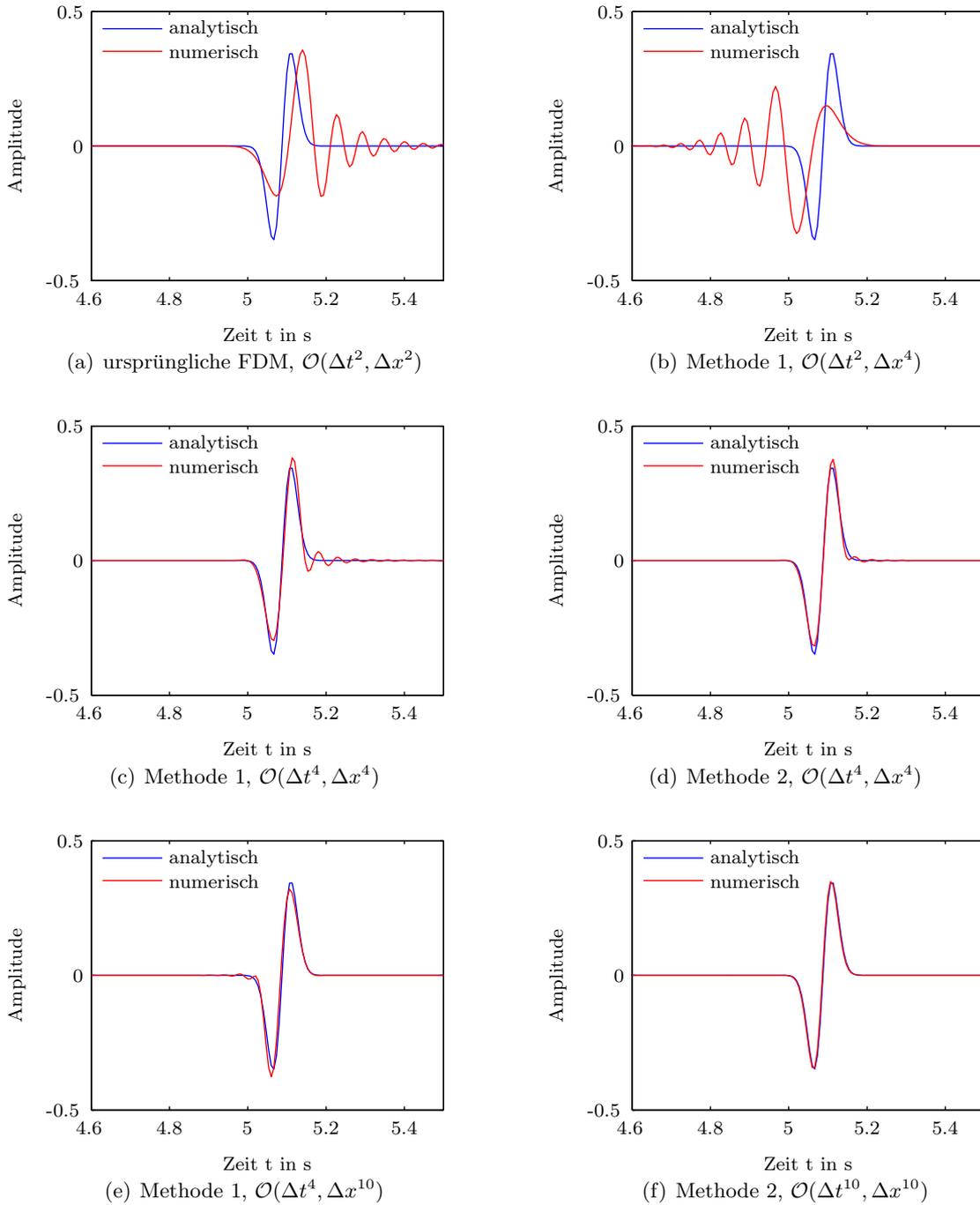


Abbildung 5.7.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit  $S = 12$ . Die Courant-Zahl  $r$  beträgt  $r = 0,8$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

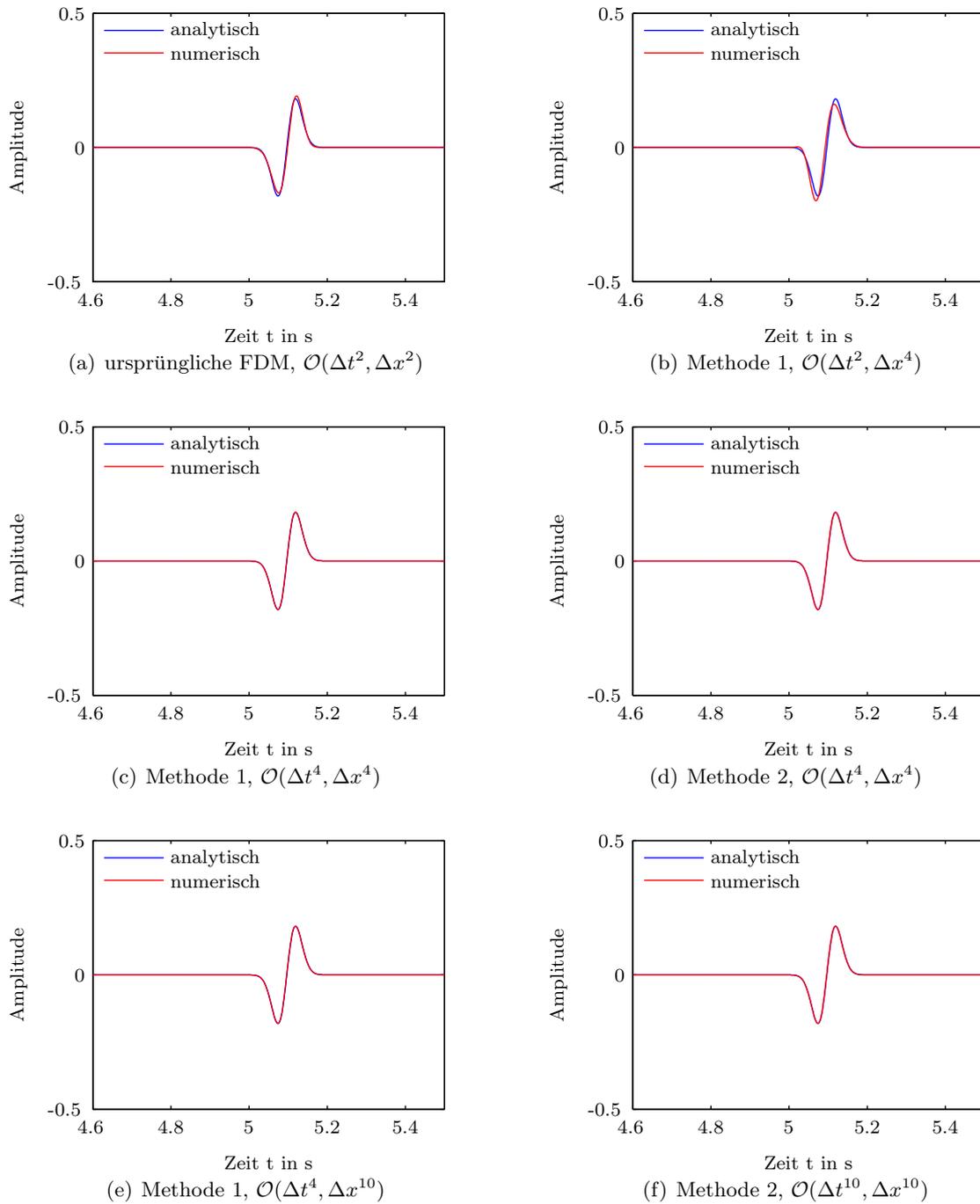


Abbildung 5.8.: Darstellung der Empfängersignale alle Ordnungen der beiden Methoden mit  $S = 45$ . Die Courant-Zahl  $r$  beträgt  $r = 0,8$  und die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei  $c = 5500$  m/s.

## 6. Ausblick und Transfer

Die Ergebnisse dieser Arbeit beziehen sich auf sehr vereinfachte Modellannahmen. Interessant ist nun, ob bzw. in wie weit ein Transfer der Erkenntnisse in einen komplexeren Modellraum möglich ist. Speziell das Verhalten der Methoden in 2 und 3 Dimensionen ist für eine praktische Anwendung in aktuellen Algorithmen von essentieller Bedeutung. In dieser Arbeit wird nun das Verhalten der beiden Methoden in mehr als einer Dimension beschrieben ohne jedoch genau auf quantitative Gesetzmäßigkeiten einzugehen. Außerdem wird die Problematik einer veränderlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c \rightarrow c(\vec{x})$  diskutiert.

### 6.1. Anwendungsmöglichkeiten in 2 und 3 Dimensionen

Ein entscheidender Unterschied zwischen den Ausbreitungsalgorithmen der beiden Methoden in einer Dimension und in mehr Dimensionen entsteht alleine durch die Anwendung der komplexeren elastischen Wellengleichungen im mehrdimensionalen Ortsraum bei der Herleitung der Differenzgleichungen aus Abschnitt 3.1 und 3.2. Die partiellen Differentialgleichungen der elastischen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial z^2} \right) \quad (2D), \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P(\vec{x}, t)}{\partial z^2} \right) \quad (3D) \quad (6.1b)$$

werden für Methode 1 in Gleichung 3.1 und 3.3 und für Methode 2 mit Hilfe von Ausdruck 3.8 in Gleichung 3.11 eingesetzt. Bei Anwendung der selben Rechenschritte wie in Abschnitt 3.1 und 3.2 zur Ermittlung der gesuchten Differenzgleichungen wird schnell klar, dass die zusätzlichen Dimensionen einen komplett unterschiedlichen Einfluss auf die Ergebnisse haben [Dab86].

Als Beispiel für den Einfluss der zusätzlichen Dimensionen bei den Berechnungen der Methode 1 wird Gleichung 6.1a in 3.3 eingesetzt

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right). \quad (6.2)$$

Die erneute Anwendung der zweidimensionalen Wellengleichung 6.1a ordnet der vierten Ableitung nach der Zeit einen äquivalenten Ausdruck reiner Ortsableitungen zu

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} = c^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c^2 \left( \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right). \quad (6.3)$$

In dieser Gleichung tritt nun die Klammer der Ortsableitungen quadratisch auf, d.h. der Einfluss der zusätzlichen Dimension ist nicht linear. In drei Dimensionen tritt dieses Verhalten selbstverständlich auch auf. Nach der Multiplikation der angesprochenen Klammern entsteht ein weiterer Term, der beide Dimensionen  $x$  und  $z$  enthält [Dab86]

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} = c^4 \left( \frac{\partial^4 P}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 P}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 P}{\partial z^4} \right). \quad (6.4)$$

Dieser Term  $\partial^4 P / \partial x^2 \partial z^2$  tritt direkt in allen Differenzgleichungen der Ordnung  $\Delta t^4$  auf. Auch wenn die weiteren Berechnungen zur Ermittlung der 1. Methode in zwei und in drei Dimensionen analog zu denen in einer Dimension verlaufen, der zusätzliche Term beeinflusst mit großer Wahrscheinlichkeit das Stabilitäts- und Dispersionsverhalten dieser Methode. Es bleibt jedoch zu prüfen ob diese Veränderungen konstruktiver oder destruktiver Natur sind. Es ist dennoch evident, dass die Methode 1 betreffenden Ergebnisse dieser Arbeit in einer Dimension nicht ohne weiteres auf zwei und drei Dimensionen übertragen werden können.

Ein zweites Beispiel soll nun den Einfluss mehr als einer Dimension auf Methode 2 verdeutlichen.

Wird die dreidimensionale Wellengleichung 6.1 bei der Herleitung der Koeffizienten  $a_j$  verwendet, so muss Gleichung 3.11 aus der Herleitung von Methode 2 (Abschnitt 3.2) erweitert werden zu [YL09]

$$\begin{aligned} 3a_0 P_{k,k,k}^n + \sum_{j=1}^M a_j \left( P_{k+j,k,k}^n + P_{k-j,k,k}^n + P_{k,k+j,k}^n + P_{k,k-k,j,k}^n P_{k,k,k+j}^n + P_{k,k,k-j}^n \right) \\ \approx \frac{\Delta x^2}{c^2 \Delta t^2} \left( P_{k,k,k}^{n-1} - 2P_{k,k,k}^n + P_{k,k,k}^{n+1} \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die weiteren Rechenschritte verlaufen analog zu den Berechnungen aus Abschnitt 3.2. So ergibt sich unter dem Ansatz einer ebenen Welle und der Definition des Kosinus über die Exponentialfunktion folgende Gleichung:

$$\frac{3}{2} a_0 + \sum_{j=1}^M a_j \left[ \cos(j\tilde{k}_x \Delta x) + \cos(j\tilde{k}_y \Delta x) + \cos(j\tilde{k}_z \Delta x) \right] \approx \frac{\Delta x^2}{c^2 \Delta t^2} \left[ \cos(c\tilde{k} \Delta t) - 1 \right]. \quad (6.6)$$

Hierbei wurde von einem identischen Gitterabstand  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  ausgegangen. Der Faktor  $\tilde{k}$  muss als Betrag des Wellenvektors interpretiert werden.

An dieser Stelle muss der Wellenvektor  $\vec{\tilde{k}}$  in Kugelkoordinaten umgeschrieben werden

$$\tilde{k}_x = \tilde{k} \cos\theta \cos\phi, \quad \tilde{k}_y = \tilde{k} \cos\theta \sin\phi, \quad \tilde{k}_z = \tilde{k} \sin\theta, \quad (6.7)$$

da nur so ein Vergleich der beiden Seiten von Gleichung 6.6 möglich ist.

Nach Anwendung der Taylorreihe auf den Kosinus aus Gleichung 6.6 ergeben sich zwei Ausdrücke, die einen Koeffizientenvergleich wie in Abschnitt 3.2, Gleichung 3.16a und 3.16b zulassen [YL09]

$$a_0 + 2 \sum_{j=1}^M a_j = 0 \quad \text{und} \quad (6.8a)$$

$$\sum_{j=1}^M j^{2i} \underbrace{(\cos^{2i}\theta \cos^{2i}\phi + \cos^{2i}\theta \sin^{2i}\phi + \sin^{2i}\theta)}_{f(\theta,\phi)} a_j = r^{2i-2} \quad (i = 1, 2, \dots, M). \quad (6.8b)$$

Die Berechnung aller Größen  $a_j$  erfolgt demnach in einer und in drei Dimensionen gleich, bis auf den winkelabhängigen Faktor  $f(\theta, \phi)$ . Wird die Richtung  $\theta = n\pi/2$  mit  $n \in \mathbb{N}$  betrachtet, so ist  $f(n\pi/2, \phi) = 1$  und die Gleichungen 3.16 und 6.8 sind komplett identisch. Dies bedeutet, dass die Hinzunahme weiterer Dimensionen die Methode 2 zwar um entsprechende Freiheitsgrade erweitert, jedoch das Ergebnis in einer einzigen dieser zusätzlichen Dimensionen augenscheinlich nicht verändert wird. Diese Erkenntnis sagt noch nichts über die Stabilitäts- und Dispersionseigenschaften der zweiten Methode in Richtung der zusätzlichen Dimensionen aus, dennoch entstehen keine nichtlinearen Terme wie bei Methode 1 und die Ergebnisse höherer Dimensionen ähneln mit hoher Wahrscheinlichkeit denen aus einer Dimension.

## 6.2. Einführung einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit

Der letzte Teil dieses Abschnitts befasst sich nun mit der Verallgemeinerung einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c(x)$ . Der Einfluss dieser Ortsabhängigkeit ist für beide Methoden verschieden und wird daher auch unabhängig voneinander diskutiert.

In Methode 1 tritt die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  bei der Berechnung der Koeffizienten  $a_j$  nicht auf (Gleichung 3.8) und hat daher auch keinen Einfluss darauf. Die Ortsabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit verändert damit die Diskretisierung der Ableitungen  $\partial^2 P / \partial x^2$  und  $\partial^4 P / \partial x^4$  nicht. Bei der Herleitung der gesamten Differenzgleichung dieser Methode wird jedoch die vierte Ableitung in der Zeit mit Hilfe der elastischen Wellengleichung durch eine räumliche Ableitung ersetzt

$$\frac{\partial^4 P}{\partial t^4} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right). \quad (6.9)$$

Wenn  $c$  nun nicht mehr konstant ist, so muss es mit abgeleitet werden und kann nicht mehr wie in Gleichung 3.4 zu  $c^4$  zusammengefasst werden. Diese Ableitung von  $c(x)$  ist im Allgemeinen numerisch problemlos möglich, jedoch verändert sich dadurch die Differenzgleichung der Methode und damit höchst wahrscheinlich auch die Stabilitäts- und Dispersionseigenschaften.

In der Publikation von M. A. Dablain wird diese Problematik ebenfalls diskutiert und darauf hingewiesen, dass bei der Verwendung von Schichtmodellen mit scharfen Schichtgrenzen die Ausbreitungsgeschwindigkeit über weite Bereiche des Modellraums konstant bleibt und die Ableitung nur an den Schichtgrenzen selbst nicht verschwindet. In diesen Fällen könne die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c(x)$  in Gleichung 6.9 vor die Ableitung gezogen werden und die Differenzgleichungen würden sich durch die Einführung einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht ändern [Dab86]. Die Ergebnisse dieser Arbeit beantworten auch die Frage des Verhaltens beider Methoden bei unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten (Abschnitt 4.2.6). Laufen die elastischen Wellen nun durch mehrere Schichten unterschiedlicher Geschwindigkeiten  $c(x)$ , so muss in jeder einzelnen Schicht die Einhaltung der Stabilitätsbedingung überprüft und die Dispersionseigenschaften neu berechnet werden, was jedoch mit Hilfe der Differenzgleichungen dieser Arbeit geschehen kann. In den Abbildungen 4.2 ist das Dispersionsverhalten aller Ordnungen der 1. und 2. Methode für unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten dargestellt. Es ist gut zu erkennen, dass im Falle der 1. Methoden nur die symmetrischen Ordnungen  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$  und  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  annähernd gleichbleibende Dispersionkurven zeigen. Die Dispersionseigenschaften der unsymmetrischen Ordnungen  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  und  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^1)$  sind dagegen stark Geschwindigkeitsabhängig, was bei der Anwendung auf Mehrschichtmodelle zu Problemen führen könnte.

Bei Methode 2 verändert eine variable Ausbreitungsgeschwindigkeit die Differenzgleichungen nicht. Ein entscheidender Unterschied zur 1. Methode des letzten Absatzes ist jedoch die Tatsache, dass dafür keine Näherung nötig ist. Der Einfluss einer variablen Ausbreitungsgeschwindigkeit macht sich bei dieser Methode während der Berechnung der Koeffizienten  $a_j$  bemerkbar. Über den Koeffizientenvergleich aus Gleichung 3.16b werden allen  $a_j$  ein entsprechender Wert in Abhängigkeit von  $r = c\Delta t/\Delta x$  zugeordnet, der dann in die Differenzgleichungen dieser Methode eingesetzt wird. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c(x)$  ist also lediglich ein variabler Faktor der Differenzgleichungen [YL09]. Wie bereits beschrieben, wurden in dieser Arbeit Dispersionskurven für verschiedene Geschwindigkeiten berechnet und in der Abbildung 4.2 dargestellt. Wie schon bei den symmetrischen Ordnungen der 1. Methode, verursachen unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten bei allen Ordnungen von Methode 2 nur minimale Veränderungen der Dispersionseigenschaften. Es kann also davon ausgegangen werden, dass bei Einhaltung der Stabilitätsbedingung die 2. Methode auch bei Ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeiten  $c(x)$  eingesetzt werden kann.

## 7. Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war es, wie bereits in der Einleitung Abschnitt 1 beschrieben, zwei Methoden zu untersuchen, die eine Zeitdiskretisierung in Ordnungen höher als  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$  ermöglichen. Ein Schwerpunkt wurde dabei auf die Analyse der Stabilität und der Dispersionsseigenschaften der Methoden gelegt.

Die Ergebnisse der Untersuchungen in einer Dimension lassen sich in den folgenden Stichpunkten präzise zusammenfassen:

- Bei sukzessiver Vergrößerung des räumlichen Gitterabstands  $\Delta x$  bleiben alle Ordnungen der beiden Methoden länger dispersionslos als die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$  der ursprünglichen Finiten-Differenzen Methode. Eine Ausnahme stellt nur die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  der 1. Methode von M. A. Dablain dar. Die Dispersion wirkt sich hier schon bei kleinen Gitterabständen deutlich auf die Form des Empfängersignals aus.
- Die Methode 2 ist im Vergleich zu Methode 1 bei gleicher Ordnung bis hin zu größeren Gitterabständen  $\Delta x$  dispersionslos. Größere räumliche Gitterabstände verkürzen, genau wie die Erhöhung des zeitlichen Gitterabstand  $\Delta t$ , die Rechenzeit und sind daher erwünscht.
- Die Stabilität der 2. Methode von Yang Liu und Mrinal K. Sen unterscheidet sich in keiner Ordnung von der, der ursprünglichen Methode  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$ . In Zahlen bedeutet das eine Stabilität bis zu einer Courant-Zahl  $r$  von  $r \leq 1$ .
- Im Gegensatz zur 2. Methode, ist die Stabilität der 1. Methode abhängig von der Ordnung des verwendeten Differenzenschemas. Die symmetrische Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  ist bis  $r \leq \sqrt{3} \approx 1,732$  stabil. Dieser Wert übersteigt deutlich die ursprüngliche Courant-Bedingung und ermöglicht so größere Gitterabstände  $\Delta t$  ohne den Verlust der Stabilität. Für die verbleibenden asymmetrischen Ordnungen ergeben sich jedoch kleinere Courant-Bedingungen. Die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^4)$  der 1. Methode ist bis  $r \leq \sqrt{3/4} \approx 0,866$  stabil und die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^{10})$  bis zu einer Courant-Zahl von  $r \leq 1/4\sqrt{24 - 3\sqrt{14}} \approx 0,894$ . Bei kleineren erlaubten Werten für  $r$  muss der zeitliche Gitterabstand  $\Delta t$  kleiner gewählt werden, als bei der ursprünglichen Methode, um die Stabilität zu gewährleisten.

Für eindimensionale Problemstellungen mit konstanter Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ergaben die Berechnungen dieser Arbeit, dass Methode 2 von Yang Liu und Mrinal K. Sen für die Diskretisierung der Zeit in höherer Ordnung besser geeignet ist als die 1. Methode

von M. A. Dablain. Neben den bereits aufgelisteten Punkten dieses Abschnitts gibt es mindestens einen weiteren Vorteil der 2. Methode, der diese Aussage bekräftigt.

Die Berechnung höherer Zeitordnungen erfolgt bei Methode 2, wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, über die Koeffizienten des räumlichen Gitters [YL09]. Die Anzahl der Koeffizienten ist proportional zur Raum- und Zeitordnung und lassen sich beliebig erhöhen. In Methode 1 geht die Zeitdiskretisierung unabhängig von der räumlichen Diskretisierung als Zusatzterm in die entsprechende Differenzgleichung ein [Dab86]. Dieser Term wird in der Publikation von M. A. Dablain nur für die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$  beschrieben. Es ist demnach nicht ohne Zusatzaufwand möglich die Zeitdiskretisierung in höherer Ordnung als  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$  zu berechnen.

Sollte die Anforderung eines Programms jedoch explizit die Verwendung der vierten Zeitordnung ( $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ ) verlangen, so könnte auch die Methode 1 in der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  sehr gute Ergebnisse liefern. Der Grund dieser Behauptung liegt in dem außergewöhnlichen Stabilitätsverhalten dieser Ordnung. In den aufgelisteten Stichpunkten wurde dieses Verhalten bereits angesprochen, jedoch soll hier nochmals betont werden, dass eine Stabilität bis weit über die Courant-Bedingung von  $r \leq 1$  für die Anwendung eines entsprechenden Algorithmus von großem Vorteil sein kann.

In dieser Arbeit wurde schließlich auch noch die Frage diskutiert, in wie weit die Ergebnisse dieser Arbeit auch in zwei und drei Dimensionen Gültigkeit besitzen und wie sich eine ortsabhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit auswirkt. Die vorwiegend qualitative Analyse ergab, dass die Ergebnisse der 1. Methode durch die Entstehung weiterer Ableitungen in höheren Dimensionen nur bedingt übertragbar sind. Die Ergebnisse der 2. Methode geben dahingegen Grund zur Annahme, dass ein Transfer in zwei und drei Dimensionen durchaus möglich ist, da die ausschließliche Betrachtung einer Dimension in der Differenzgleichung des dreidimensionalen Raums mit der Gleichung aus einer Dimension übereinstimmt. Die Einführung einer ortsabhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit ist bei beiden Methoden möglich, jedoch muss dafür bei Methode 1 eine Näherung verwendet werden, dessen Gültigkeit nicht für alle Ausbreitungsgeschwindigkeiten garantiert werden kann.

Werden alle Aspekte dieser Bachelorarbeit zusammengenommen, so zeigen beide Ordnungen der Methode 2 von Yang Liu und Mrinal K. Sen im Hinblick auf Stabilität und Dispersion ein sehr gutes Verhalten. Auch die Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^4, \Delta x^4)$  der 1. Methode von M. A. Dablain ist besonders im Bezug auf die Stabilität sehr interessant. Die restlichen Ordnungen der 1. Methode ergaben in allen Bereichen deutlich schwächere Ergebnisse.

# Literaturverzeichnis

- [Ben08] Benjamin Zammer: *Dispersionsrelationserhaltende Verfahren der Wellengleichung*, 2008. <https://www-m2.ma.tum.de>, (abgerufen am 13.7.2014).
- [Dab86] M. A. Dablain: *The application of high-order differencing to the scalar wave equation*. GEOPHYSICS, 51:54–66, 1986.
- [Fel14] Felix Jäggle, Claus-Dieter Munz: *Numerische Simulation in der Luft- und Raumfahrttechnik*, 2014. <http://www.iag.uni-stuttgart.de/IAG>, (abgerufen am 13.7.2014).
- [Fri14] Friedemann Wenzel: *Theorie seismischer Wellen*, 2014. (Vorlesungsskript zur gleichnamigen Vorlesung SS 2014).
- [GPI14] GPI: *Finite-Difference Seismic Wave Simulation*, 2014. <http://www.gpi.kit.edu/Software.php>, (abgerufen am 13.7.2014).
- [Gue10] Guenter Baerwolff: *Numerik partieller Differentialgleichungen*, 2010. <http://page.math.tu-berlin.de/~baerwolf/fvms06>, (abgerufen am 13.7.2014).
- [JEM10] S. S. Antman J. E. Marsden, L. Sirovich: *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 2010, ISBN 78-1-4419-6411-3.
- [Mar89] Dietrich Marsal: *Finite Differenzen und Elemente*. Springer-Verlag, 1989, ISBN 3-540-50192-4.
- [Mar12] Martin Neumann: *Computational Physics I: Grundlagen*, 2012. <http://www.exp.univie.ac.at/cp1/cp1-6/cp1-6.html>, (abgerufen am 13.7.2014).
- [SS00] Thomas Huckle Stefan Schneider: *Numerik für Informatiker*. Springer-Verlag, 2000, ISBN 3-540-42387-7.
- [Tec14] Technische Universität Berlin: *Finite Differenzen Methode*, 2014. <http://www3.math.tu-berlin.de/ppm/skripte/fdm1.0.pdf>, (Blockkursunterlagen, November 2011).
- [Tho14] Thomas Bohlen: *Mündliche Überlieferung*, 2014.
- [UK08] Holger Jaekel Uwe Kiencke: *Signale und Systeme*. Oldenbourg-Verlag, 2008, ISBN 978-3-486-58734-0.
- [WD00] Arnold Reusken Wolfgang Dahmen: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag, 2000, ISBN 3-540-25544-3.
- [YL09] Mrinal K. Sen Yang Liu: *A new time-space domain high-order finite-difference method for the acoustic wave equation*. Journal of Computational Physics, 228:8779–8806, 2009. [www.elsevier.com/locate/jcp](http://www.elsevier.com/locate/jcp).



# Anhang

## A. Programmcode numerische Wellenausbreitung

```
1 function [pseis ,tseis ,pseiss ,tseiss] = numerische_Ausbreitung...
2     (Courant ,def ,S, vel)
3
4 %----- Definition der Gitter-Parameter -----%
5
6
7 depth=40000;           % Tiefe bzw. Laenge des Modells [m]
8
9 T=22.4;               % Zeit der Wellenfortpflanzung [s]
10
11 fc=10.0;             % Center Frequenz der Ricker-Welle [Hz]
12
13 xsrc=5000;           % Position der Quelle [m]
14 xrec=32500;          % Position von Empfaenger [m]
15
16 dtseis=1;           %Samplingrate des Seismometers in Zeitschritten
17
18 % Berechnung von dh in Abhaengigkeit von S
19 dh=min(vel)/(fc*S);
20
21 % Berechnung von dt durch die Courant-Zahl
22 dt=Courant*dh/max(vel);
23
24 disp(['time step in FD simulation: dt=',num2str(dt)]);
25 disp(['grid spacing in FD simulation: dh=',num2str(dh)]);
26
27 %----- Ende Definition der Gitter-Parameter -----%
28
29 %----- Berechnung der Wellenausbreitung -----%
30
31 t=dt:dt:T;           % Initialisierung des Zeitvektors
32 nt=length(t);       % Laenge des Zeitvektors
33
34 % Berechnung von geeigneten Standorten von Quelle und Empfaenger
35 nxsrc=round(xsrc/dh);
36 nxrec=round(xrec/dh);
37
38 c=zeros(size(t))+vel(1); % Erzeugung eines 1-D Modells
39
40 % Definition der Rickerwelle
41 len=length(t);
42 [normintpt0 ,ricker1]=ricker(t,fc,len);
43
44 % Parameterdefinition zur Vereinfachung der Eingabe der Methoden
45 pc=dt*dt*c.*c./(dh*dh);
46
47 % Initialisierung des Arrays fuer die Partikelbewegung bzw. den Druck
48 nx=int16(depth/dh);
49 p=zeros(nx,nt);
50
51 m=1;
52 kk=1;
53 for n=3:nt-1,
54
55     % Quellfunktion (original)
56     %p(nxsrc,n-1)=p(nxsrc,n-1)+normricker(n-1);
57
```

```

58 % Quellfunktion (modifiziert)
59 p(nsrc,n-1)=normintpt0(n-1);
60
61 switch def
62     % second order wave equation O(dt^2,dx^2)
63     case 'O(dt^2,dx^2)_1'
64         for k=3:nx-2,
65             p(k,n)=2.0*p(k,n-1)-p(k,n-2)+pc(k)*(p(k+1,n-1)...
66                 -2.0*p(k,n-1)+p(k-1,n-1));
67         end
68     % fourth order wave equation O(dt^4,dx^4)
69     case 'O(dt^4,dx^4)_1'
70         for k=4:nx-3,
71             p(k,n)=2.0*p(k,n-1)-p(k,n-2)+pc(k)/12*(16*p(k+1,n-1)...
72                 -30*p(k,n-1)+16*p(k-1,n-1)-p(k-2,n-1)-p(k+2,n-1))...
73                 +pc(k).*pc(k)/144*((-2)*(16*p(k+1,n-1)-30*p(k,n-1)...
74                 +16*p(k-1,n-1)-p(k-2,n-1)-p(k+2,n-1))+(16*p(k+2,n-1)...
75                 -30*p(k+1,n-1)+16*p(k,n-1)-p(k-1,n-1)-p(k+3,n-1))...
76                 +(16*p(k,n-1)-30*p(k-1,n-1)+16*p(k-2,n-1)-p(k-3,n-1)...
77                 -p(k+1,n-1)));
78         end
79     % fourth order wave equation O(dt^2,dx^4)
80     case 'O(dt^2,dx^4)_1'
81         for k=3:nx-2,
82             p(k,n)=2.0*p(k,n-1)-p(k,n-2)+pc(k)/12*(16*p(k+1,n-1)...
83                 -30*p(k,n-1)+16*p(k-1,n-1)-p(k-2,n-1)-p(k+2,n-1));
84         end
85     case 'O(dt^2,dx^4)_2'
86         for k=3:nx-2,
87             p(k,n)=2.0*p(k,n-1)-p(k,n-2)+pc(k)*((4.0-pc(k))...
88                 /3.0*(p(k+1,n-1)+p(k-1,n-1))+(-5.0+pc(k))/2.0*p(k,n-1)...
89                 +(-1+pc(k))/12.0*(p(k+2,n-1)+p(k-2,n-1)));
90         end
91     % tenth order wave equation O(dt^2,dx^10)
92     case 'O(dt^2,dx^{10})_2'
93         for k=6:nx-5,
94             p(k,n)=2.0*p(k,n-1)-p(k,n-2)+pc(k)*((14400.0-6676.0*...
95                 pc(k)+969.0*pc(k)*pc(k)-54.0*pc(k)*pc(k)*pc(k)+pc(k)*...
96                 pc(k)*pc(k)*pc(k))/8640.0*(p(k+1,n-1)+p(k-1,n-1))...
97                 +(-21076.0+7645.0*pc(k)-1023.0*pc(k)*pc(k)+55.0*pc(k)*...
98                 pc(k)*pc(k)-pc(k)*pc(k)*pc(k)*pc(k))/7200.0*p(k,n-1)...
99                 +(-3600.0+4369.0*pc(k)-819.0*pc(k)*pc(k)+51.0*pc(k)*...
100                pc(k)*pc(k)-pc(k)*pc(k)*pc(k)*pc(k))/15120.0*(p(k+2,n-1)...
101                +p(k-2,n-1))+(1600.0-2164.0*pc(k)+609.0*pc(k)*pc(k)...
102                -46.0*pc(k)*pc(k)*pc(k)+pc(k)*pc(k)*pc(k)*pc(k))/...
103                40320.0*(p(k+3,n-1)+p(k-3,n-1))+(-900.0+1261.0*pc(k)...
104                -399.0*pc(k)*pc(k)+39.0*pc(k)*pc(k)*pc(k)-pc(k)*pc(k)*...
105                pc(k)*pc(k))/181440.0*(p(k+4,n-1)+p(k-4,n-1))+576.0*...
106                -820.0*pc(k)+273.0*pc(k)*pc(k)-30.0*pc(k)*pc(k)*pc(k)...
107                +pc(k)*pc(k)*pc(k)*pc(k))/1814400.0*(p(k+5,n-1)...
108                +p(k-5,n-1));
109         end
110     case 'O(dt^4,dx^{10})_1'
111         for k=7:nx-6,
112             p(k,n)=2.0*p(k,n-1)-p(k,n-2)+pc(k)/25200*(-73766*...
113                 p(k,n-1)+42000*p(k+1,n-1)-6000*p(k+2,n-1)+1000*...
114                 p(k+3,n-1)-125*p(k+4,n-1)+8*p(k+5,n-1)+42000*p(k-1,n-1)...
115                 -6000*p(k-2,n-1)+1000*p(k-3,n-1)-125*p(k-4,n-1)...
116                 +8*p(k-5,n-1))+pc(k).*pc(k)/(12*25200)*((-2)*(-73766*...
117                 p(k,n-1)+42000*p(k+1,n-1)-6000*p(k+2,n-1)+1000*...
118                 p(k+3,n-1)-125*p(k+4,n-1)+8*p(k+5,n-1)+42000*p(k-1,n-1)...
119                 -6000*p(k-2,n-1)+1000*p(k-3,n-1)-125*p(k-4,n-1)+8*...
120                 p(k-5,n-1))+(-73766*p(k+1,n-1)+42000*p(k+2,n-1)-6000*...
121                 p(k+3,n-1)+1000*p(k+4,n-1)-125*p(k+5,n-1)+8*p(k+6,n-1)...
122                 +42000*p(k,n-1)-6000*p(k-1,n-1)+1000*p(k-2,n-1)...
123                 -125*p(k-3,n-1)+8*p(k-4,n-1))+(-73766*p(k-1,n-1)+42000*...
124                 p(k,n-1)-6000*p(k+1,n-1)+1000*p(k+2,n-1)-125*p(k+3,n-1)...
125                 +8*p(k+4,n-1)+42000*p(k-2,n-1)-6000*p(k-3,n-1)+1000*...
126                 p(k-4,n-1)-125*p(k-5,n-1)+8*p(k-6,n-1));
127         end
128     otherwise
129         disp('Fehler bei der Eingabe der Ordnung');
130 end
131 % Speicherung der Seismogramme am Empfänger

```

```

132     if (~mod(n, dtseis)),
133         tseis(m)=n*dt;
134         pseis(m)=p(nxrec, n);
135         m=m+1;
136     end
137
138     % Speicherung der Seismogramme an der Quelle
139     if (~mod(n, dtseis)),
140         tseiss(kk)=n*dt;
141         pseiss(kk)=p(nxsrc, n);
142         kk=kk+1;
143     end
144 end

```

## B. Programmcode analytische Wellenausbreitung

```

1 function [normintptx, normintpt0, t] = analytische_Ausbreitung(Courant, S, vel)
2
3 %----- Uebernommene Parameter-Angaben -----%
4 %aus der numerischen Wellenausbreitung
5
6 depth=40000;           % Tiefe bzw. Laenge des Modells [m]
7
8 T=22.4;               % Zeit der Wellenfortpflanzung [s]
9
10 fc=10.0;             % Center Frequenz der Ricker-Welle [Hz]
11
12 xsrc=5000;           % Position der Quelle [m]
13 xrec=32500;          % Position von Empfaenger [m]
14
15 % Berechnung von dh in Abhaengigkeit von S
16 dh=min(vel)/(fc*S);
17
18 % Berechnung von geeigneten Standorten von Quelle und Empfaenger
19 nxsrc=round(xsrc/dh);
20 nxrec=round(xrec/dh);
21
22 % Berechnung von dt durch die Courant-Zahl
23 dt=Courant*dh/max(vel);
24
25 t=dt:dt:T;           % Erzeugung des Zeitvektors
26
27 %----- Ende der Uebernommenen Parametern -----%
28
29 %----- Allgemeine Parameter -----%
30
31 x=(nxrec-nxsrc)*dh-1.5*dh; % Entfernung Quelle Empfaenger,
32 % -1.5*dh um die analytische und
33 % numerische Routine anzugleichen
34
35 n2ft=length(t);      % Laenge des Zeitvektors
36
37 c0=zeros(size(t))+vel(1); % Erzeugung eines 1-D Modells
38
39 fnyq=1/(2*dt);       % Nyquist-Frequenz
40
41 %----- ENDE: Parameter-Angaben -----%
42
43 %----- Berechnung der Wellenfortpflanzung -----%
44
45
46 %Der Frequenzbereich fuer die Berechnung der Antwortfunktion ist
47 % f=[-fnyq:fnyq], dies entspricht den Indizes [1:n2ft] !
48 f=fnyq*(-n2ft/2:n2ft/2-1)/(n2ft/2);
49 w=2*pi*f;
50
51 % w muss ungleich Null sein ! (w(0)=w(n2ft/2+1))
52 w(int64(n2ft/2+1))=w(int64(n2ft/2));
53
54 %Quellsignal Ricker
55 [normintpt0, pt0]=ricker(t, fc, n2ft);
56
57 %Fouriertransformation des Quellsignals (PT0(iw)=FFT(pt0(t))):

```

```

58 normintPT0=fftshift(fft(normintpt0,n2ft));
59
60 % Dispersions term der Uebertragungsfunktion:
61 lwx=exp(-1i*x*w./c0);
62
63
64 % Eigentliche Filterung: Multiplikation des Quellsignalspektrums mit der
65 % Uebertragungsfunktion (im Frequenzbereich):
66 normintPTX=lwx.*normintPT0;
67
68
69 % Inverse Fouriertransformation:
70 % Bei der inversen FFT nur den Realteil verwendet, darum erneute
71 % Normierung:
72 normintptx=real(ifft(fftshift(normintPTX),n2ft));
73 normintptx=normintptx/norm(normintptx);

```

### C. Programmcode Ricker-Welle

```

1 function [normintpt0,pt0] = ricker(t,fc,n2ft)
2
3 % Aus urspruenglichem CODE 'fdakust_second_order_wave_equation'
4 % uebernommen
5 delay=1.0/fc; ts=t-delay; tau=pi*fc*ts;
6 pt0=(1.0-2.0*tau.*tau).*exp(-tau.*tau);
7
8 % integrierte Ricker Welle (mit MATHEMATICA berechnet)
9 intpt0=zeros(1,n2ft);
10 for k=1:n2ft
11     intpt0(k)=(-1+(pi+tau(k))/pi)/(exp(pi*pi*(-1+(pi+tau(k))/pi)^2)*fc);
12 end
13
14 % Normierung der Welle
15 normintpt0=intpt0/norm(intpt0);

```

### D. Programmcode fdakust\_2ndorder\_wave\_equation

```

1 % 1-D acoustic FD modeling
2 % T. Bohlen, 16.04.2005
3 close all;
4 clear all;
5 %-----
6 % define grid parameters
7 depth=3000; % depth of model
8 T=4.0; % propagation time [s]
9
10 p=0.9; % Courant number
11
12 G=20.0; % grid points per (minimum) wavelength
13
14
15 fc=5.0; % center frequency of Ricker wavelet
16 xsrc=5000; % source position in meter
17 xrec=10000; % receiver position in meter
18 dtseis=1; % sampling rate of seismogram in time steps
19 % Velocity model black forest (Germany) (see model_crust.eps)
20 %z=[2.0, 7.0, 13.0, 27.0 100.0]*1000.0; % depth [m]
21 %vel=[5.5, 6.0 5.5 6.6 8.1]*1000.0; % P-wave velocity [m/s]
22 %density=[2200.0 2800.0 2700.0 3000.0 3400.0]; % density
23
24 % homogeneous crust
25 z=[100.0]*1000.0;
26 vel=[5.5]*1000.0;
27 density=[2200.0];
28 %-----
29
30 % Calculation of dh according to G
31 dh=min(vel)/(fc*G);
32
33 % Calculation of dt from Courant number
34 dt=p*dh/max(vel);
35

```

```

36 nx=depth/dh;
37
38 disp(['time step in FD simulation: dt=',num2str(dt)]);
39 disp(['grid spacing in FD simulation: dh=',num2str(dh)]);
40
41
42 % time and spatial vector
43 t=dt:dt:T;
44 x=(1:nx)*dh;
45 nt=length(t);
46
47 nxsrc=round(xsrc/dh);
48 nxrec=round(xrec/dh);
49
50 % Initialize array for pressure and particle velocity
51 p=zeros(nx,nt);
52
53
54 % generate 1-D model
55 l=1;
56 for k=1:nx,
57     c(k)=vel(1);
58     rho(k)=density(1);
59     if (x(k)>=z(1)), l=l+1; end
60 end
61
62 % scale depth from km to m
63 x=x/1000;
64
65 % check stability criterion
66 dtstab=dh/max(c);
67 disp(['stability criterion: dt=',num2str(dt),' < ',num2str(dtstab),' s']);
68 %if (dt>dtstab) disp(['Use dt < ',num2str(dtstab)]); break; end
69
70 % check numerical dispersion
71 % minimum wavelength
72 lambda_min=min(c)/(2*fc);
73 disp([' Minimum wavelength is ',num2str(lambda_min),' m']);
74 disp([' Number of gridpoints per minimum wavelength is ', num2str(lambda_min/dh)
75     ]);
76 if ((lambda_min/dh)<=12) disp(['Use smaller dh !']); end
77
78 % define ricker wavelet
79 ts=1.0/fc; tau=pi*(t-ts)/(1.5*ts);
80 ricker=(1.0-4.0*tau.*tau).*exp(-2.0*tau.*tau);
81
82
83
84 % Lamé-Parameter Lambda
85 l=rho.*c.*c;
86
87 % average density
88 for k=1:nx-1,
89     rhom(k)=0.5*(rho(k+1)+rho(k));
90 end
91
92 % Loop over time steps
93 dtdh=dt/dh;
94 dh24=1.0/(24.0*dh);
95 dh1=1.0/dh;
96 pc=dt*dt*c.*c./(dh*dh);
97
98 m=1;
99 figure
100 for n=3:nt-1,
101
102     % source function
103     p(nxsrc,n-1)=p(nxsrc,n-1)+ricker(n-1);
104
105     for k=3:nx-2,
106         % second order wave equation
107         p(k,n)=2.0*p(k,n-1)-p(k,n-2)+(pc(k)*(p(k+1,n-1)-2.0*p(k,n-1)+p(k-1,n-1)));
108     end

```

```

109
110
111     % plot snapshot
112     if (~mod(n,10))
113         plot(c/1000,x,rho/1000,x,2*p(:,n),x);
114         disp([' calculating time step ', int2str(n)]);
115         axis ij
116         legend('P-velociy [km/s]', 'density [kg/m^3]', 'pressure');
117         ylabel('Depth [km]');
118         title(['T=', num2str(n*dt), ' s']);
119         pause(0.1);
120
121     end
122     % save seismogram
123     if (~mod(n, dtseis)),
124         tseis(m)=n*dt;
125         pseis(m)=p(nxrec,n);
126         m=m+1;
127     end
128 end
129
130 % plot seismogram
131 figure
132 plot(tseis,pseis);
133 title(['seismogram']);
134 xlabel(' Time [s]');
135 ylabel(' Amplitude');

```

## E. Programmcode ana\_akust

```

1 % Berechnung der analytischen Loesung fuer ein homogenes
2 % akustisches eindimensionales Medium
3 % (im Fourier-Bereich):
4
5 %----- Parameter-Angaben -----
6 close all; clear all
7
8 % Allgemeine Parameter
9 c0=500; %Phasengeschwindigkeit des Mediums fuer w-->0
10 x=400.0; % Offset, an dem das sekundaere Signal
11 % aufgezeichnet wird: p(t,x).
12
13 dt=6.0e-3;
14 fc=10.0;
15
16 % Grafische Darstellung der Zeitfunktion p(t,x) (nach der Filterung)
17 % im Zeitbereichbereich t=[t1:t2]:
18 t1=0.6;t2=1.2;
19
20 % Grafische Darstellung der Spektren im Frequenzbereich f=[f1:f2]
21 %Komplettes Spektrum:
22 %f1=-1/(2*dt); f2=1/(2*dt)-1;
23 % sonst:
24 f1=0;f2=150;
25
26 n2ft=4096;
27
28 %----- ENDE: Parameter-Angaben -----
29
30 t=(1:n2ft)*dt; % Zeitbereich
31 fnyq=1/(2*dt); %Nyquist-Frequenz
32
33 %Der Frequenzbereich fuer die Berechnung der Antwortfunktion ist
34 % f=[-fnyq:fnyq], dies entspricht den Indizes [1:n2ft] !
35 f=fnyq*(-n2ft/2:n2ft/2-1)/(n2ft/2); % f und w nur so definieren !!!!!
36 w=2*pi*f;
37 % w muss ungleich Null sein ! (w(0)=w(n2ft/2+1))
38 w(n2ft/2+1)=w(n2ft/2);
39
40 %Quellsignal Ricker
41 delay=1.0/fc; ts=t-delay; tau=pi*fc*ts;
42 pt0=(1.0-2.0*tau.*tau).*exp(-tau.*tau);
43

```

```
44 % evtl. Quellsignal plotten:
45 %plot(t,pt0);
46 %break
47
48 %Fouriertransformation des Quellsignals (PT0(iw)=FFT(pto(t))):
49 PT0=fftshift(fft(pt0,n2ft));
50 %Amplitudenspektrum:
51 %PT0amp=abs(PT0);
52 %Phasenspektrum:
53 %PT0phase=unwrap(angle(PT0));
54 %PT0phase=PT0phase-PT0phase(n1);
55
56
57 % Dispersionsterm der Uebertragungsfunktion:
58 Iwx=exp(-i*x*w./c0);
59
60
61 % Eigentliche Filterung: Multiplikation des Quellsignalspektrums mit der
    Uebertragungsfunktion (im Frequenzbereich):
62 PTX=Iwx.*PT0;
63
64
65 % Inverse Fouriertransformation und Plot:
66 % Bei der inversen FFT nur den Realteil nehmen:
67 ptx=real(iffshift(fftshift(PTX),n2ft));
68
69
70 % Plot des gefilterten (absorbierten) Signals
71 figure(1)
72 plot(t,ptx);
73 axis([t1,t2,-0.8,1.1]);
74 xlabel('T [s]');ylabel('amplitude');
```