

# Genauigkeit der in-situ Kalibrierung des supraleitenden Gravimeters SG-056 am BFO

Diplomarbeit  
von

**Tobias Geib**

am Geophysikalischen Institut  
der Fakultät Physik

Referent: Prof. Dr. T. Bohlen  
Korreferent: PD Dr. J. Ritter  
Betreuer: Dr. T. Forbriger

Abgabedatum: 18. November 2010



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Schwere . . . . .	3
2.2	Gezeiten . . . . .	5
2.3	Supraleitung . . . . .	7
2.4	Messgeräte . . . . .	8
2.4.1	Das supraleitende Gravimeter SG-056 am BFO . . . . .	8
2.4.2	Das Absolutgravimeter FG5 . . . . .	14
2.5	Kalibrierung und Kalibriermethoden . . . . .	20
2.5.1	Labormethoden . . . . .	20
2.5.2	In-situ Methode . . . . .	21
2.6	Mathematische und statistische Methoden . . . . .	22
2.6.1	Regression und die Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	22
2.6.2	Fehlerfortpflanzung . . . . .	23
2.6.3	Bootstrap-Verfahren . . . . .	25
2.6.4	Jackknife-Verfahren . . . . .	26
2.6.5	Monte-Carlo-Verfahren . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Kalibrierung</b>	<b>29</b>
3.1	Daten . . . . .	29
3.2	Datenbearbeitung . . . . .	30
3.2.1	Rekonstruktion und Vorzeichenbetrachtung . . . . .	30
3.2.2	Verwerfen von Messdaten . . . . .	35
3.2.3	Erstellen der Datenvektoren . . . . .	38
3.2.4	Filterwirkungen - Zeitversatz . . . . .	39
3.3	Bestimmung des Regressionskoeffizienten . . . . .	44
3.3.1	Wahl des Modell- und Datenvektors . . . . .	44
3.3.2	Berechnung . . . . .	46
3.3.3	Bestimmte Regressionskoeffizienten . . . . .	47
3.4	Abschätzen der Genauigkeit der Kalibrierung . . . . .	48
3.4.1	Genauigkeitsbestimmung mit der Gauß'sche Fehlerfortpflanzung . . . . .	48
3.4.2	Statistische Tests . . . . .	49

---

<b>4 Diskussion</b>	<b>51</b>
4.1 Ergebnisse für verschiedene Datensegmente . . . . .	51
4.1.1 Vergleich der Ergebnisse verschiedener Datensegmente . . . . .	52
4.2 Fehlerabschätzung des Absolutgravimeters FG5 . . . . .	55
4.3 Fehlerabschätzung der Fallversuche . . . . .	58
4.4 Betrachtung unterschiedlich langer Zeitfenster . . . . .	60
4.5 Betrachtung unterschiedlich langer Intervalle zwischen den Einzelmessungen . . . . .	69
4.6 Fazit der Diskussion . . . . .	74
<b>5 Zusammenfassung</b>	<b>77</b>
<b>6 Schlusswort</b>	<b>81</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>83</b>
<b>Anhang</b>	<b>89</b>
A Glossar . . . . .	89
B Datensätze . . . . .	91
C Programm-CD-ROM . . . . .	92

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln verfasst habe.

Karlsruhe, den 18. November 2010



# 1. Einleitung

Das Black Forest Observatory (BFO) in der Nähe von Schiltach ist das geowissenschaftliche Gemeinschaftsobservatorium des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) und der Universität Stuttgart. Durch seine Lage abseits von antropogenen Störquellen und der Unterbringung der Messgeräte in einem stillgelegten Bergwerk mit ca. 170 m Überdeckung bieten die Messungen am BFO besonders gute Signal-Rausch-Verhältnisse. Damit zählt das BFO zu den Stationen mit der weltweit besten Signalqualität.

Die Forschung am BFO profitiert von dieser guten Datenqualität. Zu den Forschungszielen zählen die Verbesserungen geophysikalischer Beobachtungsverfahren und Instrumententests, die Erforschung der freien Eigenschwingungen der Erde zur Bestimmung der Materialeigenschaften im Erdinneren und Untersuchungen der Schwerebeschleunigung. Seit September 2009 steht ein neues Messinstrument, das supraleitende Gravimeter SG-056 zur Verfügung. Das supraleitende Gravimeter bietet durch seine Überlegenheit bei langen Perioden gegenüber den am BFO bereits eingesetzten Seismometern und Gravimetern die Möglichkeit für genaueren Untersuchungen langperiodischer Eigenschwingungen der Erde um Informationen über die Dichtestruktur der Erde zu erhalten. Für Frequenzen über 1 mHz sind allerdings die Seismometer STS-1 und STS-2, sowie das Gravimeter ET-19 dem supraleitenden Gravimeter durch geringeres Eigenrauschen überlegen. Der Einsatz des supraleitenden Gravimeters als Seismometer ist daher nicht sinnvoll.

Die Daten des supraleitenden Gravimeter sollen langzeitstabil sein, also eine geringe Drift aufweisen. Vor allem die Gezeitenforschung profitiert in dieser Hinsicht von den Messdaten des supraleitenden Gravimeters. Da mit diesen die Gezeitenamplitude untersucht werden kann, die im Gegensatz zu den Gezeitenperioden noch nicht so gut bekannt sind. Die Möglichkeit das Schweresignal der 14-monatige periodischen Bewegung der Erdrotationsachse (Chandler wobble) genauer als bisher zu messen, erlaubt Aussagen über die Viskosität des Erdmantels. Man erhofft sich des weiteren Aussagen über die Struktur und Abplattung des Erdkerns, sowie die bessere Bestimmung der Dichteverhältnisse von innerem und äußerem Kern treffen zu können.

Für alle neuen Untersuchungen ist es wichtig die Genauigkeit der zu Grunde liegenden Messwerte zu kennen. Diese muss quantifizierbar sein um eine Beurteilung der Aussage-

kraft von Beobachtungen zu ermöglichen. Das Ziel dieser Arbeit soll eine Aussage über die Genauigkeit der in-situ Kalibrierung des supraleitenden Gravimeters SG-056 sein. Der Vorteil der in-situ Kalibrierung liegt darin, dass für diese nur die Messdaten des supraleitenden Gravimeters benötigt werden. Die Messung des supraleitenden Gravimeter wird davon nicht gestört.

Die Kalibrierung ist nötig, um die in Volt gemessenen Signale des supraleitenden Gravimeters als Schwereänderung in  $\mu gal$  deuten zu können. Damit dies gelingt wird eine Vergleichsmessung benötigt. Diese wurde mit einem Absolutgravimeter am BFO Ende Januar - Anfang Februar 2010 durchgeführt.

In dieser Arbeit wird mittels einer Regression mit der Methode der kleinsten Quadrate eine Anpassung des mit dem supraleitenden Gravimeter gewonnenen Datensatzes an den Vergleichsdatensatz der Absolutschweremessung durchgeführt. Der so gewonnene Regressionskoeffizient stellt den Kalibrierfaktor dar.

Die Genauigkeit dieses Kalibrierfaktors wird durch die Berechnung der Fehlerfortpflanzung und verschiedener statistischer Tests bestimmt. Diesen Tests liegen verschiedene primäre Fehlermaße zu Grunde, die sich entweder auf die Standardabweichung der Messung des Absolutgravimeters oder auf die innere Genauigkeit des Datensatzes beziehen.

Die Diskussion der Ergebnisse umfasst neben der Abschätzung der Genauigkeit und der Überprüfung einiger statistischer Erwartungen auch die Betrachtung der aus meiner Sicht optimalen Voraussetzungen für eine Kalibrierung, um mit dieser eine besonders genaue Kalibrierung zu erhalten. Dies beinhaltet neben der Wahl des Beobachtungszeitraums, auch dessen Dauer und das verwendete Messintervall der Absolutmessung.

## 2. Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der in der Arbeit benutzten Methoden erläutert. Dazu werden die physikalischen Vorgänge und Beobachtungen, die benutzten Messgeräte, sowie die mathematischen und statistischen Methoden erklärt.

### 2.1 Schwere

Die Beschreibung der Schwere stützt sich vorwiegend auf Torge (2002). Die **Gravitation** wird durch das von Newton formulierte Gravitationsgesetz beschrieben. Die Gravitationskraft  $F$ , die zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$  aufeinander ausüben, ist gegeben durch

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

mit der Gravitationskonstante  $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ .

Das zweite Newtonsche Axiom gibt die Beschleunigungswirkung einer Kraft  $F$  auf einen Körper mit der Masse  $m$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.2)$$

an.

Stellt man sich die Erde aus unendlich vielen Volumenelementen  $dv$  mit der Dichte  $\rho$  zusammengesetzt vor, so ergibt sich für die Gravitationsbeschleunigung

$$\vec{b}(\vec{r}) = -G \iiint_{\text{Erde}} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dv \quad (2.3)$$

am Ort  $\vec{r}$ . Die Gravitationskraft und damit auch die durch die Kraft hervorgerufene Beschleunigung lässt sich beschreiben als konservative Kraft durch ein Potentialfeld

$$\vec{b} = \text{grad}\Phi. \quad (2.4)$$

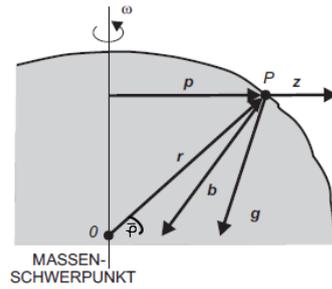


Abbildung 2.1: Erdfestes Bezugssystem mit der geozentrischen Breite  $\bar{\varphi}$ , der Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{z}$ , dem Abstand zum Massenschwerpunkt  $r$  und der Schwere  $\vec{g}$ . Abbildung von Torge (2002)

Für das Gravitationspotential der Erde gilt dann

$$\Phi(\vec{r}) = G \iiint_{\text{Erde}} \frac{\rho(\vec{r}')}{r} dv \quad (2.5)$$

mit  $\lim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \Phi = 0$ . Das so bestimmte Potential gibt die nötige Arbeit an, um eine Masseneinheit von einem Ort  $\vec{r}$  aus ins Unendliche zu befördern.

Die Erdrotation führt in einem erdfesten Bezugssystem zum Auftreten einer **Zentrifugalkraft**. Der Betrag der Zentrifugalbeschleunigung

$$z = |\vec{z}| = |(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}| = \omega^2 r \cos(\bar{\varphi}) \quad (2.6)$$

ist abhängig vom Abstand zur Drehachse  $p = r \cos \bar{\varphi}$  und der Rotationsrate der Erde. Die Größen sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

Dabei wird eine Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$  und eine feste Drehachse angenommen. Mit der Potentialschreibweise

$$z = \text{grad}Z \quad (2.7)$$

gilt für das Zentrifugalpotential

$$Z = Z(p) = \frac{\omega^2}{2} p^2. \quad (2.8)$$

Die **Schwerebeschleunigung** (oder Schwere)

$$\vec{g} = \vec{b} + \vec{z} \quad (2.9)$$

ist die Resultierende aus der Einwirkung der Gravitation  $\vec{b}$  und der Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{z}$ . Damit erhält man die wirkende Schwerkraft

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \quad (2.10)$$

auf die Masse  $m$ . In der Potentialschreibweise gilt

$$\vec{g} = \text{grad}W. \quad (2.11)$$

mit dem Schwerepotential  $W$

$$W = W(\vec{r}) = \Phi + Z = G \iiint_{\text{Erde}} \frac{\rho}{r} dv + \frac{\omega^2}{2} p(\vec{r})^2. \quad (2.12)$$

Die Schwere ist breitenabhängig. Dafür ist die Zentrifugalbeschleunigung verantwortlich, die neben ihrer primären Wirkung auch die Abplattung der Erde verursacht. Dabei ist vor allem die Wirkung der Zentrifugalbeschleunigung je nach Position bezüglich der Drehachse unterschiedlich. Da die Zentrifugalbeschleunigung in die entgegengesetzte Richtung der Gravitation wirkt ist die dadurch verursachte Abschwächung der Gravitationswirkung entscheidend für die Schwere an einem Ort. An den Polen ist der Abstand zum dichteren Erdinneren ein wenig geringer und die Zentrifugalbeschleunigung sehr gering bzw. direkt auf der Drehachse nach Gleichung (2.6) sogar Null. Daher ist die Schwere hier mit  $9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  größer als am Äquator mit  $9,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Am Äquator ist die Zentrifugalbeschleunigung maximal. In unseren Breiten von ca.

$48^\circ$  N ist der Einfluss der Zentrifugalbeschleunigung bereits deutlich ausgeprägt und führt zu einer Schwerebeschleunigung von  $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

## 2.2 Gezeiten

Die **Gezeitenbeschleunigung** setzt sich aus den Wirkungen der Gravitation von Sonne und Mond und den übrigen Planeten zusammen, wobei die Gravitationswirkung der letzteren auf der Erde gering ist. Dabei ist die Bahnbewegung der Erde um das Massenzentrum, auch Baryzentrum genannt, des jeweiligen Zwei-Körper-Systems entscheidend. Im Fall des Erde-Mond-Systems liegt das Baryzentrum im Inneren der Erde bei etwa 0,75 % des Erdradius  $r_E$ . Nutzt man ein Koordinatensystem, das sich mit der Erde mitbewegt und dessen Ursprung im Baryzentrum liegt, wobei die Erdachse nicht rotiert, so bewegen sich alle Punkte des Erdkörpers, außer dem Baryzentrum, auf einer gleichförmigen Kreisbahn und erfahren so die selben Bahnbeschleunigungen. Im Erdschwerpunkt egalieren sich die Bahnbeschleunigung und die Gravitationswirkung des betrachteten Himmelskörpers.

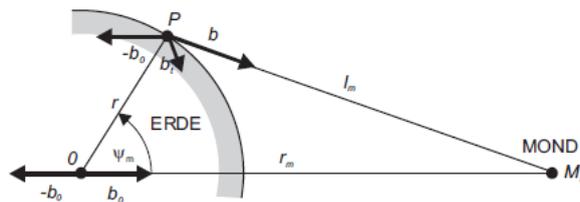


Abbildung 2.2: Durch den Mond verursachte Gravitation. Die Bahnbeschleunigung  $\vec{b}_0$  und die Gravitation des Mondes  $\vec{b}$  liegen der Berechnung der Gezeitenbeschleunigung  $\vec{b}_t$  zugrunde. Abbildung von Torge (2002)

Die Gezeitenbeschleunigung ist für die übrigen Punkte als Differenz aus der Gravitation  $\vec{b}$

des Himmelskörpers und der Zentrifugalbeschleunigung  $\vec{b}_0$

$$\vec{b}_t = \vec{b} - \vec{b}_0 \quad (2.13)$$

wie in Abbildung 2.2 definiert. Nach Gleichung (2.1) gilt mit Gleichung (2.13) für die Einwirkung des Mondes

$$\vec{b}_t = \frac{GM_m}{r_m^2} \frac{\vec{r}_m}{r_m} - \frac{GM_m}{r_m^{*2}} \frac{\vec{r}_m^*}{r_m^*} \quad (2.14)$$

mit dem Abstand des Schwerpunktes des Mondes zum Erdschwerpunkt  $\vec{r}_m^*$ , dem Abstand zum Punkt auf der Erdoberfläche  $\vec{r}_m$  und der Mondmasse  $M_m$ . Für einen Punkt auf der Erdoberfläche, der auf der Verbindungslinie zwischen Erdschwerpunkt und dem als Punktmasse angenommenen Mond liegt, gilt nach Gleichung (2.14) in skalarer Schreibweise

$$b_t = \frac{GM_m}{(r_m - r_E)^2} - \frac{GM_m}{r_m^{*2}}. \quad (2.15)$$

Für einen gegenüberliegenden Punkt auf der Erdoberfläche, also auf der dem Mond abgewandten Seite, gilt entsprechend

$$b_t = \frac{GM_m}{(r_m + r_E)^2} - \frac{GM_m}{r_m^{*2}}. \quad (2.16)$$

Die Gezeitenbeschleunigung ist stark vom Abstand der Objekte abhängig. Eine Vergrößerung des Abstandes geht mit  $\frac{1}{r^2}$  in die Berechnung der Beschleunigung ein.

Der Betrag der Gezeitenwirkung ist also auf der dem Mond zu- und abgewandten Seite gleich. Es gibt damit zwei Gezeitenberge auf den entgegengesetzten Seiten der Erde.

Da die Erde gegenüber der Ekliptik um  $23,4^\circ$  gekippt ist, durchläuft ein Punkt auf der Erdoberfläche an einem Tag mit einer Umrundung zwei Gezeitenberge unterschiedlicher Größe. Nach einem halben Tag befindet sich ein Punkt nicht mehr im Bereich maximaler Gezeitenwirkung, sondern erfährt nur eine geringere Beschleunigung. Dies ist auf der Abbildung 2.3 dargestellt.

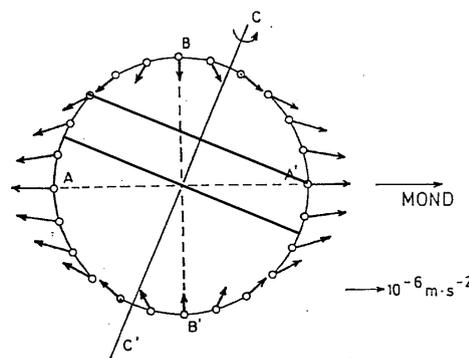


Abbildung 2.3: Gezeitenbeschleunigung an der Erdoberfläche, verursacht durch den Mond (Potentialentwicklung zweiten Grades). Die Drehachse der Erde ist um  $23,4^\circ$  gekippt. Der Punkt A' durchläuft dadurch innerhalb eines Tages den Weg, den die obere schwarze Linie anzeigt. Dadurch entstehen die halb- und gantztägigen Gezeiten. Abbildung nach Westerhaus (2007)

Die durchgezogene Linie zeigt die Bewegung des Punktes A' durch die Erdrotation im Laufe eines Tages an. Auf diese Weise entstehen halb- und ganztägige Variationen, die eine Relativbewegung der Erdoberfläche gegenüber des Erdmittelpunktes um, in unseren Breiten, bis zu 30 cm hervorrufen. Die Veränderungen der Gezeitenamplituden hängen mit der Stellung von Mond und Sonne zusammen. Die Doppelamplitude der gemessenen Schwere bezeichne ich im folgenden als Gezeitenhub. Der Mond umrundet die Erde in 27,3 Tagen, diese umrundet die Sonne in 365,3 Tagen. Je nach Konstellation verändert sich das Zusammenwirken der Gezeitenwirkung der beiden Himmelskörper. Dabei ist die Gezeitenwirkung der Sonne rund halb so groß wie die Wirkung des Mondes und liegt in der Größenordnung von  $0,5 \cdot 10^{-7} g$  mit der mittleren Schwere des Ortes von  $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ .

## 2.3 Supraleitung

Supraleitende Materialien zeichnen sich beim Übergang in den supraleitenden Zustand durch drei beobachtbare Eigenschaften aus. Dieser Abschnitt basiert weitestgehend auf der Beschreibung in Meschede (2006).

- Verschwinden des Widerstandes
- Verhalten als idealer Diamagnet
- Aufzeigen einer Energielücke bei Messung der spezifischen Wärme

Das Verschwinden des Widerstandes wurde als erstes Phänomen der Supraleitung bereits Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts entdeckt. Dabei konnte beobachtet werden, dass der Strom in einem Material, das unter seine spezifische kritische Temperatur gekühlt wird, den Strom widerstandsfrei leitet.

In dem Material kann durch

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{j} \quad (2.17)$$

mit der Stromdichte  $\vec{j}$  und dem Widerstand  $\rho = 0$  kein elektrisches Feld existieren.

Supraleitende Materialien verhalten sich unterhalb der kritischen Temperatur oder Sprungtemperatur  $T_C$  wie ideale Diamagneten mit der magnetischen Suszeptibilität  $\chi = -1$ . Im Moment des Übergangs wird das Magnetfeld aus dem Leiter verdrängt. Auf der Oberfläche bilden sich Ströme, die dem äußeren Magnetfeld entgegenwirken. Dies bezeichnet man als den Meißner-Ochsenfeld-Effekt. Durch die Verdrängung des Magnetfeldes wird das Material zum widerstandsfreien Leiter. Damit der beschriebene Effekt eintritt, darf das Magnetfeld nicht zu groß sein. Das kritische Magnetfeld  $B_C$  liegt dabei im Bereich von zehntel Tesla. Bei dem bis hierher beschriebenen Materialverhalten handelt es sich um Supraleiter erster Art. Supraleiter zweiter Art besitzen zwei kritische Magnetfelder bei denen sich die Materialeigenschaften ändern. Unterhalb der unteren kritischen Temperatur  $T_u$  und dem unteren kritischen B-Feld  $B_{C1}$  verhält sich das Material wie ein Supraleiter erster Art und befindet sich in der so genannten Meißner-Phase. Zwischen den beiden kritischen Magnetfeldern  $B_{C1}$  und  $B_{C2}$  befindet sich der Supraleiter in der so genannten Shubnikov-Phase. In diesem B-Feldbereich bilden sich magnetische Flussschläuche aus, in deren Inneren das Material normalleitend ist. Diese Flussschläuche sind regelmäßig angeordnet. Diese Supraleiter zweiter Art können bei bis zu 100 mal stärkeren Magnetfeldern Flussschläuche bilden.

Das Übergangsmetall Niob, wie es im supraleitenden Gravimeter verwendet wird, ist ein Supraleiter zweiter Art mit einer unteren kritischen Temperatur von 9,2 K.

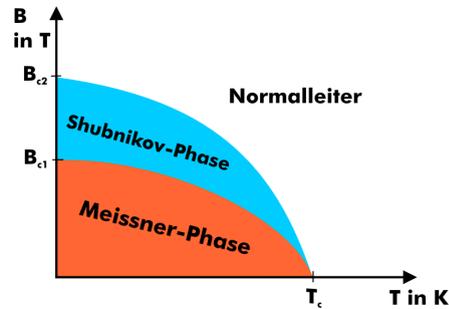


Abbildung 2.4: Phasendiagramm eines Supraleiters 2. Art. Liegt die Temperatur unterhalb der kritischen Temperatur  $T_C$  und das Magnetfeld unterhalb des kritischen Feldes  $B_{c1}$ , so befindet sich das Material in der Meißner-Phase und verhält sich wie ein Supraleiter 1. Art. Bei einem höheren B-Feld  $B_{c1} < B < B_{c2}$  bilden sich Flussschläuche aus, das Material befindet sich in der Shubnikov-Phase. Oberhalb des oberen kritischen B-Feldes ist das Material normalleitend.

Die theoretische Grundlage der Supraleitung wurde von J. Bardeen, L.N. Cooper und J.R. Schrieffer in ihrer BCS-Theorie beschrieben. Die BCS-Theorie beschreibt u.a. so genannte Cooper-Paare. Cooper-Paare bilden sich in Materialien im supraleitenden Zustand. Sie bestehen aus zwei Elektronen, die über Gitterschwingungen (so genannten Phononen) verbunden sind. Im supraleitenden Zustand haben die Elektronenbewegungen einen größeren Einfluss auf die Gitterstruktur als umgekehrt. Ein Elektron zieht beim Durchlaufen der Gitterstruktur die Gitteratome auf Grund der unterschiedlichen Ladungen an. Diese Bewegung zieht sich als Gitterschwingung durch das Material. Hinter dem auslösenden Elektron kann ein weiteres Elektron seine Energie absenken und wird so durch die Gitterschwingung an das erste gekoppelt. Die beiden Elektronen bilden das Cooper-Paar.

Die nachgewiesene Energielücke bei der Messung der spezifischen Wärme erklärt sich als Energie, die nötig ist, um ein Cooper-Paar zu trennen.

## 2.4 Messgeräte

Für diese Arbeit werden Daten zweier Messgeräte miteinander verglichen.

Das supraleitende Gravimeter SG-056 und das Freifallgravimeter FG5 werden in den folgenden beiden Unterkapiteln vorgestellt.

### 2.4.1 Das supraleitende Gravimeter SG-056 am BFO

Das supraleitende Gravimeter SG-056 (SG) der Firma GWR Instruments aus San Diego ist seit September 2009 im Stollen des BFO in Betrieb. Im folgenden Abschnitt wird der Aufbau und die Funktionsweise eines supraleitenden Gravimeters erklärt, sowie auf die Besonderheit dieses speziellen Geräts eingegangen.

Die Grundlagen des SG wurden von Prothero (1967) in seiner Dissertation und in einer Veröffentlichung von Prothero und Goodkind (1968) erstmals dargestellt. Das Messprinzip

ist seit über 40 Jahren gleich geblieben, allerdings gab es viele Detailverbesserungen, die es ermöglichen, heute deutlich genauere Messergebnisse zu erhalten.



Abbildung 2.5: Foto des SG-056 am BFO während des Aufbaus.

#### 2.4.1.1 Messprinzip des SG

Schwereänderungen werden durch ihre Wirkung auf eine Testmasse gemessen. Dazu werden als verbreitetste Geräte Federgravimeter eingesetzt. Bei diesen wird die Testmasse durch eine Federaufhängung gestützt. Die Empfindlichkeit eines solchen Messgerätes, wie auch eines Seismometers, für kleine Frequenzen ist proportional zum Quadrat der Eigenperiode des Sensors (Forbriger, 2007). Eine möglichst große Eigenperiode erhält man bei Federgravimetern durch die Veränderung des geometrischen Aufbaus, indem man versucht, das stabile Gleichgewicht zwischen rücktreibender Federkraft und der Kraft, die durch die Schwere auf die Masse ausgeübt wird, zu einem indifferenten Gleichgewicht zu verschieben. Diese Vorgehensweise nennt man Astasierung. LaCoste nutzt für Gravimeter eine spezielle Geometrie und eine Nulllängenfeder.

Darüber hinaus sind diese Gravimeter gegen Umwelteinflüsse bestmöglich abgeschirmt. So sorgt beispielsweise ein Thermostat für gleichbleibende Temperaturen. Das ganze System ist zudem druckdicht gebaut (Forbriger et al., 2010).

Trotz dieser baulichen Maßnahmen handelt es sich um mechanische Bauteile, die durch ständige Beanspruchung und speziell unsachgemäße Handhabung Fehler produzieren können. Besonders unerwünscht bei Langzeitbeobachtungen sind stetige Veränderungen, die zur so genannten Drift des Geräts führen. Eine Drift kann durch Alterungsprozesse in der Tragfeder entstehen. Sie stellt ein Abweichen vom ideal-elastischen Verhalten dar.

Im Gegensatz zu den klassischen Federgravimetern nutzen SG zur Messung der relati-

ven Schwereänderung keine mechanischen Bauteile wie Tragfedern zur Unterstützung der Testmasse. Die Aufgaben der Tragfeder werden bei einem SG durch ein Magnetfeld übernommen. In diesem Magnetfeld befindet sich eine supraleitende Kugel. Diese Kugel wird durch magnetische Levitation in der Schwebe gehalten. Eine Änderung der Schwere führt zu einer Änderung der Schwerkraft auf die Kugel, die zu einer Beschleunigung führt. Die dadurch hervorgerufene Änderung der Lage wird gemessen und eine Rückkopplungsspule (Feedback) sorgt dafür, dass die Kugel in Ruhe bleibt. Der dazu nötige Rückkopplungsstrom durch die Spule stellt die eigentliche Messgröße dar. Dieses System macht das SG unabhängiger von mechanischen Störeinflüssen. Änderungen des magnetischen Tragfeldes haben aber einen ähnlichen Effekt wie nicht ideal-elastischem Verhalten einer Tragfeder. Daher sind weitere technische Vorkehrungen nötig um eine nahezu driftfreie Messung über einen langen Zeitraum zu gewährleisten. Dazu zählen die eingebauten guard coils, die bei einer Veränderung der Spulendurchmesser durch die magnetische Kraft den magnetischen Fluss und damit das Tragfeld konstant halten. Laut Crossley et al. (2004) wurden für die in Europa registrierenden SG Driftraten von 1,6 bis  $4,9 \frac{\mu\text{gal}}{\text{a}}$  beobachtet.

#### 2.4.1.2 Funktionsweise

Das folgende Kapitel soll die Funktionsweise eines SG erläutern, wobei sich die Beschreibung an Hinderer et al. (2007) orientiert.

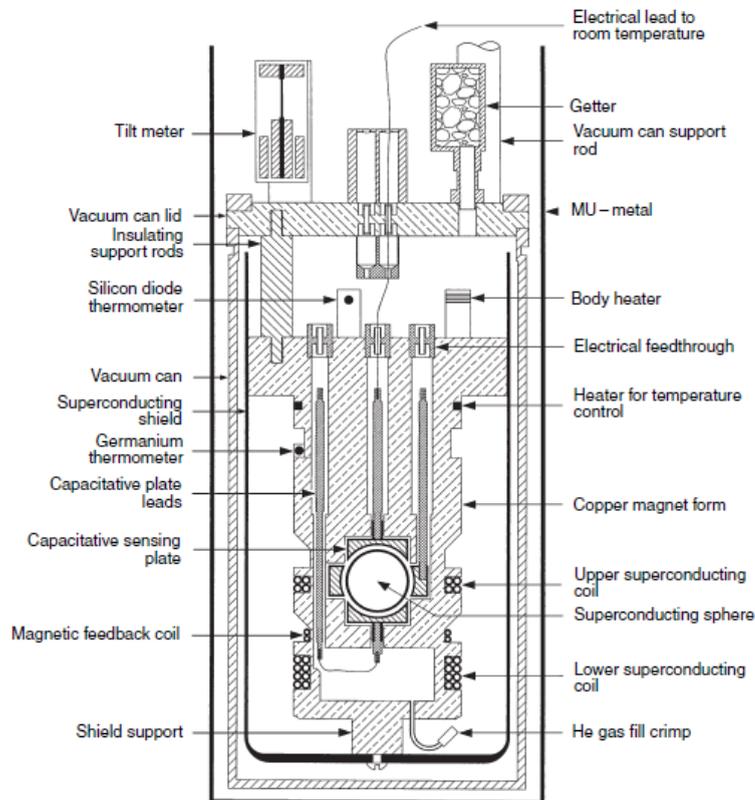


Abbildung 2.6: Schema des Aufbaus eines SG. Abbildung nach Hinderer et al. (2007)

Eine Niobhohlkugel bildet die Testmasse. Niob ist ein Übergangsmetall, das eine relativ hohe Sprungtemperatur von 9,25 K besitzt und sich daher als Material für supraleitende Bauteile gut eignet. Heute werden vor allem SG mit zwei Niobkugeln als Sensoren eingesetzt. Bei der Aufzeichnung mit zwei Sensoren ist es möglich, Versätze auf einzelnen Sensoren zu erkennen und zu entfernen. Die Besonderheit des SG-056 am BFO besteht darin, dass es sich nicht um zwei identische Sensoren handelt. Die Sensorkugeln unterscheiden sich in ihrer Masse und damit vermutlich auch im Aufbau der magnetischen Tragspulen. Der Massenunterschied ermöglicht eine Untersuchung der Auswirkungen des thermischen Rauschens. Die kryogenen Temperaturen führen zu einer Verringerung des thermischen Rauschens um einen Faktor  $\frac{283\text{ K}}{5\text{ K}} = 57$  geringer. Allerdings ist auch die Testmasse um einen Faktor  $\frac{300\text{ g}}{5\text{ g}} = 60$  leichter als bei vergleichbaren Gravimetern und damit empfindlicher für thermisches Rauschen. Mit der Konfiguration des SG-056 soll untersucht werden, ob das Rauschen rein thermisch bedingt ist. Dabei ist der grundlegende Aufbau der Sensoren gleich.

Die Testmasse hat einen Durchmesser von 2,54 cm. Die Massen liegen für Sensor G1 bei 17,7 g und bei 4,34 g für Sensor G2. Die Kugel befindet sich in einem separaten, heliumgefüllten Hohlraum zwischen den Kalotten des Wegaufnehmers. Die Temperatur während des Messbetriebs liegt bei 4,5 K. Die Kugel besitzt eine kleine Bohrung, durch die das Helium ins Kugellinnere eindringen, um zu verhindern, dass die Sensorkugel beim Evakuieren explodiert, bzw. beim Abkühlen implodiert. Die Hohlkugel ist damit nicht exakt symmetrisch, so dass sie auf Grund des Unterschieds zwischen Massenschwerpunkt der Kugel und dem Schwerpunkt der magnetischen Auftriebskraft in der Schwebelage eine klar bevorzugte Orientierungsrichtung besitzt. Das Ausgangssignal, das von den beiden Kugeln erzeugt wird, hängt dabei nicht nur von den Kugelmassen, sondern auch vom Aufbau der Rückkopplungsspulen und der genutzten Widerstände ab.

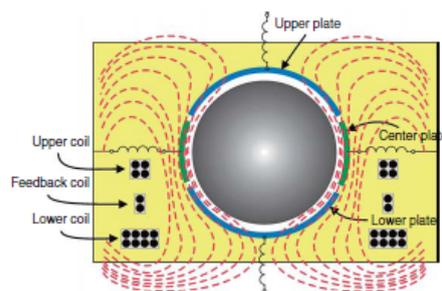


Abbildung 2.7: Schema des Aufbaus des Sensors eines SG. Das Schema zeigt die Testmasse, die Kondensatorplatten des Wegaufnehmers und die Spulen mit dem von ihnen erzeugten magnetischen Feld, angedeutet durch die magnetischen Feldlinien. Abb. nach Hinderer et al. (2007)

Das Magnetfeld wird von zwei Spulen erzeugt. Die Spulen sind ebenfalls aus Niob und damit supraleitend. Die untere Spule erzeugt vor allem die magnetische Auftriebskraft. Die Stärke des Auftriebs kann durch den eingespeisten Strom, der im supraleitenden Fall widerstandslos fließt, fein justiert werden. Der Betrag der Kraft muss genau gleich der nach unten gerichteten Schwerkraft sein um die Kugel im Zentrum der Wegaufnehmer zu halten. Das Feld der oberen Spule, die auf Höhe der Testmasse angebracht ist, steuert den

Gradienten der magnetischen Kraft, die der Federkonstanten eines klassischen Gravimeters entspricht. Damit lässt sich das gewünschte indifferente Gleichgewicht, vergleichbar zur Astasierung eines Federgravimeters, erzeugen. Dies erlaubt eine besonders hohe Sensitivität. Das durch die Überlagerung der beiden Spulenfelder erzeugte Gesamtfeld tritt mit dem auf der Kugeloberfläche induzierten Feld in Wechselwirkung. Das magnetische Feld kann nur sehr oberflächlich in die Hohlkugel eindringen, da supraleitende Materialien das Magnetfeld aus ihrem Inneren verdrängen. Auf der Kugeloberfläche bilden sich Kreisströme, die dem auslösenden Feldern entgegengerichtet sind. Dadurch ist es möglich, dass die Kugel auf diesen Feldern schwebt. Der Wegaufnehmer wird von kapazitiven Kalotten gebildet. Die obere und die untere Kalotte sind Kugelschalen, die die Kugel mit einem Spalt von 1 mm umschließen. Die mittlere Kalotte bildet einen Ring, der die Kugel umschließt. Zur Messung der Auslenkung dient eine kapazitive Brücke. Diese ist sehr sensibel für kleine Spannungsänderungen. Der Lock-in-Verstärker liefert ein 10 kHz Signal als Referenz. In die kapazitive Brücke wird das entstehende, zur Auslenkung proportionale Wechselspannungssignal des Ringkondensators geleitet. So ist es möglich, kleine Änderungen sehr genau zu erkennen.

Die gesamte Sensortechnik ist in einen Kupferkörper eingebaut, der sich in einem so genannten Dewargefäß befindet. Die Sensoreinheit ist mit Helium bei einem geringen Druck von  $10^{-1}$  Pa gefüllt, das zu einer geringen Dämpfung der Kugelbewegung führt. Die Spulen befinden sich außen am Kupferblock.

Auch in den modernen Zwei-Sensor-Geräten sind die Sensoren wie beschrieben gestaltet. Der Abstand zwischen den beiden Sensoren beträgt ungefähr 20 cm.

Das ganze hier beschriebene System arbeitet auf Basis magnetischer Phänomene und wäre in diesem Zustand anfällig für Variationen des Erdmagnetfeldes. Um die Variationen abzuschirmen ist die gesamte Sensoreinheit mit der Kupferummantelung von einem supraleitenden Schild umgeben, das nur nach oben geöffnet ist. Die Magnetfeldänderungen können das Schild nicht durchdringen, da sie vom supraleitenden Material verdrängt werden. Das Innere eines idealen Diamagneten ist magnetfeldfrei. Außerdem sorgt ein außerhalb des Vakuumbehälters angebrachtes  $\mu$ -Metall-Schild für ein abgeschwächtes Einwirken des Erdmagnetfeldes. Dadurch wird insbesondere in der Abkühlungsphase das Entstehen und Einfrieren von Flussschläuchen beim Übergang in den supraleitenden Zustand verhindert, sofern dies nicht explizit gewollt ist um die Asymmetrie der Sensorkugel zu verstärken.

Das gemessene Auslenkungssignal dient als Eingangsgröße für die Rückkopplungsspule. Dazu wird das Signal verstärkt, demoduliert und gefiltert, um schließlich die Rückkopplungsspule eingespeist zu werden. Die so erzeugte Rückkopplungskraft kann man als Produkt des Rückkopplungsstroms und des Oberflächenstroms der Kugel wie folgt berechnen,

$$F = C \cdot I_R (I_{AI} + I_{RI}) \quad (2.18)$$

mit der Rückkopplungsstromstärke  $I_R$ , dem durch die Tragspulen auf der Oberfläche induzierten Strom  $I_{AI}$ , der durch die Rückkopplung induzierten Stromstärke  $I_{RI}$  und einer Konstanten  $C$  (Hinderer et al., 2007). Der durch die Rückkopplungsspule induzierte Strom

$I_{RI} = I_R \cdot \alpha$  ist abhängig vom Strom in der Rückkopplungsspule. So dass für (2.18) auch

$$F = C \cdot I_R \cdot I_{AI} + C \cdot I_R^2 \cdot \alpha \quad (2.19)$$

geschrieben werden kann. Diese Gleichung ist nichtlinear. Wenn ein einheitlicher Kalibrierfaktor gefunden werden kann, kann man aber davon ausgehen, dass die Nichtlinearität gering ist. Von Hinderer et al. (2002) wird die Nichtlinearität auf maximal  $10^{-7}$  geschätzt, damit ist der Sensor sehr linear.

Das Dewargefäß fungiert als Isolator für den kryogenen Innenraum. Gebildet wird das Dewar aus Aluminiumschichten, die von einem Vakuum getrennt werden, als Abstandhalter dienen Plexiglasbauteile. Das speziell beschichtete, reflektierende Aluminium und das nicht wärmeleitende Vakuum sorgen dafür, dass keine Wärme in das Innere eindringen kann, die das Helium erwärmen würde.

Um eine thermische Wärmeausdehnung des Sensors zu verhindern wird die Temperatur im Sensorbereich durch ein Germaniumthermometer überwacht. Gegebenenfalls wird ein Heizstrom in ein Heizelement eingespeist. Die Temperatur soll konstant bei einem Wert von 4,5 K, der Siedetemperatur des flüssigen Heliums liegen. Ein zweiter Regelkreis ist dafür zuständig, den Druck im Dewargefäß immer etwas über dem Außendruck zu halten. Dies verhindert, dass die Membran, die die Heliumatmosphäre von der Umgebung trennt, am Dewarhals zu sehr gespannt wird.

Es handelt sich um ein geschlossenes System. Das Dewargefäß ist oben durch eine Membran abgeschlossen. Darüber liegt der Kaltkopf, der gasförmiges Helium, das konvektiv nach oben gelangt ist, wieder verflüssigt. Es ist dadurch kein Heliumnachfüllen nötig. Der Kaltkopf verursacht als mechanisches Gerät Vibrationen. Um diese nicht auf den Dewar und den darin befindlichen Sensor zu übertragen, wird der Kaltkopf über ein gesondertes Tragegestell abgestützt. Er liegt nicht direkt auf dem Dewar auf. Das Gestell ist mit dem Sockel verbunden.

Beim Aufbau ist darauf zu achten, dass die vertikale Achse des Sensors parallel zur Schwerebeschleunigung ausgerichtet ist. Ist dies nicht der Fall, wirkt eine Komponente der Schwerebeschleunigung von

$$F_h = \tilde{g} \cdot \sin(\alpha) \quad (2.20)$$

mit der scheinbaren Schwere  $\tilde{g} = \vec{g} \cdot \cos(\alpha)$  und dem Winkel  $\alpha$  zwischen der Messachse des SG und der Richtung der Schwerebeschleunigung quer zur Sensorachse. Die horizontale Kraft führt dazu, dass sich die Kugel aus dem Zentrum und damit aus dem optimalen Magnetfeld entfernt. Dadurch werden die magnetischen Tragkräfte schwächer und die Testmasse senkt sich. Diese Absenkung wird als eine Schwerezunahme registriert. Daher wird beim Aufstellen des SG durch gezieltes Verkippen des Geräts die Einstellung mit dem geringsten Schwerewert gesucht. Zur Überwachung dienen eingebaute Tiltmeter.

### 2.4.2 Das Absolutgravimeter FG5

Als Vergleichsmessapparatur zur Messung des SG dient das Absolutgravimeter FG5-101 (FG5) der Firma Micro-g LaCoste (früher: Micro-g Solutions) des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie (BKG) aus Frankfurt. Es handelt sich bei den Absolutgravimetern des Typs FG5 um einen verbreiteten Gerättyp für Absolutschweremessungen. Die Funktionsweise wird beispielsweise in der Veröffentlichung von Niebauer et al. (1995) der Herstellerfirma Micro-g Solutions beschrieben.

.



Abbildung 2.8: FG5-101 während des Aufbaus auf dem neuen Vermessungspunkt AG auf dem neuen Gravimetersockel vor der Gravimeterkammer am 27. Januar 2010

#### 2.4.2.1 Messprinzip

Die grundlegende Idee hinter der Messungen der Absolutschwere ist die Beobachtung des freien Falls einer Masse. Es gilt bei einer Ausrichtung von  $\vec{x}$  in Richtung der Schwere nach unten

$$m \cdot \ddot{a} = m \cdot g. \quad (2.21)$$

Durch zweimalige Integration erhält man im Falle von  $g$

$$z = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + z_0. \quad (2.22)$$

Legt man als Startbedingungen eine ruhende Masse mit  $v_0 = 0$  und den Ort des Auslösens  $z_0 = 0$  in den Ursprung des Koordinatensystems, erhält man eine stark vereinfachte

Gleichung für die Schwere  $g$

$$g = \frac{2 \cdot z}{t^2}. \quad (2.23)$$

Zur Bestimmung der Schwere benötigt man nach Gleichung (2.23) eine präzise Ort-Zeit-Messung.

Der freie Fall ohne Reibung kann durch einen Fall im Vakuum realisiert werden. Die Zeitmessung erfolgt über die Synchronisation mit einer internen Zeitmessung der Elektronik in Form einer hochgenauen Rubidium-Atomuhr. Die Ortsbestimmung erfolgt interferometrisch mit einem linearen Mach-Zender Interferometer. Der genaue Aufbau wird im Kapitel 2.4.2.2 erläutert. Als primäre Längennormale dient die Vakuumwellenlänge des Lichts eines frequenzstabilen Lasers.

### 2.4.2.2 Aufbau

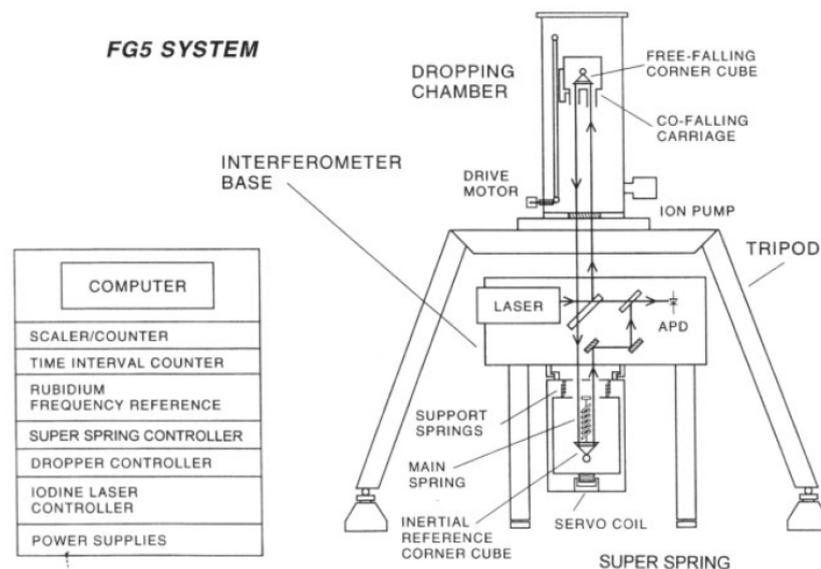


Abbildung 2.9: Schematische Darstellung der wichtigsten Komponenten des Absolutgravimeters FG5. Abbildung nach Niebauer et al. (1995), Seite 160

Das FG5 stellt ein linear angeordnetes Mach-Zender Interferometer dar. Dieses wird von zwei Gestellen gehalten. Ein Dreibein stützt die Fallkammer ab. Das restliche Interferometer wird von einem separaten Gestell gestützt. Diese Trennung soll verhindern, dass in der Fallkammer entstehende Vibrationen auf das übrige Interferometer übertragen werden. Das Gerät lässt sich zerlegen und in Kisten transportieren. Dabei besteht es aus fünf Komponenten: dem Dreibeingestell, der Fallkammer, der Superspring, dem Laser und einem Computersystem.

Ein Interferometer (Abbildung 2.10) benötigt eine kohärente Lichtquelle, deren Wellenlänge das primäre Längennormale festlegt. Im Fall des FG5-101 kommt ein iodid-frequenzstabilisierter Helium-Neon-Laser mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 633 \text{ nm}$  zum Einsatz. Er besitzt eine Frequenzstabilität von  $2.5 \cdot 10^{-11}$  und erlaubt der Messung damit eine absolute Genauigkeit von  $2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  bzw. von  $0,2 \mu\text{gal}$  (Niebauer et al., 1995). Damit der Laser zuverlässig funktioniert und seine Frequenz hält, muss er unter optimalen Umgebungsbedingungen betrieben werden. Hier ist speziell die Temperatur in einem Stollen ein Problem, da die

optimale Betriebstemperatur bei 15 °C liegt, die im Stollen bei einer gleichbleibenden Temperatur von ca. 10 °C ohne spezielle Isolierung und Nutzung der Abwärme nicht zu erreichen ist. Um die Interferenzbildung zu erhalten, muss der Laserstrahl geteilt werden. Die

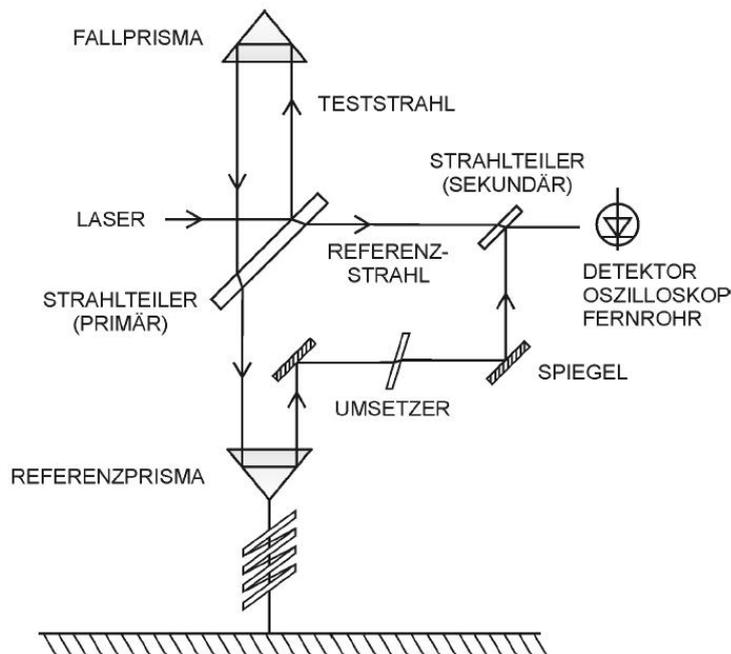


Abbildung 2.10: Schema des linearen Mach-Zehnder Interferometer des FG5. Abb. nach Gitlein (2009) nach Niebauer et al. (1995)

geteilten Strahlen durchlaufen unterschiedliche Wege und werden zur Auswertung wieder zusammengefügt. Hier bilden sich die Interferenzmuster, die es ermöglichen, Positionsänderungen zu messen. Der Referenzstrahl wird von halbdurchlässigen Spiegeln, den sog. Strahlteilern (beam splitter) kaum aus seiner Richtung gebrochen, er durchläuft das System nahezu geradlinig und immer auf einem gleichbleibend langen Weg.

Der Teststrahl wird durch die Strahlteiler aus der Bahn gebrochen und läuft über den als Retroreflektor wirkenden, fallenden Tripelspiegel. Dieser wirft den Strahl zurück. Er durchläuft den ersten Strahlteiler ein zweites Mal, diesmal allerdings in einem Bereich, der nicht reflektiert um die Transmission zu vergrößern. Der Teststrahl trifft dann auf einen Retroreflektor an der Referenzmasse der Superspring. Auf dem Weg zurück wird er von Umlenkspiegeln (pickoff mirrors) und einen Versetzer (translator) über den zweiten Strahlteiler mit dem Referenzstrahl zur Interferenz gebracht. Das Interferenzsignal wird in einer Avalanche-Photo-Diode (APD) erfasst.

Der Wegunterschied zwischen Test- und Referenzstrahl beträgt ca.

2 m, damit muss die Kohärenzlänge des Lasers mindestens 2 m betragen. Dies ist der Fall. Für die Lokation des Tripelspiegels ist der lange Wegunterschied nicht von Nachteil, hierfür wird nur die relative Änderung betrachtet. Die Änderung wird als Hell-dunkel-Wechsel im Interferenzmuster sichtbar. Diese Wechsel treten beim Durchlaufen von Interferenzmaxima, bzw. -minima auf. Die Extremstellen liegen eine halbe Wellenlänge  $\frac{\lambda}{2} = 316,5 \text{ nm}$  auseinander. Dieser Wert stellt damit die Auflösefähigkeit des Ortes dar. Die Nulldurchgänge werden als Intensitätswechsel der Interferenz von einer Hochgeschwindigkeits-Photozelle

beobachtet und gezählt. Hier entstehen die Ort-Zeit-Wertepaare.

Nach dem zweiten Strahlteiler gibt es weitere Ausgänge für ein Interferenzsignal. Ein wichtiger ist die Möglichkeit, das Gerät parallel zum örtlichen Schwerevektor auszurichten. Dafür läuft der Teststrahl nicht über den Retroreflektor der Superspring sondern über einen immer ebenen Alkoholspiegel. Der Strahl wird reflektiert und läuft über die beiden Strahlteiler und ein Dämpfungsglied (attenuator), der dafür sorgt, dass die beiden Strahlen übereinander liegen. Über ein Fernrohr wird überprüft, ob die Strahlen parallel verlaufen. Dies ist nur der Fall, wenn der Teststrahl vertikal verläuft. Um eine Messgenauigkeit von  $1 \mu\text{gal}$  erreichen zu können, muss die Ausrichtung auf  $44 \mu\text{rad}$  genau sein (Niebauer et al., 1995).

Der Laserstrahl durchläuft dabei mehrere Teile des FG5. Der Tripelspiegel fällt in der Vakuumkammer. Hier herrscht ein Hochvakuum mit einem Druck  $p_{vac} < 1 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$ . Dieses Vakuum muss durchgehend von einer Ionenpumpe gehalten werden. Daher verfügt das FG5 über eine unterbrechungsfreie Stromversorgung (USV). In der Vakuumkammer befindet sich auch die Mechanik, die für die eigentlichen Fallversuche nötig ist. Der Tripelspiegel muss nach einem Fallversuch wieder in die Ausgangsposition gebracht werden. Dafür gibt es eine reibungsfreie Kammer. Der Tripelspiegel liegt auf einer Halterung, die durch in Fräsungen gelagerten Kugeln dafür sorgt, dass sich der Tripelspiegel immer wieder horizontal ausrichtet. Die reibungsfreie Kammer besitzt Aussparungen, die es dem Laserstrahl ermöglichen auf die Spiegel zu treffen. Ab dem Zeitpunkt des Auslösens fährt der Aufzug mit der Kammer vor dem Spiegel her nach unten. Nach einer Fallstrecke von 22 cm bzw. etwa 0,2 s (Gitlein, 2009) fängt die Auffangvorrichtung die Testmasse wieder auf und fährt sie in die Ausgangsposition. Der dafür nötige Motor liegt außerhalb der Kammer und wird über einen Antriebsstrang in die Vakuumkammer geführt. Hier ist eine besondere Abdichtung nötig um die beweglichen Teile in das Vakuum zu führen. An der Unterseite der Kammer befindet sich ein optisches Fenster, um dem Laserstrahl das Eindringen in die Vakuumkammer zu ermöglichen. Die Ebenen der Scheibe müssen exakt orthogonal zum eintreffenden Laserstrahl liegen, damit dieser nicht unkontrolliert gebrochen wird.

Die Superspring wird eingesetzt um die Bodenunruhe von der Interferometermessung fern zu halten. Sie soll einen vibrationsisolierten Referenzpunkt erzeugen. Dafür werden Methoden aus der Seismometertechnik benutzt.

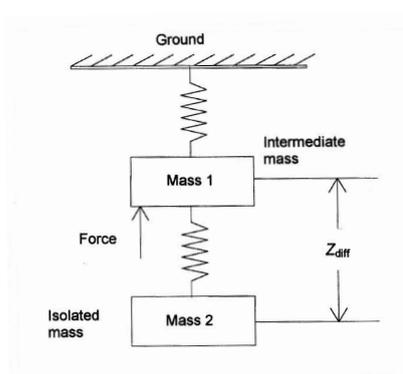


Abbildung 2.11: Schematischer Aufbau des Superspring mit ihrem Federsystem. Abbildung nach Hinderer et al. (2002).

Vereinfacht kann man sich die Superspring als System aus zwei mit Federn verbundenen Massen vorstellen, wie es in Abbildung 2.11 dargestellt ist. Der Abstand zwischen den Massen wird kontinuierlich geprüft. Gegebenenfalls wird durch den Rückkopplungsmechanismus eine Kraft auf die erste Masse ausgeübt, um den alten Abstand wieder herzustellen. Die Einflüsse seismischer Bodenunruhe sollen eliminiert werden. Dazu ist das ganze System der Superspring an Tragfedern aufgehängt. Die eigentliche Superspring ist 46 cm groß. Sie besteht aus Klavierdraht. Die Wärmeausdehnung wird durch eine sich ausdehnende Flüssigkeit kompensiert. Bei steigender Temperatur dehnt sich die Feder und der Referenz-Tripelspiegel verlässt seinen festen Ort. Gleichzeitig dehnt sich aber auch die Flüssigkeit aus. Diese drückt gegen die Aufhängung, was zur Anhebung der gesamten Superspring führt und den Tripelspiegel wieder an seinen festen Ort bringt. Die Superspring stellt damit ein Seismometer dar, wie man es sich klassisch mit einer trägen Masse, die sich nicht mit dem Gehäuse mitbewegt, vorstellt.

Trotz dieser baulichen Temperaturstabilisation ist eine Abschirmung gegen Temperaturschwankungen sinnvoll. Am BFO wird die Abschirmung durch eine Styroporhütte gewährleistet. Der Feedback der Superspring führt dazu, dass das System mit einer Eigenperi-



Abbildung 2.12: Installation des FG5 in einer Styroporhütte zur Wärmeisolation vor dem Anbringen der Frontseite

ode [cut-off period] von 60 s sehr langperiodisch ist. Diese lange Periode wurde gewählt um jenseits der Meeresmikroseismiksignale zu liegen und diese so gut eliminieren zu können. Ohne die Rückkopplung würde man nach Hinderer et al. (2002) eine statische Feder von 1 km Länge benötigen, an deren Ende der Spiegel befestigt ist.

Der technische Aufwand einer Superspring macht das Nachbearbeiten der Daten durch die Korrektur mit Bodenbewegungen, die aus Seismometermessungen gewonnen werden,

unnötig.

Zur Hardware eines FG5 gehören auch viele externe Elektronikgeräte. Hier ist u.a. die Datenauswertung untergebracht. Die Interferenzsignale werden als rechtwinklige Impulse verarbeitet. Während eines Fallversuchs werden  $7 \cdot 10^5$  Interferenzminima beobachtet. Softwareseitig wird vom Time-Interval-Analyser (TIA) nur jedem tausendsten Wert eine Zeit zugeordnet, so dass für einem Fallversuch 700 Wertepaare von

$$z_n = n \cdot \frac{\lambda}{2} = n \cdot 316,5 \text{ nm} \quad \text{und} \quad t_n \quad (2.24)$$

aufgezeichnet werden. Als Zeitnormale dient ein Rubidium-Oszillator, der ein stabiles Sinussignal mit einer Frequenz von 10 MHz mit einer Stabilität besser als  $4 \cdot 11^{-11}$  pro Monat. Damit erhält man eine Auflösung von  $100 \cdot 10^{-12}$  s (Gitlein, 2009).

### 2.4.2.3 Berechnung der Absolutschwere

Mit dem so erhalten Ort-Zeit-Wertepaaren lässt sich die Absolutschwere am Messort bestimmen. Allerdings ist die Berechnung nicht so trivial wie es die Gleichung (2.21) vermuten lässt. In die präzise Bestimmung der Schwere muss auch ein Schweregradient mit einbezogen werden. Da der Retroreflektor auf seinem Fall eine vertikale Strecke von ca. 0,2 m zurücklegt. Damit ergibt sich aus Gleichung (2.21):

$$\ddot{x} = g = g_0 + \frac{\partial g}{\partial z} x = g_0 + \gamma z \quad (2.25)$$

mit der Schwere am Startpunkt des Falles  $z_0 = 0$  und dem Schweregradienten  $\gamma$ . Für die Gleichung (2.22) ergibt sich mit (2.25) und einer Reihenentwicklung bis zur vierten Ordnung der Zeit

$$z = \frac{1}{2} g_0 \left( t^2 + \frac{1}{12} \gamma \cdot t^4 \right) + v_0 \left( t + \frac{1}{6} \gamma t^3 \right) + z_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \gamma t^2 + \frac{1}{24} \gamma^2 t^4 \right). \quad (2.26)$$

Um die Schwerebeschleunigung zu berechnen muss die Gleichung (2.26) zweimal abgeleitet werden. Damit ergibt sich

$$\ddot{z} = g = g_0 \gamma v_0 t + \frac{1}{2} \gamma g_0 t^2 + z_0 \left( \gamma + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 \right). \quad (2.27)$$

Die genaue Herleitung findet sich bei Timmen (1994). Für die Messung Ende Januar am BFO wurde ein Gradient  $\frac{\partial g}{\partial x} = -2,01 \cdot 10^3 \frac{\text{nm}}{\text{s}^2 \text{m}}$  benutzt. Dieser Wert wurde für den alten Absolutschwerepunkt FG5 im Heinrich-Gang bestimmt. Eine Gradientenmessung auf dem neuen Schwerepunkt AG, die vom Geodätischen Instituts des KIT im Oktober 2010 durchgeführt wurde, ergab einen mit  $2,52 \cdot 10^3 \frac{\text{nm}}{\text{s}^2 \text{m}}$  einen im 25 % höheren Wert. Dies hat Einfluss auf die Ergebnisse der Schwerewerte, insbesondere auch auf die  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte. Allerdings lagen mir die mit dem neuen Gradienten berechneten Ergebnisse bis zum Abschluss der Arbeit nicht vor. Der Gradient kann durch relative Schweremessungen mit einem Feldgravimeter bestimmt werden. Dazu wird der Schwerewert auf dem Sockel und in einem Meter Höhe auf einem Dreibein bestimmt. Der Relativwert gibt direkt den Gradienten in  $\frac{\text{nm}}{\text{s}^2 \text{m}}$  an (Timmen, 2004).

Der Schweregradient dient nicht nur zur Korrektur der Fallparabel, sondern auch dazu, den gemessenen Schwerewert auf den Messpunkt auf dem Sockel zu reduzieren. Der eigentliche Messwert des FG5 wird in der Höhe von ca. 1,20 m in der Vakuumkammer gemessen und muss später auf den Bezugspunkt auf dem Sockel reduziert werden.

Ein weiterer wichtiger Wert, den das FG5 liefert, ist der so genannte Sigma-Wert. Er gibt die Fehlerschätzung für den berechneten Schwerewert des Fallversuches an. Er wird durch die Güte der Anpassung der gemessenen an eine theoretische Fallparabel berechnet. Eine große Abweichung von der theoretischen Parabel führt zu einem größeren Sigma-Wert.

## 2.5 Kalibrierung und Kalibriermethoden

Eine Kalibrierung des supraleitenden Gravimeters ist notwendig, da das aufgezeichnete Ausgangssignal, wie in Abschnitt 2.4.1 erläutert, in Volt vorliegt. Eine Spannungsangabe ermöglicht zwar bei Betrachtung der Zeitreihe eine qualitative Aussage der Änderung der Schwere, aber keinen direkten Vergleich mit anderen Schwerebeobachtungen, z.B. von Feldgravimetern. Um die Schwereänderung quantitativ messen zu können, nicht nur den qualitativen Verlauf, müssen die Werte in einer vergleichbaren physikalisch passenden Größe vorliegen. Die unterschiedlichen Einheiten Volt und Gal verhindern dies.

Das Ziel ist es daher, das Spannungssignal in ein Schweresignal umzurechnen.

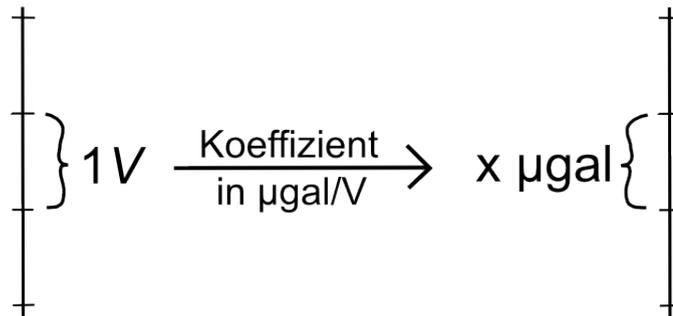


Abbildung 2.13: Veranschaulichung des Regressionszieles der Überführung vom Spannungs- zum Schweresignal

Um dieses Ziel zu erreichen, können zwei unterschiedliche Herangehensweisen genutzt werden, die in den nächsten beiden Unterkapiteln beschrieben werden.

### 2.5.1 Labormethoden

Es gibt verschiedene Ansätze zur Absolutkalibrierung von supraleitenden Gravimetern. Diese werden von mir Labormethoden genannt, da sie nicht normale Messdaten nutzen, also keine in-situ Messungen sind und teilweise größere Maschinen wie beispielsweise Kräne, benötigen.

Achilli et al. (1995) nutzen zur Kalibrierung eine 273 kg schwere Masse, die als Ring um das Gravimeter gelagert ist. Diese Masse bewegt sie auf und ab. Die sich dadurch verändernde Gravitationswirkung ist mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz (Gleichung 2.1) berechenbar, sofern die Massenverteilung bekannt ist. Sie liegt in diesem Fall bei  $6,7 \mu\text{gal}$ . Die berechnete Veränderung kann dann mit den Messungen des SG verglichen und so die

Absolutkalibrierung durchgeführt werden. Dieses Verfahren wird, im kleineren Maßstab, auch für Feldgravimeter durchgeführt (Varga et al., 1995).

Probleme bei dieser Methode können dann auftreten, wenn die Massenverteilung in der Testmasse nicht konstant ist, dadurch ändert sich die Gravitationswirkung auf die Testmasse im SG. Für die Aufhängung der Masse sind große Gerätschaften nötig. Je nach Verankerung im Boden können diese zu Deformationen des umgebenen Untergrundes führen. Diese wirken sich über die Neigung des SG auf dessen Messung aus (Richter, 1991).

In einem anderen Versuch nutzen Goodkind et al. (1993) eine Masse aus Stahl (184,4 kg) oder eine mit Quecksilber gefüllte Stahlhohlkugel (323,9 kg) unterhalb des Gravimeters, die sich periodisch hebt und senkt. Dazu ist die Masse auf einer Hubplattform gelagert. In der Messung des SG werden die Gezeiteneinwirkungen entfernt und das verbleibende Signal mit theoretisch berechneten Werten verglichen. Die Genauigkeit dieses Verfahrens liegt laut den Autoren bei 2 %. Die oben beschriebenen Probleme gelten auch für diesen Versuch, wobei die mit Quecksilber gefüllte Kugel eine möglichst optimal bekannte Gewichtsverteilung besitzt.

Richter (1991) benennt auch weitere Möglichkeiten der Absolutkalibrierung durch künstliche Beschleunigungen auf einem Rütteltisch (vergleichbar mit der Kalibrierung von Seismometern). Dabei ist aber besonders großer Aufwand nötig, da ein sehr genau arbeitendes Gerät gleichzeitig die große Last des SG tragen muss.

Alle diese Möglichkeiten haben Nachteile, sind aber nach Abschätzung der Autoren durchaus genau genug für eine realistische Anwendung. Für die Arbeit an einem Observatorium ist das Stören der Messung durch Manipulationen um und am Messgerät das größte Problem.

### 2.5.2 In-situ Methode

Im Gegensatz zu den Labormethoden, werden für in-situ Methoden Signale des laufenden Messbetriebs genutzt. Auch für diese Methoden werden zusätzliche Geräte benötigt, allerdings bei weitem nicht in dem Umfang wie in Kapitel 2.5.1 beschrieben. In-situ Methoden bieten den großen Vorteil, dass nicht in laufende Messungen eingegriffen werden muss, indem beispielsweise das Gerät in ein Labor transportiert wird. Auch sind keine Verfälschungen der Messwerte zu befürchten, da nicht direkt am Messgerät mit schwerem Gerät gearbeitet wird.

Zur Kalibrierung ist ein zusätzliches Messinstrument nötig. Dieses Gerät muss die Schwere in der gewünschten Einheit  $\mu\text{gal}$  erfassen und selber besser kalibriert sein, als es für das zu kalibrierende Gerät erreicht werden soll. In unserem Fall ist dies das Absolutgravimeter FG5, wie es im Kapitel 2.4.2 beschrieben wurde.

Mit der in Kapitel 2.6.1 beschriebenen Regression erhält man einen Regressionskoeffizienten mit der gewünschten Einheit  $[m] = 1 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ , der es ermöglicht, den Spannungswert in einen Schwerewert umzurechnen.

## 2.6 Mathematische und statistische Methoden

In diesem Kapitel wird auf die mathematischen und statistischen Methoden eingegangen, die bei dieser Arbeit angewendet werden.

### 2.6.1 Regression und die Methode der kleinsten Quadrate

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde ursprünglich für die Berechnung von Kometenbahnen und für die Landvermessung entwickelt. Anfang des 19. Jahrhunderts veröffentlichten sowohl Adrien-Marie Legendre (1805), der auch den Namen dieser Methode prägte, als auch Karl Friedrich Gauß Werke über die Berechnung von Kometenbahnen, die die Methode der kleinsten Quadrate beinhalten.

Die weiteren Ausführungen basieren in der Notation auf Aster et al. (2005). Man nutzt die Methode der kleinsten Quadrate (englisch: least squares methodes), in der Berechnung der Koeffizienten einer Regression. In dem gegebenen Fall handelt es sich um eine lineare Regression. Der Regression liegen zwei Datensätze zugrunde. Die Daten der Messung des Absolutgravimeters FG5 bilden den Datenvektor  $\vec{d}$ . Aufgrund des Aufbaus und der Messmethodik (Kapitel 2.4.1) sind die Daten des supraleitenden Gravimeters deutlich weniger verrauscht. Daher bilden die Daten des supraleitenden Gravimeters den Modellvektor  $\vec{G}$  (Kapitel 3.3.1). Das Ziel der Regression ist es, den Modellvektor mittels des Koeffizienten  $m$  an den Datenvektor anzupassen.

$$\vec{G} \cdot m = \vec{d} \quad (2.28)$$

Mit dem immer vorhandenen Rauschvektor  $\vec{n}$  gilt hier

$$\vec{G} \cdot m + \vec{n} = \vec{d} \quad (2.29)$$

Die Anpassung mittels eines Regressionskoeffizienten wird nicht zu einer perfekten Übereinstimmung führen. Es wird Abweichungen zwischen den Daten und dem angepassten Modell geben. Diese gibt das so genannte Residuum  $\vec{r}$  an.

$$\vec{r} = \vec{d} - \vec{G} \cdot m = \vec{n} \quad (2.30)$$

Die Methode der kleinsten Quadrate beschreibt den Lösungsweg zum Auffinden des geeignetsten Regressionskoeffizienten. Dabei wird derjenige Regressionskoeffizient gewählt, für den sich der kleinste Wert bei der Betrachtung der Residuenquadrate  $R$  ergibt

$$R = (\vec{d} - \vec{G} \cdot m)^2 \stackrel{!}{=} \min. \quad (2.31)$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial R}{\partial m} = 2 \cdot (\vec{d} - \vec{G} \cdot m) \cdot \vec{G} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.32)$$

Ausmultipliziert ergibt sich damit

$$2 \cdot \vec{d} \cdot \vec{G} = 2 \cdot m \cdot \vec{G}^2. \quad (2.33)$$

Somit berechnet sich der Regressionskoeffizient wie folgt:

$$m = \frac{\vec{dG}}{\vec{G}}. \quad (2.34)$$

Es ist möglich, in diese Berechnungen eine Gewichtung einfließen zu lassen. Als Gewichtungsfaktor verwende ich den für jeden Fallversuch bestimmten Fehler  $\sigma_{(FG5)}$  des FG5 (Kapitel 2.4.2.3). Für das gewichtete, quadratische Residuum erhält man in Komponentenschreibweise

$$R = \sum_{i=1}^n \left( \frac{d_i - G_i \cdot m}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2.35)$$

und die Bedingung für ein Minimum lautet damit

$$\frac{\partial R}{\partial m} = \sum_{i=1}^n 2 \cdot \left( \frac{d_i - G_i \cdot m}{\sigma_i} \right) \frac{G_i}{\sigma_i} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.36)$$

Ausmultiplizieren und umstellen führt zu

$$\sum_{i=1}^n \frac{G_i \cdot d_i}{\sigma_i^2} = m \cdot \sum_{i=1}^n \frac{G_i^2}{\sigma_i^2}. \quad (2.37)$$

Mit der Substitution  $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$  erhält man

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot G_i \cdot d_i}{\sum_{k=1}^n w_k \cdot G_k^2} \quad (2.38)$$

als Formel für den Regressionskoeffizient, die ich in den Berechnungen verwende.

### 2.6.2 Fehlerfortpflanzung

Die Fehlerfortpflanzung nach Gauß ermöglicht es, den Einfluss von Messungenauigkeiten auf die Ergebnisse zu bestimmen. Dies ist insbesondere dann interessant, wenn für die primären Messgrößen der Fehler bekannt ist und daraus auf die Genauigkeit von abgeleiteten Größen geschlossen werden soll. Damit dient die Fehlerfortpflanzung direkt zur Abschätzung der Genauigkeit einer Messung oder eines Verfahrens.

Für Regressionen wurde das Verfahren von Müller (1997) beschrieben. Ich habe die Berechnungen an das vorliegende Problem angepasst.

Der Regressionskoeffizient  $m$  berechnet sich nach (2.34). Für die Varianz des Regressionskoeffizienten gilt nach Müller (1997)

$$\Delta m^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial m}{\partial d_k} \Delta d_i \right)^2 \quad (2.39)$$

mit der Standardabweichung der Einzelmessungen  $d_i$ . Die Ableitung von  $m$  nach  $d$  berechnet sich folgendermaßen

$$\frac{\partial m}{\partial d_i} = \frac{G_i}{\sum_{k=1}^N G_k^2}. \quad (2.40)$$

Setzt man (2.40) in (2.39) ein, erhält man für die Varianz

$$\Delta m^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{G_i \Delta d_i}{\sum_{k=1}^N G_k^2} \right)^2. \quad (2.41)$$

Im Fall mit Gewichtung gilt für den Regressionskoeffizienten die Gleichung (2.38). Durch analoges Vorgehen erhält man

$$\Delta m^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial m}{\partial d_k} \Delta d_i \right)^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{w_i G_i \Delta d_i}{\sum_{k=1}^N w_k G_k^2} \right)^2 \quad (2.42)$$

Die Berechnungen werden mit verschiedenen Realisierungen des Fehlers der Daten  $\Delta d$  durchgeführt. Diese werden im Kapitel 3.4.1 dargestellt. Die Berechnung wird für alle vorgestellten Realisierungen durch das Programm `regkoef_varianz_gewichtet_neu.m` durchgeführt.

Die drei verschiedenen Realisierungen der Standardabweichung  $\Delta d$  sind:

- Individuelle Sigmawerte  
 $\Delta d$  wird in diesem Fall für jeden einzelnen Fallversuch separat gewählt. Dafür bietet sich der vom FG5 bestimmt  $\sigma_{(FG5)}$ - Wert (Kapitel 2.4.2.3) an. Für jeden Messwert geht dann die individuelle Fehlerabschätzung des Fallversuchs in die Berechnung ein.
- Einheitlicher Wert aus der Varianz der Sigmawerte  
Für diese Berechnung werden ebenfalls die Werte  $\sigma_{(FG5)}$  genutzt. Da die Werte mittelwertfrei sind ist es möglich den RMS dieser  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte anzugeben. Er entspricht der Standardverteilung der Fallversuche. Dies ist möglich, da die Residuen normalverteilt sind und den normalverteilten, statistischen Messfehler wiedergeben. Ich verwende daher den RMS-Wert der  $\sigma_{(FG5)}$ -Daten als Abschätzung der Standardabweichung  $\Delta d$  für alle Daten einheitlich. Die Standardabweichung wird in diesem Fall durch

$$RMS = \Delta d = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \sigma_{(FG5)i}^2} \quad (2.43)$$

bestimmt.

- Einheitlicher Wert aus dem Residuum der Regression

Die Berechnung der Fehlerfortpflanzung aus dem Residuum der Regression nutzt die Fehlerabschätzung des einzelnen Fallversuches nicht. Diese gehen lediglich in die Gewichtung bei der Berechnung des Regressionskoeffizienten ein. Als Unsicherheit des Datensatzes wird der RMS-Wert des Residuums der Regression, also die Abweichung der einzelnen Messwerte des Absolutgravimeters vom Modell aus den Daten des supraleitenden Gravimeters und dem Regressionskoeffizienten, genutzt. Damit nutzt diese Berechnung nicht die Genauigkeit der Einzelmessungen sondern die innere Genauigkeit der gesamten Messung mit allen Fallversuchen als primäres Fehlermaß.

Analog zur Berechnung in Abschnitt 3.4.1 ergibt sich dafür

$$RMS = \Delta d = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N R_i^2} \quad (2.44)$$

Dieser Wert entspricht der Standardabweichung der Verteilung der Residuen im Gegensatz zu Gleichung 2.43 bei der  $\sigma_{(FG5)i} > 0$  gilt. Der so bestimmte Wert wird einheitlich für alle Daten verwendet.

### 2.6.3 Bootstrap-Verfahren

Die statistische Methode des Bootstrapping erlaubt es, statistische Aussagen auf Basis nur eines Datensatzes zu treffen. Das Bootstrapping geht auf eine Veröffentlichung von Efron (1979) zurück. Es handelt sich um eine Methode des *Resampling*, bei dem das Experiment sozusagen künstlich wiederholt wird.

Der Datensatz mit unabhängigen Daten bildet hierbei die Grundgesamtheit mit dem Schätzwert  $\hat{\Theta}$ , aus der die Stichproben generiert werden. Besteht der Datensatz aus  $n$  Daten, so wird auch die Stichprobe aus  $n$  Datenpunkten erstellt. Die Daten der Stichprobe werden zufällig und mit Zurücklegen aus dem Datensatz gezogen. Die Grundgesamtheit wird nicht verändert, daher muss keine Verteilung auf Grund von möglichen Permutationen betrachtet werden. Mit der Stichprobe wird in dieser Arbeit mittels der in Kapitel 2.6.1 beschriebenen Methode ein Regressionskoeffizient  $m_i$  berechnet. Dies wird, um eine statistische Aussage treffen zu können,  $k$  mal wiederholt. Die Notation orientiert sich im folgenden an Lang und Pucker (1998).

Der mittlere Schätzwert  $\tilde{m}$  des Regressionskoeffizienten ergibt sich aus den einzelnen Testergebnissen  $m_i$  zu

$$\tilde{m} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k m_i. \quad (2.45)$$

Für die Varianz gilt dann, da die Grundgesamtheit nicht verändert wurde,

$$\Delta m^2 = Var = \sigma^2 = \frac{1}{k} \cdot \sum_{l=1}^k (m_l - \tilde{m})^2. \quad (2.46)$$

$\Delta m^2$  ist hierbei ein Schätzwert für  $\sigma^2$ , damit gilt für die durch die Bootstrap-Methode ermittelte Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{k} \cdot \sum_{l=1}^k (m_l - \tilde{m})^2}. \quad (2.47)$$

Es kann dabei nicht davon ausgegangen werden, dass die Schätzfunktion  $\tilde{m}$  den tatsächlichen Wert des Regressionskoeffizienten wiedergibt.

Als primäres Fehlermaß dient in diesem Fall die innere Genauigkeit des gemessenen Datensatzes.

### 2.6.4 Jackknife-Verfahren

Wie das Bootstrapping erlaubt auch das Jackknife-Verfahren bei Vorliegen eines Datensatzes durch *resampling* statistische Aussagen zu machen. Historisch gab es das Jackknife-Verfahren bereits 20 Jahre vor dem Bootstrap. Es wurde von Quenouille (1956) und Tukey (1958) Ende der 1950er Jahre beschrieben.

Beim Jackknifing bildet man aus einem Ausgangsdatsatz mit  $n$  Daten Teilmengen mit  $(n - 1)$ - Daten. Es entfällt also immer ein Datenpunkt des Ausgangsdatsatzes, damit greift man in die Grundgesamtheit ein. Mit den Teilmengen wird der Regressionskoeffizient  $\hat{\Theta}$  berechnet, dies wird  $n$  mal wiederholt. Da sich die Teilmengen nur in einem Wert unterscheiden, ist die resultierende Streuung gering. Dies wird bei der Berechnung der Varianz durch das Anpassen des Vorfaktors der Summe berücksichtigt.

Für die Varianz gilt:

$$\Delta m^2 = Var = \sigma^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{l=1}^n (\hat{m}_l - \hat{m})^2 \quad (2.48)$$

mit den bestimmten Regressionskoeffizienten der Einzelversuche  $\hat{m}_l$  und deren Mittelwert  $\hat{m}$ . Daraus ergibt sich eine Standardabweichung des Regressionskoeffizienten

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{n-1}{n} \sum_{l=1}^n (\hat{m}_l - \hat{m})^2}. \quad (2.49)$$

Auch in diesem Test wirkt die innere Genauigkeit des gemessenen Datensatzes als primäres Maß für die Standardabweichung des Regressionskoeffizienten.

### 2.6.5 Monte-Carlo-Verfahren

Das Monte-Carlo-Verfahren bezeichnet eine weitere statistische Methode. Diese Bezeichnung findet man in der Literatur für viele verschiedene Anwendungen. In dieser Arbeit bezeichnet es eine Analyse der Streuung der Regressionskoeffizienten bei Zugabe von künstlichem Rauschen. Für die Stichproben werden die Werte  $dmc_i$  erzeugt, indem zu jedem Messwert  $d_i$  der Schwere des Absolutgravimeters FG5 ein zufälliger Anteil des dem zugehörigen  $\sigma_{(FG5)}$ -Wertes aus Kapitel 2.4.2 addiert wird.

$$dmc_i = d_i + n_i \cdot \sigma_{(FG5)}, \quad (2.50)$$

$n_i$  wird zufällig mit der Funktion *randn* des Programmes Matlab erzeugt und ist damit normalverteilt, mittelwertfrei und besitzt die Varianz 1. Der Wert  $\sigma_{(FG5)}$  gibt für jeden gemessenen Schwerewert des Absolutgravimeters-FG5 eine Fehlerabschätzung an, die aus der Anpassung an die aufgezeichnete Fallparabel resultiert. Damit basiert das Monte-Carlo-Verfahren direkt auf der Fehlerabschätzung aus der FG5-Messung und wird sich daher von den beiden in den Abschnitten 2.6.3 und 2.6.4 beschriebenen Methoden unterscheiden, da diese Methode nicht von der Fehlerabschätzung beeinflusst werden.

Mit den so gewonnenen neuen Stichproben werden Werte für den Regressionskoeffizienten  $dmc_i$  berechnet. Aus den so gewonnenen Werten der Einzelversuche  $m_l$  erhält man einen

Wert für die Varianz des Regressionskoeffizienten:

$$\Delta m^2 = Var = \sigma^2 = \frac{1}{k} \cdot \sum_{l=1}^k (m_l - \tilde{m}) \quad (2.51)$$

mit dem Mittelwert der Monte-Carlo-Ergebnisse  $\tilde{m}$  und der Anzahl der Versuche  $k$ . Die Standardabweichung berechnet sich als Wurzel aus der Varianz

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{k} \cdot \sum_{l=1}^k (m_l - \tilde{m})}. \quad (2.52)$$

Als primäres Fehlermaß dient beim Monte-Carlo-Verfahren der vom FG5 berechnete Fehler.



## 3. Kalibrierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Bestimmung des Regressionskoeffizienten als Kalibrierfaktor für das SG. Dabei steht die Betrachtung von Faktoren, die die Messung beeinflussen und die daraus resultierende nötige Vorbereitung der Messdaten im Mittelpunkt.

### 3.1 Daten

Mir liegen für diese Arbeit zwei primäre Datensätze vor. Die Messwerte wurden von einem supraleitenden Gravimeter (Kapitel 2.4.1) und einem Absolutgravimeter (Kapitel 2.4.2) aufgenommen. Sie beinhalten jeweils Daten aus der Zeit zwischen dem 27. Januar 2010 11:47:11 Uhr (UTC) und dem 2. Februar 2010 8:11:30 Uhr. In diesem Zeitraum wurden 17550 Fallversuche durchgeführt, der Großteil davon mit einem Zeitintervall von 20 s zwischen den einzelnen Fallversuchen. Nur die ersten 747 Messwerte wurden im Abstand von 10 s aufgenommen. Nach den ersten Messungen wurde versucht, die Justierung des Lasers zu verbessern, um die Messung noch einmal zu optimieren und eine geringere Streuung der Messwerte zu erlangen. Dazu wurde die Messung vom 27. Januar 14:16:31 Uhr bis 28. Januar 14:39:08 Uhr unterbrochen. Die Ursache einer weiteren kürzeren Datenlücke am 1. Februar von 08:03:48 Uhr bis 09:46:50 Uhr ist mir nicht bekannt.

Die Messwerte des FG5 haben die Einheit der Schwere  $[g] = \mu\text{gal}$ . Zusätzlich zum Schwerewert liegen zu jedem Fallversuch gemessene Parameter bei. Dazu gehören die angebrachten Reduktionen (Abschnitt 3.2.1), die Standardabweichung jedes Fallversuchs als Fehlerabschätzungen (2.4.2.3), die sog. Sigma-Werte, die das Messgerät für jeden Fallversuch berechnet, außerdem Messgrößen der Gerätesensoren wie die Temperatur des Lasers. Als Signal dienen vor allem die durch die Gezeiten hervorgerufenen Schwereänderungen, allerdings sind diese Messungen auch von zufälligem Rauschen beeinflusst. Die Ausgabewerte des FG5 sind in Abbildung 3.1 gezeigt. Für die Ausgabewerte wurde der Einfluss der Gezeiten und des Luftdrucks aus der Messung entfernt.

Für den angegebenen Zeitraum liegen mir auch die Daten des SG-056 am BFO vor. Die Relativschwerewerte werden bei diesem Gerät mit einer Abtastfrequenz von 1 Hz registriert. In den knapp fünf Tagen wurden 505459 Messwerte aufgenommen. Da es sich um ein

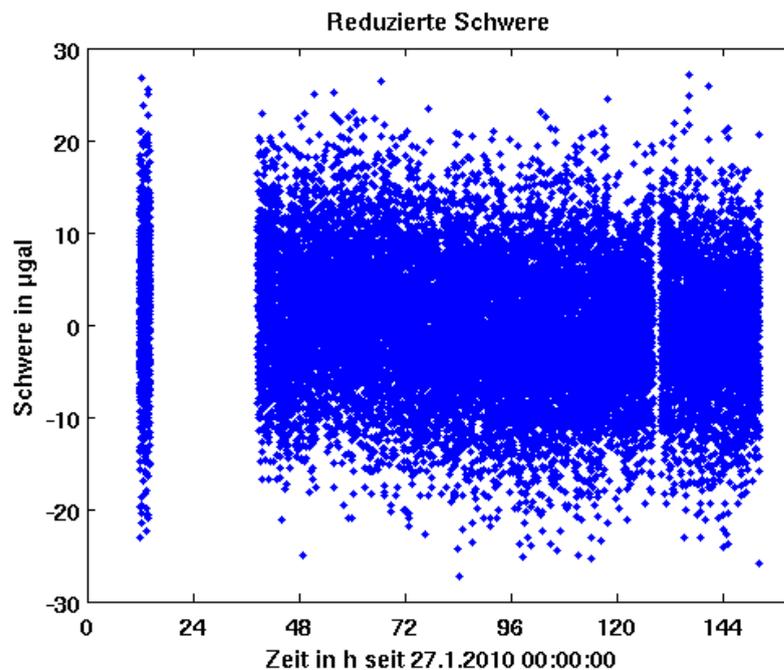


Abbildung 3.1: Reduzierte Schweredaten des FG5. Aus den gemessenen Schwerewerten wurde der Einfluss der Gezeiten und des Luftdrucks entfernt. Zur besseren Darstellung wurde von den Schweredaten der Mittelwert von  $980769930 \mu\text{gal}$  abgezogen.

Zwei-Sensorgerät handelt, werden sekundlich jeweils zwei Messwerte aufgezeichnet. Die Messgröße des SG ist die Rückkopplungs-Spannung, die Messwerte liegen daher in Volt vor. Die Daten sind in Abbildung 3.2 dargestellt.

## 3.2 Datenbearbeitung

Die von den beiden Messgeräten gemessenen Daten werden für die Berechnungen bearbeitet. Neben der eigentlichen Datenbearbeitung wird in diesem Kapitel auf die dafür nötigen Vorüberlegungen und Hintergründe eingegangen.

### 3.2.1 Rekonstruktion und Vorzeichenbetrachtung

Die Messung mit einem Absolutgravimeter dient zur Bestimmung des mittleren Absolutschwerewertes am Messpunkt, es soll also einem Messpunkt ein Schwerewert zugeordnet werden. Das bei der Messung des FG5 erhaltene Schweresignal enthält aber außer der gesuchten Absolutschwere an diesem Punkt auch andere Schwereinflüsse, die die Beschleunigung des fallenden Retroreflektors in der Fallkammer des FG5 beeinflussen. Die beiden wichtigsten Korrekturen sind die Gezeiten- und die Luftdruckkorrektur. In den Daten des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie (BKG) ist der Absolutschwerewert der einzelnen Messungen angegeben. Dazu wurde das Messergebnis von den Einflüssen der Gezeiten und des Luftdrucks befreit. Das BKG hat für den neuen Absolutschwerpunkt AG einen mittleren Schwerewert nach Abzug der Gezeiten von  $980769900,00 \pm 0,56 \mu\text{gal}$  bestimmt. Zur Verdeutlichung der Angabe dient folgender Vergleich. Eine Änderung der Höhe um

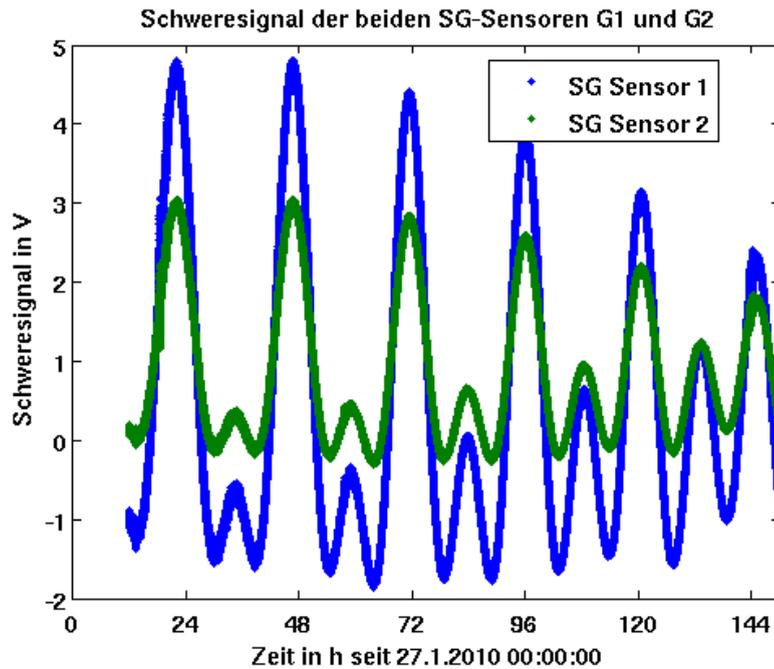


Abbildung 3.2: Gemessene Relativschwerewerte der beiden Sensoren des SG. Sensor G1 ist schwerer als Sensor G2. Die Abbildung enthält alle gemessenen Daten mit einem Abtastintervall von 1 s.

einen Meter hätte bereits eine Einfluss von  $200 \mu\text{gal}$  auf das Ergebnis und die Gezeiten über  $300 \mu\text{gal}$ . Die angebrachten Korrekturen wurden den Ergebnissen beigefügt und liegen mir vor.

Um nun einen Vergleich mit den Messungen des supraleitenden Gravimeters vornehmen zu können, muss die durch das FG5 gemessene Schwere  $a_{(FG5)}$  rekonstruiert werden. Dafür ist zu klären, wie die Gezeitenkorrektur  $a_{tide}$  und die Luftdruckkorrektur  $a_{baro}$

$$a_{rek} = a_{(FG5)} \pm a_{tide} \pm a_{baro} \quad (3.1)$$

anzubringen sind um die rekonstruierte Schweremessung  $a_{rek}$  zu erhalten.

### 3.2.1.1 Vorzeichenkonvention

Bevor ich genauer auf die nötigen Korrekturen eingehe, muss zuerst geklärt werden, welche Vorzeichenkonvention für die beiden zu vergleichenden Gravimeter gelten. Nur so kann das Vorzeichen der Korrekturen richtig gewählt werden. Um die Vorzeichenkonvention des supraleitenden Gravimeters bestimmen zu können, werden die gemessenen Daten des Gravimeters mit denen eines Breitbandseismometers des Typs STS-2 verglichen. Als Vergleichssignal dienen die registrierten Gezeiten. Das Gezeitensignal wird bei der Messungen des supraleitenden Gravimeters registriert. Auch in der Messung des STS-2 Breitbandseismometers ist das Gezeitensignal erkennbar, auch wenn der Frequenzbereich, in dem die Gezeiten liegen, nicht im optimalen Übertragungsbereich des Seismometers liegt. Das Gezeitensignal ist aber so stark, dass es trotz der starken Dämpfung zu erkennen ist. Damit ein Vergleich möglich ist, werden beide Daten der gleichen Filterung unterzogen. Hierfür durchlaufen die Signale sowohl einen Butterworth-Tiefpassfilter vierter Ordnung bei 3600s,

der dafür sorgt, dass alle seismischen Signale aus den Daten entfernt werden, als auch einen Butterworth-Hochpassfilter bei 120s und einer Dämpfung  $h=0.707$ . Letzterer repräsentiert die Seismometerantwort des STS-2. Beim Signal des STS-2 handelt es sich, wie generell bei Seismometern, um ein Bodenschwinggeschwindigkeitssignal. Durch eine Ableitung dieses Signals wird es mit dem Beschleunigungssignal des supraleitenden Gravimeters vergleichbar. Das abgeleitete STS-2 Signal und das gefilterte Signal des supraleitenden Gravimeters sind in Abbildung 3.3 zu sehen.

Das Signal des STS-2 Breitbandseismometers (oben) enthält noch einen höherfrequenten Anteil, der in den SG Daten trotz gleicher Filterung nicht zu sehen ist. Die Ursache des Signals ist mir nicht bekannt, es könnte sich dabei um Seismometerrauschen handeln. Die Zeitreihen des STS-2 und der beiden Sensoren des supraleitenden Gravimeters haben unterschiedliche Vorzeichen. Die Daten unterliegen also unterschiedlichen Vorzeichenkonventionen. Ausgehend vom STS-2 Signal kann man eine Aussage über die Konvention des supraleitenden Gravimeters treffen. Positive Werte repräsentieren bei Seismometern per Konvention eine Bodenbewegung nach oben. Eine Bodenbewegung nach oben führt zu einer Bewegung der seismischen Masse nach unten. Eine Bewegung der seismischen Masse nach unten kann aber auch durch eine Schwerezunahme bedingt sein. Betrachtet man in der Abbildung der STS-2 Zeitreihe die Zeit zwischen 9:00 Uhr und 14:15 Uhr am 29. Januar, so fällt auf, dass in dieser Zeit die Schwere zugenommen hat. In der Zeitreihe des supraleitenden Gravimeters sind hier negative Werte zu beobachten. Demnach ist hier eine Abnahme der Schwere als positiver Wert deklariert.

### 3.2.1.2 Gezeitenkorrektur

Aussagen über die Vorzeichen der anzubringenden Korrektur lassen sich jetzt durch einen Vergleich von der gemessenen SG-Zeitreihe und der Gezeitenkorrektur erhalten. Dafür wird ein ungefiltertes Signal des supraleitenden Gravimeters benutzt (Abbildung 3.4). Die Gezeitenkorrektur erhält man aus der Korrekturspalte 'tide' der FG5-Daten (Abbildung 3.5). Diese enthält synthetische Gezeiten, die mit den Gezeitenparametern des ET-19 Gezeitengravimeters berechnet wurden. Diesen Gezeitenparametern liegen monatelange Messungen zu Grunde. Die Vorzeichenkonvention der Zeitreihen ist offenbar identisch. Sie unterscheiden sich nur durch das Rauschen der SG-Daten im Vergleich zu den synthetischen Gezeitendaten. In Bereichen mit positiven Werten des SG, also geringer Schwere, ist auch der Korrekturwert positiv. Es wird also der im Vergleich zum Absolutschwerewert geringer gemessene Schwerewert durch die Addition des Korrekturwertes korrigiert. Demnach entspricht die Vorzeichenkonvention der Wirkung der Schwerebeschleunigung der von Breitbandseismometern. Eine geringere Beschleunigung führt zu höheren Korrekturwerten. Das Vorzeichen der Korrektur steht damit fest. Der Korrekturwert muss vom angegebenen Absolutschwerewert abgezogen werden

$$a_{rek} = a_{(FG5)} - a_{tide} \pm a_{baro}. \quad (3.2)$$

Einer Zunahme Korrekturwertes entspricht also eine Schwereabnahme.

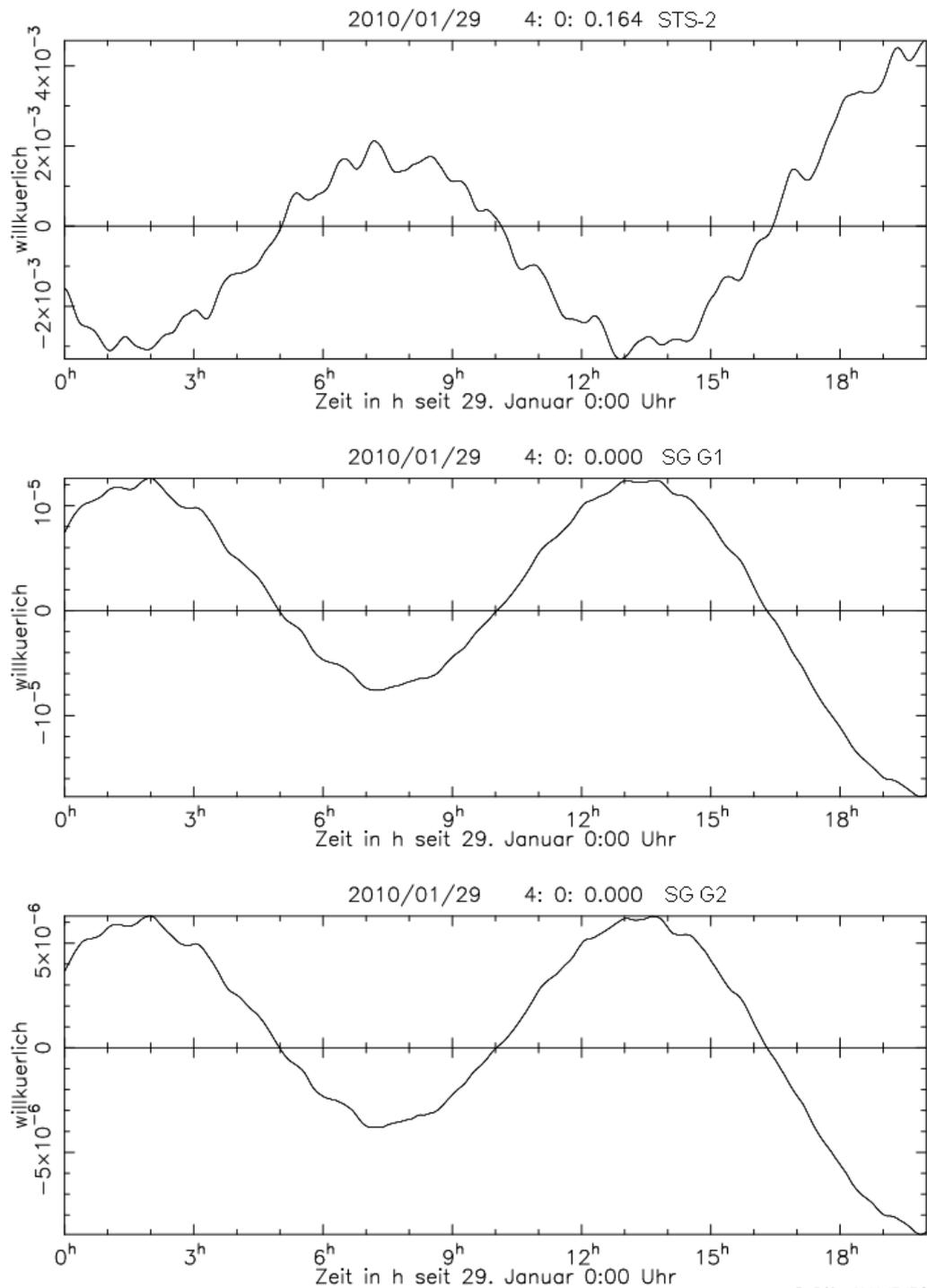


Abbildung 3.3: Vergleich der Registrierung des STS-2 Seismometers (oben) mit den beiden Sensoren des supraleitenden Gravimeters G1 und G2 (Mitte und unten). Die abgebildeten Daten beginnen am 29. Januar 2010 um 00:00:00 Uhr

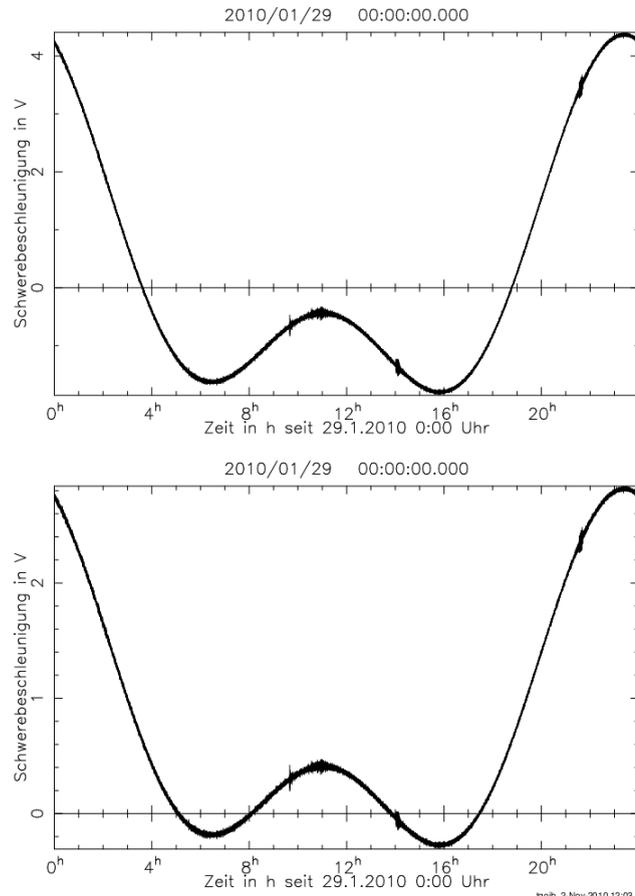


Abbildung 3.4: Originalregistrierung des supraleitenden Gravimeters ab dem 29. Januar 00:00 Uhr. Die Daten des Sensors G1 sind oben dargestellt, die des Sensors G2 unten.

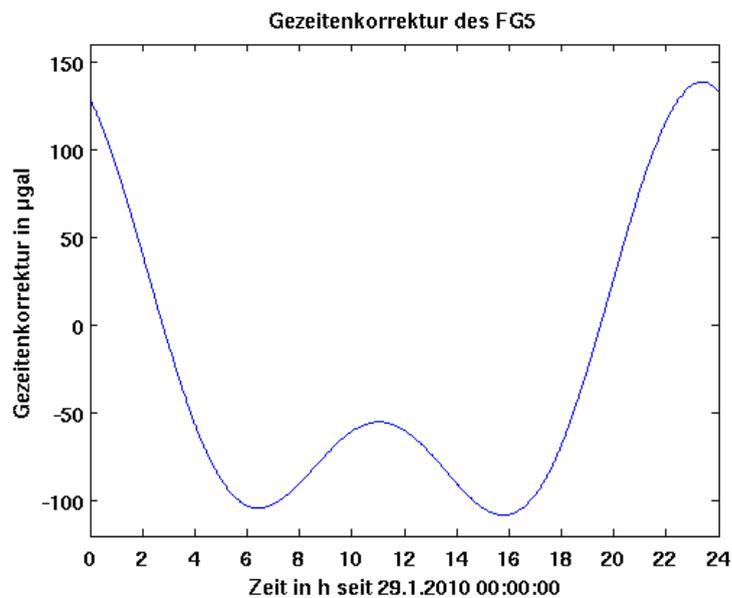
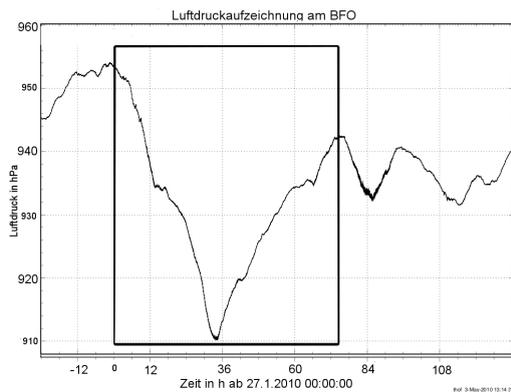
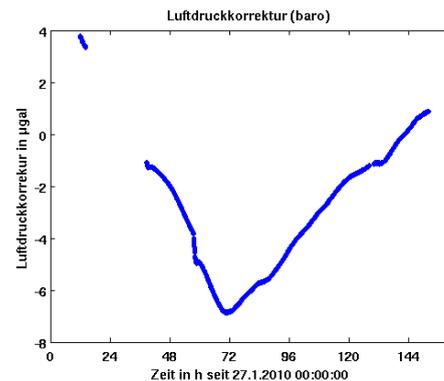


Abbildung 3.5: Gezeitenkorrektur der FG5-Daten beginnend am 29. Januar 00:00 Uhr



(a) Luftdruckdaten am BFO ab dem 24. Januar



(b) Luftdruckkorrektur der FG5-Daten ab dem 27. Januar

Abbildung 3.6: Gemessener Luftdruck und Luftdruckkorrektur. Der Rahmen in Abbildung a) bezeichnet den in Abbildung b) gezeigten Bereich

### 3.2.1.3 Luftdruckkorrektur

Auch für die Luftdruckkorrektur muss das Vorzeichen überprüft werden. Hierzu dient folgende Überlegung. Ein Absinken des Luftdruckes entspricht einer Verringerung der Luftmassen über dem Messgerät. Diese Luftmassen üben durch die geringere Masse eine geringere Gravitationswirkung auf die Testmasse aus. Diese wird anschaulich weniger nach oben gezogen, was bei der Beobachtung als Zunahme der Schwere registriert wird. Daher wird bei absinkendem Luftdruck (Abbildung 3.6 links) unter einen Wert von ca. 934 hPa, wie zwischen dem 27. und 29. Januar zu sehen, ein negativer Korrekturwert (Abbildung 3.6 rechts) angegeben, der den zu hohen gemessenen Schwerewert korrigiert. Die Korrekturen werden für einen Standardluftdruck auf Meeresebene bestimmt und mittels der barometrischen Höhenformel auf den Messlokation des Gravimeters angepasst.

Der angegebene Wert muss durch die Rekonstruktion vergrößert werden. Da der Korrekturwert negativ angegeben ist, muss auch dieser Wert abgezogen werden, um das ursprüngliche Messergebnis zu erhalten.

Damit gilt für die rekonstruierte Beschleunigung:

$$a_{rek} = a_{(FG5)} - a_{tide} - a_{baro}. \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Verwerfen von Messdaten

Abbildung 3.7 zeigt die rekonstruierte Messung des FG5 mit dem Einfluss von Gezeiten und Luftdruck. Für diese Abbildung wurde der Mittelwert von  $9,8077 \cdot 10^8 \mu\text{gal}$  entfernt. Die Ausreißer weichen bis über  $400 \mu\text{gal}$  vom sonstigen Signal ab und können daher mit bloßem Auge erkannt werden. Die Ursachen dieser Ausreißer können verschieden sein und sind im Allgemeinen unbekannt.

Das Verwerfen von Daten stellt immer einen Eingriff in die Messung dar, es handelt sich schließlich um tatsächlich ermittelte Messdaten. Auf der anderen Seite wirken sich Ausreißer besonders stark auf das Ergebnis aus und verfälschen dieses somit. Für die Entscheidung, wie viele Messwerte als Ausreißer deklariert und damit verworfen werden, kann

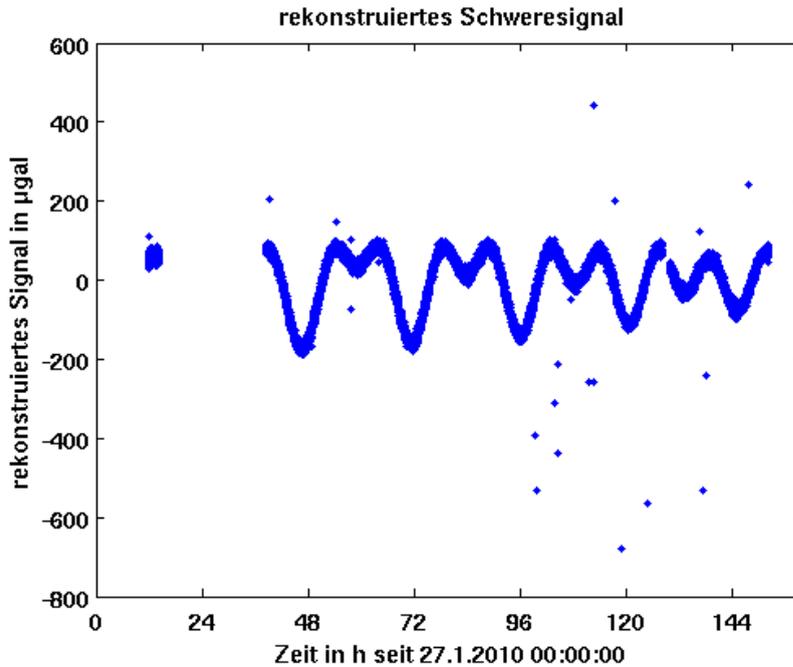


Abbildung 3.7: Gesamte rekonstruierte Messdaten des Absolutgravimeters FG5, aufgenommen ab dem 27. Januar 2010. Der Mittelwert von 980769930  $\mu\text{gal}$  der Daten wurde entfernt.

reines Augenmaß nicht entscheidend sein.

Um die Zahl der Ausreißer zu bestimmen bin ich folgendermaßen vorgegangen. Das Programm *ausreisseruntersuchung2.m* dient zur Entfernung von Messdaten aus dem Datensatz. Dafür wird der Regressionskoeffizient bestimmt und mit diesem das Residuum zwischen den Messdaten des Absolutgravimeters und den Daten des Sensors G1 des supraleitenden Gravimeter, die mit dem Regressionskoeffizient multipliziert wurden, berechnet. Danach wird das Residuum mit dem größten Betrag bestimmt, und der zugehörige Messwert aus dem Datensatz entfernt. Mit den restlichen Daten wird das Verfahren wiederholt. Um zu entscheiden wie viele Messdaten entfernt werden sollen, werden zwei Größen betrachtet. In Abbildung 3.8 ist die Entwicklung der Varianz über der Anzahl der entfernten Werte aufgetragen. Die Varianz erlaubt durch die Quantisierung der Streuung eine Aussage darüber zu treffen, wie gut es der Regression gelingt, die Messdaten nachzubilden. Ausreißer führen dazu, dass die Multiplikation des Modells mit einem Regressionskoeffizienten nicht ausreicht, um die Messergebnisse gut abzubilden, da die Ausreißer immer ein größeres Residuum verursachen. Durch schrittweise Eliminierung der Ausreißer muss die Varianz daher deutlich zurückgehen. Genau dies ist in Abbildung 3.8 zu sehen. Die Varianz nimmt bereits durch das Entfernen von wenigen Datenpunkten stark ab. Nach der Entfernung von ca. 15 Messwerten ist die Varianz bezogen auf die Varianz bei Benutzung aller Messwerte um beinahe 75% zurückgegangen und bleibt bei der Entfernung von weiteren Messdaten nahezu konstant.

Die zweite Größe ist der eigentliche Regressionskoeffizient. Im Idealfall ohne Rauschen und Ausreißer ergäbe sich für die Betrachtung des Regressionskoeffizient über die entfernten Werte eine Gerade, da sich der Regressionskoeffizient nicht ändern würde. Da dieser Fall

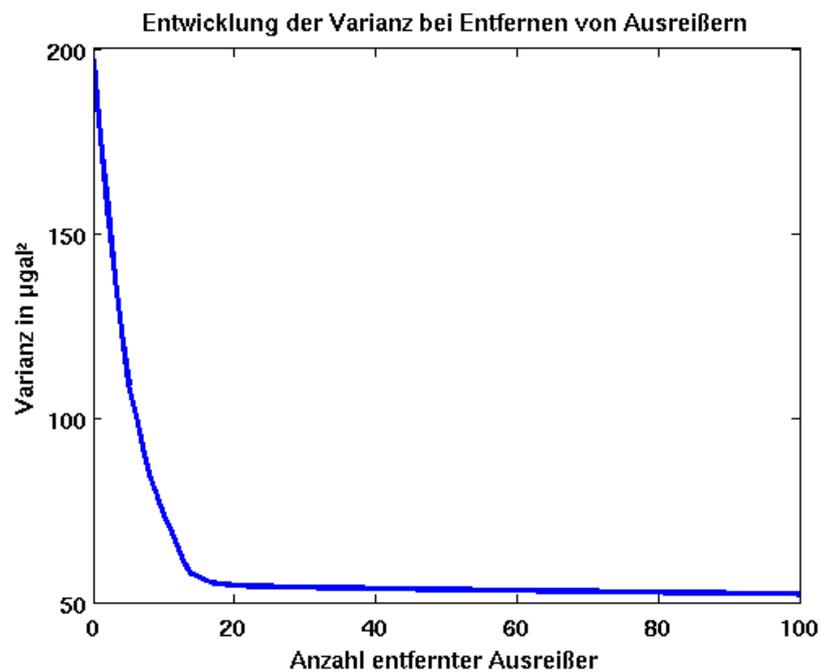


Abbildung 3.8: Entwicklung der Varianz bei Entfernen der Messwerte mit größtem Residuum. Zur Darstellung wurden der Vergleich zu Sensor G1 gewählt. In den Daten wurde der Mittelwert entfernt.

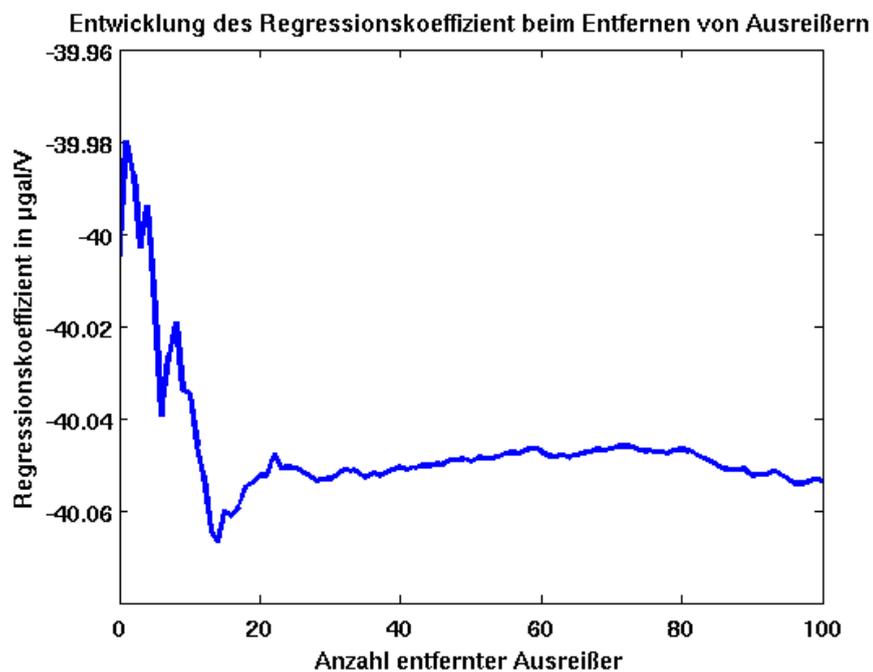


Abbildung 3.9: Entwicklung des Regressionskoeffizienten für Sensor G1 bei Verwerfen von Messwerten mit dem größten Residuum. Der Mittelwert der Messdaten wurde in jedem Durchgang entfernt.

hier nicht vorliegt, erwarte ich auf Grund des Rauschens in den Absolutschweredaten ein Annähern und Schwanken um einen Wert. Zuvor wird sich der Regressionskoeffizient stark ändern, da der Einfluss von Ausreißern groß ist. Abbildung 3.9 zeigt genau dieses Verhalten. Der Wert des Regressionskoeffizient bei systematischem Verwerfens von Ausreißern, schwankt bei der Entfernung von weniger als 20 Ausreißern noch stark. Dabei nimmt er nicht stetig ab. Das globale Minimum dieser Abbildung liegt bei 18 verworfenen Messwerten. Eine Beruhigung der Entwicklung des Regressionskoeffizient tritt erst bei über 20 verworfenen Daten auf. Damit lässt diese Abbildung darauf schließen, dass mehr Werte entfernt werden können, als bei der alleinigen Betrachtung der Varianz zu vermuten war. Allerdings scheint beim Vergleich der beiden Größen eine Auswahl einer möglichst kleinen Anzahl sinnvoll, dies verfälscht die Messdaten am wenigsten.

In Abbildung 3.9 kann die Beruhigung der Regressionskoeffizientenentwicklung ab 25 verworfenen Daten nach dem letzten klaren lokalen Minimum gewählt werden. Als Ergebnis werden daher für die weiteren Untersuchungen 25 Ausreißer aus den Daten entfernt. Abbildung 3.10 zeigt die entfernten Ausreißer.

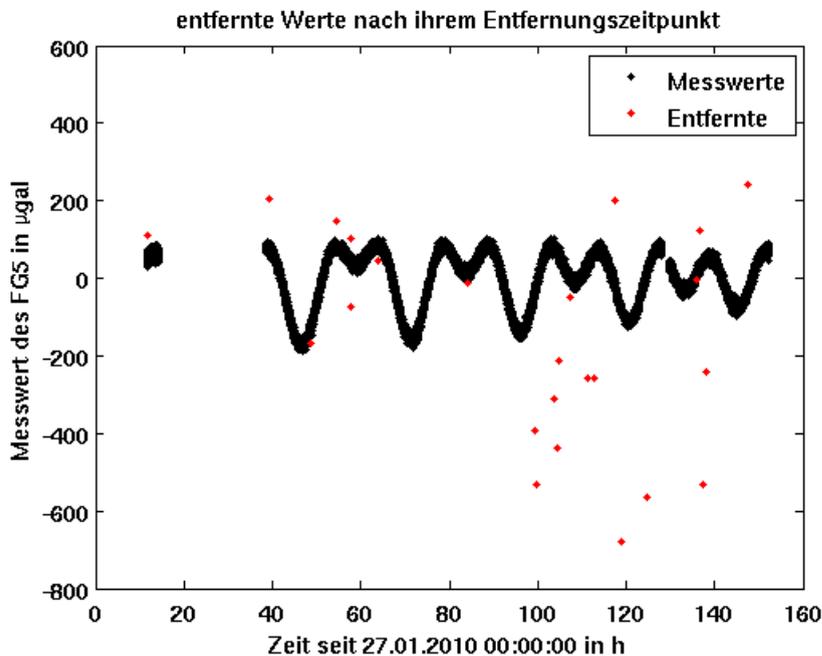


Abbildung 3.10: Messreihe des Absolutgravimeters FG5 mit den zu entfernenden Ausreißern (magenta).

### 3.2.3 Erstellen der Datenvektoren

Die bis hierher gemachten Vorüberlegungen sind für die Berechnung entscheidend, daher müssen die zur Berechnung genutzten Daten derart bearbeitet werden, dass sie die Ergebnisse der Überlegungen berücksichtigen. Dafür sind einige Schritte nötig, die durchweg im Programm *Matlab* durchgeführt werden. Die Ausgangsdaten liegen in *.txt*-Dateien vor. Diese müssen für das Einlesen in *MATLAB* bearbeitet werden. Falls unterschiedliche Abschnitte der Daten untersucht werden sollen, ist es möglich, die Eingabedateien durch Löschen der nicht verwendeten Daten anzupassen.

Die Daten des Absolutgravimeters stehen in 24 Spalten im Dokument. Insbesondere die Spalte "time" muss verändert werden, da MATLAB nicht in der gewünschten Weise in der Lage ist, die Uhrzeit in der Angabe hh:mm:ss zu verarbeiten. Daher wurden die Doppelpunkte entfernt und die getrennte Zeitangabe eingelesen. Das Einlesen übernimmt das Programm *FG52matlab.m*. Die Zeit wird in Sekunden ab dem Beginn der Messung des FG5 am 27. Januar 2010 11:49:00 Uhr angegeben. Alle nötigen Spalten sind als Vektoren in MATLAB nutzbar. Der Vektor der Schwere enthält den rekonstruierten Schweremesswert, dieser wird wie in Kapitel 3.2.1 mittels der Gleichung (3.3) erzeugt.

Die Daten des supraleitenden Gravimeters werden mit dem Programm *SG2matlab.m* eingelesen. Sie sind in neun Spalten angeordnet, die das Datum, die Uhrzeit, die beiden Schwereesignale der Sensoren G1 und G2 in Volt und einen nicht benutzten Wert enthalten. Bei der Erstellung des Zeitvektors ist darauf zu achten, dass der gleiche Bezugspunkt (27. Januar 2010 11:49:00 Uhr) genutzt wird, damit ein Vergleich des Zeitpunktes möglich ist. Die Schweredaten liegen bereits in der gewünschten Form vor und müssen nicht bearbeitet werden.

Liegen alle Daten in Vektorform vor, müssen im nächsten Schritt die passenden Wertepaare gefunden werden. Dabei wird jeder Messung des Absolutgravimeters der gleichzeitig gemessene oder ggf. zeitlich versetzte Wert des supraleitenden Gravimeters zugeordnet. Das Programm *vergleichssuche7.m* nutzt dazu den Zeitvektor des Absolutgravimeters und vergleicht jeden Eintrag mit dem Zeitvektor des supraleitenden Gravimeters, der sekundliche Daten enthält. Es kann garantiert jedem Wert des FG5 ein passender Wert des SG

$$t_{(FG5)} = t_{sg} \quad (3.4)$$

zugeordnet werden. Der Index des passenden Wertes wird gespeichert. Dies entspricht gleichzeitig aufgenommenen Werten. Wie in Kapitel 3.2.4 beschrieben fehlt zu gleichzeitig gemessenen Werten noch ein Zeitversatz von sieben Sekunden, der durch den Filter des supraleitenden Gravimeters verursacht wird. Daher werden zu jedem Index sieben addiert, so dass gilt:

$$t_{(FG5)} + 7 \text{ s} = t_{sg} \quad (3.5)$$

Das Programm *rausschreiben.m* erstellt die neuen Vektoren für die Daten des supraleitenden Gravimeters, die zu den Daten des Absolutgravimeters passen. Dazu nutzt *rausschreiben.m* die zuvor bestimmten Indizes.

Im letzten Schritt werden die bestimmten 25 Ausreißer mit dem Programm *ausreisserausreisser.m* mit dem gleichen Vorgehen wie im Kapitel 3.2.2 entfernt. Die so gewonnenen Vektoren bilden die Ausgangsdaten für alle weiteren Berechnungen. Das gesamte Vorgehen kann durch das Aufrufen des Programms *grav\_einlesen.m* ersetzt werden, das die oben genannten Programm in der gleichen Reihenfolge ausführt.

### 3.2.4 Filterwirkungen - Zeitversatz

Die Daten des supraleitenden Gravimeters durchlaufen vor der Datenerfassung einem vom Global Geodynamics Project (GGP) empfohlenen Filter, der die Vergleichbarkeit aller weltweiten Registrierungen erlaubt. Es handelt sich dabei um einen acht-poligen Besselfilter

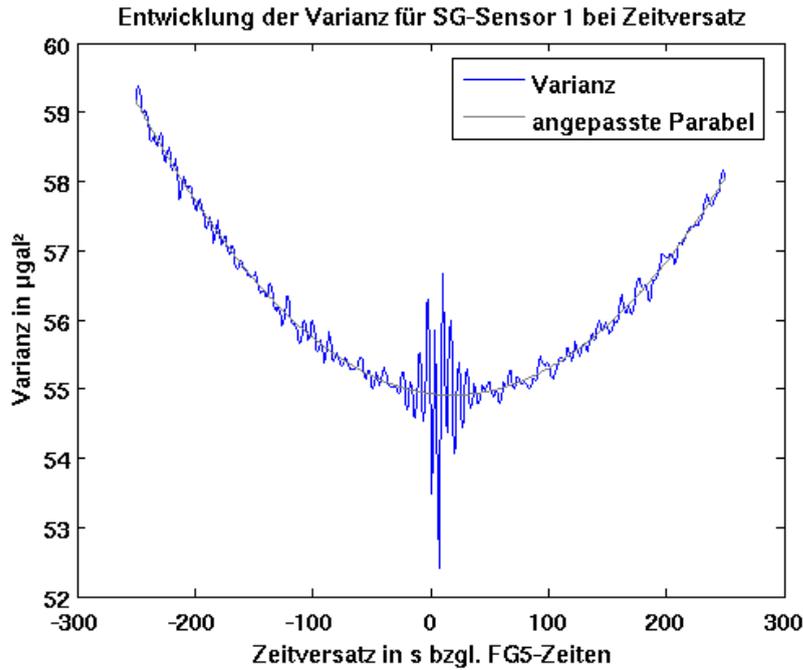


Abbildung 3.11: Entwicklung der Varianz des Regressionskoeffizienten für Sensor G1 bei Zeitversatz der Daten von -250s bis 250s

mit einer  $-3\text{dB}$  Eckfrequenz von  $0,0681\text{ Hz}$  (Forbriger, 2009). Dieser Filter hat eine Gruppenlaufzeit von nominell  $8,4\text{ s}$ . Dies kann dazu führen, dass den Messwerten des Absolutgravimeters Messwerte zugeordnet werden, die eigentlich vor dem Zeitpunkt der Absolutschweremessung aufgenommen wurden. Den Messwerten werden erst nach Durchlaufen des Filters mit dem aktuellen Zeitpunkt zu einem Wertepaar zusammengefasst. Um eine mögliche Differenz zu untersuchen werden mit dem Programm *zeitversatz\_automat.m* den Absolutschweremessungen systematisch Werte des supraleitenden Gravimeters zugeordnet, die zu Zeiten um die Messzeit aufgenommen wurden. Mit dem Zeitversatz  $t$  bedeutet das, dass einem Messwert des FG5 in jedem Durchgang ein Messwert des SG zugeordnet wird, der um einige Sekunden früher bzw. später registriert wurde.

Für die so gewonnenen neuen Datenpaare wird der Regressionskoeffizient, wie in Gleichung (2.38) beschrieben, bestimmt. Dies wird für alle Zeitversätze  $t$ , für die gilt  $-250\text{ s} \leq t \leq 250\text{ s}$ , wiederholt, ein Zeitbereich, der durch den eingelesenen Datensatz abgedeckt wird. Dabei entspricht ein positiver Zeitversatz einem um den angegebenen Zeitversatz später aufgenommenen Wert des SG bezüglich der Messung des FG5.

In Abbildung 3.11 ist die Varianz des Regressionskoeffizienten (Gleichung (2.42)) gegen den Zeitversatz aufgetragen. Die Varianz gibt die Güte der Anpassung an. Eine gute Anpassung hat eine geringe Varianz. Dies erklärt den globalen Verlauf der Werte in Form einer Parabel. Mit zunehmendem Zeitversatz muss die Anpassung schlechter werden, unabhängig von der Richtung des Versatzes, da die Signale nicht mehr kohärent sind. Da die Varianz ein quadratisches Maß, ist führt dies zur Ausbildung einer Parabelform.

Weiterhin auffällig ist die Unruhe der Varianz mit dem Zeitversatz. Die starken Ausschläge um den Ursprung nehmen zwar mit steigendem Zeitversatz ab, verschwinden aber nicht. Die Variationen um den Ursprung stammen vermutlich vom Einfluss der Meeresmikro-

seismik. Beide Messgeräte registrieren bei ihren Messungen die zu der Zeit aktive Meeresmikroseismik mit. Das FG5 sollte eigentlich durch die Superspring vom Einfluss der Meeresmikroseismik entkoppelt sein, allerdings ist das nicht vollständig möglich. Der Einfluss der Meeresmikroseismik auf die Messdaten ist daher beim SG deutlich größer. Zwar können die Geräte die Meeresmikroseismik auf Grund ihrer Abtastrate nicht darstellen, diese bildet nur ein kleines Störsignal, trotzdem hat sie eine große Wirkung auf das Residuum bei Zeitversatz. Die Meeresmikroseismik besitzt eine Periode zwischen 7 s und 14 s. Verschiebt man die Zeitreihe um einen solchen Betrag führt das zu einer positiven Überlagerung der Meeresmikroseismiksignale, die dann als großer Ausschlag zu sehen sind. Mit steigendem Zeitversatz ist die Kohärenz des Meeresmikroseismiksignals nicht mehr hoch genug, so dass die Interferenzeinflüsse deutlich kleiner werden.

Das globale Minimum liegt bei einem Zeitversatz von  $t = 7$  s mitten im Gebiet mit großem Meeresmikroseismikeinfluss. Deshalb ist nicht gesichert, dass dies wirklich der Zeitversatz mit der besten Anpassung ohne den Einfluss der Meeresmikroseismik wäre. Mit  $t = 7$  s liegt der Zeitversatz nahe an der nominellen Gruppenlaufzeit des GGP-Filters von 8,4 s. Die Auflösung des Verfahrens liegt bei 1 s, da der Zeitversatz in 1 s Schritten berechnet wurde. Das Ergebnis kann daher durchaus als Bestätigung der Einwirkung des GGP-Filters gesehen werden.

Die Abweichung von 1,4 s kann durch nicht berücksichtigte Effekte wie die Zuordnung des Messzeitpunktes des FG5 erklärt werden. Die Messung des FG5 dauert ungefähr 0,2 s, in der der Retroreflektor fällt. In diesem Zeitrahmen muss der Messwert einem genauen Zeitpunkt zugeordnet werden.

Ich habe darüber hinaus mit der Funktion *polyfit* des Programms MATLAB ein Polynom zweiter Ordnung an die Parabel angepasst. Für diese angepasste Parabel ergibt sich rechnerisch ein Minimum bei  $t = 21,4$  s (Abbildung 3.11). Dies ist mit den vermuteten Ursachen nicht in Einklang zu bringen. Die Abweichung von 14 s kann durch nicht berücksichtigte Effekte wie die Einwirkung der Übertragungsfunktion der Superspring am FG5 (Kapitel 2.4.2) erklärt werden. Um hier klare Aussagen zu treffen fehlen allerdings gezielte Experimente, die durch die komplexe Elektronik des Absolutgravimeters nur schwer durchzuführen wären. Die Übertragungsfunktion der Super-Spring muss so ausgelegt sein, dass sie insbesondere die Störeinflüsse der Meeresmikroseismik entkoppelt. Bei dem beobachteten Unterschied zwischen dem globalen Minimum der Daten und der angepassten Parabel könnte es sich um das Zusammenwirken des GGP-Filters im SG einerseits und den Übertragungseigenschaften der Superspring andererseits handeln.

Nach dieser Überlegung wähle ich eine Zeitdifferenz zwischen den beiden Daten von 7 s um die Signallaufzeitunterschiede auszugleichen. Dies soll die verzögernde Wirkung des GGP-Filters auf die Aufzeichnung der Messwerte des SG gegenüber denen des FG5 ausgleichen.

Das Verhalten des Regressionskoeffizienten bei verschiedenen Zeitversätzen ist in Abbildung 3.12 zu sehen.

Der Verlauf der Werte des Regressionskoeffizienten bei verschiedenen Zeitversatz ist auffällig, insbesondere das im Mittel monotone Ansteigen ab dem Zeitversatz von -100 s zu positiven Werten. Für Werte von ca.  $t = +10$  s ballen sich die Ergebnisse in unmittelbarer Nähe des ohne Zeitversatz berechneten Regressionskoeffizienten von  $-40,12 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ , der mit

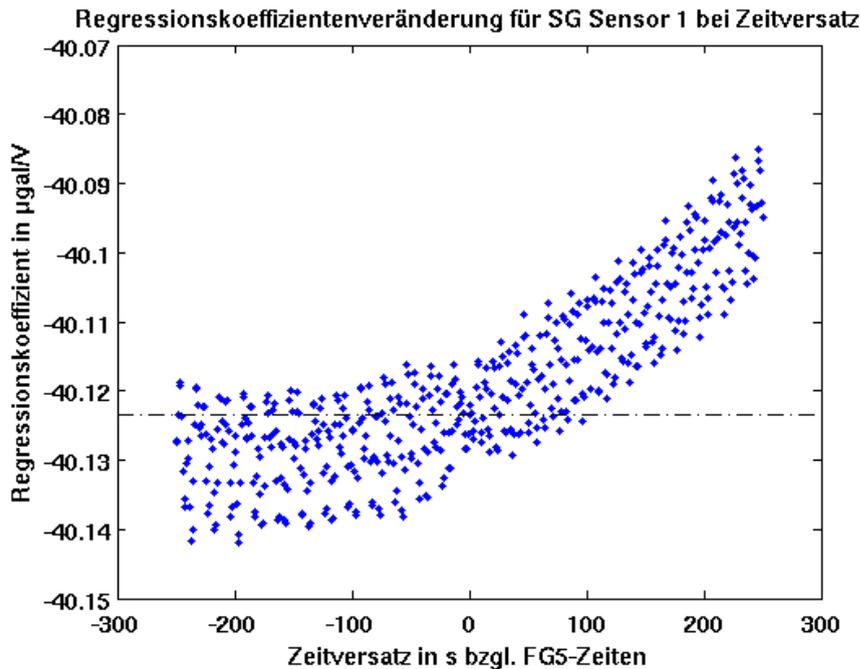
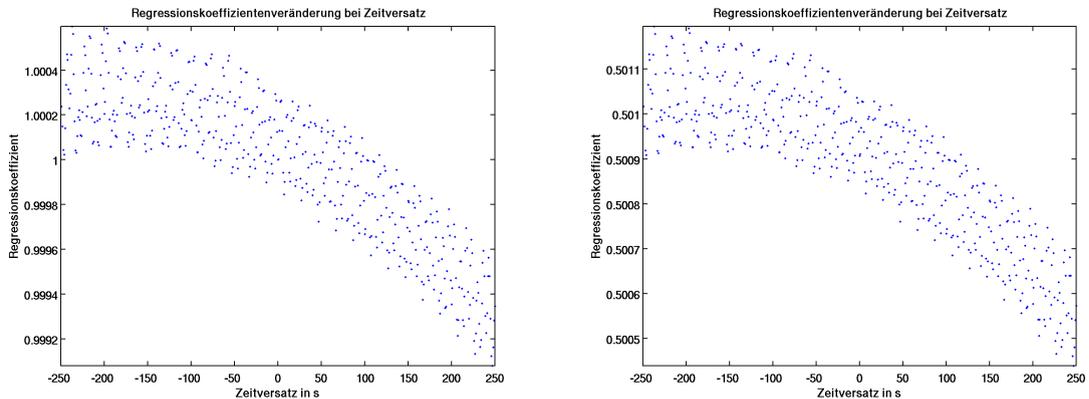


Abbildung 3.12: Entwicklung des Regressionskoeffizienten für Sensor G1 bei Zeitversatz der Daten von -250 s bis 250s

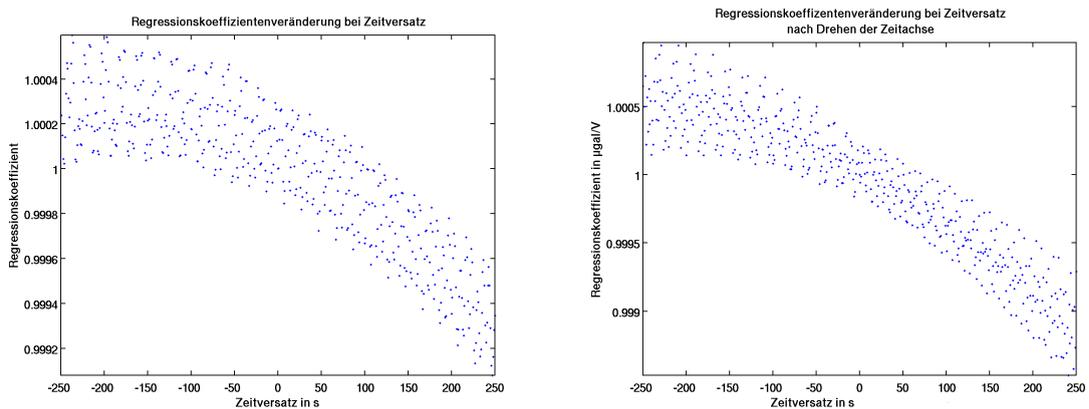
der strichpunktierten Linie angedeutet ist. Die Breite der Streuung unterscheidet sich dabei zwischen positivem und negativem Zeitversatz um ca. 45 %. Das Verhalten des Regressionskoeffizienten zeigt auch für andere verwendete Daten ein ähnliches Verhalten. Für kleine Zeitversätze ist aber bereits eine deutliche Streuung des Regressionskoeffizienten zu sehen. Die Werte der hier bestimmten Regressionskoeffizienten bereit für kleine Unterschiede im Zeitversatz um 0,5 ‰. Da der Zeitversatz nicht genau bestimmt werden konnte, ist hier ein systematischer Fehler zu erwarten. Dieser kann durch die Streuung von 0,5 ‰ abgeschätzt werden.

In den Abbildungen 3.13 a und b wird eine ähnliche Vorgehensweise gewählt. Hier werden die Daten des supraleitenden Gravimeters mit sich selbst verglichen. Ziel dieser Untersuchung ist die Auswirkungen unterschiedlicher Vorzeichenkonventionen und der Gezeitenhubänderung auf die Entwicklung des Regressionskoeffizienten bei Zeitversatz zu klären. Der Regressionskoeffizient müsste beim Vergleich der selben Daten  $m^* = 1$  sein, bzw. beim Vergleich der beiden Sensoren G1 und G2 ungefähr  $m^* \approx 0,5$  sein. Bei unterschiedlichen Vorzeichen, wie sie auch bei den Daten des supraleitenden Gravimeters im Vergleich zum Absolutgravimeter vorliegen (Kapitel 3.2.1), steigt der Wert des Regressionskoeffizienten zu positivem Zeitversatz an. Besonders interessant ist die Streuung des Regressionskoeffizienten bei kleinen Zeitversätzen. Dieser erlaubt eine Abschätzung der Ungenauigkeit des Regressionskoeffizienten bei Nichtberücksichtigung des Zeitversatzes zwischen den Daten. In Abbildung 3.14 ist ein weiterer Vergleich gezeigt. Dieser zeigt in Abbildung 3.14 (a) die eben beschriebenen Daten mit der Verschiebung der beiden Zeitreihen des Sensors G1 mit abnehmendem Gezeitenhub. Für Abbildung 3.14 (b) wurde aber der Zeitstrahl gedreht, die Daten also antichronologisch geordnet. Damit simuliere ich ein Ansteigen des Gezeitenhubs über die Messdauer. Bei Vergleich beider Abbildungen ist qualitativ kein Unterschied im



(a) Betrachtung der Messwerte von Sensor G1 und Verschiebung der Messwerte von Sensor G1 (b) Betrachtung der Messwerte von Sensor G2 und Verschiebung der Messwerte von Sensor G1

Abbildung 3.13: Vergleich der Ergebnisse der Regressionskoeffizientenentwicklung bei Zeitversatz mit unterschiedlich bearbeiteten Daten der beiden Sensoren des supraleitenden Gravimeters zur Kontrolle des Einflusses des Vorzeichens bzw. der Messung.

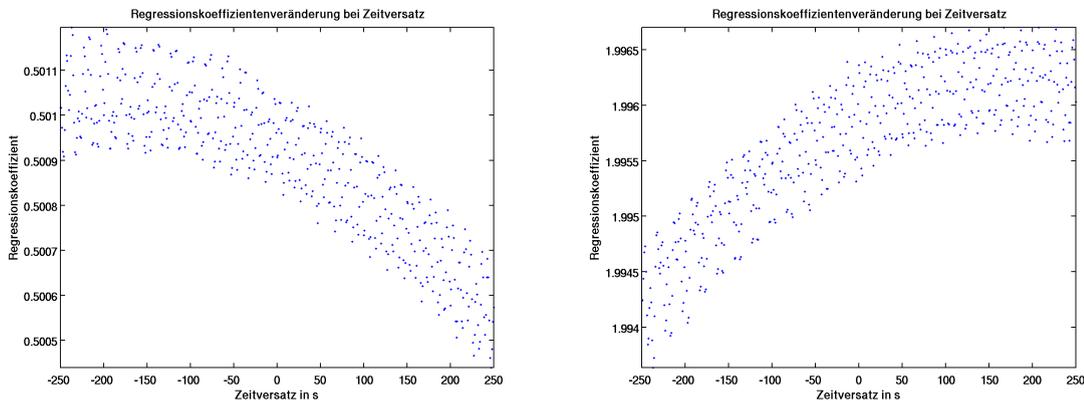


(a) Betrachtung der Messwerte von Sensor G1 und Verschiebung der Messwerte von Sensor G1 (b) Betrachtung der zeitlich gedrehten Messwerte von Sensor G1 und Verschiebung der selben Messwerte

Abbildung 3.14: Vergleich der Ergebnisse der Regressionskoeffizienten-Entwicklung bei Zeitversatz mit unterschiedlich bearbeiteten Daten des Sensors G1, dabei wurde die Daten einmal in der Originalzeitreihe und einmal umgedreht in antichronologischer Ordnung benutzt.

Verlauf des Regressionskoeffizienten mit wachsendem Zeitversatz zu erkennen. Demnach ist das unterschiedliche Verhalten der Amplitude für die Entwicklung des Regressionskoeffizienten bei Zeitversatz nicht verantwortlich.

Die beschriebenen Effekte werden nicht von den Daten hervorgerufen. Es handelt sich vielmehr um mathematische Phänomene. Least-squares Verfahren neigen dazu, bei Daten mit schlechter Übereinstimmung kleine Regressionskoeffizienten (Gleichung 2.38) zu wählen, um das Residuum (Gleichung (2.30)) zu minimieren. Die Streuung hängt von der Wahl der Daten und des Modells ab. Vertauscht man beide, erhält man leicht veränderte Regressionskoeffizienten.



(a) Betrachtung der Messwerte von Sensor G1 und Verschiebung der Messwerte von Sensor G2 (b) Betrachtung bei Vertauschung der Modell- und Datenvektoren und damit Anpassung von G2 an G1 bei Zeitversatz.

Abbildung 3.15: Vergleich der Ergebnisse der Regressionskoeffizienten-Entwicklung bei Zeitversatz bei unterschiedlicher Wahl des Modell und Datenvektors.

Dabei unterschieden sich die maximale Streuungen um 0,2 ‰. Die Ursachen hierfür werden im folgenden Kapitel 3.3.1 betrachtet.

### 3.3 Bestimmung des Regressionskoeffizienten

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie der Kalibrierfaktor als Regressionskoeffizient berechnet wird.

#### 3.3.1 Wahl des Modell- und Datenvektors

Die in Kapitel 2.6.1 vorgestellte Methode der kleinsten Quadrate kann eigentlich für eine beliebige Wahl von Datenvektoren und Modellvektoren berechnet werden. Daher soll jetzt gezeigt werden, welche Wahl genauere Ergebnisse verspricht. Bereits in Kapitel 2.6.1 wird vermutet, dass die Wahl des supraleitenden Gravimeters als Modell besser ist. In diesem Abschnitt will ich dies ausgehend von Forbriger (2005) untersuchen. Der Regressionskoeffizient

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot G_i \cdot d_i}{\sum_{k=1}^n w_k \cdot G_k^2} \quad (3.6)$$

ist abhängig von den Modelldaten und dem Datenvektor. In diesem Fall bilden die Daten des SG den Modellvektor und die des FG5 den Datenvektor. Man kann sich die Daten des

SG

$$G_i = Gg_i + o_i \quad (3.7)$$

und die des FG5

$$d_i = Ug_i + p_i \quad (3.8)$$

als aus dem einem tatsächlichen Signal  $g_i$  mit individuellen Vorfaktoren  $G$  und  $U$  und einer Rauschkomponente  $o_i$  bzw.  $p_i$  zusammengesetzten Signal vorstellen. Dabei ist zu beachten, dass Rauschen keine Signalanteile enthalten darf, da es ansonsten kein reines Rauschen ist. D.h. es muss

$$\sum_i g_i o_i = 0 \quad (3.9)$$

und

$$\sum_i g_i p_i = 0 \quad (3.10)$$

gelten. Außerdem sollen auch die Rauschkomponenten orthogonal sein

$$\sum_i p_i o_i = 0. \quad (3.11)$$

Für einen die Ableitung des Residuenquadrates nach dem gesuchten Koeffizienten (Gleichung 2.32) gilt dann im ungewichteten Fall

$$\sum_i -2d_i(G_i - md_i) = 0. \quad (3.12)$$

damit gilt für den Regressionskoeffizienten

$$m = \frac{\sum_i G_i d_i}{\sum_i d_i^2}. \quad (3.13)$$

Setzt man die Gleichungen (3.7) und (3.8) in Gleichung (3.13) ein erhält man mit den Rauschsummen  $S^2 = \sum_i g_i$  und  $O^2 = \sum_i o_i$

$$m = \frac{G}{U} \frac{1}{1 + \frac{O^2}{U^2 S^2}}. \quad (3.14)$$

Damit geht die Summe des Rauschens mit  $\frac{O^2}{G^2 S^2}$  ein.

Analog ist diese Betrachtung auch für die umgekehrte Anpassung, also das Vertauschen von Daten- und Modellvektor, möglich. Hierfür erhält man

$$m = \frac{U}{G} \frac{1}{1 + \frac{P^2}{G^2 S^2}}. \quad (3.15)$$

mit einer Abhängigkeit vom Rauschen von  $\frac{P^2}{G^2 S^2}$ . Das Ergebnis der Regression ist also vom Rauschen abhängig. Wenig Rauschen ergibt eine bessere Regression.

Betrachtet man die Signalenergie, also die Summe des quadratischen Signals, ergibt sich

$$\sum_i d_i^2 = U^2 \sum_i g_i^2 + 2U \sum_i g_i p_i + \sum_i p_i^2 \text{ mit (3.10) } = U^2 S^2 + P^2. \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich mit  $U^2 S^2 = P^2$

$$m^* = \frac{G}{2U} \quad (3.17)$$

und für das Residuum

$$g_i - m^* \cdot d_i = \frac{G}{2} g_i + o_i - \frac{G}{2U} p_i. \quad (3.18)$$

Im Gegensatz dazu ergibt sich für die andere Wahl der Vektoren und ein verschwindendes Rauschen  $N^2 = 0$  ein Residuum von

$$d_i - m g_i = p_i, \quad (3.19)$$

das nach Gleichung (3.15) keine Signalanteile mehr enthält.

Das Ergebnis zeigt, dass die Genauigkeit stark von der richtigen Wahl von Modell- und Datenvektor abhängt. Dabei sollte der Regressionskoeffizient stets vor dem weniger ver-rauschten Signal stehen. In unserem Fall heißt das, dass die SG Daten den Modellvektor und die FG5 Daten den Datenvektor bilden sollen. Die bereits vermutete Wahl ist damit bestätigt.

Zur Veranschaulichung sind in Tabelle 3.1 die Ergebnisse für die unterschiedlichen Anpassungsrichtungen angegeben.

Modell	Daten	Regressionskoeffizient in $\frac{\mu gal}{V}$	Varianz des Residuums der Regression in $\mu gal$
SG G1	FG5	-40,06	52,39
FG5	SG G1	-40,49 (invers)	52,96
SG G2	FG5	-79,99	52,10
FG5	SG G2	-80,65 (invers)	52,41

Tabelle 3.1: Anpassungsrichtung bei der Methode der kleinsten Quadrate. Die Messdaten von SG Sensor G1 und G2 und FG5 wurden abwechselnd als Modell- und Datenvektor benutzt. Zum Vergleich der Güte der Anpassung dient der RMS des prozentualen Residuums jedes einzelnen Messwertes.

Es wurden für beide Sensoren des SG jeweils beide möglichen Wahlen von Daten- und Modellvektor berechnet. Der Regressionskoeffizient wurde im Falle des FG5 als Modellvektor invers angegeben um einen besseren Vergleich zu gewährleisten. Die Residuen der Regression wurden mit den für diese Anpassung berechneten Regressionskoeffizienten in  $\mu gal$  umgerechnet und die Varianz berechnet. Es zeigt sich, dass die Berechnungen mit dem FG5 als Modell beide Male eine höhere Varianz und damit eine ungenauere Bestimmung des Regressionskoeffizienten aufweisen.

### 3.3.2 Berechnung

Vor der eigentlichen Berechnung muss der Mittelwert aus den Daten entfernt werden. Ist das in (2.38) beschriebene Verhältnis zwischen den Daten des FG5 und des SG nicht durch eine Mittelwertkorrektur bearbeitet worden, wird der berechnete Kalibrierfaktor systematisch verändert.

Das Programm *leastsquare\_weighted\_V3.m* entfernt daher vor der eigentlichen Berechnung nach Gleichung (2.38) den Mittelwert aus den Daten des FG5 und den Daten der beiden Sensoren des SG. Als Ergebnis erhält man so einen Regressionskoeffizienten und die Residuen der einzelnen Wertpaare (Abbildung 3.16). Der Mittelwert des Residuums

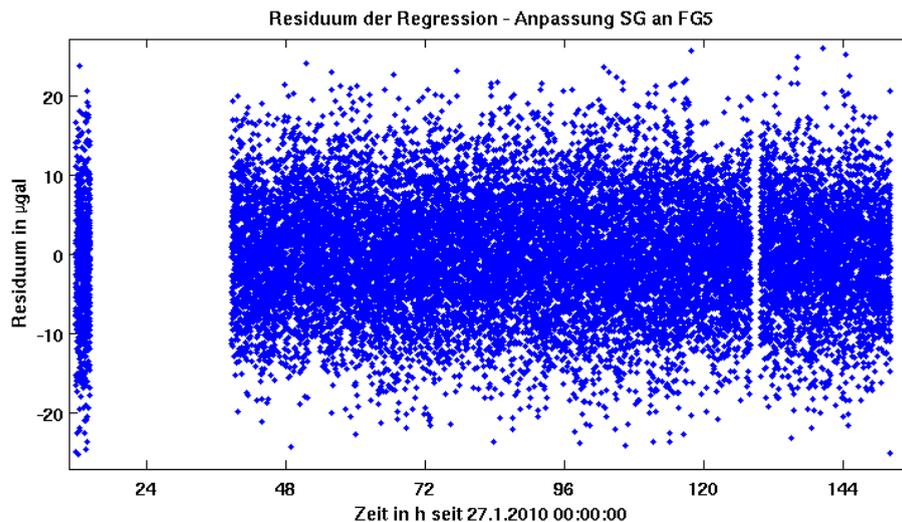


Abbildung 3.16: Residuum der Regression bei Anpassung der SG-Daten an die das FG5. Es ist weder ein Trend noch ein verbelibender Mittelwert in den Daten zu erkennen.

der Regression bei Anpassung der Daten des Sensors G1 des SG an die Daten des FG5 ist  $-1.31 \cdot 10^{-14} \mu\text{gal}$ . Damit ist das Residuum nahezu mittelwertfrei. Der Trend der Residuen der Regression wurde durch eine Geradenanpassung mit der Funktion *polyfit* in MATLAB berechnet. Es ergibt sich eine Geradensteigung und damit ein Trend in den Daten von  $-8,19 \cdot 10^{-7} \frac{\mu\text{gal}}{\text{s}}$ . Das Residuum enthält also einen Trend, dieser ist aber gering. Die Residuen können als normalverteilt angesehen werden, dies erlaubt sie mit statistischen Methoden zu untersuchen.

### 3.3.3 Bestimmte Regressionskoeffizienten

Für den gesamten Datensatz mit allen, außer den als Ausreißer betrachteten Werten ergibt mit dieser Rechnung für den Sensor G1 ein Wert von  $-40,06 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$  (Abbildung 3.17) und für den zweiten, leichteren Sensor G2  $-79,99 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ .

Auffällig sind die Regressionskoeffizienten der beiden Sensoren des SG, denn sie unterscheiden sich ziemlich genau um den Faktor 2, obwohl sie sich von ihrer Masse deutlich mehr unterscheiden. Das spricht dafür, dass die Tragspulen des schweren Sensors dementsprechend angepasst wurden.

Die Abschätzung der Genauigkeit wird im Kapitel 3.4 betrachtet. Für die meisten weiteren Berechnungen habe ich die ersten 747 Werte vor der großen Datenlücke (Kapitel 3.1) nicht berücksichtigt. Dies soll sicher stellen, dass die Daten keinen Versätze durch den Eingriff in die Messung aufweisen. Dieses Ergebnis und die abgeschätzten Genauigkeiten sind in Kapitel 4.1 zu finden.

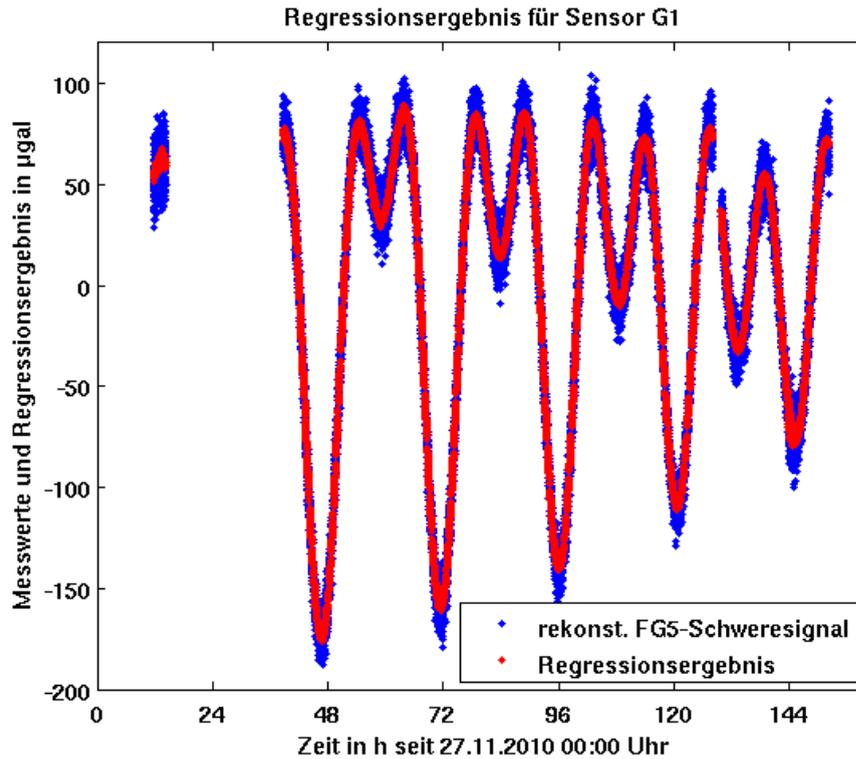


Abbildung 3.17: Ergebnis der Regression. Vergleich der Daten des FG5 (blau) mit dem dem Ergebnis der Regression, dargestellt durch die mit dem Regressionskoeffizient multiplizierten SG-Daten des Sensors G1.

### 3.4 Abschätzen der Genauigkeit der Kalibrierung

Die Genauigkeit der in den vorherigen Abschnitten dieses Kapitels beschriebenen Kalibrierung soll in diesem Abschnitt angegeben werden. Die Genauigkeit wird hierbei durch die Standardabweichung beschrieben. Im folgenden Kapitel werden dazu die hierfür benutzten Überlegungen, Rechnungen und Programme kurz erläutert.

#### 3.4.1 Genauigkeitsbestimmung mit der Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

Die Grundlagen der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung wurden bereits in Kapitel 2.6.2 beschrieben. Es bestehen mehrere Möglichkeiten, den primären Fehler der Messreihen und Messdaten abzuschätzen. Die einzelnen primären Fehler wurden bereits in Kapitel 2.6.2 eingeführt. Im Folgenden wird daher nur auf die Ergebnisse eingegangen.

- Individuelle Sigawerte

Diese Methode wird im Folgenden auch als Fortpflanzung (ind. Sigma) bezeichnet. Als Standardabweichung erhält man mit dieser Methode für die Daten ab der ersten Lücke für Sensor G1  $-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,15 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  und bei Verwendung der Daten des Sensors G2  $-80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,29 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$ . Bezogen auf einen Regressionskoeffizient von  $-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$ , bedeutet das einen relativen Fehler von 3,7 ‰.

- Einheitlicher Wert aus der Varianz der Sigawerte

Wenn ich die RMS-Werte der  $\sigma_{FG5}$ -Werte von  $35,99 \mu\text{gal}$  (Fortpflanzung (RMS Sigma)) verwende, erhalte ich eine Standardabweichung von  $-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,17 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  für

den schwereren Sensor G1 bzw.  $-80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,32 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  für Sensor G2. Der relative Fehler liegt bei 4,0 ‰. Dieser Wert liegt nahe beim relativen Fehler, der mit den individuellen Sigawerten bestimmt wurde. Da sich diese beiden Betrachtungen nur durch Abweichungen vom quadratischen Mittelwert unterscheiden, ist dieses Ergebnis zu erwarten.

- Einheitlicher Wert aus dem Residuum der Regression

Als Standardabweichung erhält man bei Nutzung des RMS-Wertes der individuellen Fehlerwerte  $-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,03 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  für Sensor G1 bzw.  $-80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,06 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  für Sensor G2. Das entspricht einem relativen Fehler, von 0,8 ‰. Durch die Verwendung der Residuen ergeben sich hier deutlich andere Resultate. Dieses Ergebnis unterscheidet sich von den beiden anderen Realisierungen um einen Faktor 5. Dies wird im Kapitel 4 unter dem Namen Fortpflanzung (RMS Residuum) ein Thema sein.

### 3.4.2 Statistische Tests

Die in den Kapiteln 2.6.3 bis 2.6.5 theoretisch eingeführten Methoden habe ich in einigen MATLAB-Programmen programmiert und mit diesen Programmen Tests durchgeführt. Diese Programme wurden im Laufe der Diplomarbeit stetig verbessert und ermöglichen durch die schnellere Laufzeiten jetzt die schnelle Durchführung von Tests.

- Bootstrap

Mit dem Programm *bootstrap\_nv.m* kann ich den Bootstraptest durchführen. Es erzeugt neue Vektoren, die gleich groß wie die Datenvektoren sind. Ein Zufallsgenerator auf Basis der *randi* Funktion des Programmpaketes MATLAB erzeugt die nötigen Zufallszahlen, die den Indizes der Werte entsprechen, die in den neuen Vektor kopiert werden. Der so entstandene Vektor dient als Datenvektor mit dem das Programm *leastsquare\_weighted\_V3.m* den Regressionskoeffizienten berechnet. Dies wird 10.000 Mal wiederholt. In jedem Durchgang wird der Regressionskoeffizient und die Varianz des Residuums gespeichert. Die abgeschätzte Standardabweichung kann dann mit Gleichung (2.47) berechnet werden. Die Standardabweichung liegt in diesem Fall bei  $-40,06 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,03 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  bzw.  $-79,99 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,06 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$ . Der relative Fehler liegt dann bei 0,8 ‰. Er entspricht damit dem Ergebnis für die Fehlerfortpflanzung mit dem RMS aus den Residuen der Regression.

- Jackknife

Für die Berechnungen des Jackknife Tests wurde das Programm *jackknife\_1.m* geschrieben. Es erzeugt die neuen Vektoren, die um ein Element kleiner sind als die Datenvektoren. Der Test wird so oft wiederholt, wie es Elemente im ursprünglichen Datenvektor gibt. In jedem Test wird der zuvor entfernte Messwert wieder eingefügt und der nächste Messwert entfernt. Für jeden Versuch werden der Regressionskoeffizient und die Varianz des Residuums gespeichert. Mit Formel (2.49) lässt sich die Standardabweichung zu  $-40,06 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,03 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  bzw.  $-79,99 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}} \pm 0,06 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  bestimmen. Auch für diesen Test ergibt sich ein relativer Fehler von 0,8 ‰. Damit ist auch in diesem Fall der Wert gleich wie bei der Fehlerfortpflanzung mit dem RMS aus den Residuen der Regression und dem Bootstrap-Test. All diesen Berechnungen liegt der

drop-scatter als primäres Fehlermaß zu Grunde.

Sowohl der Jackknife- als auch der Bootstrap-Test bestätigen damit die Annahme, dass die Residuum der Regression aus einem statistischen Prozess hervorgehen, da sie auf ein ähnliches Ergebnis wie die formale Fehlerfortpflanzung kommen.

- Monte-Carlo-Test

Der Monte-Carlo Test kann mit dem Programm *montecarlo\_randn.m* durchgeführt werden. Das Programm erzeugt für jeden Messwert einen individuellen Faktor *mc* für die Gleichung (2.50) mit der MATLAB Funktion *randn*. Damit wird der Einfluss der durch das FG5 abgeschätzten Fehler der Messdaten auf das Ergebnis untersucht. Fasst man die  $\sigma_{FG5}$ -Daten als Standardabweichung der Messungen auf, so wird in diesem Test durch zufällige Gewichtung des Wertes eine leicht veränderte, aber im Rahmen der Standardabweichung mögliche, Messung simuliert. Dazu ist es nötig, das *mc* normalverteilt und mittelwertfrei mit  $\sigma^2 = 1$  ist.

Der Test wird 10.000 Mal wiederholt und jedes Mal der Regressionskoeffizient und die Varianz des Residuums gespeichert. Die Standardabweichung des Regressionskoeffizienten berechnet man mit der Formel (2.52). Damit erhalte ich für die Standardabweichung  $-40,06 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,14 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$  bzw.  $-79,99 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,28 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ . Der relative Fehler liegt bei 3,7 ‰ und damit im Bereich der relativen Fehler der Fehlerfortpflanzungen, die den  $\sigma_{FG5}$ -Wert nutzen. Dies ist auf Grund der Nutzung des selben primären Fehlermaßes verständlich. Daher wird der Test im folgenden auch Monte Carlo (Sigma) genannt.

## 4. Diskussion

In Kapitel 3 wurde der Regressionskoeffizient berechnet und die Methoden zur Abschätzung der Genauigkeit beschrieben. Im folgenden Kapitel sollen die Ergebnisse dieser Methoden diskutiert werden. Dazu zählen unterschiedliche Ergebnisse bei Verwendung unterschiedlich vieler Daten, die Auswirkung der verschiedenen Schätzungen des primären Fehlerwertes und eine Abschätzung der nötigen Messdauer. Als Ergebnis soll neben einer Angabe der Genauigkeit der bereits durchgeführten Messung auch eine Abschätzung der nötigen Dauer einer Kalibriermessung stehen.

### 4.1 Ergebnisse für verschiedene Datensegmente

Für den Regressionskoeffizient bei Verschiebung um 7 s und Verwendung aller Daten erhält man nach Gleichung (2.38) die Ergebnisse in Tabelle 4.1. Es werden die Ergebnisse für beide Sensoren G1 und G2 angegeben. Die Schätzungen der Standardabweichung aus Kapitel 3.4 sind in Tabelle 4.2 zu finden. Dabei sind die Ergebnisse in zwei Gruppen sortiert nach ihrer Standardabweichung angegeben.

Der gesamte Datensatz weist eine große Datenlücke von über einem Tag auf. Für die folgenden Untersuchungen wurden die 747 Werte vor dieser Datenlücke (Kapitel 3.1) entfernt, es werden nur die Daten nach dieser Lücke für die Berechnungen genutzt. Nach dieser Lücke wurde nicht mehr an der Messapparatur gearbeitet, dies schließt äußere Einflüsse in den weiteren Messungen aus. Diese Ergebnisse findet man in den Tabellen 4.3 und 4.4.

Auch nach der ersten großen Lücke gibt es noch eine kleine Datenlücke (Kapitel 3.1), deren Ursache unklar ist. Verwendet man nur die Daten zwischen den beiden Lücken, so erhält man für den Regressionskoeffizienten die Ergebnisse in Tabelle 4.5 und für die Standardabweichungsberechnungen die Ergebnisse in Tabelle 4.6

Im folgenden Abschnitt werden die in den Tabellen 4.1 bis 4.6 dargestellten Werte diskutiert.

Sensor	Regressionskoeff. in $\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$	$\sigma$ des Residuums in $\mu\text{gal}$	RMS $\sigma_{(FG5)_i}$ in $\mu\text{gal}$
G1	-40,06	7,24	35,99
G2	-79,99	7,22	35,99

Tabelle 4.1: Regressionskoeffizienten, Standardabweichung des Residuums der Regression und RMS der verwendeten  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte für beide Sensoren des SG bei Verwendung des kompletten Datensatzes

Berechnungen	Standardabweichung in $\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$		relativer Fehler
	Sensor G1	Sensor G2	
Fortpflanzung(ind. Sigma)	0,14	0,29	3,7 ‰
Fortpflanzung(RMS Sigma)	0,16	0,38	4,0 ‰
Monte Carlo (Sigma)	0,14	0,28	3,7 ‰
Fortpflanzung (RMS Residuum)	0,031	0,063	0,79 ‰
Jackknife	0,030	0,059	0,74 ‰
Bootstrap	0,030	0,060	0,75 ‰

Tabelle 4.2: Zusammenfassung der Ergebnisse der Abschätzung der Genauigkeit der Bestimmung des Regressionskoeffizienten für den kompletten Datensatz

#### 4.1.1 Vergleich der Ergebnisse verschiedener Datensegmente

Vergleicht man die Ergebnisse der Berechnungen für die drei verschiedenen vorgestellten Arten aus den Daten auszuwählen (volle Daten, Daten nach der ersten Lücke, Daten zwischen den Lücken) sind sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede zwischen den ermittelten Werten erkennbar.

Der bestimmte Regressionskoeffizient ist bei der Verwendung aller Daten um 1,5 ‰ kleiner als bei den beiden anderen Datenabschnitten (Abbildung 4.1).

Es bilden sich für alle Datenabschnitte immer zwei Gruppen mit unterschiedlich großen Fehlerabschätzungen. Die erste Gruppe bilden die Ergebnisse, die auf der Fehlerabschätzung des FG5 beruhen. Diese erhält man aus den in den Messdaten enthaltenen Sigma-Spalte ( $\sigma_{(FG5)_i}$ ). In diese Gruppe fallen die Berechnung der Fehlerfortpflanzung mit den individuellen  $\sigma_{(FG5)_i}$ -Werten der einzelnen Fallversuche, die Fehlerfortpflanzungsberechnung mit einer für allen einheitlich gewählten Standardabweichung der Sigawerte und der Monte-Carlo-Test mit zufälligem Rauschen mit einer auf die  $\sigma_{(FG5)}$ -Wert normierten Stärke. Diese Berechnungen und Tests ergeben durchweg den größten Fehler. Dabei liefert die Fehlerfortpflanzung mittels der Standardabweichung der Sigma-Werte nur für den vollen Datensatz den geringsten Fehler, ansonsten schätzen die beiden anderen, sich ähnelnden Verfahren den Fehler kleiner ein. Wobei die Variation nur in der zweiten signifikanten Stelle auftritt. Mit den beiden statistischen Test Jackknifing und Bootstrapping sowie der Fehlerfortpflanzung mit dem RMS des Residuums bestimmt man stets nahe beieinander liegende Werte. Dies ist im gemeinsamen primären Fehlermaß begründet, diese Methoden nutzen dafür den drop-scatter, die Streuung der Messwerte der einzelnen Fallversuch des FG5. Für die Tests werden in beiden Fällen die Daten nach der Berechnung des Regressionskoeffizienten verwendet. Diese Daten wurden bereits bearbeitet, u.a. wurde der Mittelwert für die Berechnung des Regressionskoeffizienten entfernt. Damit werden auch messbedingte Abweichungen, also systematische Fehler in der Wegbestimmung, die zu einem Offset der

Sensor	Regressionskoeff. in $\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$	$\sigma$ des Residuums in $\mu\text{gal}$	RMS $\sigma_{(FG5)i}$ in $\mu\text{gal}$
G1	-40, 11	7, 30	36, 27
G2	-80, 07	7, 29	36, 27

Tabelle 4.3: Regressionskoeffizienten, Standardabweichung des Residuums der Regression und RMS der verwendeten  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte für beide Sensoren des SG bei Verwendung der Daten nach der ersten Lücke

Berechnungen	Standardabweichung in $\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$		relativer Fehler
	Sensor G1	Sensor G2	
Fortpflanzung(ind. Sigma)	0, 15	0, 29	3, 7 ‰
Fortpflanzung(RMS Sigma)	0, 17	0, 32	4, 0 ‰
Monte Carlo (Sigma)	0, 15	0, 30	3, 7 ‰
Fortpflanzung (RMS Residuum)	0, 032	0, 065	0, 81 ‰
Jackknife	0, 031	0, 061	0, 77 ‰
Bootstrap	0, 031	0, 061	0, 76 ‰

Tabelle 4.4: Zusammenfassung der Ergebnisse der Abschätzung der Genauigkeit der Bestimmung des Regressionskoeffizienten für die Daten nach der ersten Datenlücke

Sensor	Regressionskoeff. in $\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$	$\sigma$ des Residuums in $\mu\text{gal}$	RMS $\sigma_{(FG5)i}$ in $\mu\text{gal}$
G1	-40, 12	7, 19	36, 41
G2	-80, 10	7, 16	36, 41

Tabelle 4.5: Regressionskoeffizienten, Standardabweichung des Residuums der Regression und RMS der verwendeten  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte für beide Sensoren des SG bei Verwendung der Daten zwischen den Lücken

Berechnungen	Standardabweichung in $\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$		relativer Fehler
	Sensor G1	Sensor G2	
Fortpflanzung(ind. Sigma)	0, 15	0, 30	3, 8 ‰
Fortpflanzung(RMS Sigma)	0, 17	0, 34	4, 2 ‰
Monte Carlo (Sigma)	0, 17	0, 30	4, 2 ‰
Fortpflanzung (RMS Residuum)	0, 033	0, 066	0, 83 ‰
Jackknife	0, 031	0, 062	0, 78 ‰
Bootstrap	0, 031	0, 062	0, 78 ‰

Tabelle 4.6: Zusammenfassung der Ergebnisse der Abschätzung der Genauigkeit der Bestimmung des Regressionskoeffizienten für die Daten zwischen den Datenlücken

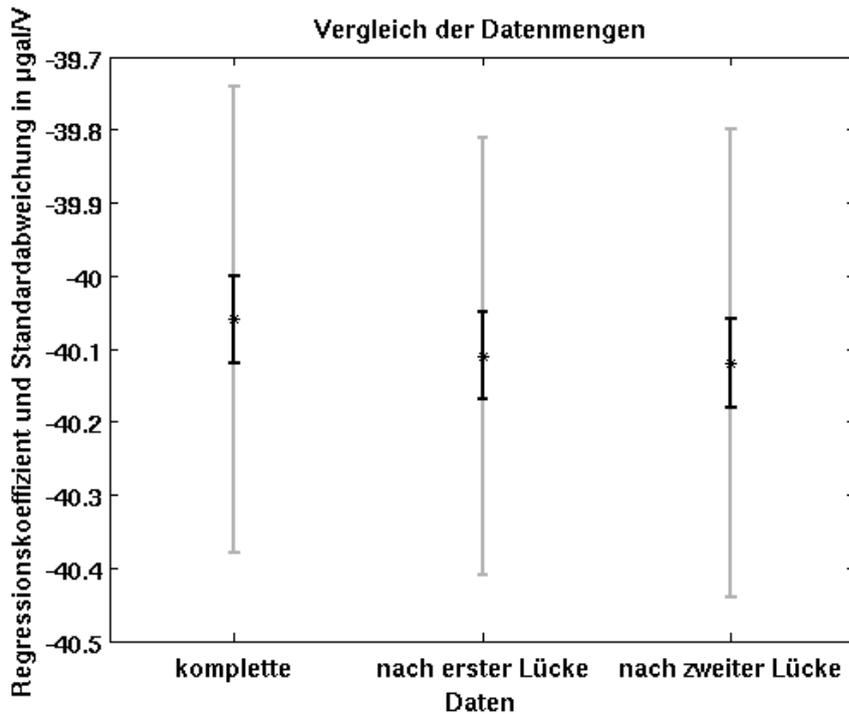
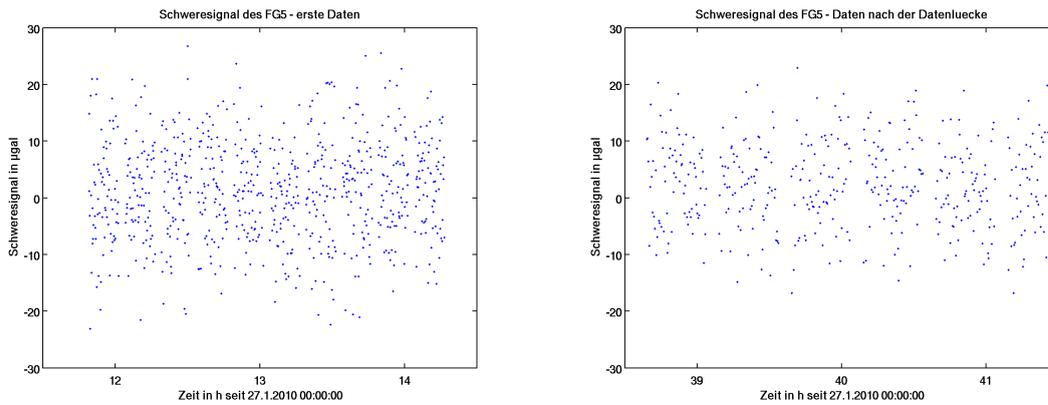


Abbildung 4.1: Vergleich der bestimmten Regressionskoeffizienten und deren Standardabweichung für die verschiedenen Datenmengen in Kapitel 4.1. Es ist sowohl ein Mittelwert für die Standardabweichungen, die die innere Genauigkeit als primäres Fehlermaß nutzen (schwarz), als auch für die, die den  $\sigma_{(FG5)}$ -Wert nutzen (grau), abgebildet.

Fallparabel vom tatsächlichen Mittelwert führen würden, entfernt. Mit diesen Tests erhält man in diesem Fall immer die geringste Fehlerschätzung. Die Standardabweichung liegt fast durchweg um einen Faktor 5 niedriger als bei den Berechnungen, die die Sigma-Werte nutzen (Abbildung 4.1). Als relativen Fehler erhält man für alle Datenmengen Werte um 0,8 %. Die verwendete Datenmenge hat in diesem Fall kaum einen Einfluss, da die verwendeten Daten in jedem Fall mindestens dreieinhalb Tage umfassen. Vielmehr scheinen die Arbeiten am Gerät einen deutlichen Einfluss auf die erzielten Ergebnisse zu haben. Eine Verbesserung der Justierung des Lasers sollte sich in einer Verringerung des drop-scatters auswirken, dies führte zur ersten, großen Datenlücke. In Abbildung 4.2 wird deutlich, dass sich der drop-scatter, also die Streuung der Messwerte, trotz der Laserjustierung kaum ändert. Dabei ist zu beachten, dass vor der Datenlücke noch jede 10 s ein Messwert bestimmt wird. Die Varianz der Messwerte liegt für die mittelwertfreien Daten vor der Lücke bei  $75,94 \left(\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}\right)^2$ . Für den gleichen Zeitraum nach der Lücke bei  $54,48 \left(\frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}\right)^2$ , dies entspricht einem Rückgang um 28,2 %. Mit diesem Rückgang ist ein Ausschluss der ersten 747 Werte aus der Berechnung des Kalibrierfaktors begründbar.

Der bestimmte Regressionskoeffizient unterscheidet sich um 1,5 %. Die beste Anpassung mit der geringsten Standardabweichung des Residuums erhält man für die Daten zwischen den Lücken, die höchste Standardabweichung besitzt das Ergebnis für die Daten nach der ersten Lücke. Allerdings sind die Unterschiede hier nur gering, weshalb ich im weiteren mit den Daten nach der ersten Lücke arbeite, um möglichst viele Messwerte zu benutzen, die



(a) Drop-scatter der ersten 747 Messwerte. Aus den reduzierten Schweredaten wurde der Mittelwert von  $980769902 \mu\text{gal}$  entfernt. Das Messintervall beträgt 10 s.

(b) Drop-scatter der Daten nach der Datenlücke. Aus den reduzierten Schweredaten wurde der Mittelwert von  $980769902 \mu\text{gal}$  entfernt. Das Messintervall beträgt 20 s.

Abbildung 4.2: Vergleich des drop-scatters vor und nach der Datenlücke. In der Zeit, in der nicht gemessen wurde, wurde der Laser neu justiert.

unter konstanten Bedingungen aufgezeichnet wurden.

## 4.2 Fehlerabschätzung des Absolutgravimeters FG5

In einer Veröffentlichung zur Einführung des damals neuen Absolutgravimeters FG5 führen Niebauer et al. (1995) eine Reihe von Berechnungen durch, die eine Abschätzung der Größe der systematischen Fehler der Messungen des FG5 erlauben.

Sie führen in ihrer Betrachtung verschiedene Fehlerquellen auf, dazu zählen:

- Restmoleküle im Fallzylinder

Der Retroreflektor des FG5 fällt in einem Zylinder, der evakuiert ist. Für den Vakuumdruck gilt normalerweise  $p_{vac} < 1 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}$ . Trotzdem kann es, z.B. durch Ausgasen des Prismas, zur Beeinflussung des Falls durch freie Teilchen kommen. Die Größenordnung dieser Störungen wird von Niebauer et al. mit  $0,1 \mu\text{gal}$  angegeben.

- Temperaturunterschiede im Messgerät

Bereits sehr kleine Temperaturunterschiede im Messgerät führen zu Druckunterschieden auf einer Skala, die der Testmasse entspricht. Durch diesen Druckunterschied wirkt eine Kraft auf die Testmasse. Zu deren Berechnung nutzen sie das ideale Gasgesetz. Der Temperaturunterschied führt zu einer Beeinflussung der Beschleunigung der Testmasse.

Die Berechnung ergab, dass eine Temperaturdifferenz von  $10 \text{ }^\circ\text{C}$  die Schweremessung um  $4 \mu\text{gal}$  verändert, allerdings klingt dieser Temperaturunterschied bereits nach 44 Minuten auf  $0,1 \text{ }^\circ\text{C}$  ab. Diese Zeit wird auf jeden Fall benötigt, um das Gerät nach dem Transport im warmen Auto am Standort zu installieren. Daher liegt ein entscheidender Wert bei einer Veränderung von  $0,04 \mu\text{gal}$  bei einer Temperaturdifferenz von  $0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ . Versuche mit beheizten Messinstrumenten und nachfolgendem Abkühlen ergaben keine Drift in den Daten. Der Einfluss der Temperaturunterschiede ist daher nicht als groß anzusehen.

- **Magnetfeldgradienten**

Ein heterogenes Magnetfeld führt bei einem fallenden Objekt zum Entstehen von Wirbelströmen. Ein solches Magnetfeld wird durch die elektrischen Bauteile erzeugt. Allerdings ist der gemessene Gradient, der von den Instrumenten verursacht wird, deutlich kleiner als der des Erdmagnetfeldes. Der Einfluss des Magnetfeldgradienten wurde sowohl rechnerisch als auch experimentell bestimmt, indem mittels eines Helmholtzspulenpaares ein bekanntes Magnetfeld angebracht wurde. Es ergab sich ein daraus resultierender Messunsicherheit von  $0,1 \mu\text{gal}$ .
- **Elektrostatische Aufladungen**

Während des Fallens des Prismas ist dieses nicht mit der Auffangeinrichtung verbunden. Diese beiden Teile werden als zwei Hälften eines Kondensators betrachtet. Der Kondensator wird durch die thermische elektromotorische Kraft geladen. Die Anziehung zwischen den beiden Objekten hängt stark von ihrem Abstand ab. Im Experiment wurden daher zwei Extremwerte genutzt, damit erhielt man eine Messunsicherheit von  $0,1 \mu\text{gal}$ .
- **Massenanziehung innerhalb und außerhalb des Messgerätes**

Die Massenanziehung des Gerätes an sich muss korrigiert werden, ist aber bekannt. Massen außerhalb des Gerätes haben einen Einfluss auf die Messung, allerdings sind nur neue Einbauten in unmittelbarer Nähe des Messplatzes Fehlerquellen, da alle anderen beweglichen, schweren Körper aus der Umgebung entfernt werden können.
- **Luftspaltenmodulation**

Der Laserstrahl muss, um in die Vakuumkammer eindringen zu können, ein optisches Fenster durchlaufen. Durch Vibrationen kann es aber dazu kommen, dass der Auftreffwinkel des Strahls auf das Fenster nicht exakt  $90^\circ$  beträgt und damit die Brechungseigenschaften verändert werden. Dies verändert den optischen Weg in einer nicht klar zu bestimmenden Weise. Modellierungen dieses Problems ergeben eine Messunsicherheit von  $0,6 \mu\text{gal}$
- **Wellenlänge des Lasers**

Die Wellenlänge des Lasers als wichtige Größe ist abhängig von der Temperatur und dem Luftdruck. Der jodstabilisierte Laser ist sehr frequenz-stabil und den oben genannten Einflüssen gegenüber nicht sehr empfindlich. Die absolute Genauigkeit ist im Vergleich mit der Drift und der Allan Varianz in diesem Fall der größte Auslöser einer Messunsicherheit von  $0,2 \mu\text{gal}$
- **Prismenrotation**

Während des Fallens kann das Prisma taumeln. Dies führt zu einer Veränderung des optischen Weges. Der Einfluss des Taumelns kann verringert werden, wenn das optische Zentrum mit dem Schwerpunkt, um den die Taumelbewegung ausgeführt wird, identisch ist, bzw. diese nahe beieinander liegen. Das Taumeln kann mit einem Laser und Photodetektoren beobachtet werden. Durch Abnutzung der Ausrichtungskugeln auf der Auffangeinrichtung kann es verstärkt werden. Die Kugeln müssen daher nach einiger Zeit ausgetauscht werden.

- Coriolis-Effekt  
Während des Falles führt der Corioliseffekt zu einer Bewegung in horizontaler Richtung. Dies kann durch das Ausrichten des Translationsvektors in Nord-Süd-Richtung verbessert werden, dazu ist eine Genauigkeit in der Ausrichtung des Vektors von  $10^\circ$  nötig. Mit einfachen Detektoren ist das Messen der Geschwindigkeit in dieser Richtung möglich. Dieser Wert kann zur Berechnung einer Fehlerkorrektur verwendet werden. Mit diesen Vorkehrungen, kann die Messunsicherheit durch den Corioliseffekt auf  $0,33 \mu\text{gal}$  beschränkt werden.
- Bodenrückstoß und -tilt  
Beim Auslösen des Falles wirkt auf das Gerät, laut dem dritten Newtonschen Axiom, ein Rückstoß. Außerdem bewirkt dies eine Verkippung (tilt) des Sockels. Der Rückstoß und Tilt führt zu einer Verlängerung der optischen Weglänge in der Größenordnung von  $4 \cdot 10^{-12}$  m, was eine Messunsicherheit von  $0,02 \mu\text{gal}$  entspricht.
- Elektronischer Phasenversatz  
Sowohl die Photodetektoren als auch die Spannungs-Komparatoren sind durch frequenzbedingte Zeitverzögerungen beeinflusst. Insbesondere die Hochgeschwindigkeits-Komparatoren sind sensible Bauteile, für die die Frequenzstabilität der Laser besonders wichtig ist, um genaue Ergebnisse liefern zu können. Tests mit anderen Frequenzgeneratoren haben gezeigt, dass die Messunsicherheit bei  $0,6 \mu\text{gal}$  liegt.
- Glasunebenheiten  
Unebenheiten in der Parallelität der Glasoberflächen können bei Strahlteilern und Spiegeln zu einer ungewollten Brechung in leicht abweichende Richtungen führen. Dabei sind die verschiedenen Übergänge zwischen Glas, Luft und Vakuum zu beachten. Insgesamt wird eine Messunsicherheit von  $0,3 \mu\text{gal}$  angegeben.
- Strahlungsdruck  
Ein Laserstrahl mit hoher Leistung produziert bei Reflexion einen Strahlungsdruck. Berechnet man diesen mit den Kenngrößen des im FG5 verbauten Gerätes erhält man eine Messunsicherheit von weniger als  $0,01 \mu\text{gal}$ .

Niebauer et al. führen die so bestimmten Messunsicherheiten zu einer Abschätzung des systematischen Fehlers des Instrumentes zusammen. Dabei gehen sie davon aus, dass die bisherigen Schätzungen unkorreliert sind. Den resultierenden systematischen Fehler berechnen sie als Wurzel aus der Quadratsumme der Einzelunsicherheiten und geben damit einen systematischen Fehler von  $1,1 \mu\text{gal}$  an. Diese Veröffentlichung stammt aus dem Jahr 1995. Die Autoren machen darauf aufmerksam, dass durch Verbesserungen des Instrumentes, wie z.B. das Versteifen des Dreibeins und Veränderungen des Fallmechanismus, einige Störeinflüsse verringert werden können. Damit wäre eine Verringerung des Fehlers auf  $0,6 \mu\text{gal}$  möglich.

Eine direkte Berechnung des im schlimmsten Fall zu erwartenden Einflusses dieser abgeschätzten Fehler durch einfaches Addieren des Maximalwertes zu den Daten des FG5 ist nicht sinnvoll, da diese Addition durch das Entfernen des Mittelwertes vor der Berechnung des Regressionskoeffizienten entfernt wird. Der Mittelwert würde sich in dem Falle um den addierten Wert vergrößern.

Die Auswirkungen des systematischen Fehlers auf den Messwert sind gering. Bezogen auf den gemessenen Schwerewert erhalte ich als Auswirkung des systematischen Fehlers  $\epsilon = \frac{1,1 \mu\text{gal}}{9,81 \cdot 10^8 \mu\text{gal}} = 1,1 \cdot 10^{-9}$ . Dies hieße auch, dass der berechnete Regressionskoeffizient um  $10^{-9}$  falsch geschätzt wird. Dieser Effekt wird durch den drop-scatter klar überdeckt.

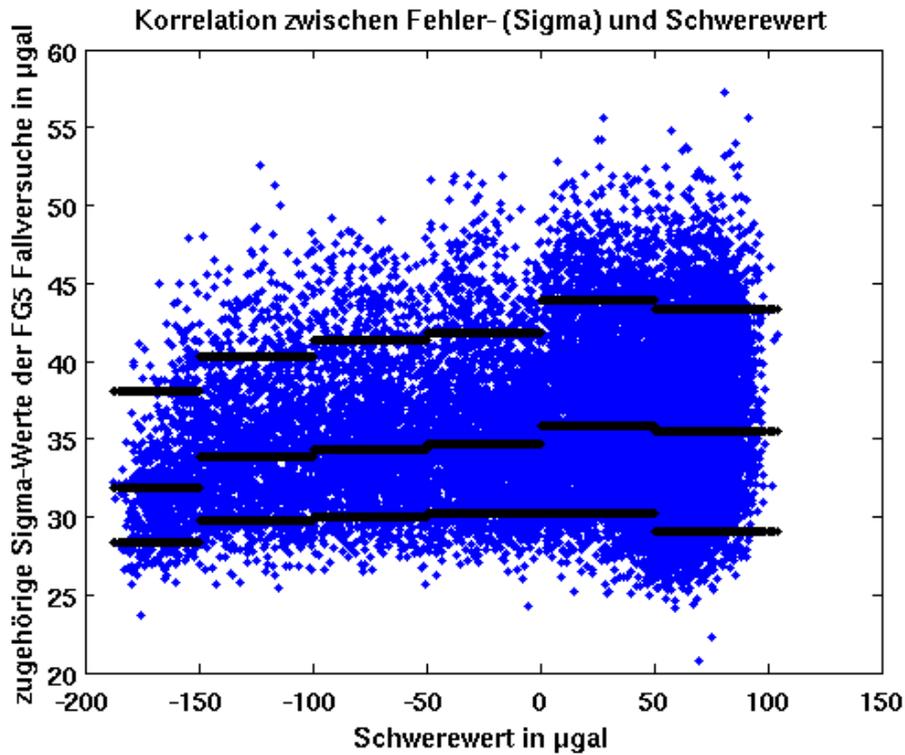
### 4.3 Fehlerabschätzung der Fallversuche

Mit Abbildung 4.3 (a) will ich klären, ob hohe gemessene Schwerewerte mit auffällig hohen Sigma-Werten korrelieren. Dies hätte Auswirkungen auf den optimalen Messzeitpunkt. Wenn die Messungen nach Berechnungen des FG5 bei großem Gezeitenhub signifikant ungenauer wären, böte sich eine Messung in diesem Zeitraum nicht an. Für diese Abbildung wurden die rekonstruierten und mittelwert-korrigierten Schwerewerte verwendet.

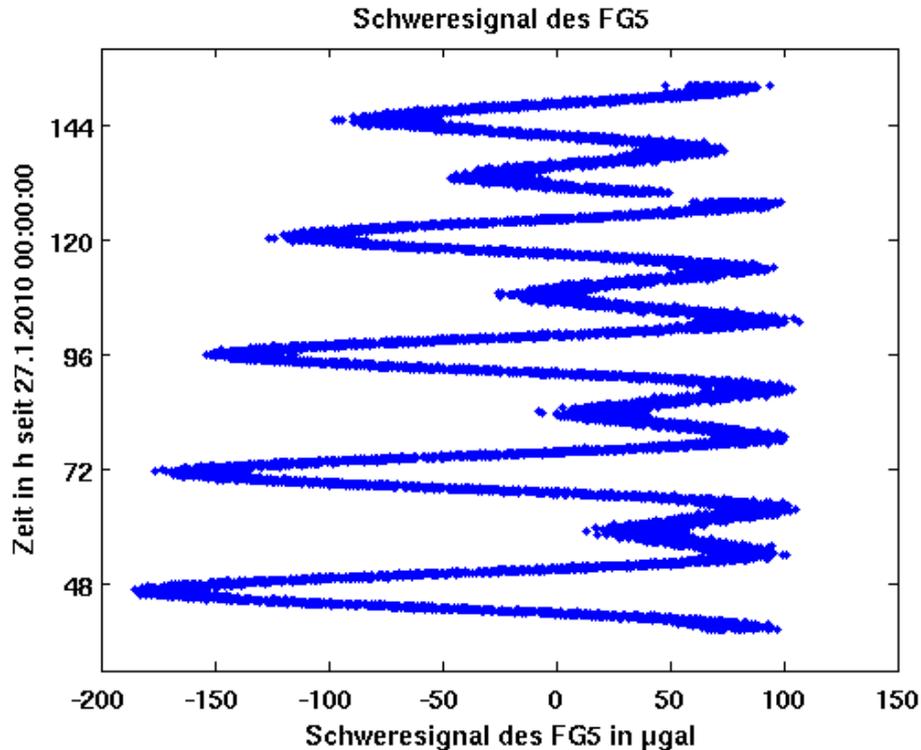
Es lässt sich in der Abbildung 4.3 (a) eine Keilform erkennen, die zeigt, dass kleinere Schwerewerte eher eine geringe Fehlerschätzung erhalten und hohe Schwerewerte größere Fehlerabschätzungen.

Im positiven Schwerebereich liegen deutlich mehr Punkte, da sich dort neben den Maxima der gantztägigen Gezeiten auch die halbtägigen Variationen zeigen (Abbildung 4.3 (b)). Es liegen in diesem Bereich also mehr Wertepaare als im Negativen, in dem die Minima der gantztägigen Gezeiten liegen. Der abnehmende Gezeitenhub führt dazu, dass die Extrema kleiner werden. Insbesondere die Minima sind zum Ende der Messung deutlich weniger ausgeprägt. Auch dies führt zur erwähnten Keilform. All diese Punkte sprechen für einen scheinbaren Keil, der nur auf Grund der Werteverteilung und Darstellung auftritt. Für die Berechnung der Regression sind die Extremstellen besonders bedeutend, da diese in den Summen in Gleichung (2.38) größeren Einfluss haben als beispielsweise Nulldurchgänge. Für die Genauigkeit der gesamten Rechnung sind daher insbesondere die Genauigkeiten dieser Extremstellen wichtig. Daher würden größere Schwerewerte durch ihre höheren  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte in der Regression heruntergewichtet, gleichzeitig haben diese Werte aber den größten Nutzen für die Regression. Dies wäre für die Standardabweichung der Regressionsergebnis negativ.

Um die Keilform zu verifizieren habe ich Perzentile der  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte für einige Schwereintervalle bestimmt. Abbildung 4.3 stellt die 10 %-, 50 %- und 90 %-Perzentilen dar. Perzentilen zeigen an, wie viele Daten sich unterhalb des angezeigten Wertes befinden. Die Perzentile wurden je über ein Schwereintervall von  $50 \mu\text{gal}$  berechnet. Im untersten Intervall von  $-200 \mu\text{gal}$  bis  $-150 \mu\text{gal}$  liegen nur rund 4 % der Messwerte, daher sind die Perzentilen hier nicht aussagekräftig. Vergleicht man die übrigen Perzentile, ist für die 10 % und 50 % Perzentile ein aufsteigender Trend zu erkennen, die Werte schwanken um maximal  $1,6 \mu\text{gal}$ , bzw. 6 %. Die 90 % verändert ihren Wert aber um bis zu  $3,5 \mu\text{gal}$ , bzw. über 9 %. Dies ist in der Abbildung auch klarer zu erkennen. Die Erhöhung des 90 %-Perzentilen-Wertes spricht dafür, dass bei größeren Schwerewerten die Wahrscheinlichkeit für außerordentlich hohe  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte zunimmt. Auch der Median, der von der 50 %-Perzentile gekennzeichnet wird, steigt an, daher kann von einem Anstieg der  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte mit größeren Schwerewerten gesprochen werden. In Abbildung 4.4, die die  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte mit steigender Schwere über dem Index der sortierten Schweremessreihe aufgetragen zeigt, ist dies aber nicht zu sehen. Die Abbildung verhindert, dass die Interpretation durch eine



(a) Vom FG5 aus der Anpassung der Fallparabel bestimmte Ungenauigkeit ( $\sigma_{(FG5)}$ ) über der beim jeweiligen Fallversuch rekonstruierten Schwere. Die Abbildung soll mögliche Korrelationen zwischen der Größe der Schwere und der Ungenauigkeit aufzeigen. Eingezeichnet sind auch die 10 %-, 50 %- und 90 % Perzentile.



(b) Veranschaulichung der Verteilung der Schwerewerte

Abbildung 4.3: Korrelationsbetrachtung zwischen der Schwere und der für jeden Fallversuch erhaltenen Fehlerabschätzung des FG5.

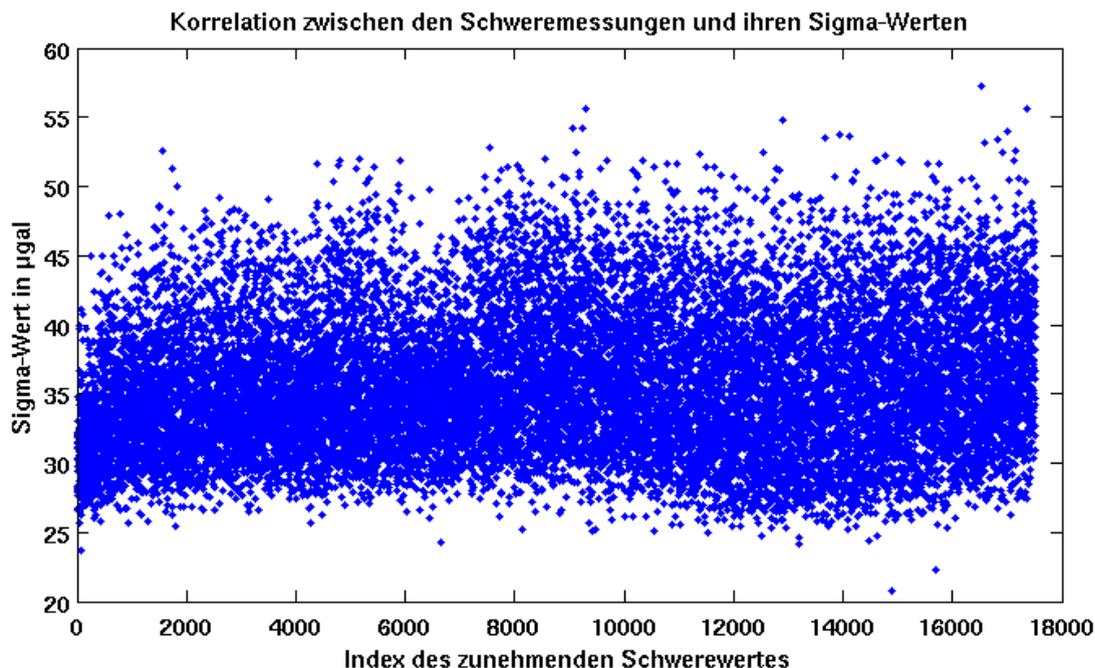


Abbildung 4.4: Sigma-Werte über den ansteigender Schwere. Die Daten wurden nach aufsteigenden Schwerewerten sortiert und die Sigma-Werte über den Indizes aufgetragen, dies verhindert eine Beeinflussung durch optische Effekte bedingt durch die Ballung von Werten.

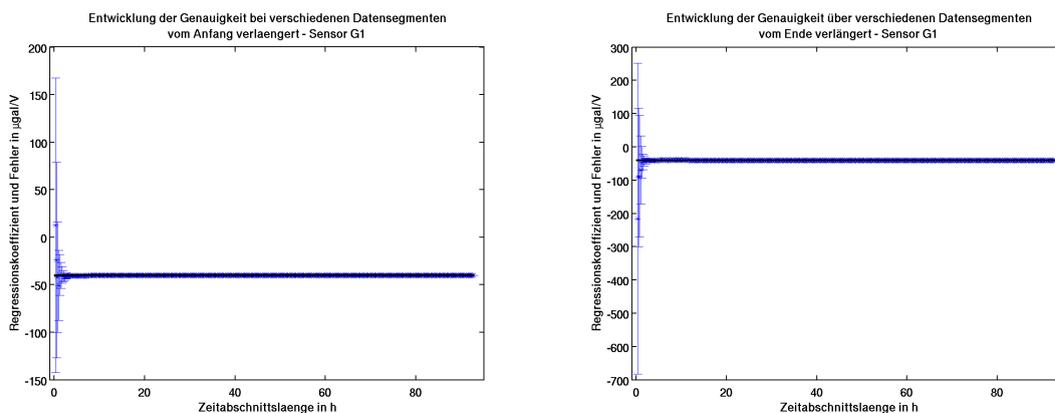
Täuschung durch Ballungen von Messwerten verfälscht werden kann. Auch Abbildung 4.4 lässt höhere maximale  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte vermuten, allerdings liegen im Bereich der Extrema auch deutlich mehr kleine  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte. Die Extremalstellen der Schweremessung werden sogar genauer gemessen als die übrigen Werte. Dies zeigt sich in am wellenförmigen Verlauf des Hauptteils der  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte. Eine Korrelation zwischen Schwere- und  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte ist nicht zu erwarten, da ein kleiner Schwereunterschied die Fallbewegung nicht so verändern sollte, das die Hochgeschwindigkeits-Elektronik der Datenerfassung in einem Bereich beansprucht würde, der klar größere Messungenauigkeiten erzeugt. Das Gravimeter an sich ist für diesen Messbereich ausgelegt. Der Grund für die beobachtete Keilform in Abbildung 4.3 a) und die scheinbare genauere Bestimmung von Schwereextrema bleibt unklar.

Damit ist eine Messung in Zeiten großer Gezeitenhübe besonders zu empfehlen, da sie die Bestimmung des Regressionskoeffizienten und dessen Standardabweichung positiv beeinflussen. Eine größerer Messfehler der Extremstellen kann gezeigt werden, da aber dieser Nachteil den Zugewinn nicht überwiegt ist die Zeit großer Gezeitenhübe zu bevorzugen.

#### 4.4 Betrachtung unterschiedlich langer Zeitfenster

Eine effiziente Kalibrierung zeichnet sich dadurch aus, dass sie mit möglichst wenigen Messungen zu einem optimalen Ergebnis kommt. Dabei ist weniger die Zeit, als die Anzahl der Messungen des Absolutgravimeters ein Kostenfaktor. Jeder Fallversuch schlägt durch mechanische Abnutzung und dadurch nötige Wartungsarbeiten, die Abschreibungskosten, den Transport und die Personalkosten mit ca. einem Euro zu buche (pers. Mitteilung R. Falk nach L. Timmen). Da die Anzahl der Fallversuche pro Zeiteinheit variieren kann und

die Zeit eine eingängige Größe ist, werde ich im Folgenden auch Zeitangaben verwenden. Für diese Betrachtung werden unterschiedlich große Datensegmente auf ihre Standardabweichung des Regressionskoeffizienten hin untersucht. Ich nutze dabei die Daten des Sensors G1 des SG. Die Frage ist, wie viele Messungen nötig sind, um die kleinste Standardabweichung des Regressionskoeffizienten zu erreichen, die noch eine sinnvolle Aussage über die Genauigkeit macht und die Genauigkeit in Hinblick auf die systematischen Fehler nicht unterschätzt. Die Frage kann auch lauten welche Standardabweichung mit einem gewählten primären Fehlermaß bei einer Messung über einen Zeitraum statistisch möglich ist. Das Fenster beginnt am Anfang bzw. Ende der Zeitreihe und ist zu Beginn 15 Minuten lang. Für die eigentliche Untersuchung wird dieses Zeitfenster in jedem Schritt um 15 Minuten bzw. 45 Datenpunkte verlängert. In jeder neuen Konfiguration wird die Fehlerfortpflanzung analog zur in Kapitel 3.4.1 beschriebenen Weise berechnet. Ich schätze die Standardabweichung des Regressionskoeffizienten mit den individuellen Sigma-Werte als primäres Fehlermaß (Kapitel 3.4.1) ab. Es wäre auch ein anderes Verfahren, das den Sigawert des FG5 nutzt, möglich, da diese nur geringe Abweichungen von einander zeigen. Die Berechnung wird mit dem Programm *zeitfenster\_fehlerbalken.m* durchgeführt. Als Referenz für diesen Test ist der relative Fehler des entsprechenden Versuchs über die gesamten Daten nach der Lücke von 4 ‰ gewählt worden, er ist in den folgenden Abbildungen als strichpunktierte Linie eingezeichnet.



(a) Die Auswahl beginnt am Anfang des Datensatzes. (b) Die Auswahl beginnt am Ende des Datensatzes.

Abbildung 4.5: Gesamtansicht der Berechnung der Fehlerfortpflanzung für individuelle Sigma-Werte für verschieden lange Datensegmente. Es werden in jedem Schritt 15 min Daten bzw. 45 Messwerte zusätzlich ausgewertet. Es werden nur die Daten nach der ersten Lücke benutzt.

Die Darstellung in den Abbildungen 4.5 zeigt die schnelle Verringerung der Standardabweichung bei zunehmender Datenmenge. Theoretisch nimmt die Standardabweichung nach Gleichung (2.47) mit einem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ab, wobei  $n$  die Zahl der Messwerte angibt (Blum). Das bedeutet, dass allein dadurch, dass man mehr Messwerte in die Berechnungen mit einbezieht, die Standardabweichung mit dem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  abnimmt. Das ist eine rein statistische Aussage, es wird nicht beachtet, dass mehr Messwerte nicht in jeden Fall mehr Informationen für die Berechnungen enthalten. Es kann damit auch nur ein scheinbarer

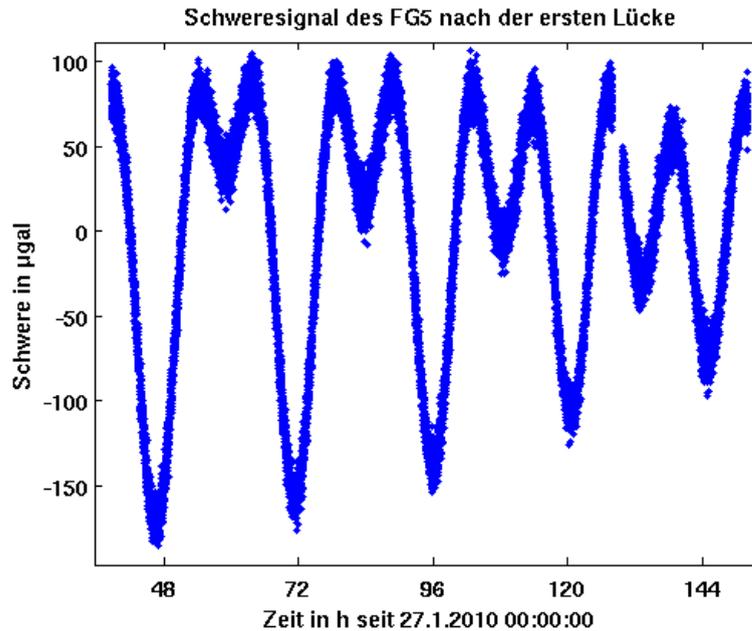


Abbildung 4.6: Vom FG5 gemessene Schwere. Die Daten beginnen nach der großen Datenlücke. Es handelt sich um die rekonstruierten Daten inklusive dem Gezeiten und dem Luftdruckeinfluss.

Genauigkeitszuwachs erzeugt werden, der keiner tatsächliche Verbesserung durch Informationszuwachs entspricht.

Bereits nach vier Stunden geht die Standardabweichung bei den Daten, die am Anfang der Zeitreihe beginnen, so stark zurück, dass eine Variation in dieser Darstellung nicht mehr erkennbar ist. Bei den Daten vom Ende her dauert dies sieben Stunden. An den Abbildungen 4.5 kann man einen Einfluss des Gezeitenhubs auf die Schätzung der Standardabweichung erkennen. Der größere Gezeitenhub zu Beginn der genutzten Daten (Abbildung 4.6 bei 48 h) scheint eine schnelle Reduzierung der Standardabweichung zur Folge zu haben als ein geringere Gezeitenamplitude (Abbildung 4.6 bei 144 h) am Ende der Messreihe.

Um genauere Aussagen über die Entwicklung der Standardabweichung mit zunehmender Datenmenge treffen zu können, schränke ich die Darstellung auf einen Bereich von  $2 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{V}}$  um den asymptotischen Wert des Regressionskoeffizienten, der Regressionskoeffizient, der für den gesamten Datensatzes berechnet wird, ein (Abbildung 4.7 folgende). Jetzt ist auch die Konvergenz des Regressionskoeffizienten zu erkennen.

Es wird deutlich, dass die Standardabweichung nicht stetig zurückgeht. Es zeigen sich eher Wellenbewegungen, die auf die Variation des berechneten Regressionskoeffizienten zurückzuführen sind. Das Ergebnis kann also nicht mit einer einfachen  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung erklärt werden. Der Grund für die teilweise schnellere Verringerung des Fehlers wurde bereits in Abschnitt 4.3 erläutert. Entscheidend hierfür ist der unterschiedliche Einfluss von Extrema und Nulldurchgängen der Schweremessung auf die Regression. Bei großen Gezeitenamplituden nimmt der Fehler schnell ab, dagegen bei Nulldurchgängen überhaupt nicht. Dabei liegt der asymptotische Wert, der Wert des Regressionskoeffizienten für fast alle Datensegmente, im Bereich der Standardabweichung. Dies ist nicht mehr der Fall, wenn ein anderes primäres Fehlermaß genutzt wird. In Abbildung 4.7 ist als primäre Fehlerabschätzung das

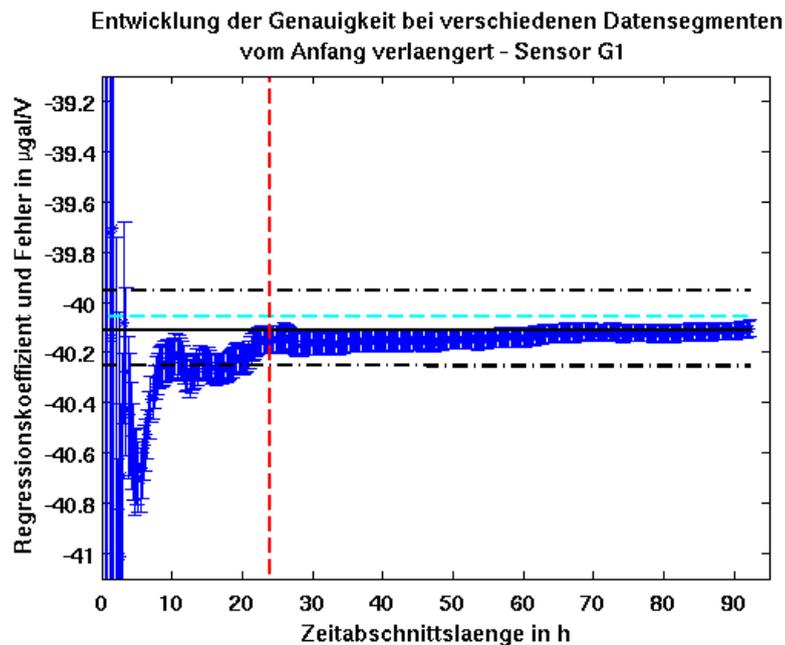
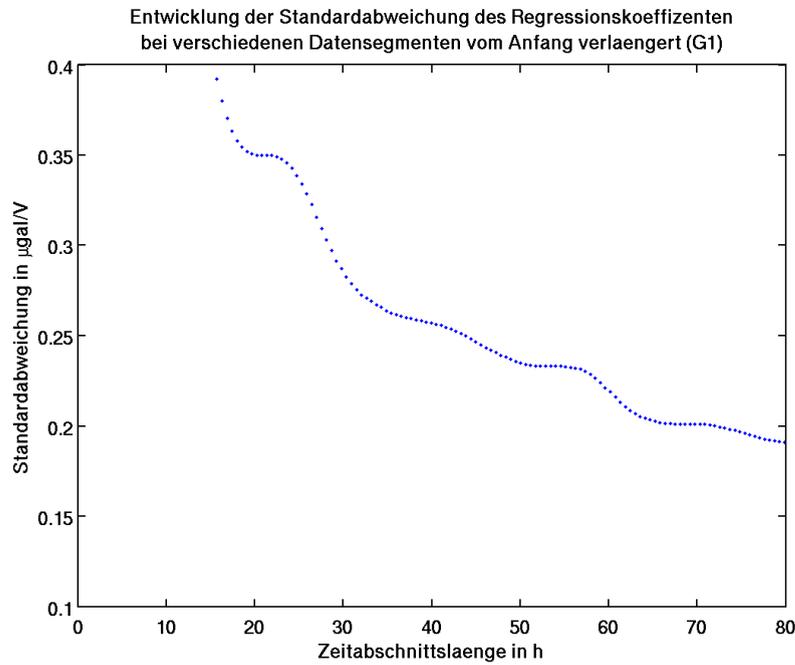


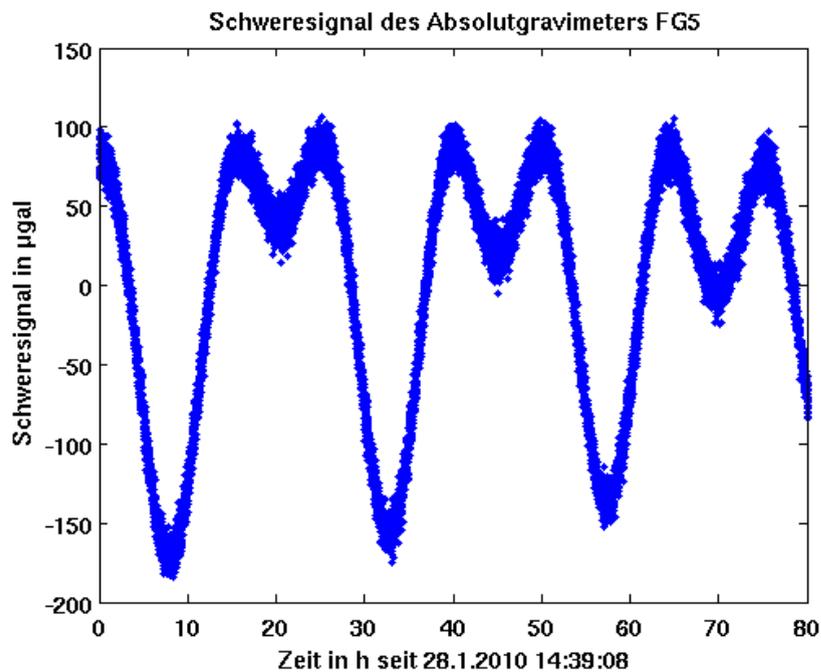
Abbildung 4.7: Entwicklung des Regressionskoeffizienten und dessen Standardabweichung bei Nutzung unterschiedlicher Datensegmente. Als primäres Fehlermaß diente in diesem Fall das Residuum der Regression, diese ist um den Faktor 5 kleiner als der primäre Fehler aus den  $\sigma_{(FG5)}$ -Werten.

Residuum der Regression gewählt worden. Diese Abschätzung ist etwa um einen Faktor 5 kleiner als die in den übrigen Abbildungen gewählte Standardabweichung, dies wirkt sich linear auf die Fehlerbalken aus. Damit liegt der asymptotische Wert von  $-40,10 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$  des Regressionskoeffizienten bei den meisten Datensegmenten nicht mehr im Bereich der Standardabweichung. In Abbildung 4.8 ist die Korrelation zwischen der Standardabweichungsentwicklung und dem gemessenen Gezeiten dargestellt. Der stärkere Einfluss von Maximalwerten auf das Ergebnis liegt in der Natur der Regression nach Gleichung (2.38). Diese beeinflussen die verwendeten Summen stark, wogegen kleine Werte die Summen nur wenig, Nulldurchgänge sogar überhaupt nicht beeinflussen. Zeitfenster, die Daten rund um die Null enthalten, können die Genauigkeit also weniger steigern als Zeitfenster, in denen Maxima der Schwerebeobachtung liegen. Sie tragen auch weniger zur Bestimmung des Regressionskoeffizienten bei. Dabei verbessert sich die Standardabweichung um so mehr, je mehr Extrema in die Rechnung einbezogen werden. Dieser Einfluss überwiegt in einigen Teilen die  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung. In Abbildung 4.8 wird dies deutlich. Das zweite Maxima der durch die halbtägigen Gezeiten überlagerten, gantztägigen Gezeitenvariation, nach ca. 27 h, führt zu einem stärkeren Absinken des bestimmten Fehlers. Damit gehen starke Verbesserungen des Regressionskoeffizienten einher. Weitere Verringerungen der Standardabweichung sind bei allen anderen Extrema zu sehen.

In Abbildung 4.9 ist der Vergleich zwischen den berechneten Standardabweichungen und der  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung dargestellt. Dabei wurde die Daten der Berechnung auf den Wert der Standardabweichung des längsten Datensegmentes skaliert. Die aus diesen Daten berechneten Standardabweichungen liegen ab ca. 5 h unterhalb der Werte, die mit Hilfe der  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung berechnet wurden. Dies kann aber durch Umskalierung verändert werden. Inter-



(a) Berechnete Fehler der Datensegmente



(b) Schweredaten des Absolutgravimeters FG5 nach der Datenlücke. Die Daten liegen ab dem 28. Januar 14:39:08 Uhr vor.

Abbildung 4.8: Vergleich der Entwicklung der Standardabweichung mit den unterschiedlichen Datensegmenten und den dafür verwendeten Schweredaten.

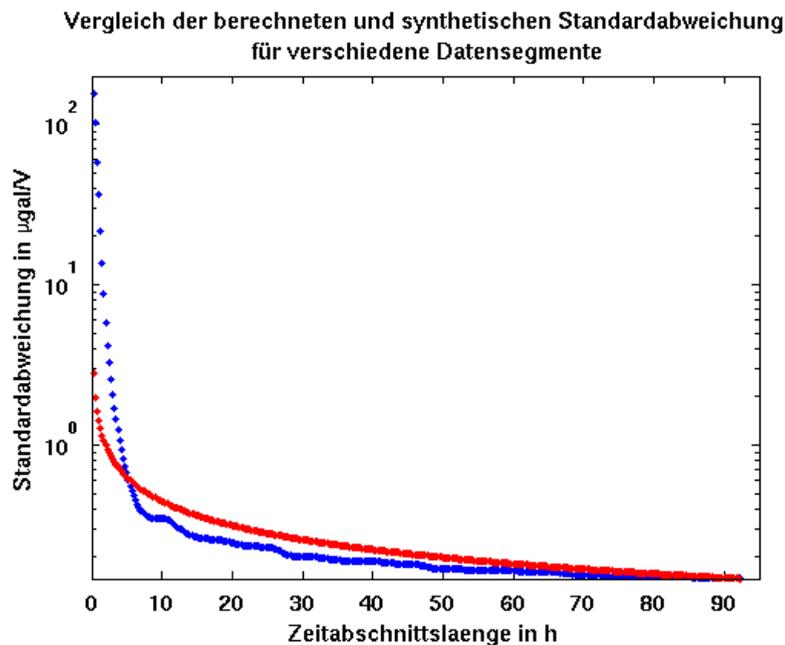
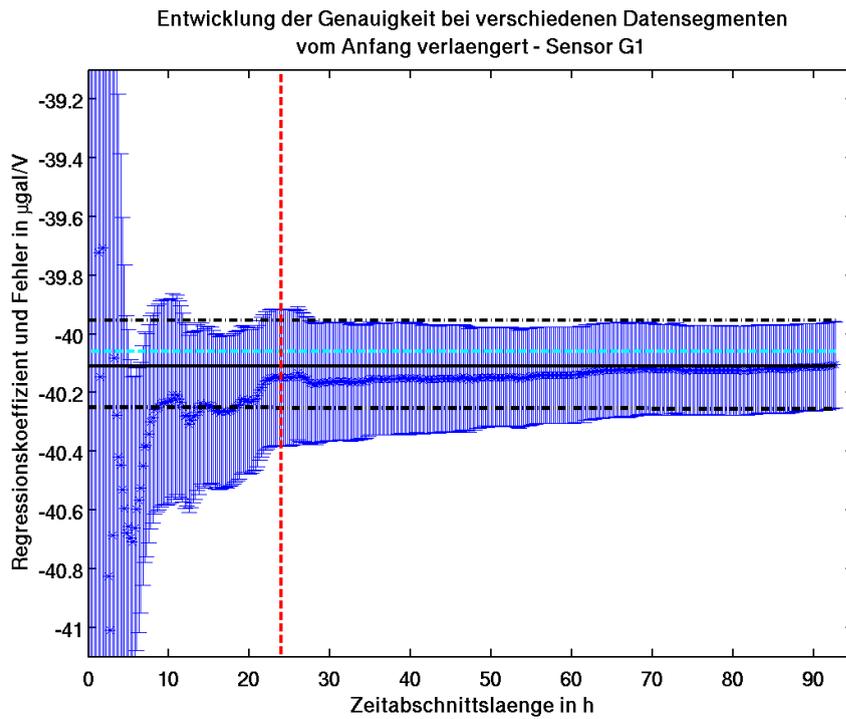


Abbildung 4.9: Vergleich der bestimmten Standardabweichung und einer den berechneten Werten der  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung. Die Berechnung wurde auf den letzten Wert der Fehlerfortpflanzungrechnung skaliert.

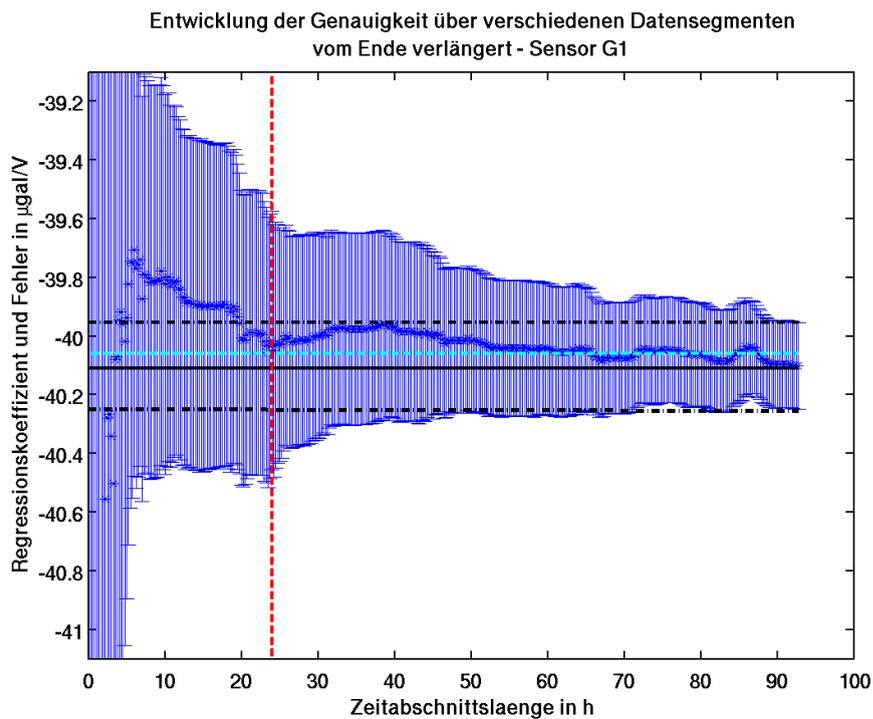
essanter ist, dass der Verlauf beider Kurven ähnlich ist. Die theoretische Betrachtung mit einer  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung stimmt also. Dabei ist die Entwicklung der Standardabweichung nicht so glatt wie bei den vorhergesagten Werte, dies spiegelt den Einfluss der unterschiedlichen Gezeitenamplituden wieder, der bereits in Abbildung 4.8 gezeigt wurde.

Der mit den unterschiedlichen Datenmengen berechnete Regressionskoeffizient (Abbildung 4.10) schwankt am Anfang stark. Erst nach dem ersten Minimum nähert er sich schnell dem asymptotischen Wert an. Nach rund einem Tag und den ersten Maxima erreicht der Regressionskoeffizient beinahe den asymptotischen Wert, fällt danach wieder etwas ab, um sich ab dem zweiten Minimum nach 30 Stunden dem Gesamtregressionskoeffizient stetig zu nähern. Bereits nach der Messung eines Tages liegen die Regressionskoeffizienten in einem Bereich von weniger als  $0,05 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$ , also unter  $1,1 \text{ ‰}$  unter dem asymptotischen Wert. Diese Abweichung ist vergleichbar mit der Auswirkung des Miteinbeziehens der 747 Datenpunkte vor der großen Datenlücke. Wie für die Standardabweichung ist bei der Berechnung des Regressionskoeffizienten der Einfluss der Extrema zu erkennen. Den Einfluss des Gezeitenhubs auf die Messung kann anhand des Vergleichs zwischen den berechneten Fehlern für den unterschiedlichen Beginn des Zeitfensters ermittelt werden. Der größte Unterschied ist bei einem Zeitfensterbeginn am Anfang bzw. am Ende der Messreihe zu erwarten, da in diesem Fall die Unterschiede des Gezeitenhubs am größten sind (Abbildung 4.6). Ein geringerer Gezeitenhub äußert sich durch das Abnehmen der Maximalwerte der Schweremessung der ganztägigen Gezeiten. Die Abnahme hat, wie bereits oben gezeigt, direkten Einfluss auf die Berechnung der Regression. Deshalb ist zu erwarten, dass der mittels Fehlerfortpflanzung berechnete Fehler bei der Betrachtung vom Ende her nicht so schnell zurückgeht, wie dies bei den Berechnungen mit dem Zeitfenster am Anfang der Daten der Fall ist.

Der Vergleich zwischen den beiden Zeitfenstern für Sensor G1 in Abbildung 4.10 zeigt,

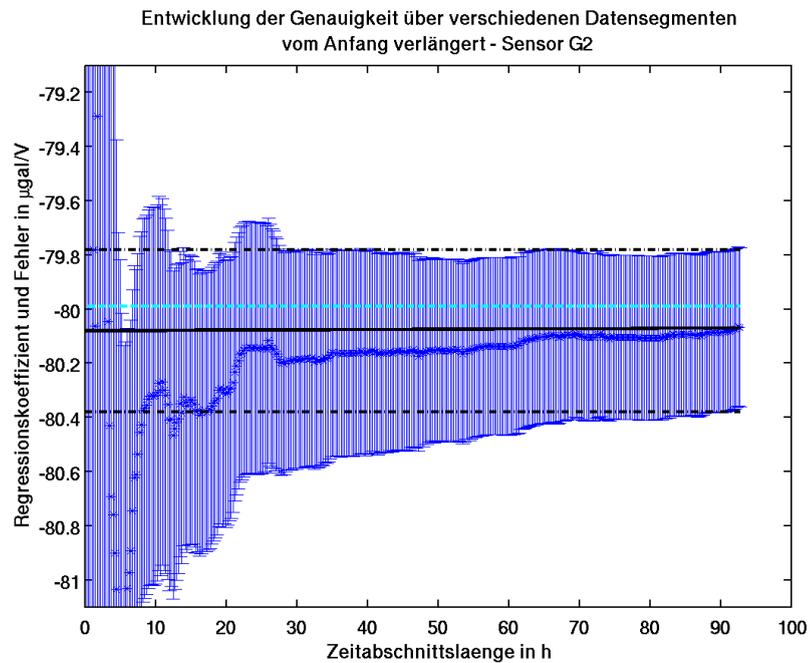


(a) Beginn der Erweiterung am Anfang der Daten.

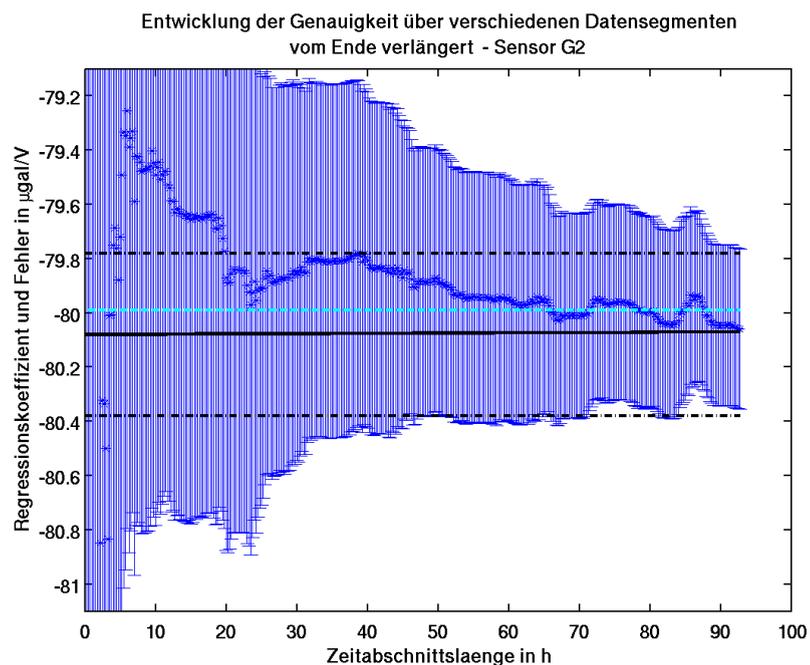


(b) Beginn der Erweiterung am Ende der Daten.

Abbildung 4.10: Entwicklung des Regressionskoeffizienten und dessen Standardabweichung bei Verwendung unterschiedlich langen Zeitfensters der Daten des Sensors G1. Das Zeitfenster wird in jedem Schritt um 15 min verlängert. Die schwarze durchgezogene Linie gibt den Regressionskoeffizienten des gesamten Datensatzes an, die strichpunktete Linie den  $1\sigma$ -Bereich von 4 ‰. Die rote, gestrichelte Linie zeigt die ersten 24 h an. Die Kreuze repräsentieren den jeweils bestimmten Regressionskoeffizienten.



(a) Beginn der Erweiterung am Ende der Daten.



(b) Beginn der Erweiterung am Ende der Daten.

Abbildung 4.11: Entwicklung der Standardabweichung des Regressionskoeffizienten bei Verwendung eines unterschiedlich langen Zeitfenster der Daten des Sensors G2. Das Zeitfenster wird in jedem Schritt um 15 min verlängert. Die schwarze durchgezogene Linie gibt den Regressionskoeffizienten des Datensatzes nach der ersten Lücke an, die strichpunktierte Linie den  $1\sigma$ -Bereich von 4 ‰. Die rote, gestrichelte Linie zeigt die ersten 24 h an. Die Kreuze repräsentieren den jeweils bestimmten Regressionskoeffizienten.

dass die Vermutungen zutreffen. Die Standardabweichungen des Zeitfensters, das am Ende beginnt, sind durchgehend deutlich größer als bei gleicher Datenmenge der Vergleichsrechnung, die am Anfang beginnt. Die Unterschiede sind mit teils doppelt so großen Werten stark ausgeprägt.

Auch in Abbildung 4.10 (b) ist das beschriebene plötzliche starke Abnehmen der Standardabweichung zu erkennen, wie es für ein Zeitfenster von Anfang an beschrieben wurde. Dabei liegen die gezeigten Fehlerbalken weit außerhalb der mit den strichpunktieren Linien angezeigten angestrebten Genauigkeit. Die Standardabweichung geht in diesem Fall sehr steil zurück.

Die Entwicklung des Regressionskoeffizienten verläuft in Abbildung 4.10 (b) anders als in Abbildung 4.10 (a). In beiden ist die Abschätzung des Regressionskoeffizienten erst sehr vage. Allerdings sind die Ergebnisse für einen Datenabschnitt von 18 Stunden bei (a) bereits sehr nahe am asymptotischen Wert, dem Regressionskoeffizienten der Gesamtdaten. Bei (b) wird für längere Zeitfenster der Regressionskoeffizient überschätzt und nähert sich erst für ein Zeitfenster von 75 Stunden Daten wieder mit gleichmäßiger Konvergenz dem asymptotischen Regressionskoeffizienten.

Die Betrachtung der Berechnungen für den zweiten, leichteren Sensor G2 in Abbildung 4.11 zeigt sehr ähnliche Ergebnisse wie der bisher betrachtete Sensor G1. Die Fehler sind auf Grund des doppelt so großen Wertes des Regressionskoeffizienten absolut höher, prozentual aber gleich groß wie bei Sensor G1. Die asymptotische Entwicklung des Regressionskoeffizienten mit zunehmender Datenanzahl ist vergleichbar, aber auf Grund des absolut größeren Wertes deutlicher zu sehen.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Messungen sollen eine Aussage darüber zulassen, welche minimale Standardabweichungen mit den in einer bestimmten Messzeit gewonnenen Daten möglich ist. Das Ergebnis der Untersuchung von verschiedenen langen Zeitreihen kann aber keine genaue Zahl von Messungen angeben, die nötig sind um eine genügend kleine Standardabweichung zu erreichen. Die Antwort auf diese Fragen ist von vielen Faktoren abhängig. Wollte man eine deutlich genaueres Ergebnis, müsste man auch dementsprechend länger messen. Dabei gilt es im Vorfeld, wie es im Rahmen dieser Arbeit geschehen soll, zu klären, wie genau eine Messung, auch in Hinblick der systematischen Messungenauigkeiten, überhaupt möglich ist.

Die Gezeitenvariationen beeinflussen die Berechnungen stark. Die unterschiedlichen Gezeitenhübe haben einen großen Einfluss auf die nötige Anzahl der Messungen. Dagegen gibt es keinen Einfluss der unterschiedlichen Massen der Sensorkugeln. Die Ergebnisse für beide Sensoren sind nahezu gleich. Das bedeutet, dass sich systematische Fehler des SGs bei beiden Sensoren gleich ausgeprägten. Damit beeinflusst nur die Messung des FG5 die Standardabweichung.

Als Vergleich für die einzelnen Standardabweichung dient mir das Ergebnis der Fehlerfortpflanzung mit individuellen  $\sigma_{(FG5)}$ -Werten für alle Daten nach der ersten Lücke von 4 %. Kürzere Datensegmente ergeben eine höhere Standardabweichung des Regressionskoeffizienten. Allerdings ist der Rückgang der Standardabweichung unter Hinzunahme des letzten gemessenen Tages, also mit Datensegmenten von 68 h bis 92 h mit  $0,01 \frac{\mu\text{gal}}{\sqrt{\text{V}}}$  gering.

Bei der vorgenommenen Messung wurde alle 20 Sekunden ein Fallversuch durchgeführt.

Technisch wäre eine Wiederholungsintervall von 10 Sekunden möglich. Dies würde bei einseitiger Betrachtung der  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung einer Halbierung der Zeit auf 32,5 Stunden entsprechen. Allerdings vergisst man bei dieser Rechnung den Einfluss der Gezeiten. Wenn man weniger als eineinhalb Tage misst, durchlaufen die Daten auch nur eineinhalb Tagesvariationen der Gezeiten. Die Daten weisen also weniger Extrema auf, die für den Genauigkeitszuwachs wichtig sind. Demnach ist eine längere Beobachtungsdauer mit längeren Intervallen zwischen den Fallversuchen aus meiner Sicht günstiger, dies werde ich in Kapitel 4.5 ausführlicher behandeln. Wie wichtig optimaler Gezeitenhub ist, zeigt der Vergleich mit den Zeitfenstern, die am Ende der Daten beginnen. In diesem Fall benötigt man für eine Genauigkeit von 4 ‰ 75 Stunden Daten, also 10 Stunden mehr als bei Beginn bei großem Gezeitenamplituden. Dies entspricht 1800 zusätzlichen Fallversuchen und damit ca. 1800 Euro Mehrausgaben, ein Kostenzuwachs von rund 15%.

Legt man nicht so viel Wert auf eine möglichst optimale Genauigkeit, reichen bereits deutlich weniger Messungen. In dem Fall ist entscheidend, dass der Regressionskoeffizient möglichst nahe am Ergebnis für den gesamten Datensatz liegt und die zugehörigen Fehler gering sind. Für möglichst kurze Messungen ist es besonders wichtig, dass der Gezeitenhub während der Messung möglichst groß ist. Dies würde es ermöglichen, mit einer Messung über 36 Stunden bereit ein gutes Ergebnis zu erzielen. Die Messungen über die nächsten 36 Stunden führen zwar zu einer Verbesserung der Bestimmung des Regressionskoeffizienten und dessen Standardabweichung, diese ist aber mit ungleich größerem Aufwand verbunden, als die Verbesserungen während der ersten 36 Stunden.

Als Ergebnis dieses Abschnittes kann man festhalten, dass für eine erfolgreiche Regression mindestens eine Gezeitenperiode lang, also ein Tag, gemessen werden muss. Danach schließen die Fehlerbalken der berechneten Regressionskoeffizienten eines Datensegmentes den asymptotischen Wert ein. Die statistischen wurden bestätigt. Nutzt man mehr Daten, sinkt die Standardabweichung des Regressionskoeffizienten, selbiges gilt bei Nutzung von Daten mit großer Gezeitenamplitude. Alle Gezeitenextrema verkleinern die Standardabweichung und verbessern die Bestimmung des Regressionskoeffizienten. Daher ist eine längere Messung anzustreben.

## 4.5 Betrachtung unterschiedlich langer Intervalle zwischen den Einzelmessungen

Das FG5 erlaubt es höchstens alle 10 s Fallversuche durchzuführen. Es stellt sich nun die Frage welches Zeitintervall zwischen den Einzelmessungen am besten geeignet ist, bei geringen Kosten ein möglichst genaues Ergebnis der Kalibrierung zu liefern.

Dazu vergleiche ich den gemessenen Datensatz des Sensors G1 mit einem aus den Daten des FG5 durch Interpolation erhaltenen Datensatz. Die Interpolation verdoppelt die Anzahl der Messpunkte künstlich, ohne den Informationsgehalt zu steigern. Es werden sowohl die Schwerewerte des FG5 als auch die zugehörigen Sigma-Werte als Mittelwerte der umliegenden beiden Messwerte gebildet. Damit erhält man einen Datenpunkt alle 10 Sekunden. Die jeweiligen Messwerte des SG können dann zugeordnet werden. Der Vergleich ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Die schnelle Verringerung der Fehler für die interpolierten Werte erklärt sich durch den  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Zusammenhang. In diesem Fall erreicht man eine

Genauigkeit von 4 ‰, dies entspricht  $0,15 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ , des Regressionskoeffizienten für die ganzen Daten bereits nach 27 Stunden. Für ein 27 h Zeitfenster erhält man mit  $-40,16 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$  einen Regressionskoeffizient, der um 1,25 ‰ vom asymptotischen Wert abweicht. Der Regressionskoeffizient erreicht zwar die eine Genauigkeit von 4 ‰, weicht aber deutlich vom asymptotischen Wert ab. Wobei dieser Wert mit Vorsicht zu betrachten ist, da er sich nicht auf tatsächliche Messungen sondern nur auf eine sehr einfache Interpolation stützt. Um die gleiche Standardabweichung mit den tatsächlichen Messdaten zu erreichen, muss man über 81 Stunden messen. Der Verlauf des Regressionskoeffizienten ist bei beiden Tests gleich. Die interpolierten Werte liefern keine neuen Informationen. Der nach 81 h gefundene Regressionskoeffizient weicht dann nur noch um 0,05 ‰ vom asymptotischen Wert ab. Ein größeres Messintervall hat also die Konsequenz, dass durch die auf Grund der Statistik langsamer zurückgehenden Standardabweichungen ein Regressionskoeffizient gewählt wird, der näher am asymptotischen Wert liegt. Die Standardabweichung am Ende der Messreihe beträgt für die kürzeren Intervalle  $0,11 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$  und für das 20 s Intervall  $0,15 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ . Dies entspricht einem Quotienten der beiden bestimmten Standardabweichungen von  $\frac{0,11 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}}{0,15 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}} = 0,74$ . Dies passt gut zum erwarteten Verhältnis von  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$ .

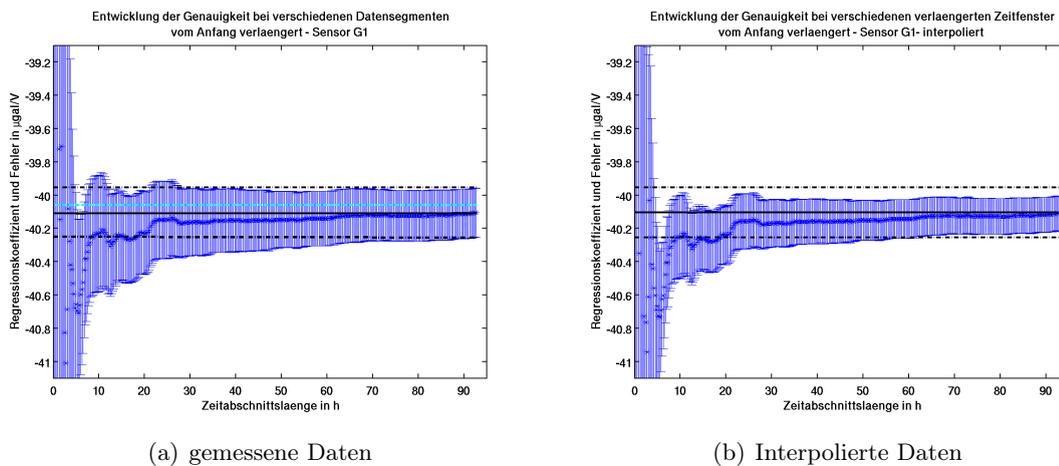
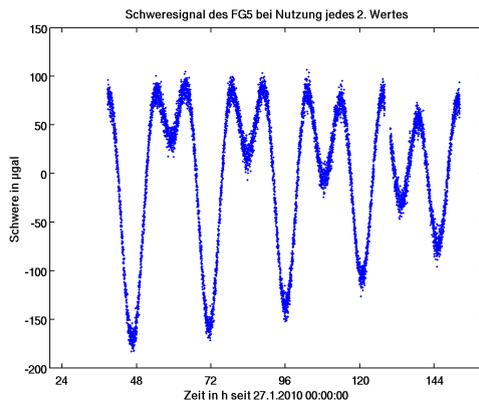


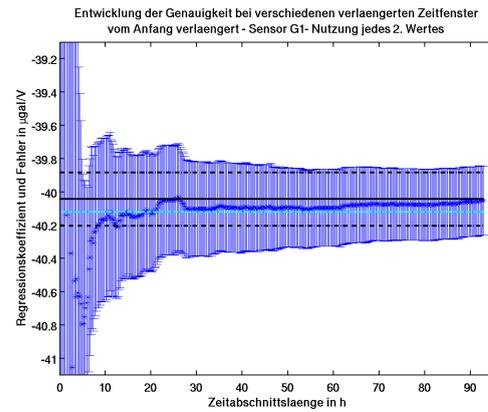
Abbildung 4.12: Entwicklung der Standardabweichung bei Verwendung unterschiedlich vieler Daten des Sensors G1. Vergleich der gemessenen Daten in einem 20 s Intervall mit interpolierten Daten mit einem 10 s Messintervall. Das Zeitfenster wird in jedem Schritt um 15 min verlängert. Die schwarze durchgezogene Linie gibt den Regressionskoeffizienten des gesamten Datensatzes an, die strichpunktierte Linie den  $1\sigma$ -Bereich von 4 ‰

Für einen gegenteiligen Test habe ich nur jeden x-ten Wert der gemessenen Daten ausgewählt und für die Berechnungen genutzt. Das Programm `zeitfenster_fehlerbalken_auswahl.m` erlaubt es anzugeben, jeden wievielten Wert man nutzen will.

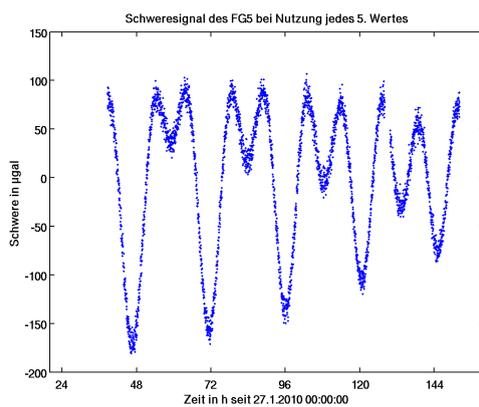
Durch die  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung sind bereits im Vorfeld größere Standardabweichungen zu erwarten. Um einen Vergleich mit den Abbildungen in Kapitel 4.4 zu ermöglichen, sind die Ausschnitte der Abbildungen gleich gewählt. Die zur Berechnung genutzten Daten sind zur Veranschaulichung der geringer werdenden Anzahl ebenfalls in Abbildung 4.13 und Abbildung 4.14 links abgebildet. Die Variation des Schweresignals ist bei allen Abbildungen



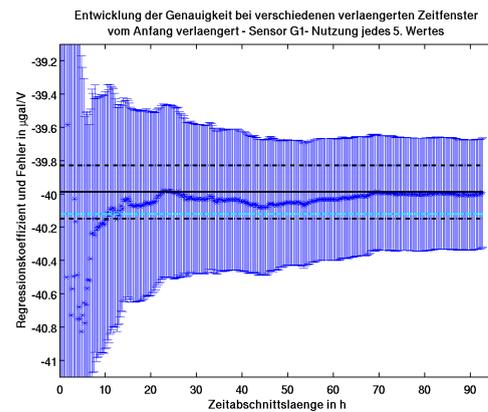
(a) Schweredaten jedes zweiten Messwertes



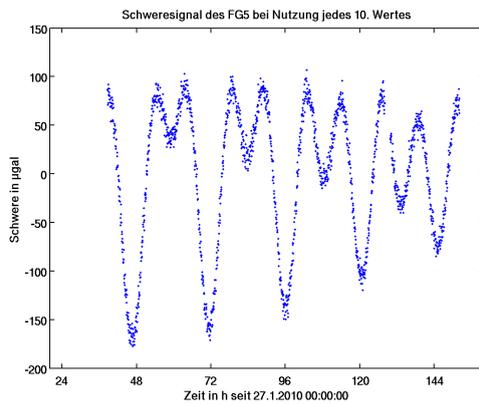
(b) Standardabweichungsentwicklung bei Nutzung jedes zweiten Messwertes



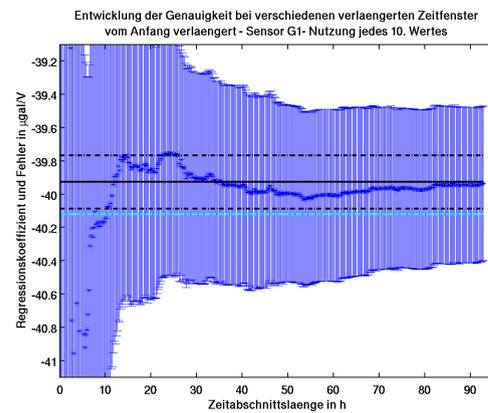
(c) Schweredaten jedes fünften Messwertes



(d) Standardabweichungsentwicklung bei Nutzung jedes fünften Messwertes

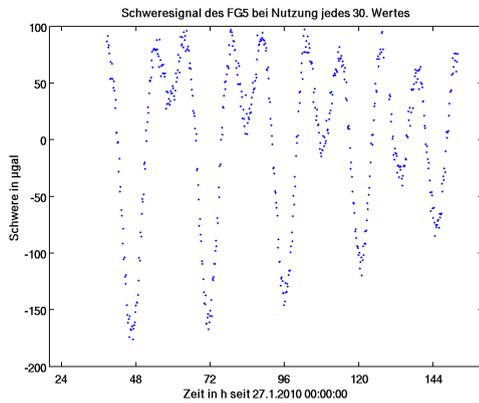


(e) Schweredaten jedes zehnten Messwertes

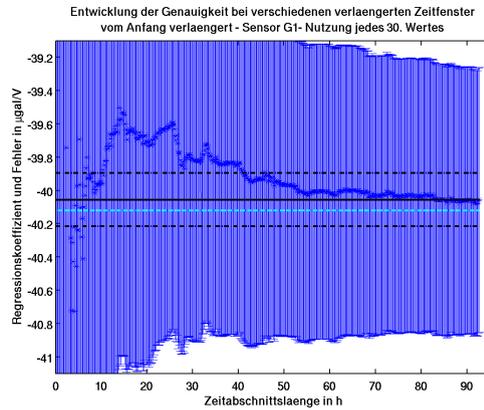


(f) Standardabweichungsentwicklung bei Nutzung jedes zehnten Messwertes

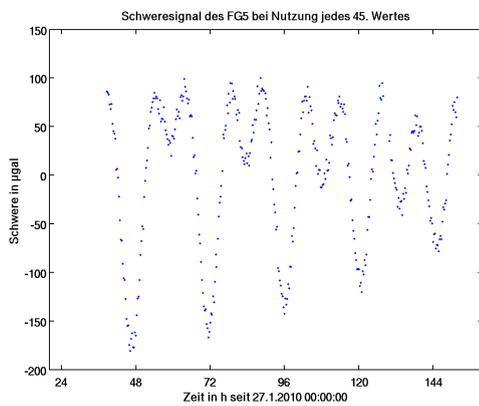
Abbildung 4.13: Entwicklung der Standardabweichung bei Verwendung eines unterschiedlich langen Zeitfensters der Daten des Sensors G1. Vergleich der gemessenen Daten in einem 20 s Intervall mit ausgewählten Daten mit verschiedenen Messintervallen von 40 s bis 200 s. Das Zeitfenster wird in jedem Schritt um 15 min verlängert. Die schwarze durchgezogene Linie gibt den Regressionskoeffizienten des längsten Datensegmentes an, die strichpunktierte Linie den  $1\sigma$ -Bereich von 4 ‰. Die türkise, gestrichelte Linie gibt den Wert des Regressionskoeffizienten für die Berechnung mit allen Daten nach der Datenlücke an



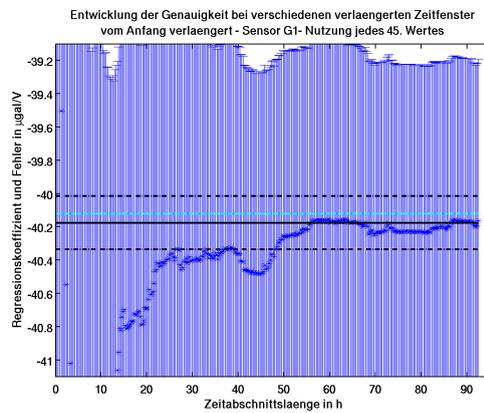
(a) Schweredaten jedes 30. Messwertes



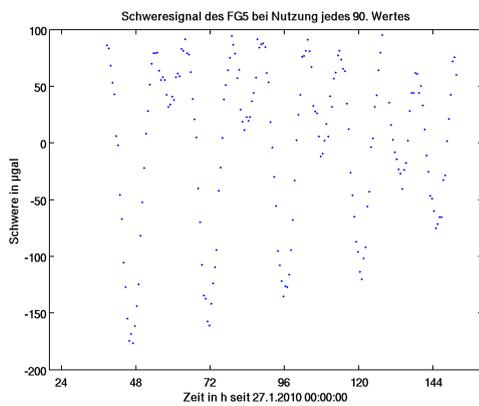
(b) Standardabweichungsentwicklung bei Nutzung jedes 30. Messwertes



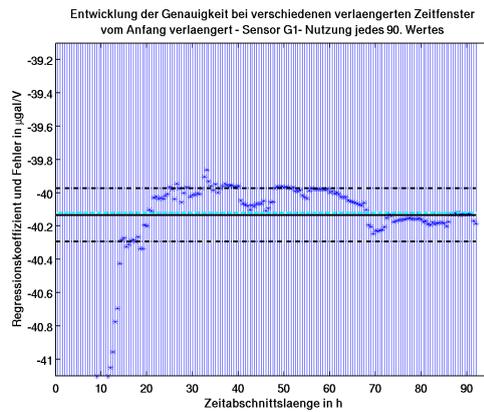
(c) Schweredaten jedes 45. Messwertes



(d) Standardabweichungsentwicklung bei Nutzung jedes 45. Messwertes



(e) Schweredaten jedes 90. Messwertes



(f) Standardabweichungsentwicklung bei Nutzung jedes 90. Messwertes

Abbildung 4.14: Untersuchungen wie in Abbildung 4.13 beschrieben für Messintervall von 10 min bis 30 min.

erkennbar. Selbst bei Nutzung jedes 90. Messwertes, also bei einer Messung jede halbe Stunde, kann man alle Konturen erkennen. Dabei werden besonders die für die Berechnungen wichtigen Extremstellen gut abgebildet.

Die Größe der Standardabweichung steigt mit wachsendem Intervall wie erwartet an. Durch das Festhalten des Ausschnitts der Plots ist eine Darstellung der gesamten Fehlerbalken bei Messintervallen über 15 min nicht mehr möglich. Eine statistische Genauigkeit von besser als 4 ‰ ist für keine der hier gezeigten Messintervalle möglich. Dabei ist zu beachten, dass sich die in den Abbildung gezeigten 4 ‰ Bereiche auf den jeweiligen asymptotischen Wert beziehen.

Besonders interessant sind die Ergebnisse der asymptotischen Werte. Außer für den Fall eines Zeitintervalls von 200 s liegt der asymptotische Wert für alle Messdaten innerhalb der 4 ‰ Standardabweichung der verschiedenen Messintervalle. Die asymptotischen Werte der ausgedünnten Datensätze liegen ebenfalls alle bis auf das Zeitintervall von 200 s im Bereich der 4 ‰ -Standardabweichung des Regressionskoeffizient für alle Daten nach der großen Lücke. Sie schwanken um etwa 6,2 ‰. Die Variation des asymptotischen Wertes ist deutlich geringer, als es die drastische Vergrößerung der Standardabweichung hätte vermuten lassen können. Dies spricht dafür, dass diese Schätzung der Standardabweichung konservativ ist, außerdem ist die Regression auch für deutlich weniger Daten noch stabil.

Etwas genauer will ich die Auswahl jedes zweiten Wertes betrachten. Dies spiegelt zwei Messungen mit doppeltem Zeitintervall wieder. Je nachdem welche Hälfte der Werte ich weglasse, ändert sich der Regressionskoeffizient stark. Er liegt entweder bei  $-40,05 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ , bzw. bei  $-40,15 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ . Diese unterscheiden sich um 2,5 ‰ voneinander. Vom Regressionskoeffizienten mit allen Daten nach der ersten Lücke unterscheiden sie sich um 1,5 ‰ bzw. 0,7 ‰. Ein Unterschied von 2,5 ‰ zwischen den Ergebnissen zweier äquivalenten Tests zeigt, der aber mit der statistischen Verteilung der Ergebnisse bei unterschiedlichen Realisierungen möglich ist.

In Abbildung 4.14 (e) zeigt sich, dass es in den Übergängen zwischen den Extrema kaum Messwerte gibt, in den Extremstellen aber vergleichsweise viele. Dies stellt, trotz der geringen Datenmenge, immer noch eine gute Grundlage für die Berechnungen dar.

Ist eine Standardabweichung im Bereich von 4 ‰ des Regressionskoeffizienten das Ziel einer Kalibrierung, so ist die Wahl eines Messintervalls von 20 s ein guter Kompromiss. Kürzere Intervalle führen auf Grund der  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung zu scheinbar besseren Ergebnissen. Diese überschätzen die Genauigkeit der Bestimmung des Regressionskoeffizienten aber deutlich, da Annahmen wie der mit einbezogene Zeitversatz nicht so genaue Berechnungen erlauben. Längere Intervalle erreichen die gewünschte Genauigkeit in der gemessenen Zeit von über 90 h überhaupt nicht. Die nötige Dauer der Messung übersteigt in diesem Fall die Zeit des maximalen Gezeitenhubs. Der maximale Gezeitenhub bietet aber auf Grund der ausgeprägten Extremalwerte besonders gute Bedingungen für eine Kalibrierung.

## 4.6 Fazit der Diskussion

In diesem Kapitel wurden die Auswirkungen der Auswahl unterschiedlicher Datensegmente auf den Regressionskoeffizienten und dessen Standardabweichung, die vermuteten systematischen Fehler des FG5, die Fehlerabschätzung des FG5, sowie die Auswirkungen unterschiedlich langer Zeitfenster der Daten untersucht. Ich will die Ergebnisse hier kurz zusammenfassend darstellen.

Die verwendeten Messdaten des FG5 enthalten zwei Datenlücken. Diese legen eine Unterteilung der Messdaten in drei Gruppen, den kompletten Datensatz, die Daten nach der ersten großen Lücke und die Daten zwischen den Lücken nahe. Die mit verschiedenen Tests berechnete Standardabweichung, der in diesen Segmenten berechneten Regressionskoeffizienten lässt sich immer, je nach primärem Fehlermaß, in zwei Genauigkeitsbereiche aufteilen. Die relativen Fehler liegen dabei für alle Datensegmente bei Nutzung der inneren Genauigkeit (drop-scatter) als primäres Fehlermaß bei ungefähr 0,8 ‰. Wenn man die  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte als primäres Fehlermaß nutzt, liegen die Standardabweichungen bei 3,7 ‰ bis 4 ‰. Die beiden Ergebnisse unterscheiden sich ungefähr um einen Faktor 5. Woher dieser Unterschied rührt, kann nur spekuliert werden. Die Fehlerberechnung könnte systematisch falsch sein, indem z.B. ein falscher Gradient angenommen wurde, dies ist aber in den Daten und den Residuum nicht zu erkennen.

Der Regressionskoeffizient ist von der Wahl der Datensegmente abhängig. Beim Vergleich der Auswahl der kompletten Daten mit den beiden anderen Segmenten erhält man einen Unterschied von 1,25 ‰ zwischen den bestimmten Regressionskoeffizienten, obwohl es keinen messtechnischen Grund für abweichende Messergebnisse gab. Diese Abweichung der Regressionskoeffizienten ist eineinhalb Mal so groß wie die mit der inneren Genauigkeit bestimmte Standardabweichung. Die Wahrscheinlichkeit eine Abweichung um 1,25 ‰ oder mehr zufällig zu erhalten liegt bei über 10 % und ist damit nicht gering.

Als Ergebnis für das in den meisten Untersuchungen verwendete Datensegment nach der ersten Lücke ergeben sich damit für Sensor G1 und den  $\sigma_{FG5}$ -Werte als primäres Fehlermaß bzw. der inneren Genauigkeit als primäres Fehlermaß:

$$-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,15 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \text{ bzw. } -40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,03 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}.$$

Die Ergebnisse für Sensor G2 liegen bei:

$$-80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,30 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \text{ bzw. } -80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,06 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}.$$

Die Größe der Standardabweichung lässt sich durch günstige Messbedingungen beeinflussen. Um überhaupt eine sinnvolle Aussage über den Regressionskoeffizient treffen zu können ist mindestens die Messung einer Gezeitenperiode nötig. Bei geringeren Messdauern streuen die berechneten Regressionskoeffizienten stark. Nach einem Tag Messdaten schließen die Fehlerbalken bereits den asymptotischen Wert für die Verwendung von 92 h bei Nutzung der individuellen  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte jedes Fallversuchs ein.

Untersuchungen mit interpolierten Werten bzw. Nutzung nur einer Auswahl von Werten bestätigen die statistischen Erwartungen. Nutzt man mehr Daten so geht die Standardabweichung schneller zurück, als bei Nutzung von weniger Messdaten. Dabei muss man aber beachten, ob eine größere Anzahl an Messwerten auch eine größere Informationsmenge in die Regression bringt. Eine einfache Verkleinerung des Intervalls zwischen den Ergebnissen erfüllt dies nicht in jedem Fall. Da bei gleicher Gesamtanzahl von Messungen weniger

Gezeitenperioden aufgezeichnet werden, die aber die Informationsträger sind. Meist sind etwas längere Intervalle und damit Messzeiträume sinnvoller. Das verwendete 20 s-Intervall scheint dabei ein guter Kompromiss für das Messintervall zu sein. Große Gezeitenamplituden haben einen positiven Einfluss auf die Regression, da insbesondere Extrema der Schweremessungen die Regression verbessern. Daher ist eine Messung bei großem Gezeitenhub zu bevorzugen. Das gilt umso mehr, da ein klarer Zusammenhang zwischen großen Gezeitenamplituden und größeren Fehlerabschätzungen des FG5 nicht gezeigt werden konnte. Zur Verdeutlichung der Genauigkeit des bestimmten Regressionskoeffizienten und zum besseren Vergleich habe ich in dieser Arbeit die Standardabweichung angegeben. Bei der Standardabweichung handelt es sich um eine statistische Aussage. Dies wurde bislang nicht speziell diskutiert. Die Standardabweichung entspricht dem  $1\sigma$ -Wert. Dieser sagt aus, dass das wahre Ergebnis bei Normalverteilung mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3 % in dem von der Standardabweichung angegebenen Bereich um den berechneten Wert liegt. Die Ergebnisse für die Berechnungen eines Regressionskoeffizienten sind normalverteilt. Nutzt man einen anderen Datensatz, so erhält man einen anderen Regressionskoeffizienten, der aber der gleichen statistischen Verteilung unterliegt. Damit sind alle Variationen des Regressionskoeffizienten in dieser Arbeit erklärbar, da sie von der angenommenen Verteilung abgedeckt werden. Als Beispiel dient hier der Unterschied zwischen den Regressionskoeffizienten mit und ohne die Werte vor der großen Datenlücke. Der Unterschied zwischen den Regressionskoeffizienten beträgt 1,25 %. Diese liegt im Bereich von  $2\sigma$  also dem doppelten  $1\sigma$ -Wert. Damit hat das zufällige Auftreten dieser Änderung eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 5 %. Da alle anderen Veränderungen des Regressionskoeffizienten kleiner als 1,25 % waren, gilt für sie selbiges. Als weiteres Beispiel kann auch die Betrachtung der beiden möglichen Umsetzungen der Nutzung jedes zweiten Messwertes herangezogen werden (Kapitel 4.5). Sie repräsentieren zwei Umsetzungen des gleichen Tests mit Ergebnissen, die sich zwar stark unterscheiden, aber durch die statistische Verteilung, der die Ergebnisse unterliegen, erklärt werden können. Die beiden Realisierungen spiegeln zwei Ergebnisse der Flanken der Verteilungsfunktion wieder und sind damit statistisch erklärbar.

Die grundlegende Frage dieser Diplomarbeit ist die, wie genau eine in-situ Kalibrierung des SG möglich ist bzw. welches Fehlermaß sich finden lässt um die Genauigkeit anzugeben. Um diese Frage klären zu können, wird ein anderes Orientierungsmaß benötigt. Grundsätzlich bieten sich systematische Fehler als solch ein Maß an, insbesondere da alle anderen Beobachtungen statistisch erklärt werden konnten. Der systematische Fehler bedingt einen grundlegenden Fehler, der grundsätzlich aus den Daten entfernt werden muss. Ist eine Entfernung nicht möglich, weil der systematische Fehler nicht genau bekannt ist, folgt daraus eine Limitierung der maximalen Genauigkeit des Ergebnisses. Eine Verringerung der Standardabweichung unter diesen grundlegenden Fehler täuscht eine größere Genauigkeit nur vor. Es macht also keinen Sinn länger zu messen, als die Zeit die nötig ist, um eine Genauigkeit mit der Größe zu erhalten, die dem, durch den systematischen Fehler hervorgerufenen grundlegenden Fehler entspricht. Allerdings liegen im Fall der von mir verwendeten Messungen keine verwertbaren Angaben zu den systematischen Fehlern vor. Niebauer et al. (1995) schätzen den systematischen Fehler der Absolutschweremessung mit dem FG5 auf  $1.1 \mu\text{gal}$ . Der systematische Fehler ist nicht zu beseitigen. Allerdings ist sein Wert bezogen

auf die gemessene Absolutschwere sehr gering (Faktor  $10^{-9}$ ), so dass der Einfluss auf den Regressionskoeffizienten nur sehr gering sein wird. Dieser Effekt wird durch die zufälligen Fehler deutlich überdeckt. Der Einfluss der systematischen Fehler des FG5 ist deutlich zu klein, um ein Ziel für eine Kalibrierung zu sein.

Als einziger Eingriff in die Daten, der systematische Änderungen hervorruft, kann der angebrachte Zeitversatz gesehen werden. Die Wahl des Wertes des Zeitversatzes war nicht eindeutig. Es gab neben dem globalen Minimum auch ein Minimum der angepassten Parabel, das sich deutlich vom globalen Minimum unterschied. Des Weiteren ist bei der von mir benutzten Methode nur eine Auflösung des Zeitversatzes von 1 s möglich. Der gewählte Zeitversatz von 7 s weicht von der nominellen Gruppenlaufzeit von 8,4 s des Filters, der als Auslöser des Zeitversatzes zwischen den Zeitreihen gilt, ab. Eine falsche Annahme des Zeitversatzes ist ein systematischer Fehler. Die bestimmten Regressionskoeffizienten, die für verschiedene Zeitversätze berechnet wurden (Abbildung 3.12), streuen auch für kleine Zeitdifferenzen um 0,5 ‰. Dies ändert sich auch für Nutzung verschiedener Datenmengen kaum. Nutzt man nur jeden zweiten Messwert, unterscheiden sich die Regressionskoeffizienten, der beiden Realisierungen deutlich, die Streuung der Werte bei geringem Zeitversatz untereinander, unterscheiden sich aber kaum. Die dadurch berechnete Streuung bezogen auf den bestimmten Regressionskoeffizienten liegen bei 0,4 ‰ bzw. 0,75 ‰. Es ist nicht zu erkennen, dass das Ergebnis von der verwendeten Datenmenge abhängt.

Daher lässt sich als einzige mögliche Quantifizierung die maximal erreichbare Genauigkeit des Regressionskoeffizienten des vollen Datensatzes mit 0,5 ‰ angeben. Es stellt sich die Frage, welche verwendete Fehlerabschätzung gewählt werden sollte. In Hinblick auf die 0,5 ‰ Streuung der Regressionskoeffizienten bei Zeitversatz und dem mit den zur Verfügung stehenden Messungen gefundenen relativen Fehler von 0,8 ‰, entscheide ich mich für die Angabe des Fehlers durch Nutzung der inneren Genauigkeit als primärem Fehlermaß. Die innere Genauigkeit lässt sich aus den Messungen ableiten und ist statistisch begründet. Die  $\sigma_{FG5}$ -Werte liegen mit einem Faktor 5 deutlich über der abgeschätzten maximalen Genauigkeit, dies lässt darauf schließen, dass sie ein sehr konservatives Fehlermaß darstellen und damit die Genauigkeit zu pessimistisch abschätzen.

Damit sind für die beiden Sensoren die Regressionskoeffizienten für ein Vertrauensniveau von  $1\sigma$  so zu wählen:

- Sensor G1  
 $-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,03 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$
- Sensor G2  
 $-80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,15 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$

## 5. Zusammenfassung

In dieser Arbeit habe ich mich mit der Genauigkeit der in-situ Kalibrierung des supraleitenden Gravimeters am Black Forest Observatory (BFO) beschäftigt.

Der Vorteil von in-situ Verfahren liegt darin, dass für diese Messungen die normale Messkonfiguration des Messgerätes benutzt werden kann. Es müssen keine Eingriffe am zu untersuchenden Gerät vorgenommen werden. Außerdem sind keine Großgeräte wie Kräne nötig, wie es bei anderen Verfahren zur Kalibrierung supraleitender Gravimeter der Fall wäre. Dies würde die Messungen stören, bzw. sogar unterbrechen. Für die in-situ Kalibrierung wird ein zweites Messgerät benötigt, das genauer kalibriert ist, als es für das zu kalibrierende Gerät angestrebt wird. Das zweite Gerät muss die Messgröße in der gewünschten Einheit liefern. Für diese Arbeit dient eine Messung mit dem Absolutgravimeter FG5-101 des BKG als Vergleich.

Die Kalibrierung soll durch die Anpassung der Daten des SGs an die Messung des FG5 erfolgen. Der so bestimmte Regressionskoeffizient dient als Kalibrierfaktor. Die Regression wurde mit der Methode der kleinsten Quadrate mit einer Gewichtung durch einen abgeschätzten Fehler der Messung des FG5 durchgeführt.

Das SG misst relative Schwereänderungen. Die Daten der beiden Sensoren G1 und G2 des SGs liegen mit einer Abtastrate von 1 s in der Einheit Volt vor. Das Messprinzip des FG5 basiert auf einzelnen Fallversuchen, diese sind nicht kontinuierlich möglich. Daher liegen die Messwerte zum Großteil mit einem Messintervall von 20 s vor. Das FG5 liefert Absolutschweremessdaten in  $\mu gal$ . Die Messung dauerte vom 27. Januar 11:47:11 Uhr (UTC) bis 2. Februar 2010 8:11:30 Uhr.

Die beiden Messergebnisse haben unterschiedliche Einheiten. Der Regressionskoeffizient wird daher die Einheit  $[m] = 1 \frac{\mu gal}{V}$  haben. Mit ihm ist es möglich die Messergebnisse des SGs in der für die Schwere üblichen Einheit  $\mu gal$  anzugeben.

Die Aufgabe eines Absolutgravimeters ist die Bestimmung des mittleren Absolutschwerewertes an einem Punkt. Daher werden die Messergebnisse des FG5 von Einflüssen bereinigt, die die Messung zeitlich variabel beeinflussen. Dies sind insbesondere die Gezeiten und die mit Luftdruckvariationen korrelierte Schwereänderung. Das Messergebnis des FG5 nach den Reduktionen als reduzierter Schwerewert angegeben. Die angebrachten Reduk-

tionen liegen vor. Für einen Vergleich der FG5- mit den SG-Daten ist es notwendig, die eigentlichen Messergebnisse samt den Einflüssen von Gezeiten und der Luftmassen in der Atmosphäre zu nutzen. Daher muss dieser Wert rekonstruiert werden. Dafür wurde die Vorzeichenkonvention des SGs überprüft und die jeweilige Auswirkung einer Änderung der Störgröße auf die Schweremessung bestimmt (Kapitel 3.2.1). Für die Reduktion erhielt ich Gleichung (3.3).

Das SG ist durch sein Messdesign und durch einige technische Einbauten darauf ausgelegt, möglichst lange Messungen mit einer sehr geringen Drift durchzuführen. Die Daten sind mit einem sehr geringen Rauschen behaftet. Bei den Einzelmessungen des FG5 kommt es vereinzelt zu Messungen, die als Ausreißer deklariert werden müssen. Daher wurden diese Daten systematischer untersucht. Durch Verwerfen der Messwerte mit dem größten Residuum nach der Regression und Berechnung der Varianz des Residuums und des Regressionskoeffizienten nach der Entfernung dieses Messwertes war es möglich, eine Anzahl der Ausreißer anzugeben. Die Betrachtung der Varianz des Residuums lässt auf eine Anzahl unter 20 schließen, allerdings beginnt der Regressionskoeffizient erst nach 25 entfernten Ausreißern gegen einen Wert geht. Daher werden aus den Daten des FG5 25 Ausreißer entfernt (Kapitel 3.2.2).

Für die Regression müssen die passenden Wertepaare der beiden Messungen gefunden werden. Entscheidend dabei ist, dass die aneinander anzupassenden Werte gleichzeitig gemessen worden sind. Daher ist die unterschiedliche Signallaufzeit entscheidend. Im SG durchlaufen die Werte einen GGP-Filter, einen achtpoligen Besselfilter mit einer -3db Eckfrequenz von 0,0681 Hz, dessen Auswirkungen durch systematisches Verschieben der Daten gegeneinander herausgefunden werden sollen. Im Falle der besten Übereinstimmung zwischen den Daten ist die Varianz der Regression am geringsten. Daher wurde die Varianz des Regressionskoeffizienten für alle Zeitversätze von  $-250$  s bis  $+250$  s berechnet. Ein globales Minimum ergibt sich bei  $+7$  s, hier werden den FG5-Daten Werte des SG zugeordnet, die 7 s später aufgenommen wurden. Dies ist mit der nominellen Gruppenlaufzeit des Filters von 8.4 s in Einklang zu bringen, spiegelt diese aber nicht direkt wieder (Kapitel 3.2.4). Der Zeitkorrekturwert kann also nicht eindeutig bestimmt werden. Durch die Anbringen der Korrektur wird ein unbekannter Fehler gemacht, es kann hier daher ein systematischer Fehler vermutet werden. Dessen Größe wird durch die Betrachtung der Streuung der Regressionskoeffizienten für kleine Zeitversätze auf ungefähr 0,5 ‰ geschätzt.

Für die Berechnungen wurden Datenvektoren erzeugt. Dabei wurde jedem Messwert des FG5 die Messwerte des SGs zugeordnet, die 7 s später registriert wurden, um den Zeitversatz auszugleichen. Die Ausreißer wurden im Vorfeld entfernt.

Mit Hilfe der gewichteten Regression mit der Methode der kleinsten Quadrate, beschrieben durch Gleichung (2.38), wurde der Regressionskoeffizient bestimmt. Die Standardabweichung in Form der  $1\sigma$ -Werte soll die Genauigkeit vergleichbar machen. Die Standardabweichung wurde auf verschiedene Weisen berechnet. Dazu zählten die Fehlerfortpflanzung nach Gauß mit unterschiedlichen primären Fehlermaßen, sowie statistische Tests. Ich habe zwei primäre Fehlermaße genutzt. Zum einen den Fehler  $\sigma_{(FG5)}$  der Messung, den das FG5 für jeden Fallversucht berechnet. Dieser geht in die Fehlerfortpflanzung mit individuellen Fehlern, in die Fehlerfortpflanzung mit dem RMS der  $\sigma_{(FG5)}$ -Werte und in die statistische

Monte-Carlo-Methode ein. Zum anderen nutze ich die innere Genauigkeit der Messung, die durch das Residuum der Regression gegeben ist, als primäres Fehlermaß. Dieses geht in die Fehlerfortpflanzung der RMS-Werte des Residuums ein, sowie in die beiden statistischen Methoden Jackknife und Bootstrap. Als Ergebnis der Berechnung des Regressionskoeffizienten und dessen Standardabweichung erhält man, für den Datensatz, der alle Werte ab der großen Datenlücke enthält folgende Ergebnisse. Für Sensor G1 mit den  $\sigma_{(FG5)}$ -Werten als primärem Fehlermaß  $-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,15 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$  bzw. mit der inneren Genauigkeit als primärem Fehlermaß  $-40,11 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,03 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}$ .

Die Ergebnisse für Sensor G2 liegen bei:

$$-80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,30 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \text{ bzw. } -80,07 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}} \pm 0,06 \frac{\mu\text{gal}}{\text{V}}.$$

Es gilt zu entscheiden, welche Methode zur Berechnung der Standardabweichung anzuwenden ist. Dazu muss wie in Kapitel 4.6 beschrieben, beachtet werden, dass die Standardabweichung nur eine Wahrscheinlichkeit angibt, mit der das wahre Ergebnis in dem von der Standardabweichung beschriebenen Intervall um das berechnete Ergebnis liegt. Die Ergebnisse unterliegen also einer statistischen Verteilung. Durch diese lassen sich die in der Arbeit beobachteten Variationen des Regressionskoeffizienten bei unterschiedlichen Tests erklären. Es handelt sich dabei nur um die Folgen der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Daher musste ein anderes Maß für die maximal erreichbare Genauigkeit gefunden werden. Als einziger systematischer Einfluss mit signifikantem Effekt tritt die angebrachte Zeitverschiebung der Zeitreihen der unterschiedlichen Messgeräte in Erscheinung (Kapitel 3.2.4). Die angebrachte Zeitverschiebung kann von der tatsächlich auftretenden Laufzeit der Daten abweichen. Dieser systematische Fehler würde sich auf die Berechnung des Regressionskoeffizienten auswirken. Kleine Änderungen des Zeitversatzes haben bereits einen Einfluss auf den Regressionskoeffizienten (Abbildung 3.12). Diese Abweichungen liegen bei ungefähr 0,5 % und sind kaum abhängig von der verwendeten Datenmenge. Damit lässt sich dieser Wert als Abschätzung der maximal sinnvollen Genauigkeit angeben. Die Berechnung der Standardabweichung mit der inneren Genauigkeit ergibt Werte von 0,8 % und liegt damit nahe bei dieser Abschätzung. Es ist ein Maß, das aus den eigentlichen Messwerten abgeschätzt wird und ist statistisch begründbar. Daher ist die Berechnung der Standardabweichung mit der inneren Genauigkeit der von mir favorisierte Ansatz. Die Fehlerabschätzung der Fallversuche ( $\sigma_{(FG5)}$ ) liefert hingegen einen um den Faktor 5 größeren Wert und ist damit zu konservativ. Eine Abschätzung der Fehler mit diesem primären Fehlermaß wäre zu pessimistisch. Der Grund für diese große Abweichung ist unklar.

Mit der Abschätzung der maximalen Genauigkeit der Kalibrierung wird ermöglicht, die dafür nötigen Messungen ebenfalls zu optimieren. Untersuchungen mit Ausschnitten der Daten und Veränderungen des Messintervalls der Absolutmessungen haben gezeigt, dass für eine Kalibrierung eine möglichst große Gezeitenamplitude wichtig ist. Diese verringert die Standardabweichung der Regression deutlich schneller als kleine Gezeitenamplituden, da große Amplituden und damit extremere Schwerewerte mehr Informationen in die Regression einbringen, als kleinere. Auch da davon ausgegangen werden kann, dass der Messfehler gleich bleibt und dann bei absolut größeren Werten der relative Messfehler kleiner wird. Für eine Kalibrierung sind die Daten mindestens einer Gezeitenperiode notwendig, sobald diese Daten in der Regression verwendet werden, nähert sich der bestimmte Regressionsko-

effizient für verlängerte Zeitfenster einem asymptotischen Wert des Regressionskoeffizient für den ganzen Datensatz an. Das Messintervall entscheidet dabei ebenfalls, wie schnell die Standardabweichung zurückgeht. Dabei bieten sich lange Intervalle zwischen den Messungen nicht an. Diese zeichnen zwar viele Gezeitenperioden auf, die Zahl der Messungen ist aber gering. Auch besonders kurze Messintervalle sollten nicht gewählt werden, da diese zwar viele Daten aufnehmen, bei vertretbarem ökonomischen Aufwand aber weniger Gezeitenperioden aufnehmen.

Eine optimale Messung sollte demnach bei maximalen Gezeitenamplituden stattfinden, ein Messintervall von ungefähr 20 s haben und mindestens einen Tag dauern. Um die maximale Genauigkeit von 0,5 ‰ zu erreichen muss man allerdings bei einer Fehlerabschätzung mit der inneren Genauigkeit länger als die vorliegenden Datensätze von 92 h messen. Diese Daten erreichen nur eine Genauigkeit von 0,8 ‰. Für eine relative Genauigkeit von 0,5 ‰ wären, wenn man eine  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ -Beziehung für die Abhängigkeit des Vertrauensbereiches zugrunde legt, weitere 6 Tage Messungen nötig.

Diese genaue Kalibrierung des SGs ermöglicht nicht nur eine Aussage über die Genauigkeit der Messdaten, sondern eröffnet auch die Möglichkeiten anderer Messgeräte, die in einem überlappenden Frequenzband operieren, ebenfalls mit einer in-situ Methode gegenseitig zu kalibrieren. Dazu zählen neben dem ET-19 Gezeitengravimeter auch die Breitbandseismometer STS-1 und STS-2, die die Gezeiten, wenn auch nicht optimal, ebenfalls registrieren. Damit wären Untersuchungen zur Langzeitstabilität dieser Messgeräte möglich, ohne die Messungen zu stören. Jede Manipulation an den Geräten birgt die Gefahr, die aktuell sehr gute Datenqualität durch induzierte Drifte zu stören. Diese weiteren Kalibrierungen können Teil von weiteren Arbeiten sein.

In dieser Arbeit konnte somit gezeigt werden, dass die maximal mögliche Genauigkeit der in-situ Kalibrierung des supraleitenden Gravimeters von der Unsicherheit der zu korrigierenden Signallaufzeit des Filters des supraleitenden Gravimeters abhängt. Die damit bestimmte relative Genauigkeit liegt bei höchstens 0,5 ‰. Zur Berechnung der Standardabweichung einer Messungen kann die innere Genauigkeit der Messdaten als primäres Fehlermaß genutzt werden. Mit den hier verwendeten Messdaten wurde eine Standardabweichung von 0,8 ‰ für den Regressionskoeffizient erreicht.

## 6. Schlusswort

Diese Diplomarbeit würde in dieser Form nicht vorliegen ohne die Unterstützung vieler Menschen, denen ich im folgenden danken will.

Meinem Betreuer **Thomas Forbriger** danke ich für die stets schnelle, geduldige und fachkundige Beantwortung meiner Fragen, die vielen Hinweise zu meiner Arbeit und der stets offenen Kommunikation.

Meinen Mitdiplomanden im Zimmer 104 **Martin Schäfer, Sven Heider** und **Zacharias Stelzer** danke ich für die vielen Diskussion, die manchmal nötige Zerstreuung und dafür, dass sie auch meine Percussionseinlagen ertragen haben.

**Anja Diez** danke ich für das geduldige Korrekturlesen und Auffinden des Sinns meiner teils dunkel, kryptisch, universitären in sich verschlossenen Sätze, sowie für die Ratschläge aus dem hohen Norden und die Vorreiterrolle in Sachen Diplomprüfungen.

**Rudolf Widmer-Schnidrig** und **Walter Zürn** danke ich für die inhaltlichen Diskussionen zu meinem Thema bei meinen Besuchen am BFO.

**Erhard Wielandt** danke ich für die Bereitschaft zur Kalibrierung des Seismometers, das für mein ursprüngliches Diplomarbeitsthema genutzt werden sollte und die dazu nötigen Erklärungen. Leider sind diese Daten bereits bei der Datenaufnahme verschollen.

Der ganzen **Arbeitsgruppe Angewandte Geophysik** danke ich für die freundliche Aufnahme und die volle Einbeziehung in alle Aktivitäten, trotz meiner eigentlich nicht ins Themengebiet passenden Arbeit.

Der **Arbeitsgruppe Seismologie** danke ich für die Ideen im Seismo-Seminar.

Allen **ESGlerInnen** der Evangelischen Studierendengemeinde (ESG) Karlsruhe und dem Präsidium der Bundesversammlung 2010 in Leipzig danke ich für die Zeit den Geist auch anderweitig zu beschäftigen und die vielen schönen Abende in und um das Dietrich-Bonhoeffer-Haus.

Dem **GAP-Orga-Team** für die vielen Stunden Diskussion und Organisation und die Durchführung des GAP 2010 in Karlsruhe und der damit verbundenen Zerstreuung.

Nicht zuletzt danke ich **meinen Eltern** und **meinem Bruder** für die immer währende Unterstützung, die Aufmunterung nach so manchem Rückschlag und das stetige Vertrauen und nicht zuletzt für die Korrekturen in Sachen Rechtschreibung und Zeichensetzung, durch die die neue Tierart der 'Rechente' und das große Werk "Variationen über das Wort 'Regressionskoeffizient' " wohl weiterhin unentdeckt bleiben.

"Falls Gott die Welt geschaffen hat, war seine Hauptsorge sicher nicht, sie so zu machen, dass wir sie verstehen können."

*Albert Einstein*

# Literaturverzeichnis

- Achilli, V., Baldi, P., Casula, G., Errani, M., Focarde, S., Guerzoni, M., Palmonari, F. und Raguni, G.: A calibration system for superconducting gravimeters. In: *Bulletin Geodesique*, Band 69:S. 73–80, 1995.
- Aster, R.C., Borchers, B. und Thurber, C.H.: *Parameter Estimation and Inverse Problems*. Elsevier Academic Press, Burlington San Diego London, 2005.
- Blum, P.: Einführung zur Fehlerrechnung im Praktikum. Skriptum, Universität Karlsruhe.
- Crossley, D., Hinderer, J. und Boy, J.-P.: Regional gravity variation in Europe from superconducting gravimeters. In: *Journal of Geodynamics*, (38):S. 325–342, 2004.
- Efron, B.: Bootstrap methods: Another look at the jackknife. In: *The Annals of Statistics*, Band 7(1):S. 1–26, 1979.
- Forbriger, T.: Eine kleine geschichte für walter oder viel lärm um nichts., 2005. Einfluss des noise in der Modellfunktion der Regression, unveröffentlicht.
- Forbriger, T.: Skriptum zur Vorlesung Seismologische Messtechnik. <http://www.rz.uni-karlsruhe.de/bi77/txt/messtechnik.html>, 2007.
- Forbriger, T.: Filter response, 2009. Untersuchung der nominellen Filterantwort des SG-056, unveröffentlicht.
- Forbriger, T., Altmann, J., Gottschämmer, E., Kästner, U., Mayer, M., Seitz, K., Wawerzinek, B., Westerhaus, M., Widmer, R. und Zürn, W.: Skriptum zu den Geophysikalischen Geländeübungen 2010, karlsruher institut für technologie. 2010.
- Gauß, K.F.: *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*. F. Perthes and I.H. Besser, Hamburg.
- Gitlein, O.: *Absolutgravimetrische Bestimmung der Fennoskandischen Landhebung mit dem FG5-220*. Dissertation, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2009.
- Goodkind, J.M., Czipoo, P.V., A.P. Mills, Jr., Murakami, M., Platzmann, P.M., Young, C.W. und D-M-Zuckerman: Test of the gravitational inverse-square law at 0.4- to 1.4-m mass separations. In: *Physical review D*, Band 47(4):S. 1290–1297, 1993.

- Hinderer, J., Amalvict, M., Crossley, D., Leveque, J.-J., Rivera, L. und Luck, B.: Tides, earthquakes and ground noise as seen by the absolute gravimeter FG5 and its super-spring; comparison with a superconducting gravimeter and a broadband seismometer. In: *Metrologia*, Band 39:S. 495–501, 2002.
- Hinderer, J., Crossley, D. und Warburton, R.J.: *Treatise on Geophysics*, Elsevier B.V., Kapitel Gravimetric Methods - Superconducting Gravity Meters, S. 65–120. 2007.
- Lang, C.B. und Pucker, N.: *Mathematische Methoden in der Physik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin, 1998.
- Legendre, A.-M.: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes (Sur la Méthode des moindres carrés)*. C.F. Didot, Paris, 1805.
- Meschede, D. (Hg.): *Gerthsen Physik*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 23. Auflage, 2006.
- Müller, G.: *Skriptum zur Vorlesung Inversionstheorie geophysikalischer Beobachtungen*. Institut für Meteorologie und Geophysik Universität Frankfurt, 1997.
- Niebauer, T.M., Sagagawa, G.S, Faller, J.E., Hilt, R. und Klopping, F.: A new generation of absolute gravimeters. In: *metrologia*, Band 32:S. 159–180, 1995.
- Prothero, W.A.: *A cryogenic gravimeter*. Dissertation, University of California at San Diego, 1967.
- Prothero, W.A. und Goodkind, J.M.: A superconducting gravimeter. In: *Review of Scientific Instruments*, (39):S. 1257–1262, 1968.
- Quenouille, M.H.: Notes on bias in estimation. In: *Biometrika*, (43):S. 353 ff, 1956.
- Richter, B.: Calibration of superconducting gravimeters. In: *Cahiers Centre Europ. Geodyn. Seismologie*, (3):S. 99 – 107, 1991.
- Timmen, L.: *Untersuchungen zur Modellbildung bei der Auswertung absoluter Schweremessungen*. Dissertation, Universität Hannover, 1994.
- Timmen, L.: Precise definition of the effective measurement height of free-fall absolute gravimeters. In: *Meterologia*, Band 46(3):S. 62, 2004.
- Torge, W.: *Geodäsie*. de Gruyter, Berlin, zweite Auflage, 2002.
- Tukey, J.W.: Bias and confidence in not quite large samples. In: *Annals of Mathematical Statistics*, Band 29:S. 614, 1958.
- Varga, P., Hajosy, H. und Csapo, G.: Laboratory calibration of Lacoste-Romberg type gravimeters by using a heavy cylindrical ring. In: *Geophysical Journal International*, (120):S. 745–757, 1995.
- Westerhaus, M.: Skriptum zur Vorlesung Rezente Geodynamik im Wintersemester 2007/08, universität karlsruhe. 2007.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Größen der Schwereberechnung . . . . .	4
2.2	Gravitation des Mondes . . . . .	5
2.3	Gezeitenbeschleunigung an der Erdoberfläche . . . . .	6
2.4	Phasendiagramm eines Supraleiters 2. Art . . . . .	8
2.5	Foto des SG-056 am BFO . . . . .	9
2.6	Schema des Aufbaus eines SG . . . . .	10
2.7	Schema des SG Sensors . . . . .	11
2.8	Foto des FG5-101 im BFO . . . . .	14
2.9	Schema des Aufbaus eines FG5 . . . . .	15
2.10	Schema eines Mach-Zender Interferometer im FG5 . . . . .	16
2.11	Aufbau der Superspring . . . . .	17
2.12	FG5 Installation mit Wärmeisolation . . . . .	18
2.13	Ziel der Kalibrierung . . . . .	20
3.1	Reduzierte Schweredaten des FG5 . . . . .	30
3.2	Gemessene Relativschwere der beiden Sensoren des SG . . . . .	31
3.3	Vergleich der Messreihen der beiden Messgeräte . . . . .	33
3.4	Registrierung des supraleitenden Gravimeters ab dem 29. Januar . . . . .	34
3.5	Gezeitenkorrektur der FG5-Daten beginnend am 29. Januar 00:00 Uhr . . . . .	34
3.6	Luftdruck und Luftdruckkorrektur . . . . .	35
3.7	Gesamte mittelwertkorrigierte Daten des Absolutgravimeters . . . . .	36
3.8	Entwicklung der Varianz beim Entfernen von Ausreißern . . . . .	37
3.9	Entwicklung des Regressionskoeffizienten beim Entfernen von Ausreißern . . . . .	37
3.10	Messreihe des Absolutgravimeters FG5 mit den zu entfernenden Ausreißern . . . . .	38
3.11	Entwicklung der Varianz des Regressionskoeffizienten für G1 bei Zeitversatz . . . . .	40
3.12	Entwicklung des Regressionskoeffizienten für Sensor G1 bei Zeitversatz . . . . .	42
3.13	Vergleich der Regressionskoeffizienten-Entwicklung für verschieden bearbeitete Daten . . . . .	43
3.14	Vergleich der Regressionskoeffizienten-Entwicklung für verschieden bearbeitete Daten . . . . .	43
3.15	Vergleich der Regressionskoeffizienten-Entwicklung bei verschiedener Wahl von Modell- und Datenvektor . . . . .	44
3.16	Residuum der Regression . . . . .	47
3.17	Regressionsergebnis . . . . .	48

---

4.1	Vergleich der Regressionskoeffizienten und deren Standardabweichung für verschiedene Datensegmente . . . . .	54
4.2	Dropscluster vergleich . . . . .	55
4.3	Korrelationsbetrachtung zwischen der Schwere und der für jeden Fallversuch erhaltenen Fehlerabschätzung des FG5. . . . .	59
4.4	Sigma-Schwere Korrelation . . . . .	60
4.5	Gesamtansicht der Entwicklung der Standardabweichung bei Sensor G1 . . . .	61
4.6	Rekonstruierte Messung des FG5 . . . . .	62
4.7	Regressionskoeffizienten und deren Standardabweichung für unterschiedliche Datensegmente . . . . .	63
4.8	Vergleich der Entwicklung der Standardabweichung mit den unterschiedlichen Datensegmenten und den dafür verwendeten Schweredaten. . . . .	64
4.9	Vergleich der Standardabweichung und $\frac{1}{\sqrt{n}}$ -Beziehung . . . . .	65
4.10	Standardabweichungsentwicklung bei Sensor G1 . . . . .	66
4.11	Standardabweichungsentwicklung bei Sensor G2 . . . . .	67
4.12	Standardabweichungsentwicklung bei interpoliertem Messintervall . . . . .	70
4.13	Standardabweichungsentwicklung bei verschiedenen Messintervallen . . . . .	71
4.14	Standardabweichungsentwicklung bei verschiedenen Messintervallen . . . . .	72

# Tabellenverzeichnis

3.1	Anpassungsrichtung bei der Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	46
4.1	Regressionskoeffizienten für gesamten Datensatz . . . . .	52
4.2	Genauigkeitsabschätzung des gesamten Datensatzes . . . . .	52
4.3	Regressionskoeffizienten für Daten nach der ersten Lücke . . . . .	53
4.4	Genauigkeitsabschätzung nach erster Lücke . . . . .	53
4.5	Regressionskoeffizienten für die Daten zwischen den Lücken . . . . .	53
4.6	Genauigkeitsabschätzung zwischen den Lücken . . . . .	53



# Anhang

## A Glossar

Eine kurze Übersicht über einige verwendete Begriffe:

- **Allan Varianz**

Die Allan-Varianz ist ein Maß für die Genauigkeit von Oszillatoren. Definiert ist sie als der halbe Durchschnitt der Differenzquadrate zweier aufeinanderfolgender Messwerte der Frequenzabweichung.

- **Astasierung**

Durch Anpassung der Federgeometrie wird das stabile Gleichgewicht von rücktreibenden Federkraft und der angreifenden Schwerkraft zu einem indifferenten Gleichgewicht verschoben. Die nichtlineare Beziehung führt zu einer hohen Sensitivität.

- **Bootstrap**

Das Bootstrap-Verfahren ist eine Methode des Resamplings, also ein statistischer Test. Dabei wird ein neuer Datensatz erzeugt, der die selbe Menge an Daten erhält wie der Ausgangsdatsatz. Die Werte des neuen Datensatz werden zufällig aus dem Ausgangsdatsatz ausgewählt. Diese Auswahl findet mit Zurücklegen statt, so dass einzelne Werte mehrmals im neuen Datensatz auftreten. Der Regressionskoeffizient wird mit dem neuen Datensatz berechnet. Dies wird vielfach wiederholt. Die Standardabweichung der so bestimmten Regressionskoeffizienten gibt ein Maß für die Genauigkeit des mittleren Regressionskoeffizienten an.

Beispiel:

Ausgangsvektor  $(x_1 \ x_2 \ x_3)$                       neuer Vektor:  $(x_3 \ x_3 \ x_2)$

- **drop-scatter**

Streuung der Messwerte des FG5 von Fallversuch zu Fallversuch

- **Fehlerfortpflanzung(individuelle Sigma)**

In die Berechnung der Fehlerfortpflanzung der Regression geht das individuelle  $\sigma_{FG5}$  jeden einzelnen Wertes ein.

- **Fehlerfortpflanzung(RMS Sigma)**

In die Berechnung der Fehlerfortpflanzung der Regression geht ein einheitlicher Wert für alle Daten ein, dieser berechnet sich als RMS aller  $\sigma_{FG5}$  Werte

- **Fehlerfortpflanzung(RMS Residuum)**

In die Fehlerfortpflanzungsberechnung der Regression geht ein einheitlicher Wert ein,

dieser berechnet sich als RMS des Residuums der Regression. Dieser Wert ist nahezu identisch zur Standardabweichung, da der Mittelwert der Residuum Null sein muss.

- **gal**

Gebräuchliche Einheit der Schwerebeschleunigung, benannt nach Galileo Galilei.

$$1\text{gal} = 0,01 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$1\mu\text{gal} = 1 \cdot 10^{-7} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,01 \frac{\mu\text{m}}{\text{s}^2}$$

- **Genauigkeit, äußere**

Die äußere Genauigkeit, oder Vergleichsstandardabweichung (nach DIN 1319), beschreibt die Abweichung zwischen Messergebnissen verschiedener Messreihen unter verschiedenen Messbedingungen. Da es sehr schwer ist die gleichen Messbedingungen zu gewährleisten gibt es diese Ungenauigkeiten bei beinahe allen Wiederholungsmessungen. Die äußere Genauigkeit enthält auch die systematischen Fehler.

- **Genauigkeit, innere**

Die innere Genauigkeit, oder Wiederholungsstandardabweichung (nach DIN 1319), gibt die Genauigkeit innerhalb eines Datensatzes an. Der Datensatz wurde unter möglichst konstanten Bedingungen erhoben. Die quantitativen Angaben sind abhängig von zur Berechnung herangezogenen primären Fehlermaßen. Sie entspricht der Standardabweichung. Es handelt sich um einen rein statistischen Ansatz.

- **Jackknife**

Das Jackknife-Verfahren ist eine Methode des Resampling, also ein statistischer Test. Dabei wird zufällig, oder systematisch, ein Datenwert aus der Messreihe entfernt und die Berechnung des Regressionskoeffizienten vielfach wiederholt. Auf Grund der daraus resultierenden, nur sehr geringen, Streuung, ist die Anpassung des Ergebnisses mit einem Vorfaktor  $\sqrt{\frac{n-1}{n}}$  notwendig. Als Ergebnis erhält man, die mit einem Faktor verstärkte, Standardabweichung der streuenden Regressionskoeffizienten.

Beispiel:

Ausgangsvektor  $(x_1 \ x_2 \ x_3)$

neuer Vektor:  $(x_2 \ x_3)$

- **RMS**

...oder quadratischer Mittelwert. Durch die Quadrierung der Messwerte vor der Summation haben größere Werte einen größeren Einfluss als kleinere

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i^2}$$

Das Vorzeichen hat im Gegensatz zum arithmetischen Mittel keinen Einfluss. Die Berechnung des RMS-Wertes beinhaltet keine Entfernung des Mittelwertes.

- **Schätzfunktion**

Eine Schätzfunktion ermöglicht es statistische Aussagen über bestimmte Parameter einer unbekanntem Grundgesamtheit zu treffen.

- **Sensor G1**

Sensor G1 ist die schwerere (17,7 g) im SG verbaute Testmasse.

- **Sensor G2**

Sensor G2 ist die leichtere (4,34 g) im SG verbaute Testmasse.

- **Sigma-Wert**

Fehlerabschätzung des FG5 für jeden einzelnen Fallversuch anhand der Anpassung der Fallparabel an die gemessene Ortskurve. der Sigma-Wert gibt somit die Standardabweichung der Einzelmessung an.

- **Supraleitung**

Supraleitende Materialien verlieren unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_C$  ihren elektrischen Widerstand und sind ideale Leiter. Supraleiter sind ebenfalls ideale Diamagneten.

- **Standardabweichung  $\sigma$**

Die Standardabweichung gibt ein Maß der Streuung an. Die Standardabweichung berechnet sich nach

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Ist der Datensatz mittelwertfrei entspricht die Standardabweichung dem RMS Wert. Die Standardabweichung ist die Quadratwurzel der Varianz.

- **Varianz  $\sigma^2$**

Die Varianz ist ein Streumaß eines Datensatzes. Sie berechnet sich nach

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Die Quadratwurzel der Varianz ist die Standardabweichung

- **Vertrauensbereich**

(engl. confidence interval) gibt den Bereich an, in dem mit der durch das Vertrauensniveau angegebenen Wahrscheinlichkeit, ein Parameter liegt.

- **Vertrauensniveau**

(engl. confidence level) gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Parameter im Vertrauensbereich liegt. Es wird meistens in vielfachen der Standardabweichung  $\sigma$  angegeben.

## B Datensätze

- **Messung des Supraleitenden Gravimeters**

Messung der relativen Schwere in 1 V beider Sensoren G1 und G2 des SG-056, das Abtastintervall beträgt 1 Hz.

- **Messung des Absolutgravimeters FG5**

Messung der Absolutschwere in 1  $\mu\text{gal}$ . Die Messdaten liegen alle 20 s vor. Der Datensatz enthält neben den reduzierten Schwerewert die angebrachten Reduktion und Geräteparameter.

- **Luftdruckmessung am BFO**

Luftdruckdaten des Barometers am BFO in 1 mbar vom 24. Januar bis 08. Februar 2010. Die Messung dient zum Vergleich mit der Luftdruckkorrektur.

- **Messungen eines STS-2**

Bodenschwinggeschwindigkeitsdaten des STS-2 Seismometers des GRSN vom 29. Januar 2010. Die Daten dienen im Vergleich zu der Aufzeichnung des SG-056 zur Klärung der Vorzeichenkonvention.

## C Programm-CD-ROM

Diese Diplomarbeit liegt eine CD-ROM mit allen verwendeten Daten, sowie den selbstprogrammierten MATLAB-Programmen bei. Die einzelnen Programme werden im Folgenden alphabetisch aufgelistet und ihre Funktion kurz erklärt.

- *abbildungen.m* erstellt die Abbildungen der Rohdaten vor den Berechnungen
- *anpassungsrichtung.m* berechnet die prozentualen Abweichungen der Residuen für die beiden Anpassungsrichtungen SG an FG5 und umgekehrt
- *ausreisserausreisser.m* entfernt anhand der Größe des Residuums eine vorgegebene Anzahl an Ausreißern aus den Datensätzen. Für die Unterdatenmengen gibt es gesonderte Versionen, die die Ausreißer im nicht betrachteten Bereich ignorieren. Diese sind am Namensendung zu erkennen.
- *ausreisserindizes.m* bestimmt die größten Residuum für beliebig viele Werte und entfernt diese Werte.
- *ausreisserplots.m* erstellt die Abbildungen in denen die entfernten Werte aus *ausreisserindizes.m* farbcodiert nach dem Zeitpunkt der Entfernung aus dem Datensatz abgebildet werden.
- *ausreisserplots2.m* erstellt die Abbildungen für die ersten 25 Werte in denen die entfernten Werte aus *ausreisserindizes.m* farbcodiert nach dem Entfernungszeitraum abgebildet werden.
- *ausreisserplots25.m* erstellt die in der Arbeit verwendeten Abbildungen der 25 entfernten Ausreißer.
- *ausreisserplotposter.m* erstellt die Abbildungen der Varianz und Regressionskoeffizientenuntersuchung für die Festlegung der Ausreißerzahl (siehe *ausreisseruntersuchung2.m*)
- *ausreisseruntersuchung2.m* berechnet die Varianz- und Regressionskoeffizienten- Entwicklung für die systematische Ausreißerentfernung und erzeugt einige Abbildungen.
- *bootstrap\_nv.m* führt den Bootstrap-Test durch. Die Anzahl der Wiederholungen ist wählbar.
- *drop-scatter\_abbildungen.m* erstellt Abbildungen zum Vergleich der drop-scatter vor und nach der großen Datenlücke

- *errorplot.m* erstellt Abbildungen mit Fehlerbalken zu den Schweremessungen und dem Regressionsergebnis
- *Fallparabel.m* berechnet die theoretische Fallparabel, die für die Bestimmung des  $\sigma_{FG5}$  genutzt wird
- *fenster\_abbildungen\_vgl.m* plottet die Ergebnisse der Fehlerfortpflanzung der Zeitfensterberechnung im Vergleich zu den bestimmten Ungenauigkeiten
- *FG52matlab.m* liest die Daten des FG5 ein und erstellt Vektoren. Die Zeitangaben werden in Sekunden ab dem 27.01.2010 11:49:00 angegeben.
- *FG52matlab\_ohneluecke.m* die Daten des FG5 nach der ersten großen Datenlücke ein und erstellt Vektoren. Die Zeitangaben werden in Sekunden ab dem 27.01.2010 11:49:00 angegeben.
- *FG52matlab\_ohneluecken.m* die Daten des FG5 zwischen den Datenlücke ein und erstellt Vektoren. Die Zeitangaben werden in Sekunden ab dem 27.01.2010 11:49:00 angegeben.
- *grav\_einlesen.m* führt die Einzelprogramme zum kompletten Einlesen nacheinander aus: *FG52matlab.m*, *SG2matlab.m*, *vergleichsuche.m*, *rausschreiben.m* und *ausreisserausreisser.m*
- *grav\_einlesen\_ohneluecke.m* s. *grav\_einlesen.m* nur mit angepassten *FG52matlab\_ohneluecke.m* und *ausreisserausreisser\_ohneluecke.m*. Entsprechend für die übrigen Namensendungen.
- *histogramm.m* erstellt ein Histogramm der Residuen der Regression
- *jack\_abbildungen\_nv.m* erstellt die Abbildungen für den Jackknife-Test
- *jackknife\_1.m* führt den Jackknife-Test durch
- *leastsquare.m* berechnet die grundlegende Least Squares Regression
- *leastsquare\_V3.m* erweiterte Fassung von *leastsquare.m* für alle Anpassungen und Sensoren.
- *leastsquare\_weighted\_V3.m* erweiterte Fassung von *leastsquare\_V3.m* mit Gewichtung.
- *lowpass\_200s* 200s Tiefpass-Filter für die SG Daten
- *lowpass\_6s* 6s Tiefpass-Filter für die SG Daten
- *lueckeneinfluss.m* kurzer Test des Einflusses des Verwerfens von 747- Werten
- *mc\_abbildungen.m* erzeugt die Abbildungen für den Monte-Carlo-Test
- *montecarlo\_fg5\_ungenauigkeit* schätzt die Ungenauigkeit des FG5 mit der Fehlerabschätzung von Niebauer et al. (1995) mittels Monte-Carlo-Tests
- *montecarlo\_randn.m* berechnet den Monte-Carlo-Test und nutzt dazu die Funktion *randn* von MATLAB.
- *rausschreiben.m* erzeugt die Vektoren der SG Daten mit den von *vergleichssuche.m* erzeugten Indizes.

- *rausschreiben\_namensendung.m* passt *rausschreiben.m* auf gefilterte und versetzte Daten an.
- *regergebnis.m* berechnet das Ergebnis der Regression und erzeugt die passenden Abbildungen.
- *regkoef\_varianz\_gewichtet\_neu.m* berechnet die Fehlerfortpflanzung für alle drei im Text erwähnten Fälle.
- *residuenplot.m* erzeugt die Abbildungen der Residuen der Regression
- *SG2matlab.m* leist die Daten des SG ein und erstellt die Vektoren. Die Zeitangaben werden in Sekunden ab dem 27.01.2010 11:49:00 angegeben.
- *SG\_ET19\_Vergleichsplot.m* erzeugt eine Abbildung zum Vergleich mit den Gezeitenreduktionen des FG5, die aus den Gezeitenparametern des ET19 bestimmt wurden.
- *sigmagravplot.m* erzeugt einen Abbildung zur Abschätzung der Korrelation zwischen  $\sigma_{FG5}$  und der Größe der Schwere.
- *sigmascript.m* berechnet einen Näherungswert für die Standardabweichung der Grundgesamtheit
- *tideplot.m* erzeugt einen Abbildung der Gezeitenkorrektur
- *vergleichssuche.m* sucht zu jeden Messwert des FG5 den passenden Messwert der Sensoren des SG.
- *vergleichssuche7.m* sucht zu jeden Messwert des FG5 den passenden Messwert der Sensoren des SG mit einem Zeitversatz von 7 s.
- *zeitfenster.m* ermöglicht es Berechnungen für beliebig lange Zeitfenster der Daten von Beginn und Ende der Zeitreihe zu machen
- *zeitfenster\_fehlerbalken\_auswahl.m* berechnet mittels Fehlerfortpflanzung die Ungenauigkeit des Regressionskoeffizient für Zeitreihen in denen nur jeder x-te Messwert genutzt wird.
- *zeitfenster\_fehlerbalken\_abbildungen\_namensendung.m* erzeugt die Abbildungen mit Fehlerbalken nach der Berechnung der Zeitfenster.
- *zeitfenster\_fehlerbalken\_interpol.m* berechnet mittels Fehlerfortpflanzung die Ungenauigkeit des Regressionskoeffizient für Zeitreihen in denen zwischen jedem Wert noch ein interpolierter Wert liegt. Damit wird eine Messung alle 10 s simuliert.
- *zeitinstuden.m* erzeugt einen Vektor *fg5\_plotzeit* in Stunden nach 27.01.2010 11:00 Uhr
- *zeitversatz\_automat.m* berechnet die Regressionskoeffizienten und Varianzen für Vektoren, die systematisch gegeneinander verschoben werden. Der Test dient zur Untersuchung etwaiger Filterlaufzeiten
- *zeitversatz\_tests.m* basiert auf *zeitversatz\_automat.m* testet aber den Einfluss von verschiedenen Datensätzen mit verschiedenen Vorzeichen und Gezeitenhüben.