

Optimale Bandstrategien für Dividendenzahlungen im Cramér-Lundberg-Modell

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaften
(Dr. rer. pol.)
von der Fakultät für
Wirtschaftswissenschaften
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte
DISSERTATION

von

Dipl. Math. oec. Jasmin Berdel

Tag der mündlichen Prüfung: 23.06.2014

Referent: Prof. Dr. Christian Hipp

Korreferent: Prof. Dr. Oliver Stein

Karlsruhe 2014

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
1.1 Steuerungstheorie in der Versicherungsmathematik	1
1.2 Forschungsbedarf und Ziele der Arbeit	2
1.3 Gliederung	3
2 Mathematische Modellierung	5
2.1 Das Optimierungsproblem	5
2.2 Die Dynamik von V^π	12
3 Lösungsmethoden	23
3.1 Schwache Lösungen der HJB	24
3.2 Gerber-Shiu-Funktionen	33
3.3 Die Methoden im Einklang	42
4 Lokalisierung und Identifikation der optimalen Bänder	46
4.1 Auswirkungen der unteren Bandgrenze	48
4.2 Lokalisierung der optimalen oberen Bandgrenze	51
4.3 Ex ante Lokalisierung aller optimalen oberen Bandgrenzen	54
4.4 Potentielle optimale untere Bandgrenzen	57
4.5 Identifikation aller optimalen Strategien	59
5 Explizites Lösungsverfahren für phasentyp verteilte Schadenhöhen	67
5.1 Eigenschaften von Phasentypverteilungen	68
5.2 Systeme von Differentialgleichungen für V^π	74
5.3 Die Übergänge in den Bandgrenzen	79
5.4 Beispiele und Implikationen	83

6	Einpunktverteilungen	93
6.1	Die Differenzen-Differentialgleichung und die Skalenfunktion	94
6.2	Der Wert einer endlichen Bandstrategie	97
6.3	Die optimalen Strategien	101
7	Fazit und Ausblick	117
A	Invarianz des Modells in Zeit- und Geldeinheit	120
B	Ergänzungen zu Kapitel 6	123
B.1	Suboptimale Strategien	123
B.2	Die Ableitung der Gerber-Shiu-Funktion in 6.3.4	126
	Literaturverzeichnis	136

Abbildungsverzeichnis

2.1	Der Risikoreserveprozess im Cramér-Lundberg-Modell	7
2.2	Der Risikoreserveprozess im Cramér-Lundberg-Modell mit Dividendenzahlungen zu einer Zweibandstrategie.	22
3.1	Unterteilung des Dividendenbarwerts einer Zweibandstrategie in Dividenden bis und ab dem Unterschreiten des oberen Bands.	44
3.2	Unterteilung des Dividendenbarwerts einer Dreibandstrategie mit zusammenfallenden Bandgrenzen $a_2 = b_1$ in Dividenden bis und ab dem Unterschreiten von b_1	45
4.1	Typischer Verlauf von $f_1^{a'}$ für verschiedene Abzweigepunkte a	47
4.2	Typische Veränderung des Integro-Differentials von $m \leftrightarrow m + 1$	58
4.3	Die zu untersuchenden Bereiche in Algorithmus 3.7 zur Bestimmung von a_{m+1} und b_{m+1} für den Fall $\zeta_{m+1} = b_m$	59
4.4	Die zu untersuchenden Bereiche in Algorithmus 3.7 zur Bestimmung von a_{m+1} und b_{m+1} für den Fall $\zeta_{m+1} \geq a_{m+1}$	60
5.1	f'_0 , ΛV^π und V' für eine geometrische Summenverteilung	87
5.2	f'_0 , ΛV^π und V' für eine Erlangverteilung	88
5.3	f'_0 , ΛV^π und V' für eine Mischung von zwei Erlangverteilungen gleichen Skalenparameters	89
5.4	f'_0 , ΛV^π und V' für eine Mischung von drei Erlangverteilungen verschiedener Skalenparameter	90
5.5	Optimale Bandgrenzen zu einer geometrischen Summenverteilung	91
5.6	Optimale Bandgrenzen zu einer Erlangverteilung	91
5.7	Optimale Bandgrenzen zu einer Mischung von zwei Erlangverteilungen gleichen Skalenparameters	92
5.8	Optimale Bandgrenzen zu einer Mischung von drei Erlangverteilungen verschiedener Skalenparameter	92

6.1	Minimierer von f'_0 in Abhängigkeit von ν und $\frac{1}{1+\rho}$	101
6.2	Die Struktur der Minimierer von f'_0 in Abhängigkeit von ν und $\frac{1}{1+\rho}$	102
6.3	Die Nulllinien der charakterisierenden Funktionen $f_i, i = 1, \dots, 7$	104
6.4	Die Untersuchungsbereiche in Abhängigkeit von ν und $\frac{1}{1+\rho}$	105

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Steuerungstheorie in der Versicherungsmathematik

Optimierungsprobleme, welche sich mit der optimalen Beeinflussung eines dynamischen Prozesses befassen, gehören zum Problemfeld der Steuerungstheorie. Dabei sind die stochastischen Steuerungsprobleme dadurch charakterisiert, dass der Entscheidungsprozess Ungewissheiten oder Risiken beinhaltet, so dass in das Modell nicht nur deterministische, sondern auch stochastische Größen miteinfließen.

Bruno de Finetti (1957) formulierte eines der ersten Optimierungsprobleme der stochastischen Steuerungstheorie in der Versicherungsmathematik. Darin wird die Maximierung des erwarteten Dividendenbarwerts untersucht, wobei der Risikoreserveprozess des Versicherungsunternehmens durch einen einfachen Random Walk gegeben ist. Gerber (1969) löste dieses Problem für das etablierte Cramér-Lundberg-Modell. Weitere frühe Veröffentlichungen zur optimalen Steuerung von Versicherungen folgten durch Frisque (1974), Shreve et al. (1984), Martin-Löf (1994), Brockett und Xia (1995) sowie Browne (1995).¹ Die Arbeiten von Asmussen et al. (1998), Hipp (2003) sowie das Buch von Schmidli (2008) bieten Übersichten zu möglichen Fragestellungen. Inzwischen existiert eine Vielzahl von Arbeiten sowie aktuellen Forschern auf diesem Gebiet. Die betrachteten Optimierungsprobleme unterscheiden sich dabei im Wesentlichen durch das Modell für den Risikoreserveprozess, die zu optimierende Zielfunktion und die steuerbaren Entscheidungsgrößen.

Die Modellierung des Risikoreserveprozesses erfolgt zumeist entweder über eine Diffusionsapproximation, das Cramér-Lundberg-Modell oder allgemeiner über einen Lévy-Prozess. Die beiden häufigsten Zielgrößen sind der von de Finetti betrachtete Dividendenbarwert sowie die Ruinwahrscheinlichkeit. Gegenstand aktueller Untersuchungen sind

¹Vgl. Hipp (2003) und Schmidli (2008).

zudem Kombinationen der beiden miteinander, etwa in Form von Nebenbedingungen, sowie die zusätzliche Berücksichtigung von Kosten oder Strafzahlungen. Die Steuerung erfolgt dabei über eine oder mehrere Einflussgrößen. Beispiele hierfür sind Dividendenzahlungen, Rückversicherungsverträge, Investments, Kapitalinjektionen, Prämienniveau und Neugeschäft.

1.2 Forschungsbedarf und Ziele der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Maximierung des erwarteten Dividendenbarwerts im Cramér-Lundberg-Modell. Gerber (1969) konnte zeigen, dass die optimale Dividendenstrategie hier stets durch eine sogenannte Bandstrategie gegeben ist. Dabei wird der Kapitalbereich durch eine aufsteigende Folge von Bandgrenzen in aneinandergrenzende Intervalle unterteilt. Auf diesen Intervallen wird abwechselnd keine Dividende bzw. gerade so viel Dividende ausgeschüttet, dass man auf die nächstkleinere Bandgrenze fällt.

Ein Großteil der Literatur fokussiert sich auf Barrierenstrategien. Dies ist die einfachste Form einer Bandstrategie, bei der es nur eine Bandgrenze – die Barriere – gibt und sämtliches Kapital oberhalb dieser Barriere als Dividende ausgeschüttet wird. Für Kapital unterhalb der Barriere wird hingegen keine Dividende gezahlt.

Eine Möglichkeit, die optimale Bandstrategie und deren Wert zu bestimmen, ist die Charakterisierung der Wertfunktion als Lösung der zugehörigen Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung des Optimierungsproblems. Dieser Ansatz wird beispielsweise bei Azcue und Muler (2005, 2009, 2010) und Schmidli (2006, 2008) verwendet. Zur Umsetzung dieses Verfahrens muss eine Integro-Differentialgleichung für verschiedene Nebenbedingungen gelöst werden. Die Bandgrenzen werden dabei über eine Suche mit Überprüfung von Optimalitätskriterien bestimmt.

Alternativ lässt sich der Wert einer Bandstrategie anhand sogenannter Gerber-Shiu-Funktionen darstellen. Dabei handelt es sich um die von Gerber und Shiu (1998) eingeführten diskontierten Straffunktionen, die eine Darstellung einer Barrierenstrategie ermöglichen. Dieser Ansatz wird vor allem im Kontext von Barrierenstrategien verwendet, so etwa bei Loeffen (2008) und Lin et al. (2003). Die Verallgemeinerung auf Bandstrategien ist Avram et al. (2013) gelungen. Alle diese Verfahren verlangen die sukzessive Berechnung von Skalenfunktionen und die Inversion von Laplace-Transformierten.

Azcue und Muler (2005) ist erstmalig die Konstruktion eines Beispiels gelungen, in dem tatsächlich eine echte Bandstrategie und keine Barrierenstrategie optimal ist. Andere Beispiele mit mindestens zwei Bändern erfordern entweder ein anderes Modell wie

etwa die zusätzliche Beschränkung der Dividendenzahlungen oder die Verwendung von nur stückweise stetigen Verteilungsfunktionen. Die Analyse der Lage und Anzahl der Bänder ist entsprechend bislang kaum erforscht. Ein zentrales Resultat ist jedoch Loeffen (2008) gelungen. Demnach ist die absolute Monotonie der Dichte der Schadenhöhenverteilung eine hinreichende Bedingung für die Optimalität einer Barrierenstrategie im Cramér-Lundberg-Modell.

Innerhalb der vorliegenden Arbeit sollen die bestehenden Bewertungsansätze insbesondere in Hinblick auf deren Umsetzung verbessert bzw. vereinfacht werden. Des Weiteren sollen die optimalen Bandgrenzen untersucht werden. Hierzu werden verschiedene Ausgangspunkte gewählt.

Zum einen werden die bestehenden Vorgehensweisen analysiert, erweitert und miteinander in Einklang gebracht. Dies soll die Möglichkeit bieten, Vorteile der jeweiligen Methode ausnutzen zu können. Aufbauend auf diesen Resultaten soll die Lage der optimalen Bänder vorzugsweise analytisch eingegrenzt werden.

Zum anderen wird für die Klasse der Phasentypverteilungen eine automatisierte Implementierung des Verfahrens angestrebt. Motivation hierfür ist die Exponentialverteilung, für welche sich das Optimierungsproblem durch Herleitung einer Differentialgleichung explizit lösen lässt. Auch in anderen Bereichen ist die Struktur der Phasentypverteilungen von Vorteil, so gelingt etwa eine analytische Berechnung von Summenverteilungen und Ruinwahrscheinlichkeiten. Aufbauend auf den dazu verwendeten Techniken werden für die im vorliegenden Modellrahmen relevanten Größen analytische Darstellungen angestrebt.

Des Weiteren wird der Spezialfall konstanter Schadenhöhen untersucht. Dieses Problem taucht erstmalig in der Arbeit von Gerber (1969) auf. Die genauere Analyse dieses Spezialfalls dient zur Abgrenzung von absolut stetigen Verteilungen und gleichzeitig als Ausgangspunkt für den allgemeinen Fall von Schadenhöhenverteilungen mit Punktmassen.

1.3 Gliederung

Im Anschluss an diese Einleitung werden im zweiten Kapitel das Optimierungsproblem formuliert, mathematische Grundlagen erläutert und erste Eigenschaften der Zielfunktion hergeleitet. Erstmals gelingt eine vollständige Beschreibung der Dynamik der Wertfunktion zu einer beliebigen Bandstrategie. Ebenfalls neu ist die Identifikation sämtlicher Unstetigkeiten und Undifferenzierbarkeiten derselben.

Das dritte Kapitel dient der Vorstellung bestehender Lösungsansätze sowie deren Erweiterung und Gegenüberstellung. Ziel ist die Bestimmung einer optimalen Strategie so-

wie der Wertfunktion in Abhängigkeit des Startkapitals. Zum einen wird die Charakterisierung dieser Wertfunktion als Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung des Optimierungsproblems präsentiert. Dabei werden Schwierigkeiten bei der Umsetzung aufgedeckt. Zum anderen wird die Darstellung der Zielfunktion anhand von Gerber-Shiu-Funktionen konstruiert. Anschließend folgt eine lückenlose Gegenüberstellung der beiden Methoden, indem alle verwendeten Funktionen und Kriterien miteinander in Verbindung gebracht werden.

Im vierten Kapitel gelingt – basierend auf den Ergebnissen aus den Kapiteln 2 und 3 – eine analytische Lokalisierung der potenziellen Bereiche der optimalen Bandgrenzen ausschließlich anhand der Schadenhöhenverteilung und der Modellparameter. Hierdurch wird zudem eine Vereinfachung der numerischen Umsetzung der vorgestellten Lösungsansätze ermöglicht. Ein weiteres zentrales Resultat ist durch die Identifikation aller optimalen Strategien gegeben.

Aufbauend auf den vorgestellten Lösungsansätzen wird im fünften Kapitel ein direkt implementierbares Lösungsverfahren für die Klasse der absolut stetigen Phasentypverteilungen hergeleitet. Anhand numerischer Beispiele werden die Erkenntnisse aus Kapitel 4 zur Lage der optimalen Bänder verdeutlicht und analysiert. Des Weiteren wird illustriert, wie sich die optimalen Bänder durch Variation der Modellparameter verändern. Hieraus erhält man Implikationen, wie sich die Anzahl der optimalen Bänder antizipieren bzw. konstruieren lässt. So kann erstmalig eine absolut stetige Schadenhöhenverteilung bestimmt werden, für welche im vorliegenden Modellrahmen eine Dreibandstrategie optimal ist.

Das sechste Kapitel befasst sich mit dem Fall einer deterministischen Schadenhöhe. Dabei gelingt eine analytische Darstellung des Werts einer beliebigen Bandstrategie. Die optimalen Bandstrategien werden – soweit möglich analytisch, andernfalls numerisch – in Abhängigkeit der Modellparameter untersucht. In Einklang mit den Ergebnissen aus Kapitel 2 zeigt sich, dass sich die Singularität der Schadenhöhenverteilung in Undifferenzierbarkeiten der Wertfunktion widerspiegelt.

Abschließend wird in Kapitel 7 ein Fazit gezogen sowie auf anknüpfende Forschungsfragen eingegangen.

Kapitel 2

Mathematische Modellierung

Der erste Abschnitt dieses Kapitels dient dazu, das Optimierungsproblem zu formulieren. Im zweiten Abschnitt werden die mathematischen Techniken vorgestellt, welche benötigt werden, um die Wertfunktion zu charakterisieren und zu analysieren. Die zentralen Resultate dieses Kapitels sind durch Satz 2.10 und Lemma 2.13 gegeben. Satz 2.10 präzisiert die Dynamik der Wertfunktion in Abhängigkeit von den beliebig wählbaren Bandgrenzen. Die Glattheit der Wertfunktion – insbesondere in den Bandgrenzen – wird mittels Lemma 2.13 bestimmt. Alle etwaigen Sprünge der Wertfunktion sowie deren Ableitung können hierdurch erstmals identifiziert werden.

2.1 Das Optimierungsproblem

Zur Aufstellung des Optimierungsproblems wird zunächst ein geeignetes Modell für den Risikoreserveprozess des Versicherungsunternehmens benötigt. Das im Folgenden betrachtete *Cramér-Lundberg-Modell* – eingeführt von Filip Lundberg (1903) – gilt als das bekannteste in der Versicherungsmathematik. Man bezeichnet es daher auch als das *klassische Risikomodell* bzw. spricht vom *klassischen Risikoreserveprozess*. Dabei wird angenommen, dass stetig Prämien eingenommen werden und der Gesamtschadenprozess durch einen zusammengesetzten Poisson-Prozess dargestellt wird. Dieser Prozess modelliert eine zufällige Schadenanzahl und hiervon unabhängige Schadenhöhen, welche wiederum stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind. Somit handelt es sich um ein *kollektives Modell*, innerhalb dessen das Gesamtschadenportefeuille eines Schadenversicherers in aggregierter Form modelliert wird. Eine Zuordnung zu den einzelnen Policen und somit auch die Modellierung der Einzelrisiken – wie es im *individuellen Modell* der Fall ist – wird hier

nicht vorgenommen.¹

In diesem Abschnitt wird zunächst der klassische Risikoreserveprozess unter zusätzlicher Berücksichtigung von Dividendenzahlungen modelliert. Es folgen die Formulierung des Optimierungsproblems sowie erste Eigenschaften der Wertfunktion. Abschließend werden verschiedene Dividendenstrategien – insbesondere die optimalen Bandstrategien – erläutert.

2.1.1 Der Risikoreserveprozess

(Ω, \mathcal{F}, P) sei stets der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum. Der Risikoreserveprozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ist für Startkapital $x \geq 0$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ gegeben durch

$$X_t = x + ct - S_t.$$

Dabei bezeichnet $c > 0$ die konstante Prämienrate. $S = (S_t)_{t \geq 0}$ ist der Prozess des kumulierten Gesamtschadens mit $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$. $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$ und modelliert die Schadenanzahl. Die Schadenhöhen $Y_i \sim Y$ sind stochastisch unabhängig identisch verteilt mit Verteilungsfunktion P^Y . Dabei gilt $P^Y((0, \infty)) = 1$, d.h. die Wahrscheinlichkeitsmasse ist auf den positiven Halbstrahl konzentriert. Negative Schäden sowie Schäden der Höhe Null werden dadurch ausgeschlossen. Die Schadenhöhen Y_i und der Prozess der Schadenanzahl N sind ebenfalls stochastisch unabhängig. Die Verteilung des Gesamtschadens ist daher eine Poissonsche Summenverteilung. λ wird auch als Schadenintensität bezeichnet, P^Y als Schadenhöhenverteilung.

Ferner sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die natürliche Filtration zu X . Als Ruin wird das Ereignis bezeichnet, dass die Reserve des Versicherungsunternehmens negativ wird. Der Ruinzeitpunkt ist definiert als $\tau = \tau(x) = \inf \{t \geq 0 : X_t < 0 \mid X_0 = x\}$. Sofern aus dem Zusammenhang die Abhängigkeit von x klar ist, wird nachfolgend lediglich die Bezeichnung τ verwendet.

Abbildung 2.1 skizziert einen typischen Pfad der Risikoreserve im Cramér-Lundberg-Modell. Zwischen den Schadeneintrittszeitpunkten, den Sprüngen des Poisson-Prozesses, wächst die Reserve linear mit Steigung c . Das Schadenereignis geht somit mit einem Sprung nach unten einher, wobei die absolute Höhe eines Sprungs der jeweiligen Schadenhöhe entspricht. Ruin tritt immer gleichzeitig mit einem Schaden ein.

In einem nächsten Schritt wird das Modell nun um Dividendenzahlungen erweitert. Zu einer Dividendenstrategie π sei $D^\pi = (D_t^\pi)_{t \geq 0}$ der Prozess der akkumulierten Dividenden

¹Ausführlichere Beschreibungen des individuellen und kollektiven Modells werden beispielsweise in Hipp und Michel (2002), Mack (2002) und Rolski et al. (1999) gegeben.

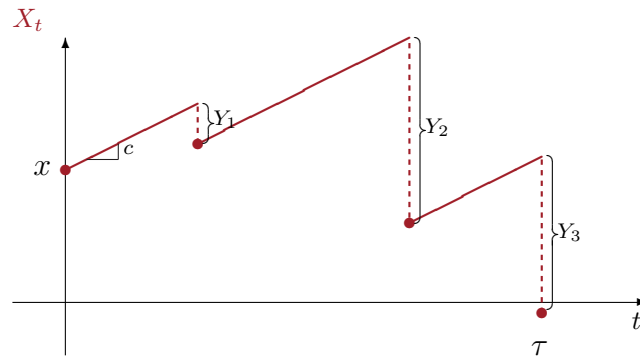


Abbildung 2.1: Der Risikoreserveprozess im Cramér-Lundberg-Modell

Schematische Skizze eines Beispielpfades im Cramér-Lundberg-Modell mit Startkapital x und Prämienrate c . Im Beispiel tritt Ruin mit dem dritten Schaden ein.

bis t . Der Post-Dividenden-Risikoreserveprozess $X^\pi = (X_t^\pi)_{t \geq 0}$ ist demnach gegeben durch

$$X_t^\pi = X_t - D_t^\pi.$$

Der Ruinzeitpunkt ist entsprechend durch $\tau^\pi = \tau^\pi(x) = \inf \{t \geq 0 : X_t^\pi < 0 \mid X_0 = x\}$ gegeben.

2.1.2 Die Wertfunktion

Der Wert $V^\pi(x)$ einer Strategie π zu Kapital $x \in \mathbb{R}$ ist definiert als der erwartete Dividendenbarwert zum Diskontfaktor $\delta \geq 0$ gemäß

$$V^\pi(x) = E \left[\int_{0-}^{\tau^\pi-} e^{-\delta t} dD_t^\pi \mid X(0) = x \right]. \quad (2.1)$$

Für $x < 0$ gilt trivialerweise $V^\pi(x) = 0$, unabhängig von der gewählten Strategie π .

Die Menge der zulässigen Strategien sei durch

$$\Pi = \{ \pi : D^\pi \text{ monoton wachsend, } \mathcal{F}_t\text{-adaptiert, càdlàg} \}$$

gegeben.

Bemerkung 2.1.

Die Einschränkungen an D^π gewährleisten, dass Dividendenzahlungen nichtnegativ sind, die Entscheidung, ob und wie viel Dividende gezahlt wird, nicht von zukünftigen Informationen abhängt und dass X^π rechtsseitig stetig ist. Durch die Integration von $0-$ bzw. $\tau^\pi-$

in (2.1) wird eine etwaige sofortige Dividendenzahlung aus dem Startkapital berücksichtigt bzw. Dividendenzahlungen, die zum Ruin führen oder danach erfolgen, werden gerade nicht mehr berücksichtigt.² Ein Festlegen von D_t für $X_t^\pi < 0$ ist somit für den Wert der Strategie irrelevant. Zur einfacheren Handhabung der Integralgrenzen in den weiteren Berechnungen wird jedoch vereinbart, dass für jede Bandstrategie $D_t^\pi = D_{\tau^\pi}^\pi$ für $t \geq \tau^\pi$ gelte, d.h. dass keine Dividendenzahlungen zum Ruin führen dürfen und nach Ruineintritt keine Dividenden mehr ausgezahlt werden. Das Ruinereignis des Post-Dividenden-Prozesses geht daher nach wie vor mit einem Schadenereignis einher.

Das Optimierungsproblem besteht nun darin, diejenige Strategie zu finden, welche den erwarteten Dividendenbarwert maximiert. Die resultierende Funktion V , welche jedem Startkapital x diesen maximalen Wert zuordnet, wird als Wertfunktion bezeichnet

$$V(x) = \sup_{\pi \in \Pi} V^\pi(x). \quad (2.2)$$

Auch ohne weitere Glattheitsannahmen an die Schadenhöhenverteilung erfüllt die Wertfunktion das folgende Lemma.

Lemma 2.2.

Die Wertfunktion V ist monoton steigend, lokal Lipschitz-stetig und absolut stetig auf $(0, \infty)$. Die Ableitung $V'(x)$ existiert fast überall auf $[0, \infty)$. Es gilt

1. $x + \frac{c}{\lambda + \delta} \leq V(x) < x + \frac{c}{\delta}$ für alle $x \geq 0$,
2. $V(y) - V(x) \geq y - x$ für alle $0 \leq x \leq y$,
3. $V(x) \geq e^{-\frac{\lambda + \delta}{c}(y-x)} V(y)$ für alle $0 \leq x \leq y$.

Beweis. Die Stetigkeit von V , die Schranken in 1. und die Monotonie-Eigenschaft 2. wurden bereits von Gerber (1969, Abschnitt 4.1) gezeigt. Die darauf aufbauenden Aussagen finden sich bei Azcue und Muler (2005, Abschnitt 2). □

Bemerkung 2.3.

Mit $V(0) \geq \frac{c}{\lambda + \delta} > 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} V(x)$ folgt, dass die Wertfunktion in Null nicht stetig und insbesondere nicht differenzierbar ist. Gemäß den Aussagen des obigen Lemmas ist V allerdings in der Null rechtsseitig stetig und rechtsseitig differenzierbar. Da die linksseitigen Werte

²Diese Annahmen stehen in Einklang mit Schmidli (2008, Abschnitt 2.4.2). Andere Arbeiten wie etwa Gerber (1969), Azcue und Muler (2005) und Loeffen (2008) betrachten hingegen *càglàd* Strategien. Hier wird stets der Prozess unmittelbar vor Dividendenzahlungen beobachtet. Dies spiegelt sich insbesondere in den technischen Beweisen wider. Vgl. Definition 2.4.

trivial sind und für die Berechnung der Bänder und der Wertfunktion an sich irrelevant sind, wird zur besseren Handhabung jedoch die Konvention $V'(0-) = V'(0+)$ getroffen.

Innerhalb der vorliegenden Arbeit werden insbesondere Schadenhöhenverteilungen mit differenzierbarer Dichte betrachtet. In Kapitel 5 sind die behandelten Phasentypverteilungen unendlich oft differenzierbar. Hier lassen sich jeweils weitergehende Aussagen zur Glattheit der Wertfunktion herleiten. Diese Eigenschaften ermöglichen auch erst die dort vorgestellten Lösungsverfahren. Im Fall konstanter Schadenhöhen, welche in Kapitel 6 behandelt werden, ist die Schadenhöhenverteilung hingegen nicht stetig. Hier wird insbesondere auf die technischen Unterschiede aufgrund der fehlenden Stetigkeitsannahme eingegangen sowie diskutiert, inwieweit dies Auswirkungen auf die optimale Strategie und die Wertfunktion hat.

2.1.3 Dividendenstrategien

In der Literatur werden unterschiedlichste Formen von Dividendenstrategien betrachtet. Im Folgenden wird die jeweilige Wirkungsweise der am meist verwendeten Formen beschrieben. Genauere Definitionen und das entsprechende Aufkommen in der Literatur finden sich unter anderem bei Albrecher und Thonhauser (2009) sowie bei Avanzi (2009).

- Bei einer **Barrierenstrategie** wird sämtliches Kapital oberhalb einer festen Barriere als Dividende ausgezahlt. Auf der Barriere wird entsprechend bis zum nächsten Schaden eine stetige Dividende in Höhe der Prämienrate ausgeschüttet. Für Kapital unterhalb der Barriere erfolgt keine Dividendenzahlung.
- Bei einer **Bandstrategie** wird der Kapitalbereich in aneinandergrenzende Intervalle unterteilt, auf denen abwechselnd keine Dividende bzw. gerade so viel Dividende ausgeschüttet wird, dass man die nächstkleinere Bandgrenze erreicht. Somit handelt es sich um eine Schichtung von Barrierenstrategien.
- Bei einer **Threshold-Strategie** wird oberhalb einer festen Schwelle (eng. *threshold*) eine stetige Dividende mit einer Rate kleiner der Prämienrate ausgeschüttet. Für Kapital unterhalb der Schwelle wird keine Dividende ausgeschüttet.
- Bei **Multi-Layer Strategien** gibt es mehrere Schwellen. Auf jeder Schicht (eng. *layer*) zwischen zwei Schwellen werden stetige Dividenden zu einer Rate kleiner der Prämienrate ausgeschüttet.
- Bei einer **linearen Barrierenstrategie** ist die Barriere nicht konstant, sondern

linear zeitabhängig. Die Dividendenrate auf der Barriere entspricht hier in der Regel der Prämienrate abzüglich der Steigung der Barriere.

- Bei einer **Einfachen Impulsstrategie** wird für Kapital oberhalb einer Schranke immer eine feste Einmalzahlung geleistet. Für Kapital unterhalb der Schranke wird wiederum keine Dividende ausgeschüttet.

Tatsächlich sind im vorliegenden Modellrahmen stets Bandstrategien optimal, so dass hierzu eine formelle Definition erforderlich ist. Gerber (1969, Definition 4.2.1) führt diese wie folgt ein.³

Definition 2.4 (Bandstrategie).

$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_\infty \subset [0, \infty)$ bilden eine disjunkte Zerlegung von $[0, \infty) = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_c \cup \mathcal{B}_\infty$ mit den folgenden Eigenschaften in $[0, \infty)$:

1. \mathcal{B}_0 rechtsseitig offen,
2. \mathcal{B}_c abgeschlossen und beschränkt,
3. \mathcal{B}_∞ linksseitig offen,
4. $\{x : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_\infty \text{ mit } x_n \rightarrow x + (n \rightarrow \infty)\} \subset \mathcal{B}_c$,
5. $(\max\{b \in \mathcal{B}_c\}, \infty) \subset \mathcal{B}_\infty$.

Die Dividendenzahlungen einer Strategie π seien anhand von $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_c$ und \mathcal{B}_∞ wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned}
 X_t^\pi \in \mathcal{B}_0 : & \quad \begin{cases} \text{Zahle keine Dividende.} \\ D_t^\pi - D_{t-}^\pi = 0 \end{cases} \\
 X_t^\pi \in \mathcal{B}_c : & \quad \begin{cases} \text{Zahle eine stetige Dividende mit Rate } c. \\ dD_t^\pi = c \, dt \end{cases} \\
 X_t^\pi \in \mathcal{B}_\infty : & \quad \begin{cases} \text{Zahle eine Einmalzahlung, so dass der nächsttiefere} \\ \text{gelegene Punkt von } \mathcal{B}_c \text{ erreicht wird.} \\ D_t^\pi - D_{t-}^\pi = X_t^\pi - \max\{b \in \mathcal{B}_c : X_t^\pi > b\} \end{cases}
 \end{aligned}$$

³Da bei Gerber (1969) càglàd-Strategien verwendet werden, entspricht die Einmalzahlung der Differenz $D_{t+}^\pi - D_t^\pi$. Des Weiteren ist dort \mathcal{B}_∞ offen. In Kapitel 4 wird sich zeigen, dass diese unterschiedlichen Eigenschaften der Mengen jeweils zulässig sind, zwar zu unterschiedlichen Strategien führen können, aber stets den gleichen Wert liefern. Mathematisch ist dies durch die rechtsseitige Stetigkeit einer jeden Schadenhöhenverteilung P^Y gewährleistet.

In diesem Fall heißt π *Bandstrategie* mit $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_c$ und \mathcal{B}_∞ . \mathcal{B}_0 bezeichnet man als *No-Action-Area*, $\mathcal{B}_c \cup \mathcal{B}_\infty$ als *Action-Area*.

Die Optimalität von Bandstrategien ist durch den folgenden Satz gegeben.

Satz 2.5 (Gerber 1969, Existenzsatz 4.5).

Für das Optimierungsproblem (2.2) existiert immer eine optimale Bandstrategie π^ , so dass $V(x) = V^{\pi^*}(x)$ für alle $x \geq 0$ gilt.*

Soweit nötig, wird zur eindeutigen Kennzeichnung die Notation $\mathcal{B}_0^*, \mathcal{B}_c^*$ und \mathcal{B}_∞^* für eine optimale Wahl der definierenden Mengen verwendet. Inwieweit diese Mengen eindeutig sind, wird in Abschnitt 4.5 diskutiert.

Gerber (1969) beweist die Existenz einer optimalen Bandstrategie über eine Diskretisierung in Zeit und Kapital mit anschließender Limesbetrachtung. Alternative Beweise finden sich jeweils bei Schmidli (2008) und Azcue und Muler (2005). Azcue und Muler (2005) verwenden die Theorie von Viskositätslösungen. Schmidli (2008) führt zunächst eine Beschränkung der Dividendenrate ein, um durch Limesbetrachtung den Fall unbeschränkter Dividendenzahlungen zu erhalten. Die Beweise greifen dabei auf Martingaltechniken zurück. Anstelle der allgemeinen Definition 2.4 definiert Schmidli (2008, Abschnitt 2.4.2) direkt die optimal zu wählenden Mengen $\mathcal{B}_0^*, \mathcal{B}_c^*$ und \mathcal{B}_∞^* über die Wertfunktion (siehe Satz 3.4). Die obige Variante liefert jedoch auch den formellen Rahmen für suboptimale Bandstrategien, welche für verschiedene Argumentationen noch eine wichtige Rolle spielen. In der vorliegenden Dissertation treten hauptsächlich Bandstrategien auf, für die der Kapitalbereich $[0, \infty)$ in eine endliche Anzahl aneinandergrenzender Intervalle wie folgt unterteilt wird.

Definition 2.6.

Existieren Bandgrenzen $0 \leq b_0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < \dots \leq a_{m-1} < b_{m-1}$, so dass gilt

$$\mathcal{B}_0 = [0, b_0) \cup \bigcup_{k=1}^{m-1} (a_k, b_k), \quad \mathcal{B}_c = \bigcup_{k=0}^{m-1} \{b_k\}, \quad \mathcal{B}_\infty = \bigcup_{k=0}^{m-2} (b_k, a_{k+1}] \cup (b_{m-1}, \infty),$$

so bezeichnet man π als *endliche Bandstrategie*.

Die Namensgebung der Intervalle ist in der Literatur nicht eindeutig. So werden entweder die Intervalle $[b_k, a_{k+1}]$ der Action-Area $\mathcal{B}_c \cup \mathcal{B}_\infty$ oder die Intervalle $[a_k, b_k]$ der No-Action-Area \mathcal{B}_0 als *Bänder* bezeichnet. Im Folgenden seien die Bänder die Intervalle von \mathcal{B}_0 , das heißt, die Bereiche, auf denen keine Dividende gezahlt wird. Entsprechend wird auch von Einband-, Zweiband- beziehungsweise allgemein von m -Bandstrategien gespro-

chen. Eine Einbandstrategie ist in der Regel eine Barrierenstrategie mit $\mathcal{B}_0 = [0, b_0)$, $\mathcal{B}_c = \{b_0\}$ und $\mathcal{B}_\infty = (b_0, \infty)$. Die spezielle Barrierenstrategie $b_0 = 0$, bei der Ruin immer mit dem ersten Schaden eintritt, wird als *Alles-muss-raus-Strategie* bezeichnet und mit π^A notiert. Einbandstrategien mit $b_0 = 0$ werden in der Literatur sowie im Folgenden zu den Zweibandstrategien gezählt. Genauer handelt es sich um eine entartete Zweibandstrategie, da das erste Band aufgrund der Wahl $b_0 = 0$ verschwunden ist. Abbildung 2.2 verdeutlicht die Wirkungsweise einer Zweibandstrategie anhand der Entwicklung der Reserve.

Allgemein ist eine Einschränkung der optimalen Strategie auf endliche Bandstrategien nicht zu gewährleisten. Gerber (1969, Abschnitt 4.7.1) schreibt bereits, dass in Abhängigkeit von der Verteilungsfunktion P^Y die Menge \mathcal{B}_c für die optimale Strategie auch aus abzählbar unendlich vielen Punkten oder aus einem ganzen Intervall bestehen kann. Entsprechende Beispiele sind hierzu jedoch nicht bekannt. In Abschnitt 4.5 wird hierauf näher eingegangen.

Soweit nötig, wird zur eindeutigen Kennzeichnung nachfolgend die Notation $b_0^*, a_1^*, \dots, a_m^*, b_m^*$ für die optimalen Bandgrenzen verwendet.

2.2 Die Dynamik von V^π

In diesem Abschnitt werden zunächst der *infinitesimale Generator* des Risikoreserveprozesses sowie die im weiteren Verlauf der Arbeit noch bedeutende *Integro-Differentialgleichung (IDG)* vorgestellt. Zur Analyse deren Lösung wird im Anschluss das Konzept von *Skalenfunktionen* herangezogen. Dies liefert die mathematische Basis, um den Wert einer Bandstrategie im weiteren Verlauf zu analysieren.

Während in der Literatur fast ausschließlich nur auf Eigenschaften der Wertfunktion eingegangen wird, folgt in Abschnitt 2.2.3 die Herleitung wichtiger Eigenschaften von V^π zu beliebigen und damit im Allgemeinen suboptimalen Bandstrategien π . Diese Eigenschaften ermöglichen eine genauere Abgrenzung zur optimalen Strategie und liefern daher mathematische Hilfsmittel zur Identifikation derselben.

2.2.1 Die Integro-Differentialgleichung

Die hier aufgeführten Definitionen und Aussagen finden sich beispielsweise bei Davis (1993) und Rolski et al. (1999, Kapitel 11).

Harmonische Funktionen

Zu einem homogenen Markov-Prozess $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ sei der Operator \mathcal{L} für hinreichend glatte Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert

$$\mathcal{L}f(z) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E[f(Z_t) | Z_0 = z] - f(z)}{t}.$$

\mathcal{L} wird als *infinitesimaler Generator* von Z bezeichnet. $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ sei das *Gebiet* des Generators, d.h. die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass der obige Grenzwert existiert.

Eine Funktion f wird als *harmonisch* bezeichnet, wenn $f(Z_t)$ ein Martingal ist. In diesem Fall gilt $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L}f \equiv 0$. Gemäß Dynkins Theorem ist für $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ der Prozess

$$f(Z_t) - f(Z_0) - \int_0^t \mathcal{L}f(Z_s) ds$$

ein Martingal. Somit folgt also auch umgekehrt, dass für $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ und $\mathcal{L}f \equiv 0$ der Prozess $f(Z_t)$ ein Martingal ist.

δ -harmonische Funktionen

Die Vorgehensweise lässt sich auch anwenden, wenn man den Prozess multiplikativ um eine zeitabhängige Komponente erweitert. Sei dazu $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei h und h' auf $(0, \infty)$ lokal beschränkt seien. \mathcal{A} sei der Generator zum Prozess (Z_t, t) , welcher auf die Produktfunktion $f^h(x, t) = f(x)h(t)$ angewandt wird. Man erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f^h(z, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{E[f(Z_{t+\Delta t})h(t+\Delta t) | Z_t = z] - f(z)h(t)}{\Delta t} \\ &= h(t)\mathcal{L}f(z) + h'(t)f(z). \end{aligned}$$

Somit ist

$$f(Z_t)h(t) - f(z)h(0) - \int_0^t (h(s)\mathcal{L}f(Z_s) + h'(s)f(Z_s)) ds$$

ein lokales Martingal für $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Für die spezielle Wahl $h(t) = e^{-\delta t}$ erhält man mit $h' = -\delta h$

$$\mathcal{A}f^h(x, t) = e^{-\delta t}(\mathcal{L}f(x) - \delta f(x)).$$

Offenbar ist f^h genau dann harmonisch, d.h. eine Lösung von $\mathcal{A}f^h \equiv 0$, wenn $\mathcal{L}f - \delta f \equiv 0$ gilt. In diesem Fall bezeichnet man f als *δ -harmonisch*.

δ -harmonische Funktionen im Cramér-Lundberg-Modell

Für das Cramér-Lundberg-Modell ist der infinitesimale Generator von X gegeben durch

$$\mathcal{L}f(x) = cf'(x) - \lambda f(x) + \lambda \int_0^\infty f(x-y)dP^Y(y).$$

Zur einfacheren Notation wird hierzu der Operator Λ eingeführt, welcher eine hinreichend glatte Funktion f auf das Integro-Differential

$$\Lambda f(x) = cf'(x) + \lambda \int_0^\infty f(x-y)dP^Y(y) - (\lambda + \delta)f(x) \quad (2.3)$$

abbildet. Es gilt also $\Lambda f = \mathcal{L}f - \delta f$. Eine Funktion f ist hier genau dann δ -harmonisch, wenn $\Lambda f(x) = 0$ gilt. Dies liefert gerade die besagte *IDG*, welche für $x \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$cf'(x) + \lambda \int_0^\infty f(x-y)dP^Y(y) - (\lambda + \delta)f(x) = 0. \quad (IDG)$$

Offenbar ist diese Gleichung homogen in f , d.h. für jede Lösung f_0 der *IDG* ist auch $K \cdot f_0$ eine Lösung für beliebiges $K \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Skalenfunktionen

Bühlmann (1970, Abschnitt 6.4.8) schreibt bereits, dass die *IDG* mit der Einschränkung $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ bis auf Normierung eindeutig lösbar sei. Diese Lösung ist im Allgemeinen jedoch nicht überall differenzierbar – wie sich in Kapitel 6 zeigen wird – und in diesem Sinne eine schwache Lösung. Um die Glattheit der Lösung zu untersuchen, wird nun das Konzept der Skalenfunktionen eingeführt. Tatsächlich ist die Lösung der *IDG* eine (δ -harmonische) Skalenfunktion. Hier zeigt sich die Parallele also bereits in der Bezeichnung. Im Folgenden werden zunächst die zugehörigen Begrifflichkeiten sowie erste Eigenschaften eingeführt. Während in der Literatur allgemein Lévy-Prozesse betrachtet werden, beziehen sich die folgenden Aussagen konkret auf den Risikoreserveprozess X ohne Dividendenzahlungen. Für die allgemeineren Formulierungen sei beispielsweise auf Bertoin (1996, Kapitel VII) und Kyprianou (2006, Kapitel 8) verwiesen.

Sei ψ der Laplace-Exponent von X , es gilt also

$$\psi(\theta) = \log(E[\exp(\theta X_1)]) = c\theta - \lambda + \lambda \widehat{p}(\theta), \quad (2.4)$$

wobei \widehat{p} auch für den Fall einer unbeschränkten Dichte p mit $dP^Y(y) = p(y)dy$ die Laplace-Transformierte sei, d.h. $\widehat{p}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta y}dP^Y(y)$. Weiter sei $\psi^-(\delta) = \sup\{\theta \geq 0 : \psi(\theta) = \delta\}$ die

Rechtsinverse von ψ . Die Skalenfunktion ist nun wie folgt definiert, siehe z.B. Kyprianou (2006, Theorem 8.1).

Proposition und Definition 2.7.

Zu $\delta \geq 0$ existiert genau eine Funktion $W^{(\delta)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

1. $W^{(\delta)}(x) = 0$ für $x < 0$,
2. $W^{(\delta)}$ ist absolut stetig und streng monoton steigend auf $[0, \infty)$,
3. $\widehat{W}^{(\delta)}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta s} W^{(\delta)}(s) ds = (\psi(\theta) - \delta)^{-1}$ für $\theta > \psi^-(\delta)$.

$W^{(\delta)}$ bezeichnet man als (δ -harmonische) Skalenfunktion.

$W^{(\delta)}$ spielt eine große Rolle bei der Analyse von Eintritts- und Austrittszeiten und taucht hierzu bereits in den sechziger Jahren auf. Eine kurze historische Übersicht zu den frühen Verwendungen von Skalenfunktionen findet sich etwa bei Kyprianou (2006, S. 215). Das folgende Lemma fasst wichtige weiterreichende Eigenschaften der Skalenfunktion zusammen.

Lemma 2.8.

Sei $\delta \geq 0$.

1. $W^{(\delta)}$ ist von rechts und links differenzierbar auf $(0, \infty)$.
2. $W^{(\delta)}(0) = \frac{1}{c}$ und $W^{(\delta)'}(0+) = \frac{\lambda + \delta}{c^2}$.
3. $\Lambda W^{(\delta)}(x) = 0$ für $x \geq 0$.
4. $W^{(\delta)}$ ist genau dann stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$, wenn P^Y keine Punktmassen hat.

Beweis. Zu 1. siehe z.B. Kyprianou et al. (2010, Lemma 8.2). 2. findet sich z.B. bei Avram et al. (2007, (3.5)). Bei Bertoin (1996, Kapitel VII) ist 3. für den Fall $W^{(\delta)} \in \mathcal{C}^1(0, \infty)$ aufgeführt. Allgemein erhält man den Zusammenhang durch Invertieren der Laplace-Transformierten von $W^{(\delta)}$. Lambert (2000, Proposition 5.1) liefert 4. □

Umgekehrt ist jede Lösung f der IDG mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ proportional zu $W^{(\delta)}$. Man sieht dies leicht durch Bilden der Laplace-Transformierten von $\Lambda f(x) = 0$ ein. Mit $\int_0^\infty f(x-y) dP^Y(y) = \int_0^x f(x-y) dP^Y(y)$ erhält man für $\widehat{f}(\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta s} f(s) ds$

$$c\theta \widehat{f}(\theta) - cf(0) + \lambda \widehat{f}(\theta) \widehat{p}(\theta) - (\lambda + \delta) \widehat{f}(\theta) = 0.$$

Folglich gilt

$$\frac{\widehat{f}(\theta)}{f(0)} = \frac{c}{c\theta + \lambda\widehat{p}(\theta) - (\lambda + \delta)} = \frac{c}{\psi(\theta) - \delta} = \frac{W^{(\delta)}(\theta)}{W^{(\delta)}(0)}.$$

Die Eindeutigkeit von Laplace-Transformierten liefert die Eindeutigkeit einer Lösung f der *IDG* mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ bis auf Normierung mit $f(0)$.

In Kapitel 6 wird explizit der Fall betrachtet, wenn $W^{(\delta)}$ Undifferenzierbarkeiten aufweist. Ist hingegen die Schadenhöhenverteilung mehrfach stetig differenzierbar, so überträgt sich dies wie folgt auf die Skalenfunktion.

Satz 2.9 (Chan et al. 2011, Theorem 3).

P^Y habe eine Dichte p mit $p(y) \leq Cy^{-1-\gamma}$ für alle $y \in (0, \epsilon)$ für ein $\epsilon > 0$ und Konstanten $\gamma < 1$ und $C > 0$. Dann gilt für $\delta \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$

$$W^{(\delta)} \in \mathcal{C}^{k+1}(0, \infty) \iff P^Y \in \mathcal{C}^k(0, \infty).$$

In Kapitel 5 wird diese Eigenschaft verwendet, um höhere Ableitungen der Wertfunktion darzustellen und in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überzuführen.

2.2.3 Eigenschaften von V^π

Es kann nun der Zusammenhang zwischen dem Optimierungsproblem und der *IDG* hergestellt werden, so dass sich die Verwendung der Skalenfunktionen zur Darstellung des Werts einer beliebigen Bandstrategie erklären lässt. Der folgende Satz beschreibt hierzu die Dynamik von V^π auf den zu unterscheidenden Bereichen. Darüber hinaus können Aussagen zur Glattheit getroffen werden, welche durch Lemma 2.13 fortgeführt werden.

Satz 2.10.

Sei V^π der Wert einer Bandstrategie zu \mathcal{B}_0 , \mathcal{B}_c und \mathcal{B}_∞ . Dann gilt

1. (a) $V^\pi(y) - V^\pi(x) = y - x$ für $(x, y] \subset \mathcal{B}_\infty$.
 (b) V^π ist auf \mathcal{B}_∞ stetig differenzierbar.
 (c) $V^{\pi'}(x) = 1$ für $x \in \mathcal{B}_\infty$.
2. (a) $V^\pi(x) \geq e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(y-x)} V^\pi(y)$ für alle $[x, y] \subset \mathcal{B}_0$.
 (b) Für $x \in \mathcal{B}_0$ und $b = \min\{z > x : z \in \mathcal{B}_c\}$ gilt

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \left(\frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} E[V^\pi(b - Y)] \right) e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(b-x)} \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \int_x^b e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(u-x)} \int_0^{u+} V^\pi(u - y) dP^Y(y) du. \end{aligned}$$

(c) $\Lambda V^\pi(x) = 0$ für $x \in \mathcal{B}_0$.

(d) Auf \mathcal{B}_0° , dem Inneren von \mathcal{B}_0 , ist V^π stetig und von links und rechts differenzierbar.

3. Sei $b \in \mathcal{B}_c$.

(a) $V^\pi(b) = \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b-Y)]$.

(b) Existiert eine Folge $(x_n) \subset \mathcal{B}_\infty$ mit $x_n \rightarrow b+$, so ist V^π in b rechtsseitig stetig und differenzierbar mit $V^{\pi'}(b+) = 1$.

(c) Falls $h \geq 0$ existiert mit $(b-h, b) \subset \mathcal{B}_0$, so ist V^π in b linksseitig stetig.

Beweis. 1.(a) folgt direkt aus der Definition 2.4. Da \mathcal{B}_∞ offen ist, folgt die stetige Differenzierbarkeit (b). Zusammen mit (a) folgt hieraus (c).

Zu 2.: Sei $h = \frac{b-x}{c}$. Ist der erste Schadeneintrittszeitpunkt T_1 erst nach h Zeiteinheiten, so werden bei Startkapital x bis zum Zeitpunkt h keine Dividenden ausgeschüttet, da die kumulierten Prämieinnahmen noch zu gering sind, um Bereiche mit Dividendenzahlungen zu erreichen. Es folgt

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= E \left[\int_{0-}^h e^{-\delta t} dD_t^\pi + e^{-\delta h} V^\pi(X_h^\pi) \middle| X(0) = x \right] \\ &\geq P(T_1 > h) e^{-\delta h} V^\pi(x + ch) = e^{-(\lambda+\delta)h} V^\pi(x + ch). \end{aligned}$$

und somit (a).

Anstelle der obigen Abschätzung wird nachfolgend eine Integralgleichung hergeleitet. Diese und die entsprechende Herleitung finden sich bereits bei Gerber (1969). Man unterteilt den Wert in die etwaigen Dividenden bis zum bzw. nach dem ersten Schaden. Entsprechend unterscheidet man, ob der erste Schaden vor oder nach dem Erreichen von \mathcal{B}_c durch Prämieinnahmen eintritt. Für Startkapital x sei dazu $b = \min \{z > x : z \in \mathcal{B}_c\}$. Man betrachtet also die Fälle $T_1 < \frac{b-x}{c}$ und $T_1 \geq \frac{b-x}{c}$ und erhält somit (b)

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= E \left[\mathbf{1} \left\{ T_1 \geq \frac{b-x}{c} \right\} \left(\int_{\frac{b-x}{c}}^{T_1} c e^{-\delta t} dt + e^{-\delta T_1} V^\pi(b-Y) \right) \right] \\ &\quad + E \left[\mathbf{1} \left\{ T_1 < \frac{b-x}{c} \right\} e^{-\delta T_1} V^\pi(x + cT_1 - Y) \right] \\ &= \left(\frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b-Y)] \right) e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(b-x)} \\ &\quad + \lambda \int_0^{\frac{b-x}{c}} e^{-(\lambda+\delta)u} \int_0^{(x+cu)+} V^\pi(x + cu - y) dP^Y(y) du \\ &= \left(\frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b-Y)] \right) e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(b-x)} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\lambda}{c} \int_x^b e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(u-x)} \int_0^{u+} V^\pi(u-y) dP^Y(y) du.$$

Anhand der Integralgleichung wird nun gezeigt, dass die Differenz $V^\pi(x+h) - V^\pi(x)$ gegen Null konvergiert für $h \rightarrow 0+$. Zusammen mit 2.(a) folgt die Stetigkeit von V^π auf \mathcal{B}_0° . Sei also $x \in \mathcal{B}_0^\circ$ und $h \geq 0$ hinreichend klein, so dass $[x, x+h] \subset \mathcal{B}_0$ gilt. Aus der Integralgleichung folgt

$$\begin{aligned} V^\pi(x+h) - V^\pi(x) &= \left(e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}h} - 1 \right) \left(\frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b-Y)] \right) e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(b-x)} \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \int_x^{x+h} e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(u-x)} \int_0^{u+} V^\pi(u-y) dP^Y(y) du. \end{aligned}$$

Der Term der ersten Zeile konvergiert für $h \rightarrow 0+$ gegen Null, da $E[V^\pi(b-Y)] < \frac{c}{\delta} + b < \infty$ gilt. Für den zweiten Term kann analog $\int_0^{u+} V^\pi(u-y) dP^Y(y) du$ durch $\frac{c}{\delta} + u$ nach oben abgeschätzt werden und zwar auch für Verteilungen P^Y mit Punktmassen. Somit folgt die Konvergenz gegen Null des zweiten Terms.

2.(c) erhält man unmittelbar durch Differentiation der Integralgleichung 2.(b). Insgesamt folgt somit (d).

3. Sei $b \in \mathcal{B}_c$. Per Definition 2.4 werden bis zum nächsten Schaden genau die stetigen Prämieinnahmen als Dividende ausgeschüttet. Somit gilt

$$\begin{aligned} V^\pi(b) &= E \left[\int_0^{T_1} e^{-\delta t} c dt + e^{-\delta T_1} V^\pi(b-Y) \right] \\ &= \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b-Y)]. \end{aligned}$$

Sei nun $h \geq 0$ mit $(b-h, b) \subset \mathcal{B}_\infty$. Gemäß 2.(b) gilt

$$\begin{aligned} V^\pi(b-h) &= \left(\frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b-Y)] \right) e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}h} \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \int_{b-h}^b e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(u-(b-h))} \int_0^{u+} V^\pi(u-y) dP^Y(y) du. \end{aligned}$$

Wie bei 2.(b) folgt hier die Konvergenz des ersten Terms gegen $\left(\frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b-Y)] \right)$ und des zweiten Terms gegen Null. Gemäß 3.(a) folgt die linksseitige Stetigkeit. \square

Bemerkung 2.11.

Die Aussagen des obigen Satzes werden bei Gerber (1969, S. 204f, 207f) für die optimale Strategie hergeleitet. Welche Eigenschaften auch für suboptimale Strategien gelten, ist jedoch nicht trivial. Beispielsweise kann man 2.(a) für V auf dem gesamten positiven

Halbstrahl zeigen. Mit $V(y) - V(x) \geq y - x$ für $x \leq y$ (gemäß Lemma 2.2) folgt direkt die Stetigkeit von V auf $(0, \infty)$ und die obige Limesbetrachtung ist nicht nötig. Tatsächlich ist der Wert einer suboptimalen Strategie im Allgemeinen nicht überall stetig. Offenbar sind hier insbesondere die Übergänge von \mathcal{B}_∞ zu \mathcal{B}_0 ggf. unstetig, wenn diese nicht optimal gewählt sind. Lemma 2.13 präzisiert die Glattheitseigenschaften. In Kapitel 6 werden dazu entsprechende Beispiele vorgestellt.

Lemma 2.12.

Sei π die Barrierenstrategie in b , d.h. $\mathcal{B}_0 = [0, b)$, $\mathcal{B}_c = \{b\}$ und $\mathcal{B}_\infty = (b, \infty)$. Dann lässt sich V^π über die Skalenfunktion $W^{(\delta)}$ wie folgt darstellen

$$V^\pi(x) = \begin{cases} \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)'(b+)}} & x < b, \\ \frac{W^{(\delta)}(b)}{W^{(\delta)'(b+)}} + x - b, & x \geq b. \end{cases} \quad (2.5)$$

Beweis. Für den Fall, dass P^Y stetig und somit $W^{(\delta)}$ differenzierbar ist, findet sich (2.5) etwa bereits bei Bühlmann (1970, Gleichung (D.5)), wobei hier nicht die Skalenfunktion, sondern die Lösung der Integro-Differentialgleichung herangezogen wird. Allgemein erhält man die Darstellung wie folgt. Auf $[0, b)$ gilt die IDG und somit $V^\pi \sim W^{(\delta)}$. In b gilt gemäß Satz 2.10 3.(a) $V^\pi(b) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} E[V^\pi(b - Y)]$. Zusammen mit $V^{\pi'}(b+) = 1$ folgt hieraus, dass V^π die IDG auch in $b+$ erfüllt. Für $x > b$ ist V^π linear mit Steigung 1. Somit folgt die Behauptung. \square

Eine probabilistische Herleitung von (2.5), ebenfalls für stetige Schadenhöhenverteilung, findet sich bei Gerber (1979) und Gerber und Shiu (1998). Die Vorgehensweise wird an dieser Stelle ergänzt, um in Abschnitt 3.2 darauf aufbauen zu können. Sei dazu

$$\zeta_b = \inf \{t \geq 0 : X \geq b \mid X_0 = x\} \quad (2.6)$$

der erste Zeitpunkt, zu dem der Prozess X das Kapital b erreicht. Der erwartete Zeitwert bis zum erstmaligen Erreichen von b ist demnach gegeben durch

$$E[e^{-\delta \zeta_b} \mathbf{1}\{\zeta_b < \tau\} \mid X(0) = x].$$

Dies entspricht dem erwarteten Barwert einer Zahlung der Höhe Eins bei Erreichen von b . Da für Kapital kleiner als b keine Dividende ausgezahlt wird, stimmen die Prozesse X und X^π entsprechend für Startkapital $X_0 = x < b$ bis ζ_b überein und man erhält, vgl. Gerber (1979, Kapitel 10, (1.9)),

$$V^\pi(x) = E \left[e^{-\delta \zeta_b} \mathbf{1} \{ \zeta_b < \tau \} \mid X(0) = x \right] V^\pi(b), \quad x \leq b. \quad (2.7)$$

Der Zeitwert bis zum Erreichen von b kann nun folgendermaßen dargestellt werden, vgl. Gerber und Shiu (1998, (6.25))⁴,

$$E \left[e^{-\delta \zeta_b} \mathbf{1} \{ \zeta_b < \tau \} \mid X(0) = x \right] = \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)}(b)}. \quad (2.8)$$

Außerhalb dieses Kontexts findet sich (2.8) bereits in Korolyuk (1975) (siehe Kyprianou (2006)).

Zusammen mit (2.7) erhält man also

$$V^\pi(x) = \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)}(b)} V^\pi(b), \quad x \leq b. \quad (2.9)$$

Die Bestimmung von $V^\pi(b)$ erfolgt wie oben mit der Bedingung $V^{\pi'}(b) = 1$ und man erhält (2.5), vgl. Gerber und Shiu (1998, (7.5)).

Während der Wert einer Barriere stetig ist, gilt dies für den Wert einer endlichen Bandstrategie im Allgemeinen nicht. Genauer gilt jedoch das folgende Lemma.

Lemma 2.13.

Sei π eine endliche Bandstrategie mit Bandgrenzen $0 \leq b_0 \leq a_1 < b_1 \cdots \leq a_m < b_m$. Dann gilt

1. V^π ist stetig auf $(0, \infty) \setminus \bigcup_{i=1}^m a_i$.
2. Besitzt P^Y keine Punktmassen, so ist V^π differenzierbar auf $(0, \infty) \setminus \bigcup_{i=1}^m a_i$.
3. Besitzt P^Y Punktmassen, so ist V^π differenzierbar auf

$$(0, \infty) \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^m a_i \cup \{ \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_c \} \cap \{ x : P^Y \{ x \} > 0 \} \right\}.$$

Für $x \in \{ \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_c \} \cap \{ x : P^Y \{ x \} > 0 \}$ erhält man

$$V^{\pi'}(x-) - V^{\pi'}(x+) = \frac{\lambda}{c} V^\pi(0) P^Y(\{x\}).$$

Beweis. Aus Satz 2.10 1. und 2. folgt die Stetigkeit von V^π auf $(0, b_0) \cup \bigcup_{i=1}^m (b_{i-1}, a_i) \cup$

⁴Auch hier taucht jedoch der Begriff der Skalenfunktion nicht auf, sondern es wird mit den in Abschnitt 3.2 eingeführten Straffunktionen argumentiert.

$\bigcup_{i=1}^m (a_i, b_i) \cup (b_m, \infty)$. Sei nun $i \in \{1, \dots, m\}$ mit $b_i \neq a_{i+1}$. In diesem Fall liefern 3.(b) und (c) zusammen die Stetigkeit in b_i und somit 1. In b_i gilt weiter von links die *IDG* und gemäß Satz 2.10 3.(a) $V^\pi(b_i) = \frac{c}{\lambda+\delta} + \frac{\lambda}{\lambda+\delta} E[V^\pi(b_i - Y)]$. Zusammen mit $V^{\pi'}(b_{i+}) = 1$ folgt hieraus, dass V^π die *IDG* auch in b_{i+} erfüllt. Besitzt P^Y keine Punktmassen, so folgt aus der *IDG* 2. Andernfalls ist das Integral $\int_0^x V^\pi(x-y)dP^Y(y)$ in den Atomen unstetig und man erhält 3. □

Die etwaigen Sprünge in den unteren Bandgrenzen a_i können an dieser Stelle noch nicht quantifiziert werden. Dies gelingt mithilfe der Methoden des nächsten Kapitels und wird in Lemma 3.8 festgehalten.

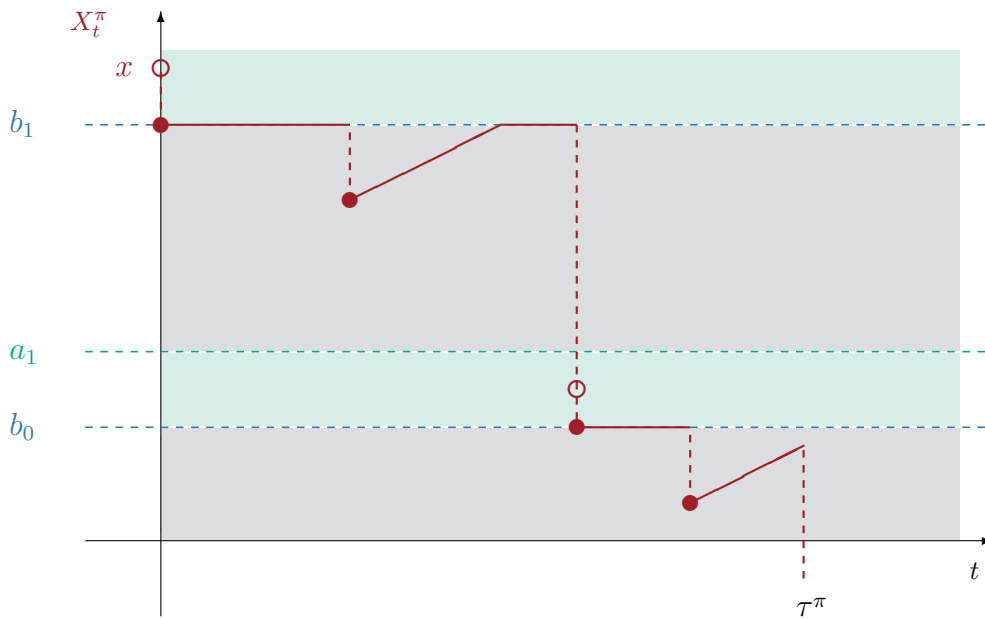
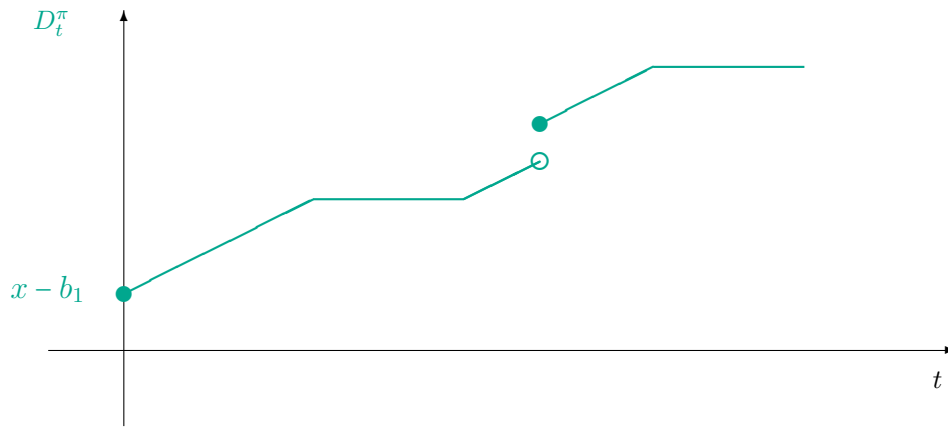


Abbildung 2.2: Der Risikoreserveprozess im Cramér-Lundberg-Modell mit Dividendenzahlungen zu einer Zweibandstrategie.

Die untere Grafik ist eine schematische Skizze eines Beispielpfades im Cramér-Lundberg-Modell mit Startkapital x und Prämienrate c zur Dividendenstrategie π mit $\mathcal{B}_0 = [0, b_0) \cup (a_1, b_1)$, $\mathcal{B}_c = \{b_0, b_1\}$, $\mathcal{B}_\infty = (b_0, a_1] \cup (b_1, \infty)$. Die obere Grafik stellt die zugehörigen kumulierten Dividendenzahlungen dar. Für Startkapital $x > b_1$ folgt eine direkte Auszahlung von $x - b_1$. Bis zum nächsten Schaden werden die Prämieinnahmen stetig als Dividenden ausgezahlt. Der erste Schaden führt zu einem Kapital innerhalb der No-Action-Area, so dass zunächst keine Dividende ausgezahlt wird. b_1 wird erneut erreicht und somit werden bis zum zweiten Schaden wieder stetig Dividenden ausgeschüttet. Nach dem zweiten Schaden ergibt sich für den Moment eine Reserve zwischen b_0 und a_1 und es folgt eine sofortige Einmalzahlung, so dass Kapital b_0 übrig bleibt. Bis zum dritten Schaden werden wieder stetig Dividenden gezahlt. Im Beispiel wird b_0 nicht mehr erreicht und der vierte Schaden führt zum Ruin.

Kapitel 3

Lösungsmethoden

In diesem Kapitel werden zwei verschiedene Konzepte vorgestellt, welche jeweils eine Möglichkeit darstellen, um die Wertfunktion und eine optimale Strategie konstruktiv zu ermitteln.

Zum einen handelt es sich dabei um die Bestimmung der Wertfunktion als Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung des Optimierungsproblems. Diese Vorgehensweise, welche sich unter anderem bei Schmidli (2008) und Azcue und Muler (2005, 2010, 2012) findet, wird in Algorithmus 3.7 formalisiert. Hierzu wird die Wohldefiniertheit aller benötigten Größen inklusive der geforderten Glattheitseigenschaften bewiesen. Unklarheiten bei der Umsetzung sowie der Zuordnung der optimalen Strategie werden identifiziert. Im Zuge der anschließenden Kapitel werden hierzu Antworten und Lösungen bereitgestellt.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Wert einer beliebigen Bandstrategie anhand sogenannter Gerber-Shiu-Funktionen darzustellen, so dass durch Optimierung über die Bandgrenzen die Wertfunktion ermittelt werden kann. Während dies in Ansätzen – insbesondere bei der Beschränkung auf Barrierenstrategien – vermehrt in der Literatur zu finden ist¹, gibt es kaum Arbeiten zum allgemeinen Fall. Avram et al. (2013) behandeln die Optimierung des erwarteten Dividendenbarwerts abzüglich einer Strafzahlung, die von der Höhe des Defizits im Ruinzeitpunkt abhängt, wenn der Risikoreserveprozess einem spektral negativen Lévy-Prozess folgt und zusätzlich bei jeder Dividendenzahlung Transaktionskosten anfallen. Es handelt sich somit um eine Verallgemeinerung des hiesigen Modellrahmens. Avram et al. zeigen, dass wiederum Formen von Bandstrategien optimal sind und stellen deren Wert anhand von Gerber-Shiu-Funktionen dar. Die technischen Beweise greifen dabei auf Super- und Sublösungen der HJB zurück. Darüber hinaus entwickeln sie einen Algorithmus zur Bestimmung der optimalen Bandgrenzen, indem sie

¹Beispielsweise bei Gerber und Shiu (1998), Lin et al. (2003), Renaud und Zhou (2007), Avram et al. (2007) und Scheer und Schmidli (2011).

rekursiv äquivalente optimale Stoppprobleme herleiten und lösen. Für die Darstellung des Werts einer beliebigen – d.h. nicht zwangsläufig optimalen Strategie – beschränken sie sich auf den Fall einer Zweibandstrategie. Wie im Folgenden gezeigt, unterscheidet sich der allgemeine Fall hiervon jedoch strukturell nicht. In Abschnitt 3.2.2 gelingt die entsprechende Darstellung des Werts einer beliebigen Bandstrategie im hiesigen Modellrahmen. Zunächst wird hierzu eine probabilistische Herleitung durchgeführt, die ein intuitives Verständnis für die Darstellung mit sich bringt. Der anschließende analytische Beweis zeichnet sich durch Einfachheit und Prägnanz aus.

Abschließend werden die Konzepte lückenlos miteinander in Einklang gebracht. Dies ermöglicht ein umfassendes Verständnis sowie eine parallele Verwendung der verschiedenen Darstellungen. In den Fragestellungen der folgenden Kapitel können somit simultan die strukturellen Vorteile beider Darstellungen ausgenutzt werden.

3.1 Schwache Lösungen der HJB

Das im Folgenden vorgestellte Verfahren basiert hauptsächlich auf den Ideen von Schmidli (2008) und Azcue und Muler (2005). Dabei wird die Wertfunktion als Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB) des Optimierungsproblems charakterisiert. Typischerweise werden Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichungen mittels des Prinzips der dynamischen Programmierung hergeleitet.

3.1.1 Die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Die Wertfunktion erfüllt das nachfolgende Prinzip der dynamischen Programmierung (siehe z.B. Mnif und Sulem (2005), Azcue und Muler (2005) und Schmidli (2006)).

Proposition 3.1 (Prinzip der dynamischen Programmierung).

Sei T eine \mathcal{F}_t -Stoppzeit. Dann gilt für $x \geq 0$

$$V(x) = \sup_{\pi \in \Pi} E \left[\int_{0-}^{T \wedge \tau^\pi} e^{-\delta u} dD_u^\pi + e^{-\delta(T \wedge \tau^\pi)} V(X_{T \wedge \tau^\pi}^\pi) \middle| X(0) = x \right]. \quad (3.1)$$

Die unten folgende HJB lässt sich dann beispielsweise wie im Beweis zu Satz 2.10 über eine heuristische Vorgehensweise aus (3.1) motivieren. Dazu wählt man für kleines $h \geq 0$ die Stoppzeit $T = \min\{T_1, h\}$, wobei T_1 wieder der Zeitpunkt des ersten Schadens sei. Für die nötigen Umformungen, um letztlich die HJB zu erhalten, werden dabei allerdings Glattheitsannahmen an die Wertfunktion gestellt, die eine Taylorapproximation

sowie das Vertauschen von Integration, Supremums- und Limesbildung ermöglichen. Hierzu wäre die Differenzierbarkeit der Wertfunktion ausreichend. Gemäß Lemma 2.2 existiert die Ableitung der Wertfunktion fast überall. Im Allgemeinen ist die Wertfunktion jedoch nicht überall differenzierbar und es bedarf einer Verifikation der *HJB* – es muss zunächst gezeigt werden, ob und inwieweit die Wertfunktion die *HJB* erfüllt. In der Literatur findet man hierzu unterschiedliche Vorgehensweisen. Zu nennen sind hier Verfahren, die sogenannte Viskositätslösungen verwenden, wie sie von Crandall und Lions (1983) eingeführt wurden.² In der Arbeit von Azcue und Muler (2005) kann hiermit gezeigt werden, dass die Wertfunktion die kleinste Viskositätslösung der *HJB* ist. Alternativ zeigt Schmidli (2006, 2008), dass die Wertfunktion eine schwache Lösung (*weak solution*) der *HJB* ist, in dem Sinne, dass die Wertfunktion die *HJB* überall erfüllt, wo die erste Ableitung existiert. Dies wird im Folgenden aufgegriffen, um darauf aufbauend die optimale Strategie und den Lösungsalgorithmus formulieren zu können.

Satz 3.2 (Schmidli 2008, Theorem 2.39).

Die Funktion V ist von links und rechts differenzierbar auf $(0, \infty)$. Beide Ableitungen erfüllen die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

$$\max \{ \Lambda V(x), 1 - V'(x) \} = 0, \quad \text{für } x \geq 0. \quad (HJB)$$

Ist P^Y stetig, so gilt darüberhinaus $V'(x-) = 1 < V'(x+)$ für alle $x \geq 0$, in denen V nicht differenzierbar ist.

Bemerkung 3.3.

Die Stetigkeit von P^Y wird hier zunächst nicht zwingend vorausgesetzt, um so auch in Kapitel 6 auf die *HJB* zurückgreifen zu können. Für die dort betrachtete Einpunktverteilung mit entsprechend unstetiger Verteilungsfunktion wird in der Tat zu beobachten sein, dass die Ableitung von V Sprünge nach unten machen kann. Ist P^Y hingegen stetig, so kann Schmidli (2008, S. 83f) folgern, dass nur Sprünge von Eins ausgehend nach oben möglich sind.

Die *HJB* nimmt hier die Form einer Variationsungleichung an. Für alle $x \geq 0$ gelten insbesondere $V'(x) \geq 1$ und $\Lambda V(x) \leq 0$. Für suboptimale Strategien gilt dies im Allgemeinen nicht, sondern lediglich $V^{\pi'}(x) = 1$ auf \mathcal{B}_∞ und $\Lambda V^\pi(x) = 0$ auf \mathcal{B}_0° gemäß Satz 2.10. Die optimal gewählten Bereiche \mathcal{B}_0^* , \mathcal{B}_c^* , \mathcal{B}_∞^* lassen sich in Abhängigkeit der Wertfunktion wie folgt definieren.

²Übersichten zu der verwendeten Methodik sowie Anwendungsbeispiele finden sich beispielsweise bei Crandall et al. (1992) und Fleming und Soner (2006).

Satz 3.4 (Schmidli 2006, Theorem 3.3.1).

Die Strategie π^* mit

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0^* &= \{x \geq 0 : V'(x-) > 1\}, \\ \mathcal{B}_c^* &= \{x \notin \mathcal{B}_0^* : \exists (x_n)_{n \geq 0} \subset \mathcal{B}_0^*, x_n \rightarrow x-\} \cup \left\{0 : \text{falls } V(0) = \frac{c}{\lambda + \delta}\right\}, \\ \mathcal{B}_\infty^* &= (0, \infty) \setminus (\mathcal{B}_0^* \cup \mathcal{B}_c^*)\end{aligned}$$

ist optimal, d.h. es gilt $V = V^{\pi^*}$.

Man beachte dabei, dass gemäß der obigen Konvention $\{0\} \subset \mathcal{B}_0^*$ gilt, wenn $V'(0+) > 1$ erfüllt ist.

Bemerkung 3.5.

Bei Schmidli (2006, 2008) folgt gemäß dieser Charakterisierung, dass \mathcal{B}_0^* offen ist. In Definition 2.4 ist lediglich die rechtsseitige Offenheit gefordert. In Kapitel 4 wird anhand von Satz 4.1 gezeigt, dass über die obige Festlegung hinaus möglicherweise weitere optimale Strategien existieren, welche nur die rechtsseitige Offenheit von \mathcal{B}_0^* erfüllen.

Der folgende Satz liefert nun umgekehrt hinreichende Kriterien, wann eine Lösung der *HJB* die Wertfunktion ist.

Satz 3.6 (Schmidli 2006, Theorem 3.4.1).

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_{x < 0} \equiv 0$ eine Lösung der *HJB* mit

1. f' hat keine Sprünge nach unten,
2. $f(x)e^{-\frac{\delta}{c}x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$,
3. $f'(0+) > 1$ oder $f(0) = \frac{c}{\lambda + \delta}$,

so gilt $f = V$.

3.1.2 Konstruktion der Wertfunktion

Schmidli (2008, S.92) beschreibt, wie sich die Wertfunktion für den Fall, dass P^Y stetig und eine endliche Bandstrategie optimal ist, sukzessive ermitteln lässt.³ Bei Azcue und Muler (2012, Abschnitt 7) findet sich für den Fall einer beschränkten Dividendenrate eine bereits formellere Darstellung dieser Vorgehensweise. Scheer und Schmidli (2011) liefern

³Gemäß Lemma 2.8 ist die Skalenfunktion in diesem Fall stetig differenzierbar.

einen Algorithmus für die Modellvariante mit Kapitalinjektionen und Administrationskosten. Der folgende Algorithmus liefert eine entsprechende Formalisierung im vorliegenden Modellrahmen. In jedem Iterationsschritt m wird hier ein neuer Kandidat V_m für die Wertfunktion bestimmt. Inwieweit dieser Algorithmus tatsächlich die Wertfunktion liefert und was dabei zu beachten ist, wird im Anschluss diskutiert.

Algorithmus 3.7.

1. Bestimme den ersten Kandidaten

$$V_0(x) = \begin{cases} \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)'(b_0)}}, & x < b_0, \\ V_0(b_0) + x - b_0, & x \geq b_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

mit

$$b_0 = \sup \left\{ x \geq 0 : W^{(\delta)'(x)} = \inf_y W^{(\delta)'(y)} \right\}. \quad (3.3)$$

Setze $m = 0$ und gehe zu Schritt 2.

2. Überprüfe ob $\Lambda V_m(x) \leq 0$ für alle $x > b_m$ gilt.

→ Ja. STOPP.

→ Nein. Dann existiert $\bar{a}_{m+1} = \inf \{x > b_m : \Lambda V_m(x) > 0\}$. Gehe zu Schritt 3.

3. Betrachte die Funktionenschar $\{f_{m+1}^a\}$ für $a \in (b_m, \bar{a}_{m+1})$, so dass $f_{m+1}^a(x)$ die IDG löst für $x > a$ und $f_{m+1}^a(x) = V_m(x)$ für $x \leq a$ gilt, d.h.

$$f_{m+1}^a(x) = \begin{cases} V_m(x), & x \leq a, \\ (\Lambda f_{m+1}^a(x) = 0), & x > a. \end{cases} \quad (3.4)$$

Bestimme

$$a_{m+1} = \inf \left\{ a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}) : \inf_{y>a} f_{m+1}^a'(y) = 1 \right\} \quad (3.5)$$

$$\text{und } b_{m+1} = \sup \left\{ x > a_{m+1} : f_{m+1}^{a_{m+1}}(x) = 1 \right\}. \quad (3.6)$$

Somit folgt der nächste Kandidat V_{m+1} für eine Lösung der HJB

$$V_{m+1}(x) = \begin{cases} V_m(x), & x \leq a_{m+1}, \\ f_{m+1}^{a_{m+1}}(x), & a_{m+1} < x < b_{m+1}, \\ f_{m+1}^{a_{m+1}}(b_{m+1}) + x - b_{m+1}, & x \geq b_{m+1}. \end{cases}$$

Setze $m = m + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Zu dem aufgeführten Algorithmus treten noch einige Schwierigkeiten bzw. ungeklärte Aspekte auf. So stellt sich die Frage, ob alle Größen und Funktionen wohldefiniert sind und die nötigen Glattheitseigenschaften gewährleistet sind. Außerdem ist zu klären, inwiefern die Folge $b_0, a_1, b_1, a_2, \dots$ tatsächlich mit den optimalen Bandgrenzen übereinstimmt und unter welchen Umständen Konvergenz gegen die Wertfunktion vorliegt. Abschließend stellt sich die Frage, wie sich der Algorithmus konkret umsetzen lässt, d.h. insbesondere wie sich die Lösungen der *IDG* bestimmen lassen.

Wohldefiniertheit

Die hier durchgeführten Überlegungen erfolgen induktiv über die Schleifen des Algorithmus 3.7. Der Induktionsanfang bezieht sich auf Schritt 1. Die Eigenschaften der Skalenfunktion (Lemma 2.8) liefern aufgrund der Stetigkeit von P^Y , dass V_0 und b_0 wohldefiniert sind und dass V_0 auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar ist. Als Induktionsvoraussetzung wird nun angenommen, dass der m -te Kandidat V_m bereits bestimmt sei. Sämtliche bisher benötigte Größen und Funktionen seien wohldefiniert. V_m sei stetig auf $(0, \infty)$ und differenzierbar auf $(0, \infty) \setminus \bigcup_{i=1}^m \{a_i\}$. Weiter sei $\bar{a}_{m+1} < \infty$, d.h. mindestens eine weitere Schleife im Algorithmus soll durchlaufen werden. Außerdem wird die folgende Kurzschreibweise verwendet

$$g_j(x) = \int_0^x V_j(x-y) dP^Y(y), \quad x \geq 0 \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, m.$$

Es sei also $a \in [b_m, \bar{a}_{m+1}]$ ein potentieller Abzweigepunkt vom linearen Verhalten von V_m ab b_m . Somit gilt $\Lambda V_m(a) \leq 0$. (3.4) und die Induktionsvoraussetzungen liefern, dass $f_{m+1}^a(x)$ wohldefiniert, auf $(0, \infty)$ stetig und auf $(0, \infty) \setminus \left\{ \bigcup_{i=1}^m \{a_i\} \cup \{a\} \right\}$ differenzierbar ist mit

$$f_{m+1}^a'(x) = \frac{\lambda + \delta}{c} f_{m+1}^a(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x f_{m+1}^a(x-y) dP^Y(y), \quad \text{für } x > a.$$

In $x = a$ ist $f_{m+1}^a'(x)$ im Allgemeinen nicht stetig. Mit $\Lambda f_{m+1}^a(a+) = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\Lambda V_m(a) \\ &= \Lambda f_{m+1}^a(a+) - \Lambda f_{m+1}^a(a-) \\ &= c(f_{m+1}^a'(a+) - f_{m+1}^a'(a-)) \\ &= c(f_{m+1}^a'(a+) - 1). \end{aligned}$$

Somit ist $f_{m+1}^a{}'(x)$ in $x = a$ genau dann stetig, wenn $\Lambda f_{m+1}^a(x)$ in $x = a$ stetig ist und dies gilt wiederum genau dann, wenn $\Lambda V_m(a) = 0$ gilt. Offenbar ist dies insbesondere in den Rändern $a \in \{b_m, \bar{a}_{m+1}\}$ der Fall. Allerdings ist nicht auszuschließen, dass die Null auch innerhalb des Bereichs punktweise berührt oder gar auf Intervallen gehalten wird.

Es wird nun der rechte Rand $a = \bar{a}_{m+1}$ betrachtet. Somit ist $f_{m+1}^{\bar{a}_{m+1}}{}'$ in \bar{a}_{m+1} stetig und es folgt

$$\inf_{y > \bar{a}_{m+1}} f_{m+1}^{\bar{a}_{m+1}}{}'(y) \leq f_{m+1}^{\bar{a}_{m+1}}{}'(\bar{a}_{m+1}) = 1. \quad (3.7)$$

Im linken Rand $a = b_m$ gilt gerade $f_{m+1}^{b_m} = f_m^{a_m}$ und es folgt

$$\begin{aligned} \inf_{x > b_m} f_{m+1}^{b_m}{}'(x) &= \inf_{x > b_m} f_m^{a_m}{}'(x) \\ &= f_m^{a_m}{}'(b_m) \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aufgrund des Supremums in (3.6) erreicht $f_{m+1}^{a_m}{}'(x)$ die Eins jedoch nicht mehr, das heißt $f_{m+1}^{b_m}{}'(x) > 1$ für alle $x > b_m$.

Für alle $a \in [b_m, \bar{a}_{m+1}]$ gilt weiter $\Lambda f_{m+1}^a(a+) = 0$. Betrachtet man diesen Ausdruck als Funktion von a , ist diese entsprechend differenzierbar bezüglich a mit $\frac{\partial}{\partial a} (\Lambda f_{m+1}^a(a+)) \equiv 0$. Aus $\frac{\partial}{\partial a} (f_{m+1}^a(a)) = \frac{\partial}{\partial a} (V_m(b_m) + a - b_m) = 1$ und

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\int_0^a f_{m+1}^a(a-y) dP^Y(y) \right) = \frac{\partial}{\partial a} \left(\int_0^a V_m(a-y) dP^Y(y) \right) = g_m'(a)$$

folgt, dass $f_{m+1}^a{}'(a+)$ bzgl. a differenzierbar ist mit

$$0 = \frac{\partial}{\partial a} (\Lambda f_{m+1}^a(a+)) = c \frac{\partial}{\partial a} (f_{m+1}^a{}'(a+)) - (\lambda + \delta) + \lambda g_m'(a). \quad (3.9)$$

Um das Vorzeichen von $\frac{\partial}{\partial a} (f_{m+1}^a{}'(a+))|_{a=b_m+}$ zu bestimmen, wird im Folgenden über ΛV_m die Größenordnung von $g_m'(b_m)$ bestimmt. Für $x \in (a_m, \infty)$ gilt

$$\Lambda V_m(x) = \begin{cases} c - (\lambda + \delta)(V_m(b_m) + x - b_m) + \lambda g_m(x), & x \geq b_m, \\ 0, & a_m < x < b_m. \end{cases}$$

Per Voraussetzung ist $V_m(x)$ in $x = b_m$ differenzierbar mit $V_m'(b_m) = 1$. Somit ist auch $\Lambda V_m(x)$ in $x = b_m$ differenzierbar mit

$$\frac{\partial}{\partial x} \Lambda V_m(x) \Big|_{x=b_m} \leq 0,$$

da $\Lambda V(b_m) = 0$ und $\Lambda V_m(x) \leq 0$ für $x \in [b_m, \bar{a}_{m+1}]$ gilt. Es gilt also

$$0 \geq \frac{\partial}{\partial x} (\Lambda V_m(x)) \Big|_{x=b_m} = -(\lambda + \delta) + \lambda g'(b_m).$$

Eingesetzt in (3.9) liefert dies

$$\frac{\partial}{\partial a} (f_{m+1}^a)'(a+) \Big|_{a=b_m+} \geq 0. \quad (3.10)$$

Da $f_{m+1}^a(x)$ stetig ist für alle $a \in (b_m, \bar{a}_{m+1})$ und $x > a$, folgt die Stetigkeit von $\inf_{y>a} f_{m+1}^a(y)$ als Funktion von a . Zusammen mit den bisherigen Ergebnissen (3.7), (3.8) und (3.10) zum Verhalten in den Rändern folgt, dass die folgenden Mengen \mathcal{D}_{m+1} und \mathcal{E}_{m+1} nicht leer sind.

$$\mathcal{D}_{m+1} = \left\{ a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}] : \inf_{x>a} f_{m+1}^a(x) = 1 \right\} \neq \emptyset.$$

$$\mathcal{E}_{m+1} = \{ x > a_{m+1} : f_{m+1}^a(x) = 1 \} \neq \emptyset.$$

Hieraus erhält man die Existenz von

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \inf \mathcal{D}_{m+1} \\ \text{und} \quad b_{m+1} &= \sup \mathcal{E}_{m+1}. \end{aligned}$$

Somit ist V_{m+1} wohldefiniert. Die stetige Fortsetzung in a_{m+1} und die entsprechende Wahl von b_{m+1} mit $V_{m+1}'(b_{m+1}-) = f_{m+1}'(b_{m+1}) = 1 = V_{m+1}'(b_{m+1})$ liefern zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, dass V_{m+1} stetig und auf $(0, \infty) \setminus \bigcup_{i=1}^{m+1} \{a_i\}$ differenzierbar ist.

Verifikation

Die Wertfunktion V ist eine stetige Funktion, welche die *HJB* gemäß Satz 3.2 erfüllt. Diese Bedingungen sind notwendig, aber nicht hinreichend, dass dies auch tatsächlich die Wertfunktion ist.

Es sei nachfolgend angenommen, dass der Algorithmus 3.7 konvergiere und der letzte Kandidat V_m sei. Gemäß den Schritten 1, 2 und 3 ist dann V_m gerade eine stetige Lösung der *HJB*. Anhand von Satz 3.6 kann nun gezeigt werden, dass in diesem Fall $V = V_m$ gilt.

Da V_m ab b_m linear ist, gilt Voraussetzung 2. in Satz 3.6. Für 3. unterscheidet man die Fälle $b_0 > 0$ oder $b_0 = 0$. Im ersten Fall gilt $V_m'(0+) = \frac{W^{(\delta)'(0+)}}{W^{(\delta)'(b_0+)}} \geq \frac{W^{(\delta)'(0+)}}{W^{(\delta)'(0+)}} = 1$. Die Gleichheit ist hier im Allgemeinen nicht auszuschließen. Allerdings gilt in diesem Fall $V_m(0) = \frac{W^{(\delta)}(0)}{W^{(\delta)'(0+)}} = \frac{c}{\lambda + \delta}$, nach Lemma 2.8 2. Analog folgt für den zweiten Fall $V_m(0) = \frac{c}{\lambda + \delta}$.

Um Satz 3.6 anwenden zu können, muss noch gezeigt werden, dass V'_m keine Sprünge nach unten macht.⁴ Gemäß Obigem können nur in den Übergängen a_i Sprünge der Ableitung auftauchen. Durch $V'_m(a_i-) = 1$ und $V'_m(a_i+) \geq 1$ ist gewährleistet, dass allenfalls Sprünge nach oben möglich sind. Somit sind die Voraussetzungen von Satz 3.6 erfüllt und es gilt $V = V_m$.

Konvergenz

Falls die optimale Strategie eine endliche Bandstrategie ist, konvergiert der obige Algorithmus, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $V_m = V$ (vgl. Schmidli (2008, S.92) und Azcue und Muler (2012, Remark 8)). Andernfalls ist jedoch keine Methode bekannt, um die optimale Strategie und die Wertfunktion konstruktiv zu bestimmen. Dies gilt ebenso für die Methodik in 3.2.

Für den Fall einer unbeschränkten Dichte der Dividendenzahlungen D_t , wie es im vorliegenden Modellrahmen erlaubt ist, liegt bislang kein Beispiel vor, dass eine Strategie mit unendlich vielen Bändern optimal wäre. Für den Fall beschränkter Dividendenzahlungen findet sich ein solches Beispiel bei Azcue und Muler (2012, Example 6.20). Man beachte hierbei, dass im dortigen Modellrahmen mit der Beschränkung $D_{t+h} - D_t \leq l_0 h$ für $h \geq 0$ und ein $l_0 < \infty$ kein Maximum für die oberste Bandgrenze angegeben werden kann. Für das dortige Beispiel kann gerade gezeigt werden, dass die optimale Strategie keine endliche oberste Bandgrenze haben kann. Hieraus lässt sich folgern, dass es unendlich viele Bänder gibt und keine Konvergenz erfolgt. Im hiesigen Modellrahmen gilt hingegen $(\frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)}, \infty) \subset \mathcal{B}_\infty$ gemäß Schmidli (2006, Lemma 3.3.1). Die Konstruktion bei Azcue und Muler (2012) lässt sich daher nicht auf den Fall unbeschränkter Dividendenzahlungen übertragen.

Suboptimale Strategien

Für die Bestimmung des Werts einer beliebigen endlichen Bandstrategie ist der obige Algorithmus nicht geeignet. Gemäß Schritt 3 würde man im Abzweigepunkt a_{m+1} derart stetig fortsetzen, dass ab a_{m+1} die *IDG* erfüllt ist. Ab b_{m+1} würde man stetig linear mit Steigung Eins fortsetzen. Während die Wertfunktion stetig ist, ist dies für suboptimale Strategien in den Abzweigepunkten im Allgemeinen jedoch nicht gewährleistet, und zwar auch für den Fall einer stetigen Schadenhöhenverteilung, vgl. Satz 2.10 und Bemerkung 2.11. Die resultierende Funktion ist also möglicherweise nicht der Wert der betrachteten

⁴In Kapitel 6 wird sich zeigen, dass diese Voraussetzung für unstetige Verteilungsfunktionen im Allgemeinen nicht gilt. Da an dieser Stelle die Stetigkeit von P^Y ohnehin bereits vorausgesetzt ist, ist dies hier unproblematisch. Andernfalls sind jedoch in den b_i Sprünge der Ableitung nach unten möglich.

Strategie. In Abschnitt 3.3 gelingt eine genaue Charakterisierung, wann man den Wert einer Strategie erhält bzw. wann nicht und unter welchen Bedingungen dieser stetig ist.

Die resultierenden Bandgrenzen

Es sei nun angenommen, dass $V = V_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gelte. Die optimale Strategie π^* lässt sich gemäß Satz 3.4 festlegen. Dies deutet zunächst darauf hin, dass die im Algorithmus erhaltenen $b_0 < a_1 < b_1 \dots a_m < b_m$ gerade den Bandgrenzen entsprechen, da auf (a_i, b_i) je $V'(x) \geq 1$ und auf (b_i, a_{i+1}) je $V'(x) = 1$ gilt.

Wenn in (3.6) die Eins in mehreren Argumenten angenommen wird, so wird gemäß Satz 3.4 nicht nur im Supremum, sondern in jedem dieser Elemente stetig Dividende gezahlt. Somit entspricht die Anzahl der benötigten Schleifen im Algorithmus im Allgemeinen nicht der optimalen Anzahl der Bänder. Dies kann bereits im ersten Schritt der Fall sein, wenn in (3.3) das Infimum in mehreren Argumenten angenommen wird. In Kapitel 4 werden alle denkbaren Konstellationen im Detail analysiert und durch Satz 4.1 identifiziert.

Anwendbarkeit

Um den obigen Algorithmus für eine konkrete Schadenhöhenverteilung und eine Parameterkonstellation durchzuführen, muss in Schritt 3 jeweils eine Funktionenschar mit fortgesetzten Lösungen der *IDG* bestimmt werden. Im Allgemeinen wird dies nur anhand numerischer Verfahren mit einer Diskretisierung des Kapitalbereichs umzusetzen sein. Maßgeblich ist dabei die Art der Schadenhöhenverteilung P^Y . Eine einfache Methode wäre z.B. ein Euler-Verfahren, welches eine Taylor-Approximation erster Ordnung verwendet. Die benötigte erste Ableitung für den nächsten Punkt im Gitter kann dabei jeweils aus der *IDG* gewonnen werden. Dieses Verfahren konvergiert jedoch insbesondere bei mehreren Bändern nur sehr langsam. Ungeachtet davon, ist innerhalb der numerischen Verfahren kaum eine Analyse der erhaltenen Strategien in Zusammenhang mit der eingegangenen Schadenhöhenverteilung möglich. In Kapitel 5 wird für die Klasse phasentyp verteilter Schadenhöhen eine analytische Darstellung der obigen Funktionenschar hergeleitet.

Gemäß Obigem ist der Algorithmus für unstetige Schadenhöhenverteilungen nicht geeignet, da hier die Ableitung in den oberen Bandgrenzen möglicherweise nicht existiert. Abschnitt 3.2 liefert die benötigten mathematischen Hilfsmittel, um schließlich in Kapitel 6 die Verfahren derart zu modifizieren, dass auch unstetige Verteilungen berücksichtigt werden können.

3.2 Gerber-Shiu-Funktionen

Gerber und Shiu (1998) führten die inzwischen nach ihnen benannten *Gerber-Shiu-Funktionen* in ihrer einschlägigen Arbeit *On the time value of ruin* ein. Wie dem Titel zu entnehmen ist, beschäftigt sich die Arbeit mit Ruintheorie – genauer wird die gemeinsame Verteilung des Ruinzeitpunkts, der Reserve unmittelbar vor Ruin und des Defizits im Ruin analysiert. Anhand dieser Verteilung berechnen sie erwartete diskontierte Strafbzahlungen im Ruin. Daher werden die hierzu verwendeten Funktionen inzwischen auch als *Gerber-Shiu diskontierte Straffunktionen* bezeichnet.

In Einklang mit den benötigten Quellen wird zunächst angenommen, dass die Schadenhöhenverteilung P^Y stetig sei. Sämtliche Aussagen in 3.2.1 lassen sich jedoch leicht auf den Fall beliebiger Schadenhöhenverteilungen erweitern. An den geeigneten Stellen finden sich hierzu ergänzende Anmerkungen.

3.2.1 Erwartete diskontierte Ruinkosten

Erwartete diskontierte Ruinkosten für den klassischen Risikoreserveprozess

Sei $w : (-\infty, 0) \rightarrow [0, \infty)$ eine nichtnegative Funktion. Es wird angenommen, dass im Ruinzeitpunkt Kosten oder auch Strafbzahlungen der Höhe $w(X(\tau))$ entstehen. w wird daher auch als *Straffunktion* bezeichnet. Gerber und Shiu (1998) betrachten die erwarteten diskontierten Ruinkosten zum Diskontfaktor $\delta \geq 0$

$$\Phi_w(x) = E \left[e^{-\delta\tau} w(X(\tau)) 1_{\{\tau < \infty\}} \mid X_0 = x \right], \quad \text{für } x \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Es gilt also $\Phi_w|_{x < 0} = w$. In späteren Arbeiten werden Funktionen der Form Φ_w als *Gerber-Shiu-Funktionen* bezeichnet.⁵

Zur Berechnung von Φ_w leiten Gerber und Shiu (1998, Gleichung (2.16)) zunächst folgende Integro-Differentialgleichung her

$$0 = -(\lambda + \delta)\Phi_w(x) + c\Phi_w'(x) + \lambda \int_0^x \Phi_w(x-y)dP^Y(y) + \lambda w(x), \quad \text{für } x \geq 0 \quad (3.12)$$

mit $w(x) = \int_x^\infty w(x-y)dP^Y(y)$. Für $w \equiv 0$ ist dies gerade die *IDG* der Skalenfunktion

⁵Bei Gerber und Shiu (1998) hängt w vom Defizit im Ruin $|X(\tau)|$ und zusätzlich von $X(\tau-)$, der Reserve unmittelbar vor Ruin ab. Die zweite Komponente ist für die Anwendungen hier nicht nötig. Bezüglich des Vorzeichens findet man in der Literatur sowohl $w(X(\tau))$ als auch $w(|X(\tau)|)$. Auf die Resultate hat dies offensichtlich keinen Einfluss.

$W^{(\delta)}$. Anders formuliert ist $W^{(\delta)}$ die Lösung der homogenen Gleichung zu (3.12). Genauer betrachtet handelt es sich um die identische Integro-Differentialgleichung – jedoch mit unterschiedlichen Nebenbedingungen für negatives Startkapital. Setzt man nämlich $\Phi_w|_{x<0} = w$ als Nebenbedingung voraus, so gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \Phi_w(x-y)dP^Y(y) &= \int_0^x \Phi_w(x-y)dP^Y(y) + \int_x^\infty w(x-y)dP^Y(y) \\ &= \int_0^x \Phi_w(x-y)dP^Y(y) + w(x). \end{aligned}$$

Somit ist (3.12) nichts anderes als die *IDG* auf $[0, \infty)$. Die Nebenbedingung für negatives Startkapital ist demnach äquivalent zur Wahl der Straffunktion w .

Ersichtlicherweise sind alle Lösungen f der *IDG* für $x \geq 0$ mit der Nebenbedingung $f|_{x<0} = w$ durch eine Kombination einer speziellen Lösung und einem Vielfachen der homogenen Lösung gegeben. Es gilt also

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \Lambda f(x) = 0 \text{ für } x \geq 0 \text{ und } f|_{x<0} = w\} = \{\Phi_w + \eta W^{(\delta)} : \eta \in \mathbb{R}\}. \quad (3.13)$$

Zur eindeutigen Bestimmung ist somit jeweils eine weitere Randbedingung erforderlich. Offenbar gelten die bisherigen Zusammenhänge auch ohne die Stetigkeitsvoraussetzung an P^Y . Die *IDG* ist in diesem Fall sowohl von den rechtsseitigen als auch den linksseitigen Ableitungen erfüllt.

Gerber und Shiu (1998, Gleichung (2.22)) führen weiter folgende Gleichung in θ ein

$$\psi(\theta) - \delta = 0 \quad (3.14)$$

und bezeichnen diese als *fundamentale Lundberg-Gleichung*. ψ ist wie bisher der Laplace-Exponent (oder auch die *Kumulantenfunktion*) von X . Allgemein besitzt (3.14) genau eine nichtnegative Lösung ρ .⁶

$$\exists^1 \rho \geq 0 : \quad \psi(\rho) = \delta. \quad (3.15)$$

Zur weiteren Darstellung wird nun die spezielle Gerber-Shiu-Funktion

$$\Psi(x) = E \left[e^{-\delta\tau + \rho X(\tau)} \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}} | X(0) = x \right] \quad (3.16)$$

⁶In Abhängigkeit von der Verteilung P^Y existiert ggf. eine weitere Lösung $\xi < 0$. Für $\delta = 0$ handelt es sich hier gerade um die berühmte Bestimmungsgleichung für den Anpassungskoeffizienten $R > 0$: $\psi(-R) = 0$. Siehe auch Asmussen und Albrecher (2010, Kapitel XII, Lemma 2.1).

benötigt. Ψ nimmt daher die Gestalt von Φ_w zur konkreten Straffunktion $w(z) = e^{\rho z}$ an. Φ_w kann anhand von Ψ folgendermaßen dargestellt werden (Gerber und Shiu 1998, (2.41), (6.5)-(6.7))

$$\begin{aligned} \Phi_w(x) = & \frac{\lambda}{c(1-\Psi(0))} \left(\int_0^x e^{-\rho z} w(z) (e^{\rho z} \Psi(x-z) - \Psi(0)) dz \right. \\ & \left. + \int_u^\infty e^{-\rho z} w(z) (e^{\rho u} - \Psi(u)) dz \right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Anstelle des Umwegs über Ψ kann auch direkt die Laplace-Transformierte von Φ_w aus der Integro-Differentialgleichung gewonnen und ggf. numerisch invertiert werden. Es gilt hier (vgl. Diskussion von Dickson zu Gerber und Shiu (1998))

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_w(\theta) &= \frac{c\Phi_w(0) - \lambda\widehat{w}(\theta)}{\psi(\theta) - \delta} \\ &= \frac{\lambda(\widehat{w}(\rho) - \widehat{w}(\theta))}{\psi(\theta) - \delta}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

In Abhängigkeit von P^Y kann hier die eine oder andere Variante vorteilhafter für die numerische oder möglicherweise auch explizite Berechnung sein. Bislang treten keine Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung unstetiger Schadenhöhenverteilungen auf. Gegebenenfalls gilt die *IDG* entsprechend von links und rechts.

Erwartete diskontierte Ruinkosten bei einer Barrierenstrategie

Lin et al. (2003) erweitern das Modell von Gerber und Shiu (1998), indem sie zusätzlich Dividendenzahlungen gemäß einer Barrierenstrategie berücksichtigen. Die Gerber-Shiu-Funktion zur Barrierenstrategie β in b ist dann wie folgt definiert⁷

$$\Phi_w^\beta(x) = E \left[e^{-\delta\tau^\beta} w(X^\beta(\tau^\beta)) \middle| X_0 = x \right]. \quad (3.19)$$

Offensichtlich ist Φ_w^β ab b konstant, d.h. es gilt

$$\Phi_w^\beta(x) = \Phi_w^\beta(b), \quad \text{für } x \geq b.$$

Unterhalb von b erfüllt Φ_w^β ebenfalls (3.12) bzw. die *IDG* und lässt sich daher mittels Φ_w ,

⁷Auch bei Lin et al. (2003) kann die Straffunktion von der Reserve unmittelbar vor Ruin abhängen. Das Defizit wird in Betragsform berücksichtigt.

der homogenen Lösung $W^{(\delta)}$ und einer Konstanten η wie folgt darstellen

$$\Phi_w^\beta(x) = \Phi_w(x) + \eta W^{(\delta)}(x), \quad \text{für } x < b. \quad (3.20)$$

Eine zusätzliche Nebenbedingung kann nun festgestellt werden, indem man den Wert für Startkapital b betrachtet. Bis zum nächsten Schaden werden hier stetig Dividenden ausgezahlt. Zum Schadeneintrittszeitpunkt T_1 verbleibt Kapital $x - Y_1$, welches somit unabhängig von T_1 ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \Phi_w^\beta(b) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-\delta t} \left(\int_0^{b+} \Phi_w^\beta(b-y) dP^Y(y) + \int_{b+}^\infty w(b-y) dP^Y(y) \right) dt \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left(\int_0^{b+} \Phi_w^\beta(b-y) dP^Y(y) + \int_{b+}^\infty w(b-y) dP^Y(y) \right). \end{aligned}$$

Zusammen mit $\Phi_w^{\beta'}(b+) = 0$ erfüllt Φ_w^β die *IDG* folglich auch in b . Mit $\Phi_w^{\beta'}(b) = \Phi_w'(b) + \eta W^{(\delta)'}(b)$ erhält man somit $\eta = -\frac{\Phi_w'(b)}{W^{(\delta)'}(b)}$. Insgesamt folgt (Lin et al. 2003, (2.8),(3.4) und (3.5))

$$\Phi_w^\beta(x) = \Phi_w(x) - \Phi_w'(b) \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)'}(b)}, \quad \text{für } x \leq b. \quad (3.21)$$

Diese Gleichung wird in der Literatur auch als *dividends-penalty identity* bezeichnet. Eine Alternative zur analytischen Herleitung findet sich bei Gerber und Yang (2010). Hier werden zunächst die Prämieinnahmen als Compound-Poisson-Prozess mit exponential verteilten Sprüngen modelliert. Für dieses Modell gelingt ihnen eine probabilistische Argumentation zur Herleitung der *dividends-penalty identity*. Die Limesbetrachtung zum Modell mit stetigen Prämieinnahmen führt dann wiederum zu (3.21).

Ist P^Y unstetig, so erhält man $\Phi_w^{\beta'}(b+) = 0$ und

$$\Phi_w^\beta(b) = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \left(\int_0^{b+} \Phi_w^\beta(b-y) dP^Y(y) + \int_{b+}^\infty w(b-y) dP^Y(y) \right).$$

Folglich ist auch hier die *IDG* in $b+$ erfüllt. Die allgemeinere Form der *dividends-penalty identity* ist entsprechend durch

$$\Phi_w^\beta(x) = \Phi_w(x) - \Phi_w'(b+) \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)'}(b+)}, \quad \text{für } x \leq b \quad (3.22)$$

gegeben. Somit ist Φ_w^β in b möglicherweise nicht differenzierbar. Genauer folgt aus der

IDG

$$\begin{aligned}
\Phi_w^{\beta'}(b-) &= \frac{\lambda + \delta}{c} \Phi_w^\beta(b) - \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^{b-} \Phi_w^\beta(b-y) dP^Y(y) + \int_{b-}^\infty w(b-y) dP^Y(y) \right) \\
&= \Phi_w^{\beta'}(b+) + \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^{b+} \Phi_w^\beta(b-y) dP^Y(y) + \int_{b+}^\infty w(b-y) dP^Y(y) \right) \\
&\quad - \frac{\lambda}{c} \left(\int_0^{b-} \Phi_w^\beta(b-y) dP^Y(y) + \int_{b-}^\infty w(b-y) dP^Y(y) \right) \\
&= \frac{\lambda}{c} P^Y(\{b\}) (\Phi_w^\beta(0+) - w(0)).
\end{aligned}$$

Anstelle von Φ_w kann jede Lösung der IDG in (3.22) verwendet werden. Genauer gilt

$$\Phi_w^\beta(x) = \tilde{\Phi}_w(x) - \tilde{\Phi}'_w(b+) \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)'(b+)}, \quad \text{für } x \leq b$$

mit $\tilde{\Phi}_w = \Phi_w + \eta W^{(\delta)}$ für alle $\eta \in \mathbb{R}$.

Avram et al. (2013, (4.7) bzw. Lem.B.1) verwenden die folgende Version

$$F_w(x) = \Phi_w(x) + \left(cw(0) - \lambda \int_0^\infty e^{-\psi^-(\delta)z} \int_z^\infty w(z-y) dP^Y(y) dz \right) W^{(\delta)}(x). \quad (3.23)$$

Während diese Wahl zunächst komplex erscheint, ergeben sich hierdurch speziell im vorliegenden Modellrahmen rechnerische Vorteile. Die Laplace-Transformierte nimmt die folgende Form an (Avram et al. 2013, (4.6))

$$\widehat{F}_w(\theta) = \frac{w(0) \frac{\psi(\theta)}{\theta} - \lambda \left(\widehat{w}(\theta) - w(0) \frac{1 - \widehat{p}(\theta)}{\theta} \right)}{\psi(\theta) - \delta}.$$

Mit der Form (2.4) von ψ und der Laplace-Transformierten von $W^{(\delta)}$ (Prop. und Def. 2.7) lässt sich dies wie folgt vereinfachen

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_w(\theta) &= \frac{\frac{w(0)}{\theta} (\psi(\theta) + \lambda(1 - \widehat{p}(\theta))) - \lambda \widehat{w}(\theta)}{\psi(\theta) - \delta} \\
&= (cw(0) - \lambda \widehat{w}(\theta)) \widehat{W}^{(\delta)}(\theta).
\end{aligned}$$

Somit lässt sich F_w durch Inversion der Laplace-Transformierten wie folgt darstellen

$$F_w(x) = cw(0)W^{(\delta)}(x) - \lambda \int_0^x W^{(\delta)}(x-y)w(y)dy. \quad (3.24)$$

Im Vergleich zu (3.17) und Avram et al. (2013, (B.1)) ist diese Darstellung einfacher und unmittelbar aus $W^{(\delta)}$ zu bestimmen. Des Weiteren ist der Wert in Null explizit durch $F_w(0) = w(0)$ gegeben (vgl. Avram et al. 2013, Lem.B.1 (ii)). Dies vereinfacht die spätere Optimierung, vgl. Abschnitt 4.5, da F_w somit in Null stetig ist. Des Weiteren erübrigt sich die Bestimmung von ρ bzw. $\widehat{w}(\rho)$.

Im Folgenden wird also die Identität

$$\Phi_w^\beta(x) = F_w(x) - F_w'(b+) \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)'(b+)}, \quad \text{für } x \leq b \quad (3.25)$$

verwendet. Für die Ableitungen – gegebenenfalls von links und rechts – von F_w gilt dabei

$$F_w'(x) = cw(0)W^{(\delta)'(x)} - \frac{\lambda}{c}w(x) - \lambda \int_0^x W^{(\delta)'(x-y)}w(y)dy. \quad (3.26)$$

3.2.2 Der Wert einer endlichen Bandstrategie

Im Folgenden wird gezeigt, wie sich der Wert einer endlichen Bandstrategie induktiv anhand von Gerber-Shiu-Funktionen konstruieren lässt. Hierzu wird nachfolgend explizit die Stetigkeit der Schadenhöhenverteilung P^Y vorausgesetzt. In Kapitel 6 werden die Besonderheiten einer unstetigen Schadenhöhenverteilung aufgezeigt.

Für ein $m \in \mathbb{N}$ sei nun π die Bandstrategie mit Bandgrenzen $0 \leq b_0 \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_m < b_m < \infty$, d.h.

$$\mathcal{B}_0 = [0, b_0) \cup \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j), \quad \mathcal{B}_c = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{b_m\}, \quad \mathcal{B}_\infty = \bigcup_{j=0}^{m-1} (b_j, a_{j+1}] \cup (b_m, \infty).$$

Zur Konstruktion wird außerdem die Barrierenstrategie β mit Barriere $b_m - a_m$ mit Ruinzeitpunkt τ^β benötigt.

Es sei angenommen, dass V^π bis b_{m-1} bereits bestimmt sei. Von b_{m-1} bis a_m und ebenso oberhalb von b_m wird die Funktion jeweils linear mit Steigung Eins stetig fortgesetzt. Somit wird noch eine Darstellung zwischen a_m und b_m benötigt.

Im Folgenden wird zunächst probabilistisch hergeleitet, dass sich V^π auf dem nächsten Band wie folgt darstellen lässt

$$V^\pi(x) = V^\beta(x - a_m) + \Phi_w^\beta(x - a_m), \quad \text{für } x \in (a_m, b_m],$$

zur Straffunktion $w(z) = V^\pi(a_m + z)$. Mit Hilfe der vorangegangenen Berechnungen kann dies in Form von Gerber-Shiu-Funktionen ausgedrückt werden. Diese Vorgehensweise lie-

fert vor allem ein besseres Verständnis des späteren Optimierungsproblems und dafür, inwieweit die Grenzen Einfluss auf den erwarteten Dividendenbarwert haben. Im Anschluss wird eine prägnante analytische Herleitung der Darstellung geliefert.

Probabilistische Herleitung

Sei im Folgenden $x \in (a_m, b_m]$. Die Stoppzeit

$$\xi = \inf \{ t > 0 : X_t^\pi < a_m \mid X_0 = x \} \quad (3.27)$$

gibt den ersten Zeitpunkt an, zu welchem die Reserve für die Strategie π unter a_m fällt. Offenbar gilt $\xi \leq \tau^\pi$. Der erwartete Dividendenbarwert lässt sich nun in Dividenden bis und ab ξ wie folgt unterteilen

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= E \left[\int_0^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dD_t^\pi \mid X_0 = x \right] \\ &= E \left[\int_0^\xi e^{-\delta t} dD_t^\pi \mid X_0 = x \right] + E \left[\int_\xi^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dD_t^\pi \mid X_0 = x \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Der erste Term in (3.28) ist somit unabhängig von b_0, a_1, \dots, b_{m-1} . Lediglich die Breite $b_m - a_m$ des Bandes und die Lage von x innerhalb dessen spielt eine Rolle. Durch eine Verschiebung des Prozesses sowie der Bandgrenzen um a_m nach unten lässt sich der erste Term aufgrund der Stationarität des Prozesses als Wert einer Barrierenstrategie darstellen. Genauer erhält man den Wert der Barrierenstrategie β in $b_m - a_m$ zu Startkapital $x - a_m$. Die Stoppzeit ξ entspricht dadurch dem Ruinzeitpunkt des transformierten Prozesses

$$\xi = \inf \{ t > 0 : X_t^\beta < 0 \mid X_0 = x - a_m \}.$$

Man erhält somit

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^\xi e^{-\delta t} dD_t^\pi \mid X_0 = x \right] &= E \left[\int_0^{\tau^\beta} e^{-\delta t} dD_t^\beta \mid X_0 = x - a_m \right] \\ &= V^\beta(x - a_m) \\ &= \frac{W^{(\delta)}(x - a_m)}{W^{(\delta)'}(b_m - a_m)}. \end{aligned}$$

Der zweite Term in (3.28) stimmt gerade mit dem auf heute diskontierten Wert V^π für Startkapital $X^\pi(\xi)$ überein

$$E \left[\int_{\xi}^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dD_t^\pi \middle| X_0 = x \right] = E \left[e^{-\delta \xi} V^\pi (X^\pi(\xi)) \middle| X_0 = x \right]. \quad (3.29)$$

Um dies einzusehen, unterscheidet man die Fälle $b_{m-1} < a_m$ bzw. $b_{m-1} = a_m$.

Sei $b_{m-1} < a_m$. Die Reserve in ξ ist somit entweder bereits unterhalb von b_{m-1} oder es erfolgt eine direkte Dividendenzahlung der Höhe $X^\pi(\xi) - b_{m-1}$. Folglich kann nach der etwaigen Dividendenzahlung in ξ Kapital größer als b_{m-1} und damit insbesondere größer als a_m nicht mehr erreicht werden. Der Barwert dieser Dividendenzahlungen lässt sich also aus V^π für Startkapital kleiner als a_m bestimmen, wofür eine Darstellung bereits vorliegt. In Abbildung 3.1 wird die Verschiebung anhand eines Beispielpfades illustriert.

Sei nun $b_{m-1} = a_m$. Grundsätzlich ist hier möglich, dass $X^\pi(\xi) \in (a_{m-1}, b_{m-1})$ gilt. In diesem Fall wird also zunächst keine Dividende gezahlt und ein erneutes Erreichen von b_{m-1} und der damit verbundenen stetigen Dividendenzahlungen ist ebenso möglich. Dies ändert jedoch nichts an der Tatsache, dass sich der Wert dieser Dividendenzahlungen aus V^π bestimmen lässt. Hier muss allerdings für den Erwartungswert Startkapital bis inklusive a_m berücksichtigt werden. Auch dieser Wert ist jedoch durch $V^\pi(a_m) = \frac{c}{\lambda + \delta} + \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \int_0^{a_m} V^\pi(a_m - y) dP^Y(y)$ bereits darstellbar. Abbildung 3.2 illustriert diesen Spezialfall und die entsprechende Verschiebung zur Unterteilung der Dividenden anhand eines Beispielpfades.

Zur Darstellung von ξ und $X^\pi(\xi)$ in (3.29) kann man wie für den ersten Term den Prozess um a_m nach unten transformieren. Insgesamt liefert dies

$$E \left[\int_{\xi}^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dD_t^\pi \middle| X_0 = x \right] = E \left[e^{-\delta \tau^\beta} V^\pi (X^\beta(\tau^\beta) + a_m) \middle| X_0 = x - a_m \right].$$

Dies stimmt jedoch gerade mit der Gerber-Shiu-Funktion (3.19) zu einer Barrierenstrategie β überein, wenn man die Barriere $b_m - a_m$ sowie die Straffunktion $w(z) = V^\pi(a_m + z)$ wählt und entsprechend Φ_w^β in $x - a_m$ auswertet. Mit (3.25) erhält man somit

$$\begin{aligned} & E \left[e^{-\delta \tau^\beta} V^\pi (X^\beta(\tau^\beta) + a_m) \middle| X_0 = x - a_m \right] \\ &= \Phi_w^\beta(x - a_m) \\ &= F_w(x - a_m) - F_w'(b_m - a_m) \frac{W^{(\delta)}(x - a_m)}{W^{(\delta)'}(b_m - a_m)}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man folgende Darstellung für V^π auf $(a_m, b_m]$

$$\begin{aligned}
V^\pi(x) &= V^\beta(x - a_m) + \Phi_w^\beta(x - a_m) \\
&= \frac{W^{(\delta)}(x - a_m)}{W^{(\delta)'(b_m - a_m)} + F_w(x - a_m) - F_w'(b_m - a_m)} \frac{W^{(\delta)}(x - a_m)}{W^{(\delta)'(b_m - a_m)} \\
&= (1 - F_w'(b_m - a_m)) \frac{W^{(\delta)}(x - a_m)}{W^{(\delta)'(b_m - a_m)} + F_w(x - a_m). \tag{3.30}
\end{aligned}$$

In Ergänzung zu Lemma 2.13 erhält man die folgende Aussage.

Lemma 3.8.

Sei π eine endliche Bandstrategie mit Bandgrenzen $0 \leq b_0 \leq a_1 < b_1 \cdots \leq a_m < b_m$. Für jedes $i = 1, \dots, m$ ist V^π genau dann stetig in a_i , wenn $F_{w_i}'(b_i - a_i) = 1$ gilt. Genauer gilt

$$V^\pi(a_i+) = \frac{1 - F_{w_i}'(b_i - a_i)}{cW^{(\delta)'(b_i - a_i)} + V^\pi(a_i-).$$

Beweis. Folgt aus (3.30) unter der jeweiligen Verwendung von $F_{w_i}(0) = w_i(0) = V^\pi(a_i-)$ und $W^{(\delta)}(0+) = \frac{1}{c}$. □

In Kombination mit Satz 2.9 erhält man das folgende Lemma.

Lemma 3.9.

Sei π eine endliche Bandstrategie. P^Y erfülle die Voraussetzungen von Satz 2.9 und sei k -mal stetig differenzierbar für ein $k \geq 1$. Dann ist V^π auf \mathcal{B}_0° $(k + 1)$ -mal stetig differenzierbar.

Beweis. Aus Satz 2.9 und der Darstellung des Werts einer Barrierenstrategie (2.5) folgt die $(k + 1)$ -mal stetige Differenzierbarkeit zunächst auf $(0, b_0)$. Die Behauptung folgt nun induktiv aus (3.30) und (3.24). □

Analytische Herleitung

Nach dieser probabilistischen Herleitung soll an dieser Stelle der analytische Zusammenhang hergestellt werden. Gesucht ist eine Funktion f mit

1. $\Lambda f(x) = 0$ für $x \geq a_m$,
2. $f|_{x < a_m} = V^\pi|_{x < a_m}$ und

3. $f'(b_m) = 1$.

Gemäß Satz 2.10 und Lemma 2.13 - da P^Y stetig ist - erfüllt V^π diese Eigenschaften.

Die erste Bedingung wird durch die Translation um a_m einer Lösung der *IDG* für $x \geq 0$ erfüllt. Für eine beliebige Strafffunktion w ist dies etwa durch $f(x) = F_w(x - a_m)$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Das homogene Problem wird hier durch die entsprechende Translation der Skalenfunktion gelöst. Die Menge aller Funktionen mit 1. ist daher durch

$$\{F_w(x - a_m) + \eta W^{(\delta)}(x - a_m) : \eta \in \mathbb{R} \text{ und } w : (-\infty, 0) \rightarrow [0, \infty)\}$$

gegeben. Es sei also $f(x) = F_w(x - a_m) + \eta W^{(\delta)}(x - a_m)$ für $x \geq 0$, wobei η und w nun gemäß den weiteren Eigenschaften bestimmt werden können. Für $x < a_m$ gilt $f(x) = w(x - a_m) + \eta \cdot 0$. Damit 2. gilt, muss die Strafffunktion $w(x) = V^\pi(a_m + x)$ gewählt werden. Die Randbedingung 3. liefert

$$\begin{aligned} f'(b_m) &= F'_w(b_m - a_m) + \eta W^{(\delta)'}(b_m - a_m) \stackrel{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow \eta &= \frac{1 - F'_w(b_m - a_m)}{W^{(\delta)'}(b_m - a_m)}. \end{aligned}$$

Insgesamt liefert dies (3.30).

3.3 Die Methoden im Einklang

In diesem Abschnitt soll die Parallele zwischen der Darstellung mittels Gerber-Shiu-Funktionen und der Vorgehensweise aus Algorithmus 3.7 gezogen werden. Es sei weiterhin P^Y stetig. Zur Notation der benötigten Gerber-Shiu-Funktionen sei für eine beliebige Strategie π und ein $a \geq 0$

$$F_{(a,\pi)} = F_w, \quad \text{zur Strafffunktion } w(z) = V^\pi(z + a). \quad (3.31)$$

Nachfolgend kann beantwortet werden, ob sich Algorithmus 3.7 auch für die Bewertung suboptimaler Strategien eignet, bzw. inwieweit dieser abgeändert werden muss. Es sei π eine Strategie mit Bandgrenzen b_0, a_1, \dots, b_m . Weiter seien $b_m \leq a < b$. Offenbar stimmt dann $F_{(a,\pi)}(x - a)$ gerade mit $f_{m+1}^a(x)$ aus (3.4) überein, wenn dort der m -te Kandidat durch $V_m = V^\pi$ gegeben ist.

$$F_{(a,\pi)}(x - a) = \left\{ \begin{array}{ll} V^\pi(x), & x < a \\ \Lambda F_{(a,\pi)}(x - a) = 0, & x \geq a \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{ll} V_m(x), & x < a \\ \Lambda f_{m+1}^a = 0, & x \geq a \end{array} \right\} \\
&= f_{m+1}^a(x). \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Betrachtet man in Fortsetzung zur Strategie π das weitere Band (a, b) , so ist der Wert dieser Strategie für $x \in (a, b)$ gemäß Darstellung (3.30) gegeben durch

$$\left(1 - F'_{(a,\pi)}(b-a)\right) \frac{W^{(\delta)}(x-a)}{W^{(\delta)'(b-a)}} + F_{(a,\pi)}(x-a),$$

wobei $F_{(a,\pi)}(0) = V^\pi(a)$ gilt. Gemäß Lemma 3.8 liefert die stetige Fortsetzung im Algorithmus 3.7 insofern nur dann den Wert der Strategie mit Bandgrenzen b_0, \dots, b_m, a, b , wenn $F'_{(a,\pi)}(b-a) = 1$ bzw. analog $f_{m+1}^a{}'(b) = 1$ gilt. Dies ist zwar auf jeden Fall für eine optimale Strategie gewährleistet, wie im Anschluss noch genauer erläutert wird, gilt allerdings nicht im Allgemeinen. In der Notation von Algorithmus 3.7 ist der Wert also gegeben durch

$$\left(1 - f_{m+1}^a{}'(b)\right) \frac{W^{(\delta)}(x-a)}{W^{(\delta)'(b-a)}} + f_{m+1}^a(x). \tag{3.33}$$

Durch die zusätzliche Berücksichtigung von $\left(1 - f_{m+1}^a{}'(b)\right) \frac{W^{(\delta)}(x-a)}{W^{(\delta)'(b-a)}}$ kann der Algorithmus 3.7 somit auch zur Bewertung suboptimaler Strategien verwendet werden.

Wählt man ein Band (a, b) mit $F'_{(a,\pi)}(b-a) \neq 1$, so ist der Wert dieser Strategie in jedem Fall in a unstetig. Für $F'_{(a,\pi)}(b-a) < 1$ erfolgt ein Sprung des Werts nach oben. Es wirkt sich also für Kapital oberhalb von a positiv aus, dass Kapital angehäuft wird. Umgekehrt wirkt es sich für Kapital unterhalb von a negativ aus, dass direkt eine Einmalzahlung geleistet wird. Für $F'_{(a,\pi)}(b-a) > 1$ erfolgt sogar ein Sprung nach unten. Der erwartete Dividendenbarwert ist also für Kapital wenig oberhalb von a tatsächlich kleiner als für Kapital unterhalb von a . In jedem Fall kann man folgern, dass der Handlungswechsel in a zu einem Ungleichgewicht führt.

Um eine optimale Strategie zu erhalten, muss daher in jedem Fall $F'_{(a,\pi)}(b-a) = 1$ gelten. Inwieweit die Wahl von Infimum bzw. Supremum in (3.5) und (3.6) bzw. die Zuweisung in Satz 3.4 die einzige optimale Wahl ist, kann zum Ende des nächsten Kapitels geklärt werden.

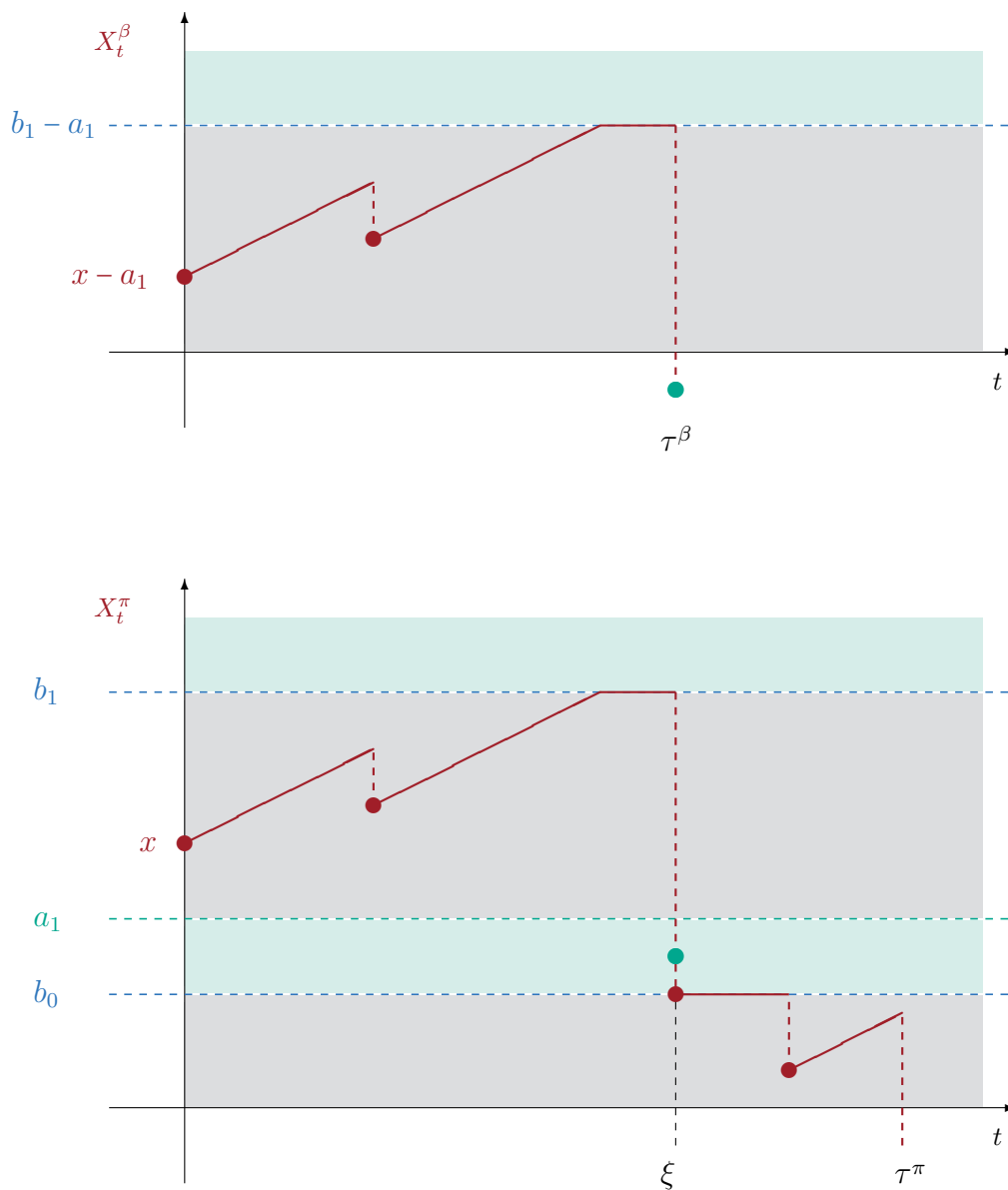


Abbildung 3.1: Unterteilung des Dividendenbarwerts einer Zweibandstrategie in Dividenden bis und ab dem Unterschreiten des oberen Bands.

Die untere Grafik ist eine schematische Skizze eines Beispielpfades im Cramér-Lundberg-Modell mit Startkapital x zur Dividendenstrategie π mit $\mathcal{B}_0 = [0, b_0] \cup (a_1, b_1)$, $\mathcal{B}_c = \{b_0, b_1\}$, $\mathcal{B}_\infty = (b_0, a_1] \cup (b_1, \infty)$. Im Beispiel tritt Ruin mit dem vierten Schaden ein. Der grüne Punkt stellt den Wert der Reserve im Zeitpunkt ξ , dem ersten Unterschreiten von a_1 dar, was im Beispiel mit dem zweiten Schaden erfolgt. Die obere Grafik zeigt die Entwicklung der Reserve mit Startkapital $x - a_1$ unter Anwendung der Barrierenstrategie β mit $\mathcal{B}_0 = [0, b_1 - a_1)$, $\mathcal{B}_c = \{b_1 - a_1\}$, $\mathcal{B}_\infty = (b_1 - a_1, \infty)$ für den gleichen Verlauf wie in der unteren Grafik, d.h. für den gleichen Ereignispfad in Ω . Somit ist der Prozess um a_1 nach unten verschoben. Der grüne Punkt stellt hier das Defizit im Ruin dar. Ruin tritt mit dem zweiten Schaden ein.

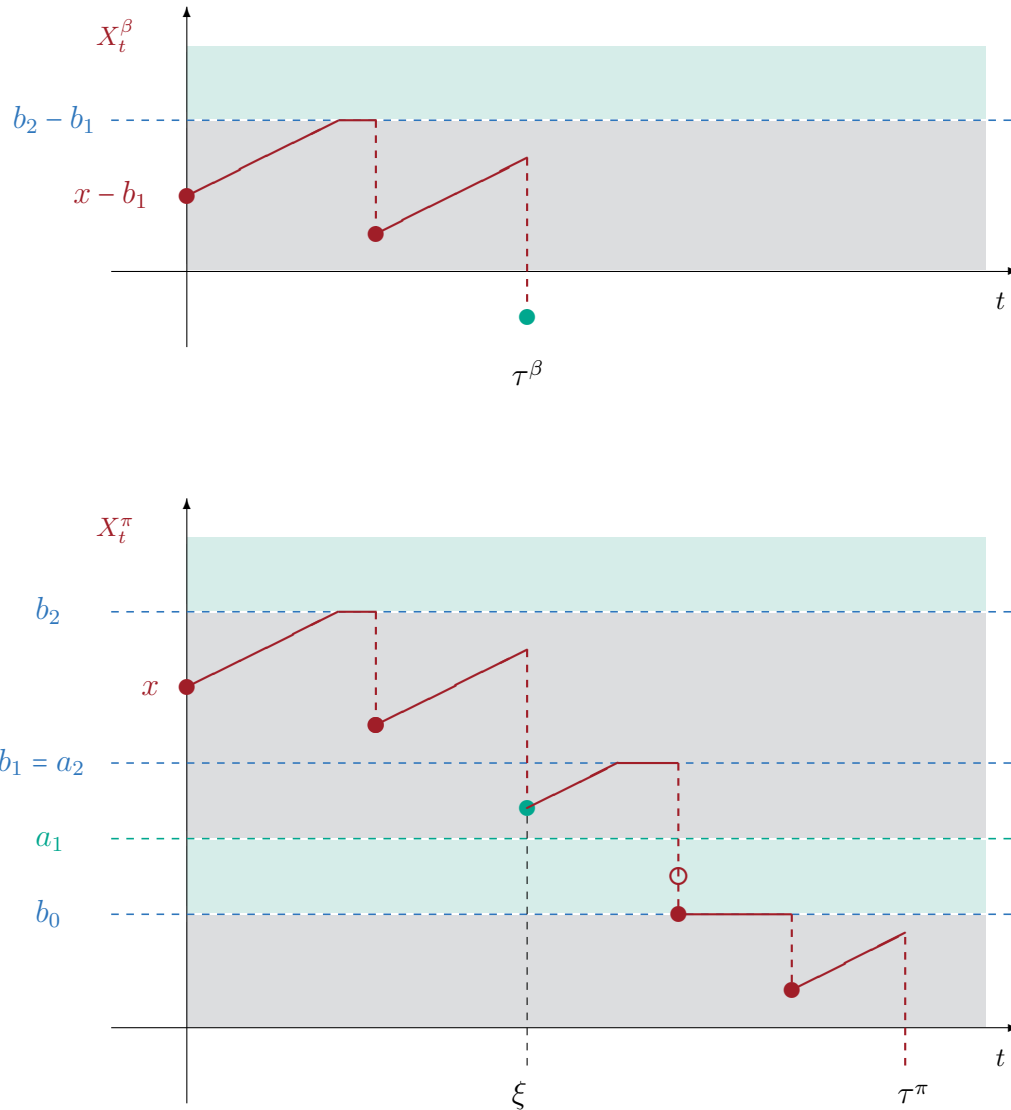


Abbildung 3.2: Unterteilung des Dividendenbarwerts einer Dreibandstrategie mit zusammenfallenden Bandgrenzen $a_2 = b_1$ in Dividenden bis und ab dem Unterschreiten von b_1 .

Die untere Grafik ist eine schematische Skizze eines Beispielpfades im Cramér-Lundberg-Modell mit Startkapital x zur Dividendenstrategie π mit $\mathcal{B}_0 = [0, b_0) \cup (a_1, b_1) \cup (b_1, b_2)$, $\mathcal{B}_c = \{b_0, b_1, b_2\}$, $\mathcal{B}_\infty = (b_0, a_1] \cup (b_2, \infty)$. Der grüne Punkt stellt den Wert der Reserve im Zeitpunkt ξ , dem ersten Unterschreiten von $a_2 = b_1$ dar, was im Beispiel mit dem zweiten Schaden erfolgt. Jedoch wird b_1 mit den anschließenden Prämieinnahmen noch vor dem dritten Schaden wieder erreicht und es kommt zu einer stetigen Dividendenauszahlung. Ruin tritt hier mit dem fünften Schaden ein. Die obere Grafik zeigt die Entwicklung der Reserve mit Startkapital $x - a_2$ unter Anwendung der Barrierenstrategie β mit $\mathcal{B}_0 = [0, b_2 - b_1)$, $\mathcal{B}_c = \{b_2 - b_1\}$, $\mathcal{B}_\infty = (b_2 - b_1, \infty)$ für den gleichen Verlauf wie in der unteren Grafik, d.h. für den gleichen Ereignispfad in Ω . Somit ist der Prozess um a_2 nach unten verschoben. Der grüne Punkt stellt hier das Defizit im Ruin dar. Ruin tritt mit dem zweiten Schaden ein.

Kapitel 4

Lokalisierung und Identifikation der optimalen Bänder

Zur Lage der optimalen Bänder ist bislang einzig die obere Schranke $\frac{\lambda c}{\delta(\lambda+\delta)}$ (Schmidli 2006, Lemma 3.3.1) für die größte optimale Bandgrenze gegeben. Des Weiteren gibt es keine Aussage zur Eindeutigkeit der durch Algorithmus 3.7 konstruierten bzw. Satz 3.4 definierten optimalen Strategie. In diesem Kapitel werden diese Aspekte aufgegriffen, um eine genauere Vorstellung von möglichen optimalen Strategien zu erhalten. Zunächst werden hierzu die Funktionenscharen aus Algorithmus 3.7 genauestens untersucht. Es wird also vorausgesetzt, dass P^Y stetig ist. Es wird nun angenommen, dass der m -te Kandidat V_m bereits bestimmt sei und bis b_m mit der Wertfunktion übereinstimmt. Demnach existiert eine Strategie π mit $V_m = V^\pi$. Eine Eindeutigkeit dieser Strategie ist an dieser Stelle weder notwendig noch gewährleistet. V_m ist stetig auf $(0, \infty)$ und differenzierbar auf $(0, \infty) \setminus \bigcup_{i=1}^m \{a_i\}$. Weiter sei $\bar{a}_{m+1} < \infty$, d.h. V_m ist nicht die Wertfunktion, und ein weiteres Band muss existieren. Für $a \in [b_m, \bar{a}_{m+1}]$ werden also die Funktionen $f_{m+1}^a(x)$ sowie $\Lambda f_{m+1}^a(x)$ und deren Ableitungen untersucht. Jedes a stellt einen möglichen Abzweigepunkt vom linearen Verlauf von V_m dar. Das Verhalten der Funktionen für ein Abzweigen in den Randpunkten $a \in \{b_m, \bar{a}_{m+1}\}$ ist hier von besonderem Interesse.

Abbildung 4.1 zeigt einen typischen Verlauf von $f_1^{a'}$ für verschiedene Werte von a . Hier ist zu beobachten, dass die Ableitung für den Abzweigepunkt b_0 zunächst in Eins startet und dann stets oberhalb von Eins bleibt. Für Werte a zwischen b_0 und a_1 bleibt die Kurve vollständig oberhalb von Eins. Für die optimale Wahl a_1 berührt die Kurve gerade die Eins. Für Werte zwischen a_1 und \bar{a}_1 fällt die Kurve unter die Eins. Im letztmöglichen Abzweigepunkt \bar{a}_1 startet die Kurve in Eins. Diese Beobachtungen werden im Folgenden analytisch untersucht.

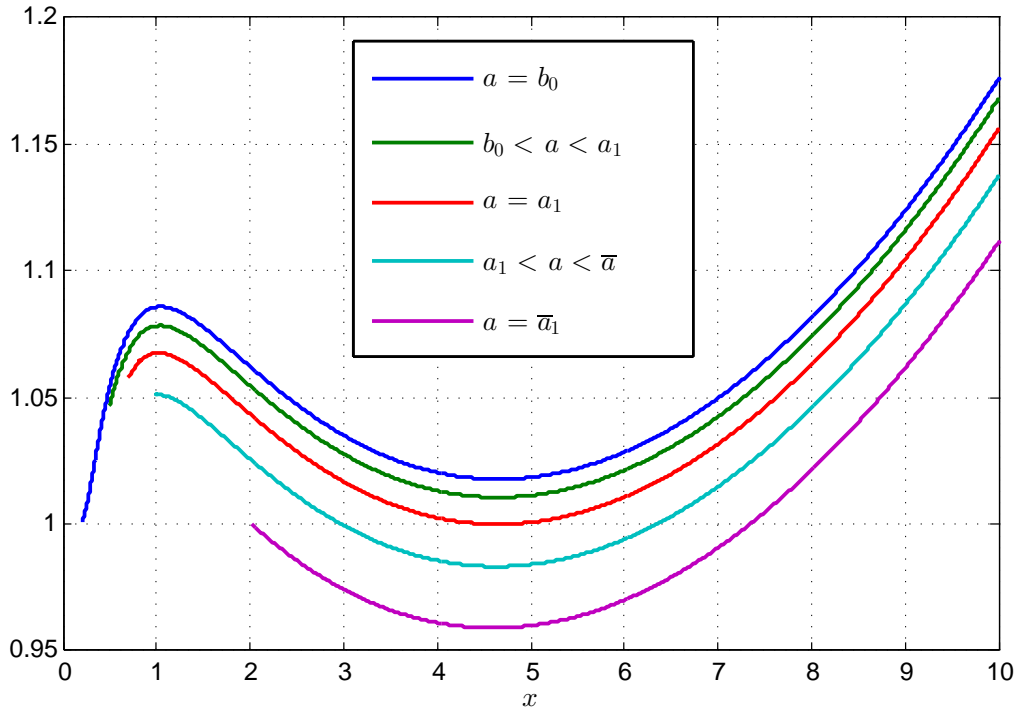


Abbildung 4.1: Typischer Verlauf von $f_1^{a'}$ für verschiedene Abzweigepunkte a

Die Grafik zeigt die numerische Auswertung von $f_1^{a'}$ für verschiedene a . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \gamma \text{Erl}(\beta_1, 2) + (1 - \gamma) \text{Erl}(\beta_2, 2)$ mit $\beta_1 = \frac{7}{4}$, $\beta_2 = \frac{35}{2}$ und $\gamma = \frac{4}{5}$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$, $\delta = 1\%$ und $\rho = 7\%$. Man erhält zunächst $b_0 = 0$, vgl. hierzu auch die Abbildungen 4.2, 5.3 und 5.7.

Hanspeter Schmidli (2008, Seite 92) schreibt bereits, dass für a kleiner als a_{m+1} die Ableitung $f_{m+1}^{a'}$ die Eins nicht mehr erreicht. Für a größer als a_{m+1} wird ein Wert kleiner als Eins angenommen.

Die etwaige Wahl des Infimums für a_{m+1} in (3.5) gewährleistet zusammen mit (3.10) in jedem Fall die Relation

$$f_{m+1}^{a'}(x) > 1 \text{ für alle } a \in (b_m, a_{m+1}) \text{ und } x \geq a. \quad (4.1)$$

Der erste Teil der Aussage von Schmidli (2008), dass die Ableitung für zu kleine Werte von a die Eins nicht mehr erreicht, ist somit bewiesen. Der zweite Teil, das Erreichen der Ableitung eines Werts kleiner als Eins für zu großes a , wird im Folgenden überprüft und schließlich mit (4.12) konkretisiert und bestätigt. Dabei wird die Kurzschreibweise $f_{m+1} = f_{m+1}^{a_{m+1}}$ verwendet.

Aufbauend auf den erwiesenen Relationen werden die optimalen Bandgrenzen genauer

eingegrenzt. Dies erfolgt zum einen ex ante anhand der Schadenhöhenverteilung. Zum anderen können in jeder Schleife des Algorithmus 3.7 die zu betrachtenden Parameter weiter eingegrenzt werden. Abschließend kann die Menge aller optimalen Strategien charakterisiert werden.

4.1 Auswirkungen der unteren Bandgrenze

Der Übergang von der Linearität zur Dynamik der *IDG*

Im Abzweigepunkt a_{m+1} ist zumeist eine Ableitung größer Eins zu beobachten, d.h. es gilt $f'_{m+1}(a_{m+1}+) > 1$. Somit entsteht ein Knick im Übergang von der Linearität zu der Dynamik der Integro-Differentialgleichung. In sämtlichen Beispielen der vorliegenden Arbeit ist dies auch der Fall. Ohne weitere Einschränkung ist dies jedoch nicht zu gewährleisten. So ist es denkbar, dass $\Lambda V_m(a_{m+1}) = 0$ und somit $f'_{m+1}(a_{m+1}+) = 1$ gilt. Es ist ebenso denkbar, dass die Ableitung auf einem anschließenden Intervall die Eins nicht verlässt. Die im Folgenden hergeleiteten Aussagen, welche größtenteils auf Ungleichungen basieren, können unter Ausschluss dieser Spezialfälle zumeist verstärkt werden. Die konkreten Bedingungen werden jeweils gesondert ausgewiesen. Dazu sei

$$\begin{aligned} \zeta_{m+1} &= \max \left\{ b_m, \max \{ x \geq a_{m+1} : \Lambda V_m(u) = 0 \text{ für alle } u \in [a_{m+1}, x] \} \right\} \\ &= \begin{cases} b_m, & \Lambda V_m(a_{m+1}) < 0, \\ \max \{ x \geq a_{m+1} : \Lambda V_m(u) = 0 \text{ für alle } u \in [a_{m+1}, x] \}, & \Lambda V_m(a_{m+1}) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $\zeta_{m+1} \geq a_{m+1}$ bedeutet dies, dass V_m auf $[a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$ linear ist und gleichzeitig die Integro-Differentialgleichung erfüllt. In der *HJB* wird somit in beiden Termen das Maximum – also gerade der Wert Null – angenommen. Somit gilt $f_{m+1}(x) = V_m(x)$ für alle $x \leq \zeta_{m+1}$. Man kann insofern nicht von einem Abknicken in a_{m+1} sprechen. Auch in ζ_{m+1} ist in diesem Fall kein Knick vorhanden. Die Differenzierbarkeit von f_{m+1} für $x > a_{m+1}$ gewährleistet einen glatten Übergang in ζ_{m+1} . Des Weiteren erhält man

$$f_{m+1}^a = f_{m+1}, \quad \text{für alle } a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]. \quad (4.2)$$

Aus der Definition von $\bar{a}_{m+1} < \infty$ folgt $\zeta_{m+1} \leq \bar{a}_{m+1}$. In der Regel wird $\Lambda V_m(a_{m+1}) < 0$ gelten, so dass $\zeta_{m+1} = b_m$ folgt.

Es kann nun das Verhalten für die Abzweigepunkte oberhalb von a_{m+1} untersucht werden, d.h. es sei $a_{m+1} < a \leq \bar{a}_{m+1}$. Unter Verwendung von $\Lambda f_{m+1}^a(a+) = \Lambda f_{m+1}(a) = 0$

erhält man somit

$$\begin{aligned}
& f_{m+1}'(a) - f_{m+1}^a'(a+) \\
&= \frac{\Lambda f_{m+1}(a)}{c} + \frac{\lambda + \delta}{c} f_{m+1}(a) - \frac{\lambda}{c} \int_0^a f_{m+1}(a-y) dP^Y(y) \\
&\quad - \left(\frac{\Lambda f_{m+1}^a(a+)}{c} + \frac{\lambda + \delta}{c} f_{m+1}^a(a) - \frac{\lambda}{c} \int_0^a f_{m+1}^a(a-y) dP^Y(y) \right) \\
&= \frac{\lambda + \delta}{c} (f_{m+1}(a) - f_{m+1}^a(a)) - \frac{\lambda}{c} \int_0^a (f_{m+1}(a-y) - f_{m+1}^a(a-y)) dP^Y(y) \\
&\geq \left(\frac{\lambda + \delta}{c} - \frac{\lambda}{c} P^Y(a - a_{m+1}) \right) (f_{m+1}(a) - f_{m+1}^a(a)) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung resultiert daraus, dass für $x \in (a_{m+1}, a)$ der Abstand zwischen $f_{m+1}(x)$ und $f_{m+1}^a(x)$ monoton steigend ist. Dies basiert wiederum darauf, dass $f'_{m+1}(x) \geq 1 = V'_m(x) = f_{m+1}^a'(x)$ für alle $x \in (a_{m+1}, a)$ gilt. Die Gleichheit $f_{m+1}'(a) = f_{m+1}^a'(a+)$ gilt genau dann, wenn $\zeta_{m+1} \geq a$ (d.h. $\Lambda V_m(x) = 0$ für alle $x \in [a_{m+1}, a]$) gilt. Dann gilt also bereits $V_m|_{x \leq a} = f_{m+1}|_{x \leq a} = f_{m+1}^a|_{x \leq a}$. Andernfalls ist die Ungleichung streng. Insgesamt erhält man demnach

$$f_{m+1}'(a) = f_{m+1}^a'(a+), \quad \text{falls } a \in (a_{m+1}, \min\{\zeta_{m+1}, \bar{a}_{m+1}\}], \quad (4.3)$$

$$f_{m+1}'(a) > f_{m+1}^a'(a+), \quad \text{falls } a \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}]. \quad (4.4)$$

Aus $\Lambda V_m(a) \leq 0$ erhält man weiter

$$\begin{aligned}
0 &= \Lambda f_{m+1}^a(a+) \\
&= c f_{m+1}^a'(a+) - (\lambda + \delta) V_m(a) + \lambda \int_0^a V_m(a-y) dP^Y(y) \\
&= c (f_{m+1}^a'(a+) - 1) + \Lambda(V_m)(a) \\
&\leq c (f_{m+1}^a'(a+) - 1), \quad \text{für } a_{m+1} < a < \bar{a}_{m+1}.
\end{aligned}$$

Dabei gilt die Gleichheit $f_{m+1}^a'(a+) = 1$ genau dann, wenn $\Lambda V_m(a) = 0$ gilt. Andernfalls gilt die strenge Ungleichung. Somit gilt für alle $a \in (a_{m+1}, \bar{a}_{m+1}]$

$$f_{m+1}^a'(a+) = 1, \quad \text{falls } \Lambda V_m(a) = 0, \quad (4.5)$$

$$f_{m+1}^a'(a+) > 1, \quad \text{falls } \Lambda V_m(a) < 0. \quad (4.6)$$

Fasst man die Ergebnisse (4.3),(4.4),(4.5) und (4.6) zusammen, erhält man

$$\begin{aligned} f_{m+1}'(a) &= f_{m+1}^a'(a) = 1, & \text{falls } a \in (a_{m+1}, \min\{\zeta_{m+1}, \bar{a}_{m+1}\}], \\ f_{m+1}'(a) &> f_{m+1}^a'(a) = 1, & \text{falls } a \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}] \text{ und } \Lambda V_m(a) = 0, \\ f_{m+1}'(a) &> f_{m+1}^a'(a) > 1, & \text{falls } a \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}] \text{ und } \Lambda V_m(a) < 0. \end{aligned}$$

Außerdem erhält man eine äquivalente Definition für ζ_{m+1}

$$\begin{aligned} \zeta_{m+1} &= \max\left\{b_m, \max\{x \geq a_{m+1} : f_{m+1}'(u) = 1 \text{ für alle } u \in [a_{m+1}, x]\}\right\} \\ &= \begin{cases} b_m, & \text{falls } f_{m+1}'(a_{m+1}) > 1, \\ \max\{x \geq a_{m+1} : f_{m+1}'(u) = 1 \text{ für alle } u \in [a_{m+1}, x]\}, & \text{falls } f_{m+1}'(a_{m+1}) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Das Auseinanderdriften von f_{m+1} und f_{m+1}^a

Es sei weiterhin $a_{m+1} < a \leq \bar{a}_{m+1}$. Im Folgenden wird überprüft, ob die Ableitung $f_{m+1}'(x)$ auch für $x > a$ die Ableitung $f_{m+1}^a'(x)$ nicht unterschreitet. Dazu wird zunächst die Annahme getroffen, dass

$$\kappa = \inf\{x > a : f_{m+1}'(x) < f_{m+1}^a'(x)\} < \infty$$

sei. Zunächst folgt $0 \leq f_{m+1}(y) - f_{m+1}^a(y) \leq f_{m+1}(\kappa) - f_{m+1}^a(\kappa)$ für alle $a_{m+1} < y \leq \kappa$. Aus $f_{m+1}'(\kappa) = f_{m+1}^a'(\kappa)$ und $\Lambda f_{m+1}(\kappa) = \Lambda f_{m+1}^a(\kappa) = 0$ erhält man analog zu oben

$$\begin{aligned} 0 &= f_{m+1}'(\kappa) - f_{m+1}^a'(\kappa) \\ &\geq \frac{\lambda + \delta}{c} (f_{m+1}(\kappa) - f_{m+1}^a(\kappa)) - \frac{\lambda}{c} (f_{m+1}(\kappa) - f_{m+1}^a(\kappa)) P^Y(\kappa - a_{m+1}) \\ &= \left(\frac{\lambda + \delta}{c} - \frac{\lambda}{c} P^Y(\kappa - a_{m+1}) \right) (f_{m+1}(\kappa) - f_{m+1}^a(\kappa)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungskette $0 = f_{m+1}'(\kappa) - f_{m+1}^a'(\kappa) = 0$ gilt nur für den Fall $f_{m+1} \equiv f_{m+1}^a$ (was wiederum äquivalent zu $\zeta_{m+1} \geq a$, also $\Lambda V_m(x) = 0$ für alle $x \in [a_{m+1}, a]$ ist) entgegen der Annahme $\kappa < \infty$ sowie der hier betrachteten Parameter $a \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}]$. Folglich führt die strenge Ungleichung $0 = f_{m+1}'(\kappa) - f_{m+1}^a'(\kappa) > 0$ zu einem Widerspruch zur Annahme $\kappa < \infty$. Es gilt also

$$f_{m+1}' \geq f_{m+1}^a'. \quad (4.7)$$

Aus $\zeta_{m+1} < a$ und (4.4) folgt weiter

$$0 \leq f_{m+1}(a) - f_{m+1}^a(a) < f_{m+1}(y) - f_{m+1}^a(y) \leq f_{m+1}(x) - f_{m+1}^a(x), \quad \text{für } \zeta_{m+1} < a < y \leq x,$$

und hieraus wiederum

$$f_{m+1}'(x) - f_{m+1}^a'(x) \geq \left(\frac{\lambda + \delta}{c} - \frac{\lambda}{c} P^Y(x - a_{m+1}) \right) (f_{m+1}(x) - f_{m+1}^a(x)) > 0.$$

Somit driften f_{m+1} und f_{m+1}^a aufgrund der durch die Integro-Differentialgleichung induzierten Dynamik immer weiter auseinander.

$$f_{m+1}'(x) > f_{m+1}^a'(x), \quad \text{für } x \geq a \text{ und } a \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}]. \quad (4.8)$$

4.2 Lokalisierung der optimalen oberen Bandgrenze

Das Integro-Differential ΛV_m auf \mathcal{E}_{m+1}

Im Folgenden wird untersucht, wie der Bereich für die nächste obere Bandgrenze anhand des Integro-Differentials ΛV_m des aktuellen Kandidaten eingeschränkt werden kann. Dazu sei $b \in \mathcal{E}_{m+1}$, d.h. $f'_{m+1}(b) = 1$. Durch Subtraktion der Integro-Differentiale $\Lambda f_{m+1}(b) = 0$ und $\Lambda V_m(b)$ erhält man in diesem Fall

$$\begin{aligned} -\Lambda V_m(b) &= \Lambda f_{m+1}(b) - \Lambda V_m(b) \\ &= -(\lambda + \delta)(f_{m+1}(b) - V_m(b)) \\ &\quad + \lambda \int_{a_{m+1}}^b (f_{m+1}(y) - V_m(y)) p(b-y) d(y) \\ &\leq -(\lambda + \delta - \lambda P^Y(b - a_{m+1}))(f_{m+1}(b) - V_m(b)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Für $b > \max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}$ und somit $f_{m+1}(b) > V_m(b)$ gilt die echte Ungleichung. Entsprechend kann f'_{m+1} die Eins insbesondere zwischen $\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}$ und \bar{a}_{m+1} nicht annehmen, da hier ΛV_m nichtpositiv ist.

$$f'_{m+1}(x) > 1, \quad \text{für alle } x \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}]. \quad (4.9)$$

Man erhält

$$\Lambda V_m(b) > 0 \quad \text{für alle } b \in \mathcal{E}_{m+1} \setminus [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]. \quad (4.10)$$

Es sei $\Theta_{m+1} = \{x \geq 0 : \Lambda V_m(x) > 0\}$. Dann gilt also

$$b_{m+1} \in \mathcal{E}_{m+1} \setminus [a_{m+1}, \zeta_{m+1}] \subset \Theta_{m+1}. \quad (4.11)$$

Hieraus lässt sich insbesondere die zweite Aussage von Schmidli (2008) bis auf die Spezialfälle $\zeta_{m+1} \geq a_{m+1}$ herleiten. Mit (4.8) und $b_{m+1} > \bar{a}_{m+1}$ folgt nämlich

$$1 = f_{m+1}'(b_{m+1}) > f_{m+1}^a'(b_{m+1}), \quad \text{für alle } a \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}]. \quad (4.12)$$

Die Ableitung fällt also in b_{m+1} unter die Eins. Folglich ist es nicht notwendig, für jeden möglichen Abzweigepunkt $a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}]$ das Minimum der Ableitung zu bestimmen, um diese insgesamt zu vergleichen. Sobald die Ableitung f_{m+1}^a' in nur einem Punkt einen Wert kleiner als Eins annimmt, erhält man die Einschränkung $a_{m+1} < a$. Dies ist insgesamt ein effizientes Ausschlusskriterium für numerische Berechnungen.

Man kann sogar die Suche nach dem Minimum von $W^{(\delta)'}$ und damit von b_0 bereits anhand des Integro-Differentials ΛV^{π^A} zum Wert der Alles-muss-raus-Strategie einschränken. Dazu seien

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= \inf \{x \geq 0 : \Lambda V^{\pi^A}(u) > 0\}, \\ \zeta_0 &= \max \{x \geq 0 : \Lambda V^{\pi^A}(u) = 0 \text{ für alle } u \in [0, x]\}, \\ \text{und } \mathcal{E}_0 &= \left\{x \geq 0 : W^{(\delta)'}(x) = \min_{y \geq 0} W^{(\delta)'}(y)\right\}. \end{aligned}$$

Für $b \in \mathcal{E}_0$ erhält man

$$\begin{aligned} -\Lambda V^{\pi^A}(b) &= \Lambda V_0(b) - \Lambda V^{\pi^A}(b) \\ &= c(V_0'(b) - 1) - (\lambda + \delta) (V_0(b) - V^{\pi^A}(b)) \\ &\quad + \lambda \left(\int_0^b (V_0(y) - V^{\pi^A}(y)) p(b-y) dy \right) \\ &\leq -(\lambda + \delta - \lambda P^Y(b)) (V_0(b) - V^{\pi^A}(b)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Falls $\Lambda V^{\pi^A}(b) = 0$ gilt, so gilt demnach $V_0(b) = V^{\pi^A}(b)$. Aus $V_0' \geq 1$ folgt dann $V_0(x) = V^{\pi^A}(x)$ für $x \leq b$. Somit erhält man $\Lambda V^{\pi^A}(x) = \Lambda V_0(x) = 0$ für $x \leq b$ und hieraus folgt $\zeta_0 \geq b$. Die Gleichheit $\Lambda V^{\pi^A}(b) = 0$ ist also genau dann gegeben, wenn $\zeta_0 \geq b$ gilt. Daraus folgt

$$W^{(\delta)'}(x) > W^{(\delta)'}(b_0), \quad \text{für alle } x \in (\zeta_0, \bar{a}_0] \quad (4.13)$$

und

$$\Lambda V^{\pi^A}(b) > 0, \quad \text{für alle } b \in \mathcal{E}_0 \setminus [0, \zeta_0]. \quad (4.14)$$

Es sei $\Theta_0 = \{0\} \cup \{x \geq 0 : \Lambda V^{\pi^A}(x) > 0\}$. Dann gilt also

$$b_0 \in \mathcal{E}_0 \setminus [0, \zeta_0] \subset \Theta_0. \quad (4.15)$$

Die Ableitung $\frac{d}{dx}\Lambda V_m(x)$ des Integro-Differentials auf \mathcal{E}_{m+1}

Sofern f_{m+1} für $x > a_{m+1}$ zweimal stetig differenzierbar ist, lässt sich die Menge \mathcal{E}_{m+1} anhand von der Ableitung des Integro-Differentials noch genauer charakterisieren. Für $x > a_{m+1}$ gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\Lambda V_m(x) &= \frac{d}{dx}(\Lambda f_{m+1}(x) - \Lambda V_m(x)) \\ &= cf''_{m+1}(x) - (\lambda + \delta)(f'_{m+1}(x) - 1) \\ &\quad + \lambda \frac{d}{dx} \left(\int_0^x (f_{m+1}(x-y) - V_m(x-y)) p(y) dy \right) \\ &= cf''_{m+1}(x) - (\lambda + \delta)(f'_{m+1}(x) - 1) \\ &\quad + \lambda \int_0^x (f'_{m+1}(x-y) - V'_m(x-y)) p(y) dy \\ &\geq cf''_{m+1}(x) - (\lambda + \delta)(f'_{m+1}(x) - 1). \end{aligned}$$

Für $b \in \mathcal{E}_{m+1}$ gilt dann $f''_{m+1}(b) = 0$ und $f'_{m+1}(b) = 1$. Hieraus folgt unmittelbar

$$\left. \frac{d}{dx}\Lambda V_m(x) \right|_{x=b} \leq 0, \quad \text{für alle } b \in \mathcal{E}_{m+1}. \quad (4.16)$$

Es sei $\Delta\Theta_{m+1} = \{x \geq 0 : \frac{d}{dx}\Lambda V_m(x) \leq 0\}$. Dann gilt demnach

$$\mathcal{E}_{m+1} \subset \Delta\Theta_{m+1}. \quad (4.17)$$

Dies gilt wie folgt bereits für $b \in \mathcal{E}_0$, wenn $W^{(\delta)}$ und somit V_0 zweimal stetig differenzierbar sind. Für $x > 0$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\Lambda V^{\pi^A}(x) &= \frac{d}{dx} \left(\left(W^{(\delta)'}(b_0) \right)^{-1} \Lambda W^{(\delta)}(x) - \Lambda V^{\pi^A}(x) \right) \\ &= c \left(W^{(\delta)'}(b_0) \right)^{-1} W^{(\delta)''}(x) - (\lambda + \delta) \left(\left(W^{(\delta)'}(b_0) \right)^{-1} W^{(\delta)'}(x) - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \left((W^{(\delta)'}(b_0))^{-1} W^{(\delta)}(x-y) - V^{\pi^A}(x-y) \right) p(y) dy \right) \\
& = c \left(W^{(\delta)'}(b_0) \right)^{-1} W^{(\delta)''}(x) - (\lambda + \delta) \left((W^{(\delta)'}(b_0))^{-1} W^{(\delta)'}(x) - 1 \right) \\
& \quad + \lambda \left(V_0(0) - V^{\pi^A}(0) \right) p(x) \\
& \quad + \lambda \int_0^x \left((W^{(\delta)'}(b_0))^{-1} W^{(\delta)}(x-y) - V^{\pi^A}(x-y) \right) p(y) dy \\
& \geq c \left(W^{(\delta)'}(b_0) \right)^{-1} W^{(\delta)''}(x) - (\lambda + \delta) \left((W^{(\delta)'}(b_0))^{-1} W^{(\delta)'}(x) - 1 \right).
\end{aligned}$$

Für $0 \neq b \in \mathcal{E}_0$ erhält man daher unter der Verwendung $W^{(\delta)''}(b) = 0$ und $W^{(\delta)'}(b) = W^{(\delta)'}(b_0)$

$$\left. \frac{d}{dx} \Lambda V^{\pi^A}(x) \right|_{x=b} \leq 0, \text{ für alle } 0 \neq b \in \mathcal{E}_0.$$

Mit der Definition $\Delta\Theta_0 = \{0\} \cup \{x \geq 0 : \frac{d}{dx} \Lambda V^{\pi^A}(x) \leq 0\}$ erhält man also

$$\mathcal{E}_0 \subset \Delta\Theta_0. \quad (4.18)$$

In Abschnitt 5.4 werden die Ergebnisse anhand entsprechender Abbildungen illustriert.

4.3 Ex ante Lokalisierung aller optimalen oberen Bandgrenzen

Veränderung des Integro-Differentials von $m \leftrightarrow m + 1$

Im Folgenden wird die Veränderung des Integro-Differentials von V_{m+1} im Vergleich zu V_m analysiert. Für $x \geq b_{m+1}$ gilt $V'_{m+1}(x) = V'_m(x) = 1$ und man erhält

$$\begin{aligned}
& \Lambda V_{m+1}(x) - \Lambda V_m(x) \\
& = -(\lambda + \delta)(V_{m+1}(x) - V_m(x)) + \lambda \int_{a_{m+1}}^x (V_{m+1}(y) - V_m(y)) p(x-y) dy \\
& \leq -(\lambda + \delta - \lambda P^Y(x - a_{m+1})) (V_{m+1}(x) - V_m(x)) \\
& < 0.
\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\Lambda V_{m+1}(x) < \Lambda V_m(x), \quad x \geq b_{m+1}$$

und

$$\{x \geq b_{m+1} : \Lambda V_{m+1}(x) > 0\} \not\subseteq \{x \geq b_{m+1} : \Lambda V_m(x) > 0\}.$$

Somit erfüllt V_{m+1} die *HJB* mindestens bis \bar{a}_{m+1} . Falls $\bar{a}_{m+2} < \infty$ gilt, so ist gemäß (4.10) der potentielle Bereich für b_{m+2} durch $\{x \geq b_{m+1} : \Lambda V_{m+1}(x) > 0\}$ eingegrenzt, usw. Dies gilt bereits, wenn man die Integro-Differentiale von V_0 und dem Wert der Alles-muss-raus-Strategie V^{π^A} vergleicht. Für $x \geq b_0$ gilt nun

$$\begin{aligned} -\Lambda V^{\pi^A}(x) &= \Lambda V_0(x) - \Lambda V^{\pi^A}(x) \\ &= -(\lambda + \delta)(V_0(x) - V^{\pi^A}(x)) + \lambda \int_0^x (V_0(y) - V^{\pi^A}(y))p(x-y)dy \\ &\leq -(\lambda + \delta - \lambda P^Y(x))(V_0(b_0) - V^{\pi^A}(b_0)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt nur für den Fall $\zeta_0 = b_0$ und somit $V^{\pi^A} = V_0$. Andernfalls gilt $\Lambda V^{\pi^A}(b_0) > 0$. Für das Integro-Differential zu V^{π^A} erhält man weiter die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Lambda V^{\pi^A}(x) &= c - (\lambda + \delta)\left(x + \frac{c}{\lambda + \delta}\right) + \lambda \int_0^x \left(x - y + \frac{c}{\lambda + \delta}\right)dP^Y(y) \\ &= -(\lambda + \delta)x + \lambda\left(x + \frac{c}{\lambda + \delta}\right)P^Y(x) - \lambda \int_0^x ydP^Y(y) \quad (4.19) \\ &\leq -(\lambda + \delta)x + \lambda\left(x + \frac{c}{\lambda + \delta}\right) \stackrel{!}{\leq} 0. \end{aligned}$$

Somit gilt $\Lambda V^{\pi^A}(x) \leq 0$ für alle $x \geq \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)}$ und es folgt $\zeta_0 \leq b_0 \leq \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)}$. Dann ist $(\Theta_m)_{m=0,1,\dots,\bar{m}}$ eine antitone Mengenfolge

$$\left[0, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)}\right) \supset \Theta_0 \supsetneq \Theta_1 \supsetneq \dots \supsetneq \Theta_{\bar{m}}. \quad (4.20)$$

Insbesondere erhält man hieraus eine alternative Herleitung von $(\frac{\lambda c}{\lambda + \delta}, \infty) \subset \mathcal{B}_\infty$. (4.19) lässt sich außerdem wie folgt darstellen

$$\Lambda V^{\pi^A}(x) = -\delta x + \frac{\lambda c}{\lambda + \delta}P^Y(x) - \lambda\mu H^Y(x),$$

wobei $\mu = E[Y]$ die mittlere Schadenhöhe und $H^Y(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x (1 - P^Y(y)) dy$ die Leiterhöhenverteilung sei. Somit erhält man die folgende Darstellung

$$\Theta_0 = \{0\} \cup \left\{ 0 < x < \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)} P^Y(x) - \frac{\lambda \mu}{\delta} H^Y(x) \right\}. \quad (4.21)$$

Dieses Ergebnis ist insofern wertvoll, als auch ohne Lösen der Integro-Differentialgleichung vorab der Bereich für alle denkbaren oberen Bandgrenzen durch Θ_0 eingeschränkt werden kann.

Veränderung der Ableitung des Integro-Differentials von $m \leftrightarrow m + 1$

Analog lässt sich die Veränderung der Ableitung des Integro-Differentials untersuchen. Für $x > b_{m+1}$ erhält man unter Verwendung von $V'_{m+1}(x) = 1$ und $V''_{m+1}(x) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\Lambda V_{m+1}(x) - \Lambda V_m(x)) &= \lambda \frac{d}{dx} \left(\int_0^x (V_{m+1}(x-y) - V_m(x-y)) p(y) dy \right) \\ &= \lambda \int_0^x (V'_{m+1}(x-y) - V'_m(x-y)) p(y) dy \\ &> 0. \end{aligned}$$

Wie oben gilt dies auch für den Übergang von V^{π^A} zu V_0 . Für $x \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\Lambda V_0(x) - \Lambda V^{\pi^A}(x)) &= \lambda \frac{d}{dx} \left(\int_0^x (V_0(x-y) - V^{\pi^A}(x-y)) p(y) dy \right) \\ &= \lambda (V_0(0) - V^{\pi^A}(0)) p(x) + \lambda \int_0^x (V'_0(x-y) - 1) p(y) dy \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Somit ist $(\Delta \Theta_m)_{m=0,1,\dots,\bar{m}}$ eine antitone Mengenfolge

$$\Delta \Theta_0 \supset \Delta \Theta_1 \supsetneq \dots \supsetneq \Delta \Theta_{\bar{m}}. \quad (4.22)$$

Für $\Delta \Theta_0$ erhält man aus

$$\frac{d}{dx} \Lambda V^{\pi^A}(x) = -(\lambda + \delta) + \frac{\lambda c}{\lambda + \delta} p(x) + \lambda P^Y(x)$$

die Darstellung

$$\Delta\Theta_0 = \{0\} \cup \left\{ x \geq 0 : \frac{\lambda c}{\lambda + \delta} p(x) \leq \lambda + \delta - \lambda P^Y(x) \right\}.$$

Sofern also f_j für $x > a_j$ zweimal stetig differenzierbar ist für alle $j = m, \dots, \bar{m}$, so gilt gemäß (4.16) und (4.18)

$$b_m \in \Delta\Theta_m, \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, \bar{m}.$$

Eine hinreichende Voraussetzung hierzu ist gegeben, wenn P^Y stetig differenzierbar ist und die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt. Kombiniert mit den obigen Ergebnissen erhält man

$$b_m \in \Theta_m \cap \Delta\Theta_m, \quad \text{für } m = 0, 1, \dots, \bar{m}. \quad (4.23)$$

Somit gelingt wiederum ohne Lösen der Integro-Differentialgleichung eine weitreichende Einschränkung für alle denkbaren oberen Bandgrenzen durch

$$\begin{aligned} & \Theta_0 \cap \Delta\Theta_0 \\ &= \{0\} \cup \left\{ x \geq 0 : x < \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)} P^Y(x) - \frac{\lambda \mu}{\delta} H^Y(x) \text{ und } \frac{\lambda c}{\lambda + \delta} p(x) \leq \lambda + \delta - \lambda P^Y(x) \right\} \\ &\subset \left[0, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Abbildung 4.2 stellt exemplarisch die Veränderung des Integro-Differentials dar.

4.4 Potentielle optimale untere Bandgrenzen

Anhand der bisherigen Ergebnisse lässt sich die Zusammensetzung der folgenden Menge beschreiben

$$\mathcal{D}_{m+1} = \left\{ a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}] : \inf_{y>a} f_{m+1}^a'(y) = 1 \right\}.$$

- Für $a \in (b_m, a_{m+1})$ folgt aus (4.1) $f_{m+1}^a'(x) > 1$ für alle $x \geq a$. Somit ist $a \notin \mathcal{D}_{m+1}$.
- Für $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$ gilt gemäß (4.2) $f_{m+1} = f_{m+1}^a$. Aus $b_{m+1} \geq \bar{a}_{m+1} \geq \zeta_{m+1} \geq a$ folgt somit $a \in \mathcal{D}_{m+1}$.
- Für $a \in (\max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}, \bar{a}_{m+1}]$ folgt aus (4.12) $f_{m+1}^a'(b_{m+1}) < 1$. Somit gilt $a \notin \mathcal{D}_{m+1}$.

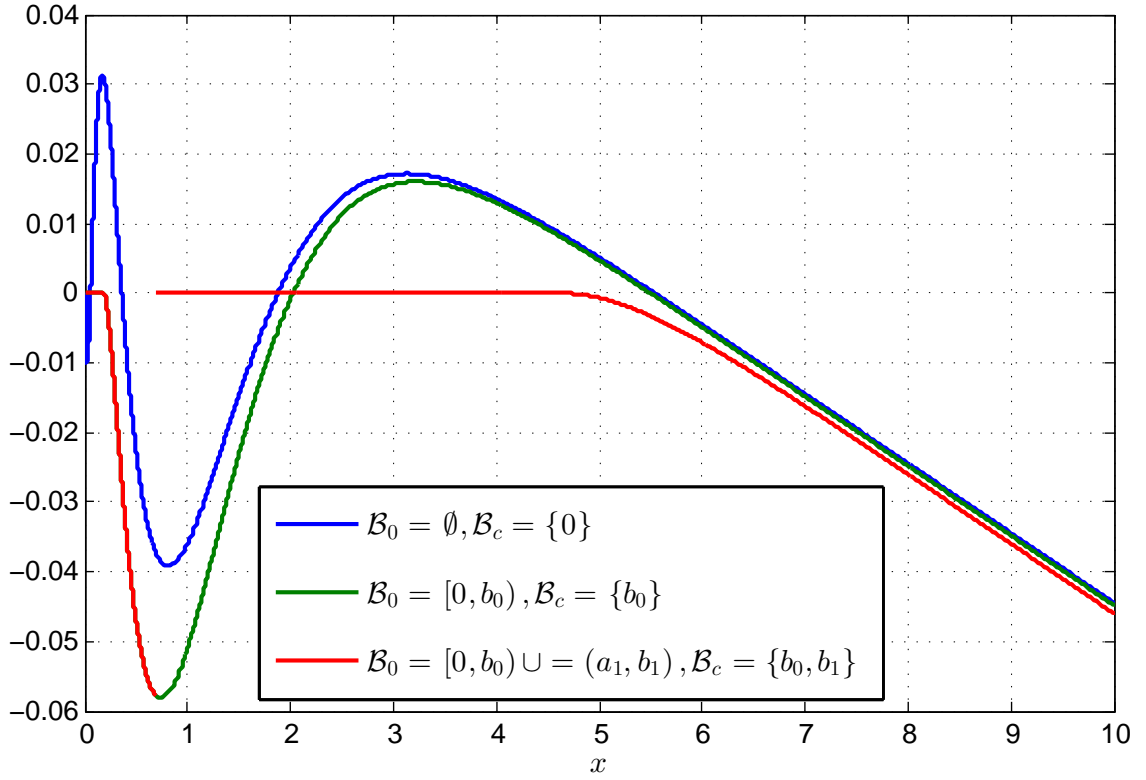


Abbildung 4.2: Typische Veränderung des Integro-Differentials von $m \leftrightarrow m + 1$

Die Grafik zeigt die numerische Auswertung von ΔV^π für die Alles-muss-raus-Strategie, die Barriere in b_0 und die optimale Zweibandstrategie. Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \gamma \text{Erl}(\beta_1, 2) + (1 - \gamma) \text{Erl}(\beta_2, 2)$ mit $\beta_1 = \frac{7}{4}$, $\beta_2 = \frac{35}{2}$ und $\gamma = \frac{4}{5}$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$, $\delta = 1\%$ und $\rho = 7\%$. Vgl. hierzu auch die Abbildungen 4.1, 5.3 und 5.7.

Insgesamt lässt sich folgern, dass die Menge \mathcal{D}_{m+1} schlicht durch folgendes Intervall gegeben ist

$$\mathcal{D}_{m+1} = \left\{ a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}] : \inf_{y>a} f_{m+1}^a{}'(y) = 1 \right\} = \{a_{m+1}\} \cup [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]. \quad (4.25)$$

In den betrachteten Beispielen gilt stets $\zeta_{m+1} = b_m$, so dass die Menge demnach nur aus $\{a_{m+1}\}$ besteht. In den Abbildungen 4.3 und 4.4 wird die Auswirkung der Ergebnisse auf die zu untersuchenden Bereiche zur Bestimmung von a_{m+1} und b_{m+1} separat für die Fälle $\zeta_{m+1} = b_m$ bzw. $\zeta_{m+1} \geq a_{m+1}$ veranschaulicht. Die zusätzlichen Einschränkungen (4.11) und (4.23) sind hier nicht zu illustrieren, da diese individuell von den Modellparametern und der Schadenhöhenverteilung abhängen. In Kapitel 5 folgen hierzu konkrete Beispiele.

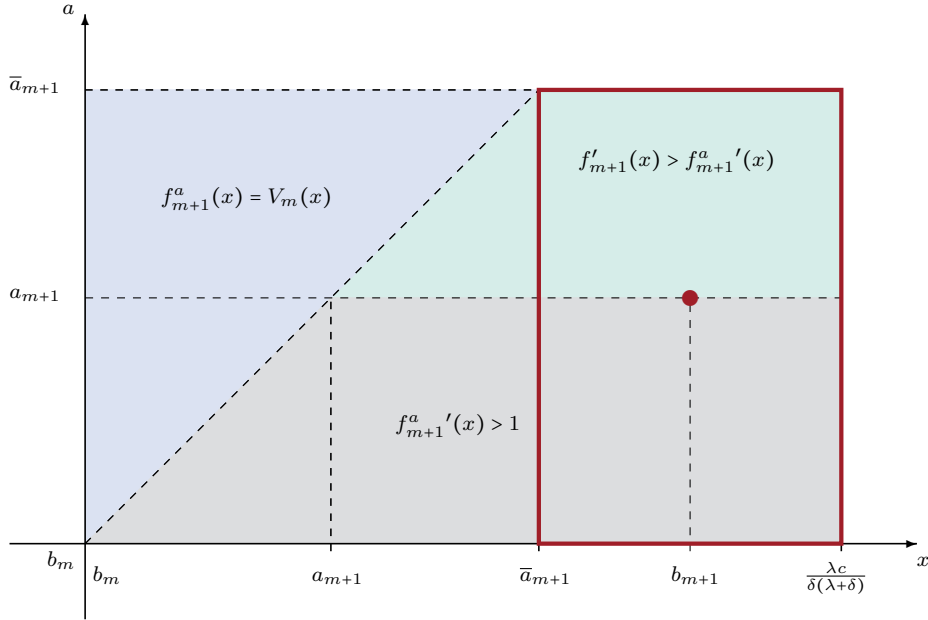


Abbildung 4.3: Die zu untersuchenden Bereiche in Algorithmus 3.7 zur Bestimmung von a_{m+1} und b_{m+1} für den Fall $\zeta_{m+1} = b_m$.

Die Grafik stellt die verschiedenen Bereiche dar, die bei der Suche von a_{m+1} und b_{m+1} eine Rolle spielen. Hier wird der zumeist zu beobachtende Fall $\zeta_{m+1} = b_m$ betrachtet. Auf dem Intervall $(b_m, \bar{a}_{m+1}]$ befindet sich a_{m+1} . Für b_{m+1} ist inzwischen gezeigt, dass man sich auf den Bereich $[\bar{a}_{m+1}, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda+\delta)}]$ beschränken kann. Für jeden Abzweigepunkt $a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}]$ und für $x \leq a$, in Blau hinterlegt, stimmt $f_{m+1}^a(x)$ mit $V_m(x)$ überein. Für alle $a \in (b_m, a_{m+1})$ und $x > a$, in Grau hinterlegt, bleibt die Ableitung $f_{m+1}^a(x)$ oberhalb von der Eins. Für $a > a_{m+1}$ und alle $x > a_{m+1}$, in Grün hinterlegt, bleibt die Ableitung $f'_{m+1}(x)$ stets oberhalb von der Ableitung $f_{m+1}^a(x)$. Für numerische Suchalgorithmen ist es ausreichend, die Ableitung auf dem rot umrandeten Bereich, d.h. für $a \in [b_m, \bar{a}_{m+1}]$ und $x \in [\bar{a}_{m+1}, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda+\delta)}]$ auszuwerten.

4.5 Identifikation aller optimalen Strategien

In diesem Abschnitt soll die Gesamtheit aller optimalen Strategien identifiziert werden. Hierzu wird die Argumentation und entsprechend die Notation aus 3.2 aufgegriffen. Man beachte daher jeweils den Zusammenhang $F_{(a,\pi)}(\cdot - a) = f_{m+1}^a(\cdot)$, für $V^\pi = V_m$ gemäß (3.32). Im Folgenden sei weiterhin angenommen, dass man ausgehend vom m -ten Kandidaten V_m aus Algorithmus 3.7 das nächste Band optimal bestimmt. Diese konkrete Konstruktion ist jedoch keine notwendige Bedingung. Alternativ wäre folgende Annahme möglich.

Es sei π eine Bandstrategie mit Grenzen b_0, a_1, \dots, b_m und den zugehörigen Bereichen $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_c$ und \mathcal{B}_∞ . Es sei angenommen, dass π bis b_m optimal sei, d.h. es gelte $V^\pi|_{x < b_m} = V|_{x < b_m}$. Außerdem sei $\bar{a}_{m+1} = \inf \{x > b_m : \Delta V^\pi(x) > 0\} < \infty$, d.h. V^π erfüllt die HJB nicht. Jede optimale Strategie hat somit mindestens ein weiteres Band (a_{m+1}, b_{m+1}) oberhalb von b_m . Es wird außerdem angenommen, dass $F'_{(b_m, \pi)}(x) > 1$ für $x > 0$ gelte.

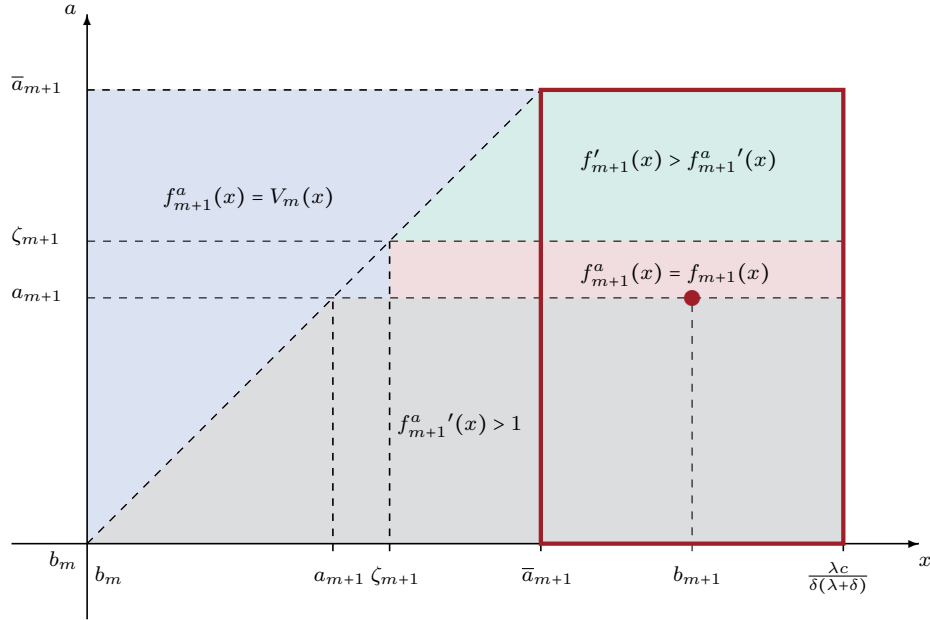


Abbildung 4.4: Die zu untersuchenden Bereiche in Algorithmus 3.7 zur Bestimmung von a_{m+1} und b_{m+1} für den Fall $\zeta_{m+1} \geq a_{m+1}$.

Die Grafik stellt die verschiedenen Bereiche dar, die bei der Suche von a_{m+1} und b_{m+1} eine Rolle spielen. Hier wird der Fall $\zeta_{m+1} \geq a_{m+1}$ betrachtet. Auf dem Intervall $(b_m, \bar{a}_{m+1}]$ befindet sich a_{m+1} . Für b_{m+1} ist inzwischen gezeigt, dass man sich auf den Bereich $[\bar{a}_{m+1}, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda+\delta)}]$ beschränken kann. Für jeden Abzweigepunkt $a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}]$ und für $x \leq a$ stimmt $f_{m+1}^a(x)$ mit $V_m(x)$ überein. Hier gilt dies auch für $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$ und $x \leq \zeta_{m+1}$. Der gesamte Bereich ist in Blau hinterlegt. Betrachtet man nun den rot hinterlegten Bereich, d.h. weiterhin $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$ und $x > \zeta_{m+1}$ so stimmen die Fortsetzungen zwar nicht mehr mit V_m jedoch alle untereinander überein, es gilt also $f_{m+1}^a(x) = f_{m+1}(x)$. Für alle $a \in (b_m, a_{m+1})$ und $x > a$, in Grau hinterlegt, bleibt die Ableitung $f_{m+1}^a(x)$ oberhalb von der Eins. Für $a > \zeta_{m+1}$ und alle $x > \zeta_{m+1}$, in Grün hinterlegt, bleibt die Ableitung $f'_{m+1}(x)$ stets oberhalb der Ableitung $f_{m+1}^a(x)$. Für numerische Suchalgorithmen ist es ausreichend, die Ableitung auf dem rot umrandeten Bereich, d.h. für $a \in [b_m, \bar{a}_{m+1}]$ und $x \in [\bar{a}_{m+1}, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda+\delta)}]$ auszuwerten.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts bestätigen im Nachgang, dass die Einschränkung $F'_{(b_m, \pi)}(x) > 1$ für $x > 0$ zulässig ist.¹ Eine Eindeutigkeit von π, a_{m+1} und b_{m+1} ist an dieser Stelle nicht gewährleistet. Vor allem aber ist die Eindeutigkeit im Folgenden nicht erforderlich. Entsprechend ist es zulässig, nach wie vor $V^\pi = V_m$ für den m -ten Kandidaten im Algorithmus 3.7 zu setzen. Dort ist auch die Einschränkung $F'_{(b_m, \pi)}(x) > 1$ für $x > 0$ erfüllt, da b_m maximal gewählt wurde. Folglich gilt $b_m < a_{m+1} < \bar{a}_{m+1}$ und $a_{m+1} < b_{m+1} < \infty$ gemäß den Eigenschaften einer Bandstrategie (Definition 2.4).

Gemäß Lemma 2.2 und Satz 3.2 ist die Wertfunktion insbesondere in a_{m+1} stetig und die Ableitung ist überall größer gleich Eins. Aus (3.30) folgt demnach $F'_{(a_{m+1}, \pi)}(b_{m+1} - a_{m+1}) = 1$

¹Andernfalls wäre auch $a_{m+1} = b_m$ zu berücksichtigen, vgl. Bemerkung 4.4.

und $F'_{(a_{m+1}, \pi)} \geq 1$. Die bisherige Zuweisung gemäß Algorithmus 3.7 von

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \inf \mathcal{D}_{m+1} = \inf \left\{ a \in (b_m, \bar{a}_{m+1}] : \min_{x>0} F'_{(a, \pi)}(x) = 1 \right\} \\ \text{und} \quad b_{m+1} &= \sup \mathcal{E}_{m+1} = \sup \left\{ b > a_{m+1} : F'_{(a_{m+1}, \pi)}(b - a_{m+1}) = 1 \right\} \end{aligned}$$

findet sich auch bei Avram et al. (2013, S. 16). Im Folgenden wird gezeigt, dass dies zwar eine optimale Wahl von a_{m+1} und b_{m+1} ist, im Allgemeinen jedoch nicht die einzige darstellt.

Gemäß (4.25) gilt $\mathcal{D}_{m+1} = \{a_{m+1}\} \cup [a_{m+1}, \max\{a_{m+1}, \zeta_{m+1}\}]$ mit

$$\zeta_{m+1} = \max \left\{ b_m, \max \{x \geq a_{m+1} : \Lambda V_m(u) = 0 \text{ für alle } u \in [a_{m+1}, x]\} \right\}.$$

Über die Menge \mathcal{E}_{m+1} sind keine solche Einschränkungen zu treffen. Es ist je nach Wahl der Schadenhöhenverteilung denkbar, dass die Menge mehrere Elemente oder Intervalle in beliebiger Kombination aufweist.

Im Folgenden werden notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet, zu denen mehrere optimale Strategien mit gleichem Wert – nämlich V – existieren. Es stellt sich heraus, dass man so auch die bereits von Gerber (1969, S.218f) antizipierten Strategien erhalten kann, bei denen die Menge \mathcal{B}_c^* sogar Intervalle beinhaltet.

Zur besseren Anschaulichkeit wird zunächst angenommen, dass $\mathcal{D}_{m+1} = \{a_{m+1}\}$ gelte und \mathcal{E}_{m+1} endlich viele Elemente habe. Dies lässt sich direkt im Anschluss auf eine beliebige Zusammensetzung von \mathcal{E}_{m+1} erweitern. Zuletzt wird zugelassen, dass $\zeta_{m+1} > a_{m+1}$ und somit $\mathcal{D}_{m+1} = [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$ gilt. Die Sätze 4.1 und 4.5 fassen die Ergebnisse zusammen.

Endlich viele Kandidaten für die nächste obere Bandgrenze

Es seien also $\mathcal{D}_{m+1} = \{a_{m+1}\}$ und $\mathcal{E}_{m+1} = \{b^{(1)}, b^{(2)}, \dots, b^{(L)}\}$ mit $b^{(1)} < b^{(2)} < \dots < b^{(L)}$. Es erscheint zunächst einzig sinnvoll, das größte Element $b_{m+1} = b^{(L)}$ zu wählen. Für jede andere Wahl $b^{(j)}$ für ein $j < L$ würde man auf der Action-Area oberhalb von $b^{(j)}$ auf eine Steigung größer Eins verzichten, da $F'_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1}) > 1$ für alle $x \in (a_{m+1}, \infty) \setminus \mathcal{E}_{m+1}$ gilt. Dies kann in dieser Form nicht optimal sein. Es besteht allerdings noch die Möglichkeit, in $b^{(j)}$ zwar stetig Dividende auszuschütten, aber oberhalb direkt noch ein weiteres Band anzuschließen. Es handelt sich dabei um zusammenfallende Bandgrenzen, wie bereits in Abbildung 3.2 dargestellt. Die Action-Area zieht sich demnach auf den Punkt $b^{(j)}$ zusammen. Dieser Fall muss genauer untersucht werden.

Es sei $\pi^{(j)}$ die Fortsetzung zur Strategie π mit den weiteren Bändern $(a_{m+1}, b^{(j)})$ und

$(b^{(j)}, s)$, wobei $s > b^{(j)}$ noch (optimal) zu wählen ist. Weiter sei $H^{(j)} = F_{(b^{(j)}, \pi^{(j)})}$ die Gerber-Shiu-Funktion zur Straffunktion $w(z) = V^{\pi^{(j)}}(z + b^{(j)})$. Dann gilt

$$V^{\pi^{(j)}}(x) = \frac{1 - H^{(j)'}(s - b^{(j)})}{W^{(\delta)'}(s - b^{(j)})} W^{(\delta)}(x - b^{(j)}) + H^{(j)}(x - b^{(j)}), \quad b^{(j)} < x \leq s.$$

Es wird nun der Zusammenhang zwischen $F_{(a_{m+1}, \pi)}$ und $H^{(j)}$ hergeleitet. $F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1})$ erfüllt insbesondere $F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1}) \Big|_{x < b^{(j)}} = V^{\pi^{(j)}}(x) = H^{(j)}(x - b^{(j)})$ für $x < b^{(j)}$. Weiter gilt $\Lambda F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1}) = 0$ für $x \geq b^{(j)}$. Demnach existiert ein $\eta \in \mathbb{R}$ mit

$$F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1}) = \eta W^{(\delta)}(x - b^{(1)}) + H^{(j)}(x - b^{(j)}), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Mit der Randbedingung $F_{(a_{m+1}, \pi)}(b^{(j)} - a_{m+1}) = V^{\pi^{(j)}}(b^{(j)}) = H^{(j)}(0)$ folgt aber direkt $\eta = 0$ und somit die Identität

$$F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1}) = H^{(j)}(x - b^{(j)}), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Für eine optimale Wahl von s muss $V^{\pi^{(j)}}$ insbesondere in $b^{(j)}$ stetig sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $1 = H^{(j)'}(s - b^{(j)}) = F'_{(a_{m+1}, \pi)}(s - a_{m+1})$ erfüllt ist. Folglich gilt $s = b^{(k)}$ für ein $k \in \{j + 1, \dots, L\}$ und die Werte der Strategien $V^{\pi^{(j)}} = V^{\pi^{(k)}}$ stimmen vollständig überein. Für jede Wahl $k < L$ kann wieder analog argumentiert werden, dass direkt ein weiteres Band anschließen muss. Induktiv lässt sich somit zeigen, dass in jedem $b^{(j)}$ für $j = 1, \dots, L - 1$ ein derartiges Gleichgewicht herrscht, dass man indifferent ist, ob zunächst bis zum etwaigen Erreichen von $b^{(j+1)}$ gespart wird oder ob man direkt stetig Dividende bezahlt.

Darüberhinaus gilt somit in jedem Fall $b_{m+1} = b^{(L)} \in \mathcal{B}_c^*$ für jede optimale Strategie. Des Weiteren kann für eine optimale Strategie in $b^{(L)}$ kein weiteres Band direkt anschließen, da $\{b > b^{(L)} : H^{(L)'}(x - b^{(L)}) = 1\} = \emptyset$ gilt.

Beliebig viele Kandidaten für die nächste obere Bandgrenze

Je nach Wahl der Schadenhöhenverteilung ist es denkbar, dass sogar Intervalle zur Menge \mathcal{E}_{m+1} der potentiellen Kandidaten gehören. Die obigen Überlegungen lassen sich wie folgt verallgemeinern. Betrachtet man anstelle von (a_{m+1}, b_{m+1}) das Band (a_{m+1}, b) für $b_{m+1} > b \in \mathcal{E}_{m+1}$, so kann die obige Argumentation analog durchgeführt werden. Eine solche Strategie kann nur optimal sein, wenn entweder in b direkt ein weiteres Band (b, s) mit $s \in \mathcal{E}_{m+1} \cap (b, b_{m+1}]$ anschließt oder ein $\epsilon > 0$ existiert mit $[b, b + \epsilon] \subset \{\mathcal{B}_c^* \cup \mathcal{B}_\infty^*\} \cap \mathcal{E}_{m+1}$.

In isolierten Punkten von \mathcal{E}_{m+1} ist man demnach indifferent, ob man bis zum Errei-

chen des nächstgrößeren Elements spart oder ob man stetig Dividende ausschüttet. Auf zusammenhängenden Intervallen in \mathcal{E}_{m+1} herrscht entsprechend völlige Gleichgültigkeit ob der möglichen drei Aktionen – keine Dividende ausschütten, stetig ausschütten oder eine Einmalzahlung leisten.

Beliebig viele Kandidaten für die nächste untere Bandgrenze

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass $\zeta_{m+1} > a_{m+1}$ gilt. In diesem Fall stimmen also $V^\pi(x)$ und $F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1})$ bis ζ_{m+1} überein und V^π erfüllt die *IDG* entsprechend bis ζ_{m+1} . Alle Fortsetzungen $F_{(a, \pi)}(x - a)$ (und trivialerweise auch deren Ableitungen) stimmen ebenso überein, solange $a \in \mathcal{D}_{m+1}$ gilt, vgl. (4.2). Man erhält also

- $F_{(a, \pi)}(x - a) = V^\pi(x) = F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1})$, für $x \leq a$ und jedes $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$,
- $F_{(a, \pi)}(x - a) = F_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1})$, für $x \in \mathbb{R}$ und jedes $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$,
- $F'_{(a, \pi)}(x - a) = F'_{(a_{m+1}, \pi)}(x - a_{m+1}) = 1$, für $x \in [b_m, \zeta_{m+1}]$ und jedes $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$.

Somit ist durch jedes $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$ eine optimale nächste untere Bandgrenze gegeben. Die Mengen der potentiellen Kandidaten etwaiger oberer Bandgrenzen unterscheiden sich aufgrund der Bedingung $b > a$ lediglich durch die Verkürzung um $(a_{m+1}, a]$. Genauer gilt für jedes $a \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$

$$(a, \zeta_{m+1}] \subset \left\{ b > a : F'_{(a, \pi)}(b - a) = 1 \right\} = \mathcal{E}_{m+1} \setminus (a_{m+1}, a]. \quad (4.26)$$

Daher ist man für $x \in [a_{m+1}, \zeta_{m+1}]$ ebenfalls indifferent, ob man keine Dividende ausschüttet, stetig ausschüttet oder eine Einmalzahlung leistet.

Der folgende Satz kombiniert die bisherigen Ergebnisse und fasst alle denkbaren Ausgestaltungen einer optimalen Strategie zusammen.

Satz 4.1.

P^Y sei stetig. π sei eine Bandstrategie mit Grenzen b_0, a_1, \dots, b_m und den zugehörigen Bereichen $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_c$ und \mathcal{B}_∞ . Es gelte $V^\pi|_{x < b_m} = V|_{x < b_m}$. Weiter seien $F'_{(b_m, \pi)}(x) > 1$ für $x > 0$ und $\bar{a}_{m+1} = \inf \{x > b_m : \Lambda V^\pi(x) > 0\} < \infty$. Dann gilt

1. Die Strategie π^\star mit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^\star &= \mathcal{B}_0 \cup (a_{m+1}, b_{m+1}) \\ \mathcal{B}_c^\star &= \mathcal{B}_c \cup \{b_{m+1}\} \\ \mathcal{B}_\infty^\star &= \mathcal{B}_\infty \setminus (a_{m+1}, b_{m+1}] \end{aligned}$$

ist optimal bis b_{m+1} , d.h. es gilt $V^{\pi^*} \Big|_{x \leq b_{m+1}} = V \Big|_{x \leq b_{m+1}}$.

2. Eine Strategie π^* mit \mathcal{B}_0^* , \mathcal{B}_c^* und \mathcal{B}_∞^* ist genau dann optimal bis b_{m+1} , wenn

(a) $V^{\pi^*} \Big|_{x \leq b_m} = V \Big|_{x \leq b_m}$ gilt,

(b) \mathcal{B}_0^* , \mathcal{B}_c^* und \mathcal{B}_∞^* die Eigenschaften aus Definition 2.4 erfüllen und

(c) drei disjunkte Teilmengen

$$B_0 \cup B_c \cup B_\infty = \{a_{m+1} : \Lambda V_m(a_{m+1}) = 0\} \cup \mathcal{E}_{m+1}$$

gegeben sind, so dass gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^* \cap [b_m, b_{m+1}] &= (a_{m+1}, b_{m+1}) \setminus \{B_c \cup B_\infty\} \cup B_0, \\ b_{m+1} \in \mathcal{B}_c^* \cap [b_m, b_{m+1}] &= \{b_m\} \setminus \{B_0 \cup B_\infty\} \cup B_c, \\ \mathcal{B}_\infty^* \cap [b_m, b_{m+1}] &= (b_m, a_{m+1}) \setminus \{B_0 \cup B_c\} \cup B_\infty. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.2.

Bei der Formulierung der Gesamtheit der optimalen Strategien ist zu beachten, dass $\mathcal{D}_{m+1} \subset \{a_{m+1}\} \cup \mathcal{E}_{m+1}$ gilt. Der Fall $\mathcal{D}_{m+1} = \{a_{m+1}\}$ liefert noch keine Aussagen, ob $\Lambda V_m(a_{m+1}) = 0$ gilt oder nicht, so dass dies explizit berücksichtigt werden muss. Die folgenden Besonderheiten sind zu beachten:

- Der Spezialfall $a_{m+1} \in B_c$ ist nur möglich, wenn $\Lambda V_m(a_{m+1}) = 0$, d.h. $\zeta_{m+1} \geq a_{m+1}$ gilt.
- Für $a_{m+1} \in B_0$ muss sogar $a_{m+1} < \zeta_{m+1}$ gelten. Die Gleichheit $a_{m+1} = \zeta_{m+1}$ genügt hier nicht, da \mathcal{B}_0^* rechtsseitig offen sein muss.
- Isolierte Punkte von \mathcal{E}_{m+1} können nicht zu B_0 gehören, da andernfalls die rechtsseitige Offenheit von \mathcal{B}_0^* verletzt wäre.

Folgerung 4.3.

P^Y sei stetig. Zu einer optimalen endlichen Bandstrategie mit zusammenfallenden Bandgrenzen existiert immer eine optimale Bandstrategie mit paarweise verschiedenen Bandgrenzen.

Bemerkung 4.4.

Für eine numerische Berechnung der Wertfunktion und einer optimalen Strategie ist die Wahl des Supremums $b_{m+1} = \sup \mathcal{E}_{m+1}$ die stabile Variante. So erhält man ein effizientes

Verfahren. Lässt man eine andere Wahl zu, so müsste man jeweils die Möglichkeit eines direkt anschließenden Bandes berücksichtigen. Dies führt zu unnötigen Schleifen. Insbesondere wäre hier eine Divergenz des Verfahrens möglich, wenn \mathcal{E}_{m+1} Intervalle beinhaltet. Dies rechtfertigt nun auch die zu Beginn dieses Abschnitts sowie im obigen Satz getroffene Einschränkung $F'_{(b_m, \pi)}(x) > 1$ für $x > 0$. Durch die jeweilige Wahl des Supremums ist dies nämlich gerade der Fall.

Die Wahl des Infimums für a_{m+1} spielt eine untergeordnete Rolle, da man gemäß (4.26) unabhängig von der Wahl der unteren Bandgrenze innerhalb von \mathcal{D}_{m+1} immer b_{m+1} als Supremum der potentiellen oberen Bandgrenzen erhält. Sofern zur Umsetzung des Algorithmus ein numerisches Verfahren verwendet wird, welches beginnend ab b_m die nächste untere Bandgrenze etwa auf einem Gitter sucht, so ist es auch hier effizient, das Infimum zu wählen, da sich die Auswertung für größere Abzweigepunkte somit erübrigt.

Demnach stellt die durch Algorithmus 3.7 formulierte Vorgehensweise von Schmidli (2008, S.92) ein effizientes Verfahren zur Konstruktion der Wertfunktion dar, welches konvergiert, sofern eine endliche Bandstrategie optimal ist.

Im Nachgang kann nun auch beantwortet werden, dass die im Algorithmus erhaltenen b_0, a_1, \dots immer auch als optimale Bandgrenzen dienen. Dies entspricht der Wahl von π^\star in Satz 4.1 für jede Schleife im Algorithmus. Die in Satz 3.4 definierte optimale Strategie von Schmidli (2008) entspricht hingegen der Strategie π^* aus 2., wenn in jeder Schleife stets $B_c = \{a_{m+1} : \Lambda V_m(a_{m+1}) = 0\} \cup \mathcal{E}_{m+1}$ maximal gewählt wird. In diesem Fall können also zusammenfallende Grenzen der Form $a_m = b_{m+1}$ auftreten. Außerdem können ganze Intervalle zu \mathcal{B}_c gehören. Die resultierende Strategie ist in diesem Fall im Sinne von Definition 2.6 keine endliche Bandstrategie. In diesen Fällen konvergiert der Algorithmus 3.7 offensichtlich trotzdem. Eine Divergenz würde dann vorliegen, wenn etwa die Folge (\bar{a}_m) einen Häufungspunkt in $\left[0, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)}\right]$ hat.

Abschließend lässt sich formulieren, wie sich die Menge der optimalen oberen Bandgrenzen grundsätzlich einschränken lässt.

Satz 4.5.

P^Y sei stetig. Ist π^ eine optimale Strategie mit $\mathcal{B}_0^*, \mathcal{B}_c^*$ und \mathcal{B}_∞^* so gilt*

$$\mathcal{B}_c^* \subset \{0\} \cup \left\{ 0 < x \leq \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)} P^Y(x) - \frac{\lambda \mu}{\delta} H^Y(x) \right\}.$$

Ist P^Y zusätzlich stetig differenzierbar und erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2.9, so

gilt

$$\mathcal{B}_c^* \subset \{0\} \cup \left\{ x \geq 0 : x \leq \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)} P^Y(x) - \frac{\lambda \mu}{\delta} H^Y(x) \text{ und } \frac{\lambda c}{\lambda + \delta} p(x) \leq \lambda + \delta - \lambda P^Y(x) \right\}.$$

Beweis. Für die erste Aussage kombiniert man Satz 4.1 mit (4.11), (4.15) und (4.21). Die Menge $\left\{ 0 < x = \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)} P^Y(x) - \frac{\lambda \mu}{\delta} H^Y(x) \right\}$ muss miteinbezogen werden, um sämtliche Konstellationen aus Satz 4.1, 2. zu berücksichtigen. Die zweite Aussage folgt analog in Kombination mit (4.23) und (4.24). \square

Kapitel 5

Explizites Lösungsverfahren für phasentyp verteilte Schadenhöhen

In den letzten beiden Kapiteln wurde ausführlich untersucht, wie sich der Wert einer beliebigen endlichen Bandstrategie darstellen lässt und wie sich die Wertfunktion innerhalb derer unterscheidet. Eine konkrete Darstellung erfordert die Bestimmung der Gerber-Shiu-Funktionen für verschiedene Straffunktionen bzw. die Lösung der *IDG* für verschiedene Anfangswerte.

Eine explizite Lösung des Optimierungsproblems liegt bislang einzig für die Exponentialverteilung vor. Hierzu wird aus der *IDG* auf der No-Action-Area für die Wertfunktion eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung hergeleitet und gelöst. Dieses Beispiel wird bereits bei Gerber (1969, S. 223f) behandelt. Grundlegend für die dortige Vorgehensweise ist die folgende Differentialgleichung erster Ordnung der Dichte $p(y) = \beta \exp(-\beta y)$, $y \geq 0$

$$\beta p = -p'. \quad (5.1)$$

Im Folgenden wird sich zeigen, inwieweit sich das Verfahren strukturell auf die gesamte Klasse der absolut stetigen Phasentypverteilungen verallgemeinern lässt. So kann man die optimale Strategie zwar nicht explizit angeben, jedoch gelingt eine explizite Darstellung für den Wert einer endlichen Bandstrategie.

Hierzu wird zunächst basierend auf Hipp (2006) eine Differentialgleichung für die Dichte der Phasentypverteilung hergeleitet. Darauf aufbauend wird für den Wert der Strategie separat auf der Action-Area bzw. auf der No-Action-Area jeweils ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung konstruiert. Beide Systeme lassen sich jeweils anhand von Matrixexponentialen lösen. Somit kann der Wert einer endlichen Bandstrategie stückweise in geschlossener Form dargestellt werden. Die optimalen Bandgrenzen können hiermit

innerhalb des vorgestellten Algorithmus 3.7 unter zusätzlicher Berücksichtigung der Eingrenzungen aus Kapitel 4 bestimmt werden.

Abschließend werden ausgewählte numerische Beispiele präsentiert. Die theoretischen Ergebnisse zur Lage der optimalen Bänder in Kapitel 4 lassen sich hiermit veranschaulichen. Des Weiteren erhält man einen Eindruck, wie sich die Anzahl der optimalen Bänder *ex ante* zumindest erahnen lässt. Hierzu gibt es bislang kaum Resultate. Loeffen (2008, Theorem 3) konnte beweisen, dass bei einer absolut monotonen Dichte der Schadenhöhenverteilung stets eine Barrierenstrategie optimal ist. In Erweiterung zeigen Kyprianou et al. (2010, Theorem 1.2), dass eine log-konvexe Dichte hinreichend für die Optimalität einer Barrierenstrategie ist. Darüberhinaus sind keine charakterisierenden Ergebnisse bekannt.¹

Anhand der gewonnenen Erkenntnisse gelingt hier erstmalig die Konstruktion einer absolut stetigen Schadenhöhenverteilung, so dass man eine optimale Dreibandstrategie erhält. Durch Variation einzelner Modellparameter erhält man für die gleiche Verteilung wiederum optimale Barrieren-, Einband- oder Zweibandstrategien. Insgesamt lassen sich dabei stetige Übergänge der Strategien beobachten. So gehen die Bänder zunächst aus einem Punkt hervor und dehnen sich schließlich immer weiter bis zum nächsten Band aus, um mit diesem zusammen ein größeres Band zu bilden. Andersherum betrachtet ziehen sich die Bänder bis zu einem Punkt zusammen, um dann zu verschwinden. Das beobachtete Verhalten der Bänder lässt Rückschlüsse zu, inwieweit sich die optimale Anzahl der Bänder anhand des Verlaufs des Integro-Differentials ΔV^{π^A} abschätzen lässt.

5.1 Eigenschaften von Phasentypverteilungen

Neuts (1975) führte die Klasse der Phasentypverteilungen ein. Eine Zufallsvariable Y und deren Verteilung werden als (stetig) phasentyp bezeichnet, wenn sich Y als Absorptionszeit einer zeitstetigen absorbierenden Markov-Kette mit endlichem Zustandsraum darstellen lässt. Diese ist wie folgt definiert.

Proposition und Definition 5.1 (Neuts 1981, Lemma 2.2.1).

$Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ sei eine reguläre zeitstetige homogene Markov-Kette auf einem endlichen

¹Avram et al. (2013) liefern in ihrem weiter gefassten Modellrahmen Optimalitätsbedingungen für Einband- und Zweibandstrategien. Im hiesigen Modellrahmen sind diese Aussagen jedoch gleichbedeutend mit dem bekannten Kriterium $\Delta V_m \leq 0$, welches nur der Überprüfung dient.

Zustandsraum $S = \{1, \dots, n, 0\}$ mit Intensitätsmatrix

$$\begin{pmatrix} B & -B \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

für eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Startverteilung sei durch $\alpha = (\alpha, \alpha_0)^T$ gegeben. Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

1. Der Zustand 0 ist der einzige absorbierende Zustand und wird mit Wahrscheinlichkeit 1 für jeden beliebigen Startzustand erreicht.
2. B ist regulär.

In diesem Fall heißt Z *absorbierende zeitstetige Markov-Kette* mit nichttrivialer Startverteilung α und nichttrivialer Intensitätsmatrix B . Der Zustandsraum besteht somit aus der Menge der transienten Zustände $\{1, \dots, n\}$ und dem schließlich absorbierenden Zustand 0.

Somit lässt sich die Phasentypverteilung formell einführen.

Definition 5.2 (Neuts 1975).

Z sei eine absorbierende zeitstetige Markov-Kette auf einem endlichen Zustandsraum $S = \{1, \dots, n, 0\}$ mit nichttrivialen Parametern α und B . Die Zufallsvariable Y wird als die Absorptionszeit der Markov-Kette definiert

$$Y = \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}.$$

Die Verteilung P^Y von Y bezeichnet man als *Phasentypverteilung* mit der Schreibweise $Y \sim PH(\alpha, B)$. n wird als *Ordnung der Darstellung* bezeichnet (O’Cinneide (1990)). Die Klasse aller Phasentypverteilungen wird im Folgenden mit PH bezeichnet.

Im Allgemeinen ist die Verteilung singulär im Nullpunkt, genauer gilt $P^Y\{0\} = \alpha_0$. Für Schadenhöhenverteilungen muss $(0, \infty)$ der Träger der Verteilung sein. Somit wird im Folgenden stets $\alpha_0 = 0$ gefordert. Die Verteilungsfunktion P^Y und die Dichte p lassen sich für $Y \sim PH(\alpha, B)$ explizit anhand der Parameter darstellen. Für $y \geq 0$ gelten (Neuts (1975))

$$1 - P^Y(y) = \alpha^T \exp(yB) \mathbf{1} \quad (5.3)$$

$$\text{und } p(y) = -\alpha^T B \exp(yB) \mathbf{1}. \quad (5.4)$$

P^Y ist demnach absolut stetig auf $(0, \infty)$. Mit der Einschränkung $\alpha_0 = 0$ erhält man somit die Klasse der absolut stetigen Phasentypverteilungen.

Offenbar gehört auch die Exponentialverteilung zur Klasse der absolut stetigen Phasentypverteilungen. Eine mögliche Parameterwahl zu $Y \sim \text{Exp}(\beta) \sim PH(\alpha, B)$ ist etwa durch $\alpha = (1)$ und $B = (-\beta)$ gegeben. Die höheren Ableitungen der Dichte von p sind gemäß (5.4) für $r = 1, 2, \dots$ gegeben durch

$$p^{(r)}(y) = -\alpha^T B^{r+1} \exp(yB) \mathbf{1}. \quad (5.5)$$

Aufbauend auf der Vorgehensweise von Hipp (2006) wird im Folgenden gezeigt, dass die Dichte einer absolut stetigen Phasentypverteilung grundsätzlich eine homogene lineare Differentialgleichung erfüllt.

Lemma 5.3.

Ist $Y \sim PH(\alpha, B)$ absolut stetig phasentyp verteilt mit Ordnung der Darstellung n , so erfüllt die Dichte die folgende homogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$p^{(n)} = \sum_{r=0}^{n-1} k_r p^{(r)}, \quad (5.6)$$

mit den Koeffizienten

$$k_r = (-1)^{n-r+1} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-r}) \in \text{Kom}_{n-r}^n} \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-r}\}} \eta_j, \quad \text{für } r = 0, \dots, n-1,$$

wobei η_j für $j = 1, \dots, n$ die Eigenwerte von B unter Berücksichtigung aller Vielfachheiten seien.²

Beweis. Die Vorgehensweise basiert auf Hipp (2006). Zunächst wird gezeigt, dass sich die rationale Laplace-Transformierte $\widehat{p}(s) = q_1(s) (q_2(s))^{-1}$ als Quotient zweier Polynome q_1 und q_2 darstellen lässt mit

$$\begin{aligned} q_1(s) &= \sum_{r=1}^n c_r \sum_{l=0}^{r-1} f^{(l)}(0) s^{r-1-l}, \\ q_2(s) &= \sum_{r=0}^n c_r s^r \end{aligned}$$

²Für $0 \leq j \leq n$ bezeichnet Kom_j^n die Menge aller Kombinationen in $\{0, \dots, n\}$ mit j Elementen.

und den Koeffizienten

$$c_r = (-1)^r \sum_{(i_1, \dots, i_{n-r}) \in \text{Kom}_{n-r}^n} \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-r}\}} \eta_j, \quad \text{für } r = 0, \dots, n.$$

Die Eigenwerte von B sind durch $\text{spec}\{B\} = \{\eta_i, i = 1, \dots, n\}$ gegeben, wobei alle Vielfachheiten berücksichtigt seien. Weiter sei $J_B = D + N$ die Jordannormalform von B mit der Diagonalmatrix $D = \text{diag}\{\eta_i\}$ und der nilpotenten Matrix $N = (N_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ mit Einträgen $N_{ij} = \mathbf{1}\{j = i + 1 \wedge \eta_i = \eta_{i+1}\}$. S sei die zugehörige Basiswechselmatrix, d.h. es gilt $B = S(D + N)S^{-1}$.

Zunächst werden die Laplace-Transformierten der höheren Ableitungen von p benötigt. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sy} p^{(r)}(y) dy &= - \int_0^\infty \alpha^T \exp((B - sI)y) B^{r+1} \mathbf{1} dy \\ &= - \left[\alpha^T (B - sI)^{-1} \exp((B - sI)y) B^{r+1} \mathbf{1} \right]_0^\infty \\ &= \alpha^T (B - sI)^{-1} B^{r+1} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Für $r = 0$ liefert dies

$$\widehat{p}(s) = E[\exp(-sY)] = \int_0^\infty \exp(-sy) p(y) dy = \alpha^T (B - sI)^{-1} B \mathbf{1}.$$

Mit der Cramérschen Regel erhält man weiter

$$\alpha^T (B - sI)^{-1} B \mathbf{1} = \frac{\alpha^T \text{adj}(B - sI) B \mathbf{1}}{\det(B - sI)},$$

wobei $\text{adj}(A)$ die Adjunkte der Matrix A bezeichnet. Es seien $q_1(s) = \alpha^T \text{adj}(B - sI) B \mathbf{1}$ und $q_2(s) = \det(B - sI)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} q_2(s) &= \det(D - sI + N) = \prod_{i=1}^n (\eta_i - s) = \sum_{r=0}^n (-1)^r s^r \sum_{(i_1, \dots, i_{n-r}) \in \text{Kom}_{n-r}^n} \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-r}\}} \eta_j \\ &= \sum_{r=0}^n c_r s^r. \end{aligned}$$

Induktiv erhält man folgende Darstellung für (5.7)

$$\int_0^\infty e^{-sy} p^{(r)}(y) dy = - \sum_{l=0}^{r-1} p^{(l)}(0) s^{r-1-l} + s^r \widehat{p}(s). \quad (5.8)$$

Der Induktionsanfang für $r = 1$ ist wie folgt gegeben

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} p'(y) dy = [e^{-sy} p(y)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-sy} p(y) dy = -p(0) + s\widehat{p}(s).$$

Den Induktionsschritt $r \mapsto r + 1$ erhält man unter Verwendung von (5.8) als Induktionsvoraussetzung (IV)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sy} p^{(r+1)}(y) dy &= [e^{-sy} p^{(r)}(y)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s) e^{-sy} p^{(r)}(y) dy \\ &\stackrel{IV}{=} -p^{(r)}(0) + s \left(-\sum_{l=0}^{r-1} p^{(l)}(0) s^{r-1-l} + s^r \widehat{p}(s) \right) \\ &= -\sum_{l=0}^{r+1-1} p^{(l)}(0) s^{r+1-1-l} + s^{r+1} \widehat{p}(s). \end{aligned}$$

Das Polynom q_1 lässt sich nun wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} q_1(s) &= \widehat{p}(s) q_2(s) = \sum_{r=0}^n c_r s^r \widehat{p}(s) \\ &\stackrel{(5.8)}{=} c_0 \widehat{p}(s) + \sum_{r=1}^n c_r \left(\int_0^{\infty} e^{-sy} p^{(r)}(y) dy + \sum_{l=0}^{r-1} p^{(l)}(0) s^{r-1-l} \right) \\ &= \sum_{r=0}^n c_r \int_0^{\infty} e^{-sy} p^{(r)}(y) dy + \sum_{r=1}^n c_r \sum_{l=0}^{r-1} p^{(l)}(0) s^{r-1-l}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mit (5.7) erhält man weiter

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} p^{(r)}(y) dy = \alpha^T (B - sI)^{-1} B^{r+1} \mathbf{1} \quad \longrightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty).$$

In (5.9) liefert dies für das Polynom $q_3(s) = \sum_{r=1}^n c_r \sum_{l=0}^{r-1} p^{(l)}(0) s^{r-1-l}$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (q_1(s) - q_3(s)) = 0.$$

Somit gilt bereits $q_1 \equiv q_3$. Folglich gilt für alle $s \geq 0$

$$\sum_{r=0}^n c_r \int_0^{\infty} e^{-sy} p^{(r)}(y) dy = 0.$$

Dies liefert $\sum_{r=0}^n c_r p^{(r)}(y) = 0$. Mit der Normierung bezüglich der n -ten Ableitung liefert dies gerade die Koeffizienten k_r aus Lemma 5.3

$$p^{(n)}(y) = \sum_{r=0}^{n-1} k_r p^{(r)}(y).$$

Es gilt also

$$k_r = -\frac{c_r}{c_n} = (-1)^{n-r+1} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-r}) \in \text{Kom}_{n-r}^n} \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-r}\}} \eta_j, \quad r = 0, \dots, n-1.$$

□

Da die Absorptionszeiten von verschiedenen Markov-Ketten in Verteilung übereinstimmen können, sind die Darstellung und folglich auch die Ordnung der Darstellung einer Phasentypverteilung nicht eindeutig (siehe zum Beispiel O' Cinneide (1989)). Die obige Differentialgleichung ist für jede Darstellung und daher auch für jede mögliche Ordnung gültig.

Beispiel 5.4.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei α der n -dimensionale Vektor mit identischen Einträgen $\frac{1}{n}$ und B die Diagonalmatrix mit identischen Diagonaleinträgen $-\beta$. Es gilt also $\alpha = (\frac{1}{n})_{j=1, \dots, n}$ und $B = \text{diag}(-\beta, \dots, -\beta)$. Somit ist $-\beta$ ein n -facher Eigenwert von B . Bei der Verteilung $PH(\alpha, B)$ handelt es sich schlicht um die Mischung der gleichen Exponentialverteilung. Dies ist nichts anderes als die Exponentialverteilung selbst $Y \sim \text{Exp}(\beta) \sim \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \text{Exp}(\beta)$. Die Koeffizienten, basierend auf der Darstellung mit α und B , sind in diesem Fall gegeben durch

$$\begin{aligned} k_r &= (-1)^{n-r-1} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-r}) \in \text{Kom}_{n-r}^n} \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-r}\}} (-\beta) \\ &= (-1)^{n-r-1} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-r}) \in \text{Kom}_{n-r}^n} (-\beta)^{n-r} \\ &= -\beta \binom{n}{n-r}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (5.6) lautet entsprechend

$$p^{(n)} = \sum_{r=0}^{n-1} (-\beta) \binom{n}{n-r} p^{(r)}.$$

Offenbar wird diese Differentialgleichung von $p(y) = \beta \exp(\beta y)$ ebenso erfüllt wie (5.1).

Dies sieht man leicht unter Verwendung von $\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{n-r} (-1)^r = (-1)^{n-1}$ ein.

5.2 Systeme von Differentialgleichungen für V^π

Es sei $Y \sim PH(\alpha, B)$ phasentyp verteilt mit Ordnung der Darstellung n . Unter Verwendung der Differentialgleichung (5.6) für p können im Folgenden Systeme von Differentialgleichungen für den Wert V^π einer Bandstrategie π aufgestellt werden. Im Anschluss können diese gelöst werden, so dass V^π stückweise explizit angegeben werden kann. Die Vorgehensweise kann nicht nur für die Bestimmung des Werts einer fest vorgegebenen Strategie verwendet werden, sondern auch zur Umsetzung von Algorithmus 3.7, um eine optimale Strategie und die Wertfunktion zu bestimmen. In Einklang mit Folgerung 4.3 werden nur Bandstrategien π mit paarweise verschiedenen Bandgrenzen betrachtet. Es gilt also $b_0 < a_1 < b_1 < \dots < a_j < b_j < \dots$. Die Bandgrenzen können dabei entweder fest vorgegeben sein oder alternativ mit Algorithmus 3.7 optimal bestimmt werden. Für $m = 0, 1, \dots$ bezeichne dazu V_m den Wert der Strategie mit den Bandgrenzen $b_0, a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$. Im Algorithmus wären dies somit die jeweiligen Lösungskandidaten, sofern die Bandgrenzen wie dort beschrieben optimal gewählt werden. Für $a > b_m$ sei f_{m+1}^a wiederum die stetige Fortsetzung von V_m ab a , so dass $\Lambda f_{m+1}^a(x) = 0$ für alle $x > a$ gilt.

Da alle Berechnungen dieses Abschnitts gleichermaßen für V^π , somit natürlich auch für alle V_m , aber auch für $W^{(\delta)}$ und alle f_{m+1}^a gelten, wird im Folgenden kurz die Bezeichnung f stellvertretend für alle Möglichkeiten verwendet. f ist also abschnittsweise entweder linear oder erfüllt die *IDG*. Etwaige Sprünge in den Übergängen sind nicht ausgeschlossen und werden im nächsten Abschnitt genauer untersucht. Für die jeweilige Faltung mit p wird die Bezeichnung

$$g(x) = \int_0^x f(y)p(x-y)dy, \quad \text{für } x \geq 0$$

stellvertretend für g^π, g_m, g_W bzw. g_{m+1}^a für die Faltung von $V^\pi, V_m, W^{(\delta)}$ bzw. f_{m+1}^a mit p verwendet.

Lemma 5.5.

Die links- und rechtsseitigen Ableitungen von f und g erfüllen die folgende Differentialgleichung

$$g^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j f^{(j)}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} k_j g^{(j)}(x), \quad (5.10)$$

wobei k_j die Koeffizienten der Differentialgleichung (5.6) für p sind und die κ_j gegeben sind durch

$$\kappa_j = p^{(n-1-j)}(0) - \sum_{l=j+1}^{n-1} k_l p^{(l-1-j)}(0), \quad \text{für } j = 1, \dots, n-2$$

und $\kappa_{n-1} = p(0)$.

Beweis. Für $r = 1, \dots, n$ gilt zunächst

$$g^{(r)}(x) = \sum_{i=0}^{r-1} f^{(r-1-i)}(x) p^{(i)}(0) + \int_0^x f(y) p^{(r)}(x-y) dy. \quad (5.11)$$

Für die n -te Ableitung von g erhält man unter der Verwendung von (5.6) und (5.11)

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} f^{(n-1-i)}(x) p^{(i)}(0) + \sum_{r=0}^{n-1} k_r g^{(r)}(x) \\ &\quad - \sum_{r=1}^{n-1} k_r \left(\sum_{i=0}^{r-1} f^{(r-1-i)}(x) p^{(i)}(0) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(p^{(n-1-j)}(0) - \sum_{l=j+1}^{n-1} k_l p^{(l-1-j)}(0) \right) f^{(j)}(x) \\ &\quad + p(0) f^{(n-1)}(x) + \sum_{r=0}^{n-1} k_r g^{(r)}(x) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Die Differentialgleichung (5.10) in f und g folgt also rein aus der Erwartungswertbildung und der Differentialgleichung (5.6) der Dichte. Die besondere Dynamik von f ist hierzu noch nicht berücksichtigt. Im Folgenden wird diese ausgenutzt, um Systeme von Differentialgleichungen zu generieren. Hierzu wird die folgende $(n+1)$ -wertige Funktion definiert

$$y(x) = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \\ g'(x) \\ g''(x) \\ \vdots \\ g^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{für } x \geq 0.$$

y wird also stellvertretend für die Funktionen y^π, y_m, y_W und y_{m+1}^a mit den jeweiligen Komponenten in $V^\pi, V_m, W^{(\delta)}$ bzw. f_{m+1}^a und den höheren Ableitungen von g^π, g_m, g_W

bzw. g_{m+1}^a verwendet.

Es wird nun zwischen den Bereichen unterschieden, auf denen f linear ist, beziehungsweise die Dynamik der IDG erfüllt. Für V^π wird also zwischen der Action-Area und der No-Action-Area unterschieden.

Lemma 5.6.

y erfüllt auf dem Inneren von $\{\Lambda f(x) = 0\}$ eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = A y(x). \quad (5.12)$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

Beweis. Induktiv erhält man zunächst auf $\{\Lambda f(x) = 0\}^\circ$ für $l = 1, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} f^{(l)}(x) &= \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right) f^{(l-1)}(x) - \frac{\lambda}{c} g^{(l-1)}(x) \\ &= \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^l f(x) - \frac{\lambda}{c} \sum_{r=0}^{l-1} \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^{(l-1-r)} g^{(r)}(x). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Kombiniert mit der Differentialgleichung (5.10) liefert dies

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j \left(\left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^j f(x) - \frac{\lambda}{c} \sum_{r=0}^{j-1} \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^{(j-1-r)} g^{(r)}(x) \right) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{n-1} k_j g^{(j)}(x) \\ &= f(x) \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^j + \sum_{j=0}^{n-1} k_j g^{(j)}(x) \\ &\quad - \frac{\lambda}{c} \sum_{r=0}^{n-2} \sum_{j=r+1}^{n-1} \kappa_j \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^{(j-1-r)} g^{(r)}(x) \\ &= f(x) \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^j + k_{n-1} g^{(n-1)}(x) \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-2} \left(k_r - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=r+1}^{n-1} \kappa_j \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^{(j-1-r)} \right) g^{(r)}(x). \end{aligned}$$

Demnach folgt die Behauptung mit folgender Zuweisung für A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+\delta}{c} & -\frac{\lambda}{c} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix},$$

wobei die Elemente der letzten Zeile gegeben sind durch

$$\begin{aligned} a_{n+1,1} &= \sum_{j=0}^{n-1} \kappa_j \left(\frac{\lambda + \delta}{c} \right)^j, \\ a_{n+1,r+2} &= k_r - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=r+1}^{n-1} \kappa_j \left(\frac{\lambda + \delta}{c} \right)^{(j-1-r)}, \quad \text{für } r = 0, \dots, n-2, \\ a_{n+1,n+1} &= k_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Die linearen Bereiche von f sind natürlich trivial, solange man die Werte in den Übergängen gegeben hat. Für die entsprechenden Randbedingungen der Differentialgleichung (5.12) für y werden daher die höheren Ableitungen von g in den Übergängen benötigt. Damit dies einfach umzusetzen ist, wird für y auch auf $\{f'(x) = 1\}$ eine Differentialgleichung aufgestellt.

Lemma 5.7.

y erfüllt auf dem Inneren von $\{f'(x) = 1\}$ eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$y'(x) = \tilde{A} y(x) + d, \tag{5.14}$$

für eine Matrix $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$ und einen Vektor $d \in \mathbb{R}^{(n+1)}$.

Beweis. Auf $\{f'(x) = 1\}^\circ$ gilt zunächst

$$f^{(l)}(x) = 0, \quad \text{für } l = 2, \dots, n-1.$$

Kombiniert mit der Differentialgleichung (5.10), liefert dies die einfache Darstellung

$$g^{(n)}(x) = \kappa_0 f(x) + \kappa_1 + \sum_{j=0}^{n-1} k_j g^{(j)}(x), \quad \text{für } x \in \{f'(x) = 1\}^\circ.$$

Somit folgt die Behauptung mit folgender Zuweisung für \tilde{A} und d

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \kappa_0 & k_0 & \cdots & \cdots & k_{n-2} & k_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \kappa_1 \end{pmatrix}.$$

□

Bemerkung 5.8.

Sämtliche Berechnungen mit der singulären Matrix \tilde{A} gestalten sich sehr einfach. So ist das Spektrum von \tilde{A} gerade gegeben durch $\text{spec}\{\tilde{A}\} = \{0\} \cup \text{spec}\{B\}$. Dazu bestimmt man das charakteristische Polynom $\det(\tilde{A} - \vartheta I)$ von \tilde{A} . Sukzessives Entwickeln nach der ersten Spalte liefert induktiv

$$\det(\tilde{A} - \vartheta I) = \begin{vmatrix} -\vartheta & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\vartheta & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\vartheta & 1 \\ \kappa_0 & k_0 & \cdots & \cdots & k_{n-2} & k_{n-1} - \vartheta \end{vmatrix} = (-1)^n \vartheta \left(\sum_{j=0}^{n-1} \vartheta^j k_j - \vartheta^n \right).$$

Neben der Lösung $\vartheta = 0$ von $\det(\tilde{A} - \vartheta I) = 0$ erhält man gerade die Eigenwerte von B . Sei dazu $\vartheta = \eta_l$. Es folgt

$$\sum_{r=0}^{n-1} \vartheta^r k_r - \vartheta^n = \left(\sum_{r=0}^{n-1} \eta_l^r (-1)^{n+r-1} \sum_{(i_1, \dots, i_{n-r}) \in \text{Kom}_{n-r}^n} \prod_{j \in \{i_1, \dots, i_{n-r}\}} \eta_j \right) - \eta_l^n.$$

Sortiert man dies nach den Potenzen von η_l , heben sich alle Terme auf und man erhält $\det(\tilde{A} - \eta_l I) = 0$ für $l = 1, \dots, n$.

V^π ergibt sich nun, indem man abwechselnd die Differentialgleichungen (5.12) und

(5.14) löst. Sind die Bandgrenzen durch $b_0, a_0, \dots, a_M, b_M$ gegeben, so gilt

$$y^\pi(x) = \begin{cases} \exp(Ax)y^\pi(0), & 0 \leq x < b_0, \\ \vdots & \\ y_{sp}(x, b_m) + \exp(\tilde{A}(x - b_m))(y^\pi(b_{m+}) - y_{sp}(b_m, b_m)), & b_m \leq x < a_{m+1}, \\ \exp(A(x - a_{m+1}))y^\pi(a_{m+1+}), & a_{m+1} \leq x < b_{m+1}, \\ \vdots & \\ y_{sp}(x, b_M) + \exp(\tilde{A}(x - b_M))(y^\pi(b_{M+}) - y_{sp}(b_M, b_M)), & x \geq b_M. \end{cases}$$

Die speziellen Lösungen $y_{sp}(\cdot, b_m)$ für $x \geq b_m$ sind dabei gegeben durch

$$y_{sp}(x, b_m)^T = \left(x - b_m, -\frac{\kappa_0}{k_0} x + \frac{\kappa_0}{k_0} \left(\frac{k_1}{k_0} + b_m \right) - \frac{\kappa_1}{k_0}, -\frac{\kappa_0}{k_0}, 0, \dots, 0 \right).$$

Dies sieht man jeweils leicht durch Überprüfen der Differentialgleichungen ein. Offenbar werden zur vollständigen Darstellung von V^π der Anfangswert $y^\pi(0)$ und die rechtsseitigen Werte in den Bandgrenzen benötigt. Insbesondere in den höheren Komponenten liegt hier im Allgemeinen keine Stetigkeit vor. Der nächste Abschnitt liefert eine explizite Berechnung der etwaigen Sprungkomponenten.

5.3 Die Übergänge in den Bandgrenzen

Bestimmen des Anfangswerts

Der Wert einer Bandstrategie kann nun sukzessive bestimmt werden. Zunächst wird y_W durch Lösen der Differentialgleichung (5.12) für $x \geq 0$ bestimmt. Der Anfangswert $y_W(0)$ errechnet sich dabei wie folgt. Zunächst gilt $W^{(\delta)}(0) = \frac{1}{c}$ (siehe Lemma 2.8.). Da P^Y keine Masse in der Null hat, folgt $g_W(0) = 0$. Für die höheren Ableitungen von g_W entfällt der Integralterm in (5.11) ebenso, da auch alle höheren Ableitungen von p stetig sind (vgl. (5.5)). Mit (5.13) erhält man für $r = 1, \dots, n-1$

$$g_W^{(r)}(0) = \sum_{l=0}^{r-1} p^{(r-1-l)}(0) W^{(\delta)(l)}(0)$$

$$= \sum_{l=0}^{r-1} p^{(r-1-l)}(0) \left(\left(\frac{\lambda + \delta}{c} \right)^l W^{(\delta)}(0) - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{\lambda + \delta}{c} \right)^{(l-1-j)} g_W^{(j)}(0) \right).$$

Dies liefert eine Rekursion für die Komponenten von $y_W(0)$, wobei die ersten beiden Komponenten gegeben sind durch $W^{(\delta)}(0) = \frac{1}{c}$ und $g_W(0) = 0$.

Somit ist die Lösung der Differentialgleichung (5.12) für $x \geq 0$ mit Anfangswert $y_W(0)$ gegeben durch

$$y_W(x) = \exp(Ax)y_W(0), \quad x \geq 0.$$

Durch entsprechende Normierung erhält man so $y_0(x)$ für $x < b_0$. Gemäß (2.5) gilt $V_0(x) = \frac{W^{(\delta)}(x)}{W^{(\delta)}(b_0)}$. Die Normierung überträgt sich gleichermaßen auf g_0 und sämtliche Ableitungen. Somit erhält man

$$y_0(x) = \frac{\exp(Ax)y_W(0)}{e_1^T A \exp(Ab_0)y_W(0)}, \quad 0 \leq x < b_0.$$

Sofern b_0 optimal bestimmt werden soll, erhält man gemäß Algorithmus 3.7 die folgende Zuweisung

$$b_0 = \max \left\{ b \geq 0 : e_1^T A \exp(Ab)y_W(0) = \min_{x \geq 0} e_1^T A \exp(Ax)y_W(0) \right\}.$$

Übergang von der No-Action-Area in die Action-Area

Ab hier erfolgt die Berechnung rekursiv. Dazu sei $m \geq 0$ und y_m sei bis b_m bestimmt. In der oberen Bandgrenze b_m muss der Übergang bestimmt werden, da hier nicht in allen Komponenten die Stetigkeit gewährleistet ist. Hierzu wird $y_m(b_m+)$ aus $y_m(b_m-)$ bestimmt. Gemäß Lemma 2.13 ist V_m in b_m nicht nur stetig sondern auch differenzierbar mit $V_m'(b_m) = 1$. Die Stetigkeit von g_m folgt somit unmittelbar. Auch die Stetigkeit der ersten Ableitung von g_m ist dadurch gewährleistet. Für die rechtsseitigen Ableitungen von V_m gilt hier

$$V_m^{(r)}(b_m+) = 0, \quad \text{für } r \geq 2.$$

Für die höheren Ableitungen von g_m gilt gemäß (5.11) für $r = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} g_m^{(r)}(b_m+) - g_m^{(r)}(b_m-) &= \sum_{i=0}^{r-1} \left(V_m^{(r-1-i)}(b_m+) - V_m^{(r-1-i)}(b_m-) \right) p^{(i)}(0) \\ &= - \sum_{i=0}^{r-3} V_m^{(r-1-i)}(b_m-) p^{(i)}(0) = - \sum_{l=2}^{r-1} V_m^{(l)}(b_m-) p^{(r-1-l)}(0). \end{aligned}$$

Somit sind auch g'_m und g''_m in b_m stetig. Ab der dritten Ableitung bzw. der fünften Komponente von y_m , können in Abhängigkeit von der Dichte und der Wahl von b_m Unstetigkeiten auftreten.

Die höheren linksseitigen Ableitungen von V_m berechnen sich unter Verwendung von (5.13) wie folgt aus $y_m(b_m-)$. Für $r \geq 2$ gilt

$$V_m^{(l)}(b_m-) = \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^l V_m(b_m-) - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^{(l-1-j)} g_m^{(j)}(b_m-).$$

Insgesamt gilt somit für $r = 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} g_m^{(r)}(b_m+) &= g_m^{(r)}(b_m-) - \sum_{l=2}^{r-1} \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^l p^{(r-1-l)}(0) V_m(b_m) \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \sum_{l=2}^{r-1} \sum_{j=0}^{l-1} \left(\frac{\lambda + \delta}{c}\right)^{(l-1-j)} p^{(r-1-l)}(0) g_m^{(j)}(b_m-). \end{aligned}$$

Somit ist die Lösung y_m der Differentialgleichung (5.14) für $x \geq b_m$ mit Anfangswert $y_m(b_m+)$ gegeben durch

$$y_m(x) = y_{sp}(x, b_m) + \exp(\tilde{A}(x - b_m))(y(b_{M+}) - y_{sp}(b_m, b_m)), \quad \text{für } x \geq b_m,$$

wobei die spezielle Lösung $y_{sp}(\cdot, b_m)$ für $x \geq b_m$ gegeben ist durch

$$y_{sp}(x, b_m)^T = \left(x - b_m, -\frac{\kappa_0}{k_0} x + \frac{\kappa_0}{k_0} \left(\frac{k_1}{k_0} + b_m\right) - \frac{\kappa_1}{k_0}, -\frac{\kappa_0}{k_0}, 0, \dots, 0\right).$$

Für den Fall $b_0 = 0$ muss die Rekursion zur Berechnung von $y_0(b_0+) = y_0(0+)$ gleichermaßen durchgeführt werden.

Übergang von der Action-Area in die No-Action-Area

Es wird nun aufbauend auf y_m die Fortsetzung für ein weiteres Band (a_{m+1}, b_{m+1}) oberhalb von b_m betrachtet. Dazu wird zunächst der Anfangswert $y_{m+1}^a(a+)$ für beliebiges $a > b_m$ bestimmt. y_{m+1}^a ist in der ersten Komponente in a stetig, da $f_{m+1}^a(a) = V_m(a)$ gilt. In der zweiten Komponente, also für g_{m+1}^a , folgt die Stetigkeit in a daraus, dass P^Y keine Punktmassen hat. Für die höheren rechtsseitigen Ableitungen von g_{m+1}^a in a wird analog zur Bestimmung von $y_W(0)$ vorgegangen. Unter der Verwendung von (5.11) folgt für $r = 1, \dots, n$

$$g_{m+1}^a{}^{(r)}(a+) - g_{m+1}^a{}^{(r)}(a-)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{r-1} \left(f_{m+1}^a{}^{(i)}(a+) - f_{m+1}^a{}^{(i)}(a-) \right) p^{(r-1-i)}(0) \\
&= \sum_{i=1}^{r-1} \left(f_{m+1}^a{}^{(i)}(a+) - V_m^{(i)}(a) \right) p^{(r-1-i)}(0) \\
&= -p^{(r-2)}(0) + \sum_{i=1}^{r-1} f_{m+1}^a{}^{(i)}(a+) p^{(r-1-i)}(0). \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Dabei wurde zunächst verwendet, dass f_{m+1}^a bis a mit V_m übereinstimmt, wobei V_m ab b_m linear ist. Somit ist auch die dritte Komponente von y_{m+1}^a stetig in a , da $g_{m+1}^a{}'(a+) = g_{m+1}^a{}'(a-) = g_m'(a)$ gilt.

Für $r \geq 1$ erhält man unter Verwendung von (5.13) und (5.15)

$$\begin{aligned}
g_{m+1}^a{}^{(r)}(a+) &= g_m^{(r)}(a) - p^{(r-2)}(0) + \sum_{i=1}^{r-1} f_{m+1}^a{}^{(i)}(a+) p^{(r-1-i)}(0) \\
&= g_m^{(r)}(a) - p^{(r-2)}(0) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{r-1} \left(\left(\frac{\lambda + \delta}{c} \right)^i f_{m+1}^a(a+) - \frac{\lambda}{c} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{\lambda + \delta}{c} \right)^{(i-1-j)} g_{m+1}^a{}^{(j)}(a+) \right) p^{(r-1-i)}(0).
\end{aligned}$$

Dies liefert eine Rekursion für die Komponenten von $y_m^a(a+)$, wobei die ersten beiden Komponenten gegeben sind durch $f_m^a(a+) = f_m^a(a-) = V_m(a)$ und $g_m^a(a+) = g_m^a(a-) = g_m(a)$.

Somit ist die Lösung y_{m+1}^a der Differentialgleichung (5.12) für $x \geq a$ mit Anfangswert $y_{m+1}^a(a+)$ gegeben durch

$$y_{m+1}^a(x) = \exp(A(x-a)) y_{m+1}^a(a+), \quad x \geq a.$$

Zu einem konkreten Band (a_{m+1}, b_{m+1}) ergibt sich der Anfangswert für y_{m+1} wie folgt. Die Rekursion erfolgt analog, allerdings beginnend mit

$$V_{m+1}(a_{m+1}+) = \frac{1 - f_{m+1}^a{}'(b_{m+1})}{W^{(\delta)'(b_{m+1} - a_{m+1})}} W^{(\delta)}(0) + f_{m+1}^a(a),$$

gemäß (3.33). Die Komponenten der Differenz $y_{m+1} - y_{m+1}^a$ erfüllen demnach die gleiche Rekursion wie die Komponenten von $y_W(0)$, allerdings beginnend mit $V_{m+1}(a_{m+1}+) - V_m(a_{m+1}) = \frac{1 - f_{m+1}^a{}'(b_{m+1})}{W^{(\delta)'(b_{m+1} - a_{m+1})}} W^{(\delta)}(0)$. Somit folgt

$$y_{m+1}(a_{m+1}+) = \frac{1 - f_{m+1}^a{}'(b_{m+1})}{W^{(\delta)'(b_{m+1} - a_{m+1})}} y_W(0) + y_{m+1}^a(a_{m+1}+).$$

Folglich ist die Lösung y_{m+1} der Differentialgleichung (5.12) für $x \geq a_{m+1}$ mit Anfangswert $y_{m+1}^a(a_{m+1}+)$ gegeben durch

$$y_{m+1}(x) = \exp(A(x - a_{m+1}))y_{m+1}(a_{m+1}+), \quad a_{m+1} \leq x < b_{m+1}.$$

Soll das nächste Band innerhalb von Algorithmus 3.7 je optimal gewählt werden, so gilt

$$a_{m+1} = \min \left\{ a > b_m : \min_{x>a} e_1^T A \exp(A(x - a)) y_{m+1}^a(a+) = 1 \right\},$$

$$b_{m+1} = \max \left\{ b > a_{m+1} : e_1^T A \exp(A(b_{m+1} - a_{m+1})) y_{m+1}^{a_{m+1}}(a_{m+1}+) = 1 \right\}.$$

In diesem Fall unterscheiden sich entsprechend $y_{m+1}(a_{m+1}+)$ und $y_{m+1}^{a_{m+1}}(a_{m+1}+)$ nicht. Die ersten drei Komponenten von y_{m+1} sind demnach in a_{m+1} stetig. Der Übergang in b_{m+1} ist ebenso glatter, da hier $V_{m+1}''(b_{m+1}+) = V_{m+1}''(b_{m+1}-) = 0$ gilt. Folglich ist sogar g_{m+1}''' in b_{m+1} stetig. Unstetigkeiten können daher in diesem Fall erst ab der fünften Komponente von $y_{m+1}(b_{m+1})$ auftreten. Dies gilt bereits für den Übergang in b_0 , sofern es sich um ein inneres Minimum handelt, d.h nicht um das Randminimum $b_0 = 0$.

5.4 Beispiele und Implikationen

Für die folgenden Beispiele ist der in 3.1.2 vorgestellte Algorithmus 3.7 in MATLAB implementiert. Die numerische Suche der optimalen Bandgrenzen ist anhand der Ergebnisse aus Kapitel 4 vereinfacht. Zur Lösung der *IDG* respektive der linearen Fortsetzung sind die in Abschnitt 5.2 vorgestellten Matrixexponentiale verwendet. Die Übergänge in den Bandgrenzen sind gemäß den Ergebnissen aus Abschnitt 5.3 ermittelt. Der jeweils zu betrachtende Kapitelbereich $\left[0, \frac{\lambda c}{\delta(\lambda + \delta)}\right]$ ist durch ein äquidistantes Gitter unterteilt. Um die Verlässlichkeit der numerischen Umsetzung zu überprüfen, sind die Berechnungen für die verschiedenen Schrittweiten 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} und 10^{-4} durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen, dass sich die ermittelten optimalen Bandgrenzen jeweils um die $(j - 1)$ -te Kommastelle bei der Verfeinerung von 10^{j-1} auf 10^j stabilisieren.

Als Schadenhöhenverteilung werden im Einzelnen die folgenden Fälle betrachtet.

1. Eine geometrische Summenverteilung zu einer Faltung zweier Exponentialverteilungen

$$P^Y = SV(\text{geo}(\gamma), \text{Exp}(\beta_1) * \text{Exp}(\beta_2))$$

mit Darstellung

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \gamma\beta_1 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

2. Eine Erlangverteilung $P^Y = \text{Erl}(\beta, 2)$ mit Darstellung

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\beta & \beta \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

3. Eine Mischung von zwei Erlangverteilungen je mit Skalenparameter 2

$$P^Y = \gamma \text{Erl}(\beta_1, 2) + (1 - \gamma) \text{Erl}(\beta_2, 2)$$

mit Darstellung

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ 1 - \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

4. Eine Mischung von drei Erlangverteilungen mit Skalenparameter 2, 3 bzw. 4

$$P^Y = \gamma_1 \text{Erl}(\beta_1, 2) + \gamma_2 \text{Erl}(\beta_2, 3) + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \text{Erl}(\beta_3, 4)$$

mit Darstellung

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 - \gamma_1 - \gamma_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_3 & \beta_3 \end{pmatrix}.$$

Anstelle einer absoluten Festlegung der Prämienrate c wird im Folgenden der Sicherheits-

zuschlag ρ gemäß dem Nettoprämienprinzip verwendet. Es gilt also $\frac{1}{1+\rho} = \frac{\lambda\mu}{c}$ mit $\mu = E[Y]$. Die übrigen Modellparameter werden absolut festgelegt. Für den Diskontfaktor δ und die Schadenintensität λ spielt jedoch nur das Verhältnis $\nu = \frac{\lambda}{\lambda+\delta}$ eine Rolle. Dies wird in Kapitel 6 erneut aufgegriffen und in Anhang A genauer erläutert.

Die Abbildungen 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4 illustrieren anhand ausgewählter Parameter die sukzessive Bestimmung der optimalen Bandstrategie gemäß Algorithmus 3.7. So wird zunächst b_0 als der Minimierer der Ableitung f'_0 der Skalenfunktion bestimmt.

In den Beispielen wird ρ variiert, wobei alle anderen Parameter und die Schadenhöhenverteilung je beibehalten werden. Man erkennt in allen Beispielen, dass das globale Minimum innerhalb der lokalen Minima wechseln kann und sich die Anzahl der Bänder in Konsequenz ändert.

Sofern das Integro-Differential ΔV^π für die Barrierenstrategie nichtpositiv bleibt, ist die Barriere bereits optimal. Andernfalls wird jeweils sukzessive das nächste Band bestimmt und wiederum das zugehörige Integro-Differential auf Nichtpositivität überprüft.

Die Grafiken illustrieren zudem die Ergebnisse aus Kapitel 4 zur Lokalisierung der Bänder. So erkennt man zum einen, dass die oberen Bandgrenzen b_m gemäß (4.11) jeweils im Bereich $\Theta_m = \{x \geq 0 : \Delta V_{m-1}(x) > 0\}$ liegen. Zum anderen erkennt man die Antitonie der Mengen Θ_m gemäß (4.20). Anhand von ΔV^π für die Alles-muss-raus-Strategie, bzw. anhand von Θ_0 , lässt sich somit schon ein recht präziser Eindruck über die optimale Strategie gewinnen.

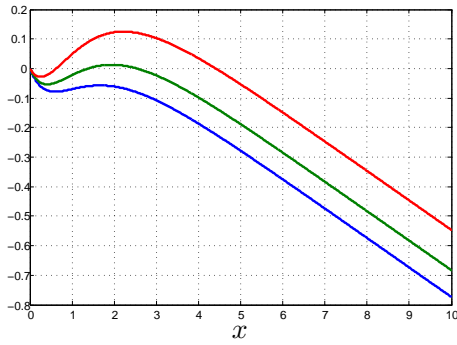
In den betrachteten Beispielen ist jeweils zu beobachten, dass die positiven Maxima des Integro-Differentials ΔV^π durch die hinzukommenden Bänder eliminiert werden. Folglich könnte man daraus schließen, dass die Anzahl der positiven Maxima des Integro-Differentials zur Alles-muss-raus-Strategie eine Obergrenze für die Anzahl der Bänder darstellen könnte. Ein analytischer Beweis ist jedoch bislang nicht gelungen. Ebenso sind schwächere Forderungen in Form der Krümmung des Integro-Differentials denkbar.

Die Abbildungen 5.5, 5.6, 5.7 und 5.8 zeigen für die verschiedenen Schadenhöhenverteilungen und Modellparameter die optimalen Bandgrenzen, welche anhand von Algorithmus 3.7 berechnet wurden, in Abhängigkeit von ρ . Die Übergänge der Bandstrategien verdeutlichen die Ergebnisse aus Abschnitt 4.5, insbesondere zur Thematik zusammenfallender Bandgrenzen.

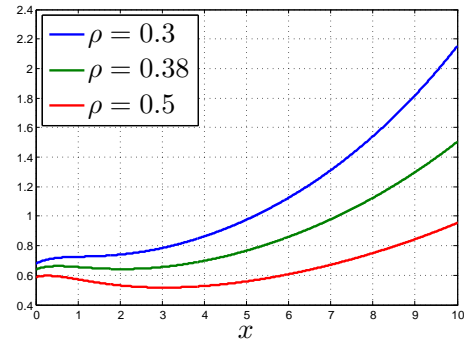
Für die geometrische Summenverteilung, die Erlangverteilung sowie die Mischung der Erlangverteilung mit Skalenparameter 2 zeigt sich für die ausgewählten Parameter, dass es entweder ein oder zwei lokale Minima der Ableitung der Skalenfunktion gibt. Für kleines ρ wird das globale Minimum im kleineren Minimierer angenommen. So ist zunächst

für kleine Werte von ρ eine Barrierenstrategie in diesem kleineren Minimierer optimal. Für größer werdendes ρ findet ein Übergang zu einer Zweibandstrategie statt. Das Band entsteht dabei aus einem Punkt. Technisch gesehen berührt in diesem Punkt das Integro-Differential gerade die Null. Die Bandgrenzen a_1 und b_1 entfernen sich im Verlauf weiter voneinander, so dass sich das Band immer weiter ausdehnt. Für die ersten drei Schadenhöhenverteilungen kommt kein weiteres Band hinzu. Die untere Bandgrenze a_1 konvergiert gegen b_0 . Die obere Bandgrenze b_1 konvergiert gegen den Minimierer des zweiten lokalen Minimums. In diesem Übergang von der Zweibandstrategie zurück zu einer Barrierenstrategie stimmen die beiden lokalen Minima miteinander überein. Die Zweibandstrategie mit zusammenfallenden Bandgrenzen $b_0 = a_0 < b_1$ hat hier den gleichen Wert wie die Barrierenstrategie in b_1 . Für größere Werte von ρ entspricht das globale Minimum dem zweiten lokalen Minimum und die Barrierenstrategie ist optimal.

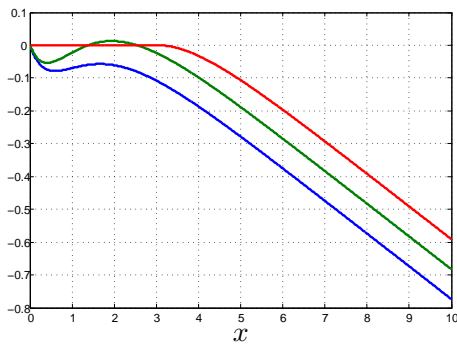
Für die betrachtete Mischung von Erlangverteilungen verschiedener Skalenparameter erhält man teilweise sogar drei lokale Minima der Ableitung der Skalenfunktion und der eben beschriebene Effekt ist zweifach zu beobachten. So erhält man für kleines ρ die Optimalität einer Barrierenstrategie, wobei das globale Minimum mit dem ersten lokalen Minimum zusammenfällt. Anschließend dehnt sich ein Band zum zweiten lokalen Minimum aus. Parallel hierzu taucht jedoch ein weiteres Band auf, welches sich im weiteren Verlauf bis zum dritten lokalen Minimum ausdehnt. So erhält man indessen erstmalig die Optimalität einer Dreibandstrategie für eine absolut stetige Schadenhöhenverteilung im hiesigen Modellrahmen. Für größeres ρ verschwindet zunächst das untere und anschließend das obere Band, bis schließlich eine Barrierenstrategie optimal ist.



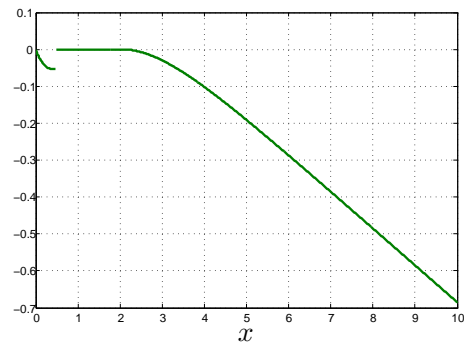
(i) ΔV^π für die Alles-muss-raus-Strategie



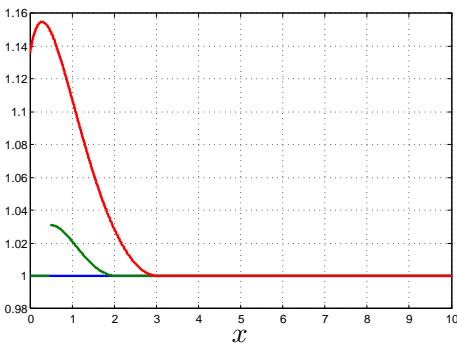
(ii) Ableitung f'_0 der Skalenfunktion



(iii) ΔV^π für die Barrierenstrategie



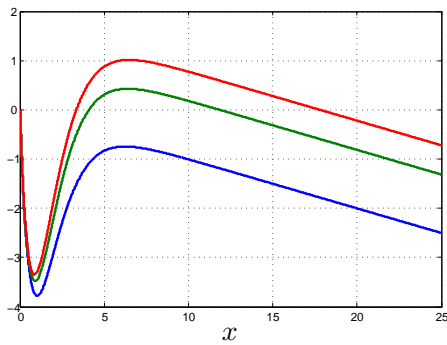
(iv) ΔV^π für die Zweibandstrategie



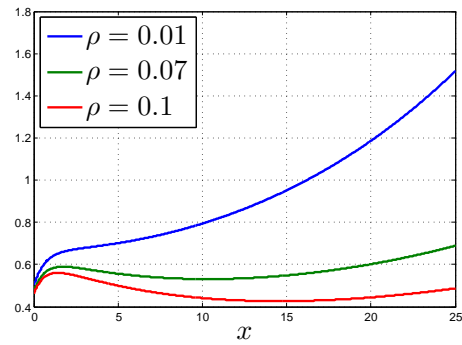
(v) Ableitung V' der Wertfunktion

Abbildung 5.1: f'_0 , ΔV^π und V' für eine geometrische Summenverteilung

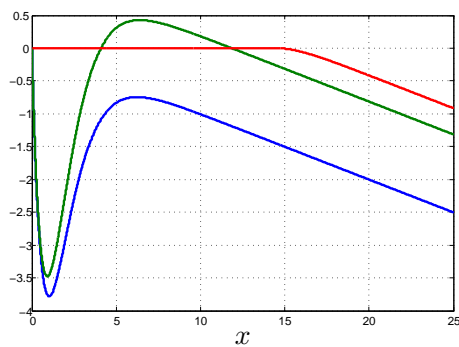
Die Grafik zeigt die numerische Auswertung von f'_0 , ΔV^π für die sukzessiven Strategien π im Algorithmus 3.7 sowie V' . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = SV(\text{geo}(\gamma), \text{Exp}(\beta_1) * \text{Exp}(\beta_2))$ mit $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$, $\delta = 10\%$ und $\rho \in \{30\%, 38\%, 50\%\}$. Für $\rho = 30\%$ ist die Alles-muss-raus-Strategie optimal. Für $\rho = 38\%$ erhält man die entartete Zweibandstrategie mit $b_0 = 0$, $a_1 = 0.48$ und $b_1 = 2.06$. Für $\rho = 50\%$ erhält man eine Barrierenstrategie mit $b_0 = 3.05$.



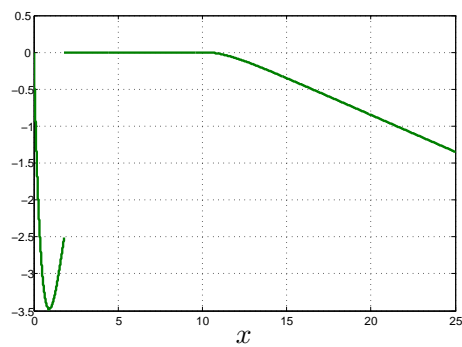
(i) ΔV^π für die Alles-muss-raus-Strategie



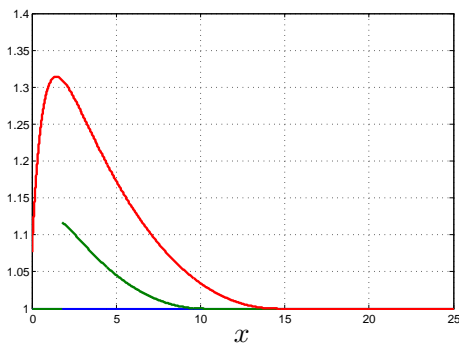
(ii) Ableitung f'_0 der Skalenfunktion



(iii) ΔV^π für die Barrierenstrategie



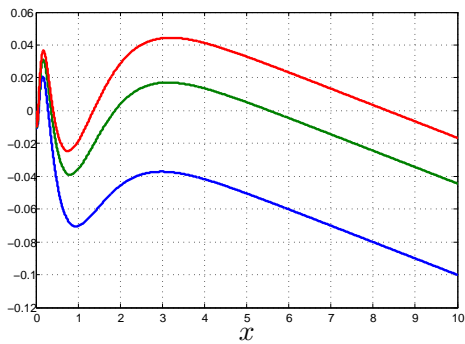
(iv) ΔV^π für die Zweibandstrategie



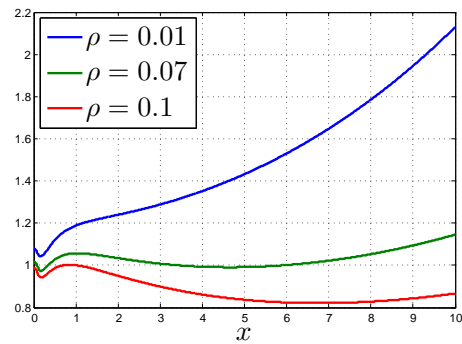
(v) Ableitung V' der Wertfunktion

Abbildung 5.2: f'_0 , ΔV^π und V' für eine Erlangverteilung

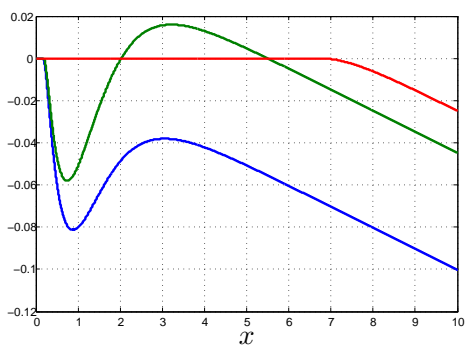
Die Grafik zeigt die numerische Auswertung von f'_0 , ΔV^π für die sukzessiven Strategien π im Algorithmus 3.7 sowie V' . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \text{Erl}(\beta, 2)$ mit $\beta = 1$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 10$, $\delta = 10\%$ und $\rho \in \{1\%, 7\%, 10\%\}$. Für $\rho = 1\%$ ist die Alles-muss-raus-Strategie optimal. Für $\rho = 7\%$ erhält man die entartete Zweibandstrategie mit $b_0 = 0$, $a_1 = 1.8$ und $b_1 = 10.22$. Hierbei handelt es sich gerade um das Beispiel von Azcue und Muler (2005). Für $\rho = 10\%$ erhält man eine Barrierenstrategie mit $b_0 = 14.55$.



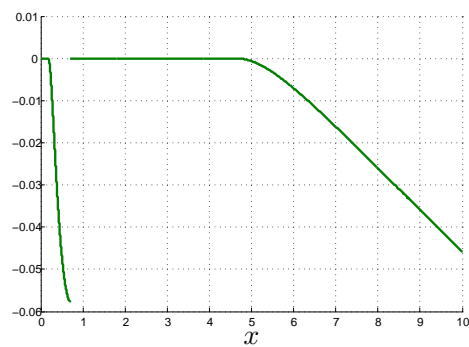
(i) ΔV^π für die Alles-muss-raus-Strategie



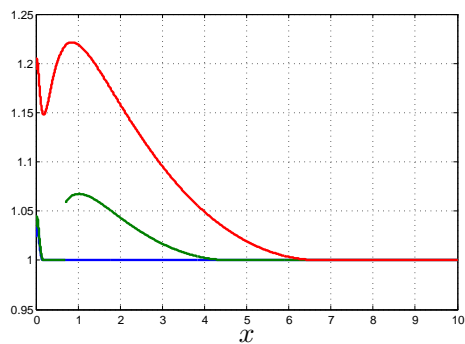
(ii) Ableitung f'_0 der Skalenfunktion



(iii) ΔV^π für die Barrierenstrategie



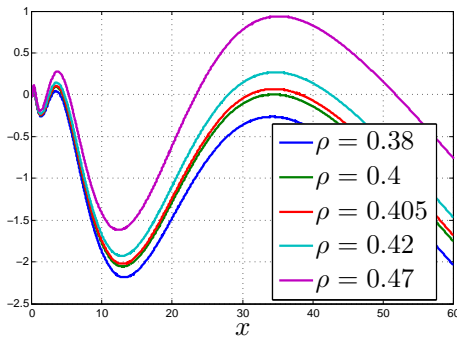
(iv) ΔV^π für die Zweibandstrategie



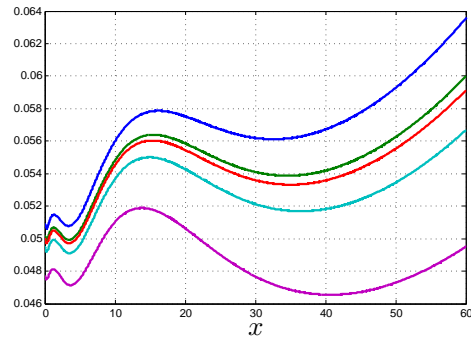
(v) Ableitung V' der Wertfunktion

Abbildung 5.3: f'_0 , ΔV^π und V' für eine Mischung von zwei Erlangverteilungen gleichen Skalenparameters

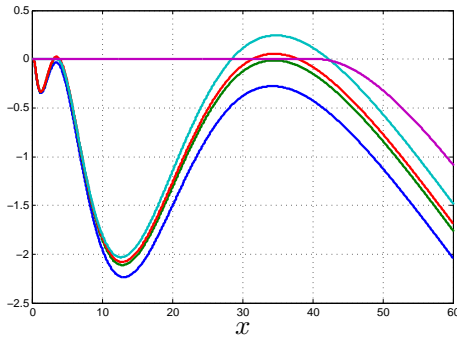
Die Grafik zeigt die numerische Auswertung von f'_0 , ΔV^π für die sukzessiven Strategien π im Algorithmus 3.7 sowie V' . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \gamma \text{Erl}(\beta_1, 2) + (1 - \gamma) \text{Erl}(\beta_2, 2)$ mit $\beta_1 = \frac{7}{4}$, $\beta_2 = \frac{35}{2}$ und $\gamma = \frac{4}{5}$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$, $\delta = 1\%$ und $\rho \in \{1\%, 7\%, 10\%\}$. Für $\rho = 1\%$ ist eine Barrierenstrategie mit $b_0 = 0.17$ optimal. Für $\rho = 7\%$ erhält man eine Zweibandstrategie mit $b_0 = 0.18$, $a_1 = 0.70$ und $b_1 = 4.66$. Für $\rho = 10\%$ erhält man eine Barrierenstrategie mit $b_0 = 6.77$.



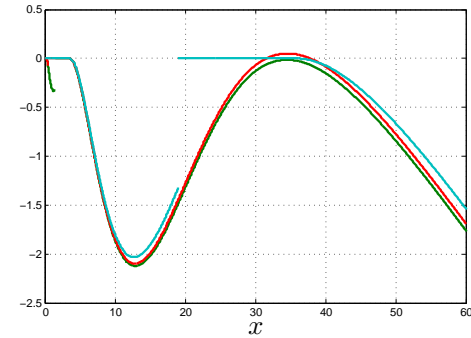
(i) ΔV^π für die Alles-muss-raus-Strategie



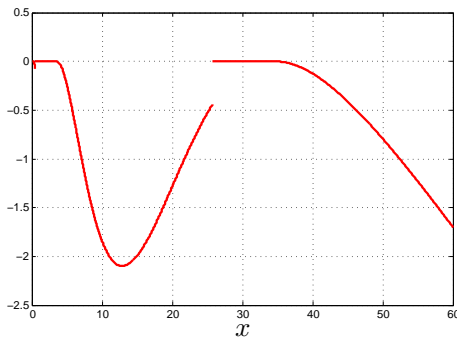
(ii) Ableitung f'_0 der Skalenfunktion



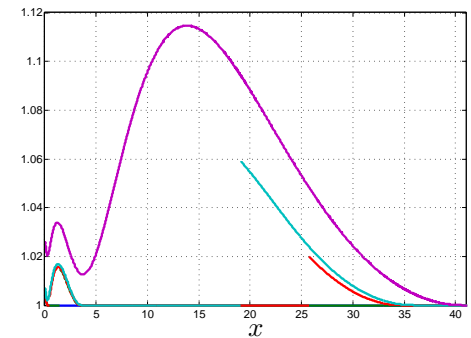
(iii) ΔV^π für die Barrierenstrategie



(iv) ΔV^π für die Zweibandstrategie



(v) ΔV^π für die Dreibandstrategie



(vi) Ableitung V' der Wertfunktion

Abbildung 5.4: f'_0 , ΔV^π und V' für eine Mischung von drei Erlangverteilungen verschiedener Skalenparameter

Die Grafik zeigt die numerische Auswertung von f'_0 , ΔV^π für die sukzessiven Strategien π im Algorithmus 3.7 sowie V' . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \gamma_1 \text{Erl}(\beta_1, 2) + \gamma_2 \text{Erl}(\beta_2, 3) + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \text{Erl}(\beta_3, 4)$ mit $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0.2$, $\gamma_1 = 0.025$ und $\gamma_2 = 0.225$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$, $\delta = 10\%$ und $\rho \in \{38\%, 40\%, 40.5\%, 42\%, 47\%\}$. Für $\rho = 38\%$ ist eine Barrierenstrategie mit $b_0 = 0.26$ optimal. Für $\rho = 40\%$ erhält man eine Zweibandstrategie mit $b_0 = 0.26$, $a_1 = 1.45$ und $b_1 = 3.51$. Für $\rho = 40.5\%$ erhält man eine Dreibandstrategie mit $b_0 = 0.26$, $a_1 = 0.79$, $b_1 = 3.52$, $a_2 = 26.60$ und $b_2 = 34.74$. Für $\rho = 42\%$ erhält man eine Zweibandstrategie mit $b_0 = 3.57$, $a_1 = 19.03$ und $b_1 = 35.94$. Für $\rho = 47\%$ ist eine Barrierenstrategie mit $b_0 = 40.60$ optimal.

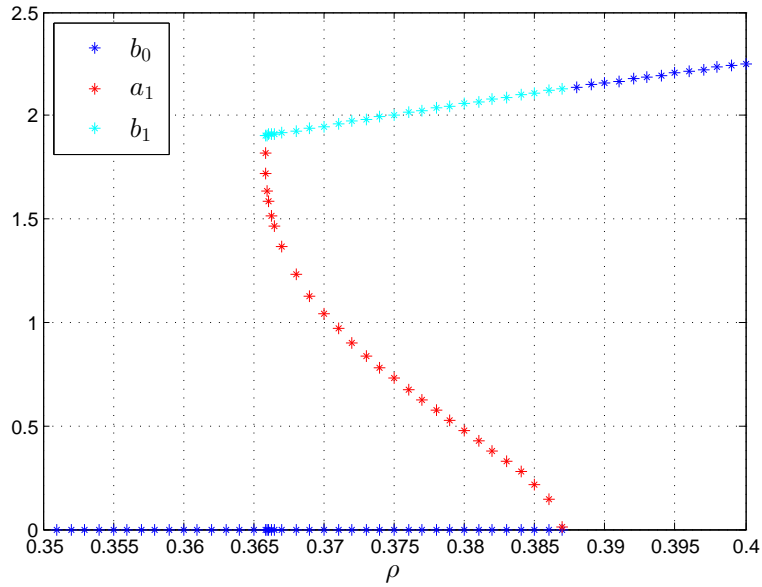


Abbildung 5.5: Optimale Bandgrenzen zu einer geometrischen Summenverteilung

Die Grafik zeigt die optimalen Bandgrenzen in Abhängigkeit von ρ . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = SV(\text{geo}(\gamma), \text{Exp}(\beta_1) * \text{Exp}(\beta_2))$ mit $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$ und $\delta = 10\%$.

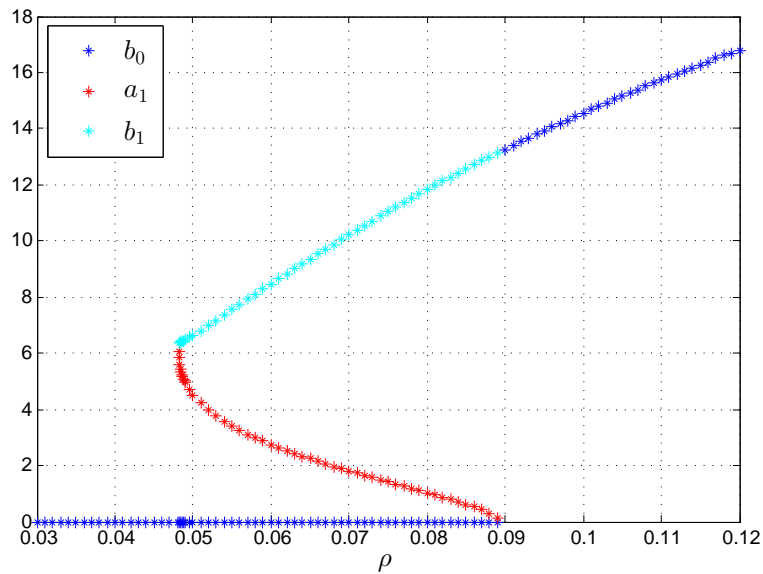


Abbildung 5.6: Optimale Bandgrenzen zu einer Erlangverteilung

Die Grafik zeigt die optimalen Bandgrenzen in Abhängigkeit von ρ . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \text{Erl}(\beta, 2)$ mit $\beta = 1$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 10$ und $\delta = 10\%$.

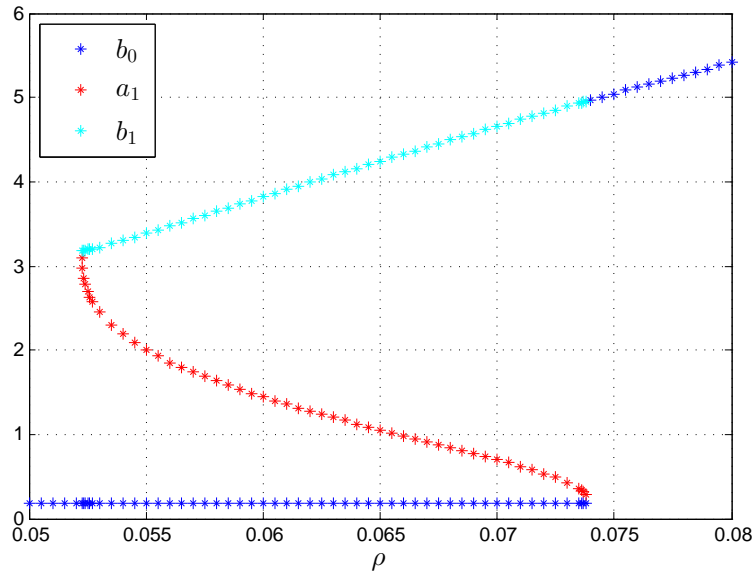


Abbildung 5.7: Optimale Bandgrenzen zu einer Mischung von zwei Erlangverteilungen gleichen Skalenparameters

Die Grafik zeigt die optimalen Bandgrenzen in Abhängigkeit von ρ . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \gamma \text{Erl}(\beta_1, 2) + (1 - \gamma) \text{Erl}(\beta_2, 2)$ mit $\beta_1 = \frac{7}{4}$, $\beta_2 = \frac{35}{2}$ und $\gamma = \frac{1}{2}$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$ und $\delta = 1\%$.

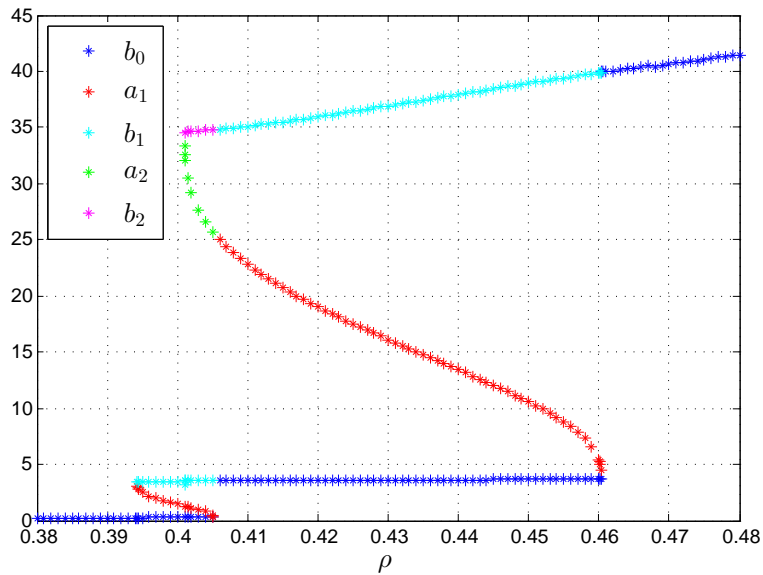


Abbildung 5.8: Optimale Bandgrenzen zu einer Mischung von drei Erlangverteilungen verschiedener Skalenparameter

Die Grafik zeigt die optimalen Bandgrenzen in Abhängigkeit von ρ . Die Schadenhöhenverteilung ist gegeben durch $P^Y = \gamma_1 \text{Erl}(\beta_1, 2) + \gamma_2 \text{Erl}(\beta_2, 3) + (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \text{Erl}(\beta_3, 4)$ mit $\beta_1 = 10$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0.2$, $\gamma_1 = 0.025$ und $\gamma_2 = 0.225$. Die Modellparameter sind gegeben durch $\lambda = 1$ und $\delta = 10\%$.

Kapitel 6

Einpunktverteilungen

In diesem Kapitel wird der Fall konstanter Schäden der Höhe $M > 0$ betrachtet. Die Schadenhöhenverteilung P^Y ist somit die Einpunktverteilung δ_M . Gerber (1969) betrachtet diese Schadenhöhenverteilung bei der Untersuchung des Verhaltens der Wertfunktion für große Zinsintensitäten. So gelingt ihm die Herleitung einer unteren Schranke für die Zinsintensität δ , so dass die Alles-muss-raus-Strategie für alle Zinsintensitäten optimal ist, welche diese Schranke nicht unterschreiten. Des Weiteren kommt er zum Schluss, dass die Alles-muss-raus-Strategie zumindest für nur wenig kleinere Zinsintensitäten von einer Strategie mit den Bandgrenzen $\{b_0 = 0 < a_1 < b_1 = M\}$ abgelöst wird. Sonstige Erkenntnisse zu diesem zunächst einfach erscheinenden Fall sind bislang nicht bekannt.

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich der Wert einer beliebigen endlichen Bandstrategie konkret berechnen lässt. Es wird sich zeigen, dass Algorithmus 3.7 sowie auch die Darstellung mittels Gerber-Shiu-Funktionen in Abschnitt 3.2 weitestgehend übernommen werden können. Die Singularität der Schadenhöhenverteilung muss allerdings jeweils explizit berücksichtigt werden und führt entsprechend zu Modifikationen in den bisher betrachteten Zusammenhängen für stetige Verteilungsfunktionen.

Innerhalb dieses Kapitels eignet sich wie bereits in den Beispielen im vorangegangenen Kapitel die Verwendung der relativen Parameter ρ und ν anstelle von λ, c und δ .¹

$$\frac{1}{1+\rho} = \frac{\lambda\mu}{c}, \quad \nu = \frac{\lambda}{\lambda+\delta},$$

mit $\mu = E[Y]$. Wie bereits erwähnt, stellt ρ den Sicherheitszuschlag dar. Somit ist $\frac{1}{1+\rho}$ gerade die Ruinwahrscheinlichkeit des klassischen Risikoreserveprozesses X ohne Dividendenzahlungen zu Startkapital 0. ν ist der erwartete Barwert des ersten Schadenein-

¹Im Anhang A wird erläutert, wie sich durch Variation der Zeit- und Geldeinheit die Parameter reduzieren lassen.

trittszeitpunktes, bzw. allgemein der erwartete Barwert der Verweildauer zwischen zwei Schäden.

$$E[e^{-\delta T_1}] = \int_0^{\infty} \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} = \nu.$$

Für die hier betrachtete Einpunktverteilung gilt trivialerweise $\mu = M$. Zur vollständigen Identifikation der Parameterkonstellation wird in Ergänzung zu ρ und ν auch weiterhin der Parameter M verwendet. Man kann ihn als Skalierung der Geldeinheit auffassen, indem sämtliche Kapitalgrößen in Vielfachen des Einheitsschadens ausgedrückt werden.²

6.1 Die Differenzen-Differentialgleichung und die Skalenfunktion

Für die Einpunktverteilung δ_M ist das Integral $\int_0^{\infty} f(x-y)dP^Y(y)$ für eine messbare Funktion f schlicht durch $f(x-M)$ gegeben. Die Integro-Differentialgleichung wird somit zu einer Differenzen-Differentialgleichung

$$(1 + \rho)\nu M f'(x) + \nu f(x - M) - f(x) = 0. \quad (DDG)$$

Zur weiteren Notation wird hierzu der Operator Γ eingeführt, welcher eine hinreichend glatte Funktion f auf das Differenzen-Differential

$$\Gamma f(x) = (1 + \rho)\nu M f'(x) + \nu f(x - M) - f(x)$$

abbildet. Es gilt also $\Gamma f = \frac{1}{\lambda+\delta}\Lambda f$. Bei der *DDG* wird somit eine andere Normierung als bei der bisherigen *IDG* verwendet, um so die Parametrisierung durch ρ , ν und M zu ermöglichen. Die *HJB* für die Wertfunktion V kann demnach wie folgt formuliert werden

$$\max\{(1 + \rho)\nu M V'(x) + \nu V(x - M) - V(x), 1 - V'(x)\} = 0. \quad (6.1)$$

Bildet man die Laplace-Transformierte auf beiden Seiten der *DDG* mit der zusätzlichen Annahme $f(x) = 0$ für $x < 0$, so erhält man durch Auflösen die folgende geschlossene Form für \widehat{f}

$$\widehat{f}(s) = \frac{(1 + \rho)\nu M f(0)}{(1 + \rho)\nu M s + \nu e^{-sM} - 1}. \quad (6.2)$$

²Siehe ebenfalls Anhang A.

Im Folgenden wird die Lösung f_0 der DDG mit Anfangswert $f_0(0) = 1$ und $f_0(x) = 0$ für $x < 0$ verwendet. f_0 ist daher die Normierung der Skalenfunktion $W^{(\delta)}$ mit dem Faktor $W^{(\delta)}(0) = \frac{1}{c}$. f_0 wird nun explizit bestimmt. Dazu betrachtet man zunächst Startkapital $x \in [0, M)$. Folglich gilt $f_0(x - M) = 0$ und die DDG vereinfacht sich zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(1 + \rho)\nu M f'(x) = f(x), \quad 0 \leq x < M.$$

Man erhält entsprechend $f_0(x) = \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right)$ für $0 \leq x < M$.³ Somit kennt man $f_0(x - M)$ für $x \in [M, 2M)$ und die DDG lässt sich hier ebenso lösen. Rekursiv lässt sich so f_0 auf den Intervallen $[0, M)$, $[M, 2M)$, \dots , $[kM, (k+1)M)$, \dots bestimmen. Die zu beobachtende Struktur lässt auf die folgende Darstellung schließen

$$f_0(x) = \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu} \frac{x}{M}\right) \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x}{M} \rfloor} \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j \left(\frac{x - jM}{M}\right)^j. \quad (6.3)$$

Die Gültigkeit lässt sich beispielsweise durch Bestimmen der Laplace-Transformierten und einem Vergleich mit (6.2) überprüfen. Für (6.3) erhält man

$$\begin{aligned} \widehat{f}_0(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kM}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^k \left(\frac{x - kM}{M}\right)^k \exp\left(\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu} - sM\right) \frac{x}{M}\right) dx \\ &= -M \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\exp(-sM)}{(1+\rho)}\right)^k \left(\frac{1}{(1+\rho)\nu} - sM\right)^{-(k+1)} \\ &= -M \left(\frac{1}{(1+\rho)\nu} - sM\right)^{-1} \frac{1}{1 - \frac{1}{(1+\rho)} \exp(-sM) \frac{1}{(1+\rho)\nu - sM}} \end{aligned}$$

und folglich gerade (6.2). Aus der Eindeutigkeit von Laplace-Transformierten folgt die Gültigkeit von (6.3). Offenbar ist f_0 auf $(0, \infty)$ stetig. Dies ist auch bereits theoretisch durch Proposition und Definition 2.7 gegeben. Zur Bestimmung des Werts einer Barrierestrategie wird weiter die erste Ableitung der (normierten) Skalenfunktion benötigt. Es gilt

$$f_0'(x) = \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right) \left(\frac{1}{(1+\rho)\nu M} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x}{M} \rfloor} \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j \left(\frac{x - jM}{M}\right)^j\right)$$

³Die Form $f_0(x) = \exp\left(\frac{(\lambda+\delta)x}{c}\right) = \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right)$ für $x < M$ erhält man grundsätzlich für alle Schadenhöhenverteilungen mit $P^Y\{[0, M)\} = 0$, da in diesem Fall $\int_0^{\infty} f(x-y) dP^Y(y) = 0$ für alle $x < M$ gilt.

$$+ \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{x}{M} \rfloor} \frac{1}{(j-1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \left(\frac{x-jM}{M} \right)^{j-1}. \quad (6.4)$$

In den k -Vielfachen von M für $k = 1, 2, \dots$ erhält man von links bzw. rechts

$$\begin{aligned} f'_0(kM-) &= \exp\left(\frac{k}{(1+\rho)\nu}\right) \left(\frac{1}{(1+\rho)\nu M} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \right)^j (k-j)^j \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(j-1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j (k-j)^{j-1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f'_0(kM+) &= \exp\left(\frac{k}{(1+\rho)\nu}\right) \left(\frac{1}{(1+\rho)\nu M} \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \right)^j (k-j)^j \\ &\quad + \frac{1}{M} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(j-1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j (k-j)^{j-1}. \end{aligned}$$

Die Differenz ist daher gegeben durch

$$f'_0(kM+) - f'_0(kM-) = \frac{1}{M} \left(-\frac{1}{1+\rho} \right)^k \left(\frac{0^k}{(1+\rho)\nu k!} + \frac{0^{k-1}}{(k-1)!} \right).$$

Dies liefert die Stetigkeit von f'_0 auf $(0, \infty) \setminus \{M\}$. Folglich ist V^π für alle Barrierenstrategien, abgesehen von der Wahl $b_0 = M$, differenzierbar. Dies ist auch bereits durch Lemma 2.13 gegeben. Konkret gilt hier

$$f'_0(M+) = \frac{1}{(1+\rho)M} \left(\frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - 1 \right) = f'_0(M-) - \frac{1}{(1+\rho)M}.$$

Unter Verwendung von Lemma 2.13 erhält man gerade für den Wert der Barrierenstrategie π in $b_0 = M$

$$\begin{aligned} V^{\pi'}(M-) &= 1 + \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(0) \\ &= 1 + \frac{1}{(1+\rho)M} \frac{1}{f'_0(M+)} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - 1 \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dies folgt schlussendlich auch durch die direkte Berechnung

$$V^{\pi'}(M-) = \frac{f'_0(M-)}{f'_0(M+)} = \frac{\frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)}{\frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - 1}.$$

Um b_0 optimal zu wählen, muss das globale Minimum von $f'_0(x)$ bestimmt werden. Hierzu kann die zweite Ableitung herangezogen werden. Es gilt

$$\begin{aligned} f''_0(x) &= \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right) \left(\frac{1}{((1+\rho)\nu M)^2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x}{M} \rfloor} \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \left(\frac{x-jM}{M} \right)^j \right. \\ &\quad + 2 \frac{1}{(1+\rho)\nu M} \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{x}{M} \rfloor} \frac{1}{(j-1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \left(\frac{x-jM}{M} \right)^{j-1} \\ &\quad \left. + \frac{1}{M^2} \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{x}{M} \rfloor} \frac{1}{(j-2)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \left(\frac{x-jM}{M} \right)^{j-2} \right). \end{aligned}$$

In den k -Vielfachen von M für $k = 1, 2, \dots$ erhält man

$$f''_0(kM+) - f''_0(kM-) = \frac{1}{M^2} \left(-\frac{1}{1+\rho} \right)^k \left(\frac{0^k}{(1+\rho)^2 \nu^2 k!} + 2 \frac{0^{k-1}}{(1+\rho)\nu(k-1)!} + \frac{0^{k-2}}{(k-2)!} \right).$$

Somit erhält man die Stetigkeit von f''_0 auf $(0, \infty) \setminus \{M, 2M\}$. In M bzw. $2M$ gilt $f''_0(M+) - f''_0(M-) = -\frac{2}{M^2(1+\rho)^2\nu}$ und $f''_0(2M+) - f''_0(2M-) = \frac{1}{M^2(1+\rho)^2}$. Die potentiellen Kandidaten für die Minima der ersten Ableitung und somit für die Wahl eines optimalen b_0 sind daher eingeschränkt durch

$$b_0^* \in \{0, M, 2M\} \cup \{x > 0 : f''_0(x) = 0\}.$$

6.2 Der Wert einer endlichen Bandstrategie

Für ein $m \in \mathbb{N}$ sei π die Bandstrategie mit Bandgrenzen $0 \leq b_0 \leq a_1 < b_1 \leq \dots \leq a_m < b_m < \infty$, d.h.

$$\mathcal{B}_0 = [0, b_0] \cup \bigcup_{j=1}^m (a_j, b_j), \quad \mathcal{B}_c = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{b_m\}, \quad \mathcal{B}_\infty = \bigcup_{j=0}^{m-1} (b_j, a_{j+1}] \cup (b_m, \infty).$$

Ausgehend von $V^\pi(x)$ für $x \leq a_m$ wird im Folgenden der Wert für Kapital $x \in (a_m, b_m)$ bestimmt. Dabei wird unterschieden, ob die Bandbreite $b_m - a_m$ mit M übereinstimmt oder nicht.

Bandbreite $b_m - a_m \neq M$

Sofern $b_m - a_m \neq M$ gilt, kann die probabilistische Argumentation aus Abschnitt 3.2.2 analog durchgeführt werden, um eine Darstellung von V^π mittels Gerber-Shiu-Funktionen zu erhalten. Wie für den Fall stetiger Verteilungsfunktion wird der erwartete Dividendenbarwert für Kapital $x \in (a_m, b_m]$ in Dividenden bis und ab $\xi = \inf \{t > 0 : X_t^\pi < a_m | X_0 = x\}$ unterteilt, siehe (3.28)

$$V^\pi(x) = E \left[\int_0^\xi e^{-\delta t} dD_t^\pi \middle| X_0 = x \right] + E \left[\int_\xi^{\tau^\pi} e^{-\delta t} dD_t^\pi \middle| X_0 = x \right]. \quad (6.5)$$

Mit (2.5) und (3.25) folgt für $x \in (a_m, b_m]$

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= E \left[\int_0^{\tau^\beta} e^{-\delta t} dD_t^\beta \middle| X_0 = x - a_m \right] + E \left[e^{-\delta \tau^\beta} V^\pi(X^\beta(\tau^\beta) + a_m) \middle| X_0 = x - a_m \right] \\ &= V^\beta(x - a_m) + \Phi_{w_m}^\beta(x - a_m) \\ &= (1 - F'_w((b_m - a_m)_+)) \frac{W^{(\delta)}(x - a_m)}{W^{(\delta)'(b_m - a_m)}} + F_w(x - a_m), \end{aligned}$$

mit der Straffunktion $w(z) = V^\pi(a_m + z)$ und der Barrierenstrategie β mit Barriere $b_m - a_m$. Für den Fall $b_m - a_m \neq M$ erhält man also gerade wieder (3.30) wie für den Fall stetiger Verteilungsfunktion P^Y .

Die Gerber-Shiu-Funktion lässt sich hier explizit ermitteln. Für eine beliebige Straffunktion w liefert (3.24)

$$F_w(x) = w(0)f_0(x) - \frac{1}{(1 + \rho)M} \int_0^x f_0(x - y)w(y)dy.$$

mit

$$w(x) = \int_x^\infty w(x - y)dP^Y(y) = \begin{cases} w(x - M), & x \leq M \\ 0, & x > M \end{cases}.$$

Somit erhält man

$$F_w(x) = w(0)f_0(x) - \frac{1}{(1 + \rho)M} \int_0^{\min\{x, M\}} f_0(x - y)w(y - M)dy,$$

mit der zugehörigen Ableitung

$$F_w'(x) = w(0)f_0'(x) - \frac{1}{(1+\rho)M} \int_0^{\min\{x,M\}} f_0'(x-y)w(y-M)dy \\ -1\{x \leq M\} \frac{1}{(1+\rho)M} w(x-M).$$

Für die Straffunktion $w(z) = V^\pi(z + a_m)$ erhält man für $x \in (a_m, b_m)$

$$F_w(x - a_m) = V^\pi(a_m)f_0(x - a_m) \\ - \frac{1}{(1+\rho)M} 1\{x > M\} \int_{(M-a_m)^+}^{\min\{x-a_m,M\}} f_0(x - a_m - y)V^\pi(y - M + a_m)dy, \\ F_w'(x - a_m) = V^\pi(a_m)f_0'(x - a_m) \\ - \frac{1}{(1+\rho)M} 1\{x > M\} \int_{(M-a_m)^+}^{\min\{x-a_m,M\}} f_0'(x - a_m - y)V^\pi(y - M + a_m)dy \\ -1\{x - a_m \leq M\} \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(x - M). \quad (6.6)$$

Zur Bestimmung der optimalen Bandgrenzen eignet sich die Auswertung von $F_w'(x - a_m)$. Hieraus lässt sich F_w auch rekursiv über (3.12) bestimmen

$$F_w(x - a_m) = (1+\rho)\nu M F_w'(x - a_m) + \nu 1\{x \geq M + a_m\} F_w(x - a_m - M) \\ + \nu 1\{M \leq x < M + a_m\} V^\pi(x - M). \quad (6.7)$$

Für $x \in (a_m, b_m)$ und $b_m - a_m \neq M$ erhält man insgesamt

$$V^\pi(x) = \left(1 + \frac{1}{(1+\rho)M} 1\{b_m > M\} \int_{(M-a_m)^+}^{\min\{b_m-a_m,M\}} f_0'(b_m - a_m - y)V^\pi(y - M + a_m)dy \right. \\ \left. + 1\{b_m - a_m \leq M\} \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(b_m - M) \right) \frac{f_0(x - a_m)}{f_0'(b_m - a_m)} \\ - \frac{1}{(1+\rho)M} 1\{x > M\} \int_{(M-a_m)^+}^{\min\{x-a_m,M\}} f_0(x - a_m - y)V^\pi(y - M + a_m)dy. \quad (6.8)$$

Für die konkrete Berechnung spielt es also eine Rolle, ob die Bandbreite $b_m - a_m$ den Einheitsschaden unter- oder überschreitet. Die Integrale können jeweils stückweise berechnet werden. Für die Skalenfunktionen sind dabei die Vielfache von M maßgeblich, für V^π

die vorangegangenen Bandgrenzen. In Kombination ergibt sich die notwendige Zerlegung der Integrale.

Bandbreite $b_m - a_m = M$

Für den Spezialfall, dass die Bandbreite $b_m - a_m$ gerade mit dem Einheitsschaden M übereinstimmt, d.h. für $b_m = a_m + M$, lässt sich die obige probabilistische Argumentation nicht direkt anwenden. Zunächst besteht für Startkapital $x \in (a_m, b_m)$ die Möglichkeit, durch die Prämieinnahmen Kapital b_m zu erreichen. Dies gilt natürlich auch für den Fall $b_m - a_m \neq M$. Nun tritt jedoch folgender Unterschied auf. Nach dem ersten Schaden in T_1 verbleibt Kapital a_m und es erfolgt eine Dividendenauszahlung. Für diesen Fall gilt insbesondere $T_1 < \xi = T_2$. Diese Dividendenauszahlung wird somit im Allgemeinen nicht durch eine Barrierenstrategie in M abgebildet.

Im Folgenden wird $V^\pi(x)$ für $x \in (a_m, a_m + M)$ unmittelbar aus $V^\pi(x)$ für $x \leq a_m$ bestimmt. Hierzu unterscheidet man wiederum, ob für Startkapital $x \in (a_m, a_m + M)$ der erste Schaden vor oder nach Erreichen von Kapital $a_m + M$ eintritt. Im ersten Fall gilt für den Schadeneintrittszeitpunkt $T_1 < \frac{a_m + M - x}{c}$ und es verbleibt nach dem Schaden ein Kapital der Höhe $x + cT_1 - M < a_m$. Der verbleibende Barwert der Dividendenzahlungen beträgt somit $V^\pi(x + cT_1 - M)$. Im zweiten Fall werden, wie eben bereits beschrieben, die Prämieinnahmen ab dem Zeitpunkt $\frac{a_m + M - x}{c}$ stetig als Dividenden ausgeschüttet und das Kapital verbleibt auf $a_m + M$. Im Schadeneintritt liefert dies somit zunächst ein Kapital von genau a_m mit direkt einsetzender Dividendenzahlung.

$$\begin{aligned}
V^\pi(x) &= \int_0^{\frac{a_m + M - x}{c}} \lambda e^{-(\lambda + \delta)t} V^\pi(x + ct - M) dt \\
&\quad + \int_{\frac{a_m + M - x}{c}}^\infty \lambda e^{-\lambda t} \left(\int_{\frac{a_m + M - x}{c}}^t e^{-\delta u} c du + e^{-\delta t} V^\pi(a_m) \right) dt \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_{x-M}^{a_m} e^{-\frac{\lambda + \delta}{c}(u + M - x)} V^\pi(u) du \\
&\quad + \left(V^\pi(a_m) + \frac{c}{\delta} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right) \right) \exp\left(-\frac{\lambda + \delta}{c}(a_m + M - x) \right) \\
&= \frac{1}{(1 + \rho)M} \int_{(x-M)^+}^{a_m} e^{-\frac{u + M - x}{(1 + \rho)\nu M}} V^\pi(u) du \\
&\quad + (\nu V^\pi(a_m) + (1 + \rho)\nu M) \exp\left(-\frac{a_m + M - x}{(1 + \rho)\nu M} \right). \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun (6.8) im Limesübergang $b_m - a_m \rightarrow M^-$, so sieht man leicht ein, dass dies gerade mit (6.9) übereinstimmt.

6.3 Die optimalen Strategien

Basierend auf den Ergebnissen der vorangegangenen Abschnitte, werden im Folgenden die optimalen Strategien untersucht. Dabei gelingt zumindest für einen Teil der Parameterkombinationen eine analytische Herleitung der Optimalität. So zeigt sich für den Fall $\mathcal{B}_0 \subset [0, M)$, dass sich der Wert V^π als eine Exponentialfunktion ausdrücken lässt. In diesem Fall gestaltet sich die Überprüfung der Optimalität einfach und es gelingt eine Charakterisierung der Optimalität in den Parametern ν und $\frac{1}{1+\rho}$. Für Bänder, welche über M hinausgehen oder erst oberhalb beginnen, ist dies aufgrund der höheren Komplexität des Werts einer solchen Strategie im Allgemeinen nicht mehr möglich. In diesen Fällen ist eine numerische Überprüfung notwendig. Allerdings lassen sich die möglichen Bereiche der Bänder auch hier mittels analytischer Vergleiche genauer eingrenzen. Um die Verlässlichkeit der in MATLAB durchgeführten numerischen Berechnungen zu überprüfen, sind für den jeweils zu betrachtenden Kapitalbereich $\left[0, \frac{\nu^2}{1-\nu}(1+\rho)M\right]$ Gitter verschiedener Schrittweiten implementiert. Konkret sind für den Kapitalbereich die Schrittweiten 10^{-1} , 10^{-2} sowie 10^{-3} betrachtet. Für den Parameterbereich $(\nu, \frac{1}{1+\rho}) \in (0, 1)^2$ bzw. die in den Abschnitten 6.3.1 bis 6.3.6 untersuchten Teilmengen ist als feinste Schrittweite 10^{-3} betrachtet. Die Ergebnisse der verschiedenen numerischen Auswertungen liefern stets die gleichen qualitativen Aussagen. Wie bereits für die Beispiele zu den Phasentypverteilungen lässt sich eine Stabilisierung der numerischen Ergebnisse bei Verfeinerung des Gitters beobachten.

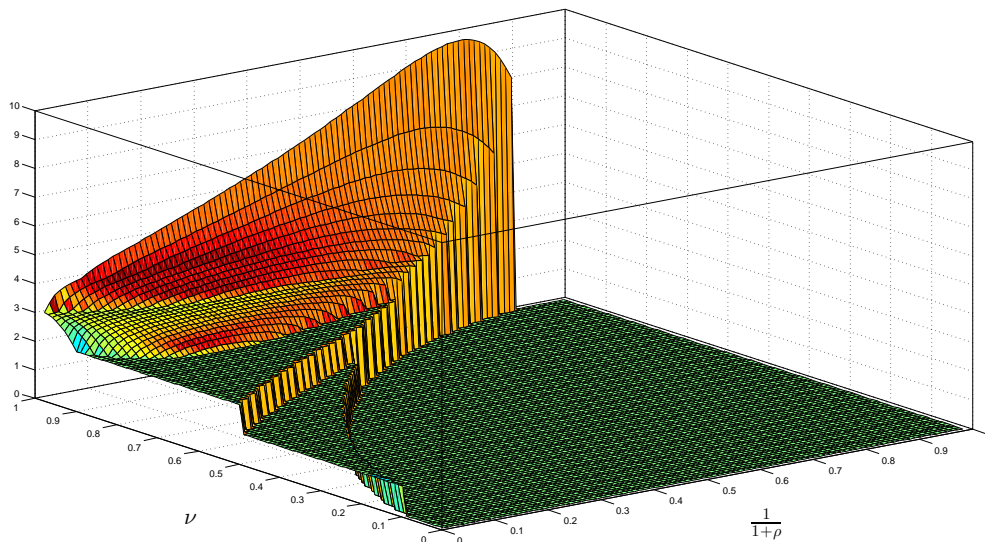


Abbildung 6.1: Minimierer von f'_0 in Abhängigkeit von ν und $\frac{1}{1+\rho}$

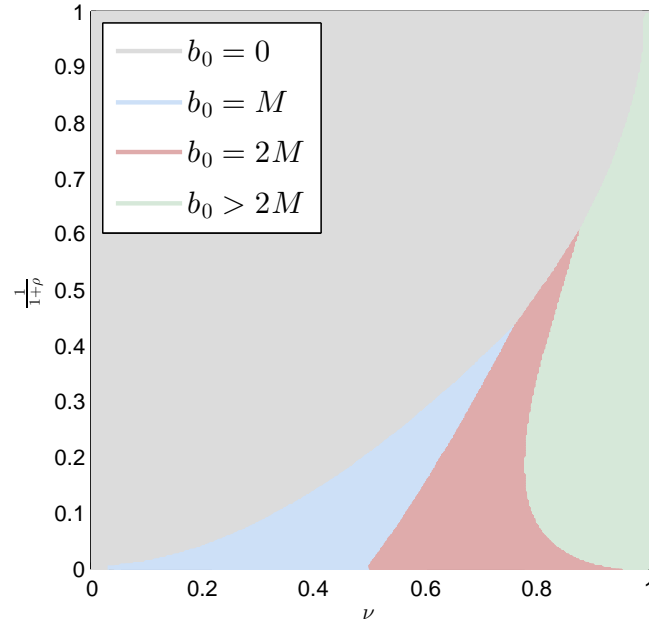


Abbildung 6.2: Die Struktur der Minimierer von f'_0 in Abhängigkeit von ν und $\frac{1}{1+\rho}$

Abbildung 6.1 skizziert die mit M normierten Minimierer von f'_0 . Für die grafische Darstellung ist die Schrittweite 10^{-2} für das Gitter der Parameterkombinationen gewählt, so dass die Höhenlinien erkennbar bleiben. Die Randwerte für $\nu = 1$ sind dabei bewusst vermieden, da der Minimier im Limes $\nu \rightarrow 1$ gegen unendlich konvergiert. Diese Aussage findet sich bereits bei Gerber (1969, (52)). In Abbildung 6.2 ist die bereits in Abbildung 6.1 zu erkennende Struktur nochmals verdeutlicht. So erhält man für einen geringen Sicherheitszuschlag, bzw. einen großen Wert für $\frac{1}{1+\rho}$ ein zusammenhängendes Gebiet mit $b_0 = 0$ als Minimierer. Zwischen $(0, M)$ und $(M, 2M)$ treten offenbar keine Minimierer auf. Im Anhang B.1 wird dies analytisch bewiesen. Die Bereiche mit $b_0 = M$ und $b_0 = 2M$ liefern ebenfalls jeweils zusammenhängende Gebiete.

Für die analytische Unterteilung des Parameterbereichs werden die Nulllinien

$$\left\{ \left(\nu, \frac{1}{1+\rho} \right) : f_i \left(\nu, \frac{1}{1+\rho} \right) = 0 \right\}, \quad \text{für } i = 1, \dots, 7$$

der folgenden Funktionen in ν und $\frac{1}{1+\rho}$ benötigt

$$\begin{aligned} f_1 \left(\nu, \frac{1}{1+\rho} \right) &= \frac{1}{1+\rho} - \nu^2, \\ f_2 \left(\nu, \frac{1}{1+\rho} \right) &= \frac{1}{1+\rho} - \nu^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) &= \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - (1+\nu), \\
f_4\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) &= \exp\left(\frac{2}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\nu + \frac{1}{1+\rho}\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - 1, \\
f_5\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) &= \exp\left(\frac{2}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\nu + \frac{1}{1+\rho} + 1\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) + \nu, \\
f_6\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) &= \nu\left(\nu - \frac{1}{1+\rho}\right) - \left(\nu^2 - \frac{1}{1+\rho}\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right), \\
f_7\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) &= \exp\left(\frac{2}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(2\nu + \frac{1}{1+\rho}\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) + \nu^2.
\end{aligned}$$

Abbildung 6.3 zeigt die Nulllinien, welche anhand einer impliziten Auswertung in Maple generiert wurden. Man beachte, dass gerade der Zusammenhang $f_5 = f_4 - f_3$ gilt. Somit schneiden sich die Nulllinien von f_3 , f_4 und f_5 in einem gemeinsamen Schnittpunkt. Hierdurch werden die Bereiche $f'_0(0) \gtrless f'_0(M)$, $f'_0(0) \gtrless f'_0(2M)$ und $f'_0(M) \gtrless f'_0(2M)$ voneinander abgetrennt. Ebenso sieht man leicht ein, dass f_2 , f_3 und f_6 einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.

In Abbildung 6.4 sind die im Folgenden betrachteten Parameterbereiche jeweils grau eingefärbt. Für die Parameterkonstellationen in (i), (ii) und (iii) gelingt eine analytische Herleitung der optimalen Strategien. Für (iv), (v) und (vi) sind hingegen nur numerisch gestützte Aussagen möglich. Teilaussagen sind jedoch auch hier in analytischer Form möglich, so dass man näherungsweise einen Eindruck über die optimalen Strategien erhält. Zusammengefasst erhält man die folgenden Aussagen über die optimalen Strategien.

Nr.	Bereich	Strategie	Überprüfung
(i)	$f_1 \geq 0$	Alles-muss-raus-Strategie $b_0 = 0$	analytisch
(ii)	$f_1 < 0 < \max\{f_2, f_3\}$	Bandstrategie $b_0 = 0 < a_1 < M = b_1$	analytisch
(iii)	$f_3 \leq 0 < f_6$	Barriere $b_0 = M$	analytisch
(iv)	$f_2 < 0 < \min\{f_3, f_4\}$	Barriere $b_0 > 2M$ oder Mehrbandstrategien	numerisch
(v)	$\max\{f_3, f_6\} < 0 < f_5$	Bandstrategie $b_0 = M < a_1 < 2M = b_1$	numerisch
(vi)	$\max\{f_4, f_5\} < 0$	Barriere $b_0 \geq 2M$	numerisch

6.3.1 Der Parameterbereich $\{f_1 \geq 0\}$

Es sei V^{π^A} der Wert der Alles-muss-raus-Strategie π^A , d.h. der Barrierenstrategie in $b_0 = 0$,

$$V^{\pi^A}(x) = (1+\rho)\nu M + x, \quad x \geq 0.$$

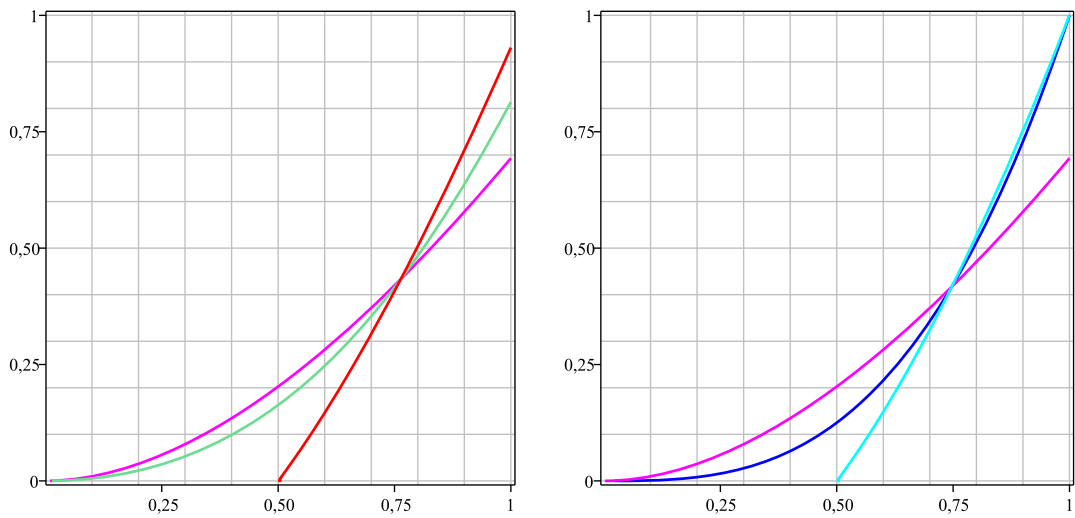
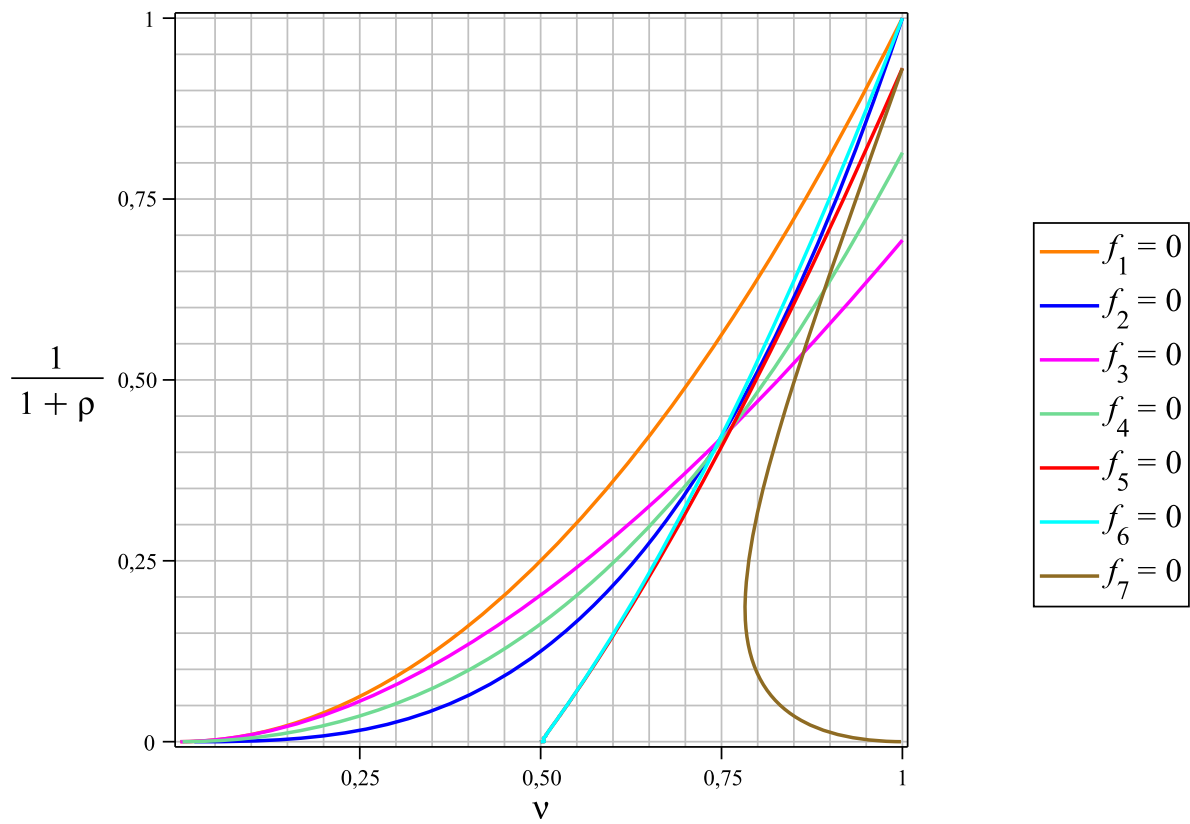
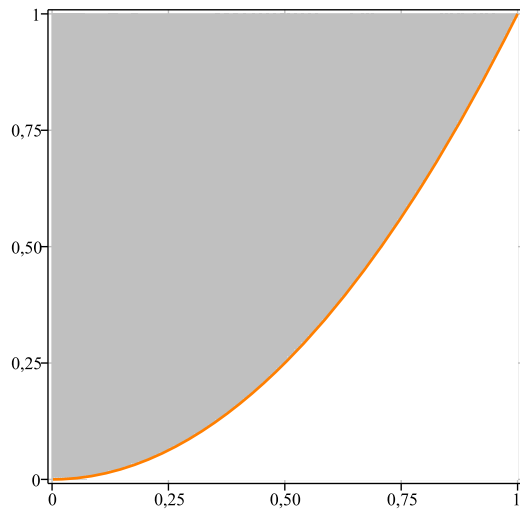
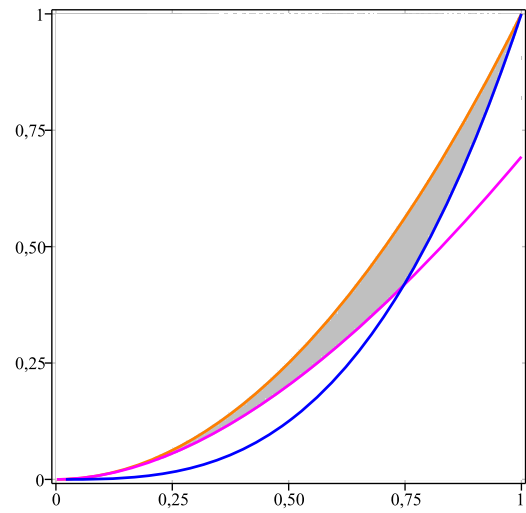


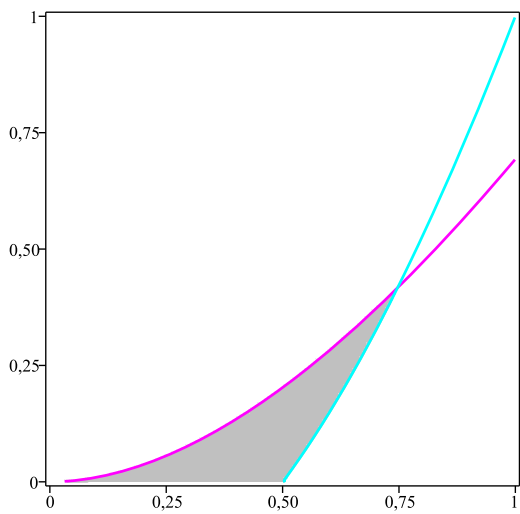
Abbildung 6.3: Die Nulllinien der charakterisierenden Funktionen f_i , $i = 1, \dots, 7$



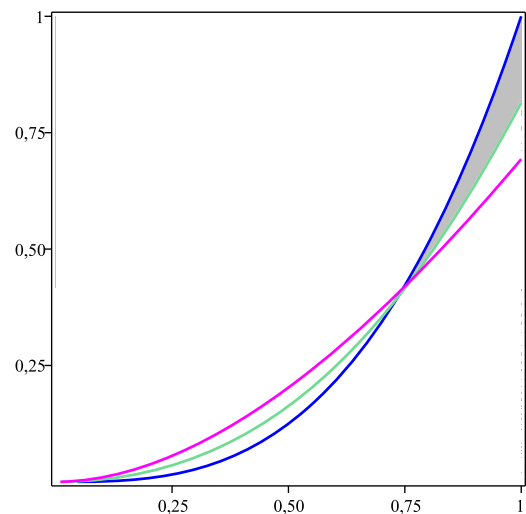
(i) $\{f_1 \geq 0\}$



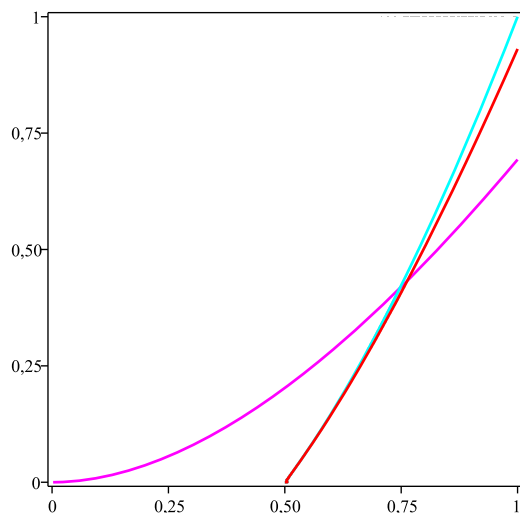
(ii) $\{f_1 < 0 < \max\{f_2, f_3\}\}$



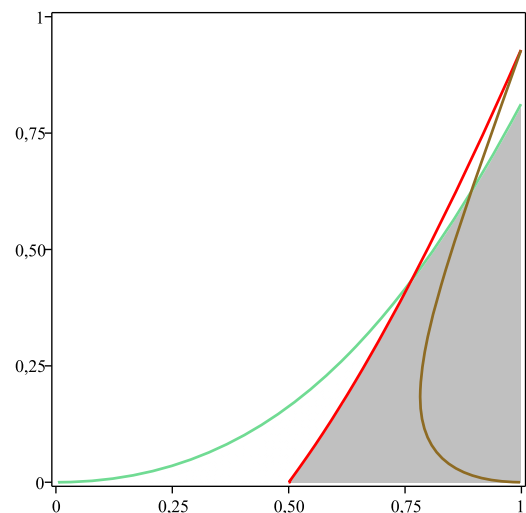
(iii) $\{f_3 \leq 0 < f_6\}$



(iv) $\{f_2 < 0 < \min\{f_3, f_4\}\}$



(v) $\{\max\{f_3, f_6\} < 0 < f_5\}$



(vi) $\{\max\{f_4, f_5\} < 0\}$

Abbildung 6.4: Die Untersuchungsbereiche in Abhängigkeit von ν und $\frac{1}{1+\rho}$

Im Folgenden wird gezeigt, dass diese Strategie genau auf dem Bereich $\{f_1 \geq 0\}$ optimal ist. Hierzu wird überprüft, ob $\Gamma V^{\pi^A}(x)$ für $x \geq 0$ nichtpositiv bleibt. Es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma V^{\pi^A}(x) \leq 0 &\Leftrightarrow (1 + \rho)\nu M + \nu V^{\pi^A}(x - M) - V^{\pi^A}(x) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \nu \left((1 + \rho)\nu M + x - M \right) 1_{\{x \geq M\}} - x \leq 0. \end{aligned}$$

Für $0 \leq x < M$ ist dies offenbar erfüllt. Für $x \geq M$ erhält man die Einschränkung

$$x \geq \nu \frac{(1 + \rho)\nu M - M}{1 - \nu}. \quad (6.10)$$

Ist nun $M \geq \nu \frac{(1 + \rho)\nu M - M}{1 - \nu}$, was äquivalent ist zu $\frac{1}{1 + \rho} \geq \nu^2$ ist, so gilt (6.10) für alle $x \geq M$. Andernfalls ist $\Lambda V^{\pi^A}(x) > 0$ für $x \in \left[M, \frac{(1 + \rho)\nu M - M}{1 - \nu} \right)$. Für die Einpunktverteilung δ_M ist die Alles-muss-raus-Strategie π^A somit genau dann optimal, wenn

$$\frac{1}{1 + \rho} \geq \nu^2 \quad (6.11)$$

erfüllt ist. Anders formuliert ist die Alles-muss-raus-Strategie für alle Parameterkombinationen $\left(\nu, \frac{1}{1 + \rho} \right)$ mit $f_1 \left(\nu, \frac{1}{1 + \rho} \right) \geq 0$ optimal. Der Bereich ist in Abbildung 6.4(i) dargestellt.

Der kritische Grenzfall $\frac{1}{1 + \rho} = \nu^2$ findet sich bereits bei Gerber (1969, (49)) in der Form

$$\delta = \lambda \left(\sqrt{\frac{c}{\lambda M}} - 1 \right) \quad (6.12)$$

bei der Analyse großer Zinsintensitäten. Für die Exponentialverteilung $Y \sim \text{Exp}(\beta)$ erhält man die gleiche Relation. Mit $\mu = \frac{1}{\beta}$ ist hier $\frac{1}{1 + \rho} = \frac{\lambda}{\beta c}$ und die Bedingung für die Optimalität der Alles-muss-raus-Strategie lautet $\frac{\lambda}{\beta c} \geq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \delta} \right)^2$, vgl. z.B. Gerber (1969, Kap. 5, Gleichung (9)) und Schmidli (2008, S.94).

Man erhält gleichzeitig auch die folgende Aussage. Sofern $\frac{1}{1 + \rho} < \nu^2$ gilt und dennoch eine Strategie π mit $b_0 = 0$ optimal ist, so hat die Strategie π mindestens ein weiteres Band (a_1, b_1) mit $a_1 \leq M$. Grundsätzlich kann im Folgenden angenommen werden, dass

$$\frac{1}{1 + \rho} < \nu^2 \quad (6.13)$$

erfüllt ist, da andernfalls die Alles-muss-raus-Strategie optimal ist.

6.3.2 Der Parameterbereich $\{f_1 < 0 < \max\{f_2, f_3\}\}$

Gerber (1969, S.219) schreibt bereits, dass für Zinsintensitäten nur wenig unterhalb der kritischen Grenze (6.12) eine Strategie π der Form $0 = b_0 < a_1 < b_1 = M$ optimal sei. Im Folgenden wird bewiesen, dass diese Strategie genau auf dem Bereich $\{f_1 < 0 < \max\{f_2, f_3\}\}$ optimal ist.

Der Wert einer solchen Strategie lässt sich auf (a_1, M) anhand von (6.8) berechnen. Die Integrale verschwinden jeweils und man erhält

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \left(1 + \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(0)\right) \frac{f_0(x-a_1)}{f_0'(M-a_1)} \\ &= (1+\rho)\nu M(1+\nu) e^{\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die vollständige Darstellung von V^π lautet entsprechend

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \begin{cases} (1+\rho)\nu M + x, & x \leq a_1 \\ (1+\nu)(1+\rho)\nu M e^{\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}}, & a_1 < x < M \\ (1+\nu)(1+\rho)\nu M + x - M, & x \geq M \end{cases} \\ &= \begin{cases} V^\pi(0) + x, & x \leq a_1 \\ V^\pi(a_1+) e^{\frac{x-a_1}{(1+\rho)\nu M}}, & a_1 < x < M \\ V^\pi(M) + x - M, & x \geq M \end{cases}. \end{aligned}$$

Der Wert der Strategie ist in a_1 genau dann stetig, wenn

$$(1+\rho)\nu M + a_1 = (1+\nu)(1+\rho)\nu M e^{\frac{a_1-M}{(1+\rho)\nu M}} \quad (6.15)$$

gilt. Dies ist eine notwendige allerdings keine hinreichende Bedingung für die Optimalität der Strategie.

Im Folgenden wird abschnittsweise untersucht, ob V^π die *HJB* bzw. (6.1) erfüllt. Dabei wird die Gültigkeit von (6.15) unterstellt. Im Anschluss wird überprüft, ob diese Wahl von a_1 überhaupt möglich ist, d.h. für welche Parameterkonstellationen die Strategie wohldefiniert ist.

Die *HJB* auf $[0, a_1]$

Auf diesem Bereich ist $V^{\pi'} = 1$ und es muss überprüft werden, ob das Differenzdifferential nichtpositiv ist. Für $x \in [0, a_1]$ gilt schlicht $\Gamma V^\pi(x) = -x < 0$.

Die HJB auf (a_1, M)

Hier muss überprüft werden, ob die Ableitung nicht unter die Eins fällt. Für $x \in (a_1, M)$ ist die Ableitung gegeben durch

$$V^{\pi'}(x) = \frac{1}{(1+\rho)\nu M} V^\pi(a_1+) e^{\frac{x-a_1}{(1+\rho)\nu M}}$$

und somit monoton steigend. Unter der Bedingung (6.15) übersteigt die rechtsseitige Ableitung in a_1 bereits die Eins

$$V^{\pi'}(a_1+) = \frac{1}{(1+\rho)\nu M} V^\pi(a_1) = 1 + \frac{1}{(1+\rho)\nu M} a_1 > 1.$$

Für $x \geq M$ ist $V^{\pi'}(x) = 1$ und es muss jeweils überprüft werden, ob das Differenzen-Differential nichtpositiv ist. Hierzu werden im Folgenden die Bereiche

- $[M, M + a_1)$,
- $[M + a_1, 2M)$ und
- $[2M, \infty)$

betrachtet.

Die HJB auf $[M, M + a_1]$

Hier erhält man unmittelbar $\Gamma V^\pi(x) = (\nu - 1)(x - M) < 0$.

Die HJB auf $(M + a_1, 2M)$

Das Differenzen-Differential ist hier gegeben durch

$$\Gamma V^\pi(x) = (1+\nu)(1+\rho)\nu^2 M e^{\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}} - (1+\rho)\nu^2 M - x + M.$$

Somit muss gelten

$$(1+\nu)(1+\rho)\nu^2 M e^{\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}} \leq (1+\rho)\nu^2 M + x - M.$$

Im linken Rand $x = M + a_1$ ist dies unter der Annahme (6.15) erfüllt. Im rechten Rand $x = 2M$ ist die folgende zusätzliche Bedingung erforderlich

$$(1+\nu)(1+\rho)\nu^2 M \leq (1+\rho)\nu^2 M + M \Leftrightarrow \nu^3 \leq \frac{1}{1+\rho}. \quad (6.16)$$

Dies ist gerade äquivalent zu $f_2\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) \geq 0$. Andernfalls ist die *HJB* noch vor $2M$ verletzt und die Strategie π kann nicht optimal sein.

Die *HJB* auf $x \in [2M, \infty)$

Für $x \geq b_m + M$ für eine oberste Bandgrenze $b_m \geq M$ gilt grundsätzlich

$$\begin{aligned} \Gamma V^\pi(x) &= (1+\rho)\nu M + \nu(V^\pi(b_m) + x - M - b_m) - (V^\pi(b_m) + x - b_m) \\ &= \Gamma V^\pi(b_m + M) - (1-\nu)(x + (b_m + M)). \end{aligned}$$

Da das Differenzen-Differential auf diesem Bereich somit monoton fällt, kommen keine weiteren Bedingungen hinzu.

Die Wohldefiniiertheit der Strategie

Es wird nun überprüft, ob zusätzlich zu (6.13) und (6.16) Bedingungen notwendig sind, damit die Strategie gemäß (6.15) wohldefiniert ist. Eine Lösung $0 < a_1 < M$ von (6.15) existiert genau dann, wenn die konvexe Funktion $k(x)$ und die Gerade $l(x)$ mit

$$\begin{aligned} l(x) &= (1+\rho)\nu M + x, \\ k(x) &= (1+\nu)(1+\rho)\nu M e^{\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}} \end{aligned}$$

zwischen 0 und M mindestens einen Schnittpunkt haben. Mit der Bedingung (6.13) folgt zunächst $l(M) < k(M)$. In Null erhält man

$$l(0) \geq k(0) \Leftrightarrow 1 \geq (1+\nu) e^{\frac{-1}{(1+\rho)\nu}} \Leftrightarrow l'(0) \geq k'(0).$$

Somit existiert genau dann ein Schnittpunkt von $k(x)$ und $l(x)$ zwischen $(0, M)$, wenn

$$\frac{1}{(1+\rho)} > \nu \log(1+\nu) \tag{6.17}$$

gilt. Dies ist eine zusätzliche Einschränkung zu den bisherigen Bedingungen (6.13) und (6.16).

Die Strategie π mit $b_0 = 0 < a_1 < b_1 = M$ mit a_1 gemäß (6.15) ist somit genau dann wohldefiniert und optimal, wenn $\max\{\nu^3, \nu \log(1+\nu)\} \leq \frac{1}{1+\rho} < \nu^2$ gilt. Dies ist wiederum äquivalent zu $f_1\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) \leq 0 \leq \min\left\{f_2\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right), f_3\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right)\right\}$. Abbildung 6.4 (ii) illustriert den Parameterbereich.

Man beachte, dass die Wertfunktion in der oberen Bandgrenze M nicht differenzier-

bar ist. Dies steht im Gegensatz zum Fall stetiger Schadenhöhenverteilung. Des Weiteren wird verdeutlicht, dass ein numerisches Verfahren wie Algorithmus 3.7, dessen Suchkriterium auf einem differenzierbaren Übergang in der oberen Bandgrenze basiert, hier nicht unmittelbar anzuwenden ist.

Die Überprüfung der *HJB* auf $(M + a_1, 2M)$ liefert des Weiteren die folgende Aussage. Sofern eine Strategie π optimal ist mit $b_0 = 0 < a_1 < M = b_1$, aber $f_2\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) < 0$ gilt, so hat π mindestens ein weiteres Band (a_2, b_2) mit $a_2 < 2M$.

Bemerkung 6.1.

Der Spezialfall $e^{\frac{1}{(1+\rho)\nu}} = (1 + \nu)$ zusammen mit der Bedingung $\nu^3 \leq \frac{1}{1+\rho}$ liefert gerade die Optimalität der Strategie ϑ mit den Bandgrenzen $b_0 = a_1 = 0 < b_1 = M$. Dabei gilt

$$V^\vartheta(x) = \begin{cases} (1 + \rho)\nu M, & x = 0 \\ (1 + \rho)\nu M(1 + \nu)e^{-\frac{M-x}{(1+\rho)\nu M}}, & 0 < x < M \\ (1 + \rho)\nu M(1 + \nu) + x - M, & x \geq M \end{cases} \quad (6.18)$$

Somit ist V^ϑ in $x = 0$ genau dann stetig, wenn $(1 + \nu) = e^{\frac{1}{(1+\rho)\nu}}$ gilt. Dies ist unter den geforderten Bedingungen gerade auch erfüllt. Den identischen Wert liefert ebenso die Barrierenstrategie in M , welche daher ebenso optimal ist. Man ist folglich zwischen den Strategien indifferent.

6.3.3 Der Parameterbereich $\{f_3 \leq 0 < f_6\}$

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Barrierenstrategie π mit $b_0 = M$ genau auf dem Bereich $\{f_3 \leq 0 < f_6\}$ optimal ist. Unter Verwendung von $f'_0(M+) = \frac{1}{(1+\rho)M} \left(\frac{1}{\nu} \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - 1\right)$ ist der Wert dieser Strategie gegeben durch

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \begin{cases} (1 + \rho)\nu M \left(\exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - \nu\right)^{-1} \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right), & 0 \leq x < M \\ (1 + \rho)\nu M \left(1 - \nu \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^{-1} + x - M, & x \geq M \end{cases} \\ &= \begin{cases} V^\pi(0) \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right), & 0 \leq x < M \\ V^\pi(M) + x - M, & x \geq M \end{cases} \end{aligned}$$

Die *HJB* auf $[0, M)$

Für diesen Bereich ist zu überprüfen, ob die Ableitung von V^π die Eins nicht unterschreitet. Da die Ableitung monoton steigend ist, genügt es, den Wert in Null zu überprüfen

$$V^{\pi'}(0) \geq 1 \Leftrightarrow f'_0(M+) \leq f'_0(0) \Leftrightarrow \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \leq 1 + \nu.$$

Dies ergibt die notwendige Bedingung

$$\frac{1}{(1+\rho)} \leq \nu \log(1 + \nu), \quad (6.19)$$

bzw. äquivalent hierzu $f_3\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) \leq 0$. Andernfalls kann die Wahl $b_0 = M$ grundsätzlich nicht optimal sein, unabhängig davon, ob oberhalb noch weitere Bänder folgen oder nicht.

Die *HJB* auf $[M, 2M)$

Das Differenzen-Differential berechnet sich hier zu

$$\Gamma V^{\pi}(x) = (1+\rho)\nu M + \nu V^{\pi}(0) \exp\left(\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}\right) - (1+\rho)\nu M - \nu V^{\pi}(0) - x + M.$$

Die *HJB* ist hier somit genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\nu V^{\pi}(0) \exp\left(\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \leq x - M + \nu V^{\pi}(0).$$

Aufgrund der Konvexität der linken Seite und der Linearität der rechten sind nur die Ränder zu überprüfen. In $x = M$ gilt gerade $\Gamma V^{\pi}(M) = 0$. Im rechten Rand $x = 2M$ erhält man die folgende zusätzliche Bedingung, damit $\Gamma V^{\pi}(2M) \leq 0$ gilt

$$\nu \left(\nu - \frac{1}{(1+\rho)}\right) \geq \left(\nu^2 - \frac{1}{(1+\rho)}\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right). \quad (6.20)$$

Dies ist äquivalent zu $f_6\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) \geq 0$. Die Barrierenstrategie mit $b_0 = M$ ist folglich genau dann optimal, wenn (6.19) und (6.20) gelten. Dies ist wiederum äquivalent zu $f_3\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) \leq 0 \leq f_6\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right)$. Der Bereich ist in Abbildung 6.4(iii) dargestellt.

Man erhält gleichzeitig auch die folgende Aussage. Sofern π optimal ist mit $b_0 = M$, aber $0 > f_6\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right)$ gilt, so weist π mindestens ein weiteres Band (a_1, b_1) auf, wobei $a_1 < 2M$ gilt.

6.3.4 Der Parameterbereich $\{f_2 < 0 < \min\{f_3, f_4\}\}$

Auf dem Parameterbereich $\{f_2 < 0 < \min\{f_3, f_4\}\}$ ist eine Vielzahl unterschiedlicher optimaler Strategien zu beobachten. Zunächst gilt $f'_0(0) < \min\{f'_0(M+), f'_0(2M)\}$. Für eine optimale Wahl von b_0 gilt daher in jedem Fall $b_0 \in \{0\} \cup (2M, \infty)$. Die numerischen Auswertungen von f'_0 zeigen, dass beide Fälle $b_0 = 0$ und $b_0 \in (2M, \infty)$ möglich sind.

Für die Parameterkombinationen mit $b_0 > 2M$ lassen die numerischen Auswertungen von ΓV^π auf die Optimalität der Barrierenstrategie schließen.

Gilt allerdings $b_0 = 0$, so zeigen die Ergebnisse aus 6.3.1, dass es mindestens ein Band (a_1, b_1) mit $a_1 < M$ geben muss. Für den Fall $b_1 = M$ zeigen die Ergebnisse aus 6.3.2, dass es hier noch mindestens ein zweites Band (a_2, b_2) mit $a_2 < 2M$ geben muss. Im Anhang B.1 wird des Weiteren gezeigt, dass jede Wahl $b_1 \in (0, M) \cup (M, M + a_1)$ nicht optimal sein kann. Somit bleiben auf Basis der numerischen Ergebnisse noch die folgenden zwei Fälle zu untersuchen

1. Strategien mit $b_0 = 0 < a_1 < M < M + a_1 < b_1$,
2. Strategien mit $b_0 = 0 < a_1 < M = b_1 < a_2 < b_2$,

wobei die Existenz weiterer Bänder oberhalb von b_1 respektive b_2 ebenfalls denkbar ist.

Strategien der Form $b_0 = 0 < a_1 < M < M + a_1 < b_1$

Der Wert V^π einer Strategie π mit Bandgrenzen $\{b_0 = 0 < a_1 < M < M + a_1 < b_1\}$ ist bis a_1 wie folgt gegeben

$$V^\pi(x) = (1 + \rho)\nu M + x, \quad x \leq a_1.$$

Zur Bestimmung der optimalen Bandgrenzen a_1 und b_1 wird die Ableitung $F'_w(x - a_1)$ der Gerber-Shiu-Funktion benötigt. Diese lässt sich anhand von (6.6) abschnittsweise auf den Intervallen

- $[lM + a_1, (l + 1)M)$ und
- $[(l + 1)M, (l + 1)M + a_1)$

für $l \geq 0$ analytisch bestimmen. Die entsprechenden Herleitungen sind in Anhang B.2 aufgeführt. Es zeigt sich, dass F'_w auf $x \in (a_1, \infty) \setminus \{M\}$ stetig ist. Der Fall $b_1 = M$ wird im Anschluss separat betrachtet. Für den Fall $b_1 > M + a_1$ kann die optimale Wahl von a_1 und b_1 daher wie im stetigen Fall erfolgen. Folglich wird a_1 minimal gewählt, so dass

$$\min_{x > a_1 + M} F'_w(x - a_1) = F'_w(b_1 - a_1) = 1$$

gilt. Die numerischen Auswertungen von $F'_w(x - a_1)$ anhand der Formeln in B.2 für $a_1 \in (0, M)$ und $b_1 \in (M + a_1, (1 + \rho)\frac{\nu^2}{1-\nu}M)$ liefern die optimalen Bandgrenzen. Der Wert der Strategie bestimmt sich in diesem Fall wie folgt

$$V^\pi(x) = \begin{cases} (1 + \rho)\nu M + x, & 0 \leq x \leq a_1 \\ F_w(x - a_1), & a_1 < x < b_1 \\ V^\pi(b_1) + x - b_1, & x \geq b_1 \end{cases} .$$

Dabei kann die Gerber-Shiu-Funktion leicht anhand von (6.7) aus $V^\pi(x)$ für $x \leq a_1$ und $F'_w(x - a_1)$ berechnet werden. Die numerischen Auswertungen lassen auf die Optimalität der Bandstrategie schließen.

Strategien der Form $b_0 = 0 < a_1 < M = b_1 < a_2 < b_2$

Der Wert einer solchen Strategie ist für den Fall, dass b_0, a_1 und b_1 optimal gewählt sind, bis $b_1 = M$ wie folgt gegeben

$$V^\pi(x) = \begin{cases} (1 + \rho)\nu M + x, & x \leq a_1 \\ (1 + \nu)(1 + \rho)\nu M e^{\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}}, & a_1 < x < M \\ (1 + \nu)(1 + \rho)\nu M + x - M, & M \leq x \leq a_2 \end{cases} .$$

Zur Bestimmung der optimalen Bandgrenzen a_2 und b_2 wird die Ableitung $F'_w(x - a_2)$ der Gerber-Shiu-Funktion wiederum mit (6.6) bestimmt. Auch hier ist eine analytische Bestimmung möglich, wobei zunächst unterschieden wird, ob $a_2 \gtrless M + a_1$ gilt. Für $a_2 \in (M, M + a_1)$ werden die Intervalle

- $[lM + a_2, (l + 1)M + a_1)$,
- $[(l + 1)M + a_1, (l + 2)M)$ und
- $[(l + 2)M, (l + 1)M + a_2)$

für $l \geq 0$ unterschieden. Der Fall $a_2 \in (M + a_1, 2M)$ erfordert die Unterteilung in

- $[lM + a_2, (l + 2)M)$ und
- $[(l + 2)M, (l + 1)M + a_2)$

für $l \geq 0$. Die Herleitungen finden sich ebenfalls in Anhang B.2. Die numerischen Auswertungen liefern wiederum verschiedene Möglichkeiten. Teilweise erhält man die Optimalität der Zweibandstrategie, wobei zumeist die Bandgrenze $b_2 = 2M$ optimal ist. Jedoch ist auch

der Fall zu beobachten, dass das Differenzen-Differential noch einmal positiv wird und die Existenz eines weiteren Bands impliziert. Die Berechnungen können entsprechend fortgesetzt werden. Mit jedem weiteren Band sind hier wiederum mehr Fallunterscheidungen nötig, um den Wert der Strategie, bzw. zunächst die Ableitung der Gerber-Shiu-Funktion, analytisch zu bestimmen. Eine allgemeine Aussage über die Anzahl der Bänder einer optimalen Strategie ist hier nicht zu treffen.

6.3.5 Der Parameterbereich $\{\max\{f_3, f_6\} < 0 < f_5\}$

Auf diesem Bereich ist anhand der analytischen Ergebnisse die erste Bandgrenze entweder in M oder oberhalb von $2M$. Es gilt also $b_0 \in \{M\} \cup (2M, \infty)$. Die numerischen Auswertungen von f'_0 liefern ausschließlich den Fall $b_0 = M$. Wie in Abschnitt 6.3.3 bereits gezeigt, muss es in diesem Fall mindestens ein weiteres Band (a_1, b_1) mit $a_1 < 2M$ geben. Die numerischen Auswertungen liefern hierbei stets $b_2 = 2M$. Im Folgenden wird analytisch gezeigt, dass immer ein $a_1 \in (M, 2M)$ existiert, so dass die Strategie mit $b_1 = 2M$ stetig ist.

Der Wert V^π einer Strategie π mit Bandgrenzen $\{b_0 = M < a_1 < 2M = b_1\}$ ist bis a_1 wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \begin{cases} (1+\rho)\nu M \left(\exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - \nu \right)^{-1} \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right), & 0 \leq x < M \\ (1+\rho)\nu M \left(1 - \nu \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^{-1} + x - M, & M \leq x \leq a_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} V^\pi(0) \exp\left(\frac{x}{(1+\rho)\nu M}\right), & 0 \leq x < M \\ V^\pi(M) + x - M, & M \leq x \leq a_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Somit ist $V^{\pi'}(x) \geq 1$ für $x \in [0, M]$, wenn $f_3\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) < 0$ gilt. Für die Ableitung der Gerber-Shiu-Funktion erhält man für $x \in (a_1, 2M]$ mit (6.6)

$$\begin{aligned} F'_w(x - a_1) &= \left(V^\pi(0) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) + a_1 - M \right) \frac{1}{(1+\rho)\nu M} \exp\left(\frac{x - a_1}{(1+\rho)\nu M}\right) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} \frac{x - a_1}{(1+\rho)\nu M} V^\pi(0) \exp\left(\frac{x - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(0) \exp\left(\frac{x - M}{(1+\rho)\nu M}\right). \end{aligned}$$

Für $x = 2M$ liefert dies

$$F'_w(2M - a_1) = \left(V^\pi(0) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) + a_1 - M \right) \frac{1}{(1+\rho)\nu M} \exp\left(\frac{2M - a_1}{(1+\rho)\nu}\right)$$

$$-\frac{1}{(1+\rho)M} \frac{2M-a_1}{(1+\rho)\nu M} V^\pi(0) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \\ - \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(0) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right).$$

Für den Randwert $a_1 = M$ gilt

$$F'_w(2M - a_1) \gtrless 1 \Leftrightarrow f_5\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) \gtrless 0.$$

Für den Randwert $a_1 = M$ gilt

$$F'_w(2M - a_1) \gtrless 1 \Leftrightarrow f_6\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) \gtrless 0.$$

Somit existiert auf dem Parameterbereich $f_5\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) > 0 > f_6\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right)$ ein $a_1 \in (M, 2M)$ mit $F'_w(2M - a_1) = 1$. Für diese Wahl ist V^π für $x \in (a_1, 2M]$ gegeben durch

$$V^\pi(x) = F_w(x - a_1) \\ = (1 + \rho)\nu M F'_w(x - a_1) + \nu V^\pi(x - M + a_1).$$

Eine analytische Herleitung der Optimalität dieser Strategie ist hier nicht möglich. Die numerischen Auswertungen lassen auf die Optimalität der Strategie $\{b_0 = M < a_1 < 2M = b_1\}$ für den gesamten betrachteten Bereich

$$f_5\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right) > 0 > \max\left\{f_3\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right), f_6\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right)\right\}.$$

schließen.

6.3.6 Der Parameterbereich $\{\max\{f_4, f_5\} < 0\}$

Sofern $f'_0(2M) \leq \min\{f'_0(0), f'_0(M+)\}$ gilt, folgt für eine optimale Wahl der ersten Bandgrenze $b_0 \geq 2M$, da wie im Anhang B.1 gezeigt auf $(0, M)$ sowie $(M, 2M)$ keine lokalen Minima von $f'_0(x)$ vorliegen. Die Bedingung $f'_0(2M) \leq f'_0(0)$ ist gegeben durch

$$\exp\left(\frac{2}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\frac{1}{1+\rho} + \nu\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - 1 \leq 0. \quad (6.21)$$

Die Bedingung $f'_0(2M) \leq f'_0(M+)$ ist äquivalent zu

$$\exp\left(\frac{2}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\nu + \frac{1}{1+\rho} + 1\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) + \nu \leq 0. \quad (6.22)$$

Somit erhält man die folgende hinreichende Bedingung für $b_0 \geq 2M$

$$\exp\left(\frac{2}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\frac{1}{1+\rho} + \nu\right) \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \leq \min\left\{1, \exp\left(\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) - \nu\right\}.$$

Dies ist gerade äquivalent zu $\max\left\{f_4\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right), f_5\left(\nu, \frac{1}{1+\rho}\right)\right\} \leq 0$. Der Bereich ist in Abbildung 6.4(vi) dargestellt. Dabei kann der Bereich weiter durch die Nulllinie von f_7 unterteilt werden. Es gilt $f''_0(2M+) < 0 \Leftrightarrow f_7 < 0$. In diesem Fall gilt stets $b_0 > 2M$.

Es bleibt zu überprüfen, ob die Barrierenstrategie optimal ist oder möglicherweise noch weitere Bänder folgen. Ab $b_0 + M$ ist ΓV^π linear monoton fallend mit $\Gamma V^\pi(x) = \Gamma V^\pi(b_0 + M) - (1 - \nu)(x - (b_0 + M))$. Auf $b_0 < x \leq b_0 + M$ ist ΓV^π genau dann nichtpositiv, wenn

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\rho} \frac{\nu f_0(x - M) - f_0(b_0)}{f'_0(b_0)M} &\leq \frac{1}{1+\rho} \frac{x - b_0}{M} - \nu \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1+\rho} \left(\frac{f_0(x) - f_0(b_0)}{f'_0(b_0)M} - \frac{x - b_0}{M} \right) &\leq \nu \left(\frac{f'_0(x)}{f'_0(b_0)M} - 1 \right) \end{aligned}$$

gilt. Weder die analytische Charakterisierung von b_0 noch die analytische Herleitung der Optimalität sind hier allgemein möglich. Die numerischen Auswertungen lassen auf die Optimalität der Barrierenstrategie in b_0 für den gesamten betrachteten Bereich schließen.

Kapitel 7

Fazit und Ausblick

Die vorliegende Dissertation setzt sich umfassend mit der Maximierung des erwarteten Dividendenbarwerts im Cramér-Lundberg-Modell auseinander. Der Schwerpunkt liegt dabei zum einen auf der Bereitstellung anwendbarer Berechnungsmethoden des Werts einer Bandstrategie. Zum anderen werden das Verhalten und die Lage der optimalen Bänder in den Fokus gestellt.

Zur Bestimmung der Wertfunktion und der optimalen Strategie werden die beiden bestehenden Verfahren für stetige Schadenhöhenverteilungen genauer untersucht und in Hinblick auf eine umfassendere und einfachere Umsetzung erweitert. Es lässt sich zeigen, dass die neuere Darstellung der Wertfunktion anhand von Gerber-Shiu-Funktionen von Avram et al. (2013) im hiesigen Modellrahmen mit der konstruktiven Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung von Schmidli (2008) übereinstimmt. Für beide Darstellungen wird die Bestimmung des Werts suboptimaler Bandstrategien ermöglicht. Hierzu wird die Darstellung anhand von Gerber-Shiu-Funktionen für eine beliebige Bandstrategie auf anschauliche Art probabilistisch hergeleitet. Der alternative analytische Beweis besticht hingegen durch seine Prägnanz. Neue Resultate zur Dynamik des Werts einer beliebigen Bandstrategie liefern einerseits die vollständige Identifikation sämtlicher Unstetigkeiten und Undifferenzierbarkeiten des Werts einer Bandstrategie. Andererseits gelingt hierdurch die Modifikation des Optimalitätskriteriums im Verfahren von Schmidli (2008), um auch suboptimale Bandstrategien abbilden zu können.

Für die Untersuchung der Lage der optimalen Bänder stellt sich eine genauere Analyse des Integro-Differentials als aufschlussreich heraus. Als zentrales Resultat erhält man die Eingrenzung der oberen Bandgrenzen durch die Kapitalbeträge mit positivem Wertebereich des Integro-Differentials zur Alles-muss-raus-Strategie, wobei die Stetigkeit der Schadenhöhenverteilung vorausgesetzt wird. Im Falle der stetigen Differenzierbarkeit kann der Bereich zusätzlich durch die Kapitalbeträge mit negativem Wertebereich der entsprechen-

den Ableitung des Integro-Differentials zur Alles-muss-raus-Strategie eingegrenzt werden. Diese Resultate sind besonders wertvoll, da sich die potentiellen Bereiche rein anhand der Schadenhöhenverteilung und der übrigen Modellparameter explizit berechnen lassen. Darüber hinaus lassen sich die Bereiche sukzessive innerhalb der Schritte der vorgestellten konstruktiven Verfahren durch die entsprechenden Bereiche des aktuellen Lösungskandidaten eingrenzen. Neben der Lokalisierung der optimalen Bänder dienen die verwendeten Kurvendiskussionen zudem zur Identifikation aller optimalen Strategien.

Um die gewonnenen theoretischen Resultate anwenden zu können, bedarf es einer Umsetzung der beschriebenen konstruktiven Verfahren. So bleibt stets die Herausforderung, die Integro-Differentialgleichung für verschiedene Nebenbedingungen zu lösen bzw. Gerber-Shiu-Funktionen zu bestimmen. Für die Klasse der Phasentypverteilungen lässt sich die Integro-Differentialgleichung unter Verwendung einer Differentialgleichung der Dichte in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen umwandeln. Schließlich gelingt eine geschlossene Darstellung der benötigten Funktionenscharen im Algorithmus zur Bestimmung der Wertfunktion anhand von Matrixexponentialen. Zudem können die Übergänge in den Bandgrenzen analytisch bestimmt werden. Somit verbleibt lediglich die numerische Auswertung zur Überprüfung der Optimalitätskriterien, um eine optimale Strategie zu erhalten. Unter Einbeziehung der analytischen Eingrenzung der optimalen Bänder erhält man folglich ein effizientes Verfahren für eine große Klasse von Schadenhöhenverteilungen. An dieser Stelle ist anzumerken, dass sich das Verfahren auf jede Verteilung anwenden lässt, deren Dichte eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erfüllt. Dies schließt die matrixexponentiellen Verteilungen mit ein.

Die ausgewählten Beispiele geben über die analytischen Resultate hinaus weiteren Aufschluss über das Verhalten der optimalen Strategien. Besonders hervorzuheben sind dabei die folgenden Beobachtungen. Zunächst kann man für die gleiche Schadenhöhenverteilung durch Variation der Modellparameter eine unterschiedliche Anzahl optimaler Bänder erhalten. Die Übergänge erfolgen in gewissem Maße stetig. Zusätzliche Bänder entstehen aus einem Punkt heraus. Umgekehrt verschwinden Bänder, indem sie entweder immer kleiner werden und sich schließlich vollständig zusammenziehen oder sich bis zu einem nächstgelegenen Band ausdehnen und mit diesem verschmelzen. In diesen Übergängen erhält man gerade den seltenen Fall, dass man zwischen verschiedenen Strategien – welche jeweils optimal sind – indifferent ist. Darüberhinaus ist zu beobachten, dass die positiven Maxima des Integro-Differentials sukzessive durch das nächste Band im Algorithmus eliminiert werden. Dies könnte darauf hindeuten, dass die Anzahl der positiven Maxima des Integro-Differentials zur Alles-muss-raus-Strategie eine obere Schranke für die Anzahl

der optimalen Bänder darstellen könnte. In Einklang mit den Ergebnissen von Loeffen (2008) wäre jedoch ebenso eine Formulierung im Krümmungsverhalten des entsprechenden Integro-Differentials denkbar. Dies zu klären, scheint eine anspruchsvolle Aufgabe zukünftiger Forschung zu sein.

Weiterer Forschungsbedarf ist durch die Betrachtung von Schadenhöhenverteilungen mit diskretem Träger gegeben. Die vorgestellte Lösungsmethodik für den Fall konstanter Schadenhöhen eignet sich hierbei unmittelbar für die Übertragung auf den Fall einer Schadenhöhenverteilung mit abzählbar endlichem Träger. Weiterreichende Argumentationen über die optimalen Strategien sind hingegen in diesem Maße kaum umzusetzen, da sich die hierzu benötigten Fallunterscheidungen mit jedem Atom zahlreicher und komplexer gestalten.

In Hinblick auf eine realistischere Modellierung ist sicherlich die Betrachtung von Modellvarianten mit weiteren Kontrollmöglichkeiten sowie der zusätzlichen Berücksichtigung ökonomischer Nebenbedingungen von Interesse. Um langfristig eine Anwendung der Optimierungsmethoden in der Versicherungswirtschaft zu erreichen, bedarf es allerdings auch für diese komplexeren Problemstellungen nicht nur einer theoretischen Lösung, sondern gleichermaßen geeigneter Berechnungsmethoden und einer umfassenden Analyse der optimalen Strategien.

Anhang A

Invarianz des Modells in Zeit- und Geldeinheit

Im vorliegenden Modellrahmen sind die Parameter λ, c und δ sowie die Schadenhöhenverteilung P^Y zu spezifizieren. In Kapitel 5 ist $P^Y = PH(\alpha, B)$ mittels α und B festgelegt, in Kapitel 6 ist lediglich der Einheitsschaden M für $P^Y = \delta_M$ zu determinieren. Durch Variation der Maßeinheiten für Zeit und Geld lässt sich die Parameteranzahl reduzieren. Die bislang nicht näher spezifizierten Standardeinheiten für Zeit und Kapital seien ZE bzw. GE . Zu fest vorgegebenen Parametern $\lambda, c, \delta, \alpha$ und B sei V^π der Wert einer beliebigen Bandstrategie π mit Bandgrenzen $\{b_0, a_1, \dots, b_m\}$ jeweils bzgl. der Geldeinheit GE .

Variation der Zeiteinheit

Es sei $ZE = \kappa \widetilde{ZE}$. Die Variation der Zeiteinheit wirkt sich entsprechend auf die Intensitäten bzw. Raten λ, c und δ aus, da diese eine Veränderung bzgl. der Zeit angeben. Man erhält somit die folgende Skalierung

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\kappa}, \quad \tilde{c} = \frac{c}{\kappa}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{\kappa}.$$

c und (α, B) bzw. M sowie V^π und die Bandgrenzen bleiben unter Veränderung der Zeiteinheit unverändert.

Variation der Geldeinheit

Es sei $GE = K \widetilde{GE}$. Die Variation der Geldeinheit wirkt sich entsprechend auf die monetären Parameter c und B respektive M aus. Es gilt

$$\tilde{c} = Kc, \quad \widetilde{M} = KM.$$

Für phasentyp verteilte Zufallsvariablen Y gilt allgemein, dass auch aY für positives a wieder phasentyp verteilt ist.¹ Für die Schadenhöhen \tilde{Y}_i gemessen in \widetilde{GE} mit Verteilungsfunktion \widetilde{P}^Y erhält man hier für $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$

$$\begin{aligned} P(\tilde{x}_1 \widetilde{GE} \leq \tilde{Y} \leq \tilde{x}_2 \widetilde{GE}) &= P\left(\frac{\tilde{x}_1}{K} GE \leq Y \leq \frac{\tilde{x}_2}{K} GE\right) \\ &= \int_{\frac{\tilde{x}_1}{K}}^{\frac{\tilde{x}_2}{K}} p(x) dx = \int_{\tilde{x}_1}^{\tilde{x}_2} \frac{1}{K} p\left(\frac{x}{K}\right) dx. \end{aligned}$$

Für die Dichte p der Phasentypverteilung gilt weiter

$$\frac{1}{K} p\left(\frac{x}{K}\right) = -\frac{1}{K} \alpha^T \exp\left(B \frac{x}{K}\right) B \mathbf{1} = -\alpha^T \exp\left(\frac{B}{K} x\right) \left(\frac{B}{K}\right) \mathbf{1}.$$

Dies ist also gerade die Dichte einer Phasentypverteilung mit Parametern $(\alpha, \frac{B}{K})$. Folglich erhält man als neue Schadenhöhenverteilung wieder eine Phasentypverteilung mit Parametern $(\tilde{\alpha}, \tilde{B}) = (\alpha, \frac{B}{K})$.

Bemerkung A.1.

Die Transformation der Phasentypverteilung ist intuitiv klar. Die Division der Intensitätsmatrix mit dem Wechselkurs K verändert nichts an der Struktur der zugrundeliegenden Markov-Kette. Die Zustände, Start- und Übergangswahrscheinlichkeiten bleiben gleich. Für die exponential verteilten Verweildauern in den Zuständen, welche als monetäre Größen interpretiert werden können, wird der jeweilige Parameter durch K dividiert und entsprechend der neuen Geldeinheit angepasst.

Die Bandgrenzen gemessen in \widetilde{GE} sind gegeben durch $\{\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_m\} = \{Kb_0, \dots, Kb_m\}$. Für den Wert der Strategie gilt $\widetilde{V}^\pi(\tilde{x}) = \frac{1}{K} V(K\tilde{x})$.

Bemerkung A.2.

Eine mögliche Normierung ist durch $E[P^Y] = 1$ gegeben. Die monetären Größen werden

¹Siehe z.B. Neuts (1975).

in diesem Fall proportional zur mittleren Schadenhöhe angegeben. Anstatt einen weiteren Parameter zu fixieren, können alternativ die absoluten Größen durch relative ersetzt werden. In Kapitel 6 werden konkret anstelle von λ, c und δ die relativen Größen

$$\nu = \frac{\lambda}{\lambda + \delta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1 + \rho} = \frac{\lambda E[P^Y]}{c}$$

variiert. Diese sind offenbar unabhängig von den gewählten Einheiten.

Anhang B

Ergänzungen zu Kapitel 6

B.1 Suboptimale Strategien

B.1.1 Bandstrategien mit $0 < b_0 < M$

Aufgrund der Relation $f'_0(M-) < f'_0(M+)$ sowie der streng steigenden Monotonie von $f'_0(x)$ für $x \in (0, M)$ werden alle Strategien mit $b_0 \in (0, M]$ von der Alles-muss-raus-Strategie auf $[0, b_0]$ dominiert. Eine solche Wahl von b_0 kann daher nie optimal sein. Zu diesem Schluss gelangt man ebenso durch die folgende probabilistische Überlegung. Für Startkapital kleiner als M ist man sowohl bei der Alles-muss-raus-Strategie als auch bei der Barrierenstrategie stets mit dem ersten Schaden ruiniert. Das Sparen bis zum Betrag b_0 stellt daher im direkten Vergleich einen Verzicht auf sofortige Dividendenzahlungen dar, ohne dass dadurch vorzeitiger Ruin verhindert bzw. spätere Dividendenzahlungen ermöglicht würden.

B.1.2 Bandstrategien mit $M < b_0 < 2M$

Im Folgenden wird gezeigt, dass f'_0 für keine Parameterkombination ein lokales Maximum auf $(M, 2M)$ haben kann und daher $b_0 \in (M, 2M)$ nie optimal ist. Es sei also $x \in (M, 2M)$. Dann gilt

$$f''_0(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x - M}{M} = (1 + \rho) \left(\exp\left(\frac{1}{(1 + \rho)\nu}\right) - 2\nu \right).$$

Demnach existiert auf $(M, 2M)$ genau dann ein lokales Extremum von f'_0 , wenn

$$\exp\left(\frac{1}{(1 + \rho)\nu}\right) \in \left(2\nu, 2\nu + \frac{1}{1 + \rho}\right) \tag{B.1}$$

gilt. Unter dieser Annahme sei

$$b_0 = M \left(1 + (1 + \rho) \left[\exp \left(\frac{1}{(1 + \rho)\nu} \right) - 2\nu \right] \right).$$

Die dritte Ableitung ist für $x \in (M, 2M)$ durch

$$f_0'''(x) = \frac{1}{(1 + \rho)^3 \nu^3 M^3} \exp \left(\frac{x}{(1 + \rho)\nu M} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \rho} \exp \left(-\frac{1}{(1 + \rho)\nu} \right) \frac{x - M}{M} - 3\nu \exp \left(-\frac{1}{(1 + \rho)\nu} \right) \right)$$

gegeben. In b_0 liefert dies

$$f_0'''(b_0) = \frac{1}{(1 + \rho)^3 \nu^3 M^3} \exp \left(\frac{b_0}{(1 + \rho)\nu M} \right) \left(-\nu \exp \left(-\frac{1}{(1 + \rho)\nu} \right) \right) < 0.$$

Somit hat f_0' unter der Bedingung (B.1) ein lokales Maximum auf $(M, 2M)$. Andernfalls gibt es kein lokales Extremum.

B.1.3 Strategien der Form $\{0 = b_0 < a_1 < b_1 < M\}$

Eine derartige Strategie erscheint vorab nicht sinnvoll. So tritt Ruin grundsätzlich mit dem ersten Schadenfall ein. Offenbar wird diese Strategie daher von der Alles-muss-raus-Strategie dominiert. Ein Sparen auf einem Intervall unterhalb von M macht keinen Sinn, da es den Ruinzeitpunkt nicht nach hinten verschiebt und einen reinen Verzicht auf Dividenden darstellt. Die Suboptimalität lässt sich zudem analytisch zeigen. Unter Verwendung von (6.8) erhält man für $x \in (a_1, b_1)$

$$V^\pi(x) = \frac{f_0(x - a_1)}{f_0'(b_1 - a_1)},$$

da sämtliche Terme bzw. Integrale mit V^π aufgrund des negativen Kapitals verschwinden. Insgesamt liefert dies

$$V^\pi(x) = \begin{cases} (1 + \rho)\nu M + x, & 0 \leq x \leq a_1 \\ (1 + \rho)\nu M e^{\frac{x - b_1}{(1 + \rho)\nu M}}, & a_1 < x < b_1 \\ (1 + \rho)\nu M + x - b_1, & x \geq b_1 \end{cases} .$$

In a_1 liegt daher ein Sprung nach unten vor

$$V^\pi(a_1) = (1 + \rho)\nu M + a_1 > (1 + \rho)\nu M e^{\frac{a_1 - b_1}{(1 + \rho)\nu M}} = V^\pi(a_1+).$$

Somit ist V^π in a_1 nicht stetig und kann daher nicht optimal sein.

B.1.4 Strategien der Form $\{0 = b_0 < a_1 < M < b_1 < M + a_1\}$

Der Wert V^π einer Strategie π mit Bandgrenzen $\{0 = b_0 < a_1 < M < b_1 < M + a_1\}$ lässt sich auf (a_1, b_1) anhand von (6.8) berechnen. Man erhält

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \left(1 + 2\nu \exp\left(\frac{b_1 - M}{(1 + \rho)\nu M}\right) - \nu\right) (1 + \rho)\nu M \exp\left(\frac{x - b_1}{(1 + \rho)\nu M}\right) \\ &\quad + 1 \{x > M\} \left(2(1 + \rho)\nu^2 M \left(1 - \exp\left(\frac{x - M}{(1 + \rho)\nu M}\right)\right) + \nu(x - M)\right). \end{aligned}$$

Die Ableitung ist somit auf $x \in (M, b_1)$ kleiner Eins

$$V^{\pi'}(x) = \left(1 - \nu\right) \exp\left(\frac{x - b_1}{(1 + \rho)\nu M}\right) + \nu < 1.$$

Eine solche Strategie kann daher nie optimal sein.

B.1.5 Strategien der Form $\{0 = b_0 < a_1 < M < b_1 = M + a_1\}$

Der Wert V^π einer Strategie π mit Bandgrenzen $\{0 = b_0 < a_1 < M < b_1 = 2M\}$ lässt sich auf $(a_1, M + a_1)$ anhand von (6.9) berechnen.

$$\begin{aligned} V^\pi(x) &= \nu \exp\left(-\frac{(x - M)^+ + M - x}{(1 + \rho)\nu M}\right) (2(1 + \rho)\nu M + (x - M)^+) \\ &\quad + (1 - \nu)(1 + \rho)\nu M \exp\left(-\frac{a_1 + M - x}{(1 + \rho)\nu M}\right). \end{aligned}$$

Für $x \in (M, M + a_1)$ erhält man

$$V^{\pi'}(x) = \nu + (1 - \nu) \exp\left(-\frac{a_1 + M - x}{(1 + \rho)\nu M}\right) < 1.$$

Diese Strategie kann daher nie optimal sein. Man beachte, dass in M ein Sprung der Ableitung nach unten vorliegt. Es gilt

$$V^{\pi'}(M-) = 2\nu + (1 - \nu) \exp\left(-\frac{a_1}{(1 + \rho)\nu M}\right) = V^{\pi'}(M+) + \nu.$$

Die Differenz entspricht dabei gerade $\nu = \frac{1}{(1 + \rho)M} V^\pi(0)$, wie auch bereits in Lemma 2.13 3. theoretisch gezeigt.

B.2 Die Ableitung der Gerber-Shiu-Funktion in 6.3.4

In Ergänzung zu Abschnitt 6.3.4 wird im Folgenden die Ableitung der Gerber-Shiu-Funktion zu den Strategien mit

1. $b_0 = 0 < a_1 < M < M + a_1 < b_1$ sowie
2. $b_0 = 0 < a_1 < M = b_1 < a_2 < b_2$

ermittelt, welche auf dem Parameterbereich $\{f_2 < 0 < \min\{f_3, f_4\}\}$ potentielle Kandidaten für eine optimale Strategie sind.

Strategien der Form $b_0 = 0 < a_1 < M < M + a_1 < b_1$

Mit (6.6) erhält man hier

$$\begin{aligned} F_w'(x - a_1) &= V^\pi(a_1) f_0'(x - a_1) \\ &\quad - \frac{1}{(1 + \rho)M} 1\{x > M\} \int_{M - a_1}^{\min\{x - a_1, M\}} f_0'(x - a_1 - y) V^\pi(y - M + a_1) dy \\ &\quad - 1\{x - a_1 \leq M\} \frac{1}{(1 + \rho)M} V^\pi(x - M). \end{aligned}$$

Dies lässt sich abschnittsweise analytisch bestimmen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} F_w'(x - a_1) &= V^\pi(a_1) f_0'(x - a_1) \\ &\quad + \begin{cases} 0, & x \in (a_1, M) \\ \nu - 2\nu \exp\left(\frac{x - M}{(1 + \rho)\nu M}\right), & x \in [M, M + a_1) \\ \left(\nu + \frac{a_1}{(1 + \rho)M}\right) f_0(x - a_1 - M) - \nu f_0(x - M) - \frac{1}{(1 + \rho)M} J_1(x), & x \geq M + a_1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dabei ist J_1 durch das folgende Integral gegeben

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= \int_{M-a_1}^M f_0(x-a_1-y) dy \\
&= \int_{M-a_1}^M \exp\left(\frac{x-a_1-y}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{x-a_1-y}{M} \rfloor} \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j \left(\frac{x-a_1-y-jM}{M}\right)^j dy.
\end{aligned}$$

Die Auswertung von J_1 verlangt die weitere Unterteilung in die Abschnitte

- $[lM + a_1, (l+1)M)$ und
- $[(l+1)M, (l+1)M + a_1)$

für $l \geq 1$. Für $x \in [lM + a_1, (l+1)M)$ gilt

$$\left\lfloor \frac{x-a_1-y}{M} \right\rfloor = l-1, \quad y \in (M-a_1, M).$$

Für $x \in [(l+1)M, (l+1)M + a_1)$ ist eine Unterteilung des Integrals in $y = x - a_1 - lM$ notwendig, da gilt

$$\left\lfloor \frac{x-a_1-y}{M} \right\rfloor = \begin{cases} l, & M-a_1 < y \leq x-a_1-lM \\ l-1, & x-a_1-lM < y < M \end{cases}.$$

Partielle Integration liefert sukzessive

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{j!} \left(\frac{x-a_1-y-jM}{M}\right)^j \exp\left(\frac{x-a_1-y}{(1+\rho)\nu M}\right) dy \\
&= M \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \left[\left(\frac{x-a_1-y-jM}{M}\right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-a_1-y}{(1+\rho)\nu M}\right) \right].
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man somit für $x \in [lM + a_1, (l+1)M)$

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j M \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{x-a_1-(j+1)M}{M}\right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-a_1-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x-(j+1)M}{M}\right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right).
\end{aligned}$$

Für $x \in [(l+1)M, (l+1)M + a_1)$ erhält man

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= M \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{x-a_1-(j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-a_1-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x-(j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right) \\
&\quad + M \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^l \sum_{k=0}^l \frac{1}{(l-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(0^{l-k} \exp\left(\frac{l}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\frac{x-(l+1)M}{M} \right)^{l-k} \exp\left(\frac{x-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right).
\end{aligned}$$

Strategien der Form $b_0 = 0 < a_1 < M = b_1 < a_2 < b_2$

Die Ableitung $F_w'(x - a_2)$ der Gerber-Shiu-Funktion wird wiederum mit (6.6) bestimmt. Für $x \geq a_2$ gilt zunächst

$$\begin{aligned}
F_w'(x - a_2) &= V^\pi(a_2) f_0'(x - a_2) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} \int_0^{\min\{x-a_2, M\}} f_0'(x - a_2 - y) V^\pi(y - M + a_2) dy \\
&\quad - 1 \{x - a_2 \leq M\} \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(x - M).
\end{aligned}$$

Dies lässt sich abschnittsweise analytisch bestimmen, wobei eine Vielzahl an Unterscheidungen benötigt wird.

1. $a_2 \in (M, M + a_1)$

(a) $x \in [a_2, M + a_1)$

$$\begin{aligned}
F_w'(x - a_2) &= V^\pi(a_2) f_0'(x - a_2) + 2\nu + \frac{x - M}{(1+\rho)M} \\
&\quad - \left(2\nu + \frac{a_2 - M}{(1+\rho)M} \right) \exp\left(\frac{x - a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) - \frac{1}{(1+\rho)M} V^\pi(x - M).
\end{aligned}$$

(b) $x \in [M + a_1, 2M)$

$$F_w'(x - a_2) = V^\pi(a_2) f_0'(x - a_2) + \left(2\nu + \frac{a_1}{(1+\rho)M} \right) \exp\left(\frac{x - a_1 - M}{(1+\rho)\nu M}\right)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2\nu + \frac{a_2 - M}{(1 + \rho)M} \right) \exp \left(\frac{x - a_2}{(1 + \rho)\nu M} \right) \\
& - (1 + \nu) \frac{x - a_1 - M}{(1 + \rho)M} \exp \left(\frac{x - 2M}{(1 + \rho)\nu M} \right) \\
& - \frac{1}{(1 + \rho)M} V^\pi(x - M).
\end{aligned}$$

(c) $x \in [2M, M + a_2)$

$$\begin{aligned}
F_w'(x - a_2) &= V^\pi(a_2) f_0'(x - a_2) \\
&+ \frac{1}{(1 + \rho)M} \exp \left(\frac{x - a_1 - M}{(1 + \rho)\nu M} \right) (2(1 + \rho)\nu M + a_1) \\
&- \frac{1}{(1 + \rho)M} \exp \left(\frac{x - a_2}{(1 + \rho)\nu M} \right) (2(1 + \rho)\nu M - M + a_2) \\
&- \frac{1}{(1 + \rho)M} (1 + \nu)(M - a_1) \exp \left(\frac{x - 2M}{(1 + \rho)\nu M} \right) \\
&+ \frac{1}{(1 + \rho)M} ((2 + \nu)(1 + \rho)\nu M + x - 2M) \\
&- \frac{1}{(1 + \rho)M} \exp \left(\frac{x - 2M}{(1 + \rho)\nu M} \right) (2 + \nu)(1 + \rho)\nu M \\
&- \frac{1}{(1 + \rho)M} V^\pi(x - M).
\end{aligned}$$

(d) $x \in [lM + a_2, (l + 1)M + a_1)$. Zunächst gilt für $x \in [lM + a_2, (l + 1)M + a_2)$

$$\begin{aligned}
F_w'(x - a_2) &= V^\pi(a_2) f_0'(x - a_2) \\
&+ \frac{1}{(1 + \rho)M} f_0(x - (a_1 + M)) ((1 + \rho)\nu M + a_1) \\
&- \frac{1}{(1 + \rho)M} f_0(x - a_2) ((1 + \rho)\nu M - M + a_2) \\
&- \frac{1}{(1 + \rho)M} \int_0^{a_1 + M - a_2} f_0(x - a_2 - y) dy \\
&- f_0(x - (a_1 + M)) (1 + \nu) \nu \exp \left(\frac{a_1 - M}{(1 + \rho)\nu M} \right) \\
&- \frac{1}{(1 + \rho)M} \int_{a_1 + M - a_2}^{2M - a_2} f_0(x - a_2 - y) (1 + \nu) \exp \left(\frac{y - 2M + a_2}{(1 + \rho)\nu M} \right) dy \\
&+ \frac{1}{(1 + \rho)M} f_0(x - a_2 - M) ((1 + \nu)(1 + \rho)\nu M - M + a_2)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(1+\rho)M} \int_{2M-a_2}^M f_0(x-a_2-y) dy. \quad (\text{B.2})$$

Für $x \in [lM + a_2, (l+1)M + a_1)$ erhält man hier weiter

$$\begin{aligned}
& F_w'(x-a_2) \\
&= V^\pi(a_2) f_0'(x-a_2) + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x-(a_1+M)) ((1+\rho)\nu M + a_1) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x-a_2) ((1+\rho)\nu M - M + a_2) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^l \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{(l-j)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{l}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\frac{x-a_2-jM}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{x-a_1-(j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-(a_1+M)}{(1+\rho)\nu M}\right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{(l-j)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{l}{(1+\rho)\nu}\right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x-(a_1+M)) (1+\nu)(1+\rho)\nu M \exp\left(\frac{a_1-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} (1+\nu)(-M) \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \\
&\quad \left(\left(\frac{x-(j+2)M}{M} \right)^{j+1} - \left(\frac{x-a_1-(j+1)M}{M} \right)^{j+1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x-a_2-M) ((1+\nu)(1+\rho)\nu M - M + a_2) dy \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{x-a_2-(j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-a_2-M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x-(j+2)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right).
\end{aligned}$$

(e) $x \in [(l+1)M + a_1, (l+2)M)$. Ausgehend von (B.2) erhält man

$$\begin{aligned}
& F_w'(x - a_2) \\
&= V^\pi(a_2) f_0'(x - a_2) + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - (a_1 + M)) ((1+\rho)\nu M + a_1) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - a_2) ((1+\rho)\nu M - M + a_2) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^l \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{x - a_1 - (j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - a_1 - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x - a_2 - jM}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - 2M) (1+\nu)(1+\rho)\nu M \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - (a_1 + M)) (1+\nu)(1+\rho)\nu M \exp\left(\frac{a_1 - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} (1+\nu)(-M) \exp\left(\frac{x - 2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^l \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \\
&\quad \left(\left(\frac{(l-j)M}{M} \right)^{j+1} - \left(\frac{x - a_2 - (j+1)M}{M} \right)^{j+1} \right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} (1+\nu)(-M) \exp\left(\frac{x - 2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \\
&\quad \left(\left(\frac{x - (j+2)M}{M} \right)^{j+1} - \left(\frac{(l-j)M}{M} \right)^{j+1} \right) \\
&\quad + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - a_2 - M) ((1+\nu)(1+\rho)\nu M - M + a_2) dy \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - 2M) (1+\nu)(1+\rho)\nu M \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{x - a_2 - (j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - a_2 - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{x-(j+2)M}{M}\right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right).$$

(f) $x \in [(l+2)M, (l+1)M + a_2]$. Wiederum mit (B.2) erhält man

$$\begin{aligned} & F_w'(x - a_2) \\ &= V^\pi(a_2) f_0'(x - a_2) + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - (a_1 + M)) ((1+\rho)\nu M + a_1) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - a_2) ((1+\rho)\nu M - M + a_2) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^l \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\ &\quad \left(\left(\frac{x - a_1 - (j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - a_1 - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x - a_2 - jM}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - 2M) (1+\nu)(1+\rho)\nu M \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - (a_1 + M)) (1+\nu)(1+\rho)\nu M \exp\left(\frac{a_1 - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} (1+\nu)(-M) \exp\left(\frac{x - 2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\ &\quad \cdot \sum_{j=0}^l \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \\ &\quad \left(\left(\frac{x - (j+2)M}{M} \right)^{j+1} - \left(\frac{x - a_1 - (j+1)M}{M} \right)^{j+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - a_2 - M) ((1+\nu)(1+\rho)\nu M - M + a_2) dy \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - 2M) (1+\nu)(1+\rho)\nu M \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^l \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\ &\quad \left(\left(\frac{(l-j)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{l}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\frac{x - (j+2)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - 2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\ &\quad \left(\left(\frac{x - a_2 - (j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - a_2 - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right) \end{aligned}$$

$$-\left(\frac{(l-j)M}{M}\right)^{j-k} \exp\left(\frac{l}{(1+\rho)\nu}\right).$$

2. $a_2 \in (M + a_1, 2M)$

(a) $x \in [a_2, 2M)$

$$\begin{aligned} F_w'(x - a_2) &= V^\pi(a_2)f_0'(x - a_2) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M}(x - a_2) \exp\left(\frac{x - 2M}{(1+\rho)\nu M}\right)(1 + \nu) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M}V^\pi(x - M). \end{aligned}$$

(b) $x \in [2M, M + a_2)$

$$\begin{aligned} F_w'(x - a_2) &= V^\pi(a_2)f_0'(x - a_2) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M}(2M - a_2) \exp\left(\frac{x - 2M}{(1+\rho)\nu M}\right)(1 + \nu) \\ &\quad + \frac{1}{(1+\rho)M}((2 + \nu)(1 + \rho)\nu M + x - 2M) \\ &\quad - (2 + \nu)\nu \exp\left(\frac{x - 2M}{(1+\rho)\nu M}\right) - \frac{1}{(1+\rho)M}V^\pi(x - M). \end{aligned}$$

(c) $x \in [lM + a_2, (l + 2)M)$. Für $x \geq M + a_2$ gilt zunächst allgemein

$$\begin{aligned} F_w'(x - a_2) &= V^\pi(a_2)f_0'(x - a_2) + (1 + \nu)\nu f_0(x - 2M) \\ &\quad - (1 + \nu)\nu f_0(x - a_2) \exp\left(\frac{-2M + a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M}(1 + \nu) \int_0^{2M - a_2} f_0(x - a_2 - y) \exp\left(\frac{y - 2M + a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) dy \\ &\quad + \frac{1}{(1+\rho)M}f_0(x - a_2 - M) ((1 + \nu)(1 + \rho)\nu M - M + a_2) \\ &\quad - (1 + \nu)\nu f_0(x - 2M) \\ &\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} \int_{2M - a_2}^M f_0(x - a_2 - y) dy. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Für $x \in [lM + a_2, (l + 2)M)$ erhält man hier weiter

$$F_w'(x - a_2)$$

$$\begin{aligned}
&= V^\pi(a_2)f'_0(x-a_2) + (1+\nu)\nu f_0(x-2M) \\
&\quad - (1+\nu)\nu f_0(x-a_2) \exp\left(\frac{-2M+a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M}(1+\nu)(-M) \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^l \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j \\
&\quad \left(\left(\frac{(l-j)M}{M}\right)^{j+1} - \left(\frac{x-a_2-jM}{M}\right)^{j+1}\right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M}(1+\nu)(-M) \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j \\
&\quad \left(\left(\frac{x-(j+2)M}{M}\right)^{j+1} - \left(\frac{(l-j)M}{M}\right)^{j+1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x-a_2-M) ((1+\nu)(1+\rho)\nu M - M + a_2) \\
&\quad - (1+\nu)\nu f_0(x-2M) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
&\quad \left(\left(\frac{x-a_2-(j+1)M}{M}\right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-a_2-M}{(1+\rho)\nu M}\right)\right) \\
&\quad \left(\frac{x-(j+2)M}{M}\right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right).
\end{aligned}$$

(d) $x \in [(l+2)M, (l+1)M + a_2)$. Ausgehend von (B.3) erhält man hier

$$\begin{aligned}
&F_w'(x-a_2) \\
&= V^\pi(a_2)f'_0(x-a_2) + (1+\nu)\nu f_0(x-2M) \\
&\quad - (1+\nu)\nu f_0(x-a_2) \exp\left(\frac{-2M+a_2}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad - \frac{1}{(1+\rho)M}(1+\nu)(-M) \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \\
&\quad \cdot \sum_{j=0}^l \frac{1}{(j+1)!} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right)\right)^j \\
&\quad \left(\left(\frac{x-(j+2)M}{M}\right)^{j+1} - \left(\frac{x-a_2-jM}{M}\right)^{j+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(1+\rho)M} f_0(x - a_2 - M) ((1+\nu)(1+\rho)\nu M - M + a_2) \\
& - (1+\nu)\nu f_0(x - 2M) \\
& - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^l \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
& \left(\left(\frac{(l-j)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{l}{(1+\rho)\nu}\right) - \left(\frac{x - (j+2)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x-2M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right) \\
& - \frac{1}{(1+\rho)M} M \sum_{j=0}^{l-1} \left(-\frac{1}{1+\rho} \exp\left(-\frac{1}{(1+\rho)\nu}\right) \right)^j \sum_{k=0}^j \frac{1}{(j-k)!} (-(1+\rho)\nu)^{k+1} \\
& \left(\left(\frac{x - a_2 - (j+1)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{x - a_2 - M}{(1+\rho)\nu M}\right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{(l-j)M}{M} \right)^{j-k} \exp\left(\frac{l}{(1+\rho)\nu}\right) \right).
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- Albrecher, H.; Thonhauser, S. (2009). Optimality results for dividend problems in insurance. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, 103(2):295–320.
- Asmussen, S.; Albrecher, H. (2010). *Ruin Probabilities*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey, 2. Auflage.
- Asmussen, S. r.; Barndorff-Nielsen, O. E.; Schmidli, H. (1998). The interplay between insurance, finance and control. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22(1):1.
- Avanzi, B. (2009). Strategies for dividend distribution: A review. *North American Actuarial Journal*, 13(2):217–251.
- Avram, F.; Palmowski, Z.; Pistorius, M. R. (2007). On the optimal dividend problem for a spectrally negative Lévy process. *The Annals of Applied Probability*, 17(1):156–180.
- Avram, F.; Palmowski, Z.; Pistorius, M. R. (2013). On Gerber-Shiu functions and optimal dividend distribution for a Lévy risk-process in the presence of a penalty function. *Arbeitspapier*.
- Azcue, P.; Muler, N. (2005). Optimal reinsurance and dividend distribution policies in the Cramér-Lundberg model. *Mathematical Finance*, 15(2):261–308.
- Azcue, P.; Muler, N. (2009). Optimal investment strategy to minimize the ruin probability of an insurance company under borrowing constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, 44(1):26–34.
- Azcue, P.; Muler, N. (2010). Optimal investment policy and dividend payment strategy in an insurance company. *The Annals of Applied Probability*, 20(4):1253–1302.
- Azcue, P.; Muler, N. (2012). Optimal dividend policies for compound Poisson processes: The case of bounded dividend rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1):26–42.

- Bertoin, J. (1996). *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Brockett, P. L.; Xia, X. (1995). Operations research in insurance: A review. *Transactions of Society of Actuaries*, 47:7–87.
- Browne, S. (1995). Optimal investment policies for a firm with a random risk process: Exponential utility and minimizing the probability of ruin. *Mathematics of Operations Research*, 20(4):937–958.
- Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Chan, T.; Kyprianou, A. E.; Savov, M. (2011). Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes. *Probability Theory and Related Fields*, 150(3-4):691–708.
- Crandall, M. G.; Lions, P.-L. (1983). Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Transactions of the American mathematical society*, 277(1).
- Crandall, M. G.; Lions, P.-L.; Ishii, H. (1992). User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society*, 27(1):1–67.
- Davis, M. H. A. (1993). *Markov Models and Optimization*. Chapman & Hall, London.
- de Finetti, B. (1957). Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 2:434–443.
- Fleming, W. H.; Soner, H. M. (2006). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer, New York, 2. Auflage.
- Frisque, A. (1974). Dynamic model of insurance company's management. *ASTIN Bulletin*, 8(1):57–65.
- Gerber, H. U. (1969). Entscheidungskriterien für den zusammengesetzten Poisson-Prozess. *Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung*, 1:185–227.
- Gerber, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, Monograph Series No. 8, Philadelphia.
- Gerber, H. U.; Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1):48–78.

- Gerber, H. U.; Yang, H. (2010). Obtaining the dividends–penalty identities by interpretation. *Insurance: Mathematics and Economics*, 47(2):206–207.
- Hipp, C. (2003). Stochastic control with application in insurance. In Frittelli, M.; Runggaldier, W., editors, *Stochastic Methods in Finance*. Springer, Heidelberg.
- Hipp, C. (2006). Speedy convolution algorithms and Panjer recursions for phase-type distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(1):176–188.
- Hipp, C.; Michel, R. (2002). *Risikotheorie: Stochastische Modelle und statistische Methoden*. In *Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik 24*. Verlag Versicherungswissenschaft, Karlsruhe.
- Korolyuk, V. (1975). *Boundary Problems for Compound Poisson Processes*. Naukova Dumka, Kiev.
- Kyprianou, A. E. (2006). *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer, Berlin.
- Kyprianou, A. E.; Rivero, V.; Song, R. (2010). Convexity and smoothness of scale functions and de Finetti’s control problem. *Journal of Theoretical Probability*, 23(2):547–564.
- Lambert, A. (2000). Completely asymmetric Lévy processes confined in a finite interval. *Ann. Inst.H. Poincaré Probab. Statist.*, 36(2):251–274.
- Lin, X. S.; Willmot, G. E.; Drekić, S. (2003). The classical risk model with a constant dividend barrier: Analysis of the Gerber–Shiu discounted penalty function. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33(3):551–566.
- Loeffen, R. L. (2008). On optimality of the barrier strategy in de Finetti’s dividend problem for spectrally negative Lévy processes. *The Annals of Applied Probability*, 18(5):1669–1680.
- Lundberg, F. (1903). *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen. Återförsäkring av Kollektivrisker*. Akad. Afhandling. Almqvist o. Wiksell, Uppsala.
- Mack, T. (2002). *Schadenversicherungsmathematik*. In *Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik 28*. Verlag Versicherungswissenschaft, Karlsruhe.
- Martin-Löf, A. (1994). Lectures on the use of control theory in insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1:1–25.

- Mnif, M.; Sulem, A. (2005). Optimal risk control and dividend policies under excess of loss reinsurance. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 77(5):455–476.
- Neuts, M. F. (1975). Probability distributions of phase type. *Liber Amicorum Professor Emeritus H. Florin*, Belgium, Dept. of Mathematics, University of Louvain, Belgium, S. 173–206.
- Neuts, M. F. (1981). *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*. Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- O’Cinneide, C. A. (1989). On non-uniqueness of representations of phase-type distributions. *Stochastic Models*, 5(2):247–259.
- O’Cinneide, C. A. (1990). Characterization of phase-type distributions. *Stochastic Models*, 6(1):1–57.
- Renaud, J.-F.; Zhou, X. (2007). Distribution of the present value of dividend payments in a Lévy risk model. *Journal of Applied Probability*, 44(2):420–427.
- Rolski, T.; Schmidli, H.; Schmidt, V.; Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, Chichester.
- Scheer, N.; Schmidli, H. (2011). Optimal dividend strategies in a Cramér–Lundberg model with capital injections and administration costs. *European Actuarial Journal*, 1(1):57–92.
- Schmidli, H. (2006). Optimisation in non-life insurance. *Stochastic Models*, 22(4):689–722.
- Schmidli, H. (2008). *Stochastic Control in Insurance*. Springer-Verlag, London.
- Shreve, S. E.; Lehoczky, J. P.; Gaver, D. P. (1984). Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 22(1):55–75.