

Korrekturen höherer Ordnung zur Produktion von Higgs-Boson-Paaren

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
von der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Phys. Jonathan Grigo
aus Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung 17.07.2015

Referent: Prof. Dr. Matthias Steinhauser

Korreferent: Prof. Dr. Kirill Melnikov

Inhalt

1	Einleitung	1
1.1	Einordnung dieser Arbeit	2
1.2	Das Higgs-Boson im Standardmodell	3
1.2.1	Spontane Symmetriebrechung und Selbstkopplung	3
1.2.2	Produktion von Higgs-Bosonen am LHC	5
1.2.3	Zerfall der Higgs-Bosonen	7
1.2.4	Experimenteller Zugang	8
1.3	Higgs-Paare jenseits des Standardmodells	10
2	Notation und LO-Wirkungsquerschnitt	11
2.1	Kinematik und Lorentz-Struktur	11
2.1.1	Grenzfall $m_t \rightarrow \infty$	12
2.2	Diskussion des LO-Wirkungsquerschnitts	13
2.2.1	Globale Parameter	13
2.2.2	Partonischer Wirkungsquerschnitt	14
2.2.3	Hadronischer Wirkungsquerschnitt	16
2.2.4	Entwicklung in $1/m_t$	18
3	Methoden für die (N)NLO-Rechnungen	21
3.1	Optisches Theorem, Cutkosky-Regeln und <i>Reversed Unitarity</i>	21
3.2	Der <i>soft+virtual</i> -(SV-)Wirkungsquerschnitt	24
3.2.1	Notation	26
3.2.2	NLO	28
3.2.3	NNLO	30
3.2.4	Qualität der SV-Näherung	33
3.3	Erzeugung der Feynman-Diagramme (QGRAF)	34
3.4	Asymptotische Entwicklung (exp)	36
3.5	Topologien (exp und TopoID)	38
3.5.1	Topologien für $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$	39
3.5.2	Topologien für $\mathcal{M}(gg \rightarrow gg)$	39
3.6	Spuren, Projektoren, und $1/m_t$ -Entwicklung (FORM)	40
3.6.1	Optimierung 1: $g^n H^m$ -Bausteine	42

3.6.2	Optimierung 2: Vorziehen der Vakuumintegrale	43
3.7	Reduktion auf Masterintegrale (FIRE)	44
3.8	Masterintegrale	45
3.8.1	Masterintegrale für $\mathcal{M}(gg \rightarrow hh)$	48
3.8.2	Masterintegrale für $\mathcal{M}(gg \rightarrow gg)$	50
3.9	Renormierung	53
3.10	Aspekte der Computernutzung	53
4	Top-Quark-Effekte im NLO-Wirkungsquerschnitt	59
4.1	Strikte $1/m_t$ -Entwicklung	60
4.2	Faktorisierung des LO-Wirkungsquerschnitts	61
4.2.1	Vergleich mit Einzel-Higgs-Produktion	63
4.3	Konvergenz	66
4.4	Hadronischer Wirkungsquerschnitt I	68
4.5	Verbesserung der LO-Faktorisierung	72
4.5.1	Aufspaltung in <i>soft+virtual</i> (SV) und <i>hard</i> (H)	72
4.5.2	Differentielle LO-Faktorisierung	75
4.5.3	Verbesserte NLO-Vorhersage	76
4.6	Hadronischer Wirkungsquerschnitt II	78
4.7	Skalenabhängigkeit	79
4.8	Andere Ansätze zur Berücksichtigung von m_t -Effekten	81
5	Matching-Koeffizient für NNLO	85
5.1	Effektive Theorien	85
5.2	Die effektive Theorie $m_t \rightarrow \infty$ des Standardmodells	86
5.3	Matching	87
5.3.1	Einschränkung auf harte bzw. <i>tree-level</i> -Anteile	89
5.3.2	Vergleich mit Einzel-Higgs-Produktion	89
5.3.3	Konsistenztests	91
5.4	Ergebnisse	91
5.4.1	Auswirkung auf den NNLO-Wirkungsquerschnitt	92
6	Top-Quark-Effekte im NNLO-SV-Wirkungsquerschnitt	95
6.1	Virtuelle Korrekturen im Grenzfall $m_t \rightarrow \infty$	96
6.2	Qualität der SV-Näherung	99
6.3	$1/m_t$ -Entwicklung der SV-Näherung	101
7	Zusammenfassung und Ausblick	107
A	Anhang	109
A.1	Kinematik und Lorentz-Struktur	109

A.2 δ -Entwicklung	110
A.3 Differentielle und nicht-differentielle LO-Faktorisierung	110
A.4 Goncharov-Polylogarithmen	113
Literaturverzeichnis	115

1 Einleitung

Die Produktion von Higgs-Boson-Paaren im Standardmodell der Elementarteilchenphysik am *Large Hadron Collider* (LHC) ist ein herausfordernder Prozess, in der Theorie ebenso wie im Experiment. Die wissenschaftliche Motivation zur Untersuchung dieses Prozesses liegt insbesondere darin, dass er Zugang zur Higgs-Boson-Selbstkopplung bietet. Diese Selbstkopplung wiederum gibt Aufschluss über den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung, und dieser Mechanismus ist von zentraler Bedeutung für das Verständnis des Standardmodells. Eine vergleichbar vielversprechende Messung der Selbstkopplung ist außer am LHC mit dem ATLAS und dem CMS Experiment an keinem anderen gegenwärtigen Experiment möglich. Allenfalls ein zukünftiger Linearbeschleuniger, wie zum Beispiel der *International Linear Collider* (ILC) oder ein *Future Circular Collider* (FCC), könnten vergleichbare Ergebnisse produzieren. Doch – von den physikalischen und technischen Möglichkeiten zukünftiger Experimente ganz abgesehen – hat der LHC den nicht zu unterschätzenden Vorteil, dass er gebaut und in Betrieb ist. Hinzu kommt, dass die bis jetzt in *Run 1* bei einer Schwerpunktsenergie von 7 TeV und 8 TeV gesammelten Daten und die zugehörigen Analysen die Erwartungen nicht nur erfüllt, sondern in vielen Fällen sogar übertroffen haben. Nicht zuletzt die Entdeckung des Higgs-Bosons [1, 2] ist eine eindrucksvolle Demonstration der erfolgreichen Zusammenarbeit von Theorie, Experiment und Technik. Vor diesem Hintergrund ist der LHC die ideale Umgebung, um auch „schwierige“ Prozesse wie die Higgs-Boson-Paarproduktion zu erforschen.

Higgs-Boson-Paarproduktion ist aber nicht nur aufgrund der Higgs-Selbstkopplung von Interesse. Es handelt sich natürlich auch um einen Standardmodell-Prozess, der am LHC prinzipiell zugänglich ist, und er sollte daher als solcher, wie jeder andere zugängliche Prozess auch, untersucht werden. Dieses Argument wird umso stärker, je mehr man berücksichtigt, dass es derzeit am LHC keine Hinweise auf große Abweichungen vom Standardmodell gibt. Und solange es keine großen Abweichungen vom Standardmodell gibt, wird es zunehmend wichtiger, möglichst alle prinzipiell zugänglichen Prozesse auch möglichst genau zu untersuchen.

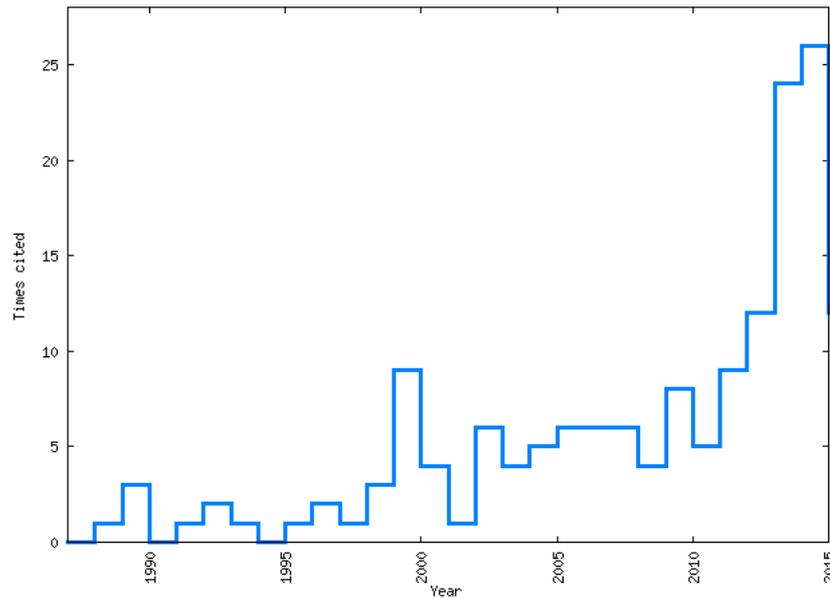


Abbildung 1.1: Anzahl der Veröffentlichungen pro Jahr, die das LO-Ergebnis für den Higgs-Paar-Wirkungsquerschnitt [3] zitieren. Daten und Abbildungen von www.inspirehep.net, Stand: Juni 2015.

1.1 Einordnung dieser Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Verbesserung der Vorhersage des Standardmodells für Higgs-Boson-Paarproduktion am LHC, insbesondere QCD-Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt in Gluon-Fusion und deren Abhängigkeit von der Top-Quark-Masse m_t . Vor Beginn dieser Untersuchungen war

- das Ergebnis in führender Ordnung der Störungstheorie (*leading order*, LO) mit voller Abhängigkeit der Top-Quark-Masse [3] (siehe auch [4]) und
- das Ergebnis in nächst-führender Ordnung der Störungstheorie (*next-to-leading order*, NLO) im Grenzfall eines unendlich schweren Top-Quarks [5] (siehe auch z.B. [6])

bekannt. Abb. 1.1 zeigt die Anzahl der Veröffentlichungen pro Jahr, die den LO-Wirkungsquerschnitt [3] zitieren. Man erkennt, dass mit dem Start des LHC und vor allem der Entdeckung des Higgs-Bosons das Interesse an Higgs-Paaren enorm gestiegen ist. Aufgrund der großen Zahl an Veröffentlichungen wird hier nur eine Auswahl der Referenzen gegeben, die im Zeitraum meiner Promotion

veröffentlicht wurden, und die – teils mehr, teils weniger – eng mit meinen Untersuchungen verknüpft sind:

- Der Wirkungsquerschnitt in nächst-nächst-führender Ordnung der Störungstheorie (NNLO) in der effektiven Theorie ($m_t \rightarrow \infty$) [7, 8];
- m_t -Effekte im NLO-Wirkungsquerschnitt in einem anderen Ansatz als in dieser Arbeit [9];
- *Parton-shower*-Effekte auf NLO [10, 11];
- Resummierung von Schwellen-Effekten [12, 13].

Im Rahmen meiner Promotion wurden in Zusammenarbeit mit Jens Hoff, Kirill Melnikov und Matthias Steinhauser bereits folgende Ergebnisse, die auch in dieser Arbeit vorgestellt werden, veröffentlicht:

- m_t -Effekte auf NLO, Entwicklung bis $\mathcal{O}(1/m_t^8)$ [14] und
- die virtuellen Korrekturen in der effektiven Theorie ($m_t \rightarrow \infty$) auf NNLO und der NNLO-Matching-Koeffizient [15].

1.2 Das Higgs-Boson im Standardmodell der Elementarteilchenphysik

1.2.1 Spontane Symmetriebrechung und Selbstkopplung

Da explizite Massenterme der W - und Z -Eichbosonen in der Lagrange-Dichte Eichinvarianz brechen, können die gemessenen Eichbosonmassen im Standardmodell ohne Higgs-Boson nicht konsistent beschrieben werden. Die dynamische Erzeugung der Eichbosonmassen mit dem (Standardmodell-)Higgs-Mechanismus ist die effizienteste Möglichkeit, die gemessenen massiven Eichbosonen konsistent zu beschreiben. Die Einführung des komplexen skalaren $SU(2)$ -Dubletts

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_u \\ \phi_d \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ v + H(x) + i\phi_3(x) \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

mit nicht-verschwindendem Vakuumerwartungswert $\langle \phi_d \rangle = v/\sqrt{2}$ und der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = [D_\mu \Phi(x)]^\dagger D^\mu \Phi - V(\Phi) \quad (1.2)$$

mit dem Higgs-Potential

$$V(\Phi) := -\mu^2 \Phi^\dagger(x)\Phi(x) + \lambda (\Phi^\dagger\Phi)^2, \quad (1.3)$$

wobei $\mu^2 > 0$ und λ die Higgs-Selbstkopplung ist, bricht die Eichsymmetrie *nicht*. Das Higgs-Dublett koppelt dabei über die kovariante Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + ig/2\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'/2B_\mu$ im kinetischen Term an die elektroschwachen Eichbosonen W^μ und B^μ mit den Eichkopplungen g und g' . Das Minimum des Higgs-Potentials bei

$$\Phi_0^\dagger\Phi_0 = |\phi_{u,0}|^2 + |\phi_{d,0}|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (1.4)$$

hingegen bricht die Eichsymmetrie, so dass bei Entwicklung des Higgs-Dubletts um das Minimum des Potentials

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{mit } v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (1.5)$$

die Massen des Higgs-Bosons und der Eichbosonen

$$m_H^2 = 2\mu^2, \quad m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad \text{und} \quad m_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{4} v^2 \quad (1.6)$$

erzeugt werden. Nach der spontanen Symmetriebrechung wird das Higgs-Potential in Gl. (1.3) zu

$$V(H) = \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4, \quad (1.7)$$

wobei H das Higgs-Feld aus Gl. (1.1) ist. Mit Gl. (1.6) ist außerdem der Vakuumerwartungswert

$$v = \frac{2m_W}{g} = \sqrt{\sqrt{2}G_F} \approx 246 \text{ GeV} \quad (1.8)$$

durch die W -Masse und die schwache Kopplung g bzw. die Fermi-Konstante G_F festgelegt. Aus der gemessenen Higgs-Masse [1, 2, 16] erhält man den Parameter

$$\mu = \frac{m_H}{\sqrt{2}} \quad \text{mit } m_H \approx 125 \text{ GeV}. \quad (1.9)$$

Im Standardmodell ist also das Higgs-Potential in Gl. (1.3) bzw. Gl. (1.7) durch μ und v bereits vollständig bestimmt, denn aus Gl. (1.5) und Gl. (1.6) folgt

$$\lambda = \frac{\mu^2}{v^2} = \frac{m_H^2}{2v^2} \approx 0.13. \quad (1.10)$$

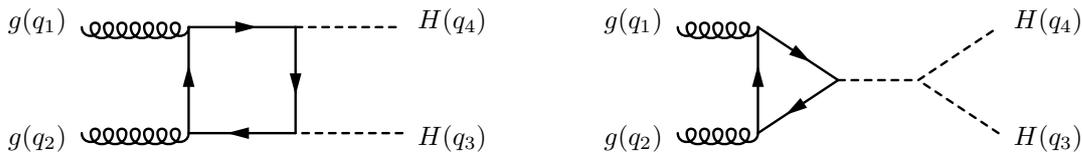


Abbildung 1.2: Feynman-Diagramme zur Produktion von zwei Higgs-Bosonen in Gluon-Fusion. Die Gluon-Higgs-Wechselwirkung wird durch eine Top-Quark-Schleife vermittelt. Das rechte Diagramm enthält den H^3 -Vertex und ist $\propto \lambda$.

Andererseits lässt sich die Higgs-Selbstkopplung λ auch durch die Messung des Koeffizienten des Drei-Higgs-Vertex direkt bestimmen, wie man in Gl. (1.7) erkennt. Eine solche direkte Messung der Drei-Higgs-Kopplung könnte das Standardmodell an einer zentralen Stelle bestätigen oder widerlegen.

In dieser direkten Messung von λ spielt die Produktion von Higgs-Boson-Paaren eine Schlüsselrolle, da es sich um den langfristig einzigen zugänglichen Prozess handelt, der vom Drei-Higgs-Vertex abhängig ist (siehe Abb. 1.2).

1.2.2 Produktion von Higgs-Bosonen am LHC

An einem Hadronen-Beschleuniger wie dem LHC oder Tevatron werden (Anti-) Protonen zur Kollision gebracht. Daher stehen als Teilchen im Anfangszustand Quarks und Gluonen zur Verfügung, und die Produktion eines Higgs-Boson-Paares erfolgt analog zur Produktion eines einzelnen Higgs-Bosons in vier Kanälen: Gluon-Fusion, Vektorboson-Fusion, Higgs-Strahlung und assoziierte Produktion mit Top-Quarks (siehe Abb. 1.3).

Die Beiträge aller Kanäle lassen sich in drei Kategorien unterteilen. Auf der linken Seite von Abb. 1.3 sind die „Dreiecks-Beiträge“ abgebildet, die der Erzeugung eines einzelnen virtuellen Higgs-Bosons entsprechen, das über den Drei-Higgs-Vertex in zwei reelle Higgs-Bosonen zerfällt. Diese Beiträge entsprechen bis auf die Phasenraumintegration und den Higgs-Propagator gerade der Einzel-Higgs-Produktion. Die zweite Kategorie auf der rechten Seite von Abb. 1.3 zeigt die sogenannten „Box-Beiträge“, die jeweils zwei Quark-Higgs- bzw. Vektorboson-Higgs-Vertizes haben. Die dritte Kategorie (Mitte) tritt nur im Vektorboson-Fusions- und im Higgs-Strahlungs-Kanal auf und zeichnet sich durch einen Vektorboson-Zwei-Higgs-Vertex aus.

In [17] ist der Theoriestatus der verschiedenen Kanäle zusammengefasst. Abb. 1.4 wurde aus [17] entnommen und zeigt den totalen Produktionswirkungsquerschnitt eines Higgs-Boson-Paares als Funktion der hadronischen Schwerpunktsenergie. Man erkennt, dass in einem weiten Bereich von LHC-Energien bei 14 TeV bis hin zu 100 TeV der Gluon-Fusions-Kanal etwa einen

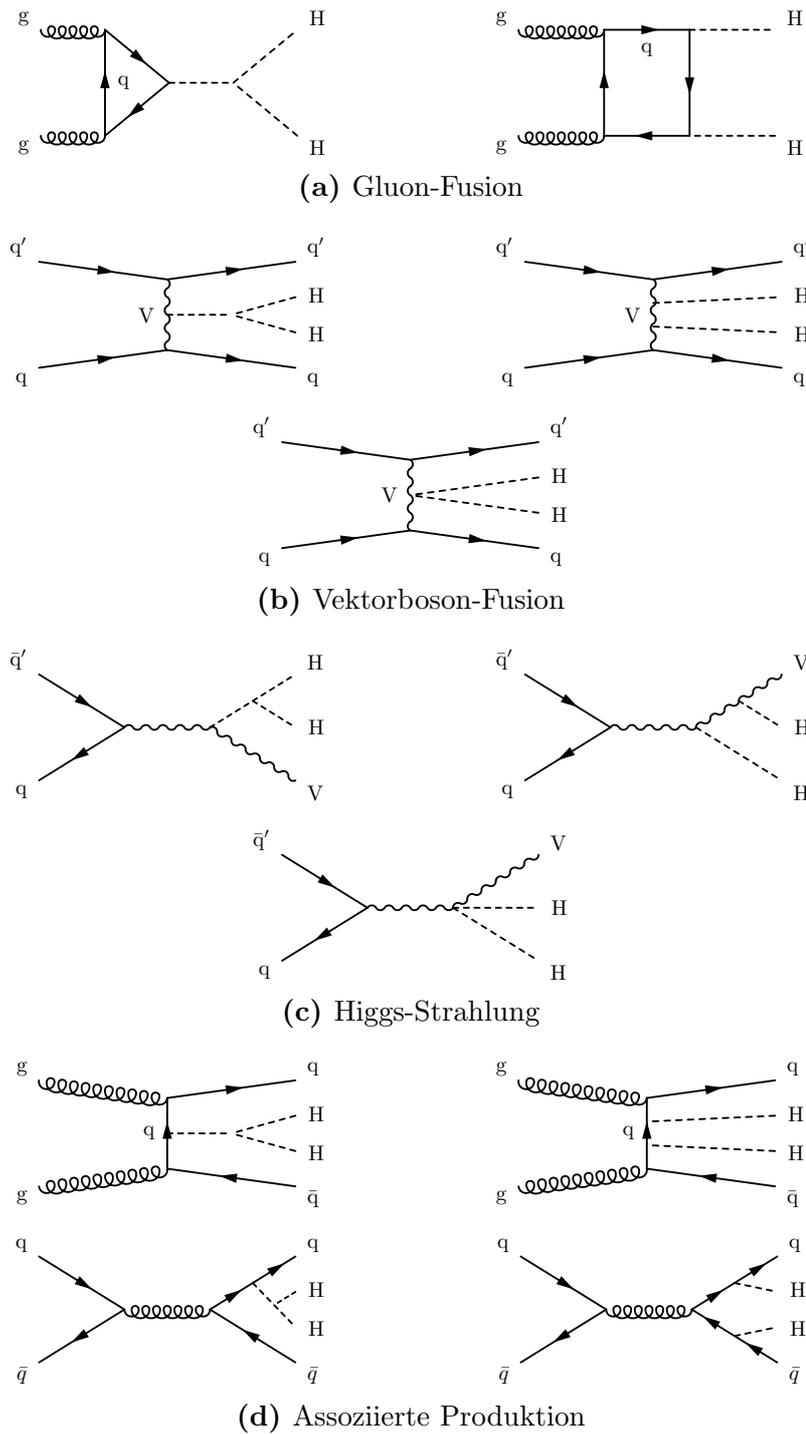


Abbildung 1.3: Produktionskanäle der Higgs-Boson-Paarproduktion am Beispiel von LO-Feynman-Diagrammen. Da die Kopplung des Higgs-Bosons an ein Quark proportional zur Masse des Quarks ist, sind in Gluon-Fusion und assoziierter Produktion die Beiträge dominant, bei denen das Higgs-Boson an ein Top-Quark koppelt.

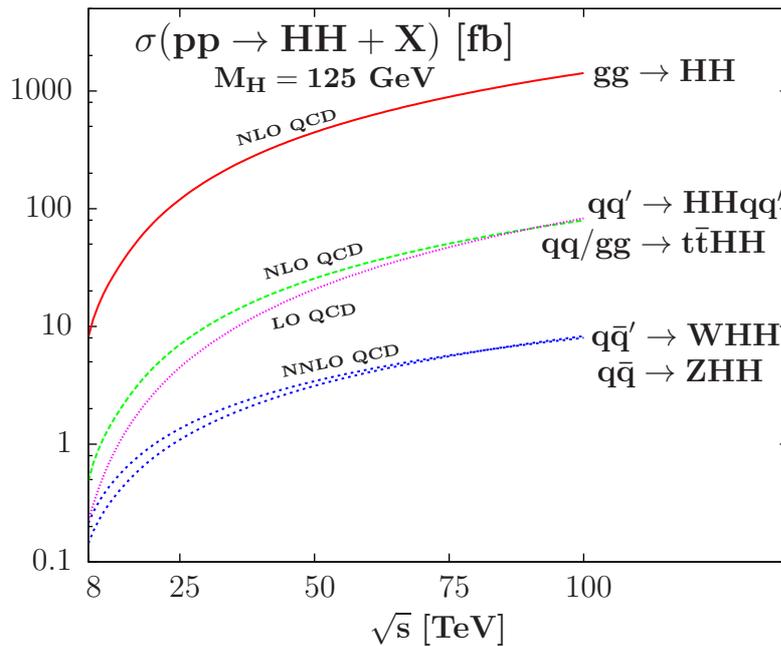


Abbildung 1.4: Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit der hadronischen Schwerpunktsenergie für Higgs-Boson-Paarproduktion in den verschiedenen Kanälen. Abbildung aus [17].

Faktor 10 über den anderen Kanälen liegt. Den nächstgrößeren Beitrag liefert Vektorboson-Fusion, gefolgt von assoziierter Produktion und zuletzt den Higgs-Strahlungs-Prozessen.

Für den totalen Wirkungsquerschnitt ist Gluon-Fusion also numerisch der wichtigste Kanal. Während in [17] dieser Kanal auf NLO und im $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzfall behandelt wurde, werden in dieser Arbeit Effekte der endlichen Top-Quark-Masse und NNLO-Korrekturen berechnet.

1.2.3 Zerfall der Higgs-Bosonen

Da das Higgs-Boson nicht stabil ist, kann es im Experiment nur indirekt über seine Zerfallsprodukte nachgewiesen werden. Abb. 1.5 (aus [18]) zeigt das Verzweungsverhältnis der verschiedenen Zerfallskanäle eines einzelnen Higgs-Bosons. Wie man sieht, ist die gemessene Higgs-Masse von etwa 125 GeV phänomenologisch sehr interessant, da eine Vielzahl verschiedener Zerfallskanäle zugänglich ist und nicht ein einzelner Kanal den Higgs-Zerfall dominiert. Abgesehen vom Zerfall in den Kanälen gg und $c\bar{c}$, die von einem enormen QCD-Hintergrund begleitet sind, zerfällt das Higgs-Boson mit folgenden Verzwei-

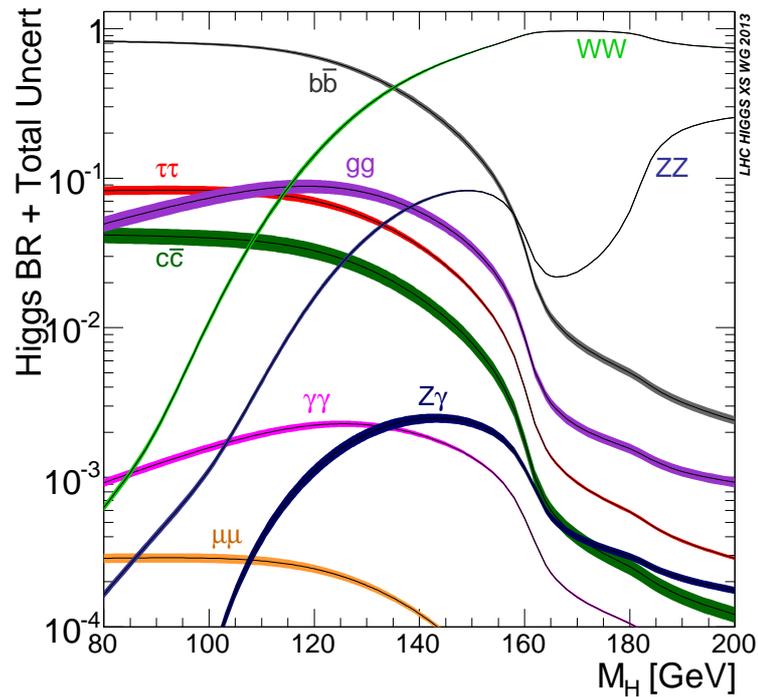


Abbildung 1.5: Zerfallskanäle des Higgs-Bosons: Dargestellt sind die verschiedenen Verzweigungsverhältnisse als Funktion der Higgs-Masse. Abbildung aus [18].

ungsverhältnissen in die verschiedenen Endzustände [18]:

Kanal	$b\bar{b}$	W^+W^-	ZZ	$\tau^+\tau^-$	$\gamma\gamma$	$Z\gamma$	$\mu^+\mu^-$
Verzw.-verhältnis [%]	56	23	2.8	6.2	0.23	0.16	0.002

Um also im Experiment ein Higgs-Boson nachzuweisen, muss man abwägen zwischen einem hohen Verzweigungsverhältnis (beispielsweise in $b\bar{b}$) einerseits und einem sauberen, d.h. hintergrundarmen, Signal (beispielsweise in $\gamma\gamma$) andererseits. Wie im nächsten Abschnitt diskutiert wird, ist tatsächlich der Kompromiss $b\bar{b}\gamma\gamma$ für den Nachweis eines Higgs-Boson-Paares ein vielversprechender Kanal.

1.2.4 Experimenteller Zugang

Zur Messung von Higgs-Paaren und der Bestimmung der Higgs-Selbstkopplung am LHC wurde schon zu Beginn der 2000er Jahre der $b\bar{b}\gamma\gamma$ - und der $W^+W^-W^+W^-$ -Kanal vorgeschlagen und eine Messung von $\lambda \neq 0$ am LHC in

Aussicht gestellt [19, 20]. Mit der Entdeckung des Higgs-Bosons im Jahr 2012 hat die Anzahl der Veröffentlichungen zum Thema Higgs-Paare und Selbstkopplung am LHC stark zugenommen. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit sei im folgenden eine Auswahl dieser Veröffentlichungen genannt. Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich die Aussagen auf den LHC mit 3000 fb^{-1} .

- In [17] wurde der $b\bar{b}\gamma\gamma$ -, der $b\bar{b}\tau^+\tau^-$ - und der $b\bar{b}W^+W^-$ -Kanal untersucht, mit dem Ergebnis, dass die ersten beiden Kanäle vielversprechend sind, während der letzte Kanal aufgrund des zu kleinen Signal-zu-Hintergrund-Verhältnisses weniger bedeutend ist.
- In [21] wurde eine Bestimmung der Selbstkopplung aus Verhältnissen von Einzel- zu Doppel-Higgs-Wirkungsquerschnitten vorgeschlagen. Mit dieser Methode könnte die Selbstkopplung mit einer Genauigkeit von $+30 \text{ \%}/-20 \text{ \%}$ bestimmt werden.
- In [22] wird die Genauigkeit auf die Selbstkopplung aus der Messung des $b\bar{b}\gamma\gamma$ -Kanals mit 40 \% geschätzt.
- In [23] wurde die assoziierte Produktion $HHt\bar{t}$ diskutiert, wobei beide Higgs-Bosonen in $b\bar{b}$ zerfallen. Obwohl die assoziierte Produktion einen deutlich geringeren Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt liefert, kann dieser Prozess in Kombination mit den übrigen Kanälen zur Bestimmung der Selbstkopplung beitragen. Dieser Kanal ist insbesondere deswegen von Interesse, da im Gegensatz zu den übrigen Kanälen der Wirkungsquerschnitt mit λ wächst und nicht fällt.
- In [24, 25] wurde von der ATLAS-Kollaboration der $b\bar{b}b\bar{b}$ - bzw. der $b\bar{b}\gamma\gamma$ -Kanal mit ca. 20 fb^{-1} bei 8 TeV untersucht. Wie im Standardmodell erwartet, kann der Prozess dort noch nicht gesehen werden, allerdings konnte im $b\bar{b}\gamma\gamma$ -Kanal eine Grenze von 2.2 pb auf das Produkt von Wirkungsquerschnitt und Verzweigungsverhältnis gesetzt werden.
- Auch die CMS-Kollaboration untersuchte in [26] den $b\bar{b}b\bar{b}$ -Kanal im Hinblick auf nicht-Standardmodell-Resonanzen.

Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass – mit Ausnahme der letzten beiden Punkte – diese Arbeiten von der Theorie-Seite stammen. Die Genauigkeiten sind also eher als erste Abschätzung zu verstehen, da es sich nicht um experimentelle Studien mit Detektorsimulation etc. handelt.

Weitere Untersuchungen zu Higgs-Paaren und der Selbstkopplung am LHC findet man zum Beispiel in [27, 28, 29, 30].

1.3 Higgs-Paare jenseits des Standardmodells

Um eine Messung von Higgs-Boson-Paaren einordnen zu können, braucht man einerseits eine möglichst genaue Standardmodell-Vorhersage, was der Kern dieser Arbeit ist. Andererseits ist natürlich auch von Interesse, ob und wie sehr sich diese Vorhersagen von bestimmten nicht-Standardmodell-Theorien unterscheiden. Hier seien beispielsweise das Zwei-Higgs-Dublett-Modell (siehe zum Beispiel [31]) oder *Composite-Higgs*-Modelle (siehe zum Beispiel [32]) genannt. Ein anderer Ansatz, mit dem man nicht ein bestimmtes Modell prüft, sondern relativ modellunabhängig bleibt, ist die Parametrisierung der unbekanntenen Neuen Physik in Form von höherdimensionalen Operatoren. Die Erweiterung des Standardmodells um $(d = 6)$ -dimensionale Operatoren im Hinblick auf Higgs-Boson-Paare wurde in [33, 34] untersucht. In solchen Erweiterungen spielt die Higgs-Paarproduktion eine Schlüsselrolle, da ein zusätzlicher Term

$$\propto \frac{|H|^6}{\Lambda^2} \quad (1.11)$$

im Higgs-Potential nur in der Drei- und Vier-Higgs-Selbstwechselwirkung sichtbar wird. Dabei ist Λ die hohe Energieskala der Neuen (unbekannten) Physik.

Überblick

Im nächsten Kapitel wird zunächst der LO-Wirkungsquerschnitt diskutiert. In Kapitel 3 werden dann technische Aspekte und Methoden vorgestellt, die für die (N)NLO-Rechnung benötigt wurden. Kapitel 4 zeigt die $1/m_t$ -Entwicklung des NLO-Wirkungsquerschnitts und dessen Abhängigkeit von der Higgs-Selbstkopplung. In Kapitel 5 wird der NNLO-Matching-Koeffizient berechnet, der für konsistente $(m_t \rightarrow \infty)$ -Vorhersagen auf NNLO benötigt wird. In Kapitel 6 werden die virtuellen Korrekturen zum NNLO-Wirkungsquerschnitt und die *soft+virtual*-Näherung inklusive m_t -Effekten vorgestellt. Zusammenfassung und Ausblick findet man in Kapitel 7.

2 Notation und Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung (LO)

In diesem Kapitel wird zunächst die Notation eingeführt, die auch in den folgenden Kapiteln verwendet wird. Außerdem werden einige Aspekte des LO-Wirkungsquerschnitts diskutiert.

2.1 Kinematik und Lorentz-Struktur

Wir betrachten den Prozess $g(q_1)g(q_2) \rightarrow H(q_3)H(q_4)$ (Abb. 2.1). Aufgrund der Energie- und Impulserhaltung haben wir also drei unabhängige Impulse $q_{1,2,3}$, aus denen sich folgende Mandelstam-Variablen bilden lassen:

$$s = (q_1 + q_2)^2, \quad t = (q_1 - q_3)^2, \quad u = (q_2 - q_3)^2, \quad (2.1)$$

wobei die Gluonen und Higgs-Bosonen reell sind, d.h.

$$q_1^2 = q_2^2 = 0, \quad q_3^2 = q_4^2 = m_H^2 \quad \Rightarrow \quad s + t + u = 2m_H^2. \quad (2.2)$$

Lorentz- und Eichinvarianz führen dazu, dass die Amplitude aus nur zwei unabhängigen Lorentz-Strukturen (siehe Anhang A.1, [4])

$$\mathcal{M} = \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu (\mathcal{M}_1 A_1^{\mu\nu} + \mathcal{M}_2 A_2^{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

besteht, wobei

$$\begin{aligned} A_1^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - \frac{1}{q_{12}} q_1^\nu q_2^\mu, \\ A_2^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + \frac{q_{33}}{q_T^2 q_{12}} q_1^\nu q_2^\mu - \frac{2q_{23}}{q_T^2 q_{12}} q_1^\nu q_3^\mu - \frac{2q_{13}}{q_T^2 q_{12}} q_3^\nu q_2^\mu + \frac{2}{q_T^2} q_3^\mu q_3^\nu, \end{aligned} \quad (2.4)$$

und

$$q_{ij} = q_i \cdot q_j, \quad q_T^2 = \frac{2q_{13}q_{23}}{q_{12}} - q_{33}. \quad (2.5)$$

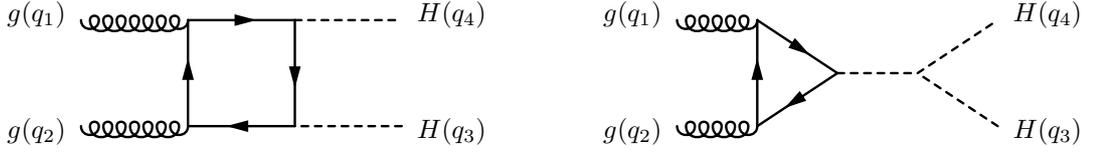


Abbildung 2.1: Diagramme, die zur LO-Amplitude für Doppel-Higgs-Produktion beitragen.

Die Projektoren auf die beiden Strukturen \mathcal{M}_1 und \mathcal{M}_2 sind im Anhang A.1 gegeben. Diese Strukturen lassen sich weiter aufspalten in Box- und Dreiecks-Beiträge:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F \alpha_s s}{2\sqrt{2}\pi} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \delta_{ab} [C_\Delta F_\Delta A_{1\mu\nu} + C_\square (F_\square A_{1\mu\nu} + G_\square A_{2\mu\nu})] \quad (2.6)$$

mit

$$C_\Delta := \lambda \frac{6v^2}{s - m_H^2} = \frac{3m_H^2}{s - m_H^2}, \quad C_\square := 1. \quad (2.7)$$

Die Formfaktoren $F_{\square/\Delta}$ und G_\square wurden berechnet und mit dem Literaturergebnis in [4] verglichen. In dieser Notation ist der partonische LO-Wirkungsquerschnitt gegeben durch

$$\sigma(gg \rightarrow HH) = \frac{G_F^2 \alpha_s^2}{512(2\pi)^3} \int_{t_-}^{t_+} dt \{ |C_\Delta F_\Delta + C_\square F_\square|^2 + |C_\square G_\square|^2 \} \quad (2.8)$$

mit

$$t_\pm = -\frac{s}{4} \left(1 + \delta \mp 2\sqrt{\delta} \right) \quad \text{und} \quad \delta = 1 - \frac{4m_H^2}{s}. \quad (2.9)$$

2.1.1 Grenzfall $m_t \rightarrow \infty$

Für $m_t \rightarrow \infty$ nehmen $F_{\square/\Delta}$ und G_\square

$$F_\Delta \rightarrow \frac{2}{3}, \quad F_\square \rightarrow -\frac{2}{3}, \quad G_\square \rightarrow 0, \quad (2.10)$$

und damit auch der Wirkungsquerschnitt in Gl. (2.8)

$$\sigma(gg \rightarrow HH) \rightarrow \frac{G_F^2 \alpha_s^2}{512(2\pi)^3} \int_{t_-}^{t_+} dt \frac{4}{9} |C_\Delta - C_\square|^2 \propto \left| \frac{s - 4m_H^2}{s - m_H^2} \right|^2 \quad (2.11)$$

eine einfache Form an. Es ist zu beachten, dass an der Produktionsschwelle ($s \rightarrow 4m_H^2$) für zwei Higgs-Bosonen die Box- und Dreiecks-Beiträge sich im Standardmodell, also für $\lambda = \lambda_{\text{SM}} = 3m_H^2/v^2$, exakt wegheben. Bei einer Reskalierung der Higgs-Selbstkopplung $\lambda = x_\lambda \lambda_{\text{SM}}$ wird Gl. (2.11) zu

$$\sigma(gg \rightarrow HH) \rightarrow \propto \left| \frac{s - (1 + 3x_\lambda)m_H^2}{s - m_H^2} \right|^2. \quad (2.12)$$

Die vollständige Kancellierung *direkt* an der Schwelle ($s = 4m_H^2$) wird also für $x_\lambda \neq 1$ zerstört. Für $x_\lambda > 1$ kommt es allerdings oberhalb der Schwelle bei $s = (1 + 3x_\lambda)m_H^2$ zu einem Nulldurchgang des Wirkungsquerschnitts. Im folgenden werden wir sehen, dass dieses Verhalten auch für endliche Top-Quark-Masse zu beobachten ist.

2.2 Diskussion des LO-Wirkungsquerschnitts

2.2.1 Globale Parameter

Bevor der Wirkungsquerschnitt auf LO diskutiert wird, werden an dieser Stelle die verwendeten Eingangsparameter angegeben. Soweit nicht anders angegeben, werden diese Parameter in der gesamten Arbeit verwendet:

$$m_H = 125.09 \text{ GeV}, \quad m_t = 173.21 \text{ GeV}, \quad G_F = 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}. \quad (2.13)$$

Der Wert der Higgs-Masse ist aus [16] entnommen, die übrigen Parametern sind die aktuellen PDG-Werte [35]. Hadronische Größen wurden mit MSTW2008 Partonverteilungen [36] auf LO, NLO und NNLO bestimmt, und es wurden die zugehörigen Werte für die starke Kopplungskonstante

$$\begin{aligned} \text{MSTW2008-LO} & \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_s(m_Z) = 0.13939 \\ \text{MSTW2008-NLO} & \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_s(m_Z) = 0.12018 \\ \text{MSTW2008-NNLO} & \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_s(m_Z) = 0.11707 \end{aligned} \quad (2.14)$$

verwendet. Die laufende Kopplung wurde daraus mit dem Programm RunDec [37] berechnet. Für die hadronische Schwerpunktsenergie wurde

$$\sqrt{\hat{s}} = 14 \text{ TeV} \quad (2.15)$$

verwendet.

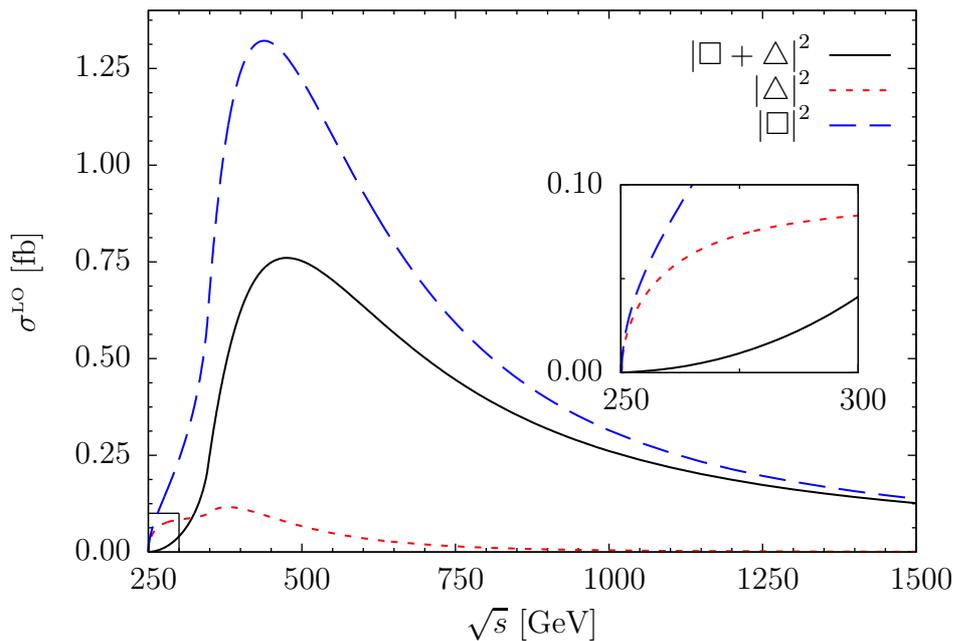


Abbildung 2.2: Partonischer LO-Wirkungsquerschnitt: Box-, Dreieck- sowie (Box+Dreieck)-Beiträge.

2.2.2 Partonischer Wirkungsquerschnitt

In Abb. 2.2 ist der partonische LO-Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\text{LO}}(gg \rightarrow HH)$ als Funktion der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} dargestellt. Die durchgezogene Linie stellt das Standardmodell-Ergebnis dar, das sich aus Box- und Dreiecks-Beiträgen sowie dem Interferenzterm zusammensetzt. Zum Vergleich sind außerdem die Box- und die Dreiecks-Beiträge gesondert dargestellt. Betrachten wir zunächst das Standardmodell-Ergebnis. Der partonische Wirkungsquerschnitt steigt von der Schwelle bei 250 GeV bis zu seinem Maximum bei etwa 500 GeV stark an und fällt danach weniger stark ab. Diese Form unterscheidet sich deutlich von der Produktion eines einzelnen Higgs-Bosons. Denn in diesem Fall ist aufgrund der $(2 \rightarrow 1)$ -Kinematik der Wirkungsquerschnitt durch eine $\delta(s - m_H^2)$ -Distribution festgelegt. Bei der Einzel-Higgs-Produktion ist also der LO-Wirkungsquerschnitt allein durch den Wert an der Schwelle gegeben, während im Doppel-Higgs-Fall bereits auf LO der Wirkungsquerschnitt durch den Bereich oberhalb der Schwelle beherrscht wird. Diese Tatsache hat weitreichende Auswirkungen, zum Beispiel im Hinblick auf die Entwicklung in der inversen schweren Top-Quark-Masse. Während im Fall der Einzel-Higgs-Produktion $m_H^2 = s < m_t^2$ gilt, ist das für Higgs-Paarproduktion mit $s \geq 4m_H^2$ im allgemeinen nicht mehr gültig. Das ist die Motivation für die detaillierte

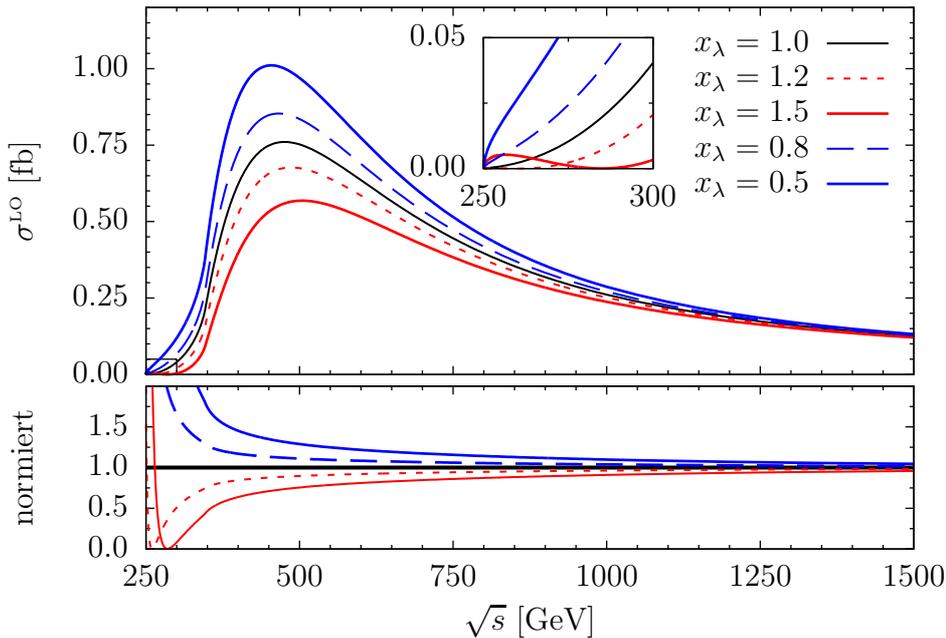


Abbildung 2.3: Partonischer LO-Wirkungsquerschnitt bei Variation der Higgs-Selbstkopplung $\lambda = x_\lambda \lambda_{\text{SM}}$ um ihren Standardmodell-Wert. Das untere Bild zeigt das Ergebnis normiert auf $x_\lambda = 1$.

Untersuchung der Top-Massen-Effekte in Kapitel 4.

Wie bereits in der Einleitung beschrieben, ist die Higgs-Paar-Produktion insbesondere wegen des Zusammenhangs mit der Higgs-Selbstkopplung λ von Interesse. Da aber nicht die gesamte Amplitude, sondern nur die Dreiecks-Beiträge proportional zu λ sind, betrachten wir jetzt getrennt die Beiträge von Box- und Dreiecks-Diagrammen. Wie man in Abb. 2.2 erkennt, sind im gesamten kinematischen Bereich die Dreiecks-Beiträge deutlich kleiner als die Box-Beiträge. Außerdem werden sie für große Schwerpunktsenergie zusätzlich unterdrückt, so dass für $\sqrt{s} \gtrsim 1000$ GeV der Wirkungsquerschnitt allein durch die Box-Beiträge bestimmt wird. Im $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzfall ist die Ursache dieser Unterdrückung offensichtlich, da in diesem Fall die Amplitude der Dreiecksdiagramme proportional zu dem Higgs-Propagator

$$C_\Delta \propto \frac{1}{s - m_H^2} \rightarrow \frac{1}{s} \text{ für } s \gg m_H^2$$

ist, während die Box-Beiträge $\propto C_\square = 1$ sind. Im Bereich $\sqrt{s} \lesssim 1000$ GeV sind die Dreiecks-Beiträge zwar ebenfalls klein, allerdings sorgt dort die Interferenz zwischen Box und Dreieck für eine deutliche Verringerung der Box-Beiträge. Im Bereich der Schwelle ($250 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 300 \text{ GeV}$) kommt es sogar zu

einer fast vollständigen gegenseitigen Auslöschung zwischen Box und Dreieck, so dass der LO-Wirkungsquerschnitt im Standardmodell dort sehr klein ist. Daher ist die Schwelle ein sehr sensibler Bereich, einerseits für Abweichungen vom Standardmodell, andererseits aber auch für Korrekturen höher Ordnung und Top-Quark-Massen-Effekte.

In Abb. 2.3 ist nochmals der partonische Wirkungsquerschnitt dargestellt, allerdings für phänomenologisch interessante Variationen der Higgs-Selbstkopplung um $\pm 50\%$ und $\pm 20\%$ bzgl. ihres Standardmodell-Wertes. Das Ergebnis im Standardmodell ($x_\lambda = 1$) ist dieselbe Kurve wie $|\square + \triangle|^2$ in Abb. 2.2. Zunächst stellen wir fest, dass das für $m_t \rightarrow \infty$ in Gl. (2.12) beobachtete Verhalten auch für endliche m_t zu beobachten ist: Für $x_\lambda < 1$ findet keine Auslöschung des Wirkungsquerschnitts statt. Für $x_\lambda > 1$ hingegen findet die Auslöschung bei $\sqrt{s} \gtrsim 2m_H$, also nahe – aber nicht *direkt* an – der Schwelle statt, was man an den Nullstellen in Abb. 2.3 (unten) erkennt. Für Energien oberhalb der Nullstelle führt wie erwartet eine größere/kleinere Selbstkopplung zu einem kleineren/größeren Wirkungsquerschnitt. Die absolute Abweichung vom Standardmodell ist bei etwa 500 GeV am größten. Die relative Abweichung hingegen wächst zur Schwelle hin an, wobei im Fall $x_\lambda > 1$ der Anstieg noch durch die Nullstelle des Wirkungsquerschnitts nahe der Schwelle unterbrochen wird.

Des Weiteren sieht man in Abb. 2.3, dass für große Schwerpunktsenergien der Wirkungsquerschnitt nicht mehr sensitiv auf die Higgs-Selbstkopplung ist, was man aufgrund der Unterdrückung der Dreiecks-Beiträge erwartet. Daran erkennt man, dass im Hinblick auf die Messung der Selbstkopplung höhere hadronische Energien nur indirekt, nämlich über die damit verbundene höhere Parton-Luminosität, hilfreich sind.

2.2.3 Hadronischer Wirkungsquerschnitt

Nachdem wir bis jetzt den partonischen Wirkungsquerschnitt im Detail betrachtet haben, stellt sich die Frage, wie sehr die beobachteten Aspekte durch die Partonverteilungen verschmiert werden und wie sie sich im hadronischen Wirkungsquerschnitt zeigen. Die Partonverteilungsfunktion $f_p(x)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Parton p mit dem longitudinalen Impulsanteil x des Hadrons zu finden. Da die Partonverteilungsfunktion des Gluons $f_g(x)$ mit wachsendem x fällt, werden Beiträge hoher partonischer Schwerpunktsenergie unterdrückt, während Beiträge niedrigerer Schwerpunktsenergie (insbesondere die Schwelle) betont werden. Da der partonische Wirkungsquerschnitt bezüglich der Abhängigkeit von λ aber auch im Hinblick auf α_s - und $1/m_t$ -Korrekturen an der Schwelle sich stark von mittleren und hohen Energien unterscheidet,

ist es von besonderem Interesse, den Einfluss der Partonverteilungen auf die unterschiedlichen Bereiche genau zu untersuchen. Dazu betrachten wir den hadronischen Wirkungsquerschnitt $\hat{\sigma}(pp \rightarrow HH)$

$$\hat{\sigma}_{\text{tot}}(\hat{s}) = \int_{4m_H^2/\hat{s}}^1 d\tau \left(\frac{d\mathcal{L}_{gg}}{d\tau} \right) \sigma(\tau\hat{s}) \quad (2.16)$$

mit

$$\left(\frac{d\mathcal{L}_{gg}}{d\tau} \right) (\tau) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_g(x_1) f_g(x_2) \delta(\tau - x_1 x_2) . \quad (2.17)$$

Durch Einführung eines Schnitts auf die partonische Schwerpunktsenergie,

$$\hat{\sigma}(\hat{s}, s_{\text{cut}}) = \int_{4m_H^2/\hat{s}}^1 d\tau \left(\frac{d\mathcal{L}_{gg}}{d\tau} \right) \sigma(\tau\hat{s}) \theta(s_{\text{cut}} - \tau\hat{s}) , \quad (2.18)$$

erkennt man bei Betrachtung des Wirkungsquerschnitts als Funktion von s_{cut} bei festem \hat{s} wie stark die Bereiche verschiedener partonischer Schwerpunktsenergie zum totalen hadronischen Wirkungsquerschnitt beitragen. Per Konstruktion erhält man für $s_{\text{cut}} \geq \hat{s}$ den totalen hadronischen Wirkungsquerschnitt.

In Abb. 2.4 ist der hadronische LO-Wirkungsquerschnitt als Funktion von $\sqrt{s_{\text{cut}}}$ für eine hadronische Schwerpunktsenergie von $\sqrt{\hat{s}} = 14$ TeV dargestellt. Man erkennt, dass der totale Wirkungsquerschnitt von dem Bereich $\sqrt{s} \lesssim 800$ GeV bestimmt wird. Für größere Energien fallen der partonische Wirkungsquerschnitt und die Partonverteilungen, so dass es keine nennenswerten Beiträge zu $\hat{\sigma}_{\text{tot}}(14 \text{ TeV})$ gibt. Der besonders interessante Bereich nahe der Schwelle liefert trotz Betonung durch die Partonverteilungen aufgrund des kleinen partonischen Wirkungsquerschnitts ebenfalls nur einen geringen Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt. Allein der Bereich $350 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 800 \text{ GeV}$ macht 90 % des totalen Wirkungsquerschnitts aus.

Da auf LO die partonische Schwerpunktsenergie gleich der invarianten Higgs-Paar-Masse $\sqrt{Q^2}$ ist, ist der in Gl. (2.18) eingeführte Schnitt auch als physikalische Observable zu sehen. Betrachtet man die relative Abweichung (Abb. 2.4 unten) bei Variation von λ , so erkennt man, dass der Wirkungsquerschnitt bei einem Schnitt auf die invariante Masse des Higgs-Paares von $\lesssim 350$ GeV extrem sensitiv auf λ ist. Unter Berücksichtigung der absoluten Größe des Wirkungsquerschnitts in diesem Bereich (Abb. 2.4 oben) wird man sich einen solchen Schnitt unter Annahme des Standardmodells aufgrund der geringen Statistik nicht leisten können.

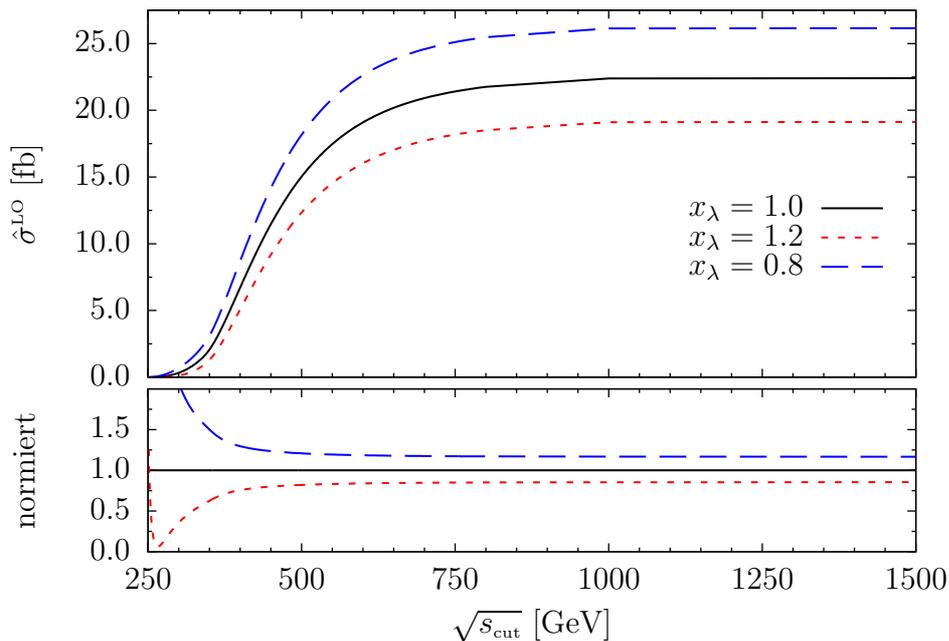


Abbildung 2.4: Hadronischer LO-Wirkungsquerschnitt bei Variation der Higgs-Selbstkopplung $\lambda = x_\lambda \lambda_{\text{SM}}$ um ihren Standardmodell-Wert. Das untere Bild zeigt das Ergebnis normiert auf $x_\lambda = 1$. Der Schnitt s_{cut} ist auf LO äquivalent zu einem Schnitt auf die invariante Higgs-Paar-Masse.

2.2.4 Entwicklung in $1/m_t$

Bevor wir im nächsten Kapitel die NLO-Korrekturen und deren m_t -Abhängigkeit untersuchen, betrachten wir die $1/m_t$ -Entwicklung auf LO. Mit dem Entwicklungsparameter

$$\rho = \frac{m_H^2}{m_t^2} \quad (2.19)$$

schreiben wir den Wirkungsquerschnitt wie folgt:

$$\sigma = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)}\rho + \sigma^{(2)}\rho^2 + \sigma^{(3)}\rho^3 + \dots \quad (2.20)$$

Da die Amplitude $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$ an der Schwelle für die Produktion eines Top-Quark-Paares bei $\sqrt{s} = 2m_t$ einen Imaginärteil entwickelt, den die Entwicklung um $\rho = 0$ nicht enthält, kann diese Entwicklung nur unterhalb der Top-Quark-Schwelle funktionieren. In Abb. 2.5 erkennt man, dass die Entwicklung bis $\mathcal{O}(\rho^6)$ unterhalb der Schwelle gut funktioniert, sie nähert sich dem in m_t exakten Ergebnis an. Direkt bei und oberhalb der Schwelle versagt die Entwicklung wie es zu erwarten war. Da der totale Wirkungsquerschnitt wesentlich

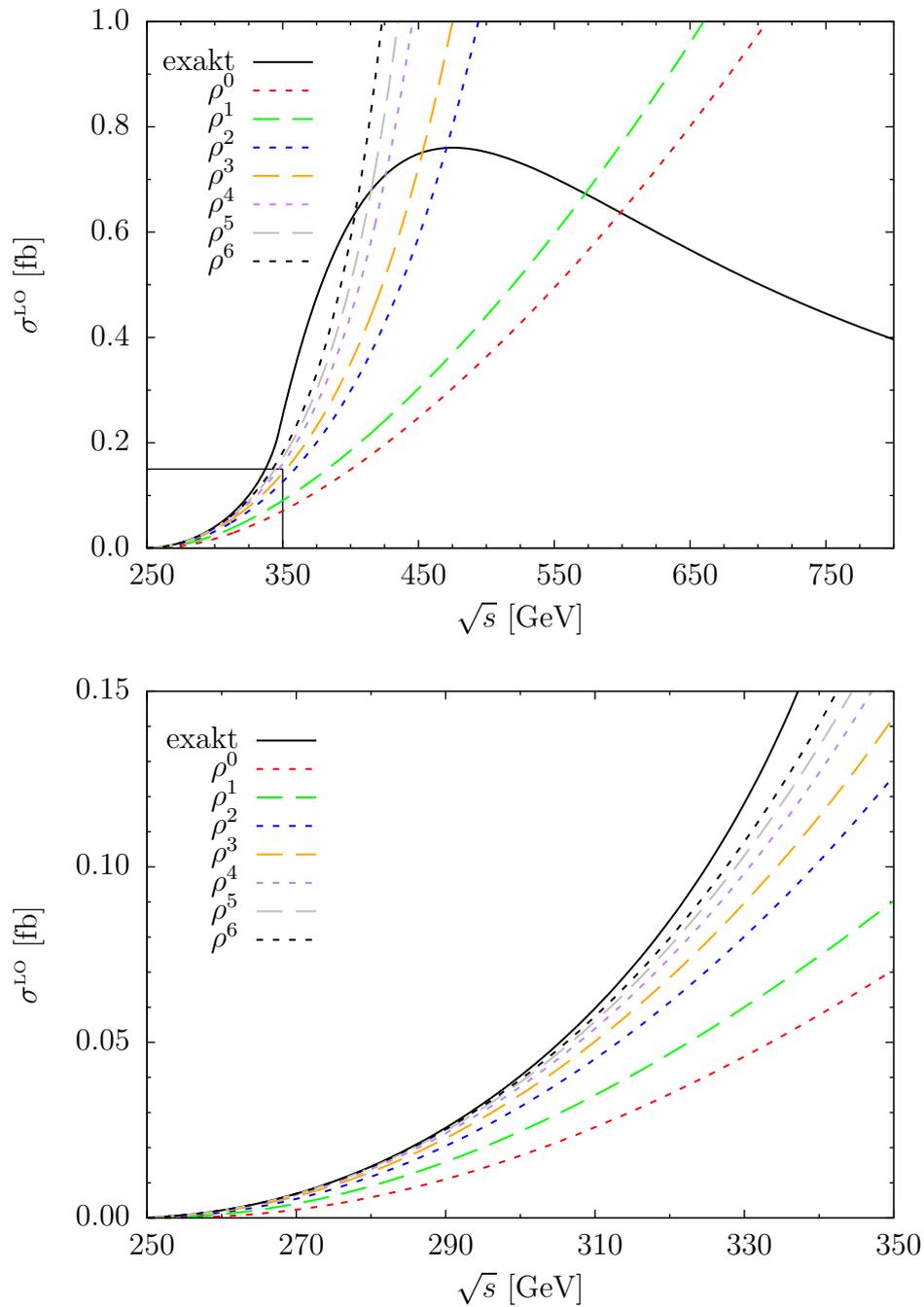


Abbildung 2.5: Partonischer LO-Wirkungsquerschnitt exakt und entwickelt in der inversen Top-Quark-Masse, wobei $\rho = m_H^2/m_t^2$. Die ρ^0 -Kurve entspricht dem Ergebnis in der effektiven Theorie ($m_t \rightarrow \infty$).

durch den Bereich oberhalb der Schwelle bestimmt wird, ist diese Entwicklung nicht geeignet, den totalen Wirkungsquerschnitt oder Verteilungen oberhalb der Top-Quark-Schwelle auf LO zu beschreiben. Im folgenden Kapitel wird diskutiert, inwiefern eine solche Entwicklung auf (N)NLO modifiziert werden kann, um auch oberhalb der Schwelle eine möglichst gute Näherung des exakten Ergebnisses zu erhalten.

Zuletzt noch eine Beobachtung bezüglich der Struktur der ρ -Entwicklung. In Abb. 2.5 erkennt man, dass die verschiedenen Kurven paarweise auftreten. Die Kurven (ρ^0, ρ^1) , (ρ^2, ρ^3) und (ρ^4, ρ^5) liegen jeweils näher zusammen. Es sei vorweggenommen, dass ein ähnliches Verhalten auch auf NLO beobachtet werden wird.

3 Methoden für die (N)NLO-Rechnungen

In diesem Kapitel werden einige technische Aspekte diskutiert, die für die (N)NLO-Rechnungen in den folgenden Kapiteln verwendet wurden. Darunter fallen verschiedene Methoden und Konzepte zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten und anderen physikalischen Observablen ebenso wie deren praktische Umsetzung, im wesentlichen in Form von Computerprogrammen.

3.1 Optisches Theorem, Cutkosky-Regeln und Reversed Unitarity

Das Optische Theorem besagt, dass sich der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{tot}}(q_1 q_2 \rightarrow X)$ aus dem Imaginärteil (bzw. der Diskontinuität) der Vorwärtsstreuamplitude $\mathcal{M}(q_1 q_2 \rightarrow q_1 q_2)$ ergibt:

$$\sigma_{\text{tot}}(q_1 q_2 \rightarrow X) = \frac{1}{s} \text{Im} \mathcal{M}(q_1, q_2 \rightarrow q_1, q_2) . \quad (3.1)$$

Dabei ist $\sqrt{s} = \sqrt{(q_1 + q_2)^2}$ die Schwerpunktsenergie. Das Theorem basiert auf der Wahrscheinlichkeitserhaltung, also auf der Unitarität der Streumatrix. Nicht nur in der Quantenmechanik, sondern auch in der Quantenfeldtheorie ist das Optische Theorem von großer Bedeutung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde es verwendet, um den totalen Wirkungsquerschnitt für Higgs-Boson-Paarproduktion im Gluon-Gluon-, im Gluon-Quark- und im Quark-Antiquark-Kanal aus den entsprechenden Vorwärtsstreuamplituden zu erhalten. Allerdings ist das Optische Theorem in Form von Gl. (3.1) dafür nicht unmittelbar geeignet. Denn in dieser Arbeit soll nicht der Wirkungsquerschnitt für einen beliebigen Endzustand X , sondern für einen Endzustand mit genau zwei Higgs-Bosonen untersucht werden. Diese Einschränkung auf dem Niveau von Feynman-Diagrammen machen zu können, erlauben die Cutkosky-Schnitt-Regeln [38] (siehe auch z.B. [39]). Diese besagen, dass der Beitrag zur Diskontinuität der Vorwärtsstreuamplitude, der mit einem bestimmten Endzustand

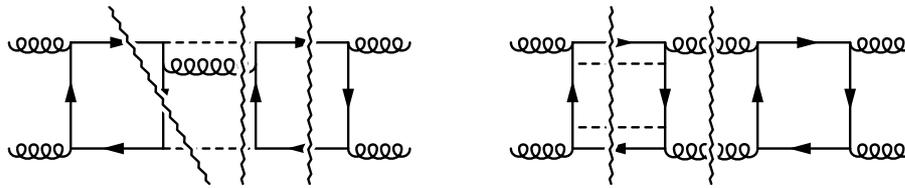


Abbildung 3.1: Beispiele für verschiedene Schnitte von Diagrammen der gg -Vorwärtsstreuamplitude. Die Schnitte tragen bei zu den Endzuständen (von links nach rechts) $Ht\bar{t}$, HHg , $t\bar{t}$, $HHt\bar{t}$ und gg .

verbunden ist, sich aus der Ersetzung der Propagatoren

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \rightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \quad (3.2)$$

ergibt, die den Teilchen im Endzustand entsprechen. Im Diagramm wird diese Ersetzung durch eine Linie (den Schnitt), die Anfangs- und Endzustand trennt, dargestellt (siehe Abb. 3.1). Diese Regel erlaubt es, nicht die gesamte Vorwärtsstreuamplitude betrachten zu müssen, sondern sich auf die Feynman-Diagramme zu beschränken, die dem gewünschten Endzustand entsprechen. Die Einschränkung des Endzustandes auf $HH + X$ (wobei X für leichte Quarks und Gluonen steht) lautet also in der Sprache der Schnitte, dass nur solche Diagramme berücksichtigt werden, die

- genau zwei geschnittene Higgs-Propagatoren und
- beliebig viele geschnittene (masselose) Quark- und Gluon-Propagatoren und
- keine geschnittenen Top-Quark-Propagatoren¹

haben. Alle anderen Diagramme tragen nicht zur Higgs-Boson-Paarproduktion bei. Weiter ist zu beachten, dass Diagramme mehrere Schnitte haben können. In diesem Fall sind genau die Schnitte zu berücksichtigen, die die Kriterien in der obigen Aufzählung erfüllen, siehe Abb. 3.1.

Reversed Unitarity

Das Optische Theorem und die Cutkosky-Regeln erlauben es also, einen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{\text{tot}}(gg \rightarrow HH + X) = \int \text{dPS} |\mathcal{M}(gg \rightarrow HH + X)|^2, \quad (3.3)$$

¹Fordert/erlaubt man auch geschnittene Top-Quark-Propagatoren, so erhält man die Beiträge zur assoziierten Produktion $\sigma(gg \rightarrow HH + t\bar{t} + X)$.

also ein Phasenraumintegral, durch geschnittene Feynman-Diagramme

$$[\mathcal{M}(gg \rightarrow gg)]_{\text{alle erlaubte Schnitte}} \quad (3.4)$$

auszudrücken. Obwohl es sich nicht um herkömmliche Schleifenintegrale, sondern (auch) um Phasenraumintegrale handelt, können viele Techniken für Schleifenintegrale auf sie angewendet werden. Die Anwendung dieser fortgeschrittenen Techniken (insbesondere IBP-Relationen, Reduktion auf Masterintegrale, Berechnung von Masterintegralen mit Differentialgleichungen) auf Schnitt-Integrale bezeichnet man als *reversed unitarity* [40]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde *reversed unitarity* verwendet, um die reellen Korrekturen zum NLO-Wirkungsquerschnitt für Higgs-Boson-Paarproduktion aus der Gluon-Gluon-Vorwärtsstreuamplitude zu berechnen. Die geschnittenen Schleifenintegrale können – mit einigen Ausnahmen – wie herkömmliche Integrale behandelt werden.

Beispiel zum Unterschied zwischen geschnittenen und nicht geschnittenen Integralen

Eine dieser Ausnahmen besteht darin, dass geschnittene Integrale nicht immer faktorisieren, auch wenn das für das entsprechende ungeschnittene Integral gilt. Dieser Fall tritt bei den virtuellen Korrekturen der Higgs-Boson-(Paar-)Produktion auf NNLO ein. Im Fall der einfachen Higgs-Produktion wurde derselbe Effekt in [41] diskutiert.

Wir betrachten die Diagramme aus Abb. 3.2a, die zum NNLO Wirkungsquerschnitt beitragen. Das Beispiel zeigt nur die \square^2 -Diagramme, für \triangle^2 und $\square\triangle$ gilt die Argumentation völlig analog. Im Zuge der $1/m_t$ -Entwicklung können die soften Beiträge dieser Diagramme auf die Topologien in Abb. 3.2b abgebildet werden, die wiederum die Masterintegrale in Abb. 3.2c enthalten. Für nicht geschnittene Schleifenintegrale wären das linke und das rechte Integral identisch, da es sich um das Produkt dreier Einschleifen-Integrale handelt. Für die geschnittenen Integrale gilt dies aber nicht. Faktoren auf der linken und auf der rechten Seite des Schnitts müssen unterschiedlich behandelt werden, was man am Vergleich mit der Vertex-Rechnung sofort erkennt: In der Vertex-Rechnung treten die entsprechenden Beiträge in der Amplitude in Form der Diagramme in Abb. 3.3a auf, die sich auf die Masterintegrale in Abb. 3.3b zurückführen lassen. Da der masselose Einschleifen-Propagator mit $(-s)^\epsilon$ skaliert, muss

$$\text{Diagramm} \propto \text{Diagramm} \left(\text{Diagramm} \right)^* \propto (-s + i0)^\epsilon (-s - i0)^\epsilon = s^{2\epsilon}$$

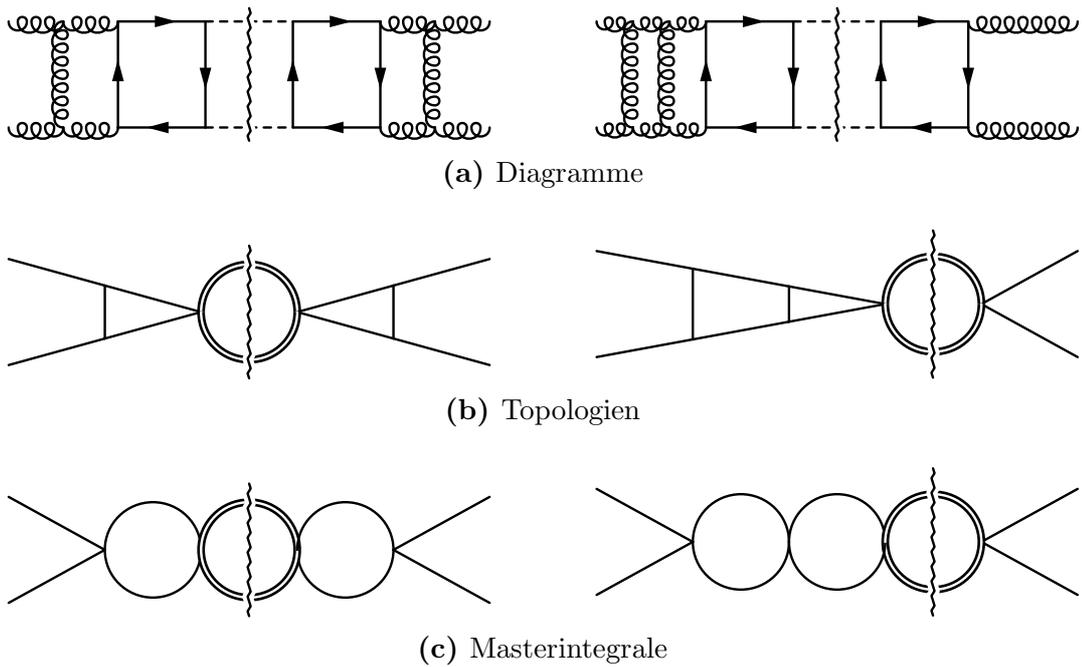


Abbildung 3.2: Beiträge zur $gg \rightarrow gg$ Amplitude.

gelten. Für das Integral auf der rechten Seite, sowie das Integral, das aus dem am Schnitt gespiegelten Diagramm hervorgeht, gilt hingegen

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagramm} + \text{Diagramm} \propto \text{Diagramm} \left(\text{Diagramm} \right)^* + cc \\
 & \propto (-s + i0)^{2\epsilon} + (-s - i0)^{2\epsilon} = s^{2\epsilon} 2 \operatorname{Re} [(-1 + i0)^{2\epsilon}] .
 \end{aligned}$$

Um also aus der gg Vorwärtsstreuamplitude den totalen $gg \rightarrow HH$ Wirkungsquerschnitt zu erhalten, dürfen die Integrale in Abb. 3.2c nicht identifiziert werden, und es muss berücksichtigt werden, dass das linke Integral mit 1, das rechte Integral mit $\operatorname{Re}[(-1 + i0)^{2\epsilon}]$ skaliert.

3.2 Der soft+virtual-(SV-)Wirkungsquerschnitt

Ein Wirkungsquerschnitt höherer Ordnung besteht aus virtuellen und reellen Korrekturen. In fester Ordnung der Störungstheorie, zum Beispiel NLO (das entspricht hier $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$), müssen alle Bestandteile von der entsprechenden Ordnung in α_s berücksichtigt werden. Die Berücksichtigung von virtuellen Korrek-

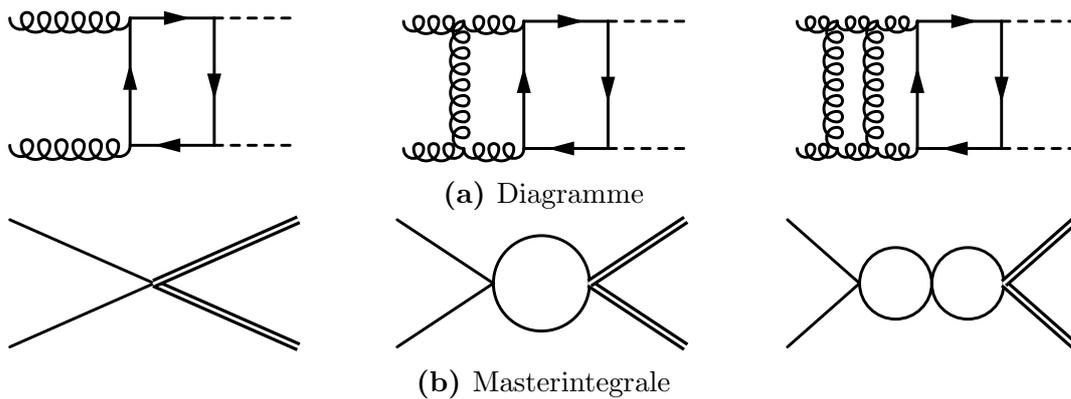


Abbildung 3.3: Beiträge zur $gg \rightarrow HH$ Amplitude.

turen von $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ bei Vernachlässigung der reellen Korrekturen von $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$ wäre nicht konsistent. In physikalischen Observablen drückt sich dieser Umstand dadurch aus, dass ein Ereignis, bei dem keine reelle Abstrahlung stattgefunden hat, nicht zu unterscheiden ist von einem Ereignis, bei dem ein hinreichend energiearmes Teilchen abgestrahlt wurde, das nicht messbar ist.

Da reelle Abstrahlung, zum Beispiel eines energiearmen Gluons, mit einer Divergenz verknüpft ist, spiegelt sich dieses Verhalten auch in Form von $1/\epsilon$ -Polen in dimensionaler Regularisierung wieder. In dimensionaler Regularisierung in $d = 4 - 2\epsilon$ Dimensionen treten ultraviolette (UV), infrarote (IR) und kollineare Divergenzen in Form von $1/\epsilon$ -Polen auf. UV-Divergenzen sind einfache Pole, die durch die Renormierung der Parameter (Felder, Massen und Kopplungen) entfernt werden. Auf (N)NLO können IR- und IR-kollineare Divergenzen $1/\epsilon^2$ - ($1/\epsilon^4$ -)Pole entwickeln, die sich durch Aufsummieren der reellen und virtuellen Korrekturen wegheben (Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem). Die verbleibenden kollinearen $1/\epsilon$ - ($1/\epsilon^2$ -) Pole werden durch Renormierung der Partonverteilungsfunktionen absorbiert.

Betrachtet man allerdings die virtuellen Korrekturen und die reellen Korrekturen in dem Grenzfall, in dem die reelle Abstrahlung energiearm ist (*soft limit*), dann ist eine physikalische Vorhersage möglich. Denn ein ($pp \rightarrow HH$)-Ereignis ist zu unterscheiden von einem ($pp \rightarrow HH + jet$)-Erzeugnis, bei dem der *jet* mindestens eine gewisse Energie hat. Durch Hinzunahme der reellen Korrekturen im *soft limit* lässt sich daher ein für $\epsilon \rightarrow 0$ endliches Ergebnis, das *soft+virtual*-Ergebnis (SV), konstruieren.

Von Vorteil ist, dass aufgrund von Faktorisierungseigenschaften der QCD das SV-Ergebnis sich allein aus den virtuellen Korrekturen konstruieren lässt. Allerdings handelt es sich bei dem SV-Wirkungsquerschnitt nur um einen –

wenn auch endlichen – Teil des totalen inklusiven Wirkungsquerschnitts. In Abschnitt 3.2.4 wird diskutiert, unter welchen Bedingungen dieses Teilergebnis als Näherung für den totalen inklusiven Wirkungsquerschnitt verwendet werden kann. In Abschnitt 4.5.1 wird sich herausstellen, dass für Higgs-Boson-Paarproduktion der SV-Wirkungsquerschnitt auf NLO eine gute Näherung des vollständigen Ergebnisses darstellt: Für große partonische Schwerpunktsenergien beträgt die Abweichung vom vollständigen Ergebnis etwa 20 %. Da die Partonverteilungen aber den Bereich kleiner Schwerpunktsenergien, wo die Abweichung deutlich geringer ist, betonen, liegt der totale hadronische SV-Wirkungsquerschnitt nur 5 % unter dem vollständigen Ergebnis. In Abschnitt 6.2 wird gezeigt, dass durch Hinzunahme nicht-führender Terme der SV-Entwicklung der totale Wirkungsquerschnitt noch genauer abgeschätzt werden kann.

In dieser Arbeit wird der SV-Wirkungsquerschnitt unter zwei Gesichtspunkten verwendet.

1. Die SV-Konstruktion beinhaltet die Vorhersage von Teilen des NLO- aus dem LO-Ergebnis. Da LO exakt in der Top-Quark-Masse bekannt ist, lässt sich so Information über die m_t -Abhängigkeit von LO auf NLO übertragen (siehe Abschnitt 4.5).
2. Auf NNLO wird das SV-Ergebnis verwendet, um die m_t -Abhängigkeit des vollen NNLO-Ergebnisses abzuschätzen (siehe Kapitel 6).

Die Konstruktion des SV-Wirkungsquerschnitts basiert auf der Eigenschaft der QCD, dass IR- und kollineare Divergenzen einer Amplitude faktorisieren, d.h. die Pole einer (UV-renormierten) n -Schleifen-Amplitude können aus der entsprechenden Amplitude mit $(n-1)$ Schleifen konstruiert werden. In [42] wurde diese Konstruktion für einen beliebigen farblosen Endzustand einer Proton-Proton-Kollision bis zu NNLO beschrieben. Die in dieser Arbeit, also für den Fall $pp \rightarrow HH + X$, verwendeten Relationen werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt. Sie wurden im wesentlichen aus [42] entnommen und folgen der dortigen Notation.

3.2.1 Notation

Wir wollen den Prozess $\hat{\sigma}(pp \rightarrow HH + X)$ untersuchen. Wir schreiben

$$Q^2 \frac{d\hat{\sigma}(\hat{s}, Q^2)}{dQ^2} = \int_{4m_H^2/\hat{s}}^1 d\hat{\tau} \left(\frac{d\mathcal{L}_{gg}}{d\hat{\tau}} \right) Q^2 \frac{d\sigma(s, Q^2)}{dQ^2} \quad \hat{\tau} := \frac{s}{\hat{s}}, \quad (3.5)$$

wobei $\hat{\sigma}$ (σ) und \hat{s} (s) für den hadronischen (partonischen) Wirkungsquerschnitt bzw. für die Schwerpunktsenergie und \mathcal{L}_{gg} für die Gluon-Gluon-Luminosität wie in Gl. (2.17) steht. Für den partonischen Wirkungsquerschnitt schreiben wir

$$Q^2 \frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{1}{s} \sigma_0 Q^2 G(z) = \sigma_0 z G(z) \quad z := \frac{Q^2}{s} \quad (3.6)$$

mit dem partonischen LO-Wirkungsquerschnitt σ_0 . Durch die Substitution $Q^2 \rightarrow zs$ wird die Integration über die invariante Higgs-Paar-Masse zu

$$\int_{4m_H^2}^s dQ^2 \frac{d\sigma}{dQ^2} = \int_{1-\delta}^1 dz \sigma_0(zs) G(z) \quad \text{mit } \delta := 1 - \frac{4m_H^2}{s}. \quad (3.7)$$

Korrekturen höherer Ordnung in α_s werden in die Funktion

$$G(z) = \underbrace{G^{(0)}}_{=\delta(1-z)} + G^{(1)}(z) \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) + G^{(2)}(z) \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \quad (3.8)$$

absorbiert. Die Abhängigkeit von der Renormierungs- und der Faktorisierungsskala und der invarianten Higgs-Paar-Masse

$$\sigma_0 = \sigma_0(Q^2) \quad \alpha_s = \alpha_s(\mu_R) \quad G(z) = G(z, Q^2, \mu_R, \mu_F)$$

wird im folgenden nicht explizit geschrieben.

Die Aufteilung in *soft* ($Q^2 \approx s$ oder $z \approx 1$) und *hard* ($s \gg Q^2$ oder $z \ll 1$) ist nicht eindeutig. In dieser Arbeit seien alle Beiträge *soft*, die im Integranden mit

$$\delta(1-z) \quad \text{oder} \quad \left[\frac{\log^n(1-z)}{1-z} \right]_+ \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

skalieren, und solche, die mit $(1-z)^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) skalieren, *hard*. Die Plus-Distributionen sind über die Integration mit einer Testfunktion f

$$\int_0^1 dz f(z) [g(z)]_+ := \int_0^1 dz [f(z) - f(1)] g(z) \quad (3.10)$$

definiert, und im folgenden wird die Schreibweise

$$D_{-1} = \delta(1-z), \quad D_{n \geq 0} = \left[\frac{\log^n(1-z)}{1-z} \right]_+ \quad (3.11)$$

verwendet. Die Charakterisierung gemäß Gl. (3.9) wird als SV-Näherung im z -Raum bezeichnet. Eine alternative Definition ist die ebenfalls in [42] beschriebene SV-Näherung im Mellin-Raum. In letzterem Ansatz werden auch

Beiträge, die nicht in führender Ordnung der $(1 - z)$ -Entwicklung im Sinne von Gl. (3.9) sind, in die *soften* Anteile absorbiert. Dadurch wird z.B. auch die Resummierung der weichen Gluon-Abstrahlung² zu allen Ordnungen in α_s möglich. Man beobachtet in Higgs-, aber auch in Doppel-Higgs-Produktion, dass die SV-Näherung im Mellin-Raum, das vollständige Ergebnis deutlich besser beschreibt, als die SV-Näherung im z -Raum (siehe auch Abschnitt 6.2).

In der SV-Näherung treten auf LO, NLO und NNLO folgende (partonische) Beiträge auf:

LO		
1 Schleife	$gg \rightarrow HH$	
NLO		
2 Schleifen	$gg \rightarrow HH$	
1 Schleife	$gg \rightarrow HHg$	(3.12)
NNLO		
3 Schleifen	$gg \rightarrow HH$	
2 Schleifen	$gg \rightarrow HHg$	
1 Schleife	$gg \rightarrow HHgg$	$gg \rightarrow Hq\bar{q}$

Die in der vollen NLO-Rechnung (siehe Abschnitt 4.2) berücksichtigten Kanäle $gg \rightarrow HHq$ und $q\bar{q} \rightarrow HHg$ sowie die Prozesse, bei denen nur ein einzelnes (Anti-)Quark abgestrahlt wird, tragen zu SV nicht bei, da die Abstrahlung eines energiearmen (Anti-)Quarks keine Singularität wie in Gl. (3.9) für $z \rightarrow 1$ entwickelt.

3.2.2 NLO

Um das SV-Ergebnis auf NLO zu erhalten, benötigt man also die virtuellen UV-renormierten Zwei-Schleifen-Korrekturen, die Korrekturen durch Abstrahlung eines energiearmen Gluons und die Counterterme zur Absorption der *soft*-kollinearen Divergenzen in die Partonverteilungen. Die virtuellen Korrekturen schreiben wir als

$$\frac{d\sigma_v^{(1)}}{dQ^2} = \frac{\sigma_0}{s} \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) \delta(1 - z) \left\{ 2\text{Re} [I_g^{(1)}] + \frac{\sigma_{\text{fin}}^{(1)}}{\sigma_0} \right\} \quad (3.13)$$

²Das sind Terme $\sim \log N$, wobei $\hat{\sigma}_N$ das N-te Mellin-Moment des hadronischen Wirkungsquerschnitts $\hat{\sigma}(\hat{s})$ ist.

mit [43]

$$I_g^{(1)} = - \left(-\frac{4\pi\mu_R^2}{s} \right)^\epsilon \frac{S_\epsilon^{-1}}{\Gamma(1-\epsilon)} \left(\frac{C_A}{\epsilon^2} + \frac{\frac{11}{6}C_A - \frac{n_l}{3}}{\epsilon} \right), \quad S_\epsilon = (4\pi)^\epsilon e^{-\epsilon\gamma_E}. \quad (3.14)$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass sich nach [43] die in ϵ singulären Anteile der virtuellen NLO-Korrekturen aus LO ergeben, so dass σ_{fin} endlich ist für $\epsilon \rightarrow 0$. Gl. (3.13) gilt für einen beliebigen Prozess mit zwei Gluonen im Anfangszustand und einem farblosen Endzustand.³ Für die Abstrahlung eines energiearmen Gluons erhält man [44, 42]

$$\frac{d\sigma_g}{dQ^2} \simeq -\frac{\sigma_0}{s} \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) \left(\frac{4\pi\mu_R^2}{s} \right)^\epsilon \frac{1}{(1-z)^{1+2\epsilon}} C_A \frac{4\Gamma(1-\epsilon)}{\epsilon\Gamma(1-2\epsilon)}, \quad (3.15)$$

wobei „ \simeq “ hier „gleich im *soft limit*“ bedeutet. Diese Formel erhält man, wie in [42] gezeigt wurde, aus der Faktorisierung des Phasenraums sowie der Faktorisierung des LO-Matrixelements für die Abstrahlung eines Gluons [44]. Die kollinearen Counterterme [45]

$$\frac{d\sigma_c}{dQ^2} = -\frac{\sigma_0}{s} \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) \frac{2P_{gg}^{(0)}}{\epsilon} \quad (3.16)$$

haben dieselbe Form wie in der vollständigen Rechnung, allerdings sind in den Altarelli-Parisi-Splitting-Funktionen nur die in $(1-z)$ singulären Anteile

$$P_{gg}^{(0)} \simeq \left(\frac{11}{6}C_A - \frac{1}{3}n_l \right) \delta(1-z) + 2C_A \left[\frac{1}{1-z} \right]_+ \quad (3.17)$$

zu berücksichtigen. Damit erhalten wir für den SV-Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma_{\text{SV}}}{dQ^2} = \frac{d\sigma_g}{dQ^2} + \frac{d\sigma_v}{dQ^2} + \frac{d\sigma_c}{dQ^2}. \quad (3.18)$$

Durch Aufsummieren und Entwicklung in ϵ beobachtet man explizit die Kancellierung der $1/\epsilon$ -Pole und erhält schließlich das endliche SV-Ergebnis

$$G^{(1)} \simeq G_{\text{SV}}^{(1)} = D_{-1} \left[\frac{2L}{3}n_l + C_A \left(-\frac{11L}{3} + \frac{2\pi^2}{3} \right) + \frac{\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}}{\sigma_0} \right]$$

³Für eine Prozess mit $q\bar{q}$ im Anfangszustand und farblosem Endzustand ist in Gl. (3.13), $I_g^{(1)}$ durch $I_q^{(1)}$ zu ersetzen, wobei sich $I_q^{(1)}$ von $I_g^{(1)}$ allein in den Farbfaktoren unterscheidet. In [43] ist die entsprechende Relation für beliebige QCD-Amplituden gegeben.

$$\begin{aligned}
 & -4C_A L D_0 + 8C_A D_1 \\
 & + \epsilon \left\{ D_{-1} \left[n_l \left(\frac{L^2}{3} - \frac{7\pi^2}{18} \right) + \frac{\sigma_{\text{fin},1}^{(1)}}{\sigma_0} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + C_A \left(\frac{-11L^2}{6} + \frac{77\pi^2}{36} + \frac{2L\pi^2}{3} - 4\zeta_3 \right) \right] \right. \\
 & \quad \left. + D_0 [C_A (-2L^2 + \pi^2)] + 8C_A L D_1 - 8C_A D_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

wobei $L = \log \mu^2/s \simeq \log \mu^2/Q^2$ ist. In dieser Arbeit wurde für die numerische Auswertung des SV-Ergebnisses stets $L = \log \mu^2/Q^2$ verwendet, da das SV-Ergebnis auf NLO mit $L = \log \mu^2/Q^2$ das vollständige NLO-Ergebnis besser annähert. Der numerische Unterschied im Vergleich zu $L = \log \mu^2/s$ ist Ausdruck nicht-führender Terme im *soft limit*. Der Einfluss solcher Terme wird in Abschnitt 6.2 diskutiert. Im Vergleich zu [42] ist in Gl. (3.19) auch die Abhängigkeit von $\mu = \mu_F = \mu_R$ gegeben, wobei auch $\sigma_{\text{fin}}^{(1)}$ noch explizit von μ abhängt. $\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}$ und $\sigma_{\text{fin},1}^{(1)}$ sind durch

$$\sigma_{\text{fin}}^{(1)} = \sigma_{\text{fin},0}^{(1)} + \sigma_{\text{fin},1}^{(1)}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.20}$$

definiert. In [42] sind außerdem auch die $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ -Terme gegeben, die allerdings erst für N³LO-Rechnungen benötigt werden. Der totale partonische NLO-SV-Wirkungsquerschnitt ist dann durch

$$\sigma_{\text{SV}}(s) = \int_{1-\delta}^1 dz \sigma_0(zs) \left[\delta(1-z) + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) G_{\text{SV}}^{(1)} \right] \tag{3.21}$$

gegeben. In der Praxis werden also der LO-Wirkungsquerschnitt und die virtuellen NLO-Korrekturen berechnet. Durch Invertieren von Gl. (3.13) erhält man daraus $\sigma_{\text{fin}}^{(1)}$. Damit ist der SV-Anteil von $G^{(1)}$ in Gl. (3.19) und folglich der SV-Wirkungsquerschnitt in Gl. (3.21) vollständig bestimmt.

3.2.3 NNLO

Die virtuellen Korrekturen auf NNLO werden analog zu NLO in Gl. (3.13) geschrieben.⁴ Für die NNLO-SV-Näherung sind auch die übrigen Subprozesse aus Gl. (3.12) zu berücksichtigen: Der NLO-Prozess mit der zusätzlichen

⁴Siehe auch Gl. (6.5), dort sind die entsprechenden Relationen für die virtuellen NLO- und NNLO-Korrekturen angegeben. Die Notation ist analog zu diesem Kapitel, mit dem Unterschied, dass in Gl. (6.5) der LO-Wirkungsquerschnitt nicht faktorisiert wurde, und dass Gl. (6.5) differentiell in der Madelstam-Variable t , und nicht differentiell in Q^2 ist.

Abstrahlung eines Gluons, sowie der LO-Prozess mit der zusätzlichen Abstrahlung zweier Gluonen oder eines Quark-Anti-Quark-Paares. Außerdem sind die zusätzlichen UV- und kollinearen Counterterme, also die Erweiterung von Gl. (3.15) und Gl. (3.17) auf $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$, zu berücksichtigen. Als Konsistenztest wurden alle diese Bestandteile aus [42] entnommen und die Funktion $G^{(2)}(z)$ im SV-Grenzfall daraus selbst konstruieren. Das Ergebnis stimmt mit dem ebenfalls in [42] gegebene Ergebnis überein. Wir finden

$$\begin{aligned}
 G_{\text{SV}}^{(2)} = & D_{-1} \left\{ C_F L n_l + n_l^2 \left(\frac{L^2}{9} + \frac{11\pi^2}{108} \right) + \frac{2L}{3} n_l \frac{\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}}{\sigma_0} + \frac{\sigma_{\text{fin},0}^{(2)}}{\sigma_0} \right. \\
 & + C_A^2 \left[\frac{607}{81} + \frac{517\pi^2}{108} - \frac{\pi^4}{80} + L^2 \left(\frac{121}{36} - \frac{4\pi^2}{3} \right) \right. \\
 & \quad \left. + L \left(-\frac{16}{3} - \frac{11\pi^2}{9} - 38\zeta_3 \right) - \frac{407}{36} \zeta_3 \right] \\
 & + C_A \left[-\frac{11L}{3} \frac{\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}}{\sigma_0} + \frac{2\pi^2}{3} \frac{\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}}{\sigma_0} \right. \\
 & \quad \left. + n_l \left(-\frac{82}{81} - \frac{11L^2}{9} - \frac{11\pi^2}{8} \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. + L \left(\frac{4}{3} + \frac{2\pi^2}{9} \right) + \frac{37\zeta_3}{18} \right) \right] \left. \right\} \\
 & + D_0 \left\{ C_A \left[n_l \left(\frac{56}{27} + \frac{20L}{9} - 2L^2 - \frac{4\pi^2}{9} \right) - 4L \frac{\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}}{\sigma_0} \right] \right. \\
 & \quad \left. + C_A^2 \left(-\frac{404}{27} + 11L^2 + \frac{22\pi^2}{9} + L \left(-\frac{134}{9} + \frac{10\pi^2}{3} \right) + 78\zeta_3 \right) \right\} \\
 & + D_1 \left\{ C_A^2 \left(\frac{268}{9} - \frac{44L}{3} + 16L^2 - \frac{20\pi^2}{3} \right) \right. \\
 & \quad \left. + C_A \left[\left(-\frac{40}{9} + \frac{8L}{3} \right) n_l + 8 \frac{\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}}{\sigma_0} \right] \right\} \\
 & + D_2 \left[C_A^2 \left(-\frac{44}{3} - 48L \right) + \frac{8C_A}{3} n_l \right] + D_3 C_A^2 32 + \mathcal{O}(\epsilon) .
 \end{aligned}$$

Dabei ist $L = \log \mu^2/s \simeq \log \mu^2/Q^2$, $C_A = 3$, $C_F = 4/3$ und $n_l = 5$ masselose Quarks. Die Distributionen D_n sind in Gl. (3.11) definiert. In dem hier angegebenen Ergebnis ist – wie bereits in Gl. (3.19) – außerdem die Abhängigkeit von

der Skala $\mu = \mu_F = \mu_R$ angegeben, wobei die μ -Abhängigkeit von $\sigma_{\text{fin},0}^{(1)}/\sigma_0$ und $\sigma_{\text{fin},0}^{(2)}/\sigma_0$ nicht explizit geschrieben wird. Die für N³LO benötigten $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Anteile findet man in [42].

Konstruktion der Skalenabhängigkeit

Die Skalenabhängigkeit wurde einerseits aus den in [42] für beliebige Skala angegebenen Bestandteilen von $G^{(1)}$ und $G^{(2)}$ bestimmt. Andererseits wurde als Konsistenztest die Skalenabhängigkeit, wie in [40] beschrieben, mit Hilfe der DGLAP-Gleichungen rekonstruiert. Dazu geht man von der Unabhängigkeit des physikalischen hadronischen Wirkungsquerschnitts von der Skala μ aus:⁵

$$0 = \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \hat{\sigma} \propto \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} (f_g \otimes f_g \otimes \sigma) , \quad (3.22)$$

wobei f_g die Gluon-Verteilungsfunktion ist. Ausführen der Ableitung führt mit Hilfe der DGLAP-Gleichung⁶

$$\mu^2 \frac{d}{d\mu^2} f_g = \frac{\alpha_s}{2\pi} (P_{gg} \otimes f_g) \quad (3.23)$$

und der β -Funktion

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) &= -\beta_0 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 - \beta_1 \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(\alpha_s^4) \\ \beta_0 &= \frac{11}{12} C_A - \frac{1}{6} n_l , \\ \beta_1 &= \frac{17}{24} C_A^2 - \frac{1}{8} C_F n_l - \frac{5}{24} C_A n_l . \end{aligned} \quad (3.24)$$

auf eine Differentialgleichung für den Wirkungsquerschnitt bzw. seine Entwicklungskoeffizienten $G^{(n)}$:

$$\sigma = \tilde{\sigma}_0 \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 \left[G^{(0)} + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right) G^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi} \right)^2 G^{(2)} + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \right] \quad (3.25)$$

⁵Dabei ist die Faltung \otimes wie folgt definiert:

$$(f_1 \otimes f_2)(x) := \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_1(x_1) f_2(x_2) \delta(x - x_1 x_2) ,$$

und der partonische Wirkungsquerschnitt ist aufzufassen als Funktion von $\tau = s/\hat{s}$.

⁶In [40] sind Splittingfunktionen, β -Funktion und Wirkungsquerschnitte in α_s/π entwickelt. Während die β -Funktion hier dieser Konvention folgt, sind Wirkungsquerschnitte und Splittingfunktionen hier in $\alpha_s/(2\pi)$ entwickelt.

Diese Differentialgleichung lässt sich Ordnung für Ordnung in α_s lösen, und so lässt sich die volle μ -Abhängigkeit der Funktionen $G = G(\mu)$ aus einer Randbedingung, wie zum Beispiel dem in [42] gegebenen $G(\mu = \sqrt{s})$, rekonstruieren.

3.2.4 Qualität der SV-Näherung

Nachdem wir gezeigt haben, wie man die SV-Näherung konstruiert, stellt sich die Frage, inwiefern diese Näherung geeignet ist, das vollständige Ergebnis zu beschreiben. In Hadron-Kollisionen werden grundsätzlich aufgrund der Partonverteilungen bestimmte Bereiche des partonischen Wirkungsquerschnitts verstärkt, während andere Bereiche unterdrückt werden. Da für Doppel-Higgs-Produktion Gluon-Fusion der dominante (in der SV-Näherung auf (N)NLO sogar der einzige) Produktionskanal ist, und die Gluon-Verteilungsfunktion $f_g(x)$ mit wachsendem x fällt, wird in diesem Fall der Bereich kleiner partonischer Schwerpunktsenergien ($z \approx 1$) verstärkt, während der Bereich großer Schwerpunktsenergien ($z \approx 0$) unterdrückt wird. Die Genauigkeit einer Entwicklung um $z = 1$ wird daher grundsätzlich von den Partonverteilungen begünstigt. Ob aber allein die führenden Terme in Gl. (3.9) eine gute Näherung darstellen, ist nicht offensichtlich. In [46] wurde für einfache Higgs-Produktion untersucht, inwiefern die Qualität der SV-Näherung den Partonverteilungen zuzuschreiben ist. Zunächst wird dort die Gluon-Luminosität für $\mu_F = 120$ GeV wie folgt parametrisiert:

$$\left(\frac{d\mathcal{L}_{gg}}{d\tau}\right)(\tau) \propto \tau^{-a} \quad \text{mit } a \approx 2.5 \text{ für } \tau < 0.05, \quad (3.26)$$

wobei $\tau_0 = m_H^2/\hat{s} \leq \tau \leq 1$. Für Tevatron- (und LHC-)Schwerpunktsenergien von $\sqrt{\hat{s}} > 2$ TeV ist $\tau_0 \ll 0.05$ und daher Gl. (3.26) eine gute Näherung. Der Einzel-Higgs-Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(gg \rightarrow H) = \sigma_0 \int_{\tau}^1 dz \left(\frac{d\mathcal{L}_{gg}}{dz}\right) \frac{C(z)}{z} \quad (3.27)$$

kann in diesem Fall näherungsweise mit

$$\sigma(gg \rightarrow H) \approx \sigma_0 \left(\frac{d\mathcal{L}_{gg}}{d\tau}\right)(\tau = m_H^2/\hat{s}) \int_0^1 dz z^{a-1} C(z) \quad (3.28)$$

beschreiben werden, wobei $z = m_H^2/s$ ist. Die Abhängigkeit von der Gluon-Luminosität ist in dem Faktor z^a parametrisiert. Die übrige z -Abhängigkeit ist in der Funktion C , die durch Gl. (3.27) definiert ist, enthalten. Da $z^{a-1} \approx z^{1.5}$

für $z \rightarrow 1$ nicht stark ansteigt, kann die Qualität der SV-Näherung im Einzel-Higgs-Fall nicht (allein) mit der Unterdrückung der Partonverteilungen erklärt werden. Sie ist vielmehr eine Eigenschaft der Funktion C , also des partonischen Wirkungsquerschnitts.

Im Fall der Doppel-Higgs-Produktion mit der Schwelle bei $2m_H$ ist immer noch $\tau_0 \ll 0.05$, und die Partonverteilungsfunktion des Gluons lässt sich mit derselben Parametrisierung beschreiben. Daher ist auch im Fall der Doppel-Higgs-Produktion aufgrund der Partonverteilungen allein die Qualität der SV-Näherung nicht zu erklären. Im nächsten Kapitel werden wir auf NLO, wo sowohl das SV- als auch das vollständige Ergebnis berechnet wurde, beobachten, dass bereits auf partonischem Niveau – also unabhängig von den Partonverteilungen – SV eine relativ gute Näherung darstellt, siehe Abschnitt 4.5.1 und Abschnitt 6.2.

3.3 Erzeugung der Feynman-Diagramme (QGRAF)

Für die Erzeugung der Feynman-Diagramme wurde das Fortran-Programm QGRAF [47] verwendet. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Amplitude $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$ berechnet. Dafür wurden die Diagramme

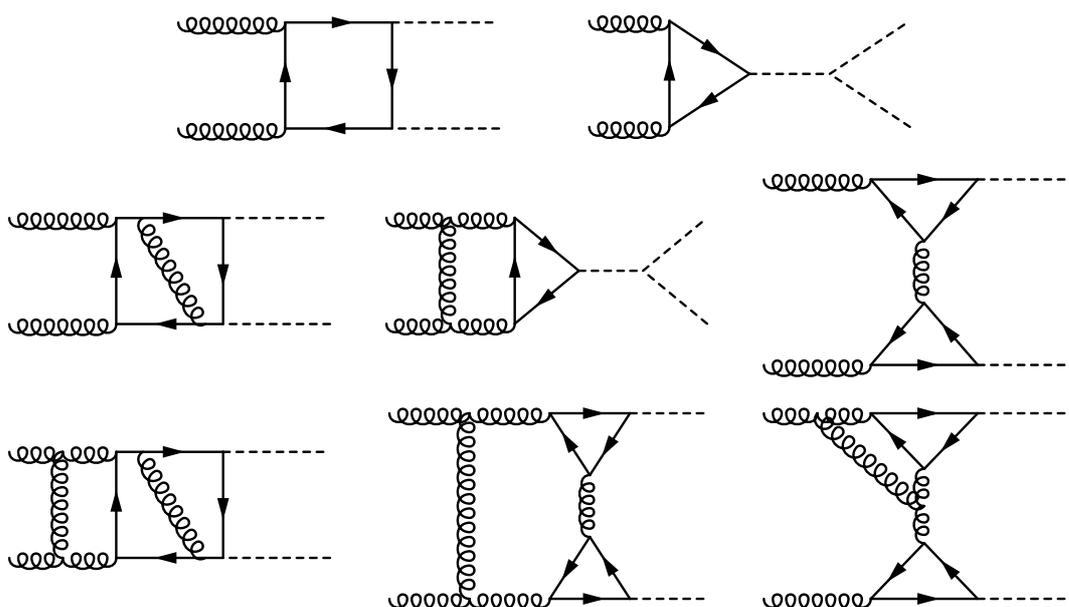
- $gg \rightarrow HH$ auf 1-, 2-, und 3-Schleifen-Niveau (LO, NLO und NNLO)

erzeugt (siehe Abb. 3.4a). Als Konsistenztest wurden außerdem die Vorwärtsstreuamplituden

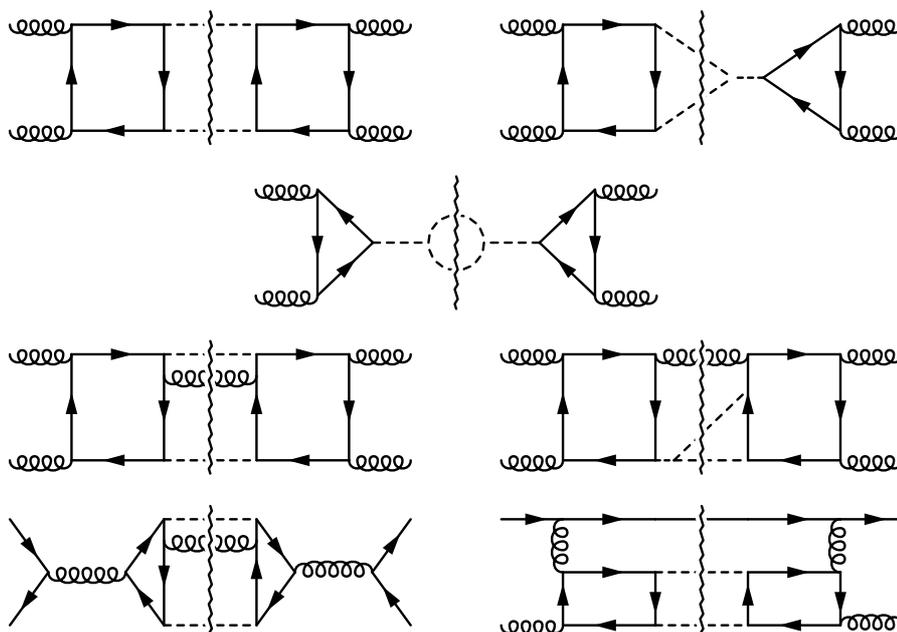
- $gg \rightarrow HH \rightarrow gg$ auf 3-, 4-, und 5-Schleifen-Niveau (LO, NLO und NNLO) und
- $cc \rightarrow HH \rightarrow cc$ auf 5-Schleifen-Niveau (NNLO), wobei c für Faddeev-Popov-Geister steht.⁷

berechnet. Die Notation $A \rightarrow B \rightarrow A$ steht für die Vorwärtsstreuamplitude $A \rightarrow A$, die einen Schnitt hat, der dem Zustand B entspricht. Der Beitrag der virtuellen Korrekturen zum totalen Wirkungsquerschnitt wurde also einerseits aus der $(gg \rightarrow HH)$ -Amplitude und andererseits über das Optische Theorem aus der $(gg \rightarrow gg)$ -Vorwärtsstreuamplituden berechnet.

⁷Die Hinzunahme der Geist-Kanäle in ein rein technisches Hilfsmittel, das es erlaubt, die Mittelung über die Gluon-Polarisationen wie im abelschen Fall durch $\sum \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\mu\nu}$ zu ersetzen. Die alternative Berechnung mit physikalischen Gluon-Polarisationen wäre technisch deutlich aufwendiger.



(a) Diagramme für die virtuellen Korrekturen zu $gg \rightarrow HH$ auf LO (erste Zeile), NLO (zweite Zeile) und NNLO (dritte Zeile).



(b) Diagramme der Vorwärtsstreuamplituden: LO (erste und zweite Zeile), NLO reell (dritte Zeile) und NLO Quark-Kanäle (vierte Zeile).

Abbildung 3.4: Beispiel-Feynman-Diagramme.

Die reellen Korrekturen im Gluon-Gluon-Kanal sowie die Quark-Kanäle wurden ebenfalls über die Vorwärtsstreuamplitude und das Optische Theorem berechnet. Dafür wurde die folgenden Diagramme benötigt:

- Für die reellen Korrekturen
 - $gg \rightarrow HHg \rightarrow gg$ auf 4-Schleifen-Niveau (NLO),
 - $c\bar{c} \rightarrow HHg \rightarrow c\bar{c}$ auf 4-Schleifen-Niveau (NLO) und
 - $cg \rightarrow HHc \rightarrow cg$ auf 4-Schleifen-Niveau (NLO),
- sowie für die Kanäle mit masselosen Quarks q
 - $qq \rightarrow HHq \rightarrow qq$ auf 4-Schleifen-Niveau (NLO) und
 - $q\bar{q} \rightarrow HHg \rightarrow q\bar{q}$ auf 4-Schleifen-Niveau (NLO).

Auf NLO wurden außerdem aus technischen Gründen auch die Diagramme mit effektiven $g^n H^m$ -Vertizes ($n = 2, 3$; $m = 1, 2$) benötigt (siehe Abschnitt 3.6.1).

Die mit QGRAF erzeugten Listen von Diagrammen enthalten im allgemeinen auch Diagramme, die nicht zum physikalischen Ergebnis beitragen, da z.B. ihr Farbfaktor verschwindet oder sie keinen gewünschten Schnitt haben (siehe Abschnitt 3.1). Diese Diagramme wurden mit Hilfe eines Skripts herausgefiltert. Im Fall der Vorwärtsstreuamplituden wurde dazu das Programm `gen`⁸ verwendet.

3.4 Asymptotische Entwicklung (exp)

Die Komplexität von Feynman-Diagrammen wächst nicht nur mit der Zahl der Schleifen, sondern auch mit der Zahl der auftretenden Massen m_i sowie der Zahl der externen Impulse q_i . Besteht allerdings zwischen zwei Skalen eine Hierarchie, zum Beispiel $m^2 \gg q^2$, so ist eine Entwicklung in $x := q^2/m^2$ (und $\log x$) eine gute Näherung, und eine Skala des Problems wird eliminiert. Die in [48, 49] eingeführte *hard mass expansion* erlaubt es, die Entwicklung in der inversen schweren Masse, in unserem Fall der Top-Quark-Masse, auf Diagramm-Niveau vor Ausführung der Schleifenintegration durchzuführen. Da aber der Schleifenimpuls k , über den integriert wird, sowohl von der Größenordnung der hohen Skala $k \sim m_t$ (*hard region*), als auch von Größenordnung der niedrigen Skala $k \sim q_1, q_2, \sqrt{s}$ (*soft region*) sein kann, muss der Integrationsbereich in verschiedene Regionen aufgeteilt werden. Am Beispiel von Diagrammen der

⁸Privater Code von Jens Hoff und Alexey Pak.

Produktion eines Higgs-Bosons auf LO, NLO und NNLO sieht diese Einteilung folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tree-level diagram} = \text{Sub-diagram} \times L \text{Diagram} \\
 & \text{One-loop diagram} = \text{Sub-diagram} \times L \text{Diagram} + \text{Sub-diagram} \times L \text{Diagram} \\
 & \text{Two-loop diagram} = \text{Sub-diagram} \times L \text{Diagram} + \text{Sub-diagram} \times L \text{Diagram} + \text{Sub-diagram} \times L \text{Diagram}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Der Grenzwert der Drei-Schleifen-Rechnung mit Top-Quark-Masse lässt sich also auf masselose Ein- und Zweischleifen-Formfaktoren sowie massive Ein-, Zwei- und Dreischleifen-Vakuuminintegrale zurückführen. Dabei steht L für den Entwicklungsoperator, der den Integranden eines Feynman-Integrals in der Hierarchie der jeweiligen Region entwickelt. Wir betrachten zum Beispiel das LO-Integral

$$I_1 = \int d^d k_1 \frac{1}{(q_1 + k_1)^2 - m_t^2} \frac{1}{(q_2 - k_1)^2 - m_t^2} \frac{1}{k_1^2 - m_t^2} .$$

Ist der Schleifenimpuls *soft*, $k_1 \sim q_{1/2}$, so ist der Integrand in der Hierarchie $q_1, q_2, k_1 \ll m_t$ zu entwickeln. Diese Entwicklung führt auf skalenlose Integrale, die in dimensionaler Regularisierung verschwinden. Ist der Schleifenimpuls hingegen in der *hard region* $k_1 \sim m_t$, so ist der Integrand in der Hierarchie $q_1, q_2 \ll k_1, m_t$ zu entwickeln. Diese Entwicklung führt auf die oben dargestellten Vakuuminintegrale.

Bei den NLO- und NNLO-Integralen mit zwei bzw. drei Schleifen erhält man entsprechende Beiträge der Regionen $(k_1 \text{ soft}, k_2 \text{ hard}), (k_{1/2} \text{ hard})$ (zweite Zeile in Gl. (3.29)) bzw. $(k_{1/2} \text{ soft}, k_3 \text{ hard}), (k_1 \text{ soft}, k_{2/3} \text{ hard}), (k_{1/2/3} \text{ hard})$ (dritte Zeile in Gl. (3.29)).

In der Praxis wurde das C++-Programm `exp` [50, 51] verwendet um die asymptotische Entwicklung symbolisch durchzuführen. `exp` erzeugt für jedes Diagramm die zugehörigen Sub- und Co-Subdiagramme (rechte Seite von Gl. (3.29)). Die explizite Berechnung der Dreipunkt- (und bei Doppel-Higgs-Produktion auch Vierpunkt-)Integrale und die Entwicklung der Vakuumdigramme (bzw. deren Propagatoren) wird im folgenden beschrieben. In diesem Formalismus konnte der NLO- sowie der NNLO-SV-Wirkungsquerschnitt bis zur Ordnung $1/m_t^{12}$ bzw. $1/m_t^4$ entwickelt werden.

3.5 Topologien (exp und TopoID)

Die in Schleifenrechnungen auftretenden Integrale haben typischerweise die Form

$$I(q_1^\mu, q_2^\nu, \dots, \{a_i\}) = \int d^d l_1 d^d l_2 \dots \frac{\prod_{i=n+1}^m N_i^{a_i}}{\prod_{i=1}^n D_i^{a_i}}, \quad (3.30)$$

mit

$$D_i := p_i^2 - m_i^2, \quad N_i := p_k \cdot p_l, \quad (3.31)$$

wobei q_i externe Impulse, m_i Massen und p_i Linearkombinationen der externen und der Schleifenimpulse l_i sind. Es genügt an dieser Stelle, skalare Integrale⁹ zu betrachten, da im Fall von Tensorintegralen eine Tensorreduktion oder die Anwendung von Projektoren das Integral auf ein skalares Integral zurückführen kann. Die Festlegung der Zähler N_i und der Nenner D_i definiert eine Topologie. Durch Angabe der Topologie und der Exponenten a_i ist dann ein bestimmtes Integral eindeutig identifiziert. Die Abbildung auf Topologien ist von großer Bedeutung, da viele Rechenschritte ohne weiteres für eine Topologie (d.h. unabhängig von den expliziten Werten der Exponenten $\{a_i\}$) implementiert werden können. Und auch wenn die Zahl der Integrale von $\mathcal{O}(10^5)$ ist, lassen sich diese in der Regel durch $\mathcal{O}(10)$ Topologien beschreiben. Im Zuge der Abbildung aller Integrale auf Integrale der Topologien lassen sich zwar beispielsweise aufgrund von Symmetrien einige Vereinfachungen machen, die Größenordnung der Anzahl der unabhängigen Integrale bleibt aber gleich. Von entscheidender Bedeutung ist allerdings, dass die Zuordnung zu Topologien es ermöglicht, alle Integrale einer Topologie durch IBP-Relationen (siehe Abschnitt 3.7) auf $\mathcal{O}(10)$ unabhängige Masterintegrale abzubilden.

Eine umfassende und formale Beschreibung zum Thema Topologien findet man in [52]. Das dort vorgestellte `Mathematica`-Programm `TopoID` wurde entwickelt um die Vorwärtsstreuamplitude für Einzel-Higgs-Produktion auf (N)NNLO zu berechnen. Der Kern des Programms identifiziert und definiert automatisch aus einer Liste von Feynman-Diagrammen benötigte Topologien und erzeugt `FORM`-Code, der die Diagramme durch Integrale der Topologien ausdrückt.

⁹Das sind solche Integrale, bei denen auf der rechten Seite von Gl. (3.30) keine offenen Lorentz-Indizes auftreten. Die offenen Indizes im Argument der linken Seite von Gl. (3.30) sollen andeuten, dass das Integral von allen Skalarprodukten der externen Impulse (z.B. q_1^2 , $q_1 \cdot q_2$ etc.) abhängen kann.

3.5.1 Topologien für $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$

Für die Berechnung von $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$ bis NNLO wurden die Topologien von Hand identifiziert, und mit Hilfe von `exp` [50, 51] wurde jedes Diagramm seiner Topologie zugeordnet. Nach der asymptotischen Entwicklung treten massive Ein-, Zwei- und Dreischleifen-Vakuumdiagramme sowie masselose Ein- und Zweischleifen-Formfaktoren und Vierpunkt-Integrale auf.

Die massiven Vakuumtopologien sind im `FORM`-Programm `MATAD` [53] nur im Ein- und Zweischleifen-Fall für beliebige Skalarprodukte im Zähler implementiert. Allerdings konnte auf private Erweiterungen zurückgegriffen werden, die durch Anwendung von Projektoren die Tensor-Integrale auf die in `MATAD` implementierten skalaren Topologien zurückführen.¹⁰

Die in Abb. 3.5 dargestellten masselosen Topologien mit vier externen Beinen wurden selbst definiert. Der `FORM`-Code, mit dem die Skalarprodukte im Zähler und die Nenner durch Integrale der jeweiligen Topologie ausgedrückt werden, wurden (halb)automatisch erzeugt. Symmetrien und Randbedingungen¹¹ der Topologien wurden als Konsistenztest auch mit `TopoID` erzeugt und verglichen.

3.5.2 Topologien für $\mathcal{M}(gg \rightarrow gg)$

Für die berechneten Vorwärtsstreuamplituden konnte auf NLO ebenfalls auf bestehende Topologien zurückgegriffen werden. Außerdem wurde unabhängig davon auf NLO sowie auf NNLO `TopoID` [52] verwendet, um alle auftretenden Topologien zu identifizieren und die Diagramme auf sie abzubilden. Abb. 3.6 zeigt die so automatisch erzeugten Topologien. Da aber in `TopoID` die asymptotische Entwicklung nicht implementiert ist, wurden die gefundenen Topologien in einem Zwischenschritt auf `exp`-Topologien abgebildet, so dass mit `exp` die asymptotische Entwicklung durchgeführt werden konnte. Danach konnten die Diagramme mit dem ebenfalls von `TopoID` erzeugten `FORM`-Code durch die skalaren Integrale der jeweiligen Topologie ausgedrückt werden.

¹⁰Vielen Dank an Alexander Kurz, der mir die entsprechenden Routinen zur Verfügung gestellt hat.

¹¹Damit sind in diesem Zusammenhang Werte der Exponenten $\{a_i\}$ gemeint, für die ein Integral Null ergibt.

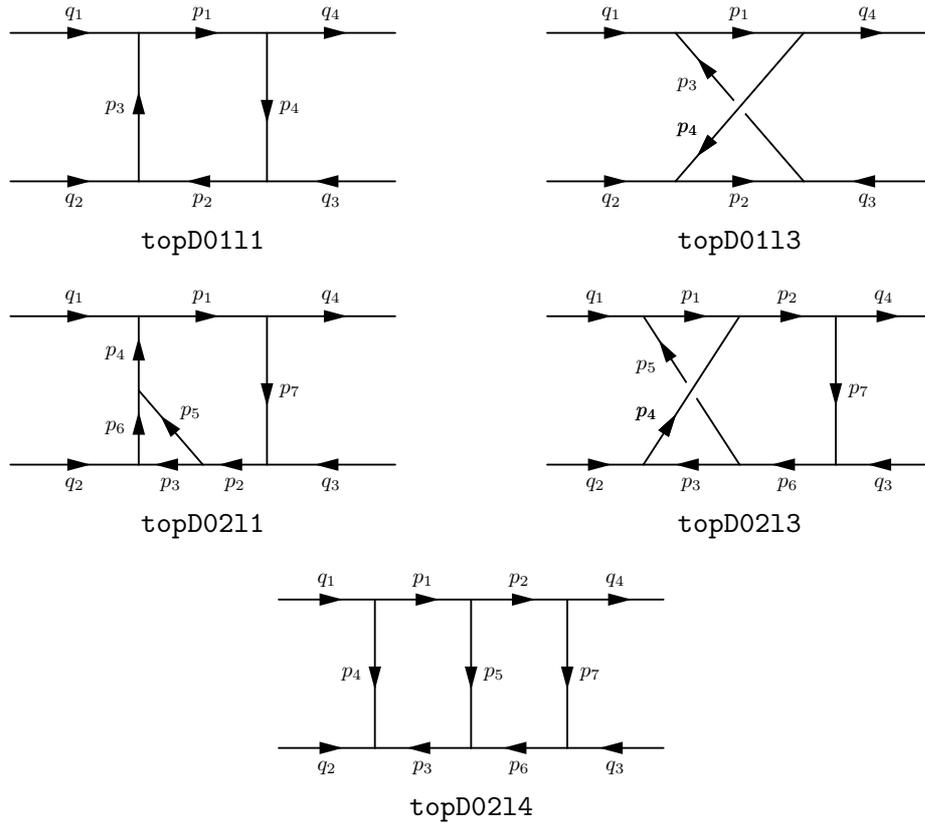
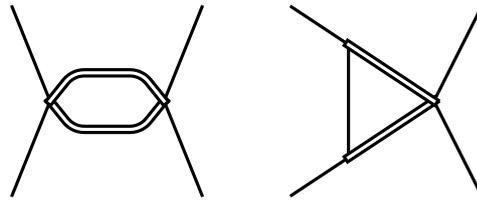


Abbildung 3.5: Topologien für die Amplitude $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$. Alle internen Linien sind masselos, $q_1^2 = q_2^2 = 0, q_3^2 = q_4^2 = m_H^2$. Die Topologien topD0112 und topD0212 gehen durch die Vertauschung $q_1 \leftrightarrow q_2$ aus topD0111 und topD0112 hervor.

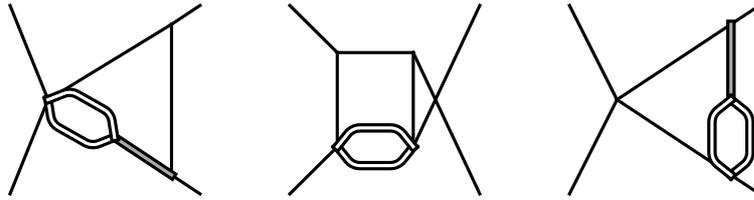
3.6 Spuren, Projektoren, und $1/m_t$ -Entwicklung (FORM)

Nach der Erzeugung der Diagramme, der (symbolischen) asymptotischen Entwicklung und der Abbildung auf Topologien liegen die Diagramme in geeigneter maschinenlesbarer Form vor und können explizit berechnet werden. Dieser rechenintensivste Teil der Arbeit wurde in FORM durchgeführt. Der verwendete Code basiert im wesentlichen auf MATAD bzw. dem vom TopoID erzeugten Code. Prozeduren für

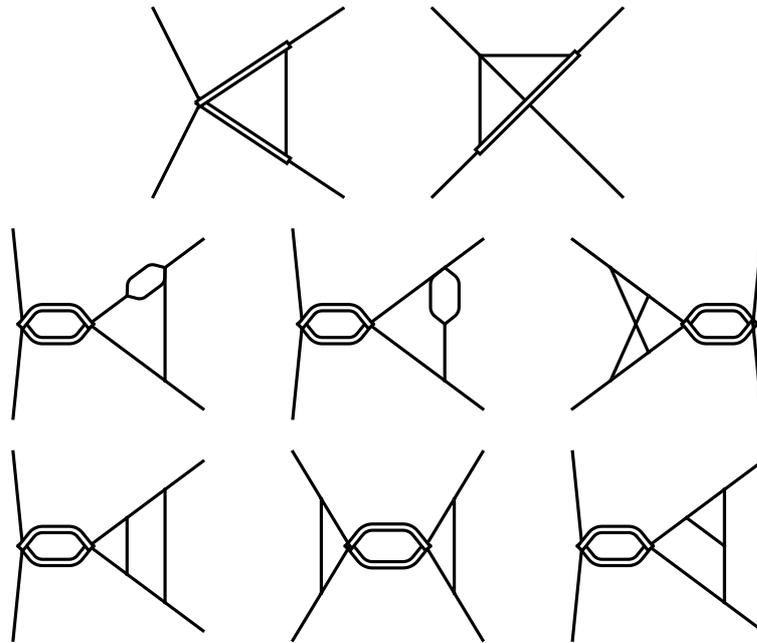
- Feynman-Regeln,
- Dirac-Algebra und Spurbildung,
- explizite Entwicklung in $1/m_t$ und



(a) Topologien für LO und NLO (virtuell).



(b) Topologien für NLO (reell).



(c) Topologien für NNLO (virtuell).

Abbildung 3.6: Von TopoID erzeugte Topologien. Die einfachen Linien stehen für masselose Propagatoren, die doppelten nicht ausgefüllten Linien stehen für geschnittene Higgs-Propagatoren, die doppelten grau unterlegten Linien stehen für nicht geschnittene Higgs-Propagatoren.

- Integration der Vakuumintegrale

konnten unverändert aus MATAD übernommen werden. Der (prozessabhängige) Input besteht lediglich aus den Topologien sowie aus den in Anhang A.1 gegebenen Projektoren auf die beiden physikalischen Lorentz-Strukturen.

In diesem Setup konnten die ersten Terme (ρ^0, ρ^1) der m_t -Entwicklung auf NLO problemlos berechnet werden. Für eine tiefere Entwicklung auf NLO und für die NNLO-Rechnung waren allerdings aus technischen Gründen (Laufzeit und Speicherbedarf) zwei Modifikationen notwendig, die in den beiden folgenden Abschnitten vorgestellt werden.

3.6.1 Optimierung 1: $g^n H^m$ -Bausteine

Idee

Bei der Berechnung der reellen Korrekturen der Vorwärtsstreuamplitude auf NLO treten in jedem Diagramm jeweils zwei der Subdiagramme in Abb. 3.7c auf. Dabei steht „1L“ für eine Top-Quark-Schleife. In MATAD werden in jedem dieser Diagramme zunächst alle Top-Quark-Linien entwickelt und dann das entsprechende Vakuum-Integral eingesetzt. Danach werden die verbliebenen masselosen n -Punkt-Topologien abgearbeitet. Es werden also in jedem Diagramm immer wieder dieselben Ein-Schleifen-Vakuumdiagramme erneut berechnet. Dazu kommt ein Symmetriefaktor, da die meisten Diagramme sich nur durch die Vertauschung z.B. der Gluonen eines $ggHH$ -Subdiagramms unterscheiden. An dieser Stelle bietet sich die folgende Optimierung an: Anstelle der eigentlich zu berechnenden Diagramme (Abb. 3.7a) werden die Diagramme in der „effektiven Theorie“ (Abb. 3.7b) mit $g^n H^m$ ($n = 2, 3; m = 1, 2$)-Vertizes erzeugt, und in diese Diagramme werden die zuvor einmalig berechneten Einschleifen-Subdiagramme eingesetzt. Dabei handelt es sich nach wie vor um die asymptotische Entwicklung der vollen Theorie. Denn obwohl die Diagramme wie in der ($m_t \rightarrow \infty$)-Theorie aussehen, wird für jede „1L“-Einsetzung stets das vollständige Einschleifen-Integral eingesetzt.

Implementierung

Die Einschleifen-Einsetzungen $g^2 H$ ($g^2 H^2, g^3 H, g^3 H^2$) bestehen aus 2, (6, 6, 24) Diagrammen, die für offene Lorentz- und Farbindices und für beliebige Impulse (in der asymptotischen Entwicklung) berechnet wurden. Die Kanzellierung der Anteile mit der symmetrischen Strukturkonstante d^{abc} wurde explizit beobachtet, so dass der $g^3 H$ - und der $g^3 H^2$ -Baustein wie der g^3 -Vertex proportional zur antisymmetrischen Strukturkonstante f^{abc} ist.

Baustein	ρ^6	ρ^5	ρ^4	ρ^3	$\rho^{2,1,0}$
$g^2 H$	< 1	< 1	< 1	< 1	< 1
$g^2 H^2$	5	2	1	< 1	< 1
$g^3 H$	7	4	1	< 1	< 1
$g^3 H^2$	130	40	10	2	< 1

Tabelle 3.1: Größe der Gluon-Higgs-Vertex-Bausteine im FORM-Format in MB.

Tab. 3.1 zeigt die Größe der Bausteine im FORM-Format in MB. Wie erwartet wächst die Größe der Bausteine mit der Tiefe der Entwicklung in $1/m_t^2 \sim \rho$ sowie mit der Zahl der externen Impulse. Auf den ersten Blick scheinen diese Zahlen nicht besonders groß, da in FORM die Manipulation von Ausdrücken auch im GB-Bereich prinzipiell keine Problem ist. Allerdings ist zu beachten, dass die Bausteine in ein Diagramm *eingesetzt* werden. Ein Ausdruck, der proportional zu einem $g^3 H^2$ -Baustein ist und der selbst aus nur 100 Termen besteht, wird sich beim Einsetzen auf 100×130 MB vergrößern. Hinzu kommt, dass jedes Diagramm nicht nur aus einem, sondern aus zwei Bausteinen besteht. Aufgrund dessen wurde das Einsetzen der Bausteine Ordnung für Ordnung in ρ vorgenommen. Am Beispiel der Entwicklung bis $\mathcal{O}(\rho^2)$ werden die Bausteine $B_1 = \sum b_{1i} \rho^i$ und $B_2 = \sum b_{2i} \rho^i$ also nicht direkt eingesetzt

$$B_1 \times B_2 \rightarrow (b_{10} + b_{11}\rho + b_{12}\rho^2) (b_{20} + b_{21}\rho + b_{22}\rho^2) , \quad (3.32)$$

sondern

$$B_1 \times B_2 \rightarrow b_{10}b_{20} + (b_{10}b_{21} + b_{11}b_{20}) \rho + (b_{10}b_{22} + b_{11}b_{21} + b_{12}b_{20}) \rho^2 . \quad (3.33)$$

Während also in Gl. (3.32) das Produkt ausmultipliziert und Terme $\sim \rho^3$ und $\sim \rho^4$ erzeugt würden, werden in Gl. (3.33) nur die Terme eingesetzt, die tatsächlich zum Endergebnis zur $\mathcal{O}(\rho^2)$ beitragen.

3.6.2 Optimierung 2: Vorziehen der Vakuumintegrale

Bei der Berechnung der virtuellen Korrekturen treten auf (N)NLO ebenfalls unabhängige Ein- und Zweischleifen-Vakuumintegrale auf. Das linke Diagramm in Abb. 3.8 zerfällt in der asymptotischen Entwicklung in ein Zwei-Schleifen- und ein Ein-Schleifen-Vakuumintegral, das rechte Diagramm in drei Einschleifen-Vakuumintegrale. Auch in diesem Fall würde MATAD zunächst alle Propagatoren entwickeln und danach die Ein- bzw. Zweischleifen-Integration ausführen. Im Fall der Diagramme in Abb. 3.8 würden also 10 bzw. 8 massive Top-Quark-Propagatoren entwickelt, wodurch der Ausdruck künstlich aufgebläht wird. Um

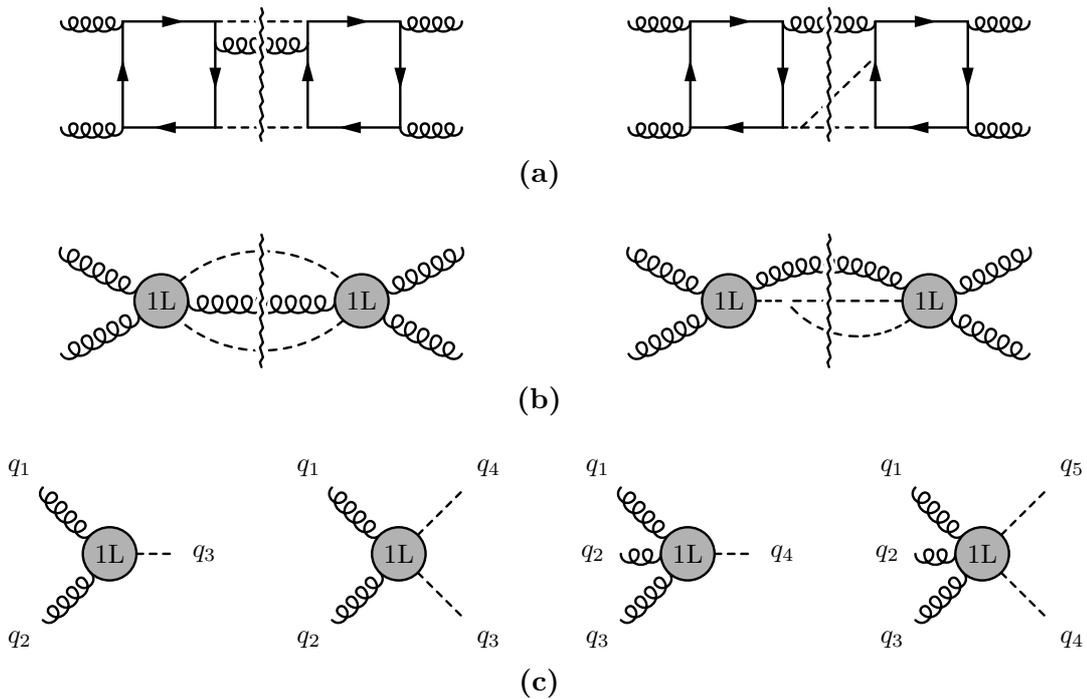
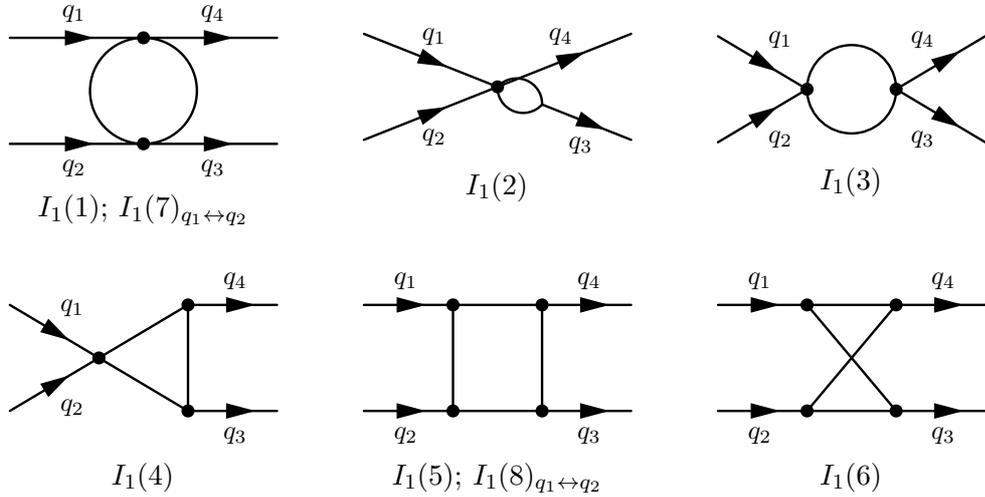


Abbildung 3.7: Die reellen NLO-Diagramme (a) bestehen aus jeweils zwei Top-Quark-Schleifen, die mit zwei oder drei Gluon- und ein oder zwei Higgs-Propagatoren verbunden sind. Diese „1L“-Einsetzungen, dargestellt in (c), können einmalig für beliebige Impulse q_i entwickelt und integriert werden und dann in die „effektiven Diagramme“ (b) eingesetzt werden.

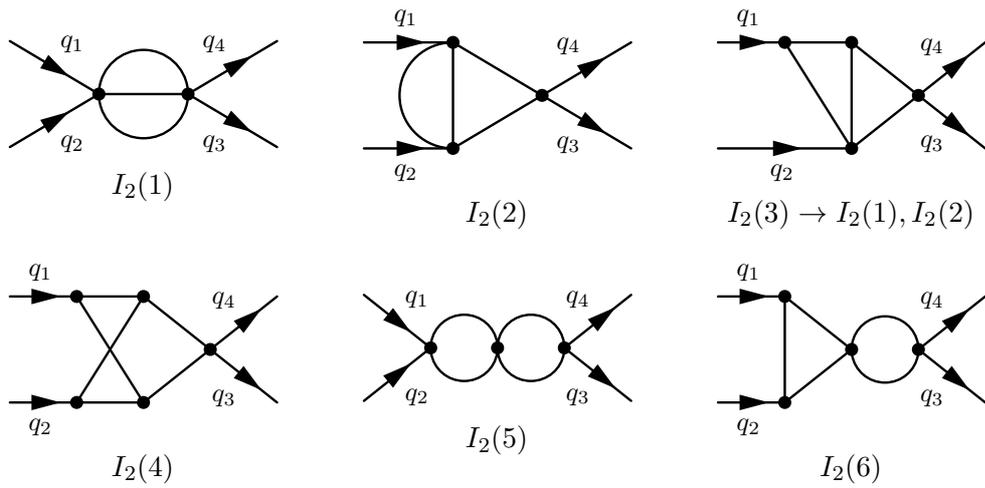
das zu vermeiden, wurde der FORM-Code abgeändert, so dass zunächst Propagatoren identifiziert werden, die zu einem Ein- oder Zweischleifen-VakuuminTEGRAL gehören. Dann werden genau die Propagatoren, die zur ersten Integration gehören, entwickelt, und die erste Integration wird ausgeführt, *bevor* die übrigen Propagatoren entwickelt und integriert werden.

3.7 Reduktion auf Masterintegrale (FIRE)

Nach den bisher diskutierten Schritten liegt die Amplitude vor, ausgedrückt durch skalare Integrale der verwendeten Topologien. Die massiven VakuuminTEGRAL wurden bereits explizit eingesetzt. Die skalaren Integrale sind allerdings nicht (linear) unabhängig. *Integration-By-Parts*-(IBP-)Relationen [54] erlauben es, die (auf NNLO ca. 50000) skalaren Integrale durch nur $\mathcal{O}(10)$ unabhängige



(a) 1-Schleifen Masterintegrale



(b) 2-Schleifen Masterintegrale

Abbildung 3.9: Masterintegrale für $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$. Alle internen Linien sind masselos, $q_1^2 = q_2^2 = 0$ und $q_3^2 = q_4^2 = m_H^2$.

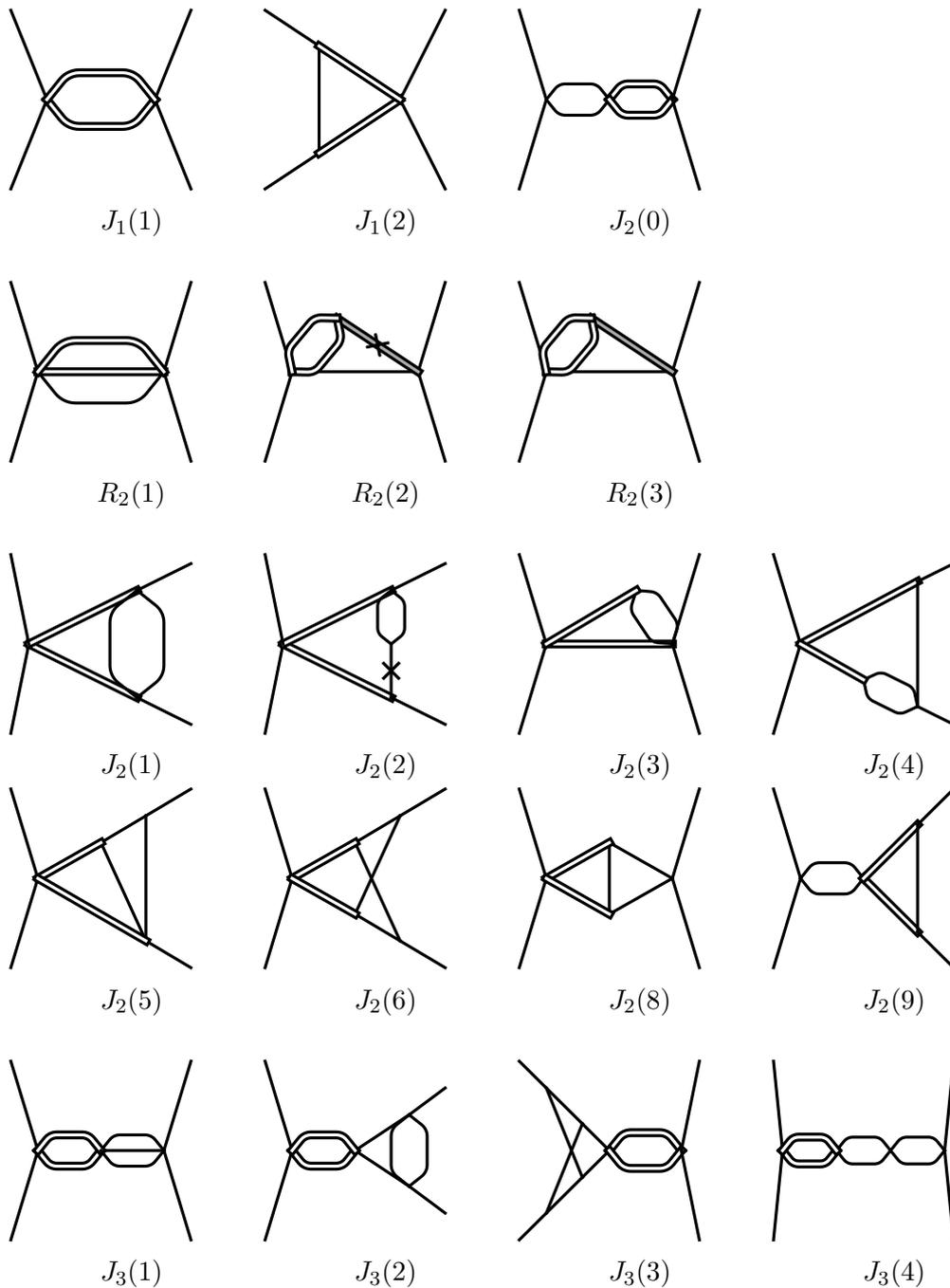


Abbildung 3.10: Mit TopoID und rows erzeugte Phasenraum-Masterintegrale. Erste Zeile: LO und NLO virtuell; zweite Zeile: NLO reell; Zeile 3–5: NNLO virtuell. Die einfachen Linien stehen für masselose Propagatoren, die doppelten nicht ausgefüllten Linien stehen für geschnittene Higgs-Propagatoren, die doppelten grau unterlegten Linien stehen für nicht geschnittene Higgs-Propagatoren. Ein Kreuz auf einer Linie steht für einen inversen Propagator. Das Diagramm für $J_2(7)$ wurde ausgelassen, da $J_2(7) = J_2(0)$ ist (interne Notation).

3.8.1 Masterintegrale für $\mathcal{M}(gg \rightarrow hh)$

In diesem Abschnitt werden die Masterintegrale vorgestellt, die man für die Vertex-Rechnung der virtuellen Korrekturen auf NLO und NNLO benötigt, siehe Abb. 3.9. Um die Notation einzuführen, betrachten wir den masselosen Propagator

$$P(q^2) := \int d^d l \frac{1}{[-l^2]} \frac{1}{[-(q-l)^2]} = i\pi^{d/2} G(1, 1) \frac{1}{(-q^2)^\epsilon} \quad (3.35)$$

mit

$$G(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \epsilon - 2)\Gamma(2 - \epsilon - \lambda_1)\Gamma(2 - \epsilon - \lambda_2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)\Gamma(4 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\epsilon)}, \quad (3.36)$$

womit wir der Konvention von [59] folgen.

Ein-Schleifen-Masterintegrale

Damit findet man sofort die Zweipunkt-Integrale

$$I_1(1) = P(t), \quad (3.37)$$

$$I_1(7) = P(u), \quad (3.38)$$

$$I_1(2) = P(m^2), \quad (3.39)$$

$$I_1(3) = P(s). \quad (3.40)$$

Für die Dreipunktfunktion $I_1(4)$ wurde die Darstellung¹²

$$I_1(4) = \frac{1}{s\sqrt{\delta}} \left[G_o(-1; x)G_o(0; y) - G_o(0; y)G_o(-1/y; x) \right. \\ \left. + 2G_o(-1, 0; x) - 2G_o(-1/y, 0; x) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (3.41)$$

mit

$$y = \frac{1}{x^2}, \quad x = \frac{1 + \sqrt{\delta}}{1 - \sqrt{\delta}}, \quad \delta = 1 - \frac{4m_H^2}{s}$$

verwendet, wobei $G_o(\{w_i\}; z)$ für den Goncharov-Polylogarithmus [64] mit Gewichten $\{w_i\}$ und Argument z steht. Für die hier benötigten Gewichte reduzieren sich die Goncharov-Polylogarithmen zu gewöhnlichen Logarithmen und Dilogarithmen, siehe Anhang A.4.

¹²Andere Darstellungen des Integrals findet man in [60, 61]. Da nicht gezeigt werden konnte, dass diese mit der hier verwendeten Darstellung übereinstimmen, wurde das hier verwendete Ergebnis durch eine numerische Auswertung des Integrals mit FIESTA [62, 63] bestätigt.

Die (gekreuzte) Box findet man in [65], es gilt

$$I_1(5) = N_{\text{Box}} \text{Box4}[m_h^2, m_h^2, s, u] , \quad (3.42)$$

$$I_1(8) = N_{\text{Box}} \text{Box4}[m_h^2, m_h^2, s, t] , \quad (3.43)$$

$$I_1(6) = N_{\text{Box}} \text{Box3}[m_h^2, m_h^2, t, u] , \quad (3.44)$$

mit Box3 und Box4 aus [65] und

$$N_{\text{Box}} = i\pi^{d/2} \frac{\Gamma^2(1-\epsilon)\Gamma(1+\epsilon)}{\Gamma(1-2\epsilon)} . \quad (3.45)$$

Zwei-Schleifen-Masterintegrale

Die Zwei-Schleifen-Masterintegrale findet man ebenfalls in [59], es gilt

$$I_2(1) = (i\pi^{d/2})^2 G(1, 1) G(1, \epsilon) \frac{1}{(-s)^{2\epsilon-1}} , \quad (3.46)$$

$$I_2(2) = (i\pi^{d/2})^2 G(1, 1) G(1, 1, \epsilon) \frac{1}{(-s)^{2\epsilon}} , \quad (3.47)$$

$$I_2(4) = (i\pi^{d/2} e^{-\gamma_E \epsilon})^2 \frac{1}{(-s)^{2+2\epsilon}} \left(\frac{1}{\epsilon^4} - \frac{\pi^2}{\epsilon^2} - \frac{83\zeta_3}{3\epsilon} - \frac{59\pi^2}{120} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) , \quad (3.48)$$

$$I_2(5) = P(s)^2 , \quad (3.49)$$

$$I_2(6) = -\frac{d-3}{d-4} \frac{2}{s} I_2(5) , \quad (3.50)$$

mit

$$G(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\Gamma(-\lambda_1 - \lambda_3 - \epsilon + 2)\Gamma(-\lambda_2 - \lambda_3 - \epsilon + 2)}{\Gamma(\lambda_1)\Gamma(\lambda_2)} \times \frac{\Gamma(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \epsilon - 2)}{\Gamma(-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - 2\epsilon + 4)} . \quad (3.51)$$

Wie in Abb. 3.9 angedeutet, ist $I_2(3)$ kein Masterintegral, da es sich als Linearkombination von $I_2(1)$ und $I_2(2)$ schreiben lässt:

$$I_2(3) = -\frac{(d-3)(3d-10)(3d-8)}{(d-4)^3} \frac{1}{s^2} I_2(1) + \frac{(d-3)(3d-10)}{(d-4)^2} \frac{1}{s} I_2(2) \quad (3.52)$$

Das Integral wird hier aufgeführt, da es von FIRE zunächst als Masterintegral identifiziert wird. Unter Ausnutzung der Symmetrie (Spiegelung an der Horizontalen, bzw. der Vertauschung von q_1 und q_2) lässt sich jedoch mit FIRE die Relation Gl. (3.52) herleiten.

3.8.2 Masterintegrale für $\mathcal{M}(gg \rightarrow gg)$

Ein-Schleifen-Phasenraumintegrale

Für den $g(q_1)g(q_2) \rightarrow H(q_3)H(q_4)$ Phasenraum in d Dimensionen¹³ findet man

$$\begin{aligned} \int d\text{PS} &= \int \frac{d^{d-1}q_3}{(2\pi)^{d-1}2E_3} \frac{d^{d-1}q_4}{(2\pi)^{d-1}2E_4} (2\pi)^d \delta^{(d)}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \\ &= \frac{1}{8\pi} \delta^{1/2-\epsilon} \left(\frac{4\pi}{s} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)} \int_0^1 dy (y(1-y))^{-\epsilon} \end{aligned} \quad (3.53)$$

mit

$$\delta = 1 - \frac{4m_H^2}{s}, \quad y = \frac{1 + \cos\theta}{2}. \quad (3.54)$$

Das Integral in Gl. (3.53) ergibt sich direkt aus der Eulerschen Betafunktion

$$B(a, b) := \int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (3.55)$$

Damit finden wir für das erste Masterintegral

$$J_1(1) = \int d\text{PS} = \underbrace{\frac{1}{8\pi} \delta^{1/2-\epsilon} \left(\frac{4\pi}{s} \right)^\epsilon \frac{1}{\Gamma(1-\epsilon)}}_{=: N_{\text{PS}}} \underbrace{\int_0^1 dy (y(1-y))^{-\epsilon}}_{=: B(1-\epsilon, 1-\epsilon)}. \quad (3.56)$$

Für die übrigen Phasenraumintegrale führen wir die Schreibweise

$$\int d\tilde{y} = \int_0^1 dy (y(1-y))^{-\epsilon} \quad (3.57)$$

ein, und mit N_{PS} aus Gl. (3.56) ergibt sich

$$J_1(2) = \int d\text{PS} \frac{1}{t} = N_{\text{PS}} \int d\tilde{y} \frac{1}{t},$$

wobei die Mandelstam-Variable

$$t = (q_1 - q_3)^2 = -\frac{s}{4} \left[\delta + 1 + 2\sqrt{\delta}(2y - 1) \right]$$

¹³ Mit $f(\epsilon), t_+, t_-$ aus [7] gilt:

$$\int d\text{PS}_2 = \frac{1}{8\pi s} \int_{t_-}^{t_+} dt f(\epsilon)$$

von y abhängt. Um das y -Integral auszuwerten, entwickeln wir den Integranden in $\delta = 1 - 4m_H^2/s$ um $\delta = 0$, also die Produktionsschwelle bei $\sqrt{s} = 2m_H$. Nach der Entwicklung ist der Integrand $\sim y^a(1-y)^b$, so dass man die Integration mit Gl. (3.55) sofort ausführen kann.

Diese δ -Entwicklung kann als praktische Alternative zur numerischen Auswertung der Integrale gesehen werden. Die konsistente Entwicklung der Integrale und des gesamten Wirkungsquerschnitts hat den Vorteil, dass Konsistenztests (Kanzellierung von ϵ -Polen) oder Vergleiche analytisch durchgeführt werden können. Außerdem bleibt Information über analytische Eigenschaften des Ergebnisses erhalten. Wie in Anhang A.2 gezeigt wird, ist bei einer Entwicklung bis $\mathcal{O}(\delta^{50})$ die Konvergenz so gut, dass die Unsicherheit aufgrund der Entwicklung auch für $\delta \approx 1$ numerisch zu vernachlässigen ist.

Zwei-Schleifen-Phasenraumintegrale – virtuell

Für die Zwei-Schleifen-Phasenraumintegrale findet man¹⁴

$$J_2(1) = \int \text{dPS} \text{Re} [I_1(1)] , \quad (3.58)$$

$$J_2(2) = \int \text{dPS} \text{Re} [I_1(1)] t , \quad (3.59)$$

$$J_2(3) = \text{Re} [I_1(2)] \int \text{dPS} , \quad (3.60)$$

$$J_2(4) = \text{Re} [I_1(2)] \int \text{dPS} \frac{1}{t} , \quad (3.61)$$

$$J_2(5) = \int \text{dPS} A_1(1) , \quad (3.62)$$

$$J_2(6) = \int \text{dPS} I_1(6) , \quad (3.63)$$

$$J_2(7) = \text{Re} [I_1(3)] \int \text{dPS} , \quad (3.64)$$

$$J_2(8) = \text{Re} [I_1(4)] \int \text{dPS} , \quad (3.65)$$

$$J_2(9) = \text{Re} [I_1(3)] \int \text{dPS} \frac{1}{t} . \quad (3.66)$$

Die Integrale, die nicht ohnehin faktorisieren, lassen sich nach δ -Entwicklung über die Definition der Eulerschen Betafunktion sofort integrieren.

¹⁴Das Integral $A_1(1)$ findet man als „Triangle 2“ in [65].

In der Basis der Masterintegrale der Vorwärtsstreuamplitude in Abb. 3.10 wird das Integral $J_2(8)$ (und damit $I_1(4)$) für die virtuellen Korrekturen auf NNLO bis einschließlich $\mathcal{O}(\epsilon)$ benötigt. In der Basis der Masterintegrale in Abb. 3.9 hingegen geht nur der $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ -Anteil in das Ergebnis ein. Durch einen Basiswechsel lässt sich der $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Anteil von $J_2(8)$ durch die bereits angegebenen Integrale und die endlichen Anteile von

$$J_2(10) = \int \text{dPS} \text{Re} [I_1(5)] \quad (3.67)$$

ausdrücken.

Zwei-Schleifen-Phasenraumintegrale – reell

Die Zwei-Schleifen-Phasenraumintegrale für die reellen NLO-Korrekturen sind

$$\begin{aligned} R_2(1) &= \int \text{d}\tilde{q}_3 \text{d}\tilde{q}_4 \text{d}\tilde{q}_5 (2\pi)^d \delta^{(d)}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4 - q_5) \\ R_2(2) &= \int \text{d}\tilde{q}_3 \text{d}\tilde{q}_4 \text{d}\tilde{q}_5 (2\pi)^d \delta^{(d)}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4 - q_5) \left[\frac{1}{(q_3 + q_4)^2 - m_H^2} \right]^{-1} \\ R_2(3) &= \int \text{d}\tilde{q}_3 \text{d}\tilde{q}_4 \text{d}\tilde{q}_5 (2\pi)^d \delta^{(d)}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4 - q_5) \left[\frac{1}{(q_3 + q_4)^2 - m_H^2} \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

mit

$$\text{d}\tilde{q} = \frac{\text{d}^{d-1}q}{(2\pi)^{d-1}2q_0}, \quad q_1^2 = q_2^2 = 0, \quad q_3^2 = q_4^2 = m_H^2. \quad (3.69)$$

Durch Reparametrisierung ergibt sich für diese Integrale [14]

$$\begin{aligned} R_2(1) &= \mathcal{N} s^{1-2\epsilon} \delta^{5/2-3\epsilon} \int_0^1 \text{d}\mu \frac{1}{\sqrt{1-\delta\mu}} (1-\mu)^{1/2-\epsilon} \mu^{1-2\epsilon}, \\ R_2(2) &= \mathcal{N} s^{2-2\epsilon} \delta^{5/2-3\epsilon} \int_0^1 \text{d}\mu \frac{1}{\sqrt{1-\delta\mu}} (1-\mu)^{1/2-\epsilon} \mu^{1-2\epsilon} \left[\frac{3}{4} + \delta \left(\frac{1}{4} - \mu \right) \right], \\ R_2(3) &= \mathcal{N} s^{2-2\epsilon} \delta^{5/2-3\epsilon} \int_0^1 \text{d}\mu \frac{1}{\sqrt{1-\delta\mu}} (1-\mu)^{1/2-\epsilon} \mu^{1-2\epsilon} \left[\frac{3}{4} + \delta \left(\frac{1}{4} - \mu \right) \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.70)$$

mit

$$\mathcal{N} = \left[\frac{\Gamma(1+\epsilon)}{(4\pi)^{d/2}} \right]^2 \left[1 + 4\epsilon + \left(12 - \frac{2\pi^2}{3} \right) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right]. \quad (3.71)$$

Die Entwicklung von Gl. (3.70) in δ führt im Integranden wieder direkt auf die Eulersche Betafunktion.

Drei-Schleifen-Phasenraumintegrale

Die Drei-Schleifen-Phasenraumintegrale faktorisieren in den Phasenraum $J_1(1)$ und bereits angegebene Integrale:

$$\begin{aligned} J_3(1) &= J_1(1) \operatorname{Re} [I_1(3)] \quad , \\ J_3(2) &= J_1(1) \operatorname{Re} [I_2(2)] \quad , \\ J_3(3) &= J_1(1) \operatorname{Re} [I_2(4)] \quad , \\ J_3(4) &= J_1(1) \operatorname{Re} [I_2(3)^2] \quad , \\ \tilde{J}_3(4) &= J_1(1) |I_1(3)|^2 \quad . \end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 3.1 beschrieben tritt das Integral $J_3(4)$ in zwei Varianten auf. Die eine entspricht dem Diagramm in Abb. 3.10, die andere entspricht dem Diagramm, bei dem die beiden masselosen Ein-Schleifen-Propagatoren auf verschiedenen Seiten des Schnittes sind (siehe Abb. 3.2).

3.9 Renormierung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde stets die starke Kopplungskonstante α_s im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit 6 aktiven *flavours* renormiert [66], und wurde im Anschluss durch *decoupling* zum 5-*flavour*-Schema übergegangen [67, 68]. Die Top-Quark-Masse wurde im *on-shell*-Schema renormiert [69]. Die *on-shell*-Renormierung der externen Gluonen wurde mit Hilfe der *decoupling*-Konstante für das Gluon-Feld ζ_3^0 [67] durchgeführt.

3.10 Aspekte der Computernutzung

Wesentliche Teile dieser Arbeit konnten nur mit Hilfe moderner Soft- und Hardware erstellt werden. Für die Berechnung der virtuellen Korrekturen auf NNLO mussten beispielsweise 3796 Feynman-Diagramme berechnet werden, von denen jedes einzelne – wenn überhaupt – nur mit größter Mühe und enormem Zeitaufwand von Hand hätte berechnet werden können.

Parallelisierung

Seit den 1960er Jahren bis heute beobachtet man, dass sich die Anzahl der Transistoren in handelsüblichen integrierten Schaltkreisen etwa jährlich verdoppelt (*Moore's Law*). Die Taktfrequenz von handelsüblichen CPUs entwickelte sich bis in die 2000er Jahre ähnlich, seitdem stagniert sie allerdings. Während es

also früher möglich war, durch Abwarten und den Kauf eines neuen Computers in einem Jahr ein Programm doppelt so schnell auszuführen, ist das heute nicht mehr möglich.¹⁵ Um also die nach wie vor beobachtbare Verdoppelung von Transistoren, die sich in der Vervielfachung der Kerne pro CPU ausdrückt, nutzen zu können, muss man parallele Algorithmen verwenden. Gelingt es, ein Problem in n unabhängige, $1/n$ große Teilprobleme aufzuspalten, so lassen sich diese im Idealfall auf einem Computer mit n Kernen gleichzeitig berechnen, und man gewinnt wieder einen Faktor n im Speedup. Gelingt das allerdings nicht, kann man auch durch modernere Computer derzeit keine Verringerung der Laufzeit erwarten.

Wenn man also von moderner Hardware profitieren will, muss erstens das Problem grundsätzlich aufspaltbar sein, und zweitens muss die entsprechende Software anpasst oder neu entwickelt werden, was in der Regel sehr aufwendig sein kann. In der Physik treten zahlreiche Probleme auf, die sich für Parallelisierung eignen. Darunter sind solche, bei denen die Parallelisierung trivial ist (da das Problem per Konstruktion in unabhängige Teilprobleme aufzuspalten ist), aber auch solche, bei denen die Zerlegung in *unabhängige* Teilprobleme nicht trivial ist und zur Ausführungszeit Information zwischen den Teilproblemen ausgetauscht werden muss. Das hat einerseits einen größeren Programmieraufwand und andererseits einen geringeren maximalen Speedup zur Folge.

Beispiel 1: Aufspaltung in Feynman-Diagramme

Die Berechnung einer Amplitude aus unabhängigen Feynman-Diagrammen ist trivial zu parallelisieren, da die Berechnung der einzelnen Diagramme vollständig unabhängig ist. Die Berechnung von Feynman-Diagrammen in dieser Arbeit wurde grundsätzlich parallel organisiert, Subdiagramme desselben Diagramms wurden allerdings nacheinander berechnet.¹⁶

¹⁵In [70] (veröffentlicht im Jahr 1999) wurde diskutiert, ob und inwiefern es effizienter ist, eine aufwendige Rechnung nicht sofort zu beginnen, sondern abzuwarten, bis die gesteigerte Rechenleistung die Wartezeit (über)kompensiert.

¹⁶Diese triviale Parallelisierbarkeit kann auch aus einer anderen Perspektive betrachtet werden. Denn obwohl die Diagramme unabhängig voneinander zu berechnen sind, bestehen zahlreiche Relationen zwischen den verschiedenen Diagrammen, die in diesem Ansatz nicht ausgenutzt werden können. So sind in der Regel einzelne Feynman-Diagramme weder eichinvariant noch endlich in $d = 4$ Dimensionen, sie brechen also Symmetrien der Amplitude. Das macht sich in einer enormen Aufblähung in Zwischenschritten der Rechnung bemerkbar. Während zum Beispiel für die Berechnung aller NNLO-Diagramme in dieser Arbeit insgesamt ein Festplattenspeicher von $\mathcal{O}(100 \text{ TB})$ nötig war, ist das aufsummierte Ergebnis noch vor Einsetzen der IBP-Relationen lediglich $\mathcal{O}(100 \text{ MB})$ groß. In modernen Ansätzen wird versucht, basierend auf der Unitarität der Streumatrix, diese Aufblähung in Zwischenschritten zu umgehen, siehe zum Beispiel [71, 72].

Beispiel 2 : Manipulation großer Ausdrücke

Die Manipulation einzelner Summanden eines großen Ausdrucks ist ebenfalls sehr zur Parallelisierung geeignet. Das Computeralgebrasystem FORM [73, 74, 75] basiert auf der termweisen Manipulation von Ausdrücken und existiert auch in den parallelen Versionen TFORM (basierend auf POSIX Threads) und ParFORM (basierend auf MPI). Ein großer Vorteil dieser Programme ist, dass bis auf wenige Ausnahmen, die Parallelisierung vollständig vom Programm übernommen wird und von Anwenderseite keine Änderungen an dem für serielles FORM entwickelten Programmcode notwendig sind.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde bei der Berechnung der einzelnen Diagramme massiver Gebrauch von TFORM [74, 76] gemacht. Ohne diesen Einsatz wäre es nicht möglich gewesen, die in den nächsten Kapiteln vorgestellten Ergebnisse zu erhalten.

Beispiel 3 : Reduktion auf Masterintegrale

Die in Abschnitt 3.7 besprochene Reduktion auf Masterintegrale ist ein weiteres Beispiel für rechenintensive Probleme der theoretischen Teilchenphysik. In den Reduktionsprogrammen FIRE5 [57] und Reduze 2 [77] sind beispielsweise parallele Algorithmen implementiert. In diesem Fall ist Parallelisierung allerdings nicht trivial, da die Zerlegung in unabhängige Teile nur eingeschränkt möglich ist.

Beispiel 4 : Gittersimulationen

Gittersimulationen sind in der Physik wie auch in benachbarten technischen Disziplinen weit verbreitet – sei es Gitter-QCD, Kosmologie (Millennium-Simulation¹⁷), Meteorologie oder numerische Strömungsmechanik (*computational fluid dynamics*). In allen diesen Gebieten kann man durch die Diskretisierung von Raum und Zeit eine Vielzahl von interessanten Größen (numerisch) berechnen, was im Kontinuum nicht möglich ist. Die Parallelisierbarkeit von Gittersimulationen beruht darauf, dass in der Regel zwar einige (typischerweise benachbarte) – aber nicht alle – Gitterpunkte wechselwirken (also Information austauschen). Daher können die Gitterpunkte, die gerade keine Information austauschen, unabhängig, und damit parallel, berechnet werden.

¹⁷<http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/millennium/>

Scheduling

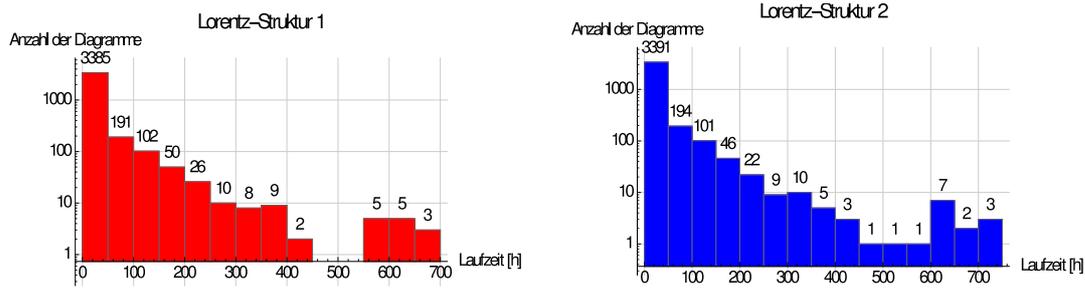
Zur Veranschaulichung des Rechenaufwands zeigt das Histogramm in Abb. 3.11 die Anzahl der Diagramme in Abhängigkeit des maximal benötigten Festplattenspeichers und der gesamten benötigten Laufzeit der Berechnung der virtuellen NNLO $\mathcal{O}(1/m_t^4)$ Korrekturen. Jedes einzelne der 3796 Diagramme wurde mit TFORM mit jeweils zwei Threads berechnet. Wie man sieht, ist der bei weitem größte Anteil der Diagramme „relativ einfach“, d.h. die Laufzeit liegt im Bereich von 10 Stunden bei einem Speicherbedarf von unter 100 GB. Andererseits gibt es aber auch $\mathcal{O}(10)$ Diagramme, die mit einer Laufzeit von über 500 Stunden bei einem Speicherbedarf von über 1 TB extrem aufwendig sind. Aufgrund dieser weiten Streuung der Komplexität der Diagramme ist es unerlässlich, das Job-Scheduling entsprechend anzupassen. In der Praxis wurde dazu folgendermaßen vorgegangen:

- Berechnung der einfacheren $\mathcal{O}(1/m_t^0)$ -Korrekturen ohne Anpassung.
- Klassifizierung der Diagramme nach deren Laufzeit in drei Gruppen:
 1. Laufzeit über 6 Stunden (sehr komplex)
 2. Laufzeit 4 – 6 Stunden (komplex)
 3. Laufzeit unter 4 Stunde (einfach)

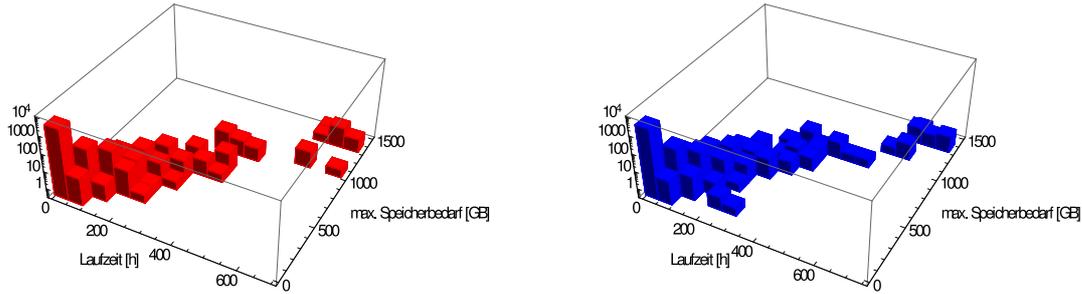
Da, wie man in Abb. 3.11 erkennt, Laufzeit und Speicherbedarf stark korreliert sind, war eine gesonderte Kategorisierung nach Speicherbedarf nicht notwendig.

- Für die Berechnung der höheren $\mathcal{O}(1/m_t^n)$ -Korrekturen wurden zunächst die Diagramme der Gruppe 1 und 2 gestartet, unter der Einschränkung, dass höchstens zwei dieser Diagramme auf einem Computer laufen. Diese Einschränkung ist notwendig, da pro Computer etwa 2-3 TB freier Festplattenspeicher verfügbar ist, so dass mehr als zwei der komplexeren Diagramme auf einem Computer aufgrund von zu wenig Speicherplatz abstürzen könnten.
- Freie Slots wurden dann mit Diagrammen der Gruppe 3 aufgefüllt.

So konnten die $\mathcal{O}(1/m_t^4)$ -Terme auf dem Cluster „Moon“ (siehe unten) des Instituts für Theoretische Teilchenphysik in ca. 4 Monaten berechnet werden. Bei einer seriellen Berechnung auf einem einzelnen Computer wäre allein für die 20 komplexesten Diagramme ein Laufzeit von etwa 2 Jahren nötig gewesen.



(a) Laufzeit der NNLO-Diagramme.



(b) Laufzeit und Speicherbedarf der NNLO-Diagramme.

Abbildung 3.11: Statistik zur Laufzeit und zum Speicherbedarf der Berechnung der virtuellen Korrekturen auf NNLO bis $\mathcal{O}(1/m_t^4)$.

Hardware

Der überwiegende Teil der hier vorgestellten Rechnungen wurde auf dem Moon-Cluster durchgeführt. Dieser besteht aus 28 Computern mit Intel Xeon X5675 Prozessoren mit einer Taktfrequenz von 3 GHz. Jeder dieser Prozessoren hat sechs physikalische Kerne, so dass durch Hyper-Threading bis zu 24 Threads pro Computer parallel ausgeführt werden können. Derzeit haben die Computer zwischen 50 GB und 100 GB Arbeitsspeicher und 3.4 TB Festplattenspeicher.

Bei der Berechnung der $1/m_t$ -Korrekturen auf NLO, insbesondere der $\mathcal{O}(1/m_t^{12})$ -Anteile, traten $\mathcal{O}(10)$ Diagramme auf, bei denen in Zwischenschritten deutlich mehr Festplattenspeicher benötigt wurde. Diese wurden auf Computern des Earth-Clusters des des Instituts für Theoretische Teilchenphysik berechnet, die bis zu 6 TB Festplattenspeicher habe.

4 Top-Quark-Effekte im NLO-Wirkungsquerschnitt

Mit den in Kapitel 3 vorgestellten Mitteln wurde der NLO-Wirkungsquerschnitt für Higgs-Boson-Paarproduktion im Gluon-Gluon-, Quark-Gluon- und Quark-Antiquark-Kanal berechnet. Für die virtuellen Korrekturen wurde die Amplitude $\mathcal{M}(gg \rightarrow HH)$ bis $\mathcal{O}(1/m_t^4)$ für beliebigen Eichparameter ξ und bis $\mathcal{O}(1/m_t^{12})$ für $\xi = 0$ berechnet. Die reellen Korrekturen wurden mit dem in Abschnitt 3.6.1 beschriebenen optimierten Setup bis $\mathcal{O}(1/m_t^{12})$ berechnet. Eine unabhängige Rechnung, in der sowohl virtuelle als auch reelle Korrekturen bis $\mathcal{O}(1/m_t^4)$ über die Vorwärtsstreuamplitude berechnet wurden, führt zu dem identischen Ergebnis.

Bevor phänomenologische Aspekte diskutiert werden, betrachten wir die analytische Form des in $\rho = m_H^2/m_t^2$ und $\delta = 1 - 4m_H^2/s$ (siehe Abschnitt 3.8.2) entwickelten NLO-Wirkungsquerschnitts:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{exp}} = & \frac{G_F^2 m_H^2}{2\pi} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \left\{ \frac{7\rho}{25920} \delta^{3/2} + \rho^2 \left(\frac{49}{4147200} \delta^{1/2} + \frac{24001}{87091200} \delta^{3/2} \right) \right. \\
& + \frac{\alpha_s}{\pi} \left[-\frac{\delta^{3/2}}{1296} + \rho \left(-\frac{7}{103680} \sqrt{\delta} + \delta^{3/2} \left\{ \frac{8957}{466560} - \frac{7\pi^2}{25920} - \frac{7}{270} L_2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{7}{540} L_2^2 + \left(-\frac{7}{810} + \frac{7}{720} L_2 \right) L_\delta + \frac{7}{4320} L_\delta^2 \right\} \right) \\
& + \rho^2 \left(\left\{ \frac{128399}{261273600} - \frac{49}{4147200} \pi^2 + \frac{49}{86400} L_2^2 + \frac{49}{691200} L_\delta^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(-\frac{49}{57600} \right) L_2 + \left(-\frac{49}{172800} + \frac{49}{115200} L_2 \right) L_\delta \right\} \delta^{1/2} \right. \\
& + \left\{ \frac{318919}{15676416} - \frac{24001}{87091200} \pi^2 + \frac{24001}{1814400} L_2^2 \right. \\
& + \frac{24001}{14515200} L_\delta^2 + \left(-\frac{24001}{907200} \right) L_2 \\
& \left. \left. + \left(-\frac{382987}{43545600} + \frac{24001}{2419200} L_2 \right) L_\delta \right\} \delta^{3/2} \right] + \mathcal{O}(\delta^{5/2}) + \mathcal{O}(\rho^3) \left. \right\} . \quad (4.1)
\end{aligned}$$

Dabei ist $L_2 = \log 2$, $L_\delta = \log \delta$, und die Renormierungs- und Faktorisierungsskala wurde auf $\mu = m_H$ gesetzt. Auch wenn diese Entwicklung für phänomenologische Betrachtungen nicht ausreichend ist, lässt sich das Verhalten an der Schwelle untersuchen. Wir beobachten:

- Die in δ und ρ führenden Terme im LO-Wirkungsquerschnitt sind von der Ordnung $\mathcal{O}(\rho^0 \delta^{5/2})$ und $\mathcal{O}(\rho \delta^{3/2})$.
- Die führenden Terme im NLO-Wirkungsquerschnitt sind von der Ordnung $\mathcal{O}(\rho^0 \delta^{3/2})$ und $\mathcal{O}(\rho \delta^{1/2})$.

Das Verhalten an der Schwelle $\delta = 0$ wird also auf LO durch $\mathcal{O}(\rho)$ -Terme bestimmt. Verglichen mit den NLO-Korrekturen ist sowohl der $\mathcal{O}(\rho^0)$ - als auch der $\mathcal{O}(\rho^1)$ -Anteil des LO-Ergebnis mit einem Faktor δ unterdrückt.

Für die folgenden Diskussionen wurde der NLO-Wirkungsquerschnitt bis $\mathcal{O}(\delta^{50})$ entwickelt. Abschneiden der δ -Entwicklung ist, wie in Anhang A.2 gezeigt wird, für diese Diskussionen nicht von Bedeutung.

4.1 Strikte $1/m_t$ -Entwicklung des NLO Wirkungsquerschnitts

Die gestrichelten Linien in Abb. 4.1 zeigen den strikt in ρ entwickelten Wirkungsquerschnitt im Gluon-Gluon-Kanal, sowie Abb. 4.2 im Quark-Gluon- und Quark-Antiquark-Kanal. Wie zu erwarten, konvergiert die Entwicklung nur nahe der Produktionsschwelle. Oberhalb und in der Nähe der Schwelle ist kein Zeichen von Konvergenz erkennbar. Diese Entwicklung ist also für phänomenologische Zwecke, bei denen der Bereich an und oberhalb der Schwelle wichtig ist, nicht geeignet. Die Entwicklung ist aber trotzdem von Nutzen:

1. Es handelt sich bei dem Ergebnis um die Entwicklung des *exakten* NLO-Ergebnisses unterhalb der Top-Quark-Schwelle, und das Ergebnis liegt in analytischer Form vor. Damit enthält es wertvolle Informationen des exakten NLO-Ergebnisses und kann als Konsistenztest für zukünftige Rechnungen jenseits der m_t -Entwicklung dienen.
2. Aus der Entwicklung auf NLO sowie der Kenntnis des exakten Ergebnisses auf LO lässt sich eine NLO-Vorhersage konstruieren, die prinzipiell auch oberhalb der Top-Quark-Schwelle zumindest als Näherung des exakten Ergebnisses dienen kann. Diese Konstruktion wird im folgenden beschrieben.

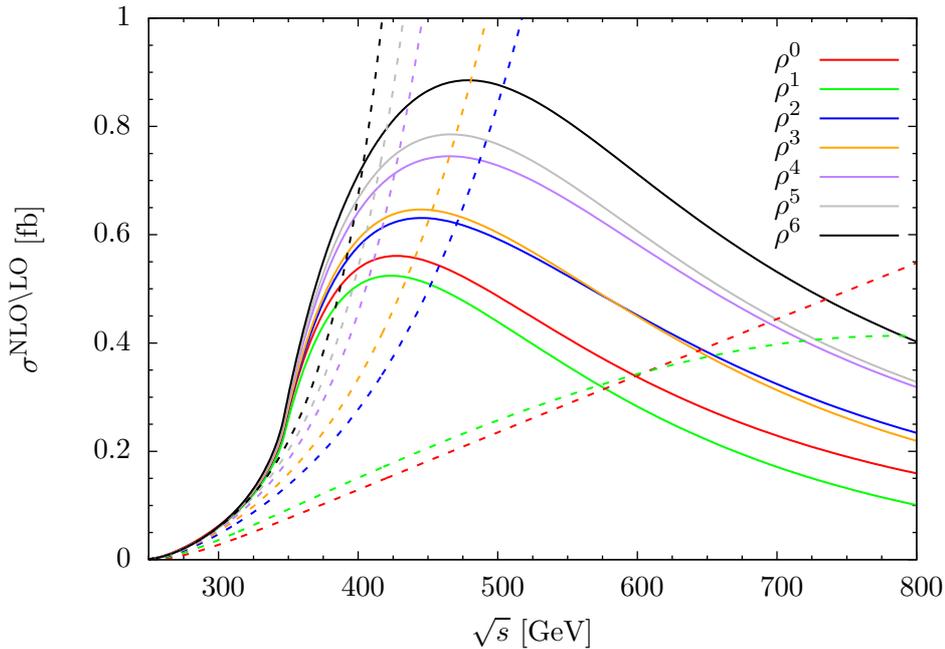


Abbildung 4.1: Partonischer NLO-Wirkungsquerschnitt ohne LO-Beitrag, Gluon-Gluon-Kanal. Die gestrichelten Linien stellen das strikt entwickelte Ergebnis dar, die durchgezogenen Linien das Ergebnis nach LO-Faktorisierung.

4.2 Faktorisierung des LO-Wirkungsquerschnitts

In dieser Arbeit bedeutet die Faktorisierung des exakten LO-Wirkungsquerschnitts die folgende Ersetzung:

$$\sigma_{\text{exp}}^{\text{NLO}} \rightarrow \sigma_{\text{fakt}}^{\text{NLO}} := \frac{\sigma^{\text{LO}}}{\sigma_{\text{exp}}^{\text{LO}}} \sigma_{\text{exp}}^{\text{NLO}} = \sigma^{\text{LO}} \frac{\sigma_{\text{exp}}^{\text{NLO}}}{\sigma_{\text{exp}}^{\text{LO}}}. \quad (4.2)$$

Vom faktorisierten Wirkungsquerschnitt σ_{fakt} erwartet man, dass er den tatsächlichen exakten Wirkungsquerschnitt besser annähert als die strikte Entwicklung. Dabei handelt es sich aber tatsächlich nur um eine Annahme. Man erkennt, dass für

$$\frac{\sigma^{\text{NLO}}}{\sigma^{\text{LO}}} \approx \frac{\sigma_{\text{exp}}^{\text{NLO}}}{\sigma_{\text{exp}}^{\text{LO}}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sigma^{\text{NLO}}}{\sigma_{\text{exp}}^{\text{NLO}}} \approx \frac{\sigma^{\text{LO}}}{\sigma_{\text{exp}}^{\text{LO}}} \quad (4.3)$$

offensichtlich $\sigma^{\text{NLO}} \approx \sigma_{\text{fakt}}^{\text{NLO}}$ ist. Die zugrundeliegende Annahme lässt sich also in Worten wie folgt formulieren:

Formulierung 1 Der exakte K-Faktor ist ungefähr gleich dem K-Faktor, den man erhält, wenn man Zähler und Nenner separat entwickelt.

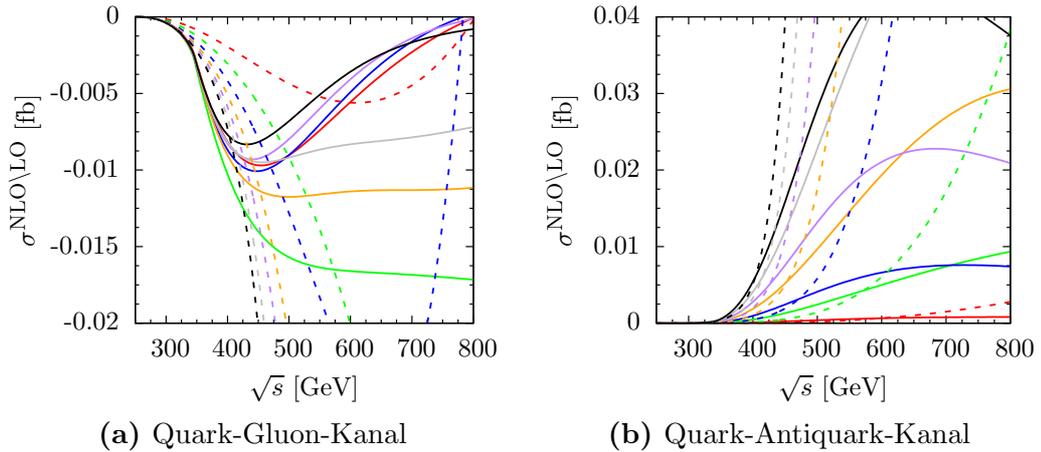


Abbildung 4.2: Partonischer NLO-Wirkungsquerschnitt. Kanäle mit mindestens einem Quark im Anfangszustand, Farben wie in Abb. 4.1.

Formulierung 2 Der $1/m_t$ -Korrekturfaktor auf LO ist ungefähr gleich dem $1/m_t$ -Korrekturfaktor auf NLO.

Formulierung 3 Der K-Faktor hängt allein von m_H und m_t , und nicht von \sqrt{s} (oder der invarianten Masse $\sqrt{Q^2}$) ab. In diesem Fall werden insbesondere analytischen Eigenschaften vom exakten LO-Wirkungsquerschnitt auf den NLO-Wirkungsquerschnitt übertragen (z.B. die Entwicklung des Imaginärteils der Amplitude an Top-Quark-Schwelle bei $\sqrt{s} = 2m_t$).

Um es nochmals zu betonen: Es handelt sich dabei um Annahmen, die auf Gl. (4.2) führen. Es handelt sich nicht um Argumente dafür, dass die Annahmen korrekt sind. Die Frage, ob und wie genau die Annahmen erfüllt sind, bzw. wie genau Gl. (4.2) das exakte NLO-Ergebnis beschreibt, ist ein zentraler Punkt dieser Arbeit. Im Fall der Einzel-Higgs-Produktion beobachtet man tatsächlich, dass die Faktorisierung wie in Gl. (4.2) den totalen Wirkungsquerschnitt sehr gut beschreibt. Bevor wir im nächsten Abschnitt den Vergleich ziehen zwischen dem Einzel- und dem Doppel-Higgs-Fall, betrachten wir jetzt den gemäß Gl. (4.2) LO-faktorierten partonischen NLO-Wirkungsquerschnitt im Doppel-Higgs-Fall.

In Abb. 4.1 und Abb. 4.2 sind die NLO-Korrekturen zum LO-Wirkungsquerschnitt dargestellt. Im folgenden wird die Notation $\sigma^{\text{NLO}\backslash\text{LO}}$ verwendet, wenn es sich um die NLO-Korrekturen handelt, die zu LO zu addieren sind. Für das vollständige NLO-Ergebnis (inklusive LO) wird die Notation $\sigma^{\text{LO+NLO}}$ verwendet. Die gestrichelten Linien zeigen das strikt entwickelte Ergebnis, die

durchgezogenen Linien das Ergebnis nach LO-Faktorisierung aus Gl. (4.2). Wir beobachten:

- Im Gluon-Gluon-Kanal bewirkt die LO-Faktorisierung eine deutliche Verbesserung des Konvergenzverhaltens. Dennoch beginnt im Bereich $350 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 400 \text{ GeV}$ eine Aufspaltung der verschiedenen Kurven, so dass für größere partonische Schwerpunktsenergien die Kurven zwar nicht konvergieren, aber verglichen mit der strikten Entwicklung doch weniger divergent sind. Eine detaillierte Diskussion des Konvergenzverhaltens findet in Abschnitt 4.3 statt.
- Im Quark-Gluon-Kanal sowie im Quark-Antiquark-Kanal ist ebenfalls eine – wenn auch weniger stark als im Gluon-Gluon-Kanal ausgeprägte – Verbesserung verglichen mit der strikten Entwicklung erkennbar. Dass die Faktorisierung weniger gut funktioniert als im Gluon-Gluon-Kanal, ist nicht überraschend, da der exakte LO-Wirkungsquerschnitt selbst ein Gluon-Gluon-Kanal ist. Und es ist nicht erstaunlich, dass die zugrundeliegenden Annahmen in Gl. (4.3) eher innerhalb eines Kanals erfüllt sind.
- In allen Kanälen zeigt sich, ähnlich wie auf LO (vgl. Abb. 2.2), bei der Produktionsschwelle ein zunächst flacher Anstieg, der im Bereich der Top-Quark-Schwelle steiler wird und nach einem Maximum (je nach Kanal zwischen 400 GeV und 700 GeV) schließlich langsam abfällt. Wie auf LO wird der Wirkungsquerschnitt nicht durch den Bereich direkt an der Schwelle bei $\sqrt{s} \approx 2m_H$, sondern durch den Bereich größerer Schwerpunktsenergien dominiert.
- Bei Betrachtung der absoluten Skala fällt auf, dass der Quark-Gluon-Kanal und der Quark-Antiquark-Kanal etwa zwei Größenordnungen kleiner sind als der Gluon-Gluon-Kanal. Dazu kommt noch eine Unterdrückung durch die Partonverteilungen, so dass diese Kanäle für Phänomenologie am LHC praktisch vernachlässigbar sind. Wenn nicht anders angegeben, wird im folgenden immer ausschließlich der Gluon-Gluon-Kanal diskutiert.

4.2.1 Vergleich mit Einzel-Higgs-Produktion

Im Fall der Einzel-Higgs-Produktion ist auf NLO bereits der in m_t exakte Wirkungsquerschnitt [79], sowie auf NNLO Entwicklungen in $1/m_t$ bekannt [80, 81, 82]. Abb. 4.3 wurde aus [78] entnommen und zeigt den totalen NLO-Wirkungsquerschnitt der Einzel-Higgs-Produktion in Abhängigkeit von der

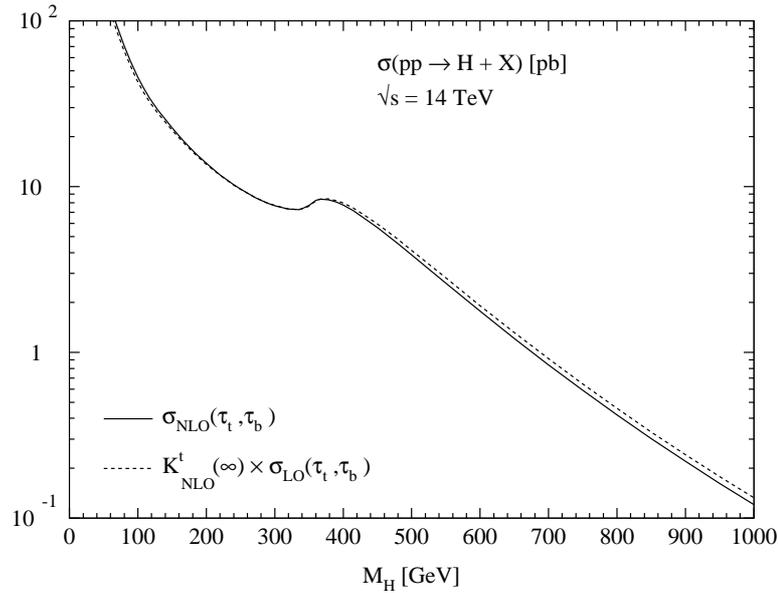


Abbildung 4.3: Totaler hadronischer NLO-Wirkungsquerschnitt für Einzel-Higgs-Produktion als Funktion der Higgs-Masse. Die durchgezogene Linie zeigt das in m_t exakte Ergebnis, die gestrichelte Linie den $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzfall mit LO-Faktorisierung wie in Gl. (4.2). Die Abbildung wurde aus [78] entnommen.

Higgs-Masse. Dargestellt ist das exakte Ergebnis (durchgezogene Linie) sowie der $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzfall mit LO-Faktorisierung wie in Gl. (4.2) (gepunktete Linie). Man erkennt, dass die effektive Theorie das exakte Ergebnis für $m_H \approx 125$ GeV hervorragend beschreibt. Selbst für eine Higgs-Masse oberhalb der Top-Quark-Schwelle ist die Näherung noch auf 10 % genau. Daran erkennt man, dass die LO-Faktorisierung prinzipiell geeignet ist, das exakte Ergebnis auch für $m_H > 2m_t$ zu beschreiben. Allerdings ist zu beachten, dass hier der totale inklusive Wirkungsquerschnitt betrachtet wurde. Und der entscheidende Unterschied zum Doppel-Higgs-Fall ist, dass für Einzel-Higgs-Produktion der Bereich $\sqrt{s} \leq 2m_t$ des partonischen Wirkungsquerschnitts den totalen hadronischen Wirkungsquerschnitt dominiert. Der in Abschnitt 4.6 für den Doppel-Higgs-Fall beobachtete Mangel an Konvergenz des hadronischen Wirkungsquerschnitts ist also eher auf die Tatsache zurückzuführen, dass für Doppel-Higgs-Produktion der Bereich $\sqrt{s} \gtrsim 2m_t$ im totalen Wirkungsquerschnitt dominant ist. Um diesen Bereich genauer zu beschreiben, ist allerdings eine tiefere Entwicklung in $1/m_t$ per Konstruktion nicht geeignet, da diese ja gerade die umgekehrte Hierarchie $\sqrt{s} \ll m_t$ impliziert. Für eine bessere Vorhersage könnte allerdings der Hochenergielimes $\sqrt{s} \gg m_t > m_H$ betrachtet werden, wie es für Einzel-Higgs-Produktion auf LO und NLO gemacht wurde.

Hochenergielimes bei Einzel-Higgs-Produktion

Wie in [83] diskutiert wurde, entwickelt der Higgs-Wirkungsquerschnitt für $s \rightarrow \infty$ eine Singularität [84, 85]

$$\sigma(gg \rightarrow H + X) \stackrel{s \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_s^k \log^{2k-1} \frac{s}{m_H^2} & \text{für } m_t \rightarrow \infty \\ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_s^k \log^{k-1} \frac{s}{m_H^2} & \text{für } m_t \text{ endlich} \end{cases} . \quad (4.4)$$

Die ggH -Punktwechselwirkung in der effektiven Theorie unterscheidet sich also charakteristisch von der vollen Theorie, in der die ggH -Wechselwirkung über einen Formfaktor – die Top-Quark-Schleife – stattfindet. Um die in Gl. (4.4) erkennbare künstliche zusätzliche Singularität $((\alpha_s \log s)^2$ anstelle von $(\alpha_s \log s)$) der effektiven Theorie zu umgehen, wurde in [83] (basierend auf der Hochenergie-Faktorisierung in [84, 85]) der Hochenergielimes der vollen Theorie bestimmt. Dieser $(\sqrt{s} \gg m_t, m_H)$ -Grenzfall wurde auf (N)NLO in [80, 82] mit dem umgekehrten Grenzfall $m_t \gg s, m_H$ durch eine Interpolation kombiniert. Man findet, dass die ohnehin kleine Abweichung vom exakten Ergebnis auf NLO, durch diese Interpolation erklärt werden kann.

Auf NNLO, wo das exakte Ergebnis nicht bekannt ist, beobachtet man eine größere Abweichung als auf NLO, die allerdings immer noch $< 1\%$ ist. Diese verbleibende NNLO-Unsicherheit ist im wesentlichen auf die Matching-Prozedur, d.h. auf die Frage, wie man zwischen den beiden Grenzfällen interpoliert, zurückzuführen.

Hochenergielimes bei Doppel-Higgs-Produktion

Da im Doppel-Higgs-Fall bereits der LO-Wirkungsquerschnitt durch höhere partonische Schwerpunktsenergien bestimmt wird, ist davon auszugehen, dass in diesem Fall das Hochenergieverhalten von noch größerer Bedeutung ist. Daher ist es naheliegend, auch für Higgs-Paare den Hochenergielimes zu bestimmen und mit der $1/m_t$ -Entwicklung zu kombinieren. Dieser Ansatz ist jedoch erstens (technisch) komplizierter und zweitens weniger erfolgversprechend als im Einzel-Higgs-Fall:

1. Wie in [84, 85, 83] gezeigt wurde, erhält man den dominanten Beitrag zum Hochenergielimes aus einem Phasenraumintegral über die *off-shell*-Amplitude $\mathcal{M}(g(q_1^2 \neq 0)g(q_2^2 \neq 0) \rightarrow H)$. Während jedoch bei der Higgs-Produktion die Phasenraumintegration aufgrund der $(2 \rightarrow 1)$ -Kinematik mit einer $\delta(Q^2 - m_H^2)$ -Distribution trivial ist, ist das bei Higgs-Paaren nicht mehr der Fall. Dort ist insbesondere die invariante Masse $\sqrt{Q^2}$ der beiden Higgs-Bosonen eine weitere freie Skala, die nur durch $\sqrt{s} \rightarrow \infty$ „beschränkt“ ist.

2. Selbst wenn man den Hochenergielimes bestimmt hätte, wäre – so wie im Einzel-Higgs-Fall auf NNLO – die Interpolation zwischen den beiden Grenzfällen ein kritischer Punkt. Letztendlich wäre damit ein (kleiner) Teil der m_t -Effekte unter Kontrolle, der vermutlich größere Teil der Unsicherheit wäre nach wie vor vorhanden, allerdings in Form der Matching-Prozedur.

4.3 Konvergenz

Bevor wir weitere Aspekte der m_t -Korrekturen auf NLO untersuchen, soll in diesem Abschnitt kurz der Konvergenz-Begriff, wie er üblicherweise im Rahmen solcher Entwicklungen in der Physik und insbesondere in dieser Arbeit verwendet wird, erläutert werden. Wir betrachten am Beispiel einer reellen Folge (x_n) den Konvergenz-Begriff in der Mathematik. Eine mögliche Definition des Grenzwertes der Folge lautet:

$$(x_n) \rightarrow x \quad \Leftrightarrow \quad \exists x : \forall \epsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n > n_0 : |x - x_n| < \epsilon . \quad (4.5)$$

Solche Formulierungen können mathematisch exakt gemacht werden. Um mit dieser Charakterisierung allerdings Konvergenz prüfen zu können, muss der Grenzwert x und/oder die Folge (x_n) (vollständig) bekannt sein. In der Physik hingegen ist die Problemstellung in der Regel eine andere: Gegeben ist eine endlich Anzahl der ersten Terme einer Entwicklung, und die Frage ist, ob die Entwicklung grundsätzlich gegen einen Grenzwert konvergiert und wie groß die Abweichung von diesem unbekanntem Grenzwert (maximal) ist. In der Regel ist also weder der Grenzwert noch eine beliebige Anzahl von Folgengliedern bekannt, vielmehr soll der Grenzwert und die verbleibende Unsicherheit aus den bekannten Folgengliedern konstruiert werden. Daher hat sich in der Physik ein anderer Begriff der Konvergenz etabliert. Am Beispiel der Folge (x_n) würde dieser lauten:

$$(x_n) \rightarrow x \quad \Leftrightarrow \quad \exists n_0 : \forall n > n_0 : |x_n - x_{n-1}| < |x_{n-1} - x_{n-2}| , \quad (4.6)$$

wobei $n, n_0 < n_{\max}$ wenn n_{\max} die Anzahl der bekannten Folgenglieder ist. In Worten bedeutet dies, dass man von Konvergenz spricht, wenn man beobachtet, dass mit wachsender Entwicklungstiefe n die Differenz zwischen der $\mathcal{O}(n)$ - und der $\mathcal{O}(n-1)$ -Entwicklung kleiner wird. Als beste Näherung des unbekanntem Grenzwertes x wird $x_{n_{\max}}$ verwendet und der Fehler mit $|x_{n_{\max}} - x_{n_{\max}-1}|$ abgeschätzt.

Diese Charakterisierung hat natürlich keine Beweiskraft, sondern ist empirischer Natur, und die verbleibende Unsicherheit ist nur eine Abschätzung. Für

viele physikalische Probleme (bei denen sowohl das exakte Ergebnis als auch die Entwicklung bekannt ist) hat sich allerdings gezeigt, dass die so gemachten Abschätzungen korrekt (gute Näherungen) sind.

Mit dieser kurzen Diskussion soll betont werden, dass mit einer Charakterisierung wie in Gl. (4.6) zwar kein mathematisch korrekter, aber dennoch ein transparenter und für die physikalische Diskussion in der Regel ausreichender Konvergenzbegriff gegeben ist.

Konvergenz im NLO Gluon-Gluon-Kanal

Anhand des Gluon-Gluon-Kanals untersuchen wir die Konvergenz des NLO-Wirkungsquerschnitts und die Auswirkungen der Faktorisierung des LO-Wirkungsquerschnitts. Dazu betrachten wir für $n = 1, \dots, 6$ die Differenz

$$\sigma^{\text{NLO},\rho^n} - \sigma^{\text{NLO},\rho^{n-1}}, \quad (4.7)$$

also die Korrekturen des ρ^n -Ergebnisses zum ρ^{n-1} -Ergebnis. In der linken Spalte von Abb. 4.4 ist jeweils der Bereich in der Nähe der Produktionsschwelle dargestellt. Abb. 4.4a zeigt den absoluten Wirkungsquerschnitt, Abb. 4.4b die entsprechende Differenz zur nächsttieferen Entwicklungsordnung.

Wir betrachten zunächst die strikte Entwicklung (gestrichelte Linien) im Bereich unterhalb der Top-Quark-Schwelle (Abb. 4.4b links). Man erkennt, dass die Differenz „ $\rho^6 - \rho^5$ “ (schwarze Linie) bis $\sqrt{s} \approx 350$ GeV kleiner ist als die niedrigerer Ordnung, d.h. die Entwicklung konvergiert in diesem Bereich, und das ρ^6 -Ergebnis ist der beste Schätzwert für das exakte Ergebnis. Für größere Schwerpunktsenergien ist das nicht mehr der Fall, und es ist kein Anzeichen von Konvergenz erkennbar. Bei Betrachtung des LO-faktorierten Ergebnisses (durchgezogene Linien) erkennt man, dass in diesem Fall schon bei $\sqrt{s} \approx 300$ GeV die Korrekturen mit wachsender Entwicklungstiefe nicht mehr kleiner werden, d.h. dass das Ergebnis dort im Sinne von Gl. (4.6) nicht konvergiert. Andererseits erkennt man ebenfalls, dass der absolute Betrag der Differenz sehr klein und deutlich kleiner als im Fall der strikten Entwicklung ohne LO-Faktorisierung ist. Betrachtet man jetzt auch den Wirkungsquerschnitt selbst (Abb. 4.4a), so erkennt man, dass in dem Bereich $\sqrt{s} \lesssim 300$ GeV, wo sowohl strikte Entwicklung als auch das faktorierte Ergebnis konvergieren, die beiden besten Schätzer (die schwarzen Kurven) sehr gut übereinstimmen.

Wir stellen also fest, dass Konvergenz in dem Sinne, dass die tiefste Entwicklung die beste Näherung für das exakte Ergebnis ist, tatsächlich auch nach LO-Faktorisierung nur für sehr kleine Schwerpunktsenergien zu beobachten ist. Andererseits ist die Variation aller verschiedenen Entwicklungstiefen noch bis $\sqrt{s} \lesssim 350$ GeV so klein, dass die Aufspaltung der Kurven für

die phänomenologische Diskussion vernachlässigt werden kann. Für größere Schwerpunktsenergien bleibt eine deutliche Unsicherheit aufgrund der Variation der Entwicklungstiefe.

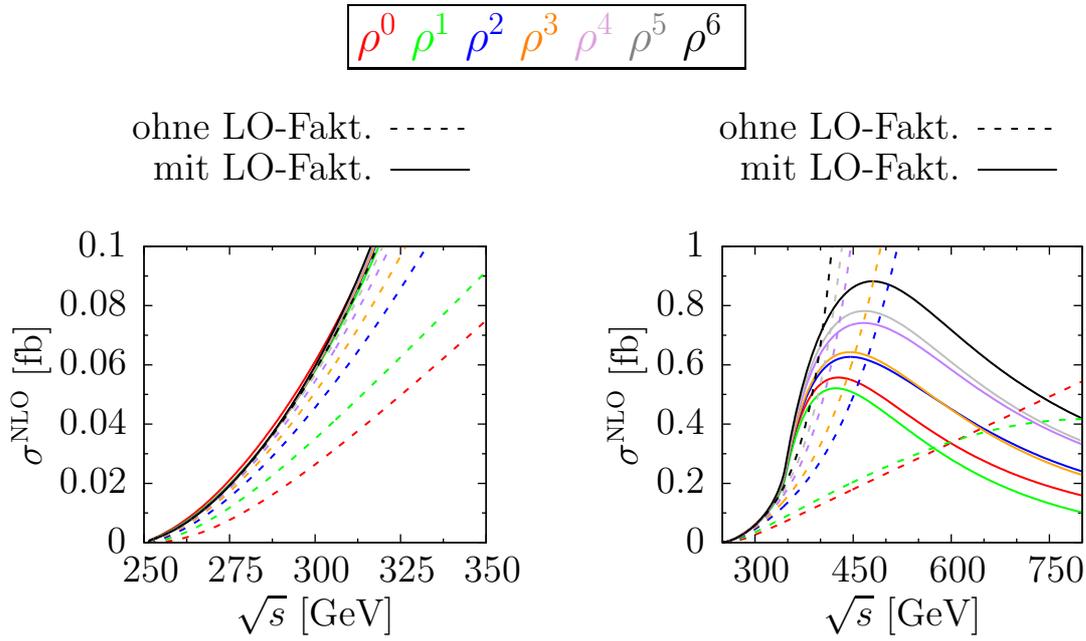
Wir fassen also zusammen:

1. Für sehr kleine Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} \lesssim 300$ GeV konvergiert die m_t -Entwicklung. Das ρ^6 Ergebnis ist dort unabhängig von der LO-Faktorisierung eine sehr gute Näherung des exakten Ergebnisses. Diese Korrekturen sind verglichen mit dem ρ^0 -Ergebnis phänomenologisch nicht von Bedeutung. Sie sind allerdings von Wert, um als Konsistenztest für zukünftige exakte (möglicherweise numerische) Rechnungen zu dienen.
2. Für größere Energien $\sqrt{s} \gtrsim 300$ GeV versagt die Konvergenz, und die Kurven spalten sich in beiden Fällen auf. Während im Fall der strikten Entwicklung bereits ab 350 GeV die Variation der verschiedenen Kurven unbeschränkt scheint, ist in dem Fall mit LO-Faktorisierung die Variation noch so klein, dass sie phänomenologisch (z.B. für den hadronischen Wirkungsquerschnitt) praktisch keine Rolle spielt. Erst für noch größere Energien ist auch hier die Variation der Kurven deutlich sichtbar, aber dennoch auf $\mathcal{O}(50\%)$ des ρ^0 -Ergebnisses beschränkt.

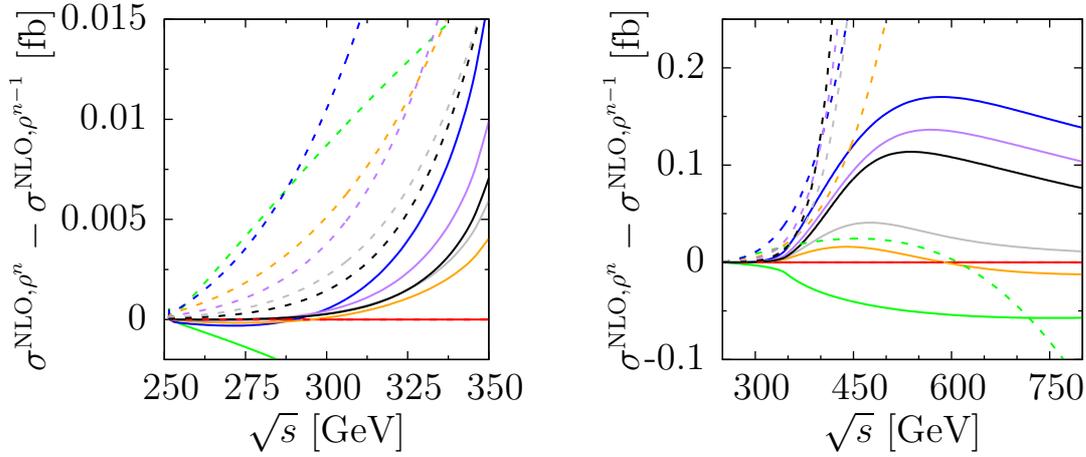
4.4 Hadronischer Wirkungsquerschnitt I

Nachdem wir festgestellt haben, dass die m_t -Entwicklung trotz LO-Faktorisierung im partonischen Wirkungsquerschnitt für $\sqrt{s} \gtrsim 400$ GeV nicht konvergiert, stellt sich die Frage, inwiefern sich das im beobachtbaren hadronischen Wirkungsquerschnitt bemerkbar macht. Dazu betrachten wir, wie bereits auf LO in Abschnitt 2.2.3, den NLO-Wirkungsquerschnitt als Funktion von $\sqrt{s_{\text{cut}}}$, einem Schnitt auf die partonische Schwerpunktsenergie. Wie in Abschnitt 4.5.1 gezeigt wird, kann man diesen „theoretischen Schnitt“ als Näherung für den im Experiment beobachtbaren Schnitt auf die invariante Higgs-Paar-Masse sehen.

Abb. 4.5 zeigt den hadronischen NLO-Wirkungsquerschnitt für $\sqrt{\hat{s}} = 14$ TeV als Funktion von $\sqrt{s_{\text{cut}}}$, wobei MSTW2008 Partonverteilungen [36] verwendet wurden. Für $\sqrt{s_{\text{cut}}} \geq \sqrt{\hat{s}}$ erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt (in der Abbildung am rechten Rand mit ∞ gekennzeichnet). Ähnlich wie bereits auf LO beobachtet man, dass der totale Wirkungsquerschnitt wesentlich durch den Bereich $350 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 700 \text{ GeV}$ bestimmt wird. Da in diesem Bereich die Entwicklung schlecht oder gar nicht konvergiert, ist folglich auch der totale Wirkungsquerschnitt nicht konvergent in der m_t -Entwicklung. Würden weitere



(a) Entwickelter NLO-Wirkungsquerschnitt, mit und ohne LO-Faktorisierung.



(b) Differenzen $\sigma(\mathcal{O}(\rho^n)) - \sigma(\mathcal{O}(\rho^{n-1}))$

Abbildung 4.4: Konvergenz der $1/m_t$ -Entwicklung des partonischen NLO-Wirkungsquerschnitts.

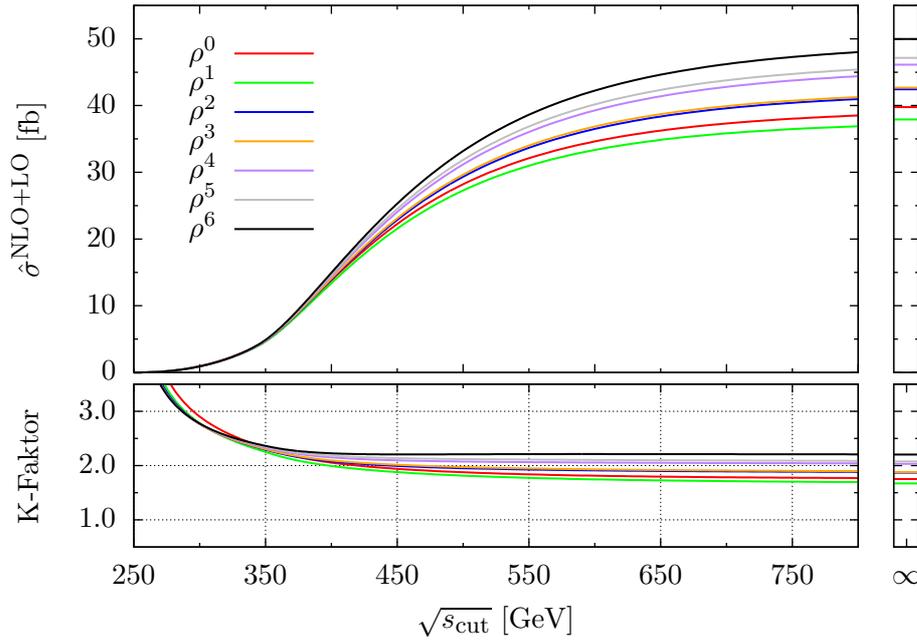


Abbildung 4.5: Hadronischer LO+NLO-Wirkungsquerschnitt und K-Faktor für $\sqrt{\hat{s}} = 14$ TeV. Für den K-Faktor wurde NLO- α_s im Zähler und LO- α_s im Nenner verwendet. $s_{\text{cut}} = \infty$ bezeichnet den totalen Wirkungsquerschnitt.

Entwicklungskoeffizienten dem Schema der berechneten Koeffizienten folgen, wäre der totale Wirkungsquerschnitt nach oben vermutlich unbeschränkt. Auf Basis dieses Ergebnisses ist es also nicht möglich, einen besten Schätzwert für den in m_t exakten totalen Wirkungsquerschnitt auf NLO anzugeben. Allerdings können die berechneten Entwicklungskoeffizienten durchaus zur (groben) Abschätzung der verbleibenden Unsicherheit verwendet werden. Das ist deswegen möglich, weil eine Entwicklung zur Ordnung $(1/m_t^2)^n$ nicht nur eine Entwicklung in $\rho = m_H^2/m_t^2$, sondern implizit auch eine Entwicklung in $\eta := s/m_t^2$ ist. Daher ist davon auszugehen, dass für hinreichend große Werte von n und große Werte von s das exakte Ergebnis durch eine weniger tiefe Entwicklung besser approximiert wird. Es ist also insbesondere denkbar, dass der totale Wirkungsquerschnitt beispielsweise durch das ρ^1 - oder ρ^2 -Ergebnis besser beschrieben wird als durch das ρ^6 -Ergebnis. Obwohl also der totale Wirkungsquerschnitt in dieser Entwicklung divergiert, sind die ersten Terme der Entwicklung eine vernünftige Abschätzung der *Größenordnung* der theoretischen Unsicherheit.

Abb. 4.6 zeigt diese Unsicherheit im Verhältnis zur Variation der Higgs-Selbstkopplung um $\pm 20\%$ verglichen mit ihrem Wert im Standardmodell. Wie man erkennt, ist für $\sqrt{s} < 350$ GeV die m_t -Entwicklung so gut, dass prak-

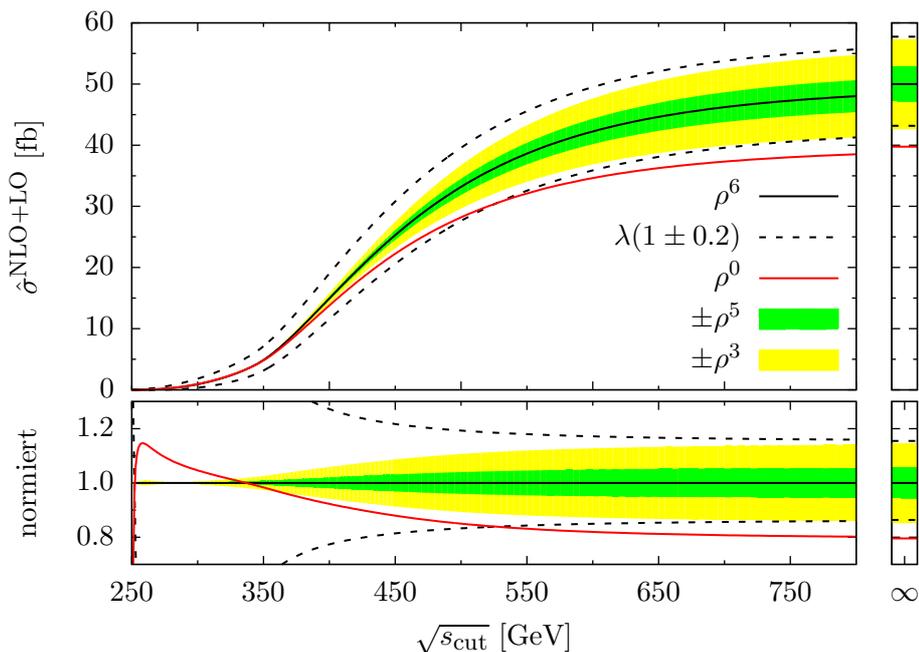


Abbildung 4.6: Masseneffekte und Variation der Higgs-Selbstkopplung im NLO-Wirkungsquerschnitt. Das untere Schaubild zeigt alle Kurven auf ρ^6 normiert. $s_{\text{cut}} = \infty$ bezeichnet den totalen Wirkungsquerschnitt.

tisch keine Unsicherheit verbleibt. Gleichzeitig ist in diesem Bereich der Wirkungsquerschnitt relativ gesehen extrem sensitiv auf die Higgs-Selbstkopplung, jedoch der absolute Wert so klein, dass im Standardmodell eine Messung am LHC mit heutigen Methoden aussichtslos scheint. Umgekehrt betrachtet ist das aber auch eine Möglichkeit, Abweichungen vom Standardmodell zu beobachten. Sollte am LHC bei einem Schnitt auf die invariante Higgs-Paar-Masse von beispielsweise 350 GeV ein deutlicher Überschuss gemessen werden, so kann aufgrund der hier gefundenen Ergebnisse ausgeschlossen werden, dass es sich dabei um m_t -Effekte handelt.

Im Bereich $350 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 550 \text{ GeV}$ wächst die m_t -Unsicherheit schnell an, während die Sensitivität auf die Selbstkopplung fällt. Danach tritt eine Sättigung ein, und die Kurven bleiben für $s \rightarrow \infty$ nahezu konstant. In diesem Bereich und insbesondere für den totalen Wirkungsquerschnitt kann die m_t -Unsicherheit nur grob mit $\mathcal{O}(\pm 10 \%)$ abgeschätzt werden. Das ist derselbe Bereich wie bei Variation der Selbstkopplung um $\mathcal{O}(\pm 10 \%)$. Insbesondere ist zu beachten, dass für den totalen Wirkungsquerschnitt oder $\sqrt{s_{\text{cut}}} \gtrsim 400 \text{ GeV}$ aufgrund fehlender Konvergenz kein bester Schätzwert gegeben werden kann. Die ρ^6 -Kurve wurde in Abb. 4.6 als zentraler Wert gewählt, da sie für kleinere

$\sqrt{s_{\text{cut}}}$ das exakte Ergebnis darstellt. Für große $\sqrt{s_{\text{cut}}}$ kann nicht davon ausgegangen werden, dass sie dem exakten Ergebnis näher kommt als die weniger tiefen Entwicklungen, die unterhalb der ρ^6 -Kurve liegen (wie man in Abb. 4.5 sieht, liegt die ρ^1 -Kurve sogar noch unterhalb der ρ^0 -Kurve).

Da am LHC eine Vermessung der Selbstkopplung mit einer Genauigkeit von $\approx 20\%$ in Reichweite ist, ist die hier gemachte Abschätzung der m_t -Effekte von $\mathcal{O}(\pm 10\%)$ unter phänomenologischen Gesichtspunkten nicht befriedigend. Daher wird im nächsten Abschnitt basierend auf der SV-Näherung eine genauere Vorhersage konstruiert.

4.5 Verbesserung der LO-Faktorisierung

Die LO-Faktorisierung, wie in Abschnitt 4.2 diskutiert, findet für den totalen partonischen Wirkungsquerschnitt statt. Das ist allerdings problematisch, da

$$\sigma(s) = \int_{4m_H^2}^s dQ^2 \frac{d\sigma}{dQ^2} \quad (4.8)$$

ist, wobei $\sqrt{Q^2}$ die invariante Masse des Higgs-Boson-Paares bezeichnet. Für große Werte von s tragen Bereiche großer Q^2 bei, in denen die m_t -Entwicklung per Konstruktion nicht funktionieren kann. Für ein robusteres Ergebnis sollte die Faktorisierung also vor der Q^2 -Integration stattfinden:

$$\frac{\sigma^{\text{exakt}}(s)}{\sigma^{\text{LO}}(s)} \int_{4m_H^2}^s dQ^2 \frac{d\sigma_{\text{NLO}}}{dQ^2} \quad \rightarrow \quad \int_{4m_H^2}^s dQ^2 \frac{\left(\frac{d\sigma^{\text{exakt}}}{dQ^2}\right)}{\left(\frac{d\sigma^{\text{LO}}}{dQ^2}\right)} \frac{d\sigma_{\text{NLO}}}{dQ^2}.$$

Da aber aufgrund der Berechnung durch das Optische Theorem der Wirkungsquerschnitt (zumindest die reellen Korrekturen) nicht differentiell vorliegt, ist das nicht ohne weiteres möglich. Andererseits können, wie in Abschnitt 3.2 gezeigt wurde, die *soften* reellen Korrekturen aus dem LO-Wirkungsquerschnitt, der exakt in m_t vorliegt, konstruiert werden. Die Grundidee ist also, das volle Ergebnis aufzuspalten in *soft+virtual* (SV) und *hard* (H). Im SV-Anteil ist die LO-Faktorisierung bereits implizit vor der Q^2 -Integration ausgeführt. Die „problematische“ LO-Faktorisierung ist dann nur noch für die harte Abstrahlung durchzuführen, die, wie wir sehen werden, im totalen Wirkungsquerschnitt numerisch nicht dominant ist.

4.5.1 Aufspaltung in soft+virtual (SV) und hard (H)

Der NLO-Wirkungsquerschnitt setzt sich zusammen aus virtuellen Korrekturen, UV-Countertermen, reellen Korrekturen und den kollinearen Counterter-

men

$$\sigma = \sigma^{\text{virt+ren}} + \sigma^{\text{real}} + \sigma^{\text{split}} . \quad (4.9)$$

Diese Beiträge liegen separat, jeweils strikt in ρ und δ entwickelt vor. Die *soften* Beiträge der Splitting-Funktionen liegen ebenfalls separat vor, die *soften* Beiträge der reellen Korrekturen allerdings nicht. Unter Ausnutzung von Gl. (3.13), Gl. (3.15) und Gl. (3.16) können wir die folgenden Zerlegungen vornehmen:

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{virt+ren}} &= \Sigma_{\text{div}} + \Sigma_{\text{fin}} & \text{mit} & \quad \Sigma_{\text{div}} = \int_{1-\delta}^1 dz \sigma^{\text{LO}}(z) f_{\text{virt}}(z) , \\ \sigma^{\text{real}} &= \Sigma_{\text{soft}}^{\text{real}} + \Sigma_{\text{hard}}^{\text{real}} & \text{mit} & \quad \Sigma_{\text{soft}}^{\text{real}} = \int_{1-\delta}^1 dz \sigma^{\text{LO}}(z) f_{\text{real}}(z) , \\ \sigma^{\text{split}} &= \Sigma_{\text{soft}}^{\text{split}} + \Sigma_{\text{hard}}^{\text{split}} & \text{mit} & \quad \Sigma_{\text{soft}}^{\text{split}} = \int_{1-\delta}^1 dz \sigma^{\text{LO}}(z) f_{\text{split}}(z) . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Damit haben wir unseren Wirkungsquerschnitt in SV und H zerlegt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \Sigma_{SV} + \Sigma_H \quad (= \sigma^{\text{virt+ren}} + \sigma^{\text{real}} + \sigma^{\text{split}}) \\ \text{mit } \Sigma_{SV} &:= \Sigma_{\text{div}} + \Sigma_{\text{fin}} + \Sigma_{\text{soft}}^{\text{real}} + \Sigma_{\text{soft}}^{\text{split}} \\ \Sigma_H &:= \Sigma_{\text{hard}}^{\text{real}} + \Sigma_{\text{hard}}^{\text{split}} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Zusammenfassung

1. $\sigma^{\text{virt+ren, real, split}}$ und σ^{LO} wurden selbst berechnet.
2. Aus der SV-Konstruktion ([42], Gl. (3.13), Gl. (3.15) und Gl. (3.16)) ergeben sich die Funktionen f_{virt} , f_{real} und f_{split} in Gl. (4.10).
3. Durch invertieren von Gl. (4.10) erhält man $\Sigma_{\text{div/fin/soft/hard}}^{\text{real/split}}$.
4. Liegt diese Aufteilung vor, so kann man die LO-Faktorisierung für die SV-Anteile auf differentielltem Niveau vornehmen.

Bevor wir aber die differentielle Faktorisierung durchführen, betrachten wir in Abb. 4.7 die Aufspaltung in SV und H. Dabei wurde für σ^{LO} in Gl. (4.10) der in ρ und δ entwickelte LO-Wirkungsquerschnitt verwendet und die z -Integration analytisch ausgeführt. Anschließend wurde die LO-Faktorisierung wie in Abschnitt 4.2 durchgeführt. Wir beobachten:

- Wie erwartet, sind die Beiträge der harten Strahlung für kleine Schwerpunktsenergien stark unterdrückt.

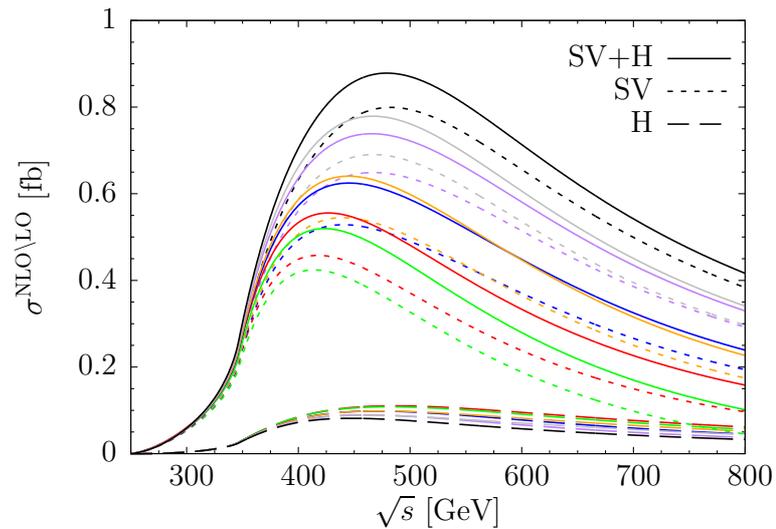


Abbildung 4.7: Aufteilung des partonischen NLO-Wirkungsquerschnitts in *soft+virtual* (SV) und *hard* (H). Farben wie in Abb. 4.5.

- Zwischen 300 GeV und 400 GeV steigen die harten Beiträge auf lediglich ca. 0.1 fb.
- Für größere Schwerpunktsenergien wird die Aufspaltung der verschiedenen Ordnungen der $1/m_t$ -Entwicklung sichtbar. Die Aufspaltung der harten Beiträge bleibt aber auch für größere \sqrt{s} klein, und die harten Beiträge sind relativ flach in \sqrt{s} .

Wir stellen also fest, dass das SV-Ergebnis die Form des partonischen Wirkungsquerschnitts sehr gut beschreibt und der absolute Wert für $\sqrt{s} \gtrsim 350$ GeV ca. 15 % unterhalb des vollen Ergebnisses liegt. Diese Beobachtung rechtfertigt auch einen Schnitt auf die partonische Schwerpunktsenergie als Näherung für einen Schnitt auf die invariante Higgs-Paar-Masse. Denn Q^2 und s unterscheiden sich nur für die harten Anteile, die aber in jeder Ordnung in $1/m_t$ klein und gleichförmig verteilt sind. Die zusätzliche Betonung der SV-Anteile durch die Partonverteilungen bewirkt, dass für den totalen hadronischen NLO-Wirkungsquerschnitt für $m_t \rightarrow \infty$ das SV-Ergebnis nur 5 % unterhalb des vollen Ergebnis liegt.

Es ist zu beachten, dass diese Zahlen und Abb. 4.7 auf der SV-Näherung im z -Raum basieren (siehe Abschnitt 3.2.1). Ein Diskussion über den Einfluss nicht-führender Terme der SV-Näherung findet in Abschnitt 6.2 statt. Für die im folgenden vorgestellten Ergebnisse sind diese Effekte weniger bedeutend, da nicht allein die SV-Näherung verwendet wird, sondern auch die harte Abstrah-

lung berücksichtigt wird. Die Definition der SV-Näherung beeinflusst also die Frage, welche Terme zu SV und welche Terme zu H gezählt werden. Die Summe aus SV+H bleibt davon unberührt.

4.5.2 Differentielle LO-Faktorisierung

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie sich die Faktorisierung auf differentiellem Niveau auswirkt. Dazu betrachten wir zunächst nur die SV-Näherung. Denn für die SV-Näherung können beide Varianten der LO-Faktorisierung konstruiert werden. Aus Gl. (4.10) und Gl. (4.11) folgt

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{SV} &= \int_{1-\delta}^1 dz \sigma^{\text{LO}} [f_{\text{virt}}(z) + f_{\text{real}}(z) + f_{\text{split}}(z)] + \Sigma_{\text{fin}} \\
 &= \int_{1-\delta}^1 dz \sigma^{\text{LO}} \left[f_{\text{virt}}(z) + f_{\text{real}}(z) + f_{\text{split}}(z) + \delta(1-z) \frac{\sigma_{\text{fin}}}{\sigma^{\text{LO}}} \right] \quad (4.12) \\
 &= \int_{1-\delta}^1 dz \sigma^{\text{LO}} G_{\text{SV}}(z) ,
 \end{aligned}$$

wobei die Funktion G_{SV} bereits in Abschnitt 3.2 eingeführt wurde. In Gl. (4.12) erkennt man, dass im SV-Ergebnis – bis auf den Anteil $\propto \sigma_{\text{fin}}$ – per Konstruktion der LO-Wirkungsquerschnitt faktorisiert. Lediglich in σ_{fin} wird die LO-Faktorisierung von Hand eingeführt. Dort spielt es allerdings ohnehin keine Rolle, ob das vor oder nach der z -Integration passiert, da dieser Anteil $\propto \delta(1-z)$ ist. Verwendet man den exakten LO-Wirkungsquerschnitt in Gl. (4.12), so wird die differentielle LO-Faktorisierung realisiert. Verwendet man hingegen den entwickelten LO-Wirkungsquerschnitt, so ist die Faktorisierung nach der z -Integration vorzunehmen. In Abb. 4.8 ist der NLO-SV-Wirkungsquerschnitt mit differentieller und nicht-differentieller LO-Faktorisierung dargestellt. Man erkennt, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, die differentielle Faktorisierung anzuwenden. Im gesamten Bereich ist die Aufspaltung der verschiedenen m_t -Ordnungen sowohl relativ als auch absolut deutlich geringer als im Fall der nicht-differentiellen Faktorisierung. Das ist ein Hinweis darauf, dass diese Variante das robustere Ergebnis im Hinblick auf die $1/m_t$ -Entwicklung liefert. Des weiteren stellen wir fest, dass, wie erwartet, für $\sqrt{s} \lesssim 350$ GeV beide Varianten gegen dieselbe Kurve konvergieren. Für größere \sqrt{s} unterscheiden sich die beiden Ansätze deutlich, und der Unterschied wächst mit der Ordnung der $1/m_t$ -Entwicklung.

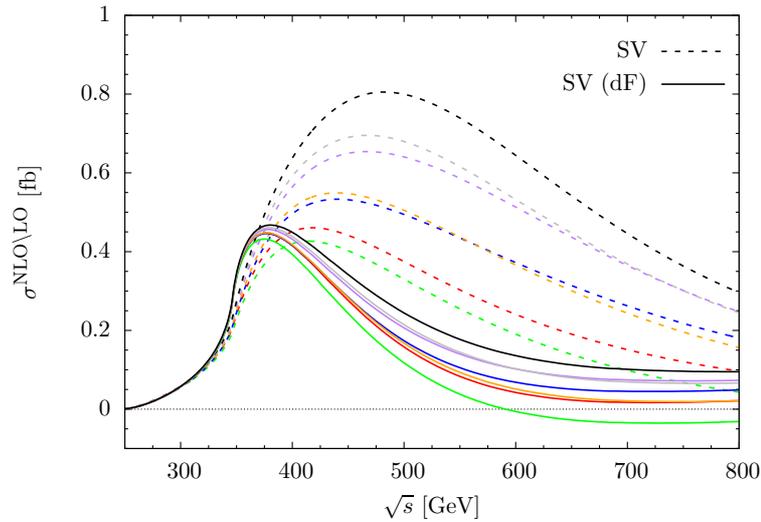


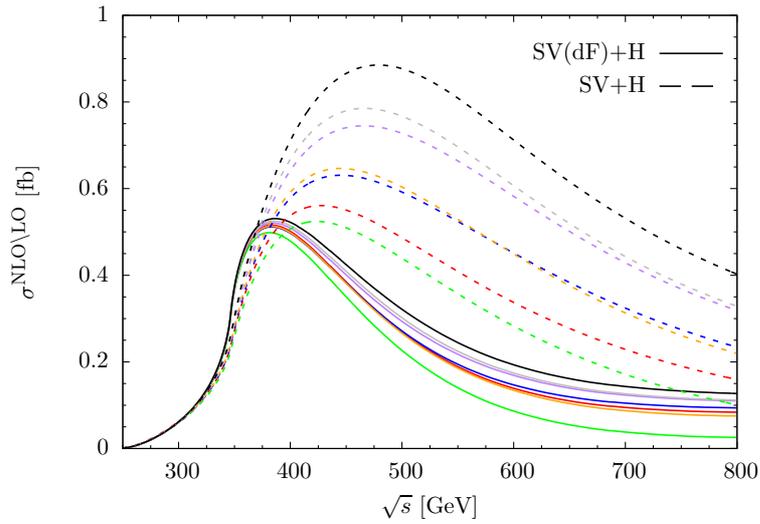
Abbildung 4.8: NLO-SV-Wirkungsquerschnitt mit LO-Faktorisierung auf differentiellem Niveau (dF) und wie in Abschnitt 4.2. Farben wie in Abb. 4.5.

4.5.3 Verbesserte NLO-Vorhersage

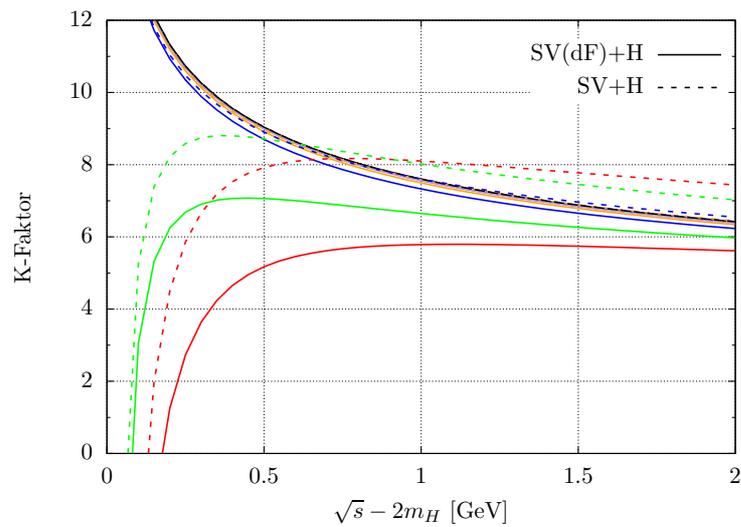
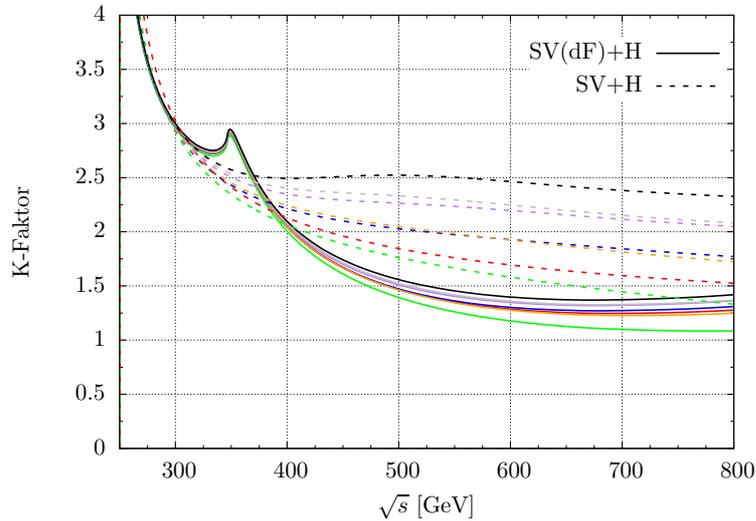
Um schließlich das verbesserte vollständige NLO-Ergebnis zu erhalten, müssen zu den SV-Anteilen noch die harten Anteile addiert werden. Da die H-Anteile nicht differentiell vorliegen, wird für sie LO-Faktorisierung des totalen Wirkungsquerschnitts vorgenommen:

$$\sigma_{\text{best guess}}^{\text{NLO}}(s) = \underbrace{\int_{1-\delta}^1 dz \sigma^{\text{LO}}(sz) G_{\text{SV}}(z)}_{\text{soft+virtual}} + \underbrace{\frac{\sigma^{\text{LO}}(s)}{\sigma_{\text{exp}}^{\text{LO}}(s)} \Sigma_H(s)}_{\text{hard}} . \quad (4.13)$$

Der so erhaltene verbesserte partonische NLO-Wirkungsquerschnitt und K-Faktor ist in Abb. 4.9 als durchgezogene Linie dargestellt. Die gestrichelten Linien zeigen zum Vergleich das nicht-differentiell faktorisierte Ergebnis aus Abb. 4.1. Da das Ergebnis von den SV-Anteilen dominiert wird und die H-Anteile relativ flach sind, zeigt sich qualitativ das gleiche Verhalten wie bei Betrachtung der SV-Anteile allein: Für kleine \sqrt{s} stimmen beide Varianten überein, die verbesserte Version zeichnet sich allerdings für größere \sqrt{s} durch eine deutlich geringere Aufspaltung der Kurven aus. Bei Betrachtung des partonischen K-Faktors in Abb. 4.9b fällt auf, dass im Bereich der Top-Quark-Schwelle sich die beiden Ansätze deutlich unterscheiden. Bei differentieller Faktorisierung übersetzt sich die starke Krümmung des LO-Wirkungsquerschnitts deutlich auf das NLO-Ergebnis. Bei nicht-differentieller Faktorisierung hingegen wird durch die Q^2 -Integration dieses Verhalten völlig ausgewaschen. Im



(a) Wirkungsquerschnitt



(b) K-Faktor

Abbildung 4.9: Verbesserte LO-Faktorisierung (SV(dF)+H) verglichen mit nicht-differentieller LO-Faktorisierung SV+H. In den partonischen K-Faktoren wurde im Zähler und im Nenner das NLO- α_s verwendet. Farben wie in Abb. 4.5.

Bereich sehr nahe der Higgs-Paar-Schwelle (Abb. 4.9b unten) sind zwei interessante Punkte festzuhalten.

1. In beiden Ansätzen verringert sich der K-Faktor des ρ^0 - und des ρ^1 -Ergebnisses, während die tieferen Entwicklungen zur Schwelle hin ansteigen. Die Tatsache, dass die effektive Theorie sich hier auch qualitativ deutlich von der Entwicklung (die in diesem Bereich praktisch dem exakten Ergebnis entspricht) unterscheidet, ist allerdings aufgrund des geringen Wirkungsquerschnitts in diesem Bereich nicht von phänomenologischem Interesse.
2. Beide Ansätze führen hier auf dasselbe Ergebnis. Die Entwicklung konvergiert so gut, dass alle ρ^n -Kurven mit $n \geq 3$ übereinander liegen. Das ist ein weiterer Konsistenztest, der bestätigt, dass die Entwicklung in diesem Bereich konvergiert.

4.6 Hadronischer Wirkungsquerschnitt II

Nachdem auf partonischem Niveau beobachtet wurde, dass eine verbesserte LO-Faktorisierung auf ein deutlich robusteres Ergebnis im Hinblick auf $1/m_t$ -Korrekturen führt, betrachten wir jetzt den entsprechenden hadronischen Wirkungsquerschnitt. Anstelle von Abb. 4.5 und Abb. 4.6 ergibt sich jetzt Abb. 4.10 und Abb. 4.11. Für den totalen hadronischen Wirkungsquerschnitt erhalten wir folgende Zahlen (links mit differentieller Faktorisierung, rechts mit nicht-differentieller Faktorisierung):

	$\hat{\sigma}$ [fb] (dF)	K^{NLO}	X^{NLO} [%]	$\hat{\sigma}$ [fb]	K^{NLO}	X^{NLO} [%]
LO	22.7	—	—	22.7	—	—
LO+NLO $ \rho^0$	36.4	1.60	0	39.8	1.75	0
LO+NLO $ \rho^1$	34.9	1.54	-4.1	37.9	1.67	-4.8
LO+NLO $ \rho^2$	36.5	1.61	+0.3	42.4	1.87	+6.5
LO+NLO $ \rho^3$	36.3	1.60	-0.3	42.7	1.88	+7.3
LO+NLO $ \rho^4$	37.1	1.63	+1.9	46.1	2.03	+15.8
LO+NLO $ \rho^5$	37.3	1.64	+2.5	47.1	2.07	+18.3
LO+NLO $ \rho^6$	37.9	1.67	+4.1	50.0	2.20	+25.6

Dabei ist der hadronische K-Faktor

$$K^{\text{NLO}} = \frac{(\hat{\sigma}^{\text{LO}} + \hat{\sigma}^{\text{NLO}})|_{\text{NLO pdfs}}}{\hat{\sigma}^{\text{LO}}|_{\text{LO pdfs}}} \quad (4.14)$$

und

$$X^{\text{NLO}} = \frac{\hat{\sigma}^{\text{NLO}}|_{\rho^n} - \hat{\sigma}^{\text{NLO}}|_{\rho^0}}{\hat{\sigma}^{\text{LO+NLO}}|_{\rho^0}} \quad (4.15)$$

die relative Abweichung zum ρ^0 -Ergebnis. Bei nicht-differentieller LO-Faktorisierung variiert der totale NLO-Wirkungsquerschnitt zwischen -4.8% (ρ^1) und $+25.6\%$ (ρ^6) verglichen mit dem ρ^0 -Ergebnis, das der effektiven Theorie entspricht. Daher kann in diesem Fall die m_t -Unsicherheit nur sehr grob mit $\mathcal{O}(\pm 10\%)$ abgeschätzt werden. Bei differentieller LO-Faktorisierung liegen alle Kurven zwischen -4.1% (ρ^1) und $+4.1\%$ (ρ^6) des ρ^0 -Ergebnisses. Allerdings ist auch in der verbesserten Variante keine Konvergenz (in dem Sinne, dass man einen besten Schätzwert geben könnte) gegeben. Es kann also nicht entschieden werden, ob ρ^1 mit -4.1% oder ρ^6 mit $+4.1\%$ dem exakten Ergebnis näher kommt. Aufgrund dessen wird die verbleibende m_t -Unsicherheit mit maximal $\pm 10\%$ – und nicht wie zuvor mit $\mathcal{O}(\pm 10\%)$ – konservativ abgeschätzt. In Anhang A.3 sind die gezeigten Schaubilder mit differentieller und nicht-differentieller LO-Faktorisierung im direkten Vergleich zu sehen.

4.7 Skalenabhängigkeit

In der bisherigen Diskussion wurde stets Renormierungs- und Faktorisierungsskala auf die Higgs-Paar-Schwelle gesetzt:

$$\mu_R = \mu_F = \mu_0 = 2m_H . \quad (4.16)$$

Die (unphysikalische) Abhängigkeit des NLO-Ergebnisses, die üblicherweise als Abschätzung der Genauigkeit verwendet wird, wird im folgenden zunächst anhand des ($m_t \rightarrow \infty$)-Ergebnisses untersucht. Zum einen wird μ in dem Bereich

$$\mu_0/2 < \mu < 2\mu_0 \quad (4.17)$$

variiert, zum anderen wird als zentraler Wert neben $2m_H$ auch $\mu_0 = \sqrt{s}$ verwendet. Die unabhängige Variation von μ_R und μ_F wird hier nicht diskutiert, für $m_t \rightarrow \infty$ findet man sie auf (N)NLO in [13]. Die invariante Masse als „natürliche“ Skala der Higgs-Paarproduktion wird in vielen Veröffentlichungen als zentraler Wert verwendet. Da in dieser Arbeit aber die reellen Korrekturen nur integriert vorliegen, ist diese Wahl hier nicht möglich. Um diese Wahl zu simulieren, wurde die partonische Schwerpunktsenergie \sqrt{s} als zentraler Wert gewählt. Die blauen (LO) und roten (LO+NLO) Bänder in Abb. 4.12 zeigen die Variation in Gl. (4.17) für die beiden unterschiedlichen zentralen Werte von μ_0 .

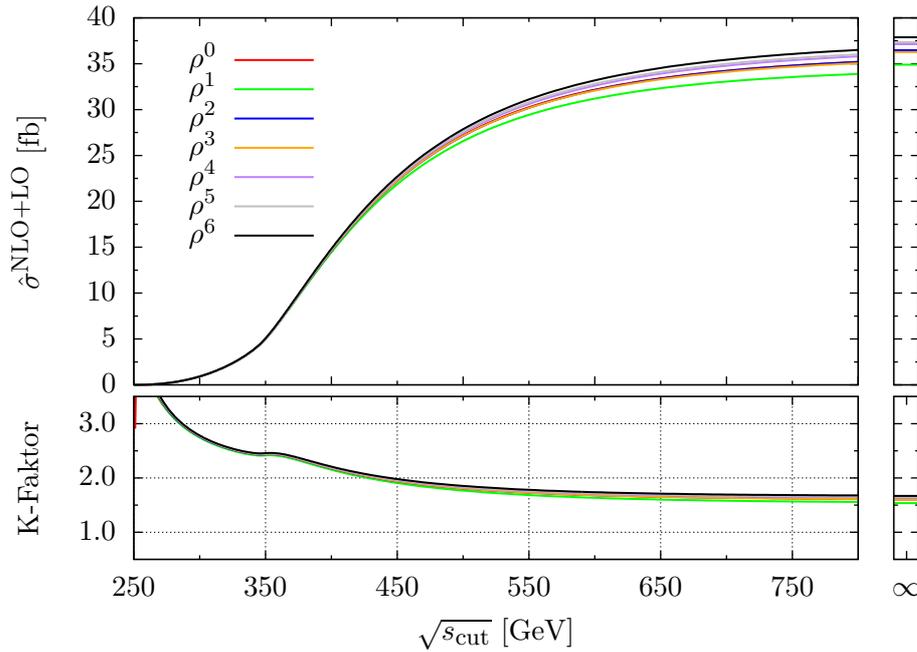


Abbildung 4.10: Hadronischer LO+NLO-Wirkungsquerschnitt und K-Faktor mit differentieller LO-Faktorisierung für $\sqrt{\hat{s}} = 14$ TeV. Für den K-Faktor wurde NLO- α_s im Zähler und LO- α_s im Nenner verwendet. $s_{\text{cut}} = \infty$ bezeichnet den totalen Wirkungsquerschnitt.

In Abb. 4.13 sind nur die zentralen Werte der beiden Möglichkeiten im direkten Vergleich zu sehen. Außerdem ist dort neben dem ρ^0 - auch das ρ^6 -Ergebnis dargestellt. Wie man am Beispiel der ρ^6 -Kurve sieht, wirkt sich die Wahl der Skala in den verschiedenen Entwicklungsordnungen in etwa gleich aus, so dass für die verschiedenen Entwicklungsordnungen die Skalenabhängigkeit nicht gesondert zu diskutieren ist, wenn man (zu LO oder zu $m_t \rightarrow \infty$) *relative* Korrekturen betrachtet. Bei Betrachtung der absoluten Zahlen ist es jedoch die Wahl der Skala deutlich zu unterscheiden.

Es ist zu beachten, dass die unabhängige Variation vom μ_R und μ_F auf NLO zu einer deutlich größeren Skalenabhängigkeit führt. Darauf wird hier nicht weiter eingegangen, da in dieser Arbeit die m_t -Effekte im Mittelpunkt stehen und die Skalenabhängigkeit kaum von diesen Effekten (der Tiefe der $1/m_t$ -Entwicklung) abhängig ist.

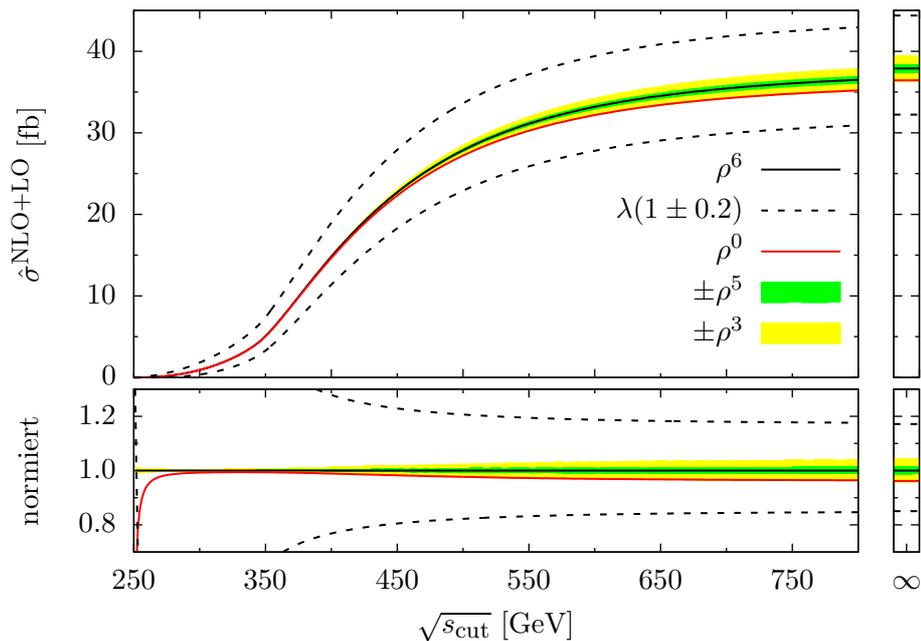


Abbildung 4.11: Masseneffekte und Variation der Higgs-Selbstkopplung im NLO-Wirkungsquerschnitt mit differentieller LO-Faktorisierung. Das untere Schaubild zeigt alle Kurven auf ρ^6 normiert. $s_{\text{cut}} = \infty$ bezeichnet den totalen Wirkungsquerschnitt.

4.8 Andere Ansätze zur Berücksichtigung von m_t -Effekten

In [9] wurden m_t -Effekte auf NLO in einer anderen Art und Weise abgeschätzt. Dort wurden alle (numerisch) exakt bekannten Anteile (das sind die reellen Korrekturen und die Dreiecks-Beiträge der virtuellen Korrekturen) exakt implementiert. Nur für die virtuellen Box-Beiträge wurde der $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzwert mit einer voll differentiellen LO-Faktorisierung verwendet. Mit dieser Methode finden die Autoren von [9] eine Korrektur von $\approx -10\%$ im totalen Wirkungsquerschnitt verglichen mit dem $(m_t \rightarrow \infty)$ -Ergebnis. Dieses Ergebnis steht nicht im Widerspruch zu den hier gefundenen Ergebnissen, da im totalen Wirkungsquerschnitt die hier gemachte Entwicklung nicht genau genug ist, um eindeutig zwischen einer Korrektur von $+10\%$ oder -10% zu unterscheiden. Für die Methode in [9] spricht, dass dort alle exakt verfügbaren Teile auch exakt implementiert sind. Der Nachteil dieses Ansatzes ist jedoch, dass ein Teil des exakten Ergebnisses fehlt, und dass nur schwer abzuschätzen ist wie groß dieser fehlende Teil ist. Insbesondere Kancellierungen zwischen den reellen und den

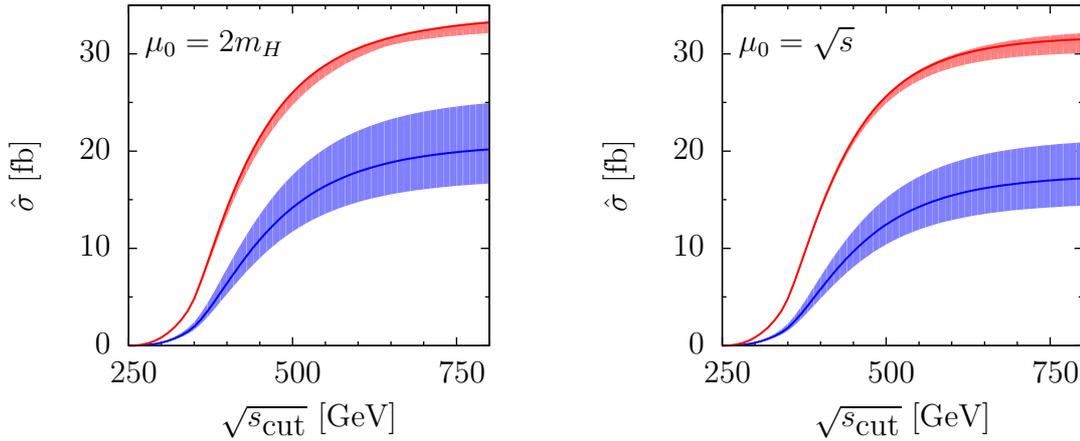


Abbildung 4.12: Skalenabhängigkeit des ρ^0 -Ergebnisses. Das blaue (rote) Band zeigt eine Variation der Skala von $\mu_0/2 \leq \mu \leq 2\mu_0$ des LO- (LO+NLO)-Wirkungsquerschnitts.

virtuellen Korrekturen können die Qualität dieser Näherung negativ beeinflussen, da die reellen Korrekturen exakt behandelt werden, während die virtuellen Korrekturen (teilweise) im $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzfall behandelt werden. Abb. 4.14 zeigt separat die endlichen Beiträge der virtuellen und der reellen Korrekturen zum NLO-Wirkungsquerschnitt bei nicht-differentieller LO-Faktorisierung. Man erkennt, dass in diesem Fall die exakte Kenntnis *entweder* der reellen *oder* der virtuellen Korrekturen nicht ausreichend ist, da es in jeder Ordnung der Entwicklung in ρ zu Kanzellierungen zwischen virtuellen und reellen Korrekturen kommt. Der Ansatz im Rahmen dieser Arbeit, alle Anteile des Ergebnisses konsistent zu entwickeln, hat den Vorteil, dass keine Kanzellierungen zwischen exakten und entwickelten Anteilen das Ergebnis verfälschen können. Außerdem können tiefere Entwicklungsterme zur Abschätzung der verbleibenden Unsicherheit verwendet werden. Der Preis dafür ist, dass nicht die gesamte bereits bekannte Information über die m_t -Abhängigkeit verwendet werden kann.

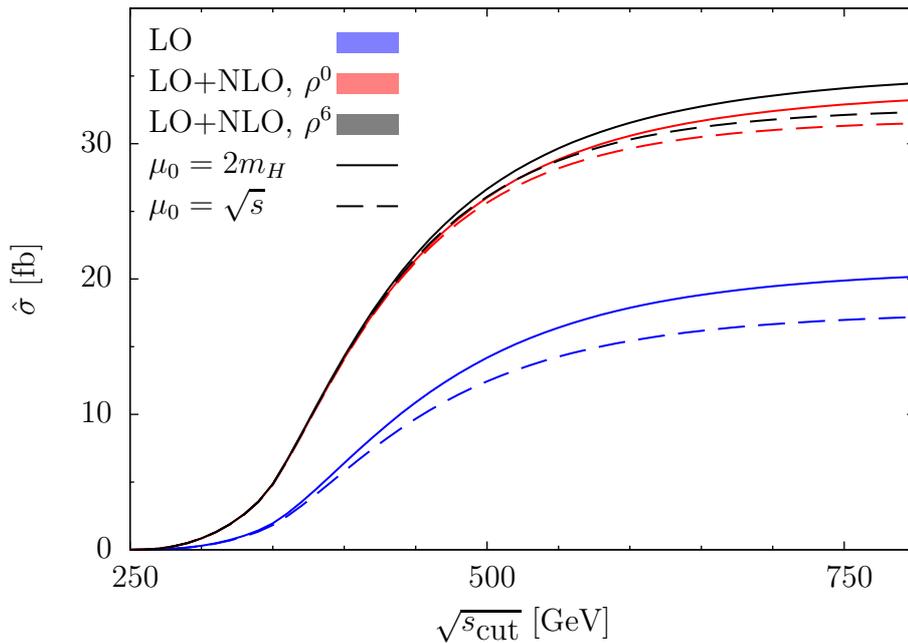


Abbildung 4.13: Skalensabhängigkeit des LO- und des NLO-Wirkungsquerschnitts in der effektiven Theorie, zentrale Werte.

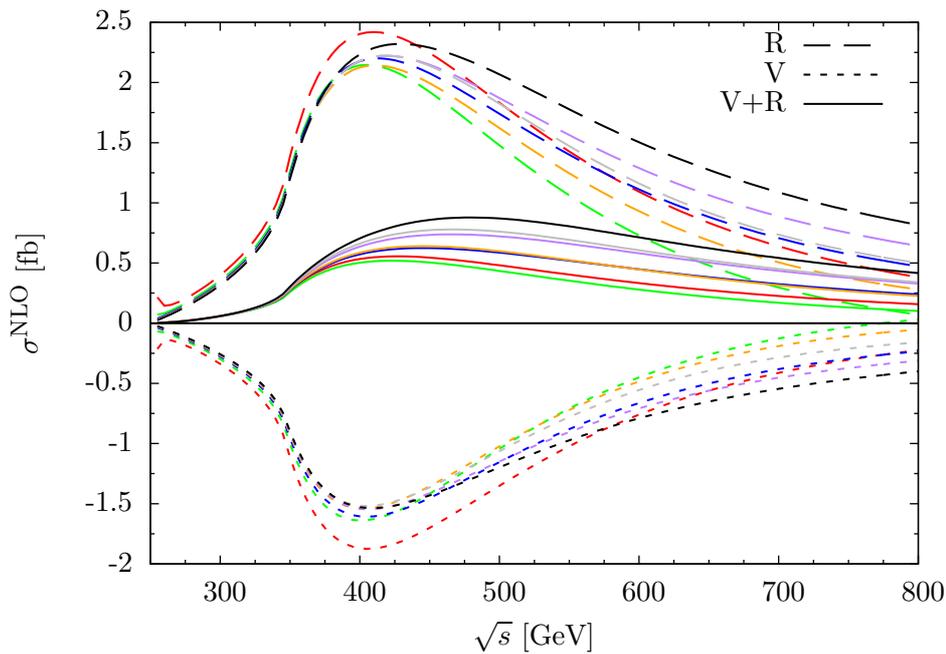


Abbildung 4.14: NLO-Wirkungsquerschnitt mit nicht-differentieller LO-Faktorisierung. Dargestellt sind die endlichen Anteile der virtuellen Korrekturen („V“, gestrichelt), die endlichen Anteile der reellen Korrekturen („R“, gepunktet) und die Summe der virtuellen und der reellen Korrekturen („V+R“, durchgezogen).

5 Matching-Koeffizient für Higgs-Boson-Paarproduktion auf NNLO

5.1 Effektive Theorien

Unter einer effektiven Theorie versteht man im allgemeinen eine Theorie, die als ein bestimmter Grenzfall aus einer anderen Theorie (auch volle Theorie genannt) hervorgeht. Die effektive Theorie ist eines der grundlegendsten Konzepte der Physik. Denn jede physikalische Theorie ist an einen Gültigkeitsbereich gebunden, so dass für praktisch jede Theorie eine vollständigere Theorie mit erweitertem Gültigkeitsbereich denkbar ist – abgesehen von einer per Definition alles beschreibenden großen vereinheitlichten Theorie. Umgekehrt lässt sich aus jeder Theorie durch Einschränkung des Gültigkeitsbereichs eine speziellere (effektive) Theorie konstruieren. Die Anwendung von effektiven Theorien lässt sich in zwei Kategorien unterteilen.

1. Die volle Theorie ist bekannt. Prinzipiell ließen sich alle Vorhersagen in der vollen Theorie berechnen. Diese volle Rechnung ist aber so aufwendig, dass man sie in der Praxis nicht durchführen will oder kann. Die effektive Theorie ist in diesem Fall eine Methode, um Rechenaufwand zu sparen. Die in dieser Arbeit diskutierten Top-Quark-Massen-Effekte fallen in diese Kategorie, ebenso wie die Newtonsche Mechanik als Grenzfall der Relativitätstheorie.
2. Die volle Theorie ist nicht bekannt oder ihre Vorhersagen sind grundsätzlich nicht berechenbar. In diesem Fall erlaubt die effektive Theorie eine Parametrisierung des Unwissens. Durch eine solche Parametrisierung ist es möglich, bestimmte Klassen von Theorien als mögliche volle Theorie zu bestätigen oder auszuschließen. Ein Beispiel dafür sind die in Abschnitt 1.3 genannten effektiven Operatoren.

Einen Überblick über effektive Theorien in der Quantenfeldtheorie findet man zum Beispiel in [86, 87, 88].

5.2 Die effektive Theorie $m_t \rightarrow \infty$ des Standardmodells

Auf LO lässt sich die Wechselwirkung von Gluonen mit beliebiger Anzahl von Higgs-Bosonen durch die folgende Lagrange-Dichte beschreiben [89, 90, 91, 92, 5]

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{LO}} = -\frac{\alpha_s}{3\pi} \mathcal{O}_1 \ln \left(1 + \frac{H}{v} \right) \quad \text{mit} \quad \mathcal{O}_1 = \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} . \quad (5.1)$$

Dabei ist α_s die starke Kopplungskonstante, H das Higgs-Feld, v der Vakuumerwartungswert und $G_{\mu\nu}^a$ der Gluon-Feldstärketensor. Die Entwicklung des Logarithmus zur Ordnung $(H/v)^N$ führt direkt auf die ggH^n -, die g^3H^n - sowie die g^4H^n -Vertizes ($n \leq N$) der effektiven Theorie mit

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{LO}} = C_H \mathcal{O}_1 \left[\frac{H}{v} - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{v} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H}{v} \right)^3 + \dots \right] , \quad C_H = -\frac{\alpha_s}{3\pi} . \quad (5.2)$$

Insbesondere gilt daher auf LO, dass – abgesehen von dem Kombinatorik-Faktor $1/n$ – die n -Higgs-Gluon-Wechselwirkung identisch ist. Der Koeffizient C_H ist derselbe, unabhängig von der Anzahl der Higgs-Bosonen. Geht man aber zu höheren Ordnungen in α_s , so ist das nicht mehr der Fall. Während Eichinvarianz nach wie vor sicherstellt, dass der n -Higgs- m -Gluon-Vertex für *festes* n und $m = 2, 3, 4$ proportional zu C_H ist, muss die Wechselwirkung verschiedener Anzahlen von Higgs-Bosonen nicht identisch sein. Da wir an (N)NLO-Korrekturen der Wechselwirkung von Gluonen mit bis zu zwei Higgs-Bosonen interessiert sind, schreiben wir also

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{H}{v} C_H \mathcal{O}_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{v} \right)^2 C_{HH} \mathcal{O}_1 . \quad (5.3)$$

Die Koeffizienten C_H und C_{HH} sowie den Operator \mathcal{O}_1 erhält man durch Renormierung aus den entsprechenden nackten Größen gemäß [93, 67]

$$C_X = \frac{1}{Z_{\mathcal{O}_1}} C_X^0 , \quad \mathcal{O}_1 = Z_{\mathcal{O}_1} \mathcal{O}_1^0 \quad (5.4)$$

mit

$$Z_{\mathcal{O}_1} = 1 - \frac{\alpha_s \beta_0}{\pi \epsilon} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\beta_0^2}{\epsilon^2} - \frac{\beta_1}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \quad (5.5)$$

und der β -Funktion wie in Gl. (3.24).

Um in der effektiven Theorie Strahlungskorrekturen bis einschließlich NNLO zu berechnen, muss man einerseits die entsprechenden Ein- und Zweischleifenmatrixelemente berechnen, andererseits benötigt man die Matching-Koeffizienten C_H und C_{HH} auch auf NNLO Genauigkeit. Während C_H bereits auf LO [90], NLO [94, 95], NNLO [96], N³LO [67] und – bis auf β_4 – sogar auf N⁴LO [97, 98] bekannt ist, war C_{HH} bisher nur auf NLO [5] bekannt. Die Berechnung von C_{HH} , das für konsistente NNLO-Rechnungen benötigt wird, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

5.3 Matching

Die Voraussagen der effektiven Theorie gehen als Grenzwert aus denen der vollen Theorie hervor. Für jede Observable X muss

$$\lim_{m_t \rightarrow \infty} X^{\text{voll}}(m_t) = X^{\text{eff}}(C_H, C_{HH}) \quad (5.6)$$

gelten. Diese Gleichung stellt die sogenannte Matching-Bedingung dar, aus der man C_H und C_{HH} berechnen kann. Bei der Wahl der Größe X hat man dabei eine gewisse Freiheit. Prinzipiell kommt jede (in der vollen und in der effektiven Theorie) berechenbare Observable, die von C_H und C_{HH} abhängt, in Frage. Naheliegend ist beispielsweise, den totalen inklusiven Wirkungsquerschnitt für Higgs-Boson-Paarproduktion zu wählen:

$$\lim_{m_t \rightarrow \infty} \sigma^{\text{voll}}(m_t) = \sigma^{\text{eff}}(C_H, C_{HH}) . \quad (5.7)$$

Wie man auf der linken Seite von Gl. (5.6) und Gl. (5.7) erkennt, benötigt man den Grenzwert einer Vorhersage der vollen Theorie. Das ist insofern eine Herausforderung, als man in der Regel eine effektive Theorie gerade dann verwendet, wenn die Rechnung in der vollen Theorie nicht möglich oder sehr aufwendig ist. Im Fall der Doppel-Higgs-Produktion ist zum Beispiel der NLO-Wirkungsquerschnitt exakt in m_t nicht bekannt, auch wenn prinzipiell die exakte Rechnung mit gegenwärtigen Methoden (zumindest numerisch) in Reichweite ist. In vielen Fällen ist es allerdings möglich, den Grenzwert der vollen Theorie direkt zu berechnen, ohne zuerst die volle Rechnung durchzuführen, und anschließend den Grenzwert zu bilden.¹ In unserem Fall ist das Werk-

¹ Selbst wenn eine solche Vereinfachung nicht möglich ist, ist das Konzept der effektiven Theorie von Nutzen. In diesen Fällen genügt es, die aufwendige Rechnung für *einen* Prozess durchführen oder den Matching-Koeffizienten aus *einer* Messung im Experiment zu ermitteln. Nach dieser einmaligen Ermittlung des Koeffizienten kann man alle anderen Prozesse, die von dem entsprechenden Koeffizienten abhängen, in der effektiven Theorie berechnen.

zeug hierfür die in Abschnitt 3.4 vorgestellte asymptotische Entwicklung der Feynman-Diagramme.

Neben der asymptotischen Entwicklung lassen sich allerdings noch weitere Vereinfachungen finden, die es erlauben, den Matching-Koeffizienten mit möglichst geringem Rechenaufwand zu bestimmen. Wie im folgenden erläutert wird, ist es ausreichend, die beiden folgenden Gleichungen zu lösen:

$$\lim_{m_t \rightarrow \infty} F_{\Delta}^{\text{voll, hard}}(m_t) = F_{\Delta}^{\text{eff, tree}}(C_H), \quad (5.8a)$$

$$\lim_{m_t \rightarrow \infty} F_{\square}^{\text{voll, hard}}(m_t) = F_{\square}^{\text{eff, tree}}(C_H, C_{HH}). \quad (5.8b)$$

Die Funktionen $F_{\Delta/\square}$ sind die in Abschnitt 2.1 eingeführten Bestandteile der Amplitude für Higgs-Paarproduktion:

$$\mathcal{M} = \frac{G_F \alpha_s s}{2\sqrt{2}\pi} \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \delta_{ab} [C_{\Delta} F_{\Delta} A_{1\mu\nu} + C_{\square} (F_{\square} A_{1\mu\nu} + G_{\square} A_{2\mu\nu})]. \quad (2.6)$$

Gl. (5.8) anstelle von Gl. (5.7) zu betrachten, ist ausreichend, denn:

1. Betragsquadrat und Phasenraumintegration sind unabhängig davon, ob man in der vollen oder in der effektiver Theorie rechnet. Daher ist das *matchen* auf Niveau der Amplitude \mathcal{M} möglich.
2. Die Lorentz-Struktur ist ebenfalls unabhängig davon, in welcher Theorie man rechnet. Daher ist es prinzipiell möglich, die Koeffizienten von $\varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu A_{1/2}^{\mu\nu}$ zu *matchen*. Da aber G_{\square} für $m_t \rightarrow \infty$ verschwindet, liefert der zu A_2 gehörende Koeffizient keine Matching-Bedingung. Die Wahl fällt also auf den Koeffizienten von A_1 , der proportional zu $(C_{\Delta} F_{\Delta} + C_{\square} F_{\square})$ ist.
3. Die Dreiecks-Beiträge entsprechen, abgesehen von dem Faktor C_{Δ} , gerade der Einzel-Higgs-Produktion. Sie hängen allein von C_H ab und sind völlig unabhängig von den übrigen (\square -)Korrekturen. Daher ist es möglich, F_{Δ} und F_{\square} separat zu *matchen*.
4. Die Einschränkung auf die sogenannten harten Anteile in der vollen Theorie und auf *tree-level*-Beiträge in der effektiven Theorie ist möglich, da alle Schleifenkorrekturen in der effektiven Theorie, so wie die *soften* Anteile der vollen Theorie, mit $s^{-n\epsilon}$ skalieren und sich separat zancellieren. Dieser letzte Schritt wird im folgenden Abschnitt genauer erläutert.

5.3.1 Einschränkung auf harte bzw. tree-level-Anteile

Die Einschränkung auf harte (*tree-level*) Anteile der vollen (effektiven) Amplitude wird, wie die asymptotische Entwicklung, am Beispiel der Einzel-Higgs-Produktion diskutiert. Der Fall der Doppel-Higgs-Produktion gestaltet sich völlig analog.

Wir betrachten zunächst die linke Seite von Gl. (5.7). Auf NNLO tragen in der asymptotischen Entwicklung (siehe Abschnitt 3.4) folgende Diagramme zum Wirkungsquerschnitt bei:

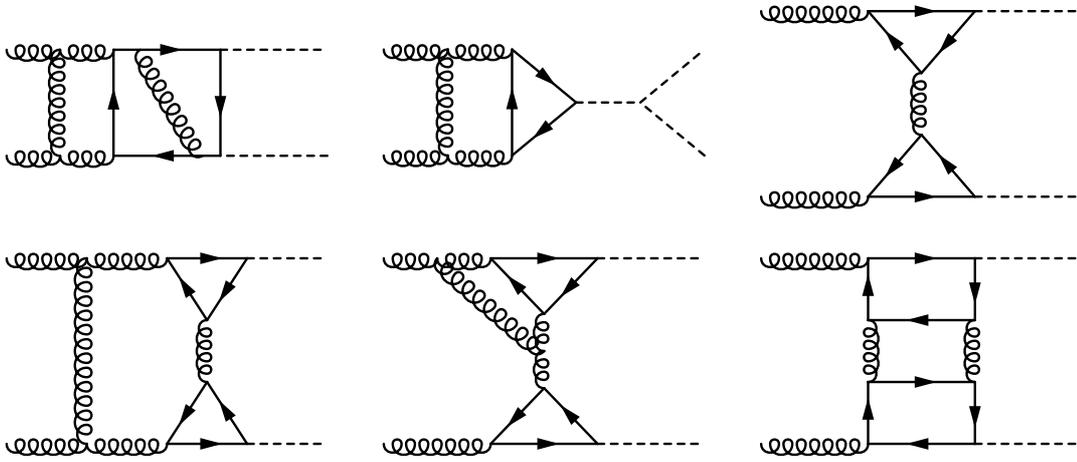
The diagram shows three rows of Feynman diagrams. Each row represents an equation where a loop diagram on the left is equal to a sum of tree-level diagrams on the right. The first row shows a one-loop diagram with a Higgs line and a fermion loop, equal to a tree-level diagram with a Higgs line and a fermion loop, multiplied by a factor L . The second row shows a two-loop diagram with a Higgs line and a fermion loop, equal to a sum of two tree-level diagrams with Higgs lines and fermion loops, each multiplied by a factor L . The third row shows a three-loop diagram with a Higgs line and a fermion loop, equal to a sum of three tree-level diagrams with Higgs lines and fermion loops, each multiplied by a factor L .

Die masselosen n -Schleifen-Formfaktor-Diagramme skalieren mit $s^{-n\epsilon}$, die massiven n -Schleifen-Vakuuminintegrale mit $m_t^{-2n\epsilon}$. Betrachten wir andererseits die rechte Seite von Gl. (5.7), so stellen wir fest, dass dort nur *tree-level*- und masselose Formfaktordiagramme auftreten können, da die effektive Theorie kein massives Quark enthält. In der effektiven Theorie skalieren also alle Schleifenkorrekturen mit $s^{-n\epsilon}$, wobei $n > 0$. Aufgrund der unterschiedlichen Skalierung müssen sich also die verschiedenen Beiträge separat entsprechen, und es genügt, sich auf beiden Seiten der Gleichung auf die harten Beiträge (also die $\propto s^0 m_t^{-2n\epsilon}$) zu beschränken.

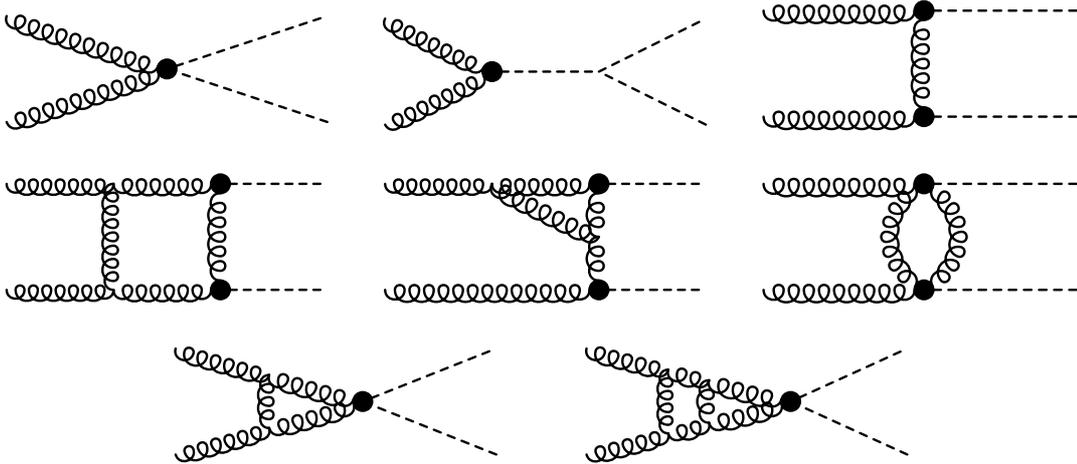
5.3.2 Vergleich mit Einzel-Higgs-Produktion

Im Fall der Einzel-Higgs-Produktion genügt es, mit Gl. (5.8a) den Koeffizienten C_H zu bestimmen. In diesem Fall ist auch in der effektiven Theorie „*tree-level*“ gleichbedeutend mit „LO“. Denn die harten Anteile der (N)NLO-Korrekturen sind vollständig in C_H enthalten. Außerdem treten nur einteilchenirreduzible (1PI, *one-particle-irreducible*) Diagramme auf. Im Fall der Doppel-Higgs-Produktion gilt das nicht mehr. Dort treten nämlich sowohl in der effektiven als auch in der vollen Theorie einteilchenreduzible (1PR, *one-particle-reducible*) Diagramme auf, siehe Abb. 5.1. Insbesondere gibt es also in der effektiven Theorie *tree-level*-Diagramme, die erst zum NLO-Wirkungsquerschnitt beitragen (siehe Abb. 5.1b oben rechts).

Die Beschränkung auf 1PI-Beiträge auf beiden Seiten von Gl. (5.8b) ist im allgemeinen nicht möglich. Während man auf NLO noch beobachtet, dass sich 1PI- und 1PR-Beiträge separat zancellieren, ist das auf NNLO nicht mehr der



(a) Diagramme der vollen Theorie.



(b) Diagramme der effektiven Theorie.

Abbildung 5.1: Beispiel-Diagramme der vollen und der effektiven Theorie. Für die Matching-Prozedur ist es ausreichend die harten Subdiagramme der vollen Theorie und die *tree-level*-Diagramme der effektiven Theorie zu betrachten.

Fall. Dort muss man die Summe 1PR+1PI und nicht die einzelnen Summanden betrachten.

5.3.3 Konsistenztests

Mit den oben beschriebenen Methoden wurden C_H und C_{HH} auf LO, NLO und NNLO berechnet, und es wurde Übereinstimmung mit den bereits bekannten Literaturergebnissen für C_H auf NNLO [96] und C_{HH} auf NLO [5] gefunden.

Die in diesem Abschnitt beschriebene Rechnung wurde für beliebigen Eichparameter ξ durchgeführt. Eine unabhängige Rechnung führte zu demselben Ergebnis.

Außerdem wurde der NNLO-Anteil von C_{HH} zusätzlich indirekt aus dem Vergleich der virtuellen Korrekturen zum NNLO-Wirkungsquerschnitt (siehe Kapitel 6) mit dem entsprechenden Ergebnis aus [7] konstruiert. In [7] war C_{HH} nur auf NLO bekannt, und das NNLO-Ergebnis wurde in Abhängigkeit von $(C_{HH} - C_H)$ angegeben. Der Vergleich mit der vollständigen Rechnung aus Kapitel 6 bestätigt das Ergebnis der direkten Berechnung von C_{HH} .

5.4 NNLO-Matching-Koeffizient – Ergebnisse

Wir schreiben das Ergebnis entwickelt in der laufenden $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungskonstante $\alpha_s = \alpha_s^{(5)}(\mu)$ mit $n_l = 5$ masselosen Quarks

$$C_X = -\frac{\alpha_s}{3\pi} \left[C_X^{(0)} + C_X^{(1)} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) + C_X^{(2)} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \right] \quad X \in \{H, HH\}, \quad (5.9)$$

und finden damit folgendes Ergebnis für C_H :

$$\begin{aligned} C_H^{(0)} &= 1 \\ C_H^{(1)} &= \frac{5}{4}C_A - \frac{3}{4}C_F \\ &= \frac{11}{4} \\ C_H^{(2)} &= \frac{1063}{576}C_A^2 - \frac{5}{96}C_A T_F - \frac{25}{12}C_A C_F + \frac{27}{32}C_F^2 - \frac{1}{12}C_F T_F \\ &\quad + \left(\frac{7}{16}C_A^2 - \frac{11}{16}C_A C_F \right) \ln \frac{\mu^2}{m_t^2} \\ &\quad + n_l T_F \left(-\frac{47}{144}C_A - \frac{5}{16}C_F + \frac{1}{2}C_F \ln \frac{\mu^2}{m_t^2} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$= \frac{2777}{288} + \frac{19}{16} \ln \frac{\mu^2}{m_t^2} + n_l \left(-\frac{67}{96} + \frac{1}{3} \ln \frac{\mu^2}{m_t^2} \right)$$

sowie für C_{HH} :

$$\begin{aligned} C_{HH}^{(0)} &= C_H^{(0)} \\ C_{HH}^{(1)} &= C_H^{(1)} \\ C_{HH}^{(2)} &= C_H^{(2)} + \Delta_{HH}^{(2)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_{HH}^{(2)} &= \frac{7}{8} C_A^2 - \frac{5}{6} C_A T_F - \frac{11}{8} C_A C_F + \frac{1}{2} C_F T_F + C_F n_l T_F \\ &= \frac{35}{24} + \frac{2n_l}{3} . \end{aligned} \quad (5.12)$$

C_A, C_F und T_F sind die $SU(N)$ -Farbfaktoren, wobei in der QCD im Standardmodell ($SU(3)$) $C_A = 3$, $C_F = 4/3$ und $T_F = 1/2$ ist. μ ist die Renormierungsskala, m_t die *on-shell* Top-Quark-Masse und $n_l = 5$ die Anzahl der masselosen Quarks.

5.4.1 Auswirkung auf den NNLO-Wirkungsquerschnitt

Noch bevor diese Ergebnisse in [15] veröffentlicht wurden, wurde der Wirkungsquerschnitt für Higgs-Paarproduktion auf NNLO in [8] veröffentlicht. Da den Autoren $C_{HH}^{(2)}$ nicht bekannt war, wurde dort für die phänomenologische Diskussion $C_{HH}^{(2)} = C_H^{(2)}$ gesetzt und der Fehler durch die Variation

$$0 < C_{HH}^{(2)} < 2C_H^{(2)} \quad (5.13)$$

abgeschätzt. Für diese Variation stellen die Autoren von [8] eine Variation des totalen Wirkungsquerschnitts von unter 2.5 % fest. Betrachten wir nun die tatsächlichen Werte aus Gl. (5.10) und Gl. (5.12) für $\mu = m_t$ und $n_l = 5$:

$$\Delta_{HH}^{(2)} \approx 4.79 \quad C_H^{(2)} \approx 6.15 \quad \Rightarrow \quad \frac{C_{HH}^{(2)}}{C_H^{(2)}} \approx 1.8 \lesssim 2 .$$

Die tatsächlichen Werte liegen also an der oberen Grenze des Intervalls in Gl. (5.13). Die Auswirkungen auf den totalen hadronischen NNLO Wirkungsquerschnitt sind allerdings moderat. Verglichen mit dem Fall $C_H = C_{HH}$ stellt das tatsächliche Ergebnis ein Korrektur von 1 % bei $\sqrt{s} = 14$ TeV dar.

Allerdings werden Beiträge, die proportional zu $\Delta_{HH}^{(2)} = C_{HH}^{(2)} - C_H^{(2)}$ sind, an der Produktionsschwelle $s \rightarrow 4m_H^2$ verstärkt. Denn $C_H^{(2)}$ und $C_{HH}^{(2)}$ treten in der effektiven-Theorie-Rechnung nur multipliziert mit den beiden LO-*tree-level*-Diagrammen auf. Das entspricht für $C_H^{(2)} \neq C_{HH}^{(2)}$ einer unabhängigen Reskalierung von C_Δ bzw. C_\square . Und eine solche Modifikation zerstört die in Abschnitt 2.1.1 beschriebene gegenseitige Auslöschung der Box- und Dreiecks-Beiträge. Aus Gl. (2.11) folgt sofort:

$$\tilde{\Delta}(s) := \frac{d\sigma_{C_H \neq C_{HH}} - d\sigma_{C_H = C_{HH}}}{d\sigma_{C_H = C_{HH}}} = \frac{2(s - m_H^2)}{(s - 4m_H^2)} \Delta_{HH}^{(2)} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2. \quad (5.14)$$

Die relative Abweichung $\tilde{\Delta}$ im partonischen NNLO Wirkungsquerschnitt ist in Abb. 5.2 als Funktion von $\sqrt{s} = \sqrt{Q^2}$ dargestellt. Man erkennt, dass ein Effekt von $\gtrsim 10\%$ allerdings erst bei $\lesssim 260$ GeV auftritt, also sehr nahe der Schwelle, an der der absolute Wirkungsquerschnitt praktisch verschwindet. Im phänomenologisch interessanteren Bereich $\gtrsim 350$ GeV sind die Auswirkungen unter 2.5% .

Der hier beobachtete Effekt, verursacht durch Variation der Box-Beiträge, ist völlig analog zur Variation der Higgs-Selbstkopplung (also der Dreiecks-Beiträge) bei Festhalten der Box-Beiträge, wie Abb. 5.3 veranschaulicht. Allgemeiner ausgedrückt führt jede Variation einer der „Kopplungen“ A, B oder C in Abb. 5.3 bei Festhalten der anderen beiden zu einem solchen Effekt.

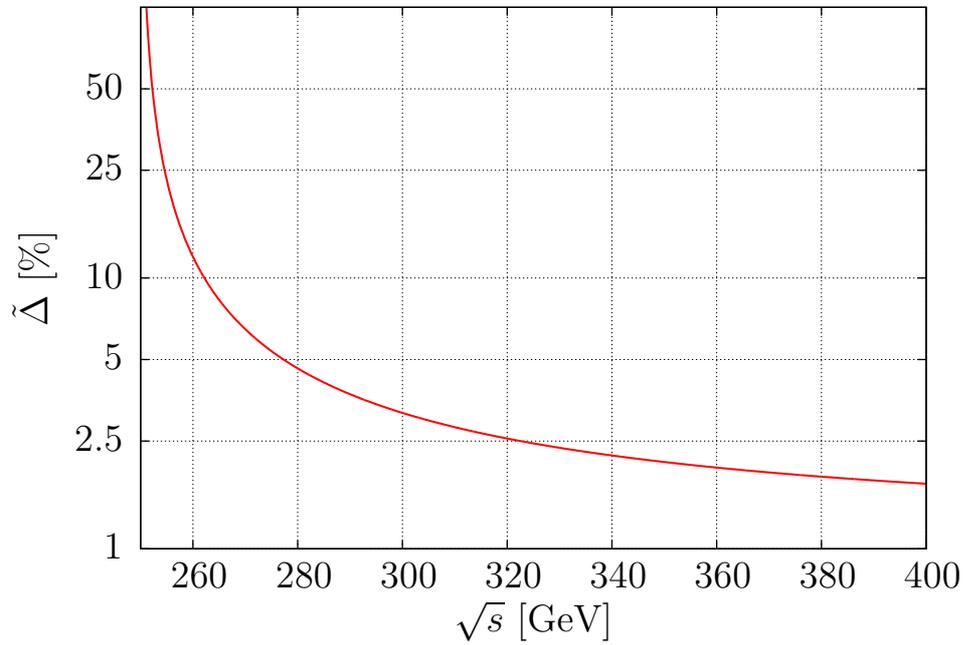


Abbildung 5.2: Effekt von $\Delta_{HH}^{(2)} \neq 0$ im NNLO Wirkungsquerschnitt auf logarithmischer Skala mit $m_H = 125$ GeV und $\alpha_s = 0.11$. $\tilde{\Delta}$ ist in Gl. (5.14) gegeben.



Abbildung 5.3: Die in Abschnitt 2.1.1 besprochene Kancellierung direkt an der Schwelle findet nur für die Standardmodell-Werte der „Kopplungen“ A, B oder C statt.

6 Top-Quark-Effekte im NNLO-SV-Wirkungsquerschnitt

Für die virtuellen Korrekturen zum NNLO-Wirkungsquerschnitt wurde die $(gg \rightarrow HH)$ -Amplitude für beliebigen Eichparameter ξ bis $\mathcal{O}(1/m_t^2)$ und für $\xi = 0$ bis $\mathcal{O}(1/m_t^4)$ durchgeführt. Das $1/m_t^0$ -Ergebnis für $d\sigma/dt$ konnte analytisch mit dem Literaturergebnis [7] verglichen werden. Eine unabhängige Berechnung von σ bis $\mathcal{O}(1/m_t^2)$ mit $\xi = 0$ über die Vorwärtsstreuamplitude führt auf dasselbe Ergebnis.¹

Bevor die Ergebnisse vorgestellt werden, sei auf einige Aspekte zur Berechnung der Ergebnisse hingewiesen. Während in [7] die Rechnung in der effektiven Theorie ohne Top-Quark durchgeführt wurde, wurde in dieser Arbeit die asymptotische Entwicklung der *vollen Theorie* mit endlicher Top-Quark-Masse berechnet. Das ist aus verschiedenen Gründen von Bedeutung:

- Der so berechnete führende Term (ρ^0) der Entwicklung stellt weniger eine Wiederholung der Rechnung in [7] als vielmehr eine unabhängige Rechnung dar.
- Die asymptotische Entwicklung der vollen Theorie erlaubt es, zu höheren Ordnungen in ρ (in diesem Fall bis $\mathcal{O}(\rho^2)$) gehen.

Der Preis für die beiden obengenannten Vorteile ist allerdings eine technisch deutlich aufwendigere Rechnung. Für die Berechnung der $(gg \rightarrow HH)$ -Amplitude mussten Drei-Schleifen-Integrale mit vier externen Beinen betrachtet werden, für die Berechnung mit dem Optischen Theorem musste die gg -Vorwärtsstreuamplitude auf Fünf-Schleifen-Niveau berechnet werden. Die unter anderem in Abschnitt 3.6.2 beschriebene Optimierung von Computerprogrammen sowie die in Abschnitt 3.10 beschriebene Parallelisierung der Rechnung waren unumgänglich um die folgenden Ergebnisse zu erhalten.

¹Für den Vergleich wurde $d\sigma/dt$ in δ entwickelt und analytisch integriert. Aufgrund der δ -Entwicklung konnten die Ergebnisse analytisch verglichen werden, bis auf den Anteil proportional zu den $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Anteilen des Integrals $J_2(8)$, siehe Abschnitt 3.8.2. Diese Anteile wurden numerisch verglichen.

6.1 Virtuelle Korrekturen im Grenzfall $m_t \rightarrow \infty$

Die virtuellen (N)NLO-Korrekturen in der effektiven Theorie waren bereits bis auf Terme $\propto (C_{HH} - C_H)$ bekannt [7]. Bevor wir m_t -Korrekturen betrachten, geben wir hier das ($m_t \rightarrow \infty$)-Ergebnis an. Dazu schreiben wir den in der Mandelstam-Variable t differentiellen virtuellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_v}{dt} = \frac{d\sigma_v^{(0)}}{dt} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{d\sigma_v^{(1)}}{dt} + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 \frac{d\sigma_v^{(2)}}{dt} + \mathcal{O}(\alpha_s^5). \quad (6.1)$$

entwickelt in der laufenden $\overline{\text{MS}}$ -Kopplungskonstante $\alpha_s = \alpha_s^{(5)}(\mu)$ für fünf masselose Quarks. Für den LO-Wirkungsquerschnitt erhalten wir

$$\frac{d\sigma_v^{(0)}}{dt} = \Sigma_{\text{LO}} \mathcal{N} (C_{\text{LO}}^2 - 4\epsilon C_{\text{LO}} + 4\epsilon^2), \quad (6.2)$$

mit

$$\mathcal{N} = \left(\frac{\mu^2}{m_t^2}\right)^{2\epsilon} (1 - \epsilon) \left(1 + \epsilon^2 \zeta_2 - \epsilon^3 \frac{2}{3} \zeta_3 + \epsilon^4 \frac{7}{4} \zeta_4 + \mathcal{O}(\epsilon^5)\right)$$

und

$$\Sigma_{\text{LO}} = \frac{\alpha_s^2 [(tu - m_H^4)/s]^{-\epsilon}}{2^{11} 3^2 v^4 \pi^3 (1 - \epsilon)^2 \Gamma(1 - \epsilon) (4\pi)^{-\epsilon}}, \quad C_{\text{LO}} = \frac{6\lambda v^2}{s - m_H^2} - 1. \quad (6.3)$$

Die $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Anteile stammen aus dem d -dimensionalen Phasenraum sowie der Mittelung über die Gluon-Polarisationen. Diese Anteile werden benötigt, um, wie in [43, 42], die divergenten Anteile des (N)NLO-Wirkungsquerschnitts zu konstruieren. Die Notation folgt [7], die $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Anteile unterscheiden sich allerdings, da in [7] in der effektiven Theorie die Matching-Koeffizienten in $d = 4$ Dimensionen verwendet wurden. In der hier vorgestellten Rechnung in der vollen Theorie sind hingegen implizit die Matching-Koeffizienten in $d = 4 - 2\epsilon$ enthalten. Während diese $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Anteile nicht in physikalische Größen eingehen, sind sie für einen Vergleich der nicht endlichen virtuellen Korrekturen von Bedeutung. Durch Identifikation der Diagramme, die in der effektiven Theorie auf $\propto C_H^2$ bzw. $\propto C_{HH}$ abgebildet werden, konnten durch die Ersetzung

$$\mathcal{M} = X(C_H^2)c_1 + X(C_{HH})c_2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{C_H^{d=4}}{C_H^d}\right)^2 c_1 + \frac{C_{HH}^{d=4}}{C_{HH}^d} c_2 \quad (6.4)$$

auch die $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Anteile in [7] reproduziert werden. Für $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir den LO-Wirkungsquerschnitt aus Gl. (2.11).

Nach UV-Renormierung schreiben wir analog zu Gl. (3.13) die virtuelle Amplitude, die noch IR und kollineare Divergenzen enthält, [43, 42] folgend als

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_v^{(1)}}{dt} &= \frac{d\sigma_{v,\text{fin}}^{(1)}}{dt} + 2\text{Re} [I_g^{(1)}] \frac{d\sigma_v^{(0)}}{dt}, \\ \frac{d\sigma_v^{(2)}}{dt} &= \frac{d\sigma_{v,\text{fin}}^{(2)}}{dt} + 2\text{Re} [I_g^{(1)}] \frac{d\sigma_{v,\text{fin}}^{(1)}}{dt} \\ &\quad + \left\{ |I_g^{(1)}|^2 + 2\text{Re} [(I_g^{(1)})^2] + 2\text{Re} [I_g^{(2)}] \right\} \frac{d\sigma_v^{(0)}}{dt}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Da $I_g^{(1)}$ bis zu $1/\epsilon^2$ -Pole, und $I_g^{(2)}$ bis zu $1/\epsilon^4$ -Pole hat, wird für ein endliches NNLO-Ergebnis $\sigma_v^{(0)}$ bis $\mathcal{O}(\epsilon^4)$ und $\sigma_v^{(1)}$ bis $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ benötigt. Durch die endlichen Anteile von $\sigma_{\text{fin}}^{(2)}$ sowie $\sigma_{\text{fin}}^{(1)}$ bis $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ist bei konsistenter Behandlung der $\mathcal{O}(\epsilon)$ Anteile von $\sigma^{(0)}$ das NNLO-Ergebnis vollständig bestimmt. Wir schreiben $\sigma_{\text{fin}}^{(1/2)}$ als

$$\frac{d\sigma_{v,\text{fin}}^{(1)}}{dt} = \Sigma_{\text{LO}} \left[C_{\text{LO}}^2 \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right)^{2\epsilon} \mathcal{F}^{(1)} + C_{\text{LO}} \left(\frac{\mu^2}{m_t^2} \right)^{3\epsilon} \mathcal{R}^{(1)} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (6.6)$$

und

$$\frac{d\sigma_{v,\text{fin}}^{(2)}}{dt} = \Sigma_{\text{LO}} [C_{\text{LO}}^2 \mathcal{F}^{(2)} + C_{\text{LO}} \mathcal{R}^{(2)} + \mathcal{V}^{(2)}] + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (6.7)$$

Die Funktionen $\mathcal{F}^{(1)}$ und $\mathcal{F}^{(2)}$ beinhalten die Beiträge der Ein- und Zweischleifen-Formfaktoren in Abb. 6.1a und Abb. 6.1b, die mit einem anderen (N)LO Formfaktor multipliziert werden. Die Funktionen $\mathcal{R}^{(1)}$ und $\mathcal{R}^{(2)}$ beinhalten die Interferenzterme von Abb. 6.1c mit LO bzw. Abb. 6.1d mit LO. Die Funktion $\mathcal{V}^{(2)}$ enthält die Beiträge, die man durch quadrieren der Beiträge in Abb. 6.1c erhält. Die die Funktionen \mathcal{F} , \mathcal{R} und \mathcal{V} werden hier explizit angegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(1)} &= \frac{1}{3}C_A [15 + 11L_s] - 3C_F - \frac{4}{3}L_s n_l T_F + \epsilon \left\{ \frac{1}{3}C_A \left[-37 - \frac{77}{2}\zeta_2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 12\zeta_3 + 15L_m - 11L_s + \frac{11}{2}L_s^2 \right] + C_F \left[\frac{35}{2} - 3L_m \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}n_l T_F [14\zeta_2 + 4L_s - 2L_s^2] \right\} + \epsilon^2 \left\{ \frac{1}{3}C_A \left[\frac{98}{3} + 61\zeta_2 - \frac{55}{2}\zeta_2 L_s \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{47}{3}\zeta_3 + 12\zeta_3 L_s + 18\zeta_4 - 31L_m + \frac{15}{2}L_m^2 - 6L_s - \frac{11}{2}L_s^2 + \frac{11}{6}L_s^3 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\frac{1}{2}C_F \left[-\frac{29}{2} - 9\zeta_2 + 35L_m - 3L_m^2 \right] \\
 & +\frac{2}{3}n_l T_F \left[-7\zeta_2 + 5\zeta_2 L_s + \frac{2}{3}\zeta_3 + L_s^2 - \frac{1}{3}L_s^3 \right] \Big\} , \\
 \mathcal{R}^{(1)} = & \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\epsilon \left\{ 1 + \frac{2m_H^2}{s} + \frac{m_H^4}{tu} - \frac{2m_H^6}{stu} + C_A [45 + 22L_s] - 45C_F \right. \\
 & \left. - 8L_s n_l T_F \right\} + \epsilon^2 \left\{ 2\zeta_2 - 101C_F - \frac{8}{3}n_l T_F \left[7\zeta_2 + 2L_s + 2L_m L_s \right. \right. \\
 & \left. \left. - L_s^2 \right] + \frac{1}{3}C_A \left[210 + 154\zeta_2 - 48\zeta_3 + 22(2L_s + 2L_m L_s - L_s^2) \right] \right\} , \\
 \mathcal{F}^{(2)} = & C_A^2 \left[\frac{23827}{648} - \frac{83}{6}\zeta_2 - \frac{253}{36}\zeta_3 + \frac{5}{8}\zeta_4 + \frac{7}{2}L_m + \frac{89}{3}L_s + \frac{121}{12}L_s^2 \right] \\
 & + 9C_F^2 + C_A C_F \left[-\frac{145}{6} - \frac{11}{2}L_m - 11L_s \right] + n_l^2 T_F^2 \left[\frac{4}{3}L_s^2 - \frac{22}{9}\zeta_2 \right] \\
 & - \frac{1}{3}n_l T_F C_A \left[\frac{2255}{54} + 40L_s + 22L_s^2 - \frac{217}{6}\zeta_2 + \frac{49}{3}\zeta_3 \right] \\
 & - \frac{1}{3}n_l T_F C_F \left[41 - 12L_m - 24\zeta_3 \right] - \frac{5}{24}C_A - \frac{1}{3}C_F , \\
 \mathcal{R}^{(2)} = & -7C_A^2 + 11C_A C_F - 8n_l C_F T_F + \frac{1}{3}C_A \left[\frac{476}{9} + \frac{11}{3}(4L_s + L_t + L_u) \right. \\
 & \left. + \frac{4m_H^2}{s} \right] - 8C_F - \frac{4}{9}T_F n_l \left[\frac{10}{3} + 4L_s + L_t + L_u \right] \\
 & - \frac{C_A}{3} \left(1 + \frac{2m_H^4}{s^2} \right) \left[2\text{Li}_2 \left(1 - \frac{m_H^4}{tu} \right) + 4\text{Li}_2 \left(\frac{m_H^2}{t} \right) \right. \\
 & \left. + 4\text{Li}_2 \left(\frac{m_H^2}{u} \right) + 4 \ln \left(1 - \frac{m_H^2}{t} \right) \ln \left(-\frac{m_H^2}{t} \right) \right. \\
 & \left. + 4 \ln \left(1 - \frac{m_H^2}{u} \right) \ln \left(-\frac{m_H^2}{u} \right) - 8\zeta_2 - \ln^2 \left(\frac{t}{u} \right) \right] , \tag{6.8} \\
 \mathcal{V}^{(2)} = & \frac{1}{(3stu)^2} \left[m_H^8 (t+u)^2 - 2m_H^4 tu (t+u)^2 + t^2 u^2 (4s^2 + (t+u)^2) \right] .
 \end{aligned}$$

Dabei ist $L_m = \ln(\mu^2/m_t^2)$, $L_s = \ln(\mu^2/s)$, $L_u = \ln[\mu^2/(-u)]$ und $L_t = \ln[\mu^2/(-t)]$. Vergleicht man für $C_A = 3$, $C_F = 4/3$, $T_F = 1/2$, $\mu^2 = s$ und

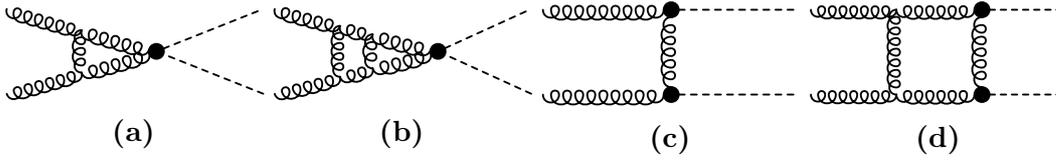


Abbildung 6.1: Klassifizierung der Beiträge zu den virtuellen Korrekturen des NNLO-Wirkungsquerschnitts für $m_t \rightarrow \infty$.

$\epsilon = 0$ den Ausdruck $\mathcal{R}^{(2)}$ mit dem in [7] gegeben Ergebnis, das von $C_{HH}^{(2)} - C_H^{(2)}$ abhängt, so findet man in Übereinstimmung mit Gl. (5.12)

$$\Delta_{HH}^{(2)} = \frac{35}{24} + \frac{2n_l}{3} .$$

6.2 Qualität der SV-Näherung

Auf NLO wurde das SV-Ergebnis verwendet um möglichst viele Anteile des vollständigen Ergebnisses durch den exakten LO-Wirkungsquerschnitt auszudrücken und so die LO-Faktorisierung zu verbessern. Da aber die harte Abstrahlung auch berücksichtigt wurde, war das Ergebnis nicht sehr sensitiv darauf ob (nicht-führende) SV-Terme zu den SV- oder zu den harten Anteilen gezählt wurden. Auf NNLO hingegen soll die SV-Näherung ohne die harte reelle Abstrahlung als Näherung für das vollständige Ergebnis verwendet werden. Dabei wird es eine entscheidende Rolle spielen welche nicht-führenden Terme man berücksichtigt oder nicht. Im Fall der Einzel-Higgs-Produktion wurde in [42] festgestellt, dass die SV-Näherung im Mellin-Raum den totalen (N)NLO-Wirkungsquerschnitt auf ca. 10 % genau beschreibt, während die SV-Näherung im z -Raum auf NLO (NNLO) um 40 % (60 %) vom exakten Ergebnis abweicht.

Bevor wir also die SV-Näherung auf NNLO betrachten, untersuchen wir den Einfluss nicht-führender Terme der SV-Entwicklung auf NLO, wo das vollständige Ergebnis zum Vergleich vorliegt. Um den Einfluss nicht-führender Terme der SV-Entwicklung zu untersuchen, gehen wir wie in [99, 100] für N³LO-Higgs-Produktion vor: Einführen einer Funktion $f(z)$ mit

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = 1 \tag{6.9}$$

im Integranden in Gl. (3.7), bzw. in der Funktion $G_{SV}(z)$ ändert die führenden Terme der SV-Näherung nicht, denn

$$\tilde{G}_{SV}(z) := f(z)G_{SV}(z) \simeq G_{SV}(z) . \tag{6.10}$$

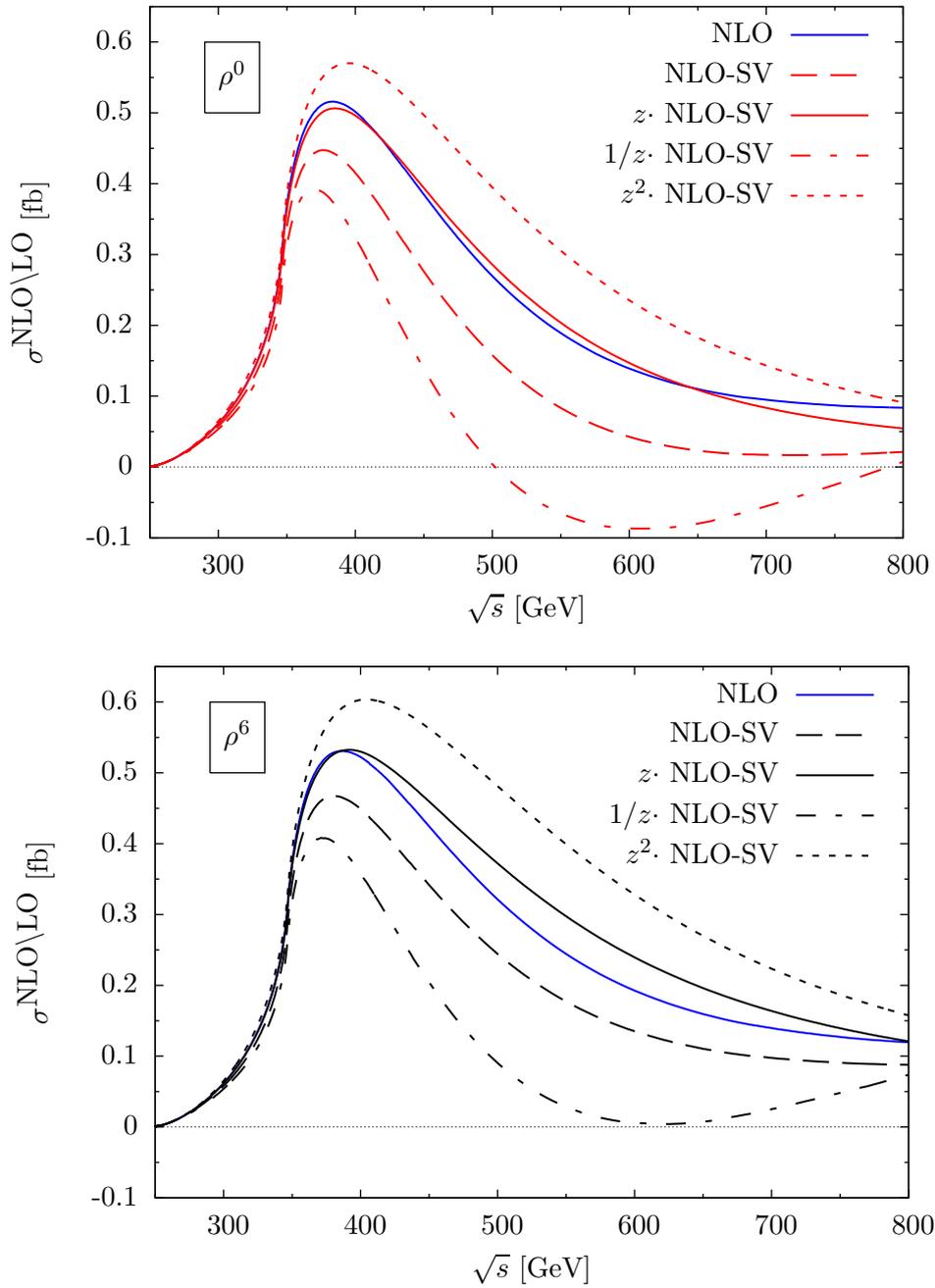


Abbildung 6.2: NLO-Wirkungsquerschnitt in der SV-Näherung und das vollständige Ergebnis. In der SV-Näherung wurden nicht-führende Terme durch die Funktionen $f(z) = 1, z, z^2, 1/z$ abgeschätzt.

Nicht-führende Terme ändern sich allerdings, und so lässt sich deren Einfluss durch verschiedene Testfunktionen f abschätzen. Abb. 6.2 zeigt neben dem vollständigen partonischen NLO-Wirkungsquerschnitt auch Variationen mit den verschiedenen Testfunktionen $f(z) = 1, z, z^2, 1/z$ für das ρ^0 - und das ρ^6 -Ergebnis. Man erkennt, dass bis zur Top-Quark-Schwelle die SV-Näherung praktisch invariant unter Änderung der Funktion f ist. D.h. dass dieser Bereich allein durch die führenden Terme bestimmt wird. Oberhalb der Top-Quark-Schwelle erkennt man wie die Kurven aufspalten und nicht-führende Terme wichtig werden. Verwendet man die SV-Näherung im z -Raum, wie in Abschnitt 3.2 definiert (also $f(z) = 1$), dann erhält man einen partonischen Wirkungsquerschnitt, der deutlich unterhalb des vollständigen Ergebnisses liegt (gestrichelte Kurve in Abb. 6.2). Während $f(z) = 1/z$ und $f(z) = z^2$ noch weiter abweichen, ist die SV-Näherung mit $f(z) = z$ für ρ^0 fast identisch mit dem vollständigen Ergebnis. Die entsprechende ρ^6 -Kurve zeigt eine etwas größere Abweichung, allerdings ist auch hier $f(z) = z$ die beste Näherung. Aufgrund dieser Beobachtung auf NLO werden wir auf NNLO die SV-Näherung mit $f(z) = z$ verwenden.

6.3 $1/m_t$ -Entwicklung der SV-Näherung

Für die virtuellen NNLO-Korrekturen wurde, wie bereits in Kapitel 4 auf NLO eine Entwicklung in der inversen Top-Quark-Masse bis $\mathcal{O}(1/m_t^4)$ durchgeführt. Daraus wurde gemäß Gl. (6.5) [43, 42] $d\sigma_{\text{fin}}^{(1)}/dt$ und $d\sigma_{\text{fin}}^{(2)}/dt$ konstruiert. Die t - sowie die z -Integration wurde numerisch ausgeführt und man erhält (mit $f(z) = z$, siehe oben) den partonischen NNLO-SV-Wirkungsquerschnitt in Abb. 6.3. Dort ist zum Vergleich auch der exakte LO-Wirkungsquerschnitt und der NLO-Wirkungsquerschnitt für ρ^0, ρ^1 und ρ^2 gezeigt. Es ist zu sehen, dass der NNLO-Beitrag eine ähnlich Form wie der NLO-Beitrag hat, allerdings ist er kleiner. Im Bereich $450 \text{ GeV} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 750 \text{ GeV}$ wird er sogar negativ. Bei Betrachtung der Schwelle fällt auf, dass, wie bereits auf NLO, die Unterdrückung verglichen mit LO (und auch verglichen mit NLO) weniger stark ist. Weiterhin erkennt man, dass die zu ρ^0 relativen Korrekturen des ρ^1 - und des ρ^2 -Ergebnisses auf NLO und NNLO-SV demselben Schema folgen: ρ^1 liegt unterhalb, während ρ^2 oberhalb der ρ^0 -Kurve liegt.

Bevor wir den hadronischen Wirkungsquerschnitt betrachten, wird in Abb. 6.4 der Effekt nicht-führenden Terme der SV-Entwicklung (also der Wahl $f(z) = z$) und der Einfluss der Skala μ gezeigt. Wie auf NLO liegen unabhängig von der Skala die Kurven mit $f(z) = 1$ deutlich unterhalb der Kurven mit $f(z) = z$.

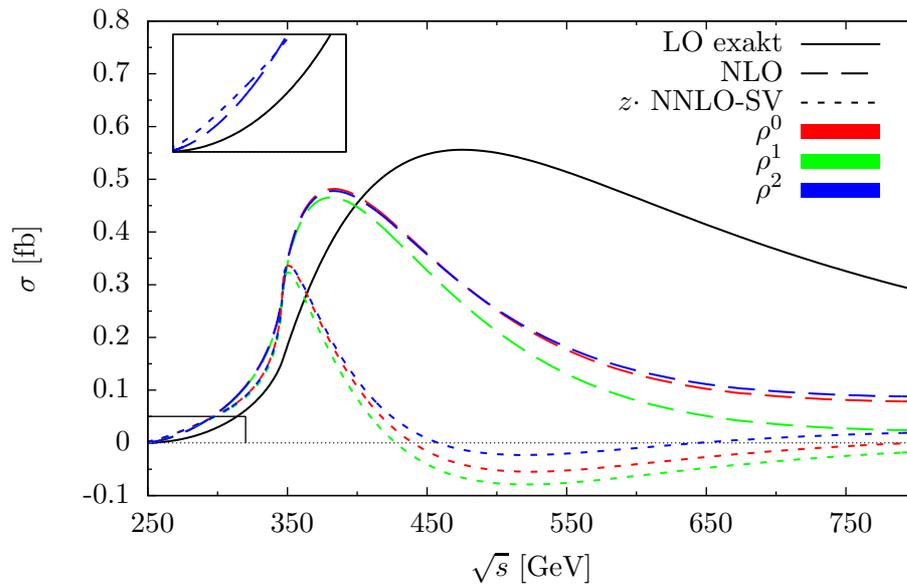


Abbildung 6.3: Partonischer Wirkungsquerschnitt. Dargestellt ist der exakte LO-, der NLO-(ohne LO) und der NNLO-(ohne LO und NLO)Wirkungsquerschnitt. Für alle Kurven wurde das NNLO- α_s verwendet.

In Abb. 6.5 ist der hadronische LO-, NLO-(ρ^0) und NNLO-SV- ($\rho^{0,1,2}$)-Beitrag zum Wirkungsquerschnitt dargestellt. Um zu untersuchen wie groß der Einfluss der m_t -Korrekturen ist, die allein von den NNLO-Korrekturen stammen, wurde auch dort immer das NLO- ρ^0 -Ergebnis verwendet.² Auch hier stellt man wie auf NLO fest, dass für $\sqrt{s}_{\text{cut}} \leq 400$ GeV praktische keine Aufspaltung der Kurven sichtbar ist. Für größere Energien wird die Aufspaltung sichtbar. Abb. 6.6 zeigt den Einfluss der Wahl der Skala sowie das hadronische Ergebnis für $f(z) = 1$ und $f(z) = z$. Um $\mu = \sqrt{Q^2}$ zu simulieren („ $\mu \approx \sqrt{Q^2}$ “) wurde in den SV-Anteilen $\mu = \sqrt{Q^2}$ und in den harten Anteilen, sowie in den Partonverteilungen $\mu = \sqrt{s}$ verwendet. Wir erhalten für den totalen hadronischen Wirkungsquerschnitt schließlich die Ergebnisse in Tab. 6.1. Dabei ist der hadronische K-Faktor

$$K^{\text{NNLO}} = \frac{(\hat{\sigma}^{\text{LO}} + \hat{\sigma}^{\text{NLO}} + \hat{\sigma}^{\text{NNLO}})|_{\text{NNLO pdfs}}}{\hat{\sigma}^{\text{LO}}|_{\text{LO pdfs}}} \quad (6.11)$$

²Da auf NLO für $\sqrt{s}_{\text{cut}} \gtrsim 350$ GeV nicht entschieden werden kann ob ρ^1 (-4.2 %) oder ρ^0 (+4.2 %) das exakte Ergebnis besser beschreibt, wird hier die zentrale ρ^0 -Kurve an Stelle des unbekanntenen exakten Ergebnisses verwendet.

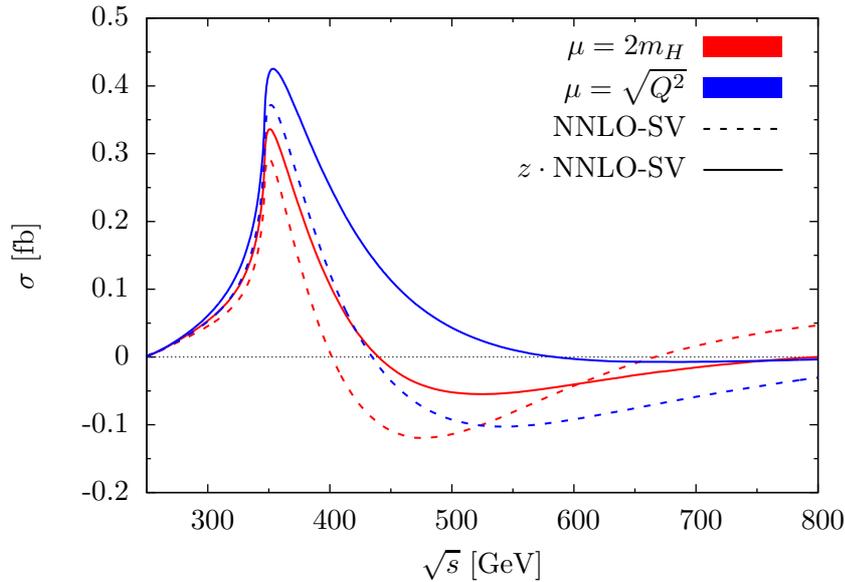


Abbildung 6.4: Partonischer NNLO-Wirkungsquerschnitt für verschiedene Skalen und für $f(z) = 1, z$. Gezeigt ist das ρ^0 -Ergebnis.

und

$$X^{\text{NNLO}} = \frac{\hat{\sigma}^{\text{NNLO}}|_{\rho^n} - \hat{\sigma}^{\text{NNLO}}|_{\rho^0}}{\hat{\sigma}^{\text{LO+NLO+NNLO}}|_{\rho^0}}. \quad (6.12)$$

Für $\rho^0, \mu \approx \sqrt{Q^2}$ und $f(z) = z$ stimmen die gefundenen Werte mit denen aus [7] überein. Für diesen Fall wurde in [8] gefunden, dass die SV-Näherung das vollständige Ergebnis auf 2 % genau beschreibt.

Wir stellen also fest, dass die m_t -Korrekturen auf NNLO-SV relativ gesehen sich wie auf NLO verhalten. Nimmt man für NLO das ρ^0 -Ergebnis als das exakte Ergebnis, dann entspricht die Variation $\rho^{0,1,2}$ allein der NNLO-SV-Korrekturen einer Variation von maximal ± 3 % des totalen NNLO-SV Wirkungsquerschnitts, unabhängig von der Wahl der Skala oder der Wahl der Funktion f . Dieses Ergebnis rechtfertigt den $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzfall als Näherung des exakten totalen inklusiven Wirkungsquerschnitts auf NNLO mit einer Genauigkeit von ± 5 %, unter der Bedingungen, dass man das (derzeit unbekannt) *exakte* NLO-Ergebnis verwendet. Bei Verwendung des $(m_t \rightarrow \infty)$ -Ergebnisses auf NLO überträgt sich die NLO- m_t -Unsicherheit natürlich auf das NNLO-Ergebnis, und man muss mit einer Unsicherheit von etwa ± 10 % des NNLO-Wirkungsquerschnitts rechnen.

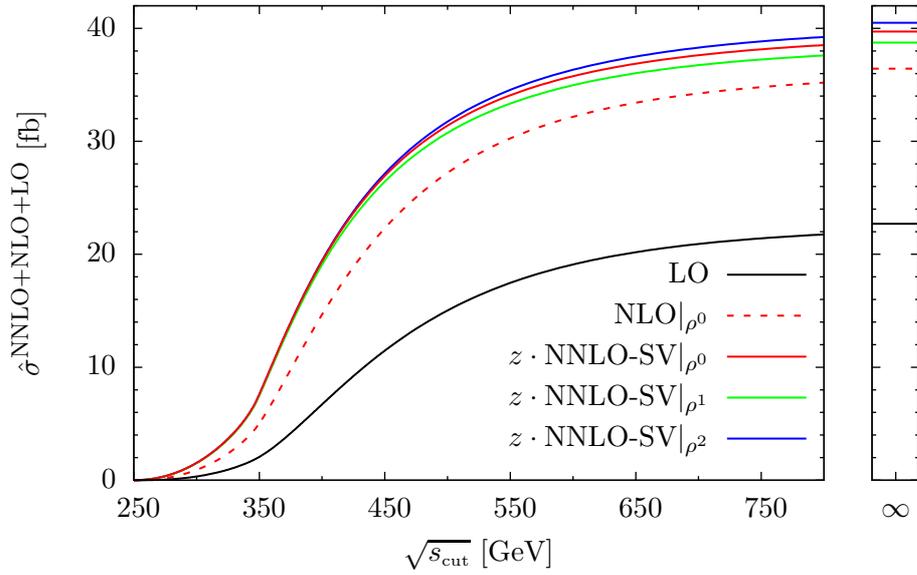


Abbildung 6.5: Hadronische NNLO-Wirkungsquerschnitte auf LO, NLO und NNLO-SV, wobei jeweils das entsprechende α_s verwendet wurde. Im NNLO-Ergebnis wurden die NLO-Anteil für ρ^0 verwendet.

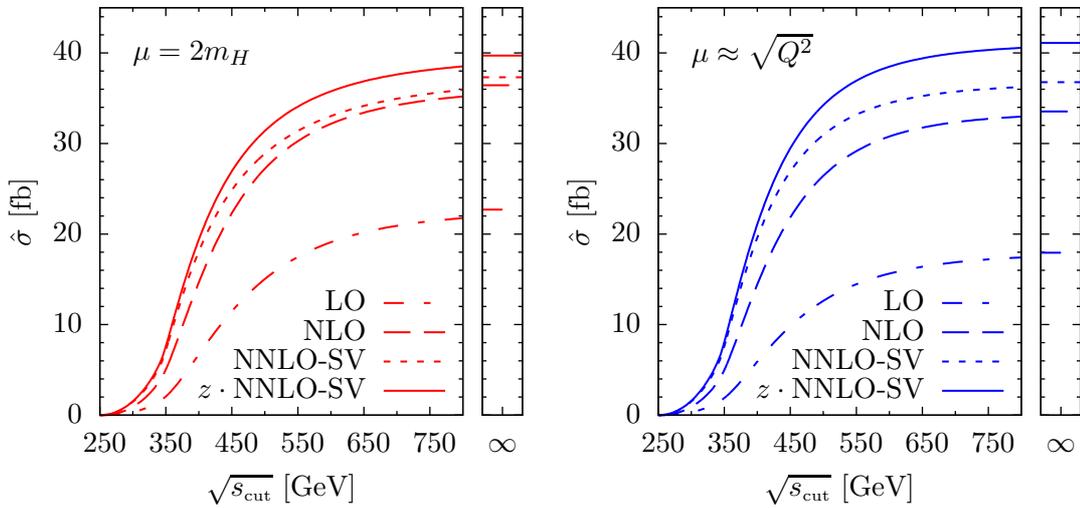


Abbildung 6.6: Hadronische NNLO-Wirkungsquerschnitte: ρ^0 -Ergebnis für verschiedene Skala und $f(z) = 1, z$.

$\mu = 2m_H$	$\hat{\sigma}$ [fb]	$K^{(N)NLO}$	X^{NNLO} [%]
LO	22.7	—	—
LO+NLO $ \rho^0$	36.4	1.60	—
$f(z) = z$			
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^0$	39.7	1.75	0
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^1$	38.7	1.70	-2.5
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^2$	40.5	1.78	+2.0
$f(z) = 1$			
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^0$	36.8	1.62	0
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^1$	35.9	1.58	-2.5
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^2$	37.4	1.65	+1.6
$\mu \approx \sqrt{Q^2}$			
LO	17.9	—	—
LO+NLO $ \rho^0$	33.5	1.87	—
$f(z) = z$			
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^0$	41.1	2.30	0
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^1$	39.9	2.23	-2.9
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^2$	41.8	2.34	+1.7
$f(z) = 1$			
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^0$	37.3	2.08	0
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^1$	36.5	2.04	-2.1
LO+NLO $ \rho^0$ +NNLO $ \rho^2$	38.0	2.12	+1.9

Tabelle 6.1: Totaler hadronischer Wirkungsquerschnitt auf LO, NLO und NNLO-SV mit m_t -Effekten für verschiedene Skalen und verschiedene Funktionen f zur Abschätzung der SV-Näherung.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Dissertation wurden QCD-Korrekturen zur Produktion von Higgs-Boson-Paaren am LHC untersucht. Es wurde insbesondere

1. der NLO-Wirkungsquerschnitt bis $\mathcal{O}(1/m_t^{12})$,
2. der NNLO-Matching-Koeffizient und
3. der NNLO-SV-Wirkungsquerschnitt bis $\mathcal{O}(1/m_t^4)$

berechnet und deren Bedeutung für die LHC-Experimente diskutiert. Damit wurden erstmalig Effekte jenseits der $(m_t \rightarrow \infty)$ -Näherung auf NLO und NNLO untersucht und durch die Berechnung des NNLO-Matching-Koeffizienten das zuvor unvollständige NNLO-Ergebnis vervollständigt. Zusammenfassend lässt sich folgendes festhalten:

- Die Effekte der endlichen Top-Quark-Masse im totalen NLO-Wirkungsquerschnitt sind bei konservativer Abschätzung maximal $\pm 10\%$ verglichen mit dem $(m_t \rightarrow \infty)$ -Grenzfall.
- Wird man im totalen Wirkungsquerschnitt auf eine Genauigkeit von $\lesssim 10\%$ sensitiv (was im Standardmodell aufgrund des kleinen Wirkungsquerschnitts sehr optimistisch ist), so muss die exakte Abhängigkeit von der Top-Quark-Masse berücksichtigt werden, und die hier gemachten Entwicklungen reichen nicht aus.
- Sollte (möglicherweise in Verbindung mit einem Schnitt auf Q^2) ein Überschuss von $\gg 10\%$ gemessen werden, dann kann ausgeschlossen werden, dass es sich dabei um m_t -Effekte im Rahmen des Standardmodells handelt.
- Bei einem Schnitt auf die invariante Higgs-Paar-Masse im Bereich unter 500 GeV nimmt die m_t -Unsicherheit wie auch der absolute Wert des Wirkungsquerschnitts zur Produktionsschwelle hin stark ab. Dort zeigen sich große relative, in absoluten Zahlen aber vernachlässigbare Korrekturen zur effektiven Theorie. Dieser Bereich ist vor allem als Test für zukünftige exakte (möglicherweise numerische) Rechnungen von Interesse.

- Im Rahmen der Entwicklungen wurden die Entwicklungskoeffizienten des in m_t *exakten* Wirkungsquerschnitts exakt und in algebraischer Form bestimmt. Diese Information ist ebenfalls im Hinblick auf Tests zukünftiger Rechnungen von Bedeutung.
- Mit dem NNLO-Matching-Koeffizienten sind jetzt auch formal vollständige Rechnungen auf NNLO in der effektiven Theorie möglich. Diese erhöhen den NLO-Wirkungsquerschnitt um weitere 10 – 20 % (je nach Wahl der Skala).
- Die m_t -Korrekturen im NNLO-SV-Wirkungsquerschnitt zeigen ein ähnliches Verhalten wie die auf NLO. Die Unsicherheit aufgrund der NNLO- m_t -Effekte allein kann mit ± 5 % abgeschätzt werden. Damit ist die effektive Theorie auf NNLO ein guter Ausgangspunkt für die Untersuchung von Higgs-Boson-Paarproduktion am LHC.

Diese Ergebnisse leisten einen Beitrag zu der Fülle an Vorhersagen des Standardmodells, die am LHC relevant sind. Mit dem Start des *Run 2* des LHC am 3. Juni 2015 rückt – trotz der großen theoretischen und experimentellen Herausforderungen – eine Messung von Higgs-Boson-Paaren und die Messung der Higgs-Boson-Selbstkopplung in greifbare Nähe. Damit, aber auch mit dem gesamten wissenschaftlichen Programm der LHC-Experimente, werden tiefere Einblicke in die Natur der Elementarteilchen möglich als jemals zuvor.

A Anhang

A.1 Kinematik und Lorentz-Struktur

Wir betrachten den Prozess $gg \rightarrow HH$, wobei die Gluonen g den Impuls $q_{1,2}$ und die Higgs-Bosonen den Impuls $q_{3,4}$ haben. Aufgrund der Energie- und Impulserhaltung haben wir also drei unabhängige Impulse $q_{1,2,3}$, aus denen sich (zusammen mit dem metrischen Tensor) 9(+1) Strukturen bilden lassen

$$\begin{aligned}
 & g^{\mu\nu} \\
 & q_1^\mu q_1^\nu \quad q_1^\mu q_2^\nu \quad q_1^\mu q_3^\nu \\
 & q_2^\mu q_1^\nu \quad q_2^\mu q_2^\nu \quad q_2^\mu q_3^\nu \\
 & q_3^\mu q_1^\nu \quad q_3^\mu q_2^\nu \quad q_3^\mu q_3^\nu
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Da die Gluon-Polarisationsvektoren senkrecht auf den zugehörigen Impulsen stehen

$$\varepsilon(q_1) \cdot q_1 = 0, \quad \varepsilon(q_2) \cdot q_2 = 0, \tag{A.2}$$

sind für die physikalische Amplitude nicht alle der obigen Strukturen von Bedeutung, und sie lässt sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}^{\mu\nu} &= c_{00} g^{\mu\nu} + \sum_{i,j} c_{ij} q_i^\mu q_j^\nu \\
 &= c_{00} g^{\mu\nu} + c_{21} q_2^\mu q_1^\nu + c_{23} q_2^\mu q_3^\nu + c_{31} q_3^\mu q_1^\nu + c_{33} q_3^\mu q_3^\nu + X_{\text{unphys.}}^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Die fünf verbleibenden physikalischen Koeffizienten sind allerdings nicht unabhängig. Ward-Identitäten führen dazu, dass nur zwei unabhängige Strukturen

$$\begin{aligned}
 A_1^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - \frac{1}{q_{12}} q_1^\nu q_2^\mu, \\
 A_2^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + \frac{q_{33}}{q_T^2 q_{12}} q_1^\nu q_2^\mu - \frac{2q_{23}}{q_T^2 q_{12}} q_1^\nu q_3^\mu - \frac{2q_{13}}{q_T^2 q_{12}} q_3^\nu q_2^\mu + \frac{2}{q_T^2} q_3^\mu q_3^\nu
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

bestehen und die Amplitude als

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} = \mathcal{M}_1 A_1^{\mu\nu} + \mathcal{M}_2 A_2^{\mu\nu} + X_{\text{unphys.}}^{\mu\nu}. \tag{A.5}$$

geschrieben werden kann. Die Projektoren

$$\begin{aligned}
P_1^{\mu\nu} &= \left\{ g^{\mu\nu} - \left[\frac{1}{q_{12}} - \epsilon \left(\frac{q_{33}}{q_{12}q_T^2} + \frac{1}{q_{12}} \right) \right] q_1^\nu q_2^\mu - \epsilon \left[\frac{2q_{23}}{q_{12}q_T^2} \right] q_1^\nu q_3^\mu \right. \\
&\quad \left. - \epsilon \left[\frac{2q_{13}}{q_{12}q_T^2} \right] q_2^\mu q_3^\nu + \epsilon \left[\frac{2}{q_T^2} \right] q_3^\mu q_3^\nu \right\} \frac{1}{2(d-3)} \\
P_2^{\mu\nu} &= \left\{ g^{\mu\nu} + \left[\frac{q_{33}}{q_{12}q_T^2} (1-\epsilon) - \epsilon \frac{1}{q_{12}} \right] q_1^\nu q_2^\mu - \left[\frac{2q_{23}}{q_{12}q_T^2} (1-\epsilon) \right] q_1^\nu q_3^\mu \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{2q_{13}}{q_{12}q_T^2} (1-\epsilon) \right] q_2^\mu q_3^\nu + \left[\frac{2}{q_T^2} (1-\epsilon) \right] q_3^\mu q_3^\nu \right\} \frac{1}{2(d-3)}
\end{aligned} \tag{A.6}$$

projizieren in d Dimensionen auf die beiden physikalischen Lorentz-Strukturen:

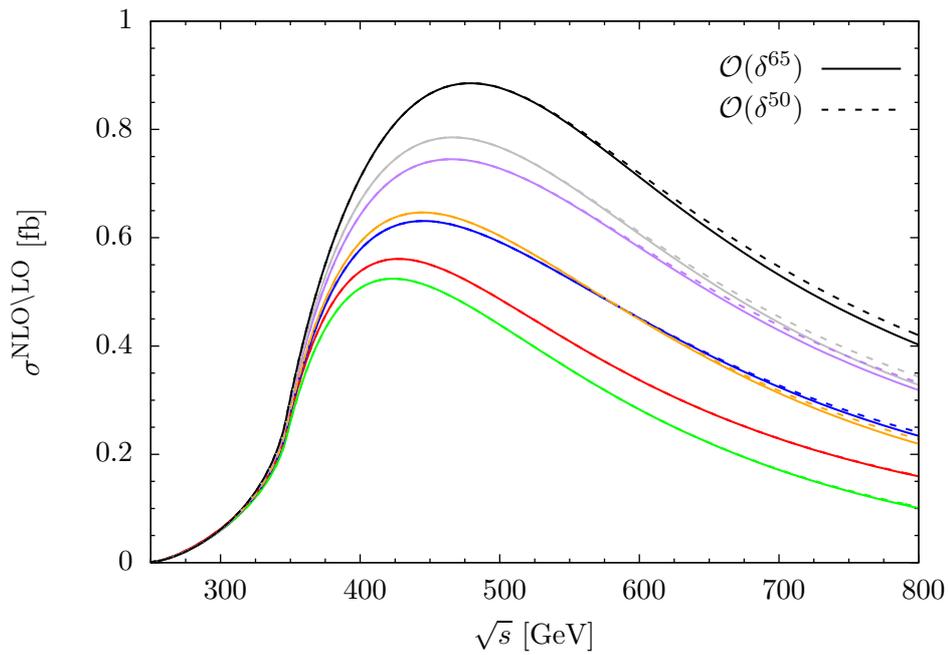
$$\begin{aligned}
P_1^{\mu\nu} \cdot \mathcal{M}_{\mu\nu} &= \mathcal{M}_1, \\
P_2^{\mu\nu} \cdot \mathcal{M}_{\mu\nu} &= \mathcal{M}_2.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

A.2 δ -Entwicklung

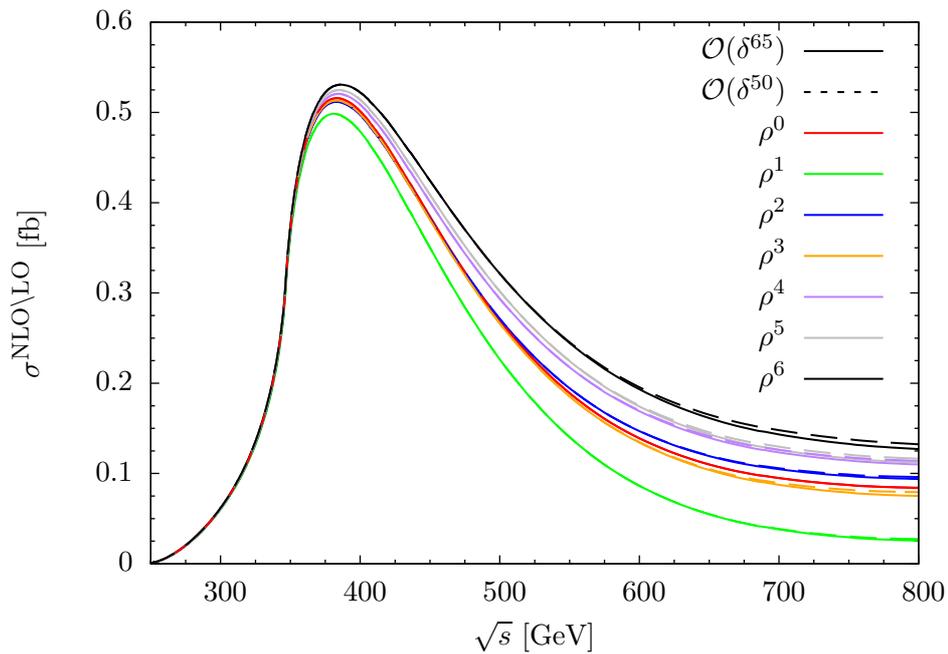
Abb. A.1 zeigt die Auswirkungen der Entwicklung der Phasenraum-Integrale in $\delta = 1 - 4m_H^2/s$. Gezeigt ist der partonische NLO-Wirkungsquerschnitt bei nicht-differentieller LO-Faktorisierung (Abb. A.1a) sowie derselbe Wirkungsquerschnitt, wobei an den SV-Anteile differentielle LO-Faktorisierung durchgeführt wurde (Abb. A.1b). Man erkennt, dass bei einer Entwicklung bis $\mathcal{O}(\delta^{50})$ die Abhängigkeit von der Entwicklungstiefe erst für $\sqrt{s} \gtrsim 600$ GeV und die ρ^n -Kurven mit $n \geq 3$ sichtbar wird und auch dann maximal 1 % – 2 % beträgt. Für die phänomenologische Diskussion und insbesondere die hadronischen Wirkungsquerschnitte spielt die δ -Entwicklung also keine Rolle.

A.3 Differentielle und nicht-differentielle LO-Faktorisierung

Abb. A.2 zeigt den direkten Vergleich von differentieller und nicht-differentieller LO-Faktorisierung auf NLO. Gezeigt sind Abb. 4.5 und Abb. 4.10 bzw. Abb. 4.6 und Abb. 4.11.

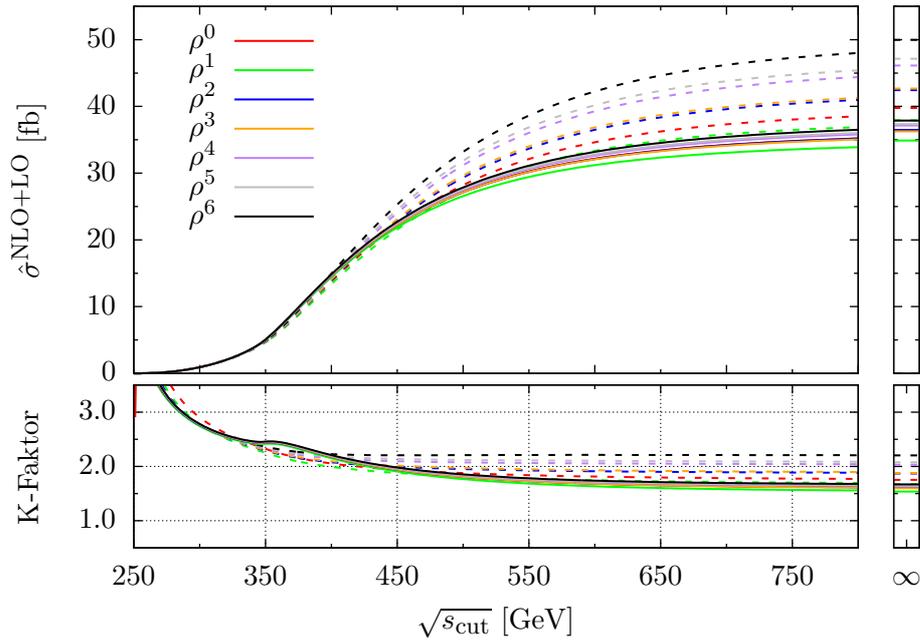


(a) Partonischer NLO-Wirkungsquerschnitt mit nicht-differentieller LO-Faktorisierung.

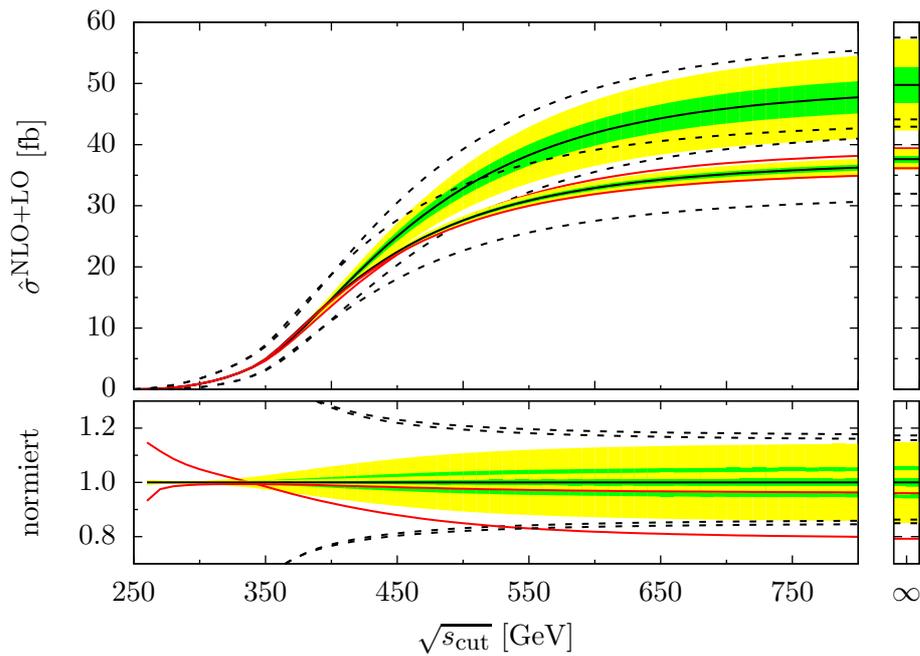


(b) Partonischer NLO-Wirkungsquerschnitt mit differentieller LO-Faktorisierung.

Abbildung A.1: Numerische Auswirkungen der δ -Entwicklung.



(a) Hadronischer LO+NLO-Wirkungsquerschnitt, $\sqrt{s} = 14$ TeV.



(b) Masseneffekte und Variation der Higgs-Selbstkopplung.

Abbildung A.2: Differentielle und nicht-differentielle LO-Faktorisierung auf NLO.

A.4 Goncharov-Polylogarithmen

Das Masterintegral $I_1(4)$ wurde in Abschnitt 3.8.1 durch Goncharov-Polylogarithmen [64] ausgedrückt. Diese sind wie folgt definiert:

$$G_o(\vec{0}_n; x) = \frac{1}{n!} \log^n x \quad \text{mit } \vec{0}_n = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ mal}}, \quad (\text{A.8})$$

und für $\vec{w} \neq \vec{0}$

$$G_o(w_1, w_2, \dots, w_n; x) = \int_0^x dt \frac{1}{t - w_1} G_o(w_2, \dots, w_n; x), \quad (\text{A.9})$$

wobei $w_i, x \in \mathbb{C}$. Für die endlichen Anteile des Masterintegrals $I_1(4)$ lassen sich alle auftretenden Goncharov-Polylogarithmen durch Logarithmen und Dilogarithmen ausdrücken:

$$G_o(0; y) = \log(y), \quad (\text{A.10})$$

$$G_o(-1; x) = \log(1 + x), \quad (\text{A.11})$$

$$G_o(-1/y; x) = \log(1 + xy), \quad (\text{A.12})$$

$$G_o(-1, 0; x) = \log(x) \log(1 + x) + \text{Li}_2(-x), \quad (\text{A.13})$$

$$G_o(-1/y, 0; x) = \log(x) \log(1 + xy) + \text{Li}_2(-xy). \quad (\text{A.14})$$

Literaturverzeichnis

- [1] ATLAS Collaboration, G. Aad *et al.*, *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, Phys.Lett. **B716** (2012) 1–29, arXiv:1207.7214 [hep-ex].
- [2] CMS Collaboration, S. Chatrchyan *et al.*, *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*, Phys.Lett. **B716** (2012) 30–61, arXiv:1207.7235 [hep-ex].
- [3] E. N. Glover and J. van der Bij, *Higgs boson pair production via gluon fusion*, Nucl.Phys. **B309** (1988) 282.
- [4] T. Plehn, M. Spira, and P. Zerwas, *Pair production of neutral Higgs particles in gluon-gluon collisions*, Nucl.Phys. **B479** (1996) 46–64, arXiv:hep-ph/9603205 [hep-ph].
- [5] S. Dawson, S. Dittmaier, and M. Spira, *Neutral Higgs boson pair production at hadron colliders: QCD corrections*, Phys.Rev. **D58** (1998) 115012, arXiv:hep-ph/9805244 [hep-ph].
- [6] A. Djouadi, W. Kilian, M. Mühlleitner, and P. Zerwas, *Production of neutral Higgs boson pairs at LHC*, Eur.Phys.J. **C10** (1999) 45–49, arXiv:hep-ph/9904287 [hep-ph].
- [7] D. de Florian and J. Mazzitelli, *Two-loop virtual corrections to Higgs pair production*, Phys.Lett. **B724** (2013) 306–309, arXiv:1305.5206 [hep-ph].
- [8] D. de Florian and J. Mazzitelli, *Higgs Boson Pair Production at Next-to-Next-to-Leading Order in QCD*, Phys.Rev.Lett. **111** (2013) 201801, arXiv:1309.6594 [hep-ph].
- [9] F. Maltoni, E. Vryonidou, and M. Zaro, *Top-quark mass effects in double and triple Higgs production in gluon-gluon fusion at NLO*, JHEP **1411** (2014) 079, arXiv:1408.6542 [hep-ph].

- [10] P. Maierhöfer and A. Papaefstathiou, *Higgs Boson pair production merged to one jet*, JHEP **1403** (2014) 126, arXiv:1401.0007 [hep-ph].
- [11] R. Frederix, S. Frixione, V. Hirschi, F. Maltoni, O. Mattelaer, *et al.*, *Higgs pair production at the LHC with NLO and parton-shower effects*, Phys.Lett. **B732** (2014) 142–149, arXiv:1401.7340 [hep-ph].
- [12] D. Y. Shao, C. S. Li, H. T. Li, and J. Wang, *Threshold resummation effects in Higgs boson pair production at the LHC*, JHEP **1307** (2013) 169, arXiv:1301.1245 [hep-ph].
- [13] D. de Florian and J. Mazzitelli, *Higgs pair production at next-to-next-to-leading logarithmic accuracy at the LHC*, arXiv:1505.07122 [hep-ph].
- [14] J. Grigo, J. Hoff, K. Melnikov, and M. Steinhauser, *On the Higgs boson pair production at the LHC*, Nucl.Phys. **B875** (2013) 1–17, arXiv:1305.7340 [hep-ph].
- [15] J. Grigo, K. Melnikov, and M. Steinhauser, *Virtual corrections to Higgs boson pair production in the large top quark mass limit*, Nucl.Phys. **B888** (2014) 17–29, arXiv:1408.2422 [hep-ph].
- [16] ATLAS, CMS Collaboration, G. Aad *et al.*, *Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments*, Phys. Rev. Lett. **114** (2015) 191803, arXiv:1503.07589 [hep-ex].
- [17] J. Baglio, A. Djouadi, R. Gröber, M. Mühlleitner, J. Quevillon, *et al.*, *The measurement of the Higgs self-coupling at the LHC: theoretical status*, JHEP **1304** (2013) 151, arXiv:1212.5581 [hep-ph].
- [18] LHC Higgs Cross Section Working Group, S. Heinemeyer, C. Mariotti, G. Passarino, and R. Tanaka (Eds.), *Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 3. Higgs Properties*, CERN-2013-004 (CERN, Geneva, 2013), arXiv:1307.1347 [hep-ph].
- [19] U. Baur, T. Plehn, and D. L. Rainwater, *Determining the Higgs boson selfcoupling at hadron colliders*, Phys.Rev. **D67** (2003) 033003, arXiv:hep-ph/0211224 [hep-ph].

- [20] U. Baur, T. Plehn, and D. L. Rainwater, *Probing the Higgs selfcoupling at hadron colliders using rare decays*, Phys.Rev. **D69** (2004) 053004, arXiv:hep-ph/0310056 [hep-ph].
- [21] F. Goertz, A. Papaefstathiou, L. L. Yang, and J. Zurita, *Higgs Boson self-coupling measurements using ratios of cross sections*, JHEP **1306** (2013) 016, arXiv:1301.3492 [hep-ph].
- [22] V. Barger, L. L. Everett, C. Jackson, and G. Shaughnessy, *Higgs-Pair Production and Measurement of the Triscalar Coupling at LHC(8,14)*, Phys.Lett. **B728** (2014) 433–436, arXiv:1311.2931 [hep-ph].
- [23] C. Englert, F. Krauss, M. Spannowsky, and J. Thompson, *Di-Higgs phenomenology in $t\bar{t}hh$: The forgotten channel*, Phys.Lett. **B743** (2015) 93–97, arXiv:1409.8074 [hep-ph].
- [24] ATLAS Collaboration, G. Aad *et al.*, *Search For Higgs Boson Pair Production in the $\gamma\gamma b\bar{b}$ Final State using pp Collision Data at $\sqrt{s} = 8$ TeV from the ATLAS Detector*, Phys.Rev.Lett. **114** no. 8, (2015) 081802, arXiv:1406.5053 [hep-ex].
- [25] ATLAS Collaboration, G. Aad *et al.*, *Search for Higgs boson pair production in the $b\bar{b}b\bar{b}$ final state from pp collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV with the ATLAS detector*, arXiv:1506.00285 [hep-ex].
- [26] CMS Collaboration, V. Khachatryan *et al.*, *Search for resonant pair production of Higgs bosons decaying to two bottom quark-antiquark pairs in proton-proton collisions at 8 TeV*, arXiv:1503.04114 [hep-ex].
- [27] M. J. Dolan, C. Englert, and M. Spannowsky, *Higgs self-coupling measurements at the LHC*, JHEP **1210** (2012) 112, arXiv:1206.5001 [hep-ph].
- [28] A. Papaefstathiou, L. L. Yang, and J. Zurita, *Higgs boson pair production at the LHC in the $b\bar{b}W^+W^-$ channel*, Phys.Rev. **D87** no. 1, (2013) 011301, arXiv:1209.1489 [hep-ph].
- [29] M. J. Dolan, C. Englert, N. Greiner, and M. Spannowsky, *Further on up the road: $hhjj$ production at the LHC*, Phys.Rev.Lett. **112** (2014) 101802, arXiv:1310.1084 [hep-ph].
- [30] D. E. Ferreira de Lima, A. Papaefstathiou, and M. Spannowsky, *Standard model Higgs boson pair production in the $(b\bar{b})(b\bar{b})$ final state*, JHEP **1408** (2014) 030, arXiv:1404.7139 [hep-ph].

- [31] J. Baglio, O. Eberhardt, U. Nierste, and M. Wiebusch, *Benchmarks for Higgs Pair Production and Heavy Higgs boson Searches in the Two-Higgs-Doublet Model of Type II*, Phys.Rev. **D90** no. 1, (2014) 015008, arXiv:1403.1264 [hep-ph].
- [32] R. Gröber and M. Mühlleitner, *Composite Higgs Boson Pair Production at the LHC*, JHEP **1106** (2011) 020, arXiv:1012.1562 [hep-ph].
- [33] F. Goertz, A. Papaefstathiou, L. L. Yang, and J. Zurita, *Higgs boson pair production in the $D=6$ extension of the SM*, JHEP **1504** (2015) 167, arXiv:1410.3471 [hep-ph].
- [34] A. Azatov, R. Contino, G. Panico, and M. Son, *Effective field theory analysis of double Higgs production via gluon fusion*, arXiv:1502.00539 [hep-ph].
- [35] Particle Data Group Collaboration, K. Olive *et al.*, *Review of Particle Physics*, Chin.Phys. **C38** (2014) 090001.
- [36] A. Martin, W. Stirling, R. Thorne, and G. Watt, *Parton distributions for the LHC*, Eur.Phys.J. **C63** (2009) 189–285, arXiv:0901.0002 [hep-ph].
- [37] K. Chetyrkin, J. H. Kühn, and M. Steinhauser, *RunDec: A Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses*, Comput.Phys.Commun. **133** (2000) 43–65, arXiv:hep-ph/0004189 [hep-ph].
- [38] R. Cutkosky, *Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes*, J.Math.Phys. **1** (1960) 429–433.
- [39] G. 't Hooft, *Under the spell of the gauge principle*, Adv.Ser.Math.Phys. **19** (1994) 1–683.
- [40] C. Anastasiou and K. Melnikov, *Higgs boson production at hadron colliders in NNLO QCD*, Nucl.Phys. **B646** (2002) 220–256, arXiv:hep-ph/0207004 [hep-ph].
- [41] A. Pak, M. Rogal, and M. Steinhauser, *Production of scalar and pseudo-scalar Higgs bosons to next-to-next-to-leading order at hadron colliders*, JHEP **1109** (2011) 088, arXiv:1107.3391 [hep-ph].

- [42] D. de Florian and J. Mazzitelli, *A next-to-next-to-leading order calculation of soft-virtual cross sections*, JHEP **1212** (2012) 088, arXiv:1209.0673 [hep-ph].
- [43] S. Catani, *The Singular behavior of QCD amplitudes at two loop order*, Phys.Lett. **B427** (1998) 161–171, arXiv:hep-ph/9802439 [hep-ph].
- [44] A. Bassetto, M. Ciafaloni, and G. Marchesini, *Jet Structure and Infrared Sensitive Quantities in Perturbative QCD*, Phys.Rept. **100** (1983) 201–272.
- [45] G. Altarelli and G. Parisi, *Asymptotic Freedom in Parton Language*, Nucl.Phys. **B126** (1977) 298.
- [46] V. Ahrens, T. Becher, M. Neubert, and L. L. Yang, *Renormalization-Group Improved Prediction for Higgs Production at Hadron Colliders*, Eur.Phys.J. **C62** (2009) 333–353, arXiv:0809.4283 [hep-ph].
- [47] P. Nogueira, *Automatic Feynman graph generation*, J.Comput.Phys. **105** (1993) 279–289.
- [48] V. A. Smirnov, *Asymptotic expansions in limits of large momenta and masses*, Commun.Math.Phys. **134** (1990) 109–137.
- [49] V. A. Smirnov, *Applied asymptotic expansions in momenta and masses*, Springer Tracts Mod.Phys. **177** (2002) 1–262.
- [50] R. Harlander, T. Seidensticker, and M. Steinhauser, *Complete corrections of Order alpha alpha-s to the decay of the Z boson into bottom quarks*, Phys.Lett. **B426** (1998) 125–132, arXiv:hep-ph/9712228 [hep-ph].
- [51] T. Seidensticker, *Automatic application of successive asymptotic expansions of Feynman diagrams*, arXiv:hep-ph/9905298 [hep-ph].
- [52] J. Hoff, *Methods for Multiloop Calculations and Higgs Boson Production at the LHC*, Dissertation (2015) .
- [53] M. Steinhauser, *MATAD: A Program package for the computation of MAssive TADpoles*, Comput.Phys.Commun. **134** (2001) 335–364, arXiv:hep-ph/0009029 [hep-ph].

- [54] K. Chetyrkin and F. Tkachov, *Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops*, Nucl.Phys. **B192** (1981) 159–204.
- [55] S. Laporta, *High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations*, Int.J.Mod.Phys. **A15** (2000) 5087–5159, arXiv:hep-ph/0102033 [hep-ph].
- [56] A. Smirnov, *Algorithm FIRE – Feynman Integral REduction*, JHEP **0810** (2008) 107, arXiv:0807.3243 [hep-ph].
- [57] A. V. Smirnov, *FIRE5: a C++ implementation of Feynman Integral REduction*, Comput.Phys.Commun. **189** (2014) 182–191, arXiv:1408.2372 [hep-ph].
- [58] A. Pak, *Precision calculations in heavy fermion decays*, Dissertation (2008) .
- [59] V. A. Smirnov, *Evaluating Feynman integrals*, Springer Tracts Mod.Phys. **211** (2004) 1–244.
- [60] T. Birthwright, E. N. Glover, and P. Marquard, *Master integrals for massless two-loop vertex diagrams with three offshell legs*, JHEP **0409** (2004) 042, arXiv:hep-ph/0407343 [hep-ph].
- [61] F. Chavez and C. Duhr, *Three-mass triangle integrals and single-valued polylogarithms*, JHEP **1211** (2012) 114, arXiv:1209.2722 [hep-ph].
- [62] A. Smirnov and M. Tentyukov, *Feynman Integral Evaluation by a Sector decomposiTion Approach (FIESTA)*, Comput.Phys.Commun. **180** (2009) 735–746, arXiv:0807.4129 [hep-ph].
- [63] A. V. Smirnov, *FIESTA 3: cluster-parallelizable multiloop numerical calculations in physical regions*, Comput.Phys.Commun. **185** (2014) 2090–2100, arXiv:1312.3186 [hep-ph].
- [64] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math.Res.Lett. **5** (1998) 497–516, arXiv:1105.2076 [math.AG].
- [65] R. K. Ellis and G. Zanderighi, *Scalar one-loop integrals for QCD*, JHEP **0802** (2008) 002, arXiv:0712.1851 [hep-ph].

- [66] K. Chetyrkin, *Four-loop renormalization of QCD: Full set of renormalization constants and anomalous dimensions*, Nucl.Phys. **B710** (2005) 499–510, arXiv:hep-ph/0405193 [hep-ph].
- [67] K. Chetyrkin, B. A. Kniehl, and M. Steinhauser, *Decoupling relations to $O(\alpha_s^3)$ and their connection to low-energy theorems*, Nucl.Phys. **B510** (1998) 61–87, arXiv:hep-ph/9708255 [hep-ph].
- [68] A. G. Grozin, M. Höschele, J. Hoff, and M. Steinhauser, *Simultaneous decoupling of bottom and charm quarks*, JHEP **1109** (2011) 066, arXiv:1107.5970 [hep-ph].
- [69] N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe, and K. Schilcher, *Three Loop Relation of Quark (Modified) M_s and Pole Masses*, Z.Phys. **C48** (1990) 673–680.
- [70] C. Gottbrath, J. Bailin, C. Meakin, T. Thompson, and J. Charfman, *The Effects of Moore’s law and slacking on large computations*, arXiv:astro-ph/9912202 [astro-ph].
- [71] R. K. Ellis, Z. Kunszt, K. Melnikov, and G. Zanderighi, *One-loop calculations in quantum field theory: from Feynman diagrams to unitarity cuts*, Phys.Rept. **518** (2012) 141–250, arXiv:1105.4319 [hep-ph].
- [72] L. J. Dixon, *A brief introduction to modern amplitude methods*, arXiv:1310.5353 [hep-ph].
- [73] J. Vermaseren, *New features of FORM*, arXiv:math-ph/0010025 [math-ph].
- [74] M. Tentyukov and J. Vermaseren, *The Multithreaded version of FORM*, Comput.Phys.Commun. **181** (2010) 1419–1427, arXiv:hep-ph/0702279 [hep-ph].
- [75] J. Kuipers, T. Ueda, J. Vermaseren, and J. Vollinga, *FORM version 4.0*, Comput.Phys.Commun. **184** (2013) 1453–1467, arXiv:1203.6543 [cs.SC].
- [76] M. Steinhauser, T. Ueda, and J. A. M. Vermaseren, *Parallel versions of FORM and more*, Nucl.Part.Phys.Proc. **261-262** (2015) 45–57, arXiv:1501.07119 [hep-ph].

- [77] A. von Manteuffel and C. Studerus, *Reduze 2 - Distributed Feynman Integral Reduction*, arXiv:1201.4330 [hep-ph].
- [78] M. Kramer, E. Laenen, and M. Spira, *Soft gluon radiation in Higgs boson production at the LHC*, Nucl.Phys. **B511** (1998) 523–549, arXiv:hep-ph/9611272 [hep-ph].
- [79] D. Graudenz, M. Spira, and P. Zerwas, *QCD corrections to Higgs boson production at proton proton colliders*, Phys.Rev.Lett. **70** (1993) 1372–1375.
- [80] A. Pak, M. Rogal, and M. Steinhauser, *Finite top quark mass effects in NNLO Higgs boson production at LHC*, JHEP **1002** (2010) 025, arXiv:0911.4662 [hep-ph].
- [81] R. V. Harlander and K. J. Ozeren, *Finite top mass effects for hadronic Higgs production at next-to-next-to-leading order*, JHEP **0911** (2009) 088, arXiv:0909.3420 [hep-ph].
- [82] R. V. Harlander, H. Mantler, S. Marzani, and K. J. Ozeren, *Higgs production in gluon fusion at next-to-next-to-leading order QCD for finite top mass*, Eur.Phys.J. **C66** (2010) 359–372, arXiv:0912.2104 [hep-ph].
- [83] S. Marzani, R. D. Ball, V. Del Duca, S. Forte, and A. Vicini, *Higgs production via gluon-gluon fusion with finite top mass beyond next-to-leading order*, Nucl.Phys. **B800** (2008) 127–145, arXiv:0801.2544 [hep-ph].
- [84] S. Catani, M. Ciafaloni, and F. Hautmann, *Gluon contributions to small x heavy flavor production*, Phys.Lett. **B242** (1990) 97.
- [85] S. Catani, M. Ciafaloni, and F. Hautmann, *High-energy factorization and small x heavy flavor production*, Nucl.Phys. **B366** (1991) 135–188.
- [86] H. Georgi, *Effective field theory*, Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. **43** (1993) 209–252.
- [87] A. Grozin, *Heavy quark effective theory*, Springer Tracts Mod.Phys. **201** (2004) 1–213.
- [88] T. Becher, A. Broggio, and A. Ferroglia, *Introduction to Soft-Collinear Effective Theory*, arXiv:1410.1892 [hep-ph].

- [89] J. R. Ellis, M. K. Gaillard, and D. V. Nanopoulos, *A Phenomenological Profile of the Higgs Boson*, Nucl.Phys. **B106** (1976) 292.
- [90] M. A. Shifman, A. Vainshtein, M. Voloshin, and V. I. Zakharov, *Low-Energy Theorems for Higgs Boson Couplings to Photons*, Sov.J.Nucl.Phys. **30** (1979) 711–716.
- [91] K. Hagiwara and H. Murayama, *Multiple weak boson production via gluon fusion*, Phys.Rev. **D41** (1990) 1001.
- [92] B. A. Kniehl and M. Spira, *Low-energy theorems in Higgs physics*, Z.Phys. **C69** (1995) 77–88, arXiv:hep-ph/9505225 [hep-ph].
- [93] V. Spiridonov, *Anomalous Dimension of g^{**2} (Muon-neutrino) and Beta Function*, .
- [94] T. Inami, T. Kubota, and Y. Okada, *Effective Gauge Theory and the Effect of Heavy Quarks in Higgs Boson Decays*, Z.Phys. **C18** (1983) 69.
- [95] A. Djouadi, M. Spira, and P. Zerwas, *Production of Higgs bosons in proton colliders: QCD corrections*, Phys.Lett. **B264** (1991) 440–446.
- [96] K. Chetyrkin, B. A. Kniehl, and M. Steinhauser, *Hadronic Higgs decay to order α_s^{**4}* , Phys.Rev.Lett. **79** (1997) 353–356, arXiv:hep-ph/9705240 [hep-ph].
- [97] Y. Schroder and M. Steinhauser, *Four-loop decoupling relations for the strong coupling*, JHEP **0601** (2006) 051, arXiv:hep-ph/0512058 [hep-ph].
- [98] K. Chetyrkin, J. H. Kühn, and C. Sturm, *QCD decoupling at four loops*, Nucl.Phys. **B744** (2006) 121–135, arXiv:hep-ph/0512060 [hep-ph].
- [99] C. Anastasiou, C. Duhr, F. Dulat, E. Furlan, T. Gehrmann, *et al.*, *Higgs boson gluon–fusion production at threshold in N^3LO QCD*, Phys.Lett. **B737** (2014) 325–328, arXiv:1403.4616 [hep-ph].
- [100] F. Herzog and B. Mistlberger, *The Soft-Virtual Higgs Cross-section at N^3LO and the Convergence of the Threshold Expansion*, arXiv:1405.5685 [hep-ph].