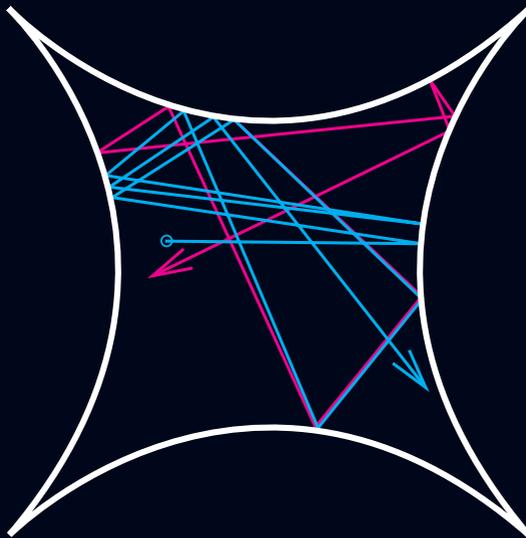


BAND 11 | SPEKTRUM DER LICHTTECHNIK

THERESA BONENBERGER

# LED FARBMISCHUNG MIT CHAOTISCHEN LICHTLEITERN





Theresa Bonenberger

**LED Farbmischung mit chaotischen Lichtleitern**

Lichttechnisches Institut  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

# **LED Farbmischung mit chaotischen Lichtleitern**

von  
Theresa Bonenberger

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, 2015  
Referenten: Prof. Dr. Cornelius Neumann, Prof. Dr. Wilhelm Stork

#### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark of Karlsruhe  
Institute of Technology. Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding the cover, pictures and graphs – is licensed  
under the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 DE License  
(CC BY-SA 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>*



*The cover page is licensed under the Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 3.0 DE License (CC BY-ND 3.0 DE):  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/de/>*

Print on Demand 2016

ISSN 2195-1152

ISBN 978-3-7315-0480-1

DOI: 10.5445/KSP/1000051748





# LED FARBMISCHUNG MIT CHAOTISCHEN LICHTLEITERN

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTOR-INGENIEURS  
von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik  
des Karlsruher Instituts für Technologie  
genehmigte  
DISSERTATION  
von

M.Sc. Theresa Susanne Bonenberger  
geb. in Tettngang

Tag der mündlichen Prüfung: 17.12.2015

Hauptreferent: Prof. Dr. Cornelius Neumann

Korreferent: Prof. Dr. Wilhelm Stork



# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1	Ziele der Arbeit.....	4
1.2	Gliederung der Arbeit.....	4
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b> .....	<b>7</b>
2.1	Geometrische Optik.....	7
2.2	Raytracing.....	9
2.3	Lichtverteilungen.....	11
2.4	Spektren von Licht emittierenden Dioden.....	13
<b>3</b>	<b>Optische Systeme zur LED Farbmischung – Stand der Technik</b> .....	<b>17</b>
3.1	Definitionen und Anforderungen.....	17
3.2	Stand der Technik.....	22
3.2.1	Nichtabbildende Elemente.....	22
3.2.2	Abbildende Elemente.....	40
3.3	Zusammenfassung.....	46
<b>4</b>	<b>Gütekriterium zur Bewertung von optischen Mischsystemen</b> .....	<b>49</b>
4.1	Kriterienauswahl.....	49
4.2	Methode.....	54
4.3	Anwendungsbeispiel.....	60
4.4	Zusammenfassung.....	63

<b>5</b>	<b>Analyse optischer Farbmischsysteme</b> .....	<b>67</b>
5.1	Farbmischung mit dispergierenden Elementen.....	67
5.1.1	Grundkonzept.....	67
5.1.2	Effizienz .....	72
5.1.3	Farbmischung .....	74
5.1.4	Optimierungsansatz.....	82
5.2	Farbmischung mit lichtleitenden Elementen.....	85
5.2.1	Grundkonzept.....	85
5.2.2	Effizienz .....	89
5.2.3	Farbmischung .....	91
5.2.4	Optimierungsansatz.....	103
5.3	Zusammenfassung .....	103
<b>6</b>	<b>Chaotische Farbmischstäbe</b> .....	<b>107</b>
6.1	Grundlagen chaotischer Billards.....	107
6.1.1	Deterministisches Chaos und mathematische Billards .....	108
6.1.2	Lyapunov Exponent.....	110
6.1.3	Ausführungsformen chaotischer Billards .....	114
6.2	Charakterisierung der Sensitivität chaotischer Billards .....	119
6.2.1	Berechnungsmethode des Lyapunov Exponenten für chaotische Billards .....	119
6.2.2	Sensitivität von Sinai-Billards.....	123
6.2.3	Sensitivität von Bunimovich-Billards.....	128

6.3	Anwendung chaotischer Billards auf den Lichtleiterquerschnitt .....	134
6.3.1	Grundkonzept .....	134
6.3.2	Farbmischung .....	136
6.4	Ausführungsbeispiel .....	157
6.4.1	Beschreibung .....	158
6.4.2	Simulationsergebnisse .....	160
6.4.3	Messergebnisse und Diskussion .....	165
6.5	Zusammenfassung .....	175
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>179</b>
7.1	Zusammenfassung .....	179
7.2	Ausblick .....	183
<b>I.</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>185</b>
Anhang A:	Weitere chaotische Farbmischstäbe .....	185
A.1	Chaotische Mischstäbe mit 100 mm Länge .....	185
A.2	Dispersiver Mischstab mit verbotener Zone .....	191
A.3	Gekrümmter Farbmischstab .....	192
A.4	Konischer Farbmischstab .....	194
Anhang B:	Lineares Fehlerwachstum .....	195
<b>II.</b>	<b>Abkürzungsverzeichnis .....</b>	<b>199</b>
<b>III.</b>	<b>Formelzeichen .....</b>	<b>201</b>
<b>IV.</b>	<b>Veröffentlichungen .....</b>	<b>205</b>
<b>V.</b>	<b>Danksagung .....</b>	<b>207</b>
<b>VI.</b>	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>209</b>



# Kapitel 1

## EINLEITUNG

Die Licht emittierende Diode, kurz LED, ist in vielen Anwendungsfeldern des modernen Alltags nahezu allgegenwärtig. Sie ist zum Beispiel als Blitzlicht in jedem Smartphone integriert, und sie ist im Automobil ebenso anzutreffen wie in der modernen Straßenbeleuchtung. Ein technologischer Durchbruch in der LED-Forschung gelang den japanischen Wissenschaftlern I. Akasaki, H. Amano und S. Nakamura in den frühen Neunzigerjahren mit der Entwicklung der blauen LED [1], [2], wofür die Wissenschaftler 2014 den Physik-Nobelpreis erhielten. Bereits in den frühen Sechzigerjahren wurde die rote LED entwickelt, wenig später folgte die grüne, die orange und die gelbe LED [3]. Doch erst mit der Entwicklung der blauen LED eröffnete sich die Möglichkeit mit LEDs durch Farbmischung weißes Licht zu erzeugen. Damit war der Grundstein gelegt, herkömmliche Leuchtmittel wie die Glühlampe zu ersetzen.

Grundlegende Voraussetzung zur Erzeugung von weißem Licht ist die Mischung des Lichtes unterschiedlicher Wellenlängen der verschiedenfarbigen LEDs. Eine derzeit häufig genutzte Möglichkeit zur Erzeugung von weißem LED-Licht ist die Kombination einer blauen LED mit einer gelben Phosphor-Leuchtschicht, die einen Teil des blauen Lichts in gelbes Licht umwandelt und so als Mischung weißes Licht ergibt. Eine weitere Möglichkeit bietet die Kombination des

Lichts einer roten, einer grünen und einer blauen LED. Dieses Vorgehen erfordert jedoch ein optisches Mischsystem, welches den Strahlungsfluss aller farbigen LEDs so durchmischt, dass homogenes weißes Licht entsteht. Da die Kombination aus blauer LED und Phosphorschicht ohne optisches Mischsystem realisierbar ist, wird zur Erzeugung von weißem Licht häufig auf dieses Verfahren zurückgegriffen. Ein Nachteil hierbei sind jedoch Einbußen in der Effizienz, bedingt durch die Konvertierung der Wellenlängen [4]. Diese Verluste treten bei Verwendung eines effizienten, optischen Systems zur Mischung einer roten, grünen und blauen LED nicht auf. Neben dem primären Ziel der Erzeugung von weißem Licht, bietet darüber hinaus die Verwendung eines optischen Systems zur Mischung von mehrfarbigen LEDs eine Vielfalt weiterer Möglichkeiten, denn der gesamte Farbraum der verwendeten LEDs steht als Farbpalette für spezifische Einstellungen zur Verfügung.

Zu den Anwendungsfeldern zählen dabei *Mood Lighting*, therapeutische Anwendungen, Projektionsbeleuchtung, Theaterbeleuchtung und des Weiteren Beleuchtungssysteme, die sich am Biorhythmus des Menschen orientieren. Der englische Begriff *Mood Lighting* ist zwischenzeitlich zum Synonym für stimmungsvolle Beleuchtung geworden, die zum Beispiel in Hotelbars Einsatz findet. Die Wirkung von Licht auf den Menschen und dessen zirkadianes System gewinnt mit der LED Technologie zunehmend an Bedeutung. So zeigen Studien den Einfluss von blauem Licht sowohl auf die Produktion von Melatonin [5], [6] als auch die Konzentrationsfähigkeit [7]. Mit optischen Farbmischsystemen kann das Spektrum gezielt auf den Menschen angepasst werden um auf diese Weise seinen Biorhythmus

positiv zu unterstützen. Weitere Studien befassen sich mit der Unterstützung von demenzkranken Patienten durch richtige Beleuchtung [8], und lassen optische Mischsysteme auch für therapeutische Anwendungen interessant werden. Wegen der Kompaktheit und der großen spektralen Bandbreite werden auch in der Projektions- [9] und der Theaterbeleuchtung [10] herkömmliche Leuchtmittel durch LEDs ersetzt.

Alle bisher beschriebenen Anwendungen benötigen optische Systeme zur LED Farbmischung, die bestimmte Anforderungen erfüllen müssen. Zentrale Forderungen sind hierbei eine hohe Effizienz, ein kleiner Bauraum und die Erzeugung von homogen durchmischem Licht ohne Farbränder oder Farbschatten. Zur Realisierung optischer Farbmischsysteme gibt es verschiedene Ansätze wie die Verwendung von Lichtleitern, Beugungsgittern, Mattscheiben, dichroitischen Filtern und Mikrolinsenarrays. Unter allen genannten Ansätzen ist jedoch kein optisches Farbmischsystem, welches die spezifischen Vorteile der LED-Technologie nutzt und damit Effizienz, gezielte Lichtformung, kleine Dimensionen und Farbhomogenität vereint.

## 1.1 ZIELE DER ARBEIT

Die zentrale Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer systematischen Methodik zur effizienten und homogenen Mischung des Strahlungsflusses verschiedenfarbiger LEDs<sup>1</sup> in Orts- und Winkelraum. Im Mittelpunkt steht hierbei die Anwendung der Prinzipien des deterministischen Chaos zur LED Farbmischung.

## 1.2 GLIEDERUNG DER ARBEIT

In Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit werden die zum weiteren Verständnis relevanten theoretischen Grundlagen zu den Themenbereichen Geometrische Optik, *Raytracing*, Lichtverteilungen und LED-Spektren vorgestellt.

Kapitel 3 bietet, nach einer Definition der Anforderungen an ein Farbmischsystem, eine detaillierte Auswertung der Literatur zu den verschiedenen Farbmischmethoden. Es folgt eine Beschreibung jeder Methode, ergänzt durch die Darstellung des aktuellen Stands der Technik, um abschließend eine Übersicht zu Potential und Grenzen der jeweiligen Methodik zu geben.

Um eine vergleichende Bewertung von Farbmischsystemen vornehmen zu können, ist ein Kriterium notwendig, das es erlaubt, für die unterschiedlichen optischen Mischsysteme eine quantitative Aussage

---

<sup>1</sup> ‚Farbmischung des Strahlungsflusses verschiedenfarbiger LEDs‘ wird im weiteren Text verkürzt wiedergegeben mit ‚Farbmischung unterschiedlicher LEDs

---

über die Güte der Durchmischung zu treffen. Dieses Gütekriterium wird in Kapitel 4 vorgestellt.

Rückblickend auf die in Kapitel 3 vorgestellten Systeme, werden in Kapitel 5 zwei Farbmischsysteme mit dem größten Optimierungspotential für eine detaillierte Analyse ausgewählt – die dispergierenden und die lichtleitenden Farbmischsysteme. Weiterhin wird in Kapitel 5 ein Optimierungsansatz für dispergierende Farbmischsysteme erläutert. Ein Optimierungsansatz für lichtleitende Farbmischsysteme, der eine neue Farbmischmethodik darstellt, wird im darauffolgenden Kapitel ausführlich erläutert.

Eine neue Methodik der Farbmischung mit lichtleitenden Elementen als zentraler Forschungsgegenstand dieser Arbeit, wird in Kapitel 6 vorgestellt. Sie basiert auf der Theorie des deterministischen Chaos, deren notwendige Grundlagen mit Fokus auf chaotische Billardsysteme erläutert werden. Im Anschluss daran wird die Anwendung ausgewählter Billardsysteme auf den Lichtleiterquerschnitt beschrieben. Die neue Methodik zur Farbmischung wird durch Simulation und Messergebnisse eines Ausführungsbeispiels bewertet.

Abschließend beinhaltet Kapitel 7 die Zusammenfassung zu den Ergebnissen der Arbeit und einen Ausblick auf mögliche weiterführende wissenschaftliche Untersuchungen.



## Kapitel 2

# GRUNDLAGEN

### 2.1 GEOMETRISCHE OPTIK

Die geometrische Optik vernachlässigt den Wellencharakter von Licht und beschreibt es mit Hilfe des Strahlenmodells. Wenn die Wellenlänge gegenüber den Abmessungen der Komponenten des optischen Systems vernachlässigbar klein ist, kann die Lichtausbreitung mit der Näherung der geometrischen Optik beschrieben werden. Hierbei kann Licht als Strahl angenommen werden, mit einer Ausbreitungsrichtung senkrecht zur jeweiligen Wellenfront. In einem homogenen Medium breitet sich der Lichtstrahl geradlinig von einer Quelle aus. An der Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien findet eine Richtungsänderung des Lichtstrahls statt. Die Beschreibung der Richtungsänderung erfolgt auf Grundlage des Brechungs- und des Reflexionsgesetzes [11].

Wird ein Lichtstrahl an der Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien reflektiert, so verbleibt der Lichtstrahl nach der Reflexion im ursprünglichen Medium. Dabei ist der Reflexionswinkel  $\beta'$  über das Reflexionsgesetz  $\beta = -\beta'$  mit dem Einfallswinkel  $\beta$  verknüpft, gemessen gegen die Flächennormale. Bei der Lichtbrechung breitet sich ein Lichtstrahl beim Übergang von einem homogenen Medium mit dem Brechungsindex  $n$  in ein anschließendes homogenes Medium mit

dem Brechungsindex  $n'$  mit dem Winkel  $\varepsilon'$  zum Lot hin aus. Dies erfolgt nach dem Snelliuschen Brechungsgesetz gemäß Gleichung (2.1).

$$n \cdot \sin \beta = n' \cdot \sin \beta' \quad (2.1)$$

Daraus ergibt sich, dass beim Übergang vom optischen dichteren zum optisch dünneren Medium ( $n > n'$ ) der Strahl vom Lot weg gebrochen wird. Bei Umkehrung des Lichtwegs wird der Strahl zum Lot hin gebrochen. Folglich werden Strahlen beim Übergang vom optisch dichten zum optisch dünneren Medium mit einem Brechungswinkel größer als der Einfallswinkel gebrochen. Ein kritischer Einfallswinkel wird für den Brechungswinkel  $\beta' = 90^\circ$  erreicht, woraus sich der Grenzwinkel der Totalreflexion  $\beta_g$  nach Gleichung (2.2) ergibt. Für Einfallswinkel größer dem Grenzwinkel der Totalreflexion werden Strahlen total reflektiert, was von großer Bedeutung für die Ausbreitung von Licht in Lichtleitern ist [11].

$$\beta_g = \arcsin\left(\frac{n}{n'}\right) \quad (2.2)$$

Für die Berechnung der Lichtausbreitung ist das Reflexions- und Brechungsgesetz in seiner vektoriellen Form oft ausreichend und die Grundlage für das *Raytracing*. Dabei werden Flächenlagen bezüglich des einfallenden Lichtstrahls durch die Richtung der Flächennormalen  $\vec{n}_{norm}$  im Auftreffpunkt charakterisiert, und Strahlrichtungen durch Richtungsvektoren  $\vec{u}$  bzw.  $\vec{u}'$  beschrieben. Die mathematische Formulierung des vektoriellen Brechungsgesetzes ist in Gleichung (2.3) dargestellt, woraus mit  $n' = -n$  die vektorielle Form des Reflexionsgesetzes hervorgeht, dargestellt in Gleichung (2.4) [12].

$$n(\vec{u} \times \vec{n}_{norm}) = n'(\vec{u}' \times \vec{n}_{norm}) \quad (2.3)$$

$$\vec{u} \times \vec{n}_{norm} = \vec{u}' \times \vec{n}_{norm} \quad (2.4)$$

Erweitert man diese grundlegenden Gesetze und betrachtet Licht als elektromagnetische Welle führt dies zu den Fresnelschen Gleichungen. Diese geben an, welcher Bruchteil der einfallenden Lichtenergie an der Grenzfläche zwischen zwei Medien transmittiert oder reflektiert wird, und zwar in Abhängigkeit vom Einfallswinkel, von den Brechungsindices und der Licht-Polarisation [11]. Die Gleichungen können der Literatur entnommen werden [11], [13], [12]. Zur Abschätzung des Transmissionsgrads von spiegelnden oder reflektierenden optischen Komponenten müssen die Fresnelschen Gleichungen berücksichtigt werden. Beispielsweise definiert sich die Effizienz eines Lichtleiters mit totalreflektierenden Mantelflächen hauptsächlich durch die Fresnelschen Reflexionsverluste an Ein- und Austrittsfläche des Lichtleiters. Die in der vorliegenden Arbeit verwendete *Raytracing* Software ASAP (erläutert in folgendem Abschnitt) stellt die Gleichung bereits implementiert zur Verfügung und ermöglicht dem Benutzer die Option einer Berücksichtigung beziehungsweise Nichtberücksichtigung der Fresnelschen Reflexionsverluste.

## 2.2 RAYTRACING

Der englische Begriff *Raytracing* beschreibt die Berechnung des Transfers von Strahlen durch ein optisches System. Dabei wird zwischen sequentiell und nicht-sequentiell *Raytracing* unterschieden.

Das sequentielle *Raytracing* beschreibt die Strahlverfolgung durch eine feststehende Reihenfolge an optischen Komponenten. Das heißt jeder Strahl eines Strahlenbündels verläuft auf demselben optischen Pfad und interagiert mit jeder Oberfläche nur einmal. Dieses Verfahren wird aufgrund seiner geringen Rechenzeit insbesondere für das Auslegen von Systemen in der abbildenden Optik verwendet. Für Systeme der nichtabbildenden Optik, oder bei der Berechnung von Streulicht, wird das Verfahren des nicht-sequentiellen *Raytracings* angewandt.

Nicht-sequentiell bedeutet, dass die Reihenfolge der optischen Komponenten nicht festgelegt ist und der *Raytracing*-Algorithmus alle Oberflächen auf eine mögliche Interaktion zwischen Strahl und Oberfläche überprüft. Das heißt ein Strahl kann mehrmals mit einer Oberfläche interagieren, was zum Beispiel in einem Lichtleiter zutrifft. Numerisch bedeutet dies, dass der *Raytracing* Algorithmus alle Schnittpunkte des Strahls und der Oberflächen berechnet, um dann den am nächsten liegenden Schnittpunkt auszuwählen und von dort die Strahlverfolgung fortzusetzen. Dementsprechend ist die Durchführung einer nicht-sequentiellen Strahlverfolgung sehr rechenintensiv [13].

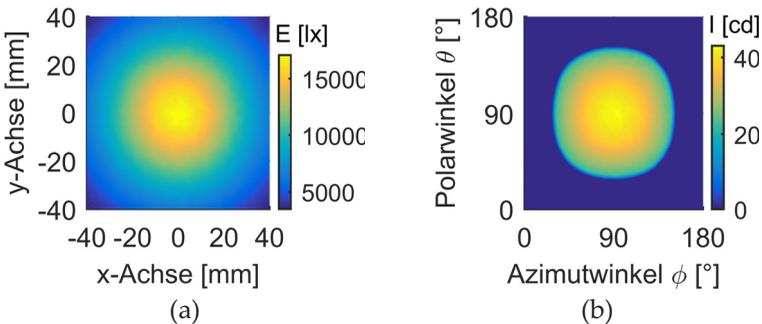
In der vorliegenden Arbeit wird dafür die Optikdesign Software ASAP (engl.: *Advanced Systems Analysis Program*) der Firma Breault Research Organisation [14] genutzt, welche auf nicht-sequentiell *Raytracing* basiert. Die Software vereint geometrische Optik und Wellenoptik und ermöglicht die Auslegung und detaillierte Analyse eines optischen Systems.

## 2.3 LICHTVERTEILUNGEN

Die hier relevanten lichttechnischen Grundbegriffe können der Literatur [15], [16], [17] entnommen werden. Der Begriff Lichtverteilungen umfasst in dieser Arbeit die Verteilung der Beleuchtungsstärke im Ortsraum und die Verteilung der Lichtstärke im Winkelraum. Die Beleuchtungsstärkeverteilung beschreibt die Verteilung des Lichtstroms  $\Phi$  über der Fläche  $A$  nach Gleichung (2.5), mit der Einheit Lux. Eine beispielhafte Darstellungsform über den kartesischen Koordinaten ist in Abbildung 2.1 (a) gezeigt.

$$E = \frac{d\Phi}{dA} \quad (2.5)$$

Die Lichtstärkeverteilung beschreibt die Verteilung des Lichtstrom  $\Phi$  über dem Raumwinkel  $\Omega$  nach Gleichung (2.6), mit der Einheit Candela. Eine beispielhafte Darstellungsform über den Polarkoordinaten ist in Abbildung 2.1 (b) gezeigt.

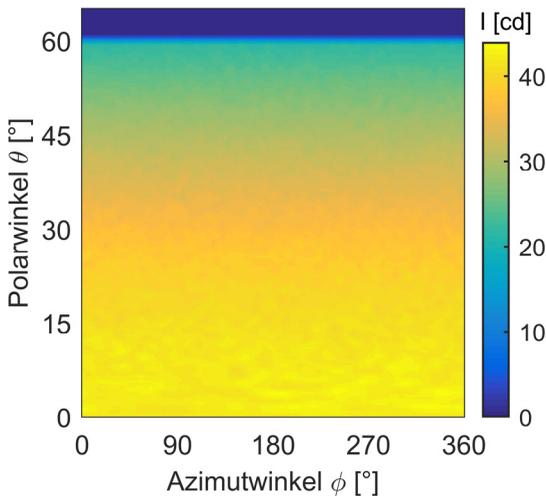


**Abbildung 2.1:** Beispielhafte Darstellung einer (a) Beleuchtungsstärkeverteilung und (b) einer Lichtstärkeverteilung

Hier handelt es sich um die gebräuchlichste Darstellungsform mit der  $+x$ -Achse als Polarachse, was die Definition des Azimutwinkels (der Winkel um die  $x$ -Achse) von der  $+y$ -Achse in Richtung der  $+z$ -Achse impliziert.

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (2.6)$$

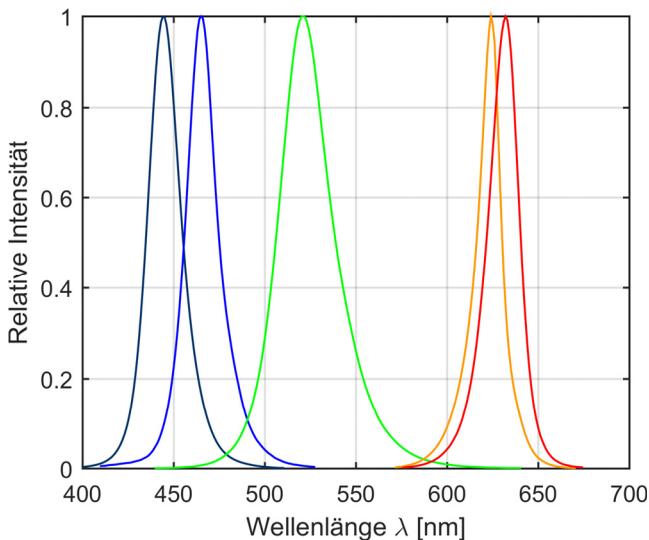
In der vorliegenden Arbeit wird aus Gründen der Vergleichbarkeit zweier Lichtstärkeverteilungen zusätzlich eine alternative Darstellungsform verwendet mit der optischen  $+z$ -Achse als Polarachse, womit sich der Azimutwinkel von der  $+x$ -Achse in Richtung der  $+y$ -Achse definiert. Diese Form der Darstellung ist in Abbildung 2.2 gezeigt für dieselbe Lichtstärkeverteilung wie in Abbildung 2.1 (b).



**Abbildung 2.2:** Beispielhafte Darstellung einer Lichtstärkeverteilung mit der optischen  $z$ -Achse als Polarachse

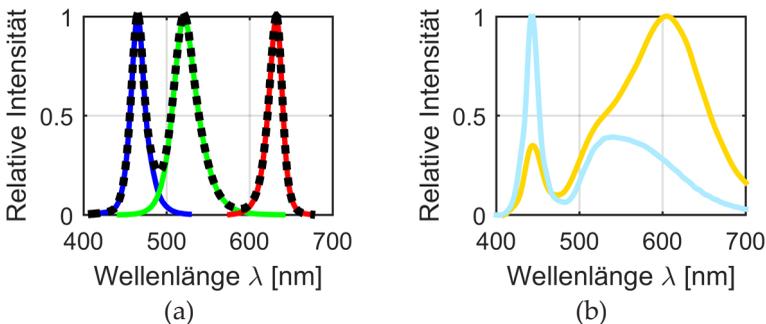
## 2.4 SPEKTREN VON LICHT EMITTIERENDEN DIODEN

LEDs (Licht emittierende Dioden) sind auf Halbleiter basierende Lichtquellen, die in Abhängigkeit vom Halbleitermaterial einen schmalbandigen Wellenlängenbereich emittieren. Das Spektrum der LED wird häufig mit der Peak-Wellenlänge  $\lambda_P$  charakterisiert, jene Wellenlänge bei der die spektrale Intensität ihren Maximalwert besitzt. Abbildung 2.3 zeigt Spektren aus der LED Serie Oslon Black der Firma Osram [18] als Beispiel für typische LED-Spektren. Die Halbwertsbreite  $\Delta\lambda$  beschreibt den Wellenlängenbereich bei der relativen spektralen Intensität 50 % und liegt typischerweise bei  $\Delta\lambda = 30 \dots 60 \text{ nm}$  [19].



**Abbildung 2.3:** Beispielhafte LED Spektren aus der Serie Oslon Black der Firma Osram

Zur Erzeugung von weißem Licht mit LEDs gibt es zwei Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist das Mischen mehrerer verschiedenfarbiger LEDs, zum Beispiel rot, grün und blau, um durch additive Farbmischung weiß zu erhalten. Ein mögliches Spektrum einer solchen gemischten LED ist in Abbildung 2.4 (a) zu sehen, verwendet wurden hier drei Spektren aus der LED Serie Oslon [18]. Zum Mischen des Lichts von LEDs gibt es viele unterschiedliche Ansätze, die in dieser Arbeit untersucht und optimiert werden. Die alternative Möglichkeit ist das Beschichten einer blauen oder ultravioletten LED mit Phosphor um Teile des Lichts der LED in längere Wellenlängen umzuwandeln, mit dem Ergebnis eines weißen Spektrums. Details hierzu können der Literatur entnommen werden [3]. In Abhängigkeit von der Phosphorschicht können LEDs mit unterschiedlicher Farbtemperatur hergestellt werden, zum Beispiel warmweiße und kaltweiße LEDs, beides beispielhaft darstellt für zwei Spektren aus der Serie X-Lamp der Firma Cree in Abbildung 2.4 (b).



**Abbildung 2.4:** (a) gemischtes weißes Spektrum durch Mischen von RGB-LEDs; (b) warmweißes und kaltweißes Spektrum einer blauen LED mit einer Phosphorschicht

Beide Möglichkeiten zur Erzeugung von weißem Licht bieten verschiedene Vor- und Nachteile. Ein wichtiger Aspekt hinsichtlich optischer Systeme zur Farbmischung ist der Faktor Effizienz. Bei der Erzeugung von weißem Licht durch Mischen mehrerer LEDs mit einem optischen Mischsystem wird je nach System nicht alles eingekoppelte Licht transferiert und damit ein Energieverlust verursacht. Jedoch ist auch die Erzeugung von weißem Licht durch Umwandlung des kurzwelligen Lichts in langwelliges Licht, die sogenannte Stokes-Verschiebung, mit Energieverlusten verbunden [3], [4].



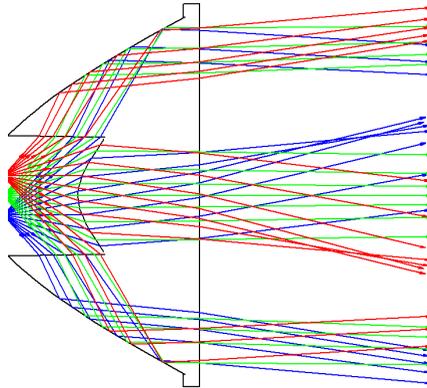
## Kapitel 3

# OPTISCHE SYSTEME ZUR LED FARBMISCHUNG – STAND DER TECHNIK

*Zur Durchmischung des Strahlungsflusses mehrerer LEDs gibt es verschiedene optische Systeme, welche die grundlegenden Elemente der Optik nutzen. Die Literatur bietet Analysen und Anwendungsbeispiele der verschiedenen Systeme. In diesem Kapitel werden im ersten Abschnitt die grundlegenden Anforderungen an ein optisches Farbmischsystem definiert. Anschließend folgt eine detaillierte Auswertung der Literatur.*

### 3.1 DEFINITIONEN UND ANFORDERUNGEN

Der Begriff ‚Mischen‘ als allgemeiner Terminus beschreibt den Vorgang zwei oder mehr Substanzen zusammenzuführen um Homogenität zu erreichen. In der Lichttechnik bezieht sich der Terminus Mischen auf die Zusammenführung des Strahlungsflusses mehrerer Lichtquellen um homogene Lichtverteilungen zu erhalten. Da LEDs abhängig vom jeweiligen Halbleitermaterial definierte Spektren an Wellenlängen emittieren, gewinnt die Farbmischung von LEDs unterschiedlicher Spektren zunehmend Bedeutung in der LED-Technologie. Durch das Mischen mehrerer LEDs kann eine Beleuchtung erzeugt werden, welche eine spektrale Verteilung aufweisen kann bis hin zur Abdeckung des gesamten sichtbaren Spektrums.



**Abbildung 3.1:** Beispiel für schlechte Farbmischung: Darstellung des Strahlengangs von drei LEDs bei einer Kollimation mit einem TIR-Kollimator

Die Notwendigkeit eines optischen Systems, welches eigens zur Mischung verschiedener LEDs ausgelegt wurde, zeigt sich bei der Verwendung einer gewöhnlichen TIR (engl.: *Total Internal Reflection*)-Kollimationsoptik<sup>2</sup>, welche lediglich zur Kollimation einer LED ausgelegt wurde. Hierzu ist in Abbildung 3.1 zur Verdeutlichung die Kollimation von drei LEDs mit einer TIR -Kollimationsoptik dargestellt. Die Trennung der LEDs im Ortsraum führt zu einer Trennung des Strahlungsflusses im Winkelraum. Zusätzlich verschlechtert sich

---

<sup>2</sup> Eine TIR (*Total Internal Reflection*)-Kollimationsoptik dient dazu, die Strahlen der in den gesamten Halbraum emittierenden LED auf einen kleinen Winkelbereich zu kollimieren. Die Optik besteht aus einem Vollmaterial wie PMMA und kollimiert die Strahlen der LED nahe zur optischen Achse durch eine Linse. Die von der optischen Achse weiter entfernten Strahlen werden durch das Prinzip Totalreflexion reflektiert.

die Farbmischung durch die inverse Trennung im Winkelraum, verursacht durch die Abbildungseigenschaften der Linse und der total-reflektierenden Fläche des Kollimators. Dies verursacht Farbschatten und Farbränder.

Ein optisches System zur Mischung mehrerer LEDs muss folglich die einzelnen LEDs im Ortsraum überlagern und dabei alle eingekoppelten LEDs im Winkelraum mischen, und zugleich das Spektrum jeder LED erhalten. An der Austrittsapertur des optischen Mischsystems findet sich dann eine ‚virtuelle LED‘, welche in Orts- und Winkelraum alle eingekoppelten Spektren idealerweise vollständig durchmischt abstrahlt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt. Die Abbildung hebt die drei elementaren Funktionen, welche ein optisches Farbmischsystem aufweisen muss, hervor.

Die erste Funktion, das Durchmischen des Strahlungsflusses der eingekoppelten LEDs im Winkelraum, lässt sich überprüfen anhand der Lichtstärkeverteilungsfunktion  $I(\theta, \phi)$  in Abhängigkeit der Polarkoordinaten  $\phi, \theta$ . In vielen Fällen werden LEDs gemischt, bei welchen die Lichtstärkeverteilungen gleich sind, was zum Beispiel auf eine Lambertsche<sup>3</sup> Abstrahlcharakteristik zutrifft. Dort gilt es die Lichtstärkeverteilungen zu erhalten und durch die zweite Funktion eines optischen Farbmischsystems, das Durchmischen im Ortsraum, nutzbar zu machen.

---

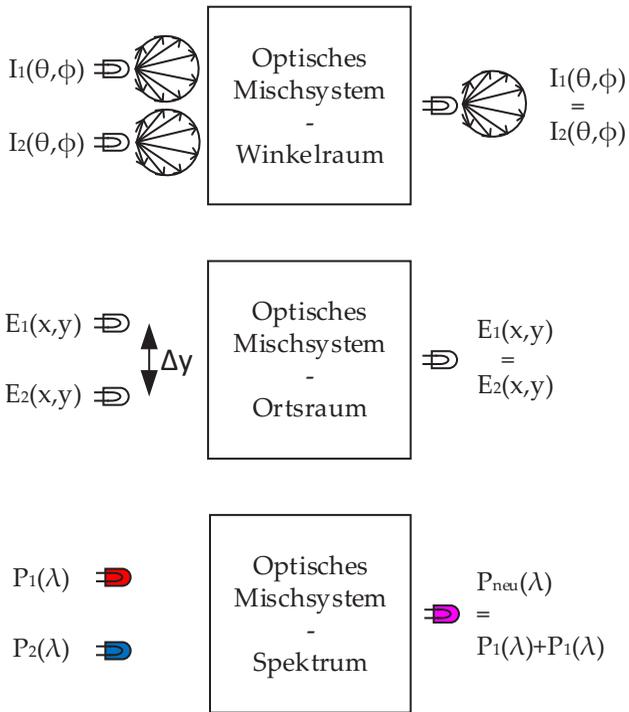
<sup>3</sup> Bei einer Lambertschen Abstrahlcharakteristik ist die Leuchtdichte über die betrachtete Fläche und den durchstrahlten Raumwinkel konstant [15].

Die Durchmischung im Ortsraum lässt sich anhand der Beleuchtungsstärkeverteilung  $E(x,y)$  in Abhängigkeit der Ortskoordinaten  $x,y$  auf einer Detektorfläche direkt hinter dem optischen Mischsystem überprüfen. Die Beleuchtungsstärkeverteilung der eingekoppelten LEDs ist bei der Einkopplung immer ungleich, bedingt durch die Trennung der LEDs im Ortsraum um den Abstand  $\Delta y$  zwischen den beiden LEDs.

Die dritte Funktion eines optischen Mischsystems ist die Mischung der eingekoppelten Spektren, beschrieben durch den Strahlungsfluss  $P(\lambda)$  in Abhängigkeit der Wellenlänge  $\lambda$ . Bei nicht dispergierenden<sup>4</sup> und nicht Wellenlängen filternden optischen Mischsystemen ist diese Funktion automatisch durch die ersten beiden Funktionen erfüllt. Bei dispergierenden und Wellenlängen filternden Mischsystemen ist die Durchmischung der Spektren jedoch nicht zwingend erfüllt. So kann beispielsweise bei der Verwendung von Farbfiltern jede LED im Ortsraum überlagert und im Winkelraum gemischt sein. Dennoch zeigt sich bei Betrachtung des Spektrums ein Wellenlängengradient über den Orts- bzw. Winkelkoordinaten.

---

<sup>4</sup> Dispergierende Mischsysteme wie zum Beispiel Dispersionsprismen oder Beugungsgitter führen zu einer spektralen Zerlegung des Lichts [12].



**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung der drei elementaren Funktionen eines Farbmischsystems: Die Mischung im Winkelraum, die Mischung im Ortsraum und die Mischung der Spektren

## 3.2 STAND DER TECHNIK

### 3.2.1 NICHTABBILDENDE ELEMENTE

Am häufigsten werden nichtabbildende Elemente zur Farbmischung verwendet. Teilweise werden sie kombiniert mit Linsensystemen, wie zum Beispiel ein Beugungsgitter mit Kollimatoren. Weiterhin werden nichtabbildenden Elemente miteinander kombiniert, wie zum Beispiel ein Lichtleiter mit einer Streuscheibe.

#### LICHTLEITENDE ELEMENTE

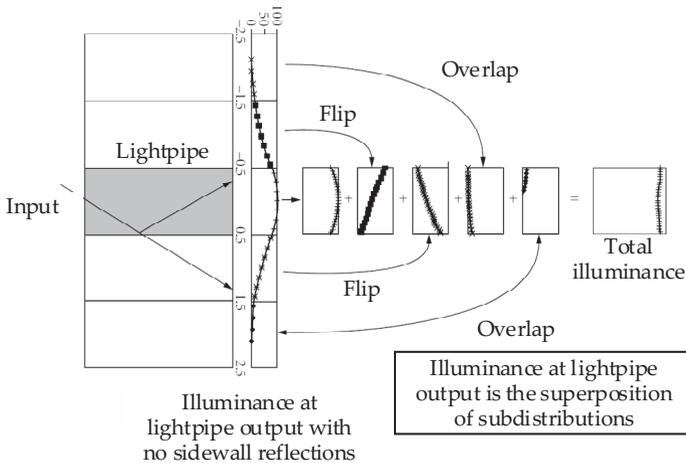
Lichtleiter sind eine verbreitete Methode für die Mischung einzelner Lichtquellen. Dabei handelt es sich um einen Körper, welcher Licht durch Vielfachreflexionen an den Begrenzungsflächen weiterleitet. Der Körper kann hohl sein und spiegelnde Begrenzungsflächen haben oder er kann aus Vollmaterial gefertigt sein wie Glas oder Polymethylmethacrylat (PMMA), bei dem die Lichtleitung durch Totalreflexion erfolgt. Generell weisen Systeme mit Lichtleitern drei Elemente auf: eine Lichtquelle, einen Lichtleiter und eine Lichtverteilungsoptik. Als Lichtquelle werden inzwischen meistens LEDs eingesetzt. Die Einkopplung kann direkt durch eine nahe Platzierung der Lichtquelle an der Lichtleitereintrittsseite erfolgen oder durch Verwendung einer zusätzlichen Optik, wie ein Reflektor oder eine Linse. Für die Lichtleitung selbst können unterschiedliche Materialien ge-

nutzt werden. Mit dem Anspruch die Verluste gering zu halten, insbesondere bei langen Lichtleiterdistanzen, eignet sich hier wegen der geringen Absorptionsverluste PMMA. Als Lichtverteilungsoptik kann direkt die Lichtleiteraustrittsfläche verwendet werden, es kann aber auch eine zusätzliche Verteilungsoptik eingesetzt werden. Häufig werden als Lichtleiterverteilungsoptiken Streuscheiben verwendet, um die vollständige Mischung im Winkelraum zu gewährleisten. Die Streuscheibe kann durch Anrauen der Austrittsfläche direkt am Lichtleiter angebracht werden oder aber durch ein zusätzliches Element. [20]

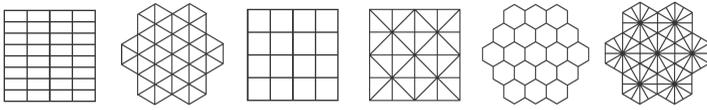
Mischstäbe sind eine spezielle Kategorie von Lichtleitern, deren Hauptaufgabe das Homogenisieren von Lichtverteilungen ist. Der Mischgrad hängt hauptsächlich von der Lichtleiterlänge, der Verteilung in Orts- und Winkelraum der eingekoppelten Quelle und der Querschnittsgeometrie des Lichtleiters ab. Durch die Vielfachreflexionen wird das Licht der eingekoppelten Lichtquellen durchmischt.

Für die Durchmischung im Ortsraum ist in Abbildung 3.3 ein Erklärungsansatz gezeigt. Dazu wird zunächst die Beleuchtungsstärkeverteilung auf einer Detektorfläche betrachtet, welche bei Entfernen des Lichtleiters entstehen würde. Diese Beleuchtungsstärkeverteilung wird in mehrere Unterregionen unterteilt. Durch die begrenzenden Lichtleiterflächen werden alle Unterregionen überlagert. Um dabei eine homogene Überlagerung zu erreichen, muss die Querschnittsfläche durch Spiegelung an der jeweiligen Kante die komplette Beleuchtungsstärkeverteilung, welche ohne Lichtleiter entstehen würde, abdecken. Solche Querschnittsgeometrien sind auch bekannt

unter dem Terminus ‚spiegelnde Kacheln‘. Querschnittsgeometrien, die ‚spiegelnde Kacheln‘ (engl: *mirrored tiling*) bieten, beinhalten unter anderem die Form eines Quadrats, eines Rechtecks, eines Hexagons und eines gleichseitigen Dreiecks und sind in ‚gekachelter‘ Form in Abbildung 3.4 dargestellt. Eine detaillierte Betrachtung des Mischprinzips sowie eine erläuternde Simulation ist in Kapitel 5.2.1 zu finden.



**Abbildung 3.3:** Flip-and-Fold-Ansatz im Gebrauch mit rechteckigen Lichtleitern: Durch Mehrfachreflexionen werden alle Unterregionen einer Beleuchtungsstärkeverteilung, die ohne Lichtleiter entstehen würde, überlagert. [17]



**Abbildung 3.4:** Querschnittsgeometrien in 'gekachelter' Form (engl.: *mirrored tiling*), welche nach einer gewissen Länge eine nahezu vollständige Durchmischung im Ortsraum bieten. [17]

Ein Zusammenhang zwischen der Querschnittsgeometrie und der Qualität der Farbmischung wird in verschiedenen Publikationen dargestellt. Viele Publikationen vergleichen quadratische und runde Querschnitte bezüglich der Farbmischung. Teilweise wird ausschließlich die Durchmischung im Ortsraum analysiert, indem die Beleuchtungsstärkeverteilung auf einer Detektorfläche an der Austrittsfläche des Lichtleiters simuliert oder gemessen wird. In manchen Publikationen wird auch die Durchmischung im Winkelraum analysiert und bewertet mittels einer Simulation oder Messung der Lichtstärkeverteilung an der Austrittsfläche des Lichtleiters.

Nach Gupta et al. [21] bieten quadratische Lichtleiter eine bessere Durchmischung im Ortsraum, während runde Lichtleiter eine bessere Durchmischung im Winkelraum bieten. Eine Aussage über die Durchmischung im Ortsraum wird durch den visuellen Vergleich der Grafiken der simulierten Beleuchtungsstärkeverteilungen auf einer Detektorfläche an der Austrittsfläche getroffen. Für die Aussage über die Durchmischung im Winkelraum werden die jeweiligen Lichtstärkeverteilungen mit einem Polarwinkel von  $-80^\circ < \theta < 80^\circ$  anhand der Grafiken verglichen. Jedoch liegt der Schwerpunkt der Publikation

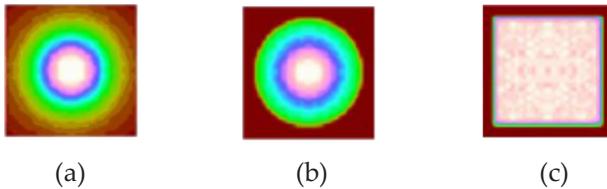
auf der Analyse des Lichttransfers im Lichtleiter durch das Konzept der ‚Hauptschnitte‘ (engl.: *principal sections*).

Zhao et al. [22] konzentriert sich dagegen auf die Analyse der Farbmischung bezüglich quadratischer und runder Querschnitte von Lichtleitern mit Ergebnissen, die einer Vielzahl anderer Publikationen, unter anderem der von Gupta et al., widersprechen. Laut Zhao et al. ist die Durchmischung im Ortsraum für runde und für quadratische Lichtleiter schlecht. Dieses Ergebnis wird durch Simulation und Messung gezeigt. Eine Ursache für Widersprüche zu anderen Publikationen ist in der Wahl der Messmethoden zu vermuten. Zur Bestimmung der Durchmischung im Ortsraum wird die Beleuchtungsstärkeverteilung auf einer zum Lichtleiter entfernten Detektorfläche mit einem CCD-(engl. *Charge-coupled device*) Kamera System gemessen. Viele andere Publikationen betrachten die Beleuchtungsstärken auf einem Detektor, welcher direkt hinter dem Lichtleiter platziert ist. Somit kann die Aussage der schlechten Durchmischung im Ortsraum von Zhao et al. auf eine schlechte Durchmischung im Winkelraum übertragen werden, was wiederum mit den Aussagen anderer Publikationen übereinstimmt.

Die Ergebnisse von Cheng et al. [23] bestätigen die Ergebnisse von Gupta et al. Durch eine analytische und numerische Untersuchung der Beleuchtungsstärkeverteilung bei Verformung des Lichtleiters von einer runden Querschnittsfläche zu einer quadratischen wird gezeigt, dass die Durchmischung im Ortsraum für quadratische Lichtleiter besser ist, und sich bei runden Lichtleitern Maxima in der Beleuchtungsstärkeverteilung bilden. Diese Aussage wird anhand des

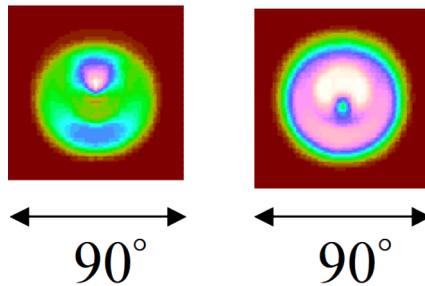
visuellen Vergleichs der Grafiken der Beleuchtungsstärkeverteilungen getroffen, und zudem bestätigt durch die Berechnung der Abweichung der Beleuchtungsstärken für eine gewisse Detektorauflösung zur mittleren Beleuchtungsstärke.

Auch Cassarly et al. [24], [25] bestätigt eine homogene Beleuchtungsstärkeverteilung am Lichtleiterausgang für Lichtleiter mit einer quadratischen Querschnittsfläche. Dagegen führen runde Lichtleiterquerschnitte zu Maxima in der Beleuchtungsstärkeverteilung, deren Darstellung und Beurteilung hauptsächlich anhand der simulierten Beleuchtungsstärkeverteilung auf eine Detektorfläche erfolgen. Abbildung 3.5 (a) stellt die Beleuchtungsstärkeverteilung an der Eintrittsfläche eines Lichtleiters dar, während Abbildung 3.5 (b) und (c) die Beleuchtungsstärkeverteilung an der Austrittsseite eines runden und eines quadratischen Farbmischstabs zeigen.



**Abbildung 3.5:** Beleuchtungsstärkeverteilung an der (a) Eintrittsfläche eines Farbmischstabs, (b) Austrittsfläche eines runden Farbmischstabs und (c) Austrittsfläche eines quadratischen Farbmischstabs. [25]

In seiner Publikation ‚Nicht-rotationssymmetrische Mischstäbe‘ [24] zeigt Cassarly wie geriffelte Strukturen auf der Lichtleitermantelfläche zur Verbesserung der Mischung in Orts- und Winkelraum führen. Explizit geht Cassarly auf die Mischung von vier verschiedenfarbigen LEDs ein und zeigt die Lichtstärkeverteilung für einen runden Lichtleiter und des Weiteren einen runden Lichtleiter mit geriffelten Strukturen, siehe Abbildung 3.6. Als Lichtleiter wird hierbei ein konischer (englisch: *tapered*) Lichtleiter<sup>5</sup> verwendet. Anhand des visuellen Vergleichs der Grafiken der Lichtstärkeverteilungen trifft er die Aussage, dass runde Lichtleiter mit einer geriffelt strukturierten Mantelfläche die Farbe im Winkelraum besser durchmischen. Auch die Durchmischung im Ortsraum wird durch geriffelte Strukturen auf einem runden Lichtleiter wesentlich verbessert.



**Abbildung 3.6:** Lichtstärkeverteilungen nach dem Transfer durch einen konischen Lichtleiter<sup>5</sup> mit einer runden Querschnittsfläche (links) und einer runden Querschnittsfläche mit geriffelter Struktur (rechts). [24]

---

<sup>5</sup> Ein konischer Lichtleiter wird verwendet zur Transformation eines großen Abstrahlwinkels hin zu einem kleineren Abstrahlwinkel. Dazu wird die Fläche des Querschnitts mit zunehmender Länge vergrößert.

Ein weiterer wichtiger Aspekt in dieser Publikation ist die Einkopplungstoleranz. Bei Lichtleitern mit geriffelten Strukturen ist die Qualität der Mischung im geringeren Maße von der Positionierung der einzukoppelnden LEDs abhängig, als bei Lichtleitern ohne geriffelt strukturierte Mantelfläche. Des Weiteren gibt Cassarly eine Zusammenfassung zu erzielten Fortschritten in der Gestaltung von Mischstäben. Er erstellt einen Vergleich von runden, ovalen und quadratischen Lichtleitern mit und ohne geriffelte Mantelflächen. Die Güte der Durchmischung einer Multichip LED im Ortsraum mit einem konischen Lichtleiter wird quantifiziert durch Berechnung der Farbortabstände  $\Delta u'v'$  auf einer Detektorfläche an der Lichtaustrittsseite und der Standardabweichung  $2\sigma_{u'v'}$ . Als Bezugsfarbkoordinaten werden die durchschnittlichen Farbkoordinaten auf der Detektorfläche verwendet. Das Ergebnis für einen konischen Lichtleiter mit einer Länge von 20 mm, einer Lichteintrittsfläche von 2.2 mm<sup>2</sup> und einer Lichtaustrittsfläche von 6.6 mm<sup>2</sup> ist  $\Delta u'v' + 2\sigma_{u'v'} = 0.003$ . Zudem wird die Durchmischung im Winkelraum im Detail analysiert. Grundsätzlich stellt er die Abhängigkeit der Durchmischung von der Einkopplungsposition fest. Wird eine Lichtquelle dezentriert zum Lichtleiter eingekoppelt, so zeigt sich der sogenannte Kaleidoskopeffekt, eine Lichtstärkeverteilung von Maxima im Wechsel mit Regionen ohne Lichtstrom. Diese schlechte Durchmischung im Winkelraum kann verbessert werden durch Verwendung von Streuscheiben.

Einen anderen Ansatz zur Optimierung der Durchmischung bietet Deller et al. [26], [27] durch Polymer dotierte Mischstäbe, welche aus einem runden PMMA Mischstab und einer angeklebten TRIMM Streuscheibe (engl.: *Transparent refractive index matched micro particle*)

bestehen. Die Streuscheibe ist gezielt auf hohe Effizienz optimiert, denn die Verwendung der TRIMM-Partikel verursacht wenig Rückstreuung. Die Mischung im Ortsraum wird in Simulation und Messung anhand der Beleuchtungsstärkeverteilung auf einer mattierten Glasscheibe in 15 cm Entfernung zum Lichtleiterausgang beurteilt sowie der Homogenität der Verteilung der  $x$ ,  $y$ -Farbkoordinaten über der Glasscheibe. Die Ergebnisse zeigen eine verbesserte Durchmischung für den Lichtleiter mit TRIMM-Streuscheibe.

Zusammenfassend ergibt die Literaturlauswertung über lichtleitende Elemente in Farbmischsystemen, dass eine homogene Durchmischung im Ortsraum durch Lichtleiter mit verschiedenen Querschnittsgeometrien möglich ist. Die homogene Durchmischung im Winkelraum ist nur möglich durch den zusätzlichen Einsatz von Streuscheiben. Das große Potential von Lichtleitern aus Vollmaterial liegt bei der Verwendung zur Farbmischung in der hohen Effizienz, welche theoretisch nur reduziert wird durch die Fresnelschen Reflexionsverlusten an Ein- und Auskoppelfläche.

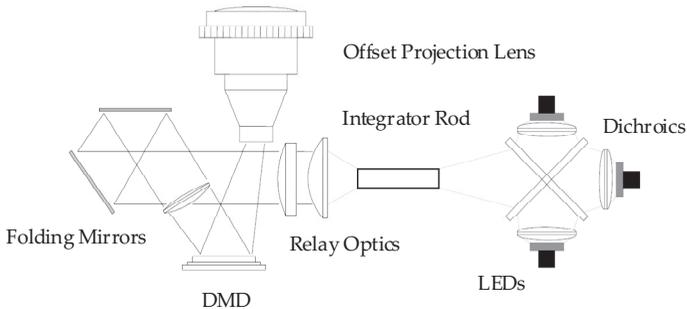
## **FILTERNDE ELEMENTE**

Dichroitische Filter oder auch Farbfilter werden in der Literatur auch als Interferenzfilter bezeichnet, im Folgenden jedoch dichroitische Filter genannt. Solche Filter sind aus dünnen Schichten aufgebaut, welche das einfallende Licht durch Interferenz wellenlängenabhängig transmittieren oder reflektieren. Das heißt die spektrale Zusammensetzung des Lichts ändert sich in Abhängigkeit von der Beschaffenheit der Schichten und dem Einfallswinkel [12].

Dichroitische Filter sind als Langpass, Kurzpass, und Bandpassfilter erhältlich. In Kombination mit einem optischen System können dichroitische Filter zur Farbmischung verwendet werden.

Häufig kommen die Filter in einer X-förmigen Anordnung zum Einsatz. Ein Beispiel dafür findet sich in einer Publikation von Roelandt et al. [28], in welcher die Entwicklung einer kompakten LED-Beleuchtungseinheit für DMD (engl.: *Digital Mirror Device*) - Projektionssysteme beschrieben wird. Roelandt analysiert unterschiedliche Konfigurationen eines Beleuchtungssystems mit dichroitischen Filtern in X-Anordnung für ein DMD-Projektionssystem.

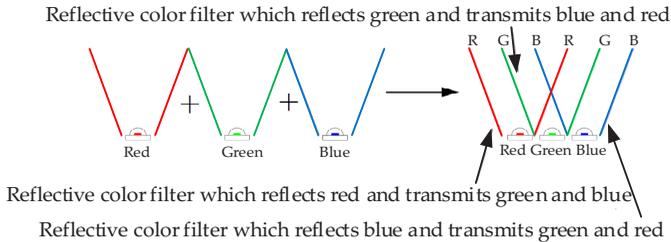
Die nicht telezentrische Konfiguration des Beleuchtungssystems ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Hierbei sei insbesondere hingewiesen auf die Verwendung eines Lichtleiters (engl.: *Integrator Rod*), der nach der X-Anordnung der dichroitischen Filter angebracht ist. Dieser Aspekt wird detailliert in der Publikation erläutert und ist auf die Abhängigkeit der Transmissionscharakteristik von dichroitischen Filtern vom Einfallswinkel zurückzuführen. Das einfallende Licht der LEDs auf die dichroitischen Filtern kann nicht perfekt kollimiert werden, sodass nicht alle Strahlen unter einem  $45^\circ$ - Winkel einfallen. Aus diesem Grund wird zur Homogenisierung nach Verwendung der dichroitischen Filter zusätzlich ein Lichtleiter eingesetzt. Doch Echtfarben-Plots der Publikationen zeigen auch mit Verwendung eines Lichtleitertabs einen leichten Farbgradienten im Zentrum der Leinwand, wobei sich dieser jedoch laut Roelandt et al. in einem akzeptablen Bereich bewegt.



**Abbildung 3.7:** Nicht-telezentrische Beleuchtungskonfiguration für ein DMD Projektionssystem [28]

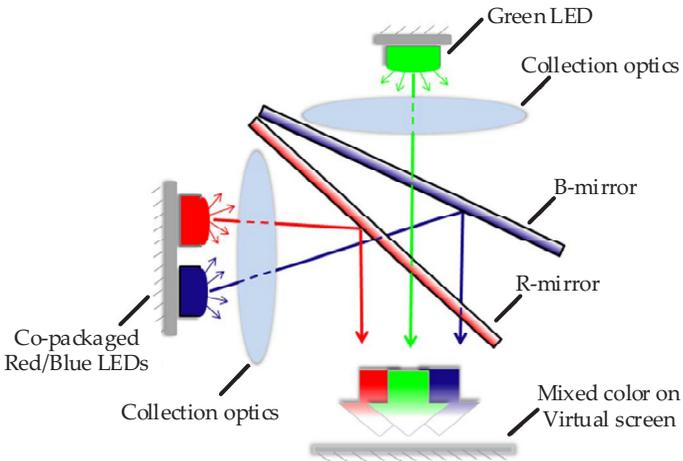
Auch eine Publikation von [29] Van Gorkom et al. bestätigt die Problematik der Abhängigkeit vom Einfallswinkel der Transmissionscharakteristik von dichroitischen Filtern. Hier wird sogar eine Gütefunktion zur Optimierung des Filters vorgestellt und angewandt. Das Ziel der Publikation ist ein kompakteres Design zu entwerfen, als es die X-Anordnung der Filter bietet. Dieses kompakte Design ist nicht für den Einsatz in Projektoren ausgelegt, sondern für die Allgemeinbeleuchtung. Die Grundidee von Van Gorkom et al. basiert auf Kollimatoren aus dichroitischen Filtern. Jede LED hat einen Kollimator, welcher das Licht der LED reflektiert und Licht von andersfarbigen LEDs transmittiert. Die Kombination von Filtern und LED ist in Abbildung 3.8 schematisch dargestellt. Für zwei der optischen Designs werden nur dichroitische Filter verwendet, doch beide Optiken zeigen Farbschatten. Nur der Prototyp des dritten optischen Designs

zeigt eine homogene Farbmischung. Allerdings wird für dieses Design zusätzlich zu den dichroitischen Filtern und noch ein hexagonaler Lichtleiter und eine Streuscheibe eingesetzt.



**Abbildung 3.8:** Schematische Darstellung der Kombination aus Filtern und LEDs zur Farbmischung [29]

Eine Alternative zur X-Anordnung der dichroitischen Filter für ein Mikro-Projektionsdisplay, dargestellt in Abbildung 3.9, zeigt Chen et al. [10]. Die sogenannte DDM (engl.: *Dual-Dichroic-Mirror*) - Anordnung weist die Besonderheit auf, dass die rote und blaue LED nebeneinander positioniert sind und mit derselben Optik kollimiert werden. Entscheidend für die Farbmischung ist die richtige Wahl von Position und Drehwinkel der dichroitischen Spiegel. Durch die ‚DDM‘ - Anordnung gelingt es Chen ein kompakteres optisches System mit höherer Effizienz zu erstellen als mit der X-Anordnung. Allerdings zeigen auch hier die Echtfarben-Plots der Projektion Farbränder.



**Abbildung 3.9:** Darstellung DDM - System als Modul einer Farbmischoptik für Mikro-Projektions-Displays [10]

Zusammenfassend ergibt die Literaturlauswertung über filternde Elemente in Farbmischsystemen, dass eine homogene Farbmischung nur begrenzt möglich ist. Für Anwendungen bei Projektoren, die eine gute Durchmischung im Ortsraum erforderlich machen, zeigen die Ergebnisse auftretende Farbschatten [10], [28]. Die Abhängigkeit der Transmissionscharakteristik von dichroitischen Filtern vom Einfallswinkel zeigt sich in allen Publikationen als begrenzender Faktor, weswegen keine homogene Durchmischung im Ortsraum erreicht werden kann. Im Anwendungsbereich der Allgemeinbeleuchtung werden für eine gute Durchmischung auf größere Distanz, also eine Durchmischung im Winkelraum, zusätzlich zu den dichroitischen Filtern ein Lichtleiter und eine Streuscheibe eingesetzt [29].

## DISPERGIERENDE ELEMENTE

Dispergierende Elemente, wie zum Beispiel Dispersionsprismen oder Beugungsgitter, führen zu einer spektralen Zerlegung des Lichts. Die zur Farbmischung verwendeten Elemente beschränken sich in der Literatur auf Beugungsgitter, meistens als Liniengitter ausgeführt, welche das einfallende Licht durch örtliche periodische Strukturen beeinflussen. Dabei wird zwischen Amplitudengitter und Phasengitter unterschieden. Bei ersterem sind die benachbarten Linien mit unterschiedlicher Transmission, bzw. Reflexion ausgeführt, sodass die Wellenamplitude beeinflusst wird. Das Phasengitter wird durch unterschiedliche Brechzahlen oder unterschiedliche Dicken realisiert, sodass die Phasen benachbarter Elementarwellen gegeneinander verschoben werden. Lichtdurchlässige Beugungsgitter werden als Transmissionsgitter bezeichnet und reflektierende Beugungsgitter als Reflexionsgitter [19].

Die Dichte der Linien, bzw. Rillen wird mit der Anzahl der Linienpaare pro Längeneinheit LP/mm angegeben. Optische Systeme welche Beugungsgitter zur Farbmischung einsetzen, nutzen die Winkeldispersion und somit die wellenlängenabhängige Strahlablenkung. Mit steigender Beugungsordnung nimmt die Winkeldispersion zu, wobei für Farbmischungen aus Effizienzgründen meistens nur die erste Beugungsordnung genutzt wird, weshalb Gitter mit Blaze-Technik verwendet werden. Bei der Blaze-Technik wird die Beugungseffizienz einer bestimmten Ordnung durch Veränderung der Rillenform hin zu keilförmigen Stufen erhöht. Dabei wird das Maximum der Beugungseffizienz von der 0ten Ordnung in eine

höhere Ordnung verschoben. Dies geschieht durch eine Überlagerung der Ausbreitungsrichtung des gebrochenen/reflektierten Lichts mit der Ausbreitungsrichtung des gebeugten Lichts.

Anwendungen von dispergierenden Elementen zur Farbmischung finden sich bisher nur in Laser-basierten Applikationen und in der abbildenden Optik, jedoch nicht in der Beleuchtung mit LEDs. In Laser basierten Applikationen werden Beugungsgitter oder Prismen beispielsweise beim Wellenlängenmultiplexverfahren eingesetzt. Bekannt unter dem englischen Begriff ‚*Spectral Beam Combining*‘ wird dabei der Strahlengang von Lasern mit unterschiedlichem Spektrum so abgelenkt, dass ein Strahlengang entsteht, der alle Spektren enthält [30].

In der abbildenden Optik werden diffraktive Strukturen in Form von sogenannten Hybridlinsen zur Korrektur des Farbfehlers eingesetzt, welcher durch die Dispersion der Linsenmaterialien entsteht. Hybridlinsen sind eine Kombination aus refraktiven und diffraktiven Linsen [31]. Die positive Dispersion der Glaslinse wird korrigiert durch die negative Dispersion der diffraktiven Linse. [32], [33]. Die Dispersion von Linsen ist verglichen mit der Dispersion von diffraktiven Strukturen sehr gering. Bei Hybridlinsen werden aus diesem Grund diffraktive Linsen mit sehr geringer Brechkraft gewählt.

Möchte man jedoch die Farbränder und Farbschatten korrigieren, die bei der Kollimation von mehreren LEDs entstehen, so wird bewusst die große Dispersion von diffraktiven Strukturen genutzt, da die Ursache für Farbränder und Farbschatten im Abstand der LEDs zueinander liegt und nicht in der Dispersion des Kollimators.

Eine Publikation von Coleman et al. [34] beschreibt die Farbmischung mit Beugungsgitter sehr allgemein. Verschiedenfarbige LED Lichtbündel (rot, grün und blau) werden durch ein Gitter abgebildet, welches die Lichtbündel so ablenkt, dass sie das Gitter in einem gemischten Lichtbündel verlassen. Das Beugungsgitter muss drei diskrete Wellenlängen des sichtbaren Spektrums in dieselbe Richtung ablenken. Colemans Analyse verschiedener Beugungsgitter ergibt, dass Beugungsgitter mit Blaze-Technik eine Farbmischung höherer Homogenität ergeben als Beugungsgitter ohne Blaze-Technik. Laut Coleman hat ein Gitter mit Blaze-Technik im Gegensatz zum Gitter ohne Blaze-Technik eine geringere Dispersion was für die Farbmischung zu einer Verwendung von kleineren Gitterperioden führt. Bei der Verwendung von großen Gitterperioden, wie es für Beugungsgitter ohne Blaze-Technik erforderlich wäre, treten mehr Beugungsordnungen auf und die Effizienz nimmt hierdurch ab. Es wurde ein Gitter mit Blaze-Technik gefunden, welches den Anforderungen an die Homogenität der Farbmischung entspricht und in der ersten Beugungsordnung für alle Wellenlängen eine Effizienz von 83% oder größer zeigt.

Die Beurteilung der Durchmischung der Farben erfolgt anhand Abbildungen der Lichtstärkeverteilungen von drei LEDs (rot, grün und blau), welche auf  $60^\circ$  Öffnungswinkel kollimiert wurden. Eine der Abbildungen zeigt die Lichtstärkeverteilung vor dem Transfer durch das Beugungsgitter, die andere die Lichtstärkeverteilung nach dem Transfer durch das Gitter. Coleman trifft anhand der Abbildungen die Aussage, dass die drei Farben im Winkelraum durchmisch sind. Zu der genannten Thematik hat Coleman ein Patent angemeldet [35].

Zusammenfassend zeigt die Literaturlauswertung über dispergierende Systeme erfolgreiche Anwendungen sowohl in der abbildenden Optik als auch für das Mischen von Laser-Strahlung. Für die LED-Beleuchtungsoptik sind nur wenige Anwendungen bekannt. Ein vielversprechender Ansatz der LED-Farbmischung mit Beugungsgitter, welcher auch patentiert ist, stammt von Coleman [34], [35]. Hier wird Optimierungspotential hinsichtlich der Verwendung von Prismen als weitere dispergierende Elemente gesehen.

#### **APERTUR- UND LICHTSTROMÄNDERNDE ELEMENTE**

Eine Mattscheibe ist ein die Apertur- und den Lichtstrom änderndes Funktionselement, welches häufig als einfache Lösung zur Farbmischung verwendet wird. Dabei handelt es sich um Platten, deren Oberfläche durch Ätzen, Sandstrahlen oder Schleifen mattiert hergestellt werden können [12]. Eine weitere Herstellungsmöglichkeit sind im Volumenkörper eingelagerte Partikel an denen das transferierte Licht durch Beugung stark gestreut wird [19].

Durch Verwendung einer Mattscheibe wird der gerichtete optische Strahlengang an der Oberfläche durch unregelmäßig gelagerte Oberflächenelemente gebrochen und dadurch gestreut. Die Streuung nimmt mit der Rauheit der Mattscheibe zu, welche von der Korngröße des Schleifmittels abhängt. Die Transmission der Mattscheiben üblicher Dicke 1.8...3.1 mm schwankt zwischen 63 % und 89 %. [12].

Je stärker die Mattscheibe streut, desto besser ist die Farbmischung. Hierdurch vergrößern sich jedoch auch die Verluste durch Rückstreuung. Mattscheiben werden auch häufig in Kombination mit anderen optischen Systemen zu Farbmischung verwendet [24], [26], [29]. Dabei wird die Oberfläche der Lichtaustrittsfläche des optischen Elements, beispielsweise eines Lichtleiters, mattiert. Solch eine Kombination einer Mattscheibe mit einer vorhandenen Optik vergrößert die gesamte Dimension des optischen Systems nur wenig [36]. Neben den hohen Transmissionsverlusten ist ein großer Nachteil der Mattscheibe die Vergrößerung der Étendue<sup>6</sup> [37]. In einer Publikation von Sales et al. [38] ist jedes Streuzentrum eine Mikrolinseneinheit, weshalb diese Publikation auch in Kapitel 3.2.2 unter Mikrolinsenarrays eingeordnet werden könnte. Jedes einzelne Streuzentrum wird hier separat konzipiert um am Ende die gewünschte Beleuchtungsstärkeverteilung zu erhalten. Dadurch ist die Erzeugung komplexer Verteilungsmuster im Ortsraum möglich. Auf die Qualität der Farbmischung wird nicht näher eingegangen.

Zusammenfassend zeigt die Literaturschau über die Verwendung von Mattscheiben zur Farbmischung, dass Mattscheiben eine einfache und günstige Methode zur Farbmischung sind. Nachteile der Mattscheibe sind jedoch eine Minderung der Effizienz, die Vergrößerung der Étendue und eine eingeschränkte Designfreiheit. Nur

---

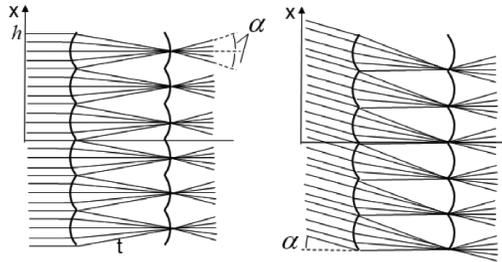
<sup>6</sup> Die Étendue ist eine geometrische Größe, welche die Lichtausbreitung in Orts- und Winkelraum beschreibt. In einem verlustfreien System ohne Absorption, Streuung, oder Fresnelsche Reflexionsverluste, bleibt die Étendue erhalten und bietet somit ein theoretisches Limit für die Fähigkeit eines optischen Systems Licht zu übertragen. [20]

die Publikation von Sales et al. [38] beschreibt Designfreiheiten durch speziell entwickelte Mattscheiben, dabei wird jedoch die Qualität der Farbmischung nicht ausreichend beschrieben.

### 3.2.2 ABBILDENDE ELEMENTE

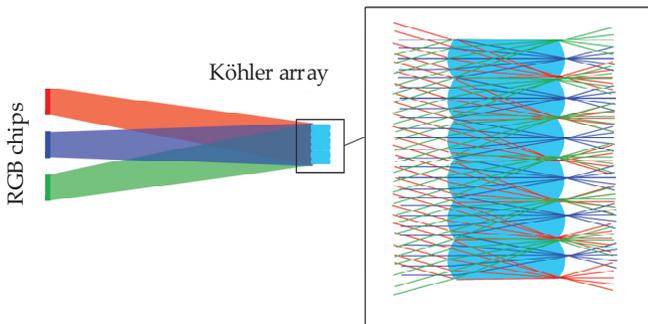
#### MIKROLINSENARRAYS

Ein Mikrolinsenarray besteht aus einem transparenten Material, welches auf beiden Seiten mit vielen kleinen Linsen strukturiert ist. Jede der kleinen Linsen an der Eintrittsseite bildet das einfallende Licht auf die gegenüber liegenden kleine Linse an der Austrittsseite ab. Dies entspricht einer Vielzahl an parallelen Köhler-Beleuchtungssystemen. Die Beleuchtungsstärkeverteilung ist ein Abbild der Struktur der kleinen Linsen, da die ausgangsseitigen Linsen die Beleuchtungsstärkeverteilung der eingangsseitigen Linsen abbilden [36]. Wie in Abbildung 3.10 dargestellt, wird kollimiertes Licht, welches aus Lichtquellen unterschiedlicher Position stammt und dadurch unterschiedliche Einfallswinkel hat, bei Einsatz der Köhler-Beleuchtung im Winkelraum durchmischt [37].



**Abbildung 3.10:** Wirkprinzip eines Mikrolinsenarrays für senkrecht einfallendes Licht (links) und Licht mit dem maximalen Einfallswinkel  $\alpha$  (rechts) [37]

Die Farbmischung erfolgt über die zahlreichen, kleinen Abbildungen der einzelnen LEDs, welche sich überlagern, Abbildung 3.11 stellt dies für drei LED Chips schematisch dar. Das Licht der drei LEDs breitet sich nach Transfer durch das Mikrolinsenarray mit derselben Verteilung im Winkelraum aus [37], ist aber im Ortsraum separiert.



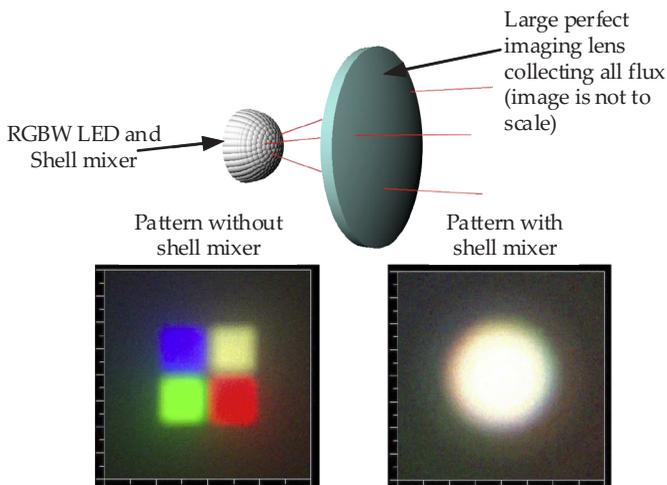
**Abbildung 3.11:** Wirkprinzip eines Linsenmikroarrays bezüglich der LED-Farbmischung [37]

Eine Publikation von Meuret et al. [39] beschreibt die Verwendung eines Mikrolinsenarrays zur homogenen Beleuchtung von reflektiven Lichtventilen in Projektionssystemen, wie beispielsweise DMDs. Hier wird die rechteckige homogene Lichtstärkeverteilung von einer Relaisoptik in eine homogene Beleuchtungsstärkeverteilung an die Position des Lichtventils transferiert.

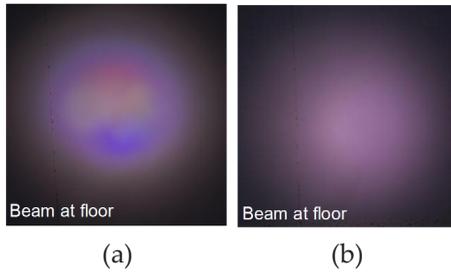
Ein Mikrolinsenarray ist nicht limitiert auf eine gerade Oberfläche sondern kann auch auf eine gekrümmte Oberfläche angewandt werden. Chaves et al. zeigt eine Farbmischoptik dieser Art – der sogenannte ‚*Shell-Mixer*‘ [37]. Hierbei handelt es sich um einen Dom der die LED bedeckt und aus vielen Köhlerbeleuchtungen besteht. Jede einzelne Mikrolinseneinheit wird dabei für die jeweilige Position des Doms angepasst. Platziert man den *Shell-Mixer* beispielsweise auf einer mehrfarbigen Multichip LED, so wird eine durchmischte virtuelle Lichtquelle an der Position der Multichip LED erzeugt. Die scheinbare LED-Größe nimmt dabei nur wenig zu, im Allgemeinen um etwa 20%. Die Simulations- und Messergebnisse eines Prototyps zeigen nach den Autoren eine homogene Durchmischung, wenn die virtuelle LED mit einer Kollimationsoptik auf eine entfernte Detektorfläche abgebildet wird. Ein Simulationsergebnis mit entsprechendem Setup ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Die Autoren sprechen bei der farbigen Fernfeldabbildung, zu sehen auf der rechten Seite der Abbildung, von einer weißen Scheibe, entstanden durch den *Shell-Mixer*.

Ein Prototyp des *Shell Mixers* wird getestet durch die Abbildung verschiedener Multichip-LEDs mit einer Reflektoroptik, wobei die LEDs einmal mit und einmal ohne *Shell-Mixer* verwendet werden.

Die Beurteilung der Homogenität der Farbmischung ist nicht quantitativ sondern erfolgt über eine subjektive visuelle Beurteilung von der Farbverteilung der Prototypen auf einer Detektorfläche, dargestellt in Abbildung 3.13. Vergleicht man die Fotos entstanden durch die Abbildung mit *Shell-Mixer* mit den Fotos ohne *Shell-Mixer* so zeigen die Ergebnisse mit *Shell-Mixer* eine deutlich homogenere Farbmischung. Eine Aussage über die Qualität der Farbmischung lässt sich anhand der Fotos aber nicht eindeutig machen.



**Abbildung 3.12:** Oben: Setup für den Test des *Shell-Mixer* mit einer perfekten Linse. Unten: farbige Fernfeldabbildung entstanden bei entferntem *Shell-Mixer* (linke Abbildung) und bei Verwendung des *Shell-Mixers* (rechte Abbildung) [37]



**Abbildung 3.13:** Farbverteilung einer Multichip-LED, abgebildet mit einem Reflektor auf einer 2.5 m entfernten Detektorfläche (a) ohne und (b) mit *Shell-mixer* [37]

Mit Fokus auf die Durchmischung im Ortsraum stellt Chen et al. [40] eine weitere vielversprechende Lösung vor. Die Publikation beschreibt den Entwurf eines optischen Systems, welches, basierend auf der Mikrolinsentechnologie, einen kollimierten Strahlengang beliebiger Form in eine rechteckige, homogene Beleuchtungsstärkeverteilung umformt. Im Unterschied zu anderen Mikrolinsenarrays, handelt es sich bei den hier verwendeten Optiken um Freiform-Mikrolinsenarrays, bei denen jede Mikrolinseneinheit aus einer planaren Eintrittsfläche und einer Freiform-Austrittsfläche besteht. Die Form einer einzelnen Mikrolinseneinheit ist dabei angesichts der großen Designfreiheiten nicht maßgebend für das Ergebnis der Beleuchtungsstärkeverteilung. Die Farbunterschiede werden gemessen in Farbortabständen  $\Delta u'v'$  [41], [42], wobei die Bezugslichtfarbe aus dem Zentrum der Zielfläche entnommen wird. Für drei eingekoppelte LEDs (rot, grün, und blau) beträgt der durchschnittliche Farbortabstand  $\Delta u'v' = 0.0096$ , was vom Autor als kleine Farbabweichung

bezeichnet wird. Diese Forschungsarbeit ist auf die Beleuchtungsstärkeverteilung mit scharfen Kanten, wie zum Beispiel zur Ausleuchtung des abbildenden Elements eines Projektors, ausgelegt.

Ein Mikrolinsenarray zur Farbmischung für die Allgemeinbeleuchtung wird von Muschaweck et al. [43] beschrieben. Ziel ist die Erzeugung einer rotationssymmetrischen Beleuchtungsstärkeverteilung auf einem entfernten Bildschirm mit einem homogenen hellen Zentrum und zum Rand hin gleichmäßig abnehmender Beleuchtungsstärke. Ausgehend von einer hexagonalen Linsenform, welche eine hexagonale Beleuchtungsstärkeverteilung mit scharfen Kanten erzeugt, wird der Symmetriebruch dieser Form beschrieben. Dazu werden die Mikrolinsen zufällig ohne regelmäßige Ordnung platziert. Um größere Beleuchtungsstärken in der Mitte des Bildschirms zu erhalten werden die Mikrolinsen am Rand kleiner gestaltet als in der Mitte. Die dargestellte Beleuchtungsstärkeverteilung zeigt die gewünschte Verteilung, allerdings wird hier die Farbverteilung nicht dargestellt.

Zusammenfassend zeigt die Literaturlauswertung über Mikrolinsenarrays zur Farbmischung vielversprechende Ergebnisse für die Farbmischung mit dem sogenannten ‚*Shell-Mixer*‘ von Chavez [37] mittels eines optischen Systems mit sehr kleinen Dimensionen. Allerdings handelt es sich bei dieser Optik um einen komplexen Design- und Herstellungsprozess und die tatsächliche Qualität der Farbmischung ist anhand der in der Publikation gezeigten Fotos der Farbverteilung schwierig zu beurteilen.

### 3.3 ZUSAMMENFASSUNG

Wie die Literaturlauswertung zeigt, gibt es viele verschiedene Elemente zur Verwendung von optischen Systemen zur Farbmischung. Für jedes Funktionselement gibt es unterschiedliche Ansätze um dieses möglichst effizient einzusetzen und homogene Farbmischung zu erreichen. Je nach Anwendung wird nicht jedes optische System zur Erfüllung der drei grundlegenden Funktionen eines Farbmischsystems ausgelegt. Manche Anwendungen erfordern nur eine Durchmischung im Ortsraum, so zum Beispiel die Ausleuchtung des Lichtventils eines Projektionssystems.

Die Güte der Durchmischung in Winkel- und / oder Ortsraum ist anhand der Literaturlauswertung sehr schwierig zu beurteilen. Viele der Publikationen bieten keine quantitative Bewertung und falls doch, so erfolgt die Bewertung für die jeweiligen Publikationen basierend auf unterschiedlichen Kriterien und Methoden. Die objektive Beurteilung der verschiedenen Farbmischsysteme würde ein quantitatives Gütemaß erfordern, welches gleichermaßen auf jede Methode angewandt werden kann. Doch gibt die Literatur einen Einblick in die limitierenden und erfolgversprechenden Faktoren jedes Funktionselements, welche im Folgenden zusammengefasst werden.

Lichtleitende Elemente haben wenige Verluste, die sich bei richtiger Einkopplung der LEDs auf die Fresnelschen Reflexionsverluste an Ein- und Austrittsfläche begrenzen. Des Weiteren sind zusätzliche Optiken nicht zwingend notwendig, da der Lichtleiter als optisches Farbmischsystem verwendet werden kann. Nachteilig kann sich die

relativ große Lichtleiterlänge auswirken, welche für eine gute Durchmischung im Ortsraum notwendig ist. Eine limitierende Wirkung auf die Durchmischung im Winkelraum ergibt sich aus der Abhängigkeit der Durchmischung von der Einkopplungsposition an der Lichtleitereintrittsseite, welche in der Lichtstärkeverteilung ein Kaleidoskopmuster verursacht. Die Güte der Farbmischung ist neben dem Faktor Lichtleiterlänge auch abhängig von dessen Querschnitt. Hier zeigt sich in der Variation des Lichtleiterquerschnitts das Optimierungspotential der Lichtleiter zur Farbmischung.

Filternde Elemente zeigen nur in Kombination mit anderen Elementen gute Ergebnisse für die Durchmischung im Ortsraum. Ein stark limitierender Faktor ist hierbei die Abhängigkeit der Transmissionscharakteristik vom Einfallswinkel, als ein Umstand, der zwingend eine zusätzliche Optik erforderlich macht. Des Weiteren bringt die Verwendung von dichroitischen Filtern immer Transmissionsverluste mit sich.

Für dispergierende Strukturen zum Mischen von LEDs kann die Literatur bislang nur wenige Ergebnisse vorstellen. Von besonderem Interesse für ein Design zur LED Farbmischung mit dispergierenden Elementen, ist die Erzeugung einer virtuellen LED (einkoppelte LEDs werden durchmischt in Orts- und Winkelraum) mit der Größe eines einzelnen LED Chips.

Eine einfache Lösung bieten Streuscheiben, jedoch bringen diese neben großen Verlusten auch eine starke Vergrößerung der Étendue mit sich. Zudem besteht keine Möglichkeit zur Lichtformung.

Dagegen zeigt sich für Mikrolinsenarrays eine vielversprechende Weiterentwicklung. Eine der Publikationen stellt den sogenannten Shell-Mixer [37] vor, für welchen jedoch mangels quantitativer Bewertungskriterien die Beurteilung der tatsächlichen Güte der Farbmischung letztlich nicht nachvollziehbar dargestellt ist. Das Design und die Herstellung der Mikrolinsenarray ist ein aufwändiger Prozess.

Abschließend kann mit Blick auf die Auswahl an dispergierenden Systemen Optimierungspotential festgestellt werden, da die Verwendung von Prismen eine Vielzahl neuer Möglichkeiten verspricht. Weiteres Optimierungspotential bieten lichtleitende Systeme durch Variation des Lichtleiterquerschnitts. Aus diesem Grund werden in Kapitel 5 lichtleitende und dispergierende Elemente im Detail analysiert.

## Kapitel 4

# GÜTEKRITERIUM ZUR BEWERTUNG VON OPTISCHEN MISCHSYSTEMEN

*Für die Bewertung von optischen Farbmischsystemen ist ein Gütekriterium notwendig, welches auf die verschiedenen Farbmischsysteme anwendbar ist. In diesem Kapitel wird im ersten Abschnitt ein Kriterium aus der Literatur ausgewählt und im nächsten Abschnitt auf die Bewertung von Farbmischsystemen angepasst. Der letzte Abschnitt zeigt ein Anwendungsbeispiel des Gütekriteriums.*

### 4.1 KRITERIENAUSWAHL

Die grundlegenden Funktionen eines optischen Mischsystems sind in Abbildung 3.2 aufgezeigt. Eine Darstellung der Lichtverteilung im Ortsraum bietet dabei die Beleuchtungsstärkeverteilung  $E(x,y)$ , zum Beispiel auf einer Detektorfläche an der Austrittspupille eines optischen Systems. Eine Darstellung der Lichtverteilung im Winkelraum erfolgt durch die Lichtstärkeverteilung  $I(\phi,\theta)$ , welche nach dem Transfer durch das optische System vorliegt. Durch Simulation oder Messung können beide Verteilungen für alle Lichtquellen separat ermittelt werden. Zur Beurteilung der Durchmischung im Ortsraum können die Beleuchtungsstärkeverteilungen der einzelnen Lichtquellen verglichen werden. Analog dazu kann zur Beurteilung der

Durchmischung im Winkelraum ein Vergleich der Lichtstärkeverteilungen herangezogen werden. Eine Aussage über die spektrale Zusammensetzung der gemischten Lichtquellen in Abhängigkeit von Orts- und Winkelraum ist möglich durch Analysemethoden, welche die Lichtverteilungen und die Wellenlängen simultan berücksichtigen, wie zum Beispiel die Analyse anhand der Farbortdifferenzen  $\Delta u'v'$  ([41], [42]) in Abhängigkeit von den Polarkoordinaten  $\phi, \theta$ , bzw. der Ortskoordinaten  $x, y$  einer Detektorfläche.

Für optische Systeme, deren Transfer unabhängig von der Wellenlänge ist, wie zum Beispiel in nicht dispergierenden Systemen, kann die Güte der Durchmischung allein anhand des Vergleichs der Lichtverteilungen überprüft werden. Die Simulation kann hierbei für jede Lichtquelle mit nur einer Wellenlänge durchgeführt werden, da die dritte Funktion des optischen Mischsystems – das Überlagern der gesamten eingekoppelten Spektren, durch das Erfüllen der ersten beiden Funktionen gegeben ist. Der Vorteil liegt in der sehr viel kürzeren Rechenzeit für die Optiksimation.

Für optische Systeme, deren Transfer wellenlängenabhängig ist, wie zum Beispiel dispergierende oder farbfiltrende Systeme, muss für jede Lichtquelle das gesamte Spektrum berücksichtigt werden. Der Vergleich der Lichtverteilungen liefert eine Aussage darüber, inwieweit die Lichtquellen mit Berücksichtigung des Spektrums in Orts- und Winkelraum durchmischt sind. Jedoch ist keine Aussage über die Farbverteilung in Orts- und Winkelraum der durchmischten Lichtquellen beinhaltet. Infolgedessen ist für diese Anwendung das Erfüllen der dritten Funktion des optischen Mischsystems nicht

automatisch gegeben durch die Erfüllung der ersten beiden Funktionen. Es muss daher zusätzlich mit einer wellenlängenabhängigen Analyseverfahren überprüft werden. Dies kann beispielsweise durch die oben erwähnten Farbortdifferenzen geschehen, oder wiederum durch Vergleichen der Lichtverteilungen, jedoch unter Berücksichtigung der Lichtverteilungen mehrerer Wellenlängen.

Für die erste Auslegung eines optischen Systems genügt es die ersten beiden Funktionen des optischen Mischsystems zu überprüfen. Sind diese beiden elementaren Funktionen nicht erfüllt, so kann die dritte Funktion auch nicht erfüllt sein. Für die grundlegenden Analysen der vorliegenden Arbeit ist es daher hinreichend aussagekräftig, die Güte der Durchmischung anhand des Vergleichs der Lichtverteilungen mehrerer Lichtquellen, transferiert durch ein optisches System, zu überprüfen. Hieraus ergibt sich die Forderung nach einer quantitativen Aussage über die Übereinstimmung von Lichtstärkeverteilungen. Dieses Gütemaß muss für eine Vielzahl von optischen Systemen anwendbar sein, zum Beispiel für einfache kollimierende Linsen, für Lichtleiter oder für hybride Kollimationsoptiken, bestehend aus Reflektor und Linse.

Beim Design von nichtabbildenden Optiken, werden für den Optimierungsprozess häufig Gütekriterien auf Basis eines Vergleichs der angestrebten Lichtverteilungen mit simuliert ermittelten realen Lichtverteilungen angewandt. In einem iterativen Prozess kann so die nichtabbildende Optik optimiert werden, bis die simulative Lichtverteilung der angestrebten Lichtverteilung annähernd entspricht.

Ein solches Gütekriterium kann auf die hier geforderte Aufgabe übertragen werden.

Ein sehr allgemeiner und vielfach verwendeter Ansatz basiert auf der Ermittlung der Summe der quadratischen Abweichung. Diese wird in [44] ausführlich beschrieben und eingesetzt. Das Gütekriterium beruht auf der Summe der quadratischen Abweichungen von verschiedenen Bewertungsfaktoren und deren zugehörigen Zielwerten. Zusätzlich werden verschiedene Gruppen von Bewertungsfaktoren angenommen. Die mathematische Formulierung ist in Gleichung (4.1) gezeigt, wobei  $w_g$  die Gewichtung der  $g$ -ten Gruppe von Gütemaßen ist,  $w_i$  die Gewichtung des  $i$ -ten Bewertungsfaktors der Gruppe  $g$  ist,  $V_i$  der Wert des  $i$ -ten Bewertungsfaktor ist und  $T_i$  der Zielwert des  $i$ -ten Bewertungsfaktor ist [44].

$$\text{MeritFunction} = MF = \sum w_g \sum w_i^2 (V_i - T_i)^2 \quad (4.1)$$

Der minimale Wert für das Gütemaß MF ist  $MF = 0$  und indiziert die vollkommene Übereinstimmung von Bewertungsfaktor und Zielwert. Um das Gütemaß nach Gleichung (4.1) auf die Übereinstimmung von Lichtverteilungen mehrerer Lichtquellen zu übertragen, wird als Bewertungsfaktor die Beleuchtungsstärkeverteilung einer ersten Lichtquelle  $V_i = E_{LQ1}(x,y)$  oder ihre Lichtstärkeverteilung  $V_i = I_{LQ1}(\phi, \theta)$  gewählt und als ‚Zielwert‘ die Beleuchtungsstärkeverteilung einer zweiten Lichtquelle  $T_i = E_{LQ2}(x,y)$  oder ihre Lichtstärkeverteilung  $T_i = I_{LQ2}(\phi, \theta)$ .

Problematisch wird die Anwendung eines solchen Gütemaßes aber bereits bei einer einfachen Kollimationslinse, welche für eine Punktlichtquelle zentriert zur Linse ausgelegt wurde. Werden mit dieser Linse zwei dezentrierte Lichtquellen mit einem Abstand von beispielsweise  $\Delta y = \pm 1$  mm zur optischen Achse abgebildet, so werden die Strahlen der einzelnen Lichtquellen weiterhin gebündelt, verlaufen jedoch in unterschiedlichen Raumwinkelbereichen. Das Vergrößern des Abstands  $\Delta y$  führt dazu, dass die Lichtstärkeverteilungen keinen gemeinsamen Raumwinkelbereich mehr haben und der Abstand der Maxima der Lichtstärkeverteilungen sich zunehmend vergrößert. Wird nun Gleichung (4.1) angewandt, ist der maximale Wert des Gütemaß MF bereits dann erreicht, wenn die beiden Lichtstärkeverteilungen keinen gemeinsamen Abstrahlwinkel mehr haben, da die Summe der quadratischen Abweichungen der beiden Lichtstärkeverteilungen keinen größeren Wert erreichen kann. Ein passendes Gütemaß für die Durchmischung mehrerer Lichtquellen, sollte aber die schlechter werdende Durchmischung für eine Vergrößerung des Abstands der LEDs anzeigen. Diese Tatsache schließt eine Verwendung der quadratischen Abweichung der Lichtverteilung mehrerer Lichtquellen als Gütemaß aus.

Ein weiteres, weniger allgemeines Gütekriterium ist der Ansatz der Lichtstromkompensation [45], [46]. Dieser ist konkret für den Vergleich von Lichtverteilungen ausgelegt. Bei dieser Methode wird eine gewünschte Ziel-Beleuchtungsstärkeverteilung mit der realen / simulierten Ist-Beleuchtungsstärke verglichen. Dazu werden die Lichtverteilungen im Raum des integrierten Lichtstroms  $\Phi(x)$  betrachtet. Die Funktion des integrierten Lichtstroms gibt für eine Verteilung  $f(x)$  in

einem Intervall  $[x_s, x_E]$  den Anteil des Gesamtlichtstroms  $\Phi_{ges}$  an, der bis zur Koordinate  $x$  durch Integration erreicht wurde. Gleichung (4.2) zeigt die mathematische Formulierung [46].

$$\Phi(x) = \int_{x_s}^x f(\tilde{x})d\tilde{x} \quad (4.2)$$

Die Funktion  $\Phi(x)$  kann aus der Beleuchtungsstärkeverteilung  $E(r)$  über dem Radius  $r$  für eine rotationssymmetrische Verteilung berechnet werden. Im weiteren Schritt wird die Ziel- und die Ist-Verteilung in  $n$  gleich große Lichtstromanteile unterteilt, sodass für den Radius  $n$  Intervalle mit gleich großen Lichtstromanteilen vorliegen. Der Unterschied der Ist- und Zielverteilung wird quantifiziert über die Differenzen der Radius-Intervalle von Ziel- und Ist-Verteilung. Diese Methode kann für den Vergleich der Lichtverteilungen mehrerer Lichtquellen angewendet werden, da der Lichtstrom und der Ort, bzw. der Raumwinkel gleichermaßen beachtet werden. Im folgenden Kapitel wird die Methode auf die Bewertung von Lichtverteilungen von zwei Lichtquellen angepasst.

## 4.2 METHODE

Die Methode der Lichtstromkompensation nach [45], [46] betrachtet eindimensionale Lichtverteilungen. Durch die Vielzahl an optischen Systemen, die analysiert werden sollen, wie zum Beispiel Lichtleiter, muss das Gütekriterium auf zweidimensionale Lichtverteilungen übertragen werden. Grundlage für die Beleuchtungsstärkeverteilung ist der Ortsraum mit den kartesischen Koordinaten  $x,y$  welcher zum

Beispiel auf einer Detektorfläche direkt hinter der Optik gemessen oder simuliert werden kann. Grundlage für die Lichtstärkeverteilung sind die Polarkoordinaten mit dem Polarwinkel  $\theta$  und dem Azimutwinkel  $\phi$  mit der optischen  $z$ -Achse als Polarachse. Aus der Lichtstärkeverteilung berechnet sich nach Gleichung (4.3) die Verteilung des Lichtstroms  $\Phi(\phi, \theta)$  über den Polarkoordinaten mit den Integrationsgrenzen  $[\phi_s, \phi_E]$  und  $[\theta_s, \theta_E]$ .

$$\Phi(\phi, \theta) = \int_{\phi_s}^{\phi_E} \int_{\theta_s}^{\theta_E} I(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4.3)$$

Analog dazu berechnet sich aus der Beleuchtungsstärkeverteilung nach Gleichung (4.4) die Verteilung des Lichtstroms  $\Phi(x, y)$  über den kartesischen Koordinaten der Detektorfläche  $x, y$  mit Integrationsgrenzen  $[x_s, x_E]$  und  $[y_s, y_E]$ .

$$\Phi(x, y) = \int_{x_s}^{x_E} \int_{y_s}^{y_E} E(x, y) dy dx \quad (4.4)$$

Die Berechnung des Gesamtlichtstroms erfolgt durch die Integration über den gesamten Halbraum der Abstrahlrichtung<sup>7</sup> nach Gleichung (4.5) bzw. durch die Integration über die gesamte Detektorfläche nach Gleichung (4.6).

---

<sup>7</sup> Da in der vorliegenden Arbeit als Lichtquellen LEDs verwendet werden, reicht die Integration über den Halbraum aus.

$$\Phi_{ges}(\phi, \theta) = \int_{\phi_S=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta_S=0}^{\theta=\pi} I(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi \quad (4.5)$$

$$\Phi_{ges}(x, y) = \int_{x_S=x_{min}}^{x_E=x_{max}} \int_{y_S=y_{min}}^{y_E=y_{max}} E(x, y) dy dx \quad (4.6)$$

Der Vergleich der zwei Verteilungen beruht auf der kumulativen Integration des Lichtstroms über den Polarkoordinaten, bzw. den kartesischen Koordinaten der Detektorfläche. Die Vorgehensweise wird im Folgenden für die Lichtstärkeverteilung beschrieben. Analog dazu gilt dieselbe Vorgehensweise für Beleuchtungsstärkeverteilungen.

In einem ersten Schritt wird der integrierte Lichtstrom  $\Phi(\phi, \theta)$  in  $n^2$  gleich große Lichtstromanteile  $\Phi_{teil} = \frac{\Phi_{ges}}{n^2}$  unterteilt. Dazu wird mit einer numerischen Nullstellensuche nach Gleichung (4.7) die Funktion  $\Phi(\phi, \theta)$  zunächst über dem Polarwinkel  $\theta$  in  $n$  Lichtstromanteile  $\Phi_{teil, \theta} = \frac{\Phi_{ges}}{n}$  unterteilt, mit  $k = 1, 2, \dots, n$  Iterationen.

$$\theta_{k+1}: \quad 0 = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} I(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi - \Phi_{teil, \theta} \quad (4.7)$$

Somit werden  $n$  Intervalle des Polarwinkels  $\theta$  ermittelt, welche jeweils denselben Lichtstrom enthalten. Innerhalb der Intervalle für einen Lichtstromanteil über dem Polarwinkel  $\theta$  wird  $\Phi(\theta, \phi)$  jeweils über dem Azimutwinkel  $\phi$  in  $n$  weitere gleich große Anteile unterteilt  $\Phi_{teil, \phi} = \frac{\Phi_{teil, \theta}}{n}$ , mit  $i = 1, 2, \dots, n^2$  Iterationen.

$$\phi_{i+1}: \quad 0 = \int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} \int_k^{\theta_{k+1}} I(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi - \Phi_{teil, \phi} \quad (4.8)$$

Diese Berechnung wird für zwei Lichtstärkeverteilungen durchgeführt. Die vorangehende Einteilung der Lichtstromintervalle über dem Polarwinkel  $\theta$  mit der Auflösung  $n$  und die hierauf folgende Einteilung über dem Azimutwinkel  $\phi$  mit der Auflösung  $n^2$  ist darin begründet, dass der Polarwinkel stets kleiner als der Azimutwinkel ist, welcher immer im Bereich  $0^\circ$ - $360^\circ$  liegt.

Im Anschluss an diese Einteilung werden die Mittelwerte der Polarkoordinaten  $\theta_{M,k} = \theta_{M,k} - \theta_{M,k-1}$  und  $\phi_{M,k} = \phi_{M,k} - \phi_{M,k-1}$  der einzelnen Lichtstromintervalle subtrahiert, wie Gleichung (4.9) und (4.10) zeigt, und sodann die Beträge der einzelnen Differenzen aufsummiert. Um ein von  $n$  unabhängiges Gütekriterium zu schaffen, wird die Summe durch die Auflösung  $n$  bzw.  $n^2$  dividiert.

$$\theta_{diff} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} |\theta_{M,k,LQ1} - \theta_{M,k,LQ2}|}{n} \quad (4.9)$$

$$\phi_{diff} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n^2} |\phi_{M,i,LQ1} - \phi_{M,i,LQ2}|}{n^2} \quad (4.10)$$

Eine Maßzahl für den Unterschied zweier Lichtstärkeverteilungen  $M_I$  ermöglicht Gleichung (4.11) durch die Bildung der Summe von  $\theta_{diff}$  und  $\phi_{diff}$ . Analog dazu ist die Maßzahl für den Unterschied zweier Beleuchtungsstärkeverteilungen  $M_E$ .

$$M_I = \theta_{diff} + \phi_{diff} \quad (4.11)$$

Die Grundlage der Berechnung des Gütemaßes sind Lichtverteilungen, welche durch Simulation des gesamten Systems mit einer *Raytracing* Software oder Messung ermittelt werden. Die durch Simulation ermittelten Lichtverteilungen liegen in Form einer Datenmatrix in einer anwendungsabhängigen Auflösung vor. Die Resultate der durch Messung ermittelten Lichtverteilungen sind unter anderem *Rayfiles*, welche in die *Raytracing* Software eingelesen werden und dort in das Datenformat der Simulationsergebnisse transferiert werden.

Da die Simulation auf statistischen Methoden beruht ist die Datenmatrix der Lichtverteilung mit einem statistischen Fehler versehen. Dieser Fehler ist kontrollierbar durch die verwendete Strahlanzahl. Je größer die Auflösung gewählt wird, desto mehr Strahlen müssen berücksichtigt werden, um den Fehler gering zu halten. Dieser Fehler ist bei der Interpretation des Gütemaß  $M_I$ , bzw.  $M_E$  zu beachten, welches einen sehr kleinen Wert ( $\rightarrow$  Null) annehmen kann und hierdurch eine vollständige Übereinstimmung der Lichtstärke, bzw. Beleuchtungsstärkeverteilung anzeigt. Ein Gütemaß mit dem Absolutwert  $M_E = 0$  bzw.  $M_I = 0$  ist nicht möglich, sondern nur ein gegen Null strebender Wert  $M_E \rightarrow 0$  bzw.  $M_I \rightarrow 0$ , da in die Berechnung der statistische Fehler miteinfließt. Die Absolutwerte für  $M_I \gg 0$  bzw.  $M_E \gg 0$  sind nicht normiert und können sich deshalb in großen Wertebereichen bewegen. Dies hat zur Folge, dass der Absolutwert ausschließlich zum Vergleich mit den in derselben Weise berechneten Maßzahlen herangezogen wird. Je größer der Wert von  $M_I$  bzw.  $M_E$  ist, desto mehr unterscheiden sich die Lichtverteilungen.

Als Beispiel dient an dieser Stelle das Gütemaß des Unterschieds zweier Beleuchtungsstärkeverteilungen  $M_E$  vor dem Transfer durch ein optisches System. Dieses beträgt  $M_E = 2$  für zwei LEDs mit einer Emitterfläche von jeweils  $1 \text{ mm}^2$  und dem Abstand  $\Delta y = 2 \text{ mm}$ , da die Lichtstromintervalle sich nur auf der  $y$ -Achse unterscheiden. Der Vergleich des Gütemaßes nach dem Transfer durch zwei verschiedene optische Systeme ermöglicht schließlich eine Aussage über das Mischverhalten der beiden Systeme.

Im Normalfall reicht der Vergleich von Lichtverteilungen von zwei Lichtquellen aus, um eine Aussage über die Qualität der Durchmischung in Orts- und Winkelraum eines optischen Farbmischsystems zu treffen. Manche Anwendungen erfordern jedoch den Vergleich mehrerer Lichtverteilungen, so zum Beispiel beim Abbilden von mehreren Lichtquellen, welche unterschiedliche vertikale Abstände zur optischen Achse des Systems aufweisen. Für diese Anwendungen kann das Gütekriterium mehrmals angewandt werden. Für den Erhalt einer Maßzahl wird die Summe aller Maßzahlen durch die Anzahl  $m$  der vergleichenden Lichtquellen dividiert. Die mathematische Formulierung ist in folgender Gleichung (4.12) gezeigt.

$$M_{I,ges} = \frac{\sum_{i=1}^{i=m} M_{Ii}}{m} \quad (4.12)$$

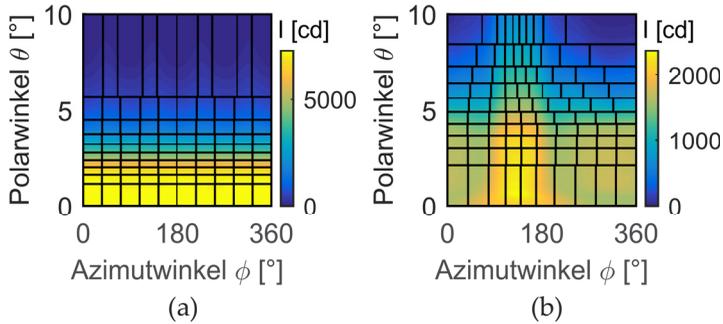
### 4.3 ANWENDUNGSBEISPIEL

Zur Veranschaulichung der Methode ist im Folgenden als Anwendungsbeispiel ein TIR-Kollimator aufgeführt. Der TIR-Kollimator wurde für eine ausgedehnte LED ausgelegt. Eine Darstellung zur Problematik der Verwendung eines solchen TIR-Kollimators zur Abbildung mehrerer LEDs, sowie eine Grafik, sind in Kapitel 3.1 zu finden.

Nachfolgend wird eine zum TIR-Kollimator zentrierte Lichtquelle 1 verglichen mit einer zum TIR-Kollimator dezentrierten Lichtquelle 2. In Abbildung 4.1 sind die Lichtstärkeverteilungen der zwei ausgedehnten Lichtquellen nach dem Transfer durch den TIR-Kollimator zu sehen. In die Lichtstärkeverteilungen sind jeweils mit schwarzen Linien die Intervalle eingezeichnet, welche gleich große Teillichtströme beinhalten. Die Einteilung erfolgte, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, zuerst über dem Polarwinkel  $\theta$  mit der Auflösung  $n$  und darauffolgend über dem Azimutwinkel  $\phi$  mit der Auflösung  $n^2$ .

Abbildung 4.1 (a) zeigt die Lichtstärkeverteilung der Lichtquelle 1, welche zentriert zum TIR-Kollimator eingekoppelt wird. Die gleichmäßige Kollimation auf  $\theta = 5^\circ$  ist deutlich zu sehen, weshalb die Intervalle einen gleichmäßigen Verlauf über den Azimutwinkel  $\phi$  haben. Die Lichtstärkeverteilung aus Abbildung 4.1 (b) von der zweiten Lichtquelle, welche dezentriert eingekoppelt wird, zeigt dagegen eine inhomogene Verteilung über dem Azimutwinkel  $\phi$ , wodurch die Intervalle gleich großer Teillichtströme unregelmäßig verteilt sind.

Die Berechnung des Gütemaßes nach Gleichung (4.11) ergibt  $M_I = 18.2$ .

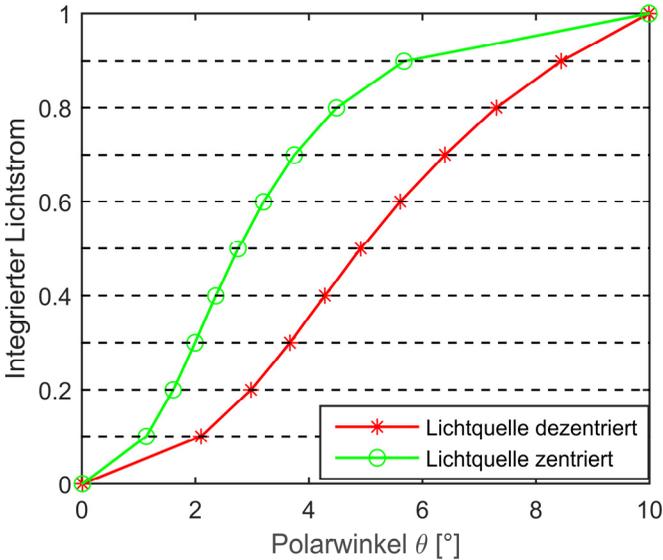


**Abbildung 4.1:** Lichtstärkeverteilungen von (a) zentrierter Lichtquelle und (b) dezentrierter Lichtquelle; die angebenen Intervalle beinhalten jeweils denselben Lichtstromanteil

Eine weitere Verdeutlichung der Unterschiede im Raum des integrierten Lichtstroms ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Hier wird die Funktion des integrierten Lichtstroms auf den Gesamtlichtstrom normiert und über  $k$  Intervallen des Polarwinkels  $\theta$  aufgetragen für  $n = 10$  gleiche Teillichtströme. Der mathematische Zusammenhang ist in Gleichung (4.13) dargestellt.

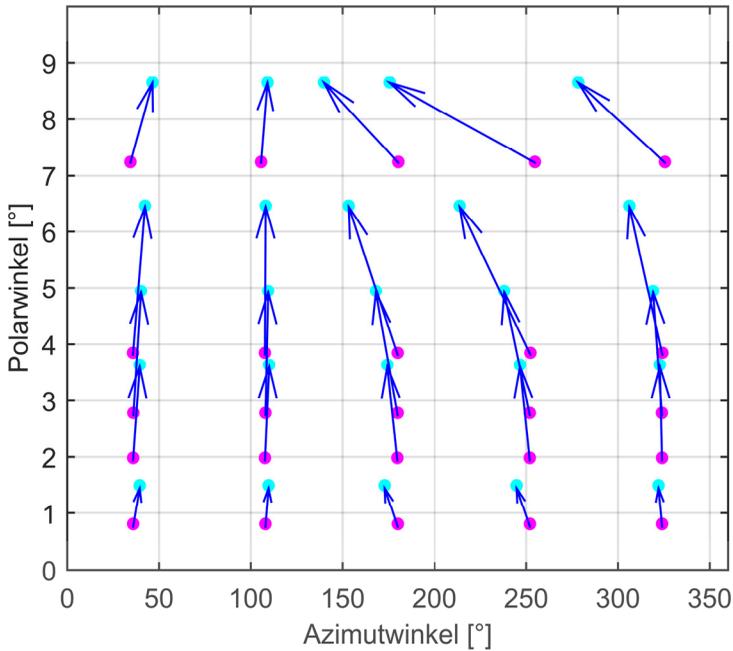
$$\Phi_k = k \Phi_{teil,\theta} \quad (4.13)$$

Die Abweichung der beiden Funktionsverläufe ist deutlich zu sehen. Die gestrichelten horizontalen schwarzen Linien stellen die äquidistanten Lichtstromanteile  $\Phi_{teil,\theta}$  dar.



**Abbildung 4.2:** Normierter integrierter Lichtstrom  $\Phi_k$  über dem Polarwinkel  $\theta$  für eine zentrierte und eine dezentrierte Lichtquelle, welche durch einen TIR-Kollimator abgebildet werden

Abbildung 4.3 zeigt ein Diagramm mit dem die Abweichungen der Lichtstärkeverteilungen grafisch dargestellt werden können. Zu sehen sind Mittelwerte der Lichtstromintervalle der zentrierten und der dezentrierten Lichtquelle. Die Abweichung der Intervalle ist gekennzeichnet durch einen Pfeil von den Intervallen der zentrierten Lichtquelle zu den Intervallen der dezentrierten Lichtquelle. Die Pfeillänge gibt die Größe der Differenz der Polarkoordinaten an. Das Diagramm macht damit deutlich, bei welchen Raumwinkel kleine bzw. große Abweichungen auftreten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde eine geringe Auflösung mit  $n = 5$  gewählt.



**Abbildung 4.3:** Darstellung der Abweichung der Lichtstromintervalle von zwei Lichtstärkeverteilungen mit einer Auflösung von  $n = 5$ , die Punkte in Magenta stellen die Mittelwerte der Lichtstromintervalle der zentrierten Lichtquelle dar, während die Punkte in Cyan die Mittelwerte der dezentrierten Lichtquelle repräsentieren

#### 4.4 ZUSAMMENFASSUNG

Die Auswahl eines Gütekriteriums für die Bewertung von optischen Systemen zur Farbmischung wurde beschränkt auf Kriterien zur Bewertung des Unterschieds von Lichtverteilungen. Durch eine solche Bewertung kann die Durchmischung von mehreren Lichtquellen in Orts- und Winkelraum unabhängig von der Wellenlänge berechnet

werden. Auf diese Weise ist es möglich, die grundlegenden Funktionen eines optischen Mischsystems zu evaluieren.

Bei der Auswahl erwies sich ein Gütekriterium, das auf dem Ansatz der Lichtstromkompensation basiert [44], [46], als am besten geeignet. Dieses Kriterium wurde konkret ausgelegt für den Vergleich von Lichtverteilungen im Raum des integrierten Lichtstroms. Die Lichtstromkompensation findet Anwendung in der Optimierung von nichtabbildenden Optiken und vergleicht eine angestrebte eindimensionale Lichtverteilung mit der realen eindimensionalen Lichtverteilung.

Dieses Gütekriterium wurde erweitert zur Anwendung auf zweidimensionale Lichtverteilungen. Im Gegensatz zur Lichtstromkompensation werden Lichtverteilungen von zwei zu mischenden Lichtquellen nach dem Transfer durch das optische System verglichen, und nicht eine angestrebte mit einer realen Lichtverteilung. Die Verteilung im Raum des integrierten Lichtstroms lässt sich anhand der Lichtverteilungen berechnen. Durch kumulative Integration des Lichtstroms über den kartesischen Koordinaten bzw. Polarkoordinaten werden die Verteilungen in  $n$  gleich große Lichtstromanteile unterteilt. Damit liegen für die kartesischen Koordinaten bzw. Polarkoordinaten  $n$  Intervalle vor, welche denselben Lichtstrom beinhalten.

Der Unterschied der Lichtverteilungen wird schließlich quantifiziert über die Summe der Beträge aller Differenzen der Intervalle. Damit erhält man für den Vergleich von zwei Lichtstärkeverteilungen das Gütemaß  $M_I$ , und analog dazu für den Vergleich von zwei Beleuchtungsstärkeverteilungen das Gütemaß  $M_E$ . Gegen Null strebende Ab-

solutwerte des Gütemaßes bedeuten eine sehr große Übereinstimmung der Lichtverteilungen, während größer werdende Absolutwerte Unterschiede in den Lichtverteilungen indizieren. In den folgenden Kapiteln wird dieses Gütekriterium zur Bewertung verschiedener optischer Farbmischsysteme verwendet.



## Kapitel 5

# ANALYSE OPTISCHER FARBMISCHSYSTEME

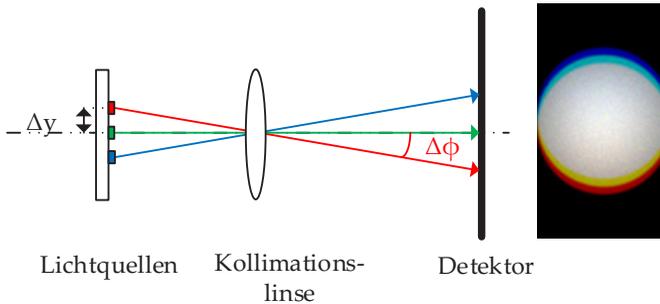
*In diesem Kapitel werden zwei Farbmischsysteme analysiert, welche anhand der Literaturlauswertung als diejenigen Systeme mit dem größten Optimierungspotential ausgewählt wurden. Die ausgewählten Farbmischsysteme verwenden dispergierende und lichtleitende Elemente. Die Analyse erfolgt anhand von Simulationen mittels der Raytracing Software ASAP und der anschließenden Bewertung mit dem im vorherigen Kapitel beschriebenen Gütemaß. Aus dieser Analyse lassen sich Optimierungsansätze ableiten.*

## 5.1 FARBMISCHUNG MIT DISPERGIERENDEN ELEMENTEN

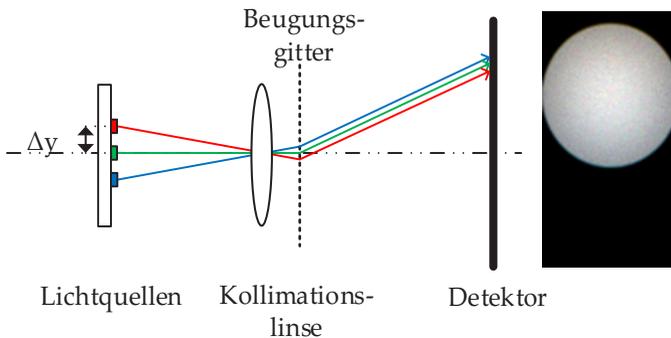
### 5.1.1 GRUNDKONZEPT

Die Grundidee der Farbmischung mit dispergierenden Elementen lässt sich am einfachsten anhand einer Linse und eines transmittierenden Beugungsgitters demonstrieren. Aufgabe der Linse ist es, das von den Lichtquellen einfallende Licht zu kollimieren, das heißt die Lichtquellen ins Unendliche abzubilden. Der Simulationsaufbau besteht aus drei ausgedehnten Lichtquellen, welche isotrop unter einem

Vollwinkel von  $50^\circ$  abstrahlen und in der Fokusebene der Linse positioniert sind. Abbildung 5.1 zeigt schematisch die Grundproblematik der Kollimation örtlich getrennter Lichtquellen: Die Trennung im Ortsraum  $\Delta y$  führt zu einer Trennung im Winkelraum  $\Delta\phi$ .



**Abbildung 5.1:** Schematische Darstellung der Kollimation mehrerer örtlich getrennter Lichtquellen mit zugehöriger farbiger Beleuchtungsstärkeverteilung auf der Detektorfläche



**Abbildung 5.2:** Schematische Darstellung der Kollimation mehrerer örtlich getrennter Lichtquellen und Kompensation der Trennung im Winkelraum durch ein Beugungsgitter mit zugehöriger farbiger Beleuchtungsstärkeverteilung auf der Detektorfläche

Dieser Zusammenhang wird in paraxialer Näherung mit der Brennweite  $f$  des Kollimators beschrieben durch Gleichung (5.1). Beleuchtet man mit dem kollimierten Strahlengang eine Detektorfläche, so entstehen Farbränder, welche in der farbigen Beleuchtungsstärkeverteilung in Abbildung 5.1 rechts zu sehen sind.

$$\Delta\phi = \arctan\left(\frac{\Delta y}{f}\right) \quad (5.1)$$

Um die Trennung im Winkelraum durch Verwendung eines Beugungsgitters aufzuheben, muss der Beugungswinkel zwischen den Wellenlängen der Lichtquellen  $\Delta\alpha_B$  dem Differenzwinkel zwischen den Lichtquellen  $\Delta\phi$  entsprechen:

$$\Delta\alpha_B = \Delta\phi \quad (5.2)$$

Die Differenz der Beugungswinkel zwischen zwei Wellenlängen wird bestimmt durch die Gittergleichung (5.3), mit der Gitterkonstante  $g$  in Linien pro Längeneinheit, und der Beugungsordnung  $m$ , wobei optische Farbmischsysteme mit Beugungsgittern nur die erste Beugungsordnung  $m = 1$  nutzen, wie in Kapitel 3.2.1 beschrieben.

$$\Delta\alpha_B = \arcsin(m\lambda_1/g) - \arcsin(m\lambda_2/g) \quad (5.3)$$

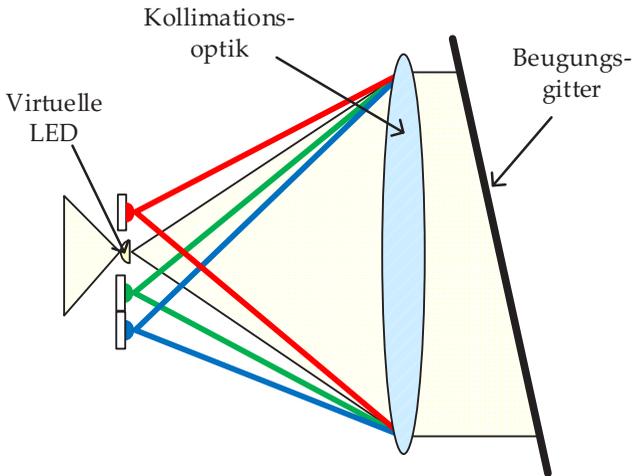
Der Abstand zwischen den Lichtquellen wird in paraxialer Näherung nach Gleichung (5.4) ausgelegt. Das bedeutet je größer die Gitterkonstante ist, desto größer muss auch der Abstand der LEDs sein.

$$\Delta y = f \tan(\Delta\alpha_B) \quad (5.4)$$

Die Kompensation der Trennung im Ortsraum mit Hilfe der dispergierenden Wirkung von Beugungsgittern, sowie die

zugehörigen Beleuchtungsstärkeverteilungen auf der Detektorfläche sind in Abbildung 5.2 schematisch dargestellt. Die dargestellten farbigen Beleuchtungsstärkeverteilungen wurden generiert durch Überlagerung der Beleuchtungsstärkeverteilungen der drei unterschiedlich farbigen LEDs. In Abbildung 5.1 werden hierdurch die Farbränder deutlich, während Abbildung 5.2 die kompensierende Wirkung des Beugungsgitters veranschaulicht.

Das beschriebene optische System dient jedoch lediglich zur Überprüfung und Darstellung des Grundprinzips. Eine alternative Ausführungsform höherer Effizienz ist in Abbildung 5.3 schematisch dargestellt.



**Abbildung 5.3:** Grundprinzip eines optischen Systems mit Beugungsgitter zur Erzeugung einer virtuellen LED – eine LED welche die einzelnen LEDs vereint

Ein solches optisches System besteht aus zwei Hauptkomponenten. Die erste Komponente ist die Kollimationsoptik, welche hier mit nur einer Linse dargestellt ist. Im realen optischen System besteht die Kollimationsoptik aus mehreren Linsen. Ihre Aufgabe ist es zunächst das Licht zu kollimieren und auf das Beugungsgitter als die zweite Komponente abzubilden, um in einem weiteren Schritt das kollimierte und vom Beugungsgitter umgelenkte Licht erneut zu fokussieren. Das Beugungsgitter ist reflektiv und mit der Blaze-Technik hergestellt. Beides Faktoren, die zu einer höheren Effizienz führen im Vergleich zu transmittierenden Beugungsgittern ohne Blaze-Technik (siehe Kapitel 3.2.1). Des Weiteren ist das Beugungsgitter so zur optischen Achse verkippt, dass die umgelenkten Strahlengänge auf der optischen Achse fokussiert werden.

In Abbildung 5.3 sind drei LEDs zu sehen, eine rote, eine grüne und eine blaue LED, welche gemischt zur Erzeugung von weißem Licht dienen. Für die folgende Analyse ist die Betrachtung von drei LEDs ausreichend, wenn auch die Verwendung von mehr als drei LEDs prinzipiell möglich ist. Die LEDs sind in einem genau definierten Abstand zueinander positioniert, der sich aus der Gitterkonstante des Beugungsgitters und der Peak-Wellenlänge der LEDs ergibt. In der Simulation wird zur genauen Bestimmung der LED-Position eine inverse Strahlverfolgung durchgeführt. Dazu wird jede einzelne LED an der vorgesehenen Position der virtuellen LED positioniert. Der Fokuspunkt der abgelenkten und rekollimierten Strahlen gibt die gewünschte Position der jeweiligen LED an.

Mit diesem System ist die Erzeugung einer virtuellen LED möglich, welche als Primärlichtquelle weiter verwendet werden kann. Für die Analyse dieses optischen Systems wird als Kollimationsoptik eine ‚ideale Linse‘ verwendet. Der Terminus ‚ideale Linse‘ stammt aus der *Raytracing* Software und charakterisiert eine Linse, welche perfekt und nicht-physikalisch ist. Perfekt ist diese Linse, weil keine Strahl-  
aberrationen auftreten und nicht-physikalisch ist sie, da sie keine Dicke aufweist. Die Position der Linsenoberfläche entspricht damit der Hauptebene eines sehr gut korrigierten reellen Systems. Für das Initialdesign des Systems und eine grundlegende Analyse desselben, stellt die Verwendung der idealen Linse eine geeignete Vereinfachung dar, da hierdurch der Schwerpunkt der Analyse auf den Effekten des zu untersuchenden Beugungsgitters liegt.

### 5.1.2 EFFIZIENZ

Die Effizienz dieses Systems wird begrenzt durch Kollimationsoptik und Beugungsgitter.

Die Effizienz einer Kollimationsoptik ist definiert durch den Lichtstrom, welcher von der Optik erfasst und kollimiert wird, relativ zum Lichtstrom der zu kollimierenden Lichtquelle. Für die Kollimationsoptik können nur Linsen verwendet werden, jedoch keinesfalls Kombinationen aus Linse und Reflektoren, wie zum Beispiel in TIR – Kollimatoren realisiert, da dies zur entgegengesetzten Ablenkung der Strahlen durch Reflektor und Linse führen würde. Es ist somit

nicht möglich den gesamten Lichtstrom der LEDs mit dem vollen Abstrahlwinkel bis zu  $180^\circ$  zu erfassen. Eine Kollimationsoptik, deren  $F$ -Zahl nah bei  $f/1$  liegt, verspricht durchaus eine Verbesserung der Effizienz der Kollimationsoptik, jedoch ist hier einzuwenden, dass eine  $F$ -Zahl  $< 1$  nur schwer zu erreichen ist. Eine Erfassung des gesamten Lichtstroms mittels einer Kollimationsoptik, die rein aus Linsen besteht, ist aus dieser Sicht nicht realisierbar.

Beugungseffizienz wird definiert als der Lichtstrom monochromatischen Lichts, welcher in eine bestimmte Ordnung gebeugt wird, relativ zum Lichtstrom des einfallenden Lichts. Die relative Effizienz ist definiert in Bezug auf eine perfekt transmittierende oder reflektierende Oberfläche und wird hauptsächlich begrenzt durch die Wellenlängenabhängigkeit des Beugungsgitters. Ein Beugungsgitter mit Blaze-Technik wird für die sogenannte Blaze-Wellenlänge ausgelegt. Alle abweichenden Wellenlängen werden mit geringerer Effizienz bei Reflexion am Beugungsgitter in die erste Beugungsordnung reflektiert. Die relative Beugungseffizienz lässt sich unter Verwendung der skalaren Beugungstheorie mit Gleichung (5.5) berechnen [47].

$$\eta(\lambda) = \left\{ \frac{\sin[m\pi(\frac{\lambda_B}{\lambda} - 1)]}{[m\pi(\frac{\lambda_B}{\lambda} - 1)]} \right\}^2 \quad (5.5)$$

Unter der Annahme, dass eine rote, grüne und blaue LED gemischt werden sollen, würde die relative Beugungseffizienz bei 95.5% liegen, bei einer Blaze-Wellenlänge von  $\lambda_B = 500$  nm. Bei der Berechnung wurden die Spektren der LEDs der Oslon Serie der Firma

Osram verwendet [18]. Jedoch sind bei der Verwendung von Beugungsgittern Absorptions- und Streulichtverluste zu beachten, was die absolute Beugungseffizienz beinhaltet. Basierend auf dem Datenblatt des Herstellers Thorlabs [48], beträgt die absolute Beugungseffizienz in Verwendung mit dem roten, grünen und blauen Spektrum insgesamt 65%, bei einer Blaze-Wellenlänge von  $\lambda_B = 500 \text{ nm}$ .

### 5.1.3 FARBMISCHUNG

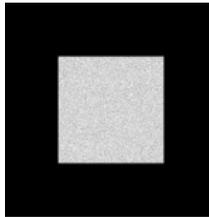
Für die Analyse der Farbmischung mit Hilfe von Beugungsgittern wird das optische System aus Abbildung 5.3 verwendet. Als Grundlage für die Berechnung der Güte der Farbmischung werden drei LEDs betrachtet deren Spektren der LED Oslon Serie der Firma Osram [18] entsprechen. Da es sich bei Beugungsgittern um dispergierende Systeme handelt, ist eine Durchmischung der Spektren nicht zwingend gegeben, auch wenn eine Durchmischung in Orts- und Winkelraum vorliegt. Die Durchmischung der Spektren muss deshalb gesondert überprüft werden.

In einer ersten Analyse werden jedoch nur die Peak-Wellenlängen und nicht das gesamte Spektrum berücksichtigt. Im darauffolgenden Abschnitt wird der Einfluss der dispergierenden Wirkung auf das gesamte Spektrum einer einzelnen LED analysiert. Zur umfassenden Beurteilung dieses Farbmischsystems wird schließlich für jede LED das gesamte Spektrum berücksichtigt.

## MISCHUNG IN ORTS- UND WINKELRAUM VON MONOCHROMATISCHEN LICHTQUELLEN

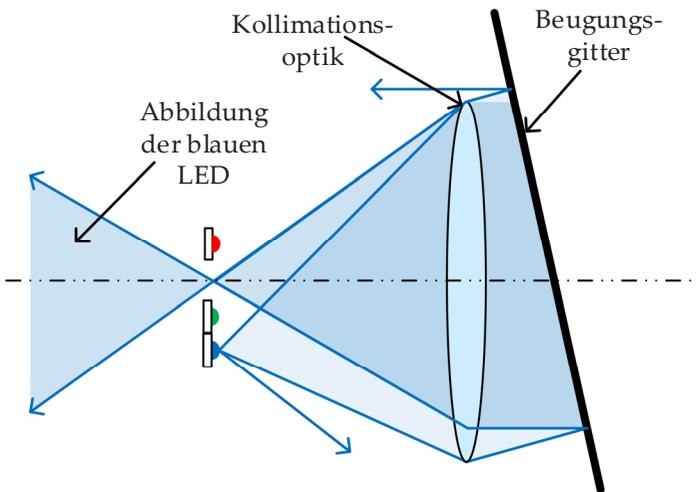
Der Abstand der LEDs wird nach der jeweiligen Peak-Wellenlänge ausgelegt, weshalb eine sehr gute Durchmischung der Peak-Wellenlängen anzunehmen ist. Wie gut die Durchmischung tatsächlich ist, wird in diesem Abschnitt untersucht.

Werden drei LEDs mit jeweils der Peak-Wellenlänge einer roten, grünen und blauen LED durch das dispergierende Farbmischsystem abgebildet, so befinden sich in der Detektorebene die Abbildungen der drei Lichtquellen in einem identischen Ortsraum. Dieser Ortsraum wird als virtuelle LED beschrieben. Die überlagerten farbigen Beleuchtungsstärkeverteilungen der drei LEDs in ihrer jeweiligen Farbe auf der Detektorfläche sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Die Berechnung der Durchmischung der Lichtquellen-Abbildungen im Ortsraum ergibt, gemittelt über die Abweichungen der drei Lichtquellen zueinander, einen gegen Null strebenden Wert für  $M_{E,ges}$ .



**Abbildung 5.4:** Überlagerte farbige Beleuchtungsstärkeverteilungen der drei LEDs in ihrer jeweiligen Farbe auf der Detektorfläche von drei Lichtquellen mit  $\lambda_1 = 632 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 464 \text{ nm}$  und  $\lambda_3 = 520 \text{ nm}$ , alle drei Abbildungen überlagern sich und bilden zusammen die virtuelle, weiße LED

Werden die Lichtstärkeverteilungen der drei Lichtquellen nach dem Transfer durch das optische System verglichen, ergibt das Gütemaß, gemittelt über die Abweichungen der drei Lichtquellen zueinander, nach Gleichung (4.12)  $M_{E,ges} < 2.11$ . Die trotz der Durchmischung im Winkelraum auftretenden geringen Abweichungen der Lichtstärkeverteilungen sind auf einen Effekt zurückzuführen, welcher durch die Verkipfung des Beugungsgitters entsteht. Dieser Effekt lässt sich anhand einer schematischen Darstellung des Strahlengangs der blauen Lichtquelle in Abbildung 5.5 aufzeigen.



**Abbildung 5.5:** Schematische Darstellung der Ursache für nicht rotationssymmetrische Lichtstärkeverteilung nach Transfer durch die dispergierende Farbmischoptik

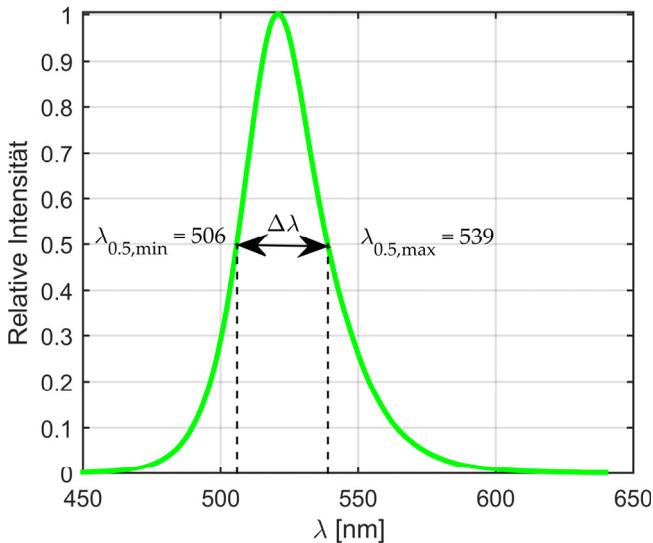
Die Verkippung des Beugungsgitters verursacht die gewünschte Umlenkung des Strahlenbündels parallel zur optischen Achse. Jedoch wird durch diese Verkippung nach der Reflexion des Strahlengangs am Beugungsgitter die Apertur des Kollimators nicht mehr vollständig ausgeleuchtet. Dies resultiert in einer Lichtstärkeverteilung, welche nicht rotationssymmetrisch zur optischen Achse ist. Der Effekt wird mit abnehmendem Abstand des Beugungsgitters vom Kollimator abgeschwächt, und wird durch den geringsten möglichen Abstand vernachlässigbar klein.

Die Analyse der Farbmischung mit Hilfe von Beugungsgittern zeigt, dass die Methode für monochromatische Lichtquellen sehr gut geeignet ist, weshalb sie auch bei Lasern angewandt wird. Mit diesem optischen System ist es möglich, drei oder mehr Wellenlängen so zu mischen, dass eine virtuelle LED entsteht, welche mehrere Wellenlängen emittiert, jedoch die räumliche Dimension von nur einer LED einnimmt. Da LEDs jedoch ein ausgedehntes Spektrum haben, führt die Verwendung eines Beugungsgitters zu einer Entmischung in Orts- und Winkelraum jeder einzelnen LED.

#### **ENTMISCHUNG EINER LED IN ORTS- UND WINKELRAUM UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DES SPEKTRUMS**

Um die Auswirkung der Entmischung für eine einzelne LED abzuschätzen, wurde die Abweichung der Lichtverteilungen  $M_I$  und die Abweichung der Beleuchtungsstärkeverteilung  $M_E$  exemplarisch für mehrere Wellenlängen der grünen LED berechnet, welche die LED mit der größten Halbwertsbreite  $\Delta\lambda$  ist. Abbildung 5.6 zeigt das

Spektrum einer grünen LED der Serie Oslon von der Firma Osram. Bei der Berechnung wurden die Licht- bzw. Beleuchtungsstärkeverteilungen der Wellenlängen innerhalb der Halbwertsbreite des LED Spektrums  $I_{\Delta\lambda}(x, y), E_{\Delta\lambda}(x, y)$  mit der Licht- bzw. Beleuchtungsstärkeverteilung der Peak-Wellenlänge  $I_{peak}(x, y), E_{peak}(x, y)$  verglichen.



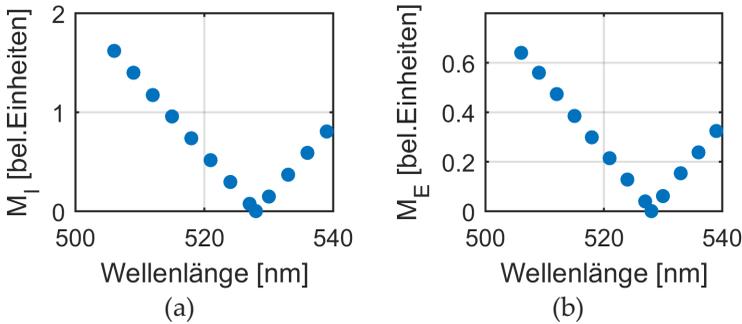
**Abbildung 5.6:** Spektrum einer grünen LED [18]

Eine Berechnung der Abweichung der Lichtstärkeverteilung  $M_l$  der Peak-Wellenlänge zu den Wellenlängen innerhalb der Halbwertsbreite ist in Abbildung 5.7 (a) dargestellt. Je größer der Unterschied zur Peak-Wellenlänge, desto größer ist die Abweichung der Lichtstärkeverteilung zu der Lichtstärkeverteilung der Peak-Wellenlänge. Hieraus lässt sich eine Entmischung im Winkelraum ableiten.

Die verglichenen Lichtstärkeverteilungen entstammen jedoch nicht alle demselben Ortsraum. Mit zunehmender Differenz von Wellenlänge und Peak – Wellenlänge verstärkt sich der Effekt einer Entmischung der LED-Abbildung im Ortsraum. Betrachtet man den Anteil des Spektrums der grünen LED, dessen Wellenlänge kleiner als die Peak-Wellenlänge ist, verschiebt sich die Abbildung der LED auf der Detektorfläche nach unten. Analog dazu verschiebt sich für die grüne LED die Abbildung des Spektrumanteils mit einer größeren Wellenlänge als die Peak-Wellenlänge auf der Detektorfläche nach oben.

Auf diese Weise kommt es zu einer Entmischung der Abbildung der grünen LED im Ortsraum. Dies bestätigt sich durch Berechnung der Abweichung der Beleuchtungsstärkeverteilungen  $M_E$ , dargestellt in Abbildung 5.7 (b). An dieser Stelle sei jedoch auf den Umstand hingewiesen, dass die relative Intensität jeder Wellenlänge mit größerem Abstand zur Peak-Wellenlänge abnimmt. So liegt beispielsweise der Ortsraum der Abbildung des Anteils der grünen LED mit  $\lambda = 490$  nm völlig außerhalb des Ortsraumes der virtuellen LED, ist aber bedingt durch die geringe relative Intensität kaum noch sichtbar.

Die Entmischung in Orts- und Winkelraum findet für jede einzelne LED statt. Je größer die Halbwertsbreite der LED, desto ausgeprägter die Entmischung. Dadurch kommt es zu einer Verzerrung der Abbildung der virtuellen LED. Zur Einschränkung dieser Verzerrung sollte eine möglichst geringe Gitterkonstante gewählt werden um größere dispersionsbedingte Aufspaltung zu vermeiden.

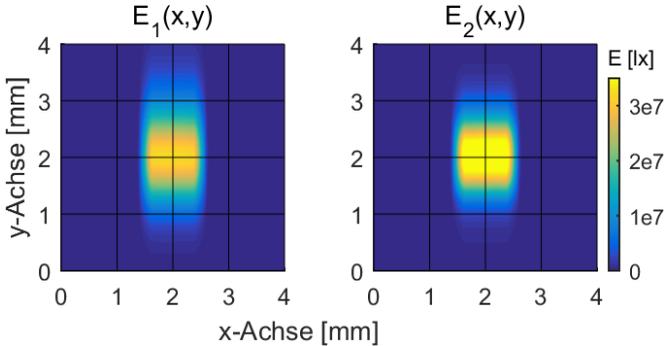


**Abbildung 5.7:** Abweichung der Licht- (a) und Beleuchtungsstärkeverteilung (b) von Wellenlängen innerhalb der Halbwertsbreite einer grünen LED zur Peak-Wellenlänge der grünen LED

#### BEURTEILUNG DER MISCHUNG IN ORTS- UND WINKELRAUM ALLER LICHTQUELLEN UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DES SPEKTRUMS

Abschließend werden die Lichtverteilungen der drei LEDs unter Berücksichtigung des gesamten Spektrums simuliert. Die über die drei LEDs gemittelte Abweichung der Lichtstärkeverteilungen beträgt  $M_{l,ges} = 3.0$ , die entsprechende Abweichung der Beleuchtungsstärkeverteilung  $M_{E,ges} = 0.12$ . Die Ergebnisse zeigen somit eine relativ geringe Entmischung in Orts- und Winkelraum. Dies ist darauf zurückzuführen, dass jede Abbildung der virtuellen LED verzerrt wird und die Abbildungen sich so wieder in Form einer ‚verzerrten virtuellen LED‘, teilweise in Winkel- und Ortsraum, überlappen. In Abbildung 5.8 sind die Beleuchtungsstärkeverteilungen der grünen und der blauen LED dargestellt. Die Verzerrung auf der  $y$ -Achse ist deutlich zu erkennen. Mit zunehmender Halbwertsbreite zeigt sich eine verstärkte Verzerrung durch Dispersion. Infolge dessen ergibt sich für

die Beleuchtungsstärkeverteilung  $E_1(x,y)$  der grünen LED eine stärkere Verzerrung auf der  $y$ -Achse, als für die Beleuchtungsstärkeverteilung  $E_2(x,y)$  der blauen LED.



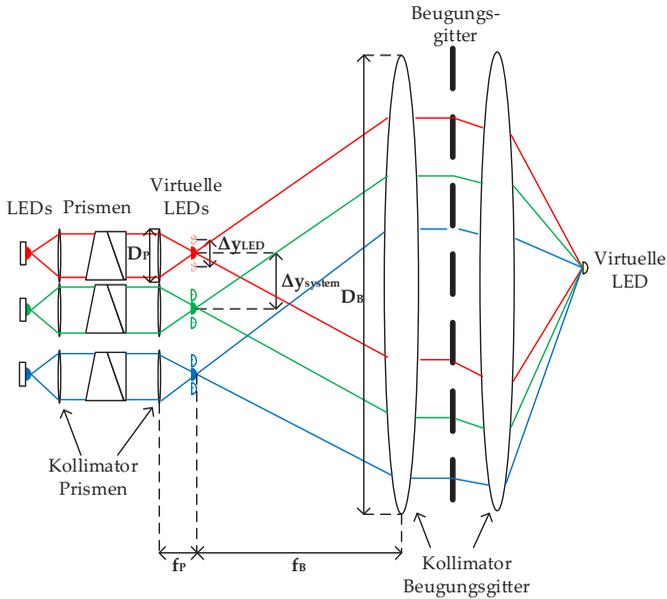
**Abbildung 5.8:** Beleuchtungsstärkeverteilung der durch die dispergierende Farbmischoptik abgebildeten grünen LED mit  $E_1(x,y)$  und der blauen LED mit  $E_2(x,y)$

Für die Beurteilung der tatsächlichen Zusammensetzung des Spektrums der virtuellen LED, muss ein Kriterium angewandt werden, welches die Wellenlänge berücksichtigt um hierdurch die Farbänderung sichtbar zu machen. Zwar können diese auf Kosten der Effizienz ausgeblendet werden, doch wird sich durch Verwendung einer Blende auch die Farbwiedergabe verschlechtern, da Teile des Spektrums ausgeblendet werden. Dies stellt sich als erheblicher Nachteil für die Farbmischung dar, spielt doch in vielen Fällen gerade bei Farbmischungen die Farbwiedergabe eine übergeordnete Rolle. Des Weiteren muss von Anwendungen, welche die Kombinationen von farbigen LEDs mit einer ‚weißen‘ LED (blaue LED mit Phosphorschicht) erfordern, abgesehen werden. Das Spektrum der ‚weißen‘

LED erstreckt sich über das gesamte sichtbare Spektrum, und wird in Kombination mit einer dispergierenden Struktur in alle spektralen Anteile aufgespalten, was eine sehr starke Entmischung zur Folge hat. Zusammenfassend zeigt die Analyse des optischen Mischsystems mit Hilfe einer dispergierenden Struktur, eine sehr gute Durchmischung in Orts- und Winkelraum für die Peak-Wellenlängen der Lichtquellen. Berücksichtigt man jedoch das ausgedehnte Spektrum von LEDs, so zeigt sich für jede einzelne LED eine Entmischung in Orts- und Winkelraum.

#### 5.1.4 OPTIMIERUNGSANSATZ

Zur Erzeugung einer guten Mischung für das gesamte LED-Spektrum, muss die Entmischung der einzelnen LED in Orts- und Winkelraum verringert werden. Da die Entmischung über die Beugungsdispersion verursacht wird, ergibt sich mit Blick auf jede einzelne LED die Forderung nach einer Kompensation der dispergierenden Wirkung, die jedoch wiederum für das gesamte Mischsystem erhalten bleiben soll. Dazu werden weitere dispergierende Komponenten benötigt, wie zum Beispiel Prismen, welche eine den beugenden Strukturen entgegengesetzte Dispersion haben: Ein Prisma bricht kurze Wellenlängen stärker als lange Wellenlängen, während Beugungsgitter für kurze Wellenlängen weniger Ablenkung als für lange Wellenlängen zeigen. Passt man die negative Dispersion eines Prismas auf die positive Dispersion eines Beugungsgitters an, so kann die wellenlängenabhängige Aufspaltung kompensiert werden. Der gesamte Optimierungsansatz mit Prismen ist in Abbildung 5.9 dargestellt.



**Abbildung 5.9:** Schematische Darstellung eines optischen Systems zur Mischung von drei LEDs mit Beugungsgitter und Prismen

Jede einzelne LED muss vor dem Eintritt in das beugende Mischsystem im Ortsraum in viele einzelne virtuelle LEDs aufgespalten werden. Diese Aufspaltung erfolgt durch ein System aus Prismen und weiteren Kollimationsoptiken. Durch die Separierung jeder einzelnen LED im Ortsraum ist die Beugungsdispersion ausgeglichen.

Voraussetzung für ein solches System ist ein Prisma, bzw. mehrere Prismen, welche die Beugungsdispersion  $\frac{\partial \alpha_B}{\partial \lambda}$  nach Gleichung (5.6) mit der Prismendispersion  $\frac{\partial \alpha_P}{\partial \lambda}$  nach Gleichung (5.7) ausgleichen können.

$$\frac{\partial \alpha_B}{\partial \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{g} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{g}\right)^2}} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \alpha_P}{\partial \lambda} = \frac{\partial \alpha_P}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \lambda} \quad (5.7)$$

Gleichung (5.7) beschreibt die Prismendispersion mit dem Ablenkungswinkel  $\frac{\partial \alpha_P}{\partial \lambda}$  und der Dispersions-Gleichung (nach Sellmeier)  $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ . Gleichung (5.6) und (5.7) zeigen eine Nichtlinearität in Abhängigkeit der Wellenlänge. Diese Nichtlinearität verhält sich bei der Beugungsdispersion gegensätzlich zur Nichtlinearität der Brechungsdispersion. Hier muss bei der Systemauslegung darauf geachtet werden, keine zu großen Gitterkonstanten zu wählen, da die Nichtlinearität der Beugungsdispersion mit zunehmender Gitterkonstante ansteigt. Weiterhin sollten bei der Prismendispersion keine zu großen Prismenwinkel gewählt werden, da die Nichtlinearität der Prismendispersion mit steigendem Prismenwinkel zunimmt. Für jede einzelne LED müssen diese Punkte beachtet werden, um eine annähernde Kompensation der Beugungsdispersion mit der Prismendispersion zu erreichen. Die Prismendispersion ist nach Gleichung (5.7) abhängig vom Material, der Prismengeometrie und dem Einfallswinkel des Lichts. Diese Parameter sind so zu wählen, dass die beugungsbedingte Dispersion ausglichener wird. Die Auslegung eines solchen Systems sollte unter Erhaltung der Étendue erfolgen um eine Minderung der Effizienz zu vermeiden. Mit dem Ziel die Étendue zu erhalten, ergibt sich Gleichung (5.8), welche den Zusammenhang  $f_b \gg f_p$  aufzeigt.

$$f_P = \frac{D_P}{D_B} f_B \quad (5.8)$$

Des Weiteren gilt Gleichung (5.9) zur Erhaltung der Étendue. Im Ergebnis zeigt sich eine sehr große Prismendispersion, welche nur durch äußerst aufwändige Prismensysteme, wie zum Beispiel dem Janssen Prisma [49], zu erreichen ist.

$$\frac{\partial \alpha_P}{\partial \lambda} = \frac{f_B}{f_P} \frac{\partial \alpha_P}{\partial \lambda} \quad (5.9)$$

Die notwendigen Systemparameter verdeutlichen die Forderung nach einem sehr schwer realisierbaren System, bedingt durch die erforderlichen langen Brennweiten mit relational kleinen Aperturen.

Die oben angeführten Gründe zeigen, dass die Kompensation der Beugungsdispersion mit Prismendispersion für jede einzelne Lichtquelle in der Theorie zwar möglich ist, in der Praxis jedoch nur schwer umsetzbar ist.

## 5.2 FARBMISCHUNG MIT LICHTLEITENDEN ELEMENTEN

### 5.2.1 GRUNDKONZEPT

Zur LED-Farbmischung mit lichtleitenden Elementen benötigt man prinzipiell nur einen Lichtleiter und die zu mischenden LEDs. Je nach Art der Anwendung und der Auswahl der LEDs, empfiehlt sich der Einsatz einer Einkoppeloptik. Viele LEDs sind geschützt durch einen sogenannten ‚Dom‘, eine halbkugelförmige Umkapselung aus Silikon. Es sind aber auch LEDs verfügbar, die als Schutzvorrichtung ein

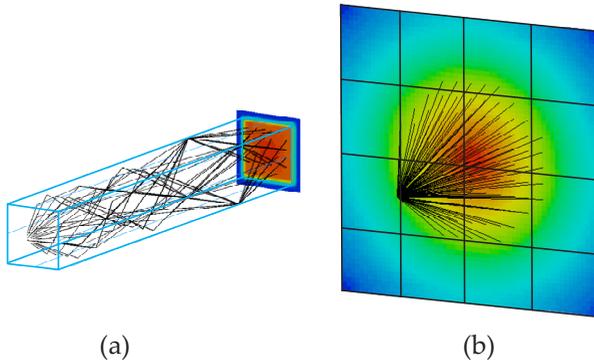
Glasfenster mit Antireflexbeschichtung haben. Letztere können durch direktes Platzieren an der Lichtleitereintrittsseite ohne zusätzliche Optik sehr effizient eingekoppelt werden. Um nahezu alles Licht von LEDs mit Dom einzukoppeln, muss eine zusätzliche Kollimationsoptik verwendet werden, da der Abstand zwischen der Emittierfläche der LED und der Lichtleitereintrittsseite durch den Dom für eine effiziente direkte Einkopplung zu groß ist.

Für den Lichtleiter selbst gibt es viele unterschiedliche Ausführungsformen der Querschnittsgeometrie, mit unterschiedlicher Auswirkung auf die Farbmischung. Die Länge des Lichtleiters bestimmt zusammen mit der Querschnittsgeometrie die Qualität der Durchmischung in Orts- und Winkelraum. Die Lichtleiteraustrittsfläche kann entweder direkt zur Beleuchtung genutzt werden, oder als Primärlichtquelle weiterverwendet werden für sich anschließende optische Systeme.

Für die Erläuterung des Grundkonzepts wird ein quadratischer Lichtleiter verwendet und die Einkopplung findet ohne Optik statt mit einer direkt vor dem Lichtleiter platzierte LED ohne Dom. Als Material wird PMMA verwendet, das bei 500 nm einen Brechungsindex von  $n_{PMMA} = 1.49$  hat.

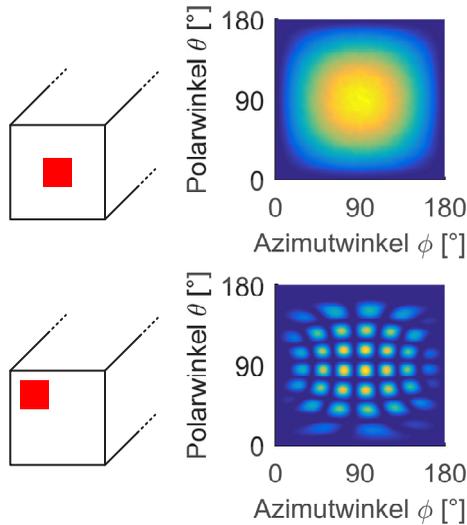
Das Grundkonzept der Durchmischung im Ortsraum ist in Kapitel 3.2.1 beschrieben und in Abbildung 3.3 dargestellt. Dieser Erklärungsansatz beruht auf der Betrachtung der Beleuchtungsstärkeverteilung, die sich ergibt wenn der Lichtleiter entfernt wird. Abbildung 5.10 (a) stellt einen quadratischen Lichtleiter und die zugehörige homogene Beleuchtungsstärkeverteilung auf einem Detektor dar. Ab-

bildung 5.10 (b) zeigt die Beleuchtungsstärkeverteilung, welche bei Entfernen des Lichtleiters entsteht.



**Abbildung 5.10:** Darstellung des Lichtleiter Mischprinzips: Die Homogenität auf dem Detektor hinter einem Lichtleiter (a) entsteht durch vielfaches Überlappen einer Beleuchtungsstärkeverteilung, welche durch Entfernen des Lichtleiters entstehen würde (b)

Durch die vielfachen Reflexionen im Lichtleiter wird diese Beleuchtungsstärkeverteilung mehrfach überlagert. Dieses Prinzip wird in der Literatur als ‚spiegelnde Kacheln‘ bezeichnet (Erläuterung in der Literaturlauswertung in Kapitel 3.2.1). Auf diese Weise entsteht nach einer gewissen Länge, das heißt, einer gewissen Anzahl an Reflexionen, eine homogene Durchmischung der eingekoppelten LED im Ortsraum. Im Falle der dezentrierten Einkopplung als grundsätzliche Vorgabe für LED Farbmischung, wird ein längerer Lichtleiter benötigt, um eine Variation der Beleuchtungsstärke von einer Ecke der Austrittsseite zur anderen Ecke zu vermeiden.



**Abbildung 5.11:** Position der LED relativ zum Lichtleiter und zugehörige Lichtstärkeverteilung. Bei dezentrierter Lichtquelle ist der Kaleidoskopeffekt zu sehen

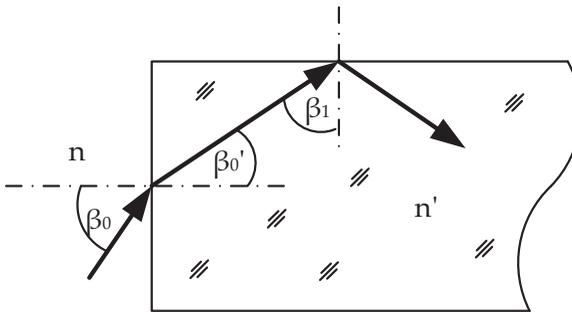
Eine homogene Durchmischung im Winkelraum findet bei Lichtleitern nicht statt und wird daher häufig durch Streuscheiben auf der Lichtaustrittsseite erzeugt. Die Vielfachreflexionen erzeugen im Winkelraum eine vielfache Abbildung der LED. Dies resultiert bei einer zum Lichtleiter zentrierten LED in einer Lichtstärkeverteilung, welche der Verteilung der eingekoppelten LED entspricht. Dagegen entsteht bei dezentrierter Anordnung der LED eine nicht-rotationssymmetrische Lichtstärkeverteilung, das sogenannte Kaleidoskopmuster, welches Stellen mit großer Lichtstärke und Stellen mit keiner Lichtstärke aufweist. Dieser Zusammenhang zwischen Position der Lichtquelle und Lichtstärkeverteilung ist in Abbildung 5.11 dargestellt für

eine LED mit Lambertscher Abstrahlung. Mit zunehmender Länge des Lichtleiters, steigt der Auflösungsgrad des Kaleidoskopmusters.

## 5.2.2 EFFIZIENZ

Die Effizienz optischer Systeme zur LED-Farbmischung mit lichtleitenden Elementen wird bestimmt durch den spektralen Transmissionsgrad des Lichtleiters und die Einkoppeleffizienz. Im Folgenden wird die Effizienz für einen Lichtleiter, mit dem für Farbmischstäbe am häufigsten verwendeten Material, PMMA berechnet. Als Brechungsindex wird für die Berechnung  $n_{PMMA} = 1.49$  verwendet, was dem Brechungsindex vom PMMA bei 500 nm entspricht. Ausgehend von glänzend polierten Grenzflächen des Lichtleiters, wird der spektrale Transmissionsgrad  $\tau(\lambda)$  hauptsächlich begrenzt durch die Fresnelschen Reflexionsverluste an Lichteintritts- und Lichtaustrittsfläche. Die Absorptionsverluste sind laut Plexiglashersteller vernachlässigbar klein [50]. Die Fresnelschen Reflexionsverluste betragen für senkrechten Einfall pro Fläche 3.8%. Wird die vollständige Einkopplung der Lambertschen Abstrahlcharakteristik einer LED vorausgesetzt, vergrößern sich die Fresnelschen Reflexionsverluste auf 8.5% je Fläche. Der spektrale Transmissionsgrad ist folglich  $\tau(\lambda) \geq 83\%$ . Sind die Grenzflächen nicht glänzend poliert, kann dies zu Verlusten bei der Totalreflexion und Streuverlusten an den Flächen führen.

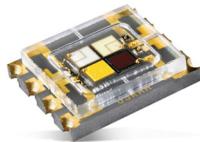
Zur Bestimmung der Einkoppeleffizienz muss der Akzeptanzwinkel des Lichtleiters beachtet werden. Abbildung 5.12 stellt den Zusammenhang dar. Der Akzeptanzwinkel bestimmt sich durch den Grenzwinkel der Totalreflexion nach Gleichung (2.2) und liegt für Plexiglas bei  $\beta_g = 41.96^\circ$ . Lichtstrahlen welche auf die Mantelfläche mit einem Winkel  $\beta_1 < 41.96^\circ$  auftreffen, werden nicht totalreflektiert sondern gebrochen. Theoretisch liegt der maximale Winkel, der in einen Lichtleiter eingekoppelt werden kann bei  $\beta_0 = 90^\circ$ , was zu einem minimal möglichen Reflexionswinkel  $\beta_1 = 48.03^\circ$  führt. Damit ist die Voraussetzung  $\beta_1 > \beta_g$  gegeben als Bedingung, unter welcher für alle eingekoppelten Strahlen der Grenzwinkel der Totalreflexion erfüllt ist. Wenn es also gelingt, die gesamte Abstrahlung der LED einzukoppeln, wird diese auch vollständig im Lichtleiter geführt.



**Abbildung 5.12:** Schematische Darstellung der Berechnung des Akzeptanzwinkels eines Lichtleiters

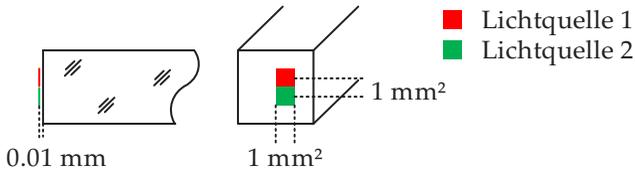
### 5.2.3 FARBMISCHUNG

Für die Analyse der Durchmischung der eingekoppelten LEDs werden in der Simulation exemplarisch die Maße der LED Serie Ostar Stage von Osram verwendet. Die LED ist eine Multichip-LED, bei der jeder Chip eine Emitterfläche von  $1 \text{ mm}^2$  aufweist, mit einer Lambert-schen Abstrahlcharakteristik in den Halbraum. Die vier separaten Chips mit dem Spektrum einer roten, blauen, grünen und weißen (blaue LED mit Phosphorschicht) LED sind sehr dicht zueinander auf einem Substrat aufgebracht, dargestellt in Abbildung 5.13.



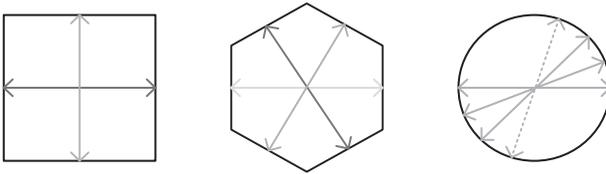
**Abbildung 5.13:** Foto der LED Osram Ostar Stage [51]

Für die Bestimmung der Güte der Farbmischung nach dem in Kapitel 4 vorgestellten Gütekriterium, genügt die Simulation von zwei monochromatischen Lichtquellen, welche den Positionen der rechten zwei Chips der LED entsprechen. Die Ergebnisse der Simulationen mit diesen Positionen gelten analog auch für die Chips der linken Seite der LED. Hierfür werden zwei übereinander platzierte Lichtquellen gewählt. Die räumliche Anordnung der einzukoppelnden LEDs in Bezug zum Lichtleiter, sowie die Bezeichnung der LEDs, sind in Abbildung 5.14 für einen quadratischen Lichtleiter dargestellt. Die Einkopplung der LEDs erfolgt durch direktes Platzieren an der Lichteintrittsseite des Lichtleiters mit einem Abstand von  $0.01 \text{ mm}$ .



**Abbildung 5.14:** Position der Lichtquellen zum Lichtleiter

Für die Analyse der Durchmischung in Orts- und Winkelraum ist die Wellenlänge bei Farbmischsystemen mit lichtleitenden Elemente vernachlässigbar, da bei vollständiger Durchmischung der Lichtquellen in Orts- und Winkelraum eine Durchmischung der Spektren automatisch gegeben ist.

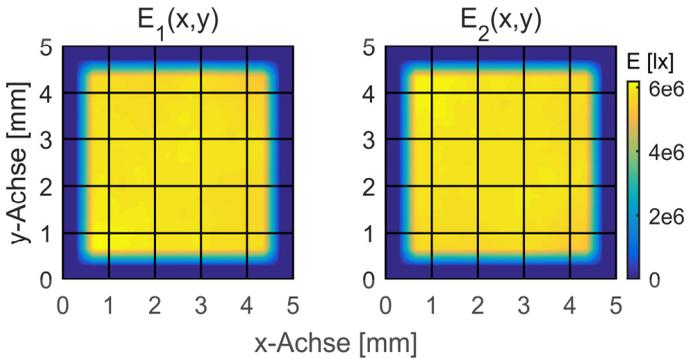


**Abbildung 5.15:** Beispiele für Querschnittsgeometrien von Lichtleiter und deren für die Reflexion wirksamen Symmetrieachsen<sup>8</sup>

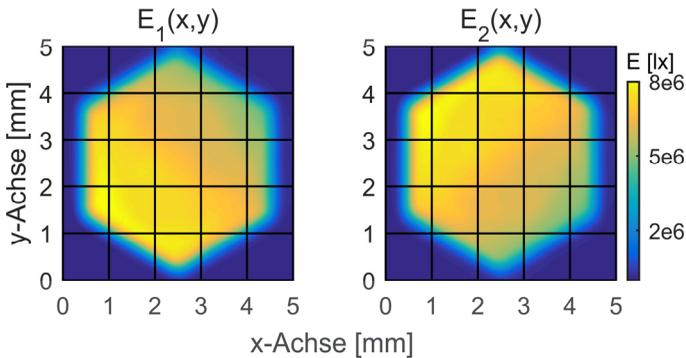
Wie aus der Literatur bekannt, ist mit manchen Lichtleiterquerschnitten eine homogenere Durchmischung zu erreichen, was sich durch den Ansatz ‚spiegelnde Kacheln‘ erklärt. In diesem Kontext werden im Folgenden drei verschiedene Lichtleiterquerschnitte bezüglich der Durchmischung in Orts- und Winkelraum analysiert. Abbildung 5.15 zeigt die Darstellung eines quadratischen, eines runden und eines gleichmäßig hexagonalen Querschnitts.

## MISCHUNG IM ORTSRAUM

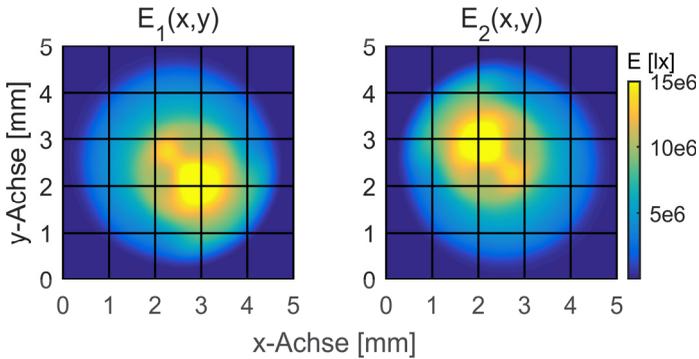
Die Durchmischung im Ortsraum zweier eingekoppelter LEDs wird unabhängig von der Querschnittsgeometrie mit zunehmender Lichtleiterlänge homogener. Dabei ist die notwendige Länge zur Erreichung einer homogenen Durchmischung über die Querschnittsgeometrie des Lichtleiters festgelegt. Um für kurze Lichtleiterlängen eine homogene Durchmischung zu erzielen, muss die Geometrie dem Prinzip der ‚gespiegelten Kacheln‘ entsprechen. In Abbildung 5.16, Abbildung 5.17 und Abbildung 5.18 sind die Beleuchtungsstärkeverteilungen von Lichtquelle 1 und Lichtquelle 2 nach dem Transfer durch einen Lichtleiter mit einem quadratischen, einem hexagonalen und einem runden Querschnitt dargestellt für eine Länge von 10 mm. Der Lichtleiter mit quadratischem Querschnitt zeigt für beide Lichtquellen dieselbe Beleuchtungsstärkeverteilung, dargestellt in Abbildung 5.16, während der Lichtleiter hexagonalen Querschnitts für diese Länge eine Abnahme der Beleuchtungsstärke von einer Ecke zur anderen erkennen lässt, zu sehen in Abbildung 5.17. Hingegen weist der runde Lichtleiter einen Hotspot auf, wodurch sich für die zwei Lichtquellen zwei unterschiedliche Beleuchtungsstärkeverteilungen ergeben, welche in Abbildung 5.18 dargestellt sind. Da der runde Lichtleiter das Prinzip der ‚spiegelnden Kacheln‘ nicht erfüllt, ist unabhängig von der Lichtleiterlänge die homogene Durchmischung im Ortsraum nicht gegeben. Der hexagonale Querschnitt erfüllt das Prinzip der gespiegelten Kacheln, hat jedoch nach 10mm Länge noch nicht die Durchmischung eines quadratischen Lichtleiters erreicht. Für eine vollständige Durchmischung benötigt er eine größere Länge.



**Abbildung 5.16:** Beleuchtungsstärkeverteilungen auf Detektorfläche von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 10 mm langen Lichtleiter mit quadratischer Querschnittsgeometrie



**Abbildung 5.17:** Beleuchtungsstärkeverteilungen auf Detektorfläche von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 10 mm langen Lichtleiter mit hexagonaler Querschnittsgeometrie



**Abbildung 5.18:** Beleuchtungsstärkeverteilungen auf Detektorfläche von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 10 mm langen Lichtleiter mit runder Querschnittsgeometrie

Dieser Effekt ist auf den Symmetriebruch zurückzuführen. In Abbildung 5.15 sind die Querschnitte der Lichtleiter und deren für die Reflexion wirksame Symmetrieachsen<sup>8</sup> gezeigt. Der runde Querschnitt ist punktsymmetrisch und hat damit unendlich viele Symmetrieachsen, welche für die Reflexionen im gesamten Querschnitt wirksam sind. Dies bedeutet, dass beim runden Lichtleiterquerschnitt in alle Richtungen Symmetrie herrscht. Der sechseckige Querschnitt dagegen zeigt drei für die Reflexionen wirksamen Symmetrieachsen, womit nur noch in drei Richtungen Symmetrie herrscht. Die Symmetrie wirkt sich jeweils auf alle Reflexionen zwischen den parallelen Segmenten aus. Beim quadratischen Querschnitt herrscht mit zwei

---

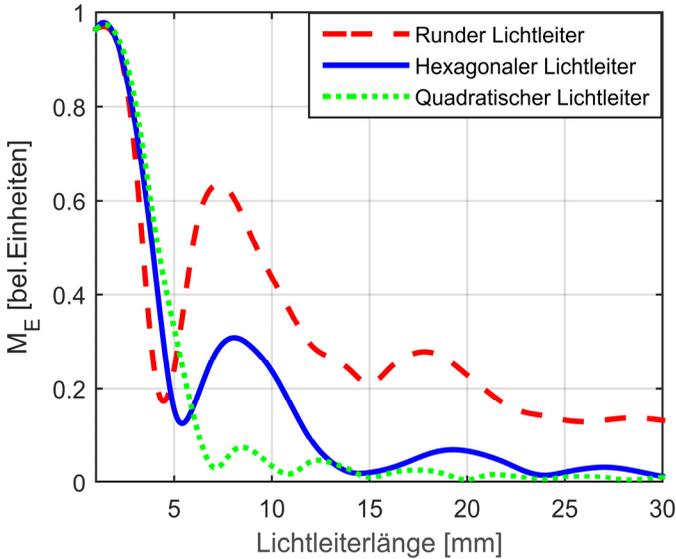
<sup>8</sup> Die diagonalen Symmetrieachsen sind für die Reflexionen nicht wirksam und werden deshalb nicht berücksichtigt. Denn trifft ein Lichtstrahl auf eine Ecke, so ist die Reflexion nicht definiert und der Lichtstrahl endet dort.

Symmetrieachsen in nur zwei Richtungen Symmetrie, was eine schnelle Durchmischung ermöglicht. Folglich hängt das schnelle Erreichen einer Durchmischung im Ortsraum, als ein Faktor, der sich in der benötigten Lichtleiterlänge ausdrückt, von der Anzahl der für die Reflexion wirksamen Symmetrieachsen des Querschnitts ab. Je weniger für die Reflexion wirksame Symmetrieachsen eine Querschnittsgeometrie aufweist, desto schneller erfolgt die Durchmischung.

Demnach muss bei einem Lichtleiter zum Erreichen einer schnellen Durchmischung die für die Reflexionen wirksame Querschnittssymmetrie wenigstens teilweise gebrochen sein. Ist dies nicht der Fall und für den gesamten Lichtleiterquerschnitt herrscht Symmetrie, wie beim runden Lichtleiter, dann kann keine vollständige homogene Durchmischung erfolgen. Die Ergebnisse der Literatur bestätigen dies durch das Beispiel eines runden Lichtleiters, dessen geriffelte Strukturen auf der Lichtleitermantelfläche zur Verbesserung der Mischung in Orts- und Winkelraum führen [24].

Die Abhängigkeit der Durchmischung von der Länge des Lichtleiters ist in Abbildung 5.19 dargestellt und bestätigt die Notwendigkeit des Symmetriebruchs. Der quadratische Lichtleiter erreicht bereits nach 7mm Länge eine sehr gute Durchmischung der beiden Lichtquellen. Der hexagonale Lichtleiter zeigt erst nach 15 mm Länge eine sehr gute Durchmischung, während der runde Lichtleiter gegen  $M_E = 0.13$  konvergiert und somit keine gute Durchmischung erreicht. Auffallend ist die Instabilität der Durchmischung. Mit steigender Anzahl von Symmetrieachsen wird die Durchmischung über der Länge instabiler, da es bedingt durch die Symmetrie immer wieder zu einer Entmischung

der beiden Lichtquellen kommt. Diese Entmischung über der Lichtleiterlänge ist für den runden Lichtleiter besonders ausgeprägt festzustellen.



**Abbildung 5.19:** Abhängigkeit der Güte der Durchmischung  $M_E$  von der Lichtleiterlänge für verschiedene Querschnittsgeometrien

### MISCHUNG IN WINKELRAUM

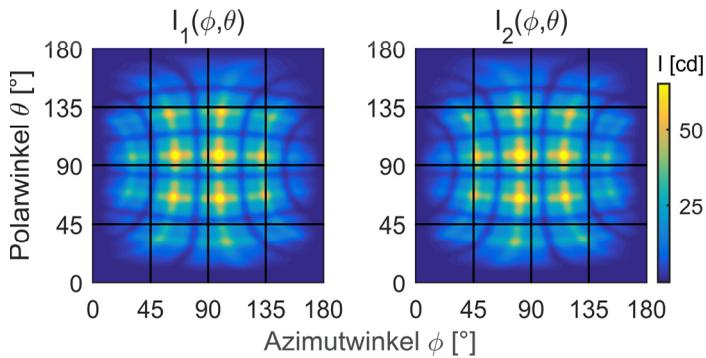
Auch die Durchmischung im Winkelraum verbessert sich mit zunehmender Lichtleiterlänge in Abhängigkeit von der Querschnittsgeometrie. Allerdings werden die einzelnen Lichtquellen nie vollständig durchmischt, da sich eine Verbesserung der Durchmischung im Winkelraum für Lichtleiter mit Symmetrieachse in einer zunehmend fei-

neren Struktur des Kaleidoskopmusters zeigt. Abbildung 5.20, Abbildung 5.21 und Abbildung 5.22 zeigen die Lichtstärkeverteilungen  $I(\phi, \theta)$  von Lichtquelle 1 und Lichtquelle 2 nach dem Transfer durch einen Lichtleiter mit einem quadratischen, einem hexagonalen und einem runden Querschnitt, dargestellt für eine Länge von 20 mm. In jeder Lichtstärkeverteilung sind deutlich Bereiche mit einer Lichtstärke von 0 cd neben Bereichen mit sehr hoher Lichtstärke zu sehen. Dieser Kaleidoskopeffekt ist in unterschiedlicher Ausprägung für alle Längen und alle Querschnittsgeometrien zu beobachten.

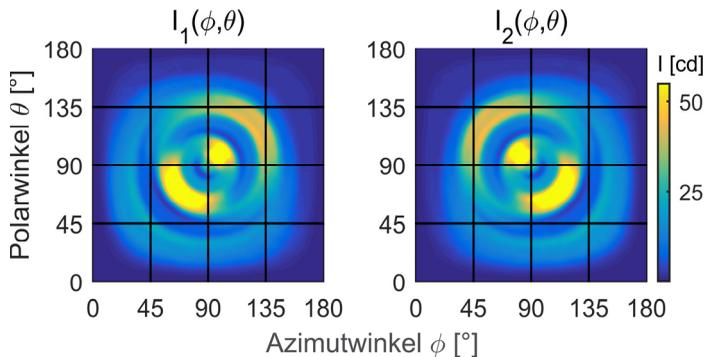
Die Lichtstärkeverteilungen des quadratischen Lichtleiters, dargestellt in Abbildung 5.20, zeigen ein sehr regelmäßiges ‚Karomuster‘, welches für beide Lichtquellen identisch ist, dabei jedoch in unterschiedlichem Raumwinkelbereich gültig ist. Das ‚Karomuster‘ strukturiert sich mit zunehmender Lichtleiterlänge feiner.

Die Lichtstärkeverteilungen des runden Lichtleiters, dargestellt in Abbildung 5.21, zeigen wenige Maxima in kreisförmiger Anordnung. Diese sind für beide Lichtquellen identisch, gelten jedoch wieder für unterschiedliche Raumwinkelbereiche.

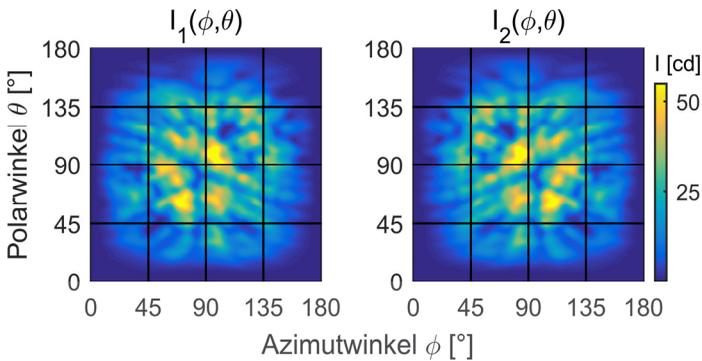
Die Lichtstärkeverteilungen des hexagonalen Lichtleiters entsprechen einer Mischung der Kaleidoskopmuster des quadratischen und des runden Lichtleiters und wirken dadurch weniger geordnet. Wie auch beim runden und quadratischen Querschnitt sind die Muster identisch, jedoch für unterschiedliche Raumwinkelbereiche definiert.



**Abbildung 5.20:** Lichtstärkeverteilungen ( $x$ -Achse als Polarachse) von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 20 mm langen Lichtleiter mit einer quadratischen Querschnittsgeometrie



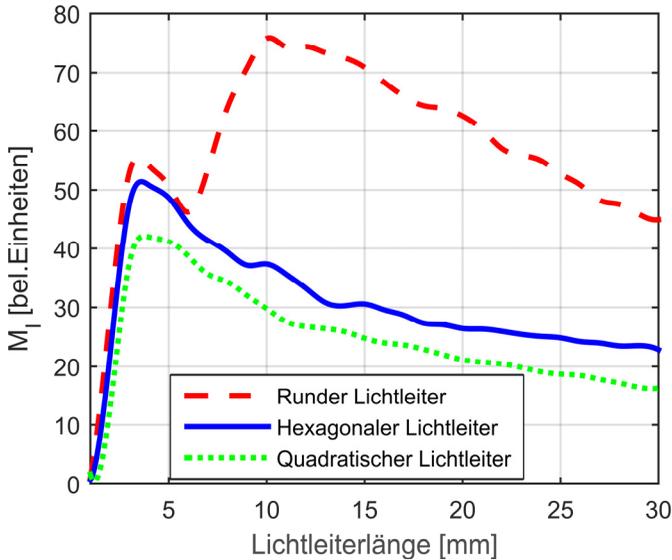
**Abbildung 5.21:** Lichtstärkeverteilungen ( $x$ -Achse als Polarachse) von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 20 mm langen Lichtleiter mit einer runden Querschnittsgeometrie



**Abbildung 5.22:** Lichtstärkeverteilungen ( $x$ -Achse als Polarachse) von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 20 mm langen Lichtleiter mit einer hexagonalen Querschnittsgeometrie

Die Angleichung der Verteilungsstruktur zweier Lichtquellen erfolgt für den quadratischen und den hexagonalen Lichtleiter über der Länge schneller als es für die Verteilungsstruktur beim runden Lichtleiter beobachtet werden kann. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 5.23 dargestellt.

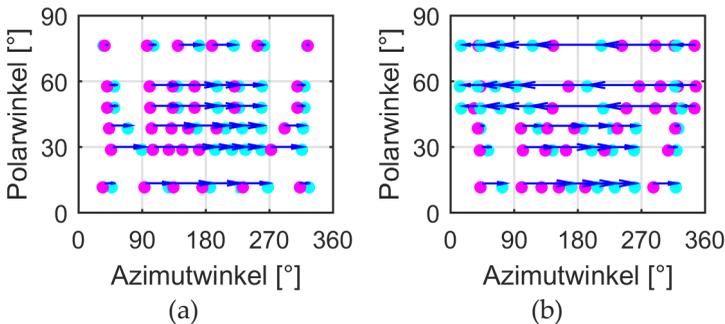
Im ersten Abschnitt des Lichtleiters, bis zu 4mm Länge, finden noch kaum Reflexionen statt. Das bedeutet, die Lichtstärkeverteilungen sind noch unbeeinflusst vom Lichtleiter und zeigen damit die ursprünglichen Lambertschen Verteilungen der Lichtquellen. Das Gütekriterium der Ähnlichkeit der beiden Lichtstärkeverteilungen  $M$  strebt dadurch gegen Null.



**Abbildung 5.23:** Abhängigkeit der Durchmischung  $M_I$  von der Lichtleiterlänge für verschiedene Querschnittsgeometrien

Die Gütefunktion aller drei Lichtleiter zeigt eine Konvergenz gegen einen Wert größer als Null, was bedeutet, dass die Lichtquellen im Winkelraum auch nach großer Länge nicht vollständig durchmischt werden. Der runde Lichtleiter stellt in Abbildung 5.23 einen Sonderfall dar mit einer anfänglichen Verbesserung der Durchmischung bis 6 mm, zunächst gefolgt von einer Verschlechterung der Durchmischung, bis diese ab 10 mm erneut eine Verbesserung zeigt. Zwischen 6 mm und 10 mm ist der langsame Übergang der Lichtstärkeverteilung zu einem Kaleidoskopmuster zu sehen, was zur Konzentration eines Bereichs mit einer Lichtstärke von 0 cd und eines Bereichs von sehr großer Lichtstärke führt. Bis zu einer Länge von 6 mm verbessert

sich die Durchmischung, weil sich in einem sehr kleinen Raumwinkelbereich zwei Lichtstärkepeaks ausbilden. Durch die Konzentration beider Lichtstromverteilungen auf einen kleinen Raumwinkelbereich, ergeben die Differenzen der Lichtstromintervalle einen kleineren Wert als nach der Ausbildung des Kaleidoskopmusters. Jetzt sind die Peaks der beiden Lichtstärkeverteilungen auf größere Raumwinkelbereiche verteilt, und verschlechtern damit die Durchmischung so lange, bis sich mehrere Peaks ausgebildet haben und sich die Durchmischung hierdurch wieder verbessert. Zur Veranschaulichung dieses Zusammenhangs sind in Abbildung 5.24 die Abweichungen der Lichtstromintervalle mit einer sehr geringen Auflösung für den runden Lichtleiter bei einer Länge von  $L = 6$  mm und einer Länge von  $L = 10$  mm aufgetragen.



**Abbildung 5.24:** Grafische Darstellung der Abweichungen von zwei Lichtstärkeverteilungen nach Transfer durch einen runden Lichtleiter mit (a) 6 mm Länge und (b) 10 mm Länge, das zugehörige Gütemaß beträgt für (a)  $M_I = 64.3$  und für (b)  $M_I = 75.9$

### 5.2.4 OPTIMIERUNGSANSATZ

Für die Optimierung der Durchmischung der eingekoppelten Lichtquellen im Winkelraum mittels eines Lichtleiters muss der Kaleidoseffekt aufgehoben werden. Der Kaleidoseffekt gibt ein Muster der Lichtquellenausdehnung und deren Position an der Lichteintrittsseite wieder. Mit zunehmender Lichtleiterlänge strukturiert sich das Kaleidoskopmuster lediglich feiner, und verhindert auch nach großer Lichtleiterlänge eine vollständige Durchmischung. Diese kann folglich nur durch einen Lichtleiter erreicht werden, der den Anfangsbedingungen gegenüber sensitiv ist, und damit für jeden von einer Lichtquelle ausgehenden Strahl nach wenigen Reflexionen eine völlig andere Trajektorie vorgibt. Eine starke Sensitivität gegenüber den Anfangsbedingungen ist im Kontext mit deterministischem Chaos gegeben. Dieser Zusammenhang führt zu chaotischen Farbmischstäben und wird im folgenden Kapitel ausführlich beschrieben.

### 5.3 ZUSAMMENFASSUNG

Die Analyse optischer Farbmischsysteme wurde beschränkt auf Systeme mit dispergierenden Elementen und lichtleitenden Elementen. Der Ansatz der Farbmischung mit dispergierenden Elementen wurde analysiert anhand eines optischen Systems, bestehend aus einer Kollimationslinse und einem reflektiven Beugungsgitter. Aufgabe der Kollimationslinse ist es zunächst das Licht zu kollimieren und auf das Beugungsgitter abzubilden, um in einem weiteren Schritt das kollo-

mierte und vom Beugungsgitter umgelenkte Licht erneut zu fokussieren. Die dispergierende Wirkung des Beugungsgitters wird dabei genutzt um die Trennung von drei LEDs im Winkelraum zu kompensieren. Das System wurde ausgelegt für die Peak-Wellenlängen von drei LEDs. Die Analyse ergab für die drei Peak-Wellenlängen der LEDs eine vollständige Durchmischung in Orts- und Winkelraum in Form einer virtuellen LED – eine Überlagerung der Abbildungen der drei LEDs im Fokus der Kollimationslinse. Berücksichtigte man jedoch das ausgedehnte Spektrum von LEDs, dann zeigte sich mit Blick auf jede einzelne LED eine Entmischung in Orts- und Winkelraum der virtuellen LED. Ein Optimierungsansatz mit Prismen zur Kompensation der Dispersion jeder einzelnen LED wurde untersucht. Dabei sollte die negative Dispersion eines Prismas die positive Dispersion eines Beugungsgitters für jede einzelne LED ausgleichen. Die Analyse ergab jedoch die Forderung nach einem sehr schwer realisierbaren System, bedingt durch die erfordernten langen Brennweiten mit relational kleinen Aperturen.

Der Ansatz zur Farbmischung mit lichtleitenden Elementen wurde anhand von Lichtleitern mit einem quadratischen, einem hexagonalen und einem runden Lichtleiterquerschnitt analysiert. Dadurch konnte die Abhängigkeit der Durchmischung in Orts- und Winkelraum vom Lichtleiterquerschnitt analysiert werden. Bei der Analyse der Durchmischung im Ortsraum, konnte das aus der Literatur bekannte Mischprinzip der ‚spiegelnden Kacheln‘ bestätigt werden. Des Weiteren wurde ein Zusammenhang zwischen den für die Reflexionen wirksamen Symmetrieachsen des Lichtleiterquerschnitts und

der Schnelligkeit der Durchmischung abgeleitet. Je weniger Symmetrieachsen ein Lichtleiterquerschnitt aufweist, desto schneller findet eine Durchmischung im Ortsraum statt. Die Analyse der Durchmischung im Winkelraum bestätigte den aus der Literatur bekannten Kaleidoskopeffekt, welcher ein Muster der Lichtquellenausdehnung und deren Position an der Lichteintrittsseite in Abhängigkeit des Lichtleiterquerschnitts wiedergibt. Da Farbmischsysteme mit lichtleitenden Elementen im Ortsraum bereits eine sehr gute Durchmischung ermöglichen, sollen diese so optimiert werden, dass auch eine sehr gute Durchmischung im Winkelraum möglich ist. Dieser umfassende Optimierungsansatz definiert eine neue Klasse von Lichtleitern und wird im folgenden Kapitel vorgestellt.



## Kapitel 6

# CHAOTISCHE FARBMISCHSTÄBE

*Der Terminus ‚chaotische Farbmischstäbe‘ beschreibt Lichtleiter mit einer Querschnittsfläche, die nach dem Prinzip eines chaotischen Billardsystems Farbmischung realisieren. Dieses Kapitel beschreibt die Anwendung chaotischer Billardsysteme auf den Lichtleiterquerschnitt als eine Methode, durch welche eine optimale Durchmischung in Orts- und Winkelraum der eingekoppelten Lichtquellen erzielt werden kann. Als Einführung werden im ersten Abschnitt die theoretischen Grundlagen chaotischer Billardsysteme vorgestellt. Daraufhin folgt eine Analyse zur unterschiedlichen Sensitivität von Billardsystemen. Eine Beschreibung der Anwendungsmöglichkeit zur Farbmischung schließt sich an. Die Berechnungen wurden durch eine prototypische Umsetzung validiert, welche im letzten Abschnitt beschrieben wird.*

### 6.1 GRUNDLAGEN CHAOTISCHER BILLARDS

Die Übertragung der Geometrie chaotischer Billardsysteme auf die Dimensionierung von Farbmischstäben setzt ein Verständnis der Grundlagen zur Theorie chaotischer Billardsysteme voraus, die im Folgenden vermittelt werden.

### 6.1.1 DETERMINISTISCHES CHAOS UND MATHEMATISCHE BILLARDS

Die Basis von deterministischem Chaos ist die starke sensitive Abhängigkeit eines Systems von Anfangsbedingungen und Störungen. In diesem Kontext ist der Begriff Stabilität von besonderer Bedeutung. Ein stabiles System ändert seinen Zustand oder seine Bewegung nicht aufgrund kleiner Störungen oder Änderung der Anfangsbedingung, wie zum Beispiel das Verhalten einer Kugel auf dem Grund einer Mulde demonstriert. Ein instabiles System dagegen, reagiert auf infinitesimale Störungen oder Änderung der Anfangsbedingungen mit großen Abweichungen in der Bewegung oder im Zustand. Diese Abweichungen vergrößern sich mit der Zeit exponentiell, wie es zum Beispiel die Kugel auf der Spitze eines Kegels demonstriert. Ein solches instabiles System ist durch die starke Sensitivität auf Anfangsbedingungen und Störungen als chaotisch zu bezeichnen [52].

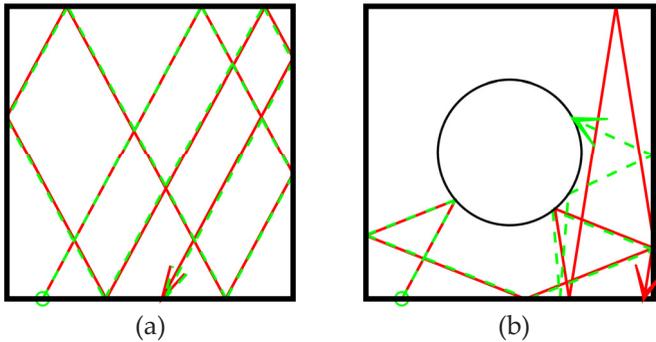
Prinzipiell sind zukünftige Zustände oder Bewegungen vollkommen determiniert durch vergangene Zustände oder Bewegungen. In der Praxis treten aber kleine Unsicherheiten auf, wie zum Beispiel die Begrenzung auf eine gewisse Anzahl an Dezimalstellen bei Berechnungen. In chaotischen Systemen werden diese Abweichungen so sehr verstärkt, dass das Verhalten, obwohl es für einen kurzen Zeitraum determiniert ist, über einen längeren Zeitraum nicht deterministisch ist. Dieses Phänomen der Sensitivität ist die grundlegende Eigenschaft aller chaotischen Systeme [53]. Ein häufig verwendetes Beispiel für deterministisches Chaos sind chaotische Billards, eine bestimmte Klasse der mathematischen Billardsysteme.

Mathematische Billardsysteme, kurz Billards genannt, beschreiben ein Gebiet in der Ebene (den Billardtisch) und einen Massepunkt (die Billardkugel), der sich in diesem Gebiet frei bewegt. Die Bewegung des Massepunktes ist geradlinig und erfolgt mit konstanter Geschwindigkeit bis zum Auftreffen auf die Grenzfläche. Die Reflexion an der Grenzfläche ist elastisch und unterliegt dem Gesetz der spiegelnden Reflexion aus der geometrischen Optik, das die Größenentsprechung von Einfallswinkel und Reflexionswinkels beschreibt. Nach der Reflexion bewegt sich der Massepunkt weiter fort, bis er erneut auf eine Grenzfläche trifft [54].

Die dynamischen Eigenschaften von Billards werden durch die Form der Grenzflächen bestimmt und können zwischen vollständig regelmäßigen und chaotischen Bewegungen variieren [55].

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.1 dargestellt für (a) ein quadratisches Billard und (b) ein chaotisches Billard. Das chaotische Billard, auch Billard mit hyperbolischer Dynamik oder hyperbolisches Billard genannt, zeigt im Gegensatz zum quadratischen Billard in der Mitte eine reflektierende Kreisscheibe. Zu sehen sind die Trajektorien von zwei Massepunkten, welche mit einer Winkeldifferenz von  $\Delta\varepsilon = 10^{-3}$  rad starten. Beim quadratischen Billard bleibt die anfängliche Winkeldifferenz nach Reflexion an den Rändern unverändert. Beim chaotischen Billard wächst die Winkeldifferenz durch Reflexion an der streuenden Kreisform in der Mitte des Billards schnell an und nach nur zehn Reflexionen weisen die Trajektorien einen völlig unterschiedlichen Verlauf auf. Die Beschreibung der Ent-

wicklung eines anfänglichen Unterschiedes eng benachbarter Trajektorien, wie zum Beispiel durch einen Winkelunterschied, und damit die Beschreibung der Sensitivität eines Systems, erfolgt über den Lyapunov Exponent, der im folgenden Abschnitt erläutert wird.



**Abbildung 6.1:** Darstellung von zwei Trajektorien, deren Startpunkte eine kleine Winkeldifferenz haben, in einem (a) quadratischen Billard und (b) chaotischen Billard

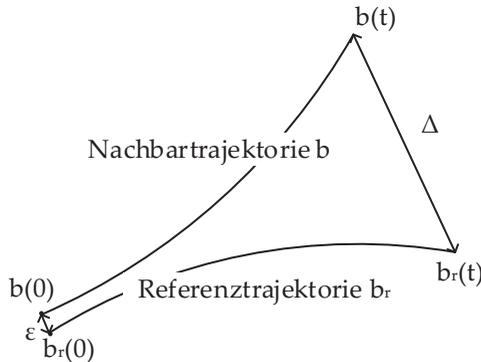
### 6.1.2 LYAPUNOV EXPONENT

#### DEFINITION

Der Lyapunov Exponent ermöglicht eine Aussage über das Stabilitätsverhalten gegebener Trajektorien durch Quantifizierung des durchschnittlichen Wachstums eines infinitesimal kleinen Unterschieds benachbarter Trajektorien [53], [56]. Zur Definition des Lyapunov Exponenten wird die Entwicklung des Unterschieds zweier Trajektorien im Folgenden Fehlerentwicklung genannt, und anhand

einer Referenztrajektorie und einer infinitesimal entfernt benachbarten Trajektorie betrachtet, dargestellt in Abbildung 6.2. Die zwei Trajektorien  $b_r$  und  $b$  starten mit einer kleinen Entfernung, dem Fehler  $\varepsilon = |b_r(0) - b(0)|$ , und zeigen einen sich exponentiell vergrößernden Abstand  $\Delta$  [57]. Für den Abstand  $\Delta$  gilt der in Gleichung (6.1) dargestellte Zusammenhang [56]. Der Exponent  $\sigma$  bestimmt, wie schnell die Trajektorien auseinander laufen und wird mit ‚Lyapunov Exponent‘ bezeichnet.

$$\Delta(t) = |b_r(t) - b(t)| = |b_r(0) - b(0)|e^{\sigma t} = \varepsilon e^{\sigma t} \quad (6.1)$$



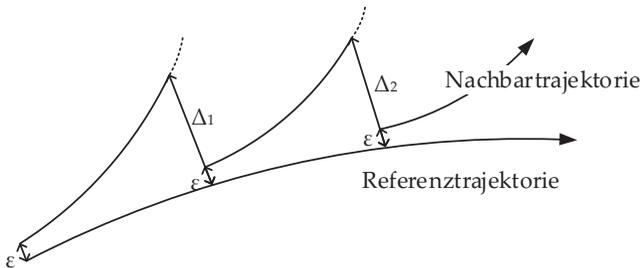
**Abbildung 6.2:** Zur Definition des Lyapunov Exponenten: Exponentielles Wachstum eines anfänglichen Unterschieds  $\varepsilon$  zwischen zwei Trajektorien

Die Berechnung des Lyapunov Exponenten wird für ideale Verhältnisse definiert mit einem exponentiellen Wachstum für kleinste  $\varepsilon$  und für asymptotisches Verhalten  $t \rightarrow \infty$  [57]. Die Bestimmungsfunktion



Schwierigkeiten auf. Im Falle chaotischen Verhaltens wächst der Fehler  $\Delta$  exponentiell an. Dies kann in der Computersimulation schnell zu ‚Overflows‘ führen. Weitere Probleme ergeben sich, wenn die Fehlerentwicklung im Winkelbereich  $-\pi$  bis  $+\pi$  liegt, da sich hierdurch der Abstand  $\Delta$  zweier chaotischer Bahnen ab einem gewissen Zeitpunkt in diesen Bereich bewegt und infolgedessen nicht mehr wachsen kann [57].

Für die Realisierung eines langen Beobachtungszeitraum  $t \rightarrow \infty$  wird deshalb ein Renormierungsverfahren angewandt [56], [57]. Bei diesem wird die Referenztrajektorie kontinuierlich errechnet, während die Nachbartrajektorie nach einem festen Zeitinkrement  $\Delta t$  wieder auf die ursprüngliche Entfernung  $\varepsilon$  gesetzt und von dort neu gestartet wird. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.3 schematisch dargestellt.



**Abbildung 6.3:** Schematische Darstellung des Renormierungsverfahrens zur praktischen Berechnung des Lyapunov Exponenten

Der Vorgang wird für  $k$  Fehlentwicklungen wiederholt, sodass man nacheinander viele Näherungen für den Lyapunov Exponent erhält.

Dieser berechnet sich mit Gleichung (6.4) [56], [57] durch die Mittelung über viele Fehlerentwicklungen:

$$\sigma = \frac{1}{k\Delta t} \sum_{i=1}^k \ln \frac{|\Delta_i|}{\varepsilon} \quad (6.4)$$

### 6.1.3 AUSFÜHRUNGSFORMEN CHAOTISCHER BILLARDS

Chaotische Billards sind in mehrere Klassen unterteilt. Die bekanntesten zwei Klassen sind die ‚Sinai-Billards‘ und die ‚Bunimovich-Billards‘, benannt nach den Mathematikern Y. Sinai [58] und L. Bunimovich [59]. Eine weitere Klasse chaotischer Billards, ebenfalls entdeckt durch L. Bunimovich, ist die Klasse der ‚Pilz-Billards‘. Viele Mathematiker beschreiben Konstruktionsweisen für chaotische Billards [60].

#### SINAI BILLARDS

Sinai Billards beinhalten dispersive<sup>9</sup> und semi-dispersive Billards. Bei dispersiven Billards sind alle Grenzflächen streuend. Sie werden realisiert durch konvexe Grenzflächen, das heißt jeder Mittelpunkt einer Grenzfläche liegt außerhalb der Billardfläche [58]. Solche Bil-

---

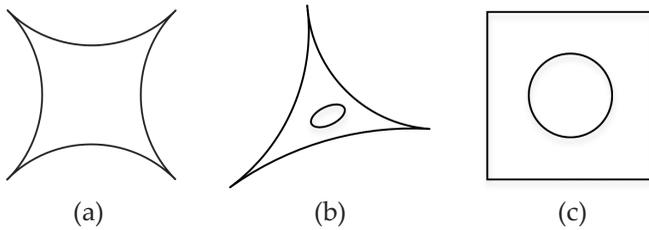
<sup>9</sup> Der Begriff ‚dispersiv‘ wird im mathematischen Sinne synonym mit ‚streuend‘ verwendet und steht in keinem Zusammenhang mit dem Dispersions-Begriff aus der Optik.

lards werden als dispersiv bzw. streuend bezeichnet, weil ein paralleles Lichtbündel nach der Reflexion an einer konvexen Grenzfläche gestreut wird. Zwei Beispiele für dispersive Billards sind in Abbildung 6.4 (a) und (b) dargestellt. Das Billard aus Abbildung 6.4 (a) wird aus vier Kreisscheiben konstruiert. Es zeigt starkes chaotisches Verhalten, wenn der Radius  $r$  der Kreisscheiben entsprechend Gleichung (6.5) auf den Abstand  $a$  zwischen dem Mittelpunkt der Billardfläche und dem Mittelpunkt einer Kreisscheibe ausgelegt wird [61].

$$\frac{1}{2}a < r < \frac{1}{\sqrt{2}}a \quad (6.5)$$

Für den Radius  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}a$  berühren sich die benachbarten Kreiselemente jeweils so, dass die Tangenten am Berührungspunkt identisch sind. Dieser Spezialfall für dispersive Billards mit sehr spitzen Ecken wird in der Literatur gesondert behandelt (engl.: *dispersing billiards with cusps*), weitere Details finden sich in [62].

Bei semi-dispersiven Billards enthalten die Grenzflächen auch geradlinige Elemente [58], dargestellt in Abbildung 6.4 (c). Zu sehen ist ein Quadrat mit einer reflektierenden Kreisscheibe in der Mitte. Durch die geradlinigen Grenzflächen wird ein paralleles Lichtbündel nicht an jeder Fläche des Billards gestreut, sondern verläuft nach Reflexion an einem geradlinigen Element weiterhin parallel, da das Billard intermittierend chaotisch ist. Das heißt beim semi-dispersiven Billard verlaufen Trajektorien nur zum einen Teil chaotisch, zum anderen Teil jedoch regelmäßig. Beim dispersiven Billard dagegen verlaufen Trajektorien ausschließlich chaotisch.



**Abbildung 6.4:** Beispiele für Sinai-Billard: (a) und (b) sind disperse Billards, (c) ein semi-dispersives Billard

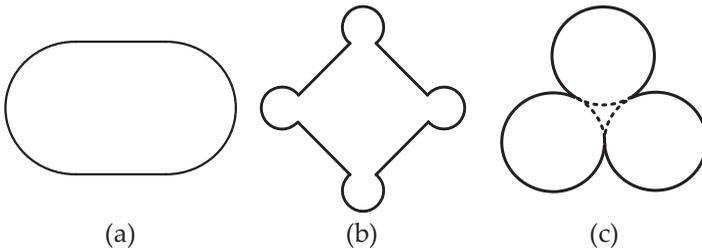
### BUNIMOVICH BILLARDS

Bunimovich Billards sind Billards mit konkaven Grenzflächen, das heißt, dass der Mittelpunkt der Grenzfläche innerhalb der Billardfläche liegt. Die Grenzflächen müssen mindestens eine konkave Komponente enthalten. Bei Reflexion eines parallelen Strahlbündels an der konkaven Komponente mündet dieses in Konvergenz. Wartet man jedoch lange genug, so wird das konvergente Strahlenbündel defokussiert und damit divergent. Das bedeutet, dass in der Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Reflexionen die Zeit  $\tau_c$  in der das Strahlbündel konvergent verläuft, kürzer sein muss als die Zeit  $\tau_d$  in der das Strahlenbündel divergent verläuft:  $\tau_c < \tau_d$ . Dadurch wirkt die konkave Grenzfläche streuend [59].

Beispiele für Bunimovich-Billard sind in Abbildung 6.5 dargestellt. Das Stadion-Billard aus Abbildung 6.5 (a) ist das bekannteste Beispiel für Bunimovich-Billard und besteht aus zwei identischen Halbkrei-

sen und zwei parallelen Segmenten [59]. Abbildung 6.5 (b) zeigt einen ‚Billardtisch mit Taschen‘, Abbildung 6.5 (c) zeigt das Flower-Billard.

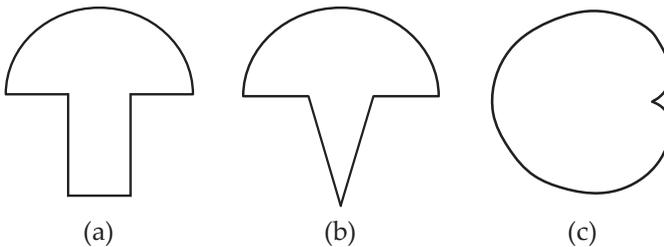
Erste Voraussetzung für die Konstruktion der Bunimovich Billards ist, dass sich die Kreisscheiben, würde man sie vervollständigen, nicht schneiden dürfen [55]. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 6.5 die Kreisscheiben mit gestrichelten Linien vervollständigt. Durch die geradlinigen Komponenten der Grenzflächen sind die Bunimovich Billards intermittierend chaotisch, was eine Alternation der Trajektorien zwischen chaotischem und regelmäßigem Verhalten zur Folge hat. Auch Bunimovich-Billards, welche nur konkave Grenzflächen enthalten und keine geradlinigen Komponenten, wie zum Beispiel das Billard aus Abbildung 6.5 (c), sind intermittierend chaotisch, da innerhalb eines offenen Kreises viele regelmäßige Reflexionen stattfinden können, bevor die Trajektorien die Kreisscheibe verlassen und defokussieren.



**Abbildung 6.5:** Beispiele für Bunimovich Billards (a) Stadion, (b) Billardtisch mit Taschen, (c) Flower mit angedeuteten vervollständigten Kreisscheiben

## SONSTIGE AUSFÜHRUNGSFORMEN

Neben den Sinai-Billardards und Bunimovich-Billardards gibt es noch andere Klassen chaotischer Billards. Darunter ist als eine bekannte Klasse die sogenannten ‚Pilze‘, dargestellt in Abbildung 6.6 (a) und (b). Abbildung 6.6 (a) zeigt die klassische Ausführungsform eines Pilz-Billardards und Abbildung 6.6 (b) eine Modifikation. Trajektorien zeigen in Pilz-Billardards entweder chaotisches oder regelmäßiges Verhalten in Abhängigkeit vom Startpunkt. Definitionen und Eigenschaften von Pilz-Billardards können in einer Publikation von L. Bunimovich nachgelesen werden [63]. Des Weiteren sind unterschiedliche Vorgehensweisen zur Konstruktion chaotischer Billards von verschiedenen Mathematikern bekannt. M. Wojtkowski publizierte in diesem Kontext Prinzipien für die Auslegung von Billards mit einem nicht-verschwindenden Lyapunov Exponenten [60]. Ein Ausführungsbeispiel seiner Billards ist in Abbildung 6.6 (c) dargestellt als ein Billard dessen Grenzfläche eine Kardioide ist.



**Abbildung 6.6:** a) Pilz-Billard, (b) Modifiziertes Pilz-Billard, (c) Beispiel für Wojtkowski-Billard

## 6.2 CHARAKTERISIERUNG DER SENSITIVITÄT CHAOTISCHER BILLARDS

Für die spätere Anwendung der Billards ist eine grundlegende Analyse der Sensitivität dieser Billards notwendig. Dazu wird das Verhalten zweier Trajektorien in den jeweiligen Billards über einer bestimmten Anzahl an Reflexionen betrachtet. Die Maßzahl für die Sensitivität ist der Lyapunov Exponent, dessen Berechnung im nachfolgenden Abschnitt beschrieben ist.

### 6.2.1 BERECHNUNGSMETHODE DES LYAPUNOV EXPONENTEN FÜR CHAOTISCHE BILLARDS

Für die Berechnung des Lyapunov Exponenten der Billard Geometrien wurde ein auf die vorliegende Arbeit angepasstes Renormierungsverfahren angewandt. Mit dem Renormierungsverfahren nach Gleichung (6.4) ergibt der Lyapunov Exponent für lineares Fehlerwachstum, welches zum Beispiel bei einem runden Billard auftritt, einen Wert größer Null. Die Anpassung dient dazu entsprechend der Definition des Lyapunov Exponenten auch für lineares Fehlerwachstum einen Lyapunov Exponenten von  $\sigma = 0$  zu erhalten. Dazu wird bei der Berechnung ein Korrekturfaktor  $\omega$  berücksichtigt, dessen Herleitung in Anhang B zu finden ist. Der Lyapunov Exponent für chaotische Billards wird demnach in der vorliegenden Arbeit mit Gleichung (6.6) berechnet.

$$\sigma_{var} = \frac{1}{k\Delta t} \sum_{i=1}^k \ln \frac{|\Delta_i|}{\omega_i \varepsilon} \quad (6.6)$$

Für die Analysen der Billards und ihrer Anwendungen auf den Lichtleiterquerschnitt, ist die Abschätzung des Lyapunov Exponenten mit angepasstem Renormierungsverfahren nach Gleichung (6.6) hinreichend. Für weitere Details zur Berechnung des Lyapunov Exponenten für mathematische Billards wird auf weiterführende Literatur verwiesen [55].

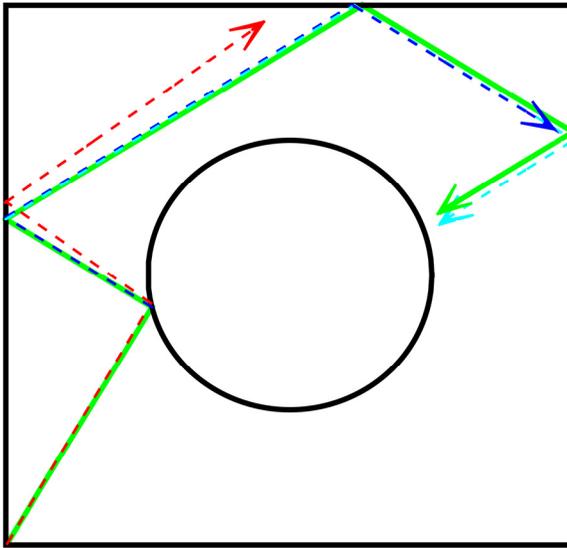
Für die Berechnungen in der vorliegenden Arbeit wurde ein vektorbasiertes Programm zur nicht sequentiellen Strahlverfolgung in Matlab [64] implementiert, anhand dessen für verschiedene Billardgeometrien der Lyapunov Exponent berechnet werden kann. Die Strahltrajektorien verlaufen dabei geradlinig bis zum Auftreffen auf die Grenzfläche, wo sie nach dem vektoriellen Reflexionsgesetz reflektiert werden. Zur Berechnung des Lyapunov Exponenten wird die Entwicklung des Winkels zwischen zwei Strahltrajektorien, deren anfänglicher Winkelunterschied  $\varepsilon$  sehr gering ist, analysiert. Die Strahltrajektorien werden über die vektorielle Punkt-Richtungsform einer Geraden definiert, welche für jede Reflexion neu berechnet wird. Der Winkelunterschied  $\varepsilon$  wird über den Schnittwinkel der Richtungsvektoren  $\vec{u}$  bzw.  $\vec{u}_r$  der beiden Strahltrajektorien nach folgender Gleichung (6.7) definiert:

$$\varepsilon = \arccos \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}_r}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}_r|} \quad (6.7)$$

Die Definition des Lyapunov Exponenten erfolgt über die Richtungsvektoren der Strahltrajektorien, da der Schnittwinkel der Richtungsvektoren eine eindimensionale Größe ergibt, was die Berechnung erheblich vereinfacht. Dagegen erfordert eine Definition über die zweidimensionalen Ortsvektoren  $x,y$  die Berechnung von zwei Lyapunov Exponenten für beide Dimensionen, was einen höheren Rechenaufwand bedingt. Des Weiteren muss ein anfänglicher Unterschied der Ortsvektoren bei einer Skalierung der Geometrie auch skaliert oder relativ zur Geometrie definiert werden. Ein anfänglicher Winkelunterschied ist dagegen invariant gegenüber einer Skalierung der Geometrie.

Die Referenztrajektorie  $\vec{b}_r$  wird kontinuierlich gerechnet, während die Berechnungen der Nachbartrajektorie  $\vec{b}$  nach einer gewissen Anzahl an Reflexionen abgebrochen werden. Um eine Mittelung über viele Entwicklungen des anfänglichen Winkelunterschieds zu erreichen, wird an jedem Reflexionspunkt der Referenztrajektorien eine Nachbartrajektorie berechnet. Folglich hat jeder Richtungsvektor ab  $N = \Delta t$  Reflexionen einen zugehörigen Nachbarrichtungsvektor, welcher  $\Delta t$  Reflexionen zuvor um den Winkel  $\varepsilon$  versetzt gestartet worden ist.

Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.7 für ein chaotisches Billard dargestellt. Die Linie in grüner Farbe indiziert dabei den Verlauf der Referenzstrahltrajektorie, während die gestrichelten Linien jeweils eine Nachbartrajektorie darstellen. Für eine übersichtliche Darstellung wurde eine  $\Delta t = 2$  gewählt, das heißt, dass alle Nachbartrajektorien für nur 2 Reflexionen berechnet werden.

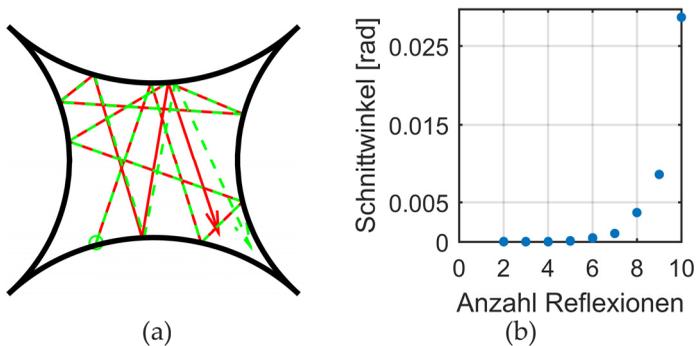


**Abbildung 6.7:** Chaotisches Billard mit der Referenztrajektorie  $b_r$  in grün und drei Nachbartrajektorien, die an jedem Reflexionspunkt mit einem Winkelunterschied von  $\varepsilon = 0.02$  rad starten

Der ‚Abstand‘  $\Delta$  zwischen den Trajektorien, welcher für die Berechnung des Lyapunov Exponenten nach Gleichung (6.4) benötigt wird, legt sich über den Schnittwinkel des Referenzvektors und des zugehörigen Nachbarrichtungsvektors fest. Die mathematische Formulierung erfolgt analog zur Berechnung des anfänglichen Winkelunterschieds  $\varepsilon$ , dargestellt in Gleichung (6.7), nach  $\Delta t$  Reflexionen.

### 6.2.2 SENSITIVITÄT VON SINAI-BILLARDS

Der Begriff Sinai-Billards umfasst dispersive und semi-dispersive Billards, wie in Kapitel 6.1.3 beschrieben. Um den Unterschied zwischen dispersiven und semi-dispersiven Billards deutlich zu machen, ist in Abbildung 6.8 und Abbildung 6.9 die Entwicklung des Schnittwinkels zweier Trajektorien dargestellt. Die Trajektorien starten mit einer sehr kleinen Winkeldifferenz von  $\varepsilon = 10^{-6}$ , definiert über den Schnittwinkel der Trajektorien. Abbildung 6.8 (a) stellt den Verlauf der Trajektorien im dispersiven Billard für zehn Reflexionen grafisch dar.

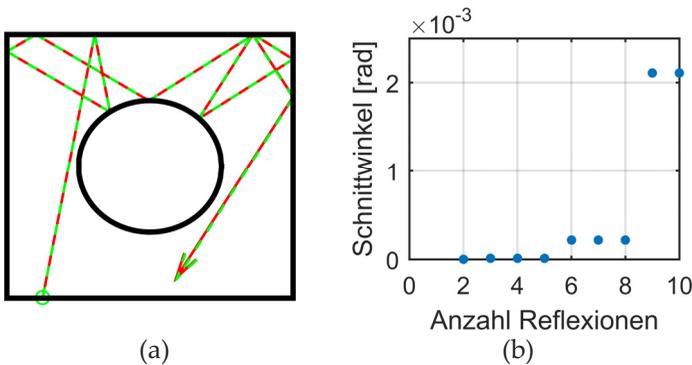


**Abbildung 6.8:** (a) Verlauf zweier Trajektorien für zehn Reflexionen mit anfänglich kleinem Winkelunterschied des Schnittwinkels und (b) Verlauf des Schnittwinkels in Abhängigkeit der Anzahl der Reflexionen für ein dispersives Billard

Die grafische Darstellung lässt kaum einen Winkel zwischen den Trajektorien erkennen, jedoch bietet sie einen Überblick über die Reflexionspunkte der Trajektorien. Hier verdeutlicht sich das Prinzip des dispersiven Billards: Jede Reflexion findet an einer streuenden

Grenzfläche statt. Dies führt zu einem exponentiellen Wachstum des anfänglich kleinen Schnittwinkels der Trajektorien. Abbildung 6.8 (b) stellt den Verlauf des berechneten Schnittwinkels über der Anzahl an Reflexionen dar und zeigt ein exponentielles Wachstum.

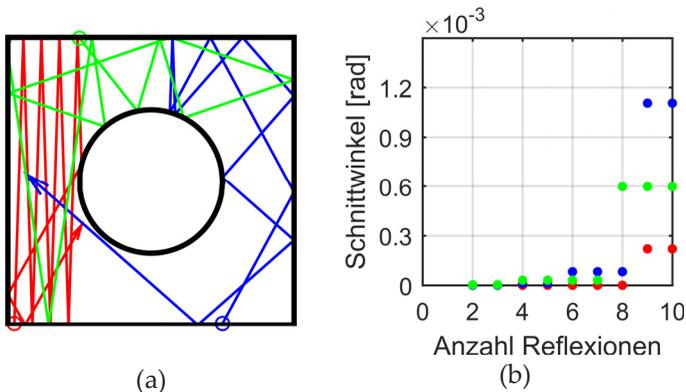
Abbildung 6.9 (a) stellt den Verlauf der Trajektorien im semi-dispersiven Billard für zehn Reflexionen grafisch dar. An dieser Stelle zeigt sich, dass manche Reflexionen an der dispersiven runden Grenzfläche in der Mitte stattfinden und andere Reflexionen mehrfach zwischen den geraden, äußeren Grenzflächen geschehen. Dies führt zu einem, zwischen chaotischem und regelmäßigem Verhalten, alternierenden Bewegungsverlauf der Trajektorien.



**Abbildung 6.9:** (a) Verlauf zweier Trajektorien für zehn Reflexionen mit anfänglich kleinem Winkelunterschied des Schnittwinkels und (b) Verlauf des Schnittwinkels in Abhängigkeit der Anzahl der Reflexionen für ein semi-dispersives Billard

Dieser intermittierend chaotische Bewegungsablauf wird deutlich bei der Berechnung des Schnittwinkels, welcher in Abbildung 6.9 (b) über der Anzahl an Reflexionen dargestellt ist. Während der Mehrfach-Reflexionen an den geraden Grenzflächen wächst der anfängliche Winkelunterschied nicht an. Nur durch Reflexionen an der streuenden inneren Grenzfläche findet ein exponentielles Wachstum des Schnittwinkels statt. Daraus resultiert ein verlangsamtes Auseinanderlaufen der Trajektorien.

Betrachtet man nur wenige Reflexionen  $N$ , so ist beim semi-dispersiven Billard eine Abhängigkeit der Fehlerentwicklung vom Startpunkt gegeben. Diese Abhängigkeit ist in Abbildung 6.10 (a) für drei beispielhafte Referenztrajektorien dargestellt. Abbildung 6.10 (b) zeigt die zugehörigen Werte des Schnittwinkels in Abhängigkeit von den Reflexionen.



**Abbildung 6.10:** Abhängigkeit der Fehlerentwicklung vom Startpunkt der Trajektorien (a) mit der grafisch dargestellten Referenztrajektorie und (b) dem Wertebereich des Schnittwinkels für ein semi-dispersives Billard

Startet die Referenztrajektorie beispielsweise mit einem sehr ‚steilen‘ Richtungsvektor, in Abbildung 6.10 (a) repräsentiert durch die rote Trajektorie, dann ist der Verlauf für mehrere Reflexionen regelmäßig und verursacht folglich keine Veränderung des Schnittwinkels. Andere Startwerte, wie beispielsweise die der blauen Referenztrajektorien, verursachen vielfache Reflexionen an der inneren Kreisscheibe und bewirken damit ein stärkeres Anwachsen des Winkelunterschieds zwischen Referenz- und Nachbartrajektorie. Diese Betrachtung für eine begrenzte Anzahl an Reflexionen ist für die spätere Anwendung des Billards auf den Lichtleiterquerschnitt relevant und in Abschnitt 6.3.2 beschrieben.

Beim dispersiven Billard spielt der Startwert der Trajektorien keine Rolle, da auch für wenige Reflexionen das Auseinanderlaufen der Trajektorien stets exponentiell ist. Jedoch wird für manche Startwerte eine größere Anzahl an Reflexionen benötigt, um auch für diese Startwerte eine vergleichbar große Winkelabweichung zu erreichen. Dies begründet sich darin, dass manche Startwerte zu Mehrfachreflexionen in einer Ecke des Billards führen. Durch die kurzen Distanzen zwischen den Reflexionen laufen, die Trajektorien langsamer auseinander als dies bei langen Distanzen über das gesamte Billard eintritt.

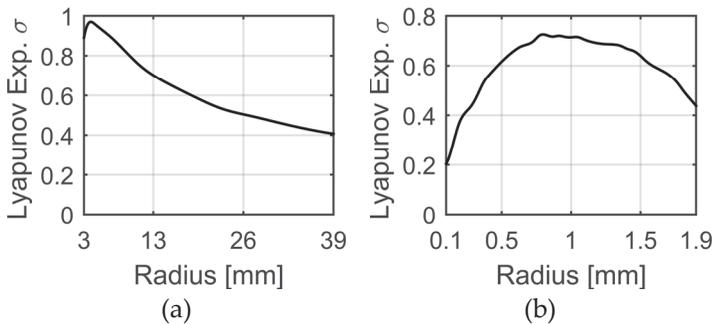
Das zwischen Chaos und Regelmäßigkeit alternierende Verhalten semi-dispersiver Billards spiegelt sich auch im Lyapunov Exponenten wieder, welcher für  $N \in [1000, 3000]$  Reflexionen einen maximalen Wert von  $\sigma_{var} = 0.73$  aufzeigt. Der Lyapunov Exponent des dispersiven Billards, mit einem Radius von  $r = 3$  mm, zeigt mit  $\sigma_{var} = 0.94$  einen höheren maximalen Wert für dieselbe Anzahl an Reflexionen.

Zur Berechnung des Lyapunov Exponenten wurde für die Anzahl der Reflexionen der Nachbartrajektorien  $\Delta t = 9$  gewählt. Diese Anzahl an Reflexionen erwies sich für alle Billard-Klassen als geeignet. Der Verlauf des Lyapunov Exponenten über der Anzahl an Reflexionen für das dispersive und das semi-dispersive Billard ist in Abbildung 6.16 dargestellt.

Ein weiterer Parameter zur Beeinflussung der Sensitivität, ist der Radius der dispersiven Grenzfläche und kann anhand des Lyapunov Exponenten überprüft werden. Prinzipiell gilt, je kleiner der Radius bei gleichbleibender Kantenlänge des dispersiven Billards ist, desto schneller laufen die Trajektorien auseinander, da die konvexen Grenzflächen mit kleiner werdendem Radius eine größere Streuung bewirken. Wählt man aber den minimal möglichen Radius, sodass die einzelnen Grenzflächen sich gerade nicht schneiden, so sind die Ecken sehr ausgeprägt, was wiederum zu kürzeren Distanzen zwischen den Reflexionen führt. Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 6.11 (a) dargestellt. Für eine Billarddimension mit der Kantenlänge  $D = 4$  mm ist der minimal mögliche Radius  $r = 2.82$  mm. Bei diesem Radius sind die Ecken zu sehr ausgeprägt. Der maximale Lyapunov Exponent findet sich für  $r = 3.76$  mm und nimmt mit größer werdendem Radius ab.

Beim semi-dispersiven Billard gilt nicht wie beim dispersivem Billard, dass ein kleinerer Radius einen größeren Lyapunov Exponenten bewirkt und damit stärker chaotisches Verhalten verursacht. Wie Abbildung 6.11 (b) zeigt, hat der Lyapunov Exponent sein Maximum bei einem Radius von  $r = 1$  mm, wenn die Kantenlänge des Billards

$D = 4$  mm ist. Je kleiner der Radius ist, desto seltener treten Reflexionen am Kreis in der Mitte auf, was zu einem geringen Lyapunov Exponenten führt. Je größer der Kreis, desto häufiger wird der Strahl am Kreis reflektiert, wobei jedoch die streuende Wirkung des Kreises mit steigendem Radius verloren geht. Das bedeutet für die Geometrie des semi-dispersiven Billards, dass das Resultat eines maximal chaotischen Verhaltens nur durch Optimierung der inneren runden Grenzfläche, entsprechend der äußeren Dimensionen, erreicht werden kann.

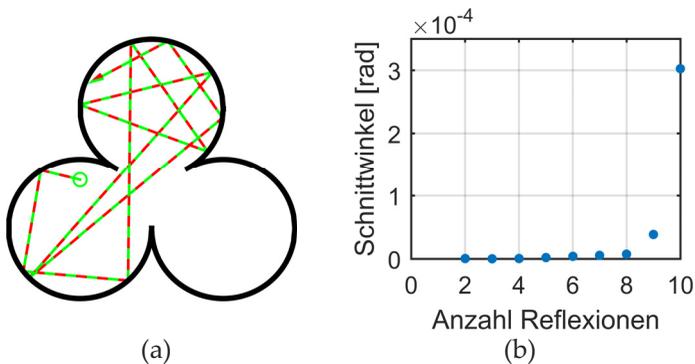


**Abbildung 6.11:** Abhängigkeit des Lyapunov Exponenten vom Radius der dispersiven Grenzflächen für ein (a) dispersives Billard und (b) semi-dispersives Billard

### 6.2.3 SENSITIVITÄT VON BUNIMOVICH-BILLARDS

Mit ‚Bunimovich-Billard‘ werden Billardsysteme bezeichnet, deren Grenzflächen aus konkaven und geradlinigen Elementen gebildet sind, wie in Kapitel 6.1.3 im Detail beschrieben. Die Analyse der Sensitivität erfolgt anhand des Stadion-Billard und des Flower-Billard.

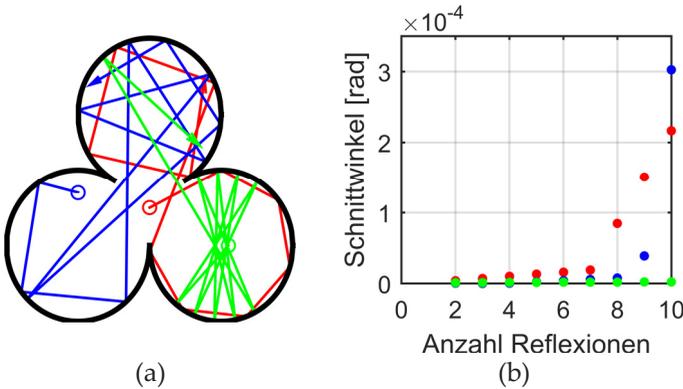
Beide Billards zeigen intermittierendes Chaos durch Komponenten, die einen regelmäßigen Verlauf der Trajektorien bewirken. Abbildung 6.12 (a) zeigt grafisch den Verlauf zweier Trajektorien mit anfänglich kleinem Winkelunterschied für ein Flower-Billard. Hier sind deutlich mehrfache Reflexionen innerhalb eines offenen Kreissegments zu sehen, welche nur ein lineares Ansteigen der Winkeldifferenz bewirken.



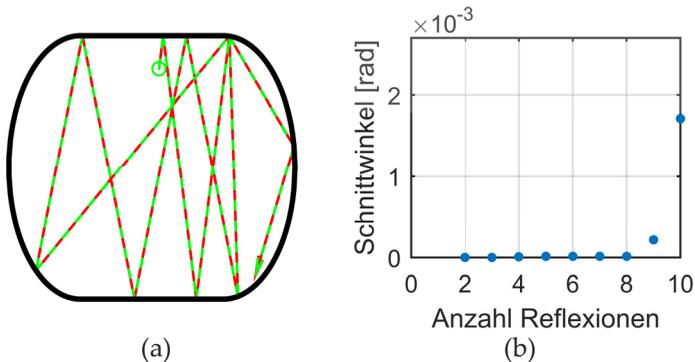
**Abbildung 6.12:** (a) Verlauf zweier Trajektorien für zehn Reflexionen mit anfänglich kleinem Winkelunterschied des Schnittwinkels und (b) Verlauf des Schnittwinkels in Abhängigkeit der Anzahl der Reflexionen für ein defokussierendes Flower-Billard

Beim Wechsel der Trajektorien von einem Kreissegment in das andere findet jedoch eine starke Defokussierung statt, wodurch sich die Winkeldifferenz exponentiell vergrößert. Abbildung 6.12 (b) zeigt die Entwicklung des Schnittwinkels der zwei Trajektorien in Abhängigkeit von den Reflexionen. Die Schnelligkeit des Auseinanderlaufens der Trajektorien ist stark abhängig von der Startposition. Dieser Zusammenhang ist für das Flower-Billard in Abbildung 6.13 (a) für die

Referenztrajektorie grafisch dargestellt, und in Abbildung 6.13 (b) sind die zugehörigen Werte des Schnittwinkels in Abhängigkeit von den Reflexionen aufgetragen.



ßige Reflexionen an den parallelen Segmenten stattfinden. Abbildung 6.14 (a) zeigt dazu grafisch den Verlauf zweier Trajektorien mit anfänglich kleinem Winkelunterschied  $\varepsilon = 10^{-6}$  und Abbildung 6.14 (b) zeigt die zugehörigen Werte des Schnittwinkels in Abhängigkeit der Anzahl an Reflexionen.

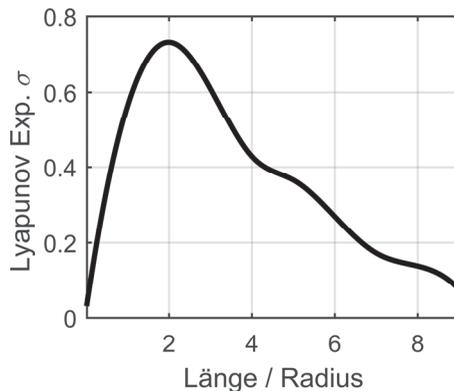


**Abbildung 6.14:** (a) Verlauf zweier Trajektorien für zehn Reflexionen mit anfänglich kleinem Winkelunterschied des Schnittwinkels und (b) Verlauf des Schnittwinkels in Abhängigkeit der Anzahl der Reflexionen für ein defokussierendes Stadion-Billard

Für den Startwert der für Abbildung 6.14 gewählt wurde, finden mehrfache Reflexionen nacheinander an den parallelen Segmenten statt, die zu keiner Veränderung des Schnittwinkels führen. Genauso wie im Flower-Billard ist beim Stadion-Billard die Fehlerentwicklung abhängig vom Startpunkt der Referenztrajektorie.

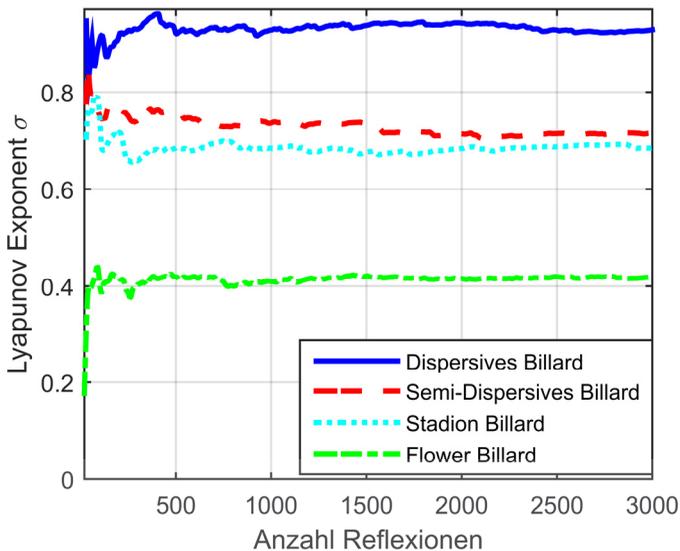
Der Startpunkt kann jedoch nur bei wenigen Reflexionen als ein Parameter zur Beeinflussung der Sensitivität dienen. Langfristig über viele Reflexionen betrachtet, stellt das Verhältnis der Länge der

parallelen Segmente  $e$  zum Radius der Halbkreissegmente  $r$  einen relevanten Parameter des Stadion-Billiards zur Beeinflussung der Sensitivität dar. Sind die Segmente zu lang, wird das Billard weniger sensitiv, hervorgerufen durch regelmäßige Reflexionen an den geradlinigen Elementen. Wählt man die parallelen Segmente jedoch zu kurz, so verringert sich auch hierdurch die Sensitivität, da sich die Kreisscheiben schneiden und die Bedingung für Bunimovich Billards damit nicht erfüllt ist. Abbildung 6.15 zeigt die zugehörige Berechnung des Lyapunov Exponenten über dem Verhältnis der Länge der parallelen Segmente zum Radius  $r$  der Halbkreissegmente bei gleichbleibender Fläche des Stadion-Billiards.



**Abbildung 6.15:** Abhängigkeit des Lyapunov Exponenten vom Verhältnis der Länge der parallelen Segmente des Stadion-Billiards zum Radius der Halbkreissegmente

Damit ergibt sich für das Stadion-Billard die höchste Sensitivität für das Verhältnis  $e/r = 2$ . Der Lyapunov Exponent zeigt bei diesem Verhältnis für  $N \in [1000, 3000]$  Reflexionen den maximalen Wert von  $\sigma_{var} = 0.69$  auf mit  $\Delta t = 9$  Reflexionen der Nachbartrajektorien. Der Lyapunov Exponent des Flower-Billard nimmt den maximalen Wert  $\sigma_{var} = 0.42$  für dieselbe Anzahl an Reflexionen an und weist folglich eine geringere Sensitivität als das Stadion-Billard auf. Der Verlauf des Lyapunov Exponenten über der Anzahl an Reflexionen für das Stadion- und das Flower-Billard ist in Abbildung 6.16 dargestellt.



**Abbildung 6.16:** Verlauf des Lyapunov Exponenten über der Anzahl an Reflexionen für verschiedene chaotische Billards

## 6.3 ANWENDUNG CHAOTISCHER BILLARDS AUF DEN LICHTLEITERQUERSCHNITT

### 6.3.1 GRUNDKONZEPT

Überträgt man die Geometrie eines chaotischen Billards auf einen Lichtleiter, im Folgenden chaotischer Farbmischstab genannt, bleibt das grundlegende Konzept der Farbmischung mit Lichtleitern, wie in Kapitel 5.2.1 beschrieben, erhalten. Notwendige Voraussetzung ist weiterhin nur der Lichtleiter und die einzukoppelnden LEDs. Die lichtleitende Funktion bleibt erhalten und somit auch die hohe Effizienz des Lichtleiters.

Nicht chaotische Lichtleiter zeigen bei der Durchmischung der eingekoppelten LEDs im Winkelraum den Kaleidoskopeffekt, verursacht durch die dezentrierte Einkopplung der LEDs. Die Anwendung der Geometrien chaotischer Billards auf den Lichtleiterquerschnitt ermöglicht es durch die Sensitivität auf die Anfangsbedingungen (Startpunkt und -winkel), eingekoppelte mehrfarbige LEDs im Lichtleiter in Orts- und Winkelraum vollständig zu durchmischen. Durch die Ausdehnung der LED-Lichtquellen liegen unterschiedliche Startpunkte vor. Damit starten die Lichtstrahlen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen und durch die sensitive Reflexion an der Mantelfläche entfernen sich die Strahltrajektorien schnell voneinander, mit dem Resultat einer schnellen Durchmischung.

Wie der vorherige Abschnitt zeigt, wird die Sensitivität chaotischer Billards durch den Lyapunov Exponenten für unendlich viele Reflexionen betrachtet. In praktischer Umsetzung ist die Annäherung mit bis zu 3000 Reflexionen zu erreichen. Beim chaotischen Farbmischstab sind jedoch nicht sehr viele Reflexionen möglich, da die Länge des Lichtleiters nicht nur begrenzt ist, sondern auch möglichst gering gehalten werden soll. Durch die geringe Anzahl an Reflexionen ist eine Verknüpfung des Lyapunov Exponenten und der Güte der Farbmischung von chaotischen Farbmischstäben erst mit zunehmender Lichtleiterlänge möglich, wie sich im nachfolgenden Abschnitt zeigt. Die maximal mögliche Anzahl an Reflexionen ergibt sich aus dem maximalen Einkopplungswinkel  $\beta'_{0,max}$ , der Querschnittsdiagonalen  $D$  und der Länge  $L$  des Lichtleiters nach Gleichung (6.8). Jedoch werden die meisten Strahlen mit einer sehr viel geringeren Anzahl an Reflexionen als  $N_{max}$  durch den Farbmischstab geleitet. Dabei gilt, je kürzer der Lichtleiter, desto mehr Strahlen werden ohne Reflexion durch den Stab geleitet, auch bezeichnet als der ‚direkte Lichtanteil‘.

$$N_{max} = \frac{L}{D} \tan(\beta'_{0,max}) \quad (6.8)$$

Durch die begrenzte Anzahl an Reflexionen ergibt sich für die verschiedenen chaotischen Billard-Geometrien eine unterschiedliche Schnelligkeit der Farbmischung über der Lichtleiterlänge. Das bedeutet, dass je nach Wahl der Querschnittsgeometrie der Lichtleiter unterschiedlich lang dimensioniert werden muss um eine gute Farbmischung zu erhalten.

### 6.3.2 FARBMISCHUNG

Zur Analyse der Farbmischung von chaotischen Farbmischstäben werden dieselben Simulationsmethoden wie in der Lichtleiteranalyse aus Kapitel 5.2.3 angewendet. Als Lichtquelle werden wieder die Maße der LED Serie Ostar Stage von Osram verwendet. Einkoppelt werden die LEDs wiederum durch direktes Platzieren an der Lichteintrittsseite des Lichtleiters, wie in Abbildung 5.14 dargestellt. Allerdings variiert die Position der LEDs auf der Eintrittsseite des Lichtleiters je nach Querschnittsgeometrie. Analysiert werden chaotische Farbmischstäbe mit den Querschnitten eines dispersiven Billards, eines semi-dispersiven Billards, eines Stadion-Billard und eines Flower-Billard, im Folgenden bezeichnet als dispersiver Farbmischstab, semi-dispersiver Farbmischstab, Stadion-Farbmischstab und Flower-Farbmischstab. Diese vier Billardgeometrien wurden für die Farbmischanalyse ausgewählt, weil sie verschiedene Kombination aus geradlinigen, konkaven und konvexen Grenzflächen realisieren. Durch die verschiedenen Geometrien ergeben sich teilweise unterschiedliche Möglichkeiten der Platzierung der LED an der Lichteitereintrittsseite. Voraussetzung für eine sinnvolle Einkopplung ist es, die Kantenlänge  $D$  des Querschnitts möglichst gering zu halten, um dadurch möglichst viele Reflexionen im Lichtleiter zu erreichen. Abbildung 6.17 zeigt die vier Querschnitte mit der Position von zwei LEDs relativ zum Querschnitt.

Beim dispersiven Farbmischstab, dargestellt in Abbildung 6.17 (a), gibt es nur eine Möglichkeit der Einkopplung, da die Grundlage des dispersiven Querschnitts eine quadratische Fläche ist mit in den

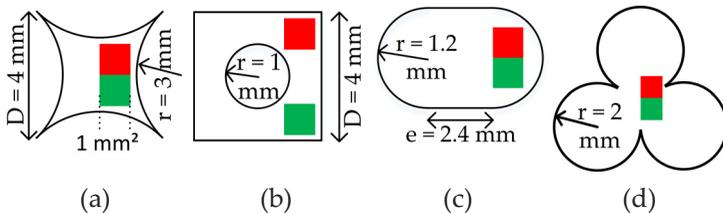
Lichtleiter hinein gezogenen Grenzflächen. Die Größe der LEDs legt damit die minimal mögliche Diagonale fest.

Mit dem Ziel, die Kantenlänge des Querschnitts gering zu halten, gibt es auch beim semi-dispersiven Farbmischstab, dargestellt in Abbildung 6.17 (b), nur die eine Möglichkeit einer Platzierung der LEDs in den Ecken.

Durch die Länge der parallelen Segmente  $e$  bietet ein Stadion-Farbmischstab, dargestellt in Abbildung 6.17 (c), mehrere Möglichkeiten die LEDs zu platzieren. Um eine schnellere Durchmischung zu erreichen, müssen die LEDs jedoch innerhalb der Halbkreissegmente platziert werden um viele anfängliche regelmäßige Reflexionen zu vermeiden. Die Platzierung innerhalb der offenen Kreisescheibe ermöglicht ein schnelleres Defokussieren.

Ein Flower-Farbmischstab, dargestellt in Abbildung 6.17 (d), bietet ebenfalls verschiedene Möglichkeiten zur Platzierung der LEDs. Mit dem Ziel, schnell eine Farbmischung zu erreichen, gibt es jedoch auch hier nur eine sinnvolle Position: die möglichst mittige Platzierung der LEDs im Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts. Würde man beispielsweise drei LEDs in jeweils einer Kreisscheibe platzieren, so würde ein Großteil der Strahlen mehrfach innerhalb einer Kreisscheibe reflektiert werden bis die Strahlen die Kreisscheibe verlassen und defokussieren. In diesem Kontext ist die Betrachtung des Verlaufs der Trajektorien abhängig vom Startpunkt beim Flower-Billard hilfreich, wie in Abbildung 6.13 dargestellt.

Die Dimensionen der Querschnitte bestimmen sich durch die Größe der LEDs und sind in Abbildung 6.17 zu finden.



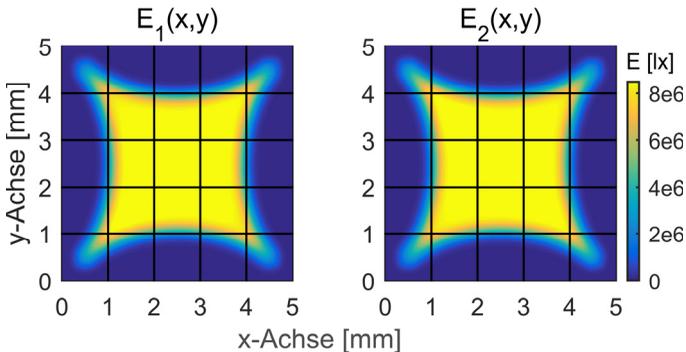
**Abbildung 6.17:** Einkopplungsposition der LEDs relativ zur Lichtleitereintrittsseite mit dem Querschnitt eines (a) dispersiven, (b) semi-dispersiven (c) Stadion- und (d) Flower-Billard

### MISCHUNG IM ORTSRAUM

Die Analyse der Durchmischung im Ortsraum bei nicht chaotischen Farbmischstäben in Kapitel 5.2.3 zeigt zwei Kriterien für eine gute Durchmischung im Ortsraum auf. Zum einen das Kriterium ‚spiegelnde Kacheln‘ und zum anderen das Kriterium ‚Symmetriebruch‘. Diese Kriterien lassen sich auch auf die chaotischen Lichtleiterstäbe anwenden. Eine Querschnittsgeometrie nach dem Prinzip ‚spiegelnde Kacheln‘ trifft auf keine der chaotischen Billard Geometrien zu. Das heißt nach diesem Prinzip sollte keine homogene Durchmischung der eingekoppelten LEDs im Ortsraum eintreten.

In Abbildung 6.18 bis Abbildung 6.21 sind Beleuchtungsstärkeverteilungen der vier analysierten Lichtleiter bei einer Länge von 50 mm auf einer Detektorfläche zu sehen. Wendet man das Prinzip ‚spie-

gelnde Kacheln' an, so trifft es bei den Beleuchtungsstärkeverteilungen aus Abbildung 6.19, Abbildung 6.20 und Abbildung 6.21 in Form einer inhomogenen Verteilung an der Lichtaustrittsseite zu, wie auch beim runden Lichtleiter in Kapitel 5.2.3 zu sehen ist. Bemerkenswert ist die Beleuchtungsstärkeverteilung des Stadion-Farbmischstabs aus Abbildung 6.20: Beide Lichtquellen erzeugen eine sehr ähnliche, jedoch inhomogene, Verteilung. Bei nicht chaotischen Lichtleitern bedeutet eine Inhomogenität der Lichtaustrittsfläche zwangsläufig, dass keine Durchmischung im Ortsraum stattfindet. Bei chaotischen Lichtleitern ist jedoch eine Durchmischung im Ortsraum auch dann möglich, wenn die Lichtaustrittsfläche eine inhomogene Verteilung zeigt, und die Querschnittsfläche damit nicht dem Prinzip ‚spiegelnde Kacheln‘ entspricht.



**Abbildung 6.18:** Beleuchtungsstärkeverteilungen auf der Detektorfläche von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 20 mm langen dispersiven Farbmischstab

Ein extremes Beispiel stellt der dispersive Farbmischstab dar, dargestellt in Abbildung 6.18, mit vollständig identischer und homogener Beleuchtungsstärkeverteilung der beiden eingekoppelten Lichtquellen. Dies ist begründet im Symmetriebruch der Lichtleiterquerschnittsgeometrie. Bei chaotischen Farbmischstäben spielt der Symmetriebruch bezüglich der Durchmischung im Ortsraum, eine dem Kriterium ‚spiegelnde Kacheln‘ übergeordnete Rolle. Der Querschnitt des dispersiven Farbmischstabs hat keine für die Reflexion wirksamen Symmetrieachsen<sup>10</sup> und ermöglicht dadurch eine vollständige Durchmischung im Ortsraum.

Der Querschnitt des Stadion-Farbmischstabs hat eine Symmetrieachse, die wirksam für die Reflexionen zwischen den parallelen Segmenten ist. Damit herrscht in einer Richtung des Lichtleiters Symmetrie, was zu regulären Bewegungen der Lichttrajektorien führt. Der Querschnitt des semi-dispersiven Farbmischstabs zeigt, wie der quadratische Farbmischstab, zwei für die Reflexionen wirksame Symmetrieachsen. Hier herrscht, im Gegensatz zum Stadion-Farbmischstab, bereits in zwei Richtungen Symmetrie. Jedoch stellt der semi-dispersive Farbmischstab durch die innere Kreisscheibe gegenüber allen anderen chaotischen Farbmischstäben einen Sonderfall

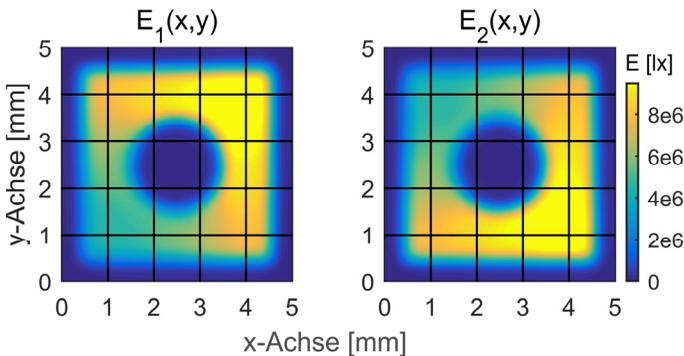
---

<sup>10</sup> Geometrisch betrachtet hat die dispersive Billardgeometrie vier Symmetrieachsen: Die Symmetrieachsen, welche sich horizontal und vertikal im Mittelpunkt der Geometrie befinden und die diagonalen Symmetrieachsen. Für die Reflexion ist keine dieser Achsen wirksam, da die vertikale und horizontale Symmetrieachse nur für Strahltrajektorien auf der Achse selbst wirksam und damit vernachlässigbar sind, während die diagonalen Symmetrieachsen für Reflexionen nicht definiert sind und der Lichtstrahl dort endet.

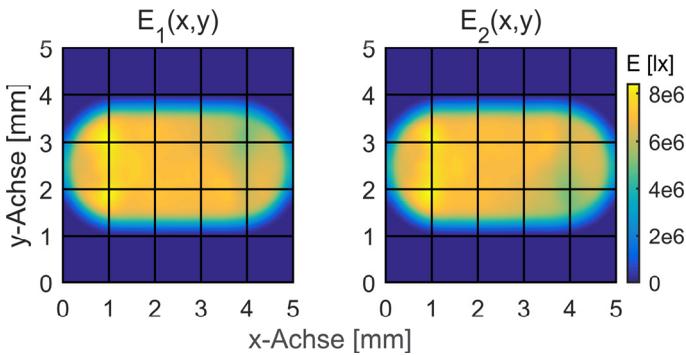
---

dar, auf den später näher eingegangen wird. Der Querschnitt des Flower-Farbmischstabs besteht aus drei offenen Kreisscheiben und hat für jede offene Kreisscheibe sehr viele Symmetrieachsen, die wirksam sind für Reflexionen innerhalb eines Kreisabschnitts von  $300^\circ$ . Damit herrscht in jeder offenen Kreisscheibe innerhalb eines Abschnitts von  $300^\circ$  Symmetrie in alle Richtungen. Somit bestätigen die Geometrien der chaotischen Farbmischstäbe die Priorität des Prinzips ‚Symmetriebruch‘ für ein Erreichen der vollständigen Durchmischung im Ortsraum, auch bei Nichteinhaltung des Prinzips ‚spiegelnde Kacheln‘.

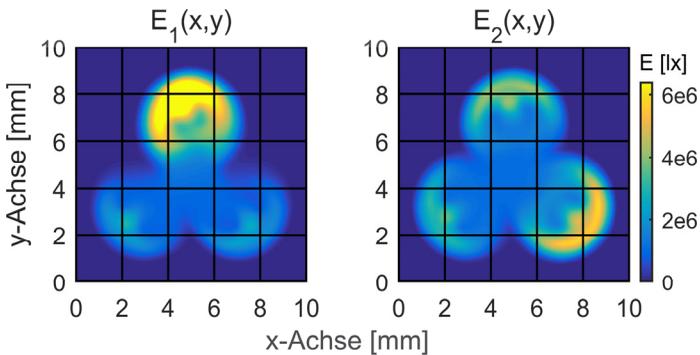
Die Durchmischung im Ortsraum verbessert sich mit zunehmender Lichtleiterlänge für alle Farbmischstäbe. Jedoch sei darauf hingewiesen, dass durch die Nichteinhaltung des Prinzips ‚spiegelnde Kacheln‘ eine vollständige Durchmischung nicht zwangsläufig eine homogene Ausleuchtung der Austrittsfläche bedeuten muss.



**Abbildung 6.19:** Beleuchtungsstärkeverteilungen auf der Detektorfläche von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 20 mm langen semi-dispersiven Farbmischstab



**Abbildung 6.20:** Beleuchtungsstärkeverteilungen auf der Detektorfläche von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 20 mm langen Stadion-Farbmischstab



**Abbildung 6.21:** Beleuchtungsstärkeverteilungen auf der Detektorfläche von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 20 mm langen Flower-Farbmischstab

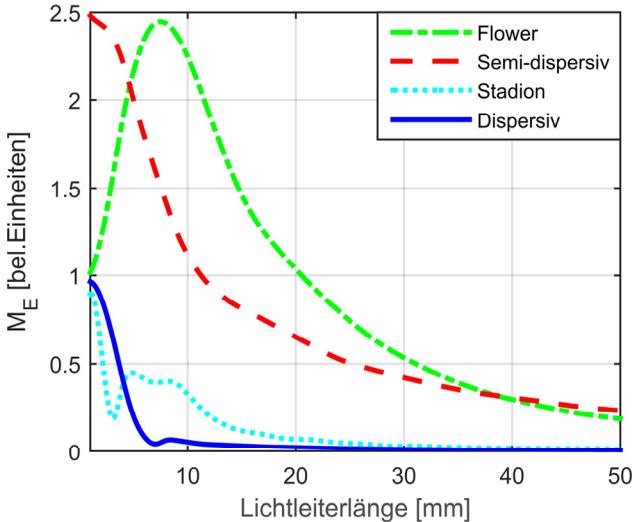
In Abbildung 6.22 ist die Abhängigkeit der Güte der Durchmischung im Ortsraum von der Länge des Farbmischstabs bis zu einer Länge von 50 mm aufgetragen. Auffallend schlecht ist die anfängliche Güte

der Durchmischung im Ortsraum des semi-dispersiven Farbmischstabs. Dies begründet sich zum einen in dem, im Vergleich zu den anderen chaotischen Mischstäben, großen Abstand der Einkopplungsposition der LEDs. Dieser beträgt beim semi-dispersiven Farbmischstab 2.5 mm gegenüber nur 1 mm, bei allen anderen Farbmischstäben. Zum anderen entsteht bei der Übertragung der semi-dispersiven Billard-Geometrie auf den Farbmischstab durch die Kreisscheibe in der Mitte eine ‚verbotene Zone‘, mitten im Lichtleiter, die wiederum die Lichtausbreitung im gesamten Lichtleiter erschwert.

Alle anderen Farbmischstäbe bestätigen dagegen die Abhängigkeit einer schnellen Durchmischung von der Anzahl reflexionswirksamer Symmetrieachsen. Der dispersive Farbmischstab erreicht nach einer Länge von 7 mm bereits eine vollständige Durchmischung im Ortsraum. Der Stadion-Farbmischstab folgt mit der vollständigen Durchmischung nach einer Länge von 41 mm. Die Beleuchtungsstärkeverteilungen zeigen bei dieser Länge allerdings noch keine vollständig homogene Lichtaustrittsfläche.

Die beim Flower-Farbmischstab zu beobachtende, anfänglich extreme Entmischung wird verursacht durch die Positionierung der LEDs, dargestellt in Abbildung 6.17. Viele der Strahltrajektorien der ersten LED (rot in der Abbildung 6.17) werden anfangs mehrfach in der oberen Kreisscheibe reflektiert, während die Lichttrajektorien der zweiten LED (grün in der Abbildung 6.17) in der Kreisscheibe rechts unten mehrfach reflektiert werden. Dadurch entfernen sich die

Strahltrajektorien im Ortsraum entsprechend dem Abstand der beiden Kreisscheiben. Jedoch kann ab einer Lichtleiterlänge von 8 mm auch beim Flower-Farbmischstab eine Durchmischung der Trajektorien festgestellt werden, da ab dieser Länge einzelne Strahltrajektorien die offenen Kreisscheiben verlassen. Durch die vielen Symmetrieachsen in jedem Kreisabschnitt und die große Querschnittsdiagonale werden die LEDs sehr viel langsamer durchmischt als im Stadion-Farbmischstab, welcher nur eine auf die Reflexionen wirksame Symmetrieachse aufweist.



**Abbildung 6.22:** Abhängigkeit der Güte der Durchmischung im Ortsraum  $M_E$  von der Lichtleiterlänge für verschiedene chaotische Querschnittsgeometrien

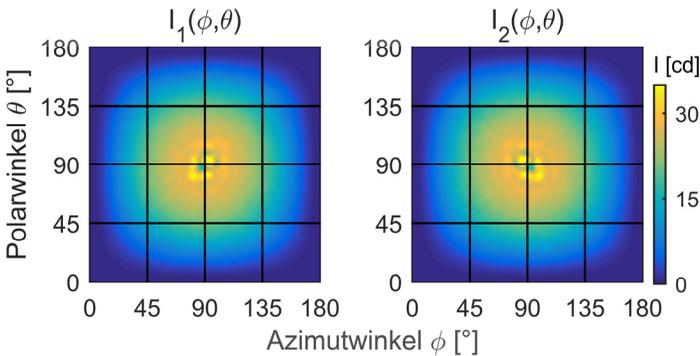
## MISCHUNG IM WINKELRAUM

Die Analyse aus Kapitel 5.2.3 zeigt bei nicht chaotischen Farbmischstäben eine Mehrfach-Abbildung der eingekoppelten LED, was bedingt ist durch den regelmäßigen Verlauf der Trajektorien. Bei einer Dezentrierung der eingekoppelten LEDs entsteht deshalb eine Lichtstärkeverteilung mit Kaleidoskopmuster. Bei chaotischen Farbmischstäben verlaufen die Trajektorien nicht mehr regelmäßig, sondern chaotisch oder intermittierend chaotisch. Die unterschiedlichen Querschnittsgeometrien der chaotischen Farbmischstäbe wirken sich sowohl auf die Schnelligkeit der Durchmischung als auch auf die Verteilung im Winkelraum aus.

Anhand der Lichtstärkeverteilungen der vier bekannten chaotischen Farbmischstäbe, bei einer Länge von 50 mm, werden in Abbildung 6.23 bis Abbildung 6.26 die Auswirkungen der Querschnittsgeometrie auf die Durchmischung im Winkelraum dargestellt.

Abbildung 6.23 zeigt die Lichtstärkeverteilungen nach dem Transfer durch einen 50 mm langen, dispersiven Farbmischstab. Zu sehen sind zwei homogene Lichtstärkeverteilungen, welche bei beiden Lichtquellen bis auf den Raumwinkelbereich nahe zur optischen Achse identisch sind. Der Unterschied im Raumwinkelbereich nahe zur optischen Achse entsteht durch den Lichtanteil, welcher für diese Lichtleiterlänge keine oder nur sehr wenige Reflexionen erfährt. Dieser Lichtanteil ist durch die Querschnittsgeometrie des Farbmischstabs nicht zu beeinflussen, kann aber dennoch beseitigt werden, was

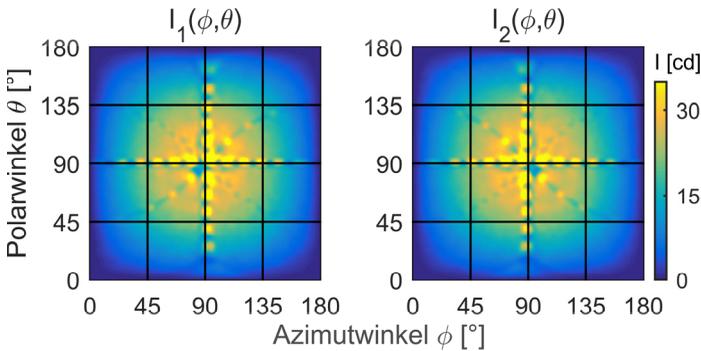
im nachfolgenden Abschnitt beschrieben wird. Alle anderen Strahltrajektorien erreichen im Winkelraum bereits nach 50 mm vollständige Durchmischung, da alle mehrmals reflektierten Trajektorien beim dispersiven Farbmischstab einen chaotischen Bewegungsablauf zeigen.



**Abbildung 6.23:** Lichtstärkeverteilungen von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 50 mm langen dispersiven Farbmischstab

Abbildung 6.24 stellt die Lichtstärkeverteilungen eines semi-dispersiven Farbmischstabs nach 50 mm Länge dar. Eine vollständige Durchmischung im Winkelraum hat hier noch nicht stattgefunden, das heißt, die Lichtstärkeverteilungen sind inhomogen und nicht identisch. Zu sehen ist ein ähnliches Karomuster, wie es beim quadratischen Lichtleiter zu beobachten ist (Abbildung 5.20). Dieses Muster entsteht durch die regelmäßige Abbildung der Lichtquelle an den geraden Grenzflächen des Farbmischstabs. Im Unterschied zum quadratischen Lichtleiter, zeigt der semi-dispersive Farbmischstab

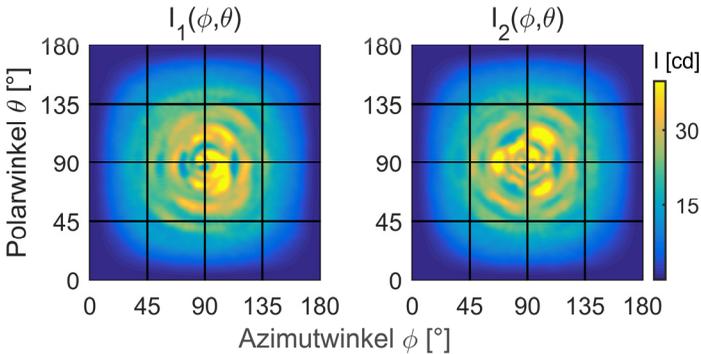
keine Raumwinkelbereiche mit einer Intensität von nahezu Null. Die Ursache für diesen Unterschied ist begründet in dem Lichtanteil, welcher an der inneren dispersiven Kreisfläche des Mischstabs reflektiert wird. Hierdurch werden die Lichttrajektorien gestreut, um sodann einem chaotischen Bewegungsablauf zu folgen. Hier zeigt sich, dass die Lichtstärkeverteilungen das zwischen chaotischen und regelmäßigen Bewegungsabläufen alternierende Verhalten widerspiegeln.



**Abbildung 6.24:** Lichtstärkeverteilungen von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 50 mm langen semi-dispersiven Farbmischstab

Auch die Lichtstärkeverteilungen des Flower-Farbmischstabs, dargestellt in Abbildung 6.25, zeigen ein dem semi-dispersiven Farbmischstab ähnliches Verhalten: Ein Lichtanteil verläuft chaotisch, während der andere Lichtanteil in den Kreisabschnitten regelmäßige Reflexionen erfährt. Ein Unterschied zu anderen Farbmischstäben ist bei diesem Farbmischstab die große Querschnittsdiagonale. Dadurch werden zwischen den Reflexionen viel längere Wege zurückgelegt, als

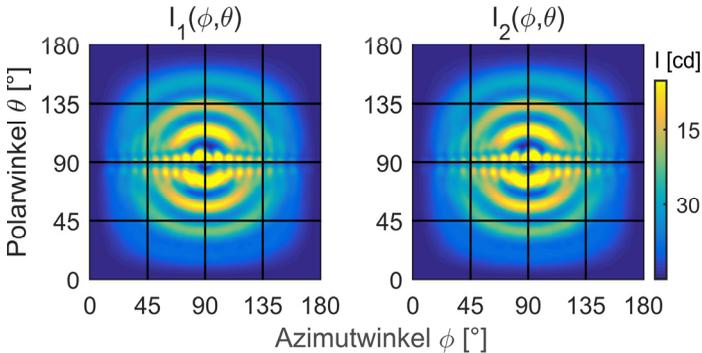
beispielsweise beim semi-dispersiven Farbmischstab. Das heißt, es finden pro Längeneinheit des Farbmischstabs weniger Reflexionen statt. Insbesondere die Lichttrajektorien welche sich von einem Kreisabschnitt in den anderen bewegen und dabei defokussieren, legen sehr lange Wege zurück.



**Abbildung 6.25:** Lichtstärkeverteilungen von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 50 mm langen Flower-Farbmischstab

Die Lichtstärkeverteilungen des Stadion-Farbmischstabs, dargestellt in Abbildung 6.26, zeigen inhomogene und unterschiedliche Verteilungsstrukturen. Folglich hat auch beim Stadion-Farbmischstab nach 50 mm noch keine Durchmischung im Winkelraum stattgefunden. Wiederum ist das Karomuster des quadratischen Farbmischstabs erkennbar. Es verläuft regelmäßig über dem Azimutwinkel bei einem Polarwinkel von  $90^\circ$ . Dieses Muster entsteht beim Stadion-Farbmischstab durch die regelmäßigen Reflexionen an den parallelen Segmenten. Der Verlauf der Lichtstärkeverteilung über dem Polarwinkel

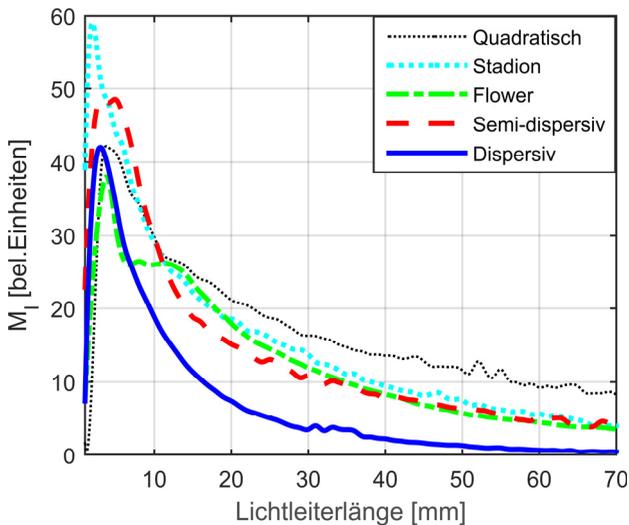
ist für beide Lichtquellen identisch, aber nicht homogen. Das heißt eine Durchmischung findet statt, jedoch mit einer inhomogenen Lichtstärkeverteilung.



**Abbildung 6.26:** Lichtstärkeverteilungen von zwei dezentriert eingekoppelten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen 50 mm langen Stadion-Farbmischstab

Abbildung 6.27 zeigt für vier chaotische Farbmischstäbe und einen quadratischen Farbmischstab die Abhängigkeit der Güte der Durchmischung im Winkelraum  $M_1$  von der Länge des Farbmischstabs. Das Gütemaß des dispersiven Farbmischstabs nimmt bereits nach einer kurzen Länge von 40 mm sehr kleine Werte an. Dies zeigt, dass dispersive Farbmischstäbe eine Durchmischung eingekoppelter Lichtquellen bewirken. Für die anderen chaotischen Farbmischstäbe zeigt die Güte der Durchmischung im Winkelraum ein ähnliches Verhalten über der Länge des Farbmischstabs. Nach 70 mm findet noch keine Durchmischung im Winkelraum statt. Zum Vergleich mit nicht chaotischen Farbmischstäben wird in Abbildung 6.27 auch die Güte

der Durchmischung im Winkelraum eines quadratischen Farbmischstabs gezeigt, welcher im Winkelraum eine schlechtere Durchmischung als die chaotischen Farbmischstäbe aufweist. Zwar verbessert sich die Güte der Durchmischung auch für den quadratischen Lichtleiter über der Länge, jedoch findet keine vollständige Durchmischung statt, da sich mit zunehmender Lichtleiterlänge lediglich das Kaleidoskopmuster feiner strukturiert.



**Abbildung 6.27:** Abhängigkeit der Durchmischung im Winkelraum  $M_I$  von der Lichtleiterlänge für verschiedene chaotische Querschnittsgeometrien

Die Werte des Gütemaßes der Durchmischung im Winkelraum für eine Länge von 100 mm sind separat in Tabelle 6.1 dargestellt. Die zugehörigen Abbildungen der Lichtstärkeverteilungen sind in An-

hang A.1 dargestellt. Nach einer Länge von 100 mm ist bereits ein Zusammenhang zwischen der notwendigen Lichtleiterlänge und dem Lyapunov Exponenten erkennbar. Der dispersive Farbmischstab, dessen Querschnittsfläche den größten Lyapunov Exponenten aufweist, hat bereits eine nahezu vollständige Durchmischung im Winkelraum erreicht. Der Flower-Farbmischstab dagegen weist, mit einem maximalen Lyapunov Exponenten der Querschnittsfläche von  $\sigma_{var} = 0.42$ , eine schlechtere Durchmischung im Winkelraum auf als der Stadion-Farbmischstab mit dem maximalen Lyapunov Exponenten von  $\sigma_{var} = 0.69$ .

**Tabelle 6.1:** Werte des Gütemaßes zur Durchmischung im Winkelraum für unterschiedliche Farbmischstäbe bei einer Länge von 100 mm

Lichtleiterquerschnitt	Gütemaß $M_i$
Dispersiv	0.3
Semi-dispersiv	2.6
Stadion	1.6
Flower	2.2
Quadratisch	6.1

Die Ausnahme bildet der semi-dispersive Farbmischstab, dessen Querschnitt mit  $\sigma_{var} = 0.73$  einen etwas größeren maximalen Lyapunov-Exponenten als das Stadion-Billard aufweist. In einem Vergleich mit allen anderen chaotischen Farbmischstäben zeigt der semi-dispersive Farbmischstab bei einer Länge von 100 mm die schlech-

teste Durchmischung im Winkelraum. Der Grund hierfür ist die ‚verbotene Zone‘ im Lichtleiter, welche einer schnellen Durchmischung entgegenwirkt. Anhang A.2 zeigt in diesem Zusammenhang die Simulationsergebnisse eines dispersiven Farbmischstabs, dessen Querschnitt, in Entsprechung zum semi-dispersiven Farbmischstab, eine reflektierende Kreisfläche, und damit eine ‚verbotene Zone‘ im Lichtleiter aufweist. Der Vergleich zum dispersiven Farbmischstab ohne verbotene Zone zeigt eine langsamere Durchmischung über der Länge.

Nach Abbildung 6.27 lassen sich Farbmischstäbe in drei Klassen einteilen:

Klasse 1: Chaotische Farbmischstäbe, deren Trajektorien alle einem chaotischen Bewegungsablauf folgen, wie beispielsweise beim dispersiven Farbmischstab. Diese Klasse erreicht eine schnelle vollständige Durchmischung der Trajektorien im Winkelraum.

Klasse 2: Chaotische Farbmischstäbe, deren Trajektorien alle einem zwischen chaotischem und regelmäßigem Verhalten alternierenden Bewegungsablauf folgen, wie beispielsweise beim Stadion-, Flower- oder semi-dispersiven Farbmischstab. Diese Klasse zeigt eine langsame Durchmischung der Trajektorien im Winkelraum.

Klasse 3: Klassische Farbmischstäbe, deren Trajektorien alle einem regelmäßigen Verhalten folgen, wie beispielsweise der quadratische Farbmischstab. Diese Klasse weist keine vollständige Durchmischung der Trajektorien im Winkelraum auf, sondern lediglich ein

Kaleidoskopmuster, welches sich mit zunehmender Lichtleiterlänge feiner strukturiert.

Daraus lassen sich folgende Kriterien für die Querschnittsgeometrie eines Farbmischstabs zur Durchmischung des eingekoppelten Lichts im Winkelraum ableiten:

*Kriterium 1:* Der Lyapunov Exponent der Querschnittsgeometrie muss größer als Null sein, ansonsten werden die eingekoppelten Lichtquellen regelmäßig abgebildet und es findet keine Durchmischung statt.

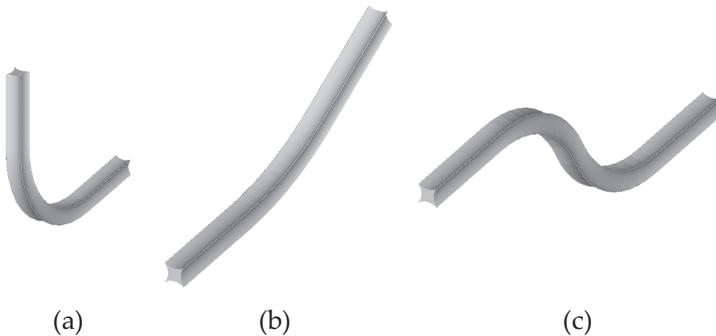
*Kriterium 2:* Für Querschnittsgeometrien ohne ‚verbotene Zonen‘ kann aus dem Absolutwert des Lyapunov Exponenten eine Aussage über die Schnelligkeit der Durchmischung getroffen werden. Querschnittsbereiche mit ‚verbotenen Zonen‘ verhindern eine schnelle Durchmischung.

*Kriterium 3:* Um für kurze Lichtleiterlängen (maximal das Zehnfache der Querschnittsdiagonalen) eine, bis auf den direkten Lichtanteil, vollständige Durchmischung im Winkelraum zu erreichen, muss die Querschnittsgeometrie für alle Trajektorien ein chaotisches Verhalten zeigen. Dies ist bei Querschnitten, welche dispersiven Billardsystemen entsprechen, gewährleistet.

## VERMEIDUNG DES DIREKTEN LICHTANTEILS

Die Durchmischung eingekoppelter Lichtquellen im Winkelraum beruht auf vielfachen Reflexionen an den Mantelflächen. Jedoch gibt es immer einen Lichtanteil, welchen die LED in einem so schmalen Abstrahlwinkel emittiert, dass er den Lichtleiter ohne Reflexion durchläuft. Dieser Anteil wird im Folgenden als ‚direkter Lichtanteil‘ bezeichnet und bewegt sich im zentralen Bereich des Abstrahlwinkels um  $0^\circ$ , in Abhängigkeit von der Lichtleiterlänge. Bei klassischen Farbmischstäben spielt der direkte Lichtanteil keine Rolle, da ohnehin keine Durchmischung im Winkelraum stattfindet. Bei chaotischen Lichtleitern wird jedoch, mit Ausnahme des direkte Lichtanteils, alles eingekoppelte Licht durchmischt. Folglich muss der direkte Lichtanteil vermieden werden, wenn eine vollständige Durchmischung im Winkelraum erreicht werden soll.

Eine einfache und wirksame Lösung bietet das Durchbiegen des Farbmischstabs. Dabei sind verschiedene Konstruktionen möglich. Abbildung 6.28 zeigt Beispiele perspektivischer Darstellungen von gekrümmten dispersiven Farbmischstäben. Je nach Art der Anwendung kann der Farbmischstab im  $90^\circ$ -Winkel gebogen werden, dargestellt in Abbildung 6.28 (a), oder aber um einen Winkel  $< 90^\circ$  gebogen werden, dargestellt in Abbildung 6.28 (b). Eine weitere Möglichkeit, dargestellt in Abbildung 6.28 (c), ist die s-förmige Biegung. Je nachdem welche Möglichkeit gewählt wird, ändert sich die Lichtausbreitungsrichtung.



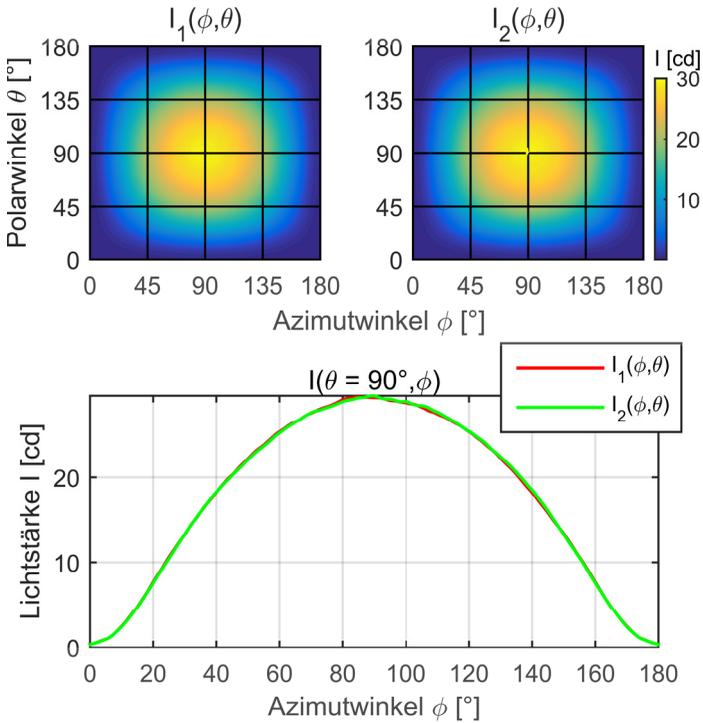
**Abbildung 6.28:** Perspektivische Ansicht von gebogenen dispersiven Farbmischstäben zu Vermeidung des direkten Lichtanteils mit einer (a) Durchbiegung im rechten Winkel, (b) einer Biegung um einen Winkel von  $25^\circ$  und (c) einer s-förmigen Durchbiegung

Bei der Wahl des Biegeradius muss auf die Erhaltung der Totalreflexion für alle eingekoppelten Strahlen geachtet werden. Des Weiteren erfordert eine vollständige Durchmischung des eingekoppelten Lichts, dass vor und nach der Biegung ein ausreichend langer gerader Abschnitt des Farbmischstabs vorhanden ist, damit alle Strahlen durchmischt werden. Eine durchgängige Krümmung des Farbmischstabs ist deshalb nicht möglich.

Beispielhaft wurde der leicht gekrümmte Farbmischstab aus Abbildung 6.28 (b) vollständig simuliert. Die aus der Simulation resultierenden Lichtstärkeverteilungen wurden mit dem Gütemaß zur Durchmischung im Winkelraum bewertet. Die Biegung des Farbmischstabs hat einen Radius von  $r_B = 70$  mm und einen Bogenabschnittswinkel von  $25^\circ$ . Die beiden geraden Abschnitte des Farbmischstabs vor und nach der Biegung haben jeweils eine Länge von

50 mm. Die Querschnittsfläche des Farbmischstabs entspricht der eines dispersiven Billards. Abbildung 6.29 stellt die entsprechenden zweidimensionalen Lichtstärkeverteilungen und deren Schnittkurve bei  $\theta = 90^\circ$  von zwei unterschiedlich platzierten LEDs dar, welche durch den gebogenen Farbmischstab transferiert wurden. Die resultierenden Lichtstärkeverteilungen sind identisch, die Berechnung des Gütemaßes ergibt deshalb  $M_I < 10^{-3}$ . Jedoch zeigen Simulationen mit kürzeren Längen der geraden Abschnitte auch schon sehr gute Ergebnisse. Die Simulation desselben Farbmischstabs mit geraden Abschnitten von nur 35 mm Länge ergibt beispielsweise  $M_I = 0.4$ . Die entsprechenden Lichtstärkeverteilungen sind im Anhang A.3 dargestellt. Die genauen Dimensionen richten sich jedoch immer nach der Anwendung des Farbmischstabs und müssen dahingehend ausgelegt werden.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass durch die Vermeidung des direkten Lichtanteils eine vollständige Durchmischung in Orts- und Winkelraum mittels chaotischer Farbmischstäbe möglich ist und dies für verschiedenste Anwendungen zur Verfügung steht. Beispielsweise kann die Lichtleiteraustrittsfläche als Primärlichtquelle weiterverwendet werden oder der Farbmischstab wird direkt für eine verlustfreie und farbmischende Transformation eines großen Abstrahlwinkels zu einem kleineren Abstrahlwinkel verwendet. (vergleiche hierzu Anhang A.4)



**Abbildung 6.29:** Lichtstärkeverteilung von zwei unterschiedlich positionierten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen gekrümmten dispersiven Farbmischstab mit einer Schnittkurve der Lichtverteilung bei  $\theta = 90^\circ$

## 6.4 AUSFÜHRUNGSBEISPIEL

Zur Validierung der Farbmischmethode durch Lichtleiter mit Querschnitten entsprechend den chaotischen Billards, wurde ein chaotischer Farbmischstab hergestellt und photometrisch analysiert. Zur

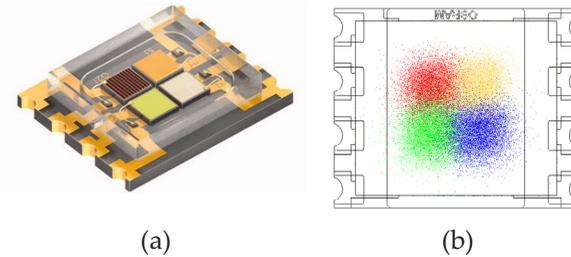
Validierung der Ergebnisse der Analysen nicht chaotischer Farbmischstäbe und zur Schaffung eines Vergleichsmodells für die chaotischen Farbmischstäbe, wurde zudem ein nicht chaotischer Farbmischstab hergestellt und photometrisch analysiert.

#### 6.4.1 BESCHREIBUNG

Für den chaotischen Farbmischstab und dessen nicht chaotisches Vergleichsmodell wurde, entsprechend den Analysen des vorherigen Abschnitts, eine dispersive und quadratische Querschnittsgeometrie gewählt. Beide Farbmischstäbe zeigen in ihrer Klasse der Lichtleiter die beste Durchmischung in Orts- und Winkelraum. Für das Ausführungsbeispiel wurde die gerade Lichtleiterform gewählt, welche zur Vermeidung des direkten Lichtanteils in einem weiteren Bearbeitungsschritt gebogen werden kann. Es wurde eine Länge von 50 mm gewählt, da ein dispersiver Farbmischstab dieser Länge schon eine sehr gute Durchmischung im Winkelraum aufweist. Die geometrischen Abmessungen wurden auf die Emitterflächen der Multichip LED von Osram Ostar Stage mit einer roten, einer grünen, einer blauen und einer weißen LED angepasst. Damit konnte die zur Analyse angewandte Kantenlänge von 4 mm weiterhin für die Farbmischstäbe verwendet werden. Für den dispersiven Farbmischstab wurde der Radius  $r = 3$  mm gewählt, welcher nahe am für diese Kantenlänge minimal möglichen Radius liegt. Die spitzen Ecken sind dadurch sehr ausgeprägt, was in den Ecken wiederum zu kürzeren Distanzen zwischen den Reflexionen führt, und ein langsames Auseinanderlaufen der Trajektorien bewirkt. Dem ist entgegen zu halten,

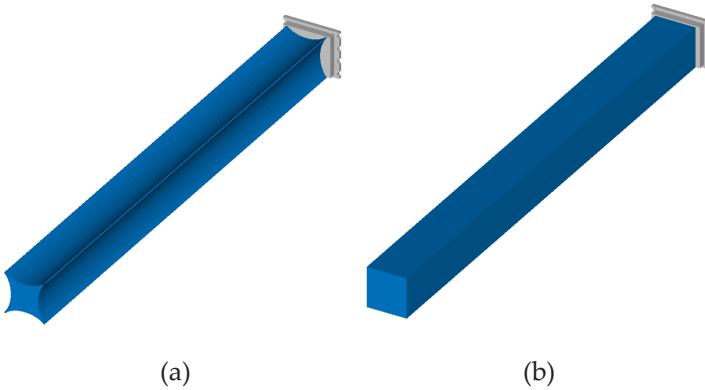
dass die Herstellung solcher spitzer Ecken praktisch nicht realisierbar ist und daher im Ausführungsbeispiel abgerundet gefertigt wurden.

Die Analyse der Durchmischung in Orts- und Winkelraum erfolgte anhand der Lichtverteilungen der LEDs in der Position der roten und grünen LED. Abbildung 6.30 (b) zeigt dazu die Anordnung der einzelnen Chips auf der LED Osram Ostar als Spotdiagramm, simuliert mit dem *Rayfile*, welches von Osram zur Verfügung gestellt wurde [18].



**Abbildung 6.30:** (a) Foto der LED Osram Ostar Stage [51] und (b) Spotdiagramm der LED mit zugehörigem Profil des LED Gehäuses zur Darstellung der Positionen der LED-Farben. Das Spotdiagramm der weißen LED ist in der Abbildung gelb dargestellt.

Für die praktisch realisierte LED-Einkopplung wurde ein maximal dichtes Platzieren des Farbmischstabs auf der LED angestrebt. In Abbildung 6.31 sind die Farbmischstäbe mit der LED Osram Ostar Stage perspektivisch dargestellt.



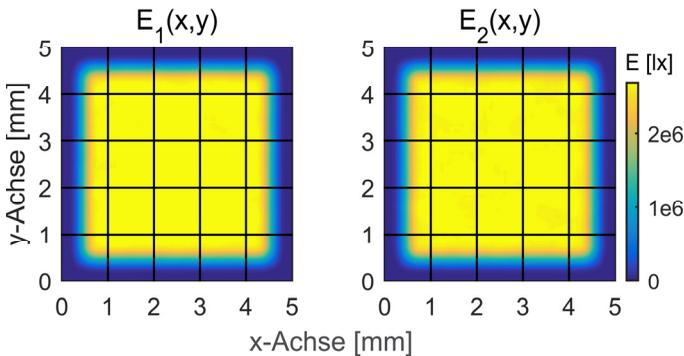
**Abbildung 6.31:** (a) dispersiver Farbmischstab mit LED (b) quadratischer Farbmischstab mit LED

#### 6.4.2 SIMULATIONSERGEBNISSE

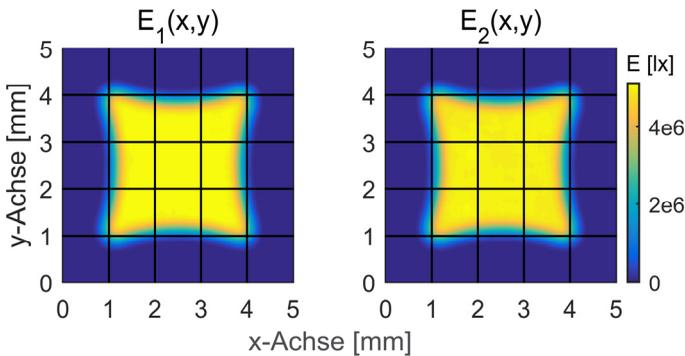
Die Simulation erfolgte mittels der *Raytracing* Software ASAP mit den von Osram zur Verfügung gestellten *Rayfiles* der LEDs. Wie in den vorangehenden Analysen wurde das Spektrum der LEDs nicht berücksichtigt, sondern jede LED wurde mit einer Wellenlänge von 500 nm simuliert. Die Abstrahlcharakteristik ist entsprechend dem *Rayfile* lambertsch. Das für die Simulation verwendete Material der Farbmischstäbe ist PMMA und die Fresnelschen Reflexionsverluste an Ein- und Austrittsseite wurden berücksichtigt. Jeder Chip der LED wurde mit demselben Lichtstrom von 50 lm simuliert. Abbildung 6.32 bis Abbildung 6.35 zeigen die Lichtverteilungen von jeweils zwei LEDs an den Positionen der roten und der grünen LED nach dem Transfer durch den quadratischen und dispersiven Farbmischstab.

Abbildung 6.32 zeigt die simulierten Beleuchtungsstärkeverteilungen nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab, und Abbildung 6.33 die simulierte Beleuchtungsstärkeverteilung nach dem Transfer durch den dispersiven Farbmischstab. Die Verteilungen der zwei Lichtquellen sind beim dispersiven und beim quadratischen Farbmischstab sehr homogen. Folglich ergibt die Berechnung des Gütemaßes der Durchmischung im Ortsraum für beide Farbmischstäbe einen gegen Null strebenden Wert.

Die Beleuchtungsstärkeverteilungen des dispersiven Farbmischstabs, dargestellt in Abbildung 6.33, zeigen deutlich die abgerundeten Ecken der Querschnittsfläche. Hierdurch ist die Querschnittsdiagonale um knapp 3 mm kürzer als die des quadratischen Farbmischstabs.



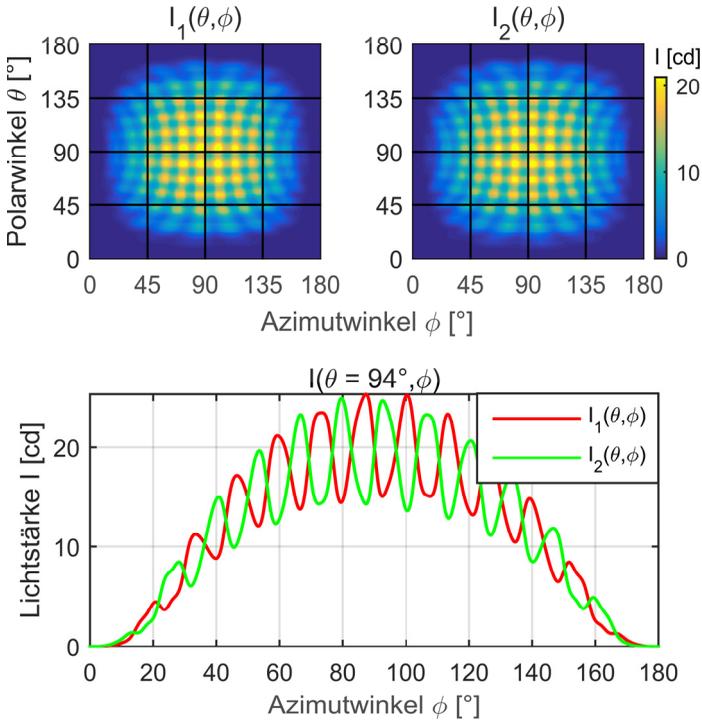
**Abbildung 6.32:** Simulierte Beleuchtungsstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $E_1(x,y)$  und grün:  $E_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab mit der Länge 50 mm



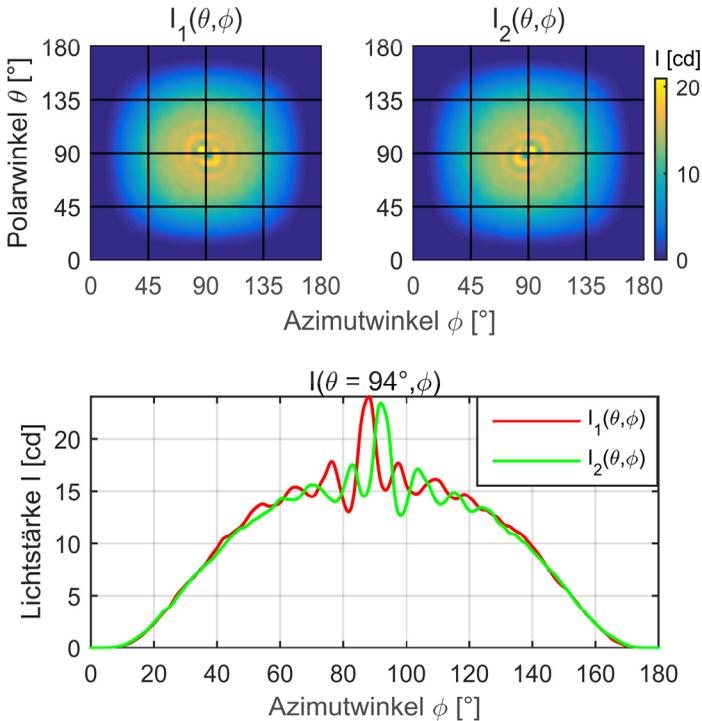
**Abbildung 6.33:** Simulierte Beleuchtungsstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $E_1(x,y)$  und grün:  $E_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den dispersiven Farbmischstab mit der Länge 50 mm

Abbildung 6.34 und Abbildung 6.35 zeigen die simulierten zweidimensionalen Lichtstärkeverteilungen (die Polarachse ist die positive  $x$ -Achse) und deren Schnittkurven. Für die Schnittkurve wurde  $\theta = 94^\circ$  gewählt, da hier das Kaleidoskopmuster beim quadratischen Farbmischstab und der direkte Lichtanteil des dispersiven Farbmischstabs sehr ausgeprägt zu sehen sind. Der dispersive Farbmischstab, dargestellt in Abbildung 6.35, zeigt bereits eine homogene Verteilung für beide LEDs, mit Ausnahme des Lichtanteils nahe der optischen Achse, welcher wenig oder gar nicht reflektiert wurde, während der quadratische Lichtleiter bei einer Länge von 50 mm ein Kaleidoskopmuster zeigt. Zur Bewertung der Durchmischung im Winkelraum wurde das Gütemaß der Abweichung der beiden Licht-

stärkeverteilungen angewandt. Das Ergebnis zeigt für den dispersiven Lichtleiter eine deutlich bessere Durchmischung mit  $M_I = 2.8$  als für den quadratischen Lichtleiter mit  $M_I = 12.2$ .



**Abbildung 6.34:** Simulierte Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $I_1(x,y)$  und grün:  $I_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab mit der Länge 50 mm. Die Schnittkurve bei einem Polarwinkel von  $\theta = 94^\circ$  zeigt deutlich das Kaleidoskopmuster.



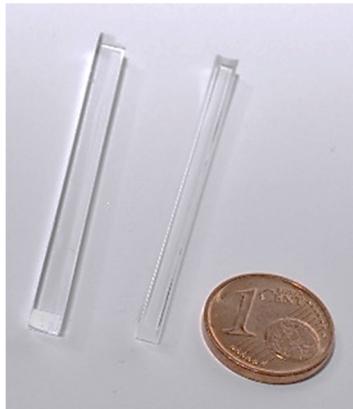
**Abbildung 6.35:** Simulierte Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $I_1(x,y)$  und grün:  $I_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den dispersiven Farbmischstab mit der Länge 50 mm. Die Schnittkurve bei einem Polarwinkel von  $\theta = 94^\circ$  zeigt deutlich den nicht durchmischten direkten Lichtanteil.

Die Effizienz des dispersiven Farbmischstab liegt mit  $\eta_{Disp,S} = 0.81$  unterhalb der des quadratischen Farbmischstabs mit  $\eta_{Quadr,S} = 0.86$ . Der Lichtverlust entsteht bei der Einkopplung, da der dispersive Farbmischstab für die Emitterfläche der LEDs ausgelegt wurde. Durch das Glasfenster über der Emitterfläche wird ein geringer Lichtanteil

jedes einzelnen LED-Chips gestreut, welcher dann nicht mehr eingekoppelt wird. Diese Streuung ist auch im Spotdiagramm der Multichip-LED in Abbildung 6.30 (b) zu sehen.

### 6.4.3 MESSERGEBNISSE UND DISKUSSION

Die Prototypen der Farbmischstäbe wurden gefräst und manuell poliert. Ein Foto der beiden Farbmischstäbe ist in Abbildung 6.36 zu sehen.



**Abbildung 6.36:** Foto der Prototypen mit dem quadratischen Farbmischstab links und dem dispersiven Farbmischstab rechts

Für die photometrische Analyse der Prototypen wurde das am LTI zur Verfügung stehende Goniophotometer RiGO801 der Firma Technoteam verwendet. Für jede LED konnten damit nach dem Transfer durch den Mischstab die Lichtverteilungen aufgezeichnet werden.

Aus der vom Goniophotometer gemessenen Lichtstärkeverteilung wurde ein *Rayfile* generiert, welches durch Einlesen in die Software ASAP einen direkten Vergleich mit den Simulationsergebnissen ermöglichte.

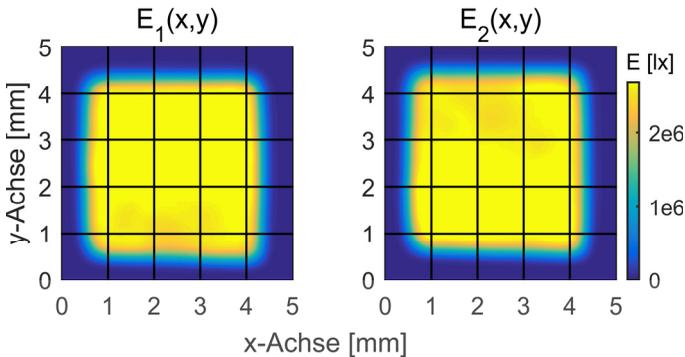
Für alle Messungen wurde dieselbe RGBW – Multichip LED verwendet. Zuerst wurde die LED ohne die Farbmischstäbe vermessen, um daraus später die Transfereffizienz der Prototypen zu bestimmen. Jeder einzelne Chip der Multichip LED wurde mit einem konstanten Strom von 0.5 A im Arbeitspunkt<sup>11</sup> der LED betrieben, wodurch für jede Messung derselbe Lichtstrom pro Emittor gewährleistet war. Durch die unterschiedliche Lichtausbeute pro LED-Chip unterschieden sich die Lichtströme der unterschiedlichen Chips. Bei der Auswertung der Messergebnisse in Form von *Rayfiles* mit der Software ASAP wurde für jedes LED-*Rayfile* ein konstanter Lichtstrom von 50 lm angenommen. Dieser wurde jeweils reduziert entsprechend der gemessenen Effizienz. Auf diese Weise können die Simulationsergebnisse direkt mit den Messergebnissen verglichen werden.

Abbildung 6.37 bis Abbildung 6.40 zeigen die gemessenen Lichtverteilungen. Die Beleuchtungsstärkeverteilungen der beiden LEDs nach dem Transfer durch den quadratischen Mischstab, dargestellt in Abbildung 6.37, sind nahezu identisch, jedoch inhomogener als das

---

<sup>11</sup> Der Arbeitspunkt der LED wurde ermittelt, indem alle vier Chips in einer Serienschaltung mit 0.5 A angesteuert wurden und die Spannung pro Chip bei einer konstanten Temperatur von 25°C gemessen wurde. Bei Einzelbetrieb eines Emittors mit 0.5 A, wurde durch eine Erhöhung der Temperatur wieder die zuvor gemessene Spannung für den Emittor eingestellt.

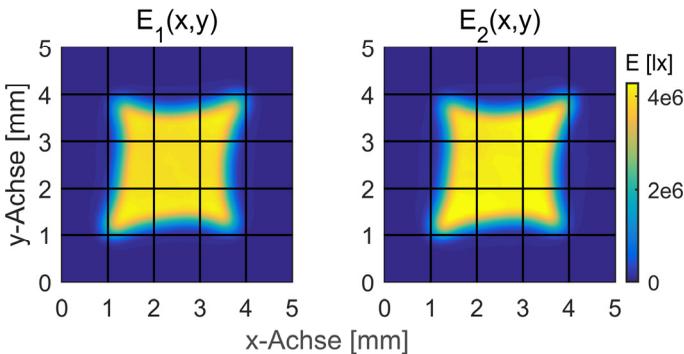
Simulationsergebnis. Dies spiegelt sich im Gütemaß wider, welches für den quadratischen Mischstab  $M_E = 0.07$  ergibt.



**Abbildung 6.37:** Gemessene Beleuchtungsstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $E_1(x,y)$  und grün:  $E_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab mit der Länge 50 mm

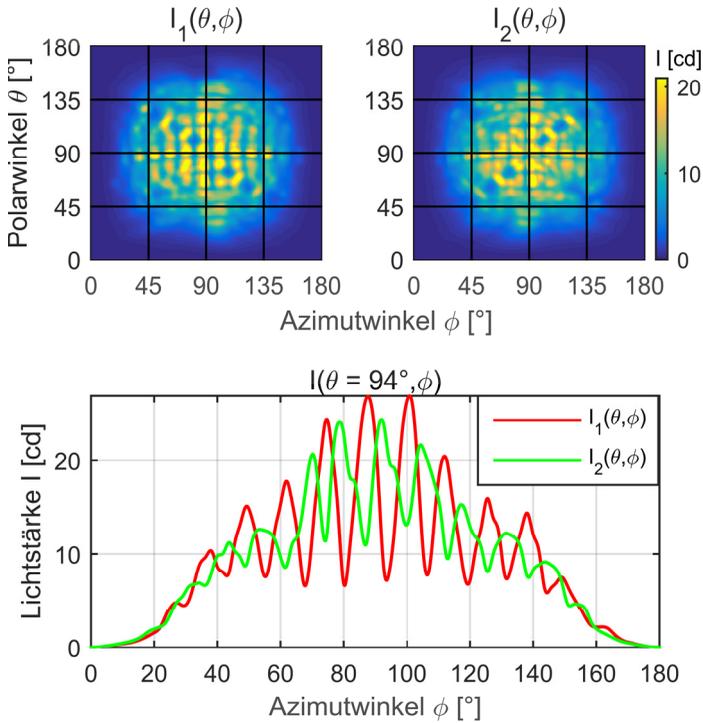
Vergleicht man die gemessenen Beleuchtungsstärkeverteilungen des dispersiven Farbmischstabs, dargestellt in Abbildung 6.38, mit den Simulationsergebnissen aus Abbildung 6.33, ist ein Unterschied in der Geometrie der Querschnittsfläche zu sehen. Zwei gegenüberliegende Ecken der prototypischen Umsetzung des dispersiven Farbmischstabs sind deutlich abgerundeter als die anderen zwei Ecken. Die simulierten und die gemessenen Beleuchtungsstärkeverteilungen spiegeln die Größe der Austrittsfläche des Farbmischstabs wider. Somit zeigt der Prototyp des dispersiven Farbmischstabs und der simulierte Farbmischstab eine etwas abweichende Querschnittsgeo-

metrie, bedingt durch Fertigungstoleranzen. Dies wirkt sich zwar geringfügig auf die Effizienz aus, jedoch nicht auf die Homogenität der Beleuchtungsstärkeverteilung. Die Beleuchtungsstärkeverteilungen beider Lichtquellen sind nahezu identisch und zeigen damit eine sehr gute Durchmischung im Ortsraum. Dies bestätigt die Berechnung des Gütemaßes mit  $M_E = 0.005$ .



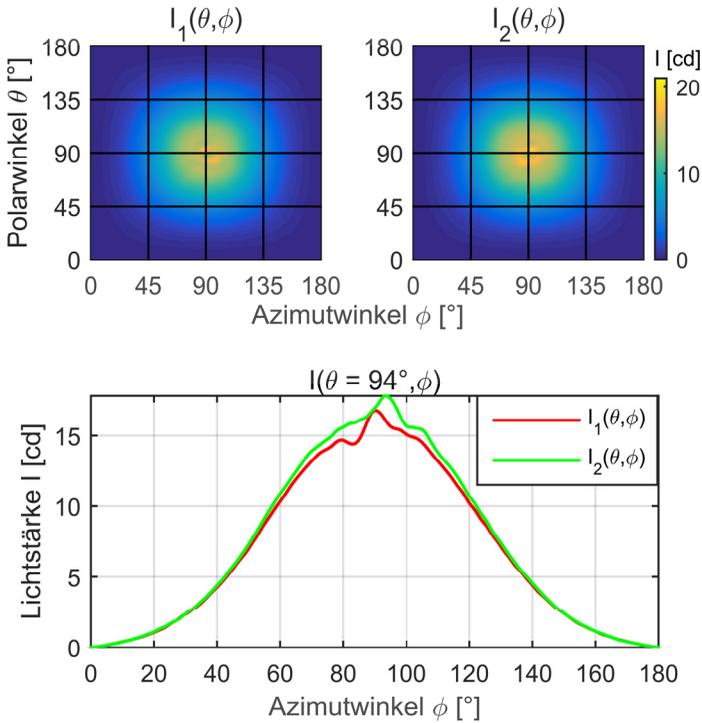
**Abbildung 6.38:** Gemessene Beleuchtungsstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $E_1(x,y)$  und grün:  $E_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den dispersiven Farbmischstab mit der Länge 50 mm

Abbildung 6.39 stellt die gemessenen Lichtstärkeverteilungen der zwei Lichtquellen nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab dar, Abbildung 6.40 zeigt die des dispersiven Farbmischstabs.



**Abbildung 6.39:** Gemessene Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $I_1(x,y)$  und grün:  $I_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab mit der Länge 50 mm

Vergleicht man die Lichtstärkeverteilungen der roten und grünen LED nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab, dargestellt in Abbildung 6.39, so zeigen beide ein ähnliches Kaleidoskopmuster, welches in unterschiedlichen Raumwinkelbereichen gültig ist. Dementsprechend ergibt die Berechnung des Gütemaßes für die Durchmischung im Winkelraum  $M_I = 16.6$ .

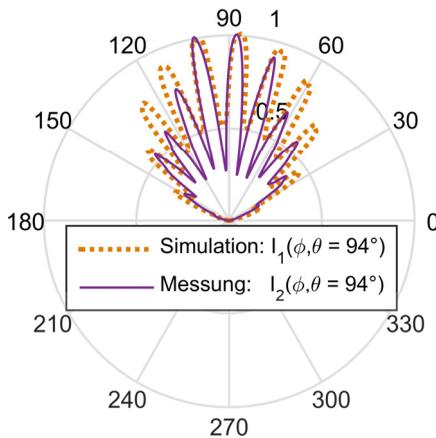


**Abbildung 6.40:** Gemessene Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs (rot:  $I_1(x,y)$  und grün:  $I_2(x,y)$ ) nach dem Transfer durch den dispersiven Farbmischstab mit der Länge 50 mm

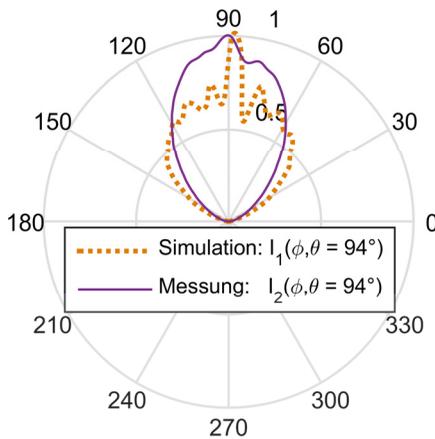
Vergleicht man die Lichtstärkeverteilungen der roten und grünen LED nach Transfer durch den dispersiven Farbmischstab, dargestellt in Abbildung 6.40, so zeigen diese bis auf den direkten Lichtanteil identische und sehr homogene Lichtstärkeverteilungen. Folglich lässt sich eine sehr gute Durchmischung im Winkelraum feststellen, was

durch das Gütemaß bestätigt ist, das für die gemessenen Lichtstärkeverteilungen  $M_I = 2.8$  ergibt.

Vergleicht man jedoch die gemessenen Lichtstärkeverteilungen mit den simulierten, so werden Unterschiede im Abstrahlwinkel beider Farbmischstäbe deutlich. Das Messergebnis zeigt im Vergleich zum Simulationsergebnis einen schmaleren Abstrahlwinkel. Das heißt, dass Strahlen der LED, welche unter einem großen Winkel abstrahlen, größere Verluste erfahren als Strahlen nahe zur optischen Achse. Zur Verdeutlichung der Unterschiede zwischen Messung und Simulation, sind in Abbildung 6.41 und Abbildung 6.42 die Lichtstärkeverteilungen der roten LED im Polardiagramm für beide Farbmischstäbe dargestellt. Für die Darstellung wurde der Polarwinkel  $\theta = 94^\circ$  gewählt.



**Abbildung 6.41:** Simulierte und gemessene normierte Lichtstärkeverteilung der roten LED im Polardiagramm nach dem Transfer durch den quadratischen Farbmischstab



**Abbildung 6.42:** Simulierte und gemessene normierte Lichtstärkeverteilung der roten LED im Polardiagramm nach dem Transfer durch den dispersiven Farbmischstab

Der schmalere Abstrahlwinkel ist auf kleine Kratzer, Staubpartikel und Inhomogenitäten auf der polierten Mantelfläche zurückzuführen. Durch diese Unebenheiten der Oberfläche wird der Grenzwinkel der Totalreflexion besonders für Strahlen, welche unter einem großen Einfallswinkel auf die Mantelfläche auftreffen, nicht mehr erreicht. Da in der Simulation eine völlig glatte Mantelfläche angenommen wurde, ist der gemessene Abstrahlwinkel des Mischstabs kleiner als der simulierte Abstrahlwinkel. Die dadurch entstehenden Verluste haben jedoch wenig Auswirkung auf die Qualität der Durchmischung im Winkelraum, sondern zeigen hauptsächlich Auswirkung auf die Effizienz.

Die gemessene Effizienz des dispersiven Farbmischstabs ist mit  $\eta_{Disp,M} = 0.54$  deutlich niedriger als die durch Simulation ermittelte Ef-

fizienz. Auch der quadratische Farbmischstab zeigt eine geringere Effizienz als in der Simulation mit  $\eta_{Quadr,M} = 0.76$ . Eine vergleichende Übersicht der gemessenen und simulierten Effizienzen ist in Tabelle 6.2 zu finden. Die Verluste werden, neben den im vorherigen Abschnitt genannten Unebenheiten der Oberflächen, verursacht durch die Einkopplung des Strahlungsflusses der LED in den Farbmischstab. Die Effizienzeinbußen durch die Einkopplung sind auf minimale Dezentrierungstoleranzen der LED zum Farbmischstab zurückzuführen. Da der dispersive Farbmischstab eine sehr viel kleinere Eintrittsfläche aufweist als der quadratische Farbmischstab, wirken sich Dezentrierungstoleranzen stärker auf die Einkopplungseffizienz aus. Dies bestätigt die gemessene Effizienz, welche für den dispersiven Farbmischstab wesentlich geringer ist als für den quadratischen Farbmischstab (vergleiche Tabelle 6.2).

Neben dem etwas kleineren Abstrahlwinkel und der geringeren Effizienz, zeigt sich ein weiterer Unterschied zwischen der gemessenen und der simulierten Lichtstärkeverteilung beim dispersiven Farbmischstab: Die Durchmischung im Winkelraum ist bei der prototypischen Umsetzung besser als in der Simulation. In der Simulation ist der Anteil des direkten Lichts, welches keine oder sehr wenige Reflexionen erfährt, noch deutlich erkennbar, während die Messung einen geringeren direkten Lichtanteil aufweist. Dieses Ergebnis ist wiederum auf Unebenheiten der Mantelfläche zurückzuführen. Eine Mantelfläche mit kleinen Unebenheiten macht für ein exponentielles Auseinanderlaufen benachbarter Lichttrajektorien weniger Reflexionen erforderlich. Dadurch sind die Lichttrajektorien mit sehr wenigen Reflexionen in der Simulation noch nicht durchmischt, während sie in

der Messung am Prototypen bereits durchmischt sind. Die Berechnung des Gütemaßes bestätigt für den Prototypen eine bessere Durchmischung im Winkelraum.

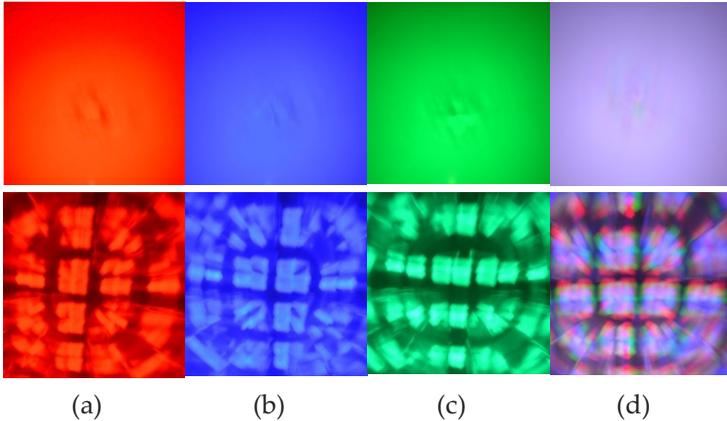
**Tabelle 6.2:** Auflistung der Simulations- und Messergebnisse für einen dispersiven und einen quadratischen Farbmischstab

	Simulation			Messung		
	$M_E$	$M_I$	$\eta$	$M_E$	$M_I$	$\eta$
Dispersiver Farbmischstab	$< 10^{-3}$	4.2	0.81	$5 \cdot 10^{-3}$	2.8	0.51
Quadratischer Farbmischstab	$< 10^{-3}$	12.2	0.86	0.07	16.6	0.76

Um einen Eindruck der visuellen Farbverteilung der Prototypen zu vermitteln, zeigt Abbildung 6.43 Fotos der Beleuchtung einer 0.5 m entfernten Detektorfläche mittels der Prototypen. Abbildung 6.43 (a) bis (c) zeigen Fotos bei Ausleuchtung der Detektorfläche mit nur einer farbigen LED und Abbildung 6.43 (d) zeigt eine Ausleuchtung mit allen LED Chips. Bei den Farbverteilungen des dispersiven Farbmischstabs ist mittig jeweils der direkte Lichtanteil zu erkennen. Die Farbverteilungen des dispersiven Farbmischstab zeigen dagegen deutlich den Kaleidoskopeffekt.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die aus den gemessenen *Rayfiles* genierten Lichtverteilungen eine hohe Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen zeigen. Hierdurch wird zum einen bestätigt, dass ein quadratischer Farbmischstab ein Kaleidoskopmuster

verursacht. Zum anderen wurde eine, bis auf den direkten Lichtanteil, vollständige Durchmischung in Orts- und Winkelraum mit Hilfe eines geraden chaotischen Farbmischstabs nachgewiesen.



**Abbildung 6.43:** Fotos verschiedenfarbiger Ausleuchtungen einer vom Farbmischstab 0.5 m entfernten Detektorfläche mit einem dispersiven Farbmischstab (oben) und einem quadratischen Farbmischstab (unten)

## 6.5 ZUSAMMENFASSUNG

Das Konzept der Farbmischung mit chaotischen Farbmischstäben basiert auf der Übertragung der Geometrie chaotischer Billardsysteme auf den Querschnitt von Lichtleitern. Chaotische Billardsysteme zeigen starke sensitive Abhängigkeit auf Anfangsbedingungen und Störungen. Eine Übersicht über die theoretischen Grundlagen zeigt verschiedene Klassen chaotischer Billardsysteme auf, darunter die bekanntesten zwei Klassen, die Sinai- und die Bunimovich-Billards.

Von den Sinai-Billards wurde die Geometrie des dispersiven und des semi-dispersiven Billards auf den Lichtleiterquerschnitt übertragen und von den Bunimovich-Billards die Geometrie des Stadion- und Flower-Billards.

In einem ersten Schritt wurde die Sensitivität der vier verschiedenen Billards charakterisiert. Dazu wurde in einem vektorbasierten Programm zur nicht-sequentiellen Strahlverfolgung in MatLab die Entwicklung des Winkels zwischen zwei Strahltrajektorien, welche mit einem infinitesimalen Winkelunterschied starten, über mehrere Reflexionen analysiert. Die Analyse zeigte nur für den Bewegungsablauf der Trajektorien des dispersiven Billards ein rein chaotisches Verhalten. Beim semi-dispersiven-Billard, beim Stadion-Billard und beim Flower-Billard zeigten die Bewegungen der Trajektorien Alternation zwischen chaotischem und regelmäßigem Verhalten. Das Verhalten der Trajektorien über viele Reflexionen wurde charakterisiert durch den Lyapunov Exponenten, welcher mit dem Renormierungsverfahren berechnet wurde.

Nach der Charakterisierung wurde in einem zweiten Schritt die Geometrie der chaotischen Billards auf den Lichtleiterquerschnitt übertragen. Mit der LED als ausgedehnte Lichtquelle ist die Voraussetzung für die Forderung nach unterschiedlichen Anfangsbedingungen gegeben. Somit starten die Lichtstrahlen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen und durch die sensitive Reflexion an der Mantelfläche entfernen sich die Strahltrajektorien schnell voneinander.

Die Analyse der Durchmischung im Ortsraum ergab für den dispersiven Farbmischstab bereits nach einer sehr kurzen Lichtleiterlänge (circa das Zweifache der Querschnittsdiagonalen) eine vollständige Durchmischung. Der semi-dispersive Farbmischstab zeigte ein sehr langsames Mischverhalten, genauso wie der Flower-Farbmischstab, während der Stadion-Farbmischstab wiederum ein schnelleres Mischverhalten aufwies. Die Analyse der Durchmischung im Winkelraum zeigte wieder für den dispersiven Farbmischstab eine sehr schnelle Durchmischung (nach einer Länge von maximal dem Zehnfachen der Querschnittsdiagonale), während eine Durchmischung bei den anderen drei chaotischen Farbmischstäben über kurzer Länge noch nicht zu beobachten war. Aus der Analyse konnten verschiedene Kriterien für die Querschnittsgeometrie abgeleitet werden, die zur vollständigen Durchmischung eingekoppelter Lichtquellen im Winkelraum auf kurzer Lichtleiterlänge führen. Oberstes Kriterium ist die Forderung, dass alle Trajektorien einem vollständig chaotischen Bewegungsablauf folgen, was bei dispersiven Farbmischstäben gegeben ist. Auch die Farbmischstäbe mit intermittierend chaotischem Verhalten zeigten eine Durchmischung im Winkelraum, jedoch erst mit zunehmender Länge des Farbmischstabs. Die Ursache hierfür ist der Anteil der Strahlen, die einen regelmäßigen Bewegungsablauf aufweisen.

Die Ergebnisse wurden validiert durch die prototypische Umsetzung des dispersiven Farbmischstabs mit einer Länge von 50 mm. Als Vergleichsmodell wurde ein nicht chaotischer quadratischer Farbmischstab gefertigt. Die photometrische Analyse ergab eine hohe Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung.



## Kapitel 7

# ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

### 7.1 ZUSAMMENFASSUNG

Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung einer systematischen Methodik zur effizienten und homogenen Mischung des Strahlungsflusses verschiedenfarbiger LEDs in Orts- und Winkelraum.

Eine Analyse des Stands der Technik zeigte für die verschiedenen Ansätze zur Farbmischung die limitierenden und die erfolgversprechenden Faktoren auf. Nach den bisherigen Ansätzen bleibt jedoch die Möglichkeit zur Zusammenführung der zahlreichen Vorteile der LED-Technologie wie Effizienz, gezielte Lichtformung, kleine Dimensionen und Farbhomogenität, ungenutzt. Zudem ist die Güte der tatsächlichen Farbmischung in Orts- und Winkelraum mangels quantitativer Bewertungskriterien nicht klar ersichtlich.

Im Zuge dieser Erkenntnis wurde ein Gütekriterium für die Bewertung von optischen Systemen zur Farbmischung entwickelt. Das Gütekriterium basiert auf der Berechnung des Unterschieds von Licht- und Beleuchtungsstärkeverteilungen. Somit konnte die Durchmischung von mehreren Lichtquellen unabhängig von der Wellenlänge berechnet werden, und die grundlegenden Funktionen eines optischen Mischsystems – die Durchmischung in Orts- und Winkelraum

– evaluiert werden. Der Vorteil eines von der Wellenlänge unabhängigen Gütekriteriums liegt in der sehr viel kürzeren Rechenzeit für die Optiks simulation.

Mit Hilfe des Gütekriteriums wurden zwei verschiedene Ansätze zur Farbmischung detailliert analysiert. Ein Ansatz umfasst optische Systeme mit dispergierenden Elementen, der andere Ansatz verwendet lichtleitende Elemente. Diese beiden Ansätze wurden für die Detailanalyse ausgewählt, da hier gegenüber den anderen Farbmischmethoden das größte Optimierungspotential gesehen wurde.

Der Ansatz mit dispergierenden Elementen wurde analysiert anhand eines für drei LEDs ausgelegten optischen Systems, bestehend aus einer Kollimationslinse und einem reflektierenden Beugungsgitter. Die Simulationen zeigten für die drei Peak-Wellenlängen der LEDs eine vollständige Durchmischung in Orts- und Winkelraum in Form der virtuellen LED (die überlagerten Abbildungen der drei LEDs erzeugen eine virtuelle LED von der Größe einer einzelnen LED). Unter Berücksichtigung des ausgedehnten Spektrums der LEDs, zeigte sich jedoch mit Blick auf jede einzelne LED eine Entmischung in Orts- und Winkelraum der virtuellen LED. Zur Kompensation der Entmischung wurde ein Optimierungsansatz mit Prismen untersucht. Die Analyse ergab jedoch die Forderung nach einem sehr schwer realisierbaren System, bedingt durch die erforderlichen langen Brennweiten mit kleinen Aperturen.

Anhand der Analyse von Farbmischsystemen mit lichtleitenden Elementen, konnte bezüglich der Durchmischung im Ortsraum ein Zu-

sammenhang festgestellt werden zwischen der Anzahl der für die Reflexion wirksamen Symmetrieachsen des Lichtleiterquerschnitts und der Durchmischung im Ortsraum. Je weniger wirksame Symmetrieachsen ein Lichtleiterquerschnitt aufwies, desto schneller fand eine Durchmischung im Ortsraum statt. Die Analyse der Durchmischung im Winkelraum bestätigte den aus der Literatur bekannten Kaleidoseffekt. Dieser gibt ein Muster der Lichtquellenausdehnung und deren Position an der Lichteintrittsseite in Abhängigkeit des Lichtleiterquerschnitts wieder. Schlussendlich ergab sich aus dem Optimierungsansatz eine neue Klasse von Farbmischstäben, die als ‚chaotische Farbmischstäbe‘ Schwerpunkt dieser Arbeit sind.

Der Terminus ‚chaotische Farbmischstäbe‘ beschreibt Lichtleiter mit einer Querschnittsfläche, die nach dem Prinzip eines chaotischen Billardsystems Farbmischung realisieren. Die grundlegende Eigenschaft chaotischer Billards ist die starke sensitive Abhängigkeit von Anfangsbedingungen und Störungen. Dies bedeutet für infinitesimal benachbarte Trajektorien, dass sie sich nach wenigen Reflexionen exponentiell voneinander entfernen. Überträgt man die Geometrie eines chaotischen Billards auf einen Farbmischstab, so erfüllt die LED als ausgedehnte Lichtquelle die Forderung nach unterschiedlichen Anfangsbedingungen, womit sich die Strahltrajektorien durch die sensitive Reflexion an der Mantelfläche exponentiell voneinander entfernen.

Um die Billardgeometrien auf Farbmischstäbe zu übertragen, wurde in einem ersten Schritt die Sensitivität von Sinai- und Bunimovich-Billards analysiert. Dabei zeigte sich für das dispersive Sinai Billard

für alle Trajektorien ein chaotischer Bewegungsablauf, während alle anderen analysierten Billardgeometrien intermittierendes Chaos aufzeigten. Diese Erkenntnis erwies sich von entscheidender Bedeutung für die Güte der Farbmischung von chaotischen Farbmischstäben. Dabei zeigte die Analyse der Durchmischung im Winkelraum für den dispersiven Farbmischstab bereits nach kurzer Lichtleiterlänge eine bis auf den direkten Lichtanteil vollständige Durchmischung.

Auf diese Weise wurde ein Farbmischstab konzipiert, der nach den Prinzipien des deterministischen Chaos Farbmischung im Winkelraum realisiert. Auch die Analyse der Durchmischung im Ortsraum zeigte für den dispersiven Farbmischstab eine Durchmischung auf sehr kurzer Länge. Wiederum konnte der Zusammenhang zwischen den für die Reflexionen wirksamen Symmetrieachsen der Querschnittsfläche und der Durchmischung im Ortsraum bestätigt werden, da die dispersive Billardgeometrie keine wirksamen Symmetrieachsen aufweist.

Für die chaotischen Farbmischstäbe mit intermittierend chaotischem Verhalten, ergab die Analyse der Durchmischung im Ortsraum eine langsame Durchmischung. Diese ist bedingt durch die für die Reflexion wirksamen, vorhandenen Symmetrieachsen der Querschnittsgeometrie. Auch die Analyse im Winkelraum zeigte eine Durchmischung auf. Wegen des Anteils von Strahltrajektorien mit regelmäßigem Bewegungsablauf, findet diese jedoch erst mit zunehmender Länge des Farbmischstabs statt.

Abschließend wurden die Ergebnisse validiert durch die prototypische Umsetzung eines dispersiven Farbmischstabs und eines geraden

nicht chaotischen quadratischen Farbmischstabs. Die photometrische Analyse ergab eine hohe Übereinstimmung zwischen Simulation und Messung. Dadurch bestätigte sich zum einen, dass ein quadratischer Farbmischstab ein Kaleidoskopmuster verursacht. Zum anderen ist es gelungen für den geraden chaotischen Farbmischstab eine, bis auf den direkten Lichtanteil, vollständige Durchmischung in Orts- und Winkelraum nachzuweisen.

## 7.2 AUSBLICK

Die Simulationsergebnisse eines geraden chaotischen Farbmischstabs wurden durch eine prototypische Umsetzung validiert. Der nächste Schritt ist die Validierung der Ergebnisse eines gebogenen chaotischen Farbmischstabs, wodurch der bisher nicht durchmischte, direkte Lichtanteil beseitigt wird.

Die prototypische Umsetzung zeigte eine geringere Effizienz als die Simulation und Berechnung. Hier liegt eine der Ursachen in der manuellen Fertigung des Prototyps. In einem weiteren Schritt sollte deshalb die Produktentwicklung fortgeführt werden und die Optimierung des Herstellungsprozesses angestrebt werden. Weiterhin sollten die verschiedenen Möglichkeiten zu einer effizienten Einkopplung der LED in den Farbmischstäben in der Praxis getestet werden. Auf diesem Weg könnte eine Weiterentwicklung des dispersiven Farbmischstabes bis hin zur Marktreife realisiert werden.

Für die fertigungsgerechte Optimierung eines chaotischen Farbmischstabs verspricht eine weitere Analyse der Güte der Farbmischung, unter Berücksichtigung der Wellenlänge, aussichtsreich zu sein. Eine Bewertung der Farbmischung anhand der Lichtverteilung, ohne Berücksichtigung der Wellenlänge, entspricht nicht der Wahrnehmung des menschlichen Auges. Da nicht alle Farbunterschiede für den Menschen gleichermaßen wahrnehmbar sind [65], wird auf diese Weise die Qualität der Farbmischung auf eine größere Homogenität optimiert, als mit Bezug auf die Erkennbarkeitsschwelle des Menschen notwendig wäre. Für diese umfassenderen Analysen könnte das Gütemaß, das bisher ausschließlich auf dem Vergleich der Lichtverteilungen basiert, um die Wellenlänge erweitert werden. Hier könnten auch bekannte Methoden wie zum Beispiel die Analyse anhand der Farbortabstände  $\Delta u'v'$  [41], [42] Anwendung finden.

# I. ANHANG

## Anhang A: WEITERE CHAOTISCHE FARBMISCHSTÄBE

### A.1 CHAOTISCHE MISCHSTÄBE MIT 100 MM LÄNGE

Abbildung A.1 bis Abbildung A.4 zeigen die zweidimensionalen Lichtstärkeverteilungen und zwei entsprechende Schnittansichten zweier unterschiedlich platzierter Lichtquellen nach dem Transfer durch verschiedene chaotische Farbmischstäbe bei einer Länge von 100 mm.

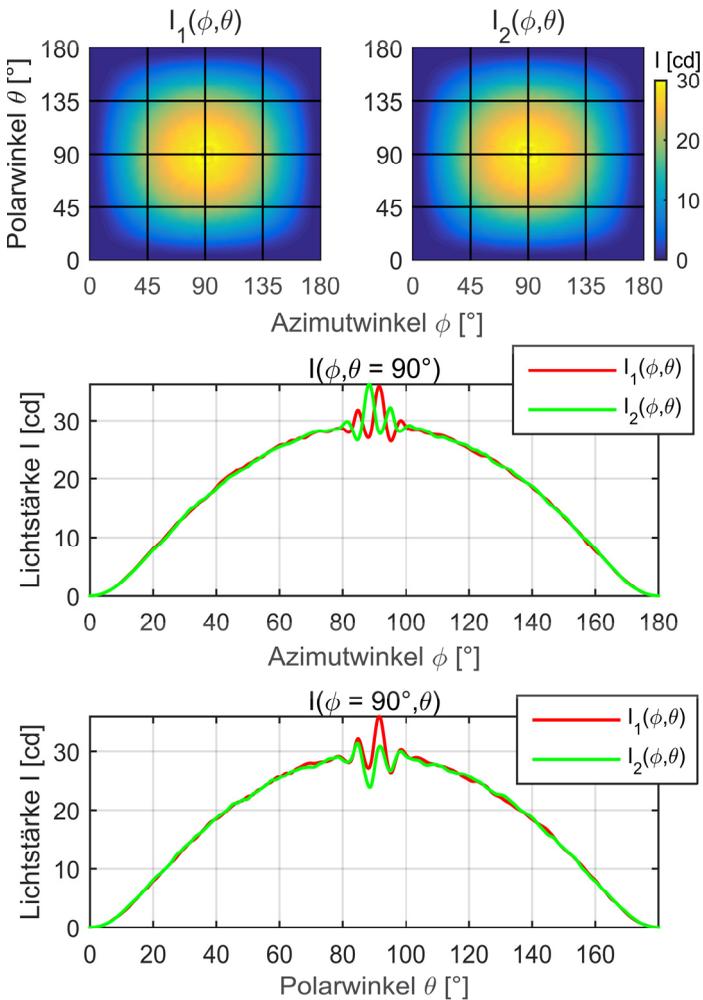
Der dispersive Farbmischstab, dargestellt in Abbildung A.1, zeigt für beide Lichtquellen Lichtstärkeverteilungen, die sich nur in einem sehr schmalen Abstrahlwinkel unterscheiden. Dies bedeutet, dass die Lichtquellen bis auf den direkten Lichtanteil im Winkelraum vollständig durchmischt sind.

Der semi-dispersive Farbmischstab, dargestellt in Abbildung A.2, zeigt für die zwei Lichtquellen zwei unterschiedliche Lichtstärkeverteilungen. Dies hat zur Folge, dass die Lichtquellen nach dem Transfer durch den 100 mm langen semi-dispersiven Farbmischstab noch nicht durchmischt sind.

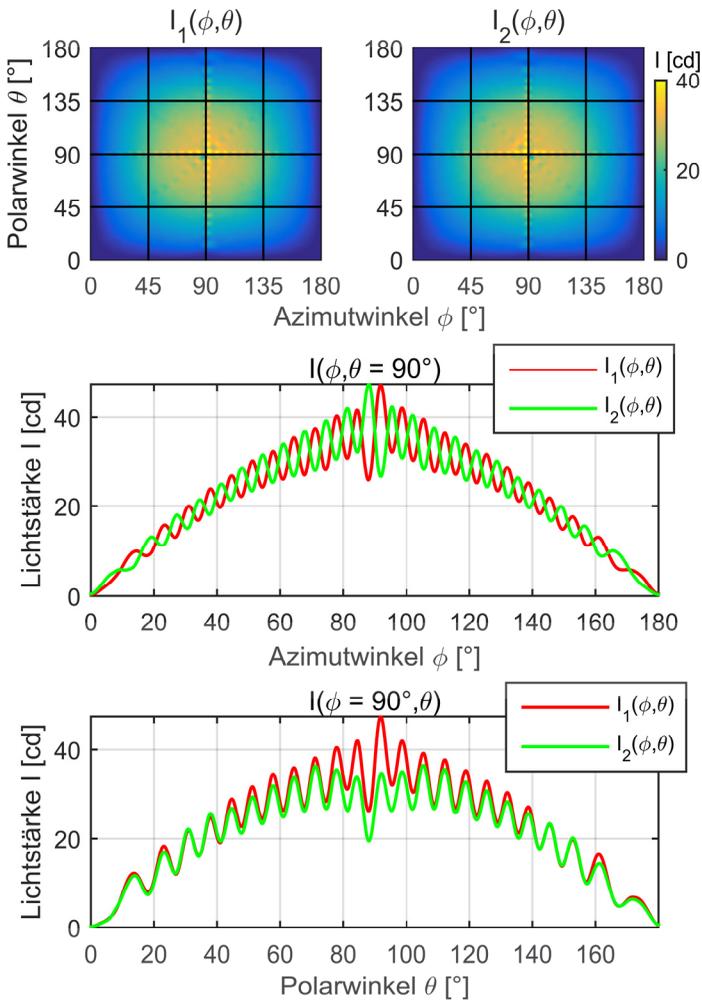
Der Stadion-Farbmischstab, dargestellt in Abbildung A.3, zeigt über den Polarwinkel nahezu identische Lichtstärkeverteilungen, welche

jedoch nicht homogen sind. Somit sind die Lichtquellen zwar durchmisch, weisen jedoch keine homogene Abstrahlcharakteristik auf.

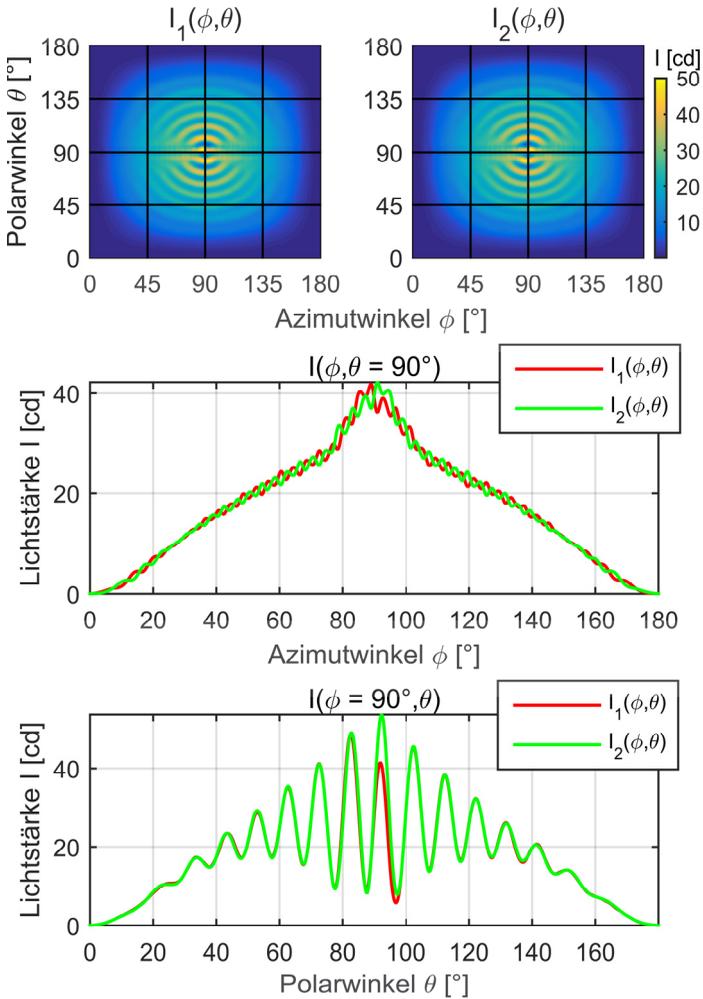
Der Flower-Farbmischstab, dargestellt in Abbildung A.4, zeigt für große Abstrahlwinkel nahezu identische Lichtstärkeverteilungen, während sie sich für schmale Abstrahlwinkel unterscheiden. Folglich ergibt sich für schmale Abstrahlwinkel bei einer Lichtleiterlänge von 100 mm keine Durchmischung der Lichtquellen.



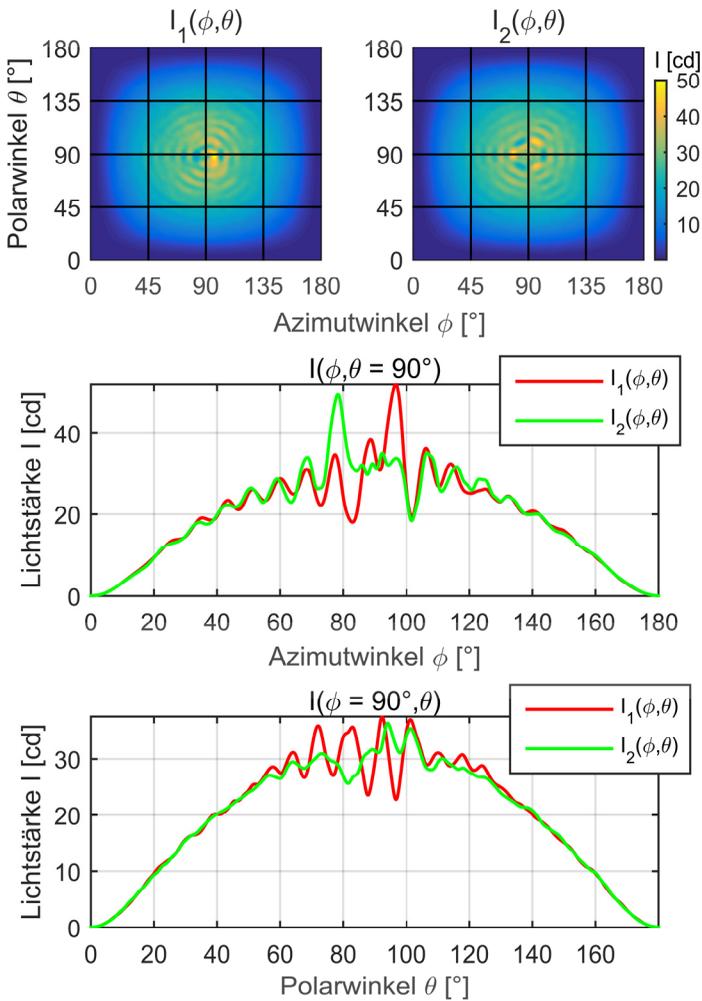
**Abbildung A.1:** Simulierte Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs nach dem Transfer durch den dispersiven Farbmischstab mit der Länge 100 mm



**Abbildung A.2:** Simulierte Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs nach dem Transfer durch den semi-dispersiven Farbmischstab mit der Länge 100 mm



**Abbildung A.3:** Simulierte Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs nach dem Transfer durch den Station-Farbmischstab mit der Länge 100 mm



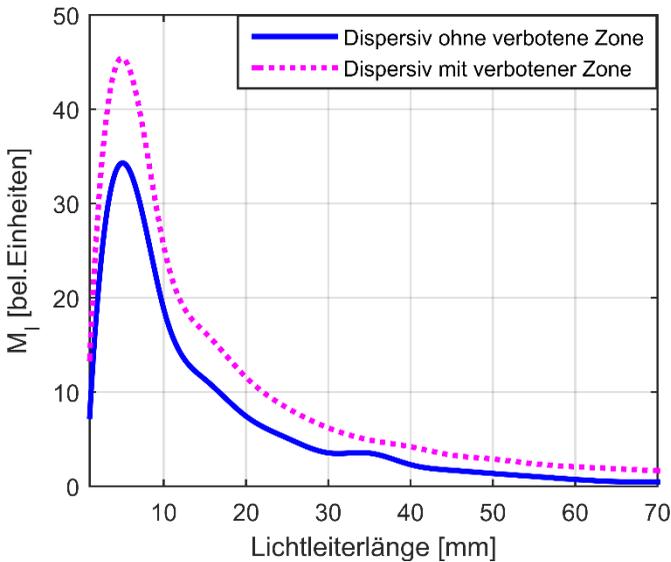
**Abbildung A.4:** Simulierte Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs nach dem Transfer durch den Flower-Farbmischstab mit der Länge 100 mm

## A.2 DISPERSIVER MISCHSTAB MIT VERBOTENER ZONE

Die Querschnittsfläche eines dispersiven Farbmischstabs mit einer ‚verbotenen Zone‘ weist in der Mitte eine reflektierende Kreisscheibe auf. Abbildung A.5 zeigt die zugehörige perspektivische Darstellung. Da sämtliche Grenzflächen weiterhin dispersiv sind, folgen alle Lichttrajektorien einem vollständig chaotischen Bewegungsablauf. Durch die Kreisscheibe in der Mitte entsteht jedoch, in Entsprechung zum semi-dispersiven Farbmischstab, eine ‚verbotene Zone‘. Diese verursacht eine langsamere Durchmischung im Winkelraum. Abbildung A.6 zeigt die Abhängigkeit der Durchmischung im Winkelraum  $M_I$  von der Lichtleiterlänge für einen dispersiven Farbmischstab mit verbotener Zonen, und einen dispersiven Farbmischstab ohne verbotene Zone.



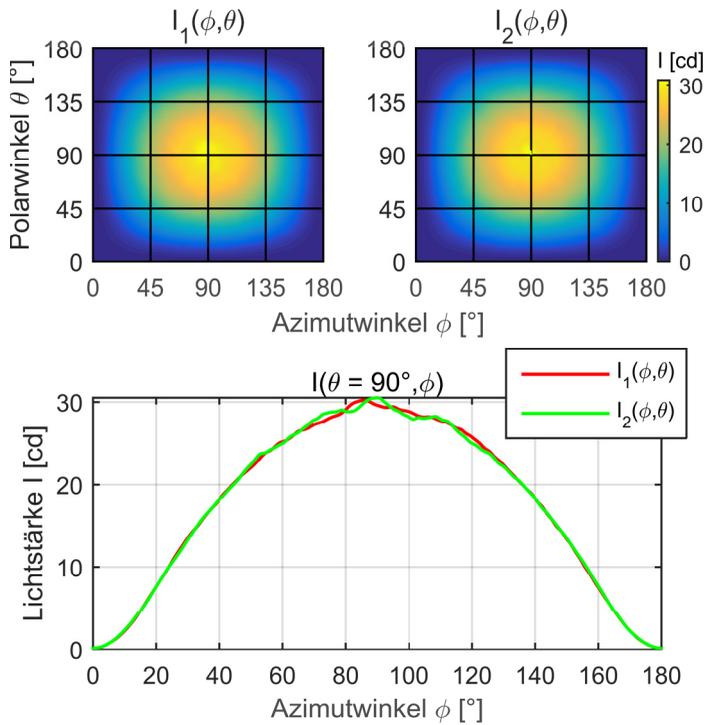
**Abbildung A.5:** Perspektivische Ansicht eines dispersiven Farbmischstabs mit verbotener Zone



**Abbildung A.6:** Abhängigkeit der Durchmischung im Winkelraum  $M_I$  von der Lichtleiterlänge für einen dispersiven Farbmischstab ohne 'verbotene Zone' und einen dispersiven Farbmischstab mit 'verbote-ner Zone'

### A.3 GEKRÜMMTER FARBMISCHSTAB

Abbildung A.7 stellt die zweidimensionalen Lichtstärkeverteilungen und deren Schnittkurve bei  $\theta = 90^\circ$  von zwei unterschiedlich platzierten LEDs dar, welche durch einen gebogenen Farbmischstab, mit geraden Abschnitten von jeweils 35mm, transferiert wurden.



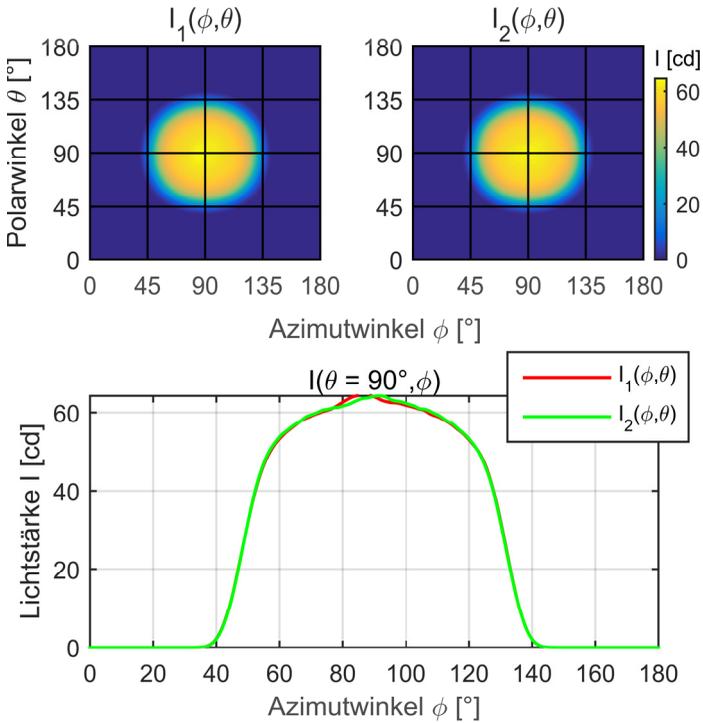
**Abbildung A.7:** Lichtstärkeverteilung von zwei unterschiedlich positionierten Lichtquellen nach dem Transfer durch einen gekrümmten dispersiven Farbmischstab mit einer Schnittkurve der Lichtverteilung bei  $\theta = 90^\circ$

#### A.4 KONISCHER FARBMISCHSTAB

Ein konischer Farbmischstab (engl.: *tapered mixing rod*) wird verwendet zur Transformation eines großen Abstrahlwinkels hin zu einem kleineren Abstrahlwinkel. Dazu wird die Fläche des Querschnitts mit zunehmender Länge vergrößert. Eine beispielhafte Simulation wurde für den in Abbildung A.8 perspektivisch dargestellten Farbmischstab durchgeführt. Die Größe der Austrittsfläche ist 1.5 Mal so groß wie die Eintrittsfläche des Farbmischstabs, ansonsten hat der Farbmischstab die gleichen Maße des in Kapitel 5.2.3 simulierten gekrümmten Farbmischstabs. Die zugehörigen Lichtstärkeverteilungen sind in Abbildung A.9 dargestellt und zeigen deutlich die Verkleinerung des Abstrahlwinkels in einem Vergleich zur Lichtstärkeverteilung aus Abbildung 6.29.



**Abbildung A.8:** Perspektivische Darstellung eines gekrümmten, dispersiven Farbmischstabs, mit einer über der Länge zunehmenden Querschnittsfläche



**Abbildung A.9:** Simulierte Lichtstärkeverteilungen von zwei unterschiedlich positionierten LEDs nach dem Transfer durch einen konischen Farbmischstab

## Anhang B: LINEARES FEHLERWACHSTUM

Für die Berechnung des Lyapunov Exponenten der Billard Geometrien wurde ein auf die vorliegende Arbeit angepasstes Renormierungsverfahren angewandt. Als eine Schwierigkeit des der Literatur entnommenen Renormierungsverfahrens, welche im Kontext mit dem linearen Anwachsen des Fehlers auftritt, sei auf den Term  $\ln \frac{|\Delta_i|}{\varepsilon}$

hingewiesen. Dieser Term wird nur für  $|\Delta_i| = \varepsilon$  einen Lyapunov Exponenten von  $\sigma = 0$  ergeben. Bei linearem Anwachsen des Fehlers, wie es bei Reflexion an konkaven Komponenten auftritt, gilt jedoch  $|\Delta_i| > \varepsilon$  und damit wird  $\sigma > 0$ . Dadurch wäre zum Beispiel für ein rundes Billard der Lyapunov Exponent größer Null, obwohl die Trajektorien im runden Billard nicht chaotisch sondern regelmäßig verlaufen.

Eine Möglichkeit diese Problematik für ein nicht chaotisches rundes Billard zu umgehen, ist die Wahl eines sehr großen Zeitinkrements  $\Delta t$ . Damit nähert sich der Lyapunov Exponent  $\sigma \rightarrow 0$  an, ein Effekt der bei linearer Fehlerentwicklung zu erwarten ist. Bei der Berechnung des Lyapunov Exponenten von chaotischen Billards, welche konkave Grenzflächen enthalten, ist die Wahl eines großen Zeitinkrements  $\Delta t$  jedoch nicht möglich. Durch die konkaven Grenzflächen tritt lineares und exponentielles Fehlerwachstum gleichermaßen auf, wodurch für die Berechnung des Lyapunov Exponenten im Sinne des Renormierungsverfahrens für alle Fehlerentwicklungen ein kleines Zeitinkrement gewählt werden muss. Dies hat zur Folge, dass der Lyapunov Exponent durch den Anteil des linearen Fehlerwachstums einen größeren Wert annimmt und das Ergebnis dadurch verfälscht wird.

Aus diesem Grund wurde in der vorliegenden Arbeit eine Variation des Lyapunov Exponenten mit einem Korrekturfaktor  $\omega$  eingeführt. Der Korrekturfaktor dient dazu, auch im Falle eines linearen Fehlerwachstums, einen Lyapunov Exponent von  $\sigma = 0$  zu erhalten. Dazu wird für jede Fehlerentwicklung  $\Delta_i$  die Anzahl der Reflexionen

$N_{konkav,i}$  an konkaven Komponenten aufgezeichnet, um im nächsten Schritt den linearen Anstieg des Fehlerwachstums zu berechnen.

Das lineare Fehlerwachstum bei konkaven Komponenten definiert sich über den anfänglichen Winkelunterschied  $\varepsilon$  zweier Strahltrajektorien. Durch den Winkelunterunterschied werden die Strahltrajektorien gegen Kurvennormalen reflektiert, die um  $\varepsilon$  zu einander verkippt sind. Dadurch vergrößert sich der anfängliche Winkelunterschied um  $2\varepsilon$ , bei jeder Reflexion an einer konkaven Kurve. Ein anfänglicher Winkelunterschied  $\varepsilon$  wächst folglich für  $N_{konkav}$  Reflexionen an konkaven Komponenten nach Gleichung (B.1) linear an.

$$\gamma = \varepsilon + 2N_{konkav}\varepsilon \tag{B.1}$$

Damit kann die Berechnung des Lyapunov Exponenten bei linearem Wachstum mit dem Faktor  $\omega_i$  korrigiert werden:

$$\omega_i = 2N_{konkav,i} + 1 \tag{B.2}$$

Mit Berücksichtigung des Korrekturfaktors  $\omega_i$  im Term  $\ln \frac{|A_i|}{\omega_i \varepsilon}$ , führt dieser auch bei linearem Wachstum zu einem Lyapunov Exponenten von  $\sigma = 0$ .



## II. ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

Abkürzung	Beschreibung
-----------	--------------

---

ASAP	engl. <i>Advanced Systems Analysis Program</i>
CCD	engl. <i>Charge-coupled device</i>
DDM	engl. <i>Dual-Dichroic mirror</i>
DMD	engl. <i>Digital mirror device</i>
LED	engl. <i>Light emitting diode</i>
MF	engl. <i>Merit function</i>
PMMA	Polymethylmethacrylat
RGBW	Rot Grün Blau Weiß
TIR	engl. <i>Total internal reflection</i>
TRIMM	engl. <i>Transparent refractive index matched microparticle</i>



### III. FORMELZEICHEN

Formelzeichen	Beschreibung
$\lambda$	Wellenlänge
$\lambda_p$	Peak-Wellenlänge
$\beta, \beta'$	Ein- und Ausfallswinkel
$n$	Brechungsindex
$\beta_g$	Grenzwinkel der Totalreflexion
$\Omega$	Raumwinkel
$P(\lambda)$	Strahlungsfluss in Abhängigkeit der Wellenlänge
$\Delta\lambda$	Halbwertsbreite
$x, y$	Ortskoordinaten auf einer Detektorfläche
$E(x, y)$	Beleuchtungsstärkeverteilung
$\phi, \theta$	Azimutwinkel, Polarwinkel
$I(\phi, \theta)$	Lichtstärkeverteilung
$\Delta u' v'$	Farbortabstände
$w_g$	Gewichtung der g-ten Gruppe von Gütemaßen
$w_i$	Gewichtung des i-ten Bewertungsfaktors der Gruppe g

FORMELZEICHEN

$V_i$	Wert des i-ten Bewertungsfaktors
$T_i$	Zielwert des i-ten Bewertungsfaktors
$\Delta y$	Vertikaler Abstand zweier Lichtquellen
$\Phi(\phi, \theta)$	Verteilung des Lichtstroms über den Polarkoordinaten
$\Phi(x, y)$	Verteilung des Lichtstroms über den Ortskoordinaten
$M_I$	Gütemaß-Bewertung für die Qualität der Durchmischung des Lichts zweier Lichtquellen im Winkelraum
$M_E$	Gütemaß-Bewertung für die Qualität der Durchmischung des Lichts zweier Lichtquellen im Ortsraum
$m$	Beugungsordnung
$\alpha_B$	Beugungswinkel
$\lambda_B$	Blaze-Wellenlänge
$f$	Brennweite
$\alpha_P$	Ablenkungswinkel Prisma
$\frac{\partial \alpha_P}{\partial \lambda}$	Prismendispersion
$\frac{\partial \alpha_B}{\partial \lambda}$	Beugungsdispersion
$\varepsilon$	Infinitesimaler anfänglicher Error

FORMELZEICHEN

$\Delta(t)$	Abstand zweier Trajektorien nach der Zeit $t$
$\sigma$	Lyapunov Exponent
$r$	Radius
$D$	Apertur
$\tau_c$	Zeit in der ein Strahlenbündel konvergent verläuft
$\tau_d$	Zeit in der ein Strahlenbündel divergent verläuft
$b_r(t)$	Referenztrajektorie
$b(t)$	Nachbartrajektorie
$f^N(x)$	Iterationsabbildung mit dem Startwert $x$
$\Delta t$	Zeitinkrement für die Verlauf der Nachbartrajektorie
$k$	Anzahl an Fehlerentwicklungen
$\omega_i$	Korrekturfaktor des linearen Wachstums eines anfänglichen Unterschieds
$N$	Anzahl an Reflexionen
$N_{konkav}$	Anzahl der Reflexionen an konkaven Komponenten
$\sigma_{var}$	Lyapunov Exponent, berechnet mit Korrekturfaktor $\omega_i$

---

$\vec{u}$ bzw. $\vec{u}_r$	Richtungsvektoren der Nachbartrajektorien bzw. der Referenztrajektorie
$N_{max}$	Maximale Anzahl an Reflexionen die ein Strahl in einem Lichtleiter der Länge L erfährt
$\eta$	Transfereffizienz einer Optik

---

## IV. VERÖFFENTLICHUNGEN

- T. Bonenberger, C. Neumann, „Vorrichtung zum Mischen und Leiten elektromagnetischer Strahlung“, *Schutzrechtsanmeldung, Anmeldetag: 13.08.2015*
- S. Junginger, T. Bonenberger, J. Baumgart, „Light Applications of Turbid Liquids“, *Tagungsband DGaO*, Brünn, Tschechien, 2015
- T. Bonenberger, I. Ruschke, J. Baumgart, A. Tarbeyeyskaya, A.Grimm, C. Neumann, „LED OASYS - Entwicklung einer energieeffizienten Tischbeleuchtung“ *Tagungsband Licht 2014*, Den Haag, Niederlande, 2014
- T. Bonenberger, J. Baumgart, S. Wendel, C. Neumann, „Diffractive structures in RGB-LED illumination“, *Tagungsband Lux Europa*, Kraków, Poland, 2013
- T. Bonenberger, J. Baumgart, S. Wendel, C. Neumann, „LED color mixing with diffractive structures“, *Proc. SPIE 8641*, San Francisco, USA, 2013
- S. Lampen, T. Bonenberger, J. Baumgart, „Simulation des Gefährdungspotentials Licht emittierender Dioden für das menschliche Auge“, *Photonik Fachzeitschrift für die optischen Technologien 3*, 2012
- T. Bonenberger, J. Baumgart, „Hybrid Collimating Optics for RGB-LEDs“, *8th EOS Topical Meeting on Diffractive Optics*, Poster session, Delft, Niederlande, 2012



## V. DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich all jenen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, danken.

Die vorliegende Arbeit entstand im Forschungsverbund ‚Zentrum für angewandte Forschung an Hochschulen‘ ZAFH im Rahmen des Projekts LED OASYS. Mein erster Dank gilt dem Bundesland Baden-Württemberg und der Europäischen Union, EFRE (Europäischer Fonds für regionale Entwicklung) für die Forschungsbeihilfe.

Ganz besonderen Dank möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Cornelius Neumann für Betreuung meiner Arbeit und die hilfreichen und konstruktiven Diskussionen aussprechen. Sein großes Wissen auf dem Gebiet der Lichtleitertechnologie und des deterministischen Chaos waren ein unverzichtbar wertvoller Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit.

Gleichermaßen gilt mein Dank Prof. Dr. Jörg Baumgart, meinem Betreuer seitens der Hochschule Ravensburg Weingarten. Auf seine fachliche und moralische Unterstützung konnte ich jederzeit bauen.

Prof. Dr. Wilhelm Stork möchte ich herzlichen Dank aussprechen für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Großer Dank gilt meinen Kollegen am Lichttechnischen Institut in Karlsruhe für den fachlichen Austausch und das freundschaftliche Miteinander. Sie standen mir jederzeit mit Rat und Tat zur Seite, nicht nur während meiner Forschungsaufenthalte am Lichttechnischen

Institut sondern auch über die örtliche Distanz zwischen Weingarten und Karlsruhe hinweg. Insbesondere danke ich Dr. Simon Wendel für den konstruktiven Diskurs, die hilfreichen Programmierhinweise sowie für die sehr gute Zusammenarbeit im Projekt LED OASYS.

Mein Dank gilt weiterhin meinen Kollegen in Weingarten für die angenehme Arbeitsatmosphäre und das freundliche Miteinander.

Ebenso möchte ich mich bei den Korrekturlesern Jörg Baumgart, Ingo Rotscholl, Simon Wendel und Susanne Bonenberger für das aufmerksame Lesen meiner Dissertation und die vielen konstruktiven Anmerkungen bedanken.

Abschließend möchte ich einen besonderen Dank aussprechen an meine Mutter Susanne Bonenberger, die mich während meiner gesamten Promotion motiviert und inspiriert hat und an meine Familie, die mir stets Rückhalt und Unterstützung gab.

## VI. LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. Murakami, T. Asahi, H. Amano, K. Hiramatsu, N. Sawaki und I. Akasaki, „Growth of Si-doped  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$  on (0001) sapphire substrate by metalorganic vapor phase epitaxy,“ *Journal of Crystal Growth Vol. 115*, pp. 648-651, 2 Dezember 1991.
- [2] S. Nakamura und T. Mukai, „High-Quality InGaN Films Grown on GaN Films,“ *Japanese Journal of Applied Physics Vol. 31*, pp. L 1457- L 1459, 15 Oktober 1992.
- [3] F. E. Schubert, *Light-Emitting Diodes*, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [4] V. K. Khanna, *Fundamentals of Solid-State Lighting: LEDs, OLEDs, and Their Applications in Illumination and Displays*, Florida, USA: Taylor & Francis Group, 2014.
- [5] C. Cajochen, M. Münch, S. Kobiakka, K. Kräuchi, R. Steiner, P. Oelhafen, S. Orgül und W.-J. Anna, „High Sensitivity of Human Melatonin, Alertness, Thermoregulation, and Heart Rate to Short Wavelength Light,“ *The Journal of Clinical Endocrinology & Metabolism Vol. 90*, p. 1311–1316, Dezember 2004.
- [6] G. C. Brainard, H. J. P., J. M. Greeson, B. Byrne, G. Glickman, E. Gerner und M. D. Rollag, „Action Spectrum for Melatonin Regulation in Humans: Evidence for a Novel Circadian Photoreceptor,“ *The Journal of Neuroscience Vol. 21*, p. 6405–6412, August 2001.

- [7] C. Cajochen, „Alerting effects of light,“ *Sleep Medicine Reviews* Vol. 11, p. 453–464, Dezember 2007.
- [8] L. Laufer, E. Láng, L. Izsó und E. Németh, „Psychophysiological effects of coloured lighting on older adults,“ *Lighting Research and Technology* Vol. 41, p. 371–378, 4 August 2009.
- [9] W. J. Cassarly, „High-Brightness LEDs,“ *Optics & Photonics News*, pp. 19-23, Januar 2008.
- [10] E. Chen, Y. Feihong und T. Guo, „Design of off-axis arranged light-emitting diodes and dual dichroic mirrors based color mixing system for micro-projection display,“ *Applied Optics* Vol. 53, pp. 1151-1158, 2014.
- [11] F. Pedrotti, *Optik für Ingenieure*, Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [12] H. Haferkorn, *Optik: Physikalisch-technische Grundlagen und Anwendungen*, Weinheim: Wiley-VCH, 2003.
- [13] H. Gross, *Handbook of optical Systems*, Bd. I, Weinheim: Wiley-VHC, 2005.
- [14] Breault Research Organization, „Breault Research,“ Breault Research Organization, 2015. [Online]. Available: <http://www.breault.com/software/about-asap>. [Zugriff am 04 09 2015].
- [15] H.-J. Hentschel, *Licht und Beleuchtung*, Heidelberg: Hüthig Buch Verlag GmbH, 1994.

- [16] A. V. Arcchi, T. Messadi und J. R. Koshel, *Field Guide to Illumination*, Washington: SPIE Press, 2007.
- [17] M. Bass, *Handbook of Optics*, Bd. II, Florida, United States: McGraw-Hill Companies, 2010.
- [18] Osram Opto Semiconductors, „LED Information Base,“ [Online]. Available: <https://apps.osram-os.com/Characteristic>. [Zugriff am 15 Juli 2015].
- [19] G. Schröder und H. Treiber, *Technische Optik*, Würzburg: Vogel Industrie Medien GmbH & Co. KG, 2007.
- [20] J. R. Koshel, *Illumination Engineering*, New Jersey: John Wiley & Sons, 2013.
- [21] A. Gupta, J. Lee und K. J. R., „Design of efficient lightpipes for illumination by an analytical approach,“ *Applied Optics Vol. 40*, pp. 3640-3648, August 2001.
- [22] F. Zhao, N. Narendran und J. Van Derlofske, „Optical elements for mixing colored LEDs to create white light,“ in *Proc. SPIE 4776*, Seattle, USA, 2002.
- [23] Y.-K. Cheng und J.-L. Chern, „Irradiance formations in hollow straight light pipes with square and circular shapes,“ *J. Opt. Soc. Am. A Vol. 23*, pp. 427-434, 2006.
- [24] W. J. Cassarly und T. L. Davenport, „Non-rotationally symmetric mixing rods,“ in *Proc. SPIE Vol 6342*, Vancouver, Kanada, 2006.

- [25] W. J. Cassarly, „Recent Advances in Mixing Rods,“ in *Proc. SPIE 7103*, Glasgow, Schottland, 2008.
- [26] C. A. Deller, G. B. Smith und J. B. Franklin, „Uniform white light distribution with low loss from coloured LEDs using polymer doped mixing rods,“ in *Proc. of SPIE Vol. 5530*, Bellingham, USA, 2004.
- [27] C. Deller, G. Smith und J. Franklin, „Colour mixing LEDs with short microsphere doped acrylic rods,“ *Optics Express Vol. 12 Nr. 15*, p. 2004, 9 Juli 2004.
- [28] S. Roelandt, L. Bogaert, Y. Meuret, A. Avci, H. De Smet und H. Thienpont, „Color uniformity in compact LED illumination for DMD projectors,“ in *Proc. of SPIE 7723*, Brüssel, Belgien, 2010.
- [29] R. van Gorkom, G. van Asb, G. Verbeek, G. Hoelen, R. Alferink, Mutsaers und C. C.A., „Étendue conserved color mixing,“ in *Proc. SPIE 6670*, San Diego, CA, 2007.
- [30] R. Paschotta, *Encyclopedia of laser physics and technology*, Weinheim, Deutschland: Wiley VHC, 2008.
- [31] C. Londono und P. Clark, „The design of achromatized hybrid diffractive lens systems,“ in *Proc. of SPIE Vol. 1354*, Monterey, USA, 1991.
- [32] D. O'Shea, T. Suleski, A. Kathman und D. Prather, *Diffractive Optics - Design, Fabrication and Test*, Washington, USA: SPIE PRESS, 2004.

- [33] Y. Ghi Hong, . Y. Joon Kim und C. Koo Lee, „Application of diffractive/refractive hybrid lens for night-vision relay lens system,“ in *Proc. of SPIE Vol. 3291*, San Jose, USA, 1998.
- [34] C. L. Coleman und W. R. H., „Applications of diffractive optics with LED sources,“ in *Diffractive Optics and Micro-Optics 2000*, Québec City, Kanada, 2000.
- [35] C. L. Coleman und R. H. Weissman, „Multi-chip LED color mixing by diffraction“. USA Patent US 6,604,839 B2, 12 August 2003.
- [36] S. Hadrath, „Methods for Color Mixing,“ in *Proc. of SPIE Vol. 8170*, Marseille, Frankreich, 2011.
- [37] J. Chaves, A. Cvetkovic, Mohedano, R., O. Dross, M. Hernandez, P. Benitez, J. Minano und J. Vilaplana, „Inhomogeneous source uniformization using a shell mixer Köhler intergrator,“ in *Proc. of SPIE Vol. 8550*, Barcelona, 2012.
- [38] T. R. Sales, S. Chakmakjian, D. J. Schertler und M. G. Morris, „LED illumination control and color mixing with engineered diffusers,“ in *Proc. of SPIE Vol. 5530*, Denver, USA, 2004.
- [39] Y. Meuret, B. C. F. Vangiel und H. Thinpont, „Efficient illumination in LED-based projection systems using lenslet integrators,“ in *Proc. SPIE 6196* , Straßburg, Frankreich, 2006.
- [40] E. Chen, R. Wu und T. Guo, „Design a freeform microlens array module for any arbitrary-shape collimated beam shaping and colormixing,“ *OpticsCommunications Vol. 321*, pp. 78-85, 15 Juni 2014.

- [41] G. Wyszecki und W. S. Stiles, *Color Science*, New York: John Wiley & Sons, 1982.
- [42] I. Rotscholl, K. Trampert, F. Herrmann und C. Neumann, „Methods for describing illumination colour uniformities,“ *Advanced Optical Technologies, Vol.4*, pp. 99-110, Februar 2015.
- [43] J. Muschaweck, „Randomized Micro Lens Arrays for Color Mixing,“ in *Proc. of SPIE Vol. 7954*, San Francisco, USA, 2001.
- [44] W. J. Cassarly, „Illumination merit functions,“ in *Proc. SPIE Vol. 6670*, San Diego, USA, 2007.
- [45] W. J. Cassarly, „Iterative Reflector Design Using a cumulative flux compensation approach,“ in *Proc. SPIE 7652*, Wyoming, USA, 2010.
- [46] S. Wendel, *Spektrum der Lichttechnik*, Bd. 7, Karlsruhe: KIT Scientific Publishing, 2014.
- [47] C. Palmer und E. Loewen, „*Diffraction Grating Handbook*,“ Newport Corporation, New York, USA, 2005.
- [48] Thorlabs, „Introduction to Diffraction Grating,“ [Online]. Available: <https://www.thorlabs.com/catalogpages/802.pdf>. [Zugriff am 10 April 2012].
- [49] N. Hagen und T. S. Tkaczyk, „Compound prism design principles II: triplet and Janssen prisms,“ *Applied Optics Vol. 50*, pp. 5012-5022, September 2011.

- [50] Evonik Industries AG, „Plexiglas Onlineshop,“ [Online]. Available: <http://www.plexiglas-shop.com/pdfs/de/211-12- PLEXIGLAS-Rohre-St%C3%A4be-de.pdf>. [Zugriff am 02 August 2015].
- [51] Osram Opto Semiconductors, „Osram Opto Semiconductors,“ [Online]. Available: [http://www.osram-os.com/osram\\_os/en/products/product-catalog/led-light-emitting-diodes/osram-ostar/osram-ostar-stage/le-rtduw-s2w/index.jsp](http://www.osram-os.com/osram_os/en/products/product-catalog/led-light-emitting-diodes/osram-ostar/osram-ostar-stage/le-rtduw-s2w/index.jsp). [Zugriff am 17 Februar 2015].
- [52] Smorodinskij, Was ist Temperatur?, Frankfurt am Main: Harri Deutsch Verlag, 2000.
- [53] H.-O. Peitgen, H. Jürgens und D. Saupe, Chaos and Fractals, New York: Springer-Verlag New-York, 2004.
- [54] S. Tabachnikov, Geometrie und Billard, Berlin: Springer-Verlag, 2013.
- [55] N. Chernov und R. Markarian, Chaotic Billiards, USA: American Mathematical Society, 2006.
- [56] J. Argyris, G. Fraus, M. Haase und R. Friedrich, Die Erforschung des Chaos, Berlin: Springer-Verlag , 2010.
- [57] R. Worg, Deterministisches Chaos, Mannheim: BI Wissenschaftsverlag, 1993.
- [58] Y. G. Sinai, „Hyperbolic Billiards,“ in *Proc. of the International Congress of Mathematicians*, Kyoto, Japan, 1990.

- [59] L. Bunimovich, „On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards Vol. 65 Nr. 3,“ *Communications in Mathematical Physics*, pp. 295-312, Oktober 1979.
- [60] M. Wojtkowski, „Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov Exponents,“ *Communications in Mathematical Physics Vol. 105*, pp. 391-414, September 1986.
- [61] L. A. Bunimovich, „Peeping at chaos: Nondestructive monitoring of chaotic systems by measuring long-time,“ *EPL Journal Vol. 80*, November 2007.
- [62] P. Bálint, N. Chernov und D. Dolgopyat, „Limit Theorems for Dispersing Billiards with Cusps,“ *Communication in Mathematical Physics Vol. 308*, pp. 479-510, Dezember 2011.
- [63] L. A. Bunimovich, „Mushrooms and other billiards with divided phase space,“ *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science Vol.11*, pp. 802-808, Dezember 2001.
- [64] MATHWORKS, INC., *MATLAB® - The Language of Technical Computing*.
- [65] K. Bieske und C. Vandahl, „Welche Farbunterschiede kann der Mensch wahrnehmen,“ Stuttgart, 2007 .





## **SPEKTRUM DER LICHTTECHNIK**

Lichttechnisches Institut Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

ISSN 2195-1152

---

- Band 1     Christian Jebas  
**Physiologische Bewertung aktiver und passiver  
Lichtsysteme im Automobil.** 2012  
ISBN 978-3-86644-937-4
- Band 2     Jan Bauer  
**Effiziente und optimierte Darstellungen von  
Informationen auf Grafikanzeigen im Fahrzeug.** 2013  
ISBN 978-3-86644-961-9
- Band 3     Christoph Kaiser  
**Mikrowellenangeregte quecksilberfreie  
Hochdruckgasentladungslampen.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0039-1
- Band 4     Manfred Scholdt  
**Temperaturbasierte Methoden zur Bestimmung der  
Lebensdauer und Stabilisierung von LEDs im System.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0044-5
- Band 5     André Domhardt  
**Analytisches Design von Freiformoptiken  
für Punktlichtquellen.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0054-4
- Band 6     Franziska Herrmann  
**Farbmessung an LED-Systemen.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0173-2
- Band 7     Simon Wendel  
**Freiform-Optiken im Nahfeld von LEDs.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0251-7
- Band 8     Carmen Kettwich  
**Ablenkung im Straßenverkehr und deren  
Einfluss auf das Fahrverhalten.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0288-3

- Band 9      Steffen Michenfelder  
**Konzeption, Realisierung und Verifikation eines automobilen  
Forschungsscheinwerfers auf Basis von Digitalprojektoren.** 2015  
ISBN 978-3-7315-0301-9
- Band 10     Celal Mohan Ögün  
**Surface wave driven molecular low pressure plasmas  
for general lighting.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0464-1
- Band 11     Theresa Bonenberger  
**LED Farbmischung mit chaotischen Lichtleitern.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0480-1





Lichttechnisches Institut  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

## SPEKTRUM DER LICHTTECHNIK

Diese Arbeit zeigt eine systematische Methodik zur effizienten und homogenen Mischung des Strahlungsflusses verschiedenfarbiger Licht emittierender Dioden, kurz LEDs, in Ortsraum und Winkelraum. Im Mittelpunkt steht hierbei die Anwendung der Geometrien chaotischer Billardsysteme auf den Querschnitt eines Lichtleiters. Als chaotische Lichtleiter ermöglichen sie nach den Prinzipien des deterministischen Chaos eine vollständige Farbmischung.

ISSN 2195-1152  
ISBN 978-3-7315-0480-1

