

Leptonische und hadronische Korrekturen zum anomalen magnetischen Moment vom Muon und Elektron

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Phys. Alexander Kurz
aus Kopejsk



Datum der mündlichen Prüfung: 12. Februar 2016

Referent: Prof. Dr. Matthias Steinhauser
Korreferent: Prof. Dr. Kirill Melnikov

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Anomales magnetisches Moment	2
1.2	Allgemeine technische Details	7
1.3	Renormierungskonstanten	9
1.3.1	Berechnung von Z_2^{OS} und Z_m^{OS}	11
1.3.2	$\overline{\text{MS}}$ -OS-Relation für α	13
2	Schwere Leptonbeiträge zum anomalen magnetischen Moment vom Muon und vom Elektron	16
2.1	Technische Details	17
2.1.1	Asymptotische Entwicklung	21
2.1.2	Tensorbehandlung	24
2.2	Ergebnisse für a_μ	27
2.3	Ergebnisse für a_e	32
3	Elektronbeiträge zum anomalen magnetischen Moment vom Muon	37
3.1	Asymptotische Entwicklung	39

3.2	Berechnung von Feynmanintegralen	43
3.3	Ergebnisse	52
3.3.1	Diagrammgruppen mit Lichtstreuung	54
3.3.2	Verbleibende Diagrammklassen	57
4	Beitrag zum muonischen anomalen magnetischen Moment von Elektron- und Tau-Schleifen	70
4.1	Beispiel zur asymptotischen Entwicklung	71
4.2	Ergebnisse	75
5	Hadronischer Beitrag	82
5.1	Einführung	82
5.2	Ergebnisse für das Muon	87
5.2.1	Beitrag zu nächst führender Ordnung	87
5.2.2	Nächst-zu-nächst führende Korrekturen	89
5.3	Ergebnisse für das Elektron	94
5.4	Test mit schwerer Leptoneinsetzung	94
	Zusammenfassung	100
	A Renormierungskonstanten	103
	B Zwei- und Dreischleifen-Ergebnisse zu a_μ	115
	C Programm zur Asymptotik	118
	Benutzung des Programms	120
	Literaturverzeichnis	131

Kapitel 1

Einleitung

In der modernen Teilchenphysik werden die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen zurzeit durch das Standardmodell der Teilchenphysik zusammen gefasst. Das theoretische Konzept basiert auf relativistischen Quantenfeldtheorien und das Standardmodell besteht dabei aus lokalen Eichtheorien zur starken und elektroschwachen Wechselwirkung, die insgesamt die Gruppe $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ bilden. Eine spontane Symmetriebrechung führt jedoch auf $SU(3)_C \otimes U(1)_{em}$, sodass die für diese Arbeit wichtige Quantenelektrodynamik (QED) entsteht. Zur QED gehören dabei die drei Leptonen Elektron, Muon und Tau, sowie die $U(1)_{em}$ -Eichwechselwirkung zwischen diesen, die durch das Photon übertragen wird.

Das magnetische Moment des Elektrons war eine der Observablen, die zur Etablierung der QED, und somit des gesamten Standardmodells, beigetragen hat. Dabei wurden theoretische Konzepte entwickelt, mit denen konsistente Vorhersagen mit Quantenfeldtheorien getroffen werden können. Dazu musste auch die Genauigkeit der Vorhersagen aufgrund der immer weiter verbesserten Präzision der Experimente erhöht werden. Um das zu erreichen, wurden höhere Ordnungen in Störungstheorie gebraucht. Da die Auswertung von diesen mit jedem weiteren Term deutlich schwieriger wird, wurden dazu neue Berechnungsmethoden entwickelt, wovon einige in dieser Arbeit verwendet wurden und daher vorgestellt werden.

Auch das magnetische Moment des Muons spielte bei der Entwicklung der modernen Teilchenphysik eine wichtige Rolle. Da das Muon schwerer als das

Elektron ist, haben schwere Teilchen einen stärkeren Effekt auf das muonische magnetische Moment. So musste für eine genaue theoretische Vorhersage von diesem relativ früh das ganze Standardmodell miteinbezogen werden. Aus diesem Grund sollten sich auch andere unbekannte Teilchen beim Muon aufzeigen. Für die Suche nach neuer Physik wurden somit die Experimente immer weiter vorangetrieben und mit ihnen die theoretischen Rechnungen. Zwar waren zunächst die experimentellen Resultate und die Theorie mit zunehmender Präzision in sehr guter Übereinstimmung, jedoch existiert seit dem letzten Experiment am Brookhaven National Laboratory eine Abweichung von ungefähr drei Standardabweichungen. Um die bisher ungeklärte Ursache dafür zu finden ist es daher wichtig, die verschiedenen Beiträge für die genaue theoretische Vorhersage des muonischen magnetischen Moments zu überprüfen, was die Hauptmotivation dieser Arbeit darstellt.

1.1 Anomales magnetisches Moment

Ein Fermion mit Masse m und Ladung e besitzt ein magnetisches Moment proportional zu seinem Spin,

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2m} \vec{S}.$$

Für elementare Teilchen ist das gyromagnetische Verhältnis g laut der relativistischen Quantenmechanik, der Dirac-Gleichung, exakt 2. Bereits in frühen Experimenten konnte jedoch beim Elektron eine Abweichung davon festgestellt werden. Diese Abweichung, die auch beim Muon auftritt, wird als anomales magnetisches Moment bezeichnet, oder kurz $g - 2$ (siehe z.B. [1–3] für weiterführende Literatur) und wird in der Regel durch

$$a = \frac{g - 2}{2}$$

parametrisiert. Die aktuellen Messwerte für das anomale magnetische Moment vom Elektron und vom Muon,

$$a_e^{\text{exp}} = 115\,965\,218.076(27) \cdot 10^{-11} \quad [4],$$

$$a_\mu^{\text{exp}} = 116\,592\,089(63) \cdot 10^{-11} \quad [5],$$

gehören zu den genauesten experimentellen Ergebnissen in der Teilchenphysik. Im Vergleich dazu betragen die theoretischen Resultate

$$a_e^{\text{th}} = 115\,965\,218.164(76) \cdot 10^{-11} \quad [6],$$

$$a_\mu^{\text{th}} = 116\,591\,840(59) \cdot 10^{-11} \quad [7].$$

Auch ist beim τ -Lepton ein anomales magnetisches Moment zu erwarten. Da es jedoch aufgrund der Kurzlebigkeit vom τ nur sehr schwer gemessen werden kann, ist es noch nicht relevant. Die Werte von a_e sind zwar in guter Übereinstimmung, jedoch besteht bei der theoretischen Vorhersage das Problem, dass dabei der experimentelle Wert der Feinstrukturkonstante α eingeht, dessen Unsicherheit den theoretischen Fehler komplett dominiert. So erlaubt es die hohe experimentelle Präzision von a_e , aus der theoretischen Vorhersage einen genaueren Wert für die Feinstrukturkonstante zu extrahieren, als es die direkte Messung von α mittels Interferometrie am Rubidiumatom liefert. Im Falle von a_μ kann zur Berechnung der aus a_e bestimmte Wert für α verwendet werden, sodass momentan die experimentelle und theoretische Unsicherheit ungefähr gleich groß ist. Desweiteren besteht eine Diskrepanz von etwa drei Standardabweichungen, dessen Ursache ungeklärt ist. In naher Zukunft sind jedoch zwei weitere Experimente am Fermilab [8] und am J-PARC [9] geplant, die die experimentelle Unsicherheit von a_μ etwa um einen Faktor 4 reduzieren würden.

Die Abweichung des gyromagnetischen Verhältnisses von 2 kann mit relativistischen Quantenfeldtheorien erklärt werden. Diese beschreiben die Wechselwirkung von Teilchen nicht nur durch direkte Wechselwirkungspunkte, wie es klassisch erklärt wird, sondern zusätzlich durch Erzeugung und Vernichtung von virtuellen Teilchen, die im Experiment jedoch nicht direkt beobachtet werden können. Da sich die Quantenelektrodynamik aus den Leptonen und dem Photon besteht, ist die einzige auftretende direkte Wechselwirkung zwischen einem Leptonpaar und einem Photon, wozu jedoch auch die Abstrahlung oder das Absorbieren eines Photons von einem Lepton gehört. Betrachtet man die Leptonwechselwirkung mit einem externen Photonfeld allgemein, also auch mit Korrekturen höherer Ordnung, lässt sich dessen Matrixelement folgendermaßen parametrisieren.

$$\bar{\psi}(p_2) M^\mu \psi(p_1) = \bar{\psi}(p_2) \left(\gamma^\mu F_E(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_M(q^2) \right) \psi(p_1). \quad (1.1)$$

Hierbei ist ψ der Dirac-Spinor des Leptons mit Masse m und Ladung e ,

die entsprechend vom ein- bzw. auslaufenden Vierer-Impuls abhängen. Die unabhängigen Lorentz-Strukturen können durch die Dirac-Matrizen γ^μ und $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ beschrieben werden, ein möglicher dritter Term proportional zum Impulsübertrag q^μ an das externe Photonfeld tritt aufgrund der Erhaltung des elektromagnetischen Stromes nicht auf. Es ist zu beachten, dass die beiden Formfaktoren, F_E und F_M , nur vom Quadrat des Impulsübertrags abhängen. Im kinematischen on-shell Limes, also für $p_1^2 = p_2^2 = m^2$ und $q^2 = 0$, bekommt der elektrische Term keine Strahlungskorrekturen und der magnetische Formfaktor entspricht dem anomalen magnetischen Moment des externen Leptons $\ell = e, \mu, \tau$, das heißt

$$F_E(0) = 1, \quad F_M(0) = a_\ell. \quad (1.2)$$

Die theoretischen Werte der anomalen magnetischen Momente setzen sich aus verschiedenen Beiträgen zusammen, die von verschiedenen Teilchen geliefert werden. Der QED-Beitrag, der von Leptonen und Photonen geliefert wird, hat den größten Wert. Dieser beginnt auf Einschleifen-Niveau mit einer Photonkorrektur in Störungstheorie, wobei in α entwickelt wird,

$$a_\ell^{\text{QED}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_\ell^{(2n)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n.$$

Der Einschleifen-Koeffizient

$$a_\ell^{(2)} = \frac{1}{2}$$

ist unabhängig vom externen Lepton und wurde bereits 1948 von Schwinger berechnet [10]. Ab zwei Schleifen kommen jedoch massenabhängige Leptonkorrekturen hinzu und es ist sinnvoll eine weitere Unterscheidung wie im Folgenden zu treffen.

$$\begin{aligned} a_e^{(2n)} &= A_1^{(2n)} + A_{2,e}^{(2n)}(m_e/m_\mu) + A_{2,e}^{(2n)}(m_e/m_\tau) + A_{3,e}^{(2n)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau), \\ a_\mu^{(2n)} &= A_1^{(2n)} + A_{2,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_e) + A_{2,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_\tau) + A_{3,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau). \end{aligned}$$

Die Beiträge vom Photon und Lepton der gleichen Art wie das externe Lepton sind in $A_1^{(2n)}$ zusammengefasst. Diese universellen Strahlungskorrekturen sind massenunabhängig und deswegen gleich für beide anomalen magnetischen Momente. Dabei sind die Koeffizienten zu jeder bekannten Schleifenordnung numerisch von der Größenordnung ~ 1 . Die Ergebnisse dafür sind bis drei Schleifen in Form von analytischen Konstanten bekannt [11–13]. Auf

Vier- und Fünfschleifen-Niveau existieren nur numerische Ergebnisse mit einer endlichen Präzision [6, 14].

Die Größen $A_{2,e}^{(2n)}(m_e/m_\mu)$, $A_{2,e}^{(2n)}(m_e/m_\tau)$, $A_{2,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_e)$ und $A_{2,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_\tau)$ beschreiben Schleifenbeiträge mit genau einer weiteren Leptonart ungleich dem externen Lepton. Diese fangen mit zwei Schleifen an und sind bis zu drei Schleifen in analytischer Form mit kompletter Massenabhängigkeit bekannt [15–18]. Zu diesen, sowie den anderen beiden massenabhängigen Beiträgen, existieren auf vier und fünf Schleifen nur numerische Gesamtergebnisse [7, 14].

Hierbei ist zu beachten, dass das virtuelle Lepton bei $A_{2,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_e)$, das Elektron, leichter als das externe Lepton, das Muon, ist. Das hat zur Folge, dass $\log(m_\mu/m_e)$ -Terme auftreten, auch mit höheren Potenzen, die numerisch groß sind. Aus diesem Grund dominiert dieser Beitrag jedes Teilergebnis $a_\mu^{(2n)}$. Vergleicht man den bekannten Elektronbeitrag auf vier Schleifen mit der Abweichung zwischen experimentellen Wert und theoretischer Vorhersage für a_μ , siehe z.B. [7],

$$A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \approx 132.7 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \approx 386 \cdot 10^{-11},$$

$$a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{th}} \approx 249(87) \cdot 10^{-11},$$

so stellt sich heraus, dass der Elektronbeitrag größer ist und somit bedeutend für das Testen des Standardmodells der Teilchenphysik, sowie die Suche nach neuer Physik. Da dieser insgesamt jedoch nur von einer Gruppe ausgewertet wurde, ist es wichtig dieses Ergebnis zu testen. Dazu erfolgte die Auswertung, wie auch die Renormierung, nur mit numerischen Methoden. Dabei treten jedoch große numerische Differenzen auf, was bei früheren Rechnungen zu falschen Resultaten führte. Das wurde an einem Teilergebnis in Ref. [19] gezeigt. Die Hauptmotivation dieser Arbeit liegt darin, den gesamten Elektronbeitrag zu a_μ mit einer komplett verschiedenen Vorgehensweise, einer analytischen Methode, auszurechnen um ein unabhängiges vollständiges Ergebnis zu erhalten. Das wird in Kapitel 3 diskutiert und wird in den Publikationen [20,21] behandelt, sowie im Proceeding [22]. Hierbei seien auch diverse Rechnungen zu einzelnen Unterklassen in Referenzen [19, 23–28] erwähnt.

Im Gegensatz zum beschriebenen Elektronbeitrag wird $A_{2,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_\tau)$ durch ein schwereres Lepton, das Tau, als das externe Muon hervorgerufen. Da

laut dem Entkopplungstheorem [29] dieser Beitrag im Limes unendlich großer Taumasse verschwindet, wird dieser Term durch $m_\mu^2/m_\tau^2 \sim 10^{-3}$ unterdrückt. Das führt dazu, dass diese Korrekturen verglichen zu den anderen Beiträgen numerisch klein sind. Im Falle von a_e gilt für $A_{2,e}^{(2n)}(m_e/m_\mu)$ und $A_{2,e}^{(2n)}(m_e/m_\tau)$ eine analoge Argumentation. So sind diese Korrekturen sogar noch stärker mit $m_e^2/m_\mu^2 \sim 10^{-5}$ bzw. $m_e^2/m_\tau^2 \sim 10^{-8}$ unterdrückt. Hierzu gehört auch der Beitrag $A_{3,e}^{(2n)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$ für $a_e^{(2n)}$, der von Feynmandiagrammen herrührt, in denen alle drei Leptonen vorkommen, und somit erst ab drei Schleifen auftreten kann. Da wie beim $A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e)$ -Beitrag auch die Vierschleifen-Korrekturen mit schweren Leptonen nur durch eine Gruppe mit gleichen numerischen Methoden berechnet wurden, ist es wichtig diese Ergebnisse durch eine unabhängige Rechnung zu testen. Außerdem war es für diese Arbeit sinnvoll diese Rechnung als erstes durchzuführen. Das liegt zum einen daran, dass diese Rechnung technisch einfacher als die von $A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e)$ ist, und zum anderen sie trotzdem erlaubt, einige Schritte von der Berechnung des Elektronbeitrags zu implementieren. Die Berechnung von schweren Leptonbeiträgen wird in Kapitel 2 behandelt. Die Ergebnisse sind in Ref. [30] publiziert, siehe auch die zugehörigen Proceedings [22, 31].

Der letzte QED-Beitrag $A_{3,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau)$, mit sowohl Elektron- als auch Tauschleifen, beginnt auf Dreischleifen-Niveau, welches dazugehörige Ergebnis in Form einer Massenentwicklung bekannt ist [16, 32, 33]. Das Besondere an diesem leptonischen Beitrag ist, dass hierbei in den Feynmandiagrammen gleichzeitig leichtere und schwerere Leptonen als das externe Muon auftreten. Zwar ist numerisch ein ähnliches Verhalten wie bei $A_{2,\mu}^{(2n)}(m_\mu/m_\tau)$ zu erwarten, wird zur Vollständigkeit in Kapitel 4 auf das Vierschleifen-Ergebnis $A_{3,\mu}^{(8)}$ eingegangen. Die Resultate dazu sind in Ref. [21] publiziert.

Außer den QED-Strahlungskorrekturen treten zum anomalen magnetischen Moment noch weitere Beiträge auf. Diese sind zum einen elektroschwache Korrekturen. Obwohl dabei das Auftreten von vielen Massen Schwierigkeiten bereitet, sind für a_μ die reinen elektroschwachen Beiträge bis Zweischleifen-Ordnung analytisch bekannt [34–37], sodass der Fehler nur von unbekannter Dreischleifen-Korrektur und gemischten elektroschwach-hadronischen Beiträgen herrührt. Analog zu schweren Leptonbeiträgen sind die elektroschwachen Korrekturen mit den Massen der elektroschwachen Eichbosonen unterdrückt. So sind diese Beiträge zu a_e aufgrund der kleinen Elektronmasse vernachlässigbar.

Beiträge hadronischer Art sind größtenteils mit Störungstheorie nur schwer zu beschreiben. Das liegt daran, dass die Kopplungskonstante α_s der ursächlichen starken Wechselwirkung bei niedrigen Energien sehr groß wird und die Entwicklung der Störungstheorie in α_s nicht funktioniert. Treten in einem Feynmandiagramm hadronische Korrekturen jedoch nur in Form einer photonischen Vakuumpolarisation auf, so lässt sich dieser Beitrag mit Hilfe von experimentellen Daten des Wirkungsquerschnitts $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ bestimmen. Der führende Beitrag ergibt sich durch die Einsetzung einer hadronischen Vakuumpolarisation in das Einschleifen-Diagramm im QED-Fall, was damit formal zu Diagrammen mit zwei Schleifen vergleichbar ist. Das Ergebnis von diesem zu a_μ und a_e , sowie nächst höhere QED-Korrekturen [38, 39], werden immer wieder mit neuen experimentellen Daten aktualisiert [40–46]. Das ist insbesondere für das muonische magnetische Moment wichtig, da dort der experimentelle Fehler vom hadronischen Beitrag die Unsicherheit des theoretischen Ergebnisses dominiert. Darüber hinaus können noch höhere unbekannte Strahlungskorrekturen zum nächst-zu-nächst-führenden hadronischen Beitrag die theoretische Vorhersage ändern. Um das zu überprüfen wurden in dieser Arbeit solche höheren, formal Vierschleifen-Beiträge mit einer hadronischen Vakuumpolarisationseinsetzung berechnet. Das wird in Kapitel 5 diskutiert, siehe dazu die Publikation [47]. Außer diese auf den experimentellen Daten basierte Technik gibt es auch andere komplett theoretische Berechnungsmethoden, wie z.B. in Ref. [48] gezeigt. Hierbei sei insbesondere die vielversprechende Methode der Gitter-QCD erwähnt, bei der mit einer diskretisierten Raumzeit gerechnet wird, siehe z.B. die Ref. [49, 50]. Die zweitgrößte theoretische Unsicherheit vom a_μ hat ihre Ursachen in sogenannter hadronischer Lichtstreuung. Diese wird durch Feynmandiagramme beschrieben, in denen eine hadronische Wechselwirkung zwischen dem externen und drei internen Photonen stattfindet. Dazu gibt es eine Reihe verschiedener Ansätze, siehe dazu z.B. [48, 51–55]. Darauf wird in dieser Arbeit jedoch nicht weiter eingegangen.

1.2 Allgemeine technische Details

Um das anomale magnetische Moment eines Leptons zu berechnen, müssen Strahlungskorrekturen zur Wechselwirkung zwischen dem Lepton und einem Photon, wie in Gleichung (1.1) definiert, betrachtet werden. Da ein offener

Lorentz-Index des Photons die Rechnung erschwert und wir nur an dem magnetischen Formfaktor interessiert sind, verwenden wir den folgenden Projektor um F_M direkt aus dem Matrixelement M^μ zu extrahieren.

$$F_M(q^2) = \frac{-2m}{(d-2)q^2(q^2 + 4m^2)}. \quad (1.3)$$

$$\text{Sp} \left[(\not{p}_1 + m) \left(\gamma_\mu + \frac{(d-2)q^2 - 4m^2}{m(q^2 + 4m^2)} \frac{(p_1 + p_2)_\mu}{2} \right) (\not{p}_2 + m) M^\mu \right].$$

Dabei ist die Raumzeitdimension durch $d = 4 - 2\epsilon$ mit $\epsilon \rightarrow 0$ gegeben, sowie die kinematische Abhängigkeit $p_2 = p_1 + q$ sei zu beachten. Um daraus das anomale magnetische Moment zu erhalten (siehe Gl. (1.2)), wird nach der Spurbildung in $q^2 \approx 0$ eine naive Taylorentwicklung durchgeführt. Um das durchführen zu können, müssen jedoch auch Skalarprodukte zwischen q und Schleifenimpulsen behandelt werden. Um die Abhängigkeit von q^2 zu erreichen, mitteln wir über alle Richtungen von q , womit der andere externe Impuls p_1 eine ausgezeichnete Richtung festlegt. Für einen linearen Term folgt aus dem Ansatz

$$q^\nu \rightarrow C_0 p_1^\nu$$

direkt

$$q^\nu \rightarrow \frac{q \cdot p_1}{p_1^2} p_1^\nu. \quad (1.4)$$

Beim quadratischen Term kann man einen ähnlichen Ansatz mit zusätzlichem metrischen Tensor machen:

$$q^{\nu_1} q^{\nu_2} \rightarrow C_1 g^{\nu_1 \nu_2} + C_2 p_1^{\nu_1} p_1^{\nu_2}.$$

Kontrahiert man die Lorentz-Indizes mit $g_{\nu_1 \nu_2}$ sowie $p_{1\nu_1} p_{1\nu_2}$, lassen sich die Konstanten C_1 und C_2 bestimmen und man erhält

$$q^{\nu_1} q^{\nu_2} \rightarrow \frac{1}{(d-1)p_1^2} \left[(q \cdot p_1)^2 \left(d \frac{p_1^{\nu_1} p_1^{\nu_2}}{p_1^2} - g^{\nu_1 \nu_2} \right) + q^2 p_1^2 \left(g^{\nu_1 \nu_2} - \frac{p_1^{\nu_1} p_1^{\nu_2}}{p_1^2} \right) \right]. \quad (1.5)$$

Um in der Entwicklung von Gleichung (1.3) die gebrauchte Ordnung von $(q^2)^0$ zu erreichen, reicht es die Rechnung bis zur quadratischen Ordnung von der Tensorstruktur durchzuführen, da im Projektor nur ein q^2 im Nenner auftaucht.

In (1.4) und (1.5) tritt noch das Skalarprodukt $q \cdot p_1$ auf. Durch Ausnutzung der on-shell Bedingung für die Leptonimpulse, $p_i^2 = m^2$, lässt sich dieses jedoch umschreiben,

$$m^2 = p_2^2 = (p_1 + q)^2 = m^2 + 2q \cdot p_1 + q^2 \quad \Rightarrow \quad q \cdot p_1 = -\frac{q^2}{2}. \quad (1.6)$$

Damit wurde die komplette Tensorstruktur in q auf der rechten Seite von Gleichung (1.3) reduziert und der Limes $q^2 \rightarrow 0$, der zum anomalen magnetischen Moment führt, kann gebildet werden.

1.3 Renormierungskonstanten

Bei der Berechnung von Feynmandiagrammen müssen Integrale über interne Viererimpulse ausgewertet werden. Da diese Integrale bei vierdimensionaler Raumzeit divergent sind, wird diese üblicherweise auf $d = 4 - 2\epsilon$ gesetzt, sodass sich die Divergenz als Pole der Laurentreihe in ϵ bemerkbar macht. Um für eine Observable bei $\epsilon = 0$ zu einem endlichen Wert zu kommen, können die Pole konsistent in jeder Störungsordnung durch die Parameter der zugrunde liegenden Quantenfeldtheorie absorbiert werden. Bei der in dieser Arbeit verwendeten Quantenelektrodynamik hat die Lagrangedichte die folgende Gestalt.

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_\ell^0 \left(i\not{\partial} - e^0 A^0 - m_\ell^0 \right) \psi_\ell^0 - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^0 - \partial_\nu A_\mu^0)^2.$$

Damit sind die divergenten Größen Leptonmassen m^0 , die Feinstrukturkonstante α^0 , sowie die Leptonspinoren ψ^0 und das Photonfeld A_ν^0 . Um endliche Größen zu erhalten, werden die Divergenzen durch die Renormierungskonstanten Z_i parametrisiert. Da die hier betrachtete Größe a_ℓ erst mit einer Schleife beginnt, werden diese generell bis zur Dreischleifen-Ordnung gebraucht um a_ℓ bis vier Schleifen auswerten zu können.

$$\begin{aligned} \psi^0 &= \sqrt{Z_2} \psi, & m^0 &= Z_m m, \\ A_\nu^0 &= \sqrt{Z_\gamma} A_\nu, & \alpha^0 &= \mu^{2\epsilon} Z_\alpha \alpha. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dabei setzt die Renormierungsskala μ die Energie fest, bei der die Renormierung durchgeführt wird. Im Allgemeinen hängt ein Ergebnis, sowie die

Kopplungen und Massen, von μ ab, sodass diese Energieskala passend zum Prozess gewählt werden muss. Jedoch ist es beim anomalen magnetischen Moment üblich die Parameter im on-shell Schema (OS) zu renormieren, was bei den Leptonmassen und der Kopplungskonstanten nicht notwendig ist. Das OS-Schema hat dabei den Vorteil, dass die physikalische Interpretation der Parameter direkt messbaren Größen entspricht. Werden zudem alle Größen im OS-Schema renormiert, so führt das dazu, dass die Renormierungsskala im Endergebnis des anomalen magnetischen Moments wegfällt. Da μ sehr wohl in Zwischenergebnissen auftritt, stellt das einen wichtigen Test für die Rechnung dar.

Bei der Feldrenormierung in Feynmandiagrammen heben sich die internen Wellenfunktionsrenormierungskonstanten von den Teilchenpropagatoren mit denen von den Wechselwirkungsvertizes weg. Somit bleiben nur die externen Feldrenormierungskonstanten übrig, die je nach betrachtetem Prozess auftreten. Bei der Berechnung des anomalen magnetischen Moments kommen zwei externe Leptonspinoren vor, weshalb ein Faktor Z_2 mitgenommen werden muss. Dagegen fällt die Renormierungskonstante vom externen Photonfeld weg. Denn allgemein gilt zwischen der Photon- und Kopplungsrenormierung die Beziehung $Z_\gamma = Z_\alpha^{-1}$. Da die Kopplung zwischen dem externen Photon und einer beliebigen Leptonlinie im Diagramm bei der Renormierung $\sqrt{Z_\alpha}$ beiträgt, kürzt sich die Renormierungskonstante vom externen Photonfeld damit weg.

Da die Massen im Projektor von Gl. (1.3) bereits renormierte Größen im OS-Schema sind, müssen nur die Massen in den Propagatoren renormiert werden. So wie bei der Feldrenormierung wird die Renormierung der Masse des externen Leptons bis zur Dreischleifen-Ordnung benötigt. Aufgrund der on-shell Bedingung $p_1^2 = m^2$ müssen die Countertermbeiträge von der Massenrenormierung jedoch bereits während der Berechnung der Feynmandiagramme bestimmt werden. Dazu ist es praktischer die Massenrenormierung additiv mit $m^0 = m + \delta m$ durchzuführen. So können die Fermionpropagatoren in dem Counterterm $\delta m = \mathcal{O}(\alpha)$ bis zur gebrauchten Störungsordnung entwickelt werden. Die anderen Leptonmassen dagegen können am Ende der Rechnung multiplikativ renormiert werden. Da außerdem die Leptonkorrekturen zum a_ℓ erst ab zwei Schleifen auftreten werden diese hier nur zur Zweischleifen-Ordnung benötigt. Das Berechnen von Z_2 und Z_m im OS-Schema wird im nächsten Unterkapitel besprochen.

Die α -Renormierung kann als letzten Schritt am Ende der Rechnung erfolgen. Hierbei verwenden wir nicht direkt das on-shell Schema, sondern benutzen erst die Renormierungskonstante im $\overline{\text{MS}}$ -Schema. An dieser Stelle müssen sich die ϵ -Pole wegheben. Danach schreiben wir die Kopplungskonstante vom $\overline{\text{MS}}$ -Schema ins OS-Schema um, sodass die Renormierungsskala μ wegfällt. Die $\overline{\text{MS}}$ -OS-Relation ist mit exakter Massenabhängigkeit inklusive drei Schleifen bekannt, siehe Anhang in Ref. [28]. Wir benötigen nur Entwicklungen in den Massenverhältnissen, weshalb wir diese separat berechnet haben. Das wird im Unterkapitel 1.3.2 diskutiert.

1.3.1 Berechnung von Z_2^{OS} und Z_m^{OS}

Wird in einer Rechnung das on-shell Schema für ein Fermion gewählt, so wird gefordert, dass der renormierte Fermionpropagator einen Pol mit Residuum i an der on-shell Masse aufweist, also gerade bei der on-shell Bedingung $p^2 = m^2$ für den Fermionimpuls. In diesem on-shell Limes soll demnach der volle Propagator die folgende Form annehmen.

$$\frac{i Z_2^{-1}}{\not{p} - m - \delta m + \Sigma(p, m)} \rightarrow \frac{i}{\not{p} - m}. \quad (1.8)$$

Dabei bezeichnet $\Sigma(p, m)$ die Selbstenergiebeiträge zum Fermion, die durch Ein-Teilchen-irreduziblen Feynmandiagramme zur Fermion-Zweipunktfunktion beschrieben werden, siehe dazu Abb. 1.1 für Beispieldiagramme¹. Diese lässt sich in zwei Lorenz-unabhängige Terme aufspalten,

$$\Sigma(p, m) = m \Sigma_1(p^2, m) + (\not{p} - m) \Sigma_2(p^2, m). \quad (1.9)$$

Um die Renormierungskonstanten zu bestimmen, muss die Bedingung an den Fermionpropagator in Gl. (1.8) ausgenutzt werden, siehe dazu auch die Ref. [58, 59]. Dabei ist es praktisch zuerst $\Sigma(p, m)$ formal in $(\not{p} - m)$ zu entwickeln,

$$\Sigma(p, m) \approx \tilde{\Sigma}_0(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + (\not{p} - m) \tilde{\Sigma}_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + \dots \quad (1.10)$$

¹Alle Feynmandiagramme in dieser Arbeit wurden mit `JaxoDraw` [56, 57] erstellt.

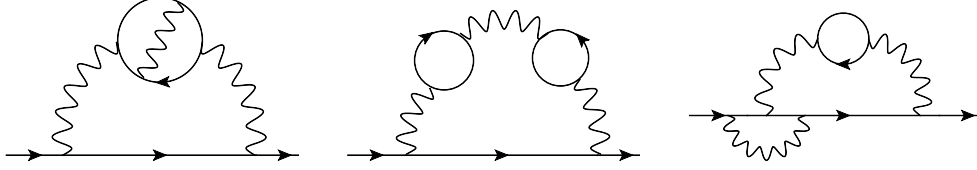


Abbildung 1.1: Exemplarische Feynmandiagramme mit leptonischen Korrekturen zur Fermionselfenergie. Das Diagramm in der Mitte ist das einzige auf dieser Ordnung, das drei verschiedene Leptonen enthalten kann.

Mit dieser Entwicklung ergeben sich direkt die Bedingungen an die Renormierungskonstanten,

$$\begin{aligned} \delta m^{\text{OS}} &= (Z_m^{\text{OS}} - 1) m = \tilde{\Sigma}_0(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2}, \\ (Z_2^{\text{OS}})^{-1} &= 1 + \tilde{\Sigma}_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

wobei die höheren Ordnungen in (1.10) zum Propagatorpol nicht beitragen. Um die benötigten Entwicklungskoeffizienten zu extrahieren, reicht es beim $\tilde{\Sigma}_0$ aus, einen geeigneten Projektor zu verwenden. Im Falle von $\tilde{\Sigma}_1$ wird dazu noch eine Ableitung nach dem Impuls gebraucht. Das führt auf die praktischen Berechnungsformeln

$$\begin{aligned} Z_m^{\text{OS}} &= 1 + \text{Sp} \left(\frac{\not{p} + m}{4m^2} \Sigma(p, m) \right) \Big|_{p^2=m^2} = \Sigma_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2}, \\ (Z_2^{\text{OS}})^{-1} &= 1 + \text{Sp} \left(\frac{\not{p} + m}{4m^2} p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \Sigma(p, m) \right) \Big|_{p^2=m^2} \\ &= 1 + \Sigma_2(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2} + 2m^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \Sigma_1(p^2, m) \Big|_{p^2=m^2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Die Impulsableitung von $\Sigma(p, m)$ lässt sich durchführen, wenn man den Impulsfluß an die durchgehende externe Fermionlinie legt, sodass nur die dazugehörigen Propagatoren betrachtet werden müssen. Die Ableitung von diesen kann dabei in folgender Form geschrieben werden.

$$p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{i}{\not{p} + \not{\ell} - m} = \frac{i}{\not{p} + \not{\ell} - m} i \not{p} \frac{i}{\not{p} + \not{\ell} - m}.$$

Wie in der Hauptrechnung dieser Arbeit werten wir auch die Renormierungskonstanten aus, indem wir in den Massenverhältnissen entwickeln. Unsere Ergebnisse sind konsistent mit den bekannten Resultaten, die in der Literatur zu finden sind. Die analogen Renormierungskonstanten zur QCD auf Zweischleifen-Niveau sind in den Referenzen [60, 61] gegeben. Auch für die Beiträge zur Dreischleifen-Ordnung können die in der QCD berechneten Ergebnisse herangezogen werden. So entsprechen Korrekturen mit einem massiven internen Quark, das leichter ist als das externe Fermion, den Elektronbeiträgen zu den Renormierungskonstanten vom Muon. Dazu wurden die Masterintegrale mit drei Schleifen in Ref. [62] mit exakter Massenabhängigkeit berechnet. Das analytische Ergebnis zur Renormierungskonstante der Wellenfunktion ist bei den Ergebnisdateien in [63] zu finden. Die exakte Massenrenormierungskonstante mit leichten massiven internen Quarkschleifen wurde jedoch nur numerisch in [64] publiziert. Ist dagegen das interne Fermion masselos, so sind dazu analytische Ergebnisse in [59, 65, 66] zu finden. Hierbei seien auch die ersten numerischen Resultate in [58, 67] erwähnt. Die Korrekturen zur Massenrenormierungskonstante von schweren Leptonen sind in Ref. [68] zur führenden Ordnung in der Massenentwicklung gegeben. Obwohl auf drei Schleifen in dieser Arbeit nur der Anteil von Leptonen ungleich dem externen Lepton benötigt wird, geben wir zur Vollständigkeit auch den universellen Beitrag an, sodass die kompletten Renormierungskonstanten für Muon und Elektron im Anhang A angegeben sind.

1.3.2 $\overline{\text{MS}}$ -OS-Relation für α

Die Renormierung von der Kopplungskonstante in der QED hängt aufgrund der Ward-Identität nur mit dem Photonpropagator zusammen. Deswegen stehen die Renormierungskonstante des Photonfeldes und der Kopplung durch $Z_\gamma = Z_\alpha^{-1}$ in Verbindung. Für das on-shell Schema werden an den Photonpropagator analoge Bedingungen gestellt wie im Falle des Fermions im letzten Unterkapitel beschrieben. Im on-shell Limes des Photonimpulses $q^2 = 0$ sollen beim renormierten Photonpropagator die Selbstenergiebeiträge verschwinden,

$$\frac{-ig^{\mu\nu} Z_\gamma^{-1}}{q^2(1 + \Pi(q^2))} + q^\mu q^\nu \dots \rightarrow \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} + q^\mu q^\nu \dots, \quad (1.13)$$

wobei die eichabhängigen Terme $\sim q^\mu q^\nu$ hier nicht relevant sind. Diese Bedingung führt direkt auf die Gleichung $Z_\alpha = 1 + \Pi(q^2 = 0)$. Dabei ist die Polarisationsfunktion $\Pi(q^2)$ durch das Tensorergebnis $-i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi(q^2)$ von den Ein-Teilchen-irreduziblen Feynmandiagrammen zur Photon-Zweipunkt-funktion gegeben.

Eine Relation zwischen den Kopplungen in verschiedenen Renormierungsschemen kann durch die unrenormierte Größe erhalten werden,

$$\alpha^0 = Z_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} = Z_\alpha \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = \frac{Z_\alpha}{Z_{\bar{\alpha}}} = \frac{1 + \Pi(q^2 = 0)}{Z_{\bar{\alpha}}}. \quad (1.14)$$

Somit ist die Umrechnung von $\bar{\alpha}$ zur on-shell Kopplung durch die renormierte Polarisationsfunktion gegeben. In unserer Hauptrechnung verwenden wir in Zwischenschritten das $\overline{\text{MS}}$ -Schema für die Kopplung, welche wir daher mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen. Wie auch die Renormierungskonstanten benötigen wir auch die $\overline{\text{MS}}$ -OS-Relation bis zur Dreischleifen-Präzision nur in den Massenverhältnissen entwickelter Form, welche wir wie beschrieben berechnet haben.

Im unten angegebenen Resultat werden mit $n_x = 1$ Leptonschleifen gekennzeichnet, sowie $\ell_x = \ln(\mu^2/m_x^2)$ mit der Renormierungsskala μ und den leptonschen on-shell Massen m_x ($x = e, \mu, \tau$). Das entwickelte Ergebnis stimmt bis auf Terme höherer Ordnung $\mathcal{O}(m_i^8/m_j^8)$ mit den in exakten Massenabhängigkeiten bekanntem Resultat aus Referenz [28] überein.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = & 1 + \frac{\alpha}{\pi} \sum_{i=e,\mu,\tau} \frac{\ell_i n_i}{3} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \left[\left(\sum_{i=e,\mu,\tau} \frac{\ell_i n_i}{3} \right)^2 + \sum_{i=e,\mu,\tau} \left(\frac{15}{16} + \frac{\ell_i}{4} \right) n_i \right] \\ & + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 \left[\sum_{\substack{i,j=e,\mu,\tau \\ m_i < m_j}} n_i n_j \left(-\frac{311}{1296} - \frac{\pi^2}{18} + \ell_i \left(\frac{15}{16} + \frac{5\ell_j}{12} \right) \right. \right. \\ & + \frac{23\ell_j}{144} + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{m_i}{m_j} \right) + \left(-\frac{167}{150} + \frac{\ell_i}{45} - \frac{\ell_j}{45} \right) \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^2 + \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^3 \\ & + \left(-\frac{29}{420} (\ell_i - \ell_j)^2 - \frac{28967}{88200} (\ell_i - \ell_j) - \frac{\pi^2}{18} - \frac{23353331}{37044000} \right) \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^4 \\ & \left. \left. + \left(\frac{5288963}{62511750} + \frac{2}{315} (\ell_i - \ell_j)^2 + \frac{4609}{99225} (\ell_i - \ell_j) \right) \left(\frac{m_i}{m_j} \right)^6 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=e,\mu,\tau} n_i \left(\frac{77}{576} - \frac{\ell_i}{32} + \frac{5\pi^2}{24} - \frac{\ln(2)\pi^2}{3} + \frac{\zeta_3}{192} \right) \\
& + \sum_{i=e,\mu,\tau} n_i^2 \left(-\frac{695}{648} + \frac{79\ell_i}{144} + \frac{5\ell_i^2}{24} + \frac{\pi^2}{9} + \frac{7\zeta_3}{64} \right) + \left(\sum_{i=e,\mu,\tau} \frac{\ell_i n_i}{3} \right)^3 \Big].
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Kapitel 2

Schwere Leptonbeiträge zum anomalen magnetischen Moment vom Muon und vom Elektron

In diesem Kapitel wird die Berechnung der Vierschleifen-Beiträge zum anomalen magnetischen Moment, die durch schwere Leptonen hervorgerufen werden, diskutiert. Dabei ist das externe Lepton leichter als die in Schleifen vorkommenden Fermionen. Beim magnetischen Moment vom Muon zählt hierzu der Beitrag mit τ -Schleifen, $A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_\tau)$. Im Falle des Elektrons gehören dazu Feynmandiagramme mit μ - oder τ -Leptonen. Beim a_e ist außerdem zu unterscheiden, ob nur ein schweres Lepton in einem Diagramm vorhanden ist, $A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_{\mu/\tau})$, oder sogar beide schwere Fermionen gleichzeitig auftreten, $A_{3,e}^{(8)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$.

Da eine Rechnung auf vier Schleifen mit exakter Massenabhängigkeit derzeit noch nicht realisierbar ist, nutzen wir aus, dass zwischen den Leptonmassen eine Hierarchie besteht, $m_e \ll m_\mu \ll m_\tau$. So wenden wir für $A_{2,l}(m_l/m_h)$ eine asymptotische Entwicklung im Verhältnis der externen zur schweren Masse, m_l/m_h , an. Analog kann bei $A_{3,e}$ in zwei Massenverhältnissen entwickelt werden. Diese Methode hat den Vorteil, dass dadurch effektiv nur Integrale mit einer Massenskala, m_l oder m_h , ausgewertet werden müssen. Diese Integrale

haben im Allgemeinen jedoch eine Tensorstruktur. Im nächsten Unterkapitel zeigen wir die asymptotische Entwicklung diagrammatisch an einem Zwei- und Vierschleifen-Beispiel. Anschließend wird eine Möglichkeit erläutert, die Tensorintegrale in skalare Integrale umzuschreiben. Die skalaren Integrale lassen sich durch Ausnutzung von Relationen, die mit partieller Integration zustande kommen, auf wenige sogenannte Masterintegrale reduzieren. Da in dieser Rechnung alle auftretenden Masterintegrale analytisch bekannt sind, erhalten wir somit analytische Massenentwicklungen mit numerisch exakten Koeffizienten. Die Ergebnisse für a_μ und a_e werden in Unterkapitel 2.2 und 2.3 besprochen.

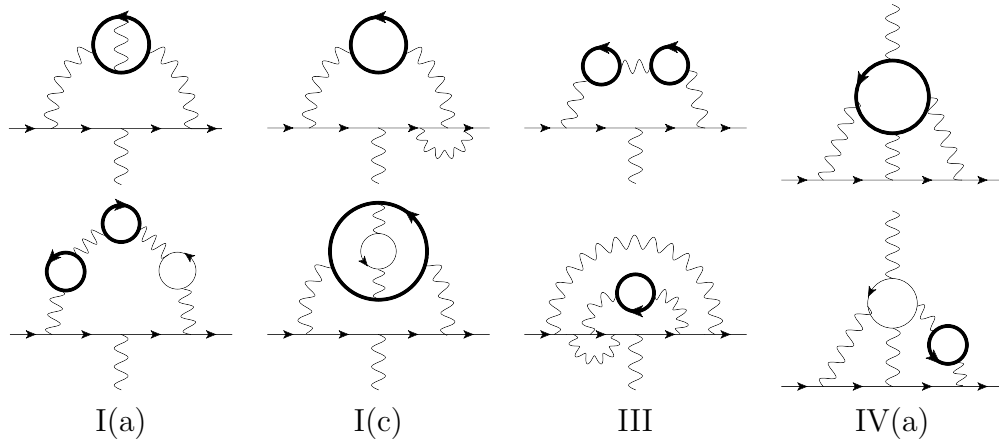


Abbildung 2.1: Einige Beispieldiagramme mit schweren Leptonen zu a_e und a_μ . Dünne durchgezogene Linien stehen für die externe Leptonart, dicke Linien geben schwere Leptonen an, mit den Wellenlinien werden Photonen dargestellt. Zu den Feynmandiagrammen mit vier Schleifen wurden die Klassenbezeichnungen aus den Referenzen [7, 14] angegeben. Für eine vollständige Liste der Vierschleifen-Diagramme können in Abb. 3.1 entsprechend schwere Leptonenschleifen verwendet werden.

2.1 Technische Details

Um die schweren leptonischen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment zu bestimmen, werten wir explizit Feynmandiagramme aus, die mindestens

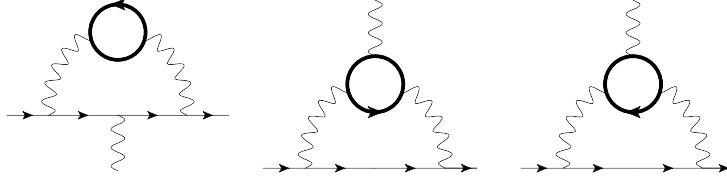


Abbildung 2.2: Alle Zweischleifen-Feynmandiagramme mit einer schweren Leptonschleife, die zur Berechnung vom anomalen magnetischen Moment erzeugt werden können. Man beachte die unterschiedliche Fermionflußrichtung der Leptonschleifen der beiden rechten Diagramme. Die Summe dieser Diagramme ergibt wegen dem Furry-Theorem null.

ein schweres Lepton enthalten, siehe Abb. 2.1 für Beispieldiagramme. Auf zwei Schleifen trägt nur ein Diagramm zum Ergebnis bei, da der Beitrag der anderen zwei Diagramme aufgrund des Furry-Theorems in der Summe null ist. Diese drei Feynmandiagramme sind in Abb. 2.2 zu sehen. Auf drei und vier Schleifen gibt es zu A_2 insgesamt 60 bzw. 1169 Diagramme, wenn das Furry-Theorem nicht berücksichtigt wird. Zu A_3 dagegen, tragen effektiv nur zwei Dreischleifen-Diagramme bei, wobei auf vier Schleifen insgesamt 406 Diagramme auftreten.

Die Feynmandiagramme werden mit `QGRAF` [69] erzeugt und anschließend mit `q2e` [70, 71] die Feynmanregeln eingesetzt. Einer der Kernschritte dieser Rechnung stellt die asymptotische Entwicklung dar. Diese Methode führt bei einem Diagramm auf mehrere Regionen, wie wir im nächsten Unterkapitel an zwei Beispielen zeigen. Hierzu benutzen wir `exp` [70, 71], das diese Regionen findet, und dazu angibt, wie die Propagatoren entwickelt werden müssen. Desweiteren kann man mit `exp` die zu berechnenden Integrale in verschiedene Klassen, sogenannte Topologien, aufteilen. Diese Aufteilung erleichtert die Rechnung, da es damit ausreicht nur wenige allgemeine Topologien zu implementieren, um damit alle vorkommenden Integrale ausrechnen zu können. In Abb. 2.3 sind die möglichen Topologien bis zu vier Schleifen dargestellt, jedoch wurde zur Vereinfachung auf eine Unterscheidung von massiven und masselosen Propagatoren verzichtet. So treten insgesamt sieben Vakuuminintegrale mit vier Schleifen auf, Dreischleifen-Integrale mit einem externen on-shell Impuls kommen neun vor. Obwohl in der in diesem Kapitel besprochenen Rechnung keine on-shell Integrale mit vier Schleifen vorkommen, zei-

gen wir zur Vollständigkeit auch Vierschleifen-Topologien vom on-shell-Typ. Denn diese werden bei der Berechnung der Elektronbeiträge zu a_μ benötigt, die in Kapitel 3 diskutiert wird.

Für die eigentliche Auswertung der Feynmandiagramme wird FORM [72–74] benutzt. Dabei werden nach dem Anwenden des Projektors die Propagatoren in leichten Massen und Impulsen entwickelt, sowie die Spuren für die γ -Matrizen durchgeführt. Außerdem werden die Tensorstrukturen reduziert, sodass am Ende nur skalare Integrale mit einer Skala übrig bleiben. Für diese Integrale verwenden wir FIRE [75], wobei dafür Skalarprodukte in linear unabhängige Propagatoren umgeschrieben werden müssen. FIRE basiert auf dem Laporta-Algorithmus [76], bei dem die partielle Integration eines allgemeinen Feynmanintegrals in der Art

$$\int d^d \ell_1 \dots d^d \ell_k \frac{\partial}{\partial \ell_i^\mu} \left(\frac{p^\mu}{D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n}} \right) = 0$$

ausgenutzt wird, wobei p ein Schleifenimpuls oder externer Impuls sein kann, siehe dazu auch [77]. Auf diese Weise erhält man ein Gleichungssystem, in dem Integrale mit verschiedenen Propagatorpotenzen in Beziehung stehen, sodass damit systematisch komplizierte Integrale auf einfachere zurückgeführt werden können. Dadurch lassen sich allgemeine Integrale in Form einer Basis aus wenigen Masterintegralen ausdrückt werden. In dieser Rechnung treten nur Masterintegrale auf, die in der Literatur bereits betrachtet wurden und analytisch bekannt sind. Das sind zum einen Vakuumintegrale bis zu vier Schleifen [78–87], zum anderen tauchen auch Integrale mit einem externen on-shell Impuls auf, jedoch nur bis zur Dreischleifen-Ordnung [13, 65, 88].

Um ein endliches Ergebnis zu erhalten, werden im 1-, 2- und 3-Schleifen-ergebnis die Renormierungskonstanten eingesetzt, die zu einem Beitrag auf Vierschleifen-Ordnung führen. Damit heben sich die Divergenzen der Feynmandiagramme weg, was einen wichtigen Test für die Rechnung darstellt. Desweiteren haben wir die Rechnung für die führende Ordnung der Massenentwicklung mit einem variablen Eichparameter im Photonpropagator durchgeführt. In Zwischenergebnissen haben wir lineare Terme im Eichparameter mitgenommen, die sich im Endergebnis aufgehoben haben. Da die Berechnung der höheren Entwicklungsordnungen im Massenverhältnis zu rechenintensiv ist, wurde dabei die Feynmanequation verwendet. Außerdem wurden

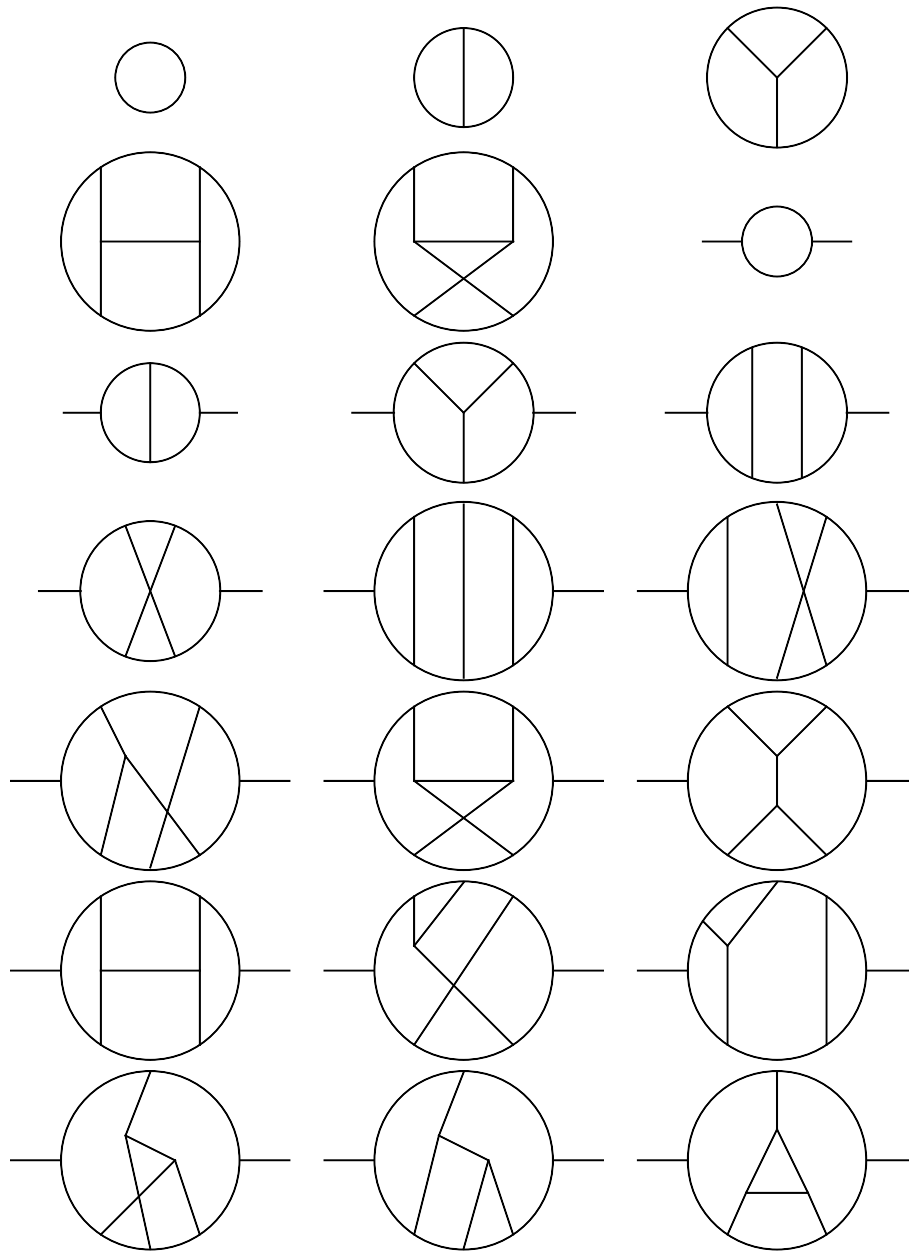


Abbildung 2.3: Die ersten fünf Diagramme zeigen Topologien für Vakuuminintegrale an. Mit dem Rest sind Integralfamilien mit einem externen Impuls bis zu vier Schleifen dargestellt. Außerdem führen verschiedene Massenbelegungen der Propagatoren zur weiteren Unterscheidung in Unterklassen.

in der Arbeitsgruppe jeweils zwei unabhängige Implementationen für die Reduzierung der Tensorstrukturen und das Umschreiben der Skalarprodukte in Propagatoren verwendet.

2.1.1 Asymptotische Entwicklung

Die asymptotische Entwicklung wird verwendet um mehrskalige Feynmanintegrale in einfachere einskalige Integrale aufzuteilen, siehe dazu z.B. [89–91]. Dabei wird eine starke Hierarchie zwischen den Skalen ausgenutzt. Hier wollen wir diese Methode beispielhaft an zwei Feynmandiagrammen zum Beitrag $A_{2,l}(m_l/m_h)$ zeigen. Die charakteristischen Skalen von diesem Beitrag sind einerseits die Masse m_h des schweren Leptons, das nur in Schleifen vorkommt. Die leichtere zweite Skala m_l wird durch das äußere Lepton gesetzt, wobei auch Schleifen mit derselben Leptonart auftreten können. Dazu gehört jedoch nicht nur die Masse, sondern auch der externe Leptonimpuls aufgrund der on-shell Bedingung $p_1^2 = m_l^2$. Außerdem ist anzumerken, dass der äußere Photonimpuls q keine eigenständige Skala darstellt, da dabei für jede Komponente in $q^\mu = 0$ entwickelt wird. Somit müssen bei der asymptotischen Entwicklung nur zwei Skalen mit $m_l \ll m_h$ betrachtet werden.

Die auftretenden asymptotischen Regionen können mit dem Skalenverhalten der Schleifenimpulse erklärt werden. Betrachtet man das Zweischleifen-Diagramm in Abb. 2.4(a), so ergeben sich die zwei dargestellten Regionen. Dabei stehen die Diagramme links von \otimes für Vakuumintegrale mit der schweren Skala, die Diagramme rechts davon sind entsprechend für die leichte Skala dargestellt, die generell den externen on-shell Impuls aufweisen. Die erste Region sieht ähnlich zum gesamten Feynmandiagramm aus. Diese ergibt sich unter der Annahme, dass jede Komponente der beiden Schleifenimpulse von der gleichen Größenordnung wie die schwere Skala sind, und $|\ell_1| \approx |\ell_2| \approx m_h$ gilt. Demnach handelt es sich bei der auszuwertenden Integration um ein Vakuumintegral mit zwei Schleifen, welche nach der Taylorentwicklung in den leichten Skalen ausgeführt werden kann. Bei der zweiten Region muss der Impuls der Leptonschleife wie $|\ell_1| \approx m_h$ gewählt werden, der andere dagegen ist nun von der leichten Skalenordnung $|\ell_2| \approx m_l$. Dabei kommt es zu einem Überlapp der beiden Integrationen, denn beide Impulse fließen durch

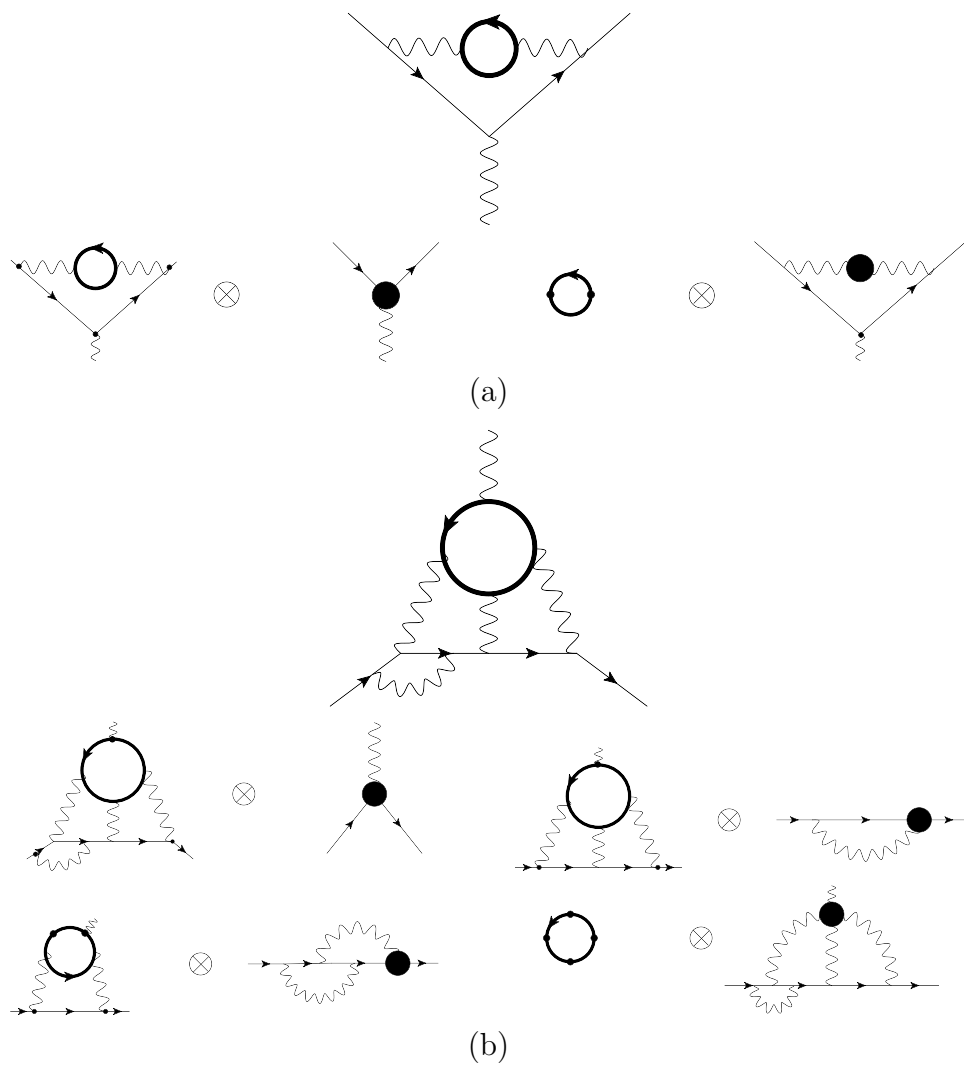


Abbildung 2.4: Diagrammatische Darstellung der asymptotischen Entwicklung. (a) Beim Zweischleifen-Diagramm sind alle vorkommenden asymptotischen Regionen dargestellt. (b) Von den insgesamt acht möglichen Regionen beim Vierschleifen-Beispiel wurden nur vier exemplarisch ausgewählt.

den selben Propagator, sodass dieser wie folgt entwickelt werden muss.

$$\frac{1}{(\ell_1 + \ell_2)^2 - m_h^2} = \frac{1}{\ell_1^2 - m_h^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\ell_1^2 - 2 \ell_1 \cdot \ell_2}{\ell_1^2 - m_h^2} \right)^n .$$

Aufgrund des Skalarprodukts $\ell_1 \cdot \ell_2$ haben die Integrale eine Tensorstruktur. Jedoch lässt sich hier das triviale Einschleifen-Vakuumindegral zuerst auswerten, sodass nur das skalare on-shell Integral übrig bleibt. Bereits an diesem einfachen Beispiel ist zu sehen, dass auf der Seite der schweren Skala eine Integration zu mindestens einer Schleife benötigt wird, da die schwere Schleife sonst ein verschwindendes skalenloses Feynmanintegral aufweisen würde.

Auf Vierschleifen-Ordnung kommen analoge asymptotische Regionen zustande, wie das in Abb. 2.4(b) dargestellt ist. Insgesamt hat das Beispieldiagramm acht Regionen, von denen manche ein ähnliches Verhalten haben, sodass wir hier nur vier davon exemplarisch zeigen.

1. Analog zum einfachen Beispiel führt die Wahl aller vier Schleifenimpulse von der Ordnung der schweren Skala auf ein Vakuumindegral mit vier Schleifen und die leichte Skala faktorisiert trivialerweise ab.
2. Ist genau einer der Schleifenimpulse leicht, so können verschiedene Impulsverteilungen unterschiedliche Regionen beschreiben. In dem Beispiel kommen drei solcher Regionen vor. Bei diesen muss ein Vakuumindegral mit drei Schleifen, sowie generell ein on-shell Integral mit einer Schleife ausgewertet werden. Diese hängen jedoch durch eine Tensorstruktur zusammen, welche zuerst aufgelöst werden sollte. Eine Methode dazu wird im nächsten Unterkapitel erklärt.
3. Ähnlich wie beim vorherigen Fall, kommen hier drei verschiedene Regionen mit zwei schweren und zwei leichten Impulsen vor. Analog führt das allgemein auf tensorwertige Vakuumin- und on-shell-Integrale mit jeweils zwei Schleifen.
4. Bei der letzten Region fließt ein schwerer Impuls durch die Leptonenschleife, das somit ein Vakuumindegral mit einer Schleife ergibt. Das restliche Diagramm führt demnach zu einer Dreischleifen-Integration mit einem externen on-shell Impuls.

2.1.2 Tensorbehandlung

Eine Methode Tensorintegrale zu vereinfachen, besteht darin, die allgemein mögliche Form des Ergebnisses der Feynmanintegrale auszunutzen. Denn die Tensorstruktur darf nach der Integration nur von externen Impulsen und dem metrischen Tensor gebildet werden. Daher können Vakuumintegrale nur von $g^{\nu_1\nu_2}$ abhängen,

$$\int d^d\ell_1 \dots d^d\ell_n \ell_{i_1}^{\mu_1} \dots \ell_{i_k}^{\mu_k} f(\{\ell_{j_1} \cdot \ell_{j_2}\}) = F^{\mu_1 \dots \mu_k}(\{g^{\nu_1\nu_2}\}). \quad (2.1)$$

Da die Metriktensoren eine gerade Anzahl an äußeren Indizes μ_1, \dots, μ_k benötigen, sind Vakuumintegrale mit einer ungeraden Anzahl null. Wird die allgemeine Gleichung (2.1) mit Termen der Form $g^{\mu_1\mu_2} \dots g^{\mu_{k-1}\mu_k}$, sowie allen Permutationen dazu, kontrahiert, so führt das auf ein Gleichungssystem. Die Lösung dessen ergibt skalare Integrale mit tensorwertigen Vorfaktoren in die das Anfangsintegral umgeschrieben werden kann.

$$F^{\mu_1 \dots \mu_k}(\{g^{\nu_1\nu_2}\}) = \sum_i F_i^{\mu_1 \dots \mu_k}(\{g^{\nu_1\nu_2}\}) \int d^d\ell_1 \dots d^d\ell_n f_i(\{\ell_{j_1} \cdot \ell_{j_2}\}). \quad (2.2)$$

Diese Form ist zur Auswertung der Feynmanintegrale besser, da skalare Integrale einfacher auszurechnen sind. Das einfachste Beispiel ist ein Tensorintegral mit zwei Indizes und einem Integrationsimpuls,

$$\int d^d\ell \ell^{\mu_1} \ell^{\mu_2} f(\ell^2) = F^{\mu_1\mu_2}(\{g^{\nu_1\nu_2}\}) = C g^{\mu_1\mu_2}.$$

Kontrahiert man diese Gleichung mit $g_{\mu_1\mu_2}$, so lässt sich die Konstante C sofort ablesen und man erhält

$$\int d^d\ell \ell^{\mu_1} \ell^{\mu_2} f(\ell^2) = \frac{g^{\mu_1\mu_2}}{d} \int d^d\ell \ell^2 f(\ell^2). \quad (2.3)$$

Kommt nur ein Integrationsimpuls vor, so ist das Integral symmetrisch in den Lorentz-Indizes und daher müssen auch die tensorwertigen Koeffizienten der skalaren Integrale bis auf Permutationen in den offenen Indizes übereinstimmen. Somit ist es auch bei höheren Tensorintegralen mit einem Impuls notwendig, nur eine Konstante zu bestimmen. Das kann sogar iterativ zur

beliebigen Tensorordnung durchgeführt werden und es gilt die folgende Relation, die auch im Anhang von [92] zu finden ist.

$$\int d^d \ell \ell^{\mu_1} \dots \ell^{\mu_k} f(\ell^2) = \frac{g^{\mu_1 \mu_2} \dots g^{\mu_{k-1} \mu_k} + \dots}{d(d+2) \dots (d+k-2)} \int d^d \ell (\ell^2)^{k/2} f(\ell^2). \quad (2.4)$$

Hierbei kommen auf der rechten Seite alle möglichen Permutationen von μ_1, \dots, μ_k in der Tensorstruktur vor. Bei Mehrschleifen-Integralen existiert keine analoge einfache Formel. Jedoch wurde in [93] ein Algorithmus vorgestellt, mit welchem beliebige tensorwertige Zweischleifen-Integrale ausgewertet werden können und dessen Implementation als eine Topologie zu MATAD [94] existiert. Da zu dieser Arbeit auch die Reduktion von tensorwertigen Vakuumintegralen mit drei Schleifen gebraucht wird, bestimmen wir für jede benötigte Tensorstruktur die entsprechenden Relationen zu Gl. (2.2). Das kann natürlich im Vorfeld erfolgen, sodass bei der Auswertung der Feynmandiagramme die berechneten Relationen verwendet werden können.

Im Folgenden sei die Herleitung der Tensorrelationen für ein Dreischleifen-Integral gezeigt, dessen Vorgehen analog zu Ref. [95] durchgeführt wird.

$$\begin{aligned} & \int d^d \ell_1 d^d \ell_2 d^d \ell_3 \ell_1^{\mu_1} \ell_2^{\mu_2} \ell_3^{\mu_3} \ell_3^{\mu_4} f(\{\ell_{j_1} \cdot \ell_{j_2}\}) \\ &= C_1 g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} + C_2 (g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} + g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}). \end{aligned}$$

Dabei wurde bereits die Symmetrie unter Vertauschung von μ_3 und μ_4 ausgenutzt. Die Kontraktion der offenen Indizes mit metrischen Tensoren ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int d^d \ell_1 d^d \ell_2 d^d \ell_3 (\ell_1 \cdot \ell_2) \ell_3^2 f(\{\ell_{j_1} \cdot \ell_{j_2}\}) &= C_1 d^2 + C_2 2d, \\ I_2 &:= \int d^d \ell_1 d^d \ell_2 d^d \ell_3 (\ell_1 \cdot \ell_3) (\ell_2 \cdot \ell_3) f(\{\ell_{j_1} \cdot \ell_{j_2}\}) &= C_1 d + C_2 d(d+1). \end{aligned}$$

Wird das gelöst, bekommt man die folgende Relation für das ursprüngliche Tensorintegral.

$$\begin{aligned} & \int d^d \ell_1 d^d \ell_2 d^d \ell_3 \ell_1^{\mu_1} \ell_2^{\mu_2} \ell_3^{\mu_3} \ell_3^{\mu_4} f(\{\ell_{j_1} \cdot \ell_{j_2}\}) \\ &= \frac{1}{(d+2)d(d-1)} \left\{ [(d+1) I_1 - 2 I_2] g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} \right\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

$$+ (d I_2 - I_1) (g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} + g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3}) \}.$$

Auf diese Weise wurden für die Berechnung des anomalen magnetischen Moments bei Zweischleifen-Integralen alle Relationen bis zum Tensorrang zwölf implementiert, sowie für Dreischleifen-Integrale bis zum Rang zehn.

Zwar lassen sich Tensorintegrale mit einem externen Impuls bei der Berechnung der schweren leptonischen Beiträge vermeiden, so ist es jedoch bei der Auswertung der Elektronkorrekturen zu a_μ nicht der Fall, da dort Produkte von solchen Tensorintegralen mit externem Impuls sogar bis zur Zweischleifen-Ordnung vorkommen. Aus diesem Grund wird hier noch auf Integrale mit einem externen Impuls eingegangen, die eine Tensorstruktur aufweisen. Das können z.B. on-shell Integrale sein. Da das Ergebnis von solchen tensorwertigen Integralen auch vom externen Impuls q^ν abhängen kann, muss das bei der Herleitung der Relationen berücksichtigt werden. So ändert sich Gleichung (2.1) zu

$$\int d^d \ell_1 \dots d^d \ell_n \ell_{i_1}^{\mu_1} \dots \ell_{i_k}^{\mu_k} f(\{\ell_{j_1} \cdot \ell_{j_2}, \ell_j \cdot q\}) = F^{\mu_1 \dots \mu_k}(\{q^\nu, g^{\nu_1 \nu_2}\}),$$

und (2.2) entsprechend. Nun sind auch ungerade Tensorordnungen erlaubt. So ist die einfachste Tensorstruktur mit nur einem Index μ proportional zu q^μ ,

$$\int d^d \ell \ell^\mu f(\ell^2, \ell \cdot q) = F^\mu(\{q^\nu, g^{\nu_1 \nu_2}\}) = C q^\mu.$$

Wird die Gleichung mit q_μ kontrahiert, so ist die Konstante direkt bestimmt und das Ergebnis lautet

$$\int d^d \ell \ell^\mu f(\ell^2, \ell \cdot q) = q^\mu \cdot \int d^d \ell \frac{\ell \cdot q}{q^2} f(\ell^2, \ell \cdot q). \quad (2.6)$$

Bei höheren Tensorordnungen muss natürlich auch der Metriktensor berücksichtigt werden, sodass bei zwei offenen Indizes,

$$\int d^d \ell \ell^{\mu_1} \ell^{\mu_2} f(\ell^2, \ell \cdot q) = F^{\mu_1 \mu_2}(\{q^\nu, g^{\nu_1 \nu_2}\}) = C_1 q^{\mu_1} q^{\mu_2} + C_2 g^{\mu_1 \mu_2},$$

das wiederum auf die folgenden Gleichungen führt.

$$\cdot g_{\mu_1 \mu_2} \Rightarrow \int d^d \ell \ell^2 f(\ell^2, \ell \cdot q) = C_1 q^2 + C_2 d,$$

$$\cdot q_{\mu_1} q_{\mu_2} \Rightarrow \int d^d \ell (\ell \cdot q)^2 f(\ell^2, \ell \cdot q) = C_1 q^4 + C_2 q^2.$$

Damit lässt sich die Reduktion für das Tensorintegral bestimmen.

$$\begin{aligned} \int d^d \ell \ell^{\mu_1} \ell^{\mu_2} f(\ell^2, \ell \cdot q) &= \frac{q^{\mu_1} q^{\mu_2}}{q^2 (d-1)} \cdot \int d^d \ell \left(-\ell^2 + \frac{d (\ell \cdot q)^2}{q^2} \right) f(\ell^2, \ell \cdot q) \\ &+ \frac{g^{\mu_1 \mu_2}}{d-1} \cdot \int d^d \ell \left(\ell^2 - \frac{(\ell \cdot q)^2}{q^2} \right) f(\ell^2, \ell \cdot q). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Analog lassen sich die Reduktionsformeln für höhere Tensorstrukturen herleiten, die für diese Arbeit mit bis zu zehn offene Indizes ausgewertet wurden. Auch für Integrale mit zwei Schleifenimpulsen kann ähnlich vorgegangen werden, dafür wurden Tensorrelationen bis zum Rang acht bestimmt.

2.2 Ergebnisse für a_μ

Zuerst seien die Resultate mit zwei und drei Schleifen gezeigt, die wir auch mittels asymptotischer Entwicklung bis zu hoher Entwicklungsordnung im Massenverhältnis berechnet haben. Da diese Ergebnisse in exakter Massenabhängigkeit bekannt sind, geben wir nur einen Teil der berechneten Entwicklung an.

$$\begin{aligned} A_\mu^{(4)}(m_\mu/m_\tau) &= \frac{m_\mu^2}{45 m_\tau^2} + \left(\frac{9}{19600} - \frac{1}{140} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} \\ &+ \left(-\frac{131}{99225} - \frac{2}{315} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \right) \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6} \\ &+ \left(-\frac{47}{39204} - \frac{1}{198} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \right) \frac{m_\mu^8}{m_\tau^8} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^{10} \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} A_\mu^{(6)}(m_\mu/m_\tau) &= \left(-\frac{23}{270} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{2\pi^2}{45} + \frac{3\zeta_3}{2} - \frac{74957}{97200} \right) \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \\ &+ \left(-\frac{4337}{90720} \ln^2 \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{209891}{952560} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{1919\pi^2}{68040} + \frac{1811\zeta_3}{2304} \right. \\ &\left. - \frac{451205689}{533433600} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} + \left(-\frac{2807}{86400} \ln^2 \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{665641}{5953500} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{16967\pi^2}{907200} + \frac{3077\zeta_3}{5760} - \frac{246800849221}{480090240000} \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^8\right). \quad (2.9)$$

Aufgrund des schweren τ -Leptons und wegen dem Entkopplungstheorem [29] beginnen die Ergebnisse erst mit der $(m_\mu/m_\tau)^2$ -Ordnung. Für das Vierschleifen-Ergebnis erhalten wir entsprechend die folgende analytische Entwicklung, die wir nur bis zur angegebenen Entwicklungsordnung bestimmt haben.

$$\begin{aligned} A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_\tau) = & \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^2 \left(\frac{37448693521}{2286144000} + \frac{89603}{16200} P_4 + \frac{52}{675} P_5 + \frac{4\pi^2\zeta_3}{15} \right. \\ & + \frac{5771 \ln(2)\pi^4}{32400} - \frac{3851\pi^2}{3600} - \frac{25307\zeta_5}{1440} - \frac{37600399\pi^4}{27216000} \\ & + \frac{35590996657\zeta_3}{508032000} + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(-\frac{38891}{12150} + \frac{19\pi^2}{135} + \frac{3\zeta_3}{2} \right) \\ & + \frac{359}{1080} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left. + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^3 \frac{\pi^2}{90} \right. \\ & + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^4 \left(\frac{392783023945426851403}{73077446697615360000} - \frac{3355249339331\pi^4}{2575112601600} \right. \\ & + \frac{74184592369}{14306181120} P_4 + \frac{557}{9450} P_5 - \frac{378681587\pi^2}{114307200} - \frac{652 \ln(2)\pi^2}{1215} \\ & + \frac{26783 \ln(2)\pi^4}{226800} + \frac{725750082915523417\zeta_3}{10310750856806400} + \frac{66211\pi^2\zeta_3}{22680} \\ & - \frac{425983\zeta_5}{30240} + \frac{193032971}{457228800} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{24037}{362880} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \\ & + \left. \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(-\frac{1922512966823}{1229031014400} + \frac{47899\pi^2}{816480} + \frac{81782993\zeta_3}{123863040} \right) \right) \\ & + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^5 \left(\frac{2671\pi^2}{176400} + \frac{\pi^2}{140} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right) \\ & + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}\right)^6 \left(\frac{326292200455466311953239}{4974581098834034688000} \right. \\ & + \frac{4785889811617\pi^2}{1234517760000} + \frac{989648650006997}{191294078976000} P_4 + \frac{7001}{207900} P_5 \\ & - \frac{27903657664078117\pi^4}{11477644738560000} + \frac{711883 \ln(2)\pi^4}{9979200} - \frac{148 \ln(2)\pi^2}{315} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6446695611351419899\zeta_3}{66315280711680000} - \frac{18533\pi^2\zeta_3}{6048} + \frac{179971\zeta_5}{24192} \\
& + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(- \frac{2631561259843654279}{132735349555200000} + \frac{17955349\pi^2}{489888000} \right. \\
& \left. + \frac{314284167899\zeta_3}{19818086400} \right) + \frac{22710352067}{58786560000} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \\
& - \frac{101799017}{979776000} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left) + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^7 \left(\frac{79\pi^2}{15120} + \frac{\pi^2}{60} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right) \\
& + \mathcal{O} \left(\left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^8 \right). \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Hierbei ist $P_4 = 24a_4 + \ln^4(2) - \ln^2(2)\pi^2$ und $P_5 = 120a_5 - \ln^5(2) + \frac{5}{3} \ln^3(2)\pi^2$, sowie $a_n = \text{Li}_n(1/2)$. Interessanterweise treten auf Vierschleifen-Niveau auch Terme ungerader Ordnung auf, welche nicht bei den Zwei- und Dreischleifen-Ergebnissen vorkommen. Diese Terme stammen ausschließlich von der Renormierung der τ -Masse, und zwar von den Korrekturen mit einer μ -Schleife, siehe dazu [60, 64]. Diese enthalten unter anderem ungerade Ordnungen im Massenverhältnis, da die Beiträge dabei von einem leichteren Lepton als das externe τ -Lepton hervorgerufen werden.

Für die Numerik wird im Folgenden der experimentelle Wert des Massenverhältnisses $m_\mu/m_\tau = 5.94649(54) \cdot 10^{-2}$ [96] benutzt. Zwar benutzten wir für das Zwei- und Dreischleifen-Ergebnis unsere berechnete Entwicklung, jedoch ist diese so weit, sodass der Fehler aufgrund der vernachlässigten höheren Ordnungen viel kleiner als die experimentelle Unsicherheit des Massenverhältnisses ist. Damit ergeben sich die Koeffizienten und die experimentellen Unsicherheiten zu

$$\begin{aligned}
A_{2,\mu}^{(4)}(m_\mu/m_\tau) &= 7.8079(14) \cdot 10^{-5}, \\
A_{2,\mu}^{(6)}(m_\mu/m_\tau) &= 3.6063(12) \cdot 10^{-4}, \tag{2.11}
\end{aligned}$$

siehe auch die Ref. [4]¹ für eine weitere numerische Auswertung. Beim Vierschleifen-Ergebnis betrachten wir zusätzlich die numerischen Resultate der

¹Als Anmerkung ist zu erwähnen, dass die hier gezeigten Ergebnisse von der Referenz in der letzten Stelle abweichen können. Denn es kann z.B. zu unterschiedlichen Ergebnissen führen, ob bei der numerischen Auswertung der Wert $m_\mu/m_\tau = 0.0594649(54)$ oder $m_\tau/m_\mu = 16.8167(15)$ benutzt wird, jedoch sind beide in Ref. [4] angegeben. So ändert sich $A_{2,\mu}^{(6)}(m_\mu/m_\tau) = 3.6062(11) \cdot 10^{-4}$ im Vergleich zu Gl. (2.11).

einzelnen Entwicklungsordnungen, damit der Fehler von nicht betrachteten höheren Ordnungen abgeschätzt werden kann. Da die ungeraden Ordnungen in der Entwicklung keine eigenständigen Beiträge zum Vierschleifen-Ergebnis darstellen, fassen wir die Terme $(m_\mu/m_\tau)^n$ und $(m_\mu/m_\tau)^{n+1}$ für $n = 2, 4, 6$ zusammen. Damit ergeben sich die Ergebnisse für jede Ordnung sowie die Summe zu

$$\begin{aligned} A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_\tau) &\approx 0.0421670 + 0.0003257 + 0.0000015 \\ &= 0.0424941(2)(53). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Das Ergebnis zeigt ein sehr gutes Konvergenzverhalten, denn jede Entwicklungsordnung hat einen um etwa zwei Größenordnungen kleineren Beitrag. Die erste Unsicherheit des Endergebnisses ist die Abschätzung für die Korrekturen höherer Terme in der Massenentwicklung, die wir auf 10 % von der letzten Ordnung festlegen. Der deutlich größere zweite Fehler stammt von der experimentellen Unsicherheit des Massenverhältnisses. Aktuell würden somit höhere Terme in der Entwicklung, also $\mathcal{O}(m_\mu^8/m_\tau^8)$, das Ergebnis nicht weiter verbessern. Das präsentierte Endergebnis stimmt mit dem bekannten Wert $A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_\tau) = 0.04234(12)$ aus Referenz [7] überein, wobei das in dieser Arbeit erhaltene Ergebnis präziser ist.

In Gl. (2.10) ist zwar nur das analytische Endergebnis für $A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_\tau)$ gezeigt, jedoch wurde die Rechnung mit einer variablen Anzahl an μ - und τ -Leptonen, sowie allgemeinen Kopplungen, durchgeführt. Damit lässt sich das Ergebnis in unabhängige Gruppen aufteilen, die für sich einen endlichen Beitrag liefern. In Tabelle 2.1 werden die numerischen Beiträge von einzelnen Gruppen gezeigt und mit den Ergebnissen aus Ref. [7] verglichen, wobei auch die Namensgebung der Gruppen aus der Referenz übernommen wurde. Aufgrund der komplett unterschiedlichen Berechnungen ist es für den Vergleich nötig manche Gruppen in [7] zu summieren, wobei die Unsicherheiten quadratisch addiert wurden. Wie beim Endergebnis ist auch für alle Gruppen einzeln eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen. Dabei stellt das nicht nur einen Test dieser Beiträge dar, damit wird auch eine Konsistenz zwischen dem numerischen Zugang in Ref. [7] und den hier verwendeten analytischen Methoden gezeigt. Außerdem zeigen die hier berechneten Ergebnisse eine deutlich höhere Genauigkeit als die Resultate aus der Referenz auf. Erwähnenswert ist auch, dass von der Klasse IV(b) der führende Term in schwerer Massenentwicklung bereits in Ref. [97] analytisch berechnet wurde und mit dem in dieser Arbeit ausgewerteten übereinstimmt.

Gruppe	$10^2 \cdot A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_\tau)$	
	diese Arbeit	Ref. [7]
I(a)	0.00324281(2)	0.0032(0)
I(b) + I(c) + II(b) + II(c)	-0.6292808(6)	-0.6293(1)
I(d)	0.0367796(4)	0.0368(0)
III	4.5208986(6)	4.504(14)
II(a) + IV(d)	-2.316756(5)	-2.3197(37)
IV(a)	3.851967(3)	3.8513(11)
IV(b)	0.612661(5)	0.6106(31)
IV(c)	-1.83010(1)	-1.823(11)

Tabelle 2.1: Numerische τ -Beiträge für den Vierschleifen-Koeffizienten von a_μ unterteilt in einzelne Gruppen. Der angegebene Fehler entspricht 10 % von den höchsten Entwicklungstermen $(m_\mu/m_\tau)^n$, $n = 6, 7$. Hier wurden die Unsicherheiten der experimentellen Parametern weggelassen. Die Fehler aus der Vergleichsreferenz wurden quadratisch addiert.

Es ist interessant die Zwei- und Dreischleifen-Ergebnisse in Gl. (2.11) mit dem Vierschleifen-Koeffizienten in Gl. (2.12) zu vergleichen. So unterscheiden sich zwar die Resultate zu zwei und drei Schleifen etwa um einen Faktor fünf, jedoch ist das Vierschleifen-Ergebnis um mehr als das 100-fache größer. Das hat die Konsequenz, dass der zusätzliche Faktor α/π in der Störungsreihe größtenteils kompensiert wird. Die numerischen τ -Beiträge der Zwei-, Drei- und Vierschleifen-Korrektur ergeben sich mit $\alpha = 1/137.035999174$ [14] insgesamt zu

$$a_\mu \Big|_\tau = (42.13 + 0.45 + 0.12) \cdot 10^{-11}. \quad (2.13)$$

So scheint die Konvergenz zu höheren Schleifenordnungen schlechter zu sein, als das von niedrigeren Ordnungen zu erwarten wäre. Betrachtet man die Beiträge zu jeder Schleifenordnung für den universellen Term A_1 aus Ref. [7]

$$a_\mu \Big|_{\text{univ.}} = (116\,140\,973.21 - 177\,230.51 + 1\,480.42 - 5.56 + 0.06) \cdot 10^{-11},$$

so stellt man fest, dass hierbei die Korrekturen um etwa 2 bis 3 Größenordnungen gleichmäßig kleiner werden, sodass der universelle Fünfschleifen-Beitrag sogar nur halb so groß ist wie der τ -Leptonbeitrag zu vier Schleifen. Damit trägt die hier berechnete Vierschleifen-Korrektur mit τ -Leptonen einen wichtigen Beitrag zu a_μ bei.

2.3 Ergebnisse für a_e

Die Beiträge von einem schweren Lepton zum anomalen magnetischen Moment vom Elektron sind zum Teil analog wie im Muonfall. So lassen sich die Größen $A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\mu)$ und $A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\tau)$ aus Gleichung (2.10) mit der Ersetzung des Massenverhältnisses m_μ/m_τ durch $m_e/m_\mu = 4.83633166(12) \cdot 10^{-3}$ bzw. $m_e/m_\tau = 2.87592(26) \cdot 10^{-4}$ [96] bestimmen. Doch zuerst seien hier zur Vollständigkeit die Zwei- und Dreischleifen-Ergebnisse angegeben.

$$\begin{aligned}
A_{2,e}^{(4)}(m_e/m_\mu) &= 5.19738668(26) \cdot 10^{-7}, \\
A_{2,e}^{(6)}(m_e/m_\mu) &= -7.37394162(27) \cdot 10^{-6}, \\
A_{2,e}^{(4)}(m_e/m_\tau) &= 1.83798(33) \cdot 10^{-9}, \\
A_{2,e}^{(6)}(m_e/m_\tau) &= -6.5830(11) \cdot 10^{-8}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Interessanterweise ist jedes Ergebnis zu drei Schleifen negativ, im Gegensatz zu Muonergebnissen in Gl. (2.11). Das liegt daran, dass in diesem Fall die linearen logarithmischen Terme, die einen negativen Beitrag liefern, dominieren, was sonst nicht der Fall ist. Aus Gleichung (2.10) ergeben sich die Koeffizienten auf Vierschleifen-Niveau,

$$\begin{aligned}
A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\mu) &\approx (9.161259603 + 0.000711078 + 2.2 \cdot 10^{-8}) \cdot 10^{-4} \\
&\approx 9.161970703(2)(372) \cdot 10^{-4}, \\
A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\tau) &\approx (7.42923268609971 + 2.75209424 \cdot 10^{-6} + 3.2 \cdot 10^{-13}) \cdot 10^{-6} \\
&\approx 7.42924(0)(118) \cdot 10^{-6}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Aufgrund der numerisch kleinen Massenverhältnisse konvergieren hier die Entwicklungen sehr schnell. Jedoch sind die Ergebnisse deswegen auch sehr klein und haben daher im Vergleich zum universellen Anteil einen vernachlässigbaren Beitrag zu a_e . Die ersten Unsicherheiten stammen von den fehlenden höheren Termen in der Entwicklung. Diese wurden mit 10% der letzten Ordnung abgeschätzt und sind sehr gering. Die viel größeren zweiten Fehler berücksichtigen die experimentellen Unsicherheiten der Inputwerte für die Massen. Die beiden Resultate sind in guter Übereinstimmung mit den in Ref. [14]² berechneten Ergebnissen $A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\mu) = 9.222(66) \cdot 10^{-4}$ und

²Es ist anzumerken, dass sich in dieser Referenz ein Tippfehler für die Klasse I(d) von $A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\tau)$ in Tabelle I befindet. Der abgedruckte Wert muss durch 100 geteilt werden,

$A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\tau) = 7.38(12) \cdot 10^{-6}$. In Tabelle 2.2 sind einzelne Teilergebnisse gezeigt und mit Ref. [14] verglichen. Bei allen Diagrammklassen ist eine gute Übereinstimmung festzustellen. Da die sehr gute Konvergenz der analytischen Resultate zu sehr hoher Präzision führt, sind diese Ergebnisse viel genauer als die aus Ref. [14].

Gruppe	$10^4 \cdot A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\mu)$	
	diese Arbeit	[14]
I(a)	0.002264474414(6)	0.00226456(14)
I(b) + I(c) + II(b) + II(c)	-1.21390182678(6)	-1.21386(24)
I(d)	0.02472687590(2)	0.024725(7)
III	8.1715251555(1)	8.1792(95)
II(a) + IV(d)	-2.6414355180(7)	-2.642(12)
IV(a)	6.3578810372(3)	6.3583(44)
IV(b)	0.4157367168(5)	0.4105(93)
IV(c)	-1.954826212(2)	-1.897(64)

Gruppe	$10^6 \cdot A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\tau)$	
	diese Arbeit	[14]
I(a)	0.0008024665425029(1)	0.00080233(5)
I(b) + I(c) + II(b) + II(c)	-0.9458168451136621(8)	-0.94506(25)
I(d)	0.0087455060010553(1)	0.008744(1)
III	6.059301961911502(2)	6.061(12)
II(a) + IV(d)	-1.372489352896281(9)	-1.3835(30)
IV(a)	4.510496216222387(2)	4.5117(69)
IV(b)	0.147081582099596(4)	0.1431(95)
IV(c)	-0.97888609657284(3)	-1.02(11)

Tabelle 2.2: Separate Resultate für einzelne Diagrammklassen mit vier Schleifen von μ -Korrekturen (oben), sowie τ -Beiträge (unten) zu a_e . Der Fehler der hier bestimmten Ergebnisse ist auf 10% der letzten berechneten Ordnung, also $\mathcal{O}(m_e^6)$, festgesetzt. Die experimentellen Fehler der Massenwerte sind nicht mit angegeben.

was beim hier angegebenen Endergebnis und in Tabelle 2.2 berücksichtigt wurde. Das wurde durch die Autoren von [14] bestätigt.

Der letzte massenbehaftete Beitrag zu a_e wird durch Feynmandiagramme mit allen drei Leptonen hervorgerufen. Analog zu der Rechnung mit nur zwei Leptonen, ergibt die asymptotische Entwicklung mit der Hierarchie $m_e \ll m_\mu \ll m_\tau$ ein Ergebnis, das in allen möglichen Massenverhältnissen entwickelt ist. Auf Vierschleifen-Niveau erhalten wir das folgende analytische Ergebnis.

$$\begin{aligned}
A_{3,e}^{(8)}\left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_e}{m_\tau}\right) &= \frac{m_e^2}{m_\tau^2} \left(-\frac{3123671}{1458000} - \frac{\pi^2}{270} + \frac{\pi^4}{30} - \frac{19\zeta_3}{45} \right. \\
&\quad + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(\frac{271073}{291600} - \frac{3\zeta_3}{2} \right) + \frac{89}{810} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left. \right) + \frac{m_e^2 m_\mu \pi^2}{m_\tau^3 90} \\
&\quad + \frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^4} \left(\frac{\pi^4}{3150} - \frac{1213316893}{5834430000} + \frac{1294\zeta_3}{3675} - \frac{3}{280} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
&\quad + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(-\frac{9573107}{18522000} + \frac{\zeta_3}{70} \right) + \frac{130813}{1058400} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left. \right) \\
&\quad + \frac{m_e^4}{m_\mu^2 m_\tau^2} \left(\frac{3304933}{14580000} + \frac{88\pi^2}{6075} - \frac{107\zeta_3}{360} + \frac{2533}{40500} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
&\quad + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-\frac{3239}{121500} - \frac{79}{1350} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right) - \frac{7}{8100} \ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left. \right) \\
&\quad + \frac{m_e^4}{m_\tau^4} \left(-\frac{19009349146181}{10081895040000} - \frac{37877173\zeta_3}{76204800} - \frac{79\pi^2}{58800} \right. \\
&\quad - \frac{373}{40320} P_4 + \frac{280111\pi^4}{14515200} + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{441068819}{1714608000} \right. \\
&\quad - \frac{33487}{2721600} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{1423}{38880} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{\pi^2}{420} \left. \right) \\
&\quad + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(\frac{767814079}{750141000} - \frac{\pi^2}{420} - \frac{61849\zeta_3}{80640} \right) \\
&\quad - \frac{3034811}{38102400} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{1181}{40824} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left. \right) \\
&\quad + \frac{m_e^2 m_\mu^3 \pi^2}{m_\tau^5 90} + \frac{m_e^4 m_\mu}{m_\tau^5} \left(\frac{79\pi^2}{19600} + \frac{\pi^2}{140} \ln \frac{m_e^2}{m_\tau^2} \right). \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Dabei wurden Terme $\mathcal{O}(1/M^6)$ weggelassen, wobei M für schwere Massen m_μ

und m_τ stellvertretend steht. Die numerische Auswertung ergibt das Ergebnis

$$\begin{aligned} A_{3,e}^{(8)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau) &\approx (7.4426 + 0.0261) \cdot 10^{-7} \\ &= 7.4687(26)(10) \cdot 10^{-7}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Aufgrund der hier niedrigen Entwicklung sind in der ersten Zeile nur zwei Werte für das Ergebnis angegeben. Beim ersten wurden Terme bis $\mathcal{O}(1/M^3)$ ausgewertet, beim zweiten entsprechend der Rest. Daher ist die erste Unsicherheit von der Entwicklung vergleichsweise groß wie der Fehler von den Massenwerten. Außerdem ist dieser Beitrag sogar kleiner als $A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\mu)$ und $A_{2,e}^{(8)}(m_e/m_\tau)$. Das liegt zum einen daran, dass der führende Term proportional zu m_e^2/m_τ^2 ist und Terme der Form m_μ^2/m_τ^2 oder m_e^2/m_μ^2 nicht vorkommen. Dass diese Terme nicht vorhanden sind, lässt sich damit erklären, dass einerseits im Limes $m_{\mu,\tau} \rightarrow \infty$, wobei m_μ/m_τ nicht gegen null geht, eine Entkopplung auftritt, der Beitrag also verschwindet. Andererseits muss das auch im Fall $m_\tau \rightarrow \infty$ mit einem endlichen Wert für m_e/m_μ gelten. Desweiteren kommt bei der führenden Massenordnung nur der numerisch kleinere Logarithmus $\ln(m_\mu^2/m_\tau^2)$ vor. Auch bei höheren Ordnungen muss mindestens ein Massenverhältnis m_e^2/m_τ^2 vorkommen, dagegen treten alle Logarithmen auf. Der Vergleich mit Ref. [14], $A_{3,e}^{(8)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau) = 7.465(18) \cdot 10^{-7}$, zeigt auch hier gute Übereinstimmung.

Im Vergleich zum Vierschleifen-Ergebnis ist die führende Ordnung im Dreischleifenfall proportional zu $m_e^4/(m_\mu^2 m_\tau^2)$, was deswegen einen mehr als sechs Größenordnungen kleineren Koeffizienten nach sich zieht,

$$A_{3,e}^{(6)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau) = 1.90982(34) \cdot 10^{-13}. \quad (2.18)$$

Diese Abhängigkeit kann auf die Gestalt der zugrunde liegenden Feynmandiagramme zurück geführt werden, siehe dazu das dritte Diagramm in erster Zeile von Abb. 2.1. Denn diese entstehen durch zwei Einsetzungen von schweren Leptonschleifen im Photonpropagator des Einschleifen-Diagramms.

Deswegen zeigt der Beitrag mit drei Leptonschleifen-Einsetzungen, siehe I(a) in Abb. 2.1, und mindestens zwei schweren Leptonen ein analoges Verhalten. So beginnt die Entwicklung erst mit Termen von der Form $m_e^4/(m_\tau^2 m_{\mu,\tau}^2)$. Um eine Aussagekraft zum Konvergenzverhalten von diesem Beitrag zu erhalten, wurde für diese Diagramme auch die nächste höhere Ordnung in den Mas-

Gruppe	$10^7 \cdot A_{3,e}^{(8)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$	
	diese Arbeit	[14]
I(a)	0.00001199558(2)	0.000011994(1)
I(b) + I(c)	0.172910(24)	0.172874(21)
II(b) + II(c)	-1.64747(17)	-1.64866(67)
IV(a)	8.9432(25)	8.941(17)

Tabelle 2.3: Beiträge zu a_e auf vier Schleifen von Feynmandiagrammen, die sowohl μ - als auch τ -Leptonen enthalten. Die Ergebnisse dieser Arbeit stammen von zwei Ordnungen in der asymptotischen Massenentwicklung, wobei der Fehler 10% des zweiten Terms entspricht.

senentwicklungen berechnet. Hier seien nur die zusätzlichen Terme gezeigt.

$$\begin{aligned}
\delta A_{3,e}^{(8)} \left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_e}{m_\tau} \right) \Big|_{\text{I(a)}, m^6} &= \frac{m_e^4 m_\mu^2}{m_\tau^6} \left(-\frac{1032407}{187535250} + \frac{1303}{297675} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
&+ \frac{4}{945} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{4}{945} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{1039}{297675} \right) \\
&+ \frac{m_e^6}{m_\mu^4 m_\tau^2} \left(\frac{204569}{30870000} + \frac{166}{18375} \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} + \frac{1}{350} \ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \\
&+ \frac{m_e^6}{m_\mu^2 m_\tau^4} \left(\frac{959}{90000} + \frac{31}{5250} \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} + \frac{1}{350} \ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right) \\
&+ \frac{m_e^6}{m_\tau^6} \left(\frac{8\zeta_3}{315} - \frac{118286321}{19691201250} + \frac{676036}{31255875} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
&+ \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{2735573}{187535250} - \frac{199}{297675} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
&\left. \left. + \frac{2}{945} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right) + \frac{394}{99225} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{2}{945} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right). \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Das wurde in Tabelle 2.3 berücksichtigt. Dort sind einzelne Teilergebnisse sowie der Vergleich mit Referenz [14] gezeigt. Da bei diesen Beiträgen nur die zwei führenden Ordnungen ausgewertet wurden, sind manche Fehler vergleichsweise gleich groß.

Kapitel 3

Elektronbeiträge zum anomalen magnetischen Moment vom Muon

Die wichtigsten Beiträge zum anomalen magnetischen Moment vom Muon stellen die Strahlungskorrekturen dar, die vom Elektron hervorgerufen werden. In diesem Kapitel wird auf die Berechnung und die Ergebnisse zur Vierschleifen-Ordnung, also auf den Koeffizienten $A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e)$, eingegangen. Die Feynmandiagramme dazu ergeben sich analog zu den Korrekturen, die τ -Schleifen enthalten. In Abb. 3.1 ist eine mögliche Aufteilung in Diagrammklassen, die aus Ref. [7] übernommen wurde, gezeigt. Zur Auswertung der Diagramme benutzen wir hier die selben Methoden wie bei der Berechnung der schweren Leptonkorrekturen. Da sich die beiden Massen m_e und m_μ numerisch etwa um einen Faktor 200 unterscheiden, ist es auch hier angemessen eine asymptotische Entwicklung mit $m_e \ll m_\mu$ durchzuführen. Der entscheidende Unterschied zum τ -Fall ist jedoch, dass das Elektron leichter als das externe Muon ist. Das hat zur Folge, dass die dazugehörigen Integrale ein anderes asymptotisches Verhalten zeigen, als das bei der schweren Leptonrechnung besprochen wurde. Deswegen wird im nächsten Unterkapitel darauf eingegangen und ein Beispiel mit vier Schleifen erläutert. Die dabei hervorgerufenen Feynmanintegrale sind nicht nur Vakuum- und on-shell-Integrale, zusätzlich entstehen Integrale mit Propagatoren von der Form $1/(2\ell \cdot p)$, mit dem externen Muonimpuls p und einem Schleifenimpuls ℓ . Die verwendeten

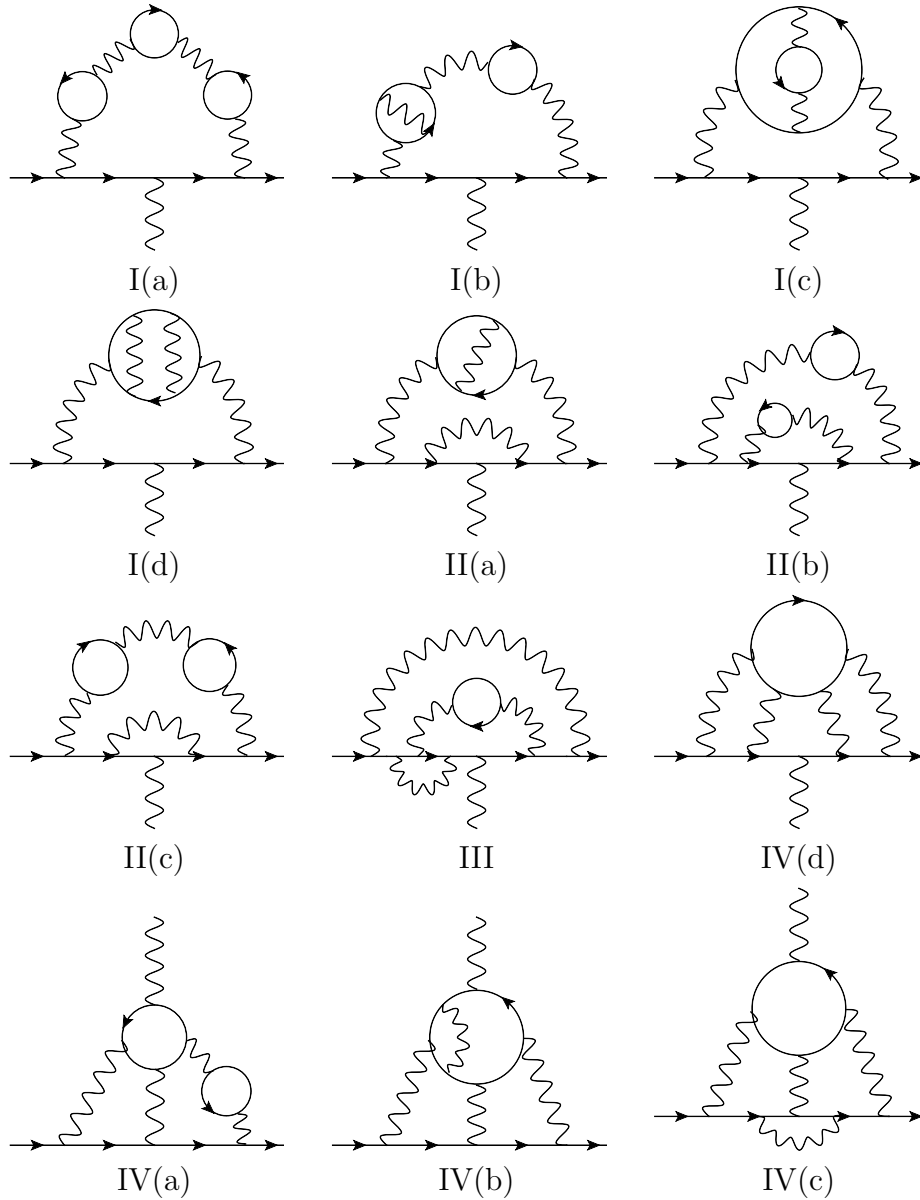


Abbildung 3.1: Diagrammklassen zum Elektronbeitrag von a_μ mit vier Schleifen. In den Fermionschleifen können Elektronen und Muonen auftreten, jedoch ist mindestens eine Elektronschleife vorhanden. In der letzten Zeile sind Diagramme mit externer Lichtstreuung dargestellt, bei der das externe Photon und drei interne durch eine Leptonschleife verbunden sind.

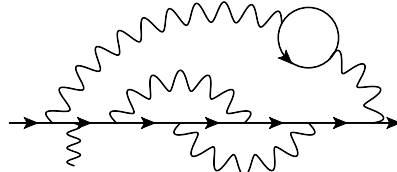
Methoden zur Berechnung dieser Integrale werden im Unterkapitel 3.2 besprochen. Anschließend werden die numerischen Ergebnisse zu $A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e)$ diskutiert.

3.1 Asymptotische Entwicklung

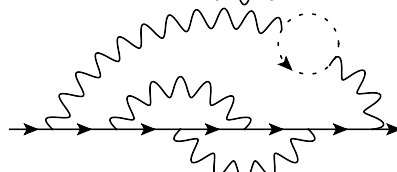
Die Feynmandiagramme, die den Elektronbeitrag zu a_μ beschreiben, enthalten zwei asymptotische Energieskalen m_e und m_μ . Der externe Muonimpuls erfüllt die on-shell Bedingung $p^2 = m_\mu^2$. Da im externen Photonimpuls um $q^2 = 0$ entwickelt wird, trägt auch dieser keine weitere asymptotische Skala bei, die bei der asymptotischen Entwicklung berücksichtigt werden muss. Um die asymptotischen Regionen in einem allgemeinem Feynmandiagramm zu bestimmen, kann die Darstellung in alpha-Parametern und deren Skalierungsverhalten genutzt werden, siehe dazu z.B. [98]. Das ist im Mathematica-Programm `asy` [99, 100] realisiert. Der Nachteil dieser Methode ist jedoch, dass für die eigentliche Berechnung der Diagramme konkrete Impulsverteilungen benötigt werden, die somit passend zum Output von `asy` gefunden werden müssen.

Zur direkteren Bestimmung der Regionen können daher sofort die möglichen Impulsverteilungen im Diagramm betrachten werden. Die Wahl der Schleifenimpulse entweder von der Größenordnung der leichten Skala, m_e , oder der schweren, m_μ , führt auf mögliche asymptotische Regionen. Zwar kann eine Region mehrere unterschiedliche Impulsverteilungen haben, jedoch wird die eindeutige Zuordnung der Regionen durch das eindeutige Skalenverhalten der Propagatoren garantiert. Diese speziell auf die durchgeführte Rechnung entwickelte Methode wurde in einem eigenständigen Mathematica-Programm implementiert, auf das im Anhang C eingegangen wird. Mit diesem Programm lassen sich auch die benötigten Impulsverteilungen mit Hilfe von `asy` erzeugen. Zwar wurden mit beiden Methoden die selben asymptotischen Regionen für alle Diagramme gefunden, der Vergleich zeigte jedoch, dass die Laufzeit von `asy` ab vier Schleifen deutlich länger ausfällt, als dass bei der Verwendung des eigenen Algorithmus der Fall ist. Bei niedrigen Schleifenordnungen ist die Laufzeit vergleichbar groß. Dazu ist noch anzumerken, dass die eigene Methode auf die spezielle Kinematik in der durchgeführten Rechnung entwickelt wurde und dass `asy` auch bei anderen Problemen anwendbar ist.

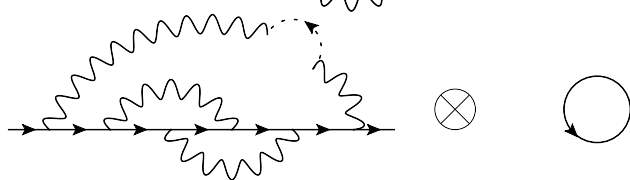
Ausgangsdiagramm:



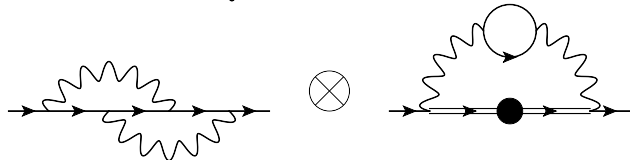
1. Schwerste Skalenregion:



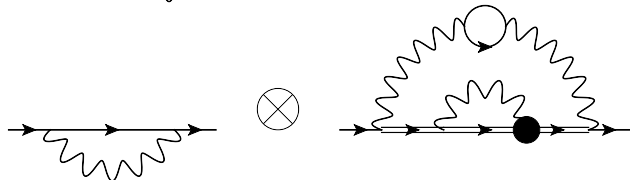
2. zwei Regionen:



3. eine Region:



4. zwei Regionen:



5. Leichteste Skalenregion:

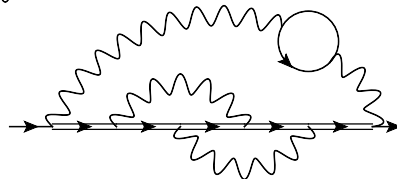


Abbildung 3.2: Asymptotische Regionen zu einem Feynmandiagramm mit vier Schleifen und einer Elektronschleife. Die gepunkteten Linien zeigen massenlose Elektronpropagatoren. Die doppelten durchgezogenen Linien stehen für Propagatoren der Form $1/(2\ell \cdot p)$. Erläuterungen zu den mit 1. bis 5. bezeichneten Regionen finden sich im Text.

Im Folgenden werden die resultierenden Regionen aus der asymptotischen Entwicklung anhand eines Beispieldiagramms mit vier Schleifen diskutiert. Die asymptotischen Regionen sind diagrammatisch in Abbildung 3.2 dargestellt.

1. Sind alle Schleifenimpulse von der schweren Skala m_μ , so bildet das gesamte Diagramm ein Integral mit vier Schleifen und einem externen Impuls mit der on-shell Bedingung. Da die Elektronpropagatoren zunächst sowohl schwere Impulse als auch die leichte Masse m_e enthalten, muss eine Taylorentwicklung durchgeführt werden, sodass diese Propagatoren masselos werden.
2. Bei den nächsten leichteren Regionen weist jeweils einer der zwei Elektronpropagatoren ein leichtes Skalierungsverhalten auf, wobei der Rest des Diagramms von der schweren Größenordnung bleibt. Der zugehörige Elektronpropagator darf daher nur einen Schleifenimpuls $\ell_1 \sim m_e$ beinhalten, da die anderen von der Skala m_μ sind. Außerdem bildet dieser ein Vakuumintegral mit Masse m_e und nur einer Schleife, das restliche Diagramm führt dagegen zu einem on-shell Integral zur Dreischleifen-Ordnung.
Da der leichte Impuls ℓ_1 vom Vakuumintegral durch das Diagramm fließt, muss in den Propagatoren in m_e und ℓ_1 entwickelt werden. Ähnlich wie in Unterkapitel 2.1.1 besprochen, kommt dabei zwischen den beiden Integralen eine Tensorstruktur zustande. Jedoch lässt sich das triviale Vakuumintegral zuerst auswerten, sodass ein skalares Dreischleifen-Integral übrig bleibt.
3. Für diese Region sind genau zwei Schleifenimpulse von der schweren Skala zu wählen, die sich auf die zwei Photonlinien ohne die Elektronschleife, sowie die drei innersten Muonpropagatoren verteilen. Das führt demnach auf ein Integral mit zwei Schleifen und der Skala m_μ . Die anderen Propagatoren können nur ein Skalierungsverhalten von der leichten Skala aufweisen, wenn der externe schwere Muonimpuls p durch die Muonpropagatoren fließt. Aufgrund der on-shell Bedingung $p^2 = m_\mu^2$ führt das mit den leichten Schleifenimpulsen $\ell_{1/2} \sim m_e$ bei den beiden äußeren Muonpropagatoren auf die Entwicklung

$$\frac{1}{(\ell_1 + p)^2 - m_\mu^2} = \frac{1}{\ell_1^2 + 2\ell_1 \cdot p} = \frac{1}{2\ell_1 \cdot p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\ell_1^2}{2\ell_1 \cdot p} \right)^n.$$

Es ist zu beachten, dass der lineare Propagator $1/(2\ell_1 \cdot p)^n$ keine weitere Skala einführt und nur zu einem trivialen Vorfaktor $(p^2)^{-n/2}$ führt. Die Abhängigkeit des Integrals zum äußeren Teildiagramms bleibt somit nur von der Skala m_e .

Analog zur letzten diskutierten Region muss auch hier ein leichter Impuls durch den schweren Teil des Diagramms fließen, sodass hier nach den Taylorentwicklungen der Propagatoren Tensorstrukturen zwischen den beiden Integralen auftreten. Jedoch haben hier beide Integrale zwei Schleifenimpulse und tragen sogar den externen Impuls. Diese Art der Tensorintegrale können auf die gleiche Weise wie das in Unterkapitel 2.1.2 für Einschleifen-Integrale mit externem Impuls erläutert wurde, auf skalare Integrale reduziert werden.

4. Wird einer der zwei schweren Impulse in der vorherigen Region stattdessen auf die leichte Größenordnung m_e gesetzt, so ergeben sich zwei Regionen mit jeweils einem on-shell Integral mit einer Schleife und einem Dreischleifen-Integral von der leichten Skala mit linearen Propagatoren. Auch hier treten Tensorstrukturen auf, jedoch kann zuerst das einfachere Einschleifen-Integral ausgewertet werden, sodass nur ein skalares Dreischleifen-Integral berechnet werden muss.
5. In der letzten Region weist das gesamte Diagramm, und daher alle Schleifenimpulse, ein leichtes Skalierungsverhalten auf. Dazu muss wiederum der Fluß des schweren externen Impulses durch die Muonlinie führen, sodass alle Muonpropagatoren nach der Taylorentwicklung lineare Propagatoren ergeben. Demnach hängt das resultierende Vierschleifen-Integral nur von der Skala m_e ab.

Der Vergleich mit der in Kap. 2.1.1 diskutierten asymptotischen Entwicklung zeigt, dass beim schweren Lepton nur ein Vierschleifen-Integral ausgewertet werden muss, das dazu ein Vakuumintegral ist. Im Gegensatz dazu kommen in diesem leichten Leptonfall zwei Integraltypen mit vier Schleifen vor: On-shell-Integrale und Integrale mit linearen Propagatoren. Beide Integraltypen haben einen nicht-verschwindenden externen Impuls und sind deswegen schwieriger zu berechnen als Vakuumintegrale. Der Integraltyp mit linearen Propagatoren wurde auf Vierschleifen-Niveau noch nicht in der Literatur betrachtet.

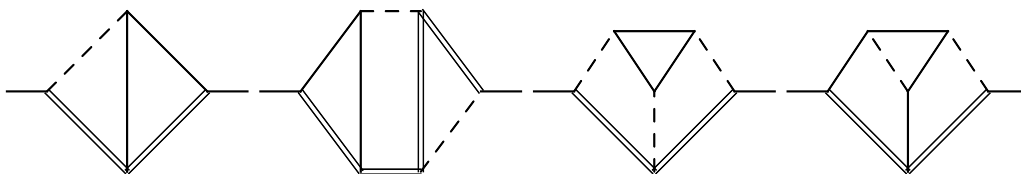


Abbildung 3.3: Zusätzlich benötigte Integralklassen zu Zwei- und Dreischleifen-Ordnung bei der asymptotischen Berechnung von Feynmandiagrammen mit einem internen leichteren Lepton als das externe Lepton. Durchgezogene und gestrichene Linien stellen massive bzw. masselose Propagatoren dar, die doppelten durchgezogenen Linien stehen für lineare Propagatoren.

3.2 Berechnung von Feynmanintegralen

Die Auswertung der Feynmandiagramme erfolgt bei dieser Rechnung teilweise mit den gleichen Methoden wie bei den Diagrammen mit schweren Leptonen. Jedoch kommt hier die neue Integralklasse mit linearen Propagatoren hinzu. Außerdem sind die hier auftretenden Masterintegrale mit vier Schleifen generell nicht analytisch bekannt. Die hier auftretenden on-shell Masterintegrale mit vier Schleifen wurden bereits bei der Berechnung der $\overline{\text{MS}}$ -OS-Relation für Quarkmassen in Ref. [101] betrachtet, so wurden die Ergebnisse der on-shell Masterintegrale bei der Auswertung der Elektronbeiträge zu a_μ wiederverwendet. Dagegen wurden die Vierschleifen-Masterintegrale mit linearen Propagatoren im Rahmen dieser Arbeit mit überwiegend numerischen Methoden, die später in diesem Kapitel vorgestellt werden, berechnet.

Nachdem die Feynmandiagramme mit `FORM` durch skalare Integrale ausgedrückt wurden, werden diese mit `FIRE` [75] und `crusher` [102], die beide auf dem Laporta-Algorithmus basieren, auf Masterintegrale reduziert. Der Unterschied der beiden Programme liegt darin, dass `crusher` automatisch die Symmetrien der Integrale ausnutzt, die bei `FIRE` vom User bereitgestellt werden müssen, um die Laufzeit der Reduktion zu verkürzen. Jedoch hat `FIRE` den Vorteil, dass auch andere Relationen zwischen den Integralen verwendet werden können, wie die z.B. von `LiteRed` [103] geliefert werden. Obwohl bei der Benutzung von `FIRE` Symmetrien ausgenutzt wurden, konnten komplizierte Integrale nicht in einer annehmbaren Laufzeit reduziert werden, das jedoch mit `crusher` bewerkstelligt wurde.

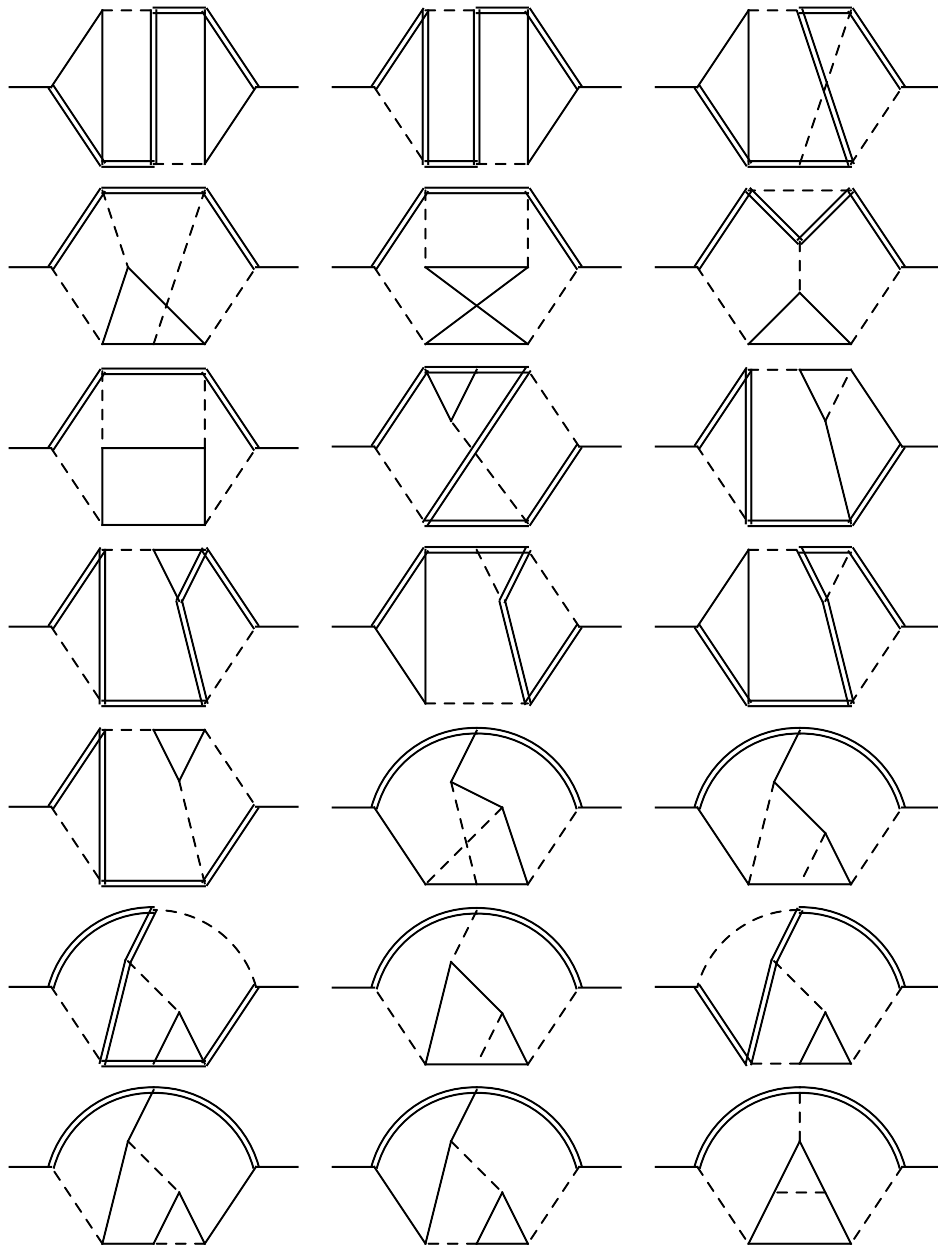


Abbildung 3.4: Integralfamilien mit linearen Propagatoren, die zur Einteilung von Vierschleifen-Integralen verwendet wurden. Bei manchen Integralklassen führt die Partialbruchzerlegung von lineare Propagatoren auf eine weitere Aufspaltung in zwei oder vier Topologien.

Für die Verwendung von `FIRE/crusher` werden die Integrale in allgemeine Klassen, sogenannte Topologien, eingeteilt. Für die Zwei- und Dreischleifen-Integrale mit linearen Propagatoren reichen in QED die in Abb. 3.3 dargestellten Topologien aus. Auf vier Schleifen werden ähnlich zu den on-shell Integralen etwa 20 Topologien gebraucht. Auch weisen die linearen Integrale eine analoge Form zu den on-shell Integralen auf und sind in Abb. 3.4 gezeigt. Um den Laporta-Algorithmus anwenden zu können, müssen die Propagatoren linear unabhängig sein. Bei der ersten Dreischleifen-Topologie in Abb. 3.3 ist das jedoch nicht der Fall. Wählt man für die Schleifenimpulse zum Beispiel die kürzesten Flußwege, so kommen von den linearen Propagatoren sowohl $1/(2\ell \cdot p)$, $1/(2k \cdot p)$ als auch $1/(2\ell \cdot p + 2k \cdot p)$ vor, mit dem externen Impuls p und zwei Schleifenimpulsen ℓ und k . Damit der Laporta-Algorithmus anwendbar ist, muss daher einer der Propagatoren durch die anderen ausgedrückt werden. Hat einer der Propagatoren einen negativen Exponenten, kommt also als Zähler vor, so kann dieser trivialerweise umgeschrieben werden. Tritt das nicht auf, so kann eine Partialbruchzerlegung in der Form

$$\frac{1}{2\ell \cdot p} \frac{1}{2(\ell + k) \cdot p} = \frac{1}{2k \cdot p} \left(\frac{1}{2\ell \cdot p} - \frac{1}{2(\ell + k) \cdot p} \right)$$

sukzessive ausgeführt werden, bis einer der beiden Propagatoren der linken Seite aus einem Ausdruck verschwindet. Je nachdem welche Propagatoren übrig bleiben, führt das auf unterschiedliche Topologien, sodass effektiv zwei Topologien mit dem Laporta-Algorithmus behandelt werden müssen. Auf Vierschleifen-Niveau kommt es sogar dazu, dass zwei Partialbruchzerlegungen angewendet werden müssen, um jeweils einen Propagator von zwei Propagatorpaaren zu streichen. Aufgrund der vier Möglichkeiten führt das entsprechend auf die Auswertung von vier Topologien.

Da die Masterintegrale vom linearen Typ auf Vierschleifen-Ordnung weitgehend unbekannt sind, wurden diese im Zuge dieser Arbeit ausgewertet. Die einfacheren Integrale lassen sich mit Mellin-Barnes-Methoden [104] numerisch sehr präzise berechnen. Deswegen seien als Beispiel die nicht-trivialen linearen Integrale mit drei Schleifen, siehe Abb. 3.5, besprochen. Diese Masterintegrale wurden bereits in der Literatur betrachtet und in Ref. [105] sind dazu analytische Ergebnisse zu finden. Um die Feynmanintegrale auf eine mögliche Form mit Mellin-Barnes-Integralen zu bringen, können die Propagatoren mit Feynmanparametern zusammengefasst werden. Ist ein Integral trivial, so führt die Auswertung der Integrationen über die Impulse

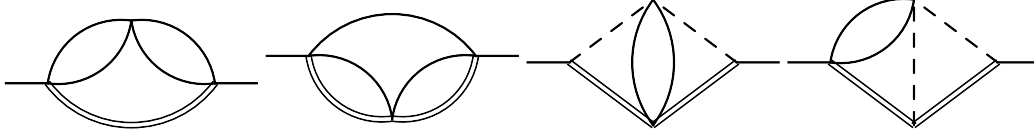


Abbildung 3.5: Nicht-triviale Masterintegrale mit drei Schleifen, die aus den Topologien in Abbildung 3.3 hervorgehen.

und die Feynmanparameter auf ein Ergebnis in Form von Γ -Funktionen. Bei schwierigeren Feynmanintegralen müssen jedoch zwischendurch Mellin-Barnes-Integrale eingeführt werden, die am Ende berechnet werden. Schauen wir uns dazu das erste Integral in Abb. 3.5 an, das folgendermaßen geschrieben werden kann.

$$I_1 = \int \frac{d^d \ell_1 d^d \ell_2 d^d \ell_3}{(2\ell_1 \cdot p)(-\ell_1 + \ell_2)^2 + m^2)(-\ell_2^2 + m^2)(-\ell_1 + \ell_3)^2 + m^2)(-\ell_3^2 + m^2)}. \quad (3.1)$$

Hierbei wird die euklidische Notation für die Propagatoren verwendet, sowie die “ $i0$ ”-Abhängigkeit unterdrückt. Die Anwendung der Feynmanparameter erlaubt es Propagatoren zu kombinieren. Die allgemeine Formel für zwei Faktoren lautet

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(x \cdot A + (1-x) \cdot B)^{\alpha+\beta}}. \quad (3.2)$$

Die Verwendung dessen kann so erfolgen:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d \ell_2}{(-\ell_1 + \ell_2)^2 + m^2)(-\ell_2^2 + m^2)} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell_2 \Gamma(2)}{(-\ell_2^2 - 2\ell_1 \ell_2 x - \ell_1^2 x + m^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell_2 \Gamma(2)}{(-(\ell_2 + \ell_1 x)^2 - \ell_1^2 x(1-x) + m^2)^2} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^d \ell_2 \Gamma(2)}{(-\ell_2^2 - \ell_1^2 x(1-x) + m^2)^2}. \end{aligned}$$

Dabei wurde am Ende eine Translation $\ell_2 \rightarrow \ell_2 - \ell_1 x$ durchgeführt, die sonst keine Auswirkung auf den Gesamtausdruck in (3.1) hat. Mit der allgemeinen

Formel für Einschleifen-Vakuuminintegrale,

$$\int \frac{d^d k}{(-k^2 + m^2)^a} = \frac{i\pi^{d/2}}{(m^2)^{a+\epsilon-2}} \frac{\Gamma(a + \epsilon - 2)}{\Gamma(a)}, \quad (3.3)$$

lässt sich die Integration über ℓ_2 , und ℓ_3 mit den analogen Schritten, ausführen, sodass das Integral die Form

$$\begin{aligned} I_1 &= -\pi^d \int_0^1 dx dy \int \frac{d^d \ell_1 \Gamma(\epsilon)^2}{(2\ell_1 \cdot p)(-\ell_1^2 x(1-x) + m^2)^\epsilon (-\ell_1^2 y(1-y) + m^2)^\epsilon} \\ &= -\pi^d \int_0^1 dx dy \int \frac{d^d \ell_1 (x(1-x))^{-\epsilon} (y(1-y))^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon)^2}{(2\ell_1 \cdot p) \left(-\ell_1^2 + \frac{m^2}{x(1-x)}\right)^\epsilon \left(-\ell_1^2 + \frac{m^2}{y(1-y)}\right)^\epsilon} \\ &= -\pi^d \int_0^1 dx dy dz \int \frac{d^d \ell_1 (x(1-x))^{-\epsilon} (y(1-y))^{-\epsilon} (z(1-z))^{\epsilon-1} \Gamma(2\epsilon)}{(2\ell_1 \cdot p) \left(-\ell_1^2 + m^2 \left(\frac{z}{x(1-x)} + \frac{1-z}{y(1-y)}\right)\right)^{2\epsilon}} \end{aligned}$$

bekommt. Hierbei wurde ein weiterer Feynmanparameter eingeführt, damit auch die letzte Impulsintegration mit der Einschleifen-Formel

$$\int \frac{d^d k}{(2k \cdot p)^a (-k^2 + m^2)^b} = \frac{i\pi^{d/2}}{(p^2)^{a/2} (m^2)^{a/2+b+\epsilon-2}} \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(\frac{a}{2} + b + \epsilon - 2)}{2 \Gamma(a)\Gamma(b)}, \quad (3.4)$$

ausgewertet werden kann, sodass nur die Integrationen von den Feynmanparametern übrig bleiben,

$$I_1 = -i\pi^{\frac{3}{2}d} \int_0^1 dx dy dz \frac{(x(1-x))^{-\epsilon} (y(1-y))^{-\epsilon} (z(1-z))^{\epsilon-1} \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(3\epsilon - \frac{3}{2})}{2 (p^2)^{1/2} \left(m^2 \left(\frac{z}{x(1-x)} + \frac{1-z}{y(1-y)}\right)\right)^{3\epsilon-3/2}}.$$

Um auch diese Integrale mit der Formel für die Eulersche Betafunktion,

$$\int_0^1 dt t^{a-1} (1-t)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad (3.5)$$

aufzulösen, kann der Nenner mit der Einführung eines Mellin-Barnes-Integrals durch

$$\frac{1}{(A+B)^\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int d\alpha \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\lambda) A^{-\alpha} B^{\alpha+\lambda}} \quad (3.6)$$

umgeschrieben werden, was das Folgende ergibt.

$$I_1 = \frac{-i\pi^{\frac{3}{2}d}}{2\pi i} \int_0^1 dx dy dz \frac{(x(1-x))^{-\epsilon} (y(1-y))^{-\epsilon} (z(1-z))^{\epsilon-1} \Gamma(\frac{1}{2})}{2 (p^2)^{1/2} (m^2)^{3\epsilon-3/2}}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \int d\alpha \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha + 3\epsilon - \frac{3}{2})}{\left(\frac{z}{x(1-x)}\right)^{-\alpha} \left(\frac{1-z}{y(1-y)}\right)^{\alpha+3\epsilon-3/2}} \\
& = \frac{-i\pi^{\frac{3}{2}d}}{2\pi i} \int d\alpha \frac{\Gamma(-\alpha - \epsilon + 1)^2 \Gamma(\alpha + 2\epsilon - \frac{1}{2})^2 \Gamma(\alpha + \epsilon)\Gamma(-\alpha - 2\epsilon + \frac{3}{2})}{\Gamma(-2\alpha - 2\epsilon + 2)\Gamma(2\alpha + 4\epsilon - 1)\Gamma(-\epsilon + \frac{3}{2})} \\
& \quad \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha + 3\epsilon - \frac{3}{2})}{2(p^2)^{1/2}(m^2)^{3\epsilon-3/2}}.
\end{aligned}$$

Die Kontur des Mellin-Barnes-Integrals muss parallel zur Imaginärachse verlaufen, sodass die Pole von den Gammafunktionen $\Gamma(\alpha + \dots)$ und den von $\Gamma(-\alpha + \dots)$ getrennt sind. Außerdem kann ausgewählt werden zu welcher Richtung die Kontur geschlossen wird, was zu einer Summe über die Residuen der entsprechend eingeschlossenen Pole führt. Die Auswertung von nur einer Mellin-Barnes-Integration kann numerisch sehr präzise durchgeführt werden und sogar, wie in Ref. [105] gezeigt, analytisch ausgewertet werden. Somit geben wir hier nur die bei der Dreischleifen-Rechnung benötigten Terme an, die mit dem Integral J_3 in [105] konsistent sind,

$$I_1 = \frac{-i\pi^{\frac{3}{2}d}e^{-3\epsilon\gamma_E}}{(p^2)^{1/2}(m^2)^{3\epsilon-3/2}} \left[\frac{32\pi^2}{3} + \epsilon \left(\frac{448\pi^2}{3} + \frac{64\pi^3}{3} - \frac{256}{3}\pi^2 \log(2) \right) \right]. \quad (3.7)$$

Die anderen Integrale in Abb. 3.5 sind etwas schwieriger auszuwerten. Deshalb sei hier noch das zweite Integral besprochen,

$$I_2 = \int \frac{d^d\ell_1 d^d\ell_2 d^d\ell_3}{(2(\ell_1 + \ell_3) \cdot p)(2(\ell_2 + \ell_3) \cdot p)(-\ell_1^2 + m^2)(-\ell_2^2 + m^2)(-\ell_3^2 + m^2)}. \quad (3.8)$$

Mit dieser geschickten Impulsverteilung lassen sich die linearen Propagatoren mit Mellin-Barnes-Integralen aufspalten, sodass die Impulsintegrationen direkt ausgeführt werden können,

$$\begin{aligned}
I_2 & = \int \frac{d^d\ell_1 d^d\ell_2 d^d\ell_3}{(-\ell_1^2 + m^2)(-\ell_2^2 + m^2)(-\ell_3^2 + m^2)} \\
& \quad \cdot \int \frac{d\alpha}{2\pi i} \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha + 1)}{(2\ell_1 \cdot p)^{-\alpha}(2\ell_3 \cdot p)^{\alpha+1}} \int \frac{d\beta}{2\pi i} \frac{\Gamma(-\beta)\Gamma(\beta + 1)}{(2\ell_2 \cdot p)^{-\beta}(2\ell_3 \cdot p)^{\beta+1}} \\
& = \frac{-i\pi^{\frac{3}{2}d}}{8(p^2)(m^2)^{3\epsilon-2}} \int \frac{d\alpha d\beta}{(2\pi i)^2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 1)\Gamma(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \epsilon)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1) \\
& \quad \cdot \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2} + \epsilon - 1\right) \Gamma\left(-\frac{\beta}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\beta}{2} + \epsilon - 1\right).
\end{aligned}$$

Obwohl multidimensionale Mellin-Barnes-Integrale schwieriger auszuwerten sind als eindimensionale, lässt sich ein zweidimensionales Integral zum Beispiel mit dem Mathematica-Programm MB [104] immernoch relativ einfach numerisch sehr genau bestimmen. Jedoch geben wir auch hier das analytische Resultat an, das in Ref. [105] mit dem gleichen Namen zu finden ist,

$$I_2 = \frac{-i\pi^{\frac{3}{2}d}e^{-3\epsilon\gamma_E}}{(p^2)(m^2)^{3\epsilon-2}} \left[\frac{\pi^2}{6\epsilon} + \frac{5\pi^2}{12} + \left(-\frac{7\pi^2}{8} - \frac{\pi^4}{8} \right) \epsilon \right. \\ \left. + \epsilon^2 \left(\frac{47\pi^2\zeta_3}{6} - \frac{599\pi^2}{48} - \frac{5\pi^4}{16} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Für die beiden letzten Integrale in Abb. 3.5 kann mit den in diesem Kapitel gezeigten Umformungen jeweils eine Darstellung mit eindimensionalem Mellin-Barnes-Integral gefunden werden. Demnach ist die Berechnung der Integrale relativ einfach, sodass hier nur die Ergebnisse angegeben sind, die auch in Ref. [105] unter der gleichen Bezeichnung vorzufinden sind.

$$I_3 = \frac{-i\pi^{\frac{3}{2}d}e^{-3\epsilon\gamma_E}}{(p^2)(m^2)^{3\epsilon-1}} \left[-\frac{\pi^2}{9\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{4\zeta_3}{3} - \frac{5\pi^2}{9} \right) - \frac{20\zeta_3}{3} - \frac{31\pi^4}{540} - \frac{19\pi^2}{9} \right. \\ \left. + \epsilon \left(-\frac{76\zeta_3}{3} - \frac{10\pi^2\zeta_3}{9} - \frac{16\zeta_5}{3} - \frac{65\pi^2}{9} - \frac{31\pi^4}{108} \right) \right], \\ I_4 = \frac{-i\pi^{\frac{3}{2}d}e^{-3\epsilon\gamma_E}}{(p^2)(m^2)^{3\epsilon-1}} \left[-\frac{\pi^2}{9\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{2\zeta_3}{3} - \frac{5\pi^2}{9} \right) + \frac{10\zeta_3}{3} - \frac{37\pi^4}{540} - \frac{19\pi^2}{9} \right. \\ \left. + \epsilon \left(\frac{38\zeta_3}{3} - \frac{11\pi^2\zeta_3}{18} + \frac{8\zeta_5}{3} - \frac{65\pi^2}{9} - \frac{37\pi^4}{108} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Analog können Masterintegrale mit vier Schleifen ausgewertet werden. Jedoch treten dabei auch schwierige Integrale auf, die auf vier- und höherdimensionale Mellin-Barnes-Integrale führen, sodass diese Methode nicht mehr praktikabel ist. Deswegen wurden kompliziertere Integrale mit FIESTA [106] berechnet. Dieses Programm basiert auf einem Algorithmus, bei dem die Integrationen in der alpha-Parameter Darstellung derart unterteilt werden, sodass die Pole im Feynmanintegral aufgelöst werden, siehe z.B. [107]. So müssen nur endliche Integrale ausgewertet werden, die FIESTA numerisch berechnet.

Um die Unsicherheiten von der numerischen Integration so gering wie möglich zu halten, wurden auch Integrale mit höheren Propagatorpotenzen berechnet, die sich entsprechend auf das gesuchte Masterintegral mit FIRE oder

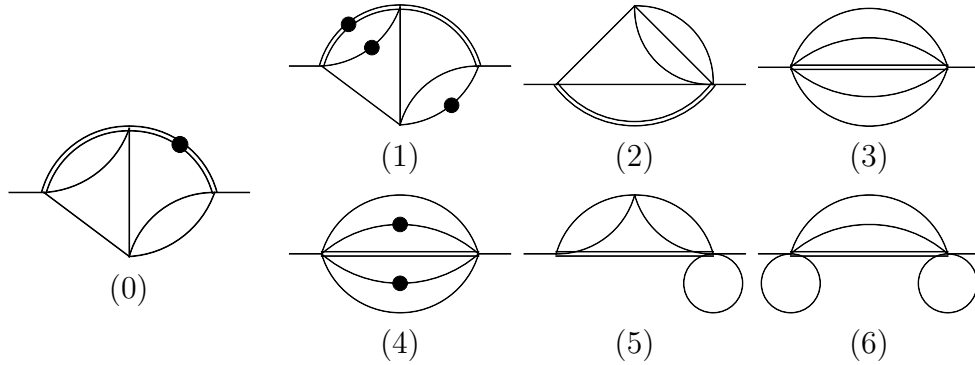


Abbildung 3.6: In (0) ist ein beispielhaftes Masterintegral mit vier Schleifen gezeigt. Zur präziseren numerischen Berechnung kann das als Linearkombination aus den Integralen (1) bis (6) geschrieben werden. Ein Punkt auf einer Linie signalisiert dass der zugehörige Propagator eine zweifache Potenz aufweist.

`crusher` reduzieren lassen. Dabei konnte oft ein Integral gefunden werden, das nach dem Basiswechsel zu einer niedrigeren Entwicklung in ϵ ausgewertet werden muss als das ursprüngliche Masterintegral, und sich somit besser für die Berechnung mit `FIESTA` eignet. Darüber hinaus stellt die Wahl unterschiedlicher Basen einen Test an die Ergebnisse aus `FIESTA` dar. Es wurde überprüft, dass verschiedene Basen von Masterintegralen innerhalb der numerischen Unsicherheiten gleiche Resultate liefern.

Zur Berechnung der Integrale mit `FIESTA` wird ein Beispiel veranschaulicht. Dazu ist in Abb. 3.6(0) ein typisches Masterintegral mit vier Schleifen gezeigt, das bis zur dritten Potenz in der ϵ -Entwicklung benötigt wurde. Für solche kompliziertere Integrale sollte die Integration mit dem in C++ implementierten Integrator von `FIESTA` erfolgen. So ist die Berechnung in zwei Schritte unterteilt. Zuerst wird mit Mathematica der zu integrierte Ausdruck in einer Datenbank vorbereitet. Für das vorliegende Beispiel kann dazu `FIESTA` folgendermaßen aufgerufen werden.

```

OnlyPrepare=True;
SDEvaluate[UF[{l1,l2,l3,l4},-{(l1*q1) , (l1)^2 , (l4*q1) , (l4)^2 , (l1 - l4)^2 ,
(l1 - l2)^2 - m^2 , (l2)^2 - m^2 , (l3)^2 - m^2 , (-l3 + l4)^2 - m^2 , (-l2 +
l4)^2 - m^2 , (-l2 + l3)^2 , (l2*q1) , (l3*q1) , (l1 - l3)^2}], {m->1, q1^2->1}],
{1,0,2,0,0,1,1,1,1,1,0,0,0}, 3]

```

Die eigentliche Integration kann damit auf einem anderen Computer oder einem Cluster erfolgen, bei der keine Mathematica-Lizenz gebraucht wird. Hierfür wurde ein Clustercomputer mit 18 Kernen verwendet, so hat der Integrator aufzurufende Befehl die folgende Form.

```
FIESTA/bin/CIntegratePool -in temp/in -out temp/out -all -direct
-threads 18 -intpar maxeval 500000
```

Dabei betrug die Laufzeit etwa 16 Stunden mit dem Ergebnis

$$(0) = (-0.0001 \pm 0.02) \epsilon^{-2} + (52.61 \pm 0.23) \epsilon^{-1} + (4045.3 \pm 1.8) \\ + (-588 \pm 19) \epsilon + (527832 \pm 169) \epsilon^2 + (-414350 \pm 1650) \epsilon^3. \quad (3.11)$$

Mit Ausnahme der ϵ^1 -Ordnung ist die relative Präzision der Teilresultate im Prozentbereich. Zwar ist diese numerische Genauigkeit für ein Integral schon ziemlich gut, jedoch treten in Gesamtergebnissen zum anomalen magnetischen Moment relativ große Differenzen zwischen den einzelnen Masterintegralen auf, was zu einer deutlich schlechteren numerischen Präzision des Endergebnisses führt. Um die Genauigkeit zu verbessern kann das Masterintegral durch eine Linearkombination der in Abb. 3.6(1)-(6) dargestellten Integrale ausgedrückt werden. Das lässt sich dadurch bewerkstelligen, indem das zum Ursprungsintegral ähnliche Integral (1) mit **FIRE** oder **crusher** auf die Masterintegrale (0) und (2)-(6) reduziert wird, und die Relation entsprechend umgestellt. Damit bekommt man die Gleichung

$$(0) = \left(8\epsilon + \dots\right) (1) + \left(\frac{7}{8\epsilon} + \dots\right) (2) + \left(\frac{245}{64\epsilon} + \dots\right) (3) \\ + \left(-\frac{21}{4\epsilon} + \dots\right) (4) + \left(1 + \dots\right) (5) + \left(-\frac{21}{16\epsilon} + \dots\right) (6), \quad (3.12)$$

wobei hier die höheren Terme in der ϵ -Entwicklung weggelassen wurden, da die genaue Form für die weitere Diskussion nicht relevant ist. Hierbei ist zu beachten, dass der Koeffizient von (1) bereits mit ϵ beginnt und dieses Integral somit um eine Entwicklungsordnung niedriger berechnet werden muss als (0). Das führt dazu, dass dieses Integral in der selben Laufzeit numerisch deutlich präziser berechnet werden kann.

Zwar werden die anderen Integrale zu einer höheren Entwicklungsordnung gebraucht, jedoch sind diese von einer einfacheren Form als das Ursprungsintegral. So lässt sich für das Integral (2) eine Darstellung mit einem dreidimensionalen Mellin-Barnes Integral finden, das sehr genau numerisch berechnet

werden kann. Für die Masterintegrale (3) und (4) gibt es sogar eine eindimensionale Mellin-Barnes-Form und die Integrale (5) und (6) faktorisieren in Integrale auf niedrigerem Schleifenniveau, die somit auch kein Problem darstellen. Es sei angemerkt, dass die einfacheren Integrale auch ohne diesen Basiswechsel im Gesamtergebnis mit hoher Wahrscheinlichkeit anzutreffen sind und daher trotzdem berechnet werden müssen. Setzen wir die numerischen Ergebnisse für die Integrale in Gl. (3.12) ein, so bekommen wir das Resultat

$$\begin{aligned} (0) = & 52.64 \epsilon^{-1} + 4045.18 + (-583.266 \pm 0.005) \epsilon \\ & + (527854 \pm 0.22) \epsilon^2 + (-413715 \pm 3.4) \epsilon^3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die numerischen Unsicherheiten von den verschiedenen Integralen und ϵ -Ordnungen wurden dabei quadratisch addiert, die jedoch komplett von dem Ergebnis des Integrals (1) dominiert werden. Dieses wurde wiederum mit FIESTA auf dem selben Computer wie zuvor (0) berechnet, jedoch betrug die Laufzeit diesmal weniger als 3 Stunden. Der Vergleich mit Gl. (3.11) zeigt, dass durch den Basiswechsel die numerischen Fehler um mehrere Größenordnungen reduziert werden konnten. Natürlich sind auch die beiden Ergebnisse innerhalb der Unsicherheiten konsistent.

3.3 Ergebnisse

Bevor die Ergebnisse zur Vierschleifen-Ordnung präsentiert werden, wollen wir zuerst als Beispiel das Resultat von Feynmandiagrammen mit drei Schleifen zeigen, die durch Lichtstreuung hervorgerufen werden. Dieses Ergebnis ist in kompletter Massenabhängigkeit analytisch bekannt [17]. Bei Verwendung der besprochenen asymptotischen Entwicklung hängt das Resultat jedoch nur durch eine Entwicklung in $x = m_e/m_\mu$, sowie über logarithmische Koeffizienten $\ell_x = \log(x)$, vom Massenverhältnis ab. Da die analytische Entwicklung konsistent mit dem exakten Ergebnis in [17] ist, wird diese im Anhang B bis zur Ordnung x^4 angegeben und hier nur das Resultat mit numerisch ausgewerteten Koeffizienten gezeigt.

$$\begin{aligned} A_{2,\text{lbl}}^{(6)}(m_\mu/m_e) = & -14.5525 - 6.5797 \ell_x \\ & + x [18.0169 - 13.1595 \ell_x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^2 [-12.4582 + 1.5944 \ell_x - 5.5700 \ell_x^2 + 0.6667 \ell_x^3] \\
& + x^3 [-12.0628 - 10.9662 \ell_x] \\
& + x^4 [14.4529 - 19.0431 \ell_x + 2.2778 \ell_x^2 - 0.7778 \ell_x^3] \\
= & - 14.5525 + 35.0805 \\
& + [0.08714 + 0.3393] \\
& + [-0.0002914 - 0.0001988 - 0.003703 - 0.002363] \\
& + [-0.0000014 + 0.0000066] \\
& + [0.0000000079 + 0.000000056 \\
& \quad + 0.000000035 + 0.000000064] \\
= & 20.5280 + 0.4265 - 0.006557 + 0.0000052 + 0.0000002 \\
= & 20.9479. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Es ist interessant zu sehen, dass die höheren geraden Entwicklungsordnungen x^2 und x^4 logarithmische Terme bis zur dritten Potenz enthalten, die anderen Ordnungen jedoch nur lineare Terme in ℓ_x . Beim gezeigten Ergebnis werden zuerst die Werte für $x \approx 1/206.7682843$ [96], sowie ℓ_x , eingesetzt. Dabei werden die Summanden getrennt gelassen, sodass der numerische Einfluß zwischen den Logarithmen und Konstanten zu erkennen ist. Es ist zu sehen, dass in jeder Ordnung der logarithmische Beitrag am größten ist. Beim x^2 -Koeffizienten sind die Terme von ℓ_x^2 und ℓ_x^3 sogar etwa zehn mal so groß wie die Konstante und der ℓ_x -Term. Im nächsten Schritt werden die Summen für jede Entwicklungsordnung in x einzeln ausgeführt, sodass eine schnelle Konvergenz zu beobachten ist. Der lineare Term trägt noch etwa 2% von der führenden Ordnung bei. Der quadratische Beitrag ist dagegen bereits ziemlich klein und fällt nur zu etwa 0.03% aus. Die kubische und quadratische Ordnung haben einen vernachlässigbaren Einfluß von unter 0.00003%. Am Schluß wird das Gesamtergebnis gezeigt.

Zur Vollständigkeit geben wir die bekannten numerischen Gesamtergebnisse zur Zwei- und Dreischleifen-Ordnung an [4], für die analytischen Entwicklungen siehe Anhang B.

$$\begin{aligned}
A_{2,\mu}^{(4)}(m_\mu/m_e) &= 1.0942583119(81), \\
A_{2,\mu}^{(6)}(m_\mu/m_e) &= 22.86838004(19). \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Die Unsicherheiten beziehen sich auf den Fehler des Massenverhältnisses. Dabei ist interessant, dass der oben besprochene Anteil von Diagrammen

mit Lichtstreuung über 90 % des gesamten Koeffizienten auf drei Schleifen stellt.

In ähnlicher Weise zu Gl. (3.14) seien nun die Ergebnisse zu vier Schleifen gezeigt. Da die Integrale zum Teil mit numerischer Integration berechnet wurden, liegen keine vollständigen analytischen Resultate vor. Somit sind die numerischen Ergebnisse zu Integralen mit Fehlern behaftet, die mit quadratischer Fehlerfortpflanzung die Unsicherheiten der Endergebnisse bestimmen.

3.3.1 Diagrammgruppen mit Lichtstreuung

Zuerst sei der numerisch wichtigste Beitrag gezeigt. Wie bereits auf Dreischleifen-Niveau beobachtet wird dieser mit Feynmandiagrammen beschrieben, die durch Lichtstreuung hervorgerufen werden. Im Grunde jedoch dominiert hierbei nur die Klasse mit zwei Elektronschleifen, die im Folgenden mit IV(a0) bezeichnet wird und eine Untergruppe von IV(a) darstellt, siehe Abb. 3.1. Da bei diesen Diagrammen die auftretenden on-shell Integrale zur Vierschleifen-Ordnung analytisch bekannt sind [28], lässt sich somit auch die logarithmische Abhängigkeit analytisch bestimmen, obwohl manche Vierschleifen-Integrale vom linearen Typ nur numerisch berechnet wurden. Hier sei jedoch nur das numerische Ergebnis gezeigt,

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{IV}(a0)} &= 7.5018 \pm 0.0026 + 14.8808 \ell_x + 6.5797 \ell_x^2 \\
&\quad + x [6.29 \pm 0.46 - 14.6216 \ell_x + 8.7729 \ell_x^2] \\
&\quad + x^2 [-16.81 \pm 0.43 + 30.0172 \ell_x - 6.5069 \ell_x^2 \\
&\quad\quad + 7.6489 \ell_x^3 - 0.8889 \ell_x^4] \\
&\quad + x^3 [-48.31 \pm 0.24 - 4.8739 \ell_x + 13.1595 \ell_x^2] \\
&= 7.5018 \pm 0.0026 - 79.3384 + 187.0352 \\
&\quad + [0.0304 \pm 0.0022 + 0.3770 + 1.2061] \\
&\quad + [-0.000393 \pm 0.000010 - 0.003743 - 0.004326 \\
&\quad\quad - 0.02711 - 0.01680] \\
&\quad + [-0.0000055 + 0.0000029 + 0.0000423] \\
&= [115.1986 \pm 0.0026] + [1.6135 \pm 0.0022] \\
&\quad + [-0.052378 \pm 0.000010] + [0.000040] \\
&= 116.7598 \pm 0.0034. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Dreischleifen-Ergebnis in Gl. (3.14) treten hier auf führender Ordnung in x sogar quadratische logarithmische Terme auf, das auf die zwei Elektronschleifen zurückzuführen ist. Obwohl mehr als 40 % des quadratischen Logarithmus vom linearen Term subtrahiert wird, bleibt ein großer numerischer Wert übrig. Die Konstante liefert dazu nur um eine Größenordnung kleineren Beitrag. Das ist zum Ergebnis auf drei Schleifen vergleichbar, bei dem eine ähnliche Differenz zwischen dem Logarithmus und der Konstanten stattfindet. Die höheren Ordnungen vom Vierschleifen-Ergebnis enthalten analog eine Potenz in ℓ_x mehr als das in Gl. (3.14) der Fall ist. Ebenso ist hier die Konvergenz sehr gut, sodass der x^3 -Term nur einen vernachlässigbaren Beitrag liefert.

Die weiteren Feynmandiagramme zur Klasse IV(a) mit zwei Fermionschleifen ergeben sich aus IV(a0), wobei eine Elektronschleife durch eine Muonschleife ersetzt wird. Kommt das Muon in der photonischen Polarisationsfunktion vor, so wird das mit IV(a1) bezeichnet. Mit IV(a2) dagegen werden Diagramme zusammen gefasst, bei denen das externe Photon an die Muonschleife koppelt.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),IV(a1)} &= 2.734 \pm 0.028 \\
&\quad + x [-9.5571] \\
&\quad + x^2 [-7.494 \pm 0.033 - 14.2010 \ell_x + 0.3559 \ell_x^2] \\
&\quad + x^3 [6.1668 - 9.0654 \ell_x] \\
&= 2.734 \pm 0.028 \\
&\quad + [-0.04622] \\
&\quad + [-0.000175 \pm 0.000001 + 0.001771 + 0.0002366] \\
&\quad + [0.000001 + 0.000005] \\
&= [2.734 \pm 0.028] + [-0.04622] \\
&\quad + [0.001832 \pm 0.000001] + [0.000006] \\
&= 2.690 \pm 0.028, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),IV(a2)} &= 0.370 \pm 0.033 - 0.7420 \ell_x \\
&\quad + x [0] \\
&\quad + x^2 [0.8628 \pm 0.002618] \\
&\quad + x^3 [-2.6844] \\
&= [0.370 \pm 0.033 + 3.9561]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [0] \\
& + [0.00002018 \pm 0.00000006] \\
& + [-0.0000003] \\
& = [4.326 \pm 0.03288] + [0] + [0.00002018 \pm 0.00000006] \\
& \quad + [-0.0000003] \\
& = 4.326 \pm 0.033 .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Da bei diesen Diagrammklassen eine Muonschleife vorkommt, kann in der asymptotischen Entwicklung keine Region auftreten, bei der alle Schleifenimpulse von der Skala der Elektronmasse sind, sodass auch keine linearen Integrale mit vier Schleifen vorkommen. Dadurch war es hier möglich alle logarithmischen Terme analytisch zu bestimmen. Ebenso ist es für Konstanten bei ungeraden Ordnungen x und x^3 der Fall, da die on-shell Integrale mit vier Schleifen nur zu geraden Ordnungen beitragen. Bei IV(a1) verschwindet die lineare Ordnung sogar, damit stellt der führende Term eine gute Approximation dar, wobei der Logarithmus um mehr als eine Größenordnung über der Konstanten dominiert.

Die letzten Feynmandiagramme mit Lichtstreuung enthalten nur eine Fermionschleife. In IV(b) bekommt die Elektronschleife photonische Korrekturen, bei IV(c) treten diese bei der Muonlinie auf.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{IV}(b)} & = 27.395 \pm 0.014 + (4.93482 \pm 0.00003) \ell_x \\
& \quad + x [-0.81 \pm 1.22 + 59.0235 \ell_x] \\
& \quad + x^2 [142.5 \pm 7.6 + 40.6546 \ell_x + 20.5582 \ell_x^2 \\
& \quad \quad - 9.6167 \ell_x^3 + 0.8333 \ell_x^4] \\
& \quad + x^3 [62.11 \pm 2.89 + 132.7421 \ell_x - 40.9406 \ell_x^2] \\
& = 27.395 \pm 0.014 + (-26.3105 \pm 0.0002) \\
& \quad + [-0.0039 \pm 0.0059 - 1.5219] \\
& \quad + [0.003334 \pm 0.0001769 - 0.005070 + 0.01367 \\
& \quad \quad + 0.03409 + 0.01575] \\
& \quad + [0.000007 \pm 0. - 0.000080 - 0.000132] \\
& = [1.084 \pm 0.014] + [-1.5259 \pm 0.0059] \\
& \quad + [0.06177 \pm 0.00018] + [-0.0002047] \\
& = -0.380 \pm 0.016 ,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),IV(c)} &= -14.900 \pm 0.059 - 3.2899 \ell_x \\
&+ x [65.4209] \\
&+ x^2 [33.61 \pm 9.96 + (56.76 \pm 0.78) \ell_x \\
&\quad + (-24.66 \pm 0.27) \ell_x^2 + (-1.935 \pm 0.091) \ell_x^3] \\
&+ x^3 [25.11 \pm 0.60 + 107.4325 \ell_x - 19.8610 \ell_x^2] \\
&= -14.9 \pm 0.05945 + 17.54 \\
&+ [0.3164] \\
&+ [0.00079 \pm 0.00023 + (-0.007078 \pm 0.000097) \\
&\quad + (-0.01640 \pm 0.00018) + (0.00686 \pm 0.00032)] \\
&+ [0.00000284 \pm 0.00000007 - 0.00006479 - 0.00006387] \\
&= [2.641 \pm 0.059] + [0.3164] + [-0.01583 \pm 0.00045] \\
&\quad + [-0.00012582 \pm 0.00000007] \\
&= 2.941 \pm 0.059. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Bei beiden Klassen heben sich in führender Ordnung die Beiträge vom Logarithmus und der Konstanten größtenteils weg. Dennoch kommt bei IV(c) ein zu IV(a1) und IV(a2) vergleichbares Endergebnis heraus. Bei IV(b) dagegen führt es dazu, dass der führende Beitrag etwas kleiner als der lineare Term ist. Da diese sogar ein anderes Vorzeichen haben, kürzt sich nochmal ein deutlicher Beitrag heraus, sodass das Endergebnis zu IV(b) den kleinsten Wert von den oben besprochenen Ergebnissen liefert. Außerdem hat deswegen die x^3 -Ordnung von IV(b) einen nicht unwichtigen Einfluß von ungefähr 0.05 %. Da mit Ausnahme der führenden Ordnung die Konvergenz der Entwicklung gewährleistet ist, ist es zu erwarten, dass noch höhere Terme einen vernachlässigbaren Wert liefern.

3.3.2 Verbleibende Diagrammklassen

Kommen wir nun zu Feynmandiagrammen, bei denen das externe Photon nicht an eine Fermionschleife koppelt, siehe Abb. 3.1. Für diese wird wiederum eine weitere Aufteilung analog wie bei Klasse IV(a) durchgeführt. Die Diagramme aus I(a) enthalten drei Fermionschleifen-Korrekturen zu einem Photonpropagator. Die weitere Aufspaltung kann somit in drei Klassen erfolgen. Bei I(a0) sind alle drei internen Fermionen Elektronen, in I(a1) kommt

eine Muon- und zwei Elektronschleifen vor, in der Klasse I(a2) enthalten zwei der Fermionenschleifen Muonen und nur eine Elektronen.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),I(a0)} &= -3.266377 - 2.687872 \ell_x - 0.925926 \ell_x^2 - 0.148148 \ell_x^3 \\
&\quad + x[6.40516] \\
&\quad + x^2[17.24475 + 20.03224 \ell_x + 5.77778 \ell_x^2 + 1.77778 \ell_x^3] \\
&\quad + x^3[-52.0022] \\
&= [-3.26638 + 14.33065 - 26.32032 + 22.45270] \\
&\quad + [0.0309775] \\
&\quad + [0.000403 - 0.002498 + 0.003842 - 0.006302] \\
&\quad + [-0.000005883] \\
&= [7.19666] + [0.03098] + [-0.004555] + [-0.000005883] \\
&= 7.22308, \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),I(a1)} &= 0.0167998 + 0.0220046 \ell_x + 0.0209166 \ell_x^2 \\
&\quad + x[0] \\
&\quad + x^2[-0.548361 - 0.254463 \ell_x] \\
&\quad + x^3[0] \\
&= [0.016700 - 0.117320 + 0.594573] + [0] \\
&\quad + [-0.00001283 + 0.00003173] + [0] \\
&= [0.494053] + [0] + [0.00001891] + [0] \\
&= 0.494072, \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),I(a2)} &= 0.000706151 - 0.00511705 \ell_x \\
&\quad + x[0] \\
&\quad + x^2[0.00493387] \\
&\quad + x^3[0] \\
&= [0.0007062 + 0.0272821] + [0] + [0.0000001154] + [0] \\
&= [0.0279882] + [0] + [0.0000001154] + [0] \\
&= 0.0279883. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Analog zu IV(a0) kommen in der führenden Ordnung von I(a0) aufgrund der drei Elektronschleifen logarithmische Terme sogar zur dritten Potenz vor. Jedoch tritt zwischen den logarithmischen Beiträgen eine ziemlich große Aufhebung auf, sodass nur ein moderat großer Wert bleibt. Die lineare Ordnung hat

dagegen keine Logarithmen, so tragen die höheren Entwicklungsterme weniger als ein Prozent zum Ergebnis bei. Mit jeder zusätzlichen Muonschleife nimmt auch die höchste Potenz der Logarithmen ab. Das hat zur Folge, dass die Resultate von $I(a1)$ und $I(a2)$ um eine bzw. zwei Größenordnungen kleiner sind als das Ergebnis zu $I(a0)$. Da die ungeraden Ordnungen von $I(a1)$ und $I(a2)$ verschwinden, stellt der mit x^2 unterdrückte Term den größten Beitrag der höheren Korrekturen dar. Diese sind jedoch sehr klein, sodass die Näherung mit masselosen Elektronen dabei sehr präzise ist. Außerdem treten bei den drei Klassen zu $I(a)$ relativ einfache Masterintegrale mit vier Schleifen auf, so konnte $I(a0)$ und $I(a2)$ numerisch sehr genau bestimmt werden, und $I(a1)$ analytisch. Deswegen sind in den gezeigten Ergebnissen die sehr kleinen numerischen Unsicherheiten nicht dargestellt.

Die nächsten Klassen $I(b)$ und $I(c)$ können aus dem Einschleifen-Diagramm erzeugt werden, indem das Photon Selbstenergiekorrekturen mit zwei Leptonschleifen bekommt. Da in dieser Arbeit bei der Berechnung dieser Beiträge eine multiplikative Renormierung für α verwendet wurde, tragen zu beiden Diagrammklassen Counterterme bei, die von gleichen Diagrammen auf niedriger Schleifenordnung stammen. Um diese Counterterm-Beiträge zu unterscheiden, können bei der Auswertung der Feynmandiagramme explizite Counterterm-Einsetzungen verwendet werden, das jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt wurde. Da wir deswegen $I(b)$ und $I(c)$ nicht getrennt renormieren können, verzichten wir auf eine Aufspaltung in diese Klassen und betrachten damit nur die Summe der beiden Klassen, $I(bc)$. Dennoch teilen wir diese Summe anhand der vorkommenden Leptonarten auf, in $I(bc0)$ mit zwei Elektronschleifen und in die Klassen mit einer Elektron- und einer Muonschleife, $I(bc1)$ und $I(bc2)$. In $I(bc1)$ hat die Elektronschleife vier Photonkopplungen und die Muonschleife zwei, dazu sind bei der Klasse $I(bc2)$ die Leptonschleifen vertauscht.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),I(bc0)} &= 0.558875 + 0.714610 \ell_x + 0.416667 \ell_x^2 \\
&\quad + x[-8.77188 \pm 0.00035] \\
&\quad + x^2[-51.3498 - 61.6586 \ell_x - 18 \ell_x^2 - 6.6667 \ell_x^3] \\
&\quad + x^3[176.8096 \pm 0.0014] \\
&= [0.55887 - 3.81001 + 11.84414] \\
&\quad + [-0.0424237 \pm 0.0000017] \\
&\quad + [-0.00120 + 0.00769 - 0.01197 + 0.02363]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [0.00002000] \\
& = [8.59301] + [-0.0424237 \pm 0.0000017] \\
& \quad + [0.018153] + [0.00002000] \\
& = 8.568755 \pm 0.000002, \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),I(bc1)} & = 0.057516 \pm 0.001200 - 0.0156874 \ell_x \\
& \quad + x[0] \\
& \quad + x^2[0.30059 \pm 0.00017 + 0.359473 \ell_x] \\
& \quad + x^3[3.15081 - 0.292433 \ell_x] \\
& = [0.057516 \pm 0.001200 + 0.083639] \\
& \quad + [0] \\
& \quad + [0.0000070307 \pm 0.000000040 - 0.0000448286] \\
& \quad + [0.0000003564 + 0.0000001764] \\
& = [0.141155 \pm 0.001200] + [0] + [-0.0000377979 \pm 0.0000000040] \\
& \quad + [0.0000005328] \\
& = 0.1411 \pm 0.0012, \tag{3.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),I(bc2)} & = -0.068531 \pm 0.000075 - 0.105741 \ell_x \\
& \quad + x[0.0626838] \\
& \quad + x^2[0.422851 \pm 0.000053] \\
& \quad + x^3[-3.26780] \\
& = [-0.068531 \pm 0.000075 + 0.563770] \\
& \quad + [0.0003032] \\
& \quad + [0.0000098905 \pm 0.0000000012] \\
& \quad + [-0.0000003697] \\
& = [0.495239 \pm 0.000075] + [0.0003032] \\
& \quad + [0.0000098905 \pm 0.0000000012] + [-0.0000003697] \\
& = 0.495552 \pm 0.000075. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Die Struktur der führenden Ordnung verhält sich wie bei den oben besprochenen Klassen. Damit treten bei I(bc0) logarithmische Terme zur zweiten Potenz auf und bei I(bc1) und I(bc2) nur einfache, sodass die Endergebnisse von I(bc1) und I(bc2) wiederum um mehr als eine Größenordnung kleiner sind als I(bc0). Interessanterweise ist der x^2 -Beitrag zu I(bc0) etwa 40% von der Größe des x -Terms, jedoch vom anderen Vorzeichen, sodass insgesamt die

höheren Ordnungen trotzdem eine kleine Korrektur liefern. Die x^3 -Ordnung skaliert wiederum wie es von der Entwicklung zu erwarten ist.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{I(d)}} &= -0.124375 + 0.03125 \ell_x \\
&+ x[17.4222 \pm 0.0997] \\
&+ x^2[40.1185 + 53.5293 \ell_x + 5.25 \ell_x^2 + 6 \ell_x^3] \\
&+ x^3[-349.570 \pm 2.148] \\
&= [-0.124375 - 0.166612] \\
&+ [0.08426 \pm 0.00048] \\
&+ [0.0009384 - 0.0066755 + 0.0034907 - 0.0212694] \\
&+ [-0.00003954 \pm 0.00000024] \\
&= [-0.290987] + [0.08426 \pm 0.00048] \\
&+ [-0.0235159] + [-0.00003954 \pm 0.00000024] \\
&= -0.23028 \pm 0.00048. \tag{3.27}
\end{aligned}$$

Die Klasse I(d), die von einer photonischen Selbstenergiekorrektur mit genau einer Elektronschleife hervorgeht, zeigt ein schlechteres Konvergenzverhalten bei ersten Entwicklungsordnungen in x auf, als das bei anderen Ergebnissen der Fall ist. Erst der x^3 -Term bestätigt die Konvergenz der Massenentwicklung, sodass es hierbei wichtig war diesen auszuwerten. Auch ist somit die Annäherung mit masselosen Elektronen hier nicht sinnvoll. Der lineare Term in der Entwicklung ist ungefähr gleich 29 % von der führenden Ordnung. Fast genauso verhalten sich auch die quadratische und lineare Ordnung zueinander. Erst mit dem kubischen Term tritt eine übliche Skalierung auf, da dieser im Vergleich zu x^2 kleiner als 0.2 % ist und zum führenden Term sogar kleiner als 0.02 %.

Die nächsten diskutierten Klassen können von Feynmandiagrammen mit zwei Photonen und zwei Schleifen erzeugt werden. Dabei kann entweder genau eine Korrektur zum Photonpropagator auftreten und somit eine Elektronschleife, bei II(a), oder zwei Fermionschleifen-Korrekturen, bei II(b) und II(c). Da wir hier aufgrund der multiplikativen Renormierung wie bei I(b) und I(c) auch II(b) und II(c) nicht unterscheiden können, fassen wir diese zu II(bc) zusammen. Dazu werden mit II(bc0) bzw. II(bc1) Diagramme mit zwei Elek-

tronschleifen bzw. einer Elektron- und einer Muonschleife bezeichnet.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{II(a)}} &= -0.934278 + 0.344166 \ell_x \\
&\quad + x[-2.83881] \\
&\quad + x^2[-9.44284 - 2.73820 \ell_x + 6 \ell_x^2] \\
&\quad + x^3[234.5798 \pm 0.0044 + 37.9774 \ell_x] \\
&= [-0.93428 - 1.83496] \\
&\quad + [-0.0137294] \\
&\quad + [-0.0002209 + 0.0003415 + 0.0039893] \\
&\quad + [0.0000265362 \pm 0.0000000005 - 0.0000229050] \\
&= [-2.76923] + [-0.0137294] \\
&\quad + [0.004110] + [0.0000036312 \pm 0.0000000005] \\
&= -2.77885, \tag{3.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{II(bc0)}} &= 0.307547 - 0.0974404 \ell_x - 0.458889 \ell_x^2 \\
&\quad + x[-2.97459 - 0.822467 \ell_x] \\
&\quad + x^2[8.84230 - 9.50786 \ell_x - 5.33333 \ell_x^2] \\
&\quad + x^3[-7.15473 \pm 0.00091 + 53.9477 \ell_x + 4.38649 \ell_x^2] \\
&= [0.3075 + 0.5195 - 13.0443] \\
&\quad + [-0.0143861 + 0.0212076] \\
&\quad + [0.000207 + 0.001186 - 0.003546] \\
&\quad + [-0.00000081 - 0.00003254 + 0.00001411] \\
&= [-12.2173] + [0.006822] + [-0.002154] + [-0.00001924] \\
&= -12.2126, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{II(bc1)}} &= -0.0817145 \pm 0.0000026 + 0.300345 \ell_x \\
&\quad + x[-0.0239766] \\
&\quad + x^2[-0.0725930 \pm 0.0000015 + 0.125499 \ell_x] \\
&\quad + x^3[-0.323625] \\
&= [-0.081714 \pm 0.000003 - 1.601317] \\
&\quad + [-0.0001160] \\
&\quad + [-0.00000170 - 0.00001565] \\
&\quad + [-0.0000003661] \\
&= [-1.683031 \pm 0.000003] + [-0.0001160]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [-0.00001735] + [-0.00000003661] \\
& = -1.683165 \pm 0.000003.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Die Struktur der Ergebnisse von II(bc0) und II(bc1) ist analog zu den I(bc)-Klassen. Jedoch haben diese Resultate ein anderes Vorzeichen. Ebenso liefert auch II(a) einen negativen Beitrag. Zwar sind die Ergebnisse von II(a) und II(bc1) vergleichbar, jedoch zeigt die Entwicklung von II(a) eine schlechtere Konvergenz, sodass diese Klasse Korrekturen von fast 0.5% aus höheren Ordnungen erhält.

Die Anwendung der asymptotischen Entwicklung auf Feynmandiagramme der Klasse III, mit drei Photonen und einer Elektronschleifen-Einsetzung, führt auf Regionen bei denen die kompliziertesten Tensorstrukturen als bei anderen Diagrammen auftreten. Jedoch heben sich überraschend die Vierschleifen-Integrale vom linearen Typ bei den hier berechneten Ordnungen gegeneinander weg. Das passiert erst nachdem die Integrale auf Masterintegrale reduziert wurden und diese von verschiedenen Integralfamilien miteinander identifiziert wurden. So trägt jedes Feynmandiagramm einen Anteil mit linearen Vierschleifen-Integralen bei, die sich erst in der Summe wegheben. Aus diesem Grund konnten die ungeraden Ordnungen, sowie bei anderen die Logarithmen, analytisch bestimmt werden. Außerdem ist es interessant, dass obwohl nur lineare logarithmische Terme vorkommen, das Ergebnis trotzdem mit der Größe von I(bc0) und II(bc0) vergleichbar ist, die jedoch quadratische Logarithmen aufweisen. Der ziemlich große Wert der führenden Entwicklungsordnung trägt auch dazu bei, dass der Beitrag der höheren Ordnungen mit unter 0.04% sehr klein ausfällt. Als Ergebnis für die Diagrammklasse III erhalten wir:

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{III}} &= 1.15444 \pm 0.00446 - 1.80996 \ell_x \\
&+ x[-0.849197] \\
&+ x^2[-1.95556 \pm 0.00400 - 1.25333 \ell_x] \\
&+ x^3[-20.2365 - 15.3527 \ell_x] \\
&= [1.1544 \pm 0.0045 + 9.6500] \\
&+ [-0.004107] \\
&+ [-0.00004574 \pm 0.00000009 + 0.00015630] \\
&+ [-0.000002289 + 0.000009260] \\
&= [10.8044 \pm 0.0045] + [-0.004107]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [0.00011056 \pm 0.00000009] + [0.000006970] \\
& = 10.8004 \pm 0.0045.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Die Feynmandiagramme der letzten Klasse IV(d) weisen eine Lichtreuung zwischen vier internen Photonen auf, und unterscheiden sich damit, dass sie nicht aus Diagrammen von niedrigeren Schleifenordnungen durch Selbstenergie-Einsetzungen erzeugt werden können. Aus diesem Grund treten hier auch Masterintegrale mit der maximal möglichen Anzahl an Propagatoren auf, die dem vollen Diagramm entsprechen und somit am schwierigsten auszuwerten sind. Außerdem treten deswegen keine Logarithmen in der führenden Ordnung auf. Das liegt daran, dass der führende Term in der Entwicklung für alle Feynmandiagramme ohne eine externe Lichtstreuung im Grenzfall $m_e = 0$ berechnet werden kann. Die logarithmischen Terme ergeben sich dabei aus der $\overline{\text{MS}}$ -OS-Relation von α . Diese treten demnach nur bei Diagrammen auf, die Selbstenergiekorrekturen zu Photonpropagatoren enthalten, das jedoch nur bei der Gruppe IV(d) nicht der Fall ist. Obwohl keine logarithmische Verstärkung vorliegt ist der Beitrag der führenden Ordnung von IV(d) ziemlich groß, die lineare Ordnung ist dagegen sehr klein und ungefähr gleich der quadratischen Ordnung. Somit ist hier die Näherung durch masselose Elektronen sehr gut erfüllt.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{IV(d)}} &= -4.33491 \pm 0.06055 \\
& + x[1.61430 \pm 0.09570] \\
& + x^2[-435.46 \pm 13.85 + (-135.694 \pm 0.166) \ell_x] \\
& + x^3[-328.90 \pm 24.77 - 614.619 \ell_x + 39.4784 \ell_x] \\
& = [-4.33491 \pm 0.06055] \\
& + [0.007807 \pm 0.000463] \\
& + [-0.010186 \pm 0.000324 + (0.016922 \pm 0.000021)] \\
& + [-0.0000372 \pm 0.0000028 + 0.0003707 + 0.0001269] \\
& = [-4.335 \pm 0.061] + [0.00781 \pm 0.00046] \\
& + [0.00710 \pm 0.00037] + [0.0004604 \pm 0.0000028] \\
& = -4.320 \pm 0.061.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Die Endergebnisse für alle Diagrammklassen mit vier Schleifen, Gl. (3.16) bis (3.32), sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst und werden mit den bereits aus

$A_2^{(8)}(m_\mu/m_e)$	diese Arbeit	Literatur	
I(a0)	7.223076	7.223077 ± 0.000029	[108]
		7.223076	[25]
I(a1)	0.494072	0.494075 ± 0.000006	[108]
		0.494072	[25]
I(a2)	0.027988	0.027988 ± 0.000001	[108]
		0.027988	[25]
I(a)	7.745136	7.74547 ± 0.00042	[7]
I(bc0)	8.56876 ± 0.00001	8.56874 ± 0.00005	[108]
I(bc1)	0.1411 ± 0.0060	0.141184 ± 0.000003	[108]
I(bc2)	0.4956 ± 0.0004	0.49565 ± 0.00001	[108]
I(bc)	9.2054 ± 0.0060	9.20632 ± 0.00071	[7]
I(d)	$- 0.2303 \pm 0.0024$	$- 0.22982 \pm 0.00037$	[7]
		$- 0.230362 \pm 0.000005$	[19]
II(a)	$- 2.77885$	$- 2.77888 \pm 0.00038$	[7]
		$- 2.77885$	[25]
II(bc0)	-12.212631	-12.21247 ± 0.00045	[108]
II(bc1)	$- 1.683165 \pm 0.000013$	$- 1.68319 \pm 0.00014$	[108]
II(bc)	-13.895796 ± 0.000013	-13.89457 ± 0.00088	[7]
III	10.800 ± 0.022	10.7934 ± 0.0027	[7]
IV(a0)	116.76 ± 0.02	116.759183 ± 0.000292	[108]
		111.1 ± 8.1	[23]
		117.4 ± 0.5	[24]
IV(a1)	2.69 ± 0.14	2.697443 ± 0.000142	[108]
IV(a2)	4.33 ± 0.17	4.328885 ± 0.000293	[108]
IV(a)	123.78 ± 0.22	123.78551 ± 0.00044	[7]
IV(b)	$- 0.38 \pm 0.08$	$- 0.4170 \pm 0.0037$	[7]
IV(c)	2.94 ± 0.30	2.9072 ± 0.0044	[7]
IV(d)	$- 4.32 \pm 0.30$	$- 4.43243 \pm 0.00058$	[7]

Tabelle 3.1: Zusammenfassung der Elektronbeiträge von a_μ auf Vierschleifen-Niveau und Vergleich mit der Literatur. Die Unsicherheiten der verwendeten Resultate aus Gl. (3.16) bis (3.32) wurden mit 5 multipliziert.

der Literatur bekannten Resultaten verglichen. Um eine konservative Fehlerabschätzung zu erhalten, wurden dabei die numerischen Unsicherheiten mit Faktor fünf multipliziert. Für die meisten Diagrammklassen, bei denen das externe Photon nicht an eine Leptonschleife koppelt, sind die Unsicherheiten unserer Ergebnisse unter 0.2% und oft deutlich niedriger. Die Ausnahmen dazu sind einerseits die numerisch kleinen Ergebnisse zu I(bc1) und I(d), bei denen der Fehler im Prozentbereich liegt, jedoch absolut gesehen sehr klein ist. Die Klasse IV(d) hat einen relativen Fehler von fast 7%, dessen absoluter Wert auch zu den größten gehört. Die Diagrammklassen mit externer Lichtsreuung tragen die größten numerischen Unsicherheiten, und sind bei den kleinen Ergebnissen, IV(b) und IV(c), auch relativ am größten.

Der Vergleich mit der Literatur zeigt eine sehr gute Übereinstimmung innerhalb der numerischen Unsicherheiten. Bei der Diagrammklasse II(bc) und dessen Untergruppen konnte eine Verbesserung gegenüber den bekannten Werten erreicht werden, sodass die Unsicherheiten um mehr als eine Größenordnung reduziert wurden. In Ref. [25] sind im Massenverhältnis entwickelte analytische Ergebnisse bis einschließlich $(m_e/m_\mu)^2$ angegeben. Die Ergebnisse zu I(a0), I(a2) und II(a) konnten wir bis zu sehr hoher numerischer Genauigkeit ($\sim 10^{-12}$) bestätigen, sowie I(a1) analytisch. Im Folgenden sind unsere Resultate zu diesen Beiträgen gezeigt.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),I(a0)} &= -\frac{8609}{5832} - \frac{25\pi^2}{162} - \frac{2\zeta_3}{9} + \left(-\frac{317}{162} - \frac{2\pi^2}{27}\right) \ell_x - \frac{25}{27} \ell_x^2 - \frac{4}{27} \ell_x^3 \\
&\quad + 6.405155074501456 x \\
&\quad + x^2 \left(\frac{967}{315} + \frac{26\pi^2}{27} + \frac{136\zeta_3}{35} + \left(\frac{304}{27} + \frac{8\pi^2}{9}\right) \ell_x + \frac{52}{9} \ell_x^2 + \frac{16}{9} \ell_x^3\right) \\
&\quad - 52.00224911971472 x^3, \\
A_2^{(8),I(a1)} &= \frac{7627}{1944} + \frac{13\pi^2}{27} - \frac{4\pi^4}{45} + \ell_x \left(\frac{61}{81} - \frac{2\pi^2}{27}\right) + \ell_x^2 \left(\frac{119}{27} - \frac{4\pi^2}{9}\right) \\
&\quad + x^2 \left(\frac{227}{18} - \frac{4\pi^2}{3} + \ell_x \left(\frac{230}{27} - \frac{8\pi^2}{9}\right)\right) \\
A_2^{(8),I(a2)} &= 0.0007061505929186751 + \ell_x \left(\frac{943}{162} + \frac{8\pi^2}{135} - \frac{16\zeta_3}{3}\right) \\
&\quad + 0.004933870387556993 x^2, \\
A_2^{(8),II(a)} &= -0.9342776853294055 + \ell_x \left(\frac{31}{16} - \frac{5\pi^2}{12} + \frac{\pi^2 \log(2)}{2} - \frac{3\zeta_3}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x \left(\frac{79\pi^2}{54} - \frac{13\pi^3}{36} - \frac{8\pi^2 \log(2)}{9} \right) \\
& + x^2 \left(-9.442838330353652 \right. \\
& \quad \left. + \ell_x \left(-\frac{47}{2} + \frac{37\pi^2}{4} - 14\pi^2 \log(2) + 21\zeta_3 \right) + 6\ell_x^2 \right).
\end{aligned}$$

Ein paar andere Klassen wurden bereits im Limes $m_e = 0$ analytisch berechnet. Dazu zählt I(d) aus [27], sowie I(bc0) und II(bc0) in Ref. [28]. Da die höheren Entwicklungsordnungen von II(bc0) nicht in der Literatur analytisch zu finden sind, sei hier unser Ergebnis bis zum x^2 -Term angegeben:

$$\begin{aligned}
A_2^{(8),\text{II}(\text{bc}0)} &= \frac{2299\pi^2}{648} - \frac{17233}{1728} + \frac{40a_4}{3} + \frac{16a_5}{3} - \frac{37\zeta_5}{6} - \frac{\pi^2\zeta_3}{8} + \frac{431\zeta_3}{36} \\
&\quad - \frac{403\pi^4}{3240} - \frac{2\log^5(2)}{45} + \frac{5\log^4(2)}{9} - \frac{4}{27}\pi^2\log^3(2) \\
&\quad - \frac{31}{540}\pi^4\log(2) - \frac{235}{54}\pi^2\log(2) + \frac{10}{9}\pi^2\log^2(2) \\
&\quad + \left(\frac{16a_4}{3} + 7\zeta_3 - \frac{11\pi^4}{108} + \frac{79\pi^2}{27} - \frac{115}{12} \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{2\log^4(2)}{9} + \frac{4}{9}\pi^2\log^2(2) - \frac{10}{3}\pi^2\log(2) \right) \ell_x \\
&\quad + \left(\zeta_3 - \frac{31}{12} + \frac{5\pi^2}{9} - \frac{2}{3}\pi^2\log(2) \right) \ell_x^2 + x \left(-\frac{217\pi^2}{720} - \frac{\pi^2}{12} \ell_x \right) \\
&\quad + x^2 \left(\frac{425}{36} - \frac{112a_4}{3} - \frac{455\zeta_3}{12} + \frac{335\pi^4}{432} - \frac{409\pi^2}{36} \right. \\
&\quad \quad - \frac{14\log^4(2)}{9} - \frac{28}{9}\pi^2\log^2(2) + \frac{299}{18}\pi^2\log(2) \\
&\quad \quad \left. + \left(\frac{13}{3} - 14\zeta_3 - \frac{37\pi^2}{6} + \frac{28}{3}\pi^2\log(2) \right) \ell_x - \frac{16}{3}\ell_x^2 \right).
\end{aligned}$$

Desweiteren konnten die logarithmischen Terme zu den Unterklassen von IV(a), sowie für gewisse Ordnungen von IV(b) und IV(c), analytisch bestimmt werden.

$$A_2^{(8),\text{IV}(\text{a}0)} \Big|_{\ell_x} = \left(-\frac{4}{3} + \frac{8\pi^2}{3} - \frac{8\pi^4}{45} + 6\zeta_3 \right) \ell_x + \frac{2\pi^2}{3} \ell_x^2$$

$$\begin{aligned}
& + x \left(\frac{-40\pi^2}{27} \ell_x + \frac{8\pi^2}{9} \ell_x^2 \right) \\
& + x^2 \left[\left(\frac{47}{3} + 6\pi^2 - \frac{98\pi^4}{405} - 10\zeta_3 - \frac{8\pi^2\zeta_3}{27} - \frac{50\zeta_5}{9} \right) \ell_x \right. \\
& \quad + \left(-\frac{220}{9} + \frac{32\pi^2}{9} - \frac{16\pi^4}{135} - \frac{14\zeta_3}{3} \right) \ell_x^2 \\
& \quad \left. + \left(\frac{82}{9} - \frac{4\pi^2}{27} \right) \ell_x^3 - \frac{8}{9} \ell_x^4 \right] \\
& + x^3 \left(\frac{-40\pi^2}{81} \ell_x + \frac{4\pi^2}{3} \ell_x^2 \right), \\
A_2^{(8),\text{IV(a1)}} \Big|_{\ell_x} & = x^2 \left(\frac{137}{27} - \frac{12629\pi^2}{9720} - \frac{2\ln(2)\pi^2}{3} - \frac{31\pi^4}{405} + \frac{125\zeta_3}{27} \right) \ell_x \\
& \quad + x^2 \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{20}{27} \right) \ell_x^2 - x^3 \frac{124\pi^2}{135} \ell_x, \\
A_2^{(8),\text{IV(a2)}} \Big|_{\ell_x} & = \left(-\frac{10}{9} - 32a_4 - \frac{4\ln^4(2)}{3} - \frac{931\pi^2}{27} + 48\ln(2)\pi^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{4\ln^2(2)\pi^2}{3} + \frac{41\pi^4}{270} + \frac{8\zeta_3}{3} + \frac{5\pi^2\zeta_3}{9} - \frac{5\zeta_5}{3} \right) \ell_x, \\
A_2^{(8),\text{IV(b)}} \Big|_{x^1, \ell_x} & = x \left(3\pi^3 - \frac{31\pi^2}{9} \right) \ell_x, \\
A_2^{(8),\text{IV(b)}} \Big|_{x^3, \ell_x} & = x^3 \left[\left(\frac{137\pi^2}{4050} + \frac{1153\pi^3}{270} \right) \ell_x - \frac{112\pi^2}{27} \ell_x^2 \right], \\
A_2^{(8),\text{IV(c)}} \Big|_{x^0, \ell_x} & = -\frac{\pi^2}{3} \ell_x, \\
A_2^{(8),\text{IV(c)}} \Big|_{x^1, \ell_x} & = 0, \\
A_2^{(8),\text{IV(c)}} \Big|_{x^3, \ell_x} & = x^3 \left[\frac{2939\pi^2}{270} \ell_x - \frac{163\pi^2}{81} \ell_x^2 \right].
\end{aligned}$$

Zum Schluss zeigen wir die Summe der in Tab. 3.1 präsentierten Teilresultate zu den Elektronkorrekturen und dessen Beitrag zum anomalen magnetischen Moment vom Muon.

$$A_{2,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 = 132.86(48) \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 = 386.8(1.4) \cdot 10^{-11}. \quad (3.33)$$

Dieses Ergebnis bestätigt nicht nur den bekannten Gesamtbeitrag von Elektronenschleifen, sondern auch die Abweichung zwischen dem experimentellen Wert und der theoretischen Vorhersage in Ref. [7], die $249(87) \cdot 10^{-11}$ beträgt. Vergleicht man diese aktuelle Diskrepanz mit unserem Ergebnis, so ist deutlich zu sehen, dass unsere numerische Unsicherheit derzeit vollkommen ausreichend ist und das auch in naher Zukunft bleibt. Denn auch wenn die experimentellen und theoretischen Unsicherheiten zu a_μ um Faktor vier reduziert werden, was unter anderem mit neuen Experimenten geplant ist, so bleibt trotzdem unsere numerische Unsicherheit zehn mal kleiner als die der Abweichung.

Kapitel 4

Beitrag zum muonischen anomalen magnetischen Moment von Elektron- und Tau-Schleifen

Das gleichzeitige Auftreten von sowohl Elektron- als auch Tau-Schleifen führt in Feynmandiagrammen zum anomalen magnetischen Moment vom Muon zum interessanten Fall, dass gleichzeitig leichtere und schwerere Leptonen als das externe Muon vorkommen. Aufgrund der Entkopplung vom τ -Lepton sind diese Beiträge mit $1/m_\tau^2$ unterdrückt. Desweiteren bringen die Elektronschleifen $\log(m_e/m_\mu)$ - und $\log(m_e/m_\tau)$ -Terme hervor¹. Jedoch überwiegt der Unterdrückungsfaktor $1/m_\tau^2$ gegenüber der log-Verstärkung, sodass diese Korrekturen insgesamt klein ausfallen.

Die Berechnung des Vierschleifen-Beitrags $A_{3,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau)$ erfolgte mit den gleichen Methoden wie bei den anderen Korrekturen. So wurde eine asymptotische Entwicklung mit $m_e \ll m_\mu \ll m_\tau$ durchgeführt, das ähnliche Regionen und somit auch Integrale wie im reinen Elektron- bzw. Taubeitrag liefert. Dazu ist ein Beispiel im nächsten Kapitel gezeigt. Da wegen dem

¹Für die numerische Auswertung ist es sinnvoll die $\log(m_e/m_\tau)$ -Terme durch die anderen Logarithmen auszudrücken, um den Beitrag von m_e/m_τ zur experimentellen Unsicherheit des Ergebnisses zu eliminieren.

schweren τ -Lepton als Masterintegrale mit vier Schleifen nur die bekannten Vakuumintegrale vorkommen, konnte ein analytisches Ergebnis in Form einer Massenentwicklung bestimmt werden. In Unterkapitel 4.2 wird das Ergebnis angegeben und die numerische Auswertung besprochen.

4.1 Beispiel zur asymptotischen Entwicklung

Aufgrund der drei Massenskalen ist die asymptotische Entwicklung verglichen mit den Zweiskalen-Rechnungen schwieriger durchzuführen. Da außerdem beim a_μ ein leichteres Lepton, als die externe Skala, vorkommt und somit nicht entkoppelt, führt das zu einem komplizierteren Verhalten als bei der a_e -Berechnung. Die asymptotische Entwicklung haben wir wie für die Rechnung in Kap. 3 mit dem Mathematica-Paket durchgeführt, das im Anhang C erläutert ist. Dabei wurde wiederum sowohl die eigenständige Methode zur Bestimmung der asymptotischen Regionen verwendet, sowie `asy`, das die selben Regionen liefert. Um die asymptotische Entwicklung beispielhaft aufzuzeigen, werden für das Feynmandiagramm in Abb. 4.1 die 26 resultierenden Regionen in Abb. 4.2 bis 4.4 diagrammatisch dargestellt. Aufgrund der Entkopplung des τ -Leptons weisen alle Regionen mindestens Einschleifen-

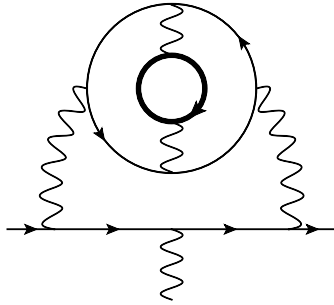


Abbildung 4.1: Feynmandiagramm zu a_μ mit einer Elektron- und Tau-Schleife. Die Schleifen mit durchgezogenen dünnen bzw. dicken Linien beinhalten e - bzw. τ -Leptonen. Die untere durchgezogene Linie steht entsprechend für das äußere Muon. Wellenlinien stellen Photonen dar. Die asymptotische Entwicklung in $m_e \ll m_\mu \ll m_\tau$ führt auf Regionen, die in den Abb. 4.2, 4.3 und 4.4 zu sehen sind.

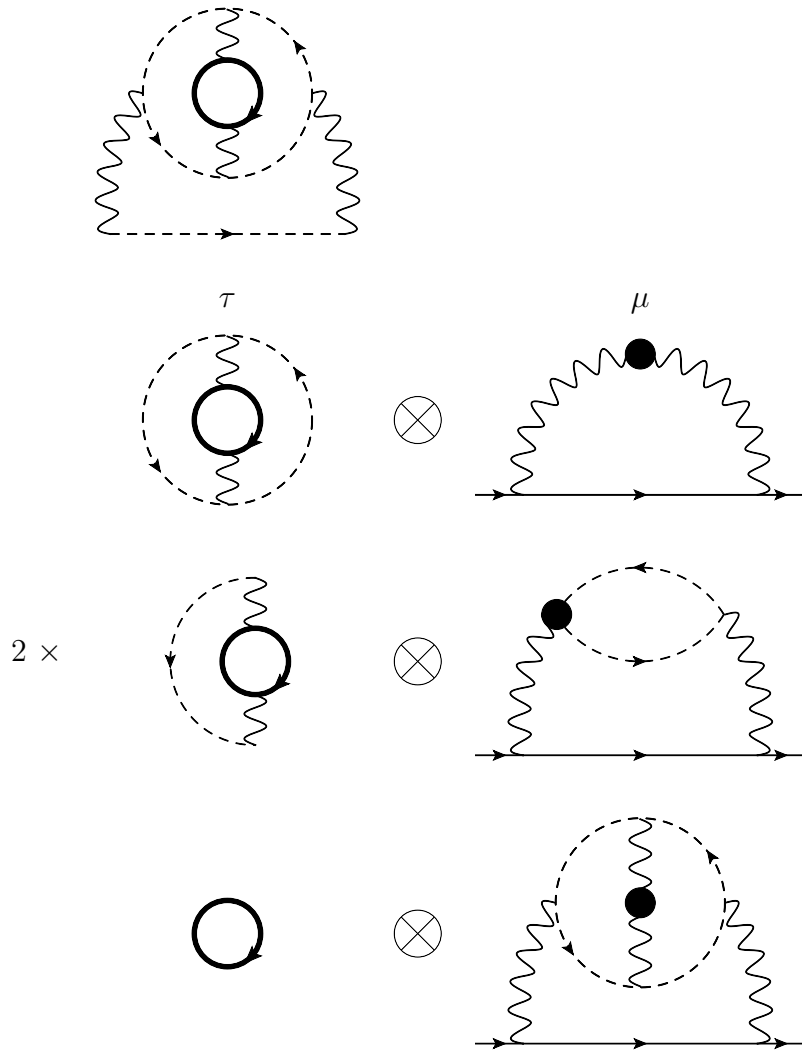


Abbildung 4.2: Asymptotische Regionen, die effektiv masselose Elektronen aufweisen. Die masselosen Leptonpropagatoren sind durch die gestrichelten Linien gegeben. Links vom \otimes sind Vakuumintegrale mit der Taumasse gezeigt, rechts die on-shell Integrale mit der Muonskala. Eine zur dritten ähnliche Region wurde weggelassen, die aus den spiegelverkehrten Integralen besteht.

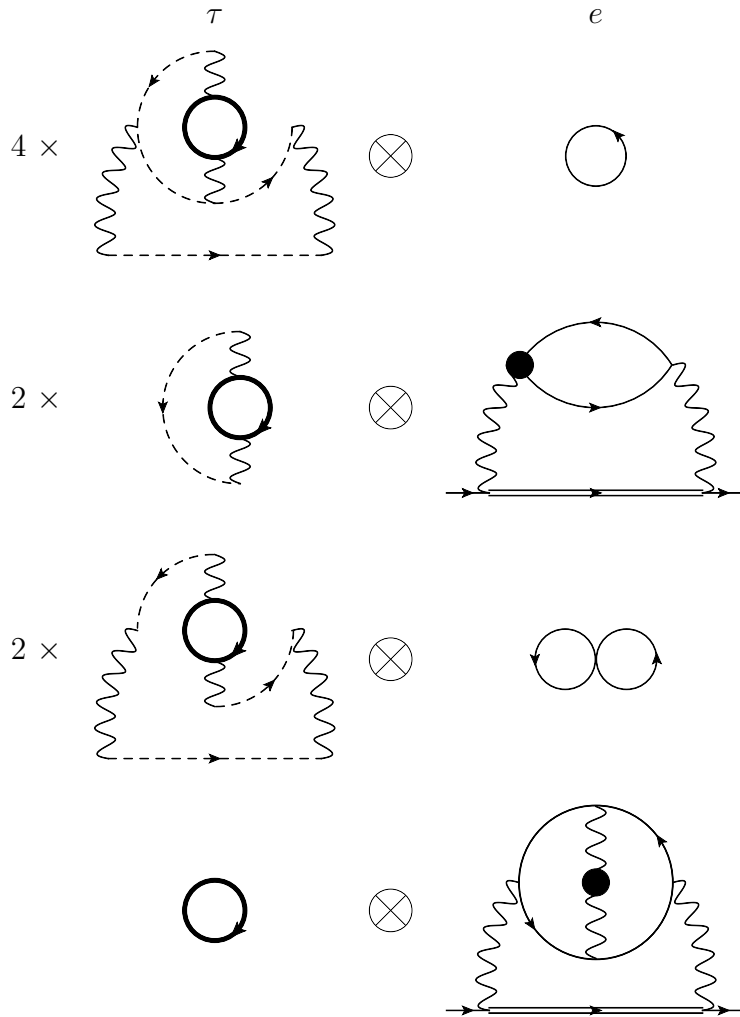


Abbildung 4.3: Asymptotische Regionen bestehend aus Vakuumintegralen mit m_τ und aus Integralen von der Elektronskala, rechts vom \otimes . Die doppelten durchgezogenen Linien zeigen Propagatoren der Form $1/(2\ell \cdot p)$ an, mit einem Schleifenimpuls ℓ und externen Muonimpuls p . Der Faktor vor den Regionen signalisiert die Anzahl der insgesamt vorkommender analoger Regionen.

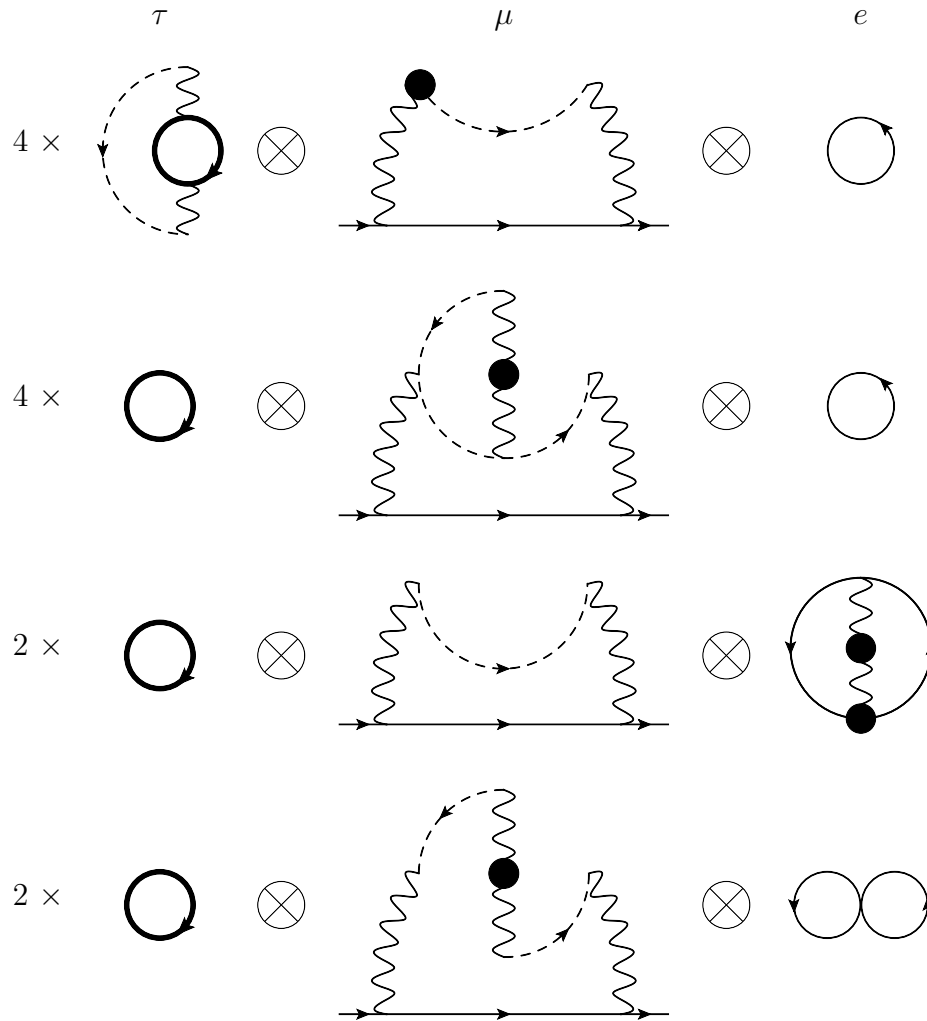


Abbildung 4.4: Hier sind Gruppen von Regionen gezeigt, bei denen gleichzeitig Vakuumintegrale mit Tau- sowie Elektronmasse und on-shell Integrale von der Muonskala auftreten. Zu jeder Gruppe treten insgesamt vier oder zwei symmetrische Regionen auf.

Vakuuminintegrale mit m_τ auf. Auch ist das einzige Vierschleifen-Integral ein Vakuuminintegral, sodass die Berechnung der Feynmandiagramme einfacher als in Kapitel 3 vorgestellten Rechnung ist. Um das Ergebnis zum Feynmandiagramm in Abb. 4.1 zu erhalten, müssen entsprechend die Resultate von allen Subdiagrammen in Abb. 4.2, 4.3 und 4.4 aufsummiert werden.

In Abb. 4.2 sind die Regionen aufgezeigt, die auch bei masselosen Elektronen auftreten und m_e -Korrekturen durch eine naive Entwicklung in der Elektronenmasse entstehen. Deswegen bestehen diese analog zu Diagrammen mit nur schweren Leptonen aus Vakuuminintegralen mit ein bis vier Schleifen von der τ -Skala, sowie Ein- bis Dreischleifen-Integralen vom on-shell Typ. Die Regionen in Abb. 4.3 dagegen führen zu einen auf Vakuuminintegrale mit der Taumasse, bei denen eine naive Entwicklung in m_e und m_μ durchgeführt wird. Zum anderen treten dort Integrale von der Elektronskala auf, sodass die Muonskala trivialerweise abfaktorisiert. Als letztes sind in Abb. 4.4 Regionen dargestellt, die Integrale zu allen drei Massenskalen aufweisen. Bei diesen treten gleichzeitig on-shell Integrale von der μ -Skala und Vakuuminintegrale mit m_e und m_τ auf.

4.2 Ergebnisse

Da die Auswertung der Vierschleifen-Diagramme mittels asymptotischer Entwicklung nur zu analytisch bekannten Integralen führt, erhalten wir ein analytisches Ergebnis, das in allen Massenverhältnissen entwickelt ist. Das Resultat zum Vierschleifen-Koeffizienten ist im Folgenden angegeben.

$$\begin{aligned}
A_{3,\mu}^{(8)}\left(\frac{m_\mu}{m_e}, \frac{m_\mu}{m_\tau}\right) &= \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(\frac{1}{135} \ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} + \frac{89}{810} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(\frac{22493}{291600} - \frac{3\zeta_3}{2} \right) \right. \\
&\quad + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-\frac{23}{270} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{3\zeta_3}{2} + \frac{2\pi^2}{45} + \frac{74597}{97200} \right) \\
&\quad + \frac{17\zeta_3}{135} + \frac{2\pi^4}{75} + \frac{193\pi^2}{810} - \frac{984587}{486000} - \frac{8}{135} \pi^2 \log(2) \left. \right) \\
&\quad + \frac{m_e m_\mu}{m_\tau^2} \left(\frac{4\pi^2}{15} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{821\pi^2}{900} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_e^2}{m_\tau^2} \left(\ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-\frac{1}{10} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{\pi^2}{36} + \frac{17}{50} \right) \right. \\
& \quad + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{3}{5} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{\zeta_3}{3} - \frac{4\pi^4}{135} - \frac{23\pi^2}{135} - \frac{673}{450} \right) \\
& \quad + \left(-\frac{43}{45} - \frac{\pi^2}{15} \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{16\zeta_5}{9} - \frac{8\pi^2\zeta_3}{15} + \frac{47\zeta_3}{45} \\
& \quad \left. - \frac{251\pi^4}{4050} + \frac{56\pi^2}{225} + \frac{45671}{8100} - \frac{4}{15}\pi^2 \log(2) \right) \\
& + \frac{m_e^3}{m_\mu m_\tau^2} \left(\frac{28\pi^3}{135} - \frac{64\pi^2}{135} \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} - \frac{4\pi^2}{135} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{5689\pi^2}{24300} \right) \\
& + \frac{\pi^2 m_e m_\mu^2}{90 m_\tau^3} \\
& + \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} \left(\ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{1}{420} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{3}{19600} \right) + \frac{1181}{40824} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
& \quad + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{4553}{90720} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{1074457}{4762800} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{1811\zeta_3}{2304} \right. \\
& \quad + \frac{1811\pi^2}{68040} + \frac{2304926093}{2667168000} \left. \right) - \frac{3034811}{38102400} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \\
& \quad + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(-\frac{61849\zeta_3}{80640} + \frac{3520386679}{4000752000} - \frac{2011\pi^2}{204120} \right) \\
& \quad - \frac{9564133\zeta_3}{76204800} + \frac{50467\pi^4}{2903040} + \frac{9308371\pi^2}{85730400} \\
& \quad - \frac{9932011422817}{5040947520000} - \frac{7}{1152} \log^4(2) \\
& \quad \left. + \frac{7\pi^2}{1152} \log^2(2) - \frac{44}{945} \pi^2 \log(2) - \frac{7a_4}{48} \right) \\
& + \frac{m_e m_\mu^3}{m_\tau^4} \left(\frac{19\pi^2}{720} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{2161\pi^2}{43200} \right) \\
& + \frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^4} \left(\ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{61}{3528} - \frac{1}{84} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right) - \frac{3}{280} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
& \quad \left. + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-\frac{9}{280} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{49181}{176400} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{\pi^2}{168} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{5938843}{12348000} \Big) + \frac{130813}{1058400} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \\
& + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(\frac{\zeta_3}{70} - \frac{1050211}{1543500} + \frac{17\pi^2}{1260} \right) \\
& + \frac{6751\zeta_3}{14700} + \frac{\pi^4}{1050} - \frac{163823\pi^2}{1587600} - \frac{271714897}{23337720000} \Big) \\
& + \frac{m_e m_\mu^4}{m_\tau^5} \left(\frac{\pi^2}{140} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{79\pi^2}{19600} \right) \\
& + \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6} \left(\ln^2 \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{2}{945} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{131}{297675} \right) \right. \\
& \quad + \ln \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{20929}{604800} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{229507}{1984500} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{3077\zeta_3}{5760} + \frac{83\pi^2}{4800} + \frac{84725571607}{160030080000} \right) \right. \\
& \quad + \frac{15787}{777600} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{104754659}{2286144000} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \\
& \quad \left. + \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(-\frac{62761\zeta_3}{120960} + \frac{33670638521}{51438240000} - \frac{3973\pi^2}{544320} \right) \right. \\
& \quad - \frac{34589999\zeta_3}{152409600} + \frac{818557\pi^4}{65318400} + \frac{43896581\pi^2}{685843200} \\
& \quad - \frac{34820138253959}{28355329800000} - \frac{17}{2880} \log^4(2) + \frac{17\pi^2}{2880} \log^2(2) \\
& \quad \left. - \frac{512\pi^2}{14175} \log(2) - \frac{17a_4}{120} \right) \\
& + \frac{m_e m_\mu^5}{m_\tau^6} \left(\frac{11\pi^2}{5670} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} - \frac{39157\pi^2}{3572100} \right) \\
& + \frac{m_e m_\mu^6}{m_\tau^7} \left(\frac{\pi^2}{105} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{79\pi^2}{66150} \right). \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der Taumasse bis einschließlich $\mathcal{O}(1/m_\tau^7)$ entwickelt. Die mitgenommenen Terme in der Elektronenmasse hängen dagegen von den Ordnungen in m_τ ab. So enthält das Ergebnis in führender Ordnung, also bei m_τ^{-2} und m_τ^{-3} , eine Entwicklung bis m_e^3 . Bei jeder höheren schweren Leptonordnung, also bei Erniedrigung der m_τ -Potenz um 2, wurde auch eine Potenz

weniger von m_e mitgenommen, sodass die dritte Ordnung nur noch lineare Terme in der Elektronenmasse aufweist.

Die Verwendung der numerischen Werte $m_\mu/m_\tau = 5.94649(54) \cdot 10^{-2}$ und $m_\mu/m_e = 206.7682843(52)$ führt auf das Resultat

$$\begin{aligned} A_{3,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) &\approx 0.06321803 - 0.00049494 - 0.00000111 \\ &= 0.0627220(1)(100). \end{aligned} \quad (4.2)$$

In der ersten Zeile sind die Beiträge von verschiedenen Entwicklungstermen gezeigt. Das erste Ergebnis ergibt sich aus der führenden schweren Leptonenordnung, also bis $\mathcal{O}(m_\tau^{-3})$, und bis zu linearer Ordnung in der Elektronenmasse. Mit dem zweiten Summanden wird der zusätzliche Beitrag von der nächsten Ordnung $\mathcal{O}(m_\tau^{-5})$ und den $\mathcal{O}(m_e^2)$ -Termen gezeigt. Der dritte Wert gibt die letzte Entwicklungskorrektur zum gesamten Ergebnis an.

Die schnelle Konvergenz ist vergleichbar mit den τ -Beiträgen für a_μ , da die hier durchgeführte numerische Aufteilung des Beitrags durch die Ordnungen in m_τ dominiert wird und die Korrekturen in der Elektronenmasse nur eine geringe Rolle spielen. Somit wurde auch hier der Fehler für die fehlenden höheren Entwicklungsordnungen mit 10 % vom letzten Term abgeschätzt. Die zweite Unsicherheit in Gl. (4.2), die viel größer ist, wird direkt durch die experimentelle Unsicherheit von den Massenverhältnissen, jedoch überwiegend von m_μ/m_τ , bestimmt.

Das Ergebnis aus Gl. (4.2) stimmt mit dem in Ref. [7] angegebenen Gesamtergebnis $A_{3,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) = 0.06272(4)$ überein. Desweiteren sind dort Teilergebnisse einzelner Diagrammklassen gezeigt, deren Summe den Wert $A_{3,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) = 0.062716(36)$ ergibt. Der direkte Vergleich der Teilergebnisse in Tabelle 4.1 zeigt außerdem, dass nur zwei der vier Diagrammgruppen sehr gut übereinstimmen. Die Summe der Gruppen II(b) und II(c) weist eine leichte Abweichung auf. Da in der Referenz [7] dazu nur einstellige Unsicherheiten angegeben sind, müssen wir dabei eventuelle Rundungsfehler berücksichtigen. Dazu nehmen wir für II(b) bzw. II(c) einen Fehler von $1.5 \cdot 10^{-6}$ bzw. $2.5 \cdot 10^{-6}$ an, anstatt der angegebenen Werte $1 \cdot 10^{-6}$ und $2 \cdot 10^{-6}$. Das führt bei quadratischer Addition auf eine Unsicherheit von $2.9 \cdot 10^{-6}$ für die Summe aus II(b) und II(c), sodass die Diskrepanz zwischen unserem Ergebnis und der Referenz etwas über dem zweifachen der Unsicherheit liegt, wobei unsere numerische Unsicherheit hier vernachlässigbar

Gruppe	$A_{3,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau)$	
	diese Arbeit	[7]
I(a)	0.00320905(1)	0.003209(0)
I(b) + I(c)	0.00442289(2)	0.004418(0)
II(b) + II(c)	-0.02865753(1)	-0.028650(2)
IV(a)	0.08374757(9)	0.083739(36)

Tabelle 4.1: Ergebnisse einzelner Diagrammklassen zu a_μ mit sowohl e - als auch τ -Schleifen und der Vergleich zu [7]. Die Unsicherheiten aus der Referenz wurden quadratisch addiert. Die Fehler der Ergebnisse aus dieser Arbeit sind durch die höchsten Entwicklungsterme abgeschätzt. Die Resultate für die Gruppe I(b) + I(c) zeigen einen signifikanten Unterschied.

ist. Bei der Summe der Klassen I(b) und I(c) dagegen ist ein deutlicherer Unterschied zu erkennen. Wird bei den Ergebnissen für I(b) und I(c) aus [7] jeweils ein Fehler von $0.5 \cdot 10^{-6}$ anstatt der angegebenen 0 angenommen, so beträgt die Unsicherheit für die Summe $0.7 \cdot 10^{-6}$. Damit unterscheiden sich die beiden Ergebnisse für die Summe um das 5,5-fache der angenommenen Unsicherheit, die wiederum viel größer als unsere numerische Unsicherheit ist.

Die Diagramme zu I(b) entstehen aus dem Einschleifen-Diagramm mit zwei getrennten Photonkorrekturen mit einer bzw. zwei Schleifen. Da diese Photoneinsetzungen in analytischer Abhängigkeit vom Photonimpuls bekannt

Gruppe	$A_{3,\mu}^{(8)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau)$	
		[7]
I(b)	0.002611285 [109]	0.002611(0)
I(c)	0.00181160(2)	0.001807(0)

Tabelle 4.2: In der linken Spalte ist das Resultat für die Diagrammklasse I(b) aus einer numerischen Berechnungsmethode angegeben. Das Ergebnis für I(c) wurde durch die Differenz zwischen der Summe der beiden Gruppen aus Tabelle 4.1 und dem angegebenen Wert für I(b) bestimmt. Der Vergleich mit den Resultaten aus der Literatur in der rechten Spalte zeigt einen Unterschied bei I(c).

sind, lässt sich der Beitrag von I(b) numerisch relativ einfach sehr präzise bestimmen. Dieses genaue Ergebnis stimmt mit der Ref. [7] überein und zeigt damit, dass die Diskrepanz ausschließlich auf die schwierigen Feynmandiagramme I(c) zurückzuführen ist. Die damit bestimmten Ergebnisse zur Gruppe I(b) und I(c) sowie der Vergleich mit Ref. [7] ist in Tabelle 4.2 gezeigt.

Zur Vollständigkeit sei für das bekannte Ergebnis zum Dreischleifen-Koeffizienten die analytische Entwicklung angegeben. Dabei wurden Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(m_e^4)$ und $\mathcal{O}(1/m_\tau^6)$ mitgenommen.

$$\begin{aligned}
A_\mu^{(6)}\left(\frac{m_\mu}{m_e}, \frac{m_\mu}{m_\tau}\right) &= \left(\frac{2}{135} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{1}{135}\right) \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \frac{2 m_e^2}{15 m_\tau^2} - \frac{4\pi^2 m_e^3}{45 m_\mu m_\tau^2} - \frac{m_e^2 m_\mu^2}{105 m_\tau^4} \\
&+ \left(-\frac{1}{420} \ln^2 \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{1}{210} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{37}{22050} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2}\right. \\
&+ \left.\frac{3}{9800} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{\pi^2}{630} - \frac{229213}{12348000}\right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} \\
&+ \left(\frac{2}{15} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{4\pi^2}{45} + \frac{8}{15}\right) \frac{m_e^4}{m_\mu^2 m_\tau^2} + \left(\frac{1}{70} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{1}{35}\right) \frac{m_e^4}{m_\tau^4} \\
&+ \left(\frac{4}{945} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{326}{297675}\right) \frac{m_e^2 m_\mu^4}{m_\tau^6} + \left(-\frac{2}{945} \ln^2 \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2}\right. \\
&- \frac{4}{945} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{199}{297675} \ln \frac{m_\tau^2}{m_\mu^2} - \frac{262}{297675} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \\
&+ \left.\frac{4\pi^2}{2835} - \frac{1102961}{75014100}\right) \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6}. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Die numerische Auswertung ergibt sich zu

$$A_{3,\mu}^{(6)}(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) = 5.27762(95) \cdot 10^{-4}, \tag{4.4}$$

siehe auch Ref. [4]. Die Unsicherheit ist durch die Massenwerte bestimmt. Da das Ergebnis durch die schwere Leptonentwicklung dominiert wird, ist dieser Wert, sowie das Ergebnis zu vier Schleifen, von der gleichen Größenordnung wie die entsprechenden Ergebnisse zu reinen τ -Korrekturen. So fällt auch der endgültige Beitrag zu a_μ vergleichsweise gering aus und man erhält für die Drei- und Vierschleifen-Ordnung die Endergebnisse

$$a_\mu \Big|_{e,\tau} = (0.66 + 0.18) \cdot 10^{-11}. \tag{4.5}$$

Analog zu τ -Ergebnissen kann das auch mit universellen Beiträgen verglichen werden, die deswegen hier nochmal angegeben sind,

$$a_\mu \Big|_{\text{univ.}} = (116\,140\,973.21 - 177\,230.51 + 1\,480.42 - 5.56 + 0.06) \cdot 10^{-11} .$$

So ist der Vierschleifen-Anteil der e - τ -Korrekturen sogar drei mal so groß wie der universelle Beitrag zu fünf Schleifen und hat einen wichtigen Beitrag zum anomalen magnetischen Moment vom Muon.

Kapitel 5

Hadronischer Beitrag

5.1 Einführung

Neben den leptonischen Korrekturen haben die hadronischen Beiträge einen wichtigen Einfluß auf die theoretische Vorhersage zum anomalen magnetischen Moment. Das liegt jedoch nicht nur an der Größe der hadronischen Beiträge, sondern auch daran, dass die Unsicherheiten der hadronischen Korrekturen die vom Gesamtergebnis zum anomalen magnetischen Moment dominiert. Außerdem liegt die Schwierigkeit der hadronischen Beiträge darin, dass diese nicht mit reinen störungstheoretischen Methoden berechnet werden können. Treten die hadronischen Strahlungskorrekturen in einem Feynmandiagramm nur als Vakuumkorrekturen von Photonpropagatoren auf, so lässt sich das Ergebnis mit teilweise störungstheoretischen Methoden auf den Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ zurückführen. Demnach ist die Unsicherheit dieser Beiträge fast ausschließlich durch den experimentellen Wert vom Wirkungsquerschnitt bestimmt. Dazu ist in erster Zeile von Abb. 5.1 die führende und die bekannte nächste höhere Ordnung, formal zum Dreischleifen-Niveau, gezeigt. Die anderen Feynmandiagramme in der Abbildung stellen bisher unbekannte Beiträge von noch höheren Strahlungskorrekturen dar, die in dieser Arbeit berechnet wurden.

Um die angewandte Methode vorzustellen, betrachten wir den hadronischen Beitrag zur führenden Ordnung, der durch das Feynmandiagramm in Abbil-

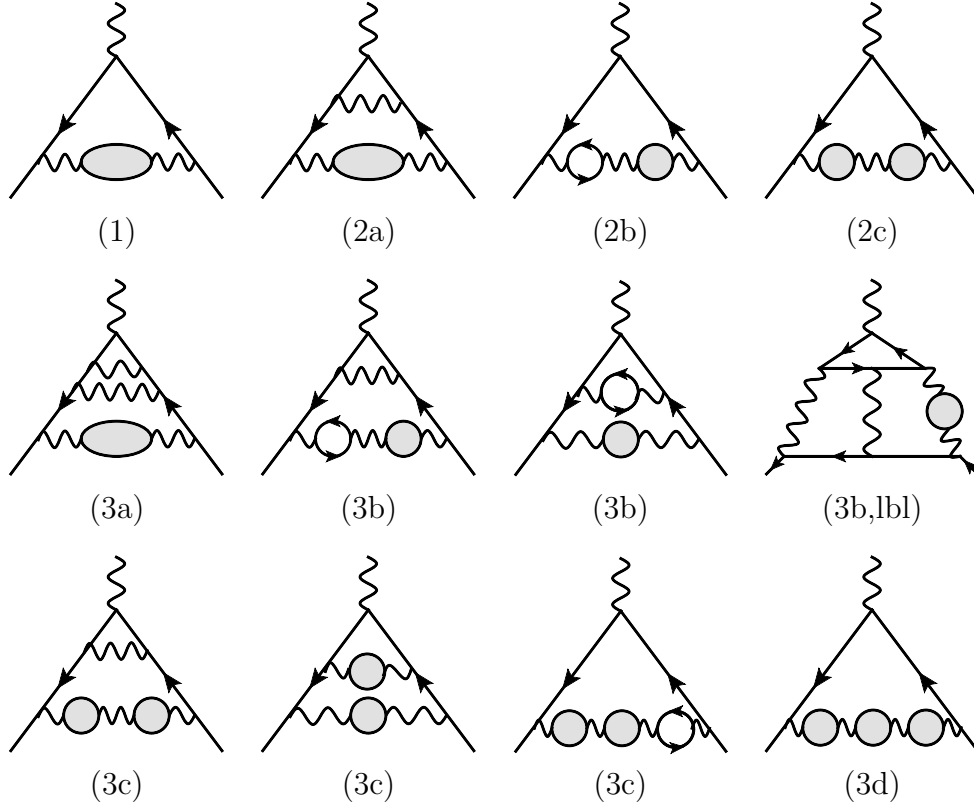


Abbildung 5.1: Darstellung einzelner Diagrammklassen zur Berechnung der hadronischen Korrekturen zum anomalen magnetischen Moment. Die Leptonschleifen in den Klassen (2b), (3b) und (3b,lbl) enthalten vom externen Fermion verschiedene Leptonen. Bei gleichartigen Leptonen ist das Feynmandiagramm je nach Störungsordnung der Klasse (2a) oder (3a) zugewiesen.

Abbildung 5.1(1) dargestellt ist. Die hadronische Einsetzung kann allgemein mit der Polarisationsfunktion, $\Pi^{\mu\nu}(k^2) = -i(k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu) \Pi(k^2)$, parametrisiert werden. Der Beitrag zum anomalen magnetischen Moment kann wiederum direkt durch in Gl. (1.3) gezeigten Projektor, der hier mit P^μ bezeichnet wird, bestimmt werden. So ergibt sich die führende hadronische Korrektur aus

$$a^{(1)} = \int d^d \ell \text{Sp} \left[P^\omega i e \gamma_\rho \frac{i}{\not{p} + \not{q} + \not{\ell} - m} i \gamma_\omega \frac{i}{\not{p} + \not{\ell} - m} i e \gamma_\lambda \right]$$

$$\cdot \frac{-ig^{\rho\mu}}{\ell^2} \frac{-ig^{\nu\lambda}}{\ell^2} i (\ell_\mu \ell_\nu - \ell^2 g_{\mu\nu}) \Pi(\ell^2), \quad (5.1)$$

wobei hier zur Vereinfachung Feynmannotation verwendet wurde. Um die Integration über den Schleifenimpuls auswerten zu können, kann die Dispersionsrelation benutzt werden, die aus der Analytizität von $\Pi(k^2)$ folgt und in unserem Fall folgendermaßen lautet

$$\Pi(k^2) = -\frac{k^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k^2 - s} \text{Im} \Pi(s) \frac{ds}{s}. \quad (5.2)$$

Das führt unter Vertauschung der Integrationen auf

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= \int_0^\infty ds \frac{\text{Im} \Pi(s)}{\pi s} \\ &\cdot \int d^d \ell \text{Sp} \left[P^\omega i e \gamma_\rho \frac{i}{\not{p} + \not{q} + \not{\ell} - m} i \gamma_\omega \frac{i}{\not{p} + \not{\ell} - m} i e \gamma_\lambda \right] \\ &\cdot \frac{-i}{\ell^2 - s} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{\ell^\rho \ell^\lambda}{\ell^2} \right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Es ist zu sehen, dass die beiden letzten Zeilen in Gl. (5.3) aus (5.1) hervorgehen, wenn die hadronische Einsetzung sowie die zwei dazugehörigen Photonen durch ein Photon mit Masse \sqrt{s} ersetzt wird. Somit kann die Impulsintegration analog zum Einschleifen-Diagramm der universellen Korrektur erfolgen, insbesondere ist die Dirac-Struktur die gleiche. Zur Auswertung des Schleifenintegrals verweisen wir daher auf Kap. 6.3 im Buch [110]. So führen die beiden letzten Zeilen in Gl. (5.3) bis auf den Faktor α/π auf die Form

$$K^{(1)}(s) = \int_0^1 dx \frac{x^2(1-x)}{x^2 + (1-x)\frac{s}{m^2}}. \quad (5.4)$$

Der Imaginärteil der Polarisationsfunktion steht durch das optische Theorem mit dem Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ in Beziehung. Dieser wird üblicherweise als Verhältnis

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma_{pt}} \quad (5.5)$$

mit der Normierung $\sigma_{pt} = 4\pi\alpha^2/(3s)$ angegeben und erfüllt die Relation

$$\text{Im} \Pi(s) = \frac{e^2}{12\pi} R(s). \quad (5.6)$$

Damit kann der führende hadronische Beitrag folgendermaßen kompakt geschrieben werden.

$$a^{(1)} = \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R(s) K^{(1)}(s). \quad (5.7)$$

Hier wurde die untere Integrationsgrenze auf m_π^2 gesetzt, da ab dieser Schwelle Hadronen durch $e^+e^- \rightarrow \pi^0\gamma$ produziert werden können. Jedoch ist der Wirkungsquerschnitt dazu sehr klein, sodass erst die Pionpaarproduktion einen nennenswerten Beitrag liefert.

Der Wirkungsquerschnitt in Gl. (5.5) kann aus mehreren experimentellen Daten zu den unterschiedlichen Produktionskanälen von e^+e^- -Annihilation gewonnen werden. Das würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit übersteigen, sodass hier ein **Fortran**-Programm verwendet wurde, das von den Autoren von Ref. [43] freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurde. Das Programm enthält Datenpunkte zu $R(s)$, zwischen denen linear interpoliert wird. Außerdem liefert das Programm nicht nur den Zentralwert, sondern gibt auch die obere und untere Schranke der experimentellen Daten an. Der Test mit führender hadronischer Ordnung zeigt jedoch, dass die naive Benutzung der Schranken zu einer großen Überschätzung des Fehlers vom Endergebnis führt, was an den fehlenden Informationen über die Fehlerkorrelationen liegt. Um trotzdem eine sinnvolle Fehlerabschätzung zu bekommen, wird bei den gezeigten Ergebnissen die Unsicherheit auf ein Drittel der Differenz zwischen dem Zentralwert und der oberen oder unteren Schranke gesetzt. So ergibt sich der Beitrag für das Muon vom Energieintervall $\sqrt{s} = 0.32 \text{ GeV}$ bis 1.43 GeV in Gl. (5.7) zu $608.19 \pm 3.97 \cdot 10^{-10}$. Das stimmt gut mit dem Resultat $606.50 \pm 3.35 \cdot 10^{-10}$ aus Tabelle 5 in Ref. [43] überein. Natürlich sollte für die führende Ordnung eine korrekte Analyse für die Unsicherheiten durchgeführt werden, jedoch ist hier nicht das Ziel diese zu verbessern. Stattdessen wurden die unbekannt höheren Korrekturen berechnet, sodass nur der Zentralwert von Bedeutung ist und eine grobe Fehlerabschätzung dazu ausreichend ist.

Desweiteren tragen zum Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})$ auch sehr schmale Resonanzen J/Ψ , $\Psi(2S)$ und $\Upsilon(nS)$ ($n = 1, \dots, 4$) bei, die nur schlecht mit einer stetigen Funktion beschrieben werden können. Diese Beiträge können jedoch auf die entsprechenden experimentellen Zerfallsbreiten in ein e -Paar zurückgeführt werden. Da die Resonanzen sehr schmal sind,

können diese im Grenzfall verschwindender Breite, der “narrow-width approximation”, betrachtet werden, sodass für eine Resonanz V gilt

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow V) = C_{\text{res}} \frac{12\pi^2}{M_V} \Gamma(V \rightarrow e^+e^-) \delta(s - M_V^2), \quad (5.8)$$

mit dem Vorfaktor

$$C_{\text{res}} = \left(\frac{\alpha}{\alpha(M_V)} \right)^2 \left(1 + \frac{3\alpha}{4\pi} \right)^{-1}.$$

Dieser ist dazu da, die experimentellen Daten aufgrund der vorhandenen Strahlungskorrekturen zu korrigieren. Denn bei der Berechnung der hadronischen Korrekturen wird die nackte Zerfallsbreite ohne Strahlungskorrekturen benötigt, die natürlich in der gemessenen Zerfallsbreite enthalten sind. Für die Details sei auf Ref. [111] verwiesen. Wird Gl. (5.8) in Gl. (5.5) eingesetzt, so ergibt das

$$R(s) = C_{\text{res}} \frac{9\pi}{\alpha^2} M_V \Gamma(V \rightarrow e^+e^-) \delta(s - M_V^2). \quad (5.9)$$

Aufgrund der δ -Distribution ist der Beitrag davon zum anomalen magnetischen Moment trivial auszuwerten, sodass sich der hadronische Beitrag von allen Resonanzen zu

$$a_{\text{res}}^{(1)} = \frac{3}{\pi} \sum_{V=J/\Psi, \Psi', \Upsilon} \frac{C_{\text{res}}}{M_V} \Gamma(V \rightarrow e^+e^-) K^{(1)}(M_V^2) \quad (5.10)$$

ergibt. Die experimentellen Daten der Resonanzen können dazu aus der Ref. [96] entnommen werden.

Die Korrekturen höherer Ordnung mit einfacher hadronischer Einsetzung ergeben sich mit einer analogen Formel wie in Gl. (5.7) angegeben, sodass insbesondere $R(s)$ gleich bleibt und der Kern $K^{(1)}(s)$ entsprechend mit weiteren Faktoren von α/π ausgetauscht werden muss. Wie wir oben bereits gesehen haben, kann die Berechnung der benötigten Kerne diagrammatisch erfolgen, indem die hadronische Einsetzung durch ein Photon mit Masse \sqrt{s} parametrisiert wird. Da das massive Photon eine schwere Skala einführt, sind die dazugehörigen Feynmandiagramme ähnlich zu den Diagrammen, bei denen ein schweres Lepton vorkommt. Deswegen können bei dieser Berechnung ähnliche Methoden wie in den rein leptonischen Fällen benutzt werden. So wird

hier eine asymptotische Entwicklung mit $s \gg m_\mu^2 \gg m_e^2$ bei einer einfachen hadronischen Einsetzung verwendet. Kommen dagegen zwei hadronische Einsetzungen in einem Feynmandiagramm vor, so führt das auf Integrationen über s und s' , wobei entsprechend effektiv zwei massive Photonen auftreten. Daher werden die Diagramme zu diesen Beiträgen in den Hierarchien $s \gg s' \gg m_\mu^2$, $s \approx s' \gg m_\mu^2$ und $s' \gg s \gg m_\mu^2$ ausgewertet, sodass daraus eine im ganzen Bereich gültige Funktion konstruiert werden kann.

Da hier im Vergleich zu reinen leptonischen Rechnungen massive Photonen hinzu kommen, muss das bei der Renormierung berücksichtigt werden. So bekommen die Renormierungskonstanten auch Beiträge mit massiven Photonen, die wir mit asymptotischer Entwicklung berechnet haben. Auf die Angabe von diesen wird jedoch verzichtet, da sie nur in dieser speziellen Rechnung benötigt werden. Zu beachten ist außerdem, dass bei einer hadronischen Einsetzung eine Kopplung α hinzu kommt, die auch renormiert werden muss.

5.2 Ergebnisse für das Muon

5.2.1 Beitrag zu nächst führender Ordnung

Die hadronischen Beiträge für das anomale magnetische Moment vom Muon können ähnlich zu den rein leptonischen Korrekturen anhand dem Vorkommen von Leptonen aufgeteilt werden, siehe dazu auch Abb. 5.1. Die Diagramme zur nächst höheren Ordnung als die führende Ordnung, die nur aus Photon- und Muonpropagatoren bestehen, sowie einer einfachen hadronischen Einsetzung, sind in (2a) zusammengefasst. Kommt dazu eine Elektronschleife vor, so wird die Klasse mit (2b) bezeichnet. Das Ergebnis zu den zugehörigen Kernen $K^{(2a)}$ und $K^{(2b)}$ aus einer asymptotischen Entwicklung stimmen mit den in Ref. [39] angegebenen Resultaten analytisch überein. Bei dem Beitrag mit zwei hadronischen Einsetzungen muss die Gl. (5.7) wie folgt angepasst werden.

$$a_\mu^{(2c)} = \frac{1}{9} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds ds'}{s s'} R(s) R(s') K^{(2c)}(s, s'). \quad (5.11)$$

Da dabei die hadronischen Einsetzungen nur in dem Einschleifen-Diagramm auftreten, kann für die Kernfunktion eine ähnliche Integraldarstellung wie für die führende Ordnung in Gl. (5.4) hergeleitet werden. Dazu kann für das Feynmandiagramm (2c) in Abb. 5.1 analog wie für Diagramm (1) vorgegangen werden und man erhält ein ähnliches Ergebnis wie in Gl. (5.3):

$$a_\mu^{(2c)} = \int_0^\infty ds \frac{\text{Im } \Pi(s)}{\pi s} \int_0^\infty ds' \frac{\text{Im } \Pi(s')}{\pi s'} \cdot \int d^d \ell \text{Sp}[\dots] \frac{-i}{\ell^2 - s} \frac{\ell^2}{\ell^2 - s'} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{\ell^\rho \ell^\lambda}{\ell^2} \right). \quad (5.12)$$

Die letzte Zeile ergibt α/π mal die Kernfunktion $K^{(2c)}$. Anstatt jedoch die Impulsintegration auszuführen, kann eine algebraische Beziehung zu $K^{(1)}$ hergestellt werden. Wird nämlich im Zähler die Umformung $\ell^2 \rightarrow (\ell^2 - s') + s'$ durchgeführt, so ergibt das die Relation

$$K^{(2c)}(s, s') = K^{(1)}(s) + s' \tilde{K}(s, s') \quad (5.13)$$

mit

$$\tilde{K}(s, s') = \int d^d \ell \text{Sp}[\dots] \frac{-i}{\ell^2 - s} \frac{1}{\ell^2 - s'} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{\ell^\rho \ell^\lambda}{\ell^2} \right).$$

Die Verwendung von $\ell^2 \rightarrow (\ell^2 - s) + s$ führt entsprechend auf

$$K^{(2c)}(s, s') = K^{(1)}(s') + s \tilde{K}(s, s'). \quad (5.14)$$

Mit dieser Relation kann $\tilde{K}(s, s')$ in Gl. (5.13) eliminiert werden und man erhält mit dem bekannten Ergebnis für $K^{(1)}$ aus Gl. (5.4) das Resultat

$$\begin{aligned} K^{(2c)}(s, s') &= \frac{s K^{(1)}(s) - s' K^{(1)}(s')}{s - s'} \\ &= \int_0^1 dx \frac{x^4(1-x)}{\left[x^2 + (1-x)\frac{s}{m_\mu^2} \right] \left[x^2 + (1-x)\frac{s'}{m_\mu^2} \right]}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Damit und den mit asymptotischer Entwicklung berechneten Kernfunktionen $K^{(2a)}$ und $K^{(2b)}$ ergeben sich die hadronischen Beiträge zu

$$\begin{aligned} a_\mu^{(2a)} &= -20.90 \cdot 10^{-10}, \\ a_\mu^{(2b)} &= 10.68 \cdot 10^{-10}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$a_\mu^{(2c)} = 0.35 \cdot 10^{-10}.$$

Es sei noch ein weiterer Beitrag erwähnt, bei dem τ -Schleifen auftreten. Dieser ergibt jedoch ein vernachlässigbares Resultat von $0.01 \cdot 10^{-10}$, das auf die Unterdrückung mit m_μ^2/m_τ^2 zurückzuführen ist. Unser Gesamtergebnis für diese hadronische Ordnung lautet

$$a_\mu^{(2)} = -9.87 \pm 0.09 \cdot 10^{-10}, \quad (5.17)$$

wobei die Unsicherheit von der Fehlerabschätzung zu $R(s)$ stammt. Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit den Ref. [43, 111]. Das stellt natürlich keinen unabhängigen Test dar, da die verwendeten Daten zu $R(s)$ von den Autoren der Referenzen zur Verfügung gestellt wurden. Jedoch kann somit bei den im Folgenden besprochenen Korrekturen von einem realistischen Ergebnis ausgegangen werden.

5.2.2 Nächst-zu-nächst führende Korrekturen

Die Feynmandiagramme höherer Ordnung werden, wie in Abb. 5.1 dargestellt, anhand der Anzahl der hadronischen Einsetzungen und der Leptonenschleifen eingeteilt.

- $K^{(3a)}$ bezeichnet den Beitrag mit einer hadronischen Einsetzung und bis zu zwei Photonkorrekturen. Dazu zählen auch alle Diagramme mit Muonschleifen.
- $K^{(3b)}$ beinhaltet eine hadronische Einsetzung und mindestens eine Elektronschleife. Zusätzlich können auch Muonschleifen vorkommen. Das externe Photon koppelt jedoch immer an die externe Muonlinie.
- $K^{(3b,1bl)}$ stammt von Diagrammen mit einer Lichtstreuung. Dabei ist das externe Photon und drei interne durch eine Elektronschleife verbunden. Bei einem Photon tritt eine hadronische Korrektur auf.
- $K^{(3c)}$ hat zwei hadronische Einsetzungen. Es kommen auch Diagramme mit einer Elektron- oder Muonschleife vor.
- $K^{(3d)}$ ist das Ergebnis von dem Diagramm mit drei hadronischen Korrekturen.

Auch hier werden Korrekturen mit τ -Schleifen aufgrund des vernachlässigbaren Einflusses nicht berücksichtigt. Die Berechnung der Beiträge mit einer hadronischen Einsetzung, also im Fall (3a), (3b) und (3b,bl), erfolgt mit einer asymptotischen Entwicklung wie bei den Feynmandiagrammen auf niedrigerem Schleifenniveau. Dabei wurden Terme bis zur Ordnung $(m_\mu^2/s)^4$ berücksichtigt. Da die untere Integrationsgrenze von s gleich m_π^2 ist, kann der Entwicklungsparameter $m_\mu^2/m_\pi^2 \approx 0.6$ betragen. Jedoch wurde bereits besprochen, dass der hadronische Beitrag bis zur Pionpaarschwelle sehr klein ist und die Entwicklung somit effektiv erst mit $m_\mu^2/(4m_\pi^2) \approx 0.15$ erfolgt. Dazu wurde die Konvergenz auch direkt an den Ergebnissen der Kerne untersucht. Wird nämlich der höchste berechnete Term in der asymptotischen Entwicklung nicht berücksichtigt, so ergibt sich ein Beitrag zum a_μ , der nur im Promillebereich von der gesamten berechneten Entwicklung abweicht, sodass die experimentellen Unsicherheiten deutlich größer sind. Beim Auftreten von Elektronschleifen, also bei (3b) und (3b,bl), kommt die weitere Entwicklung in m_e/m_μ hinzu. Dabei stellt sich heraus, dass nur der lineare Term eine nennenswerte Korrektur liefert, bereits die höheren Terme sind dagegen vernachlässigbar klein.

Für den Beitrag mit zweifacher hadronischer Einsetzung $K^{(3c)}(s, s')$ gibt es keine simple Integraldarstellung wie auf Zweischleifen-Niveau, sodass wir uns hier auf die asymptotischen Ergebnisse mit $s' \gg s \gg m_\mu^2$, $s' \approx s \gg m_\mu^2$ und $s \gg s' \gg m_\mu^2$ verlassen müssen. Im Fall $s' \approx s$ kann außerdem ausgewählt werden ob die weitere Entwicklung in der Differenz durch den Parameter $1 - \sqrt{s}/\sqrt{s'}$ oder $1 - \sqrt{s'}/\sqrt{s}$ erfolgt. Das kann bei der numerischen Auswertung zu verschiedenen guten Konvergenzen führen. Auf diese Weise erhalten wir vier Approximationen für die Funktion $K^{(3c)}(s, s')$. Solche Näherungen können für $K^{(2c)}(s, s')$ getestet werden, da dort eine exakte Darstellung, siehe Gl. (5.15), vorliegt. Dazu ist in Abb. 5.2(a) bei festem $\sqrt{s} = 1$ GeV die Näherungen und das exakte Ergebnis für $K^{(2c)}(s, s')$ als Funktion von $\sqrt{s'}$ gezeigt. Zu jedem Punkt findet sich dabei mindestens ein asymptotisches Ergebnis, das den exakten Wert sehr gut annähert. Wird aus den Approximationen eine im gesamten Bereich gültige Funktion konstruiert, so unterscheidet sich dessen Endergebnis zu $a_\mu^{(2c)}$ vom exakten Resultat um weniger als 1%. In Abb. 5.2(b) sind analog die asymptotischen Näherungen für $K^{(3c)}(s, s')$ gezeigt. Es ist zu sehen, dass in jedem Bereich mindestens zwei Approximationen übereinstimmen, sodass daraus eine Funktion auf dem ganzen Gebiet definiert werden kann.

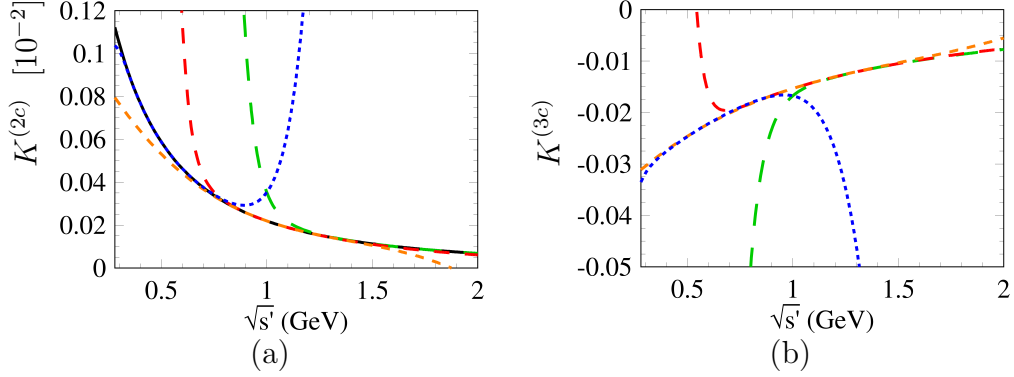


Abbildung 5.2: Darstellung der Funktionen (a) $K^{(2c)}(s, s')$ und (b) $K^{(3c)}(s, s')$ bei festem $\sqrt{s} = 1 \text{ GeV}$ in entwickelter Form mit $s \gg s'$ (blau gepunktet), $s \approx s'$ (orange und rot, kurz und mittel gestrichen) und $s' \gg s$ (grün lang gestrichen). Für $K^{(2c)}(s, s')$ ist außerdem das exakte Ergebnis (schwarz, durchgezogen) zum Vergleich gezeigt.

Der Beitrag von einer dreifachen hadronischen Einsetzung ergibt sich durch

$$a_\mu^{(3d)} = \frac{1}{27} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4 \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds ds' ds''}{s s' s''} R(s) R(s') R(s'') K^{(3d)}(s, s', s''). \quad (5.18)$$

Um die Kernelfunktion zu bestimmen, kann analog wie für $K^{(2c)}$ vorgegangen werden. So ergibt das Diagramm (3d) in Abb. 5.1 den Ausdruck

$$a_\mu^{(3d)} = \int_0^\infty ds \frac{\text{Im } \Pi(s)}{\pi s} \int_0^\infty ds' \frac{\text{Im } \Pi(s')}{\pi s'} \int_0^\infty ds'' \frac{\text{Im } \Pi(s'')}{\pi s''} \cdot \int d^d \ell \text{Sp}[\dots] \frac{-i}{\ell^2 - s} \frac{\ell^2}{\ell^2 - s'} \frac{\ell^2}{\ell^2 - s''} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{\ell^\rho \ell^\lambda}{\ell^2} \right), \quad (5.19)$$

wobei die Spur wiederum in Gl. (5.3) zu finden ist. Wird in der letzten Zeile genau ein ℓ^2 im Zähler um $-s + s$ oder $-s' + s'$ ergänzt, so führt das auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} K^{(3d)}(s, s', s'') &= K^{(2c)}(s', s'') + s \tilde{K}(s, s', s'') \\ &= K^{(2c)}(s, s'') + s' \tilde{K}(s, s', s'') \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{K}(s, s', s'') = \int d^d \ell \text{Sp}[\dots] \frac{-i}{\ell^2 - s} \frac{1}{\ell^2 - s'} \frac{\ell^2}{\ell^2 - s''} \left(g^{\rho\lambda} - \frac{\ell^\rho \ell^\lambda}{\ell^2} \right).$$

Unter Verwendung des Resultats von $K^{(2c)}$ aus Gl. (5.15) bekommt man damit das Ergebnis

$$\begin{aligned}
K^{(3d)}(s, s', s'') &= \frac{s' K^{(2c)}(s', s'') - s K^{(2c)}(s, s'')}{s' - s} \\
&= \int_0^1 dx \frac{x^6(1-x)}{\left[x^2 + (1-x)\frac{s}{m_\mu^2}\right] \left[x^2 + (1-x)\frac{s'}{m_\mu^2}\right] \left[x^2 + (1-x)\frac{s''}{m_\mu^2}\right]}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Auf die Angabe der Kernelfunktionen, die mittels asymptotischer Entwicklung berechnet wurden, wird verzichtet. Diese werden auf der Internetseite [112] zur Verfügung gestellt. Die jeweiligen numerischen Beiträge ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
a_\mu^{(3a)} &= 0.80 \cdot 10^{-10}, \\
a_\mu^{(3b)} &= -0.41 \cdot 10^{-10}, \\
a_\mu^{(3b, \text{lbl})} &= 0.91 \cdot 10^{-10}, \\
a_\mu^{(3c)} &= -0.06 \cdot 10^{-10}, \\
a_\mu^{(3d)} &= 0.0005 \cdot 10^{-10}.
\end{aligned}$$

Es ist interessant, dass sich das Verhalten der niedrigeren Ordnung, siehe (5.16), hier wiederholt, sodass die Hälfte des photonischen Beitrags $a_\mu^{(3a)}$ von dem mit Elektronschleifen $a_\mu^{(3b)}$ weggehoben wird. Jedoch kommt auf dieser Ordnung die neue Korrektur $a_\mu^{(3b, \text{lbl})}$ hinzu, die von der Lichtstreuung über eine Elektronschleife erzeugt wird. Dieser Beitrag ist sogar der dominanteste und trägt entscheidend zum relativ großen Gesamtergebnis bei. Die mehrfachen hadronischen Einsetzungen sind erwartungsgemäß klein. Das Gesamtergebnis mit dem Fehler aus den experimentellen Daten lautet

$$a_\mu^{(3)} = 1.24 \pm 0.01 \cdot 10^{-10}. \tag{5.21}$$

Das Resultat ist von der gleichen Größenordnung wie die Unsicherheit der führenden hadronischen Korrektur. Dazu beläuft sich z.B. in Ref. [43] die Kombination aus dem statistischen und systematischen Fehler auf $3.72 \cdot 10^{-10}$. Damit sollte das Ergebnis in Gl. (5.21) in die theoretische Vorhersage für das anomale magnetische Moment des Muons berücksichtigt werden. So verringert sich beispielsweise die Differenz zwischen dem Ergebnis

$a_\mu^{\text{th}} = 116\,591\,840(59) \cdot 10^{-11}$ aus Ref. [7] und dem experimentellen Resultat $a_\mu^{\text{exp}} = 116\,592\,089(63) \cdot 10^{-11}$ [5] von 2.9σ auf 2.7σ . Bei den zukünftigen Experimenten ist eine deutliche Verringerung der Unsicherheit geplant, siehe z.B. [114], sodass der experimentelle Fehler von der Größenordnung des Resultats in Gl. (5.21) sein wird.

Es sei noch einmal angemerkt, dass die hier berechneten Beiträge von hadronischen Korrekturen, die in Form von Vakuumpolarisationen auftreten, die betrachtete Störungsordnung nicht vollständig wiedergeben. In Abb. 5.3 sind weitere beispielhafte Feynmandiagramme dargestellt, die berücksichtigt werden müssen. So sollten zum einen Diagramme miteinbezogen werden, bei denen das externe Photon mit drei internen über eine hadronische Korrektur verbunden ist. Diese wurden bisher nicht streng mathematisch berechnet, jedoch wird in Ref. [113] ein Schätzwert von $0.3 \pm 0.2 \cdot 10^{-10}$ angegeben. Außerdem treten bei dieser Ordnung zum ersten mal Diagramme mit einer internen hadronischen Lichtstreuung auf, d.h. vier interne Photonen werden durch eine hadronische Einsetzung verbunden. Für diesen Beitrag existiert nicht einmal eine Abschätzung und dessen Wert somit nicht bekannt ist.

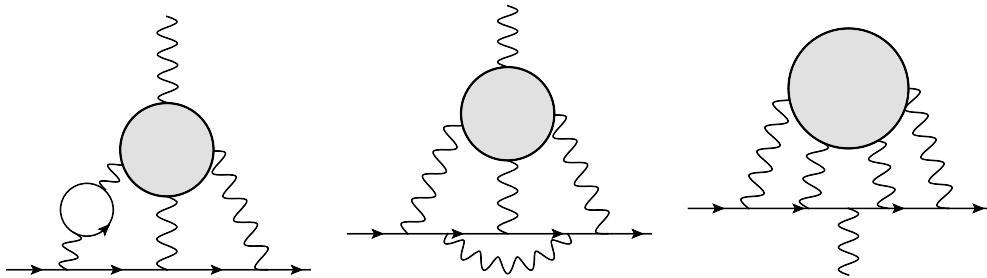


Abbildung 5.3: Beiträge zu a_μ mit hadronischer Lichtstreuung zur selben Störungsordnung wie in diesem Kapitel vorgestellten Korrekturen. Die Fermionschleife kann beliebige Leptonen enthalten, jedoch dominiert der Beitrag mit einer Elektronschleife.

5.3 Ergebnisse für das Elektron

Bei der Berechnung der hadronischen Beiträge des anomalen magnetischen Moments vom Elektron können die entsprechend angepassten analytischen Ergebnisse von Kernen wie beim Muon verwendet werden. Aufgrund der kleineren Masse ist hier die Konvergenz der asymptotischen Entwicklungen sehr schnell. Das führt jedoch auch dazu, dass der Beitrag von der doppelten hadronischen Einsetzung $K^{(2c)}$ vernachlässigbar ist, was auch auf die Korrekturen mit μ - oder τ -Schleifen zutrifft. Für die photonischen Korrekturen in den ersten beiden Ordnungen erhalten wir $a_e^{(1)} = 1.877 \cdot 10^{-12}$ und $a_e^{(2a)} = -0.2246 \cdot 10^{-12}$. Diese Werte sind in Konsistenz mit den Ergebnissen $a_e^{(1)} = 1.866 \pm 0.011 \cdot 10^{-12}$ und $a_e^{(2)} = -0.2234 \pm 0.0014 \cdot 10^{-12}$ aus Ref. [46].

Bei der höheren Ordnung dominiert ebenfalls die photonische Korrektur. So trägt $K^{(3c)}$ einen um Faktor 100 kleineren Beitrag bei. Die Korrekturen mit schweren Leptonschleifen sind auch hier vernachlässigbar. Damit ergibt sich das hadronische Ergebnis von Vakuumpolarisationen zu

$$a_e^{(3)} = a_e^{(3a)} = 0.028 \pm 0.001 \cdot 10^{-12}. \quad (5.22)$$

Dieser Beitrag ist mehr als doppelt so groß wie der Fehler der führenden hadronischen Ordnung aus Ref. [46] und von der selben Größenordnung wie die führende Korrektur durch eine hadronische Lichtstreuung, die gleich $a_e^{\text{had,lbl}} = 0.035 \pm 0.010 \cdot 10^{-12}$ [14] ist. Jedoch wird die Unsicherheit der theoretischen Vorhersage durch den experimentellen Wert der Feinstrukturkonstante α dominiert und beträgt ungefähr 10^{-12} . Das ist fast 40 mal größer als das Ergebnis in Gl. (5.22). Wird dagegen α durch das anomale magnetische Moment vom Elektron bestimmt, so wird die Unsicherheit dazu vom Fehler des Messwerts zu a_e dominiert. Dieser Fehler ist jedoch momentan deutlich größer als $a_e^{(3a)}$.

5.4 Test mit schwerer Leptoneinsetzung

Mit den berechneten Kernfunktionen können ähnlich zu den hadronischen Beiträgen auch reine schwere Leptonkorrekturen ausgewertet werden. Dazu ist es nur nötig für $R(s)$ die leptonische Funktion zu benutzen. Bei einer

τ -Schleifen-Einsetzung hat diese die Form

$$R_\tau(s) = \sqrt{1 - \frac{4m_\tau^2}{s}} \left(1 + \frac{2m_\tau^2}{s} \right). \quad (5.23)$$

Demnach ändert sich auch die untere Integrationsgrenze über s zu $4m_\tau^2$. Damit lassen sich die Beiträge der Feynmandiagramme, bei denen eine oder mehrere τ -Schleifen als photonische Vakuumpolarisation auftreten, berechnen. Bei einer Einsetzung ergibt sich der Koeffizient einer Störungsordnung durch

$$A_\tau = \frac{1}{3} \int_{4m_\tau^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R_\tau(s) K(s). \quad (5.24)$$

Zur numerischen Auswertung können die vorkommenden Leptonmassen mit $m_\ell \rightarrow m_\ell/m_\tau$ umskaliert werden, sodass die Integration von 4 beginnt und nur die Massenverhältnisse $m_\mu/m_\tau = 5.94649 \cdot 10^{-2}$ und $m_e/m_\tau = 2.87592 \cdot 10^{-4}$ benötigt werden. Die experimentellen Unsicherheiten werden hier nicht berücksichtigt, da diese Rechnungen nur als Test dienen. Damit erhält man für ein externes Muon die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_\tau^{(3a)} &= 0.06203067148(12), \\ A_\tau^{(3b)} &= -0.02446184563(23), \\ A_\tau^{(3b,\text{lbl})} &= 0.04830664279(41). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Fehler sind auf den Beitrag der letzten Ordnungen in den Entwicklungen gesetzt, konkret sind es in diesem Fall die Terme $1/s^4$ und m_e^4 . Zum Vergleich sind die folgenden direkten Ergebnisse von Diagrammen mit genau einer τ -Schleife und zwei angekoppelten Photonen gezeigt.

$$\begin{aligned} A_2 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}; n_\tau Q_\tau^2 \right) &= 0.062030672(25), \\ A_3 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}, \frac{m_\mu}{m_e}; n_\tau Q_\tau^2 \right)_{\text{non-lbl}} &= -0.024461845(48), \\ A_3 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}, \frac{m_\mu}{m_e}; n_\tau Q_\tau^2 \right)_{\text{lbl}} &= 0.048306642(31). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Es ist eine perfekte Übereinstimmung mit (5.25) zu sehen. Da hier die Ergebnisse nur bis $1/m_\tau^6$ und m_e^3 entwickelt wurden, weisen diese Resultate eine etwas größere Unsicherheit auf. In Tabelle 5.1 sind die Beiträge von $A_\tau^{(3a)}$

Gruppe	$A_\tau^{(3a)}$	$A_2 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}; n_\tau Q_\tau^2 \right)$
n_μ^0	0.04520898524(59)	0.045208986(59)
n_μ^1	0.01679015710(47)	0.016790157(89)
n_μ^2	0.0000315291398(11)	0.0000315291(47)
Gruppe	$A_\tau^{(3b)}$	$A_3 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}, \frac{m_\mu}{m_e}; n_\tau Q_\tau^2 \right)_{\text{non-lbl}}$
$n_\mu n_e Q_e^2$	0.000456154558(36)	0.000456155(37)
$n_e^2 Q_e^4$	0.00274911638(11)	0.00274912(10)
$n_e Q_e^4$	0.00099041347(50)	0.000990414(14)
$n_e Q_e^2$	-0.02865753004(41)	-0.02865753(11)

Tabelle 5.1: Vergleich der numerischen Ergebnisse über die Kernfunktionen, in der mittleren Spalte, mit den Resultaten aus der direkten Auswertung der Feynmandiagramme, in der rechten Spalte. Die Beiträge sind anhand der Markierungen n_e bzw. n_μ für jede Elektron- bzw. Muonschleife und den Elektron-Photon-Kopplungen Q_e unterteilt.

und $A_\tau^{(3b)}$ anhand der Leptonschleifen und Photonkopplungen noch weiter aufgeteilt, sowie mit den entsprechenden direkten Ergebnissen verglichen. Da die zum Vergleich benötigten direkten Resultate eine τ -Korrektur zu einem Photon mit einer Schleife besitzen müssen, stellen die meisten in Tab. 5.1 gezeigten Ergebnisse nur eine Unterklasse der in Tab. 2.1 und 4.1 präsentierten Gruppen dar. Eine Ausnahme bildet dabei die Klasse III, die vollständig mit einer hier berechneten Kernfunktion bestimmt werden kann. So entspricht das Ergebnis zur Gruppe III in Tab. 2.1 dem n_μ^0 -Eintrag für A_2 in Tab. 5.1.

Analog zu einer Einsetzung können die Kerne zu mehreren Einsetzungen dazu verwendet werden, die Beiträge mit mehreren τ -Schleifen-Korrekturen zu berechnen. Bei der zweifachen Einsetzung wird ähnlich zum hadronischen Fall eine interpolierende Funktion aus den entwickelten Kernen konstruiert, das auf das Resultat

$$A_\tau^{(3c)} = -0.0004325(14) \quad (5.27)$$

führt. Dabei beruht der Fehler hauptsächlich auf der Entwicklung in der Energiedifferenz $\sqrt{s} - \sqrt{s'}$ von der Näherung $s \approx s'$, die nur bis zur dritten Potenz ausgewertet wurde. Für die hadronische Auswertung ist diese Präzi-

sion ausreichend gewesen. Da hier Beiträge mit und ohne Elektronschleifen enthalten sind, müssen zum Vergleich die Feynmandiagramme mit zwei τ -Schleifen sowohl zu A_2 als auch zu A_3 herangezogen werden,

$$(A_2 + A_3) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}, \frac{m_\mu}{m_e}; n_\tau^2 Q_\tau^4 \right) = -0.000432478(13). \quad (5.28)$$

Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Zur Vollständigkeit sei noch das Ergebnis aus dem exakten Kern mit drei Einsetzungen und das Resultat des Diagramms mit drei τ -Schleifen angegeben.

$$A_\tau^{(3d)} = 2.324 \cdot 10^{-8},$$

$$A_2 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau}; n_\tau^3 Q_\tau^6 \right) = 2.324(38) \cdot 10^{-8}. \quad (5.29)$$

Der angegebene Fehler zum direkten Ergebnis ist relativ groß, da dieser der $(m_\mu/m_\tau)^6$ -Korrektur entspricht und die Entwicklung erst mit $(m_\mu/m_\tau)^4$ beginnt. Aufgrund der einfachen Struktur des beitragenden Diagramms kann man naiv vermuten, dass jede τ -Schleifen-Einsetzung in dem Photonpropagator einen unabhängigen Beitrag zum Gesamtergebnis liefert und proportional zum Quadrat des Massenverhältnisses ist. Demnach würde die führende Ordnung vom Diagramm $(m_\mu/m_\tau)^6$ betragen.

Um die Herkunft der $(m_\mu/m_\tau)^4$ -Beiträge zu untersuchen, betrachten wir die Ergebnisse einzelner asymptotischer Regionen separat. Dazu sollten diese jedoch getrennt renormiert werden, womit auch die Korrekturen der analogen Diagramme auf niedrigeren Schleifenordnungen in die jeweiligen asymptotischen Regionen aufgeteilt werden müssen. Hierbei treten nur zwei Regionen auf, wie das in Abb. 2.4(a) für das Zweischleifen-Diagramm gezeigt ist. So besteht dabei eine Region aus dem vollen Diagramm, bei der in den äußeren Impulsen und der Muonmasse entwickelt wird, sodass ein Vakuumintegral ausgewertet werden muss. Bei der anderen Region faktorisiert das Diagramm in die einzelnen Tauschleifen-Einsetzungen und ein on-shell Integral mit einer Schleife.

Auf Zweischleifen-Niveau muss nur der Counterterm-Beitrag vom Einschleifen-Diagramm und der Renormierungskonstante von α berücksichtigt werden, den wir entsprechend zur Region mit dem on-shell Integral dazunehmen. Die andere Region bleibt dagegen auf zwei Schleifen unrenormiert. Damit

erhält man für die ersten beiden Entwicklungsordnungen der Zweischleifen-Ergebnisse

$$A_2^{(4)}(n_\tau; \text{OS} \times \text{VI}) = \frac{1}{15} \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \left(-\frac{1}{140\epsilon} + \frac{3}{140} - \frac{\ell_\tau + \ell_\mu}{140} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4},$$

$$A_2^{(4)}(n_\tau; \text{2S VI}) = -\frac{2}{45} \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \left(\frac{1}{140\epsilon} - \frac{411}{19600} + \frac{\ell_\tau}{70} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4}.$$

Wie zu erwarten beginnen beide Resultate mit einem $(m_\mu/m_\tau)^2$ -Term. Da auf der $(m_\mu/m_\tau)^4$ -Ordnung ϵ^{-1} -Pole auftreten, die sich natürlich wegheben würden, ist davon auszugehen, dass die beiden Regionen auf die hier vorgestellte Weise nicht komplett unabhängig voneinander betrachtet werden können. Die Entwicklungsterme zu $(m_\mu/m_\tau)^6$ haben dazu eine ähnliche Struktur und wurden deswegen nicht gezeigt.

Für die Dreischleifen-Ergebnisse werden Renormierungsbeiträge vom Zweischleifen-Resultat mitberücksichtigt. So bekommt die Region mit zwei τ -Einsetzungen zusätzlich zur Renormierung des Einschleifen-Diagramms auch den Counterterm-Beitrag von der entsprechenden Region auf Zweischleifen-Niveau. Der Renormierungsbeitrag vom Teilergebnis des Zweischleifen-Vakuumintegrals wird dagegen der Region mit dem Dreischleifen-Vakuumintegral zugeschrieben. So ergeben sich die Ergebnisse zu

$$A_2^{(6)}(n_\tau^2; \text{OS} \times \text{VI}^2) = \left(\frac{1}{225\epsilon} + \frac{\pi^2}{2520} - \frac{4}{225} + \frac{2\ell_\mu + \ell_\tau}{225} + \frac{\ell_\tau^2}{420} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4},$$

$$A_2^{(6)}(n_\tau^2; \text{3S VI}) = \left(-\frac{1}{225\epsilon} - \frac{\pi^2}{2520} + \frac{799}{54000} - \frac{\ell_\tau}{75} - \frac{\ell_\tau^2}{420} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4},$$

wobei die $(m_\mu/m_\tau)^6$ -Ordnung wiederum für die Diskussion nicht benötigt wird. Aufgrund der Renormierung heben sich die $(m_\mu/m_\tau)^2$ -Terme bei beiden Regionen separat weg, sodass $(m_\mu/m_\tau)^4$ die führende Ordnung darstellt. Wie bei den Zweischleifen-Ergebnissen treten auch hier ϵ^{-1} -Pole auf. Desweiteren kommen bei beiden Resultaten endliche Terme mit π^2 oder ℓ_τ^2 vor, die in der Summe verschwinden.

Auf Vierschleifen-Niveau wird analog das nackte Ergebnis mit τ -Einsetzungen und die Renormierungsbeiträge von solchen niedrigeren Schleifenordnungen zusammengefasst. Dasselbe wird für die vollen Vakuumintegral-Beiträge

und den jeweiligen Countertermen durchgeführt. Damit erhalten wir die folgenden Resultate.

$$\begin{aligned}
A_2^{(8)}(n_\tau^3; \text{OS} \times \text{VI}^3) &= \left(-\frac{\pi^2}{2700} - \frac{\ell_\tau^2}{450} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} + \left(-\frac{2}{1125 \epsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\pi^2}{2100} + \frac{14}{3375} - \frac{2}{375} \ell_\tau - \frac{2}{1125} \ell_\mu - \frac{1}{350} \ell_\tau^2 \right) \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6}, \\
A_2^{(8)}(n_\tau^3; 4\text{S VI}) &= \left(\frac{\pi^2}{2700} + \frac{87709}{9729720} - \frac{89\zeta_3}{15015} + \frac{\ell_\tau^2}{450} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} + \left(\frac{2}{1125 \epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\pi^2}{2100} + \frac{4637107}{1824322500} - \frac{40\zeta_3}{9009} + \frac{8}{1125} \ell_\tau + \frac{1}{350} \ell_\tau^2 \right) \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6}.
\end{aligned}$$

Auch hier treten keine $(m_\mu/m_\tau)^2$ -Terme auf. Bei der Region mit drei τ -Einsetzungen kommen zwar auch $(m_\mu/m_\tau)^4$ -Terme vor, die π^2 oder ℓ_τ^2 besitzen und sich jedoch in der Summe mit der anderen Region herausheben. Die Region vom Vierschleifen-Vakuumintegral hat dagegen weitere Terme auf dieser Massenordnung, die somit das Gesamtergebnis stellen. Auf der $(m_\mu/m_\tau)^6$ -Ordnung besitzen beide Regionen wieder alle möglichen endlichen Terme und ϵ^{-1} -Pole. Damit und den Ergebnissen zu niedrigeren Schleifenordnungen trägt tatsächlich jede Tauschleifen-Einsetzung einen Faktor $(m_\mu/m_\tau)^2$ bei, jedoch nur bei den entsprechenden asymptotischen Regionen. Die vollen Vakuumintegrale können Massenordnungen beitragen, die den führenden Entwicklungsterm des kompletten Diagramms stellen.

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die leptonischen Vierschleifen-Korrekturen und nächst-zu-nächst-führenden hadronischen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment vom Muon und Elektron ausgewertet. Dabei spielen insbesondere die Beiträge zu a_μ , die Elektronschleifen enthalten, eine numerisch wichtige Rolle. Der numerische Beitrag dieser Korrekturen ist größer als die derzeitige Diskrepanz zwischen der theoretischen Vorhersage von a_μ und dem experimentellem Wert. Da diese außerdem bisher vollständig nur durch eine Gruppe berechnet wurden, war es wichtig diese Ergebnisse zu überprüfen. Um einen unabhängigen Test zu bekommen wurde dabei eine komplett verschiedene Berechnungsmethode verwendet, die auf analytischen Umformungen basiert. Damit wurde ein analytisches Resultat bestimmt, das durch eine Linearkombination von Masterintegralen ausgedrückt ist. Da wir nur diese Integrale im letzten Schritt numerisch ausgewertet haben, ist es möglich das Ergebnis systematisch zu verbessern, indem die Masterintegrale entweder analytisch oder mit sehr hoher numerischer Präzision ausgewertet werden. Jedoch ist bereits unsere numerische Unsicherheit bei den aktuellen experimentellen und theoretischen Unsicherheiten vollkommen ausreichend und das auch bei einer Verbesserung von diesen um Faktor vier bleibt. Wie in der zusammenfassenden Tabelle 3.1 zu sehen ist, stimmen unsere Resultate einzelner Untergruppen innerhalb der numerischen Unsicherheiten sehr gut mit den bekannten Werten überein.

Die anderen leptonischen Korrekturen zum muonischen anomalen magnetischen Moment enthalten das Tau-Lepton. Außerdem können zusätzlich auch Elektronschleifen auftreten. Da das Tau schwerer als das Muon ist, sind diese Art der Beiträge mit dem Quadrat der τ -Masse unterdrückt, sodass die numerischen Ergebnisse vergleichsweise klein sind. Zu diesen Korrekturen war

es jedoch sogar möglich analytische Entwicklungen in den Massenverhältnissen zu bestimmen. Diese neuen analytischen Resultate sind präziser als die bekannten rein numerischen Ergebnisse. Desweiteren konnte bei einer Diagrammklasse mit sowohl Tau- als auch Elektron-Schleifen eine deutliche Abweichung zwischen dem hier berechneten und dem bekannten Wert festgestellt werden. Damit haben wir alle leptonischen Korrekturen zu a_μ auf Vierschleifen-Niveau ausgewertet. Zusammenfassend geben wir die einzelnen numerischen Koeffizienten der reinen Elektron- und Tau-Korrekturen, sowie den Beitrag mit sowohl Elektron- als auch Tau-Schleifen im Folgenden an.

$$a_\mu^{(8)} = a_\mu^{(8)} \Big|_{\text{univ}} + 132.86(48) + 0.0424941(53) + 0.062722(10). \quad (5.30)$$

Beim anomalen magnetischen Moment vom Elektron tritt eine analoge Massenunterdrückung wie beim τ -Beitrag zu a_μ auf, da die Elektronmasse die leichteste Skala ist. Somit sind alle leptonischen Korrekturen numerisch kleiner als der universelle Beitrag. Im Vergleich zum Muon treten daher beim a_e sogar Feynmandiagramme mit zwei schwereren Fermionen als das externe Lepton auf. Zur Vollständigkeit wurden auch diese Beiträge zur Vierschleifen-Ordnung in analytischer Massenentwicklung berechnet, die bisher auch nur numerisch bekannt waren. Da die reinen μ - und τ -Korrekturen zu a_e aus dem entsprechenden analytischen Ergebnis zu a_μ bestimmt werden können, haben wir daher alle leptonischen Vierschleifen-Koeffizienten zu a_e berechnet, mit den folgenden Einzelergebnissen.

$$a_e^{(8)} = a_e^{(8)} \Big|_{\text{univ}} + (9.1619707(4) + 0.074292(12) + 0.007469(3)) \cdot 10^{-4}. \quad (5.31)$$

Desweiteren wurden hadronische Beiträge zum anomalen magnetischen Moment betrachtet, die durch Vakuumpolarisationseinsetzungen von Photonen entstehen. Die hadronischen Beiträge sind insbesondere für das Muon wichtig, da die führende hadronische Korrektur die Unsicherheit der gesamten theoretischen Vorhersage für a_μ dominiert. Hier wurden jedoch die Korrekturen auf nächst-zu-nächst-führender Ordnung, formal auf Vierschleifen-Niveau, bestimmt. Es stellte sich heraus, dass diese bisher unbekanntes Korrekturen den vergleichsweise großen Beitrag $1.24(1) \cdot 10^{-10}$ liefern, was auf das Auftreten einer neuen Diagrammklasse zurückzuführen ist. Werden diese Korrekturen miteinbezogen, verringert sich damit die Diskrepanz zwischen dem Messwert für a_μ und der theoretischen Vorhersage um etwa 0.2σ . Mit

den berechneten analytischen Ergebnissen ließ sich auch der hadronische Beitrag der gleichen Ordnung von a_e bestimmen, der numerisch jedoch nicht relevant ist.

Alle Rechnungen dieser Arbeit wurden mittels asymptotischer Entwicklung durchgeführt. Dazu wurde gezeigt, wie diese konkret auf Feynmandiagramme angewendet wird. Damit konnten komplizierte mehrskalige Integrale auf einfachere Integrale mit nur einer Skala reduziert werden. Desweiteren wurde besprochen, wie allgemeine Tensorintegrale auf skalarwertige zurückgeführt werden können. Außerdem wurden einige Methoden zur Berechnung der skalaren Integrale aufgezeigt.

Anhang A

Renormierungskonstanten

Die benötigten Renormierungskonstanten wurden mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung mit der Hierarchie $m_e \ll m_\mu \ll m_\tau$ berechnet. Hier sind die Massen- und Feldrenormierungskonstanten im on-shell-Schema für das Muon und Elektron gezeigt. Dabei wurden Leptonschleifen mit n_x für $x = e, \mu, \tau$ gekennzeichnet. Außerdem werden in den Formeln $\ell_x = \ln(\mu^2/m_x^2)$ mit der Renormierungsskala μ , $a_4 = \text{Li}_4(1/2)$ und die Kopplungskonstante $\bar{\alpha}$ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema verwendet.

Bei den folgenden angegebenen Renormierungskonstanten für das Muon wurden Terme der Ordnung $\mathcal{O}(1/m_\tau^8)$ und $\mathcal{O}(m_e^4)$ weggelassen.

$$\begin{aligned} Z_{m,\mu}^{\text{OS}} = & 1 + \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \left[-1 - \frac{3}{4\epsilon} - \frac{3\ell_\mu}{4} + \epsilon \left(-2 - \ell_\mu - \frac{3\ell_\mu^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} \right) \right. \\ & + \epsilon^2 \left(-4 - \frac{\ell_\mu^2}{2} - \frac{\ell_\mu^3}{8} - \frac{\pi^2}{12} + \ell_\mu \left(-2 - \frac{\pi^2}{16} \right) + \frac{\zeta_3}{4} \right) \\ & + \epsilon^3 \left(-8 - \frac{\ell_\mu^3}{6} - \frac{\ell_\mu^4}{32} - \frac{\pi^2}{6} - \frac{3\pi^4}{640} + \ell_\mu^2 \left(-1 - \frac{\pi^2}{32} \right) \right. \\ & \left. \left. + \ell_\mu \left(-4 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\zeta_3}{4} \right) + \frac{\zeta_3}{3} \right) \right] \\ & + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\pi} \right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{9}{32} - \frac{n_\mu}{8} - \frac{n_\tau}{8} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{45}{64} + \frac{9\ell_\mu}{16} + \frac{5n_\mu}{48} + \frac{5n_\tau}{48} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{199}{128} + \frac{45\ell_\mu}{32} + \frac{9\ell_\mu^2}{16} - \frac{17\pi^2}{64} + \frac{\ln(2)\pi^2}{2} - \frac{3\zeta_3}{4} \\
& + n_\mu \left(\frac{143}{96} + \frac{13\ell_\mu}{24} + \frac{\ell_\mu^2}{8} - \frac{\pi^2}{6} \right) \\
& + n_\tau \left(-\frac{89}{288} + \frac{13\ell_\tau}{24} + \frac{\ell_\mu\ell_\tau}{4} - \frac{\ell_\tau^2}{8} + \left(\frac{19}{150} + \frac{\ell_\mu}{15} - \frac{\ell_\tau}{15} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \right. \\
& + \left(\frac{1389}{78400} + \frac{9\ell_\mu}{560} - \frac{9\ell_\tau}{560} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \\
& + \left(\frac{997}{198450} + \frac{2\ell_\mu}{315} - \frac{2\ell_\tau}{315} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \\
& + \left. \left(\frac{1229}{627264} + \frac{5\ell_\mu}{1584} - \frac{5\ell_\tau}{1584} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^8 \right) \\
& + \epsilon \left(\frac{677}{256} - 12a_4 + \frac{45\ell_\mu^2}{32} + \frac{3\ell_\mu^3}{8} - \frac{\ln^4(2)}{2} - \frac{205\pi^2}{128} + 3\ln(2)\pi^2 \right. \\
& - \ln^2(2)\pi^2 + \frac{7\pi^4}{40} - \frac{135\zeta_3}{16} + \ell_\mu \left(\frac{199}{64} - \frac{17\pi^2}{32} + \ln(2)\pi^2 - \frac{3\zeta_3}{2} \right) \\
& + n_\mu \left(\frac{1133}{192} + \frac{17\ell_\mu^2}{24} + \frac{\ell_\mu^3}{8} - \frac{227\pi^2}{288} + \ln(2)\pi^2 - \frac{7\zeta_3}{2} + \frac{175\ell_\mu}{48} - \frac{5\pi^2\ell_\mu}{16} \right) \\
& + n_\tau \left(\frac{869}{1728} + \frac{7\ell_\tau}{144} + \frac{\ell_\mu^2\ell_\tau}{8} + \frac{3\ell_\tau^2}{8} - \frac{\ell_\tau^3}{8} + \frac{13\pi^2}{288} + \ell_\mu \left(\frac{\ell_\tau}{3} + \frac{\ell_\tau^2}{8} + \frac{\pi^2}{48} \right) \right. \\
& + \left(-\frac{701}{3375} + \frac{\ell_\mu^2}{30} + \ell_\mu \left(\frac{1}{30} + \frac{\ell_\tau}{15} \right) + \frac{11\ell_\tau}{50} - \frac{\ell_\tau^2}{10} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \\
& + \left(\frac{20481}{10976000} + \frac{9\ell_\mu^2}{1120} + \frac{27\ell_\mu}{1120} + \frac{9\ell_\tau\ell_\mu}{560} + \frac{111\ell_\tau}{9800} - \frac{27\ell_\tau^2}{1120} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \\
& + \left(\frac{584149}{125023500} + \frac{\ell_\mu^2}{315} + \ell_\mu \left(\frac{5}{378} + \frac{2\ell_\tau}{315} \right) - \frac{631\ell_\tau}{198450} - \frac{\ell_\tau^2}{105} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \\
& + \left(\frac{176625767}{60857153280} + \frac{5\ell_\mu^2}{3168} + \ell_\mu \left(\frac{1}{126} + \frac{5\ell_\tau}{1584} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{8821\ell_\tau}{2195424} - \frac{5\ell_\tau^2}{1056} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^8 \Big) \\
& + n_e \left(-\frac{1}{8\epsilon^2} + \frac{5}{48\epsilon} + \frac{\ell_\mu^2}{8} + \frac{13\ell_\mu}{24} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{71}{96} - \frac{\pi^2}{4} \frac{m_e}{m_\mu} + \frac{3}{2} \frac{m_e^2}{m_\mu^2} - \frac{\pi^2}{4} \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon \left(\frac{\ell_\mu^3}{8} + \frac{17\ell_\mu^2}{24} + \left(\frac{103}{48} + \frac{3\pi^2}{16} \right) \ell_\mu + \zeta_3 + \frac{97\pi^2}{288} + \frac{581}{192} \right. \\
& \quad + \frac{m_e}{m_\mu} \left(-\frac{\pi^2 \ell_e}{2} - \frac{7\pi^2}{4} + 2\pi^2 \log(2) \right) + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(3\ell_\mu + \frac{1}{2} \right) \\
& \quad \left. + \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \left(-\frac{\pi^2 \ell_e}{2} - \frac{7\pi^2}{6} + 2\pi^2 \log(2) \right) \right) \Bigg] \\
& + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\pi} \right)^3 \left[\frac{1}{\epsilon^3} \left(-\frac{9}{128} + \frac{3n_\mu}{32} - \frac{n_\mu^2}{36} - \frac{n_\mu n_\tau}{18} + \frac{3n_\tau}{32} - \frac{n_\tau^2}{36} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\epsilon^2} \left(-\frac{63}{256} - \frac{27\ell_\mu}{128} + \left(-\frac{5}{192} + \frac{3\ell_\mu}{32} \right) n_\mu + \frac{5n_\mu^2}{216} \right. \\
& \quad \left. + \frac{5n_\mu n_\tau}{108} + \left(-\frac{5}{192} + \frac{3\ell_\mu}{32} \right) n_\tau + \frac{5n_\tau^2}{216} \right) \\
& + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{457}{512} - \frac{189\ell_\mu}{256} - \frac{81\ell_\mu^2}{256} + \frac{35n_\mu^2}{1296} \right. \\
& + \frac{35n_\mu n_\tau}{648} + \frac{35n_\tau^2}{1296} + \frac{111\pi^2}{512} - \frac{3\ln(2)\pi^2}{8} + \frac{9\zeta_3}{16} \\
& + n_\tau \left(\frac{79}{128} + \frac{3\ell_\mu^2}{64} + \ell_\mu \left(\frac{3}{64} - \frac{3\ell_\tau}{16} \right) - \frac{13\ell_\tau}{32} + \frac{3\ell_\tau^2}{32} + \frac{\pi^2}{128} - \frac{\zeta_3}{4} \right. \\
& + \left(-\frac{19}{200} - \frac{\ell_\mu}{20} + \frac{\ell_\tau}{20} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 + \left(-\frac{4167}{313600} - \frac{27\ell_\mu}{2240} \right. \\
& \quad \left. + \frac{27\ell_\tau}{2240} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 + \left(-\frac{997}{264600} - \frac{\ell_\mu}{210} + \frac{\ell_\tau}{210} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \Bigg) \\
& + n_\mu \left(-\frac{281}{384} - \frac{23\ell_\mu}{64} - \frac{3\ell_\mu^2}{64} + \frac{17\pi^2}{128} - \frac{\zeta_3}{4} \right) \Bigg) - \frac{567\ell_\mu^2}{512} - \frac{81\ell_\mu^3}{256} \\
& - \frac{14225}{3072} - 3a_4 - \frac{\ln^4(2)}{8} - \frac{6037\pi^2}{3072} + 5\ln(2)\pi^2 + \frac{5\ln^2(2)\pi^2}{4} - \frac{73\pi^4}{480} \\
& + \frac{5\zeta_5}{8} + \frac{153\zeta_3}{128} - \frac{\pi^2\zeta_3}{16} + \ell_\mu \left(-\frac{1371}{512} + \frac{333\pi^2}{512} - \frac{9\ln(2)\pi^2}{8} + \frac{27\zeta_3}{16} \right) \\
& + n_\tau \left(\frac{6367}{2304} - 4a_4 + \frac{\ell_\mu^3}{64} + \ell_\mu^2 \left(\frac{3}{128} - \frac{9\ell_\tau}{32} \right) - \frac{9\ell_\tau^2}{32} + \frac{3\ell_\tau^3}{32} \right. \\
& \left. - \frac{\ln^4(2)}{6} - \frac{23\pi^2}{768} + \frac{\ln^2(2)\pi^2}{6} + \frac{11\pi^4}{360} - \frac{29\zeta_3}{16} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \ell_\mu \left(\frac{415}{384} - \frac{21\ell_\tau}{32} - \frac{\pi^2}{128} \right) + \ell_\tau \left(-\frac{1}{64} + \frac{5\pi^2}{24} - \frac{\ln(2)\pi^2}{3} - \frac{\zeta_3}{4} \right) \\
& + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \left(\frac{8153}{12150} - \frac{31\ell_\mu^2}{360} + \ell_\mu \left(-\frac{67}{4050} + \frac{\ell_\tau}{45} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{4349\ell_\tau}{16200} + \frac{23\ell_\tau^2}{360} + \frac{2\pi^2}{135} - \frac{77\zeta_3}{144} \right) \\
& + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \left(\frac{13231711}{98784000} - \frac{17\ell_\mu^2}{1120} + \ell_\mu \left(\frac{1907}{44800} - \frac{13\ell_\tau}{2240} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{517\ell_\tau}{6272} + \frac{47\ell_\tau^2}{2240} + \frac{\pi^2}{105} - \frac{147\zeta_3}{1024} \right) \\
& + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \left(\frac{3752184623}{90016920000} - \frac{8\ell_\mu^2}{2025} + \ell_\mu \left(\frac{925261}{35721000} - \frac{181\ell_\tau}{28350} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{664523\ell_\tau}{17860500} + \frac{293\ell_\tau^2}{28350} + \frac{32\pi^2}{6075} - \frac{119\zeta_3}{1920} \right) \\
& + n_\tau^2 \left(\frac{1685}{7776} + \frac{31\ell_\tau}{108} - \frac{13\ell_\tau^2}{72} - \frac{\ell_\mu\ell_\tau^2}{12} + \frac{\ell_\tau^3}{18} - \frac{7\zeta_3}{18} \right) \\
& + \left(\frac{23}{324} - \frac{19\ell_\tau}{225} - \frac{2\ell_\mu\ell_\tau}{45} + \frac{2\ell_\tau^2}{45} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \\
& + \left(-\frac{119}{24000} + \ell_\mu \left(-\frac{1}{100} - \frac{3\ell_\tau}{280} \right) - \frac{71\ell_\tau}{39200} + \frac{3\ell_\tau^2}{280} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \\
& + \left(-\frac{1594}{496125} + \ell_\mu \left(-\frac{1}{175} - \frac{4\ell_\tau}{945} \right) + \frac{704\ell_\tau}{297675} + \frac{4\ell_\tau^2}{945} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \\
& + n_\mu n_\tau \left(-\frac{1327}{3888} - \frac{13\ell_\mu\ell_\tau}{36} - \frac{\ell_\mu^2\ell_\tau}{12} + \frac{\ell_\tau^3}{36} + \ell_\tau \left(-\frac{5}{8} + \frac{\pi^2}{9} \right) + \frac{2\zeta_3}{9} \right) \\
& + \left(-\frac{1541}{3375} - \frac{11\ell_\mu}{45} - \frac{\ell_\mu^2}{45} + \frac{4\ell_\tau}{25} + \frac{\ell_\tau^2}{45} + \frac{4\pi^2}{135} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \\
& + \left(-\frac{1833259}{16464000} - \frac{9\ell_\mu^2}{560} - \frac{3551\ell_\mu}{39200} + \frac{3\ell_\tau\ell_\mu}{140} + \frac{193\ell_\tau}{2450} - \frac{3\ell_\tau^2}{560} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \\
& + \left(-\frac{1997398}{93767625} - \frac{2\ell_\mu^2}{315} + \ell_\mu \left(-\frac{8021}{297675} + \frac{8\ell_\tau}{945} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{7024\ell_\tau}{297675} - \frac{2\ell_\tau^2}{945} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n_\mu \left(-\frac{5257}{2304} + \frac{8a_4}{3} - \frac{117\ell_\mu^2}{128} - \frac{11\ell_\mu^3}{64} + \frac{\ln^4(2)}{9} - \frac{1327\pi^2}{6912} + \frac{37\zeta_3}{96} \right. \\
& \quad + \frac{5\ln(2)\pi^2}{36} - \frac{\ln^2(2)\pi^2}{9} + \frac{91\pi^4}{2160} \\
& \quad \left. + \ell_\mu \left(-\frac{1145}{384} + \frac{221\pi^2}{384} - \frac{\ln(2)\pi^2}{3} - \frac{\zeta_3}{4} \right) \right) \\
& + n_\mu^2 \left(-\frac{9481}{7776} - \frac{13\ell_\mu^2}{72} - \frac{\ell_\mu^3}{36} + \frac{4\pi^2}{135} + \ell_\mu \left(-\frac{197}{216} + \frac{\pi^2}{9} \right) + \frac{11\zeta_3}{18} \right) \\
& + n_e n_\mu \left(-\frac{1}{18\epsilon^3} + \frac{5}{108\epsilon^2} + \frac{35}{648\epsilon} - \frac{\ell_\mu^3}{18} - \frac{13\ell_\mu^2}{36} + \left(\frac{\pi^2}{18} - \frac{143}{108} \right) \ell_\mu \right. \\
& \quad + \frac{13\pi^2}{108} + \frac{2\zeta_3}{9} - \frac{5917}{3888} + \frac{\pi^2 \ell_\mu m_e}{6 m_\mu} \\
& \quad \left. + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-\ell_\mu - \frac{2}{3} \right) + \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \left(\frac{\ell_\mu \pi^2}{6} + \frac{4\pi^2}{45} \right) \right) \\
& + n_e \left(\frac{3}{32\epsilon^3} + \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{3\ell_\mu}{32} - \frac{5}{192} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{3\ell_\mu^2}{64} - \frac{7\pi^2}{128} - \frac{23\ell_\mu}{64} - \frac{\zeta_3}{4} \right. \right. \\
& \quad \left. - \frac{65}{384} + \frac{3\pi^2 m_e}{16 m_\mu} - \frac{9 m_e^2}{8 m_\mu^2} + \frac{3\pi^2 m_e^3}{16 m_\mu^3} \right) - \frac{11\ell_\mu^3}{64} - \frac{117\ell_\mu^2}{128} \\
& \quad + \ell_\mu \left(-\frac{\pi^2 \log(2)}{3} + \frac{5\pi^2}{384} - \frac{\zeta_3}{4} - \frac{497}{384} \right) + \frac{\log^4(2)}{9} + \frac{2\pi^2 \log^2(2)}{9} \\
& \quad - \frac{11\pi^2 \log(2)}{9} - \frac{119\pi^4}{2160} + \frac{1091\pi^2}{2304} + \frac{8a_4}{3} + \frac{145\zeta_3}{96} + \frac{575}{2304} \\
& \quad + \frac{m_e}{m_\mu} \left(\frac{13\pi^3}{18} + \frac{3\ell_e \pi^2}{8} + \frac{3\ell_\mu \pi^2}{16} + \frac{5\pi^2 \log(2)}{18} - \frac{751\pi^2}{432} \right) \\
& \quad + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{3\pi^2}{4} - \frac{9\ell_e}{4} - \frac{9\ell_\mu}{8} - \frac{51}{8} \right) \\
& \quad \left. + \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \left(\frac{7\pi^3}{12} + \frac{11\ell_e \pi^2}{72} + \frac{59\ell_\mu \pi^2}{144} + \frac{5\pi^2 \log(2)}{18} - \frac{49\pi^2}{36} \right) \right) \\
& + n_e^2 \left(-\frac{1}{36\epsilon^3} + \frac{5}{216\epsilon^2} + \frac{35}{1296\epsilon} - \frac{\ell_\mu^3}{36} - \frac{13\ell_\mu^2}{72} + \left(-\frac{\pi^2}{18} - \frac{89}{216} \right) \ell_\mu \right. \\
& \quad \left. - \frac{13\pi^2}{108} - \frac{7\zeta_3}{18} - \frac{2353}{7776} + \frac{m_e}{m_\mu} \left(\frac{\ell_e \pi^2}{6} + \frac{4\pi^2}{45} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-\ell_\mu - \frac{2}{3} \right) + \frac{\ell_e \pi^2 m_e^3}{6 m_\mu^3} \\
& + n_e n_\tau \left(-\frac{1}{18\epsilon^3} + \frac{5}{108\epsilon^2} + \frac{35}{648\epsilon} + \frac{\ell_\tau^3}{36} + \ell_\tau \left(-\frac{1}{8} - \frac{13\ell_\mu}{36} - \frac{\ell_\mu^2}{12} - \frac{\pi^2}{18} \right) \right. \\
& \quad - \frac{1327}{3888} + \frac{2\zeta_3}{9} + \frac{\ell_\tau \pi^2 m_e}{6 m_\mu} - \frac{\ell_\tau m_e^2}{m_\mu^2} + \left(-\frac{46}{75} - \frac{\ell_\mu}{5} + \frac{\ell_\tau}{5} \right) \frac{m_e^2}{m_\tau^2} \\
& \quad + \left(\frac{529}{3375} - \frac{2\ell_\mu}{45} - \frac{\ell_\mu^2}{45} - \frac{\ell_\tau}{25} + \frac{\ell_\tau^2}{45} - \frac{2\pi^2}{135} \right) \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \\
& \quad + \frac{\ell_\tau \pi^2 m_e^3}{6 m_\mu^3} + \frac{4\pi^2 m_e^3}{45 m_\mu m_\tau^2} + \left(-\frac{142}{3675} - \frac{\ell_\mu}{35} + \frac{\ell_\tau}{35} \right) \frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^4} \\
& \quad + \left(\frac{552889}{16464000} - \frac{9\ell_\mu}{1120} - \frac{3\ell_\mu^2}{560} - \frac{37\ell_\tau}{9800} + \frac{3\ell_\tau^2}{560} - \frac{\pi^2}{280} \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} \\
& \quad + \left(\frac{99227}{7501410} - \frac{38\ell_\mu}{14175} - \frac{2\ell_\mu^2}{945} - \frac{199\ell_\tau}{297675} + \frac{2\ell_\tau^2}{945} - \frac{4\pi^2}{2835} \right) \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6} \\
& \quad \left. + \left(-\frac{286}{33075} - \frac{\ell_\mu}{105} + \frac{\ell_\tau}{105} \right) \frac{m_e^2 m_\mu^4}{m_\tau^6} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{2,\mu}^{\text{OS}} &= 1 + \frac{\bar{\alpha}}{\pi} \left[-1 - \frac{3}{4\epsilon} - \frac{3\ell_\mu}{4} + \epsilon \left(-2 - \ell_\mu - \frac{3\ell_\mu^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} \right) \right. \\
& \quad + \epsilon^2 \left(-4 - \frac{\ell_\mu^2}{2} - \frac{\ell_\mu^3}{8} - \frac{\pi^2}{12} + \ell_\mu \left(-2 - \frac{\pi^2}{16} \right) + \frac{\zeta_3}{4} \right) \\
& \quad + \epsilon^3 \left(-8 - \frac{\ell_\mu^3}{6} - \frac{\ell_\mu^4}{32} - \frac{\pi^2}{6} - \frac{3\pi^4}{640} + \ell_\mu^2 \left(-1 - \frac{\pi^2}{32} \right) \right. \\
& \quad \left. + \ell_\mu \left(-4 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{\zeta_3}{4} \right) + \frac{\zeta_3}{3} \right] \\
& \quad + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\pi} \right)^2 \left[\frac{9}{32\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{51}{64} + \frac{9\ell_\mu}{16} + \left(\frac{1}{16} + \frac{\ell_\mu}{4} \right) n_\mu + \left(\frac{1}{16} + \frac{\ell_\tau}{4} \right) n_\tau \right) \right. \\
& \quad + \frac{433}{128} + \frac{51\ell_\mu}{32} + \frac{9\ell_\mu^2}{16} - \frac{49\pi^2}{64} + \ln(2)\pi^2 - \frac{3\zeta_3}{2} \\
& \quad \left. + n_\mu \left(\frac{947}{288} + \frac{11\ell_\mu}{24} + \frac{3\ell_\mu^2}{8} - \frac{5\pi^2}{16} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n_\tau \left(\frac{\pi^2}{48} - \frac{5}{96} + \frac{11\ell_\tau}{24} + \frac{\ell_\mu \ell_\tau}{4} + \frac{\ell_\tau^2}{8} + \frac{1}{15} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \right. \\
& \quad + \left(-\frac{129}{78400} - \frac{9\ell_\mu}{560} + \frac{9\ell_\tau}{560} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \\
& \quad + \left(-\frac{367}{99225} - \frac{4\ell_\mu}{315} + \frac{4\ell_\tau}{315} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \\
& \quad \left. + \left(-\frac{569}{209088} - \frac{5\ell_\mu}{528} + \frac{5\ell_\tau}{528} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^8 \right) \\
& + \epsilon \left(\frac{211}{256} + \frac{51\ell_\mu^2}{32} + \frac{3\ell_\mu^3}{8} - \ln^4(2) - \frac{339\pi^2}{128} + \frac{23 \ln(2)\pi^2}{4} - 2 \ln^2(2)\pi^2 \right. \\
& \quad + \ell_\mu \left(\frac{433}{64} - \frac{49\pi^2}{32} + 2 \ln(2)\pi^2 - 3\zeta_3 \right) - \frac{297\zeta_3}{16} + \frac{7\pi^4}{20} - 24a_4 \\
& + n_\mu \left(\frac{17971}{1728} + \frac{5\ell_\mu^2}{8} + \frac{7\ell_\mu^3}{24} - \frac{445\pi^2}{288} + 2 \ln(2)\pi^2 \right. \\
& \quad \left. + \ell_\mu \left(\frac{1043}{144} - \frac{29\pi^2}{48} \right) - \frac{85\zeta_3}{12} \right) \\
& + n_\tau \left(\frac{89}{576} + \frac{\ell_\mu^2 \ell_\tau}{8} + \frac{7\ell_\tau^2}{24} + \frac{\ell_\tau^3}{24} + \frac{11\pi^2}{288} - \frac{\zeta_3}{12} + \ell_\tau \left(\frac{9}{16} + \frac{\pi^2}{24} \right) \right. \\
& \quad + \ell_\mu \left(\frac{\ell_\tau}{3} + \frac{\ell_\tau^2}{8} + \frac{\pi^2}{48} \right) + \left(-\frac{7}{75} + \frac{2\ell_\tau}{15} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \\
& \quad + \left(\frac{49659}{10976000} - \frac{9\ell_\mu^2}{1120} - \frac{27\ell_\mu}{1120} - \frac{9\ell_\tau \ell_\mu}{560} + \frac{51\ell_\tau}{2450} + \frac{27\ell_\tau^2}{1120} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \\
& \quad + \left(-\frac{71329}{62511750} - \frac{2\ell_\mu^2}{315} - \frac{5\ell_\mu}{189} - \frac{4\ell_\tau \ell_\mu}{315} + \frac{1891\ell_\tau}{99225} + \frac{2\ell_\tau^2}{105} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \\
& \quad + \left(-\frac{55373867}{20285717760} - \frac{5\ell_\mu^2}{1056} + \ell_\mu \left(-\frac{1}{42} - \frac{5\ell_\tau}{528} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{13441\ell_\tau}{731808} + \frac{5\ell_\tau^2}{352} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^8 \Big) \\
& + n_e \left(\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\ell_e}{4} + \frac{1}{16} \right) + \frac{\ell_e^2}{4} - \frac{\ell_e}{3} + \frac{\ell_\mu^2}{8} + \frac{19\ell_\mu}{24} + \frac{5\pi^2}{48} + \frac{443}{288} - \frac{3\pi^2}{8} \frac{m_e}{m_\mu} \right. \\
& \quad \left. + \frac{3m_e^2}{m_\mu^2} - \frac{5\pi^2}{8} \frac{m_e^3}{m_\mu^3} + \epsilon \left(\frac{\ell_e^3}{6} - \frac{\ell_e^2}{3} + \left(\frac{13}{18} + \frac{\pi^2}{24} \right) \ell_e + \frac{\ell_\mu^3}{8} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{23\ell_\mu^2}{24} + \left(\frac{145}{48} + \frac{3\pi^2}{16} \right) \ell_\mu + \frac{11\zeta_3}{12} + \frac{119\pi^2}{288} + \frac{6523}{1728} \\
& + \frac{m_e}{m_\mu} \left(-\frac{3\pi^2\ell_e}{4} - \frac{19\pi^2}{8} + 3\pi^2 \log(2) \right) + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(6\ell_\mu + \frac{5}{2} \right) \\
& + \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \left(-\frac{5\pi^2\ell_e}{4} + 5\pi^2 \log(2) - \frac{8\pi^2}{3} \right) \Bigg] \\
& + \left(\frac{\bar{\alpha}}{\pi} \right)^3 \left[-\frac{9}{128\epsilon^3} + \frac{1}{\epsilon^2} \left(-\frac{81}{256} - \frac{27\ell_\mu}{128} + \left(-\frac{7}{192} - \frac{3\ell_\mu}{16} \right) n_\mu \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{n_\mu^2}{72} + \frac{n_\mu n_\tau}{36} + \left(-\frac{7}{192} - \frac{3\ell_\tau}{16} \right) n_\tau + \frac{n_\tau^2}{72} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{1039}{512} - \frac{243\ell_\mu}{256} - \frac{81\ell_\mu^2}{256} + \frac{303\pi^2}{512} - \frac{3\ln(2)\pi^2}{4} + \frac{9\zeta_3}{8} \right. \\
& + \left(-\frac{5}{432} - \frac{\ell_\mu^2}{12} \right) n_\mu^2 + \left(-\frac{5}{216} - \frac{\ell_\mu\ell_\tau}{6} \right) n_\mu n_\tau + \left(-\frac{5}{432} - \frac{\ell_\tau^2}{12} \right) n_\tau^2 \\
& + n_\tau \left(\frac{85}{128} + \ell_\mu \left(-\frac{3}{64} - \frac{3\ell_\tau}{8} \right) - \frac{13\ell_\tau}{32} - \frac{3\ell_\tau^2}{32} - \frac{\pi^2}{64} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{20} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 + \left(\frac{387}{313600} + \frac{27\ell_\mu}{2240} - \frac{27\ell_\tau}{2240} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{367}{132300} + \frac{\ell_\mu}{105} - \frac{\ell_\tau}{105} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \right) \\
& + n_\mu \left(-\frac{707}{384} - \frac{29\ell_\mu}{64} - \frac{15\ell_\mu^2}{32} + \frac{15\pi^2}{64} \right) \\
& - \frac{10823}{3072} - \frac{729\ell_\mu^2}{512} - \frac{81\ell_\mu^3}{256} - \frac{5\ln^4(2)}{12} - \frac{58321\pi^2}{9216} - 10a_4 \\
& + \frac{685\ln(2)\pi^2}{48} + 3\ln^2(2)\pi^2 - \frac{41\pi^4}{120} - \frac{739\zeta_3}{128} + \frac{\pi^2\zeta_3}{8} \\
& + \ell_\mu \left(-\frac{3117}{512} + \frac{909\pi^2}{512} - \frac{9\ln(2)\pi^2}{4} + \frac{27\zeta_3}{8} \right) - \frac{5\zeta_5}{16} \\
& + n_\tau^2 \left(-\frac{35}{2592} - \frac{11\ell_\tau^2}{72} - \frac{\ell_\mu\ell_\tau^2}{12} - \frac{\ell_\tau^3}{12} - \frac{\ell_\tau\pi^2}{72} - \frac{2\ell_\tau}{45} \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{121}{24000} + \ell_\mu \left(\frac{1}{100} + \frac{3\ell_\tau}{280} \right) - \frac{349\ell_\tau}{39200} - \frac{3\ell_\tau^2}{280} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{353}{496125} + \ell_\mu \left(\frac{2}{175} + \frac{8\ell_\tau}{945} \right) - \frac{2668\ell_\tau}{297675} - \frac{8\ell_\tau^2}{945} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \\
& + n_\mu n_\tau \left(-\frac{35}{1296} - \frac{\ell_\mu^2 \ell_\tau}{4} + \ell_\tau \left(-\frac{481}{216} + \frac{5\pi^2}{24} \right) \right. \\
& \quad \left. + \ell_\mu \left(-\frac{11\ell_\tau}{36} - \frac{\ell_\tau^2}{12} - \frac{\pi^2}{72} \right) + \left(-\frac{37}{90} - \frac{2\ell_\mu}{45} + \frac{2\pi^2}{45} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{317689}{16464000} - \frac{3\ell_\mu}{1120} + \frac{3\ell_\mu^2}{560} + \frac{37\ell_\tau}{9800} - \frac{3\ell_\tau^2}{560} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \right. \\
& \quad \left. + \left(-\frac{159337}{18753525} + \frac{151\ell_\mu}{14175} + \frac{4\ell_\mu^2}{945} - \frac{2437\ell_\tau}{297675} - \frac{4\ell_\tau^2}{945} \right) \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \right) \\
& + n_\mu^2 \left(-\frac{8425}{2592} - \frac{11\ell_\mu^2}{72} - \frac{\ell_\mu^3}{6} + \frac{2\pi^2}{45} + \ell_\mu \left(-\frac{481}{216} + \frac{5\pi^2}{24} \right) + \frac{7\zeta_3}{3} \right) \\
& + n_\tau \left(\frac{4285}{2304} + \ell_\mu^2 \left(-\frac{3}{128} - \frac{3\ell_\tau}{8} \right) - \frac{\ell_\tau^2}{8} - \frac{\ell_\tau^3}{32} - \frac{29\pi^2}{768} + \frac{3\zeta_3}{16} \right. \\
& \quad \left. + \ell_\mu \left(\frac{87}{128} - \frac{31\ell_\tau}{32} - \frac{3\ell_\tau^2}{16} - \frac{\pi^2}{32} \right) + \ell_\tau \left(\zeta_3 - \frac{133}{192} + \frac{95\pi^2}{192} - \frac{2\ln(2)\pi^2}{3} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^2 \left(-\frac{461}{1296} - \frac{71\ell_\mu}{360} + \frac{17\ell_\tau}{360} + \frac{\pi^2}{45} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^4 \left(-\frac{2229623}{8232000} + \frac{3\ell_\mu^2}{80} + \ell_\mu \left(-\frac{28607}{940800} - \frac{87\ell_\tau}{2240} \right) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{3209\ell_\tau}{94080} + \frac{3\ell_\tau^2}{2240} + \frac{\pi^2}{105} + \frac{147\zeta_3}{1024} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)^6 \left(-\frac{15665719421}{90016920000} + \frac{1913\ell_\mu^2}{56700} + \ell_\mu \left(-\frac{1587179}{71442000} - \frac{1103\ell_\tau}{28350} \right) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. + \frac{2181719\ell_\tau}{71442000} + \frac{293\ell_\tau^2}{56700} + \frac{16\pi^2}{6075} + \frac{119\zeta_3}{960} \right) \right) \\
& + n_\mu \left(-\frac{76897}{6912} + 12a_4 - \frac{143\ell_\mu^2}{128} - \frac{19\ell_\mu^3}{32} + \frac{\ln^4(2)}{2} - \frac{11551\pi^2}{20736} \right. \\
& \quad \left. + \frac{7\ln(2)\pi^2}{18} - \frac{\ln^2(2)\pi^2}{2} + \frac{31\pi^4}{720} + \frac{1763\zeta_3}{288} \right. \\
& \quad \left. + \ell_\mu \left(-\frac{2891}{384} + \frac{233\pi^2}{192} - \frac{2\ln(2)\pi^2}{3} + \zeta_3 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + n_e n_\mu \left(\frac{1}{36\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{\ell_e \ell_\mu}{6} - \frac{5}{216} \right) - \frac{\ell_\mu^3}{12} - \frac{19\ell_\mu^2}{36} - \frac{\ell_e^2 \ell_\mu}{6} \right. \\
& \quad + \left(-\frac{355}{108} + \frac{11\pi^2}{72} \right) \ell_\mu + \ell_e \left(-\frac{\ell_\mu^2}{12} + \frac{2\ell_\mu}{9} - \frac{\pi^2}{72} \right) + \frac{13\pi^2}{36} - \frac{4721}{1296} \\
& \quad \left. + \frac{\pi^2 \ell_\mu}{4} \frac{m_e}{m_\mu} + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{\ell_e}{5} - \frac{11\ell_\mu}{5} - \frac{13}{25} \right) + \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \left(\frac{5\pi^2 \ell_\mu}{12} + \frac{2\pi^2}{15} \right) \right) \\
& + n_e \left(\frac{1}{\epsilon^2} \left(-\frac{3\ell_e}{16} - \frac{7}{192} \right) + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{3\ell_e^2}{16} - \frac{3\ell_\mu^2}{32} + \ell_e \left(\frac{3}{16} - \frac{3\ell_\mu}{16} \right) \right) \right. \\
& \quad - \frac{41\ell_\mu}{64} - \frac{5\pi^2}{64} - \frac{203}{384} + \frac{9\pi^2}{32} \frac{m_e}{m_\mu} - \frac{9}{4} \frac{m_e^2}{m_\mu^2} + \frac{15\pi^2}{32} \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \Bigg) \\
& \quad - \frac{\ell_e^3}{8} + \left(\frac{9}{32} - \frac{3\ell_\mu}{16} \right) \ell_e^2 + \left(-\frac{3\ell_\mu^2}{32} + \frac{3\zeta_3}{4} - \frac{3\pi^2}{64} + \frac{29}{48} \right) \ell_e \\
& \quad - \frac{3\ell_\mu^3}{16} - \frac{179\ell_\mu^2}{128} + \frac{28a_4}{3} + \frac{641\zeta_3}{96} + \frac{7\log^4(2)}{18} + \frac{5}{18} \pi^2 \log^2(2) \\
& \quad + \ell_\mu \left(\frac{\zeta_3}{4} - \frac{2}{3} \pi^2 \log(2) + \frac{31\pi^2}{96} - \frac{537}{128} \right) - \frac{47}{18} \pi^2 \log(2) - \frac{59\pi^4}{432} \\
& \quad + \frac{2881\pi^2}{2304} - \frac{5875}{2304} + \frac{m_e}{m_\mu} \left(\frac{9\pi^2 \ell_e}{16} + \frac{5}{12} \pi^2 \log(2) + \frac{9\ell_\mu \pi^2}{32} - \frac{751\pi^2}{288} \right. \\
& \quad \left. + \frac{13\pi^3}{12} \right) + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(\frac{\ell_\mu \ell_e}{2} - \frac{\ell_e^3}{4} - \frac{67\ell_e}{12} - \frac{\ell_\mu^2}{4} - \frac{7\ell_\mu}{6} + \frac{17\pi^2}{8} - \frac{1267}{72} \right) \\
& \quad \left. + \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \left(\frac{47\pi^2 \ell_e}{144} + \frac{41}{36} \pi^2 \log(2) + \frac{35\pi^3}{24} + \frac{311\ell_\mu \pi^2}{288} - \frac{47\pi^2}{12} \right) \right) \\
& + n_e^2 \left(\frac{1}{72\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{\ell_e^2}{12} - \frac{5}{432} \right) - \frac{5\ell_e^3}{36} + \frac{\ell_e^2}{9} - \frac{\ell_\mu^3}{36} - \frac{19\ell_\mu^2}{72} \right. \\
& \quad + \left(-\frac{31}{108} - \frac{\pi^2}{72} \right) \ell_e + \ell_\mu \left(-\frac{167}{216} - \frac{\pi^2}{18} \right) - \frac{19\pi^2}{108} - \frac{2449}{2592} \\
& \quad + \frac{m_e}{m_\mu} \left(\frac{\pi^2 \ell_e}{4} + \frac{2\pi^2}{15} \right) + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-2\ell_\mu - \frac{7}{3} \right) + \frac{5\pi^2 \ell_e}{12} \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \Bigg) \\
& + n_e n_\tau \left(\frac{1}{36\epsilon^2} - \frac{5}{216\epsilon} - \frac{\ell_e \ell_\tau}{6\epsilon} - \frac{\ell_e^2 \ell_\tau}{6} - \frac{35}{1296} + \ell_e \left(\frac{2\ell_\tau}{9} - \frac{\ell_\tau^2}{12} - \frac{\pi^2}{72} \right) \right. \\
& \quad \left. + \ell_\tau \left(-\frac{229}{216} - \frac{19\ell_\mu}{36} - \frac{\ell_\mu^2}{12} - \frac{5\pi^2}{72} \right) + \frac{\ell_\tau \pi^2}{4} \frac{m_e}{m_\mu} - \frac{2\ell_\tau m_e^2}{m_\mu^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{2}{45} - \frac{2\ell_\mu}{45} \right) \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\ell_e}{5} - \frac{\ell_\mu}{5} \right) \frac{m_e^2}{m_\tau^2} + \frac{5\ell_\tau\pi^2 m_e^3}{12 m_\mu^3} \\
& + \frac{2\pi^2 m_e^3}{15 m_\mu m_\tau^2} - \frac{m_e^2 m_\mu^2}{35 m_\tau^4} + \left(-\frac{685189}{16464000} - \frac{3\ell_\mu}{1120} + \frac{3\ell_\mu^2}{560} \right. \\
& + \frac{37\ell_\tau}{9800} - \frac{3\ell_\tau^2}{560} + \frac{\pi^2}{280} \left. \right) \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} + \left(-\frac{29}{33075} + \frac{\ell_\mu}{105} - \frac{\ell_\tau}{105} \right) \frac{m_e^2 m_\mu^4}{m_\tau^6} \\
& + \left(\frac{16\ell_\mu}{14175} + \frac{4\ell_\mu^2}{945} + \frac{398\ell_\tau}{297675} - \frac{4\ell_\tau^2}{945} + \frac{8\pi^2}{2835} - \frac{546409}{18753525} \right) \frac{m_\mu^6}{m_\tau^6} \left. \right].
\end{aligned}$$

Auf die Angabe der Renormierungskonstanten für das Elektron wird verzichtet, da diese zum Großteil aus den Muonkonstanten erzeugt werden können. Dazu muss zuerst $n_e = 0$ gesetzt werden. Die Ersetzungen von n_μ , m_μ und ℓ_μ durch n_e , m_e und ℓ_e führen auf den universellen und den Tau-Beitrag. Um den Muonbeitrag zu bekommen, müssen die Terme mit n_τ und n_τ^2 verdoppelt und in den dazugekommen Termen die Symbole n_τ , m_τ und ℓ_τ durch n_μ , m_μ und ℓ_μ ausgetauscht werden. Die Beiträge mit sowohl einer Muon- und Tauschleife können jedoch nicht extrahiert werden, sodass wir diese hier bis einschließlich der vierten Potenz in inversen schweren Massen m_μ und m_τ angeben.

$$\begin{aligned}
\delta Z_{m,e}^{\text{OS}} = n_\mu n_\tau \left(\frac{\bar{\alpha}}{\pi} \right)^3 & \left[-\frac{1}{18\epsilon^3} + \frac{5}{108\epsilon^2} + \frac{35}{648\epsilon} - \frac{1327}{3888} + \frac{2\zeta_3}{9} \right. \\
& + \frac{31\ell_\tau}{54} - \frac{13\ell_\mu\ell_\tau}{36} - \frac{\ell_e\ell_\mu\ell_\tau}{6} + \frac{\ell_\mu^2\ell_\tau}{12} + \frac{\ell_\tau^3}{36} \\
& + \frac{m_\mu^2}{m_\tau^2} \left(-\frac{47}{150} - \frac{\ell_\mu}{5} + \frac{\ell_\tau}{5} \right) + \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \left(-\frac{19\ell_\tau}{225} - \frac{2\ell_e\ell_\tau}{45} + \frac{2\ell_\mu\ell_\tau}{45} \right) \\
& + \frac{m_e^2}{m_\tau^2} \left(\frac{1937}{10125} - \frac{2\ell_\mu}{45} - \frac{2\ell_e\ell_\mu}{45} + \frac{\ell_\mu^2}{45} - \frac{\ell_\tau}{25} + \frac{\ell_\tau^2}{45} \right) \\
& + \frac{m_e^2 m_\mu^2}{m_\tau^4} \left(-\frac{107}{3675} - \frac{\ell_\mu}{35} + \frac{\ell_\tau}{35} \right) + \frac{m_e^4}{m_\mu^2 m_\tau^2} \left(-\frac{33}{1000} - \frac{\ell_e}{50} + \frac{\ell_\mu}{50} \right) \\
& + \frac{m_\mu^4}{m_\tau^4} \left(-\frac{224261}{2058000} - \frac{529\ell_\mu}{9800} - \frac{3\ell_\mu^2}{280} + \frac{529\ell_\tau}{9800} + \frac{3\ell_\mu\ell_\tau}{140} - \frac{3\ell_\tau^2}{280} \right) \\
& + \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \left(-\frac{463\ell_\tau}{39200} - \frac{3\ell_e\ell_\tau}{280} + \frac{3\ell_\mu\ell_\tau}{280} \right)
\end{aligned}$$

$$+ \frac{m_e^4}{m_\tau^4} \left(\frac{39379}{1029000} - \frac{9\ell_\mu}{1120} - \frac{3\ell_e\ell_\mu}{280} + \frac{3\ell_\mu^2}{560} - \frac{37\ell_\tau}{9800} + \frac{3\ell_\tau^2}{560} \right) \Bigg],$$

$$\begin{aligned} \delta Z_{2,e}^{\text{OS}} = n_\mu n_\tau \left(\frac{\bar{\alpha}}{\pi} \right)^3 & \left[\frac{1}{36\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-\frac{5}{216} - \frac{\ell_\mu\ell_\tau}{6} \right) - \frac{35}{1296} - \frac{11\ell_\mu\ell_\tau}{36} \right. \\ & - \frac{\ell_e\ell_\mu\ell_\tau}{6} - \frac{\ell_\mu^2\ell_\tau}{12} - \frac{\ell_\mu\ell_\tau^2}{12} - \frac{\ell_\mu\pi^2}{72} - \frac{\ell_\tau\pi^2}{72} \\ & - \frac{2\ell_\tau m_e^2}{45 m_\mu^2} - \frac{2\ell_\mu m_e^2}{45 m_\tau^2} + \left(\frac{13}{1000} + \frac{\ell_e}{50} - \frac{\ell_\mu}{50} \right) \frac{m_e^4}{m_\mu^2 m_\tau^2} \\ & + \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \left(\frac{43\ell_\tau}{39200} + \frac{3\ell_e\ell_\tau}{280} - \frac{3\ell_\mu\ell_\tau}{280} \right) \\ & \left. + \frac{m_e^4}{m_\tau^4} \left(-\frac{39379}{1029000} - \frac{3\ell_\mu}{1120} + \frac{3\ell_e\ell_\mu}{280} - \frac{3\ell_\mu^2}{560} + \frac{37\ell_\tau}{9800} - \frac{3\ell_\tau^2}{560} \right) \right]. \end{aligned}$$

Anhang B

Zwei- und Dreischleifen-Ergebnisse zu a_μ

Im Folgenden sind die universellen QED-Beiträge und die Elektronkorrekturen mit zwei und drei Schleifen zum anomalen magnetischen Moment vom Muon angegeben. Auch bei dieser Rechnung wurde eine asymptotische Entwicklung mit $m_e \ll m_\mu$ verwendet, sodass die Elektronbeiträge im Massenverhältnis entwickelt sind. Das Zweischleifen-Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} a_\mu^{(4)} = & \frac{3\zeta_3}{4} - \frac{31}{16} + \frac{5\pi^2}{12} - \frac{\log(2)\pi^2}{2} + n_\mu \left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3} \right) \\ & + n_e \left(\frac{1}{6} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{25}{36} + \frac{\pi^2 m_e}{4 m_\mu} + \left(3 - 2 \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right) \frac{m_e^2}{m_\mu^2} - \frac{5\pi^2 m_e^3}{4 m_\mu^3} \right. \\ & + \left(\frac{44}{9} + \frac{7}{3} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{1}{2} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{\pi^2}{3} \right) \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \\ & \left. + \left(-\frac{109}{225} - \frac{4}{15} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right) \frac{m_e^6}{m_\mu^6} + \left(-\frac{69}{980} - \frac{1}{14} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right) \frac{m_e^8}{m_\mu^8} \right). \end{aligned}$$

Die Dreischleifen-Ergebnisse wurden in zwei Beiträge aufgeteilt. $a_{\mu,\text{vac}}^{(6)}$ enthält nur leptonische Beiträge in Form von Korrekturen zu Photonpropagatoren und den universellen Anteil. $a_{\mu,\text{lbl}}^{(6)}$ stammt von Feynmandiagrammen mit einer Lichtstreuung zwischen dem externen und drei internen Photonen.

$$a_{\mu,\text{vac}}^{(6)} = \frac{5 \log^4(2)}{18} - \frac{5\pi^2 \log^2(2)}{18} - \frac{22\pi^2 \log(2)}{3} - \frac{139\pi^4}{2160} + \frac{23\pi^2}{6}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{20a_4}{3} + \frac{103\pi^2\zeta_3}{72} + \frac{241\zeta_3}{24} - \frac{235\zeta_5}{24} - \frac{101}{64} + n_\mu^2 \left(\frac{8\zeta_3}{3} - \frac{4\pi^2}{135} - \frac{943}{324} \right) \\
& + n_\mu \left(\frac{4\log^4(2)}{9} - \frac{4\pi^2\log^2(2)}{9} - \frac{16\pi^2\log(2)}{9} + \frac{4\pi^4}{135} + \frac{11\pi^2}{162} \right. \\
& + \left. \frac{32a_4}{3} - \frac{263\zeta_3}{72} + \frac{2027}{216} \right) + n_e^2 \left(-\frac{25}{54} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{1}{18} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{\pi^2}{27} + \frac{317}{324} \right. \\
& - \left. \frac{4\pi^2 m_e}{45 m_\mu} + \left(-\frac{2}{3} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{26}{9} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{4\pi^2}{9} - 4 \right) \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right. \\
& + \left. \left(\frac{2}{9} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{5}{6} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \left(\frac{4\pi^2}{9} + \frac{53}{54} \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{5\pi^2}{9} + \frac{551}{324} \right) \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \right) \\
& + n_e \left(\left(\frac{\zeta_3}{2} - \frac{1}{3} \pi^2 \log(2) - \frac{7}{6} + \frac{5\pi^2}{18} \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{\log^4(2)}{9} \right. \\
& - \left. \frac{2\pi^2 \log^2(2)}{9} + \frac{5\pi^2 \log(2)}{3} + \frac{11\pi^4}{216} - \frac{79\pi^2}{54} - \frac{8a_4}{3} - 3\zeta_3 + \frac{35}{8} \right. \\
& + \left. \left(-\frac{13\pi^3}{18} - \frac{16\log(2)\pi^2}{9} + \frac{659\pi^2}{216} \right) \frac{m_e}{m_\mu} \right. \\
& + \left. \left(\frac{3}{2} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{7}{2} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{14\log(2)\pi^2}{3} + \frac{49\pi^2}{12} - 2\zeta_3 + \frac{35}{6} \right) \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right. \\
& + \left. \left(\frac{2\pi^2}{3} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{35\pi^3}{12} - \frac{16\log(2)\pi^2}{3} - \frac{1135\pi^2}{216} \right) \frac{m_e^3}{m_\mu^3} \right. \\
& + \left(-\frac{41}{72} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{413}{144} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{10\log^4(2)}{9} + \frac{8\pi^2\log^2(2)}{9} \right. \\
& + \left. \left(2\pi^2 \log(2) - \frac{37\pi^2}{32} - \frac{236}{27} - \zeta_3 \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{89\pi^2 \log(2)}{48} \right. \\
& - \left. \left. \frac{43\pi^4}{108} - \frac{125\pi^2}{96} + \frac{80a_4}{3} + \frac{411\zeta_3}{32} - \frac{16741}{1296} \right) \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \right) \\
& + n_e n_\mu \left(\left(\frac{119}{54} - \frac{2\pi^2}{9} \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{\pi^2}{27} - \frac{61}{162} + \left(\frac{4\pi^2}{9} - \frac{115}{27} \right) \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \right. \\
& - \left. \frac{4\pi^2 m_e^3}{45 m_\mu^3} + \left(\frac{2}{15} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \left(\frac{331}{150} - \frac{2\pi^2}{9} \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{13\pi^2}{27} + \frac{124199}{20250} \right) \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \right),
\end{aligned}$$

$$a_{\mu,\text{lbl}}^{(6)} = n_\mu \left(16a_4 + \frac{2\log^4(2)}{3} - \frac{2\log^2(2)\pi^2}{3} - 24\log(2)\pi^2 - \frac{41\pi^4}{540} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5\pi^2\zeta_3}{18} + \frac{931\pi^2}{54} - \frac{4\zeta_3}{3} + \frac{5\zeta_5}{6} + \frac{5}{9} \Big) + n_e \left(\frac{\pi^2}{3} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{59\pi^4}{270} - 3\zeta_3 \right. \\
& - \frac{10\pi^2}{3} + \frac{2}{3} + \left. \left(\frac{2\pi^2}{3} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{196 \log(2)\pi^2}{3} + \frac{424\pi^2}{9} \right) \frac{m_e}{m_\mu} \right. \\
& + \left(-\frac{1}{12} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \left(\frac{\pi^2}{36} - \frac{5}{3} \right) \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{61\pi^4}{270} + \frac{4\pi^2\zeta_3}{3} + \frac{25\pi^2}{18} \right. \\
& + 3\zeta_3 - \frac{283}{12} + \left. \left(\frac{16\pi^2}{9} - \frac{8\pi^4}{135} - 2\zeta_3 - \frac{61}{6} \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right) \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \\
& + \left(\frac{5\pi^2}{9} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} - \frac{11\pi^2}{9} \right) \frac{m_e^3}{m_\mu^3} + \left(\frac{7}{72} \ln^3 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{41}{72} \ln^2 \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \right. \\
& \left. + \left(\frac{13\pi^2}{18} + \frac{517}{216} \right) \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{191\pi^2}{216} + \frac{\zeta_3}{2} + \frac{13283}{2592} \right) \frac{m_e^4}{m_\mu^4} \Big).
\end{aligned}$$

Anhang C

Programm zur Asymptotik

Die asymptotische Entwicklung ist einer der Kernschritte der durchgeführten Rechnungen. Aus diesem Grund wurde ein eigenständiges Mathematica-Paket implementiert, das die betrachteten Feynmandiagramme auf ihr asymptotisches Verhalten untersucht. Optional kann dabei auch das Programm `asy` eingebunden werden, das sogar für andere asymptotische Entwicklungen und Kinematiken benutzt werden kann. Desweiteren wird für die eigentliche Auswertung der asymptotischen Regionen eine konkrete Impulsverteilung gefunden und auf Integralfamilien abgebildet. Dazu wird auch entsprechender FORM-code erzeugt, der zur Berechnung der Regionen verwendet werden kann. Im Folgenden wird das Vorhergehen des Programmpakets beschrieben, das auch in Abb. C.1 schematisch gezeigt ist.

Zu einem betrachteten Feynmandiagramm werden zuerst alle möglichen Impulsverteilungen erzeugt, da diese für die Untersuchung der Asymptotik und das spätere Abbilden auf Integraltopologien gebraucht werden. Dazu ist es nötig alle Schleifen im Diagramm und alle Pfade für die externen Impulse zu finden. Für eine mögliche Impulsverteilung kann entsprechend die benötigte Anzahl an Schleifen, anhand derer die Integrationsimpulse gelegt werden, mit einem Pfad für den externen Impulsfluß kombiniert werden. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass nicht alle Permutationen von Schleifen erlaubt sind. So muss beispielsweise bei einem Ein-Teilchen-irreduziblen Diagramm der gesamte Graph mit den ausgewählten Schleifen überdeckt sein, sodass durch jeden Propagator mindestens ein Schleifenimpuls fließt.

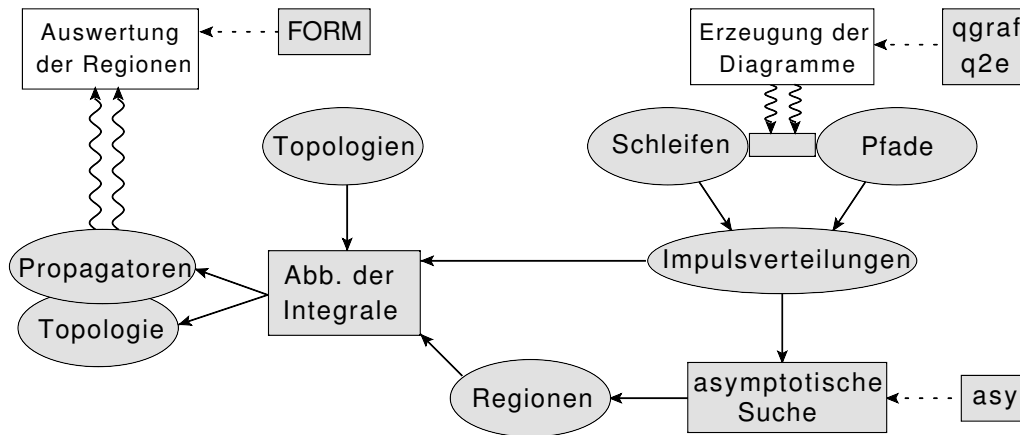


Abbildung C.1: Programmverlauf des implementierten Mathematicapakets zum asymptotischen Verhalten von Feynmandiagrammen. Dabei ist auch der Zusammenhang zu der Berechnung der Diagramme hergestellt. Als Input zum Mathematicapaket können die mit `qgraf/q2e` erzeugten Diagramme dienen, der Output kann mit `FORM` weiter behandelt werden, um die Diagramme konkret auszuwerten. Im Programmverlauf werden mit Rechtecken (Unter-) Programme dargestellt. Ovale zeigen dagegen Objekte, die von Unterprogrammen erzeugt werden und/oder zum weiteren Programmverlauf benötigt werden.

Um die asymptotischen Regionen des Feynmandiagramms zu bestimmen kann einerseits `asy` verwendet werden. Dazu werden die Propagatoren einer möglichen Impulsverteilung als Input an `asy` übergeben, sowie die vorgegebenen Skalierungsverhalten der Massen und externen Impulse. Die Ausgabe der gefundenen Regionen wird durch das Skalierungsverhalten der alpha-Parameter dargestellt, das auf die zugehörigen Propagatoren übertragen werden kann. Die andere benutzte Methode für das Auffinden der Regionen besteht darin alle zuvor erzeugten Impulsverteilungen zu betrachten. Dabei wird jeder Schleifenimpuls von der asymptotischen Skala auf eine der vorgegebenen Skalen gesetzt. Das führt bei einer möglichen Impulsverteilung direkt auf das Skalierungsverhalten der Propagatoren, sodass auch die Skalierung der entsprechenden alpha-Parameter bestimmt ist. Da das Verhalten der alpha-Parameter eine Region eindeutig kennzeichnet, wird damit sichergestellt, dass keine Region mehrmals auftritt. Außerdem wird mit der

Propagatordarstellung überprüft ob die Region skalenlose Integrale aufweist, sodass solche Regionen nicht mitgenommen werden. Auf diese Weise werden alle Impulsverteilungen mit allen möglichen asymptotischen Skalierungen der Schleifenimpulse untersucht. So ist garantiert, dass alle vorkommenden Regionen gefunden werden.

Zur eigentlichen Auswertung der asymptotischen Regionen wird eine konkrete Impulsverteilung gebraucht. Wurde jedoch bei der Untersuchung der Asymptotik `asy` verwendet, so liegen nur die Skalierungen der alpha-Parameter vor. Um dazu passende Impulsdarstellungen zu bekommen, kann ähnlich wie bei der Suche nach den Regionen vorgegangen werden. So werden alle Impulsverteilungen der möglichen Skalierungen der Schleifenimpulse solange überprüft, ob die dazugehörige alpha-Parameter Darstellung einer der vorliegenden entspricht, bis bei jeder Region eine Impulsverteilung gefunden wurde.

Bei der Berechnung der Schleifenintegrale werden diese üblicherweise in allgemeine Integralfamilien eingeteilt. Dazu ist es jedoch notwendig die Integrale einer asymptotischen Region auf die Integraltopologien abzubilden. Um das zu erreichen, werden zuerst die Integrale mit verschiedenen asymptotischen Skalen voneinander getrennt, sodass zu jeder Skala der dazugehörige Anteil der Propagatoren vorliegt. Damit das auf eine passende Integraltopologie abgebildet werden kann, werden für die Topologien wie zum Gesamtdiagramm alle möglichen Impulsverteilungen generiert. Diese wiederum werden mit den Propagatoren der einzelnen Skalen verglichen, bis eine komplette Übereinstimmung gefunden wird. Daraus lassen sich die Propagatoren einer Region auf passende Topologien übertragen und der notwendige `FORM`-code für die weitere Berechnung erzeugen.

Benutzung des Programms

Das Programmpaket wurde dazu entworfen asymptotische Entwicklungen für Feynmandiagramme mit bis zu vier Schleifen durchzuführen, die bis zu zwei externe Impulse und drei Massen aufweisen können. Es ist vorgesehen, dass ein externer Impuls vom asymptotischen Verhalten einer Masse entspricht, also $q_1 \sim M_1$ gilt, jedoch wurde in den durchgeführten Rechnungen nur die on-shell Bedingung $q_1^2 = M_1^2$ gebraucht. Beim optionalen zweiten Impuls wird

dagegen naiv entwickelt, also der Grenzfall $q_2 \rightarrow 0$ betrachtet. Die Notation der Ein- und Ausgabe ist an die von `q2e/exp` angelehnt, insbesondere kann `q2e` zur Erzeugung des benötigten Inputs verwendet werden. Im Folgenden wird die Benutzung der Funktionen und Variablen erläutert und danach ein paar Beispiele gezeigt.

- **takediasinfo**: Diese Funktion bekommt als Argument den Pfad zu der Datei mit den Namen und Grapheninformationen der zu betrachtenden Feynmandiagramme. Die Notation dazu entspricht der Ausgabe von `q2e`, siehe auch das Beispiel unten. **takediasinfo** bereitet nur den Input für die Funktion **gensrcfile** vor, sodass diese direkt auf jeden Diagrammeintrag angewendet werden kann. Außerdem wird das erste Diagramm dazu verwendet die Massenhierarchie festzulegen, die über die Variable **masshierarchy** in **gensrcfile** abgefragt wird.
- **taketopologies**: Das Argument dieser Funktion sollte der Pfad zur Datei sein, in der die allgemeinen Integralfamilien definiert werden. Dabei sollte eine ähnliche Notation wie bei der Benutzung von `exp` verwendet werden. Zusätzlich wird für die Propagatoren, die nur aus einem Skalarprodukt zwischen dem externen Impuls q_1 und einem Schleifenimpuls bestehen, als Konvention die Ziffer 9 in der Massenverteilung verwendet. Sollten außerdem mehrere Massenverteilungen angegeben werden, so wird nur die erste berücksichtigt. Im Gegensatz zu `exp` ist es bei dieser Funktion nicht vorgesehen, dass ein “x” in der Massenverteilung verwendet wird, sodass auf Topologien auch bei fehlenden massiven Propagatoren abgebildet wird. Diese Funktion gibt die Topologiedefinitionen in einem Format wider, der von **gensrcfile** benutzt werden kann und sollte dafür der Variablen **topologies** zugewiesen werden.
- **gensrcfile** ist die Hauptfunktion zum gesamten Paket. Diese liefert für ein Diagramm einen mit `FORM` lesbaren Programmcode, der in die vorhandenen asymptotischen Regionen aufgeteilt ist. Zu jeder Region sind dort auch die Informationen über die abgebildeten Integraltopologien und dafür notwendigen Definitionen zu Propagatoren enthalten. Das Argument sollte aus dem Namen und den Grapheninformationen zu einem Feynmandiagramm bestehen, wie das von **takediasinfo** geliefert wird. Desweiteren werden die folgenden Variablen gebraucht.

- **masshierarchy** sollte die Hierarchie der vorkommenden Massen beinhalten und wird nur zur Erzeugung des FORM-codes benötigt. Die Funktion **takediasinfo** setzt diese Variable automatisch.
- **topologies**: Hier muss eine Liste mit allen Integralfamilien definiert sein, die bei der Abbildung der Regionen auf diese gebraucht werden. Dazu kann die Ausgabe von **taketopologies** benutzt werden. Die Reihenfolge der Integraltopologien in der Liste bestimmt auch die Reihenfolge der zu berechnenden Integrale im FORM-code. So können simplere Topologien zuerst berechnet werden, sodass bei den schwierigeren Integralen keine Tensorstruktur ausgewertet werden muss.
- **diasinput** gibt den Pfad zum Verzeichnis vor, das die Dateien, aus denen der FORM-code generiert werden soll, enthält. Zu jedem Feynmandiagramm ist eine eigene Datei zu erstellen, deren Name aus dem Diagrammnamen und der Endung “.txt” besteht. Dazu kann auch die Ausgabe von **q2e** benutzt werden. Um die notwendigen Ersetzungen der Impulse durchzuführen wird der Inhalt in der Ausgangsdatei vom String zum Mathematica-Ausdruck umgewandelt, so sollte auf die Verwendung von Unterstrichen verzichtet werden. Außerdem sollte es möglich sein runde Klammern in eckige zu konvertieren. Eine Ausnahme bildet dabei der erste Faktor, bei dem die Klammern nicht ersetzt werden und dieser somit direkt als ein Mathematica-Ausdruck interpretiert wird. Daher sollten an dieser Stelle keine Funktionen auftreten, sondern nur Zahlen und Symbole.
- **makestrout** muss als String definiert sein. Dazu wird ein String angehängt, der als Teil eines Makefiles für die weitere Auswertung der Regionen benutzt werden kann.
- **rulekin** gibt die kinematischen Einschränkungen vor. Jedoch wurden bisher nur Rechnungen mit der on-shell Bedingung für den externen Impuls durchgeführt, sodass $q_1^2 \rightarrow M_1^2$ verwendet wurde. Andere Fälle sind demnach nicht getestet worden.
- **rulemass** und **rulemom** definieren das Skalierungsverhalten der vorkommenden Massen und des externen Impulses, das bei der asymptotischen Entwicklung benutzt wird. Die Skalierungen sollten in der Form $M_1 \rightarrow M_1 * x^n$ bzw. $q_1 \rightarrow q_1 * x^n$ angegeben

werden, wobei n gleich 0 oder 1 ist. Als Konvention wird mit “x” die leichte Skala gesetzt, das auch mit `asy` verträglich ist. Weiterhin können die Massen M_2 und M_3 verwendet werden und in der aktuellen Version muss der externe Impuls q_1 von der gleichen Skala wie M_1 sein. Es ist auch möglich Probleme mit drei Skalen zu betrachten, indem die leichteste Skala auf einen deutlich größeren Wert als die schweren Skalen gesetzt wird, z.B. x^5 . So wird ein Überlapp zwischen den Skalierungen in den Propagatoren vermieden.

- **asymode** gibt an, welche Methode zur Suche der asymptotischen Regionen benutzt wird und muss entweder auf -1 oder 0 gesetzt sein. Bei 0 wird das Programm `asy` verwendet, das deswegen bereits im Vorfeld mit Mathematica geladen werden muss. Ist -1 gesetzt, so werden die Regionen mit einem eigenständigen Algorithmus gesucht, bei dem alle möglichen Impulsverteilungen untersucht werden. Dabei kann nicht ausgeschlossen werden, dass einige Regionen mitgenommen werden, die auf skalenlose Integrale führen und somit null sind. Um das zu vermeiden kann **stickQ1toM1** auf 1 gesetzt werden, wenn die Diagramme es erlauben. Das führt auch zu einer Beschleunigung des Suchprozesses.
- **stickQ1toM1**: Wird diese Variable auf 1 gesetzt, so werden bei der Suche der Regionen nur Impulsverteilungen berücksichtigt, bei denen q_1 durch Propagatoren mit Masse M_1 fließt. Ist diese Wahl bei den betrachteten Diagrammen möglich und wird die eingebaute Suchmethode verwendet (**asymode** = -1), so ist es hilfreich diese Option zu verwenden. Ist **stickQ1toM1** nicht definiert oder ungleich 1, so wird keine Einschränkung an q_1 gelegt.

Zur Veranschaulichung der Benutzung des Programms werden im Folgenden einige Beispiele mit einer Schleife besprochen, die in Abb. C.2 gezeigt sind. Die Diagramme besitzen einen externen Impuls und zwei massive Propagatoren. Zuerst sei das Beispiel mit einer schwereren Masse als die Skala des externen Teilchen besprochen. Dazu werden drei Dateien benötigt. Die Grapheninformation soll hier in der Textdatei “dia1L.txt” gegeben sein, wobei diese die folgende Form aufweisen sollte, die auch der Ausgabe von `q2e` entspricht.

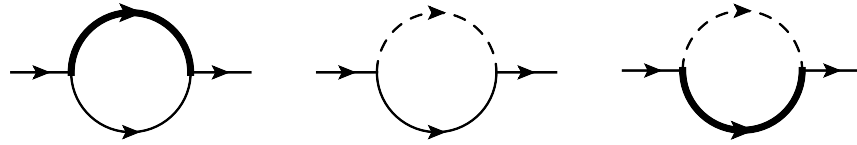


Abbildung C.2: Beispieldiagramme mit einer Schleife und einem externen Impuls. Der Propagator mit der dicken durchgezogenen Linie besitzt die schwerste Masse, die mittlere Skala wird vom externen Teilchen und dem Propagator mit der dünnen durchgezogenen Linie gesetzt. Die Masse des gestrichelten Propagators ist die leichteste Skala.

$$\{ \text{d1l}; 2; 1; 1; 2; M2, M1; (q1:1,2) (p1, M1:1,2) (p2, M2:1,2) \}$$

Die notwendigen Informationen sind der Diagrammname “d1l”, die Massenhierarchie “M2,M1”, die $M2 \gg M1$ signalisiert, und die internen und externen Impulsverläufe. Dabei geben beim Impulsfluß “(p:x,y)” die Zahlen x und y die Vertizes im Diagramm an. Bei massiven Propagatoren wird gegebenenfalls noch die Masse angegeben. Kommt ein zweiter externer Impuls vor, so wird in diesem naiv um 0 entwickelt, und die Notation dabei ist “(q2,e:x,y)”. Der zu behandelnde FORM-code zu diesem Diagramm muss in der Datei “d1l.txt” abgelegt sein. Dieser sei hier beispielsweise folgendermaßen gegeben.

```
* --#[ d1l :
    1*(-factor)*(-factor)
    *prop1*FP1(p1)
    *prop2*FP1(p2)
    ;
* --#] d1l :
```

Dabei ist in der zweiten Zeile der erste Faktor, der direkt als ein Mathematica-Ausdruck ausgewertet wird. So dürfen dort runde Klammern vorkommen, jedoch keine Funktionen. Bei Verwendung von `q2e` stehen hier beispielsweise Markierungen für Fermionschleifen. Bei den anderen Zeilen des Gesamtausdrucks dagegen dürfen runde Klammern nur in Verbindung mit Funktionen dastehen. Das Verzeichnis zu dieser Datei sei hier mit “BspV” bezeichnet. In diesem Beispiel werden nur zwei Integraltopologien benötigt, die in der Datei “topos1L.txt” definiert sind.


```
{ tad1lv2, poco_scale, copy_scale ; 2 ; 1 ; 0 ; 1 ; ; (p1:1,2) (p2:2,1) ; 20 }
{ prop1L, poco_scale, copy_scale ; 2 ; 1 ; 1 ; 1 ; ; (q1:1,2) (p1:1,2) (p2:1,2) ; 01 }
```

Die Konvention ist hierbei genauso wie bei der Verwendung von `exp`. Zuerst ist der Topologienname mit den Optionen angegeben. Auf die Bedeutung der Optionen wird in den Beispielen eingegangen. Die Zahlen danach zeigen die Anzahl der Linien, der Schleifen, der externen Impulse und der Massen auf. Analog zur oben angegebenen Diagrammdefinition sind auch hier die Propagatoren aufgezeigt, jedoch sind hier die Massenverteilungen durch die Ziffern am Schluß gegeben, wobei die “0” für eine masselose Linie steht. Durch den folgenden Mathematica-code lässt sich nun mit dem Programmpaket der benötigte FORM-code zur asymptotischen Berechnung des Diagramms erzeugen.

```
rulekin = { q1^2 -> M1^2 };
rulemass = { M2 -> M2, M1 -> M1*x };
rulemom = { q1 -> q1*x };

diasinput = “BspV/”;
dia1L = takediasinfo[“dia1L.txt”][[1]];
topologies = taketopologies[“topos1L.txt”];

asymode = -1;
stickQ1toM1 = 1;
makestrout = “”;
srcoutput = gensrcfile[dia1L];

Export[ToString[dia1L[[1]]] <> “.src”, srcoutput, “Table”];
```

Dabei wurde der eingebaute Algorithmus zur Suche der asymptotischen Regionen verwendet und der externe Impuls auf den Propagator mit Masse M1 gelegt. Der resultierende FORM-code wurde in der Datei “d1l.src” abgelegt. Dazu lassen sich zwei Regionen finden. Bei einer Region skaliert der Schleifenimpuls wie die schwere Masse M2, sodass beide Propagatoren schwer sind und die Topologie “tad1lv2” verwendet wird. Die alpha-Skalierung ist dazu {0,0}. Die andere Region hat dementsprechend den Impuls von der Masse M1, sodass die Topologie “prop1L” verwendet wird. Da ein Propagator jedoch die schwerere Masse aufweist, sind die beiden Propagatoren von der Skalierung unterschiedlich. In der alpha-Darstellung führt das auf {-2,0}, da jedoch aus Konsistenz zum Programm `asy` die erste Zahl auf 0 normiert wird,

wird das als $\{0,2\}$ angegeben. Der FORM-code ist analog zu der Ausgabe von `exp` gehalten, so sieht zur schwerer Region die Ausgabe wie folgt aus.

```
* --#[ d1lsub1 :
factor^2
*prop1*FP1(L, 1001, p12, pM2, exp, q1, pM1, M1, pM1, 1001, L)
*prop2*FP1(L, 1003, -p11, pM2, M2, pM2, 1003, L)
;
#define TOPOLOGY "arb"
#define INT1 "tad1lv2"
#define MASS1 "M2"
#define DALA1 "0"
* --#[ d1lsub1 :
* --#[ expd1lsub1 :
multiply eM2^1*pM2^4;
* --#[ expd1lsub1 :
```

Der erste Faktor wurde dabei direkt mit Mathematica ausgewertet. Die Propagatoren `p1` und `p2` wurden durch die Massen und die Linienimpulse der abgebildeten Topologie ersetzt. Die Notation der Impulse "`pxy`" gibt die Zuweisung zur `x`-ten Topologie, die mit "`INTx`" definiert ist, und dessen Impuls zur `y`-ten Linie an. Das Skalenverhalten ist durch die Variablen "`pMx`" gegeben, und da im ersten Propagator mehrere unterschiedliche asymptotische Skalen auftreten, werden diese mit der Variablen "`exp`" getrennt. Aufgrund der Optionen "`copy_scale`" und "`poco_scale`" in der Topologiedefinition wird einerseits die Massenskala vom Integral in "`MASSx`" definiert, und andererseits die Potenz vom Integrationsmaß im "`expd1lsub1`"-Block angegeben. Zu der zweiten Region wurden analog die Propagatoren aus der Ursprungsdatei ersetzt und ein FORM-code erzeugt, sodass hier nur die beiden Zeilen zu den Propagatoren angegeben seien.

```
*prop1*FP1(L, 1001, p12, pM1, M1, pM1, 1001, L)
*prop2*FP1(L, 1003, M2, pM2, exp, p11, pM1, 1003, L)
```

Da die zugehörige Topologie “prop1L” auch den externen Impuls mit einschließt, ist hier der Unterschied, dass dieser in den zugehörigen Linienimpulsen absorbiert ist und somit nicht auftaucht.

Das zweite Beispiel soll nun eine leichtere Masse, die hier mit M3 bezeichnet wird, als das externe Teilchen aufweisen. So muss auch die Massenhierarchie in der Graphendefinition angepasst werden.

$$\{ d11; 2; 1; 1; 2; M1, M3; (q1:1,2) (p1, M1:1,2) (p2, M3:1,2) \}$$

Der zu behandelnde FORM-code in der Datei “d11.txt” kann jedoch wiederverwendet werden. Bei der Ausführung des Asymptotik-Programms werden somit auch andere Ersetzungen für die asymptotischen Skalierungen benötigt.

```
rulemass = { M1 -> M1, M3 -> M3*x };
rulemom = { q1 -> q1 };
```

Aufgrund der leichten Skala wird eine weitere Integraltopologie gebraucht, die in folgender Form definiert wird.

$$\{ prop1l, poco_scale, copy_scale; 2; 1; 1; 2; ; (q1:1,2) (p1:2,1) (p2:1,2); 39 \}$$

Diese Topologie weist zum gewöhnlichen Propagator mit Masse M3 auch einen linearen Propagator auf, der in der Massenverteilung mit Ziffer “9” gekennzeichnet wird. Durch diesen Propagator muss der externe Impuls fließen, sodass die Entwicklung von diesem auf die Form $1/(2*p1.q1)$ führt. Hierbei ist demnach p1 nicht nur der erste Linienimpuls, sondern auch der Schleifenimpuls. Das führt darauf, dass dieser Propagator jeweils einfach mit der leichten und schweren Masse skaliert, der andere Propagator skaliert dagegen doppelt mit der leichten Skala. So ist das Skalierungsverhalten dieser asymptotischen Region in der alpha-Darstellung $\{-1,-2\}$, was aufgrund der Normierung auf $\{0,-1\}$ führt. Als Konvention wird im generierten FORM-code für den linearen Propagator “pM9” anstatt der üblichen Massenskala verwendet, so haben die ersetzten Propagatoren die folgende Gestalt.

```
*prop1*FP1(L, 1001, p12, pM9, M1, pM1, 1001, L)
*prop2*FP1(L, 1003, -p11, pM3, M3, pM3, 1003, L)
```

Die schwere Region dagegen kann auf die on-shell Topologie “prop1L” abgebildet werden, mit dem folgenden Ergebnis.

*prop1*FP1(L, 1001, p12, pM1, M1, pM1, 1001, L)
 *prop2*FP1(L, 1003, p11, pM1, exp, M3, pM3, 1003, L)

Zum Schluß soll noch das Einschleifen-Diagramm mit drei Skalen besprochen werden, wobei die Massen der Propagatoren sowohl schwerer als auch leichter als das externe Teilchen sind. Die Graphendefinition ist damit durch

$$\{ \text{d11}; 2; 1; 1; 2; M2, M1, M3; (q1:1,2) (p1, M2:1,2) (p2, M3:1,2) \}$$

gegeben. Es ist zu beachten, dass hier kein Propagator mit Masse M1 vorkommt und somit die Variable **stickQ1toM1** nicht auf 1 gesetzt werden darf. Um die Hierarchie $M2 \gg M1 \gg M3$ mit nur einem Entwicklungsparameter "x" zu beschreiben, kann die leichteste Skala auf eine viel größere Potenz, z.B. auf 5, gesetzt werden. Da in den Propagatoren die Massen und Impulse höchstens zur quadratischen Potenz auftreten, können dadurch die verschiedenen Skalen immer noch unterschieden werden. Die Ersetzungen zum Skalierungsverhalten haben somit die folgende Form.

rulemass = { M2 -> M2, M1 -> M1*x, M3 -> M3*x^5 };
 rulemom = { q1 -> q1*x };

Analog zum ersten Beispiel kann hier die schwere asymptotische Region auf die Integraltopologie "tad1lv2" abgebildet werden.

*prop1*FP1(L, 1001, p11, pM2, M2, pM2, 1001, L)
 *prop2*FP1(L, 1003, -p12, pM2, exp, q1, pM1, M3, pM3, 1003, L)

Auch die leichte Region zeigt ein ähnliches Verhalten, bei dem ein Propagator von der schweren Skala bleibt und der andere mit der leichtesten Masse skaliert. In der alpha-Darstellung führt das auf {0,-10}. Hier tritt ein Vakuumintegral auf, das folgendermaßen definiert werden kann.

$$\{ \text{tad1lv1}, \text{poco_scale}, \text{copy_scale}; 1; 1; 0; 1; ; (p1:1,1); 3 \}$$

Damit führt das bei den Propagatoren auf das Folgende.

*prop1*FP1(L, 1001, M2, pM2, exp, q1, pM1, p11, pM3, 1001, L)
 *prop2*FP1(L, 1003, -p11, pM3, M3, pM3, 1003, L)

Lebenslauf

Alexander Kurz

Anschrift	Am Graben 51 15732 Eichwalde
Geburtsdatum	19. Oktober 1985
Geburtsort	Kopejsk
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig
E-Mail	alex_kurz@gmx.net

Beruflicher Werdegang

Okt. 2014 - Dez. 2015	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Deutschen Elektronen-Synchrotron
Nov. 2012 - Sep. 2014	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Karlsruher Institut für Technologie

Ausbildungsdaten

Promotion	seit Nov. 2012, Physik am Karlsruher Institut für Technologie
Datum der Prüfung	12. Februar 2016
Titel	Leptonische und hadronische Korrekturen zum anomalen magnetischen Moment vom Muon und Elektron
Studium	2006-2012, Physik am Karlsruher Institut für Technologie
Diplom	10.04.2012, Note "sehr gut"
Titel	Entkopplungseffekte zur Dreischleifenordnung in supersymmetrischer QCD

Zivildienst	Nov. 2005 - Juli 2006, Arbeiter-Samariter-Bund, Karlsruhe
Schulbesuch	2002 - 2005 Friedrich-List-Wirtschafts- gymnasium, Karlsruhe 24.6.2005 Abitur, Durchschnittsnote 1,5

Publikationsliste

- A. Kurz, T. Liu, P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, “Light-by-light-type corrections to the muon anomalous magnetic moment at four-loop order,” *Phys. Rev. D* **92** (2015) 7, 073019 [arXiv:1508.00901 [hep-ph]].
- A. Kurz, T. Liu, P. Marquard and M. Steinhauser, “Hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment to next-to-next-to-leading order,” *Phys. Lett. B* **734** (2014) 144 [arXiv:1403.6400 [hep-ph]].
- A. Kurz, T. Liu, P. Marquard and M. Steinhauser, “Anomalous magnetic moment with heavy virtual leptons,” *Nucl. Phys. B* **879** (2014) 1 [arXiv:1311.2471 [hep-ph]].
- A. Kurz, M. Steinhauser and N. Zerf, “Decoupling Constant for α_s and the Effective Gluon-Higgs Coupling to Three Loops in Supersymmetric QCD,” *JHEP* **1207** (2012) 138 [arXiv:1206.6675 [hep-ph]].

Proceedings

- A. Kurz, T. Liu, P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, “Higher order hadronic and leptonic contributions to the muon $g - 2$,” arXiv:1511.08222 [hep-ph].
- A. Kurz, T. Liu, P. Marquard and M. Steinhauser, “Higher-order hadronic and heavy-lepton contributions to the anomalous magnetic moment,” *PoS LL* **2014** (2014) 051 [arXiv:1407.0264 [hep-ph]].

Literaturverzeichnis

- [1] K. Melnikov and A. Vainshtein, “Theory of the muon anomalous magnetic moment,” Springer Tracts Mod. Phys. **216** (2006) 1.
- [2] F. Jegerlehner and A. Nyffeler, “The Muon $g-2$,” Phys. Rept. **477** (2009) 1 [arXiv:0902.3360 [hep-ph]].
- [3] J. P. Miller, E. d. Rafael, B. L. Roberts and D. Stöckinger, “Muon ($g-2$): Experiment and Theory,” Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **62** (2012) 237.
- [4] P. J. Mohr, B. N. Taylor and D. B. Newell, “CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010,” Rev. Mod. Phys. **84** (2012) 1527 [arXiv:1203.5425 [physics.atom-ph]].
- [5] G. W. Bennett *et al.* [Muon $g-2$ Collaboration], “Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL,” Phys. Rev. D **73** (2006) 072003 [hep-ex/0602035].
- [6] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, “Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment — Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops,” Phys. Rev. D **91** (2015) 3, 033006 [arXiv:1412.8284 [hep-ph]].
- [7] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, “Complete Tenth-Order QED Contribution to the Muon $g-2$,” Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 111808 [arXiv:1205.5370 [hep-ph]].
- [8] R. M. Carey *et al.*, “The New ($g-2$) Experiment: A proposal to measure the muon anomalous magnetic moment to ± 0.14 ppm precision,” FERMILAB-PROPOSAL-0989.

- [9] T. Mibe [J-PARC g-2 Collaboration], “New g-2 experiment at J-PARC,” *Chin. Phys. C* **34**, 745 (2010).
- [10] J. S. Schwinger, “On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron,” *Phys. Rev.* **73** (1948) 416.
- [11] A. Petermann, “Fourth order magnetic moment of the electron,” *Helv. Phys. Acta* **30** (1957) 407.
- [12] C. M. Sommerfield, “Magnetic Dipole Moment of the Electron,” *Phys. Rev.* **107** (1957) 328.
- [13] S. Laporta and E. Remiddi, “The Analytical value of the electron (g-2) at order α^3 in QED,” *Phys. Lett. B* **379** (1996) 283 [hep-ph/9602417].
- [14] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita and M. Nio, “Tenth-Order QED Contribution to the Electron g-2 and an Improved Value of the Fine Structure Constant,” *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 111807 [arXiv:1205.5368 [hep-ph]].
- [15] H.H. Elend, *Phys. Lett.* **20** (1966) 682; **21** (1966) 720(E).
- [16] M. A. Samuel and G. w. Li, “Improved analytic theory of the muon anomalous magnetic moment,” *Phys. Rev. D* **44** (1991) 3935 [*Phys. Rev. D* **48** (1993) 1879].
- [17] S. Laporta and E. Remiddi, “The Analytical value of the electron light-light graphs contribution to the muon (g-2) in QED,” *Phys. Lett. B* **301** (1993) 440.
- [18] S. Laporta, “The Analytical contribution of the sixth order graphs with vacuum polarization insertions to the muon (g-2) in QED,” *Nuovo Cim. A* **106**, 675 (1993).
- [19] P. A. Baikov and D. J. Broadhurst, “Three loop QED vacuum polarization and the four loop muon anomalous magnetic moment,” In *Pisa 1995, New computing techniques in physics research* 167-172 [hep-ph/9504398].
- [20] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, “Light-by-light-type corrections to the muon anomalous magnetic moment at four-loop order,” *Phys. Rev. D* **92** (2015) 7, 073019 [arXiv:1508.00901 [hep-ph]].

- [21] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard, A. Smirnov, V. Smirnov and M. Steinhauser, “Electron contribution to the muon anomalous magnetic moment at four loops,” arXiv:1602.02785 [hep-ph].
- [22] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, “Higher order hadronic and leptonic contributions to the muon $g - 2$,” arXiv:1511.08222 [hep-ph].
- [23] J. Calmet and A. Peterman, “Contribution to the Muon Anomaly from a Set of Eighth Order Diagrams,” Phys. Lett. B **56** (1975) 383.
- [24] C. Chlouber and M. A. Samuel, “Contribution to the Eighth Order Anomalous Magnetic Moment of the Muon,” Phys. Rev. D **16** (1977) 3596.
- [25] S. Laporta, “The Analytical contribution of some eighth order graphs containing vacuum polarization insertions to the muon ($g-2$) in QED,” Phys. Lett. B **312** (1993) 495 [hep-ph/9306324].
- [26] J. P. Aguilar, D. Greynat and E. De Rafael, “Muon Anomaly from Lepton Vacuum Polarization and The Mellin-Barnes Representation,” Phys. Rev. D **77** (2008) 093010 [arXiv:0802.2618 [hep-ph]].
- [27] D. J. Broadhurst, A. L. Kataev and O. V. Tarasov, “Analytical on-shell QED results: Three loop vacuum polarization, four loop Beta function and the muon anomaly,” Phys. Lett. B **298** (1993) 445 [hep-ph/9210255].
- [28] R. Lee, P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, “Four-loop corrections with two closed fermion loops to fermion self energies and the lepton anomalous magnetic moment,” JHEP **1303** (2013) 162 [arXiv:1301.6481 [hep-ph]].
- [29] T. Appelquist and J. Carazzone, “Infrared Singularities and Massive Fields,” Phys. Rev. D **11** (1975) 2856.
- [30] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard and M. Steinhauser, “Anomalous magnetic moment with heavy virtual leptons,” Nucl. Phys. B **879** (2014) 1 [arXiv:1311.2471 [hep-ph]].
- [31] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard and M. Steinhauser, “Higher-order hadronic and heavy-lepton contributions to the anomalous magnetic moment,” PoS LL **2014** (2014) 051 [arXiv:1407.0264 [hep-ph]].

- [32] A. Czarnecki and M. Skrzypek, “The Muon anomalous magnetic moment in QED: Three loop electron and tau contributions,” *Phys. Lett. B* **449** (1999) 354 [hep-ph/9812394].
- [33] S. Friot, D. Greynat and E. De Rafael, “Asymptotics of Feynman diagrams and the Mellin-Barnes representation,” *Phys. Lett. B* **628** (2005) 73 [hep-ph/0505038].
- [34] A. Czarnecki, B. Krause and W. J. Marciano, “Electroweak corrections to the muon anomalous magnetic moment,” *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3267 [hep-ph/9512369].
- [35] M. Knecht, S. Peris, M. Perrottet and E. De Rafael, “Electroweak hadronic contributions to the muon ($g-2$),” *JHEP* **0211** (2002) 003 [hep-ph/0205102].
- [36] A. Czarnecki, W. J. Marciano and A. Vainshtein, “Refinements in electroweak contributions to the muon anomalous magnetic moment,” *Phys. Rev. D* **67** (2003) 073006 [*Phys. Rev. D* **73** (2006) 119901] [hep-ph/0212229].
- [37] C. Gnendiger, D. Stöckinger and H. Stöckinger-Kim, “The electroweak contributions to $(g-2)_\mu$ after the Higgs boson mass measurement,” *Phys. Rev. D* **88** (2013) 053005 [arXiv:1306.5546 [hep-ph]].
- [38] R. Barbieri and E. Remiddi, “Electron and Muon $1/2(g-2)$ from Vacuum Polarization Insertions,” *Nucl. Phys. B* **90** (1975) 233.
- [39] B. Krause, “Higher order hadronic contributions to the anomalous magnetic moment of leptons,” *Phys. Lett. B* **390**, 392 (1997) [hep-ph/9607259].
- [40] B. Aubert *et al.* [BaBar Collaboration], “Precise measurement of the $e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^- (\gamma)$ cross section with the Initial State Radiation method at BABAR,” *Phys. Rev. Lett.* **103** (2009) 231801 [arXiv:0908.3589 [hep-ex]].
- [41] F. Ambrosino *et al.* [KLOE Collaboration], “Measurement of $\sigma(e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ from threshold to 0.85 GeV^2 using Initial State Radiation with the KLOE detector,” *Phys. Lett. B* **700** (2011) 102 [arXiv:1006.5313 [hep-ex]].

- [42] M. Davier, A. Hoecker, B. Malaescu and Z. Zhang, “Reevaluation of the Hadronic Contributions to the Muon $g-2$ and to $\alpha(M_Z)$,” *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1515 [*Eur. Phys. J. C* **72** (2012) 1874] [arXiv:1010.4180 [hep-ph]].
- [43] K. Hagiwara, R. Liao, A. D. Martin, D. Nomura and T. Teubner, “ $(g-2)_\mu$ and $\alpha(M_Z^2)$ re-evaluated using new precise data,” *J. Phys. G* **38** (2011) 085003 [arXiv:1105.3149 [hep-ph]].
- [44] F. Jegerlehner and R. Szafron, “ $\rho^0-\gamma$ mixing in the neutral channel pion form factor F_π^e and its role in comparing e^+e^- with τ spectral functions,” *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1632 [arXiv:1101.2872 [hep-ph]].
- [45] M. Benayoun, P. David, L. DelBuono and F. Jegerlehner, “An Update of the HLS Estimate of the Muon $g-2$,” *Eur. Phys. J. C* **73** (2013) 2453 [arXiv:1210.7184 [hep-ph]].
- [46] D. Nomura and T. Teubner, “Hadronic contributions to the anomalous magnetic moment of the electron and the hyperfine splitting of muonium,” *Nucl. Phys. B* **867** (2013) 236 [arXiv:1208.4194 [hep-ph]].
- [47] A. Kurz, T. Liu, P. Marquard and M. Steinhauser, “Hadronic contribution to the muon anomalous magnetic moment to next-to-next-to-leading order,” *Phys. Lett. B* **734** (2014) 144 [arXiv:1403.6400 [hep-ph]].
- [48] D. Greynat and E. de Rafael, “Hadronic Contributions to the Muon Anomaly in the Constituent Chiral Quark Model,” *JHEP* **1207** (2012) 020 [arXiv:1204.3029 [hep-ph]].
- [49] M. Della Morte, B. Jager, A. Juttner and H. Wittig, “Towards a precise lattice determination of the leading hadronic contribution to $(g-2)_\mu$,” *JHEP* **1203** (2012) 055 [arXiv:1112.2894 [hep-lat]].
- [50] F. Burger *et al.* [ETM Collaboration], “Four-Flavour Leading-Order Hadronic Contribution To The Muon Anomalous Magnetic Moment,” *JHEP* **1402** (2014) 099 [arXiv:1308.4327 [hep-lat]].
- [51] K. Melnikov and A. Vainshtein, “Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment revisited,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 113006 [hep-ph/0312226].

- [52] A. Nyffeler, “Hadronic light-by-light scattering in the muon $g-2$: A New short-distance constraint on pion-exchange,” *Phys. Rev. D* **79** (2009) 073012 [arXiv:0901.1172 [hep-ph]].
- [53] J. Prades, E. de Rafael and A. Vainshtein, “The Hadronic Light-by-Light Scattering Contribution to the Muon and Electron Anomalous Magnetic Moments,” *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **20** (2009) 303 [arXiv:0901.0306 [hep-ph]].
- [54] T. Blum, S. Chowdhury, M. Hayakawa and T. Izubuchi, “Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon anomalous magnetic moment from lattice QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 1, 012001 [arXiv:1407.2923 [hep-lat]].
- [55] T. Blum, N. Christ, M. Hayakawa, T. Izubuchi, L. Jin and C. Lehner, “Lattice Calculation of Hadronic Light-by-Light Contribution to the Muon Anomalous Magnetic Moment,” arXiv:1510.07100 [hep-lat].
- [56] J. A. M. Vermaseren, “Axodraw,” *Comput. Phys. Commun.* **83** (1994) 45.
- [57] D. Binosi, J. Collins, C. Kaufhold and L. Theussl, “JaxoDraw: A Graphical user interface for drawing Feynman diagrams. Version 2.0 release notes,” *Comput. Phys. Commun.* **180** (2009) 1709 [arXiv:0811.4113 [hep-ph]].
- [58] K. G. Chetyrkin and M. Steinhauser, “The Relation between the \overline{MS} and the on-shell quark mass at order $\alpha(s)^3$,” *Nucl. Phys. B* **573** (2000) 617 [hep-ph/9911434].
- [59] K. Melnikov and T. van Ritbergen, “The Three loop on-shell renormalization of QCD and QED,” *Nucl. Phys. B* **591** (2000) 515 [hep-ph/0005131].
- [60] N. Gray, D. J. Broadhurst, W. Grafe and K. Schilcher, “Three Loop Relation of Quark (Modified) M_s and Pole Masses,” *Z. Phys. C* **48** (1990) 673.
- [61] D. J. Broadhurst, N. Gray and K. Schilcher, “Gauge invariant on-shell $Z(2)$ in QED, QCD and the effective field theory of a static quark,” *Z. Phys. C* **52** (1991) 111.

- [62] S. Bekavac, A. G. Grozin, D. Seidel and V. A. Smirnov, “Three-loop on-shell Feynman integrals with two masses,” Nucl. Phys. B **819** (2009) 183 [arXiv:0903.4760 [hep-ph]].
- [63] <http://www.ttp.kit.edu/Progdata/ttp07/ttp07-21/>
- [64] S. Bekavac, A. Grozin, D. Seidel and M. Steinhauser, “Light quark mass effects in the on-shell renormalization constants,” JHEP **0710** (2007) 006 [arXiv:0708.1729 [hep-ph]].
- [65] K. Melnikov and T. v. Ritbergen, “The Three loop relation between the $\overline{\text{MS}}$ and the pole quark masses,” Phys. Lett. B **482** (2000) 99 [hep-ph/9912391].
- [66] P. Marquard, L. Mihaila, J. H. Piclum and M. Steinhauser, “Relation between the pole and the minimally subtracted mass in dimensional regularization and dimensional reduction to three-loop order,” Nucl. Phys. B **773** (2007) 1 [hep-ph/0702185].
- [67] K. G. Chetyrkin and M. Steinhauser, “Short distance mass of a heavy quark at order α_s^3 ,” Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4001 [hep-ph/9907509].
- [68] C. Sturm, “Leptonic contributions to the effective electromagnetic coupling at four-loop order in QED,” Nucl. Phys. B **874** (2013) 698 [arXiv:1305.0581 [hep-ph]].
- [69] P. Nogueira, “Automatic Feynman graph generation,” J. Comput. Phys. **105** (1993) 279.
- [70] R. Harlander, T. Seidensticker and M. Steinhauser, “Complete corrections of Order α_s^3 to the decay of the Z boson into bottom quarks,” Phys. Lett. B **426** (1998) 125 [hep-ph/9712228].
- [71] T. Seidensticker, “Automatic application of successive asymptotic expansions of Feynman diagrams,” hep-ph/9905298.
- [72] J. A. M. Vermaseren, “New features of FORM,” math-ph/0010025.
- [73] J. Kuipers, T. Ueda, J. A. M. Vermaseren and J. Vollinga, “FORM version 4.0,” Comput. Phys. Commun. **184** (2013) 1453 [arXiv:1203.6543 [cs.SC]].

- [74] M. Tentyukov and J. A. M. Vermaseren, “The Multithreaded version of FORM,” *Comput. Phys. Commun.* **181** (2010) 1419 [hep-ph/0702279].
- [75] A. V. Smirnov, “FIRE5: a C++ implementation of Feynman Integral REduction,” *Comput. Phys. Commun.* **189** (2014) 182 [arXiv: 1408.2372 [hep-ph]].
- [76] S. Laporta, “High precision calculation of multiloop Feynman integrals by difference equations,” *Int. J. Mod. Phys. A* **15** (2000) 5087 [hep-ph/0102033].
- [77] K. G. Chetyrkin and F. V. Tkachov, “Integration by Parts: The Algorithm to Calculate beta Functions in 4 Loops,” *Nucl. Phys. B* **192**, 159 (1981).
- [78] S. Laporta, “High precision epsilon expansions of massive four loop vacuum bubbles,” *Phys. Lett. B* **549** (2002) 115 [hep-ph/0210336].
- [79] K. G. Chetyrkin, J. H. Kuhn, P. Mastrolia and C. Sturm, “Heavy-quark vacuum polarization: First two moments of the $O(\alpha^3(s) n^2(f))$ contribution,” *Eur. Phys. J. C* **40** (2005) 361 [hep-ph/0412055].
- [80] B. A. Kniehl and A. V. Kotikov, “Calculating four-loop tadpoles with one non-zero mass,” *Phys. Lett. B* **638** (2006) 531 [hep-ph/0508238].
- [81] Y. Schroder and M. Steinhauser, “Four-loop singlet contribution to the rho parameter,” *Phys. Lett. B* **622** (2005) 124 [hep-ph/0504055].
- [82] Y. Schroder and M. Steinhauser, “Four-loop decoupling relations for the strong coupling,” *JHEP* **0601** (2006) 051 [hep-ph/ 0512058].
- [83] Y. Schroder and A. Vuorinen, “High-precision epsilon expansions of single-mass-scale four-loop vacuum bubbles,” *JHEP* **0506** (2005) 051 [hep-ph/0503209].
- [84] E. Bejdakic and Y. Schroder, “Hypergeometric representation of a four-loop vacuum bubble,” *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **160** (2006) 155 [hep-ph/0607006].
- [85] K. G. Chetyrkin, M. Faisst, C. Sturm and M. Tentyukov, “epsilon-finite basis of master integrals for the integration-by-parts method,” *Nucl. Phys. B* **742** (2006) 208 [hep-ph/0601165].

- [86] B. A. Kniehl and A. V. Kotikov, “Heavy-quark QCD vacuum polarisation function: Analytical results at four loops,” *Phys. Lett. B* **642** (2006) 68 [hep-ph/0607201].
- [87] B. A. Kniehl, A. V. Kotikov, A. I. Onishchenko and O. L. Veretin, “Strong-coupling constant with flavor thresholds at five loops in the anti-MS scheme,” *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 042001 [hep-ph/0607202].
- [88] R. N. Lee and V. A. Smirnov, “Analytic Epsilon Expansions of Master Integrals Corresponding to Massless Three-Loop Form Factors and Three-Loop $g-2$ up to Four-Loop Transcendentality Weight,” *JHEP* **1102** (2011) 102 [arXiv:1010.1334 [hep-ph]].
- [89] V. A. Smirnov, “Asymptotic expansions in limits of large momenta and masses,” *Commun. Math. Phys.* **134** (1990) 109.
- [90] M. Beneke and V. A. Smirnov, “Asymptotic expansion of Feynman integrals near threshold,” *Nucl. Phys. B* **522** (1998) 321 [hep-ph/9711391].
- [91] B. Jantzen, “Foundation and generalization of the expansion by regions,” *JHEP* **1112** (2011) 076 [arXiv:1111.2589 [hep-ph]].
- [92] V. A. Smirnov, “Analytic tools for Feynman integrals,” *Springer Tracts Mod. Phys.* **250** (2012) 1.
- [93] K. G. Chetyrkin, “A closed analytical formula for two loop massive tadpoles with arbitrary tensor numerators,” In *Oberammergau 1993, New computing techniques in physics research III* 559-563 [hep-ph/0212040].
- [94] M. Steinhauser, “MATAD: A Program package for the computation of MASSive TADpoles,” *Comput. Phys. Commun.* **134** (2001) 335 [hep-ph/0009029].
- [95] G. Passarino and M. J. G. Veltman, “One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model,” *Nucl. Phys. B* **160** (1979) 151.
- [96] J. Beringer *et al.* [Particle Data Group Collaboration], “Review of Particle Physics (RPP),” *Phys. Rev. D* **86**, 010001 (2012).

- [97] R. Boughezal and K. Melnikov, “Hadronic light-by-light scattering contribution to the muon magnetic anomaly: constituent quark loops and QCD effects,” *Phys. Lett. B* **704** (2011) 193 [arXiv:1104.4510 [hep-ph]].
- [98] V. A. Smirnov, “Problems of the strategy of regions,” *Phys. Lett. B* **465** (1999) 226 [hep-ph/9907471].
- [99] A. Pak and A. Smirnov, “Geometric approach to asymptotic expansion of Feynman integrals,” *Eur. Phys. J. C* **71** (2011) 1626 [arXiv:1011.4863 [hep-ph]].
- [100] B. Jantzen, A. V. Smirnov and V. A. Smirnov, “Expansion by regions: revealing potential and Glauber regions automatically,” *Eur. Phys. J. C* **72** (2012) 2139 [arXiv:1206.0546 [hep-ph]].
- [101] P. Marquard, A. V. Smirnov, V. A. Smirnov and M. Steinhauser, “Quark Mass Relations to Four-Loop Order in Perturbative QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **114** (2015) 14, 142002 [arXiv:1502.01030 [hep-ph]].
- [102] P. Marquard, D. Seidel, nicht publiziert.
- [103] R. N. Lee, “Presenting LiteRed: a tool for the Loop InTEgrals REDuction,” arXiv:1212.2685 [hep-ph].
- [104] M. Czakon, “Automatized analytic continuation of Mellin-Barnes integrals,” *Comput. Phys. Commun.* **175** (2006) 559 [hep-ph/0511200].
- [105] A. G. Grozin, A. V. Smirnov and V. A. Smirnov, “Decoupling of heavy quarks in HQET,” *JHEP* **0611** (2006) 022 [hep-ph/0609280].
- [106] A. V. Smirnov, “FIESTA 4: optimized Feynman integral calculations with GPU support,” arXiv:1511.03614 [hep-ph].
- [107] T. Binoth and G. Heinrich, “Numerical evaluation of multiloop integrals by sector decomposition,” *Nucl. Phys. B* **680** (2004) 375 [hep-ph/0305234].
- [108] T. Kinoshita and M. Nio, “Improved α^4 term of the muon anomalous magnetic moment,” *Phys. Rev. D* **70** (2004) 113001 [hep-ph/0402206].
- [109] P. Marquard, private Kommunikation.

- [110] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [111] K. Hagiwara, A. D. Martin, D. Nomura and T. Teubner, “Predictions for $g-2$ of the muon and $\alpha(\text{QED})(M^{*2}(Z))$,” Phys. Rev. D **69** (2004) 093003 [hep-ph/0312250].
- [112] <http://www.ttp.kit.edu/Progdata/ttp14/ttp14-009/>
- [113] G. Colangelo, M. Hoferichter, A. Nyffeler, M. Passera and P. Stoffer, “Remarks on higher-order hadronic corrections to the muon $g-2$,” Phys. Lett. B **735** (2014) 90 [arXiv:1403.7512 [hep-ph]].
- [114] G. Venanzoni [Muon $g-2$ Collaboration], “The new muon $g-2$ experiment at Fermilab,” Nucl. Phys. Proc. Suppl. **225-227** (2012) 277.