

Perkolation auf zufälligen Mosaiken und im Boole'schen Modell

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

bei der Fakultät für Mathematik
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

eingereichte
DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Sebastian Ziesche

Datum der mündlichen Prüfung:	17. Februar 2016
Referent:	Prof. Dr. Günter Last
Korreferenten:	Prof. Dr. Markus Heydenreich PD Dr. Steffen Winter



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung –
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 3.0 Deutschland Lizenz
(CC BY-SA 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>

Danksagung

Ich möchte mich besonders bei meinem Betreuer Prof. Dr. Günter Last für die unermüdliche Unterstützung und die großen Freiheiten bedanken, die ich während meiner Doktorarbeit hatte. Er war für mich in vielen mathematischen und nicht-mathematischen Dingen ein Vorbild.

Weiterer Dank geht an meine Kollegen am Institut für Stochastik und der mathematischen Fakultät des Karlsruher Instituts für Technologie, die sich ein ums andere Mal die Zeit genommen haben mathematische Fragen mit mir zu diskutieren. Dabei sind insbesondere aus dem Institut für Stochastik zu nennen: PD Dr. Steffen Winter, Prof. Dr. Daniel Hug, Dr. Matthias Schulte, Prof. Dr. Norbert Henze, Dr. Michael Klatt, Dennis Müller, Jan Weis, Franz Nestmann, Prof. Dr. Vicky Fasen, Fabian Gieringer, Silke Weber, Andreas Reichenbacher, Prof. Dr. Wolfgang Weil, Daniel Schmithals, Dr. Bruno Ebner, Prof. Dr. Nicole Bäuerle und Dr. Bernhard Klar, sowie aus der Fakultät für Mathematik Dr. Torsten Ueckerdt, PD Dr. Frank Hettlich, Oleksandr Bondarenko, Prof. Dr. Andreas Kirsch, Prof. Dr. Michael Plum, Dr. Anja Randecker, Prof. Maria Axenovich Ph.D., PD Dr. Gabriele Link, Prof. Dr. Roman Sauer, PD Dr. Manuel Amann, PD Dr. Stefan Kühnlein, PD Dr. Peer Christian Kunstmann, PD Dr. Gerd Herzog, Prof. Dr. Marlis Hochbruck und PD Dr. Tilo Arens. Außerdem danke ich Prof. Dr. Markus Heydenreich dafür, dass er sich dazu bereit erklärt hat, die Arbeit zu begutachten.

Nicht zuletzt schulde ich große Dankbarkeit meiner Frau Hanna, meinen Eltern Thomas und Kerstin sowie meinen Schwestern Antonia und Johanna, die mir stets die Kraft gaben sämtliche mathematische und nicht-mathematische Herausforderungen zu meistern.

Abstract

The purpose of this work is twofold. In the first part, we establish necessary conditions under which the basic percolation results, i.e. the non-triviality of the percolation threshold, the uniqueness of the infinite cluster and the existence of a limit-shape in first-passage-percolation, carry over to Bernoulli-percolation on a random tessellation. By that, we mean a random tessellation of \mathbb{R}^d in which each cell is colored black with probability $p \in [0, 1]$ independently of each other cell. We will establish various kinds of conditions and give examples which include the Voronoi-tessellation induced by Poisson-cluster-processes or determinantal point-processes.

In the second part, we focus on the boolean model build from a Poisson-process with intensity $t \in [0, \infty)$ and a fixed compact connected grain \mathbf{B} . We prove the exponential decay of the radius of a typical point with a new approach that was developed by Duminil-Copin and Tassion for percolation on lattices in [DCT16]. From this result we derive a new way to compute lower bounds for the critical percolation threshold at an arbitrary confidence level. The corresponding simulations show, that the bounds approach the critical threshold if the simulation-parameters are chosen appropriately. In fact the bounds from dimension 6 to 11 are slightly better than current simulation results from the physics literature [TJ12]. We also apply an approach by Hall [Hal85] to obtain new rigorous lower bounds for dimensions 3-11 which become tight much faster than the so-called Penrose bound.

Finally we study rigorously the existence of a solution to the so-called Ornstein-Zernike relation from theoretical physics. It is shown in high generality, that a unique solution exists which has nice analytic and combinatorial properties.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	3
2.1. Produkträume	3
2.2. Punktprozesse	4
2.3. Knotenperkolation auf Graphen	7
2.4. Graphentiere und Zufallsfelder	9
I. Perkolation auf Mosaiken	13
3. Einführung	15
4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs	21
4.1. Zahme Mosaik	21
4.2. Skalierungsmischende Mosaik	28
4.3. Planare Graphen mit eindeutigem unendlichem Cluster	37
5. Eindeutigkeit des unendlichen Clusters	45
5.1. Das Argument von Burton und Keane	45
5.2. Das Argument von Gandolfi, Grimmett und Russo	50
6. First-Passage Perkolation	57
6.1. Ein Shape-Theorem für zufällige Pseudometriken	58
6.2. Die Positivität der Zeitkonstante	68
6.3. Ein graphentheoretischer Ergodensatz	71
7. Beispiele	77
7.1. Ergodische Mosaik (Z1)	77
7.2. Zahme Mosaik (Z2)	79
7.3. Zahme Mosaik (Z3)	82
7.4. Skalierungsmischende Mosaik	85
7.5. Mosaik mit guten Momenteneigenschaften	90
7.6. Poisson-Hyperebenen-Mosaik	92
7.7. Zusammenfassung	98

II. Das Boole'sche Modell	101
8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich	105
8.1. Hilfsmittel und Bekannte Resultate	105
8.2. Der Radius des Clusters eines typischen Punktes	108
9. Die Ornstein-Zernike Gleichung	119
9.1. Lösbarkeit der Ornstein-Zernike Gleichung	121
9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness	127
9.3. Ein kombinatorischer Zugang für niedrige Intensität	138
10. Untere Schranken für die kritische Intensität	147
10.1. Simulation des Nullclusters	147
10.2. Operatoransatz von Hall	150
10.3. Zusammenfassung der Simulationsergebnisse	151
A. Anhang	153

1. Einleitung

Perkolation wurde als Modell für den Fluss von Wasser durch ein poröses Medium 1957 von Broadbent und Hammersley eingeführt. Dabei werden in einem Graphen zufällig Kanten (Kantenperkolation) oder Knoten (Knotenperkolation) entfernt und es werden die Eigenschaften der verbleibenden zusammenhängenden Teilgraphen betrachtet. Während in der Physik relativ schnell durch Experimente, Simulationen und theoretische Argumente ein gutes Verständnis für das Modell entstand, ließ die rigorose Verifikation vieler Ergebnisse seitens der Mathematik verhältnismäßig lange auf sich warten.

Es wurde in der mathematischen Literatur zunächst nur der Fall betrachtet, bei dem der Graph eine Gitterstruktur besitzt und die Kanten bzw. Knoten unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit $1 - p \in [0, 1]$ entfernt werden. Im Jahr 1960 gelang es Harris, zu zeigen, dass für Kantenperkolation mit $p = 1/2$ auf dem Quadratgitter fast sicher kein unendlich großer Teilgraph existiert. Es wurde jedoch vermutet, dass für jedes $p > 1/2$ ein solcher fast sicher existiert. Es dauerte jedoch 20 Jahre, bis diese Vermutung in einer bahnbrechenden Arbeit von Kesten bewiesen werden konnte. In den folgenden zehn bis fünfzehn Jahren entwickelte sich durch Arbeiten von Grimmett, Aizenman, Barsky, Menshikov und vielen anderen ein sehr umfassendes Bild für Gitter, auch in höheren Dimensionen. Parallel dazu wurden nach und nach auch in der mathematischen Literatur allgemeinere Modelle betrachtet. Man begann sich einerseits von der Unabhängigkeitsvoraussetzung zu lösen, indem zum Beispiel Perkolationseigenschaften des sogenannten Ising-Modells betrachtet wurden. Andererseits wurde auch Perkolation in stetigen (nicht diskreten) Modellen untersucht. Hier ist insbesondere das Boole'sche Modell bzw. der Gilbert Graph zu nennen.

In dieser Arbeit gehen wir diesen Weg weiter, indem wir zwei Ansätze verfolgen. Der erste Ansatz (Teil I der Arbeit) ist die Verallgemeinerung der Perkulationsmodelle auf zufällige Graphen. Insbesondere wollen wir uns dem Fall zuwenden, dass die Zellen eines zufälligen Mosaiks unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p schwarz bzw. mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ weiß gefärbt und danach die schwarzen Zusammenhangskomponenten betrachtet werden. Diese Idee wurde bis jetzt nur in wenigen sehr speziellen Fällen betrachtet. Wir werden in diesem Teil der Arbeit den Fokus auf große Allgemeinheit legen und wesentliche Voraussetzungen an ein zufälliges Mosaik herausarbeiten, die für die grundlegenden Perkolationseigenschaften hinreichend sind. Damit ist

1. Einleitung

insbesondere die Nichttrivialität des Phasenübergangs, die Eindeutigkeit der unendlichen Zusammenhangskomponente und die Existenz einer Grenzform in sogenannter First-Passage-Percolation gemeint. Im zwei-dimensionalen Fall zeigen wir außerdem eine sehr allgemeine untere Schranke an die kritische Wahrscheinlichkeit. Die Resultate und Methoden, die wir dabei entwickeln, tragen außerdem maßgeblich dazu bei, das Verständnis von *globalen Eigenschaften* zufälliger Mosaike zu verbessern. Die Forschung steht in diesem Bereich erst am Anfang. Zwar wurden Mischungseigenschaften und Ergodizität in vielen Beispielen nachgewiesen, jedoch steht der Fokus in vielen Arbeiten eher auf der Bestimmung lokaler Größen wie z.B. Erwartungswerten und Varianzen von Zellcharakteristika.

Der zweite Ansatz besteht darin, Ideen aus der physikalischen Literatur, die unter dem Stichwort „Ornstein-Zernike-Gleichung“ firmieren, mathematisch rigoros aufzuarbeiten und daraus Erkenntnisse über das Boole'sche Modell zu gewinnen. Im Zuge dessen erhalten wir unter anderem die Analytizität der erwarteten Größe der Zusammenhangskomponente eines typischen Punktes und untere Schranken für die sogenannte kritische Intensität. Außerdem übertragen wir einen neuen Beweis für den exponentiellen Tail des Radius der Zusammenhangskomponente des typischen Punktes vom diskreten Modell auf das Boole'sche Modell. Der Beweis zeigt dabei eine Möglichkeit auf, untere Schranken für die kritische Intensität aus Simulationen zu errechnen. Für die so erhaltenen Schranken können wir Konfidenzintervalle angeben und wir können zeigen, dass sie den kritischen Punkt beliebig genau approximieren. Die Approximation ist dabei in hohen Dimensionen sogar besser als bisherige Simulationsergebnisse aus der physikalischen Literatur.

2. Grundlagen

Es ist stets $d \geq 2$ die Dimension des Raums, in dem wir arbeiten. Wir bezeichnen mit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum. Außerdem definieren wir $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $[n] := \{1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, e_i den i -ten Einheitsvektor, δ_x das Dirac-Maß im Punkt x , $\mathbf{0}$ die Wurzel eines Graphen \mathcal{G} , A^c das Komplement von A , falls A ein Ereignis oder eine Teilmenge von \mathbb{R}^d oder \mathbb{Z}^d ist, ∂A den Rand von $A \subset \mathbb{R}^d$, $\text{int } A := A \setminus \partial A$ das Innere von A , $|\cdot|$ den Betrag einer Zahl oder die Kardinalität einer Menge, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ die 1-Norm, die euklidische Norm und die Maximumsnorm eines Vektors, $B_r(x) := B_r(x; \mathbb{R}^d) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\|_2 \leq r\}$ den Ball um $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $r \geq 0$ (wir nutzen die zweite Schreibweise bei Verwechslungsgefahr mit dem Ball in einem Graphen bzgl. der Graphenmetrik. vgl. Abschnitt 2.3 und 6.1), \mathbb{P}_X die Verteilung einer Zufallsvariablen oder eines zufälligen Elements X , $f|_A$ die Einschränkung der Funktion f auf die Menge A , $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge der Menge A , $\text{Vol}(A)$ das d -dimensionale Lebesgue-Maß der Menge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ die Minkowski-Summe der Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$.

2.1. Produkträume

Sei I eine endliche oder abzählbar unendliche Indexmenge und $X := \{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von unabhängig $\text{Ber}(p)$, $p \in [0, 1]$ verteilten Zufallsvariablen. Die Verteilung von X nennen wir \mathbb{P}_p . Der Raum $\{0, 1\}^I$ mit σ -Algebra $\mathfrak{F}(\{0, 1\}^I) := \otimes_{i \in I} \mathcal{P}(\{0, 1\})$ besitze die kanonische Halbordnung \preceq , d.h. für $\omega, \omega' \in \{0, 1\}^I$ ist $\omega \preceq \omega'$, falls $\omega_i \leq \omega'_i$ für alle $i \in I$ gilt. Wir nennen eine Funktion $f : \{0, 1\}^I \rightarrow \mathbb{R}$ *aufsteigend*, falls für $\omega, \omega' \in \{0, 1\}^I$ und $\omega \preceq \omega'$ auch $f(\omega) \leq f(\omega')$ gilt. Eine Funktion f heiße *absteigend*, falls $-f$ aufsteigend ist. Ein Ereignis $A \subset \{0, 1\}^I$ heiße *aufsteigend* (*absteigend*), falls $\mathbf{1}_A$ eine aufsteigende (*absteigende*) Funktion ist. Die folgenden Theoreme sind Standard in der Perkolationstheorie. Beweise lassen sich in [Gri99] oder [BR06b] finden.

2.1.1 Theorem (FKG-Ungleichung)

Für zwei aufsteigende Ereignisse $A, B \in \mathfrak{F}(\{0, 1\}^I)$ gilt

$$\mathbb{P}_p[A \cap B] \geq \mathbb{P}_p[A] \mathbb{P}_p[B].$$

2. Grundlagen

Sei im Folgenden $|I| < \infty$ und $A, B \in \mathfrak{F}(\{0, 1\}^I)$ aufsteigend. Wir definieren

$$A \circ B := \{\alpha + \beta \mid \alpha\beta = 0, \alpha \in A, \beta \in B\}$$

und sagen A und B treten disjunkt ein, d.h. es gibt für jedes $\omega \in A \circ B$ eine Zerlegung von I in I_A und I_B derart, dass ω eingeschränkt auf I_A bereits das Eintreten von A erzwingt und ω eingeschränkt auf I_B bereits das Eintreten von B erzwingt. Diese Notation erlaubt uns in gewissem Sinne eine Umkehrung der FKG-Ungleichung.

2.1.2 Theorem (BK-Ungleichung)

Für zwei aufsteigende Ereignisse $A, B \in \mathfrak{F}(\{0, 1\}^I)$ gilt

$$\mathbb{P}_p[A \circ B] \leq \mathbb{P}_p[A]\mathbb{P}_p[B].$$

Ein Index $i \in I$ heißt *pivotal* für eine Konfiguration $\omega \in \{0, 1\}^I$ und ein Ereignis $A \in \mathfrak{F}(\{0, 1\}^I)$, wenn sich mit dem Ändern von ω_i auch ändert, ob $\omega \in A$ gilt oder nicht. Mit Hilfe von pivotalen Indizes lässt sich die Ableitung des Erwartungswerts eines Funktionals $f : \{0, 1\}^I \rightarrow \mathbb{R}$ nach p quantifizieren.

2.1.3 Theorem (Russo-Formel)

Ist $A \in \mathfrak{F}(\{0, 1\}^I)$ ein aufsteigendes Ereignis, so gilt

$$\frac{\partial \mathbb{P}_p[A]}{\partial p} = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_p[i \text{ ist pivotal für } A].$$

2.2. Punktprozesse

In diesem Teil der Einführung übernehmen wir wesentliche Definitionen und Notationen aus [SW08]. Es sei D ein metrischer Raum und $\mathcal{B}(D)$ die Borel- σ -Algebra darauf. Wir bezeichnen mit $\mathbf{N}(D)$ die Menge der lokal endlichen einfachen Zählmaße η auf D . Das heißt, für jede beschränkte Menge $K \in \mathcal{B}(D)$ ist $\eta(K) < \infty$ und für jedes $x \in D$ ist $\eta(\{x\}) \in \{0, 1\}$. Wir versehen $\mathbf{N}(D)$ mit der σ -Algebra $\mathcal{N}(D)$, die von den Mengen $\{\eta \mid \eta(A) = k\}$ mit $A \in \mathcal{B}(D)$ erzeugt wird. Eine messbare Abbildung $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}(D)$ nennen wir einen *Punktprozess* auf D . Jeder Punktprozess Φ besitzt eine Darstellung

$$\Phi = \sum_{i=1}^{\Phi(D)} \delta_{\zeta_i},$$

wobei $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit Werten in D sind [SW08, Lemma 3.1.3]. Das Maß Θ auf D mit $\Theta(A) := \mathbb{E}[\Phi(A)]$ für $A \in \mathcal{B}(D)$ nennen wir *Intensitätsmaß* von

2.2. Punktprozesse

Φ . Ist $D = \mathbb{R}^d$ und $\Theta = \gamma\lambda^d$ ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes λ^d , so nennen wir γ die *Intensität von Φ* .

In vielen Anwendungen ist es elegant, die Punkte eines Punktprozesses weitere Informationen tragen zu lassen. Ist M ein metrischer Raum, Ξ ein Punktprozess auf $D' := D \times M$, so nennen wir Ξ einen *markierten Punktprozess* auf D mit *Markenraum M* . Besitzt Ξ eine Darstellung

$$\Xi = \sum_{i=1}^{\Xi(D')} \delta_{(\zeta_i, \mu_i)},$$

wobei die Folge $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von u.i.v. Zufallselementen in M unabhängig von $\Xi(D')$ und $(\zeta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist und jedes μ_i die Verteilung \mathbb{Q} hat, so nennen wir Ξ einen *unabhängig markierten Punktprozess mit Markenverteilung \mathbb{Q}* oder auch die *unabhängige Markierung von Φ mit \mathbb{Q}* .

Im Falle $M \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir ein Ereignis $A \in \mathcal{N}(D \times M)$ als *monoton*, falls aus $(\eta, \mu) \in A$ und $\mu' \geq \mu$ folgt, dass $(\eta, \mu') \in A$. Dabei ist $\mu' \geq \mu$, wenn $\mu'_i \geq \mu_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt.

Für messbare Funktionen $f : D \rightarrow [0, \infty)$ bezeichnen wir mit

$$L_\Phi(f) := \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int f(x) \Phi(dx) \right) \right]$$

das *Laplace-Funktional* des Punktprozesses Φ . Für Funktionen mit Werten in \mathbb{R} nutzen wir die gleiche Symbolik und nennen es das *erweiterte Laplace-Funktional*. Es ist zu bemerken, dass das Laplace-Funktional stets existiert, was für das erweiterte Laplace-Funktional nicht zutrifft. Eine ausführliche Einführung des Laplace-Funktional und dessen Eigenschaften findet sich in [DVJ03].

2.2.1 Lemma

Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen \mathbb{Q} und \mathbb{Q}' , wobei \mathbb{Q}' stochastisch größer ist als \mathbb{Q} . Sei weiter Φ ein Partikelprozess und Ξ, Ξ' zwei unabhängige Markierungen von Φ mit \mathbb{Q} sowie \mathbb{Q}' . Ist $A \in \mathcal{N}(D \times M)$ ein monotones Ereignis, so gilt

$$\mathbb{P}[\Xi \in A] \leq \mathbb{P}[\Xi' \in A].$$

Beweis: Da \mathbb{Q}' stochastisch größer ist als \mathbb{Q} können die zugehörigen Marken μ und μ' auf Ω so konstruiert werden, dass $\mu' \geq \mu$ gilt. Dann gilt jedoch $\{\Xi \in A\} \subset \{\Xi' \in A\}$ und es folgt die Behauptung. \square

Wir bezeichnen mit \mathcal{K} die Menge der nicht leeren, konvexen und kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d . Auf \mathcal{K} gibt es eine Metrik, bezüglich der die lokale Endlichkeit eines Zählmaßes μ auf \mathcal{K} impliziert, dass $\mu(\{K \in \mathcal{K} \mid K \cap C \neq \emptyset\}) < \infty$ für jedes Kompaktum $C \subset \mathbb{R}^d$ gilt (siehe [SW08]). Wir nennen einen Punktprozess auf \mathcal{K} mit dieser Metrik einen *Partikelprozess*. Besteht D aus Teilmengen

2. Grundlagen

des \mathbb{R}^d , so definieren wir den *Verschiebungsoperator* $\theta_x : \mathbf{N}(D) \rightarrow \mathbf{N}(D)$ bzw. $\theta_x : \mathbf{N}(D \times M) \rightarrow \mathbf{N}(D \times M)$ via

$$\theta_x \eta(A) := \eta(A - x), \quad A \in \mathcal{B}(D)$$

bzw.

$$\theta_x \eta(A \times B) := \eta((A - x) \times B), \quad A \in \mathcal{B}(D), B \in \mathcal{B}(M).$$

Mit dessen Hilfe definieren wir einen (markierten) Punktprozess Φ als *stationär*, wenn für beliebiges $x \in \mathbb{R}^d$ in Verteilung $\theta_x \Phi = \Phi$ gilt. Wir werden uns im Laufe der Arbeit ausschließlich mit stationären Punktprozessen beschäftigen.

Es sei $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{N}(D)$ bzw. $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{N}(D \times M)$ die σ -Algebra der θ_x -invarianten Ereignisse, d.h. für $A \in \mathcal{I}_x$ gilt $\theta_x A = A$. Weiter sei $\mathcal{I} := \bigcap_{x \in \mathbb{R}^d} \mathcal{I}_x$ die σ -Algebra der verschiebungsinvarianten Ereignisse. Wir nennen einen stationären (markierten) Punktprozess Φ *ergodisch*, wenn $\mathbb{P}[\Phi \in A] \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{I}$ gilt. Außerdem nennen wir Φ *stark ergodisch*, wenn $\mathbb{P}[\Phi \in A] \in \{0, 1\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{I}_x$ gilt. Ist Ξ eine unabhängige \mathbb{Q} -Markierung eines Punktprozesses Φ , so ist leicht nachzurechnen, dass für $f : D \times M \rightarrow [0, \infty)$ und $g : D \rightarrow [0, \infty) : x \rightarrow -\log(\int \exp(-f(x, y)) \mathbb{Q}(dy))$ bereits $L_{\Xi}(f) = L_{\Phi}(g)$ gilt. Mit Hilfe von [DVJ07, Proposition 12.3.VI.] können wir dann leicht zeigen, dass Ξ genau dann ergodisch ist, wenn Φ ergodisch ist. Selbes gilt für die Stationarität, die sich direkt zeigen lässt. Im Fall der Ergodizität bzgl. eines θ_x mit $x \in \mathbb{R}^d$ lassen sich ebenfalls Charakterisierungen analog zu [DVJ07, Definition 12.3.I.] und [DVJ07, Proposition 12.3.VI.] finden, aus denen leicht die Ergodizität bzgl. θ_x eines unabhängig markierten Punktprozesses schließen lässt. Wir werden die Details dazu nicht ausführen. Allgemein ist darauf hinzuweisen, dass in der Literatur die Unterschiede zwischen Ergodizität und starker Ergodizität mitunter übergangen werden. Dies hat eine gewisse Berechtigung, wenn die Verschiebungsgruppe \mathbb{R}^d ist, da hier ein allgemeines Resultat von Pugh und Shub [PS71] zeigt, dass aus Ergodizität bereits Ergodizität bzgl. θ_x für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ folgt. Außerdem wird der Nachweis der Ergodizität in der Regel über den Nachweis von Mischungseigenschaften geführt, die sofort auch die starke Ergodizität implizieren.

Ein Punktprozess auf einem Raum $(D, \mathcal{B}(D))$, den wir in Teil 1 oft als Baustein für einfache Beispiele nutzen und der im zweiten Teil der Arbeit noch genauer untersucht wird, ist der sogenannte *Poisson-Prozess* Φ mit *Intensitätsmaß* Θ . Für ein Maß Θ auf $(D, \mathcal{B}(D))$ ist die Verteilung von Φ durch die zwei folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmt:

1. Der Prozess Φ hat Poisson-verteilte Zuwächse. Das heißt, es gilt

$$\mathbb{P}[\Phi(A) = k] = \frac{\Theta(A)^k}{k!} e^{-\Theta(A)}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

2.3. Knotenperkolation auf Graphen

2. Der Prozess Φ hat unabhängige Zuwächse. Das heißt, $\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_n)$ ist eine Familie unabhängiger Zufallsvariablen, falls die Mengen $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $i \in [n]$, $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkt sind.

Zu Beginn des zweiten Teils der Arbeit (Abschnitt 8.1) wiederholen wir die benötigten grundlegenden Sätze über den Poisson-Prozess. Im ersten Teil werden wir kaum konkret damit rechnen. Eine umfassende Einführung findet sich in [SW08] und in [DVJ03].

2.3. Knotenperkolation auf Graphen

Sei $p \in [0, 1]$ und $\mathcal{G} := (V, E)$ ein Graph mit abzählbarer Knotenmenge V und Kantenmenge E . Wir nehmen stets an, dass alle Knoten endlich viele Nachbarn besitzen. Wir sagen, eine Teilmenge $U \subset V$ induziert den Teilgraphen \mathcal{G}' , wenn $\mathcal{G}' = (U, \{\{v, w\} \in E \mid v, w \in U\})$ gilt. Sei weiter X ein zufälliges Element im Raum $\{0, 1\}^V$ mit Verteilung $\mathbb{P}_p := \otimes_{v \in V} \text{Ber}(p)$. In der Perkolations-theorie interessieren wir uns für die Größe der Zusammenhangskomponenten im von $\{v \in V \mid X_v = 1\}$ induzierten Teilgraphen von \mathcal{G} . Dieses Modell kann auch für zufälliges Löschen von Kanten des Graphen betrachtet werden (vgl. [Gri99]). Diese sogenannte Kantenperkolation werden wir jedoch in dieser Arbeit nicht weiter vertiefen.

Wir nutzen folgende Notationen und Begriffe: Ein *Pfad* $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, $\gamma_i \in V$ ist eine endliche oder unendliche Folge von Knoten mit $\{\gamma_i, \gamma_{i+1}\} \in E$ für $i \in \mathbb{N}$ und $\gamma_i \neq \gamma_j$ für $i \neq j$. Eine Zusammenhangskomponente von \mathcal{G} ist eine maximale Teilmenge $C \subset V$, bei der je zwei Knoten durch einen Pfad verbunden sind. Ein *Zyklus* ist ein endlicher Pfad, in dem Anfangs- und Endknoten benachbart sind. Wir bezeichnen mit $d_{\mathcal{G}}(v, w) := \inf\{|\gamma| - 1 \mid \gamma \text{ ist Pfad von } v \text{ nach } w \text{ in } \mathcal{G}\}$ den Abstand zweier Knoten $v, w \in V$ in \mathcal{G} und erweitern dies via $d_{\mathcal{G}}(U, W) := \inf\{d_{\mathcal{G}}(u, w) \mid u \in U, w \in W\}$ auf Teilmengen $U, W \subset V$ von Knoten. Der Ball $B_n(v)$ mit Radius $n \in [0, \infty)$ und Mittelpunkt $v \in V$ ist definiert als $B_n(v) := B_n(v; \mathcal{G}) := \{w \in V \mid d_{\mathcal{G}}(v, w) \leq n\}$. Wir nutzen die zweite Schreibweise bei Verwechslungsgefahr des zugrundeliegenden Graphen bzw. Raumes (vgl. Anfang von Kapitel 2 und Abschnitt 6.1). Für eine Menge von Knoten $W \subset V$ sei $\partial^+ W := \{v \in V \setminus W \mid d_{\mathcal{G}}(v, W) = 1\}$ der äußere und $\partial^- W := \{w \in W \mid d_{\mathcal{G}}(w, V \setminus W) = 1\}$ der innere Rand von W .

In der Perkolation interessieren wir uns für zufällig gefärbte Graphen. Formal nennen wir das Paar (\mathcal{G}, f) eine *Färbung* von \mathcal{G} , wenn f eine Abbildung von der Knotenmenge V in die Menge $\{0, 1\}$ ist. Wir nennen einen Pfad γ in einem gefärbten Graphen (\mathcal{G}, f) *schwarz (weiß)*, wenn $f(v) = 1$ ($f(v) = 0$) für alle $v \in \gamma$ gilt. Ein *schwarzer (weißer) Cluster* $C \subset V$ ist eine maximale Menge von Knoten,

2. Grundlagen

in der je zwei Knoten miteinander durch einen schwarzen (weißen) Pfad verbunden sind. Für $v, w \in V$ bezeichnen wir mit $\{v \leftrightarrow w\}$ das Ereignis, dass v mit w durch einen schwarzen Pfad verbunden ist. Außerdem sei $C(v; \mathcal{G}, f)$ der schwarze Cluster in (\mathcal{G}, f) , der v enthält. Dies ist die leere Menge, wenn $f(v) = 0$.

In diesem Sinne ist (\mathcal{G}, X) eine zufällige Färbung von \mathcal{G} und wir schreiben abkürzend $C_v := C(v; \mathcal{G}, X)$, wenn der Bezug klar ist.

In der Perkolationstheorie sind zwei Funktionen von zentraler Bedeutung. Die *Perkolationsfunktion*

$$\theta_p(v) := \mathbb{P}_p[|C_v| = \infty],$$

und die *erwartete Clustergröße*

$$\chi_p(v) := \mathbb{E}_p[|C_v|] = \sum_{w \in V} \mathbb{P}_p[v \leftrightarrow w].$$

Eine wichtige Kenngröße ist die sogenannte *kritische Perkolationswahrscheinlichkeit*

$$p_c := p_c(\mathcal{G}) := \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta_p(\mathbf{0}) = 0\}. \quad (2.1)$$

Wir wollen im Folgenden einen sehr kurzen Überblick über die grundlegenden bekannten Resultate geben, wenn der Graph \mathcal{G} das d -dimensionale Gitter $\mathcal{Z}^d := (\mathbb{Z}^d, E(\mathcal{Z}^d))$ mit $E(\mathcal{Z}^d) := \{\{v, w\} \subset \mathbb{Z}^d \mid \|v - w\|_2 = 1\}$ ist. Es hat sich gezeigt, dass sich alle diese Ergebnisse auf das sogenannte Boole'sche Modell und manche sogar auf das Poisson-Voronoi Perkolationsmodell übertragen lassen (siehe [Pen], [MR96] im Falle des Boole'schen Modells und [BR06a] für das Poisson-Voronoi Perkolationsmodell). Wir werden einige dieser Resultate als Spezialfälle unserer allgemeinen Theorie erhalten. Beweise für die folgenden Aussagen finden sich ohne Ausnahme in [Gri99].

2.3.1 Theorem (Existenz eines Phasenübergangs)

Es gilt $p_c(\mathcal{Z}^d) \in (0, 1)$.

2.3.2 Theorem (Eindeutigkeit des unendlichen Clusters)

Für alle $p \in [0, 1]$ existiert höchstens ein unendlicher schwarzer Cluster.

2.3.3 Theorem (Verhalten im sub-kritischen Fall)

Für $0 \leq p < p_c(\mathcal{Z}^d)$ sind θ_p und χ_p reell analytische Funktionen und es gibt Konstanten $c_1(p), c_2(p) > 0$, sodass

$$\mathbb{P}_p[\mathbf{0} \leftrightarrow \partial^+ B_n(\mathbf{0})] \leq e^{-c_1(p)n} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_p[|C_{\mathbf{0}}| = n] \leq e^{-c_2(p)n}$$

gilt.

2.4. Graphentiere und Zufallsfelder

2.3.4 Theorem (Verhalten im super-kritischen Fall)

Für $p_c < p \leq 1$ sind θ_p und χ_p unendlich oft differenzierbar und es gibt Konstanten $c_1(p), c_2(p) > 0$, sodass

$$\mathbb{P}_p[\mathbf{0} \leftrightarrow \partial^+ B_n(\mathbf{0}), |C_{\mathbf{0}}| < \infty] \leq e^{-c_1(p)n} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}_p[|C_{\mathbf{0}}| = n] \leq e^{-c_2(p)n^{(d-1)/d}}$$

gilt.

Im 2-dimensionalen Fall benötigen wir den Graphen $\mathcal{Z}^{2*} := (\mathbb{Z}^2, \{\{v, w\} \subset \mathbb{Z}^d \mid \|v - w\|_\infty = 1\})$.

2.3.5 Theorem (2-dimensionaler Fall)

Es gilt $p_c(\mathbb{Z}^2) + p_c(\mathbb{Z}^{2*}) = 1$ und für $p = p_c(\mathbb{Z}^2) = 1 - p_c(\mathbb{Z}^{2*})$ gibt es weder einen unendlichen weißen noch einen unendlichen schwarzen Cluster in \mathbb{Z}^2 oder \mathbb{Z}^{2*} . Insbesondere gibt es für $p \neq p_c(\mathbb{Z}^2)$ stets entweder einen unendlichen schwarzen oder einen unendlichen weißen Cluster.

2.4. Graphentiere und Zufallsfelder

Für einen Graphen $\mathcal{G} := (V, E)$ mit Wurzel $\mathbf{0}$ definieren wir die Menge der Graphentiere $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ als die Menge aller endlichen zusammenhängenden Teilgraphen von \mathcal{G} , die die Wurzel enthalten. Die Menge $\mathcal{A}_n(\mathcal{G}) := \{\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{G}) \mid |\alpha| = n\}$ enthält dann alle Graphentiere der Größe $n \in \mathbb{N}$. Im Falle des d -dimensionalen Gitters \mathbb{Z}^d nennen wir die Objekte in $\mathcal{A}^{(d)} := \mathcal{A}(\mathbb{Z}^d)$ Gittertiere. Wir zeigen zunächst eine exponentielle Wachstumsschranke für die Anzahl der Graphentiere der Größe $n \in \mathbb{N}$.

2.4.1 Lemma

Ist \mathcal{G} ein Graph mit Wurzel $\mathbf{0}$, in dem jeder Knoten höchstens $m \in \mathbb{N}$ Nachbarknoten besitzt, so gilt

$$|\mathcal{A}_{n+1}(\mathcal{G})| \leq (m+1)^n \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m(n+1)} \leq e^{n+1} (m+1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wir adaptieren den Beweis aus [Gri99, S. 81], der auf Kesten zurückgeht. Ein Graphentier $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$ der Größe $n \in \mathbb{N}$ hat höchstens mn Nachbarknoten, d.h. Knoten außerhalb von α die zu einem Knoten in α adjazent sind. Wir definieren

$$\mathcal{A}_{n,b}(\mathcal{G}) := \{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G}) \mid |\partial^+ \alpha| = b\}$$

2. Grundlagen

und erhalten für beliebiges $p \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
 1 &\geq \mathbb{P}_p[|C_0| = n + 1 \mid X_0 = 1] \\
 &= \sum_{b \in \mathbb{N}} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n+1,b}(\mathcal{G})} \mathbb{P}_p[C_0 = \alpha \mid X_0 = 1] \\
 &= \sum_{b \in \mathbb{N}} |\mathcal{A}_{n+1,b}(\mathcal{G})| p^n (1-p)^b \\
 &\geq \sum_{b \in \mathbb{N}} |\mathcal{A}_{n+1,b}(\mathcal{G})| p^n (1-p)^{m(n+1)} \\
 &= p^n (1-p)^{m(n+1)} |\mathcal{A}_{n+1}(\mathcal{G})|.
 \end{aligned}$$

Wählen wir $p = \frac{1}{1+m}$, so ergibt sich wegen $(\frac{1}{1+m})^m \leq e$ durch Umstellen der Gleichung die Behauptung. \square

Für einen Graphen $\mathcal{G} := (V, E)$ nennen wir eine Familie von Zufallsvariablen $Y := \{Y_v \mid v \in V\}$ ein zufälliges Feld auf \mathcal{G} .

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Ist für je zwei Mengen $U, W \subset V$ mit $d_{\mathcal{G}}(U, W) \geq k$ die σ -Algebra $\sigma(Y_u \mid u \in U)$ unabhängig von der σ -Algebra $\sigma(Y_w \mid w \in W)$, so nennen wir Y ein *k-abhängiges Feld*. Im Fall $\mathcal{G} = \mathbb{Z}^d$ definieren wir wie für Punktprozesse für ein $w \in \mathbb{Z}^d$ den Verschiebungsoperator $\theta_w : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ via $(\theta_w Y)_v := Y_{v-w}$.

Daher nennen wir ein zufälliges Feld Y auf \mathbb{Z}^d *stationär*, wenn $Y \stackrel{d}{=} \theta_w Y$ für alle $w \in \mathbb{Z}^d$ gilt.

Wir bezeichnen mit \mathcal{I} wieder die σ -Algebra der verschiebungsinvarianten Ereignisse und nennen Y *ergodisch*, falls Y stationär ist und für alle Ereignisse $A \in \mathcal{I}$ bereits $\mathbb{P}[Y \in A] \in \{0, 1\}$ gilt.

Sei Y ein zufälliges Feld auf \mathcal{G} , wobei alle Y_v gleich verteilt sind. Wir nennen Y *zahm*, falls eine Konstante $c < \text{ess sup } Y_0$ existiert, sodass f.s.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} Y_v \leq c$$

gilt. Für das Gitter \mathbb{Z}^d und eine Familie von u.i.v. Zufallsvariablen Y mit einer Verteilung mit unbeschränktem Träger geht die Begriffsbildung auf Cox, Gandolfi, Griffin und Kesten zurück [CGGK93], [GK94], die nach Bedingungen an das Tailverhalten von Y_0 suchten, die implizieren, dass Y zahm ist. In [Mar02] werden diese Bedingungen leicht verbessert. Außerdem gibt es eine Abschätzung für c . Wir werden ebenfalls eine solche Abschätzung im Fall $Y_0 \sim \text{Ber}(p)$ herleiten. Es lässt sich leicht zeigen, dass die Ergebnisse aus [Mar02] in weiten Teilen auch für k -abhängige Felder gelten. Allgemein ist es eine interessante und komplexe Fragestellung, welche Bedingungen an Abhängigkeitsstruktur und Tailverhalten gestellt werden müssen, um ein zahmes zufälliges Feld zu erhalten. Dies ist bislang nicht untersucht worden.

2.4. Graphentiere und Zufallsfelder

2.4.2 Lemma

Sei \mathcal{G} ein Graph, in dem jeder Knoten höchstens $m \in \mathbb{N}$ Nachbarknoten besitzt, $p \in [0, 1]$ und Y ein zufälliges Feld auf \mathcal{G} aus unabhängigen $\text{Ber}(p)$ -verteilten Zufallsvariablen. Ist $c_1 \in (p, 1)$ derart, dass

$$c_2 := e(m+1) \left(\frac{p}{c_1}\right)^{c_1} \left(\frac{1-p}{1-c_1}\right)^{1-c_1} < 1 \quad (2.2)$$

gilt, so ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} Y_v \leq c_1.$$

Insbesondere gibt es für jedes $c_1 \in (0, 1)$ ein $p > 0$, sodass (2.2) erfüllt ist und für jedes $p \in [0, (e(m+1))^{-1}]$ gibt es ein $c_1 < 1$, sodass (2.2) erfüllt ist.

Ist N das Infimum über alle $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\max_{\alpha \in \mathcal{A}_n} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} Y_v \leq \min(c_1, 1)$$

erfüllt ist, so gilt

$$\mathbb{P}[N > k] \leq \frac{e}{1-c_2} c_2^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wir nutzen Lemma 2.4.1 sowie die Markov-Ungleichung mit der Funktion e^{tx} und erhalten für $n \in \mathbb{N}$ und $t > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} \sum_{v \in \alpha} Y_v > c_1 n \right] &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} \mathbb{P} \left[\sum_{v \in \alpha} Y_v > c_1 n \right] \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} e^{-tc_1 n} \mathbb{E}[e^{tY_0}]^n \\ &\leq e^n (m+1)^{n-1} e^{-tc_1 n} (1-p+pe^t)^n. \end{aligned}$$

Wir wählen $t = \ln \left(\frac{c_1(1-p)}{(1-c_1)p} \right) > 0$, was zu

$$\mathbb{P} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} \sum_{v \in \alpha} Y_v > c_1 n \right] \leq \frac{1}{m+1} \left(e(m+1) \left(\frac{p}{c_1}\right)^{c_1} \left(\frac{1-p}{1-c_1}\right)^{1-c_1} \right)^n$$

führt. Das Borel-Cantelli-Lemma liefert damit die erste Behauptung. Die zweite Behauptung folgt wegen

$$\lim_{p \searrow 0} \left(\frac{p}{c_1}\right)^{c_1} \left(\frac{1-p}{1-c_1}\right)^{1-c_1} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{c_1 \nearrow 1} \left(\frac{p}{c_1}\right)^{c_1} \left(\frac{1-p}{1-c_1}\right)^{1-c_1} = p.$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{P}[N > k] \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mathbb{P} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} \sum_{v \in \alpha} Y_v > c_1 n \right] \leq e \sum_{n=k}^{\infty} c_2^n = \frac{e}{1-c_2} c_2^k,$$

2. Grundlagen

was den Beweis abschließt. \square

Ist Y ein stationäres zufälliges Feld auf \mathbb{Z}^d und $q \in [0, 1]$, so heißt Y q -dominierend, falls Y stochastisch größer ist als das zufällige Feld $X := \{X_v \mid v \in \mathbb{Z}^d\}$, wobei die X_v unabhängig identisch $\text{Ber}(q)$ verteilt sind. In [LSS97] wird diese Eigenschaft ausführlich für $\{0, 1\}$ -wertiges Y_0 untersucht. Insbesondere wird gezeigt, dass für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ und $q < 1$ ein $p(k, q, d) < 1$ existiert, so dass jedes k -abhängige zufällige Feld Y mit $\mathbb{P}[Y_0 = 1] > p(k, q, d)$ bereits q -dominierend ist.

2.4.3 Bemerkung

Ist Y ein d -dimensionales stationäres zufälliges Feld mit $Y_0 \sim \text{Ber}(p)$, $p \in [0, 1]$ und ist $1 - Y$ q -dominierend mit $q > 1 - (e(2d + 1))^{-1}$, so folgt mit Lemma 2.4.2, dass Y zahm ist.

Teil I.

Perkolation auf Mosaiken

3. Einführung

Wir nennen eine Menge $Z \in \mathcal{K}$ eine *Zelle*, wenn Z innere Punkte besitzt. Eine abzählbare Menge $\mathfrak{m} := \{Z_1, Z_2, \dots\}$ von Zellen nennen wir *Mosaik*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Jede kompakte Teilmenge des \mathbb{R}^d wird nur von endlich vielen Zellen von \mathfrak{m} geschnitten.
2. Die Zellen überdecken den gesamten Raum, d.h.

$$\bigcup_{Z \in \mathfrak{m}} Z = \mathbb{R}^d.$$

3. Für je zwei Zellen $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{m}$ mit $Z_1 \neq Z_2$ gilt $\text{int } Z_1 \cap \text{int } Z_2 = \emptyset$.

Die Zelle von \mathfrak{m} , die den Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ enthält, bezeichnen wir mit $Z_x(\mathfrak{m})$. Sollte x in zwei oder mehr Zellen enthalten sein, so sei Z_x diejenige dieser Zellen, welche den lexikographisch kleinsten Punkt enthält. Die Zelle $Z_0(\mathfrak{m})$ nennen wir *Nullzelle* von \mathfrak{m} .

Es bezeichne $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}(\mathcal{K})$ die Menge der Mosaik im \mathbb{R}^d und $\mathfrak{F}(\mathbf{M}) := \mathcal{N}(\mathcal{K})|_{\mathbf{M}}$ die Spur- σ -Algebra von $\mathcal{N}(\mathcal{K})$ auf \mathbf{M} . Ein *zufälliges Mosaik* \mathfrak{M} ist ein Partikel-Prozess, dessen Partikel fast sicher die Zellen eines Mosaiks bilden. Die Nullzelle $Z_0(\mathfrak{M})$ eines stationären zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} ist fast sicher eindeutig bestimmt [SW08]. Damit ist gemeint, dass der Ursprung fast sicher nur in genau einer Zelle enthalten ist.

Jedes Mosaik $\mathfrak{m} \in \mathbf{M}$ induziert einen Graphen $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}} := (\mathfrak{m}, E_{\mathfrak{m}})$ dessen *Knotenmenge aus den Zellen des Mosaiks besteht*. Dabei sind in $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}$ zwei Zellen Z_1 und Z_2 benachbart, wenn ihr Schnitt $(d - 1)$ -dimensional ist (d.h. er liegt in keiner $(d - 2)$ -dimensionalen affinen Hyperebene). Von \mathfrak{m} wird ein weiterer Graph $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}^* := (\mathfrak{m}, E_{\mathfrak{m}}^*)$ induziert. Dessen Knotenmenge besteht ebenfalls aus den Zellen von \mathfrak{m} aber in ihm sind zwei Zellen bereits benachbart, wenn sie sich schneiden (vgl. Abb. 3.1). Wir nennen $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}^*$ den zu $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}$ dualen Graphen und weisen darauf hin, dass dieser im Wesentlichen im 2-dimensionalen eine Rolle spielt. Es wird sich allerdings auch herausstellen, dass sämtliche Theoreme im Folgenden nicht nur für $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}$ sondern auch für $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}^*$ gelten. Es ist in $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}$ stets $\mathbf{0} := Z_0(\mathfrak{m})$. Das heißt, die Wurzel von $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}}$ wird stets von der Nullzelle $Z_0(\mathfrak{m})$ gebildet.

3. Einführung

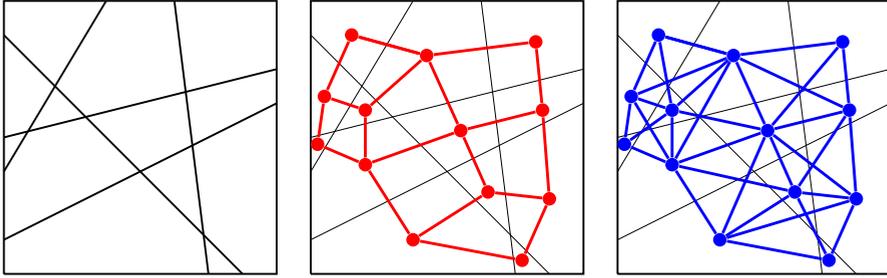


Abbildung 3.1.: Ein Ausschnitt eines Poisson-Hyperbenen-Mosaiks (vgl. Abschnitt 7.6) mit den Graphen \mathcal{G}_m und \mathcal{G}_m^*

Ist \mathfrak{M} ein zufälliges Mosaik, so ist $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ ein zufälliger Graph mit Wurzel $\mathbf{0} = Z_0(\mathfrak{M})$. Wir wollen in diesem ersten Teil der Arbeit auf solchen Graphen Knotenperkolation betrachten. Anschaulich färben wir also jede Zelle von \mathfrak{M} unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ schwarz und betrachten die schwarzen Zusammenhangskomponenten, d.h. alle Punkte die durch schwarze Pfade in \mathbb{R}^d verbunden sind (vgl. Abb. 3.2). Der Begriff Zusammenhangskomponente ist dabei natürlich nur für die Knotenperkolation auf $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}^*$ exakt. Für $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ müsste die Definition lauten: „wir betrachten alle Punkte, die durch schwarze Pfade verbunden sind, die in einer offenen Menge liegen, die ebenfalls schwarz ist“. Denn in $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ sind zwei Zellen nicht benachbart, wenn sie nur einen Punkt (bzw. eine niederdimensionale Seite) gemeinsam haben (vgl. Abb. 3.1).

Mathematisch modellieren wir die zufällige Färbung eines Mosaiks wie folgt. Für ein Mosaik $m \in \mathcal{M}$ ist $\{0, 1\}^m$ der Raum der möglichen schwarz(1)-weiß(0)-Färbungen von m . Diesen Raum versehen wir mit der üblichen Produkt- σ -Algebra. Wir nennen ein Paar (m, f) eine *Färbung des Mosaiks* m , wenn $f \in \{0, 1\}^m$ ist. Eine *unabhängige Färbung des Mosaiks* m mit Parameter $p \in [0, 1]$ ist ein Paar (m, F) , wobei F ein zufälliges Element in $\{0, 1\}^m$ ist, das unter $\mathbb{P}_{p,m}$ die Verteilung $\otimes_{Z \in m} \text{Ber}(p)$ hat.

Eine Färbung (m, f) des Mosaiks m induziert in kanonischer Weise den gefärbten Graphen $\mathcal{G}_{m,f} := (\mathcal{G}_m, f)$ (vgl. Abschnitt 2.3). Analog induziert eine zufällige Färbung (m, F) einen zufällig gefärbten Graphen $\mathcal{G}_{m,F} := (\mathcal{G}_m, F)$.

Bei zufälligen Mosaiken verfahren wir ebenso, indem wir den zugrunde liegenden Partikelprozess $\mathfrak{M} := \{Z_1, Z_2, \dots\}$ unabhängig markieren. Für den zugehörigen unabhängig markierten Partikelprozess $\{(Z_1, F_1), (Z_2, F_2), \dots\}$ nutzen wir stets die Bezeichnung \mathfrak{M}_F mit $F = (F_1, F_2, \dots)$. Die Marken seien Bernoulli verteilt mit Parameter p , d.h., eine schwarze Zelle entspricht einem Partikel mit Marke 1. Wir schreiben $\mathcal{M}_F \subset \mathcal{N}(\mathcal{K} \times \{0, 1\})$ für die Menge der gefärbten Mosaik und $\mathfrak{F}(\mathcal{M}_F)$ für die Spur- σ -Algebra darauf. Unter \mathbb{P}_p hat \mathfrak{M}_F die Verteilung eines unabhängig $\text{Ber}(p)$ markierten Mosaiks \mathfrak{M} . Es wird dabei stets aus dem Kontext klar werden, ob sich \mathbb{P}_p auf eine feste Indexmenge

(vgl. Abschnitt 2.1) oder auf ein zufälliges gefärbtes Mosaik bezieht (und auch auf welches Mosaik in letzterem Fall).

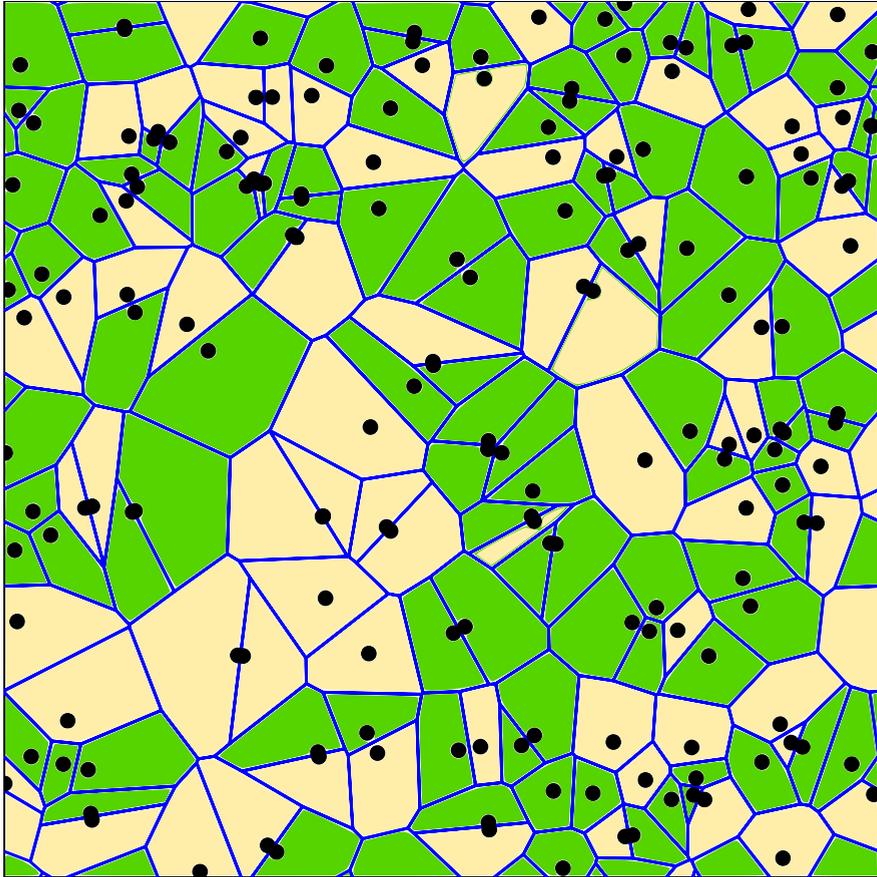


Abbildung 3.2.: Eine Realisierung eines gefärbten Voronoi-Mosaiks, das von einem Poisson-Cluster-Prozess erzeugt wird. Jede Zelle wurde mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.6$ grün gefärbt. (Daten von Michael Klatt)

Jeder markierte Partikelprozess $\mathfrak{M}_F = \{(Z_1, F_1), (Z_2, F_2), \dots\}$ induziert eine zufällige Färbung (\mathfrak{M}, F') des zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} via $F'(Z_i) = F_i$. Wir werden stets F für F' und \mathfrak{M}_F für (\mathfrak{M}, F') schreiben. Umgekehrt bezeichnet \mathbf{M}_F dann auch den Raum aller möglichen Färbungen von Mosaiken. Es wird aus dem Kontext klar werden, was gemeint ist. In diesem Sinne gilt für alle

3. Einführung

$$A \in \mathfrak{F}(\mathbf{M}_F)$$

$$\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in A] = \int_{\mathbf{M}} \mathbb{P}_{p,m}[(m, F) \in A] \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}(dm). \quad (3.1)$$

Das zufällig gefärbte zufällige Mosaik \mathfrak{M}_F induziert dann den zufällig gefärbten zufälligen Graphen $\mathcal{G}_{\mathfrak{M},F} := (\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}, F)$.

Wenden wir uns zunächst der Existenz eines unendlichen schwarzen Clusters zu. Es folgt leicht aus dem 0-1-Gesetz von Kolmogorov, dass in einem deterministischen Graphen die Wahrscheinlichkeit, dass ein unendlicher schwarzer Cluster existiert entweder 0 oder 1 ist. Dieses Verhalten überträgt sich nicht sofort auf stationäre zufällige Mosaik.

3.0.1 Beispiel

Sei $\mathfrak{L}_1 := \{[0, 1]^2 + v \mid v \in \mathbb{Z}^2\}$ das Mosaik, welches dem Quadratgitter entspricht. Sei weiter H das regelmäßige Sechseck mit Seitenlänge eins und $\mathfrak{L}_2 := \{H + v \mid v \in (\sqrt{3}/2, 0)\mathbb{Z} \times (\sqrt{3}/2, 3/2)\mathbb{Z}\}$ das Mosaik, welches dem Hexagonalgitter entspricht. Es ist bekannt [Gri99], dass die kritischen Perkolationswahrscheinlichkeiten $p_c(\mathfrak{L}_2) = 1/2 < p_c(\mathfrak{L}_1)$ unterschiedlich sind. Für $X_1 \sim \text{Unif}([0, 1]^2)$ und $X_2 \sim \text{Unif}(H)$ kann leicht nachgerechnet werden, dass $\mathfrak{L}_1 + X_1$ und $\mathfrak{L}_2 + X_2$ jeweils stationäre Mosaik sind. Wählen wir $p \in (p_c(\mathfrak{L}_2), p_c(\mathfrak{L}_1))$ und definieren $Y \sim \text{Ber}(1/2)$ wobei (X_1, X_2, Y) unabhängig seien, so gilt für das stationäre zufällige Mosaik $\mathfrak{M} := \mathbb{1}\{Y = 0\}(\mathfrak{L}_1 + X_1) + \mathbb{1}\{Y = 1\}(\mathfrak{L}_2 + X_2)$

$$\mathbb{P}_p[\text{es ex. ein unendlicher schwarzer Cluster in } \mathcal{G}_{\mathfrak{M},F}] = \frac{1}{2}.$$

Um diesen, in gewissem Sinne pathologischen, Fall auszuschließen, werden wir im Weiteren stets ergodische Mosaik betrachten.

3.0.2 Lemma

Ist \mathfrak{M} ein ergodisches Mosaik, so gilt für alle $p \in [0, 1]$

$$\mathbb{P}_p[\text{es ex. ein unendlicher Cluster in } \mathcal{G}_{\mathfrak{M},F}] \in \{0, 1\}.$$

Beweis: Da \mathfrak{M} ergodisch ist, ist auch \mathfrak{M}_F unter \mathbb{P}_p ergodisch nach Abschnitt 2.2. Das Ereignis „es existiert ein unendlicher Cluster in $\mathcal{G}_{\mathfrak{M},F}$ “ ist verschiebungsinvariant. \square

Wir können also die Definition der kritischen Perkolationswahrscheinlichkeit aus (2.1) auf ergodische Mosaik verallgemeinern. Für ein zufälliges ergodisches Mosaik \mathfrak{M} sei

$$\theta_p(\mathfrak{M}) := \mathbb{P}_p[|C(\mathbf{0}, \mathcal{G}_{\mathfrak{M},F})| = \infty]$$

die Perkulationsfunktion und

$$p_c(\mathfrak{M}) := \sup\{p \in [0, 1] \mid \theta_p(\mathfrak{M}) = 0\}$$

die kritische Perkulationswahrscheinlichkeit (vgl. Abschnitt 2.3). Damit ist klar, dass für $p > p_c$ f.s. ein unendlicher Cluster existiert, da bereits der Ursprung mit positiver Wahrscheinlichkeit von einem unendlichen Cluster überdeckt wird. Für $p < p_c$ existiert wiederum f.s. kein unendlicher Cluster, da wegen der Stationarität f.s. kein Punkt mit rationalen Koordinaten in einem unendlichen Cluster liegt, aber alle Zellen rationale Punkte enthalten. Ob es für $p = p_c$ einen unendlichen Cluster gibt, ist wie im diskreten Fall nur in wenigen Spezialfällen bekannt. Allgemein erwarten wir, dass am kritischen Punkt kein unendlicher Cluster existiert.

Wir bemerken an dieser Stelle auch, dass die Ereignisse „es existiert ein unendlicher schwarzer Cluster in $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}, F}$ “ und „die Nullzelle liegt in einem unendlichen schwarzen Cluster“ aufsteigend sind. Also ist $\theta_p(\mathfrak{M})$ nach Lemma 2.2.1 eine monoton steigende Funktion in p .

Wir wenden uns nun drei wesentlichen Phänomenen zu, die in Perkulationsmodellen beobachtet werden. Dies ist erstens ein *nicht trivialer Phasenübergang*, d.h. an einem Punkt innerhalb des Parameterbereichs ändert sich das qualitative Verhalten des Modells grundlegend, indem ein unendlicher schwarzer Cluster entsteht. Es ist zweitens die *Eindeutigkeit des unendlichen Clusters*. Das heißt, dass es fast sicher keine zwei unendlichen Cluster gibt. Und es ist drittens die Existenz einer Grenzform. Damit meinen wir, dass große Bälle in der Graphenmetrik von $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ geeignet skaliert gegen eine deterministische Menge konvergieren. Wir sprechen dann auch davon, dass \mathfrak{M} ein *Shape-Theorem* erfüllt. Alle drei Phänomene wurden bereits für das sogenannte Poisson-Voronoi-Mosaik [BR06a], [Art96], [VAW92] nachgewiesen. Wir zeigen in diesem Teil der Arbeit ganz allgemein, unter welchen Voraussetzungen an ein zufälliges Mosaik diese Phänomene beobachtet werden können.

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

Eine grundlegende Frage in der Perkolationstheorie ist, ob ein nicht trivialer Phasenübergang stattfindet. Das heißt, ob $p_c \in (0, 1)$ gilt. Diese Frage ist für Gitter leicht zu klären [Gri99]. Sie wurde jedoch bereits im sehr allgemeinen Rahmen der Cayley-Graphen endlich präsentierter Gruppen in [BB99] beantwortet. Bei zufälligen Mosaiken stellt sich die Frage, welche Regularitätsvoraussetzungen an ein zufälliges ergodisches Mosaik gestellt werden müssen, um ebenfalls $p_c \in (0, 1)$ zu erhalten. Wir werden dazu in den zwei folgenden Abschnitten zwei allgemeine Ansätze diskutieren, die in beliebigen Dimensionen funktionieren.

Der erste Ansatz setzt die Ergodizität des Mosaiks voraus und stellt zwei Bedingungen, wie sehr sich kleine und große Zellen häufen dürfen. Der zweite Ansatz führt eine neue Mischungsbedingung ein.

Für ein zufälliges Mosaik genügt es dann, die Bedingungen von *einem* der beiden Ansätze nachzuweisen um zu schließen, dass der Phasenübergang in diesem zufälligen Mosaik nicht trivial ist.

Im dritten Abschnitt gehen wir auf die spezielle Situation im 2-dimensionalen ein, in der unter schwachen Voraussetzungen bereits $p_c \geq \frac{1}{2}$ gilt.

4.1. Zahme Mosaike

Im ersten Ansatz wollen wir zwei Bedingungen ausmachen, die es für ein zufälliges Mosaik \mathfrak{M} ermöglichen, die Anzahl der Graphentiere von $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ abzuschätzen um dann die selben Methoden anwenden zu können wie im diskreten Fall. Die Heuristik hinter den zwei Bedingungen ist, dass einerseits große Zellen nicht zu nah beieinander sein bzw. zu oft vorkommen dürfen, andererseits sollen sich nicht zu viele kleine Zellen häufen.

Wir nennen eine Funktion $z : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine *Zentrumsfunktion*, wenn z messbar und verschiebungskovariant ist, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $Z \in \mathcal{K}$ gelte $z(Z + x) = z(Z) + x$. Im folgenden sei z außerdem stets derart, dass $z(Z) \in Z$ gilt. Beispiele für mögliche Zentrumsfunktionen (wie z.B. den Schwerpunkt) finden sich in [SW08, S. 110].

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

Wir müssen im folgenden Abschnitt einige Diskretisierungen vornehmen, weshalb wir folgende wichtige Bezeichnung einführen. Für $\zeta \subset \mathbb{Z}^d$ und $\delta > 0$ setzen wir

$$\zeta^{\square\delta} := \delta \left(\zeta + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d \right).$$

Dies ist die aus Würfeln der Seitenlänge δ zusammengesetzte Teilmenge des \mathbb{R}^d die mit ζ korrespondiert. Ist $v \in \mathbb{Z}^d$, schreiben wir kurz $v^{\square\delta}$ für $\{v\}^{\square\delta}$, den um δv zentrierten Würfel mit Seitenlänge δ .

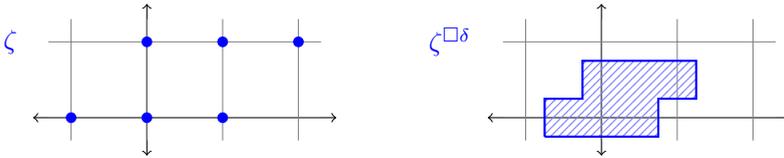


Abbildung 4.2.: Eine Menge $\zeta \subset \mathbb{Z}^2$ und das zugehörige $\zeta^{\square\delta}$ mit $\delta = \frac{1}{2}$.

Für ein stationäres zufälliges Mosaik \mathfrak{M} und $\delta > 0$ definieren wir die d -dimensionalen zufälligen Felder $Y(\mathfrak{M}, \delta) := \{Y_v(\mathfrak{M}, \delta) \mid v \in \mathbb{Z}^d\}$ und $U(\mathfrak{M}, \delta) := \{U_v(\mathfrak{M}, \delta) \mid v \in \mathbb{Z}^d\}$ via

$$Y_v(\mathfrak{M}, \delta) := |\{Z \in \mathfrak{M} \mid z(Z) \in v^{\square\delta}\}|$$

$$U_v(\mathfrak{M}, \delta) := \mathbf{1}\{\text{Eine Zelle von } \mathfrak{M} \text{ schneidet } v^{\square\delta} \text{ und } \{w \in \mathbb{Z}^d \mid \|w - v\|_\infty \geq 2\}^{\square\delta}\}.$$

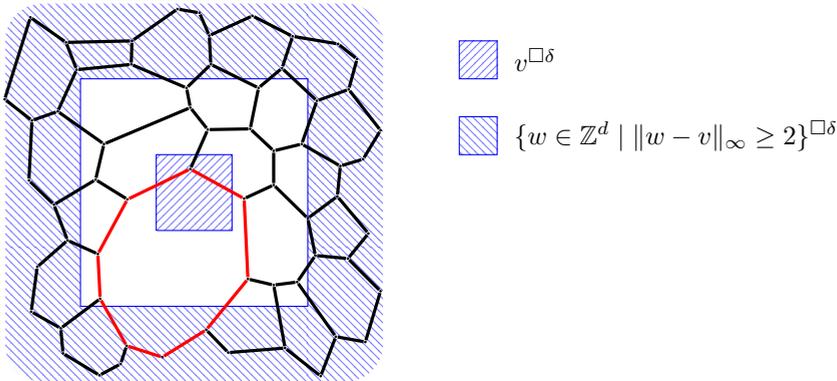


Abbildung 4.3.: Ausschnitt einer Realisierung eines zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} für das $U_v(\mathfrak{M}, \delta) = 1$ gilt, da beide blau schraffierten Bereiche von der selben (rot markierten) Zelle geschnitten werden.

Überdecken wir also den \mathbb{R}^d mit einem Gitter der Weite δ , so zählt $Y(\mathfrak{M}, \delta)$, wie viele Zellzentren in jedem Würfel liegen. Die Gitterweite δ ist im Allgemeinen groß. Daher zeigt das Feld $U(\mathfrak{M}, \delta)$ an, welche Würfel von großen Zellen geschnitten werden. Es ist klar, dass $Y(\mathfrak{M}, \delta)$ und $U(\mathfrak{M}, \delta)$ stationär sind.

Wir erinnern daran, dass ein zufälliges Feld $X = \{X_v \mid v \in \mathbb{Z}^d\}$ zahm ist, falls eine Konstante $c < \text{ess sup } X_0$ existiert, sodass f.s.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} X_v \leq c$$

gilt.

Wir nennen ein zufälliges Mosaik \mathfrak{M} *zahm*, wenn es folgende Eigenschaften besitzt:

(Z1) Das zufällige Mosaik \mathfrak{M} ist ergodisch.

(Z2) Es gibt ein $\delta_1 > 0$ und ein $c_1 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} Y_v(\mathfrak{M}, \delta_1) \leq c_1$$

gilt.

(Z3) Es gibt ein $\delta_2 > 0$, sodass $U(\mathfrak{M}, \delta_2)$ zahm ist.

Im Fall, dass $Y_0(\mathfrak{M}, \delta_1)$ f.s. beschränkt ist, ist die Eigenschaft (Z2) trivialerweise erfüllt. Anderfalls bedeutet sie, dass $Y(\mathfrak{M}, \delta_1)$ zahm ist.

Um zu zeigen, dass $U(\mathfrak{M}, \delta_2)$ zahm ist, bieten sich z.B. Argumente der stochastischen Vergleichbarkeit unter Nutzung von [LSS97] an. Dazu muss für die Randverteilungen von $U(\mathfrak{M}, \delta_2)$ wegen Bemerkung 2.4.3 $\mathbb{P}[U_0 = 1] \leq (e(2d + 1))^{-1}$ gelten. Es ist allerdings leicht zu zeigen, dass $\mathbb{P}[U_0 = 1] \rightarrow 0$ für $\delta_2 \rightarrow \infty$ gilt, sofern der Durchmesser der Nullzelle von \mathfrak{M} ein endliches $d + \varepsilon$ Moment mit $\varepsilon > 0$ besitzt. In vielen Beispielen ist es der Fall, dass alle Momente des Durchmessers der Nullzelle endlich sind.

Wir möchten im weiteren Verlauf diskretisieren. Dazu ist es geschickt, wenn $\delta_1 = \delta_2$ gilt. Das folgende Lemma zeigt, dass wir dies stets annehmen können.

4.1.1 Lemma

Ist \mathfrak{M} ein stationäres zufälliges Mosaik, $\delta_1 > 0$ und $c_1 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} Y_v(\mathfrak{M}, \delta_1) \leq c_1$$

gilt, so gibt es für jedes $\delta_2 > 0$ ein $c_2(\delta_1)$, sodass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} Y_v(\mathfrak{M}, \delta_2) \leq c_2(\delta_1),$$

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

gilt. Insbesondere ist also $Y(\mathfrak{M}, \delta_2)$ zahm, falls $\text{ess sup } Y_0(\mathfrak{M}, \delta_1) = \infty$ und $Y(\mathfrak{M}, \delta_1)$ zahm ist.

Beweis: Ist δ_2 fest, so gibt es eine Konstante $c_3 \in \mathbb{N}$ derart, dass jeder Würfel $v^{\square\delta_2}$, $v \in \mathbb{Z}^d$ von weniger als c_3 vielen Würfeln der Form $w^{\square\delta_1}$, $w \in \mathbb{Z}^d$ überdeckt wird. Damit gibt es für jedes $\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}$ ein $\tilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{c_3 n}^{(d)}$ mit

$$\sum_{v \in \alpha} Y_v(\mathfrak{M}, \delta_2) \leq \sum_{v \in \tilde{\alpha}} Y_v(\mathfrak{M}, \delta_1)$$

woraus die Behauptung folgt. \square

Lemma 4.1.1 liefert uns Eigenschaft (Z2) also auch für das δ_2 , das in (Z3) benutzt wird. Daher können wir uns im Weiteren auf $U := U(\mathfrak{M}, \delta_2)$ und $Y := Y(\mathfrak{M}, \delta_2)$ beschränken und schreiben kurz ζ^{\square} für $\zeta^{\square\delta_2}$ wenn $\zeta \subset \mathbb{Z}^d$ ist. Würfel der Art v^{\square} mit $v \in \mathbb{Z}^d$ werden wir Boxen nennen. Diese Notation wird nur im Zusammenhang mit zahmen Mosaiken verwendet werden.

Für ein Mosaik m nennen wir $\mathcal{A}(\mathcal{G}_m)$ die Menge der *Mosaiktiere* von m , wobei daran erinnert sei, dass die Nullzelle die Wurzel von \mathcal{G}_m ist.

4.1.2 Theorem

Ist \mathfrak{M} ein stationäres zahmes Mosaik, dann existiert eine f.s. endliche Zufallsvariable N und Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ abhängig von d und der Verteilung von \mathfrak{M} , sodass für alle $n > N$

$$|\mathcal{A}_n(\mathcal{G}_m)| \leq c_1^n$$

und für die Anzahl der äußeren Nachbarn $\partial^+ \alpha$ von $\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G}_m)$

$$|\partial^+ \alpha| \leq c_2 n$$

gilt.

In Kombination mit folgendem Standardlemma der Perkolationstheorie, können wir $p_c(\mathfrak{M}) > 0$ schließen.

4.1.3 Lemma

Sei \mathcal{G} ein zusammenhängender Graph. Gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für $n \in \mathbb{N}$ groß genug $|\mathcal{A}_n(\mathcal{G})| \leq c^n$ gilt, so ist

$$p_c(\mathcal{G}) \geq \frac{1}{c}.$$

Beweis: Es gilt für alle $p \in [0, 1]$ und n groß genug

$$\theta_p(\mathbf{0}) \leq \mathbb{P}_p \left[\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} \bigcap_{v \in \alpha} \{X_v = 1\} \right] \leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G})} p^n \leq (cp)^n.$$

Daraus folgt $\theta_p(\mathbf{0}) = 0$ für $p < c^{-1}$ und damit $p_c(\mathcal{G}) \geq 1/c$. □

4.1.4 Theorem

Ist \mathfrak{M} ein stationäres zahmes zufälliges Mosaik, so gilt

$$p_c(\mathfrak{M}) > 0.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Theorem 4.1.2 und Lemma 4.1.3. □

Lemma 4.1.3 liefert zusammen mit Lemma 2.4.1 auch den einfachen Beweis von $p_c > 0$ für Graphen mit beschränktem Knotengrad, also insbesondere für Gitter. Bei einem zufälligen Mosaik \mathfrak{M} kann jedoch schon in einfachen Beispielen der Knotengrad in $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ unbeschränkt sein.

In deterministischen Graphen mit beschränktem Knotengrad ergibt eine Analyse der Anzahl der Pfade, die im Ursprung starten und Länge n haben, deutlich bessere Schranken, die in hohen Dimensionen sogar asymptotisch korrekt sind. Für zufällige Mosaikere sind die Schranken allerdings in beiden Fällen so schlecht, dass die Untersuchung der Mosaikere lohnenswerter ist, da sich später daraus noch andere Eigenschaften ableiten lassen.

Beweis von 4.1.2: Da $U = U(\mathfrak{M}, \delta_2)$ zahm ist, existiert eine Konstante $c_3 < 1$ und eine Zufallsvariable N_1 , sodass für $n > N_1$

$$\max_{\zeta \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \sum_{v \in \zeta} U_v \leq c_3 n$$

gilt. Dann folgt für alle $n > N_1$, dass die Vereinigung aller Zellen eines Mosaiktieres $\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G}_{\mathfrak{M}})$ von höchstens $3^d(1 - c_3)^{-1}n$ Boxen überdeckt wird. Denn angenommen man bräuchte mehr als $3^d(1 - c_3)^{-1}n$ solcher Boxen, so bildeten deren Mittelpunkte ein Gittertier ζ , das nach Voraussetzung eine Teilmenge M mit mehr als $3^d n$ Knoten besitzt, wobei alle $v \in M$ die Eigenschaft haben, dass keine Zelle die v^\square schneidet auch noch $\{w \in \mathbb{Z}^d \mid \|w - v\| > 1\}^\square$ schneidet. Wir können also eine Teilmenge $\tilde{M} \subset M$ von mehr als n Knoten wählen, sodass jede Menge $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - v\|_\infty \leq \frac{3}{2}\delta_2\}$ mit $v \in \tilde{M}$ mindestens eine Zelle von α enthält und für je zwei verschiedene Knoten $v, w \in \tilde{M}$ bereits $\|v - w\|_\infty \geq 3$ gilt. Damit hätte α mehr als n Elemente, was der Annahme widerspricht.

Wir hatten nach Lemma 4.1.1 bereits bemerkt, dass wegen Lemma 4.1.1 und (Z2) eine Konstante c_4 und eine f.s. endliche Zufallsvariable N_2 existieren, sodass für alle $n > N_2$

$$\max_{\zeta \in \mathcal{A}_n^{(d)}} |\{Z \in \mathfrak{M} \mid z(Z) \in \zeta^\square\}| \leq c_4 n \tag{4.1}$$

gilt.

Fassen wir die beiden Überlegungen zusammen, erhalten wir, dass es für jedes

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

Mosaiktier $\alpha \in \mathcal{A}_n(\mathcal{G}_{\mathfrak{M}})$ ein Gittertier ζ der Größe $\lfloor 3^d(1-c_3)^{-1}n \rfloor$ gibt, sodass die Zellen von α von ζ^\square überdeckt werden. Für $\lfloor 3^d(1-c_3)^{-1}n \rfloor > N_2$ liegen jedoch nach (4.1) nie mehr als $c_4 \lfloor 3^d(1-c_3)^{-1}n \rfloor$ Zellen in ζ^\square . Daher kann die Anzahl von Mosaiktieren der Größe $n > \max(N_1, N_2)$ nicht größer sein als die Anzahl von Gittertieren der Größe $\lfloor 3^d(1-c_3)^{-1}n \rfloor$ multipliziert mit der Anzahl von Teilmengen einer Menge mit $c_4 \lfloor 3^d(1-c_3)^{-1}n \rfloor$ Elementen. Die Anwendung von Lemma 2.4.1 ergibt daher die erste Behauptung.

Betrachten wir nun die Anzahl der Randknoten $|\partial^+\alpha|$ von α . Wir wissen bereits, dass die Zellen von α von einer Menge ζ^\square überdeckt werden, wobei ζ ein Gittertier der Größe $\lfloor 3^d(1-c_3)^{-1}n \rfloor$ ist. Damit schneidet jede Zelle in $\partial^+\alpha$ die Menge ζ^\square . Also schneidet keine Zelle von $\partial^+\alpha$ eine Box v^\square mit $U_v = 0$, für die $\{w \in \mathbb{Z}^d \mid \|w-v\|_\infty \leq 1\}$ disjunkt zu ζ ist. Ist also $\xi := \{v \in \mathbb{Z}^d \mid \min_{w \in \zeta} \|v-w\|_\infty \leq 2\}$ und

$$C(\zeta) := \xi \cup \{v \in \mathbb{Z}^d \mid v \leftrightarrow \xi \text{ in } U\},$$

so muss $\partial^+\alpha \subset C(\zeta)^\square$ gelten. Da $C(\zeta)$ ein Gittertier mit $|C(\zeta)| \geq |\zeta| > n$ ist, gilt

$$\sum_{v \in C(\zeta)} U_v \leq c_3 |C(\zeta)|.$$

Da $U_v = 1$ für alle Knoten $v \in C(\zeta) \setminus \xi$, ist

$$|C(\zeta)| - |\xi| \leq \sum_{v \in C(\zeta)} U_v$$

und damit folgt

$$|C(\zeta)| \leq \frac{|\xi|}{1-c_3} \leq \frac{5^d |\zeta|}{1-c_3}.$$

Da $|C(\zeta)| > n$ ist, schließen wir aus (4.1) und $\partial^+\alpha \subset C(\zeta)^\square$ die zweite Behauptung. \square

Es ist im Beweis ersichtlich, dass wir N leicht kontrollieren können, wenn wir N_2 gut kennt. Bilden beispielsweise die Zellzentren einen Poisson-Punktprozess, so können wir leicht zeigen (ähnlich wie in Lemma 2.4.2), dass eine Konstante $c_5 > 0$ existiert, sodass $\mathbb{P}[N_2 > m] \leq e^{-c_5 m}$ gilt. Dann hätte auch N ein exponentielles Tailverhalten.

Wenn \mathfrak{M} zahm ist, erhalten wir auch eine obere Schranke für die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit. Diese ist jedoch so schlecht, dass wir sie nicht explizit angeben haben. Sie lässt sich jedoch leicht aus dem Beweis des folgenden Theorems extrahieren.

4.1.5 Theorem

Ist \mathfrak{M} ein stationäres zahmes zufälliges Mosaik, so gilt

$$p_c(\mathfrak{M}) < 1.$$

Beweis: Wir verwenden N_1, N_2, c_3 und c_4 wie im Beweis von Theorem 4.1.2. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass mit positiver Wahrscheinlichkeit $N_1, N_2 \leq n_0$ ist. Sei \mathfrak{m} eine Realisierung von \mathfrak{M} mit $N_1, N_2 \leq n_0$ und für ein $v \in \mathbb{Z}^d$ sei W_v das Ereignis „Die Box v^\square wird von einer weißen Zelle aus \mathfrak{m} geschnitten.“. Wir schreiben im Beweis stets U und Y für $U(\mathfrak{m}, \delta)$ und $Y(\mathfrak{m}, \delta)$.

Wir nutzen das bekannte Argument von Peierl (vgl. [Gri99]). Dies besagt im Falle des Quadratgitters \mathcal{Z}^2 , wenn der schwarze Cluster des Ursprungs endlich und nicht leer ist, so gibt es im Graphen $\mathcal{Z}^{2*} = (\mathbb{Z}^2, \{\{v, w\} \subset \mathbb{Z}^2 \mid \|v - w\|_\infty = 1\})$ einen weißen geschlossenen Pfad γ der 0 einschließt. Dabei meint einschließen, dass jeder unendliche Pfad φ in \mathcal{Z}^2 , der in 0 startet, γ schneiden muss. Außerdem impliziert die Existenz eines unendlichen Clusters in \mathcal{Z}^2 bereits die Existenz eines solchen in \mathcal{Z}^d . Auf Mosaike angewandt ergibt sich, dass

$$\mathbb{P}_{p,m} [|C(\mathbf{0}, \mathcal{G}_{\mathfrak{m}, F})| < \infty] \leq \mathbb{P}_{p,m} \left[\bigcup_{\gamma} \bigcap_{v \in \gamma} W_v \right]$$

gelten muss, wobei die erste Vereinigung über alle geschlossenen Pfade in \mathcal{Z}^{2*} , die 0 einschließen, gebildet wird. Ein geschlossener Pfad γ der Größe $m \in \mathbb{N}$ der 0 einschließt, muss jede Koordinatenhalbachse schneiden. Verbinden wir den Ursprung auf direktem Wege mit einem dieser Schnittpunkte, sehen wir ein, dass es ein Graphentier $\alpha \in \mathcal{A}_l(\mathcal{Z}^{2*})$ mit $m \leq l \leq 2m$ gibt, welches γ überdeckt. Damit erhalten wir für beliebiges $n_1 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,m} [\text{es ex. kein unendlicher Cluster}] &\leq \mathbb{P}_{p,m} \left[\bigcup_{n \geq n_1} \bigcup_{i=n}^{2n} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_i(\mathcal{Z}^{2*})} \bigcap_{v \in \alpha} W_v \right] \\ &\leq \sum_{n \geq n_1} \sum_{i=n}^{2n} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i(\mathcal{Z}^{2*})} \mathbb{P}_{p,m} \left[\bigcap_{v \in \alpha} W_v \right]. \end{aligned}$$

Ist $\alpha \in \mathcal{A}(\mathcal{Z}^{2*})$ ein Graphentier mit Größe mindestens n_0 und $\beta_1 := \{v \in \alpha \mid U_v = 0\}$, dann ist $|\beta_1| \geq (1 - c_3)|\alpha|$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es nun ein $\beta_2 \subset \beta_1$, sodass $\|v - w\|_\infty \geq 3$ für $v, w \in \beta_2$ und $|\beta_2| \geq |\beta_1|/3^d$ gilt. Dies impliziert, dass für $v, w \in \beta_2$ keine Zelle sowohl die Box v^\square als auch die Box w^\square schneiden kann. Daher sind die Ereignisse W_v und W_w unter $\mathbb{P}_{p,m}$ unabhängig und wir erhalten

$$\mathbb{P}_{p,m} \left[\bigcap_{v \in \alpha} W_v \right] \leq \mathbb{P}_{p,m} \left[\bigcap_{v \in \beta_2} W_v \right] = \prod_{v \in \beta_2} \mathbb{P}_{p,m} [W_v], \quad (4.2)$$

wobei für β_2

$$|\beta_2| \geq (1 - c_3)|\alpha|3^{-d} \quad (4.3)$$

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

gilt. Da wir $z(Z) \in Z$ für alle Zellen Z vorausgesetzt hatten, müssen alle Zentren von Zellen, die v^\square mit $v \in \alpha$ schneiden, in der Menge $\{w \in \mathbb{Z}^2 \mid \|w-v\|_\infty \leq 1\}^\square$ liegen. Dementsprechend gilt

$$\prod_{v \in \beta_2} \mathbb{P}_{p,m}[W_v] \leq \prod_{v \in \beta_2} \left(1 - p^{\sum_{w: \|w-v\|_\infty \leq 1} Y_w}\right). \quad (4.4)$$

Weiter gilt nach der Wahl von β_2

$$\bigcup_{v \in \beta_2} \{w \mid \|w-v\|_\infty \leq 1\} \subset \alpha + \{v \in \mathbb{Z}^d \mid \|v\|_\infty \leq 1\},$$

wobei die Menge auf der rechten Seite ein Gittertier der Größe höchstens $3^d|\alpha|$ ist. Daher ist (vgl. (4.1))

$$\sum_{v \in \beta_2} \sum_{w: \|w-v\|_\infty \leq 1} Y_w \leq c_4 3^d |\alpha|.$$

Eine Maximierung der rechten Seite von (4.4) unter dieser Nebenbedingung zeigt, dass das Maximum erreicht wird, wenn alle Exponenten gleich groß sind. Wegen (4.3) folgt

$$\prod_{v \in \beta_2} \left(1 - p^{\sum_{w: \|w-v\|_\infty \leq 1} Y_w}\right) \leq \prod_{v \in \beta_2} \left(1 - p^{\frac{3^{2d} c_4}{1-c_3}}\right) \leq \left(1 - p^{\frac{3^{2d} c_4}{1-c_3}}\right)^{(1-c_3)|\alpha| 3^{-d}}.$$

Für $n_1 \geq n_0$ und p groß genug ist

$$\sum_{n \geq n_1} \sum_{i=n}^{2n} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i(\mathbb{Z}^{2*})} \mathbb{P}_{p,m} \left[\bigcap_{v \in \alpha} W_v \right] \leq \sum_{n \geq n_1} \sum_{i=n}^{2n} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_i(\mathbb{Z}^{2*})} \left(1 - p^{\frac{3^{2d} c_4}{1-c_3}}\right)^{(1-c_3)i 3^{-d}}$$

wegen Lemma 2.4.1 summierbar und daher kleiner als eins für n_1 groß genug. Wegen der Ergodizität gibt es dann fast sicher einen unendlichen schwarzen Cluster. \square

4.2. Skalierungsmischende Mosaik

Wir möchten in diesem Abschnitt eine zweite sehr allgemeine Herangehensweise vorstellen, um die Existenz eines nicht trivialen Phasenübergangs zu zeigen. Dazu fordern wir anstelle von Ergodizität starke Mischungseigenschaften für das zufällige Mosaik.

4.2. Skalierungsmischende Mosaike

Wir wollen zuerst ein Beispiel eines mischenden Mosaiks skizzieren, das keinen trivialen Phasenübergang besitzt. In [Hei12] wird im Rahmen von Irrfahrten in zufälligen Umgebungen ein Beispiel für eine zufällige Umgebung (das sogenannte *streetgrid* $SG(X)$) konstruiert, die mischend ist (In dem Sinne, dass $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A \cap \theta_x(B)] = \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B]$ für Ereignisse A, B gilt). Dabei wird \mathbb{Z}^2 in Rechtecke partitioniert, die dann je nach Lage mit unterschiedlichen Übergangswahrscheinlichkeiten ausgestattet werden. Wir sagen, ein Quadrupel (R_1, \dots, R_4) von Rechtecken in \mathbb{Z}^2 umschließt den Ursprung, wenn jeder unendliche Pfad der im Ursprung startet, eines der Rechtecke schneiden muss. Die Konstruktion der Partition ist derart, dass der Ursprung fast sicher von unendlich vielen Quadrupeln $Q_i = (R_{1,i}, R_{4,i})$ von Rechtecken umschlossen wird (siehe [Hei12, Figure 2]), wobei $R_{i,k} \cap R_{j,l} = \emptyset$ für alle $i \neq j \in \mathbb{N}$ und $k, l \in [4]$ gilt. Dieses Beispiel kann leicht abgewandelt werden, indem die Rechtecke der Partition als Zellen eines zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} betrachtet werden. Das Mosaik \mathfrak{M} ist dann immer noch mischend in geeignetem Sinne. Die Details dazu werden wir jedoch nicht ausführen.

Dies führt dazu, dass $p_c(\mathfrak{M}) = 1$ ist, da für $p < 1$ fast sicher ein Quadrupel aus Rechtecken existiert, welches den Ursprung umschließt und in dem alle vier Rechtecke weiß sind. Damit liegt der Ursprung fast sicher in einem endlichen Cluster.

Die einfache Verschärfung von ergodisch zu mischend genügt also im Allgemeinen noch nicht, um einen nicht trivialen Phasenübergang zu garantieren. Wir stellen nun eine stärkere Mischungsbedingung vor, die dies leistet.

Für eine Borelmenge $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ nennen wir eine Funktion $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ *determiniert von A*, wenn für je zwei Mosaike $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in \mathbf{M}$ mit $\mathfrak{m}_1 \cap A = \mathfrak{m}_2 \cap A$ bereits $f(\mathfrak{m}_1) = f(\mathfrak{m}_2)$ gilt. Dabei meinen wir mit $\mathfrak{m}_1 \cap A$ die Menge $\{Z \cap A \mid Z \in \mathfrak{m}_1, Z \cap A \neq \emptyset\}$. Das heißt, die Werte von f hängen nur vom Aussehen des Mosaiks in A ab. Ein Ereignis $E \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ nennen wir *determiniert von A*, wenn $\mathbb{1}_E$ von A determiniert ist. Analog definieren wir den Begriff für Funktionen $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbf{M}_F \rightarrow \mathbb{R}$ und Ereignisse $E \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ bzw. $E \in \mathfrak{F}(\mathbf{M}_F)$. Dabei sei $(\mathfrak{m}, f) \cap A := \{(Z_n \cap A, f_n) \mid Z_n \cap A \neq \emptyset\}$ für $(\mathfrak{m}, f) = \{(Z_n, f_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{M}_F$.

Wir nennen ein stationäres zufälliges Mosaik \mathfrak{M} *skalierungsmischend*, wenn für je zwei disjunkte Quader $Q := [a, b]$ und $Q' := [a', b']$ mit $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^d$ zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, sodass für $t > 0$ groß genug für alle $E \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ determiniert von tQ und $E' \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ determiniert von tQ'

$$|\mathbb{P}[\mathfrak{M} \in E \cap E'] - \mathbb{P}[\mathfrak{M} \in E]\mathbb{P}[\mathfrak{M} \in E']| \leq c_1 t^{-c_2}$$

gilt. Analog definieren wir skalierungsmischende Punktprozesse und gefärbte Mosaike.

Anschaulich bedeutet dies, dass Ereignisse nicht wie bei mischenden Mosaiken durch Verschiebung räumlich voneinander getrennt werden, sondern durch

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

Skalierung. Außerdem ist die Geschwindigkeit mit der die Abhängigkeiten abnehmen in dieser Definition quantifiziert. Dies wird später für die Anwendung des Borel-Cantelli Lemmas benötigt.

Wir erinnern daran, dass wir mit $z : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine Zentrumsfunktion bezeichnet hatten. Wir können ein stationäres zufälliges Mosaik $\mathfrak{M} = \{Z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ als stationären markierten Punktprozess $\mathfrak{M}' := \{(z(Z_n), Z_n - z(Z_n)) \mid n \in \mathbb{N}\}$ in \mathbb{R}^d mit Markenraum \mathcal{K} auffassen. Es ist bekannt, dass es in diesem Fall eine Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf \mathcal{K} gibt, sodass das Intensitätsmaß Θ des Mosaiks von der Form $\Theta = \gamma \lambda \otimes \mathbb{Q}$ ist ([SW08, Theorem 3.5.1]). Dabei ist γ die Intensität und λ das Lebesgue-Maß. Das Maß \mathbb{Q} wird die *Verteilung der typischen Zelle* genannt und es gilt für jede messbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}$ die Campbell-Formel

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(x,Z) \in \mathfrak{M}'} f(x, Z) \right] = \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}} f(x, Z) \mathbb{Q}(dZ) dx.$$

4.2.1 Lemma

Ein stationäres zufälliges Mosaik \mathfrak{M} ist genau dann skalierungsmischend, wenn für je zwei disjunkte Quader $Q := [a, b]$ und $Q' := [a', b']$ mit $a, a', b, b' \in \mathbb{R}^d$ zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, sodass für $t > 0$ groß genug, für alle $f : \mathbf{M} \rightarrow [0, 1]$ messbar und determiniert von tQ sowie $g : \mathbf{M} \rightarrow [0, 1]$ messbar und determiniert von tQ'

$$|\mathbb{E}[f(\mathfrak{M})g(\mathfrak{M})] - \mathbb{E}[f(\mathfrak{M})]\mathbb{E}[g(\mathfrak{M})]| \leq c_1 t^{-c_2}$$

gilt.

Besitzt außerdem der Durchmesser der typischen Zelle ein endliches $d + \varepsilon$ Moment, d.h. existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$\int_{\mathcal{K}} \text{diam}(Z)^{d+\varepsilon} \mathbb{Q}(dZ) < \infty$$

gilt, so gibt es ein Konstante c_3 , sodass für alle $p \in [0, 1]$ und Ereignisse $E, E' \in \mathfrak{F}(\mathbf{M}_F)$ die von tQ bzw. tQ' determiniert sind

$$|\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E \cap E'] - \mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E]\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E']| \leq c_1 t^{-c_2} + c_3 t^{-\varepsilon}$$

gilt.

Beweis: Die Rückrichtung der ersten Behauptung ist trivial, wenn wir $f := \mathbb{1}_E$ und $g := \mathbb{1}_{E'}$ setzen. Für die Hinrichtung seien $n, m \in \mathbb{N}$, $a_i \in [0, \frac{1}{n}]$, $b_j \in [0, \frac{1}{m}]$, $A_i \in \mathcal{F}$ determiniert von tQ , $B_j \in \mathcal{F}$ determiniert von tQ' mit $i \in [n]$ und $j \in [m]$. Für einfache Funktionen

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}, \quad g = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}
 & |\mathbb{E}[f(\mathfrak{M})g(\mathfrak{M})] - \mathbb{E}[f(\mathfrak{M})]\mathbb{E}[g(\mathfrak{M})]| \\
 & \leq \left| \sum_{i,j} a_i b_j (\mathbb{P}[\mathfrak{M} \in A_i \cap B_j] - \mathbb{P}[\mathfrak{M} \in A_i]\mathbb{P}[\mathfrak{M} \in B_j]) \right| \\
 & \leq c_1 t^{-c_2} \sum_{i,j} a_i b_j \\
 & \leq c_1 t^{-c_2}.
 \end{aligned}$$

Durch Approximation können wir dieses Resultat sofort auf messbare $[0, 1]$ -wertige Funktionen f und g ausdehnen, die von tQ bzw. tQ' determiniert sind. Zum Beweis der zweiten Aussage, sehen wir ein, dass die Funktion $f : \mathbf{M} \rightarrow [0, 1] : \mathfrak{m} \mapsto \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E]$ von tQ determiniert ist, da E von tQ determiniert ist. Nach (3.1) gilt für f

$$\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E] = \mathbb{E}[f(\mathfrak{M})].$$

Definieren wir $f'(\mathfrak{m}) := \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E']$, so gilt

$$\begin{aligned}
 & |\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E \cap E'] - \mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E]\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E']| \\
 & \leq |\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E \cap E'] - \mathbb{E}[f(\mathfrak{M})f'(\mathfrak{M})]| + c_1 t^{-c_2}.
 \end{aligned}$$

Um dies weiter abschätzen zu können, machen wir uns klar, dass nach dem Blockungslemma

$$\mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E]\mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E'] = \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E \cap E']$$

gilt, wenn keine Zelle in \mathfrak{m} sowohl tQ als auch tQ' schneidet. Ist A_t die Menge der Mosaik in denen keine Zelle von \mathfrak{m} sowohl tQ als auch tQ' schneidet, so gilt

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}[\mathfrak{M}_F \in E \cap E'] \\
 & = \int_{\mathbf{M}} \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E \cap E'] \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}(d\mathfrak{m}) \\
 & = \int_{\mathbf{M}} \mathbf{1}_{A_t}(\mathfrak{m}) \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E] \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E'] \\
 & \quad + \mathbf{1}_{A_t^c}(\mathfrak{m}) \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E \cap E'] \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}(d\mathfrak{m})
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[f(\mathfrak{M})f'(\mathfrak{M})] \\
 & = \int_{\mathbf{M}} \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E] \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E'] \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}(d\mathfrak{m}) \\
 & = \int_{\mathbf{M}} \mathbf{1}_{A_t}(\mathfrak{m}) \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E] \mathbb{P}_{p,\mathfrak{m}}[(\mathfrak{m}, F) \in E'] + \mathbf{1}_{A_t^c}(\mathfrak{m}) f(\mathfrak{m}) f'(\mathfrak{m}) \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}(d\mathfrak{m}).
 \end{aligned}$$

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

Daher ist

$$|\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E \cap E'] - \mathbb{E}[f(\mathfrak{M})f'(\mathfrak{M})]| \leq \mathbb{P}[\mathfrak{M} \in A_t^c],$$

was wir leicht mit Hilfe der Momentenbedingung an den Durchmesser der typischen Zelle abschätzen können.

Dazu sei r so groß, dass $Q, Q' \subset B_r$ gilt. Weiter sei $\delta > 0$ so klein, dass

$$\delta r < \inf\{\|x - x'\|_2 \mid x \in Q, x' \in Q'\}$$

gilt. Wird weder tQ noch tQ' von einer Zelle mit Durchmesser größer als δr geschnitten, so kann auch keine Zelle beide Quader gleichzeitig schneiden, daher gilt

$$\mathbb{P}[\mathfrak{M} \in A_t^c] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{(x,Z) \in \mathfrak{M}'} \mathbf{1}\{(Z+x) \cap B_{tr} \neq \emptyset, \text{diam}(Z) > t\delta r\} \right].$$

Wegen der Campbell-Formel ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\mathfrak{M} \in A_t^c] &\leq \gamma \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{1}\{(Z+x) \cap B_{tr} \neq \emptyset, \text{diam}(Z) > t\delta r\} \mathbb{Q}(dZ) dx \\ &\leq \gamma \int_{\mathbb{B}_{tr+t\delta r}} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{1}\{\text{diam}(Z) > t\delta r\} \mathbb{Q}(dZ) dx \\ &\leq \gamma \kappa_d (rt(1+\delta))^d \int_{\mathcal{K}} \mathbf{1}\{\text{diam}(Z) > t\delta r\} \mathbb{Q}(dZ). \end{aligned}$$

Es bleibt die Markov-Ungleichung mit der Funktion $x \mapsto x^{d+\varepsilon}$ anzuwenden um

$$\mathbb{P}[\mathfrak{M} \in A_t^c] \leq \gamma \kappa_d (rt(1+\delta))^d (t\delta r)^{-d-\varepsilon} \int_{\mathcal{K}} \text{diam}(Z)^{d+\varepsilon} \mathbb{Q}(dZ) = c_3 t^{-\varepsilon}$$

zu erhalten. □

Lemma 4.2.1 zeigt, dass unter einer schwachen Momentenbedingung das gefärbte zufällige Mosaik \mathfrak{M}_F skalierungsmischend ist, wenn \mathfrak{M} skalierungsmischend ist. Dabei sind die Konstanten unabhängig von p .

4.2.2 Theorem

Ist \mathfrak{M}_F ein stationäres skalierungsmischendes zufälliges Mosaik auf \mathbb{R}^d mit $d \geq 2$, so gilt

$$p_c(\mathfrak{M}) \in (0, 1).$$

Beweis: Wir beginnen mit dem Beweis von $p_c(\mathfrak{M}) < 1$ und verallgemeinern eine Idee, die auch im diskreten Fall genutzt wird, um aus hohen Überquerungswahrscheinlichkeiten von Rechtecken auf die Existenz eines unendlichen

4.2. Skalierungsmischende Mosaik

Clusters zu schließen (siehe [BR06b, zweiter Beweis von Theorem 10]). Es sei

$$\mathfrak{M}_F|_{\mathbb{R}^2} := \{(Z \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\}^{d-2}, f) \mid (Z, f) \in \mathfrak{M}_F, Z \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\}^{d-2} \neq \emptyset\}$$

das zufällige gefärbte Mosaik, das durch Schnitt von \mathfrak{M}_F mit einer 2-dimensionalen Ebene entsteht. Dass $\mathfrak{M}_F|_{\mathbb{R}^2}$ wieder ein zufällig gefärbtes zufälliges Mosaik ist folgt sofort aus der Stationarität von \mathfrak{M} . Wenn wir zeigen können, dass bereits in diesem Mosaik für ein $p < 1$ ein unendlicher Cluster existiert, so folgt $p_c(\mathfrak{M}) < 1$. Nach der Definition eines skalierungsmischenden zufälligen Mosaiks muss auch $\mathfrak{M}|_{\mathbb{R}^2}$ skalierungsmischend sein, also beschränken wir uns im Folgenden auf die Dimension $d = 2$.

Wir schreiben im Folgenden $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^d$ für den Quader $\times_{i \in [d]} [a_i, b_i]$. Sei nun für $a, b \in \mathbb{R}^2$, $H(a, b) \in \mathfrak{F}(\mathfrak{M}_F)$ das Ereignis „Es gibt einen schwarzen Pfad in $[a, b]$, der $\{a_1\} \times [a_2, b_2]$ mit $\{b_1\} \times [a_2, b_2]$ verbindet.“. Wir sagen auch, $[a, b]$ besitzt eine horizontale schwarze Querung, wenn $H(a, b)$ eintritt. Analog definieren wir das Ereignis $V(a, b)$ als das Vorhandensein einer vertikalen schwarzen Querung in $[a, b]$. Wir setzen $Q_1 := [0, 9] \times [0, 1]$, $Q'_1 := [0, 9] \times [2, 3]$, $Q_2 := [0, 1] \times [0, 9]$, $Q'_2 := [2, 3] \times [0, 9]$ und erhalten ein $t_0 \in \mathbb{R}$, $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$, sodass für alle $t \geq t_0$ und alle A_i bzw. A'_i , die von tQ_i bzw. tQ'_i , $i \in [2]$ determiniert sind,

$$|\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in A_i \cap A'_i] - \mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in A_i] \mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in A'_i]| \leq c_1 t^{-c_2}, \quad p \in (0, 1)$$

gilt.

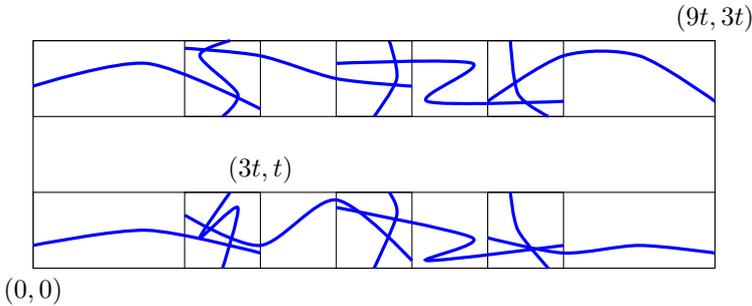


Abbildung 4.4.: Horizontale und vertikale Querungen von kleineren Rechtecken implizieren die Querung des großen Rechtecks. (vgl. Gleichung (4.5))

Dies nutzen wir, um verschiedene Querungswahrscheinlichkeiten in Beziehung

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

zu setzen. Ist $t \geq t_0$, so gilt wegen der Stationarität von \mathfrak{M} (vgl. Abb. 4.4)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_p \left[H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9t \\ 3t \end{pmatrix} \right)^c \right] \\
 & \leq \mathbb{P}_p \left[H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9t \\ t \end{pmatrix} \right)^c \cap H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9t \\ 3t \end{pmatrix} \right)^c \right] \\
 & \leq \mathbb{P}_p \left[H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9t \\ t \end{pmatrix} \right)^c \right]^2 + c_1 t^{-c_2} \\
 & \leq (4\mathbb{P}_p \left[H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} \right)^c \right] + 3\mathbb{P}_p \left[V \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \right)^c \right])^2 + c_1 t^{-c_2} \\
 & \leq (7 \max \{ \mathbb{P}_p \left[H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} \right)^c \right], \mathbb{P}_p \left[V \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 3t \end{pmatrix} \right)^c \right] \})^2 + c_1 t^{-c_2}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die selbe Beziehung erhalten wir für $V \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9t \\ 3t \end{pmatrix} \right)$, was für $t_1 \geq t_0$ zu

$$f_{n+1} \leq 49f_n^2 + c_1(3^n t_1)^{-c_2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

mit

$$f_n := \max \left\{ \mathbb{P}_p \left[H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^{n+1} t_1 \\ 3^n t_1 \end{pmatrix} \right)^c \right], \mathbb{P}_p \left[V \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^n t_1 \\ 3^{n+1} t_1 \end{pmatrix} \right)^c \right] \right\}$$

führt. Wir werden nun zeigen, dass für p und t_1 groß genug $f_n \leq 3^{-c_2 n}$ gilt. Wählen wir t_1 so groß, dass $c_1 t_1^{-c_2} < (4 \cdot 49 \cdot 3^{c_2})^{-1}$ gilt. Ein Rechteck wird in jedem Fall gequert, wenn alle Zellen, die es schneiden, schwarz sind. Damit ist klar, dass es ein $p < 1$ gibt, sodass $f_1 \leq (2 \cdot 49 \cdot 3^{c_2})^{-1}$ gilt. Dann gilt per Induktion $f_n \leq (2 \cdot 49 \cdot 3^{c_2})^{-1}$, denn

$$f_{n+1} \leq \frac{49}{4 \cdot 49^2} 3^{-2c_2} + 3^{-c_2 n} \frac{1}{4 \cdot 49} 3^{-c_2} \leq \frac{1}{2 \cdot 49} 3^{-c_2}.$$

Weiterhin gilt per Induktion $f_n \leq 3^{-c_2 n}$, denn

$$f_{n+1} \leq 49 \cdot 3^{-c_2 n} \frac{1}{2 \cdot 49} 3^{-c_2} + 3^{-c_2 n} \frac{1}{4 \cdot 49} 3^{-c_2} \leq 3^{-c_2(n+1)}.$$

Mit Hilfe des Borel-Cantelli Lemmas können wir schließen, dass von der Menge von Ereignissen

$$\left\{ H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^{2n+1} t_1 \\ 3^{2n} t_1 \end{pmatrix} \right), V \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^{2n+1} t_1 \\ 3^{2n+2} t_1 \end{pmatrix} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

fast sicher nur endlich viele nicht eintreten. Dies impliziert die Existenz eines unendlichen schwarzen Clusters, da sich die Pfade von $H \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^{2n+1} t_1 \\ 3^{2n} t_1 \end{pmatrix} \right)$ und $V \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3^{2n+2} t_1 \\ 3^{2n+1} t_1 \end{pmatrix} \right)$ kreuzen müssen (vgl. Abbildung 4.5).

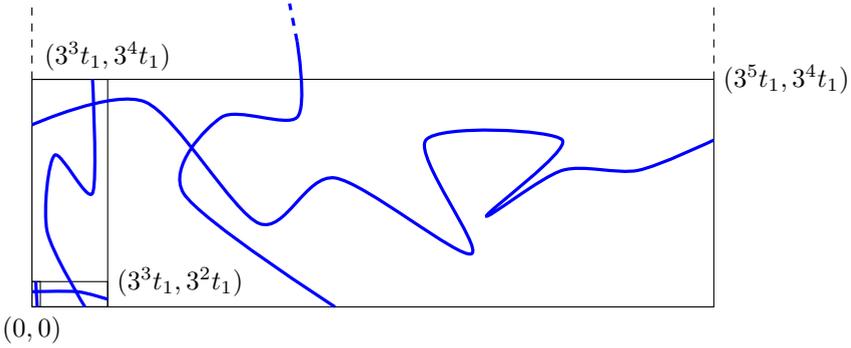


Abbildung 4.5.: Ein unendlicher Cluster entsteht aus Querungen von Rechtecken

Wenden wir uns der Behauptung $p_c(\mathfrak{M}) > 0$ zu. Die Dimension $d \geq 2$ sei jetzt wieder beliebig. Die Argumentation in diesem Fall bleibt gleich, aber die Geometrie wird etwas komplizierter (der zweidimensionale Fall ist in Abbildung 4.6 skizziert). Wir betrachten Quader $S(i, t) := [0, 3t]^{i-1} \times [0, t] \times [0, 3t]^{d-i}$ mit $i \in [d], t > 0$ und definieren das Ereignis $A(S(i, t)) :=$ „Es gibt in $S(i, t)$ einen schwarzen Pfad von $[0, 3t]^{i-1} \times \{0\} \times [0, 3t]^{d-i}$ nach $[0, 3t]^{i-1} \times \{t\} \times [0, 3t]^{d-i}$ “. Das heißt, wenn $A(S(i, t))$ eintritt wird $S(i, t)$ in kurzer Richtung gequert. Startet ein schwarzer Pfad $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ im Würfel $[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]^d$ und verlässt den Würfel $[-\frac{3t}{2}, \frac{3t}{2}]^d$, so sei $x_a := \min\{x \in [0, 1] \mid \|\gamma(x)\|_\infty = \frac{3t}{2}\}$ der erste Punkt, an dem γ den Würfel $[-\frac{3t}{2}, \frac{3t}{2}]^d$ verlässt. Der Punkt x_a liegt in mindestens einem der Quader $\{S(i, t) + \frac{t}{2}\mathbf{e}_i + \sum_{j \in [d] \setminus \{i\}} \frac{3t}{2}\mathbf{e}_j \mid i \in [d]\} \cup \{S(i, t) - \sum_{j \in [d]} \frac{3t}{2}\mathbf{e}_j \mid i \in [d]\}$. Wir nennen diesen Quader S_γ . Ist $x_i := \min\{x < x_a \mid \forall y \in [x, x_a] : \gamma(y) \in S_\gamma\}$, so wird S_γ von $\gamma|_{[x_i, x_a]}$ in kurzer Richtung gequert.

Wir wollen jetzt, wie im ersten Teil des Beweises, rekursiv eine Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit von $A(S(i, t))$ konstruieren. Wir betrachten $S(i, 6t)$ und überdecken die beiden Seitenflächen $[0, 3t]^{i-1} \times \{0\} \times [0, 3t]^{d-i}$ und $[0, 3t]^{i-1} \times \{t\} \times [0, 3t]^{d-i}$ mit endlich vielen Würfeln der Seitenlänge t , die alle in $S(i, 6t)$ liegen und deren Innere sich nicht schneiden. Das Eintreten von $A(S(i, t))$ impliziert, dass es für jede der beiden Seitenflächen wenigstens einen Würfel in der Überdeckung dieser Seitenfläche gibt, in dem ein schwarzer Pfad startet, der sich weiter als t von diesem Würfel entfernt. Insbesondere wird also nach obiger Argumentation jeweils einer der anliegenden Quader dieses Würfels in kurzer Richtung gequert.

Mit den selben Rechnungen wie im ersten Teil des Beweises erhalten wir Konstanten $c_1, c_2, c_3, t_0 \in (0, \infty)$, sodass für alle $t_1 \geq t_0$

$$\max_{i \in [d]} \mathbb{P}_p[A(S(i, 6t_1))] \leq c_3 \max_{i \in [d]} \mathbb{P}_p[A(S(i, t_1))]^2 + c_1 (6^n t_1)^{-c_2}$$

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

gilt. Ein Quader wird nicht von einem schwarzen Pfad gequert, wenn alle Zellen, die ihn schneiden, weiß sind. Wir können also wie im ersten Teil des Beweises folgern, dass es ein $t_1 \in \mathbb{R}$ und ein $p > 0$ gibt, sodass

$$\max_{i \in [d]} \mathbb{P}_p[A(S(i, 6^n t_1))] \leq 6^{-c_2 n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt.

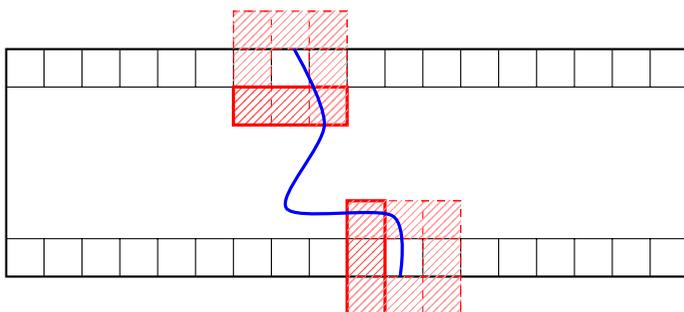


Abbildung 4.6.: Die blaue Querung des großen Rechtecks impliziert, dass ein Quadrat an der Oberseite und eines an der Unterseite „verlassen“ wird. Daher gibt es mindestens zwei Querungen von kleinen Rechtecken (rot markiert).

Wir schließen, dass für jeden der Würfel mit Seitenlänge $6^n t$ die wir zum Überdecken der Seitenflächen verwendet haben, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Pfad in diesem Würfel startet und den darum zentrierten Würfel der Seitenlänge $3 \cdot 6^n t$ verlässt, kleiner als $2d6^{-c_2 n}$ ist. Damit liefert das Borel-Cantelli Lemma, dass der Ursprung fast sicher in einem endlichen Cluster liegt. \square

4.2.3 Bemerkung

Es ist leicht nachzurechnen, dass für ein $p > 0$ mit $\max_{i \in [d]} \mathbb{P}_p[A(S(i, 6^n t_1))] \leq 6^{-c_2 n}$, $n \in \mathbb{N}$, das Clustervolumen einen polynomialen Tail hat.

Der Beweis liefert auch für andere Modelle der stetigen oder diskreten Perkolation eine Blaupause. Es ist lediglich sicher zu stellen, dass die Mischungsbedingung erfüllt ist und dass die Modellparameter sich derart wählen lassen, dass Querungen hohe Wahrscheinlichkeit besitzen.

Wir sehen im Beweis, dass es genügen würde die Mischungsbedingung für bestimmte Querungsereignisse nachzuweisen. Diese hängen jedoch im Allgemeinen auf so komplizierte Art und Weise vom Mosaik ab, dass es sich nicht lohnen würde, dies einzeln darzustellen. Die Einführung des skalierenden Mischens erscheint konzeptionell sinnvoller.

4.3. Planare Graphen mit eindeutigem unendlichem Cluster

Die Situation in 2 Dimensionen unterscheidet sich bei zufälligen Mosaiken, wie auch im Diskreten, stark von der Situation in höheren Dimensionen. Dies gibt uns die Möglichkeit, die bisherigen Ergebnisse für zufällige Mosaiken in zwei Dimensionen noch signifikant zu verbessern.

Der Graph eines zufälligen Mosaiks auf \mathbb{R}^2 ist ein planarer Graph. Wir betrachten daher jetzt den Fall eines unendlichen planaren Graphen. Für das Quadratgitter wurde bereits von Harris [Har60] gezeigt, dass sich im Fall $p = 1/2$ ein unendlicher weißer und ein unendlicher schwarzer Cluster gegenseitig so „im Weg stehen“ würden, dass sie nicht gleichzeitig existieren können. Dieser Beweis wurde in [Gri99, Lemma 11.12] wesentlich vereinfacht und ist seither unter dem Namen „Argument von Zhang“ bekannt. Er setzt lediglich Gittersymmetrien, die Eindeutigkeit des unendlichen Clusters und Planarität voraus und zeigt sogar die stärkere Aussage $p_c + p_c^* \geq 1$, wobei p_c^* die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit des sogenannten *dualen Graphen* ist. In [BR08] wurde dann gezeigt, dass die Anzahl der notwendigen Symmetrien auf Spiegelsymmetrie reduziert werden kann. Wir werden dieses Argument derart modifizieren, dass wir auf Symmetrien vollständig verzichten können. Dafür müssen wir uns allerdings wieder auf $p = 1/2$ beschränken. Für die Anwendung auf zufällige Mosaiken ist dies oft unproblematisch, da in vielen 2-dimensionalen zufälligen Mosaiken \mathfrak{M} fast sicher je höchstens drei Zellen in einem Punkt zusammentreffen und damit $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}} = \mathcal{G}_{\mathfrak{M}}^*$ gilt.

Wir nehmen im Folgenden stets an, dass eine Einbettung des planaren Graphen in die Ebene vorliegt, in der sämtliche Kanten stückweise linear sind und sich nicht schneiden. Die beiden Knoten, welche eine Kante verbindet, gehören dabei nicht zur Kante selbst. Wir fordern außerdem, dass die Einbettung lokal endlich ist, dass also jedes Kompaktum in \mathbb{R}^2 nur von endlich vielen Knoten und Kanten geschnitten wird. Wir werden den Graphen stets mit seiner konkreten Einbettung identifizieren und keine gesonderte Notation dafür einführen.

4.3.1 Theorem

Sei $\mathcal{G} := (V, E)$ ein unendlicher zusammenhängender planarer Graph. Genau dann, wenn es für $p = 1/2$ nicht mehr als einen unendlichen schwarzen Cluster gibt, ist $\theta_{1/2}(v) = 0$ für jedes $v \in V$. Insbesondere gilt in diesem Fall

$$p_c \geq \frac{1}{2}.$$

Die Frage nach den Graphen, für die sich dieses Theorem anwenden lässt,

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

drängt sich sofort auf. Wir werden darauf in Theorem 5.1.2 und Theorem 5.2.2 eingehen und nehmen deren Anwendung hier schon vorweg.

4.3.2 Theorem

Ist \mathfrak{M} ein ergodisches zufälliges Mosaik mit $\mathbb{E}[|\{Z \in \mathfrak{M} \mid Z \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\}|] < \infty$, so gilt $\theta_{\frac{1}{2}}(\mathfrak{M}) = 0$ und insbesondere

$$p_c(\mathfrak{M}) \geq \frac{1}{2}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus den Theoremen 4.3.1 und 5.1.2. \square

Es ist allerdings zu betonen, dass die Theoreme 4.3.1 und 5.2.2 auch die bekanntesten Resultate für deterministische Graphen signifikant erweitern, da keinerlei Transitivität, Quasitransitivität oder Symmetrie gefordert wird.

Der Beweis von Theorem 4.3.1 beinhaltet topologische und graphentheoretische Argumente und Grundlagen, die den Büchern von Diestel [Die10] und Mohar, Thomassen [MT01] entnommen sind. Der notwendige Hintergrund zum Jordanschen Kurvensatz findet sich in [Hal07]. Um den probabilistischen Teil des Beweises klar zu strukturieren, wollen wir zwei topologische Lemmata vorab beweisen.

Wir führen dazu folgende Bezeichnungen ein. Eine *Kurve* φ ist eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach \mathbb{R}^d . Eine Kurve φ heißt *geschlossen*, falls $\varphi(0) = \varphi(1)$. Eine Kurve heißt *Jordan-Kurve*, falls φ injektiv ist. Die Ausnahme ist die geschlossene Jordan-Kurve für die $\varphi(0) = \varphi(1)$ gefordert sei. Eine Kurve heißt *polygonal*, wenn die Kurve stückweise linear ist. Wir werden Kurven stets mit ihrem Bild identifizieren. Der Jordan'sche Kurvensatz besagt, dass für eine geschlossene Jordan-Kurve $\varphi \subset \mathbb{R}^2$ die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi$ in zwei Gebiete (ein Gebiet sei eine zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^2) zerfällt, von denen genau eines unbeschränkt ist. Eine wichtige Ergänzung des Satzes besagt, dass ein Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ genau dann im beschränkten Gebiet von $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi$ liegt, wenn eine Jordan-Kurve, die in x startet und nach unendlich läuft, φ genau $2k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$ mal kreuzt (wir werden den Satz lediglich für polygonale Kurven verwenden und daher nicht gesondert definieren, was „kreuzt“ bedeutet). Wir nennen das unbeschränkte Gebiet *Äußeres* und das beschränkte Gebiet *Inneres von φ* . Ein *Artikulationspunkt* (engl. cut vertex) eines zusammenhängenden Graphen ist ein Knoten dessen Löschung dafür sorgt, dass der Graph nicht mehr zusammenhängend ist.

4.3.3 Lemma

Ist $\mathcal{G} := (V, E)$ ein unendlicher zusammenhängender planarer Graph mit Wurzel $\mathbf{0}$, so gibt es für jedes natürliche $n \geq 2$ eine polygonale geschlossene Jordan-Kurve ϕ mit folgenden Eigenschaften:

1. Keine Kante $e \in E$ schneidet ϕ .

4.3. Planare Graphen mit eindeutigem unendlichem Cluster

2. Jeder Knoten $v \in B_n(\mathbf{0}; \mathcal{G})$ liegt entweder auf ϕ oder im Inneren von ϕ .
3. Ist R_n die Menge der Knoten $v \in B_n(\mathbf{0}; \mathcal{G})$, in denen ein unendlicher Pfad starten kann, der $B_n(\mathbf{0}; \mathcal{G})$ nur in v schneidet, so gilt $R_n \subset \phi$.

Die erste Eigenschaft bedeutet, dass ϕ den Graphen nur in seinen Knoten schneidet. Die zweite Eigenschaft meint heuristisch, dass ϕ um $B_n(\mathbf{0})$ herum läuft. In der dritten Eigenschaft sind Pfade gemeint, die in $B_n(\mathbf{0})$ starten und dann nie wieder dorthin zurückkehren. Die Definition von R_n scheint auf den ersten Blick unnötig kompliziert. Es finden sich allerdings leicht Beispiele in denen nicht stattdessen einfach $\partial^- B_n(\mathbf{0})$ genutzt werden kann.

Beweis von Lemma 4.3.3: Wir betrachten zunächst einen endlichen zusammenhängenden planaren Graphen $\mathcal{G}_f := (V_f, E_f)$ und wählen $\varepsilon > 0$ so klein, dass in der Einbettung von \mathcal{G}_f in die Ebene im ε -Ball um jeden Knoten $v \in V_f$ nur das erste Geradenstück jeder Kante die von v ausgeht liegt. Insbesondere dürfen keine anderen Knoten oder Teile von Kanten in diesem Ball liegen.

Ein *geschlossener Weg* (engl. closed walk) ist ein Zyklus, in dem das mehrfache Vorkommen von Knoten zugelassen ist. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus (V_f \cup E_f)$ nennen wir Flächen von \mathcal{G}_f . Es ist bekannt, dass ein endlicher planarer Graph endlich viele Flächen hat, von denen genau eine unbeschränkt ist. Der Rand jeder Fläche F induziert auf natürliche Weise einen geschlossenen Weg $L := (l_1, \dots, l_m)$ mit der Eigenschaft, dass zwei aufeinanderfolgende Kanten $e_i := \{l_i, l_{i+1}\}$ und $e_{i+1} = \{l_{i+1}, l_{i+2}\}$, $i \in [m-2]$ derart auf l_{i+1} treffen, dass e_i im Uhrzeigersinn direkt nach e_{i+1} kommt. Das heißt, das Kreissegment mit Radius ε , das von e_{i+1} und e_i dabei eingeschlossen wird, liegt in F . Der Weg L ist dabei bis auf die Wahl des Startpunktes und der Anzahl der Durchläufe eindeutig. Wir nehmen im Folgenden an, dass L nur einmal durchlaufen wird.

Wir zeigen zunächst, dass ein Knoten, der in L mehrfach vorkommt, ein Artikulationspunkt von \mathcal{G}_n ist. Nehmen wir an, der Knoten l_i kommt in L mehrfach vor, so gibt es mindestens zwei Kreissegmente α und β an l_i mit Radius ε , deren Inneres Teilmenge von F ist (vgl. Abb. 4.7 links). Verbinden wir α und β in F durch eine polygonale Jordan-Kurve J' in F derart, dass J' die Kreissegmente α und β nur in deren Rand in den Punkten x_α und x_β schneidet. Setzen wir nun die Gerade von l_i nach x_α , die Kurve J' und die Gerade von x_β nach l_i hintereinander, erhalten wir die geschlossene Jordan-Kurve J .

Betrachten wir nun die zwei Kanten $e := \{l_i, v\}$ und $e' := \{v', l_i\}$, die α einschließen. Der polygonale Pfad, der in v startet und über e , l_i und e' führend in v' endet, kreuzt J einmal. Dadurch ist klar, dass v und v' nicht in den gleichen Gebieten von $\mathbb{R}^2 \setminus J$ liegen können (vgl. Abb. 4.7). Daraus folgt auch, dass nach dem Entfernen von l_i die Knoten v und v' in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von \mathcal{G}_f liegen, da J nur in l_i von \mathcal{G}_f geschnitten wird. Damit ist

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

zeigt, dass ein Knoten, der in L mehrfach vorkommt, ein Artikulationspunkt ist.

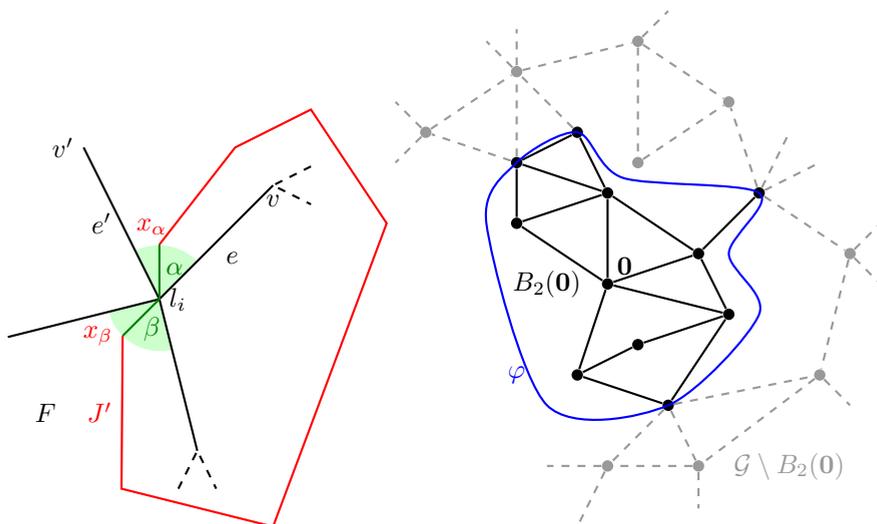


Abbildung 4.7.: Im linken Bild ist skizziert, dass ein Knoten, der in L mehrfach vorkommt, ein Artikulationspunkt ist. Im rechten Bild haben wir für den Graphen \mathcal{G} und den Radius 2 eine mögliche Kurve φ dargestellt.

Betrachten wir den endlichen Teilgraphen \mathcal{G}_n von \mathcal{G} , der von den Knoten in $B_n(0)$ induziert wird. Der geschlossene Weg L , der von der unbeschränkten Fläche U von \mathcal{G}_n induziert wird, bildet auf natürliche Weise die Grundlage für ϕ . Dazu konstruieren wir sukzessive drei Kurven.

Wir beginnen mit der Kurve $\phi_1(L)$, die wir dadurch erhalten, dass wir L einmal entlang laufen. Die Kanten zwischen den Knoten in L werden also einfach als Kurven interpretiert und aneinander gesetzt. Damit schneidet $\phi_1(L)$ noch einige Kanten und verletzt somit Bedingung 1.

Wir modifizieren daher $\phi_1(L)$ zu $\phi_2(L)$, indem wir jede Kurve zwischen zwei Knoten $l_i, l_{i+1} \in L$ durch eine Kurve ersetzen, die in U nur knapp neben der ursprünglichen Kurve liegt und keine Kante von \mathcal{G} schneidet. Dies ist wegen der lokalen Endlichkeit der Einbettung möglich. Dies ist sogar so möglich, dass die Kurven paarweise disjunkt sind. Die Kurve $\phi_2(L)$ erfüllt jetzt bereits die Eigenschaften 1, 2 und 3, da R_n im Rand von U enthalten sein muss. Leider kann es passieren, dass Knoten in L mehrfach vorkommen. In diesem Fall ist $\phi_2(L)$ keine Jordankurve.

Wir modifizieren also $\phi_2(L)$ zu $\phi_3(L)$ indem wir Knoten die mehrfach vorkommen wie folgt auslassen. Möchten wir den Punkt l_i auslassen, so sei γ_1 das

4.3. Planare Graphen mit eindeutigem unendlichem Cluster

Kurvenstück in $\phi_2(L)$, welches in l_i endet und γ_2 das Kurvenstück in $\phi_2(L)$, welches daran anschließend in l_i startet. Wir schneiden jetzt ein genügend kurzes Stück am Ende von γ_1 und am Anfang von γ_2 ab und verbinden diese direkt durch eine Kurve, die nicht durch l_i läuft. Auf diese Weise erhalten wir $\phi_3(L)$. Die lokale Endlichkeit der Einbettung sichert uns, dass wir die Modifikation so vornehmen können, dass Eigenschaften 1 und 2 erhalten bleiben. Wir müssen jetzt noch klären, dass auch Eigenschaft 3 erhalten bleibt.

Sei v ein Artikulationspunkt von \mathcal{G}_n und $S_1, \dots, S_k, k \geq 2$ seien die Zusammenhangskomponenten, in die \mathcal{G}_n zerfällt, wenn v entfernt wird. Ist $i \in [k]$ derart, dass $\mathbf{0} \notin S_i$, so gilt nach Definition der Graphennorm $d_{\mathcal{G}_n}(v, \mathbf{0}) < d_{\mathcal{G}_n}(w, \mathbf{0})$ für alle $w \in S_i$. Das heißt, dass Knoten der Menge $\tilde{R}_n := \{v \in B_n(\mathbf{0}) \mid d_{\mathcal{G}_n}(v, \mathbf{0}) = n\}$ keine Artikulationspunkte von \mathcal{G}_n sein können und daher im Weg L der unbeschränkten Fläche U höchstens einmal vorkommen. Da $R_n \subset \tilde{R}_n$ gilt, bleibt also auch Eigenschaft 3 in $\phi_3(L)$ erhalten und wir können $\phi = \phi_3(L)$ setzen. \square

Eine stetige injektive Abbildung $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} \|\gamma(x)\|_2 = \infty$ bezeichnen wir als *einseitig unendliche Jordan-Kurve*. Wir schreiben ebenfalls γ für deren Bild.

4.3.4 Lemma

Sei ϕ eine geschlossene polygonale Jordan-Kurve mit Punkten $v_1, \dots, v_4 \in \phi$, die in dieser Reihenfolge auf ϕ liegen. Seien weiter $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ vier einseitig unendliche polygonale Jordan-Kurven und ρ_{13}, ρ_{24} zwei polygonale Jordan-Kurven mit den Eigenschaften:

1. $(\gamma_1 \cup \gamma_3) \cap (\gamma_2 \cup \gamma_4) = \emptyset$,
2. $\gamma_i \cap \phi = \{\gamma_i(0)\} = \{v_i\}$ für $i \in [4]$,
3. $\rho_{13}(0) \in \gamma_1, \rho_{13}(1) \in \gamma_3$,
4. $\rho_{24}(0) \in \gamma_2, \rho_{24}(1) \in \gamma_4$.

Dann gilt

$$(\gamma_1 \cup \rho_{13} \cup \gamma_3) \cap (\gamma_2 \cup \rho_{24} \cup \gamma_4) \neq \emptyset.$$

Beweis: Wir wählen einen Radius $r > 0$ so groß, dass $\rho_{13}, \rho_{24}, \phi \subset B_{r-1}(0; \mathbb{R}^2)$. Außerdem sei $w_i := \gamma(x_i)$ mit $x_i := \min\{x \in [0, \infty) \mid \|\gamma_i(x)\|_2 = r\}$, $i \in [4]$ der erste Schnittpunkt von γ_i und $B_r(0; \mathbb{R}^2)$. Wir betrachten eine geschlossene Jordan-Kurve J , die wir erhalten, wenn wir von v_1 entlang γ_1 bis w_1 dann im Uhrzeigersinn entlang $\partial B_r(0; \mathbb{R}^2)$ bis w_3 dann entlang γ_3 bis v_3 und dann im Inneren von ϕ bis v_1 gehen. Laufen wir von v_2 entlang ϕ nach v_3 und weiter nach v_4 , so schneiden wir wegen Voraussetzung 2 J genau einmal bei v_3 (vgl. Abb. 4.8). An dieser Stelle kreuzen wir sogar J , da J vor v_3 im Äußeren von ϕ

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

ist und nach v_3 im Inneren von ϕ . Es muss also entweder v_2 im Inneren und v_4 im Äußeren von J liegen oder umgekehrt.

Nehmen wir an v_4 liegt im Äußeren von J . Die einseitig unendliche Jordan-Kurve $\tilde{\gamma}_4$, die in v_4 startet, entlang γ_4 bis w_4 läuft und dann entlang des Strahls $\{tw_4 \mid t \geq 1\}$ in Richtung unendlich läuft, kann J höchstens in w_4 einmal schneiden. Da v_4 im Äußeren von J liegt, kreuzt $\tilde{\gamma}_4$ die Kurve J eine gerade Anzahl oft, also gar nicht. Daher muss auch w_4 im Äußeren von J liegen. Jede Kurve, die auf γ_2 vor w_2 startet und entlang γ_2 , über v_2 , entlang ϕ , über v_3 entlang ϕ , über v_4 , entlang γ_4 , über w_4 und entlang des Strahls $\{tw_4 \mid t \geq 1\}$ in Richtung unendlich läuft, kreuzt J genau einmal in v_3 , daher muss $w_2 \in J$ gelten. Wir schließen, dass in diesem Fall w_1, w_2, w_3 und w_4 in dieser Reihenfolge auf $\partial B_r(0; \mathbb{R}^2)$ liegen. Liegt stattdessen v_2 im Inneren von J , so erhalten wir mit der selben Argumentation, dass w_1, w_4, w_3 und w_2 in dieser Reihenfolge auf $\partial B_r(0; \mathbb{R}^2)$ liegen.

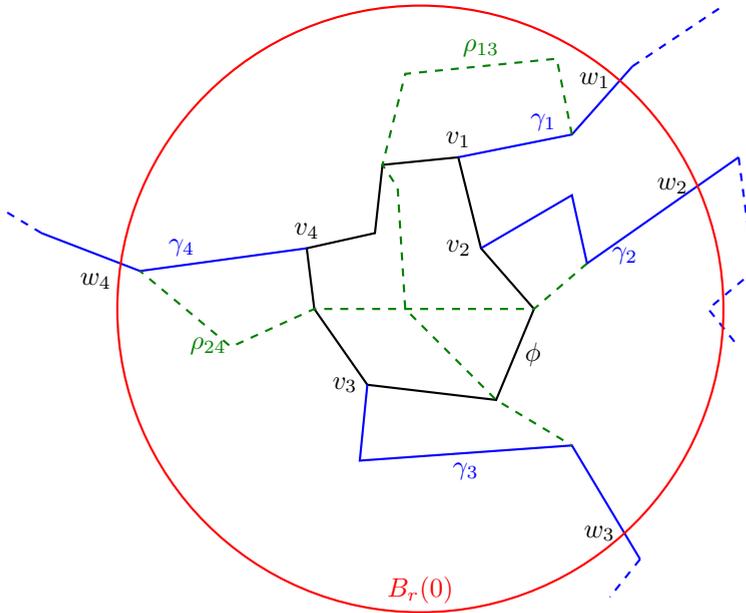


Abbildung 4.8.: Beispiel für Lemma 4.3.4.

Nach Voraussetzung enthalten $\gamma_1 \cup \rho_{13} \cup \gamma_3$ und $\gamma_2 \cup \rho_{24} \cup \gamma_4$ aber polygonale Kurven ρ'_{13} von w_1 nach w_3 beziehungsweise ρ'_{24} von w_2 nach w_4 . Es ist bekannt, dass wegen der alternierenden Reihenfolge in der die w_i auf dem Kreisrand liegen, je zwei Kurven von w_2 nach w_4 bzw. von w_1 nach w_3 sich schneiden müssen. \square

4.3. Planare Graphen mit eindeutigem unendlichem Cluster

Beweis von Theorem 4.3.1: Ist $\theta_{\frac{1}{2}}(v) = 0$ für jedes $v \in V$ so gibt es f.s. keinen unendlichen schwarzen Cluster für $p = 1/2$, was die Rückrichtung zeigt.

Sei also $p = 1/2$, $\varepsilon > 0$ und nehmen wir an, es gibt f.s. genau einen unendlichen schwarzen Cluster C_{∞}^+ . Wegen der Vertauschbarkeit der Farben bei $p = 1/2$ gibt es auch f.s. einen unendlichen weißen Cluster C_{∞}^- . Insbesondere ist $\theta_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0}) > 0$.

Der Abstand von $\mathbf{0}$ zu C_{∞}^+ ist eine f.s. endliche Zufallsvariable. Unter Verwendung der Notation aus Lemma 4.3.3 können wir also feststellen, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\mathbb{P}[R_n \cap C_{\infty}^+ \neq \emptyset] > 1 - \varepsilon$$

gilt. Sei ϕ die Jordan-Kurve, die Lemma 4.3.3 für $B_n(\mathbf{0})$ liefert. Weiter seien (r_1, \dots, r_m) , $m \in \mathbb{N}$ die Knoten in R_n , die in dieser Reihenfolge auf ϕ liegen. Für $U \subset R_n$ betrachten wir nun das absteigende Ereignis $E^+(U) :=$ „Es gibt *keinen* unendlichen schwarzen Pfad, der in U startet und R_n nur einmal schneidet.“ Wir definieren

$$f(U) := \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[E^+(U)]$$

und erhalten folgende Eigenschaften:

- (i) $f(\emptyset) = 1$,
- (ii) $f(\{v\}) \geq \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[X_v = 0] = \frac{1}{2}$ für $v \in R_n$,
- (iii) $f(U \cup W) \geq f(U)f(W)$ für $U, W \subset R_n$ wegen der FKG-Ungleichung,
- (iv) $f(U) \geq f(W)$ für $U \subset W \subset R_n$,
- (v) $f(R_n) \leq \varepsilon$.

Aus (ii), (iii) und (iv) folgt für $U \subset R_n$ und $v \in R_n$

$$f(U) \geq f(U \cup \{v\}) \geq \frac{1}{2}f(U). \quad (4.6)$$

Die Idee ist, R_n in vier aufeinander folgende Teile T_1, \dots, T_4 zu zerlegen, deren f -Werte sich nicht zu stark unterscheiden. Wir teilen R_n zunächst in zwei Abschnitte $T_{12}^{(k)} := (r_1, \dots, r_k)$ und $T_{34}^{(k)} := (r_{k+1}, \dots, r_m)$, wobei $k \in [m]$. Für $k = m$ gilt also $f(T_{12}^{(k)}) = f(R_n) \leq \varepsilon$ und $f(T_{34}^{(k)}) = f(\emptyset) = 1$. Wenn wir k um eins verkleinern, steigt wegen (4.6) $f(T_{12}^{(k)})$ höchstens um den Faktor 2 während $f(T_{34}^{(k)})$ höchstens um den Faktor 2 fällt. Es gibt also ein k derart, dass

$$f(T_{12}^{(k)}) \leq f(T_{34}^{(k)}) \leq 4f(T_{12}^{(k)}) \quad (4.7)$$

und demzufolge auch

$$\begin{aligned} f(T_{12}^{(k)})^2 &\leq f(T_{12}^{(k)})f(T_{34}^{(k)}) \leq f(R_n) \leq \varepsilon \\ f(T_{34}^{(k)})^2 &\leq 4f(T_{12}^{(k)})f(T_{34}^{(k)}) \leq 4f(R_n) \leq 4\varepsilon \end{aligned}$$

4. Existenz eines nicht-trivialen Phasenübergangs

gilt. Auf die selbe Art und Weise teilen wir $T_{12}^{(k)}$ und $T_{34}^{(k)}$ in jeweils zwei Teilstücke T_1, T_2 und T_3, T_4 , sodass

$$f(T_i) = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[E^+(T_i)] = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[E^-(T_i)] \leq 2\sqrt{2}\sqrt[4]{\varepsilon}, \quad i \in [4]$$

gilt. Definieren wir $E^-(U)$ für $U \subset R_n$, indem wir in der Definition von $E^+(U)$ schwarze Pfade durch weiße Pfade ersetzen, so gilt $\mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[E^-(U)] = \mathbb{P}_{\frac{1}{2}}[E^+(U)]$. Wählen wir ε klein genug, so hat also das Ereignis

$$E^+(T_1)^c \cap E^-(T_2)^c \cap E^+(T_3)^c \cap E^-(T_4)^c,$$

dass in T_1 und T_3 zwei schwarze unendliche Pfade γ_1 und γ_3 starten und dass in T_2 und T_4 zwei weiße unendliche Pfade γ_2 und γ_4 starten, die alle R_n und daher auch $B_n(\mathbf{0}; \mathcal{G})$ nur einmal schneiden (jeweils in v_1, \dots, v_4), positive Wahrscheinlichkeit. Der schwarze und der weiße unendliche Cluster sind aber nach Voraussetzung eindeutig. Dass heißt, es muss f.s. einen schwarzen Pfad ρ_{13} geben, der γ_1 mit γ_3 verbindet, und es muss f.s. einen weißen Pfad ρ_{24} geben, der γ_2 mit γ_4 verbindet. Diese Pfade erfüllen nach Konstruktion die Voraussetzungen von Lemma 4.3.4 und daher müssen sich $\gamma_1 \cup \rho_{13} \cup \gamma_3$ und $\gamma_2 \cup \rho_{24} \cup \gamma_4$ schneiden. Da der Graph planar ist, muss der Schnittpunkt ein Knoten sein. Da kein Knoten gleichzeitig schwarz und weiß sein kann, ergibt sich ein Widerspruch. \square

5. Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

Nachdem wir untersucht haben, unter welchen Voraussetzungen nicht-triviale Phasenübergänge sichtbar werden, drängt sich die Frage auf, wie sich die Anzahl der unendlichen Cluster verhält. Im diskreten Fall wurde diese Frage von Aizenman, Kesten und Newman in [AKN87] zum ersten mal umfassend beantwortet. Der Beweis konnte von Gandolfi, Grimmett und Russo in [GGR88] nochmal signifikant vereinfacht werden. Diese vereinfachte Variante wurde vor kurzem von Cerf in [Cer15] auch quantifiziert. Alles in Allem schien die Herangehensweise jedoch zu stark die Unabhängigkeit zu nutzen und so wurde weiter nach einem allgemeineren Argument gesucht bis Burton und Keane in [BK89] der endgültige Durchbruch gelang. Ihr Beweis macht nur sehr schwache Voraussetzungen an die Abhängigkeitsstruktur und wurde seitdem, aufgrund der sehr eleganten und robusten Argumentation, vielfach adaptiert. Wir werden hier beide Beweise einzeln aufgreifen und an den Rahmen der zufälligen Mosaik anpassen. Die Adaption des Beweises von Gandolfi, Grimmett und Russo wird dabei deutlich stärkere Voraussetzungen verlangen als die des Beweises von Burton und Keane. Die Adaption des Beweises von Gandolfi, Grimmett und Russo liefert jedoch als Zwischenergebnis ein Theorem, welches die Eindeutigkeit des unendlichen Clusters für sehr allgemeine deterministische Graphen zeigt und in diesem Sinne zusätzliche Einsichten ermöglicht, die mit der Argumentation von Burton und Keane nicht beweisbar sind. Unsere Ergebnisse im Kapitel über First-Passage-Perkolation werden uns in die Lage versetzen, dieses Theorem auf geeignete zufällige Mosaik anzuwenden und so letztlich die Eindeutigkeit des unendlichen Clusters auf einem zweiten Weg zu zeigen, wenn auch unter stärkeren Voraussetzungen.

5.1. Das Argument von Burton und Keane

Die Adaption des Beweises macht es notwendig das kombinatorische Lemma über die Partitionen einer Menge aus [BK89] leicht zu variieren. Wir schreiben im folgenden Abschnitt Komponenten anstelle von Zusammenhangskomponenten.

5. Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

5.1.1 Lemma

Sei $\mathcal{H} = (V, E)$ ein endlicher Graph, dessen Knoten einen der drei Typen „Tri-Knoten“, „Inf-Knoten“, „Fin-Knoten“ haben und der folgende Bedingungen erfüllt:

1. jede Komponente $K \subset V$ von \mathcal{H} , die einen Tri-Knoten v enthält, zerfällt durch dessen Entfernung in mindestens drei Komponenten K_1, \dots, K_m , $m \geq 3$, von denen jede mindestens einen Inf-Knoten enthält,
2. \mathcal{H} besitzt mindestens einen Tri-Knoten.

Es gilt

$$\#\text{Tri-Knoten in } V + 2 \leq \#\text{Inf-Knoten in } V.$$

Beweis: Wir führen eine Induktion über die Anzahl der Tri-Knoten in V durch. Nehmen wir an, es gibt genau einen Tri-Knoten in V , dann gibt es in dessen Komponente mindestens drei Inf-Knoten, was den Induktionsanfang zeigt.

Wir können daher per Induktion davon ausgehen, dass \mathcal{H} zusammenhängend ist. Sei also $n \in \mathbb{N}$ und nehmen wir an, die Behauptung gilt für alle Graphen mit n oder weniger Tri-Knoten. Enthält V genau $n + 1$ Tri-Knoten, so wählen wir einen davon, den wir mit v bezeichnen. Wir bezeichnen die Komponenten von \mathcal{H} die durch das Entfernen von v entstehen mit K_1, \dots, K_m , $m \geq 3$. Wir behaupten, dass dann für jede der Komponenten \tilde{K}_i , $i \in [m]$

$$\#\text{Tri-Knoten in } K_i + 1 \leq \#\text{Inf-Knoten in } K_i. \quad (5.1)$$

gilt. Um dies zu zeigen, modifizieren wir jedes K_i , $i \in [m]$, das einen Tri-Knoten enthält, derart, dass wir an die Stelle, wo wir v entfernt haben, einen Inf-Knoten setzen, ohne dabei die Verbindung zu den anderen Komponenten wieder herzustellen. Die derart modifizierte Komponente bezeichnen wir mit \tilde{K}_i . Für nicht modifizierte Komponenten sei $\tilde{K}_i := K_i$.

Wir unterscheiden zwei Fälle. Enthält K_i keinen Tri-Knoten, so enthält es wegen Voraussetzung 1 mindestens einen Inf-Knoten und (5.1) gilt.

Enthält K_i mindestens einen Tri-Knoten, so erfüllt \tilde{K}_i die Induktionsvoraussetzung, da \tilde{K}_i bei Entfernung eines weiteren Tri-Knoten immer noch in mindestens drei Komponenten zerfallen muss, von denen diejenige, die ehemals v enthielt, nach der Modifikation garantiert einen Inf-Knoten enthält. Alle anderen blieben unverändert und müssen daher nach Voraussetzung 1 einen Inf-Knoten enthalten. Daher gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \#\text{Tri-Knoten in } K_i + 2 &= \#\text{Tri-Knoten in } \tilde{K}_i + 2 \\ &\leq \#\text{Inf-Knoten in } \tilde{K}_i \\ &\leq \#\text{Inf-Knoten in } K_i + 1 \end{aligned}$$

5.1. Das Argument von Burton und Keane

und damit auch in diesem Fall (5.1). Demnach muss für \mathcal{H}

$$\begin{aligned}
 \#\text{Tri-Knoten in } V &= 1 + \sum_{i \in [m]} \#\text{Tri-Knoten in } K_i \\
 &\leq 1 + \sum_{i \in [m]} (\#\text{Inf-Knoten in } K_i - 1) \\
 &\leq 1 + \#\text{Inf-Knoten in } V - m \\
 &\leq \#\text{Inf-Knoten in } V - 2
 \end{aligned}$$

gelten. □

Das Lemma kann verschärft werden (siehe z.B. [BR06b, S. 121, Lemma 3]), ist jedoch für unsere Zwecke vollkommen ausreichend.

5.1.2 Theorem

Sei \mathfrak{M} ein stationäres Mosaik. Ist $p \in [0, 1]$ und

$$\mathbb{E}[|\{Z \in \mathfrak{M} \mid Z \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\}|] < \infty$$

so gibt es \mathbb{P}_p -f.s. in $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}, F}$ höchstens einen unendlichen schwarzen Cluster.

Beweis: Der Beweis ist, wie bereits erwähnt, eine Adaption von [BK89]. Die Behauptung ist für $p \in \{0, 1\}$ trivial, es sei also im Folgenden $p \in (0, 1)$. Nehmen wir zunächst an, \mathfrak{M} ist ergodisch. Dann ist nach Abschnitt 2.2 auch \mathfrak{M}_F unter \mathbb{P}_p ergodisch. Ist $n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, so definieren wir die Ereignisse

$$E_n := \{(\mathfrak{m}, f) \in \mathbf{M}_F \mid \text{es gibt genau } n \text{ unendliche schwarze Cluster in } \mathcal{G}_{\mathfrak{m}, f}\}.$$

Es gilt $\mathbb{P}_p[\mathfrak{M}_F \in E_n] \in \{0, 1\}$, da alle E_n verschiebungsinvariant sind. Daher tritt genau eines dieser Ereignisse fast sicher ein und alle anderen treten fast sicher nicht ein.

Nehmen wir an, für ein festes $2 \leq n < \infty$ tritt E_n fast sicher ein. In diesem Fall liegt \mathfrak{M} fast sicher in der Menge

$$A := \{\mathfrak{m} \in \mathbf{M} \mid \mathbb{P}_{p, \mathfrak{m}}[\text{in } \mathcal{G}_{\mathfrak{m}, F} \text{ gibt es } n \text{ unendliche schwarze Cluster}] = 1\}.$$

Wir fixieren ein $\mathfrak{m} \in A$ und definieren die Zufallsvariablen $N(i, r)$, $i \in \{0, 1\}$, $r \in \mathbb{N}$ als die Anzahl der unendlichen schwarzen Cluster des Graphen, den wir erhalten, wenn wir in $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}, F}$ allen Knoten in $B_r(\mathbf{0}; \mathcal{G}_{\mathfrak{m}})$ den Wert (bzw. die Farbe) i zuweisen. Da die Anzahl schwarzer unendlicher Cluster in $\mathcal{G}_{\mathfrak{m}, F}$ $\mathbb{P}_{p, \mathfrak{m}}$ -f.s. konstant n ist und mit positiver Wahrscheinlichkeit alle Knoten in $B_r(\mathbf{0}; \mathcal{G}_{\mathfrak{m}})$ den Wert i haben, $i \in \{0, 1\}$, gilt

$$\mathbb{P}_{p, \mathfrak{m}}[N(0, r) = N(1, r) = n] = 1, \quad r \in \mathbb{N}.$$

5. Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

Da $n < \infty$ ist, können die Zufallsvariablen $N(0, r)$ und $N(1, r)$ nur gleich sein, wenn der Ball $B_r(\mathbf{0}; \mathcal{G}_m)$ von höchstens einem unendlichen schwarzen Cluster geschnitten wird. Die Anzahl der unendlichen schwarzen Cluster, die $B_r(\mathbf{0}; \mathcal{G}_m)$ schneiden, konvergiert für $r \rightarrow \infty$ f.s. gegen n , was zum Widerspruch führt.

Es bleibt der Fall auszuschließen, dass E_∞ f.s. eintritt. Nehmen wir an $\mathbb{P}_p[E_\infty] = 1$. Sei $m \in \mathbf{M}$ ein Mosaik und (m, f) eine Färbung von m . Für $x \in \mathbb{R}^d$ war $Z_x(m)$ die Zelle, die x enthält (wobei wir eine beliebige Auswahlregel anwenden, wenn x in mehr als einer Zelle liegt) und wir nennen x einen Trifurkationspunkt von (m, f) mit Parametern (r_1, r_2) , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Alle Knoten in $B_{r_1}(Z_x(m); \mathcal{G}_m)$ sind schwarz.
- Der äußere Rand $\partial^+ B_{r_1}(Z_x(m); \mathcal{G}_m)$ des Balles um $Z_x(m)$ wird von mindestens drei unendlichen schwarzen Clustern geschnitten, wenn wir die Farbe jedes Knoten in $B_{r_1}(Z_x(m); \mathcal{G}_m)$ auf weiß setzen.
- $B_{r_1}(Z_x(m); \mathcal{G}_m) \subset [-r_2, r_2]^d$.

Sei $x \in \mathbb{R}^d$. Da \mathbb{P}_p -f.s. unendlich viele unendliche schwarze Cluster existieren, kann r_1 so groß gewählt werden, dass $B_{r_1}(Z_x; \mathcal{G}_m)$ mit positiver Wahrscheinlichkeit von mindestens drei unendlichen schwarzen Clustern geschnitten wird. Unter \mathbb{P} ist also eine Realisierung m von \mathfrak{M} mit positiver Wahrscheinlichkeit derart, dass unter $\mathbb{P}_{p,m}$ die zufällige Färbung (m, F) mit positiver Wahrscheinlichkeit die zweite Bedingung an einen Trifurkationspunkt erfüllt. Daher kann r_2 so groß gewählt werden, dass unter \mathbb{P}_p der Punkt x mit positiver Wahrscheinlichkeit ein Trifurkationspunkt von \mathfrak{M}_F mit Parametern (r_1, r_2) ist.

Wie benötigen jetzt Lemma 5.1.1, um zu zeigen, dass für jeden Trifurkationspunkt innerhalb einer Menge wenigstens ein schwarzer unendlicher Pfad aus dieser Menge heraus führen muss. Genauer wollen wir Folgendes zeigen.

Wenn mindestens $k \in \mathbb{N}$ Punkte der Menge $D_r := (3r_2\mathbb{Z}^d) \cap [-r, r]^d$, $r > 0$ Trifurkationspunkte eines zufällig gefärbten Mosaiks (m, F) sind, so gibt es mindestens $k + 2$ schwarze Zellen in (m, F) , die $\partial[-r - r_2, r + r_2]^d$ schneiden. Die Einschränkung auf $3r_2\mathbb{Z}^d$ führen wir deshalb ein, damit sich später kein Ball $B_{r_1}(Z_x(m); \mathcal{G}_m)$ eines Trifurkationspunktes x mit dem entsprechenden Ball eines anderen Trifurkationspunktes schneidet.

Dazu benötigen wir den gefärbten Graphen $\mathcal{G}_{m,F}^-$, den wir erhalten, indem wir für alle Trifurkationspunkte $x \in D_r$ alle Zellen in $B_{r_1}(Z_x(m); \mathcal{G}_m)$ weiß färben. Außerdem konstruieren wir den Hilfsgraphen $\mathcal{H} = (V_{\mathcal{H}}, E_{\mathcal{H}})$, dessen Knotenmenge $V_{\mathcal{H}}$ aus drei verschiedenen Typen von Knoten besteht.

Für jeden Trifurkationspunkt $x \in D_r$ gibt es in $V_{\mathcal{H}}$ einen Knoten des Typs „Tri-Knoten“. Für jeden unendlichen schwarzen Cluster in $\mathcal{G}_{m,F}^-$, der $[-r - r_2, r + r_2]^d$ schneidet, fügen wir einen sogenannten „Inf-Knoten“ zu $V_{\mathcal{H}}$ hinzu und für jeden endlichen schwarzen Cluster in $\mathcal{G}_{m,F}^-$, der für mindestens zwei Trifurkati-

5.1. Das Argument von Burton und Keane

onspunkte $x \neq y \in D_r$ die Mengen $\partial^+ B_{r_1}(Z_x(\mathbf{m}); \mathcal{G}_m)$ und $\partial^+ B_{r_1}(Z_y(\mathbf{m}); \mathcal{G}_m)$ schneidet, fügen wir einen sogenannten „Fin-Knoten“ zu $V_{\mathcal{H}}$ hinzu. Die Kantenmenge $E_{\mathcal{H}}$ wird so konstruiert, dass jeder Fin-Knoten oder Inf-Knoten v mit einem Tri-Knoten w verbunden ist, wenn der Cluster, den v repräsentiert, die Menge $\partial^+ B_{r_1}(Z_{x(w)}(\mathbf{m}); \mathcal{G}_m)$ schneidet, wobei $x(w)$ der Trifurkationspunkt sei, den w repräsentiert.

Um Lemma 5.1.1 nutzen zu können, müssen wir uns klarmachen, dass \mathcal{H} die Bedingung 1 des Lemmas erfüllt. Entfernen wir einen Tri-Knoten aus \mathcal{H} so zerfällt \mathcal{H} in mindestens drei Komponenten. Keine dieser Komponenten besteht nur aus Fin-Knoten, da diese wenigstens zu zwei Tri-Knoten verbunden sein müssen. Es kann auch keine der Komponenten nur aus Fin- und Tri-Knoten bestehen, da in diesem Falle das Entfernen eines solchen Tri-Knotens aus \mathcal{H} lediglich eine Komponente mit mindestens einem Inf-Knoten hinterlassen würde.

Wir können daher mit Lemma 5.1.1 schließen, dass \mathcal{H} mindestens so viele Inf-Knoten wie Tri-Knoten hat. Nach Konstruktion von \mathcal{H} gibt es für jeden Inf-Knoten in \mathcal{H} einen unendlichen schwarzen Cluster in $\mathcal{G}_{m,F}^-$, der $[-r-r_2, r+r_2]^d$ schneidet. Für jeden solchen Cluster muss wiederum der Rand $\partial[-r-r_2, r+r_2]^d$ von wenigstens einer schwarzen Zelle aus (\mathbf{m}, f) geschnitten werden. Die erwartete Anzahl von Trifurkationspunkten in D_r muss daher kleiner sein als die erwartete Anzahl schwarzer Zellen, die $\partial[-r-r_2, r+r_2]^d$ schneiden. Die erwartete Anzahl Trifurkationspunkte in D_r ist von der Ordnung r^d . Die erwartete Anzahl schwarzer Zellen, die $\partial[-r-r_2, r+r_2]^d$ schneiden, ist jedoch nach Voraussetzung nur von der Ordnung r^{d-1} , was zu einem Widerspruch führt, wenn r groß genug ist. Damit ist die Behauptung für ergodische Mosaik gezeigt.

Ist \mathfrak{M} lediglich stationär, so gibt es nach [Kal02, Theorem 10.26] eine geeignete σ -Algebra und ein Maß ν auf der Menge \mathcal{L} der Verteilungen von ergodischen zufälligen Mosaiken, sodass für jedes Ereignis $A \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}[A] = \int_{\mathcal{L}} P(A) \nu(dP)$$

gilt. Nach Voraussetzung gilt

$$\int |\{Z \in \mathbf{m} \mid Z \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\}| \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}(d\mathbf{m}) < \infty.$$

Daher muss für ν -fast alle Verteilungen P ebenfalls

$$\int |\{Z \in \mathbf{m} \mid Z \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\}| P(d\mathbf{m}) < \infty \quad (5.2)$$

gelten. Für ein ergodisches zufälliges Mosaik dessen Verteilung P die Beziehung (5.2) erfüllt, haben wir jedoch gezeigt, dass es P -f.s. höchstens einen un-

5. Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

endlichen Cluster gibt. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in \mathcal{G}_M höchstens einen unendlichen Cluster gibt gleich eins. \square

Wie in Theorem 4.3.2 bereits vorweggenommen, folgt aus Theorem 5.1.2 für $p = \frac{1}{2}$ die Abwesenheit eines unendlichen schwarzen bzw. weißen Clusters in einem ergodischen zufälligen Mosaik mit schwachen Momenteneigenschaften. Wir vermuten, dass in vielen Fällen, in denen in einem 2-dimensionalen Mosaik fast sicher je höchstens drei Zellen eine Ecke gemeinsam haben, die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit exakt den Wert $\frac{1}{2}$ hat, konnten jedoch keine genügend schwachen hinreichenden Bedingungen dafür finden. Wie bereits erwähnt, wurde dieses Ergebnis in [BR06a] für den Spezialfall des Poisson-Voronoi-Mosaiks gezeigt. Der Beweis in diesem Spezialfall ist jedoch bereits sehr aufwändig.

5.2. Das Argument von Gandolfi, Grimmett und Russo

Wir formulieren das Ergebnis dieses Abschnitts zuerst für deterministische Graphen $\mathcal{G} := (V, E)$ und wenden es dann auf zufällige Mosaik an.

Wir bezeichnen in diesem Abschnitt mit L_v das Ereignis, dass der Knoten $v \in V$ im äußeren Rand von zwei unendlichen schwarzen Clustern liegt. Der Beweis des folgenden Lemmas findet sich im Wesentlichen auch in [GGR88], wir werden ihn hier dennoch noch einmal ausführen, um die Details, die sich durch die Verallgemeinerung ergeben, direkt prüfen zu können.

5.2.1 Lemma

Sei \mathcal{G} ein Graph und $v \in V$ ein Knoten in \mathcal{G} . Ist $p \in (0, 1)$, so gibt es eine Konstante $c_1(p) \in (0, \infty)$, sodass für alle $\varepsilon > 0$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}_p \left[|\partial^+ C_v| - \frac{1-p}{p} |C_v| \geq \varepsilon k, |C_v| + |\partial^+ C_v| = k \right] \leq e^{-c_1(p)\varepsilon^2 k}$$

gilt.

Beweis: Wir erinnern daran, dass $\mathcal{A}_{n,b}(\mathcal{G})$ die Menge der Graphentiere α mit $|\alpha| = n$ inneren und $|\partial^+ \alpha| = b$ Randknoten war, wenden die Markov-Unglei-

5.2. Das Argument von Gandolfi, Grimmett und Russo

chung mit der Funktion $r \mapsto e^{tr}$, $t > 0$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_p \left[\left| \partial^+ C_v \right| - \frac{1-p}{p} |C_v| \geq \varepsilon k, |C_v| + |\partial^+ C_v| = k \right] \\
 & \leq e^{-\varepsilon k t} \mathbb{E}_p \left[e^{t \left(|\partial^+ C_v| - \frac{1-p}{p} |C_v| \right)} \mathbf{1} \{ |C_v| + |\partial^+ C_v| = k \} \right] \\
 & = e^{-\varepsilon k t} \sum_{n+b=k} |\mathcal{A}_{n,b}(\mathcal{G})| e^{t \left(b - \frac{1-p}{p} n \right)} p^n (1-p)^b \\
 & = e^{-\varepsilon k t} \sum_{n+b=k} |\mathcal{A}_{n,b}(\mathcal{G})| \left(p e^{-t \frac{1-p}{p}} \right)^n \left((1-p) e^t \right)^b.
 \end{aligned}$$

Wir schreiben abkürzend $q_1 := p e^{-t \frac{1-p}{p}}$ sowie $q_2 := (1-p) e^t$, womit

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_p \left[\left| \partial^+ C_v \right| - \frac{1-p}{p} |C_v| \geq \varepsilon k, |C_v| + |\partial^+ C_v| = k \right] \\
 & \leq e^{-\varepsilon k t} (q_1 + q_2)^k \sum_{n+b=k} |\mathcal{A}_{n,b}(\mathcal{G})| \left(\frac{q_1}{q_1 + q_2} \right)^n \left(\frac{q_2}{q_1 + q_2} \right)^b \\
 & = \left(e^{-\varepsilon t} (q_1 + q_2) \right)^k \mathbb{P}_{\frac{q_1}{q_1+q_2}} [|C_v| + |\partial^+ C_v| = k]
 \end{aligned}$$

gilt. Es ist leicht nachzurechnen, dass

$$q_1 + q_2 \leq e^{t^2 c_2(p)}$$

mit $c_2(p) \leq \frac{(1-p)^2}{2p} + e - 1$ gilt. Wählen wir nun $t = \frac{\varepsilon}{2c_2(p)}$, ergibt sich

$$\mathbb{P}_p \left[\left| \partial^+ C_v \right| - \frac{1-p}{p} |C_v| \geq \varepsilon k, |C_v| + |\partial^+ C_v| = k \right] \leq \exp \left(-\frac{k\varepsilon^2}{4c_2(p)} \right).$$

□

Es ist also „unwahrscheinlich“, dass ein Cluster der Größe $(1-p)k$ deutlich mehr als pk Nachbarknoten hat. Dabei spielt der Graph \mathcal{G} keine Rolle. Es ist außerdem interessant, dass diese Abschätzung auch für $p = p_c$ gilt. In diesem Fall wird für viele Graphen (insbesondere bei d -dimensionalen Gittern) erwartet, dass $\mathbb{P}_{p_c} [|C_v| + |\partial^+ C_v| = k]$ lediglich polynomial fällt und nicht exponentiell. Die Besonderheit des folgenden Theorems liegt nun insbesondere darin, dass keine Transitivität oder Quasitranstivität für den Graphen \mathcal{G} gefordert wird.

5.2.2 Theorem

Sei \mathcal{G} ein zusammenhängender Graph mit den folgenden Eigenschaften:

1. Für die Funktionen

$$g_1 : V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \mathbb{P}_p [L_v]$$

5. Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

und

$$g_2 : V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto |\partial^+ \{v\}|,$$

existiert

$$c_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_n(\mathbf{0}; \mathcal{G})|} \sum_{v \in B_n(\mathbf{0})} g_i(v), \quad i \in \{1, 2\}$$

und ist 0 genau dann, wenn $g_i = 0$.

2. Für die Größe des Balls $B_n(\mathbf{0})$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_n(\mathbf{0})|}{n^{c_3}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_{n-\sqrt{n}}(\mathbf{0})|}{|B_n(\mathbf{0})|} = 1,$$

mit geeignetem $c_3 \in \mathbb{R}$.

Dann existiert fast sicher höchstens ein unendlicher Cluster in \mathcal{G} .

Die erste Voraussetzung an \mathcal{G} ist eine Art Ergodizität oder Mittelbarkeit, die perfekt zu der Anwendung auf ergodische Mosaik passt. Die zweite Voraussetzung wird erfüllt, wenn die Größe des Balls polynomial wächst, d.h. wenn es $c_4, c_5 > 0$ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_n(\mathbf{0})|}{n^{c_4}} = c_5.$$

Mit der Beziehung $B_{n-d_G(v, \mathbf{0})}(\mathbf{0}) \subset B_n(v) \subset B_{n+d_G(v, \mathbf{0})}(\mathbf{0})$ für $v \in V$ rechnen wir leicht nach, dass die zweite Voraussetzung nicht von der Wahl der Wurzel $\mathbf{0}$ von \mathcal{G} abhängt.

Beweis von Theorem 5.2.2: Der Beweis ist, wie bereits erwähnt, eine Verallgemeinerung von [GGR88]. Die Behauptung ist für $p \in \{0, 1\}$ trivial, es sei also im Folgenden $p \in (0, 1)$. Gibt es mit positiver Wahrscheinlichkeit mindestens zwei unendliche schwarze Cluster, so gibt es auch einen Knoten $v \in V$ der mit positiver Wahrscheinlichkeit im Rand von zwei unendlichen schwarzen Clustern liegt. Wir zeigen im Folgenden, dass dies jedoch nicht möglich ist, das also $\mathbb{P}_p[L_v] = 0$ für alle $v \in V$ gilt. Wir definieren die Mengen

$$\mathcal{C}_n := \{C \cap B_n(\mathbf{0}) \mid C \text{ ist ein schwarzer Cluster in } \mathcal{G} \text{ mit } C \cap \partial^+ B_n(\mathbf{0}) \neq \emptyset\}$$

$$F_n := \bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} C$$

$$G_n := B_n(\mathbf{0}) \cap \bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} \partial^+ C$$

$$H_n := B_n(\mathbf{0}) \cap \bigcup_{C_1 \neq C_2 \in \mathcal{C}_n} (\partial C_1 \cap \partial C_2)$$

5.2. Das Argument von Gandolfi, Grimmett und Russo

und erhalten

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_n} |C| \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{x \in B_n(\mathbf{0})} \mathbf{1}\{x \leftrightarrow \partial^+ B_n(\mathbf{0})\} \right] \\
 &\leq \frac{p}{1-p} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in B_{n-1}(\mathbf{0})} \mathbf{1}\{x \in G_n\} \right] + |\partial^+ B_{n-1}(\mathbf{0})| \\
 &\leq \frac{p}{1-p} \mathbb{E}[|G_n|] + |\partial^+ B_{n-1}(\mathbf{0})|.
 \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \sum_{v \in B_n(\mathbf{0})} \mathbb{P}_p[L_v] \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_p[|H_n|]}{|B_n(\mathbf{0})|} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \mathbb{E}_p \left[\left(\sum_{C \in \mathcal{C}_n} |\partial^+ C| \right) - |G_n| \right] \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \left(\mathbb{E}_p \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_n} \underbrace{|\partial^+ C| - \frac{1-p}{p}|C|}_{=: f(C)} \right] + \frac{1-p}{p} |\partial^+ B_{n-1}(\mathbf{0})| \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \mathbb{E}_p \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_n} f(C) \right]. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

Wir möchten nun Lemma 5.2.1 anwenden und definieren dazu

$$\mathcal{C}'_n := \{C \in \mathcal{C}_n \mid |C| + |\partial^+ C| \geq \sqrt{n}\}$$

und für $\varepsilon > 0$ das Ereignis

$$A_n := \bigcap_{C \in \mathcal{C}'_n} \{f(C) \leq \varepsilon(|C| + |\partial^+ C|)\}.$$

Wir teilen die Summe in (5.3) auf in die Summe über die Cluster aus \mathcal{C}'_n und die

5. Eindeutigkeit des unendlichen Clusters

Summe über den Rest. Für den Rest gilt dann

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \mathbb{E}_p \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}'_n} f(C) \right] \\
& \leq \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \mathbb{E}_p \left[\sum_{C \in \mathcal{C}_n \setminus \mathcal{C}'_n} |\partial^+ C| \right] \\
& \leq \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \mathbb{E}_p \left[\sum_{v \in B_n(\mathbf{0}) \setminus B_{n-\sqrt{n}}(\mathbf{0})} |\partial^+ \{v\}| \right] \\
& = \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \sum_{x \in B_n(\mathbf{0})} |\partial^+ \{x\}| - \frac{|B_{n-\sqrt{n}}(\mathbf{0})|}{|B_n(\mathbf{0})|} \frac{1}{|B_{n-\sqrt{n}}(\mathbf{0})|} \sum_{x \in B_{n-\sqrt{n}}(\mathbf{0})} |\partial^+ \{x\}| \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

und somit bleibt die Summe aus (5.3) über \mathcal{C}'_n zu untersuchen. Dabei betrachten wir den Erwartungswert, wenn A_n eintritt und wenn nicht. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \left(\mathbb{E} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}'_n} f(C) \mathbf{1}_{A_n} \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}'_n} f(C) \mathbf{1}_{A_n^c} \right] \right) \\
& \leq \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \left(\mathbb{E} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}'_n} \varepsilon(|C| + |\partial^+ C|) \right] + \mathbb{E} \left[\sum_{C \in \mathcal{C}'_n} |\partial^+ C| \mathbf{1}_{A_n^c} \right] \right) \\
& \leq \frac{\varepsilon}{|B_n(\mathbf{0})|} \sum_{x \in B_n(\mathbf{0})} (1 + |\partial^+ \{x\}|) + \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \sum_{x \in B_n(\mathbf{0})} |\partial^+ \{x\}| (1 - \mathbb{P}_p[A_n]) \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon(1 + c_2) + c_2(1 - \mathbb{P}_p[A_n])
\end{aligned}$$

und wir wenden Lemma 5.2.1 an, um mit

$$\begin{aligned}
1 - \mathbb{P}_p[A_n] & \leq \mathbb{P}_p[\exists v \in B_n(\mathbf{0}) : C_v \in \mathcal{C}'_n, f(C_v) > \varepsilon(|C_v| + |\partial^+ C_v|)] \\
& \leq \sum_{v \in B_n(\mathbf{0})} \sum_{k \geq \sqrt{n}} \mathbb{P}_p[f(C_v) > \varepsilon k, |C_v| + |\partial^+ C_v| = k] \\
& \leq |B_n(\mathbf{0})| \sum_{k \geq \sqrt{n}} e^{-c_6 \varepsilon^2 k} \\
& \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_n(\mathbf{0})|} \sum_{v \in B_n(\mathbf{0})} \mathbb{P}_p[L_v] = 0$$

5.2. Das Argument von Gandolfi, Grimmett und Russo

gilt. Daraus folgt nach Voraussetzung 1, dass $\mathbb{P}_p[L_v] = 0$ für alle $v \in V$ ist. \square

Auch bei Theorem 5.2.2 bleibt zunächst die Frage, auf welche Graphen, die man bisher noch nicht behandeln konnte, es sich anwenden lässt. Die Antwort wird sein, dass es sich auf Graphen $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$, die von ergodischen zufälligen Mosaiken \mathfrak{M} erzeugt werden, anwenden lässt. Dazu brauchen wir jedoch eine gute Kontrolle über das Verhalten des Balls in $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$. Dies ist das Thema des kommenden Abschnitts. Leider werden die dort benötigten Voraussetzungen an das Mosaik deutlich stärker sein, als die minimalen Voraussetzungen in Theorem 5.1.2.

6. First-Passage Perkolaton

In diesem Abschnitt widmen wir uns der sogenannten First-Passage Perkolaton, die von Hammersley und Welsh [HW65] im Jahr 1963 eingeführt wurde. Das Modell entstand ebenfalls aus dem Ansatz, eine Flüssigkeit durch ein poröses Medium fließen zu lassen. Im Gegensatz zum normalen Perkolationsmodell steht hierbei jedoch nicht die Durchlässigkeit des Mediums, sondern die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit im Mittelpunkt. Die First-Passage Perkolaton wurde dabei wesentlich von Arbeiten von Cox, Durrett, Grimmett, Kesten, Kingmann und anderen geprägt. Als Meilenstein von enormer Wichtigkeit, weit über den Bereich der First-Passage Perkolaton hinaus, sei in diesem Zusammenhang auch die Entdeckung des subadditiven Ergodensatzes von Kingman [Kin73] genannt. Einen guten Einstieg in die Thematik bietet der ausführliche Übersichtsartikel von Auffinger et. al. [AHD15].

Auf dem d -dimensionalen Gitter \mathbb{Z}^d wird das Modell für gewöhnlich so eingeführt, dass es eine Familie $T = \{T_e \mid e \in E(\mathbb{Z}^d)\}$ von nicht negativen Zufallsvariablen gibt und jeder Kante $e \in E(\mathbb{Z}^d)$ die Zeit T_e zugeordnet wird, deren Wert festlegt, wie lange die Flüssigkeit benötigt, um diese Kante zu passieren. Dadurch ergibt sich für je zwei Knoten $v, w \in \mathbb{Z}^d$ die zufällige *Passierzeit*

$$\tau(v, w; T) := \inf_{\gamma} \sum_{e \in \gamma} T_e,$$

wobei das Infimum über alle Pfade γ genommen wird, die in v starten und in w enden (Pfade werden hier ausnahmsweise als Folgen von Kanten interpretiert). Die Passierzeiten ergeben eine zufällige Pseudometrik auf \mathbb{Z}^d . Wir können diese Pseudometrik leicht auf \mathbb{R}^d ausdehnen, indem wir $\tau(x, y; T) := \tau(v_x, v_y; T)$ für $x, y \in \mathbb{R}^d$ definieren, wobei $v_x, v_y \in \mathbb{Z}^d$ mit $x - v_x, y - v_y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gelten soll. Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, das Modell auf zufällige Metriken in \mathbb{R}^d zu erweitern. Dabei ist ein wichtiger Spezialfall, dass der Graph \mathbb{Z}^d durch den zufälligen Graphen $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$, der von einem zufälligen Mosaik \mathfrak{M} induziert wird, ersetzt wird.

6.1. Ein Shape-Theorem für zufällige Pseudometriken

Es liegt nah, die Bälle

$$B_t(x; T) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \tau(x, y; T) \leq t\}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

in der Pseudometrik $\tau(x, y; T)$ zu betrachten und sie mit Bällen in anderen Metriken zu vergleichen. Es stellt sich heraus, dass es, unter gewissen Momentenbedingungen an die Zeiten $T := (T_e)_{e \in E(\mathbb{Z}^d)}$, eine Norm auf \mathbb{Z}^d gibt, deren Bälle den Bällen $B_t(x; T)$ sehr ähnlich sind. Theoreme dieser Art firmieren in der englischen Literatur unter dem Namen „Shape Theorem“.

6.1.1 Theorem [Kes86, Theorem 1.7 und 1.15]

Sei $T := (T_e)_{e \in E(\mathbb{Z}^d)}$ eine Menge von u.i.v. Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}[\min\{T_{\{0, \pm e_1\}}, \dots, T_{\{0, \pm e_d\}}\}^d] < \infty. \quad (6.1)$$

Es gibt eine nicht leere konvexe Menge $S \subset \mathbb{R}^d$, die invariant unter Spiegelungen in Koordinatenrichtung sowie Permutationen von Koordinaten ist und die entweder kompakt oder gleich \mathbb{R}^d ist. Die Menge hat außerdem folgende Eigenschaften:

- Ist S kompakt, so gilt fast sicher: für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für genügend große t

$$(1 - \varepsilon)S \subset \frac{B_t(0; T)}{t} \subset (1 + \varepsilon)S.$$

- Ist $S = \mathbb{R}^d$, so gilt fast sicher: für jedes $c > 0$ gilt für genügend große t

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq c\} \subset \frac{B_t(0; T)}{t}.$$

Ist die Momentenbedingung (6.1) nicht erfüllt, so gilt

$$\limsup_{\|v\|_2 \rightarrow \infty} \frac{\tau(0, v; T)}{\|v\|_2} = \infty \quad \text{f.s. .}$$

Es ist $S = \mathbb{R}^d$ genau dann, wenn $\mathbb{P}[T_{e_1} = 0]$ größer oder gleich der kritischen Perkolationswahrscheinlichkeit für Kantenperkolaton auf \mathbb{Z}^d ist.

Wir möchten die First-Passage Perkolaton auf zufällige Mosaik bzw. die von ihnen erzeugten Graphen übertragen und führen dazu folgende Begriffe ein. Jedes Mosaik wird eindeutig durch die $(d - 1)$ -dimensionalen Seitenflächen

6.1. Ein Shape-Theorem für zufällige Pseudometriken

der Zellen bestimmt. Wir nennen einen Partikelprozess, dessen Partikel f.s. die $(d - 1)$ -dimensionalen Seitenflächen von Zellen eines Mosaiks sind, einen *Seitenflächenprozess*. Ist \mathfrak{M} ein zufälliges Mosaik, so nennen wir den Partikelprozess $\mathfrak{M}^{(d-1)}$, der aus den $(d - 1)$ -dimensionalen Seitenflächen der Zellen von $\mathfrak{M}^{(d-1)}$ besteht, den *von \mathfrak{M} induzierten Seitenflächenprozess* und umgekehrt nennen wir \mathfrak{M} das zu $\mathfrak{M}^{(d-1)}$ zugehörige *Mosaik* (für Details zur Existenz und Messbarkeit sei auf Kapitel 10 in [SW08] verwiesen).

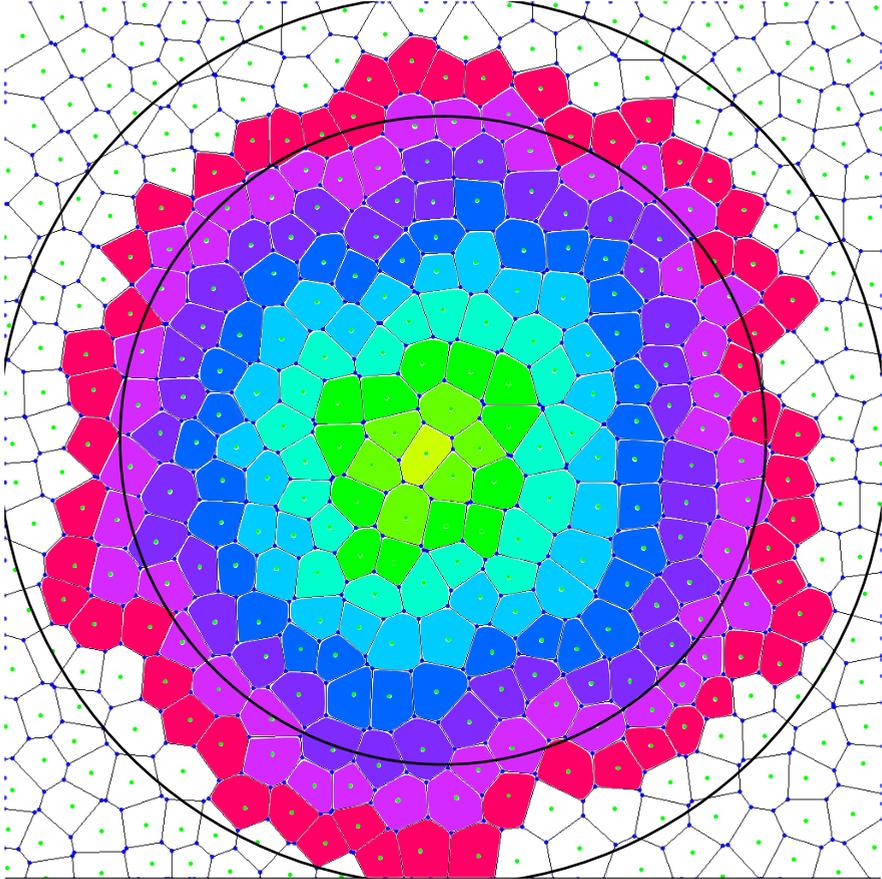


Abbildung 6.1.: Eine Realisierung eines zufälligen Voronoi-Mosaiks \mathfrak{M} , das von einem stationären Punktprozess erzeugt wird. Sämtliche Marken sind konstant 1. Mit verschiedenen Farben sind die Mengen $B_0(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)}), \dots, B_8(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})$ gekennzeichnet. Die zwei schwarzen Kreise deuten die Konvergenz von $B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})$ gegen den Kreis als Grenzform an.

6. First-Passage Perkolaton

Der Einfachheit halber werden wir uns in diesem Abschnitt auf Mosaikbe-
schränken, bei denen der Schnitt zweier Zellen entweder leer oder eine $(d-1)$ -
dimensionale Seitenfläche beider Zellen ist. Da Seitenflächenprozesse Partikel-
prozesse sind, ist nach Abschnitt 2.2 klar, was die Begriffe stationär, ergodisch
und markiert in diesem Zusammenhang bedeuten. Es ist auch klar, dass zwi-
schen den Partikeln in $\mathfrak{M}^{(d-1)}$ und den Kanten in $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ in natürlicher Weise eine
Eins-zu-Eins-Beziehung existiert.

Ist nun $\mathfrak{M}^{(d-1)} := \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ der vom Mosaik \mathfrak{M} induzierte Seitenflächenpro-
zess, $T = \{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Folge nicht negativer Zufallsvariablen und $\mathfrak{M}_T^{(d-1)} :=$
 $\{(S_i, T_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ ein markierter Seitenflächenprozess mit Markenraum $[0, \infty)$,
so induziert dieser eine zufällige Pseudometrik auf \mathbb{R}^d via

$$\tau(x, y; \mathfrak{M}_T^{(d-1)}) := \inf_{\gamma} \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i \mathbb{1}\{S_i \cap \gamma \neq \emptyset\},$$

wobei das Infimum über alle stetigen, polygonalen Kurven von x nach y ge-
bildet wird (wir identifizieren Kurven stets mit ihrem Bild, vgl. Abschnitt 4.3).
Diese Metrik entspricht der Vorstellung, dass die Flüssigkeit sich innerhalb von
Zellen mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreitet und eine Zeit T_i benötigt
um durch die Zellwand S_i zu diffundieren.

Die zufälligen Bälle in dieser zufälligen Pseudometrik (vgl. Abb. 6.1) bezeich-
nen wir mit

$$B_r(x; \mathfrak{M}_T^{(d-1)}) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \tau(x, y; \mathfrak{M}_T^{(d-1)}) \leq r\}.$$

Wie in den vorangegangenen Abschnitten stellt sich die Frage, unter welchen
Bedingung an das Mosaik ein Shape-Theorem nachweisbar ist. Wenn wir ver-
suchen mit einer Approximation an das Problem heranzugehen, können wir
Theorem 6.1.1 nicht nutzen, da die Unabhängigkeit der Zeiten in einem ap-
proximierenden Gitter im Allgemeinen nicht gegeben sein wird. Wir benötigen
stattdessen Kenntnis über das Verhalten eines Modells auf dem Gitter, wenn
die Zeiten nicht unabhängig, sondern lediglich ergodisch sind. Dies wurde
von Boivin in [Boi90] sehr allgemein behandelt und wir wiederholen hier den
Hauptsatz und das zentrale Lemma seiner Arbeit, um uns mit einer anderen
Darstellungsart der Shape Theoreme vertraut zu machen. Es sei daran erinnert,
dass eine Abbildung $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ genau dann eine Halbnorm ist, wenn

1. $\mu(\lambda x) = |\lambda| \mu(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$,
2. $\mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^d$

gilt (es kann also im Gegensatz zu einer Norm auch $\mu(x) = 0$ sein, obwohl
 $x \neq 0$ ist). Es ist leicht zu zeigen, dass dies bereits

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq \max_{i \in [d]} \mu(e_i) \|x - y\|_1 \quad (6.2)$$

6.1. Ein Shape-Theorem für zufällige Pseudometriken

und somit die Lipschitz-Stetigkeit von μ impliziert.

Auf $E(\mathcal{Z}^d)$ definieren wir analog zu Abschnitt 2.4 den Shift-Operator $\theta_v, v \in \mathbb{Z}^d$ via $\theta_v(\{w_1, w_2\}) := \{w_1 + v, w_2 + v\}$ für $\{w_1, w_2\} \in E(\mathcal{Z}^d)$. Ebenfalls analog seien die Begriffe stationär und ergodisch definiert. Wir weisen darauf hin, dass die Stationarität einer Familie von Zufallsvariablen $T := (T_e)_{e \in E(\mathcal{Z}^d)}$ nicht impliziert, dass $T_{\{0, e_1\}} \stackrel{d}{=} T_{\{0, e_2\}}$ gilt.

6.1.2 Theorem [Boi90]

Sei $T := (T_e)_{e \in E(\mathcal{Z}^d)}$ eine stark ergodische Familie von Zufallsvariablen. Ist

$$\mathbb{E}[T_{\{0, e_i\}}^{d+\varepsilon}] < \infty$$

für alle $i \in [d]$ und ein $\varepsilon > 0$, so existiert eine Halbnorm μ mit

$$\lim_{\|v\|_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|v\|_2} (\tau(0, v; T) - \mu(v)) = 0 \quad f.s..$$

Die Aussage von Theorem 6.1.2 ist zunächst, dass für jeden Vektor u mit $\|u\|_2 = 1$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\tau(0, ru; T)}{r} = \mu(u)$$

gilt. Dies bedeutet, dass $\mu(u)$ die reziproke asymptotische Geschwindigkeit ist, mit der sich die Flüssigkeit in Richtung u durch das Gitter bewegt. Der Fall $\mu(u) = 0$ impliziert daher, dass sich die Flüssigkeit mit beliebig hoher Geschwindigkeit in Richtung u durch das Gitter bewegen kann.

Darüber hinaus macht Theorem 6.1.2 aber auch die Aussage, dass die Konvergenz für alle Richtungen *gleichmäßig* ist. Dies ist die Hauptaussage, da die Existenz des Limes in eine konkrete Richtung sofort aus der starken Ergodizität von T folgt.

6.1.3 Lemma [Boi90]

Sei $T := (T_e)_{e \in E(\mathcal{Z}^d)}$ eine stark ergodische Familie von Zufallsvariablen. Ist

$$\mathbb{E}[T_{\{0, e_i\}}^{d+\varepsilon}] < \infty$$

für alle $i \in [d]$ und ein $\varepsilon > 0$, so gibt es eine Konstante c die nur von der Dimension abhängt, sodass für alle $\lambda > 0$

$$\mathbb{P} \left[\sup_{v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{\tau(0, v; T)}{\|v\|_2} > \lambda \right] \leq \frac{c \max_{i \in [d]} \mathbb{E}[T_{\{0, e_i\}}^{d+\varepsilon}]}{\lambda^d}$$

gilt.

6. First-Passage Perkolaton

Für Mosaik mit zufälligen Zeiten ergibt sich ein sehr ähnliches Bild. Bei der Suche nach einem Beweis wurde jedoch deutlich, dass ein Shape-Theorem für First-Passage Perkolaton auf zufälligen Mosaiken nur ein Spezialfall einer Verallgemeinerung des Theorems 6.1.2 von \mathbb{Z}^d auf \mathbb{R}^d ist, den wir im Folgenden beweisen werden. Diese Verallgemeinerung deckt auch die Existenz eines Shape-Theorems für viele weitere Spezialfälle ab, die bereits in der Literatur behandelt wurden [VAW92], [HN97], [LW09] (in der dritten Arbeit können dadurch auch die notwendigen Voraussetzungen deutlich abgeschwächt werden). Erstaunlich ist dabei, dass weiterhin Ergodizität und eine schwache Momentenbedingung die einzigen notwendigen Voraussetzungen sind.

Wir nennen eine Familie von $[0, \infty)$ -wertigen Zufallsvariablen $\tau := \{\tau(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^d\}$ eine *zufällige Pseudometrik auf \mathbb{R}^d* , wenn fast sicher für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}\tau(x, x) &= 0, \\ \tau(x, y) &= \tau(y, x), \\ \tau(x, y) &\leq \tau(x, z) + \tau(z, y)\end{aligned}$$

gilt. Formal ist τ ein zufälliges Feld auf \mathbb{R}^{2d} , das heißt, ein zufälliges Element im Raum $[0, \infty)^{\mathbb{R}^{2d}}$, der wie üblich mit der von den Projektionen erzeugten σ -Algebra ausgestattet ist. Wir definieren den Verschiebungsoperator θ_z via

$$\theta_z(\tau(x, y)) := \tau(x - z, y - z)$$

und führen Stationarität und (starke) Ergodizität einer zufälligen Pseudometrik wie in Abschnitt 2.2 ein.

6.1.4 Theorem

Ist $\tau := \{\tau(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^d\}$ eine stark ergodische Pseudometrik mit

$$\mathbb{E} \left[\max \{ \tau(0, x) \mid \|x\|_\infty \leq 1 \}^{d+\varepsilon} \right] < \infty \quad (6.3)$$

so gibt es eine Halbnorm μ , sodass

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|_2} (\tau(0, x) - \mu(x)) = 0$$

gilt.

Beweis: Das Grundgerüst des Beweises ist wie in [Boi90], wir müssen uns jedoch um einige zusätzliche Probleme kümmern, die in unserem stetigen Rahmen entstehen. Für eine feste Richtung $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ existiert wegen der starken Ergodizität von τ und dem subadditiven Ergodensatz [Kal02, Theorem 10.22] der Limes

$$\mu(u) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau(0, nu)}{n}.$$

6.1. Ein Shape-Theorem für zufällige Pseudometriken

Die Homogenität von μ folgt direkt aus der Definition und die Dreiecksungleichung für μ folgt sofort aus der Dreiecksungleichung für τ . Wenn die Konvergenz also „gleichmäßig in alle Richtungen“ ist, folgt die Behauptung.

Wir zeigen zuerst, dass es genügt sich auf $x \in \mathbb{Z}^d$ zu beschränken. Für $x \in \mathbb{R}^d$ sei $x_r \in \mathbb{Z}^d$ so gewählt, dass $x - x_r \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ gilt. Dann gilt wegen (6.2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|x\|_2} |\tau(0, x) - \mu(x)| \\ & \leq \frac{1}{\|x\|_2} (|\tau(0, x_r) - \mu(x_r)| + |\tau(x, x_r)| + |\mu(x_r) - \mu(x)|) \\ & \leq \frac{1}{\|x\|_2} (|\tau(0, x_r) - \mu(x_r)| + \max\{\tau(x_r, y) \mid y \in x_r + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d\} + \frac{1}{2} \max_{i \in [d]} \mu(e_i)). \end{aligned}$$

Lemma A.4 zeigt nun, dass aus Voraussetzung (6.3) folgt, dass für ein beliebiges $\delta > 0$ der zweite Summand fast sicher nur für endlich viele $x_r \in \mathbb{Z}^d$ größer als $\delta \|x_r\|_2$ ist. Damit folgt, dass es genügt

$$\limsup_{\|v\|_2 \rightarrow \infty, v \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{\|v\|_2} |\tau(0, v) - \mu(v)| = 0$$

zu zeigen. Die Idee ist nun, mit Hilfe von Lemma 6.1.3 die Konvergenz in Kegeln

$$K(u, r, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq r, \langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \rangle \geq 1 - \delta\}$$

mit Richtung $u \in \mathcal{S}^{d-1}$, Länge $r \in [0, \infty]$ und Öffnungswinkel $\arccos(1 - \delta) \in [0, 2\pi]$ zu zeigen. Wir definieren eine diskrete Familie von Zeiten $T := (T_e)_{e \in E(\mathbb{Z}^d)}$ via

$$T_{\{v, w\}} := \tau(v, w), \quad \{v, w\} \in E(\mathbb{Z}^d).$$

Wegen Lemma 7.1.1 und der starken Ergodizität von τ ist T stark ergodisch, es gilt

$$\tau(v, w) \leq \tau(v, w; T) \quad v, w \in \mathbb{Z}^d \tag{6.4}$$

und damit wegen (6.3) auch

$$\mathbb{E}[T_{\{0, e_i\}}^{d+\varepsilon}] \leq \mathbb{E}[\max\{\tau(0, x) \mid \|x\|_\infty \leq 1\}^{d+\varepsilon}] < \infty. \tag{6.5}$$

Wir fixieren jetzt eine Richtung $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und nutzen Lemma 6.1.3 um zu zeigen, dass Kegelkappen einer gewissen Dicke Punkte enthalten, die von überall relativ gut erreichbar sind. Das heißt, für jedes $\rho > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbb{P} \left[\sup_{v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \|v\|_2^{-1} \tau(0, v; T) > \lambda \right] < 1$$

6. First-Passage Perkolaton

und jedes $\delta > 0$ gilt fast sicher: Für genügend großes $r \in \mathbb{R}$ gibt es ein $v \in (K(u, r(1 + \rho), \delta) \setminus K(u, r, \delta)) \cap \mathbb{Z}^d$, sodass

$$A_v := \left\{ \sup_{w \in \mathbb{Z}^d \setminus \{v\}} \frac{\tau(v, w; T)}{\|v - w\|_2} \leq \lambda \right\}$$

eintritt. Dazu wenden wir zunächst den diskreten räumlichen Ergodensatz (siehe [NZ79, Proposition 4.23, Beispiel 1]) auf die Folge von Kegeln $\{K(u, r, \delta) \mid r \in \mathbb{N}\}$ und die Funktion $\mathbb{1}_{A_0}$ an und erhalten, dass für $\varepsilon \in (0, \mathbb{P}[A_0])$ für alle r groß genug

$$\mathbb{P}[A_0] - \varepsilon \leq \frac{1}{|K(u, r, \delta) \cap \mathbb{Z}^d|} \sum_{v \in K(u, r, \delta) \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{A_v} \leq \mathbb{P}[A_0] + \varepsilon$$

gilt. Nehmen wir an, dass es für eine Realisierung von τ kein v mit der gewünschten Eigenschaft gibt, so gilt

$$\mathbb{P}[A_0] - \varepsilon \leq \frac{1}{|K(u, r(1 + \rho), \delta) \cap \mathbb{Z}^d|} \sum_{v \in K(u, r, \delta) \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{A_v}.$$

Außerdem rechnen wir leicht nach, dass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r^d}{|K(u, r, \delta) \cap \mathbb{Z}^d|} = c_2(\delta)$$

gilt. Daraus folgt für r groß genug

$$\begin{aligned} (c_2(\delta) - \varepsilon)(r^d(1 + \rho)^d - r^d) &\leq |(K(u, r(1 + \rho), \delta) \setminus K(u, r, \delta)) \cap \mathbb{Z}^d| \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{P}[A_0] - \varepsilon} \sum_{v \in K(u, r, \delta) \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{A_v} - |K(u, r, \delta) \cap \mathbb{Z}^d| \\ &\leq |K(u, r, \delta) \cap \mathbb{Z}^d| \left(\frac{\mathbb{P}[A_0] + \varepsilon}{\mathbb{P}[A_0] - \varepsilon} - 1 \right) \\ &\leq (c_2(\delta) + \varepsilon)r^d \left(\frac{\mathbb{P}[A_0] + \varepsilon}{\mathbb{P}[A_0] - \varepsilon} - 1 \right) \end{aligned}$$

und damit ein Widerspruch, wenn wir ε klein genug wählen.

Betrachten wir nun die Abweichungen innerhalb eines Kegels. Es sei $u \in S^{d-1}$, $\delta, \rho > 0$ und für $r \in \mathbb{R}$ groß genug sei $w(r) \in \mathbb{Z}^d$ ein Punkt in $K(u, r(1 + \rho), \delta) \setminus K(u, r, \delta)$, sodass $A_{w(r)}$ eintritt. Für $v \in K(u, \infty, \delta) \cap \mathbb{Z}^d$ mit $\|v\|_2$ groß genug

6.1. Ein Shape-Theorem für zufällige Pseudometriken

gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|v\|_2} |\tau(0, v) - \mu(v)| &\leq \frac{1}{\|v\|_2} \left(|\tau(0, v) - \tau(0, w(\|v\|_2))| \right. \\ &\quad + |\tau(0, w(\|v\|_2)) - \tau(0, \|v\|_2 u)| \\ &\quad + |\tau(0, \|v\|_2 u) - \mu(\|v\|_2 u)| \\ &\quad \left. + |\mu(\|v\|_2 u) - \mu(v)| \right) \end{aligned}$$

und wir schätzen alle Summanden geeignet ab. Aus (6.4) und Lemma A.6 folgt

$$\begin{aligned} |\tau(0, v) - \tau(0, w(\|v\|_2))| &\leq \tau(v, w(\|v\|_2)) \\ &\leq \tau(v, w(\|v\|_2); T) \\ &\leq \lambda \|v - w(\|v\|_2)\| \\ &\leq \lambda \|v\|_2 (\rho + 2\sqrt{2}\delta(1 + \rho)) \end{aligned}$$

und analog

$$|\tau(0, w(\|v\|_2)) - \tau(0, \|v\|_2 u)| \leq \lambda \|v\|_2 (\rho + 2\sqrt{2}\delta(1 + \rho)).$$

Aus (6.2) schließen wir

$$\begin{aligned} |\mu(\|v\|_2 u) - \mu(v)| &\leq \max_{i \in [d]} \mu(\mathbf{e}_i) \|\|v\|_2 u - v\|_2 \\ &\leq \max_{i \in [d]} \mu(\mathbf{e}_i) \|v\|_2 (\rho + 2\sqrt{2}\delta(1 + \rho)). \end{aligned}$$

Also können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ und $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ Werte $\lambda, r_0 \in \mathbb{R}$ und $\rho, \delta > 0$ finden, sodass fast sicher für alle $v \in K(u, \infty, \delta) \cap \mathbb{Z}^d$ mit $\|v\|_2 > r_0$

$$\frac{1}{\|v\|_2} |\tau(0, v) - \mu(v)| < \varepsilon$$

gilt. Wir schreiben $\delta(u, \varepsilon)$ anstelle von δ um die Abhängigkeit zu verdeutlichen und sehen ein, dass die Kegel $\{K(u, 1, \delta(u, \varepsilon)) \mid u \in \mathcal{S}^{d-1}\}$ die Einheitskugel überdecken. Es ist möglich, eine endliche Teilüberdeckung $\{K(u_i, 1, \delta(u_i, \varepsilon)) \mid i \in [m]\}$ mit $m \in \mathbb{N}$, $u_i \in \mathcal{S}^{d-1}$ zu finden, da \mathcal{S}^{d-1} kompakt ist. Demnach gilt

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i \in [m]} K(u_i, \infty, \delta(u_i, \varepsilon))$$

und es folgt die gewünschte gleichmäßige Konvergenz. \square

Um den Begriff „Shape Theorem“ für Theorem 6.1.4 zu motivieren, bringen wir dessen Aussage in die Form von Theorem 6.1.1. Dazu sei für $x \in \mathbb{R}^d$

$$B_t(x; \tau) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \tau(x, y) \leq t\}$$

definiert.

6. First-Passage Perkolaton

6.1.5 Lemma

Es existiert genau dann eine Norm μ mit

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|_2} (\tau(0, x) - \mu(x)) = 0 \quad \text{f.s.},$$

wenn eine kompakte konvexe Menge S existiert und fast sicher für alle $\varepsilon > 0$ und genügend große t

$$(1 - \varepsilon)S \subset \frac{B_t(0; \tau)}{t} \subset (1 + \varepsilon)S$$

gilt. In diesem Fall gilt $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mu(x) \leq 1\}$.

Es ist genau dann

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \frac{\tau(0, x)}{\|x\|_2} = 0 \quad \text{f.s.},$$

wenn fast sicher für alle $c > 0$ und genügend große t

$$\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq c\} \subset \frac{B_t(0; \tau)}{t}$$

gilt.

Beweis: Der Beweis ist eine leichte Übungsaufgabe, und vollkommen identisch zum diskreten Fall [Kes86]. \square

Das Lemma 6.1.5 charakterisiert die beiden Fälle $\mu(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$ und $\mu(x) = 0$ für $x \neq 0$. Es ist aber im Prinzip in diesem allgemeinen Rahmen möglich, dass μ nur auf einem k -dimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^d konstant null und außerhalb dieses Unterraums positiv ist. In diesem Fall erhielten wir eine Mischung der beiden Aussagen aus Lemma 6.1.5. Die Aussage, die wir dann über $B_t(0; \tau)$ treffen können ist wie auch die zweite Aussage des Lemmas eher schwach, daher interessiert uns besonders der Fall, in dem μ eine Norm ist, d.h. es gilt $\mu(x) > 0$ für $x \neq 0$. Diesen Fall untersuchen wir in Abschnitt 6.2. Theorem 6.1.4 können wir jetzt leicht auf First-Passage Perkolaton in zufälligen Mosaiken anwenden. Wir werden dabei die Momentenbedingung minimal verschärfen, da sich deren Nachweis dadurch deutlich leichter gestaltet.

6.1.6 Korollar

Sei $\mathfrak{M}_T^{(d-1)}$ ein stark ergodischer unabhängig markierter Seitenflächenprozess mit Markenraum $[0, \infty)$, Markenverteilung \mathbb{Q} und zugehörigem zufälligen Mosaik \mathfrak{M} . Ist für ein $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{Z \in \mathfrak{M}} \mathbb{1}\{Z \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\} \right)^{d+\varepsilon} \right] < \infty$$

6.1. Ein Shape-Theorem für zufällige Pseudometriken

und

$$\int t^{d+\varepsilon} \mathbb{Q}(dt) < \infty,$$

so gibt es eine Halbnorm μ , sodass

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|_2} (\tau(0, x; \mathfrak{M}_T^{(d-1)}) - \mu(x)) = 0$$

gilt.

Beweis: Der unabhängig markierte Seitenflächenprozess $\mathfrak{M}_T^{(d-1)}$ ist stark ergodisch, also ist nach Lemma 7.1.1 auch $\tau(\cdot, \cdot; \mathfrak{M}_T^{(d-1)})$ stark ergodisch. Sei

$$N := \{Z \in \mathfrak{M} \mid Z \cap [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d\}$$

die Menge der Zellen, die den verschobenen Einheitswürfel schneiden. Der von N induzierte Teilgraph \mathcal{G}_N von $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ ist zusammenhängend, also gibt es einen Spannbaum mit Kantenmenge K , für die $|K| = |N| - 1$ gilt. Daher ist

$$\max \left\{ \tau(0, x; \mathfrak{M}_T^{(d-1)}) \mid \|x\|_\infty \leq 1 \right\} \leq \sum_{e \in K} T_e$$

und wir erhalten aus dem Lemma A.1 und den beiden Voraussetzungen

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\max \left\{ \tau(0, x; \mathfrak{M}_T^{(d-1)}) \mid \|x\|_\infty \leq 1 \right\}^{d+\varepsilon} \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\left(\sum_{Z \in \mathfrak{M}} \mathbb{1}_{\{Z \cap [0, 1]^d\}} \right)^{d+\varepsilon} \right] \int t^{d+\varepsilon} \mathbb{Q}(dt) < \infty. \end{aligned}$$

Theorem 6.1.4 liefert damit die Behauptung. \square

Um die Tragweite und Allgemeinheit von Theorem 6.1.4 zu illustrieren, möchten wir auf zwei Dinge hinweisen.

Den Verallgemeinerungen des Modells auf zufälligen Mosaiken sind kaum Grenzen gesetzt. Es wäre beispielsweise möglich Zellen mit zufälligen Zeiten zu versehen, Zeiten deterministisch aus Charakteristika des Mosaiks und der Zell- bzw. Seitenflächenumgebung zu berechnen oder auch solche Ansätze zu vermischen. Der Nachweis der Ergodizität sollte dabei wegen Lemma 7.1.1 kaum ein Problem darstellen. Die Momentenbedingung ist so schwach, dass sie auch in komplizierteren Modellen gut nachweisbar sein sollte.

Es ist jedoch auch möglich, sich vollkommen von zufälligen Mosaiken zu lösen. Dazu möchten wir kurz das Modell aus [LW09] vorstellen. Wir benötigen dafür zufällige Felder im \mathbb{R}^d . Wir werden für diese keinerlei Einführung geben und

6. First-Passage Perkolaton

stattdessen auf das Buch von Azaïs und Wschebor [AW09] verweisen.

Sei F die Menge der stetigen Abbildungen von \mathbb{R}^d in die Menge der symmetrischen positiv definiten $d \times d$ Matrizen. Jedes $g \in F$ induziert eine Pseudometrik auf \mathbb{R}^d , indem jeder stetig differenzierbaren Kurve γ via

$$L(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), g(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$$

eine Länge zugeordnet wird. Der Abstand $\tau(x, y; g)$ zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist dann via

$$\tau(x, y; g) := \inf_{\gamma} L(\gamma)$$

definiert, wobei das Infimum über alle stückweise stetig differenzierbaren Kurven genommen wird, die in x starten und in y enden. Für ein $g \in F$ sei die Verschiebung $\theta_x g$, $x \in \mathbb{R}^d$ durch $\theta_x g(y) := g(y - x)$ definiert. Ist nun g ein stark ergodisches zufälliges Element in F (Ergodizität und Stationarität sind wie immer bzgl. θ_x definiert), dann ist wegen Lemma 7.1.1 klar, dass $\tau(\cdot, \cdot; g)$ eine stark ergodische zufällige Pseudometrik ist. Für die Länge einer Kurve $\gamma(t) := ut$ mit $t \in [0, 1]$, $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ gilt

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\langle u, g(ut)u \rangle} dt \leq \int_0^1 \|g(ut)\| dt,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Spektralnorm meint. Daher ist

$$\max\{\tau(0, x; g) \mid \|x\|_{\infty} \leq 1\} \leq \max\{\Lambda(x) \mid \|x\|_{\infty} \leq 1\}$$

wobei $\Lambda(x)$ den größte Eigenwert von $g(x)$ meint. Dies stellt eine klare Bedingung an g , unter der wir Theorem 6.1.4 auf $\tau(\cdot, \cdot; g)$ anwenden können.

Ein leicht visualisierbares Beispiel erhalten wir, wenn wir $g(x) := f(x)I$ als zufälliges positives Vielfaches der Einheitsmatrix wählen. In diesem Fall ist die Zeit, die für eine Kurve γ benötigt wird, gerade die Fläche unter der nichtnegativen Funktion f entlang der Kurve γ . Dies könnte sehr gut als stetiges Modell für die Ausbreitung in einem Medium mit zufälliger Dichte genutzt werden. Die Momentenbedingung vereinfacht sich in diesem Fall dazu, dass ein $d + \varepsilon$ Moment des Maximums von f existieren muss.

6.2. Die Positivität der Zeitkonstante

Nachdem die Existenz der Halbnorm μ geklärt ist, wollen wir uns deren Eigenschaften widmen. Es ist klar, dass sich Spiegelsymmetrien in der Verteilung

6.2. Die Positivität der Zeitkonstante

von τ auf μ bzw. S übertragen. Liegt Rotationssymmetrie vor, folgt ebenso, dass μ auf dem Rand des Einheitsballes konstant ist, d.h. falls $\mu(e_1) > 0$ gilt, ist S eine Kugel. Darüber hinaus ist selbst für den Fall der First-Passage Perkolation auf \mathbb{Z}^d wenig bekannt. Es gibt im Wesentlichen grobe Abschätzungen für $\mu(e_1)$ für bestimmte Verteilungen der Zeiten [AP02], die Aussage, dass $\mu(x)$ im Sinne der schwachen Konvergenz stetig von der Verteilung der Zeiten abhängt [CK81], [Kes86] und die schon in Theorem 6.1.1 erwähnte Charakterisierung der Positivität von μ . Die Situation bei zufälligen Metriken oder bei zufälligen Mosaiken ist erwartungsgemäß schlechter. Schranken an μ könnten wir zwar unter gewissen starken Bedingungen zeigen, diese wären jedoch vollkommen unbrauchbar, da sie nicht ansatzweise in der Nähe der wahren Werte liegen würden. Die Stetigkeitsaussage benötigt einige andere Ergebnisse, die sich in der Gesamtheit schwer auf diese allgemeinen Fälle übertragen lassen.

Es bleibt also die Positivität von μ zu untersuchen. Wir werden uns dazu sofort auf zufällige Mosaik spezialisieren. Dabei stellen wir zuerst fest, dass im Falle von konstanten Zeiten μ positiv ist, falls neben der Ergodizität und der Momentenbedingung auch Voraussetzung (Z3) gegeben ist. Sind die Zeiten fast sicher konstant gleich 1, so schreiben wir $\mathfrak{M}_1^{(d-1)}$ anstelle von $\mathfrak{M}_T^{(d-1)}$. In diesem Fall gilt f.s.

$$B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)}) = \bigcup_{Z \in B_n(0; \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})} Z.$$

6.2.1 Theorem

Sei $\mathfrak{M}_1^{(d-1)}$ ein stark ergodischer markierter Seitenflächenprozess, dessen Marken fast sicher konstant 1 sind. Es gelten außerdem die Momentenbedingungen aus Korollar 6.1.6 und es sei μ die zugehörige Halbnorm. Erfüllt \mathfrak{M} die Bedingung (Z3), so ist $\mu(x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

Beweis: Es sei daran erinnert, dass es wegen Bedingung (Z3) für fast alle Realisierungen \mathfrak{m} des Mosaiks \mathfrak{M} ein $n_0(\mathfrak{m}) \in \mathbb{N}$ und ein $c_1 > 0$ gibt, sodass für alle $n > n_0(\mathfrak{m})$

$$\min_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \sum_{v \in \alpha} 1 - U_v \geq c_1 n$$

gilt. Dabei ist

$$1 - U_v = \mathbb{1}\{\text{Keine Zelle von } \mathfrak{M} \text{ schneidet} \\ v^{\square_{\delta_2}} \text{ und } \{w \in \mathbb{Z}^d \mid \|w - v\|_{\infty} \geq 2\}^{\square_{\delta_2}}\}$$

und

$$\zeta^{\square_{\delta_2}} := \delta_2 \left(\zeta + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d \right), \quad \zeta \subset \mathbb{Z}^d.$$

Das heißt, jedes Gittertier der Größe n enthält wenigstens $c_1 n$ Knoten, die mit δ_2 -Boxen korrespondieren, bei denen ein Pfad, der $v^{\square_{\delta_2}}$ und $\{w \in \mathbb{Z}^d \mid \|w -$

6. First-Passage Perkolaton

$v\|_\infty \geq 2\}^{\square\delta_2}$ verbindet, mindestens eine Zellwand queren muss. Daher gibt es ein $r \in \mathbb{R}$, sodass für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x\|_1 \geq r$ jeder Pfad von 0 nach x mindestens $c_1\|x\|_1/(3^d\delta_2)$ Zellwände kreuzen muss. Daraus folgt die Behauptung. \square

Mit dieser Herangehensweise könnten wir auch für zufällige Metriken Bedingungen aufstellen, die die Positivität von μ implizieren. Diese wären jedoch im konkreten Spezialfall schwer nachzuweisen.

Wenn die Zeiten unabhängig identisch verteilt sind, würden wir hoffen, ebenfalls einen qualitativen Unterschied zeigen zu können, je nachdem ob die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zeit gleich null ist, kleiner oder größer als die kritische Perkolationswahrscheinlichkeit ist (vgl. Theorem 6.1.1). Jedoch scheint Bedingung (Z2) dafür nicht zu genügen. Da wir im Moment die Bedingung, die wir bräuchten in keinem einzigen zufälligen Mosaik nachweisen können, beschränken wir uns hier darauf zu zeigen, dass mit gewisser positiver Wahrscheinlichkeit eine Kante die Zeit null erhalten kann und trotzdem μ noch positiv ist.

6.2.2 Theorem

Sei $\mathfrak{M}_T^{(d-1)}$ ein stark ergodischer unabhängig markierter Seitenflächenprozess mit Markenverteilung \mathbb{Q} die auf $[0, \infty)$ konzentriert ist. Es gelte außerdem die Momentenbedingung aus Theorem 6.1.6 und es sei μ die zugehörige Halbnorm. Erfüllt \mathfrak{M} die Bedingungen (Z2) und (Z3), so gibt es eine Konstante $c > 0$ derart, dass $\mu(x) > 0$ für alle $x \neq 0$ gilt, falls $\mathbb{Q}(\{0\}) < c$ ist.

Beweis: Nach Theorem 4.1.2 gibt es eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$, sodass fast sicher die Anzahl $|\mathcal{A}_n(\mathcal{G}_m)|$ von Mosaiktieren der Größe n für n groß genug durch c_1^n beschränkt ist. Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_n :=$ „Es existiert ein Pfad γ der Länge n , der in Z_0 startet und dessen Gesamtzeit nicht länger ist als $c_2 n$ “. Jeder Pfad der in Z_0 startet ist ein Mosaiktier, also erhalten wir mit der Markov-Ungleichung und wegen der Unabhängigkeit der Zeiten für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_n] &\leq \sum_{\gamma} \mathbb{P} \left[\sum_{e \in \gamma} T_e \leq c_2 n \right] \\ &\leq c_1^n e^{tc_2 n} \mathbb{E}[e^{-tT_1}]^{(n-1)} \\ &\leq c_1^n e^{tc_2 n} (\mathbb{P}[T_1 < \varepsilon] + e^{-t\varepsilon} \mathbb{P}[T_1 \geq \varepsilon])^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Falls $\mathbb{P}[T_1 = 0] < c_1^{-1}$ gilt, so finden wir auch ein $\varepsilon > 0$, $t \in (0, \infty)$ und $c_2 > 0$ (in dieser Reihenfolge), sodass $e^{tc_2} (\mathbb{P}[T_1 < \varepsilon] + e^{-t\varepsilon} \mathbb{P}[T_1 \geq \varepsilon]) < c_1^{-1}$ gilt. Das Borel-Cantelli-Lemma zeigt dann, dass fast sicher nur endlich viele A_n eintreten. Das heißt, für fast jede Realisierung m von \mathfrak{M} wird die Zeit $c_2 n$ benötigt,

6.3. Ein graphentheoretischer Ergodensatz

um einen Weg durch n Zellen zurückzulegen.

Aus Theorem 6.2.1 folgt jedoch, dass wir in fast jeder Realisierung m irgendwann mindestens $c_3\|x\|_2$ Zellen durchqueren müssen, um von 0 zu einem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ zu gelangen. Ist also $\|x\|_2$ groß genug, so ist die Passierzeit von 0 nach x größer als $c_2c_3\|x\|_2$, woraus die Behauptung folgt. \square

6.3. Ein graphentheoretischer Ergodensatz

Wir wenden uns den Anwendungen der bisherigen Resultate dieses Kapitels zu. Wir hatten in Kapitel 5 bereits angedeutet später die Voraussetzungen für die Anwendung von Theorem 5.2.2 in konkreten Fällen nachzuweisen. Dazu wird uns eine Variante des räumlichen Ergodensatzes behilflich sein, die aus dem Shape-Theorem folgt. Zuerst möchten wir an den räumlichen Ergodensatz erinnern, der auf Wiener zurück geht. Wir werden dabei die Version aus [Kal02] direkt auf unseren Rahmen ergodischer Mosaik spezialisieren.

6.3.1 Theorem [Kal02, Theorem 10.14]

Sei \mathfrak{M} ein zufälliges stationäres Mosaik, $\mathcal{I} \subset \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ die σ -Algebra der verschiebungsinvarianten Ereignisse und $W_1 \subset W_2 \subset \dots$ eine Folge beschränkter konvexer Mengen im \mathbb{R}^d , deren Innenradien gegen unendlich gehen. Ist $f : \mathbf{M} \rightarrow [0, \infty)$ messbar, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(W_n)} \int_{W_n} f(\theta_x \mathfrak{M}) dx = \mathbb{E}[f(\mathfrak{M}) \mid \mathcal{I}] \quad \text{f.s.}$$

Die Konvergenz gilt in L^p , wenn $\mathbb{E}[f(\mathfrak{M})^p] < \infty$ für $p \geq 1$ ist. Insbesondere ist der Limes f.s. konstant, wenn \mathfrak{M} außerdem ergodisch ist.

Existiert einer Grenzform S für \mathfrak{M} im Sinne von Lemma 6.1.5 Punkt eins, so unterscheiden sich die Bälle bzgl. der Graphenmetrik $\tau(x, y; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})$ nur wenig von den Bällen in der Norm μ . Dies gibt uns die Möglichkeit im räumlichen Ergodensatz direkt über diese Bälle anstelle von deterministischen Bällen einer Norm zu mitteln. Dadurch werden Anwendungen auf den von \mathfrak{M} erzeugten zufälligen Graphen $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ ermöglicht.

Ist \mathfrak{M} ein ergodisches zufälliges Mosaik, so sagen wir \mathfrak{M} erfüllt ein Shape-Theorem mit Grenzform S , wenn fast sicher für jedes $\varepsilon > 0$ und n groß genug

$$(1 - \varepsilon)S \subset \frac{1}{n}B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)}) \subset (1 + \varepsilon)S \quad (6.6)$$

gilt (vgl. Lemma 6.1.5 und Theorem 6.2.1). Es ist leicht einzusehen, dass S eine Kugel $B_r(0, \mathbb{R}^d)$ mit $r > 0$ enthalten muss.

6. First-Passage Perkolaton

Die Ergebnisse des folgenden Theorems lassen sich im Sinne Palm'scher Wahrscheinlichkeiten interpretieren. Dazu müssen wir ein zufälliges Mosaik \mathfrak{M} , welches wir als Partikelprozess $\mathfrak{M} = \{Z_i \in \mathcal{K} \mid i \in \mathbb{N}\}$ definiert haben, als markierten Punktprozess $\mathfrak{M}' := \{(z(Z_i), Z_i - z(Z_i)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ mit Markenraum \mathcal{K} interpretieren. Dabei ist $z : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^d$ die in Abschnitt 4.1 eingeführte Zentrumsfunktion, die jeder Zelle $Z \in \mathcal{K}$ auf verschiebungskovariante Weise ein Zentrum $z(Z)$ zuordnet. Die Funktion z kann beispielsweise den Schwerpunkt von Z ermitteln.

Für diese Darstellung definieren wir die Zellintensität

$$\gamma_{\mathfrak{M}} := \mathbb{E}[|\{(x, Z) \in \mathfrak{M}' \mid x \in [0, 1]^d\}|] = \mathbb{E}[|\{Z \in \mathfrak{M} \mid z(Z) \in [0, 1]^d\}|]$$

und die Palm'sche Verteilung (vgl. [SW08, Theorem 3.5.2])

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{M}'}^0[A] := \frac{1}{\gamma_{\mathfrak{M}}} \mathbb{E} \left[\sum_{(x, Z) \in \mathfrak{M}'} \mathbb{1}_{[0, 1]^d}(x) \mathbb{1}_{\{(Z, \theta_x \mathfrak{M}') \in A\}} \right],$$

mit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}) \otimes \mathcal{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K})$. Wir können $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}'}^0$ interpretieren als Verteilung, bedingt darauf, dass im Ursprung das Zentrum der Nullzelle liegt. Wir reden in diesem Zusammenhang auch von der typischen Zelle des Mosaiks \mathfrak{M} . Für messbare Funktionen $f : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K} \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}) \rightarrow [0, \infty)$ gilt dann wie gewohnt ein Campbell'sches Theorem [SW08, Theorem 3.5.3]

$$\mathbb{E} \left[\sum_{(x, Z) \in \mathfrak{M}'} f(x, Z, \mathfrak{M}') \right] = \gamma_{\mathfrak{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K} \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K})} f(x, Z, \theta_{-x} \mathfrak{m}) \mathbb{P}_{\mathfrak{M}'}^0(d(Z, \mathfrak{m})) dx.$$

Bevor wir den erwähnten Ergodensatz aufstellen und beweisen, überlegen wir uns kurz noch einen Zusammenhang zwischen der Palm'schen Verteilung und der Verteilung eines zufälligen Mosaiks \mathfrak{M}' .

Es sei $h : \mathcal{K} \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}) \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare translationsinvariante Funktion. Dabei meint translationsinvariant, dass $h(Z, \mathfrak{m}') = h(x + Z, \theta_{-x} \mathfrak{m}')$ gilt. Wir definieren die Funktion $\tilde{h} : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}) \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\tilde{h}(\mathfrak{m}') := h(Z_0(\mathfrak{m}'), \mathfrak{m}') \tag{6.7}$$

und erhalten aus der Translationsinvarianz von h , dass für jedes Mosaik $\mathfrak{m}' \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K})$, jeden Punkt $(x, Z) \in \mathfrak{m}'$ und alle $y_1, y_2 \in \text{int}(Z + x)$

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\theta_{-y_1} \mathfrak{m}') &= h(Z_0(\theta_{-y_1} \mathfrak{m}'), \theta_{-y_1} \mathfrak{m}') \\ &= h(Z_0(\theta_{-y_1} \mathfrak{m}') + y_1 - x + x - y_2, \theta_{-y_2} \mathfrak{m}') \\ &= h(Z_0(\theta_{-x} \mathfrak{m}') + x - y_2, \theta_{-y_2} \mathfrak{m}') \\ &= h(Z_0(\theta_{-y_2} \mathfrak{m}'), \theta_{-y_2} \mathfrak{m}') \\ &= \tilde{h}(\theta_{-y_2} \mathfrak{m}') \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.3. Ein graphentheoretischer Ergodensatz

gilt. Mit Hilfe des Campbell'schen Theorems angewendet auf $f(x, Z, \mathfrak{m}') := \mathbb{1}\{0 \in Z + x\} \tilde{h}(\mathfrak{m}') \text{Vol}(Z)^{-1}$ erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left[\frac{h(\mathfrak{M}')}{\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}'))} \right] \\
 &= \gamma_{\mathfrak{M}} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{K} \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K})} h(\theta_{-x} \mathfrak{m}') \frac{\mathbb{1}\{0 \in Z + x\}}{\text{Vol}(Z)} \mathbb{P}_{\mathfrak{M}'}^0(d(Z, \mathfrak{m}')) dx \\
 &= \gamma_{\mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K} \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K})} \int_{\mathbb{R}^d} h(Z_0(\mathfrak{m}'), \mathfrak{m}') \frac{\mathbb{1}\{-x \in Z\}}{\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{m}'))} dx \mathbb{P}_{\mathfrak{M}'}^0(d(Z, \mathfrak{m}')) \\
 &= \gamma_{\mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K} \times \mathbf{N}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K})} h(Z, \mathfrak{m}') \mathbb{P}_{\mathfrak{M}'}^0(d(Z, \mathfrak{m}')).
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Insbesondere gilt dann für die Zellintensität

$$\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}] = \gamma_{\mathfrak{M}}. \tag{6.10}$$

6.3.2 Theorem

Sei \mathfrak{M} ein ergodisches zufälliges Mosaik, das ein Shape-Theorem mit konvexer Grenzform S erfüllt. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})|}{n^d} = \text{Vol}(S) \mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}] = \text{Vol}(S) \gamma_{\mathfrak{M}} \quad \text{f.s.}$$

Weiter gilt für jede messbare Funktion $g : \mathbf{M} \rightarrow [0, \infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)}))} \int_{B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})} g(\theta_x \mathfrak{M}) dx = \mathbb{E}[g(\mathfrak{M})] \quad \text{f.s.}$$

Sind h und \tilde{h} wie vor und in (6.7) definiert, so gilt f.s.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})|} \sum_{Z \in B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})} h(Z, \mathfrak{M}) \\
 &= \frac{\mathbb{E}[\tilde{h}(\mathfrak{M}) \text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]}{\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]} \\
 &= \gamma_{\mathfrak{M}} \int h(Z, \mathfrak{m}') \mathbb{P}_{\mathfrak{M}'}^0(d(Z, \mathfrak{m}')).
 \end{aligned}$$

Beweis: Wir zeigen zuerst die zweite Aussage. Für $\varepsilon > 0$ wenden wir den räumlichen Ergodensatz 6.3.1 mit $f := g$ und $W_n := n(1 - \varepsilon)S$ an. Dann gilt f.s.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[f(\mathfrak{M})] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(n(1 - \varepsilon)S)} \int_{n(1 - \varepsilon)S} f(\theta_x \mathfrak{M}) dx \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \varepsilon)^d (1 - \varepsilon)^{-d}}{\text{Vol}(B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)}))} \int_{B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})} g(\theta_x \mathfrak{M}) dx.
 \end{aligned}$$

6. First-Passage Perkolaton

Die Abschätzung nach unten ist analog und die zweite Behauptung folgt. Die erste Gleichheit der ersten Behauptung folgt, indem wir dieselbe Abschätzung mit $f(\mathfrak{M}) := \text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}$ und $W_n := -nS$ durchführen und einsehen, dass f.s.

$$\begin{aligned} \int_{-B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})} \frac{1}{\text{Vol}(Z_0(\theta_x \mathfrak{M}))} dx &= \int_{-B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})} \frac{1}{\text{Vol}(Z_{-x}(\mathfrak{M}))} dx \\ &= \sum_{Z \in B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})} \int_Z \frac{1}{\text{Vol}(Z_x(\mathfrak{M}))} dx \\ &= |B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})| \end{aligned}$$

gilt. Für die zweite Gleichheit nutzen wir (6.10).

Für die dritte Behauptung wenden wir neben (6.9) den räumlichen Ergodensatz mit $f(\mathfrak{M}) := \tilde{h}(\mathfrak{M})/\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))$ und $W_n := -nS$ an. Dann sehen wir mit den gleichen Argumenten wie bisher ein, dass f.s.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{\tilde{h}(\mathfrak{M})}{\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))}\right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Vol}(nS)} \int_{-B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})} \frac{\tilde{h}(\theta_x \mathfrak{M})}{\text{Vol}(Z_0(\theta_x \mathfrak{M}))} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]}{|B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})|} \int_{-B_n(0; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})} \frac{\tilde{h}(\theta_x \mathfrak{M})}{\text{Vol}(Z_{-x}(\mathfrak{M}))} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]}{|B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})|} \sum_{Z \in B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})} \int_Z \frac{\tilde{h}(\theta_{-x} \mathfrak{M})}{\text{Vol}(Z_x(\mathfrak{M}))} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]}{|B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})|} \sum_{Z \in B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})} \int_Z \frac{h(Z_x(\mathfrak{M}), \mathfrak{M})}{\text{Vol}(Z_x(\mathfrak{M}))} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]}{|B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})|} \sum_{Z \in B_n(Z_0(\mathfrak{M}); \mathcal{G}_{\mathfrak{M}})} h(Z, \mathfrak{M}) \end{aligned}$$

gilt. □

Eine Anwendung des Theorems 6.3.2 erhalten wir, indem wir die erste und dritte Aussage nutzen um für fast alle Realisierungen \mathfrak{m} eines zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} , das ein Shape-Theorem mit konvexer Grenzform S erfüllt, die Voraussetzungen von Theorem 5.2.2 nachzuweisen. Dazu werden jetzt nur noch die Momenteneigenschaften $\mathbb{E}[\text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]$ und $\mathbb{E}[|\partial^+ Z_0(\mathfrak{M})| \text{Vol}(Z_0(\mathfrak{M}))^{-1}]$ benötigt. Dies sind natürlich deutlich stärkere Voraussetzungen, als sie für 5.1.2 notwendig sind. Jedoch kann der Beweis von Gandolfi et al. im Fall des \mathcal{Z}^d -Gitters mit moderatem Aufwand quantifiziert werden [Cer15], sodass dies in der Zukunft für zufällige Mosaike ebenfalls möglich werden könnte.

Weitere Anwendungen ergeben sich, wenn man sich für den Graphen $\mathcal{G}_{\mathfrak{M}}$ und

6.3. Ein graphentheoretischer Ergodensatz

dessen „räumliche Struktur“ interessiert. Beispiele für die translationsinvariante Funktion $h(Z, m')$ wären dann die Anzahl der Nachbarn von Z , das Volumen von Z oder auch die Wahrscheinlichkeit, dass Z in einem unendlichen Cluster liegt, wenn das Mosaik m' unabhängig gefärbt wird. Diese könnten alle mit der dritten Aussage gemittelt werden.

Bevor wir diesen Abschnitt abschließen, möchten wir nochmal bemerken, dass die geforderten Momentenbedingungen an das zufällige Mosaik relativ leicht für viele gängige Beispiele zu zeigen sind. Dies werden wir im Kapitel 7 tun. Dort wird sich ebenfalls zeigen, dass die in Theorem 6.2.1 geforderte Bedingung (Z3) eine relevante Einschränkung ist, die sich z.B. nicht für STIT- oder Poisson-Hyperebenen-Mosaik zeigen lässt. Im Fall der Poisson-Hyperebenen-Mosaik sind wir jedoch aufgrund der speziellen Konstruktion in der Lage, trotzdem nachzuweisen, dass sie ein Shape-Theorem mit konvexer Grenzform S erfüllen, die wir *exakt* bestimmen können (siehe Abschnitt 7.6). Dies ist bisher nur auf Gittern in zwei Spezialfällen möglich gewesen. Einer davon findet sich in [Sep98], den zweiten erhalten wir wie folgt. Für jede Koordinatenrichtung $i \in [d]$ generieren wir eine Folge von u.i.v. Zeiten $(T_j^{(i)})_{j \in \mathbb{Z}}$. Jede Kante $v + \{0, e_i\}$ mit $v \in \mathbb{Z}^d$ erhält dann die Zeit $T_{v^{(i)}}^{(i)}$. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Fall aufgrund der eingebauten Abhängigkeiten, der direkte Weg immer der kürzeste ist. Der Fall des Poisson-Hyperebenen-Mosaiks überträgt dieses Prinzip ins Kontinuum.

7. Beispiele

In diesem Kapitel wollen wir einige Beispiele liefern, in denen sich die allgemeinen Bedingungen aus den vorherigen Kapiteln nachweisen lassen. Die wichtigste Rolle spielt dabei das *Voronoi-Mosaik*.

Ist $\varphi \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d)$ eine lokal-endliche, nicht leere Menge von Punkten, so heißt für $x \in \varphi$ die Menge

$$\mathcal{V}(x, \varphi) := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall z \in \varphi : \|y - x\|_2 \leq \|y - z\|_2\},$$

die *Voronoi-Zelle* von x . Sind alle Voronoi-Zellen beschränkt, so bilden sie das *Voronoi-Mosaik*

$$\mathfrak{V}(\varphi) := \{\mathcal{V}(x, \varphi) \mid x \in \varphi\},$$

das von φ induziert wird. Diese Begriffsbildung ist gerechtfertigt, da es sich bei $\mathfrak{V}(\varphi)$ tatsächlich um ein Mosaik handelt [SW08, Theorem 10.2.1]. Die Voronoi-Zellen eines stationären Punktprozesses Φ sind fast sicher alle beschränkt. Ein stationärer Punktprozess Φ erzeugt also fast sicher ein stationäres zufälliges Mosaik $\mathfrak{V}(\Phi)$ [SW08, Theorem 10.2.2].

Wir setzen in diesem Abschnitt stets voraus, dass die betrachteten stationären Punktprozesse nicht 0 sind.

7.1. Ergodische Mosaik (Z1)

Wenden wir uns zunächst der Ergodizität zu. Diese lässt sich in vielen grundlegenden Modellen nachrechnen, aber das folgende Lemma zeigt auch einen Weg auf, wie sich Ergodizität auf komplizierte Konstruktionen übertragen lässt. Wir definieren dazu nochmal Ergodizität in einem sehr allgemeinen Rahmen, der die bisherigen Definitionen mit einschließt. Sei $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $G := \mathbb{R}^d$ oder $G := \mathbb{Z}^d$ eine abelsche Gruppe. Eine Transformation $S : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ heißt μ -invariant, falls $\mu(A) = \mu(S^{-1}A)$ für alle $A \in \mathcal{X}$. Sei weiter $T := \{T_x \mid x \in G\}$ mit einer Familie von μ -invarianten Transformationen mit der Halbgruppeneigenschaft $T_{x+y} = T_x \circ T_y$ für alle $x, y \in G$ und $\mathcal{I}_x := \{A \in \mathcal{X} \mid T_x^{-1}A = A\}$ die σ -Algebra der T_x -invarianten Ereignisse sowie $\mathcal{I} := \bigcap_{x \in G} \mathcal{I}_x$ die σ -Algebra der T -invarianten Ereignisse. Dann heißt μ *stationär*, wenn alle $T_x \in T$ μ -invariant sind. Das Maß μ heißt *T-ergodisch*,

7. Beispiele

wenn $\mu(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{I}$ gilt und es heißt *stark T -ergodisch*, wenn $\mu(A) \in \{0, 1\}$ für alle $x \in G$ und $A \in \mathcal{I}_x$ gilt.

7.1.1 Lemma

Sei $T := \{T_x \mid x \in G\}$ eine Familie von Transformationen, $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit einem (stark) T -ergodischen Maß μ und $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ ein Messraum. Sei weiter $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ messbar und $\nu := \mu \circ f^{-1}$ das Bildmaß von f . Ist $S = \{S_x \mid x \in G\}$ eine Familie von Transformationen auf \mathbb{Y} , sodass für alle $x \in G$

$$S_x \circ f = f \circ T_x$$

gilt, so ist ν (stark) S -ergodisch.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{Y}$ ein S -invariantes (S_x -invariantes) Ereignis. Es gilt für alle $x \in G$

$$T_x^{-1} \circ f^{-1}(A) = (f \circ T_x)^{-1}(A) = (S_x \circ f)^{-1}(A) = f^{-1} \circ S_x^{-1}(A) = f^{-1}(A).$$

Also ist $f^{-1}(A)$ ein T -invariantes (T_x -invariantes) Ereignis und damit folgt

$$\nu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \in \{0, 1\}.$$

□

Betrachten wir als eine Anwendung dieses Lemmas, das zufällige Voronoi-Mosaik $\mathfrak{V}(\Phi)$ eines Punktprozesses Φ auf \mathbb{R}^d . Es ist klar, dass die Konstruktion der Zellen aus einer Punktkonfiguration mit einer Verschiebung um den Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ vertauschbar ist. Also ist $\mathfrak{V}(\Phi)$ (stark) ergodisch, wenn Φ (stark) ergodisch ist.

Als Beispiele für (stark) ergodische Punktprozesse sind zu nennen Poisson-Punktprozesse, stationäre Determinantal-Punktprozesse [Sos00], Cox-Prozesse deren steuerndes Maß (stark) ergodisch ist [DVJ03], Cluster-Prozesse bei denen die Clusterzentren einen (stark) ergodischen Punktprozess bilden (z.B. Poisson-Cluster-Prozesse) [DVJ03] und einige Gibbs'sche Punktprozesse [Hei92]. Wir bemerken außerdem, dass für einen (stark) ergodischen Punktprozess Φ mit Verteilung \mathbb{P}_Φ auch jeder stationäre Punktprozess Γ , dessen Verteilung \mathbb{P}_Γ absolut stetig bezüglich \mathbb{P}_Φ ist, (stark) ergodisch ist. Dies folgt direkt aus der Definition absoluter Stetigkeit, da für ein invariantes Ereignis A entweder $\mathbb{P}_\Phi[A] = 0$ oder $\mathbb{P}_\Phi[A^c] = 0$ gilt. Dies zeigt ebenfalls die (starke) Ergodizität großer Klassen von Gibbs'schen Punktprozessen, da diese oft als Punktprozesse mit einer Dichte bezüglich eines Poisson-Prozesses definiert werden.

Weiterhin wurde Ergodizität für sogenannte STIT-Mosaik in [MN14] gezeigt. Wir werden STIT-Mosaik nicht einführen und verweisen stattdessen auf die Arbeiten [NW05], [MNW08] sowie [ST13] und die Referenzen darin.

Für Poisson-Hyperebenen-Mosaik wurde in [SW08, Thm. 10.5.3.] gezeigt, dass

diese mischend, also auch stark ergodisch, sind. Wir werden in Abschnitt 7.6 eine kurze Einführung der Poisson-Hyperebenen-Mosaik geben und verweisen für weitere Details auf [SW08].

7.2. Zahme Mosaik (Z2)

Die Bedingung (Z2) hängt vom Punktprozess der Zellzentren ab und ist schon wesentlich restriktiver, da sie relativ gute Kenntnis der globalen Abhängigkeitsstruktur verlangt. Die beiden einfachsten Beispiele ergeben sich, wenn die Zellzentren einen Poisson-Prozess mit konstanter Intensität oder einen Hard-Core Punktprozess bilden. Beim Poisson-Prozess ist klar, dass das zufällige Feld Y aus unabhängigen Zufallsvariablen mit exponentiellem Tail besteht, was nach [Mar02] bereits für (Z2) genügt. Bei einem Hard-Core Punktprozess ist es per Definition so, dass keine zwei Punkte einen Abstand kleiner als eine festgelegte Konstante haben, dadurch ist die Anzahl der Punkte in jedem Würfel beschränkt durch eine globale Konstante.

Die Ergebnisse von Martin [Mar02] lassen sich mit wenigen Modifikationen auf k -abhängige stationäre Felder mit den selben Voraussetzungen an die Tails verallgemeinern, wodurch (Z2) ebenfalls für gewisse k -abhängige Punktprozesse nachweisbar wird. Im allgemeinen Fall wird jedoch oft nur die Möglichkeit bleiben, die Voraussetzungen des folgenden Lemmas nachzuprüfen. Wir erinnern an die Definition des zufälligen Feldes $Y := Y(\mathfrak{M}, \delta) := \{Y_v(\mathfrak{M}, \delta) \mid v \in \mathbb{Z}^d\}$ mit

$$Y_v(\mathfrak{M}, \delta) := |\{Z \in \mathfrak{M} \mid z(Z) \in v^{\square\delta}\}|$$

und daran, dass wir für $\alpha \subset \mathbb{Z}^d$ die Menge $\alpha^{\square} := \delta_2(\alpha + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d)$ und für definiert haben (vgl. Abb. 4.2).

7.2.1 Lemma

Sei $\Phi := \{z(Z) \mid Z \in \mathfrak{M}\}$ der Punktprozess der Zell-Zentren eines zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} und es gebe ein $t > 0$ und $c_1 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ groß genug und alle $\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}$

$$L_{\Phi}(-t\mathbb{1}_{\alpha^{\square}}) = \mathbb{E} \left[\exp(t\Phi(\alpha^{\square})) \right] \leq c_1^n$$

gilt. Dann gibt es ein $c_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \frac{1}{n} \sum_{v \in \alpha} Y_v \leq c_2$$

gilt.

7. Beispiele

Beweis: Wegen Subadditivität, Lemma 2.4.1 und Markov-Ungleichung mit der Funktion e^{tx} gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \sum_{v \in \alpha} Y_v > c_2 n \right] &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \mathbb{P} \left[\sum_{v \in \alpha} Y_v > c_2 n \right] \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} e^{-c_2 t n} \mathbb{E} \left[\exp \left(t \sum_{v \in \alpha} Y_v \right) \right] \\ &\leq \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} e^{-c_2 t n} \mathbb{E} \left[\exp(t \Phi(\alpha^\square)) \right] \\ &\leq (e(2d+1))^n e^{-c_2 t n} c_1^n. \end{aligned}$$

Das Borel-Cantelli Lemma liefert die Behauptung für c_2 groß genug. \square

Es ist zu bemerken, dass das Lemma 7.2.1 nicht von dem in die Definition von α^\square eingehenden δ_2 abhängt.

Schauen wir nun, welche Klassen von Punktprozessen diese Voraussetzung an das erweiterte Laplace-Funktional L_Φ erfüllen. Die erste große Klasse bilden die sogenannten α -schwach sub-Poisson Punktprozesse. Dies sind Punktprozesse, die in gewissem Sinne ihre Punkte gleichmäßiger im Raum verteilen als Poisson-Punktprozesse. Wir nennen einen Punktprozess Φ α -schwach sub-Poisson, wenn

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^k \Phi(A_i) \right] \leq \prod_{i=1}^k \mathbb{E}[\Phi(A_i)]$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkten Borelmengen A_1, \dots, A_k gilt. Das folgende Lemma zeigt, dass für negative Funktionen das erweiterte Laplace-Funktional solcher Prozesse kleiner oder gleich dem eines Poisson-Prozesses mit gleichem Intensitätsmaß ist.

7.2.2 Proposition ([BY14, Proposition 2.2])

Sei Φ ein einfacher Punktprozess auf \mathbb{R}^d mit lokal beschränktem Intensitätsmaß Θ und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ messbar. Ist Φ α -schwach sub-Poisson, so gilt

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Phi(dx) \right) \right] \leq \exp \left(\int_{\mathbb{R}^d} (e^{f(x)} - 1) \Theta(dx) \right).$$

Ist also Φ stationär mit Intensität $\theta \in (0, \infty)$ und erfüllt es die Voraussetzungen

von Proposition 7.2.2, so gilt für alle $\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}$

$$\begin{aligned} L_\Phi(-t\mathbf{1}_{\alpha\Box}) &\leq \exp\left(\int_{\mathbb{R}^d} (\exp(t\mathbf{1}_{\alpha\Box}) - 1)\theta \, dx\right) \\ &= \exp\left((e^t - 1)\theta \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\alpha\Box} \, dx\right) \\ &= e^{\theta(e^t - 1)\delta_2^d n}. \end{aligned}$$

Damit erfüllt Φ die Bedingung (Z2). In [BY14, Kapitel 2] werden viele Beispiele für α -schwach sub-Poisson besprochen und weitere Vergleichsmöglichkeiten für Punktprozesse diskutiert. Die wichtigste Beispiellklasse sind dabei die Determinantal-Punktprozesse.

Die Abschätzung des erweiterten Laplace-Funktional, die für Lemma 7.2.1 nötig ist, lässt sich für eine große Klasse stationärer Poisson-Cluster-Prozesses auch direkt nachrechnen.

7.2.3 Lemma

Sei $\Phi_0 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\zeta_n}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\theta_0 > 0$ und sei $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine u.i.v. Folge von Punktprozessen unabhängig von Φ_0 mit endlichem Intensitätsmaß Θ_1 . Für den Punktprozess

$$\Phi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n + \zeta_n$$

ist dann für alle $t \geq 0$ und $\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}$

$$L_\Phi(-t\mathbf{1}_{\alpha\Box}) \leq \exp\left(-\theta_0 \delta_2^d (1 - \mathbb{E}[e^{t\Psi_1(\mathbb{R}^d)}])n\right).$$

Insbesondere sind die Voraussetzungen von Lemma 7.2.1 erfüllt, wenn $\mathbb{E}[e^{t\Psi_1(\mathbb{R}^d)}] < \infty$ für ein $t > 0$.

Beweis: Das Laplace-Funktional für solche Poisson-Cluster-Prozesse ist bekannt [DVJ03] und wir erhalten

$$L_\Phi(-t\mathbf{1}_{\alpha\Box}) = \exp\left(-\int_{\mathbb{R}^d} \int 1 - e^{t\mu(\alpha\Box - x)} \mathbb{P}_{\Psi_1}(d\mu) \theta_0 \, dx\right).$$

Wir erinnern uns daran, dass für $x \in [0, x_0]$ die Ungleichung $1 - e^x \geq x(1 -$

7. Beispiele

e^{x_0}/x_0 gilt, was zu

$$\begin{aligned}
 L_{\Phi}(-t\mathbf{1}_{\alpha^{\square}}) &\leq \exp\left(-\theta_0 \int_{\mathbb{R}^d} \int \mu(\alpha^{\square} - x) \frac{1 - e^{t\mu(\mathbb{R}^d)}}{\mu(\mathbb{R}^d)} \mathbb{P}_{\Psi_1}(d\mu) dx\right) \\
 &= \exp\left(-\theta_0 \int \int_{\mathbb{R}^d} \mu(\alpha^{\square} - x) dx \frac{1 - e^{t\mu(\mathbb{R}^d)}}{\mu(\mathbb{R}^d)} \mathbb{P}_{\Psi_1}(d\mu)\right) \\
 &= \exp\left(-\theta_0 \delta_2^d n \int 1 - e^{t\mu(\mathbb{R}^d)} \mathbb{P}_{\Psi_1}(d\mu)\right) \\
 &= \exp\left(-\theta_0 \delta_2^d n (1 - \mathbb{E}[e^{t\Psi_1(\mathbb{R}^d)}])\right)
 \end{aligned}$$

führt. □

Wir bemerken noch, dass die Abschätzung im obigen Lemma scharf ist, wenn $\Psi_i := \tau\delta_0$ mit einer \mathbb{N}_0 -wertigen Zufallsvariablen τ ist. Möchte man sich auf Cluster aus einfachen Punktprozessen beschränken, so könnte man dieses Beispiel leicht abwandeln, indem man die Punkte nah beieinander setzt und dadurch beliebig nah an den Gleichheitsfall herankommen.

Ein offenes Problem ist an dieser Stelle, die Eigenschaft (Z2) für ein Poisson-Hyperebenen-Mosaik oder ein STIT-Mosaik nachzuweisen. Diese scheinen aufgrund ihrer weiterreichenden Abhängigkeiten schwerer zu behandeln zu sein.

7.3. Zahme Mosaik (Z3)

Wenden wir uns der Bedingung (Z3) zu, welche besagt, dass es ein δ_2 gibt, sodass $U := (U_v(\mathfrak{M}, \delta_2))_{v \in \mathbb{Z}^d}$ mit

$$U_v(\mathfrak{M}, \delta_2) := \mathbf{1}\{\text{Eine Zelle von } \mathfrak{M} \text{ schneidet } v^{\square\delta_2} \text{ und } \{w \in \mathbb{Z}^d \mid \|w - v\|_{\infty} \geq 2\}^{\square\delta_2}\}$$

zahm ist. Wir werden dies für Voronoi-Mosaik nachweisen, die aus verschiedenen Punktprozessen erzeugt werden. Dazu werden wir sie zuerst in eine Bedingung an die Leerwahrscheinlichkeiten des Punktprozesses umformen.

7.3.1 Lemma

Sei Φ ein stationärer Punktprozess auf \mathbb{R}^d und $\mathfrak{M} := \mathfrak{V}(\Phi)$ das Voronoi-Mosaik, welches von den Punkten in Φ erzeugt wird. Gibt es ein $\delta > 0$ und ein $c_1 < 1$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{Z}^d$ mit $|I| = n$

$$\mathbb{P}[\Phi(I^{\square\delta}) = 0] \leq c_1^n,$$

gilt, so existiert ein $\delta_2 > 0$, sodass U zahm ist.

Beweis: Ist $J \subset \mathbb{Z}^d$ mit $|J| = n$, so existiert ein $I \subset \mathbb{Z}^d$ mit $|I| = 2^d n$, sodass $J^{\square 2\delta} = I^{\square \delta}$ und somit

$$\mathbb{P}[\Phi(J^{\square 2\delta}) = 0] = \mathbb{P}[\Phi(I^{\square \delta}) = 0] \leq c_1^{2^d n}$$

gilt. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass c_1 klein ist. Die benötigte Schranke wird sich später im Beweis ergeben.

Wir wählen $c_2 \in \mathbb{N}$ ungerade mit $c_2 > 2\sqrt{d}$, setzen $\delta_2 := c_2\delta$ und überdecken jede Box v^{\square} , $v \in \mathbb{Z}^d$ mit c_2^d Würfeln der Seitenlänge δ . Sei $v \in \mathbb{Z}^d$ sowie $x, y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|x - \delta_2 v\| = \frac{\delta_2}{2}$ und $\|y - \delta_2 v\| = \frac{3\delta_2}{2}$. Es liegt also x im „inneren“ und y im „äußeren“ Rand, des für U_v relevanten Annulus (vgl. Abb. 7.1). Ist Φ derart, dass in jedem der Würfel mit Seitenlänge δ , die diesen Annulus überdecken, mindestens ein Punkt enthalten ist, so kann der Abstand von x zum Mittelpunkt z_x einer Zelle des Mosaiks, in der x liegt, nicht länger als die Diagonale eines Würfels $v^{\square \delta}$ sein. Das heißt, sie kann nicht länger als $\sqrt{d}\delta$ sein. Gleiches gilt für den Abstand von y zum Mittelpunkt z_y einer Zelle des Mosaiks, in der y liegt. Da $\|x - y\|_2 \geq \delta_2 > 2\sqrt{d}\delta$, muss auch $\|z_x - z_y\|_2 > 0$ sein. Damit können x und y nicht in der gleichen Zelle liegen und es ist $U_v = 0$.

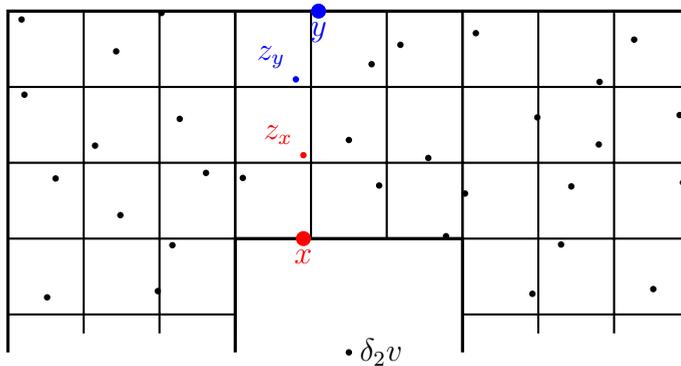


Abbildung 7.1.: Beispiel für das im Satz beschriebene Setting mit $c_2 = 3$.

Dies wiederum zeigt, dass jeder Würfel mit Seitenlänge δ in dem kein Punkt von Φ liegt, nur für höchstens $3^d - 1$ Knoten $w \in \mathbb{Z}^d$ mit $U_w = 1$ verantwortlich sein kann. Damit gibt es für jedes $\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}$ ein $\tilde{\alpha} \in \mathcal{A}_{3^d c_2^d n}^{(d)}$, sodass

7. Beispiele

$(\alpha \cup \partial^+ \alpha)^{\square \delta_2} \subset \tilde{\alpha}^{\square \delta}$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[\sum_{v \in \alpha} U_v > \frac{n}{2} \right] &\leq \mathbb{P} \left[\sum_{v \in \tilde{\alpha}} \mathbf{1}\{\Phi(v^{\square \delta}) = 0\} > \frac{n}{2(3^d - 1)} \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[\exists I \subset \tilde{\alpha}, |I| = \left\lceil \frac{n}{2(3^d - 1)} \right\rceil : \Phi(I^{\square \delta}) = 0 \right] \\ &\leq \binom{3^d c_2^d n}{\lceil \frac{n}{2(3^d - 1)} \rceil} c_1^{\lceil \frac{n}{2(3^d - 1)} \rceil}. \end{aligned}$$

Es folgt leicht aus der Stirling'schen Formel, dass $\binom{n}{qn} < c_3(q)^n$ für n groß genug, $q \in (0, 1)$ und ein $c_3(q) > 0$ gilt. Wir wählen also c_1 so klein, dass

$$(e(2d+1))^n \mathbb{P} \left[\sum_{v \in \alpha} U_v > \frac{n}{2} \right] < c_4^n$$

mit $c_4 < 1$ gilt. Damit ist wegen Lemma 2.4.1

$$\mathbb{P} \left[\max_{\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}} \sum_{v \in \alpha} U_v > \frac{n}{2} \right] \leq c_4^n$$

und die Anwendung des Borel-Cantelli Lemmas schließt den Beweis ab. \square

Als Beispiele für Punktprozesse, die mit solchen Leerwahrscheinlichkeiten aufwarten können, nehmen wir uns zuerst wieder Poisson-Cluster-Prozesse vor.

7.3.2 Lemma

Sei $\Phi_0 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{\zeta_n}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\theta_0 > 0$ und sei $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine u.i.v. Folge von Punktprozessen unabhängig von Φ_0 mit endlichem Intensitätsmaß Θ_1 . Für den Punktprozess

$$\Phi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n + \zeta_n$$

ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{Z}^d$ mit $|I| = n$

$$\mathbb{P}[\Phi(I^{\square \delta}) = 0] \leq \exp(-\mathbb{P}[\Psi_1 \neq 0] \theta_0 \delta_2^d n).$$

Insbesondere ist (Z3) für $\mathfrak{V}(\Phi)$ erfüllt.

7.4. Skalierungsmischende Mosaik

Beweis: Für eine Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[\Phi(B) = 0] &= \mathbb{E} \left[\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{(\Psi_n + \zeta_n)(B) = 0\} \right] \\
 &= \int \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[(\Psi_1 + x_n)(B) = 0] \mathbb{P}_{\Phi_0} d(x_1, x_2, \dots) \\
 &= \exp \left(- \int_{\mathbb{R}^d} (1 - \mathbb{P}[\Psi_1(B - x) = 0]) \theta_0 dx \right) \\
 &= \exp \left(- \int \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{\psi(B - x) > 0\} \theta_0 dx \mathbb{P}_{\Psi_1}(d\psi) \right) \\
 &= \exp \left(- \int \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{\exists y \in \psi : x \in B - y\} \theta_0 dx \mathbb{P}_{\Psi_1}(d\psi) \right) \\
 &= \exp \left(- \int \theta_0 \text{Vol}(B - \psi) \mathbb{P}_{\Psi_1}(d\psi) \right) \\
 &\leq \exp(-\mathbb{P}[\Psi_1 \neq 0] \theta_0 \text{Vol}(B)).
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Unabhängigkeit von Φ_0 und $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und im dritten Schritt die Formel für das erzeugende Funktional eines Poisson-Punktprozesses [DVJ03] verwendet. \square

Es gibt außerdem einige Punktprozesse, deren Leerwahrscheinlichkeiten stets kleiner sind als die eines Poisson-Prozesses mit gleicher Intensität. Für solche Punktprozesse Φ muss $U(\mathfrak{A}(\Phi, \delta_2))$ natürlich ebenfalls zahm sein. Diese Prozesse werden in der Literatur ν -schwach sub-Poisson genannt. In der Arbeit von Blaszczyzyn und Yogeshwaran [BY14] werden einige Beispiele diskutiert, insbesondere wird gezeigt, dass *stationäre Determinantal-Punktprozesse* ν -schwach sub-Poisson sind.

7.4. Skalierungsmischende Mosaik

In diesem Abschnitt möchten wir zuerst zeigen, dass sich die skalierungsmischende Eigenschaft eines Punktprozesses Φ auf das erzeugte zufällige Mosaik $\mathfrak{A}(\Phi)$ überträgt. Dazu benötigen wir zuerst ein Lemma, das zeigt, dass Leerwahrscheinlichkeiten eines skalierungsmischenden Punktprozesses polynomial in der Größe des betrachteten Gebiets fallen.

7.4.1 Lemma

Ist Φ ein stationärer skalierungsmischender Punktprozess in \mathbb{R}^d und Q ein Quader, so

7. Beispiele

gibt es ein $t_1 \in \mathbb{R}$ und Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass für alle $t > t_1$

$$\mathbb{P}[\Phi(tQ) = 0] \leq c_1 t^{-c_2}$$

gilt.

Beweis: Wie im Beweis von Theorem 4.2.2 stellen wir eine Beziehung zwischen $\{\Phi(3tQ) = 0\}$ und $\{\Phi(tQ) = 0\}$ her. Dazu genügt es einzusehen, dass sich in $3tQ$ zwei disjunkte Quader $tQ + x_1$ und $tQ + x_2$ finden lassen. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $t_0 \in \mathbb{R}$ und zwei Konstanten $c_3, c_4 > 0$, sodass für alle $t > t_0$

$$\mathbb{P}[\Phi(3tQ) = 0] \leq \mathbb{P}[\Phi(tQ + x_1) = 0, \Phi(tQ + x_2) = 0] \leq \mathbb{P}[\Phi(tQ) = 0]^2 + c_3 t^{-c_4}$$

gilt. Da $\Phi \neq 0$ ist, gilt

$$\mathbb{P}[\Phi(tQ) = 0] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Damit lässt sich ebenfalls wie in Theorem 4.2.2 die Existenz eines $t_1 \in \mathbb{R}$ und $c_5 > 0$ ableiten, für das

$$\mathbb{P}[\Phi(3^n t_1 Q) = 0] \leq c_5 3^{-c_4 n}$$

gilt. Es folgt wegen Monotonie für beliebiges $x > 1$

$$\mathbb{P}[\Phi(3^x 3t_1 Q) = 0] \leq c_5 3^{-c_4 x}$$

und damit die Behauptung. □

7.4.2 Theorem

Ist Φ ein stationärer skalierungsmischender Punktprozess in \mathbb{R}^d , so ist $\mathfrak{V}(\Phi)$ ebenfalls skalierungsmischend.

Beweis: Seien Q und Q' zwei disjunkte Quader. Wir wählen zwei weitere disjunkte Quader H und H' , sodass Q im Inneren von H und Q' im Inneren von H' liegt. Ähnlich wie im Beweis von Lemma 7.3.1 ist leicht einzusehen, dass es eine endliche Menge von disjunkten Würfeln $W_1, \dots, W_m \subset H \setminus Q$ und $W'_1, \dots, W'_{m'} \subset H' \setminus Q'$ gibt, sodass folgendes gilt. Wenn in jedem dieser Würfel mindestens ein Punkt von Φ liegt, so ist das Voronoi-Mosaik $\mathfrak{V}(\Phi)$ eingeschränkt auf Q bzw. Q' von den Punkten von Φ in H bzw. H' determiniert (vgl. Abb. 7.2). Dies ändert sich durch Skalierung um den Faktor t nicht und wir können die Würfel der Einfachheit halber auch gleich groß wählen.

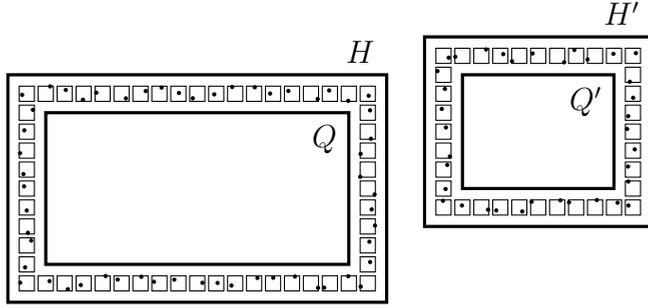


Abbildung 7.2.: Beispiel für das im Satz beschriebene Setting.

Nennen wir also E bzw. E' das Ereignis, dass jeder Würfel tW_i bzw. tW'_j mit $i \in [m]$, $j \in [m']$ mindestens einen Punkt von Φ enthält. Dann ist zunächst nach Lemma 7.4.1 für t groß genug

$$\mathbb{P}[E^c] \leq mc_1 t^{-c_2} \text{ und } \mathbb{P}[E'^c] \leq m'c_1 t^{-c_2}$$

mit geeigneten Konstanten $c_1, c_2 > 0$. Des Weiteren ist für Ereignisse $A \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ bzw. $A' \in \mathfrak{F}(\mathbf{M}')$, determiniert von tQ bzw. tQ' , das Ereignis $\{\mathfrak{B}(\Phi) \in A\} \cap E$ bzw. $\{\mathfrak{B}(\Phi) \in A'\} \cap E'$ determiniert von tH bzw. tH' . Daher gilt für t groß genug

$$\begin{aligned} & |\mathbb{P}[\mathfrak{B}(\Phi) \in A \cap A'] - \mathbb{P}[\mathfrak{B}(\Phi) \in A]\mathbb{P}[\mathfrak{B}(\Phi) \in A']| \\ & \leq |\mathbb{P}[\{\mathfrak{B}(\Phi) \in A\} \cap E \cap \{\mathfrak{B}(\Phi) \in A'\} \cap E'] \\ & \quad - \mathbb{P}[\{\mathfrak{B}(\Phi) \in A\} \cap E]\mathbb{P}[\{\mathfrak{B}(\Phi) \in A'\} \cap E']| \\ & \quad + 2\mathbb{P}[E^c] + 3\mathbb{P}[E'^c] \\ & \leq c_3 t^{-c_4} + 2mc_1 t^{-c_2} + 3m'c_1 t^{-c_2} \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten $c_3, c_4 > 0$ und die Behauptung folgt. \square

Es ist für viele Klassen von Punktprozessen offen, ob sie skalierungsmischend sind. Trivialerweise sind k -abhängige Punktprozesse skalierungsmischend. Punktprozesse heißen k -abhängig, wenn für zwei Borel-Mengen $Q, Q' \subset \mathbb{R}^d$, deren Abstand größer als k ist und Ereignisse E bzw. E' , die von Q bzw. Q' determiniert sind, gilt, dass E von E' unabhängig ist.

Für Poisson-Cluster Prozesse lässt sich eine Bedingung an das Tailverhalten des Durchmessers eines Clusters stellen, die garantiert, dass diese Prozesse skalierungsmischend sind. Für einen Punktprozess Ψ bezeichnen wir mit $\text{diam}(\Psi) := \sup_{x, y \in \Psi} \|x - y\|$ den Durchmesser von Ψ .

7.4.3 Lemma

Sei $\Phi_0 := \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_{z_n}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\theta_0 > 0$ und sei $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine

7. Beispiele

u.i.v. Folge von Punktprozessen unabhängig von Φ_0 mit endlichem Intensitätsmaß Θ_1 sowie Verteilung \mathbb{P}_Ψ . Gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass für alle $r > 0$

$$\mathbb{P}[\text{diam}(\Psi_1) \geq r] \leq c_1 r^{-(d+c_2)}$$

gilt, so ist der Punktprozess

$$\Phi := \sum_{n \in \mathbb{N}} \Psi_n + \zeta_n$$

skalierungsmischend.

Beweis: Das unabhängige zufällige Verschieben der Punkte eines Poisson-Prozesses liefert einen Poisson-Prozess gleicher Intensität. Die beiden Prozesse sind also in Verteilung gleich. Demzufolge kann o.B.d.A \mathbb{P}_Ψ so gewählt werden, dass, falls $\Psi_1 \neq 0$ gilt, wenigstens ein Punkt von Ψ_1 in 0 liegt.

Seien Q und Q' zwei disjunkte Quader. Wir wählen zwei weitere disjunkte Quader H und H' , sodass Q im Inneren von H und Q' im Inneren von H' liegt. Des Weiteren wählen wir $c_3 > 0$ derart, dass $Q + B_{c_3}(0) \subset H$ und $Q' + B_{c_3}(0) \subset H'$ gilt und definieren für eine Borelmenge D

$$\Phi_D := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{1}\{\zeta_n \in D\}(\Psi_n + \zeta_n),$$

den Cluster-Prozess, der von $\Phi_0|_D$ gebildet wird. Außerdem sei für disjunkte Borelmengen D, D' das Ereignis $E(D, D')$ definiert als „Kein Cluster Ψ_n eines Poisson-Punktes $\zeta_n \in D$ schneidet D' “. Wir bemerken zunächst, dass für zwei Ereignisse $A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ und $A' \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$, die von Q und Q' determiniert sind,

$$\begin{aligned} & \{\Phi \in A \cap A'\} \cap E(H, Q') \cap E(H', Q) \cap E((H \cup H')^c, Q \cup Q') \\ &= \{\Phi_H \in A\} \cap \{\Phi_{H'} \in A'\} \cap E(H, Q') \cap E(H', Q) \cap E((H \cup H')^c, Q \cup Q') \end{aligned}$$

gilt, denn wenn $E(H, Q')$, $E(H', Q)$ und $E((H \cup H')^c, Q \cup Q')$ eintreten, gibt es in Q nur noch Punkte aus Clustern Ψ_n , deren Poisson-Punkte ζ_n in H liegen, woraus $\Phi_H \in A$ folgt. Für die umgekehrte Inklusion bemerken wir mit dem gleichen Argument, dass $\Phi \in A$ liegt. Die Argumentation für A' ist dieselbe. Ähnlich machen wir uns klar, dass auch

$$\{\Phi \in A\} \cap E(H^c, Q) = \{\Phi_H \in A\} \cap E(H^c, Q)$$

gilt. Diese Argumente bleiben auch korrekt, wenn wir alle Teilmengen des \mathbb{R}^d um den Faktor t skalieren und A bzw. A' von tQ bzw. tQ' determiniert sind. Nun ist nachzurechnen, dass die Fehlerterme die richtige Größe haben. Dazu betrachten wir $\mathbb{P}[E(tH^c, tQ)^c]$ und erhalten mit dem Campbell'schen Theo-

rem

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[E(tH^c, tQ)^c] &\leq \mathbb{P}[\exists n \in \mathbb{N} : \zeta_n \in tH^c, \text{diam}(\Psi_n) \geq d(\zeta_n, tQ)] \\
 &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{\zeta_n \in tH^c, \text{diam}(\Psi_n) \geq d(\zeta_n, tQ)\} \right] \\
 &= \theta_0 \int_{tH^c} \mathbb{P}[\text{diam}(\Psi_0) \geq d(x, tQ)] dx \\
 &\leq \theta_0 c_1 \int_{tH^c} d(x, tQ)^{-d-c_2} dx.
 \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x := ty$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[E(tH^c, tQ)^c] &\leq \theta_0 c_1 t^d \int_{H^c} d(ty, tQ)^{-d-c_2} dy \\
 &\leq \theta_0 c_1 t^{-c_2} \int_{H^c} d(y, Q)^{-d-c_2} dy.
 \end{aligned}$$

Es bleibt zu klären, dass das Integral endlich ist. Dazu wählen wir ein $r \in \mathbb{R}$ mit $Q, H \subset B_r(0)$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 &\int_{H^c} d(y, Q)^{-d-c_2} dy \\
 &\leq \int_{H^c \cap B_{r+1}(0)} d(y, Q)^{-d-c_2} dy + \int_{B_{r+1}(0)^c} d(y, B_r(0))^{-d-c_2} dy \\
 &\leq \int_{H^c \cap B_{r+1}(0)} c_3^{-d-c_2} dy + c_4 \int_{r+1}^{\infty} s^{-1-c_2} ds \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

wobei c_4 die Oberfläche der d -dimensionalen Einheitssphäre ist. Dieselbe Argumentation können wir auch auf $\mathbb{P}[E((tH \cup tH')^c, tQ \cup tQ')]$ anwenden. Fügen wir alle Ergebnisse zusammen, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &|\mathbb{P}[\Phi \in A \cap A'] - \mathbb{P}[\Phi \in A]\mathbb{P}[\Phi \in A']| \\
 &\leq |\mathbb{P}[\{\Phi \in A \cap A'\} \cap E(tH, tQ') \cap E(tH', tQ) \cap E((tH \cup tH')^c, tQ \cup tQ')]| \\
 &\quad - \mathbb{P}[\{\Phi \in A\} \cap E(tH^c, tQ')]\mathbb{P}[\{\Phi \in A'\} \cap E(tH'^c, tQ)] \\
 &\quad + \mathbb{P}[E(tH, tQ')^c] + \mathbb{P}[E(tH', tQ)^c] + \mathbb{P}[E((tH \cup tH')^c, tQ \cup tQ')^c] \\
 &\quad + \mathbb{P}[E(tH^c, tQ')^c] + 2\mathbb{P}[E(tH'^c, tQ)^c] \\
 &\leq |\mathbb{P}[\{\Phi_{tH} \in A\} \cap E(tH, tQ')]\mathbb{P}[\{\Phi_{tH'} \in A'\} \cap E(tH', tQ)]| \\
 &\quad \times \mathbb{P}[E((tH \cup tH')^c, tQ \cup tQ')] - \mathbb{P}[\Phi_H \in A]\mathbb{P}[E(H^c, Q)] \\
 &\quad \times \mathbb{P}[\Phi_{H'} \in A']\mathbb{P}[E(H'^c, Q')]| + c_5 t^{-c_2} \\
 &\leq c_6 t^{-c_2}
 \end{aligned}$$

7. Beispiele

mit geeigneten Konstanten $c_5, c_6 > 0$. □

Für einen Poisson-Cluster-Prozess lässt sich leicht zeigen, dass alle Momente des Durchmessers der typischen Zelle existieren, woraus mit Hilfe von Lemma 4.2.1 folgt, dass unter den in Lemma 7.4.3 genannten Bedingungen auch das zufällig gefärbte Voronoi-Mosaik $\mathfrak{M}(\Phi)_F$ skalierungsmischend ist. Wir weisen auch darauf hin, dass mit Hilfe von Lemma 7.4.3 für eine kleine Klasse von nicht k -abhängigen, aber skalierungsmischenden Poisson-Cluster-Prozessen die Existenz eines Phasenübergang folgt. In dieser Klasse müsste der Durchmesser eines Clusters beliebig groß werden können und die Anzahl Punkte in einem Cluster müsste zwar ein $d + \varepsilon$ Moment besitzen jedoch kein exponentiales. Ein solcher Prozess wäre nicht k -abhängig und würde auch die Voraussetzungen von Lemma 7.2.1 nicht erfüllen. Er könnte jedoch mit Lemma 7.4.3 behandelt werden.

Leider sind sowohl Poisson-Hyperebenen Mosaik als auch STIT-Mosaik nicht skalierungsmischend. Wir werden die Argumente dafür nur skizzieren. Betrachten wir $Q := [0, 1] \times [0, 3]$ und $Q' := [2, 3] \times [0, 3]$ und die Ereignisse $A :=$ „Das Rechteck tQ wird von einer Geraden mit Anstieg in $[-1/t, 1/t]$ getroffen.“ sowie analog A' mit tQ' anstelle von tQ . Dann wird für $t \rightarrow \infty$ einerseits $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A']$ gegen eine Konstante in $(0, 1)$ konvergieren, aber andererseits wird $\mathbb{P}[A \mid A']$ gegen eins streben, da die Gerade von A' mit geringem Anstieg mit hoher Wahrscheinlichkeit auch tQ schneiden wird. Daher konvergiert $\mathbb{P}[A \cap A'] - \mathbb{P}[A]\mathbb{P}[A']$ gegen einen konstanten Wert größer als null. Dieses Beispiel kann auf höhere Dimensionen angepasst werden.

Im Fall eines STIT-Mosaiks kann das Beispiel ebenfalls adaptiert werden, indem „Die erste Gerade, die tQ schneidet, hat einen Anstieg der klein ist.“ als Ereignis A gewählt wird. Das Ereignis A' definieren wir wieder, indem wir tQ durch tQ' ersetzen. Der Punkt ist, dass die Konstruktion des STIT-Mosaiks auf $tQ \cup tQ'$ vorgenommen werden kann, indem es auf $[0, 3t]^2$ konstruiert und dann einschränkt wird. Wir bemerken, dass in diesem Fall die erste Gerade, die tQ trifft, mit positiver von t unabhängiger Wahrscheinlichkeit auch die erste ist, die $[0, 3t]$ und tQ' trifft. Dadurch wird die asymptotische Unabhängigkeit von A und A' zerstört.

7.5. Mosaik mit guten Momenteneigenschaften

Wir haben in Kapitel 5 und 6 gesehen, dass für die Eindeutigkeit des unendlichen Clusters und das Shape-Theorem für zufällige Mosaik gewisse Momente der Zufallsvariablen

$$N := \sum_{Z \in \mathfrak{M}} \mathbb{1}\{Z \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\} \tag{7.1}$$

7.5. Mosaik mit guten Momenteneigenschaften

endlich sein müssen. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass für große Klassen von zufälligen Mosaiken alle Momente von N existieren.

Für STIT-Mosaik wurde in [NW05, Beweis Lemma 1] gezeigt, dass die Anzahl der Zellen, die den Einheitswürfel schneiden, geometrisch verteilt ist. Daher existiert sogar ein exponentielles Moment von N , d.h. es gibt ein $t > 0$, sodass $\mathbb{E}[e^{tN}] < \infty$ gilt.

Für Poisson-Hyperebenen-Mosaik werden wir im nächsten Abschnitt zeigen, dass alle Momente von N endlich sind.

Es bleibt das Voronoi-Mosaik zu untersuchen. Wir suchen für dieses, wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten, Bedingungen an den zugrunde liegenden Punktprozess. Hierbei gibt es relativ viele Möglichkeiten und wir haben uns für eine entschieden, die wir bisher schon verwendet haben. Es wird jedoch in den Beweisen klar werden, dass es möglich ist, diese Bedingungen weiter abzuschwächen.

7.5.1 Lemma

Sei Φ ein stationärer Punktprozess auf \mathbb{R}^d und $\mathfrak{M} := \mathfrak{V}(\Phi)$ das Voronoi-Mosaik, welches von Φ erzeugt wird. Gibt es ein $\delta > 0$ und ein $c_1 < 1$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $I \subset \mathbb{Z}^d$ mit $|I| = n$

$$\mathbb{P}[\Phi(I^{\square\delta}) = 0] \leq c_1^n$$

gilt und gibt es außerdem ein $t > 0$ und $c_2 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ groß genug und alle $\alpha \in \mathcal{A}_n^{(d)}$

$$L_{\Phi}(-t\mathbb{1}_{\alpha^{\square\delta}}) = \mathbb{E} \left[\exp(t\Phi(\alpha^{\square\delta})) \right] \leq c_2^n$$

gilt, so gibt es Konstanten $c_5, c_6 > 0$ sodass

$$\mathbb{P}[N \geq n] \leq c_5 e^{-c_6 n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Beweis: Es können auf zwei unterschiedliche Arten viele Zellen den Einheitswürfel schneiden. Einerseits kann $\Phi([0, 1]^d)$ groß sein. Andererseits könnte es einen großen leeren Bereich um $[0, 1]^d$ geben, in dessen Komplement viele Punkte sehr symmetrisch angeordnet sind. Unsere erste Voraussetzung sichert uns jedoch, dass Leerwahrscheinlichkeiten klein genug sind. Die zweite Voraussetzung sorgt dafür, dass nur mit geringer Wahrscheinlichkeit viele Punkte in einer beschränkten Menge sind.

Es ist leicht einzusehen (vgl. Beweis von Lemma 7.3.1), dass die Voraussetzungen des Theorems auch mit 2δ anstelle von δ erfüllt sind, wenn die Konstanten c_1 und c_2 entsprechend angepasst werden. Wir nehmen daher o.B.d.A $\delta > \sqrt{d}$ an und definieren

$$A_k := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq \delta k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

7. Beispiele

Ist $\Phi(A_k) \geq 1$, so gibt es für jeden Punkt $x \in [0, 1]^d \subset A_1$ einen Punkt $y \in \Phi \cap A_k$ mit $\|x - y\|_2 \leq \delta(k + 2)$. Daraus schließen wir, dass in diesem Fall keine Zelle $\mathcal{V}(z, \Phi)$ eines Punktes $z \in \Phi \cap \mathbb{R}^d \setminus A_{k+2}$ den Einheitswürfel schneidet. Also gilt

$$\{N \geq n, \Phi(A_k) \geq 1\} \subset \{\Phi(A_{k+2}) \geq n\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und wir erhalten für $c_3(n) \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[N \geq n] &= \mathbb{P}[N \geq n, \Phi(A_1) \geq 1] + \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[N \geq n, \Phi(A_i) = 0, \Phi(A_{i+1}) \geq 1] \\ &\leq \mathbb{P}[\Phi(A_3) \geq n] + \mathbb{P}[\Phi(A_{c_3(n)}) = 0] + \sum_{i=1}^{c_3(n)-1} \mathbb{P}[\Phi(A_{i+3}) \geq n] \\ &\leq \mathbb{P}[\Phi(A_{c_3(n)}) = 0] + c_3(n) \mathbb{P}[\Phi(A_{c_3(n)+2}) \geq n]. \end{aligned}$$

Es gibt ein Gittertier $\alpha \in \mathcal{A}^{(d)}$ mit $|\alpha| = (2(c_3(n) + 2))^d$, sodass $A_{c_3(n)+2} \subset \alpha^{\square\delta}$. Daher folgt aus der zweiten Voraussetzung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\Phi(A_{c_3(n)+2}) \geq n] &\leq \mathbb{P}[\Phi(\alpha^{\square\delta}) \geq n] \\ &\leq e^{-tn} \mathbb{E}[\exp(t\Phi(\alpha^{\square\delta}))] \\ &\leq e^{-tn} c_2^{(2(c_3(n)+2))^d}. \end{aligned}$$

Außerdem gibt es eine Konstante $c_4 > 0$, sodass für $c_3(n)$ groß genug ein Gittertier $\alpha \in \mathcal{A}^{(d)}$ mit $|\alpha| = c_4(c_3(n))^d$ und $\alpha^{\square\delta} \subset A_{c_3(n)}$ existiert. Kombinieren wir dies mit der ersten Voraussetzung, erhalten wir

$$\mathbb{P}[\Phi(A_{c_3(n)}) = 0] \leq \mathbb{P}[\Phi(\alpha^{\square\delta}) = 0] \leq c_1^{c_4(c_3(n))^d}.$$

Wir wählen jetzt $c_3(n) \in \mathbb{N}$ maximal unter der Bedingung, dass $(2(c_3(n)+2))^d \leq tn/2$ gilt und schließen die Behauptung. \square

7.6. Poisson-Hyperebenen-Mosaik

Während sich die Konstruktion von Voronoi-Mosaiken sehr gut mit unseren Voraussetzungen verträgt, mussten wir bisher feststellen, dass dies aufgrund der etwas weiter reichenden Abhängigkeiten nicht auf Poisson-Hyperebenen-Mosaik zutrifft. Die besondere Konstruktion ermöglicht es jedoch, direkt nachzuweisen, dass diese Mosaik ein Shape-Theorem erfüllen.

Wir führen zunächst das Poisson-Hyperebenen-Mosaik ein. Dazu übernehmen wir für diesen Abschnitt im Wesentlichen die Notation aus [SW08]. Beweise

7.6. Poisson-Hyperebenen-Mosaik

für alle grundlegenden Eigenschaften des Mosaiks und des assoziierten Zonoids finden sich in [SW08, Kapitel 4.4, 10.3, 9.3].

Es sei $\mathcal{S}^{d-1} := \{u \in \mathbb{R}^d \mid \|u\|_2 = 1\}$ die d -dimensionale Einheitskugel. Für ein $u \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $r \geq 0$ sei $E(u, r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u \rangle = r\}$ die Hyperebene, die senkrecht auf u steht und Abstand r zum Ursprung hat. Wir betrachten einen Poisson-Punktprozess Φ auf $\mathcal{S}^{d-1} \times [0, \infty)$ mit Intensitätsmaß $\gamma\varphi \otimes \lambda$. Dabei seien φ ein gerades Maß, welches auf keinem Großkreis konzentriert ist, $\gamma > 0$ und λ das Lebesgue-Maß. Wir identifizieren Φ mit der zufälligen Menge von Ebenen $\{E(u, r) \mid (u, r) \in \Phi\}$ und nennen Φ einen *Poisson-Hyperebenen-Prozess*. Die bisherigen Voraussetzungen sind dabei so gewählt, dass der Prozess der Hyperebenen stationär und stark ergodisch (sogar mischend) ist und den gesamten Raum fast sicher in beschränkte Zellen zerlegt. Insbesondere wird dadurch ein zufälliges Mosaik \mathfrak{M} induziert, dessen Verteilung durch γ und φ eindeutig bestimmt ist. Dieses nennen wir *Poisson-Hyperebenen-Mosaik mit Richtungsverteilung φ und Intensität γ* .

Eine wesentliche Kenngröße solcher zufälliger Mosaik ist das sogenannte *assozierte Zonoid*. Dies ist eine konvexe Menge mit Stützfunktion

$$h(x) := \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} |\langle x, u \rangle| \varphi(du), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Gleichzeitig ist

$$h(x) = \frac{1}{2} \mathbb{E}[|[0, x] \cap \Phi|], \quad x \in \mathbb{R}^d$$

die halbe erwartete Anzahl der Schnitte des Prozesses von Ebenen mit der Strecke von 0 nach x .

Es gibt nun zwei natürliche Möglichkeiten, den Seitenflächen von \mathfrak{M} Zeiten zuzuweisen. Die erste Möglichkeit ist die unabhängige Markierung der Seitenflächen mit Zeiten, wie wir sie im Abschnitt 6.1 untersucht haben. In diesem Fall genügt es, wenn die Zeiten ein endliches $d + \varepsilon$ Moment vorweisen können, um die Voraussetzungen für das Shape-Theorem 6.1.6 zu schaffen. Denn dass das Hinzufügen einer Ebene, kann die Anzahl der Zellen, die das Einheitsquadrat schneiden, höchstens verdoppeln. Daher gilt

$$\sum_{Z \in \mathfrak{M}} \mathbb{1}\{Z \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\} \leq 2 \sum_{E \in \Phi} \mathbb{1}\{E \cap [0, 1]^d \neq \emptyset\}.$$

Da die Anzahl der Ebenen, die den Einheitswürfel schneiden Poisson-verteilt ist, existieren alle Momente der Anzahl der Zellen, die den Einheitswürfel schneiden. Demzufolge sind die Voraussetzungen von Theorem 6.1.6 erfüllt. Unter welchen Voraussetzungen μ in diesem Fall eine Norm ist, ist eine offene Frage.

Die zweite Möglichkeit ist, anstelle der Seitenflächen von \mathfrak{M} jeder Ebene von Φ

7. Beispiele

eine unabhängige Zeit zuzuweisen. Diesen Fall werden wir ausführlicher studieren. Wir können in diesem Rahmen zeigen, dass μ eine Norm ist. Darüber hinaus können wir μ sogar *explizit* angeben und eine Konvergenzrate für die Konvergenz im Shape-Theorem angeben.

Sei also $\Phi = \{E_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ der Poisson-Hyperebenen-Prozess, $T := (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine u.i.v. Folge von $(0, \infty)$ -wertigen Zufallsvariablen und $\Phi_T := \{(E_i, T_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ der unabhängig markierte Hyperebenen-Prozess. Der zufällige Abstand zweier Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist via

$$\tau(x, y; \Phi_T) := \inf_{\gamma} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{E_i \cap \gamma \neq \emptyset\} T_i$$

definiert, wobei das Infimum wie bisher über stetige polygonale Kurven gebildet wird, die in x starten und in y enden.

Das Besondere an der Konstruktion ist, dass *der direkte Weg auf einer Geraden stets der kürzeste Weg ist*. Denn liegen zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^d$ auf zwei unterschiedlichen Seiten einer Hyperebene, so muss jeder stetige Pfad von x nach y diese Hyperebene irgendwann schneiden. Der direkte Weg wiederum schneidet jede dieser Hyperebenen höchstens einmal und keine weiteren. Damit gilt

$$\tau(0, x; \Phi_T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{E_i \cap [0, x] \neq \emptyset\} T_i, \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (7.2)$$

und wir schließen aus

$$\max \{ \tau(0, x; \Phi_T) \mid \|x\|_{\infty} \leq 1 \} \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{E_i \cap [-1, 1]^d \neq \emptyset\} T_i$$

und Lemma A.1, dass $\tau(\cdot, \cdot; \Phi_T)$ die Voraussetzungen von Theorem 6.1.4 erfüllt, sobald $\mathbb{E}[T_1^{d+\varepsilon}] < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$ gilt. Aus (7.2) folgt, dass die Passierzeiten zusammengesetzt Poisson-verteilt sind und dass

$$\mathbb{E}[\tau(0, x; \Phi_T)] = 2\mathbb{E}[T_1]h(x)$$

gilt. Dementsprechend ist nach dem subadditiven Ergodensatz [Kal02, Theorem 10.22] und wegen der Homogenität von h

$$\mu(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tau(0, tx; \Phi_T)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\mathbb{E}[\tau(0, tx; \Phi_T)]}{t} = 2\mathbb{E}[T_1]h(x).$$

Wir sehen also, dass die spezielle Konstruktion der zufälligen Metrik leicht die Voraussetzungen für ein Shape-Theorem erfüllt, bei dem wir sogar die Grenzform S bestimmen können.

Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, die Konvergenzgeschwindigkeit im Shape-Theorem zu bestimmen. Wir werden uns dazu auf den Fall zurückziehen,

in dem die Zeiten konstant eins sind. Dafür schreiben wir Φ_1 anstelle von Φ_T und bemerken, dass $\tau(\cdot, \cdot; \Phi_1) = \tau(\cdot, \cdot; \mathfrak{M}_1^{(d-1)})$ gilt. Im Beweis wird ersichtlich werden, wie auch im Fall einer nicht auf 1 konzentrierten Verteilung der Zeiten die Konvergenzgeschwindigkeit abgeschätzt werden kann.

7.6.1 Theorem

Sei Φ der Poisson-Hyperbenen Prozess mit Richtungsverteilung φ , Intensität γ und Grenzform $S := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mu(x) \leq 1\}$, wobei μ die entsprechende Norm zu $\tau(\cdot, \cdot; \Phi_1)$ ist. Es gibt eine Konstante $c > 0$ die nur von d, γ und φ abhängt, sodass für alle $\varepsilon > 0$ und $r > 0$

$$\mathbb{P}[\exists x \in r\mathcal{S}^{d-1} : |\tau(0, x; \Phi_1) - \mu(x)| > \varepsilon r] \leq c\varepsilon^{-2(d-1)} \exp\left(-\frac{r\varepsilon^2}{m}\right)$$

mit $m := 8 \max_{u \in \mathcal{S}^{d-1}} \mu(u)$ gilt.

Beweis: Wir gehen vor wie im Beweis von 6.1.4 und quantifizieren die einzelnen Details. Einerseits müssen wir uns überlegen, wie viele Kegel mit welchem Öffnungswinkel benötigt werden, um den Raum zu überdecken. Dies haben wir in Lemma A.7 im Anhang getan. Andererseits benötigen wir eine Konzentrationsungleichung für die Differenz zwischen τ und μ innerhalb eines Kegels. Sei $\varepsilon > 0$. Für eine Richtung $u \in \mathcal{S}^{d-1}$, $r \in [0, \infty]$ und $\delta > 0$ definieren wir den (abgeschnittenen) Kegel

$$K(u, r, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq r, \langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \rangle \geq 1 - \delta\}$$

und die folgenden Mengen von Hyperbenen:

$$\mathcal{E}_1(u, r, \delta) := \{E(v, a) \mid \exists \tilde{u} \in \mathcal{S}^{d-1}, \langle u, \tilde{u} \rangle \geq 1 - \delta : \langle \tilde{u}, v \rangle \geq \frac{a}{r}\},$$

die Menge der Hyperbenen, die den Kegel $K(u, r, \delta)$ der Länge r in Richtung u mit Öffnungswinkel $\arccos(1 - \delta)$ schneiden, und

$$\mathcal{E}_2(u, r, \delta) := \{E(v, a) \mid \forall \tilde{u} \in \mathcal{S}^{d-1}, \langle u, \tilde{u} \rangle \geq 1 - \delta : \langle \tilde{u}, v \rangle > \frac{a}{r}\}.$$

die Menge der Hyperbenen, die jede Strecke $[0, r\tilde{u}] \subset K(u, r, \delta)$ schneiden. Dies impliziert, dass fast sicher

$$\max\{\tau(0, x; \Phi_1) \mid x \in K(u, \infty, \delta) \cap r\mathcal{S}^{d-1}\} \leq \Phi(\mathcal{E}_1(u, r, \delta)) \quad (7.3)$$

und

$$\min\{\tau(0, x; \Phi_1) \mid x \in K(u, \infty, \delta) \cap r\mathcal{S}^{d-1}\} \geq \Phi(\mathcal{E}_2(u, r, \delta)) \quad (7.4)$$

gilt. Ist Θ das Intensitätsmaß von Φ , so gilt für $i \in [2]$

$$E(v, a) \in \mathcal{E}_i(u, r, \delta) \Leftrightarrow E(v, \frac{a}{r}) \in \mathcal{E}_i(u, 1, \delta)$$

7. Beispiele

und damit auch

$$\begin{aligned}
 \Theta(\mathcal{E}_i(u, r, \delta)) &= \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\mathcal{E}_i(u, r, \delta)}(E(v, a)) \, da \, \varphi(dv) \\
 &= r\gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}_{\mathcal{E}_i(u, 1, \delta)}(E(v, \frac{a}{r})) \, da \, \varphi(dv) \\
 &= r\Theta(\mathcal{E}_i(u, 1, \delta)).
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Weiter stellen wir fest, dass wegen Lemma A.5 für $u, v, w \in \mathcal{S}^{d-1}$ und $\delta \in (0, 1]$ mit $\langle u, w \rangle \geq 1 - \delta$

$$\langle v, w \rangle \leq \langle u, v \rangle + \delta + \sqrt{8\delta} \leq \langle u, v \rangle + c_1\sqrt{\delta}$$

gilt, wobei $c_1 := 1 + \sqrt{8}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 &\Theta(\mathcal{E}_1(u, 1, \delta)) \\
 &= \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}\{\exists w \in \mathcal{S}^{d-1} : \langle w, u \rangle \geq 1 - \delta, \langle w, v \rangle \geq a\} \, da \, \varphi(dv) \\
 &\leq \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}\{\langle u, v \rangle + c_1\sqrt{\delta} \geq a\} \, da \, \varphi(dv) \\
 &= \Theta(\mathcal{E}_1(u, 1, 0)) + \gamma c_1\sqrt{\delta} \\
 &= \mu(u) + \gamma c_1\sqrt{\delta}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &\Theta(\mathcal{E}_2(u, 1, \delta)) \\
 &= \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}\{\forall w \in \mathcal{S}^{d-1}, \langle w, u \rangle \geq 1 - \delta : \langle w, v \rangle \geq a\} \, da \, \varphi(dv) \\
 &\geq \gamma \int_{\mathcal{S}^{d-1}} \int_0^\infty \mathbf{1}\{\langle u, v \rangle - c_1\sqrt{\delta} \geq a\} \, da \, \varphi(dv) \\
 &= \Theta(\mathcal{E}_2(u, 1, 0)) - \gamma c_1\sqrt{\delta} \\
 &= \mu(u) - \gamma c_1\sqrt{\delta}.
 \end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, dass wegen Lemma A.6 und (6.2) für alle $u \in \mathcal{S}^{d-1}$, $r, \delta > 0$ und $x \in K(u, r, \delta) \cap r\mathcal{S}^{d-1}$

$$\mu(x) \geq \mu(ru) - \max_{i \in [d]} \mu(\mathbf{e}_i) \|x - ru\|_1 \geq \mu(ru) - c_2\sqrt{\delta}r$$

gilt, wobei $c_2 := 2\sqrt{2} \max_{i \in [d]} \mu(\mathbf{e}_i)$ ist.

Sei nun $\delta \in (0, 1]$. Nach Lemma A.7 gibt es ein $c_3 \in \mathbb{R}$, ein $k \leq c_3\delta^{1-d}$ und

7.6. Poisson-Hyperebenen-Mosaik

eine Menge von Richtungen $\{u_i \in \mathcal{S}^{d-1} \mid i \in [k]\}$, sodass \mathcal{S}^{d-1} von den Kegeln $K(u_i, 1, \delta)$ überdeckt wird. In diesem Fall wird auch \mathbb{R}^d von den Kegeln $K(u_i, \infty, \delta)$ überdeckt. Daher gilt für $\varepsilon, r > 0$ wegen (7.3)

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}[\exists x \in r\mathcal{S}^{d-1} : \tau(0, x, \Phi_1) - \mu(x) > \varepsilon r] \\
 & \leq \sum_{i \in [k]} \mathbb{P}[\exists x \in K(u_i, \infty, \delta) \cap r\mathcal{S}^{d-1} : \tau(0, x, \Phi_1) - \mu(x) > \varepsilon r] \\
 & \leq \sum_{i \in [k]} \mathbb{P}[\exists x \in K(u_i, \infty, \delta) \cap r\mathcal{S}^{d-1} : \tau(0, x, \Phi_1) > r(\mu(u_i) - c_2\sqrt{\delta} + \varepsilon)] \quad (7.6) \\
 & \leq \sum_{i \in [k]} \mathbb{P}[\Phi(\mathcal{E}_1(u_i, r, \delta)) > r(\mu(u_i) - c_2\sqrt{\delta} + \varepsilon)].
 \end{aligned}$$

Aus der Markov'schen Ungleichung angewandt mit der Funktion e^{sx} und einer Optimierung über $s > 0$ ergibt sich die Schranke

$$\mathbb{P}[X \geq \mathbb{E}[X] + x] \leq \exp\left(\frac{-x^2}{2\mathbb{E}[X]}\right), \quad x \geq 0 \quad (7.7)$$

für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable X . Daraus folgt

$$\mathbb{P}[\Phi(\mathcal{E}_1(u_i, r, \delta)) > r(\mu(u_i) - c_2\sqrt{\delta} + \varepsilon)] \leq \exp\left(-\frac{r(\varepsilon - (\gamma c_1 + c_2)\sqrt{\delta})^2}{2\mu(u_i)}\right)$$

und wir erhalten wegen (7.6) und $k \leq c_3\delta^{1-d}$, dass

$$\mathbb{P}[\exists x \in r\mathcal{S}^{d-1} : \tau(0, x, \Phi_1) - \mu(x) > \varepsilon r] \leq \frac{c_3}{\delta^{d-1}} \exp\left(-\frac{r(\varepsilon - (\gamma c_1 + c_2)\sqrt{\delta})^2}{2 \max_{u \in \mathcal{S}^{d-1}} \mu(u)}\right)$$

gilt. Die Ungleichung

$$\mathbb{P}[\exists x \in r\mathcal{S}^{d-1} : \tau(0, x, \Phi_1) - \mu(x) < -\varepsilon r] \leq \frac{c_3}{\delta^{d-1}} \exp\left(-\frac{r(\varepsilon - (\gamma c_1 + c_2)\sqrt{\delta})^2}{2 \max_{u \in \mathcal{S}^{d-1}} \mu(u)}\right)$$

ergibt sich analog unter Verwendung von \mathcal{E}_2 und (7.4) anstelle von \mathcal{E}_1 und (7.3), sowie

$$\mathbb{P}[X \leq \mathbb{E}[X] - x] \leq \exp\left(\frac{-x^2}{2\mathbb{E}[X]}\right), \quad x \geq 0.$$

Die Wahl von

$$\sqrt{\delta} = \frac{\varepsilon}{2(\gamma c_1 + c_2)}$$

liefert die Behauptung. □

7. Beispiele

Die Wahl von δ im obigen Beweis lässt sich etwas verbessern, wodurch jedoch die Abschätzung sehr unübersichtlich wird. Das wesentliche Verhalten ändert sich dadurch nicht mehr.

Allgemein stellt sich beim Nutzen der sub-Additivität die Frage, wie gut die Schranke tatsächlich ist. Eine untere Schranke für den Tail von Poisson-verteilten Zufallsvariablen, wie man sie beispielsweise aus dem Satz von Cramér und Chernoff [Kal02, Theorem 27.3] herleiten kann, würde im Fall von Theorem 7.6.1 zu einer unteren Schranke der Form $\exp(-r\varepsilon^2 c_1 - c_2)$, $c_1, c_2 > 0$ führen, die für r groß genug gelten würde. Um das asymptotische Verhalten noch genauer beschreiben zu können, müssten die Techniken zu sogenannten Scan-Statistiken für Poisson-Prozesse an den Raum $S^{d-1} \times [0, 1]$ angepasst werden (siehe [Pen09]). Wir nehmen an, dass dies im Prinzip möglich, aber technisch aufwändig ist.

Für das Modell mit zufälligen Zeiten genügt es einzusehen, dass $\Phi(\mathcal{E}_1)$ durch die Summe der Zeiten der Ebenen von Φ in \mathcal{E}_1 ersetzt werden muss. Dementsprechend muss lediglich für diese zusammengesetzt Poisson-verteilte Zufallsvariable eine Tail-Abschätzung der Form (7.7) bereitgestellt und bzgl. δ optimiert werden, um eine Konvergenzrate für Φ_T zu erhalten.

7.7. Zusammenfassung

Nehmen wir die Resultate dieses Kapitels zusammen, kommen wir auf folgende Ergebnisse:

- In STIT-Mosaiken gibt es fast sicher höchstens einen unendlichen schwarzen Cluster. Daher gilt im 2-dimensionalen Fall $p_c \geq \frac{1}{2}$. Es gilt außerdem ein Shape-Theorem bei dem wir jedoch nicht zeigen konnten, dass μ stets eine Norm ist. Die Existenz eines nicht trivialen Phasenübergangs konnten wir nicht zeigen.
- In Poisson-Hyperebenen Mosaiken existiert ebenfalls höchstens ein unendlicher schwarzer Cluster und im 2-dimensionalen Fall ist $p_c \geq \frac{1}{2}$. Im speziellen Fall, dass jede Ebene mit einer Passierzeit ausgestattet ist, konnten wir ein Shape-Theorem zeigen, die Grenzform explizit bestimmen und die Konvergenzgeschwindigkeit abschätzen. Die Existenz eines nicht trivialen Phasenübergangs konnte nicht gezeigt werden.
- Für Voronoi-Mosaik haben wir gezeigt, dass es für die Existenz eines nicht trivialen Phasenübergangs hinreichend ist, wenn der zugrundeliegende Punktprozess skalierungs-mischend ist oder wenn er ergodisch ist und sein erweitertes Laplace-Funktional die Bedingungen in Lemma 7.2.1 und

Lemma 7.3.1 erfüllt. Wir haben weiterhin festgestellt, dass Determinantal-Punktprozesse und große Klassen von Poisson-Clusterprozessen diese Bedingungen erfüllen. Woraus sich insbesondere ergab, dass die erzeugten Mosaikzahn sind.

Es konnte außerdem nachgewiesen werden, dass es unter schwachen Voraussetzungen an den zugrundeliegenden Punktprozess höchstens einen unendlichen schwarzen Cluster gibt und dass daher in 2 Dimensionen $p_c \geq \frac{1}{2}$ gilt.

Wir haben für Voronoi-Mosaikzahn ein Shape-Theorem gezeigt und konnten im Falle der zahmen Mosaikzahn auch die Positivität der Zeitkonstante nachweisen. Dies ermöglichte außerdem die Anwendung des graphentheoretischen Ergodensatzes.

Wir vermuten, dass ein nicht trivialer Phasenübergang in allen drei Klassen zufälliger Mosaikzahn unter schwachen Bedingungen vorliegt. Für Voronoi-Mosaikzahn vermuten wir insbesondere, dass unter geeigneten Voraussetzungen im 2-dimensionalen Fall $p_c = \frac{1}{2}$ gilt.

Teil II.

Das Boole'sche Modell

Im zweiten Teil der Arbeit beschäftigen wir uns mit dem Boole'schen Modell. Dieses hat in der Literatur viele weitere Namen (Continuum-Percolation, Gilbert-Graph, Keim-Korn-Modell, zufälliger geometrischer Graph, Poisson-Blob-Model, Swiss-cheese model, randomly overlapping spheres, fully penetrable spheres), die oft damit korrespondieren, welche Fragestellungen bearbeitet werden und in welcher Allgemeinheit die Arbeit angelegt ist.

Wir werden außer in Abschnitt 9.1 stets folgende Version des Modells nutzen: Es sei $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte wegzusammenhängende Menge mit nicht leerem Inneren und $0 \in \mathbf{B}$. Wir nehmen im Folgenden o.B.d.A an, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $B_\varepsilon(0) \subset \mathbf{B}$ gilt. Weiter sei Φ ein Punktprozess, der unter \mathbb{P}_t verteilt ist wie ein Poisson-Prozess mit Intensität $t \geq 0$. Wir nennen die Menge

$$\bigcup_{x \in \Phi} (x + \mathbf{B})$$

das *Boole'sche Modell mit Korn \mathbf{B}* . Wir möchten die Perkolationseigenschaften dieses Modells unter die Lupe nehmen und stellen fest, dass sämtliche dafür notwendige Information bereits im Graphen

$$\mathcal{G}_\Phi := (\Phi, \{\{x, y\} \subset \Phi \mid x + \mathbf{B} \cap y + \mathbf{B} \neq \emptyset\})$$

kodiert sind. Diesen nennen wir den *Gilbert-Graphen von Φ* . Der Parameter $p \in [0, 1]$ macht in diesem Zusammenhang keinen Sinn mehr und wird stattdessen durch die Intensität $t \geq 0$ des Prozesses Φ ersetzt. Es ergibt sich analog zur diskreten Perkolation die Definition

$$t_c := \sup\{t \geq 0 \mid \mathbb{P}_t[|C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0})| < \infty] = 1\}$$

der *kritischen Intensität* (Die Verwendung von $\Phi + \delta_0$ anstelle von Φ erklären wir am Ende des Abschnitts 8.1).

Die Perkolationseigenschaften dieses Modells sind im Allgemeinen in etwa so gut verstanden, wie die der Perkolation auf dem Gitter \mathbb{Z}^d . Das liegt daran, dass es zu nahezu allen Werkzeugen der diskreten Perkolation (z.B. FKG-Ungleichung, Russo-Formel, BK-Ungleichung) Pendant im Kontinuum gibt und daran, dass sich das Boole'sche Modell sehr gut durch diskrete Modelle approximieren lässt. Leider wurden die Ergebnisse nie systematisch übertragen und sind daher nur teilweise in der Literatur zu finden [Hal85], [Tan93], [Tan96], [Pen], [MR96]. Wir werden eine dieser Lücken schließen, indem wir den exponentiellen Abfall des „Radius“ des Nullclusters, der von Menshikov [Men86] bzw. Aizenman und Barsky [AB87] im diskreten Fall nachgewiesen wurde, für das Boole'sche Modell zeigen. Erfreulicherweise wurde vor kurzem ein neuer Beweis für den diskreten Fall entdeckt [DCT16], der die bisherige Argumentation radikal vereinfacht. Wir werden diesen Beweis auf das Boole'sche Modell übertragen und im Kapitel 10 daraus eine Methode ableiten,

untere Schranken für die kritische Intensität per Simulation zu bestimmen. Der Beweis liefert außerdem die Einsicht, dass die Perkulationsfunktion bei der kritischen Intensität wenigstens linear wächst.

In Kapitel 9 werden wir uns mit der sogenannten Ornstein-Zernike-Gleichung befassen. Dies ist eine, in der mathematischen Literatur fast unbekannte, Faltungsgleichung mit deren Hilfe in der Physik viele Erkenntnisse über das Verhalten der sogenannten *Pair-Connectedness-Funktion* gewonnen werden konnten. Die Gleichung ist dabei so einfach und grundlegend, dass es eine schier unüberschaubare Menge an Publikationen in der physikalischen Literatur gibt, die mit ihr in Verbindung stehen. Wir möchten hier nur exemplarisch die Arbeiten [OZ14], [CDAF77] und [Tor12] nennen, die für uns später noch von größerer Relevanz sein werden. Die *Pair-Connectedness-Funktion* $P_t(x, y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Punkte x und y eines Poisson-Prozesses Φ der Intensität t im selben Cluster von \mathcal{G}_Φ liegen, und damit eine der zentralen Kenngrößen in der Perkulationstheorie. Wir werden im Boole'schen Modell die mathematischen Grundlagen der Lösbarkeit der Ornstein-Zernike-Gleichung legen und analytische und kombinatorische Eigenschaften der Lösung herleiten.

8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich

8.1. Hilfsmittel und Bekannte Resultate

Wie bereits erwähnt gibt es für den Poisson-Prozess Varianten der Standardwerkzeuge der diskreten Perkolation, die wir hier nochmals aufführen wollen. Die Beweise finden sich in [MR96] und [LP16]. Außerdem möchten wir einen kurzen Überblick über die für uns wesentlichen Perkulationsresultate geben, deren Beweise in [Pen] und [MR96] zu finden sind.

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ *aufsteigend*, wenn aus $\varphi \subset \varphi' \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d)$ bereits $f(\varphi) \leq f(\varphi')$ folgt (vgl. Abschnitt 2.1 mit „ $I = \mathbb{R}^{d'}$ “). Ein Ereignis $E \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ heißt *aufsteigend*, wenn $\mathbb{1}_E$ aufsteigend ist.

8.1.1 Theorem (FKG-Ungleichung für Poisson-Prozesse)

Für zwei aufsteigende Ereignisse $A, B \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\mathbb{P}_t[\Phi \in A \cap B] \geq \mathbb{P}_t[\Phi \in A] \mathbb{P}_t[\Phi \in B].$$

Die BK-Ungleichung gibt uns wiederum eine Möglichkeit, das „disjunkte“ Eintreten zweier Ereignisse zu quantifizieren. Wichtig ist hierbei, dass der Poisson-Prozess f.s. endlich sein muss. Ist $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und sind $A, B \in \mathcal{N}(U)$ zwei aufsteigende Ereignisse, so definieren wir

$$A \square B := \{\varphi \in \mathcal{N}(U) \mid \exists K, L \subset U, K \cap L = \emptyset : \varphi \cap K \in A, \varphi \cap L \in B\}.$$

8.1.2 Theorem (BK-Ungleichung für Poisson-Prozesse)

Für $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und zwei aufsteigende Ereignisse $A, B \in \mathcal{N}(U)$ gilt

$$\mathbb{P}_t[\Phi \cap U \in A \square B] \leq \mathbb{P}_t[\Phi \cap U \in A] \mathbb{P}_t[\Phi \cap U \in B].$$

Das Pendant der Russo-Formel (2.1.3) benötigen wir in verschärfter Form, wie es in [MZ00] oder allgemeiner in [LP16] gezeigt wird. Für eine messbare Funktion $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren den n -ten Differenzen-Operator durch

$$D_{x_1, \dots, x_n}^n f(\varphi) = \sum_{J \subset [n]} (-1)^{n-|J|} f\left(\varphi + \sum_{j \in J} \delta_{x_j}\right), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d, \varphi \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d).$$

8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich

Wir erinnern daran, dass wir eine Abbildung $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ durch $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ determiniert nennen, wenn für $\varphi, \varphi' \in \mathbb{R}^d$ aus $\varphi \cap U = \varphi' \cap U$ bereits $f(\varphi) = f(\varphi')$ folgt.

8.1.3 Theorem (Perturbationsformel für Poisson-Prozesse)

Sei $t_0, t \in [0, \infty)$, $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die durch U determiniert ist. Ist $\mathbb{E}_{t_0+t}[|f(\Phi)|] < \infty$, so gilt

$$\mathbb{E}_{t_0+t}[f(\Phi)] = \mathbb{E}_{t_0}[f(\Phi)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}_{t_0}[D_{x_1, \dots, x_n}^n f(\Phi)] d(x_1, \dots, x_n) \quad (8.1)$$

und die Summe konvergiert absolut.

Theorem 8.1.3 zeigt, dass $\mathbb{E}_t[f(\Phi)]$ unter gewissen Integrierbarkeitsbedingungen eine reell-analytische Funktion in t ist, deren erste Ableitung durch

$$\frac{\partial \mathbb{E}_t[f(\Phi)]}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_t[f(\Phi + \delta_x) - f(\Phi)] dx \quad (8.2)$$

gegeben ist. Ein weiteres Hilfsmittel, das wir sehr oft benötigen werden, ist die sogenannte Mecke-Gleichung. Dabei bezeichnet $\Phi_{\neq}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Phi^m \mid \forall i \neq j : x_i \neq x_j\}$, $n \in \mathbb{N}$ die n -Tupel von Punkten in Φ , bei denen kein Punkt doppelt auftritt.

8.1.4 Theorem (Mecke-Gleichung)

Für jede messbare Funktion $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \times (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow [0, \infty)$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t \left[\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Phi_{\neq}^n} f(\Phi, x_1, \dots, x_n) \right] \\ = t^n \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}_t \left[f \left(\Phi + \sum_{i \in [n]} \delta_{x_i}, x_1, \dots, x_n \right) \right] d(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ die Mecke-Gleichung

$$\mathbb{E}_t \left[\sum_{x \in \Phi} f(\Phi, x) \right] = t \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_t[f(\Phi + \delta_x, x)] dx.$$

Ein Beweis findet sich in [SW08, Theorem 3.2.5].

Vor dem physikalischen Hintergrund, macht es Sinn, sämtliche Größen nicht im Ursprung, sondern in einem sogenannten *typischen Punkt* des Punktprozesses auszuwerten. In einem endlichen System würden wir einen solchen Punkt

erhalten, indem wir unter allen Punkten uniform einen auswählen. Dies ist in einem unendlichen System nicht mehr möglich. Für einen stationären Punktprozess η auf \mathbb{R}^d können wir jedoch die sogenannte *Palm'sche Verteilung* \mathbb{P}_η^0 von η durch

$$\mathbb{P}_\eta^0[A] := \mathbb{E}[\eta([0, 1]^d)]^{-1} \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \eta \cap [0, 1]^d} \mathbb{1}\{\theta_x \eta \in A\} \right], \quad A \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$$

definieren. Diese Verteilung kann interpretiert werden als die Verteilung von η wenn wir darauf bedingen, dass der Ursprung in η liegt. Ist η ein Poisson-Prozess, so erhalten wir die Palm'sche Verteilung, indem wir $\eta + \delta_0$ anstelle von η betrachten. Im Abschnitt zur Lösbarkeit der Ornstein-Zernike-Gleichung werden wir die Palm'schen Verteilungen nochmal aufgreifen.

Wir schreiben in diesem Teil der Arbeit stets $B_r(x)$ für $B_r(x; \mathbb{R}^d)$ und B_r für $B_r(0)$, da Kugeln in anderen Metriken keine Rolle mehr spielen werden (vgl. Kapitel 2). Außerdem definieren wir die Ereignisse

$$\{A_1 \leftrightarrow A_2 \text{ in } \eta\} := \{\exists x_1, x_2 \in \eta : (x_i + \mathbf{B}) \cap A_i \neq \emptyset, i \in [2], x_1 \leftrightarrow x_2 \text{ in } \mathcal{G}_\eta\}$$

mit $\eta \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d)$, $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, die wir in vielfältiger Weise nutzen werden.

Wie bereits erwähnt, lassen sich fast alle Resultate der Knotenperkolation auf dem Gitter \mathcal{Z}^d auf das Boole'sche Modell übertragen. Das heißt unter anderem, dass die kritische Intensität t_c im Intervall $(0, \infty)$ liegt, also nicht trivial ist. Weiter gibt es für jedes $t \in [0, \infty)$ nur höchstens einen unendlichen Cluster. Ist $t < t_c$, weisen sowohl das „Volumen“ $|C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0})|$ als auch der „Radius“ $\max\{r > 0 \mid C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0}) \cap B_r \neq \emptyset\}$ des Clusters des typischen Kornes einen exponentiellen Tail auf.

Das Ergebnis für das Volumen wurde von Penrose in [Pen, Kapitel 10] gezeigt. Der Beweis beschränkt sich auf Kugeln als Körner, lässt sich aber leicht auf unser etwas allgemeineres Modell übertragen. Wir möchten das Theorem der Vollständigkeit halber hier noch einmal aufführen.

8.1.5 Theorem (Exponentielles Verhalten des Clustervolumens)

Für $t > 0$ existieren die Limiten

$$\begin{aligned} c_V(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log(\mathbb{P}_t[|C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0})| \geq n]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log(\mathbb{P}_t[|C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0})| = n]). \end{aligned}$$

Außerdem ist c_V stetig sowie monoton fallend in t und es gilt $c_V(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow 0$ sowie $c_V(t) = 0$ genau dann, wenn $t \geq t_c$.

8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich

Das Ergebnis für den Radius ließe sich im Prinzip ebenfalls mit einem einfachen Approximationsargument auf das Boole'sche Modell übertragen. Wir werden jedoch im kommenden Abschnitt einen direkten Beweis liefern, der weitere signifikante Einsichten in das Boole'sche Modell liefert.

8.2. Der Radius des Clusters eines typischen Punktes

Der Radius des Clusters verhält sich im subkritischen Bereich ähnlich wie das Volumen. Um dies zu zeigen, adaptieren wir den Beweis aus [DCT16] an das Boole'sche Modell. Der Beweis klärt die Beziehungen zwischen der Verteilungsfunktion des Radius

$$\theta_t(r) := \mathbb{P}_t[C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0}) \cap \partial B_r \neq \emptyset] = \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \Phi],$$

der Perkulationswahrscheinlichkeit

$$\theta_t := \mathbb{P}_t[|C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0})| = \infty] = \lim_{r \rightarrow \infty} \theta_t(r),$$

der erwarteten Clustergröße des typischen Punktes

$$\chi_t := \mathbb{E}_t[|C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0})|]$$

und dem Parameter t . Die Idee in [DCT16] war, nicht eine dieser Funktionen zu betrachten und Schlussfolgerungen auf die jeweils anderen zu ziehen, sondern eine geschickte weitere Kenngröße $\varphi_t(S)$ einzuführen und zu allen drei Funktionen in Beziehung zu setzen.

Für eine beschränkte Menge $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definieren wir

$$\partial_{\mathbf{B}} S := (S - \mathbf{B}) \cap (S^c - \mathbf{B})$$

und

$$\varphi_t(S) := \mathbb{E}_t \left[\sum_{x \in \Phi} \mathbb{1}\{x \in \partial_{\mathbf{B}} S, \mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S)\} \right] \quad (8.3)$$

$$= t \int_{\partial_{\mathbf{B}} S} \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S)] dx, \quad (8.4)$$

die erwartete Anzahl von Körnern des Boole'schen Modells im „breiten Rand“ $\partial_{\mathbf{B}} S$, die innerhalb von $S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S$ mit dem Punkt im Ursprung verbunden sind. Wir bemerken, dass die Menge $S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S$ aus denjenigen Punkten x besteht, für die $x + B \subset S$ gilt.

8.2. Der Radius des Clusters eines typischen Punktes

Die Kenngröße $\varphi_t(S)$ wird nun dazu benutzt, um einen weiteren kritischen Punkt

$$\tilde{t}_c := \sup\{t \geq 0 \mid \text{Es ex. } S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ beschränkt, mit } \mathbf{B} \subset S \text{ und } \varphi_t(S) < 1\} \quad (8.5)$$

zu definieren und damit das folgende Resultat zu formulieren.

8.2.1 Theorem

Es gilt $t_c = \tilde{t}_c$. Außerdem gilt:

1. Für $t < t_c$ existiert ein $c(t) > 0$ mit

$$\theta_t(r) = \mathbb{P}_t[C(0, \mathcal{G}_{\Phi+\delta_0}) \cap \partial B_r \neq \emptyset] \leq e^{-c(t)r}, \quad r > \text{diam}(\mathbf{B}).$$

2. Für $t = t_c$ ist für alle beschränkten $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbf{B} \subset S$

$$\varphi_t(S) \geq 1$$

und es gilt

$$\chi_t = \infty.$$

3. Für $t > t_c$ ist

$$\theta_t \geq \frac{t - \tilde{t}_c}{t}.$$

Beweis: Es genügt, die Aussagen 1, 2 und 3 für \tilde{t}_c anstelle von t_c zu zeigen, da sich daraus sofort $\tilde{t}_c = t_c$ ergibt. Ist also $t < \tilde{t}_c$, so gibt es ein offenes, beschränktes $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbf{B} \subset S$ und $\varphi_t(S) < 1$. Ist $r > 0$ so groß, dass $S \subset B_r(0)$ gilt, so schneidet jede stetige Kurve, die 0 mit einem Punkt in ∂B_r verbindet, den Rand von S . Da \mathbf{B} wegzusammenhängend und abgeschlossen ist, folgt aus „ $\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r$ in Φ “, dass es ein $x \in \Phi \cap \partial_{\mathbf{B}} S$ gibt, sodass $\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B}$ in $\Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S)$ und $x + \mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r$ in Φ gilt, wobei die Punktemengen, die die beiden Verbindungen realisieren, disjunkt sind. Um dies einzusehen, gehen wir entlang eines Pfades in \mathcal{G}_{Φ} , der \mathbf{B} mit ∂B_r verbindet, und wählen den Punkt als x , für den als erstes $(x + \mathbf{B}) \cap S^c \neq \emptyset$ gilt.

8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich

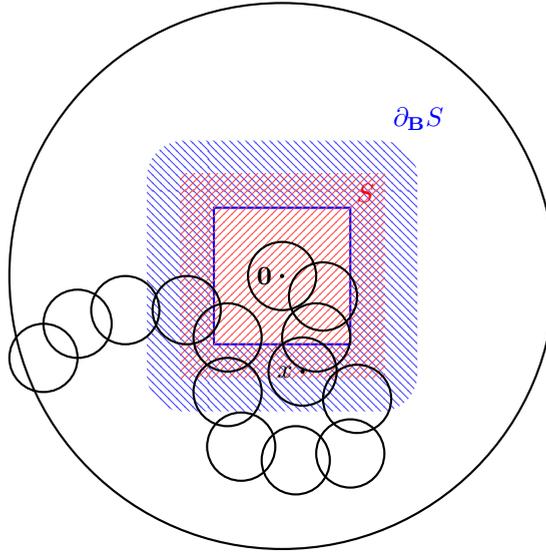


Abbildung 8.1.: Realisierung des Ereignisses $\{\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \Phi\}$ mit gekennzeichnetem x , $\mathbf{B} = B_1$, S in Form eines offenen Quadrats (rot schraffiert) und $\partial_{\mathbf{B}} S$ (blau schraffiert).

Daraus folgt mit Hilfe der Mecke-Gleichung 8.1.4 und der BK-Ungleichung 8.1.2, dass

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \Phi] \\
 & \leq \mathbb{E}_t \left[\sum_{x \in \Phi} \mathbf{1}\{x \in \partial_{\mathbf{B}} S, \mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S), \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. x + \mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \Phi \text{ mit disjunkten Punkten} \} \right] \\
 & = t \int_{\partial_{\mathbf{B}} S} \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S), \\
 & \qquad \qquad \qquad x + \mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \Phi \text{ mit disj. Pktn.}] dx \\
 & \leq t \int_{\partial_{\mathbf{B}} S} \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S)] \mathbb{P}_t[x + \mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \Phi] dx \\
 & \leq t \int_{\partial_{\mathbf{B}} S} \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}} S)] \\
 & \qquad \qquad \qquad \mathbb{P}_t[x + \mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_{r - \text{diam}(\partial_{\mathbf{B}} S)}(x) \text{ in } \Phi] dx \\
 & = \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_{r - \text{diam}(\partial_{\mathbf{B}} S)} \in \Phi] \varphi_t(S)
 \end{aligned}$$

8.2. Der Radius des Clusters eines typischen Punktes

gilt. Im vierten Schritt haben wir dabei genutzt, dass $B_{r-\text{diam}(\partial_{\mathbf{B}}S)}(x) \subset B_r$ gilt, wenn $x \in \partial_{\mathbf{B}}S$ ist. Damit folgt durch Iteration Aussage 1 für \tilde{t}_c anstelle von t_c . Für den Beweis der zweiten Aussage erinnern wir uns daran, dass nach Theorem 8.1.3 für jedes beschränkte $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Funktion $\varphi_t(S)$ analytisch also insbesondere stetig ist. Gäbe es also ein S mit $\varphi_{\tilde{t}_c}(S) < 1$, so würde dies auch für ein $t > \tilde{t}_c$ noch gelten, was ein Widerspruch zur Definition von $\varphi_t(S)$ ist. Die Mengen $\partial_{\mathbf{B}}D_n$ mit $D_n := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 < 3n \text{diam}(\mathbf{B})\}$, $n \in \mathbb{N}$ sind paarweise disjunkt, daher gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_t &= \mathbb{E}_t \left[1 + \sum_{x \in \Phi} \mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi\} \right] \\
 &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_t \left[\sum_{x \in \Phi} \mathbb{1}\{x \in \partial_{\mathbf{B}}D_n, \mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi\} \right] \\
 &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_t \left[\sum_{x \in \Phi} \mathbb{1}\{x \in \partial_{\mathbf{B}}D_n, \mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (D_n \setminus \partial_{\mathbf{B}}D_n)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_t(\partial_{\mathbf{B}}D_n) \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

Um die dritte Aussage zu zeigen, werden wir zunächst die Differentialungleichung

$$\frac{\partial \theta_t(r)}{\partial t} \geq \frac{1 - \theta_t(r)}{t}, \quad t \geq \tilde{t}_c, r > \text{diam}(\mathbf{B}) \quad (8.6)$$

herleiten. Das Ereignis $\{\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r\}$ ist durch die Menge $B_r^\circ - \mathbf{B}$ determiniert. Wir schreiben der Lesbarkeit wegen im Folgenden B_r° anstelle von $\text{int } B_r$. Wir verwenden ein besonderes Verfahren, um einen Poisson-Prozess auf $B_r^\circ - \mathbf{B}$ zu konstruieren. Wir gehen induktiv vor und konstruieren eine Folge von Punkt-Prozessen $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dazu sei $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Poisson-Prozessen mit Intensität t auf \mathbb{R}^d . Zuerst setzen wir $A_1 := \partial_{\mathbf{B}}B_r^\circ$ und definieren $\eta_1 := \Phi_1 \cap A_1$. Nun definieren wir induktiv

$$A_{n+1} := ((\eta_n + \mathbf{B} - \mathbf{B}) \cap (B_r^\circ - \mathbf{B})) \setminus A_n$$

und

$$\eta_{n+1} := \Phi_{n+1} \cap A_{n+1}.$$

Die Menge A_{n+1} ist der Bereich in $B_r^\circ - \mathbf{B}$, in dem jedes Korn $x + \mathbf{B}$ mit $x \in A_{n+1}$ ein Korn $y + \mathbf{B}$ mit $y \in \eta_n$ schneiden würde und in dem der Prozess noch nicht konstruiert wurde.

8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich

Aus der Konstruktion folgt, dass für $n \in \mathbb{N}$ und zwei Punkte $x \in \eta_n$ und $y \in \eta_{n+2}$ bereits $x + \mathbf{B} \cap y + \mathbf{B} = \emptyset$ gilt. Da \mathbf{B} eine offene Kugel um 0 enthält, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ abhängig von r, d und \mathbf{B} , sodass $A_k = \emptyset$ ist. Wir setzen

$$\eta^{(1)} := \sum_{n=1}^k \eta_n$$

und

$$A^{(1)} := \bigcup_{n=1}^k A_n.$$

Es ist möglich, dass $A^{(1)} \neq B_r^\circ - \mathbf{B}$, daher definieren wir

$$A^{(2)} := (B_r^\circ - \mathbf{B}) \setminus A^{(1)}$$

und setzen

$$\eta^{(2)} := \Phi_{k+1} \cap A^{(2)}.$$

Diese Konstruktion hat zur Folge, dass $\eta := \eta^{(1)} + \eta^{(2)}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität t auf $B_r^\circ - \mathbf{B}$ ist und damit die selbe Verteilung hat wie $\Phi \cap (B_r - \mathbf{B})$ unter \mathbb{P}_t . Der Prozess $\eta^{(1)}$ enthält dann genau die Punkte von η , die mit ∂B_r in $\eta^{(1)}$ verbunden sind. Außerdem ist $\eta^{(2)}$ Poisson-verteilt auf $A^{(2)}$, wenn $\eta^{(1)}$ gegeben ist. Diese Konstruktion wurde in ähnlicher Weise bereits in [Pen96] verwendet.

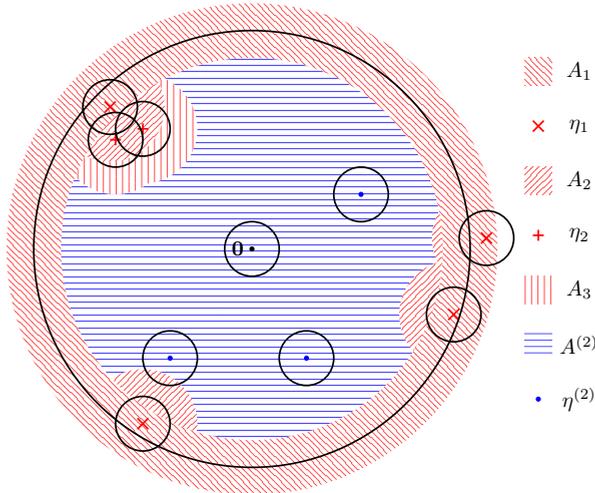


Abbildung 8.2.: Eine Realisierung von η , bei der drei Iterationen durchgeführt wurden.

8.2. Der Radius des Clusters eines typischen Punktes

Wir benötigen im Weiteren, dass

$$A^{(2)} = (B_r^\circ \setminus (\eta^{(1)} + \mathbf{B})) \setminus \partial_{\mathbf{B}}(B_r^\circ \setminus (\eta^{(1)} + \mathbf{B})) \quad (8.7)$$

gilt (Abbildung 8.2 macht die Gleichheit plausibel, deren Beweis etwas länglich ist).

Zunächst erhalten wir aus der Definition von $A^{(1)}$ durch einfache Umformungen

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= (\partial_{\mathbf{B}} B_r^\circ) \cup \bigcup_{n=1}^k ((\eta_n + \mathbf{B} - \mathbf{B}) \cap (B_r^\circ - \mathbf{B})) \\ &= ((\eta^{(1)} + \mathbf{B} - \mathbf{B}) \cap (B_r^\circ - \mathbf{B})) \cup \partial_{\mathbf{B}} B_r^\circ \\ &= ((\eta^{(1)} + \mathbf{B} - \mathbf{B}) \cup \partial_{\mathbf{B}} B_r^\circ) \cap (B_r^\circ - \mathbf{B}), \end{aligned}$$

woraus

$$A^{(2)} = (B_r^\circ - \mathbf{B}) \setminus ((\eta^{(1)} + \mathbf{B} - \mathbf{B}) \cup \partial_{\mathbf{B}} B_r^\circ) \quad (8.8)$$

folgt. Ist nun x ein Element der rechten Seite von (8.8) so gilt:

1. $(x + \mathbf{B}) \cap B_r^\circ \neq \emptyset$,
2. $(x + \mathbf{B}) \cap (\eta^{(1)} + \mathbf{B}) = \emptyset$,
3. $x + \mathbf{B} \subset B_r^\circ$ oder $x + \mathbf{B} \subset (B_r^\circ)^c$.

Aus 1. und 3. folgt $x + \mathbf{B} \subset B_r^\circ$, weshalb auch $x \in B_r^\circ$ gilt. Aus 2. folgt $x \notin \eta^{(1)} + \mathbf{B}$. Aus 1. und 2. folgt $x + \mathbf{B} \subset B_r^\circ \setminus (\eta^{(1)} + \mathbf{B})$. Dies impliziert, dass x auch in der rechten Seite von (8.7) enthalten ist.

Ist umgekehrt x ein Element der rechten Seite von (8.7), so ist $x + \mathbf{B} \subset B_r^\circ \setminus (\eta^{(1)} + \mathbf{B})$. Daher ist $x \in B_r^\circ$, $x + \mathbf{B} \cap (\eta^{(1)} + \mathbf{B}) = \emptyset$ und $x + \mathbf{B} \subset B_r^\circ$. Letzteres impliziert $x \notin \partial_{\mathbf{B}} B_r^\circ$ und es folgt, dass x in der rechten Seite von (8.7) enthalten ist.

Wir möchten die Ableitung von $\theta_t(r)$ nach t untersuchen. Dazu würden wir wegen Gleichung (8.2) gern zeigen, dass für $x \in B_r^\circ - \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \eta + \delta_x\} - \mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \eta\} \\ &= \mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \eta^{(2)}, \eta^{(1)} + \mathbf{B} \cap \mathbf{B} = \emptyset, x \in \partial_{\mathbf{B}}(B_r^\circ \setminus (\eta^{(1)} + \mathbf{B}))\} \end{aligned} \quad (8.9)$$

gilt. Die linke Seite der Gleichung kann nicht negativ werden, also bleiben drei Fälle zu unterscheiden (vgl. Abbildung 8.3).

Fall 1: Die linke Seite von (8.9) ist gleich eins. Dann erzeugt das Hinzufügen von $x + \mathbf{B}$ eine Verbindung von \mathbf{B} nach ∂B_r , die es in $\eta + \mathbf{B}$ nicht gibt. Das heißt, $\{\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \eta\}$ muss eintreten. Die Verbindung darf jedoch keine Punkte

8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich

aus $\eta^{(1)}$ nutzen, weil sonst bereits ohne die Hilfe von x eine Verbindung von \mathbf{B} und ∂B_r vorhanden wäre, da alle Punkte in $\eta^{(1)}$ mit ∂B_r in $\eta^{(1)}$ verbunden sind. Demzufolge kann auch kein Korn eines Punktes von $\eta^{(1)}$ das Korn \mathbf{B} schneiden. Da $x + \mathbf{B}$ eine neue Verbindung zwischen \mathbf{B} und ∂B_r schafft, folgt außerdem, dass $x + \mathbf{B}$ die Menge $(B_r^\circ)^c \cup (\eta^{(1)} + \mathbf{B})$ schneidet. Wir haben bereits festgestellt, dass $\{\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \eta^{(2)}\}$ eintritt. Daher muss $x + \mathbf{B}$ auch $(\eta^{(1)} + \mathbf{B})^c$ schneiden und es folgt $x \in \partial_{\mathbf{B}}(B_r^\circ \setminus (\eta^{(1)} + \mathbf{B}))$.

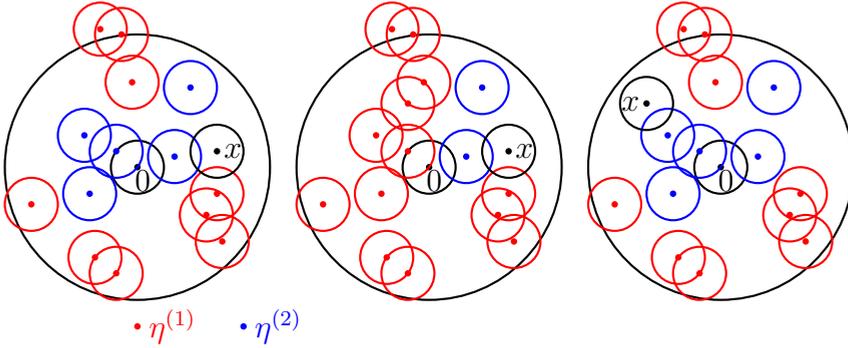


Abbildung 8.3.: Beispiel für Realisierungen der drei beschriebenen Fälle.

Fall 2: Die linke Seite ist gleich null, wobei beide Indikatoren den Wert eins haben. Dann muss nach Konstruktion $\{\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \eta^{(1)}\}$ eintreten, weshalb die zweite Bedingung der rechten Seite nicht erfüllt ist.

Fall 3: Beide Indikatoren der linken Seite sind gleich null. Nehmen wir an, die erste und die dritte Bedingung der rechten Seiten von (8.9) wären erfüllt, dann würde $x + \mathbf{B}$ die Menge $(B_r^\circ)^c \cup (\eta^{(1)} + \mathbf{B})$ schneiden und es gäbe in $\eta^{(2)}$ eine Verbindung von \mathbf{B} nach $x + \mathbf{B}$. Dadurch entstünde eine Verbindung von \mathbf{B} nach ∂B_r , da alle Punkte in $\eta^{(1)}$ mit ∂B_r in $\eta^{(1)}$ verbunden sind. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass beide Indikatoren der linken Seite gleich null sind.

Jetzt können wir mit Hilfe von (8.7) und (8.9) die Ableitung umformen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_t(r)}{\partial t} &= \int_{B_r^\circ - \mathbf{B}} \mathbb{E}[\mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \eta + \delta_x\} - \mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow \partial B_r \text{ in } \eta\}] dx \\ &= \int_{B_r^\circ - \mathbf{B}} \int \mathbb{E}[\mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \eta^{(2)}, (\eta^{(1)} + \mathbf{B}) \cap \mathbf{B} = \emptyset, \\ &\quad x \in \partial_{\mathbf{B}}(B_r^\circ \setminus (\eta^{(1)} + \mathbf{B}))\} \mid \eta^{(1)} = \xi] \mathbb{P}_{\eta^{(1)}}(d\xi) dx. \end{aligned}$$

8.2. Der Radius des Clusters eines typischen Punktes

Bei gegebenem $\eta^{(1)}$ ist $\eta^{(2)}$ wie erwähnt Poisson-verteilt auf A_2 und es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_t(r)}{\partial t} &= \int \mathbb{1}\{(\xi + \mathbf{B}) \cap \mathbf{B} = \emptyset\} \int_{B_r^\circ - \mathbf{B}} \mathbb{1}\{x \in \partial_{\mathbf{B}}(B_r^\circ \setminus (\xi + \mathbf{B}))\} \\
 &\quad \mathbb{E}[\mathbb{1}\{\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \eta^{(2)}\} \mid \eta^{(1)} = \xi] dx \mathbb{P}_{\eta^{(1)}}(d\xi) \\
 &= \int \mathbb{1}\{(\xi + \mathbf{B}) \cap \mathbf{B} = \emptyset\} \int_{\partial_{\mathbf{B}}(B_r^\circ \setminus (\xi + \mathbf{B}))} \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in} \\
 &\quad \Phi \cap ((B_r^\circ \setminus (\xi + \mathbf{B})) \setminus \partial_{\mathbf{B}}(B_r^\circ \setminus (\xi + \mathbf{B})))] dx \mathbb{P}_{\eta^{(1)}}(d\xi) \\
 &= \frac{1}{t} \int \varphi_t(B_r^\circ \setminus (\xi + \mathbf{B})) \mathbb{1}\{(\xi + \mathbf{B}) \cap \mathbf{B} = \emptyset\} \mathbb{P}_{\eta^{(1)}}(d\xi).
 \end{aligned}$$

Wenn $(\xi + \mathbf{B}) \cap \mathbf{B} = \emptyset$ gilt, ist wegen $r > \text{diam}(\mathbf{B})$ auch gesichert, dass $\mathbf{B} \subset B_r^\circ \setminus (\xi + \mathbf{B})$ gilt. Aus den Überlegungen zur Behauptung 2 und der Definition von \tilde{t}_c folgt, dass für $t \geq \tilde{t}_c$ und jedes beschränkte $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\mathbf{B} \subset S$

$$\varphi_t(S) \geq 1$$

gilt. Daher erhalten wir die gewünschte Differentialungleichung

$$\frac{\partial \theta_t(r)}{\partial t} \geq \frac{1}{t} \int \mathbb{1}\{(\xi + \mathbf{B}) \cap \mathbf{B} = \emptyset\} \mathbb{P}_{\eta^{(1)}}(d\xi) = \frac{1 - \theta_t(r)}{t}. \quad (8.10)$$

Es bleibt Behauptung 3 aus (8.10) herzuleiten. Da mit positiver Wahrscheinlichkeit $\Phi \cap B_r^\circ - \mathbf{B}$ leer ist, gilt $\theta_t(r) < 1$ und es folgt

$$\frac{\theta'_t(r)}{1 - \theta_t(r)} \geq \frac{1}{t}.$$

Diese Ungleichung integrieren wir von \tilde{t}_c bis t und erhalten

$$\log \left(\frac{1 - \theta_{\tilde{t}_c}(r)}{1 - \theta_t(r)} \right) \geq \log \left(\frac{t}{\tilde{t}_c} \right).$$

Die Abschätzung $\theta_{\tilde{t}_c}(r) \geq 0$ und einfache Umformungen liefern

$$\theta_t(r) \geq \frac{t - \tilde{t}_c}{t}.$$

Mit dem Limes $r \rightarrow \infty$ ergibt sich die dritte Behauptung für \tilde{t}_c . □

Das Theorem 8.2.1 liefert auch eine weitere einfache Möglichkeit die bereits bekannte untere Schranke (in der Literatur mitunter Penrose-Schranke genannt)

$$t_c \geq \frac{1}{\text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B})} \quad (8.11)$$

8. Exponentieller Abfall im Subkritischen Bereich

herzuleiten. Dazu wählen wir $\varepsilon > 0$ und $S = \mathbf{B} + B_\varepsilon^\circ$ und erhalten $\varphi_t(\mathbf{B} + B_\varepsilon^\circ) \leq t \text{Vol}(\mathbf{B} + B_\varepsilon^\circ - \mathbf{B})$, indem wir den Integrand in (8.4) durch 1 abschätzen und $\partial_{\mathbf{B}}(\mathbf{B} + B_\varepsilon^\circ) \subset \mathbf{B} + B_\varepsilon^\circ - \mathbf{B}$ nutzen. Angenommen es ist $t_c < \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B})^{-1}$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\varphi_{t_c}(S) < 1$ gilt (dies folgt, da $\mathbf{B} - \mathbf{B}$ kompakt und das Lebesgue-Maßes stetig von oben ist). Dies ist ein Widerspruch zu Theorem 8.2.1.

Dieser Ansatz kann jedoch nochmal signifikant verbessert werden. Wir betrachten dazu den Spezialfall $\mathbf{B} = B_1$ und berechnen $\varphi_t(B_3)$. Das Verfahren lässt sich auch für beliebige andere Körner durchführen, die Numerik kann dabei jedoch deutlich komplizierter werden.

Wir setzen $S = B_3^\circ$ und $\mathbf{B} = B_1$. Dann ist $\partial_{\mathbf{B}}S = B_4^\circ \setminus B_2^\circ$ und $S \setminus \partial_{\mathbf{B}}S = B_2^\circ$. Sei $x \in \partial_{\mathbf{B}}S = B_4^\circ \setminus B_2^\circ$. Das Ereignis $\{\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}}S)\}$ tritt genau dann ein, wenn es mindestens einen Punkt $y \in \Phi \cap B_2$ gibt sodass $(y + \mathbf{B}) \cap (x + \mathbf{B}) \neq \emptyset$ gilt. Denn es gilt $\mathbf{B} \cap (y + \mathbf{B}) \neq \emptyset$ und somit stellt das Korn $y + \mathbf{B}$ bereits die Verbindung zwischen \mathbf{B} und $x + \mathbf{B}$ her. Es muss also $y \in \Phi \cap B_2^\circ \cap (x + B_2)$ gelten. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \leftrightarrow x + \mathbf{B} \text{ in } \Phi \cap (S \setminus \partial_{\mathbf{B}}S)] &= \mathbb{P}_t[\Phi((x + B_2) \cap B_2) \geq 1] \\ &= 1 - e^{-t \text{Vol}((x+B_2) \cap B_2)} \end{aligned}$$

und wegen (8.4) nach dem Übergang zu Polarkoordinaten

$$\varphi_t(B_3) = t \text{Vol}(B_1) \int_2^4 r^{d-1} (1 - e^{-t \text{Vol}((r\mathbf{e}_1 + B_2) \cap B_2)}) dr. \quad (8.12)$$

Dieses Integral kann sehr gut numerisch ausgewertet werden und wir können numerisch das t bestimmen, für das $\varphi_t(B_3) = 1$ gilt. Dies ist wegen Theorem 8.2.1 eine untere Schranke an t_c .

Wir werden in Kapitel 10 ein Verfahren von Hall auf beliebige Dimensionen ausdehnen, welches noch bessere Schranken liefern wird. Dort werden wir auch die Güte dieser Schranken diskutieren.

8.2. Der Radius des Clusters eines typischen Punktes

d	Schranke via $\varphi_t(B_3)$	Penrose Schranke
2	0.135802...	0.0795774...
3	0.0433691...	0.0298415...
4	0.0167131...	0.0126651...
5	0.00734445...	0.00593678...
6	0.00357261...	0.00302358...
7	0.00188850...	0.00165352...
8	0.00107117...	0.000962435...
9	0.000645942...	0.000592123...
10	0.000411202...	0.000382941...
11	0.000274803...	0.000259158...

Tabelle 8.1.: Untere Schranken für die kritische Intensität t_c in Dimensionen 2 bis 11 mit $\mathbf{B} = B_1$.

Es sei erwähnt, dass Penrose in [Pen96] nicht nur eine untere Schranke angibt, sondern auch zeigt, dass diese asymptotisch exakt wird. Ähnliche und teilweise noch deutlich präzisere Entwicklungen der kritischen Perkolationswahrscheinlichkeit wurden mit Hilfe der sogenannten Lace-Expansion in diskreten Modellen erreicht (siehe z.B. [vdHS06])

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

Die zentrale Größe, die wir in diesem Kapitel untersuchen, ist die bereits in der Einführung genannte Pair-Connectedness-Funktion $P_t : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, die für $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $t \geq 0$ durch

$$P_t(x, y) := \mathbb{P}_t[\{x\} \leftrightarrow \{y\} \text{ in } \Phi + \delta_x + \delta_y] = \mathbb{P}_t[x + \mathbf{B} \leftrightarrow y + \mathbf{B} \text{ in } \Phi] \quad (9.1)$$

definiert ist. Aus der Stationarität von Φ folgt sofort $P_t(x, y) = P_t(0, y - x)$ und wir schreiben daher $P_t(x) := P_t(0, x)$. Es ist wegen Theorem 8.2.1 klar, dass $P_t(x)$ im subkritischen Bereich $t < t_c$ für $\|x\|_2 \rightarrow \infty$ exponentiell fallen muss, und das folgende Lemma verschärft diese Aussage noch etwas.

9.0.1 Lemma

Für $t < t_c$ gibt es ein $c(t) > 0$, sodass

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{r} \log(P_t(r\mathbf{e}_1)) = c(t)$$

gilt.

Beweis: Mit Hilfe der FKG-Ungleichung 8.1.1 ist leicht einzusehen, dass für $r_1, r_2 > 0$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_t[\{0\} \leftrightarrow \{(r_1 + r_2)\mathbf{e}_1\} \text{ in } \Phi] \\ & \geq \mathbb{P}_t[\{0\} \leftrightarrow \{r_1\mathbf{e}_1\} \text{ in } \Phi, \{r_1\mathbf{e}_1\} \leftrightarrow \{(r_1 + r_2)\mathbf{e}_1\} \text{ in } \Phi] \\ & \geq \mathbb{P}_t[\{0\} \leftrightarrow \{r_1\mathbf{e}_1\} \text{ in } \Phi] \mathbb{P}_t[\{0\} \leftrightarrow \{r_2\mathbf{e}_1\} \text{ in } \Phi] \end{aligned}$$

gilt. Demzufolge gilt für

$$f(r) := -\log(\mathbb{P}_t[\{0\} \leftrightarrow \{r\mathbf{e}_1\} \text{ in } \Phi]), \quad r \geq 0$$

die Ungleichung

$$f(r_1 + r_2) \leq f(r_1) + f(r_2)$$

und es folgt aus einer Verallgemeinerung von Feketes Lemma [Ham62], dass der Limes

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r}$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

existiert. Es bleibt also die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}_t[\{0\} \leftrightarrow \{r\mathbf{e}_1\} \text{ in } \Phi]$ zu $P_t(0, r\mathbf{e}_1)$ in Beziehung zu setzen. Es gilt einerseits für $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$\mathbb{P}_t[\{\mathbf{x}\} \leftrightarrow \{y\} \text{ in } \Phi] \leq \mathbb{P}_t[x + \mathbf{B} \leftrightarrow y + \mathbf{B} \text{ in } \Phi],$$

andererseits ist wegen der FKG-Ungleichung (8.1.1) und der Stationarität von Φ

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t[\{\mathbf{x}\} \leftrightarrow \{y\} \text{ in } \Phi] &\geq \mathbb{P}_t[x + \mathbf{B} \leftrightarrow y + \mathbf{B} \text{ in } \Phi, x + \mathbf{B} \subset \Phi + \mathbf{B}, y + \mathbf{B} \subset \Phi + \mathbf{B}] \\ &\geq \mathbb{P}_t[x + \mathbf{B} \leftrightarrow y + \mathbf{B} \text{ in } \Phi] \mathbb{P}_t[\mathbf{B} \subset \Phi + \mathbf{B}]^2. \end{aligned}$$

Da \mathbf{B} eine Kugel mit positivem Radius enthält, ist $\mathbb{P}_t[\mathbf{B} \subset \Phi + \mathbf{B}] > 0$.

Da $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r)/r$ existiert, folgt mit Hilfe dieser beiden Abschätzungen leicht die Existenz von $\lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{r} \log(P_t(r\mathbf{e}_1))$. Dass $c(t) > 0$ ist, ergibt sich aus $\mathbb{P}_t(0, r\mathbf{e}_1) \leq \theta_t(r - \text{diam}(\mathbf{B}))$ und Theorem 8.2.1. \square

Es sei daran erinnert, dass für zwei integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ die Faltung $f * g$ via

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

definiert ist. Es gelten die elementaren Spezialfälle der Young'schen Ungleichung [Bog07, Theorem 3.9.2]

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1, \quad f, g \in L^1, \quad (9.2)$$

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty, \quad f \in L^1, g \in L^\infty, \quad (9.3)$$

weshalb die Definition insbesondere für $f, g \in L^1$ bzw. $f \in L^1, g \in L^\infty$ Sinn macht. Mit L^1 seien dabei die integrierbaren und mit L^∞ die beschränkten Funktionen gemeint. Diese Räumen seien mit den entsprechenden Normen ausgestattet.

Wir würden das Verhalten von P_t gern besser verstehen. Die *Ornstein-Zernike-Gleichung*

$$P_t = Q_t + tP_t * Q_t, \quad (9.4)$$

die P_t mit der sogenannten *Direct-Connectedness-Funktion* $Q_t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ in Verbindung bringt, liefert dazu zwei mögliche Ansätze. Der erste Ansatz besteht darin, eine weitere Beziehung zwischen P_t und Q_t herzustellen und dann das resultierende Gleichungssystem nach P_t aufzulösen. Dieser Ansatz wurde in der Physik in vielfältiger Weise verfolgt. In der Regel ist die zweite Gleichung eine Näherung, wodurch auch das gefundene P_t eine Näherung darstellt (siehe z.B. [PA87], [Bax70]).

9.1. Lösbarkeit der Ornstein-Zernike Gleichung

Der zweite Ansatz ist, zu zeigen, dass $Q_t(x)$ mit betragsmäßig größer werdendem x ebenfalls exponentiell in $\|x\|_2$ fällt, wobei jedoch die Konstante im Exponenten größer ist (d.h. der Abfall ist schneller). Daraus kann mit Hilfe von funktionentheoretischen Argumenten geschlossen werden, dass $P_t(x)$ von der Form $c_1(t)/\|x\|_2^{(d-1)/2} e^{-c_2(t)\|x\|_2} (1 + o(1))$ ist [CCC91].

Wir wollen daher grundlegende Fragen der Lösbarkeit der Ornstein-Zernike-Gleichung und der Eigenschaften dieser Lösung stellen und beantworten.

9.1. Lösbarkeit der Ornstein-Zernike Gleichung

Die Lösbarkeit können wir in einem sehr allgemeinen Rahmen zeigen, der deutlich über den Rahmen des Boole'schen Modells hinausgeht. Dazu ist es notwendig, die Stationarität von Punktprozessen auf andere Art und Weise einzuführen. Wir nutzen in diesem Abschnitt (und nur in diesem) folgende Definitionen und Begriffe:

Der Grundraum $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ sei mit einem messbaren Fluss $\theta = (\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ ausgestattet. Dies ist eine Familie von Abbildungen $\theta_x : \Omega \rightarrow \Omega$, für die $(\omega, x) \mapsto \theta_x(\omega)$ messbar ist. Weiter fordern wir, dass θ_0 die Identität ist und dass $\theta_x \circ \theta_y = \theta_{x+y}$ gilt. Wir können uns weiterhin θ_x als Verschiebung um x vorstellen, jedoch ist diese Verschiebung jetzt so angelegt, dass sie auf ganz Ω wirkt. Wir setzen voraus, dass

$$\mathbb{P} \circ \theta_x = \mathbb{P}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

gilt. In diesem Sinne nennen wir einen einfachen Punktprozess η auf \mathbb{R}^d *stationär*, wenn

$$\eta(\omega, A + x) = \eta(\theta_x(\omega), A), \quad \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

erfüllt ist. Dies ist konsistent mit der Definition von Stationarität aus Abschnitt 2.2. Die Intensität von η bezeichnen wir mit γ_η .

Wir möchten auch die Clusterbildung so allgemein wie möglich halten. Dazu sei $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine messbare translationskovariante Funktion, d.h. es gilt

$$\pi(\theta_y(\omega), x - y) = \pi(\omega, x) - y, \quad \omega \in \Omega, x, y \in \mathbb{R}^d. \quad (9.5)$$

Die Funktion π kodiert die Art und Weise, wie Cluster gebildet werden, indem sie jedem Punkt des Punktprozesses ein Clusterzentrum zuordnet. Im Fall des Boole'schen Modells würden z.B. alle Punkte eines Clusters durch π auf den lexikographisch kleinsten Punkt des Clusters abgebildet. Dadurch ergibt sich der *Punktprozess der Clusterzentren* von η

$$\zeta(\omega) := \{\pi(\omega, x) \mid x \in \eta(\omega)\}$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

und der Cluster eines Punktes $x \in \eta$

$$C(x) := C(\omega, x) := \{y \in \eta \mid \pi(\eta(\omega), x) = \pi(\eta(\omega), y)\}.$$

Aus der Translationskovarianz von η folgt, dass ζ ebenfalls stationär ist. Die Intensität von ζ nennen wir γ_ζ . Umgekehrt weisen wir jedem Clusterzentrum $z \in \zeta$ seinen Cluster

$$C'(z) := C'(\omega, z) := \{x \in \eta \mid \pi(\eta(\omega), x) = z\}$$

zu und erhalten dadurch eine Familie disjunkter Cluster, für die

$$\eta = \bigcup_{z \in \zeta} C(z) \tag{9.6}$$

gilt. Wegen der Translationskovarianz von π gilt für $x \in \eta$

$$C(\theta_y(\omega), x) = C(\omega, x + y) - y, \quad \omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^d \tag{9.7}$$

und für $z \in \zeta$

$$C'(\theta_y(\omega), z) = C'(\omega, z + y) - y, \quad \omega \in \Omega, y \in \mathbb{R}^d. \tag{9.8}$$

Wir werden nun einen kleinen Teil der Theorie Palm'scher Verteilungen einführen, den wir nur in diesem Abschnitt benötigen werden. Einen sehr guten Überblick über die Theorie liefert Kapitel 3 in [Las10], das Buch von Daley und Vere-Jones [DVJ03], [DVJ07] oder auch [SW08]. Wir erinnern daran, dass wir das *Palm'sche Maß* \mathbb{P}_η^0 von η via

$$\mathbb{P}_\eta^0[A] := \gamma_\eta^{-1} \int \sum_{x \in \eta(\omega) \cap [0,1]^d} \mathbb{1}\{\theta_x \omega \in A\} \mathbb{P}(d\omega)$$

eingeführt hatten. Dies kann interpretiert werden als die Verteilung von η , bedingt darauf, dass η einen Punkt im Ursprung besitzt. Dieser Punkt im Ursprung kann auch als ein typischer Punkt von η angesehen werden. Das Palm'sche Maß von η erfüllt das verfeinerte Campbell-Theorem

$$\int \sum_{x \in \eta(\omega)} f(\theta_x(\omega), x) \mathbb{P}(d\omega) = \gamma_\eta \int \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega, x) dx \mathbb{P}_\eta^0(d\omega)$$

für jedes messbare $f : \Omega \times x \rightarrow [0, \infty)$. Dies kann, die üblichen Konventionen nutzend, auch als

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \eta} f(\theta_x, x) \right] = \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[\int_{\mathbb{R}^d} f(\theta_0, x) dx \right]$$

geschrieben werden. Mit Hilfe der *Neveu'schen Austauschformel* lassen sich zwei Palm'sche Verteilungen zueinander in Beziehung setzen.

9.1. Lösbarkeit der Ornstein-Zernike Gleichung

9.1.1 Proposition (Neveu'sche Austauschformel)

Es seien η und η' zwei stationäre Punktprozesse in \mathbb{R}^d mit Intensitäten $\gamma_\eta, \gamma_{\eta'} \in (0, \infty)$. Ist $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ messbar, so gilt

$$\gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[\sum_{x \in \eta'} f(\theta_0, x) \right] = \gamma_{\eta'} \mathbb{E}_{\eta'}^0 \left[\sum_{x \in \eta} f(\theta_x, -x) \right].$$

Dies gilt auch für $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, falls $\mathbb{E}_{\eta'}^0 [\sum_{x \in \eta} |f(\theta_x, -x)|] < \infty$ erfüllt ist.

Dies erlaubt uns auch eine Beziehung zwischen Funktionalen des typischen Clusters und des Clusters des typische Punkts herzustellen.

9.1.2 Korollar

Für jede messbare Funktion $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$ gilt

$$\gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 [f(C(0) - \pi(0))] = \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 [C'(0) | f(C'(0))].$$

Beweis: Aus der Neveu'schen Austauschformel und der Translationskovarianz (9.5), (9.7), (9.8) folgt

$$\begin{aligned} \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 [C'(0) | f(C'(0))] &= \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 \left[\sum_{x \in \eta} f(C'(0)) \mathbb{1}\{\pi(x) = 0\} \right] \\ &= \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[\sum_{z \in \zeta} f(C'(\theta_z, 0)) \mathbb{1}\{\pi(\theta_z, -z) = 0\} \right] \\ &= \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[\sum_{z \in \zeta} f(C'(z) - z) \mathbb{1}\{\pi(0) = z\} \right] \\ &= \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 [f(C(0) - \pi(0))]. \end{aligned}$$

□

Da wir die Pair-Connectedness-Funktion betrachten möchten, benötigen wir außerdem die bivariaten Palm'schen Verteilungen. Die Grundvoraussetzung dafür ist, dass das zweite Momentenmaß $\Lambda^{(2)}$ von η

$$\Lambda^{(2)}(A) := \mathbb{E} \left[\sum_{x, y \in \eta, x \neq y} \mathbb{1}_A(x, y) \right], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$$

absolut stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes ist. Das heißt wegen der Stationarität von η , dass es eine messbare Funktion $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ geben muss, für die

$$\Lambda^{(2)}(d(x, y)) = \gamma_\eta^2 \rho(y - x) dx dy$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

gilt. Die Zwei-Punkt-Palm-Verteilung von η ist dann eine Familie $\{\mathbb{P}_\eta^{x,y} \mid x, y \in \mathbb{R}^d\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (Ω, \mathfrak{F}) , sodass $(x, y) \mapsto \mathbb{P}_\eta^{x,y}[A]$ für alle $A \in \mathfrak{F}$ messbar ist und

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x,y \in \eta, x \neq y} f(\theta_0, x, y) \right] = \gamma_\eta^2 \iint \mathbb{E}_\eta^{x,y}[f(\theta_0, x, y)] \rho(y-x) dx dy \quad (9.9)$$

für jedes messbare $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gilt. Dabei sei $\mathbb{E}_\eta^{(x,y)}$ der Erwartungswert bzgl. $\mathbb{P}_\eta^{x,y}$. Unter der Annahme, dass (Ω, \mathfrak{F}) ein Borel-Raum ist, kann mittels Desintegration gezeigt werden, dass es eine Familie $\{\mathbb{P}_\eta^{0,x} \mid x \in \mathbb{R}^d\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf (Ω, \mathfrak{F}) gibt, sodass

$$\mathbb{E}_\eta^0 \left[\sum_{x \in \eta} f(\theta_0, x) \right] = \mathbb{E}_\eta^0[f(\theta_0, 0)] + \gamma_\eta \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_\eta^{0,x}[f(\theta_0, x)] \rho(x) dx \quad (9.10)$$

für alle messbaren $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gilt. Dies lässt sich mit Standardmethoden auf messbare und integrierbare $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ ausdehnen (integrierbar meint in diesem Fall, dass die Erwartungswerte bzw. Integrale in (9.10) über $|f|$ endlich sind). Es ist leicht nachzurechnen, dass dann

$$\mathbb{P}_\eta^{x,y}[A] := \mathbb{P}_\eta^{0,y-x}[\theta_x A], \quad x, y \in \mathbb{R}^d, A \in \mathfrak{F} \quad (9.11)$$

die Gleichung (9.9) erfüllt. Es kann, ähnlich wie bei der Palm'schen Verteilung, die Verteilung $\mathbb{P}_\eta^{x,y}$ interpretiert werden, als Verteilung von η bedingt darauf, dass η jeweils einen Punkt bei x und y besitzt. Demzufolge ist z.B. $\mathbb{P}_\eta^{x,y}[x, y \in \eta] = 1$.

Wir sind jetzt in der Lage, die Pair-Connectedness-Funktion $P(x, y)$ in der verallgemeinerten Variante des Modells als

$$P(x, y) := \rho(x-y) \mathbb{P}_\eta^{x,y}[x \in C(y)]$$

einzuführen. Wegen (9.7) und (9.11) gilt dann

$$P(x, y) = P(y-x), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Wir setzen also wieder $P(x) := P(0, x)$ und erhalten durch die Wahl von $f(x) = 1_{\{x \in C(0)\}}$ mit Hilfe von (9.10) die Gleichung

$$\mathbb{E}_\eta^0[|C(0)|] = 1 + \gamma_\eta \int_{\mathbb{R}^d} P(x) dx. \quad (9.12)$$

Daraus leitet sich ab, dass P genau dann integrierbar ist, wenn die erwartete Clustergröße des typischen Punktes endlich ist. Dies ist dann auch die einzige

9.1. Lösbarkeit der Ornstein-Zernike Gleichung

wesentlich Voraussetzung für die Lösbarkeit der Ornstein-Zernike-Gleichung. Wir meinen mit xy das euklidische Skalarprodukt, falls $x, y \in \mathbb{R}^d$ und definieren für eine Funktion $f \in L^1$ die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(w) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{iwx} dx, \quad w \in \mathbb{R}^d.$$

Die im Folgenden benutzten Aussagen zur Fouriertransformation und Lösbarkeit von Integralgleichungen (insbesondere der Satz von Wiener) finden sich zusammen mit einer guten Einführung in die Thematik in [Jö70].

9.1.3 Theorem

Sei η ein stationärer Punktprozess mit $\mathbb{E}_\eta^0[|C(0)|] < \infty$, dessen zweites faktorielles Momentenmaß absolut stetig zum Lebesgue-Maß ist. Es existiert genau dann ein $Q \in L^1 \cap L^\infty$ mit

$$P = Q + \gamma_\eta Q * P,$$

wenn

$$\mathbb{P}_\zeta^0 \left[\sum_{x \in C'(0)} e^{iwx} \neq 0 \right] > 0, \quad w \in \mathbb{R}^d$$

gilt.

Beweis: Um den Satz von Wiener [Jö70, Satz 13.2] anwenden zu können müssen wir zeigen, dass $1 + \gamma_\eta \hat{P}$ stets positiv ist. Wegen der Integrierbarkeit von $|C(0)|$ können wir (9.10) anwenden und erhalten mit (9.6), dass

$$\begin{aligned} \gamma_\eta + \gamma_\eta^2 \hat{P}(w) &= \gamma_\eta + \gamma_\eta^2 \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}^{0,x}[x \in C(0)] e^{iwx} \rho(x) dx \\ &= \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[\sum_{x \in \eta} \mathbb{1}\{x \in C(0)\} e^{iwx} \right] \\ &= \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0 \left[\sum_{z \in \zeta} \sum_{x \in \eta} \mathbb{1}\{x \in C(0)\} e^{iwx} \mathbb{1}\{\pi(x) = z\} \right] \end{aligned}$$

gilt. Unter Verwendung der Neveu'schen Austauschformel 9.1.1 und der Trans-

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

lationskovarianzen (9.5), (9.7) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \gamma_\eta + \gamma_\eta^2 \hat{P}(w) \\
 &= \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 \left[\sum_{y \in \eta} \sum_{x \in \eta \circ \theta_y} \mathbb{1}\{x \in C(\theta_y, 0)\} e^{iw x} \mathbb{1}\{\pi(\theta_y, x) = -y\} \right] \\
 &= \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 \left[\sum_{y \in \eta} \sum_{x \in \eta} \mathbb{1}\{x - y \in C(\theta_y, 0)\} e^{iw(x-y)} \mathbb{1}\{\pi(\theta_y, x - y) = -y\} \right] \\
 &= \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 \left[\sum_{y \in \eta} \sum_{x \in \eta} \mathbb{1}\{x \in C(y)\} e^{iw(x-y)} \mathbb{1}\{\pi(x) = 0\} \right].
 \end{aligned}$$

Ist $0 \in \zeta$, so gilt $\pi(x) = 0$ und $x \in C(y)$ genau dann, wenn $x, y \in C'(0)$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 \gamma_\eta + \gamma_\eta^2 \hat{P}(w) &= \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 \left[\sum_{y \in \eta} \sum_{x \in \eta} \mathbb{1}\{x \in C'(0)\} e^{iw x} \mathbb{1}\{y \in C'(0)\} e^{-iwy} \right] \\
 &= \gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0 \left[\left| \sum_{x \in C'(0)} e^{iw x} \right|^2 \right]
 \end{aligned} \tag{9.13}$$

unter Verwendung des Satzes von Fubini. Das Korollar 9.1.2 impliziert, dass

$$\gamma_\zeta \mathbb{E}_\zeta^0[|C'(0)|^2] = \gamma_\eta \mathbb{E}_\eta^0[|C(0)|] < \infty$$

gilt. Damit ist klar, dass die Anwendungen der Neveu'sche Austauschformel und des Satzes von Fubini gerechtfertigt waren.

Wenden wir uns nun dem eigentlichen Beweis zu. Existiert eine Lösung $Q \in L^1 \cap L^\infty$ der Ornstein-Zernike-Gleichung, so liefert die Bildung der Fourier-transformierten, dass

$$\hat{P} = \hat{Q} + \gamma_\eta \hat{Q} \hat{P} \tag{9.14}$$

gilt. Angenommen für ein $w \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mathbb{P}_\zeta^0 \left[\sum_{x \in C'(0)} e^{iw x} \neq 0 \right] = 0,$$

so ist nach (9.13) auch $1 + \gamma_\eta \hat{P}(w) = 0$ und wegen (9.14) auch $\hat{P}(w) = 0$. Dies ist ein Widerspruch.

Für die Rückrichtung sei daran erinnert, dass die L^1 Funktionen zusammen mit der punktweisen Addition und der Faltung eine Algebra bilden. Diese Algebra

9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness

hat zunächst kein 1-Element, was durch das Hinzufügen der Delta-Distribution δ behoben wird. Wir bezeichnen mit M^1 die Faltungsalgebra mit 1-Element, die alle Funktionen der Form $r\delta + f$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1$ enthält. Die Ornstein-Zernike-Gleichung können wir in diesem Sinne in

$$P = Q * (\delta + \gamma_\eta P)$$

umformulieren. Es folgt aus der Voraussetzung und (9.13), dass die Fouriertransformierte $\widehat{\delta_0 + \gamma_\eta P} = 1 + \gamma_\eta \hat{P}$ stets größer als 0 ist. Der Satz von Wiener [Jö70, Satz 13.2] besagt, dass zu $\delta + \gamma_\eta P$ in diesem Fall ein Inverses in M^1 existiert, das die Form $\delta + f$ mit

$$\hat{f} = \frac{-\gamma_\eta \hat{P}}{1 + \gamma_\eta \hat{P}}$$

hat. Dies zeigt, dass $Q \in L^1$ mit

$$\hat{Q} := \frac{\hat{P}}{1 + \gamma_\eta \hat{P}}$$

die Ornstein-Zernike-Gleichung löst. Damit folgt aus (9.3)

$$\|Q\|_\infty = \|P - \gamma_\eta Q * P\|_\infty \leq \|P\|_\infty + \gamma_\eta \|Q\|_1 \|P\|_\infty < \infty,$$

da $P(x) \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}^d$. □

9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness

Wir beschränken uns von nun an wieder auf den Fall des Boole'schen Modells mit Intensität t und Korn B , wie wir ihn zu Beginn dieses Kapitels eingeführt hatten. Wir zeigen, dass der Erwartungswert von Funktionalen des Clusters des typischen Punktes unter sehr schwachen Voraussetzungen reell analytisch im Bereich $[0, t_c)$ sind. Dies wird insbesondere zeigen, dass die Pair-Connectedness-Funktion $P_t(x)$ für festes $x \in \mathbb{R}^d$ und die erwartete Clustergröße χ_t analytisch in $t \in [0, t_c)$ sind. Daraus werden wir schließen, dass auch die Lösung Q_t der Ornstein-Zernike-Gleichung analytisch in $t \in [0, t_c)$ ist.

Es sei im Folgenden stets $f : \mathbf{N}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung, die langsamer als exponential wächst. Das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f(\varphi)| \leq e^{\varepsilon \max\{|\varphi|, n_0\}}, \quad \varphi \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d). \quad (9.15)$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

Dies beinhaltet insbesondere die Größe des Nullclusters und Potenzen davon, sowie den Indikator $\mathbb{1}\{x \leftrightarrow y \text{ in } \varphi\}$.

Um die Lesbarkeit zu verbessern, schreiben wir in diesem Abschnitt $C(x, \eta)$ anstelle von $C(x, \mathcal{G}_\eta)$ für $\eta \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \eta$.

9.2.1 Theorem

Die Abbildung $t \mapsto \mathbb{E}_t[f(C(0, \Phi + \delta_0))]$ ist auf $[0, t_c)$ analytisch. Die Reihenentwicklung in einer Umgebung eines Punktes $t_0 \in [0, t_c)$ ist wie in (8.1) durch

$$\mathbb{E}_{t_0+t}[g(\Phi)] = \mathbb{E}_{t_0}[g(\Phi)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{E}_{t_0}[D_{x_1, \dots, x_n}^n g(\Phi)] d(x_1, \dots, x_n)$$

mit

$$g(\Phi) := f(C(0, \Phi + \delta_0))$$

gegeben.

Zum Beweis approximieren wir Φ durch den, auf ein beschränktes Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eingeschränkten, Poisson-Prozess $\Phi_W := \Phi \cap W$. Wir definieren

$$H(t) := \mathbb{E}_t[f(C(0, \Phi + \delta_0))]$$

und

$$H_W(t) := \mathbb{E}_t[f(C(0, \Phi_W + \delta_0))].$$

Dann gilt nach (8.1)

$$H_W(t) = \mathbb{E}_{t_0}[f(C(0, \Phi_W + \delta_0))] + \sum_{n=1}^{\infty} (t - t_0)^n h_n(t_0, W), \quad t_0 \in [0, t_c)$$

mit

$$h_n(t_0, W) := \tag{9.16}$$

$$\frac{1}{n!} \int_{W^n} \mathbb{E}_{t_0} \left[\sum_{J \subset [n]} (-1)^{n-|J|} f \left(C \left(0, \Phi_W + \delta_0 + \sum_{j \in J} \delta_{x_j} \right) \right) \right] d(x_1, \dots, x_n). \tag{9.17}$$

Wir werden zunächst eine integralgeometrische Ungleichung zeigen, die für sich genommen bereits interessant ist, und diese nutzen um Schranken für die Koeffizienten $h_n(t_0, W)$ herzuleiten.

9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness

9.2.2 Lemma

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{1} \left\{ \mathbf{B} \cup \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{B} + x_i) \text{ ist zusammenhängend} \right\} d(x_1, \dots, x_n) \\ & \leq n! e^{n+1} \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B})^n. \end{aligned}$$

Beweis: Wir partitionieren den \mathbb{R}^d mit halboffenen Würfeln der Seitenlänge m^{-1} und Mittelpunkten in $m^{-1}\mathbb{Z}^d$, $m \in \mathbb{N}$. Wir nutzen $m^{-1}\mathbb{Z}^d$ als Knoten eines Graphen \mathcal{G}_m , wobei wir zwei Punkte $u, v \in m^{-1}\mathbb{Z}^d$ verbinden, wenn es $y_u, y_v \in [0, m^{-1})^d$ gibt, sodass $(\mathbf{B} + u + y_u) \cap (\mathbf{B} + v + y_v) \neq \emptyset$ gilt. In \mathcal{G}_m besitzt demnach jeder Knoten $m^d \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B})(1 + O(m^{-1}))$ Nachbarn. Mit dieser Konstruktion korrespondiert ein Menge $\{0, x_1, \dots, x_n\}$, für die der Integrand nicht verschwindet, entweder zu einem Graphentier $\alpha \in \mathcal{A}_{n+1}(\mathcal{G}_m)$ der Größe $n+1$ in \mathcal{G}_m oder zwei der Punkte liegen im selben halboffenen Würfel. Mit „ $\{0, x_1, \dots, x_n\}$ korrespondiert zu α “ meinen wir, dass es für jedes $v \in \alpha$ genau ein Element aus $\{0, x_1, \dots, x_n\}$ gibt, das im gleichen halboffenen Würfel der Seitenlänge m^{-1} liegt.

Um den zweiten Fall abzuschätzen, genügt es einzusehen, dass der Integrand in jedem Fall verschwindet, wenn einer der Punkte nicht in $M := B_{2(n+1)\text{diam}(\mathbf{B})}$ liegt, da die Knoten dann nicht mehr alle in einem Cluster liegen können. Mit diesen Überlegungen ergibt sich

$$\begin{aligned} I & := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{1} \left\{ \mathbf{B} \cup \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{B} + x_i) \text{ ist zusammenhängend} \right\} d(x_1, \dots, x_n) \\ & \leq \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{n+1}(\mathcal{G}_m)} \mathbb{1} \{ \{0, x_1, \dots, x_n\} \text{ korrespondiert zu } \alpha \} d(x_1, \dots, x_n) \\ & \quad + \int_{M^n} \mathbb{1} \{ \text{aus } \{0, x_1, \dots, x_n\} \text{ sind zwei im selben Würfel} \} d(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass das zweite Integral gegen null konvergiert für $m \rightarrow \infty$. Das Integral über $\mathbb{1} \{ \{0, x_1, \dots, x_n\} \text{ korrespondiert zu } \alpha \}$ hängt nicht von α ab und nimmt den Wert $n! m^{-dn}$ an, da n Punkte in n verschiedenen Würfeln liegen, die jeweils das Volumen m^{-d} haben. Mit Hilfe von Lemma 2.4.1 ergibt sich

$$\begin{aligned} I & \leq n! m^{-dn} e^{n+1} (m^d \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B})(1 + O(m^{-1})) + 1)^n + o(1) \\ & \xrightarrow{m \rightarrow \infty} n! e^{n+1} \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B})^n. \end{aligned}$$

□

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

Die Untersuchung der Analytizität von H unterscheidet sich qualitativ, je nachdem ob $t_0 = 0$ ist oder nicht. Für $t_0 = 0$ kann auch die Voraussetzung aus (9.15) abgeschwächt werden. Es genügt in diesem Fall, dass f höchstens exponentiell wächst, wie wir im folgenden Lemma zeigen.

9.2.3 Lemma

Ist für ein $c_f \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$|f(\varphi)| \leq c_f^{|\varphi|}, \quad \varphi \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d), |\varphi| \leq n + 1, \quad (9.18)$$

so gilt

$$|h_n(0, W)| \leq ec_f((1 + c_f)e \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B}))^n.$$

Beweis: Wenn $t_0 = 0$ gilt, ist Φ_W fast sicher das Nullmaß unter \mathbb{P}_{t_0} . Wir überlegen uns zunächst, dass der Integrand in (9.16) gleich null ist, wenn nicht alle Punkte $\{0, x_1, \dots, x_n\}$ in einem Cluster liegen. Angenommen diese Punkte würden zwei oder mehr Cluster bilden und für $i \in [n]$ wäre x_i nicht im Cluster des Ursprungs. Dann gilt für $J \subset ([n] \setminus \{i\})$

$$(-1)^{n-|J|} f\left(C\left(0, \delta_0 + \sum_{j \in J} \delta_{x_j}\right)\right) + (-1)^{n-|J \cup \{i\}|} f\left(C\left(0, \delta_0 + \delta_{x_i} + \sum_{j \in J} \delta_{x_j}\right)\right) = 0,$$

da der Cluster des Ursprungs in beiden Summanden der gleiche ist. Daraus folgt nach Lemma 9.2.2, nach Voraussetzung und mit Hilfe der binomischen Formel

$$\begin{aligned} |h_n(0, W)| &\leq \frac{1}{n!} \int_{W^n} \mathbf{1} \left\{ \mathbf{B} \cup \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{B} + x_i) \text{ ist zusammenhängend} \right\} \\ &\quad \times \sum_{J \subset [n]} \left| f\left(C\left(0, \delta_0 + \sum_{j \in J} \delta_{x_j}\right)\right) \right| d(x_1, \dots, x_n) \\ &\leq \frac{1}{n!} \sum_{J \subset [n]} c_f^{|J|+1} \int_{W^n} \mathbf{1} \left\{ \mathbf{B} \cup \bigcup_{i=1}^n (\mathbf{B} + x_i) \text{ ist zsmh.} \right\} d(x_1, \dots, x_n) \\ &\leq \frac{1}{n!} c_f (1 + c_f)^n n! e^{n+1} \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B})^n \\ &= ec_f((1 + c_f)e \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B}))^n. \end{aligned}$$

□

Wir hatten in Theorem 8.1.5 gezeigt, dass die Anzahl der Punkte des Clusters des typischen Punktes ein Tailverhalten der Art $e^{-c_V(t)x}$ hat, wobei $c_V(t) > 0$ für $t < t_c$ war. Dies benötigen wir, um die Schranken an $h_n(t, W)$ im Intervall $(0, t_c)$ nachzuweisen.

9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness

9.2.4 Lemma

Sei $0 < t_0 < t_1 < t_c$ und $t \in [t_0, t_1]$. Ist f wie in (9.15), so gibt es ein $c(t_0, t_1) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n > c(t_0, t_1)$

$$|h_n(t, W)| \leq \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}}} \left(\frac{2e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}}}{t_0(1 - e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}})} \right)^n$$

gilt.

Beweis: Mit derselben Argumentation wie in Lemma 9.2.3 sehen wir ein, dass der Integrand in (9.16) verschwindet, wenn nicht alle Punkte x_1, \dots, x_n mit 0 verbunden sind. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |h_n(t, W)| &\leq \frac{1}{n!} \int_{W^n} \mathbb{E}_t \left[\mathbb{1} \left\{ \forall i \in [n] : \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} + x_i \text{ in } \Phi_W + \delta_0 + \sum_{i \in [n]} \delta_{x_i} \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{J \subset [n]} \left| f \left(C \left(0, \Phi_W + \delta_0 + \sum_{j \in J} \delta_{x_j} \right) \right) \right| \right] d(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Wir wenden Ungleichung (9.15) mit $\varepsilon = c_V(t_1)/4$ (vgl. Theorem 8.1.5) an und erhalten ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\begin{aligned} &\sum_{J \subset [n]} \left| f \left(C \left(0, \Phi_W + \delta_0 + \sum_{j \in J} \delta_{x_j} \right) \right) \right| \\ &\leq \sum_{J \subset [n]} \exp \left(\frac{c_V(t_1)}{4} \max \left\{ n_0, \left| C \left(0, \Phi_W + \delta_0 + \sum_{j \in J} \delta_{x_j} \right) \right| \right\} \right) \\ &\leq 2^n \exp \left(\frac{c_V(t_1)}{4} \max \left\{ n_0, \left| C \left(0, \Phi_W + \delta_0 + \sum_{j \in [n]} \delta_{x_j} \right) \right| \right\} \right) \end{aligned}$$

gilt. Dies nutzen wir zusammen mit der Mecke-Gleichung 8.1.4, um

$$\begin{aligned} |h_n(t, W)| &\leq \frac{2^n}{n!t^n} \mathbb{E}_t \left[\sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Phi_{\neq}^n} \mathbb{1} \left\{ \forall i \in [n] : \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} + x_i \text{ in } \Phi_W + \delta_0 \right\} \right. \\ &\quad \left. \times \exp \left(\frac{c_V(t_1)}{4} \max \{ n_0, |C(0, \Phi_W + \delta_0)| \} \right) \right] \end{aligned}$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

einzuzeigen. Wir unterscheiden nach der Größe des Nullclusters und erhalten

$$\begin{aligned}
 |h_n(t, W)| &\leq \frac{2^n}{n!t^n} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{c_V(t_1)}{4} \max\{n_0, k\}\right) \mathbb{E}_t \left[\mathbf{1}\{|C(0, \Phi_W + \delta_0)| = k\} \right. \\
 &\quad \left. \times \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \Phi_{\neq}^n} \mathbf{1}\{\forall i \in [n] : \mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{B} + x_i \text{ in } \Phi_W + \delta_0\} \right] \\
 &= \frac{2^n}{n!t_0^n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{c_V(t_1)}{4} \max\{n_0, k\}} k \cdot \dots \cdot (k - n + 1) \\
 &\quad \times \mathbb{P}_t[|C(0, \Phi_W + \delta_0)| = k].
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

Wegen Theorem 8.1.5 und der Monotonie in t gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\mathbb{P}_t[|C(0, \Phi + \delta_0)| = k] \leq \mathbb{P}_{t_1}[|C(0, \Phi + \delta_0)| \geq k] \leq e^{-c_V(t_1)k/2}$$

für alle $k > n_1$ gilt. Da die ersten n Summanden in (9.19) verschwinden, erhalten wir für alle $n > \max\{n_0, n_1\}$

$$\begin{aligned}
 |h_n(t_0, W)| &\leq \frac{2^n}{n!t_0^n} \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}k} k \cdot \dots \cdot (k - n + 1) \\
 &= \frac{2^n}{n!t_0^n} \frac{n!}{1 - e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}}} \left(\frac{e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}}}{1 - e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}}} \right)^n \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}}} \left(\frac{2e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}}}{t_0(1 - e^{-\frac{c_V(t_1)}{4}})} \right)^n.
 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt dabei aus der bekannten Formel für das faktorielle Moment der geometrischen Verteilung. \square

Beweis von Theorem 9.2.1: Wie im Beweis von Lemma 9.2.4 gibt es für $t \in [t_0, t_1] \subset [0, t_c)$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\mathbb{P}_{t_1}[|C(0, \Phi + \delta_0)| = n] \leq \exp(-\frac{1}{2}c_V(t_1)n), \quad n > n_0$$

und

$$|f(\varphi)| \leq \exp(\frac{1}{4}c_V(t_1) \max\{|\varphi|, n_0\}), \quad \varphi \in \mathbf{N}(\mathbb{R}^d)$$

gilt. Wir finden via

$$\begin{aligned}
 |f(C(0, \Phi_W + \delta_0))| &\leq \exp(\frac{1}{4}c_V(t_1) \max\{n_0, |C(0, \Phi_W + \delta_0)|\}) \\
 &\leq \exp(\frac{1}{4}c_V(t_1) \max\{n_0, |C(0, \Phi + \delta_0)|\})
 \end{aligned}$$

9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness

ein Majorante von $f(C(0, \Phi_W + \delta_0))$, die wegen

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t[\exp(\tfrac{1}{4}c_V(t_1) \max\{n_0, |C(0, \Phi + \delta_0)|\})] \\ & \leq \mathbb{E}_{t_1}[\exp(\tfrac{1}{4}c_V(t_1) \max\{n_0, |C(0, \Phi + \delta_0)|\})] \\ & \leq \exp(\tfrac{1}{4}c_V(t_1)n_0) + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \exp(\tfrac{1}{4}c_V(t_1)k) \exp(-\tfrac{1}{2}c_V(t_1)k) \\ & < \infty \end{aligned}$$

integrierbar ist. Da der Nullcluster fast sicher endlich ist, konvergiert der Wert von $f(C(0, \Phi_{B_n} + \delta_0))$ für $n \rightarrow \infty$ fast sicher gegen $f(C(0, \Phi + \delta_0))$. Daher gilt

$$H(t) = \mathbb{E}_t[f(C(0, \Phi + \delta_0))] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_t[f(C(0, \Phi_{B_n} + \delta_0))] = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{B_n}(t).$$

Wegen Lemma 9.2.3, Lemma 9.2.4 und majorisierter Konvergenz lässt sich eine Umgebung U von t finden, sodass für $s \in U$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{B_n}(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{B_n}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (s-t)^k \lim_{n \rightarrow \infty} h_k(t, B_n)$$

gilt. Die Beweise von Lemma 9.2.3 und Lemma 9.2.4 zeigen, dass

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} h_k(t, B_n) \\ & = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_t \left[\sum_{J \subset [n]} (-1)^{n-|J|} f\left(C\left(0, \Phi + \delta_0 + \sum_{j \in J} \delta_{x_j}\right)\right) \right] d(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

gilt und die Behauptung folgt. \square

Wir bemerken, dass für Funktionale, die exponentiell mit der Clustergröße wachsen, durch Lemma 9.2.3 wenigstens die Analytizität um 0 sichergestellt ist. Es ist daraus ebenfalls ablesbar, dass der Konvergenzradius der Entwicklung bei 0 eines Funktionals, das schneller als exponentiell fällt, größer oder gleich $(2e \text{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B}))^{-1}$ ist. Theorem 9.2.1 zeigt insbesondere, dass die Pair-Connectedness-Funktion und die erwartete Clustergröße im subkritischen Bereich analytisch sind. Daher gibt es für jedes $t_0 \in [0, t_c)$ eine Umgebung $U(t_0)$ mit

$$P_t(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (t-t_0)^n p_n(x, y; t_0), \quad t \in U(t_0), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

wobei $p_0(x, y; t_0) = P_{t_0}(x, y)$ und

$$\begin{aligned}
 & p_n(x, y; t_0) \\
 &= \frac{1}{n!} \int \mathbb{E}_{t_0} \left[\sum_{J \subset [n]} (-1)^{n-|J|} \mathbb{1} \left\{ \mathbf{B} + x \leftrightarrow \mathbf{B} + y \text{ in } \Phi + \sum_{j \in J} \delta_{x_j} \right\} \right] d(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wie schon bei P_t schreiben wir auch bei den Koeffizienten verkürzend $p_n(x; t_0) := p_n(0, x; t_0)$ und fassen die Integrabilitätseigenschaften in folgendem Korollar zusammen.

9.2.5 Korollar

Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\|p_n(\cdot; 0)\|_\infty \leq e(2e \operatorname{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B}))^n, \tag{9.21}$$

$$\|p_n(\cdot; 0)\|_1 \leq \frac{(n+1)e}{2} (2e \operatorname{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B}))^{n+1}. \tag{9.22}$$

Für $0 < t_0 < t_1 < t_c$ gibt es Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, sodass für $t \in [t_0, t_1]$

$$\|p_n(\cdot; t)\|_\infty \leq c_1 c_2^n, \tag{9.23}$$

$$\|p_n(\cdot; t)\|_1 \leq \frac{n+1}{2} c_1 c_2^{n+1} \tag{9.24}$$

gilt. Insbesondere gibt es für $t_0 \in [0, t_c)$ eine Umgebung $U(t_0)$, sodass

$$P_t(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} (t - t_0)^n p_n(\cdot; t_0), \quad t \in U(t_0) \tag{9.25}$$

ist, wobei die Konvergenz im L^1 und im L^∞ Sinne vorliegt.

Beweis: Wir haben in den Beweisen von Lemma 9.2.3 und Lemma 9.2.4 gesehen, dass die dort angegebenen Schranken lediglich von den Konstanten in den Wachstumsschranken (9.18) und (9.18) an das Funktional abhängen. Daher können wir die Supremumsnorm von $p_n(x; t_0)$ genauso abschätzen wie $p_n(x; t_0)$. Mit den Argumenten des Beweises von Lemma 9.2.3 erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^d} |p_n(x; 0)| dx \\
 & \leq \frac{2^n}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^{n+1}} \mathbb{1} \left\{ \mathbf{B} \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} (\mathbf{B} + x_i) \text{ ist zusammenhängend} \right\} d(x_1, \dots, x_{n+1}) \\
 & \leq \frac{(n+1)e}{2} (2e \operatorname{Vol}(\mathbf{B} - \mathbf{B}))^{n+1}.
 \end{aligned}$$

9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness

Eine ähnliche Abschätzung können wir für $\|p_n(\cdot; t)\|_\infty$ und $\|p_n(\cdot; t)\|_1$ im Fall $t \in [t_0, t_1]$ vornehmen. \square

Korollar 9.2.5 eröffnet uns die Möglichkeit, auch die nach Theorem 9.1.3 existierende Lösung Q_t der Ornstein-Zernike-Gleichung auf Analytizität hin zu untersuchen. Wir werden dabei in zwei Schritten zuerst die Analytizität um 0 und danach die Analytizität um andere Punkte des subkritischen Bereichs zeigen. Die Methoden liefern dabei auch Rekursionsformeln zur Bestimmung der Koeffizienten der Entwicklung von Q_t , die wir im kommenden Abschnitt genauer untersuchen werden.

Wir schreiben im Folgenden f^{*n} für die Faltungspotenz, die rekursiv via $f^{*0} := \delta$ und $f^{*n} := f^{*(n-1)} * f$, $n \in \mathbb{N}$ definiert ist (δ bezeichnet das 1-Element der Faltungsalgebra vgl. Abschnitt 9.1). Analog zum Summen- bzw. Produktzeichen nutzen wir $*$, zum Beispiel in der Form $*_{n=1}^k f = f^{*k}$.

9.2.6 Proposition

Für alle $t \geq 0$ mit $\mathbb{E}_t[|C(0, \Phi + \delta_0)|] < 2$ gilt

$$Q_t = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n P_t^{*(n+1)} \quad (9.26)$$

in L^1 und L^∞ . Außerdem gibt es für jedes $t_0 \in [0, t_c)$ eine Umgebung $U(t_0)$ von t_0 , sodass

$$Q_t(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} (t - t_0)^n q_n(\cdot; t_0), \quad t \in U(t_0) \quad (9.27)$$

gilt. Die Konvergenz liegt dabei in L^1 und L^∞ vor. Die Koeffizienten können rekursiv durch die lösbaren Gleichungen

$$q_0(\cdot; t_0) = p_0(\cdot; t_0) - t_0 p_0(\cdot; t_0) q_0(\cdot; t_0), \quad (9.28)$$

und

$$\begin{aligned} & q_n(\cdot; t_0) + t_0 q_n(\cdot; t_0) * p_0(\cdot; t_0) \\ &= p_n(\cdot; t_0) - \sum_{k=1}^n q_{n-k}(\cdot; t_0) * (p_{k-1}(\cdot; t_0) + t_0 p_k(\cdot; t_0)) \end{aligned} \quad (9.29)$$

bestimmt werden.

Beweis: Aus $\mathbb{E}_t[|C(0, \Phi + \delta_0)|] < 2$ und Gleichung (9.12) folgt $t\|P_t\|_1 < 1$. Mit Hilfe von (9.3) und (9.2) erhalten wir

$$\|P_t^{*k+1}\|_\infty \leq \|P_t\|_1^k \|P_t\|_\infty, \quad k \in \mathbb{N}$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

sowie

$$\|P_t^{*k+1}\|_1 \leq \|P_t\|_1^{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es folgt wegen der Vollständigkeit von L^1 bzw. L^∞ mit dem Cauchy Kriterium die Konvergenz in L^1 und L^∞ der Darstellung (9.26). Dass die Ornstein-Zernike-Gleichung gelöst wird, folgt aus

$$Q_t + tQ_t * P_t = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n P_t^{*n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^{n+1} P_t^{*n+2} = P_t.$$

Um den zweiten Teil der Behauptung zu zeigen, werden wir zunächst zeigen, dass (9.28) und (9.29) nach $q_0(\cdot; t_0)$ bzw. $q_n(\cdot; t_0)$ aufgelöst werden können. Wir zeigen weiter, dass die Reihe

$$\tilde{Q}_t(\cdot) := \sum_{n=0}^{\infty} (t - t_0)^n q_n(\cdot; t_0), \quad t \in U(t_0)$$

in einer Umgebung von t_0 in L^1 und L^∞ konvergiert und die Ornstein-Zernike Gleichung (9.4) löst.

Wir erinnern daran (vgl. Beweis von Theorem 9.1.3 und [Jö70, Kapitel 13]), dass $M^1 = \{r\delta + f \mid r \in \mathbb{R}, f \in L^1\}$ mit punktweiser Addition und Faltung eine Algebra ist. Auf M^1 ist die Norm $\|\cdot\|_1$ durch $\|r\delta + f\|_1 = |r| + \|f\|_1$ gegeben, für die die Ungleichungen (9.2) und (9.3) auch für $f \in M^1$ anstelle von $f \in L^1$ gelten. Außerdem besitzt die Funktion $\delta + t_0 p_0(\cdot; t_0) \in M^1$ ein Inverses $h \in M^1$. Daher können die Gleichungen (9.28) und (9.29) nach $q_0(\cdot, t_0)$ bzw. rekursiv nach $q_n(\cdot, t_0)$ aufgelöst werden, indem die linke Seite der Gleichung zu $q_n(\cdot; t_0) * (\delta + t_0 p_0(\cdot; t_0))$ umgeschrieben wird. Da nach Definition $p_0(\cdot; t_0) = P_{t_0}(\cdot)$ ist, bemerken wir, dass auch $q_0(\cdot; t_0) = \tilde{Q}_{t_0}(\cdot)$ gilt.

Dass das so bestimmte \tilde{Q}_t die Ornstein-Zernike-Gleichung formal löst, kann leicht durch einen Koeffizientenvergleich geprüft werden, nachdem (9.29) zu

$$p_n(\cdot; t_0) = q_n(\cdot; t_0) + \sum_{k=1}^n p_{k-1}(\cdot; t_0) * q_{n-k}(\cdot; t_0) + t_0 \sum_{k=0}^n p_k(\cdot; t_0) * q_{n-k}(\cdot; t_0)$$

und die Ornstein-Zernike-Gleichung zu

$$P_t = \tilde{Q}_t + (t - t_0)P_t * \tilde{Q}_t + t_0 P_t * \tilde{Q}_t$$

umgeformt wurde. Es bleibt also die Konvergenz zu klären.

Wir schreiben kurz p_n für $p_n(\cdot, t_0)$ sowie q_n für $q_n(\cdot, t_0)$ und wählen $p, c \in \mathbb{R}$ mit $\max\{\|p_n\|_1, \|p_n\|_\infty\} \leq p^n$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $\max\{\|p_0\|_1, \|q_0\|_1, \|h\|_1\} \leq c$, was nach Korollar 9.2.5 und Theorem (9.1.3) möglich ist. Weiter wählen wir $q \in \mathbb{R}$ so groß, dass $q > p$,

$$q > c(p + c^2 + ct_0 p)$$

9.2. Analytizität der Clusterfunktionale und der Direct-Connectedness

und

$$c \left(\frac{p}{q} + \frac{2c}{q} + \frac{p}{q(q-p)} + \frac{t_0cp}{q} + \frac{t_0p}{q-p} \right) \leq 1$$

gilt, und zeigen per Induktion $\|q_n\|_1 \leq q^n$ und $\|q_n\|_\infty \leq q^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ ist

$$\|q_1\|_1 = \|h * (p_1 - q_0 * p_0 - t_0q_0 * p_1)\|_1 \leq c(p + c^2 + t_0cp) < q.$$

Gleiches gilt für $\|q_1\|_\infty$.

Nehmen wir an, die Behauptung gilt bereits für $n \in \mathbb{N}$ so ist wegen (9.29), (9.2) und der Dreiecks-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|q_{n+1}\|_1 &= \left\| h * \left(p_{n+1} - \sum_{k=0}^n p_k * q_{n-k} - t_0 \sum_{k=1}^{n+1} p_k * q_{n+1-k} \right) \right\|_1 \\ &\leq c \left(p^{n+1} + p^n c + cq^n + \frac{p^n q - pq^n}{p-q} + t_0 p^{n+1} c + t_0 \frac{p^{n+1} q - pq^{n+1}}{p-q} \right) \\ &= q^{n+1} c \left(\left(\frac{p}{q} \right)^{n+1} + \left(\frac{p}{q} \right)^n \frac{c}{q} + \frac{c}{q} + \frac{1}{q-p} \left(\left(\frac{p}{q} \right) - \left(\frac{p}{q} \right)^n \right) + \right. \\ &\quad \left. + t_0 c \left(\frac{p}{q} \right)^{n+1} + t_0 \frac{p}{q-p} \left(1 - \left(\frac{p}{q} \right)^n \right) \right) \\ &\leq q^{n+1} c \left(\frac{p}{q} + \frac{2c}{q} + \frac{p}{q(q-p)} + \frac{t_0cp}{q} + \frac{t_0p}{q-p} \right) \\ &\leq q^{n+1}. \end{aligned}$$

Mit der gleichen Abschätzung erhalten wir dann auch $\|q_n\|_\infty \leq q^n$, wenn wir (9.3) anstelle von (9.2) benutzen. Damit folgt die Konvergenz in einer Umgebung von t_0 . \square

Um später die Beziehung zwischen den Koeffizienten von Q_t und P_t kombinatorisch zu interpretieren, ist es hilfreich, die Relation (9.29) für $t_0 = 0$ explizit anzugeben. Zunächst gilt

$$q_{n+1}(\cdot; 0) = p_{n+1}(\cdot; 0) - \sum_{k=0}^n p_k(\cdot; 0) * q_{n-k}(\cdot; 0) \quad (9.30)$$

und per Induktion (oder aus (9.26)) kann leicht nachgewiesen werden, dass

$$q_n(\cdot; 0) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{l_0 + \dots + l_k = n-k} *_{i=0}^k p_{l_i}(\cdot; 0) \quad (9.31)$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

gilt. Umgekehrt erhalten wir ebenso

$$p_n(\cdot; 0) = \sum_{k=0}^n \sum_{l_0 + \dots + l_k = n-k} *_{i=0}^k q_{l_i}(\cdot; 0). \quad (9.32)$$

9.3. Ein kombinatorischer Zugang für niedrige Intensität

Die Koeffizienten in der Potenzreihendarstellung (9.20) von P_t sind im allgemeinen sehr komplizierte probabilistische Größen. Im Fall $t_0 = 0$ verschwindet jedoch der Erwartungswert und es bleiben Integrale über Indikatoren gewisser Schnittmengen übrig. Diese Indikatoren können nach der Form der Schnittmenge aufgeteilt werden, was zu einer kombinatorischen Interpretation führt. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie die Koeffizienten $q_n := q_n(\cdot; 0)$ der Entwicklung von Q_t auf rein kombinatorischem Wege aus den $p_n := p_n(\cdot; 0)$ hergeleitet werden können.

Im Folgenden seien \mathbf{x} und \mathbf{y} zwei Knoten. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei \mathbb{G}_n die Menge der zusammenhängenden Graphen mit Knotenmenge $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, 1, \dots, n\}$. Der Knoten \mathbf{x} heißt Anfangsknoten und der Knoten \mathbf{y} heißt Endknoten eines Graphen $G \in \mathbb{G}_n$. Wir definieren kombinatorische Funktionale $\pi_n : \mathbb{G}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ durch

$$\pi_n(G) := \sum_{I \subset [n]} (-1)^{n-|I|} \mathbb{1}\{\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y} \text{ in } G \text{ nur über Knoten in } I\}.$$

Jeder Graph $G \in \mathbb{G}_n$ wird die relative Lage von $n+2$ Körnern \mathbf{B} zueinander kodieren. In diesem Sinne *induzieren die Punkte $x_{\mathbf{x}}, x_{\mathbf{y}}, x_1, \dots, x_n$ den Graphen $G \in \mathbb{G}_n$, wenn*

$$\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \{v, w\} \in E(G)$$

gilt, wobei daran erinnert sei, dass $E(G)$ die Kanten von G bezeichnet. Wir haben im Beweis Lemma 9.2.3 bereits eingesehen, dass der Integrand in der Darstellung (9.20) von $p_n(0, x; 0)$ verschwindet, wenn der von $0, x, x_1, \dots, x_n$ induzierte Graph nicht zusammenhängend ist. Dies führt zu folgender Darstellung dieser Koeffizienten:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \sum_{G \in \mathbb{G}_n} \pi_n(G) \mathbb{1}\{0, x, x_1, \dots, x_n \text{ induzieren } G\} d(x_1, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{G \in \mathbb{G}_n} \pi_n(G) I_n(G, x), \end{aligned}$$

9.3. Ein kombinatorischer Zugang für niedrige Intensität

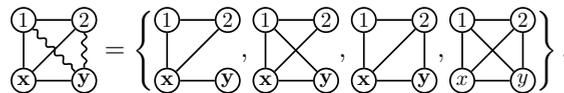
wobei $I_n : \mathbb{G}_n \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\begin{aligned}
 I_n(G, x) &:= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \mathbb{1}\{0, x, x_1, \dots, x_n \text{ induzieren } G\} d(x_1, \dots, x_n) \\
 &= \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \prod_{\{v,w\} \in E(G)} \mathbb{1}\{\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w \neq \emptyset\} \\
 &\quad \prod_{\{v,w\} \notin E(G)} \mathbb{1}\{\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w = \emptyset\} d(x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

mit $x_{\mathbf{x}} = 0$ und $x_{\mathbf{y}} = x$ definiert ist. Wir können also den Koeffizienten p_n als Summe über die Graphen in \mathbb{G}_n betrachten, wobei ein Faktor jedes Summands rein kombinatorischer und der andere rein integralgeometrischer Natur ist. Es ist auch zu bemerken, dass die π_n nicht eindeutig durch die Definition von I_n festgelegt sind, da es verschiedene Graphen mit gleichem Integral geben kann. Die Darstellung der p_n sieht auf den ersten Blick ganz natürlich aus. Sie hat jedoch den Nachteil, dass sie sich nur schlecht mit der Faltung verträgt. Wir werden daher noch ein zweite Darstellung erarbeiten, die sich einerseits gut falten lässt und andererseits auch eine extrem einfache Beziehung zur Darstellung der q_n aufweist.

Es sei $\mathbb{D}_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{G}_n)$ die Menge der sogenannten *Diagramme* mit der $n + 2$ -elementigen Knotenmenge $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, 1, \dots, n\}$. Eine Menge $D \subset \mathbb{G}_n$ ist genau dann ein Diagramm, wenn es ein $G \in D$ gibt, sodass D aus genau den Graphen $G' \in \mathbb{G}_n$ mit $E(G) \subset E(G')$ besteht. Dieses G nennen wir den *Repräsentanten* von D und bemerken, dass der Repräsentant eindeutig ist.

In der graphischen Darstellung zeichnen wir die Kanten eines Graphen durch Linien oder Kurven. Nicht vorhandene Kanten werden nicht gezeichnet. Für die Darstellung eines Diagramms zeichnen wir den Repräsentanten des Diagramms, jedoch werden die im Repräsentanten nicht vorhandenen Kanten als gewellte Linie oder Kurve dargestellt. Dies entspricht der Vorstellung, dass ein Diagramm genau die Graphen zusammenfasst, die bestimmte Kanten enthalten. Wir schreiben $E(D)$ für die Kantenmenge des Repräsentanten des Diagramms D . Ein Beispiel ist das Diagramm



welches die Graphen zusammenfasst, die die Kanten $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$, $\{\mathbf{x}, 1\}$, $\{\mathbf{x}, 2\}$ und $\{1, 2\}$ enthalten. Das erste Element der Menge ist dabei der Repräsentant des Diagramms.

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

Das Integralfunktional I_n überträgt sich in natürlicher Weise via

$$J_n(D, x) := \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \prod_{\{v,w\} \in E(D)} \mathbb{1}\{\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w \neq \emptyset\} d(x_1, \dots, x_n) \quad (9.34)$$

$$= \sum_{G \in \mathbb{D}} I_n(G, x) \quad (9.35)$$

auf Diagramme, wobei $x_x = 0$ und $x_y = x$ sei. Um die Gleichheit in (9.35) einzusehen, multiplizieren wir für jede Kante $\{v, w\}$, die nicht in $E(D)$ liegt, eine 1 hinzu, die wir in $\mathbb{1}\{\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w \neq \emptyset\}$ und $\mathbb{1}\{\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w = \emptyset\}$ aufteilen. Damit gilt beispielsweise

$$J_2 \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{y} \end{array} \right) = I_2 \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{y} \end{array} \right) + I_2 \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{y} \end{array} \right) + I_2 \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \diagdown \quad \diagdown \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{y} \end{array} \right) + I_2 \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ \diagup \quad \diagup \\ \textcircled{x} \quad \textcircled{y} \end{array} \right).$$

Aus Lemma A.9 folgt die Invertierung

$$I_n(G, x) = \sum_{D \in \mathbb{D}_n} \mathbb{1}\{E(G) \subset E(D)\} (-1)^{|E(D)| - |E(G)|} J_n(D, x), \quad G \in \mathbb{G}_n \quad (9.36)$$

von Gleichung (9.35), da \mathbb{G}_n im Sinne des Lemmas aufsteigend ist. Damit ergibt sich eine weitere Darstellung von p_n via

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{n!} \sum_{G \in \mathbb{G}_n} \pi_n(G) I_n(G, x) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{G \in \mathbb{G}_n} \sum_{D \in \mathbb{D}_n} \mathbb{1}\{E(G) \subset E(D)\} \pi_n(G) (-1)^{|E(D)| - |E(G)|} J_n(D, x) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{D \in \mathbb{D}_n} J_n(D, x) \sum_{G \in \mathbb{G}_n} \mathbb{1}\{E(G) \subset E(D)\} \pi_n(G) (-1)^{|E(D)| - |E(G)|}. \end{aligned}$$

Das heißt, es gilt

$$p_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{D \in \mathbb{D}_n} \tilde{\pi}_n(D) J_n(D, x), \quad n \in \mathbb{N} \quad (9.37)$$

mit

$$\tilde{\pi}_n(D) := \sum_{G \in \mathbb{G}_n} \mathbb{1}\{E(G) \subset E(D)\} \pi_n(G) (-1)^{|E(D)| - |E(G)|}. \quad (9.38)$$

Wir nennen einen Knoten $v \in [n]$ in einem Diagramm $D \in \mathbb{D}_n$ *pivotal*, wenn jeder Pfad von x nach y im Repräsentanten von D den Knoten v enthält. Eine besondere Rolle kommt der Menge $\mathbb{D}_n^0 \subset \mathbb{D}_n$ derjenigen Diagramme zu, die *keine pivotalen Knoten* enthalten.

9.3. Ein kombinatorischer Zugang für niedrige Intensität

9.3.1 Theorem

Für die Koeffizienten $q_n(x; 0)$ der Potenzreihendarstellung (9.27) von Q_t um den Punkt $t_0 = 0$ gilt

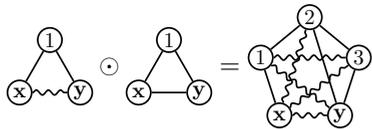
$$q_n(x; 0) = \frac{1}{n!} \sum_{D \in \mathbb{D}_n^0} \tilde{\pi}_n(D) J_n(D, x).$$

Das heißt, dass sich die Koeffizienten q_n nur dahingehend von p_n unterscheiden, als dass nur über die Diagramme ohne pivotale Knoten summiert wird. Wir benötigen für den Beweis eine Reihe von Lemmata, die die Verträglichkeit der Faltung mit der Diagramm-Darstellung zeigen.

Wir definieren zunächst eine Operation zwischen Graphen, die wir *Verknüpfung* nennen. Für $m, n \in \mathbb{N}$ und zwei Graphen $G_1 \in \mathbb{G}_n, G_2 \in \mathbb{G}_m$ schreiben wir $G_1 \odot G_2 \in \mathbb{G}_{n+m+1}$. Dabei wird $G_3 := G_1 \odot G_2$ wie folgt konstruiert:

1. Benenne den Knoten $y \in G_1$ in $n + 1$ um.
2. Benenne den Knoten $x \in G_2$ in $n + 1$ um.
3. Benenne die Knoten $\{1, \dots, m\} \subset G_2$ bei gleichbleibender Reihenfolge in $\{n + 2, \dots, n + m + 1\}$ um.
4. Setze die Knotenmenge $V(G_3) := V(G_1) \cup V(G_2)$.
5. Setze die Kantenmenge $E(G_3) := E(G_1) \cup E(G_2)$.

Analog definieren wir die Verknüpfung zweier Diagramme $D_1 \in \mathbb{D}_n$ und $D_2 \in \mathbb{D}_m$ mit Repräsentanten G_1, G_2 als das Diagramm mit Repräsentant $G_1 \odot G_2$. Zum Beispiel gilt



Es wird also lediglich der Endknoten von D_1 mit dem Anfangsknoten von D_2 verschmolzen und mit der passenden Nummer versehen.

9.3.2 Lemma

Ist $n, m \in \mathbb{N}$ und $G_1 \in \mathbb{G}_n$ sowie $G_2 \in \mathbb{G}_m$, so gilt

$$\pi_{n+m+1}(G_1 \odot G_2) = \pi_n(G_1) \pi_m(G_2).$$

Beweis: Wir schreiben abkürzend „ $x \leftrightarrow y$ in G mit I'' für „ $x \leftrightarrow y$ in G wobei nur Knoten in I genutzt werden“.

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

Der Knoten $n + 1 \in G_1 \odot G_2$ ist nach Konstruktion pivotal, daher sind \mathbf{x} und \mathbf{y} in $G_1 \odot G_2$ nicht mehr verbunden, wenn $n + 1 \notin I$ und es gilt

$$\begin{aligned}
 & \pi_{n+m+1}(G_1 \odot G_2) \\
 = & \sum_{I \subset [n+m+1]} (-1)^{n+m+1-|I|} \mathbb{1}\{\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y} \text{ in } G_1 \odot G_2 \text{ mit } I\} \\
 = & \sum_{I_1 \subset [n]} \sum_{I_2 \subset [m]+n+1} (-1)^{n+m-|I_1|-|I_2|} \mathbb{1}\{\mathbf{x} \leftrightarrow n+1 \text{ in } G_1 \odot G_2 \text{ mit } I_1\} \\
 & \quad \times \mathbb{1}\{n+1 \leftrightarrow \mathbf{y} \text{ in } G_1 \odot G_2 \text{ mit } I_2\} \\
 = & \sum_{I_1 \subset [n]} \sum_{I_2 \subset [m]} (-1)^{n+m-|I_1|-|I_2|} \mathbb{1}\{\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y} \text{ in } G_1 \text{ mit } I_1\} \\
 & \quad \times \mathbb{1}\{\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{y} \text{ in } G_2 \text{ mit } I_2\} \\
 = & \pi_n(G_1)\pi_m(G_2).
 \end{aligned}$$

□

Das gleiche gilt für Diagramme.

9.3.3 Lemma

Ist $n, m \in \mathbb{N}$ und $D_1 \in \mathbb{D}_n$ sowie $D_2 \in \mathbb{D}_m$, so gilt

$$\tilde{\pi}_{n+m+1}(D_1 \odot D_2) = \tilde{\pi}_n(D_1)\tilde{\pi}_m(D_2).$$

Beweis: Es seien G_1 und G_2 die Repräsentanten von D_1 und D_2 . Falls \mathbf{x} und \mathbf{y} in einem Graph $G \in \mathbb{G}_k$, $k \in \mathbb{N}$ nicht verbunden sind, so ist $\pi_k(G) = 0$. Jeder Graph, dessen Kantenmenge eine Teilmenge von $E(D_1 \odot D_2)$ ist, hat entweder $n + 1$ ebenfalls als pivotalen Knoten, oder ist nicht zusammenhängend. Daher können wir in der Summation über die $G \in \mathbb{G}_{n+m+1}$ zwischen dem Graphen „vor“ und „nach“ dem pivotalen Knoten $n + 1$ unterscheiden. Es folgt mit Hilfe von Lemma 9.3.2

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\pi}_{n+m+1}(D_1 \odot D_2) \\
 = & \sum_{G \in \mathbb{G}_{n+m+1}} \mathbb{1}\{E(G) \subset E(D_1 \odot D_2)\} \pi_{n+m+1}(G) (-1)^{|E(G)|-|E(D_1 \odot D_2)|} \\
 = & \sum_{G_1 \in \mathbb{G}_n} \sum_{G_2 \in \mathbb{G}_m} \mathbb{1}\{E(G_1 \odot G_2) \subset E(D_1 \odot D_2)\} \pi_{n+m+1}(G_1 \odot G_2) \\
 & \quad \times (-1)^{|E(G_1 \odot G_2)|-|E(D_1 \odot D_2)|} \\
 = & \sum_{G_1 \in \mathbb{G}_n} \sum_{G_2 \in \mathbb{G}_m} \mathbb{1}\{E(G_1) \subset E(D_1)\} \mathbb{1}\{E(G_2) \subset E(D_2)\} \\
 & \quad \times \pi_n(G_1)\pi_m(G_2) (-1)^{|E(G_1)|+|E(G_2)|-|E(D_1)|-|E(D_2)|} \\
 = & \tilde{\pi}_n(D_1)\tilde{\pi}_m(D_2).
 \end{aligned}$$

9.3. Ein kombinatorischer Zugang für niedrige Intensität

□

9.3.4 Lemma

Ist $n, m \in \mathbb{N}$ und $D_1 \in \mathbb{D}_n$ sowie $D_2 \in \mathbb{D}_m$, so gilt

$$J_n(D_1) * J_m(D_2) = J_{n+m+1}(D_1 \odot D_2).$$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} & (J_n(D_1) * J_m(D_2))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \prod_{\{v,w\} \in E(D_1)} \mathbb{1}\{\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w \neq \emptyset\} d(x_1, \dots, x_n) \\ & \quad \times \int_{(\mathbb{R}^d)^m} \prod_{\{v,w\} \in E(D_2)} \mathbb{1}\{\mathbf{B} + y_v \cap \mathbf{B} + y_w \neq \emptyset\} d(y_1, \dots, y_m) dz, \end{aligned}$$

wobei $x_x = 0$, $x_y = z$ und $y_x = 0$, $y_y = x - z$ ist. Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes bleibt der Wert des Integrals derselbe, wenn wir $y_x = z$, $y_y = x$ setzen. Durch eine Umbenennung der Integrationsvariablen, die mit der Konstruktion der Verknüpfung korrespondiert, erhalten wir

$$\begin{aligned} & (J_n(D_1) * J_m(D_2))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \int_{(\mathbb{R}^d)^m} \prod_{\{v,w\} \in E(D_1 \odot D_2)} \mathbb{1}\{\mathbf{B} + x_v \cap \mathbf{B} + x_w \neq \emptyset\} \\ & \quad \times d(x_1, \dots, x_n) d(x_{n+2}, \dots, x_{n+m+1}) dx_{n+1} \\ &= J_{n+m+1}(D_1 \odot D_2)(x). \end{aligned}$$

□

Damit haben wir alle notwendigen Voraussetzungen bereitgestellt um Theorem 9.3.1 zu beweisen.

Beweis von Theorem 9.3.1: Wir führen Induktion nach n durch und nutzen die Rekursion aus (9.30).

Für den Induktionsanfang sehen wir ein, dass $\mathbb{D}_0 = \mathbb{D}_0^0$ gilt, da der Graph, der x durch eine Kante mit y verbindet, das einzige Diagramm $D_0 \in \mathbb{D}_0$ bildet. Für \mathbb{D}_0 lässt sich mit Gleichung (9.38) leicht nachrechnen, dass

$$\frac{1}{0!} \sum_{D \in \mathbb{D}_0^0} \tilde{\pi}_0(D) J_0(D, x) = J_0(D_0, x) = p_0 = q_0$$

gilt.

Für den Induktionsschritt setzen wir $\mathbb{D}_n^{>0} := \mathbb{D}_n \setminus \mathbb{D}_n^0$. Damit gilt wegen (9.37)

$$p_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{D \in \mathbb{D}_{n+1}^0} \tilde{\pi}_{n+1}(D) J_{n+1}(D) + \frac{1}{(n+1)!} \sum_{D \in \mathbb{D}_{n+1}^{>0}} \tilde{\pi}_{n+1}(D) J_{n+1}(D)$$

9. Die Ornstein-Zernike Gleichung

und somit genügt es wegen (9.30)

$$\frac{1}{(n+1)!} \sum_{D \in \mathbb{D}_{n+1}^{>0}} \tilde{\pi}_{n+1}(D) J_{n+1}(D) = \sum_{k=0}^n p_k * q_{n-k} \quad (9.39)$$

zu zeigen. Wir setzen auf der rechten Seite die Induktionsvoraussetzung ein und nutzen Lemma 9.3.3 sowie Lemma 9.3.4 um einzusehen, dass

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n p_k * q_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} \sum_{D_1 \in \mathbb{D}_k} \tilde{\pi}_k(D_1) J_k(D_1) \right) * \left(\frac{1}{(n-k)!} \sum_{D_2 \in \mathbb{D}_{n-k}^0} \tilde{\pi}_{n-k}(D_2) J_{n-k}(D_2) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{D_1 \in \mathbb{D}_k} \sum_{D_2 \in \mathbb{D}_{n-k}^0} \tilde{\pi}_{n+1}(D_1 \odot D_2) J_{n+1}(D_1 \odot D_2) \end{aligned} \quad (9.40)$$

gilt.

Wir betrachten nun die linke Seite von (9.39). Jeder Pfad von x nach y durchläuft die pivotalen Knoten eines Diagramms in derselben Reihenfolge, daher macht es Sinn, von einem letzten pivotalen Knoten zu sprechen. Genauso ist klar, was es heißt, dass ein Knoten vor oder hinter einem pivotalen Knoten liegt. Es sei $\mathbb{H}_k \subset \mathbb{D}_{n+1}$, $k \in [n] \cup \{0\}$ eine Menge von Diagrammen mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Diagramm enthält mindestens ein pivotalen Knoten.
- Der Knoten $k+1$ ist der letzte pivotale Knoten im Diagramm.
- Die k Knoten $\{1, \dots, k\}$ liegen vor dem Knoten $k+1$.
- Die $n-k$ Knoten $\{k+2, \dots, n+1\}$ liegen hinter dem Knoten $k+1$.

Wir teilen die Knoten $\{1, \dots, n+1\}$ in jedem Diagramm $D \in \mathbb{D}_{n+1}^{>0}$ in drei Mengen ein. Die erste Menge M_1 enthält alle Knoten, die vor dem letzten pivotalen Knoten liegen. Die zweite Menge M_2 enthält nur den letzten pivotalen Knoten. Die dritte Menge M_3 enthält die restlichen Knoten. Wir können nun eine Umbenennung der Knoten auf folgende Weise vornehmen. Die Knoten in M_1 benennen wir mit den Zahlen $1, \dots, |M_1|$ ohne dabei die Reihenfolge zu verändern. Der Knoten in M_2 bekommt die Bezeichnung $|M_1| + 1$ und die Knoten in M_3 benennen wir mit den Zahlen $|M_1| + 2, \dots, |M_1| + |M_3| + 1$, wiederum ohne die Reihenfolge zu ändern. Nach einer solchen Umbenennung ist $D \in \mathbb{H}_{|M_1|}$ und die Werte $\tilde{\pi}_{n+1}(D)$ und $J_{n+1}(D)$ sind unverändert. Es gibt dabei

9.3. Ein kombinatorischer Zugang für niedrige Intensität

genau $\binom{n+1}{k, n-k, 1}$ Diagramme in $D_{n+1}^{>0}$, die zum gleichen Diagramm in $D \in \mathbb{H}_k$ umbenannt werden. Damit wird die linke Seite von Gleichung (9.39) zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \sum_{D \in \mathbb{H}_k} \binom{n+1}{k, n-k, 1} \tilde{\pi}_{n+1}(D) J_{n+1}(D) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{D \in \mathbb{H}_k} \frac{1}{k!(n-k)!} \tilde{\pi}_{n+1}(D) J_{n+1}(D), \end{aligned}$$

was der rechten Seite von (9.40) entspricht. □

10. Untere Schranken für die kritische Intensität

Es ist ein Kernanliegen in der Perkolationstheorie, die kritische Wahrscheinlichkeit bzw. die kritische Intensität zu bestimmen oder wenigstens Schranken dafür anzugeben. In der physikalischen Literatur gibt es groß angelegte Simulationsstudien für die verschiedensten Modelle, die aus mathematischer Sicht stets den Schönheitsfehler haben, dass die Beziehung zwischen den, in einem endlichen Beobachtungsfenster simulierten, Ereignissen und Kenngrößen und der Existenz eines unendlichen Clusters nicht vollkommen klar ist ([LZ01], [TJ12] sei nur als ein Beispiel genannt).

Wir wollen daher Schranken für das Boolesche Modell mit der Einheitskugel als Korn berechnen bzw. aus Simulationen herleiten, die entweder mathematisch exakt sind, oder bei denen wir Konfidenzintervalle angeben können. Einen ersten Ansatz hatten wir dazu bereits am Ende von Abschnitt 8.2 gesehen und wir werden jetzt noch zwei weitere vorstellen.

10.1. Simulation des Nullclusters

Bei der Betrachtung von Theorem 8.2.1 und der damit verbundenen Charakterisierung der kritischen Intensität (8.5), ist die nahe liegende Idee, eine große Menge S zu wählen, $\varphi_t(S)$ für verschiedene t zu simulieren und dabei t so zu justieren, dass $\varphi_t(S) < 1$ gilt. Ein t , für das dies gilt, ist nach Theorem 8.2.1 eine untere Schranke für t_c .

Die Methode ist auf den ersten Blick recht praktikabel, da der „wahre“ kritische Wert bis auf einige Kommastellen „bekannt“ ist, und daher auf diese Art eine gewisse Genauigkeit erreicht werden könnte. Es ist außerdem zu vermuten, dass für $S = B_r(0)$ mit großem Radius r die so erhaltene untere Schranke nur noch wenig vom wahren Wert entfernt ist.

Es ergibt sich jedoch das Problem, dass $\varphi_t(S)$ ein Erwartungswert einer Verteilung mit großer Masse auf 0 und einer extrem breiten Verteilung der Restmasse ist. Über $\varphi_t(S)$ ist ansonsten lediglich bekannt, dass es stochastisch kleiner ist als eine Poisson-verteilte Zufallsvariable, deren Parameter in etwa proportional zur Oberfläche von S ist. Dies ergibt extrem schlechte Konfidenzintervalle für

10. Untere Schranken für die kritische Intensität

den geschätzten Erwartungswert, die keinen praktischen Nutzen mehr haben. Dies führt dazu, dass die Methode zu ungenau ist.

Es ist daher geschickter, das in Theorem 8.2.1 beschriebene Verhalten oberhalb der kritischen Intensität zu nutzen. Aus Theorem 8.2.1 folgt

$$\theta_t(r) \geq \frac{t - \tilde{t}_c}{t}, \quad t > t_c. \quad (10.1)$$

Dies ist auch für $t \leq t_c$ korrekt, da $\theta_t(r) \geq 0$ ist. Eine Umformung liefert

$$t_c \geq t(1 - \theta_t(r)). \quad (10.2)$$

Um eine untere Schranke für t_c zu erhalten, genügt es also, für ein beliebiges $t > 0$ und $r > 1$ die Wahrscheinlichkeit $\theta_t(r)$ nach oben zu beschränken. Es ist bekannt, dass $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta_t(r) = 0$ für $t < t_c$ gilt. Es ist also theoretisch möglich, mit dieser Methode eine beliebig genaue untere Schranke anzugeben.

Der Ansatz in diesem Abschnitt ist, die Wahrscheinlichkeit $\theta_t(r)$ für ein t nah an t_c und großes r durch Simulationen zu schätzen, indem wir n mal den Cluster des Punktes bei 0 simulieren und überprüfen, ob dieser den Rand des Balles mit Radius r schneidet. Diese Methode hat zwei Vorteile. Erstens kann das Boole'sche Modell auf B_r exakt simuliert werden und zweitens erhalten wir mit Standardmethoden gute Konfidenzintervalle für unsere Schätzung.

Wenn wir also durch die Simulationen herausfinden, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% $\theta_t(r)$ kleiner als ein bestimmter Wert ist, so können wir daraus auch eine Schranke errechnen, die t_c nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% unterschreitet.

Wir werden nun kurz den Algorithmus beschreiben, mit dem wir den Cluster des typischen Punktes erzeugen und testen, ob der Rand der Kugel mit Radius r von diesem Cluster geschnitten wird. Dazu nutzen wir eine ähnliche Methode wie im zweiten Teil des Beweises von Theorem 8.2.1.

Wir starten mit einem Punkt bei 0 und erzeugen zufällig die Poisson-Punkte in $B_2(0)$. Danach erzeugen wir für jeden neuen Punkt x wiederum Poisson-Punkte in $B_2(x) \setminus M$, wobei M die Menge ist, auf der bereits Punkte erzeugt wurden. Dadurch bauen wir sukzessive den Cluster der 0 auf, ohne unnötige Punkte zu erzeugen.

Formal kann der Algorithmus wie folgt beschrieben werden: Es sei R die Menge der bereits realisierten Punkte, L die Liste der Punkte, in deren Umkreis noch Punkte realisiert werden müssen, und $\Phi(W)$ die stets neu erzeugte Reali-

sierung eines Poisson-Prozesses mit Intensität t auf der Menge W .

```

R := {0}
L :=  $\Phi(B_2)$ 
while  $L \neq \emptyset$  do{
   $x := L_1$ 
  if  $\|x\|_2 \geq r$  return true
   $L := L \setminus \{x\}$ 
   $L := L \cup \Phi(B_2(x) \setminus (R + B_2(0)))$ 
   $R := R \cup \{x\}$ 
return false

```

Es wird also nach und nach der Poisson-Prozess realisiert, jedoch stets nur dort, wo es relevant für den Nullcluster ist (vgl. mit Algorithmus zur Erzeugung von $\eta^{(1)}$ in Theorem 8.2.1). Außerdem prüfen wir in jeder Iteration, ob der aktuell behandelte Punkt bereits den Rand der Kugel B_r schneidet.

Um die Laufzeit in höheren Dimensionen zu verkürzen, haben wir in manchen Fällen konservativ abgeschätzt, indem wir auch dann einen Erfolg (Rand von B_r wird vom Cluster erreicht) gezählt haben, wenn eine gewisse Clustergröße (in den meisten Fällen 300000 Punkte) überschritten wurde. Dies verkürzt die Rechenzeit und verschlechtert evtl. die erreichten Schranken.

Wir haben bei den Simulationen für jede Dimension 10000 Durchläufe durchgeführt und folgende Ergebnisse erhalten:

d	r	t	Erfolge	99% KI für $\theta_t(r)$	untere Schranke
2	16000	0.357	0	0.00063692	0.356772
3	2000	0.0814	0	0.00063692	0.0813481
4	500	0.0261	10	0.002119993	0.0260445
5	500	0.0101	0	0.00063692	0.0100935
6	200	0.00456	1	0.000813077	0.00455628
7	200	0.00228	18	0.003154537	0.00227278
8	150	0.00124	21	0.003529665	0.00123560
9	150	0.000725	6	0.001571485	0.000723859
10	120	0.000450	4	0.001282615	0.000449422
11	120	0.0002955	8	0.001849554	0.000294952

Tabelle 10.1.: Simulationsergebnisse für untere Schranken an die kritische Intensität t_c in den Dimensionen 2 bis 11 bei 10000 Durchläufen. Die Konfidenzintervalle wurden mit der `prop.test` Routine der Software „R“ berechnet.

10. Untere Schranken für die kritische Intensität

Es ist sinnvoll neben der Position der realisierten Punkte R auch für jede Box $v + [0, 2]^d$ mit $v \in 2\mathbb{Z}^d$ zu speichern, ob und welche Punkte in dieser Box enthalten sind, um den Test, ob ein neuer Punkt in $R + B_2(0)$ liegt, schnell durchführen zu können. In hohen Dimensionen bietet sich dazu eine Hash-Map eher an als eine Matrix fester Größe.

Wir möchten die gewählten Simulationsparameter und Ergebnisse kurz diskutieren. Es ist erkennbar, dass die Präzision nie über drei relevante Stellen hinausgeht. Dies liegt daran, dass die Ungleichung (10.2) nur dann eine hohe Genauigkeit liefert, wenn das Konfidenzintervall für $\theta_t(r)$ klein ist. Die Größe des Konfidenzintervalls hängt von der Anzahl der Versuche und von der Anzahl der Erfolge ab. In den Simulationen hat sich herausgestellt, dass es effizient ist, die Parameter so zu wählen, dass bei 10000 Durchgängen des Nullclusters möglichst etwa höchstens 20 den Rand von B_r erreichen. Diejenigen Cluster, die den Rand erreichen, benötigen aufgrund ihrer Größe enorm viel Rechenzeit (in zwei Dimensionen wurden teilweise Cluster mit über 10^7 Punkten erzeugt). Es ist daher empfehlenswert, den Versuchsparameter t etwas kleiner als das vermutete t_c zu wählen.

Trotzdem ist in Tabelle 10.1 zu erkennen, dass ab Dimension 6 die simulierten unteren Schranken größer als die Simulationsergebnisse aus [TJ12] sind (inklusive Fehlerabweichung).

10.2. Operatoransatz von Hall

Der zweite Ansatz ist der Arbeit [Hal85] entnommen, wo er auf den 2-dimensionalen Fall angewandt wurde. Die Idee ist eine verfeinerte Variante der Idee, die zur Penrose-Schranke führt. Die Penrose-Schranke erhalten wir, indem wir im Algorithmus des vorherigen Abschnitts die Überprüfung entfallen lassen, wo der Poisson-Prozess bereits realisiert wurde. Stattdessen werden für jeden Knoten x neue Nachfahren auf $B_2(x)$ erzeugt (ersetze im Algorithmus $\Phi(B_2(x) \setminus (R + B_2(0)))$ durch $\Phi(B_2(x))$). Dadurch werden nicht weniger Punkte realisiert und somit ist der auf diese Weise realisierte Nullcluster stets mindestens so groß wie der „wahre“ Nullcluster. Die Anzahl der Knoten in diesem variierten Nullcluster ist jedoch gleich der Anzahl der Nachkommen in einem Galton-Watson Baum mit einer Poisson-verteilten Anzahl an Kindern. Der Parameter dieser Poisson-Verteilung ist die Intensität t mal das Volumen von $B_2(0)$. Es ist bekannt, dass ein Galton-Watson Baum fast sicher endlich ist, wenn die erwartete Anzahl Kinder kleiner als eins ist, was zu (8.11) führt. Hall verbesserte diese Idee, indem er jedem Nachkommen x eines Punktes y einen Typ zuwies. Dieser Typ war die Entfernung $\|x - y\|_2$. Es wird dann im Algorithmus nur eine abgeschwächte Form der Prüfung durchgeführt (die bei Penrose vollständig

10.3. Zusammenfassung der Simulationsergebnisse

entfällt), indem lediglich überprüft wird, ob ein realisierter Punkt in dem Bereich liegt, in dem der Mutterknoten bereits den Poisson-Prozess realisiert hat (ersetze im Algorithmus $\Phi(B_2(x) \setminus (R + B_2(0)))$ durch $\Phi(B_2(x) \setminus B_2(y))$). Dies führt zu einem Galton-Watson Baum mit einer Nachkommenverteilung die vom Typ abhängt. Hall zeigt, dass die erwartete Anzahl Nachkommen durch

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} t^n T^n(\mathbb{1}_{(0,2)})(1) \quad (10.3)$$

gegeben ist. Dabei ist $T : C((0, 2)) \rightarrow C((0, 2))$ ein Operator auf den stetigen Funktionen des Intervalls $(0, 2)$, der durch

$$T(f)(x) := \int_0^2 f(y)g(y, x) dy \quad (10.4)$$

bestimmt ist. Hierbei ist $g(y, x)$ der Flächeninhalt von $\partial B_y(xe_1) \setminus B_2(0)$. Die Funktion $g(y, x)$ liefert also die Dichte des Intensitätsmaßes der Nachkommen eines Punktes vom Typ x . Hall beschränkte sich in seiner Arbeit auf das Boole'sche Modell in zwei Dimensionen und auch wenn Meester und Roy in Ihren Buch behaupten, dass die folgenden Rechnungen in höheren Dimension kaum zu bewältigen wären, ist dies natürlich mitnichten der Fall. Die Oberfläche einer Kugelkappe in d Dimensionen ist leicht auszurechnen (siehe z.B. [Li11]) und es ergibt sich g konkret als

$$g(y, x) := \begin{cases} (d-1)\kappa_{d-1}y^{d-1} \int_0^{\arccos\left(\frac{4-x^2-y^2}{2xy}\right)} \sin^{d-2}(\varphi) d\varphi, & y \in (2-x, 2) \\ 0, & y \in (0, 2-x) \end{cases} \quad (10.5)$$

Dabei ist $(d-1)\kappa_{d-1}$ die Oberfläche der d -dimensionalen Einheitskugel. Hall schlussfolgert, dass die erwartete Anzahl an Nachkommen fast sicher endlich ist, wenn der größte Eigenwert des Operators kleiner als $1/t$ ist. Den Eigenwert des Operators erhalten wir mit hoher Genauigkeit, indem wir zunächst für die Dimensionen 2 bis 11 das Integral in g explizit berechnen. Danach ist die numerische Bestimmung des größten Eigenwerts mit Standardmethoden machbar. Die Ergebnisse sind in Tabelle 10.2 zusammengefasst.

10.3. Zusammenfassung der Simulationsergebnisse

Wir fassen alle erhaltenen unteren Schranken an die kritische Intensität für das Boole'sche Modell mit Korn $\mathbf{B} = B_1(0)$ nochmal übersichtlich zusammen. Bei

10. Untere Schranken für die kritische Intensität

den theoretischen Schranken liefert der Ansatz von Hall etwas bessere Ergebnisse, als aus der Berechnung von $\varphi_t(B_3)$ folgen, welche wiederum deutlich besser sind, als die Schranke von Penrose. Es ist auch ersichtlich, dass in Dimension $d = 11$ die Schranke von Hall bereits fast bis auf zwei relevante Stellen korrekt ist.

d	Penrose (8.11)	via $\varphi_t(B_3)$ (8.12)	Hall Abschn. 10.2	Sim. $\theta_t(r)$ Abschn. 10.1	Sim. [TJ12]
2	0.0795774	0.135802	0.174746	0.356772	0.359085
3	0.0298415	0.0433691	0.0534187	0.0813481	0.081858
4	0.0126651	0.0167131	0.0198296	0.0260445	0.02642
5	0.00593678	0.00734445	0.00845546	0.0100935	0.01034
6	0.00302358	0.00357261	0.00401478	0.00455628	0.004526
7	0.00165352	0.00188850	0.00208114	0.00226708	0.002272
8	0.000962436	0.00107117	0.00116176	0.00123560	0.001208
9	0.000592124	0.000645943	0.000691455	0.000722539	0.0007133
10	0.000382941	0.000411203	0.000435437	0.000449422	0.0004462
11	0.000259158	0.000274804	0.000288394	0.000294952	0.0002935

Tabelle 10.2.: Die Spalten 1 bis 4 enthalten sämtliche untere Schranken, die durch die vorgestellten Methoden errechnet oder simuliert wurden. Die unteren Schranken in der vierten Spalte liegen in einem 99% Konfidenzintervall. Die letzte Spalte enthält die besten oberen Schranken für t_c aus der Literatur.

Bei den Simulationen haben wir untere Schranken erhalten, die ab Dimension 6 die bisherigen Simulationsergebnisse von Torquato und Jiao [TJ12] knapp nicht mehr enthalten.

A. Anhang

A.1 Lemma

Sei Y eine \mathbb{N} -wertige Zufallsvariable, die unabhängig von der u.i.v. Folge $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von nicht-negativen Zufallsvariablen ist. Ist $u \geq 1$, so gilt

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^Y X_i \right)^u \right] \leq \mathbb{E}[Y^u] \mathbb{E}[X_1^u].$$

Beweis: Wir wenden die Jensen-Ungleichung an und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^Y X_i \right)^u \right] &\leq \mathbb{E} \left[Y^{u-1} \sum_{i=1}^Y X_i^u \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[Y = k] \mathbb{E} \left[k^{u-1} \sum_{i=1}^k X_i^u \right] \\ &\leq \mathbb{E}[Y^u] \mathbb{E}[X_1^u] \end{aligned}$$

□

A.2 Lemma

Sei Y eine \mathbb{N} -wertige Zufallsvariable und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge identisch verteilter nicht-negativer Zufallsvariablen. Ist $u \geq 1$ und $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so gilt

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^Y X_i \right)^u \right] \leq \mathbb{E}[Y^{up}]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}[X_1^{uq}]^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis: Wir wenden die Jensen-Ungleichung an und erhalten

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^Y X_i \right)^u \right] \leq \mathbb{E} \left[Y^{u-1} \sum_{i=1}^Y X_i^u \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y^{u-1} \mathbb{1}\{Y \geq i\} X_i^u].$$

Die Funktion $f(x, y) := x^u y^{u-1} \mathbb{1}\{y \geq i\}$ ist Produkt zweier monotoner Funktionen, die nur von x bzw. y abhängen, daher folgt, dass f im Sinne von [CSS76] quasi-monoton ist. Seien X' und Y' nun Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X' \leq x, Y' \leq y] = \min\{F_{X_1}(x), F_Y(y)\}$, so gilt ebenfalls nach [CSS76]

$$\mathbb{E}[Y^{u-1} \mathbb{1}\{Y \geq i\} X_i^u] \leq \mathbb{E}[Y'^{u-1} \mathbb{1}\{Y' \geq i\} X'^u]$$

A. Anhang

und wir schließen

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^Y X_i \right)^u \right] \leq \mathbb{E}[Y'^u X'^u].$$

Die Hölder-Ungleichung liefert dann die Behauptung, da X' die gleiche Verteilung wie X_1 hat. \square

In seltenen Fällen hat Y ein exponentielles Moment und ist nicht beschränkt, aber X besitzt kein $u(1 + \varepsilon)$ Moment. Dann können wir die folgende Ungleichung nutzen, die in diesem Sinne eine Art Young'sche Ungleichung ist.

A.3 Lemma

Es gilt für $x \geq 0, y, t, u > 0$ und die Ungleichung

$$x^u y^u \leq \frac{1}{tu} e^{tux} + \frac{y^u}{tu} \log(y).$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion $f(x, y, t, u) = \frac{1}{tu} e^{tux} + \frac{y^u}{tu} \log(y) - x^u y^u$. Für festes t, u und y ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y, t, u) = \infty$. Außerdem ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, t, u) = e^{tux} - y$ und daher gibt es genau ein Minimum bei $y = e^{tux}$. Der Funktionswert an dieser Stelle ist $f(x, e^{tux}, t) = \frac{1}{tu} e^{tux} + \frac{1}{tu} e^{tx} tux - x e^{tux} > 0$. \square

A.4 Lemma

Ist $X = (X_v)_{v \in \mathbb{Z}^d}$ eine Familie gleich verteilter nicht-negativer Zufallsvariable mit

$$\mathbb{E}[X_0^{d+\varepsilon}] < \infty$$

für ein $\varepsilon > 0$, so gilt für alle $\delta > 0$, dass fast sicher nur endlich viele Ereignisse $\{X_v \geq \delta \|v\|_2\}$ eintreten.

Beweis: Es ist bekannt, dass es eine Konstante $c_1(d) \in \mathbb{R}$ abhängig von der Dimension gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{v \in \mathbb{Z}^d \mid \|v\|_1 = n\} \leq c_1(d) n^{d-1}$$

gilt. Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}[X_v \geq \delta \|v\|_2] &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_1(d) n^{d-1} \mathbb{P}[X_0 \geq \delta n] \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} c_1(d) n^{d-1} \mathbb{E}[X_0^{d+\varepsilon}] (\delta n)^{-d-\varepsilon} \\ &< \infty \end{aligned}$$

und das Borel-Cantelli-Lemma liefert die Behauptung. \square

A.5 Lemma

Ist \mathcal{H} ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $x, y, z \in \mathcal{H}$, so gilt

$$\langle x, y \rangle \geq \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle - \langle z, z \rangle - \sqrt{(\langle x, x \rangle + \langle z, z \rangle - 2\langle x, z \rangle)(\langle y, y \rangle + \langle z, z \rangle - 2\langle y, z \rangle)}$$

Insbesondere gilt für $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = \langle z, z \rangle = 1$

$$\langle x, y \rangle \geq \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle - 1 - 2\sqrt{(1 - \langle x, z \rangle)(1 - \langle y, z \rangle)}.$$

Beweis: Es ist bekanntlich durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm auf \mathcal{H} definiert. Demzufolge definiert $d(x, y) := \|x - y\| = \sqrt{\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle}$ eine Metrik. Die Dreiecksungleichung für diese Metrik ergibt sofort die Behauptung. \square

A.6 Lemma

Für $u \in \mathcal{S}^{d-1}$, $r \in [0, \infty)$ und $\delta > 0$ sei $K(u, r, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq r, \langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \rangle \geq 1 - \delta\}$ der Kegel der Länge r in Richtung u mit Öffnungswinkel $\arccos(1 - \delta)$. Sind $x, y \in K(u, r_2, \delta) \setminus K(u, r_1, \delta)$ für $0 \leq r_1 < r_2 < \infty$, so gilt

$$\|x - y\|_2 \leq r_2 - r_1 + 2\sqrt{2\delta}r_2.$$

Beweis: Ist z der Punkt auf der Geraden $\{\lambda x \mid \lambda \in [0, \infty)\}$, für den $\|z\|_2 = \|y\|_2$ gilt, so ist $z \in K(u, r_2, \delta) \setminus K(u, r_1, \delta)$ und es gilt

$$\|x - z\|_2 \leq r_2 - r_1$$

und

$$\|z - \|z\|_2 u\|_2 = \sqrt{\langle z - \|z\|_2 u, z - \|z\|_2 u \rangle} \leq \sqrt{2\delta}\|z\|_2 \leq \sqrt{2\delta}r_2.$$

Ebenso ist $\|y - \|y\|_2 u\|_2 \leq \sqrt{2\delta}r_2$ und die Dreiecksungleichung liefert die Behauptung. \square

A.7 Lemma

Es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, die nur von der Dimension d abhängt, sodass für jedes $\delta > 0$ eine Menge von Richtungen $\{u_i \in \mathcal{S}^{d-1} \mid i \in [k]\}$ existiert, sodass

$$\mathcal{S}^{d-1} \subset \bigcup_{i \in [k]} K(u_i, 1, \delta)$$

und

$$k \leq \frac{c}{\delta^{d-1}}$$

gilt. Dabei ist $K(u, r, \delta) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq r, \langle \frac{x}{\|x\|_2}, u \rangle \geq 1 - \delta\}$.

A. Anhang

Beweis: Wir werden die gewünschte Überdeckung direkt konstruieren. Dazu überdecken wir S^{d-1} mit Würfeln der Form $\frac{\delta}{\sqrt{d}}([0, 1]^d + v)$ mit $v \in \mathbb{Z}^d$ und nennen diese Überdeckung U . Die Würfel in U haben einen Durchmesser von δ , daher kann kein Würfel in U die Sphäre $(1-\delta)S^{d-1}$ oder $(1+\delta)S^{d-1}$ schneiden. Die Würfel in U haben also höchstens ein Gesamtvolumen von $\kappa_d((1+\delta)^d - (1-\delta)^d)$ und demzufolge gilt

$$|U| \leq \frac{\kappa_d((1+\delta)^d - (1-\delta)^d)}{d^{d/2}\delta^d}.$$

Es gibt also eine Konstante c , sodass $|U| \leq \frac{c}{\delta^{d-1}}$. Ist nun $x \in \frac{\delta}{\sqrt{d}}([0, 1]^d + v) \in U$, dann gibt es ein $u \in S^{d-1}$ und ein $x' \in \frac{\delta}{\sqrt{d}}[-1, 1]^d$ mit $x = u + x'$ und es gilt

$$\langle u, x \rangle = 1 + \langle u, x' \rangle \geq 1 - \|x'\|_2 \geq 1 - \delta.$$

Also liegt $\frac{\delta}{\sqrt{d}}([0, 1]^d + v) \cap S^{d-1}$ im Kegel $K(u, 1, \delta)$ und die Behauptung folgt. \square

A.8 Lemma

Seien $\{f_i \in L^1 \cap L^\infty \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ und $\{g_i \in L^1 \cap L^\infty \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ zwei Folgen von Funktionen von $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$. Konvergieren die Reihen

$$F(t) := \sum_{n=0}^{\infty} t^n f_n, \quad G(t) := \sum_{n=0}^{\infty} t^n g_n$$

in L^1 und L^∞ für $|t| < r \in \mathbb{R}$, so gilt für $|t| < r$

$$F(t) * G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{l+j=n} f_l * g_j,$$

wobei die Reihe ebenfalls in L^1 und L^∞ konvergiert.

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis des Cauchy-Produkts wobei anstelle der Normeigenschaften, die Ungleichungen

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

und

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

verwendet werden. \square

A.9 Lemma

Sei $A \subset \{0, 1\}^n$ derart, dass $\mathbb{1}_A$ aufsteigend ist. Sind $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, dann gilt

$$f(x) = \sum_{y \succeq x} g(y) \quad x \in A$$

genau dann, wenn

$$g(x) = \sum_{y \succeq x} (-1)^{|x|-|y|} f(y) \quad x \in A.$$

gilt.

Beweis: Nehmen wir an, die Darstellung von f gilt, so ist für $x \in A$

$$\begin{aligned} \sum_{y \succeq x} (-1)^{|x|-|y|} f(y) &= \sum_{y \in A} (-1)^{|x|-|y|} \mathbb{1}\{y \succeq x\} \sum_{z \in A} g(y) \mathbb{1}\{z \succeq y\} \\ &= (-1)^{|x|} \sum_{z \in A} \mathbb{1}\{z \succeq x\} g(z) \sum_{y \in M} (-1)^{|y|} \mathbb{1}\{z \succeq y \succeq x\} \\ &= (-1)^{|x|} \sum_{z \in A} \mathbb{1}\{z \succeq x\} g(z) \sum_{k=0}^{|z|-|x|} (-1)^{k+|x|} \binom{|z|-|x|}{k} \\ &= \sum_{z \in A} \mathbb{1}\{z \succeq x\} g(z) (1-1)^{|z|-|x|} \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Die Rückrichtung lässt sich auf die selbe Art und Weise zeigen. \square

Das gleiche Resultat gilt, wenn beide \succeq in Lemma A.9 durch \preceq ersetzt werden und $\mathbb{1}_A$ absteigend ist.

Symbolverzeichnis

0	Wurzel eines Graphen, Seite 3
$\alpha^{\square\delta}$	Würfel mit Seitenlänge δ um die Punkte in $\delta\alpha$, Seite 18
$f * g$	Faltung von f und g , Seite 100
$[n]$	Zahlen von 1 bis n , Seite 3
A^c	Komplement der Menge A , Seite 3
∂A	Rand der Menge A , Seite 3
$\partial^+ W, \partial^- W$	äußerer und innerer Rand der Knotenmenge W in einem Graph, Seite 7
\preceq	Halbordnung auf kartesischen Produkten vollständig geordneter Mengen, Seite 3
$\mathcal{A}(\mathcal{G}), \mathcal{A}_n(\mathcal{G})$	Graphentiere (der Größe n) des Graphen \mathcal{G} , Seite 8
$\mathcal{A}^{(d)}, \mathcal{A}_n^{(d)}$	Graphentiere (der Größe n) des Graphen \mathcal{Z}^d , auch Gittertiere genannt, Seite 8
$B_n(v; \mathcal{G})$	Ball mit Radius n um den Knoten v im Graphen \mathcal{G} , Seite 7
$B_r(x; \mathfrak{M}_T^{(d-1)})$	zufälliger Ball mit Radius r um x in der zufälligen Pseudometrik $\tau(x, y; \mathfrak{M}_T^{(d-1)})$, Seite 49
$B_r(x; \mathbb{R}^d)$	euklidischer Ball um x mit Radius r , Seite 3
B	kompaktes, wegzusammenhängendes Korn im Boole'schen Modell, Seite 85
$\mathcal{B}(A)$	Borel'sche σ -Algebra der Menge A , Seite 4
$\text{Ber}(p)$	Bernoulli-Verteilung mit Parameter p , Seite 3

A. Anhang

$C(v; \mathcal{G}, f)$	(schwarzer) Cluster des Knoten v im gefärbten Graphen (\mathcal{G}, f) , Seite 7
d	Dimension des Raumes, Seite 3
$d_{\mathcal{G}}(u, v)$	Abstand der Knoten u und v im Graphen \mathcal{G} , Seite 7
δ_x	Dirac-Maß im Punkt x , Seite 3
\mathbf{e}_i	i -te Einheitsvektor, Seite 3
\mathbb{G}_n, D_n	Menge der Graphen bzw. Diagramme mit n Knoten die x und y verbinden, Seite 117
$\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_m^*$	Graphen die vom Mosaik m erzeugt werden, Seite 13
\mathcal{G}_{Φ}	Gilbertgraph der vom Punktprozess Φ und dem Korn \mathbf{B} erzeugt wird., Seite 85
\mathcal{I}_x	σ -Algebra der θ_x -invarianten Ereignisse, Seite 5
\mathcal{I}	σ -Algebra der verschiebungsinvarianten Ereignisse, Seite 6
$\text{int } A$	Innere von A , Seite 3
\mathcal{K}	Menge der nicht leeren, konvexen und kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d , Seite 5
L_{Φ}	erweiterte Laplace-Funktional des Punktprozesses Φ , Seite 5
$(\mathbf{M}, \mathfrak{F}(\mathbf{M}))$	Raum der Mosaik, Seite 13
$(\mathbf{M}_F, \mathfrak{F}(\mathbf{M}_F))$	Raum der schwarz-weiß gefärbten Mosaik, Seite 14
$\mathfrak{M}^{(d-1)}$	Seitenflächenprozess der vom zufälligen Mosaik \mathfrak{M} erzeugt wird, Seite 48
$\mathfrak{M}_T^{(d-1)}$	mit Zeiten aus T markierter Seitenflächenprozess des zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} , Seite 49
$\mathbf{N}(A)$	Menge der lokal endlichen einfachen Zählmaße auf A , Seite 4
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen (vereinigt mit 0), Seite 3

$\mathcal{N}(A)$	σ -Algebra auf $\mathbf{N}(A)$, Seite 4
$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$	zugrunde liegender Wahrscheinlichkeitsraum, Seite 3
$p_c(\mathcal{G})$	kritische Perkulationswahrscheinlichkeit des Graphen \mathcal{G} , Seite 7
$p_c(\mathfrak{M})$	kritische Perkulationswahrscheinlichkeit des zufälligen Mosaiks \mathfrak{M} , Seite 16
$P_t(x, y)$	Pair-Connectedness-Funktion, Seite 99
$\mathbb{P}_\eta^0, \mathbb{E}_\eta^0$	Palm'sches Maß bzw. Erwartungswert des Punktprozesses η , Seite 102
\mathbb{P}_p	Produktmaß von unabhängigen $\text{Ber}(p)$ verteilten Zufallsvariablen, Seite 3
\mathbb{P}_X	Verteilung einer Zufallsvariable bzw. eines zufälligen Elements X , Seite 3
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge der Menge A , Seite 3
t_c	kritische Intensität im Boole'schen Modell, Seite 85
$\tau(x, y; \mathfrak{M}_T^{(d-1)})$	Passierzeit von x nach y im Mosaik \mathfrak{M} welches mit den Zeiten aus T versehen ist, Seite 49
$\theta_p(\mathfrak{M})$	Wahrscheinlichkeit unter \mathbb{P}_p , dass die Nullzelle von \mathfrak{M} in einem unendlichen Cluster liegt., Seite 16
$\theta_p(v)$	Wahrscheinlichkeit unter \mathbb{P}_p , dass der Knoten v in einem unendlichen Cluster liegt, Seite 7
θ_x	Verschiebung um den Vektor x , Seite 5
$\text{Vol}(A)$	d -dimensionale Lebesguemaß der Menge A , Seite 3
$\chi_p(v)$	unter \mathbb{P}_p erwartete Clustergröße des Knoten v , Seite 7
$Y(\mathfrak{M}, \delta), U(\mathfrak{M}, \delta)$	zufällige Felder, die die Häufigkeit von kleinen und großen Zellen im zufälligen Mosaik \mathfrak{M} beschreiben., Seite 18
$z(Z)$	Zentrum der Zelle Z , Seite 17
$Z_0(\mathfrak{m})$	Nullzelle des Mosaiks \mathfrak{m} , Seite 13

A. Anhang

$Z_x(\mathbf{m})$ Zelle des Mosaiks \mathbf{m} die x enthält, Seite 13

\mathcal{Z}^d d -dimensionale Gitter, Seite 7

Literaturverzeichnis

- [AB87] M. Aizenman and D. J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Communications in Mathematical Physics*, 108(3):489–526, 1987.
- [AHD15] A. Auffinger, J. Hanson, and M. Damron. 50 years of first passage percolation. *arXiv preprint arXiv:1511.03262*, 2015.
- [AKN87] M. Aizenman, H. Kesten, and C. M. Newman. Uniqueness of the infinite cluster and continuity of connectivity functions for short and long range percolation. *Communications in Mathematical Physics*, 111(4):505–531, 1987.
- [AP02] S. E. Alm and R. Parviainen. Lower and upper bounds for the time constant of first-passage percolation. *Combinatorics, Probability & Computing*, 11(05):433–445, 2002.
- [Art96] Z. Artem. *The critical probability for Voronoi percolation*. PhD thesis, Weizmann Institute of Science, 1996.
- [AW09] J. M. Azaïs and M. Wschebor. *Level sets and extrema of random processes and fields*. John Wiley & Sons, 2009.
- [Bax70] R. J. Baxter. Ornstein-zernike relation and percus-yevick approximation for fluid mixtures. *The Journal of Chemical Physics*, 52(9):4559–4562, 1970.
- [BB99] E. Babson and I. Benjamini. Cut sets and normed cohomology with applications to percolation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127(2):589–597, 1999.
- [BK89] R. M. Burton and M. Keane. Density and uniqueness in percolation. *Communications in Mathematical Physics*, 121(3):501–505, 1989.
- [Bog07] V. I. Bogachev. *Measure Theory*, volume 1. Springer Science & Business Media, 2007.
- [Boi90] D. Boivin. First passage percolation: the stationary case. *Probability theory and related fields*, 86(4):491–499, 1990.

Literaturverzeichnis

- [BR06a] B. Bollobás and O. Riordan. The critical probability for random Voronoi percolation in the plane is $1/2$. *Probability Theory and Related Fields*, 136(3):417–468, 2006.
- [BR06b] B. Bollobás and O. Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, 2006.
- [BR08] B. Bollobás and O. Riordan. Percolation on dual lattices with k -fold symmetry. *Random Structures & Algorithms*, 32(4):463–472, 2008.
- [BY14] B. Blaszczyzyn and D. Yogeshwaran. Clustering comparison of point processes, with applications to random geometric models. In V. Schmidt, editor, *Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields*, chapter 2, pages 31–72. Springer, 2014.
- [CCC91] M. Campanino, J. T. Chayes, and L. Chayes. Gaussian fluctuations of connectivities in the subcritical regime of percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 88(3):269–341, 1991.
- [CDAF77] A. Coniglio, U. De Angelis, and A. Forlani. Pair connectedness and cluster size. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 10(7):1123, 1977.
- [Cer15] R. Cerf. A lower bound on the two-arms exponent for critical percolation on the lattice. *Ann. Probab.*, 43(5):2458–2480, 09 2015.
- [CGGK93] J. T. Cox, A. Gandolfi, P. S. Griffin, and H. Kesten. Greedy lattice animals i: Upper bounds. *The Annals of Applied Probability*, 3(4):1151–1169, 1993.
- [CK81] J. T. Cox and H. Kesten. On the continuity of the time constant of first-passage percolation. *Journal of Applied Probability*, 18(4):809–819, 1981.
- [CSS76] S. Cambanis, G. Simons, and W. Stout. Inequalities for $\mathcal{E}k(x, y)$ when the marginals are fixed. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 36(4):285–294, 1976.
- [DCT16] H. Duminil-Copin and V. Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for bernoulli percolation and the ising model. *Communications in Mathematical Physics*, 343(2):725–745, 2016.
- [Die10] R. Diestel. *Graph theory*. Springer Heidelberg, 2010.
- [DVJ03] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes, volume I: Elementary Theory and Methods of Probability and its Applications*. Springer, 2003.

- [DVJ07] D. J. Daley and D. Vere-Jones. *An Introduction to the Theory of Point Processes: volume II: General Theory and Structure*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2007.
- [GGR88] A. Gandolfi, G. Grimmett, and L. Russo. On the uniqueness of the infinite cluster in the percolation model. *Communications in Mathematical Physics*, 114(4):549–552, 1988.
- [GK94] A. Gandolfi and H. Kesten. Greedy lattice animals ii: Linear growth. *The Annals of Applied Probability*, 4(1):76–107, 1994.
- [Gri99] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1999.
- [Hal85] P. Hall. On continuum percolation. *The Annals of Probability*, 13(4):1250–1266, 1985.
- [Hal07] T. C. Hales. Jordan’s proof of the Jordan curve theorem. *Studies in logic, grammar and rhetoric*, 10(23):45–60, 2007.
- [Ham62] J. M. Hammersley. Generalization of the fundamental theorem on subadditive functions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 58:235–238, 4 1962.
- [Har60] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 56:13–20, 1 1960.
- [Hei92] L. Heinrich. *Mixing Properties of Gibbsian Point Processes and Asymptotic Normality of Takacs Fiksel Estimates*. Universität Bielefeld. SFB 343. Diskrete Strukturen in der Mathematik, 1992.
- [Hei12] H. Heil. A stationary, mixing and perturbative counterexample to the 0-1-law for random walk in random environment in two dimensions. *arXiv preprint arXiv:1203.3121*, 2012.
- [HN97] C. D. Howard and C. M. Newman. Euclidean models of first-passage percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 108(2):153–170, 1997.
- [HW65] J. M. Hammersley and D. J. A. Welsh. First-passage percolation, subadditive processes, stochastic networks, and generalized renewal theory. In Jerzy Neyman and Lucien M. Le Cam, editors, *Bernoulli 1713 Bayes 1763 Laplace 1813*, pages 61–110. Springer Berlin Heidelberg, 1965.

Literaturverzeichnis

- [Jö70] K. Jörgens. *Lineare Integraloperatoren*. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1970.
- [Kal02] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer Verlag, 2002.
- [Kes86] H. Kesten. Aspects of first passage percolation. In *École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV-1984*, volume 1180 of *Lecture notes in mathematics*, pages 125–264. Springer, 1986.
- [Kin73] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *The Annals of Probability*, 1(6):883–899, 1973.
- [Las10] G. Last. Modern random measures: Palm theory and related models. In W. S. Kendall and I. S. Molchanov, editors, *New Perspectives in Stochastic Geometry*, chapter 3, pages 77–110. Oxford University Press, 2010.
- [Li11] Shengqiao Li. Concise formulas for the area and volume of a hyperspherical cap. *Asian Journal of Mathematics and Statistics*, 4(1):66–70, 2011.
- [LP16] G. Last and M.D. Penrose. *Lectures on the Poisson Process*. 2016. to be published by Cambridge University Press. Available at http://www.math.kit.edu/stoch/~last/page/lehrbuch_poissonp/en.
- [LSS97] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, and A. M. Stacey. Domination by product measures. *The Annals of Probability*, 25(1):71–95, 1997.
- [LW09] T. LaGatta and J. Wehr. A shape theorem for riemannian first-passage percolation. *arXiv preprint arXiv:0907.2228*, 2009.
- [LZ01] C. D. Lorenz and R. M. Ziff. Precise determination of the critical percolation threshold for the three-dimensional “swiss cheese” model using a growth algorithm. *The Journal of Chemical Physics*, 114(8):3659–3661, 2001.
- [Mar02] J. B. Martin. Linear growth for greedy lattice animals. *Stochastic Processes and their Applications*, 98(1):43–66, 2002.
- [Men86] M. V. Menshikov. Coincidence of critical-points in the percolation problems. *Doklady akademii nauk sssr*, 288(6):1308–1311, 1986.
- [MN14] S. Martínez and W. Nagel. STIT tessellations have trivial tail σ -algebra. *Advances in Applied Probability*, 46(3):643–660, 2014.

- [MNW08] J. Mecke, W. Nagel, and V. Weiss. A global construction of homogeneous random planar tessellations that are stable under iteration. *Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 80(1):51–67, 2008.
- [MR96] R. Meester and R. Roy. *Continuum percolation*. Number 119 in Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
- [MT01] B. Mohar and C. Thomassen. *Graphs on surfaces. Johns Hopkins studies in the mathematical sciences*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001.
- [MZ00] I. Molchanov and S. Zuyev. Variational analysis of functionals of poisson processes. *Mathematics of Operations Research*, 25(3):485–508, 2000.
- [NW05] W. Nagel and V. Weiss. Crack stit tessellations: characterization of stationary random tessellations stable with respect to iteration. *Adv. in Appl. Probab.*, 37(4):859–883, 12 2005.
- [NZ79] X. Nguyen and H. Zessin. Ergodic theorems for spatial processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 48(2):133–158, 1979.
- [OZ14] L. S. Ornstein and F. Zernike. Accidental deviations of density and opalescence at the critical point of a single substance. In *Proc. Akad. Sci.(Amsterdam)*, volume 17, pages 793–806, 1914.
- [PA87] P. D. Poll and N. W. Ashcroft. Critical behavior of the hypernetted-chain equation. *Phys. Rev. A*, 35:5167–5173, June 1987.
- [Pen] M. D. Penrose. *Random Geometric Graphs*. Oxford studies in probability.
- [Pen96] M. D. Penrose. Continuum percolation and euclidean minimal spanning trees in high dimensions. *The Annals of Applied Probability*, 6(2):528–544, 1996.
- [Pen09] C. H. Peng. Maxima of moving sums in a poisson random field. *Advances in Applied Probability*, 41(3):647–663, 2009.
- [PS71] C. Pugh and M. Shub. Ergodic elements of ergodic actions. *Compositio Mathematica*, 23(1):115–122, 1971.
- [Sep98] T. Seppalainen. Exact limiting shape for a simplified model of first-passage percolation on the plane. *The Annals of Probability*, 26(3):1232–1250, 1998.

Literaturverzeichnis

- [Sos00] A. Soshnikov. Determinantal random point fields. *Russian Mathematical Surveys*, 55(5):923–975, 2000.
- [ST13] T. Schreiber and C. Thäle. Geometry of iteration stable tessellations: Connection with poisson hyperplanes. *Bernoulli*, 19(5A):1637–1654, 11 2013.
- [SW08] R. Schneider and W. Weil. *Stochastic and Integral Geometry*. Springer Verlag, 2008.
- [Tan93] H. Tanemura. Behavior of the supercritical phase of a continuum percolation model on \mathbb{R}^d . *Journal of Applied Probability*, 30(2):382–396, 1993.
- [Tan96] H. Tanemura. Critical behavior for a continuum percolation model. *Probability Theory and Mathematical Statistics*.(S. Watanabe et al. eds.) World Scientific, pages 485–495, 1996.
- [TJ12] S. Torquato and Y. Jiao. Effect of dimensionality on the continuum percolation of overlapping hyperspheres and hypercubes. ii. simulation results and analyses. *The Journal of Chemical Physics*, 137(7), 2012.
- [Tor12] S. Torquato. Effect of dimensionality on the continuum percolation of overlapping hyperspheres and hypercubes. *The Journal of chemical physics*, 136(5):054106, 2012.
- [VAW92] M. Q. Vahidi-Asl and J. C. Wierman. A shape result for first-passage percolation on the voronoi tessellation and delaunay triangulation. In *Random graphs*, volume 89, pages 247–262. Wiley-Interscience, 1992.
- [vdHS06] R. van der Hofstad and G. Slade. Expansion in n^{-1} for percolation critical values on the n -cube and \mathbb{Z}^n : the first three terms. *Combinatorics, Probability and Computing*, 15:695–713, 9 2006.