



KIT SCIENTIFIC REPORTS 7705

Statistische Modellierung einer geschichteten Zweiphasenströmung

Matthias Benz

Matthias Benz

Statistische Modellierung einer geschichteten Zweiphasenströmung

Karlsruhe Institute of Technology
KIT SCIENTIFIC REPORTS 7705

Statistische Modellierung einer geschichteten Zweiphasenströmung

von
Matthias Benz

Report-Nr. KIT-SR 7705

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Fakultät für Maschinenbau

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juni 2016

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Thomas Schulenberg, Prof. Dr.-Ing. Xu Cheng

Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
KIT Scientific Publishing
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark of Karlsruhe
Institute of Technology. Reprint using the book cover is not allowed.

www.ksp.kit.edu



*This document – excluding the cover, pictures and graphs – is licensed
under the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 DE License
(CC BY-SA 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>*



*The cover page is licensed under the Creative Commons
Attribution-No Derivatives 3.0 DE License (CC BY-ND 3.0 DE):
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/de/>*

Print on Demand 2016

ISSN 1869-9669

ISBN 978-3-7315-0549-5

DOI: 10.5445/KSP/1000056168

Statistische Modellierung einer geschichteten Zweiphasenströmung

Zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
der Fakultät für Maschinenbau
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Ing. Matthias Benz

Datum der mündlichen Prüfung: 21. Juni 2016

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Thomas Schulenberg
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Xu Cheng

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Kern- und Energietechnik (IKET) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Ich möchte mich an dieser Stelle bei all jenen Personen bedanken, die maßgeblich zum Erfolg der Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt meinem Hauptreferenten, Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Schulenberg, Leiter des Instituts für Kern- und Energietechnik (IKET), für die Möglichkeit, diese Arbeit an seinem Institut anzufertigen und für die vielen Diskussionen, in denen er mir mit seinem fachlichen Rat zur Seite stand.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Xu Cheng, dem Leiter des Instituts für Fusionstechnologie und Reaktortechnik (IFRT), danke ich herzlich für das Interesse an meiner Arbeit und für die Übernahme des Koreferats. Bei Frau Prof. Dr.-Ing. Bettina Frohnafel, Leiterin des Instituts für Strömungsmechanik (ISTM), möchte ich mich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes bedanken.

Ich danke all meinen Arbeitskollegen für die entspannte Arbeitsatmosphäre, die mir das Arbeiten am IKET sehr angenehm machte.

Mein Dank gilt auch meinen Eltern und meinem Bruder, die mir die ganze Zeit unterstützend zur Seite standen. Ganz besonders will ich mich bei meiner Frau Anna bedanken, die mir stets mit viel Verständnis begegnete und es immer wieder aufs Neue verstand, mich zu motivieren.

Karlsruhe, im Juni 2016

Matthias Benz

Kurzfassung

Statistische Modellierung einer geschichteten Zweiphasenströmung

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Modellierungsansatz für die Simulation geschichteter Zweiphasenströmungen vorgestellt. Sie sind charakterisiert durch eine wellige Phasengrenze, über die Impuls und Energie übertragen werden. In früheren Studien hat sich herausgestellt, dass turbulente Wirbel dabei eine wichtige Rolle spielen. Diese wiederum werden von Oberflächenwellen, die sich als Resultat der Scherkräfte an der Grenzfläche bilden, entscheidend beeinflusst.

Eine einfache Möglichkeit das Zusammenspiel von Turbulenz und Oberflächenwellen zu modellieren, bietet der Zweischichten-Turbulenzansatz. Dabei wird das Strömungsfeld in einen inneren, oberflächennahen Bereich und zwei äußere, oberflächenentfernte Bereiche aufgeteilt. Die Zweischichten-Formulierung macht es nun möglich, unterschiedliche Turbulenzmodelle in den jeweiligen Bereichen anwenden zu können. Während in den äußeren Bereichen Zweigleichungs-Wirbelviskositätsmodelle zum Einsatz kommen, wird im inneren Bereich ein einfacheres Eingleichungsmodell verwendet. Im Gegensatz zu vorangegangenen Studien ist in dieser Arbeit hier die Wellenamplitude als turbulentes Längenmaß gewählt worden.

Da die Wellenhöhe als Teil der numerischen Lösung nicht vorab bekannt ist, muss sie mithilfe eines Modelles abgeschätzt werden. Basierend auf einem statistischen Gleichgewicht zwischen turbulenter kinetischer, turbulenter potentieller und turbulenter Oberflächenenergie, konnten zwei Modelle zur Beschreibung der Wellenspektren und der mittleren Phasenverteilung entwickelt werden. Mit diesen ist es möglich, die gesuchte Wellenhöhe zu bestimmen. Das Zweischichten-Turbulenzmodell ist daraufhin in den Volume-of-Fluid Löser `interFoam` des quelloffenen CFD-Programms `OpenFOAM` implementiert und anhand mehrerer experimenteller Messdaten in horizontal und vertikal geschichteten Strömungen validiert worden. Die Simulationsergebnisse zeigten dabei gute Übereinstimmung mit den Versuchsdaten, wobei die Tendenz überhöhten Turbulenzeintrags an der Grenzfläche auf Seiten der Gasphase zu beobachten war.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Modellierungsansatz bietet also eine einfache Möglichkeit, die Grenzflächeneffekte in geschichteten Zweiphasenströmungen mit einer nur geringen Anzahl an freien Einstellparametern abzubilden, ohne dabei auf komplizierte Phasenwechselwirkungsmodelle zurückgreifen zu müssen.

Abstract

Statistical modelling of a stratified two-phase flow

A new modelling approach for stratified two-phase flows has been developed in the present work. Such flow is characterized by a wavy interface, which transfers momentum and energy. Previous studies have shown that turbulent eddies play an important role in this context. These eddies are influenced by surface waves which form at the interface as a result of shear stresses.

The two-layer turbulence model is a simple method to model the interaction between turbulence and surface waves. Therefore, the flow field is divided into an inner region near the interface and two outer regions which are further away from the interface. The two-layer approach now offers the possibility to use different turbulence models within each region. While two-equation eddy viscosity models are used in the outer regions, a simpler one-equation model is introduced to the interfacial region. In contrast to previous studies, the wave amplitude is used here as turbulent length scale in this study.

Since the wave height is part of the numerical solution and therefore not known in advance, it must be estimated with the help of a model. Based on a statistical equilibrium between turbulent kinetic, turbulent potential and turbulent surface energy, two models have been developed that can describe wave spectra and averaged phase distributions. With these models, it is now possible to predict the wave height. The new two-layer turbulence model has been implemented in the volume-of-fluid solver `interFoam` of the opensource CFD-package `OpenFOAM` and has been validated against several experimental data of horizontally and vertically stratified flows. The simulations show good agreement with the experiments with the general tendency of somewhat overpredicted turbulence production in the gas phase near the interface.

Therefore, the modelling approach presented in this work offers an easy way to include the interfacial effects of stratified two-phase flows with only few free fitting parameters and without the need to use sophisticated phase-exchange models.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	ix
1 Einleitung	1
2 Grundlagen und Stand der Forschung	7
2.1 Geschichtete Zweiphasenströmungen	7
2.1.1 Fließende und schießende Strömung	10
2.1.2 Hydraulischer Sprung	11
2.1.3 Gegenstrombegrenzung	11
2.1.4 Wechselwirkung an der freien Oberfläche	14
2.2 Oberflächenwellen	17
2.2.1 Entstehung von Oberflächenwellen	17
2.2.2 Mathematische Beschreibung von Oberflächenwellen	20
2.3 Numerische Strömungsmechanik (CFD)	30
2.3.1 Modellierung von Zweiphasenströmungen	30
2.3.2 Turbulenzmodellierung in Zweiphasenströmungen	38
2.3.3 Numerische Simulation von geschichteten Zweiphasenströmungen	42
3 Zielsetzung der Arbeit	47
4 Statistisches Wellenmodell	49
4.1 Phasenverteilung	49
4.2 Wellenspektren	53
4.3 Validierung	59
4.3.1 Horizontale Gas-Flüssigkeitsströmung im Gegenstrom	61
4.3.2 Horizontale Gas-Flüssigkeitsströmung im Gleichstrom	64
4.3.3 Meeresströmung	66
4.3.4 Vertikale Gas-Flüssigkeitsströmung im Gleichstrom	68
5 Numerische Modellierung geschichteter Zweiphasenströmungen	71
5.1 Das CFD-Software Paket OpenFOAM	72
5.1.1 Der Zweiphasenlöser interFoam	72
5.1.2 Turbulenzmodellierung in interFoam	75
5.2 Zweischichten-Turbulenzmodell für geschichtete Zweiphasenströmungen	78

5.3	Implementierung des Zweischichten-Turbulenzmodells in OpenFOAM . . .	80
5.3.1	Zusammenfassung aller implementierter Gleichungen	81
5.3.2	Numerischer Ablauf eines Zeitschrittes	82
5.3.3	Bestimmung der freien Oberfläche	84
5.3.4	Bestimmung der freien Parameter	86
6	Validierung des Zweischichten-Turbulenzmodells	95
6.1	Horizontale Zweiphasenströmung im Gegenstrom	95
6.1.1	Fließende Strömung	96
6.1.2	Schießende Strömung	98
6.1.3	Teilweise umgekehrte Strömung	100
6.2	Vertikale Zweiphasenströmung im Gleichstrom	105
6.3	Anlaufen einer Welle	110
7	Zusammenfassung und Schlussfolgerung	115
	Literaturverzeichnis	119
	Anhang	129
A	Berechnung der relativen Oberflächenvergrößerung dA	129
B	Bestimmung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit aus der Schubspannungsgeschwindigkeit an der Wand	130

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

Formelzeichen	Beschreibung	Einheit
A	Wave Aspect Ratio	-
B	Kanalbreite	m
c	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit	m/s
D	Durchmesser	m
e	Energiedichte	$kg/m \cdot s^2$
E	Energie pro Fläche	kg/s^2
f	Frequenz	Hz
g	Gravitationskonstante	m/s^2
h	Wellenamplitude	m
H	Wellenhöhe	m
k	turbulente kinetische Energie	m^2/s^2
L	Länge	m
l_μ	turbulentes Längenmaß	m
m	Masse	kg
M	Zwischenphasenkraft	N/m^3
p	Druck	bar
q	Wellenzahl	$1/m$
S	Kanalhöhe	m
t	Zeit	s
u, v, w	Geschwindigkeitskomponente in x-, y-, z-Richtung	m/s
U	Geschwindigkeit	m/s
U_{kS}	Leerrohrgeschwindigkeit der Phase k	m/s
V	Volumen	m^3
\dot{V}	Volumenstrom	m^3/s
x, y, z	kartesische Koordinaten	-

Griechische Buchstaben

Formelzeichen	Beschreibung	Einheit
α	Phasenvolumenanteil	-
δ	mittlere Wassertiefe, Filmdicke	m
Γ	Dampf- bzw. Kondensatquellichte	$kg/m^2 s$
ϵ	turbulente Dissipation	m^2/s^3
λ	Wellenlänge	m
μ	dynamische Viskosität	$kg/m s$
ν	kinematische Viskosität	m^2/s
ω	Kreisfrequenz	rad/s
ω	spezifische Dissipationsrate	$1/s$
ρ	Dichte	kg/m^3
σ	Oberflächenspannung	N/m
τ	Schubspannung	N/m^2
ϕ	Geschwindigkeitspotential	m^2/s

Indizes

Index	Beschreibung
0	Ruhelage
B	Boden
<i>deep</i>	Tiefwasser
G	Gasphase
i	Zeitschrittindikator
<i>in</i>	Eintritt
<i>in</i>	innerer Bereich des Zweischichten-Turbulenzmodells
k	Indikator für Phase k
<i>kin</i>	kinetisch
L	Flüssigphase (liquid)
m	Mischung
M	mittlere freie Oberfläche
<i>pot</i>	potentiell
r	relativ
<i>shallow</i>	Flachwasser

$S, surf$	freie Oberfläche
t	turbulent
x, y	Größe in Richtung der kartesischen Koordinaten

Kennzahlen

Kennzahl	Beschreibung
Fr	Froude-Zahl
Fr^*	erweiterte Froude-Zahl

Operatoren

Operator	Beschreibung
$\overline{\phi}^V, \overline{\phi}^{V_k}$	volumengemittelte Strömungsgröße
$\overline{\phi}$	zeitlich gemittelte Strömungsgröße
ϕ'	Stochastische Schwankungsgröße
ϕ	Vektor
ϕ	Tensor
∇	Nabla-Operator
$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$	partiell Differential

Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
APSD	Auto-Power Spectrum Density
DNS	Direkte Numerische Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes

1 Einleitung

Geschichtete Zweiphasenströmungen treten in vielen technischen Bereichen auf. Vor allem in energietechnischen Anwendungen, wo Verdampfen oder Kondensation eine wichtige Rolle spielen, ist das Verständnis solcher Strömungen von zentraler Bedeutung. Beispielsweise für die Dampferzeugung in thermischen Kraftwerken, wo Wasser in den Rohren des Verdampfers durch Wärmezufuhr über die Rohrwand oder im Falle eines Siedewasserreaktors in den Unterkanälen des Brennelementes verdampft und der Dampf anschließend zur Stromerzeugung über eine Dampfturbine geleitet wird. In Abhängigkeit des Dampfanteils und der Strömungsgeschwindigkeiten der beiden Phasen bilden sich unterschiedliche Strömungsformen aus. Unter anderem kann die in Abbildung 1.1 gezeigte Ringströmung beobachtet werden, wo der Wasserdampf in der Rohrmitte strömt und das noch flüssige Wasser an den Rohrwänden haftet. Die unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten der Phasen verursachen dabei Scherspannungen an der Grenzfläche, die dort wiederum eine erhöhte Turbulenzproduktion und die Entstehung von Oberflächenwellen zur Folge haben. Bei hohen Gasgeschwindigkeiten werden außerdem einzelne Wassertropfen von den Wellenkämmen abgelöst. Bei weiterer Wärmezufuhr nimmt der Dampfgehalt weiter zu, während der Wasserfilm stetig abnimmt, bis er zuletzt gänzlich verschwindet. Dieser Punkt wird als *Dryout* bezeichnet und geht mit einer sprunghaften Erhöhung der Wandtemperaturen aufgrund des schlechteren Wärmeübergangs zur Gasphase einher [115].

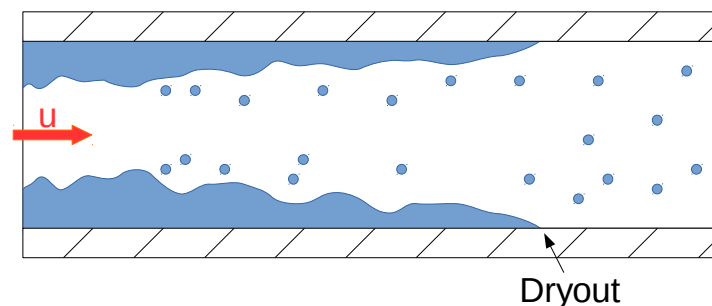


Abbildung 1.1: Ringströmung mit anschließendem Dryout in einem Verdampferrohr

Ein Beispiel für das Auftreten geschichteter Strömungen während der Kondensation einer gasförmigen Phase sind die Strömungsvorgänge in den geneigten Rohren eines Luftkondensators (Abb. 1.2), der bevorzugt in wasserarmen Regionen für die Kondensation des von der Dampfturbine kommenden Wasserdampfes eingesetzt wird [97]. Dabei bildet sich eine anfangs gleichmäßig über den Rohrumfang verteilte Ringströmung aus, die in Strömungsrichtung aufgrund der steigenden Filmdicke und des Einflusses der Schwerkraft zunehmend in eine Schichtenströmung übergeht. Auch hier spielen die Wechselwirkungen an der Phasengrenzfläche eine wichtige Rolle [103].

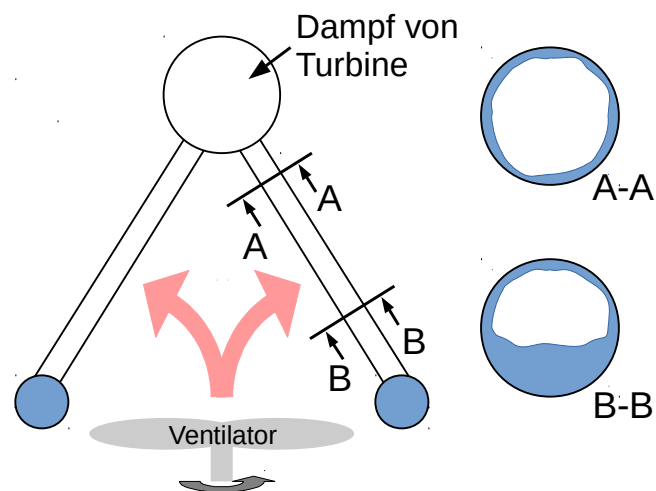


Abbildung 1.2: Funktionsprinzip eines Luftkondensators

Doch nicht nur in Wärmetauschern sind geschichtete Gas-Flüssigkeits-Strömungen von Interesse. Auch in anderen Komponenten thermischer Kraftwerke tritt diese Strömungsform auf. So muss beispielsweise sichergestellt werden, dass der Wasserdampf im Sattdampfkreislauf einen nur geringen Restfeuchteanteil aufweist, um Erosion in der Dampfturbine zu vermeiden. Dazu wird das Wasser/Dampf-Gemisch mithilfe von Zyklon-Wasserabscheidern oder Dampftrocknern bzw. einer Kombination aus beiden voneinander getrennt [49].

Im Wasserabscheider wird der feuchte Wasserdampf in Rotation versetzt, wodurch die Tropfen an die Wand geworfen werden und sich wiederum eine Ringströmung ausbildet. Je nach Anwendungsfall wird das Wasser auf unterschiedlich Art und Weise aus dem Abscheider geführt. Im Falle eines Siedewasserreaktors (Abb. 1.3a), wo der feuchte Dampf von unten über einen Drallerzeuger in den Wasserabscheider geführt wird, wird das Wasser mithilfe von Entnahmeringen vom Dampf getrennt [49]. Im Anfahrssystem von Kohle- bzw. Gas- und Dampfkraftwerken wird hingegen die Schwerkraft bei der Phasentrennung ausgenutzt (Abb. 1.3b). Hier wird das Wasser/Dampf-Gemisch dadurch in Rotation versetzt, indem es tangential von oben in den Abscheider geleitet wird. Das schwerere Wasser fließt dabei an den Wänden nach unten, während der leichtere Wasserdampf

nach oben ausströmt [7, 91, 92, 97]. In Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeiten kommt es auch hier zur Ausbildung von Oberflächenwellen und zur Tropfenablösung. Dadurch wird die Effizienz der Phasentrennung negativ beeinflusst, da einerseits die Wellen über die Entnahmeringe schwappen und sich andererseits die Tropfen wieder vom Wasserfilm lösen und zusammen mit dem Dampf aus dem Wasserabscheider ausströmen können.

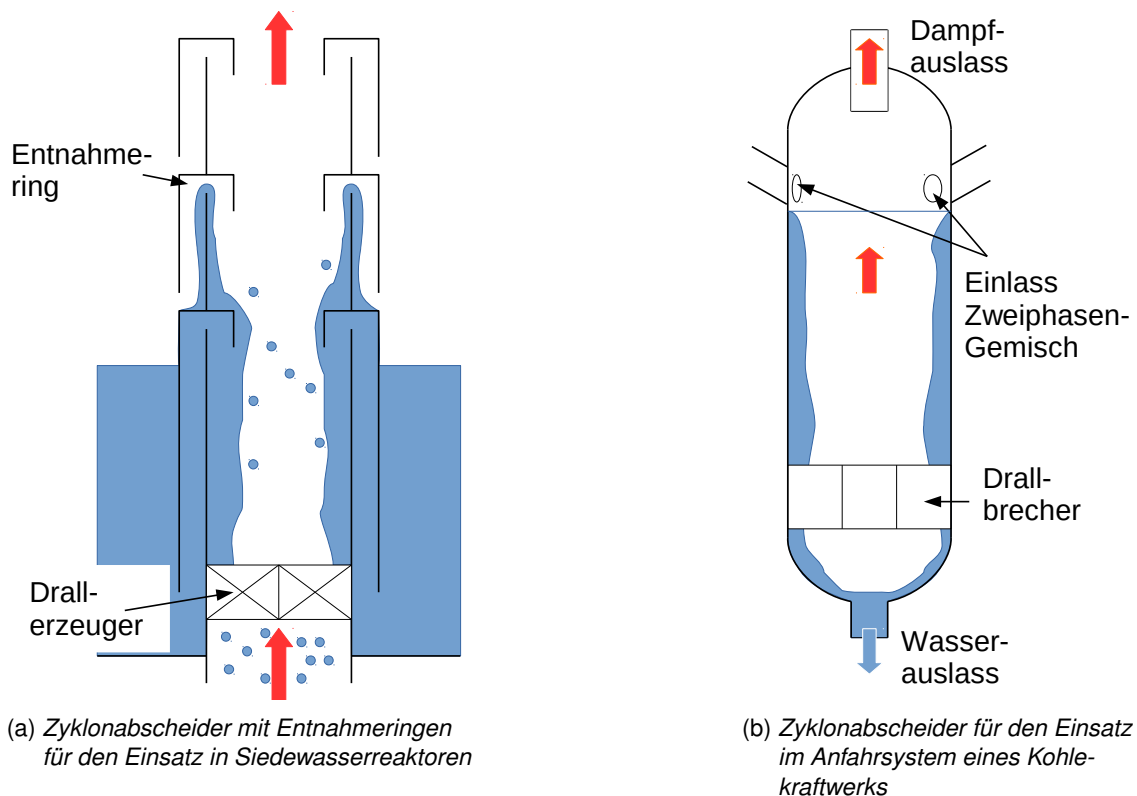


Abbildung 1.3: Verschiedene Arten von Zyklonabscheidern

Im Gegensatz zu den Zyklonabscheidern wird der feuchte Wasserdampf in Dampftrocknern, wie in Abbildung 1.4 gezeigt, durch zickzackförmige Kanäle geführt. In einem solchen Lamellenabscheider muss das Zweiphasengemisch daher ständig seine Strömungsrichtung ändern, wobei die flüssige Phase aufgrund höherer Trägheit an der Wand anhaftet und in Richtung der Schwerkraft nach unten abfließen kann. Auch bei dieser Form der Phasentrennung führt Tropfenablösung zur Verschlechterung der Effizienz des Bauteils, was eine gut ausgelegte Wasserentnahme ebenso wichtig macht, wie die Phasentrennung an sich [49, 52]. Lamellenabscheider findet man in Siedewasserreaktoren, wo sie direkt den Zyklonabscheidern nachgeschaltet sind und den Feuchtegehalt des Dampfes auf zum Teil weit unter 1 % vermindern [49, 97]. Aber auch im Zwischenüberhitzer in Kernkraftwerken [5] oder in der Rauchgasentschwefelungsanlage in Kohlekraftwerken [97] kommen diese Flüssigkeitsabscheider zum Einsatz.

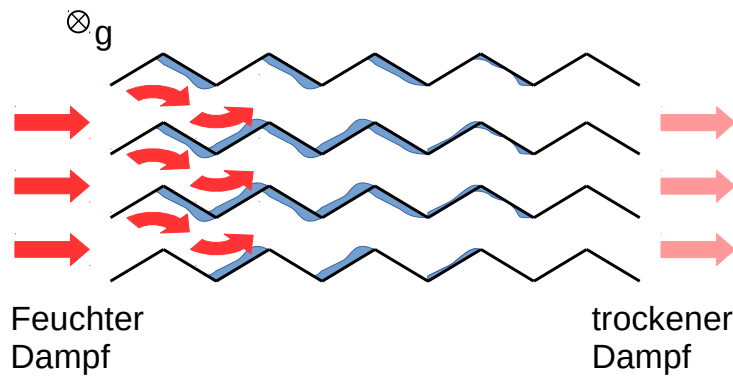


Abbildung 1.4: Funktionsprinzip eines Lamellenabscheiders

Bei den bisher genannten Beispielen wurden bis auf die Rauchgasentschwefelung (hier ist es ein Gemisch aus Verbrennungsabgasen und Wasser) ausschließlich Zweiphasengemische bestehend aus flüssigem Wasser und Wasserdampf betrachtet. Doch geschichtete Zweiphasenströmungen beschränken sich keineswegs nur auf solche Gemische. So treten geschichtete Öl-Luft-Strömungen zum Beispiel in verschiedenen Komponenten von Turbinen auf. In den Lagergehäusen der Turbinen ist das Verständnis dieser Strömungsform unter anderem für Abscheidung des Schmieröls aus dem Gehäuse wichtig [36]. Eine Schichtenströmung bestehend aus Öl und Luft tritt auch bei der luftgestützten Ölzerstäubung in der Brennkammer einer Gasturbine auf, wo eine feine Zerstäubung des Brennstoffes für die Verbrennung maßgeblich ist. In den sogenannten Airblast-Zerstäubern (Abb. 1.5) wird der flüssige Brennstoff in eine rotierende Luftströmung eingespritzt und aufgrund der Zentrifugalbeschleunigung ähnlich dem Zyklonabscheider nach außen an die Wand getragen. Dort bildet sich eine geschichtete Strömung aus, die mit der Luftströmung interagiert. Dabei bilden sich Oberflächenwellen und erste Tropfen werden aus dem Flüssigkeitsfilm abgelöst. Die eigentliche Zerstäubung findet jedoch an der Abrisskante der Düse statt, wo die Flüssigkeit auf einen äußeren rotierenden Luftstrom trifft, wodurch die ablösenden Tropfen fein zerstäubt werden [8, 58, 88, 90].

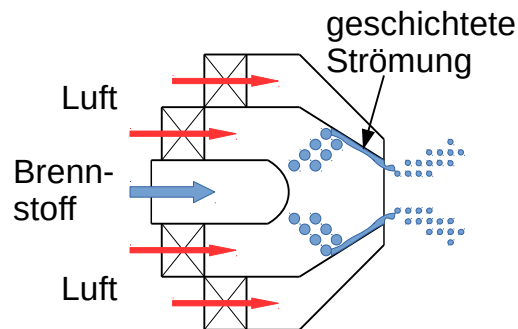


Abbildung 1.5: Funktionsprinzip eines Airblast-Zerstäubers

Die Beispiele zeigen, dass das vollständige Verständnis geschichteter Zweiphasenströmungen für die Funktionsweise und für die Optimierung technischer Komponenten hinsichtlich ihrer Effizienz von fundamentaler Bedeutung sind. Diese Arbeit beschäftigt sich aus diesem Grund mit der numerischen Beschreibung geschichteter Zweiphasenströmungen, wobei vor allem der Beschreibung der Wechselwirkungen an der Phasengrenzfläche besondere Beachtung geschenkt wird. Dazu wird ein neues statistisches Modell entwickelt mit dem die Bildung von Oberflächenwellen und die erhöhte Turbulenzproduktion berücksichtigt werden kann. Die Tropfenablösung aus den Wellenkämmen wird dabei nicht betrachtet.

Bevor das neue numerische Modell in den Kapiteln 4 bis 6 vorgestellt wird, sollen zu Beginn die Grundlagen und die Ergebnisse vorangegangener Untersuchungen auf dem Gebiet der geschichteten Strömungen in Kapitel 2 erarbeitet werden, um die Ziele dieser Arbeit sinnvoll definieren zu können (Kapitel 3).

2 Grundlagen und Stand der Forschung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen, die zum Verständnis geschichteter Strömungen und deren numerischer Berechnung notwendig sind, behandelt. Außerdem werden vorangegangene Studien auf dem Gebiet geschichteter Strömungen vorgestellt, um die Ergebnisse dieser Arbeit besser in den Gesamtzusammenhang der Thematik einordnen zu können.

2.1 Geschichtete Zweiphasenströmungen

Als Zwei- bzw. Mehrphasenströmung werden Strömungen bezeichnet bei denen zwei oder mehrere Phasen gemeinsam in einem Strömungsquerschnitt fließen. Als Phase wird hierbei der thermodynamische Aggregatzustand fest, flüssig oder gasförmig bezeichnet. Eine weitere Unterteilung findet mit der Angabe der beteiligten Komponenten statt. So spricht man von einer Einkomponenten-Mehrphasenströmung, wenn die einzelnen Phasen unterschiedlichen Aggregatzuständen desselben Stoffes entsprechen. Ein Beispiel hierfür wäre das Stoffsystem Wasser und Wasserdampf. Bei Zwei- bzw. Mehrkomponenten-Mehrphasenströmungen sind dagegen Phasen verschiedener Stoffe, wie beispielsweise Luft und Wasser, beteiligt [74, 75].

Die in dieser Arbeit behandelten Gas-Flüssigkeit-Zweiphasenströmungen können aufgrund der Wechselwirkungen zwischen den Phasen unterschiedliche Formen annehmen. Neben dem Volumenanteil und den Volumenströmen der beteiligten Phasen spielen hierbei auch die Schwerkraft sowie Grenzflächenspannungen eine entscheidende Rolle. Am Beispiel einer horizontalen und einer vertikalen Rohrströmung lassen sich die Strömungsformen anschaulich erläutern [6, 39, 74].

In einer aufwärtsgerichteten Gas-Flüssigkeits-Strömung in einem vertikalen Rohr lassen sich die in Abbildung 2.1 gezeigten Strömungsformen unterscheiden. Ausgehend von einer *Blasenströmung*, wo die Gasphase aufgrund ihres geringen Volumenanteils fein dispers in Form kleiner Gasbläschen in der kontinuierlichen Flüssigkeitsphase verteilt ist, kommt es mit steigendem Volumenanteil zur Koaleszenz der Gasblasen. Es entstehen große Gasblasen, die sich annähernd über den gesamten Rohrquerschnitt erstrecken.

Aufgrund der charakteristischen Pfropfenform der Gasblasen, wird diese Strömungsform als *Pfropfenströmung* bezeichnet. Mit weiter ansteigendem Gasvolumenstrom werden die Gasblasen nach und nach instabiler und brechen in unterschiedlich große und unregelmäßig geformte Gasblasen auf. Diesen Strömungsbereich bezeichnet man als *Schaumströmung*. Wird der Gasvolumenstrom abermals erhöht, bildet sich eine *Ringströmung* aus. Dabei wird die Flüssigkeit von der Gasphase an die Rohrwand gedrückt. Aufgrund der durch die hohen Gasgeschwindigkeiten verursachten Scherkräfte wird die Grenzfläche zwischen den beiden Phasen instabil und es kommt zu Wellenbildung und Tropfenablösung, bis schließlich bei sehr hohen Gasgeschwindigkeiten und beheizten Wänden nur noch fein disperse Flüssigkeitstropfen in der nunmehr kontinuierlichen Gasphase vorliegen. Diese Strömungsform wird *Tropfenströmung* genannt.

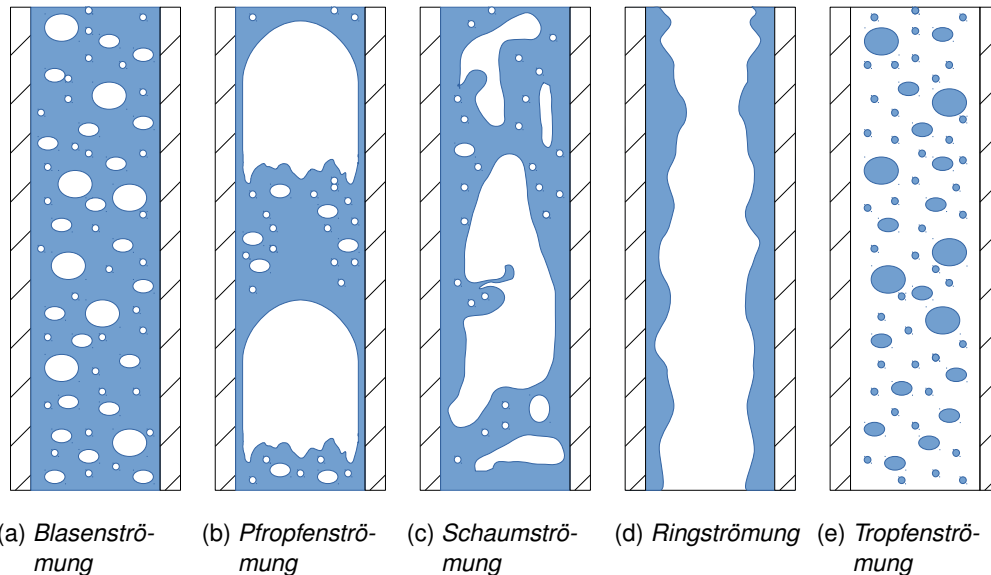


Abbildung 2.1: Strömungsformen in vertikalem Rohr

Ähnlich können auch in horizontal ausgerichteten Rohren unterschiedliche Strömungsformen beobachtet werden, wie Abbildung 2.2 zeigt. Wiederum ausgehend von einer fein dispersen *Blasenströmung*, vereinen sich die Gasbläschen mit zunehmendem Gasvolumenanteil zu größeren Gasblasen, die sich nun aber aufgrund von Auftriebskräften überwiegend im oberen Teil des Rohres ansammeln. Man spricht hierbei von einer *elongierten Blasenströmung*. Nimmt der Gasvolumenanteil bei gleichzeitig niedrigen Fluidgeschwindigkeiten weiter zu, so trennen sich die beiden Phasen vollständig. Die beiden Fluide strömen nun geschichtet übereinander, wobei die schwerere Flüssigkeitsphase aufgrund des Schwerkrafteinflusses im unteren Teil des Rohres anzutreffen ist. Man bezeichnet diese Art von Strömung als *Schichtenströmung*. Wird der Gasvolumenstrom erhöht, wird die Phasengrenzfläche wie bei der vertikalen Strömung instabil und es bildet sich eine *wellige Schichtenströmung* aus. Mit weiter zunehmendem Volumenstrom

der Gasphase werden die Wellen weiter angefacht, wobei es dazu kommen kann, dass die Wellenkämme in Kontakt mit der oberen Rohrwand kommen. Es liegt eine *Schwallströmung* vor. Bei noch höheren Volumenströmen benetzt die Flüssigphase dauerhaft die obere Rohrwand und es bildet sich eine *Ringströmung*, wobei die Gasphase mit erheblich größerer Geschwindigkeit in der Mitte des Rohres strömt. Es werden immer mehr Flüssigkeitstropfen aus dem Wasserfilm gerissen bis sich schließlich auch hier bei sehr hohen Gasvolumenströmen und beheizten Wänden eine disperse *Tropfenströmung* ausbildet.

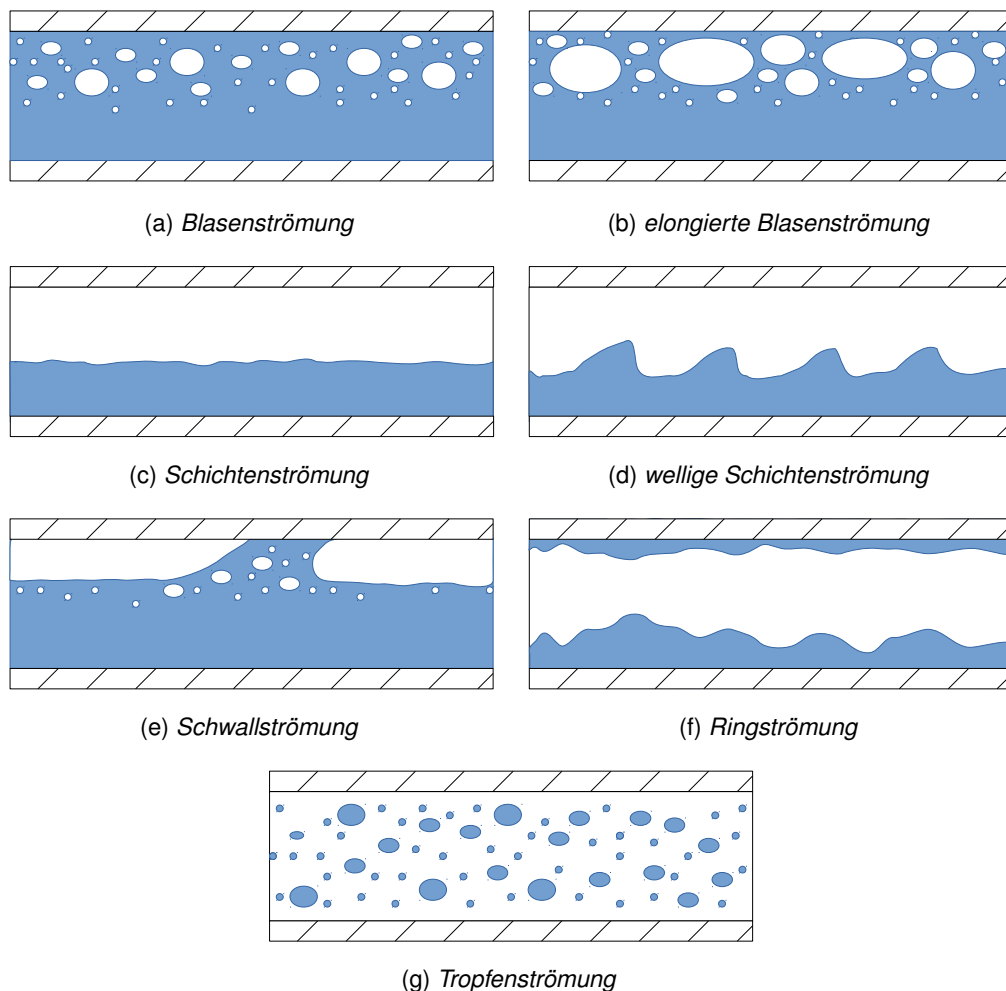


Abbildung 2.2: Strömungsformen in einem horizontalem Rohr

Wie bereits angedeutet, konzentriert sich diese Arbeit auf wellige Schichten- und Ringströmungen in horizontalen und vertikalen Rohren bzw. Kanälen. Dabei werden vor allem jene Strömungen betrachtet, bei denen die Grenzfläche instabil ist und es zur Ausbildung von Oberflächenwellen kommt. In diesem Zusammenhang werden im Folgenden weitere strömungsmechanische Phänomene erläutert, die bei Schichtenströmungen auftreten können.

2.1.1 Fließende und schießende Strömung

Abhängig von der Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeitsphase wird zwischen fließender und schießender Strömung unterschieden. Als charakteristische Kennzahl hierbei dient die *Froude-Zahl*. Sie ist als das Verhältnis zwischen der Trägheitskraft und der Gewichtskraft definiert:

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g\delta}} \quad (2.1)$$

wobei u die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeitsphase, g die Erdbeschleunigung und δ die mittlere Filmdicke der Flüssigkeit darstellen.

Wie in Kapitel 2.2 gezeigt wird, entspricht der Wurzelausdruck im Nenner von Gleichung 2.1 der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Flachwasserwelle. Die Froudezahl gibt also auch das Verhältnis zwischen mittlerer Strömungsgeschwindigkeit und der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Oberflächenwelle an. Anhand dieser Definition können die Unterschiede zwischen fließenden und schießenden Strömungen anschaulich erläutert werden [28].

In *fließenden*, oder auch unterkritisch genannten Strömungen gilt $Fr < 1$. Das bedeutet, dass die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit größer als die Geschwindigkeit der Hauptströmung ist. Eine Störung, in diesem Fall in Form einer Welle, kann sich demnach auch entgegen der Hauptströmungsrichtung stromauf fortpflanzen. Die Fließgeschwindigkeit der Flüssigphase nimmt in fließenden Strömungen in Strömungsrichtung zu, was eine Reduzierung der mittleren Wassertiefe infolge der Massenerhaltung nach sich zieht (Abb. 2.3). Schwerewellen mit großen Amplituden und Wellenlängen können beobachtet werden [28, 31].

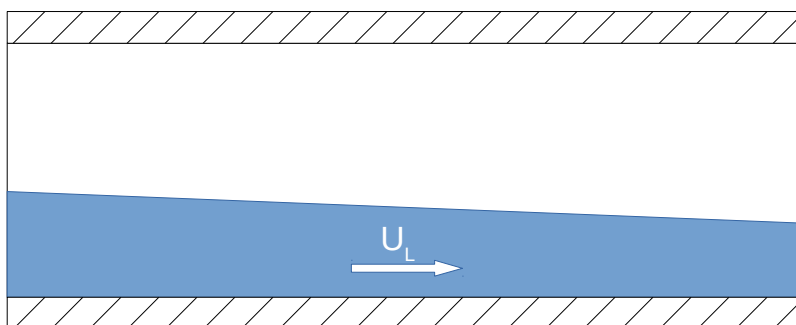
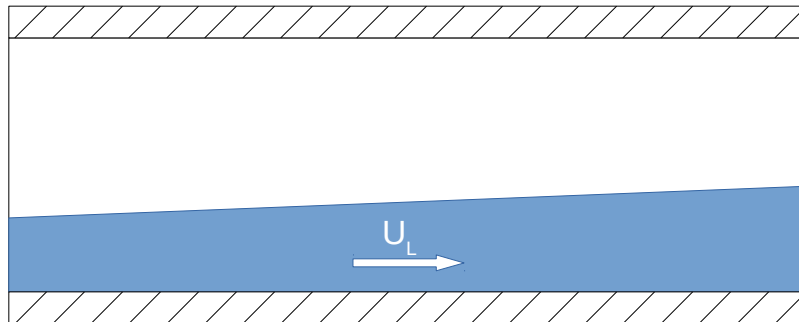


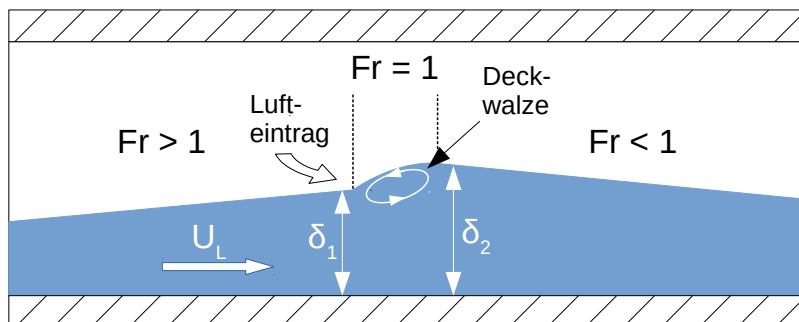
Abbildung 2.3: *Fließende Strömung*

In einer *schießenden* bzw. überkritischen Strömung gilt hingegen $Fr > 1$. Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist also kleiner als jene der Hauptströmung, weshalb sich eine Störung nur noch stromab ausbreiten kann. Die Strömung wird hier in Strömungsrichtung verzögert, was eine Vergrößerung der Wassertiefe zur Folge hat (Abb. 2.4). Vorwiegend Kapillarkräfte sind hier für die Wellenentstehung verantwortlich, weshalb Wellen mit nur geringer Amplitude und Wellenlängen beobachtet werden können [28, 31].

Abbildung 2.4: *Schießende Strömung*

2.1.2 Hydraulischer Sprung

Interessant sind auch die Strömungsverhältnisse am Übergangspunkt $Fr = 1$. Während der Übergang von fließender zu schießender Strömung aufgrund der Beschleunigung der Strömung annähernd verlustfrei verläuft, kommt es im umgekehrten Fall infolge eines positiven Druckgradienten in Strömungsrichtung zu einem sprunghaften Anstieg der Wassertiefe, dem sogenannten *hydraulischen Sprung* (Abb. 2.5).

Abbildung 2.5: *Hydraulischer Sprung*

Der Sprung geht dabei mit einer erheblichen Turbulenzerzeugung und Energiedissipation einher. Abhängig von der Froude-Zahl in der schießenden Strömung vor dem hydraulischen Sprung, fällt der Anstieg der Wassertiefe unterschiedlich stark aus, wobei mit zu-

nehmender Froude-Zahl auch die Sprungstärke δ_2/δ_1 zunimmt. Bei besonders starken Sprüngen bildet sich ein Rückströmgebiet in Form einer Deckwalze aus, durch die Luft in die fließende Strömung nach dem Sprung eingetragen wird [28, 47].

2.1.3 Gegenstrombegrenzung

Bisher wurde keine Aussage über die Strömungsrichtungen der beiden Phasen gemacht. Prinzipiell werden zwei Möglichkeiten unterschieden. Zum einen können beide Phasen in die gleiche Richtung strömen. Man spricht dann von einer *gleichgerichteten* Strömung oder von Gleichstrom. Zum anderen ist es möglich, dass die Phasen in entgegengesetzte Richtungen fließen, was als *entgegengerichtete* Strömung oder Gegenstrom bezeichnet wird. Aufgrund der Schubspannungskräfte, die an der Grenzfläche zwischen den Phasen wirken, kann es in entgegengerichteten Strömungen vorkommen, dass die Flüssigphase in der Nähe der Grenzfläche derart stark verzögert wird, dass sie sogar ihre Strömungsrichtung ändert und in Richtung der Gasströmung abfließt. Dieses Phänomen wird *teilweise Strömungsumkehr* genannt (Abb. 2.6).

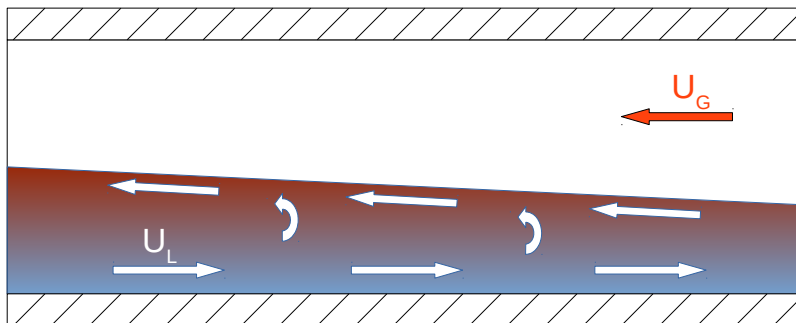


Abbildung 2.6: Teilweise Strömungsumkehr

Mit zunehmender Relativgeschwindigkeit zwischen den Phasen wird immer mehr Flüssigphase umgekehrt, bis letztlich die gesamte Flüssigkeit im Gleichstrom mit der Gasphase abströmt. Man spricht dann von *vollständiger Strömungsumkehr* (Abb 2.7).

Entgegengerichtete Strömungen werden also bei bestimmten Strömungsverhältnissen instabil, was allgemein als *Gegenstrombegrenzung* bzw. im englischen Sprachraum als *Countercurrent Flow Limitations (CCFL)* bezeichnet wird. Auch den Begriff des *Flutens* bzw. *onset on flooding* findet man in diesem Zusammenhang in der Literatur [39].

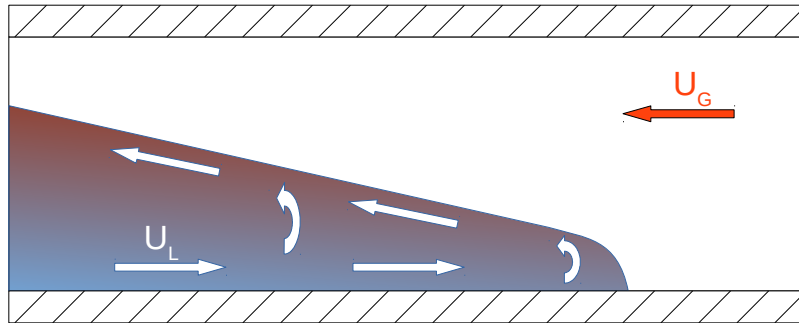


Abbildung 2.7: Vollständige Strömungsumkehr

Eine der ersten Studien, die sich mit der Strömungsumkehr in vertikalen Rohren befasste, geht auf Wallis [105, 106] zurück. Darin entwickelte er mit Gleichung 2.2 ein Kriterium, mit dem sich das Einsetzen der Strömungsumkehr bestimmen lässt:

$$\sqrt{U_{GS}^*} + m\sqrt{U_{LS}^*} = C \quad (2.2)$$

mit den dimensionslosen Leerrohrgeschwindigkeiten U_{kS}^* der jeweiligen Phase k und den Konstanten m und C , die von den Stoff- und Strömungseigenschaften sowie den geometrischen Randbedingungen am Einlass bzw. Auslass des Rohres abhängen. Die dimensionslose Leerrohrgeschwindigkeit für die Phase k berechnet sich wie folgt aus der dimensionsbehafteten Leerrohrgeschwindigkeit U_{kS} :

$$U_{kS}^* = \left[\frac{\rho_k}{gD(\rho_L - \rho_G)} \right]^{0,5} U_{kS} \quad (2.3)$$

wobei mit ρ_k die Dichte der k -Phase, mit g die Erdbeschleunigung und mit D der Rohr- bzw. der hydraulische Durchmesser bezeichnet wird.

Für turbulente Strömungen gibt Wallis [105] $m = 1$ an, während C von den geometrischen Verhältnissen am Eintritt abhängt. So gilt $C = 0,725$ im Falle einer scharfen Kante am Rohreintritt, wohingegen der Wert von C für abgerundete Einlasskanten zwischen 0,88 und 1 liegt.

Richter u. a. [87] untersuchten die Strömungsumkehr in einem Modell des heißen Stranges eines Druckwasserreaktors und gaben dabei ein abgeändertes Wallis-Kriterium für ihre experimentellen Versuchsergebnisse an, mit $m = 1$ und $C = 0,7$.

Ohnuki [76] untersuchte ebenfalls die Gegenstrombegrenzung in heißstrangähnlichen Geometrien, bestehend aus einem horizontalen und einem anschließend angewinkelten Rohr von variierender Länge und Durchmesser. Er fand heraus, dass C zum einen vom

Verhältnis der Länge des horizontalen Rohres zum Rohrdurchmesser und zum anderen von der Länge des angewinkelten Rohres abhängt. Die Konstante m war in seinen Experimenten annähernd konstant gleich 0,75.

Im Gegensatz zu den bisher genannten Studien, entwickelte Lopez de Bertodano [59] eine Korrelation zur Vorhersage des Flutbeginns, die nicht auf Gleichung 2.2 aufbaut. Er passte vielmehr die Beziehung von Mishima u. Ishii [69] für die Anwendung bei geneigten Rohren mit kreisrundem Querschnitt an. Diese basiert auf einer Kelvin-Helmholtz Instabilitätsanalyse für das Einsetzen von Wellenwachstum an der Grenzfläche zwischen der Gas- und Flüssigkeitsströmung. Danach setzt der Flutvorgang abhängig von der Relativgeschwindigkeit $u_G - u_L$ der beiden Phasen wie folgt nach Gleichung 2.4 ein:

$$u_G - u_L > 0,487 \left[\frac{\left(\frac{\rho_L - \rho_G}{\rho_G} \right) g D \alpha \cos \phi}{\frac{8}{\pi} \left(\frac{\delta}{D} \left[1 - \frac{\delta}{D} \right] \right)^{0,5}} \right]^{0,5} \quad (2.4)$$

Hierin sind D und ϕ der Durchmesser bzw. der Neigungswinkel des Rohres, δ die Dicke der Flüssigkeitsströmung und α der Gasvolumenanteil. Im Zuge der Validierung dieser Beziehung gegen experimentelle Ergebnisse, musste Lopez de Bertodano [59] den Vorfaktor von 0,487 auf 0,3 reduzieren, um der Auswirkung des Rohrdurchmessers Rechnung zu tragen.

Gargallo [30, 31] stellte in ihrer Untersuchung entgegengerichteter Zweiphasenschichtenströmungen fest, dass neben dem Wallis-Kriterium eine weitere Bedingung für die Gegenstrombegrenzung erfüllt sein muss. So kann Strömungsumkehr nur dann auftreten, wenn die Strömung unterkritisch ist, d.h. $Fr < 1$ gilt.

Den Einfluss der Stoffeigenschaften (Dichte, Viskosität und Oberflächenspannung) untersuchten Zapke u. Kröger [114] in ihrer Studie. Dabei stellte sich heraus, dass nur die Dichte der Fluide einen erheblichen Einfluss auf das Einsetzen der Strömungsumkehr hat, wohingegen der Viskosität überhaupt kein Einfluss nachgewiesen werden konnte. Die Oberflächenspannung wirkt sich nur minimal stabilisierend auf die Gegenstrombegrenzung aus.

Für eine ausführliche Zusammenfassung der Studien, die sich mit der Gegenstrombegrenzung beschäftigen, sei an dieser Stelle auf die Veröffentlichung von Al Issa u. Macian [4] verwiesen.

2.1.4 Wechselwirkung an der freien Oberfläche

Laut Rashidi u. a. [85] spielt die Turbulenz in der Flüssigphase eine entscheidende Rolle bei der Wechselwirkung an der Grenzfläche zwischen den beteiligten Phasen in ge-

schichteten Strömungen. Die Thematik war daher in der Vergangenheit Ausgangspunkt zahlreicher Untersuchungen, um ein besseres Verständnis der Austauschvorgänge an der Phasengrenzfläche zu erhalten. Im Folgenden sollen einige der Studien kurz vorgestellt werden.

Komori u. a. [51] untersuchten die turbulenten Strukturen an der freien Oberfläche in offenen Kanalströmungen. Ihre Messungen zeigten, dass die vertikalen Geschwindigkeitsfluktuationen in der Nähe der Grenzfläche gedämpft werden, während die Fluktuationen parallel zur Phasengrenzfläche verstärkt werden. Große Wirbelgebilde erneuern dabei stets die Oberfläche und kontrollieren somit sowohl den Masse- als auch den Wärmetransport über die Grenzfläche, ehe sie wieder zurück in die Hauptströmung reflektiert werden. Allerdings konnten sie nicht erklären, wo diese Wirbel ihren Ursprung haben. Diese offene Fragestellung wurde später in einem weiterführenden Experiment [50] beantwortet. Danach lösen sich die Wirbel vom unteren Kanalboden ab und werden in Richtung der freien Oberfläche transportiert, wobei beinahe alle Wirbel zur Erneuerung der Phasengrenzfläche beitragen. Von ähnlichen Ergebnissen wurde auch von Rashidi u. Bannerjee [84] berichtet. Laut ihrer Aussage führt die Dämpfung der vertikalen Fluktuationen bei gleichzeitiger Verstärkung der horizontalen Geschwindigkeitsschwankungen zusammen mit der Reflexion der turbulenten Wirbel zu der charakteristischen Rollbewegung der Strömung nahe der freien Oberfläche.

Rashidi u. a. [85] führten ebenfalls Messungen in geschichteten Kanalströmungen durch, wobei sie neben Strömungen, in denen die Scherkräfte an der Phasengrenzfläche zu vernachlässigen waren, auch solche untersuchten, bei denen die Gasphase erhebliche Schubspannungskräfte auf die freie Oberfläche ausübte. Zur Ausbildung von Oberflächenwellen kam es dabei jedoch nicht. Die experimentellen Daten zeigten, dass sich im Falle einer schubspannungsbehafteten Grenzfläche die Entstehung turbulenter Wirbel auch an der Phasengrenzfläche beobachten lässt, wobei deren Eigenschaften vergleichbar mit jenen der am Kanalboden abgelösten Wirbeln sind. Die Forscher vermuteten daher, dass Scherkräfte für die Entstehung der Wirbel verantwortlich seien. In Strömungen mit vernachlässigbarem Schubspannungseinfluss an der freien Oberfläche werde der Transportprozess also von den turbulenten Bodenwirbeln bestimmt, während der Transport über die Grenzfläche im Falle einer schubspannungsbehafteten Oberfläche überwiegend von den dort produzierten Wirbeln beherrscht werde.

Wenig später untersuchte dieselbe Forschergruppe [86] den Einfluss von Oberflächenwellen auf die turbulenten Eigenschaften der Flüssigphase. Die Wellen wurden dabei mechanisch erzeugt, wodurch keinerlei Scherkräfte an der freien Oberfläche auftraten. Die Versuchsergebnisse zeigten, dass der Mechanismus der Erzeugung der turbulenten Wirbel am Kanalboden vergleichbar mit jenen der Strömungen ohne Oberflächenwellen waren. Es konnte jedoch beobachtet werden, dass die Oberflächenwellen die Ablösefrequenz der Wirbel und somit die Turbulenz in der Flüssigphase allgemein vergrößerten.

Dabei hing die Ablösefrequenz jedoch nicht, wie zu vermuten wäre, von der Wellenfrequenz sondern vielmehr von der Amplitude der Wellen ab. Höhere Wellen führten zu einem höheren Turbulenzlevel. Außerdem zeigte sich eine Verstärkung der Turbulenz unter den Wellenbergen und eine Abschwächung der Turbulenz unter den Wellentälern.

Im Gegensatz zu Rashidi u. a. [86] bildeten sich die Oberflächenwellen im Experiment von Lorencez u. a. [61] aufgrund des Schubspannungseinflusses durch die Gasströmung. Die Ergebnisse waren jedoch vergleichbar mit jenen der beiden zuvor beschriebenen Versuche [85, 86]. Die Scherkräfte an der freien Oberflächen führten auch hier zu turbulenten Wirbeln, die von der Phasengrenzfläche ablösten, wohingegen größeren Wellenamplituden in einer höheren Turbulenz der Flüssigkeitsphase resultierten. Daraus schloss man, dass die Entstehung von turbulenten Wirbeln hauptverantwortlich für den Impulsaustausch über die Phasengrenzfläche sei.

Stäbler [93, 94, 95] und Gabriel [29] führten die Arbeit von Gargallo Gallego [31] mit der Untersuchung einer geschichteten Wasser-Luft-Strömung im Gegenstrom fort. Dabei wurden detaillierte Messungen von Phasen und Geschwindigkeitsverteilungen in fließenden, wie auch in schießenden Strömungen gemacht, die für die Entwicklung neuer numerischer Modellierungsansätze für geschichtete Zweiphasenströmungen bereitgestellt werden sollten. Die Daten von Stäbler in einem horizontalen Rechteckkanal zeigten eine deutliche Reduzierung der horizontalen Geschwindigkeitskomponente in der Nähe der Phasengrenzfläche und dem Kanalboden aufgrund der dort auftretenden Scherkräfte. Auch die Vertikalkomponente zeigte eine, wenn auch nicht ganz so starke Dämpfung nahe der beiden physikalischen Ränder. Im Gegensatz dazu wiesen die turbulenten Fluktuationen in beiden Richtungen einen Anstieg im Bereich der freien Oberfläche auf, mit den größten Werten in teilweiser umgekehrter Strömung, dort wo die größten Wellenamplituden auftraten. Den Grund hierfür sah Stäbler in der Verzögerung der Flüssigphase in horizontaler und der Wellenbewegung in vertikaler Richtung. Weiterhin konnte eine lineare Abhängigkeit der zeitlich gemittelten Verteilung der Phasen im Bereich der Wellen festgestellt werden. Anhand seiner Messergebnisse entwickelte er zudem ein Modell zur Beschreibung der Phasenverteilung. Dieses Modell basierte auf einem statistischen Gleichgewicht zwischen der turbulenten kinetischen und der potentiellen Energie der Fluidpartikel. Im Gegensatz zu Stäbler verwendete Gabriel für seine Messungen einen nach oben abknickenden Rechteckkanal, wodurch ein möglicherweise auftretender hydraulischer Sprung ortsfest gehalten werden sollte. Außerdem untersuchte er auch die Tropfenablösung und den Luftblaseneintrag in die Flüssigkeit im Falle von Oberflächenwellen. Auch seine Ergebnisse zeigten deutliche Maxima der Geschwindigkeitsschwankungen nahe des Kanalbodens und unterhalb der freien Oberfläche, wobei Gabriel vor allem auf den ausgeprägten anisotropen Charakter der Turbulenz hinwies. Im Bereich der schießenden Strömung wurden nur kleine Wellen mit geringer Amplitude sowie die Ablösung einzelner Tropfen beobachtet. In der untersuchten teilweise umgekehrten

Strömung hingegen traten dann höhere Wellen auf, von deren Wellenkamm sich deutlich mehr Tropfen ablösten. Beim Übergang von schießender zu fließender Strömung beobachtete Gabriel eine Rollwelle, die sich auf der Flüssigkeitsströmung ausbildete und mit zunehmendem Luftmassenstrom stromauf wanderte, ehe sie sich in Form eines hydraulischen Sprunges stabilisierte. Dabei wurden neben einer erhöhten Tropfenablösung auch der Eintrag von Luftblasen in die Flüssigkeit gemessen.

Hashmi [36] untersuchte geschichtete Öl/Luft-Strömungen in Lagerkammern von Flugzeugtriebwerken sowohl experimentell als auch numerisch. Im experimentellen Teil der Arbeit wurden in einem horizontalen Kanal Messungen der Strömung im Gleich- und im Gegenstrom durchgeführt, wobei Wasser und Luft als Arbeitsmedien gewählt wurden. Um die Vergleichbarkeit zu einem Öl/Luft-System bei hohen Temperaturen herzustellen, musste die Oberflächenspannung mithilfe eines Tensides herabgesetzt werden. Die Ergebnisse zeigten im Falle des Gleichstroms eine schießende Strömung mit relativ kleinen Oberflächenwellen und wenig Tropfenablösung. Flossen die beiden Fluide entgegengerichtet zueinander, wurde eine fließende Strömung mit ausgeprägter Wellenbindung und Tropfenbildung beobachtet. Auch der Einfluss der Oberflächenspannung und der Viskosität auf die Strömung wurde untersucht. So ging die Minderung der Oberflächenspannung mit einer Reduzierung der Wellenhöhe und einer Reduzierung des Druckverlustes im Vergleich zu normalem Wasser einher. Im Gegensatz dazu führte eine Erhöhung der Viskosität zu einem deutlich größeren Druckverlust, während die Wellenhöhe wiederum geringer wurde.

2.2 Oberflächenwellen

Wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert wurde, spielen die Austauschvorgänge von Masse, Impuls und Energie über die Phasengrenzfläche eine wichtige Rolle in geschichteten Strömungen. Scherkräfte an der freien Oberfläche aufgrund unterschiedlicher Geschwindigkeiten der beiden Phasen führen darüber hinaus zur Ausbildung von Oberflächenwellen. Es konnte gezeigt werden, dass diese einen erheblichen Einfluss auf die Turbulenz in der Flüssigkeitsströmung und somit auch auf die Grenzflächentransportprozesse haben. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel vertieft auf die Entstehung solcher Oberflächenwellen sowie deren mathematischer Beschreibung eingegangen.

2.2.1 Entstehung von Oberflächenwellen

Die Entstehung von Wellen an der Grenzfläche zweier geschichtet fließender Fluide ist die Folge des Auftretens von Strömungsinstabilitäten. Die wissenschaftliche Untersuchung der Wellenbildung reicht bis in die späten 60er Jahre des 19. Jahrhunderts zurück.

Bereits 1868 bzw. 1871 untersuchten von Helmholtz [38] und Lord Kelvin [60] das Stabilitätsverhalten einer kleinen Störung an der Grenzfläche zweier nicht-viskoser, horizontal geschichteter Fluide anhand der Ausbreitungsgeschwindigkeit C der Störung [42]:

$$C = \frac{\rho_L u_L + \rho_G u_G}{\rho_L + \rho_G} \pm \left[C_\infty^2 - \rho_G \rho_L \left(\frac{u_G - u_L}{\rho_L + \rho_G} \right)^2 \right]^{0,5} \quad (2.5)$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit C_∞ im Falle ruhender Fluide ($u_L = u_G = 0$):

$$C_\infty^2 = \frac{g \rho_L - \rho_G}{q \rho_L + \rho_G} + \frac{\sigma q}{\rho_L + \rho_G} \quad (2.6)$$

wobei q die Wellenzahl und σ die Oberflächenspannung kennzeichnet. Die Auslenkung der Wasseroberfläche aus der Ruhelage aufgrund der Störung lässt sich durch

$$y_S(x, t) = A \exp(iq(x - Ct)) \quad (2.7)$$

mit der Amplitude A der Störung beschreiben [113]. Eine Störung an der Grenzfläche kann nun exponentiell anwachsen, falls der Wurzel Ausdruck in Gleichung 2.5 einen von Null verschiedenen Imaginärteil besitzt [42]. Die Strömung ist also instabil für

$$\frac{g \rho_L - \rho_G}{q \rho_L + \rho_G} + \frac{\sigma q}{\rho_L + \rho_G} < \rho_G \rho_L \left(\frac{u_G - u_L}{\rho_L + \rho_G} \right)^2 \quad (2.8)$$

Gleichung 2.6 hat für die kritische Wellenlänge $q_{krit} = \sqrt{g(\rho_L - \rho_G)/\sigma}$ ein Minimum, womit sich ein Stabilitätskriterium in Abhängigkeit der Relativgeschwindigkeit der beiden Fluide aus Gleichung 2.8 ableiten lässt. Die Strömung ist stabil, solange gilt:

$$(u_G - u_L)^2 < \frac{2(\rho_L + \rho_G)}{\rho_G \rho_L} \sqrt{\sigma g(\rho_L - \rho_G)} \quad (2.9)$$

Physikalisch anschaulich lässt sich die Anfachung der Wellen durch den Kelvin-Helmholtz Mechanismus so erklären, dass die Gasströmung infolge der Auslenkung der Flüssigkeit im Bereich der Störung beschleunigt wird, wobei der Druck gemäß der Bernoulli-Beziehung absinkt. Dadurch ergibt sich eine nach oben gerichtete Krafteinwirkung, die zum Anwachsen der Störung bzw. der Welle führt. Wie anhand Gleichung 2.9 leicht zu erkennen ist, wirken die Gewichtskraft und die Oberflächenspannung stabilisierend und die Relativgeschwindigkeit der beiden Phasen destabilisierend auf die Strömung.

Miles [67, 68] stellte jedoch fest, dass die nach Gleichung 2.9 errechnete Relativgeschwindigkeit (ca. $6,5 \text{ m/s}$ bei Normalbedingungen) die tatsächlich in Experimenten beobachteten Geschwindigkeiten überschätzt, mit der Ausnahme von Strömungen mit hochviskosen Fluiden. Dieser Sachverhalt war schon Lord Kelvin [60] bekannt, wobei er die Wellen mit Wellenlängen kleiner als der kritischen Wellenlänge schlicht als „ripples“, also als *Kräuselungen* bezeichnete [16, 42].

Kordyban [53] betont hingegen die Wichtigkeit des Kelvin-Helmholtz Mechanismus für die Ausbildung von hohen Wellen in einem nach oben verschlossenen Kanal. Durch die obere Begrenzung werde die Luftströmung zusätzlich beschleunigt, wodurch sich der Effekt der Kelvin-Helmholtz-Instabilität verstärke.

Eine weitere Theorie, wie Oberflächenwellen angefacht werden können, lieferte Jeffreys [46]. Er ging davon aus, dass die Gasströmung beim Überströmen einer Welle auf der Leeseite ablöse. Dadurch entstehe ein Druckunterschied zwischen der Luv- und der Leeseite der Welle, der zu Schubkräften entlang der Kontur der Welle führe und diese dabei anfache. Allerdings konnte von Ursell [101] gezeigt werden, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle in den meisten Fällen größer als die Geschwindigkeit der Gasströmung ist, wodurch die Strömung auf der Leeseite überhaupt nicht ablösen könne [113].

Durch einen Resonanzeffekt zwischen turbulenten Druckschwankungen der Luft und den Wasseroberfläche versuchte Phillips [80] die Entstehung von Oberflächenwellen zu erklären. Auch diese Theorie konnte entkräftet werden, da nachgewiesen werden konnte, dass die Druckschwankungen in der Realität zu klein sind, um das Wellenwachstum zu erklären. Dennoch könnte der Mechanismus die Entstehung kleiner Störungen an der Oberfläche erklären, die dann aufgrund eines der anderen genannten Mechanismen anwachsen kann [113].

Die allgemein anerkannte Theorie zur Entstehung von Oberflächenwellen ist die Theorie von Miles [66]. Auch sein Ansatz basiert auf der Annahme eines Resonanzeffektes, allerdings zwischen den welleninduzierten Druckschwankungen und den Oberflächenwellen. Dabei machte er weitere vereinfachende Annahmen, für die das Modell trotz der allgemeinen Akzeptanz oft in der Kritik stand. So ging er beispielsweise davon aus, dass weder die Viskosität noch die Turbulenz der Luftströmung einen Effekt auf die Wellenbildung haben. Und auch die Flüssigphase wird als inkompressibel, nichtviskos und rotationsfrei angenommen. Nicht-lineare Effekte wie die Wechselwirkung zwischen mittlerer Hauptströmung und Oberflächenwellen werden ebenfalls gänzlich vernachlässigt. Aus seiner Theorie errechnete Miles [66] eine kritische Relativgeschwindigkeit der beiden Phasen für den Beginn von Wellenausbildung im Bereich von 1 m/s [98, 113].

2.2.2 Mathematische Beschreibung von Oberflächenwellen

Neben der Fragestellung warum und unter welchen Umständen sich Wellen beispielsweise an einer Flüssigkeitsoberfläche ausbilden, ist auch die Frage von Interesse, wie sich die Wellen mathematisch beschreiben lassen. Zu aller erst denkt man dabei fast automatisch an jene regelmäßigen, sinusförmigen Wellen, die auftreten, wenn man eine kurze Störung in die ruhende Oberfläche in einem Wasserglas oder einer Wasserpflanze einbringt. Doch spätestens im Sommerurlaub am Meer oder an einem See muss man dann feststellen, dass Oberflächenwellen alles andere als regelmäßig und sinusförmig sein können. Durch Überlagerungen verschiedener Wellen, Reflexionen an physikalischen Grenzflächen und weitere Effekte, entstehen komplexe Gebilde, deren Beschreibung nicht trivial erscheint. Es ist daher nicht verwunderlich, dass eine der ersten Theorien, die in diesem Zusammenhang aufgestellt wurde, die lineare Theorie von Airy [1], auf dem Ansatz einer harmonischen Sinuswelle beruht. Diese Theorie konnte bereits viele Beobachtungen, die bei Oberflächenwellen gemacht wurden, beschreiben [62]. Wie im Verlauf dieses Kapitel gezeigt wird, konnte sie jedoch nicht den Transport von Masse durch die Welle erklären. Dies änderte sich wenig später mit der Wellentheorie von Stokes [96], der neben den linearen auch nicht-lineare Anteile der Wellenbewegung berücksichtigte. Mit diesen Theorien lassen sich jedoch nur einfache Wellenerscheinungen an freien Oberflächen beschreiben. Kommt es zur Überlagerung vieler einzelner Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen und Wellenlängen, entstehen, wie bereits angedeutet, sehr komplexe Oberflächengebilde. Diese lassen sich nur noch mithilfe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, den sogenannten Wellenspektren charakterisieren.

Im Folgenden werden sowohl die lineare als auch die nicht-lineare Wellentheorie vorgestellt und zum Schluss kurz auf spektrale Modelle eingegangen. Wenn nicht anders angegeben, dienen die Bücher von Malcherek [62], Graw [34] und Nielsen [73] dabei als Grundlage für die Herleitungen.

Lineare Wellentheorie (Theorie von Airy)

Die lineare Wellentheorie von [1] geht von einer inkompressiblen, reibungsfreien und rotationsfreien Strömung aus. Solche Strömungen können allgemein mithilfe der Euler-Gleichungen beschrieben werden:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (2.11)$$

Außerdem wird bei der linearen Theorie angenommen, dass die Wellenhöhe H klein gegenüber der Wellenlänge λ ist, wodurch die Impulsgleichung 2.11 durch Vernachlässigung der nicht-linearen Konvektionsterme auf der linken Seite linearisiert werden kann. Aufgrund der Rotationsfreiheit kann der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{U} durch ein skalares Geschwindigkeitspotential ϕ ersetzt werden:

$$\mathbf{U} = \text{grad}\phi \quad (2.12)$$

Solche Strömungen bezeichnet man daher auch als Potentialströmungen. Durch Einsetzen von Gleichung 2.12 in die Bewegungsgleichungen lässt sich die Anzahl der zu lösenden Differentialgleichungen halbieren:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + g(y - y_0) + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (2.14)$$

Gleichung 2.13 stellt die sogenannte *Laplace-Gleichung* dar. Sie ist linear und 2. Ordnung [75]. Die zweite Gleichung (Gl. 2.14) ist die linearisierte Form der instationären *Bernoulli-Gleichung*. Beide Gleichungen gelten für beliebige Potentialströmungen mit den getroffenen Annahmen. Sollen nur Oberflächenwellen betrachtet werden, müssen weitere Annahmen für die Potentialfunktion ϕ getroffen werden. Geht man von einer sich in x-Richtung ausbreitenden sinusförmigen Welle (Abb. 2.8) aus, die in Querrichtung eine gleichmäßige und unendliche Ausdehnung hat, aber deren vertikales Profil $f(y)$ noch unbekannt ist, so ergibt sich die Potentialfunktion zu:

$$\phi(x, y, t) = \cos(qx - \omega t) f(y) \quad (2.15)$$

mit der Wellenzahl q und der Kreisfrequenz ω der Welle.

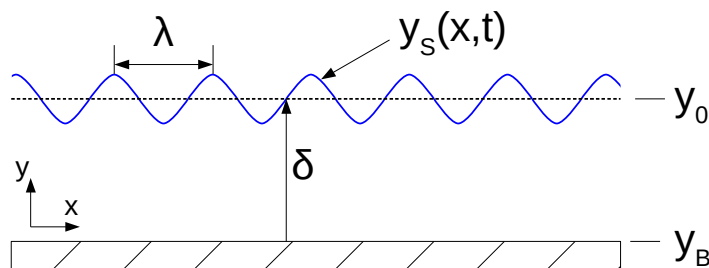


Abbildung 2.8: Sinusförmige Welle nach der Airy-Theorie

Diese Gleichung eingesetzt in die Laplace-Gleichung 2.13 liefert eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösung

$$f(y) = C \cosh qy \quad (2.16)$$

ist mit der Konstanten C . Diese lässt sich bestimmen, wenn die linearisierte Bernoulli-Gleichung 2.14 auf die Wasseroberfläche bei $y = y_S$ angewandt wird. Mit der Annahme, dass der Druck p an der Oberfläche gleich Null ist, folgt:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{y=y_S} + g(y - y_0) = 0 \quad (2.17)$$

Einsetzen der Potentialfunktion ϕ liefert mit

$$y_S(x, t) = y_0 - C \frac{\omega}{g} \cosh(q [y_S(x, t) - y_B]) \sin(qx - \omega t) \quad (2.18)$$

eine implizite Gleichung für die Auslenkung der Wasseroberfläche. Mit der Annahme, dass die Wellenhöhe klein gegenüber der Wassertiefe ist, kann Gleichung 2.18 mit einer konstanten mittleren Wassertiefe $y_S - y_B \approx \delta$ quasi explizit gemacht werden:

$$y_S(x, t) = y_0 - C \frac{\omega}{g} \cosh q\delta \sin(qx - \omega t) \quad (2.19)$$

Gleichung 2.19 beschreibt die sinusförmige Auslenkung der Wasseroberfläche aus der Ruhelage y_0 . Es ist daher sofort ersichtlich, dass es sich bei dem Vorfaktor der Sinusfunktion um die reale Amplitude h der Welle handeln muss:

$$h = -C \frac{\omega}{g} \cosh q\delta \quad (2.20)$$

Damit ergibt sich die Potentialfunktion ϕ , die die Oberflächenwellen beschreibt, zu:

$$\phi(x, y, t) = -h \frac{g \cosh qy}{\omega \cosh q\delta} \cos(qx - \omega t) \quad (2.21)$$

Einen weiteren interessanten Zusammenhang liefert die zeitliche Ableitung der Bernoulli-Gleichung für die Wasseroberfläche, wobei die zeitliche Ableitung des Druckes verschwinden muss, da der Druck an der Wasseroberfläche konstant ist:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial y_S}{\partial t} = 0 \quad (2.22)$$

Darin ist $\partial y_S / \partial t$ die vertikale Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wasseroberfläche, die sich laut Definition (Gl. 2.12) aus dem Geschwindigkeitspotential berechnen lässt:

$$\frac{\partial y_S}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.23)$$

Gleichung 2.23 eingesetzt in Gleichung 2.22 liefert dann:

$$-g \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

Mit der Potentialfunktion ϕ (Gl. 2.21) folgt daraus die Dispersionsrelation der linearen Airy Wellen:

$$\omega^2 = gq \tanh q\delta \quad (2.25)$$

Eine Welle besitzt bei gegebener Periode ω und Wassertiefe δ also immer genau eine eindeutig bestimmte Wellenlänge $\lambda = 2\pi/q$. Sollen neben der Gravitationskraft auch der Einfluss der Oberflächenspannung σ berücksichtigt werden, muss die Dispersionsbeziehung entsprechend Gleichung 2.26 erweitert werden:

$$\omega^2 = \left(gq + \frac{\sigma q^3}{\rho_L} \right) \tanh q\delta \quad (2.26)$$

Setzt man die Dispersionsbeziehung in die allgemeine Definitionsgleichung für die Ausbreitungs- bzw. Phasengeschwindigkeit der Welle $c = \omega/q$ ein, folgt für die Geschwindigkeit der Welle:

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{q} + \frac{\sigma q}{\rho_L} \right) \tanh q\delta} \quad (2.27)$$

Wellen mit großer Wellenlänge bewegen sich also schneller als jene mit kleiner Wellenlänge. Aus Gleichung 2.27 lassen sich zwei Grenzwerte für die Phasengeschwindigkeit ableiten:

1. Steht die Welle nicht in Wechselwirkung mit dem Boden, d.h. die Wassertiefe δ ist sehr viel größer als die Wellenlänge, so spricht man von einer *Tiefwasserwelle*. Der Tangenshyperbolicus-Ausdruck in Gleichung 2.27 wird hier ungefähr zu 1, womit für die Phasengeschwindigkeit einer Tiefwasserwelle

$$c_{deep} = \sqrt{\frac{g}{q} + \frac{\sigma q}{\rho_L}} \quad (2.28)$$

gilt.

2. Eine Welle, bei der hingegen eine starke Wechselwirkung mit dem Boden stattfindet, die Wassertiefe δ also kleiner als die Wellenlänge ist, bezeichnet man als *Flachwasserwelle*. Hier gilt $\tanh q\delta \approx q\delta$, wodurch sich die Phasengeschwindigkeit zu

$$c_{shallow} = \sqrt{g\delta + \frac{\sigma q^2 \delta}{\rho_L}} \quad (2.29)$$

ergibt.

Neben der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle, ist auch das Bahnverhalten einzelner Fluidpartikel, die sogenannten *Orbitalbahnen*, von Interesse. Mit ein wenig Rechenaufwand (mehr dazu in [62]) lässt sich zeigen, dass sich die Partikel in Airy-Wellen, wie in Abbildung 2.9 gezeigt, auf geschlossenen Ellipsenbahnen mit der horizontalen Halbachse

$$R_x = h \frac{\cosh qy}{\sinh q\delta} \quad (2.30)$$

und vertikalen Halbachse

$$R_y = h \frac{\sinh qy}{\sinh q\delta} \quad (2.31)$$

bewegen.

Unter Airy-Wellen kann damit also kein Nettomassenstrom in Bewegungsrichtung der Welle stattfinden, welcher in der Realität allerdings zu beobachten ist. Diese Driftbewegung lässt sich auch rechnerisch mit der Airy-Theorie belegen. Für die Driftgeschwindigkeit in horizontaler Richtung gilt:

$$u_{drift}(\delta) = \frac{h^2 \sqrt{gq^3 \tanh q\delta}}{2 \sinh^2 q\delta} \left(\cosh 2q\delta - \frac{\sinh 2q\delta}{2q\delta} \right) \quad (2.32)$$

Die Driftbewegung ist also umso stärker desto größer die Wassertiefe, desto kürzer die Wellenlänge bzw. desto größer die Wellenamplitude ist. In vertikaler Richtung findet kein Nettomassenstrom statt.

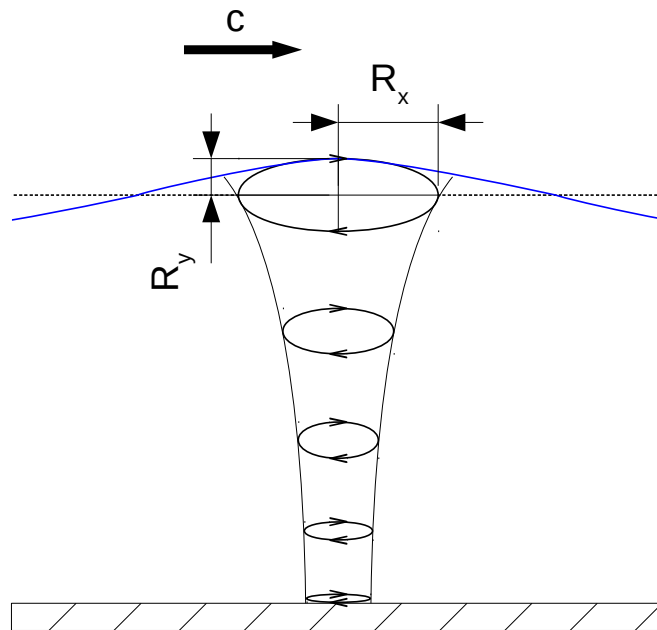


Abbildung 2.9: Orbitalbahnen nach der Airy-Theorie

Nicht-lineare Wellentheorie

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt worden ist, kann der Nettomassenstrom, der aufgrund der Wellenausbreitung beobachtet werden kann, nicht mit der linearen Wellentheorie erklärt werden. Der Grund hierfür ist in der Vernachlässigung der nicht-linearen Konvektionsterme in den Euler-Impulsgleichungen zu suchen, welche die Folge der Annahme war, dass die Wellenhöhe klein gegenüber der Wellenlänge ist. In der Realität lassen sich aber mitunter auch hohe Wellen beobachten, die nicht mehr mit der linearen Theorie beschrieben werden können. Aus diesem Grund hat Stokes [96] eine Wellentheorie 2. Ordnung veröffentlicht, die auch die nicht-linearen Terme berücksichtigt. Die Annahme einer inkompressiblen, reibungsfreien und rotationsfreien Strömung bleibt hingegen weiterhin bestehen. Das Geschwindigkeitspotential ergibt sich dann aus einer Taylor-Reihenentwicklung zu:

$$\phi(x, y, t) = -h \frac{\omega \cosh qy}{q \sinh q\delta} \sin(qx - \omega t) - \frac{3}{8} h^2 \omega \frac{\cosh 2qy}{\sinh^4 q\delta} \sin 2(qx - \omega t) \quad (2.33)$$

Die Auslenkung der freien Oberfläche folgt damit Gleichung 2.34:

$$y_S(x, t) = y_0 + h \cos(qx - \omega t) + \frac{h^2 q (2 + \cosh 2q\delta) \cosh q\delta}{4 \sinh^3 q\delta} \cos 2(qx - \omega t) \quad (2.34)$$

Wie leicht zu erkennen ist, sind der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung 2.33 bzw. die ersten beiden Terme in Gleichung 2.34 identisch mit jenen aus der linearen Theorie. Aufgrund der Hinzunahme der nicht-linearen Konvektionsterme in den Euler-Gleichungen, entsteht nun ein weiterer Term, der die Form der Wellen beeinflusst. Wellenberge werden steiler, während Wellentäler flacher werden, wie Abbildung 2.10 zeigt.

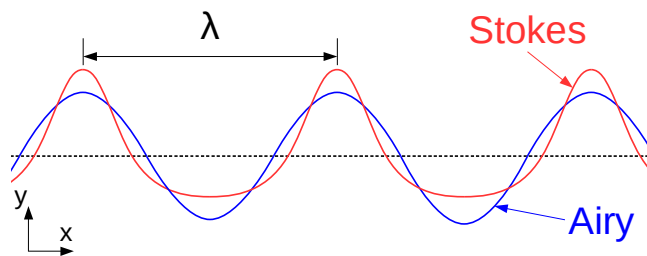


Abbildung 2.10: Vergleich der Wellenform von Stokes- und Airy-Wellen

Die Wellendispersionbeziehung und damit auch die Phasengeschwindigkeit der Welle, wird von dem zusätzlichen Korrekturterm 2. Ordnung nicht verändert und entspricht der linearen Theorie. Es lässt sich zeigen, dass sich die einzelnen Fluidpartikel zwar immer noch auf oszillatorischen Orbitalbahnen bewegen, die nun aber nicht mehr in sich geschlossen sind. Dadurch ergibt sich ein konvektiver Nettomassenstrom, der, wie bereits erläutert, auch in der Realität zu beobachten ist. Die nicht-lineare Theorie von Stokes lässt sich nur auf Wellen im Tiefwasser anwenden, da der Korrekturterm im Falle von Flachwasserwellen beliebig groß werden würde. Für den Flachwasserbereich haben Korteweg u. de Vries [54] die nicht-lineare *Cnoidal-Wellentheorie* entwickelt, die wie die Stokes'sche Theorie auf einer Potenzreihenentwicklung basiert. Auf diese Theorie soll nicht weiter eingegangen, sondern auf das Buch von Graw [34] verwiesen werden. Dort wird auch näher auf die *trochoidale Wellentheorie* von Gerstner [32] eingegangen, die ebenfalls nur auf den Tiefwasserbereich anwendbar ist, aber auf die Annahme einer wirbelfreien Strömung verzichtet.

Spektrale Wellenverteilung

Sollen komplexe Wellensysteme, die durch Überlagerung mehrerer Wellen verschiedener Wellenlängen und -frequenzen entstehen, charakterisiert werden, stoßen die bisher beschriebenen Wellentheorien schnell an ihre Grenzen. Zur Beschreibung solcher Systeme, wie beispielsweise der durch Wind erzeugte Seegang auf den Ozeanen, greift man daher auf die Statistik zurück. Dazu werden einzelne Wellenparameter, wie zum Beispiel die Wellenhöhe, in verschiedene Klassen k aufgeteilt, für deren Auftreten dann eine gewisse Wahrscheinlichkeit $P(k)$ angegeben wird, die sich als der Quotient aus der Anzahl

$n(k)$ der der Klasse k zugeordneten Einträge und der gesamten Anzahl N der Einträge aller Klassen berechnet:

$$P(k) = \frac{n(k)}{N} \quad (2.35)$$

Mit Einführung einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(m)$ für den Wellenparameter m , kann die etwas umständliche Einteilung in verschiedene Klassen umgangen werden. Für die Wahrscheinlichkeit $P(k)$ gilt dann:

$$P(k) = \int_{m_k}^{m_{k+1}} p(m) dm \quad (2.36)$$

In ingenieurtechnischen Anwendungen, vor allem auf dem Gebiet der Ozeanforschung, ist es oft von Interesse, die Wahrscheinlichkeitsdichten anhand der Randbedingungen, wie beispielsweise der Windgeschwindigkeit, berechnen zu können, ohne sie vorher aus experimentellen Daten bestimmen zu müssen. Daher wurden in der Vergangenheit verschiedene Modelle zur Beschreibung von Wellenverteilungen entwickelt. Dabei ist vor allem die spektrale Verteilung der pro Flächeneinheit gespeicherten Wellenenergie e^W interessant. Diese Wellenenergiedichte lässt sich wie folgt berechnen:

$$e^W = g \int_0^{\infty} P(f) df \quad (2.37)$$

mit der von der Wellenfrequenz f abhängigen spektralen Energiedichtefunktion $P(f)$.

Bereits im Jahr 1958 leitete Phillips [81, 82] eine Beziehung für die spektrale Energiedichtefunktion $P(\omega)$ von Ozeanwellen, die sogenannte *Phillips-Funktion*, aus einer Dimensionsanalyse her:

$$P(\omega) = \frac{\alpha g}{\omega^5} \quad (2.38)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ und der Konstanten $\alpha = 8,1 \cdot 10^{-3}$.

Das Modell kann das Abklingen der Wellenenergie im Tiefwasser für gegen Unendlich strebende Frequenzen gut abbilden. Für Frequenzen gegen Null divergiert das Modell allerdings, wodurch die Wellen mit langer Periodendauer praktisch beliebig hohe Amplituden aufweisen können, was in der Realität nicht beobachtet werden kann.

Um das unrealistische Ansteigen der Amplituden bei tiefen Frequenzen zu unterbinden, erweiterten Pierson u. Moskowitz [83] die Phillipsfunktion um eine Exponentialfunktion, um die von Kitaigorodskii [48] vorgeschlagene Form des Energiespektrums zu erhalten:

$$P(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left(-\beta \left(\frac{\omega_{peak}}{\omega}\right)^4\right) \quad (2.39)$$

mit den Konstanten $\alpha = 8,1 \cdot 10^{-3}$ und $\beta = 0,74$, der Erdbeschleunigung g und der Peakfrequenz ω_{peak} , bei der das Spektrum sein Maximum besitzt. Sie berechnet sich aus Windgeschwindigkeit $U_{19,5}$ 19,5 m über der Wasseroberfläche $\omega_{peak} = g/U_{19,5}$.

Gleichung 2.39 wurde rein empirisch, durch Probieren verschiedener Potenzen für die Kreisfrequenz in der Exponentialfunktion und der Phillipsfunktion bestimmt und gilt nur für vollentwickelten Seegang, d.h. für Wellen, deren Entstehungsprozess weit zurückliegt.

Soll die spektrale Verteilung während des Wellenentstehungsprozesses angegeben werden, muss das Pierson-Moskowitz-Spektrum um einen weiteren Faktor erweitert werden:

$$P(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left(-\beta \left(\frac{\omega_{peak}}{\omega}\right)^4\right) \gamma \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_{peak})^2}{2\sigma_V^2 \omega_{peak}^2}\right) \quad (2.40)$$

mit dem Überhöhungsfaktor $\gamma = 3,3$ und der Standardabweichung σ_V , die mit

$$\sigma_V = \begin{cases} 0,07 & , \text{für } \omega \leq \omega_{peak} \\ 0,09 & , \text{für } \omega > \omega_{peak} \end{cases}$$

angegeben wird. Diese Erweiterung des Pierson-Moskowitz-Spektrums geht auf Hasselmann u. a. [37] zurück, die bei der Auswertung der von einer internationalen Forschergruppe durchgeführten Messungen vor der Insel Sylt festgestellt haben, dass die Energie des Windes vorzugsweise bei der Peakfrequenz eingetragen wird und das Spektrum daher dort eine im Vergleich zum Pierson-Moskowitz-Spektrum starke Überhöhung aufweist, wie in Abbildung 2.11 zu erkennen ist. Die Peakfrequenz ist dabei eine Funktion

der Windgeschwindigkeit U_{10} in 10 m über dem Boden und der sogenannten Fetchlänge F , die die Distanz angibt, in der die mittlere Windgeschwindigkeit und -richtung ungefähr gleich bleiben:

$$\omega_{peak} = \omega_{peak}(U_{10}, F)$$

Das Spektrum nach Gleichung 2.40 wird in Anlehnung an den Namen der Messreihe „Joint North Sea Wave Project“ als *JONSWAP-Spektrum* bezeichnet.

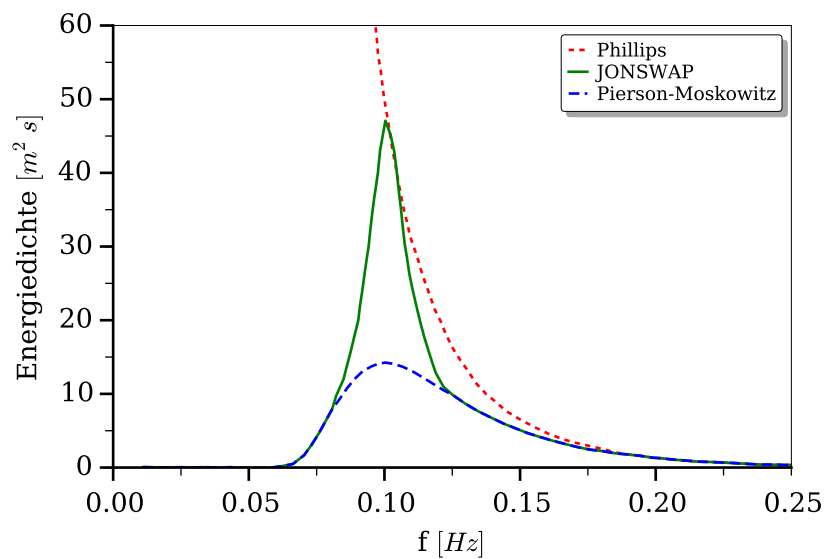


Abbildung 2.11: Vergleich der spektralen Wellenmodelle

2.3 Numerische Strömungsmechanik (CFD)

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik, die Navier-Stokes-Gleichungen, lassen sich nur für sehr wenige und sehr einfache Strömungen analytisch lösen, da es sich um nichtlineare und miteinander gekoppelte partielle Differentialgleichungen handelt. Die Strömungsprobleme, die in ingenieurtechnischen Anwendungen von Interesse sind, sind in der Regel viel komplexer und sind nur noch mit numerischen Methoden lösbar. Dies ist der Themenbereich der numerischen Strömungsmechanik (engl. *Computational Fluid Dynamics (CFD)*).

Doch auch die numerischen Lösungen, auch wenn sie mit den genauesten zur Verfügung stehenden Methoden gelöst werden, stellen nur Näherungslösungen der Navier-Stokes-Gleichungen dar. Der Grund hierfür ist zu aller erst in der Diskretisierung der kontinuierlichen Grundgleichungen zu suchen, die notwendig ist, da Computer nur algebraische Gleichungssysteme lösen können. Dazu wird das Rechengebiet in kleine räumliche Gebiete, das sogenannte numerische Gitter, unterteilt, in denen diese algebraischen Gleichungen dann gelöst werden. Man erhält also numerische Lösungen an bestimmten, d.h. *diskreten* Stellen im Rechengebiet, deren Genauigkeit von der Wahl der Diskretisierungsmethode abhängen. Ein weiterer Grund dafür, dass numerische Lösungen nur Näherungen der genauen Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen sein können, ist das Lösungsverfahren der diskretisierten Gleichungen. Dieses ist in den meisten Fällen iterativ, wobei die Lösungsfindung nach einer bestimmten endlichen Anzahl an Iterationen abgebrochen wird, was zu einem Abbruchfehler führt. Die genaue Lösung würde erst nach unendlich vielen Iterationen erreicht werden. Zu guter Letzt müssen viele Strömungsphänomene, wie beispielsweise die Turbulenz oder aber Mehrphasenströmungen mit vereinfachten Modellen approximiert werden, da die direkte numerische Simulation der Navier-Stokes-Gleichungen mit heutiger Computerleistung nicht möglich ist [26].

2.3.1 Modellierung von Zweiphasenströmungen

Die numerische Berechnung von Zwei- oder Mehrphasenströmungen gestaltet sich erheblich komplexer als jene der einphasigen Strömungen, da je nach Strömungsform eine oder auch mehrere sich bewegende Grenzflächen berücksichtigt werden müssen, deren Lage in der Regel nicht bekannt ist und erst als Teil der Lösung bestimmt werden muss. Doch nicht nur die Bewegung und die räumliche Verteilung der Phasen bzw. der Phasengrenzflächen, sondern auch die physikalischen Transportprozesse, die an der Phasengrenzfläche stattfinden, stellen eine große Herausforderung bei der Lösung solcher strömungstechnischer Probleme dar. Dazu gehören der Impulsaustausch oder aber der Wärme- und Stofftransport zwischen den Phasen an und über die Grenzflächen [26, 112].

Im Prinzip könnte jede Phase k mit einem eigenen Satz an Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und, wenn Temperatureinflüsse berücksichtigt werden sollen, auch für die Energie beschrieben werden:

- *Massenerhaltung (Kontinuität):*

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{U}_k) = 0 \quad (2.41)$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{U}_k und der Dichte ρ_k der jeweiligen Phase k .

- *Impulserhaltung:*

$$\frac{\partial \rho_k \mathbf{U}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k [\mathbf{U}_k \otimes \mathbf{U}_k]) = -\nabla p_k + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_k + \rho_k \mathbf{g} \quad (2.42)$$

mit dem Druck p_k , der Erdbeschleunigung \mathbf{g} und dem Schubspannungstensor $\boldsymbol{\tau}_k$, der sich mit der dynamischen Viskosität μ_k wie folgt zusammensetzt:

$$\boldsymbol{\tau}_k = \mu_k \left((\nabla \mathbf{U}_k + \nabla \mathbf{U}_k^T) - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{U}_k \right) \quad (2.43)$$

Da die Strömungsprobleme in dieser Arbeit stets als adiabatisch angenommen wurden, wird an dieser Stelle auf die Darstellung der Energiegleichung verzichtet.

Betrachtet man eine Zweiphasenströmung bestehend aus einer Flüssigphase (L), z.B. Wasser, und einer Gasphase (G), wie beispielsweise Luft, so müssen an der Grenzfläche i (engl.: *interface*) der beiden Phasen zwei Randbedingungen stets erfüllt sein [26, 112]:

1. *kinematische Randbedingung:*

Die Geschwindigkeitskomponente normal zur Grenzfläche muss in beiden Phasen gleich sein

$$\mathbf{U}_{Li} \cdot \mathbf{n}_L = \mathbf{U}_{Gi} \cdot \mathbf{n}_G \quad (2.44)$$

mit dem Normaleinheitsvektor \mathbf{n}_L , der von der freien Oberfläche in die Flüssigphase zeigt. Sind beide Fluide viskos, so sind auch die Geschwindigkeitskomponenten in tangentialer Richtung in beiden Phasen gleich. Somit gilt:

$$\mathbf{U}_{Li} = \mathbf{U}_{Gi} \quad (2.45)$$

2. *dynamische Randbedingung:*

An der Grenzfläche müssen sich der Druck und die viskosen Scherkräfte im Gleichgewicht mit den Kräften, die sich aus der Oberflächenspannung ergeben, befinden:

$$-(p_{Li} - p_{Gi})\mathbf{n}_L + (\boldsymbol{\tau}_L - \boldsymbol{\tau}_G) \cdot \mathbf{n}_L = \kappa\sigma\mathbf{n}_L + \nabla_S\sigma \quad (2.46)$$

mit der Krümmung der freien Oberfläche κ und der Oberflächenspannung σ . Dabei gibt der erste Term auf der rechten Seite die Kraft aus der Oberflächenspannung normal und der zweite Term die Kraft tangential zur Grenzfläche an. Letzterer ist im Falle einer konstanten Oberflächenspannung gleich Null.

Zusammen mit den Randbedingungen 2.44 und 2.46, beschreiben die Gleichungen 2.41 und 2.42 eine Zweiphasenströmung im Grunde genommen „exakt“. Das Problem dabei ist, dass sie auch kleinste Details der Strömung beinhalten und das Rechengitter entsprechend fein aufgelöst sein muss. Dies hat bei den heutigen Computerkapazitäten extrem lange Berechnungsdauern zur Folge und ist somit für ingenieurtechnische Anwendungen wenig geeignet.

Um die Computerzeiten zu reduzieren, werden die beiden Phasen daher als einander durchdringende Kontinua angesehen und eine Volumenmittlungsoperation auf die Grundgleichungen angewendet. Dazu wird ein zeit- und ortsfestes Volumenelement V mit dem äußeren Rand ∂V betrachtet, dessen Größe und Form als beliebig angenommen werden kann (Abb. 2.12).

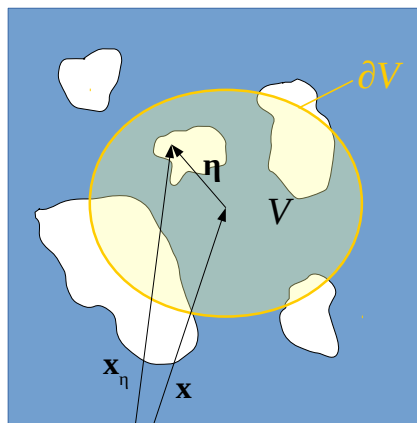


Abbildung 2.12: *Volumenelement*

\mathbf{x} und \mathbf{x}_η stellen dabei den Ortsvektor zum geometrischen Mittelpunkt des Kontrollvolumens bzw. den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt innerhalb des Volumens dar.

Für die Volumenmittlung einer beliebigen Strömungsgröße ϕ_k der Phase k gilt dann:

$$\overline{\phi_k}^V = \frac{1}{V} \int_V \phi_k(\mathbf{x}_\eta, t) X_k(\mathbf{x}_\eta, t) d\mathbf{x}_\eta \quad (2.47)$$

mit der Phasenindikatorfunktion X_k , die den Wert 1 annimmt, falls \mathbf{x}_η auf ein Fluidelement der Phase k zeigt und ansonsten gleich Null ist:

$$X_k = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \mathbf{x}_\eta \in \text{Phase } k \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (2.48)$$

Führt man nun die Volumenmittlung an den Gleichungen 2.41 und 2.42 durch, erhält man nach einigen Umformungen:

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \overline{\mathbf{U}}_k^{V_k}) = \Gamma_k \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_k \rho_k \overline{\mathbf{U}}_k^{V_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k [\overline{\mathbf{U}}_k^{V_k} \otimes \overline{\mathbf{U}}_k^{V_k}]) = \\ - \nabla \cdot (\alpha_k \overline{p}_k^{V_k}) + \nabla \cdot (\alpha_k [\overline{\boldsymbol{\tau}}_k^{V_k} + \boldsymbol{\tau}_k^{sgs}]) + \alpha_k \rho_k \mathbf{g} + \mathbf{M}_k \end{aligned} \quad (2.50)$$

Die genaue Herleitung der volumengemittelten Grundgleichungen kann in [112] nachvollzogen werden.

Der Superscript V_k weist darauf hin, dass die Strömungsgröße, in diesem Fall der Geschwindigkeitsvektor, nicht über das gesamte Kontrollvolumen V , sondern nur über das wirkliche von der Phase k eingenommene Volumen V_k gemittelt wurde. Diese Art der Volumenmittlung wird intrinsische Volumenmittlung genannt:

$$\overline{\phi_k}^{V_k} = \frac{1}{V_k} \int_V \phi_k(\mathbf{x}_\eta, t) X_k(\mathbf{x}_\eta, t) d\mathbf{x}_\eta \quad (2.51)$$

$\alpha_k = V_k/V$ repräsentiert den Volumenanteil der Phase k am Gesamtvolumen, wobei gilt:

$$\alpha_G + \alpha_L = 1 \quad (2.52)$$

Auf der rechten Seite von Gleichung 2.49 und 2.50 sind mit Γ_k , \mathbf{M}_k und $\boldsymbol{\tau}_k^{sgs}$ drei neue Terme durch die Volumenmittlung hinzugekommen. Die ersten beiden beschreiben den Massen- bzw. den Impulsaustausch über die Phasengrenze, welche mit entsprechenden Modellen approximiert werden müssen. Durch sie sind die Bewegungsgleichungen der einzelnen Phasen miteinander gekoppelt. Aufgrund der Massenerhaltung muss

$$\Gamma_G + \Gamma_L = 0$$

gelten. Bei den untersuchten Strömungen in dieser Arbeit findet kein Massentransport über die Grenzfläche statt, d.h. es geht keine Phase durch Verdampfen bzw. Kondensation in die andere über, weshalb $\Gamma_k = 0$ ist. Die Sprungbedingung für den Impulsaustausch ergibt sich aus der dynamischen Randbedingung:

$$\mathbf{M}_G + \mathbf{M}_L = \frac{1}{V} \int_{S_i \cap V} (\kappa \sigma \mathbf{n}_L + \nabla_S \sigma) dS \quad (2.53)$$

wobei das Integral nur auf die im Kontrollvolumen V gelegenen Grenzflächen S_i angewendet wird. Der letzte, neu hinzugekommene Term $\boldsymbol{\tau}_k^{sgs}$ auf der rechten Seite von Gleichung 2.50 ist der Tensor der Feinstrukturspannungen. Er geht aus dem nicht-linearen konvektiven Term hervor, wenn der lokale Geschwindigkeitsvektor \mathbf{U}_k vor der Volumenmittlung der Grundgleichungen mittels des Reynolds-Ansatzes zerlegt wird in einen volumengemittelten Mittelwert $\overline{\mathbf{U}_k}^{V_k}$ und einen Term \mathbf{U}'_k , der die räumlichen Fluktuationen der Geschwindigkeit um diesen Mittelwert angibt.

$$\mathbf{U}_k = \overline{\mathbf{U}_k}^{V_k} + \mathbf{U}'_k \quad (2.54)$$

Die Zerlegung ist notwendig, da das volumengemittelte dyadische Produkt des lokalen Geschwindigkeitsvektors $\overline{\mathbf{U}_k} \otimes \overline{\mathbf{U}_k}^{V_k}$ im konvektiven Term von Gleichung 2.42 unbekannt ist. Mithilfe des Reynolds-Ansatzes kann der konvektive Term der volumengemittelten Impulsgleichung 2.50 ausschließlich mit bekannten Größen geschrieben werden. Zu den räumlichen Fluktuationen werden alle Strömungseffekte gezählt, deren Größenskalen kleiner ist als jene, die mit dem volumengemittelten Mittelwert noch dargestellt werden können. Mit dem Tensor $\boldsymbol{\tau}_k^{sgs}$ werden nun alle Wechselwirkungen dieser Geschwindigkeitsfluktuationen beschrieben, was auch den Namen *Feinstrukturspannungen* bzw. im Englischen *sub-grid stresses (sgs)* erklärt. Die Schließung des Feinstruktur tensors ist Gegenstand der Grobstruktursimulation, auch *Large Eddy Simulation* genannt, die im nächsten Kapitel kurz erläutert wird. Es sei an dieser Stelle bereits angemerkt, dass eine zeitliche Mittelung des Feinstrukturspannungstensors den bekannten

Reynolds-Spannungstensor als Ergebnis hat, der im Falle der ebenfalls im nächsten Kapitel vorgestellten Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen mithilfe eines Turbulenzmodelles approximiert werden muss.

Mit den Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls (Gln. 2.49 u. 2.50), der Summenbedingung für den Phasenvolumenanteil 2.52 und der Sprungbedingung für den Impulsaustausch 2.53 stehen insgesamt 12 Gleichungen zur Lösung von 28 unbekanntem Größen — mit der Annahme, dass $\Gamma_k = 0$ — zur Verfügung. Nimmt man die 12 Unbekannten des Feinstrukturspannungstensors heraus — seine Schließung soll im Kapitel 2.3.2 behandelt werden — und trifft die in der Mehrphasenmodellierung übliche Annahme, dass die beteiligten Phasen das gleiche Druckfeld teilen, also $p_k = p$ gilt, so verringert sich die Zahl der unbekanntem Größen auf 15. Im Folgenden werden zwei Herangehensweisen erläutert, wie das Problem im Falle einer Zweiphasenströmung geschlossen werden kann.

Zwei-Fluid Modell

Das allgemeinste aller Zweiphasenmodelle ist das sogenannte *Zwei-Fluid Modell*. Hier werden beide Phasen mit einem eigenen Satz an volumengemittelten Erhaltungsgleichungen (Gln. 2.49 u. 2.50) beschrieben. Zur Schließung des Gleichungssystems wird eine konstitutive Gleichung für einen der beiden Impulsaustauschterme, z.B. M_G , aufgestellt, während der andere, z.B. M_L , dann über die Sprungbedingung für den Impuls (Gl. 2.53) berechnet werden kann. Im Falle von geschichteten Zweiphasenströmungen müsste also ein Modell gefunden werden, das die Widerstandskraft aufgrund der Relativgeschwindigkeit der beiden Phasen an der Phasengrenzfläche beschreibt. Verschiedene solcher Modelle wurden von Gargallo Gallego [31] für eindimensionale Strömungen untersucht und deren Ergebnisse miteinander verglichen.

Homogenes Zweiphasenmodell

Ein weiteres und zugleich das einfachste aller Zweiphasenmodelle, das auf der Idee der sich durchdringenden Kontinua beruht, ist das *homogene Zweiphasenmodell*. Hier werden beide Phasen als ein homogenes Zweiphasengemisch betrachtet, für das ein einziger Satz an Grundgleichungen für das gemeinsame Strömungsfeld gelöst wird. Dazu

werden die Erhaltungsgleichungen jeder einzelnen Phase (Gln. 2.49 u. 2.50) aufsummiert und Stoff- bzw. Strömungsgrößen für Zweiphasengemische wie folgt definiert:

$$\rho_m = \alpha_G \rho_G + \alpha_L \rho_L \quad (2.55)$$

$$\mu_m = \alpha_G \mu_G + \alpha_L \mu_L \quad (2.56)$$

$$\mathbf{U}_m = \frac{\alpha_G \rho_G \overline{\mathbf{U}_G}^{V_k} + \alpha_L \rho_L \overline{\mathbf{U}_L}^{V_k}}{\rho_m} \quad (2.57)$$

Außerdem wird angenommen, dass sich beide Phasen an der gemeinsamen Grenzfläche in einem mechanischen Gleichgewicht befinden, d.h. dass die Geschwindigkeiten beider Phasen dort gleich sind. Diese Annahme ist gültig, wenn eine Phase fein dispers in einer andern Phase verteilt ist, oder aber wenn sich beide Phasen klar von einander abgrenzen lassen. Letzteres ist beispielsweise in geschichteten Strömungen der Fall.

Die zu lösenden Gleichungen ergeben sich dann zu:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}_m) = 0 \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m \mathbf{U}_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m [\mathbf{U}_m \otimes \mathbf{U}_m]) = \\ - \nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}_m + \boldsymbol{\tau}_m^{sgs}) + \rho_m \mathbf{g} + \frac{1}{V} \int_{S_i \cap V} (\kappa \sigma \mathbf{n}_L + \nabla_S \sigma) dS \end{aligned} \quad (2.59)$$

Das Zweiphasengemisch verhält sich daher wie eine einphasige Strömung eines Stoffes mit der veränderlichen Dichte ρ_m . Mit dem letzten Term auf der rechten Seite von Gleichung 2.59 wird die Kraft, die die Oberflächenspannung auf die Grenzfläche zwischen den beiden Phasen ausübt, berücksichtigt. Sie wird in der Regel mit dem *continuum surface force model (CSF)* von Brackbill u. a. [12] modelliert:

$$\frac{1}{V} \int_{S_i \cap V} (\kappa \sigma \mathbf{n}_L + \nabla_S \sigma) dS = \sigma \kappa \nabla \alpha_G \quad (2.60)$$

Die Krümmung κ der freien Oberfläche wird dabei wie folgt berechnet:

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \alpha_G}{|\nabla \alpha_G|} \right) \quad (2.61)$$

mit dem Normaleneinheitsvektor der Grenzfläche $\mathbf{n} = \nabla \alpha_G / |\nabla \alpha_G|$.

Mit den Gleichungen 2.58, 2.59, 2.55, 2.56, 2.57 und 2.52 stehen nun acht Gleichungen zur Berechnung von neun Unbekannten — die Volumenanteile der beiden Phasen, die beiden Geschwindigkeitsvektoren mit jeweils 3 Einträgen und der Druck — zur Verfügung.

Um das Gleichungssystem vollends zu schließen, muss die Verteilung der Phasen im Strömungsgebiet bekannt sein, was die Berechnung der Form und Lage der Phasengrenzfläche zu jedem Berechnungszeitschritt erforderlich macht. In diesem Zusammenhang wurden in der Vergangenheit zahlreiche Modelle vorgestellt, die von Ferziger u. Perić [26] in zwei Gruppen aufgeteilt werden — in *Interfaceerfassungsmethoden* und in *Interfaceverfolgungsmethoden*. Bei den Interfaceverfolgungsmethoden wird die Bewegung der freien Oberfläche explizit verfolgt und das Rechengitter in jedem Zeitschritt an die Grenzfläche angepasst, sodass die Fluide stets durch eine genau definierte Trennfläche von einander getrennt sind. Zwei Methoden, die auf der Verfolgung der Grenzfläche basieren, sind die *Moving Mesh* Methode bzw. die *Front-Tracking* Methode von Glimm u. a. [33]. Im Gegensatz dazu wird die Grenzfläche bei den Interfaceerfassungsmethoden nicht direkt verfolgt, sondern durch den Volumenanteil der beiden Phasen bestimmt. Zu den bekanntesten Interfaceerfassungsmethoden gehören die *Marker-and-Cell (MAC)* Methode von Harlow u. Welch [35], die *Volume-of-Fluid (VOF)* Methode von Hirt u. Nichols [40] und die *Level-Set* Methode von Osher u. Sethian [78]. Im Folgenden soll lediglich die Volume-of-Fluid Methode näher vorgestellt werden, da diese für die Simulationen in dieser Arbeit verwendet wird.

Bei der Volume-of-Fluid Methode wird eine zusätzliche Transportgleichung für den Volumenanteil einer der beiden Phasen, beispielsweise für die Gasphase, gelöst:

$$\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_G \mathbf{U}_m) = 0 \quad (2.62)$$

Gleichung 2.62 erhält man direkt aus der Kontinuitätsgleichung für die Gasphase (Gl. 2.49 mit $k = G$), wenn eine inkompressible Strömung angenommen wird. Die Massenerhaltung vereinfacht sich dadurch zu:

$$\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_G \overline{\mathbf{U}_G}^{V_G}) = 0 \quad (2.63)$$

Drückt man nun die Geschwindigkeit der Gasphase mithilfe der Geschwindigkeit des Zweiphasengemisches und der Relativgeschwindigkeit der beiden Phasen an der Grenzfläche \mathbf{U}_r aus ($\overline{\mathbf{U}}_G^{V_G} = \mathbf{U}_m - \frac{\alpha_L \rho_L}{\rho_m} \mathbf{U}_r$), schreibt sich Gleichung 2.63 wie folgt:

$$\frac{\partial \alpha_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_G \mathbf{U}_m) = \nabla \cdot \alpha_G \alpha_L \frac{\rho_L}{\rho_m} \mathbf{U}_r \quad (2.64)$$

Da beim homogenen Modell die Annahme getroffen worden ist, dass sich die beiden Phasen an der freien Oberfläche in einem mechanischen Gleichgewicht befinden, ist die Relativgeschwindigkeit gleich Null und aus Gleichung 2.64 ergibt sich, wie gewünscht, Gleichung 2.62. Ein Nachteil der Volume-of-Fluid Methode ist, dass sie an der Grenzfläche einen kontinuierlichen, und nicht sprunghaften Übergang von einer Phase zur anderen berechnet, was zu einer Verschmierung der Grenzfläche führt. Um dem entgegenzuwirken gibt es zahlreiche Varianten der Methode, die die Phasengrenzfläche geometrisch rekonstruieren. Auf diese soll aber an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden, da sie in dieser Arbeit nicht verwendet werden. Dem Nachteil des Verschmierens der Grenzfläche steht jedoch ein entscheidender Vorteil gegenüber, den die Volume-of-Fluid Methode gegenüber den anderen Methoden besitzt: Die Massenerhaltung ist zu jeder Zeit gewährleistet, da Gleichung 2.62 direkt aus der Massenerhaltungsgleichung für die Gasphase hervorgeht. Im Gegensatz dazu muss die Abstandsfunktion bei der Level-Set Methode, beispielsweise, in regelmäßigen Abständen neu initialisiert werden.

2.3.2 Turbulenzmodellierung in Zweiphasenströmungen

Die Simulation turbulenter Strömungen wird für gewöhnlich je nach Grad der Modellierung der Turbulenz in drei verschiedene Kategorien unterteilt: Die *direkte numerische Simulation (DNS)*, die *Grobstruktursimulation (LES)* und die *Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS)* [57].

Bei der direkten numerischen Simulation werden bis auf die Diskretisierung keine weiteren Vereinfachungen getroffen, d.h. die Navier-Stokes-Gleichungen werden direkt gelöst. Jede noch so kleine Fluidbewegung wird dabei berücksichtigt. Dies erfordert jedoch eine sehr hohe räumliche Auflösung der diskreten Unterteilung des Rechengebietes, wodurch der numerische Aufwand zur Lösung der Grundgleichungen enorm hoch ist. Aus diesem Grund findet die direkte numerische Simulation gegenwärtig nur bei sehr einfachen Strömungsproblemen in der Grundlagenforschung Anwendung [26].

Einen Schritt in Richtung „alltagstauglicher“ Anwendung macht die Grobstruktursimulation, die im Englischen als *Large Eddy Simulation (LES)* bezeichnet wird. Hier werden die großskaligen Wirbelstrukturen der Turbulenz direkt gelöst, während kleine Wirbel mit Modellen approximiert werden. Im Vergleich zur DNS können bei der LES daher gröbere

numerische Gitter verwendet werden. Der numerische Aufwand ist allerdings auch hier für praxisrelevante Aufgabenstellungen noch zu hoch [26].

In ingenieurtechnischen Anwendungen ist es in der Regel nicht wichtig jeden einzelnen Strömungseffekt bis ins kleinste Detail aufzulösen. Es kommt vielmehr auf einen guten Kompromiss aus Genauigkeit und Rechengeschwindigkeit an, wobei vor allem mittlere Strömungsgrößen bzw. mittlere Kräfte von Interesse sind. Im Gegensatz zur Grobstruktursimulation werden dann alle Instationaritäten, egal welche Größenskalen sie aufweisen, der Turbulenz zugeordnet. Man wendet aus diesem Grund ein zeitliches Mittelungsverfahren auf die Erhaltungsgleichungen an und schreibt jede zeitlich veränderliche, turbulente Strömungsgröße $\phi(x, t)$, ähnlich dem Vorgehen im vorherigen Kapitel (Gl. 2.54), als die Summe eines zeitlich konstanten Mittelwertes $\bar{\phi}(x)$ und einer turbulenten Fluktuation $\phi'(x, t)$ um diesen Mittelwert [26, 57]:

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x, t) \quad (2.65)$$

wobei gilt

$$\bar{\phi}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x, t) dt \quad (2.66)$$

mit dem Mittelungsintervall T , das verglichen mit der typischen zeitlichen Größenordnung der turbulenten Schwankungen ausreichend groß gewählt werden muss; daher $T \rightarrow \infty$. Ist die Strömung im Mittel nicht stationär, muss ein anderes Mittelungsverfahren, die sogenannte *Ensemblemittelung* angewendet werden, wobei die mittlere Strömungsgröße dann nicht mehr zeitlich konstant ist:

$$\bar{\phi}(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi_n(x, t) \quad (2.67)$$

Beide Mittelungsverfahren sind in Abbildung 2.13 veranschaulicht.

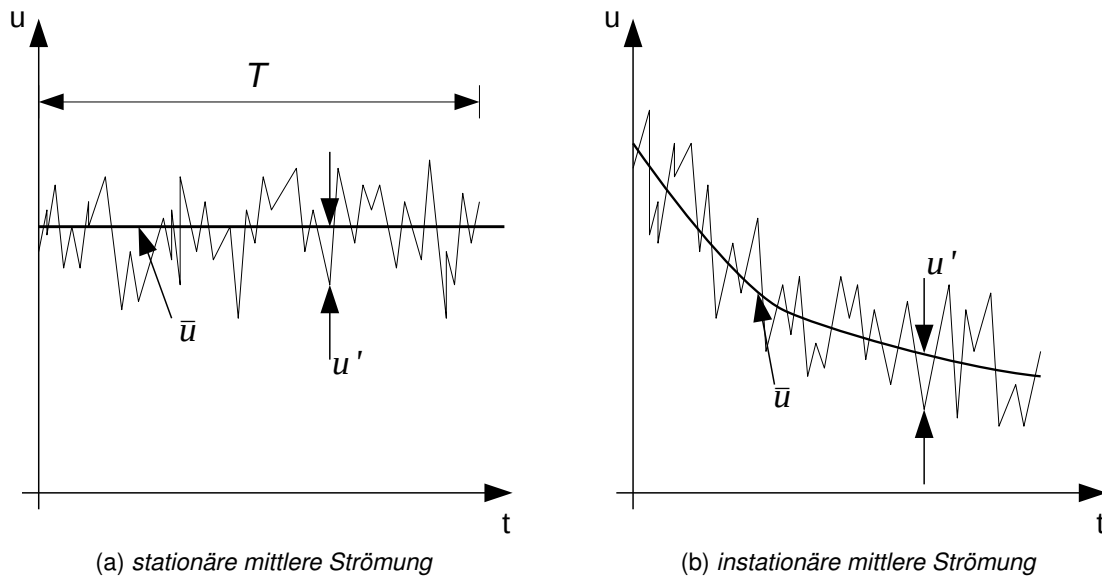


Abbildung 2.13: Zeitliche Mittelungsverfahren

Wird der mit Gleichung 2.65 beschriebene Reynolds-Ansatz in die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt und diese dann zeitlich gemittelt, erhält man die sogenannten *Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS)*:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{U}} = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho [\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}]) = -\nabla \bar{p} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \nabla \cdot (\rho \overline{\mathbf{U}' \otimes \mathbf{U}'}) \quad (2.69)$$

Wie sehr leicht zu erkennen ist, entsprechen die RANS-Gleichungen bis auf den letzten Term auf der rechten Seite von Gleichung 2.69 den Strömungsgleichungen einer laminaren Strömung. Der zusätzliche Term $-\left(\rho \overline{\mathbf{U}' \otimes \mathbf{U}'}\right)$ wird als *Reynolds-Spannungstensor* $\boldsymbol{\tau}_t$ bezeichnet, da die turbulenten Fluktuationen einen ähnlichen Einfluss auf die mittlere Strömung haben wie die molekularen Spannungen [57]. Um das Gleichungssystem zu schließen, müssen die Reynoldsspannungen in Abhängigkeit der bekannten mittleren Größen modelliert werden [57]. Ein einfacher und daher weitverbreiteter Ansatz ist, den Reynolds-Spannungstensor ähnlich dem Tensor der molekularen Spannungen zu modellieren:

$$\boldsymbol{\tau}_t = -\left(\rho \overline{\mathbf{U}' \otimes \mathbf{U}'}\right) = \mu_t \left(\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T\right) \quad (2.70)$$

mit der fiktiven, durch die turbulenten Wirbelstrukturen verursachten Viskosität μ_t , die kurz als *Wirbelviskosität* bezeichnet wird. Turbulenzmodelle, die auf dem Prinzip der

Wirbelviskosität beruhen werden daher auch *Wirbelviskositätsmodelle* genannt. Damit lassen sich die letzten beiden Terme von Gleichung 2.69 zu einem einzelnen Term kombinieren, wodurch die Impulsgleichung zu

$$\frac{\partial \rho \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho [\bar{\mathbf{U}} \otimes \bar{\mathbf{U}}]) = -\nabla \bar{p} + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \left((\mu + \mu_t) (\nabla \bar{\mathbf{U}} + \nabla \bar{\mathbf{U}}^T) \right) \quad (2.71)$$

wird. Dies erklärt auch, warum in diesem Zusammenhang oft vom Prinzip der erhöhten Viskosität gesprochen wird [26].

Zwei, bei der Lösung technischer Problemstellungen sehr beliebte Turbulenzmodelle sind das $k - \epsilon$ Turbulenzmodell nach Launder u. Sharma [56] und das $k - \omega$ *SST* Modell nach Menter [63, 64]. Beide gehören zur Gruppe der Zweigleichungs-Transportmodelle, da jeweils eine Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie k und die turbulente Dissipation ϵ bzw. die spezifische Dissipationsrate ω gelöst werden. Diese werden auch in dieser Arbeit verwendet und werden in Kapitel 5.1.2 näher vorgestellt.

Die Herleitung der RANS-Gleichungen erfolgte am Beispiel einer einphasigen Strömung. Die Zerlegung einer turbulenten Strömungsgröße in einen Mittelwert und eine Schwankungsgröße mit anschließender Mittelung der Erhaltungsgleichungen lässt sich auch auf mehrphasige Strömungen anwenden. Dies wurde bereits im vorherigen Kapitel bei der Herleitung der volumengemittelten Gleichungen gezeigt. Das Mittelungsverfahren hatte den zusätzlichen Feinstrukturspannungstensor τ_k^{sgs} zur Folge, der von Grobstruktur-turbulenzmodellen approximiert werden muss. Die entsprechenden RANS-Gleichungen erhält man dann durch zeitliche Mittelung der Gleichungen 2.49, 2.50 im Falle des Zwei-Fluid Modells bzw. durch Mittelung der Gleichungen 2.58 und 2.59 bei Verwendung des homogenen Modells. Wie bereits angedeutet, ergibt sich der Reynolds-Spannungstensor dabei direkt aus dem Feinstrukturspannungstensor. Auch die ursprünglich für Einphasenströmungen entwickelten Wirbelviskositätsmodelle werden zur Lösung von Mehrphasenströmungen verwendet, indem auch hier durch eine Volumenmittlung der Phasenvolumenanteil α_k eingeführt wird. Auch hier entstehen zusätzliche Produktions- und Dissipationsterme, die den Austausch an der Phasengrenzfläche beschreiben [43, 110]. Diese müssen mit geeigneten Modellen approximiert werden, was sich jedoch aus Mangel an Kenntnis der turbulenten Strukturen an der freien Oberfläche als äußerst schwierig erweist [36]. Um dieses Problem zu umgehen, behilft man sich hier meistens mit einer homogenen Formulierung des Turbulenzfeldes. Auch dann, wenn das Geschwindigkeitsfeld mit einem Zwei-Fluid Ansatz gelöst wird. Doch auch in diesem Fall müssen geeignete Randbedingungen für die Turbulenzgrößen gefunden werden, was wiederum aufgrund des mangelnden Verständnisses der Vorgänge an der Grenzfläche schwierig ist [61].

2.3.3 Numerische Simulation von geschichteten Zweiphasenströmungen

Geschichtete Zweiphasenströmungen wurden nicht nur in experimentellen Studien untersucht. Es gibt auch zahlreiche numerische Untersuchungen, von denen einige im Folgenden vorgestellt werden sollen.

Daly u. Harlow [18] berechneten eine Zweiphasenströmung bestehend aus Wasser und Wasserdampf im Gegenstrom mithilfe eines eindimensionalen Zwei-Fluid Modells. Der Impulstransport über die freie Oberfläche wurde dabei mittels einer Reibkraft, deren Widerstandsbeiwert vom Kehrwert der Wellenlänge der Oberflächenwellen abhängig ist, modelliert, während für den Masseaustausch eine Kondensationsrate definiert wurde. Die Simulationsergebnisse zeigten, dass die Wasserphase mit zunehmendem Druckverlust verzögert wird. Die Kondensationsrate hatte keinen Einfluss auf die Wassergeschwindigkeit, wohl aber die Reibkraft an der Grenzfläche. Mit sinkendem Widerstandsbeiwert sank bei konstantem Druckverlust auch die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsphase, da jene der Gasphase anstieg und zu erhöhtem Impulsaustausch über die Grenzfläche führte. Die Simulationsergebnisse wurden jedoch nicht anhand von experimentellen Daten validiert.

Akai u. a. [2] formulierten einen Satz von zweidimensionalen Erhaltungsgleichungen für jede Phase zusammen mit einem Low-Reynolds- $k - \epsilon$ Modell. Der Impulsaustausch über die Phasengrenzfläche wurde mithilfe unterschiedlicher Randbedingungen für Strömungen mit glatter Oberfläche bzw. für Strömungen mit welliger Oberfläche behandelt. Im Falle glatter Oberflächen machten sie die Annahme, dass die Geschwindigkeiten und die Schubspannungen in beiden Phasen an der Grenzfläche identisch sein müssen, wohingegen die turbulente kinetische Energie zu Null würde. Für den Fall einer welligen Oberfläche sollten jedoch die kinetischen Energien gleich sein ($k_G = k_L = k_i$), wobei die Wellen als eine Turbulenzquelle betrachtet werden. Die Geschwindigkeit der Grenzfläche in vertikaler Richtung wird hierbei als Energiequelle angenommen:

$$k_i = \beta \left(\frac{2H}{T} \right)^2 \quad (2.72)$$

mit der Wellenhöhe H , der Wellenperiodendauer T und einer numerischen Konstanten β . Die Autoren merkten jedoch an, dass die numerischen Ergebnisse bei Verwendung dieser Randbedingung im Vergleich mit ihrer experimentellen Untersuchung in Luft-Quecksilber-Strömungen [3] nicht immer zufriedenstellend waren. Die Gleichheit der turbulenten kinetischen Energien müsse nicht immer notwendig sein, da die Scherkräfte an der Phasengrenzfläche großskalige Wirbelstrukturen in der Gasphase erzeugen würden, die für die Flüssigphase aber nicht relevant seien.

Auch Issa [44] zweifelte die Richtigkeit der turbulenten Randbedingung an der Grenzfläche an und stellte die Frage, ob nicht vielmehr die Schubspannungen an der freien Oberfläche gleich sein müssten. Wenn dem so sei, müsste die Randbedingung $\rho_k k_k = \text{const.}$ gelten und die turbulenten kinetischen Energien würden sich durch das Dichteverhältnis der beiden Phasen voneinander unterscheiden. Die Frage blieb jedoch unbeantwortet.

Lorenz u. a. [61] machten wie Akai u. a. [2] die Annahme, dass die turbulente kinetische Energie an der Phasengrenzfläche einen endlichen Wert größer Null annehmen muss, da ihre Experimente gezeigt hatten, dass die Geschwindigkeitsschwankungen an der freien Oberfläche nicht verschwinden. Im Gegensatz zu Akai u. a. [2] machten sie in der Flüssigphase neben der Schwankungsgeschwindigkeit in vertikaler Richtung auch die Fluktuationen in Strömungsrichtung, also parallel zur Grenzfläche, als Turbulenzquelle aus:

$$k_{iL} = k_x + k_y > 0 \quad (2.73)$$

wobei die Indizes x und y die turbulente Randbedingung in Strömungsrichtung bzw. in vertikaler Richtung bezeichnen. Während für k_y dieselbe Bedingung wie bei Akai u. a. [2] (Gl. 2.72 verwendet wurde ($\beta = 1$)), wurde k_x proportional zu den Schubspannungen an der Grenzfläche angenommen:

$$k_x = \left(\frac{\rho_G}{\rho_L} \right) U_{iG}^2 \quad (2.74)$$

Die Simulationen zeigten zufriedenstellende Ergebnisse, wobei die Wellenhöhen und -periodendauern aus dem Experiment als gegeben vorausgesetzt wurden. Simulationen, in denen lediglich die Randbedingung für die vertikale Richtung verwendet wurde, führten auch hier zu falschen Ergebnissen.

Berthelsen u. Ytrehus [11] verwendeten für die Simulation vollentwickelter Gas-Flüssigkeitsströmungen in Rohren die Level-Set Methode zusammen mit einem modifizierten Zweischichten-Turbulenzmodell, mit dem sie die Wechselwirkungen der Oberflächenwellen an der Phasengrenzfläche berücksichtigten. Das Zweischichten-Modell wurde ursprünglich von Chen u. Patel [17] entwickelt, um die numerischen Ergebnisse in der Nähe fester Wände bei Verwendung des $k - \epsilon$ Modell zu verbessern, wo das Turbulenzmodell einige schlechte Eigenschaften aufweist. Dazu wird das Strömungsfeld in einen inneren Bereich nahe physikalischer Ränder, wie beispielsweise feste Wände oder aber auch freie Oberflächen, und einen äußeren Bereich aufgeteilt, der weiter von den physikalischen Rändern entfernt liegt. Während im äußeren Bereich das $k - \epsilon$ Modell verwendet wird, kommt im inneren Bereich, wo die Viskosität eine wichtige Rolle spielt, ein

einfacheres Eingleichungswirbelviskositätsmodell zum Einsatz. Die Erhöhung der Turbulenz an der Phasengrenzfläche durch den Einfluss der Wellen modellierten Berthelsen u. Ytrehus [11] mithilfe einer im Vergleich zum Modell von Chen u. Patel [17] vergrößerten Verdrängungshöhe im turbulenten Längenmaß für den inneren Bereich. Die zusätzliche Verdrängungshöhe ist dabei eine Funktion eines äquivalenten Rauigkeitsparameters. An der freien Oberfläche wurden gleiche Geschwindigkeiten und, wie von Issa [44] vorgeschlagen, gleiche Scherspannungen angenommen, wobei eine ähnliche Randbedingung wie bei Newton u. Behnia [71, 72] für die turbulente kinetische Energie in beiden Phasen verwendet wurde.

Basierend auf der Theorie von Stähler [94] entwickelte Wintterle [110, 111] ein Phasenwechselwirkungsmodell, das das Verschmieren der welligen Phasengrenzfläche aufgrund zeitlicher Mittlung mithilfe einer zusätzlichen Diffusionskraft in dem von ihm verwendeten Zwei-Fluid Modell modellierte. Außerdem wurde ein Produktionsterm in die Transportgleichung für die spezifische Dissipation des $k-\omega$ Turbulenzmodelles nach Wilcox [109] eingeführt, um die Dämpfung der Turbulenz in der Phasenwechselwirkungszone abzubilden. Dieser Dämpfungsterm wurde analog zum Produktionsterm der Dissipation im Modell für einphasige Strömung, allerdings mit angepasster Konstante berechnet. Im Gegensatz zur Konstante im einphasigen Fall war diese jedoch um vier Größenordnungen kleiner. Die Simulationsergebnisse zeigten gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten, wobei die Verteilungen der Turbulenzgrößen allerdings zum Teil erhebliche Abweichungen zeigten.

Neben der experimentellen Arbeit, führte Hashmi [36] auch ausführliche numerische Berechnung geschichteter Zweiphasenströmungen durch. Er verwendete dafür einen Volume-of-Fluid Ansatz, den er für die Simulation von geschichteten Strömungen für geeigneter hielt als das Zwei-Fluid Modell. Zum einen weil die Verfolgung der freien Oberfläche bei der Zwei-Fluid Modellierung noch am Anfang der Entwicklung steht, und zum anderen weil zur Modellierung der Wechselwirkungen an der Grenzfläche geeignete Modelle manuell vom Benutzer ausgewählt werden müssen, die er im Bereich der geschichteten Strömungen ebenfalls für noch nicht ausgereift genug hielt. Ein Problem sieht er hierbei vor allem darin, dass die Grenzfläche im Gegensatz zu dispersen Blasenströmungen, wo eine konstante Blasengröße angenommen werden kann, ständig ihre Form ändere, was die Modellierung der Widerstandskraft äußerst schwierig mache. Allerdings stellte Hashmi fest, dass auch das Volume-of-Fluid Modell einige Probleme bei der Berechnung geschichteter Strömung hat, vor allem wenn in den Strömungsgrößen große Gradienten über die Grenzfläche auftreten. Er beobachtete einen falschen Impulsaustausch zwischen den beiden Phasen, was er auf die Turbulenzmodellierung zurückführte, die die Grenzflächenphysik nur mangelhaft abbilden könne. So würden beim Volume-of-Fluid Modell bzw. der homogenen Zweiphasenmodellierung keine spezifischen Randbedingungen an der Grenzfläche verwendet, wodurch sich turbulente Wirbel frei über die

freie Oberfläche bewegen könnten. Dies führe zu erhöhtem Impulsaustausch und somit auch zu falschen Geschwindigkeitsverläufen in beiden Phasen. Außerdem sieht Hashmi auch bei der Definition der turbulenten Wirbelviskosität ein Problem, da diese mit Größen des homogenen Gemisches gebildet wird, was in der Gasphase im Bereich der Grenzfläche zu unrealistischen Werten führe. Aus diesem Grund schlägt auch er, wie Wintterle [110] einen zusätzlichen Produktionsterm in der Transportgleichung der turbulenten Dissipation vor, mit dem die Erzeugung turbulenter kinetische Energie an der Grenzfläche komplett unterdrückt werden solle.

Wiederum einen Zwei-Fluid Ansatz wählten Höhne u. Mehlhoop [41] für die Simulation von Strömungen mit freier Oberfläche. Mithilfe einer Grenzflächendichtefunktion und diversen Blendungsfunktionen waren sie in der Lage mehrere Strömungsformen von disperser Blasenströmung, über geschichtete Strömungen bis hin zu disperser Tropfenströmung zu berücksichtigen, für die unterschiedliche Modelle zur Berechnung des Widerstandsbeiwertes an der Grenzfläche gewählt wurden. Außerdem führten sie einen zusätzlichen Produktionsterm in die Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie ein, um den Einfluss kleiner Wellen, deren charakteristische Größe kleiner als die Maschenweite des numerischen Gitters ist, berücksichtigen zu können. Erste Validierungsrechnungen anhand der experimentellen Daten von Fabre. u. a. [25] und Vallée u. a. [102] zeigten bessere Ergebnisse bezüglich der turbulenten kinetischen Energie als die Simulationen mit den herkömmlichen Turbulenzmodellen. Doch auch hier waren noch weitere Untersuchungen notwendig.

3 Zielsetzung der Arbeit

Kapitel 2.3 hat gezeigt, dass, trotz zahlreicher Untersuchungen in der Vergangenheit, noch heute enormer Entwicklungsbedarf bei der numerische Behandlung geschichteter Zweiphasenströmungen besteht. Vor allem die komplexen Wechselwirkungsvorgänge zwischen den beteiligten Phasen an der gemeinsamen Grenzfläche, stellen eine große Herausforderung für die Modellierung solcher Strömungen dar. Im Gegensatz zu einphasigen Strömungen müssen hier zusätzlich der Transport von Masse, Impuls und Energie über die freie Oberfläche berücksichtigt werden. Die experimentellen Studien haben gezeigt, dass die Turbulenz dabei von großer Bedeutung ist. Außerdem ist eine genaue Kenntnis über die Form und Lage der Grenzfläche unabdingbar, um die Phasen zu jedem Zeitpunkt voneinander unterscheiden zu können. Aufgrund von Druck- und Scherkräften kann eine anfangs ungestörte Oberfläche instabil werden, was zum Anfachen von Oberflächenwellen führt. Schwerkraft und Oberflächenspannung spielen hierbei eine wichtige Rolle. Eine genaue Beschreibung der Turbulenz und der Oberflächenwellen ist für die realistische Berechnung geschichteter Strömungen mithilfe numerischer Werkzeuge aus diesem Grund besonders wichtig.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es daher, einen weiteren Beitrag zur Entwicklung neuer numerischer Modelle zur Berechnung geschichteter Zweiphasenströmungen zu leisten. Im Prinzip könnten solche Strömungen unter Verwendung einer Volume-of-Fluid Methode direkt gelöst werden, wobei sämtliche Oberflächeneffekte, wie beispielsweise die Wellenbildung, detailliert aufgelöst werden würden. Diese numerische Herangehensweise erfordert jedoch sehr kleine Gitterweiten des numerischen Netzes und sind daher sehr zeit- und rechenintensiv. Ein RANS-Modell zusammen mit einer statistischen Modellierung der Vorgänge an der Phasengrenzfläche, ähnlich der Modellierung der Turbulenz, wäre daher die gesuchte Lösung.

Eine Möglichkeit hierbei ist die Verwendung des Zwei-Fluid Modelles, wobei der Impulsaustausch an der Grenzfläche mittels geeigneter Phasenwechselwirkungstermen berücksichtigt werden muss. Eine weitere Möglichkeit ist eine homogene Modellierung des Zweiphasengemisches, wo die Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden Phasen an deren Grenzfläche per Definition gleich Null ist und keine Wechselwirkungsterme zu beachten sind. Diese Annahme ist im Falle geschichteter Strömungen durchaus sinnvoll, da die Gasphase in den Wellentälern annähernd auf die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsphase abgebremst wird. Der Einfluss der Oberflächenwellen auf die mittlere Strömung

kann dann direkt in die Turbulenzmodellierung eingefügt werden, da die Experimente ebenfalls gezeigt haben, dass Oberflächenwellen und Turbulenz in enger Verbindung zueinander stehen.

Einen einfachen Weg die Oberflächeneffekte zu berücksichtigen, bietet das Zweischichten-Turbulenzmodell von [17]. Es wurde von Berthelsen u. Ytrehus [11] bereits erfolgreich für die Simulation geschichteter Strömungen angewendet, wobei der Einfluss der Wellen mithilfe einer zusätzlichen Verdrängungshöhe modelliert worden ist. In der vorliegenden Arbeit soll mit der Höhe der Wellen dagegen eine weniger empirisch bestimmte Größe als turbulentes Längenmaß für den inneren Wellenbereich gewählt werden. Dazu wird in Kapitel 4 ein statistisches Wellenmodell hergeleitet, mit dessen Hilfe es möglich sein wird, mittlere Phasenverteilungen und daraus mittlere Wellenhöhen bestimmen zu können. Das Modell beruht dabei auf einem Gleichgewichtszustand zwischen turbulenter kinetischer, turbulenter potentieller und turbulenter Oberflächenenergie. Die auf diese Weise gewonnen Wellenhöhen werden dann, wie zuvor erläutert, in einem Zweischichten-Turbulenzmodell verwendet, welches zusammen mit dessen Implementierung in ein homogenes Zweiphasenmodell in Kapitel 5 vorgestellt und schließlich in Kapitel 6 validiert wird.

4 Statistisches Wellenmodell

Ähnlich dem Ansatz von Stähler [94] können, basierend auf einem statistischen Energiegleichgewicht, zwei neue Modelle zur Beschreibung sowohl der mittleren Phasenverteilung als auch der spektralen Verteilung von Oberflächenwellen in geschichteten Strömung hergeleitet werden. Anders als Stähler [94], der den Einfluss von Kapillarkräften in seinem Modell vernachlässigt, wird in dieser Arbeit, neben der turbulenten kinetischen und der turbulenten potentiellen Energie, auch die turbulente Oberflächenenergie im Gleichgewichtszustand berücksichtigt. Dadurch können vor allem die Abweichungen in der Phasenverteilung zwischen den experimentellen Daten und dem statistischen Modell von Stähler [94] in schießenden Strömungen minimiert werden. In solchen Strömungen treten überwiegend Wellen mit kleiner Amplitude auf, weshalb Kapillarkräfte gegenüber Schwerkraft an Bedeutung gewinnen. In dem Modell zur Bestimmung der Phasenverteilung ist die Wellenzahl nun eine zusätzliche Unbekannte, die, wie im Kapitel 4.2 beschrieben wird, aus den Wellenzahlspektren berechnet werden kann.

4.1 Phasenverteilung

Die Messdaten von Stähler [94] zeigen eine Gaußsche Normalverteilung der lokalen Geschwindigkeit u :

$$P(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u'^2}} \exp\left(-\frac{(u - \bar{u})^2}{2u'^2}\right) \quad (4.1)$$

Darin ist \bar{u} die mittlere Geschwindigkeit und $\overline{u'^2}$ die Varianz der lokalen Geschwindigkeit u .

Wird der Exponent in Gleichung 4.1 mit der Dichte $\frac{1}{2}\bar{\rho}$ erweitert und in alle drei Raumrichtungen verallgemeinert, erhält man eine Boltzmann-Verteilung für die turbulente kinetische Energiedichte e_{kin} :

$$P(e_{kin}) = \frac{1}{2\rho k} \exp\left(-\frac{e_{kin}}{2\rho k}\right) \quad (4.2)$$

wobei

$$\overline{\rho k} = \alpha \rho_G k_G + (1 - \alpha) \rho_L k_L \quad (4.3)$$

Darin bezeichnet α den Volumenanteil der Gasphase und $\rho_k k_k$ die mittlere turbulente kinetische Energie(-dichte) der jeweiligen Phase k . Der Faktor $\frac{1}{2\rho k}$ in Gleichung 4.2 ergibt sich aus der Normierung des Energiespektrums:

$$\int_0^{\infty} P(e_{kin}) dE = 1 \quad (4.4)$$

Diese turbulente kinetische Energie kann in horizontal geschichteten Strömungen einerseits dazu genutzt werden, um das Fluid von der vertikalen Position y auf $y + dy$ anzuheben und somit dessen potentielle Energie Δe_{pot} zu erhöhen, andererseits kann die turbulente kinetische Energie in Oberflächenenergie Δe_{surf} umgewandelt und damit für die Ausbildung einer gekrümmten Oberfläche verwendet werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für den Fall, dass die turbulente kinetische Energie für jeden der genannten Umwandlungsprozesse ausreichend ist, ergeben sich wie folgt:

$$P(\Delta e_{pot}) = \frac{1}{2\rho k} \exp\left(-\frac{\Delta e_{pot}}{2\rho k}\right) \quad (4.5)$$

$$P(\Delta e_{surf}) = \frac{1}{2\rho k} \exp\left(-\frac{\Delta e_{surf}}{2\rho k}\right) \quad (4.6)$$

Hierbei ist $\Delta e_{pot} = (\rho_L - \rho_G)gdy$ mit der Dichte ρ_k der jeweiligen Phase k und der Erdbeschleunigung g [94]. Entwickelt man die Oberflächenwellen in einer Fourier-Reihe, so gilt für jeden spektralen Anteil

$$y(x) = h \sin(qx - \omega t) \quad (4.7)$$

mit der Wellenamplitude h und der Wellenzahl q . Die zugehörige Oberflächenenergie-dichte e_{surf} wird berechnet als

$$e_{surf} = \sigma \left| \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right| \quad (4.8)$$

Mit Gleichung 4.7 ergibt sich Δe_{surf} zu:

$$\Delta e_{surf} = \sigma q^2 dy \quad (4.9)$$

mit der Oberflächenspannung σ .

Da beide Energieumwandlungsvorgänge stets zeitgleich ablaufen, gilt für die gesamte Wellenenergiedichte Δe :

$$P(\Delta e) = P(\Delta e_{pot}) \cdot P(\Delta e_{surf}) = \frac{1}{2\rho k} \exp\left(-\frac{\Delta e_{pot} + \Delta e_{surf}}{2\rho k}\right) \quad (4.10)$$

Genauso wie in Gleichung 4.2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung in Gleichung 4.10 wiederum auf 1 normiert.

Unter physikalischer Betrachtungsweise beschreibt Gleichung 4.10 die Wechselwirkung zwischen der Turbulenz und der Oberflächenwelle. Die Welle bezieht demnach ihre Energie aus einer Art Energievorratsspeicher $\overline{\rho k}$, der sowohl von der Flüssig- als auch von der Gasphase gespeist wird. Dies ist ein weiterer Unterschied zu dem Modell von Stähler [94], der an dieser Stelle aufgrund messtechnischer Schwierigkeiten in der Gasphase nahe der Phasengrenzfläche nur die Flüssigphase betrachtet. Somit können mit Gleichung 4.10 auch die Austauschvorgänge zwischen den Phasen über die gemeinsame Grenzfläche beschrieben werden.

Um nun aus Gleichung 4.10 eine Beziehung zur Berechnung der Phasenverteilung herleiten zu können, wird im Folgenden die Wechselwirkung der einzelnen Fluidpartikel untereinander näher betrachtet. Dabei muss berücksichtigt werden, dass sich die Partikel gegenseitig verdrängen und sich somit zu keiner Zeit zwei Teilchen am selben Ort befinden können. Diese Bedingung stellt ein Analogon zu dem aus der Quantenmechanik bekannten *Pauli'schen Ausschlussprinzip* dar [65, 99]. P_1 gibt dabei die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Fluidteilchen seine turbulente kinetische Energie abgibt, um sie entweder der potentiellen Energie eines weiteren Teilchens zu zuführen, in dem es um eine bestimmte Strecke dy angehoben wird, oder aber um die Energie zur Vergrößerung bzw. der Verformung der Oberfläche zu nutzen. Sie lässt sich als Produkt mehrerer Wahrscheinlichkeiten darstellen. Zum einen muss sich an einer vertikalen Position y ein Fluidpartikel befinden, dessen potentielle Energie erhöht werden kann. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist gleich dem Flüssigkeitsvolumenanteil $1 - \alpha(y)$ an der Stelle y . Zum anderen darf an der Stelle $y + dy$ kein Fluidpartikel vorhanden sein, was durch den Gasvolumenanteil $\alpha(y + dy)$ angegeben werden kann. Zu guter Letzt muss genügend Energie vorhanden sein, damit die Energieaustauschvorgänge ablaufen können. Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit

$P(\Delta e)$ aus Gleichung 4.10. Die Wahrscheinlichkeit P_1 ergibt sich somit zu:

$$P_1 = (1 - \alpha(y)) \alpha(y + dy) P(\Delta e) \quad (4.11)$$

Durch Einsetzen von Gleichung 4.10 und Linearisierung für kleine dy folgt aus Gleichung 4.11:

$$P_1 = (1 - \alpha(y)) \alpha(y + dy) \frac{1}{2\rho\bar{k}(y)} \left[1 - \frac{\Delta\rho g dy}{2\rho\bar{k}(y)} - \frac{\sigma q^2 dy}{2\rho\bar{k}(y)} \right] \quad (4.12)$$

Auf ähnliche Art und Weise kann auch der umgekehrte Energieaustauschvorgang mit der Wahrscheinlichkeit P_2 beschrieben werden, wenn potentielle Energie oder Oberflächenenergie in kinetische Energie umgewandelt wird. In diesem Fall benötigt die Flüssigkeit keine zusätzliche Energie. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $P(0) = \frac{1}{2\rho\bar{k}(y)}$. Die Wahrscheinlichkeit P_2 ergibt sich dann zu:

$$P_2 = \alpha(y) (1 - \alpha(y + dy)) \frac{1}{2\rho\bar{k}(y)} \quad (4.13)$$

Unter der Annahme, dass beide Wahrscheinlichkeiten P_1 und P_2 im Gleichgewicht gleich groß sind ($P_1 = P_2$) [94] und unter Berücksichtigung, dass

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{\alpha(y + dy) - \alpha(y)}{dy} \quad (4.14)$$

gilt und damit

$$\alpha(y + dy) = \alpha(y) + \frac{d\alpha}{dy} dy \quad (4.15)$$

folgt:

$$\frac{d\alpha}{dy} dy = (1 - \alpha(y)) \left(\alpha(y) + \frac{d\alpha}{dy} dy \right) \frac{\Delta\rho g dy + \sigma q^2 dy}{2\rho\bar{k}(y)} \quad (4.16)$$

Werden Terme höherer Ordnung vernachlässigt, erhält man schließlich mit Gleichung 4.17 einen Ausdruck für den Gradienten des Gasvolumenanteils α :

$$\frac{d\alpha}{dy} = \alpha(y) (1 - \alpha(y)) \frac{\Delta\rho g + \sigma q^2}{2\rho\bar{k}(y)} \quad (4.17)$$

Integration von Gleichung 4.17 liefert dann die gesuchte Beziehung für den lokalen Gasvolumenanteil in Abhängigkeit der vertikalen Ortskoordinate y :

$$\alpha(y) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\int_{y_M}^y \frac{\Delta\rho g + \sigma q^2}{2\rho k(y)} dy\right)} \quad (4.18)$$

wobei die zeitlich gemittelte Position der Phasengrenzfläche $y_M = y(\alpha = 0,5)$ als untere Integrationsgrenze gewählt wird. Diese Wahrscheinlichkeitsfunktion ist vom Typ einer Fermi-Dirac Verteilung.

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, stellt die Wellenzahl q in den Gleichungen 4.17 und 4.18 eine zusätzliche Unbekannte dar. Eine mittlere Wellenzahl lässt sich jedoch sehr einfach aus dem Wellenzahlspektrum der Strömung berechnen, wie im Folgenden beschrieben wird.

4.2 Wellenspektren

Mit einem ähnlichen statistischen Ansatz wie im Kapitel zuvor, können auch gesamte Wellenspektren einer horizontal geschichteten Strömung beschrieben werden. Das Energiespektrum eines betrachteten Wellenfeldes ergibt sich analog zu Gleichung 4.10 zu:

$$P(E) dE = (P(E_{pot}) \cdot P(E_{surf})) dE = \frac{1}{2E_t} \exp\left(-\frac{E_{pot} + E_{surf}}{2E_t}\right) dE \quad (4.19)$$

Die betrachteten Wellenfelder haben grundsätzlich eine räumliche Ausdehnung [62], weshalb Ausdrücke für die pro (ungestörte) Grundfläche gespeicherten Energien hergeleitet werden. Die flächenspezifische turbulente kinetische Energie E_t ergibt sich durch Integration über die vertikale Auslenkung der Welle:

$$E_t = \int_0^h \overline{\rho k}(y) dy \approx \overline{\rho k} h \quad (4.20)$$

Ausgehend von der potentiellen Energie eines infinitesimalen Volumenelements dV der Masse Δm (vgl. Abb. 4.1)

$$E_{pot,dV} = \Delta m g y = \Delta \rho dx dy dz g y, \quad (4.21)$$

erhält man die flächenspezifische turbulente potentielle Energie E_{pot} durch Integration über das Volumen der Welle. Dabei wird für ein Element des Wellenspektrums wiederum von einer ebenen, sinusförmigen Welle der Form $y_S(x) = h \sin(qx - \omega t)$ mit der Wellenlänge λ und der Breite B in Richtung der z -Koordinate ausgegangen:

$$E_{pot} = \frac{1}{\lambda B} \int_0^B \int_0^\lambda \int_0^{y_S} \Delta \rho g y dy dx dz = \frac{1}{4} \Delta \rho g h^2 \quad (4.22)$$

Schließlich ergibt sich die flächenspezifische Oberflächenenergie aus der relativen Oberflächenvergrößerung dA bezogen auf die ungestörte Grundfläche A_0 [22], wobei sich die relative Oberflächenvergrößerung aus der Differenz der Oberfläche der Welle A_{Welle} und die der ungestörten Grundfläche A_0 berechnet (vgl. Abb. 4.1):

$$E_{surf} = \sigma \frac{dA}{A_0} = \sigma \frac{(A_{Welle} - A_0)}{A_0} \quad (4.23)$$

Geht man von einer ebenen, sinusförmigen Welle der Form $y_S(x) = h \sin(qx - \omega t)$ aus, gilt für dA :

$$dA = \int_0^B \int_0^\lambda \left(\sqrt{1 + y_S'(x)^2} - 1 \right) dx dz = \frac{1}{4} h^2 q^2 \lambda B \quad (4.24)$$

mit der aus der Analysis bekannten Vorschrift

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

zur Berechnung der Kurvenlänge s einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ [15]. Eine ausführliche Herleitung von Gleichung 4.24 befindet sich im Anhang A.

Gleichung 4.24 eingesetzt in Gleichung 4.23, liefert dann mit $A_0 = \lambda B$ den gesuchten Ausdruck für die flächenspezifische Oberflächenenergie:

$$E_{surf} = \sigma \frac{dA}{A_0} = \frac{1}{4} \sigma q^2 h^2 \quad (4.25)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 4.20, 4.22 und 4.25 in Gleichung 4.19 folgt für das Wellenenergiespektrum dann:

$$P(E) dE = \frac{1}{2E_t} \exp\left(-\frac{\Delta\rho gh^2 + \sigma q^2 h^2}{8E_t}\right) dE \quad (4.26)$$

bzw. mit Gleichung 4.20 und Normierung des Spektrums:

$$P(E) dE = \frac{1}{2\overline{\rho k}} \exp\left(-\frac{\Delta\rho gh + \sigma q^2 h}{8\overline{\rho k}}\right) dE \quad (4.27)$$

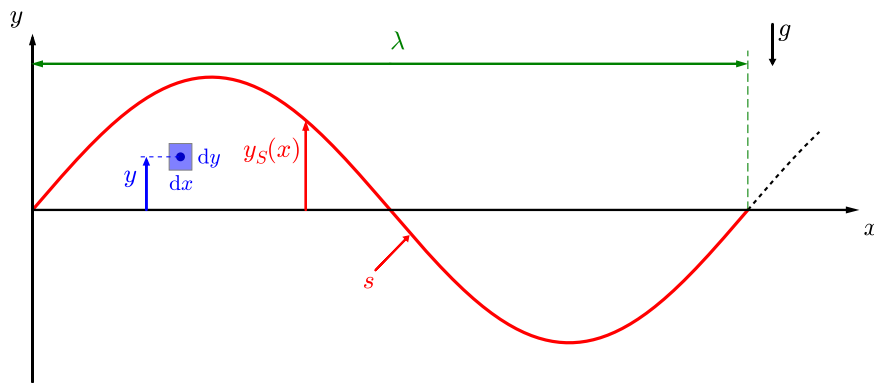


Abbildung 4.1: *Infinitesimales Volumenelement und Oberfläche einer sinusförmigen Welle*

Häufig kommt es vor, dass sich, wie in Abbildung 4.2 gezeigt, kleinere Wellen auf den größeren Wellen ausbilden, also sozusagen auf der größeren Welle „schwimmen“. Ihr Spektrum kann ebenfalls durch Gleichung 4.26 beschrieben werden. Dabei muss allerdings beachtet werden, dass diese Wellen ihre Energie nicht aus dem gesamten Volumen der Welle beziehen können, da sie als reiner Oberflächeneffekt auftreten. Ihre Energie $E_{t,kl}$ lässt sich jedoch aus der Energie E_t der großen Welle wie folgt abschätzen:

$$\frac{E_{t,kl}}{E_t} = \frac{\int_0^h \overline{\rho k} dy}{\int_0^h \overline{\rho k} dy} = \frac{h}{h} \quad (4.28)$$

wobei hier von einer konstanten Verteilung der turbulenten kinetischen Energiedichte $\overline{\rho k}$ ausgegangen wird.

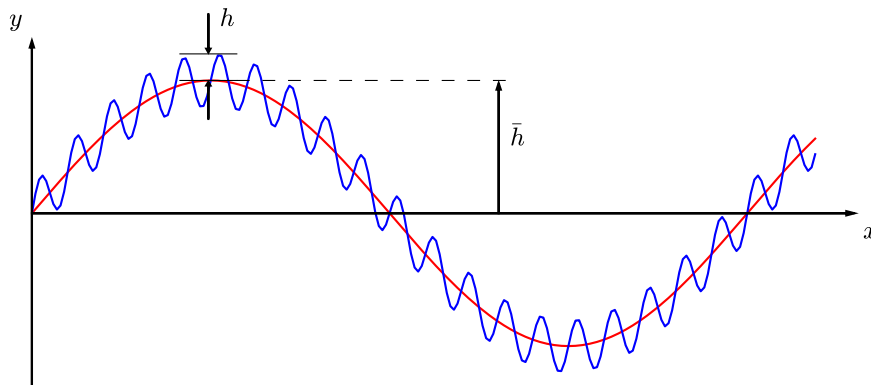


Abbildung 4.2: Kleinere Welle auf größerer Welle „schwimmend“

Das Spektrum der kleinen, auf den großen Wellen schwimmenden Wellen ergibt sich unter Berücksichtigung von Gleichung 4.28 dann zu:

$$P(E) dE = \frac{1}{2E_t} \exp\left(-\frac{\Delta\rho g h \bar{h} + \sigma q^2 h \bar{h}}{8E_t}\right) dE \quad (4.29)$$

Das gesamte Wellenspektrum lässt sich aus den Spektren der großen und der kleinen Wellen zusammensetzen:

$$P(E) dE = (P_{gr}(E) \cdot P_{kl}(E)) dE \quad (4.30)$$

Da es sich bei den großen Wellen meist um reine Schwerewellen handelt, kann in ihrem Spektrum der Anteil der Oberflächenenergie vernachlässigt werden. Die kleinen Wellen dagegen sind meist reine Kapillarwellen, bei denen der Oberflächenenergieanteil über den Anteil aus der potentiellen Energie überwiegt. Aus diesem Grund kann bei Kapillarwellen die potentielle Energie vernachlässigt werden. Mit diesen Annahmen lässt sich das gesamte Wellenspektrum dann berechnen aus:

$$P(E) dE = \frac{1}{2E_t} \exp\left(-\frac{\Delta\rho g h^2 + \sigma q^2 h \bar{h}}{8E_t}\right) dE \quad (4.31)$$

Daraus kann das Wellenzahlspektrum $P(q)$ schließlich ganz einfach durch Multiplikation von Gleichung 4.31 mit der Ableitung der Wellenenergie nach der Wellenzahl abgeleitet werden:

$$P(q) dq = P(E) \frac{dE}{dq} dq \quad (4.32)$$

Dabei muss beachtet werden, dass die Wellenamplitude nach der Stokeschen Wellentheorie zweiter Ordnung eine Funktion der Wellenzahl ist [34]:

$$h(q) = \frac{1}{q} \frac{\tanh^3 q\delta}{3 - \tanh^2 q\delta} \quad (4.33)$$

mit der Wassertiefe δ .

Für das Wellenzahlspektrum gilt somit:

$$P(q) dq = \frac{1}{2E_t} \left[-\frac{1}{2} \Delta\rho g h \frac{dh}{dq} + \frac{1}{2} \sigma q \bar{h} h + \frac{1}{4} \sigma q^2 \bar{h} \frac{dh}{dq} \right] \exp\left(-\frac{\Delta\rho g h^2 + \sigma q^2 h \bar{h}}{8E_t}\right) dq \quad (4.34)$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass das negative Vorzeichen in der Ableitung der potentiellen Energie direkt aus der Normierung des Wellenzahlspektrums der Schwerewelle folgt.

Aus Gleichung 4.33 wird leicht ersichtlich, dass das Verhältnis von Wellenamplitude zu Wellenlänge $\frac{h}{\lambda}$, hier ausgedrückt durch das Produkt von Wellenamplitude und Wellenzahl $hq = \frac{2\pi h}{\lambda}$, für große Wassertiefen oder für große Wellenzahlen eine obere Begrenzung besitzt:

$$\lim_{q, \delta \rightarrow \infty} hq = \frac{1}{2} \quad (4.35)$$

Mit der Annahme, dass das Produkt aus Wellenamplitude und Wellenzahl, im Folgenden als *Wave Aspect Ratio* A bezeichnet, konstant und nie größer 0,5 ist ($A = hq = const. \leq 0,5$), vereinfacht sich Gleichung 4.34 zu:

$$P(q) dq = \frac{1}{2E_t} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta\rho g A^2}{q^3} + \frac{1}{4} \sigma A \bar{h} \right] \exp\left(-\frac{\Delta\rho g \frac{A^2}{q^2} + \sigma q A \bar{h}}{8E_t}\right) dq \quad (4.36)$$

Durch Mittelung über das Wellenzahlspektrum, kann aus Gleichung 4.36 nun die gesuchte Wellenzahl q zur Schließung der Gleichungen 4.17 und 4.18 bestimmt werden. Dabei wird davon ausgegangen, dass die kleineren Kapillarwellen in horizontal geschichteten Strömungen nur wenig zur Phasenverteilung beitragen, da sie auf der größeren Schwerewelle „mitschwimmen“. Unter Zuhilfenahme der Integraltabellen in [13] folgt dann für die über das Spektrum der Schwerewelle $P_g(q)$ gemittelte Wellenzahl ($\sigma = 0$):

$$\bar{q}_g = \int_0^{\infty} q P_g(q) dq = \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{\Delta\rho g A^2}{E_t}} \quad (4.37)$$

Wie bereits mehrfach erwähnt wurde, sind die oben genannten Gleichungen zur Berechnung der Phasenverteilung bzw. der Wellenspektren für horizontal geschichtete Strömungen hergeleitet worden. In diesen Strömungen wirken sowohl die Gewichtskraft als auch die Oberflächenspannung als rückstellende Kräfte. In vertikalen Schichtenströmungen, wie zum Beispiel einer Ringströmung in einem vertikalen Rohr, wirkt dagegen nur die Kraft aus der Oberflächenspannung, da die Auslenkung der Welle senkrecht zur Erdbeschleunigung stattfindet (vgl. Abb. 4.3). Die Phasenverteilung bzw. die spektralen Verteilungen können daher analog zu den obigen Ausführungen hergeleitet werden, wobei lediglich der Beitrag der potentiellen Energie vernachlässigt werden muss. Für den Gradienten der Phasenverteilung bzw. für die Phasenverteilung in Abhängigkeit der vertikalen Ortskoordinate y in vertikalen Strömungen folgt somit:

$$\frac{d\alpha}{dy} = \alpha(y) (1 - \alpha(y)) \frac{\sigma q^2}{2\rho\bar{k}(y)} \quad (4.38)$$

bzw.

$$\alpha(y) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\int_{y_M}^y \frac{\sigma q^2}{2\rho\bar{k}(y)} dy\right)} \quad (4.39)$$

Die Wellenspektren ergeben sich zu:

$$P_\sigma(E) dE = \frac{1}{2\rho\bar{k}} \exp\left(-\frac{\sigma q^2 h}{8\rho\bar{k}}\right) dE \quad (4.40)$$

bzw. mit $A = hq$

$$P_\sigma(q) dq = \frac{\sigma A}{8\rho\bar{k}} \exp\left(-\frac{\sigma q A}{8\rho\bar{k}}\right) dq \quad (4.41)$$

und daraus dann die mittlere Wellenzahl zur Schließung der Gleichungen 4.38 bzw. 4.39:

$$\bar{q}_\sigma = \int_0^\infty q P_\sigma(q) dq = \frac{8\rho\bar{k}}{\sigma A} \quad (4.42)$$

Auch hier erweisen sich die Integraltabellen in [13] wieder als sehr nützlich.

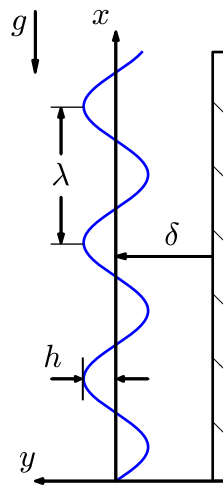


Abbildung 4.3: Vertikale Welle

4.3 Validierung

In diesem Kapitel sollen die beiden in den Kapiteln 4.1 und 4.2 hergeleiteten Modelle anhand mehrerer experimenteller Daten validiert werden. Unglücklicherweise wurden in der Literatur stets Wellenfrequenzspektren angegeben, da sich diese prinzipiell am leichtesten aus den Messdaten bestimmen lassen. Auf eine ausführliche Erklärung der Bestimmung der spektralen Verteilungen aus Messdaten wird an dieser Stelle verzichtet und stattdessen auf die einschlägige Literatur, wie zum Beispiel [62] oder [94], verwiesen.

Aus den Wellenzahlspektren $P(q)dq$ in den Gleichungen 4.36 und 4.41, lässt sich das Wellenfrequenzspektrum allgemein durch Multiplikation mit der Ableitung der Wellenzahl nach der Frequenz bestimmen:

$$P(f) df = P(q) \frac{dq}{df} df \quad (4.43)$$

Bei der Bestimmung der Ableitung $\frac{dq}{df}$ müssen dabei allerdings mehrere Effekte, wie beispielsweise die Wellendispersionsbeziehung berücksichtigt werden. Aber auch der Doppler-Effekt spielt eine Rolle, falls sich die Welle relativ zur Kernströmung ausbreitet.

Wie bereits in Kapitel 2.1.1 erläutert wurde, wird zwischen fließenden und schießenden Strömungen unterschieden, welche durch die Froude-Zahl Fr charakterisiert werden. In fließenden Strömungen ($Fr < 1$) kann sich die Welle sowohl in Richtung einer treibenden Kraft, wie zum Beispiel einer Luftströmung über eine Flüssigkeitsoberfläche, als auch in jede beliebige, durch Reflexionen verursachte Richtung mit der Phasengeschwindigkeit c relativ zur Kernströmung ausbreiten. Aus diesem Grund muss hier der Doppler-Effekt und die damit einhergehende Frequenzverschiebung bei der Auswertung berücksichtigt werden. Die gemessene Frequenz in Abhängigkeit der Wellenzahl lässt sich somit berechnen aus:

$$f = \frac{q}{2\pi}(c \pm u) \quad (4.44)$$

mit der Geschwindigkeit u der Kernströmung, wobei im Fall einer stromab laufenden Welle die Kernströmungsgeschwindigkeit addiert und im Fall einer stromauf laufenden Welle subtrahiert werden muss. Aus Gleichung 4.44 folgt für die Ableitung $\frac{dq}{df}$ dann:

$$\frac{dq}{df} = \frac{1}{\frac{df}{dq}} = \frac{2\pi}{(c \pm u) + q\frac{dc}{dq}} \quad (4.45)$$

In schießenden Strömungen ($Fr > 1$) hingegen kann sich die Welle nur stromab mit der Geschwindigkeit der Kernströmung bewegen. In einem sich mit der Kernströmung mitbewegenden Koordinatensystem zeigen solche Wellen, mit Ausnahme einer mit der Lauflänge exponentiellen Abnahme der Wellenamplitude, keinerlei Bewegung. Im Folgenden werden sie daher *gefrorene* Wellen genannt, während jene in fließenden Strömungen als *laufende* Wellen bezeichnet werden. Die gemessene Frequenz und die Ableitung $\frac{dq}{df}$ der gefrorenen Wellen ergeben sich somit zu:

$$f = \frac{qu}{2\pi} \quad (4.46)$$

$$\frac{dq}{df} = \frac{2\pi}{u} \quad (4.47)$$

Der Übergang von einer fließenden zu einer schießenden Strömung verläuft jedoch nicht abrupt. In einer schießenden Strömung mit einer Froude-Zahl nahe 1 lassen sich daher immer noch laufende Wellen beobachten, die sich im Frequenzspektrum mit den gefrorenen Wellen überlagern. Es lässt sich jedoch zeigen, dass sich die Wellentypen im

Wellenzahlspektrum sauber voneinander trennen lassen. Dazu werden Kapillarkräfte bei der Definition der Froude-Zahl berücksichtigt, die allgemein nach Gleichung 2.1 als das Verhältnis der Geschwindigkeit der Kernströmung u zur Phasengeschwindigkeit c der Welle im Flachwassergebiet definiert ist. Mit Gleichung 2.29 lässt sich eine erweiterte Froude-Zahl Fr^* ableiten:

$$Fr^* = \frac{u}{\sqrt{g\delta + \frac{\sigma q^2 \delta}{\rho_L}}} \quad (4.48)$$

wobei mit δ wiederum die mittlere Wassertiefe bezeichnet wird. Mit $Fr^* = 1$ lässt sich daraus dann die Wellenzahl am Umschlagpunkt zwischen gefrorenen und laufenden Wellen berechnen:

$$q = \sqrt{\frac{\rho_L(u^2 - g\delta)}{\sigma\delta}} \quad (4.49)$$

4.3.1 Horizontale Gas-Flüssigkeitsströmung im Gegenstrom

Horizontale Gas-Flüssigkeitsströmungen im Gegenstrom wurden von Stähler [94] untersucht. Dabei wurden die Volumenströme beider Phasen derart variiert, um sowohl Bereiche fließender als auch schießender Strömungen abzudecken.

Abbildung 4.4 zeigt das mit den Gleichungen 4.36, 4.43 und 4.45 berechnete Frequenzspektrum einer fließenden, teilweise umgekehrten Strömung im Vergleich mit der im Experiment von Stähler [94] (Messpunkt 5) bestimmten spektralen Verteilung. Die Phasengeschwindigkeit der Welle wurde dabei mit dem Ansatz für Tiefwasser aus der linearen Wellentheorie (Gl. 2.28) approximiert und ein Wave Aspect Ratio von 0,25 ($A = 0,25$) gewählt. Alle weiteren Größen, wie die mittlere Wellenamplitude \bar{h} oder die turbulente kinetische Energie $\overline{\rho k}$, sind den Versuchsdaten entnommen worden.

Das statistische Modell ist in der Lage das experimentell bestimmte Spektrum mit guter Genauigkeit für Frequenzen größer 1,6 Hz wiederzugeben. Auch die Maximalfrequenz von ungefähr 2 Hz stimmt mit dem Experiment überein. Einzig für Frequenzen kleiner 1,6 Hz gibt es Abweichungen, die jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit in der Abbildung nicht gezeigt werden. In diesem Frequenzbereich ($f < 1,6 \text{ Hz}$) befinden sich Wellen mit großer Amplitude, für die der gewählte Tiefwasseransatz für die Phasengeschwindigkeit nicht mehr gültig ist, da sie bereits durch den Kanalboden beeinflusst werden.

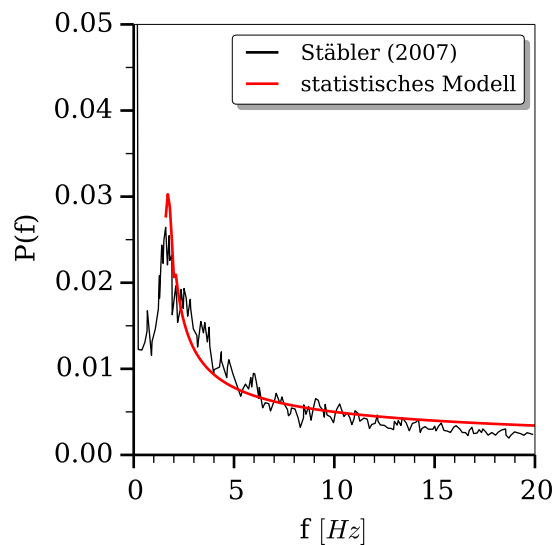


Abbildung 4.4: Frequenzspektrum einer fließenden, teilweise umgekehrten Strömung (Messpunkt 5 in [94])

Den Vergleich zwischen Modell und Experiment für eine schießende Strömung (Messpunkt 74 in [94]) zeigt Abbildung 4.5. Das Wave Aspect Ratio wurde hierbei gleich 0,28 ($A = 0,28$) gewählt. Alle weiteren Größen sind wiederum den experimentellen Daten entnommen. Die mittlere Froude-Zahl Fr liegt mit einem Wert von 1,36 ($Fr^* = 1,08$) nahe 1 und damit im Übergangsbereich von fließender zu schießender Strömung. Es können daher sowohl gefrorene als auch laufende Wellen beobachtet werden, die sich in einem bestimmten Frequenzbereich überlagern. Zur Berechnung der laufenden Wellen muss hier die Phasengeschwindigkeit c der Flachwasserwelle (Gl. 2.29) verwendet werden.

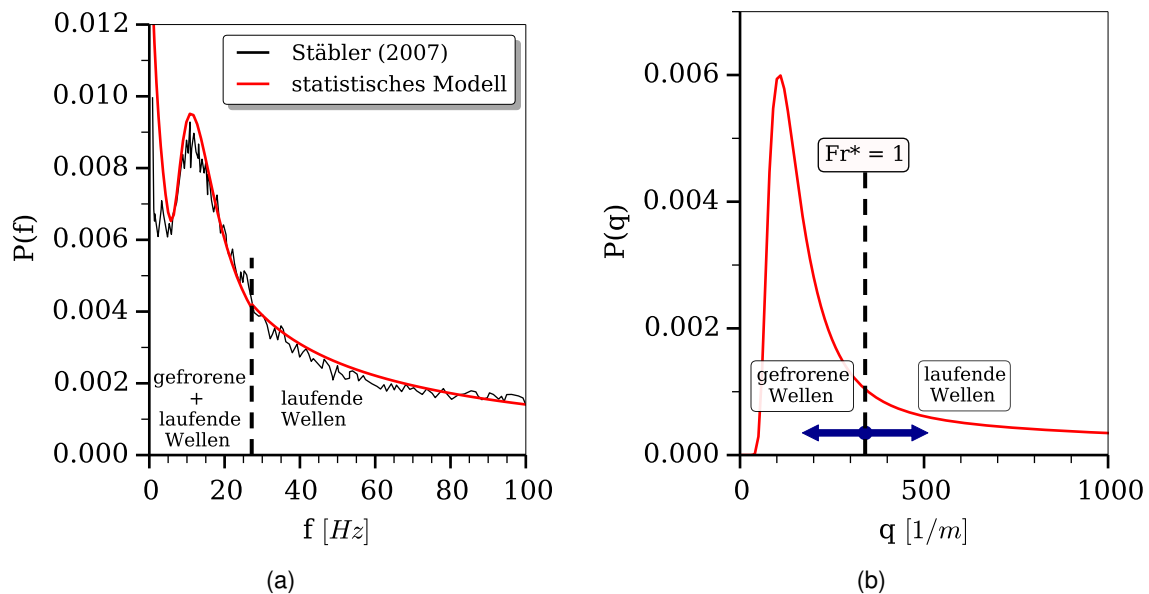


Abbildung 4.5: Frequenz- (a) und Wellenzahlspektrum (b) einer schießenden Strömung (Messpunkt 74 in [94])

Auch für die schießende Strömung kann das statistische Wellenmodell das Frequenzspektrum aus dem Experiment (Abb. 4.5a) gut wiedergeben. Für Frequenzen kleiner ungefähr 27 Hz hat der Übergang von fließender zu schießender Strömung bereits stattgefunden, wodurch sich gefrorene und laufende Wellen in diesem Bereich überlagern, während die Strömung im Frequenzbereich größer 27 Hz weiterhin fließend ist. In Abbildung 4.5b ist zu erkennen, dass die Unterscheidung und gegebenenfalls die Überlagerung von gefrorenen und laufenden Wellen lediglich im Frequenzspektrum durchgeführt werden muss. Im Wellenzahlspektrum können beide Wellentypen klar voneinander abgegrenzt werden. Die Grenzwellenzahl für $Fr^* = 1$ liegt nach Gleichung 4.49 bei ungefähr $340^{1/m}$.

Neben den Frequenzspektren hat Stähler [94] auch die zeitlich gemittelten Phasenverteilungen gemessen und diese mit seinem Modell zur Bestimmung der Phasenverteilungen verglichen. Mit Abbildung 4.6 soll nun das in dieser Arbeit entwickelte Phasenverteilungsmodell sowohl mit den experimentellen Daten als auch mit dem Modell von Stähler [94] für eine fließende und eine schießende Strömung verglichen und diskutiert werden. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass bei der Auswertung des neu entwickelten Phasenmodells, genau wie bei Stähler [94], nur die turbulente kinetische Energie der Flüssigphase berücksichtigt und daher $\overline{\rho k} = \rho_L k_L$ verwendet worden ist. Der Grund hierfür liegt im Fehlen experimenteller Daten für die turbulente kinetische Energie der Gasphase im Wellenbereich aufgrund messtechnischer Schwierigkeiten in diesem Bereich.

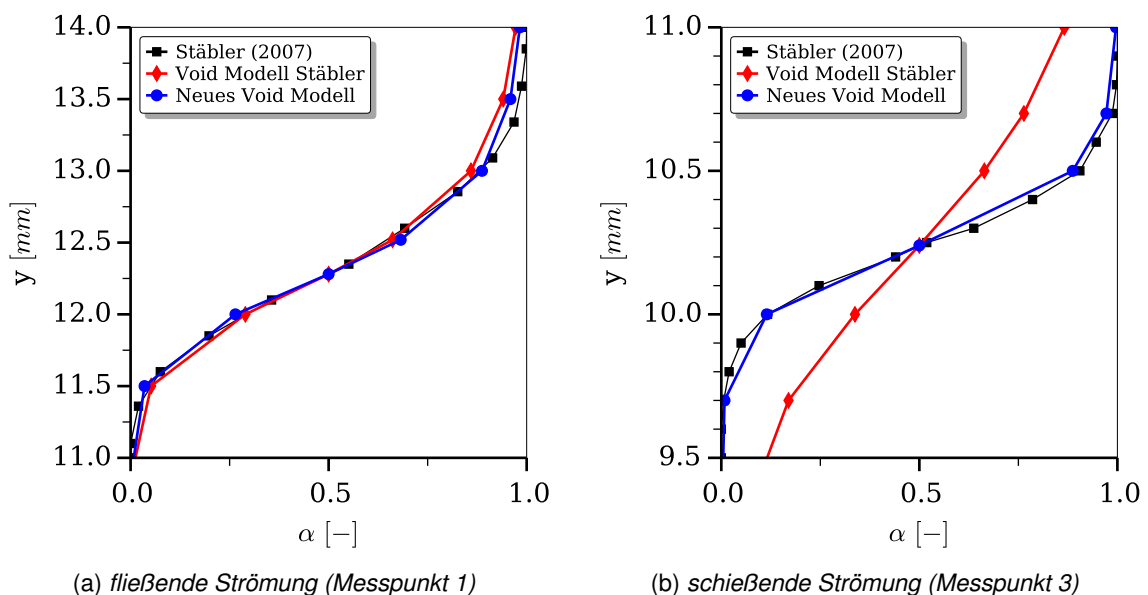


Abbildung 4.6: Vergleich der Modelle zur Berechnung der Phasenverteilung

Wie Abbildung 4.6a zeigt, kann das neue Phasenmodell die experimentell ermittelte Verteilung gut wiedergeben. Es wurde dabei ein Wave Aspect Ratio $A = 0,1$ gewählt, wodurch sich gemäß Gleichung 4.37 eine mittlere Wellenzahl $\bar{q} = 137^{1/m}$ ergibt. Der Unter-

schied zum Phasenmodell von Stähler [94] ist dabei erwartungsgemäß klein, da in fließenden Strömungen die Schwerkkräfte dominieren, die auch von Stähler [94] berücksichtigt wurden. Unterschiede zwischen den beiden Modellen werden erst bei Betrachtung der schießenden Strömung (Abb. 4.6b) deutlich. Hier zeigt das Modell von Stähler [94] große Abweichungen vom Experiment, während das in dieser Arbeit entwickelte Modell mit $A = 0,25$ und $\bar{q} = 522 \text{ }^{1/m}$ gut mit den Versuchsdaten übereinstimmt. Der Grund hierfür liegt in der Berücksichtigung der Kapillarkräfte im neuen Modell, die in schießenden Strömungen nicht mehr vernachlässigt werden dürfen, da hier nur Wellen mit geringer Wellenhöhe, dafür aber mit hoher Wellenzahl auftreten. In beiden Strömungen fällt jedoch auf, dass das Modell kleinere Abweichungen im Bereich der Wellenberge, also im Bereich größeren Gasvolumenanteils ($\alpha > 0,5$) zeigt. Der Grund hierfür ist vermutlich in der Vernachlässigung der Turbulenz der Gasphase zu suchen. Gemäß Gleichung 4.3 überwiegt die Turbulenz der Gasphase für große Gasvolumenanteile. Somit würde die Berücksichtigung der Gasphase den Betrag von $\overline{\rho k}$ in Gleichung 4.17 und damit auch die Steigung der Phasenverteilungskurve in diesem Bereich verändern. Aus diesem Ergebnis wird ersichtlich, wie wichtig auch die Berücksichtigung der Gasphase für die Beschreibung von Oberflächenwellen ist. Falls die experimentellen Daten für die Gasphase nicht vorliegen bzw. aus technischen Gründen überhaupt nicht gemessen werden können, bietet sich die Verwendung geeigneter numerischer Methoden, wie zum Beispiel das CFD-Modell, das in Kapitel 5 hergeleitet wird, als Alternative für die Berechnung der relevanten Strömungsgrößen an.

4.3.2 Horizontale Gas-Flüssigkeitsströmung im Gleichstrom

Horizontale Gas-Flüssigkeitsströmungen im Gleichstrom wurden von Bruno u. McCready [14] in einer Rechteckkanalgeometrie untersucht. In der Literatur wird die Welligkeit einer Wasseroberfläche gewöhnlich mit einem Autoleistungsdichtespektrum, *engl. auto-power spectrum density (APSD)*, beschrieben [9]. Es ist als das Produkt aus dem Quadrat der Wellenamplitude $h^2(f)$ und dem Frequenzspektrum $P(f)$ definiert:

$$APSD = h^2(f)P(f) \quad (4.50)$$

Abbildung 4.7 zeigt die Autoleistungsdichtespektren zweier Messpunkte (a und c in Fig. 10) von Bruno u. McCready [14] im Vergleich mit den berechneten Spektren.

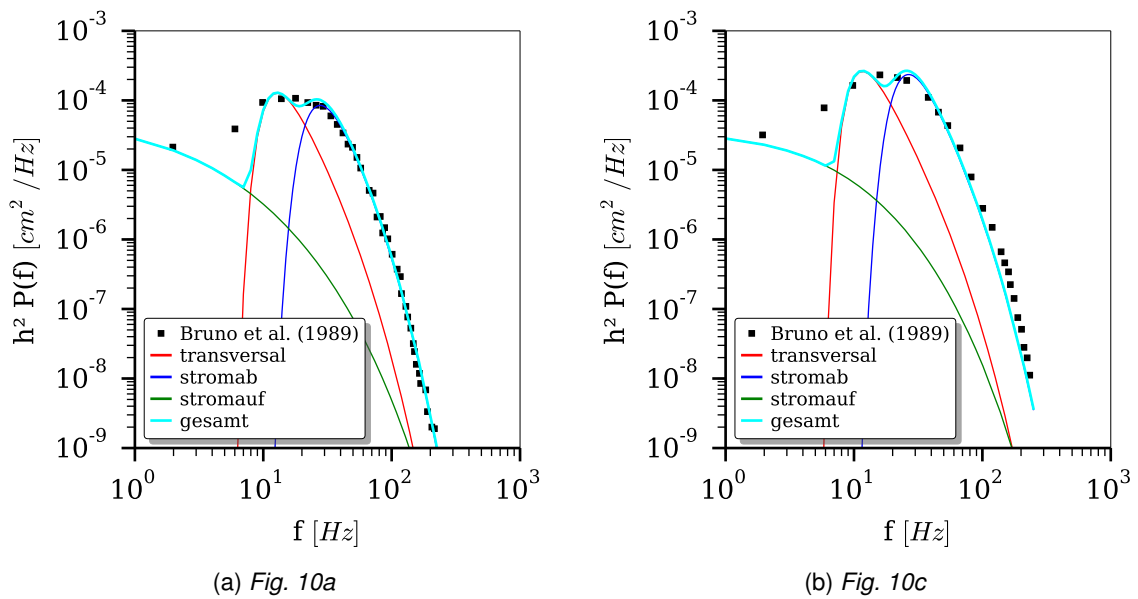


Abbildung 4.7: Autoleistungsdichtespektren horizontaler Zweiphasenströmungen im Gleichstrom [14]

Hierbei mussten mehrere Größen abgeschätzt werden, da sie nicht explizit in [14] angegeben sind. Die turbulente kinetische Energie der Welle wurde aus der mittleren potentiellen Energie der Welle abgeschätzt:

$$E_t \approx \frac{1}{4} \Delta \rho g \bar{h}^2$$

mit dem Quadrat der mittleren Wellenamplitude \bar{h}^2 , das sich aus der Integration des gemessenen Autoleistungsdichtespektrums über alle Frequenzen ergibt:

$$\bar{h}^2 = \int_0^{\infty} h^2(f) P(f) df \quad (4.51)$$

Im Experiment von Bruno u. McCready [14] überlagern sich die zu erwartenden stroma-
blaufenden Wellen mit, vermutlich durch Reflexionen an den Kanalwänden entstan-
denen, stromauf und transversal, also quer zu Hauptströmungsrichtung laufenden Wellen.
Jede der drei Wellen besitzt ein bestimmtes Wave Aspect Ratio A , das nicht von den
jeweils anderen abhängt. Ferner muss bei den stromab und stromauf laufenden Wel-
len zusätzlich der Doppler-Effekt (Gl. 4.44) berücksichtigt werden. Die Geschwindigkeit
der Hauptströmung u ist dabei wiederum eine Unbekannte, die allerdings aus der in [14]

angegebenen Schubspannungsgeschwindigkeit u^* unter Annahme eines laminaren Geschwindigkeitsprofils abgeschätzt werden kann:

$$u \approx \frac{1}{3} \frac{\rho_L \delta u^{*2}}{\mu_L} \quad (4.52)$$

Die genaue Herleitung von Gleichung 4.52 befindet sich im Anhang B. Die abgeschätzte Geschwindigkeit musste leicht korrigiert werden, da die untersuchten Strömungen vollständig turbulent waren. Allerdings sind die Korrekturen nur minimal, was die Annahme eines laminaren Geschwindigkeitsprofils als erste grobe Näherung als durchaus plausibel erscheinen lässt. In Tabelle 4.1 sind alle abgeschätzten Größen nochmals übersichtlich für beide Messpunkte aufgelistet.

Wie man in Abbildung 4.7 sehen kann, können die experimentell ermittelten Spektren für beide Messpunkte gut wiedergegeben werden. Insbesondere im Bereich hoher Frequenzen sind Experiment und Modell, vor allem für Messpunkt 10a, nahezu deckungsgleich. Im Bereich kleiner 10 Hz ergeben sich dagegen größere Abweichungen in den Spektren. Als Erklärung hierfür kann aufgeführt werden, dass sicherlich nicht alle Effekte, die bei Berechnung der Spektren im Frequenzbereich beachtet werden müssen, berücksichtigt wurden. Es muss an dieser Stelle allerdings angemerkt werden, dass die Bestimmung der Daten aus dem Schaubild in [14] bei Messpunkt 10c nicht immer eindeutig war, da mehrere Messpunkte in einem Schaubild zusammengetragen sind, die sich vereinzelt überlagern und daher nur schwer voneinander zu unterscheiden sind.

Tabelle 4.1: Übersicht über die abgeschätzten Größen zur Berechnung des Autoleistungsdichtespektrums bei Bruno u. McCreedy [14]

Fig. 10	E_t [J/m^2]	A_{ab} [-]	A_{auf} [-]	A_{trans} [-]	u_{lam} [m/s]	u_{korr} [m/s]
a	0,0009	0,40	0,20	0,38	0,12	0,25
c	0,0020	0,50	0,30	0,50	0,23	0,30

4.3.3 Meeresströmung

Eine weitere Form der horizontal geschichteten Gas-Flüssigkeitsströmungen sind Meeresströmungen. Winde auf den Ozeanen fachen dabei Oberflächenwellen von oft mehreren Metern Höhe und Länge sowie mehreren (tausend) Kilometern Anlaufänge an. Bereits 1964 hat Moskowitz [70] mithilfe von Wetterschiffen Messungen in Ozeanen durchgeführt und spektrale Verteilungen von voll ausgebildetem, durch Wind verursachten

Seegang in Abhängigkeit verschiedener Windgeschwindigkeiten ermittelt. Anhand dieser Messdaten konnten Pierson u. Moskowitz [83] im selben Jahr ein empirisches Modell zur Berechnung des Seegangspektrums (Gl. 2.39) ableiten. Dieses sei an dieser Stelle für den folgenden Vergleich mit dem in dieser Arbeit hergeleiteten Modell nochmals angegeben:

$$P(\omega)d\omega = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left(-\beta \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right) d\omega$$

Da bei Meereswellen die potentielle Energie aufgrund deren Größe klar dominiert ($h \gg q$), kann der Anteil der Oberflächenenergie in Gleichung 4.19 vernachlässigt werden. Mit $q = \omega^2/g$ und $dq/d\omega = 2\omega/g$ folgt dann für das in dieser Arbeit entwickelte statistische Modell:

$$P(\omega)d\omega = \frac{\Delta\rho g^3 A^2}{2E_t \omega^5} \exp\left(-\frac{\Delta\rho g^3 A^2}{8E_t \omega^4}\right) d\omega \quad (4.53)$$

Damit bestätigt das neue Modell die von Pierson u. Moskowitz [83] empirisch, durch probierenden Vergleich gefundene $1/\omega^5$ - Abhängigkeit im Vorfaktor bzw. die $1/\omega^4$ - Abhängigkeit im Exponenten der Gleichungen 2.39 und 4.53.

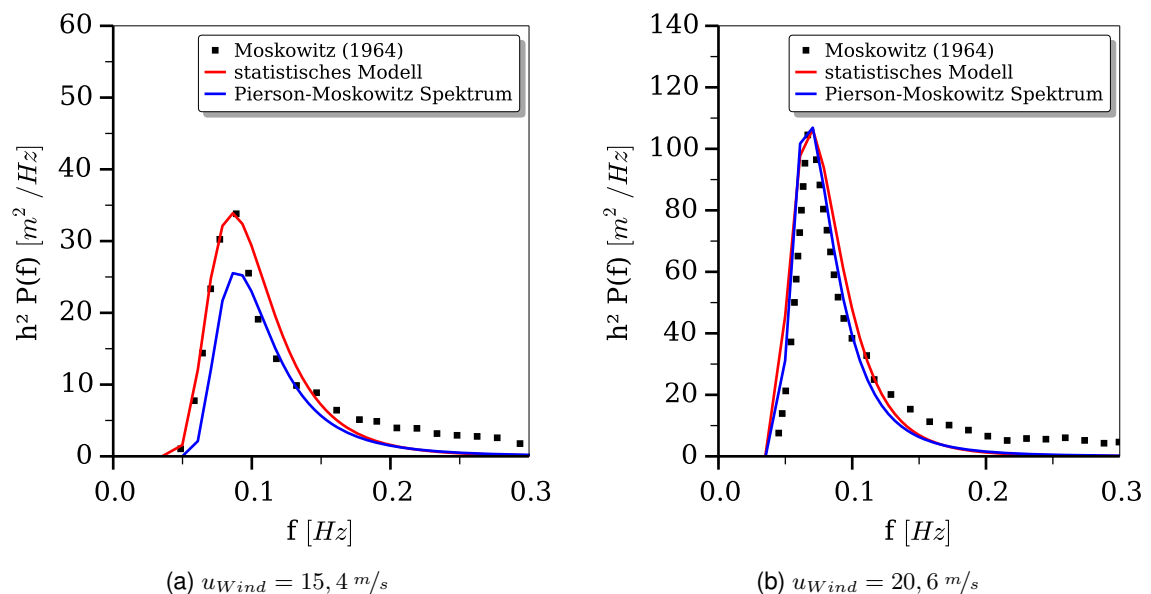


Abbildung 4.8: Autoleistungsdichtespektren von Meeresströmungen bei unterschiedlichen Windgeschwindigkeiten[70]

Abbildung 4.8 zeigt die Ergebnisse beider Modelle im Vergleich mit den gemessenen Daten von Moskowitz [70] für Windgeschwindigkeiten von $15,4 \text{ m/s}$ bzw. $20,6 \text{ m/s}$. Für das neue statistische Modell musste dafür das Wave Aspect Ratio A , die turbulente kinetische

Energie der Welle $E_t \approx 1/4 \Delta \rho g \bar{h}^2$ sowie die mittlere Wellenhöhe \bar{h} abgeschätzt werden. Die genauen Werte für die Berechnung sind in Tabelle 4.2 übersichtlich aufgelistet.

Die Spektren bei beiden Windgeschwindigkeiten können gut mit dem neuen statistischen Modell wiedergegeben werden. Sowohl die Lage als auch die Höhe des Maximums stimmen unter Berücksichtigung der gemachten Abschätzungen mit den gemessenen Daten überein. Verglichen mit dem empirischen Modell von Pierson u. Moskowitz [83], das die Höhe des Maximums bei einer Windgeschwindigkeit von $15,4 \text{ m/s}$ falsch berechnet, liefert das neue Modell damit bessere Ergebnisse. Beide Modelle zeigen jedoch Abweichungen von den Messungen für Frequenzen größer ungefähr $0,13 \text{ Hz}$. Es sollte jedoch an dieser Stelle auch darauf hingewiesen werden, dass im Modell allein von lokaler Wellenentstehung ausgegangen wird. Auf den Ozeanen können lokal jedoch auch Wellen gemessen werden, deren Ursprung, wie anfangs erwähnt, oft hunderte Kilometer entfernt vom Ort der Messung liegt. Somit sind die gemessenen Wellen in den Weltmeeren nicht ausschließlich auf lokale Effekte zurückzuführen.

Tabelle 4.2: Übersicht über die abgeschätzten Größen zur Berechnung des Autoleistungsdichtespektrums bei Moskowitz [70]

u_{Wind} [m/s]	E_t [J/m ²]	A [-]	\bar{h} [m]
15,4	705,4	0,11	0,53
20,6	1814,35	0,11	0,84

4.3.4 Vertikale Gas-Flüssigkeitsströmung im Gleichstrom

Vertikale Gas-Flüssigkeitsströmungen im Gleichstrom wurden von Belt u. a. [9] untersucht, wobei unter anderem Filmdicken der Flüssigkeitsströmung und Wellenspektren in Abhängigkeit verschiedener Gas- und Flüssigkeitsvolumenströmen gemessen worden sind. Die hierbei auftretenden Wellen sind ausschließlich Kapillarwellen, da der Vektor der Erdbeschleunigung senkrecht auf der Auslenkungsrichtung der Wellen steht und somit keine Kraft infolge der Gravitation entgegen der Auslenkung ausgeübt werden kann. Das Wellenspektrum kann folglich unter Vernachlässigung der potentiellen Energie gemäß Gleichung 4.40 bzw. Gleichung 4.41 ermittelt werden.

Abbildung 4.9 zeigt die Autoleistungsdichtespektren für zwei verschiedene Leerrohrgeschwindigkeiten der Flüssigphase U_{LS} bei einem Gasdurchsatz von $U_{GS} = 42 \text{ m/s}$. Da im Experiment keinerlei Turbulenzgrößen gemessen worden sind, musste die turbulente kinetische Energiedichte $\overline{\rho k}$ abgeschätzt werden. Eine weitere Unbekannte war wiederum das Wave Aspect Ratio A . Es musste dabei allerdings beachtet werden, dass die Wellenamplitude h bei den untersuchten Strömungen durch die Filmdicke δ begrenzt war.

Wellen mit Wellenamplituden im Bereich der Filmdicke werden durch den Bodeneinfluss gedämpft, wodurch ein weiteres Anwachsen der Welle nicht mehr möglich ist. Belt u. a. [9] fanden einen linearen Zusammenhang zwischen der Filmdicke und der mittleren Wellenamplitude \bar{h} (s. Fig. 19 in [9]):

$$\bar{h} = 1,04 (\delta - \delta_{min}) \quad (4.54)$$

mit einer minimalen Filmdicke $\delta_{min} = 0.0001m$. Aus diesem Grund wurde die Wellenamplitude bei den Berechnungen der Wellenspektren in Abbildung 4.9 derart gewählt, dass sie den Wert der mittleren Amplitude nicht überschreiten kann:

$$h = \min(\bar{h}; A/q) \quad (4.55)$$

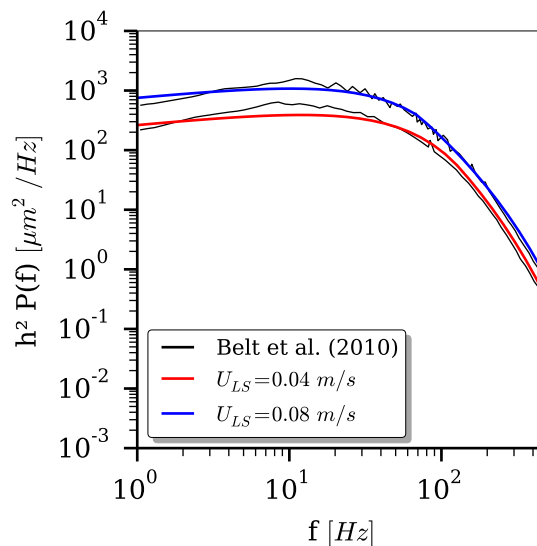


Abbildung 4.9: Autoleistungsdichtespektren zweier vertikaler Ringströmungen [9]

In Tabelle 4.3 sind alle verwendeten Größen übersichtlich aufgelistet.

Tabelle 4.3: Übersicht über die verwendeten Größen zur Berechnung des Autoleistungsdichtespektrums bei Belt u. a. [9]

U_{LS} [m/s]	$\bar{\rho k}$ [J/m ³]	A [—]	δ [m]	\bar{h} [m]
0,04	3,1	0,4	$3,20e^{-4}$	$2,29e^{-4}$
0,08	3,5	0,4	$2,47e^{-4}$	$1,53e^{-4}$

Mit den gewählten Werten kann das in dieser Arbeit entwickelte Wellenmodell die gemessenen Spektren in vertikalen Strömungen ebenfalls gut wiedergeben. Vor allem im Bereich hoher Frequenzen sind die Abweichungen klein. Im Bereich niedriger Frequenzen ($f < 20Hz$) zeigen sich einige Abweichungen zwischen Experiment und Modell, wobei die Peakfrequenz richtig berechnet und lediglich die Höhe des Maximums zu gering vorausgesagt wird.

5 Numerische Modellierung geschichteter Zweiphasenströmungen

Nachdem im vorherigen Kapitel die Statistik von Oberflächenwellen in geschichteten Strömungen behandelt worden ist, soll in diesem Kapitel nun das numerische Modell zur Beschreibung geschichteter Zweiphasenströmungen entwickelt werden. Wie bereits in Kapitel 2.3 erläutert, ist es im Allgemeinen für ingenieurtechnische Anwendungen nicht wichtig jeden einzelnen Strömungseffekt bis ins kleinste Detail aufzulösen. Es kommt vielmehr auf einen guten Kompromiss aus Genauigkeit und Rechengeschwindigkeit an, weshalb auf Modelle zurückgegriffen werden muss, die die Auswirkungen der kleinskaligen Effekte auf die Hauptströmung abbilden können. Bezogen auf geschichtete Zweiphasenströmungen ist es also nicht wichtig jede kleine Kapillarwelle an der Grenzfläche zwischen den beiden Phasen zu berechnen, solange ihre Wechselwirkung mit der Hauptströmung mit einem Modell hinreichend genau beschrieben werden kann.

Das statistische Wellenmodell aus Kapitel 4 hat gezeigt, dass die Welle in enger Wechselwirkung mit der Turbulenz der Strömung steht. Leider sind die gebräuchlichen Wirbelviskositätsturbulenzmodelle, wie beispielsweise das $k-\epsilon$ Modell, ursprünglich für einphasige Strömungen entwickelt und später einfach aus Mangel an Alternativen für Mehrphasenströmungen übernommen worden. Es ist daher nicht verwunderlich, dass diese Turbulenzmodelle gute Ergebnisse innerhalb einer Phase und weit weg von der Grenzfläche liefern, wohingegen sie im Bereich der Grenzfläche, wo im zeitlichen Mittel aufgrund der Wellenbildung beide Phasen anteilig angetroffen werden, dann aber versagen [24, 36]. Aus diesem Grund ist in dieser Arbeit ein neues numerisches Modell entwickelt worden, das sich der Wellenstatistik bedient und in der Lage ist, Welleneffekte an der Phasengrenzfläche zu berücksichtigen. Dieses Modell wurde für numerische Simulationen in das freie CFD-Software Paket OpenFOAM implementiert, welches im Folgenden zu aller erst vorgestellt werden soll.

5.1 Das CFD-Software Paket OpenFOAM

OpenFOAM (engl. Abk.: *Open Source Field Operation and Manipulation*) ist eine quell-offene Bibliothek verschiedener C++ Klassen zur numerischen Lösung kontinuumsmechanischer (hauptsächlich strömungsmechanischer) Probleme. Das Ziel der Entwickler dabei ist es, dem Benutzer ein Werkzeug an die Hand zu geben, das einerseits möglichst einfach zu bedienen ist, andererseits aber auch die Möglichkeit bietet, effiziente numerische Löser, auch *solver* genannt, selbst zu entwickeln. Das wird durch eine, eng an den bekannten mathematischen Notationen für Tensoren und partielle Differentialgleichungen angelehnte Syntax erreicht [77, 107]. Somit können Differentialgleichungen in der selben Schreibweise eingegeben werden, wie es der Benutzer aus Büchern der Höheren Mathematik gewohnt ist, ohne sich dabei allzu große Gedanken über die Diskretisierung der einzelnen Differentialoperatoren machen zu müssen. Wie in der Strömungsmechanik üblich, erfolgt die Diskretisierung der Transportgleichungen in OpenFOAM auf Grundlage der Finiten-Volumen-Methode. OpenFOAM stellt dem Benutzer bereits eine große Auswahl an Lösern für verschiedenste kontinuumsmechanische Probleme, aber auch sonstige Pre- und Postprocessing-Tools zur Verfügung, die vom Benutzer nach Belieben an die untersuchte Problemstellung angepasst werden können. Im Folgenden sollen nun der bereits in OpenFOAM implementierte Löser für Zweiphasenströmungen *interFoam* sowie die Turbulenzmodellierung in *interFoam* vorgestellt werden, die als Grundlage für das in dieser Arbeit entwickelte numerische Modell dienen. Alle Aussagen beziehen sich dabei auf die zu Beginn dieser Arbeit aktuellen Version 2.2.0. Für weitere Informationen bezüglich OpenFOAM sei an dieser Stelle auf die Dissertationen von Jasak [45], Rusche [89] und Damián [19] und das Handbuch von OpenFOAM [77] verwiesen.

5.1.1 Der Zweiphasenlöser *interFoam*

interFoam ist ein auf der Volume-of-Fluid Methode basierender Zweiphasenlöser für zwei inkompressible, nicht mischbare Fluide. Wie im Kapitel 2.3.1 beschrieben, handelt es sich dabei um ein homogenes Zweiphasenmodell, wo sich beide Fluide ein gemeinsames Strömungsfeld teilen, für das ein einziger Satz von Erhaltungsgleichungen gelöst wird. Wärme- und Massenaustausch über die Grenzfläche der beiden Phasen werden nicht berücksichtigt. Die zu lösende Kontinuitäts- bzw. Impulsgleichung lautet:

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho [\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}]) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} + \sigma \kappa \nabla \alpha \quad (5.2)$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor \mathbf{U} , der Dichte ρ , dem Druck p , dem Schubspannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und der Erdbeschleunigung \mathbf{g} . Für Newtonsche Fluide, wie sie in dieser Arbeit ausschließlich untersucht werden, kann der Schubspannungstensor geschrieben werden als:

$$\boldsymbol{\tau} = \mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \quad (5.3)$$

Mit den letzten Term auf der rechten Seite von Gleichung 5.2 wird die Kraft aus der Oberflächenspannung nach Brackbill u. a. [12] beschrieben. Dabei handelt es sich ausschließlich um zeitlich gemittelte Größen des Zweiphasengemisches, auf deren besondere Kennzeichnung aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wurde.

Bei einer homogenen Zweiphasenmodellierung werden die beiden Fluide mittels einer Phasenindikatorfunktion unterschieden. Wie bei der Volume-of-Fluid Methode üblich, fungiert der Gasvolumenanteil α , auch *void fraction* genannt, auch in interFoam als Phasenindikator, für den eine eigene Transportgleichung aufgestellt und gelöst wird:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad (5.4)$$

Auch hier wurde zur besseren Übersicht auf den Index G verzichtet. Für die reine Gasphase gilt demnach $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ für die reine Flüssigkeitsphase und $0 < \alpha < 1$ im Übergangsbereich von einer zur anderen Phase. Damit lassen sich die lokale Dichte ρ in Gleichung 5.2 bzw. die lokale dynamische Viskosität μ in Gleichung 5.3 schreiben als:

$$\rho = \alpha \rho_G + (1 - \alpha) \rho_L \quad (5.5)$$

bzw.

$$\mu = \alpha \mu_G + (1 - \alpha) \mu_L \quad (5.6)$$

Durch die Diskretisierung von Gleichung 5.4 mittels eines Differenzen-Verfahrens entstehen zusätzliche Diffusionsterme, die zu einer Verschmierung der Grenzfläche führen. Anhand einer eindimensionalen Form von Gleichung 5.4 mit konstanter Geschwindigkeit u

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (5.7)$$

kann dies sehr einfach gezeigt werden.

Die Diskretisierung von Gleichung 5.7 führt zu:

$$\frac{\alpha_i^{n+1} - \alpha_i^n}{\Delta t} + u \frac{\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n}{\Delta x} = 0 \quad (5.8)$$

Durch eine Taylor-Reihen-Entwicklung erhält man schließlich für α_i^{n+1} und α_{i+1}^n :

$$\alpha_i^{n+1} = \alpha_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{x=x_i}^{t=n\Delta t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \right|_{x=x_i}^{t=n\Delta t} + \dots \quad (5.9)$$

$$\alpha_{i+1}^n = \alpha_i^n + \Delta x \left. \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right|_{x=x_i}^{t=n\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right|_{x=x_i}^{t=n\Delta x} + \dots \quad (5.10)$$

Einsetzen der Gleichungen 5.9 und 5.10 in Gleichung 5.8 liefert:

$$\frac{\alpha_i^{n+1} - \alpha_i^n}{\Delta t} + u \frac{\alpha_{i+1}^n - \alpha_i^n}{\Delta x} = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \dots \quad (5.11)$$

wobei nun der letzte Term auf der rechten Seite als zusätzlicher Diffusionsterm zur Verschmierung der Grenzfläche führt. Um die numerische Diffusion möglichst gering zu halten, wird in interFoam ein zusätzlicher Kompressionsterm in Gleichung 5.4 eingeführt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha + \nabla \cdot [\alpha(1 - \alpha)\mathbf{U}_r] = 0 \quad (5.12)$$

mit der Kompressionsgeschwindigkeit $\mathbf{U}_r = K_\alpha \mathbf{n} |\mathbf{U}|$ und einer Konstanten K_α . Aufgrund der Multiplikation mit $\alpha(1 - \alpha)$ ist der Kompressionsterm nur im Bereich der Phasengrenzfläche aktiv und beeinflusst die Ergebnisse in den Bereichen weiter entfernt von der Grenzfläche kaum [89].

Um die Definition der Druckrandbedingungen zu erleichtern und den numerischen Ablauf effizienter zu machen [10, 89], wird ein modifizierter Druck p_{rgh} eingeführt, der sich aus der Differenz des Gesamtdruckes und des hydrostatischen Druckes berechnet:

$$p_{rgh} = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \quad (5.13)$$

mit dem Ortsvektor \mathbf{x} . Damit folgt für den Gradienten des modifizierten Druckes:

$$\nabla p_{rgh} = \nabla p - \nabla(\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) = \nabla p - \rho \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \nabla \rho \quad (5.14)$$

Durch einfache Umformung von Gleichung 5.14 erhält man:

$$-\nabla p + \rho \mathbf{g} = -\nabla p_{rgh} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \nabla \rho \quad (5.15)$$

Gleichung 5.15 eingesetzt in Gleichung 5.2, liefert dann die in interFoam implementierte Impulsgleichung:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho [\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}]) = -\nabla p_{rgh} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \nabla \rho + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)) + \sigma \kappa \nabla \alpha \quad (5.16)$$

5.1.2 Turbulenzmodellierung in interFoam

In Verbindung mit interFoam lassen sich eine Vielzahl bereits implementierter Turbulenzmodelle aus dem Bereich der *Large Eddy Simulation (LES)* und dem Bereich der *Reynolds-gemittelten* Modelle auswählen. Im Folgenden wird lediglich auf Letztere näher eingegangen, da mit dem $k - \epsilon$ Turbulenzmodell nach Launder u. Sharma [56] und dem $k - \omega$ *SST* Modell nach Menter [63, 64] ausschließlich *RANS*-Modelle in dieser Arbeit verwendet werden. Beide genannten Modelle gehören zur Gruppe der in Kapitel 2.3.2 beschriebenen Wirbelviskositätsmodelle, bei denen der in Gleichung 2.69 durch die Mittelung entstandene Term als zusätzlicher viskoser Spannungstensor mit der Wirbelviskosität μ_t (Gl. 2.70) modelliert wird.

In der Impulsgleichung 5.16 wird dazu die dynamische Viskosität μ durch eine effektive dynamische Viskosität μ_{eff} ersetzt, die sich aus der Summe der dynamischen Viskosität und der zusätzlichen turbulenten Wirbelviskosität berechnet:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho [\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}]) = -\nabla p_{rgh} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \nabla \rho + \nabla \cdot (\mu_{eff} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)) + \sigma \kappa \nabla \alpha \quad (5.17)$$

mit $\mu_{eff} = \mu + \mu_t$.

Die Wirbelviskosität wiederum wird mit Gleichung 5.18 im Falle des $k - \epsilon$ bzw. mit Gleichung 5.19 im Falle des $k - \omega$ *SST* Modells bestimmt:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.18)$$

$$\mu_t = \rho \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega ; SF_2)} \quad (5.19)$$

mit der turbulenten kinetischen Energie k , der turbulenten Dissipation ϵ , der spezifischen turbulenten Dissipationsrate ω , den Konstanten $C_\mu = \beta^* = 0,09$ und $a_1 = 0,31$, $S = \sqrt{(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \nabla \mathbf{U}}$ und der Funktion F_2 :

$$F_2 = \tanh \left(\max \left[2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right] \right) \quad (5.20)$$

Darin sind y der Abstand zur nächstgelegenen Wand und ν die kinematische Viskosität.

Für die turbulenten Größen k und ϵ bzw. ω wird jeweils eine Transportgleichung gelöst. Im Falle des $k - \epsilon$ Modells:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}k) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \epsilon \quad (5.21)$$

und

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\epsilon) = \nabla \cdot \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + \frac{\epsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \epsilon) \quad (5.22)$$

mit der turbulenten kinematischen Viskosität ν_t , dem turbulenten Produktionsterm $P_k = \nu_t (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \nabla \mathbf{U}$ sowie den Konstanten $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\epsilon = 1,3$, $C_1 = 1,44$ und $C_2 = 1,92$.

Für das $k - \omega$ SST Modell werden folgende Transportgleichungen berechnet:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}k) = \nabla \cdot \left((\nu + \sigma_k \nu_t) \nabla k \right) + P_k - \beta^* k \omega \quad (5.23)$$

und

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U}\omega) = \nabla \cdot \left((\nu + \sigma_\omega \nu_t) \nabla \omega \right) + \gamma S^2 - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{\nabla k \nabla \omega}{\omega} \quad (5.24)$$

Darin setzen sich die σ_k , σ_ω , β und γ aus der allgemeinen Vorschrift $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$ zusammen mit $\sigma_{k1} = 0,85$, $\sigma_{k2} = 1,0$, $\sigma_{\omega 1} = 0,5$, $\sigma_{\omega 2} = 0,856$, $\beta_1 = 0,075$, $\beta_2 = 0,0828$, $\gamma_1 = 0,56$ und $\gamma_2 = 0,44$.

F_1 ist wiederum eine Funktion des Wandabstandes:

$$F_1 = \tanh \left(\min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right); \frac{4\rho\sigma_{\omega} 2k}{CD_{k\omega} y^2} \right]^4 \right) \quad (5.25)$$

mit

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\rho\sigma_{\omega} 2 \frac{\nabla k \nabla \omega}{\omega}; 10^{-10} \right) \quad (5.26)$$

Das Ziel von Menter [63, 64] war es, die Vorteile des Standard- $k - \epsilon$ Modell in wandentfernten Bereichen und mit denen des $k - \omega$ Modells nach Wilcox [108] in wandnahen Bereichen der Strömung miteinander zu kombinieren [26, 63, 64], wobei mittels der Funktionen F_1 und F_2 zwischen den beiden Modellen gewechselt werden kann.

In den Gleichungen 5.21 bis 5.24 fällt auf, dass die Dichte ρ als konstant angenommen wurde. Das ist jedoch nur bei inkompressiblen Einphasenströmungen zulässig, wohingegen die Dichte bei kompressiblen Ein- oder Mehrphasenströmungen als zeitlich bzw. örtlich veränderbare Größe berücksichtigt werden muss. Aber auch bei der numerischen Berechnung von inkompressiblen Mehrphasenströmungen mithilfe eines homogenen Strömungsmodells weist die Dichte nach Gleichung 5.5 eine örtliche Abhängigkeit auf und muss in den Transportgleichungen beachtet werden. Aus diesem Grund wurden die Gleichungen 5.21 bis 5.24 in dieser Arbeit zunächst unter Berücksichtigung der Dichte ρ umgeschrieben und berichtigt in interFoam implementiert:

Zweiphasen - $k - \epsilon$ Modell:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} k) = \nabla \cdot \left(\rho \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + \rho P_k - \rho \epsilon \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \epsilon) = \nabla \cdot \left(\rho \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + \frac{\rho \epsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \epsilon) \quad (5.28)$$

Zweiphasen - $k - \omega$ SST Modell:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} k) = \nabla \cdot \left(\rho (\nu + \sigma_k \nu_t) \nabla k \right) + \rho P_k - \rho \beta^* k \omega \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \omega) = \nabla \cdot \left(\rho (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \nabla \omega \right) + \rho \gamma S^2 - \rho \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \rho \sigma_{\omega} 2 \frac{\nabla k \nabla \omega}{\omega} \quad (5.30)$$

5.2 Zweischichten-Turbulenzmodell für geschichtete Zweiphasenströmungen

Wie bereits zu Beginn von Kapitel 5 erwähnt, versagen die Standard-Wirbelviskositätsmodelle bei geschichteten Zweiphasenströmungen im Bereich der Phasengrenzfläche, vor allem dann, wenn sich Oberflächenwellen an der freien Oberfläche ausbilden. Aus diesem Grund wurden in der Vergangenheit vermehrt Versuche unternommen mit neuen Modellierungsansätzen die Turbulenz unter den Wellen abbilden zu können, u.a. von [2], [18], [44], [61] und [111]. Ein sehr interessanter Ansatz ist das in Kapitel 2.3.3 erläuterte Zweischichten-Turbulenzmodell von Berthelsen u. Ytrehus [11]. Das ursprünglich von Chen u. Patel [17] entwickelte Modell, das die Ungenauigkeiten des Standard – $k - \epsilon$ Modells in wandnahen Region überbrückte, adaptierten sie auf geschichtete Zweiphasenströmungen in geneigten Rohren. Im Zweischichten-Turbulenzmodell wird das Strömungsfeld in verschiedene Regionen aufgeteilt - in Regionen nahe physikalischen Rändern, wie den Kanalwänden oder der freien Oberfläche, und in Regionen, die sich weiter entfernt von diesen Rändern befinden. Während in den randentfernten Gebieten das Standard – $k - \epsilon$ Modell verwendet wird, wird nahe der Wände und der freien Oberfläche ein einfacheres Eingleichung – $k - l$ Modell appliziert. Wie die Rohrwände, fassen Berthelsen u. Ytrehus [11] die wellige Phasengrenzschicht als eine raue Wand auf, die mit den Erweiterungen des Zweischichten-Turbulenzmodells von Patel u. Yoon [79] und Durbin u. a. [23] für raue Wände behandelt wird. Hierbei wird der erhöhte Widerstand aufgrund der Wandrauheit durch einen zusätzlichen Längenparameter im turbulenten Längenmaß l berücksichtigt. Dieser Längenparameter ist eine Funktion eines äquivalenten Rauigkeitsparameters, der wiederum abhängig von der Sandkornrauigkeit der Rohrwände bzw. von einer empirisch bestimmten Rauigkeit der Phasengrenzfläche ist.

Das Zweischichten-Turbulenz-Ansatz bietet also eine einfache Möglichkeit die Auswirkung von Oberflächenwellen auf die Turbulenz der Strömung zu erfassen und wird daher auch in dieser Arbeit verwendet. Wie in Abbildung 5.1 gezeigt, wird im Gegensatz zu Berthelsen u. Ytrehus [11] jedoch ausschließlich der Wellenbereich mit dem Zweischichten-Ansatz behandelt, während an den Kanalwänden Wandfunktionen zum Einsatz kommen. Außerdem wird mit der Wellenamplitude ein weniger empirisch bestimmter Ausdruck für das turbulente Längenmaß des Eingleichung-Turbulenzmodells im inneren Wellenbereich gewählt. Sie berechnet sich aus der halben Wellenhöhe H . In den äußeren Bereichen werden hingegen das Zweiphasen – $k - \epsilon$ oder das Zweiphasen – $k - \omega$ SST Modell verwendet. Die Grenzen des inneren Bereichs werden als Vielfaches der Wellenhöhe oberhalb und unterhalb der mittleren Flüssigkeitshöhe y_M definiert. Die Konstanten C_L und C_G werden in Kapitel 5.3.4 mithilfe einer Parameterstudie bestimmt.

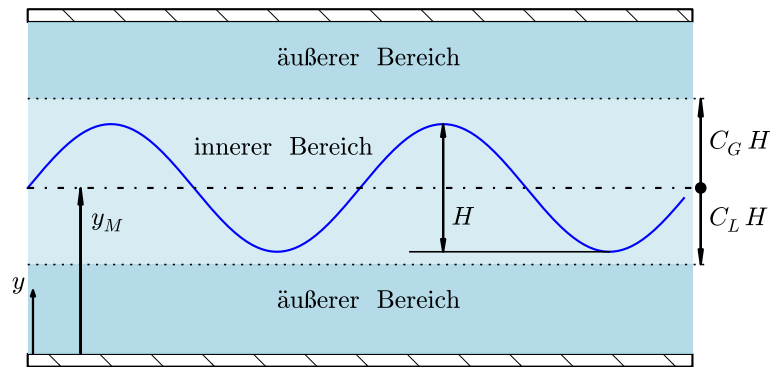


Abbildung 5.1: Bereiche des Zweischichten-Turbulenzmodelles

Allgemein wird die turbulente Wirbelviskosität im gesamten Strömungsfeld dann mit Gleichung 5.31 bestimmt:

$$\mu_t = \rho \sqrt{k} l_\mu \quad (5.31)$$

mit dem charakteristischen turbulenten Längenmaß l_μ , das je Bereich unterschiedlich berechnet wird:

$$l_\mu = \begin{cases} C_{in} \frac{1}{2} H & , \text{für } y_M - C_L H < y < y_M + C_G H \\ C_\mu \frac{k^{3/2}}{\epsilon} & , \text{falls } k - \epsilon \text{ Modell} \\ \frac{a_1 \sqrt{k}}{\max(a_1 \omega; SF_2)} & , \text{falls } k - \omega \text{ SST Modell} \end{cases} \quad (5.32)$$

mit einer Konstanten C_{in} , die ebenfalls in Kapitel 5.3.4 ermittelt wird. Die Wellenhöhe H in Gleichung 5.32 ist bisher allerdings noch eine Unbekannte, die es zu bestimmen gilt. Prinzipiell ist der Wellenbereich dadurch gekennzeichnet, dass dort im zeitlichen Mittel beide Phasen anzutreffen sind, d.h. wo $0 < \alpha < 1$ gilt. Wie Abbildung 5.2 verdeutlicht, lässt sich die Wellenhöhe dann unter Verwendung von Gleichung 4.17 aus der Wellenstatistik wie folgt abschätzen:

$$H \approx \frac{1}{\left. \frac{d\alpha}{dy} \right|_{\alpha=0,5}} \quad (5.33)$$

Gleichung 5.33 liefert dabei keineswegs die maximal auftretende Wellenhöhe, die sich aus der gesamten Breite des Zweiphasenbereiches ($0 < \alpha < 1$) ergeben würde, sondern

vielmehr eine Art durchschnittliche Wellenhöhe. Eine maximale Wellenhöhe ließe sich aus der Theorie ohnehin nicht bestimmen, da sich der Verlauf des Gasvolumenanteils asymptotisch seinen beiden Grenzen annähert und somit theoretisch auch Wellen mit unendlicher Amplitude auftreten können. Daher stellt Gleichung 5.33 ein plausibles charakteristisches Längenmaß für die Wellenhöhe dar, die für die folgenden Betrachtungen als mittlere Wellenhöhe definiert werden soll.

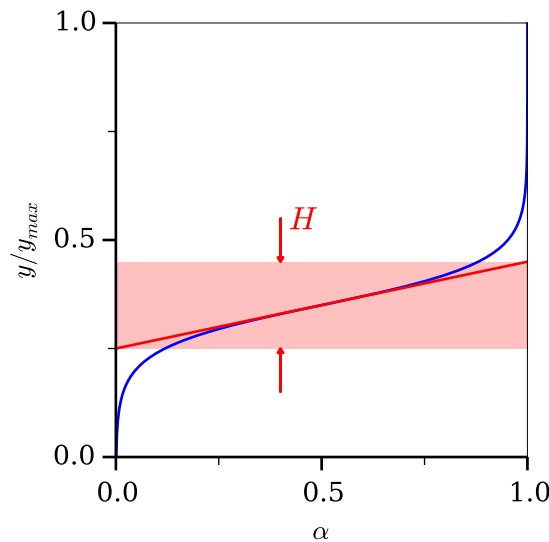


Abbildung 5.2: Abschätzen der Wellenhöhe aus dem Gasvolumenverteilung

5.3 Implementierung des Zweischichten- Turbulenzmodells in OpenFOAM

Das im vorherigen Kapitel entwickelte Zweischichten-Turbulenzmodell wurde für die Validierung des Modells ebenfalls in OpenFoam implementiert. Als Grundlage für die Implementierung diente der im Kapitel 5.1.1 vorgestellte Zweiphasen-Löser *interFoam*. Im Gegensatz zu *interFoam*, wo verschiedene Turbulenzmodelle durch die externe Klasse *turbulenceModel* ausgewählt werden können, wurde das Turbulenzmodell in dieser Arbeit direkt in den Quellcode implementiert, wodurch je nach verwendetem Turbulenzmodell für den äußeren Bereich ein separater Löser (*twoLayerEpsilonFoam* bzw. *twoLayerOmegaSSTFoam*) kompiliert worden ist. Dadurch sollte sichergestellt werden, dass der numerische Ablauf so einfach wie möglich aus dem Quellcode ersichtlich ist, ohne sich in den Tiefen verschiedener Klassenstrukturen zu verlieren. Außerdem erleichterte diese Herangehensweise auch die Suche nach möglichen Fehlern im Code.

5.3.1 Zusammenfassung aller implementierter Gleichungen

Alle in den neu entwickelten Zweiphasen-Löser implementierten Gleichungen werden im Folgenden nochmals übersichtlich aufgelistet.

Kontinuitätsgleichung (nicht explizit implementiert):

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (5.34)$$

Impulsgleichung:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho [\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}]) = -\nabla p_{rgh} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \nabla \rho + \nabla \cdot (\mu_{eff} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)) + \sigma \kappa \nabla \alpha \quad (5.35)$$

$$\mu_{eff} = \mu + \mu_t \quad (5.36)$$

$$\rho = \alpha \rho_G + (1 - \alpha) \rho_L \quad (5.37)$$

$$\mu = \alpha \mu_G + (1 - \alpha) \mu_L \quad (5.38)$$

Phasenindikatorfunktion / Gasvolumenanteil:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \alpha + \nabla \cdot [\alpha(1 - \alpha) \mathbf{U}_r] = 0 \quad (5.39)$$

Zweischichten-Turbulenzmodell:

$$\mu_t = \rho \sqrt{k} l_\mu \quad (5.40)$$

$$l_\mu = \begin{cases} C_{in} \frac{1}{2} H & , \text{für } y_M - C_L H < y < y_M + C_G H \\ C_\mu \frac{k^{3/2}}{\epsilon} & , \text{falls } k - \epsilon \text{ Modell} \\ \frac{a_1 \sqrt{k}}{\max(a_1 \omega; SF_2)} & , \text{falls } k - \omega \text{ SST Modell} \end{cases} \quad (5.41)$$

Innerer Wellenbereich:

$$H = \frac{1}{\left. \frac{d\alpha}{dy} \right|_{\alpha=0,5}} \quad (5.42)$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \alpha(1-\alpha) \frac{\Delta\rho g + \sigma \bar{q}^2}{2\rho k} \quad (5.43)$$

$$\bar{q} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{\rho g A^2}{E_t}} & , \text{ für horizontale Strömung} \\ \frac{8\rho k}{\sigma A} & , \text{ für vertikale Strömung} \end{cases} \quad (5.44)$$

Äußerer Bereich:

Zweiphasen – k – ϵ Modell:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} k) = \nabla \cdot \left(\rho \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + \rho P_k - \rho \epsilon \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \epsilon) = \nabla \cdot \left(\rho \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + \frac{\rho \epsilon}{k} (C_1 P_k - C_2 \epsilon) \quad (5.46)$$

Zweiphasen – k – ω Modell:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} k) = \nabla \cdot (\rho (\nu + \sigma_k \nu_t) \nabla k) + \rho P_k - \rho \beta^* k \omega \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} \omega) = \nabla \cdot (\rho (\nu + \sigma_\omega \nu_t) \nabla \omega) + \alpha_\omega \frac{\rho \omega}{k} P_k - \rho \beta \omega^2 \quad (5.48)$$

5.3.2 Numerischer Ablauf eines Zeitschrittes

Abbildung 5.3a zeigt den numerischen Ablauf des neu entwickelten Zweiphasenphasen-Lösers während eines Zeitschrittes.

Zu Beginn wird durch Lösung von Gleichung 5.39 der Gasvolumenanteil α bestimmt und dann die Stoffgrößen des homogenen Gemisches aktualisiert (Gln. 5.37 und 5.38). Im nächsten Schritt wird die Impulsgleichung (Gl. 5.35) gelöst und anschließend das Druckfeld mit Hilfe des Geschwindigkeits-Druck-Kopplungs-Algorithmus *PISO* so korrigiert, dass sowohl Impuls- als auch Massenerhaltung gewährleistet sind. Abschließend

wird dann die effektive Viskosität für den nächsten Zeitschritt aktualisiert (Gl. 5.36), nachdem mit dem gewählten Turbulenzmodell die turbulente Wirbelviskosität μ_t berechnet wurde. In Abbildung 5.3b ist der entsprechende Ablauf für das neu entwickelte Zweischichten-Turbulenzmodell aufgezeigt. Nach Lösen der k - und ϵ - oder ω -Gleichungen (Gln. 5.45 - 5.48), werden zunächst die mittlere Flüssigkeitshöhe y_M , die mittlere Wellenhöhe H (Gl. 5.42) und die mittlere Wellenzahl q (Gl. 5.44) bestimmt. Zur Berechnung der mittleren Flüssigkeitshöhe müsste im Grund genommen in jedem Zeitschritt eine zeitliche Mittelung der Gasvolumenverteilung über alle vorangegangenen Zeitschritte durchgeführt werden. Dies ist jedoch sehr zeitaufwändig und führt im Falle abrupter Volumenstromänderungen und damit einhergehender abrupter Änderungen der lokalen Höhe der Flüssigphase zu Problemen, da sich die mittlere Höhe nur langsam mit der Zeit ändert. Dadurch kann es passieren, dass die Lage des Wellenbereichs, die im Zweischichten-Turbulenzmodell verwendet wird, und der Ort der Wellen im aktuellen Zeitschritt grundlegend voneinander abweichen. Daher wird für y_M schlicht der Ort der freien Oberfläche ($\alpha = 0,5$) im aktuellen Zeitschritt gewählt. Mit Gleichung 5.41 kann dann das turbulente Längenmaß l_μ für die verschiedenen Bereiche und mit Gleichung 5.40 die turbulente Wirbelviskosität μ_t berechnet werden. Abschließend folgt die Aktualisierung der effektiven Viskosität μ_{eff} (Gl. 5.36).

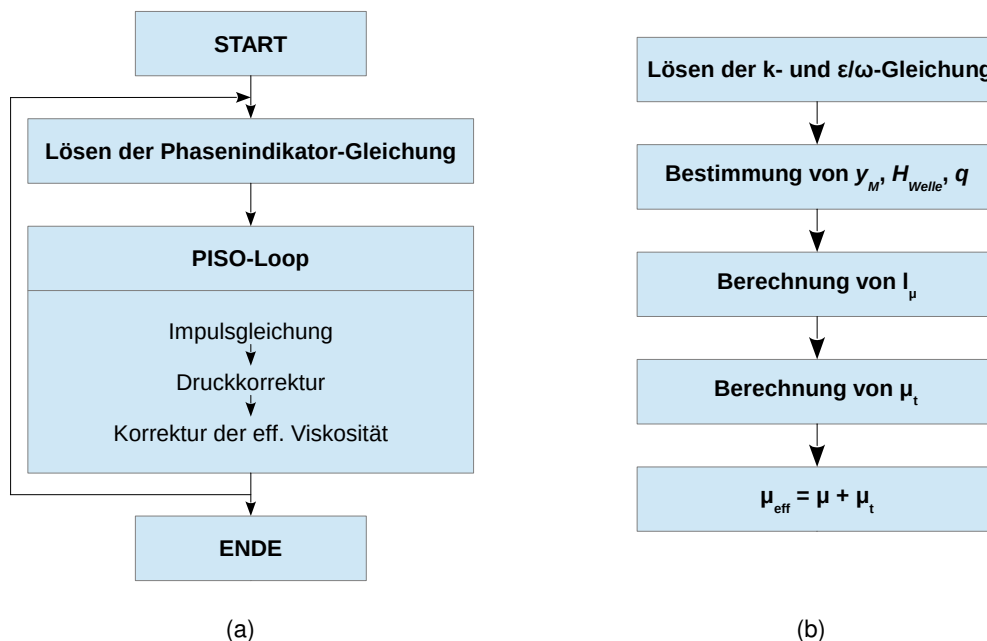


Abbildung 5.3: Ablauf eines Zeitschrittes (a) und Korrektur der effektiven Viskosität (b)

5.3.3 Bestimmung der freien Oberfläche

OpenFOAM bietet mit dem Post-Processing-Sampling-Tool *isoSurface* bereits eine Möglichkeit, Oberflächen anhand des Gasvolumenanteils zu berechnen. Die zugrunde liegende Methode basiert auf der Arbeit von Treece u. a. [100], welche die Iso-Oberfläche mit Hilfe zusammenhängender Tetraeder modelliert. Der Nachteil der implementierten Methode ist allerdings, dass sie die Eckpunkte der Tetraeder nicht auf den diskreten Punkten des Rechengitters aus der Strömungssimulation, sondern frei im Raum definiert. Soll die Methode nun innerhalb der Strömungsberechnung verwendet und zu jedem Zeitschritt aufgerufen werden, müssten die Tetraeder-Eckpunkte jedes Mal umständlich zurück auf das diskrete Rechenetz interpoliert werden. Dieser Vorgang ist vor allem für Gitter mit vielen Volumenelementen sehr zeitaufwändig und daher für die Anwendung innerhalb eines Strömungslösers nicht geeignet.

Aus diesem Grund wurde in dieser Arbeit eine eigene Methode zur Bestimmung der freien Oberfläche in geschichteten Strömungen auf strukturierten Netzen entwickelt, die weitaus weniger zeitintensiv ist als die zuvor vorgestellte Methode. Hierbei wird für jede Zelle des Rechengitters die in positiver, vertikaler Richtung darüber liegende Zelle bestimmt und dann deren Gasvolumenanteil miteinander verglichen. Ist der Gasvolumenanteil der unteren Zelle kleiner 0,5 und jener der oberen Zelle größer 0,5, so liegt die freie Oberfläche zwischen den beiden Zellenmittelpunkten. Die genaue vertikale Position der Oberfläche kann dann ganz einfach aus den Vertikalkomponenten der beiden Zellmittelpunkte durch Interpolation errechnet werden. Die Bestimmung des über der betrachteten Zelle gelegenen Zellnachbarn erweist sich jedoch als schwierig. In OpenFOAM können die Zellnachbarn einer bestimmten Zelle zwar mit bereits implementierten Werkzeugen bestimmt werden, nicht aber, um welche Zelle es sich dabei handelt. Die gesuchte Zelle kann also nicht ohne Weiteres aus der Liste aller Zellnachbarn ermittelt werden. Mit wenigen geometrischen Überlegungen lassen sich jedoch einfache Bestimmungskriterien aufstellen.

In Geometrien, in denen die Gitterlinien parallel bzw. senkrecht zur Wandnormalen stehen, kann die darüber liegende Zelle einfach aus der Vertikalkomponente der Zellmittelpunkte ermittelt werden, wie Abbildung 5.4 für den Fall eines horizontalen Kanals zeigt. Es wird hierzu ein lokales Koordinatensystem xy definiert, bei dem die y -Achse mit der Wandnormalen und die x -Achse mit der Wandparallelen zusammenfallen. In diesem Fall ist die y -Komponente des Vektors c_1 , der die Zellmittelpunkte der gesuchten Zelle 1 und der betrachteten Zelle P verbindet, stets größer Null, während die y -Komponenten der übrigen Verbindungsvektoren allesamt kleiner oder gleich Null sind. Allerdings muss beachtet werden, dass durch numerische Rundungsfehler auch die y -Komponenten der Vektoren c_2 und c_3 minimal größer Null werden können. Aus diesem Grund wird zu-

sätzlich ein Toleranzbereich $\pm t$ definiert und in diesem Bereich liegende Zellmittelpunkte vernachlässigt.

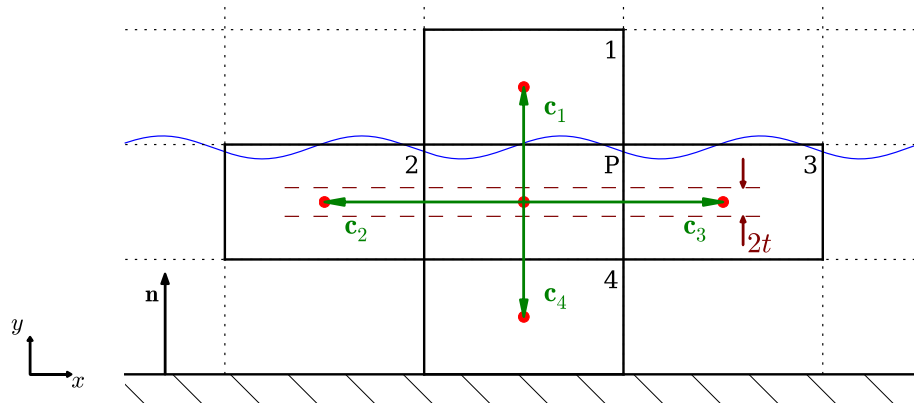


Abbildung 5.4: Bestimmung der über einer Zelle gelegenen Nachbarzelle bei achsenparallelem Rechengitter

Etwas schwieriger wird es, wenn die Gitterlinien nicht mehr senkrecht bzw. parallel zum Wandnormalenvektor \mathbf{n} stehen (Abb. 5.5). Hier reicht das zuvor aufgestellte Kriterium für die y -Komponente des Verbindungsvektors allein nicht mehr aus, da nun auch weitere Zellmittelpunkte, wie im gezeigten Fall von Zelle 2 oder 3, außerhalb des Toleranzbereiches liegen können. Ein zweites Bestimmungskriterium für Zelle 1 lässt sich mit Hilfe des Winkels zwischen dem jeweiligen Verbindungsvektor \mathbf{c}_i und dem Wandnormalenvektor aufstellen. Wie man in den Abbildungen 5.5a bis 5.5d leicht feststellen kann, ist der Winkel zwischen \mathbf{c}_1 und \mathbf{n} stets kleiner als jener zwischen \mathbf{c}_2 und \mathbf{n} bzw. \mathbf{c}_3 und \mathbf{n} . Mathematisch lässt sich der Winkel ϕ zwischen zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aus ihrem Skalarprodukt bestimmen [13]:

$$\cos \phi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (5.49)$$

Da dieses Winkelkriterium auch für den ersten Fall mit orthogonalem Gitter gilt, lässt sich Zelle 1 ganz allgemein aus den beiden erläuterten Kriterien bestimmen:

$$\begin{aligned} y - \text{Kriterium:} & \quad \mathbf{c}_{iy} > t \\ \phi - \text{Kriterium:} & \quad \min(\angle(\mathbf{c}_i, \mathbf{n})) \end{aligned}$$

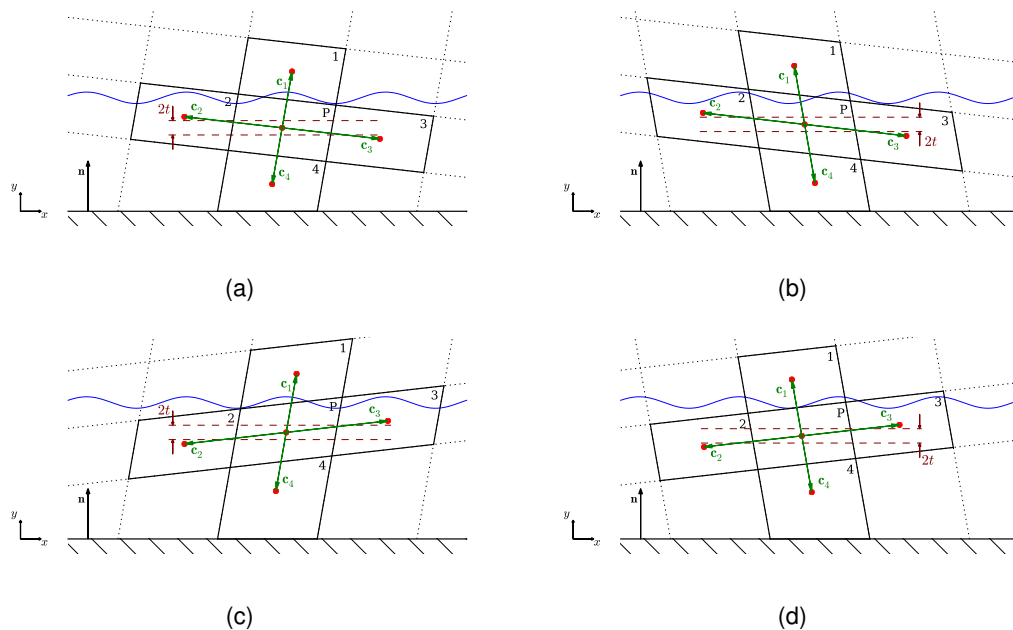


Abbildung 5.5: Bestimmung der über einer Zelle gelegenen Nachbarzelle bei schiefem Rechengitter

Die Bestimmung der benachbarten Zellen muss nur ein einziges Mal zu Beginn jeder Simulation durchgeführt werden, falls wie in dieser Arbeit ohne örtliche Zellverfeinerung zwischen den Zeitschritten gearbeitet wird. Es muss jedoch für jedes Netz durch eine geeignete Wahl des Parameters t für den Toleranzbereich sichergestellt werden, dass alle Zellnachbarn richtig bestimmt werden. Für die in dieser Arbeit verwendeten Netze erwies sich ein Toleranzparameter von $t = 1 \cdot 10^{-4}$ als ein guter Wert.

5.3.4 Bestimmung der freien Parameter

Nach Gleichung 5.41 wurden für den inneren Bereich des neu entwickelten Zweischichten-Turbulenzmodells die drei noch unbekannte Konstanten C_{in} , C_L und C_G eingeführt. Diese wurden in einer Parameterstudie bestimmt, wobei mehrere numerische Simulationen im Bereich der fließenden Strömung (Messpunkt 1 bei [94]) in der horizontalen Kanalgeometrie von Stähler [94] durchgeführt und die unbekannten Parameter dabei systematisch variiert wurden. Durch den anschließenden Vergleich der Ergebnisse mit den experimentell ermittelten Daten von Stähler [94] konnten dann die am besten geeigneten Parametersätze bestimmt werden. Stähler [94] untersuchte horizontal geschichtete Strömungen im Gegenstrom in einer Rechteckkanalgeometrie mit dem Ziel detaillierte Datensätze im Bereich der fließenden und der schießenden Strömung für die Entwicklung neuer numerischer Modellierungsansätze zur Verfügung zu stellen.

Für die Durchführung der Parameterstudie wurde ein zweidimensionales Modell der Teststrecke aus dem Versuch von Stähler [94] erstellt, das in Abbildung 5.6 dargestellt ist. Wasser wird von links in den Kanal gespeist und fließt dann im Gegenstrom zu der von rechts kommenden Luftströmung. Dabei sind neben der eigentlichen Teststrecke auch Teile der Ein- bzw. Auslassbereiche für die Fluide berücksichtigt worden.

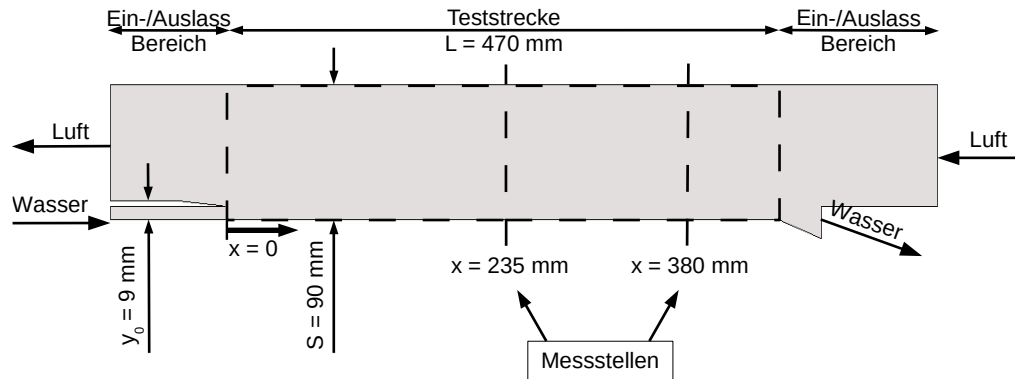


Abbildung 5.6: Teststrecke im Versuch von Stähler [94]

Anhand dieses Modelles wurden mehrere numerische Rechengitter mit Hilfe des Vernetzungsprogramms *ICEM* erzeugt, um vorab in einer gesonderten Netzstudie ein geeignetes Rechengitter auswählen zu können. Dabei wurde die Anzahl der Zellen über die Kanalhöhe (y -Richtung) ausgehend von Netz 1 bis zu Netz 4 sukzessive erhöht, während die Zellanzahl in der Hauptströmungsrichtung (x -Richtung) nicht verändert wurde. Die Abhängigkeit der Ergebnisse von der axialen Zellanzahl wurde dann mit Netz 5 überprüft. Es basiert auf Netz 2, wobei die axiale Zellanzahl jedoch erhöht worden ist. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Differenz zwischen der angegebenen Gesamtzellanzahl und der Anzahl der Zellen der Teststrecke auf die Berücksichtigung der Ein- und Auslassbereiche zurückzuführen ist, die ebenfalls vernetzt werden mussten. Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die erzeugten Netze.

Tabelle 5.1: Überblick über die Rechennetze für die Netzstudie

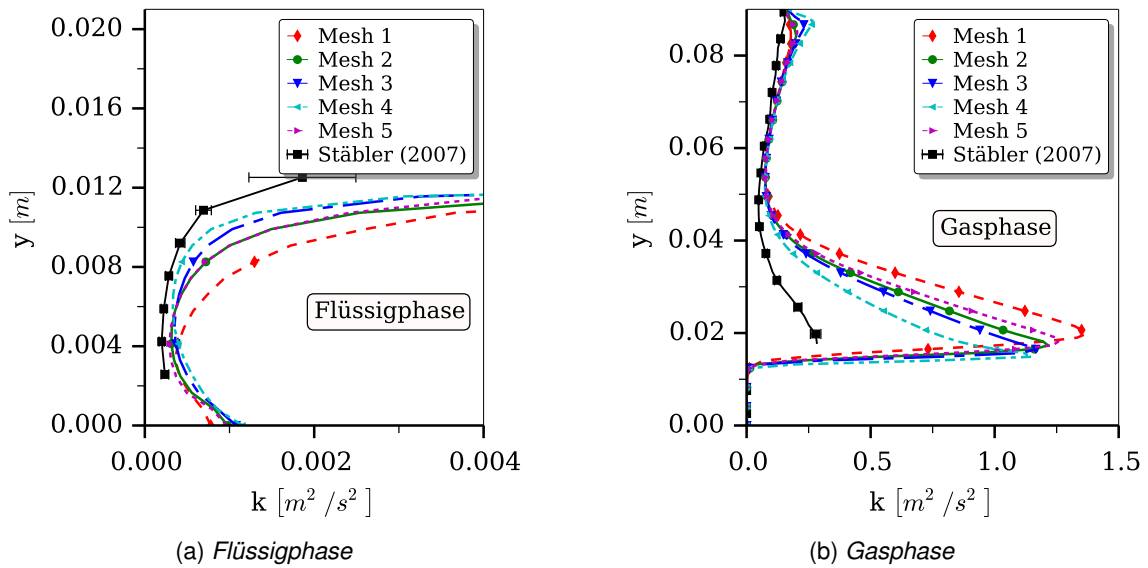
Netz	Zellanzahl Teststrecke			Zellanzahl gesamt
	gesamt	x -Richtung	y -Richtung	
1	3420	95	36	4704
2	4845	95	51	6643
3	5605	95	69	8995
4	9310	95	98	12782
5	6936	136	51	9245

Für die Netzstudie wurden die drei noch unbekannt Parameter mit $C_{in} = 0,09$ und $C_L = C_G = 1,0$ so gewählt, dass C_{in} dem Parameter aus dem Modell von Berthelsen u. Ytrehus [11] bzw. dem $k - \epsilon$ Modell entspricht und die Breite des inneren Wellenbereichs eine Wellenhöhe zu beiden Seiten der mittleren Wasserhöhe beträgt. Das Wave Aspect Ratio in Gleichung 5.44 wurde mit $A = 0,1$ genauso eingestellt, wie es bei der Validierung des statistischen Phasenverteilungsmodell in Kapitel 4.3.1 für den Messpunkt 1 gewählt werden musste. Die Eintrittsgeschwindigkeiten der Phasen wurden aus den jeweiligen Volumenströmen aus [94] berechnet und an den Einlässen vorgegeben, ebenso wie eine Intensität der Turbulenz von 5%. Die Stoffeigenschaften der beteiligten Phasen Wasser und Luft sind für Normalbedingungen ($T = 20^\circ C$, $p = 1 \text{ bar}$) dem VDI-Wärmeatlas [103] entnommen und in Tabelle 5.2 aufgelistet.

Tabelle 5.2: Stoffeigenschaften von Luft und Wasser unter Normalbedingungen

	Dichte ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	Viskosität ν [$\frac{m^2}{s}$]	Oberflächenspannung σ [$\frac{N}{m}$]
Luft	1,189	$1,532 \cdot 10^{-5}$	0,07274
Wasser	998,21	$1,003 \cdot 10^{-6}$	

Als charakteristische Größe für die Auswertung der Ergebnisse wurde die turbulente kinetische Energie k gewählt, da sie bei der Entwicklung eines neuen Turbulenzmodelles eine sehr wichtige Größe darstellt. Abbildung 5.7 zeigt die Ergebnisse der Netzstudie für die turbulente kinetische Energie k sowohl im Bereich der Flüssig- als auch im Bereich der Gasphase. Die Strömung wurde jeweils über eine Zeitspanne von 10 s simuliert und dann über die letzten 7 s zeitlich gemittelt. Wie eine zu Beginn durchgeführte Simulation mit einer Länge von 30 s zeigte, ist dies ausreichend, da sich die zeitlich gemittelten Ergebnisse ab 7 s Mittlungslänge nicht mehr veränderten. Somit konnte die Rechenzeit minimiert werden, ohne jedoch die Ergebnisse zu verfälschen. Es zeigt sich, dass die Genauigkeit der Simulationen im Vergleich zu den experimentell bestimmten Daten wie erwartet mit steigender Zellanzahl über die Kanalhöhe zunimmt. Während die Ergebnisse mit Netz 1 sehr stark von den Messergebnissen abweichen, zeigt die Simulation mit Netz 4 eine sehr viel bessere Übereinstimmung, vor allem im Bereich der Flüssigphase. Allerdings erhöht sich bekanntermaßen mit steigender Anzahl an Gitterzellen auch die Rechenzeit. So konnte eine Verdreifachung der benötigten Rechenzeit bei Verwendung von Netz 4 im Vergleich zu Netz 1 festgestellt werden. Eine Verfeinerung der Zellanzahl in Richtung der Hauptströmung hat dagegen nur wenig Einfluss auf das Ergebnis, wie der Vergleich von Netz 2 und 6 zeigt.

Abbildung 5.7: Netzstudie: Verteilung der turbulenten kinetischen Energie k

Für die Parameterstudie wurde letztlich jedoch nicht Netz 4 gewählt, sondern mit Netz 3 ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit gesucht. Die Vorgehensweise bei der Parameterstudie war dabei wie folgt:

1. Bestimmung von C_{in} mit $C_L = C_G = 1, 0$.
Schrittweise Variation von $C_{in} = \{0, 07; 0, 09; 0, 12; 0, 15; 0, 18\}$.
2. Bestimmung von C_L mit $C_G = 1$ und C_{in} aus Schritt 1.
Schrittweise Variation von $C_L = \{0, 5; 1, 0; 2, 0; 3, 0; 4, 0; 5, 0\}$.
3. Bestimmung von C_G mit C_{in} und C_L aus Schritt 1 bzw. Schritt 2.
Schrittweise Variation von $C_G = \{0, 5; 1, 0; 2, 0; 3, 0; 4, 0; 5, 0\}$.

In den Abbildungen 5.8 bis 5.10 sind die Ergebnisse der Parameterstudie bei Verwendung des $k - \epsilon$ Modells in den äußeren Bereichen dargestellt. Wie bei der Netzstudie wird auch hier die turbulente kinetische Energie k betrachtet.

Im Bereich der Flüssigphase hat die Veränderung von C_{in} dabei fast keinerlei Auswirkung auf das Ergebnis, wie Abbildung 5.8a zeigt. In der Gasphase (Abb. 5.8b) hingegen ist ein, wenn auch kleiner Unterschied zwischen den Simulationen im Bereich der Grenzfläche zu erkennen, wobei die numerische Rechnung mit $C_{in} = 0, 07$ die besten Ergebnisse liefert. Um die Konsistenz zu der Studie von Berthelsen u. Ytrehus [11] und zum $k - \epsilon$ Modell zu wahren, wurde jedoch $C_{in} = 0, 09$ gewählt, da sich beide Simulationen ohnehin nur geringfügig voneinander unterscheiden.

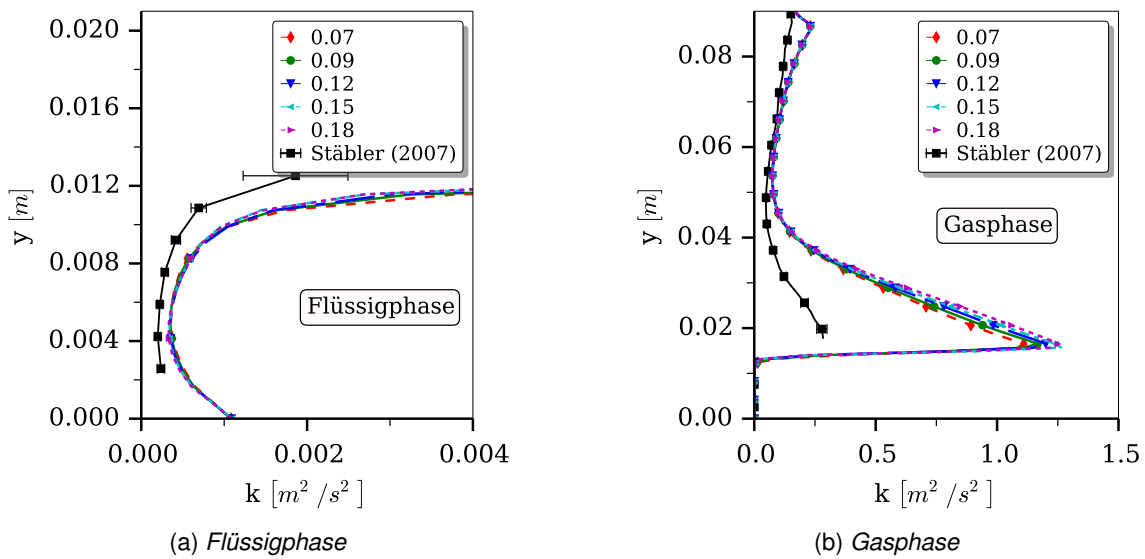


Abbildung 5.8: Parameterstudie: Bestimmung von C_{in} ($k - \epsilon$ Modell)

Wie zuvor bei der Bestimmung von C_{in} , zeigen die Ergebnisse nur geringfügige Abhängigkeit von C_L sowohl in der Flüssig- (Abb. 5.9a) als auch in der Gasphase (Abb. 5.9b). Die besten Ergebnisse werden dabei mit $C_L = 0,5$ erzielt.

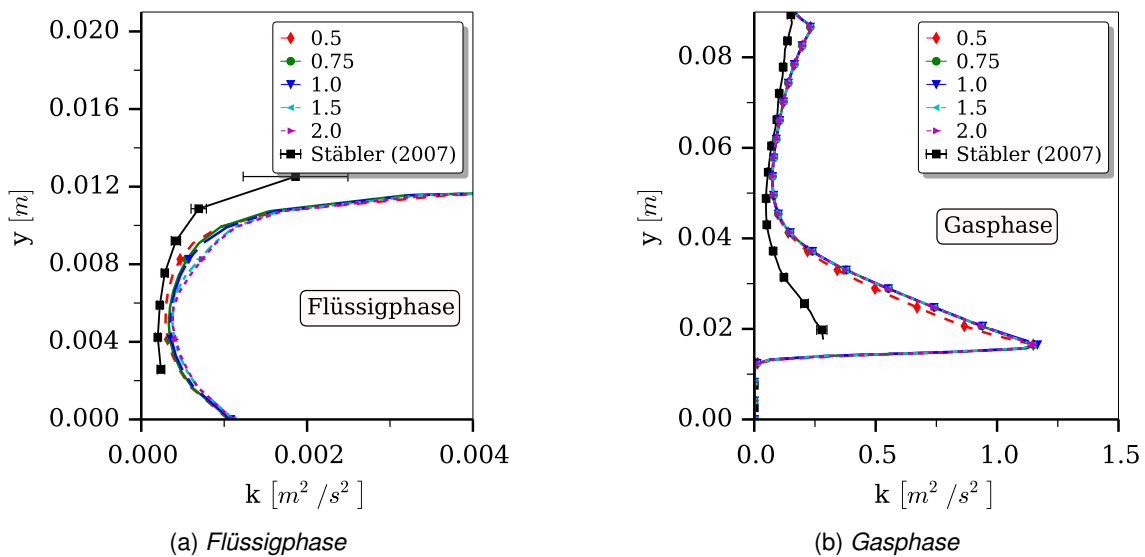


Abbildung 5.9: Parameterstudie: Bestimmung von C_L ($k - \epsilon$ Modell)

Auch bei Variation von C_G fallen in Abbildung 5.10a die geringen Unterschiede zwischen den Simulationsergebnissen in der Flüssigphase auf. Bei Betrachtung der Gasphase (Abb. 5.10b) wird der Einfluss von C_G dafür aber umso deutlicher. Hier liefern die Simulationen mit $C_G = 4,0$ bzw. $C_G = 5,0$ die mit Abstand besten Ergebnisse, wobei sich die beiden Simulationen untereinander praktisch nicht unterscheiden. Aus diesem Grund

wird $C_G = 4,0$ für die folgenden Simulationen mit dem Zweischichten-Turbulenzmodell in Verbindung mit dem $k - \epsilon$ Modell gewählt.

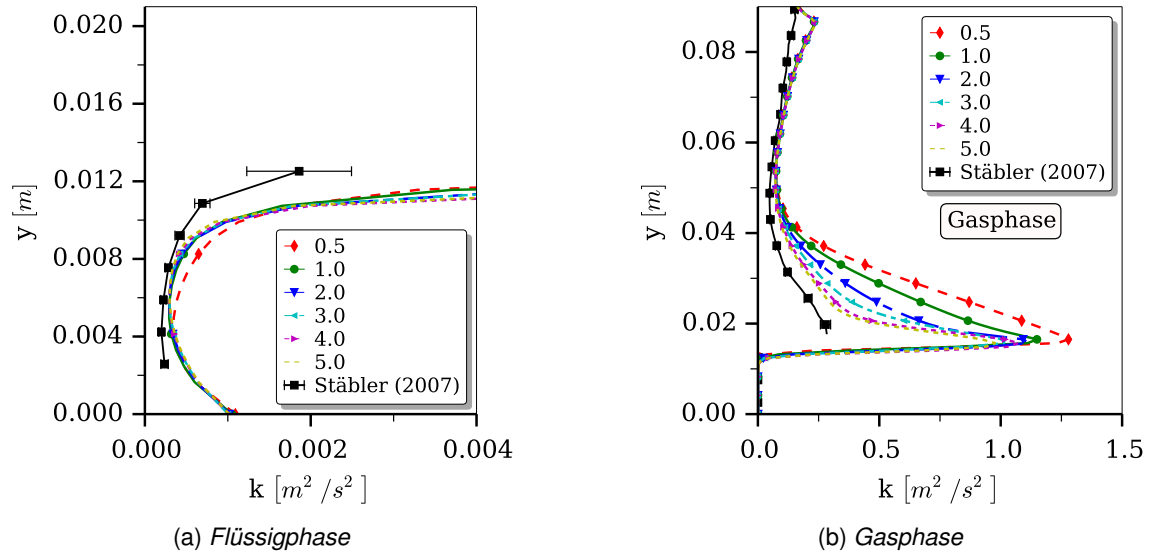


Abbildung 5.10: Parameterstudie: Bestimmung von C_G ($k - \epsilon$ Modell)

In den Abbildungen 5.11 bis 5.13 sind die Ergebnisse der Parameterstudie bei Verwendung des $k - \omega$ SST Modells in den äußeren Bereichen dargestellt.

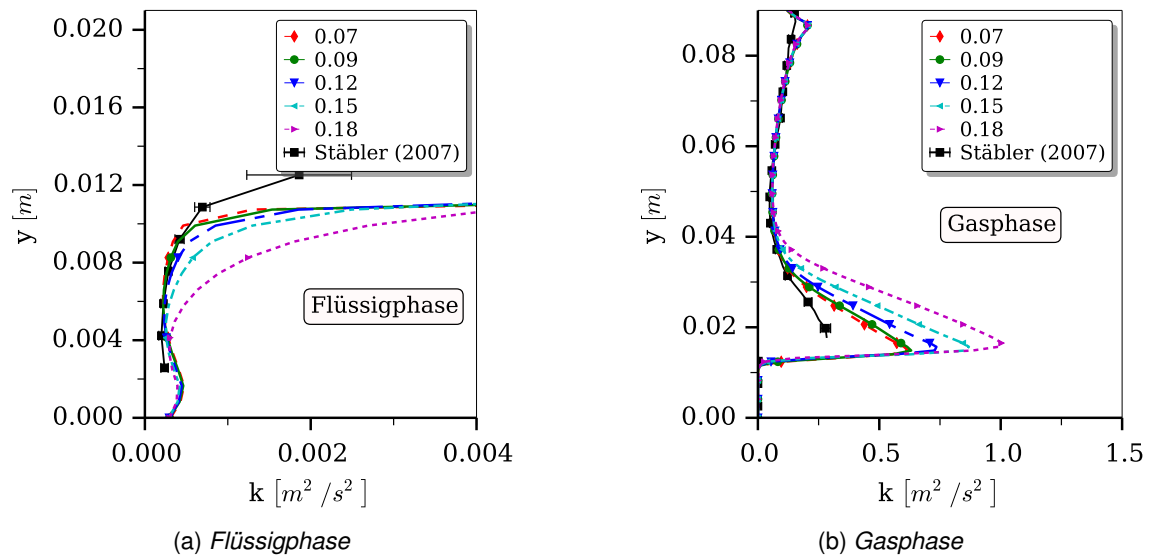


Abbildung 5.11: Parameterstudie: Bestimmung von C_{in} ($k - \omega$ SST Modell)

Im Gegensatz zu den Ergebnissen bei Verwendung des $k - \epsilon$ Modells, hat die Veränderung von C_{in} dabei sowohl in der Flüssigphase (Abb. 5.11a) als auch in der Gasphase (Abb. 5.11b) einen deutlichen Einfluss auf die Simulationsergebnisse, wobei mit $C_{in} = 0,07$ und $C_{in} = 0,09$ die besten Ergebnisse erzielt werden. Um wiederum der all-

gemeinen Empfehlung aus anderen Studien [11, 56] zu folgen, wurde $C_{in} = 0,09$ für die folgenden Rechnungen gewählt.

C_L hat hingegen überhaupt keinen Einfluss auf die Ergebnisse, wie die Abbildungen 5.12a und 5.12b zeigen. $C_L = 1,0$ wird daher auch für die folgenden Simulationen weiter verwendet.

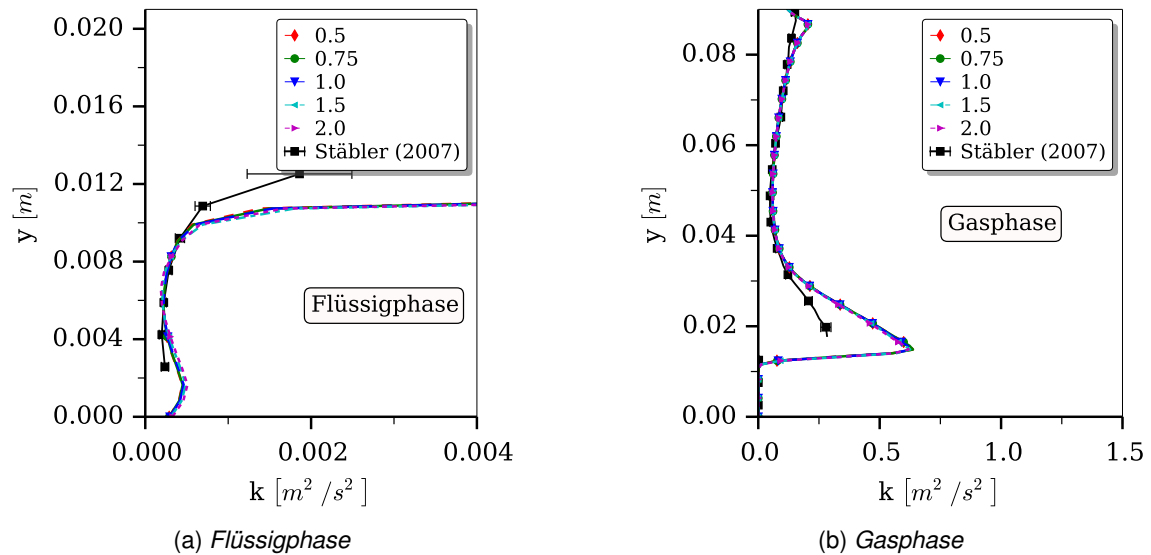


Abbildung 5.12: Parameterstudie: Bestimmung von C_L ($k - \omega$ SST Modell)

Die Simulationen, bei denen C_G verändert wurde, zeigen im Bereich $C_G < 2,0$ wieder deutlichere Unterschiede untereinander (Abb. 5.13a und 5.13b). Für $C_G > 2,0$ hat C_G keinerlei Einfluss mehr, weshalb $C_G = 2,0$ für weitere Simulationen gewählt wird.

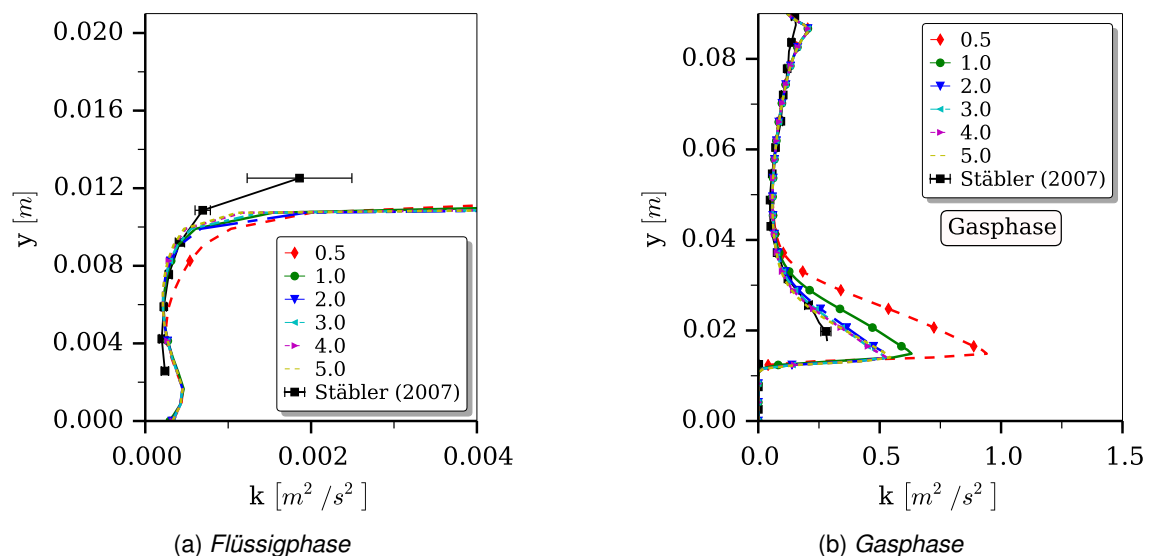


Abbildung 5.13: Parameterstudie: Bestimmung von C_G ($k - \omega$ SST Modell)

Damit sind nun alle zuvor unbekannt Parameter in Gleichung 5.41 bestimmt worden. Das neu entwickelte Zweischichten-Turbulenzmodell kann nun für die Validierungsrechnungen im folgenden Kapitel verwendet werden. Zusammenfassend zeigt Tabelle 5.3 die Parametersätze, die für die folgenden Simulationen mit dem Zweischichten-Turbulenzmodell in Verbindung mit dem $k - \epsilon$ bzw. dem $k - \omega$ SST Modell verwendet werden.

Tabelle 5.3: Parameter für das Zweischichten-Turbulenzmodell

	C_{in}	C_L	C_G
$k - \epsilon$ Modell	0,09	0,5	4,0
$k - \omega$ SST Modell	0,09	1,0	2,0

6 Validierung des Zweischichten-Turbulenzmodells

In diesem Kapitel werden verschiedene Problemstellungen aus dem Bereich der geschichteten Strömungen mit Hilfe des neu entwickelten Zweischichten-Turbulenzmodells berechnet, um das Modell mit den im vorherigen Kapitel gefundenen Parameter zu validieren. Dazu werden drei Messpunkte aus der experimentellen Untersuchung horizontal geschichteter Zweiphasenströmungen im Gegenstrom von Stähler [94], wie auch drei Messpunkte einer gleichgerichteten Ringströmung in einem vertikalen Rohr aus der Studie von Belt u. a. [9] betrachtet. Abschließend wird das Anlaufverhalten der Wellen in der numerischen Simulation mit den Ergebnissen aus der Kelvin-Helmholtz Theorie verglichen.

6.1 Horizontale Zweiphasenströmung im Gegenstrom

Wie bereits mehrfach erwähnt, untersuchte Stähler [94] in seiner experimentellen Studie entgegengerichtete, geschichtete Zweiphasenströmungen in einem horizontalen Rechteckkanal. Gemessen wurden dabei zeitlich gemittelte Phasen- und Geschwindigkeitsverteilungen, aber auch turbulente Schwankungsgeschwindigkeiten. Es stehen somit detaillierte Datensätze im Bereich der fließenden, schießenden und teilweise umgekehrten Strömung zur Verfügung, die sich sehr gut für die Validierung des neuen Modells eignen.

Die im Folgenden gezeigten Simulationsergebnisse wurden mit den selben, aus der Netz- bzw. Parameterstudie bekannten Einstellungen erzielt. Es wurde wiederum Netz 3 verwendet und die Strömung über die letzten 7 s der 10 s Simulationslänge gemittelt. Die verwendeten Stoffeigenschaften sind in Tabelle 5.2 aufgeführt. Sämtliche Strömungsgrößen wurden an der Messstelle in der Mitte der Teststrecke ($x = 235 \text{ mm}$ in Abb. 5.6) ausgewertet. Die Eintrittsbedingungen und das verwendete Wave Aspect Ratio des jeweiligen Messpunktes sind in Tabelle 6.1 aufgelistet. Letzteres wurde wiederum so gewählt, wie es bei der Validierung des statistischen Wellenmodells in Kapitel 4.3.1 für den jeweiligen Messpunkt gewählt werden musste. Auch die Turbulenzintensität von 5% an den Einlässen wurde weiterhin beibehalten.

Tabelle 6.1: Eintrittsbedingungen im Versuch von Stähler [94]

Messpunkt	Strömungsform	$\dot{V}_{in,L}$ [l/min]	$\dot{V}_{in,G}$ [l/s]	A [-]
1	fließend	16,4	39,7	0,10
2	teilweise umgekehrt	16,6	89,1	0,25
3	schießend	41,6	39,6	0,25

6.1.1 Fließende Strömung

In den Abbildungen 6.1 bis 6.3 sind die Ergebnisse aus den Simulationen mit dem Zweischichten-Turbulenzmodell für eine fließende Strömung (Messpunkt 1 bei [94]) dargestellt, wobei sowohl die Variante mit dem $k - \epsilon$ Modell als auch jene mit dem $k - \omega$ SST Modell für den äußeren Bereich gezeigt werden. Neben den beiden Simulationen mit dem neuen Turbulenzmodell wurde zum Vergleich auch eine Simulation mit dem Standard Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modell durchgeführt.

Wie Abbildung 6.1 zeigt, kann das Zweischichten- $k - \epsilon$ Modell den Wellenbereich ($0 < \alpha < 1$) im Vergleich mit den beiden anderen Turbulenzmodelle am besten wiedergeben, wobei die mittlere Wasserhöhe bei $\alpha = 0,5$ nur geringfügig unterschätzt wird. Auch der Bereich der Wellentäler ($\alpha < 0,5$) wird minimal zu tief berechnet. Das Zweischichten- $k - \omega$ SST Modell hingegen kann die Breite des Wellenbereichs qualitativ zwar ebenfalls gut wiedergeben, unterschätzt dabei die mittlere Wasserhöhe aber deutlich. Das Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modell berechnet dagegen eine deutlich zu große mittlere Wassertiefe.

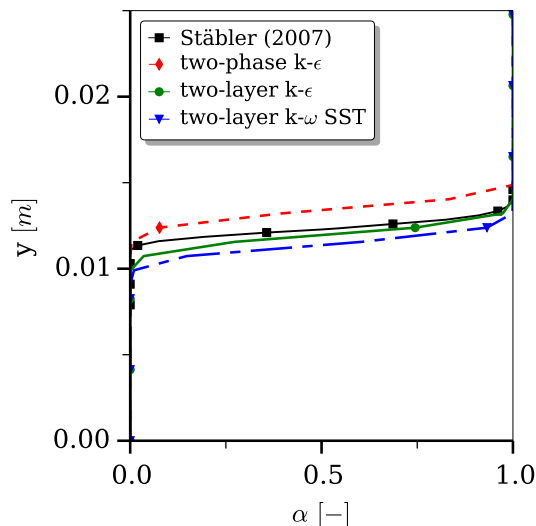


Abbildung 6.1: Messpunkt 1 [94]: Phasenverteilung

Auch bei den Geschwindigkeitsverteilungen zeigt das Zweischichten- $k - \epsilon$ Modell die besten Ergebnisse sowohl im Bereich der Flüssigphase (Abb. 6.2a) als auch im Bereich der Gasphase (Abb. 6.2b). Die Geschwindigkeitsverteilung der Gasphase kann auch das Zweischichten- $k - \omega$ SST Modell gut wiedergeben. In der Flüssigphase weichen die Ergebnisse jedoch in Richtung der Grenzfläche erheblich von den experimentellen Daten ab. Ein möglicher Grund hierfür könnte die zu niedrig berechnete Wasserhöhe sein. Das Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modell dagegen kann in beiden Phasen nur wenig überzeugen. Vor allem im Bereich der Grenzfläche zeigen die Ergebnisse deutliche Unterschiede zu den Versuchsdaten.

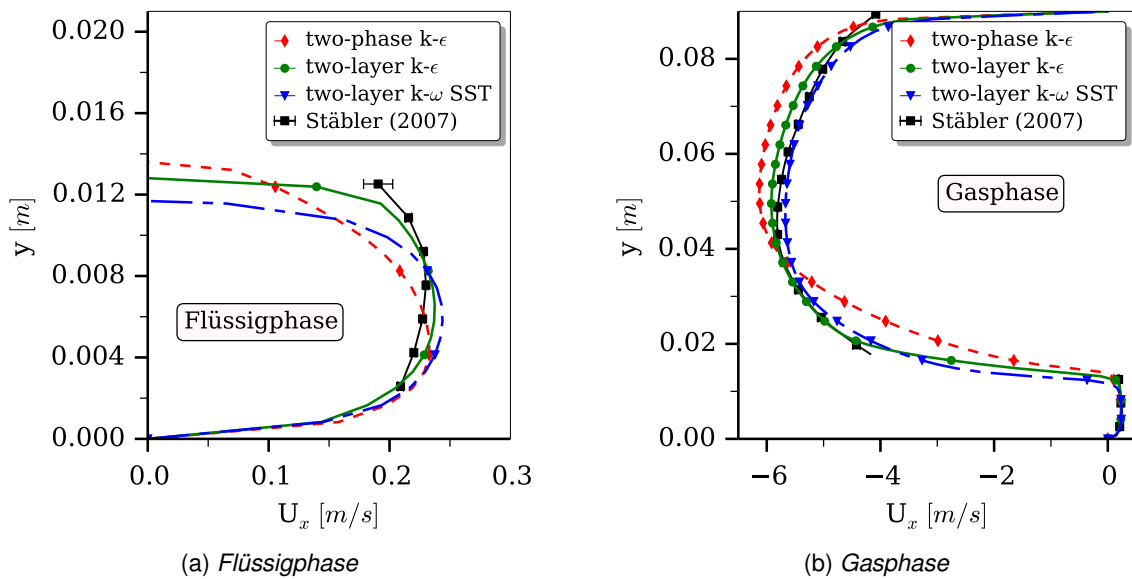


Abbildung 6.2: Messpunkt 1 [94]: Geschwindigkeitsverteilung

Die Verteilung der turbulenten kinetischen Energie gibt das Zweischichten- $k - \omega$ SST Modell am besten wieder. Sowohl in der Flüssigphase (Abb. 6.3a) als auch im Bereich der Gasphase (Abb. 6.3b) stimmen die Ergebnisse sehr gut mit dem Experiment überein. An der unteren Kanalwand ($y = 0$ m) werden zu dem die Stärken des $k - \omega$ SST Modells in wandnahen Bereichen ersichtlich. Hier zeigen die beiden anderen Modelle deutlich größere Abweichungen von der Messwerten, wobei das Zweischichten- $k - \epsilon$ Modell in Richtung der Grenzfläche ($y \approx 0,012$ m) dann durchaus ebenso gute Ergebnisse liefert wie die Variante mit dem $k - \omega$ SST Modell. Auf die größeren Abweichungen aller Modelle für $y > 0,01$ m auf der Wasserseite wird bei der Auswertung der teilweisen umgekehrten Strömung näher eingegangen. Auch in der Gasphase stimmt der Verlauf der Kurve des Zweischichten- $k - \epsilon$ Modells in der Umgebung der Grenzfläche qualitativ mit den gemessenen Daten überein. Quantitativ wird jedoch zu viel turbulente kinetische Energie in die Gasphase eingetragen. Das Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modell berechnet in beiden Phasen eine erheblich höhere Turbulenz als es im Versuch der Fall gewesen war. Einzig weit entfernt von der Grenzfläche ($y > 0,05$ m) treffen alle drei Modelle die Messwerte sehr gut. An

der oberen Wand des Kanals können hingegen wieder größere Abweichungen beobachtet werden. Leider liegen aufgrund messtechnischer Schwierigkeit keine Versuchsergebnisse an der Grenzfläche in der Gasphase vor. Somit ist es nicht möglich zu beurteilen, ob der rasche Anstieg der turbulenten kinetischen Energie in dieser Region physikalisch zu begründen ist. Die Lage des Maximums dicht über der mittleren Wasseroberfläche legt jedoch die Vermutung nahe, dass es sich dabei um einen ähnlichen Effekt handeln könnte, wie im Falle der erhöhten Turbulenz in der Nähe fester Wände.

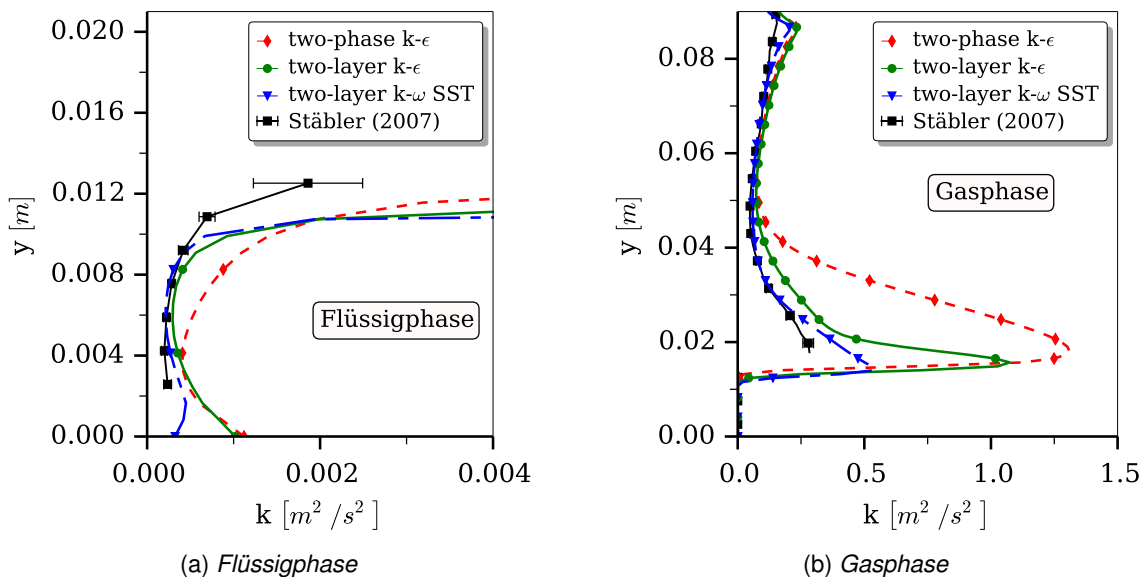


Abbildung 6.3: Messpunkt 1 [94]: Verteilung der turbulenten kinetischen Energie

6.1.2 Schießende Strömung

In den Abbildungen 6.4 bis 6.6 sind die Ergebnisse für eine schießende Schichtenströmung (Messpunkt 3 bei [94]) dargestellt. Wiederum werden beide Varianten des Zweischichten-Turbulenzmodells als auch das Standard Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modell gezeigt.

Die Phasenverteilung in der schießenden Strömung (Abb. 6.4) kann keines der drei Modelle zufriedenstellend wiedergeben. Alle drei Simulationen zeigen einen zu breiten Wellenbereich, d.h. es werden Wellen mit zu großer Amplitude berechnet. Der Grund hierfür dürfte jedoch ein numerischer Effekt aufgrund einer zu groben Netzauflösung im Bereich der Grenzfläche für diesen Messpunkt sein. In Kapitel 5.1.1 wurde erläutert, dass die Diskretisierung der Phasenindikatorfunktion zu unerwünschten numerischen Diffusionseffekten führt, die das Verschmieren der Grenzfläche über mehrere Zellen nach sich ziehen. Wie in schießenden Strömungen üblich, wurden auch von Stäbler [94] Wellen mit sehr kleiner Wellenhöhe ($H = 0,98 \text{ mm}$) bei diesem Messpunkt beobachtet. Die

Höhe der Zellen im Bereich der Grenzfläche ist mit etwa $0,7\text{ mm}$ aber annähernd genauso groß wie die Wellenhöhe. Kommt es nun zur numerischen Verschmierung der Grenzfläche, wird der Wellenbereich fälschlicherweise über mehrere Zellen und damit zu breit berechnet. Die mittlere Wasserhöhe ($y \approx 0,01\text{ m}$) bei $\alpha = 0,5$ hingegen stimmt bei den beiden Zweischichten-Turbulenzmodellen mit dem Experiment überein, während sie das Zweiphasen- $k-\epsilon$ Modell leicht überschätzt.

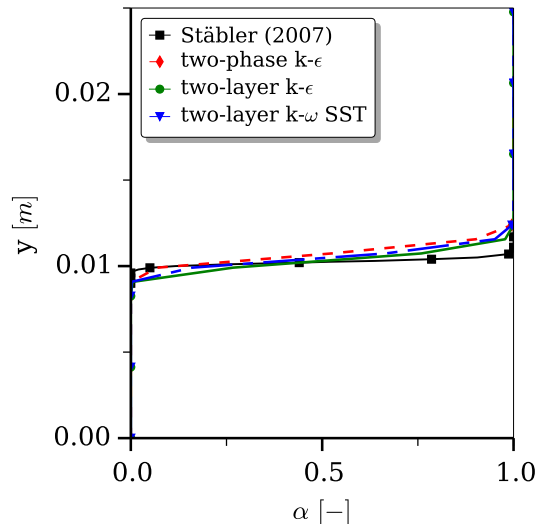


Abbildung 6.4: Messpunkt 3 [94]: Phasenverteilung

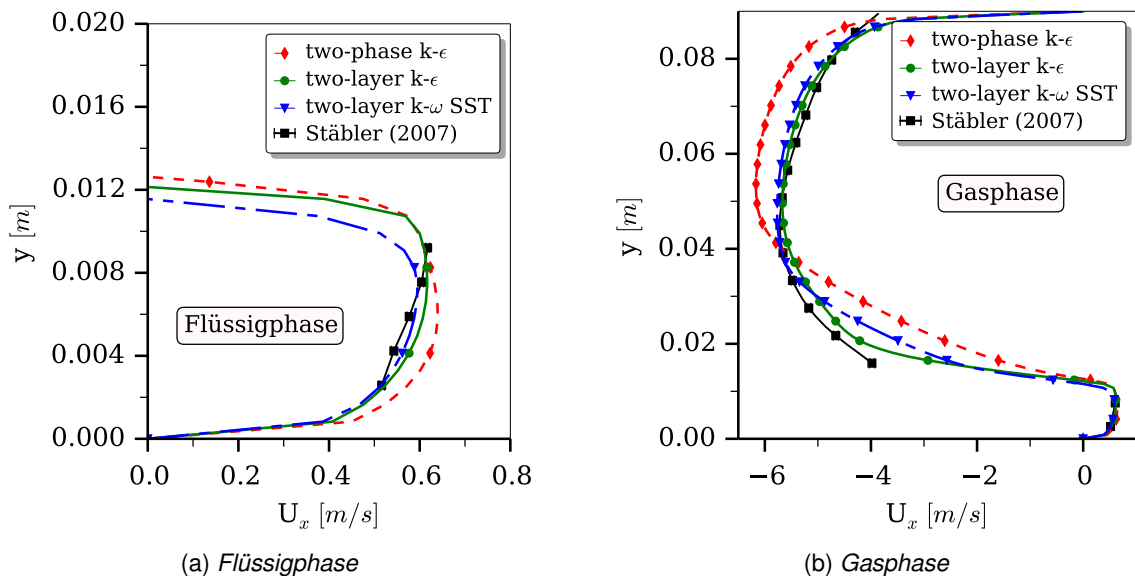


Abbildung 6.5: Messpunkt 3 [94]: Geschwindigkeitsverteilung

Die Geschwindigkeitsverteilung in Abbildung 6.5 wird erneut vom Zweischichten- $k-\epsilon$ Modell am besten wiedergegeben. Im Gegensatz dazu zeigt das Zweischichten- $k-\omega$ SST Modell zwar entfernt von der Grenzfläche eine gute Übereinstimmung mit den Mess-

ergebnissen. In der Nähe der Phasengrenzfläche unterschätzt es die Geschwindigkeit dann aber. Das Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modell kann weder in der Flüssigphase noch in der Gasphase überzeugen.

Auch bei der turbulenten kinetischen Energie stimmt das Zweischichten- $k - \epsilon$ Modell besser mit den experimentellen Daten überein als das Zweischichten- $k - \omega$ SST Modell. Während beide Modelle in der Flüssigphase (Abb. 6.6a) noch annähernd gleiche Ergebnisse liefern, passt der Verlauf der Variante mit dem $k - \epsilon$ Modell in der Gasphase (Abb. 6.6b) zumindest qualitativ zum Experiment. Wie zuvor bei der fließenden Strömung, kann auch hier eine zu hohe Turbulenzproduktion im Bereich der Phasengrenzfläche in der Gasphase beobachtet werden. Auch die Stärke des $k - \omega$ SST Modell gegenüber dem $k - \epsilon$ Modell in wandnahen Bereichen ist in der Flüssigphase wiederum zu erkennen.

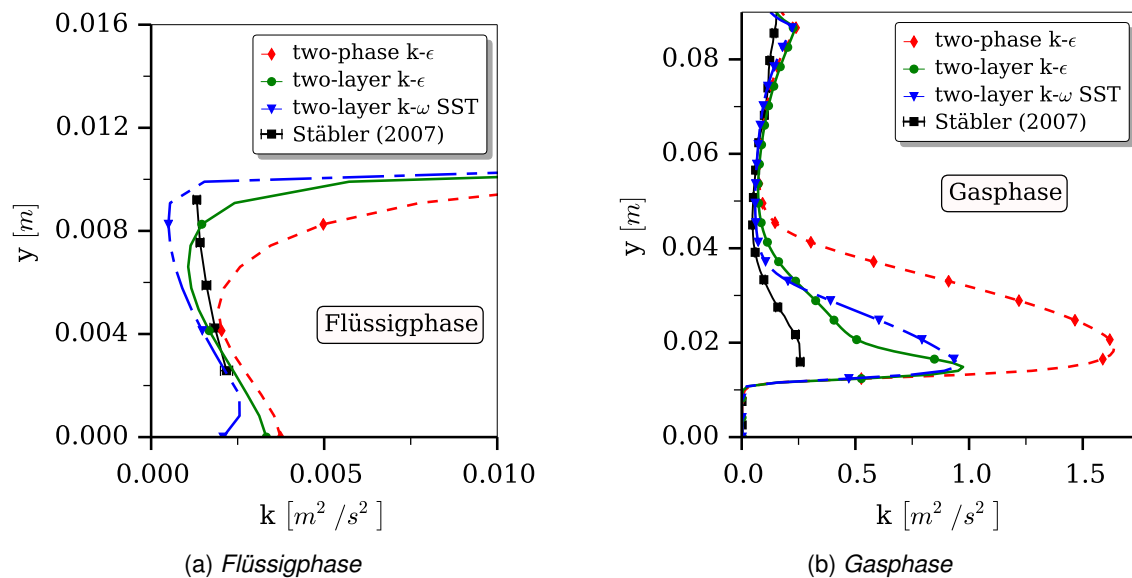


Abbildung 6.6: Messpunkt 3 [94]: Verteilung der turbulenten kinetischen Energie

6.1.3 Teilweise umgekehrte Strömung

Als letzte Strömungsform wird in den Abbildungen 6.7 bis 6.9 die teilweise umgekehrte Strömung gezeigt. Sie kann mitunter auch zu der interessantesten Strömungsform für die Validierung des neuen Turbulenzmodells gezählt werden, da die Wellen hier mit Wellenhöhen im Zentimeterbereich erheblich größer sind, als bei den zuvor gezeigten Strömungen.

Wie Abbildung 6.7 zeigt, kann nur das Zweischichten- $k - \epsilon$ Modell die Phasenverteilung in der teilweise umgekehrten Strömung wiedergeben. Die mittlere Wasserhöhe wird dabei nur minimal überschätzt. Und auch der Wellenbereich stimmt gut mit dem Versuch von Stähler [94] überein mit einiger Abweichung im Bereich der Wellentäler, deren Tiefe zu gering berechnet wird. Im Gegensatz dazu sind weder das Zweischichten- $k - \omega$ SST Modell noch das Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modell in der Lage den Phasenverlauf korrekt zu beschreiben. Beide überschätzen die mittlere Wasserhöhe deutlich und auch die Wellenhöhe wird bei beiden zu klein vorausgesagt, wie der flache Verlauf der Kurven zeigt.

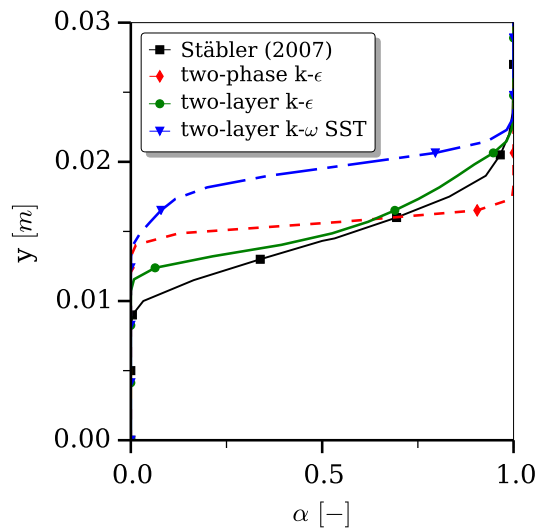


Abbildung 6.7: Messpunkt 2 [94]: Phasenverteilung

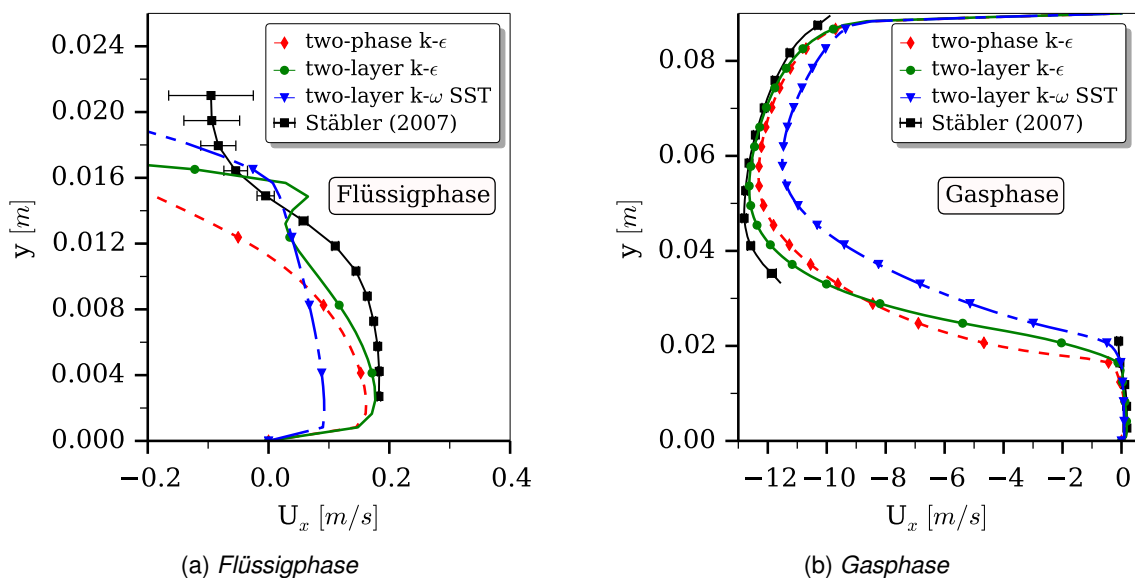


Abbildung 6.8: Messpunkt 2 [94]: Geschwindigkeitsverteilung

Auch die Geschwindigkeitsverläufe (Abb. 6.8) stimmen nur in der Simulation mit dem Zweischichten- $k - \epsilon$ Modell gut mit dem Versuch überein, mit Abweichungen vor allem im Flüssigkeitsbereich. Anders als in den vorherigen Strömungen zeigt das Zweischichten- $k - \omega$ SST Modell hier sogar die schlechtesten Ergebnisse aller drei betrachteten Turbulenzmodelle. Sowohl in der Flüssig- als auch in der Gasphase werden die Geschwindigkeiten deutlich unterschätzt. Die Ergebnisse des Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modells liegen zwischen den beiden Zweischichten-Turbulenzmodellvarianten.

Das selbe Bild zeigt sich bei Betrachtung der Verläufe der turbulenten kinetischen Energie in Abbildung 6.9. In der Gasphase sind die Simulationsergebnisse des Zweischichten- $k - \epsilon$ Modells beinahe deckungsgleich mit dem Versuch. In der Flüssigphase hingegen decken sich die Ergebnisse des Zweiphasen- $k - \epsilon$ Modells mit den experimentell bestimmten Daten, während das Zweischichten- $k - \epsilon$ Modell die turbulente kinetische Energie nur geringfügig unterschätzt. Das Zweischichten- $k - \omega$ SST Modell kann hier überhaupt nicht überzeugen. Es fällt auf, dass die Verläufe aller Modelle im Bereich der mittleren Wasserhöhe ($y \approx 0,012\text{ m}$) auf der Wasserseite allesamt nach rechts wegnicken, während die Kurve der Messergebnisse weiter ansteigt. Der Grund hierfür ist, dass hier im Grunde genommen zwei verschiedene Größen miteinander verglichen werden. Während Stähler [94] ausschließlich die turbulente kinetische Energie der Flüssigphase k_L gemessen hat, wird in den Simulationen eine turbulente kinetische Energie der Mischung aus Flüssigkeit und Gasphase berechnet:

$$k_{sim} = \frac{\alpha \rho_G k_G + (1 - \alpha) \rho_L k_L}{\rho}$$

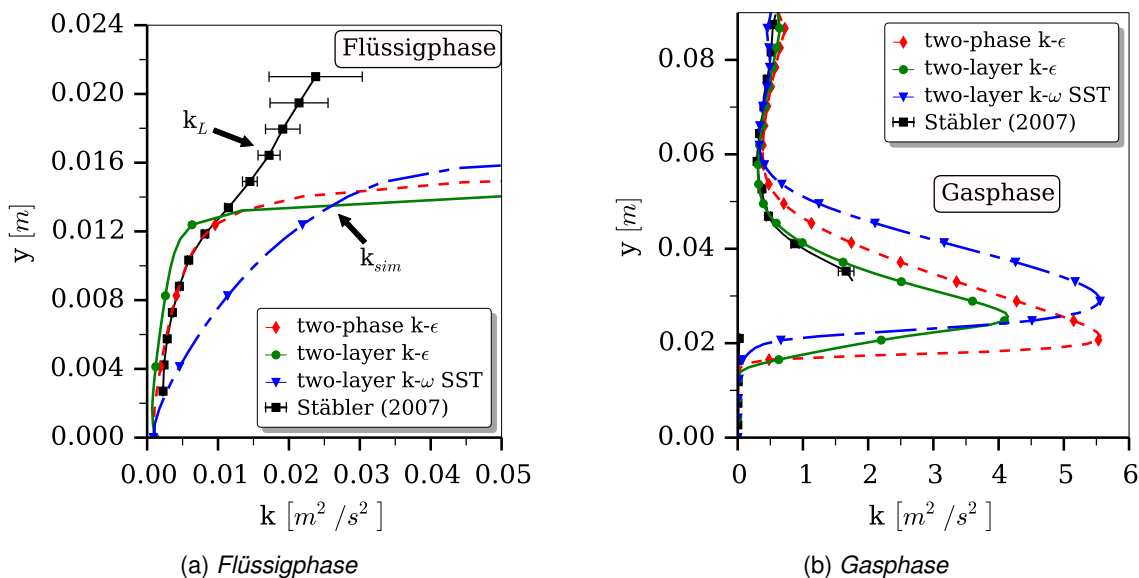


Abbildung 6.9: Messpunkt 2 [94]: Verteilung der turbulenten kinetischen Energie

Somit sollten die Ergebnisse auch nur außerhalb des Wellenbereiches miteinander verglichen werden, wo $\alpha = 0$ gilt. Der gleiche Effekt lässt sich auch bei der Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigphase in Abbildung 6.8a und in nicht ganz so ausgeprägter Form auch bei den übrigen Strömungsformen in der Flüssigkeit beobachten. In der Gasphase tritt er hingegen nicht auf, da im Versuch dort im Wellenbereich nicht gemessen werden konnte.

Mit dem statistischen Voidmodell müsste es nach Gleichung 4.18 nun ebenfalls möglich sein, die mittlere Voidverteilung aus der Verteilung der mittleren turbulenten kinetischen Energie $\overline{\rho k}$ zu berechnen. Da im numerischen Modell jedoch nur eine Transportgleichung für k gelöst wird, muss der zeitliche Mittelwert von ρk dazu aus dem Produkt der gemittelten Einzelgrößen berechnet werden:

$$\overline{\rho k} = \overline{\rho} \overline{k} \quad (6.1)$$

Abbildung 6.10 zeigt die mit Gleichungen 4.18 und 6.1 berechnete mittlere Verteilung der Phasen (rote Linie) im Vergleich mit der mit der Volume-of-Fluid Methode gewonnenen Verteilung (schwarze Linie).

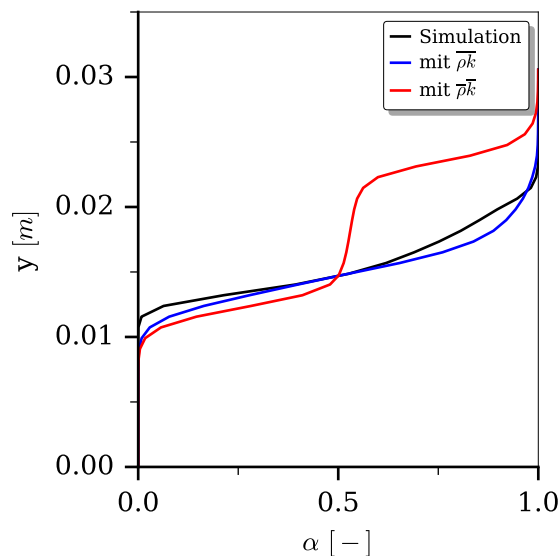


Abbildung 6.10: Vergleich der Phasenverteilungen aus der Simulation und dem statistischen Voidmodell

Es fällt dabei sofort auch, dass die mit dem Voidmodell berechnete Kurve bei einem Volumenanteil von $\alpha = 0,5$ nach oben weg knickt. Der Grund hierfür liegt in der zeitlichen Mittelung der Größen im Wellenbereich. Da die turbulenten Wirbel in einem homogenen Zweiphasengemisch neben der turbulenten Energie k auch die Dichte ρ transportieren,

dürfen diese beiden Größen nicht, wie in Gleichung 6.1 angenommen, als voneinander unabhängig betrachtet werden. Das Produkt ρk muss vielmehr vor der zeitlichen Mittelung für jeden Zeitschritt gebildet werden. Dies wird mit Abbildung 6.11 offensichtlich. Hier unterscheiden sich die Werte der beiden Berechnungsmethoden im Wellenbereich, also wenn $0 < \alpha < 1$, deutlich voneinander. Werden ρ und k als voneinander unabhängige Größen betrachtet (rote Kurve), ergeben sich erheblich größere Werte für $\overline{\rho k}$ im Zweiphasenbereich als für den Fall, dass die Multiplikation vor der zeitlichen Mittelung stattfindet (blaue Kurve). Das erklärt auch den Knick im Verlauf der mit dem Voidmodell errechneten Phasenverteilung. Die Steigung der Kurven in Abbildung 6.10 wird mit $\partial y / \partial \alpha$ berechnet, wodurch mit Einsetzen von Gleichung 4.17 die mittlere turbulente kinetische Energie im Zähler steht. Somit ergeben größere Werte für $\overline{\rho k}$ auch eine größere Steigung der Phasenverteilungskurve. Werden die Größen hingegen vor der zeitlichen Mittelung miteinander multipliziert, berechnet das Voidmodell die Phasenverteilung korrekt, wie in Abbildung 6.10 ebenfalls gezeigt wird (blaue Kurve).

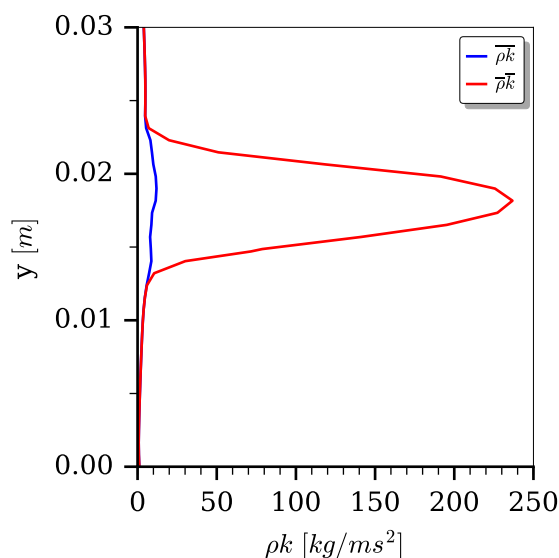


Abbildung 6.11: Vergleich der Verteilung von $\overline{\rho k}$ und $\overline{\rho} \overline{k}$ im Falle eines Zweiphasengemischs

Das Ergebnis lässt die Frage aufkommen, ob im Falle einer homogenen Turbulenzformulierung das Produkt aus Dichte und turbulenter kinetischer Energie ρk , und nicht einzig k als Erhaltungsgröße, für die eine Transportgleichung gelöst wird, betrachtet werden sollte? Im Vergleich zu Gleichung 5.27, müsste demnach nur der diffusive Term auf die Form

$$\nabla \cdot (C \nabla(\rho k))$$

gebracht und der Faktor C mithilfe experimenteller Daten kalibriert werden. Dazu wäre eine Vielzahl an Messdaten in Strömungen mit unterschiedlichen Randbedingungen notwendig, um universelle Beziehungen für C ableiten zu können. Leider gibt es nur wenige

experimentelle Studien, die geschichtete Zweiphasenströmungen derart detailliert wie Stähler [94] gemessen haben. Zudem müsste in beiden Phasen bis nahe zur Grenzfläche gemessen werden, was sich in der Gasphase aufgrund messtechnischer Probleme als äußerst schwierig erweist.

6.2 Vertikale Zweiphasenströmung im Gleichstrom

Neben horizontal geschichteten Strömungen, treten in ingenieurtechnischen Anwendungen häufig vertikal ausgerichtete Schichtenströmungen auf. Ein Beispiel hierfür sind Ringströmungen in vertikalen Rohren. Auch für diese Anwendung soll das neue Zweischichten-Turbulenzmodell validiert werden. Als Referenz dient dabei die Studie von Belt u. a. [9], in der Oberflächenwellen in einer vertikalen Ringströmung untersucht worden sind. Leider wurden keine derart detaillierten Messungen der Strömung gemacht wie es bei Stähler [94] der Fall ist. Dennoch können mittlere Wasserhöhen und mittlere Wellenhöhen aus dem Experiment mit jenen aus der Simulation für verschiedene Messpunkte verglichen werden.

Im Experiment von Belt u. a. [9] wurde Luft von unten in ein vertikales Rohr mit einem Durchmesser D von $0,05\text{ m}$ und einer Gesamtlänge L von 12 m eingespeist. Durch eine poröse Wand trat Wasser 1 m stromab vom Lufteinlass in Wechselwirkung mit der Luftströmung, wodurch sich eine vertikale Ringströmung ausbildete. Mit Hilfe eines Filmdickensensors wurde der zeitliche Verlauf der Dicke des Wasserfilms etwa $6,5\text{ m}$ nach dem Wassereinlass gemessen. Daraus konnte neben einer mittleren Filmdicke auch eine mittlere Wellenhöhe bei gegebenen Einlassbedingungen bestimmt werden. Rund $2,5\text{ m}$ nach der Messstrecke wurden die beiden Phasen über einen Ringspalt wieder voneinander getrennt.

Um die Rechenzeit zu minimieren, wurde ein vereinfachtes Modell des Versuchsaufbaus verwendet, das in Abbildung 6.12 gezeigt wird. Der Bereich des Rohres, in dem die beiden Phasen miteinander wechselwirken (Teststrecke), ist mit $0,5\text{ m}$ Länge erheblich kürzer als im Versuch. Das war nötig, um die Anzahl der Gitterzellen mit 32725 in einem angemessenen Rahmen halten zu können, da der neuentwickelte Löser nicht parallelisiert wurde und die Simulationen daher jeweils nur auf einem Prozessorkern ausgeführt werden konnten. Außerdem wurde nur der äußere, wandnahe Ausschnitt eines dünnen Kreissegmentes des Rohres betrachtet (Abb. 6.13).

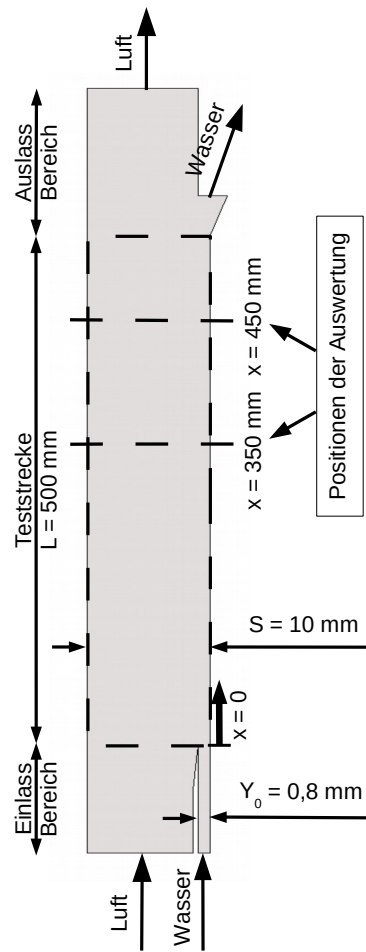


Abbildung 6.12: Modell für Simulationen in vertikaler Strömung

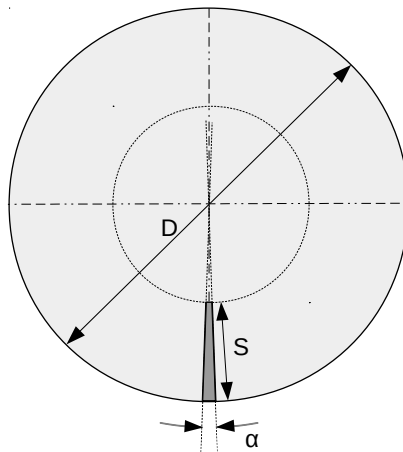


Abbildung 6.13: Ausschnitt des Kreissegmentes des Rohres

Dadurch war es möglich die Problemstellung in nur zwei Dimensionen zu betrachten, da sich der Querschnitt des Kreissegmentausschnitts für kleine Winkel α einem Rechteck annähert. Zudem konnten auf diese Weise weiterhin kartesische Koordinaten verwendet werden, ohne den Strömungslöser unter Berücksichtigung von Zylinderkoordinaten umschreiben zu müssen. Die Höhe S des Ausschnittes musste dabei so gewählt werden, dass die innere Begrenzung außerhalb der turbulenten Grenzschicht der Gasströmung liegt, die sich über der Phasengrenzschicht ausbildet. Die Dicke der turbulenten Grenzschicht kann nach Frank [27] mit

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0,16}{\text{Re}_x^{1/7}} \quad (6.2)$$

bzw. nach Krause [55] mit

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0,37}{\text{Re}_x^{1/5}} \quad (6.3)$$

abgeschätzt werden. Darin sind δ die Dicke der turbulenten Grenzschicht und Re_x die lokale Reynoldszahl an der Stelle x . Für alle betrachteten Messpunkte ergeben sich sowohl nach Gleichung 6.2 als auch nach Gleichung 6.3 Grenzschichtdicken von ungefähr $\delta \approx 0,01 \text{ m}$. Dieser Wert wurde auch für die Höhe des Kreissegmentausschnittes gewählt. Auch der Einlassbereich entspricht nicht dem Experiment. Um definierte Einlassbedingungen gewährleisten zu können, wurde, ähnlich dem Versuch von Stähler [94], ein Einlassbereich mit zwei voneinander getrennten Einlasskanälen gewählt, wobei die Höhe des Wassereinlasses mit $0,0008 \text{ m}$ der höchsten aus den experimentellen Daten zu erwartenden Filmdicke der Flüssigkeit entspricht. Es wurden drei verschiedene Messpunkte untersucht, deren Eintrittsgeschwindigkeiten aus den von Belt u. a. [9] angegebenen Leerrohrgeschwindigkeiten und den geometrischen Abmessungen errechnet wurden. Sie sind in Tabelle 6.2 aufgelistet.

Tabelle 6.2: Eintrittsbedingungen im Versuch von Belt u. a. [9]

U_{LS} [m/s]	U_{GS} [m/s]	$U_{L,0}$ [m/s]	$U_{G,0}$ [m/s]	A [—]
0,019	31,0	0,31	33,04	0,4
0,040	26,2	0,67	27,93	0,4
0,082	21,9	1,34	23,32	0,4

Zudem wurde mit $A = 0,4$ das Wave Aspect Ratio so eingestellt, wie es auch in Kapitel 4.3.4 für das Experiment von Belt u. a. [9] gewählt werden musste. Wie sich bei der Validierung der horizontal geschichteten Strömungen im vorherigen Kapitel gezeigt hat,

liefert ausschließlich das Zweischichten- $k-\epsilon$ Modell gute Ergebnisse in allen Strömungsbereichen. Aus diesem Grund wird bei diesem und dem folgenden Validierungsbeispiel nur noch das Zweischichten- $k-\epsilon$ Modell verwendet. Die beiden anderen Modelle werden nicht mehr berücksichtigt.

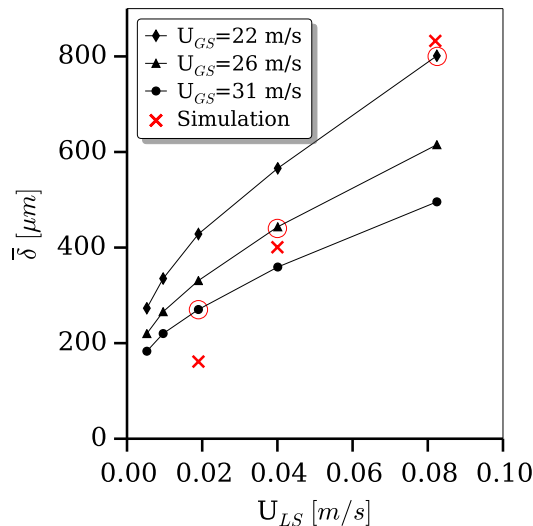


Abbildung 6.14: Vergleich der mittleren Filmdicke

Abbildung 6.14 zeigt die Ergebnisse aus der Auswertung der mittleren Filmdicken $\bar{\delta}$ für die drei untersuchten Messpunkte an der Stelle $x = 450 \text{ mm}$. Die mittlere Filmdicke wurde dabei in Abhängigkeit der Leerrohrgeschwindigkeit U_{LS} der Flüssigphase für verschiedene Gas-Leerrohrgeschwindigkeiten aufgetragen. Die Simulationsergebnisse sind jeweils mit einem roten X und die dazugehörigen Datenpunkte aus dem Experiment mit einem roten Kreis gekennzeichnet. Wie zuvor bei der horizontalen Strömung, wurden die zeitlich abhängigen Simulationsergebnisse auch hier über eine längere Zeitspanne gemittelt. Die Zeitspanne war mit 5 s jedoch nur halb so lang wie bei der horizontalen Strömung. Grund hierfür war die, trotz der vergleichsweise geringen Zellanzahl, sehr lange Berechnungszeit von ungefähr einem Tag pro eine Sekunde Simulationszeit. Dies ist jedoch auch nicht verwunderlich, da die Höhe der einzelnen Gitterzellen mit ungefähr $0,0001 \text{ m}$ sehr klein gewählt werden musste, um ausreichend viele Zellen im Bereich des sehr dünnen Wasserfilms realisieren zu können. Zusammen mit den hohen Fluidgeschwindigkeiten ergaben sich dadurch Zeitschrittweiten zwischen 10^{-6} s und 10^{-5} s , um numerische Stabilität zu gewährleisten. Die Stoffeigenschaften wurden wiederum gemäß Tabelle 5.2 eingestellt. Und auch die Intensität der Turbulenz an den Einlässen blieb mit 5% unverändert. Wie in der Abbildung zu erkennen ist, können die mittleren Filmdicken der Wasserströmung gut mit dem neuen Zweischichten-Turbulenz-Strömungslöser wiedergegeben werden. Die berechneten Wasserhöhen weichen dabei vor allem für die beiden Messpunkte mit den höheren Flüssigkeits-Leerrohrgeschwindigkeiten nur geringfügig von den experimentellen Daten ab. Eine etwas größere Abweichung zeigt sich bei

dem Messpunkt mit der kleinsten Leerrohrgeschwindigkeit der Wasserphase. Hier muss allerdings berücksichtigt werden, dass aufgrund der geringen Filmdicke ($\bar{\delta} \approx 0,00027\text{ m}$) nur 2 bis 3 Gitterzellen im Flüssigkeitsbereich liegen.

In Abbildung 6.15 ist das Verhältnis aus mittlerer Wellenhöhe H und mittlerer Filmdicke $\bar{\delta}$ über den Quotienten aus mittlerer Filmdicke und Rohrdurchmesser D für verschiedene Leerrohrgeschwindigkeiten der Gasphase aufgetragen. Wiederum sind die Simulationsergebnisse mit einem roten X und die entsprechenden experimentellen Datenpunkte mit einem roten Kreis markiert. Es fällt auf, dass die mittleren Wellenhöhen in der Simulation allesamt deutlich unter jenen im Versuch gemessenen Werten liegen. Dieses Ergebnis lässt sich jedoch damit erklären, dass die Anlaufstrecke in der Simulation deutlich kürzer war als im Experiment. Erfahrungsgemäß nimmt die Wellenhöhe mit steigender Anlauflänge zu.

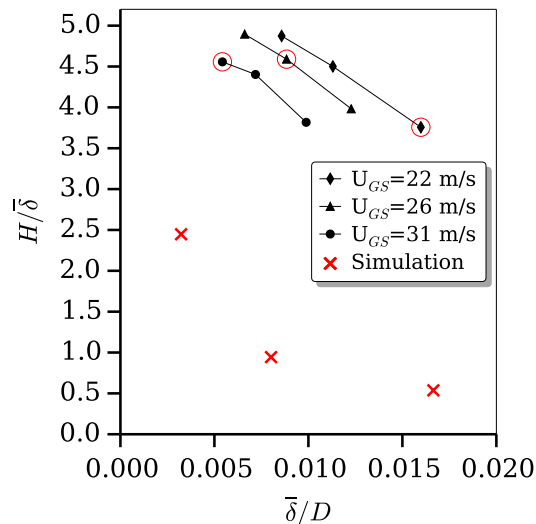


Abbildung 6.15: Vergleich der mittleren Wellenhöhe

Zur Korrektur wurde die zu erwartende mittlere Wellenhöhe an der Messposition im Experiment durch lineare Extrapolation der Simulationsergebnisse an den Stellen $x = 350\text{ mm}$ und $x = 450\text{ mm}$ für den Messpunkt mit $U_{LS} = 0,019\text{ m/s}$ und $U_{GS} = 31,0\text{ m/s}$ bestimmt. Abbildung 6.16 zeigt das Ergebnis der Extrapolation. Die extrapolierte Wellenhöhe weicht mit einem Wert von ca. $1500\text{ }\mu\text{m}$ dabei zwar vom Experiment (ca. $1200\text{ }\mu\text{m}$) ab, der allgemeine Trend ist jedoch sehr gut ersichtlich. Es muss außerdem beachtet werden, dass die Annahme einer linearen Zunahme der Wellenhöhe mit der Lauflänge nicht unbedingt realistisch ist, sondern nur der Veranschaulichung dienen soll.

Zusammenfassend kann auch hier festgehalten werden, dass das neu entwickelte Zweischichten-Turbulenzmodell durchaus in der Lage ist, auch in vertikal geschichteten Strömungen gute Ergebnisse zu liefern.

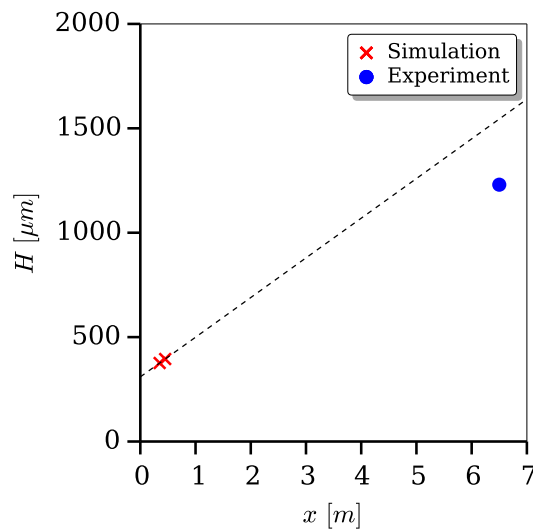


Abbildung 6.16: Extrapolation der Wellenhöhe über die Kanallänge

6.3 Anlaufen einer Welle

Als letztes Validierungsbeispiel soll das Anlaufverhalten einer geschichteten Strömung untersucht werden. Dazu wird, ähnlich dem Versuchsaufbau von Veron u. Melville [104], eine Luftströmung über eine anfangs ruhende Wasseroberfläche geleitet, wobei die Luftgeschwindigkeit kontinuierlich bis zum Erreichen der Endgeschwindigkeit von 8 m/s gesteigert wird. Aufgrund der Reibungskräfte wird die Wasseroberfläche in Bewegung gesetzt. Dabei werden Oberflächenwellen angefacht. Wie in Kapitel 2.2.1 erläutert wurde, liegt der Entstehung von Oberflächenwellen ein Stabilitätsproblem zu Grunde, das mithilfe des Kelvin-Helmholtz-Mechanismus erklärt werden kann. Nach der Theorie wird eine ruhende Wasseroberfläche unter Normalbedingungen ab einer Luftgeschwindigkeit von ca. $6,5\text{ m/s}$ instabil. Laut Miles [67, 68] überschätzt die Kelvin-Helmholtz Instabilität jedoch die Luftgeschwindigkeit, bei der Wellenwachstum zum ersten Mal zu beobachten ist. Nach seiner Theorie [66] müssten bereits ab einer Relativgeschwindigkeit beider Fluide von ungefähr 1 m/s Oberflächenwellen angefacht werden. Allerdings ist der Kelvin-Helmholtz Mechanismus laut Kordyban [53] dennoch wichtig für die Entstehung hoher Wellen im Falle nach oben verschlossenen Kanälen. Dieser Fall wird mit diesem Beispiel behandelt. Aus diesem Grund soll aus den Simulationsergebnissen die Luftgeschwindigkeit bestimmt werden, bei der vom Zweischichten-Turbulenzmodell erstmals kleine Wellen berechnet werden. Außerdem wird anhand der Phasenverteilung untersucht, ab welcher Luftgeschwindigkeit erstmals sichtbare Wellen auftreten. Auch der Einfluss der Viskosität des Wassers und jener der Oberflächenspannung soll betrachtet werden. Veron u. Melville [104] haben in ihrem Experiment festgestellt, dass die Bildung von Oberflächenwellen durch die Zugabe des Tensids Triton X-100 weit über den Punkt hinaus unterdrückt wird, bei dem normales Wasser ohne Reduzierung der Oberflächenspannung

bereits instabil geworden war. Das Ergebnis erscheint ein wenig verwunderlich, da die Oberflächenspannung nach Gleichung 2.9 stabilisierend auf die Phasengrenzfläche wirkt. Eine verzögertes Anlaufen müsste also bei erhöhten und nicht, wie bei Veron u. Melville [104], bei verminderten Oberflächenspannungen zu beobachten sein.

Die Geometrie, die für dieses Validierungsbeispiel verwendet wurde, ähnelt dem aus dem Versuch von Veron u. Melville [104] und ist in Abbildung 6.17 dargestellt. Allerdings auch hier mit deutlich reduzierten Abmaßen, um eine angemessene Anzahl an Gitterzellen realisieren und somit Simulationsergebnisse in vertretbarer Zeit erhalten zu können.

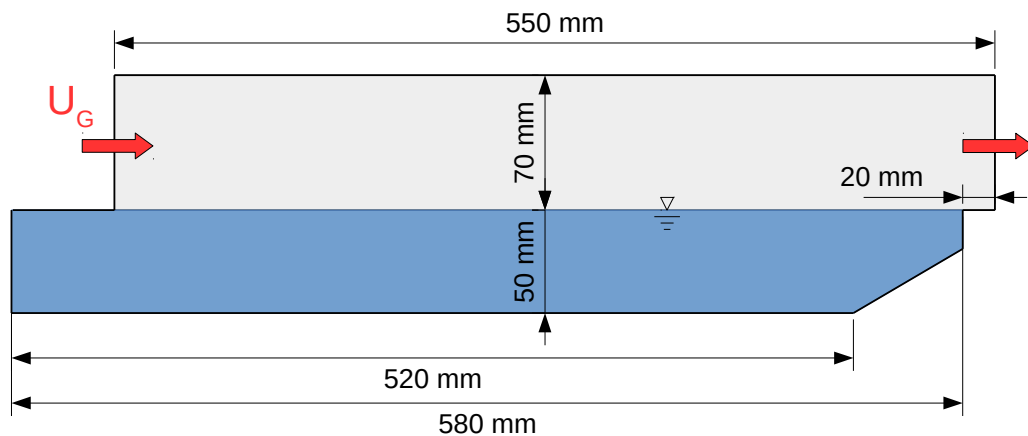


Abbildung 6.17: Geometrie im Validierungsbeispiel: Anlaufen einer Welle

Wie bereits erwähnt, werden Luft und Wasser als Arbeitsmedium verwendet. Die verwendeten Stoffdaten sind in Tabelle 6.3 aufgelistet. Neben den Daten bei Normalbedingungen wurden auch die reduzierte Oberflächenspannung bei Verwendung von Triton X-100 und die erhöhte Viskosität der Flüssigphase, die bei der Untersuchung des Einflusses dieser Stoffgröße gewählt wurde, in die Tabelle aufgenommen. Die Angaben für das Tensid sind dem „Answer Center“ des Herstellers [20] entnommen worden. Die Wahl der Viskosität für den dritten betrachteten Fall wird im Laufe der Auswertung der Simulationsergebnisse erklärt werden.

Tabelle 6.3: Stoffdaten im Validierungsbeispiel: Anlaufen einer Welle

	ρ_G [kg/m ³]	ρ_L [kg/m ³]	ν_G [10 ⁻⁵ m ² /s]	ν_L [10 ⁻⁶ m ² /s]	σ [N/m]
Normalbedingung	1,189	998,21	1,532	1,003	0,07274
red. Oberflächenspannung	1,189	998,21	1,532	1,003	0,03
erh. Viskosität	1,189	998,21	1,532	10,03	0,07274

Die kritischen Windgeschwindigkeiten, bei denen Wellenwachstum auftritt, sind in Tabelle 6.4 gezeigt. Es wird dabei unterschieden, zwischen der Geschwindigkeit, bei der das Zweischichten-Modell erstmals Wellen detektiert, d.h. einen inneren Bereich berechnet, und jener, bei der erstmals sichtbare Wellen auftreten, d.h. Wellen, deren Höhe die lokale Zellohde von ca. $0,8\text{ mm}$ übersteigen. Bei den erstgenannten wird nochmals der Ort — nahe des Lufteinlasses (*Eintritt*) bzw. über die gesamte Wasseroberfläche (*gesamt*) — unterschieden. Außerdem sind die maximalen Wellenhöhen aufgelistet, die bei der untersuchten Maximalgeschwindigkeit der Luftströmung beobachtet werden können.

Tabelle 6.4: Ergebnisse im Validierungsbeispiel: Anlaufen einer Welle

	Turbulenzmodell		sichtbar	max. Wellenhöhe
	Eintritt	gesamt		
Normalbedingung	$1,40\text{ m/s}$	$1,96\text{ m/s}$	$4,5\text{ m/s}$	8 mm
red. Oberflächenspannung	$1,20\text{ m/s}$	$1,56\text{ m/s}$	$3,6\text{ m/s}$	10 mm
erh. Viskosität	$2,25\text{ m/s}$	$2,32\text{ m/s}$	$5,25\text{ m/s}$	7 mm

Wie die Ergebnisse der Simulation mit den Stoffwerten unter Normalbedingungen zeigen, werden ab einer Relativgeschwindigkeit von ungefähr $1,2\text{ m/s}$ erstmals kleine Wellen vom Turbulenzmodell berechnet. Dieser Wert liegt sehr nahe bei der von Miles [66] angegebenen Geschwindigkeit, bei der eine Wasseroberfläche instabil wird. Die Luftgeschwindigkeit, ab der sichtbare Wellen zu beobachten sind, liegt mit $4,5\text{ m/s}$ deutlich höher, jedoch immer noch unter dem von der Kelvin-Helmholtz Theorie berechneten Wert. Wie bereits vermutet wurde, verschiebt sich der Start der Wellenbildung bei Reduzierung der Oberflächenspannung zur niedrigeren Geschwindigkeiten und Wellen mit größerer maximaler Amplitude können beobachtet werden, da die stabilisierende Wirkung der Oberflächenspannung verloren geht. Der Effekt größerer Wellenhöhen bei geringerer Oberflächenspannung lässt sich auch direkt aus dem neu entwickelten statistischen Wellenmodell ableiten. Gleichung 4.17 in Gleichung 5.33 eingesetzt liefert:

$$H \approx \frac{1}{\left. \frac{d\alpha}{dy} \right|_{\alpha=0,5}} = 0,25 \frac{2 \overline{\rho k} \Big|_{\alpha=0,5}}{\Delta \rho g + \sigma q^2} \quad (6.4)$$

wobei die Oberflächenspannung σ im Nenner steht und der Ausdruck auf der rechten Seite für kleinere σ somit größer wird. Eine mögliche Erklärung, warum ein gegenteiliger Effekt im Versuch von Veron u. Melville [104] beobachtet wurde, liefert der Blick auf die Viskosität von Triton X-100 in wässriger Lösung, die laut Herstellerangaben [21] bei einer Massenkonzentration des Tensids von 10 % und einer Temperatur von 25°C bei $\mu_{\text{Triton},10\%} = 0,002\text{ kg/ms}$ beträgt, also rund das Doppelte des Wertes von normalem

Wasser. Bei einer Massenkonzentration von 30 % liegt der Wert bereits beim Achtzigfachen des normalen Wassers. Aus diesem Grund wurde auch der Einfluss der Viskosität auf die Wellenbildung untersucht, wobei mit der Erhöhung der Viskosität um den Faktor 10, ein Wert zwischen den genannten Stoffwerten für Triton X-100 gewählt worden ist. Wie man anhand der Simulationsergebnisse sehen kann, setzt die Wellenbildung bei erhöhter Viskosität später ein als im Fall von normalem Wasser und auch die maximalen Wellenhöhen sind kleiner. Die Viskosität hat daher, wie die Oberflächenspannung, eine stabilisierende Wirkung auf die Grenzfläche, womit sich das Ausbleiben der Wellenbildung bei Verwendung des Tensids im Versuch von Veron u. Melville [104] zumindest qualitativ erklären ließe.

Mit dem abschließenden Valdierungsbeispiel, konnte gezeigt werden, dass mit dem in dieser Arbeit entwickelte Turbulenzmodell auch lokale Effekte, wie das Anlaufen einer Welle, dargestellt werden können. Außerdem werden die Einflüsse der Oberflächenspannung und der Viskosität auf die Bildung von Oberflächenwellen wiedergegeben.

7 Zusammenfassung und Schlussfolgerung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein neuer Modellierungsansatz für die Simulation geschichteter Zweiphasenströmungen herausgearbeitet, wobei der Einfluss von Oberflächenwellen auf die Strömung mit einem Zweischichten-Turbulenzmodell berücksichtigt wird. Dazu wird das Strömungsfeld in einen inneren, oberflächennahen Bereich und zwei äußere Bereiche, in denen nur einphasige Flüssigkeits- bzw. einphasige Gasströmung zu erwarten sind, aufgeteilt. Die Zweischichten-Formulierung macht es dabei möglich, unterschiedliche Turbulenzmodelle in den jeweiligen Bereichen anwenden zu können. Während in den äußeren Bereichen Zweigleichungs-Wirbelviskositätsmodelle zum Einsatz kommen, wird im inneren Bereich ein einfacheres Eingleichungsmodell verwendet, wo im Gegensatz zu anderen Studien die Wellenamplitude als turbulentes Längenmaß gewählt worden ist.

Die Wellenhöhe ist dabei nicht a priori bekannt und muss daher aus den bekannten Strömungsgrößen bestimmt werden. Dazu wurde in dieser Arbeit ebenfalls ein Wellenmodell entwickelt, dessen grundlegende Annahme ein statistisches Gleichgewicht zwischen der turbulenten kinetischen Energie, der turbulenten potentiellen Energie und der turbulenten Oberflächenenergie ist. In der Modellanschauung kann die kinetische Energie der Turbulenz dazu verwendet werden, um die potentielle Energie eines Fluidpartikels oder aber die Grenzflächenenergie zu erhöhen. Mit anderen Worten, Turbulenz und Oberflächenwellen stehen in engem Wechselspiel miteinander, wobei die Wellen ihre Energie aus einer Art Energiereservoir $\overline{\rho k}$ beziehen. Dieser Speicher wird aus beiden Phasen gespeist, wodurch der Impulsaustausch über die Phasengrenzfläche beschrieben wird. Mit diesem statistischen Ansatz ist es möglich, einerseits ein Modell zur Bestimmung der mittleren Phasenverteilungen, aus denen die gesuchten mittleren Wellenhöhen bzw. -amplituden bestimmt werden können, und andererseits eines zur Berechnung ganzer Wellenspektren abzuleiten. Die Validierung der Modelle zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten im Bereich horizontal und vertikal geschichteter Kanalströmungen sowie im Bereich der Meeresströmungen.

Das Zweischichten-Turbulenzmodell ist daraufhin in den Volume-of-Fluid Löser *interFoam* des quelloffenen CFD-Programms *OpenFOAM* implementiert worden. Dabei mussten zu Beginn die bereits implementierten Zweigleichungsmodelle ($k - \epsilon$ und $k - \omega$ *SST*) auf die

Zweiphasenschreibweise umgeschrieben werden. In einer Parameterstudie wurden dann die noch unbekannt Parameter des Zweischichten-Turbulenzmodells bestimmt, wobei sich herausstellte, dass der Vorfaktor im turbulenten Längemaß des inneren Bereiches gleich dem Vorfaktor C_{μ} des $k - \epsilon$ Modells gewählt werden muss. Dadurch beschränkt sich die Zahl der Einstellparameter des neuen Turbulenzmodelles lediglich auf die beiden Konstanten C_L und C_G , die die Grenzen des inneren Bereiches definieren und von der Wahl des Turbulenzmodelles in den äußeren Bereichen abhängen.

Ausführliche Validierungsrechnungen in horizontalen und vertikalen Kanal- bzw. Rohrgeometrien zeigten gute Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit den experimentell ermittelten Daten. Während im Fall der vertikalen Rohrströmung lediglich mittlere Flüssigkeitshöhen und mittlere Wellenhöhen zum Vergleich zur Verfügung standen, konnte im Fall der horizontalen Kanalströmung auf die detaillierten Messergebnisse (Phasenverteilungen sowie Geschwindigkeits- und Turbulenzprofile) von Stähler [94] zurückgegriffen werden. Es zeigte sich hierbei, dass das Zweischichten-Turbulenzmodell deutlich bessere Ergebnisse in allen untersuchten Strömungsformen (schießend, fließend, teilweise umgekehrt) liefern kann, als eine Simulation, in der einzig das Standard $k - \epsilon$ Modell zum Einsatz kam. Vor allem die Verläufe der turbulenten kinetischen Energie stimmen bei den Simulationen mit dem Zweischichten-Ansatz viel besser mit dem Experiment überein, mit der allgemeinen Tendenz, dass die Turbulenzproduktion an der Phasengrenzfläche überschätzt wird. Es waren dabei sehr wohl auch Unterschiede zwischen den Simulationen mit dem Zweischichten-Modell zu beobachten, als die Turbulenzmodelle in den äußeren Bereichen variiert wurden. So waren die Ergebnisse, die das Modell im Falle der teilweise umgekehrten Strömung bei Verwendung des $k - \omega$ SST Modelles lieferte, sogar schlechter als jene der Simulation ohne das Zweischichten-Modell. Die Anwendung des $k - \epsilon$ Modells in den äußeren Bereichen des Zweischichten-Turbulenzmodelles wird daher empfohlen. Abschließend wurde überprüft, ob das Modell das Anlaufverhalten der Strömung aus der Ruhelage realistisch wiedergeben kann. Es hat sich dabei gezeigt, dass die Gasgeschwindigkeiten, bei denen zum ersten Mal Wellenwachstum beobachtet werden kann, sehr gut in dem von den gängigen Wellentheorien vorhergesagten Bereich liegen. Auch die Änderung der Stoffeigenschaften der Flüssigkeit führt zu den zu erwartenden Ergebnissen. So wird die freie Oberfläche bei Reduzierung der Oberflächenspannung deutlich früher instabil, als es der Fall bei Verwendung des normalen Luft-Wasser-Gemisches ist. Im Gegensatz dazu führt eine Erhöhung der Viskosität zu einem späteren Einsetzen der Wellenbildung.

Es kann daher festgehalten werden, dass der in dieser Arbeit vorgestellte Modellierungsansatz für geschichtete Zweiphasenströmungen eine einfache Möglichkeit bietet, die Oberflächeneffekte in diesen Strömungen mit einer nur geringen Anzahl an freien Einstellparametern abzubilden. Mit dem neuen numerischen Modell ist somit nun möglich, die in den Verdampfer- bzw. Kondensatorrohren thermischer Kraftwerke auftreten-

den Ring- und Schichtenströmungen zu berechnen, ohne dabei auf komplizierte Phasenwechselwirkungsmodelle zurückgreifen zu müssen. Auch die Simulation der rotierenden Schichtenströmungen in den Zyklonabscheidern und den Turbinenkomponenten sollte problemlos möglich sein, wobei in diesen Fällen zusätzlich der energetische Beitrag der Zentrifugalkraft in der Wellenstatistik berücksichtigt werden muss.

Allerdings konnte bei der Validierung des neuen numerischen Modells gezeigt werden, dass die Dichte und die turbulente kinetische Energie im Falle eines homogenen Zweiphasengemisch nicht unabhängig voneinander betrachtet werden dürfen. Dabei stellte sich die Frage, ob nicht das Produkt dieser beider Größen und nicht die turbulente kinetische Energie alleine, als Erhaltungsgröße für die Turbulenz gewählt werden müsse. Die Umformulierung des diffusiven Terms in der Gleichung für die turbulente kinetische Energie, der, wie bei den herkömmlichen Turbulenzmodellen für Zweiphasenströmungen üblich, aus der Formulierung für einphasige Strömungen übernommen worden ist, ist im Moment jedoch nicht möglich, da die für die Kalibrierung des Vorfaktors notwendigen Messdaten noch nicht existieren. Die Frage konnte daher nicht abschließend geklärt werden und zeigt die Notwendigkeit von weiteren detaillierten experimentellen Untersuchungen auf dem Gebiet geschichteter Zweiphasenströmungen.

Literaturverzeichnis

- [1] AIRY, G. B.: Tides and Waves. In: ROSE, H. J. (Hrsg.) ; ROSE, H. J. (Hrsg.) ; SMEDLEY, E. (Hrsg.): *Encyclopaedia Metropolitana* Bd. 5. London, 1841, S. 241–396
- [2] AKAI, M. ; INOUE, A. ; AOKI, S.: The prediction of stratified two-phase flow with a two-equation model of turbulence. In: *International Journal of Multiphase Flow* 7 (1981), Nr. 1, S. 21 – 39
- [3] AKAI, M. ; INOUE, A. ; AOKI, S. ; ENDO, K.: A co-current stratified air-mercury flow with wavy interface. In: *International Journal of Multiphase Flow* 6 (1980), Nr. 3, S. 173 – 190
- [4] AL ISSA, S. ; MACIAN, R.: A review if CCFL phenomenon. In: *Annals of Nuclear Energy* 38 (2011), Nr. 9, S. 1795–1819
- [5] ALSTOM POWER: *Heat exchangers for thermal power plants*. <http://alstomenergy.gepower.com/Global/Power/Resources/Documents/Brochures/heat-exchangers.pdf>. – zugegriffen am 29.2.2016
- [6] BAEHR, H. D. ; STEPHAN, K.: *Wärme- und Stoffübertragung*. 8. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2013
- [7] BALLING, L: *Fast cycling and rapid start-up: new generation of plants achieves impressive results*. http://www.energy.siemens.com/br/pool/hq/power-generation/power-plants/gas-fired-power-plants/combined-cycle-powerplants/Fast_cycling_and_rapid_start-up_US.pdf. – zugegriffen am 29.2.2016
- [8] BATARSEH, F. Z.: *Spray generated by an airblast atomizer : atomization, propagation and aerodynamic instability*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2009
- [9] BELT, R.J. ; WESTENDE, J.M.C. V. ; PRASSER, H.M. ; PORTELA, L.M.: Time and spatially resolved measurements of interfacial waves in vertical annular flow. In: *International Journal of Multiphase Flow* 36 (2010), Nr. 7, S. 570 – 587

- [10] BERBEROVIĆ, E. ; VAN HINBERG, N. P. ; JAKIRLIĆ, S. ; ROISMAN, I. V. ; TROPEA, C.: Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: Dynamics of the cavity evolution. In: *Phys. Rev. E* 79 (2009), S. 036306
- [11] BERTHELSEN, P. A. ; YTREHUS, T.: Calculations of stratified wavy two-phase flow in pipes. In: *International Journal of Multiphase Flow* 31 (2005), Nr. 5, S. 571 – 592
- [12] BRACKBILL, J.U. ; KOTHE, D.B. ; ZEMACH, C.: A continuum method for modeling surface tension. In: *Journal of Computational Physics* 100 (1992), Nr. 2, S. 335 – 354
- [13] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAEV, K.A. ; ZEIDLER, E. (Hrsg.): *Springer-Taschenbuch der Mathematik*. Bd. 3. Auflage. Wiesbaden : Springer Spektrum, 2013
- [14] BRUNO, K. ; MCCREADY, M.J.: Processes which control the interfacial wave spectrum in separated gas-liquid flows. In: *International Journal of Multiphase Flow* 15 (1989), Nr. 4, S. 531 – 552
- [15] BURG, K. ; HAF, H. ; WILLE, F. ; MEISTER, A.: *Höhere Mathematik für Ingenieure - Band I: Analysis*. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2013
- [16] CHANDRASEKHAR, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. New York : Dover Publications, Inc., 1981. – ursprüngl. erschienen in Oxford University Press, 1961
- [17] CHEN, H. C. ; PATEL, V. C.: Near-wall turbulence models for complex flows including separation. In: *AIAA Journal* 26 (1988), 2015/10/26, Nr. 6, S. 641–648
- [18] DALY, B. J. ; HARLOW, F.H.: A Model of Countercurrent Steam-Water Flow in Large Horizontal Pipes. In: *Nuclear Science and Engineering* 77 (1981), Nr. 3, S. 273–284
- [19] DAMIÁN, S. M.: *An extended mixture model for the simultaneous treatment of short and long scale interfaces*. Santa Fe, Argentinien, Universidad Nacional del Litoral, Diss., 2013
- [20] DOW CHEMICAL COMPANY: *TRITON X-100 Surfactant Surface Tension*. http://dowac.custhelp.com/app/answers/detail/a_id/1666/. – Answer ID 1666 - zugegriffen am 14.01.2016
- [21] DOW CHEMICAL COMPANY: *TRITON X-100 Surfactant Viscosity*. http://dowac.custhelp.com/app/answers/detail/a_id/1668/. – Answer ID 1668 - zugegriffen am 14.01.2016

- [22] DRANSFELD, K. ; KIENLE, P. ; KALVIUS, G.M.: *Physik I - Mechanik und Wellen*. Bd. 10. Auflage. München Wien : Oldenbourg Verlag, 2005
- [23] DURBIN, P. A. ; MEDIC, G. ; SEO, J. M. ; EATON, J. K. ; SONG, S.: Rough Wall Modification of Two-Layer k - ϵ . In: *Journal of Fluids Engineering* 123 (2001), Nr. 1, S. 16–21
- [24] FABRE, J.: Modelling of Stratified Gas-Liquid Flow. In: BERTOLA, V. (Hrsg.): *Modeling and Experimentation in Two-Phase Flow* Bd. 450. Wien : Springer, 2003, S. 79–116
- [25] FABRE., J. ; MASBERNAT, L. ; SUZANNE, C.: Selected Experimental Data Set No. 7: Stratified Flow, Part I: Local Structure. In: *Multiphase Science and Technology* 3 (1987), S. 285–301
- [26] FERZIGER, J. H. ; PERIĆ, M.: *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin Heidelberg : Springer, 2008
- [27] FRANK, F. M.: *Viscous Fluid Flow*. 2nd Edition. McGraw Hill, Inc., 1991
- [28] FRENCH, R. H.: *Open-Channel Hydraulics*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1985
- [29] GABRIEL, S. G.: *Experimentelle Untersuchung der Tropfenabscheidung einer horizontalen, entgegengerichteten Wasser/Luft-Schichtenströmung*, Karlsruher Institut für Technologie, KIT Scientific Report 7683, 2014. – Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2014
- [30] GARGALLO, M. ; SCHULENBERG, T. ; MEYER, L. ; LAURIEN, E.: Counter-current flow limitations during hot leg injection in pressurized water reactors. In: *Nuclear Engineering and Design* 235 (2005), Nr. 7, S. 785 – 804
- [31] GARGALLO GALLEGO, M.: *Countercurrent Flow Limitations in Horizontal Stratified Flows of Air and Water*, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Wissenschaftlicher Bericht FZKA 7018, 2004. – Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2004
- [32] GERSTNER, F.: Theorie der Wellen. In: *Abhandlung der Königlichen Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften (Prag)* (1802)
- [33] GLIMM, J. ; GROVE, J. W. ; LI, X. L. ; SHYUE, K.-M. ; ZENG, Y. ; ZHANG, Q.: Three-Dimensional Front Tracking. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 19 (1998), Nr. 3, S. 703–727
- [34] GRAW, K.-U.: *Wellenenergie - eine hydromechanische Analyse*. Bericht Nr. 8. Wuppertal : Institut für Grundbau, Abfall- und Wasserwesen, Bergische Universität - Gesamthochschule Wuppertal, 1995

- [35] HARLOW, F. H. ; WELCH, J. E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. In: *Physics of Fluids* 8 (1965), Nr. 12, S. 2182–2189
- [36] HASHMI, A. A.: *Oil Film Dynamics in Aero Engine Bearing Chambers - Fundamental Investigations and Numerical Modelling*. Berlin, Karlsruher Institut für Technologie, Forschungsbericht aus dem Institut für Thermische Strömungsmaschinen, 2012
- [37] HASSELMANN, K. ; BARNETT, T.P. ; BOUWS, E. ; CARLSON, H. ; CARTWRIGHT, D.E. ; ENKE, K. ; EWING, J.A. ; GIENAPP, H. ; HASSELMANN, D.E. ; KRUSEMAN, P. ; MEERBURG, A. ; MÜLLER, P. ; OLBERS, D.J. ; RICHTER, K. ; SELL, W. ; WALDEN, H.: Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). In: *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift Reihe A* (8) (1973), Nr. 12
- [38] HELMHOLTZ, H. von: Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. In: *Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.* 23 (1868), S. 215–228
- [39] HEWITT, G. F.: Flow Regimes. In: HETSRONI, G. (Hrsg.): *Handbook of Multiphase Systems*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1982, S. 2–3 – 2–43
- [40] HIRT, C. W. ; NICHOLS, B. D.: Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. In: *Journal of Computational Physics* 39 (1981), Nr. 1, S. 201–225
- [41] HÖHNE, T. ; MEHLHOOP, J.-P.: Validation of closure models for interfacial drag and turbulence in numerical simulations of horizontal stratified gas-liquid flows. In: *International Journal of Multiphase Flow* 62 (2014), S. 1 – 16
- [42] ISHII, M.: Wave Phenomena and Two-Phase Flow Instabilities. In: HETSRONI, G. (Hrsg.): *Handbook of Multiphase Systems*. New York : McGraw-Hill Book Company, 1982, S. 2–95 – 2–122
- [43] ISHII, M. ; HIBIKI, T.: *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. 2. New York : Springer, 2011
- [44] ISSA, R.I.: Prediction of turbulent, stratified, two-phase flow in inclined pipes and channels. In: *International Journal of Multiphase Flow* 14 (1988), Nr. 2, S. 141 – 154
- [45] JASAK, H.: *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flows*. London, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Diss., Juni 1996
- [46] JEFFREYS, H.: On the Formation of Water Waves by Wind. In: *Proc. Roy. Soc. A* 107 (1925), Nr. 742, S. 189–206

- [47] JIRKA, G. H. ; LANG, C.: *Einführung in die Gerinnehydraulik*. Karlsruhe : Universitätsverlag Karlsruhe, 2009
- [48] KITAIGORODSKII, S. A.: Application of the theory of similarity to the analysis of wind generated wave motion as a stochastic process. In: *Izv. Geophys. Ser.* (1961), S. 105–117. – translation by Irving Emin
- [49] KOLEV, N. I.: *Multiphase Flow Dynamics 5*. Berlin Heidelberg : Springer, 2015
- [50] KOMORI, S. ; MURAKAMI, Y. ; UEDA, H.: The relationship between surface-renewal and bursting motions in an open-channel flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 203 (1989), S. 103–123
- [51] KOMORI, S. ; UEDA, H. ; OGINO, F. ; MIZUSHINA, T.: Turbulence structure and transport mechanism at the free surface in an open channel flow. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 25 (1982), Nr. 4, S. 513 – 521
- [52] KOOPMAN, H. K.: *Analytical investigations concerning the performance of vane separators and experimental validation of droplet separation efficiency*, Karlsruher Institut für Technologie, KIT Scientific Report 7690, 2015. – Zugl.: Karlsruhe, KIT, Diss., 2014
- [53] KORDYBAN, E.: Some Characteristics of High Waves in Closed Channels Approaching Kelvin-Helmholtz Instability. In: *Journal of Fluids Engineering* 99 (1977), Nr. 2, S. 339–346
- [54] KORTEWEG, D. J. ; DE VRIES, G.: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. In: *Philosophical Magazine Series 5* Vol. 39 (1895), S. 422
- [55] KRAUSE, E.: *Strömungslehre, Gasdynamik und Aerodynamisches Laboratorium*. 1. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 2003
- [56] LAUNDER, B. E. ; SHARMA, B. I.: Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. In: *Letters in Heat and Mass Transfer* 1 (1974), Nr. 2, S. 131–137
- [57] LAURIEN, E. ; OERTEL JR., H.: *Numerische Strömungsmechanik*. 5. Aufl. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2013
- [58] LEFEBVRE, A. H.: *Atomization and Sprays*. Taylor and Francis, 1989
- [59] LOPEZ DE BERTODANO, M.: Countercurrent Gas-Liquid Flow in a Pressurized Water Reactor Hot Leg. In: *Nuclear Science and Engineering* 117 (1994), Nr. 2, S. 126–133

- [60] LORD KELVIN, W. T.: Hydrokinetic solutions and observations. In: *Philosophical Magazine Series 4* 42 (1871), Nr. 281, S. 362–377
- [61] LORENCEZ, C. ; NASR-ESFAHANY, M. ; KAWAJI, M. ; OJHA, M.: Liquid turbulence structure at a sheared and wavy gas-liquid interface. In: *International Journal of Multiphase Flow* 23 (1997), Nr. 2, S. 205 – 226
- [62] MALCHEREK, A.: *Gezeiten und Wellen*. 1. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 2010
- [63] MENTER, F. R.: Zonal Two Equation k - ω Turbulence Models for Aerodynamic flows. In: *24th AIAA Fluid Dynamics Conference*. Orlando, FL, United States, 1993 (AIAA-Paper 93-2906)
- [64] MENTER, F. R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. In: *AIAA Journal* 32 (1994), Nr. 8, S. 1598–1605
- [65] MESCHÉDE, D.: *Gerthsen Physik*. 25. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2015
- [66] MILES, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows. In: *Journal of Fluid Mechanics* 3 (1957), S. 185–204
- [67] MILES, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows. Part 2. In: *Journal of Fluid Mechanics* 6 (1959), Nr. 4, S. 568–582
- [68] MILES, J. W.: On the generation of surface waves by shear flows Part 3. Kelvin-Helmholtz instability. In: *Journal of Fluid Mechanics* 6 (1959), Nr. 4, S. 583–598
- [69] MISHIMA, K. ; ISHII, M.: Theoretical Prediction of Onset of Horizontal Slug Flow. In: *Journal of Fluids Engineering* 102 (1980), Nr. 4, S. 441–445
- [70] MOSKOWITZ, L.: Estimates of the power spectrums for fully developed seas for wind speeds of 20 to 40 knots. In: *Journal of Geophysical Research* 69 (1964), Nr. 24, S. 5161 – 5179
- [71] NEWTON, C. H. ; BEHNIA, M.: Numerical calculation of turbulent stratified gas-liquid pipe flows. In: *International Journal of Multiphase Flow* 26 (2000), Nr. 2, S. 327–337
- [72] NEWTON, C. H. ; BEHNIA, M.: A numerical model of stratified wavy gas-liquid pipe flow. In: *Chemical Engineering Science* 56 (2001), Nr. 24, S. 6851–6861
- [73] NIELSEN, P.: *Advanced Series on Ocean Engineering*. Bd. 29: *Coastal and Estuarine Processes*. New Jersey : World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009

- [74] OERTEL JR., H. (Hrsg.): *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*. 13. Aufl. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2012
- [75] OERTEL JR., H. ; BÖHLE, M. ; REVIOL, T.: *Strömungsmechanik*. 7. Aufl. Wiesbaden : Springer Fachmedien, 2015
- [76] OHNUKI, A.: Experimental Study of Counter-Current Two-Phase Flow in Horizontal Tube Connected to Inclined Riser. In: *Journal of Nuclear Science and Technology* 23 (1986), Nr. 3, S. 219–232
- [77] OPENFOAM FOUNDATION: *OpenFOAM - The Open Source CFD Toolbox*, User Guide Version 2.2.0, 2013
- [78] OSHER, S. ; SETHIAN, J. A.: Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. In: *Journal of Computational Physics* 79 (1988), Nr. 1, S. 12–49
- [79] PATEL, V. C. ; YOON, J. Y.: Application of Turbulence Models to Separated Flow Over Rough Surfaces. In: *Journal of Fluids Engineering* 117 (1995), Nr. 2, S. 234–241
- [80] PHILLIPS, O. M.: On the generation of waves by turbulent wind. In: *Journal of Fluid Mechanics* 2 (1957), Nr. 5, S. 417–445
- [81] PHILLIPS, O. M.: The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. In: *Journal of Fluid Mechanics* 4 (1958), Nr. 4, S. 426–434
- [82] PHILLIPS, O. M.: *The Dynamics of the Upper Ocean*. Cambridge : Cambridge University Press, 1966
- [83] PIERSON, W. J. ; MOSKOWITZ, L.: A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. In: *Journal of Geophysical Research* 69 (1964), Nr. 24, S. 5181–5190
- [84] RASHIDI, M. ; BANERJEE, S.: Turbulence structure in free-surface channel flows. In: *Physics of Fluids* 31 (1988), Nr. 9, S. 2491–2503
- [85] RASHIDI, M. ; HETSRONI, G. ; BANERJEE, S.: Mechanisms of heat and mass transport at gas-liquid interfaces. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 34 (1991), Nr. 7, S. 1799 – 1810
- [86] RASHIDI, M. ; HETSRONI, G. ; BANERJEE, S.: Wave-turbulence interaction in free-surface channel flows. In: *Physics of Fluids A* 4 (1992), Nr. 12, S. 2727–2738
- [87] RICHTER, H. J. ; WALLIS, G. B. ; CARTER, K. H. ; MURPHY, S. L.: Deentrainment and Counter-current Air-Water Flow in a Model PWR Hot Leg. In: *Nuclear Regulatory Commission Report* (1978), Nr. NRC-0193-9

- [88] RICK, H.: *Gasturbinen und Flugantriebe*. Berlin Heidelberg : Springer, 2013
- [89] RUSCHE, H.: *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*. London, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Diss., Dezember 2002
- [90] SATTELMAYER, T.: Grundlagen der Verbrennung in stationären Gasturbinen. In: LECHNER, C. (Hrsg.) ; SEUME, J. (Hrsg.): *Stationäre Gasturbinen*. 2. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2010
- [91] SIEMENS: *BENSON - Once-Through Heat Recovery Steam Generator*. http://www.energy.siemens.com/hq/pool/hq/power-generation/power-plants/steam-power-plant-solutions/benson%20boiler/BENSON_Once-Through_HRSG.pdf. – zugegriffen am 29.2.2016
- [92] SIEMENS: *BENSON Boilers for Maximum Cost-Effectiveness in Power Plants*. http://www.energy.siemens.com/hq/pool/hq/power-generation/power-plants/steam-power-plant-solutions/benson%20boiler/BENSON_Boilers_for_Maximum_Cost_Effectiveness.pdf. – zugegriffen am 29.2.2016
- [93] STÄBLER, T. ; MEYER, L. ; SCHULENBERG, T. ; LAURIEN, E.: Investigations on flow reversal in stratified horizontal Flow. In: *Proceedings of the International Conference "Nuclear Energy for New Europe 2005"*. Bled, Slovenia, 2005, S. 112.1 – 112.10
- [94] STÄBLER, T. D.: *Experimentelle Untersuchung und physikalische Beschreibung der Schichtenströmung in horizontalen Kanälen*, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Wissenschaftlicher Bericht FZKA 7296, 2007. – Zugl.: Stuttgart, Univ., Diss., 2007
- [95] STÄBLER, T. D. ; MEYER, L. ; SCHULENBERG, T. ; LAURIEN, E.: Turbulence and Void Distribution in Horizontal Counter-Current Stratified Flow. In: *Proceeding of The Seventeenth International Symposium on Transport Phenomena*. Toyama, Japan, 2006
- [96] STOKES, G. G.: On the Theory of Oscillatory Waves. In: *Trans. Camb. Phil. Soc.* 8 (1847), S. 441–455
- [97] STRAUSS, K.: *Kraftwerkstechnik*. 6. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2009
- [98] THE WISE GROUP: Wave modelling - The state of the art. In: *Progress in Oceanography* 75 (2007), S. 603–674
- [99] TIPLER, P. A. ; MOSCA, G. ; WAGNER, J. (Hrsg.): *Physik - für Wissenschaftler und Ingenieure*. 7. Aufl. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2015

- [100] TREECE, G. M. ; PRAGER, R. W. ; GEE, A. H.: Regularised marching tetrahedra: improved iso-surface extraction. In: *Computers & Graphics* 23 (1999), Nr. 4, S. 583–598
- [101] URSELL, R.: Wave Generation by Wind. In: BATCHELOR, G. K. (Hrsg.) ; DAVIES, R. M. (Hrsg.): *Surveys in Mechanics*. Cambridge University Press, 1956, S. 216–249
- [102] VALLÉE, C. ; HÖHNE, T. ; PRASSER, H.-M. ; SÜHNEL, T.: Experimental investigation and CFD simulation of horizontal stratified two-phase flow phenomena. In: *Nuclear Engineering and Design* 238 (2008), Nr. 3, S. 637 – 646. – Benchmarking of CFD Codes for Application to Nuclear Reactor Safety
- [103] VDI E.V. (Hrsg.): *VDI-Wärmeatlas*. Bd. 11. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2013
- [104] VERON, F. ; MELVILLE, W. K.: Experiments on the stability and transition of wind-driven wte surfaces. In: *Journal of Fluid Mechanics* 446 (2001), S. 25–65
- [105] WALLIS, G. B.: *One-dimensional Two-phase Flow*. New York : McGraw-Hill, Inc., 1969
- [106] WALLIS, G.B.: Flooding Velocities for Air and Water in Vertical Tubes. In: *UKAEA Report* (1961), Nr. AAEW-R123
- [107] WELLER, H. G. ; TABOR, G. ; JASAK, H. ; FUREBY, C.: A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. In: *Computers in Physics* 12 (1998), Nr. 6, S. 620–631
- [108] WILCOX, D. C.: Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. In: *AIAA journal* 26 (1988), Nr. 11, S. 1299–1310
- [109] WILCOX, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd Edition. La Cañada, California : DCW Industries, Inc., 2006
- [110] WINTTERLE, T.: *Modellentwicklung und numerische Analyse zweiphasig geschichteter horizontaler Strömungen*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Diss., 2008
- [111] WINTTERLE, T. ; LAURIEN, E. ; STÄBLER, T. ; MEYER, L. ; SCHULENBERG, T.: Experimental and numerical investigation of counter-current stratified flows in horizontal channels. In: *Nuclear Engineering and Design* 238 (2008), Nr. 3, S. 627 – 636. – Benchmarking of CFD-Codes for Application to Nuclear Reactor Safety
- [112] WÖRNER, M.: A compact introduction to the numerical modeling of multiphase flows / Forschungszentrum Karlsruhe GmbH. Karlsruhe, 2003. – Wissenschaftlicher Bericht FZKA 6932

- [113] YIH, C.-S.: *Stratified Flows*. New York : Academic Press, 1980
- [114] ZAPKE, A. ; KRÖGER, D. G.: The influence of fluid properties and inlet geometry in flooding in vertical and inclined tubes. In: *International Journal of Multiphase Flow* 22 (1996), S. 461–472
- [115] ZIEGLER, A. (Hrsg.) ; ALLELEIN, H.-J. (Hrsg.): *Reaktortechnik*. 2. Auflage. Berlin Heidelberg : Springer, 2013

Anhang

A Berechnung der relativen Oberflächenvergrößerung dA

Wird die Phasengrenzfläche mit Grundfläche $A_0 = \lambda B$ (Abb. 4.1) aus ihrer Ruhelage ausgelenkt, so vergrößert sich ihr Oberfläche. Die vergrößerte Oberfläche A_1 lässt sich aus dem Produkt der Kurvenlänge s und der Tiefe B durch Integration berechnen:

$$A_1 = \int_0^B \int_0^\lambda \left(\sqrt{1 + y_S'(x)^2} \right) dx dz \quad (\text{A.1})$$

wobei die aus der Analysis bekannten Vorschrift

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

zur Berechnung der Kurvenlänge s einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ angewendet wird [15].

Damit folgt für die relative Oberflächenvergrößerung dA :

$$dA = A_1 - A_0 = \int_0^B \int_0^\lambda \left(\sqrt{1 + y_S'(x)^2} - 1 \right) dx dz \quad (\text{A.2})$$

Wird nun von einer sinusförmigen Oberflächenwelle der Form $y_S(x) = h \sin(qx - \omega t)$ ausgegangen, gilt für die Ableitung der Oberflächenauslenkung $y_S(x)$:

$$y_S'(x) = hq \cos(qx - \omega t) \quad (\text{A.3})$$

Mit der Annahme, dass die Wellenhöhe viel kleiner als die Wellenlänge sei, also $hq \ll 1$, kann der Wurzelausdruck in Gleichung A.2 mit einer Reihenentwicklung angenähert werden:

$$\sqrt{1 + h^2 q^2 \cos^2(qx - \omega t)} \approx 1 + \frac{1}{2} h^2 q^2 \cos^2(qx - \omega t) + \dots \quad (\text{A.4})$$

Einsetzen in Gleichung A.2 liefert dann den gesuchten Ausdruck für die relative Oberflächenvergrößerung:

$$dA = \int_0^B \int_0^\lambda \frac{1}{2} h^2 q^2 \cos^2(qx - \omega t) dx dz = \frac{1}{4} h^2 q^2 \lambda B \quad (\text{A.5})$$

B Bestimmung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit aus der Schubspannungsgeschwindigkeit an der Wand

Angenommen wird ein ebene, eingelaufene und laminare Strömung. Die Impulsgleichung lautet dann:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Integrieren über die Wasserhöhe y mit den Randbedingungen $\partial u / \partial y = 0$ für $y = \delta$ und $u = 0$ für $y = 0$ liefert:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y - \delta) \quad (\text{B.7})$$

und

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{y^2}{2} - y\delta \right) \quad (\text{B.8})$$

wobei δ die maximale Wasserhöhe darstellt.

Aus der Randbedingung $\partial u / \partial y = \tau_W / \mu$ an der unteren Wand bei $y = 0$ folgt dann für den Druckgradienten aus Gleichung B.7:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\tau_W}{\delta} \quad (\text{B.9})$$

mit der Wandschubspannung τ_W .

Einsetzen in Gleichung B.8 liefert dann das Geschwindigkeitsprofil in Abhängigkeit der Wandschubspannung:


$$u(y) = \frac{\tau_W}{\mu \delta} \left(y\delta - \frac{y^2}{2} \right) \quad (\text{B.10})$$

Daraus lässt sich die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} bestimmen:

$$\bar{u} = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} u(y) dy = \frac{1}{3} \frac{\tau_W \delta}{\mu} \quad (\text{B.11})$$

Mit der Definition der Schubspannungsgeschwindigkeit $u^* = \sqrt{\tau_W / \rho}$ folgt die gesuchte Beziehung zwischen der mittleren Strömungsgeschwindigkeit und der Wandschubspannungsgeschwindigkeit:

$$\bar{u} = \frac{1}{3} \frac{\rho \delta u^{*2}}{\mu} \quad (\text{B.12})$$



In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Modellierungsansatz für die Simulation geschichteter Zweiphasenströmungen vorgestellt. Sie sind charakterisiert durch eine wellige Phasengrenze, über die Impuls und Energie übertragen werden. In früheren Studien hat sich herausgestellt, dass turbulente Wirbel dabei eine wichtige Rolle spielen, die wiederum von Oberflächenwellen als Resultat der Scherkräfte an der Grenzfläche entscheidend beeinflusst werden.

Eine einfache Möglichkeit das Zusammenspiel von Turbulenz und Oberflächenwellen zu modellieren, bietet der Zweischichten-Turbulenzansatz. Dabei wird das Strömungsfeld in einen inneren, oberflächennahen Bereich und zwei äußere, oberflächenentfernte Bereiche aufgeteilt. Während in den äußeren Bereichen Zweigleichungs-Wirbelviskositätsmodelle zum Einsatz kommen, wird im inneren Bereich ein einfacheres Eingleichungsmodell verwendet. Im Gegensatz zu vorangegangenen Studien ist in dieser Arbeit hier die Wellenamplitude als turbulentes Längenmaß gewählt worden. Diese kann aus einem statistischen Gleichgewicht zwischen turbulenter kinetischer, turbulenter potentieller und turbulenter Oberflächenenergie bestimmt werden.

Das Zweischichten-Turbulenzmodell ist daraufhin in den Volume-of-Fluid Löser interFoam des quelloffenen CFD-Programms OpenFOAM implementiert und anhand mehrerer experimenteller Messdaten in horizontal und vertikal geschichteten Strömungen validiert worden.