

Alles oder Nichts - Flavourverletzung im Kontext der links-rechts symmetrischen Vereinigung

*Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
von der Fakultät für Physik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte*

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Wolfgang NOLL
geboren in Koblenz

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juni 2016

Referent: Prof. Dr. Ulrich NIERSTE

Korreferent: Prof. Dr. Matthias STEINHAUSER

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	ii
1 Motivation	1
1.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik	1
1.1.1 Eichgruppe und Teilchenmultipletts des SM	1
1.1.2 Eichkinetischer Sektor des SM	3
1.1.3 Yukawa Sektor des SM	4
1.2 Die Links-Rechts symmetrische Erweiterung	6
1.2.1 Quark Yukawa-Sektor	7
1.2.2 Eichbosonen	11
1.2.3 Higgs-Potenzial des MLRM	16
1.2.3.1 VEV see-saw	19
1.2.3.2 Neutrino see-saw und Paritätssymmetrie	20
1.2.4 Flavorverletzung und Verschränkungsrelationen	22
1.2.5 V_R -unabhängige Flavorverletzung: Eine numerische Untergrenze	23
2 Der Einfluss des Higgssektors auf das Flavorproblem	26
2.1 Verschränkungsrelationen und $\tan\beta$	26
2.2 Bidoublettbasis und $\tan\beta$	27
3 Diskrete Symmetrien und 2HDM	32
3.1 Das Zwei Higgs-Doublett Modell	32
3.2 Das Zwei Higgs-Doublett Modell Typ I und Typ II	37
3.2.1 2HDM Typ I	37
3.2.2 2HDM Typ II	39
3.2.2.1 Die Flavorsymmetrie des eichkinetischen Sektors	41
3.3 Das MLRM als spezielles 2HDM	44
3.3.1 Ein geometrisches Argument zur Yukawa-Verschränkung	48
4 Multi Higgs-Bidoublett Modelle	56
4.1 Zwei Higgs-Bidoublett Modell	56
4.2 $n \geq 3$ Higgs-Bidoublett Modell	61
5 Effektiv Links-Rechts symmetrische Modelle	65
5.1 $K^0 - \bar{K}^0$ Mischung	66
5.2 Links-Rechts symmetrisches Δ -Modell	69
5.3 Beiträge höherdimensionaler Yukawa-Operatoren	76
5.3.1 Höhere Massendimensionen	79

5.4	Unterdrückte Flavorverletzung im effektiven Δ -Modell	83
6	Das Flavorproblem als Eigenwertgleichung	93
7	Zusammenfassung	98
A	Beweis der Summenregel (1.113)	101
B	Manifest eichsymmetrische Transformation der Bidoublett Basis	102
B.1	Unitäre Basistransformation im \mathbb{C}^m	103
	Literaturverzeichnis	106

Kapitel 1

Motivation

In der vorliegenden Arbeit werden die Auswirkungen der Links-Rechts symmetrischen Erweiterung der Eichgruppe des Standardmodells der Teilchenphysik

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{LR} &= SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \\ &\quad \uparrow \\ \mathcal{G}_{SM} &= SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \end{aligned} \tag{1.1}$$

auf die Flavorphysik entsprechender Modelle untersucht.

Nach einer kurzen Wiederholung der für die Diskussion relevanten Eigenschaften des Standardmodells der Teilchenphysik (SM) in Abschnitt 1.1, werden diese im darauffolgenden Abschnitt 1.2 mit ihren Links-Rechts symmetrischen Realisierungen verglichen und anhand dessen ein generelles Interesse für die Untersuchung Links-Rechts symmetrischer Theorien motiviert. Anschließend werden in den Abschnitten 1.2.4 und 1.2.5 für ein Minimales Modell (MLRM) erste Flavorimplikationen der Links-Rechts symmetrischen Vereinheitlichung hergeleitet, die den Ausgangspunkt für die Betrachtungen in den nachfolgenden Kapiteln bilden.

1.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

1.1.1 Eichgruppe und Teilchenmultipletts des SM

Die Eichgruppe des Standardmodells der Teilchenphysik (SM) unterteilt sich in die Eichgruppen der starken ([1], [2], [3]) und der elektro-schwachen ([4], [5]) Wechselwirkung

$$\mathcal{G}_{SM} = \underbrace{SU(3)_c}_{\text{QCD}} \times \underbrace{SU(2)_L \times U(1)_Y}_{\text{el.-weak}} \tag{1.2}$$

von der für die Flavorstruktur nur Letztere von Bedeutung ist. Die QCD ist invariant unter beliebigen Transformationen im Flavorraum und im hier betrachteten Kontext beschränkt sich ihre Relevanz daher auf diese Symmetrie. Im Gegensatz zur QCD, tragen die links- und rechts-händigen Komponenten der chiralen Quarkspinoren des SM

$$\begin{aligned}\Psi_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi \\ \Psi_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi\end{aligned}\tag{1.3}$$

unter der elektro-schwachen Wechselwirkung unterschiedliche Eichladungen. Während die links-händigen Komponenten einer Quarkgeneration in einer Doublett Darstellung des $SU(2)_L$ Isospins vereinheitlicht sind

$$Q_{L,1} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad Q_{L,2} = \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad Q_{L,3} = \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}\tag{1.4}$$

werden die rechts-händigen Chiralitäten Singulett Darstellungen zugeordnet

$$\begin{aligned}u_{R,1} &= u_R, & u_{R,2} &= c_R, & u_{R,3} &= t_R \\ d_{R,1} &= d_R, & d_{R,2} &= s_R, & d_{R,3} &= b_R\end{aligned}\tag{1.5}$$

Die schwache $U(1)_Y$ -Ladung des SM, die in LR-Modellen durch die Differenz aus Baryon- und Leptonzahl $B-L$ abgelöst wird, wird den $SU(2)_L$ -Multipletts in der Art zugeordnet, dass sich nach der spontanen Brechung der elektro-schwachen Eichsymmetrie die korrekten elektrischen Ladungen der Elementarteilchen ergeben. Diese Einstellung der Quantenzahlen entbehrt im SM einer physikalischen Erklärung. Die Chiralitätskomponenten der leptonischen Zustände werden, den Quarkzuständen entsprechend, ebenfalls durch ihre Isospin-Darstellung unterschieden. Da einem rechts-händigen Neutrino in einer $SU(2)_L$ Singulett Darstellung dabei eine schwache Hyperladung von 0 zugeordnet werden müsste, was es von jeglicher Wechselwirkung des SM entkoppelt, fehlen diese im leptonischen Teilchenspektrum

$$\begin{aligned}L_{L,1} &= \begin{pmatrix} \nu_{e,L} \\ e_L^- \end{pmatrix}, & L_{L,2} &= \begin{pmatrix} \nu_{\mu,L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix}, & L_{L,3} &= \begin{pmatrix} \nu_{\tau,L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix} \\ L_{R,1} &= e_R^-, & L_{R,2} &= \mu_R^-, & L_{R,3} &= \tau_R^-\end{aligned}\tag{1.6}$$

Komplettiert wird die Spezifikation des SM Teilcheninhalts durch die Hinzunahme eines einzelnen skalaren $SU(2)_L$ Higgs-Doubletts, das eine schwache $U(1)_Y$ Hyperladung von 1 trägt

$$\phi = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix}\tag{1.7}$$

Die aus dieser Wahl der Quantenzahlen resultierenden Kopplungen des Higgs-Felds an die bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade des SM, realisieren das beobachtete Massenspektrum der Elementarteilchen über den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung.

1.1.2 Eichkinetischer Sektor des SM

Die Eichbosonen des SM werden durch die adjungierte Darstellung der Eichgruppe (1.2) spezifiziert. Aus der Gruppendimension von 3 respektive 1 für die beiden Faktoren der elektro-schwachen Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_{B-L}$ ergibt sich, dass die elektro-schwache Wechselwirkung im SM durch vier reelle Eichbosonen vermittelt wird, die sich nach der spontanen Brechung der Eichsymmetrie zu den massiven Eichbosonen W^\pm, Z^0 und dem masselosen Photon γ kombinieren.

Die Kopplung der Eichbosonen an die Chiralitätskomponenten der Fermionfelder erfolgt im kinetischen Term der SM Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} = & \bar{Q}_{L,f} i\gamma^\mu D_\mu Q_{L,f} + \bar{u}_{R,f} i\gamma^\mu D_\mu u_{R,f} + \bar{d}_{R,f} i\gamma^\mu D_\mu d_{R,f} \\ & + \bar{L}_{L,f} i\gamma^\mu D_\mu L_{L,f} + \bar{e}_{R,f} i\gamma^\mu D_\mu e_{R,f} \end{aligned} \quad (1.8)$$

mittels der kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi_L &= \partial_\mu \Psi_L - ig_L \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{L\mu} \Psi_L - ig_Y \frac{Y}{2} B_\mu \Psi_L \\ D_\mu \Psi_R &= \partial_\mu \Psi_R - ig_Y \frac{Y}{2} B_\mu \Psi_R \end{aligned} \quad (1.9)$$

Die exklusive Kopplung der $SU(2)_L$ -Eichbosonen an links-händige Quark- und Leptonfelder spiegelt sich dabei in dem Fehlen des $\vec{W}_{L\mu}$ -Kopplungsterms in der kovarianten Ableitung der rechts-händigen Freiheitsgrade, $D_\mu \Psi_R$ in (1.9), wider. Der Grund für dieses Fehlen liegt in der Zuordnung eines verschwindenden schwachen Isospins zu rechts-händigen Chiralitätskomponenten, der zu einem trivialen Transformationsverhalten unter $SU(2)_L$ Eichtransformationen führt. Dieser Invarianz entsprechend tragen sie keine $SU(2)_L$ Ladung, was eine Kopplung an die entsprechenden Eichbosonen ausschließt.

Die implizit vorausgesetzte Summation über den Flavorindex f in (1.8) ist invariant unter unitären Transformationen der Flavoreigenzustände, die die Eichkovarianz erhalten. Dies bedeutet, dass die Isospin Komponenten der $SU(2)_L$ Quark-Doublets $Q_{L,f}$ bezüglich Flavortransformationen gleich behandelt werden müssen, was durch einen gemeinsamen Flavor- bzw. Generationsindex in (1.4) deutlich gemacht wird

$$Q_{L,i} \rightarrow V_{u,ij} Q_{L,j} \quad (1.10)$$

Aufgrund ihres trivialen Transformationsverhaltens unter $SU(2)_L$ Transformationen, ergibt sich eine solche Einschränkung für rechts-händige Quarks nicht, was eine unabhängige, eichkovariante Basistransformation der Chiralitätskomponenten up- und down-artiger Quarks im Flavorraum ermöglicht

$$\begin{aligned} u_{R,i} &\rightarrow W_{u,ij} u_{R,j} \\ d_{R,i} &\rightarrow W_{d,ij} d_{R,j} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Für den eichkinetischen Teil der SM Lagrange-Dichte (1.8) stellt die Gesamtheit dieser drei unabhängigen unitären Transformationen der Quarkflavor eine Symmetrie dar, die sogenannte (Quark-)Flavorsymmetrie des eichkinetischen Terms mit der Symmetriegruppe

$$\mathcal{G}_{SM}^{\text{flav}} = U(3)_{Q_L} \times U(3)_{u_R} \times U(3)_{d_R} \quad (1.12)$$

Analog ergibt sich eine leptonische Flavorsymmetriegruppe, die aufgrund des Fehlens rechts-händiger Neutrinos im SM um den entsprechenden $U(3)$ -Faktor verringert ist. Da im Folgenden nur die Physik der Quarkflavor betrachtet wird, ist mit der Flavorsymmetriegruppe des SM, bzw. später des MLRM, immer nur (1.12), bzw. dessen LR-symmetrische Entsprechung (1.27) gemeint.

1.1.3 Yukawa Sektor des SM

Der allgemeinste, renormierbare (Quark-)Yukawa-Sektor des SM, der sich aus den in Abschnitt 1.1.1 spezifizierten SM Freiheitsgraden konstruieren lässt, lautet

$$- \mathcal{L}_Y = \bar{Q}_L Y^d \phi d_R + \bar{Q}_L Y^u \phi^c u_R + h.c. \quad (1.13)$$

wobei $Y^{u,d} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ für Matrizen im Flavorraum stehen und ϕ^c das zum $SU(2)_L$ Higgs-Doublett ϕ ladungskonjugierte Doublett

$$\phi^c = i\sigma^2 \phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H^- \\ H^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H^{0*} \\ -H^- \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

mit gleicher $SU(2)_L$ - und umgekehrter $U(1)_Y$ -Ladung bezeichnet. Die in 1.1.2 diskutierte Flavorsymmetrie (1.12) wird im SM nur durch den Yukawa-Sektor gebrochen und kann daher ausgenutzt werden, um diesen durch Elimination unphysikalischer Parameter zu vereinfachen. Aus der Polardarstellung der Yukawa-Matrizen lässt sich für beliebige $Y^{u,d}$ eine Zerlegung der Form

$$\begin{aligned} Y^u &= V_u \hat{Y}^u W_u^\dagger \\ Y^d &= V_d \hat{Y}^d W_d^\dagger \end{aligned} \quad (1.15)$$

mit unitären Matrizen $V_{u,d}, W_{u,d} \in U(3)$ und nicht-negativen Diagonalmatrizen $\hat{Y}^{u,d}$ finden. Setzt man diese Zerlegung in (1.13) ein

$$-\mathcal{L}_Y = \bar{Q}_L V_d \hat{Y}^d W_d^\dagger \phi d_R + \bar{Q}_L V_u \hat{Y}^u W_u^\dagger \phi^c u_R + h.c. \quad (1.16)$$

erkennt man leicht, dass die Flavorsymmetriegruppe (1.12) eine Transformation enthält, die drei der vier unitären Matrizen eliminiert, nämlich

$$\begin{aligned} Q_L &\rightarrow V_u Q_L \\ u_R &\rightarrow W_u u_R \\ d_R &\rightarrow W_d d_R \end{aligned} \quad (1.17)$$

Diese überführt den Yukawa-Sektor in die Form

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y &\rightarrow \bar{Q}_L V_u^\dagger V_d \hat{Y}^d W_d^\dagger W_d \phi d_R + \bar{Q}_L V_u^\dagger V_u \hat{Y}^u W_u^\dagger W_u \phi^c u_R + h.c. \\ &= \bar{Q}_L V_u^\dagger V_d \hat{Y}^d \phi d_R + \bar{Q}_L \hat{Y}^u \phi^c u_R + h.c. \end{aligned} \quad (1.18)$$

sodass für die Yukawa-Matrizen des SM ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Darstellung

$$\begin{aligned} Y^u &= \hat{Y}^u \\ Y^d &= V_{\text{CKM}} \hat{Y}^d \end{aligned} \quad (1.19)$$

durch zwei nicht-negative Diagonalmatrizen und eine unitäre Mischungsmatrix $V_{\text{CKM}} = V_u^\dagger V_d \in U(3)$ verwendet werden kann.

Die Quarkmassenmatrizen ergeben sich aus der Multiplikation der diagonalen Anteile $\hat{Y}^{u,d}$ der Yukawa-Matrizen mit dem elektro-schwachen Vakuumerwartungswert des Higgs-Doublets (1.7), welcher die elektro-magnetische Eichgruppe $U(1)_{\text{e.m.}}$ invariant lässt und unter Ausnutzung der Eichsymmetrie reell und nicht-negativ gewählt werden kann

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Setzt man dies in den Yukawa-Sektor ein, ergeben sich die Massenterme

$$-\mathcal{L}_Y(\langle \phi \rangle) = \bar{d}_L k V_{\text{CKM}} \hat{Y}^d d_R + \bar{u}_L k \hat{Y}^u u_R + h.c. \quad (1.21)$$

die die physikalische Masseneigenbasis der Quarks definieren. Aufgrund der flavorsymmetrischen Wahl der diagonalen Kopplungsmatrix \hat{Y}^u , lassen sich die up-artigen Flavoreigenzustände sofort mit ihren Masseneigenzuständen zur Massenmatrix $\hat{M}^u = k \hat{Y}^u$

identifizieren

$$\begin{aligned} u_L &\rightarrow u'_L := u_L \\ u_R &\rightarrow u'_R := u_R \end{aligned} \tag{1.22}$$

Die down-artige Massenmatrix $M^d = kV_{\text{CKM}}\hat{Y}^d$ ist im Allgemeinen in der Flavorbasis nicht diagonal und ihre Diagonalisierung erfordert die Transformation

$$\begin{aligned} d_L &\rightarrow d'_L := V_{\text{CKM}}^\dagger d_L \\ d_R &\rightarrow d'_R := d_R \end{aligned} \tag{1.23}$$

Der Quark Yukawa-Sektor des SM ist somit in der Basis der Quarkmasseneigenzustände durch

$$-\mathcal{L}_Y = \bar{d}'_L \hat{Y}^d \phi d'_R + \bar{u}'_L \hat{Y}^u \phi^c u'_R + h.c. \tag{1.24}$$

gegeben und enthält demnach nur flavor-erhaltende Kopplungen des Higgs-Doublets an massive Quarks.

Der Übergang in die Massenbasis unterscheidet sich für die links-händigen Chiralitäten up- und down-artiger Quarks, den Komponenten der schwachen Isospin-Doublets. In der Folge stellt der Übergang in die Quarkmassenbasis keine Symmetrietransformation des eichkinetischen Terms (1.8) dar und die unitäre Mischungsmatrix V_{CKM} verbleibt als Artefakt in den Kopplungen geladener W_μ^\pm -Bosonen, die durch $W_\mu^\pm = (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)/\sqrt{2}$ gegeben sind, an massive Quarkfelder

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} \supset g_L \bar{u}_L \gamma^\mu d_L W_\mu^+ + h.c. = g_L \bar{u}'_L \gamma^\mu V_{\text{CKM}} d'_L W_\mu^+ + h.c. \tag{1.25}$$

Die verbleibenden Kopplungen massiver Quarks in $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$, an die neutralen Eichbosonen Z und γ , sind aufgrund der Unitarität der CKM-Matrix V_{CKM} flavor-diagonal. Die einzige flavor-ändernde Kopplung im SM ist damit die des geladenen W^\pm -Bosons und die entsprechende Vertexregel für einen solchen Übergang zwischen unterschiedlichen Quarkgenerationen beinhaltet die Elemente der CKM-Mischungsmatrix $(V_{\text{CKM}})_{i \neq j}$ abseits der Diagonalen.

1.2 Die Links-Rechts symmetrische Erweiterung

Die Erweiterung der SM Eichgruppe \mathcal{G}_{SM} zur Links-Rechts symmetrischen Eichgruppe \mathcal{G}_{LR} ist von dem Gedanken getragen, die rechtshändigen Freiheitsgrade des Standardmodells nach dem Vorbild der schwachen Wechselwirkung zu vereinheitlichen. Somit werden die rechtshändigen Quarks, symmetrisch zu ihren links-händigen Partnern, in

$SU(2)_R$ -Doublets zusammengefasst:

$$u_{R,i}, d_{R,i} \rightarrow Q_{R,i} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{R,i} \quad (1.26)$$

Der Index i steht hierbei für den jeweiligen Quark-Flavor, also zum Beispiel $d_{R,2} = s_R$ und $d_{R,3} = b_R$. Er soll andeuten, dass die $SU(2)_R$ -Multipletts einen gemeinsamen Flavoreigenzustand bilden, also die komplette Flavorinformation der rechts-chiralen Quarkgenerationen durch einen einzigen Vektor im Flavor-Raum dargestellt ist. Somit wird die komplette Flavor-Physik eines Links-Rechts symmetrischen Modells durch insgesamt zwei Vektoren im Flavorraum beschrieben. Für den flavorblinden Teil der Lagrange-Dichte stellt die unabhängige unitäre Rotation dieser beiden Vektoren eine Symmetrie dar

$$\mathcal{G}_{MLRM}^{\text{flav}} = U(3)_L \times U(3)_R \quad (1.27)$$

die im Vergleich zur entsprechenden Flavorsymmetriegruppe der SM Lagrange-Dichte

$$\mathcal{G}_{SM}^{\text{flav}} = U(3)_L \times U(3)_{u_R} \times U(3)_{d_R} \quad (1.28)$$

durch die Vereinheitlichung der rechts-händigen Quark-Generationen

$$U(3)_{u_R} \times U(3)_{d_R} \rightarrow U(3)_R \quad (1.29)$$

eingeschränkt ist.

1.2.1 Quark Yukawa-Sektor

Die Brechung dieser Symmetrie erfolgt, wie im Standardmodell, durch die Kopplung der Quarks an Higgsfelder

$$(\bar{u} \ \bar{d})_{L,i} \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} d_{R,j} \rightarrow (\bar{u} \ \bar{d})_{L,i} \Phi \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{R,j} \quad (1.30)$$

Nach dem Transformationsverhalten der Quark-Doublets

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{L,R} \rightarrow \underbrace{e^{i\varphi}}_{\in U(1)_{B-L}} \underbrace{U_{L,R}}_{\in SU(2)_{L,R}} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{L,R} \quad (1.31)$$

fordert das Prinzip der Eichinvarianz daher für eine eichinvariante Yukawa-Kopplung

$$\Phi \rightarrow \underbrace{U_L}_{\in SU(2)_L} \Phi \underbrace{U_R^\dagger}_{\in SU(2)_R} \quad (1.32)$$

Man spricht bei einem solchen Transformationsverhalten von einem Bidoublett welches sich als (2×2) -Matrix darstellen lässt

$$\Phi = \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

Ausgehend von dieser Darstellung sind die komplex konjugierten Koordinaten in kovarianter Form durch

$$\Phi^c = i\sigma_2 \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix}^* (-i\sigma_2) = \begin{pmatrix} H_2^{0*} & -H_1^- \\ -H_2^+ & H_1^{0*} \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

dargestellt, d.h. sie verhalten sich unter Eichtransformationen wie das ursprüngliche Bidoublett

$$\Phi^c \rightarrow \underbrace{U_L}_{\in SU(2)_L} \Phi^c \underbrace{U_R^\dagger}_{\in SU(2)_R} \quad (1.35)$$

Der Begriff Bi-Doublett rührt aus der Tatsache her, dass sich die Spalten(Zeilen) dieser Matrix in der fundamentalen Darstellung der Untergruppe $SU(2)_{L(R)}$ transformieren. Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, dass sich die beiden Spalten der Matrix Φ bezüglich Standardmodell-Eichtransformationen wie zwei Kopien des Standardmodell-Higgsdoubletts verhalten. Zusätzlich aber als komplette Matrix unter allgemeinen Eichtransformationen ein komplexeres Verhalten zeigen.

Den Quarks ist jeweils eine Baryonzahl $B = 1/3$ und Leptonzahl $L = 0$ zugeordnet, somit ergibt sich aus der Eichinvarianz der Yukawa-Kopplung

$$\overline{Q}_L \Phi Q_R \xrightarrow{U(1)_{B-L}} \underbrace{e^{-i/3\varphi} e^{i/3\varphi}}_{=1} e^{i(B-L)(\Phi)} \overline{Q}_L \Phi Q_R \quad (1.36)$$

für die $U(1)$ -Ladung des Bi-Doubletts

$$(B - L)(\Phi) = \underbrace{(B - L)(Q_R)}_{=1/3} - \underbrace{(B - L)(Q_L)}_{=1/3} = 0 \quad (1.37)$$

Aus diesem Transformationsverhalten lassen sich die Ladungen der Komponenten bezüglich Transformationen der Untergruppe $U(1)_{\text{e.m.}}$, das heißt die elektrischen Ladungen der Komponenten des Bidoubletts ermitteln. Da der Vakuumerwartungswert(VEV) des Bidoubletts Φ die elektro-magnetische Eichgruppe $U(1)_{\text{e.m.}}$ invariant lassen muss, können

nur die ungeladenen Diagonalelemente in (1.33) einen nicht-verschwindenden VEV entwickeln. Unter Ausnutzung der gebrochenen Eichsymmetrie ergibt sich für diesen die allgemeinste Form

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{mit } k_{1,2} \geq 0 \quad \alpha \in [0, 2\pi) \quad (1.38)$$

Da der Fall $k_1 = 0, k_2 > 0$ durch Ladungskonjugation (1.34) gefolgt von einer Eichtransformation auf den Fall $k_1 > 0, k_2 = 0$ abgebildet werden kann, lässt sich für einen nicht-verschwindenden VEV $\Phi \neq 0$ immer $k_1 > 0$ annehmen und eine neue Parametrisierung einführen

$$\tan \beta = \frac{k_2}{k_1} \quad (1.39)$$

$$k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (1.40)$$

Diese Parameter sind optimal geeignet, um das Minimale Links-Rechts-Modell (MLRM) mit dem Standardmodell (SM) zu vergleichen und die Auswirkungen der verringerten Flavoursymmetrie auf die erlaubten Flavour-ändernden Prozesse zu verstehen.

Hierzu beginnt man mit dem allgemeinsten, renormierbaren Quark Yukawa-Sektor

$$- \mathcal{L}_Y = F_{ij} \bar{Q}_{L,i} \Phi Q_{R,j} + \tilde{F}_{ij} \bar{Q}_{L,i} \underbrace{\Phi^c}_{:= \sigma^2 \Phi^* \sigma^2} Q_{R,j} + h.c. \quad (1.41)$$

und zerlegt das Bi-Doublett Φ in seine beiden Spalten, also seine beiden Kopien des SM Higgs-Doubletts. Diese lassen sich dann in einer Basis darstellen, in der ein Basisvektor in Richtung des elektroschwachen VEVs und einer senkrecht dazu zeigt. Die entsprechende Basistransformation ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos \beta & e^{i\alpha} \sin \beta \\ -e^{-i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2^c \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

wobei die Ladungskonjugation für Doubletts durch $H_2^c := i\sigma^2 H_2^*$ definiert ist. Dies ist konsistent mit der Ladungskonjugation für Bi-Doubletts $\Phi^c := \sigma^2 \Phi^* \sigma^2$.

Diese Wahl der Higgs-Basis bricht die manifeste $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ Eichsymmetrie des Quark Yukawa-Sektors (1.41) und erlaubt so einen Vergleich mit dem Standardmodell

$$- \mathcal{L}_Y = \bar{Q}_L Y^u h u_R + \bar{Q}_L Y^d h^c d_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}^u H u_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}^d H^c d_R + h.c. \quad (1.43)$$

Das $SU(2)_L$ -Doublett h trägt in dieser Basis den kompletten elektro-schwachen VEV und somit generieren bei der spontanen Symmetriebrechung ausschließlich die Kopplungen an h Quarkmassenterme. Dieser Sachverhalt erlaubt die Identifikation von h mit

dem SM Higgs-Doublett. Das zweite Higgs-Doublett H hat im Standardmodell kein Pendant, die entsprechenden Beiträge zu physikalischen Prozessen wären somit ein Zeichen “Neuer Physik”. Wie die Links-Rechts Symmetrie diese Beiträge “Neuer Physik” mit “Altbekanntem” verschränkt wird deutlich, wenn man die Herleitung von (1.43) zur manifest eichsymmetrischen Form (1.41) zurückverfolgt und die vier Yukawa-Matrizen $Y_{u,d}, \tilde{Y}_{u,d}$ durch die eichinvarianten Kopplungsmatrizen F, \tilde{F} ausdrückt

$$\begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix} := \overbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \\ -e^{i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}}^{=:\chi^u} \begin{pmatrix} F \\ \tilde{F} \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

$$\begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix} := \overbrace{\begin{pmatrix} -e^{i\alpha} \sin \beta & -\cos \beta \\ -\cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}}^{=:\chi^d} \begin{pmatrix} F \\ \tilde{F} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

Die aus diesen Relationen erwachsenden Abhängigkeiten zwischen den Yukawa-Kopplungen des SM- h und des NP-Higgs-Doubletts H lassen sich leicht durch Einsetzen der beiden Gleichungen ineinander isolieren

$$Y^d = -e^{i\alpha} \sin(2\beta) Y^u - \cos(2\beta) \tilde{Y}^u \quad (1.46)$$

$$\tilde{Y}^d = -\cos(2\beta) Y^u + e^{-i\alpha} \sin(2\beta) \tilde{Y}^u \quad (1.47)$$

Bemerkenswert ist, dass diese Relationen unabhängig von den Werten der Parameter $\alpha, \tan \beta$ gelten, die alleine durchs Higgspotenzial festgelegt sind. Da in (1.44), (1.45) immer $\chi^u, \chi^d \in U(2)$ gilt, ist diese Form der linearen Abhängigkeiten/Verschränkungen zwischen den Yukawa-Kopplungen die Allgemeinste, die im MLRM mit jedem nicht-verschwindenden VEV verträglich ist. Von diesem Standpunkt aus gesehen, ist der Zusammenhang der SM-Yukawa-Kopplungen mit Beiträgen “Neuer Physik” eine intrinsische Eigenschaft des MLRM.

Nach Ablauf der spontanen Symmetriebrechung definieren die Kopplungen an den elektro-schwachen VEV die physikalischen Masseneigenzustände. Da in der gewählten Higgsbasis nur das SM-artige Higgs-Doublett h einen nicht-verschwindenden VEV erhält, sind die Massenmatrizen der Quarks durch die entsprechenden Kopplungskonstanten gegeben

$$M^u = kY^u, \quad M^d = kY^d \quad (1.48)$$

Die physikalische Basis ist durch diagonale Massenmatrizen ausgezeichnet, daher zeigen diese Beziehungen, dass das SM-artige Higgs nur flavor-diagonal an die physikalischen Quarkfelder koppelt. Um zu verstehen, welche Auswirkungen dies auf die Yukawa-Kopplungen mit dem NP-Doublett H hat, betrachtet man die Verschränkungsrelationen (1.46), (1.47) ebenfalls in der Massenbasis: Die Flavorsymmetrie (1.27) erlaubt es, von

vorneherein und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y^u = \hat{Y}^u$ diagonal und nicht-negativ zu wählen. Der Übergang in die Basis der Masseneigenzustände vereinfacht sich dann zu

$$\begin{aligned} u_{L,R} &\rightarrow u'_{L,R} := u_{L,R} \\ d_{L,R} &\rightarrow d'_{L,R} := V_{L,R}^\dagger d_{L,R} \end{aligned} \quad (1.49)$$

wobei die Kopplungsmatrix $Y^d = V_L \hat{Y}^d V_R^\dagger$ von $V_{L,R} \in U(3)$ bi-unitär diagonalisiert wird.

Im Links-Rechts symmetrischen Modell schöpft die Wahl $Y^u = \hat{Y}^u$ die Flavoursymmetrie (1.27) bereits voll aus, sodass den Mischungsmatrizen $V_{L,R}$ physikalische Bedeutung zukommt. Im Standardmodell lassen sich die rechts-händigen up- und down-artigen Quarks zusätzlich unabhängig im Flavorraum rotieren (vgl. (1.28)), da sie Singulets bezüglich der elektro-schwachen SM-Eichgruppe bilden. Dies führt dazu, dass eine der beiden Transformationen in (1.49) eine zusätzliche Symmetrieoperation darstellt und somit die entsprechende Matrix im Standardmodell ihre physikalische Bedeutung verliert. Die verbleibende physikalische Mischungsmatrix ist die bekannte CKM-Matrix. Somit lässt sich das Auftreten von zwei physikalischen CKM-Analoga im Links-Rechts Modell auf die verringerte Flavoursymmetrie und schlußendlich auf die Vereinheitlichung der rechts-händigen Quarkfreiheitsgrade zurückführen.

Die beiden $SU(2)_L$ Higgs-Doublets h, H in (1.43) enthalten beide eine elektrisch neutrale Komponente, die an die physikalischen Quarkzustände koppeln

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{\text{el.,neutr.}} &= \bar{u}'_L \hat{Y}^u h^0 u'_R + \bar{d}'_L \hat{Y}^d (-h^{0*}) d'_R \\ &+ \bar{u}'_L \tilde{Y}^u H^0 u'_R + \bar{d}'_L V_L^\dagger \tilde{Y}^d V_R (-H^{0*}) d'_R \\ &+ h.c. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Das SM-artige Higgs h^0 koppelt, wie im Standardmodell auch, nur flavor-diagonal an die Quarkfelder. Dies wird durch die diagonalen Kopplungsmatrizen $\hat{Y}^{u,d}$ signalisiert. Die Kopplungen des neuen Higgs-Bosons H sind aber im Allgemeinen flavor-verletzend und es drängt sich die Frage auf, in wie weit diese Flavor-Verletzung durch die Verschränkungsrelationen (1.46), (1.47) festgeschrieben ist. Diese Fragestellung bildet einen Kernpunkt dieser Arbeit.

1.2.2 Eichbosonen

Nach den Regeln einer lokalen Eichtheorie ist das Spektrum der Eichbosonen durch die Spezifikation der Eichgruppe bestimmt. Daher stellt die Erweiterung der SM-Eichgruppe

zur LR-Eichgruppe in (1.1) dem $SU(2)_L$ -Eichboson W_L , das nur an links-händige Quarkströme koppelt

$$\frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{q} \underbrace{\gamma^\mu (1 - \gamma_5)}_{(V-A)} q W_{L,\mu} \quad (1.51)$$

einen $SU(2)_R$ -Partner W_R zur Seite, der umgekehrt nur mit rechts-händigen Quarkströmen wechselwirkt. Die $(V - A)$ -Wechselwirkung, die im elektro-schwachen SM die maximale Verletzung der Paritätssymmetrie verursacht, wird hierdurch im LR Modell durch eine Kopplung an den paritätstransformierten $(V + A)$ -Strom ergänzt

$$\frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q W_{L,\mu} \rightarrow \frac{g_L}{\sqrt{2}} \bar{q} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) q W_{L,\mu} + \frac{g_R}{\sqrt{2}} \bar{q} \underbrace{\gamma^\mu (1 + \gamma_5)}_{(V+A)} q W_{R,\mu} \quad (1.52)$$

Da die Kopplungen der $(V \mp A)$ -Ströme durch die Massen der unterschiedlichen Eichbosonen unterschiedlich stark unterdrückt werden, ergibt sich effektiv eine Asymmetrie zwischen den Kopplungen der $(V \mp A)$ -Ströme. Diese Asymmetrie bzw. Paritätsverletzung ergibt sich sogar für den Fall einer paritätssymmetrischen Lagrange-Dichte $g_L = g = g_R$, sodass der Unterschied in den Massen der Eichbosonen als Ursache für eine spontane Verletzung der Paritätssymmetrie verstanden werden kann. Im Entkopplungslimes $m_{W_R} \rightarrow \infty$ ergibt sich aus (1.52) effektiv die $(V - A)$ -Wechselwirkung des SM, korrigiert um Terme der Größenordnung $\mathcal{O}(m_{W_L}^2/m_{W_R}^2)$ [6].

Um das Standardmodell als Niederenergie-theorie einer Links-Rechts symmetrischen Vereinheitlichung zu berücksichtigen, muss die Brechung der LR Eichgruppe (1.1) zur SM Eichgruppe bei einer Energieskala $v_R \gg k$ weit oberhalb der elektro-schwachen Skala k erfolgen. Die volle Brechkungskette zur elektro-magnetischen Wechselwirkung ist dann durch

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \xrightarrow{v_R} SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{k} U(1)_{\text{e.m.}} \quad (1.53)$$

gegeben, was auf unterschiedliche Weise (z.B. [6], [7]) realisiert werden kann. In [6] wurde gezeigt, dass die Aufnahme eines Triplets

$$\Delta_R = \begin{pmatrix} \delta^+/\sqrt{2} & \delta^{++} \\ \delta^0 & -\delta^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

mit Transformationsverhalten

$$\Delta_R \xrightarrow{g_{LR}} e^{2i\varphi} U_R \Delta_R U_R^\dagger \quad (1.55)$$

ins Higgs-Spektrum zu einem besonders attraktiven Modell führt. Der VEV dieses Triplets bricht, wie gewünscht, die $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ und die zusätzliche Ergänzung des

Teilcheninhalts um seinen paritätstransformierten Partner

$$\Delta_L = \begin{pmatrix} \delta_L^+/\sqrt{2} & \delta_L^{++} \\ \delta_L^0 & -\delta_L^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

der sich entsprechend gemäß

$$\Delta_L \rightarrow e^{2i\varphi} U_L \Delta_L U_L^\dagger \quad (1.57)$$

transformiert, erlaubt für ein Modell mit Majorana-Neutrinos eine Erklärung der Kleinheit der zugehörigen Massen durch die spontane Paritätsverletzung [8]

$$m_{\nu_e} \simeq \frac{m_e^2}{gm_{W_R}} \quad (1.58)$$

Auf diese Relation, die eine der Hauptmotivationen für die Untersuchung Links-Rechts symmetrischer Modelle im Allgemeinen darstellt, wird in Abschnitt 1.2.3.2 noch genauer eingegangen, an dieser Stelle soll sie lediglich die Wahl des Higgs-Spektrums motivieren. Nach den Regeln einer lokalen Eichtheorie sind die Kopplungen der Eichbosonen an die fermionischen und skalaren Freiheitsgrade durch die Wahl der Eichgruppe und Teilchenmultipletts festgelegt. Der Teil der Lagrange-Dichte, der die kinetischen Terme der Fermionfelder enthält, lautet [9]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = \sum_{\Psi=Q,L} & \left[\bar{\Psi}_L i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_L \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{L\mu} + ig' \frac{B-L}{2} B_\mu \right) \Psi_L \right. \\ & \left. + \bar{\Psi}_R i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig_R \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{R\mu} + ig' \frac{B-L}{2} B_\mu \right) \Psi_R \right] \end{aligned} \quad (1.59)$$

und der entsprechende Teil für die skalaren Felder

$$\mathcal{L}_s = \text{Tr} \left[(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) + (D_\mu \Delta_L)^\dagger (D^\mu \Delta_L) + (D_\mu \Delta_R)^\dagger (D^\mu \Delta_R) \right] \quad (1.60)$$

mit den kovarianten Ableitungen [9]

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= \partial_\mu \Phi + ig \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{L\mu} \Phi - \Phi \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{R\mu} \right) \\ D_\mu \Delta_{L,R} &= \partial_\mu \Delta_{L,R} + ig \left[\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{L,R\mu}, \Delta_{L,R} \right] + ig' B_\mu \Delta_{L,R} \end{aligned} \quad (1.61)$$

Um die Masseneigenzustände und zugehörigen Massen der Eichbosonen zu bestimmen, muss man zunächst die entsprechenden Massenterme, die sich nach Ablauf der spontanen Symmetriebrechung aus den kovarianten Ableitungen der Higgs-Felder ergeben, extrahieren. Dies bewerkstelligt man, indem man in (1.60) die Higgs-Multipletts durch ihre VEVs (1.67) ersetzt. Die geladenen Eichbosonen $W_{L,R}^\pm = (W_{L,R1} \mp iW_{L,R2})/\sqrt{2}$

kombinieren sich gemäß

$$\begin{pmatrix} W_1^+ \\ W_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & e^{-i\alpha} \sin \zeta \\ -e^{i\alpha} \sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_L^+ \\ W_R^+ \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

zu den physikalischen, geladenen Masseneigenzuständen $W_{1,2}^+$ [9]. Der Mischungswinkel kann dabei, unter Ausnutzung der Skalenhierarchie $v_L \ll k \ll v_R$ durch

$$\zeta \simeq \frac{2k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2 \quad (1.63)$$

und die zugehörigen Masseneigenwerte durch

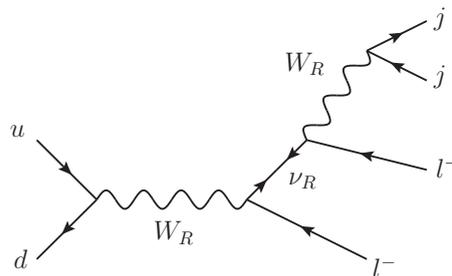
$$\begin{aligned} M_1^2 &\simeq \frac{g^2}{2} k_{\text{EW}}^2 \\ M_2^2 &\simeq \frac{g^2}{2} (k_{\text{EW}}^2 + 2v_R^2) \end{aligned} \quad (1.64)$$

approximiert werden, wobei die Skala der elektro-schwachen Symmetriebrechung mit $k_{\text{EW}} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ identifiziert wurde. Da für das Verhältnis der Massen demnach $M_1^2/M_2^2 = \mathcal{O}(k_{\text{EW}}^2/v_R^2)$ gilt, kann man den Mischungswinkel ζ in führender Ordnung vernachlässigen, sodass die mit der Eichgruppe $SU(2)_{L,R}$ assoziierten Eichbosonen $W_{L,R}$ ihrerseits bereits ungefähre Masseneigenzustände bilden. In dieser Näherung lässt sich das SM W -Boson mit W_L und das zusätzliche NP W -Boson mit W_R identifizieren und damit ist klar, dass die $(V + A)$ -Kopplungen der W_R -Bosonen an rechtshändige Quarkströme in (1.52) gegenüber den im SM exklusiv auftretenden $(V - A)$ -Kopplungen der W_L -Bosonen an linkshändige Quarkströme mit $M_2^{-2} \sim v_R^{-2}$ unterdrückt sind.

Neben den geladenen, enthält das MLRM zusätzlich noch drei ungeladene Eichbosonen, ein Photon sowie die links- und rechtshändigen Analoga $Z_{L,R}$ des SM Z -Bosons. Die entsprechenden Eigenzustände sind in [6] angegeben und lauten

$$\begin{aligned} A_\mu &= \sin \theta_W (W_{L\mu}^3 + W_{R\mu}^3) + \sqrt{\cos 2\theta_W} B_\mu \\ Z_{L\mu} &\simeq \cos \theta_W W_{L\mu}^3 - \sin \theta_W \tan \theta_W W_{R\mu}^3 - \tan \theta_W \sqrt{\cos 2\theta_W} B_\mu \\ Z_{R\mu} &\simeq \frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{\cos \theta_W} W_{R\mu}^3 - \tan \theta_W B_\mu \end{aligned} \quad (1.65)$$

wobei $\tan \theta_W = g'/\sqrt{g^2 + g'^2}$ mit dem Weinberg-Winkel des SM identifiziert werden kann, sodass für die Elementarladung $e^2 = g^2 \sin^2 \theta_W$ und in führender Ordnung die


 ABBILDUNG 1.1: Goldener Kanal für W_R -Produktion

SM-Beziehung $m_{W_L}^2 \simeq m_{Z_L}^2 \cos^2 \theta_W$ gilt. Für die den Masseneigenzuständen (1.65) zugeordneten Masseneigenwerte ergibt sich laut [6]

$$\begin{aligned}
 m_A &= 0 \\
 m_{Z_L}^2 &\simeq \frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_W} (k_{EW}^2 + 4v_L^2) \\
 m_{Z_R}^2 &\simeq 2(g^2 + g'^2)v_R^2
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

In [10] wurde für den Fall manifester Links-Rechts Symmetrie, in dem die zusätzliche CKM-Matrix V_R durch die SM-artige CKM Matrix V_L bestimmt ist, aus der $K_L - K_S$ -Massendifferenz im neutralen K -System ursprünglich eine Untergrenze von $M_{W_R} \gtrsim 1.6\text{TeV}$ bestimmt. Eine neuere Analyse von $\Delta F = 2$ Übergängen in [11], die neben dem K - auch die $B_{d,s}$ -Systeme, aktuelle elektroschwache Präzisionsdaten und Renormierungseffekte berücksichtigt, gibt als Untergrenze für das zusätzliche schwere, geladene Eichboson eine Untergrenze von $M_{W_R} \gtrsim 3\text{TeV}$ mit $95\%C.L.$ an. Zu einem vergleichbaren Ergebnis kommt eine Analyse dieser Untergrenze unter Verwendung einer Perturbativitäts- und Unitaritätsbedingung bezüglich des Parameters des Higgsmassensplittings α_3 [12]. Für das zusätzliche schwere Z' -Boson wird in [13] ein Massenbereich von $3.4 - 4.5\text{TeV}$ vorhergesagt. Der zuerst in [14] vorgeschlagene goldene Kanal für die Entdeckung des schweren W_R -Bosons in Abbildung 1.1 ist das Kollider-Analogon zum Neutrinoslosen doppelten β -Zerfall, der nach [15] am LHC zu einem Leptonzahl-verletzenden Übergang mit zwei gleichgeladenen Leptonen und zwei Jets im Endzustand führt und neben den Massen von W_R und des schweren Neutrinos ν_R auch dessen Majorana-Natur und die Paritätssymmetrie bei hohen Energien testet.

1.2.3 Higgs-Potenzial des MLRM

Jedes der drei im MLRM auftretenden Higgs-Multipletts besitzt im Allgemeinen einen nicht-verschwindenden VEV, der sich unter Ausnutzung der Eichsymmetrie ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form

$$\begin{aligned} \langle \Phi \rangle &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \\ \langle \Delta_L \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L e^{i\theta_L} & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \Delta_R \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.67)$$

darstellen lässt. Hierbei bezeichnen $k_{1,2}, v_L, v_R \geq 0$ nicht-negative, reelle Zahlen und $\alpha, \theta_L \in [0, 2\pi)$ die komplexen Phasen der Polarzerlegung komplexer VEVs. Entsprechend der Definition des Vakuumerwartungswertes (VEV) sind diese Parameter durch das Minimum des zum Modell gehörenden Higgs-Potenzials V bestimmt, was laut [16], [17], im Allgemeinen zu den 6 Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial k_1} = \frac{\partial V}{\partial k_2} = \frac{\partial V}{\partial v_L} = \frac{\partial V}{\partial v_R} = \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial \theta_L} = 0 \quad (1.68)$$

führt. Das zugehörige zu minimierende Potenzial besteht aus allen eichinvarianten Termen, die sich aus dem Bidoublett Φ , den beiden Triplets $\Delta_{L,R}$ und den ladungskonjugierten Higgs-Feldern $\Phi^c = \sigma^2 \Phi^* \sigma^2$, $\Delta_{L,R} = \sigma^2 \Delta_{L,R}^* \sigma^2 = -\Delta_{L,R}^\dagger$ konstruieren lassen und höchstens Massendimension 4 besitzen. Um dieses, im Allgemeinen sehr komplizierte Higgs-Potenzial handhabbarer zu machen, wird in [16] zusätzlich Invarianz unter der diskreten Links-Rechts Symmetrie

$$\Delta_L \leftrightarrow \Delta_R, \quad \Phi \leftrightarrow \Phi^\dagger \quad (1.69)$$

gefordert¹, sodass beispielsweise die beiden Terme

$$-\mu_{3L}^2 \text{Tr} \left(\Delta_L \Delta_L^\dagger \right) - \mu_{3R}^2 \text{Tr} \left(\Delta_R \Delta_R^\dagger \right) \xrightarrow{(1.69)} -\mu_{3L}^2 \text{Tr} \left(\Delta_R \Delta_R^\dagger \right) - \mu_{3R}^2 \text{Tr} \left(\Delta_L \Delta_L^\dagger \right) \quad (1.70)$$

nur für einen gemeinsamen Koeffizienten $\mu_{3L}^2 = \mu_3^2 = \mu_{3R}^2$ die LR-Symmetrie erhalten. Für das allgemeinste MLRM Higgs-Potenzial mit diskreter LR-Symmetrie ergibt sich

¹Für ein paritätssymmetrisches Modell ist diese Einschränkung des Higgs-Potenzials notwendig.

dann laut [16]

$$\begin{aligned}
 V = & -\mu_1^2 \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi) - \mu_2^2 \left[\text{Tr}(\Phi^c \Phi^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^{c\dagger} \Phi) \right] - \mu_3^2 \left[\text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) \right] \\
 & + \lambda_1 \left[\text{Tr}(\Phi \Phi^\dagger) \right]^2 + \lambda_2 \left\{ \left[\text{Tr}(\Phi^c \Phi^\dagger) \right]^2 + \left[\text{Tr}(\Phi^{c\dagger} \Phi) \right]^2 \right\} + \lambda_3 \left[\text{Tr}(\Phi^c \Phi^\dagger) \text{Tr}(\Phi^{c\dagger} \Phi) \right] \\
 & + \lambda_4 \left\{ \text{Tr}(\Phi \Phi^\dagger) \left[\text{Tr}(\Phi^c \Phi^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^{c\dagger} \Phi) \right] \right\} + \rho_1 \left\{ \left[\text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right]^2 + \left[\text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) \right]^2 \right\} \\
 & + \rho_2 \left[\text{Tr}(\Delta_L \Delta_L) \text{Tr}(\Delta_L^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R) \text{Tr}(\Delta_R^\dagger \Delta_R^\dagger) \right] + \rho_3 \left[\text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) \right] \\
 & + \rho_4 \left[\text{Tr}(\Delta_L \Delta_L) \text{Tr}(\Delta_R^\dagger \Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_L^\dagger \Delta_L^\dagger) \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R) \right] \\
 & + \alpha_1 \left\{ \text{Tr}(\Phi \Phi^\dagger) \left[\text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) \right] \right\} \\
 & + \alpha_2 \left[\text{Tr}(\Phi \Phi^{c\dagger}) \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi^c) \text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right] \\
 & + \alpha_2^* \left[\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi^c) \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^{c\dagger} \Phi) \text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right] \\
 & + \alpha_3 \left[\text{Tr}(\Phi \Phi^\dagger \Delta_L \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi \Delta_R \Delta_R^\dagger) \right] \\
 & + \beta_1 \left[\text{Tr}(\Phi \Delta_R \Phi^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Delta_L \Phi \Delta_R^\dagger) \right] + \beta_2 \left[\text{Tr}(\Phi^c \Delta_R \Phi^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^{c\dagger} \Delta_L \Phi \Delta_R^\dagger) \right] \\
 & + \beta_3 \left[\text{Tr}(\Phi \Delta_R \Phi^{c\dagger} \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Delta_L \Phi^c \Delta_R^\dagger) \right]
 \end{aligned} \tag{1.71}$$

wobei α_2 bzw. α_2^* als einzige Koeffizienten komplex sein können, da sie den einzigen nicht-selbstkonjugierten Operator des Potentials multiplizieren

$$\begin{aligned}
 & \alpha_2 \left[\text{Tr}(\Phi \Phi^{c\dagger}) \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi^c) \text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right] + h.c. \\
 = & \alpha_2 \left[\text{Tr}(\Phi \Phi^{c\dagger}) \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi^c) \text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right] \\
 & + \alpha_2^* \left[\text{Tr}(\Phi^\dagger \Phi^c) \text{Tr}(\Delta_R \Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^{c\dagger} \Phi) \text{Tr}(\Delta_L \Delta_L^\dagger) \right]
 \end{aligned} \tag{1.72}$$

Beachtet man, dass die Ladungskonjugation der Higgs-Multipletts

$$\mathcal{C} : \begin{cases} \Phi & \leftrightarrow \Phi^c = \sigma^2 \Phi^* \sigma^2 \\ \Delta_{L,R} & \leftrightarrow \Delta_{L,R}^c = \sigma^2 \Delta_{L,R}^* \sigma^2 \end{cases} \tag{1.73}$$

für alle Terme im Higgs-Potenzial (1.71) zu den zugehörigen komplex konjugierten Operatoren führt, also z.B.

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr}(\Phi \Delta_R \Phi^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Delta_L \Phi \Delta_R^\dagger) \\
 \xrightarrow{\mathcal{C}} & \text{Tr}(\sigma^2 \Phi^* \sigma^2 \sigma^2 \Delta_R^* \sigma^2 \sigma^2 \Phi^T \sigma^2 \sigma^2 \Delta_L^T \sigma^2) + \text{Tr}(\sigma^2 \Phi^T \sigma^2 \sigma^2 \Delta_L^* \sigma^2 \sigma^2 \Phi^* \sigma^2 \sigma^2 \Delta_R^T \sigma^2) \\
 = & \left(\text{Tr}(\Phi \Delta_R \Phi^\dagger \Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger \Delta_L \Phi \Delta_R^\dagger) \right)^*
 \end{aligned} \tag{1.74}$$

ist klar, dass jeder selbst-konjugierte Operator des Potenzials \mathcal{C} -invariant ist. Umgekehrt gilt für den einzigen nicht-selbstkonjugierten Operator im Potenzial,

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \left[\text{Tr} \left(\Phi \Phi^{c\dagger} \right) \text{Tr} \left(\Delta_R \Delta_R^\dagger \right) + \text{Tr} \left(\Phi^\dagger \Phi^c \right) \text{Tr} \left(\Delta_L \Delta_L^\dagger \right) \right] + h.c. \\ & \xrightarrow{\mathcal{C}} \alpha_2^* \left[\text{Tr} \left(\Phi \Phi^{c\dagger} \right) \text{Tr} \left(\Delta_R \Delta_R^\dagger \right) + \text{Tr} \left(\Phi^\dagger \Phi^c \right) \text{Tr} \left(\Delta_L \Delta_L^\dagger \right) \right] + h.c. \end{aligned} \quad (1.75)$$

sodass das Higgs-Potenzial (1.71) genau dann invariant unter \mathcal{C} -Transformationen ist, wenn $\alpha_2 = \alpha_2^*$ gilt. Demnach ergibt sich aus der Einschränkung $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ in (1.71) das allgemeinste $\mathcal{C} \times \mathcal{P}$ -invariante Higgs-Potenzial des MLRM, für welches in [17] der Entkopplungslimes $v_R \rightarrow \infty$ untersucht wurde. Um in diesem Limes das Higgs-Spektrum des Standardmodells zu reproduzieren, müssen sich die Massenterme der elektrisch neutralen Komponenten des Bi-Doublets Φ notwendigerweise um die Größenordnung $\mathcal{O}(v_R)$ unterscheiden, sodass im Entkopplungslimes $v_R \rightarrow \infty$ nur eine neutrale Komponente von endlicher Masse $\mathcal{O}(k)$ verbleibt. Durch Ausnutzung der Eichsymmetrie kann man diese Komponente, genau wie den zugehörigen VEV (k_1 in (1.67)), immer reell wählen und diese daher mit dem SM Higgs-Boson identifizieren. Da nur ein Term im Higgs-Potenzial (1.71) ein solches Splitting zwischen den Komponenten des Bidoublets Φ verursachen kann

$$\alpha_3 \text{Tr} \left(\Phi^\dagger \Phi \Delta_R \Delta_R^\dagger \right) \xrightarrow{\Delta_R \rightarrow \langle \Delta_R \rangle} \alpha_3 v_R^2 (H_2^+ H_2^- + H_2^{0*} H_2^0) \quad (1.76)$$

kommt dem zugehörigen Koeffizienten α_3 im Hinblick auf den Entkopplungslimes besondere Bedeutung bei. Die neutralen Komponenten des Bi-Doublets Φ kombinieren sich zum Masseneigenzustand des Standardmodell Higgs-Bosons h^0 mit Masseneigenwert $\mathcal{O}(k)$ und zwei zusätzlichen Higgs-Bosonen $H_{1,2}^{NP,0}$, deren Massen in einer Entwicklung unter Ausnutzung der Skalenhierarchie $v_L \ll k \ll v_R$ zur führenden Ordnung durch [18]

$$M_H^2 = M_{H_1}^2 = M_{H_2}^2 = v_R^2 \left(\frac{\alpha_3}{1 - 2 \sin^2 \beta} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \quad (1.77)$$

gegeben sind. Der Mischungswinkel β ist dabei über das Verhältnis

$$\tan \beta = \frac{k_2}{k_1} \quad (1.78)$$

der Beträge der VEV-Komponenten des Bi-Doublets Φ in (1.67) definiert und der Entwicklungsparameter $\epsilon = \max\{v_L/k, k/v_R\}$ charakterisiert die hierarchische Skalenentwicklung. Damit die Massen der beiden neutralen NP-Higgs-Bosonen (1.77) unabhängig vom Verhältnis der VEVs v_L/k , die im Entkopplungslimes die residuale SM-Symmetrie brechen, für $v_R \rightarrow \infty$ mit der Brechungsskala der $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -Symmetrie entkoppeln, muss nach [17] $\alpha_3 = \mathcal{O}(1)$ gelten. Desweiteren wird dort gezeigt, dass die \mathcal{CP} -Eigenschaften des Vakuumzustandes in direktem Zusammenhang mit dem Higgs-Spektrum im Entkopplungslimes stehen. Für ein \mathcal{CP} -erhaltendes Higgs-Potenzial, d.h.

für (1.71) mit $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, ergibt sich als Niederenergietheorie nur dann das SM, wenn beide Phasen α, θ_L in (1.67) exakt verschwinden, also $\alpha = 0 = \theta_L$. Als Schlussfolgerung wird in [17] festgehalten, dass eine Entkopplung des MLRM zum SM für $v_R \rightarrow \infty$ keine spontane \mathcal{CP} -Verletzung an der elektro-schwachen Skala erlaubt, die Hinzunahme von zusätzlichen Eichsingulets aber die Möglichkeit bietet, eine spontane \mathcal{CP} -Verletzung, die durch eine neue Phase φ parametrisiert ist, an der hohen Skala v_R zu realisieren. Die Entkopplung zum SM erfordert in diesem Fall $\alpha = -\varphi$ und $\theta_L = 0$.

1.2.3.1 VEV see-saw

Das MLRM enthält drei Symmetriebrechungsskalen, v_R die mit der Brechung der Eichgruppe $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ und desweiteren mit der Skala der spontanen Paritätsverletzung assoziiert ist, die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung k und eine dritte Skala v_L , die anstatt der SM Eichgruppe den Faktor $SU(2)_L \times U(1)_{B-L}$ der vollen MLRM Eichgruppe brechen würde. Da dies nicht der gewünschten Symmetriebrechungskette (5.61) über die Zwischenstufe der SM Eichsymmetrie entspricht, muss für den zu Δ_L gehörigen VEV $v_L \ll k$ gelten. Da die VEVs der Higgs-Felder keine freien Parameter des Modells sind muss untersucht werden, ob das Minimum des Higgs-Potenzials (1.71), das die Symmetriebrechungsskalen festlegt, mit der gewünschten VEV Hierarchie $v_L \ll k \ll v_R$ verträglich ist. Dass dies tatsächlich der Fall ist, äußert sich in einer “see-saw” Relation zwischen den unterschiedlichen Skalen, deren Herleitung hier für ein vereinfachtes Higgs-Potenzial demonstriert werden soll. Für reelle VEVs und unter Vernachlässigung von k_2 in (1.67) lauten die relevanten Terme des Higgs-Potenzials [6]

$$V(v_L, k_1, v_R) = -\mu^2(v_L^2 + v_R^2) + \frac{\rho}{4}(v_L^4 + v_R^4) + \frac{\rho'}{2}v_L^2v_R^2 + \frac{\alpha}{2}(v_L^2 + v_R^2)k_1^2 + \beta v_L v_R k_1 \quad (1.79)$$

wobei die genaue Definition der Koeffizienten $\mu, \rho, \rho', \alpha, \beta$ durch die Koeffizienten des vollen Potenzials in der angegebenen Referenz zu finden ist und für die qualitative Untersuchung der see-saw Relation keine Rolle spielt.

Aus den Minimierungsbedingungen (1.68) bezüglich v_L und v_R

$$\frac{\partial V}{\partial v_L} = 0 = \frac{\partial V}{\partial v_R} \quad (1.80)$$

ergibt sich für das vereinfachte Potenzial (1.79)

$$\begin{aligned} \mu^2 v_L &= \rho v_L^3 + \rho' v_L v_R^2 + \alpha k_1^2 v_L + \beta k_1^2 v_R \\ \mu^2 v_R &= \rho v_R^3 + \rho' v_R v_L^2 + \alpha k_1^2 v_R + \beta k_1^2 v_L \end{aligned} \quad (1.81)$$

woraus sich durch Multiplikation mit v_R bzw. v_L und anschließender Subtraktion der Gleichungen

$$[(\rho - \rho')v_L v_R - \beta k_1^2][v_L^2 - v_R^2] = 0 \quad (1.82)$$

ergibt. Die Lösung dieser Gleichung durch $v_L = v_R$ wäre nicht mit der gewünschten Hierarchie der VEVs $v_L \ll v_R$ verträglich, laut [6] lassen sich die Parameter des Higgs-Potenzials aber so wählen, dass diese Lösung von (1.80) einem lokalen Maximum entspricht und daher keinen Vakuumzustand darstellt. Für die gleiche Parameterwahl ist dann durch die zweite Lösung

$$v_L v_R = \frac{\beta}{\rho - \rho'} k_1^2 \quad (1.83)$$

ein Minimum des Potenzials bestimmt und mit der Abkürzung $\gamma = \beta/(\rho - \rho')$ ergibt sich die VEV see-saw Relation [6]

$$v_L = \gamma \frac{k_1^2}{v_R} \quad (1.84)$$

Diese Relation zeigt, dass das Minimum des Higgs-Potenzials nicht nur mit der Hierarchie

$$v_L \ll k \ll v_R \quad (1.85)$$

verträglich ist, sondern vielmehr eine Begründung dafür liefert, warum die Brechung der SM Eichsymmetrie durch den elektroschwachen VEV des Bidoublets Φ und nicht durch den VEV des linkshändigen Triplets Δ_L dominiert wird.

1.2.3.2 Neutrino see-saw und Paritätssymmetrie

Die in Abschnitt 1.2.2 spezifizierten Triplets $\Delta_{L,R}$, die zusammen mit dem Bi-Doublet Φ das Higgs-Spektrum des MLRM bilden ermöglichen es, für die leptonischen $SU(2)_{L,R}$ -Doublets

$$\Psi_{L,R} = \begin{pmatrix} \nu_{L,R} \\ l_{L,R}^- \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

neben den zu (1.41) analogen Yukawa-Kopplungen an das Bi-Doublet Φ

$$- \mathcal{L}_Y(\Phi) = F_{ij}^L \bar{\Psi}_{L,i} \Phi \Psi_{R,j} + \tilde{F}_{ij}^L \bar{\Psi}_{L,i} \Phi^c \Psi_{R,j} + h.c. \quad (1.87)$$

zusätzliche Kopplungen an die Triplet Higgs-Multiplets $\Delta_{L,R}$

$$\mathcal{L}_Y(\Delta_{L,R}) = G_{L,ij} \Psi_{L,i}^T C^{-1} i\sigma^2 \Delta_L \Psi_{L,j} + G_{R,ij} \Psi_{R,i}^T C^{-1} i\sigma^2 \Delta_R \Psi_{R,j} + h.c. \quad (1.88)$$

zu konstruieren, wobei C die Ladungskonjugationsmatrix bezeichnet. Um hieraus die leptonische Massenmatrix zu bestimmen, müssen sowohl das Bi-Doublet als auch die

beiden Triplets durch ihre VEVs (1.67) ersetzt werden. Aus (1.87) erhält man dann

$$\mathcal{L}_Y(\langle\Phi\rangle) = - \left(k_1 F_{ij}^L + k_2 e^{-i\alpha} \tilde{F}_{ij}^L \right) \bar{\nu}_{L,i} \nu_{R,j} - \left(k_2 e^{i\alpha} F_{ij}^L + k_1 \tilde{F}_{ij}^L \right) \bar{e}_{L,i} e_{R,j} + h.c. \quad (1.89)$$

woraus sich die Diracmassenmatrizen der geladenen Leptonen und Neutrinos

$$\begin{aligned} M_e^D &= k_2 e^{i\alpha} F^L + k_1 \tilde{F}^L \\ M_\nu^D &= k_1 F^L + k_2 e^{-i\alpha} \tilde{F}^L \end{aligned} \quad (1.90)$$

ablesen lassen. Analog ergeben sich aus dem Triplett Yukawa-Sektor (1.88)

$$\mathcal{L}_Y(\langle\Delta_{L,R}\rangle) = v_L e^{i\theta_L} G_{L,ij} \nu_{L,i}^T C^{-1} \nu_{L,j} + v_R G_{R,ij} \nu_{R,i}^T C^{-1} \nu_{R,j} + h.c. \quad (1.91)$$

zusätzliche Massenterme für die Neutrinos, nicht jedoch für die geladenen Leptonen. Die Ursache für diese Unterscheidung zwischen ν und l^- liegt in den VEVs der Triplets $\Delta_{L,R}$ (1.67). Für diese gilt

$$i\sigma^2 \langle\Delta_{L,R}\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\theta_L} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_{L,R} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_L} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{L,R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.92)$$

und somit projizieren sie in (1.88) nur die jeweils erste Komponente aus den leptonischen Doublets (1.86), welche gerade den Neutrino Freiheitsgraden entsprechen, heraus. Fasst man die links-händigen Neutrino-Freiheitsgrade in einem Vektor

$$\Omega_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ (\nu_R)^c \end{pmatrix} \quad (1.93)$$

zusammen, lassen sich die unterschiedlichen Neutrino Massenterme aus (1.87) und (1.88) in einem Majorana Massenterm

$$\mathcal{L}_\nu^m = \frac{1}{2} \Omega_L^T C^{-1} \mathcal{M}_\nu \Omega_L + h.c. \quad (1.94)$$

zusammenfassen, Majorana-Neutrinos vorausgesetzt. Für drei Neutrino Generationen handelt es sich bei \mathcal{M}_ν um eine (6×6) Matrix die explizit durch [9]

$$\mathcal{M}_\nu = \begin{pmatrix} 2v_L e^{i\theta_L} G_L & M_D^{\nu*} \\ M_D^{\nu\dagger} & 2v_R G_R^* \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

gegeben ist. Aus einer entsprechenden Matrix wird dann in [6], [8] die see-saw Relation (1.58) zwischen den leichten Neutrino Massen und der Skala der Paritätssymmetriebrechung v_R hergeleitet. Dies lässt sich leicht nachvollziehen, wenn man der Einfachheit halber lediglich die unterschiedlichen Größenordnungen der einzelnen Matrixelemente in

(1.95) betrachtet

$$\mathcal{M}_\nu \sim \begin{pmatrix} v_L & k \\ k & v_R \end{pmatrix} \quad (1.96)$$

und die zugehörigen Eigenwerte berechnet. Unter Ausnutzung von $v_L, k \ll v_R$ ergibt sich entsprechend [6] für die Neutrinomassen die qualitative Abhängigkeit

$$\begin{aligned} m_\nu &\sim v_L - \frac{k^2}{v_R} \\ m_N &\sim v_R \end{aligned} \quad (1.97)$$

Wie in Abschnitt 1.2.3.1 gezeigt, ergibt sich aus den Minimierungsbedingungen des Higgs-Potenzials eine see-saw Relation zwischen den unterschiedlichen Symmetriebrechungsskalen. Da dieses dort nur für den vereinfachten Fall des Higgs-Potenzials (1.79) aus [6] hergeleitet wurde, muss k_2 hier ebenfalls vernachlässigt werden, um ein konsistentes Ergebnis zu erhalten. Ersetzt man dementsprechend in (1.97) $k \rightarrow k_1$ und verwendet anschließend die VEV see-saw Relation (1.84), ergibt sich

$$\begin{aligned} m_\nu &\sim (\gamma - 1) \frac{k_1^2}{v_R} \\ m_N &\sim v_R \end{aligned} \quad (1.98)$$

Dieses Resultat lässt sich so deuten, dass die maximale Paritätsverletzung in niedere-nergetischen Prozessen der schwachen Wechselwirkung und die Kleinheit der Neutrinomassen im MLRM auf eine gemeinsame Ursache, die Symmetriebrechungsskala v_R , zurückführbar sind.

1.2.4 Flavorverletzung und Verschränkungsrelationen

Die aus (1.50) herleitbaren Feynmanregeln enthalten Vertices, die zwei up- bzw down-artige Quarkflavor über das neue Higgs-Boson H^0 miteinander kopplen. Die entsprechenden flavor-verletzenden Kopplungskonstanten sind durch

$$c_{u,ij}^{\text{FCNH}} = \tilde{Y}_{ij}^u \quad (1.99)$$

$$c_{d,ij}^{\text{FCNH}} = \left(V_L^\dagger \tilde{Y}^d V_R \right)_{ij} \quad (1.100)$$

gegeben, wobei i, j die zugehörigen Flavorindizes bezeichnen und die Flavorverletzung durch $i \neq j$ charakterisiert ist. Aufgrund der Links-Rechts-Symmetrie hängen die in $c_{u,d}^{\text{FCNH}}$ auftretenden Matrizen $\tilde{Y}^{u,d}$ über die Verschränkungsrelationen (1.46), (1.47) von

den SM-Yukawamatrizen $Y^{u,d}$ ab und hieraus ergibt sich eine entsprechende Abhängigkeit für die FCNH-Kopplungskonstanten

$$\cos(2\beta)c_{u,ij}^{\text{FCNH}} = -e^{i\alpha} \sin(2\beta)k^{-1}m_i^u \delta_{ij} - k^{-1}m_a^d V_{L,ia} V_{R,ja}^* \quad (1.101)$$

$$c_{d,ij}^{\text{FCNH}} = -\cos(2\beta)k^{-1}m_a^u V_{L,ai}^* V_{R,aj} + e^{-i\alpha} \sin(2\beta)c_{u,ab}^{\text{FCNH}} V_{L,ai}^* V_{R,bj} \quad (1.102)$$

Aus (1.101) lässt sich leicht eine untere Schranke für die Stärke der flavor-verletzenden Kopplungen an up-artige Quarks $c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}}$ herleiten

$$|k^{-1}M_{i \neq j}^d| = |k^{-1}(V_L \hat{M}^d V_R^\dagger)_{i \neq j}| = |\cos(2\beta)| |c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}}| \leq |c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}}| \quad (1.103)$$

die das Problem der Yukawaverschränkung in Links-Rechts symmetrischen Modellen offenbart:

Angenommen es gäbe einen Mechanismus, der flavor-verletzende Kopplungsterme der Quarks an H^0 grundsätzlich verbietet, also insbesondere $c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}} = 0$ erzwingt. Dann impliziert (1.103)

$$c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{ij}^d \sim k\delta_{ij} \quad (1.104)$$

eine bereits in der Basis der Flavoreigenzustände diagonale Quarkmassenmatrix M^d und somit eine gemeinsame Basis aus Flavor- und Masseneigenzuständen. Der Übergang in die Massenbasis (1.49) ist dann bis auf Phasenredefinition der Quarkfelder durch die Identitätstransformation $V_{L,R} = 1$ gegeben. Anders ausgedrückt reicht in diesem Fall die Flavorsymmetrie des Links-Rechts symmetrischen Modells aus, um beide Massenmatrizen simultan zu diagonalisieren. Daher verlieren die entsprechenden Mischungsmatrizen $V_{L,R}$ ihre physikalische Bedeutung und in dem Modell treten keinerlei flavor-verletzenden Prozesse mehr auf, weder durch Kopplungen an Higgs- noch an Eichbosonen. Somit lässt sich festhalten, dass jeder Versuch im MLRM alle flavor-verletzenden Yukawa-Kopplungen gleichzeitig zu verbieten, automatisch auf komplett triviale Flavorphysik führt. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Eine notwendige Bedingung für eine nicht-triviale Flavorstruktur ist die Nichtexistenz einer gemeinsamen Basis aus Flavor- und Masseneigenzuständen. Damit enthält M^d in jeder Flavorbasis, also auch in der mit $M^u = \hat{M}^u$, mindestens ein nicht-verschwindendes Element mit $i \neq j$. Die Abschätzung (1.103) zeigt dann, dass die entsprechende FCNH-Kopplungskonstante ebenfalls von Null verschieden ist.

1.2.5 V_R -unabhängige Flavorverletzung: Eine numerische Untergrenze

In Abschnitt 1.2.4 wurde allgemein gezeigt, dass jedes MLRM mit einer nicht-trivialen Flavorstruktur zwangsläufig flavorverletzende Kopplungen enthält. Fordert man zusätzlich konkret, dass die Flavorstruktur im Niederenergielimes durch die bekannte Struktur

des Standardmodell gegeben ist, lässt sich aus den zu (1.101), (1.102) äquivalenten Verschrankungsrelationen

$$c_{u,ij}^{\text{FCNH}} = -\cos(2\beta)k^{-1}m_a^d V_{L,ia} V_{R,ja}^* + e^{i\alpha} \sin(2\beta) c_{d,ab}^{\text{FCNH}} V_{L,ia} V_{R,jb}^* \quad (1.105)$$

$$\cos(2\beta) c_{d,ij}^{\text{FCNH}} = -e^{-i\alpha} \sin(2\beta) k^{-1} m_i^d \delta_{ij} - k^{-1} m_a^u V_{L,ai}^* V_{R,aj} \quad (1.106)$$

eine numerische Untergrenze für die durch $c_{d,i\neq j}^{\text{FCNH}}$ verursachte Flavorverletzung herleiten. Da diese Untergrenze nur von Standardmodellparametern abhängt, ist sie für jedes MLRM gültig das das Standardmodell als Niederenergielimes enthält, also für jedes physikalisch sinnvolle MLRM.

Analog zur Herleitung von (1.103) folgt aus (1.106) für die flavorverletzenden Kopplungen des H^0 Bosons an down-artige Quarkzustände $c_{d,i\neq j}^{\text{FCNH}}$

$$|k^{-1} \left(V_L^\dagger \hat{M}^u V_R \right)_{i\neq j}| = |\cos(2\beta)| |c_{d,i\neq j}^{\text{FCNH}}| \leq |c_{d,i\neq j}^{\text{FCNH}}| \quad (1.107)$$

Das Standardmodell soll nun in der Art Berücksichtigung als Niederenergietheorie des MLRM finden, als dass die bekannte Hierarchie der up-Quarkmassen durch

$$k^{-1} \hat{M}^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (1.108)$$

und die SM-artige Mischungsmatrix V_L durch die Wolfensteinnäherung [19]

$$V_L = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (1.109)$$

parametrisiert werden, wobei $y_t = \mathcal{O}(1)$ die top-Yukawakopplung bezeichnet. Hiermit lässt sich die Untergrenze der flavor-verletzenden Kopplungen $c_{d,i\neq j}^{\text{FCNH}}$ in (1.107) in λ entwickeln und zur zweiten Ordnung ergibt sich

$$k^{-1} \left(V_L^\dagger \hat{M}^u V_R \right)_{i\neq j} = \bar{Y}_{2,i\neq j}^u + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (1.110)$$

wobei die Matrix durch

$$\bar{Y}_2^u := y_t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -AV_{R,31}\lambda^2 & -AV_{R,32}\lambda^2 & -AV_{R,33}\lambda^2 \\ V_{R,31} & V_{R,32} & V_{R,33} \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

definiert ist. In führender Ordnung ist dann die Untergrenze für $c_{d,i\neq j}^{\text{FCNH}}$ in (1.107) durch den Betrag des entsprechenden Elements dieser Matrix gegeben. Für individuelle Kopplungen hängen diese Untergrenzen von der neuen CKM-artigen Matrix V_R ab, die im Standardmodell keine Entsprechung besitzt und über deren Struktur daher a priori keine Annahme getroffen werden soll. Die Gesamtheit der Kopplungen, also in gewisser Weise die Gesamtflavorverletzung im MLRM, besitzt allerdings eine untere Schranke die in führender Ordnung nur von Standardmodellparametern abhängt.

Beschränkt man sich auf den Parameterbereich $0 \leq A\lambda^2 \leq 1$, der mit den experimentellen Werten der SM-CKM-Parameter $A = 0,801_{-0,020}^{+0,029}$ und $\lambda \sim 0,23$ [20] verträglich ist, lassen sich in (1.111) die drei betragsmäßig größten Nicht-Diagonalelemente $\bar{Y}_{2,i\neq j}^u$ ablesen

$$(\bar{Y}_2^u)_{bd} = y_t V_{R,31}, \quad (\bar{Y}_2^u)_{bs} = y_t V_{R,32}, \quad (\bar{Y}_2^u)_{sb} = -y_t A V_{R,33} \lambda^2 \quad (1.112)$$

Dies sind, in führender Ordnung in der Entwicklung in λ (1.110), die größten Elemente von $k^{-1}(V_L^\dagger \hat{M}^u V_R)_{i\neq j}$, welche die zugehörigen flavorverletzenden Kopplungen im down-Sektor $c_{d,i\neq j}^{\text{FCNH}}$ gemäß (1.107) nach unten beschränken. In Anhang A wird bewiesen, dass diese drei Untergrenzen dann aufgrund der Unitarität der Mischungsmatrix $V_R \in U(3)$ die Summenregel

$$y_t A \lambda^2 \leq |(\bar{Y}_2^u)_{bd}| + |(\bar{Y}_2^u)_{bs}| + |(\bar{Y}_2^u)_{sb}| \quad (1.113)$$

erfüllen. Dies macht einmal mehr deutlich, wie die Links-Rechts Symmetrie die verschiedenen flavor-verletzenden Sektoren des Modells verschränkt. In Abschnitt 1.2.4 wurde gezeigt, dass diese Verschränkung für eine beliebige nicht-triviale Flavorstruktur des Modells das Auftreten flavor-verletzender Yukawakopplungen mit dem neuen Higgs-Boson H^0 vorhersagt. In diesem Abschnitt wurde die Verschränkungsrelation (1.106) verwendet um eine Untergrenze für die Stärke der Flavorverletzung herzuleiten, die der Yukawasektor des MLRM aufweisen muss um im Niederenergielimes mit der Flavorstruktur des Standardmodells verträglich zu sein.

Kapitel 2

Der Einfluss des Higgssektors auf das Flavorproblem

In diesem Abschnitt wird für das MLRM die Abhängigkeit der Yukawa-Verschränkung vom Higgs-Potenzials untersucht. Ein besonderes Augenmerk wird hierbei auf den Parameter $\tan \beta$ gerichtet, der das Verhältnis der VEVs der beiden neutralen Komponenten des Bidoublets parametrisiert

$$\tan \beta = \frac{k_2}{k_1} \quad \rightarrow \quad \langle \Phi \rangle = \underbrace{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}_{=:k} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Da der VEV alleine durch die Form des Higgs-Potenzials festgelegt ist, ist der Einfluß von $\tan \beta$ auf die Flavorphysik des MLRM besonders interessant.

2.1 Verschränkungsrelationen und $\tan \beta$

Eine Folge der Links-Rechts Symmetrie nach der Brechung der manifesten $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -Eichsymmetrie sind die unitären Relationen (1.44), (1.45), die die vier Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$ durch die zwei eichinvarianten Kopplungen F, \tilde{F} ausdrücken. Ausgedrückt durch diese beiden Matrizen findet man für die Kopplungen des SM-artigen Higgs an die Quark-Flavoreigenzustände

$$\hat{Y}^u = \cos \beta F + e^{-i\alpha} \sin \beta \tilde{F} \quad (2.2)$$

$$Y^d = -e^{i\alpha} \sin \beta F - \cos \beta \tilde{F} \quad (2.3)$$

Nutzt man die Flavorsymmetrie (1.27) aus, um ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y^u = \hat{Y}^u$ diagonal zu wählen, impliziert dies Matrizen F, \tilde{F} für die alle Nicht-Diagonalelemente in der Linearkombination auf der rechten Seite von (2.2) verschwinden. Fasst man F, \tilde{F} als Lösungen dieser Gleichung auf ist klar, dass diese im Allgemeinen von den Koeffizienten $\cos \beta, e^{\pm i\alpha} \sin \beta$ abhängen werden. Diese wiederum sind durch die VEVs der Higgsfelder definiert und hängen somit schlußendlich vom Higgs-Potenzial ab. Setzt man die Lösung von (2.2) anschließend in die zweite Linearkombination (2.3) ein, erhält man die Yukawamatrix Y^d . Diese hängt dann einerseits ebenfalls vom Higgs-Potenzial ab und definiert zweitens die Masseneigenbasis der down-artigen Quarks, aus welcher sich die CKM-Mischungsmatrizen ergeben. Das Zusammenspiel der Flavorsymmetrie mit der Abhängigkeit der Flavorstruktur vom Higgs-Potenzial lässt sich folgendermaßen verdeutlichen:

Multipliziert man beide Seiten von (2.2) mit der komplexen Phase des VEVs $e^{i\alpha}$ und addiert dies dann zu (2.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \hat{Y}^u + Y^d &= F e^{i\alpha} \cos \beta + \tilde{F} \sin \beta - F e^{i\alpha} \sin \beta - \tilde{F} \cos \beta \\ &= F e^{i\alpha} (\cos \beta - \sin \beta) + \tilde{F} (\sin \beta - \cos \beta) \\ &= (\cos \beta - \sin \beta) (F e^{i\alpha} - \tilde{F}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Somit erkennt man, dass für ein Minimum des Higgs-Potenzials mit betragsmässig gleich großen VEVs der neutralen Komponenten des Bidoublets, also für $k_1 = k/\sqrt{2} = k_2$

$$\tan \beta = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{2}k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos \beta = \sin \beta \quad (2.5)$$

gilt und daher der erste Faktor auf der rechten Seite von (2.4) verschwindet. Hieraus folgt dann

$$Y^d \stackrel{\beta=\pi/4}{=} -e^{i\alpha} \hat{Y}^u \quad (2.6)$$

dass Y^d in der Flavorbasis ebenfalls diagonal ist, die Flavoreigenzustände der down-artigen Quarks also bis auf Phasenredefinition den zugehörigen Masseneigenzuständen entsprechen. Die Diagonalität von Y^d folgt dabei aus der Diagonalität von \hat{Y}^u und daher aus der Flavorsymmetrie des Modells. Dies demonstriert genau die Behauptung, dass das Higgs-Potenzial in Links-Rechts symmetrischen Modellen die Flavorstruktur beeinflusst.

2.2 Bidoublettbasis und $\tan \beta$

Durch die Wahl einer geeigneten Bidoublettbasis lässt sich der in Abschnitt 2.1 diskutierte Einfluß des Higgs-Potenzials auf die Flavorstruktur des MLRM auf dem Level der

Lagrange-Dichte erkennen und in dieser Darstellung wird der Zusammenhang mit der Flavorsymmetrie besonders einfach.

Nach Ablauf der spontanen Symmetriebrechung ist der allgemeine VEV des Bidoublets durch (2.1) parametrisiert und zu jedem möglichen Wert der Parameter α, β definiert

$$\begin{pmatrix} \Phi' \\ \Phi'' \end{pmatrix} := \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta & e^{i\alpha} \sin \beta \\ -e^{-i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}}_{\in U(2)} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi^c \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

einen unitären Basiswechsel. Ausgedrückt durch Φ', Φ'' , lautet der Yukawa-Sektor des MLRM (1.41)

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q &= \bar{Q}_L F \Phi Q_R + \bar{Q}_L \tilde{F} \Phi^c Q_R + h.c. \\ &= \bar{Q}_L \underbrace{\left(F \cos \beta + \tilde{F} e^{-i\alpha} \sin \beta \right)}_{=: F'} \Phi' Q_R + \bar{Q}_L \underbrace{\left(\tilde{F} \cos \beta - F e^{i\alpha} \sin \beta \right)}_{=: F''} \Phi'' Q_R + h.c. \\ &= \bar{Q}_L F' \Phi' Q_R + \bar{Q}_L F'' \Phi'' Q_R + h.c. \end{aligned} \quad (2.8)$$

In Abschnitt 1.2.1 wurde das Bi-Doublet in seine beiden $SU(2)_L$ -Doublets zerlegt und anschließend die Linearkombinationen identifiziert, die die SM Yukawa-Kopplungen bilden. Danach wurde die Flavorsymmetrie ausgenutzt, um $Y^u = \hat{Y}^u$ zu wählen. Diese Wahl nutzt die Flavorsymmetrie nur indirekt, da eine invariante Transformation des eichkinetischen Terms (1.59) die Form

$$Q_{L,R;i} \xrightarrow{U(3)_{Q_L} \times U(3)_{Q_R}} V_{L,R;ij} Q_{L,R;i} \quad (2.9)$$

hat. Somit ändern sich unter einer Flavortransformation die Matrizen F, \tilde{F} (bzw. F', F'') und die Wahl $Y^u = \hat{Y}^u$ bedeutet eigentlich, dass die Matrizen F, \tilde{F} in der Art redefiniert werden, dass die Linearkombination (2.2) diagonal und nicht-negativ ist. In der neu konstruierten Basis wird diese Linearkombination in einen Basisvektor absorbiert und man kann die Flavorsymmetrie (2.9) verwenden um $F' = \hat{F}'$ zu wählen. Diese Wahl ist in dem hier diskutierten Sinne eine "direkte" Ausnutzung der Flavorsymmetrie.

Aus diesem Yukawa-Sektor lassen sich, wie üblich, die Quarkmassenmatrizen ablesen, indem man die Higgs-Felder um ihre VEVs entwickelt. Die Koordinaten der VEVs in dieser neuen, durch sie selbst definierten Bidoublettbasis, erhält man aus der unitären

Basistransformation (2.7)

$$\begin{aligned} \langle \Phi' \rangle &= k \begin{pmatrix} \cos^2 \beta & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \sin \beta \cos \beta \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \sin^2 \beta & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \sin \beta \cos \beta \end{pmatrix} \\ &= k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \sin(2\beta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi'' \rangle &= k \begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} \sin \beta \cos \beta & 0 \\ 0 & -\sin^2 \beta \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \sin \beta \cos \beta & 0 \\ 0 & \cos^2 \beta \end{pmatrix} \\ &= k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\beta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Damit ergibt sich mit dem Quark-Yukawa-Sektor (2.8)

$$- \mathcal{L}_Y^Q \xrightarrow{\Phi^i \rightarrow \langle \Phi^i \rangle} \bar{u}_L k \hat{F}' u_R + \bar{d}_L k \left(e^{i\alpha} \sin(2\beta) \hat{F}' + \cos(2\beta) F'' \right) d_R + h.c. \quad (2.12)$$

woraus die Quark-Massenmatrizen abgelesen werden können

$$M^u = k \hat{F}' = \hat{M}^u \quad (2.13)$$

$$M^d = e^{i\alpha} \sin(2\beta) \hat{M}^u + k \cos(2\beta) F'' \quad (2.14)$$

Für $\beta = \pi/4$ erhält man hieraus wieder

$$M^d \stackrel{\beta=\pi/4}{=} e^{i\alpha} \underbrace{\sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)}_{=1} \hat{M}^u + k \underbrace{\cos\left(2\frac{\pi}{4}\right)}_{=0} F'' = e^{i\alpha} \hat{M}^u \quad (2.15)$$

das Resultat (2.6) aus Abschnitt 2.1 über den Einfluss des Higgs-Potenzials auf die Flavorstruktur des MLRM.

In Abschnitt 1.2.4 wurde gezeigt, dass das Auftreten flavor-verletzender Kopplungen neutraler Higgs-Bosonen an physikalische Quarkzustände im MLRM untrennbar mit einer nicht-trivialen Flavorphysik, also nicht-trivialen CKM-Mischungsmatrizen verbunden ist. Dies wurde anhand der Verschränkungsrelationen (1.101), (1.102) bewiesen, wobei die Flavorsymmetrie in Form der Wahl $Y^u = \hat{Y}^u$ ausgenutzt wurde. Im Anschluss an (2.8) wird argumentiert, dass dies eine indirekte Ausnutzung der Flavorsymmetrie darstellt, welche zu impliziten Relationen zwischen den eichinvarianten Parametern des Modells, also den Elementen der Matrizen F, \tilde{F} , führt. In der hier konstruierten Bi-doublettbasis (2.7) hingegen, entspricht die analoge Wahl $F' = \hat{F}'$ einer expliziten Reduktion der eichinvarianten Parameter F', F'' auf dem Level der Lagrange-Dichte. Die Flavorstruktur des MLRM wird dann gemäß (2.14) durch diese Modellparameter, insbesondere durch die Matrix F'' , definiert. In (2.6) und (2.15) wurde zwar gezeigt, dass im Grenzfall $\beta = \pi/4$ die Flavorphysik des MLRM unabhängig von dieser Matrix trivial

wird, allerdings führt dies innerhalb der Generationen zu einer Entartung der Quarkmassen

$$M^d M^{d\dagger} \stackrel{\beta=\pi/4}{=} e^{i\alpha} \hat{M}^u (e^{i\alpha} M^u)^\dagger = \begin{pmatrix} m_u^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_t^2 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

und ist somit als physikalischer Grenzfall uninteressant. Für $\beta = 0$ findet man den gegenteiligen Fall

$$M^d \stackrel{\beta=0}{=} e^{i\alpha} \underbrace{\sin(0)}_{=0} \hat{M}^u + k \underbrace{\cos(0)}_{=1} F'' = k F'' \quad (2.17)$$

für welchen alle Abhängigkeiten zwischen up- und down-Quarksektor verschwinden und beliebige down-Quark Massen und CKM-Mischungsmatrizen durch eine entsprechende Wahl von F'' definiert werden können. In diesem Fall muss die Matrix F'' für die Definition einer nicht-triviale Flavorstruktur Elemente abseits der Diagonalen enthalten. Der zweite Summand in der Gleichung in (2.8) enthält dann zu diesen proportionale, flavor-ändernde Kopplungsterme

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q &\supset (F'')_{ij} \bar{Q}_{L,i} \Phi'' Q_{R,j} + h.c. \\ &\stackrel{\beta=0}{\supset} (F'')_{ij} \bar{u}_{L,i} u_{R,j} \phi_1'' + (F'')_{ij} \bar{d}_{L,i} d_{R,j} \phi_2'' + h.c. \end{aligned} \quad (2.18)$$

wobei die Gleichheit der Kopplungskonstanten F''_{ij} zwischen den beiden Termen eine direkte Konsequenz der Links-Rechts-symmetrischen Vereinheitlichung ist, also der Anordnung der links- und rechts-händigen Quarks in $SU(2)_{L,R}$ -Doublets $Q_{L,R}$. Diese Tatsache ist entscheidend für das Auftreten der Yukawa- Verschränkung im MLRM:

Die Flavorsymmetrie erlaubt es, für die up-artigen Quarks eine gemeinsame Basis aus Flavor- und Masseneigenzuständen zu wählen, also $u_{L,i} = u'_{L,i}$ (vgl. (1.49)). Somit ist die entsprechende Kopplung an up-Quarks invariant unter dem Übergang in die Basis der physikalischen Quarkzustände

$$(F'')_{ij} \bar{u}_{L,i} u_{R,j} \phi_1'' = (F'')_{ij} \bar{u}'_{L,i} u'_{R,j} \phi_1'' \quad (2.19)$$

während sie im down-Sektor diagonalisiert wird

$$(F'')_{ij} \bar{d}_{L,i} d_{R,j} \phi_2'' \stackrel{\beta=0}{=} \left(k^{-1} V_L \hat{M}^d V_R^\dagger \right)_{ij} \bar{d}_{L,i} d_{R,j} \phi_2'' \stackrel{(1.49)}{=} \left(k^{-1} \hat{M}^d \right)_{ii} \bar{d}'_{L,i} d'_{R,i} \phi_2'' \quad (2.20)$$

Wie bereits argumentiert wurde, definiert F'' die Flavorstruktur des MLRM und muss damit für eine Brechung der Flavorsymmetrie im down-Sektor (2.20) notwendigerweise ein Element $F''_{i \neq j} \neq 0$ besitzen. Die Links-Rechts Symmetrie erzwingt, dass dieses Element ebenfalls im up-Sektor (2.19) enthalten ist und dort eine flavorverletzende Kopplung verursacht. Umgekehrt tritt im up-Sektor (2.19) dann keine Flavorverletzung auf,

wenn $F''_{i \neq j} = 0$ gilt. Setzt man dies in den down-Sektor ein, ist die Yukawa-Kopplung auf der linken Seite von (2.20) bereits diagonal und somit sind die CKM-Mischungsmatrizen bis auf eine mögliche Phasenredefinition durch $V_{L,R} = 1$ gegeben. In diesem Fall treten im MLRM keinerlei Übergänge zwischen verschiedenen Flavoreigenzuständen mehr auf. Diese Argumentation bezieht sich nur auf die Nicht-Diagonalelemente der Matrix M^d und ist daher wegen

$$M^d_{i \neq j} = e^{i\alpha} \sin(2\beta) \underbrace{\hat{M}^u_{i \neq j}}_{=0} + k \cos(2\beta) F''_{i \neq j} = k \cos(2\beta) F''_{i \neq j} \quad (2.21)$$

für alle Werte von β gültig. Umgekehrt lässt sich hieraus auf eine notwendige Bedingung schließen, die das Higgs-Potenzial für eine beliebige nicht-triviale Flavorstruktur des MLRM erfüllen muss

$$M^d_{i \neq j} \stackrel{!}{\neq} 0 \Rightarrow \cos(2\beta) \neq 0 \Rightarrow |\tan \beta| \neq 1 \Rightarrow k_1 \neq k_2 \quad (2.22)$$

Durch den Übergang in die Bidoublettbasis (2.7) konnte gezeigt werden, dass die Brechung der Flavorsymmetrie und die Kopplungskonstanten flavor-verletzender Terme im Yukawa-Sektor durch die selben eichinvarianten Modellparameter F''_{ij} gegeben sind. Dies beweist erneut das in Abschnitt 1.2.4 gefundene Resultat, dass jedes flavor-verletzende MLRM einen flavor-verletzenden Yukawa-Sektor besitzt.

Kapitel 3

Diskrete Symmetrien und 2HDM

Eine der einfachsten Erweiterungen des Standardmodells ist die Ergänzung der Higgs-Sektors um ein zusätzliches $SU(2)_L$ -Doublett

$$H_1, H_2^c : (\underbrace{0}_{SU(3)_c}, \underbrace{2}_{SU(2)_L}, \underbrace{1/2}_{U(1)_Y}) \quad (3.1)$$

und einem gegenüber dem Standardmodell ansonsten unveränderten Teilcheninhalt. Ein Modell mit zugrundeliegender SM-Eichgruppe und diesem Spektrum wird als Zwei Higgs-Doublett Modell (2HDM) bezeichnet. Die Hinzunahme des zweiten Higgs-Doubletts führt im Allgemeinen zu flavour-ändernden Kopplungen neutraler Higgs-Bosonen an massive Quarks, wie sie auch im Yukawa-Sektor (1.50) des MLRM auftreten. Da für das 2HDM seit Langem exakte Lösungen dieses Problems in Form diskreter Symmetrien bekannt sind, ist ihre Betrachtung im Kontext dieser Arbeit interessant. Die beiden populärsten Vertreter dieser Lösungen sind das 2HDM Typ I und Typ II [21], welche im Folgenden nach einer kurzen Einführung in das allgemeine 2HDM vorgestellt werden. Nach der Betrachtung dieser beiden Spezialfälle wird das MLRM in die Klasse der 2HDM Modelle eingebettet und der Einfluss der, aus der Links-Rechts Symmetrie resultierenden, Verschränkungsrelationen (1.46), (1.47) auf die Lösbarkeit des Flavorproblems durch diskrete Symmetrien untersucht.

3.1 Das Zwei Higgs-Doublett Modell

In diesem Unterabschnitt soll das allgemeine Zwei Higgs-Doublett Modell (2HDM) vorgestellt werden. Die Eichgruppe dieses Modells ist identisch mit der des Standardmodells

$$\mathcal{G}_{2\text{HDM}} = \mathcal{G}_{\text{SM}} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (3.2)$$

und auch die zugehörigen Symmetriemultipletts unterscheiden sich von denen des SM lediglich um ein zusätzliches $SU(2)_L$ Higgs-Doublett

$$\begin{aligned} Q_{L,i} &= \begin{pmatrix} u_{L,i} \\ d_{L,i} \end{pmatrix}, & u_{R,i}, d_{R,i} \\ H_1 &= \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, & H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mit diesen Freiheitsgraden lässt sich der allgemeinste eichinvariante, renormierbare Quark-Yukawa-Sektor des 2HDM konstruieren

$$- \mathcal{L}_Y^Q = \bar{Q}_L F_1 H_1 u_R + \bar{Q}_L F_2 H_2 d_R + \bar{Q}_L (-\tilde{F}_1) H_1^c d_R + \bar{Q}_L \tilde{F}_2 H_2^c u_R + h.c. \quad (3.4)$$

wobei $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ für beliebige Kopplungsmatrizen im Flavorraum stehen und die Ladungskonjugation für $SU(2)_L$ Doubletts wie üblich durch $\Phi_{1,2}^c := i\sigma^2 \Phi_{1,2}^*$ definiert ist. Das Vorzeichen vor \tilde{F}_1 wurde lediglich eingeführt, um im Folgenden den Vergleich mit dem MLRM zu vereinfachen.

Analog zum Vorgehen im SM kann die gebrochene $SU(2)_L$ -Eichsymmetrie ausgenutzt werden, um den Vakuumerwartungswert eines dieser beiden Doubletts ohne Beschränkung der Allgemeinheit reell und nicht-negativ zu wählen. Das im Zwei Higgs-Doublett Modell zusätzlich auftretende Higgs-Doublett trägt dann einen, im Allgemeinen, komplexen VEV

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2^c \rangle = \begin{pmatrix} k_2 e^{-i\alpha} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Für einen nicht-trivialen Vakuumzustand des MLRM muss also entweder $k_1 > 0$ oder $k_2 > 0$ gelten. Da die beiden Doubletts H_1, H_2^c gleichberechtigt im Yukawa-Sektor (3.4) auftreten, lässt sich der Fall $k_1 = 0, k_2 > 0$ durch Vertauschen der Indizes $H_1 \leftrightarrow H_2^c$ gefolgt von einer passenden Eichtransformation, die zu einem positiven nicht-verschwindenden VEV führt, auf den Fall $k_1 > 0, k_2 = 0$ abbilden. Somit genügt es, sich auf den Fall $k_1 > 0$ zu beschränken und analog zu Abschnitt 1.2.1 zwei neue Parameter zu definieren

$$\begin{aligned} \tan \beta = \frac{k_2}{k_1} &\Rightarrow k_1 = k \cos \beta \\ k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} &\Rightarrow k_2 = k \sin \beta \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analog zu (1.42) führt die unitäre Rotation der beiden Doubletts um den Winkel β zu einer Basis, in der ein Higgs-Doublett den kompletten VEV trägt und einer hierzu

orthogonalen Komponente mit trivialem VEV

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \cos \beta & e^{i\alpha} \sin \beta \\ -e^{-i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2^c \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \langle h \rangle &= \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Der allgemeinste Quark Yukawa-Sektor des 2HDM (3.4) wird unter diesem Basiswechsel zu

$$-\mathcal{L}_Y^Q = \bar{Q}_L Y^u h u_R + \bar{Q}_L Y^d h^c d_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}^u H u_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}^d H^c d_R + h.c. \quad (3.8)$$

und der Zusammenhang der Yukawamatrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$ mit den ursprünglichen Kopplungsmatrizen ist durch

$$\begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \\ -e^{i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}}^{=\chi^u} \begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -e^{i\alpha} \sin \beta & -\cos \beta \\ -\cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}}_{=\chi^d} \begin{pmatrix} F_2 \\ \tilde{F}_1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

gegeben. Die in diesen Relationen auftretenden unitären Matrizen $\chi^{u,d} \in U(2)$ sind die selben, die auch in der Herleitung der Verschränkungsrelationen für das MLRM in (1.44), (1.45) auftauchen. Dies ist der Grund für die Wahl des Vorzeichens $(-\tilde{F}_1)$ in (3.4). Im 2HDM multiplizieren die beiden Matrizen $\chi^{u,d}$ im Allgemeinen jedoch zwei unterschiedliche Vektoren $(F_1, \tilde{F}_2), (F_2, \tilde{F}_1)$, sodass sich die Relationen (3.9) und (3.10), im Gegensatz zu ihren Entsprechungen im MLRM (1.44) und (1.45), im Allgemeinen nicht ineinander einsetzen lassen. Daher folgen für das allgemeine 2HDM keine Verschränkungsrelationen à la (1.46), (1.47) zwischen den vier Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$, der Ursache des Flavorproblems im MLRM.

Da die fermionischen Symmetriemultipletts des 2HDM mit denen des SM übereinstimmen, besitzt sein eichkinetischer Sektor die gleiche Flavorsymmetrie

$$\mathcal{G}_{2HDM}^{\text{flav}} = \mathcal{G}_{SM}^{\text{flav}} = U(3)_{Q_L} \times U(3)_{u_R} \times U(3)_{d_R} \quad (3.11)$$

Diese lässt sich ausnutzen, um im Vorhinein eine Basis des Flavorraums zu wählen, in der möglichst viele der in (3.8) auftretenden Matrizen diagonal sind:

Zu den beiden Yukawakopplungen Y^u, Y^d gibt es jeweils zwei unitäre Matrizen $V_{u,d}, W_{u,d} \in U(3)$, die diese bi-unitär diagonalisieren

$$Y^u = V_u \hat{Y}^u W_u^\dagger, \quad Y^d = V_d \hat{Y}^d W_d^\dagger \quad (3.12)$$

Die unitäre Transformation der Quarkfelder gemäß

$$\begin{aligned} Q_L &\rightarrow V_u Q_L \\ u_R &\rightarrow W_u u_R \\ d_R &\rightarrow W_d d_R \end{aligned} \quad (3.13)$$

stellt dann laut (3.11) eine Symmetrietransformation des eichkinetischen Sektors dar, während der Yukawa-Sektor sich zu

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q &\rightarrow \bar{Q}_L \hat{Y}^u h u_R + \bar{Q}_L \overbrace{V_u^\dagger V_d}^{=: V_{\text{CKM}}} \hat{Y}^d h^c d_R \\ &+ \bar{Q}_L V_u^\dagger \tilde{Y}^u W_u H u_R + \bar{Q}_L V_u^\dagger \tilde{Y}^d W_d H^c d_R \\ &+ h.c. \end{aligned} \quad (3.14)$$

vereinfacht. Da zwischen den vier Yukawa-Matrizen im allgemeinen 2HDM keine Verschränkungsrelationen bestehen, können unspezifizierte Kopplungen durch andere ersetzt werden

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^u &\rightarrow V_u \tilde{Y}^u W_u^\dagger \\ \tilde{Y}^d &\rightarrow V_u \tilde{Y}^d W_d^\dagger \end{aligned} \quad (3.15)$$

Daher erschöpft sich die Flavorsymmetrie in dem vereinfachten Yukawa-Sektor

$$-\mathcal{L}_Y^Q = \bar{Q}_L \hat{Y}^u h u_R + \bar{Q}_L V_{\text{CKM}} \hat{Y}^d h^c d_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}^u H u_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}^d H^c d_R + h.c. \quad (3.16)$$

Um die Massenbasis zu bestimmen, werden die Higgs-Felder durch ihre VEVs $\langle h^0 \rangle = k$, $\langle H^0 \rangle = 0$ ersetzt

$$-\mathcal{L}_Y^Q \xrightarrow{\langle \cdot \rangle} \bar{u}_L k \hat{Y}^u u_R + \bar{d}_L k V_{\text{CKM}} \hat{Y}^d d_R + h.c. \quad (3.17)$$

woraus sich sofort die Massenmatrizen ablesen lassen

$$\begin{aligned} M^u &= k \hat{Y}^u = \hat{M}^u \\ M^d &= k V_{\text{CKM}} \hat{Y}^d = V_{\text{CKM}} \hat{M}^d \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die gesuchte Masseneigenbasis ist durch diagonale Massenmatrizen \hat{M}^u, \hat{M}^d im Yukawa-Sektor (3.17) charakterisiert und die Zerlegung dieser in (3.18) legt die Basistransformation fest

$$u_{L,R} \rightarrow u'_{L,R} := u_{L,R} \quad (3.19)$$

$$d_L \rightarrow d'_L := V_{\text{CKM}}^\dagger d_L \quad (3.20)$$

$$d_R \rightarrow d'_R := d_R \quad (3.21)$$

Der Vergleich mit der analogen Transformation (1.49) im MLRM erlaubt die Identifikation

$$\begin{array}{ccc} \text{MLRM} & & \text{2HDM} \\ V_L & \leftrightarrow & V_{\text{CKM}} \\ V_R & \leftrightarrow & 1 \end{array} \quad (3.22)$$

worin sich die unterschiedlichen Flavorsymmetriegruppen der beiden Modelle (1.27) und (3.11) widerspiegeln. Aus dem zusätzlichen $U(3)$ -Faktor der 2HDM Flavorsymmetrie resultiert das Fehlen einer zweiten physikalischen Mischungsmatrix. Dies wird in (3.22) durch $V_R \leftrightarrow 1$ angedeutet.

Die Transformation (3.19) überführt den vereinfachten Yukawa-Sektor (3.16) in die Basis der physikalischen Quarkmasseneigenzustände, was per Definition die Yukawa-Kopplungen $Y^{u,d}$ an das einzige VEV-tragende Higgsdoublett h diagonalisiert. In (3.15) wurde ausgenutzt, dass die Matrizen $\tilde{Y}^{u,d}$ beliebig gewählt werden können. Dies wurde damit begründet, dass aus (3.9) und (3.10) keine Verschränkungsrelationen folgen, es also zu jedem Paar (Y^u, \tilde{Y}^u) und (Y^d, \tilde{Y}^d) ein eindeutiges Paar (F_1, \tilde{F}_2) und (F_2, \tilde{F}_1) aus eichinvarianten Kopplungsmatrizen gibt. Insbesondere gibt es für fest gewählte Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}$ beliebig viele solcher Paare mit unterschiedlichen $\tilde{Y}^{u,d}$. Da die Massenbasis alleine durch Y^u und Y^d definiert wird, ist der Basiswechsel unabhängig von den Matrizen $\tilde{Y}^{u,d}$. Die gleiche Massenbasis ergibt sich für die Paare (Y^u, \tilde{Y}^u) und $(Y^d, V_{\text{CKM}} \tilde{Y}^d)$. Hieraus lässt sich schließen, dass die Kopplungsmatrizen $\tilde{Y}^{u,d}$ im Masseneigenraum im Allgemeinen nicht diagonal sind. Dies führt, wie im Fall des MLRM (1.50), zu flavorverletzenden Termen im Yukawa-Sektor (3.16)

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{\text{el.neutr.}} &= \bar{u}'_L \hat{Y}^u h^0 u'_R + \bar{d}'_L \hat{Y}^d (-h^{0*}) d'_R \\ &\quad + \bar{u}'_L \tilde{Y}^u H^0 u'_R + \bar{d}'_L V_{\text{CKM}}^\dagger \tilde{Y}^d (-H^{0*}) d'_R \\ &\quad + h.c. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wie soeben argumentiert wurde, hätte die unitäre Mischungsmatrix V_{CKM} in eine Redefinition von \tilde{Y}^d absorbiert werden können. Hier wurde sie aber explizit mit angegeben, um den späteren Vergleich mit dem MLRM zu erleichtern. Das zugrundeliegende Argument war aber dennoch nützlich, da es gezeigt hat, dass die Massenbasis im 2HDM

unabhängig von den flavor-verletzenden Kopplungen ist. Das bedeutet zum einen, dass das allgemeine 2HDM einen flavor-verletzenden Yukawa-Sektor besitzt und zum anderen, dass für jede gegebene Massenbasis Y^u, Y^d ein spezielles 2HDM existiert, für welches das Flavorproblem gelöst ist. Die Ursache für beides ist die Freiheit, in (3.9) und (3.10) unabhängig voneinander vier Matrizen $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ zu wählen. Eine spezielle Lösung des Flavorproblems im 2HDM ist durch verschwindende FCNC Kopplungsmatrizen $\tilde{Y}^{u,d}$ gegeben und die zugehörige Wahl der eichinvarianten Kopplungen lautet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -e^{-i\alpha} \sin \beta \\ e^{i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^u \cos \beta \\ Y^u e^{i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} F_2 \\ \tilde{F}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -e^{-i\alpha} \sin \beta & -\cos \beta \\ -\cos \beta & e^{i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^d \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} Y^d e^{-i\alpha} \sin \beta \\ Y^d \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Im folgenden Abschnitt wird betrachtet, wie sich solch eine spezielle Wahl der eichinvarianten Modellparameter $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ auf dem Level der Lagrange-Dichte durch diskrete Symmetrien begründen lässt.

3.2 Das Zwei Higgs-Doublett Modell Typ I und Typ II

In (3.24) wurde berechnet, für welche eichinvarianten Kopplungen $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ der Yukawa-Sektor des 2HDM keine Kopplungen an das neutrale Higgs-Boson H^0 enthält, also $\tilde{Y}^{u,d} = 0$ gilt. Unter dieser Prämisse ist die allgemeine Lösung in Abhängigkeit von der Massenbasis $Y^{u,d}$ gegeben. In diesem Abschnitt soll die Logik der Herangehensweise umgekehrt werden:

Anstatt im allgemeinen 2HDM alle Kopplungsmatrizen für das SM- und NP- Higgs-Doublett wie in Abschnitt 3.1 zu berechnen und anschließend die ursprünglichen Parameter “nachzutunen” um das gewünschte Ergebnis zu erhalten, soll hier die Lagrange-Dichte mit einer zusätzlichen diskreten Symmetrie ausgestattet werden. Die Kopplungsmatrizen $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ werden dann durch die Symmetrieforderung eingeschränkt und die Lösung des Flavorproblems [22], [23], ausgedrückt in den Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$, ergibt sich als “natürliche” Folge dieser Annahme.

3.2.1 2HDM Typ I

Der Yukawa-Sektor des allgemeinen 2HDM enthält insgesamt vier unabhängige Kopplungsmatrizen, von denen bereits zwei ausreichen um eine beliebige Massenbasis zu definieren. Wie die Argumentation vor Gleichung (3.23) klar macht, führt die Freiheit in der Wahl der beiden verbleibenden Matrizen im Allgemeinen zu flavor-verletzenden

Kopplungen. Schränkt man den Yukawa-Sektor des 2HDM so ein, dass er nur zwei Yukawa-Matrizen enthält, besteht keine Freiheit mehr irgendeine Kopplung zu wählen. Die beiden Matrizen definieren die Massenbasis und sind in selbiger diagonal, das Flavorproblem ist also gelöst. Für ein 2HDM das eine “natürliche” Erklärung für das Auftreten von nur zwei Kopplungsmatrizen im Yukawa-Sektor besitzt, folgt also automatisch auch eine “natürliche” Lösung des Flavorproblems.

Das sogenannte 2HDM Typ I [21] erklärt das Fehlen der Matrizen F_1, \tilde{F}_1 in (3.4), der Kopplungen an das Higgs-Doublett H_1 , durch die Forderung nach Invarianz der Lagrange-Dichte unter der diskreten Transformation

$$H_1 \xrightarrow{\mathcal{T}_{\text{Typ I}}} -H_1 \quad (3.25)$$

die alle anderen Felder unverändert lässt. Der allgemeine Quark-Yukawa-Sektor des 2HDM wird hierdurch zu

$$-\mathcal{L}_Y^Q \xrightarrow{\mathcal{T}_{\text{Typ I}}} -\bar{Q}_L F_1 H_1 u_R + \bar{Q}_L F_2 H_2 d_R - \bar{Q}_L (-\tilde{F}_1) H_1^c d_R + \bar{Q}_L \tilde{F}_2 H_2^c u_R + h.c. \quad (3.26)$$

und die Invarianzforderung erzwingt

$$\mathcal{T}_{\text{Typ I}}(\mathcal{L}_Y^Q) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}_Y^Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -F_1 = F_1 \\ \tilde{F}_1 = -\tilde{F}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0 \\ \tilde{F}_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Eine solche Schlussfolgerung aus einer Symmetrieforderung wird gemeinhin als “natürliche” Erklärung akzeptiert¹ und impliziert in dem hier betrachteten Zusammenhang, wie bereits in der Einleitung begründet, eine “natürliche” Lösung des Flavorproblems. Konkret ergibt sich für die Yukawa-Matrizen (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \\ -e^{i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_2 e^{-i\alpha} \sin \beta \\ \tilde{F}_2 \cos \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -e^{i\alpha} \sin \beta & -\cos \beta \\ -\cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_2 e^{i\alpha} \sin \beta \\ -F_2 \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Diese Gleichungen geben die Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$ als Funktion der eichinvarianten Kopplungen $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ an, welche durch die Symmetrien der Lagrange-Dichte festgelegt sind. Vergleicht man dies mit der “nachgetuneten” Lösung (3.24) wird der Unterschied in der Herangehensweise deutlich:

Spricht man von einer natürlichen Lösung, wenn diese aus einer Symmetrie der Lagrange-Dichte folgt, kann dies nur die manifesten Modellparameter $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ betreffen. Somit

¹Eine Symmetrie der Lagrange-Dichte gilt in allen Ordnungen der Störungstheorie und schützt somit die flavordiagonalen Higgs-Kopplungen im 2HDM vom Typ I(II) vor flavorverletzenden radiativen Korrekturen.

kann eine natürliche Lösung in Form der Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$ nur eine Schlussfolgerung, beziehungsweise eine Funktion der entsprechenden Lösung in Form der Modellparameter sein, wie es in (3.28) der Fall ist. Im Gegensatz dazu werden in (3.24) die invertierten Gleichungen verwendet, die die Modellparameter als Funktion der Yukawa-Kopplungen angeben. Da deren Form sich nicht natürlich begründen lässt, wurde mit der Inversion der Relationen auch die dahinterstehende Logik auf den Kopf gestellt.

Um abschließend explizit zu zeigen, dass das 2HDM Typ I das Flavorproblem exakt löst, muss man sich lediglich klar machen, dass die problematischen Kopplungsterme des neuen neutralen Higgs-Bosons H^0 sich unter Transformationen der Quarkfelder wie die entsprechenden Kopplungen des SM Higgs-Boson h^0 transformieren, z.B.

$$\left. \begin{array}{l} \bar{u}_L Y^u u_R h^0 \\ \bar{u}_L \tilde{Y}^u u_R H^0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{u}_L V_u^\dagger Y^u W^u u_R h^0 \\ \bar{u}_L V_u^\dagger \tilde{Y}^u W^u u_R H^0 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Der Übergang in die Massenbasis diagonalisiert per Definition Y^u und Y^d und das Flavorproblem ist gelöst, wenn \tilde{Y}^u und \tilde{Y}^d in dieser Basis ebenfalls diagonal sind. Da $Y^u(Y^d)$ und $\tilde{Y}^u(\tilde{Y}^d)$ in (3.29) gleich transformiert werden, ist dies der Fall, wenn sie simultan bi-unitär diagonalisierbar sind. Dies gilt für das Paar (Y^u, \tilde{Y}^u) in (3.28) aufgrund der linearen Abhängigkeit zwischen den beiden Matrizen offensichtlich und ebenso für (Y^d, \tilde{Y}^d) .

3.2.2 2HDM Typ II

Das 2HDM Typ II [21] wird durch eine diskrete Symmetrie der Lagrange-Dichte unter der Transformation

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \\ d_{R,i} \end{array} \right\} \xrightarrow{\mathcal{T}_{\text{Typ II}}} \left\{ \begin{array}{l} -H_1 \\ -d_{R,i} \end{array} \right. \quad (3.30)$$

implementiert, wobei $d_{R,i}$ bedeuten soll, dass sich jeder rechts-händige, down-artige Quark-Flavor gleich transformiert. Alle anderen Felder bleiben, wie auch im 2HDM vom Typ I, unverändert.

Aus dem Verhalten des allgemeinen 2HDM Quark-Yukawa-Sektors (3.4) unter dieser Transformation

$$-\mathcal{L}_Y^Q \xrightarrow{\mathcal{T}_{\text{Typ II}}} -\bar{Q}_L F_1 H_1 u_R - \bar{Q}_L F_2 H_2 d_R + \bar{Q}_L (-\tilde{F}_1) H_1^c d_R + \bar{Q}_L \tilde{F}_2 H_2^c u_R + h.c. \quad (3.31)$$

liest man die Implikationen der Invarianzforderung für das 2HDM Typ II ab

$$\mathcal{T}_{\text{Typ II}}(\mathcal{L}_Y^Q) \stackrel{!}{=} \mathcal{L}_Y^Q \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -F_1 = F_1 \\ -F_2 = F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Wie schon für das 2HDM Typ I, löst die Einschränkung der Lagrange-Dichte auf $\mathcal{T}_{\text{Typ II}}$ -invariante Terme das Flavorproblem auf der Ebene der Modellparameter F_i, \tilde{F}_i . Die zugehörige Lösung in Form der Yukawa-Matrizen folgt dann aus (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \\ -e^{i\alpha} \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F}_2 e^{-i\alpha} \sin \beta \\ \tilde{F}_2 \cos \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -e^{i\alpha} \sin \beta & -\cos \beta \\ -\cos \beta & e^{-i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\tilde{F}_1 \cos \beta \\ \tilde{F}_1 e^{-i\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Die simultane bi-unitäre Diagonalisierbarkeit der Paare (Y^i, \tilde{Y}^i) folgt, wie in Abschnitt 3.2.1, aus der linearen Abhängigkeit der Matrizen

$$\begin{array}{c|cc} & h^0 & H^0 \\ \hline \bar{u}_{L,i} u_{R,j} & Y^u \sim \tilde{F}_2 & \sim \tilde{Y}^u \\ & \approx & \\ \bar{d}_{L,i} d_{R,j} & Y^d \sim \tilde{F}_1 & \sim \tilde{Y}^d \end{array} \quad (3.34)$$

Diese schematische Auftragung macht die Anatomie der Lösung deutlich:

Die horizontal angeordneten Yukawa-Kopplungen verhalten sich unter Flavortransformationen (3.13) gleich, während vertikal angeordnete sich in verschiedenen Untergruppen von (3.2) transformieren. Die Flavortransformation der jeweiligen Kopplungsmatrizen ist alleine durch die in der Kopplung auftretenden Quarkfelder festgelegt

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}^{\text{flav}} & U(3)_{Q_L} & U(3)_{u_R} & U(3)_{d_R} \\ \bar{u}_{L,i} u_{R,j} & \rightarrow & V_{u,ik}^* & W_{u,jl} & \bar{u}_{L,k} u_{R,l} \\ \bar{d}_{L,i} d_{R,j} & \rightarrow & V_{u,ik}^* & W_{d,jl} & \bar{d}_{L,k} d_{R,l} \end{array} \quad (3.35)$$

da die Higgs-Felder, die die Spalten in (3.34) unterscheiden, keinen Flavorindex tragen. Somit weisen Kopplungen in der selben Zeile die gleichen Flavorindizes auf und verhalten sich dementsprechend unter Flavortransformationen gleich. Die Zeilen untereinander werden durch die Isospin-Multipletts der enthaltenen Quarks unterschieden. Um zu verstehen warum dies sicherstellt, dass die Kopplungen in unterschiedlichen Zeilen sich in unterschiedlichen Untergruppen von $\mathcal{G}_{2HDM}^{\text{flav}}$ transformieren, muss man den eichkinetischen Sektor betrachten.

3.2.2.1 Die Flavorsymmetrie des eichkinetischen Sektors

Die links- und rechts-händigen Quarkfreiheitsgrade sind im 2HDM, wie auch im SM, in verschiedene Darstellungen der Eichgruppe eingeordnet. Die links-händigen Quarks einer Generation werden in einem $SU(2)_L$ -Doublett zusammengefasst, während die rechts-händigen Quarkflavor der selben Generation als zwei unabhängige Elemente in der trivialen Darstellung aufgefasst werden

$$Q_{L,i} = \begin{pmatrix} u_{L,i} \\ d_{L,i} \end{pmatrix}, \quad u_{R,i}, \quad d_{R,i} \quad (3.36)$$

Der Index $i = 1, 2, 3$ unterscheidet dabei drei identische Kopien dieser Multipletts, die die Freiheitsgrade der drei Quark-Familien enthalten. Konstruiert man für jede dieser Kopien einen kinetischen Term, ergibt sich der eichkinetische Quarksektor (vgl. (1.59))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{gauge}} = & \sum_{i=1}^3 \bar{Q}_{L,i} i \gamma^\mu D_\mu Q_{L,i} \\ & + \sum_{i=1}^3 \bar{u}_{R,i} i \gamma^\mu D_\mu u_{R,i} \\ & + \sum_{i=1}^3 \bar{d}_{R,i} i \gamma^\mu D_\mu d_{R,i} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Jeder der drei Terme ist invariant unter einer unitären Transformation des kontrahierten Flavorindizes, also

$$\sum_{i=1}^3 \bar{d}_{R,i} d_{R,i} \rightarrow \sum_{k,l=1}^3 \sum_{i=1}^3 \underbrace{W_{d,ik}^* W_{d,il}}_{\delta_{kl}} \bar{d}_{L,k} d_{R,l} = \sum_{k=1}^3 \bar{d}_{R,k} d_{R,k} \quad (3.38)$$

Fasst man die Flavorindizes als Komponenten eines Vektors im \mathbb{C}^3 -Flavorraum auf, beschreiben diese Transformationen drei unabhängige unitäre Rotationen der Vektoren

$$\begin{aligned} \vec{Q}_L & \rightarrow V_u \vec{Q}_L \\ \vec{u}_R & \rightarrow W_u \vec{u}_R \\ \vec{d}_R & \rightarrow W_d \vec{d}_R \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die links-händigen Quarkfreiheitsgrade werden in der elektro-schwachen Vereinheitlichung in einem $SU(2)_L$ -Doublett zusammengefasst, daher erzwingt die $SU(2)_L$ -Kovarianz, dass $(u_{L,i}, d_{L,i})$ sich als ein Vektor $Q_{L,i}$ im Flavorraum transformiert. Es ist bemerkenswert, dass somit die Eichkovarianz die Flavorsymmetriegruppe des eichkinetischen

Terms

$$\mathcal{G}_{2HDM}^{\text{flav}} = U(3)_{Q_L} \times U(3)_{u_R} \times U(3)_{d_R} \quad (3.40)$$

auf drei $U(3)$ -Faktoren begrenzt.

Nun sollte klar sein, dass fermionische Freiheitsgrade die in gemeinsamen Isospin-Multipletts zusammengefasst sind, sich als ein gemeinsames Objekt im Flavorraum transformieren. Für jedes dieser Eichmultipletts enthält der eichkinetische Term der Lagrange-Dichte einen eigenen, unter dieser Transformation invarianten, kinetischen Term. Im ersten Flavorindex transformieren sich die beiden Zeilen im Schema (3.34) demnach gleich, da die links-händigen Quarkfelder $(u_{L,i}, d_{L,i})$ ein Isospin-Doublett bilden. Die rechts-händigen Quarkfelder $u_{R,i}, d_{R,i}$ hingegen bilden zwei unabhängige Isospin-Singuletts und können demnach unabhängig voneinander mit $U(3)_{u_R}$ bzw. $U(3)_{d_R}$ transformiert werden.

Demnach ist das Transformationsverhalten der Zeilen des Schemas (3.35) eine Folge der Eichkovarianz und für eine allgemeine $\mathcal{G}_{2HDM}^{\text{flav}}$ -Transformation gilt

$$(3.34) \quad \xrightarrow{\mathcal{G}_{2HDM}^{\text{flav}}} \begin{array}{c|cc} & h^0 & H^0 \\ \hline \bar{u}_{L,i} u_{R,j} & V_u^\dagger Y^u W_u \sim V_u^\dagger \tilde{F}_2 W_u \sim V_u^\dagger \tilde{Y}^u W_u & \\ & \approx & \\ \bar{d}_{L,i} d_{R,j} & V_u^\dagger Y^d W_d \sim V_u^\dagger \tilde{F}_1 W_d \sim V_u^\dagger \tilde{Y}^d W_d & \end{array} \quad (3.41)$$

Da das SM-Higgs Boson h^0 in der gewählten Higgs-Basis als einziges einen nicht-verschwindenden elektro-schwachen VEV trägt, definieren die zugehörigen Kopplungsmatrizen die Massenbasis der Quarks. Um diese Definition auf physikalische Parameter einzuschränken, muss die Flavorsymmetrie verwendet werden, um möglichst viele Parameter in der ersten Spalte des Schemas zu eliminieren.

Beginnt man mit dem Element in der oberen, linken Ecke, lassen sich zwei unitäre Matrizen V_u, W_u finden, die Y^u bi-unitär diagonalisieren, also $V_u^\dagger Y^u W_u = \hat{Y}^u$. Diese Wahl legt die komplette Transformation der ersten Zeile fest. Daher kann die Kopplung des NP-Higgs H^0 in der Quarkmassenbasis die Flavorsymmetrie nur dann erhalten, wenn die für Y^u gewählten Matrizen V_u, W_u ebenfalls \tilde{Y}^u bi-unitär diagonalisieren. Dies ist genau dann der Fall, wenn Y^u und \tilde{Y}^u , oder allgemein alle Kopplungen in der selben Zeile, simultan bi-unitär diagonalisierbar sind. Das hier betrachtete 2HDM Typ II stellt dies durch die lineare Abhängigkeit der Zeilen von nur jeweils einer Matrix \tilde{F}_2 bzw. \tilde{F}_1 sicher.

Die Matrix V_u wird durch die erste Zeile des Schemas bestimmt und wie in Abschnitt 3.2.2.1 erläutert, ist damit auch das Transformationsverhalten des ersten Flavorindex in der zweiten Zeile festgelegt. Da $d_{R,i}$ im 2HDM ein Eichsingulett bildet, kann das Transformationsverhalten bezüglich des zweiten Index in der zweiten Zeile jedoch frei gewählt

werden, was sich im transformierten Schema in der unabhängigen Matrix W_d bemerkbar macht. Wählt man diese derart, dass $V_d^\dagger Y^d W_d = \hat{Y}^d$ die bi-unitäre Diagonalisierung der down-Massenbasis bildet, sind alle freien Flavorindizes des Schemas festgelegt und die Flavorsymmetrie komplett ausgenutzt

$$\begin{array}{c|cc}
 & h^0 & H^0 \\
 \hline
 \bar{u}_{L,i} u_{R,j} & \hat{Y}^u & \sim \tilde{F}_2 & \sim \tilde{Y}^u \\
 & & \approx & \\
 \bar{d}_{L,i} d_{R,j} & V_u^\dagger V_d \hat{Y}^d & \sim V_u^\dagger V_d \tilde{F}_1 & \sim V_u^\dagger V_d \tilde{Y}^d
 \end{array} \quad (3.42)$$

Das Flavorproblem ist hierdurch gelöst, da in jeder Zeile alle Elemente simultan bi-unitär diagonalisierbar sind. Das 2HDM Typ II garantiert dies für beliebige Matrizen $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ durch die im Schema angedeutete lineare Abhängigkeit

$$\left. \begin{array}{l} Y^u = e^{-i\alpha} \sin \beta \tilde{F}_2 \\ \tilde{Y}^u = \cos \beta \tilde{F}_2 \end{array} \right\} \sim \tilde{F}_2, \quad \left. \begin{array}{l} Y^d = -\cos \beta \tilde{F}_1 \\ \tilde{Y}^d = e^{-i\alpha} \sin \beta \tilde{F}_1 \end{array} \right\} \sim \tilde{F}_1 \quad (3.43)$$

Dies stellt die komplette Lösungsmenge des Flavorproblems im 2HDM Typ II dar und diese lässt sich in zwei Teilmengen, eine physikalische und eine unphysikalische, aufteilen. Die unphysikalischen Lösungen sind dabei die, die das Flavorproblem durch ein komplett flavorsymmetrisches Modell, also eine triviale Flavorphysik, lösen. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Elemente im Schema gleichzeitig diagonal sind, es also drei unitäre Matrizen $V_u, W_{u,d} \in U(3)$ gibt, sodass

$$\begin{aligned}
 V_u^\dagger \tilde{F}_2 W_u &= \tilde{F}_2 \\
 V_u^\dagger \tilde{F}_1 W_d &= \tilde{F}_1
 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Insbesondere erkennt man hieraus, dass in diesem Fall $V_d = V_u$ gilt, sodass für die physikalische Mischungsmatrix in (3.42) $V_{CKM} = V_u^\dagger V_d = 1$ folgt. Der Übergang in die Massensbasis (3.19) wird hierdurch trivial und $V_{CKM} = 1$ verbietet Kopplungen des W -Bosons zwischen verschiedenen Quark-Familien. Aus der Bedingung für das Auftreten einer unphysikalischen Lösung (3.44) folgt

$$\begin{aligned}
 V_u^\dagger \tilde{F}_2 \tilde{F}_2^\dagger V_u &= \tilde{F}_2 \tilde{F}_2^\dagger \\
 V_u^\dagger \tilde{F}_1 \tilde{F}_1^\dagger V_u &= \tilde{F}_1 \tilde{F}_1^\dagger
 \end{aligned} \quad (3.45)$$

woraus man abliest, dass $V_u \in U(3)$ die beiden hermiteschen Matrizen $\tilde{F}_2 \tilde{F}_2^\dagger$ und $\tilde{F}_1 \tilde{F}_1^\dagger$ simultan diagonalisiert. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass es ein solches V_u

genau dann gibt, wenn

$$\tilde{F}_2 \tilde{F}_2^\dagger \text{ und } \tilde{F}_1 \tilde{F}_1^\dagger \text{ simultan diagonalisierbar} \leftrightarrow [\tilde{F}_2 \tilde{F}_2^\dagger, \tilde{F}_1 \tilde{F}_1^\dagger] = 0 \quad (3.46)$$

Umgekehrt garantiert ein nicht-verschwindender Kommutator, dass die notwendige Bedingung (3.45) und daher auch (3.44) nicht erfüllt ist. Da es aber immer vier unitäre Matrizen $V_{u,d}, W_{u,d} \in U(3)$ Matrizen gibt, die die Kopplungen bi-unitär diagonalisieren

$$\begin{aligned} V_u^\dagger \tilde{F}_2 W_u &= \hat{\tilde{F}}_2 \\ V_d^\dagger \tilde{F}_1 W_d &= \hat{\tilde{F}}_1 \end{aligned} \quad (3.47)$$

folgt hieraus $V_u \neq V_d$ und somit $V_{CKM} = V_u^\dagger V_d \neq 1$. Zusammenfassend lässt sich festhalten:

Die im 2HDM Typ II eingeführte diskrete Symmetrie $\mathcal{T}_{\text{Typ II}}$ garantiert die simultane bi-unitäre Diagonalisierbarkeit der im Schema (3.34) horizontal angeordneten Matrizen. Dies verhindert das Auftreten flavor-verletzender Kopplungen des neutralen Higgs-Bosons H^0 in der Massenbasis der Quarks. Unabhängig davon stellt $[\tilde{F}_2 \tilde{F}_2^\dagger, \tilde{F}_1 \tilde{F}_1^\dagger] \neq 0$ sicher, dass die vertikal angeordneten Matrizen nicht simultan bi-unitär diagonalisierbar sind, was zu einer nicht-trivialen Flavorphysik $V_{CKM} \neq 1$ führt.

3.3 Das MLRM als spezielles 2HDM

Nachdem in Abschnitt 3.2 mit dem 2HDM Typ I und Typ II zwei konkrete Lösungen des Flavorproblems in der Klasse der 2HDM betrachtet wurden, soll im Folgenden das MLRM als spezielles 2HDM dargestellt werden, um den Einfluss der links-rechts symmetrischen Yukawa-Verschränkung auf die Lösbarkeit des Flavorproblems im Kontext des 2HDM und insbesondere im Hinblick auf diskrete Symmetrien zu untersuchen.

Der allgemeinste, renormierbare (Quark-)Yukawa-Sektor des MLRM in (1.41) wurde in (1.43) bereits in einer Form angegeben, die nur noch unter der Standardmodell-Eichgruppe \mathcal{G}_{SM} manifest eichsymmetrisch ist. Dieser hat die selbe Form wie der allgemeinste, renormierbare Yukawa-Sektor des 2HDM in (3.8), allerdings äußert sich die nicht-manifeste $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -Symmetrie in einer Einschränkung der Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$, aus welcher sich die Verschränkungsrelationen des MLRM ergeben. Durch Vergleich der Yukawa-Matrizen des MLRM (1.44), (1.45) mit denen des 2HDM (3.9), (3.10) ergibt sich die gesuchte Einbettung durch die Wahl

$$\begin{aligned} F_1 &= F = F_2 \\ \tilde{F}_1 &= \tilde{F} = \tilde{F}_2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Die maximal mögliche, flavorsymmetrische Vereinfachung dieser Matrizen und damit die Isolation physikalischer Parameter ergibt sich aus dem zu (3.34) analogen Schema für das MLRM. Wie dort enthält es für die unterschiedlichen Yukawa-Kopplungen an das neutrale SM- h^0 und NP-Higgs-Boson H^0 jeweils eine Spalte. Die Zeilen des Schemas werden anhand der Isospin-Multipletts der enthaltenen Quark-Felder unterschieden, wodurch laut der Argumentation in 3.2.2.1 unterschiedliche flavorsymmetrische Manipulationen der Yukawa-Kopplungen unterschieden werden. Im 2HDM waren dies die drei unabhängigen Flavor-Rotationen (3.11), die sich zu zwei unterschiedlichen Transformationen (3.35) kombinieren lassen, was im Schema des 2HDM durch zwei Zeilen dargestellt ist. Die Links-Rechts symmetrische Verheinheitlichung besteht in der Einordnung der rechts-händigen Quark-Freiheitsgrade in ein $SU(2)_R$ Isospin-Doublett, was zur Folge hat, dass eine flavorsymmetrische Transformation der Quarkfelder nicht mehr zwischen $u_{R,i}$ und $d_{R,i}$ unterscheiden kann

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_{L,i} u_{R,j} \\ \bar{d}_{L,i} d_{R,j} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{G}^{\text{flav}}} \begin{matrix} U(3)_{Q_L} & U(3)_{Q_R} \\ V_{u,ik}^* & W_{u,jl} \end{matrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_{L,k} u_{R,l} \\ \bar{d}_{L,k} d_{R,l} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

und dementsprechend das Flavortransformationsschema des MLRM nur eine Zeile besitzt

$$\begin{array}{c|cc} & h^0 & H^0 \\ \hline \begin{pmatrix} \bar{u}_{L,i} u_{R,j} \\ \bar{d}_{L,i} d_{R,j} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Y^u \\ Y^d \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \tilde{Y}^u \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix} \end{array} \quad (3.50)$$

die einer möglichen flavorsymmetrischen Vereinfachung der Yukawa-Matrizen entspricht. Wählt man die beiden unitären Matrizen $V_u \in U(3)_{Q_L}, W_u \in U(3)_{Q_R}$ derart, dass sie Y^u bi-unitär diagonalisieren, also $V_u^\dagger Y^u W_u = \hat{Y}^u$, ergibt sich das maximal flavorsymmetrisch vereinfachte Schema

$$(3.50) \xrightarrow{\mathcal{G}_{MLRM}^{\text{flav}}} \begin{array}{c|cc} & h^0 & H^0 \\ \hline \begin{pmatrix} \bar{u}_{L,i} u_{R,j} \\ \bar{d}_{L,i} d_{R,j} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \hat{Y}^u \\ V_u^\dagger V_d \hat{Y}^d W_d^\dagger W_u \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} V_u^\dagger \tilde{Y}^u W_u \\ V_u^\dagger \tilde{Y}^d W_u \end{pmatrix} \end{array} \quad (3.51)$$

Hieraus liest man ab, dass die Transformation in die Quarkmassenbasis die zwei unitären Mischungsmatrizen $V_L = V_u^\dagger V_d$ und $V_R = W_u^\dagger W_d$ involviert und dass diese Matrizen physikalisch sind, folgt aus ihrem Auftreten im maximal flavorsymmetrisch vereinfachten Schema. Dass beide Flavorindizes der Matrix Y_{ij}^d mit physikalischen Mischungsmatrizen transformiert werden, ergibt sich im Vergleich mit dem Schema (3.34) des 2HDM (Typ II) aus dem Fehlen der zweiten Zeile im MLRM Schema.

Betrachtet man die in (3.50) auftretenden Kopplungen ist zu erkennen, dass das Flavorproblem genau dann gelöst ist, wenn es unitäre Matrizen $V_{u,d}, W_{u,d} \in U(3)$ gibt, die die

up- bzw. down-artigen Yukawa-Kopplungen simultan bi-unitär diagonalisieren, also

$$\begin{aligned} V_u^\dagger Y^u W_u &= \hat{Y}^u, & V_u^\dagger \tilde{Y}^u W_u &= \hat{\tilde{Y}}^u \\ V_d^\dagger Y^d W_d &= \hat{Y}^d, & V_d^\dagger \tilde{Y}^d W_d &= \hat{\tilde{Y}}^d \end{aligned} \quad (3.52)$$

Aufgrund der Links-Rechts Symmetrie sind diese vier Kopplungsmatrizen nicht unabhängig voneinander und die Yukawa-Kopplungen an die down-artigen Quarks lassen sich gemäß (1.44), (1.45) umkehrbar, eindeutig durch die up-artigen Yukawa-Kopplungen ausdrücken

$$\begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix}_{ij} = \underbrace{\chi_d \chi_u^\dagger}_{\in U(2)} \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix}_{ij} \quad (3.53)$$

Dies sind genau die bereits diskutierten Verschränkungsrelationen in Matrixschreibweise. Die Indizes $(\)_{ij}$ an den Vektoren sollen andeuten, dass die Gleichung für die Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$ komponentenweise gelten, z.B.

$$\begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix}_{12} := \begin{pmatrix} Y_{12}^d \\ \tilde{Y}_{12}^d \end{pmatrix} = \chi_d \chi_u^\dagger \begin{pmatrix} Y_{12}^u \\ \tilde{Y}_{12}^u \end{pmatrix} =: \chi_d \chi_u^\dagger \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix}_{12} \quad (3.54)$$

Mit Hilfe dieser Schreibweise ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_u^\dagger Y^d W_u \\ V_u^\dagger \tilde{Y}^d W_u \end{pmatrix}_{ij} &= V_{u,ai}^* W_{u,bj} \begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix}_{ab} = V_{u,ai}^* W_{u,bj} \chi_d \chi_u^\dagger \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix}_{ab} \\ &= \chi_d \chi_u^\dagger \begin{pmatrix} V_u^\dagger Y^u W_u \\ V_u^\dagger \tilde{Y}^u W_u \end{pmatrix}_{ij} \end{aligned} \quad (3.55)$$

und unter Verwendung von (3.52) findet man für jeden Vektor mit Indizes $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} V_u^\dagger Y^d W_u \\ V_u^\dagger \tilde{Y}^d W_u \end{pmatrix}_{i \neq j} = \chi_d \chi_u^\dagger \begin{pmatrix} \hat{Y}^u \\ \hat{\tilde{Y}}^u \end{pmatrix}_{i \neq j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

was nichts anderes bedeutet, als dass die beiden Matrizen $V_u, W_u \in U(3)$ neben (Y^u, \tilde{Y}^u) auch (Y^d, \tilde{Y}^d) bi-unitär diagonalisieren, allerdings im Allgemeinen mit komplexen Einträgen auf der Diagonalen von Y^d , die aber durch Multiplikation mit einer zusätzlichen, diagonalen Phasenmatrix reell und positiv semi-definit gemacht werden können. Daher lässt sich, abgesehen von dieser möglichen diagonalen Phasenmatrix, die unitär ist und die Quarkgenerationen nicht mischt, $V_u = V_d$ und $W_u = W_d$ wählen, wodurch alle Einträge im Schema (3.51) diagonal werden. Da die Einträge in diesem Schema in der Flavorbasis angegeben sind, bedeuten ausschließlich diagonale Einträge, dass das Modell flavorsymmetrisch und seine Flavorphysik daher trivial ist. Das selbe erkennt man auch an Hand der, mit Hilfe des Schemas identifizierten, physikalischen Mischungsmatrizen,

für die dann

$$\begin{aligned} V_L &= V_u^\dagger V_d \quad \begin{matrix} V_u \equiv V_d \\ W_u \equiv W_d \end{matrix} \quad 1 \\ V_R &= W_u^\dagger W_d \quad \begin{matrix} V_u \equiv V_d \\ W_u \equiv W_d \end{matrix} \quad 1 \end{aligned} \quad (3.57)$$

gilt, wieder abgesehen von einer möglichen diagonalen Phasenmatrix.

Dies beweist, dass jede exakte Lösung des Flavorproblems im MLRM ein komplett flavor-symmetrisches Modell mit trivialer Flavorphysik ist.

Die Notation der Verschränkungsrelationen in (3.53) in Komponenten erleichtert desweiteren die Trennung von Flavor- und Higgs-Parametern. Hierzu ist wichtig zu verstehen, dass die unitäre Matrix $\chi_d \chi_u^\dagger \in U(2)$ selbst keine Flavorindizes trägt, im Flavorraum also alle Komponenten der Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$ auf gleiche Weise verschränkt. Daher ergeben sich für beliebige Indizes in der Notation als Komponentenvektoren

$$\begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix}_{mn}^\dagger \begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix}_{ij} = \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix}_{mn}^\dagger \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_d \chi_u^\dagger \\ \chi_d \chi_u^\dagger \end{pmatrix}_{ij}}_{=1} \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix}_{ij} \quad (3.58)$$

Relationen zwischen Produkten verschiedener Komponenten der Yukawa- $Y^{u,d}$ und FC-NH-Matrizen $\tilde{Y}^{u,d}$. Nachdem die Matrix $\chi_u \chi_d^\dagger$, die nur durch Parameter des Higgs-Potenzials bestimmt ist, eliminiert wurde, ist es für das Folgende sinnvoll, zur üblichen Notation der Matrixkomponenten zurückzukehren. Hierzu müssen lediglich die Skalarprodukte $(\cdot)_{mn}^\dagger (\cdot)_{ij}$ ganz links und ganz rechts von (3.58) mit Hilfe der Definition der Komponentenvektoren ausgewertet werden

$$Y_{mn}^{d*} Y_{ij}^d + \tilde{Y}_{mn}^{d*} \tilde{Y}_{ij}^d = Y_{mn}^{u*} Y_{ij}^u + \tilde{Y}_{mn}^{u*} \tilde{Y}_{ij}^u \quad (3.59)$$

Da diese Relationen für beliebige Indizes gelten, lassen sich leicht Relationen zwischen kompletten Matrixprodukten folgern, indem man z.B. $m \rightarrow i$ ersetzt und anschließend über diesen Index summiert. Hierdurch erhält man in jedem Summanden ein Matrixprodukt und als Matrixgleichung ergibt sich

$$Y^{d\dagger} Y^d + \tilde{Y}^{d\dagger} \tilde{Y}^d = Y^{u\dagger} Y^u + \tilde{Y}^{u\dagger} \tilde{Y}^u \quad (3.60)$$

und analog durch die Ersetzung $n \rightarrow j$ mit anschließender Summation über den doppelt auftretenden Index

$$Y^d Y^{d\dagger} + \tilde{Y}^d \tilde{Y}^{d\dagger} = Y^u Y^{u\dagger} + \tilde{Y}^u \tilde{Y}^{u\dagger} \quad (3.61)$$

Setzt man diese Logik in der Ersetzung $j \rightarrow i$ fort, lässt sich aus (3.59) noch eine weitere Relation finden

$$\text{Tr} \left(Y^d \right) Y^{d\dagger} + \text{Tr} \left(\tilde{Y}^d \right) \tilde{Y}^{d\dagger} = \text{Tr} \left(Y^u \right) Y^{u\dagger} + \text{Tr} \left(\tilde{Y}^u \right) \tilde{Y}^{u\dagger} \quad (3.62)$$

Interessant an diesen Gleichungen ist, dass in ihnen ausschließlich Flavorparameter auftreten, wodurch die Verschränkung der erwünschten flavor-ändernden Kopplungen des SM W -Bosons mit den unerwünschten/problematischen flavor-ändernden Kopplungen neutraler Higgs-Bosonen isoliert im Flavorraum betrachtet werden kann.

3.3.1 Ein geometrisches Argument zur Yukawa-Verschränkung

Anstatt in (3.59) zwei der vier freien Indizes zu kontrahieren um eine Matrixgleichung in den zwei verbleibenden beiden Indizes zu gewinnen, kann man auch eine Aussage über die Beträge der individuellen Elemente der Matrizen machen. Hierzu ersetzt man $m \rightarrow i, n \rightarrow j$ ohne über i und j zu summieren

$$|Y_{ij}^d|^2 + |\tilde{Y}_{ij}^d|^2 = |\hat{Y}_{ij}^u|^2 + |\tilde{Y}_{ij}^u|^2 \quad (3.63)$$

Hierbei wurde bereits ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y^u = \hat{Y}^u$ diagonal gewählt, was die Flavorsymmetrie (1.27) des eichkinetischen Terms (1.59) des MLRM voll ausnutzt. Nach der Elimination der Parameter des Higgs-Potenzials in (3.58) werden hierdurch unphysikalische Flavorparameter in eine Redefinition der Yukawa-Matrizen absorbiert. Insbesondere impliziert die Wahl $V_u = 1 = W_u$, woraus für die CKM-Matrizen $V_L = V_d, V_R = W_d$ folgt. Mit der Definition der flavor-verletzenden Higgs-Kopplungen an up-artige Quarks (1.99) ergibt sich dann

$$|Y_{i \neq j}^d|^2 + |\tilde{Y}_{i \neq j}^d|^2 - |c_{u, i \neq j}^{\text{FCNH}}|^2 = 0 \quad (3.64)$$

Vergleicht man dies mit der quadratischen Form

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \quad (3.65)$$

die sich geometrisch als Kegel interpretieren lässt, kann man für jedes Paar $i \neq j$ von Flavorindizes die Lösungen von Gleichung (3.64) als Punkte auf diesem Kegel auffassen. Aufgrund der positiven Definitheit der Betragsfunktion $|\cdot| \geq 0$ liegen diese Lösungen alle im 1. Oktanten eines Koordinatensystems, dessen positive z -Achse in Richtung der flavorverletzenden Kopplungsstärke $|c_{u, i \neq j}^{\text{FCNH}}|$ zeigt. In den Abbildungen 3.1 und 3.2 ist dieser Kegel für zwei unterschiedliche Situationen dargestellt, mit deren Hilfe sich das Problem der Yukawaverschränkung im MLRM geometrisch verstehen lässt:

Die grüne Fläche parallel zur (x, y) -Ebene in Abbildung 3.1 erfüllt die Ebenengleichung

$$z = |c_{u, i \neq j}^{\text{FCNH}}| \quad (3.66)$$

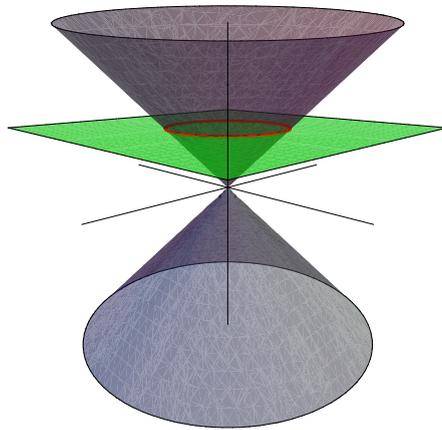


ABBILDUNG 3.1: Yukawakonus

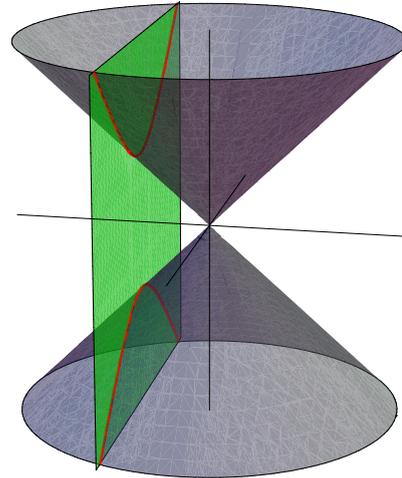


ABBILDUNG 3.2: Yukawakonus

und enthält alle Punkte, für den die Kopplungsstärke des NP-Higgs-Boson H^0 an den flavor-verletzenden Übergang $i \rightarrow j$ durch $|c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}}|$, also den Abstand von der (x, y) -Ebene, gegeben ist. Gleichzeitig liegen alle Kombinationen von Kopplungen die die Higgs-Parameter-unabhängigen Verschränkungsrelationen (3.64) erfüllen auf dem Kegel. Die Teilmenge dieser Lösungen mit fester Flavorverletzung $|c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}}|$ besteht somit aus dem rot eingezeichneten Schnittkreis der Ebene mit dem Kegel. Für eine verschwindende flavor-verletzende Kopplung $|c_{u,i \neq j}^{\text{FCNH}}| = 0 = z$ fällt die grüne Ebene mit der (x, y) -Ebene zusammen, wodurch der rote Schnittkreis der im MLRM erlaubten Lösungen auf den Ursprung zusammengezogen wird. Dies impliziert für die verbleibenden Koordinaten

$$(3.64) \xrightarrow{z=0} \begin{cases} |Y_{i \neq j}^d| = x = 0 \\ |\tilde{Y}_{i \neq j}^d| = y = 0 \end{cases} \quad (3.67)$$

und damit ein Verschwinden der entsprechenden Elemente $i \neq j$ der Yukawa-Matrizen $Y_{i \neq j}^d, \tilde{Y}_{i \neq j}^d$. Fordert man für alle Paare $i \neq j$ eine verschwindende, flavorverletzende Kopplung von H^0 an die entsprechenden Quarkflavor, also eine flavor-diagonale Kopplung des NP-Higgs-Bosons H^0 an up-artige Quarks, erzwingt die Geometrie des Kegels ein Verschwinden aller Elemente $Y_{i \neq j}^d, \tilde{Y}_{i \neq j}^d$, sodass diese beiden Matrizen dann notwendigerweise ebenfalls diagonal sind. Da in diesem Fall alle Yukawa-Matrizen bereits im Flavorraum diagonal sind, sind die CKM-Matrizen, bis auf eventuelle Phasenredefinitionen, durch $V_L = 1 = V_R$ bestimmt und die Flavorphysik des Modells daher trivial. In Abbildung 3.2 ist ein weiterer Kegelschnitt eingezeichnet. Diesmal erfüllen die Punkte der grünen Ebene

$$x = |Y_{i \neq j}^d| = |(V_L \hat{Y}^d V_R^\dagger)_{i \neq j}| \quad (3.68)$$

sodass der Abstand dieser Ebene von der (y, z) -Ebene durch das Element $Y_{i \neq j}^d$ abseits der Diagonalen gegeben ist und daher von der Definition der Quarkmassenbasis abhängt. Da eine nicht-triviale Struktur der CKM-Matrizen notwendigerweise erfordert, dass $\hat{M}^u = k\hat{Y}^u$ und $M^d = kY^d$ in keiner Flavorbasis gleichzeitig diagonal sind, können diese Elemente für eine phenomenologisch sinnvolle Flavorphysik des Modells nicht alle gleichzeitig verschwinden. Somit muss es Flavorindizes $i \neq j$ geben, für die die grüne Fläche den Ursprung nicht enthält. Der Kegelschnitt der Lösungen von (3.64) mit dieser Ebene zeigt dann, dass die z -Koordinate der roten Schnittkurve, also die flavorverletzende Kopplungsstärke $c_{u, i \neq j}^{\text{FCNH}}$, ebenfalls von Null verschieden sein muss. Obwohl diese Resultate bereits an anderen Stellen der vorliegenden Arbeit bewiesen wurden, war die neuerliche Herleitung anhand geometrischer Gesichtspunkte lohnenswert, da sie die Interpretation der Yukawa-Verschränkung im MLRM als Kegelschnitte zulässt. Gerade im Hinblick auf die Frage welches Mindestmaß an Flavorverletzung im Yukawa-Sektor die CKM-Matrizen des MLRM erzwingen, ist die Anschaulichkeit der Lösungen von (3.64) hilfreich:

Entlang der roten Hyperbel, die sich als Kegelschnitt mit der Ebene $x = |Y_{i \neq j}^d|$ ergibt, ist der Betrag der z -Koordinate in der (x, z) -Ebene minimal. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen der Stärke der Flavorverletzung $|c_{u, i \neq j}^{\text{FCNH}}|$ im up-Sektor und der Definition der Massenbasis im down-Sektor $|Y_{i \neq j}^d|$ dort linear. Das Auftreten der diagonalen up-Quark Massenmatrix \hat{Y}^u in (3.63) impliziert, dass die entsprechende Gleichung nicht von unphysikalischen Parametern abhängt. Die geometrische Veranschaulichung der zugehörigen Lösungen erklärt daher die Verschränkung von SM-Yukawa- und FCNH-Kopplungen durch Kegelschnitte in einem physikalischen Parameterraum, also insbesondere ohne expliziten Bezug auf die eichinvarianten Modellparameter F, \tilde{F} . Vielmehr fasst diese Sichtweise sämtliche Konfigurationen dieser Parameter in allen möglichen, daraus resultierenden physikalischen Parametern Y^i, \tilde{Y}^i zusammen. Eine Variation der Modellparameter führt also lediglich zu einer Bewegung entlang des durch (3.64) gegebenen Kegels. Daher gibt es keine, insbesondere keine durch eine diskrete Symmetrie wie in Abschnitt 3.2 motivierte, Wahl dieser Parameter, für die die Verschränkung der physikalischen Yukawa-Kopplungen durch Kegelschnitte nicht gilt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll nun noch die Verallgemeinerung von Gleichung (3.59) für das allgemeine 2HDM hergeleitet werden, da sich anhand der Einbettung des MLRM (3.48) in die Klasse der 2HDM verstehen lässt, wie die Yukawa-Verschränkung aus der links-rechts symmetrischen Vereinheitlichung folgt. Hierzu beginnt man mit den unitären Relationen (3.9), (3.10) zwischen den Modellparametern F_i, \tilde{F}_i und den Yukawa-Kopplungen Y^i, \tilde{Y}^i . Unter Verwendung von Komponentenvektoren wie in (3.53) lauten

diese

$$\begin{aligned}\vec{y}_{u,ij} &:= \begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}^u \end{pmatrix}_{ij} = \chi^u \begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix}_{ij} =: \chi^u \vec{F}_{u,ij} \\ \vec{y}_{d,ij} &:= \begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}^d \end{pmatrix}_{ij} = \chi^d \begin{pmatrix} F_2 \\ \tilde{F}_1 \end{pmatrix}_{ij} =: \chi^d \vec{F}_{d,ij}\end{aligned}\quad (3.69)$$

Da diese Relationen unabhängig von den Flavorindizes i, j gelten, werden sie im Folgenden zu Gunsten einer besseren Lesbarkeit unterdrückt.

Die vier eichinvarianten Kopplungsmatrizen $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ des allgemeinen 2HDM gruppieren sich in zwei, im Allgemeinen unabhängigen Vektoren (mit unterdrückten Indizes)

$$\vec{F}_u = \begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_d = \begin{pmatrix} F_2 \\ \tilde{F}_1 \end{pmatrix}\quad (3.70)$$

aus denen dann gemäß (3.9), (3.10) zwei unabhängige Paare von Yukawa-Matrizen (Y^u, \tilde{Y}^u) und (Y^d, \tilde{Y}^d) resultieren. Da diese Paare gerade den Kopplungen innerhalb einer Zeile im Schema (3.34) entsprechen, hängt der Unterschied zwischen den Zeilen von der Differenz dieser Vektoren ab

$$\Delta \vec{F} := \vec{F}_d - \vec{F}_u = \begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ \tilde{F}_1 - \tilde{F}_2 \end{pmatrix}\quad (3.71)$$

die für allgemeine F_i, \tilde{F}_i beliebig eingestellt werden kann. Das bedeutet, dass die Yukawa-Kopplungen im down-Sektor, insbesondere die Definition der physikalischen Quarkmassenbasis durch Y^d , unabhängig von den Kopplungen im up-Sektor sind. Die Yukawa-Kopplungen im allgemeinen 2HDM sind demnach nicht verschränkt.

Für den Spezialfall des MLRM gilt gemäß der Einbettung (3.48)

$$\Delta \vec{F} \Big|_{MLRM} = \vec{0}\quad (3.72)$$

was sich im Auftreten von nur einer Zeile im Yukawaschema des MLRM (3.50) niederschlägt. Mit Hilfe von $\Delta \vec{F}$ lässt sich demnach charakterisieren, ob die Modellparameter des allgemeinen 2HDM mit einer links-rechts symmetrischen Vereinheitlichung verträglich sind. Eine Umparametrisierung der Yukawa-Matrizen mit Hilfe der Definition von $\Delta \vec{F}$ ergibt

$$\begin{aligned}\vec{y}^u &= \chi^u (\vec{F}_d - \Delta \vec{F}) \\ \vec{y}^d &= \chi^d \vec{F}_d\end{aligned}\quad (3.73)$$

woraus durch Elimination von \vec{F}_d

$$\vec{y}^d = \chi^d \left(\chi^{u\dagger} \vec{y}^u + \Delta \vec{F} \right) \quad (3.74)$$

folgt. Analog zur Herleitung in (3.58) bildet man anschliessend die Standard-Skalarprodukte der Komponentenvektoren

$$\begin{aligned} \vec{y}^{d\dagger} \vec{y}^d &= \left(\chi^{u\dagger} \vec{y}^u + \Delta \vec{F} \right)^\dagger \left(\chi^{u\dagger} \vec{y}^u + \Delta \vec{F} \right) \\ &= \vec{y}^{u\dagger} \vec{y}^u + \Delta \vec{F}^\dagger \Delta \vec{F} + \vec{y}^{u\dagger} \chi^u \Delta \vec{F} + \Delta \vec{F}^\dagger \chi^{u\dagger} \vec{y}^u \end{aligned} \quad (3.75)$$

und unter Verwendung von (3.9), (3.10) erhält man hieraus nach kurzer Umformung

$$\vec{y}^{d\dagger} \vec{y}^d = \vec{y}^{u\dagger} \vec{y}^u + \Delta \vec{F}^\dagger \left(\Delta \vec{F} + \vec{F}_u \right) + \vec{F}_u^\dagger \Delta \vec{F} \quad (3.76)$$

Will man die unterdrückten Flavorindizes an dieser Stelle wieder einführen, schreibt man an jeden Zeilen-(Spalten-) Vektor das selbe Indexpaar. Die Paare von Zeilen- und Spaltenvektoren können dabei unterschiedlich sein

$$\vec{y}_{ij}^{d\dagger} \vec{y}_{kl}^d = \vec{y}_{ij}^{u\dagger} \vec{y}_{kl}^u + \Delta \vec{F}_{ij}^\dagger \left(\Delta \vec{F}_{kl} + \vec{F}_{u,kl} \right) + \vec{F}_{u,ij}^\dagger \Delta \vec{F}_{kl} \quad (3.77)$$

Aus der für eine links-rechts symmetrische Einbettung notwendigen Bedingung $\Delta \vec{F} = \vec{0}$, folgt hieraus mit (3.59) wieder die Verschränkung der physikalischen Yukawa-Kopplungen durch Kegelschnitte. Hierzu sollte bemerkt werden, dass diese Bedingung an $\Delta \vec{F}$ eine Folge der links-rechts symmetrischen Vereinheitlichung ist. Die Zusammenführung der rechts-händigen up- und down-artigen Quark-Freiheitsgrade in $SU(2)_R$ -Doublets erlaubt, wie für die $SU(2)_L$ -Doublets, nur noch eine gemeinsame eichinvariante Kopplungsmatrix für die rechtshändigen Quarks einer Generation. Um den Einfluss einer links-rechts symmetrischen Erweiterung der Eichsymmetrie auf die Kopplungsmatrizen des allgemeinen 2HDM zu untersuchen, ist es von Vorteil dessen (Quark-)Yukawa-Sektor (3.4) so umzuschreiben, dass manifest eichinvariante Terme der erweiterten Symmetrie

\mathcal{G}_{LR} direkt identifiziert werden können. Der hierzu notwendige erste Schritt ist das Zusammenfassen der rechts-händigen Quarkflavor in 2er-Tupel, die sich für eine Erweiterung der Eichgruppe von \mathcal{G}_{2HDM} zu \mathcal{G}_{LR} direkt zu $SU(2)_R$ -Doublets Q_R verallgemeinern

$$\begin{array}{l}
\text{SM: } \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{G}_{SM}} \begin{pmatrix} e^{4/3i\varphi} u_R \\ e^{-2/3i\varphi} d_R \end{pmatrix} = \underbrace{e^{1/3i\varphi}}_{\in U(1)_{B-L}} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}}_{\in SU(2)_R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \\
\downarrow \\
\text{LR: } Q_R \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} \underbrace{e^{1/3i\varphi}}_{\in U(1)_{B-L}} \underbrace{U_R}_{\in SU(2)_R} Q_R
\end{array} \tag{3.78}$$

Ebenso werden die beiden Higgs-Doublets, die sich unter der SM-Eichgruppe gemäß

$$\begin{aligned}
H_1 &= \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{G}_{SM}} \underbrace{e^{-i\varphi}}_{\in U(1)_Y} \underbrace{U_L}_{\in SU(2)_L} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \\
H_2 &= \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{G}_{SM}} \underbrace{e^{+i\varphi}}_{\in U(1)_Y} \underbrace{U_L}_{\in SU(2)_L} \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

transformieren, kompakt in einer (2×2) -Matrix zusammengefasst, die bei der Vergrößerung der Eichsymmetrie zu \mathcal{G}_{LR} zu einem fundamentalen Higgs-Bidoublett erweitert wird

$$\begin{array}{l}
\text{SM: } \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{G}_{SM}} \underbrace{U_L}_{\in SU(2)_L} \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}^\dagger}_{\in SU(2)_R} \\
\downarrow \\
\text{LR: } \Phi \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} \underbrace{U_L}_{\in SU(2)_L} \Phi \underbrace{U_R^\dagger}_{\in SU(2)_R}
\end{array} \tag{3.80}$$

Unter Verwendung der Regeln der Matrixmultiplikation gilt dann

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} u_R = H_1 u_R \\
\begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} d_R = H_2 d_R
\end{aligned} \tag{3.81}$$

womit sich die ersten beiden Terme im allgemeinsten Yukawa-Sektor des 2HDM in (3.4) mit der Definition $\Delta := F_2 - F_1$ wie folgt umschreiben lassen

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q &\supset \bar{Q}_L F_1 \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{Q}_L F_2 \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d_R \end{pmatrix} + h.c. \\ &= \bar{Q}_L F_1 \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} + \bar{Q}_L \Delta \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d_R \end{pmatrix} + h.c. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Der erste Summand in der letzten Zeile enthält dabei nur Objekte, die sich, wie in (3.78) und (3.80) gezeigt, direkt zu fundamentalen Symmetriemultipletts der Eichgruppe \mathcal{G}_{LR} erweitern lassen, was einen manifest links-rechts eichsymmetrischen Term ergibt. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen, sollen zur besseren Übersicht in diesem Term die (2×2) -Matrix durch das entsprechende Bidoublett Φ und das 2er Tupel der down-Quarks durch das zugehörige $SU(2)_R$ -Doublett Q_R ersetzt werden. Geht man für die letzten beiden Terme im Yukawa-Sektor (3.4), die die Kopplungen an die ladungskonjugierten Higgs-Doubletts $H_i^c = i\sigma_2 H_i^*$ enthalten, genau so vor, erhält man insgesamt

$$-\mathcal{L}_Y^Q = \bar{Q}_L F_1 \Phi Q_R + \bar{Q}_L \tilde{F}_1 \Phi^c Q_R + \bar{Q}_L \Delta H_2 d_R - \bar{Q}_L \tilde{\Delta} H_2^c u_R + h.c. \quad (3.83)$$

wobei $\tilde{\Delta} := \tilde{F}_1 - \tilde{F}_2$ und die ladungskonjugierten Higgs-Doubletts konsistent mit der Ladungskonjugation für Bidoubletts in der Matrix $\Phi^c = \sigma^2 \Phi^* \sigma^2$ zusammengefasst sind. Es sollte hier noch einmal betont werden, dass (3.83) nach wie vor die SM-Eichgruppe \mathcal{G}_{SM} zugrunde liegt. Die Notation und Anordnung lässt aber direkt erkennen, welche Terme sich zu manifest links-rechts eichsymmetrischen Termen verallgemeinern. In den ersten beiden Termen erkennt man den allgemeinsten, renormierbaren Quark Yukawa-Sektor des MLRM (1.41), welcher manifest eichinvariant unter \mathcal{G}_{LR} ist. Die beiden letzten Terme hingegen lassen sich nicht komplett in eine Form bringen, die sich gemäß (3.78) natürlich in eine links-rechts eichsymmetrische Größe einbetten lässt. Die Invarianz unter der erweiterten Eichsymmetrie \mathcal{G}_{LR} erzwingt also für die zugehörigen Koeffizienten

$$\Delta = 0 = \tilde{\Delta} \quad (3.84)$$

Vergleicht man dies mit der Definition von $\Delta \vec{F}$

$$\Delta \vec{F} = \vec{F}_d - \vec{F}_u = \begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ \tilde{F}_1 - \tilde{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta \\ \tilde{\Delta} \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

ergibt sich die Behauptung, dass $\Delta \vec{F} = \vec{0}$ eine Folge der Links-Rechts symmetrischen Vereinheitlichung ist. Dies bedeutet insbesondere, dass sich die aus (3.77) ergebende Yukawa-Verschränkung durch Kegelschnitte (3.59) durch keine Wahl der eichinvarianten

Modellparameter umgehen lässt.

Kapitel 4

Multi Higgs-Bidoublett Modelle

Im Minimalen Links-Rechts symmetrischen Modell(MLRM) ist eine nicht-triviale Flavorstruktur untrennbar mit dem Auftreten flavor-verletzender neutraler tree-level Ströme verbunden. In Abschnitt 1.2.4 wurde dies anhand der Verschränkungsrelationen (1.46), (1.47) allgemein bewiesen. Diese ergeben sich aus der Überbestimmtheit der Yukawa-Kopplungen, also der Tatsache, dass die vier Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}, \tilde{Y}^{u,d}$ nur durch zwei eichinvariante Kopplungsmatrizen F, \tilde{F} gegeben sind (vgl. (1.44), (1.45)).

Erweitert man den Teilcheninhalt des MLRM um Kopien des Bidoublets Φ , erhält man im Yukawasektor (1.41) für jedes neue Bidoublett ein zusätzliches Paar (F_k, \tilde{F}_k) eichinvarianter Kopplungsmatrizen. Im Folgenden wird untersucht, ob diese zusätzlichen Parameter die Überbestimmtheit der Yukawa-Kopplungen und somit die durch die Verschränkungsrelationen hervorgerufene Flavorverletzung beeinflussen können.

4.1 Zwei Higgs-Bidoublett Modell

Fügt man dem MLRM ein zweites Bidoublett hinzu, erweitert sich der Yukawasektor (1.41) zu

$$-\mathcal{L}_Y^{(2)} = \bar{Q}_L F_1 \Phi_1 Q_R + \bar{Q}_L \tilde{F}_1 \Phi_1^c Q_R + \bar{Q}_L F_2 \Phi_2 Q_R + \bar{Q}_L \tilde{F}_2 \Phi_2^c Q_R + h.c. \quad (4.1)$$

Für die Vakuumerwartungswerte $\langle \Phi_{1,2} \rangle$ lautet die allgemeinste Form, die die elektromagnetische Eichsymmetrie $U(1)_{\text{e.m.}}$ invariant lässt

$$\langle \Phi_k \rangle = \begin{pmatrix} v_k & 0 \\ 0 & w_k \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

In Anhang B wird bewiesen, dass es dann zu beliebigen Werten $v_{1,2}, w_{1,2} \in \mathbb{C}$ eine unitäre Matrix $U_{\Phi}^{(2)} \in U(2)$ gibt, sodass die redefinierten Bidoublets

$$\phi_k = \sum_{l=1}^2 U_{\Phi,kl}^{(2)} \Phi_l \quad (4.3)$$

Vakuumerwartungswerte der Form

$$\langle \phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha} \end{pmatrix}, \quad \langle \phi_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

mit $k_{1,2}, \kappa \geq 0$ und $\alpha \in [0, 2\pi)$ aufweisen. In dieser Basis lautet der Quark Yukawa-Sektor (4.1) des Zwei Higgs-Bidoublett Modells

$$-\mathcal{L}_Y^{(2)} = \bar{Q}_L f_1 \phi_1 Q_R + \bar{Q}_L \tilde{f}_1 \phi_1^c Q_R + \bar{Q}_L f_2 \phi_2 Q_R + \bar{Q}_L \tilde{f}_2 \phi_2^c Q_R + h.c. \quad (4.5)$$

wobei die neuen eichinvarianten Kopplungen f_k, \tilde{f}_k über

$$f_k := \sum_{l=1}^2 U_{\Phi,kl}^{(2)*} F_l, \quad \tilde{f}_k := \sum_{l=1}^2 U_{\Phi,kl}^{(2)} \tilde{F}_l \quad (4.6)$$

durch die ursprünglichen Kopplungsmatrizen F_k, \tilde{F}_k gegeben sind. Ausgedrückt in diesen Größen, erhält man für die Massenmatrizen der up- und down-artigen Quarks

$$\begin{aligned} M^u &= k_1 f_1 + k_2 e^{-i\alpha} \tilde{f}_1 + \kappa \tilde{f}_2 \\ M^d &= k_2 e^{i\alpha} f_1 + k_1 \tilde{f}_1 + \kappa f_2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Um hieraus die verallgemeinerten Verschränkungsrelationen des 2 Higgs-Bidoublett Modells(2HBM) abzuleiten, geht man analog zur Herleitung der entsprechenden Relationen (1.46),(1.47) vor und drückt die beiden Bidoublets in nicht manifest eichinvarianter Weise durch die vier enthaltenen $SU(2)_L$ -Doublets aus

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \rightarrow H_1, H_2^c \quad (4.8)$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} H_3^0 & H_4^+ \\ H_3^- & H_4^0 \end{pmatrix} \rightarrow H_3, H_4^c \quad (4.9)$$

Diese werden anschließend in eine Basis transformiert, in der eine Koordinatenachse entlang des SM Higgs-Bosons zeigt. Diese Richtung ist durch die VEVs der $SU(2)_L$ -Doubletts

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2^c \rangle = \begin{pmatrix} k_2 e^{-i\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_3 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_4^c \rangle = \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

festgelegt. Definiert man die beiden Drehwinkel β und γ über die Relationen

$$\tan \beta = \frac{k_2}{k_1}, \quad \tan \gamma = \frac{\kappa}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \quad (4.11)$$

ist die gesuchte Basistransformation explizit durch

$$\begin{pmatrix} h \\ \tilde{H}_1 \\ \tilde{H}_2 \\ \tilde{H}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & e^{i\alpha} \sin \beta \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ e^{-i\alpha} \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma & 0 & -e^{-i\alpha} \cos \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & e^{i\alpha} \cos \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2^c \\ H_3 \\ H_4^c \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

gegeben und für die VEVs ergibt sich, in Einheiten der elektroschwachen Brechungsskala $\bar{k} := \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \kappa^2}$

$$\begin{pmatrix} \langle h \rangle \\ \langle \tilde{H}_1 \rangle \\ \langle \tilde{H}_2 \rangle \\ \langle \tilde{H}_3 \rangle \end{pmatrix} = \bar{k} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

In dieser Basis lautet der zu (1.43) analoge, nicht manifest $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -eichsymmetrische Quark Yukawa-Sektor des 2HBM

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{(2)} = & \bar{Q}_L Y^u h u_R + \bar{Q}_L Y^d h^c d_R \\ & + \bar{Q}_L \tilde{Y}_1^u \tilde{H}_1 u_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}_1^d \tilde{H}_1^c d_R \\ & + \bar{Q}_L \tilde{Y}_2^u \tilde{H}_2 u_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}_2^d \tilde{H}_2^c d_R \\ & + \bar{Q}_L \tilde{Y}_3^u \tilde{H}_3 u_R + \bar{Q}_L \tilde{Y}_3^d \tilde{H}_3^c d_R \\ & + h.c. \end{aligned} \quad (4.14)$$

in welchem sich das SM Higgs-Boson und damit auch die zugehörigen SM Yukawa-Kopplungen identifizieren lassen. Zusammen mit den Yukawa-Kopplungen der neuen

$SU(2)_L$ Higgs-Doublets $\tilde{H}_{1,2,3}$, hängen diese insgesamt acht Kopplungsmatrizen über

$$\begin{pmatrix} Y^u \\ \tilde{Y}_1^u \\ \tilde{Y}_2^u \\ \tilde{Y}_3^u \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & e^{-i\alpha} \sin \beta \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ e^{i\alpha} \cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \sin \gamma & 0 & -e^{i\alpha} \cos \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & e^{-i\alpha} \cos \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}}{=: \chi_u^{(4)}} \begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_1 \\ F_2 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{pmatrix} Y^d \\ \tilde{Y}_1^d \\ \tilde{Y}_2^d \\ \tilde{Y}_3^d \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} -e^{i\alpha} \sin \beta \cos \gamma & -\cos \beta \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ -\sin \beta \sin \gamma & -e^{-i\alpha} \cos \beta \sin \gamma & e^{-i\alpha} \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -e^{i\alpha} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}}{=: \chi_d^{(4)}} \begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_1 \\ F_2 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

von den vier eichinvarianten Kopplungsmatrizen $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$ ab. Eliminiert man diese unter Ausnutzung von $\chi_{u,d}^{(4)} \in SU(4)$, ergeben sich die Verschränkungsrelationen für das 2HBM

$$\begin{aligned} Y^d &= -e^{i\alpha} \sin(2\beta) \cos^2 \gamma Y^u - \frac{1}{2} \sin(2\beta) \sin(2\gamma) \tilde{Y}_1^u - \sin \gamma \tilde{Y}_2^u \\ &\quad - e^{i\alpha} \cos(2\beta) \cos \gamma \tilde{Y}_3^u \\ \tilde{Y}_1^d &= -\frac{1}{2} \sin(2\beta) \sin(2\gamma) Y^u - e^{-i\alpha} \sin(2\beta) \sin^2 \gamma \tilde{Y}_1^u + e^{-i\alpha} \cos \gamma \tilde{Y}_2^u \\ &\quad - \cos(2\beta) \sin \gamma \tilde{Y}_3^u \\ \tilde{Y}_2^d &= -\sin \gamma Y^u + e^{-i\alpha} \cos \gamma \tilde{Y}_1^u \\ \tilde{Y}_3^d &= -e^{i\alpha} \cos(2\beta) \cos \gamma Y^u - \cos(2\beta) \sin \gamma \tilde{Y}_1^u + e^{i\alpha} \sin(2\beta) \tilde{Y}_3^u \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dies sind die gesuchten Verallgemeinerungen von (1.46) und (1.47) für ein Modell mit zwei Higgs Bidoublets.

Analog zu (1.99), (1.100) findet man für die Kopplungen der neutralen Higgs-Bosonen $\tilde{H}_{1,2,3}^0$ an die physikalischen Quarkmasseneigenzustände

$$c_{u;a,ij}^{\text{FCNH}} = \left(\tilde{Y}_a^u \right)_{ij} \quad (4.18)$$

$$c_{d;a,ij}^{\text{FCNH}} = \left(V_L^\dagger \tilde{Y}_a^d V_R \right)_{ij} \quad (4.19)$$

wobei eine flavorverletzende Kopplung hier ebenfalls durch ungleiche Flavorindizes $i \neq j$ ausgezeichnet ist. Dass in $c_{u;a,ij}^{\text{FCNH}}$ keine CKM-Elemente auftreten spiegelt die Tatsache wider, dass die Flavorsymmetrie bereits implizit verwendet wurde, um ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y^u = \hat{Y}^u$ diagonal zu wählen. Dies lässt sich ausnutzen, um unter zur

Hilfenahme der Dreiecksungleichung die Verallgemeinerung von (1.103) für das 2HBM

$$\begin{aligned}
|\bar{k}^{-1} M_{i \neq j}^d| &= \left| -\frac{1}{2} \sin(2\beta) \sin(2\gamma) c_{u;1,i \neq j}^{\text{FCNH}} - \sin \gamma c_{u;2,i \neq j}^{\text{FCNH}} - e^{i\alpha} \cos(2\beta) \cos \gamma c_{u;3,i \neq j}^{\text{FCNH}} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sin(2\beta) \sin(2\gamma) |c_{u;1,i \neq j}^{\text{FCNH}}| + |\sin \gamma| |c_{u;2,i \neq j}^{\text{FCNH}}| + |e^{i\alpha} \cos(2\beta) \cos \gamma| |c_{u;3,i \neq j}^{\text{FCNH}}| \\
&\leq |c_{u;1,i \neq j}^{\text{FCNH}}| + |c_{u;2,i \neq j}^{\text{FCNH}}| + |c_{u;3,i \neq j}^{\text{FCNH}}|
\end{aligned} \tag{4.20}$$

herzuleiten. Im letzten Schritt wurden die Beträge aller Koeffizienten durch 1 nach oben abgeschätzt. Dass dies möglich ist, ist kein Zufall sondern eine Folge der Unitarität von $\chi_d^{(4)} \chi_u^{(4)\dagger} \in SU(4)$.

Auf tree-level wird die Flavorverletzung im MLRM durch Kopplungen des nicht SM-artigen neutralen Higgsbosons H^0 an die physikalischen Quarkfreiheitsgrade verursacht. Die zugehörige Kopplungskonstante ist durch (1.103) nach unten beschränkt. Im 2HBM tauchen zwei weitere neutrale Higgsbosonen mit, im Allgemeinen, nicht-diagonalen Yukawa-Kopplungsmatrizen auf, die zusätzliche Beiträge zu flavorverletzenden Prozessen liefern und deren Kopplungskonstanten auf der rechten Seite der verallgemeinerten Bedingung (4.20) auftauchen. Dass die untere Schranke $|\bar{k}^{-1} M_{i \neq j}^d|$ auf der linken Seite der Abschätzung unverändert bleibt, lässt sich dahingehend interpretieren, dass die Erweiterung des MLRM um ein weiteres Bidoublett die individuelle Flavorverletzung abmildert, da nur die Summe der Kopplungsstärken nach unten begrenzt ist. Somit lassen sich die individuellen Kopplungen der Higgsbosonen $\tilde{H}_{1,2,3}$ parametrisch um einen Faktor 1/3 kleiner als im MLRM wählen, wenn man die zwangsläufig auftretende Flavorverletzung gleichmäßig auf die Summanden verteilt

$$c^{\text{MLRM}} \rightarrow \frac{c^{\text{MLRM}}}{3} + \frac{c^{\text{MLRM}}}{3} + \frac{c^{\text{MLRM}}}{3} \tag{4.21}$$

Zusätzlich erlaubt (4.20) eine oder auch zwei exakt verschwindende Kopplungen, wobei die verbleibenden Summanden das Fehlen dieser Terme ausgleichen müssen. Für den Fall einer verschwindenden Kopplung lassen sich die beiden übrigen im Sinne von (4.21) noch um einen Faktor 1/2 kleiner als im MLRM wählen, für zwei verschwindende Kopplungen übernimmt die Verbleibende die komplette Flavorverletzung mit der selben Untergrenze wie im MLRM. Da für einen FCNH-Prozess die Beiträge aller Higgsbosonen gemeinsam berücksichtigt werden müssen, bleibt die nach der Herleitung von (1.103) diskutierte generelle Verschränkung der bekannten SM-Flavorstruktur mit flavorverletzenden Beiträgen ‘‘Neuer Physik’’ auch für das 2HBM bestehen. Somit ist das 2HBM geeignet um die Gesamtflavorverletzung auf mehrere Feynmandiagramme aufzuteilen und damit parametrisch kleinere Kopplungskonstanten zu erhalten, das grundsätzliche Auftreten flavorverletzender Übergänge als Folge einer beliebigen nicht-trivialen Flavorstruktur des Modells lässt sich damit aber nicht vermeiden.

4.2 $n \geq 3$ Higgs-Bidoublett Modell

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass sich das Problem der Yukawaverschränkung im MLRM durch die Hinzunahme eines zweiten Bidoubletts nicht grundsätzlich lösen lässt. Das Mindestmaß an Flavorverletzung ist nach wie vor durch das entsprechende Element der down-Quark Massenmatrix in der Flavorbasis $\bar{k}^{-1} M_{i \neq j}^d$ gegeben. Jedoch erlauben die mit dem zweiten Bidoublett neu eingeführten Parameter, dieses im Sinne von (4.21) auf mehrere flavorverletzende Beiträge mit entsprechend kleineren Kopplungskonstanten aufzuteilen.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Fall des 2HBM eine Sonderrolle einnimmt, da eine Erweiterung um weitere Bidoubletts zum 3HBM, 4HBM,... nicht die naive Erwartung erfüllt, zusätzliche Parameter in (4.17) einzuführen, auf die sich die Gesamtflavorverletzung weiter aufteilen lässt. Es wird vielmehr bewiesen, dass die Verschränkungsrelationen des 2HBM die maximale Anzahl an Parametern enthalten und eine Erweiterung um weitere Bidoubletts lediglich zu zusätzlichen, von der Verschränkungsrelation unabhängigen Beiträgen zu flavor-verletzenden tree-level Prozessen führt.

Der allgemeinste, renormierbare Links-Rechts eichsymmetrische Quark Yukawa-Sektor mit n Kopien des MLRM Bidoubletts (B.1) und beliebigen Yukawamatrizen $F_i, \tilde{F}_i \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ lautet

$$- \mathcal{L}_Q^{(n)} = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_L [F_i \Phi_i + \tilde{F}_i \Phi_i^c] Q_R + h.c. \quad (4.22)$$

Für diesen allgemeinen Fall soll vor der konkreten Herleitung der Verschränkungsrelationen geklärt werden, welcher Mechanismus in Links-Rechts symmetrischen Modellen beliebige nicht-triviale Flavorstrukturen mit dem Auftreten flavor-verletzender Kopplungen verknüpft. In Abschnitt 1.2.4 wurde bereits argumentiert, dass ein flavor-verletzender Übergang nur dann auftreten kann, wenn die physikalischen Quarkzustände keine exakten Flavoreigenzustände sind, sondern aus einer Superposition verschiedener Flavor bestehen. Nach den Regeln der Quantenmechanik ist die Wahrscheinlichkeit für ein Quark q' einen bestimmten Flavor i zu messen, durch den "Anteil" dieses Flavorzustands am physikalischen Masseneigenzustand gegeben

$$|q'\rangle = a_{q'u}|u\rangle + a_{q'c}|c\rangle + a_{q't}|t\rangle \quad (4.23)$$

$$\rightarrow \mathcal{P}_{q'i} = |a_{q'i}|^2 \quad (4.24)$$

Die Koeffizienten $a_{q'i}$ lassen sich dabei als Koordinaten des physikalischen Masseneigenzustands in der Flavorbasis interpretieren. Die Koordinaten des selben Vektors sind in der Basis der Masseneigenzustände, also der Basis die ihn selbst als Basisvektor enthält,

durch einen Standardeinheitsvektor

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

gegeben. Die Koordinaten in der Flavorbasis $c_{q'i}$, die Auskunft über die Wahrscheinlichkeit für die Messung des entsprechenden Flavors geben, werden beim Basiswechsel in die zugehörige unitäre Transformationsmatrix absorbiert. Somit kann ein flavorverletzender Übergang nur dann auftreten, wenn die physikalische Lagrangedichte von der Flavorzusammensetzung der Quarks, also von den Elementen der Basistransformationsmatrix abhängt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der entsprechende Basiswechsel kein Element der Flavorsymmetriegruppe des Modells ist. Wie im Standardmodell lässt sich die Flavorsymmetrie ausnutzen, um ohne Beschränkung der Allgemeinheit die up-Quark Massenmatrix von vorneherein diagonal zu wählen

$$M^u \rightarrow \hat{M}^u \quad (4.26)$$

Diese Wahl schöpft die, durch die Vereinheitlichung der rechts-händigen Freiheitsgrade, verringerte Flavorsymmetrie

$$\mathcal{G}_{LR}^{\text{flav}} = U(3)_{Q_L} \times U(3)_{Q_R} \quad (4.27)$$

in Links-Rechts symmetrischen Modellen bereits voll aus, sodass jede weitere Transformation der Quarkfelder kein Element der Flavorsymmetriegruppe mehr ist. Ist die down-Quark Massenmatrix in der Basis, in der (4.26) gilt, nicht ebenfalls diagonal, ist solch eine weitere Transformation notwendig, um diese zu diagonalisieren. Wie argumentiert besitzt das Modell dann eine nicht-triviale Flavorstruktur.

Betrachtet man die Verschränkungsrelationen für das MLRM (1.46) und das 2HBM (4.17) versteht man, wie die notwendige Bedingung für ein nicht-flavorsymmetrisches Modell mit dem Auftreten flavorverletzender Kopplungen verknüpft ist

- MLRM:

$$Y^d = -e^{i\alpha} \sin(2\beta) \hat{Y}^u - \cos(2\beta) \tilde{Y}^u \quad (4.28)$$

- 2HBM:

$$\begin{aligned}
Y^d &= -e^{i\alpha} \sin(2\beta) \cos^2 \gamma \hat{Y}^u - \frac{1}{2} \sin(2\beta) \sin(2\gamma) \tilde{Y}_1^u - \sin \gamma \tilde{Y}_2^u \\
&\quad - e^{i\alpha} \cos(2\beta) \cos \gamma \tilde{Y}_3^u
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Die Flavorsymmetrie wurde hier bereits voll ausgenutzt, um die up-artigen Quarkzustände von vorneherein mit Masseneigenzustände identifizieren zu können. Dies wird aus der Diagonalität der Matrix \hat{Y}^u deutlich. Eine notwendige Bedingung für eine Brechung der Flavorsymmetrie und damit für eine nicht-triviale Flavorphysik ist dann eine nicht-diagonale Matrix Y^d . Da die Verschränkungsrelationen diese Matrix als Linearkombination der diagonalen Matrix \hat{Y}^u und zusätzlichen Kopplungsmatrizen \tilde{Y}_i^u ausdrücken, kann dies nur erfüllt sein, wenn weitere ebenfalls Elemente abseits der Diagonalen enthalten. Diese Elemente sind aber gerade die Kopplungskonstanten flavor-verletzender Vertices zwischen nicht-SM-artigen Higgsbosonen und physikalischen up-artigen Quarkzuständen (vgl. (1.99), (4.18)). Dies ist die gesuchte Verbindung zwischen nicht-triviale Flavorphysik und dem Auftreten flavor-verletzender Higgs-Kopplungen in Links-Rechts symmetrischen Modellen.

Im Folgenden wird nun noch gezeigt, dass (4.17) bereits die allgemeinste Form der Verschränkungsrelationen für ein Modell mit n Bidoubletts (4.22) darstellen und daher die obige Argumentation für ein beliebiges Links-Rechts Modell unverändert gültig bleibt. In Anhang B wird explizit eine manifest eichsymmetrische Bidoublettbasis konstruiert, in der die VEVs der n Bidoubletts durch (B.2) gegeben sind. Die zugehörige unitäre Basistransformation (B.14) sei hier mit $U_{\langle \vec{\Phi} \rangle} \in U(n)$ bezeichnet

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \left(U_{\langle \vec{\Phi} \rangle} \right)_{ij} \Phi_j \tag{4.30}$$

Da dies per Konstruktion die manifeste Eichsymmetrie erhält, ist (4.22) forminvariant unter dem Basiswechsel und lautet ausgedrückt in den neuen Bidoubletts ϕ_i

$$-\mathcal{L}_Q^{(n)} = \sum_{i=1}^n \bar{Q}_L [f_i \phi_i + \tilde{f}_i \phi_i^c] Q_R + h.c. \tag{4.31}$$

mit neuen eichsymmetrischen Kopplungsmatrizen f_i, \tilde{f}_i , die eindeutig von den ursprünglichen F_i, \tilde{F}_i abhängen

$$\begin{aligned}
f_i &:= \sum_{j=1}^n \left(U_{\langle \vec{\Phi} \rangle} \right)_{ij}^* F_j \\
\tilde{f}_i &:= \sum_{j=1}^n \left(U_{\langle \vec{\Phi} \rangle} \right)_{ij} \tilde{F}_j
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Die neue Higgsbasis zeichnet sich jedoch durch eine besonders einfache VEV-Struktur aus, in der der VEV der n ursprünglichen von nur zwei Bidoublets getragen und durch drei nicht-negative reelle Parameter und eine Phase parametrisiert ist (B.15). Da jeder Beitrag zu den Quarkmassenmatrizen nach dem Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung proportional zum VEV eines Higgsfeldes ist, tauchen nur die eichsymmetrischen Kopplungsmatrizen dieser und der zugehörigen ladungskonjugierten Bidoublets in den Quarkmassenmatrizen auf

$$\hat{M}^u = k_1 f_1 + k_2 e^{-i\alpha} \tilde{f}_1 + \kappa \tilde{f}_2 \quad (4.33)$$

$$M^d = k_2 e^{i\alpha} f_1 + k_1 \tilde{f}_1 + \kappa f_2 \quad (4.34)$$

Dies sind exakt die Relationen (4.7) für die Massenmatrizen im 2HBM. Die Herleitung in Abschnitt 4.1 kann daher unverändert übernommen werden, um die Verschränkungsrelationen (4.17) für die Yukawa-Kopplungen des SM-Higgs-Doublets und die drei zusätzlichen nicht-SM-artigen $SU(2)_L$ -Doublets, die sich aus $\phi_{1,2}$ konstituieren, herzuleiten. Die verbleibenden $n - 2$ Bidoublets tragen lediglich einen trivialen VEV $\langle \phi_{3,4,\dots,n} \rangle = 0$, liefern somit keine Beiträge zu den Massenmatrizen und tauchen daher auch nicht in den Verschränkungsrelationen auf. Vielmehr sind die zugehörigen $2(n - 2)$ Kopplungsmatrizen $f_{3,4,\dots,n}, \tilde{f}_{3,4,\dots,n}$ im Allgemeinen völlig beliebig und liefern komplett unbeschränkte Beiträge zu flavor-verletzenden tree-level Prozessen.

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass ein beliebiges Links-Rechts symmetrisches Modell mit n Kopien des MLRM Bidoublets immer mindestens ein und maximal drei nicht-SM-artige $SU(2)_L$ -Doublets enthält, deren flavor-verletzende Kopplungen an physikalische Quarkzustände zwangsläufig aus einer nicht-trivialen Struktur der CKM-Matrizen, also der Existenz flavor-ändernder Kopplungen an Eichbosonen, folgt. Dies ist unabhängig von den Kopplungen der restlichen $2(n - 2)$ nicht-SM-artigen $SU(2)_L$ -Doublets. Somit nimmt das 2HBM eine Sonderrolle unter den Links-Rechts symmetrischen Modellen ein:

Die Verschränkungsrelationen des 2HBM enthalten die maximale Anzahl an Parametern und daher lässt sich das Problem der Yukawa-Verschränkung dort am stärksten abmildern (vgl. (4.21)). Eine Erweiterung um weitere Bidoublets führt, bei gleicher Abmilderung der Yukawaverschränkung, lediglich zu zusätzlichen, im Allgemeinen unbeschränkten Beiträgen zu flavor-verletzenden Prozessen.

Kapitel 5

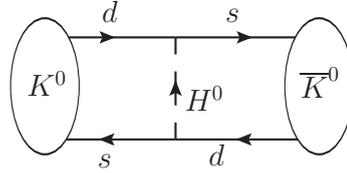
Effektiv Links-Rechts symmetrische Modelle

In den Abschnitten 1.2.1 und 4.1 wurde das Problem der Yukawa-Verschärkung in Links-Rechts symmetrischen Modellen von der konzeptionellen Seite betrachtet. Der Fokus lag dabei auf dem Zusammenhang der allgemeinen Flavorstruktur des Modells mit der Flavorverletzung im Yukawa-Sektor und dem dieser Verbindung zugrundeliegenden Mechanismus. Für das grundsätzliche Auftreten einer Flavorverletzung war dabei nur entscheidend, ob die Yukawa-Matrizen in der Masseneigenbasis der Quarks diagonal, die flavorverletzenden Kopplungskonstanten also exakt Null sind, oder nicht. Eine Aussage über die tatsächliche numerische Größe der Kopplungskonstanten wurde bisher nur in Form der Abschätzung (1.113) in Abschnitt 1.2.5 getroffen.

Nach den Regeln der Quantenfeldtheorie sagt ein Modell einen konkreten physikalischen Prozess in Form eines S -Matrixelements voraus, welches sich für perturbative Prozesse wiederum durch eine Serie von Feynman-Diagrammen darstellen lässt. Die in den vorherigen Abschnitten untersuchten flavor-verletzenden Kopplungskonstanten, treten in diesen Diagrammen zusammen mit dem Propagator des zugehörigen Higgs-Bosons auf

$$\frac{c_{d,21}^{\text{FCNH}} c_{d,12}^{\text{FCNH}*}}{M_H^2 - q^2} \xrightarrow{\frac{q^2}{M_H^2} < 1} \frac{c_{d,21}^{\text{FCNH}} c_{d,12}^{\text{FCNH}*}}{M_H^2} + \mathcal{O}\left(\frac{q^2}{M_H^2}\right) \quad (5.1)$$

Auf den ersten Blick werden dadurch alle bisher gemachten Überlegungen überflüssig, da sich jeder Beitrag dieser Form mit einer genügend großen Higgs-Masse M_H beliebig weit unterdrücken lässt. Somit ergibt sich aus der experimentellen Obergrenze für das Auftreten flavor-ändernder neutraler Ströme eine Untergrenze für die Massenskala M_H der neuen, nicht-SM-artigen Higgs-Bosonen. Diese Untergrenze hängt von den flavor-verletzenden Kopplungsstärken ab und ist umso geringer, je kleiner die Kopplungen sind.

ABBILDUNG 5.1: Tree level Beitrag zur $K^0 - \bar{K}^0$ -Mischung

Dies macht man sich leicht anhand der Überlegung klar, dass im Grenzfall einer exakt verschwindenden Flavorverletzung das Unterdrückungskriterium nur noch die triviale Untergrenze liefert

$$M_H \gtrsim \sqrt{\frac{c_{d,21}^{\text{FCNH}} c_{d,12}^{\text{FCNH}*}}{\mathcal{A}_{\text{exp}}}} \xrightarrow{\text{keine Flavorverletzung}} 0 \quad (5.2)$$

Somit liegt die Frage nahe, welche Massenskala sich für die minimalen flavor-verletzenden Kopplungen ergibt, die mit den Verschränkungsrelationen verträglich sind. Dies ist dann die minimale Energieskala, bei der eine realistische Links-Rechts symmetrische Vereinheitlichung auftreten kann.

5.1 $K^0 - \bar{K}^0$ Mischung

Das in der Einleitung angeführte Beispiel (5.1) beschreibt im MLRM den tree-level Beitrag zur neutralen Kaon-Mischung in Abbildung 5.1. Da es sich hierbei um einen flavorändernden neutralen Strom handelt und der GIM-Mechanismus im Standardmodell einen solchen Prozess nur auf Loop-Level erlaubt, führt dieser Beitrag die Störungsreihe an. Mit den in Abschnitt 1.2.4 hergeleiteten Kopplungskonstanten (1.100), ergibt sich für das in diesem Diagramm enthaltene Produkt

$$c_{d,21}^{\text{FCNH}} c_{d,12}^{\text{FCNH}*} = \left(V_L^\dagger \tilde{Y}^d V_R \right)_{21} \left(V_L^\dagger \tilde{Y}^d V_R \right)_{12}^* \quad (5.3)$$

Bis jetzt wurden die beiden Faktoren auf der rechten Seite mit den Verschränkungsrelationen (1.46) und (1.47) untersucht. Diese sind im gesamten Wertebereich der Parameter des Higgs-Potenzials gültig und eignen sich somit für allgemeine Aussagen über die Flavorverschränkung in Links-Rechts symmetrischen Modellen. Um eine konkrete Vorhersage über die Größe der flavor-verletzenden Beiträge zu machen ist es aber sinnvoller, die Kopplungen explizit in Quark-Massen und CKM-Elementen auszudrücken

$$\left(V_L^\dagger \tilde{Y}^d V_R \right)_{ij} = \frac{-1}{k \cos(2\beta)} \left(V_L^\dagger \hat{M}^u V_R \right)_{ij} - e^{-i\alpha} \frac{\tan(2\beta)}{k} \left(\hat{M}^d \right)_{ij} \quad (5.4)$$

wobei dies nur für $\cos(2\beta) \neq 0$ gültig ist. Dies stellt zwar mathematisch eine Beschneidung des allgemeinsten Falls dar, in Abschnitt 2.1 wird aber gezeigt, dass diese Einschränkung für phenomenologisch sinnvolle Modelle sowieso getroffen werden muss. Die Beiträge des MLRM zur $K^0 - \bar{K}^0$ -Mischung sind dann durch

$$c_{d,21}^{\text{FCNH}} = \frac{-1}{k \cos(2\beta)} (m_u V_{L,us}^* V_{R,ud} + m_c V_{L,cs}^* V_{R,cd} + m_t V_{L,ts}^* V_{R,td}) \quad (5.5)$$

$$c_{d,12}^{\text{FCNH}^*} = \frac{-1}{k \cos(2\beta)} (m_u V_{L,ud} V_{R,us}^* + m_c V_{L,cd} V_{R,cs}^* + m_t V_{L,td} V_{R,ts}^*) \quad (5.6)$$

gegeben. In Abschnitt 1.2.4 wurde allgemein bewiesen, dass das Auftreten solcher flavorverletzender Kopplungen im MLRM untrennbar mit einer nicht-trivialen Flavorstruktur verknüpft ist und diese Verbindung ist auch in der konkreten Darstellung der für die Kaon-Mischung relevanten Kopplungen (5.5), (5.6) erkennbar. Jeder Summand auf der rechten Seite enthält ein CKM-Element, dessen zwei Indizes unterschiedliche Quark-Generationen mischen. Gäbe es eine Basis aus gemeinsamen Flavor- und Masseneigenzuständen wären die Mischungsmatrizen trivial, also insbesondere alle Elemente abseits der Diagonalen exakt Null und somit würde gleiches für die komplette Summe gelten. Weiterhin erkennt man in dieser konkreten Darstellung, dass sich die problematischen Kopplungen durch eine passende Wahl der rechts-händigen Mischungsmatrix V_R verkleinern lassen. Diese Wahl der Mischungsmatrix wirkt sich allerdings in anderen Bereichen aus, wie zum Beispiel den Kopplungen des neuen schweren Eichbosons W_R an die Quarks und scheitert spätestens, wenn man zusätzliche diskrete Symmetrien fordert, die die Wahl der rechtshändigen CKM-Matrix einschränken. Beispiele für solche diskreten Symmetrien sind

- (Quasi-)Manifeste Links-Rechts Symmetrie: $V_{L,ij} = \pm V_{R,ij}$
- Pseudo-manifeste Links-Rechts Symmetrie: $|V_{L,ij}| = |V_{R,ij}|$

In diesen Fällen unterscheiden sich die Elemente der beiden Mischungsmatrizen $V_{L,R}$ lediglich um einen Phasenfaktor und verwendet man die Wolfensteinparametrisierung der SM-CKM-Matrix als Näherung für die Mischungsmatrix V_L , ergibt sich für (5.5), (5.6) in führender Ordnung

$$\begin{aligned} c_{d,21}^{\text{FCNH}} &= \frac{\tilde{y}_c e^{i\varphi_{cd}^R}}{\cos(2\beta)} \lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^5) \\ c_{d,12}^{\text{FCNH}^*} &= \frac{\tilde{y}_c e^{-i\varphi_{cs}^R}}{\cos(2\beta)} \lambda^4 + \mathcal{O}(\lambda^5) \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei $V_{R,ij} = e^{i\varphi_{ij}^R} V_{L,ij}$ den möglichen Unterschied in den Phasen der CKM-Elemente parametrisiert. Weiterhin wird $\tilde{y}_c = \mathcal{O}(1)$ mit $\tilde{y}_c \lambda^4 = m_c/k$ als Label für den charm-Beitrag in der Entwicklung im Wolfenstein-Parameter λ verwendet.

Es stellt sich nun die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt, die flavor-verletzenden Kopplungen $c_{d,21}^{\text{FCNH}}, c_{d,12}^{\text{FCNH}*}$ unabhängig von den Mischungsmatrizen $V_{L,R}$ zu minimieren. Da jeder Summand in (5.5) und (5.6) mit jeweils einer up-artigen Quark-Masse multipliziert wird, verschwinden diese Kopplungen im Grenzfall masseloser Quarks

$$c_{d,21}^{\text{FCNH}}, c_{d,12}^{\text{FCNH}*} \xrightarrow{m_{u,c,t} \rightarrow 0} 0 \quad (5.8)$$

Diese Beobachtung ist wenig überraschend, da in diesem Fall der Masseneigenraum komplett entartet und daher die Flavorsymmetrie des Modells wiederhergestellt ist. Zwei Punkte, die für eine Verringerung der Untergrenze der Masse des FCNH vermittelnden NP Higgs-Bosons H^0 relevant sind, sollen hier festgehalten werden:

- Der führende Beitrag zur Kaon-Mischung im MLRM mit diskreter LR Symmetrie ist proportional zu $y_c \sim \lambda^4$
- Für masselose Quarks ist die Flavorsymmetrie ungebrochen und für die CKM-Matrizen gilt $V_{L,R} \sim 1$

Die numerische Größe der Masse des charm-Quarks motiviert, den zugehörigen Massenterm durch einen höherdimensionalen, effektiven Operator mit Massendimension n zu beschreiben. Nach den Regeln einer effektiven Feldtheorie ist der entsprechende Beitrag dann mit Potenzen einer hohen NP-Skala Λ^{4-n} unterdrückt, was eine Erklärung für die Kleinheit der entsprechenden Größe liefern kann. Hier ist aber lediglich entscheidend, dass y_c in diesem Modell an einer anderen Stelle auftritt als in der Dimension 4 Yukawa-Matrix des MLRM

$$\begin{array}{c|c} \text{MLRM} & \text{eff. LR-Modell} \\ \hline Y^u = \begin{pmatrix} y_u & 0 & 0 \\ 0 & y_c & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix} & Y^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix}, \frac{1}{\Lambda^{n-4}} Y_{\text{eff.}}^u = \begin{pmatrix} y_u & 0 & 0 \\ 0 & y_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad (5.9)$$

Die Yukawa-Kopplung des up-Quarks, die numerisch noch kleiner als y_c ist, soll hier gleichfalls durch einen effektiven Operator generiert werden. Da die Verschränkungsrelationen (1.46), (1.47) die flavorverletzenden Kopplungen (5.7) mit den Yukawa-Matrizen $Y^{u,d}$ und nicht mit den Massenmatrizen $M^{u,d}$ in Verbindung setzen, verschwinden die entsprechenden Terme, durch die ‘‘Umverteilung der Yukawa-Kopplungen’’ in effektive Beiträge, aus den Verschränkungsrelationen ohne die Massenmatrix zu verändern. Lediglich für die Yukawa-Kopplung des top-Quarks ist diese Herangehensweise wegen

$y_t = \mathcal{O}(1)$ unzulässig, sodass die entsprechende Kopplung in der ursprünglichen Dimension 4 Yukawa-Matrix Y^u und somit in den Verschränkungsrelationen verbleiben muss. In diesem Abschnitt wurde anstatt der allgemeinen Verschränkungsrelationen (1.46) und (1.47), die für phenomenologische Analysen interessante konkrete Darstellung der flavor-verletzenden Kopplungen des MLRM (5.5) und (5.6) betrachtet. Für den Fall diskreter LR-Symmetrie, in dem die zusätzliche rechts-händige CKM-Mischungsmatrix V_R , zumindest teilweise, durch die Phänomenologie des links-händigen, SM-artigen Sektors festgelegt ist, ergibt sich eine Entwicklung dieser Kopplungen im Wolfenstein-Parameter λ , der die hierarchische Struktur des SM Quarksektors in die flavorverletzenden Kopplungen des MLRM überträgt. Diese Betrachtung hat gezeigt, dass die zur Kaon-Mischung beitragenden flavor-verletzenden Kopplungen $c_{d,21}^{\text{FCNH}}$, $c_{d,12}^{\text{FCNH}*}$ dann in führender Ordnung durch den Massenterm des charm-Quarks verursacht werden (vgl. (5.7)). Zusätzlich wurde bemerkt, dass sich im Grenzfall masseloser Quarks aus den Verschränkungsrelationen keine flavorverletzenden Kopplungen mehr ergeben (vgl. (5.8)). Dies motiviert, die Verschränkungsrelationen im Rahmen einer effektiven Theorie zu untersuchen, in denen die leichten Quarkmassen als Störungen des (teilweise) flavorsymmetrischen Grenzfalls betrachtet und durch höherdimensionalere Operatoren, die für effektive Beiträge Neuer Physik oberhalb einer NP-Skala Λ stehen, parametrisiert sind. Daher soll die Links-Rechts Eichsymmetrie \mathcal{G}_{LR} im Folgenden im Kontext effektiver Feldtheorien untersucht werden, wobei der Schwerpunkt nach wie vor auf dem Zusammenspiel der Yukawa-Verschränkung mit der Definition der Quarkmassenbasis liegt.

5.2 Links-Rechts symmetrisches Δ -Modell

Am Ende von Abschnitt 3.3 wurde der Quark Yukawa-Sektor des in Abschnitt 3.1 diskutierten, allgemeinen 2HDM in der Form des Quark Yukawa-Sektors des MLRM (1.41) und Termen, die die links-rechts Eichsymmetrie explizit brechen, dargestellt. Daher erzwingt die Erweiterung der Eichsymmetrie $\mathcal{G}_{SM} \rightarrow \mathcal{G}_{LR}$ für Letztere ein Verschwinden der Kopplungskonstanten, welche vor (3.82) bzw. nach (3.83) definiert sind, $\Delta = 0 = \tilde{\Delta}$. Dies entspricht genau der Einbettung (3.48) des MLRM in die Klasse der 2HDM und führt demnach zur problematischen Verschränkung der Yukawa-Matrizen. Daher stellt sich die Frage, ob es eine Möglichkeit gibt den Yukawa-Sektor so zu erweitern, dass die erweiterte Eichsymmetrie $\Delta, \tilde{\Delta} \neq 0$ zulässt und auf diesem Wege das Flavorproblem umgeht. Die relevanten Terme in (3.83), die die Links-Rechts Eichsymmetrie brechen, lauten

$$-\mathcal{L}_Y^Q \supset -\mathcal{L}_\Delta = \bar{Q}_L \Delta H_2 d_R - \bar{Q}_L \tilde{\Delta} H_2^c u_R + h.c. \quad (5.10)$$

Es fällt direkt auf, dass in diesen Termen jeweils nur einer der beiden rechts-händigen Doublett-Partner

$$Q_{R,i} = \begin{pmatrix} u_{R,i} \\ d_{R,i} \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

auftritt. Desweiteren enthalten beide Summanden lediglich H_2 , die zweite Spalte des Higgs-Bidoublets

$$\Phi = \left(H_1 \mid H_2 \right) = \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Um die in \mathcal{L}_Δ gebrochene $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -Eichsymmetrie herzustellen, müssen also die fehlenden Multiplettspartner von d_R und H_2 bzw. u_R und H_2^c ergänzt werden. Nach den Regeln der Matrixmultiplikation gilt

$$\begin{aligned} H_2 d_R &= \left(H_1 \mid H_2 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ d_R \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q_R \\ H_2^c u_R &= \left(H_1^c \mid H_2^c \right) \begin{pmatrix} 0 \\ u_R \end{pmatrix} = \underbrace{\left(H_1^c \mid H_2^c \right)}_{\Phi^c} (-i\sigma^2) i\sigma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ u_R \end{pmatrix} \\ &= \Phi^c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_R \end{aligned} \quad (5.13)$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichungen sind die Quark- und Higgs-Felder wie gewünscht durch ihre LR-Symmetriemultipletts ersetzt, allerdings mussten hierzu konstante Projektionsmatrizen eingeführt werden, sodass die Eichsymmetrie nach wie vor gebrochen ist. Im Geiste der spontanen Symmetriebrechung sollen diese Matrizen daher durch dynamische Higgs-Felder ersetzt werden, deren Vakuumerwartungswerte die $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -Symmetrie brechen und Terme der Form (5.10) reproduzieren. Aus der Forderung nach Eichinvarianz unter

$$\bar{Q}_{L,i} \Phi \mathcal{O}_\Delta Q_{R,j} \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} \bar{Q}_{L,i} U_L^\dagger U_L \Phi U_R^\dagger \mathcal{O}'_\Delta U_R Q_{R,j} \quad (5.14)$$

folgt das Transformationsverhalten des gesuchten Operators

$$\mathcal{O}_\Delta \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} \mathcal{O}'_\Delta = U_R \mathcal{O}_\Delta U_R^\dagger \quad (5.15)$$

und damit auch die elektrischen $U(1)_{\text{e.m.}}$ -Ladungen der einzelnen Komponenten

$$\mathcal{O}_\Delta = \begin{pmatrix} \omega_{11}^0 & \omega_{12}^+ \\ \omega_{21}^- & \omega_{22}^0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Im Allgemeinen besitzt der $U(1)_{\text{e.m.}}$ -invariante VEV dieses Operators also zwei nicht-verschwindende Diagonalelemente, die durch das Higgs-Potenzial bestimmt sind. Eine

weitere Einschränkung an \mathcal{O}_Δ ergibt sich dann aus der Forderung, dass der VEV des gesuchten Operators unabhängig vom Higgs-Potenzial proportional zur Projektionsmatrix auf down-artige Doublett-Komponenten ist

$$\langle \mathcal{O}_\Delta \rangle \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Da die $U(1)_{\text{e.m.}}$ -Invarianzforderung lediglich garantiert, dass elektrisch geladene Felder nur einen trivialen VEV besitzen, muss die elektrisch neutrale Komponente ω_{11}^0 in der oberen linken Ecke ein Produkt aus zwei entgegengesetzt elektrisch geladenen Feldern sein, um ein Verschwinden des zugehörigen VEVs als Folge der ungebrochenen $U(1)_{\text{e.m.}}$ -Symmetrie zu garantieren. Diesen Sachverhalt macht man sich für ein generisches, elektrisch geladenes Higgs-Feld ϕ_R^\pm anhand von

$$\begin{aligned} Q(\phi_R^+ \phi_R^-) &= (+1) + (-1) = 0 \\ \langle \phi_R^+ \phi_R^- \rangle &= \underbrace{\langle \phi_R^+ \rangle}_0 \cdot \underbrace{\langle \phi_R^- \rangle}_0 = 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

klar. Das Teilchenspektrum des MLRM besitzt genau ein Higgs-Multiplett in einer Triplet-Darstellung von $SU(2)_R$ und dieses trägt eine $U(1)_{B-L}$ -Ladung von 2

$$\Delta_R \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} e^{2i\varphi} U_R \Delta_R U_R^\dagger \quad (5.19)$$

Dieses Transformationsverhalten hat zur Folge, dass Δ_R nur eine elektrisch neutrale Komponente enthält

$$\Delta_R = \begin{pmatrix} \Delta^+/\sqrt{2} & \Delta^{++} \\ \Delta^0 & -\Delta^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

sodass der allgemeinste $U(1)_{\text{e.m.}}$ -invariante VEV durch

$$\langle \Delta_R \rangle = v_R e^{i\varphi_R} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

gegeben ist. Wie argumentiert, muss es sich bei dem gesuchten Operator um ein Produkt mit Transformationsverhalten (5.15) handeln und dieses lässt sich aus dem im MLRM enthaltenen Triplet Δ_R konstruieren

$$\mathcal{O}_\Delta = \Delta_R \Delta_R^\dagger \quad (5.22)$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieses sowohl das korrekte Transformationsverhalten

$$\Delta_R \Delta_R^\dagger \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} e^{(2i-2i)\varphi} U_R \Delta_R U_R^\dagger U_R \Delta_R^\dagger U_R^\dagger = U_R \Delta_R \Delta_R^\dagger U_R^\dagger \quad (5.23)$$

als auch die gewünschte Form des VEVs

$$\langle \Delta_R \Delta_R^\dagger \rangle = v_R^2 e^{(i-i)\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = v_R^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

aufweist. Das zugehörige Produkt des ladungskonjugierten Triplets $\Delta_R^c = \sigma^2 \Delta_R^* \sigma^2 = -\Delta_R^\dagger$

$$\Delta_R^c \Delta_R^{c\dagger} = \Delta_R^\dagger \Delta_R \quad (5.25)$$

besitzt das gleiche Transformationsverhalten und die Struktur seines VEVs

$$\langle \Delta_R^\dagger \Delta_R \rangle = v_R^2 e^{(-i+i)\varphi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = v_R^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

komplettiert die gesuchten Projektionsmatrizen in (5.13). Somit lässt sich \mathcal{L}_Δ in (5.10), der die Links-Rechts Eichsymmetrie brechende Teil des Yukawa-Sektors des allgemeinen 2HDM, mit Hilfe von \mathcal{O}_Δ eichsymmetrisch zu einer effektiven Links-Rechts symmetrischen Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_\Delta \rightarrow \mathcal{L}(\Delta_R) = \frac{G_{ij}}{\Lambda^2} \bar{Q}_{L,i} \Phi \Delta_R \Delta_R^\dagger Q_{R,j} + \frac{\tilde{G}_{ij}}{\Lambda^2} \bar{Q}_{L,i} \Phi^c \Delta_R^\dagger \Delta_R Q_{R,j} + h.c. \quad (5.27)$$

erweitern, wobei Λ die Energieskala des UV-Abschlusses der Theorie parameterisiert.

Um den Anschluss an das allgemeine 2HDM herzustellen, muss die $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ Symmetrie gebrochen werden, indem das die Brechung verursachende Triplet Δ_R durch seinen VEV ersetzt und (5.13) verwendet wird

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(\langle \Delta_R \rangle) &= \frac{G_{ij} v_R^2}{\Lambda^2} \bar{Q}_{L,i} \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q_{R,j} + \frac{\tilde{G}_{ij} v_R^2}{\Lambda^2} \bar{Q}_{L,i} \Phi^c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_{R,j} + h.c. \\ &= \frac{G_{ij} v_R^2}{\Lambda^2} \bar{Q}_{L,i} H_2 d_{R,j} + \frac{\tilde{G}_{ij} v_R^2}{\Lambda^2} \bar{Q}_{L,i} H_2^c u_{R,j} + h.c. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Anschließend können die Parameter mit denen in \mathcal{L}_Δ verglichen werden und man findet

$$\Delta \vec{F} = \begin{pmatrix} \Delta \\ \tilde{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \begin{pmatrix} G \\ -\tilde{G} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass für das MLRM $\Delta \vec{F} = \vec{0}$ gilt, was aus der eichsymmetrischen Einschränkung des Yukawa-Sektors auf zwei eichinvariante Kopplungsmatrizen $F_1 = F = F_2$ und $\tilde{F}_1 = \tilde{F} = \tilde{F}_2$ resultiert. Desweiteren wurde anhand des Schemas (3.50) deutlich, dass es in diesem Fall keine exakte Lösung des Flavorproblems mit nicht-trivialer Flavorphysik gibt. Demgegenüber steht das allgemeine 2HDM mit vier beliebigen Yukawa-Matrizen $F_{1,2}, \tilde{F}_{1,2}$, die in (3.83) durch $F_1, \tilde{F}_1, \Delta, \tilde{\Delta}$ parametrisiert

sind und für die phänomenologisch sinnvolle Lösungen des Flavorproblems existieren, zum Beispiel in Form des 2HDM Typ I und Typ II in Abschnitt 3.2. Diese Lösungen verschwinden allerdings im Grenzfall $\Delta\vec{F} \rightarrow \vec{0}$ und daher soll im Folgenden untersucht werden, welche Einschränkung an $\Delta\vec{F}$ sich aus der bekannten Flavorstruktur des SM ergeben. Die dynamische Erklärung dieser Größe als Folge der spontan gebrochenen $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -Eichsymmetrie durch $\mathcal{O}_\Delta = \Delta_R \Delta_R^\dagger$ in (5.29), setzt dann die Struktur der CKM-Matrizen mit der Größenordnung Links-Rechts symmetrischer Beiträge Neuer Physik in Verbindung.

Nach der Diskussion in Abschnitt 3.3 ist das Flavor-Problem genau dann gelöst, wenn alle Kopplungen neutraler Higgs-Bosonen an Quark-Masseneigenzustände durch diagonale Yukawa-Matrizen gegeben sind. Da die Quarkmassenmatrizen, die im Formalismus der spontanen Symmetriebrechung durch solche Matrizen gegeben sind, per Definition in der Masseneigenbasis diagonal sind, müssen zusätzlich auftretende Kopplungsmatrizen durch die selbe Transformation, das bedeutet simultan mit den Massenmatrizen, diagonalisiert werden. Dies geschieht unabhängig voneinander im up- und down-Sektor, darf aber für $V_{\text{CKM}} \neq 1$ nicht simultan möglich sein. Dieser Unterscheidung zwischen den Bereichen notwendiger (nicht-)simultaner, bi-unitärer Diagonalisierbarkeit, wie sie durch die Zeilen im Schema (3.34) gegeben ist, trägt die Vektornotation (3.69) Rechnung. Eine Lösung des Flavorproblems bedeutet dann die Existenz jeweils zweier unitärer Matrizen zu den Vektoren \vec{y}_u, \vec{y}_d , die die als Komponenten enthaltenen Matrizen gemäß (3.52) simultan bi-unitär diagonalisieren. Fasst man die diagonalen Matrizen, die sich aus dieser Transformation ergeben, wieder in einem Vektor zusammen, lässt sich eine Lösung des Flavorproblems in up- und down-Sektor kompakt durch

$$\begin{aligned} V_u^\dagger \vec{y}^u W_u &= \hat{y}^u \\ V_d^\dagger \vec{y}^d W_d &= \hat{y}^d \end{aligned} \quad (5.30)$$

darstellen, wobei zu beachten ist, dass die Matrizen $V_{u,d}, W_{u,d} \in U(3)$ auf die unterdrückten Flavorindizes $\vec{y}_{ij}^u, \vec{y}_{ij}^d$ wirken. Aus den flavor-blinden, unitären Relationen (3.69) zwischen Yukawa-Matrizen und Modellparametern ergibt sich

$$V_u^\dagger \vec{F}_a^u W_u = \chi_{ba}^{u*} V_u^\dagger (\vec{y}^u)_b W_u = \chi_{ba}^{u*} (\hat{y}^u)_b \quad (5.31)$$

was zeigt, dass $V_u^\dagger \vec{F}_a^u W_u$ als Linearkombination diagonalen Matrizen ebenfalls diagonal ist. Mit der entsprechenden Relation für den down-Sektor und der Definition von $\Delta\vec{F}$ in (3.71) findet man dann

$$\begin{aligned} V_u^\dagger (\vec{y}_d)_a W_u &= \chi_{ab}^d V_u^\dagger \vec{F}_b^d W_u = \chi_{ab}^d V_u^\dagger \left(\vec{F}_b^u + \Delta\vec{F}_b \right) W_u \\ &= \chi_{ab}^d \chi_{cb}^{u*} (\hat{y}^u)_c + \chi_{ab}^d V_u^\dagger \Delta\vec{F}_b W_u \end{aligned} \quad (5.32)$$

woraus ersichtlich ist, dass die bi-unitäre Transformation mittels V_u, W_u im up-Sektor, die Yukawa-Kopplungen an down-artige Quarks, bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta\vec{F})$, ebenfalls diagonalisiert

$$V_u^\dagger \vec{y}_d W_u = \chi^d \chi^{u\dagger} \hat{y}^u + \mathcal{O}(\Delta\vec{F}) \quad (5.33)$$

Da es sich bei den beiden Linearkombinationen $\chi^d \chi^{u\dagger} \hat{y}^u$ im Allgemeinen um komplexe Diagonalmatrizen handelt

$$\chi^d \chi^{u\dagger} \hat{y}^u = \begin{pmatrix} (\chi^d \chi^{u\dagger})_{11} \hat{Y}^u + (\chi^d \chi^{u\dagger})_{12} \tilde{\hat{Y}}^u \\ (\chi^d \chi^{u\dagger})_{21} \hat{Y}^u + (\chi^d \chi^{u\dagger})_{22} \tilde{\hat{Y}}^u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ \tilde{D} \tilde{P}_d P_d^\dagger \end{pmatrix} P_d \quad (5.34)$$

werden sie in jeweils eine Diagonalmatrix mit nicht-negativen, reellen Einträgen D, \tilde{D} und eine diagonale Phasenmatrix P_d, \tilde{P}_d zerlegt. Vergleicht man dies mit der definierenden Gleichung der, das Flavorproblem im down-Sektor lösenden, bi-unitären Transformation durch V_d, W_d in (5.30)

$$V_d^\dagger \vec{y}_d W_d = \hat{y}^d \quad (5.35)$$

wird diese zur führenden Ordnung in der Differenz $\Delta\vec{F}$ durch

$$\begin{aligned} V_d &= V_u + \mathcal{O}(\Delta\vec{F}) \\ W_d &= W_u P_d^\dagger + \mathcal{O}(\Delta\vec{F}) \end{aligned} \quad (5.36)$$

gelöst. Während die Lösung des Flavorproblems lediglich diagonale Yukawa-Matrizen in der Quarkmassenbasis verlangt, wird durch die Hinzunahme der Phasenmatrix P_d sichergestellt, dass die diagonalisierte down-Quark Massenmatrix

$$\hat{M}^d = k \hat{Y}^d = kD + \mathcal{O}(\Delta\vec{F}) \quad (5.37)$$

in der führenden Ordnung nur reelle Einträge enthält.

Legt man dieser Betrachtung die mit der Links-Rechts Eichsymmetrie \mathcal{G}_{LR} verträgliche Flavorsymmetrie des eichkinetischen Terms $\mathcal{G}_{MLRM}^{\text{flav}}$ zugrunde, sind die physikalischen Mischungsmatrizen laut (3.51) durch $V_L = V_u^\dagger V_d$ und $V_R = W_u^\dagger W_d$ gegeben und unter Verwendung von (5.36) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} V_L &= 1 + \mathcal{O}(\Delta\vec{F}) \\ V_R &= P_d^\dagger + \mathcal{O}(\Delta\vec{F}) \end{aligned} \quad (5.38)$$

In dieser Herleitung wurde eine exakte Lösbarkeit des Flavorproblems in der Form (5.30) vorausgesetzt. Daher beweist (5.38) explizit, dass das MLRM, welches durch $\Delta\vec{F} = \vec{0}$ charakterisiert ist, keine nicht-triviale Lösung des Flavorproblems enthält.

Im Gegensatz dazu ist die Erweiterung des Yukawa-Sektors des MLRM um die effektive

Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\Delta_R)$ in (5.27) mit der, für eine nicht-triviale Lösung des Flavorproblems notwendigen Bedingung $\Delta\vec{F} \neq \vec{0}$ verträglich. Dies bedeutet allerdings nicht, dass das Flavorproblem in diesem Modell gelöst ist, wie sich in Abschnitt 5.4 zeigen wird. Desweiteren begründet die dynamische Erklärung von $\Delta\vec{F}$ in (5.29) die Entwicklung der CKM-Matrizen in der Differenz $\Delta\vec{F}$ durch die Unterdrückung dieser Beiträge mit

$$\Delta\vec{F} \sim \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \quad (5.39)$$

sodass die nicht-triviale Struktur der physikalischen Mischungsmatrizen

$$\begin{aligned} V_L &= 1 + \mathcal{O}\left(\frac{v_R^2}{\Lambda^2}\right) \\ V_R &= P_d^\dagger + \mathcal{O}\left(\frac{v_R^2}{\Lambda^2}\right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

als Effekt Neuer Physik oberhalb der Energieskala Λ verstanden werden kann. Aus der Bestimmung der CKM-Elemente, wie sie im Rahmen flavorphysikalischer Experimente durchgeführt wird, lassen sich dann Rückschlüsse auf den Abstand der NP-Skala Λ von der $SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ -Brechungsskala v_R ziehen, wie anhand der folgenden Argumentation klar gemacht werden soll:

Da die bekannte CKM-Mischungsmatrix des Standardmodells in der phenomenologisch motivierten Wolfenstein-Parametrisierung [19] durch

$$V_{\text{CKM}}^{\text{SM}} = 1 + \mathcal{O}(\lambda) \quad (5.41)$$

angegeben werden kann und demnach die führende Abweichung von der Einheitsmatrix von der Größenordnung $\lambda \approx 0,23$ ist, sollte die entsprechende Korrektur in (5.40) numerisch einen vergleichbaren Beitrag liefern. Setzt man perturbative Flavorkoeffizienten $G_{ij}, \tilde{G}_{ij} \lesssim \mathcal{O}(1)$ voraus, lässt sich als Untergrenze des Verhältnisses

$$\lambda \lesssim \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \quad (5.42)$$

angeben, woraus sich als Obergrenze für die NP-Skala

$$\Lambda \lesssim \frac{v_R}{\sqrt{\lambda}} \approx 2,09 v_R \quad (5.43)$$

ergibt. Interessanterweise führt demnach eine stärkere Flavormischung durch V_{CKM} zu Effekten Neuer Physik bei niedrigeren Energien. Durch negative NP-Suchen lässt sich umgekehrt aus der sich experimentell ergebenden Untergrenze an Λ die maximale Flavorverletzung λ , die mit (5.42) verträglich ist, angeben und mit der Bestimmung der entsprechenden Größe aus anderen Bereichen vergleichen. Es sei darauf hingewiesen,

dass der numerische Wert von 2,09 nicht zu ernst genommen werden sollte. Eine belastbare numerische Analyse involviert neben λ weitere Flavorparameter und hätte die Herleitung, die lediglich das qualitative Zusammenspiel zwischen NP-Skala und CKM-Matrix im effektiven Δ -Modell demonstrieren soll, unnötig verkompliziert.

In Abschnitt 5.3 wird die Erweiterung des Quark-Yukawa-Sektors des MLRM um alle konstruierbaren, höherdimensionalen Yukawa-Operatoren untersucht und es zeigt sich, dass die führende Korrektur in diesem allgemeinsten Fall ebenfalls durch $\mathcal{O}(v_R^2/\Lambda^2)$ -Beiträge gegeben ist. Im darauf folgenden Abschnitt 5.4 wird abschliessend betrachtet, wie die Erweiterung der Lagrange-Dichte um solche höherdimensionalen Yukawa-Operatoren neben den erwünschten $\Delta\vec{F}$ -Termen zusätzliche, flavorverletzende Kopplungen produziert und die Kopplungsstärke anhand der Klassifikation in 5.3 bestimmt.

5.3 Beiträge höherdimensionaler Yukawa-Operatoren

In diesem Abschnitt werden die höherdimensionalen Yukawa-Operatoren betrachtet, die sich aus dem Teilcheninhalt des MLRM konstruieren lassen. Diese parametrisieren, im Rahmen einer effektiven Theorie, Korrekturen zum MLRM, die sich aus Effekten Neuer Physik oberhalb einer “cut-off”-Skala Λ ergeben. Da die Links-Rechts Eichsymmetrie für das MLRM $\Delta\vec{F}|_{\text{MLRM}} = \vec{0}$ erzwingt, erfordert eine Lösung des Flavorproblems mit nicht-trivialer Flavorphysik solche Beiträge

$$\Delta\vec{F}|_{\text{eff.}} = \underbrace{\Delta\vec{F}|_{\text{MLRM}}}_{=\vec{0}} + \Delta\vec{F}|_{\text{NP}} \quad (5.44)$$

Die Analyse der entsprechenden Operatoren gibt dann Aufschluss über die Entwicklung dieser Größe in inversen Potenzen der NP-Skala Λ .

Um alle effektiven Yukawa-Operatoren zu konstruieren, muss man sich zunächst klar machen, was einen solchen auszeichnet und welche Symmetriemultipletts im MLRM zur Konstruktion zur Verfügung stehen. Eine renormierbare Yukawa-Kopplung, das heißt eine solche mit Massendimension 4, koppelt zwei Quarkfelder an ein skalares Higgs-Feld. Entwickelt dieses einen nicht-verschwindenden VEV, ergibt sich ein in den Quarkfeldern quadratischer Term mit Massendimension 3, was einen Quarkmassenterm charakterisiert. Eine Erweiterung eines solchen Operators um zusätzliche Quarkfelder führt demnach nicht zu einem Beitrag zur Massenmatrix, sondern zu einem neuen effektiven Vertex entsprechend höherer Massendimension, der mehr als zwei Quarks aneinander koppelt. Daher soll festgehalten werden, dass ein höherdimensionaler Yukawa-Operator mit Massendimension n genau 2 Quarkfelder und $n - 2 \cdot 3/2 = n - 3$ skalare Higgs-Felder enthält. Da Letztere sich trivial unter Lorentztransformationen verhalten, erzwingt eine lorentzinvariante Lagrange-Dichte das Auftreten entgegengesetzter Chiralitätskomponenten

der Dirac-Spinoren im Yukawa-Operator. In Links-Rechts symmetrischen Modellen werden up- und down-artige Quarks einer Familie nach Chiralität getrennt in zwei Doublets zusammenfasst, welche sich in der definierenden Darstellung der zugehörigen $SU(2)_{L,R}$ transformieren. Somit ist ein allgemeiner Links-Rechts symmetrischer Yukawa-Operator mit Massendimension n durch

$$\bar{Q}_{L,i} \mathcal{O}^{(n-3)} Q_{R,j} \quad (5.45)$$

gegeben, wobei das Transformationsverhalten des Produktes aus $n - 3$ Higgs-Multipletts $\mathcal{O}^{(n-3)}$, gemäß dem Prinzip der Eichinvarianz, durch das der Quark-Doublets festlegt ist

$$\mathcal{O}^{(n-3)} \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} U_L \mathcal{O}^{(n-3)} U_R^\dagger \quad (5.46)$$

Der komplette skalare Teilcheninhalt des MLRM organisiert sich in drei Higgs-Multipletts, ein Bi-Doublett mit verschwindender $U(1)_{B-L}$ -Ladung und zwei Triplets, die sich nicht-trivial unter $U(1)_{B-L}$ - und in der Triplett-Darstellung jeweils einer $SU(2)_{L,R}$ -Gruppe transformieren

$$\begin{array}{llllll} \mathcal{G}_{LR} & & & & & \\ \Delta_L & \longrightarrow & e^{2i\varphi} & U_L & \Delta_L & U_L^\dagger & \text{L-Triplett} \\ \Phi & \longrightarrow & 1 & U_L & \Phi & U_R^\dagger & \text{Bi-Doublett} \\ \Delta_R & \longrightarrow & e^{2i\varphi} & U_R & \Delta_R & U_R^\dagger & \text{R-Triplett} \end{array} \quad (5.47)$$

Hinzu kommen noch die ladungskonjugierten Multipletts

$$\begin{aligned} \Delta_L^c &= \sigma^2 \Delta_L^* \sigma^2 = -\Delta_L^\dagger \\ \Phi^c &= \sigma^2 \Phi^* \sigma^2 \\ \Delta_R^c &= \sigma^2 \Delta_R^* \sigma^2 = -\Delta_R^\dagger \end{aligned} \quad (5.48)$$

die sich bezüglich $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Transformationen wie ihre unkonjugierten Partner verhalten, aber die entgegengesetzte $U(1)_{B-L}$ -Ladung tragen.

Beginnend mit $n = 4$, der kleinstmöglichen Massendimension für einen Vertex mit zwei Quark-Feldern und mindestens einem Higgs-Feld, ergibt sich aus dem für einen LR-symmetrischen Yukawa-Operator notwendigen Transformationsverhalten (5.46)

$$\mathcal{O}^{(1)} \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} U_L \mathcal{O}^{(1)} U_R^\dagger \quad (5.49)$$

Die, durch $(4 - 3) = (1)$ bezeichnete, Massendimension der gesuchten Higgs-Einsetzung zeigt, dass $\mathcal{O}^{(1)}$ nur ein Higgs-Multiplett enthält. Aus der Liste aller Higgs-Multipletts im MLRM (5.47) kommen somit lediglich das Bi-Doublett Φ und das zugehörige konjugierte Bi-Doublett Φ^c für $\mathcal{O}^{(1)}$ in Frage und die Gesamtheit dieser Möglichkeiten konstituiert den allgemeinsten, renormierbaren Quark Yukawa-Sektor des MLRM (1.41).

Für die nächstfolgende Massendimension 5 müsste es sich bei $\mathcal{O}^{(5-3)}$ um ein Produkt aus zwei Higgs-Multipletts handeln. Allerdings ist es unmöglich, aus zwei Elementen der Liste (5.47), oder deren Ladungskonjugierten, einen Operator mit der Eigenschaft (5.46) zu konstruieren: Die $U(1)_{B-L}$ -Eichinvarianz erzwingt, dass entweder beide Faktoren in $\mathcal{O}^{(2)}$ eine nicht-verschwindende $U(1)_{B-L}$ -Ladung tragen, oder keiner. Demnach kommen gemischte Produkte aus einem Bi-Doublet und einem Triplet nicht in Frage. Für alle verbleibenden Möglichkeiten führt eine $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Eichtransformation auf Terme, in denen die zugehörigen Transformationsmatrizen $U_{L,R} \in SU(2)_{L,R}$ jeweils in gerader Anzahl auftreten. Laut dem gewünschten Transformationsverhalten (5.46), soll der aus einer Eichtransformation resultierende Ausdruck nur jeweils eine Matrix U_L und U_R^\dagger enthalten. Dann müsste sich eine jeweils ungerade Anzahl an verbleibenden U_L - und U_R -Matrizen separat zur Einheitsmatrix kombinieren, was aber, wegen $U^\dagger U = 1$, immer nur paarweise möglich ist. Somit gibt es keine Möglichkeit aus den Higgs-Freiheitsgraden (5.47) einen Operator $\mathcal{O}^{(2)}$ zu konstruieren und daher für ein effektives Modell mit dem MLRM als Niederenergie-theorie keinen (Quark-)Yukawa-Operator mit Massendimension 5.

Für Massendimension 6 enthält $\mathcal{O}^{(6-3)}$ drei Higgs-Multipletts, von denen entweder keines oder genau zwei eine nicht-verschwindende $U(1)_{B-L}$ -Ladung besitzen müssen, um einen eichinvarianten Operator konstruieren zu können. Damit kommt nur in Frage, dass $\mathcal{O}^{(3)}$ aus drei Bi-Doublet-Faktoren oder einem Bi-Doublet-Faktor und zwei Triplets besteht, wobei letzteres sich wiederum auf drei unterschiedliche Kombinationen von Triplets aufteilen lässt. In (5.50) sind alle Möglichkeiten $\mathcal{O}^{(3)}$ zu konstruieren nach diesen Unterscheidungskriterien tabelliert.

# Δ_L	# Φ	# Δ_R	$\mathcal{O}^{(6-3)}$
2	1	0	$\Delta_L \Delta_L^\dagger \Phi, \Delta_L \Delta_L^\dagger \Phi^c, \Delta_L^\dagger \Delta_L \Phi, \Delta_L^\dagger \Delta_L \Phi^c$
1	1	1	$\Delta_L \Phi \Delta_R^\dagger, \Delta_L \Phi^c \Delta_R^\dagger, \Delta_L^\dagger \Phi \Delta_R, \Delta_L^\dagger \Phi^c \Delta_R$
0	3	0	$\Phi \Phi^\dagger \Phi,$ $\Phi^c \Phi^\dagger \Phi, \Phi \Phi^{c\dagger} \Phi, \Phi \Phi^\dagger \Phi^c,$ $\Phi^c \Phi^{c\dagger} \Phi, \Phi \Phi^{c\dagger} \Phi^c, \Phi^c \Phi^\dagger \Phi^c,$ $\Phi^c \Phi^{c\dagger} \Phi^c$
0	1	2	$\Phi \Delta_R \Delta_R^\dagger, \Phi^c \Delta_R \Delta_R^\dagger, \Phi \Delta_R^\dagger \Delta_R, \Phi^c \Delta_R^\dagger \Delta_R$

(5.50)

Die dort verwendete Einteilung gibt Aufschluss über die unterschiedlichen Beiträge der Operatoren zur Quark-Massenmatrix. Diese Unterschiede rühren aus der Hierarchie der VEVs her, die die Brechkette der Eichsymmetrie für die verschiedenen Higgs-Multipletts impliziert.

5.3.1 Höhere Massendimensionen

Dass es keinen eichinvarianten Yukawa-Operator mit Massendimension 5 im Quark Yukawa-Sektor des MLRM gibt, konnte soeben alleine anhand der Anzahl an Bi-Doublets und Triplets gezeigt werden, die im entsprechenden Higgs-Produkt $\mathcal{O}^{(2)}$ auftreten. Diese Argumentation lässt sich leicht auf den Fall beliebiger Massendimension n übertragen, wodurch im Folgenden bewiesen wird, dass der Quark Yukawa-Sektor des MLRM allgemein keinen Yukawa-Operator mit ungerader Massendimension enthält.

Ein allgemeiner (Quark-)Yukawa-Operator mit Massendimension n hat die Form (5.45), wobei $\mathcal{O}^{(n-3)}$ für ein beliebiges Produkt aus $(n-3)$ Higgs-Multipletts (5.47) und ihrer Ladungskonjugierten steht. Unter Außerachtlassung der nicht-abelschen Struktur der Eichtheorie, lässt sich ein solches Produkt in der generischen Form

$$\mathcal{O}^{(n-3)} = \Delta_L^l \Phi^b \Delta_R^r \quad \text{mit } n-3 = l+b+r \quad (5.51)$$

schreiben, wobei l, b, r jeweils für die Gesamtanzahl der entsprechenden Multipletts stehen, z.B.

$$\Delta_L \Phi^c \Delta_R^\dagger \Phi^\dagger \Phi \Delta_R^\dagger \Delta_R \sim \Delta_L^1 \Phi^3 \Delta_R^3 \quad (5.52)$$

Vergleicht man das zugehörige, generische Transformationsverhalten

$$\Delta_L^l \Phi^b \Delta_R^r \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} (e^{2i\varphi})^{l+r} (U_L)^{2l+b} (U_R)^{2r+b} \Delta_L^l \Phi^b \Delta_R^r \quad (5.53)$$

mit dem des in (5.46) geforderten

$$\mathcal{O}^{(n-3)} \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} (e^{2i\varphi})^0 (U_L)^1 (U_R)^1 \mathcal{O}^{(n-3)} \quad (5.54)$$

erkennt man, dass sich die $U(1)_{B-L}$ -Faktoren gegenseitig aufheben müssen. Für diese Aufhebung müssen notwendigerweise genau so viele Faktoren $e^{2i\varphi}$, wie inverse Faktoren $e^{-2i\varphi}$ im transformierten Ausdruck (5.53) auftreten. Da die generischen Indizes l, b, r nicht zwischen konjugierten und nicht-konjugierten Größen unterscheiden, gibt der Exponent $l+r$ die gemeinsame Anzahl an Faktoren $e^{2i\varphi}$ und inversen Faktoren $e^{-2i\varphi}$ an, die für eine komplette Aufhebung dann notwendigerweise gerade sein muss. Analog muss die gemeinsame Anzahl an U_L - und U_L^\dagger - (bzw. U_R - und U_R^\dagger -) Matrizen ungerade sein, damit sich, wie in (5.53) gefordert, bis auf eine Matrix $U_L(U_R^\dagger)$ alle weiteren gegenseitig aufheben. Insgesamt ergeben sich als notwendige Bedingungen für die generischen Indizes

$$\begin{aligned} l+r \quad \text{mod } 2 &= 0 \\ 2l+b \quad \text{mod } 2 &= 1 \\ 2r+b \quad \text{mod } 2 &= 1 \end{aligned} \quad (5.55)$$

Wie in (5.51) angegeben, lautet die Massendimension des Higgs-Produkts $\mathcal{O}^{(n-3)}$

$$\left[\mathcal{O}^{(n-3)} \right] = \left[\Delta_L^l \Phi^b \Delta_R^r \right] = l + b + r \quad (5.56)$$

wobei n für die Massendimension des zugehörigen Yukawa-Operators (5.45) steht

$$n = \left[\overline{Q}_{L,i} \mathcal{O}^{(n-3)} Q_{R,j} \right] = l + b + r + 2 \cdot \frac{3}{2} \quad (5.57)$$

Unter Verwendung von (5.55) folgt demnach

$$n \bmod 2 = 0 \quad (5.58)$$

was beweist, dass alle effektiven, eichinvarianten Operatoren im Quark Yukawa-Sektor des MLRM eine gerade Massendimension aufweisen.

Die Folgerung der Massendimension des Yukawa-Operators ergibt sich aus den notwendigen Bedingungen (5.55) für die Anzahl der Bidoublets(b) und Triplets(l, r) im entsprechenden Higgs-Produkt (5.51). Durch explizite Konstruktion überzeugt man sich desweiteren, dass es zu jeder erlaubten Kombination (l, b, r) auch mindestens einen entsprechenden Yukawa-Operator mit Massendimension $n = l + b + r + 3$ gibt: Die erste Bedingung, die sich aus (5.55) ergibt, besagt dass die Gesamtanzahl der Bidoublets b immer ungerade ist. Somit lässt sich das Produkt

$$\Phi \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^{\frac{b-1}{2}} \xrightarrow{\mathcal{G}_{LR}} U_L \Phi U_R^\dagger \left(U_R \Phi^\dagger U_L^\dagger U_L \Phi U_R^\dagger \right)^{\frac{b-1}{2}} = U_L \Phi \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^{\frac{b-1}{2}} U_R^\dagger \quad (5.59)$$

bilden, welches bereits das korrekte Bi-Doublet Transformationsverhalten (5.46) besitzt. Desweiteren stellt (5.55) sicher, dass die Gesamtanzahl der L- und R-Triplets $l + r$ stets gerade ist, sodass die individuellen Beiträge l und r entweder beide gerade oder beide ungerade sind. Die Wahl

$$\mathcal{O}^{(n-3)} = \begin{cases} \left(\Delta_L^\dagger \Delta_L \right)^{\frac{l}{2}} \Phi \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^{\frac{b-1}{2}} \left(\Delta_R^\dagger \Delta_R \right)^{\frac{r}{2}} & l \text{ und } r \text{ gerade} \\ \Delta_L \left(\Delta_L^\dagger \Delta_L \right)^{\frac{l-1}{2}} \Phi \left(\Phi^\dagger \Phi \right)^{\frac{b-1}{2}} \left(\Delta_R^\dagger \Delta_R \right)^{\frac{r-1}{2}} \Delta_R^\dagger & l \text{ und } r \text{ ungerade} \end{cases} \quad (5.60)$$

weist dann das erforderliche Transformationsverhalten (5.46) auf, um einen eichinvarianten Yukawa-Operator (5.45) mit Massendimension $n = l + b + r + 3$ (5.57) zu konstruieren. Dies beweist, dass es zu jeder Anzahl an Bidoublets b und Triplets l, r die (5.55) erfüllen, einen Yukawa-Operator im Quark Yukawa-Sektor des MLRM gibt.

In Tabelle (5.50) sind alle solchen Higgs-Produkte $\mathcal{O}^{(n-3)}$ für einen Yukawa-Operator mit Massendimension $n = 6$ angegeben. Die Unterteilung dieser in 4 Zeilen entspricht dabei genau den 4 von (5.55) erlaubten Kombinationen (l, b, r) mit $n = l + b + r + 3 = 6$. Die Unterdrückung effektiver Kopplungen durch inverse Potenzen der NP-Skala Λ^{4-n}

hängt nur von der Massendimension des entsprechenden Operators n ab und ist daher für alle Einträge der Tabelle gleich. Die entsprechenden Beiträge zur Quarkmassenmatrix, die nur die VEVs der Higgs-Multipletts involvieren, unterscheiden sich im Gegensatz dazu von Zeile zu Zeile. Der Grund hierfür liegt in der, durch die Brechungskette der Eichsymmetrie

$$\mathcal{G}_{LR} \xrightarrow{\langle \Delta_R \rangle} \mathcal{G}_{SM} \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} \mathcal{G}_{e.m.} \quad (5.61)$$

motivierten Hierarchie der Higgs-Multiplett VEVs

$$\begin{array}{ccc} \langle \Delta_L \rangle & \langle \Phi \rangle & \langle \Delta_R \rangle \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ v_L & \ll k & \ll v_R \end{array} \quad (5.62)$$

denn diese führt dazu, dass die Beiträge unterschiedlicher $\mathcal{O}^{(n-3)}$ zur Quarkmassenmatrix für feste Massendimension n unterschiedlich stark unterdrückt sind. Die Stärke dieser Unterdrückung hängt dabei von der Higgs-Zusammensetzung (l, b, r) von $\mathcal{O}^{(n-3)}$ ab, die die Zeilen von Tabelle (5.50), bzw. deren Verallgemeinerung, unterscheiden. Für die VEVs der Higgs-Produkte in Tabelle (5.50) gilt

# Δ_L	# Φ	# Δ_R	$\langle \mathcal{O}^{(6-3)} \rangle$
2	1	0	$k\Lambda^2 \mathcal{O}(v_L^2/\Lambda^2)$
1	1	1	$k\Lambda^2 \mathcal{O}(v_L v_R/\Lambda^2)$
0	3	0	$k\Lambda^2 \mathcal{O}(k^2/\Lambda^2)$
0	1	2	$k\Lambda^2 \mathcal{O}(v_R^2/\Lambda^2)$

(5.63)

woraus sich, durch die Hinzunahme der Yukawa-Operatoren (5.45) von Massendimension 6 zur Lagrange-Dichte des MLRM, in einer Entwicklung der Quark Massenmatrizen in Λ^{4-n} folgende Beiträge mit allgemeinen Koeffizienten ergeben

$$M_{\text{eff}}^{u,d} = kY_{MLRM}^{u,d} + k\frac{v_R^2}{\Lambda^2}Y_{(0,1,2)}^{u,d} + k\frac{k^2}{\Lambda^2}Y_{(0,3,0)}^{u,d} + k\frac{v_L v_R}{\Lambda^2}Y_{(1,1,1)}^{u,d} + k\frac{v_L^2}{\Lambda^2}Y_{(2,1,0)}^{u,d} + k\mathcal{O}(\Lambda^{-4}) \quad (5.64)$$

Die führende Korrektur zu den Massenmatrizen des MLRM, $kY_{MLRM}^{u,d}$, das heißt der Beitrag mit der geringsten Unterdrückung durch die VEV-Hierarchie (5.62), ist durch die effektiven Yukawa-Kopplungen mit den Higgs-Produkten $\mathcal{O}^{(6-3)}$ in der letzten Zeile von Tabelle (5.50) gegeben. Diese sind vom $(0, 1, 2)$ -Typ, enthalten also ein Bi-Doublet und zwei R-Triplets. Folglich werden die zugehörigen Yukawa-Matrizen, die in $Y_{(0,1,2)}^{u,d}$ zusammengefasst sind, in (5.64) gegenüber dem MLRM Beitrag zur Massenmatrix mit einem Faktor v_R^2/Λ^2 unterdrückt. Unter Verwendung der Hierarchie (5.62) zeigt man leicht, dass dies, im Vergleich mit den übrigen Unterdrückungsfaktoren eines Dimension

6 Yukawa-Operators in (5.63), den größten Beitrag liefert

$$\begin{array}{cccc} (2, 1, 0) & (1, 1, 1) & (0, 3, 0) & (0, 1, 2) \\ \hline v_L^2/\Lambda^2 & \ll & v_L v_R/\Lambda^2 & \ll & v_R^2/\Lambda^2 \\ v_L^2/\Lambda^2 & \ll & k^2/\Lambda^2 & \ll & v_R^2/\Lambda^2 \end{array} \quad (5.65)$$

Der entsprechend kleinste Beitrag ergibt sich für Higgs-Produkte in der ersten Zeilen von Tabelle (5.50). Deren VEV multipliziert die zugehörigen, in (5.64) zu $Y_{(2,1,0)}^{u,d}$ zusammengefassten, Yukawa-Matrizen laut (5.65) mit dem stärksten Unterdrückungsfaktor. Für die beiden dazwischen liegenden Beiträge in der zweiten und dritten Zeile von (5.63) hängt die relative Stärke von der genauen Form des Higgs-Potenzials ab. Das Verhältnis der beiden Unterdrückungsfaktoren

$$\frac{(1, 1, 1)}{(0, 3, 0)} \sim \frac{v_L v_R/\Lambda^2}{k^2/\Lambda^2} = \frac{v_L}{k} \left(\frac{k}{v_R} \right)^{-1} \quad (5.66)$$

kann sowohl größer als auch kleiner 1 sein, ohne die allgemeine Implikation (5.62) aus der Symmetrie-Brechungskette (5.61) zu verletzen. Für zwei beispielhafte Größenordnungen der Verhältnisse v_L/k und k/v_R , die für $\epsilon \ll 1$ mit der Brechungskette (5.61) kompatibel sind, erhält man unterschiedliche Hierarchien

- $v_L/k \sim \epsilon^2, k/v_R \sim \epsilon$

$$\Rightarrow \frac{v_L}{k} \left(\frac{k}{v_R} \right)^{-1} \sim \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \epsilon \ll 1 \quad (5.67)$$

- $v_L/k \sim \epsilon, k/v_R \sim \epsilon^2$

$$\Rightarrow \frac{v_L}{k} \left(\frac{k}{v_R} \right)^{-1} \sim \frac{\epsilon}{\epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon} \gg 1 \quad (5.68)$$

zwischen den Beiträgen der Typen (1, 1, 1) und (0, 3, 0). Diese Abhängigkeit vom Higgs-Potenzial, dessen Minima die genauen Werte der VEVs festlegen, ist in Tabelle (5.50) durch die gestrichelte Linie zwischen der zweiten und dritten Zeile angedeutet.

Für eine beliebige Massendimension n stellt die Bedingung $b \bmod 2 = 1$, die aus (5.55) folgt, sicher, dass jeder höherdimensionale Yukawa-Operator aus MLRM Freiheitsgraden mindestens ein Bidoublett enthält. Der Beitrag eines solchen Yukawa-Operators zur Entwicklung der Massenmatrizen in effektiven Beiträgen (5.64) ist dann immer proportional zur Skala der elektro-schwachen Symmetriebrechung k . Dies ist wenig überraschend, da das Bidoublett das einzige Symmetriemultipllett im MLRM ist, dass sich gleichzeitig nicht-trivial bezüglich $SU(2)_L$ und $SU(2)_R$ transformiert und somit links- und rechts-händige Quarkdoubletts auf eichinvariante Weise miteinander koppeln kann. Für den

allgemeinen Fall des Higgs-Produktes $\mathcal{O}^{(n-3)}$ in (5.46), welches das selbe Transformationsverhalten wie das Bidoublett aufweist, muss dementsprechend auch an mindestens einer Stelle ein Bidoublett auftauchen, da nur dieses unter Eichtransformationen eine ungerade Anzahl an Transformationsmatrizen $U_L \in SU(2)_L$ und $U_R \in SU(2)_R$ in $\mathcal{O}^{(n-3)}$ einführen kann. Für eine beliebig, fest gewählte Massendimension n , ist der entsprechende Beitrag zur Quarkmassenmatrix mit Λ^{4-n} unterdrückt und die Entwicklung des zugehörigen Koeffizienten im Skalenverhältnis der VEVs (5.62) ergibt zur jeweils führenden Ordnung

$$M_{\text{eff}}^{u,d} \Big|_{n,\text{LO}} = \begin{cases} k \left(\frac{v_R}{\Lambda}\right)^{n-4} Y_{(0,1,n-4)}^{u,d} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.69)$$

Dies zeigt, dass das Auftreten des Unterdrückungsfaktors $(v_R/\Lambda)^2$ in Abschätzung (5.42) in dem Sinne eine Konsequenz der Eichsymmetrie ist, dass die Hinzunahme sämtlicher, aus den Freiheitsgraden des MLRM konstruierbaren Yukawa-Operatoren, die Quarkmassenmatrizen in führender Ordnung um $k\mathcal{O}(v_R^2/\Lambda^2)$ -Terme korrigieren und dieses powercounting durch die für Eichinvarianz notwendigen Bedingungen (5.55) und die durch die Symmetriebrechungskette (5.61) motivierte Skalenhierarchie (5.62) festgelegt sind.

5.4 Unterdrückte Flavorverletzung im effektiven Δ -Modell

In diesem Abschnitt soll das in Abschnitt 5.2 entwickelte effektive Δ Modell im Hinblick auf die enthaltenen Yukawa-Matrizen untersucht werden. Es zeigt sich, dass die Implementierung einer nicht-trivialen Flavorstruktur durch effektive $\Delta \vec{F} \neq 0$ -Terme zu zusätzlichen flavorverletzenden Kopplungen führt, das Flavorproblem also auch im effektiven Δ Modell nicht exakt gelöst ist. Im Gegensatz zum MLRM, kann der Beitrag der $\Delta \vec{F}$ -Terme zu flavorverletzenden Kopplungen jedoch stärker unterdrückt sein als die zugehörigen-Beiträge zu den Quarkmassenmatrizen.

Erweitert man den Quark Yukawa-Sektor des MLRM um sämtliche Operatoren vom Typ (0, 1, 2) in Tabelle (5.50), ergibt sich

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y = & \bar{Q}_L F \Phi Q_R + \bar{Q}_L \tilde{F} \Phi^c Q_R \\ & + \frac{1}{\Lambda^2} \left[\bar{Q}_L G_d \Phi \Delta_R \Delta_R^\dagger Q_R + \bar{Q}_L G_u \Phi \Delta_R^\dagger \Delta_R Q_R \right. \\ & \quad \left. + \bar{Q}_L \tilde{G}_d \Phi^c \Delta_R \Delta_R^\dagger Q_R + \bar{Q}_L \tilde{G}_u \Phi^c \Delta_R^\dagger \Delta_R Q_R \right] \\ & + h.c. \end{aligned} \quad (5.70)$$

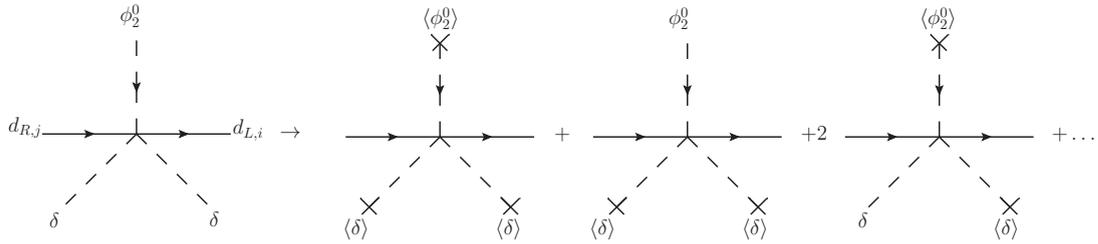


ABBILDUNG 5.2: Entwicklung höherdimensionaler Operatoren in Yukawa-Kopplungen

mit 6, a priori beliebigen, Kopplungsmatrizen $F, \tilde{F}, G_{u,d}, \tilde{G}_{u,d}$ im Flavorraum. Die lokale Eichsymmetrie des Modells lässt sich ausnutzen, um den Higgs-Inhalt dieser Lagrange-Dichte zu vereinfachen. Durch eine entsprechende Eichtransformation lässt sich im Bi-doublett Φ und im R-Triplett Δ_R jeweils eine reelle, neutrale Feldkomponente eliminieren, sodass in ersterem nur noch drei reelle (bzw. eine reelle und eine komplexe) und in zweiterem nur noch eine reelle, elektrisch neutrale Komponente auftritt. Insgesamt enthält der angegebene Yukawa-Sektor also Kopplungen an 4 elektrisch neutrale, reelle Higgs-Felder, die sich dementsprechend zu 4 physikalischen Higgs Masseneigenzuständen kombinieren. Um die zu diesen 4 Higgs-Bosonen gehörigen Yukawa-Kopplungen an die Quarkfelder zu bestimmen, müssen die Dimension 6 Operatoren in (5.70) in einem ersten Schritt um ihre Vakuumerwartungswerte entwickelt werden, da hierbei für Produkte neutraler Higgs-Felder, im Gegensatz zu einem einzelnen Higgs-Feld, neben Beiträgen zur Quarkmassenmatrix zusätzliche Kopplungen auftreten. Für den ersten Term in der eckigen Klammer in (5.70) ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Lambda^2} \bar{Q}_L G_d \Phi \Delta_R \Delta_R^\dagger Q_R &\xrightarrow{\langle \cdot \rangle^+} \frac{1}{\Lambda^2} \bar{Q}_L G_d \langle \Phi \rangle \langle \Delta_R \rangle \langle \Delta_R^\dagger \rangle Q_R \\
 &+ \frac{1}{\Lambda^2} \bar{Q}_L G_d \Phi \langle \Delta_R \rangle \langle \Delta_R^\dagger \rangle Q_R \\
 &+ \frac{1}{\Lambda^2} \bar{Q}_L G_d \langle \Phi \rangle \Delta_R \langle \Delta_R^\dagger \rangle Q_R \\
 &+ \frac{1}{\Lambda^2} \bar{Q}_L G_d \langle \Phi \rangle \langle \Delta_R \rangle \Delta_R^\dagger Q_R \\
 &+ \dots
 \end{aligned} \tag{5.71}$$

Neben dem Beitrag zur Quarkmassenmatrix in der ersten Zeile, der durch die Kopplung aller Higgs-Felder an ihre VEVs charakterisiert ist, ergeben sich in der zweiten bis vierten Zeile Yukawa-Kopplungen, wenn jeweils 2 der Higgs-Felder an ihren VEV koppeln und das dritte als dynamischer Freiheitsgrad in der Kopplung verbleibt. Alle weiteren Terme enthalten Kopplungen an mehr als ein Higgs-Boson und sind damit für die Betrachtung von FCNC Prozessen auf tree-level uninteressant. Der Beitrag zur down-Quarkmassenmatrix und die relevanten Yukawa-Kopplungen die sich aus (5.71) ergeben, sind in Abbildung 5.2 durch Feynman-Diagramme dargestellt. Leitet man die zugehörigen Feynman-Regeln ab, erkennt man direkt, dass alle Terme die sich durch die Entwicklung der Higgs-Felder um ihre VEVs aus dem Term auf der linken Seite

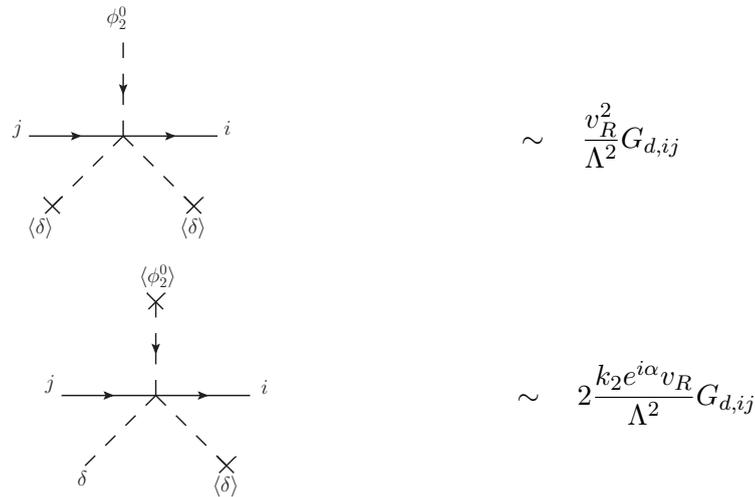


ABBILDUNG 5.3: Feynman-Regeln effektiver Yukawa-Kopplungen

in (5.71) ergeben, proportional zur selben Flavormatrix $G_{d,ij}$ sind. Je nachdem welche Higgs-Felder an ihren VEV koppeln, wird diese Matrix aber mit unterschiedlichen Faktoren multipliziert, wie aus den zugehörigen Vertexregeln in Abbildung 5.3 klar wird. Die Terme in (5.71) in denen alle Higgs-Tripletts durch ihre VEVs ersetzt sind, wurden bereits in Abschnitt 5.2 diskutiert. Wie dort gezeigt, ergeben sich aus ihnen Beiträge zu den Massentermen und Yukawa-Kopplungen down-artiger Quarks. Mit den Projektionsmatrizen

$$P_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

lässt sich der VEV des R-Tripletts als $\langle \Delta_R \rangle \langle \Delta_R^\dagger \rangle = v_R^2 P_d$ schreiben. Hierdurch ist begründet, warum sich aus (5.71) keine entsprechenden Beiträge zum up-Sektor ergeben. Für den zweiten Operator in der eckigen Klammer in (5.70) gilt $\langle \Delta_R^\dagger \rangle \langle \Delta_R \rangle = v_R^2 P_u$, sodass dieser umgekehrt zum Ersten nur einen Beitrag zum up-, nicht aber zum down-Sektor liefert. Diese Überlegung war die ursprüngliche Motivation bei der Entwicklung des effektiven Δ -Modells in Abschnitt 5.2, da auf diese Weise dem up- und down-Sektor unterschiedliche, linear unabhängige Kopplungsmatrizen hinzugefügt werden können. Zu den ursprünglichen, eichinvarianten Kopplungsmatrizen F, \tilde{F} ergeben sich explizit folgende Korrekturen

$$- \mathcal{L}_Y \supset \bar{Q}_L \Phi \left(F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} [G_u P_u + G_d P_d] \right) Q_R + \bar{Q}_L \Phi^c \left(\tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} [\tilde{G}_u P_u + \tilde{G}_d P_d] \right) Q_R \quad (5.73)$$

Die Matrizen F, \tilde{F} tragen dabei gleichermaßen zum up- und down-Sektor bei, was sich mit Hilfe der Projektionsmatrizen durch

$$F \rightarrow F [P_u + P_d], \quad \tilde{F} \rightarrow \tilde{F} [P_u + P_d] \quad (5.74)$$

darstellen lässt. Da die neutralen Higgs-Felder des Bidoublets $\phi_{1,2}^0$ in der Fortsetzung dieser Logik durch

$$\begin{aligned}\Phi|_{\text{el.neutr.}} &= \phi_1^0 P_u + \phi_2^0 P_d \\ \Phi^c|_{\text{el.neutr.}} &= \phi_2^{0*} P_u + \phi_1^{0*} P_d\end{aligned}\quad (5.75)$$

gegeben sind, lassen sich die Massenterme in (5.70) direkt angeben. Hierzu muss in (5.73) lediglich (5.75) eingesetzt und die Ersetzungen $\phi_1^0 \rightarrow k_1$, $\phi_2^0 \rightarrow k_2 e^{i\alpha}$ vorgenommen werden. Man findet

$$\begin{aligned}& (k_1 P_u + k_2 e^{i\alpha} P_d) \left(F [P_u + P_d] + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} [G_u P_u + G_d P_d] \right) \\ & + (k_2 e^{-i\alpha} P_u + k_1 P_d) \left(\tilde{F} [P_u + P_d] + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} [\tilde{G}_u P_u + \tilde{G}_d P_d] \right) \\ & = \left(k_1 F + k_2 e^{-i\alpha} \tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} [k_1 G_u + k_2 e^{-i\alpha} \tilde{G}_u] \right) P_u \\ & \quad + \left(k_2 e^{i\alpha} F + k_1 \tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} [k_2 e^{i\alpha} G_d + k_1 \tilde{G}_d] \right) P_d\end{aligned}\quad (5.76)$$

woraus man die Quarkmassenmatrizen im up- und down-Sektor als Koeffizienten der entsprechenden Projektoren ablesen kann

$$\begin{aligned}M^u &= k_1 \begin{bmatrix} F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} G_u \\ F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} G_d \end{bmatrix} + k_2 e^{-i\alpha} \begin{bmatrix} \tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \tilde{G}_u \\ \tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \tilde{G}_d \end{bmatrix} \\ M^d &= k_2 e^{i\alpha} \begin{bmatrix} F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} G_u \\ F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} G_d \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} \tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \tilde{G}_u \\ \tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \tilde{G}_d \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.77)$$

Die Ursache für die problematischen Verschränkungsrelationen im MLRM liegt in der Tatsache, dass die Massenmatrizen im up- und down-Sektor durch die selben eichinvarianten Kopplungsmatrizen F, \tilde{F} gegeben sind und daher die Masseneigenbasen der physikalischen up- und down-Quarks nicht unabhängig voneinander definiert werden können. Aus (5.77) ist aber zu erkennen, dass die Erweiterung des Yukawa-Sektors gemäß (5.70) jeden Summanden der ursprünglichen Verschränkungsrelation um einen unabhängigen Korrekturterm ergänzt.

Um deutlich zu machen, wie diese Korrekturterme, zumindest prinzipiell, zu einer unabhängigen Definition der up- und down-artigen Massenbasis führen, soll ungeachtet irgendwelcher Einschränkungen an die Größenordnung der freien Parameter $G_{u,d}, \tilde{G}_{u,d}$ in (5.77) die Ersetzung

$$\begin{aligned}G_u &\rightarrow \frac{\Lambda^2}{v_R^2} (F_u - F), & \tilde{G}_u &\rightarrow \frac{\Lambda^2}{v_R^2} (\tilde{F}_u - \tilde{F}) \\ G_d &\rightarrow \frac{\Lambda^2}{v_R^2} (F_d - F), & \tilde{G}_d &\rightarrow \frac{\Lambda^2}{v_R^2} (\tilde{F}_d - \tilde{F})\end{aligned}\quad (5.78)$$

durchgeführt werden. Hierdurch ergeben sich in (5.77) Quarkmassenmatrizen $M^{u,d}$, die durch die linear unabhängigen Matrizen F_u, \tilde{F}_u und F_d, \tilde{F}_d bestimmt und somit nicht mehr verschränkt sind. Allerdings wird im Folgenden gezeigt, wie die im Allgemeinen nicht-perturbative Wahl (5.78) die Verschränkung der Yukawa-Matrizen in andere Kopplungen transferiert. Zunächst sei aber noch bemerkt, dass die Perturbativitätsforderung

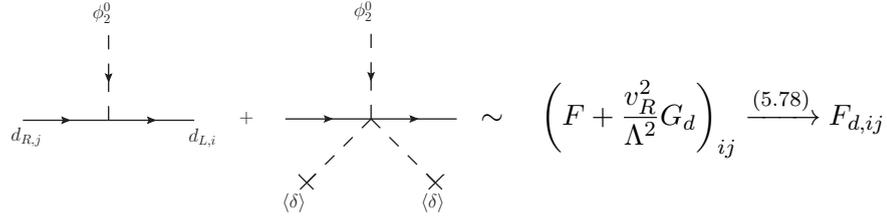


ABBILDUNG 5.4: Effektive Beiträge zum Yukawa-Vertex

$G_{u,d}, \tilde{G}_{u,d} \lesssim \mathcal{O}(1)$ die Differenzen der Matrizen in (5.78) auf

$$(F_u - F), (F_d - F), (\tilde{F}_u - \tilde{F}), (\tilde{F}_d - \tilde{F}) \lesssim \mathcal{O}(v_R^2/\Lambda^2) \quad (5.79)$$

einschränkt, sodass der Unterschied in der Definition der Massenbasis der up- und downartigen Quarks ebenfalls von dieser Größenordnung sein sollte. Dieses Resultat deckt sich mit der Aussage von (5.40) in Abschnitt 5.2.

Auf dem diagrammatischen Level kann man die Ersetzung bzw. Umparametrisierung der Yukawa-Matrizen (5.78) so verstehen, als dass sich aus der Entwicklung in Abbildung 5.2 ein zusätzlicher Yukawa-Vertex ergibt, der eine Komponente des MLRM Bi-Doublets an die Quarkfelder koppelt. Da dieser eine vom zugehörigen Vertex im MLRM unabhängige Kopplungsmatrix aufweist, ist die Summe der beiden Vertices in Abbildung 5.4, zumindest im Rahmen der Perturbativitätseinschränkung (5.79), von den Verschränkungsrelationen des MLRM unabhängig. Auch ohne diese Einschränkung, d.h. für komplett unabhängige Kopplungen der neutralen Bidoublett Komponenten ϕ_1^0, ϕ_2^0 im up- und down-Sektor, bleibt die Verschränkung der Yukawa-Kopplungen erhalten, wie man aus den Feynman-Regeln in Abbildung 5.3 erkennen kann. Der obere der dort angegebenen Vertices ist gerade der Korrekturterm zum $d-d-\phi_2^0$ -Vertex in Abbildung 5.4 und daher durch die Forderung nach Aufhebung der Verschränkung zwischen den Bidoublett Komponenten festgelegt. Der untere Vertex, der die neutrale R-Triplett Komponente δ mit den Quark-Feldern koppelt, involviert die selbe Kopplungsmatrix G_d wie der erste, da beide Vertices gemäß der Entwicklung in Abbildung 5.2 aus dem selben Dimension 6 Operator (5.71) stammen. Führt man die Ersetzung (5.78) konsistent an allen Stellen durch, an denen die entsprechenden Matrizen auftauchen, verschiebt sich der untere Vertex wie in Abbildung 5.5 gezeigt. Daher bewirkt die Verschiebung an dieser Stelle gerade das Gegenteil der ursprünglichen Motivation, die Yukawa-Kopplungen in up- und down-Sektor unabhängig zu machen, indem sie die Kopplungsmatrix F aus dem $d-d-\phi_2^0$ - in den $d-d-\delta$ -Vertex transportiert. Dass mit der Matrix F auch die Verschränkung erhalten bleibt wird klar, wenn man zusätzlich den $u-u-\delta$ -Vertex im up-Sektor betrachtet, der sich analog zu (5.71) aus der Entwicklung des zweiten Operators in der eckigen Klammer in (5.70) ergibt und in Abbildung 5.6 diagrammatisch dargestellt ist. Wie auch für den down-Sektor, führt die Verschiebung (5.78) im up-Sektor dazu, dass

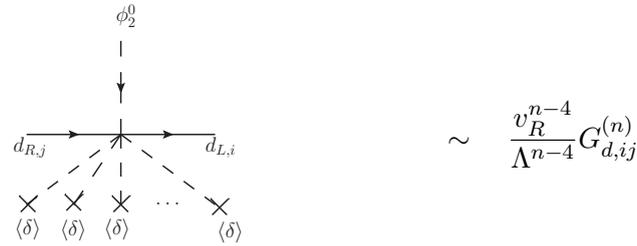
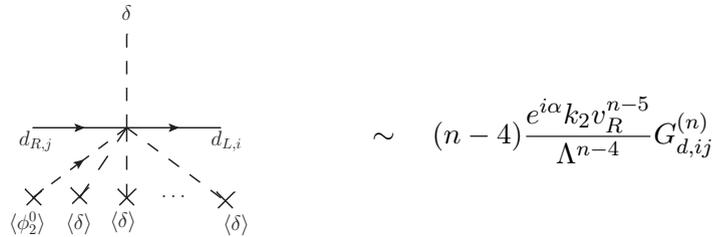
ABBILDUNG 5.5: Verschiebung der Yukawa-Kopplung der Triplet Komponente im down-Sektor

ABBILDUNG 5.6: Verschiebung der Yukawa-Kopplung der Triplet Komponente im up-Sektor

die Yukawa-Kopplung der Bidoublett-Komponente ϕ_1^0 an die up-Quarks zu dem Preis unabhängig von der Matrix F wird, als dass diese stattdessen in der Yukawa-Kopplung an die Triplet-Komponente δ auftaucht. Daher enthalten die Yukawa-Kopplungen von δ im down- (Abb. 5.5) und im up-Sektor (Abb. 5.6) die gleiche Matrix F , welche aber beim Übergang in die Masseneigenbasis der Quarks unterschiedlichen Transformationen unterworfen ist

$$\begin{array}{ccc}
 & & (V_u^\dagger F W_u)_{ij} \quad (\text{up-Sektor}) \\
 & \nearrow & \\
 F_{ij} & & \\
 & \searrow & \\
 & & (V_d^\dagger F W_d)_{ij} \quad (\text{down-Sektor})
 \end{array} \quad (5.80)$$

wobei der Unterschied in diesen Transformationen die physikalischen CKM-Matrizen $V_L = V_u^\dagger V_d$, $V_R = W_u^\dagger W_d$ (vgl. Abschnitt 3.3) definiert. Da eine solche Argumentation bereits für das MLRM in Abschnitt 1.2.1 die Ursache für das Flavorproblem dargestellt hat zeigt dies, inwiefern (5.78) die Yukawa-Verschrankung des MLRM in eine andere Kopplung verschiebt. Es ist bemerkenswert, dass diese Verschiebung, wie gerade beschrieben, das Flavorproblem zwar konzeptionell erhält, die verschrankten flavorverletzenden Kopplungen an die Triplet-Komponente δ aber im Gegensatz zu den Kopplungen an Bi-Doublett Komponenten $\phi_{1,2}^0$ mit einem zusätzlichen Unterdrückungsfaktor multipliziert werden, wie sich anhand der Abbildungen 5.4 und 5.5 nachverfolgen lässt. Die Ursache hierfür liegt in der in Abschnitt 5.3 diskutierten Hierarchie der VEVs: Da das R-Triplett δ mit $\langle \delta \rangle = v_R$ den größten VEV trägt, ergeben sich in der Entwicklung des Dimension 6 Operators (5.71) in Abbildung 5.2 die größten Beiträge zu den


 ABBILDUNG 5.7: Maximale Korrektur zur ϕ_2^0 -Yukawakopplung

 ABBILDUNG 5.8: Unterdrückter Beitrag zur δ -Yukawakopplung

Yukawa-Kopplungen, wenn die Unterdrückung durch inverse Potenzen der NP-Skala Λ^{-2} durch die maximale Potenz der Skala v_R abgemildert wird. Um das Problem nicht-perturbativer Kopplungen, die sich aus der Ersetzung (5.78) ergeben können, möglichst gering zu halten, ist diese minimale Unterdrückung der Koeffizienten erstrebenswert. Da die notwendigen Bedingungen (5.55) für einen eichinvarianten Yukawa-Operator von Massendimension n , wie er in Abschnitt 5.3 diskutiert wurde, sicherstellen, dass er mindestens ein Bidoublett Φ enthält, ist der größtmögliche Beitrag eines Yukawa-Operators von Massendimension n zur Yukawa-Kopplung einer Bidoublett-Komponente durch Abbildung 5.7 gegeben, in dem alle Komponenten der R-Triplets an ihre VEVs koppeln und damit die Unterdrückung durch Λ^{4-n} maximal abdämpfen. Im sich zusätzlich ergebenden Vertex in Abbildung 5.8, der die Kopplung der R-Triplett Komponente δ an die Quarkfelder beschreibt und in den die Ersetzung (5.78) die Yukawa-Verschrankung transportiert, muss die notwendigerweise auftretende Bidoublett-Komponente neben den restlichen δ -Feldern an ihren VEV koppeln, woraus sich eine stärkere Unterdrückung der Kopplung ergibt. Für den umgekehrten Fall der Kopplung eines Bidoubletts an L-Triplets, deren VEV unterhalb des elektroschwachen Skala liegt, würde sich umgekehrt eine maximale Unterdrückung der Korrekturen der Yukawa-Kopplungen der Bidoublett Komponenten und eine Verstärkung der verschränkten Beiträge in den Kopplungen an die L-Triplett Komponente δ_L ergeben. Im Folgenden wird explizit gezeigt, wie die Erweiterung der MLRM Lagrange-Dichte um alle Operatoren vom Typ $(0, 1, 2)$ in (5.70) es ermöglicht, die gesamte Flavorverletzung, die im MLRM durch die Verschrankung der Yukawa-Kopplungen der neutralen Bidoublett Komponenten verursacht wird, in effektive Yukawa-Kopplungen der neutralen Komponente δ des R-Triplets Δ_R zu verschieben.

Während die entsprechenden Diagramme eine Unterdrückung durch die Hierarchie der Symmetriebrechungsskalen erfahren, koppeln die neutralen Bidoublett-Komponenten $\phi_{1,2}^0$ im up- und down-Sektor unabhängig an die Quarkmasseneigenzustände, wodurch eine unabhängige Definition der up- und down-Massenbasen realisiert werden kann.

Eine unabhängige Definition der Quarkmassenbasis ergibt sich aus der Wahl

$$\begin{aligned} G_u &= \frac{\Lambda^2}{v_R^2} \begin{pmatrix} \cos \beta Y^u & - F \end{pmatrix} \\ \tilde{G}_u &= \frac{\Lambda^2}{v_R^2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \sin \beta Y^u & - \tilde{F} \end{pmatrix} \\ G_d &= \frac{\Lambda^2}{v_R^2} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} \sin \beta Y^d & - F \end{pmatrix} \\ \tilde{G}_d &= \frac{\Lambda^2}{v_R^2} \begin{pmatrix} \cos \beta Y^d & - \tilde{F} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.81)$$

der Kopplungsmatrizen in (5.70), wobei $Y^{u,d}$ in diesem Fall für Parametermatrizen stehen und der Winkel β über das Verhältnis der VEVs $\tan \beta = k_2/k_1$ definiert ist (vgl. (1.39)). Durch Einsetzen in die Ausdrücke für die Massenmatrizen (5.77) überzeugt man sich, dass die up-

$$\begin{aligned} M^u &= k_1 \left[F + \frac{v_R^2 \Lambda^2}{\Lambda^2 v_R^2} (\cos \beta Y^u - F) \right] + k_2 e^{-i\alpha} \left[\tilde{F} + \frac{v_R^2 \Lambda^2}{\Lambda^2 v_R^2} (e^{i\alpha} \sin \beta Y^u - \tilde{F}) \right] \\ &= k (\cos^2 \beta Y^u + \sin^2 \beta Y^u) \\ &= k Y^u \end{aligned} \quad (5.82)$$

und down-Massenbasis

$$\begin{aligned} M^d &= k_2 e^{i\alpha} \left[F + \frac{v_R^2 \Lambda^2}{\Lambda^2 v_R^2} (e^{-i\alpha} \sin \beta Y^d - F) \right] + k_1 \left[\tilde{F} + \frac{v_R^2 \Lambda^2}{\Lambda^2 v_R^2} (\cos \beta Y^d - \tilde{F}) \right] \\ &= k (\sin^2 \beta Y^d + \cos^2 \beta Y^d) \\ &= k Y^d \end{aligned} \quad (5.83)$$

dann durch die unabhängigen Parameter $Y^{u,d}$ definiert sind. Hierbei ist zu beachten, dass die Unabhängigkeit dieser Parameter und damit auch die Unabhängigkeit in der Definition der up- und down-Massenbasen im Allgemeinen durch die Forderung nach perturbativen Kopplungen eingeschränkt wird. Eliminiert man in (5.81) durch Differenzbildung die Matrizen F und \tilde{F} , erhält man

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -e^{-i\alpha} \sin \beta \\ e^{i\alpha} \sin \beta & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^u \\ Y^d \end{pmatrix} = \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \begin{pmatrix} G_u - G_d \\ \tilde{G}_u - \tilde{G}_d \end{pmatrix} \quad (5.84)$$

und für perturbative Kopplungen $G_{u,d}, \tilde{G}_{u,d} \lesssim \mathcal{O}(1)$ stellt die rechte Seite dieser Gleichung eine Einschränkung an die Wahl der Parameter $Y^{u,d}$ dar.

In Abbildung 5.4 ist der um $\mathcal{O}(v_R^2/\Lambda^2)$ -Terme korrigierte Yukawa-Vertex der Kopplung der Bidoublett-Komponente ϕ_2^0 an den down-Sektor angegeben. Für die konkrete Wahl

(5.81) gilt für die zugehörige Vertex-Regel die Ersetzung

$$F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} G_d \xrightarrow{(5.81)} e^{-i\alpha} \sin \beta Y^d \quad (5.85)$$

sodass die Definition der Massenbasis durch (5.83) garantiert, dass die physikalischen down-artigen Masseneigenzustände nur flavor-diagonal an ϕ_2^0 koppeln. Infolgedessen trägt der $d - d - \phi_2^0$ Vertex nicht zu flavor-verletzenden Prozessen bei. Die übrigen Feynman-Regeln für die Kopplungen sämtlicher neutraler Higgs-Bosonen im down-Sektor, ergeben sich analog zur Herleitung der Vertex-Regel in Abbildung 5.4 aus dem entsprechenden Teil der effektiven Lagrange-Dichte (5.70). Die relevanten Terme mit zwei down-artigen Quarkfeldern und einem neutralen Higgs-Feld lauten

$$\begin{aligned} & \left(F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} G_d \right)_{ij} \bar{d}_{L,i} \phi_2^0 d_{R,j} + \left(\tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \tilde{G}_d \right)_{ij} \bar{d}_{L,i} \phi_1^{0*} d_{R,j} \\ & + 2 \frac{kv_R}{\Lambda^2} \left(e^{i\alpha} \sin \beta G_d + \cos \beta \tilde{G}_d \right) \bar{d}_{L,i} \delta d_{R,j} + h.c. \end{aligned} \quad (5.86)$$

und entsprechend mit zwei up-artigen Quarkfeldern

$$\begin{aligned} & \left(F + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} G_u \right)_{ij} \bar{u}_{L,i} \phi_1^0 u_{R,j} + \left(\tilde{F} + \frac{v_R^2}{\Lambda^2} \tilde{G}_u \right)_{ij} \bar{u}_{L,i} \phi_2^{0*} u_{R,j} \\ & + 2 \frac{kv_R}{\Lambda^2} \left(\cos \beta G_u + e^{-i\alpha} \sin \beta \tilde{G}_u \right)_{ij} \bar{u}_{L,i} \delta u_{R,j} + h.c. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Unter Verwendung von (5.81), liest man hieraus die folgenden Feynman-Regeln der in (5.70) enthaltenen Yukawa-Kopplungen ab

down-Sektor:	
$d - d - \phi_2$	$e^{-i\alpha} \sin \beta Y^d$
$d - d - \phi_1^{0*}$	$\cos \beta Y^d$
$d - d - \delta$	$2 \frac{k}{v_R} \left(Y^d - e^{i\alpha} \sin \beta F - \cos \beta \tilde{F} \right)$
up-Sektor:	
$u - u - \phi_1^0$	$\cos \beta Y^u$
$u - u - \phi_2^{0*}$	$e^{i\alpha} \sin \beta Y^u$
$u - u - \delta$	$2 \frac{k}{v_R} \left(Y^u - \cos \beta F - e^{-i\alpha} \sin \beta \tilde{F} \right)$

(5.88)

Man erkennt sofort, dass die neutralen Bidoublett-Komponenten $\phi_1^{0(*)}, \phi_2^{0(*)}$ ausschließlich flavor-diagonal an physikalische Quarkzustände koppeln, welche durch diagonale Massenmatrizen (5.82), (5.83) ausgezeichnet sind. Somit wurde die Yukawa-Verschränkung der neutralen Bidoublett-Komponenten im Rahmen der Gültigkeit von (5.84) aufgelöst. Weiterhin ist aus der letzten Zeile der Tabelle ersichtlich, dass sowohl im up- als auch im down-Sektor lediglich die Kopplung der neutralen R-Triplett Komponente

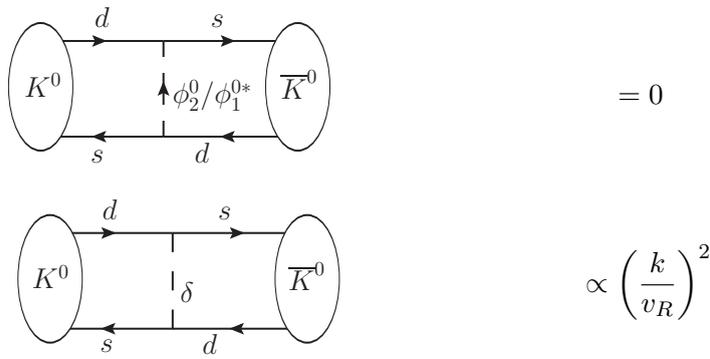


ABBILDUNG 5.9: Unterdrückte tree-level Beiträge zur Kaon-Mischung im effektiven Δ -Modell

δ einen flavorverletzenden Übergang verursachen kann. Auf tree-level tragen daher nur Feynman-Diagramme zu flavor-ändernden neutralen Strömen bei, die das zugehörige Higgs-Feld δ enthalten. Da sich aus den Vertex-Regeln für jede Kopplung des neutralen δ an Quarkfelder ein Faktor k/v_R ergibt, erfahren diese Beiträge eine entsprechende Unterdrückung. Für das Beispiel der neutralen Kaon-Mischung aus Abschnitt 5.1 ist dies in Abbildung 5.9 dargestellt. Durch die exakte Aufhebung der Flavorverschränkung zwischen den Bidoublett Komponenten, wird der gesamte flavor-verletzende tree-level Prozess nur noch durch den Austausch der neutralen R-Triplett Komponente δ vermittelt. Im Gegensatz zu den neutralen Komponenten des Bidoublets ϕ_1^0, ϕ_2^0 , die sich zum SM Higgs-Boson und einem, um das Massensplitting im Higgs-Potenzial (1.76) schwereren NP Higgs-Boson kombinieren, enthält das R-Triplett keine SM Freiheitsgrade. Die Massen der R-Triplett Komponenten können daher wesentlich größer als dieses Massensplitting und damit auch wesentlich größer als die Masse des Bidoublett NP Higgs sein, dementsprechend stärker sind ihre Beiträge unterdrückt. Diese Unterdrückung flavor-ändernder neutraler Ströme auf tree-level durch ein “extra” schweres Triplett Δ_R setzt eine exakte Lösung des Flavorproblems zwischen den Bidoublett-Komponenten voraus, andernfalls gäbe es einen zugehörigen FCNH Beitrag der vom VEV $\langle \Delta_R \rangle$, nicht aber von der Masse der R-Triplett Komponenten abhängt und daher keine derartige Unterdrückung erfahren würde.

Kapitel 6

Das Flavorproblem als Eigenwertgleichung

Im vorliegenden Kapitel wird das Flavorproblem im MLRM aus der algebraischen Perspektive betrachtet. Es zeigt sich, dass dessen Lösung im up- und down-Sektor jeweils eine Eigenwertgleichung des Ladungskonjugationsoperators \mathcal{C} impliziert. Anhand dessen Spektrum wird dann bewiesen, dass diese nur trivial erfüllt sein kann. Diese triviale Lösung der Eigenwertgleichung entspricht genau dem Fall simultan (bi-unitär) diagonalisierbarer Kopplungsmatrizen F, \tilde{F} , woraus eine triviale Flavorstruktur des MLRM in Form diagonaler Mischungsmatrizen $V_{L,R}$ resultiert.

Das Flavorproblem im MLRM besteht in der Frage

1. ob das zusätzlich zum SM Higgs-Boson h^0 auftretende NP Higgs-Boson H^0 (vgl. 1.2.1) flavorverletzend an massive Quarkfelder koppelt.
2. wie diese Flavorverletzung von den CKM-Mischungsmatrizen $V_{L,R}$ abhängt und umgekehrt.

Zur Beantwortung wird vorausgesetzt, dass im up-Sektor kein neutrales Higgs-Boson einen flavor-ändernden Übergang zwischen massiven Quarks verursacht, da dies eine notwendige Bedingung für eine exakte Lösung des Flavorproblems darstellt, die in Abbildung 6.1 diagrammatisch angegeben ist. Die zugehörigen Feynman-Regeln leitet man aus dem nicht-manifest eichinvarianten MLRM Yukawa-Sektor (1.43) ab und auf der Ebene der Feldoperatoren ergibt sich für ungleiche Flavorindizes $i \neq j$

$$Y_{i \neq j}^u h^0 + \tilde{Y}_{i \neq j}^u H^0 \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.1)$$

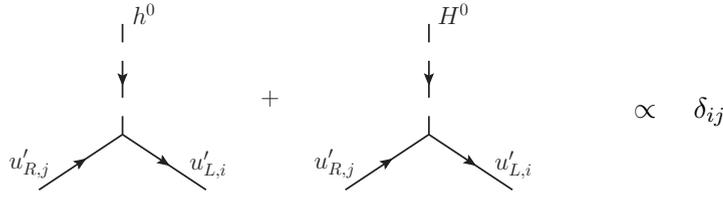


ABBILDUNG 6.1: Notwendige Bedingung für exakte Lösung des Flavorproblems

Unter Verwendung der Transformation der Higgs-Basis (1.42) und der daraus resultierenden Definition der Yukawa-Matrizen (1.44), lässt sich diese Bedingung auch durch Elemente der eichinvarianten Kopplungsmatrizen F, \tilde{F} und Komponenten des Higgs-Bidoublets Φ ausdrücken

$$F_{i \neq j} H_1^0 + \tilde{F}_{i \neq j} H_2^{0*} \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.2)$$

Wie ein Vergleich des Bidoublets (1.33) mit seinem ladungskonjugierten Partner (1.34) zeigt

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} H_1^0 & H_2^+ \\ H_1^- & H_2^0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{C}\Phi &= \Phi^c = \begin{pmatrix} H_2^{0*} & -H_1^- \\ -H_2^+ & H_1^{0*} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.3)$$

muss der Ladungskonjugationsoperator \mathcal{C} die einzelnen Komponenten gemäß

$$\mathcal{C} : \left\{ \begin{array}{l|l} H_1^0 \mapsto H_2^{0*} & H_1^- \mapsto -H_2^+ \\ H_2^0 \mapsto H_1^{0*} & H_2^+ \mapsto -H_1^- \end{array} \right. \quad (6.4)$$

abbilden, um konsistent mit der Ladungskonjugation des vollen Bidoublets zu sein. Im Speziellen gilt also

$$\mathcal{C}H_1^0 = H_2^{0*} \quad (6.5)$$

sodass aus der notwendigen Bedingung (6.2) für eine exakte Lösung des Flavorproblems

$$\tilde{F}_{i \neq j} \mathcal{C}H_1^0 = -F_{i \neq j} H_1^0 \quad (6.6)$$

folgt. Setzt man voraus, dass es sich bei H_1^0 um ein nicht-triviales Quantenfeld handelt, dass es also Raumzeitpunkte x^μ mit $H_1^0(x^\mu) \neq 0$ gibt, findet man für $\tilde{F}_{i \neq j} \neq 0$ die Eigenwertgleichung

$$\mathcal{C}H_1^0 = -\frac{F_{i \neq j}}{\tilde{F}_{i \neq j}} H_1^0 \quad (6.7)$$

Da es sich bei \mathcal{C} um eine Involution handelt, das bedeutet $\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}$, besitzt er genau die beiden Eigenwerte ± 1 , wie man leicht anhand der Eigenwertgleichung

$$\mathcal{C}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad (6.8)$$

nachrechnet. Wendet man auf beide Seiten die Involution an und verwendet die definierende Eigenschaft $\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}$, folgt

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle &= \mathcal{C}^{-1}\mathcal{C}|\lambda\rangle = \mathcal{C}\mathcal{C}|\lambda\rangle = \lambda^2|\lambda\rangle \\ &\Rightarrow (\lambda^2 - 1)|\lambda\rangle = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Da ein Eigenvektor per Definition von Null verschieden ist $|\lambda\rangle \neq \vec{0}$, ergibt sich für die Eigenwerte $\lambda = \pm 1$. Wendet man dieses Ergebnis auf die Eigenwertgleichung (6.7) an, erhält man, als Folge der algebraischen Eigenschaft $\mathcal{C}^2 = 1$ des Ladungskonjugationsoperators, für das Verhältnis der eichinvarianten Kopplungen

$$-\frac{F_{i \neq j}}{\widetilde{F}_{i \neq j}} = \pm 1 \quad \rightarrow \quad F_{i \neq j} = \mp \widetilde{F}_{i \neq j} \quad (6.10)$$

Setzt man dieses Ergebnis anschließend in die ursprüngliche Gleichung (6.2) ein

$$F_{i \neq j} (H_1^0 \mp H_2^{0*}) = 0 \quad (6.11)$$

und identifiziert die beiden Linearkombinationen der Higgs-Felder mit den Eigenzuständen des Ladungskonjugationsoperators

$$\mathcal{C} (H_1^0 \mp H_2^{0*}) = (H_2^{0*} \mp H_1^0) = \mp (H_1^0 \mp H_2^{0*}) \quad (6.12)$$

verbliebe als einzige mögliche Lösung $F_{i \neq j} = 0$. Hieraus würde aber wegen $\widetilde{F}_{i \neq j} = \mp F_{i \neq j}$ auch $\widetilde{F}_{i \neq j} = 0$ folgen, im Widerspruch zur Annahme $\widetilde{F}_{i \neq j} \neq 0$ in der Herleitung von (6.7). Daher gilt in (6.2) von vorneherein $\widetilde{F}_{i \neq j} = 0$ und für ein nicht überall verschwindendes Higgs-Feld H_1^0 impliziert dies

$$F_{i \neq j} = 0 = \widetilde{F}_{i \neq j} \quad (6.13)$$

Somit verschwinden in den Matrizen F, \widetilde{F} alle Elemente mit Indizes $i \neq j$, was als Definition einer Diagonalmatrix verstanden werden kann. Dies beweist, dass es eine (Flavor-)Basis gibt, in der F und \widetilde{F} gleichzeitig diagonal sind, sie sind also simultan (bi-unitär) diagonalisierbar.

Wie soeben gezeigt wurde, folgt im MLRM aus flavordiagonalen Kopplungen des SM- h^0 und NP-Higgs-Bosons H^0 an massive up-Quarks (vgl. Abbildung 6.1) die simultane (bi-unitäre) Diagonalisierbarkeit der Kopplungsmatrizen F, \widetilde{F} des eichinvarianten Yukawa-Sektors (1.41). Somit gibt es zwei unitäre Matrizen $V, W \in U(3)$ mit

$$\begin{aligned} V^\dagger F W &= F_{\text{diag}} \\ V^\dagger \widetilde{F} W &= \widetilde{F}_{\text{diag}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

wobei das Subskript diag deutlich machen soll, dass es sich bei $F_{\text{diag}}, \tilde{F}_{\text{diag}}$ im Allgemeinen um komplexe Diagonalmatrizen handelt. Da die entsprechende Transformation der Quarkfelder

$$\begin{aligned} Q_{L,i} &\rightarrow V_{ij} Q_{L,j} \\ Q_{R,i} &\rightarrow W_{ij} Q_{R,j} \end{aligned} \quad (6.15)$$

in der Flavorsymmetriegruppe $\mathcal{G}_{MLRM}^{\text{flav}}$ des MLRM enthalten ist

$$(V, W) \in U(3)_L \times U(3)_R = \mathcal{G}_{MLRM}^{\text{flav}} \quad (6.16)$$

ist der Quark Yukawa-Sektor des MLRM unter der Voraussetzung in Abbildung 6.1, d.h. für eine exakte Lösbarkeit des Flavorproblems im up-Sektor, ohne Beschränkung der Allgemeinheit durch

$$- \mathcal{L} = \bar{Q}_L \left[F_{\text{diag}} \Phi + \tilde{F}_{\text{diag}} \Phi^c \right] Q_R + h.c. \quad (6.17)$$

gegeben. Da die einzelnen Quarkgenerationen in diesem Fall durch die diagonalen Flavourmatrizen $F_{\text{diag}}, \tilde{F}_{\text{diag}}$ entkoppelt werden, reduziert sich der Übergang von der Flavor- in die Masseneigenbasis, sowohl im up- als auch im down-Sektor auf eine Absorption der Phasen komplexer Massenterme in die Quarkfelder, z.B.

$$k \underbrace{\left(e^{i\alpha} \sin \beta F_{\text{diag},bb} + \cos \beta \tilde{F}_{\text{diag},bb} \right)}_{y_b e^{-i\varphi_b}} \bar{b}_L b_R = k y_b \underbrace{\bar{b}_L (e^{-i\varphi_b} b_R)}_{=\bar{b}'_L b'_R} \quad (6.18)$$

Die diesem Basiswechsel zugeordneten CKM-Matrizen $V_{L,R}$

$$\begin{aligned} V_L &= V_u^\dagger V_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ V_R &= W_u^\dagger W_d = \begin{pmatrix} e^{i(\varphi_d - \varphi_u)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi_s - \varphi_c)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(\varphi_b - \varphi_y)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.19)$$

übertragen somit die Entkopplung der Quarkgenerationen aus dem Yukawa-Sektor in den eichkinetischen Term. Infolgedessen tritt keinerlei Flavormischung auf, die Flavorphysik wird trivial.

In diesem Kapitel konnte somit anhand algebraischer Eigenschaften des Ladungskonjugationsoperators \mathcal{C} bewiesen werden, dass flavorerhaltende Kopplungen der neutralen Higgs-Bosonen h^0, H^0 an massive up-Quarks nur in einem MLRM mit trivialer Flavorstruktur auftreten können. In der Umkehrung, dass jedes MLRM mit nicht-trivialer

Flavorstruktur einen flavorverletzenden Yukawa-Sektor besitzt, bestätigt dies das Resultat in Abschnitt 1.2.4.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden die Auswirkungen der Links-Rechts symmetrischen Vereinheitlichung, die in Form der Eichgruppe

$$\mathcal{G}_{LR} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \quad (7.1)$$

realisiert ist, auf die Flavorstruktur hierauf aufbauender Modelle, die sog. Klasse der Links-Rechts symmetrischen Modelle, untersucht. Durch die Vereinheitlichung rechts-händiger Quark-Freiheitsgrade in $SU(2)_R$ -Doublets, wird die im SM paritätsverletzende Kopplung der schwachen Wechselwirkung ausschließlich an links-händige Chiralitäten, in diesen Modellen zwischen links- und rechts-händigen Quark-Freiheitsgraden symmetrisiert. Infolgedessen reduziert sich die im Modell enthaltene Flavorinformation, die im SM durch drei unabhängige Vektoren im Flavorraum dargestellt ist, in Links-Rechts symmetrischen Modellen auf nur noch zwei Vektoren. Aus der hiermit einhergehenden Verringerung der Anzahl freier Flavorparameter eines solchen Modells ergeben sich Abhängigkeiten zwischen physikalischen Observablen, wie dem Quarkmassenspektrum und der Struktur der CKM-Mischungsmatrizen $V_{L,R}$, den links-rechts symmetrischen Analoga zur Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix V_{CKM} .

In Abschnitt 1.2.4 wurde für das Minimale Links-Rechts Modell (MLRM), eine minimale Wahl des Teilchenspektrums eines Links-Rechts symmetrischen Modells, gezeigt, dass diese Abhängigkeit flavor-ändernde Kopplungen geladener Eichbosonen W^\pm, W'^\pm an massive Quarks mit dem Auftreten, durch neutrale Higgs-Bosonen auf tree-level medierten, flavor-ändernden neutralen Quarkströmen (FCNC) verschränkt. Die Abwesenheit solcher Ströme, die im SM kein Pendant besitzen, impliziert dann auch das Verschwinden sämtlicher flavor-ändernder geladener Quarkströme (FCCC), welche im SM wiederum auftreten. Da dieser Sachverhalt für ein phänomenologisch sinnvolles MLRM

berücksichtigt werden muss, ergeben sich im Umkehrschluss aus der Flavorphänomenologie des SM im MLRM FCNC-Kopplungen neutraler Higgs-Bosonen. Dieser Punkt wurde in Abschnitt 1.2.5 durch die Herleitung einer numerischen Untergrenze für eine, von der rechts-händigen Mischungsmatrix V_R unabhängigen Kombination solch flavorverletzender Kopplungsstärken unterstrichen, die von den Parametern der Wolfenstein-Darstellung der SM CKM-Matrix abhängt.

Die zugrundeliegende Verschränkung zwischen den Yukawa-Kopplungen des MLRM hängt von den Parametern des Higgs-Potenzials ab, wie in Abschnitt 2.1 gezeigt wird. Dem Parameter $\tan\beta$, der durch das Eichsymmetrie-brechende Higgs-Vakuum festgelegt ist, kommt dabei entscheidende Bedeutung zu. Für ausgeglichene Beiträge der Vakuumenerwartungswerte der MLRM Higgs-Bosonen zur Massenmatrix der up- und down-Quarks, welche durch $\tan\beta = 1$ bzw. den Mischungswinkel $\beta = \pi/4$ charakterisiert sind, ergibt sich eine lineare Abhängigkeit zwischen Flavor- und Masseneigenzuständen der Quarks, was das Auftreten jeglicher Mischungsphänomene verhindert. Dieser Einfluss des Higgs-Potenzials auf die Flavorstruktur des MLRM wird durch eine eichinvariante Redefinition der Higgs-Basis in Abschnitt 2.2 manifest.

In Kapitel 3 wurde das MLRM der Klasse der Zwei Higgs-Doublett Modelle (2HDM) gegenübergestellt, dessen Higgs-Freiheitsgrade denen des MLRM zugeordnet werden können. Da die Eichgruppe dieser Modelle der des Standardmodells \mathcal{G}_{SM} entspricht und demnach ihre Flavorstruktur durch mehr freie Parameter als in einem vergleichbaren MLRM gegeben ist, erlaubt diese Zuordnung eine Analyse der Links-Rechts (eich-)symmetrischen Vereinheitlichung im Flavorkontext. Im Gegensatz zur üblichen Einbettung des MLRM in die Klasse der 2HDM, wurde in Abschnitt 3.3 das allgemeine 2HDM durch MLRM Freiheitsgrade dargestellt. Dies hat gezeigt, dass die zusätzliche Freiheit in der Definition des 2HDM Yukawa-Sektors auf Terme zurückzuführen ist, die die Eichsymmetrie \mathcal{G}_{LR} Links-Rechts symmetrischer Modelle brechen. Somit beschränkt die Eichsymmetrie des MLRM die Einbettung seines Yukawa-Sektors auf eine Teilmenge der Klasse der 2HDM, die von nicht-trivialen Lösungen des Flavorproblems disjunkt ist. Nach dem Vorbild des 2HDM, wird das MLRM in Kapitel 4 um zusätzliche Bidoublets ergänzt. In Abschnitt 4.1 wurde die Verallgemeinerung der Verschränkung zwischen den Yukawa-Kopplungen in Links-Rechts symmetrischen Modellen für die Erweiterung des MLRM um ein zusätzliches Bidoublett explizit hergeleitet. Dies hat gezeigt, dass die in Abschnitt 1.2.4 diskutierte Abhängigkeit zwischen dem Auftreten von FCNCs und FCCCs durch eine solche Erweiterung parametrisch abgemildert, aber nicht aufgehoben werden kann. Für die Hinzunahme weiterer Bidoublets zum 3, 4, \dots , n Higgs-Bidoublett Modell wurde in Abschnitt 4.2 eine unitäre Transformation der Bidoublett-Basis konstruiert, die die Betrachtung der Yukawa-Verschränkung in einem solchen Modell auf den Fall des 2 Higgs-Bidoublett Modells in Abschnitt 4.1 zurückführt.

Die in Abschnitt 3.3 entwickelte Darstellung der Lösungen des Flavorproblems im 2HDM

durch \mathcal{G}_{LR} -brechende Terme, motiviert in Kapitel 5 eine Assoziation dieser mit der spontanen Brechung der \mathcal{G}_{LR} -Eichsymmetrie. Ausgehend von der Darstellung des allgemeinen 2HDM durch links-rechts symmetrische Freiheitsgrade, wurde in Abschnitt 5.2 ein effektives, \mathcal{G}_{LR} -symmetrisches Modell entwickelt, das die gewünschten Terme im Zuge der spontanen Symmetriebrechung reproduziert. Dies induziert eine Abhängigkeit der CKM-Mischungsmatrix vom Verhältnis der Brechungsskala der \mathcal{G}_{LR} -Eichsymmetrie v_R und der Skala des UV Abschlusses der effektiven Theorie Λ , was in diesem Modell einen Zusammenhang zwischen der Flavorstruktur und der Unterdrückung effektiver NP Beiträge mit Λ^{4-n} etabliert. Die Kategorisierung sämtlicher höherdimensionaler Yukawa-Operatoren des MLRM in Abschnitt 5.3 zeigt anschliessend, dass es keine weniger stark unterdrückten Beiträge als die in Abschnitt 5.2 betrachteten gibt. Desweiteren wird in Abschnitt 5.4 gezeigt, dass das Auftreten flavor-verletzender Higgs-Kopplungen auch durch die Erweiterung des MLRM um höherdimensionale Operatoren nicht vermieden werden kann. Von theoretischem Interesse für die Links-Rechts Symmetrie ist allerdings, dass sich aus der Entwicklung dieser in die enthaltenen Dimension 4 Yukawa-Kopplungen, abhängig von der Kategorisierung, unterschiedlich stark unterdrückte Beiträge zu den Kopplungen des SM- und flavor-verletzenden NP-Higgsbosonen ergeben und diese Asymmetrie, die aus der Hierarchie der Symmetriebrechungsskalen des MLRM folgt, die Verschränkung der CKM Flavorstruktur mit einem flavorverletzenden Yukawa-Sektor abmildern kann. Konzeptionell ist es möglich, die Verschränkung zwischen den Yukawa-Kopplungen der neutralen Bi-Doublet Komponenten, das Flavorproblem im MLRM, exakt aufzulösen. Die zwangsläufig vorhandene Flavorverletzung wird hierzu in die Wechselwirkung massiver Quarks mit einem Triplett Higgs-Boson absorbiert, dessen Masse wesentlich größer als die des flavor-verletzenden Higgs-Bosons im MLRM sein kann. In diesem Fall sind die durch das schwere Triplett Higgs-Boson vermittelten flavor-verletzenden Prozesse stärker unterdrückt als ihre Entsprechungen im MLRM.

Im abschließenden Kapitel 6 wurde die Unlösbarkeit des Flavorproblems im MLRM anhand algebraischer Eigenschaften des Ladungskonjugationsoperators \mathcal{C} bewiesen.

Anhang A

Beweis der Summenregel (1.113)

In diesem Anhang wird die Summenregel (1.113) aus Abschnitt 1.2.5 bewiesen. Da die in (1.112) auftretenden CKM-Elemente $V_{R,31}$, $V_{R,32}$ und $V_{R,33}$ die dritte Spalte der unitären Matrix $V_R \in U(3)$ bilden, erfüllen sie die Relation

$$|V_{R,31}|^2 + |V_{R,32}|^2 + |V_{R,33}|^2 = 1 \quad (\text{A.1})$$

und hieraus folgt

$$1 - |V_{R,33}|^2 \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

Für den angenommenen Parameterbereich $0 \leq A\lambda^2 \leq 1$ führt dies auf

$$(1 - |V_{R,33}|^2) A^2 \lambda^4 \leq 1 - |V_{R,33}|^2 \quad (\text{A.3})$$

oder äquivalent auf

$$A^2 \lambda^4 \leq 1 - (1 - A^2 \lambda^4) |V_{R,33}|^2 \quad (\text{A.4})$$

Für die rechte Seite dieser Ungleichung gilt

$$1 - (1 - A^2 \lambda^4) |V_{R,33}|^2 = \overbrace{|V_{R,31}|^2 + |V_{R,32}|^2}^{1 - |V_{R,33}|^2} + A^2 \lambda^4 |V_{R,33}|^2 \quad (\text{A.5})$$

$$\leq (|V_{R,31}| + |V_{R,32}| + A\lambda^2 |V_{R,33}|)^2 \quad (\text{A.6})$$

und damit ergibt sich

$$A^2 \lambda^4 \leq (|V_{R,31}| + |V_{R,32}| + A\lambda^2 |V_{R,33}|)^2 \quad (\text{A.7})$$

Zieht man nun auf beiden Seiten die Wurzel und multipliziert mit y_t erhält man die Behauptung.

Anhang B

Manifest eichsymmetrische Transformation der Bidoublett Basis

In diesem Anhang wird durch explizite Konstruktion bewiesen, dass jedes Links-Rechts symmetrische Modell mit mindestens zwei Bidoublets eine manifest eichsymmetrische Higgsbasis enthält, in der höchstens zwei Bidoublets einen nicht-verschwindenden $U(1)_{e.m.}$ -invarianten VEV entwickeln.

Da nur die Diagonalelemente eines Bidoublets mit $(B - L) = 0$ elektrisch neutral sind

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \phi_{1i}^0 & \phi_{2i}^+ \\ \phi_{1i}^- & \phi_{2i}^0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

können auch nur diese einen nicht-trivialen VEV besitzen, der die elektro-magnetische Eichsymmetrie $U(1)_{e.m.}$ nicht bricht. In einem Modell mit $n \geq 2$ Bidoublets ist ein solcher VEV in seiner allgemeinsten Form somit durch

$$\langle \Phi_i \rangle = \begin{pmatrix} v_i & 0 \\ 0 & w_i \end{pmatrix}, \quad v_i, w_i \in \mathbb{C} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (\text{B.2})$$

gegeben. Diese $2n$ komplexen Parameter definieren zwei unabhängige Richtungen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

im \mathbb{C}^n und mit den Mitteln der linearen Algebra lässt sich eine Orthonormalbasis konstruieren, die eine dieser beiden Richtungen als Koordinatenachse enthält.

B.1 Unitäre Basistransformation im \mathbb{C}^m

Sei $\vec{z} \in \mathbb{C}^m$ ($m \in \mathbb{N}$).

Dann gibt es ein $U_{\vec{z}} \in U(m)$ mit

$$U_{\vec{z}}\vec{z} = \begin{pmatrix} \|\vec{z}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Beweis:

Für $\vec{z} = \vec{0}$ folgt $\|\vec{z}\| = 0$ und die Behauptung ist trivial.

Für $\vec{z} \neq \vec{0}$ folgt aus der Definition der Vektornorm $\|\vec{z}\| > 0$ und somit ist der normierte Vektor

$$\vec{u}_1 := \hat{\vec{z}} := \frac{\vec{z}}{\|\vec{z}\|} \quad (\text{B.5})$$

definiert. Dieser lässt sich, zum Beispiel durch das Gram-Schmitt'sche Orthonormalisierungsverfahren, zu einer kompletten Orthonormalbasis $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ des \mathbb{C}^m ergänzen. Die Matrix

$$\left(U_{\vec{z}}^\dagger \right)_{ij} := (\vec{u}_j)_i \quad (\text{B.6})$$

deren Spalten dieses Orthonormalsystem enthalten ist dann zwangsläufig unitär. Gleiches gilt dann auch für ihr Inverses

$$U_{\vec{z}} = \left(U_{\vec{z}}^\dagger \right)^\dagger = \left(U_{\vec{z}}^\dagger \right)^{-1} \in U(m) \quad (\text{B.7})$$

und es verbleibt nur noch zu zeigen, dass $U_{\vec{z}}$ die Behauptung (B.4) erfüllt. Für jede Komponente $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ rechnet man dies mit der Definition (B.7) und $\vec{z} = \|\vec{z}\|\vec{u}_1$ explizit nach

$$(U_{\vec{z}}\vec{z})_k = \sum_{l=1}^m \left(U_{\vec{z}}^\dagger \right)_{lk}^* (\vec{z})_l = \|\vec{z}\| \sum_{l=1}^m (\vec{u}_k)_l^* (\vec{u}_1)_l = \|\vec{z}\| \vec{u}_k^\dagger \vec{u}_1 = \|\vec{z}\| \delta_{k1} \quad (\text{B.8})$$

Bezüglich der Richtung \vec{v} ist die zugehörige Basistransformation gemäß Lemma B.1 durch $U_{\vec{v}} \in U(n)$ gegeben. Per Konstruktion hat der Vektor \vec{v} in dieser Basis höchstens eine nicht-verschwindende Komponente, während der unabhängige Vektor \vec{w} nach wie

vor beliebig ist

$$\vec{v}' = U_{\vec{v}} \vec{v} = \begin{pmatrix} \|\vec{v}'\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}' = U_{\vec{w}} \vec{w} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Die letzten $n - 1$ Komponenten des Vektors \vec{w}' definieren im Untervektorraum $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ einen Vektor \tilde{w}'

$$\tilde{w}' := \begin{pmatrix} w'_2 \\ w'_3 \\ \vdots \\ w'_n \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

zu welchem sich ebenfalls entsprechend Lemma B.1 eine Matrix $U_{\tilde{w}'}^{(n-1)} \in U(n-1)$ konstruieren lässt, die aber lediglich die Basis dieses Untervektorraums transformiert. Daher erhält man für die Vektoren \vec{v}' und \vec{w}'

$$\left(1 \times U_{\tilde{w}'}^{(n-1)}\right) \vec{v}' = \vec{v}' = \begin{pmatrix} \|\vec{v}'\| \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\left(1 \times U_{\tilde{w}'}^{(n-1)}\right) \vec{w}' = \begin{pmatrix} w'_1 \\ U_{\tilde{w}'}^{(n-1)} \tilde{w}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ \|\tilde{w}'\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Die beiden ursprünglichen Vektoren \vec{v}, \vec{w} sind in dieser Basis durch nur zwei nicht-negative und eine komplexe Komponente

$$\begin{aligned} \|\vec{v}'\| &=: k_1, & \|\tilde{w}'\| &=: \kappa \\ w'_1 &=: k_2 e^{i\alpha} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

beschrieben. Da die Vektoren \vec{v}, \vec{w} durch die VEVs (B.2) definiert sind, hängt die VEV-Struktur der unitär redefinierten Bidoublets

$$\phi_i := \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\left(1 \times U_{\tilde{w}'}^{(n-1)}\right) U_{\vec{v}} \right)}_{\in U(n)}_{ij} \Phi_j \quad (\text{B.14})$$

nur von den Parametern (B.13) ab und ist explizit durch

$$\begin{aligned} \langle \phi_1 \rangle &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 e^{i\alpha} \end{pmatrix}, & \langle \phi_2 \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \\ \langle \phi_l \rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & l &= 3, 4, \dots, n \end{aligned} \tag{B.15}$$

gegeben.

Somit wurde gezeigt, dass für ein Links-Rechts symmetrisches Modell mit beliebig vielen Kopien des MLRM Bidoublets immer eine Basis existiert, in der der allgemeinste $U(1)_{\text{e.m.}}$ -invariante VEV durch (B.15) parametrisiert ist. Die zugehörige Basistransformation (B.14) wurde explizit konstruiert.

Literaturverzeichnis

- [1] H. Fritzsch and M. Gell-Mann, eConf **C720906V2**, 135 (1972), hep-ph/0208010.
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [3] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [4] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961).
- [5] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967).
- [6] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. **D23**, 165 (1981).
- [7] G. Senjanovic and R. N. Mohapatra, Phys. Rev. **D12**, 1502 (1975).
- [8] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **44**, 912 (1980).
- [9] W. Grimus, Introduction to left-right symmetric models, in *Elementary particle physics. Proceedings, 4th Hellenic School, Corfu, Greece, September 2-20, 1992. 1992*, pp. 619–632, 1993.
- [10] G. Beall, M. Bander, and A. Soni, Phys. Rev. Lett. **48**, 848 (1982).
- [11] S. Bertolini, A. Maiezza, and F. Nesti, Phys. Rev. **D89**, 095028 (2014), 1403.7112.
- [12] A. Maiezza, M. Nemevšek, and F. Nesti, (2016), 1603.00360.
- [13] B. A. Dobrescu and Z. Liu, Phys. Rev. Lett. **115**, 211802 (2015), 1506.06736.
- [14] W.-Y. Keung and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett. **50**, 1427 (1983).
- [15] A. Maiezza, M. Nemevsek, F. Nesti, and G. Senjanovic, Phys. Rev. **D82**, 055022 (2010), 1005.5160.
- [16] N. G. Deshpande, J. F. Gunion, B. Kayser, and F. I. Olness, Phys. Rev. **D44**, 837 (1991).
- [17] G. Barenboim, M. Gorbahn, U. Nierste, and M. Raidal, Phys. Rev. **D65**, 095003 (2002), hep-ph/0107121.

-
- [18] M. Blanke, A. J. Buras, K. Gemmler, and T. Heidsieck, *JHEP* **03**, 024 (2012), 1111.5014.
- [19] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1945 (1983).
- [20] CKMfitter Group, J. Charles *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C41**, 1 (2005), hep-ph/0406184.
- [21] G. C. Branco *et al.*, *Phys. Rept.* **516**, 1 (2012), 1106.0034.
- [22] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D15**, 1958 (1977).
- [23] E. A. Paschos, *Phys. Rev.* **D15**, 1966 (1977).