

Konzentrationsungleichungen für Poisson- und Binomialfunktionale in der Stochastischen Geometrie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

(Dr. rer. nat.)

von der Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Fabian Marcel Gieringer
aus Rottenburg am Neckar

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 2016

Referent: Prof. Dr. Günter Last

Korreferent: Prof. Dr. Daniel Hug

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Stochastik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Meine Stelle wurde finanziell gefördert von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) durch die Forschergruppe „Geometry and Physics of Spatial Random Systems“ (LA 965/6-1 und LA 965/6-2).

Ich möchte mich zunächst bei meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Günter Last dafür bedanken, mich in den letzten Jahren bei der Beschäftigung mit den vielfältigen Aspekten der Stochastischen Geometrie unermüdlich geleitet zu haben. Seine zahllosen Hinweise und Anregungen haben diese Arbeit in diesem Gebiet der Mathematik, das ich im Studium so nicht kennenlernen konnte, erst ermöglicht.

Mein weiterer Dank gilt meinem Korreferenten Herrn Prof. Dr. Daniel Hug. Bei ihm hatte ich die Gelegenheit, insbesondere viel über Konzentrationsungleichungen zu lernen. Für das Gelingen der schriftlichen Ausarbeitung meiner Ergebnisse hat er sich durch Fragen, Hinweise und Korrekturen gewissenhaft eingesetzt.

Ich danke allen aktuellen und ehemaligen Kollegen des Instituts für Stochastik für die fachliche und moralische Unterstützung. Sie haben eine sehr lebhafte wie anregende Atmosphäre geschaffen und mir die Augen geöffnet, wie wichtig es ist, bei Abwesenheit den Computer zu sperren.

Bei der Untersuchung der Euler-Charakteristik wurde ich in topologischen Fragestellungen von Dr. Anja Randecker und Tobias Columbus vom Institut für Algebra und Geometrie des KIT beraten. Ich bedanke mich für ihre Hilfsbereitschaft und Geduld. Für etwaige Mängel in der Umsetzung ihrer Anregungen trage ich die alleinige Verantwortung.

Insbesondere möchte ich natürlich meiner Familie für die vielfältige Unterstützung in den letzten Jahren danken, ohne die dies alles nicht möglich gewesen wäre.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen und Notationen	3
2.1	Allgemeines	3
2.2	Mengensysteme in \mathbb{R}^d	5
2.3	Innere Volumina	6
2.3.1	Steiner-Formel	6
2.3.2	Euler-Charakteristik	7
2.4	Punkt- und Poissonprozesse	11
2.4.1	Punktprozesse	12
2.4.2	Poissonprozesse	12
2.4.3	Die Kovarianzgleichung	14
2.5	Modelle in der Stochastischen Geometrie	16
2.5.1	Das Boolesche Modell	16
2.5.2	Das Poisson-Voronoi-Mosaik	17
3	Allgemeine Konzentrationsungleichungen	19
3.1	Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen	21
3.2	Poissonfunktionale und die Log-Sobolev-Ungleichung	25
3.3	Poissonfunktionale und die Kovarianzgleichung	27
4	Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell	37
4.1	Das Boolesche Modell für Binomialprozesse	37
4.1.1	Volumen	37
4.1.2	Oberfläche	40
4.1.3	Euler-Charakteristik	45
4.2	Volumen des Booleschen Modells für Poissonprozesse	48
4.2.1	Allgemeine Körner	49
4.2.2	Beschränkte Körner	58
4.2.3	Unbeschränkte Körner	64
4.3	Oberfläche des Booleschen Modells für Poissonprozesse	73
5	Eine Konzentrationsungleichung für das Poisson-Voronoi-Mosaik	77
	Literaturverzeichnis	81

1 Einleitung

Eine zentrale Aufgabe in der Wahrscheinlichkeitstheorie ist die Untersuchung der Verteilungen von Zufallsvariablen. Um die Verteilung einer Zufallsvariable X vollständig zu charakterisieren, genügt es, für alle $r \in \mathbb{R}$ jeweils die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X \leq r]$ zu bestimmen. In vielen Fällen ist dies aber ein zu anspruchsvolles Ziel und das Ziel ist zunächst, einige wichtige Aspekte der Verteilung zu bestimmen. Der wichtigste davon ist natürlich der Erwartungswert, der jedoch noch nichts über die Streuung der Zufallsvariable aussagt. Wenn man den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und alle Abweichungswahrscheinlichkeiten der Form

$$\mathbb{P}[X - \mathbb{E}[X] \geq r] \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X - \mathbb{E}[X] \leq -r], \quad r \geq 0, \quad (1.0.1)$$

kennt, ist wiederum die Verteilung von X bestimmt. Können die Wahrscheinlichkeiten der Form (1.0.1) nicht exakt berechnet werden, ist es eine naheliegende Aufgabe, sie jeweils zumindest durch eine Funktion in r abzuschätzen. Je kleiner die Werte sind, die die Wahrscheinlichkeiten in (1.0.1) nach *oben* beschränken, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit, dass X „nahe“ an ihrem Erwartungswert liegt und desto stärker ist die Verteilung von X um den Erwartungswert *konzentriert*. Daher ist es üblich, Ungleichungen der Form

$$\mathbb{P}[X - \mathbb{E}[X] \geq r] \leq f_1(r) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}[X - \mathbb{E}[X] \leq -r] \leq f_2(r), \quad r \geq 0,$$

als *Konzentrationsungleichungen* zu bezeichnen, wobei f_1 und f_2 Funktionen sind, die auf einem Teilintervall von $[0, \infty)$ definiert sind und nicht-negative Werte (sinnvollerweise sogar nur Werte in $[0, 1]$) annehmen. Wir sprechen dann davon, dass f_1 eine Abschätzung für den *oberen Tail* und f_2 eine Abschätzung für den *unteren Tail* der Verteilung von X liefert.

Wir werden uns in dieser Arbeit mit Konzentrationsungleichungen von zwei speziellen Arten von Zufallsvariablen beschäftigen. In der ersten betrachteten Situation ist die Zufallsvariable X gegeben durch eine deterministische Funktion einer festen Anzahl von unabhängigen Zufallsvariablen. Im zweiten untersuchten Fall ist die Zufallsvariable fast sicher durch eine deterministische Funktion eines *Poissonprozesses* gegeben und wird daher *Poissonfunktional* genannt. In beiden Fällen wenden wir die allgemeinen Ergebnisse anschließend auf wichtige geometrische Kenngrößen des sogenannten *Booleschen Modells* an, eines der zentralen Objekte der Stochastischen Geometrie. Eine weitere Anwendung ergibt sich für das *Poisson-Voronoi-Mosaik*.

Zunächst geben wir im zweiten Kapitel die Grundlagen an, die wir für die Untersuchung der Konzentrationsungleichungen benötigen. Dazu gehören neben der Formulierung einer Kovarianzgleichung und den Definitionen des Booleschen Modells sowie des Poisson-Voronoi-Mosaiks, denen jeweils ein geeigneter Poissonprozess zugrunde liegt, auch einige geometrische Kenngrößen, die *Innere Volumina* genannt werden. Zu den inneren Volumina

1 Einleitung

gehört die *Euler-Charakteristik*. Für sie wird zum Beispiel auf Seite 601 in [33] die folgende Formel angegeben: Für diejenigen Teilmengen des \mathbb{R}^2 , die durch endliche Vereinigungen konvexer und kompakter Mengen gegeben sind, kann die Euler-Charakteristik durch die Anzahl der Zusammenhangskomponenten minus die Anzahl der Löcher bestimmt werden. Einen Beweis dafür konnten wir in der Literatur jedoch nicht finden. Um technische Schwierigkeiten zu minimieren, beweisen wir diese Aussage in Unterabschnitt 2.3.2 nur für eine leicht eingeschränkte Klasse solcher Teilmengen des \mathbb{R}^2 .

Zu Beginn von Kapitel 3 stellen wir die *Chernoff-Schranke* vor, auf der alle im Weiteren betrachteten Konzentrationsungleichungen aufbauen. Ein wichtiges Hilfsmittel um die Chernoff-Schranke weiter abschätzen zu können ist die *Methode von Herbst*, die wir in zwei einfachen Varianten vorstellen und anschließend innerhalb der Beweise der verschiedenen Konzentrationsungleichungen variieren. In Abschnitt 3.1 stellen wir einige Ergebnisse von McDiarmid in [25] sowie von Boucheron, Lugosi und Massart in [3] über Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen zusammen. Wenn die aus den Originalarbeiten übernommenen Sätze nur Aussagen über den oberen Tail treffen, fügen wir die analogen Aussagen über den unteren Tail mitsamt der Beweise an. In Abschnitt 3.2 skizzieren wir, wie Bachmann und Peccati in [5] die Methoden aus [3], die auf einer sogenannten *Log-Sobolev-Ungleichung* beruhen, auf Poissonfunktionale übertragen. Unter Verwendung der Kovarianzgleichung leiten wir in Abschnitt 3.3 einige neue Konzentrationsungleichungen für Poissonfunktionale her. Andere Ergebnisse in dieser Richtung gibt es von Houdré [15] sowie Houdré und Privault [16], die gesammelt in [30] zusammengestellt sind. Unser sehr allgemeiner Ansatz führt teilweise zu besseren Abschätzungen als in [30] und zu neuen Anwendungsmöglichkeiten.

In Kapitel 4 wenden wir die Konzentrationsungleichungen aus Kapitel 3 auf das Boolesche Modell an. Für den Abschnitt 4.1 verwenden wir eine modifizierte Definition des Booleschen Modells mittels eines *Binomialprozesses*, sodass wir die Funktionen unabhängiger Zufallsvariablen aus Abschnitt 3.1 darauf anwenden können. Da die Werte dieser Funktionen nun durch einen Binomialprozess bestimmt werden, nennen wir sie *Binomialfunktionale*. Neben dem Volumen können wir in Spezialfällen auch die Oberfläche und unter Verwendung der in Kapitel 2 bewiesenen Aussage auch die Euler-Charakteristik untersuchen. Danach kehren wir zur ursprünglichen Definition des Booleschen Modells zurück und vergleichen in Abschnitt 4.2 im Beispiel des Volumens die Qualität der Konzentrationsungleichungen, die mithilfe der Log-Sobolev-Ungleichung beziehungsweise der Kovarianzgleichung in allgemeinen und verschiedenen Spezialfällen hergeleitet werden. Außerdem demonstrieren wir in wichtigen Fällen die Qualität der aus der Kovarianzgleichung erhaltenen Ergebnisse. Dies geschieht bei einer solchen Konzentrationsungleichung dadurch, dass wir in etwa dasselbe Tailverhalten wie bei einer leichter berechenbaren Zufallsvariable feststellen, die als Volumen eines stark vereinfachten Booleschen Modells interpretiert werden kann und daher mindestens genauso scharfe Abschätzungen erlaubt. Zum Abschluss des Kapitels werden wir die Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 zur Oberfläche auf den Poissonfall übertragen. Dazu ist nicht viel zusätzliche Arbeit nötig, da die wesentlichen Hilfsmittel durch dieselben rein geometrischen Lemmata gegeben sind.

Zuletzt geben wir in Kapitel 5 eine Konzentrationsungleichung für den unteren Tail des Volumens der typischen Voronoi-Zelle an. Der Beweis ist an ein Verfahren aus [5] angelehnt.

2 Grundlagen und Notationen

2.1 Allgemeines

Zunächst führen wir die wichtigsten Begriffe ein. Dabei folgen wir überwiegend den Notationen im Buch von R. Schneider [32], aus dem wir auch die in diesem Abschnitt 2.1 angegebenen Aussagen übernehmen, soweit nicht anders gekennzeichnet.

In dieser Arbeit bezeichne \mathbb{R} die Menge der *reellen Zahlen*, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ die Menge der *natürlichen Zahlen* und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für eine Menge S und $m \in \mathbb{N}$ bezeichne $S^m := S \times \dots \times S$ das m -fache *kartesische Produkt* und $\#S$ die *Kardinalität* der Menge. Zu einer Menge S betrachten wir die zugehörige *Indikatorfunktion* $\mathbb{1}_S(x)$, die den Wert 1 annimmt, wenn $x \in S$ gilt, und für $x \notin S$ durch den Wert 0 gegeben ist. Es ist oft bequem, dafür auch $\mathbb{1}\{x \in S\}$ zu schreiben. Ist \mathbb{X} ein topologischer Raum, so steht $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ für die *Borelsche σ -Algebra* auf \mathbb{X} . Wenn ein Objekt a von einem anderen Objekt b abhängt, werden wir manchmal die funktionale Schreibweise $a = a(b)$ verwenden um diese Abhängigkeit zu betonen.

Seien $d \in \mathbb{N}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das *Standardskalarprodukt* und $\|\cdot\|$ die *Euklidische Norm* in \mathbb{R}^d . Wir bezeichnen mit \mathcal{H}^j das *j -dimensionale Hausdorffmaß* auf \mathbb{R}^d , $0 \leq j \leq d$. Wenn B eine Borelsche Teilmenge eines j -dimensionalen affinen Unterraums A des \mathbb{R}^d ist, gilt $\mathcal{H}^j(B) = \lambda_j(B)$, wobei λ_j das auf A definierte *j -dimensionale Lebesguemaß* ist, $0 \leq j \leq d$. Ein weiteres wichtiges Maß ist das *Diracmaß* $\delta_x(\cdot) := \mathbb{1}\{x \in \cdot\}$ in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$.

Die Schreibweise $A \subset B$ für zwei Mengen A, B verwenden wir in der Bedeutung, dass entweder $A = B$ gilt oder A eine *echte* Teilmenge von B ist. Die *Minkowski-Summe* zweier Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^d$ ist durch

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} \tag{2.1.1}$$

definiert. Abkürzend schreiben wir $A + x$ anstatt $A + \{x\}$ für $x \in \mathbb{R}^d$. Entsprechend definieren wir $tA := \{ta : a \in A\}$ für $t \in \mathbb{R}$. Im Fall $t = -1$ schreiben wir

$$A^* := -A = \{-a : a \in A\}$$

für die *Spiegelung* der Menge A am Ursprung 0. Würde schlicht die Schreibweise $-A$ für die Spiegelung verwendet werden, könnte dies suggerieren, dass die Menge $A + (-A)$ nur die 0 enthält, was zum Beispiel für jede Menge, die 0 und ein weiteres Element enthält, falsch ist.

Für $x \in \mathbb{R}^d$ und $r > 0$ definieren wir die *d -dimensionale abgeschlossene Kugel* mit Mittelpunkt x und Radius r durch $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq r\}$. Es bezeichnen $\text{cl}(A)$, A° , $\text{bd}(A)$ und A^c den Abschluss, das Innere, den Rand beziehungsweise das Komplement

2 Grundlagen und Notationen

einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$. Mittels der *affinen Hülle* $\text{aff}(A) := \{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, x_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \}$ werden $\dim(A)$, die *Dimension von A*, durch die Dimension von $\text{aff}(A)$ und das *relative Innere* $\text{relint}(A) := \{x \in A : \exists \epsilon > 0 (B(x, \epsilon) \cap \text{aff}(A)) \subset A\}$ definiert.

Das Volumen der d -dimensionalen *Einheitskugel* ist durch

$$\kappa_d := \lambda_d(B(0, 1)) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})} = \frac{2\pi^{d/2}}{d\Gamma(\frac{d}{2})}$$

und ihr Oberflächeninhalt durch

$$\omega_d := \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B(0, 1))) = d\kappa_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$$

gegeben, wobei $\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$, $t > 0$, die *Gamma-Funktion* sei.

Seien $A_1 = U_1 + x_1$ und $A_2 = U_2 + x_2$ zwei affine Unterräume des \mathbb{R}^d , wobei U_1, U_2 lineare Unterräume des \mathbb{R}^d seien und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$. Dann heißen A_1 und A_2 *parallel*, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt.

Eine *Strecke* zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^d$ ist gegeben durch $[x, y] := \{\alpha x + (1 - \alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1\}$. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ heißt *konvex*, wenn für jeweils zwei Punkte $x, y \in A$ auch $[x, y] \subset A$ gilt. Sowohl Durchschnitte als auch endliche Minkowski-Summen konvexer Mengen sind wiederum konvex. Die *konvexe Hülle* $\text{conv}(A)$ einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist definiert als der Durchschnitt aller konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^d , die A enthalten. Für eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ gibt es zu jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ einen eindeutigen Punkt $p(A, x) \in A$, der $\|x - p(A, x)\| \leq \|x - y\|$ für alle $y \in A$ erfüllt. Die Abbildung $p(A, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow A$ heißt *metrische Projektion* auf A .

Für $0 \neq u \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir die *Hyperebene* $H = H_{u, \alpha} := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = \alpha\}$ in \mathbb{R}^d sowie die Halbräume $H^- = H_{u, \alpha}^- := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$ und $H^+ = H_{u, \alpha}^+ := \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle \geq \alpha\}$. Sei P ein *Polytop* in \mathbb{R}^d , das heißt die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$. Die Hyperebene H *stützt P in x*, wenn $x \in P \cap H$ und entweder $P \subset H^-$ oder $P \subset H^+$ gilt. Weiter heißt H eine *Stützhyperebene von P*, wenn sie P in irgendeinem Punkt $x \in \text{bd}(P)$ stützt. Ist H eine Stützhyperebene von P und besitzt der Schnitt $H \cap P$ die Dimension $d - 1$, so heißt $H \cap P$ *Facette* von P . Wenn $H = H_{u, \alpha}$ das Polytop P in x stützt, ist u ein *äußerer Normalenvektor von P in x*.

Eine Einführung zu den sogenannten *Landau-Symbolen* ist in Paragraph 12 des Buchs [21] ihres Namensgebers zu finden. Wir verwenden die folgenden Symbole für reelle Funktionen f und g : Die Schreibweise $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ bedeutet $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) < \infty$. Für $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$ schreiben wir $f(x) = o(g(x))$. Wenn sowohl $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ als auch $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$ gilt, wird der Ausdruck $f(x) = \Theta(g(x))$ verwendet. Wenn in letzterem Fall sogar $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$ gilt, schreiben wir $f(x) \sim g(x)$.

2.2 Mengensysteme in \mathbb{R}^d

In diesem Abschnitt stellen wir einige Definitionen und Resultate aus dem Buch [33] von R. Schneider und W. Weil zusammen.

Mit \mathcal{G}^d , \mathcal{F}^d , \mathcal{C}^d und \mathcal{K}^d bezeichnen wir die Menge aller offenen, abgeschlossenen, kompakten beziehungsweise konvexen und kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d . Der *Konvexring* auf \mathbb{R}^d ist durch die Menge aller Vereinigungen von endlich vielen konvexen und kompakten Mengen gegeben, das heißt durch

$$\mathcal{R}^d := \left\{ \bigcup_{j=1}^n K_j : n \in \mathbb{N}, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^d \right\}.$$

Es gilt also $\mathcal{K}^d \subset \mathcal{R}^d \subset \mathcal{C}^d \subset \mathcal{F}^d$. Wir definieren $'\mathcal{C}^d := \mathcal{C}^d \setminus \{\emptyset\}$ und verwenden bei den anderen vorgestellten Mengensystemen die analoge Schreibweise für den Ausschluss der leeren Menge. Nun bestimmen wir die *Zentrumsfunktion*

$$\text{zen} : '\mathcal{C}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$$

dadurch, dass sie jeder nicht-leeren kompakten Menge C den Mittelpunkt der eindeutig bestimmten kleinsten Kugel, in der C enthalten ist, zuordnet. Den Radius dieser Kugel bezeichnen wir als den *Umkugelradius* $R(C)$. Das Urbild $\text{zen}^{-1}(\{0\})$ schreiben wir als

$$\mathcal{C}_0^d := \{K \in '\mathcal{C}^d : \text{zen}(K) = 0\}.$$

Für $A \subset \mathbb{R}^d$ setzen wir

$$\mathcal{F}^A := \{F \in \mathcal{F}^d : F \cap A = \emptyset\} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_A := \{F \in \mathcal{F}^d : F \cap A \neq \emptyset\}.$$

Die *Fell-Topologie* auf \mathcal{F}^d wird von dem Mengensystem

$$\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}^d\} \cup \{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{G}^d\}$$

erzeugt. Mit dieser Wahl der Topologie ist \mathcal{F}^d metrisierbar. Wir starten im Folgenden \mathcal{F}^d mit der von der Fell-Topologie erzeugten Borelschen σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F}^d)$ aus. Auf der Teilmenge $'\mathcal{C}^d \subset \mathcal{F}^d$ ist es jedoch üblich, als Metrik die *Hausdorff-Metrik* δ betrachten, die für $C_1, C_2 \in '\mathcal{C}^d$ durch

$$\delta(C_1, C_2) := \max \left\{ \max_{x \in C_1} \min_{y \in C_2} \|x - y\|, \max_{x \in C_2} \min_{y \in C_1} \|x - y\| \right\}$$

definiert ist. Die von der Hausdorff-Metrik auf $'\mathcal{C}^d$ induzierte Topologie ist strikt feiner als die von der Fell-Topologie induzierte Spurtopologie. Insbesondere ist in $'\mathcal{C}^d$ jede bezüglich der Hausdorff-Metrik kompakte Menge auch kompakt bezüglich der Fell-Topologie.

2.3 Innere Volumina

Der *Charakterisierungssatz von Hadwiger* (Hugo Hadwiger, 1908-1981), siehe Theorem 6.4.14 in [32], besagt, dass jedes additive, stetige und bewegungsinvariante Funktional, das von \mathcal{K}^d nach \mathbb{R} abbildet, durch eine Linearkombination von gewissen Funktionalen V_0, \dots, V_d gegeben ist. Da diese drei Eigenschaften sehr natürlich sind, ist die Untersuchung der Funktionalen V_0, \dots, V_d grundlegend. Wir führen nun diese Funktionalen über die Steiner-Formel (Jakob Steiner, 1796-1863) ein und nennen ihre wichtigsten Eigenschaften.

2.3.1 Steiner-Formel

Dieser Unterabschnitt gibt Resultate wieder, die in den Büchern [33] von R. Schneider und W. Weil sowie [32] von R. Schneider ausführlich beschrieben werden.

Sei $\mathcal{S} \in \{\mathcal{C}^d, \mathcal{K}^d, \mathcal{R}^d\}$. Eine messbare Funktion $V : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $V(\emptyset) = 0$ heißt *additives Funktional auf \mathcal{S}* , wenn

$$V(K \cup L) + V(K \cap L) = V(K) + V(L), \quad K, L, K \cup L \in \mathcal{S}, \quad (2.3.1)$$

erfüllt ist. Die *Steiner-Formel* besagt nun, dass es Funktionalen $V_i : \mathcal{K}^d \rightarrow [0, \infty)$ mit $V_i(\emptyset) = 0$ gibt, $0 \leq i \leq d$, sodass für alle $K \in \mathcal{K}^d$ und $\epsilon \geq 0$ die Gleichung

$$\lambda_d(K + \epsilon B^d) = \sum_{i=0}^d \epsilon^{d-i} \kappa_{d-i} V_i(K) \quad (2.3.2)$$

gilt. Sei $0 \leq i \leq d$. Das Funktional V_i heißt *i -tes inneres Volumen*, ist additiv auf \mathcal{K}^d und lässt sich auf eindeutige Weise zu einem additiven Funktional auf \mathcal{R}^d fortsetzen. Für diese Fortsetzung verwenden wir nun wieder die Bezeichnung *i -tes inneres Volumen*. Für $S \in \mathcal{R}^d$ hängt $V_i(S)$ nur von S und nicht von der Dimension d des umgebenden Raums ab. Außerdem haben V_d, V_{d-1} und V_0 die folgenden besonderen Eigenschaften: V_d ist das d -dimensionale Volumen, das heißt

$$V_d(S) = \lambda_d(S), \quad S \in \mathcal{R}^d.$$

Für $K \in \mathcal{K}^d$ gilt

$$V_{d-1}(K) = \mathbb{1}\{K^\circ \neq \emptyset\} \cdot \frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K)) + \mathbb{1}\{K^\circ = \emptyset\} \cdot \mathcal{H}^{d-1}(K). \quad (2.3.3)$$

Für $S \in \mathcal{R}^d$ gilt im Fall $\text{cl}(S^\circ) = S$ ebenfalls $V_{d-1}(S) = \frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(S))$, also insbesondere $V_{d-1}(S) \geq 0$. Das 0-te innere Volumen V_0 heißt *Euler-Charakteristik* und wird für $K \in \mathcal{K}^d$ durch

$$V_0(K) = \mathbb{1}\{K \neq \emptyset\} \quad (2.3.4)$$

bestimmt.

2.3.2 Euler-Charakteristik

In Proposition 2.7 werden wir eine Formel zur Berechnung der Euler-Charakteristik in \mathcal{R}^2 wiedergeben, die in dieser oder ähnlicher Form in der Literatur schon mehrfach dargestellt wurde. So ist die Formel, die die Euler-Charakteristik einer Menge aus \mathcal{R}^2 durch die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der Menge minus der Anzahl ihrer Löcher angibt, zum Beispiel in [27] und [33] zu finden. In [20] wird sie sogar als Definition verwendet. Da wir für diese Formel keinen Nachweis finden konnten, möchten wir einen Weg zeigen, wie diese Lücke zumindest für eine große Teilmenge von \mathcal{R}^2 geschlossen werden kann. Manche elementaren Details sparen wir bei der Herleitung aus, da der Hauptteil dieser Arbeit probabilistischen Fragestellungen vorbehalten sein soll. Die Herleitung deutet außerdem an, wie für drei-dimensionale Mengen eine analoge Aussage erhalten werden kann. Die Formel für \mathcal{R}^1 ergibt sich sehr leicht. Von den Definitionen in diesem Abschnitt 2.3.2 werden alle bis auf Definition 2.4 nur innerhalb dieses Abschnitts verwendet.

Die Grundlage unserer Herleitung bildet der Begriff des CW-Komplexes. In der Literatur sind verschiedene äquivalente Definitionen dieses Begriffs gebräuchlich, wir verwenden die elementarste, siehe Seite 175 in [31].

Definition 2.1. Eine *null-dimensionale offene Zelle* ist eine einelementige Menge und für $m \in \mathbb{N}$ bezeichne eine *m-dimensionale offene Zelle* C einen topologischen Raum, der homöomorph zum Inneren von $B^m := [0, 1]^m$ ist, das heißt es gibt eine bijektive und stetige Abbildung von $(0, 1)^m$ nach C , deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Ein *Hausdorff-Raum* ist ein topologischer Raum, in dem jeweils zwei paarweise verschiedene Punkte des Raums disjunkte offene Umgebungen besitzen. Ein *CW-Komplex* ist ein Hausdorff-Raum H zusammen mit einer Partition von H in offene Zellen $(C_i)_{i \in I}$, sodass die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) Für jede m -dimensionale Zelle C_i aus der Partition von H gibt es eine stetige Abbildung $f_i : B^m \rightarrow H$, sodass
 - (i) die Einschränkung von f_i auf $(0, 1)^m$ ein Homöomorphismus nach C_i ist und
 - (ii) das Bild des Randes von B^m in der Vereinigung von endlich vielen Zellen der Partition, deren Dimension jeweils kleiner m ist, enthalten ist.
- (b) Eine Teilmenge von H ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle $i \in I$ ihr Durchschnitt mit dem Abschluss von C_i abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.2. Bezeichnen wir einen Hausdorff-Raum, der Eigenschaft (a) aus Definition 2.1 erfüllt, als *Zellkomplex*, dann erfüllt jeder Zellkomplex, der aus endlich vielen Zellen besteht, auch Eigenschaft (b), siehe Seite 521 in [10]. Da wir im Folgenden nur Zellkomplexe mit endlicher Zellenanzahl betrachten, muss die Eigenschaft (b) nicht mehr nachgewiesen werden.

Definition 2.3. Für einen d -dimensionalen CW-Komplex H ist die *Euler-Charakteristik* V'_0 gegeben durch

$$V'_0(H) := \sum_{m=0}^d (-1)^m c_m(H), \quad (2.3.5)$$

wobei $c_m(H)$ die Anzahl der m -dimensionalen offenen Zellen von H bezeichne. Dieser Wert hängt nicht von der Wahl der Zellzerlegung von H ab, vergleiche Seite 146 in [10].

In [9] erklärt H. Hadwiger auf den Seiten 239 und 289 die Übereinstimmung dieser beiden vorgestellten Definitionen des Begriffs „Euler-Charakteristik“ für Mengen des Konvexrings \mathcal{R}^d . Dafür ist jedoch zuerst zu zeigen, dass sich Mengen aus \mathcal{R}^d als CW-Komplexe darstellen lassen. Um einige technische Schwierigkeiten zu vermeiden, führen wir eine einfacher zu behandelnde Teilmenge $\tilde{\mathcal{R}}^d \subset \mathcal{R}^d$ des Konvexrings ein, die sich später als ausreichend groß für unsere Anwendung erweisen wird.

Definition 2.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^d$. Eine beschränkte Zusammenhangskomponente von M^c bezeichnen wir als *Loch* von M . Zwei Mengen $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^d$ *berühren* sich, wenn $\text{bd}(M_1) \cap \text{bd}(M_2) \neq \emptyset$ und $M_1^\circ \cap M_2^\circ = \emptyset$ gilt. Schließlich setzen wir

$$\tilde{\mathcal{R}}^d := \left\{ H \in \mathcal{R}^d : \text{es existieren } n \in \mathbb{N}_0, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^d \text{ mit } H = \bigcup_{i=1}^n K_i, \right.$$

wobei $\dim(K_i) = d$ gilt und K_i, K_j sich nicht berühren, $1 \leq i < j \leq n$.

Insbesondere besitzt eine Menge $H \in \tilde{\mathcal{R}}^d$ keine zwei sich berührenden Löcher L_1 und L_2 : Angenommen, es gibt ein $x \in \text{bd}(L_1) \cap \text{bd}(L_2)$. Sei $\{K_1, \dots, K_n\}$ eine minimale Menge von konvexen Komponenten von H . Dann gibt es $1 \leq i < j \leq n$ mit $x \in \text{bd}(K_i) \cap \text{bd}(K_j)$ und eine Hyperebene, die einerseits x enthält und andererseits mit den Inneren von K_i und K_j jeweils disjunkt ist. Es folgt $K_i^\circ \cap K_j^\circ = \emptyset$ und weil sich K_i, K_j also berühren ein Widerspruch.

Für $d = 2$ erhalten wir eine einfache Zerlegung von $H \in \tilde{\mathcal{R}}^2$ in offene Zellen, indem wir H wie folgt einem Gitter ähnlich unterteilen.

Lemma 2.5. *Eine Menge $H \in \tilde{\mathcal{R}}^2$ sei ausgestattet mit der Teilraumtopologie, die vom euklidischen Raum \mathbb{R}^2 geerbt wird. Dann gibt es eine Partition von H , mit der H einen CW-Komplex bildet.*

Beweis. Es genügt, eine Zellstruktur $(C_i)_{i \in I}$ wie in Definition 2.1 für eine einzelne Zusammenhangskomponente L von H zu finden. Dann sind die m -dimensionalen offenen Zellen von H für $0 \leq m \leq 2$ durch alle entsprechenden Zellen der einzelnen Zusammenhangskomponenten gegeben. Abkürzend schreiben wir hier der Übersicht halber $[n] := \{1, \dots, n\}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Sei $l \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Löcher L_1, \dots, L_l von L . Zunächst definieren wir $S_i := \text{bd}(L_i) \subset L$ für $i \in [l]$ und $S_{l+1} := \text{bd}(L) \setminus \bigcup_{i \in [l]} S_i$. Da sich die Löcher von H nicht berühren, lassen sich S_1, \dots, S_{l+1} jeweils als disjunkte geschlossene Kurven darstellen. Wegen $L \in \mathcal{R}^2$ können endlich viele Strecken $S_i = [x_i, y_i] \subset L$, $x_i, y_i \in L$, $i \in [n'_1] \setminus [l+1]$ für ein $n'_1 \geq l+2$

so gewählt werden, dass sich erstens für $l + 2 \leq i < j \leq n'_1$ die Strecken S_i und S_j nicht in ihren relativen Inneren schneiden und zweitens $L \setminus \bigcup_{i \in [n'_1]} S_i$ in nicht-leere, konvexe und offene Zusammenhangskomponenten $(F_i)_{i \in [n_2]}$ zerfällt. Die Elemente P_1, \dots, P_{n_0} der nicht-leeren Schnittpunktmenge $\{P \in L : \sum_{i \in [n'_1]} \mathbb{1}\{P \in S_i\} \geq 2\}$ werden nun als null-dimensionale offene Zellen von L gewählt. Die Abschnitte der S_i , $i \in [n'_1]$, die jeweils echt zwischen zwei solchen Schnittpunkten liegen, bilden die ein-dimensionalen offenen Zellen $(S'_i)_{i \in [n_1]}$, siehe Abbildung 2.1. Da die Randstücke S_1, \dots, S_{l+1} jeweils möglicherweise durch mehrere der Punkte $(P_i)_{i \in [n_0]}$ unterteilt werden, gilt $n_1 \geq n'_1$. Die konvexen, offenen Mengen F_i , $i \in [n_2]$, bilden schließlich die zwei-dimensionalen offenen Zellen. Zu zeigen bleibt, dass diese ein- und zwei-dimensionalen offenen Zellen wohldefiniert sind.

Nach Satz X auf Seite 601 in [1] sind alle m -dimensionalen konvexen und kompakten Mengen mit nicht-leerem Inneren zueinander homöomorph, $m \in \mathbb{N}$. Im Beweis in [1] wird für eine beliebige solche Menge konkret ein Homöomorphismus auf die m -dimensionale Einheitskugel angegeben, die nur den Rand der Menge auf den Rand der Kugel abbildet. Mit einer ähnlichen Konstruktion wie in [1] kann S_i , $i \in [n_1]$, leicht durch einen Homöomorphismus auf das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}^1$ abgebildet werden. Berücksichtigen wir nun, dass Homöomorphismen abgeschlossen bezüglich Hintereinanderausführung und Invertierung sind, folgt die Gültigkeit der Eigenschaft (a), (i) von Definition 2.1 für die oben definierten Zellen. Teil (ii) ergibt sich nun direkt aus der Konstruktion der Zellen. Die Behauptung folgt schließlich mit Bemerkung 2.2. \square

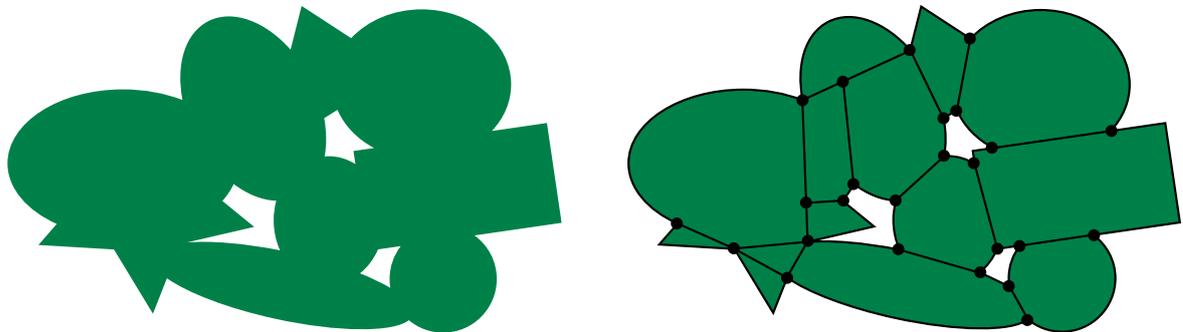


Abbildung 2.1: 2-dimensionale Zusammenhangskomponente ohne und mit Zellzerlegung. Rechts: 0- bzw. 1-dimensionale offene Zellen als schwarze Punkte bzw. Linien

Da wir nun auf $\tilde{\mathcal{R}}^2$ die Gleichheit $V_0 = V'_0$ verwenden können, bezeichnen wir die Euler-Charakteristik im Folgenden nur noch mit V_0 und können zu ihrer Berechnung auch Gleichung (2.3.5) verwenden. Die einfache Zellzerlegung eines $H \in \tilde{\mathcal{R}}^2$ wie in der vorigen Konstruktion ermöglicht allerdings noch keine praktikable Berechenbarkeit von V_0 , da die Anzahlen n_0, n_1 und n_2 der offenen Zellen nicht explizit angegeben werden konnten. Unser Vorgehen ist nun, dass wir H in geeignete Teile zerlegen, sodass diese auf eine insofern „gutartige“ Weise verformt werden können, dass sich die Euler-Charakteristik nicht ändert und leicht berechenbar wird. Dafür benötigen wir weitere Grundbegriffe der Algebraischen Topologie, wie sie zum Beispiel auf Seite 3 in [10] zu finden sind.

Definition 2.6. Seien X und Y topologische Räume. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen *homotop*, in Zeichen $f \simeq g$, wenn es eine *Homotopie* zwischen ihnen gibt, das heißt eine stetige Abbildung $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mit $h(\cdot, 0) = f$ und $h(\cdot, 1) = g$. Die Räume X und Y sind *vom gleichen Homotopietyp*, wenn es eine *Homotopieäquivalenz* zwischen ihnen gibt, das heißt eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$, zu der es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ derart gibt, dass $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ gilt.

Sei $A \subset X$ ausgestattet mit der Teilraumtopologie. Eine *Retraktion* von X auf A ist eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r|_A = \text{id}_A$. Solch ein r heißt *Deformationsretraktion*, falls r zu id_X *relativ A homotop* ist, das heißt es existiert eine Homotopie $h : X \times [0, 1] \rightarrow X$ mit $h(\cdot, 0) = \text{id}_X$, $h(\cdot, 1) = r$ und $h(\cdot, t)|_A = \text{id}_A$ für alle $t \in [0, 1]$. Falls eine (Deformations-)Retraktion für (X, A) existiert, so heißt A ein (*Deformations-*)*Retrakt* von X .

Insbesondere ist jede Deformationsretraktion eine Homotopieäquivalenz. Die Euler-Charakteristik für CW-Komplexe ist unter solchen Abbildungen invariant, wie auf Seite 146 in [10] erklärt wird.

Damit können wir nun die zu Beginn des Abschnitts angesprochene Formel für die Euler-Charakteristik im Fall $d = 2$ herleiten. Im Fall $d = 1$ ist die Argumentation sehr einfach.

Proposition 2.7. *Es gilt*

$$V_0(H) = \begin{cases} k(H), & H \in \mathcal{R}^1, \\ k(H) - l(H), & H \in \tilde{\mathcal{R}}^2, \end{cases} \quad (2.3.6)$$

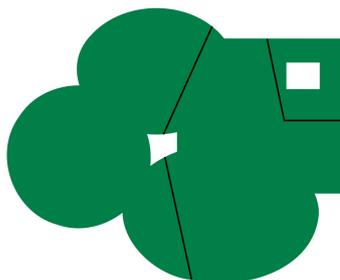
wobei $k(H)$ jeweils die Anzahl der Zusammenhangskomponenten und $l(H)$ die Anzahl der Löcher von H angibt.

Beweis. Für $H = \emptyset$ gilt nach Gleichung (2.3.5) einfach $V_0(H) = 0$. Sei also im Folgenden stets $H \neq \emptyset$. Im ein-dimensionalen Fall ergibt sich $V_0(H) = k(H)$ direkt mit den Gleichungen (2.3.4) und (2.3.1).

Für $H \in \tilde{\mathcal{R}}^2$ müssen wir wie im Beweis von Lemma 2.5 nur den Fall $k(H) = 1$ betrachten. Der allgemeine Fall folgt dann durch Summierung über alle Zusammenhangskomponenten. Wir führen einer Idee von J. Hörrmann folgend eine Induktion über $l(H)$. Wenn H kein Loch besitzt, wählen wir einen Punkt $a \in H^o$. Die Menge $\{a\}$ ist ein Deformationsretrakt des CW-Komplexes H und damit gilt $V_0(H) = V_0(\{a\}) = 1$.

Wir verwenden wie im Beweis von Lemma 2.5, dass wegen $H \in \tilde{\mathcal{R}}^2$ der Rand von H in $l(H) + 1$ disjunkte Zusammenhangskomponenten zerfällt, sodass die im Folgenden konstruierten Kurven existieren. Gilt nun $l(H) = 1$, so kann H mit einer stückweise linearen Kurve derart durchtrennt werden, dass die beiden entstehenden Stücke H_1 und H_2 , in denen die Kurve jeweils noch enthalten sei, jeweils wiederum in $\tilde{\mathcal{R}}^2$ liegen und damit nach Induktionsanfang die Euler-Charakteristik 1 haben. Da der Schnitt aus zwei disjunkten Teilen besteht, die jeweils wegen des Ergebnisses für $d = 1$ die Euler-Charakteristik 1 haben, folgt aus der Additivität

$$V_0(H) = V_0(H_1) + V_0(H_2) - V_0(H_1 \cap H_2) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Abbildung 2.2: Zerlegung von H im Fall von zwei Löchern

Sei nun $l(H) \geq 2$. Ähnlich wie zuvor kann ein Teil H'_1 von H , der genau ein Loch umschließt, durch eine stückweise lineare Kurve in H abgetrennt werden, wobei wiederum die Kurve zu beiden entstehenden Stücken H'_1 und H'_2 gehöre, siehe Abbildung 2.2. Der Schnitt von H'_1 und H'_2 ist also zusammenhängend und wir erhalten mit der Additivität, der Induktionsvoraussetzung und dem Ergebnis für $d = 1$ die Behauptung durch

$$V_0(H) = V_0(H'_1) + V_0(H'_2) - V_0(H'_1 \cap H'_2) = 0 + (1 - (l(H) - 1)) - 1 = 1 - l(H). \quad \square$$

Bemerkung 2.8. (a) Die Einschränkung auf $\tilde{\mathcal{R}}^2$ bei Formel (2.3.6) dient nur der Vereinfachung ihres Beweises und stellt keinen Zweifel an der Gültigkeit dieser Formel für alle Mengen in \mathcal{R}^2 dar. Durch eine ähnliche, aber kompliziertere Beweisführung dürfte die Aussage auf ganz \mathcal{R}^2 ausgeweitet werden können.

(b) Es scheint, dass die Gleichungen (2.3.6) nur die einfachsten Fälle von Formeln für endlich-dimensionale Mengen darstellen, bei denen die Euler-Charakteristiken jeweils durch alternierende Summen gegeben sind. Im drei-dimensionalen Fall stellt sich die entsprechende Formel durch

$$V_0(H) = k(H) - h(H) + l(H), \quad H \in \mathcal{R}^3, \quad (2.3.7)$$

dar, wobei $h(H)$ die *Anzahl der Henkel von H* ist. Mit der Anzahl der Henkel einer Zusammenhangskomponente von H ist die maximale Anzahl disjunkter Schnitte von H gemeint, sodass H ohne diese Schnitte noch zusammenhängend ist. Übung 7 auf Seite 149 in [26] besagt in ähnlichem Zusammenhang, dass jeder Henkel die Euler-Charakteristik um 1 reduziert. Durch eine Konstruktion der offenen Zellen analog zum Beweis von Lemma 2.5 und von Trennlinien und -flächen analog zum Beweis der Proposition 2.7 kann die Formel (2.3.7) bestätigt werden, wir verzichten aber auf eine ausführliche Diskussion.

2.4 Punkt- und Poissonprozesse

In diesem Abschnitt geben wir die später verwendeten Begriffe und Aussagen aus der Theorie der Punktprozesse und insbesondere der Poissonprozesse an. Wir folgen dabei dem Buch [18] von G. Last und M. Penrose. Nur die Definitionen bezüglich Poissonschen Partikelprozessen am Ende von Unterabschnitt 2.4.2 sind dem Buch [33] von R. Schneider und W. Weil entnommen.

Alle im Folgenden erscheinenden zufälligen Objekte seien auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert. Den Erwartungswert bezüglich \mathbb{P} bezeichnen wir mit \mathbb{E} . Wir fixieren einen messbaren Raum $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.

2.4.1 Punktprozesse

Wir definieren $\mathbb{N}_{<\infty}(\mathbb{X}) = \mathbb{N}_{<\infty}$ als den Raum aller Maße μ auf \mathbb{X} , sodass $\mu(B) \in \mathbb{N}_0$ für alle $B \in \mathcal{X}$ gilt, und $\mathbb{N}(\mathbb{X}) = \mathbb{N}$ als den Raum aller Maße auf \mathbb{X} , die durch eine abzählbare Summe von Maßen aus $\mathbb{N}_{<\infty}$ gegeben sind. Ein Maß ν auf \mathbb{X} heißt *s-endlich*, wenn es die abzählbare Summe von endlichen Maßen ist. Insbesondere ist jedes Element von \mathbb{N} *s-endlich*. Eine abzählbare Summe von *s-endlichen* Maßen ist wieder *s-endlich*. Ein Maß ν auf \mathbb{X} heißt *σ -endlich*, wenn es eine Folge $B_n \in \mathcal{X}$, $n \in \mathbb{N}$, gibt mit der Eigenschaft $B_n \uparrow \mathbb{X}$ und $\nu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Jedes *σ -endliche* Maß ist *s-endlich*.

Mit $\mathcal{N}(\mathbb{X}) = \mathcal{N}$ bezeichnen wir die σ -Algebra auf \mathbb{N} , die von den Mengen $\{\mu \in \mathbb{N} : \mu(B) = k\}$ für $B \in \mathcal{X}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ erzeugt wird.

Ein *Punktprozess* auf \mathbb{X} ist ein *Zufallselement* in $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$, das heißt eine messbare Abbildung $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$. Wenn η ein Punktprozess auf \mathbb{X} und $B \in \mathcal{X}$ ist, bezeichnen wir mit $\eta(B)$ die Abbildung $\Omega \ni \omega \mapsto \eta(\omega, B) := \eta(\omega)(B)$, die messbar und somit eine Zufallsvariable ist. Die *Verteilung* eines Punktprozesses η auf \mathbb{X} ist das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_η auf $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$, das durch $A \mapsto \mathbb{P}[\eta \in A]$ gegeben ist. Haben zwei Punktprozesse η_1, η_2 die gleiche Verteilung, schreiben wir $\eta_1 \stackrel{d}{=} \eta_2$.

Das *Intensitätsmaß* λ eines Punktprozesses η auf \mathbb{X} ist definiert durch

$$\lambda(B) := \mathbb{E}[\eta(B)], \quad B \in \mathcal{X}. \quad (2.4.1)$$

Die Eigenschaften des Erwartungswerts stellen sicher, dass das so definierte λ tatsächlich ein Maß ist.

Seien \mathbb{B} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{X} , $m \in \mathbb{N}$ und X_1, \dots, X_m unabhängige Zufallselemente in \mathbb{X} mit Verteilung \mathbb{B} . Dann ist

$$\eta := \delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_m}$$

ein Punktprozess auf \mathbb{X} und wird *Binomialprozess* mit Parametern m und \mathbb{B} genannt. In diesem Fall ist das Intensitätsmaß von η gegeben durch $m\mathbb{B}$.

2.4.2 Poissonprozesse

Eine Zufallsvariable Z ist *Poisson-verteilt* mit Parameter $\gamma \in (0, \infty)$, falls

$$\mathbb{P}[Z = k] = e^{-\gamma} \frac{\gamma^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

gilt. Wir erweitern diese Definition auf die Fälle $\gamma = 0$ und $\gamma = \infty$, indem wir im ersten Fall $\mathbb{P}[Z = 0] = 1$ und im zweiten Fall $\mathbb{P}[Z = \infty] = 1$ setzen. Für alle Wahlen von $\gamma \in [0, \infty]$ schreiben wir dann kurz $Z \sim \text{Po}(\gamma)$ und erhalten $\mathbb{E}[Z] = \gamma$.

Im aktuellen Unterabschnitt 2.4.2 sei λ stets ein s -endliches Maß auf \mathbb{X} . Ein *Poissonprozess* mit Intensitätsmaß λ ist ein Punktprozess η auf \mathbb{X} mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- (a) Für jedes $B \in \mathcal{X}$ gilt $\eta(B) \sim \text{Po}(\lambda(B))$.
- (b) Für $m \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte Mengen $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{X}$ sind die Zufallsvariablen $\eta(B_1), \dots, \eta(B_m)$ unabhängig.

Wenn η ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß λ ist, schreiben wir auch kurz

$$\eta \sim \text{Po}(\lambda).$$

Ein Poissonprozess $\eta \sim \text{Po}(\lambda)$ erfüllt insbesondere $\mathbb{E}[\eta(B)] = \lambda(B)$, $B \in \mathcal{X}$, sodass die Definition von Poissonprozessen konsistent mit (2.4.1) ist.

Sei η ein Punktprozess auf \mathbb{X} . Dann besagt die *Mecke-Gleichung* (Joseph Mecke, 1938-2015), dass $\eta \sim \text{Po}(\lambda)$ genau dann gilt, wenn

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}} f(x, \eta) \eta(dx) \right] = \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}[f(x, \eta + \delta_x)] \lambda(dx) \quad (2.4.2)$$

für jede messbare Funktion $f : \mathbb{X} \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ erfüllt ist. In diesem Fall gilt (2.4.2) auch für jede messbare Funktion $f : \mathbb{X} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, die $\int \mathbb{E}[|f(x, \eta + \delta_x)|] \lambda(dx) < \infty$ erfüllt.

Es gibt einen Poissonprozess η auf \mathbb{X} mit Intensitätsmaß λ , der die Darstellung

$$\eta = \sum_{n=1}^{\kappa} \delta_{X_n} \quad (2.4.3)$$

mit geeigneten Zufallselementen X_1, X_2, \dots in \mathbb{X} und einer $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ -wertigen Zufallsvariable κ besitzt. Jeder andere Poissonprozess mit Intensitätsmaß λ besitzt die gleiche Verteilung wie η . Da wir uns in dieser Arbeit bei der Untersuchung von Poissonprozessen nur mit Fragen beschäftigen, die durch die Verteilung solcher Prozesse bestimmt werden, können und werden wir stets davon ausgehen, dass ein Poissonprozess η in der Form (2.4.3) gegeben ist. Dabei nennen wir die Zufallselemente X_n *Punkte* von η .

Sei \mathbb{X} im Rest von diesem Unterabschnitt 2.4.2 stets ein metrischer Raum mit Metrik ρ und Borelscher σ -Algebra \mathcal{X} . Insbesondere gilt $\{x\} \in \mathcal{X}$ für alle $x \in \mathbb{X}$. Bei einem Maß $\mu \in \mathbb{N}$ schreiben wir $x \in \mu$, falls $\mu(\{x\}) > 0$ gilt. Die Menge aller $x \in \mathbb{R}^d$, für die in diesem Sinne $x \in \mu$ gilt, bezeichnen wir als $\text{supp}(\mu)$. Eine Menge $B \subset \mathbb{X}$ heißt *beschränkt*, wenn sie entweder leer oder ihr *Durchmesser*

$$\text{diam}(B) := \sup\{\rho(x, y) : x, y \in B\}$$

endlich ist. Ein Maß ν auf \mathbb{X} nennen wir *lokal-endlich*, wenn es auf allen beschränkten Mengen endlich ist. In diesem Fall ist ν insbesondere σ -endlich. Ein Maß ν auf \mathbb{X} heißt *diffus*, wenn $\nu(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt, und ein Maß $\mu \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\{x\}) \leq 1$, $x \in \mathbb{X}$, wird *einfach* genannt. Die Menge aller lokal-endlichen einfachen Maße ist messbar. Ein Punktprozess ist *einfach*, wenn er fast sicher lokal-endlich und einfach ist. Falls λ sogar lokal-endlich ist, gilt, dass η genau dann einfach ist, wenn λ diffus ist.

Wenn η ein Poissonprozess auf $'\mathcal{F}^d$ mit der Eigenschaft $\mathbb{P}[\eta(''\mathcal{F}^d \setminus '\mathcal{C}^d) = 0] = 1$ ist, heißt η *Poissonscher Partikelprozess*. In diesem Fall nennen wir die Punkte von η *Partikel*. Sei nun $\mathbb{X} \in \{\mathbb{R}^d, '\mathcal{F}^d\}$. Für $y \in \mathbb{R}^d$ definieren wir auf \mathbb{N} die *Translation* θ_y durch

$$\theta_y \mu(B) := \mu(B + y), \quad \mu \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{X}),$$

wobei für $B \in \mathcal{B}(''\mathcal{F}^d)$ aufbauend auf (2.1.1) die Definition $B + y := \{F + y : F \in B\}$ verwendet wird. Der Poissonprozess η auf \mathbb{X} heißt nun *stationär*, falls $\eta \stackrel{d}{=} \theta_y \eta$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Sei λ ein lokal-endliches Maß auf \mathbb{R}^d . Der Poissonprozess $\eta \sim \text{Po}(\lambda)$ ist genau dann stationär, wenn $\lambda = \gamma \lambda_d$ für ein $\gamma \geq 0$ gilt. In diesem Fall heißt γ die *Intensität* von η .

2.4.3 Die Kovarianzgleichung

In diesem Unterabschnitt seien $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ wieder ein allgemeiner messbarer Raum, λ ein σ -endliches Maß auf \mathbb{X} und $\eta \sim \text{Po}(\lambda)$ wie in (2.4.3) gegeben.

Seien $0 \leq t \leq 1$ und Y_1, Y_2, \dots eine von η unabhängige Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Verteilung $(1-t)\delta_0 + t\delta_1$. Definieren wir damit den Punktprozess

$$\xi := \sum_{n=1}^{\kappa} \delta_{(X_n, Y_n)},$$

so heißt $\eta_t := \xi(\cdot \times \{1\})$ eine *t-Verdünnung* von η . Der Prozess η_t wird also dadurch aus η gewonnen, indem jeder Punkt von η unabhängig von allen anderen Zufallselementen mit Wahrscheinlichkeit t behalten und sonst entfernt wird. Dabei gilt $\eta_t \sim \text{Po}(t\lambda)$.

Von fundamentaler Bedeutung bei der Herleitung von Konzentrationsungleichungen in dieser Arbeit ist der sogenannte *Differenzenoperator*. Für ein Element $x \in \mathbb{X}$ und eine messbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist er gegeben durch

$$D_x f(\mu) := f(\mu + \delta_x) - f(\mu), \quad \mu \in \mathbb{N}.$$

Manchmal werden wir den iterierten Differenzenoperator $D_{x_1} D_{x_2} f := D_{x_1}(D_{x_2} f)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, betrachten. Weil $(\mu, x) \mapsto \mu + \delta_x$ messbar ist, sind die Abbildungen $(\mu, x) \mapsto D_x f(\mu)$ und $(\mu, x_1, x_2) \mapsto D_{x_1} D_{x_2} f(\mu)$ ebenfalls messbar.

Wir nennen eine Zufallsvariable F ein *Poissonfunktional*, wenn es eine messbare Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, für die fast sicher $F = f(\eta)$ gilt. Jedes solche f heißt ein *Repräsentant* von F . In diesem Fall definieren wir

$$D_{x_1} F := D_{x_1} f(\eta) \quad \text{und} \quad D_{x_1} D_{x_2} F := D_{x_1} D_{x_2} f(\eta), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{X}.$$

Wegen der Mecke-Gleichung hängen diese Definitionen fast sicher für λ^2 -fast alle (x_1, x_2) nicht vom gewählten Repräsentanten f ab. Wir nennen ein Poissonfunktional mit Repräsentant f *wachsend*, falls $D_x f(\mu) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{X}$ und $\mu \in \mathbb{N}$ gilt. Das Funktional F heißt *fallend*, wenn $-F$ wachsend ist.

Für $p > 0$ bezeichne L_η^p den Raum aller Poissonfunktionale F , die $\mathbb{E}[|F|^p] < \infty$ erfüllen. Für ein Poissonfunktional $F \in L_\eta^1$ mit Repräsentant f definieren wir

$$P_t F := \int_{\mathbb{N}} \mathbb{E}[f(\eta_t + \mu) \mid \eta] \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu), \quad t \in [0, 1],$$

wobei Π_λ die Verteilung eines Poissonprozesses mit Intensitätsmaß λ bezeichne. Auch die Definition von $P_t F$ hängt im Sinne von fast sicherer Gleichheit nicht von f ab. Darüber hinaus können wir für jedes $t \in [0, 1]$ einen solchen Repräsentanten von $P_t F$ wählen, dass $P_t F$ als gemeinsame Funktion von $t \in [0, 1]$ und dem unterdrückten $\omega \in \Omega$ messbar ist. Es gilt die Ungleichung $\mathbb{E}[|P_t F|^p] \leq \mathbb{E}[|F|^p]$, $t \in [0, 1]$.

Für ein Poissonfunktional $F \in L_\eta^2$ haben wir damit eine Abbildung $DF : \Omega \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $(\omega, x) \mapsto (D_x F)(\omega)$ gegeben ist. Die Forderung $DF \in L^2(\mathbb{P} \otimes \lambda)$ bedeutet also $\mathbb{E}[\int_{\mathbb{X}} (D_x F)^2 \lambda(dx)] < \infty$.

Damit können wir die *Kovarianzgleichung*, siehe Theorem 20.2 in [18], wiedergeben, die wir als Ausgangspunkt für neue allgemeine Konzentrationsungleichungen verwenden werden:

Für $F = f(\eta), G = g(\eta) \in L_\eta^2$ mit $DF, DG \in L^2(\mathbb{P} \otimes \lambda)$ gilt

$$\mathbb{E}[FG] - \mathbb{E}[F]\mathbb{E}[G] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 (D_x F)(P_t D_x G) dt \lambda(dx)\right].$$

Wir vereinfachen diese Kovarianzgleichung noch insofern, als wir im Faktor $P_t D_x G$ die Bedingung auf η entfernen: Wegen $\mathbb{E}[(P_t D_x G)^2] \leq \mathbb{E}[(D_x G)^2]$, $x \in \mathbb{X}, t \in [0, 1]$, und $DG \in L^2(\mathbb{P} \otimes \lambda)$ folgt $\int_0^1 \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}[(P_t D_x G)^2] \lambda(dx) dt < \infty$. Da auch $\int_0^1 \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}[(D_x F)^2] \lambda(dx) dt < \infty$ gilt, erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}[|(D_x F)(P_t D_x G)|] \lambda(dx) dt < \infty.$$

Verwenden wir die Darstellung $P_t D_x G = \mathbb{E}[D_x g(\eta_t + \eta'_{1-t}) \mid \eta]$, wobei $\eta'_{1-t} \sim \text{Po}((1-t)\lambda)$ unabhängig vom Paar (η, η_t) sei, ergibt dies

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[(D_x F)(D_x g(\eta_t + \eta'_{1-t})) \mid \eta]|] \lambda(dx) dt < \infty. \quad (2.4.4)$$

Also können wir nach dem Satz von Fubini auf der linken Seite von (2.4.4) nach Streichung der Betragsstriche den äußeren Erwartungswert und die beiden Integrale beliebig vertauschen. Aus den Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts folgt somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[FG] - \mathbb{E}[F]\mathbb{E}[G] &= \int_{\mathbb{X}} \int_0^1 \mathbb{E}[\mathbb{E}[(D_x F)(D_x g(\eta_t + \eta'_{1-t})) \mid \eta]] dt \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{X}} \int_0^1 \mathbb{E}[(D_x F)(D_x g(\eta_t + \eta'_{1-t}))] dt \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{X}} \int_0^1 \mathbb{E}\left[(D_x F) \int_{\mathbb{N}} D_x g(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu)\right] dt \lambda(dx) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 (D_x F) \int_{\mathbb{N}} D_x g(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx)\right]. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

2.5 Modelle in der Stochastischen Geometrie

Wir stellen nun zwei der am intensivsten untersuchten Modelle der Stochastischen Geometrie vor. Bei der Definition des Booleschen Modells folgen wir im nächsten Abschnitt der Darstellung in [17]. Die enthaltenenen Aussagen werden in [33] bewiesen. Der Leser möge beim Nachschlagen beachten, dass in [18] und damit in der vorliegenden Arbeit eine andere Definition des Begriffs „lokal-endlich“ verwendet wird als in [33]. Eine Sammlung von Verweisen auf Literatur, die praktische Anwendungen des Booleschen Modells präsentieren, ist zum Beispiel in der Einleitung von [13] zu finden.

2.5.1 Das Boolesche Modell

Sei η ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit einem Intensitätsmaß $\Lambda \neq 0$, das endlich auf kompakten Mengen (bezüglich der Fell-Topologie) ist. Diese Eigenschaft ist äquivalent dazu, dass

$$\Lambda(\{K \in \mathcal{C}^d : K \cap C \neq \emptyset\}) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d,$$

gilt. Insbesondere ist Λ lokal-endlich bezüglich der Hausdorff-Metrik. Dann gibt es eine Zahl $\gamma > 0$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} auf \mathcal{C}_0^d , sodass

$$\Lambda(\cdot) = \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{K + x \in \cdot\} dx \mathbb{Q}(dK) \quad (2.5.1)$$

gilt. Dabei sind die *Intensität* γ und die *Kornverteilung* \mathbb{Q} eindeutig bestimmt. Ein Zufallselement Z_0 mit Verteilung \mathbb{Q} nennen wir *typisches Korn von η* . Ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q}' auf \mathcal{C}_0^d ist die Kornverteilung eines stationären Partikelprozesses genau dann, wenn

$$\int_{\mathcal{C}_0^d} \lambda_d(K + B(0, t)) \mathbb{Q}'(dK) < \infty, \quad t > 0, \quad (2.5.2)$$

gilt. Bezeichnen wir mit Z_0 das typische Korn bezüglich der Formverteilung \mathbb{Q} , dann schreibt sich die Ungleichung (2.5.2) als

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 + B(0, t))] < \infty, \quad t > 0.$$

Nun definieren wir eine Abbildung auf $\mathbb{N}(\mathcal{C}^d)$ durch

$$Z(\mu) := \bigcup_{K \in \mu} K,$$

falls μ lokal-endlich bezüglich der Hausdorff-Metrik ist und anderenfalls $Z(\mu) := \emptyset$. Die Abbildung $\mu \mapsto Z(\mu)$ bildet in den Raum \mathcal{F}^d ab und ist messbar, siehe Theorem 3.6.2 in [33]. Das Boolesche Modell ist nun durch $Z = Z(\eta)$ gegeben, das heißt wir betrachten die zufällige Vereinigungsmenge

$$Z = \bigcup_{K \in \eta} K.$$



Abbildung 2.3: Ausschnitt des Booleschen Modells mit konvexen und kompakten Körnern.

Das Boolesche Modell ist ein Beispiel der allgemeiner definierten Klasse der sogenannten *Keim-Korn-Modelle*. Ohne diese in voller Allgemeinheit wiederzugeben, nehmen wir dies zum Anlass, die Mengen $K \in \eta$ als *Körner* von Z zu bezeichnen.

Für den *Volumenanteil* $p := \mathbb{P}[0 \in Z]$ des Booleschen Modells Z mit Intensität γ und typischem Korn Z_0 gilt

$$\mathbb{E}[\lambda_d(Z \cap B)] = p\lambda_d(B) = (1 - e^{-\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]})\lambda_d(B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (2.5.3)$$

2.5.2 Das Poisson-Voronoi-Mosaik

Das Voronoi-Mosaik definieren wir wie in [33]. Wir betrachten die Menge $\mathbb{N}_0(\mathbb{R}^d)$ der lokal-endlichen einfachen Maße $\mu \in \mathbb{N}(\mathbb{R}^d)$, die $\text{conv}(\text{supp}(\mu)) = \mathbb{R}^d$ erfüllen. Für $\mu \in \mathbb{N}_0(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mu$ sei das Polytop

$$C(\mu, x) := \{z \in \mathbb{R}^d : \|z - x\| \leq \|z - y\| \forall y \in \mu\}$$

die *Voronoi-Zelle* von x und

$$\mathbf{m}(\mu) := \{C(\mu, x) : x \in \mu\}$$

das von μ erzeugte *Voronoi-Mosaik*. Für $\mu \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ setzen wir $C(\mu, x) := \emptyset$. Seien $\mu \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mu$, $C = C(\mu, x)$ eine feste Voronoi-Zelle und $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^d$ eine minimale Menge, deren konvexe Hülle gleich C ist. Die *Voronoi-Flower* $S(\mu, x)$ der Zelle C ist gegeben durch $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \|x_i - x\|)$.

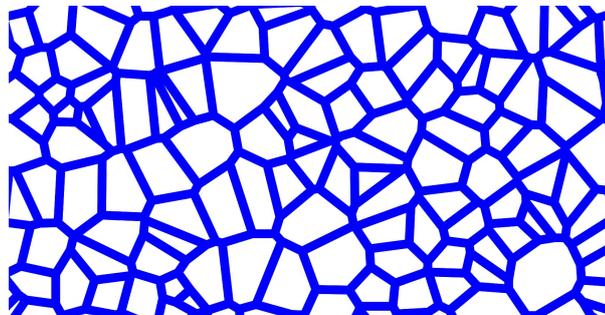


Abbildung 2.4: Ausschnitt eines Poisson-Voronoi-Mosaiks. (Grafik von Michael Klatt.)

2 Grundlagen und Notationen

Sei η ein stationärer Poissonprozess auf \mathbb{R}^d mit Intensität $\gamma > 0$. Die typische Voronoi-Zelle definieren wir nun durch eine komprimierte Fassung der zugehörigen Begriffsbildungen in [18]: Eine *Palm'sche Version* η^0 von η ist ein einfacher Punktprozess mit Verteilung

$$\mathbb{P}_\eta^0(\cdot) := \mathbb{P}(\eta + \delta_0 \in \cdot).$$

Wir definieren

$$C_0(\mu) := C(\mu + \delta_0, 0), \quad \mu \in \mathbb{N}_0,$$

und $C_0(\mu) := \{0\}$ für $\mu \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$. Dann besitzt $C_0(\eta)$ die Verteilung der typischen Voronoi-Zelle, zum Hintergrund dieses Begriffs verweisen wir auf [18] oder [33].

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

Als grundlegenden Ansatz zur Herleitung einer Konzentrationsungleichung verwenden wir stets die Markov-Ungleichung nach einer speziellen Umformung der betrachteten Ungleichung. Eine Konzentrationsungleichung für den oberen Tail einer integrierbaren Zufallsvariable Y gewinnen wir durch das folgende Vorgehen:

(1) Für $r \geq 0$ und $s = s(r) > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \geq r] = \mathbb{P}[s(Y - \mathbb{E}[Y]) \geq sr] = \mathbb{P}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])} \geq e^{sr}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}]}{e^{sr}}$$

und damit für jedes $r \geq 0$ die Ungleichung

$$\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \geq r] \leq \inf_{s>0} \frac{\mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}]}{e^{sr}}. \quad (3.0.1)$$

Analog erhält man einen Ansatz für den unteren Tail durch

$$\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \leq -r] = \inf_{s>0} \mathbb{P}[e^{-s(Y - \mathbb{E}[Y])} \geq e^{sr}] \leq \inf_{s>0} \frac{\mathbb{E}[e^{-s(Y - \mathbb{E}[Y])}]}{e^{sr}}, \quad r \geq 0. \quad (3.0.2)$$

Die rechte Seite von (3.0.1) beziehungsweise von (3.0.2) wird gemäß ihrer erstmaligen Betrachtung in dieser Form in [6] als *Chernoff-Schranke* bezeichnet.

Bemerkung 3.1. Setzt man $\psi(s) := \log \mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}]$, $s > 0$, (die *kumulantenerzeugende Funktion* von $Y - \mathbb{E}[Y]$) und betrachtet man die (modifizierte) *Fenchel-Legendre-Transformierte* $\psi^*(r) := \sup_{s>0} (sr - \psi(s))$, $r \geq 0$, so gilt $\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \geq r] \leq \exp(-\psi^*(r))$, vergleiche Seite 21 in [4]. Diese grundlegende Begriffsbildung aus der Theorie der Konzentrationsungleichungen und Großen Abweichungen soll zumindest hiermit erwähnt werden, auch wenn wir im Weiteren nicht direkt mit diesem Begriff arbeiten werden.

(2) Wenn der üblicherweise unbekannte Wert $\mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}]$ in einem zweiten Schritt mit einer geeigneten Funktion f nach oben durch $\exp(f(s))$ abgeschätzt wird, stellt sich (3) zuletzt die Aufgabe der Minimierung von $f(s) - sr$ und Einsetzen des für s erhaltenen Werts in (3.0.1) beziehungsweise (3.0.2).

Bevor wir in den folgenden drei Abschnitten verschiedene Methoden präsentieren, explizite Konzentrationsungleichungen für zuerst Binomial- und dann Poissonfunktionale herzuleiten, stellen wir ein Hilfsmittel vor, das im weiteren Verlauf in verschiedenen Varianten verwendet wird. Die *Methode von Herbst* wurde erstmals in [7] verwendet und dort

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

einem unveröffentlichten Brief von I. Herbst zugeschrieben. Proposition 6.1 in [4] stellt die einfachste Variante der Methode von Herbst vor. Da diese Variante den Kern der Methode illustriert und später auch so verwendet wird, geben wir sie mitsamt des Beweises wieder.

Definition 3.2. Die *Entropie* einer Zufallsvariablen $Y > 0$ mit endlichem Erwartungswert ist gegeben durch

$$\text{Ent}(Y) := \mathbb{E}[Y \log(Y)] - \mathbb{E}[Y] \log \mathbb{E}[Y].$$

Lemma 3.3. (*Methode von Herbst, Variante I*)

Seien $c, s > 0$ und Y eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[e^{sY}] < \infty$ und

$$\frac{\text{Ent}(e^{uY})}{\mathbb{E}[e^{uY}]} \leq c \frac{u^2}{2}, \quad 0 < u \leq s.$$

Dann gilt

$$\log \mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}] \leq c \frac{s^2}{2}.$$

Beweis. Sei $0 < u \leq s$. Setze $h(u) := \frac{1}{u} \log \mathbb{E}[e^{uY}]$. Es gilt nun

$$h'(u) = \frac{\mathbb{E}[Y e^{uY}]}{u \mathbb{E}[e^{uY}]} - \frac{\log \mathbb{E}[e^{uY}]}{u^2} = \frac{\text{Ent}(e^{uY})}{u^2 \mathbb{E}[e^{uY}]} \leq \frac{1}{2} c. \quad (3.0.3)$$

Nun bemerken wir, dass

$$\lim_{u \downarrow 0} h(u) = \frac{d}{du} \log \mathbb{E}[e^{uY}] \Big|_{u=0} = \frac{\mathbb{E}[Y e^{uY}]}{\mathbb{E}[e^{uY}]} \Big|_{u=0} = \mathbb{E}[Y]$$

gilt und erhalten damit $h(s) = \mathbb{E}[Y] + \int_0^s h'(u) du$. Zusammen mit (3.0.3) folgt daraus

$$\frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sY}] \leq \mathbb{E}[Y] + \frac{1}{2} cs$$

und schließlich

$$\log \mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}] = \log \mathbb{E}[e^{sY}] - s \mathbb{E}[Y] \leq \frac{s^2}{2} c. \quad \square$$

Die Betrachtung der Entropie wird bei den Konzentrationsungleichungen in den Abschnitten 3.1 und 3.2 eine entscheidende Rolle spielen. Dagegen benötigen wir für die Resultate in Abschnitt 3.3 Abschätzungen für $\mathbb{E}[Y e^{uY}]$ und dementsprechend andere Varianten der Methode von Herbst, von denen wir nun die einfachste angeben, vergleiche mit dem Beweis des Theorems 1 in [15].

Lemma 3.4. (*Methode von Herbst, Variante II*)

Seien $c, s > 0$ und Y eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[e^{sY}] < \infty$ und

$$\frac{\mathbb{E}[Y e^{uY}]}{\mathbb{E}[e^{uY}]} \leq \mathbb{E}[Y] + cu, \quad 0 < u \leq s.$$

Dann gilt

$$\log \mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}] \leq c \frac{s^2}{2}.$$

Beweis. Sei $0 < u \leq s$. Mit der Definition $h(u) := \log \mathbb{E}[e^{uY}]$ gilt

$$h'(u) = \frac{\mathbb{E}[Ye^{uY}]}{\mathbb{E}[e^{uY}]} \leq \mathbb{E}[Y] + cu. \quad (3.0.4)$$

Wegen $\lim_{u \downarrow 0} h(u) = 0$ erhalten wir $h(s) = \int_0^s h'(u) du$. Zusammen mit (3.0.4) folgt daraus

$$\log \mathbb{E}[e^{sY}] \leq s\mathbb{E}[Y] + \frac{s^2}{2}c,$$

also

$$\log \mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}] \leq \frac{s^2}{2}c. \quad \square$$

3.1 Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt geben wir allgemeine Konzentrationsungleichungen für Funktionen von unabhängigen Zufallsvariablen wieder, die wir in Abschnitt 4.1 auf Volumen, Oberfläche und Euler-Charakteristik einer passenden Variante des Booleschen Modells anwenden können. Die Konzentrationsungleichungen stammen im Wesentlichen aus den Arbeiten [25] von C. McDiarmid und [3] von S. Boucheron, G. Lugosi und P. Massart.

Seien $m \in \mathbb{N}$, X_1, \dots, X_m unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in einem messbaren Raum S und $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung, sodass

$$Y := f(X_1, \dots, X_m)$$

integrierbar ist. Zur Untersuchung der Verteilung der Zufallsvariable Y benutzen wir eine unabhängige Kopie (X'_1, \dots, X'_m) von (X_1, \dots, X_m) und setzen

$$Y^{(i)} := f(X_1, \dots, X_{i-1}, X'_i, X_{i+1}, \dots, X_m), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.1.1)$$

Zuerst geben wir Lemma 1.2 in [25] wieder. Die entscheidende Voraussetzung (3.1.2) wird als *Eigenschaft der beschränkten Differenzen* bezeichnet.

Satz 3.5. *Falls Konstanten $c_1, \dots, c_m > 0$ existieren, sodass*

$$|f(x_1, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_m)| \leq c_i, \quad x_1, \dots, x_m, x'_i \in S, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (3.1.2)$$

erfüllt ist, gilt

$$\mathbb{P}[|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq r] \leq 2 \exp\left(-\frac{2r^2}{\sum_{i=1}^m c_i^2}\right), \quad r \geq 0. \quad (3.1.3)$$

Bemerkung 3.6. Tatsächlich wird in [25] eine stärkere Aussage bewiesen, nämlich die getrennte Abschätzung beider Tails jeweils durch $\exp(-2r^2 / \sum_i c_i^2)$. Entsprechendes gilt für alle Aussagen, die wir mithilfe von (3.1.3) beweisen.

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

In vielen Fällen ist die von McDiarmid geforderte Eigenschaft der beschränkten Differenzen jedoch zu strikt. In [3] stellen Boucheron, Lugosi und Massart verschiedene Varianten von schwächeren Voraussetzungen vor, unter denen andere Konzentrationen als in Satz 3.5 bewiesen werden können. Ausgangspunkt für ihre Untersuchungen ist Lemma 8 in [24] von Massart, das sie leicht modifiziert als Proposition 10 in [3] wie folgt (ohne Nennung der Bedingung an den Parameter s) unter der Bezeichnung *Logarithmische Sobolev-Ungleichungen* wiedergeben: Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}[e^{sY}] < \infty$ gelten die Ungleichungen

$$\text{Ent}(e^{sY}) \leq \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[e^{sY} \psi(-s(Y - Y^{(i)})) \mathbb{1}\{Y > Y^{(i)}\}] \quad (3.1.4)$$

und

$$\text{Ent}(e^{sY}) \leq \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[e^{sY} \psi(s(Y^{(i)} - Y)) \mathbb{1}\{Y < Y^{(i)}\}], \quad (3.1.5)$$

wobei $\psi(x) := x(e^x - 1)$. Wir nennen (3.1.4) und (3.1.5) im Folgenden etwas kürzer *Log-Sobolev-Ungleichungen*. Aus diesen Ungleichungen folgern die Autoren in [3], dass auch nicht-deterministische Abschätzungen der Zufallsvariablen

$$V_B^{(+)} := \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m (Y - Y^{(i)})^2 \mathbb{1}\{Y > Y^{(i)}\} \mid X_1, \dots, X_m\right] \quad (3.1.6)$$

und

$$V_B^{(-)} := \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m (Y - Y^{(i)})^2 \mathbb{1}\{Y < Y^{(i)}\} \mid X_1, \dots, X_m\right] \quad (3.1.7)$$

zu Konzentrationsungleichungen für den oberen beziehungsweise unteren Tail von Y führen. Wir erinnern hier daran, dass für unabhängige Zufallsvariablen T_1, T_2 und eine messbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty]$ die Gleichung $\mathbb{E}[g(T_1, T_2) \mid T_1] = \int_{\mathbb{R}} g(T_1, t) \mathbb{P}_{T_2}(dt)$ gilt. Die Konzentrationsungleichungen in [3] basieren auf dem dortigen Theorem 2, das wir nun wiedergeben.

Satz 3.7. *Für alle $\theta > 0$ und $s \in (0, 1/\theta)$ gelten im Fall der Endlichkeit der folgenden Erwartungswerte die Ungleichungen*

$$\log \mathbb{E}[e^{s(Y - \mathbb{E}[Y])}] \leq \frac{s\theta}{1 - s\theta} \log \mathbb{E}[e^{sV_B^{(+)}/\theta}]$$

und

$$\log \mathbb{E}[e^{-s(Y - \mathbb{E}[Y])}] \leq \frac{s\theta}{1 - s\theta} \log \mathbb{E}[e^{sV_B^{(-)}/\theta}]. \quad (3.1.8)$$

Zunächst kann leicht eingesehen werden, dass im Falle der Abschätzung von $V_B^{(+)}$ beziehungsweise von $V_B^{(-)}$ durch eine Konstante der Satz 3.7 noch keine Verbesserung gegenüber Satz 3.5 darstellt, wenn man die Abschätzung mit der Chernoff-Schranke kombiniert. Falls jedoch $V_B^{(+)}$ und $V_B^{(-)}$ durch geeignete Zufallsvariablen abgeschätzt werden können, ergeben sich interessante neue Resultate. Von besonderem Interesse im Hinblick auf die Anwendung auf eine modifizierte Version des Booleschen Modells sind dabei die Sätze 5

und 8 in [3], die Aussagen über den oberen Tail der Verteilung von Y treffen. Wir geben diese Aussagen nun ergänzt um die notwendigen Momentenbedingungen in den folgenden Sätzen 3.8 und 3.9 in den jeweiligen Teilen (a) wieder und erweitern sie jeweils in (b) um analoge Aussagen für den unteren Tail, wobei wir die Beweise der jeweiligen Teile (b) ausführen. Die Momentenbedingungen von Satz 3.8 ergeben sich aus Lemma 11 in [3], das in den Beweisen für beide Tails verwendet wird. Zumindest die im folgenden Satz 3.8 genannte Aussage für den unteren Tail war den Autoren von [3] offenbar bekannt, da sie im dortigen Lemma 11 genau die dafür benötigte elementare Ungleichung bereitstellen: Für $a, c > 0$ und $0 < r < c/a$ gilt

$$\sup_{s>0} \left\{ sr - \frac{cs^2}{1+sa} \right\} \geq \frac{r^2}{4c}. \quad (3.1.9)$$

Satz 3.8. *Seien $a > 0$ und $b \geq 0$.*

(a) *Sei $r \geq 0$. Es gelte $\mathbb{E}[e^{uY}] < \infty$ für alle $0 < u \leq (1 - (1 + \frac{ar}{a\mathbb{E}[Y]+b})^{-1/2})/a$ und fast sicher $V_B^{(+)} \leq aY + b$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{r^2}{4a\mathbb{E}[Y] + 4b + 2ar}\right). \quad (3.1.10)$$

(b) *Sei $0 < r < \mathbb{E}[Y]$. Es gelte $\mathbb{E}[e^{-uY}] < \infty$ für alle $0 < u \leq ((1 - \frac{ar}{a\mathbb{E}[Y]+b})^{-1/2} - 1)/a$ und fast sicher $V_B^{(-)} \leq aY + b$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \leq -r] \leq \exp\left(-\frac{r^2}{4a\mathbb{E}[Y] + 4b}\right).$$

Beweis. Teil (a) ist als Theorem 5 in [3] bewiesen. Analog dazu zeigen wir die Aussage von Teil (b). Seien $s > 0$ und $0 < u \leq s$. Mit (3.1.5), der Abschätzung $x(e^x - 1) \leq x^2$ für $x < 0$ und der Voraussetzung erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{Ent}(e^{-uY}) &\leq \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[e^{-uY} \psi(-u(Y^{(i)} - Y)) \mathbf{1}\{Y < Y^{(i)}\}] \\ &\leq u^2 \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[e^{-uY} (Y^{(i)} - Y)^2 \mathbf{1}\{Y < Y^{(i)}\}] = u^2 \mathbb{E}[e^{-uY} V_B^{(-)}] \\ &\leq u^2 (a\mathbb{E}[Y e^{-uY}] + b\mathbb{E}[e^{-uY}]). \end{aligned}$$

Definieren wir $h(u) := -\frac{1}{u} \log \mathbb{E}[e^{-uY}]$, ergibt dies

$$h'(u) = \frac{\mathbb{E}[Y e^{-uY}]}{u\mathbb{E}[e^{-uY}]} + \frac{\log \mathbb{E}[e^{-uY}]}{u^2} = -\frac{\text{Ent}(e^{-uY})}{u^2 \mathbb{E}[e^{-uY}]} \geq -a \frac{\mathbb{E}[Y e^{-uY}]}{\mathbb{E}[e^{-uY}]} - b. \quad (3.1.11)$$

Wegen $\lim_{u \downarrow 0} h(u) = \mathbb{E}[Y]$ gilt $h(s) = \mathbb{E}[Y] + \int_0^s h'(u) du$. Zusammen mit der Ungleichung (3.1.11) ergibt dies

$$h(s) \geq \mathbb{E}[Y] - \int_0^s \left(a \frac{\mathbb{E}[Y e^{-uY}]}{\mathbb{E}[e^{-uY}]} + b \right) du = \mathbb{E}[Y] + a \log \mathbb{E}[e^{-sY}] - bs$$

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

und damit

$$\log \mathbb{E}[e^{-sY}] \leq -s\mathbb{E}[Y] - sa \log \mathbb{E}[e^{-sY}] + bs^2.$$

Daraus folgt

$$\log \mathbb{E}[e^{-sY}] \leq (-s\mathbb{E}[Y] + bs^2)/(1 + sa)$$

und durch weitere Umformung

$$\log \mathbb{E}[e^{-sY}] + s\mathbb{E}[Y] \leq (a\mathbb{E}[Y] + b) \frac{s^2}{1 + sa}.$$

Mit der Chernoff-Schranke folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \leq -r] &\leq \inf_{s>0} \frac{\mathbb{E}[e^{-s(Y-\mathbb{E}[Y])}]}{e^{sr}} \leq \inf_{s>0} \exp\left(\left(a\mathbb{E}[Y] + b\right) \frac{s^2}{1 + sa} - sr\right) \\ &\leq \exp\left(-\sup_{s>0} \left\{sr - \left(a\mathbb{E}[Y] + b\right) \frac{s^2}{1 + sa}\right\}\right). \end{aligned}$$

Nun können wir für $0 < r < \mathbb{E}[Y]$ die Abschätzung (3.1.9) anwenden, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Satz 3.9. Sei $M \geq 0$ eine Zufallsvariable und es gelte $f \geq 0$.

- (a) Es sei $V_B^{(+)} \leq MY$ fast sicher erfüllt. Dann gilt für alle $\alpha > 0$ und $\beta \in (0, 1/\alpha)$ mit $\mathbb{E}[e^{\beta M/\alpha}] < \infty$:

$$\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \geq r] \leq \exp\left(\frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \log\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\beta M}{\alpha}\right)\right]\right) - \beta z_1\right), \quad r \geq 0,$$

wobei $z_1 = z_1(r) := \sqrt{\mathbb{E}[Y] + r} - \sqrt{\mathbb{E}[Y]}$ ist.

- (b) Im Fall $V_B^{(-)} \leq MY$ gilt für alle $\alpha > 0$ und $\beta \in (0, 1/\alpha)$ mit $\mathbb{E}[e^{\beta M/\alpha}] < \infty$:

$$\mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \leq -r] \leq \exp\left(\frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \log\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\beta M}{\alpha}\right)\right]\right) - \beta z_2\right), \quad 0 \leq r \leq \mathbb{E}[Y],$$

wobei $z_2 = z_2(r) := -\sqrt{\mathbb{E}[Y] - r} + \mathbb{E}[\sqrt{Y}]$ ist.

Beweis. Teil (a) ist durch Theorem 8 und den anschließenden Hinweis in [3] bewiesen. Zum Beweis von Teil (b) erhalten wir für $\beta > 0$ ähnlich wie auf Seite 1588 in [3]:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y - \mathbb{E}[Y] \leq -r] &= \mathbb{P}[\sqrt{Y} \leq \sqrt{\mathbb{E}[Y] - r}] = \mathbb{P}[\sqrt{Y} \leq -z_2 + \mathbb{E}[\sqrt{Y}]] \\ &= \mathbb{P}[\sqrt{Y} - \mathbb{E}[\sqrt{Y}] \leq -z_2] = \mathbb{P}[e^{-\beta(\sqrt{Y} - \mathbb{E}[\sqrt{Y}])} \geq e^{\beta z_2}] \\ &\leq \mathbb{E}[e^{-\beta(\sqrt{Y} - \mathbb{E}[\sqrt{Y}])}] e^{-\beta z_2}. \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Nun definieren wir $\tilde{V}_B^{(-)}$ durch die rechte Seite von (3.1.7), wobei wir dort Y durch \sqrt{Y} und $Y^{(i)}$ durch $\sqrt{Y^{(i)}}$ ersetzen. Es gilt also

$$\tilde{V}_B^{(-)} \cdot \mathbf{1}\{Y > 0\} = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m (\sqrt{Y} - \sqrt{Y^{(i)}})^2 \mathbf{1}\{0 < \sqrt{Y} < \sqrt{Y^{(i)}}\} \mid X_1, \dots, X_m\right]. \tag{3.1.13}$$

Für Zahlen $0 < a < b$ gilt $(a - b)^2 < \left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{b}\right)^2$. Durch Anwendung dieser Abschätzung auf (3.1.13) folgern wir analog zum Beweis von Theorem 8 in [3]:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_B^{(-)} \cdot \mathbf{1}\{Y > 0\} &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{Y}{\sqrt{Y^{(i)}}} - \frac{Y^{(i)}}{\sqrt{Y^{(i)}}}\right)^2 \mathbf{1}\{0 < Y < Y^{(i)}\} \mid X_1, \dots, X_m\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{Y^{(i)}} (Y - Y^{(i)})^2 \mathbf{1}\{0 < Y < Y^{(i)}\} \mid X_1, \dots, X_m\right] \\ &\leq \mathbf{1}\{Y > 0\} \frac{1}{Y} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^m (Y - Y^{(i)})^2 \mathbf{1}\{Y < Y^{(i)}\} \mid X_1, \dots, X_m\right] \\ &= \mathbf{1}\{Y > 0\} \frac{1}{Y} V_B^{(-)}. \end{aligned}$$

Deshalb gilt auf dem Ereignis $\{Y > 0, V_B^{(-)} \leq MY\}$ die Ungleichung $\tilde{V}_B^{(-)} \leq M$. Außerdem folgt auf dem Ereignis $\{Y = 0, V_B^{(-)} \leq MY\} = \{Y = 0, V_B^{(-)} = 0\}$ direkt aus der Definition $\tilde{V}_B^{(-)} = 0$. Da $V_B^{(-)} \leq MY$ fast sicher erfüllt ist, gilt also nach diesen beiden getrennten Beobachtungen auch $\tilde{V}_B^{(-)} \leq M$ fast sicher. Mit obiger Abschätzung (3.1.12) und Ungleichung (3.1.8), angewendet auf \sqrt{Y} , folgt nun die Behauptung. \square

3.2 Poissonfunktionale und die Log-Sobolev-Ungleichung

In [34] entwickelt L. Wu eine sogenannte *modifizierte Logarithmische Sobolev-Ungleichung für Poissonprozesse*, die sich als ein mächtiges Hilfsmittel zur Herleitung von Konzentrationsungleichungen für Poissonfunktionale erweist. Wir werden ohne Verwechslungsgefahr wie in Abschnitt 3.1 die Abkürzung *Log-Sobolev-Ungleichung verwenden*. Dazu stellt Wu erste Möglichkeiten vor, wie daraus Konzentrationsungleichungen hergeleitet werden können. In [5] zeigen S. Bachmann und G. Peccati, wie sich durch das Übertragen der Methoden in [3] auf Poissonfunktionale viele weitere Varianten von Konzentrationsungleichungen gewinnen lassen. Außerdem verallgemeinern Bachmann und Peccati die Log-Sobolev-Ungleichung von Wu durch eine insofern flexible Anwendung der Mecke-Gleichung, als in Satz 3.10 die Menge I beliebig gewählt werden kann. Wir geben nun diese verallgemeinerte Log-Sobolev-Ungleichung an.

In diesem Abschnitt 3.2 sei stets $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ ein messbarer Raum, wobei \mathcal{X} einen abzählbaren Erzeuger besitze, und $\lambda \neq 0$ ein σ -endliches Maß auf \mathbb{X} . Darauf aufbauend sei $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ wie in Abschnitt 2.4 definiert. Nun sei $\eta \sim \text{Po}(\lambda)$. Weiter sei F ein Poissonfunktional mit Repräsentant f . Für eine messbare Teilmenge $I \subset \mathbb{X} \times \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{X}$ und $\mu \in \mathbb{N}$ wird

$$D_x^I f(\mu) := (D_x f(\mu)) \cdot \mathbf{1}\{(x, \mu) \in I\}.$$

gesetzt. Für $\beta \in \mathbb{R}$ schreiben wir $D_x^{\geq \beta} f(\mu) := (D_x f(\mu)) \cdot \mathbf{1}\{D_x f(\mu) \geq \beta\}$, analog sind $D_x^{\leq \beta}$, $D_x^{< \beta}$ und $D_x^{> \beta}$ definiert.

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

Nun geben wir Proposition 3.1 in [5] wieder.

Satz 3.10. (*Log-Sobolev-Ungleichung*) Sei $I \subset \mathbb{X} \times \mathbb{N}$ eine messbare Menge. Dann gilt für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}[e^{sF}] < \infty$ die Abschätzung

$$\text{Ent}(e^{sF}) \leq \mathbb{E} \left[e^{sF} \left(\int_{\mathbb{X}} \psi(sD_x^I F) \lambda(dx) + \int_{\mathbb{X}} \phi(-sD_x^{I^c} f(\eta - \delta_x)) \eta(dx) \right) \right],$$

wobei $\psi(z) := ze^z - e^z + 1$ und $\phi(z) := e^z - z - 1$, $z \in \mathbb{R}$.

Ähnlich wie in [3] für Funktionen unabhängiger Zufallsvariablen vorgezeichnet, schließen Bachmann und Peccati aus der Log-Sobolev-Ungleichung in Satz 3.10, dass geeignete Abschätzungen der Zufallsvariablen

$$V_L^{\beta,+} := \int_{\mathbb{X}} (D_x^{\leq \beta} F)^2 \lambda(dx) + \int_{\mathbb{X}} (D_x^{> \beta} f(\eta - \delta_x))^2 \eta(dx)$$

und

$$V_L^{\beta,-} := \int_{\mathbb{X}} (D_x^{\geq \beta} F)^2 \lambda(dx) + \int_{\mathbb{X}} (D_x^{< \beta} f(\eta - \delta_x))^2 \eta(dx)$$

Konzentrationsungleichungen für F ermöglichen. Vergleiche die Definition dieser Zufallsvariablen mit (3.1.6) und (3.1.7). Eine Wiedergabe des zu Satz 3.7 analogen Theorems 3.2 in [5] ist etwas technisch und für unsere Zwecke verzichtbar. Wir fahren mit einer leicht gekürzten Fassung der Korollare 3.3 und 3.4 in [5] fort, die im Fall einer deterministischen Beschränkung von $V_L^{\beta,+}$ beziehungsweise $V_L^{\beta,-}$ starke Konzentrationsungleichungen liefern und die Proposition 3.1 von Wu in [34] enthalten. Dafür werden die beiden Bedingungen

- (i) es gilt $\beta > 0$ und $D_x f(\mu) \leq \beta$, $(x, \mu) \in \mathbb{X} \times \mathbb{N}$,
- (ii) es gilt $\beta < 0$ und $D_x f(\mu) \geq \beta$, $(x, \mu) \in \mathbb{X} \times \mathbb{N}$,

aufgestellt.

Satz 3.11. (a) *Es sei $V_L^{\beta,+} \leq c$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$ und ein $c > 0$. Dann ist F integrierbar und es gelten die beiden Aussagen: Wenn eine der obigen Bedingungen (i) und (ii) erfüllt ist, gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(- \left(\frac{c}{\beta^2} + \frac{r}{|\beta|} \right) \log \left(1 + \frac{|\beta|r}{c} \right) + \frac{r}{|\beta|} \right), \quad r \geq 0. \quad (3.2.1)$$

Falls $\beta = 0$, also $V_L^{0,+} \leq c$ erfüllt ist, gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(- \frac{r^2}{2c} \right), \quad r \geq 0. \quad (3.2.2)$$

(b) *Es sei $V_L^{\beta,-} \leq c$ für ein $\beta \in \mathbb{R}$ und ein $c > 0$. Dann ist F integrierbar und es gelten die beiden Aussagen: Wenn eine der obigen Bedingungen (i) und (ii) erfüllt ist, gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp \left(- \left(\frac{c}{\beta^2} + \frac{r}{|\beta|} \right) \log \left(1 + \frac{|\beta|r}{c} \right) + \frac{r}{|\beta|} \right), \quad r \geq 0. \quad (3.2.3)$$

Falls $\beta = 0$, also $V_L^{0,-} \leq c$ erfüllt ist, gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp \left(- \frac{r^2}{2c} \right), \quad r \geq 0. \quad (3.2.4)$$

Theorem 3.7 in [5] beinhaltet die zu Satz 3.8 analoge Aussage für Poissonfunktionale. Das Korollar 3.5 in [5] ist der wesentliche Baustein für eine zu Satz 3.9 analoge Konzentrationsungleichung. Da hierbei die Ausformulierung der entsprechenden allgemeinen Konzentrationsungleichung allerdings einigen technischen Aufwand erfordern würde, der für die spätere Anwendung des Satzes verzichtbar ist, geben wir in Satz 3.13 nur die tatsächlich aus Korollar 3.5 in [5] verwendete Aussage wieder.

Dabei wird in den beiden folgenden Sätzen, wie auch bei den jeweiligen Vorbildern in [5], jeweils nur der obere Tail betrachtet. Wir verzichten hier auf eine Ausformulierung der entsprechenden Aussagen für den unteren Tail, die analog zur Argumentation in [5] bewiesen werden können, aber auf die von uns später betrachteten Modelle der Stochastischen Geometrie nicht anwendbar sind.

Satz 3.12. *Das Poissonfunktional F sei integrierbar und es gelte $V_L^{0,+} \leq aF + b$ für $a > 0$ und $b \geq 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2a\mathbb{E}[F] + 2b + ar}\right), \quad r \geq 0.$$

Satz 3.13. *Es gelte $F \geq 0$ und $V_L^{0,+} \leq MF$ mit einer Zufallsvariable $M \geq 0$, die $\mathbb{E}[e^M] < \infty$ erfüllt. Dann ist $\mathbb{E}[F^{1/2}]$ endlich und es gilt die Ungleichung*

$$\mathbb{E}[\exp(\sqrt{F} - \mathbb{E}[\sqrt{F}])] \leq \mathbb{E}[e^M].$$

3.3 Poissonfunktionale und die Kovarianzgleichung

In diesem Abschnitt 3.3 seien stets ein messbarer Raum $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$ und ein Poissonprozess η auf \mathbb{X} mit einem σ -endlichen Intensitätsmaß λ gegeben. Im Unterschied zu Abschnitt 3.2 setzen wir keine weiteren Eigenschaften der σ -Algebra \mathcal{X} voraus. Weiter sei F ein Poissonfunktional mit Repräsentant f , das die Bedingungen $F \in L^2$ und $DF \in L^2(\mathbb{P} \otimes \lambda)$ erfüllt. Wir definieren

$$m_1 := \sup\{s \geq 0 : e^{sF} \in L^2, De^{sF} \in L^2(\mathbb{P} \otimes \lambda)\}$$

und

$$m_2 := \sup\{s \geq 0 : e^{-sF} \in L^2, De^{-sF} \in L^2(\mathbb{P} \otimes \lambda)\}.$$

Als Ausgangspunkt für die Herleitung von Konzentrationsungleichungen verwenden wir nun die Kovarianzgleichung (2.4.5) in den beiden Formen

$$\text{Cov}(F, e^{sF}) = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 (D_x e^{sF}) \int_{\mathbb{N}} (D_x f(\eta_t + \mu)) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx)\right], \quad 0 < s < m_1, \quad (3.3.1)$$

und

$$\text{Cov}(-F, e^{-sF}) = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 (D_x e^{-sF}) \int_{\mathbb{N}} (-D_x f(\eta_t + \mu)) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx)\right], \quad 0 < s < m_2. \quad (3.3.2)$$

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

Für den oberen Tail von F erhalten wir Konzentrationsungleichungen durch geeignete Abschätzungen der Zufallsvariable

$$V_s^{(+)} := \int_{\mathbb{X}} (e^{sD_x F} - 1) \int_0^1 \int_{\mathbb{N}} D_x f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx), \quad 0 < s < m_1.$$

Konzentrationsungleichungen für den unteren Tail von F sind äquivalent zu Konzentrationsungleichungen für den oberen Tail von $-F$. Dann betrachten wir also

$$\begin{aligned} V_s^{(-)} &:= \int_{\mathbb{X}} (e^{sD_x(-F)} - 1) \int_0^1 \int_{\mathbb{N}} D_x(-f(\eta_t + \mu)) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx) \\ &= \int_{\mathbb{X}} (1 - e^{-sD_x F}) \int_0^1 \int_{\mathbb{N}} D_x f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx), \quad 0 < s < m_2. \end{aligned}$$

Wir leiten nun aus der Kovarianzgleichung ein Analogon zu Satz 3.7 und damit auch zu Theorem 3.2 in [5] her. Wie auch in den Beweisen dieser genannten Sätze verwenden wir Massarts Lemma 11 in [24], das folgendes besagt: Für $s > 0$ und zwei Zufallsvariablen X und Y , die $\mathbb{E}[e^{sX}] < \infty$, $\mathbb{E}[e^{sY}] < \infty$ und $\mathbb{E}[X e^{sY}] < \infty$ erfüllen, gilt

$$\frac{\mathbb{E}[X e^{sY}]}{\mathbb{E}[e^{sY}]} \leq \frac{\mathbb{E}[Y e^{sY}]}{\mathbb{E}[e^{sY}]} + \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sX}] - \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sY}]. \quad (3.3.3)$$

Diese Ungleichung wird durch eine geeignete Anwendung der Jensen-Ungleichung auf das Maß $e^{sY} / \mathbb{E}[e^{sY}] d\mathbb{P}$ bewiesen.

Theorem 3.14. *Für $0 < s < m_1$ gilt*

$$\log \mathbb{E}[e^{s(F - \mathbb{E}[F])}] \leq \inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta}{1 - \theta} \left(\int_0^s \left(\frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sV_u^{(+)}/\theta}] - \frac{1}{u} \log \mathbb{E}[e^{uF}] \right) du + s\mathbb{E}[F] \right) \quad (3.3.4)$$

$$\leq \inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta}{s(1 - \theta)} \left(\int_0^s \log \mathbb{E}[e^{sV_u^{(+)}/\theta}] du \right) \quad (3.3.5)$$

und für $0 < s < m_2$ gilt

$$\log \mathbb{E}[e^{-s(F - \mathbb{E}[F])}] \leq \inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta}{1 - \theta} \left(\int_0^s \left(\frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sV_u^{(-)}/\theta}] - \frac{1}{u} \log \mathbb{E}[e^{-uF}] \right) du - s\mathbb{E}[F] \right) \quad (3.3.6)$$

$$\leq \inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta}{s(1 - \theta)} \left(\int_0^s \log \mathbb{E}[e^{sV_u^{(-)}/\theta}] du \right). \quad (3.3.7)$$

Beweis. Seien $0 < \theta < 1$ und $0 < s < m_1$ derart, dass $\mathbb{E}[e^{sV_u^{(+)}/\theta}] < \infty$ gilt und sei $0 < u \leq s$. Nach der Kovarianzgleichung (3.3.1) gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(F, e^{uF}) &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 (D_x e^{uF}) \int_{\mathbb{N}} D_x f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 e^{uF} (e^{uD_x F} - 1) \int_{\mathbb{N}} D_x f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx) \right] \\
 &= \mathbb{E}[e^{uF} V_u^{(+)}]. \tag{3.3.8}
 \end{aligned}$$

Wegen $u < m_1$ ist diese Kovarianz und damit auch $\mathbb{E}[e^{uF} V_u^{(+)}]$ endlich. Somit kann Ungleichung (3.3.3) auf $V_u^{(+)}/\theta$ und F angewendet werden und wir erhalten

$$\frac{\mathbb{E}[e^{uF} V_u^{(+)}]}{\mathbb{E}[e^{uF}]} \leq \frac{\theta \mathbb{E}[e^{uF} F]}{\mathbb{E}[e^{uF}]} + \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{uV_u^{(+)}/\theta}] - \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{uF}]. \tag{3.3.9}$$

Die Kombination von (3.3.8) und (3.3.9) ergibt die Abschätzung

$$\frac{\mathbb{E}[F e^{uF}]}{\mathbb{E}[e^{uF}]} - \mathbb{E}[F] = \frac{\text{Cov}(F, e^{uF})}{\mathbb{E}[e^{uF}]} \leq \frac{\theta \mathbb{E}[e^{uF} F]}{\mathbb{E}[e^{uF}]} + \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{uV_u^{(+)}/\theta}] - \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{uF}]$$

und nach einfacher Umformung

$$\frac{\mathbb{E}[F e^{uF}]}{\mathbb{E}[e^{uF}]} \leq \frac{\theta}{u(1-\theta)} \left(\frac{u}{\theta} \mathbb{E}[F] + \log \mathbb{E}[e^{uV_u^{(+)}/\theta}] - \log \mathbb{E}[e^{uF}] \right).$$

Setzen wir $h(t) := \log \mathbb{E}[e^{tF}]$ und $g_u(t) := \log \mathbb{E}[e^{tV_u^{(+)}}]$, $t \geq 0$, ergibt dies

$$\begin{aligned}
 h(s) &= h(0) + \int_0^s h'(u) du = \int_0^s \frac{\mathbb{E}[F e^{uF}]}{\mathbb{E}[e^{uF}]} du \\
 &\leq \int_0^s \frac{\theta}{u(1-\theta)} \left(\frac{u}{\theta} \mathbb{E}[F] + g_u(u/\theta) - h(u) \right) du.
 \end{aligned}$$

Aufgrund von $g_u(0) = 0$ und der Konvexität von g_u , die durch Betrachtung der zweiten Ableitung eingesehen werden kann, gilt $g_u(\lambda t) \leq \lambda g_u(t)$ für $0 < \lambda \leq 1$, $t > 0$, und damit

$$\begin{aligned}
 h(s) &\leq \frac{s}{1-\theta} \mathbb{E}[F] + \frac{\theta}{1-\theta} \int_0^s \frac{1}{u} \left(\frac{u}{s} g_u(s/\theta) - h(u) \right) du \\
 &= \frac{s}{1-\theta} \mathbb{E}[F] + \frac{\theta}{1-\theta} \int_0^s \left(\frac{1}{s} g_u(s/\theta) - \frac{1}{u} h(u) \right) du.
 \end{aligned}$$

Aus $\log \mathbb{E}[e^{s(F - \mathbb{E}[F])}] = h(s) - s\mathbb{E}[F]$ folgt nun (3.3.4). Wegen der Jensen-Ungleichung gilt

$$\int_0^s \frac{1}{u} \log \mathbb{E}[e^{uF}] du \geq \int_0^s \frac{1}{u} \mathbb{E}[uF] du = s\mathbb{E}[F]. \tag{3.3.10}$$

Das Einsetzen von (3.3.10) in (3.3.4) ergibt die Ungleichung (3.3.5).

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

Analog ergeben sich die Aussagen für den unteren Tail: Nach der Kovarianzgleichung (3.3.2) gelten für $0 < \theta < 1$ und $0 < u \leq s < m_2$ mit $\mathbb{E}[e^{sV_u^{(-)}/\theta}] < \infty$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \text{Cov}(-F, e^{-uF}) &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 (D_x e^{-uF}) \int_{\mathbb{N}} (-D_x f(\eta_t + \mu)) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 e^{-uF} (1 - e^{-uD_x F}) \int_{\mathbb{N}} D_x f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx) \right] \\ &= \mathbb{E}[e^{-uF} V_u^{(-)}]. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Ungleichung (3.3.3), angewendet auf $V_u^{(-)}/\theta$ und $-F$, ergibt

$$\frac{\mathbb{E}[e^{-uF} V_u^{(-)}]}{\mathbb{E}[e^{-uF}]} \leq \frac{\theta \mathbb{E}[-F e^{-uF}]}{\mathbb{E}[e^{-uF}]} + \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{uV_u^{(-)}/\theta}] - \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{-uF}]. \quad (3.3.12)$$

Die Kombination von (3.3.11) und (3.3.12) ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}[-F e^{-uF}]}{\mathbb{E}[e^{-uF}]} + \mathbb{E}[F] &= \frac{\text{Cov}(-F, e^{-uF})}{\mathbb{E}[e^{-uF}]} \\ &\leq \frac{\theta \mathbb{E}[-F e^{-uF}]}{\mathbb{E}[e^{-uF}]} + \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{uV_u^{(-)}/\theta}] - \frac{\theta}{u} \log \mathbb{E}[e^{-uF}] \end{aligned}$$

und nach einfacher Umformung

$$\frac{\mathbb{E}[-F e^{-uF}]}{\mathbb{E}[e^{-uF}]} \leq \frac{\theta}{u(1-\theta)} \left(\log \mathbb{E}[e^{uV_u^{(-)}/\theta}] - \frac{u}{\theta} \mathbb{E}[F] - \log \mathbb{E}[e^{-uF}] \right).$$

Setzen wir $h(t) := \log \mathbb{E}[e^{-tF}]$ und $g_u(t) := \log \mathbb{E}[e^{tV_u^{(-)}}]$, $t \geq 0$, ergibt dies

$$\begin{aligned} h(s) &= h(0) + \int_0^s h'(u) du = \int_0^s \frac{\mathbb{E}[-F e^{-uF}]}{\mathbb{E}[e^{-uF}]} du \\ &\leq \int_0^s \frac{\theta}{u(1-\theta)} \left(g_u(u/\theta) - \frac{u}{\theta} \mathbb{E}[F] - h(u) \right) du. \end{aligned}$$

Verwenden wir erneut $g_u(\lambda t) \leq \lambda g_u(t)$ für $0 < \lambda \leq 1$, $t > 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} h(s) &\leq \frac{\theta}{1-\theta} \int_0^s \frac{1}{u} \left(\frac{u}{s} g_u(s/\theta) - h(u) \right) du - \frac{s}{1-\theta} \mathbb{E}[F] \\ &= \frac{\theta}{1-\theta} \int_0^s \left(\frac{1}{s} g_u(s/\theta) - \frac{1}{u} h(u) \right) du - \frac{s}{1-\theta} \mathbb{E}[F]. \end{aligned}$$

Aus $\log \mathbb{E}[e^{-s(F - \mathbb{E}[F])}] = h(s) + s\mathbb{E}[F]$ folgt somit (3.3.6). Die zu (3.3.10) analoge Anwendung der Jensen-Ungleichung führt damit zu Ungleichung (3.3.7). \square

Wenn die Zufallsvariable $V_s^{(+)}$ beziehungsweise $V_s^{(-)}$ durch einen deterministischen Ausdruck beschränkt werden kann, vereinfacht sich die Aussage von Theorem 3.14 und wir geben eine Konzentrationsungleichung in übersichtlicher Form an. Eine ähnliche Aussage findet sich in [30] als Proposition 6.9.1, allerdings unterlassen wir im Vergleich dazu zunächst eine recht grobe Supremumsabschätzung, die in [30] durch die dortige Definition (6.9.1) gebildet wird. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, auch dann Konzentrationsungleichungen für F angeben zu können, wenn $V_s^{(+)}$ beziehungsweise $V_s^{(-)}$ nicht deterministisch beschränkt ist. Aber auch im Fall von deterministischen Schranken können wir die Supremumsabschätzung in [30] verbessern. Dazu später mehr im Beispiel des Volumens des Booleschen Modells mit beschränkten Körnern.

Korollar 3.15. (a) Ist $h^{(+)} : [0, m_1) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die fast sicher

$$V_s^{(+)} \leq h^{(+)}(s), \quad 0 < s < m_1, \quad (3.3.13)$$

erfüllt, so gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\inf_{0 < s < m_1} \int_0^s h^{(+)}(u) du - sr\right), \quad r \geq 0.$$

(b) Ist $h^{(-)} : [0, m_2) \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, die fast sicher

$$V_s^{(-)} \leq h^{(-)}(s), \quad 0 < s < m_2,$$

erfüllt, so gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(\inf_{0 < s < m_2} \int_0^s h^{(-)}(u) du - sr\right), \quad r \geq 0.$$

Beweis. (a) Seien $0 < s < m_1$ und $r \geq 0$. Mit der Chernoff-Schranke und der Abschätzung (3.3.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &\leq \mathbb{E}[e^{s(F - \mathbb{E}[F])}] e^{-sr} \\ &\leq \exp\left(\inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta}{s(1 - \theta)} \left(\int_0^s \log \mathbb{E}[e^{sV_u^{(+)} / \theta}] du\right) - sr\right) \\ &\leq \exp\left(\inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta}{s(1 - \theta)} \left(\int_0^s \frac{s}{\theta} h^{(+)}(u) du\right) - sr\right) \\ &= \exp\left(\inf_{0 < \theta < 1} \frac{1}{1 - \theta} \int_0^s h^{(+)}(u) du - sr\right). \end{aligned}$$

Es gilt $\int_0^s h^{(+)}(u) du \geq 0$, da anderenfalls $\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq 0] \leq 0$ folgen würde, was offenbar falsch ist. Somit ergibt sich $\inf_{0 < \theta < 1} \frac{1}{1 - \theta} \int_0^s h^{(+)}(u) du = \int_0^s h^{(+)}(u) du$, woraus die Behauptung folgt.

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

(b) Seien $0 < s < m_2$ und $r \geq 0$. Analog zu Teil (a) erhalten wir mit (3.3.7) für $0 < s < m_2$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] &\leq \mathbb{E}[e^{-s(F - \mathbb{E}[F])}] e^{-sr} \\ &\leq \exp\left(\inf_{0 < \theta < 1} \frac{\theta}{s(1-\theta)} \left(\int_0^s \log(\mathbb{E}[e^{sV_u^{(-)}/\theta}]) du\right) - sr\right) \\ &\leq \exp\left(\inf_{0 < \theta < 1} \frac{1}{1-\theta} \int_0^s h^{(-)}(u) du - sr\right) \\ &= \exp\left(\int_0^s h^{(-)}(u) du - sr\right) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Durch ein ähnliches Verfahren wie bei Theorem 3.14 lassen sich für beide Tails von F gröbere, aber gegebenenfalls praktikablere Konzentrationsungleichungen beweisen. Anders als zuvor wird nun die Ungleichung (3.3.3) ohne Optimierungsparameter θ angewendet, was anschließend die Herbst-Methode abkürzt.

Satz 3.16. *Es gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \inf_{0 < s < m_1} \mathbb{E}[e^{sV_s^{(+)}}] e^{-sr}, \quad r \geq 0,$$

und

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \inf_{0 < s < m_2} \mathbb{E}[e^{sV_s^{(-)}}] e^{-sr}, \quad r \geq 0.$$

Beweis. Sei $0 < s < m_1$. Nach Ungleichung (3.3.3) gilt

$$\frac{\mathbb{E}[e^{sF} V_s^{(+)}]}{\mathbb{E}[e^{sF}]} \leq \frac{\mathbb{E}[e^{sF} F]}{\mathbb{E}[e^{sF}]} + \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sV_s^{(+)}}] - \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sF}]. \quad (3.3.14)$$

Verwenden wir Gleichung (3.3.8) mit dem Parameter s , erhalten wir mit (3.3.14) die Abschätzung

$$\frac{\mathbb{E}[e^{sF} F]}{\mathbb{E}[e^{sF}]} - \mathbb{E}[F] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{sF} F]}{\mathbb{E}[e^{sF}]} + \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sV_s^{(+)}}] - \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sF}]$$

und weiter nach einfacher Umformung

$$\log \mathbb{E}[e^{sF}] - s\mathbb{E}[F] \leq \log \mathbb{E}[e^{sV_s^{(+)}}].$$

Daraus folgt $\mathbb{E}[e^{s(F - \mathbb{E}[F])}] \leq \mathbb{E}[e^{sV_s^{(+)}}]$ und damit die erste Behauptung.

Sei nun $0 < s < m_2$. Wiederum mit Ungleichung (3.3.3) gilt

$$\frac{\mathbb{E}[e^{-sF} V_s^{(-)}]}{\mathbb{E}[e^{-sF}]} \leq \frac{\mathbb{E}[-F e^{-sF}]}{\mathbb{E}[e^{-sF}]} + \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sV_s^{(-)}}] - \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{-sF}]. \quad (3.3.15)$$

Die Kombination von (3.3.11) und (3.3.15) ergibt

$$\frac{\mathbb{E}[-Fe^{-sF}]}{\mathbb{E}[e^{-sF}]} + \mathbb{E}[F] \leq \frac{\mathbb{E}[-Fe^{-sF}]}{\mathbb{E}[e^{-sF}]} + \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{sV_s^{(-)}}] - \frac{1}{s} \log \mathbb{E}[e^{-sF}],$$

also

$$s\mathbb{E}[F] + \log \mathbb{E}[e^{-sF}] \leq \log \mathbb{E}[e^{sV_s^{(-)}}]$$

und damit die zweite Ungleichung. \square

Aussage und Beweis von Korollar 3.15 stehen in engem Zusammenhang mit Theorem 1 in [15]. Dort werden Konzentrationsungleichungen für Lipschitz-Funktionen unbegrenzt teilbarer Zufallsvektoren ohne Gaußschen Anteil mithilfe einer Kovarianzgleichung bewiesen.

Wir geben nun verschiedene Varianten von Konzentrationsungleichungen an, die auch über die Kovarianzgleichung hergeleitet werden. Wie in [5] bringen wir dabei die Mecke-Gleichung ins Spiel. Ein praktikables allgemeines Analogon zu Satz 3.10 können wir zwar nicht aufstellen, stattdessen bietet aber die getrennte Untersuchung verschiedener Varianten von speziellen Voraussetzungen weitere Anwendungsmöglichkeiten. So betrachten wir nun die Zufallsvariable

$$V_M := \int_{\mathbb{X}} D_x f(\eta - \delta_x) \eta(dx).$$

Satz 3.17. *Sei $F \geq 0$ wachsend und es gelte fast sicher*

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{N}} D_x f^{1-\beta}(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \leq c_1 \quad \text{für } \lambda\text{-fast alle } x \in \mathbb{X},$$

sowie $V_M \leq c_2 F^\beta$ für Konstanten $c_1, c_2 > 0$ und $\beta \in [0, 1)$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{z^2}{2c_1 c_2}\right), \quad r \geq 0,$$

wobei $z = z(r) := (\mathbb{E}[F] + r)^{1-\beta} - \mathbb{E}[F]^{1-\beta}$ ist. Insbesondere gilt im Fall $\beta = 0$:

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2c_1 c_2}\right), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Seien $u > 0$ und $\gamma := 1 - \beta$. Mit der Kovarianzgleichung (3.3.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F^\gamma e^{uF^\gamma}] - \mathbb{E}[F^\gamma] \mathbb{E}[e^{uF^\gamma}] &= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} \int_0^1 (D_x e^{uF^\gamma}) \int_{\mathbb{N}} D_x f^\gamma(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \lambda(dx)\right] \\ &\leq c_1 \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} (D_x e^{uF^\gamma}) \lambda(dx)\right]. \end{aligned}$$

Aus der Mecke-Formel und der elementaren Ungleichung $e^z - 1 \leq ze^z$ für $z \in \mathbb{R}$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F^\gamma e^{uF^\gamma}] - \mathbb{E}[F^\gamma] \mathbb{E}[e^{uF^\gamma}] &\leq c_1 \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} D_x e^{uf(\eta-\delta_x)^\gamma} \eta(dx)\right] \\ &= c_1 \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{X}} e^{uf(\eta-\delta_x)^\gamma} (e^{uD_x f(\eta-\delta_x)^\gamma} - 1) \eta(dx)\right] \\ &\leq c_1 u \mathbb{E}\left[e^{uF^\gamma} \int_{\mathbb{X}} D_x f(\eta - \delta_x)^\gamma \eta(dx)\right]. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

Analog zum Beweis von Korollar 3.5 in [5] zeigen wir nun, dass der letzte Ausdruck durch $c_1 c_2 u \mathbb{E}[e^{uF^\gamma}]$ beschränkt ist. Auf dem Ereignis $\{F > 0\}$ gilt wegen $f(\eta - \delta_x)^\beta \leq F^\beta$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{X}} D_x f(\eta - \delta_x)^\gamma \eta(dx) &= \int_{\mathbb{X}} \mathbf{1}\{f(\eta - \delta_x) > 0\} (F^\gamma - f(\eta - \delta_x)^\gamma) \eta(dx) \\ &\quad + \int_{\mathbb{X}} \mathbf{1}\{f(\eta - \delta_x) = 0\} F^\gamma \eta(dx) \\ &\leq \int_{\mathbb{X}} \mathbf{1}\{f(\eta - \delta_x) > 0\} \left(\frac{F}{F^\beta} - \frac{f(\eta - \delta_x)}{F^\beta} \right) \eta(dx) \\ &\quad + \int_{\mathbb{X}} \mathbf{1}\{f(\eta - \delta_x) = 0\} \frac{F}{F^\beta} \eta(dx) \\ &= \frac{V_M}{F^\beta}. \end{aligned}$$

Also gilt die Ungleichung $\int_{\mathbb{X}} D_x f(\eta - \delta_x)^\gamma \eta(dx) \leq c_2$ auf dem Ereignis $\{F > 0, V_M \leq c_2 F^\beta\}$ und damit offenbar auch auf dem fast sicheren Ereignis $\{V_M \leq c_2 F^\beta\}$. Somit erhalten wir

$$\mathbb{E}[F^\gamma e^{uF^\gamma}] \leq \mathbb{E}[e^{uF^\gamma}] (\mathbb{E}[F^\gamma] + c_1 c_2 u)$$

und weiter nach Lemma 3.4 die Abschätzung

$$\mathbb{P}[F^\gamma - \mathbb{E}[F^\gamma] \geq z] \leq \exp\left(-\frac{z^2}{2c_1 c_2}\right).$$

Analog zur Rechnung auf Seite 1588 in [3] gilt mit der Jensen-Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &= \mathbb{P}[F^\gamma \geq (\mathbb{E}[F] + r)^\gamma] \\ &= \mathbb{P}[F^\gamma \geq z + \mathbb{E}[F]^\gamma] \leq \mathbb{P}[F^\gamma - \mathbb{E}[F^\gamma] \geq z]. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt die Behauptung. \square

Wenn wir die Voraussetzung $V_M \leq c_2 F^\beta$ des vorigen Satzes zu $V_M \leq c_2 F$ ändern, vereinfacht sich die Situation.

Satz 3.18. *Es seien $c_1, c_2 > 0$. Weiter sei $F \geq 0$ wachsend und es gelte fast sicher*

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{N}} D_x f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\lambda}(d\mu) dt \leq c_1, \quad \lambda - \text{fast alle } x \in \mathbb{X},$$

Falls nun $V_M \leq c_2 F$ erfüllt ist, gilt für $r > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &\leq \exp\left(-\frac{1}{c_1 c_2} \left(r + \mathbb{E}[F] \log\left(\frac{\mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\Theta\left(-\frac{r}{c_1 c_2}\right)\right), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Beweis. Seien $0 < u \leq s < (c_1 c_2)^{-1}$. Mit dem Verfahren wie im Beweis von Satz 3.17 bis zur Abschätzung (3.3.16) und der Voraussetzung $V_M \leq c_2 F$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[F e^{uF}] - \mathbb{E}[F] \mathbb{E}[e^{uF}] \leq c_1 u \mathbb{E}[e^{uF} V_M] \leq c_1 c_2 u \mathbb{E}[F e^{uF}].$$

Daraus ergibt sich durch Umordnung

$$\frac{\mathbb{E}[F e^{uF}]}{\mathbb{E}[e^{uF}]} \leq \frac{\mathbb{E}[F]}{1 - c_1 c_2 u}.$$

Weiter geht es wieder mit der Herbst-Methode: Mit $h(u) := \log \mathbb{E}[e^{uF}]$ gilt

$$h'(u) \leq \frac{\mathbb{E}[F]}{1 - c_1 c_2 u}$$

und wegen $h(s) = \int_0^s h'(u) du$ folglich $\log \mathbb{E}[e^{sF}] \leq -\mathbb{E}[F] \log(1 - c_1 c_2 s)/(c_1 c_2)$. Eine erneute Umordnung ergibt

$$\log \mathbb{E}[e^{s(F - \mathbb{E}[F])}] \leq -\mathbb{E}[F] \left(s + \frac{\log(1 - c_1 c_2 s)}{c_1 c_2} \right).$$

Mit der Chernoff-Schranke erhalten wir also

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(\inf_{s > 0} \left[-\mathbb{E}[F] \left(s + \frac{\log(1 - c_1 c_2 s)}{c_1 c_2} \right) - sr \right] \right). \quad (3.3.18)$$

Die Minimierung von $s \mapsto -\mathbb{E}[F] \left(s + \frac{\log(1 - c_1 c_2 s)}{c_1 c_2} \right) - sr$ wird durch

$$\mathbb{E}[F] \left(\frac{1}{1 - c_1 c_2 s} - 1 \right) = r \Leftrightarrow 1 - c_1 c_2 s = \left(\frac{r}{\mathbb{E}[F]} + 1 \right)^{-1} \Leftrightarrow s = \frac{1}{c_1 c_2} - \frac{\mathbb{E}[F]}{c_1 c_2 (r + \mathbb{E}[F])}$$

erreicht. Einsetzen dieses Werts, der tatsächlich im offenen Intervall $(0, c_1 c_2)$ liegt, in die Ungleichung (3.3.18) ergibt wie folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &\leq \exp \left(-\frac{r}{c_1 c_2} + \frac{r \mathbb{E}[F]}{c_1 c_2 (r + \mathbb{E}[F])} \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{E}[F] \left(\frac{1}{c_1 c_2} - \frac{\mathbb{E}[F]}{c_1 c_2 (r + \mathbb{E}[F])} + \frac{1}{c_1 c_2} \log \left(\frac{\mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{c_1 c_2} \left(-r + \frac{r \mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]} - \mathbb{E}[F] \left(1 - \frac{\mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]} + \log \left(\frac{\mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]} \right) \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{c_1 c_2} \left(r + \mathbb{E}[F] \log \left(\frac{\mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]} \right) \right) \right). \quad \square \end{aligned}$$

3 Allgemeine Konzentrationsungleichungen

Lemma 3.19. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ messbar. Falls

$$D_x D_y f(\mu) \leq 0, \quad x, y \in \mathbb{X}, \quad \mu \in \mathbb{N}, \quad (3.3.19)$$

erfüllt ist, gilt für alle $\nu \in \{ \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}, n \in \mathbb{N} \}$ die Ungleichung

$$D_x f(\mu + \nu) \leq D_x f(\mu), \quad x \in \mathbb{X}, \quad \mu \in \mathbb{N}. \quad (3.3.20)$$

Falls in (3.3.19) die umgekehrte Ungleichung gilt, folgt auch in (3.3.20) die umgekehrte Ungleichung.

Beweis. Sei $\nu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ mit geeigneten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{X}$ und $n \in \mathbb{N}$. Mit der Notation $\mu^{(k)} := \mu + \sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$, $0 \leq k \leq n$, gilt

$$f(\mu + \nu) - f(\mu) = \sum_{k=1}^n f(\mu^{(k)}) - f(\mu^{(k-1)}). \quad (3.3.21)$$

Aus (3.3.21) und (3.3.19) folgt nun

$$\begin{aligned} D_x f(\mu + \nu) - D_x f(\mu) &= D_x (f(\mu + \nu) - f(\mu)) = \sum_{k=1}^n D_x (f(\mu^{(k-1)} + \delta_{x_k}) - f(\mu^{(k-1)})) \\ &= \sum_{k=1}^n D_x (D_{x_k} f(\mu^{(k-1)})) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

und damit die erste Behauptung. Die zweite Aussage ergibt sich analog mit der umgekehrten Ungleichung in (3.3.22). \square

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

4.1 Das Boolesche Modell für Binomialprozesse

Seien $n \in \mathbb{N}$ und \mathbb{B} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{C}^d . Wir verwenden in diesem Abschnitt 4.1 eine modifizierte Definition des Booleschen Modells, dem ein Binomialprozess mit Parametern n und \mathbb{B} zugrunde liegt. Seien Z_1, \dots, Z_n unabhängige Zufallselemente in \mathcal{C}^d mit Verteilung \mathbb{B} . Dann ist das Boolesche Modell gegeben durch

$$Z := \bigcup_{i=1}^n Z_i. \quad (4.1.1)$$

Um die Sätze aus Abschnitt 3.1 auf die inneren Volumina beziehungsweise das Lebesgue-Maß des Booleschen Modells Z anwenden zu können, definieren wir die Funktionen

$$f_j : (\mathcal{K}^d)^n \rightarrow \mathbb{R}, (K_1, \dots, K_n) \mapsto V_j \left(\bigcup_{i=1}^n K_i \right), \quad 0 \leq j \leq d-1,$$

sowie

$$f_d : (\mathcal{C}^d)^n \rightarrow [0, \infty), (C_1, \dots, C_n) \mapsto \lambda_d \left(\bigcup_{i=1}^n C_i \right).$$

Die Funktionen f_j , $0 \leq j \leq d-1$, werden wir nur dann betrachten, wenn \mathbb{B} auf \mathcal{K}^d konzentriert ist. Dann gilt

$$F := F_d := f_d(Z_1, \dots, Z_n) = \lambda_d(Z) \quad \text{und} \quad F_j := f_j(Z_1, \dots, Z_n) = V_j(Z), \quad 0 \leq j \leq d-1.$$

Da die Werte der Zufallsvariablen F_0, \dots, F_d als messbare Funktionen eines Binomialprozesses dargestellt werden können, nennen wir sie *Binomialfunktionale*.

Bei der Untersuchung der Oberfläche und der Euler-Charakteristik von Z in den Abschnitten 4.1.2 und 4.1.3 ist es für die Anwendbarkeit von geometrischen Lemmata notwendig, die Verteilungen des Umkugelmittelpunkts $\text{zen}(Z_1)$ und des zentrierten Kornes $Z_1 - \text{zen}(Z_1)$ getrennt zu betrachten. Erstere Verteilung nennen wir die *Mittelpunktverteilung* \mathbb{M} und die letztere heißt in Analogie zur Definition bei (2.5.1) die *Kornverteilung* \mathbb{Q} .

4.1.1 Volumen

Eine Orientierung bei der Frage, welche Konzentrationsungleichung für das Binomialfunktional F bestenfalls zu erwarten ist, bietet eine Diskretisierung des Modells. Dabei vereinfachen wir das Volumen des Booleschen Modells durch eine Summe von unabhängigen

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Bernoulli-Variablen: Seien $W_n := \{1, \dots, n\}^d$, $(B_i)_{i \in W_n}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[B_1 = 1] = 1 - \mathbb{P}[B_1 = 0]$ und $S_n := \sum_{i \in W_n} B_i$. Dann gilt mit der Hoeffding-Ungleichung, siehe Theorem 2 in [12], die direkt aus der historisch jüngeren McDiarmid-Ungleichung gefolgert werden kann:

$$\mathbb{P}[S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{2r^2}{\#W_n}\right) = \exp\left(-\frac{2r^2}{n^d}\right). \quad (4.1.2)$$

Bis auf Modifikationen in den Konstanten wie zum Beispiel in Theorem 2.47 in [2], nach der wir in unserem Beispiel (4.1.2) den Faktor 2 durch $3/(1 + 2\mathbb{P}[B_1 = 1]\mathbb{P}[B_1 = 0])$ ersetzen können, ist unter den genannten Voraussetzungen nach unserem Wissen (4.1.2) die beste Abschätzung.

Im Folgenden werden wir die Definitionen (3.1.1) und (3.1.6) analog mit der Wahl $Y = F$ verwenden.

Proposition 4.1. *Es sei fast sicher $\lambda_d(Z_1) \leq a$ für eine Konstante $a > 0$ erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{2r^2}{a \cdot \min\{na, 8\mathbb{E}[F] + 4r\}}\right), \quad r \geq 0, \quad (4.1.3)$$

und

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(-\frac{2r^2}{na^2}\right), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Das Volumen des Booleschen Modells kann sich durch das Verändern eines einzelnen Korns höchstens um das maximale Volumen a eines Korns verändern. Zum einen gilt also

$$|f_d(C_1, \dots, C_n) - f_d(C_1, \dots, C_{i-1}, C'_i, C_{i+1}, \dots, C_n)| \leq a \quad (4.1.4)$$

für $1 \leq i \leq n$ und $C_1, \dots, C_n, C'_i \in \mathcal{C}^d$. Somit folgt die Abschätzung für den unteren Tail sowie die gleiche Schranke für den oberen Tail aus Satz 3.5 und Bemerkung 3.6. Zum anderen können wir mit (4.1.4) die Zufallsvariable $V_B^{(+)}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} V_B^{(+)} &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (F - F^{(i)})^2 \mathbf{1}\{F > F^{(i)}\} \mid Z_1, \dots, Z_n\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (F - f_d(Z_1, \dots, Z_{i-1}, \emptyset, Z_{i+1}, \dots, Z_n))^2 \mathbf{1}\{F > F^{(i)}\} \mid Z_1, \dots, Z_n\right] \\ &\leq a \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n (F - f_d(Z_1, \dots, Z_{i-1}, \emptyset, Z_{i+1}, \dots, Z_n)) \mid Z_1, \dots, Z_n\right] \\ &= a \sum_{i=1}^n \lambda_d\left(Z_i \setminus \bigcup_{j \neq i} Z_j\right) \leq aF. \end{aligned}$$

Mit Ungleichung (3.1.10) folgt daraus (4.1.3), wenn das dort genannte Minimum durch $8\mathbb{E}[F] + 4r$ ersetzt wird. Die Kombination beider bewiesener Aussagen über den oberen Tail ergibt nun (4.1.3). \square

Mit dem ersten Teil von Satz 3.9 können wir auch den Fall unbeschränkter Körner behandeln. Der Übersichtlichkeit halber nehmen wir gleich eine spezielle Wahl für die Parameter α und β aus Satz 3.9 vor. Die folgende Konzentrationsungleichung kann leicht auf die allgemeinere Darstellung übertragen werden.

Proposition 4.2. *Die Kornverteilung \mathbb{Q} erfülle $t := \sup \{s > 0 : \mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_1)}] < \infty\} > 1$. Dann gilt mit $M := \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_d(Z_i)$ die Ungleichung*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq e^{-z} \inf_{0 < s < t-1} \mathbb{E}[e^{(1+s)M}]^{1/s} < \infty, \quad r \geq 0,$$

wobei $z = z(r) = \sqrt{\mathbb{E}[F] + r} - \sqrt{\mathbb{E}[F]}$ wie in Satz 3.9 (a) gegeben ist.

Beweis. Mit einer ähnlichen Argumentation wie im Beweis der Proposition 4.1 erhalten wir

$$\begin{aligned} V_B^{(+)} &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (F - f_d(Z_1, \dots, Z_{i-1}, \emptyset, Z_{i+1}, \dots, Z_n))^2 \mathbb{1}\{F > F^{(i)}\} \mid Z_1, \dots, Z_n \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_d(Z_i) \cdot \sum_{i=1}^n (F - f_d(Z_1, \dots, Z_{i-1}, \emptyset, Z_{i+1}, \dots, Z_n)) \mid Z_1, \dots, Z_n \right] \\ &= M \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_d \left(Z_i \setminus \bigcup_{j \neq i} Z_j \right) \leq MF. \end{aligned}$$

Sei $0 < s < t - 1$. Wählen wir damit $\alpha = 1/(1+s)$ und $\beta = 1$ in Teil (a) von Satz 3.9, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &\leq \exp \left(\frac{1/(1+s)}{1 - 1/(1+s)} \log \mathbb{E}[\exp((1+s)M)] - z \right) \\ &= e^{-z} \mathbb{E}[e^{(1+s)M}]^{1/s}. \end{aligned}$$

Mit

$$\mathbb{E}[e^{(1+s)M}] = \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq i \leq n} e^{(1+s)\lambda_d(Z_i)} \right] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n e^{(1+s)\lambda_d(Z_i)} \right] = n \mathbb{E}[e^{(1+s)\lambda_d(Z_1)}] < \infty$$

ist schließlich die Behauptung gezeigt. \square

Bemerkung 4.3. Falls Z nur innerhalb einer kompakten Menge $W \in \mathcal{C}^d$ betrachtet wird, also $F = \lambda_d(Z \cap W)$ gesetzt wird, können wir im Beweis von Proposition 4.2 auch $V_B^{(+)} \leq \lambda_d(W)F$ abschätzen, was mit Satz 3.8 zu

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(- \frac{r^2}{2\lambda_d(W)(2\mathbb{E}[F] + r)} \right), \quad r \geq 0,$$

und damit zu einer ähnlichen Form wie später im Poissonfall bei Ungleichung (4.2.35) führt.

4.1.2 Oberfläche

In diesem Abschnitt 4.1.2 sei die Mittelpunktsverteilung \mathbb{M} stets diffus.

Im Unterschied zu den Betrachtungen beim Volumen müssen wir hier eine untere Schranke für die Korngrößen annehmen. Der Grund dafür ist, dass anderenfalls beliebig viel Oberfläche von vielen kleinen Körnern durch ein einzelnes großes Korn überdeckt werden könnte. Wir betrachten das Boolesche Modell in den beiden Spezialfällen, in denen die Körner deterministische Kugeln beziehungsweise Hyperquader mit fester Form und variabler Größe sind.

Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Fall $\mathbb{Q} = \delta_{B(0,R)}$ für ein festes $R > 0$. Dazu beweisen wir zunächst ein rein geometrisches Lemma, das hier und auch später im Poissonfall das zentrale Hilfsmittel für den Beweis von Konzentrationsungleichungen für F_{d-1} ist.

Lemma 4.4. *Seien $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ paarweise verschieden, $K = B(x_0, R)$ und $A = \bigcup_{i=1}^n B(x_i, R)$. Dann gilt*

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap K) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K)).$$

Beweis. Für $1 \leq i \leq n$ setzen wir abkürzend $B_i := B(x_i, R)$. Weiter seien

$$K_i := \text{bd}(K) \cap B_i \quad \text{und} \quad A_i := \text{bd}(B_i) \cap K, \quad 1 \leq i \leq n,$$

die beiden Randstücke, die beim Schneiden von K mit der i -ten Kugel von A entstehen. Diese Randstücke sind jeweils in verschiedenen Halbräumen enthalten, welche durch die Hyperebene $H_i := \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_i\| = \|y - x_0\|\}$ definiert werden. Nun seien

$$D_i := A_i \setminus \bigcup_{j \neq i} B_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

die derart gekürzten Randstücke, dass sie einerseits disjunkt sind und andererseits $\mathcal{H}^{d-1}((\text{bd}(A) \cap K) \setminus \bigcup_{i=1}^n D_i) = 0$ erfüllen. Mit der metrischen Projektion $p(H_i, z)$ von $z \in A_i$ auf H_i definieren wir

$$\varphi_i : A_i \rightarrow K_i, \quad z \mapsto 2p(H_i, z) - z,$$

die Spiegelung von z an $p(H_i, z)$ auf K_i . Zu zeigen ist nun, dass die Spiegelungen der disjunkten Randstücke D_1, \dots, D_n ebenfalls disjunkt sind:

$$\varphi_i(D_i) \cap \varphi_j(D_j) = \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq n. \quad (4.1.5)$$

Denn dann folgt die Behauptung durch

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap K) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^{d-1}(D_i) = \sum_{i=1}^n \mathcal{H}^{d-1}(\varphi_i(D_i)) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K)).$$

Zum Beweis von (4.1.5) seien also $1 \leq i < j \leq n$ und $y \in \varphi_i(D_i)$, das heißt es gibt ein eindeutiges $z_i \in D_i$ mit $\varphi_i(z_i) = y$. Falls y nicht in B_j liegt, gilt $y \notin K_j$ und folglich $y \notin \varphi_j(D_j)$. Wir nehmen also $y \in B_j$ an. Nun sei z_j der eindeutig bestimmte Punkt von A_j mit $\varphi_j(z_j) = y$. Im Fall $y \in \text{bd}(B_j)$ gilt wegen $y \in \text{bd}(K)$ schließlich $y \in A_j \cap K_j$ und damit $y = z_j$. Dann liegt z_j in B_i , insbesondere $z_j \notin D_j$.

Wir müssen also nur noch den Fall $y \in B_j^\circ$ betrachten. Außerdem gilt $y \in B_i^\circ$, denn aus der Annahme $y \in \text{bd}(B_i)$ folgt analog zur vorigen Argumentation der Widerspruch $z_i \notin D_i$. Sei

$$E := y + \text{lin}\{z_i - y, z_j - y\}$$

der durch y, z_i und z_j erzeugte affine Unterraum des \mathbb{R}^d . Falls $z_i - y$ und $z_j - y$ auf einer Geraden liegen, betrachten wir die Differenz $\|z_j - y\| - \|z_i - y\|$. Wenn diese strikt positiv ist, erhalten wir durch $z_i \in [y, z_j) \subset A^\circ$ einen Widerspruch. Anderenfalls gilt $z_j \in B_i \subset D_j^c$.

Wir gehen im Folgenden also davon aus, dass E zwei-dimensional ist und definieren damit

$$L := E \cap K \cap B_i \cap B_j.$$

Da wegen $y \in B_i^\circ \cap B_j^\circ$ jeweils ein Anfangsstück der offenen Intervalle (y, z_i) und (y, z_j) im Inneren von $K \cap B_i \cap B_j$ liegt, ist auch die affine Hülle von L zwei-dimensional. Nun gelte $E \cap K \cap B_j \not\subseteq E \cap K \cap B_i$, denn sonst folgt wieder $z_j \in B_i \subset D_j^c$. Umgekehrt gilt auch $E \cap K \cap B_i \not\subseteq E \cap K \cap B_j$, da zum Beispiel z_i nur im ersteren Schnitt liegt. Wie in Abbildung 4.1 dargestellt, wird die konvexe Fläche L von den drei verschiedenen Eckpunkten

$$\{a\} = E \cap \text{bd}(K) \cap \text{bd}(B_i) \cap B_j, \quad \{b\} = E \cap \text{bd}(K) \cap B_i \cap \text{bd}(B_j)$$

$$\text{und } \{c\} = E \cap K \cap \text{bd}(B_i) \cap \text{bd}(B_j)$$

sowie drei gekrümmten Randstücken begrenzt.

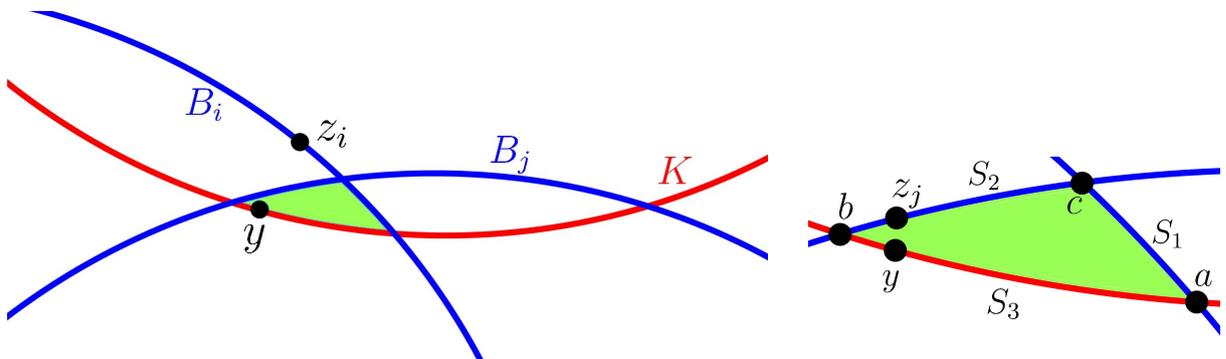


Abbildung 4.1: Im Beweis von Lemma 4.4 betrachtete Kugeln innerhalb des affinen Unterraums E . Die Fläche L in grün.

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Diese Randstücke, bezeichnet mit S_1 zwischen a und c , mit S_2 zwischen b und c sowie mit S_3 zwischen a und b , sind Abschnitte der Kreisränder $\text{bd}(E \cap B_i)$, $\text{bd}(E \cap B_j)$ beziehungsweise $\text{bd}(E \cap K)$. Somit gilt

$$\|y - a\| = \|\varphi_i(z_i) - a\| = \|z_i - a\| > \|c - a\| = \|\varphi_i(c) - a\|, \quad (4.1.6)$$

wobei die Ungleichung aus $z_i \notin B(x_j, R)$ folgt. Nun zeigen wir

$$\mathcal{H}^1(\text{bd}(E \cap K)) = \mathcal{H}^1(\text{bd}(E \cap B_i)) = \mathcal{H}^1(\text{bd}(E \cap B_j)). \quad (4.1.7)$$

Die Geraden $\text{lin}\{z_i - y\}$ und $\text{lin}\{x_i - x_0\}$ sind parallel, das heißt es gibt ein $\alpha_1 \neq 0$ mit $\alpha_1(z_i - y) = x_0 - x_i$. Insbesondere liegen E und $\text{lin}\{x_i - x_0\}$ parallel und die erste Gleichheit in (4.1.7) folgt. Analog gibt es ein $\alpha_2 \neq 0$ mit $\alpha_2(z_j - y) = x_0 - x_j$. Somit gilt $x_i - x_j = \alpha_2(z_j - y) - \alpha_1(z_i - y)$ und daher $\text{lin}\{x_i - x_j\} \subset \text{lin}\{z_i - y, z_j - y\}$. Da $\text{lin}\{x_i - x_j\}$ und E also parallel liegen, folgt die zweite Gleichheit in (4.1.7).

Aus (4.1.7) folgt die Ungleichung $\mathcal{H}^1(\varphi_i(S_1)) + \mathcal{H}^1(\varphi_j(S_2)) = \mathcal{H}^1(S_1) + \mathcal{H}^1(S_2) \geq \mathcal{H}^1(S_3)$. Weil $\varphi_i(S_1)$ und $\varphi_j(S_2)$ in S_3 liegen, folgt daraus $\varphi_i(S_1) \cap \varphi_j(S_2) \neq \emptyset$ und damit $\|\varphi_i(c) - a\| \geq \|\varphi_j(c) - a\|$. Zusammen mit (4.1.6) ergibt dies $\|y - a\| > \|\varphi_j(c) - a\|$ und damit

$$\|z_j - b\| = \|y - b\| < \|\varphi_j(c) - b\| = \|c - b\|.$$

Hiermit erhalten wir $z_j \in L \subset B_i \subset D_j^c$ und (4.1.5) ist bewiesen. \square

Die folgende Ungleichung wird sowohl im anschließenden Beweis von Proposition 4.5 als auch im Beweis der entsprechenden Aussage im Poissonfall, siehe Satz 4.43, verwendet:

Für $S, T \in \mathcal{R}^d$ gilt wegen $\text{bd}(S \cap T) \subset (\text{bd}(S) \cap T) \cup (S \cap \text{bd}(T))$ sowie der Subadditivität und Monotonie des Hausdorffmaßes die Ungleichung

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(S \cap T)) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(S)) + \mathcal{H}^{d-1}(S \cap \text{bd}(T)). \quad (4.1.8)$$

Proposition 4.5. *Seien \mathbb{M} diffus und $\mathbb{Q} = \delta_{B(0,R)}$ für ein $R > 0$. Für $F_{d-1} = V_{d-1}(Z)$ gilt dann*

$$\mathbb{P}[|F_{d-1} - \mathbb{E}[F_{d-1}]| \geq r] \leq 2 \exp\left(-\frac{r^2}{2na^2}\right), \quad r \geq 0,$$

wobei $a := V_{d-1}(B(0, R)) = R^{d-1}\omega_d/2$.

Beweis. Da Z_1, \dots, Z_n fast sicher Werte in $\{B(x, R) : x \in \mathbb{R}^d\}$ mit paarweise verschiedenen Mittelpunkten annehmen und f_{d-1} eine symmetrische Funktion ist, genügt es für die Anwendung von Satz 3.5, die Eigenschaft der beschränkten Differenzen (3.1.2) nur für Kugeln aus dieser Menge im Fall $i = 1$ zu betrachten. Seien also $x_1, \dots, x_n, x'_1 \in \mathbb{R}^d$ paar-

weise verschieden. Mit den Notationen $B_i := B(x_i, R)$, $1 \leq i \leq n$, und $B'_1 := B(x'_1, R)$ erhalten wir wegen der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 & |f_{d-1}(B_1, \dots, B_n) - f_{d-1}(B'_1, B_2, \dots, B_n)| \\
 &= |V_{d-1}(B_1 \cup \dots \cup B_n) - V_{d-1}(B'_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)| \\
 &\leq |V_{d-1}(B'_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) - V_{d-1}(B_2 \cup \dots \cup B_n)| \\
 &\quad + |V_{d-1}(B_1 \cup \dots \cup B_n) - V_{d-1}(B_2 \cup \dots \cup B_n)|. \quad (4.1.9)
 \end{aligned}$$

Wegen der Additivität von V_{d-1} und (2.3.3) gilt

$$\begin{aligned}
 & |V_{d-1}(B'_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) - V_{d-1}(B_2 \cup \dots \cup B_n)| \\
 &= |V_{d-1}(B'_1) - V_{d-1}(B'_1 \cap (B_2 \cup \dots \cup B_n))| \\
 &= \frac{1}{2} |\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B'_1)) - \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B'_1 \cap (B_2 \cup \dots \cup B_n)))|. \quad (4.1.10)
 \end{aligned}$$

Verwenden wir (4.1.8) mit $S = B'_1$ und $T = B_2 \cup \dots \cup B_n$ sowie anschließend Lemma 4.4, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B'_1 \cap (B_2 \cup \dots \cup B_n))) &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B'_1)) + \mathcal{H}^{d-1}(B'_1 \cap \text{bd}(B_2 \cup \dots \cup B_n)) \\
 &\leq 2 \cdot \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B'_1)).
 \end{aligned}$$

Aus (4.1.10) folgt damit

$$|V_{d-1}(B'_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) - V_{d-1}(B_2 \cup \dots \cup B_n)| \leq \frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B'_1)) = a.$$

Mit der analogen Abschätzung für den zweiten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung (4.1.9) ergibt dies

$$|f_{d-1}(B_1, \dots, B_n) - f_{d-1}(B'_1, B_2, \dots, B_n)| \leq 2a$$

Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.5. □

Wir betrachten nun für feste Werte $c_1, \dots, c_d > 0$ und $\alpha \geq 1$ das Boolesche Modell (4.1.1), bei dem $Z_1 - \text{zen}(Z_1)$ eine Streckung des Quaders

$$K_0 := \left[-\frac{c_1}{2}, \frac{c_1}{2}\right] \times \dots \times \left[-\frac{c_d}{2}, \frac{c_d}{2}\right]$$

mit einem zufälligen Faktor ist, der zwischen 1 und α liegt. Im folgenden Lemma wird die Schreibweise $x = (x_1, \dots, x_d)$ für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ verwendet.

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Lemma 4.6. Seien $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq t_0, \dots, t_n \leq \alpha$ und $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ derart, dass

$$x_{i,k} - x_{j,k} \notin \frac{1}{2}c_k \cdot \{\pm(t_i + t_j), \pm(t_i - t_j)\}, \quad 0 \leq i < j \leq n, \quad 1 \leq k \leq d, \quad (4.1.11)$$

gilt. Weiter seien $K := t_0K_0 + x_0$ und $A := \bigcup_{i=1}^n (t_iK_0 + x_i)$. Dann gilt

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap K) \leq \lceil \alpha \rceil^d \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0)).$$

Beweis. Für $1 \leq i \leq n$ setzen wir abkürzend $Q_i := t_iK_0 + x_i$. Seien $S_{(i-1)2d+1}, S_{(i-1)2d+2}, \dots, S_{i2d}$ eine Aufzählung der relativen Inneren der Facetten von Q_i , $1 \leq i \leq n$, und

$$A_i := S_i \cap \text{bd}(A) \cap K, \quad 1 \leq i \leq 2nd.$$

Weiter sei S^K die disjunkte Vereinigung der relativen Inneren der Facetten von K . Der Schnitt von zwei unterschiedlichen Facetten eines Quaders ist in einem $(d-2)$ -dimensionalen Unterraum enthalten, ebenso wegen der Voraussetzung (4.1.11) der Schnitt von zwei Facetten von Q_i beziehungsweise Q_j , $1 \leq i < j \leq n$. Also gilt sowohl $\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K)) = \mathcal{H}^{d-1}(S^K)$ als auch $\mathcal{H}^{d-1}(S_i \cap S_j) = 0$ und folglich $\mathcal{H}^{d-1}(A_i \cap A_j) = 0$ für $1 \leq i < j \leq 2nd$. Insgesamt erhalten wir damit

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap K) = \mathcal{H}^{d-1}\left(\bigcup_{i=1}^{2nd} S_i \cap \text{bd}(A) \cap K\right) = \sum_{i=1}^{2nd} \mathcal{H}^{d-1}(A_i). \quad (4.1.12)$$

Sei $I := \{1 \leq i \leq 2nd : A_i \neq \emptyset\}$. Für $i \in I$ gibt es einen eindeutigen normierten äußeren Normalenvektor u_i von $Q_{\lceil i/(2d) \rceil}$ in einem Punkt $z \in A_i$, wobei u_i nicht von der konkreten Wahl von z abhängt. Damit definieren wir eine Spiegelung $\varphi_i : A_i \rightarrow \text{bd}(K)$, indem $z \in A_i$ auf den eindeutigen Schnittpunkt von $\{z - \lambda u_i : \lambda > 0\}$ mit $\text{bd}(K)$ abgebildet wird.

Nun seien $y \in S^K$ und $u(y)$ der eindeutige normierte äußere Normalenvektor von K in y . Sei $k = k(y) \in \{1, \dots, d\}$ derart, dass t_0c_k der Abstand von y zu seinem durch $\{y - \lambda u(y) : \lambda > 0\} \cap S^K$ bestimmten gegenüberliegenden Randpunkt ist. Weiter sei

$$I_y := \bigcup_{i \in I} \varphi_i^{-1}(\{y\})$$

die Menge der Punkte in $\text{bd}(A) \cap K$, von denen ein Spiegelbild definiert ist, das in y liegt. Dann gibt es für jeden der endlich vielen Punkte $z_1, \dots, z_{|I_y|}$ aus I_y genau einen Quader, sagen wir $Q^{(z_j)}$, $1 \leq j \leq |I_y|$, sodass $Q^{(z_j)} \cap I_y = \{z_j\}$ gilt. Also haben diese Punkte paarweise mindestens den Abstand c_k voneinander. Und da sie alle auf der offenen Strecke $(y, y - t_0c_k u(y))$ liegen, kann es höchstens $\lceil t_0 \rceil$ davon geben. Damit folgt die Behauptung aus (4.1.12) durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap K) &= \sum_{i \in I} \mathcal{H}^{d-1}(A_i) = \sum_{i \in I} \mathcal{H}^{d-1}(\varphi_i(A_i)) = \sum_{i \in I} \mathcal{H}^{d-1}(\varphi_i(A_i) \cap S^K) \\ &\leq \lceil t_0 \rceil \mathcal{H}^{d-1}(S^K) \leq \lceil \alpha \rceil \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(\alpha K_0)) \leq \lceil \alpha \rceil^d \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0)). \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 4.7. *Sei \mathbb{M} diffus. Im Fall $\mathbb{Q}(\{tK_0 : 1 \leq t \leq \alpha\}) = 1$ gilt*

$$\mathbb{P}[|F_{d-1} - \mathbb{E}[F_{d-1}]| \geq r] \leq 2 \exp\left(-\frac{r^2}{2na^2}\right), \quad r \geq 0,$$

wobei $a := \frac{1}{2}[\alpha]^d \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0)) = [\alpha]^d \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} c_j$.

Beweis. Benutzen wir die Darstellung $Z_i = T_i K_0 + X_i$ für die Körner des Booleschen Modells, $1 \leq i \leq n$, und sei $Z_0 = T_0 K_0 + X_0$ ein weiteres, von Z_1, \dots, Z_n unabhängiges Korn mit Verteilung \mathbb{B} , dann erfüllen $T_0, \dots, T_n, X_0, \dots, X_n$ fast sicher die Voraussetzung (4.1.11), da die Mittelpunktsverteilung \mathbb{M} diffus ist. Dann können wir völlig analog zum Beweis von Proposition 4.5 vorgehen, wobei wir diesmal Lemma 4.6 verwenden.

Der wohlbekanntete Wert von $\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0))$ berechnet sich durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0)) &= \sum_{i=1}^d \mathcal{H}^{d-1}([0, c_1] \times \dots \times [0, c_{i-1}] \times \{0\} \times [0, c_{i+1}] \times \dots \times [0, c_d]) \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \mathcal{H}^{d-1}([0, c_1] \times \dots \times [0, c_{i-1}] \times \{c_i\} \times [0, c_{i+1}] \times \dots \times [0, c_d]) \\ &= 2 \sum_{i=1}^d \lambda_{d-1}([0, c_1] \times \dots \times [0, c_{i-1}] \times [0, c_{i+1}] \times \dots \times [0, c_d]) \\ &= 2 \sum_{i=1}^d \prod_{j \neq i} c_j. \end{aligned} \quad \square$$

4.1.3 Euler-Charakteristik

In diesem Abschnitt 4.1.3 seien stets $d = 2$ und $n \geq 3$ fest.

Um bei der Herleitung von Konzentrationsungleichungen die Euler-Charakteristik geeignet abschätzen zu können, verwenden wir die Formel (2.3.6). Wir erinnern daran, dass sich diese im Fall $d = 2$ durch

$$V_0(A) = k(A) - l(A), \quad A \in \tilde{\mathcal{R}}^2, \quad (4.1.13)$$

darstellt. Falls Z fast sicher in $\tilde{\mathcal{R}}^2$ liegt, ist es also von wesentlicher Bedeutung, die Anzahl der Löcher von Z zu kontrollieren. Dafür können wir ein exaktes Ergebnis von Kedem et al. in [23] verwenden. Analog zur Begriffsbildung in [23] stellen wir die folgende Definition auf, die sich in Proposition 4.9 auch als Schlüssel zur Anwendbarkeit der Formel (4.1.13) erweist.

Definition 4.8. Wir setzen ${}^o\mathcal{K}^2 := \{K \in \mathcal{K}^2 : K^o \neq \emptyset\}$. Eine endliche Folge $(K_1, \dots, K_n) \in ({}^o\mathcal{K}^2)^n$ heißt *zulässig*, wenn

$$\#(\text{bd}(K_i) \cap \text{bd}(K_j)) \in \{0, 2\}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (4.1.14)$$

erfüllt ist.

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Wir setzen in diesem Abschnitt 4.1.3 voraus, dass \mathbb{B} erstens auf ${}^o\mathcal{K}^2$ konzentriert und zweitens dergestalt ist, dass (Z_1, \dots, Z_n) fast sicher zulässig ist, das heißt $\{(Z_1, \dots, Z_n) \text{ ist nicht zulässig}\}$ ist in einer \mathbb{P} -Nullmenge enthalten.

Dies ist erfüllt, wenn \mathbb{M} beliebig und $Z_1 = B(0, R)$ mit einer auf $(0, \infty)$ stetig verteilten Zufallsvariablen R ist. Ein anderes Beispiel ist der Fall, wenn \mathbb{M} diffus ist und ein $K \in {}^o\mathcal{K}^2$ existiert mit $\mathbb{Q} = \delta_K$, wobei für alle $x, y \in K$ die offene Strecke (x, y) in K° enthalten ist.

Proposition 4.9. *Sei $(K_1, \dots, K_n) \in ({}^o\mathcal{K}^2)^n$ zulässig. Dann gilt $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \tilde{\mathcal{R}}^2$. Insbesondere ist fast sicher $Z \in \tilde{\mathcal{R}}^2$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass sich K_1 und K_2 fast sicher nicht berühren. Angenommen, dies ist falsch. Falls dann $\#(\text{bd}(K_1) \cap \text{bd}(K_2)) = 1$ gilt, ist dies ein Widerspruch zur Voraussetzung (4.1.14). Falls $x, y \in \text{bd}(K_1) \cap \text{bd}(K_2)$ existieren mit $x \neq y$, gilt wegen der Konvexität von K_1 und K_2 , dass die gesamte Strecke $[x, y]$ in $K_1 \cap K_2$ liegt. Wegen $\text{relint}(K_1) \cap \text{relint}(K_2) = \emptyset$ folgt dann sogar $[x, y] \subset (\text{bd}(K_1) \cap \text{bd}(K_2))$. Dies bedeutet $\#(\text{bd}(K_1) \cap \text{bd}(K_2)) = \infty$ und damit ebenso einen Widerspruch zu (4.1.14). Die erste Behauptung impliziert nun die zweite wegen der Voraussetzung an \mathbb{B} . \square

Lemma 4.10. *Seien $K_1, \dots, K_n \in {}^o\mathcal{K}^2$ mit $K_1 \cap K_j \in {}^o\mathcal{K}^2$, $2 \leq j \leq n$. Dann gilt*

$$V_0(K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)) \geq V_0(K_2 \cup \dots \cup K_n). \quad (4.1.15)$$

Beweis. Wegen $\emptyset \neq K_1 \cap K_j \subset K_j$ gilt beim simultanen Übergang von K_j zu $K_1 \cap K_j$, $2 \leq j \leq n$, für jede Zusammenhangskomponente der Vereinigungsmenge, dass sie weder komplett verschwindet, noch mit einer anderen Zusammenhangskomponente verbunden wird. Daraus folgt mit $K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n) = (K_1 \cap K_2) \cup \dots \cup (K_1 \cap K_n)$ die Ungleichung

$$k(K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)) \geq k(K_2 \cup \dots \cup K_n). \quad (4.1.16)$$

Nun sei L ein Loch von $K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)$. Da $L \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Zusammenhangskomponente ist, gilt $L \subset \text{conv}(\text{bd}(L))$. Wegen $\text{bd}(L) \subset K_1$ und der Konvexität von K_1 folgt $L \subset K_1$, also ist L ein Loch von $K_2 \cup \dots \cup K_n$. Damit gilt

$$l(K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)) \leq l(K_2 \cup \dots \cup K_n). \quad (4.1.17)$$

Da wegen Proposition 4.9 die Formel (4.1.13) für beide Seiten von (4.1.15) anwendbar ist, ergibt sich die Behauptung aus (4.1.16) und (4.1.17). \square

Lemma 4.11. *Sei $(K_1, \dots, K_n) \in ({}^o\mathcal{K}^2)^n$ zulässig. Dann gilt für die Anzahl der Löcher der Vereinigungsmenge $A := \bigcup_{i=1}^n K_i$ die Abschätzung $l(A) \leq 2n - 4$. Insbesondere gilt für die Euler-Charakteristik*

$$V_0(A) \geq -2n + 5. \quad (4.1.18)$$

Beweis. Wegen Voraussetzung (4.1.14) können wir Theorem 3.2 in [23] anwenden. Demnach besitzt die Menge $C(A) := \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} (\text{bd}(K_i) \cap \text{bd}(K_j)) \cap \text{bd}(A)$ aller Schnittpunkte der Ränder, die auch auf dem Rand von A liegen, höchstens $6n - 12$ Elemente.

Jedes Loch von A wird durch mindestens drei der Mengen K_1, \dots, K_n begrenzt. Ein Punkt aus $C(A)$, der auf dem Rand eines Lochs liegt, liegt nicht auch auf dem Rand eines anderen Lochs. Denn angenommen, es gibt Löcher L_1, L_2 und einen Punkt $x \in \text{bd}(L_1) \cap \text{bd}(L_2) \cap C(A)$, dann gibt es $1 \leq i < j \leq n$ mit $x \in \text{bd}(K_i) \cap \text{bd}(K_j)$ und folglich berühren sich K_i und K_j . Dies ist aber wegen Proposition 4.9 ausgeschlossen.

Damit können jeweils mindestens drei Elemente von $C(A)$ eindeutig einem gemeinsamen Loch von A zugeordnet werden. Also besitzt A höchstens $(6n - 12)/3 = 2n - 4$ Löcher. Aus $k(A) \geq 1$ und Gleichung (4.1.13) folgt daher (4.1.18). \square

Bemerkung 4.12. Die Schranke für die Anzahl der Löcher in Lemma 4.11 kann nicht verbessert werden, siehe Seite 65 in [23].

Proposition 4.13. *Seien $d = 2$, $n \geq 3$ und \mathbb{B} so auf ${}^o\mathcal{K}^2$ konzentriert, dass (Z_1, \dots, Z_n) fast sicher zulässig ist. Dann gilt für die Euler-Charakteristik $F_0 = V_0(Z)$:*

$$\mathbb{P}[|F_0 - \mathbb{E}[F_0]| \geq r] \leq 2 \exp\left(-\frac{2r^2}{9n^3 - 48n^2 + 64n}\right), \quad r \geq 0. \quad (4.1.19)$$

Beweis. Da Z_1, \dots, Z_n fast sicher Werte in ${}^o\mathcal{K}^2$ annehmen und f_0 eine symmetrische Funktion ist, genügt es für die Anwendung von Satz 3.5, die Ungleichung (3.1.2) im Fall $i = 1$ für Elemente aus diesem Raum mit der Schranke $c_1 = 3n - 8$ nachzuweisen. Des Weiteren genügt es nach Voraussetzung, nur solche $K_1, \dots, K_n, K'_1 \in {}^o\mathcal{K}^2$ zu betrachten, sodass (K_1, \dots, K_n) und (K'_1, K_2, \dots, K_n) jeweils zulässig sind. Aus den grundlegenden Eigenschaften (2.3.4) und (2.3.1) der Euler-Charakteristik folgt

$$\begin{aligned} f_0(K_1, \dots, K_n) - f_0(K'_1, K_2, \dots, K_n) &= V_0(K_1 \cup (K_2 \cup \dots \cup K_n)) - V_0(K'_1 \cup (K_2 \cup \dots \cup K_n)) \\ &= V_0(K_1) - V_0(K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)) - V_0(K'_1) + V_0(K'_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)) \\ &= V_0((K'_1 \cap K_2) \cup \dots \cup (K'_1 \cap K_n)) - V_0(K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)). \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Für den zweiten Summanden können wir Lemma 4.10 verwenden, da sich K_1 und K_j nicht berühren, $2 \leq j \leq n$, und erhalten

$$V_0(K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)) = V_0\left(K_1 \cap \bigcup_{2 \leq j \leq n: K_1 \cap K_j \neq \emptyset} K_j\right) \geq V_0\left(\bigcup_{2 \leq j \leq n: K_1 \cap K_j \neq \emptyset} K_j\right). \quad (4.1.21)$$

Im Fall $n \geq 4$ erhalten wir mit Lemma 4.11 daraus die Abschätzung

$$V_0(K_1 \cap (K_2 \cup \dots \cup K_n)) \geq -2n + 7, \quad (4.1.22)$$

die für $n = 3$ aus (4.1.21) dadurch folgt, dass zwei konvexe Mengen kein Loch einschließen können. Setzen wir die Abschätzungen (4.1.22) und

$$V_0((K'_1 \cap K_2) \cup \dots \cup (K'_1 \cap K_n)) \leq k((K'_1 \cap K_2) \cup \dots \cup (K'_1 \cap K_n)) \leq n - 1$$

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

in (4.1.20) ein, erhalten wir $f_0(K_1, \dots, K_n) - f_0(K'_1, K_2, \dots, K_n) \leq 3n - 8$. Die gleiche Argumentation nach (4.1.20) mit vertauschten K_1, K'_1 führt zur entsprechenden unteren Schranke. Insgesamt gilt also

$$|f_0(K_1, \dots, K_n) - f_0(K'_1, K_2, \dots, K_n)| \leq 3n - 8. \quad (4.1.23)$$

Der Nenner in (4.1.19) ergibt sich nun gemäß Satz 3.5 durch $n(3n - 8)^2$. \square

Bemerkung 4.14. (a) Im Unterschied zu den Konzentrationsungleichungen für das Volumen und die Oberfläche des Booleschen Modells in den Propositionen 4.1 und 4.5 erhalten wir für die Euler-Charakteristik durch McDiarmids Ungleichung einen Ausdruck, der im Nenner nicht linear von n abhängt. Dies ist eine direkte Folge davon, dass die maximale Änderung des Funktionals beim Austausch eines der n Körner nun selbst von n abhängt.

(b) In Spezialfällen kann für die rechte Seite von (4.1.23) ein von n unabhängiger Wert erhalten werden, sodass der Nenner in (4.1.19) durch einen Ausdruck ersetzt werden kann, der nur linear von n abhängt: Seien zum Beispiel $M \subset \mathbb{R}^2$ eine höchstens abzählbare Menge, die $\inf_{y_1 \neq y_2 \in M} \|y_1 - y_2\| > 0$ erfüllt, und R eine durch $R_0 > 0$ beschränkte, stetig verteilte Zufallsvariable. Nun sei \mathbb{M} auf M konzentriert und Z_1 durch $B(0, R)$ gegeben. Dann müssen wir für jedes $y \in M$ von den möglicherweise mehreren Kugeln mit Mittelpunkt y nur eine betrachten, die alle anderen mit diesem Mittelpunkt vollständig überdeckt. Der Wert $c := \sup_{y \in M} |B(y, 2R_0) \cap M| < \infty$ begrenzt die Anzahl von Kugeln, die eine gegebene Kugel schneiden kann. Damit erhalten wir

$$\mathbb{P}[|F_0 - \mathbb{E}[F_0]| \geq r] \leq 2 \exp\left(-\frac{2r^2}{n(3c - 8)^2}\right), \quad r \geq 0,$$

indem wir in den Abschätzungen im Beweis von Proposition 4.13 die Konstante c anstelle von n einsetzen.

4.2 Volumen des Booleschen Modells für Poissonprozesse

Wir setzen an die Begriffsbildungen aus Unterabschnitt 2.5.1 an, das heißt η sei ein stationärer Poissonscher Partikelprozess mit einem Intensitätsmaß $\Lambda \neq 0$, das

$$\Lambda(\{K \in \mathcal{C}^d : K \cap C \neq \emptyset\}) < \infty, \quad C \in \mathcal{C}^d, \quad (4.2.1)$$

erfüllt. Das Boolesche Modell ist dann gegeben durch

$$Z = \bigcup_{K \in \eta} K. \quad (4.2.2)$$

Wir betrachten in diesem Abschnitt 4.2 das Volumen von Z innerhalb eines sogenannten *Beobachtungsfensters* $W \in \mathcal{K}^d$, für das $\lambda_d(W) > 0$ vorausgesetzt wird. Das zugehörige Poissonfunktional

$$F = \lambda_d(Z \cap W)$$

besitzt den Repräsentanten $f : \mathbb{N}(\mathcal{C}^d) \rightarrow [0, \lambda_d(W)]$, gegeben durch $f(\mu) = \lambda_d(Z(\mu) \cap W)$, falls $\mu \in \mathbb{N}_l := \{\mu \in \mathbb{N} : \mu \text{ ist lokal-endlich bezüglich der Hausdorff-Metrik}\}$, und sonst $f(\mu) = 0$.

4.2.1 Allgemeine Körner

Wir führen zuerst eine Variante von Lemma 3.2 in [17] aus, die wir oft benötigen werden.

Lemma 4.15. *Seien $\mathcal{S} \in \{\mathcal{C}^d, \mathcal{R}^d\}$ und $\mu \in \mathbb{N}_l(\mathcal{S})$. Weiter sei $V : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ additiv auf \mathcal{S} und $f_V(\mu) := V(Z(\mu) \cap W)$. Dann gilt für $K_1, K_2 \in \mathcal{S}$*

$$D_{K_1} f_V(\mu) = V(K_1 \cap W) - V(Z(\mu) \cap K_1 \cap W) \quad (4.2.3)$$

und

$$D_{K_1} D_{K_2} f_V(\mu) = -V(K_1 \cap K_2 \cap W) + V(Z(\mu) \cap K_1 \cap K_2 \cap W). \quad (4.2.4)$$

Beweis. Gleichung (4.2.3) erhalten wir durch

$$\begin{aligned} D_{K_1} f(\mu) &= V(Z(\mu + \delta_{K_1}) \cap W) - V(Z(\mu) \cap W) \\ &= V((Z(\mu) \cap W) \cup (K_1 \cap W)) - V(Z(\mu) \cap W) \\ &= V(Z(\mu) \cap W) + V(K_1 \cap W) - V(Z(\mu) \cap K_1 \cap W) - V(Z(\mu) \cap W). \end{aligned}$$

Weiter berechnen wir unter Verwendung von (4.2.3)

$$\begin{aligned} D_{K_1} D_{K_2} f(\mu) &= D_{K_2} f_V(\mu + \delta_{K_1}) - D_{K_2} f_V(\mu) \\ &= V(K_2 \cap W) - V(Z(\mu + \delta_{K_1}) \cap K_2 \cap W) \\ &\quad - V(K_2 \cap W) + V(Z(\mu) \cap K_2 \cap W) \\ &= -V((Z(\mu) \cap K_2 \cap W) \cup (K_1 \cap K_2 \cap W)) + V(Z(\mu) \cap K_2 \cap W) \\ &= V(Z(\mu) \cap K_1 \cap K_2 \cap W) - V(K_1 \cap K_2 \cap W). \quad \square \end{aligned}$$

Durch die Verwendung des folgenden Lemmas führt der Ansatz über die Kovarianzgleichung zu besseren Konzentrationsungleichungen für F als die Verwendung der Log-Sobolev-Gleichung. Wir verwenden für f wieder die spezielle Wahl als Repräsentant des Volumens.

Lemma 4.16. *Für $t \in [0, 1]$ und $K \in \mathcal{C}^d$ gilt*

$$\int_{\mathbb{N}} D_K f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) \leq \lambda_d(K \cap W) (e^{-(1-t)\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}).$$

Beweis. Sei ξ ein stationärer Poissonprozess auf \mathcal{C}^d mit Intensitätsmaß $(1-t)\Lambda$. Wir betrachten die Darstellungen $\eta_t = \sum_{n=1}^{\kappa_1} \delta_{K_n}$ und $\xi = \sum_{n=1}^{\kappa_2} \delta_{L_n}$ wie in (2.4.3), wobei $K_1, L_1, K_2, L_2, \dots$ Zufallselemente in \mathcal{C}^d und κ_1, κ_2 Zufallsvariablen in $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ sind. Wegen

$$f(\mu) = \lambda_d\left(\bigcup_{C \in \mu} (C \cap W)\right), \quad \mu \in \mathbb{N}_l(\mathcal{C}^d),$$

gilt $f(\xi + \eta_t) = f(\xi + \eta'_t)$, wobei $\eta'_t := \sum_{n=1}^{\kappa_1} \mathbf{1}\{K_n \cap W \neq \emptyset\} \delta_{K_n}$. Da für $\mathcal{C}_W := \{C \in \mathcal{C}^d : C \cap W \neq \emptyset\}$ der Wert $\Lambda(\mathcal{C}_W)$ nach (4.2.1) endlich ist und $\eta'_t(\mathcal{C}_W) = \eta_t(\mathcal{C}_W) \sim \text{Po}(t \cdot \Lambda(\mathcal{C}_W))$, ist η'_t fast sicher eine endliche Summe von Dirac-Maßen. Um Lemma 3.19

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

anwenden zu können, weisen wir mithilfe von Gleichung (4.2.4) die Bedingung (3.3.19) nach: Für $C_1, C_2 \in \mathcal{C}^d$ und $\mu \in \mathbb{N}_l$ gilt

$$\begin{aligned} D_{C_1} D_{C_2} f(\mu) &= \lambda_d(Z(\mu) \cap C_1 \cap C_2 \cap W) - \lambda_d(C_1 \cap C_2 \cap W) \\ &= -\lambda_d(Z(\mu)^c \cap C_1 \cap C_2 \cap W) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.19 folgt nun fast sicher $D_K f(\mu + \eta_t) = D_K f(\mu + \eta'_t) \leq D_K f(\mu)$. So ergibt sich mit Gleichung (4.2.3):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} D_K f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) &\leq \int_{\mathbb{N}} D_K f(\mu) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) \\ &= \int_{\mathbb{N}} (\lambda_d(K \cap W) - \lambda_d(Z(\mu) \cap K \cap W)) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) \\ &= \int_{\mathbb{N}} \lambda_d(Z(\mu)^c \cap K \cap W) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu). \end{aligned}$$

Da nach (2.5.3) die Gleichung

$$\int_{\mathbb{N}} \lambda_d(Z(\mu) \cap K \cap W) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) = \lambda_d(K \cap W) (1 - e^{-(1-t)\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]})$$

gilt, erhalten wir die Behauptung durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{N}} \lambda_d(Z(\mu)^c \cap K \cap W) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) &= \lambda_d(K \cap W) - \int_{\mathbb{N}} \lambda_d(Z(\mu) \cap K \cap W) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) \\ &= \lambda_d(K \cap W) (e^{-(1-t)\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}). \quad \square \end{aligned}$$

Wir wenden nun Korollar 3.15 auf das Volumen des Booleschen Modells Z mit Volumenanteil p an. Dafür verwenden wir die Funktionen

$$\phi(x) = e^x - 1 - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

und

$$H(s) = \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*) \phi(s\lambda_d(Z_0))], \quad s \in \mathbb{R},$$

sowie die Konstante

$$c_0 := \frac{p}{\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}.$$

Satz 4.17. *Für das Volumen $F = \lambda_d(Z \cap W)$ gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\inf_{s \geq 0} (c_0 H(s) - sr)\right), \quad r \geq 0, \quad (4.2.5)$$

und

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(\inf_{s \geq 0} (c_0 H(-s) - sr)\right), \quad 0 \leq r \leq \mathbb{E}[F]. \quad (4.2.6)$$

Beweis. Nach Berücksichtigung von $H(0) = 0$ ist zu zeigen, dass die beiden Wahrscheinlichkeiten in (4.2.5) und (4.2.6) für alle $s > 0$ durch $\exp(c_0 H(s) - sr)$ beziehungsweise durch $\exp(c_0 H(-s) - sr)$ beschränkt sind. Um dafür Korollar 3.15 anwenden zu können, überprüfen wir zunächst die Voraussetzungen von Abschnitt 3.3 und zeigen $m_1 = \infty$. Sei also $s > 0$. Die Zufallsvariablen F und e^{sF} sind durch $\lambda_d(W)$ beziehungsweise $e^{s\lambda_d(W)}$ beschränkt, weshalb die beiden Bedingungen $DF \in L^2(\mathbb{P} \otimes \Lambda)$ und $De^{sF} \in L^2(\mathbb{P} \otimes \Lambda)$ zu zeigen bleiben. In beiden Fällen benutzen wir den Satz von Fubini, die Gleichung (4.2.3) und zuletzt die Voraussetzung (4.2.1). Die Gültigkeit von $DF \in L^2(\mathbb{P} \otimes \Lambda)$ erhalten wir durch

$$\begin{aligned} \int (DF)^2 d(\mathbb{P} \otimes \Lambda) &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{C}^d} (f(\eta + \delta_K) - F)^2 \Lambda(dK) \right] = \int_{\mathcal{C}^d} \mathbb{E} [\lambda_d(Z^c \cap K \cap W)^2] \Lambda(dK) \\ &\leq \int_{\mathcal{C}^d} \lambda_d(K \cap W)^2 \Lambda(dK) \leq \lambda_d(W)^2 \cdot \Lambda(\{K \in \mathcal{C}^d : K \cap W \neq \emptyset\}) < \infty \end{aligned}$$

und $De^{sF} \in L^2(\mathbb{P} \otimes \Lambda)$ folgt aus

$$\begin{aligned} \int (De^{sF})^2 d(\mathbb{P} \otimes \Lambda) &= \mathbb{E} \left[\int_{\mathcal{C}^d} (e^{sf(\eta + \delta_K)} - e^{sf(\eta)})^2 \Lambda(dK) \right] \\ &= \int_{\mathcal{C}^d} \mathbb{E} [(e^{sF} (e^{sD_K F} - 1))^2] \Lambda(dK) \\ &\leq \int_{\mathcal{C}^d} \mathbb{E} [e^{2sF}] (e^{s\lambda_d(K \cap W)} - 1)^2 \Lambda(dK) \\ &\leq e^{2s\lambda_d(W)} \int_{\mathcal{C}^d} e^{2s\lambda_d(W)} \cdot \mathbf{1}_{\{K \cap W \neq \emptyset\}} \Lambda(dK) \\ &\leq e^{4s\lambda_d(W)} \cdot \Lambda(\{K \in \mathcal{C}^d : K \cap W \neq \emptyset\}) < \infty. \end{aligned}$$

Zur Herleitung der Ungleichung (3.3.13) für eine geeignete Funktion $h^{(+)}$ schätzen wir nun mit Lemma 4.16 wie folgt ab.

$$\begin{aligned} V_s^{(+)} &= \int_{\mathcal{C}^d} \int_0^1 (e^{sD_K F} - 1) \left(\int_{\mathbb{N}} D_K f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) \right) dt \Lambda(dK) \\ &\leq \int_{\mathcal{C}^d} \int_0^1 (e^{s\lambda_d(K \cap W)} - 1) \lambda_d(K \cap W) (e^{-(1-t)\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}) dt \Lambda(dK) \\ &= \int_{\mathcal{C}^d} (e^{s\lambda_d(K \cap W)} - 1) \lambda_d(K \cap W) \frac{1 - e^{-\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}}{\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]} \Lambda(dK) \\ &= \frac{c_0}{\gamma} \int_{\mathcal{C}^d} (e^{s\lambda_d(K \cap W)} - 1) \lambda_d(K \cap W) \Lambda(dK) =: h^{(+)}(s). \end{aligned}$$

Nun berechnen wir mit dem Satz von Fubini und Gleichung (2.5.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0} \int_0^s h^{(+)}(u) du &= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{C}^d} \int_0^s (e^{u\lambda_d(K \cap W)} - 1) \lambda_d(K \cap W) du \Lambda(dK) \\ &= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{C}^d} (e^{s\lambda_d(K \cap W)} - 1 - s\lambda_d(K \cap W)) \Lambda(dK) \end{aligned}$$

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{s\lambda_d((K+x)\cap W)} - 1 - s\lambda_d((K+x)\cap W)) dx \mathbb{Q}(dK) \\
&\leq \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K+x)\cap W \neq \emptyset\} (e^{s\lambda_d(K)} - 1 - s\lambda_d(K)) dx \mathbb{Q}(dK) \\
&= \int_{\mathcal{C}_0^d} \lambda_d(W + K^*) (e^{s\lambda_d(K)} - 1 - s\lambda_d(K)) \mathbb{Q}(dK).
\end{aligned}$$

Aus der hiermit erhaltenen Ungleichung $\int_0^s h^{(+)}(u) du \leq c_0 H(s)$ und Korollar 3.15 (a) folgt die Behauptung (4.2.5) zum oberen Tail.

Zum Beweis von (4.2.6) führen wir dasselbe Verfahren für $-F$ durch. Es gilt $m_2 = \infty$, denn für $s > 0$ ist e^{-sF} durch 1 beschränkt und $De^{-sF} \in L^2(\mathbb{P} \otimes \Lambda)$ gilt wegen

$$\begin{aligned}
\int (De^{-sF})^2 d(\mathbb{P} \otimes \Lambda) &= \int_{\mathcal{C}^d} \mathbb{E} \left[(e^{-sF} (e^{-sD_{KF}} - 1))^2 \right] \Lambda(dK) \\
&\leq \int_{\mathcal{C}^d} \mathbb{E} [e^{-2sF}] \mathbb{1}\{K \cap W \neq \emptyset\} \Lambda(dK) \\
&\leq \Lambda(\{K \in \mathcal{C}^d : K \cap W \neq \emptyset\}) < \infty.
\end{aligned}$$

Nun gilt analog zu obiger Abschätzung von $V_s^{(+)}$:

$$\begin{aligned}
V_s^{(-)} &= \int_{\mathcal{C}^d} \int_0^1 (1 - e^{-sD_{KF}}) \left(\int_{\mathbb{N}} D_K f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) \right) dt \Lambda(dK) \\
&\leq \frac{c_0}{\gamma} \int_{\mathcal{C}^d} (1 - e^{-s\lambda_d(K \cap W)}) \lambda_d(K \cap W) \Lambda(dK) =: h^{(-)}(s).
\end{aligned}$$

Mit Verwendung der Monotonie von $x \mapsto e^{-sx} - 1 + sx$, $x \geq 0$, erhalten wir damit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_0} \int_0^s h^{(-)}(u) du &= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{C}^d} \int_0^s (1 - e^{-u\lambda_d(K \cap W)}) \lambda_d(K \cap W) du \Lambda(dK) \\
&= \frac{1}{\gamma} \int_{\mathcal{C}^d} (e^{-s\lambda_d(K \cap W)} - 1 + s\lambda_d(K \cap W)) \Lambda(dK) \\
&= \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-s\lambda_d((K+x)\cap W)} - 1 + s\lambda_d((K+x)\cap W)) dx \mathbb{Q}(dK) \\
&\leq \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K+x)\cap W \neq \emptyset\} (e^{-s\lambda_d(K)} - 1 + s\lambda_d(K)) dx \mathbb{Q}(dK) \\
&= \int_{\mathcal{C}_0^d} \lambda_d(W + K^*) (e^{-s\lambda_d(K)} - 1 + s\lambda_d(K)) \mathbb{Q}(dK),
\end{aligned}$$

woraus (4.2.6) mit Korollar 3.15 (b) folgt. □

Bemerkung 4.18. Einen Hinweis auf die Qualität von Satz 4.17 gibt der Vergleich mit einem zusammengesetzten Poissonprozess $\tilde{F} = \sum_{i=1}^{\tau} X_i$, wobei die X_i , $i \in \mathbb{N}$, unabhängig sind und $\tau \sim \text{Po}(\gamma)$ unabhängig von $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist. Dies können wir als ein vereinfachtes Modell von $F = \lambda_d(Z \cap W)$ aus Satz 4.17 ansehen, bei dem die Volumina der Körner mit Zentrum in W einfach aufsummiert werden, ohne Überschneidungen der Körner zu berücksichtigen. Die nach unserem Wissen beste Konzentrationsungleichung für \tilde{F} ist in [15] im ersten Absatz auf Seite 1226 zu finden:

$$\mathbb{P}[\tilde{F} - \mathbb{E}[\tilde{F}] \geq r] \leq \exp\left(\min_{0 < s < m} \gamma \tilde{H}(s) - sr\right), \quad r > 0, \quad (4.2.7)$$

mit $\tilde{H}(s) = \mathbb{E}[\phi(s|X_1)]$ und $m = \sup\{s > 0 : \mathbb{E}[e^{s|X_1|}] < \infty\}$.

Die Ungleichungen (4.2.5) und (4.2.7) sind also sehr ähnlich, insbesondere da der Faktor c_0 in (4.2.5) mithilfe der wohlbekannteren elementaren Ungleichung $1 - e^{-x} \leq x$, $x \in \mathbb{R}$, nach oben durch γ abgeschätzt werden kann. Da bei der Herleitung von Satz 4.17 bezüglich des Intensitätsmaßes des Partikelprozesses integriert wird und sich dies nach (2.5.1) in praktikabler Form als Doppelintegration darstellt, handeln wir uns beim sukzessiven Auflösen der Integrale den Faktor $\lambda_d(W + Z_0^*)$ ein, der letztlich in H , aber nicht in \tilde{H} erscheint. Von diesem Detail abgesehen, spricht der Vergleich mit (4.2.7) also dafür, dass Satz 4.17 nicht wesentlich verbessert werden kann.

Bevor wir Satz 4.17 für bestimmte Kornverteilungen konkretisieren, geben wir einige allgemeinere Folgerungen an. Für die weiteren Aussagen über den oberen Tail benötigen wir, dass

$$t_1 := \sup\{s > 0 : \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)e^{s\lambda_d(Z_0)}] < \infty\} \quad (4.2.8)$$

positiv (möglicherweise unendlich) ist. Da die Abbildung

$$s \mapsto \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)e^{s\lambda_d(Z_0)}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)\lambda_d(Z_0)^n] \frac{s^n}{n!}$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius t_1 ist, können wir im Folgenden benutzen, dass auch die Funktion $H(s)$ und deren Ableitungen den Konvergenzradius t_1 besitzen. Die im Vergleich zu (4.2.8) schwächere Voraussetzung

$$\mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)\lambda_d(Z_0)^2] < \infty \quad (4.2.9)$$

ermöglicht uns die entsprechenden Aussagen für den unteren Tail.

Proposition 4.19. *Falls $t_1 > 0$ gilt, wird das Infimum in (4.2.5) durch das eindeutige Urbild $s_1 = s_1(r) = (H')^{-1}(r/c_0)$ angenommen. Falls (4.2.9) gilt, wird das Infimum in (4.2.6) durch den eindeutigen Wert $s_2 = -(H')^{-1}(-r/c_0)$ bestimmt.*

Beweis. Für $r = 0$ sind in Satz 4.17 die Werte $H(s)$ beziehungsweise $H(-s)$ zu minimieren. Da $\phi(x)$ nur durch $\phi(0) = 0$ minimiert wird, ist die Lösung jeweils eindeutig durch $s = 0 = (H')^{-1}(0)$ gegeben.

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Wir betrachten im Folgenden also nur noch $r > 0$ im ersten Fall und $0 < r \leq \mathbb{E}[F]$ im zweiten. Verwenden wir die Notation $I_1(s) := c_0 H(s) - sr$, $s \geq 0$, erhalten wir die Extrempunkte von I_1 durch Auflösen von $I_1'(s) = c_0 H'(s) - r = 0$ nach s , also mit den Elementen des Urbilds $(H')^{-1}(r/c_0)$. Da die stetige Funktion

$$H'(s) = \mathbb{E}\left[\lambda_d(W + Z_0^*)\phi'(s\lambda_d(Z_0))\lambda_d(Z_0)\right], \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.2.10)$$

auf $(0, t_1)$ strikt monoton wachsend ist und $H'((0, t_1)) = (0, \infty)$ gilt, existiert ein eindeutiges $s_1 = (H')^{-1}(r/c_0) \in (0, t_1)$. Aus (4.2.8) und $\phi''(x) > 0$ für $x > 0$ folgt

$$I_1''(s_1) = c_0 H''(s_1) = c_0 \mathbb{E}\left[\lambda_d(W + Z_0^*)\phi''(s_1\lambda_d(Z_0))\lambda_d(Z_0)^2\right] \in (0, \infty),$$

somit ist s_1 ein Minimum und der erste Teil der Behauptung ist bewiesen.

Mit der Voraussetzung (4.2.9) erhalten wir für $s \geq 0$

$$H(-s) = \mathbb{E}\left[\lambda_d(W + Z_0^*)(e^{-s\lambda_d(Z_0)} - 1 + s\lambda_d(Z_0))\right] \leq s\mathbb{E}\left[\lambda_d(W + Z_0^*)\lambda_d(Z_0)\right] < \infty.$$

Analog zu obiger Rechnung erhalten wir die Extrempunkte der Funktion $I_2(s) := c_0 H(-s) - sr$, $s \geq 0$, durch $-(H')^{-1}(-r/c_0)$. Aus $\phi'((-\infty, 0)) = (-1, 0)$ ergibt sich für $H'(s)$ in (4.2.10) die Gleichung

$$H'((-\infty, 0)) = (-\mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)\lambda_d(Z_0)], 0).$$

Daraus folgt zusammen mit

$$0 < \frac{r}{c_0} \leq \frac{\mathbb{E}[F]\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}{p} = \lambda_d(W)\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)] < \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)\lambda_d(Z_0)], \quad (4.2.11)$$

dass $(H')^{-1}(-r/c_0)$ existiert. Und da H' auf $(-\infty, t_1)$ strikt monoton wächst, ist dieses Urbild $-s_2 < 0$ eindeutig. Wegen $\phi''((-\infty, 0)) = (0, 1)$ und (4.2.9) folgt

$$I_2''(s_2) = c_0 H''(-s_2) \leq c_0 \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)\lambda_d(Z_0)^2] \in (0, \infty),$$

weshalb s_2 ein Minimum ist. □

Es bezeichne

$$M(s) := \mathbb{E}\left[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d}\right], \quad s \in \mathbb{R},$$

die momentenerzeugende Funktion des Volumens der Umkugel von Z_0 . Falls die Verteilung von $R(Z_0)$ bekannt ist, können wir in Proposition 4.22 unter leicht verschärften Voraussetzungen explizitere Konzentrationsungleichungen angeben. Es sei

$$t_2 := \sup\{s > 0 : M(s) < \infty\}.$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$G_1(s) := \sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(W) \mathbb{E}\left[\phi(s\kappa_d R(Z_0)^d) R(Z_0)^{d-i}\right], \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.2.12)$$

die ebenfalls eine Potenzreihe ist.

Lemma 4.20. *Der Konvergenzradius von G_1 (und allen Ableitungen davon) ist t_2 .*

Beweis. Wegen $\phi(x) \geq \phi(-x)$ für $x \geq 0$ müssen wir nur $s > 0$ betrachten. Sei $s < t_2$ und damit $M(s) < \infty$ und $M(s)' < \infty$. Die Endlichkeit von $G_1(s)$ ist äquivalent zu $\mathbb{E}[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d} R(Z_0)^{d-i}] < \infty$, $0 \leq i \leq d$. Dann folgt $G_1(s) < \infty$ aus

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d} R(Z_0)^{d-i}] &= \mathbb{E}[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d} R(Z_0)^{d-i} \mathbf{1}\{R(Z_0) \geq 1\}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d} R(Z_0)^{d-i} \mathbf{1}\{R(Z_0) < 1\}] \\ &\leq \mathbb{E}[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d} R(Z_0)^d \mathbf{1}\{R(Z_0) \geq 1\}] \\ &\quad + \mathbb{E}[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d} (R(Z_0)^d + 1) \mathbf{1}\{R(Z_0) < 1\}] \\ &\leq \frac{1}{\kappa_d} M'(s) + 2M(s) \end{aligned}$$

für $0 \leq i \leq d$. Umgekehrt folgt aus $G_1(s) < \infty$ insbesondere die Endlichkeit des letzten Summanden in (4.2.12), was äquivalent zu $M(s) < \infty$ ist. \square

Lemma 4.21. *Für $s \in \mathbb{R}$ gilt*

$$H(s) \leq G_1(s).$$

Beweis. Ersetzen wir in $H(s) = \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*) \phi(s\lambda_d(Z_0))]$ das typische Korn Z_0 jeweils durch seine Umkugel, ergibt sich $G_1(s)$ durch Anwendung der Steiner-Formel und der Monotonieeigenschaft der Funktion $\phi(x)$, die für $x \leq 0$ ab- und für $x \geq 0$ zunimmt. \square

In Definition (4.2.8) kann $e^{s\lambda_d(Z_0)}$ äquivalent durch $\phi(s\lambda_d(Z_0))$ ersetzt werden. Aus den Lemmata 4.21 und 4.20 folgt damit $t_2 \leq t_1$. Für den unteren Tail benötigen wir als Analogon zu Voraussetzung (4.2.9) die Bedingung

$$\mathbb{E}[R(Z_0)^{3d}] < \infty. \quad (4.2.13)$$

Wie im Beweis von Lemma 4.21 kann eingesehen werden, dass dies (4.2.9) verschärft.

Proposition 4.22. *Falls $t_2 > 0$ erfüllt ist, gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\min_{0 \leq s < t_2} (c_0 G_1(s) - sr)\right), \quad r \geq 0, \quad (4.2.14)$$

und das Minimum ist durch das eindeutige Urbild $s_1 = s_1(r) = (G_1')^{-1}(r/c_0)$ bestimmt. Unter Voraussetzung (4.2.13) gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(\min_{s \geq 0} (c_0 G_1(-s) - sr)\right), \quad 0 \leq r \leq \mathbb{E}[F], \quad (4.2.15)$$

wobei das Minimum durch $s_2 = -(G_1')^{-1}(-r/c_0)$ bestimmt wird.

Beweis. Aus Satz 4.17 und Lemma 4.21 folgen unmittelbar (4.2.14) und (4.2.15). Die Behauptungen zu den Minima ergeben sich unter Verwendung von Lemma 4.20 analog zum Beweis der Proposition 4.19. Zu beachten ist dabei lediglich, dass der letzte Ausdruck in (4.2.11) wieder wie im Beweis von Lemma 4.21 abzuschätzen ist. \square

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Später werden wir in Proposition 4.35 ein Beispiel für Proposition 4.22 sehen. Zunächst behandeln wir den Spezialfall, dass der Umkugelradius des typischen Korns mindestens den Wert 1 annimmt. Die folgende Konzentrationsungleichung ist dann interessant, wenn $(M'')^{-1}$ berechnet werden kann. Dabei betrachten wir die Potenzreihe

$$G_2(s) := \left(\sum_{i=0}^d \frac{\kappa_{d-i}}{\kappa_d} V_i(W) \right) \left(M'(s) - \mathbb{E}[\kappa_d R(Z_0)^d] - s \mathbb{E}[\kappa_d^2 R(Z_0)^{2d}] \right), \quad s \in \mathbb{R},$$

die wiederum den Konvergenzradius t_2 hat.

Proposition 4.23. *Für den Umkugelradius des typischen Korns sei fast sicher $R(Z_0) \geq 1$ erfüllt und es gelte $t_2 > 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(\min_{0 \leq s < t_2} (c_0 G_2(s) - sr) \right), \quad r \geq 0, \quad (4.2.16)$$

wobei das Minimum durch

$$s_1 = s_1(r) = (M'')^{-1} \left(\frac{r}{\frac{c_0}{\kappa_d} \sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(W) + \mathbb{E}[\kappa_d^2 R(Z_0)^{2d}]} \right)$$

bestimmt wird. Unter Voraussetzung (4.2.13) gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(\min_{s \geq 0} (c_0 G_2(-s) - sr) \right), \quad 0 \leq r \leq \mathbb{E}[F]. \quad (4.2.17)$$

Dabei wird das eindeutige Minimum angenommen durch

$$s_2 = -(M'')^{-1} \left(\frac{-r}{\frac{c_0}{\kappa_d} \sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(W) + \mathbb{E}[\kappa_d^2 R(Z_0)^{2d}]} \right).$$

Beweis. Wegen $R(Z_0) \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} G_1(s) &\leq \sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(W) \mathbb{E}[\phi(s \kappa_d R(Z_0)^d) R(Z_0)^d] \\ &= \sum_{i=0}^d \frac{\kappa_{d-i}}{\kappa_d} V_i(W) \mathbb{E}[\kappa_d R(Z_0)^d (e^{s \kappa_d R(Z_0)^d} - 1 - s \kappa_d R(Z_0)^d)] = G_2(s) \end{aligned}$$

für $s \in \mathbb{R}$. Aus Proposition 4.22 folgen damit (4.2.16) und (4.2.17). Mit der Darstellung $G_2(s) = c \mathbb{E}[R(Z_0)^d \phi(s \kappa_d R(Z_0)^d)]$ mit einem gewissen $c > 0$ sehen wir, dass der Beweis der Existenz der Minima wie bei Proposition 4.22 und damit analog zum Beweis von Proposition 4.19 geführt werden kann. Die Darstellung von s_1 und s_2 ergibt sich aus der Äquivalenz von $G_2'(s) = \pm r/c_0$ und

$$M''(s) = \frac{\pm r}{\frac{c_0}{\kappa_d} \sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(W) + \mathbb{E}[\kappa_d^2 R(Z_0)^{2d}]}.$$

□

Bemerkung 4.24. Wenn in Proposition 4.23 auf die Voraussetzung $R(Z_0) \geq 1$ verzichtet wird, können analog Tailabschätzungen mittels einer modifizierten Funktion G_2 gefolgert werden, aber für die Bestimmung der Minima kann nicht ohne Weiteres auf ein analoges Vorgehen wie im Beweis voriger Propositionen verwiesen werden. Auf die Ausarbeitung der technischen Details verzichten wir an dieser Stelle.

Bemerkung 4.25. Aus Lemma 3.7 in [17] folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^d V_i(W) &\leq \sum_{i=1}^d V_d(W)(2^d - 1) (r(W)^i \kappa_i)^{-1} + V_d(W) \\ &= V_d(W) \left((2^d - 1) \sum_{i=1}^d (r(W)^i \kappa_i)^{-1} + 1 \right), \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

wobei $r(W)$ den Radius der größten in W enthaltenen Kugel bezeichne. Insbesondere folgt aus (4.2.18), dass bei bezüglich Inklusion zunehmendem W die Summe $\sum_{i=0}^d \kappa_{d-i} V_i(W)$ höchstens linear in $V_d(W)$ wächst.

Konzentrationsungleichungen für das Volumen des Booleschen Modells (4.2.2) wurden bisher von Heinrich in [11] untersucht. Seine Ergebnisse geben die Abschätzung (4.2.5) im Allgemeinen nicht wieder, wie wir nach Proposition 4.29 genauer feststellen werden. Auf die von ihm verwendete Methode der Kumulanten gehen wir in dieser Arbeit nicht näher ein, da sie, wie auch in [8] zu sehen ist, zwar vielfältige Anwendungsmöglichkeiten hat, aber oft zu einer nicht optimalen Asymptotik der Schranken führt. Das Theorem 3 in [11] besagt nun folgendes:

Proposition 4.26. *Es gilt für alle $r \geq 0$, $0 < \rho < 1$ und $s \geq 0$ mit $\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}] < \infty$:*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \begin{cases} \exp\left(-\frac{1-\rho}{2\tilde{H}(s)\lambda_d(W)} \cdot r^2\right), & 0 \leq r \leq \frac{\rho\gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}] \cdot \lambda_d(W)}{(1-\rho)(s + \gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}])}, \\ \exp\left(-\frac{\rho}{2\Delta(s)} \cdot r\right), & r > \frac{\rho\gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}] \cdot \lambda_d(W)}{(1-\rho)(s + \gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}])}, \end{cases}$$

mit

$$\tilde{H}(s) := \frac{8\gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}](1 + e^{\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]})}{s^2} \quad \text{und} \quad \Delta(s) := \frac{8(s + \gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}])(1 + e^{\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]})}{s^2}.$$

Bemerkung 4.27. Wird in Proposition 4.26 in der Schranke für die kleineren Abweichungen ein Faktor von $r \cdot r$ durch die Intervallgrenze $\rho\gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}]\lambda_d(W)/(\dots)$ ersetzt, was eine Abschätzung dieser Schranke nach *unten* bedeutet, erhält man genau die zweite Schranke $\exp(-\rho r/(s\Delta(s)))$. Das heißt, dass diese zweite besser als die erste wäre, wenn man die gleichen Werte für r einsetzen könnte. Allerdings lässt sich das in [11] verwendete Beweisverfahren für diese zweite Schranke nicht anwenden, wenn r höchstens $\rho\gamma\mathbb{E}[e^{s\lambda_d(Z_0)}]\lambda_d(W)/(\dots)$ ist.

Wir möchten unsere allgemeine Konzentrationsungleichung aus Satz 4.17 im Folgenden in Spezialfällen explizit angeben und dann mit Proposition 4.26 vergleichen.

4.2.2 Beschränkte Körner

Es gelten die Notationen von Unterabschnitt 4.2.1. Zusätzlich sei \mathbb{Q} nun auf Körnern konzentriert, die in einem $K_0 \in \mathcal{C}_0^d$ enthalten sind. Damit definieren wir die Konstanten

$$a := \lambda_d(K_0) \quad \text{und} \quad b := \lambda_d(W + K_0^*).$$

In Proposition 4.29 werden wir für den oberen und unteren Tail jeweils eine Konzentrationsungleichung zuerst in schärferer und dann in einer übersichtlicheren Form angeben. Dazu benötigen wir zwei elementare Ungleichungen, die zum Beispiel auf Seite 44 in [22] erwähnt werden. Stellvertretend für alle in dieser Arbeit verwendeten elementaren Ungleichungen führen wir den Beweis der ersteren, der in den anderen Fällen analog geführt werden kann, vollständig aus.

Lemma 4.28. *Es gilt*

$$(1+x) \log(1+x) - x \geq \frac{x^2}{2 + \frac{2}{3}x}, \quad x \geq 0, \quad (4.2.19)$$

und, mit $0 \log(0) := 0$,

$$(1-x) \log(1-x) + x \geq \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (4.2.20)$$

Beweis. Sei $f(x)$ die linke Seite von (4.2.19) und $g(x)$ die rechte. Für $x = 0$ gilt mit $0 = 0$ Gleichheit. Daher genügt es zu zeigen, dass $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \geq 0$ gilt. Für $x = 0$ sind $f'(x) = \log(1+x)$ und $g'(x) = (x + \frac{1}{6}x^2)/(1 + \frac{1}{3}x)^2$ wieder jeweils gleich 0. Für $x > 0$ folgt die Behauptung aus der Bernoullischen Ungleichung $1+x \leq (1 + \frac{1}{3}x)^3$ und damit $f''(x) = 1/(1+x) \geq 1/(1 + \frac{1}{3}x)^3 = g''(x)$ sowie $f''(0) = 1 = g''(0)$. Der Beweis von (4.2.20) kann analog geführt werden. \square

Proposition 4.29. *Es gilt für das Boolesche Modell (4.2.2) mit beschränkten Körnern*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\frac{\mathbb{E}[F]}{a} \left(\frac{r}{\mathbb{E}[F]} - \left(1 + \frac{r}{\mathbb{E}[F]}\right) \log\left(1 + \frac{r}{\mathbb{E}[F]}\right)\right)\right) \quad (4.2.21)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{r^2}{2a(\mathbb{E}[F] + \frac{1}{3}r)}\right), \quad r \geq 0, \quad (4.2.22)$$

und

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(-\frac{\mathbb{E}[F]}{a} \left(\frac{r}{\mathbb{E}[F]} + \left(1 - \frac{r}{\mathbb{E}[F]}\right) \log\left(1 - \frac{r}{\mathbb{E}[F]}\right)\right)\right) \quad (4.2.23)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{r^2}{2a\mathbb{E}[F]}\right), \quad 0 \leq r \leq \mathbb{E}[F]. \quad (4.2.24)$$

Beweis. Wir wenden Satz 4.17 an. Sei $s \geq 0$. Da $x \mapsto \phi(sx)/x$ für positive x monoton wächst, erhalten wir

$$c_0 H(s) \leq \frac{p}{\lambda_d(K_0)} \lambda_d(W + K_0^*) \phi(s\lambda_d(K_0)) = \frac{p}{a} b \phi(sa).$$

Also ist für den oberen Tail die Schranke

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\frac{p}{a} b(e^{sa} - 1 - sa) - sr\right) =: g_1(s) \quad (4.2.25)$$

in s zu optimieren. Das Minimum von g erhalten wir durch die Lösung von

$$g_1'(s) = g_1(s) \left(\frac{p}{a} b(ae^{sa} - a) - r \right) = 0.$$

Die vorige Gleichung bedeutet

$$ae^{sa} - a = \frac{ra}{pb}, \quad \text{also } s = \frac{1}{a} \log\left(1 + \frac{r}{pb}\right).$$

Einsetzen in (4.2.25) ergibt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &\leq \exp\left(\frac{pb}{a} \left(\frac{r}{pb} - \log\left(1 + \frac{r}{pb}\right)\right) - \frac{r}{a} \log\left(1 + \frac{r}{pb}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{pb}{a} \left(\frac{r}{pb} - \left(1 + \frac{r}{pb}\right) \log\left(1 + \frac{r}{pb}\right)\right)\right). \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Aus Gleichung (2.5.3) erhalten wir

$$pb = \mathbb{E}[\lambda_d(Z \cap (W + K_0^*))] \geq \mathbb{E}[\lambda_d(Z \cap W)] = \mathbb{E}[F] \quad (4.2.27)$$

und da $x \mapsto \frac{1}{x}(x - (1+x)\log(1+x))$ für positive x monoton fällt, folgt aus (4.2.26) die erste behauptete Ungleichung. Mit (4.2.19) vereinfacht sich diese zu (4.2.22).

Durch analoge Rechnung erhalten wir die Abschätzungen für den unteren Tail. Da für $s \geq 0$ auch $x \mapsto \phi(-sx)/x$ für positive x monoton wächst, gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(\frac{p}{a} b(e^{-sa} - 1 + sa) - sr\right) =: g_2(s). \quad (4.2.28)$$

Die Auflösung von $g_2'(s) = g_2(s) \left(\frac{p}{a} b(-ae^{-sa} + a) - r \right) = 0$ ergibt mit

$$s = -\frac{1}{a} \log\left(1 - \frac{r}{pb}\right)$$

einen Wert, der nur für $r < pb$ wohldefiniert ist. In (4.2.28) eingesetzt ergibt dies

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(-\frac{pb}{a} \left(\frac{r}{pb} + \left(1 - \frac{r}{pb}\right) \log\left(1 - \frac{r}{pb}\right)\right)\right).$$

Ungleichung (4.2.23) folgt nun daraus, dass $x \mapsto -\frac{1}{x}(x + (1-x)\log(1-x))$ für $0 \leq x < 1$ monoton fällt. Mit (4.2.20) ergibt sich die letzte Behauptung. \square

Bemerkung 4.30. Anstatt Abschätzung (4.2.19) zur Vereinfachung der Konzentrationsungleichung (4.2.21) zu verwenden, könnten wir auch die asymptotisch bessere Abschätzung $(1+x)\log(1+x) - x \geq (x/2)\log(1+x)$, $x \geq 0$, verwenden. Allerdings ist die letztere Abschätzung für $x < 7,577$ schlechter als (4.2.19). Da wir in Proposition 4.29 für x den Bruch $r/\mathbb{E}[F]$ einsetzen und dabei nur $r \leq \lambda_d(W) - \mathbb{E}[F] = \mathbb{E}[F](p^{-1} - 1)$ zu betrachten ist, führt Abschätzung (4.2.19) zumindest im Fall $p^{-1} - 1 < 7,577$, also für $p > 1/(8,577)$ zu einer besseren Konzentrationsungleichung. Im Fall $p < 1/(8,577)$ ist (4.2.19) noch für entsprechend kleine Werte von r besser.

Proposition 4.29 zeigt einen deutlichen Unterschied zu Heinrichs Proposition 4.26. Dort wird für große r eine Abschätzung mit der Asymptotik $\exp(-\Theta(r))$, $r \rightarrow \infty$, erhalten, wohingegen unser Ansatz über die Kovarianzgleichung zu Ungleichung (4.2.21) und damit zur asymptotisch besseren Abschätzung $\exp(-\Theta(r \log r))$ führt.

Darüber hinaus ist die Ungleichung (4.2.21) recht scharf. Dies belegt der Vergleich mit einem gegenüber demjenigen in Bemerkung 4.18 erneut vereinfachten Modell: Die Zufallsvariable $X \sim \text{Po}(\lambda)$, $\lambda > 0$, steht dabei für das Volumen des Booleschen Modells innerhalb eines Beobachtungsfensters, wenn das Volumen jedes Korns gleich 1 ist und Überschneidungen der Körner nicht berücksichtigt werden. Zunächst gilt laut Lemma 1.2 in [29] die Abschätzung

$$\mathbb{P}[X - \lambda \geq r] \leq \exp(r - (\lambda + r)\log(1 + r/\lambda)), \quad r \geq 0. \quad (4.2.29)$$

Gemäß Seite 1225 in [15] gilt unter nur leichter Modifikation der obigen rechten Seite sogar die asymptotische Gleichheit

$$\mathbb{P}[X - \lambda \geq r] \sim (2\pi(\lambda + r))^{-1/2} \exp(r - (\lambda + r)\log(1 + r/\lambda)), \quad r \rightarrow \infty.$$

Wir erkennen in (4.2.21) die genau gleiche Form wie in (4.2.29) mit dem zusätzlichen Faktor $1/a$ innerhalb der Exponentialfunktion. Es ist nicht überraschend, dass das Volumen eines einzelnen Korns in dieser Form auftritt: Es gilt wegen der elementaren Ungleichung $1 - e^{-x} \leq x$, $x \in \mathbb{R}$, in der nur für $x = 0$ Gleichheit vorliegt, die Abschätzung $1 - e^{-\gamma a} \leq \gamma a$, die für kleinere Werte von γ immer schärfer wird: Für $\gamma \rightarrow 0$ gilt $\gamma \sim (1 - e^{-\gamma a})/a \leq 1/a$. Und eine kleinere Intensität bedeutet ja tendenziell weniger Überlappungen der Körner.

Da es möglich ist, das in diesem Unterabschnitt 4.2.2 untersuchte Boolesche Modell innerhalb eines Beobachtungsfensters zu simulieren, können empirische Abweichungswahrscheinlichkeiten zum Beispiel mit den Werten der Schranke (4.2.21) verglichen werden. Michael Klatt hat Simulationen mit zwei-dimensionalen Rechtecken durchgeführt, die in Abbildung 4.2 zusammengefasst sind.

Details zur Simulation und zur verwendeten Software sind in [14] beschrieben, wobei hier nicht wie in [14] periodische Randbedingungen verwendet werden, sondern die Mittelpunkte der Rechtecke in einer ausreichend großen Umgebung des Beobachtungsfensters W simuliert werden und dann die Vereinigung der Rechtecke mit W geschnitten wird. Da Chernoff-Schranken für kleine Abweichungen immer nahe bei 1 liegen, ist zunächst ein deutlicher Abstand zwischen Schranke und empirischer Wahrscheinlichkeit natürlich. In Abbildung 4.2 sehen wir ein Beispiel, wie sich dieser Abstand für zunehmendes r verkleinert. Wir erinnern daran, dass Konzentrationsungleichungen dann interessant sind,

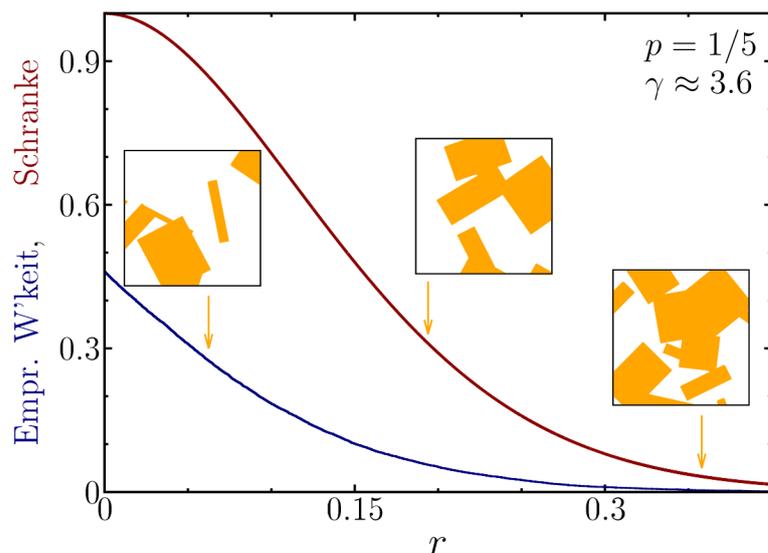


Abbildung 4.2: Vergleich der empirischen Abweichungswahrscheinlichkeiten mit der Schranke (4.2.21) im Fall von $W = [0, 1]^2$ und zufällig gedrehten Rechtecken, deren Kantenlängen unabhängig und gleichverteilt in $[0, 1/2]$ sind. Eingefügt sind drei Stichproben. Die Pfeile nach unten zeigen dabei jeweils an, um welchen Wert r die Fläche von Z ihren Erwartungswert übersteigt. (Grafik von Michael Klatt.)

wenn die Abweichungswahrscheinlichkeiten nicht exakt bestimmt werden können. Außerdem gilt die Schranke (4.2.21) in allgemeinerem Rahmen als speziell unter den im Beispiel verwendeten Voraussetzungen. Daher ist eine vollständige Annäherung der Schranke an den empirischen Wert auch nicht zu erwarten.

Die Verwendung der Log-Sobolev-Ungleichung führt mit der folgenden Proposition zu einem ähnlichen, aber wie wir sehen werden unter Umständen schlechteren, Ergebnis als die mithilfe der Kovarianzgleichung hergeleitete Proposition 4.29.

Proposition 4.31. *Für das Boolesche Modell (4.2.2) mit beschränkten Körnern gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\frac{r}{a} - \left(\frac{r}{a} + \gamma \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)]\right) \log\left(\frac{r}{\gamma a \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)]} + 1\right)\right) \quad (4.2.30)$$

$$\leq \exp\left(\gamma b \left(\frac{r}{\gamma ab} - \left(\frac{r}{\gamma ab} + 1\right) \log\left(\frac{r}{\gamma ab} + 1\right)\right)\right), \quad r \geq 0, \quad (4.2.31)$$

und

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2\gamma a^2 \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)]}\right), \quad r \geq 0. \quad (4.2.32)$$

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Beweis. Mit (4.2.3) erhalten wir die fast sichere Abschätzung

$$\begin{aligned}
V_L^{a,+} = V_L^{0,-} &= \int_{\mathcal{C}^d} (D_K F)^2 \Lambda(dK) = \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} (D_{K+x} F)^2 dx \mathbb{Q}(dK) \\
&= \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda_d(Z^c \cap (K+x) \cap W))^2 dx \mathbb{Q}(dK) \\
&\leq \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K+x) \cap W \neq \emptyset\} \lambda_d(K+x)^2 dx \mathbb{Q}(dK) \\
&\leq \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{(K+x) \cap W \neq \emptyset\} a^2 dx \mathbb{Q}(dK) \\
&= \gamma a^2 \int_{\mathcal{C}_0^d} \lambda_d(W + K^*) \mathbb{Q}(dK).
\end{aligned}$$

Durch Anwenden von (3.2.1) und (3.2.4) erhalten wir nun (4.2.30) und (4.2.32). Da die Funktion $x \mapsto \left(\frac{r}{a} + x\right) \log\left(\frac{r}{xa} + 1\right)$ für $x > 0$ monoton fällt, folgt die zweite Ungleichung (4.2.31) aus der fast sicheren Inklusion $Z_0^* \subset K_0^*$ und (4.2.30). \square

Bemerkung 4.32. Im Fall deterministischer Körner sind die Konzentrationsungleichungen, die von uns über den Ansatz der Kovarianzgleichung hergeleitet wurden, besser als die auf der Log-Sobolev-Ungleichung aufbauenden: Betrachten wir zunächst beim oberen Tail jeweils die schärfste erhaltene Ungleichung ohne weitere Vereinfachungen und verwenden die Notation $\psi(x) := \frac{1}{x}(x - (1+x) \log(1+x))$, schreiben sich (4.2.26) und (4.2.30) als

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\frac{r}{a} \cdot \psi\left(\frac{r}{pb}\right)\right), \quad r \geq 0,$$

beziehungsweise

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(\frac{r}{a} \cdot \psi\left(\frac{r}{\gamma a \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)]}\right)\right), \quad r \geq 0.$$

Insbesondere unterscheiden sich die beiden Konzentrationsungleichungen nur in den Konstanten. Da $\psi(x)$ für positive x monoton fällt, führt der Ansatz über die Kovarianzgleichung also genau dann zu einer besseren Schranke, wenn die Ungleichung

$$(1 - e^{-\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}) \mathbb{E}[\lambda_d(W + K_0^*)] \leq \gamma a \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)] \quad (4.2.33)$$

erfüllt ist. Wenn nun $Z_0 = K_0$ fast sicher gilt, vereinfacht sich dieses Kriterium zu $1 - e^{-\gamma a} \leq \gamma a$, das für alle Werte von γ und a erfüllt ist. Der Unterschied zwischen beiden Abschätzungen ist in Abbildung 4.3 in einem konkreten Beispiel zu sehen. Ähnlich sieht der Vergleich der Abschätzungen (4.2.24) und (4.2.32) für den unteren Tail aus: Unter Berücksichtigung der Ungleichung (4.2.27) sehen wir, dass die Gültigkeit von (4.2.33) für die Bevorzugung der Herleitung über die Kovarianzgleichung hinreichend ist. Der exakte Vergleich mit Heinrichs Proposition 4.26 ist schwierig, da dort zwei Optimierungsparameter zusammenwirken. Bei Stichproben konnten wir keine Hinweise dafür finden, dass Proposition 4.26 in konkreten Beispielen ähnlich gute Ergebnisse liefert wie die Propositionen 4.29 und 4.31.

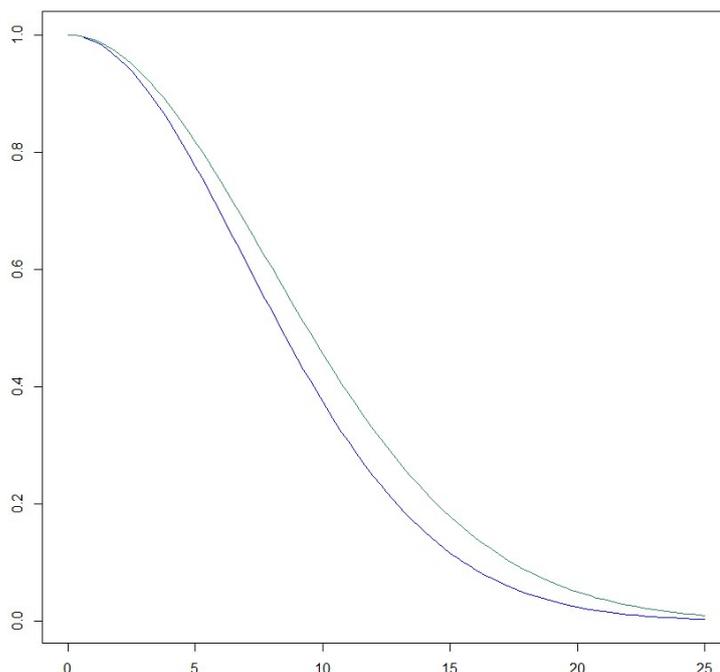


Abbildung 4.3: Vergleich der Abschätzungen (4.2.26) (in blau) und (4.2.30) (in grün) bei deterministischen Körnern mit $d = 2$, $Z_0 = [-1/2, 1/2]^2$, $W = [0, 10]^2$ und $\gamma = 1/2$. Auf der x -Achse die Werte für r , auf der y -Achse die oberen Schranken für die Abweichungswahrscheinlichkeiten.

Bemerkung 4.33. Die Sätze 3.12 und 3.13 sind für die Anwendung auf das Boolesche Modell (4.2.2) mit beschränkten Körnern ungeeignet:

(a) Analog zur Abschätzung im Beweis von Proposition 4.1 erhalten wir mit (4.2.3):

$$V_L^{0,+} = \sum_{K \in \eta} (f(\eta) - f(\eta - \delta_K))^2 = \sum_{K \in \eta} \lambda_d \left((K \cap W) \setminus \bigcup_{L \in \eta - \delta_K} L \right)^2 \leq aF. \quad (4.2.34)$$

Mit Satz 3.12 folgt daraus

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(- \frac{r^2}{a(2\mathbb{E}[F] + r)} \right), \quad r \geq 0, \quad (4.2.35)$$

was offenbar eine schlechtere Abschätzung als (4.2.22) ist. Verwenden wir in (4.2.34) die Abschätzung

$$\sum_{K \in \eta} \lambda_d \left((K \cap W) \setminus \bigcup_{L \in \eta - \delta_K} L \right) \leq \lambda_d(W),$$

erhalten wir mit (3.2.2) durch

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp \left(- \frac{r^2}{2a\lambda_d(W)} \right), \quad r \geq 0,$$

sogar einen oberen gaußschen Tail. Allerdings ist letztere Ungleichung für die interessanten Werte $0 \leq r \leq \lambda_d(W) - \mathbb{E}[F]$ schlechter als (4.2.35), da dann $2\mathbb{E}[F] + r \leq 2\lambda_d(W)$ gilt.

(b) Als Spezialfall von (3.3.17) erhalten wir

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \mathbb{P}[\sqrt{F} - \mathbb{E}[\sqrt{F}] \geq z] \leq \mathbb{E}[\exp(\sqrt{F} - \mathbb{E}[\sqrt{F}])] e^{-z}, \quad (4.2.36)$$

mit $z = z(r) = \sqrt{\mathbb{E}[F] + r} - \sqrt{\mathbb{E}[F]}$, wobei zuletzt noch die Markov-Ungleichung verwendet wurde. Durch Anwendung von Satz 3.13 ist also nur eine Schranke, die sich in r wie $\exp(\sqrt{r})$ verhält, zu gewinnen. Es ist für uns auch keine derart geschicktere Anwendung des allgemeineren Korollars 3.5 in [5] in Sicht, die eine bessere Asymptotik als $\exp(\sqrt{r})$ liefern würde.

4.2.3 Unbeschränkte Körner

Wir bezeichnen die Gammaverteilung mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ als $\gamma(\alpha, \beta)$, das heißt

$$h(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x \geq 0,$$

ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte von $\gamma(\alpha, \beta)$ bezüglich des Lebesgue-Maßes λ_1 . Die folgende elementare Rechnung zeigt für $Y \sim \gamma(\alpha, \beta)$ und $r \rightarrow \infty$ die Asymptotik

$$\mathbb{P}[Y \geq r] \sim h(r)/\beta = \exp(-r\beta + \mathcal{O}(\log(r))) = \exp(-r(\beta - o(1))). \quad (4.2.37)$$

Wegen

$$h'(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} ((\alpha - 1)x^{\alpha-2} e^{-\beta x} - \beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x}) = h(x) \left(\frac{\alpha - 1}{x} - \beta \right)$$

erhalten wir mit partieller Integration für $r > \frac{\alpha-1}{\beta}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \geq r) &= \int_r^\infty \frac{x}{\alpha - 1 - x\beta} \left(\left(\frac{\alpha - 1}{x} - \beta \right) f(x) \right) dx \\ &= \left[\frac{x}{\alpha - 1 - x\beta} f(x) \right]_r^\infty - \int_r^\infty \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1 - x\beta)^2} f(x) dx \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

$$\leq \frac{r}{r\beta - \alpha + 1} f(r). \quad (4.2.39)$$

Andererseits kann das Integral in (4.2.38) nach oben durch $\frac{\alpha-1}{(r\beta-\alpha+1)^2} \int_r^\infty f(x) dx$ abgeschätzt werden. Daraus ergibt sich

$$\mathbb{P}(Y \geq r) \geq \frac{r}{r\beta - \alpha + 1} f(r) - \left(\frac{\alpha - 1}{(r\beta - \alpha + 1)^2} \right) \mathbb{P}(Y \geq r)$$

und nach Umsortierung

$$\mathbb{P}(Y \geq r) \geq \frac{r}{r\beta - \alpha + 1} f(r) / \left(\frac{(r\beta - \alpha + 1)^2 + \alpha - 1}{(r\beta - \alpha + 1)^2} \right). \quad (4.2.40)$$

Die beiden Schranken (4.2.39) und (4.2.40) unterscheiden sich nur um den letzten Faktor in (4.2.40), der für $r \rightarrow \infty$ gegen 1 konvergiert. Es folgt (4.2.37).

Eine ähnliche Asymptotik sehen wir in der folgenden Proposition für das Volumen des Booleschen Modells, wenn das Umkugelvolumen des typischen Korns Gamma-verteilt ist. Dabei werden mehrfach Gebrauch des folgenden elementaren Lemmas machen. Es folgt unmittelbar daraus, dass $x^{\alpha-1} e^{-bx} b^\alpha / \Gamma(\alpha) \cdot \mathbf{1}\{x \geq 0\}$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

Lemma 4.34. Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a}.$$

Proposition 4.35. Für das Volumen der Umkugel des typischen Korns des Booleschen Modells (4.2.2) gelte $R(Z_0)^d \kappa_d \sim \gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$. Definieren wir $t := R(W)$, $\tilde{\alpha} := \max\{\alpha, 1\}$ und für $r, c > 0$ die Funktion

$$\begin{aligned} g(r, c) &:= c_0 \tilde{\alpha} \left[\beta^{2\alpha/(\alpha+2)} \left(\frac{r}{c}\right)^{\alpha/(\alpha+2)} \left(t \kappa_d^{1/d} + \left(\frac{r}{c\beta\alpha}\right)^{1/(d(\alpha+2))} \right)^d - \left(t \kappa_d^{1/d} + \beta^{-\frac{1}{d}} \right)^d \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + \alpha - \alpha \left(\frac{r}{c}\right)^{-1/(\alpha+2)} \beta^{-2/(\alpha+2)} \right) \right] - \beta r + r^{(\alpha+1)/(\alpha+2)} (c\beta\alpha)^{1/(\alpha+2)}, \\ &= -r\beta + \mathcal{O}(r^{(\alpha+1)/(\alpha+2)}) \\ &= -r(\beta - o(1)), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

so gilt für $r \geq 0$:

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp(g(r, c_1)), \quad 0 < c_1 < r\beta^2, \tag{4.2.42}$$

und

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp(g(r, c_2)), \quad c_2 > r\beta^2.$$

Beweis. Die Aussagen über die Asymptotik von g ergeben sich aus den wohlbekanntenen Rechenregeln für Landau-Symbole. Zunächst überprüfen wir die Wohldefiniertheit des Booleschen Modells mit dieser Kornverteilung, das heißt die Bedingung (2.5.2). Für $p > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0 + B(0, p))] &\leq \mathbb{E}[\lambda_d(B(0, R(Z_0) + p))] \leq \mathbb{E}[\kappa_d(R(Z_0) + p)^d] \\ &= \mathbb{E}\left[\kappa_d \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} p^i R(Z_0)^{d-i}\right] \\ &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} p^i \kappa_d \left(\mathbb{E}[R(Z_0)^{d-i} \mathbf{1}\{R(Z_0) \leq 1\}] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}[R(Z_0)^{d-i} \mathbf{1}\{R(Z_0) > 1\}] \right) \\ &\leq \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} p^i \kappa_d (1 + \mathbb{E}[R(Z_0)^d]) = \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} p^i \left(\kappa_d + \frac{\alpha}{\beta} \right) < \infty. \end{aligned}$$

Um nun beide Aussagen von Proposition 4.22 verwenden zu können, überprüfen wir zunächst deren Voraussetzungen. Sei $-\infty < s < \beta$. Mit Lemma 4.34 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{s\kappa_d R(Z_0)^d}] &= \int_0^\infty e^{sx} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-(\beta-s)x} x^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta-s)^\alpha} < \infty \end{aligned}$$

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

sowie

$$\mathbb{E}[R(Z_0)^{3d}] = \frac{1}{\kappa_d^3} \int_0^\infty x^{3d} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\kappa_d^3 \Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(3d + \alpha)}{\beta^{3d+\alpha}} < \infty.$$

Für die Funktion G_1 von (4.2.12) gilt nun

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \sum_{i=0}^d \kappa_i V_{d-i}(W) \mathbb{E}[R(Z_0)^i \phi(sR(Z_0)^d \kappa_d)] \\ &= \sum_{i=0}^d \kappa_i V_{d-i}(W) \kappa_d^{-i/d} \mathbb{E}\left[\left(\kappa_d R(Z_0)^d\right)^{i/d} \phi(sR(Z_0)^d \kappa_d)\right] \\ &= \sum_{i=0}^d \kappa_i V_{d-i}(W) \kappa_d^{-i/d} \int_0^\infty x^{i/d} (e^{sx} - 1 - sx) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Aus der Monotonie und Homogenität der inneren Volumina erhalten wir

$$V_{d-i}(W) \leq V_{d-i}(B(0, t)) = t^{d-i} V_{d-i}(B(0, 1)) = t^{d-i} \binom{d}{i} \frac{\kappa_d}{\kappa_i}, \quad 0 \leq i \leq d. \quad (4.2.44)$$

wobei wir zuletzt eine bekannte Formel für die inneren Volumina der Einheitskugel verwendet haben, die sich zum Beispiel leicht aus der Steiner-Formel folgern lässt. Setzen wir bei jedem Summanden in (4.2.43) Abschätzung (4.2.44) entsprechend ein, erhalten wir

$$G_1(s) \leq \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (t\kappa_d^{1/d})^{d-i} \int_0^\infty x^{\frac{i}{d}+\alpha-1} (e^{-(\beta-s)x} - e^{-\beta x} - sxe^{-\beta x}) dx.$$

Dreifache Anwendung von Lemma 4.34 ergibt wegen $\beta > s$:

$$\begin{aligned} G_1(s) &\leq \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (t\kappa_d^{1/d})^{d-i} \left(\left((\beta-s)^{-\frac{i}{d}-\alpha} - \beta^{-\frac{i}{d}-\alpha} \right) \Gamma\left(\frac{i}{d} + \alpha\right) \right. \\ &\quad \left. - s\beta^{-\frac{i}{d}-\alpha-1} \Gamma\left(\frac{i}{d} + \alpha + 1\right) \right) \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (t\kappa_d^{1/d})^{d-i} \Gamma\left(\frac{i}{d} + \alpha\right) \left((\beta-s)^{-\frac{i}{d}-\alpha} - \beta^{-\frac{i}{d}-\alpha} - s\beta^{-\frac{i}{d}-\alpha-1} \left(\frac{i}{d} + \alpha\right) \right). \end{aligned}$$

Für $x \in (0, 1]$ fällt $\Gamma(x) \geq 1$ monoton, mit $x \in (1, 2)$ gilt $\Gamma(x) < 1$ und für $x \geq 2$ wächst $\Gamma(x)$ monoton. Also gilt für $0 \leq i \leq d$

$$\Gamma\left(\frac{i}{d} + \alpha\right) \leq \begin{cases} \Gamma(\alpha), & \alpha \leq 1, \\ \Gamma(1 + \alpha) = \alpha\Gamma(\alpha), & \alpha > 1, \end{cases}$$

und daher, da jeder Summand von G_1 nicht-negativ ist,

$$G_1(s) \leq \beta^\alpha \tilde{\alpha} \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} (t\kappa_d^{1/d})^{d-i} \left((\beta-s)^{-\frac{i}{d}-\alpha} - \beta^{-\frac{i}{d}-\alpha} - s\beta^{-\frac{i}{d}-\alpha-1} \left(\frac{i}{d} + \alpha\right) \right). \quad (4.2.45)$$

Für die weiteren Rechnungen transformieren wir den Parameter $s \in (0, \beta)$ wie folgt: Für $c_1 \in (0, r\beta^2)$ setzen wir

$$s^{(1)} := \beta - \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{-1/(\alpha+2)}.$$

Zu beachten ist, dass $s^{(1)}$ im Intervall $(0, \beta)$ liegt und dort auch alle Werte bei jeweils geeigneter Wahl von c_1 annehmen kann. Nun erhalten wir mit Ungleichung (4.2.45):

$$\begin{aligned} \frac{G_1(s^{(1)})}{\beta^\alpha \tilde{\alpha}} &\leq \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(t\kappa_d^{1/d} \right)^{d-i} \left[\left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{(\frac{i}{d} + \alpha)/(\alpha+2)} - \beta^{-\frac{i}{d} - \alpha} \right. \\ &\quad \left. - \left(\beta - \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{-1/(\alpha+2)} \right) \beta^{-\frac{i}{d} - \alpha - 1} \left(\frac{i}{d} + \alpha \right) \right] \\ &\leq \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(t\kappa_d^{1/d} \right)^{d-i} \left[\left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{(\frac{i}{d} + \alpha)/(\alpha+2)} - \beta^{-\frac{i}{d} - \alpha} \right. \\ &\quad \left. - \alpha \left(\beta^{-\frac{i}{d} - \alpha} - \left(\frac{r}{c_1} \right)^{-1/(\alpha+2)} \beta^{\alpha/(\alpha+2) - \frac{i}{d} - \alpha - 1} \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^d \binom{d}{i} \left(t\kappa_d^{1/d} \right)^{d-i} \left[\left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha+2)} \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{i/(d(\alpha+2))} - \beta^{-\alpha} \beta^{-\frac{i}{d}} \right. \\ &\quad \left. - \alpha \beta^{-\alpha} \beta^{-\frac{i}{d}} + \alpha \left(\frac{r}{c_1} \right)^{-1/(\alpha+2)} \beta^{-\alpha - 2/(\alpha+2)} \beta^{-\frac{i}{d}} \right]. \end{aligned}$$

Durch Anwenden der Binomischen Formel auf jeden Summanden vereinfacht sich dies zu

$$\begin{aligned} \frac{G_1(s^{(1)})}{\beta^\alpha \tilde{\alpha}} &\leq \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha+2)} \left(t\kappa_d^{1/d} + \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{1/(d(\alpha+2))} \right)^d - \beta^{-\alpha} \left(t\kappa_d^{1/d} + \beta^{-\frac{1}{d}} \right)^d \\ &\quad - \alpha \beta^{-\alpha} \left(t\kappa_d^{1/d} + \beta^{-\frac{1}{d}} \right)^d + \alpha \left(\frac{r}{c_1} \right)^{-1/(\alpha+2)} \beta^{-\alpha - 2/(\alpha+2)} \left(t\kappa_d^{1/d} + \beta^{-\frac{1}{d}} \right)^d \\ &= \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha+2)} \left(t\kappa_d^{1/d} + \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{1/(d(\alpha+2))} \right)^d \\ &\quad - \left(t\kappa_d^{1/d} + \beta^{-\frac{1}{d}} \right)^d \left(\beta^{-\alpha} + \alpha \beta^{-\alpha} - \alpha \left(\frac{r}{c_1} \right)^{-1/(\alpha+2)} \beta^{-\alpha - 2/(\alpha+2)} \right). \end{aligned}$$

Also gilt nach (4.2.14) für $c_1 \in (0, r\beta^2)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &\leq \exp(c_0 G_1(s^{(1)}) - sr) \\ &\leq \exp \left(c_0 \beta^\alpha \tilde{\alpha} \left[\left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{\alpha/(\alpha+2)} \left(t\kappa_d^{1/d} + \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{1/(d(\alpha+2))} \right)^d \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(t\kappa_d^{1/d} + \beta^{-\frac{1}{d}} \right)^d \left(\beta^{-\alpha} + \alpha \beta^{-\alpha} - \alpha \left(\frac{r}{c_1} \right)^{-1/(\alpha+2)} \beta^{-\alpha - 2/(\alpha+2)} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \beta r + r \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{-1/(\alpha+2)} \right) \\ &= \exp \left(c_0 \tilde{\alpha} \left[\beta^{2\alpha/(\alpha+2)} \left(\frac{r}{c_1} \right)^{\alpha/(\alpha+2)} \left(t\kappa_d^{1/d} + \left(\frac{r}{c_1 \beta^\alpha} \right)^{1/(d(\alpha+2))} \right)^d \right. \right. \end{aligned}$$

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

$$\begin{aligned} & - \left(t\kappa_d^{1/d} + \beta^{-\frac{1}{d}} \right)^d \left(1 + \alpha - \alpha \left(\frac{r}{c_1} \right)^{-1/(\alpha+2)} \beta^{-2/(\alpha+2)} \right) \Big] \\ & - \beta r + r^{(\alpha+1)/(\alpha+2)} (c_1 \beta^\alpha)^{1/(\alpha+2)}. \end{aligned}$$

Damit ist (4.2.42) gezeigt. Führen wir ab (4.2.45) die analoge Rechnung mit einem beliebigen $c_2 > r\beta^2$ und der Wahl

$$s^{(2)} := -\beta + \left(\frac{r}{c_2 \beta^\alpha} \right)^{-1/(\alpha+2)} \in (0, \infty)$$

durch, wobei lediglich $G_1(s^{(1)})$ durch $G_1(-s^{(2)})$ zu ersetzen ist, folgt die Behauptung zum unteren Tail mit (4.2.15). \square

Bemerkung 4.36. Eine Abschätzung mit wesentlich besserer Asymptotik als in (4.2.41) ist unter den betrachteten Voraussetzungen nicht zu erwarten, solange wir Konzentrationsungleichungen wie üblich über die Chernoff-Schranke herleiten. Denn vereinfachen wir die Voraussetzungen von Proposition 4.35 wie im Folgenden durch die Annahme von unabhängigen Kugelvolumina, gilt fast dieselbe Asymptotik:

Seien τ, X_1, X_2, \dots unabhängig, X_1, X_2, \dots identisch verteilt und $X_1 \sim \gamma(\alpha, \beta)$ sowie $\tau \sim \text{Po}(\lambda)$, $\alpha, \beta, \lambda > 0$. Sei weiter $s > 0$ und

$$F := \sum_{n=1}^{\tau} X_n.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{sF}] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\tau = k\} e^{s \sum_{n=1}^k X_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}[e^{s \sum_{n=1}^k X_n}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}[e^{sX_1}]^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}[e^{sX_1}]^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda M_{X_1}(s))^k}{k!} = \exp(\lambda(M_{X_1}(s) - 1)), \end{aligned}$$

wobei M_{X_1} die momentenerzeugende Funktion von X_1 bezeichne. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \exp(s\mathbb{E}[F]) &= \exp\left(s \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\tau = k\} \sum_{n=1}^k X_n]\right) = \exp\left(s \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} k \mathbb{E}[X_1]\right) \\ &= \exp\left(s\mathbb{E}[X_1] e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right) = \exp(s\mathbb{E}[X_1] \lambda). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{sF}]}{e^{s\mathbb{E}[F]} e^{sr}} = \frac{e^{\lambda(M_{X_1}(s)-1)}}{e^{s(r+\lambda\mathbb{E}[X_1])}} = \exp(\lambda(M_{X_1}(s) - 1 - s\mathbb{E}[X_1]) - sr).$$

Optimiert mit $s = \beta \left(1 - \left(\frac{r\beta}{\lambda\alpha} + 1\right)^{-1/(\alpha+1)}\right)$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] &\leq \exp\left(\lambda\left(M_{X_1}(s) - 1 - s\frac{\alpha}{\beta}\right) - sr\right) \\
 &= \exp\left(\lambda\left[\left(\frac{r\beta}{\lambda\alpha} + 1\right)^{\alpha/(\alpha+1)} - 1 - \alpha + \alpha\left(\frac{r\beta}{\lambda\alpha} + 1\right)^{-1/(\alpha+1)}\right]\right. \\
 &\quad \left.- r\beta + r\beta\left(\frac{r\beta}{\lambda\alpha} + 1\right)^{-1/(\alpha+1)}\right) \\
 &= \exp\left(-r\beta + \lambda\left[\left(\frac{r\beta}{\lambda\alpha} + 1\right)^{\alpha/(\alpha+1)} - 1 - \alpha\right.\right. \\
 &\quad \left.\left.+ \left(\alpha + \frac{r\beta}{\lambda}\right)\left(\frac{r\beta}{\lambda\alpha} + 1\right)^{-1/(\alpha+1)}\right]\right) \\
 &= \exp\left(-r\beta + \mathcal{O}(r^{\alpha/(\alpha+1)})\right),
 \end{aligned}$$

also eine nur sehr wenig bessere Asymptotik als (4.2.41).

Während sich die Konzentrationsungleichungen von Wu in [34] nicht auf das Boolesche Modell mit unbeschränkten Körnern anwenden lassen, ermöglichen die Erweiterungen von Bachmann und Peccati diese Verallgemeinerung. Mithilfe von Satz 3.13 erhalten wir die folgende Konzentrationsungleichung.

Proposition 4.37. *Seien $\gamma_W := \gamma \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)]$ sowie $X_0 := \min\{\lambda_d(Z_0), \lambda_d(W)\}$ und es gelte $\lambda_d(W) \geq \gamma^{-1}$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \gamma_W \mathbb{E}[e^{X_0}] e^{-z}, \quad r \geq 0,$$

mit $z = z(r) := \sqrt{\mathbb{E}[F] + r} - \sqrt{\mathbb{E}[F]}$.

Beweis. Es gilt mit der Konvention $\max \emptyset := 0$:

$$\begin{aligned}
 V_L^{0,+} &= \sum_{K \in \eta} (D_K f(\eta - \delta_K))^2 = \sum_{K \in \eta} (f(\eta) - f(\eta - \delta_K))^2 \\
 &\leq \max\{f(\eta) - f(\eta - \delta_K) : K \in \eta \text{ mit } K \cap W \neq \emptyset\} \left(\sum_{K \in \eta} f(\eta) - f(\eta - \delta_K) \right) \\
 &\leq \max\{\min\{\lambda_d(K), \lambda_d(W)\} : K \in \eta \text{ mit } K \cap W \neq \emptyset\} \cdot F,
 \end{aligned} \tag{4.2.46}$$

Es sei $\mathcal{C}_W^d := \{C \in \mathcal{C}^d : C \cap W \neq \emptyset\}$. Die Verteilung von $\max_K \lambda_d(K)$ ist gleich der Verteilung von $M := \max\{X_1, \dots, X_\kappa\}$, wobei $X_n \stackrel{d}{=} X_0$, $n \in \mathbb{N}$, und κ Poisson-verteilt mit Parameter $\mathbb{E}[\eta(\mathcal{C}_W^d)] < \infty$ sowie κ, X_1, X_2, \dots unabhängig seien. Wegen

$$\gamma_W = \gamma \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)] = \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{K + x \cap W \neq \emptyset\} dx \mathbb{Q}(dK) = \Lambda(\mathcal{C}_W^d) = \mathbb{E}[\eta(\mathcal{C}_W^d)]$$

gilt $\kappa \sim \text{Po}(\gamma_W)$.

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Es bezeichne G die Verteilungsfunktion von X_0 . Damit gilt für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} H(t) &:= \mathbb{P}[M \leq t] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[\kappa = n] \mathbb{P}\left[\max_{1 \leq i \leq n} X_i \leq t\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_W^n}{n!} e^{-\gamma_W} G(t)^n \\ &= \exp(-\gamma_W(1 - G(t))) \end{aligned}$$

und $H(t) = 0$ für $t < 0$. Somit erhalten wir mit der Ungleichung $1 - e^{-x} \leq x$, $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^M] &= \int_0^{\infty} (1 - \mathbb{P}[e^M \leq t]) dt = \int_0^{\infty} (1 - H(\log(t))) dt \\ &= 1 + \int_1^{\infty} (1 - \exp[-\gamma_W(1 - G(\log(t)))] dt \\ &\leq 1 + \int_1^{\infty} \gamma_W(1 - G(\log(t))) dt = 1 + \gamma_W \int_1^{\infty} (1 - \mathbb{P}[e^{X_0} \leq t]) dt \\ &\leq \gamma_W \left(1 + \int_1^{\infty} (1 - \mathbb{P}[e^{X_0} \leq t]) dt\right) = \gamma_W \mathbb{E}[e^{X_0}], \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

wobei wir bei der letzten Ungleichung die Voraussetzung benutzt haben. Nun wenden wir mithilfe der Abschätzung (4.2.46) Satz 3.13 an und erhalten weiter mit (4.2.47):

$$\mathbb{E}[\exp(\sqrt{F} - \mathbb{E}[\sqrt{F}])] \leq \mathbb{E}[e^M] \leq \gamma_W \mathbb{E}[e^{X_0}].$$

Daraus folgt mit (4.2.36) die Behauptung. \square

Beispiel 4.38. Sei $\lambda_d(Z_0) \sim \gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$. Dann gilt für $\beta > 1$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda_d(Z_0)}] = \left(\frac{\beta}{\beta - 1}\right)^\alpha$$

und daher mit Proposition 4.37:

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \gamma_W \mathbb{E}[e^{X_0}] e^{-z} \leq \gamma_W \left(\frac{\beta}{\beta - 1}\right)^\alpha e^{-z}.$$

Bemerkung 4.39. Im Vergleich zu Proposition 4.35 hat Proposition 4.37 schwächere Voraussetzungen. Falls allerdings Proposition 4.35 anwendbar ist, bietet sie eine bessere Abschätzung, unter Vernachlässigung der Konstanten nämlich e^{-r} statt $e^{-\sqrt{r}}$ wie in Beispiel 4.38. Hinzu kommt in Proposition 4.37 der typischerweise große Faktor $\gamma_W \mathbb{E}[e^{X_0}] \leq \gamma_W \mathbb{E}[e^{\lambda_d(Z_0)}]$ außerhalb der Exponentialfunktion, den wir durch Anwendung der Ungleichung $1 - e^{-x} \leq x$ erhalten haben.

Mit dem auf der Kovarianzgleichung beruhenden Satz 3.18 erhalten wir jedoch mit der ersten folgenden Konzentrationsungleichung im ganz allgemeinen Fall ein deutlich besseres Ergebnis als in Proposition 4.37, da für $c > 0$ die Asymptotik $r + c \log(c/(r+c)) \sim r$, $r \rightarrow \infty$, gilt. Das zweite, analog erhaltene Ergebnis bei beschränkten Körnervolumen bietet offenbar keinen Fortschritt gegenüber vorigen Ergebnissen in Unterabschnitt 4.2.2.

Proposition 4.40. *Für den oberen Tail des Volumens des Booleschen Modells (4.2.2) gilt*

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}{\mathbb{E}[F]} \left(r + \mathbb{E}[F] \log\left(\frac{\mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]}\right)\right)\right), \quad r > 0, \quad (4.2.48)$$

und im Fall beschränkter Körnervolumen mit $\lambda_d(Z_0) \leq a$ fast sicher für ein $a > 0$ gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \geq r] \leq \exp\left(-\frac{\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}{pa} \left(r + \mathbb{E}[F] \log\left(\frac{\mathbb{E}[F]}{r + \mathbb{E}[F]}\right)\right)\right), \quad r > 0.$$

Beweis. Nach Lemma 4.16 gilt

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{N}} D_K f(\eta_t + \mu) \Pi_{(1-t)\Lambda}(d\mu) dt \leq \int_0^1 \lambda_d(K \cap W) (e^{-(1-t)\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)]}) dt. \quad (4.2.49)$$

Im allgemeinen Fall schätzen wir $\lambda_d(K \cap W) \leq \lambda_d(W)$ ab und erhalten dann für die rechte Seite in (4.2.49) den Wert $\lambda_d(W)p/(\gamma \mathbb{E}[\lambda_d(Z_0)])$. Im Fall beschränkter Körner verwenden wir $\lambda_d(K \cap W) \leq a$. Außerdem gilt analog zu vorigen Abschätzungen

$$V_M = \sum_{K \in \eta} D_K f(\eta - \delta_K) = \sum_{K \in \eta} \lambda_d\left((K \cap W) \setminus \bigcup_{L \in \eta - \delta_K} L\right) \leq F.$$

Damit folgen die Behauptungen jeweils aus Satz 3.18. □

Beispiel 4.41. Wir vergleichen die Propositionen 4.35, 4.37 und 4.40 anhand des folgenden einfachen Beispiels: Seien $d = 2$, $W = B(0, 10)$, die Intensität $\gamma = 1/2$ und das typische Korn sei eine Kugel mit $\gamma(1, 1)$ -verteilterm Volumen.

Zunächst stellen wir fest, dass Proposition 4.37 in diesem Fall keine sinnvollen Abschätzungen bereitstellt: Die Funktion $g(r) = \gamma \lambda_2(W) \exp(-\sqrt{\mathbb{E}[F] + r} + \sqrt{\mathbb{E}[F]})$ nimmt erst für $r > 138$ (gerundet) Werte kleiner 1 an. Da g recht grob nach oben durch die Schranke

$$\gamma \mathbb{E}[\lambda_2(W + Z_0)] \mathbb{E}[\exp(\min\{\lambda_2(Z_0), \lambda_2(W)\})] \cdot \exp(-\sqrt{\mathbb{E}[F] + r} + \sqrt{\mathbb{E}[F]}) \quad (4.2.50)$$

aus Proposition 4.37 abgeschätzt werden kann, sehen wir in Verbindung mit den Werten $\mathbb{E}[F] \approx 123, 6$ und $\lambda_d(W) \approx 314, 2$, dass die Schranke (4.2.50) keine guten Werte liefert. Auch in anderen Beispielen ist die Problematik wegen des zweiten und dritten Faktors in (4.2.50) ähnlich.

4 Konzentrationsungleichungen für das Boolesche Modell

Die Schranke aus Proposition 4.35 können wir nicht direkt plotten, da für jeden Wert von r der Parameter c_1 von Neuem numerisch zu optimieren ist. Die folgende Tabelle zeigt jedoch stichprobenartig die eindeutig besten Abschätzungen:

r	$c_1 = c_1(r)$	Schranke
10	9.74	0.99
15	13.93	0.91
20	17.73	0.78
25	21.19	0.61
30	24.34	0.46
35	27.22	0.31
40	29.86	0.20
45	32.28	0.12
50	34.50	0.07
60	38.42	0.02

Die Proposition 4.40 stellt im Unterschied zu Proposition 4.35 keine weiteren Bedingungen an die Verteilung des Volumens des typischen Korns, ist dafür aber im hier betrachteten Beispiel schlechter, wie der Vergleich obiger Tabelle mit Abbildung 4.4 zeigt.

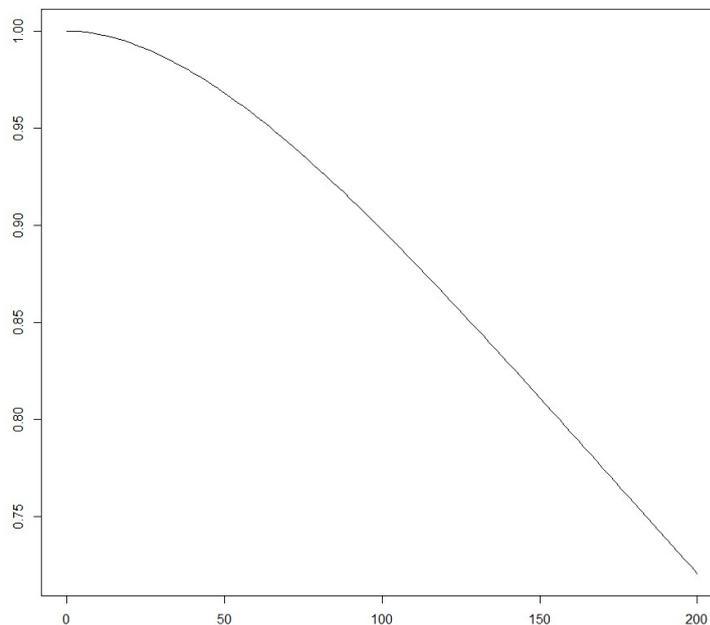


Abbildung 4.4: Die Schranke (4.2.48) im Beispiel 4.41 für die relevanten Werte von r .

Satz 4.42. Für den unteren Tail des Volumens des Booleschen Modells (4.2.2) gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2\gamma\mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)(\lambda_d(Z_0))^2]}\right), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Die Behauptung folgt durch Ungleichung (3.2.4) aus Satz 3.11 mit

$$\begin{aligned} V_L^{0,-} &= \int_{\mathcal{C}^d} (D_K F)^2 \Lambda(dK) \\ &= \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} (\lambda_d((Z \cup (K+x)) \cap W) - \lambda_d(Z \cap W))^2 dx \mathbb{Q}(dK) \\ &\leq \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{K+x \cap W \neq \emptyset\} (\lambda_d(K+x))^2 dx \mathbb{Q}(dK) \\ &= \gamma \mathbb{E}[\lambda_d(W + Z_0^*)(\lambda_d(Z_0))^2]. \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Oberfläche des Booleschen Modells für Poissonprozesse

Wir betrachten das durch (4.2.2) definierte Boolesche Modell Z und nun den (halben) Oberflächeninhalt

$$F_{d-1} := V_{d-1}(Z \cap W)$$

des auf ein Beobachtungsfenster $W \in \mathcal{K}^d$ mit $\lambda_d(W) > 0$ eingeschränkten Booleschen Modells. Seien $K_0 \in \mathcal{K}^d$ mit nicht-leerem Inneren, $1 \leq \alpha < \infty$ und es gelte

$$\mathbb{Q}(\{tK_0 : 1 \leq t \leq \alpha\}) = 1. \quad (4.3.1)$$

Diese Voraussetzung ermöglicht es bei geeigneter Wahl von K_0 , eine obere Schranke für den Wert herzuleiten, um den die Oberfläche von Z beim Hinzufügen eines neuen Korns gegebenenfalls abnimmt. Wie wir im Beweis der folgenden Proposition 4.43 sehen werden, liegt solch eine geeignete Wahl von K_0 dann vor, wenn für alle $W' \in \mathcal{K}^d$ mit $\lambda_d(W') > 0$ fast sicher

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(Z) \cap L \cap W') \leq [\alpha]^d \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0)), \quad \Lambda\text{-fast alle } L, \quad (4.3.2)$$

gilt. In diesem Fall können wir Konzentrationsungleichungen für beide Tails von F_{d-1} angeben, die sehr ähnlich sind zu den in den Propositionen 4.29 und 4.31 aufgestellten Konzentrationsungleichungen für das Volumen von $Z \cap W$ im Fall beschränkter Körner. Die im Folgenden hergeleiteten Konstanten für die Konzentrationsungleichungen sind

$$a := [\alpha]^d V_{d-1}(K_0) \quad \text{und} \quad b := \lambda_d(W + \alpha K_0^*).$$

Satz 4.43. *Seien die Bedingungen (4.3.1) und (4.3.2) erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbb{P}[|F_{d-1} - \mathbb{E}[F_{d-1}]| \geq r] \leq 2 \exp\left(-\left(\frac{r}{a} + \gamma b\right) \log\left(1 + \frac{r}{\gamma ab}\right) + \frac{r}{a}\right) \quad (4.3.3)$$

$$\leq 2 \exp\left(-\frac{r^2}{2a(\gamma ab + \frac{1}{3}r)}\right), \quad r \geq 0. \quad (4.3.4)$$

Beweis. Die Abschätzung (4.3.4) folgt mit Ungleichung (4.2.19) aus (4.3.3). Wir müssen also nur die Ungleichung (4.3.3) zeigen. Dafür werden wir die Ungleichung (3.2.1) aus Satz 3.11 verwenden.

Wegen (2.5.1) und (4.3.1) sind Λ -fast alle $L \in \mathcal{C}^d$ von der Form $L = t \cdot K_0 + x$ für ein $t \in [1, \alpha]$ und ein $x \in \mathbb{R}^d$, insbesondere sind diese Mengen konvex. Für solch eine Menge L gilt nun mit (4.2.3):

$$\begin{aligned} D_L F_{d-1} &= V_{d-1}(L \cap W) - V_{d-1}(Z \cap L \cap W) \leq V_{d-1}(L \cap W) \leq V_{d-1}(L) \\ &\leq V_{d-1}(\alpha K_0) = \alpha^{d-1} V_{d-1}(K_0) \leq a. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Des Weiteren ergibt sich für eine Menge L der Form $L = t \cdot K_0 + x$ wegen (4.2.3) und (2.3.3) die Gleichung

$$D_L F_{d-1} = V_{d-1}(L \cap W) - \frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(Z \cap L \cap W))$$

Wir erhalten damit durch Verwendung von (4.1.8) mit $S = L \cap W$ sowie $T = Z$ die Abschätzung

$$\mathbb{1}\{D_L F_{d-1} < 0\} (D_L F_{d-1})^2 \leq \mathbb{1}\{D_L F_{d-1} < 0\} \left(\frac{1}{2} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(Z \cap L \cap W))\right)^2.$$

Mit der Voraussetzung (4.3.2) folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbb{1}\{D_L F_{d-1} < 0\} (D_L F_{d-1})^2 &\leq \mathbb{1}\{D_L F_{d-1} < 0\} \left(\frac{1}{2} [\alpha]^d \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0))\right)^2 \\ &= \mathbb{1}\{D_L F_{d-1} < 0\} \cdot a^2. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Die Kombination von (4.3.5) und (4.3.6) ergibt nun mit (2.5.1) die Ungleichung

$$\int_{\mathcal{C}^d} (D_L F_{d-1})^2 \Lambda(dL) \leq a^2 \gamma \int_{\mathcal{C}_0^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}\{D_{L+x} F_{d-1} \neq 0\} dx \mathbb{Q}(dL) \quad (4.3.7)$$

Mit

$$\mathbb{1}\{D_{L+x} F_{d-1} \neq 0\} \leq \mathbb{1}\{(L+x) \cap W \neq \emptyset\} = \mathbb{1}\{x \in W + L^\star\}, \quad L \in \mathcal{C}_0^d, x \in \mathbb{R}^d,$$

folgt aus (4.3.7) schließlich

$$\int_{\mathcal{C}^d} (D_L F_{d-1})^2 \Lambda(dL) \leq \gamma a^2 \int_{\mathcal{C}_0^d} \lambda_d(W + L^\star) \mathbb{Q}(dL) \leq \gamma a^2 b.$$

Wegen $V_L^{a,+} = \int_{\mathcal{C}^d} (D_L F_{d-1})^2 \Lambda(dL)$ bekommen wir als Schranke für den oberen Tail die rechte Seite von (4.3.3) ohne den Faktor 2 durch Anwenden von (3.2.1) aus Satz 3.11. Aus obiger Rechnung geht außerdem die stets gültige Ungleichung $D_L F_{d-1} \geq -a$ hervor. Also gilt auch $V_L^{-a,-} = \int_{\mathcal{C}^d} (D_L F_{d-1})^2 \Lambda(dL)$, womit wir aus (3.2.3) für den unteren Tail die identische Abschätzung wie für den oberen Tail erhalten. \square

Proposition 4.44. *Seien $R > 0$, $K_0 = B(0, R)$ und $\mathbb{Q} = \delta_{K_0}$. Dann ist die Bedingung (4.3.2) erfüllt. Insbesondere gelten die Konzentrationsungleichungen (4.3.3) und (4.3.4). Dabei gilt $a = R^{d-1}\omega_d/2$.*

Beweis. Da η stationär ist, sind die fast sicher endlich vielen Partikel von η in $\{B(x, R) : x \in W + B(0, R)\}$ fast sicher paarweise verschieden. Seien $\omega \in \Omega$ aus diesem fast sicheren Ereignis und $B(x_1, R), \dots, B(x_n, R)$ die Punkte von $\eta(\omega)$, die W schneiden. Weiter seien $A := \bigcup_{i=1}^n B(x_i, R)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann gilt mit der Monotonie des Hausdorffmaßes und Lemma 4.4:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}[Z(\eta(\omega))] \cap W \cap B(x_0, R)) &= \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap W \cap B(x_0, R)) \\ &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap B(x_0, R)) \leq \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B(x_0, R))) \\ &= \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(B(0, R))). \end{aligned}$$

Damit ist (4.3.2) gezeigt. □

Wir betrachten nun wie in Abschnitt 4.1.2 den durch feste Werte $c_1, \dots, c_d > 0$ definierten Quader

$$K_0 := \left[-\frac{c_1}{2}, \frac{c_1}{2}\right] \times \dots \times \left[-\frac{c_d}{2}, \frac{c_d}{2}\right] \quad (4.3.8)$$

und als typisches Korn eine zufällige Streckung von K_0 mit einem Faktor, der zwischen 1 und α liegt. Wir verwenden wieder die Schreibweise $x = (x_1, \dots, x_d)$ für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 4.45. *Sei K_0 wie in (4.3.8) und es gelte $\mathbb{Q}(\{tK_0 : 1 \leq t \leq \alpha\}) = 1$. Dann ist die Bedingung (4.3.2) erfüllt. Insbesondere gelten die Konzentrationsungleichungen (4.3.3) und (4.3.4). Dabei gilt $a = \lceil \alpha \rceil^d \cdot \sum_{i=1}^d \prod_{j \neq i} c_j$.*

Beweis. Da η stationär ist, erfüllen die Zentren der fast sicher endlich vielen Partikel von η in $\{tK_0 + x : t \in [1, \alpha], x \in W + K_0^*\}$ fast sicher die Voraussetzung (4.1.11). Seien $\omega \in \Omega$ aus diesem fast sicheren Ereignis und $t_1K_0 + x_1, \dots, t_nK_0 + x_n$ die Punkte von $\eta(\omega)$, die W schneiden. Weiter seien $A := \bigcup_{i=1}^n t_iK_0 + x_i$, $t_0 \in [1, \alpha]$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ derart, dass die Bedingung (4.1.11) entsprechend unter Hinzunahme von t_0 und x_0 erfüllt ist. Dann folgt (4.3.2) aus der Monotonie des Hausdorffmaßes und Lemma 4.6 durch

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}[Z(\eta(\omega))] \cap W \cap (t_0K_0 + x_0)) &= \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap W \cap (t_0K_0 + x_0)) \\ &\leq \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(A) \cap (t_0K_0 + x_0)) \\ &\leq \lceil \alpha \rceil^d \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd}(K_0)). \end{aligned} \quad \square$$

5 Eine Konzentrationsungleichung für das Poisson-Voronoi-Mosaik

Wir untersuchen nun

$$f_i(\mu) := V_i(C_0(\mu)), \quad 0 \leq i \leq d,$$

für $\mu \in \mathbb{N}_0$, siehe Definition in 2.5.2, und insbesondere die inneren Volumina der typischen Zelle des Poisson-Voronoi-Mosaiks

$$F_i := f_i(\eta) = V_i(C(\eta + \delta_0, 0)), \quad 0 \leq i \leq d.$$

Lemma 5.1. *Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$ und $\mu \in \mathbb{N}_0$ gilt*

(a)

$$D_{x_1} f_i(\mu) \leq 0, \quad 0 \leq i \leq d,$$

(b)

$$D_{x_1} D_{x_2} f_d(\mu) \geq 0.$$

Beweis. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} D_{x_1} f_i(\mu) &= V_i(C_0(\mu + \delta_{x_1})) - V_i(C_0(\mu)) \\ &= V_i(\{z \in \mathbb{R}^d : \|z\| \leq \|z - y\| \forall y \in \mu + \delta_{x_1}\}) \\ &\quad - V_i(\{z \in \mathbb{R}^d : \|z\| \leq \|z - y\| \forall y \in \mu\}), \end{aligned} \quad (5.0.1)$$

wobei alle Ausdrücke wohldefiniert sind, da die Voronoi-Zellen aufgrund der Voraussetzung an μ kompakt sind. Da in Gleichung (5.0.1) V_i auf zwei jeweils konvexe Mengen angewendet wird, wobei die erste eine Teilmenge der zweiten ist, folgt $D_{x_1} f_i(\mu) \leq 0$ aus der Monotonie von V_i auf konvexen Mengen.

(b) Im Fall des Volumens können wir die Maßeigenschaften von λ_d verwenden:

$$\begin{aligned} D_{x_1} D_{x_2} f_d(\mu) &= D_{x_2} f_d(\mu + \delta_{x_1}) - D_{x_2} f_d(\mu) \\ &= f_d(\mu + \delta_{x_1} + \delta_{x_2}) - f_d(\mu + \delta_{x_1}) - f_d(\mu + \delta_{x_2}) + f_d(\mu) \\ &= V_d(C(\mu + \delta_0, 0)) - V_d(C(\mu + \delta_0 + \delta_{x_2}, 0)) \\ &\quad - (V_d(C(\mu + \delta_0 + \delta_{x_1}, 0)) - V_d(C(\mu + \delta_0 + \delta_{x_1} + \delta_{x_2}, 0))) \\ &= \lambda_d(\{z \in C(\mu + \delta_0, 0) : \|z\| > \|z - x_2\|\}) \\ &\quad - \lambda_d(\{z \in C(\mu + \delta_0 + \delta_{x_1}, 0) : \|z\| > \|z - x_2\|\}) \\ &= \lambda_d(\{z \in C(\mu + \delta_0, 0) : \|z\| > \|z - x_2\|, \|z\| > \|z - x_1\|\}) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad \square$$

5 Eine Konzentrationsungleichung für das Poisson-Voronoi-Mosaik

Die in Satz 5.5 folgende Konzentrationsungleichung für den unteren Tail von F_i erhalten wir durch ein ähnliches Beweisverfahren wie in Theorem 3.8 von [5]. Zunächst beweisen wir die Integrierbarkeit des dafür im Fall $i = d$ benötigten Funktionals

$$M_i := \sum_{x \in \eta} (D_x f_i(\eta - \delta_x))^2, \quad 0 \leq i \leq d.$$

Lemma 5.2. *Für alle $0 \leq i \leq d$ gilt $\mathbb{E}[M_i] < \infty$.*

Beweis. Mit der Steiner-Formel (2.3.2) können wir

$$F_i = V_i(C_0(\eta)) \leq \frac{1}{\kappa_{d-i}} \lambda_d(C_0(\eta) + B(0, 1)) \quad (5.0.2)$$

abschätzen. Es bezeichne $S(\eta + \delta_0, 0)$ die Voronoi-Flower der typischen Zelle. Mit der Mecke-Gleichung, der Monotonie von F_i auf kompakten Mengen und der Abschätzung (5.0.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_i] &= \mathbb{E} \left[\gamma \int_{\mathbb{R}^d} (D_x F_i)^2 dx \right] \leq \gamma \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{x \in S(\eta + \delta_0, 0)\} F_i^2 dx \right] \\ &= \gamma \mathbb{E} \left[F_i^2 \lambda_d(S(\eta + \delta_0, 0)) \right] \leq \frac{\gamma}{\kappa_{d-i}^2} \mathbb{E} \left[\lambda_d(C_0(\eta) + B^d)^2 \lambda_d(S(\eta + \delta_0, 0)) \right] \\ &\leq \frac{\gamma}{\kappa_{d-i}^2} \mathbb{E} \left[\lambda_d(S(\eta + \delta_0, 0) + B(0, 1))^3 \right]. \end{aligned}$$

Wegen $S(\eta + \delta_0, 0) \subset B(0, 2 \operatorname{diam}(C_0(\eta)))$ erhalten wir damit

$$\mathbb{E}[M_i] \leq \frac{\gamma}{\kappa_{d-i}^2} \mathbb{E} \left[\lambda_d(B(0, 1 + 2 \operatorname{diam}(C_0(\eta))))^3 \right] = \frac{\gamma}{\kappa_{d-i}^2} \mathbb{E} \left[(1 + 2 \operatorname{diam}(C_0(\eta)))^{3d} \kappa_d^3 \right].$$

Da nach Lemma 3.1.2 in [28] alle Momente von $\operatorname{diam}(C_0(\eta))$ endlich sind, folgt die Behauptung nach Anwendung der Binomischen Formel. \square

Bemerkung 5.3. Eine Vereinfachung des obigen Beweises zeigt auch $\mathbb{E}[F_i] < \infty$.

Das folgende Lemma ergibt sich direkt aus der FKG-Ungleichung, siehe Theorem 1.4 in [19].

Lemma 5.4. *Seien G_1, G_2 Poissonfunktionale, wobei G_1 beschränkt und wachsend sowie G_2 integrierbar und fallend ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[G_1 G_2] \leq \mathbb{E}[G_1] \mathbb{E}[G_2].$$

Satz 5.5. Für das Volumen $F = F_d$ der typischen Poisson-Voronoi-Zelle gilt

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \exp\left(-\frac{r^2}{2\mathbb{E}[M_d]}\right), \quad r \geq 0.$$

Beweis. Da $\text{conv}(\text{supp}(\eta)) = \mathbb{R}^d$ fast sicher gilt, erhalten wir mit Lemma 5.1, dass F fast sicher fallend ist. Sei $u > 0$. Dann gilt nach Satz 3.10:

$$\text{Ent}(e^{-uF}) \leq \mathbb{E}\left[e^{-uF} \sum_{x \in \eta} \phi(uD_x f(\eta - \delta_x))\right],$$

wobei $\phi(z) := e^z - z - 1$, $z \in \mathbb{R}$. Wegen $\phi(z) \leq z^2/2$ für $z \leq 0$ folgt daraus

$$\text{Ent}(e^{-uF}) \leq \frac{1}{2}u^2 \mathbb{E}\left[e^{-uF} \sum_{x \in \eta} (D_x f(\eta - \delta_x))^2\right] = \frac{u^2}{2} \mathbb{E}[e^{-uF} M_d]. \quad (5.0.3)$$

Nun zeigen wir analog zu Bemerkung 3.9 in [5], dass M_d fallend ist: Für $y \in \mathbb{R}^d$ und $x \in \eta$ gilt nach Lemma 5.1:

$$0 \leq D_y D_x f(\eta - \delta_x) = D_x f(\eta + \delta_y - \delta_x) - D_x f(\eta - \delta_x),$$

also $0 \geq D_x f(\eta + \delta_y - \delta_x) \geq D_x f(\eta - \delta_x)$, somit $(D_x f(\eta + \delta_y - \delta_x))^2 \leq (D_x f(\eta - \delta_x))^2$ und schließlich

$$D_y M_d = \sum_{x \in \eta} D_y (D_x f(\eta - \delta_x))^2 \leq 0.$$

Da F fällt, wächst das beschränkte Funktional e^{-uF} . Wegen Lemma 5.2 können wir nun Lemma 5.4 auf e^{-uF} und M_d anwenden. Aus (5.0.3) folgt damit

$$\text{Ent}(e^{-uF}) \leq \frac{u^2}{2} \mathbb{E}[e^{-uF}] \mathbb{E}[M_d].$$

Die Behauptung folgt nun mit der Chernoff-Schranke und Lemma 3.3 durch

$$\mathbb{P}[F - \mathbb{E}[F] \leq -r] \leq \inf_{s>0} \frac{\mathbb{E}[e^{-s(F-\mathbb{E}[F])}]}{e^{-sr}} \leq \inf_{s>0} \exp\left(\frac{s^2}{2}\mathbb{E}[M_d] - sr\right)$$

und schließlich der Optimierung mit $s = r/\mathbb{E}[M_d]$. □

Literaturverzeichnis

- [1] Alexandroff, P. und Hopf, H. (1935). *Topologie. Erster Band*. Springer. Berlin.
- [2] Bercu, B., Delyon, B. und Rio, E. (2015) *Concentration Inequalities for Martingales*. Springer International Publishing.
- [3] Boucheron, S., Lugosi, G. und Massart, P. (2003). Concentration inequalities using the entropy method. *Annals of Probability*, 31(3), 1583-1614.
- [4] Boucheron, S., Lugosi, G. und Massart, P. (2013). *Concentration Inequalities: A Nonasymptotic Theory of Independence*. OUP Oxford.
- [5] Bachmann, S. und Peccati, G. (2016). Concentration bounds for geometric Poisson functionals: Logarithmic Sobolev inequalities revisited. *Electronic Journal of Probability*, 21(6), 1-44.
- [6] Chernoff, H. (1952). A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations. *The Annals of Mathematical Statistics*, 493-507.
- [7] Davies, E. B. und Simon, B. (1984). Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians. *Journal of Functional Analysis*, 59, 335-395.
- [8] Eichelsbacher, P., Raič, M. und Schreiber, T. (2015). Moderate deviations for stabilizing functionals in geometric probability. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 51(1), 89-128.
- [9] Hadwiger, H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer, Berlin.
- [10] Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge.
Erhältlich unter www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf
- [11] Heinrich, L. (2005). Large deviations of the empirical volume fraction for stationary Poisson grain models. *Annals of Applied Probability*, 15(1A), 392-420.
- [12] Hoeffding, W. (1963). Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American statistical association*, 58(301), 13-30.
- [13] Hörrmann, J. (2014). *The Method of Densities for Non-Isotropic Boolean Models*. PhD thesis. Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Karlsruhe.
- [14] Hörrmann, J., Hug, D., Klatt, M. und Mecke, K. (2014). Minkowski tensor density formulas for Boolean models. *Advances in Applied Mathematics*, 55, 48-85.
- [15] Houdré, C. (2002). Remarks on deviation inequalities for functions of infinitely divisible random vectors. *Annals of Probability*, 30(3), 1223-1237.

- [16] Houdré, C. und Privault, N. (2002) Concentration and deviation inequalities in infinite dimensions via covariance representations. *Bernoulli*, 8(6), 697-720.
- [17] Hug, D., Last, G. und Schulte, M. (2016). Second order properties and central limit theorems for geometric functionals of Boolean models. *Annals of Applied Probability*, 26(1), 73-135.
- [18] Last, G. und Penrose, M. (2016). *Lectures on the Poisson Process*. Erscheint bei Cambridge University Press.
Erhältlich unter www.math.kit.edu/stoch/~last/seite/lehrbuch_poissonp/de
- [19] Last, G. und Penrose, M. (2011). Poisson process Fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities. *Probability theory and related fields* 150, 663-690.
- [20] Lachieze-Rey, R. (2015). Bicovariograms and Euler characteristic I. Regular sets. arXiv:1510.00501.
- [21] Landau, E. (1909) *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. 2 vols. B. G. Teubner, Leipzig.
- [22] Lugosi, G. (2005). *Concentration of Measure Inequalities*. Lecture Notes.
Erhältlich unter www.econ.upf.edu/~lugosi/anu.pdf
- [23] Kedem, K., Livne, R., Pach, J. und Sharir, M. (1986). On the union of Jordan regions and collision-free translational motion amidst polygonal obstacles. *Discrete & Computational Geometry*, 1(1), 59-71.
- [24] Massart, P. (2000). About the constants in Talagrand's concentration inequalities for empirical processes. *Annals of Probability*, 28(2), 863-884.
- [25] McDiarmid, C. (1989). On the method of bounded differences. *Surveys in combinatorics*, 141(1), 148-188.
- [26] Messer, R. und Straffin, P. (2006) *Topology Now!*. Mathematical Association of America, Washington, DC.
- [27] Neher, R. A., Mecke, K. und Wagner, H. (2008). Topological estimation of percolation thresholds. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(01), P01011.
- [28] Ochsenreither, E. M. (2014). *Geometrische Kenngrößen und Zentrale Grenzwertsätze Stetiger Perkolationsmodelle*. Doktorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Karlsruhe.
- [29] Penrose, M. D. (2003). *Random Geometric Graphs*. Oxford University Press, Oxford.
- [30] Privault, N. (2009). *Stochastic Analysis in Discrete and Continuous Settings: With Normal Martingales*. Springer, Heidelberg.
- [31] Schubert, H. (1964). *Topologie. Eine Einführung*. Teubner, Stuttgart.
- [32] Schneider, R. (2014) *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Encyclopedia of mathematics and its applications 151. Second expanded edition, Cambridge University Press.

- [33] Schneider, R. und Weil, W. (2008). *Stochastic and Integral Geometry*. Springer, Berlin.
- [34] Wu, L. (2000). A new modified logarithmic Sobolev inequality for Poisson point processes and several applications. *Probability Theory and Related Fields*, 118(3), 427-438.