

**Die orthotrope Wärmeleitung als numerischer Integrator
allgemeiner Richtungsfelder mit Anwendung zur optimalen
Faserplatzierung und Kraftflussvisualisierung**

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der Fakultät für Maschinenbau

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Herbert Moldenhauer

Tag der Einreichung: 21. Juni 2016

Tag der mündlichen Prüfung: 12. September 2016

Hauptreferent: Prof. Dr. rer. nat. Claus Mattheck

Koreferent: Prof. Dr.-Ing. Frank Henning

Zusammenfassung

In einigen Ingenieursdisziplinen (Leichtbau, Maschinenbau, Bauingenieurwesen) sind Trajektorienbilder ein geeignetes Mittel, Spannungszustände mit besonderer Aussagekraft darzustellen. Die Tangenten der Hauptnormalspannungstrajektorien geben die Richtung der Hauptspannungen an, damit ist die besondere Aussage der Schubspannungsfreiheit verknüpft. Speziell im Fall der Faserverbundbauteile kann daraus ein Konstruktionsprinzip abgeleitet werden, das die überragenden longitudinalen Steifigkeits- und Festigkeitswerte von Fasern optimal ausnützt, sofern die Fasern den Richtungen der Hauptspannungen folgen. Für diese Methodik hat sich die Bezeichnung CAIO (Computer Aided Internal Optimization) etabliert.

Das primäre Ziel dieser Arbeit ist deshalb die Visualisierung der Spannungstrajektorien. Die zu lösende Aufgabe besteht darin, die aus den FE-Programmen berechneten Hauptspannungsrichtungen zu integrieren, die Kurven visuell darzustellen, die Kurvenverläufe zudem numerisch aufzubereiten, sodass deren Weiterverarbeitung in numerisch gesteuerten Faser-Legemaschinen gesichert ist.

Mit der Integration von Hauptspannungsrichtungen fallen gezwungenermaßen methodisch auch Lösungen allgemeiner Richtungsfelder aus Physik und Mathematik an, die zunächst nicht angestrebt waren. Diese Lösungen könnten deshalb als Nebenprodukt bezeichnet werden, hierarchisch sind sie jedoch übergeordnet und rechtfertigen den Titel der Arbeit. Deshalb werden auch Lösungen zu allgemeinen Richtungsfeldern besprochen.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die Integration von Richtungsfeldern für ebene Strukturen sowie für 3D-Schalen über die Simulation orthotroper Wärmeleitung mit hoher Genauigkeit möglich ist: Die gesuchten CAIO-Linien sind die Isothermen. CAIO-Linien (Isothermen) lassen sich mit beliebiger Dichte aus dem Temperaturfeld extrahieren. Die Güte der Berechnung ist stets überprüfbar: Die vorgegebenen Richtungen (in Form von Vektoren) tangieren die Isothermen.

Sofern das zu integrierende Richtungsfeld zum Beispiel aus den Hauptspannungsrichtungen besteht, ist die Vorgehensweise wie folgt:

- Berechnung der Hauptspannungsrichtungen (Scheibe, Platte bzw. Schale)
- Austausch der Strukturelemente durch thermische Elemente
- Elementweise Festlegung von Lokalsystemen entsprechend den zuvor gerechneten Hauptspannungsrichtungen
- Zuordnung orthotroper Wärmeleitfähigkeiten λ in diesen Lokalsystemen mit extremen Verhältnissen, z.B. $\lambda_1 / \lambda_2 > 10^4$
- Definition einfacher thermischer Randbedingungen. Diese haben keinen Einfluss auf den qualitativen Isothermenverlauf, sondern nur auf deren mehr oder weniger gleichförmige Verteilung.
- $\lambda_1 / \lambda_2 > 10^4$ liefert die CAIO-Linien zur ersten, $\lambda_2 / \lambda_1 > 10^4$ zur zweiten Hauptspannungsrichtung.

Andere Richtungsfelder kommen aus verschiedensten Anwendungsbereichen der Mathematik und Mechanik. Stichworte dazu sind: Gewöhnliche Differenzialgleichungen $y' = dy/dx = f(x,y)$, partielle Differenzialgleichung (die statischen Gleichgewichtsbedingungen führen auf die Lastpfadmethode), Umformprozesse (Gleitlinien = Hauptschubspannungslinien), Hydromechanik (Geschwindigkeitsfelder).

Für die orthotrope Wärmeleitung liegen einige wenige theoretische, streng mathematische Lösungen vor mit ihrer direkten Abhängigkeit von λ_1 und λ_2 . Durch Steigerung des λ_1 / λ_2 Verhältnisses ins Extreme ergeben sich rein formal zusätzliche Erkenntnisse, die sich bei moderaten λ_1 / λ_2 Verhältnissen nicht zeigen. Das wichtigste Ergebnis ist:

Bei extremer Orthotropie der Wärmeleitfähigkeiten dreht sich der *relevante Wärmefluss* (Kap. 3.4) um 90 Grad gegenüber dem isotropen Wärmefluss. Dieser ist dann parallel zu den Isothermen und nicht mehr senkrecht dazu. Die extreme Orthotropie produziert ein Gerinne (Korridor) für den Wärmefluss, flankiert durch Isothermen. Die Orientierung dieser Korridore hat der Anwender zuvor festgelegt: Es ist die in jedem Element vorhandene Hauptspannungsrichtung aus der statischen Vorausberechnung. Die weiteren numerischen Untersuchungen zeigen: Im Gegensatz zur isotropen Wärmeleitung spielen die thermischen Randbedingungen bei extremer Orthotropie fast keine Rolle.

Damit liegt ein praktikables Verfahren vor, das der Anwender zur Ermittlung von CAIO-Linien anwenden kann. Alle FE-Programme mit entsprechenden Berechnungsoptionen der linearen Statik und orthotropen Wärmeleitung sind dafür geeignet.

Lochplatte, horizontaler Zug
Isothermen (CAIO-Linien für die 1. Hauptspannungsrichtung) aus orthotroper Wärmeleitung.

- a) $\lambda_1 / \lambda_2 = 1$
- b) $\lambda_1 / \lambda_2 = 16$
- c) $\lambda_1 / \lambda_2 = 128$
- d) $\lambda_1 / \lambda_2 = 4096$

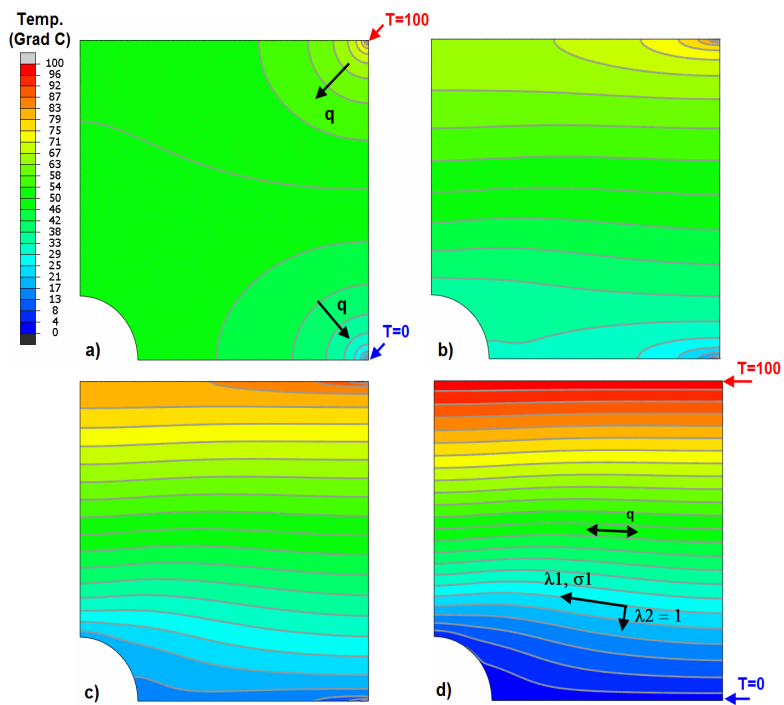


Plate with hole, horizontal tension

Isothermal lines (CAIO-lines corresponding to the 1st mean stress direction) from orthotropic heat conduction.

- a) $\lambda_1 / \lambda_2 = 1$
- b) $\lambda_1 / \lambda_2 = 16$
- c) $\lambda_1 / \lambda_2 = 128$
- d) $\lambda_1 / \lambda_2 = 4096$

Abstract: *The orthotropic heat conduction as numerical integrator for general direction fields with application to tailored fiber placement and load path visualization.*

Various publications exist on the subject of fiber placement in composites, following stresses in mean direction. Some are based on bionic aspects, others simply emphasize the fibers superior attributes with regard to longitudinal stiffness and strength. The numerical method behind this strategy is known as CAIO (Computer aided internal optimization).

The task to be solved consists herein is the integration of direction fields. These can be shown by means of differential equations with scalar, vectorial or tensorial properties. The latter representing velocity and stress fields, e.g.

The very few non-commercial CAIO-software programs can partly be used as postprocessors in commercial general purpose FE programs. Users are cautious about buying special software, they prefer to stay within their usual standard FE application.

This work shows that the integration of direction fields for plane structures and 3D-shells can be simulated with high accuracy through orthotropic heat conduction. The CAIO-lines to be calculated are the isothermal lines. These lines can be extracted with any density from the continuous temperature field. The accuracy of the results can always be tested: The mean

stress directions from the static analysis, now serving as oriented local material directions in the orthotropic heat conduction analysis, are tangential to the isothermal lines. The procedure to be followed:

- Calculation of the mean stress directions
- Replacement of static elements by thermal elements
- Definition of local systems in every thermal element in correspondence with step 1, above
- Assignment of orthotropic conductivity for the local systems with extreme ratios, e.g. $\lambda_1 / \lambda_2 > 10^4$
- Definition of simple thermal boundary conditions. They have little influence on the course of the isothermal lines, but there is dependence on the evenness.
- $\lambda_1 / \lambda_2 > 10^4$ yield lines corresponding to the 1st, $\lambda_2 / \lambda_1 > 10^4$ to the 2nd mean stress direction

Direction fields are known from mathematics and mechanics: Ordinary differential equations ($y' = dy/dx = f(x,y)$), partial differential equations (equations of equilibrium, they lead to the load path method), metal forming (slip lines from mean shear stress directions), hydromechanics (velocity fields).

The main emphasis is on Chapter 3 and 4. There are few theoretical solutions for orthotropic heat conduction problems. Rising λ_1/λ_2 to the extreme leads to the crucial insight not visible with moderate conductivity ratios. The most important result is:

Heat flux is turning direction with increasing orthotropy of conductivities. It flows no longer at right angles to the isothermal lines. For extreme orthotropy the *relevant heat flux* (Chap. 3.4) runs in parallel to these lines, steering its flow like in a corridor. Flow directions were determined beforehand, using, e.g., the mean stress directions from a static analysis. Any alteration of thermal boundaries has little influence on the course of the isothermal lines, only their local distribution is affected. This is in sharp contrast to isotropic heat conduction.

This kind of analysis delivers a practical method for the integration of direction fields, the mean stress directions being a special application. All FE-programs can be used so far as they have options for linear statics and orthotropic heat conduction.

In dieser Arbeit häufig verwendete Abkürzungen:

CAIO	Computer aided internal Optimization (nach C. Mattheck und R. Kriechbaum)
CAIO _{II}	CAIO-Faserplatzierung mit der CFD-Technik <i>streamtracing</i> (nach J. Reuschel)
CAIO _{Shell}	CAIO-Faserplatzierung für ebene Spannungszustände inkl. 3D-Schalen
CAIO _{OW}	Integration von Richtungsfeldern mithilfe der orthotropen Wärmeleitung. Der Einfachheit halber oft nur mit „CAIO“ benannt.
CLT	Klassische Laminattheorie
DG	Differenzialgleichung
FKV	Faser-Kunststoff-Verbund
HS	Hauptspannung
HSS	Hauptschubspannung
LP	Lastpfad
UD	unidirektionale (Schicht)
α	generische Orientierung der Lokalsysteme mit den orthotropen Wärmeleitfähigkeiten λ_1 und λ_2 . Dieser Winkel entspricht gleichermaßen den HS-, HSS- und LP-Richtungen.

Inhaltsverzeichnis

2 Zusammenfassung

8 0. Einleitung

CAIO im Kontext zur Strukturoptimierung

Trajektorienmittlung: Stand der Technik - Ziel der Arbeit

Lösungsweg

Wesentliche Ergebnisse

Teil A: Methodik

13 1. Motivation für die Verbesserung der bisherigen CAIO-Technik

16 2. CAIO-Verfahren aus dem BMBF-Projekt *BIOTEX*

Das Programm CAIO_{Shell}

19 3. Neues CAIO-Verfahren: Visualisierung der Faserverläufe in HS-Richtung, simuliert über orthotrope Wärmeleitung

3.1 Demonstration des CAIO-Verfahrens

3.2 Bedeutung der Dichte der CAIO-Linien

3.3 Der quantitative Einfluss der Orthotropie der Wärmeleitung

3.4 Die zentrale Wärmequelle in einer kreisförmigen Scheibe

3.5 Die Drehung des Wärmestromvektors in einer orthotropen Wand

3.6 Der Einfluss der Randbedingungen auf die Qualität der CAIO-Linien

33 4. Verhalten der Lösungen in der orthotropen Wärmeleitung bei Existenz singulärer Punkte

4.1 Punktförmige statische Lasten

4.2 Singuläre Punkte mit unbestimmter Hauptspannungsrichtung ($\sigma_1 = \sigma_2$)

4.3 Exkurs: Der Informationsgehalt von Hauptspannungslinien

- 39** 5. Anwendung der orthotropen Wärmeleitung zur Lösung allgemeiner nichtlinearer Differenzialgleichungen vom Typ $y' = f(x,y)$
- 41** 6. Anwendung der orthotropen Wärmeleitung zur Bestimmung der Gleitlinienfelder (slip line fields) in starrplastischen Umformprozessen
- 45** 7. Anwendung der orthotropen Wärmeleitung auf alternative Kriterien der optimalen Faserpositionierung (Lastpfad-Methode)
- 7.1 Einführendes Beispiel zur Demonstration der Lastpfadmethode
 - 7.2 Ursprüngliche Definition des Kraftflusses
 - 7.3 Kraftflussdefinition über die Analogie zur Hydromechanik
 - 7.4 Grafische Darstellung der Kraftflussvektoren im Mohrschen Spannungskreis
- 51** 8. Torsion: Gemeinsamkeiten zwischen CAIO und Lastpfad
- 8.1 Die elastische Torsion einfach zusammenhängender Querschnitte
 - 8.2 Die elastische Torsion mehrfach zusammenhängender Querschnitte
- 54** 9. Die Erweiterung der CAIO-Methode zur Behandlung von ausgeglichenen Winkelverbunden (AWV)
- 9.1 Die Überlegenheit von AWV gegenüber CAIO-Kreuzverbunden in Gebieten mit Hauptspannungen gleichen Vorzeichens
 - 9.2 Ausgeglicherer Winkelverbund versus Kreuzverbund
- 61** 10. Die Anwendung der orthotropen Wärmeleitung zur Integration von vektoriellen Richtungsfeldern (Geschwindigkeiten etc.)
- Überlagerung von Parallel-, Quell- und Senkenströmungen reibungsfreier Fluide
- 63** 11. Die Anwendung der orthotropen Wärmeleitung in 3D

Teil B: Anwendungen

- 64** 12. CAIO-Anwendungsbeispiele im Vergleich zu Standardlamina-
ten
- 12.1 CAIO-Muster über die Schalendicke: Zerlegung des Schalen-
Spannungszustandes in seine Membran- und Biegeanteile
 - 12.2 Definition der „Lochplattenscheibe“ als charakteristisches Beispiel
 - 12.3 Scheibenbeispiele
 - 12.4 Plattenbeispiele
 - 12.5 Anwendung von CAIO auf nichtlineares Materialverhalten
 - 12.6 Die CAIO-Optimierung des Ω -Spants (Biotex-Demonstratorbauteil)
 - 12.7 Verifikation der CAIO-Methode anhand von experimentellen Verfahren mit
Reißlack
 - 12.8 Stahlbeton-Träger. CAIO-Linien: Vorlage für die Armierung
- 79** 13. Faserplatzierung: HS-Richtung versus Lastpfad-Richtung
- 13.1 Lochscheibe unter Zugbelastung
 - 13.2 Bolzenverbindung mit Spielpassungen
 - 13.3 Der gekröpfte Träger mit indirektem Kraftfluss
- 85** 14. Die Visualisierung des Kraftflusses mit der Lastpfadmethode
- 14.1 Kraftfluss in Gewindegängen
 - 14.2 Kraftfluss in Entlastungskernen
 - 14.3 Das Knotenblech im Stahlbau
- 91** 15. Hinweise zur praktischen Arbeit mit CAIO
- 15.1 Die Randbedingungen der orthotropen Wärmeleitung für das CAIO_{ow} -
Verfahren
 - 15.2 Zusammenhang zwischen Liniendichte und Schichtdicke
 - 15.3 Hinweise zum Einsatz von FE-Programmen
 - 15.4 Hinweis zum Einsatz von Abaqus
 - 15.5 Hinweis zum Einsatz von Ansys
 - 15.6 Hinweis zum Einsatz von Tecplot (Postprocessor)
- 98** 16. Diskussion und Resumé
- Vergleich älterer CAIO-Verfahren mit CAIO_{ow}
 - Ist CAIO mit der Faserorientierung in den Hauptspannungsrichtungen optimal?
 - Die Handhabung von CAIO_{ow} im Zusammenhang mit FE-Programmen
 - Die Genauigkeit der CAIO_{ow} Methode
 - Streamtracing* versus CAIO_{ow}
 - Resumé
- 102** Literaturverzeichnis
- 104** Anhang: Verwendete Software

0. Einleitung

CAIO im Kontext zur Strukturoptimierung /1a/

Die Integration einer Hauptspannungsrichtung (HS-Richtung) führt zu einer HS-Linie (CAIO-Linie), die sich als Pfad für eine empfehlenswerte, wenn nicht gar optimale Faserpositionierung anbietet. Unabhängig davon kann man die Faserpositionierung als eine mathematische Optimierungsaufgabe ansehen mit Zielfunktion (z.B. minimales Gewicht), zusammen mit (Festigkeits-)Restriktionen. Als Beispiel dient zunächst eine einzelne Laminatsschicht unter einem gegebenen inneren, lokal konstanten Beanspruchungszustand. Die Entwurfsvariable (hier: Faserwinkel) wird so lange iteriert, bis sich das Gewichtsminimum einstellt. Es ist nun nicht überraschend, dass der optimale Faserwinkel aus der mathematischen Optimierung einer HS-Richtung des vorgegebenen Beanspruchungszustands entspricht. In diesem Fall erübrigt sich die Anwendung der mathematischen Optimierung, die HS-Richtung wird schon aus dem CLT-Laminatprogramm bzw. aus dem FE-Programm direkt bereitgestellt. Dieser Sachverhalt macht deutlich, dass die CAIO-Faserplatzierung dem HS-Kriterium geschuldet ist und nicht dem Ergebnis einer Optimierung.

Das HS-Kriterium verhindert zudem, dass nur ein lokales Minimum gefunden wird, ein Umstand, der mit der „nichtkonvexen“ Problemstellung zusammenhängt. (Die Optimierungsaufgabe ist im Zusammenhang mit Laminaten nicht konvex wegen der trigonometrischen Funktionen für die Transformation von Dehnungen und Spannungen zwischen dem Globalsystem und den Lokalsystemen der Einzelschichten.)

Baut man das obige Beispiel aus und reserviert eine zweite Schicht zur Aufnahme der zweiten Hauptspannung, so würde eine mathematische Optimierung zwei Faserwinkel liefern, die den HS-Richtungen entsprechen, sofern die 2 Hauptspannungen aus der Beanspruchung unterschiedliche Vorzeichen haben. Man kann sich diese 2 Entwurfsvariablen sparen und als solche nur die Schichtdicken zulassen. Die Auffindung optimaler Dicken kann CAIO jedoch nicht liefern, dies ist der mathematischen Optimierung vorbehalten.

Das gewählte Beispiel repräsentiert eine (Teil-)Struktur, dessen Spannungszustand konstant ist (z.B. Zylinderkessel mit Endscheiben unter Innendruck, jedoch fernab der Endscheiben) oder aber ein einzelnes Element mit linearem Verschiebungsansatz und konstanter Spannung aus einer FE-Strukturberechnung. Der letztere Fall ist von realem Interesse. Die eindeutigen Ergebnisse einer Optimierungsberechnung bezüglich der lokal konstanten Beanspruchung lassen sich nicht direkt auf eine Gesamtstruktur ausweiten, die sich aus vielen Elementen mit variierender Lokalbeanspruchung zusammensetzt. Optistruc (Firma Altair) löst die Aufgabe wie folgt: Vorgabe einer einheitlichen Faserorientierung in allen Schichten, z.B. „Flugzeuglaminat“ $[(0/+45/-45/90)]_s$ mit 4 Entwurfsvariablen für die 4 Schichtdicken + Festigkeitsrestriktionen. Daraus resultiert eine elementweise veränderliche Verteilung der vier Schichtdicken. Diese wird reduziert auf größere Unterbereiche mit jeweils konstanter Dicke, um die Fertigung zu erleichtern. Es macht nun rechentechnisch keinen Unterschied, die vorgegebenen konstanten Faserrichtungen (z.B. eines Flugzeuglaminats) elementweise durch die HS-Richtungen zu ersetzen. Den so erzielten Lösungen wird in der Literatur eine „hervorragende“ rechnerische Performance zuerkannt, /32a/, sofern es sich jeweils um einen ganz bestimmten Lastfall handelt. Dieses Ergebnis kann noch verbessert werden:

Der zunächst naheliegende Nachteil ist im Kreuzverbund zu sehen, der sich aus der Orthogonalität der beiden Hauptspannungen ergibt. Solange ihr Vorzeichen unterschiedlich ist, ist der Kreuzverbund „optimal“, nicht jedoch bei gleichem Vorzeichen. Im letzteren Fall ist der ausgeglichene Winkelverbund AWW $[+\beta/-\beta]_s$ günstiger, s. /23/, /33/ und Kap. 9. Die lokale HS1-Richtung wird um den lokalen β -Wert korrigiert, daraus resultiert ein neues Richtungsfeld. Wie schon in der Zusammenfassung angedeutet, kann diese wesentliche Verbesserung leicht durch die orthotrope Wärmeleitung berücksichtigt werden, da das Richtungsfeld nicht nur auf HS-Richtungen basiert, vielmehr ist jedes Richtungsfeld für die Integration zulässig.

Es liegt in der Natur der Sache, dass ein Optimum zunächst nur für einen bestimmten Lastfall gilt. Kommen weitere Lastfälle hinzu, so gibt es zwar unter erschwerten Bedingungen weiterhin ein Optimum, allerdings ein gewichtsmäßig weniger günstiges. In der Praxis wird das zweckmäßigerweise so gelöst, indem der kritische Lastfall dem CAIO-Verlauf zugeordnet wird. Dessen Schichten werden dann auf ein (optimiertes) Standardlaminat aufgesteckt, das die weiteren Lastfälle abdeckt.

Vergleicht man die beiden Lösungen (Optistruc mit festen Faserrichtungen und bereichsweise konstanten Schichtdicken versus CAIO) so ist rechnerisch gesehen sicher CAIO im Vorteil, nicht jedoch fertigungstechnisch. Die CAIO-Faserplatzierung hat in den letzten Jahren Fortschritte erzielt. In /34/ wird umfangreich über die Berechnung, Auslegung und Fertigung einer TFP-Fahrradfelgenbremse berichtet (Tailored Fiber Placement). Die C-Faserverwindungen folgen dabei den HS-Richtungen. Kap. 12.6 zeigt ein Beispiel eines 3D-Trägers, der entsprechend der CAIO-Auslegung am IPF (Institut für Polymerforschung, Dresden) gefertigt wurde.

Aus dem bisher Gesagten wird klar, dass der variable Faserverlauf keine Entwurfsvariablen in einem mathematischen Optimierungsverfahren benötigt, dieser ist schon von vornherein durch HS- und AWW-Kriterien festgelegt. Somit kann CAIO selbst in eine mathematische Optimierung eingebunden werden als fixer Bestandteil, um andere wichtige Entwurfsvariablen (Schichtdicken, Stapelreihenfolge bei kombinierter Membran- und Biegebeanspruchung) zu optimieren.

Trajektorienermittlung: Stand der Technik - Ziel der Arbeit

Die Integration einer Hauptspannungsrichtung (HS-Richtung) führt zu einer HS-Linie (CAIO-Linie), die i.A. auch als HS-Trajektorie bezeichnet wird. Der Stand der Technik bezüglich der Trajektorienberechnung bis zum Jahr 2015 wird umfassend von F.R. Beyer in seiner Dissertation /2/ dargestellt, mit Bezugnahme auf diverse weitere Quellen. Deshalb sollen daraus einige wichtige Ergebnisse zitiert werden.

Standardintegrationsverfahren für Richtungsfelder, die der Differenzialgleichung $y' = f(x,y)$ gehorchen, sind weit verbreitet. Die Verwandtschaft zu den HS-Trajektorien bei ebenen Spannungszuständen ist sofort erkenntlich:

$$y'_1 = f(x,y) \quad \text{entspricht der 1. HS-Richtung} \quad (0.1a)$$

$$y'_2 = -1/f(x,y) \quad \text{entspricht der 2. HS-Richtung} \quad (0.1b)$$

Im Fall der FE-Applikation stammt $f(x,y)$ aus einer punktwise vorliegenden, numerischen Datenbasis. Gl. (0.1) stellt ein Anfangswertproblem dar und kann z.B. mit dem expliziten Euler Verfahren gelöst werden. Es existieren dazu genauere Methoden (z.B. Runge-Kutta). Allen Verfahren gemein ist das mehr oder weniger starke Abdriften der numerischen von der exakten Lösung, je weiter die Integration vom Startpunkt (x_0, y_0) fortgeschritten ist. Der Fehler korreliert zudem mit der Neigung y' und ist auch bei kleinen Integrations-Schrittweiten unbefriedigend. Liegt zum Beispiel die exakte Lösung auf einem Kreis in der x-y-Ebene, so ist y' an der 3- und 9- Uhr Position unendlich. Ein Fortschreiten der Integration über diese 2 Punkte hinaus ist bei diesen Integrationsverfahren „generell nicht vorgesehen und generell (mindestens ohne Weiteres) nicht möglich“, /2/.

Ein weiterer Nachteil solcher Verfahren ist auch die Nichtproduzierbarkeit des Startwerts y_0 bei einem umgekehrten Integrationsweg. Wird zum Beispiel bei der Hinintegration nach 10 Schritten die numerische Lösung y_{10} erreicht, und dieser Wert als Startwert für die Rückintegration benützt, so kommt man nicht auf den ursprünglichen Startwert y_0 zurück.

Zudem weist F.R. Beyer nach, dass über Spannungstrajektorien diverse Irrtümer bestehen. Nur um die beiden wichtigsten zu nennen: Zum einen wird einer Verdichtung von Spannungstrajektorien eine entsprechend hohe Hauptspannung unterstellt, zum anderen wird das Tensorfeld der Spannungen als Vektorfeld angesehen, um daraus mit Methoden der Fluid-Mechanik Stromlinien zu ermitteln, die dann als HS-Linien interpretiert werden.

Im ersten Fall möge man sich einen dicken Hohlzylinder unter Außendruck vorstellen. Eine der beiden HS-Linien verläuft radial und hat ihre größte Liniendichte am Innenradius. Dort ist aber die dazugehörige Haupt- bzw. Radialspannung Null.

Der zweite Fall hat manche Autoren (z.B. /29/ und /35/) veranlasst, die sogenannte stream-tracing Technik für die Integration anzuwenden. Praktisch bedeutet dies ein Aneinanderreihen der (interpolierten) Geschwindigkeitsvektoren in einer Strömung. Abgesehen von sehr einfachen Problemstellungen führt dies zu problematischen Ergebnissen, s. Kap. 1. Basierend auf diesem Stand hat F.R. Beyer einen Algorithmus entwickelt, der die oben genannten Unzulänglichkeiten vermeidet, siehe /2/.

Innerhalb eines BMBF-Projekts (Biotex, /24/) war schon 2005 die Aufgabe gestellt, ein eigenständiges Integrationsverfahren für die Hauptspannungsrichtungen zu entwickeln. Zu diesem Zeitpunkt waren die Erkenntnisse von /2/ in diesem Ausmaß jedoch nicht vorhanden. Realisiert wurde die Software CAIO_{Shell} für den ebenen Spannungszustand, also auch für dünnwandige Schalen in 3D, s. Kap. 2. Eine zusammenfassende Veröffentlichung findet sich in /26/. Während CAIO_{Shell} nur lineare Elemente mit einem Integrationspunkt zulässt, kommen in /2/ auch höherwertige Elemente zum Einsatz. CAIO_{Shell} benötigt deshalb vergleichsweise eine feinere Elementierung. Ein Vergleich zwischen /2/ und CAIO_{Shell} /24/ zeigt, dass der Leistungsumfang beider Programme ähnlich ist.

Beiden Algorithmen (/2/ und CAIO_{Shell}) gemeinsam ist die methodenbedingte Schwäche, dass die HS-Linien relativ inhomogen verlaufen, also mit den unterschiedlichsten Abständen zueinander, siehe beispielhaft Bild 2.3 in Kap. 2. Mit einer manuellen Nachbearbeitung lässt sich dies teilweise verbessern, jedoch wäre ein Verfahren ohne diesen Zeitaufwand ideal. Zudem hat sich diese Arbeit zum Ziel gesetzt, den Integrationsprozess in gängige, kommerzielle FE-Programme zu verankern, sodass dieser als eine Standardtechnik in der Modellierungsphase einer FE-Aufgabenstellung anzusehen ist. Vorbilder für diese Vorgehensweise sind die Optimierungswerkzeuge CAO (Formoptimierung) und SKO (Topologieoptimierung), /20/. Dies erhöht die Akzeptanz seitens der Anwender, die Anschaffung einer Spezialsoftware erübrigt sich.

Lösungsweg

Allen CAIO-Faserverläufen gemeinsam ist der stromlinienförmige Charakter, der den Konturlinien einer Stromfunktion Ψ entspricht. Es drängt sich dabei die Frage auf, ob solche Isolinien, auf denen Ψ konstant ist, sich nicht mit den mächtigen Werkzeugen der Standard FE-Programme „simulieren“ lassen? Was zunächst befremdlich klingt, kann durch den Hinweis relativiert werden, dass die Qualität solcher Isolinien stets zuverlässig überprüft werden kann. Die Hauptspannungsrichtungen bilden dafür das solide Fundament, diese tangieren exakt die CAIO-Linien.

Zunächst mag es abwegig erscheinen, Wärmeleitungsprobleme in Erwägung zu ziehen. Deren Lösungen in Form von Isothermen hängen von Randbedingungen ab, die in keinem Zusammenhang mit statischen Problemen stehen. Wenn nun aber statt der thermischen Randbedingungen andere Informationen vorgegeben werden, die die Mannigfaltigkeit der Lösungen einschränken, so ist dies ein neuer Aspekt. In erster Linie wird dabei an die indirekte Vorgabe der Isotherme selbst gedacht, also an deren Tangentenvektoren mit einer bestimmten Richtung, z.B. einer Hauptspannungsrichtung. In isotropen Wärmeleitungsrechnungen besteht eine Zugriffsmöglichkeit auf den Wärmeflussvektor, der in 2D bzw. 3D senkrecht auf der Isothermen(fläche) steht. Die Vorgabe eines Wärmeflussvektors entspräche der 2. Hauptspannungsrichtung, die senkrecht auf der ersten steht. Was zunächst wie die Lösung für die gesuchte Simulation aussieht, ist jedoch mit Standard-FE-Programmen nicht zu realisieren. In thermischen Elementen können innerhalb der Struktur Wärmequellen, nicht jedoch gerichtete Wärmeflüsse definiert werden. Eine Lösungsmöglichkeit liegt vielmehr in der Materialorthotropie.

Analog zu orthotropen FKV-Strukturen, in denen der Kraftfluss in Richtung der Fasern gelenkt ist, kann dies auch für den Wärmefluss in orthotropem Material erwartet werden. In einer orthotropen Wärmeleitungsrechnung steht der Wärmefluss nicht mehr senkrecht auf der Isothermen. Ist die Orthotropie extrem ($\lambda_1 / \lambda_2 \approx 10^3 \dots 10^6$), wird der relevante Wärmefluss (Definition in Kap. 3.4) um 90° gedreht, mit Bezug auf einen isotropen Wärmestromvektor. Diese Steuerung des Wärmestromvektors ist naheliegend. In welche andere Richtung sollte die Wärme fließen, wenn eine solche Richtung über eine extrem hohe Wärmeleitfähigkeit vorgegeben ist? Durch diese Vorgehensweise ist sichergestellt, dass die Hauptforderung an die CAIO-Simulation erfüllt wird und stets überprüfbar ist: Die Richtung mit der extrem hohen Wärmeleitfähigkeit (= Hauptspannungsrichtung) tangiert die Isotherme. Die Isothermen einer solchen Analyse können dann als CAIO-Linien aufgefasst werden.

Zunächst offen ist die Frage nach der Auswirkung von thermischen Randbedingungen, die zur Erzeugung eines Wärmeflusses nach wie vor spezifiziert werden müssen. In dieser Arbeit wird gezeigt (Kap. 3 und 4), dass die thermischen Randbedingungen Einfluss auf die Wichtung der CAIO-Linien haben, nicht jedoch auf deren Orientierung, die durch die Vorgabe der Hauptspannungsrichtungen erzwungen wird.

Wesentliche Ergebnisse

Die Arbeit ist gegliedert in 2 Teile. Teil A befasst sich mit der Methodik der orthotropen Wärmeleitung für die Integration tensorieller und vektorielle Richtungsfelder und ist deshalb nicht auf die originale CAIO-Thematik beschränkt. Insgesamt werden folgende Gebiete behandelt:

- Tensorielle Richtungsfelder der Hauptspannungen
- Tensorielle Richtungsfelder der Hauptschubspannungen (Gleitlinien im plastischen Bereich)
- AWW: Ausgeglichener Winkelverbund \rightarrow Modifikation der Hauptspannungsrichtungen
- Vektorielle Kraftflüsse (Lastpfadmethode, alternative Möglichkeit der Faserplatzierung)
- Richtungsfelder in Differenzialgleichungen
- Geschwindigkeitsfelder in der Fluid-Mechanik

Die Anwendung der orthotropen Wärmeleitung auf 3D-Probleme weist keine besonderen Schwierigkeiten auf. Den Isothermen in 2D entsprechen jedoch Isoflächen in 3D. Kap. 11 behandelt diesen Aspekt.

Im Teil B (Kap. 12 und 13) werden Anwendungen vorgestellt, besonders die numerische und quantitative Verifikation der Faserplatzierung nach der CAIO- und Lastpfad-Methode. Damit soll keineswegs eine der Methoden favorisiert werden, auch nicht gegenüber anderen Optimierungsverfahren der klassischen Laminattheorie (CLT). Man muss bedenken, dass mit der Faserorientierung längs der Hauptspannungsrichtungen die Auslegung nicht komplett ist. Wichtig ist zudem die Festlegung der Schichtdicken untereinander und deren Stapelreihenfolge. Für diese Teilaufgaben existieren zusätzliche Optimierungsstrategien.

Die Lastpfadmethode ist nicht nur eine alternative Möglichkeit, Faserverläufe dem Kraftfluss anzupassen. Aufgrund der Erfüllung von Kontinuitätsgleichungen ist dieses Verfahren sehr geeignet, Kraftflüsse zu visualisieren. Kapitel 14 gibt dafür Beispiele.

Kap. 15 gibt Hinweise für die praktische Arbeit mit FE-Programmen. Damit lassen sich die CAIO-Linien visualisieren, nicht jedoch koordinatenmäßig ausgeben. Zur komfortablen Auswertung ist der grafische Postprocessor Tecplot nötig, der in der industriellen Anwendung weite Verbreitung gefunden hat. Zum Beispiel wird die Umsetzung der Isolinien in CAD-Koordinaten gefordert. Ein weiteres Beispiel ist die Ermittlung der Dickenverteilung, die sich aus dem stromlinienförmigen Verlauf der CAIO-Linien zwangsläufig ergibt, da der Abstand der „Stromlinien“ im Lösungsgebiet variabel ist.

Man kann noch nicht sagen, dass die Akzeptanz des CAIO-Verfahrens überall gegeben ist. Einerseits ist die Umsetzung der rechnerisch ermittelten Faserverläufe auf FKV-Bauteile technologisch sehr anspruchsvoll, besonders auf 3D-Schalen. Andererseits ist festzustellen, dass softwaremäßig eher „Insellösungen“ als allgemeingültige und robuste Algorithmen angeboten werden. Industrielle Anwender, die mit Standard-FE-Programmen arbeiten, sind zurückhaltend mit der Anschaffung von Insellösungen. Abgesehen von den Kosten inklusive der Wartung fällt auch Aufwand an bei der Einarbeitung in diese Spezialsoftware. Die hier vorgestellte Integration von Richtungsfeldern dagegen erlaubt dem Anwender entsprechende Problemstellungen zu lösen, und das in seiner vertrauten Umgebung ohne Inanspruchnahme externer Zusatzsoftware.

A: Methodik

1. Motivation für die Verbesserung der bisherigen CAIO-Technik

Obwohl die vorliegende Arbeit sich allgemein mit der Integration von Richtungsfeldern befasst, war am Anfang der Fokus auf die Integration von Hauptspannungsrichtungen gerichtet, mit dem Ziel, günstige Faserplatzierungen im Hinblick auf Steifigkeit und Festigkeit in Kunststoffverbunden zu erhalten.

Konstruktionen in Faserverbundbauweise zeichnen sich durch ein leichtes Gewicht, hohe Steifigkeit und Festigkeit aus. Dies wird erreicht, indem die Fasern möglichst parallel der lokalen Beanspruchungsrichtung im Bauteil folgen. Der herkömmliche Laminataufbau mit schichtweise konstanter Faserorientierung nützt das Potenzial der Fasertechnologie nicht genügend aus und kann durch einen lokal beanspruchungsgerechten Faserverlauf mit variabler Ausrichtung verbessert werden. Arbeiten mit dieser Zielsetzung liegen zahlreich vor, z.B. in /12/, /20/, /29/ und /35/.

Von der Berechnungsseite werden die dafür notwendigen Hilfsmittel in den gängigen Finite Element Programmen zur Verfügung gestellt, besonders die Bestimmung der Hauptspannungen (häufig mit HS abgekürzt) mit den dazugehörigen HS-Richtungen ist Standard. Für die nachfolgende qualitative und quantitative Beurteilung des Bauteils unter seinen äußeren Lasten liegen ausgereifte Methoden vor, z.B. Schürmann /33/, die in ihren wesentlichen Quintessenzen in vielen FE-Programmen implementiert sind. Es fehlt jedoch an allgemeingültigen Visualisierungsmöglichkeiten der nun variablen, von Ort zu Ort sich ändernden Faserverläufe sowie deren koordinatenmäßige Erfassung. Letzteres ist Voraussetzung für die Faserplatzierung mithilfe von Stickmaschinen.

Für ebene und räumliche Strukturen, nicht jedoch für 3D-Schalenstrukturen wurden bezüglich der Visualisierung hilfsweise das sogenannte *streamtracing* Verfahren eingesetzt, s. Reuschel /29/ (Software *CAIO_{II}*) und Temmen /35/ (Software *TACO*). Diese Technik wird in Simulationsprogrammen der Strömungsmechanik eingesetzt, da dort an jedem Berechnungspunkt der Geschwindigkeitsvektor vorliegt. Diese Vektoren lassen sich Punkt für Punkt verfolgen (\rightarrow *streamtracing*) und zur Stromlinie verbinden. Es liegt nahe, die HS-Richtungen ebenfalls mit dieser Methode zu bearbeiten, was auch bei einfachen Strukturen gelingt, z.B. bei einer Scheibe mit Loch unter axialem Zug. Jedoch wurde schon in /29/ festgestellt, dass auf diese Art berechnete Faserverläufe ab einer bestimmten Position wieder in sich zurücklaufen. Ebenso ist ein seitliches Ausweichen möglich, die Faserverläufe setzen dann ihren Weg rechtwinklig zu den HS-Richtungen fort. Der Grund liegt in einem lokalen Vorzeichenwechsel der HS-Richtung, d.h., es erfolgt ein Richtungswechsel der „Stromlinie“ um 180°. Es ist dies eine besondere Eigenschaft in der Strukturmechanik, dass HS-Richtungen bezüglich ihres Vorzeichens nicht eindeutig sind, das lässt sich mathematisch als Eigenwertaufgabe formulieren:

$$(\mathbf{s} - \sigma_{HS} \mathbf{I}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.1)$$

mit

\mathbf{s} = Spannungstensor (3x3), bezogen auf die globalen Koordinatenrichtungen x, y, z,

$\sigma_{HS} \rightarrow \sigma_1, \sigma_2$ bzw. σ_3 ; 3 Hauptspannungen (Skalare),

\mathbf{I} = Einheitsmatrix (3x3),

\mathbf{n} = Hauptspannungsrichtung $[n_x, n_y, n_z]$, normiert: $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. (1.2)

Die Determinante des Klammerausdrucks in Gl. (1.1) wird null gesetzt und erlaubt die Bestimmung der 3 Hauptspannungen (Eigenwerte). Diese werden dann nacheinander in Gl. (1.1) eingesetzt, um die 3 Hauptrichtungen zu berechnen. Man sieht unmittelbar, dass diese Gleichung unabhängig ist vom Vorzeichen, \mathbf{n} demnach keine Richtung sondern eine Achse beschreibt. In der Praxis wird bei der Normierung die positive Wurzel genommen, die

HS-Richtung liegt dann jedoch nur scheinbar eindeutig vor. Es verhindert nicht die sporadische Richtungsumkehr bei Anwendung der *streamtracing* Technik, sodass ein anderer Grund für den Vorzeichenwechsel verantwortlich sein muss.

Der Mohrsche Spannungskreis erlaubt alternativ die Berechnung von Hauptspannungsrichtungen, für den ebenen Spannungszustand gilt:

$$2 \alpha = \arctan (-2 \tau_{xy} / (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})) \quad (1.3)$$

wobei jedoch der doppelte Wert von α nicht im direkten Zusammenhang mit der HS-Richtung steht. Nach Wyss /44/ gilt für das Richtungsfeld y' der Hauptspannungen

$$y' = dy/dx = \tan \alpha = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2 \tau_{xy} \pm [1 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 \tau_{xy}^2]^{1/2} \quad (1.4)$$

Der Teil unter der Wurzel ist stets positiv, die beiden Vorzeichen vor der Wurzel führen zur ersten bzw. zweiten HS-Richtung. Zu kontrollieren ist demnach das Vorzeichenverhalten von $(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$ im Zähler und τ_{xy} im Nenner, letztere Größe ist für die Unstetigkeit des Tangens bei $\alpha = \pm 90^\circ$ verantwortlich. Zu diesem Zweck können die Isolinien τ_{xy} geplottet werden, speziell ihre Null-Isolinien sind dann Kandidaten für einen Vorzeichenwechsel in y' gemäß der Gl. (1.4). Für einen Winkelträger unter Biegung soll im folgenden Beispiel das *streamtracing* Verfahren zur Ermittlung der 2. HS-Richtung ($-\sqrt{\quad}$ in Gl. (1.4)) angewandt werden.

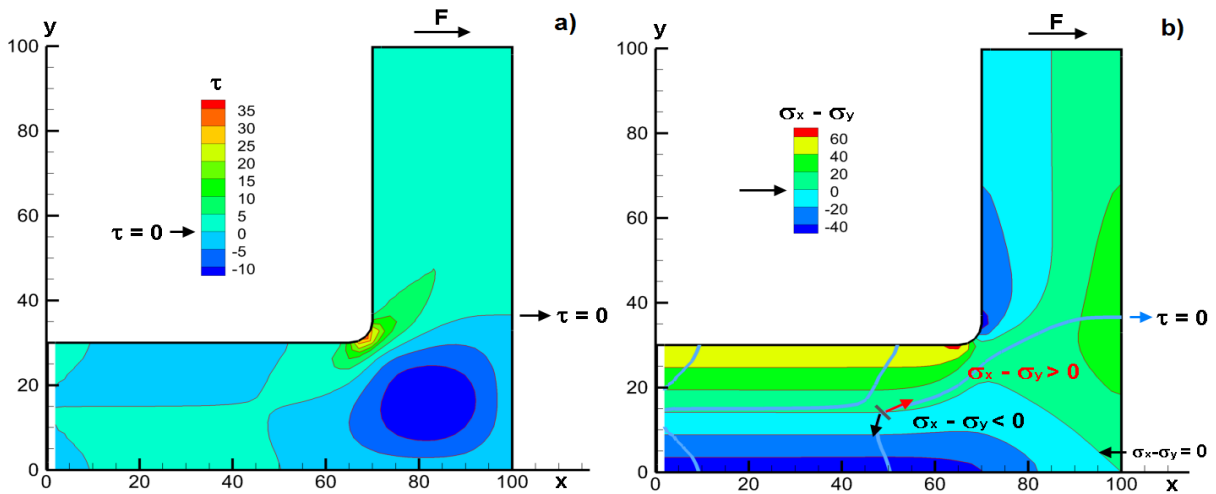
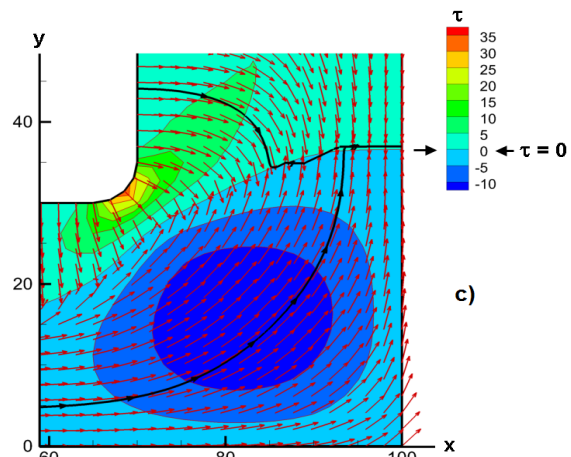


Bild 1.1. Querkraftbiegung F eines Winkelträgers, fixiert in x -Richtung bei $x=0$.

a) Schubspannungsverteilung τ_{xy} . Auf der $\tau = 0$ Linie kann ein Vorzeichenwechsel vorliegen.

b) Verteilung der Spannungsdifferenz $(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$. Zusätzlich gekennzeichnet ist die $\tau = 0$ Linie. Die kritische $\tau = 0$ Linie hat im problematischen rot gekennzeichneten Bereich positive Spannungsdifferenzen $(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$, d.h. $\sigma_{xx} > \sigma_{yy}$. Der Vorzeichenwechsel im Term $-(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2 \tau_{xy}$ der Gl. (1.4) kommt somit durch den Nenner zustande.

c) Die HS-Richtung zur Druckhauptspannung σ_2 ist durch Vektoren visualisiert. Das *streamtracing* Verfahren „verbindet“ die Vektoren. Die beispielhaft eingezeichnete schwarze Linie symbolisiert eine daraus gewonnene HS-Linie, die jedoch beim Überqueren der $\tau = 0$ Isolinie seitlich ausweicht: das Verfahren versagt. Der 1. Term der Gl. (1.4) und die abgebildete $\tau = 0$ Isolinie erklären somit den Richtungssprung von $y' = -\infty$ auf $+\infty$, bzw. von -90° auf $+90^\circ$.



Entsprechend dem Bild 1.1 kann der Vorzeichenwechsel der HS-Richtungen über den ersten Term der Gl. (1.4) erklärt werden. Es liegt nahe, die HS-Richtung für die Problemzone *manuell* durch Vorzeichenwechsel zu korrigieren, die Faserorientierung wäre davon nicht beeinträchtigt. (Eine solche Problemzone ist z.B. der positive τ -Bereich oberhalb $\tau=0$ in Bild 1.1c). Damit kann das *streamtracing* ein Stück weiter vorangetrieben werden, jedoch nur bis zur nächsten Problemzone. Diese Vorgehensweise ist wenig empfehlenswert, bei komplexen Strukturen tritt ein Vorzeichenwechsel vielfach auf und lässt sich nicht widerspruchsfrei auflösen. Man gelangt dann zu einem Gebiet, wo ein zuvor schon manipuliertes Vorzeichen nochmals umgekehrt werden muss, damit es zur Richtung des Nachbargesichts passt, s. auch /2/. Tatsächlich beschränken sich veröffentlichte CAIO-Muster auf einfache ebene Strukturen ohne Vorzeichenwechsel, angekündigte Verbesserungen in /35/ erfolgten jedoch nicht. Das originale *streamtracing* Verfahren, angewandt auf Strömungen, hat mit solchen Schwierigkeiten nicht zu kämpfen: Der Geschwindigkeitsvektor $[v_x \ v_y \ v_z]$ aus einer CFD-Analyse ist eindeutig.

Untersucht man Gl. (1.4) näher, so scheint es, dass jede $\tau=0$ Linie ein Ort des Versagens für das *streamtracing* Verfahren ist. Der Mohrsche Spannungskreis konkretisiert diese Aussage, siehe Bild (1.2).

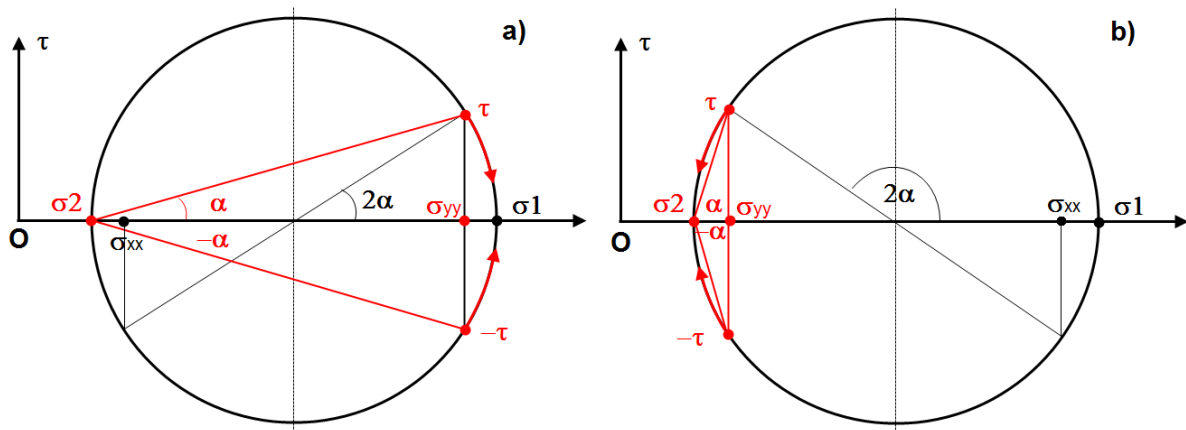


Bild 1.2. Mohrscher Spannungskreis. Für $\alpha = 0^\circ$ bzw. 90° liegen die zwei HS-Richtungen vor ($\tau = 0$). Im Zusammenhang mit Bild 1.1 ist der Ursprung „O“ nicht generell links von σ_2 . Er kann auch zwischen σ_1 und σ_2 oder rechts von σ_2 liegen. Es sind 2 Konstellationen zu unterscheiden:

a) $\sigma_{xx} < \sigma_{yy}$, b) $\sigma_{xx} > \sigma_{yy}$.

a) $\sigma_{xx} < \sigma_{yy}$: Der Vorzeichenwechsel von τ findet beim Übergang vom 1. zum 4. Quadranten (oder vice versa) statt. Dabei ändert sich α stetig mit Werten nahe null.

b) $\sigma_{xx} > \sigma_{yy}$: Der Vorzeichenwechsel von τ findet beim Übergang vom 2. zum 3. Quadranten (oder vice versa) statt. Dabei ändert sich α unstetig um 180° .

Die Konstellation im Bild 1.2b verursacht die Probleme beim *streamtracing*. Die Verwendung dieser Technik muss zumindest modifiziert werden, sofern ein allgemeingültiges Verfahren zur Visualisierung der Faserverläufe angestrebt wird. Die Modifikation besteht darin, dass die HS-Richtung nicht als (eindeutiger) Vektor aufgefasst wird, sondern als (zweideutige) Achse, d.h. z.B., ein 0° -Vektor ist von einem 180° -Vektor dann nicht mehr zu unterscheiden. Diese Vorgehensweise hat nichts damit zu tun, per Postprocessing ganze Gebiete mit einem Vorzeichenwechsel zu manipulieren, so wie oben beschrieben. Vielmehr muss jede einzelne HS-Linie von Anfang bis Ende „traktiert“ werden, sodass die HS-Linie den „HS-Achsen“ stetig folgt und nicht den Richtungspfeilen der HS-Vektoren.

Ein entsprechendes Programm wurde unabhängig von vorliegenden *streamtracing*-Algorithmen innerhalb des BMBF-Projekts *Biotex* /24/ erstellt. Die Software namens *CAIO_{Shell}* ist im nächsten Kapitel vorgestellt und ist allgemein anwendbar für Strukturen mit ebenem Spannungszustand (Scheiben, Platten und Schalen).

2. CAIO-Verfahren aus dem BMBF-Projekt *BIOTEX*

Das Programm CAIO_{Shell} /24/

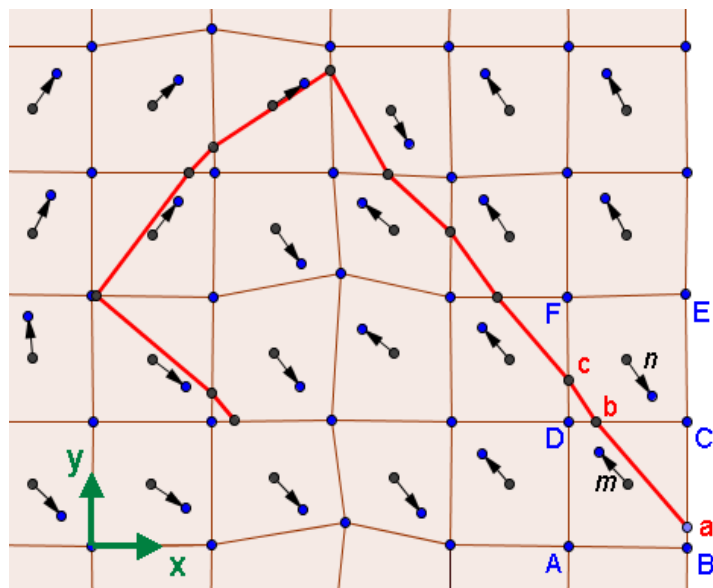
Die gängigen FE-Programme liefern für Schalen, Platten und Scheiben die Spannungskomponenten sowie 2 Hauptspannungsrichtungen, die senkrecht aufeinander stehen. Werden nun Fasern in Hauptspannungsrichtung verlegt, so sind diese „optimal“ ausgerichtet, da die Faser in ihrer Längsrichtung maximale Festigkeitswerte aufweist. Die Transformation der Spannungen auf die Hauptspannungsrichtungen ist zudem durch Schubspannungsfreiheit gekennzeichnet, eine wünschenswerte Eigenschaft. Die Festigkeitseigenschaften quer zur Faser sind jedoch gering, sodass Querlasten durch Fasern in der 2. Hauptspannungsrichtung aufgenommen werden. Im Allgemeinen ist somit stets ein System von 2 aufeinander senkrecht stehenden Fasersystemen nötig.

Aus den Hauptspannungsrichtungen ist durch Integration der Faserverlauf zu berechnen. Bild 2.1 zeigt das Integrationsschema anhand einer Scheibenidealisierung. Gezeigt ist eine der beiden Hauptspannungsrichtungen im Mittelpunkt eines jeden Elements. Durch sukzessive Anwendung der *Punkt-Steigungsformel* kann für jedes Element ein gerader Abschnitt des CAIO-Verlaufs ermittelt werden. Die zusammengesetzten Abschnitte ergeben dann den Faserverlauf als Polygonzug.

Bild 2.1. Sukzessive Integration einer beliebig angenommenen Hauptspannungsrichtung, beginnend am Startpunkt *a* auf dem Strukturrand rechts.

HS-Linien folgen den „HS-Achsen“ und nicht den Richtungspfeilen der HS-Vektoren.

Wenn der Startpunkt nicht auf einem Strukturrand liegt, so muss die Integration gleich von Anfang an in 2 Richtungen ($\pm m$) erfolgen.



Integration der HS-Richtung vom Startelement zum Nachbarelement

Startelement ABCD: Die Integration beginnt in einem Randpunkt *a*. Das gesuchte Faserstück *ab* hat die Steigung *m* der Hauptspannungsrichtung. Die Gerade *ab* ist durch eine Punkt-Steigungsformel gegeben und wird zum Schnitt mit der Elementberandung *DC* gebracht, die durch eine 2-Punkte-Formel gegeben ist. Diese Verschneidung liefert die Koordinaten (x_b/y_b) des Punktes *b*. Die Strecke *ab* ist parallel zur Hauptspannungsrichtung *m*. Punkt *b* ist nun der Startpunkt im Element *DCEF*, das durch die Hauptspannungsrichtung *n* gekennzeichnet ist. Sofern nicht ein Startpunkt *a* auf dem Rand definiert wird, sondern irgendein Startpunkt inmitten der Struktur, so ist derselbe Formalismus 2x anzuwenden. Dies liefert dann 2 Schnittpunkte, da die Steigung $\pm m$ prinzipiell für 2 Richtungen steht.

Nachbarelement DCEF: Die Integration wird nun fortgesetzt am Punkt **b** des Elements **DCEF**. Das gesuchte Faserstück **bc** hat die Steigung **n** der Hauptspannungsrichtung. Es wird der gleiche Formalismus wie für das Startelement angewandt, um zum Punkt **c** zu gelangen. Hier unterscheidet sich die Integration von einem alternativen Verfahren namens *streamtracing* in Tecplot, das in /29/ und /35/ verwendet wird. CAIO_{Shell} interpretiert **n** nur als Linienelement mit der Achs-Richtung $\pm n$ und kommt somit nach der Integration zum Punkt **c**. Tecplot folgt der Richtung **n** und läuft im gezeigten Beispiel zurück oder mittelt die beiden Richtungen $\pm n$, was zu einem seitlichen Ausweichen führt, s. auch Bild 1.1c. Solche Richtungskehrungen sind charakteristisch für FE-Programme, weil dort die Hauptrichtungen über Eigenvektoren nur mit unbestimmten Vorzeichen berechnet werden.

Die Integration, die beispielhaft für das Start- und Nachbarelement gezeigt ist, wird nun sukzessive wiederholt, indem in der folgenden Schleife das Nachbarelement die Rolle des Startelements übernimmt. Die Integration wird so lange fortgeführt, bis ein Strukturrand das Ende der Schleife signalisiert. Damit ist eine Faser erzeugt, weitere Fasern folgen, indem weitere Startelemente gewählt werden.

Das Integrationsverfahren ist auch für Schalenelemente realisiert worden. Die 4-Knoten-Elemente facettieren die Schale, jedes Schalenelement spannt eine Ebene im Raum auf, sofern keine (allzu große) Verwindung vorliegt. In dieser Ebene kann das Verschneiden zweier Geraden erfolgen, wenn zuvor die notwendigen geometrischen Transformationen durchgeführt werden. Die Verwindung eines 4-Knoten-Schalenelements kann durch ein feines Netz klein gehalten werden, alternativ ist der Einsatz von Dreieckselementen möglich.

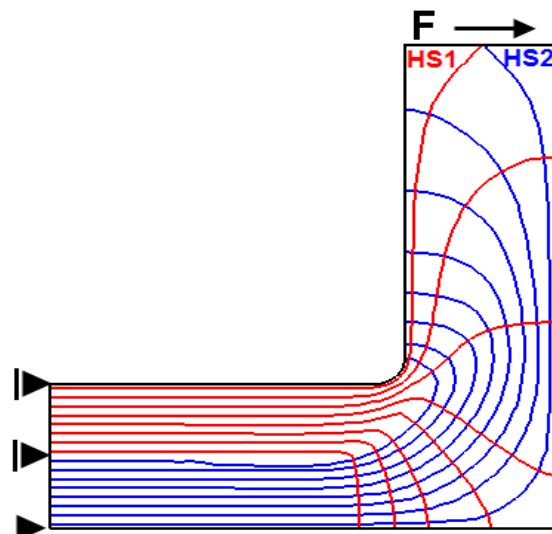
Gegenüber dem *streamtracing* Verfahren bedeutet dies folgende Verbesserung:

- Vermeidung von Faserrückläufen und inkorrekt er Richtungsmittlung, die letztendlich den Abbruch der HS-Richtungsintegration bedeuten, s. die Bilder 1.1c und 2.2.
- Anwendung der CAIO-Technik auch auf allgemeine Schalenstrukturen.

Keine Verbesserung konnte jedoch für folgende Punkte erreicht werden:

- Das Netz der orthogonalen Faserverläufe entsprechend den beiden HS-Richtungen ist i.A. unregelmäßig, d.h., der Abstand der HS1-Fasern bzw. der HS2-Fasern, die zur 1. bzw. 2. Hauptspannung gehören, ist ungleichmäßig. Eine „Homogenisierung“ erfordert einen relativ hohen Mehraufwand, s. Bild 2.3.
- Das Ergebnis einer CAIO-Berechnung steht für ein gewisses Faservolumen bzw. Flächengewicht der Laminatsschicht mit dem variablen Faserverlauf. Möchte der Konstrukteur dies nachträglich ändern, so ist eine neue CAIO-Faserplatzierung nötig, die die gewünschte Faserdichte erbringen soll.

Bild 2.2. Winkelträger unter Querlast aus Kap. 1. Das Programm CAIO_{Shell} /24/ vermeidet den Faserrücklauf bzw. das seitliche Ausweichen, das in Bild 1.1c dargestellt ist.



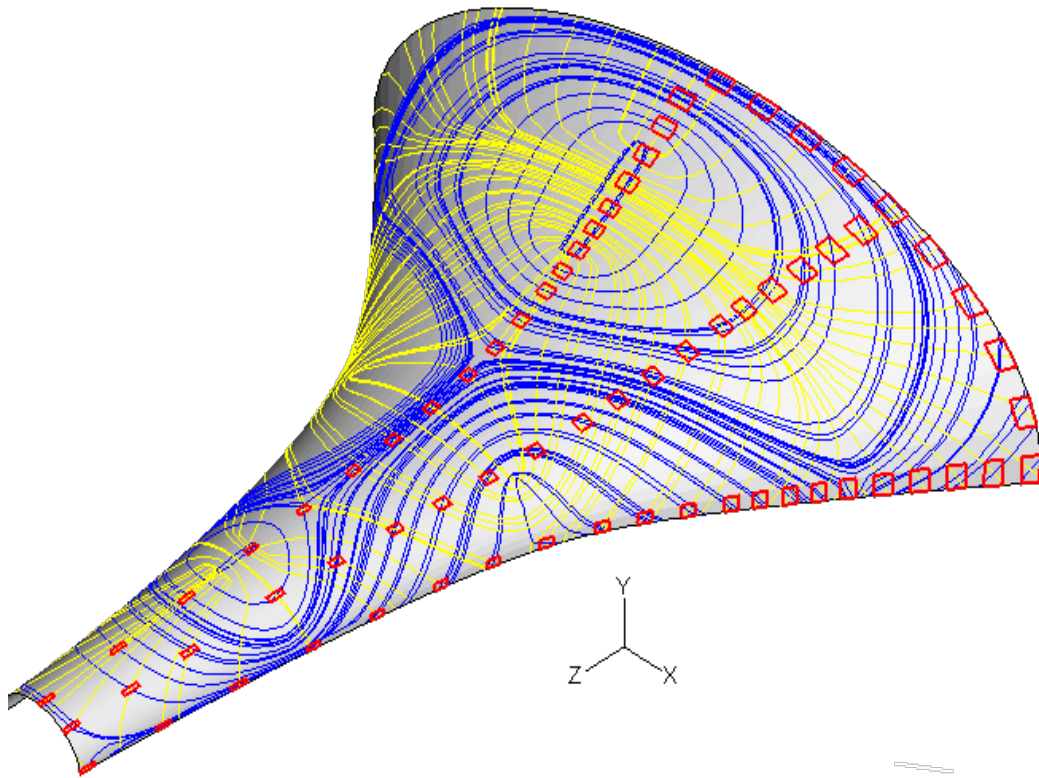


Bild 2.3. $CAIO_{Shell}$ /24/, angewandt auf einen Fahrradsattel mit elastischer Federbettung, belastet mit dem Gewicht des Radfahrers. Jedes Startelement (rot markiert) liefert mit der oben beschriebenen Prozedur zwei Einzelfaserverläufe entsprechend den beiden HS-Richtungen. Eine regelmäßige Platzierung der Startelemente garantiert keineswegs eine gleichförmige Verteilung der HS-Linien. Eine Homogenisierung der Faserabstände wird nur mit erheblichem Aufwand erreicht. Die lokale Beanspruchung in den Faserverläufen kann durch Einfärbung kenntlich gemacht werden, s. /24/. Weitere Ergebnisse aus der Anwendung von $CAIO_{Shell}$ sind in /14/ und /36/ dokumentiert.

3. Neues CAIO-Verfahren: Visualisierung der Faserverläufe in HS-Richtung, simuliert über orthotrope Wärmeleitung

Die beiden in Kap. 2.1 genannten problematischen und damit verbesserungswürdigen Punkte führen zu Überlegungen, das Verfahren ganz neu zu konzipieren. Bisher waren CAIO-Programme eigenständige Softwareprodukte, die dem Anwender Einarbeitung und Kosten verursachen und den Entwickler zwingt, ein bestimmtes FE-Programm zu nutzen. Es sind die verschiedenen kommerziellen Programme (z.B. Abaqus, Ansys, Tecplot) daraufhin zu untersuchen, ob deren Bordmittel ausreichen, CAIO-Linien direkt zu berechnen. Man kann z.B. ein Skalarfeld, beispielsweise ein Temperaturfeld, bezüglich seiner Isolinien auswerten, wobei ein solches Feld für eine der beiden HS-Linien stehen soll. Es ist einleuchtend, dass eine isotrope Wärmeleitung für diesen Zweck völlig ungeeignet ist. Die orthotrope Wärmeleitung hat jedoch einen „Link“ zu den Hauptspannungsrichtungen, da die orthotropen Wärmeleitfähigkeiten auf ein (lokales) Koordinatensystem verweisen, das parallel zu den HS-Richtungen definiert werden kann. Das Problem scheint dabei in den Temperatur-Randbedingungen zu liegen, die die Isothermen (als Stellvertreter der HS-Linien) beeinflussen. Es wäre dann zu zeigen, dass dieser Einfluss der Randbedingungen bei extremer Orthotropie (z.B. $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$ für die CAIO-Linie der 1. Hauptspannung bzw. $\lambda_2 / \lambda_1 = 10^6$ für die CAIO-Linie der 2. Hauptspannung) mehr und mehr verschwindet. Es ist zu erwarten, dass bei derartigen Orthotropieverhältnissen der Wärmefluss der hohen Wärmeleitfähigkeit folgt, die kleine Wärmeleitfähigkeit senkrecht dazu eine Sperre für den Wärmefluss darstellt. Dies ist qualitativ schon aus der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung zu ersehen:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial T / \partial n_1 \\ \partial T / \partial n_2 \end{bmatrix} \quad \left| \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial T / \partial n_1 \\ \partial T / \partial n_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Das linke Gleichungssystem steht für die isotrope, das rechte für die orthotrope Wärmeleitung, beide sind als Transformationsgleichungen aufzufassen. Der Temperaturgradientenvektor links wird auf den Wärmestromvektor abgebildet, wobei Gradient (**grad T**) und Wärmestromvektor **q** zueinander parallel sind. Die Isotherme steht dabei stets senkrecht zu **q**. Rechts dagegen wird der Wärmestromvektor infolge der Orthotropie gedreht, abhängig vom Grad der Orthotropie. Bei extremer Orthotropie mit einer 90°-Drehung wäre demnach die Isotherme die angestrebte CAIO-Linie, die Indizes „1“ und „2“ in Gl. (3.1) stehen für die 1. und 2. Hauptspannungsrichtung. In den folgenden Unterkapiteln wird dieses zunächst hypothetisch unterstellte Verhalten dahingehend untersucht, ob eine (extrem) orthotrope Wärmeleitung als Prozedur zur Auffindung der HS-Linien dienen kann. Ein solches Verfahren hätte folgende Vorzüge:

- Die orthotrope Wärmeleitung als Kontinuumsproblem berechnet stellvertretend die Faserverläufe der 1. und 2. Hauptspannung unendlich dicht, die Festlegung auf eine bestimmte Faserdichte erfolgt nachträglich ohne Neuberechnung. Einzelfasern sind schlicht einzelne Isolinien, die generell in beliebiger Dichte visualisiert werden können.
- Das so ermittelte diskrete Faserfeld ist im Nachhinein manipulierbar, indem die Funktionalität von *Tecplot* genutzt wird: Per Mausklick werden einzelne Fasern zwischen zwei vorhandene gelegt, gelöscht bzw. verschoben. Wird z.B. eine Faser neu generiert oder verschoben, findet dieser Vorgang in der gekrümmten Schalenfläche statt, die Faser verlässt diese nicht.

- Es ist eine charakteristische Eigenschaft der HS-Linien, dass diese veränderliche Abstände voneinander haben. Dies führt zu veränderlichen Faservolumina in der Matrix. Die Isolinien eines Skalarfelds lassen sich jedoch durch Gradientenbildung auf veränderliche Abstände analysieren, sodass diese wichtige Information als Nebenresultat anfällt. Somit können Steifigkeits- und Festigkeitskennwerte als Funktion des Faservolumens definiert werden. Erst dann ist eine realistische Evaluierung der zuvor gerechneten CAIO-Verläufe per FEM sinnvoll.
- Die orthotrope Wärmeleitung ist ganz allgemein ein Integrator der Differenzialgleichung
$$y' = f(x,y), \tag{3.2}$$
wobei für Schalenprobleme das Wertepaar (x,y) sich auf ein gekrümmtes Koordinatensystem bezieht. Im Fall der Faserorientierung in HS-Richtung liefert das FE-Programm den gewünschten y' -Wert als Rechthandseite in Gl. (3.2) in Abhängigkeit des Ortes und der lokalen Spannungen. Die HS-Richtung ist jedoch nicht das einzige Kriterium für eine optimale Faserplatzierung. Alternative Faserverläufe liefert z.B. die Lastpfad-Methode, s. auch Kap. 7. Die Anwendung der Gl. (3.2) ist generell stets möglich, wann immer das FE-Programm die Rechthandseite bereitstellen kann. Dies ist für das Lastpfad-Verfahren in einfacher Weise stets möglich.
- Die Visualisierung von Hauptspannungslinien hat ihre Anwendung im Bereich der Faserverbund Konstruktionen. Die Visualisierung der Hauptschubspannungslinien ist hilfreich für die Darstellung von Gleitlinienfeldern (slip line fields) bei starrplastischen Umformprozessen. Die Anwendung der Gl. (3.2) auf $\pm 45^\circ$ gedrehte HS-Richtungen führt direkt zu den Gleitlinien.

3.1 Demonstration des CAIO-Verfahrens

Zuerst soll an einem einfachen Beispiel (Scheibe mit elliptischem Loch unter einem Biegemoment) die Leistungsfähigkeit des Verfahrens demonstriert werden. Durch das elliptische Loch entstehen lokale Spannungskonzentrationen, die den reinen (schubspannungsfreien) Biegespannungszustand an der Kraffteinleitungsstelle stören. Bild 3.1 zeigt die Längs- und Schubspannungen, wobei besonders die lokale Schubspannunginsel auf der vertikalen Anti-Symmetrieachse auffällt. Dieser Effekt ist von C. Mattheck in [22] beschrieben. Es erhebt sich die Frage, ob die HS-Richtungen aus einer isotropen oder orthotropen Berechnung Basis für die nachfolgende Integration herangezogen werden sollen. Der Vergleich der Spannungskonturen aus einer isotropen und orthotropen Analyse ergeben, z.B. bezüglich der Schubspannungen (Bilder 3.1 b und c), unterstreicht ihre Berechtigung. Die aus den HS-Richtungen mit der orthotropen Wärmeleitungsberechnung ermittelten HS-Linien zeigen jedoch qualitativ geringe Unterschiede, s. Bild 3.4.

Bild 3.1.

Halbmodell einer Rechteckscheibe mit elliptischer Aussparung (70x200 mm) und Ellipsenhalfachsen 25x50 mm unter Biegung.

Relative Spannungsverteilungen.

Rot: positives Maximum.

Blau: negatives Maximum.

Deformationen überhöht.

a) Längsspannung isotrop

b) Schubspannung isotrop

c) Schubspannung orthotrop

Isotrop: $E=10.000 \text{ MPa}$

Orthotrop: $E_x = 800 \text{ MPa}$,

$E_y = 10.000 \text{ MPa}$

$G = 600 \text{ MPa}$.

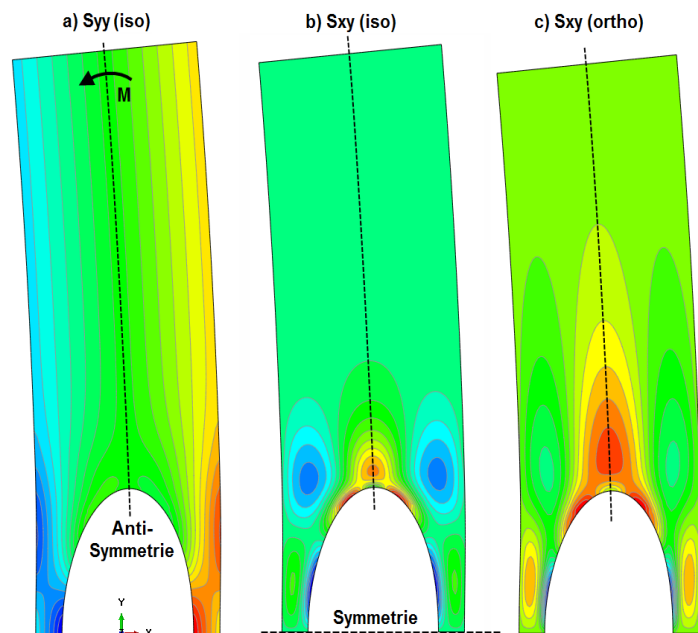
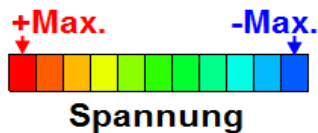


Bild 3.2.

Isotrope Hauptspannungsrichtungen, Ausschnitt aus Bild 3.1a.

Die Länge der „Richtungsvektoren“ ist ein Maß für den Betrag der Hauptspannung.

HS1-Richtungen (Zug)

HS2-Richtungen (Druck)

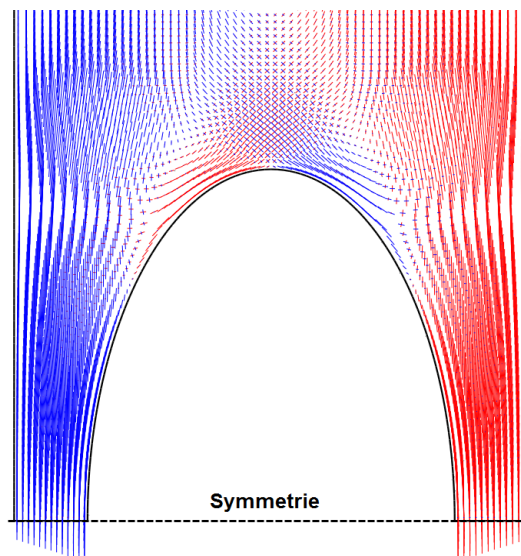


Bild 3.2 zeigt die beiden Hauptspannungsrichtungen, wobei die **Zughauptspannung HS1** betragsmäßig gleich der **Druckhauptspannung HS2** ist. Beide Richtungen stehen senkrecht aufeinander.

Zur Ermittlung der Hauptspannungslinien werden zwei thermische FE-Berechnungen mit orthotropen Wärmeleitfähigkeiten entsprechend den Bildern 3.3a und b durchgeführt.

Bild 3.3.

Isothermen aus 2 thermischen Berechnungen mit orthotropen Wärmeleitfähigkeiten.

a) $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$

b) $\lambda_2 / \lambda_1 = 10^6$

Die Lokalsysteme mit diesen λ -Werten haben die Richtungen der beiden Hauptspannungen σ_1, σ_2 aus der statischen isotropen Analyse.

Der Temperaturlastfall wird hier durch einen Temperaturgradienten von -35° auf $+35^\circ\text{C}$ symbolisiert. Eine optimierte Festlegung der Randbedingungen wird in Kap. 3.6 diskutiert.

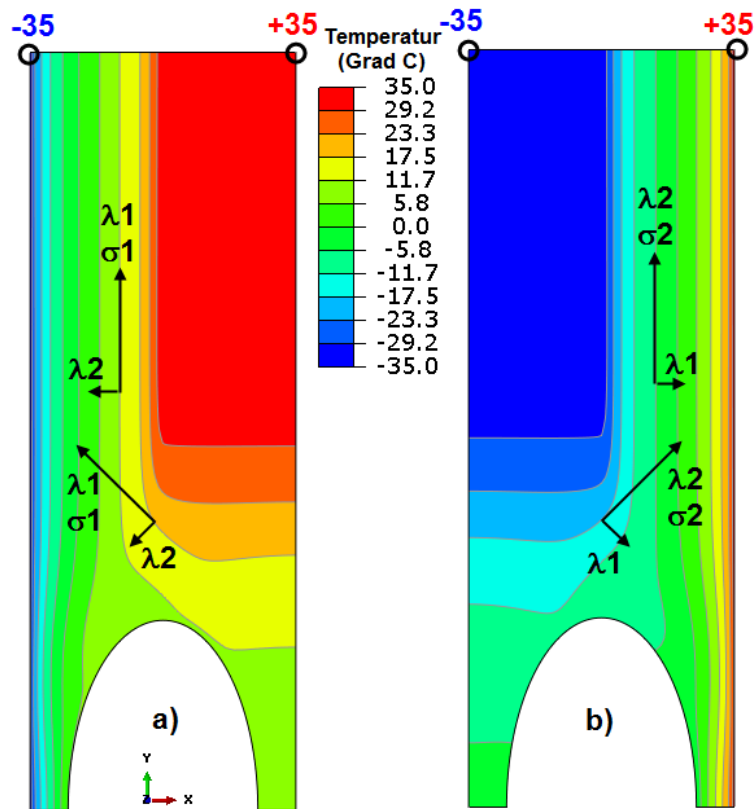


Bild 3.3a: Aus der Spannungsanalyse ist in jedem Element die 1. Hauptspannungsrichtung bekannt. In der thermischen Analyse wird diese HS-Richtung für jedes äquivalente thermische Element zur Definition eines Lokalsystems benötigt. In diesem Lokalsystem wird die Wärmeleitfähigkeit λ so definiert, dass $\lambda_1 \gg \lambda_2$ ist.

Ohne „Lastfall“ ergeben sich jedoch damit noch keine Isothermen. Es muss noch ein Temperaturgefälle in Form eines Gradienten definiert werden. Es zeigt sich, dass dieser Gradient in seiner einfachsten Form mit 2 ungleichen Knotenpunkttemperaturen an fast beliebiger Stelle spezifiziert werden kann, hier im Beispiel mit -35° und $+35^\circ\text{C}$ in den 2 äußersten oberen Eckknoten. Bei dieser groben Spezifikation ergeben sich relativ ungleichförmig verteilte Isothermen. Eine optimierte Festlegung der Randbedingungen wird in Kap. 3.6 diskutiert.

Was bleibt dem Wärmefluss anderes übrig als in der dominanten λ_1 -Richtung zu fließen, quasi in dem so vorgegebenen „Gerinne“? Dies wird auch durch die orthotropen Fourier'schen Wärmeleitungsgleichungen belegt:

$$q_1 = -\lambda_1 \partial T / \partial n_1 \quad (3.3a)$$

$$q_2 = -\lambda_2 \partial T / \partial n_2 \quad (3.3b)$$

Es zeigt sich, dass selbst ein geringer Temperaturgradient in n_1 -Richtung durch den hohen λ_1 -Wert zu einem hohen Wärmefluss führt, dagegen wird die n_2 -Richtung praktisch gesperrt.

Bild 3.3b: Die HS-Linien zur 2. Hauptspannung werden analog zum Vorgehen entsprechend dem Bild 3.3a ermittelt. Im Element-Lokalsystem wird die Wärmeleitfähigkeit λ jedoch so definiert, dass $\lambda_1 \ll \lambda_2$ ist.

Danach werden beide Isothermenbilder übereinander gelegt, Bild 3.4. Für den vorgegebenen Lastfall wird man nun den Verlauf der Isothermen als Vorlage für die Faserplatzierung heranziehen. Im ersten Fall sind die Fasern (Isothermen) an der Kräfteinleitungsstelle gleichmäßig platziert. Dies führt dazu, dass das Faservolumen relativ gleichmäßig verteilt ist. Beanspruchungsgerecht ist dagegen die Faserplatzierung entsprechend dem Bild 3.4b anzusehen: Die Wichtung der Fasern zu den Rändern hin trägt den dort höheren Biegespannungen Rechnung.

Bild 3.4.

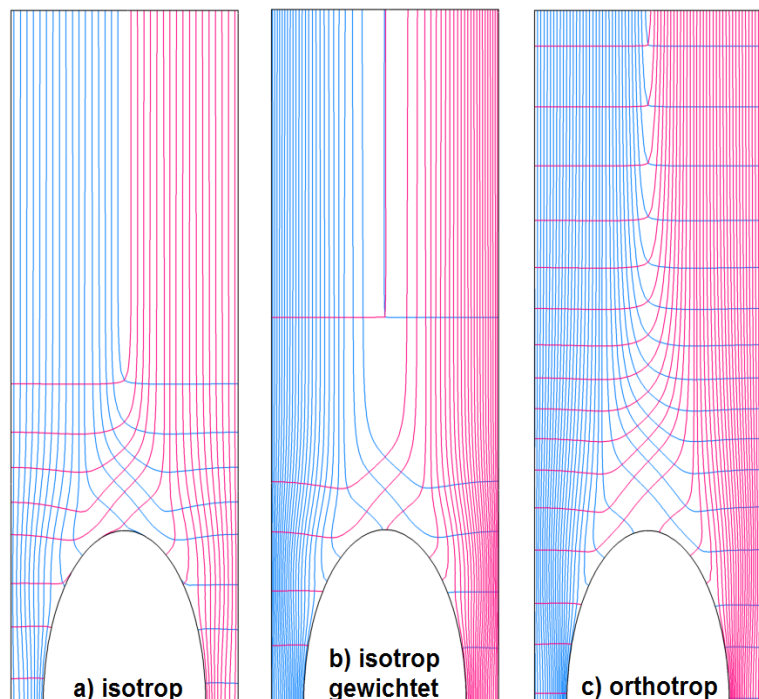
Übereinander gelegte Isothermen aus der orthotropen Wärmeleitungsrechnung in Bild 3.3.

a) Spannungsberechnung isotrop: Fasern uniform gewichtet.

b) Spannungsberechnung isotrop: Fasern beanspruchungsgerecht gewichtet.

c) Spannungsberechnung orthotrop: Fasern uniform gewichtet. Doppelte Anzahl von Isothermen aus dem Temperaturfeld extrahiert.

Die Technik der Wichtung von Fasern (CAIO-Linien) wird in Kap. 3.6 erläutert.



In der orthotropen Spannungsberechnung ist die Störung der reinen Biegebeanspruchung durch das Auftreten von Schubspannungen an der Ellipsenkontur evident, Bilder 3.1c und 3.4c. Diese klingen nun langsamer ab und erreichen sogar den oberen Rand der Lasteinleitung. Der Vergleich mit dem isotropen CAIO-Layout (Bild 3.4a) zeigt qualitativ jedoch nur geringe Unterschiede. Es liegt im Ermessen des Anwenders, die HS-Richtungen aus einer isotropen oder orthotropen Spannungsberechnung zu ermitteln, letztere mit dem vorgesehenen Faserverbund-Material. In jedem Fall muss die nachfolgende Wärmeleitungsrechnung mit extremer Orthotropie der Wärmeleitfähigkeiten durchgeführt werden, ihre artifizielle Orthotropie steht in keinem Zusammenhang mit der realen Orthotropie der Spannungsberechnung. Die Frage nach den Iterationen, ob notwendig oder lässlich, wird in Kap. 12 behandelt.

Aus den Faser-Layouts im Bild 3.4 wird ein weiterer Vorteil des CAIO-Verfahrens deutlich: Im orthotropen Fall wurden aus der Temperaturverteilung zu Demonstrationszwecken doppelt so viele Isothermen extrahiert wie im isotropen Fall. Das Temperaturfeld ist kontinuierlich, seine Isothermen (Fasern) liegen deshalb „unendlich“ dicht vor. Wann immer der Konstrukteur nachträglich die Faserdichte ändern möchte, eine CAIO-Neuberechnung ist unnötig.

3.2 Bedeutung der Dichte der CAIO-Linien

Im Bild 3.4 sind die HS-Linien an der Lasteinleitungsstelle uniform (Bild 3.4a) bzw. auf die Ränder hin gewichtet (Bild 3.4b). Dies wird durch eine Technik erreicht, die in Kap. 3.6 beschrieben ist. Es erhebt sich die Frage, ob die lokale Dichte der HS-Linien ein Maß für die lokale Beanspruchung darstellt?

Ein Blick auf die HS-Richtungen im Bild 3.2 zeigt nun, dass in Gebieten dominanter Hauptspannung (z.B. im Bereich der horizontalen Symmetrieachse) die dazu gehörende komplementäre zweite Hauptspannung praktisch null wird. Wird dies mit dem entsprechenden CAIO-Plot im Bild 3.4 verglichen, so sind an solchen Stellen die dazugehörigen HS-Linien stärker präsent als zu erwarten wäre. Das liegt daran, dass HS-Linien meistens auf Strukturberandungen beginnen und enden, jedoch nicht „versickern“, auch wenn die dahinter stehende Hauptspannung praktisch null ist. Daraus lässt sich folgern, dass die Dichte der CAIO-Linien i.A. nicht proportional zur lokalen Beanspruchung ist, s. auch /2/.

3.3 Der quantitative Einfluss der Orthotropie der Wärmeleitung

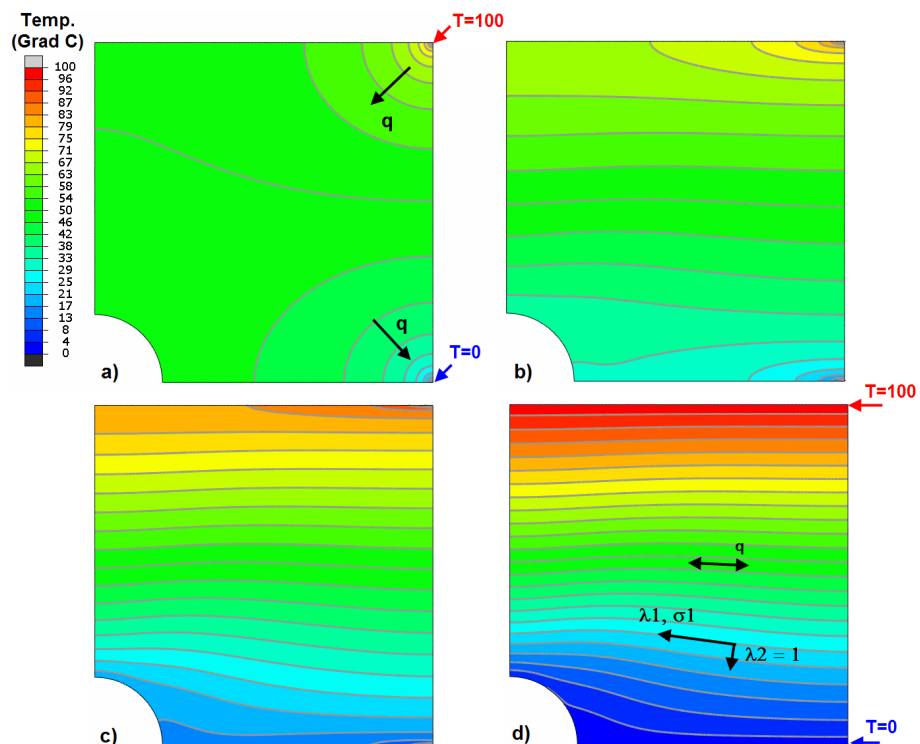
Für ein einfaches Beispiel (isotrope Kreislochplatte unter Zug) wird zur Ermittlung der CAIO-Linien das Verhältnis λ_1 / λ_2 in den dazu notwendigen thermischen Analysen sukzessive jeweils um den Faktor 2 gesteigert. Das Bild 3.5 zeigt 4 Standbilder aus einem „Film“, und zwar für $\lambda_1 / \lambda_2 = 1, 16, 128, 4096$.

- A Bei Isotropie (Bild 3.5a) stehen Wärmestromdichte \mathbf{q} und Isothermen senkrecht zueinander. Die Isothermen reagieren empfindlich auf den definierten Lastfall (hier 2 Eckknoten mit 0° und 100°C).
- B Bei extremer Orthotropie (Bild 3.5d) sind \mathbf{q} und die Isothermen parallel zueinander. Die Isothermen reagieren so gut wie nicht auf den definierten Lastfall. Die Isothermen sind durch die HS1-Richtungen vorgegeben, die das „Gerinne“ für den Wärmestrom bilden.

Bild 3.5.
Viertelmodell mit Kreisloch, horizontaler Zug.

Berechnung der CAIO-Linien für die 1. Hauptspannungsrichtung mittels orthotroper Wärmeleitung, $\lambda_2 = 1$.

- a) $\lambda_1 = 1$
 - b) $\lambda_1 = 16$
 - c) $\lambda_1 = 128$
 - d) $\lambda_1 = 4096$
- (Einheiten nicht relevant)



In den Fourierschen Wärmeleitungsgleichungen (3.3) ist q_1 proportional zu λ_1 und dominiert bei großen Werten die darauf senkrecht stehende Komponente q_2 . Die λ_1 - Dominanz geht einher mit einem sich sehr klein einstellenden Temperaturgradienten $\partial T / \partial n_1$. Dadurch ist sichergestellt, dass der Wärmeflussvektor \mathbf{q} die Isotherme tangiert.

Im nächsten Abschnitt werden 2 theoretische Ergebnisse der orthotropen Wärmeleitungsgleichung aus der Literatur ausgewertet, die die beiden aufgestellten Feststellungen A und B eingangs dieses Kapitels bestätigen.

3.4 Die zentrale Wärmequelle in einer kreisförmigen Scheibe

Es wird i.A. nicht gelingen, das CAIO-Verfahren im Zusammenhang mit der orthotropen Wärmeleitung theoretisch zu begründen, jedoch kann für spezielle Sonderfälle das CAIO-Ergebnis durch die analytische Lösung gestützt werden. Unter den wenigen orthotropen Wärmeleitungsproblemen ist z.B. die zentrale Wärmequelle in einer Scheibe zu nennen. Deren Resultate zeigen, dass beim Übergang von isotropen zu orthotropen Wärmeleitfähigkeiten die kreisrunden Isothermen in elliptische übergehen. Bei extremer Orthotropie ($\lambda_1 \gg \lambda_2$) degenerieren die Ellipsen zu Geraden.

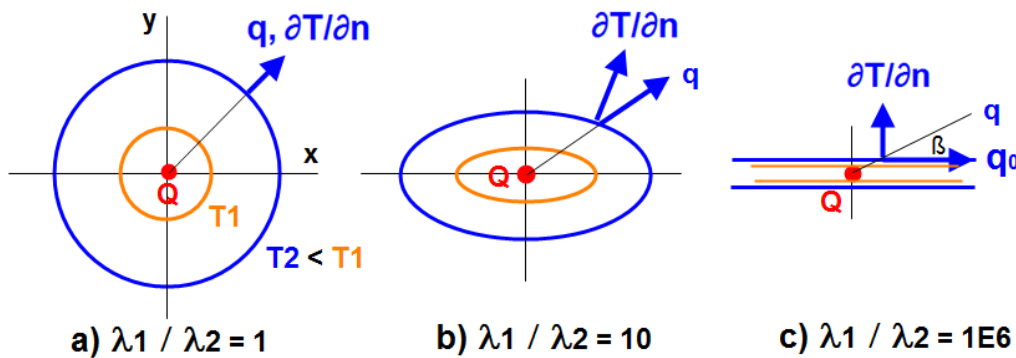


Bild 3.6a-c. Die zentrale Wärmequelle Q in einer Scheibe mit Radius R . Schematische Darstellung zweier Isothermen T_1 und T_2 bei größer werdendem Orthotropieverhältnis λ_1 / λ_2 (von links nach rechts), \mathbf{n} = Normalenrichtung, \mathbf{q} = Wärmestromvektor, stets radial gerichtet. Die Randbedingungen für den (orthotropen) Wärmeabfluss auf $r = R$ sind /3/ entnommen.

a) isotrop

b) $\lambda_1 / \lambda_2 = 10$ (auch in /11/ abgebildet)

c) $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$, \mathbf{q} ist radial gerichtet, jedoch fällt sein Betrag mit zunehmendem Winkel β rasch gegen null, q_0 ($\beta=0$) $\gg q$ ($\beta>1^\circ$), s. auch die Bilder 3.6d und e.

Das oben genannte Problem wird durch die orthotrope Wärmeleitungsgleichung beschrieben. Für den Fall, dass das kartesische System (x,y) ein Hauptsystem darstellt, der Tensor der Wärmeleitfähigkeiten also nur Hauptdiagonalglieder besitzt, so gilt nach /3/ für die stationäre zweidimensionale Wärmeleitung mit verteilten Wärmequellen w (genauer: w =Wärmeflussdichte):

$$\lambda_1 (\partial^2 T / \partial x^2) + \lambda_2 (\partial^2 T / \partial y^2) = w \quad (3.4)$$

In einer Scheibe mit zentraler Wärmequelle Q , $w=0$ und Randbedingungen der Art, dass über den Rand einer Kreisscheibe mit Radius R genau so viel Wärme abfließt wie durch Q produziert wird, haben die Isothermen die Form von Ellipsen:

$$x^2 / \lambda_1 + y^2 / \lambda_2 = \text{konst.} \quad (3.5)$$

Die zur Gl. (3.5) passende Randbedingung ist nicht trivial, insofern die Wärmestromdichte q auf dem Rand wegen der Orthotropie nicht konstant ist, s. /3/. Im Gegensatz zur typischen Ellipsengleichung stehen in Gl. (3.5) direkt die Wärmeleitfähigkeiten und nicht deren Quadrate.

Im isotropen Fall bilden die Isothermen konzentrische Kreise um die Punktquelle. Charakteristisch ist das singuläre Verhalten in der Punktquelle, dort steigt die Temperatur ins Unendliche, die Isothermen liegen dort extrem dicht. Wird nun Orthotropie definiert, sodass die Wärmeleitfähigkeit λ_1 größer ist als λ_2 , so gehen die Kreise in Ellipsen über. Bei einem Verhältnis $\lambda_1 / \lambda_2 > 10^3$ sind die Isothermen praktisch im ganzen Lösungsgebiet gerade Linien. Im kartesischen System sind diese Linien parallel zur x-Achse. Es liegt nahe anzunehmen, dass bei extremer Orthotropie der Wärmeflussvektor um 90° gegenüber seinem isotropen Pendant gedreht wird. Dies bedarf einer Erläuterung.

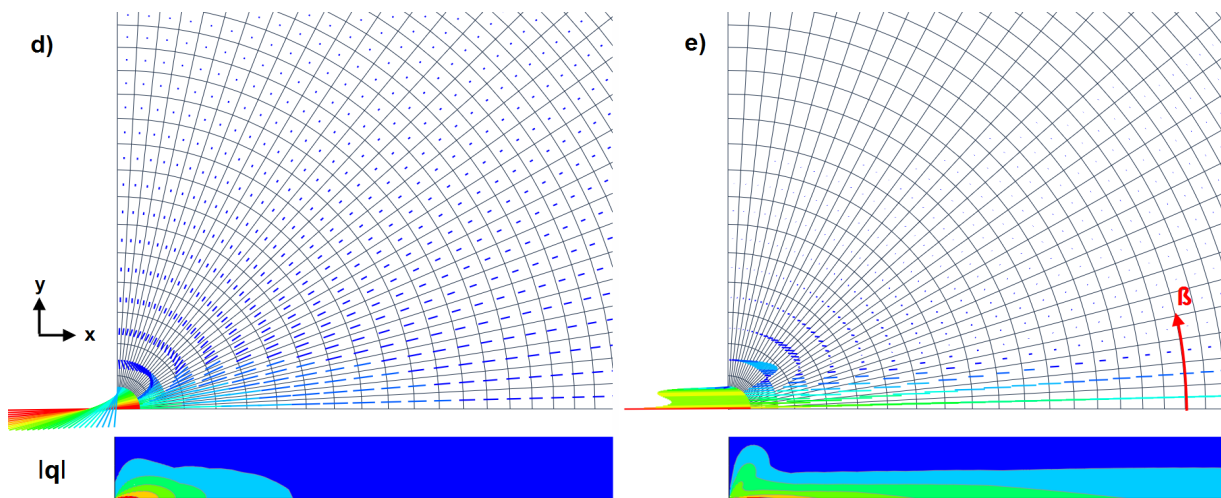


Bild 3.6d-e. Die zentrale Wärmequelle Q in einer Scheibe. Wärmeflussvektoren für 2 unterschiedliche Orthotropieverhältnisse. Die Länge (und die Farbe) ist ein Maß für den Betrag von q .

d) $\lambda_x / \lambda_y = 10$, darunter $|q|$ im Bereich der x-Achse (blau repräsentiert geringen Wärmefluss).
e) $\lambda_x / \lambda_y = 10^3$, q ist radial gerichtet, jedoch fällt sein Betrag für $\beta > 0$ rasch auf null. Darunter: $|q|$. Die x-Orthotropie verschafft dem Wärmefluss einen „Korridor“ in x-Richtung.

Für das gewählte Beispiel der Kreisscheibe mit zentraler Wärmequelle liegt eine analytische Lösung vor, /3/. Danach ist der Wärmeflussvektor stets radial gerichtet, unabhängig vom Grad der Orthotropie, s. Bilder 3.6a bis c. Diese qualitative Aussage wird durch die quantitative relativiert. Die Bilder 3.6e und f zeigen die Wärmeflussvektoren quantitativ in der Nähe der zentralen Wärmequelle. Im Teilbild e) ist schon für $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^3$ zu erkennen, dass nur der x-gerichtete Wärmefluss größtmäßig relevant ist. Der im isotropen Fall in allen Richtungen uniforme Wärmestrom degeneriert im orthotropen Fall zu einem „x-Strahler“, sofern die dominante Orthotropieachse in x-Richtung weist. Man kann sagen: Extreme Orthotropie der Wärmeleitfähigkeit dreht den **relevanten** Wärmestrom um 90° und tangiert dort die Isotherme.

Für die CAIO-Methode hat dieses spezielle Beispiel besondere Bedeutung: Das statische Modell mit seinen HS-Richtungen liefert die Lokalsysteme für das entsprechende Wärmeleitungsmodell. Jedes thermische Element bekommt eine Wärmequelle zugewiesen und verhält sich wie ein lokaler orthotroper Strahler aufgrund seiner orthotropen Wärmeleitfähigkeiten. Bei extremen λ_1 / λ_2 -Verhältnissen tangieren die lokalen Wärmeflüsse ihre Isothermen. (Diese Superposition von „Elementarlösungen“ ist gängige Praxis. Zum Beispiel werden in Kap. 10 eine singuläre Quelle und Senke mit einer Parallelströmung überlagert, um eine bestimmte Strömungskontur zu erhalten.)

Mit dieser Vorgehensweise ist eine sichere Methode aufgezeigt, um CAIO-Linien indirekt über eine orthotrope Wärmeleitungsberechnung zu erhalten. Die thermischen Randbedingungen sind sehr einfach: Aufheizung eines jeden Elements plus Spezifikation einer Referenztemperatur an einem beliebigen Knoten (Bsp. in Kap. 4.1). Die Praxis zeigt, dass das Verfahren sehr gutmütig ist und auch andere Randbedingungen zulässig sind, sofern eine gleichmäßigere Verteilung der Isothermen angestrebt wird.

Die Randbedingungen für das gezeigte Beispiel in Bild 3.6 sind relativ kompliziert: $q(R) \neq$ konstant. Sie sind jedoch notwendig, um die theoretische Lösung in [3] mit FE-Programmen nachzuvollziehen. Das folgende Beispiel soll zeigen, dass auch $q(R) =$ konstant zu den gleichen Resultaten führt, sofern λ_1 / λ_2 sehr groß wird, z.B. $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$.

Bild 3.7 zeigt für unterschiedliche Randbedingungen und Orthotropieverhältnisse die Temperaturverteilung für eine kreisrunde Scheibe mit zentraler Wärmequelle. Um die orthotrope Wärmeleitung für das CAIO-Verfahren nützlich zu machen, ist es offensichtlich erforderlich, die Randbedingungen so wenig restriktiv wie möglich und das Orthotropieverhältnis ausreichend groß zu machen. Zum Beispiel sind auf dem Rand vorgegebene Ableitungen der Lösungsfunktion T (d.h. $\partial T / \partial n$, n =Randnormale) weniger restriktiv als die Lösungsfunktion selbst. Ziel ist es, einfache Randbedingungen zu finden, die als Resultat die Isothermen in das vorgegebene Lokalsystem zwingen. In diesem Scheiben-Beispiel wird ein Lokalsystem definiert, das um $\beta = 30^\circ$ zur x -Achse geneigt ist. Damit soll eine HS-Richtung assoziiert werden, die nicht mit der kartesischen x -Achse identisch ist. Einfache Randbedingungen wären:

- 1) Temperaturvorgabe auf zwei beliebig gewählte Randknoten. Die restlichen nicht spezifizierten Randknoten haben dann implizit den Wärmestrom $q = 0$. Dies entspricht einer Isolierung bzw. dem Temperaturgradienten $\partial T / \partial n = 0$.
- 2) Konstanter Wärmestrom auf dem Rand. Zudem ist statt der Wärmequelle eine Referenztemperatur (z.B. $T=0^\circ\text{C}$) zu spezifizieren, um eine unendliche Aufheizung bzw. Abkühlung zu vermeiden. Die Referenztemperatur wirkt dann als Quelle bzw. Senke.
- 3) Verteilte Wärmequellen w im gesamten Lösungsgebiet, keine Spezifikation auf dem Rand (ein entsprechendes Beispiel zeigt Kap. 4.1).

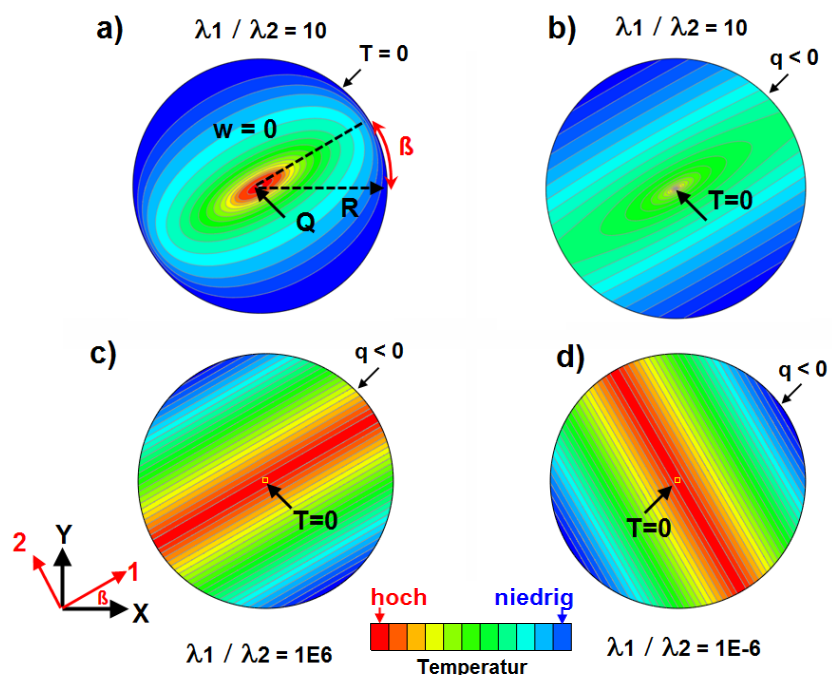
Bild 3.7. Isothermen der stationären Wärmeleitung für verschiedene λ_1 / λ_2 Verhältnisse und Randbedingungen. Das Lokalsystem ist gegenüber dem Globalsystem hier beispielsweise um $\beta=30^\circ$ gedreht.

a) Randbedingungen der Art $T(r=R) = \text{konstant}$ (hier $=0^\circ\text{C}$) produzieren elliptische Isothermen mit sich ändernden Halbachsenverhältnissen. Für $r=R$ ist die Ellipse exakt kreisförmig.

b) dito a) jedoch mit $q < 0$ als Randbedingung.

c) extreme Orthotropie: $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$ simuliert Isothermenneigung β (\rightarrow Orientierung σ_1)

d) extreme Orthotropie: $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^{-6}$ simuliert $\beta + 90^\circ$ (\rightarrow Orientierung σ_2)



Teilbild a): Aus der Verteilung der Isothermen kann gefolgert werden, dass bei der notwendigen Definition der Randbedingungen die direkte Vorgabe der Temperatur auf dem *kompletten* Rand für das CAIO-Verfahren unbrauchbar ist. Das Ziel ist, dass bei extremer Orthotropie der Wärmeleitfähigkeiten die Isotherme in jedem Element (also auch in den Randelementen) die Neigung β annimmt. In diesem Beispiel sind die Randisothermen wegen $T(R)=\text{konstant}$ jedoch kreisförmig.

Teilbilder b) und d): Diese zeigen den Einfluss der Randbedingungen auf das angestrebte Ziel, nämlich dass die Isothermen der Orientierung des Element-Lokalsystems folgen sollen. Werden die Randbedingungen für die Problemstellung in den Bildern 3.1b-d „gelockert“, d. h. dass dort nur der Wärmestrom \mathbf{q} , und zudem für die Scheibenmitte eine Referenztemperatur ($T=0^\circ\text{C}$) definiert werden, so zeigt schon Teilbild b) für die relativ schwache Orthotropie $\lambda_1 / \lambda_2 = 10$ die gewünschte β -Neigung in der Nähe des Randes $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = R$. Bei extremer Orthotropie stellt sich überall die β -Neigung ein, s. die Teilbilder c) und d).

Der Grund für dieses thermische Verhalten liegt in der Gl. (3.5) für die theoretische Lösung der Wärmepunktquelle. Die konzentrischen Isothermen bei $\lambda_1 = \lambda_2$ degenerieren mehr und mehr zu Ellipsen, je größer die Orthotropie der Wärmeleitfähigkeiten ist. Der konstante Wärmestrom \mathbf{q} auf dem Rand ist notwendig, um die triviale Lösung $T(x,y) = 0^\circ\text{C}$ im gesamten Gebiet zu vermeiden (Bilder 3.7b-d).

3.5 Die Drehung des Wärmestromvektors in einer orthotropen Wand

Eine mit unterschiedlichen Materialien geschichtete Wand verhält sich in ihrer Wärmeleitung orthotrop. E. Eckert in [7] berechnet die Richtung des maximalen Wärmestroms in einer geschichteten Wand, die mit der Wandnormalen den Schichtungswinkel β einschließt, Bild 3.8. Die beiden Wärmeleitfähigkeiten λ_p , λ_n parallel bzw. normal zur Schichtung definieren ein orthotropes Hauptsystem λ_1, λ_2 . Die Temperaturen sind auf der linken und rechten Wandseite mit T_1 bzw. T_2 festgelegt. Entsprechend [7] erreicht die Wärmestromdichte ihren maximalen Wert unter dem Winkel γ , gemessen bezüglich der β -Richtung:

$$\tan \gamma = \tan(\beta) \lambda_n / \lambda_p \quad (3.6)$$

Diese Beziehung ist in Bild 3.9 grafisch dargestellt, zusammen mit 2 Lesebeispielen:

Für $\beta = 85^\circ$ und isotropem Material ($\lambda_n / \lambda_p = 1$) wird $\gamma = 85^\circ$ abgelesen, d.h., der Wärmestrom $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$ ist erwartungsgemäß senkrecht zur Wand gerichtet. Der Schichtungswinkel ist bei Isotropie irrelevant.

Für $\beta = 30^\circ$ und orthotropem Material ($\lambda_n / \lambda_p = 0,01$) wird $\gamma = 0,33^\circ$ abgelesen, d.h., der Wärmestrom hat praktisch die β -Orientierung. Wird dagegen $\lambda_n / \lambda_p = 1000$, so ist $\gamma = 89,9^\circ$, d.h., der Wärmestrom hat sich praktisch um 90° gedreht.

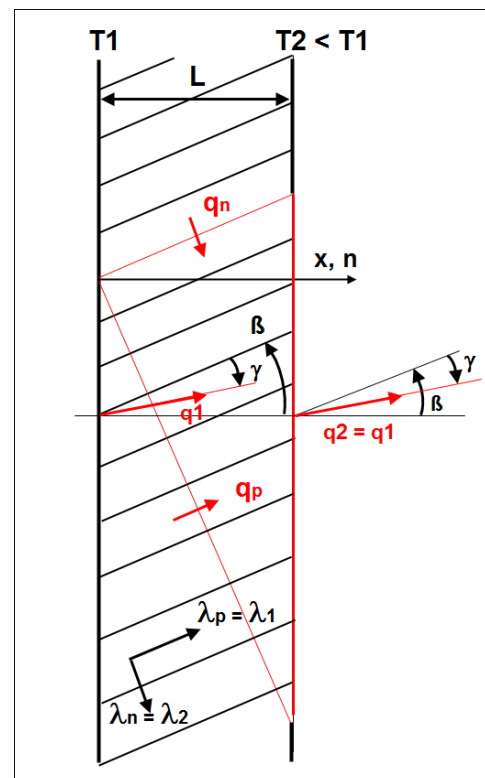


Bild 3.8. Orthotrope Wand mit geschichtetem Material, geneigt um den Winkel β gegen die Wandnormale n .

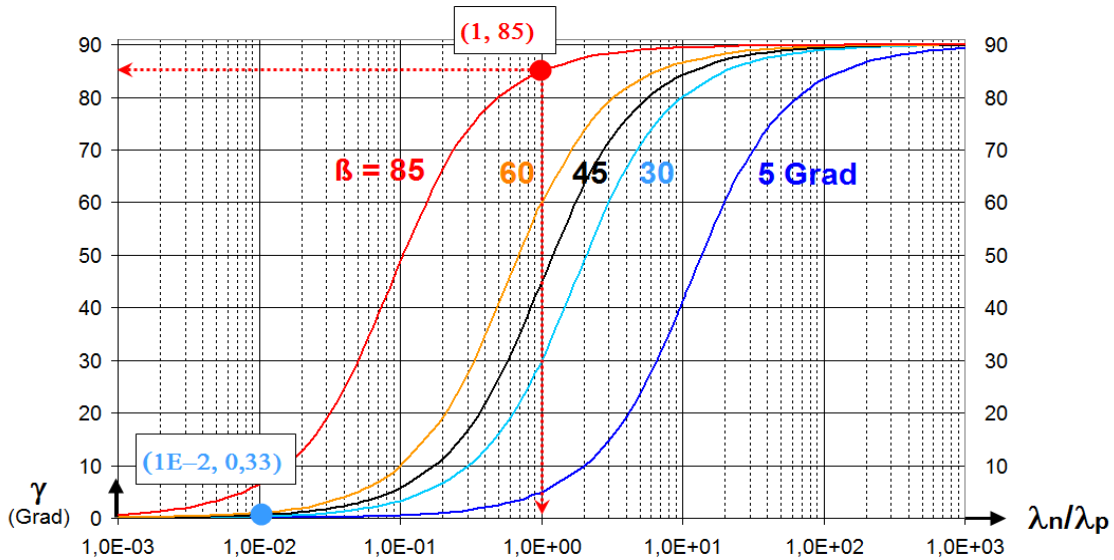


Bild 3.9: Grafische Darstellung der Gl. (3.6) für die Richtung γ (Grad) des maximalen Wärmestroms in Abhängigkeit des Orthotropieverhältnisses λ_n / λ_p . Parameter ist die Neigung β der Schichtung gegenüber der Wandnormalen, s. auch Bild. 3.8.

Auf das 2. Lesebeispiel mit $\beta=30^\circ$ wurde das CAIO-Verfahren angewandt. Bild 3.10 zeigt die orthotrope Wand mit lokal unterschiedlichen Randbedingungen und Orthotropieverhältnissen.

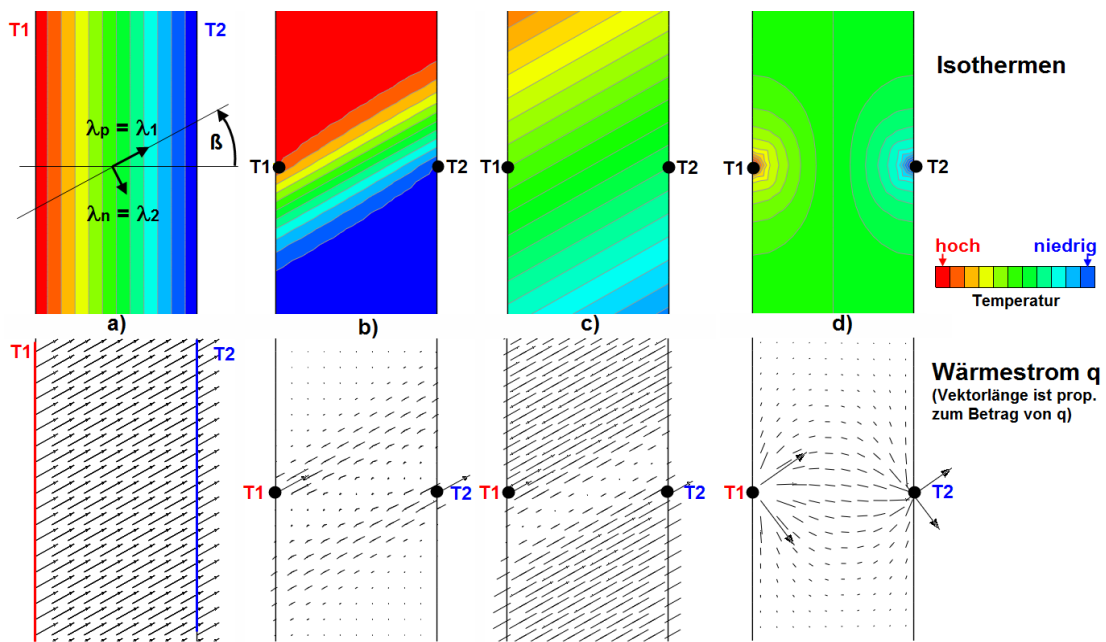


Bild 3.10. Die orthotrope Wand mit lokal unterschiedlichen Randbedingungen und Orthotropieverhältnissen. Der Schichtungswinkel β beträgt 30° , $T_1 = +50^\circ\text{C}$, $T_2 = -50^\circ\text{C}$.

a) Beispiel nach E. Eckert /7/. Die beiden Wandtemperaturen erstrecken sich vertikal unbegrenzt, $\lambda_n / \lambda_p = 0,01$. Die Vorgabe von T auf dem gesamten Rand ist für CAIO ungeeignet.

b) analog zu a) jedoch T_1 und T_2 punktförmig.

c) analog zu b) jedoch $\lambda_n / \lambda_p = 1\text{E-}6$. (Dieses Isothermenbild erhält man auch durch das Aufbringen von $+q$ auf die linke und $-q$ auf die rechte Wandseite schon für $\lambda_n / \lambda_p = 0.01$.)

d) analog zu c) jedoch $\lambda_n / \lambda_p = 1$ (isotrop).

Die künstlichen Temperaturen $T > T_1$ und $T < T_2$ in den Teilbildern b) und c) werden in Kap. 3.6 erläutert.

Die Gl. (3.6) (und deren grafische Darstellung) in Bild 3.9 gilt für uniforme Wandtemperaturen. Auch dieses Beispiel zeigt, dass die Spezifikation der Temperatur auf dem gesamten Rand für CAIO nicht brauchbar ist. Das Teilbild b) zeigt unmittelbar den günstigen Einfluss „gelockerter“ Randbedingungen, die bezüglich der Temperatur nun nur noch an 2 Einzelknoten vorgegeben sind. Jedoch erst für extreme Orthotropieverhältnisse wie im Teilbild c) nehmen die Isothermen im gesamten Lösungsgebiet die gewünschte Orientierung des Lokalsystems mit $\beta=30^\circ$ an. Teilbild d) demonstriert nochmals den Einfluss des Orthotropieverhältnisses: Bei isotropem Material sind die Wärmestromvektoren völlig unabhängig vom Lokalsystem β .

3.6 Der Einfluss der Randbedingungen auf die Qualität der CAIO-Linien

Die drei vorangegangenen Beispiele haben gezeigt, dass eine (extreme) Orthotropie nur zusammen mit einem Temperaturlastfall für das CAIO-Verfahren hilfreich ist. Zudem soll dieser Temperaturlastfall idealerweise einfach, ortsunabhängig und wenig restriktiv sein.

Dies geschieht durch Vorgabe des Wärmestroms, der letztendlich eine differentielle Ableitung der Temperatur nach der Randnormalen bedeutet. Zum Beispiel wird man über einen Teilrand so viel Wärme einfließen lassen, wie man über einen anderen Teilrand wieder abfließen lässt. Zur Fixierung des „Temperaturpotenzials“ ist dann nur noch die Spezifikation einer Referenztemperatur an einem beliebigen Knoten notwendig. Eine Knotenpunkttemperatur wirkt ihrerseits als Quelle oder Senke, deren Stärke jedoch null ist, wenn zuvor die Wärmestrombilanz an den Rändern ausgeglichen ist.

Geeignet ist auch die Vorgabe unterschiedlicher Temperaturen auf 2 verschiedenen Randknoten. Wie Bild 3.10b zeigt, ist ein schwaches Orthotropieverhältnis nicht ausreichend, um im gesamten Lösungsgebiet die Isothermen in das Lokalsystem β zu zwingen, jedoch wird dies durch ein extremes Orthotropieverhältnis leicht erreicht, s. Bild 3.10c. Dass Wärmestromrandbedingungen weniger restriktiv sind als „Primärrandbedingungen“ für die Temperatur kann leicht gezeigt werden: Ersetzt man in Bild 3.10b die Randbedingung für T1 durch einen einfließenden Wärmestrom auf der gesamten linken und T2 durch einen abfließenden Wärmestrom auf der rechten Wand, so ergibt sich (bei Hinzunahme einer Referenztemperatur) für $\lambda_n / \lambda_p = 0,01$ das Isothermenbild aus Bild 3.10c, ein extremes Orthotropieverhältnis ist dafür nicht erforderlich.

Die Robustheit der 2-Knoten-Randbedingung wird auch durch das folgende Beispiel im Bild 3.11 verdeutlicht:

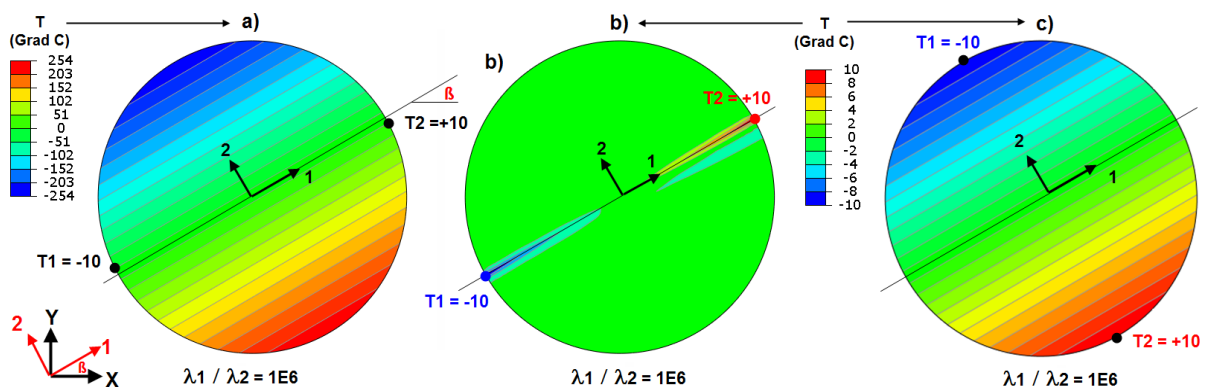


Bild 3.11. Problemstellung wie in Bild 3.7c, jedoch mit veränderten Randbedingungen: $T_1 = -10^\circ\text{C}$ und $T_2 = +10^\circ\text{C}$. Gezeigt sind die Isothermen.

a) Ungünstige Platzierung der 2 Knotenpunkttemperaturen, etwas versetzt gegenüber der β -Neigung. Man beachte die Temperaturbereiche außerhalb der vorgegebenen Temperatur-

spanne von $-10^{\circ}\text{C} < T < +10^{\circ}\text{C}$. Diese sind eine Folge der extremen Orthotropie bei ungünstig platzierten Randbedingungen. Die Qualität der Isothermen bezüglich der geforderten β -Neigung leidet darunter nicht, wie ein Vergleich mit optimal platzierten Randbedingungen in Teilbild c) zeigt.

b) Ungültige Platzierung der 2 Knotenpunkttemperaturen, da diese exakt auf der 1-Achse liegen.

c) Optimale Platzierung der 2 Knotenpunkttemperaturen.

Teilbild a) demonstriert die Robustheit des CAIO-Verfahrens. Obwohl die Platzierung der Randbedingungen gerade noch zulässig ist (man vergleiche mit Teilbild b), ergeben sich Isothermen wie in Teilbild c) bei optimaler Platzierung der Randbedingungen. Die zu den Isothermen gehörenden Temperaturen sind jedoch unphysikalisch und betragsmäßig mit 254°C weit über der vorgegebenen Temperaturspanne von $\pm 10^{\circ}\text{C}$. Dies ist der extremen Orthotropie geschuldet, die extrem feine Elementnetze erfordert, um eine konvergente Lösung ($-10^{\circ}\text{C} < T < +10^{\circ}\text{C}$ im gesamten Gebiet) zu erhalten. Eine erste Elementverfeinerung von 6500 Elementen (Bild 3.11) auf das Vierfache ergibt dasselbe Isothermenbild, jedoch erstreckt sich der Temperaturbereich dann nur noch über $\pm 151^{\circ}\text{C}$ (statt $\pm 254^{\circ}\text{C}$ in Teilbild a). Eine konvergente Lösung bezüglich der Temperaturen ist indessen nicht erforderlich. Die Isothermen selbst schmiegen sich an die vorgegebenen Orthotropierichtungen schon bei moderaten Netzfeinheiten, und zwar umso besser, je extremer das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten λ_1 / λ_2 festgelegt wird.

Teilbild b) zeigt die Grenzen des CAIO-Verfahrens: Die beiden Knotenpunkttemperaturen definieren einen Gradienten, der exakt orthogonal ist zu dem optimalen Gradienten in Teilbild c).

Diese Ausführung erklärt auch die unphysikalischen Temperaturen in den Bildern 3.10b und 3.10c. Wird z.B. dort T1 im oberen linken Eck und T2 im unteren rechten Eck spezifiziert (statt diametral auf kürzestem Abstand), so haben die Isothermen dieselbe β -Neigung. Die sich einstellende Temperatur beschränkt sich dann im gesamten Lösungsbereich auf die vorgegebene Temperaturspanne von $\pm 50^{\circ}\text{C}$.

Die vorgeführten Beispiele waren einfach, in der Praxis wird man jedoch bei realen Problemstellungen häufig Folgendes feststellen: Die Isothermen folgen zwar lokal dem örtlichen Lokalsystem aus den HS-Richtungen der statischen Berechnung, eine gleichmäßige Verteilung der CAIO-Linien liegt jedoch nicht vor. Für eine Verbesserung dieser Umstände ist zwischen ebenen 2D-Scheiben, 2D-Platten und räumlich gekrümmten 3D-Schalen zu unterscheiden.

2D-Scheiben: Die Belastung wirkt in der Scheibenebene. An Lasteinleitungsrändern liegt z.B. eine konstante oder eine linear veränderliche Linienlast vor, letztere wirkt dann als Biegemoment, wie dies im Kap. 3.1 demonstriert wurde. In der entsprechenden nachfolgenden Wärmeleitungsberechnung wird man dann auf diesem Rand die Knotenpunkttemperaturen als Funktion der lokalen Randkoordinaten vorgeben, je nachdem, ob man eine gleichförmige CAIO-Linienverteilung oder eine beanspruchungsgerechte Verteilung dieser „Faserlinien“ wünscht, s. Bild 3.12a. Im Hinblick auf eine übersichtliche Darstellung des CAIO-Verfahrens ist in Bild 3.3 ein einfacher Temperaturgradient in Form zweier Einzeltemperaturen von -35° bzw. $+35^{\circ}$ zugrunde gelegt. Daraus ergibt sich jedoch eine ungleichförmige Verteilung entsprechend dem Bild 3.12b, wobei die Haupteigenschaft der CAIO-Linien respektive Isothermen, nämlich korrekt zu den HS-Richtungen zu liegen, weiterhin erfüllt ist.

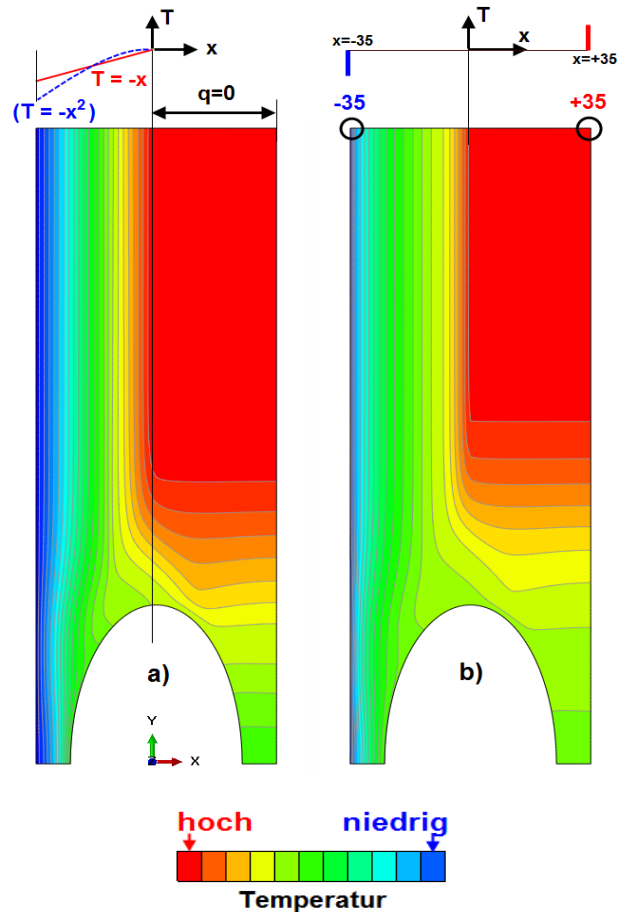
Bild 3.12. Einfluss der Randbedingungen auf die Gleichförmigkeit der CAIO-Linien Kap. 3.1, Bild 3.3a.

a) Gleichförmige CAIO-Linienverteilung
 $T = -x$ für $x \leq 0$, $q=0$ für $x > 0$, s. auch Bild 3.4a.

(Beanspruchungsgerecht wäre $T = -x^2$ für $x \leq 0$, $q=0$ für $x > 0$, s. auch Bild 3.4b.)
 Die Randbedingung $q=0$ muss nicht explizit angegeben werden, diese ist „Default“ auf nicht spezifizierten Rändern.

b) Die Vorgabe von 2 Knotenpunkts-temperaturen („universelle Randbedingung“) resultiert in eine ungleichförmige CAIO-Linienverteilung.

$T(x=-35) = -35^\circ$, $T(x=+35) = +35^\circ$



Offensichtlich ist die Vorgehensweise entsprechend dem Teilbild a) genauer, jedoch ist b) praxisgerechter, da reale Problemfälle komplizierter Natur sein können. Zudem kann aus der Inspektion des Teilbildes b) relativ leicht auf verbesserte Randbedingungen geschlossen werden, da die Isothermen am oberen Rand $T = -x$ für $x \leq 0$, $q=0$ für $x > 0$ suggerieren. Es ist noch darauf hinzuweisen, dass CAIO zusammen mit dem Postprocessor *Tecplot* das optimale Handwerkszeug für die Faserplatzierung ist, da dort interaktiv die Fasern (CAIO-Linien) verschoben werden können.

2D-Platten und 3D-Schalen: Die Belastung wirkt normalerweise quer zur Plattenoberfläche bzw. Schalenmittelfläche. Daraus ergibt sich keine unmittelbar naheliegende „in-plane“ Spannungsverteilung, die eventuell eine Vorgabe von Temperaturen auf einem Teil der Berandung wie bei Scheibenproblemen sinnvoll macht. Vielmehr ist die Vorgabe von unterschiedlichen Temperaturen auf 2 beliebig ausgewählte Randknoten (die möglichst weit auseinanderliegen sollten) die beste Empfehlung. Nach der Erstinspektion der Isothermen kann es empfehlenswert sein, einen oder zwei weitere Knoten im Inneren der Struktur mit vorgegebenen Temperaturen zu beaufschlagen.

Zusammenfassung: Im einleitenden ersten Beispiel wird die *extrem orthotrope* Wärmeleitungsrechnung als Vehikel zur Bestimmung von CAIO-Linien benutzt. Die Methode ist insofern robust, weil die CAIO-Linien fast unabhängig sind von den gewählten Randbedingungen, sofern diese sich auf das Notwendigste beziehen (zum Beispiel 2 Knotenpunktstemperaturen zur Definition eines lokalen Temperaturgradienten).

Die zwei untersuchten theoretischen Aufgabenstellungen mit analytischer Lösung stellen Spezialfälle dar. Die Gültigkeit einer Verallgemeinerung kann damit zwar nicht bewiesen, jedoch stets leicht überprüft werden: Die HS-Richtungspfeile müssen die Isothermen (CAIO-Linien) tangieren.

4. Verhalten der Lösungen in der orthotropen Wärmeleitung bei Existenz singulärer Punkte

4.1 Punktförmige statische Lasten

Punktförmige Lasten treten zwar in der Realität nicht auf, sind aber in Lösungen der Elastizitätstheorie sowie in FE-Berechnungen häufig vertreten. Es ist einleuchtend, dass von einer Punktlast im Nahfeld radiale Hauptspannungslinien ausgehen, die sich exakt im Belastungspunkt treffen. Dieses Verhalten müsste bei orthotroper Wärmeleitung zu sich kreuzenden Isothermen führen, was jedoch physikalisch ausgeschlossen ist: An einem Punkt können nicht unterschiedliche Temperaturen vorliegen. Deshalb erhebt sich die Frage, welche Ergebnisse CAIO-Verfahren unter solchen Umständen liefern? Die Robustheit des Verfahrens wird mithilfe des Beispiels aus Kap. 3.4 gezeigt. Zu diesem Zweck wird jedoch nicht ein Richtungsfeld mit konstantem Winkel β gefordert, sondern ein radiales Richtungsfeld bezüglich eines beliebig gewählten Punktes. In der Scheibe des Bildes 4.1 ist im Punkt Z ein Polarkoordinatensystem definiert, das bei Vorgabe von extremen Wärmeleitungsfähigkeiten in Radial- und Umfangsrichtung entsprechende Isothermen produzieren soll.

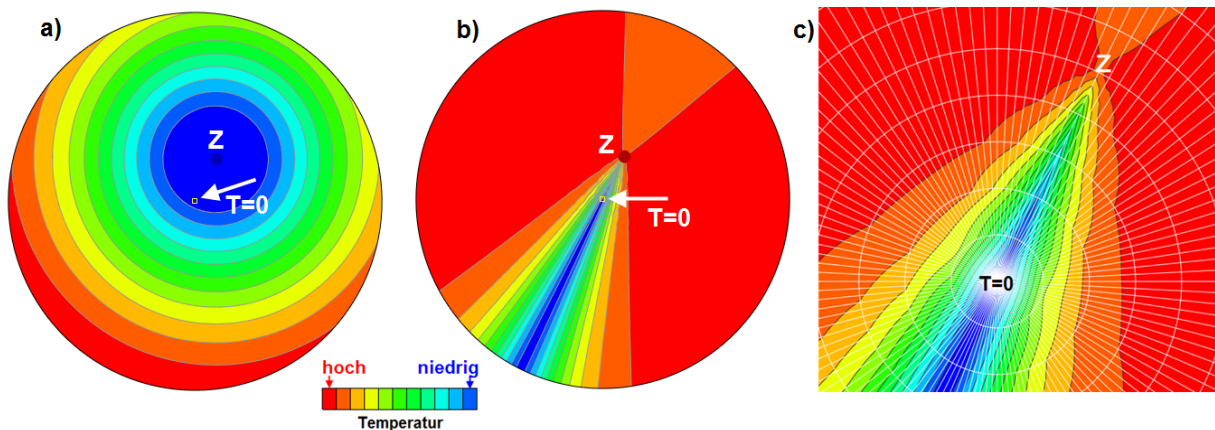


Bild 4.1. Isothermen der stationären Wärmeleitung für extreme λ_1 / λ_2 Verhältnisse im Polarkoordinatensystem mit Zentrum Z. Randbedingungen: Referenztemperatur $T=0^\circ\text{C}$ im Mittelpunkt der Scheibe, gleichmäßige Wärmequellenverteilung $w>0$ auf allen Knoten (Aufheizung).

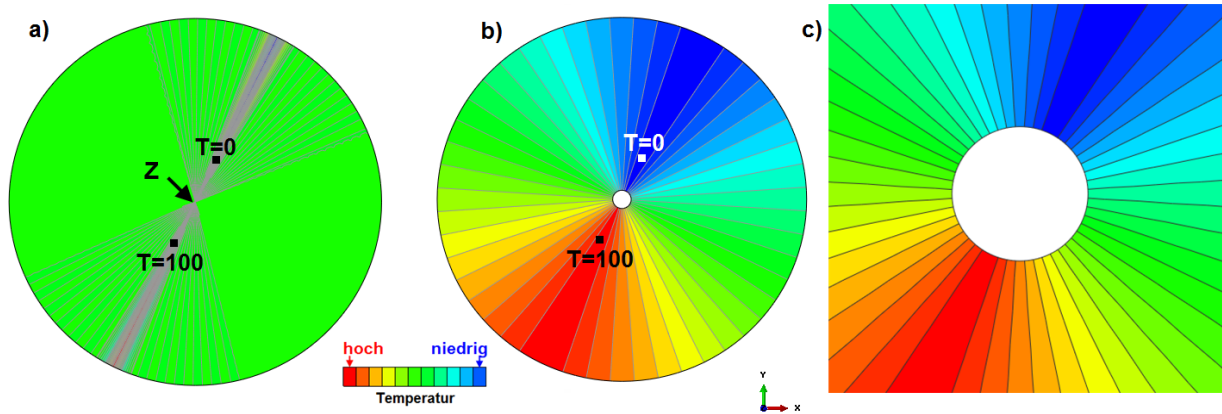
a) extreme Orthotropie: $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^{-6}$ simuliert Umfangsisothermen (entspricht HS2)

b) extreme Orthotropie: $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$ simuliert Radialisothermen (entspricht HS1)

c) Detail aus Teilbild b).

Bild 4.1a ist insofern nicht trivial, weil die Isothermen konzentrisch sind bezüglich Z und nicht bezüglich der Wärmesenke $T=0$. (Bei isotroper Wärmeleitung sind die Isothermen konzentrisch bezüglich der Scheibenmitte, dort wo die Senke $T=0$ definiert ist.) Man beachte auch den „transparenten“ Scheibenrand: Die Isothermen verhalten sich so, als wäre der Scheibenrand nicht vorhanden.

Entsprechend verlaufen die radialen Isothermen. Die Unmöglichkeit unterschiedlicher Temperaturen im Punkt Z wird in der orthotropen Wärmeleitung durch scharf einknickende, „artifizielle“ Isothermen vermieden. Alternativ zu den hier vorliegenden Randbedingungen (w auf allen Knoten, Referenztemperatur an einem beliebigen Knoten) können auch 2 Temperaturen auf 2 beliebigen Knoten definiert werden. Im Bild 4.2 ist die Problemstellung modifiziert.



Das Zentrum des Polarkoordinatensystems ist die Scheibenmitte. Alle Wärmequellen sind beseitigt, es wird nur ein Gradient in Form zweier Einzeltemperaturen vorgegeben.

Bild 4.2. Isothermen der stationären Wärmeleitung für $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$ im Polarkoordinatensystem mit Zentrum Z. Randbedingungen: Temperatur $T=0^\circ\text{C}$ und $T=100^\circ\text{C}$.

a) Scheibe ohne mittige Aussparung: nicht praktikabel.

b) Scheibe mit mittiger Aussparung: Isothermen mit eindeutigen Temperaturen.

c) Detail aus Teilbild b).

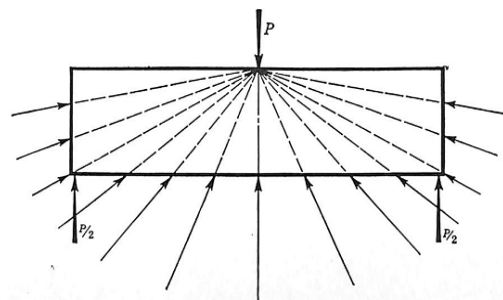
Während Teilbild a) qualitativ keine Verbesserung liefert, zeigt Teilbild b), dass nur eine kleine kreisförmige Aussparung der Lösungsweg bezüglich Gleichförmigkeit und Genauigkeit sein kann. Da die kreisförmige Aussparung in der Praxis sehr klein ausfallen darf, bedeutet diese Problemmodifikation keinen wesentlichen Eingriff.

4.2 Singuläre (neutrale) Punkte mit unbestimmter Hauptspannungsrichtung ($\sigma_1 = \sigma_2$)

Neutrale Punkte mit ($\sigma_1 = \sigma_2$) haben unbestimmte HS-Richtungen, sie sind aus der Spannungsoptik bekannt. Wenn solche Punkte durch lokale Kraffteinwirkung im Inneren der Struktur erzeugt werden, so ist nicht zu erwarten, dass eine Lastverteilung auf wenige Nachbarelemente Abhilfe bringt. Entsprechend den Beispielen aus der Literatur existieren neutrale Punkte auch bei verteilter Last (Streckenlast). Zudem sind (kleine) Materialaussparungen an der Singularität entsprechend dem vorigen Kapitel nicht zulässig, da solche die Problemdefinition abändern (neue Spannungskonzentrationen).

Es ist demnach zu zeigen, wie robust das CAIO-Verfahren ist und ob die singulären Stellen (= neutrale Punkte) im Isothermenbild überhaupt erkennbar sind. Als Beispiel wird der Balken auf 2 Stützen gewählt (Bild 4.3), da dieser in /9/ umfangreich experimentell und theoretisch dokumentiert ist.

Bild 4.3. Die Spannungsverteilung des 2-fach gestützten Balkens folgt aus der Überlagerung zweier Anteile. Der erste ergibt sich aus der elementaren Theorie der Biegung (S1, s. Bild 4.5), der zweite erfasst den Spannungszustand in einem unendlichen Halbraum unter einer zentralen Einzellast P (S2, s. Bild 4.5). Zusätzlich sind Korrekturterme berücksichtigt, um die tatsächlichen Randbedingungen zu erfüllen. Quelle: /9/.



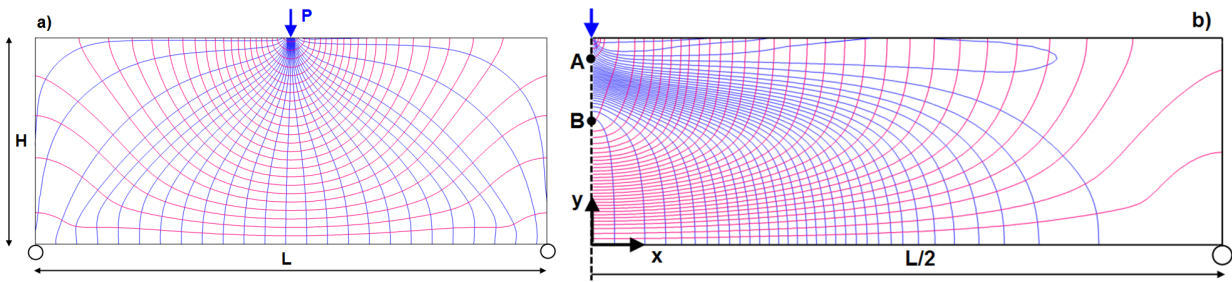


Bild 4.4. Der zweiseitig gelagerte Balken unter Einzellast. CAIO-Linien mithilfe der orthotropen Wärmeleitung. Randbedingungen: Wärmequellen auf allen Strukturpunkten, Referenztemperatur $T=0$ auf dem Lastknoten P.

a) $L/H = 3$, keine neutralen Punkte.

b) $L/H = 6$ (rechte Symmetriehälfte), zwei neutrale Punkte mit $\sigma_1 = \sigma_2$ bei A und B.

Der relativ kurze Balken mit $L/H=3$ in Bild 4.4a weist keine neutralen Punkte auf. Nach /9/ stellen sich solche erst ein für $L/H > 4.24$. Im Teilbild b) sind diese für $L/H = 6$ mit A und B gekennzeichnet. Das Bild 4.5 erläutert schematisch, wie es überhaupt zu neutralen Punkten kommt und wie diese vom Schlankheitsgrad L/H abhängen.

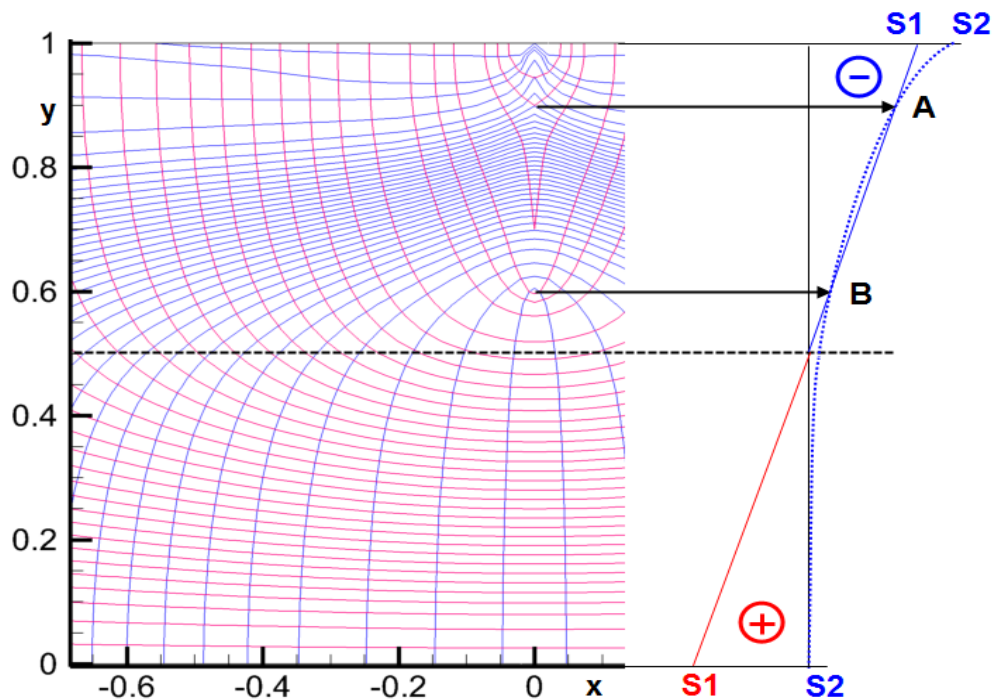


Bild 4.5. Entstehung von neutralen Punkten mit $\sigma_1 = \sigma_2$ bei A und B. Im Schnitt $x=0$ sind die Schubspannungen null, auf der Y-Achse ($x=0$) findet ein Vorzeichenwechsel bezüglich der Schubspannungen im kartesischen Globalsystem statt. σ_x ist dort identisch mit einer der beiden Hauptspannungen. Diese ergibt sich aus Überlagerung zweier Teillösungen S1 und S2 (s. auch Bild 4.3). Für $L/H = 6$ ergeben sich 2 Positionen A und B, an denen die Beiträge aus beiden Teillösungen gleich groß sind, demnach also neutrale Punkte vorliegen. Für den kurzen Balken im Bild 4.4a ist die Neigung der Biegespannungslinie **S1-S1** zu gering und es kommt nicht zum Schnitt mit der Kurve **S2-S2**, es entstehen keine neutralen Punkte. $L/H=4.24$ ist der Grenzfall, in dem die beiden Kurven berühren und zu einem neutralen Punkt führen. Für $L/H \gg 6$ schneiden sich **S1** und **S2** nur in einem Punkt nahe der Balkenmitte mit $\sigma_1 = \sigma_2 \approx 0$.

Bild 4.6 veranschaulicht die Grenzen der *extrem orthotropen* Wärmeleitungsberechnung hinsichtlich ihrer Eigenschaft als Lieferant der Hauptspannungslinien. Die HS-Linien **s1** - **s5** sind im Nahfeld der Last **P** nicht radial auf diesen Lastpunkt ausgerichtet, da die Isothermen als deren Stellvertreter direkt am Lastpunkt nicht unterschiedliche Temperaturwerte einnehmen können. Analoges gilt für die HS-Linien **s1** und **s2**. Diese müssen theoretisch den neutralen Punkt **B** umschließen, so wie dies bei **s3** und **s4** geschieht.

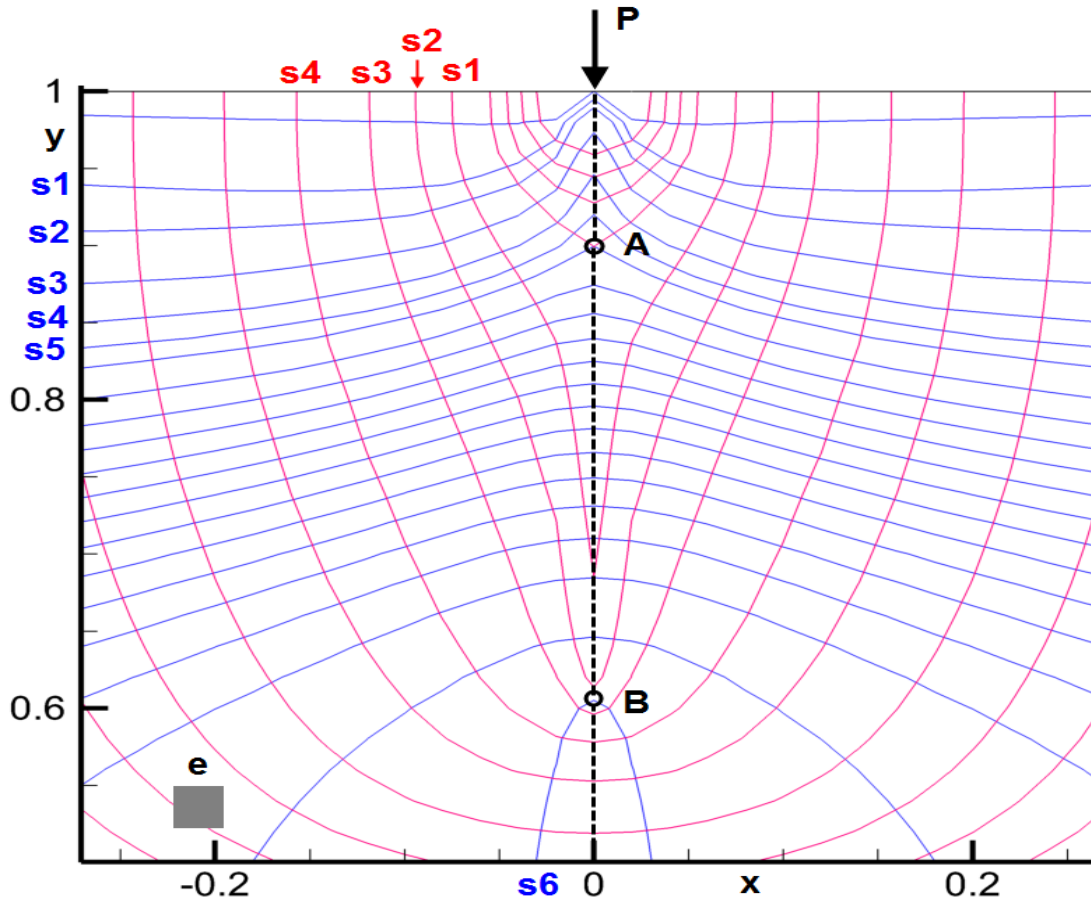


Bild 4.6. Die Grenzen der *extrem orthotropen* Wärmeleitungsberechnung: die HS Linien **s1** bis **s5**, sowie **s1** und **s2** weichen im Nahbereich $x=0$ von den wahren HS-Richtungen ab. Das Element "e" mit den Abmessungen 0.02×0.02 symbolisiert die Netzfeinheit, die im gesamten Lösungsgebiet konstant ist.

Das Problem besteht nur im Einflussbereich der singulären bzw. neutralen Punkte, es liegt in der Natur der Spannungsfelder. In den neutralen und singulären Punkten ist die HS-Richtung unbestimmt, jedoch in unmittelbarer Nachbarschaft liegen eindeutige HS-Richtungen vor. Diese Richtungsvorgaben werden durch die Isothermen der orthotropen Wärmeleitung umso besser eingehalten, je feiner die Diskretisierung ist. Zur praktischen Seite kann jedoch angemerkt werden, dass eine direkte Umsetzung „mängelfreier“ CAIO-Linien in Faserverläufe nicht sinnvoll ist. In der Nähe von **P** und **B** würde eine übermäßige Faser-Aufdickung stattfinden. Die in Bild 4.6 dargestellten HS-Verläufe stellen vielmehr einen realistischen Kompromiss dar, wie die Aufdickung bei weitgehender Einhaltung der HS-Richtungen abgemildert wird.

Je nach Anforderung an die Genauigkeit der Faserplatzierung ist die Kenntnis der Lage von neutralen Punkten mehr oder weniger notwendig. Aus dem Bild 4.6 geht hervor, dass die Lage von **B** durch die HS-Linien **s3** und **s6** eingegrenzt wird, was jedoch hier mehr Zufall ist, je

nach Anzahl der gewählten Isothermen. In diesem Fall empfiehlt sich die Darstellung der Isochromaten, also Linien gleicher Hauptspannungsdifferenz, s. Bild 4.7.

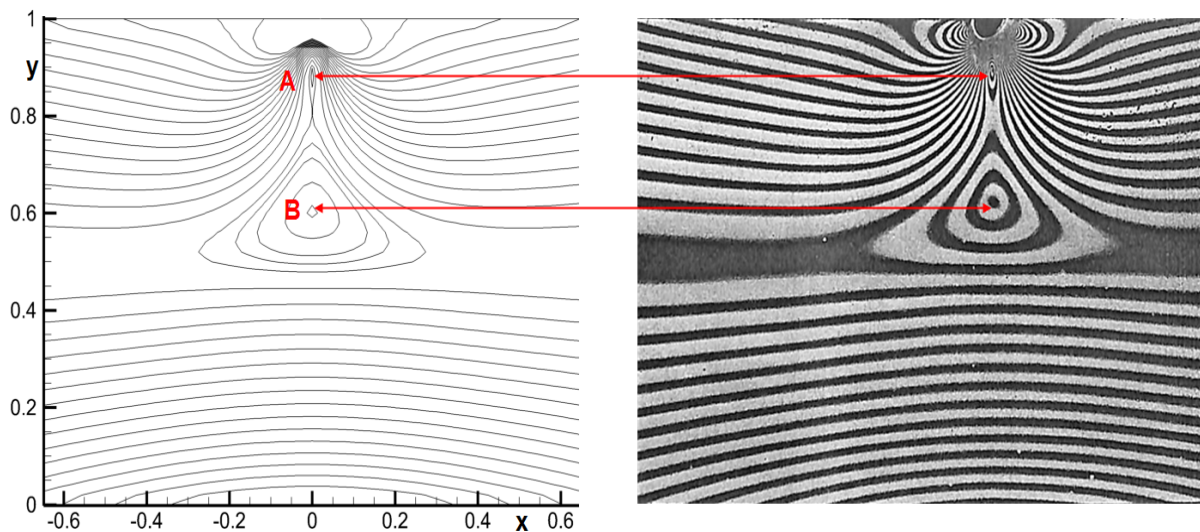


Bild 4.7. Visualisierung der neutralen Punkte über die Darstellung der Isochromaten (Linien gleicher Hauptspannungsdifferenz bzw. maximaler Schubspannung). Balken entsprechend dem Bild 4.4b. Links: FE-Analyse (Abaqus), rechts experimentell nach /9/.

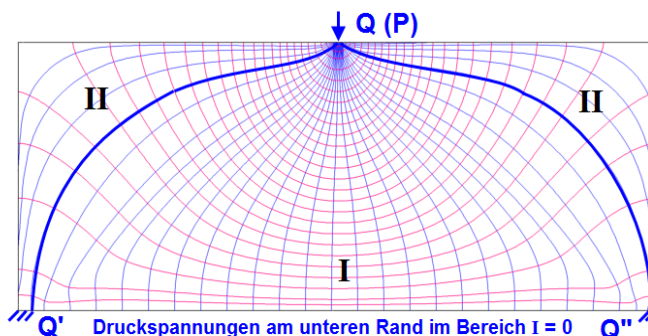
4.3 Exkurs: Der Informationsgehalt von Hauptspannungslinien

Wenn auch die Motivation zur einfachen Berechnung von HS-Linien durch den Wunsch nach einer optimalen Faserplatzierung entstanden ist, so lassen sich aus deren Darstellung noch wichtige Erkenntnisse ziehen, /44/:

Das System der HS-Linien ist deutlich komplexer als die Strom- und Potenziellinien aus der Hydromechanik. So gibt es kein Kontinuitätsgesetz, dass zwischen zwei Linien der 1. (bzw. der 2.) Hauptspannung ein konstanter (Kraft-)Fluss vorhanden ist, so wie das im Fall für 2 Stromlinien gilt. Vielmehr ist der Kraftfluss veränderlich, das System der HS1-Linien gibt an das System der HS2-Linien kontinuierlich Kraft ab oder nimmt auf. Man muss sich das System der orthogonalen HS-Linien als ein Netz vorstellen, an deren Verknüpfungspunkten die Aufnahme bzw. Abgabe von Kräften stattfindet. So kann nach Th. Wyss /44/ der Biegeträger in den Bildern 4.4 - 4.6 als Tragwerk nun wie folgt interpretiert werden:

Bild 4.8. Balken entsprechend dem Bild 4.4a. Wechselwirkung der HS-Linien und Bezeichnungen entsprechend Th. Wyss in /44/:

Abgabesystem I
Tragsystem II



Der Träger besteht aus 3 Quellen Q (Last P + 2 Auflagerkräfte). Ein Großteil der radialen Druckkräfte „versickert“ auf ihrem Weg im Gebiet **I** zum unteren Balkenrand, da dort die Intensität auf null zurückgeht. Der andere Teil der radialen Druckkräfte überstreicht das Teilgebiet **II** und mündet in die Auflager Q' und Q'' . Wyss nennt die **Drucklinien** im Gebiet **II** das Tragsystem und die **Drucklinien** im Gebiet **I** das Abgabesystem. Die **Zuglinien** im Gebiet **I** stellen das Überleitungssystem dar. Ihre Aufgabe ist es, die Kräfte aus dem Abgabesystem der Quelle Q auf das Tragsystem umzuleiten.

Eine weitere anschauliche Visualisierung physikalischer Vorgänge ergibt sich aus der Interpretation der Hauptschubspannungslinien. Diese entstehen durch Drehung der HS-Linien um 45° . Längs solcher Linien findet Gleitung plastisch beanspruchter Körper z.B. bei Umformprozessen statt. Im Kap. 6 wird darauf näher eingegangen.

5. Anwendung der orthotropen Wärmeleitung zur Lösung allgemeiner nichtlinearer Differenzialgleichungen vom Typ $y' = f(x,y)$

In den Kapiteln 3 und 4 werden verschiedene Beispiele angeführt, bei denen die Wärmeleitungsorthotropie nicht auf dem HS-Richtungsfeld basiert, sondern die Richtungen direkt vorgegeben sind, siehe z.B. die Bilder 3.7 und 4.1. Die Verallgemeinerung auf gewöhnliche und nichtlineare Differenzialgleichungen erster Ordnung vom Typ $y' = f(x,y)$ von beliebigem Grad liegt nahe, da für jeden Punkt $P(x,y)$ des Lösungsgebiets die Steigung y' explizit angegeben werden kann. So kann CAIO als numerischer Solver für Differenzialgleichungen dieser Art angesehen werden. Die integrierten Richtungen stellen mathematisch Lösungskurven, strukturell Faserverläufe dar.

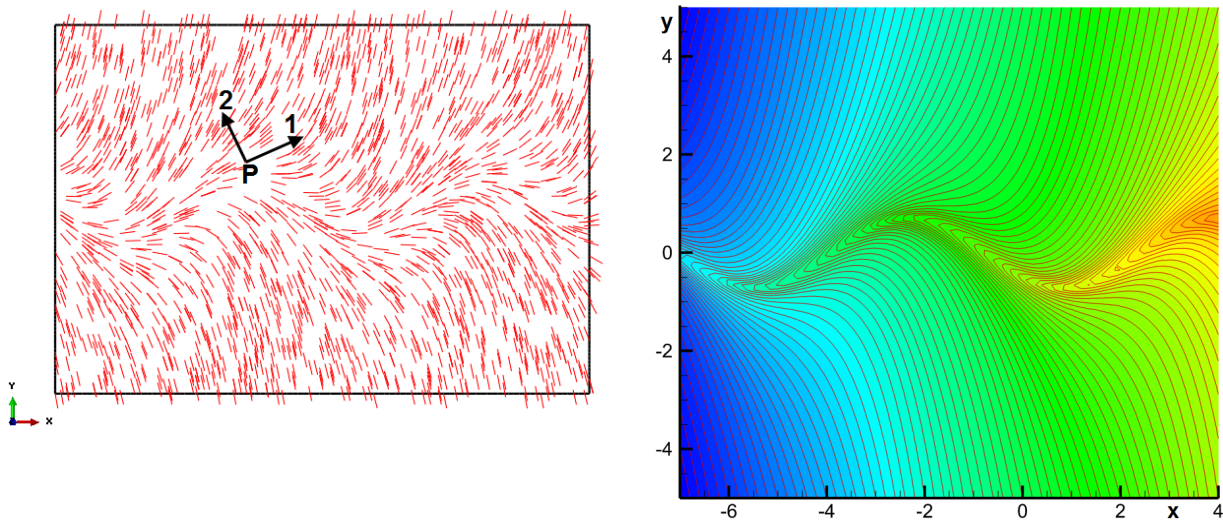


Bild 5.1. CAIO als Integrator für Differenzialgleichungen, CAIO-Testberechnung für $y' = y + \sin x$ für $x_{min} \leq x \leq x_{max}$ und $y_{min} \leq y \leq y_{max}$.

Links: Das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = dy/dx = y + \sin x$. Dieses Feld definiert gleichzeitig das Lokalsystem (1,2), in welchem die orthotropen Wärmeleitfähigkeiten λ_1 und λ_2 vorgegeben werden. Gezeigt sind nur die 1-Richtungen.

Rechts: Lösungskurven für das Richtungsfeld (links). Die orthotrope Wärmeleitungsgleichung wurde mit $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^4$ und 2 willkürlichen Temperaturrandbedingungen auf der x-Achse für x_{min} und x_{max} in Abaqus numerisch gelöst. Die mathematische Lösung lautet:

$$y = C e^x - 0.5 \sin x - 0.5 \cos x$$

und kann methodisch durch die „Variation der Konstanten“ abgeleitet werden /4/. Man erkennt, dass alle „Isothermen“ in die „Störfunktion“ $\sin x$ münden. Eine entsprechend feinere Diskretisierung könnte steilere Temperaturgradienten erfassen, die theoretischen Null-Gradspitzen auf der Störfunktion können jedoch lokal nicht aufgelöst werden.

Das Beispiel im Bild 5.1 steht für die Integration eines skalaren Richtungsfeldes. Die orthotrope Wärmeleitung ist auf diesen Typ allein nicht beschränkt. Die in den vorigen Kapiteln aufgeführten Spannungsprobleme basieren auf tensoriellen Richtungsfeldern, die alternativ durch eine Differentialgleichung angegeben werden können. Die schon in Kap. 1 aufgeführte Differentialgleichung (1.4)

$$y' = dy/dx = \tan \alpha = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) / 2 \tau_{xy} \pm [1 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 / 4 \tau_{xy}^2]^{1/2}$$

repräsentiert das tensorielle Richtungsfeld für einen allgemeinen ebenen Spannungszustand, die Spannungskomponenten selbst sind Funktionen von x und y . Die Rechthandseite liegt für einfachere Problemstellungen analytisch vor, oder aber durch Auswertung der numerisch ermittelten Spannungskomponenten.

Vektorielle Richtungsfelder sind ebenfalls durch die orthotrope Wärmeleitung integrierbar. Die Differenzialgleichung für die ebene Stromlinie lautet, /15/:

$$dy/dx = V_y / V_x \quad (5.1)$$

mit den beiden Geschwindigkeitskomponenten V_x und V_y in x - und y -Richtung. Wie zuvor liegt die Rechthandseite für einfachere Problemstellungen analytisch vor, oder aber durch Auswertung der numerisch ermittelten Geschwindigkeitskomponenten.

6. Anwendung der orthotropen Wärmeleitung zur Bestimmung der Gleitlinienfelder (slip line fields) in starrplastischen Umformprozessen

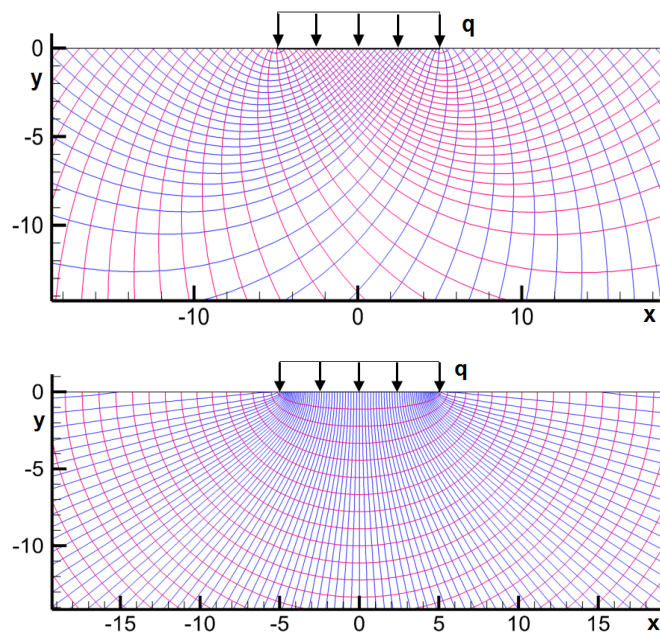
Im Kapitel 4.3 wurde gezeigt, dass die HS-Linien nicht nur die Vorlage für eine optimale Faserplatzierung liefern, sondern auch zum Verständnis des Kraftflusses zwischen Lasteinleitung und den Auflagern beitragen. Noch wertvoller ist die Visualisierung der Hauptschubspannungslinien (HSS-Linien) bei Umformprozessen. Die plastischen Formänderungen sind charakterisiert durch Gleitlinien (Lüders-Bänder), die bei isotroper Plastizität identisch sind mit den HSS-Linien. Jedoch sind die Hauptschubspannungsrichtungen kein direktes Ergebnis einer entsprechenden FE-Rechnung (z.B. in Abaqus oder Ansys), der Schwerpunkt solcher Analysen besteht vielmehr in der Darstellung der plastischen Bereiche.

Die Visualisierung der Gleitlinien trägt einiges zum Verständnis der Umformprozesse bei, aus diesem Grund werden auch heute noch spezielle Verfahren zur Konstruktion von Gleitlinienfeldern angewandt. Die Literatur /13/ liefert dafür viele visualisierte Beispiele, sodass ein Vergleich mit den Ergebnissen des CAIO-Verfahrens möglich ist. Ein häufig zitiertes Beispiel ist das von Prandtl /31/: die Streckenlast auf einer unendlich großen ebenen Halbscheibe. Die HS- und HSS-Linien bei elastischem Verhalten sind in Bild 6.1 dargestellt, um dann später die Unterschiede mit der plastischen Lösung zu demonstrieren.

Bild 6.1. Vorstudie: Das Prandtl-Problem, elastisch gerechnet. Streckenlast auf einer „unendlichen“ Halbscheibe. Der Druck p ist definiert im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ mm. Die Halbscheibe hat einen Radius von 1000 mm. Randbedingungen für $R=1000$ mm: Radialspannungsverteilung aus der theoretischen Lösung für eine Halbscheibe unter Einzellast, s. Timoshenko /38/.

Oben: Hauptschubspannungslinien (HSS), diese sind gegenüber den HS-Linien um 45° geneigt.

Unten: Hauptspannungslinien (HS)



Die von Prandtl gelieferte Lösung setzt ideal starrplastisches Verhalten voraus, d.h., es gibt keine Materialverfestigung, überall ist die (Fließ-)Schubspannung konstant ($\tau = k$) und es interessiert nur der voll plastifizierte Bereich, die elastisch angrenzenden Gebiete sind starr. Längs der Trennungslinie zwischen dem starren und plastischen Bereich findet plastisches Gleiten statt. Die Lage dieser Trennungslinie ist Teil der Lösung. Im vollplastischen Bereich sind die Spannungen nicht mit den Formänderungen, sondern mit den Formänderungsgeschwindigkeiten verknüpft und damit vergleichbar mit dem Fließverhalten zäher Flüssigkeiten.

Damit ergeben sich erhebliche Vereinfachungen für die theoretische Lösung. Es genügen die 2 Gleichgewichtsbedingungen und die Fließbedingung zur Bestimmung der 3 Spannungskomponenten σ_{xx} , σ_{yy} und τ_{xy} (statische Bestimmtheit), s. auch /13/.

$$\partial\sigma_{xx}/\partial x + \partial\tau_{xy}/\partial y = 0, \quad \partial\tau_{xy}/\partial x + \partial\sigma_{yy}/\partial y = 0, \quad \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \tau_{xy}^2 = k^2 = \tau_{\max}^2 \quad (6.1)$$

Im gesamten Lösungsgebiet (der Starrbereich gehört nicht dazu) gilt überall Fließen bei $\tau_{\max} = k$. Übersichtliche Beziehungen ergeben sich, wenn σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} mithilfe des Mohrschen Spannungskreises durch die Variablen $p = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ und $\tau_{xy} = k \cdot \sin 2\varphi$ ersetzt werden ($k =$ Fließschubspannung $=$ konstant, $\varphi =$ Winkel zwischen globaler Schubspannung τ_{xy} und HS-Richtung im Mohrschen Spannungskreis). Wird dann noch beachtet, dass die HSS-Linien „Winkelhalbierende“ der HS-Linien sind, also zwischen dem Neigungswinkel α der Gleitlinien und dem Neigungswinkel φ die Beziehung $\alpha = \varphi + 45^\circ$ besteht, so können die Gleichungen für die 2 senkrecht aufeinanderstehenden Gleitlinien ψ_1 und ψ_2

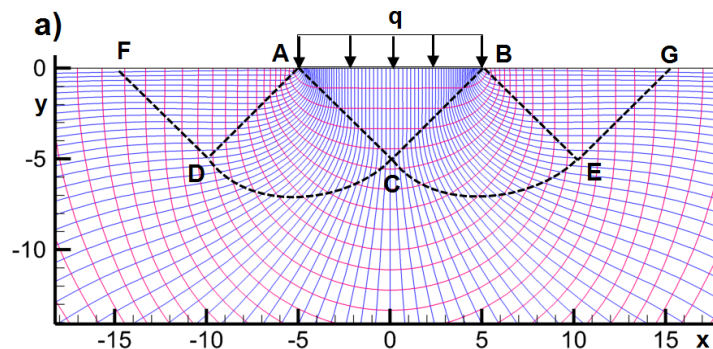
$$\psi_1 = p + 2 k \alpha = \text{const.}, \quad \psi_2 = p - 2 k \alpha = \text{const.} \quad (6.2)$$

abgeleitet werden, s, auch A. Föppl in /8/.

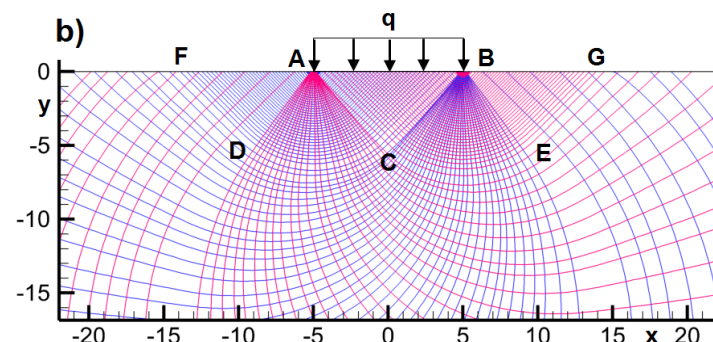
Die Nachrechnung mit FE-Methoden ist direkt nicht möglich, da ein starr-plastisches Materialgesetz nicht realisierbar ist. Es liegt nahe, einen hohen E-Modul und eine niedrige Fließspannung zu wählen, damit $\epsilon_{pl} \gg \epsilon_{el}$ gilt. Schwerwiegender ist die generell andersartige Lösung, da diese wegen des nichtlinearen Fließens nur schrittweise erfolgen kann. Jede Teillösung ist Anfangsbedingung für den nächsten iterativen Schritt. Die so resultierende plastische Zone unterscheidet sich erheblich von der Lösung des linearen starr-plastischen Problems, das direkt in einem einzigen Berechnungsschritt gefunden wird. Es ist dann zu fragen, welche Gemeinsamkeiten die beiden Lösungen dann noch haben? Große Gemeinsamkeiten bestehen in den Gleitlinien und im Spannungsfeld, s. die Bilder 6.2 bis 6.4. Die Berechnung der HS- und HSS-Linien erfolgt wieder über die orthotrope Wärmeleitung. Für die Festlegung von Randbedingungen gilt das in den Kapiteln 3 und 4 Gesagte: Sie sollen so wenig restriktiv wie möglich sein, z.B. durch Vorgabe von 2 Einzeltemperaturen. Diese sind beispielhaft für die HSS-Linien in Bild 6.2b angegeben.

Bild 6.2. Das Prandtl-Problem aus Bild 6.1, jedoch ideal plastisch mit $E = 1E6$ MPa und $k = 2$ MPa, isotrop (d.h. Fließschubspannungen im Zug- und Druckbereich sind identisch). Die FE-Lösung liefert eine Lösung auch unterhalb von FDCEG. Im plastischen Bereich der 5 Zwickel stimmen die Gleitlinien mit der Prandtl'schen Lösung in /8/ gut überein. Der kritische Stempeldruck q , für den unbegrenzt Fließen eintritt, beträgt nach Prandtl $5.14 k$. Das gezeigte Netz der HS- und HSS-Linien entspricht einer Streckenlast $q = 5.9 k$, s. auch Bild 6.4.

a) Hauptspannungslinien. In das Netz der HS-Linien sind die Bereichsgrenzen des Gleitlinienfelds entsprechend den Methoden in /13/ hinein konstruiert worden.



b) Hauptschubspannungslinien.
 HSS -> ψ_1 , CAIO-Temperaturen:
 A = 100° , G = 0°C .
 HSS -> ψ_2 , CAIO-Temperaturen:
 F = 100° , B = 0°C .



Die Theorie der Gleitlinien /13/ starrplastischer Probleme schränkt deren Form stark ein. Dies zeigt auch Gl. (6.2): In den Zwickeln ADF, ABC, BEG ist der Schubwinkel α konstant, Bild 6.2b. Daraus folgt Konstanz längs der ψ_1 bzw. ψ_2 Linie für den hydrostatischen Druck. In den Fächer-Zwickeln ACD und BCE kann der Schubwinkel α den Radialstrahlen, ausgehend von A bzw. B zugeordnet werden. Senkrecht dazu laufen Kreisbogensegmente, s. Bild 6.2b. Gemäß der Gl. (6.2) entspricht eine Winkelzunahme auf der einen HSS-Schar einer Druckzunahme, auf der anderen HSS-Schar jedoch einer Druckabnahme /44/. In anderen Worten: Längs eines geraden HSS-Segments ändern sich weder α noch p . Längs eines gekrümmten HSS-Segments ändern sich α und p gleichermaßen, sodass ihre Summe konstant bleibt, $p + 2k\alpha = \text{konstant}$, α [rad]. Bild 6.3 zeigt die starr-plastische Lösung des originalen Prandtl-Problems, Bild 6.4 die elastisch, ideal plastische FE-Lösung.

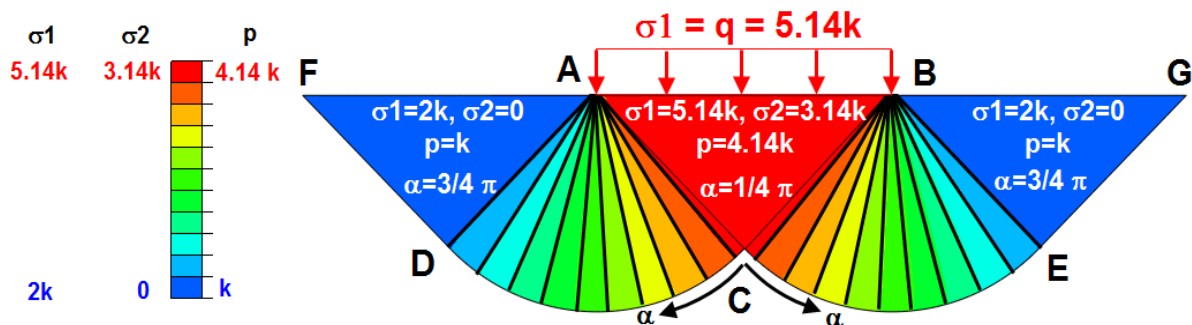
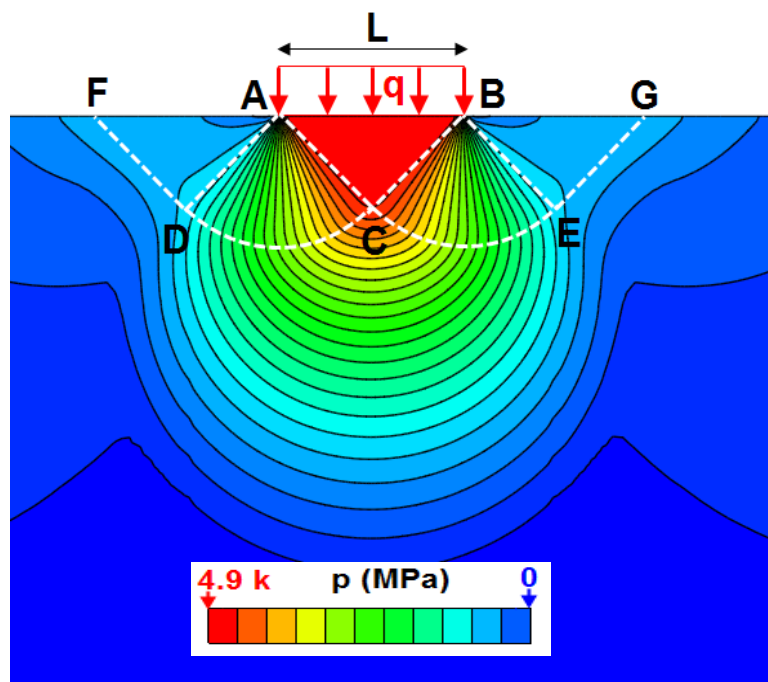


Bild 6.3. Die hydrostatische Druckverteilung p der starr-plastischen Lösung von Prandtl. Aus den Beziehungen am Mohrschen Spannungskreis folgt für die Hauptspannungen: $\sigma_1 = p + k$, $\sigma_2 = p - k$, wobei k die Fließschubspannung ist. Ausgehend von der statischen Randbedingung für den kritischen Stempeldruck $q = \sigma_1 = 5.14k$ kann sukzessive mit Gl. (6.2) der Spannungszustand für das gesamte Lösungsgebiet ermittelt werden. Daraus ergibt sich ein konstanter Spannungszustand für die Dreieckszwickel und ein mit dem Winkel α linear an- bzw. abfallender Spannungszustand in den Fächerdreiecken.

Bild 6.4. Das plastische Prandtl-Problem aus Bild 6.2, dargestellt ist der hydrostatische Druck p aus der FE-Analyse mit Abaqus. Es gilt nach Prandtl (bei Erreichen des kritischen Stempeldrucks $q = 5.14k$) $p_{\max} = 4.14k$. Die FE-Lösung mit Abaqus erbringt für $q = 5.9k$ den maximalen Druck $p_{\max} = 4.9k$. Die höhere Belastung in der FE-Analyse ist wegen des mittragenden elastischen Bereichs unterhalb FDCEG nötig, um die komplett ausgebildete Radialstruktur der Fächer ADC und BCE zu erhalten. In der Abbildung sind die Bereichsgrenzen des Gleitlinienfelds entsprechend den Methoden in /13/ hinein konstruiert worden.



Weniger Übereinstimmung bringt dagegen der Vergleich der plastischen Zonen zwischen Prandtl und FEM. Bei Prandtl sind die 5 Zwickel voraussetzungsgemäß voll plastisch, über die Größe der plastischen Dehnungskomponenten ist keine Aussage getroffen, sie müssen jedoch gering sein, damit seine Annahme kleiner Deformationen gerechtfertigt ist. Das Bild 6.5 zeigt die elastoplastische FE-Lösung mit Abaqus. Der Bereich der plastischen Zonen ist nun größer, da auch das unmittelbar an die Prandtl'schen Zwickel angrenzende Gebiet miteingefasst wird.

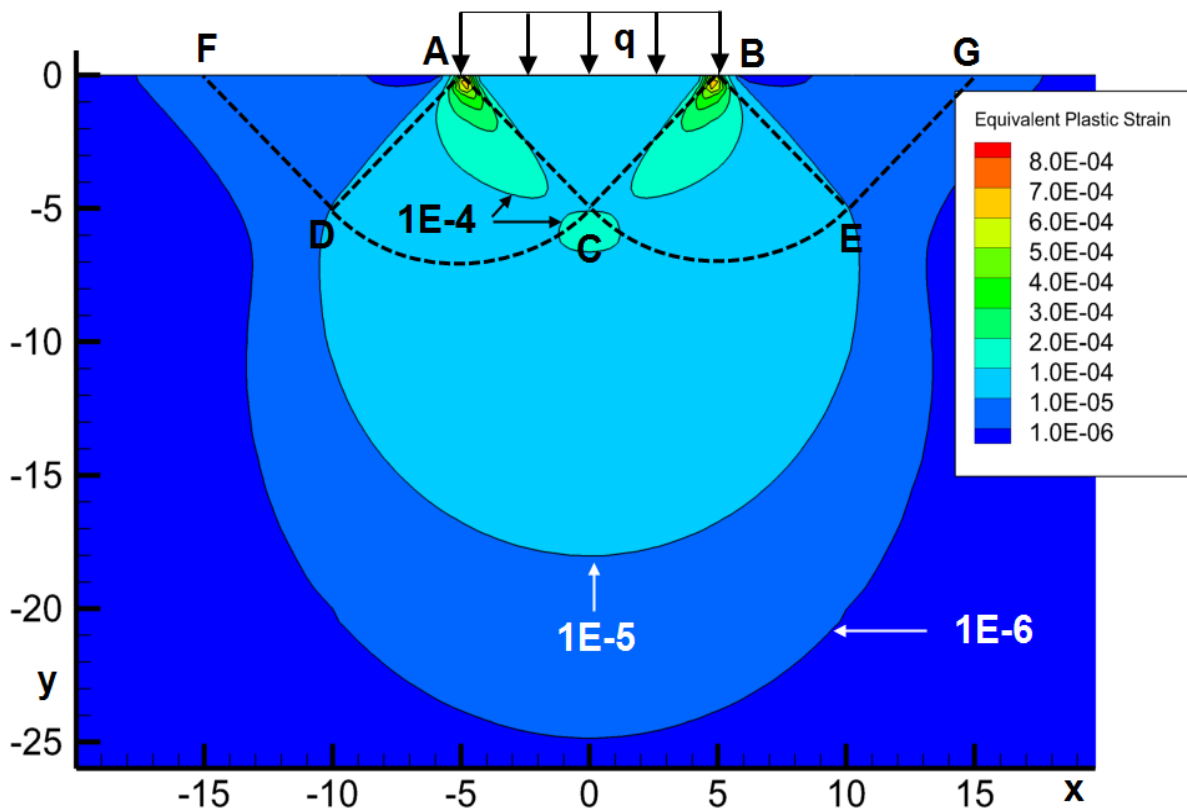


Bild 6.5. Die plastischen Zonen entsprechend der FE-Analyse aus Bild 6.4. Der Vergleich mit dem starr-plastischen Gebiet oberhalb FDCEG ist abhängig von der Wahl einer signifikanten Minimaldehnung. Zur Wahl stehen beispielsweise die Konturlinien 1E-4, 1E-5 und 1E-6. Die plastischen Vergleichsdehnungen entsprechen einer Linienlast $q = 5.9k$ mit $k=2 \text{ MPa}$ längs einer Strecke von 10 mm.

7. Anwendung der orthotropen Wärmeleitung auf alternative Kriterien der optimalen Faserpositionierung (Lastpfad-Methode)

Nachdem in den vorhergehenden Kapiteln die orthotrope Wärmeleitung als numerischer Integrator für HS- und HSS-Richtungen, aber auch für Differenzialgleichungen der Form $y'=f(x,y)$ eingesetzt wurde, liegt es nahe, auch andere Richtungsfelder zu untersuchen. In der Literatur wird als alternative Methode zur Faserplatzierung in HS-Richtung auch die Lastpfadmethode (LP) angewandt, die in mehreren Veröffentlichungen von *Kelly* propagiert wurde, stellvertretend sei /16/ genannt. Als Ergebnis wird der Kraftfluss in 2D- und 3D-Strukturen zwischen Krafteinleitungsstellen und der Lagerung geliefert. Im Gegensatz zu dem Kraftfluss aus den HS-Linien (s. Bsp. des zweiseitig gelagerten Biegeträgers in Kap. 4.3) kann nun ein Zusammenhang mit den Stromlinienbildern aus der Hydromechanik aufgezeigt werden. Die prinzipielle Vorgehensweise wird im folgenden Abschnitt an einem Beispiel demonstriert.

7.1 Einführendes Beispiel zur Demonstration der Lastpfadmethode

Dem Statiker ist das Stromlinienbild eines umströmten Zylinders geläufig. Deshalb soll die dazu passende statische Aufgabenstellung, nämlich die Scheibe mit kreisrundem Loch unter uniaxialem Zug vergleichsweise betrachtet werden. Bild 7.1 zeigt den Ausschnitt einer unendlich großen Scheibe mit Loch, wobei bezüglich $x=0$ eine Spiegelsymmetrie vorhanden ist. Die angelegte Horizontalspannung weitab vom Loch beträgt 1 MPa in x-Richtung, die gezeigten Normalspannungen σ_{xx} erfahren eine Spannungsüberhöhung um das 3fache, die auch von der theoretischen Seite bekannt ist. Den Spannungskonturen ist der Kraftfluss in Form von Stromlinien überlagert, der sich aus der Verbindung von Kraftflussvektoren ergibt. In Kap. 7.2 wird gezeigt, dass der x-Kraftflussvektor $\mathbf{f}_x = [\sigma_{xx} \quad \tau_{xy}]$ in 2D-Strukturen durch das Richtungsfeld

$$y' = dy / dx = \tan \alpha = \tau_{xy} / \sigma_{xx} \quad (7.1)$$

gegeben ist. Das Detail in Bild 7.1b zeigt zusätzlich die Kraftflussvektoren der Gl. (7.1). Man erkennt dort, dass die Kraftflussvektoren die Kraftflusslinien tangieren. Dies entspricht den Geschwindigkeitsvektoren bei einem umströmten Zylinder, die tangential zu den Stromlinien orientiert sind. Die beiden Problemstellungen haben dennoch nichts gemein. Die maximale Spannungsüberhöhung ist im statischen Fall das 3fache der angelegten Spannung. Die maximale Geschwindigkeitsüberhöhung eines umströmten Zylinders beträgt das 2fache der Anströmgeschwindigkeit, sofern die Strömung potenzialtheoretisch untersucht wird. Bei einer solchen Strömung tritt auch keine „Rückströmung“ auf, wie dies in Bild 7.1b erkennbar ist. (Die „Rückströmungen“ sind durch lokale Druckspannungen in x-Richtung bedingt. Das Spannungsfeld der unendlichen Lochplatte in Bild 7.1 ist hier durch eine FE-Analyse generiert, sie liegt aber auch theoretisch exakt vor, z.B. in /40/). Die Integration der Kraftflussvektoren geschieht wieder mittels der orthotropen Wärmeleitung, wobei die 1-Richtung des Lokalsystems für die Wärmeleitfähigkeit λ_1 durch Gl. (7.1) gegeben ist. Die Wärmeleitfähigkeit λ_2 für die darauf senkrecht stehende 2-Richtung ist 10^6 fach kleiner. Die Vorgehensweise für die Integration der HS- bzw. LP-Richtung ist die Gleiche: Im ersten Fall ist Gl. (1.1), im zweiten Fall Gl. (7.1) die Basis für die Orthotropierichtungen.

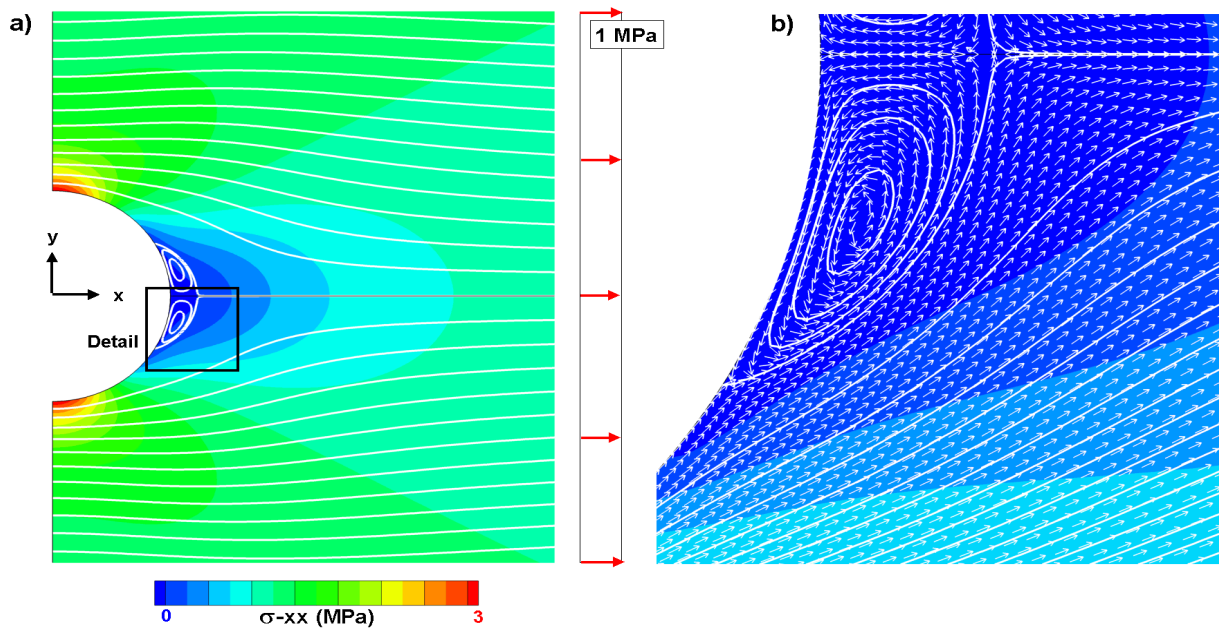
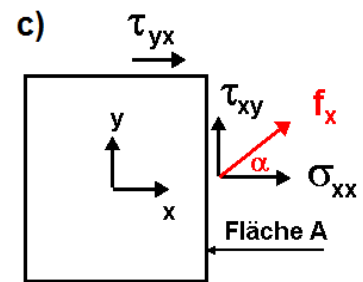


Bild 7.1. Scheibe mit Loch unter horizontaler Beanspruchung, Symmetrie bez. $x=0$. Der Unterschied zwischen den integrierten HS- bzw. LP-Richtungen ist in Bild 13.3 dargestellt.

- a) Normalspannungen σ_{xx} überlagert mit x-Kraftflusslinien (weiß). An der 6- und 12 Uhr Loch-Position ist die Kraftfluss-Liniendichte exakt 3-fach höher als im Querschnitt der Krafteinleitung. Sofern die Scheibe sich ins Unendliche erstreckt, liegen für dieses Problem die Spannungskomponenten in analytischer Form vor, /40/.
- b) Detailplot, ergänzt um die Kraftflussvektoren f_x (weiß).
- c) Definition des Kraftflussvektors f_x .



Welchen Zusatznutzen bringt nun die Visualisierung des Kraftflusses? Man muss sich zunächst noch einmal die physikalische Aussage bezüglich der Kontinuität der x-Komponente des Kraftvektors vergegenwärtigen. Zwischen 2 Kraftflusslinien im Bild 7.1a ist f_x konstant. Diese Kraftkomponente in x-Richtung resultiert aus den Spannungskomponenten σ_{xx} und τ_{yx} , die jedoch zunächst nicht direkt vektoriell addiert werden können, da sie auf verschiedenen Flächen wirken, s. Bild 7.1c. Erst über das Gesetz der zugeordneten Schubspannungen $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ kann τ_{xy} auf dem Flächenelement A mit σ_{xx} vektoriell addiert werden.

Die Umlenkung des x-Kraftflusses am Loch ist also ausschließlich durch induzierte Schubspannungen hervorgerufen und bewirkt eine Verdichtung der Kraftflusslinien um das exakt 3fache an der 6- bzw. 12-Uhr Position des Kreisloches, sofern am rechten Rand in Bild 7.1a die Kraftflusslinien äquidistant positioniert sind.

An dieser Stelle muss betont werden, dass der x-Kraftfluss nur eine Komponente der Gesamtkraft darstellt. In der Hydromechanik gibt es eine solche Vektorkomponente nicht: Der „Fluss“ ist der skalare Gesamtfluss aus der Kontinuitätsgleichung. Liegen die (Strom-)Flusslinien eng beieinander, so ist der Fluss (Durchsatz) hoch. In der Statik muss damit jedoch immer ein vektorieller Fluss assoziiert werden, man betrachtet die Flussbeiträge separat für die globale x-, y- und (in 3D) z-Richtung. Kraftflüsse verlaufen zwischen den auf die Struktur einwirkenden Kräften (externe Lasten, Lagerreaktionen). Lastfreie Ränder werden von den Kraftlinien nur tangiert. Kraftflüsse sind dann optimal, wenn sie möglichst direkt ohne Um-

wege zwischen den Lastpunkten verlaufen, insofern ist eine Beurteilung über die Effizienz der Struktur leicht möglich.

Ineffektive Strukturbereiche sind oft durch „Rückströmungen“ identifizierbar (Bild 7.1b). Im Fall der Lochscheibe tragen diese zum Kraftfluss nichts bei und könnten bei einer Strukturoptimierung eingespart werden.

Der Aufwand für die Visualisierung der Kraftflusslinien ist sehr gering. Finite-Elemente-Programme liefern standardmäßig die Spannungskomponenten, die Vektoren entsprechend der Gl. (7.1) definieren das Richtungsfeld ganz analog zu den HS-Richtungen. Die Verbindung dieser Vektoren zu Kraftflusslinien geschieht wie in Kap. 3, d.h. durch orthotrope Wärmeleitung oder aber auch durch das *streamtracing* Verfahren.

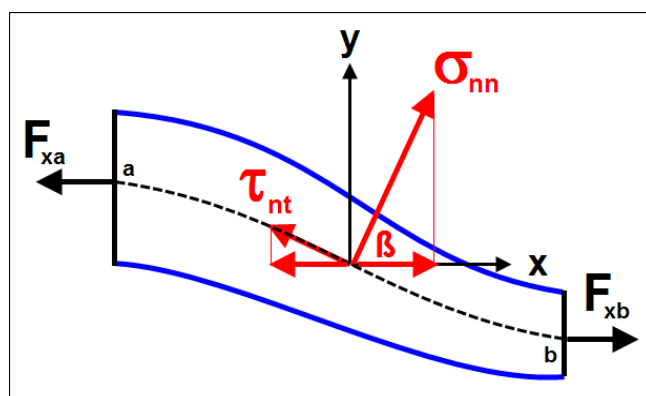
Das gezeigte Beispiel beschränkt sich auf die Darstellung des Kraftflusses in x-Richtung. Der Kraftfluss in y-Richtung existiert ebenso und wird durch Kraftvektoren $\mathbf{f}_y = [\tau_{yx} \ \sigma_{yy}]$ definiert. Da das vorliegende Problem ausschließlich durch eine externe Belastung in x-Richtung charakterisiert ist, bringt die Visualisierung des y-Kraftflusses wenig. Es handelt sich dabei um kreisartig geschlossene Kurven, siehe z.B. /42/.

Die Lastpfad-Methode hat ähnliche Anwendungsmöglichkeiten wie das originale CAIO-Verfahren. Effektiv ist die Methode dann, wenn eine Kraftflussrichtung vorherrschend ist, bei der gezeigten Lochplatte ist es die x-Richtung: Die Faserplatzierung findet in Richtung des Kraftflusses \mathbf{f}_x statt (Bild 7.1a). Die dazu senkrechte Faserplatzierung (bei CAIO: σ_2) entfällt, da der Kraftfluss \mathbf{f}_y nicht signifikant ist. Vielmehr empfiehlt es sich, die \mathbf{f}_x -Faserverläufe auf ein Standardlaminat aufzusticken, s. auch Kap. 13.1. Letztendlich entscheidet ein numerischer Vergleich zwischen den beiden konkurrierenden Methoden über Vor- und Nachteile.

7.2 Ursprüngliche Definition des Kraftflusses

Die Bestimmung der Kraftflussrichtung ähnelt dem Auffinden einer Hauptspannungsrichtung. Diese ergibt sich bekanntlich aus einer Spannungstransformation in ein Hauptsystem, das dem Kriterium der Schubspannungsfreiheit genügt. Da die Spannungen von Ort zu Ort variieren, verändert sich gleichermaßen auch die gesuchte (schubspannungsfreie) Richtung. D.W. Kelly /16/ hat dieses Kriterium nun so abgeändert, dass bei einer bestimmten Transformation des Spannungstensors die x-Komponente des Kraftvektors in globaler x-Richtung konstant bleibt. Diese Vorgehensweise soll hier vereinfacht an einem 2D-System skizziert werden.

Bild 7.2. Prinzipskizze zur Kontinuität des Kraftflusses in x-Richtung



In Bild 7.2 ist zwischen den 2 gesuchten Kraftflusslinien (blau), die im Allgemeinen gekrümmt sind, eine Mittellinie skizziert, welche an jeder Position Spannungen im Globalsystem (x,y) aufweist. Durch eine Transformation der Spannungen auf ein System mit einem ortsabhängigen Winkel β zur globalen x-Achse werden die globalen Spannungen auf die lokalen Größen σ_{nn} und τ_{nt} überführt. Die Richtung \mathbf{n} steht senkrecht, die Richtung \mathbf{t} parallel zur gestrichelten

Mittellinie. Wenn der Winkel β so gewählt wird, dass sich die Projektionen von σ_{nn} und τ_{nt} gerade aufheben, wenn also gilt

$$\sigma_{nn} \cos \beta - \tau_{nt} \sin \beta = 0 \quad (7.2)$$

dann kann längs der Mittellinie „ab“, deren Verlauf jedoch zunächst unbekannt ist, kein Kraftzuwachs in globaler Richtung x erfolgen. In diesem Fall gilt $F_{xa} = F_{xb}$. Man beachte die Ähnlichkeit der Aufgabenstellung bezüglich der Bestimmung der Hauptspannungsrichtung. Dort wird ein System (\mathbf{n}, \mathbf{t}) gesucht, in dem die Schubspannung τ_{nt} verschwindet.

Die weitere Entwicklung der Gl. (7.2) führt in der Originalarbeit /16/ auf eine nichtlineare Gleichung für β , die iterativ gelöst werden kann. Später hat W. Waldman in /42/ eine geschlossene Lösung für β gefunden und zwar

$$\tan \beta = -\sigma_{xx} / \tau_{xy} \quad (7.3a)$$

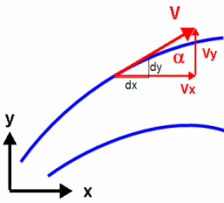
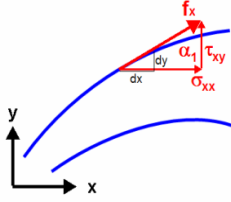
Zwischen β und dem Winkel α in Bild 7.1c besteht die Beziehung $\alpha = 90^\circ + \beta$, α schließt somit den Winkel zwischen τ_{nt} und der x -Achse ein:

$$\tan \alpha = \tau_{xy} / \sigma_{xx} \quad (7.3b)$$

7.3 Kraftflussdefinition über die Analogie zur Hydromechanik

Es geht aber auch anschaulicher. In /25/ und /27/ wird direkt eine Analogie zwischen der Kontinuitätsgleichung der Hydromechanik und dem Kraftfluss für die kartesischen Richtungen x, y und z aufgezeigt. Zu diesem Zweck müssen nur die Terme der differentiellen Kontinuitätsgleichung der Hydromechanik mit denen des statischen Gleichgewichts (ohne Volumenkräfte) aus der Mechanik verglichen werden, hier angewandt auf Probleme in 2D, (in /25/ und /27/ auch in 3D, zudem in Kap. 8.1 aufgeführt):

Bild 7.3. 2D-Analogie zwischen der Kontinuitätsgleichung der Hydromechanik (links) und dem statischen Gleichgewicht in globaler x - und y -Richtung (rechts).

<p>Kontinuitätsgleichung $\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$</p> <p>Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = [v_x \ v_y]$</p> <p>DG der Stromlinie $dy/dx = v_y / v_x = \tan \alpha$</p> <p>Geschwindigkeitsbetrag $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$</p> 	<p>(7.4) Gleichgewicht $\partial \sigma_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y = 0$ $\partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_{yy} / \partial y = 0$ $\tau_{yx} = \tau_{xy}$</p> <p>(7.5) Kraftflussvektor $\mathbf{f}_x = [\sigma_{xx} \ \tau_{xy}]$ $\mathbf{f}_y = [\tau_{yx} \ \sigma_{yy}]$</p> <p>(7.6) DG der Kraftflusslinie $dy/dx = \tau_{xy} / \sigma_{xx} = \tan \alpha_1$ $dy/dx = \sigma_{yy} / \tau_{yx} = \tan \alpha_2$</p> <p>(7.7) Betrag des Kraftflussvektors $f_x = (\sigma_{xx}^2 + \tau_{xy}^2)^{1/2}$ $f_y = (\tau_{xy}^2 + \sigma_{yy}^2)^{1/2}$</p>
 <p>Bsp. f_x</p>	

In einer stationären, inkompressiblen und wirbelfreien ebenen Potenzialströmung (Bild 7.3 links) gilt die Kontinuitätsgleichung (7.4). Zwischen 2 Stromlinien ist der Massenstrom konstant. Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} in Gl. (7.5) tangiert die Stromlinie, letztere kann mithilfe der Differenzialgleichung (7.6) berechnet werden.

Die statischen Gleichgewichtsbeziehungen der Gl. (7.4) bei vernachlässigter Volumenkraft für die Spannungskomponenten σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , die Kraftvektoren \mathbf{f}_x und \mathbf{f}_y in Gl. (7.5) sowie die Differenzialgleichungen für den Kraftfluss der Gl. (7.6) in x- und y-Richtung haben identischen Aufbau wie ihr Pendant aus der Hydromechanik. In einer FE-Analyse müssen also nur die Kraftflussvektoren der Gl. (7.5) bereitgestellt und verbunden werden, um die Kraftflusslinien zu visualisieren.

Es ist zwar einzuwenden, dass die Betragskonstanz einer Kraftflusskomponente, z.B. f_x , weniger griffig ist als die Konstanz des Massenstroms zwischen 2 Stromlinien. Es ist zudem zu abstrahieren, dass es in der Statik zwei Kontinuitätsgleichungen in 2D (bzw. drei in 3D) gibt, während in der Hydromechanik jeweils nur eine Kontinuitätsgleichung existiert, sowohl in 2D als auch in 3D. Für allgemeine Aufgabenstellungen, die signifikante Kraftflüsse in allen Richtungen aufweisen, sind deshalb bis zu 3 Kraftflüsse simultan auszuwerten. Es gibt jedoch etliche Aufgabenstellungen, in denen eine Kraftflussrichtung dominant ist, z.B. in Schraubenverbindungen (s. Kap. 14.1), für die die Lastpfadmethode zur Visualisierung des Kraftflusses sehr geeignet ist.

Es erhebt sich die Frage, ob der Kraftfluss auch bei Verwendung anderer Koordinatensysteme korrekte Ergebnisse liefert, d.h. ob Konstanz einer Kraftflusskomponente längs ihrer Kraftflusslinie vorliegt? Die Antwort ist wiederum über die Analogie zur Hydromechanik zu beantworten, s. Bild 7.4. Werden die entsprechenden Kontinuitätsgleichungen mit den statischen Gleichgewichtsbeziehungen in denselben Koordinatensystemen verglichen, so stimmen sie allenfalls nur für bestimmte Koordinatenrichtungen überein. Zum Beispiel: für ein rotationssymmetrisches System (r, φ, z) stimmt die statische Gleichgewichtsbedingung in Radialrichtung, s. Gl. (7.8), formal nicht mit der Kontinuitätsgleichung überein, eine einfache Formel für den radialen Kraftfluss existiert nicht, im Gegensatz zum axialen Kraftfluss f_z , Gl. (7.9).

Kontinuitätsgleichung – rotationssym. $\partial(r v_r) / \partial r + \partial(r v_z) / \partial z = 0$	(7.8) Gleichgew. (rotationssym.) – radial und axial $\partial \sigma_{rr} / \partial r + \partial \tau_{rz} / \partial z + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) / r = 0$ $\partial(r \tau_{rz}) / \partial r + \partial(r \sigma_{zz}) / \partial z = 0$ $\tau_{rz} = \tau_{rz}$
Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v} = [v_r \ v_z]$	(7.9) Kraftflussvektor $\mathbf{f}_z = [\tau_{rz} \ \sigma_{zz}]$
DG der Stromlinie $dz/dr = r v_z / r v_r = v_z / v_r = \tan \alpha$	(7.10) DG des Kraftflusses in z-Richtung $dz/dr = r \sigma_{zz} / r \tau_{rz} = \sigma_{zz} / \tau_{rz} = \tan \alpha_2$

Bild 7.4. Die Analogie für rotationssymmetrische Koordinatensysteme (r, φ, z) zwischen der Kontinuitätsgleichung der Hydromechanik (links) und dem statischen Gleichgewicht in r- und z-Richtung (rechts) ist nur für die z-Richtung gegeben (rot hervorgehoben).

7.4 Grafische Darstellung der Kraftflussvektoren im Mohrschen Spannungskreis

Der Mohrsche Spannungskreis ist für die Darstellung von Spannungstransformationen, besonders für die Visualisierung der Hauptspannungsrichtung, ein wertvolles grafisches Hilfsmittel. Bild 7.5 zeigt nun, dass die Kraftflussrichtung sich dort ebenso darstellen lässt.

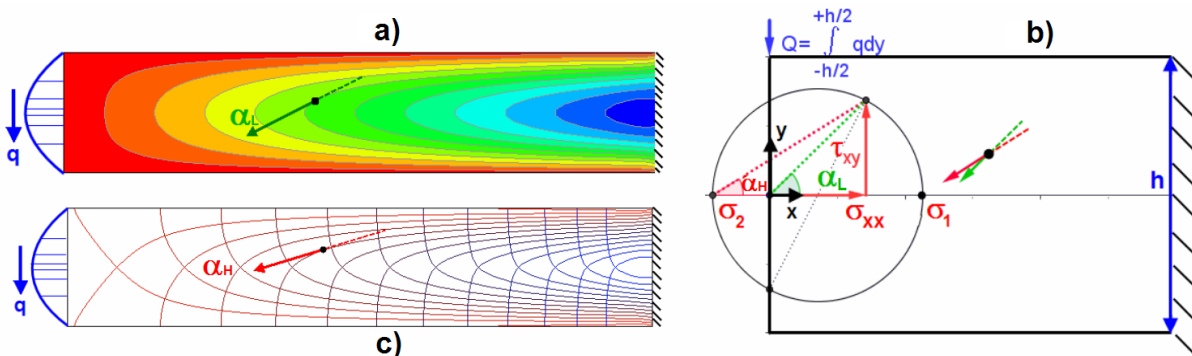


Bild 7.5. Kragbalken unter vertikaler Querlast q bzw. Q . **a)** x -Kraftflusslinien, **b)** Kragbalken (in Horizontalrichtung gestaucht) mit Mohrschem Spannungskreis, **c)** Hauptspannungslinien entsprechend der größten und kleinsten Hauptspannung σ_1 und σ_2

Der Kragbalken unter Querlast ist durch Horizontalspannungen σ_{xx} und τ_{xy} gekennzeichnet. In der elementaren Biegetheorie wird σ_{yy} zu null gesetzt. Obwohl die Querlast in globaler y -Richtung wirkt, ist der Kraftfluss aufgrund der σ_{xx} -Spannungen, besonders beim langen Balken, in x -Richtung dominant. Im Gegensatz dazu steht das Beispiel in Kap. 7.1. Dort stimmt die Belastungsrichtung mit dem dominanten Kraftfluss in x -Richtung überein. Über die Dominanz eines Kraftflusses ist allein die Größe der Beträge von f_x , f_y bzw. f_z entscheidend und hängt nicht zwingend zusammen mit der Belastungsrichtung. Beim Kragbalken resultiert der y -Kraftfluss nur aus dem Beitrag von τ_{xy} und ist im Bild 7.5a durch die blauen Horizontallinien der parabelförmigen q -Verteilung angedeutet. Diese erstrecken sich, horizontal konstant bleibend, bis zur Einspannung des Balkens am rechten Ende.

Der in Bild 7.5a gezeigte Kraftfluss hat in x -Richtung keinen externen Lastbeitrag. Wird das System freigemacht, so erscheinen die Reaktionskräfte als externe Lasten. Die Kraftlinien starten deshalb an der Einspannstelle im Zugbereich ($y > 0$) und enden dort im Druckbereich ($y < 0$), die maximale Umlenkung beträgt 180° . Zwischen 2 Kraftlinien ist f_x konstant, gekennzeichnet durch eine einheitliche Färbung. Das Farbband ist auf der neutralen Achse ($y=0$) maximal gespreizt, die f_x -Intensität also minimal. Dort stammt der Beitrag zu f_x ausschließlich aus τ_{yx} ($= \tau_{xy}$).

In Bild 7.5b demonstriert der Mohrsche Spannungskreis den Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten und der dazugehörigen x -Kraftflussrichtung α_L bzw. der Hauptspannungsrichtung α_H .

Das in Bild 7.5c gezeigte orthogonale System der Hauptspannungslinien resultiert aus dem Vorhandensein von 2 Hauptspannungen. Man erkennt, dass die alternativen x -Kraftflusslinien eine sinnvolle Kombination der senkrecht aufeinander stehenden Hauptspannungslinien darstellen.

Der Verlauf der Kraftfluss- bzw. der Hauptspannungslinien zeigt besonders am Beispiel des Kragbalkens, dass die ursprünglich gewünschte Visualisierung des Kraftverlaufs von der Krafteinleitung bis zur Kraftausleitung perfekt durch den über Gl. (7.5) definierten Kraftfluss wiedergegeben wird. Bei der Darstellung des x -Kraftflusses „fließt“ Kraft nur über die Einspannung, eine externe x -Belastung fehlt im Kragbalken-Beispiel. Die Hauptspannungslinien dagegen verlassen den Kragbalken bei $y = \pm h/2$ senkrecht zur Berandung, zwar mit Nullintensität, jedoch ist dies aus der Darstellung nicht direkt ersichtlich. Diese Darstellung ist somit weniger intuitiv als ihr Pendant zum Kraftfluss.

8. Torsion: Gemeinsamkeiten zwischen CAIO und Lastpfad

Die freie Torsion prismatischer Stäbe stellt einen Sonderfall dar: Der Kraftfluss - genauer Schubfluss - verläuft parallel zur Hauptschubspannungsrichtung (HSS-Richtung), beide Methoden (CAIO und Lastpfad) liefern identische Isothermen (CAIO-Linien).

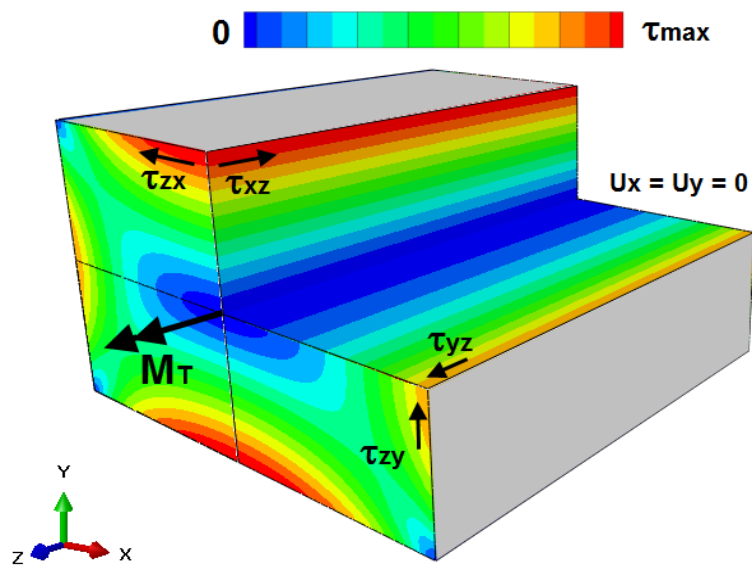
8.1 Die elastische Torsion einfach zusammenhängender Querschnitte

Für die freie Torsion prismatischer Stäbe um die z-Achse gilt bei unbehinderter Querschnittsverwölbung U_z :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0 \quad (8.1)$$

Der Spannungszustand lässt sich an einem repräsentativen Beispiel veranschaulichen, es wird ein Rechteckquerschnitt gewählt, s. Bild 8.1.

Bild 8.1. Torsion eines Rechteckquerschnitts, statische Berechnung mit Abaqus. Der Endquerschnitt ist fixiert, nicht jedoch bezüglich seiner axialen Deformation U_z . Farblich dargestellt ist die Gesamtschubspannung, Gl. (8.10). Um die zugeordneten Schubspannungskomponenten zu kennzeichnen, ist der 1. Quadrant ausgespart. Der Spannungszustand ist unabhängig von z, in allen Querschnitten $z=\text{konstant}$ existieren nur die beiden Komponenten τ_{zx} und τ_{zy} . Die grauen Außenflächen sind spannungsfrei.



Die in Bild 7.3 gezeigten 2D-Beziehungen für das Gleichgewicht (ohne Volumenkräfte) und den Kraftfluss /27/ müssen zuerst noch auf 3 Dimensionen verallgemeinert werden. Die Kraftvektoren können wegen $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ entsprechend alternativ angegeben werden. Man beachte: der 1. Index der Spannungskomponente steht für die Fläche (Normalenrichtung), in der die Spannungskomponente wirkt, der 2. Index steht für die Richtung.

$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0$	Kontinuitätsgl. der Hydromechanik (8.2)
$\partial \sigma_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z = 0$	Gleichgewicht in x-Richtung (8.3)
$\partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \sigma_{yy} / \partial y + \partial \tau_{zy} / \partial z = 0$	Gleichgewicht in y-Richtung (8.4)
$\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y + \partial \sigma_{zz} / \partial z = 0$	Gleichgewicht in z-Richtung (8.5)
$\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]$	Geschwindigkeitsvektor (8.6)
$\mathbf{f}_x = [\sigma_{xx} \ \tau_{xy} \ \tau_{xz}] = [\sigma_{xx} \ \tau_{yx} \ \tau_{zx}]$	Kraftvektor in x-Richtung (8.7)
$\mathbf{f}_y = [\tau_{yx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{yz}] = [\tau_{xy} \ \sigma_{yy} \ \tau_{zy}]$	Kraftvektor in y-Richtung (8.8)
$\mathbf{f}_z = [\tau_{zx} \ \tau_{zy} \ \sigma_{zz}] = [\tau_{xz} \ \tau_{yz} \ \sigma_{zz}]$	Kraftvektor in z-Richtung (8.9)

Da nun entsprechend dem Bild 8.1 der Spannungszustand unabhängig von z ist, d.h., alle Ableitungen nach z verschwinden und zudem bei der Torsion Gl. (8.1) gilt, reduzieren sich die Gleichungen (8.2) bis (8.9). Wenn dann noch die Strömung ebenfalls unabhängig von z definiert wird, verbleiben demnach:

$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y = 0$	Kontinuitätsgl. der Hydromechanik (8.2a)
$\partial \tau_{zx} / \partial z = 0$	Gleichgewicht in x-Richtung (8.3a)
$\partial \tau_{zy} / \partial z = 0$	Gleichgewicht in y-Richtung (8.4a)
$\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y = 0$	Gleichgewicht in z-Richtung (8.5a)
$\partial \tau_{zx} / \partial x + \partial \tau_{zy} / \partial y = 0$	dto., jedoch formuliert für die x-y-Ebene (8.5b)
$\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ 0]$	Geschwindigkeitsvektor (8.6a)
$\mathbf{f}_x = [0 \ 0 \ \tau_{zx}] = [0 \ 0 \ \tau_{zx}]$	Kraftvektor in x-Richtung (8.7a)
$\mathbf{f}_y = [0 \ 0 \ \tau_{zy}] = [0 \ 0 \ \tau_{zy}]$	Kraftvektor in y-Richtung (8.8a)
$\mathbf{f}_z = [\tau_{zx} \ \tau_{zy} \ 0] = [\tau_{zx} \ \tau_{zy} \ 0]$	Kraftvektor in z-Richtung (8.9a)

Für die Torsion sind nur die Gln. (8.5a) und (8.9a) nichttrivial und damit rechentechnisch zweidimensional. Das Gleichgewicht in z-Richtung, Gl. (8.5a), kann besser über die zugeordneten Schubspannungen in Gl. (8.5b) veranschaulicht werden, da dort die Verdrehung des x-y-Querschnitts um die z-Achse offensichtlich ist. Dieser Sachverhalt wird durch die beiden ersten Komponenten des ersten Klammerausdrucks der Gl. (8.9a) wiedergegeben. Die für die Lastpfad-Methode notwendigen Spannungskomponenten τ_{zx} und τ_{zy} stellen das zu integrierende Richtungsfeld im x-y-Querschnitt dar.

Die Gesamtschubspannung τ ergibt sich aus

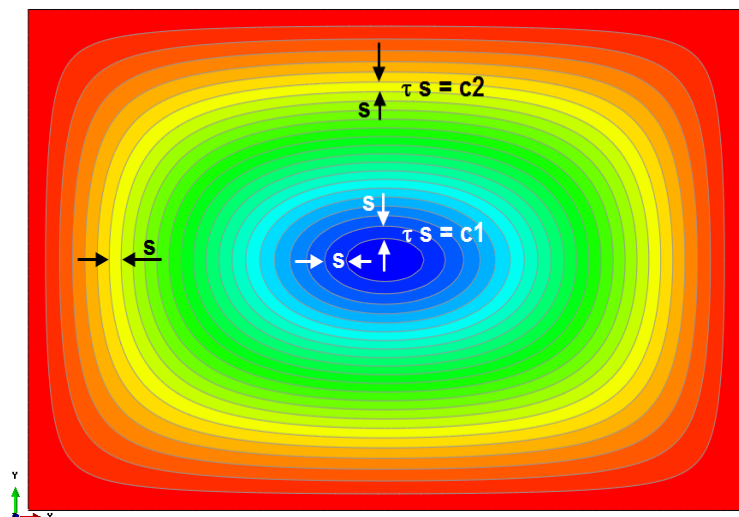
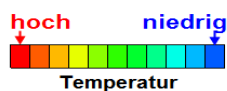
$$\tau = (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{1/2} \tag{8.10}$$

und ist stets maximal in dem Sinne, dass keine der beiden Komponenten τ_{zx} und τ_{zy} größer ist als τ . Demnach ist τ die Hauptschubspannung, die HSS-Richtung ergibt sich aus dem Tangens der beiden Komponenten des Spannungsvektors $[\tau_{zx} \ \tau_{zy}]$.

$$dy/dx = \tau_{zy} / \tau_{zx} \tag{8.11}$$

Der Spannungsvektor ist identisch mit der Krafftflussdefinition der Gl. (8.9a), es gilt demnach für die Torsion prismatischer Stäbe: Das Richtungsfeld der Lastpfadmethode ist identisch mit dem Richtungsfeld der Hauptschubspannungen. Bild 8.2 zeigt die HSS- bzw. Lastpfad-Linien für das Problem aus Bild 8.1, die durch die orthotrope Wärmeleitung aus dem Richtungsfeld der Gl. (8.11) berechnet werden können.

Bild 8.2. HSS- bzw. Lastpfadlinien entsprechend der statischen Berechnung aus dem Bild 8.1. Innerhalb einer Kontur der Breite s ist der Krafftfluss $\tau s = \text{konstant}$, jedoch hat jede Kontur seine eigene Konstante ($c1 \neq c2$). Die orthotrope Wärmeleitung liefert Isothermen mit der vorgeschriebenen Richtung aus Gl. (8.11), kann diese jedoch nicht so anordnen, dass alle Konturen τs die gleiche Konstante c haben.



8.2 Die elastische Torsion mehrfach zusammenhängender Querschnitte

Wenn der prismatische Torsionsstab Hohlräume aufweist, so setzt sich sein Querschnitt aus einer äußeren und mehreren inneren Berandungskurven zusammen.

Bild 8.3 zeigt einen Kastenträger mit einem Zwischensteg unter einer reinen freien Torsion.

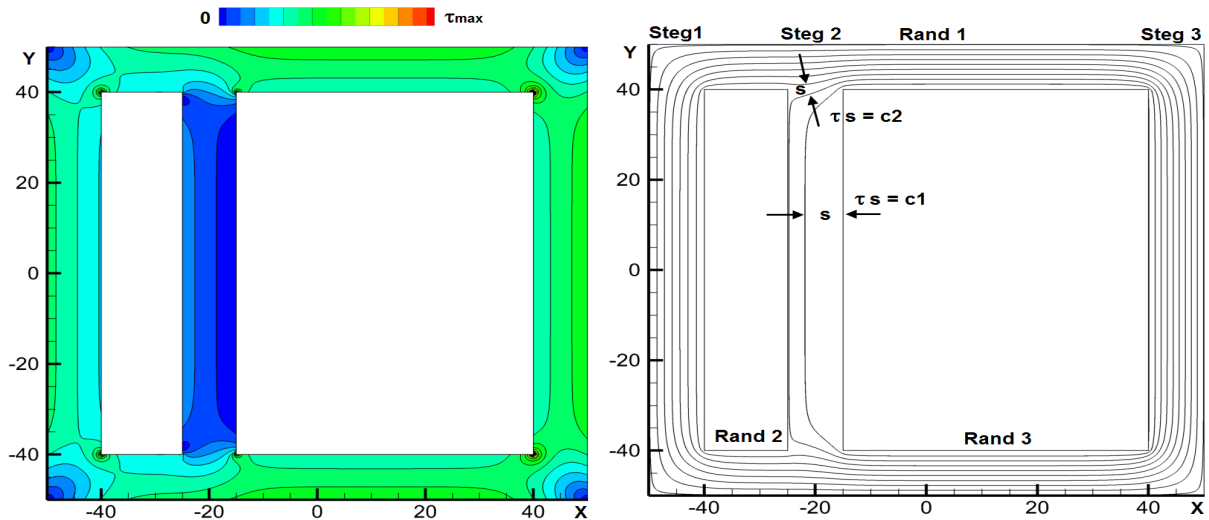


Bild 8.3. Torsion eines Kastenträgers, statische Berechnung mit Abaqus mit Randbedingungen analog zu Bild 8.1.

Links: Gesamtschubspannung $\tau = (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{1/2}$

Rechts: HSS- bzw. Lastpfadlinien entsprechend dem Kraftfluss f_z der Gl. (8.9a). Innerhalb einer Kontur der Breite s ist der Kraftfluss $\tau s = \text{konstant}$, jedoch hat jede Kontur seine eigene Konstante ($c1 \neq c2$). Die orthotrope Wärmeleitung liefert Isothermen mit der vorgeschriebenen Richtung aus Gl. (8.11), kann diese jedoch nicht so anordnen, dass alle Konturen τs die gleiche Konstante c haben. Wenn die Dichte der Kraftlinien grob ist, so wie beispielsweise im Steg 2, muss über die Kraftflussbreite s die Schubspannung τ integriert werden, um den Kraftfluss τs zu erhalten.

Die HSS-Linien stimmen qualitativ sehr gut mit der Lösung einer aus /44/ entnommenen ähnlichen Problemstellung überein. Aus Bild 8.3 rechts ist die Einhaltung des Kontinuitätsgesetzes gut zu erkennen: Die Summe der Kraftlinien in Steg 1 und 2 ist gleich der Anzahl der Kraftlinien in Steg 3. Wäre Steg 2 exakt in der Mitte, so würde aus diesem Steg aufgrund der Symmetrie keine Kraftlinie in Steg 1 oder 3 münden.

9. Die Erweiterung der CAIO-Methode zur Behandlung von ausgeglichenen Winkelverbunden (AWV)

Das in Kap. 3 vorgestellte Integrationsverfahren zur Ermittlung der CAIO-Linien (Faserplatzierung in HS-Richtung: Kreuzverbund) soll erweitert werden, um auch ausgeglichene Winkelverbunde (AWV) zu behandeln. AWV-Layouts sind gekennzeichnet durch Winkelabweichungen um $\pm\beta$ gegenüber einer HS-Richtung. Das so modifizierte Richtungsfeld wird ebenfalls mit der orthotropen Wärmeleitung integriert.

9.1 Die Überlegenheit von AWV gegenüber CAIO-Kreuzverbunden in Gebieten mit Hauptspannungen gleichen Vorzeichens.

Der Nutzen der CAIO-Methode muss mittels geeigneter Methoden nachgewiesen werden. In erster Linie kommt dabei die klassische Laminatstheorie (CLT) zusammen mit FE-Analysen zum Einsatz. Aufwendiger ist der Nachweis mit volumenbasierten 3D-FE-Analysen oder durch geeignete experimentelle Untersuchungen im Labor.

Die Anwendung von CAIO führt direkt zu 2 Fasersystemen, die zu den Richtungen der 1. und 2. Hauptspannung gehören. Ein solcher Verbund wird benötigt im Falle von Hauptspannungen gleicher Größenordnung. Sofern jedoch HS1 betragsmäßig HS2 deutlich übertrifft, so ist die Schicht von HS2, auch wenn diese dickenmäßig entsprechend geringer dimensioniert ist, dem Querkzug aus HS1 ausgesetzt. Es lohnt die Überprüfung, ob nur eine Schicht, zu HS1 gehörend, ausreicht. In diesem Fall müsste die HS1-Faser selbst, zusammen mit der Matrix, genügend Querkzugfestigkeit aufweisen. Wenn dem nicht so ist, kann außerhalb der problematischen Zone trotzdem eine HS1-Schicht ausreichen: Die HS1-Schicht wird als Doppelschicht gestaltet und verzweigt dann in der Problemzone jeweils hälftig in $\pm\beta$ -Richtung (AWV). Diese Strategie geht etwas zu Lasten der hohen HS1-Faserlängsfestigkeit zugunsten seiner geringen Querkfestigkeit und ist am besten über die Kräftezerlegung im Parallelogramm nachvollziehbar. Im Kap. 9.2 wird für eine Lochscheibe das Zwei-Schichten-Modell dem Ein-Schichten-Modell gegenübergestellt.

CAIO erfordert i.A. die Ausdimensionierung zweier Schichten, der HS1- und HS2-Schicht. Nach /33/ kann dies für eine gegebene Belastung in einer ebenen Scheibenstruktur vorab mit der sogenannten Netztheorie erfolgen, nur das Fasernetz trägt, die Tragwirkung der Matrix wird vernachlässigt. Damit entfällt eine Bewertung des Zwischenfaserbruchs (ZFB), der später einsetzende Faserbruch (FB) wird jedoch gut angenähert. Eine korrekte Dimensionierung nach der Netztheorie bedeutet, dass Längs- und Querfasern ihre Zug- bzw. Druckfestigkeitsgrenzen gleichzeitig erreichen. Dies ist der Fall, wenn die Schichtstärken t_1 und t_2 sich verhalten wie

$$t_1 / t_2 = HS1 / HS2 \quad (9.1)$$

wobei HS1 und HS2 die lokalen Hauptspannungen sind. Gl. (9.1) folgt aus der statischen Bestimmtheit, Materialsteifigkeiten spielen dabei keine Rolle. Das Verhältnis aus Gl. (9.1) ist i.A. in einem Bauteil veränderlich, sodass für ein gewichtsoptimales Design ein sehr hoher Aufwand betrieben werden müsste. Selbst wenn man sich auf den maximal beanspruchten Ort im Bauteil beschränkt, so kann nicht erwartet werden, dass sowohl HS1 als auch HS2 *dort* maximal sind, vielmehr liegt das jeweilige Maximum für HS1 und HS2 örtlich auseinander. Diese Schwierigkeiten der Dimensionierung sind jedoch nicht spezifisch für CAIO, sie sind bei Standardlaminaten ebenso vorhanden.

Wichtiger sind jedoch zunächst generelle Untersuchungen, ob CAIO mit seiner Faserplatzierung in HS-Richtung unabhängig von der Ausdimensionierung die bestmögliche Wahl darstellt. Für die Netztheorie und die klassische Laminatstheorie (CLT) sind in /33/ für die folgenden 3 Fälle eine eindeutige Aussage getroffen, abhängig vom Vorzeichen der Hauptspannungen:

- a) HS1 und HS2 > 0

- b) $HS1$ und $HS2 < 0$
- c) $HS1 \cdot HS2 < 0$

Wird nach Gl. (9.1) dimensioniert, so zeigt die Anwendung der Netztheorie, dass der HS-Kreuzverbund für alle 3 Fälle optimal ist. Allerdings werden die gleichen optimalen Ergebnisse für den ausgeglichenen Winkelverbund in den beiden Fällen a) und b) erzielt, sofern die speziellen AWV-Dimensionierungsformeln aus /33/ verwendet werden (hier nicht wiedergegeben).

Anders gestaltet sich die Aussage, wenn realitätsnäher nach CLT beurteilt wird. Eine Ausdimensionierung hängt wegen der statischen Unbestimmtheit von den Materialeigenschaften und den Festigkeitskriterien für FB und ZFB ab. Da der Zwischenfaserbruch vor dem Faserbruch stattfindet, kann für ein bestimmtes ZFB-Kriterium zusammen mit entsprechenden Materialwerten für GFK und CFK eine allgemeine Aussage gemacht werden, s. /23/:

AWV ist optimal für die Fälle a) und b).

Der HS1-HS2-Kreuzverbund ist optimal für Fall c).

Diese Aussage soll nun, wie oben angekündigt im nächsten Kapitel numerisch überprüft werden.

9.2 Ausgeglicherer Winkelverbund versus Kreuzverbund

Die in Bild 9.1 gezeigten Hauptspannungen zeigen für eine uniaxial belastete Lochscheibe das Problem der Querspannungen.

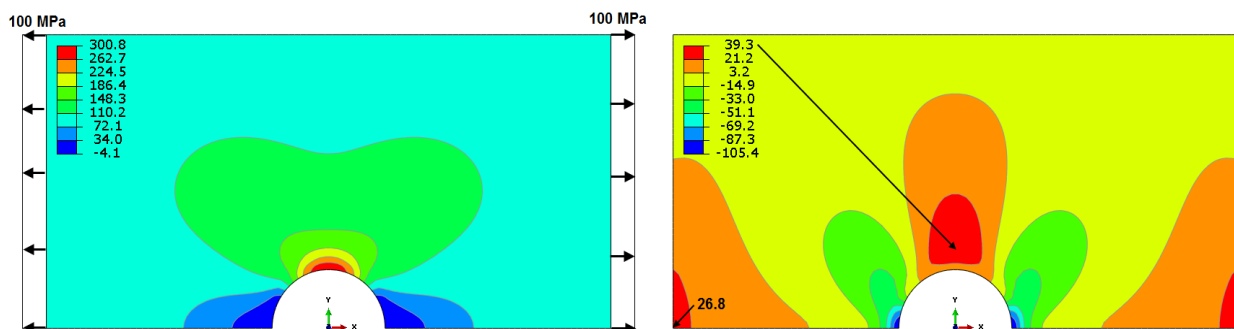


Bild 9.1. Lochscheibe (Halbmodell) unter Zug in x-Richtung, isotrop, Abmessungen, s. Bild 9.4.

Links: Maximale 1. Hauptspannung (MPa), Maximum = 300.8 MPa auf der 12 Uhr-Position.

Rechts: Maximale 2. Hauptspannung (MPa), Maximum = 39.3 MPa über der 12 Uhr-Position.

Bei der dominanten Beanspruchung in x-Richtung genügt eine einlagige Schicht mit Faserorientierung in Richtung der größten Hauptspannung. Die Matrix kann die Querbeanspruchung von 39.3 MPa nur knapp ertragen, s. Bild 9.4e. Wird nun in der Hoffnung auf größere Sicherheit ein zweilagiger CAIO-Verbund gewählt, so könnte das Verhältnis der Schichtdicken entsprechend Gl. (9.1) mit $t_1 / t_2 \approx 300 / 40$ abgeschätzt werden.

Die im Kapitel 9.1 genannten 3 Fälle führen in der Lochscheibe zu einer Zoneneinteilung, für die nach CLT unterschiedliche Optimalkriterien gelten, s. Bild 9.2.

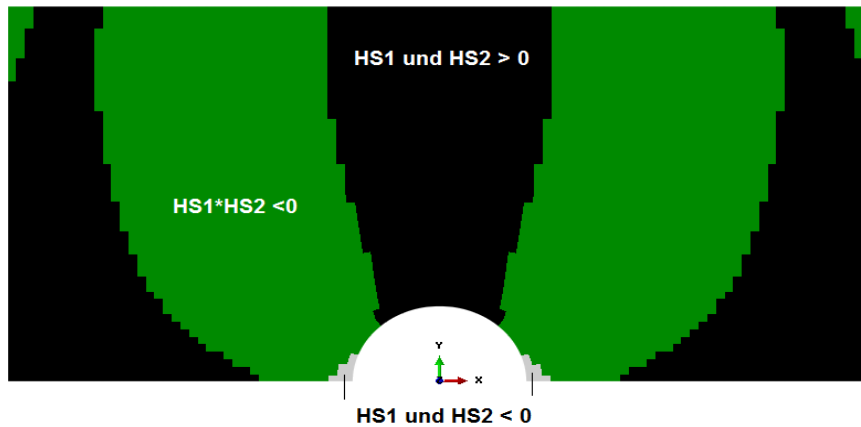


Bild 9.2. Lochscheibe, Einteilung in Zonen mit unterschiedlichem Vorzeichenverhalten für die Hauptspannungen. Nach /33/ und CLT gelten folgende Optimalkriterien:

HS1*HS2 < 0: HS (Kreuzverbund, CAIO)

HS1 und HS2 > 0: AWV

HS1 und HS2 < 0: AWV

Die Winkeldefinitionen $\pm\beta$ des ausgeglichenen Winkelverbunds beziehen sich hier auf eine der beiden HS-Richtungen. Insofern kann AWV als Modifikation des HS-Richtungsfelds gesehen werden. Die Winkelabweichung β bezüglich HS1 ist in /23/ für generische GFK- und CFK-Materialien entsprechend der klassischen Laminatstheorie CLT in Abhängigkeit vom Verhältnis HS1/HS2 tabelliert, s. Bild 9.3. Bild 9.1 zeigt, dass nur der Bereich der signifikanten Querkzugspannungen (Bereich der 12 Uhr-Position) kritisch ist, weshalb die schwarzen Kräfteinleitungszonen und (vereinfachend auch) die grauen Zonen der 3 und 9 Uhr-Position in Bild 9.2 als UD-Schicht in HS1-Richtung (σ_1 - Richtung) gestaltet werden.

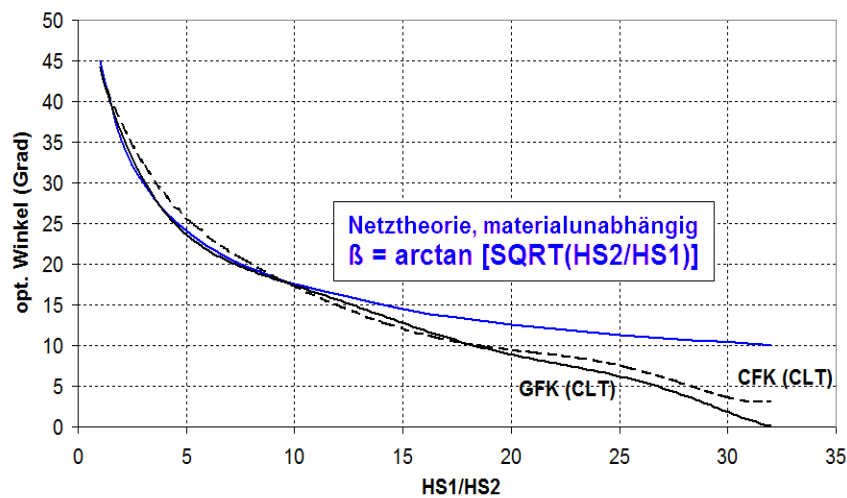


Bild 9.3. AWV in Zonen HS1 und HS2 > 0, s. auch Bild 9.2. (Für HS1 und HS2 < 0 kann mittels /23/ ein analoger Plot für negative Hauptspannungen erstellt werden.)

Optimale β -Winkel für GFK und CFK nach CLT /23/ und Netztheorie /33/ in Abhängigkeit des Hauptspannungsverhältnisses. Die β -Winkel sind relativ zur HS1-Richtung zu messen.

Erweitert man das CAIO-Konzept dahingehend, dass in Zonen mit HS1 > 0 und HS2 > 0 das HS-Richtungsfeld modifiziert wird mit Winkelkorrekturen entsprechend dem Bild 9.3, so führt die Anwendung der orthotropen Wärmeleitung auf AWV-modifizierte CAIO-Linien, siehe Bild 9.4c.

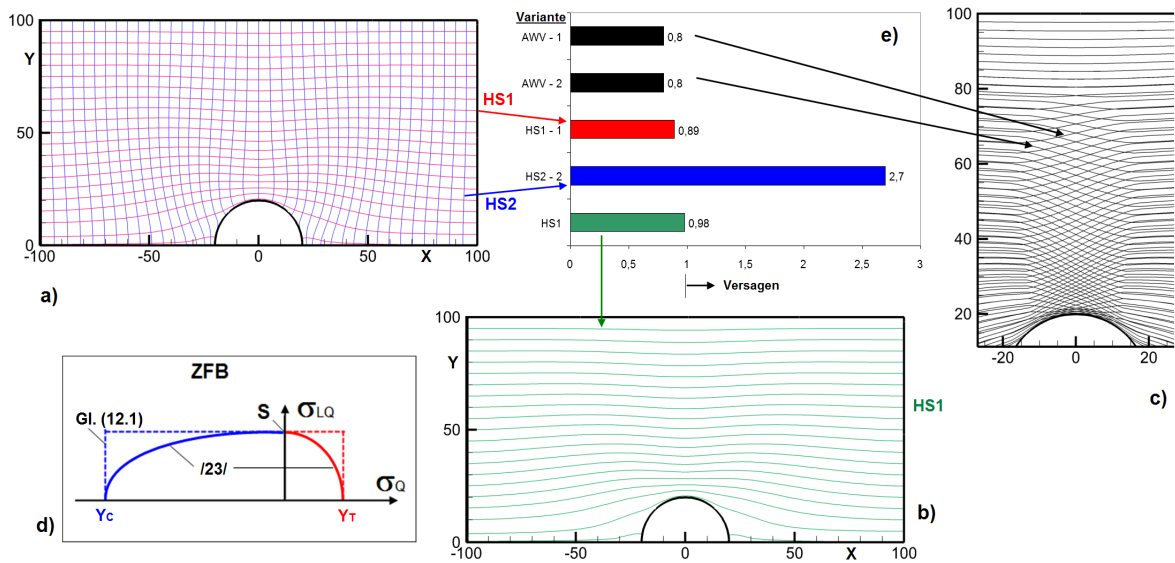


Bild 9.4. Der ausgeglichene Winkelverbund als Modifikation des HS-Richtungsfelds (GFK).

a) Der 2-Schichtenverbund mit CAIO-Linien entsprechend den Richtungen von HS1 und HS2, mit $t_1 / t_2 = 300 / 40$, $t = t_1 + t_2 = 1$ mm.

b) Der 1-Schichtenverbund mit CAIO-Linien entsprechend den Richtungen von HS1, $t=1$ mm.

c) AWV im 2-Schichtenverbund oberhalb der 12 Uhr-Position mit β -Korrekturen der HS1-Richtungen entsprechend dem Bild 9.3, $t_1 = t_2 = 0.5$ mm.

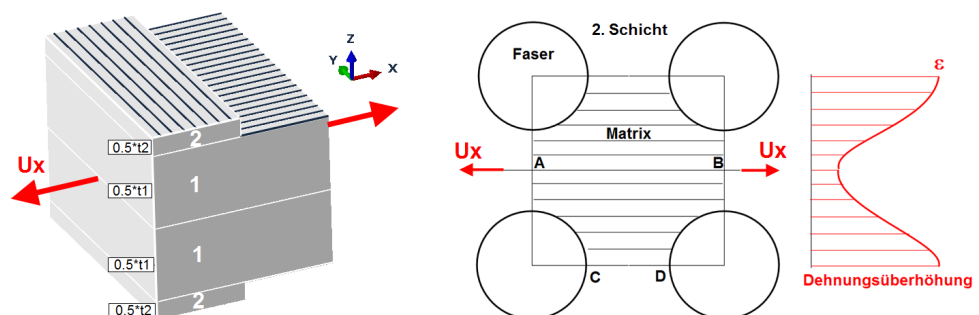
d) Einfaches Zwischenfaserbruch-Kriterium ($|23|$, dort Gl. 7.2.3/2), σ_Q und σ_{LQ} sind Quer- und Schubspannung, S, Y_C und Y_T sind Materialwerte der Tab. 9.1. Die roten und blauen Kurven-segmente sind Ellipsen.

e) Maximaler Versagenswert in den Lochscheiben a), b) und c) nach dem ZFB-Kriterium im Teilbild d). Werte größer 1 bedeuten Zwischenfaserbruch. Man beachte die Reduktion des Versagensfaktors 2.7 auf 0.8, sofern die HS1-Richtungen aus Teilbild b) entsprechend dem Teilbild c) im Bereich $-20 < x < +20$ modifiziert werden.

Der hohe Versagenswert von 2.7 in der **2. HS-Schicht** in Bild 9.4e ist dem Querzug in x-Richtung geschuldet. Die Faser ist deutlich steifer als die Matrix, die Strecke CD in Bild 9.5 erfährt dadurch eine Dehnungsüberhöhung, während die Strecke AB eine kleinere Dehnung aufweist, $|33|$.

Bild 9.5.

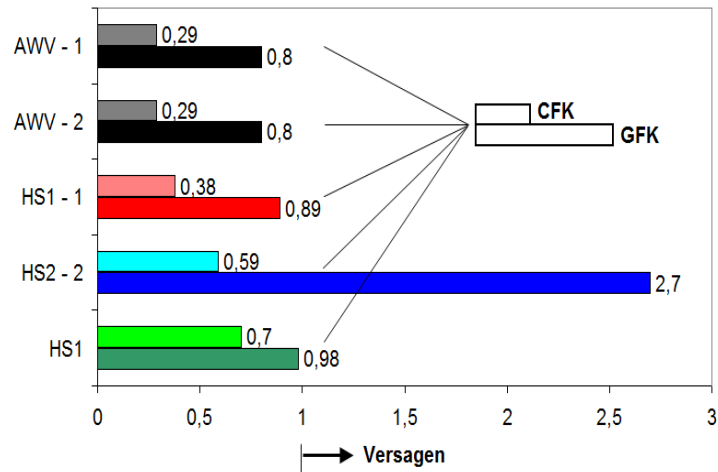
Erklärung des ZFB für den CAIO-Kreuzverbund aus Bild 9.4a (2. Schicht). Das 4-Schichten-Modell sei in x-Richtung über eine konstante Verschiebung U_x uniform gedehnt.



Die steife Faser im Schnitt CD zwingt der Matrix auf der Strecke CD eine höhere Dehnung auf als auf der Strecke AB. Die Überdehnung der Matrix im Schnitt CD ist verantwortlich für die geringe Querzugfestigkeit einer unidirektionalen Schicht.

Das Problem des Zwischenfaserbruchs für die 2-Schichten GFK-Lochscheibe (Bild 9.4e) lässt sich einerseits beheben durch eine Beschränkung auf nur eine GFK-Schicht in HS1-Richtung, besser jedoch durch eine lokale AWW-Gestaltung im Bereich $-20 < x < 20$. Als dritte Möglichkeit ist ein Materialwechsel auf CFK zu erwägen. Da eine Carbonfaser erheblich steifer ist als eine Glasfaser, wird die Querdehnung in Bild 9.5 entsprechend geringer ausfallen, s. Bild 9.6.

Bild 9.6. Vergleich der GFK- mit der CFK-Lochscheibe bei unveränderten Schichtdicken. Die hellen Farben des oberen Balkens stehen für CFK, die dunkleren des unteren Balkens für GFK. Die GFK-Resultate finden sich schon in Bild 9.4e. Für die deutliche Reduktion des Versagensfaktors von 2.7 (GFK) auf 0.59 (CFK) in der 2. HS-Schicht ist das fast 4fach höhere Verhältnis von E_1/E_2 von CFK gegenüber GFK verantwortlich, s. Tab. 9.1. Man beachte die sehr günstigen CFK-Resultate für das AWW-Layup.



Der Nachteil eines Kreuzverbunds in einem Gebiet mit $HS1 > 0$ und $HS2 > 0$ gegenüber einem AWW-Layup ist umso größer, je höher das Verhältnis $HS1/HS2$ ausfällt. Dies erklärt auch das schlechte Abschneiden der horizontal belasteten Lochplatte, deren charakteristisches Verhältnis $HS1/HS2 = 300/40 = 7.5$ beträgt, s. Bild 9.4e. Der Sachverhalt wird klar, wenn die Sicherheitsfaktoren des CAIO-Kreuzverbunds und AWW in Abhängigkeit des Hauptspannungsverhältnisses aufgetragen werden, s. Bild 9.7.

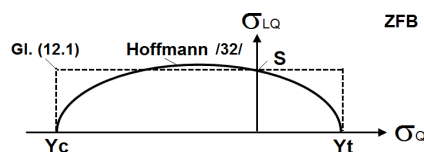
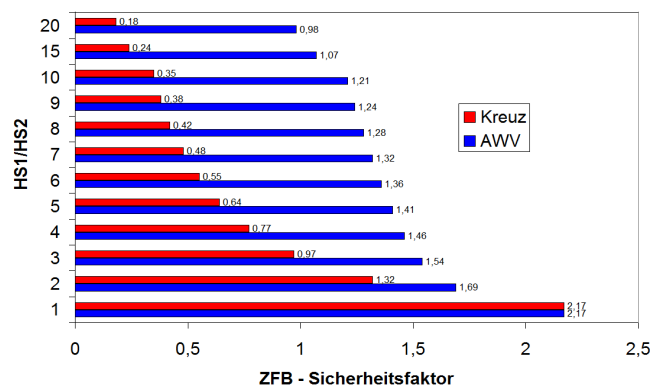
Bild 9.7. Laminatcheck (Anhang , /e/) AWW versus HS-Kreuzverbund für positive Hauptspannungen. Sicherheitsfaktoren aus dem ZFB-Kriterium nach Hoffmann /32/ in Abhängigkeit des HS-Verhältnisses für ein 2-Schichten-Laminat aus GFK (Tab. 9.1) mit der Gesamtdicke $t = t_1 + t_2 = 3 \text{ mm}$. (Das einfachere ZFB-Kriterium in Bild 9.4d steht in dem Laminator Programm (Anhang , /e/) nicht zur Verfügung.) Die angelegten Beanspruchungen sind:

$$100 < HS1 < 2000 \text{ MPa}$$

$$HS2 = 100 \text{ MPa} = \text{konstant.}$$

Die angegebenen Sicherheitsfaktoren sind als Multiplikatoren für die Belastung zu sehen, die zu einem Zwischenfaserbruch führen.

AWV: $[+\beta \mid -\beta]_S$ mit $t_1 = t_2$ und nach Bild 9.3. **Kreuz:** $[0^\circ \mid 90^\circ]_S$ mit t_1/t_2 nach Gl. (9.1).



Tab. 9.1 – Materialkennwerte für CFK und GFK [MPa] nach /23/.

	CFK-HT	GFK
Längsmodul E_1	130000	44500
Quersmodul E_2	9500	12500
Schubmodul G	5600	6000
Längszugfestigkeit X_T	1500	1300
Längsdruckfestigkeit X_C	1400	800
Querzugfestigkeit Y_T	45	35
Querdruckfestigkeit Y_C	200	140
Schubfestigkeit S	70	75
Querkontraktion ν [-]	0,3	0,28
Dichte ρ [kg/m ³]	1550	2040

Die Bilder 9.4 und 9.8 demonstrieren, dass der lokal angewendete AWV eine signifikante Verbesserung des herkömmlichen CAIO-Designs darstellt. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Faserplatzierung in HS-Richtung aufgegeben werden muss. Vielmehr wird in Gebieten mit gleichem Vorzeichen der Hauptspannungen das HS-Richtungsfeld modifiziert. AWV folgt dann der Richtung von HS1 mit variablen β -Korrekturen für die Orientierung von λ_1 in Abhängigkeit von den lokalen Verhältnissen HS1/HS2. Die Vorgaben für die Richtungskorrektur resultieren aus einer Optimierung von 2-Schicht-Laminaten mittels CLT, s. Bild 9.3. Die ingenieurmäßige Bereitstellung von Richtungsfeldern stellt somit eine weitere Anwendungsmöglichkeit der orthotropen Wärmeleitung zu deren Integration dar.

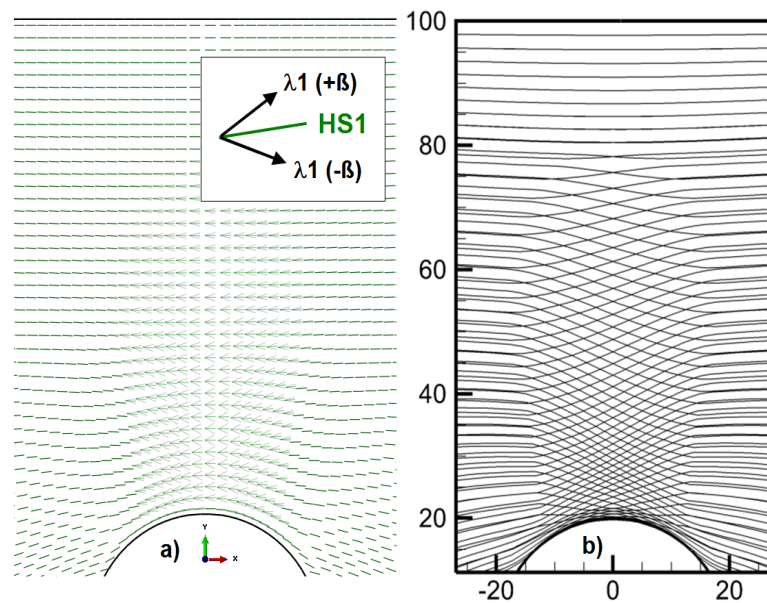


Bild 9.8.

- a)** Richtungsfelder $\pm\beta$ korrigieren das **HS1-Richtungsfeld**. Da sich die HS1-Linien im Gebiet $HS1 \cdot HS2 > 0$ in $\pm\beta$ -Richtung verzweigen, sind 2 orthotrope Wärmeleitungsrechnungen durchzuführen. Die hohe Wärmeleitfähigkeit ($\lambda_1 = 10^6$) gilt sowohl für $+\beta$ als auch für $-\beta$.
- b)** Integration von a) mittels der orthotropen Wärmeleitung.

Die einlagige CAIO-Schicht mit lokalen, zweilagigen AWV-Korrekturen kann jedoch nicht überall eingesetzt werden. Ein Biegebalken (als Scheibe gedacht) erfordert ein 2-lagiges CAIO-System entsprechend dem Beispiel aus Kap. 3.1. Es erhebt sich die Frage, ob ein zweilagiger CAIO-Verbund ebenfalls von (dann vierlagigen) AWV-Korrekturen profitiert? Eine Scheibe mit Doppelnut unter Biegung (Bild 9.9) soll die Frage exemplarisch beantworten. In diesem Fall wird jede der beiden HS-Schichten als Doppelschicht vorgesehen, die sich dann in Problemzonen jeweils hälftig in $\pm\beta$ -Richtung (AWV) aufteilt.

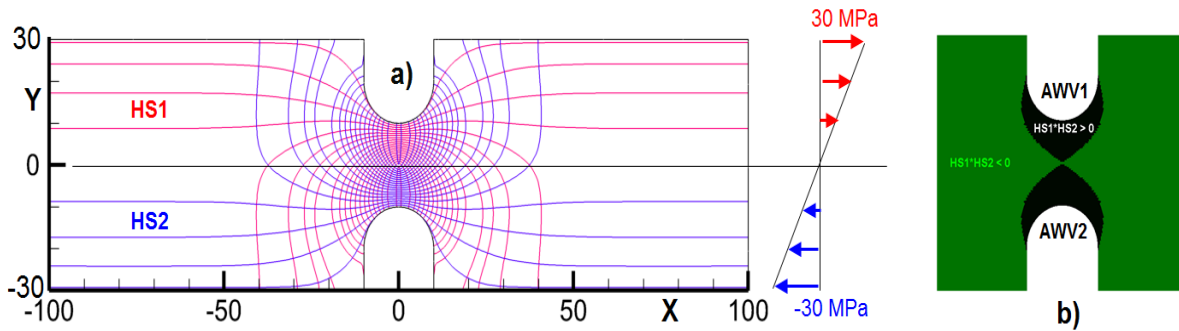
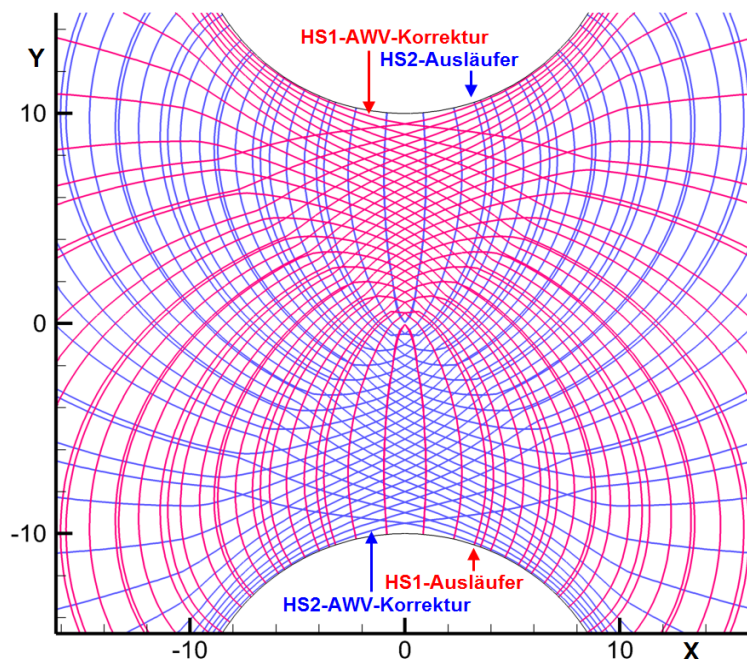


Bild 9.9. Scheibe mit Doppelnut unter Wechselbiegung ± 30 MPa. Einspannung bei $x=-100$.
a) **HS1**- und **HS2**-CAIO-Linien, berechnet mit orthotroper Wärmeleitung. Randbedingungen: **HS1**: $T(x=0, y>0) = y, \lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$, **HS2**: $T(x=0, y<0) = y, \lambda_1 / \lambda_2 = 10^{-6}$, s. auch Kap. 3.6.
b) Detail aus a), relevante Zonenunterteilung: **HS1*HS2 > 0** (AWV) und **HS1*HS2 < 0**.

Aus Bild 9.10 ist nun ersichtlich, dass für die HS1-Linien im Bereich AWW1 nach der β -Korrektur für $y>0$ ein ähnliches CAIO-Muster entsteht wie in Bild 9.8b. Der entscheidende Unterschied jedoch sind die zusätzlichen **HS2-Ausläufer**, die in den Bereich $y>0$ eindringen. Während im Beispiel des Bildes 9.8 durch die AWW-Korrektur eine CAIO-Schicht in HS2-Richtung mit ihrer schwachen Querfestigkeit entbehrlich wurde, ist diese nun in Bild 9.9 (HS1-HS2-Kreuzverbund) bzw. in Bild 9.10 (Kreuzverbund mit AWW-Modifikation) problembedingt vorhanden (Biegung: $HS1 = -HS2$) und dem x-Querzug voll ausgesetzt.

Analoges gilt für die HS2-Linien im Bereich AWW2 und $y<0$. Eine hier nicht gezeigte Nachrechnung ergibt, dass das unmodifizierte Layout in Bild 9.9 günstiger ist als das AWW-modifizierte in Bild 9.10. Die AWW-Korrektur eines HS-Richtungsfeldes lohnt sich nur dann, wenn im Wesentlichen ein eindimensionaler Spannungszustand herrscht, der durch lokale Spannungskonzentrationen gestört wird, wie dies in Bild 9.8 der Fall ist. Diese Strategie geht etwas zu Lasten der hohen Faserlängsfestigkeit zugunsten seiner geringen Querfestigkeit, vermeidet dabei jedoch eine zweite (querlaufende) CAIO-Schicht mit den Nachteilen aus Bild 9.5.

Bild 9.10. Scheibe mit Doppelnut, AWW-Layout in den Bereichen $HS1*HS2 > 0$ (Bild 9.9b). Im Gegensatz zu Bild 9.8b ist mit einem solchen Layout keine Verbesserung zu erwarten.



10. Die Anwendung der orthotropen Wärmeleitung zur Integration von vektoriellen Richtungsfeldern (Geschwindigkeiten etc.)

Das Hauptanwendungsgebiet der orthotropen Wärmeleitung zur Ermittlung von Trajektorien basiert auf tensoriellen Feldern. Diese Methode führt aus dem Engpass heraus, der durch Nutzung des *streamtracing* Verfahrens zur Generierung von HS-Trajektorien entstanden ist. Nur für einfache Aufgabenstellungen (z.B. Lochscheibe unter Zug) gelingt das, i.A. jedoch versagt *streamtracing* für CAIO-Aufgabenstellungen.

Das traditionelle Hauptanwendungsgebiet für *streamtracing* sind Vektorfelder in der Fluidmechanik (CFD-Programme). Die Darstellung der Stromlinien basiert auf den zuvor berechneten Geschwindigkeitsfeldern aus den Navier-Stokes Gleichungen. Die Technik ist standardmäßig in Abaqus und Ansys vorhanden, aber auch im Postprozessor Tecplot für allgemeine FE-Programme.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen tensoriellen und vektoriellen Feldern besteht darin, dass erstere oft nur in den Elementen, letztere in den Knoten vorliegen. Die HS-Richtungen im ersten Fall werden benützt, um gleichgerichtete Lokalsysteme für die orthotrope Wärmeleitung bereitzustellen, damit die extremen Wärmeleitungsverhältnisse λ_1/λ_2 ihre Wirkung entfalten. Diese Lokalsysteme sind stets elementbezogen. Wird nun die orthotrope Wärmeleitung auf knotenpunktsbezogene Vektoren angesetzt, so sind zuvor entsprechende Umrechnungen nötig. Damit geht ein Teil der Effizienz schon verloren, das *streamtracing* ist in diesen Fällen vorzuziehen.

Die Lastpfadmethode läuft ebenfalls auf die Integration von Vektorfeldern hinaus. Im Gegensatz zu den knotenpunktsbezogenen Geschwindigkeitsfeldern werden Lastpfade jedoch über elementbezogene Spannungskomponenten definiert. Damit liegen ohne Umrechnung die elementbezogenen Lokalsysteme vor.

Nach den Erörterungen in den vorangegangenen Kapiteln lässt sich nun eine Einteilung bezüglich der Anwendbarkeit der beiden „konkurrierenden“ Integrationssysteme vornehmen, s. Tab. 10.1.

Richtungsfeld:

tensoriell, vektoriell

HS: Hauptspannungen

HSS: Hauptschubspannungen

AWV: Ausgeglicherer Winkelverbund

LP: Lastpfad

DG: Differenzialgl., s. Kap. 5

UV: Verschiebung, Geschwindigkeit

Tab. 10.1 Integration von Richtungsfeldern		
	Orthotrope Wärmeleitung	streamtracing
2D	HS / HSS / AWV / LP / DG / (UV**)	LP*** / UV
3D-Schale	HS / HSS / AWV	
3D	HS* / LP*	LP*** / UV

*Die orthotrope Wärmeleitung liefert, angewandt auf 3D-Volumenstrukturen, Isoflächen der Temperatur, jedoch keine Isolinien. Isoflächen können über Tecplot koordinatenmäßig ausgegeben und mit 3D-Druckverfahren verarbeitet werden, s. Kap. 11.

Die orthotrope Wärmeleitung liefert für 3D-Schalen keine LP-Anwendungsmöglichkeit. Es fehlen die mathematischen Beziehungen, die der Gl. (7.4) entsprechen.

**Für den 2D-Sonderfall, dass Geschwindigkeitsvektoren elementweise vorliegen, ist der Einsatz der orthotropen Wärmeleitung jedoch ähnlich effizient wie das *streamtracing*. Dies soll durch ein Beispiel im nächsten Abschnitt demonstriert werden, s. auch /1/.

***Obwohl die LP-Methode ebenfalls auf Spannungen basiert, kann hier *streamtracing* ohne Einschränkung verwendet werden. Nur wenn Spannungen auf ein Hauptsystem nach Gl. (1.1) transformiert werden, ergeben sich Probleme mit der HS-Richtungsumkehr.

Überlagerung von Parallel-, Quell- und Senkenströmungen reibungsfreier Fluide

Aus der Potenzialtheorie der Strömungen ist bekannt, dass durch die Überlagerung elementarer dichtebeständiger Strömungen neue Strömungen entstehen, die auch technische Relevanz haben. Werden zum Beispiel Parallel-, Quell- und Senkenströmungen superponiert, so kann damit u.a. die Umströmung eines Kreises oder einer Ellipse simuliert werden. Da es sich um ein Potenzialproblem handelt, kann auch analog die isotrope Wärmeleitung zur Lösung eingesetzt werden, s. /1/.

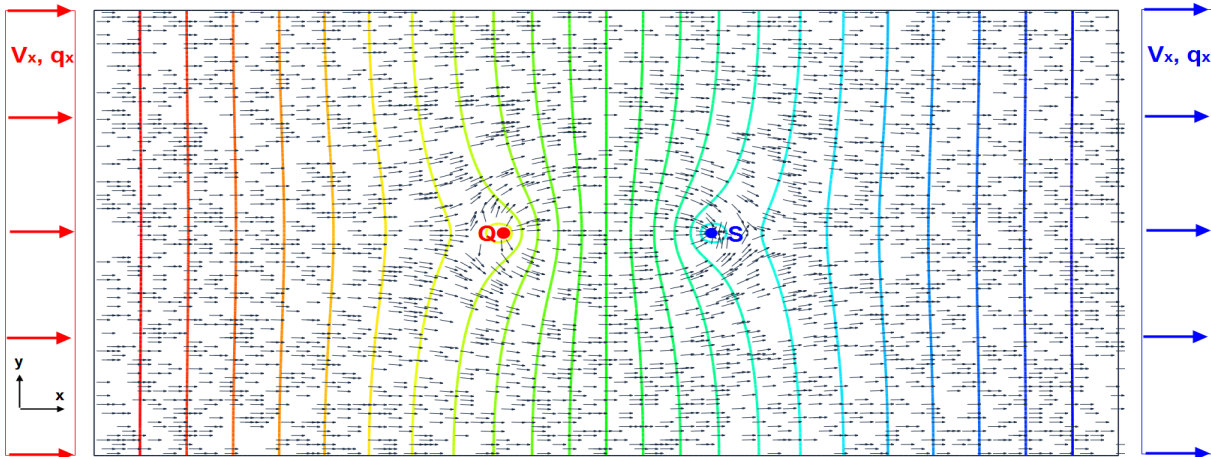
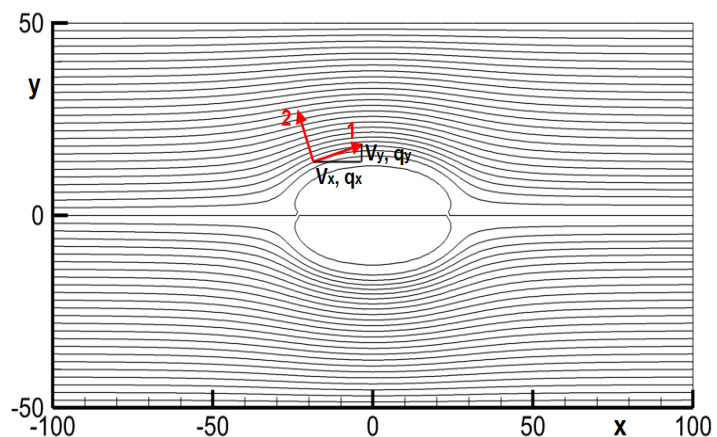


Bild 10.1. Überlagerung von Parallel-, Quell- und Senkenströmungen. In der potenzialtheoretischen Strömungsmechanik und Wärmeleitung bestehen Entsprechungen zwischen den verschiedenen Feldgrößen, z.B. $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{q}$. Die Lösung des isotropen Wärmeleitungsproblems ergibt die Temperaturverteilung (in Form der farbigen „Vertikalisothermen“), zudem werden die Wärmestromvektoren \mathbf{q} als Gradient der Temperatur ausgegeben. Diese Vektoren haben wegen der Analogie dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{V} .

Die Geschwindigkeitsvektoren in der Verkleidung der (elementbasierten) Wärmestromvektoren liefern die Lokalsysteme für die folgende orthotrope Wärmeleitungsberechnung. Bild 10.2 zeigt die resultierenden Isothermen, die nun als Stromlinien des Ausgangsproblems aufgefasst werden können.

Bild 10.2. Mit den vorgegebenen Richtungen der Wärmeflussvektoren (respektive Geschwindigkeitsvektoren) aus Bild 10.1 lassen sich **Lokalsysteme (1,2)** für die orthotrope Wärmeleitungsberechnung definieren: $\lambda_1/\lambda_2 = 10^6$.

Die Randbedingungen für die Wärmeleitungsberechnung sind am besten durch $T(x = -100) = y$ definiert. Es ergeben sich gewisse Ungenauigkeiten an den Staupunkten, da diese singular sind.



11. Die Anwendung der orthotropen Wärmeleitung in 3D

Es stellt sich die Frage, ob die orthotrope Wärmeleitung auch im 3D-Raum funktioniert, analog zu den 2D-Problemstellungen. Die 2D-Isothermen (CAIO-Linien) sind Kurven, das Äquivalent in 3D sind (gekrümmte) Flächen, s. Bild 11.1. Die Erörterung ist nicht nur von theoretischem Wert, da eine Fertigung durch 3D-Druckverfahren möglich erscheint, s. Bild 11.2.

In einer isothermen 3D-Fläche fließt die Wärme zwar nach wie vor in die gewünschte HS1-Richtung, sofern z.B. $\lambda_1 \gg \lambda_2 = \lambda_3$ gilt. Jedoch ist das Resultat eben nur eine Isothermenfläche und keine Isolinie. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, dass prinzipiell solche Isolinien aus der Verschneidung von 2 Isothermenflächen extrahiert werden können.

Bild 11.1. Kugelhohlraum unter Zug in x-Richtung. Wegen der 3-fachen Symmetrie genügt $\frac{1}{8}$ der Struktur. Es wurden 2 orthotrope Wärmeberechnungen durchgeführt:

1.) $T(x=X_L, y, z) = y$

2.) $T(x, y=Y_L, z) = z$

mit $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 10^6 : 1 : 1$.

Die 1. Analyse liefert die „senkrechten“, die 2. die waagrechten Isoflächen. Der Übersicht halber sind jeweils nur 3 Isoflächen gezeigt. Die Verschneidung der 3 senkrechten mit den 3 waagrechten Isoflächen ergibt 9 CAIO-Linien.

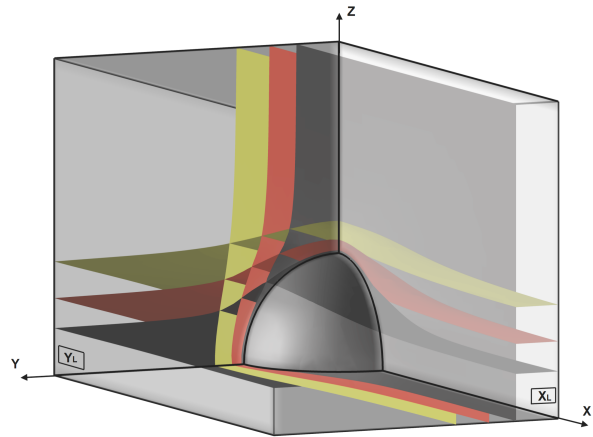
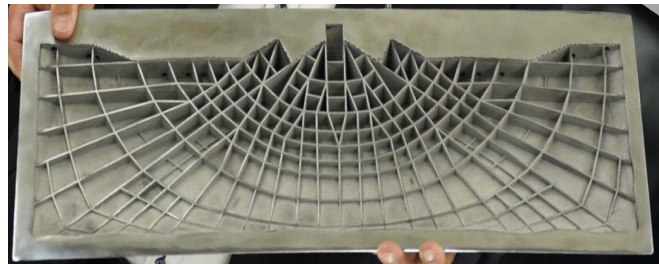


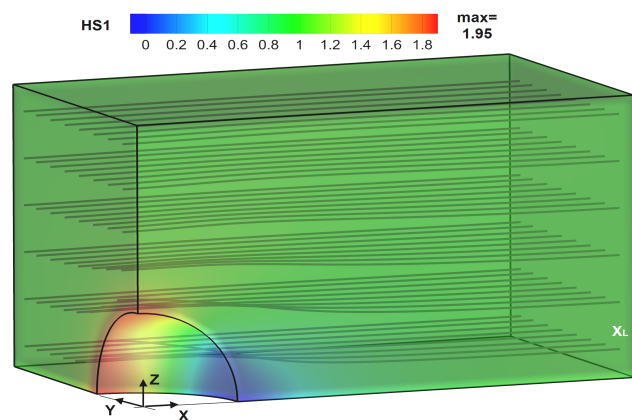
Bild 11.2. Potenzielle Anwendungsmöglichkeit für Isoflächen aus einer 3D-orthotropen Wärmeleitung. Fertigung durch „Additive Layer Manufacturing“ (ALM) mit 3D-Druckverfahren. Isoflächen können mit Tecplot koordinatenmäßig ausgegeben werden. Bildquelle: Airbus Flügelklappe, © dpa.



Wird dagegen das Problem aus Bild 11.1 entsprechend der Tabelle 10.1 mit der Lastpfadmethode angegangen, so ergeben sich direkt verwertbare CAIO-Linien, s. Bild 11.3.

Bild 11.3. Kugelhohlraum unter Zug in x-Richtung analog zu Bild 11.1, jedoch mit der Lastpfadmethode gelöst. Der zu integrierende Kraftflussvektor ist $\mathbf{f}_x = [\sigma_{xx} \ \tau_{xy} \ \tau_{xz}]$, siehe Gl. (8.7).

Auf der Fläche $x=X_L$ wurde die Spannung von 1 MPa aufgebracht. Die HS1-Konturen liefern deshalb Spannungskonzentrationsfaktoren. Der Maximalwert von 1.95 ist in guter Übereinstimmung mit $\sqrt{41}$, wobei jedoch dort der Kugelhohlraum im unendlichen 3D-Raum eingeschlossen ist.



12. CAIO-Anwendungsbeispiele im Vergleich zu Standardlaminaten (aus dem Biotex-Projekt /24/ unter Ausschluss von AWV-Laminaten)

Obwohl der Schwerpunkt der Arbeit sich mit der allgemeinen Integration von Richtungsfeldern beschäftigt, dürfte die Hauptanwendung daraus die Faserplatzierung entsprechend den Hauptspannungsrichtungen sein. Deshalb soll im Folgenden das CAIO-Verfahren nach der klassischen Laminattheorie (CLT) auch quantitativ bewertet werden im Vergleich zu den konkurrierenden Standard-Laminaten. Es soll damit nicht gesagt sein, dass für $HS_1 \cdot HS_2 < 0$ das CAIO-Kreuzlaminat die optimale Lösung darstellt. Zwar liegen in diesem Fall die Fasern beanspruchungsgerecht in Richtung ihrer höchsten Festigkeit „schubspannungsfrei“ in der Matrix, jedoch ist der zuerst auftretende Zwischenfaserbruch ZFB (durch Querkzug *oder* Schub) nicht ausbalanciert. Im Fall von ZFB sollten Querkzug bzw. Schub denselben Sicherheitsabstand zu den zugeordneten Festigkeitswerten haben, dies ist bei CAIO jedoch prinzipiell nicht gewährleistet. Es ist denkbar, die Faserorientierung so zu modifizieren, dass die Schubspannungsfreiheit aufgegeben wird zugunsten einer dafür reduzierten Faserquerbeanspruchung. Dies ist bei der nicht schubspannungsfreien Lastpfadmethode zu erwarten. Ergebnisse zeigen, dass im letzteren Fall die Balance zwischen Schub und Querkzug dort besser gewahrt ist. Deshalb soll auch „CAIO versus Lastpfad“ in Kapitel 13 untersucht werden.

Während die Auslegung von ebenen Scheibenstrukturen zu einem übersichtlichen (symmetrischen) Schichtaufbau führt, z.B. $[0^\circ / 90^\circ]_s$, ist der Aufwand bei Platten und Schalen unter Membran- *und* Biegebeanspruchung erheblich höher. Bei dieser kombinierten Beanspruchung ändern sich die HS-Richtungen über die Dicke, sodass schon von der Berechnungsseite an eine CAIO-Auslegung höhere Ansprüche gestellt werden. Die folgenden *CAIO-Laminat*e sind deshalb vereinfacht worden, weil es primär um einen ersten vorläufigen Vergleich zwischen CAIO- und Standard-Laminaten geht. Die Vereinfachungen sind wie folgt:

- Überführung des schichtweise vorhandenen Spannungszustands in Schnittkräfte (Membranschnittkraft \mathbf{N} , Biegemoment \mathbf{M}) mit jeweils zwei HS-Richtungen für \mathbf{N} und \mathbf{M} .
- Die Versagenskriterien werden zwar getrennt für FB und ZFB angesetzt, jedoch besonders genaue Kriterien, wie z.B. nach Puck /32/ bleiben unberücksichtigt.
- Die Materialkennwerte für eine unidirektionale UD-Schicht aus CFK stellen Mittelwerte dar. Sie sind /23/ und /25/ entnommen und hängen ab vom Faservolumen. Bei CAIO ist ein konstantes Faservolumen wegen der variablen Faserabstände lokal nur durch Aufdickung zu erreichen, der Einfluss einer solchen Aufdickung auf die Kennwerte bleibt jedoch unberücksichtigt.

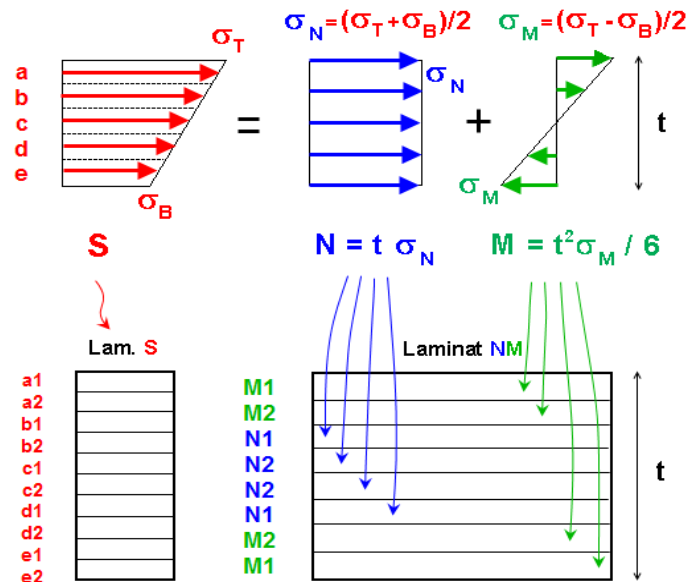
Die Vereinfachungen sind bis auf den 3. Punkt unkritisch, da sie sowohl das CAIO- als auch das Standard-Laminat gleichermaßen betreffen und ein relativer Vergleich aussagekräftig ist. Der 3. Punkt ist schwerwiegender, das Standard-Laminat hat nicht mit den Unwägbarkeiten einer lokalen Aufdickung zu rechnen.

Konvergenzverhalten der HS-Richtungen während der Iteration: In /29/ wird als Ausgangspunkt für die HS-Iterationen ein orthotropes Material mit einem bestimmten Verhältnis der Längs- zur Quersteifigkeit E_1/E_2 gewählt. Die Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz ist von diesem Verhältnis abhängig. Es zeigt sich, dass schon die erstmalige Bestimmung der HS-Richtungen die Schubspannung drastisch reduziert. Iterationen lohnen sich kaum. Kritisch ist anzumerken, dass mit Iterationen und rechnerischer Schubspannungsfreiheit eine Genauigkeit suggeriert wird, die nur theoretisch ist. Einerseits gilt das oben Gesagte: Die Querkzugspannungen und Schubspannungen sind hinsichtlich ihrer Festigkeitswerte nicht ausbalanciert. Andererseits weist ein „ebenes“ CAIO-Laminat wegen der lokalen Aufdickung aus dem variablen Faserverlauf 3D-Effekte auf. Diese Problematik ist in /34/ von Spickenheuer in seiner Dissertation behandelt. Es genügt deshalb eine direkte, nicht-iterative HS-Richtungsermittlung, die auf isotropem Materialverhalten basiert.

12.1 CAIO-Muster über die Schalendicke: Zerlegung des Schalen-Spannungszustandes in seine Membran- und Biegeanteile

Der allgemeine Spannungszustand in einer Schale (Platte) ist durch einen linearen Spannungsverlauf $\mathbf{S} = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \}$ über die Dicke t gekennzeichnet.

Bild 12.1. Zerlegung des allgemeinen Spannungszustandes \mathbf{S} in seinen Membran- und Biegeanteil \mathbf{N} und \mathbf{M}



Es werden n Unterteilungen der Dicke notwendig sein, ist z.B. $n = 5$, so müssen 5 Schichten **a, b, c, d, e**

$$\mathbf{a} \rightarrow \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \}_{\mathbf{a}} \rightarrow \{ \sigma_1, \sigma_2 \}_{\mathbf{a}}$$

$$\mathbf{b} \rightarrow \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \}_{\mathbf{b}} \rightarrow \{ \sigma_1, \sigma_2 \}_{\mathbf{b}}$$

....

$$\mathbf{e} \rightarrow \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy} \}_{\mathbf{e}} \rightarrow \{ \sigma_1, \sigma_2 \}_{\mathbf{e}}$$

vorgesehen werden. Die optimale Faserausrichtung wechselt von Schicht zu Schicht und ist durch die Richtungen **1** und **2** ihrer Hauptspannungen $\{ \sigma_1, \sigma_2 \}$ charakterisiert. Somit unterteilt sich nochmals jede Schicht in 2 Unterschichten, wobei die erste dem Faserverlauf der σ_1 -Richtung, die zweite der σ_2 -Richtung folgt.

Vereinfachung: Die Anzahl der benötigten CAIO-Schichten hängt vom Verhältnis der Membran- zur Biegespannung ab. Es können praktisch keine Regeln vorgegeben werden. Eine praktikable Vorgehensweise lässt sich nur durch eine Transformation der Spannungen auf Schnittkräfte und Schnittmomente realisieren. Die Integration der Spannungen über die Dicke führt zur Schnittkraft \mathbf{N} [N/mm] und zum Schnittmoment \mathbf{M} [Nmm/mm].

Der allgemeine Spannungszustand \mathbf{S} kann somit auch als Summe infolge der Spannungen einer Normalkraft

$$\mathbf{N} = \{ N_{xx}, N_{yy}, N_{xy} \} \rightarrow \{ \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2 \}$$

und eines Moments

$$\mathbf{M} = \{ M_{xx}, M_{yy}, M_{xy} \} \rightarrow \{ \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \}$$

dargestellt werden. Die Richtungen 1 und 2 ihrer Hauptnormalkräfte bzw. Hauptmomente variieren nun **nicht** mehr über die Dicke t . Bei einer allgemeinen Beanspruchung sind somit 2 CAIO-Schichten für \mathbf{N} und 2 für \mathbf{M} , jeweils in 1- bzw. 2-Richtung notwendig. Es gibt somit

nur 4 unterschiedliche **CAIO-Muster** (N_1, N_2, M_1, M_2). Um einen symmetrischen Aufbau zu bekommen, empfiehlt sich z.B. $[M_1 / M_2 / N_1 / N_2]_s$.

Zweckmäßigerweise werden die N-Schichten in der Schalenmitte, die M-Schichten außen angeordnet, die Spannungsaufteilung $S = N/t + M/t$ ist somit nicht mehr exakt, sondern nur noch approximativ. Ist $|M_1| > |M_2|$, so wird die 1-Schicht ganz außen positioniert, andernfalls die 2-Schicht.

Es muss jedoch betont werden, dass nicht alle Problemstellungen auf den Lagenaufbau im Bild 12.1 zurückgeführt werden können. Zum Beispiel sind generelle Schalenprobleme selbst mit einfachen Belastungen, jedoch mit beliebigen Randbedingungen häufig dadurch gekennzeichnet, dass fernab der Lagerung in der Schale vorwiegend Membran-, im Bereich der Lagerung jedoch Biegespannungen vorherrschen. In diesem Fall wird die Schale mit N-Schichten allein auskommen, nicht jedoch an den Lagerstellen, wo zusätzlich M-Schichten benötigt werden.

Liegt ein reiner Membranspannungszustand vor, z.B. in einer Scheibe, so entfallen die M-Schichten. CAIO ist dann besonders effektiv, da alle Fasern über die Dicke gleichmäßig beansprucht werden.

Liegt ein reiner Biegespannungszustand vor, z.B. in einer Platte, so entfallen die N-Schichten. CAIO ist dann nicht so effektiv, da dann die Innenfasern weniger beansprucht werden. Diese Situation kann verbessert werden durch einen Sandwichkern. Die Biegung wird dann auch durch geometrische Effekte (erhöhtes Trägheitsmoment) aufgenommen.

12.2 Definition der Lochplatte als charakteristisches Beispiel

CAIO-Auslegungen sind für alle Scheiben-, Platten- und Schalenstrukturen sinnvoll, die durch geometrische Besonderheiten Spannungskonzentrationen *und/oder* durch nichttriviale Belastungen einen zweidimensionalen Spannungszustand aufweisen.

Für einige wichtige Membran- und Biegeprobleme wurde versucht, einen repräsentativen Vergleich zwischen CAIO- und Standardlaminaten vorzunehmen, s. Tab. 12.1. Definiert wurde dabei stets nur ein Lastfall. Die Schichtdicken sind jeweils alle gleich, obwohl eine weitere Optimierung der Schichtdicken selbst möglich wäre. Ein direkter Vergleich zwischen CAIO- und Standard-Laminaten ist jedoch schon bei konstanten Schichtdicken aussagekräftig.

Plattenbiegung: Bei quasi-homogener Schichtung ist der Einfluss der Stapelfolge nur dann vernachlässigbar ($< 5\%$), wenn der Wiederholungsfaktor $r \geq 12$ (CFK) ist, s. /23/. Dies ist z.B. der Fall für das Laminat $[(0^\circ / 90^\circ)_{12}]_s$, nicht jedoch für $[(0^\circ / 90^\circ)]_s$, wobei beide Lamine gleich dick sein sollen. Somit ist die Plattenbiegung zunächst nur theoretisch interessant, da so viele CAIO-Schichten sehr aufwendig zu realisieren wären. Deshalb wurde auch die CAIO-Sandwichplatte gerechnet, die dieses Problem effektiv vermeidet.

Abaqus ordnet die Hauptspannungen (Hauptschnittkräfte- und -momente) entgegen allgemeiner Konvention unter Berücksichtigung der Vorzeichen in aufsteigender Reihenfolge an, d.h. $N_1 < N_2$ bzw. $M_1 < M_2$. Diese Festlegung soll nur in diesem Kapitel gelten, in den anderen Kapiteln gilt die allgemeine Konvention. Der CAIO-optimierte Faserverlauf N_1, N_2 bzw. M_1, M_2 ist in jedem Beispiel farblich und quantitativ angegeben, damit auch der Laminataufbau entsprechend der Tab. 12.1 nachvollzogen werden kann.

Tab. 12.1 - Lochplatte: 2L x 2L mit L = 100 mm. Lochradius R = 20 mm, Material: CFK mit 60% Faservolumengehalt, Elementlänge ca. 1 mm.

Scheibe: Gesamtdicke 1 mm, In-plane Streckenlast $q = 100 \text{ N/mm}$.

Platte: Gesamtdicke 10 mm, Lateraldruck $p = 1 \text{ MPa}$.

Sandwichplatte: Gesamtdicke 26 mm, Sandwichkern (Core), 24 mm dick, Lateraldruck $p = 1 \text{ MPa}$.

CAIO-Performance (gegenüber Standard-Laminat): s. Gl. (12.2)

Belastung (Randbedingungen)	Bild	CAIO-Per- formance P Gl. (12.2)	CAIO-Layup	Standard-UD-Layup $0^\circ = x, 90^\circ = y$ -Achse
$q_x = q$	12.2	1,47	$[N_2 / N_1]_s$	$[0^\circ / 90^\circ]_s$
$q_x = q_y = q$	12.4	1,74		
$q_y = -q_x = -q$	12.6	1,35		
$p, u_z(x = \pm L) = 0$	12.8	1,30	$[(M_2 / M_1)_{12}]_s$	$[(0^\circ / 90^\circ)_{12}]_s$
$p, u_z(x = \pm L) = u_z(y = \pm L) = 0$	12.11	1,31	$[(M_2 / M_1)_{12}]_s$	$[(+45^\circ / -45^\circ)_{12}]_s$
	12.11	1,55	$*[M_1 / M_2 / C]_s$	$[+45^\circ / -45^\circ / C]_s$

*Empfehlenswert wäre $[M_2 / M_1]$, jedoch im Biotex-Projekt /24/ nicht realisiert.

Tab. 12.2 – Kennwerte [MPa], s. auch Gl. (12.1)	CFK-HT /24/
Längsmodul E_1	130000
Quermodul E_2	9500
Schubmodul G	5600
Längszugfestigkeit X_T	1500
Längsdruckfestigkeit X_C	900*
Querzugfestigkeit Y_T	45
Querdruckfestigkeit Y_C	200
Schubfestigkeit S	70
Querkontraktion ν [-]	0.3
Dichte ρ [kg/m ³]	1550

* in /23/ 1400

Tab. 12.3 – Kennwerte [MPa] für Sandwichkern	ATC Foam A1200, isotrop
E-Modul	354
Zugfestigkeit	4,17
Druckfestigkeit	4,07
Schubfestigkeit	2,38
Querkontraktion ν [-]	0,3
Dichte ρ [kg/m ³]	210

Festigkeitskriterium: In den Beispielen wird die Hypothese der maximalen Spannung angewandt, s. Gl. (12.1). Diese Hypothese besagt, dass ein Versagen einer Schicht dann eintritt, wenn auch nur eine der in den Orthotropieachsen auftretenden Spannungen den zugeordneten Festigkeitswert überschreitet. In den Schichten müssen die Spannungen in ein Lokalsystem der Faserorientierung transformiert werden, damit in Faserlängs- und -querrichtung die entsprechenden Spannungen σ_L , σ_Q und σ_{LQ} berechnet werden können.

$$F = \text{Max} (\sigma_L / X, \sigma_Q / Y, |\sigma_{LQ}| / S) < 1 \quad (12.1)$$

Falls $\sigma_L > 0$, $X = X_T$, andernfalls $X = X_C$. Falls $Y_Q > 0$, $Y = Y_T$ andernfalls $Y = Y_C$. Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass ein eventuelles Versagen nachvollziehbar den einzelnen Festig-

keitswerten der Tab. 12.2 zugeordnet werden kann. Der Kehrwert von Faktor F in Gl. (12.1) ist gleichzeitig die Sicherheit gegen Versagen (zusätzliche Sicherheitsfaktoren bleiben unberücksichtigt).

Die folgenden Beispiele starten alle mit einem isotropen Material. Die gezeigten v.Mises Spannungsbilder gelten nur für das isotrope Material. V.Mises hat keine Bedeutung für Laminat. Erst nach Berechnung der „isotropen“ Hauptspannungsrichtungen (Richtungen der Hauptschnittkräfte und –momente) wird der Struktur das orthotrope Material entsprechend der Tab. 12.2 zugewiesen. Man beachte in allen Bildern den hohen Schubspannungswert im Standard-Laminat, der bei CAIO-Auslegung zu null oder vernachlässigbar klein wird.

In den folgenden Beispielen ist der Querzug stets am meisten gefährdet. Es wurde deshalb der Quotient P

$$P = (\sigma_Q)_{\text{Standard}} / (\sigma_Q)_{\text{CAIO}} \quad (12.2)$$

als CAIO-Performance definiert, s. auch Tab. 12.1. Dieser gibt an, um welchen Faktor das Standard-Laminat ungünstiger ist als das CAIO-Laminat.

12.3 Scheibenbeispiele (2L x 2L x t, L = 100 mm, t = 1 mm, Lochradius = 20 mm)

a) Lochscheibe unter uniaxialem Zug

Bild 12.2. CAIO-Ergebnisse

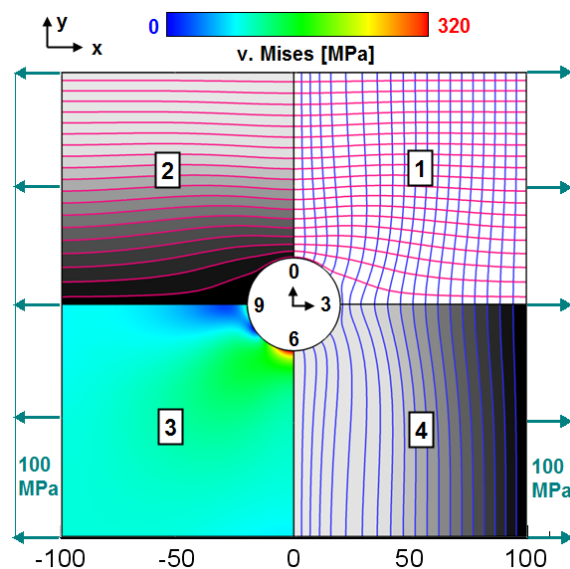
1. Quadrant. CAIO-Layup transparent.

Bei symmetrischem Aufbau werden 4 Schichten benötigt: $[N_2 / N_1]_S$, wobei die Stapelreihenfolge bei einer Scheibe jedoch ohne Einfluss ist.

2. Quadrant: Die N_2 -Haupttrichtungen ergeben integriert das N_2 -Feld, aus welchem in Tecplot durch Definition der Anzahl von N_2 -Isolinien beliebig viele N_2 -Rovings extrahiert werden können.

3. Quadrant: v.Mises [MPa], CAIO startet stets von einem isotropen Spannungszustand und ist erst bei optionalen Iterationen orthotrop.

4. Quadrant: Die N_1 -Haupttrichtungen ergeben integriert das N_1 -Feld.

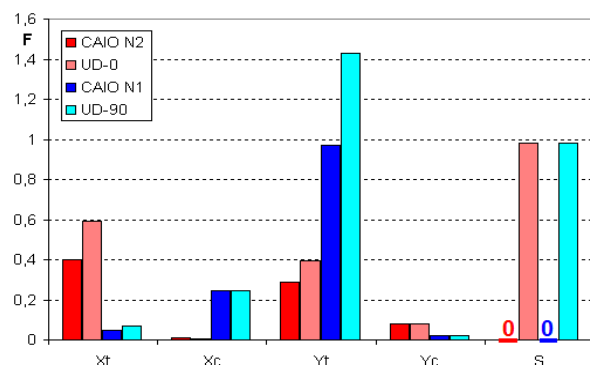


UD $[0^\circ / 90^\circ]_S$: Am höchsten gefährdet ist die 90° -Schicht bezüglich Querzug an der 6-Uhr-Position, (wegen Symmetrie auch 0-Uhr).

Bild 12.3. Auswertung von Bild 12.2

CAIO $[N_2 / N_1]_S$ versus $[0^\circ / 90^\circ]_S$

Maximale F-Werte für die Scheibe aus Gl. (12.1). Werte > 1 bedeuten Versagen, s. auch Tab. 12.2. Am höchsten gefährdet ist die 90° -Schicht des Standardlaminats bezüglich Querzug und vergleichsweise circa 1.47-fach ungünstiger als CAIO. Die CAIO-Schubspannung σ_{LQ} ist praktisch null, Iterationen können dieses Ergebnis nicht verbessern.



b) Lochscheibe unter biaxialem Zug, Viertelsymmetrie.

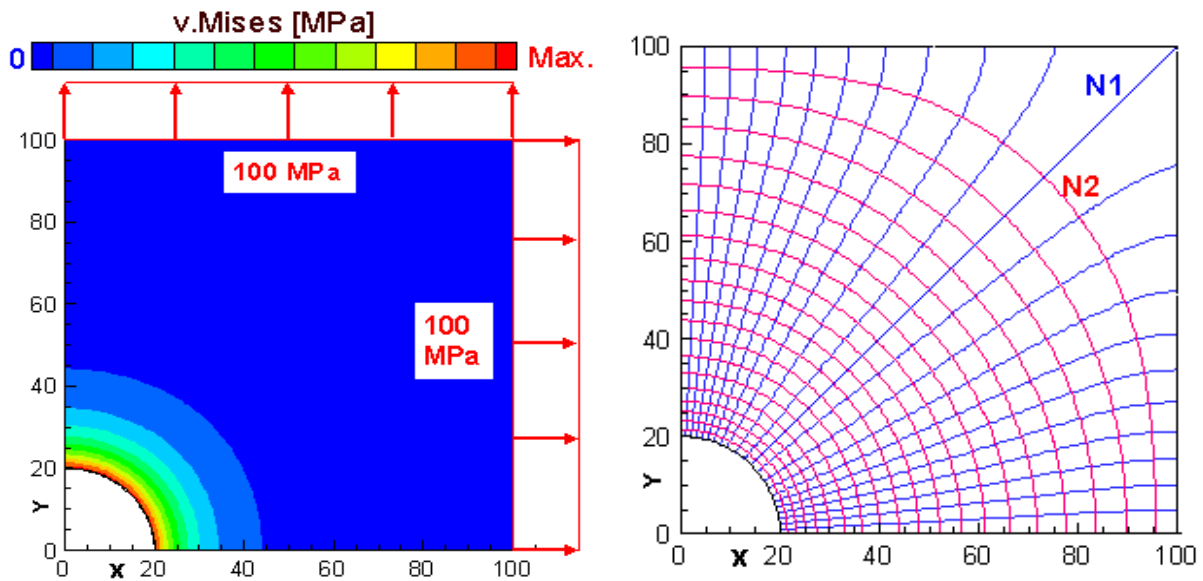


Bild 12.4. CAIO-Ergebnisse

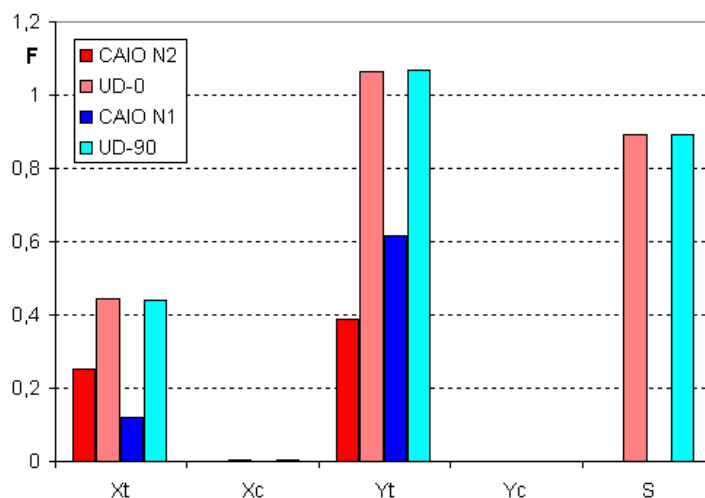
Links: $0 < v.Mises [MPa] < 200$.

Rechts: CAIO-Layup. Bei symmetrischem Aufbau werden 4 Schichten benötigt: $[N_2 / N_1]_s$, wobei die Stapelreihenfolge bei einer Scheibe ohne Einfluss ist. Anmerkung zum Standard-Laminat: Zwei Vergleichsrechnungen zeigen, dass $[0^\circ / 90^\circ]_s$ günstiger ist als $[45^\circ / -45^\circ]_s$.

Bild 12.5. Auswertung von Bild 12.4

CAIO $[N_2 / N_1]_s$ vs. $[0^\circ / 90^\circ]_s$.

Maximale F-Werte für die Scheibe aus Gl. (12.1). Werte > 1 bedeuten Versagen, s. auch Tab. 12.2. Am höchsten gefährdet ist die 0° -Schicht bzw. 90° -Schicht des Standardlaminats bezüglich Querszug und vergleichsweise circa 1.74-fach ungünstiger als CAIO. Die CAIO-Schubspannung σ_{LQ} ist praktisch null, Iterationen können dieses Ergebnis nicht verbessern.



c) Lochscheibe unter biaxialem Zug und Druck, Viertelsymmetrie

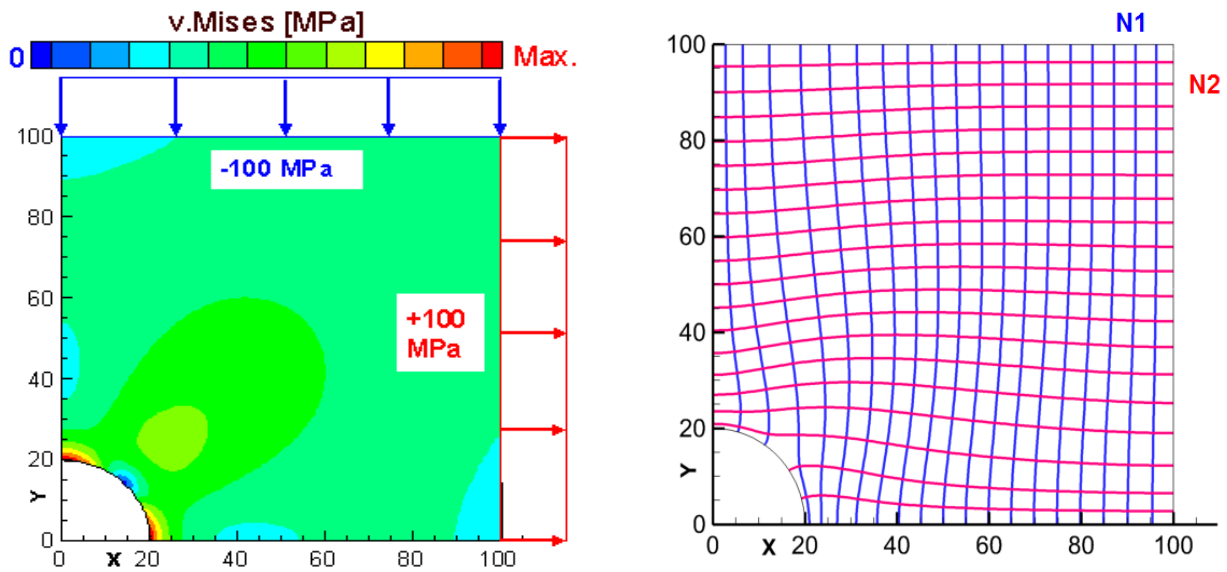


Bild 12.6. CAIO-Ergebnisse

Links: $0 < v.Mises [MPa] < 440$. Die aufgebrachte Belastung wirkt unter 45° zur x-Achse als reiner Schub.

Rechts: CAIO-Layup. Bei symmetrischem Aufbau werden 4 Schichten benötigt: $[N_2 / N_1]_s$, wobei die Stapelreihenfolge bei einer Scheibe ohne Einfluss ist.

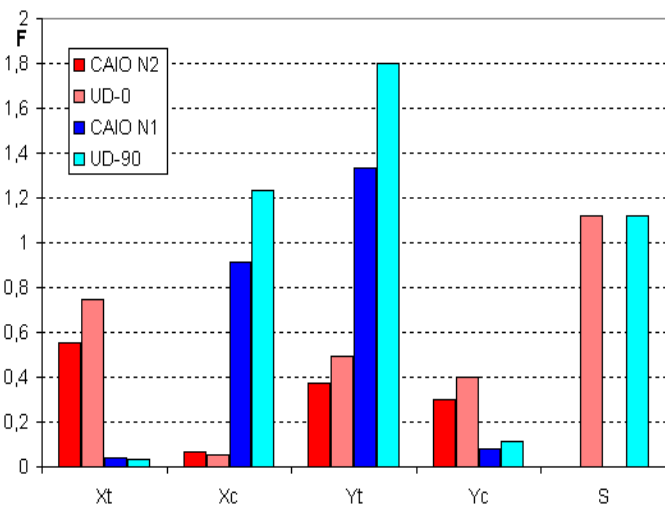
Bild 12.7. Auswertung von Bild 12.6

CAIO $[N_2 / N_1]_s$ versus $[0^\circ / 90^\circ]_s$.

Maximale F-Werte für die Scheibe aus Gl. (12.1). Werte > 1 bedeuten Versagen, s. auch Tab. 12.2.

Am höchsten gefährdet ist die 90° -Schicht des Standardlaminats bezüglich Querdzug und vergleichsweise circa 1.35-fach ungünstiger als CAIO.

Die CAIO-Schubspannung σ_{LQ} ist praktisch null, Iterationen können dieses Ergebnis nicht verbessern.



12.4 Plattenbeispiele (2L x 2L x t, L = 100 mm, t = 10 mm, Lochradius = 20 mm, Lateraldruck in z-Richtung: $p_z = 1$ MPa)

a) Einseitig gelagerte Lochplatte unter lateralem Druck

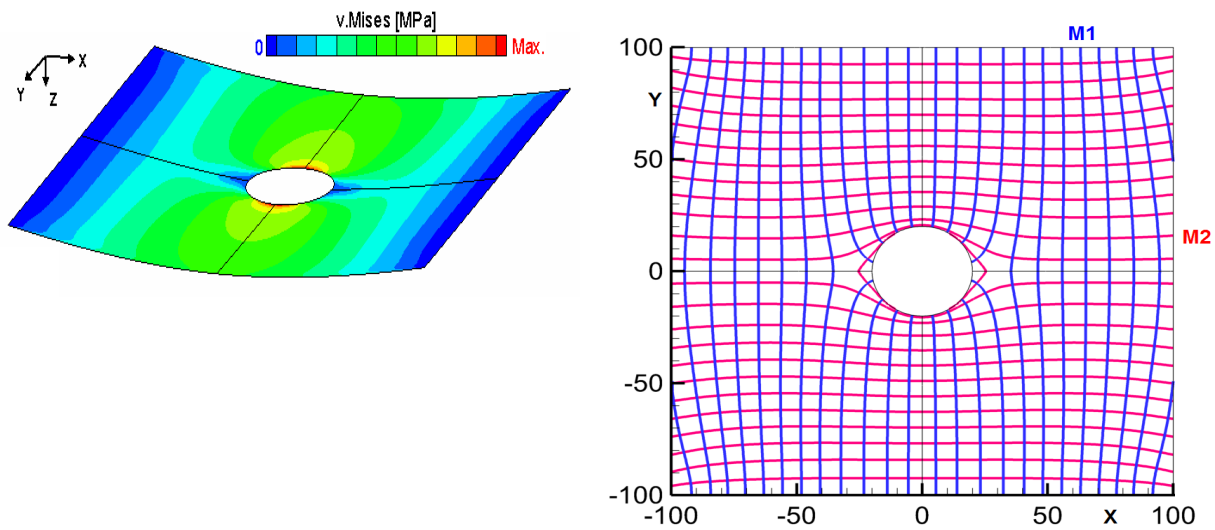


Bild 12.8. CAIO-Ergebnisse

Links: Einseitige Lagerung längs $x = \pm 100$ mm ($U_z = 0$). $0 < v.Mises$ [MPa] < 535 auf der Plattenober- und -unterseite.

Rechts: CAIO-Layup. Es wurde ein sym. Aufbau mit 48 Schichten gewählt, $[(M_2 / M_1)_{12}]_S$, um den Einfluss der Stapelreihenfolge auszuschließen.

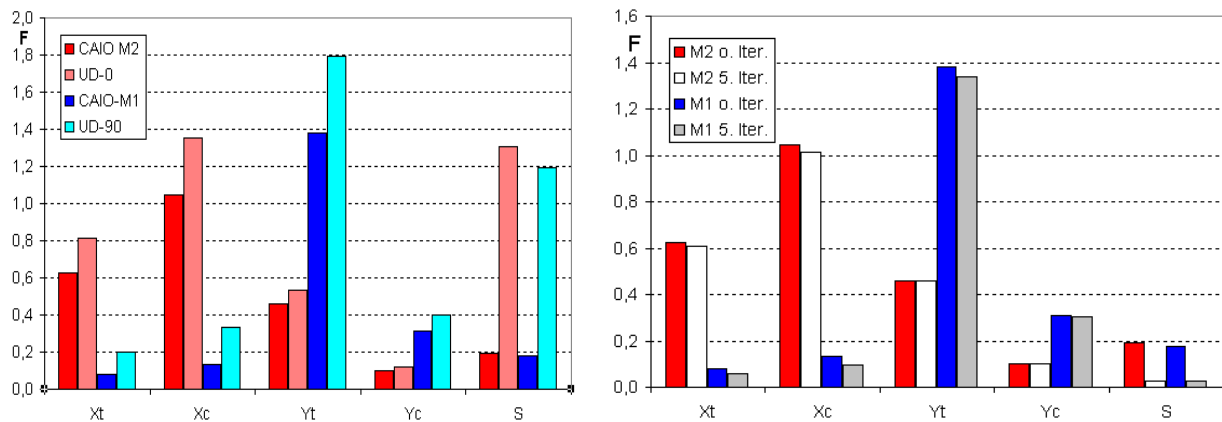


Bild 12.9. Auswertung von Bild 12.8. Maximale F-Werte für die Platte aus Gl. (12.1).

Werte > 1 bedeuten Versagen, s. auch Tab. 12.2, $[(M_2 / M_1)_{12}]_S$ versus $[(0^\circ / 90^\circ)_{12}]_S$.

Links: F-Faktoren für das CAIO- und Standard-Laminat ohne Iterationen. Maximal gefährdet ist die 90° -Schicht bezüglich Querzug. Zu beachten ist auch der hohe Faserlängsdruck. Die CAIO-Schubspannung σ_{LQ} ist ca. 20% der Schubfestigkeit ($F \approx 0.2$). Iterationen verbessern dieses CAIO-Ergebnis, nach 5 Iterationen beträgt der Faktor $F = 0.027$. Das Standard-Laminat ist bezüglich des kritischen Querzugs circa 1.3-fach ungünstiger als CAIO.

Rechts: Einfluss der Iterationen auf das CAIO-Laminat: Vergleich der F-Faktoren. Der F-Faktor für Schub reduziert sich merklich, nicht jedoch die anderen F-Faktoren. Die Faserverläufe ohne und mit Iterationen entsprechen Bild 12.8 rechts und sind per Augenschein kaum zu unterscheiden.

b) Zweiseitig gelagerte Lochplatte ohne u. mit Schaumstoffkern (Honeycomb Core C) unter lateralem Druck

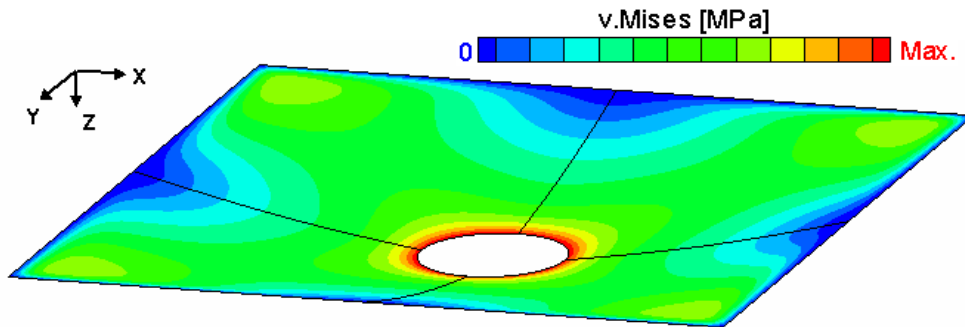


Bild 12.10. Zweiseitige Lagerung längs $x = y = \pm 100 \text{ mm}$ ($U_z = 0$). $0 < v.\text{Mises} [\text{MPa}] < 203$. Die Spannungsverteilung der isotropen Platte mit einer Dicke von 10 mm ist Ausgangspunkt für die beiden CAIO-Analysen mit und ohne Sandwichkern,

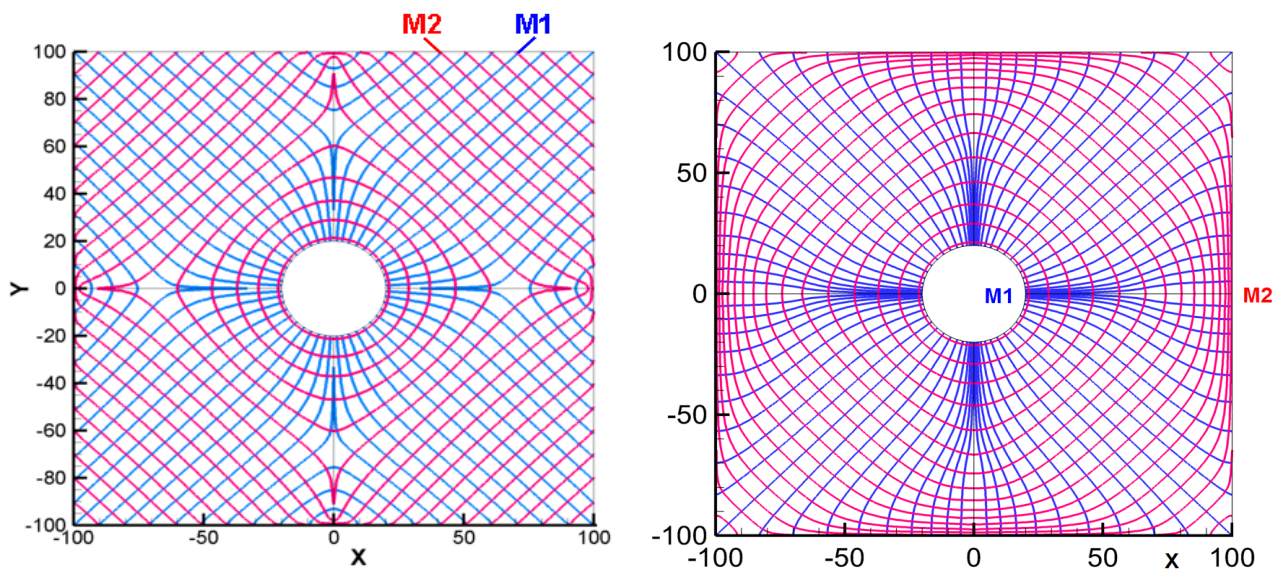


Bild 12.11. CAIO-Ergebnisse

Links: Platte **ohne** Sandwichkern, CAIO-Muster für $[(M_1 / M_2)_{12}]_S$ aus der isotropen Analyse (Plattendicke = 10 mm). Dieses Muster bleibt bei nachgeschalteten Iterationen praktisch unverändert. Standard-Vergleichslaminat: $[(45^\circ / -45^\circ)_{12}]_S$

Rechts: Platte **mit** Sandwichkern C, CAIO-Muster für $[(M_1 / M_2 / C)_S]$ aus der orthotropen Analyse nach 5 Iterationen (Plattendicke = 26 mm, Sandwichkerndicke = 24 mm, siehe Tab. 12.3). Das CAIO-Muster aus der isotropen Startanalyse entspricht dem linken Muster, schon nach der 1. Iteration ergibt sich das rechte Muster, das bei weiteren Iterationen dann praktisch unverändert bleibt.

Standard-Vergleichslaminat: $[(45^\circ / -45^\circ / C)_S]$

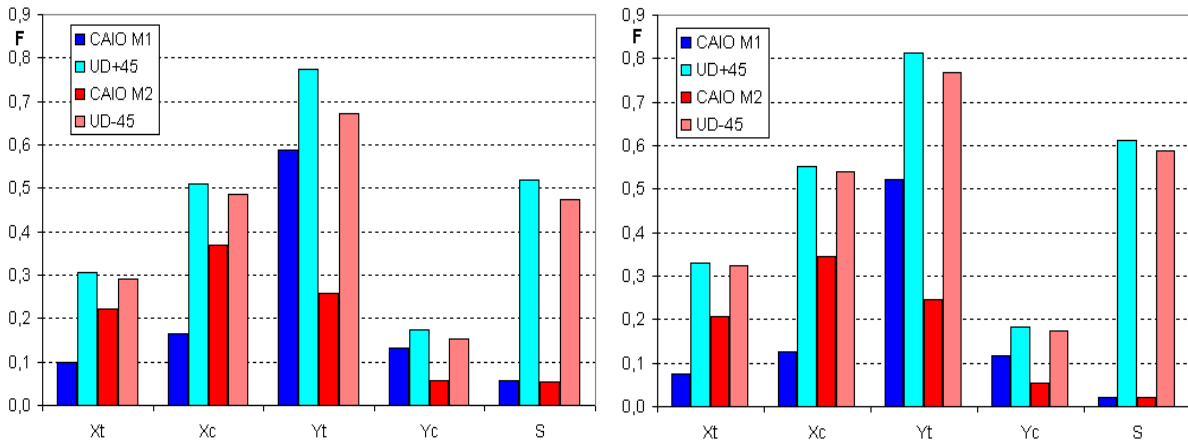


Bild 12.12. Auswertung von Bild 12.11. Maximale F-Werte für die Platte aus Gl. (12.1). Werte > 1 bedeuten Versagen, s. auch Tab. 12.2.

Links: Platte ohne Sandwichkern, CAIO-Laminat $[(M_1 / M_2)_{12}]_S$ bzw. Standard-Laminat $[(+45^\circ / -45^\circ)_{12}]_S$, beide 10 mm dick, Gesamtgewicht: 600 g. Der M1-M2-Faserverlauf entspricht dem Bild 12.11 links. Die CAIO-Schubspannung σ_{LQ} ist relativ klein ($F=0.05$), eine Iteration kann dieses Ergebnis nur wenig verbessern. Das Standard-Laminat ist bezüglich des kritischen Querzugs ca. 1.31-fach ungünstiger als CAIO.

Rechts: Platte mit Sandwichkern C, CAIO-Laminat $[M_1 / M_2 / C]_S$ bzw. Standard-Laminat $[+45^\circ / -45^\circ / C]_S$, beide 26 mm dick mit einem leichten Schaumstoffkern (Tab. 12.3) von 24 mm Dicke, Gesamtgewicht: 315 g. Der M1-M2-Faserverlauf entspricht dem Bild 12.11 rechts. Das Standard-Laminat ist bezüglich des kritischen Querzugs ca. 1.55-fach ungünstiger als CAIO.

CAIO $[M_1 / M_2 / C]_S$: Der Schaumstoff wird maximal zu 20% seiner Druckfestigkeit und zu 13% seiner Schubfestigkeit ausgenutzt, s. auch Tab. 12.3.

Standard-Laminat $[+45^\circ / -45^\circ / C]_S$: Der Schaumstoff wird maximal zu 37% seiner Druckfestigkeit und zu 21% seiner Schubfestigkeit ausgenutzt, s. auch Tab. 12.3.

Fazit zu Kap. 12.3 und 12.4: Für Scheiben- und Plattenprobleme mit reiner Membranbeanspruchung bzw. reiner Biegung sind jeweils nur 2 CAIO-Muster nötig, um den 2 Hauptrichtungen für **N** und **M** zu folgen. Im letzteren Fall muss jedoch zur Erlangung einer quasi-homogenen Schichtung das CAIO-Muster mehrfach über die Dicke wiederholt werden, s. /23/. Dieser Aufwand kann jedoch über eine CAIO-Sandwichlösung verringert werden.

Die gezeigten CAIO-Lösungen wurden mit dem jeweils günstigsten Standard-Laminat einer $[0^\circ / 90^\circ]$ bzw. $[+45^\circ / -45^\circ]$ Schichtung verglichen. Auf eine weitere Optimierung der jeweiligen Schichtdicken wurde verzichtet, da dies gleichermaßen für CAIO- und Standard-Laminat möglich ist.

Die klassische Laminattheorie (CLT) für Standard-Laminat wurde unverändert auch auf CAIO-Laminat angewandt, obwohl die CAIO-Faserkrümmungen einerseits, die schwer zu realisierenden konstanten Faservolumina und die damit verbundenen Aufdickungen normal zur Platte andererseits, eher negativen als positiven Einfluss auf die Festigkeit und Steifigkeit haben. Letztendlich müssen für zuverlässigere Aussagen aufwendige 3D-Analysen durchgeführt werden, z.B. entsprechend der Dissertation von Spickenheuer /34/. Dort ergeben sich die Ablagemuster für die Rovings aus den HS-Linien, die analog zu Kap. 2.1 (CAIO_{Shell}) ermittelt werden. Aus dem Abstand der HS-Linien (Rovings) wird lokal die Aufdickung berechnet, ähnlich wie in Bild 15.4, jedoch genauer unter Berücksichtigung der Feinheit der Rovings. Mit dieser Information wird dann das 3D-Volumenmodell aufgebaut, das dann auch die *out-of-plane*-Krümmungen abbilden kann.

12.5 Anwendung von CAIO auf nichtlineares Materialverhalten

Die vorgestellten Berechnungsergebnisse der Kapitel 12.3 und 12.4 basieren auf linearen Modellen. Festigkeitsgrenzen sind dabei nur über Versagenskriterien berücksichtigt. Die Ergebnisse lassen nur qualitative Aussagen zu, ob das Laminat bezüglich der Faserlängs- bzw. -querbeanspruchung versagt bzw. welcher Sicherheitsabstand zur Versagensgrenze besteht.

Im Allgemeinen wird die Grenze der Querfestigkeit schnell erreicht, lokale Matrixbrüche sind die Folge. Das Laminat kann jedoch solche Schädigung durch Kraftumleitungen zunächst gut vertragen, das tatsächliche Versagen tritt später ein und ist durch Faserbruch gekennzeichnet. Die Analysen erfordern eine Lastinkrementierung in kleinen Schritten und Iterationen in jedem Lastinkrement.

Bild 12.13 zeigt am Beispiel einer CFK-Lochscheibe Bruchlasten für Standard-Laminat und für das CAIO-Laminat. Letzteres geht aus der Kombination von einer Basisschicht $[(+45/-45)_2]_s$ mit 2 dazu symmetrisch aufgestickten CAIO-Schichten hervor. Aus /5/ (dort auch weitere Angaben zur Problemstellung) wurden 5 experimentell getestete Varianten gewählt und direkt mit der FE-Berechnung (Abaqus) verglichen. Zusätzlich sind 3 weitere Standard-Laminat gezeigt, darunter das „Flugzeuglaminat“ $[(0/+45/-45/90)_3]_s$ und eine Variante aus Aluminium. Es wurde darauf geachtet, dass alle Varianten praktisch gleiches Gewicht haben.

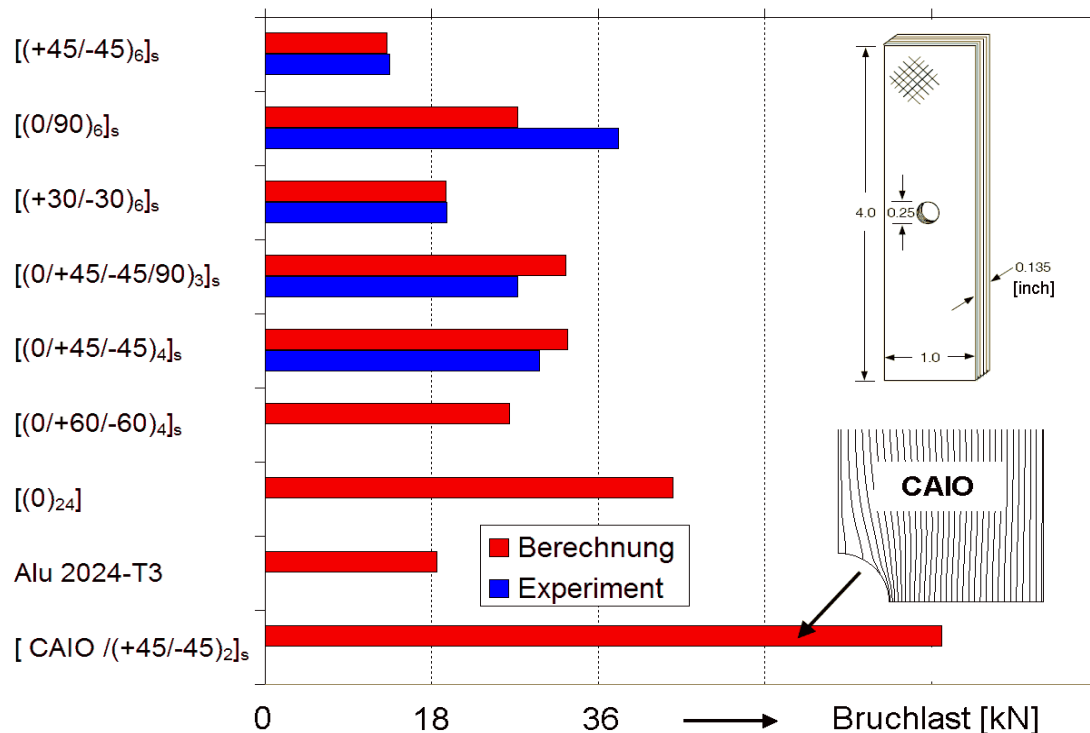


Bild 12.13. Bruchlasten für Standard-Laminat sowie einer Variante aus Aluminium und der CAIO-optimierten Lochplatte. Der Faserwinkel bezieht sich auf die axiale Belastungsrichtung (Kompression, Faserbeulfestigkeit 2700 MPa!), CFK-Lochplatte T300 / 976 (Carbon + Epoxy mit 66% C-Faseranteil), Abmessungen in inches, alle Materialdefinitionen und experimentellen Ergebnisse in /5/.

Bild 12.13 zeigt, dass die rechnerisch vorhergesagten Bruchlasten recht gut mit den in /5/ angegebenen experimentellen Werten übereinstimmen. Das CAIO-optimierte Laminat verspricht eine beachtliche Bruchlaststeigerung, die jedoch noch im Labor überprüft werden muss.

12.6 Die CAIO-Optimierung des Ω -Spants (Biotex-Demonstratorbauteil aus /24/)

Der Omega-Spant wurde von den Biotex-Projektteilnehmern als „Demonstratorbauteil“ (Bilder 12.14 bis 12.17) gewählt, /24/. Bei der Fertigung und der experimentellen Evaluierung dieser Struktur waren EADS, IFB (Universität Stuttgart), IPF (Universität Dresden) und Saertex beteiligt. Für den Lastfall *3-Punkt-Biegung* wurden die 2 folgenden Varianten berechnet und optimiert:

- **Omega-Spant mit Standard-Auslegung:** Diese Auslegung ist durch einen regelmäßigen Aufbau der UD-Schichten mit z.B. $\pm 45^\circ$ Orientierung gekennzeichnet. Der verwendete Schichtaufbau für den Stegbereich des Spants ist in Bild 12.14 rechts gezeigt.
- **Omega-Spant, optimiert mit CAIO:** Diese Auslegung ist durch Faserverläufe in Hauptspannungsrichtung gekennzeichnet. Die Berechnungen zeigen, dass der Spant im Wesentlichen membranartig beansprucht wird, d.h., die Spannungen ändern sich nur unwesentlich über die Spantdicke. Dafür sind 2 CAIO-Schichten nötig. Es wird erwartet, dass ein symmetrischer Aufbau mit 2 gespiegelten CAIO-Schichten für diese hier vorliegende Problemstellung keine Vorteile bringt gegenüber einem unsymmetrischen CAIO-Aufbau mit 2 Schichten.

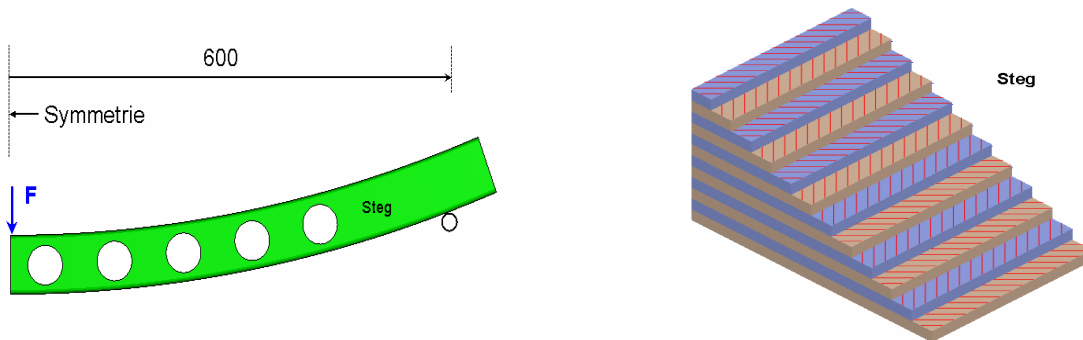


Bild 12.14. Omega-Spant aus dem BMBF Biotex-Projekt /24/.

Links: Vereinfachte Problemdarstellung. **Rechts:** Standard-Multiaxialgelege aus C-Fasern im Steg (12 Schichten mit $\pm 45^\circ$).



Bild 12.15. Demonstratorbauteil „Omega-Spant“, gefertigt am IFP, Dresden. Im Vordergrund: CAIO-Spant, im Hintergrund: Standard-Multiaxialgelege.

Bild 12.16. Omega-Spant

Oben: Detail mit den CAIO-Rovings auf der Oberfläche.

Unten: CAIO-Faserverlauf als Vorlage für die Fertigung.

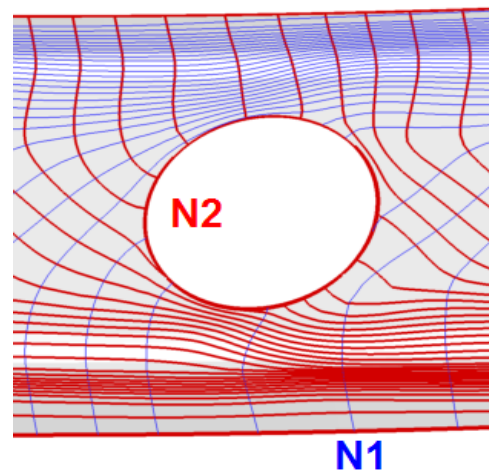
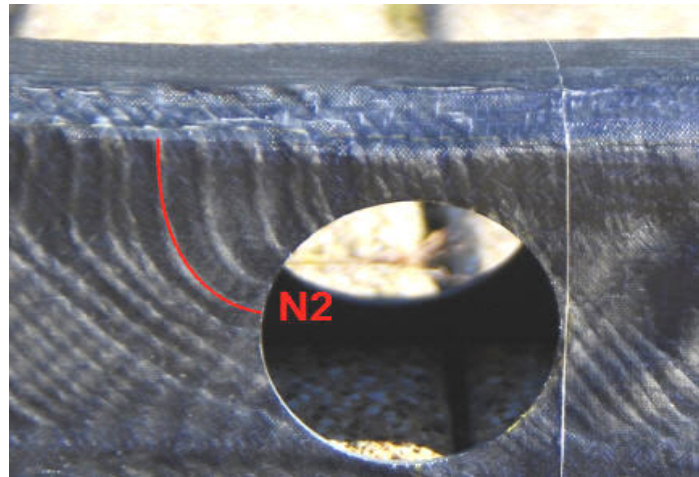
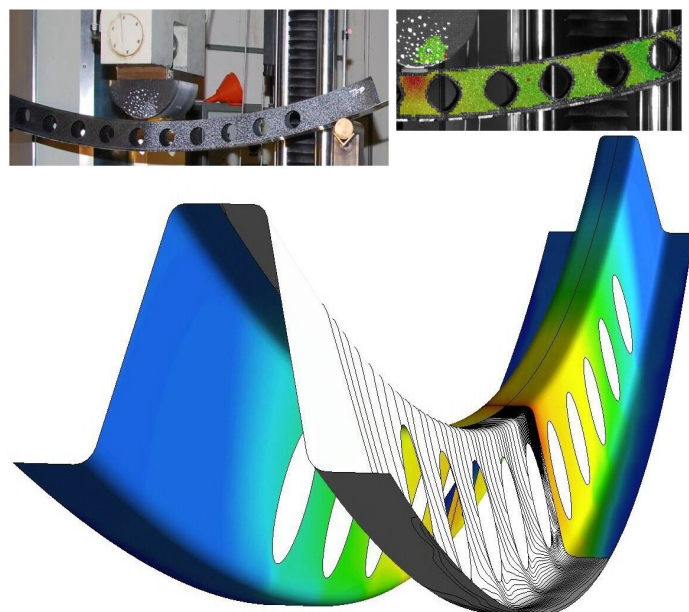


Bild 12.17: Der Ω - Spant, CAIO-optimiert. Von Lokaleffekten abgesehen ist der Spannungszustand im Wesentlichen membranartig und durch die 2 Membranhaupttrichtungen N1 und N2 gegeben. Farblich dargestellt ist das dichte Faserfeld N2 (Temperaturfeld der orthotropen Wärmeleitung). Die Schwarz-Weiß Region zeigt die Extraktion von Einzelfasern als Isolinien aus dem N2-Feld. Nur zusammen mit den N1-Fasern, die senkrecht auf den N2-Fasern stehen, ist eine CAIO-Membranauslegung vollständig.

Links oben: 3-Punkt-Biegeversuch am IFB, Prüfaufbau. Die Messungen am IFB ergaben: der mit CAIO optimierte Spant aus C-Fasern ist im Vergleich zum MAG-Spant (Multiaxialgelege aus C-Fasern) ca. 30% steifer.

Rechts oben: Verformungs- und Dehnungsmessung mit ARAMIS am IFB (Universität Stuttgart).



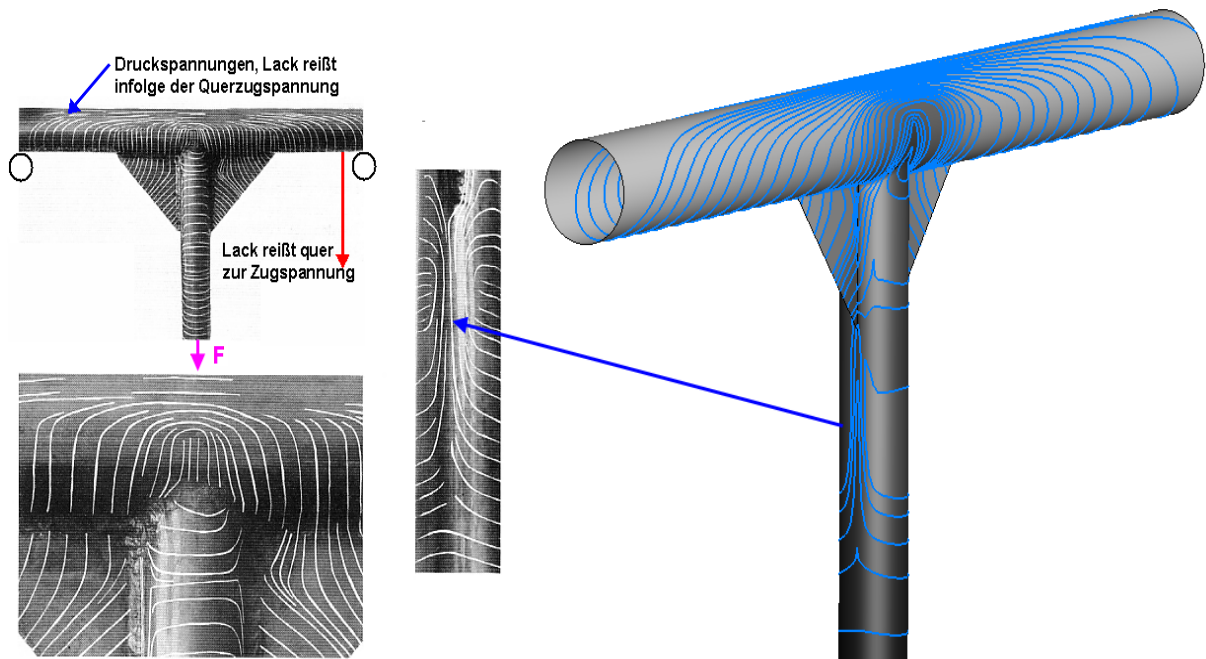
12.7 Verifikation der CAIO-Methode anhand von experimentellen Verfahren mit Reißlack

Es existieren mechanische Messprinzipien, die geradezu auf die CAIO-Methode führen und somit einen Vergleich zwischen Messung und Rechnung erlauben. Das Reißlackverfahren, auch Dehnungslinienverfahren genannt (Maybach, 1924 und Stresscoat, 1938), funktioniert wie folgt: Nach dem Trocknen des „lackierten“ Bauteils wird die Last aufgebracht. Der spröde Lack reißt quer zur Richtung mit der größten Zughauptspannung σ_2 ($\sigma_1 < \sigma_2$, Abaqus-Konvention). Damit ist die Richtung der 1. Hauptspannung visualisiert. Die 2. HS-Richtung (σ_2) verläuft dazu senkrecht.

Der Reißlack dient als experimenteller Transformator auf das Hauptachsensystem und als Integrator längs einer Hauptspannungsrichtung. Die Risslinie selbst ist das Ergebnis der Integration und ist vergleichbar mit den aus CAIO rechnerisch ermittelten Faserverläufen.

Bild 12.18 zeigt einen solchen Vergleich anhand eines T-Rohrs mit Eckblech-Versteifung. Das Foto ist entnommen aus: W. Kloth, Atlas der Spannungsfelder in technischen Bauteilen, /18/.

Bild 12.18. T-Rohr unter Vertikallast F , an den waagrechten Rohrenden gelagert.
Links: Risslinien im Reißlack, ein Teil davon wurde von W. Kloth weiß nachgezeichnet.



Rechts: 3D-Schalenmodell mit CAIO-Faserverlauf $N1$.

12.8 Stahlbeton-Träger. CAIO-Linien: Vorlage für die Armierung

Beim Einsatz von Stahlarmierung berücksichtigt der Baustatiker die Trajektorien der Hauptzugspannung. Bei nur horizontaler Bewehrung entstehen sonst schräge Risse in der Nähe der Auflager. Die CAIO-Linien liefern einen Designvorschlag für die Armierung, die Druckbewehrung **N1** ist optional.

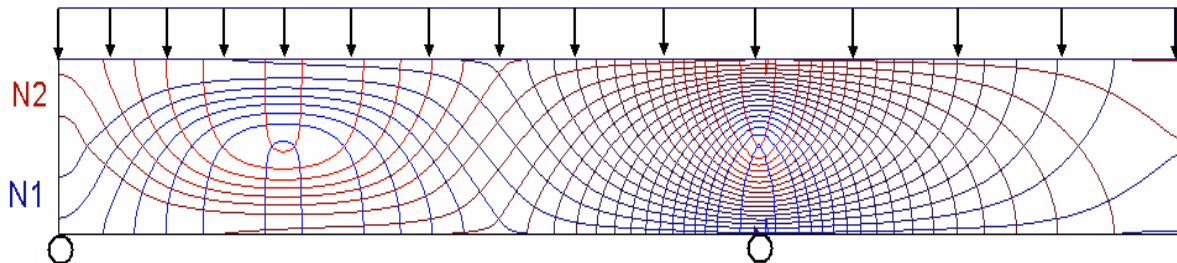


Bild 12.19: Stahlbeton-Träger unter konstant verteilter Querkraft, Armierung längs **N1** und **N2**.

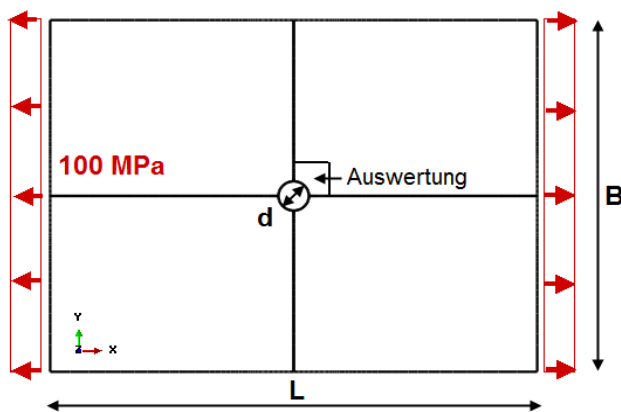
13. Faserplatzierung: HS-Richtung versus Lastpfad-Richtung

Eingangs des vorigen Kapitels wurde angemerkt, dass die Faserplatzierung längs der HS-Richtungen eine günstige Ausnutzung der hohen longitudinalen Faserfestigkeit bedeutet und zudem die Schubbeanspruchung zwischen den Fasern und der Matrix vermeidet. Der kritische Punkt besteht in der relativ geringen Zug-Querfestigkeit des Verbunds. Wenn nun eine Balance zwischen Quer- und Schubbeanspruchung angestrebt wird, kann insgesamt eine höhere Bauteilsicherheit erreicht werden. Diese Balance könnte bei vorwiegend eindimensionalen Spannungszuständen von der Lastpfadmethode besser gewahrt sein als beim originalen CAIO-Konzept, wie das folgende Beispiel zeigt.

13.1 Lochscheibe unter Zugbelastung, Bild 13.1, Vergleich: LP - CAIO - UD, /37/

Dieses Problem ist durch Spannungen gekennzeichnet, deren x-Komponente bei weitem die anderen Komponenten überwiegt. Prinzipiell würde deshalb eine Faserorientierung ausreichen: Lastpfad in x-Richtung (x-LP), CAIO in Richtung der größten Hauptspannung, UD parallel zur x-Achse. Die kritische Beanspruchung findet quer zur Faser statt, bei genügend hoher Belastung tritt ein Zwischenfaserbruch (ZFB) auf. Die Lastpfadmethode liefert die geringste ZFB-Beanspruchung. Der „schubspannungsfreie“ Zustand ist „überoptimiert“. Die Schubspannungsfreiheit geht zu Lasten einer höheren Querbeanspruchung der CAIO-Faser. Bei der Lastpfadmethode sind in diesem Beispiel die Quer- und Schubbeanspruchungen dagegen in einem ausgewogenen Verhältnis.

Es wurde auch ein Zwei-Schichtenmodell untersucht, es zeigt sich, dass ein solches Modell deutlich schlechter ist als das Ein-Schichten-Modell, weil 2 Schichten nicht erforderlich sind. Dies gilt jedoch nur für diesen speziellen Fall der GFK-Lochscheibe unter x-Belastung.



Tab. 13.1 – Kennwerte [MPa], s. auch Gl. (12.1).	GFK /23/
Längsmodul E_1	44500
Quersmodul E_2	12500
Schubmodul G	6000
Längszugfestigkeit X_T	1300
Längsdruckfestigkeit X_C	800
Querzugfestigkeit Y_T	35
Querdruckfestigkeit Y_C	140
Schubfestigkeit S	75
Querkontraktion ν [-]	0.28
Dichte ρ [kg/m ³]	2040

Bild 13.1.

Links: Lochscheibe unter Zug in x-Richtung, Dicke $t = 1$ mm, $d = t$, $L = 16 d$, $B = 12 d$. Die Auswertung ist auf die Lochumgebung beschränkt.

Rechts: Materialkennwerte für GFK aus /23/, Faservolumen = 60%.

Gerechnet wurden folgende Varianten:

- 1-Schichtenmodell: LP: [x-LP], CAIO: [HS1], UD: [0°]
- 2-Schichtenmodell: LP: [x-LP / 90°]_s, CAIO: [HS1 / HS2]_s, UD: [0° / 90°]_s

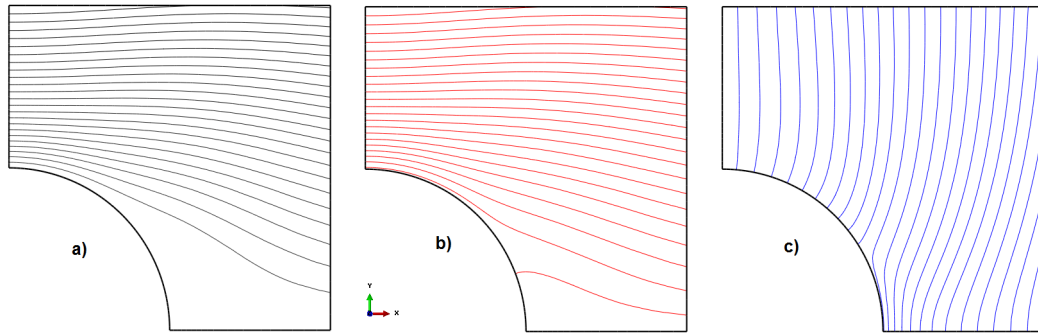


Bild 13.2. Lochscheibe im Bereich der Auswertung

- a) Lastpfad in x-Richtung (x-LP). Da eine Belastung in y-Richtung nicht vorliegt, ist y-LP nicht relevant.
- b) CAIO-Linien entsprechend der 1. HS ($\sigma_1 > \sigma_2$, allgemeine Konvention).
- c) CAIO-Linien entsprechend der 2. HS.

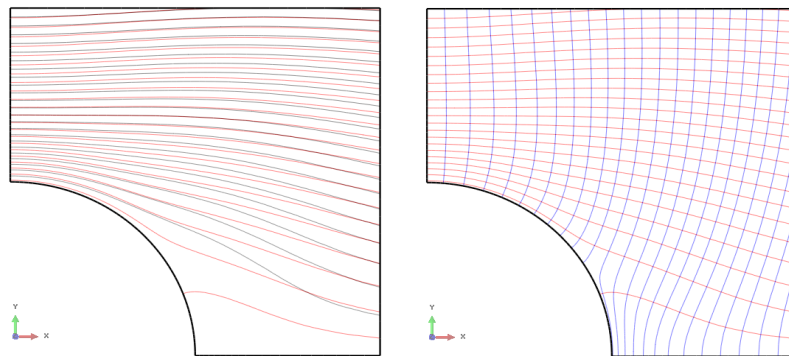


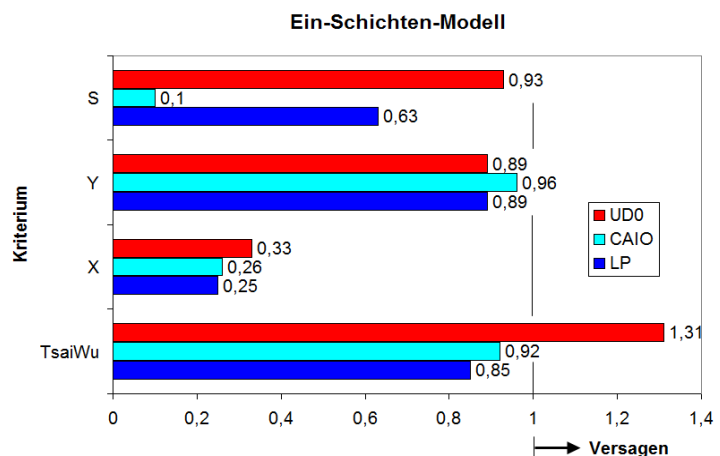
Bild 13.3. 1-Schichtenmodell versus 2-Schichtenmodell

Links: 1-Schichtenmodell: Verlauf der **CAIO-HS-Linien** und der **Lastpfad-Linien**. Bild 7.5 erklärt anhand des Mohrschen Spannungskreises den unterschiedlichen Verlauf in Abhängigkeit der HS-Richtung γ und der Lastpfad-Richtung α . Während HS-Linien auch auf dem unbelasteten Lochrand enden können (allerdings mit Null-Intensität), können Lastpfadlinien diesen nur tangieren.

Rechts: 2-Schichtenmodell: **CAIO-Linien der 1. HS** und **CAIO-Linien der 2. HS**.

Das 2-Schichtenmodell für die Lastpfad-Analyse kombiniert x-LP mit einer UD-Schicht in y-Richtung: $[x\text{-LP} / 90^\circ]_s$. Das 2-Schichtenmodell UD0-90 ist ein Kreuzverbund $[0^\circ / 90^\circ]_s$.

Bild 13.4. Auswertung des Ein-Schichtenmodells ($t = 1 \text{ mm}$) entsprechend den Festigkeiten der Tab. 13.1: Schub **S**, ZFB (Zwischenfaserbruch) **Y**, Faserbruch **X** und Tsai-Wu („Pauschkriterium“, in FE-Programmen Standard). Die günstigen S- und X-Werte bei CAIO können nicht darüber hinwegtäuschen, dass der Y-Wert sogar schlechter ist als bei UD0, X-, Y- und S-Wert sind nicht optimal ausbalanciert.



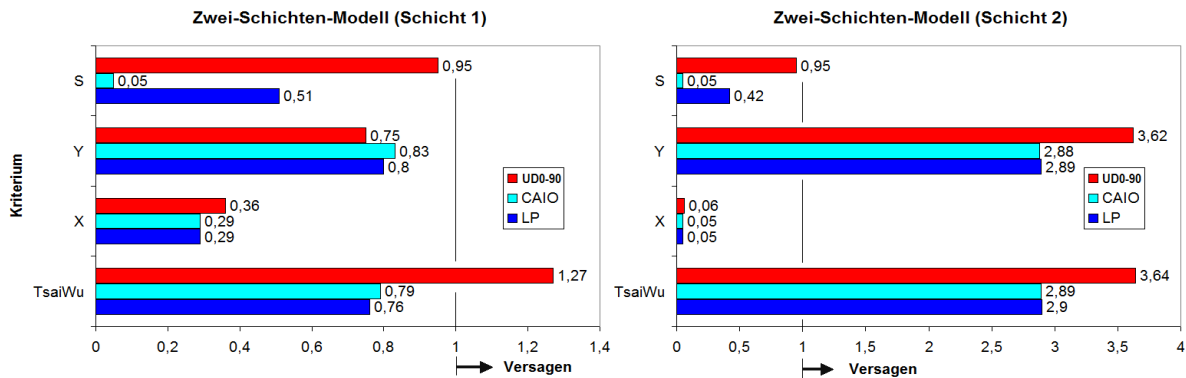


Bild 13.5. Auswertung des 2-Schichtenmodells aus GFK (Schicht 1: 0.8 mm, Schicht 2: 0.2 mm) entsprechend den Festigkeiten in Tab. 13.1: Schub **S**, Zwischenfaserbruch ZFB **Y**, Faserbruch **X** und Tsai-Wu. Die zusätzliche 2. Schicht liegt im Wesentlichen quer zur angelegten Spannung von 100 MPa in x-Richtung und ist mit seiner schwachen Querzugfestigkeit dieser Belastung ausgesetzt. Man beachte: Bei einer CFK-Lochscheibe ist ein entsprechendes 2-Schichtenmodell günstiger als das Modell mit nur einer CFK-Schicht, s. auch Kap. 9, Bild 9.6.

Bild 13.5 belegt durch einen Vergleich mit Bild 13.4, dass die Verwendung einer 2. GFK-Schicht, auch wenn sie sehr dünn ausfällt, nicht empfehlenswert ist, solange das Problem im Wesentlichen einem eindimensionalen Spannungszustand entspricht, mit nur lokalen Störungen am Lochrand. Der Verzicht auf die zweite Schicht kommt der ersten zugute, die auch allein den Querzug über die Matrix abfängt. Die Möglichkeit, das 1-Schichtmodell lokal durch AWW zu verbessern und somit auch höhere Lasten in x-Richtung zuzulassen, ist in Kap. 9 untersucht.

Fazit: Für dieses ausgewählte GFK-Beispiel zeigt sich, dass die Verwendung einer einzigen CAIO- bzw. Lastpfadschicht deutlich günstiger ist als die von 2 Schichten. Dies ist der Dominanz der unidirektionalen Belastung in x-Richtung geschuldet. Eine 2. Schicht wird erst nötig, wenn ein zweidimensionaler Spannungszustand vorliegt, vorzugsweise mit ausgeglichenem Hauptspannungsverhältnis ($HS1 \approx HS2$). Beim CAIO-1-Schichtenmodell ist im vorliegenden Beispiel die praktische Schubspannungsfreiheit durch eine höhere Querzugbelastung erkauft. Jedoch ist dieses Beispiel allein sicherlich nicht aussagekräftig genug um zu verallgemeinern. Zusätzlich zum Nutzen einer alternativen Faserplatzierung liegt der Wert der Lastpfadmethode in der Visualisierung des Krafftflusses, wie in den nächsten Beispielen gezeigt wird.

13.2 Bolzenverbindung mit Spielpassungen

Das Beispiel zeigt die symmetrische obere Hälfte einer Lochscheibe (Lochradius $R=10$ mm) mit 2 Bolzen, die eine rechts eingeleitete Kraft F abtragen sollen. Der linke Bolzen ist passgenau, der rechte weist jedoch einen kleineren Radius als das Loch auf. Wenn das Untermaß zu groß wird ($r = 9.9$ mm), trägt der 2. Bolzen keine Last. Folgerichtig tangieren die Krafftflusslinien den 9.9er Bolzen, es wird dort keine Last abgetragen. Der x-Lastpfad ist intuitiv und ist bestens geeignet, den Krafftfluss von Spielpassungen in Bolzenverbindungen zu visualisieren.

Ist die Lochscheibe als FKV-Bauteil konzipiert, so assoziiert der Krafftfluss zudem einen lastgerechten Faserverlauf. Beispielhaft sei auf die passgenaue Bolzenverbindung mit $r=10$ (Bild 13.6c) hingewiesen. Die Faserverdichtung findet logischerweise an 2 Schwachstellen statt. Dies sind die 9-Uhr-Position (Lochleibung) und die 12-Uhr-Position (Flankenbug). Das Faser-Layout kommt mit einem Muster (x-LP) aus, im Gegensatz zum CAIO-Faser-Layout mit 2 Mustern (HS1, HS2), Bild 13.6. Die Lastpfadmethode kombiniert quasi die 2 CAIO-Faserverläufe zu einem einzigen.

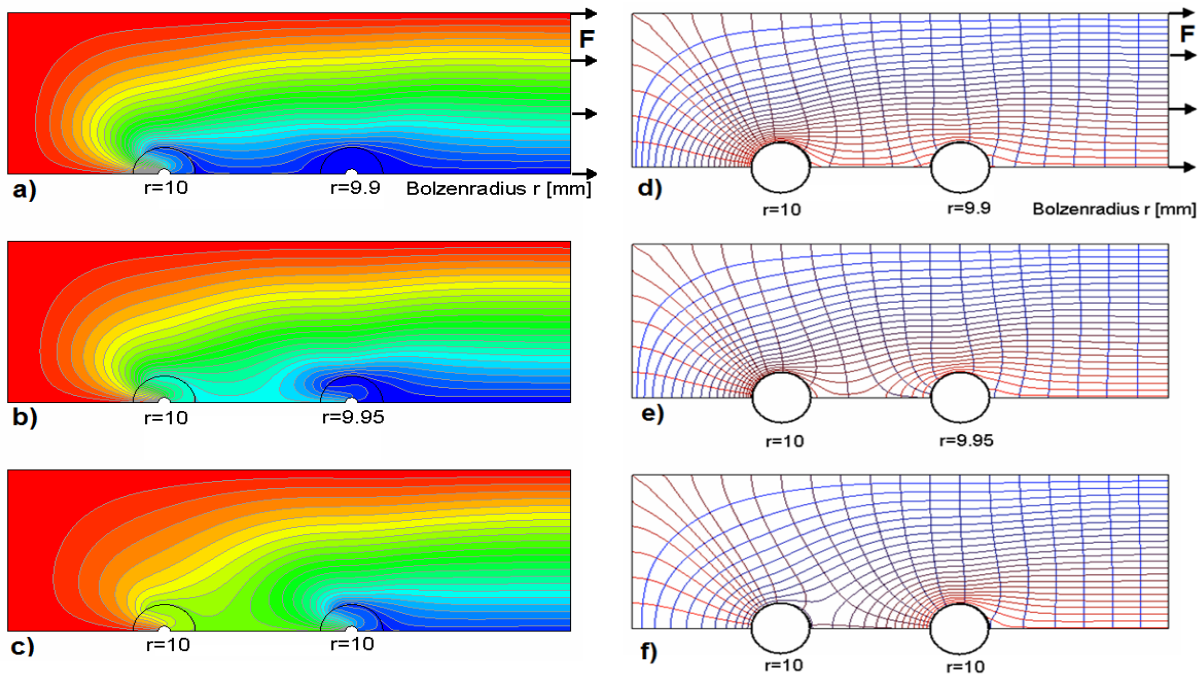


Bild 13.6. Bolzenverbindung mit Spielpassungen, der linke Bolzen ist passgenau zum Loch mit $r=10$ mm. Isotrope Berechnung der LP- und HS-Linien, $E=210.000$ MPa. (Die Farben haben keinen Bezug zur lokalen Beanspruchung.)

a) Lastpfadlinien: Der rechte Bolzen mit $r=9.9$ mm ist zentral fixiert, sodass zum Lochrand uniform ein Spiel von 0.1 mm vorhanden ist. Zwischen zwei Lastpfadlinien ist der Kraftfluss, resultierend aus den Beiträgen von σ_{xx} und τ_{xy} , konstant, s. auch Gl. 7.5. Da der rechte Bolzen nicht trägt, muss der linke Bolzen die gesamte Kraft abtragen.

b) dto. a) jedoch rechter Bolzen mit halbem Spiel.

c) dto. a) jedoch beide Bolzen ohne Spiel.

d) - e) dto. a) - c), jedoch HS1- und HS2-Linien.

In /39/ ist eine passgenaue Ein-Bolzenverbindung (Lochscheibe mit einem Bolzen) experimentell untersucht, wobei die Faserplatzierung einerseits nach den Lastpfad-, andererseits nach den HS-Richtungen vorgenommen wurde, der Faserverlauf ähnelt dem in Bild 13.6c und f. In dieser Untersuchung schneidet hinsichtlich der Versagenslast das HS-Konzept etwas günstiger ab als das LP-Konzept.

13.3 Der gekröpfte Träger mit indirektem Kraftfluss

Es ist offensichtlich, dass Lastpfade so kurz und direkt wie möglich gestaltet werden sollen. Gekröpfte Konstruktionen sind ineffektiv und durch zusätzliche Biegung gekennzeichnet. Bild 13.7 zeigt intuitiv, dass der Stab aus Teilbild a) dem Design aus b) vorzuziehen ist. In der Praxis ist jedoch der letztere Fall von größerer Relevanz.

Das in Abb. 13.7b gezeigte CAIO-Layout ist optimal. Der Aufwand soll jedoch dadurch reduziert werden, dass ein $[0^\circ / 90^\circ]$ Basislaminat durch einige wenige zusätzliche Rovings verstärkt wird. Es bietet sich an, aus den Druckhauptspannungslinien nur diejenigen zu nehmen, die als Kraftfluss zwischen den 2 Kräften F zugeordnet werden können. Es bieten sich jedoch auch andere Verstärkungsvarianten mit geringerem Materialaufwand an, s. Bild 13.8. Die Varianten 1-3 sind Untermengen aus Bild 13.7b, Variante 4 ist das Ergebnis aus der Anwendung der Lastpfadmethode.

Bild 13.7. Der gekröpfte Träger als C-Bügel

a) Direkter Kraftfluss

b) Indirekter Kraftfluss. Die Konstruktion kann durch die CAIO-Schichten der Zug- und Druckhauptspannungslinien optimal ausgelegt werden.

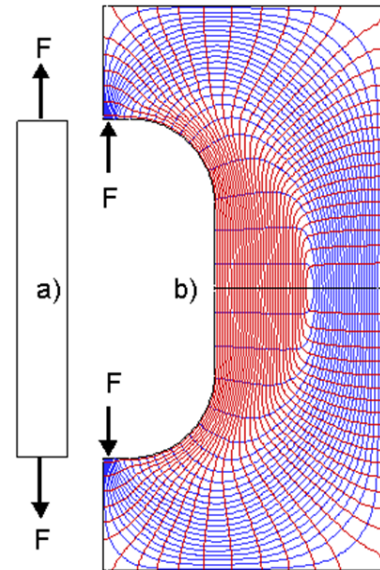
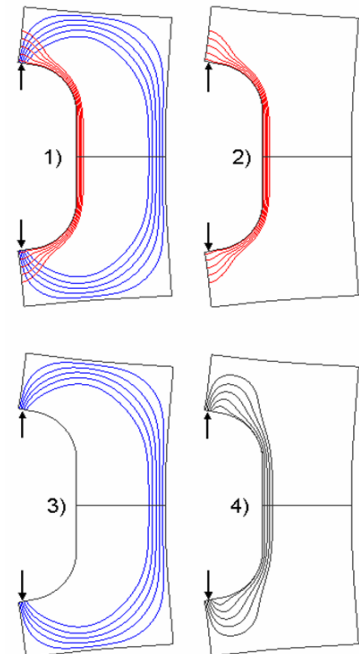
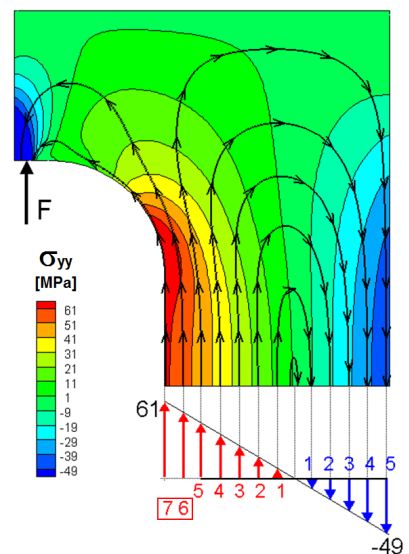


Bild 13.8. Verstärkungsvarianten mit Einzelrovings von jeweils gleichem Querschnitt. Varianten 1) bis 3) aus den Hauptspannungslinien in Bild 13.7b, Variante 4) aus der LP-Methode in Bild 13.9 entsprechend den Kraftpfeilen 7 und 6. Der Steifigkeitszuwachs mit den aufgestickten Rovings bezogen auf ein unverstärktes Standardlaminat beträgt (rechnerisch): 1) 30%, 2) 21%, 3) 10%, 4) 22%.



Das Roving-Layout aus der Lastpfadmethode ist intuitiv. Variante 1) aus Bild 13.7b ist zwar noch effektiver, jedoch ist der zusätzliche Materialverbrauch größer. Aus Bild 13.9 geht hervor, dass die Lastpfade unter der Kraft F effektiv die äußere Belastung abtragen, während das unvermeidliche Biegemoment zum Gleichgewicht in der Vertikalrichtung nichts beiträgt.

Bild 13.9. Verlauf der Lastpfade im isotropen Basismaterial, dargestellt ist die obere Symmetriehälfte zusammen mit der vertikalen Normalspannung σ_{yy} . Die Kraftpfeile 7 und 6 stehen mit der Kraft F im Gleichgewicht. Die roten und blauen Kraftpfeile 1-5 aus dem Moment heben sich gegenseitig auf und tragen nichts zum Kraftfluss F bei.



Als praktisches Beispiel für eine gekröpfte Konstruktion soll der Setzkopf (Bild 13.10) aus dem BMBF-Projekt /25/ dienen. Die Lastpfadlinien werden jetzt jedoch nicht als effektive Faserverläufe gedeutet, vielmehr werden die geschlossenen Linienzüge mithilfe von Bild 13.10 als mögliche Aussparung interpretiert.

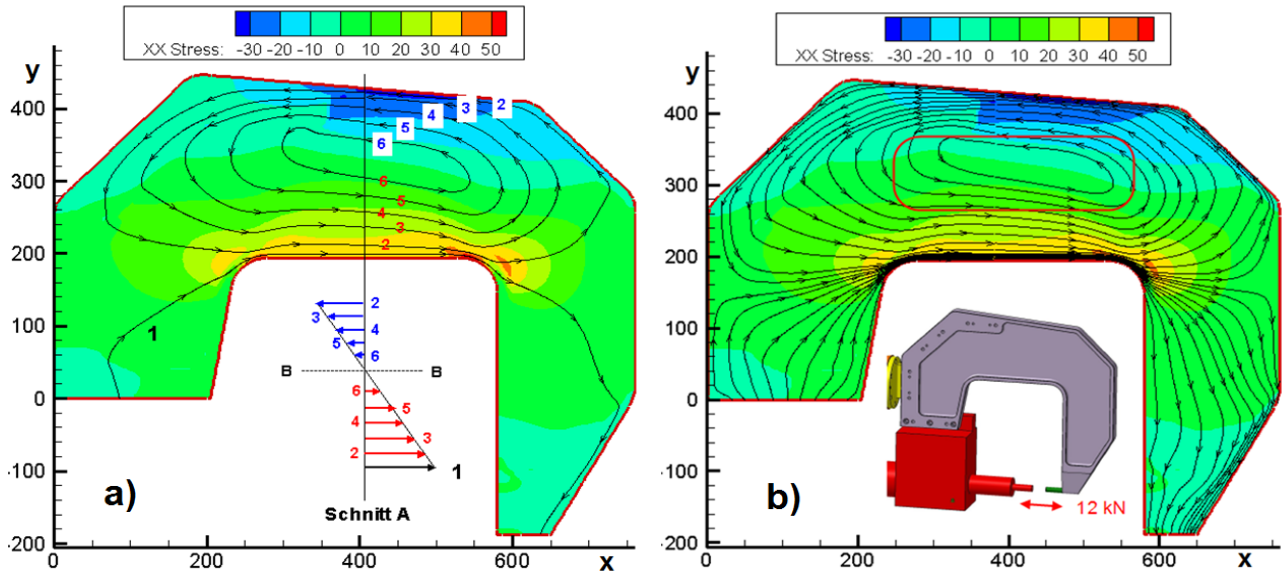


Bild 13.10. Setzkopf /25/ unter Axiallast von 12 N

a) Die geschlossenen Kraftflusslinien repräsentieren ein Biegemoment analog zu Bild 13.9. Die inneren Schleifen sind in der Nähe der neutralen Faser positioniert und bezüglich der Kraftübertragung in x-Richtung ohne Beitrag.

b) dito a) jedoch mehr Lastpfadlinien. Für eine Gewichtsoptimierung bietet sich an, den **rechteckigen Ausschnitt** einzusparen, der in etwa den Schleifen 5 und 6 (Teilbild a) entspricht und wenig zur Biegesteifigkeit beiträgt.

14. Die Visualisierung des Kraftflusses mit der Lastpfadmethode, /27/

Bei der Visualisierung der HS-Linien kann die orthotrope Wärmeleitung, nicht jedoch das *streamtracing* Verfahren eingesetzt werden, s. Kap. 1. Die Visualisierung der LP-Linien ist dagegen mit beiden Methoden möglich.

14.1 Kraftfluss in Gewindegängen

Der 2D-axialsymmetrisch approximierte Kraftfluss in Gewindegängen ist oftmals in Lehrbüchern des Maschinen- und Stahlbaus skizziert. Mithilfe der Gl. (7.9) und der orthotropen Wärmeleitung kann dieser visualisiert werden. Bild 14.1 zeigt die Kraftflusslinien in einem M24-Bolzen mit Druckmutter und verspanntem Flansch (Halbmodell bezüglich der Symmetrieebene $z = -12$ mm). Es handelt sich um eine rotationssymmetrische, nichtlineare Kontaktanalyse bei Vernachlässigung der Gewindesteigung mit dem FE-Programm Abaqus. Dargestellt sind die Kraftflusslinien der axialen z -Richtung. Zwischen jeweils zwei Kraftlinien bzw. konzentrischen Kraftflächen ist der Kraftfluss $f_z = [\tau_{zr}, \sigma_{zz}] = \text{konstant}$. Der flanschnahe Gewindegang trägt am meisten. Für eine genaue Darstellung der Lastverteilung in den einzelnen Gewindegängen müssen jedoch die Kraftflusslinien dichter ermittelt werden, wie dies in Bild 14.2 gezeigt ist.

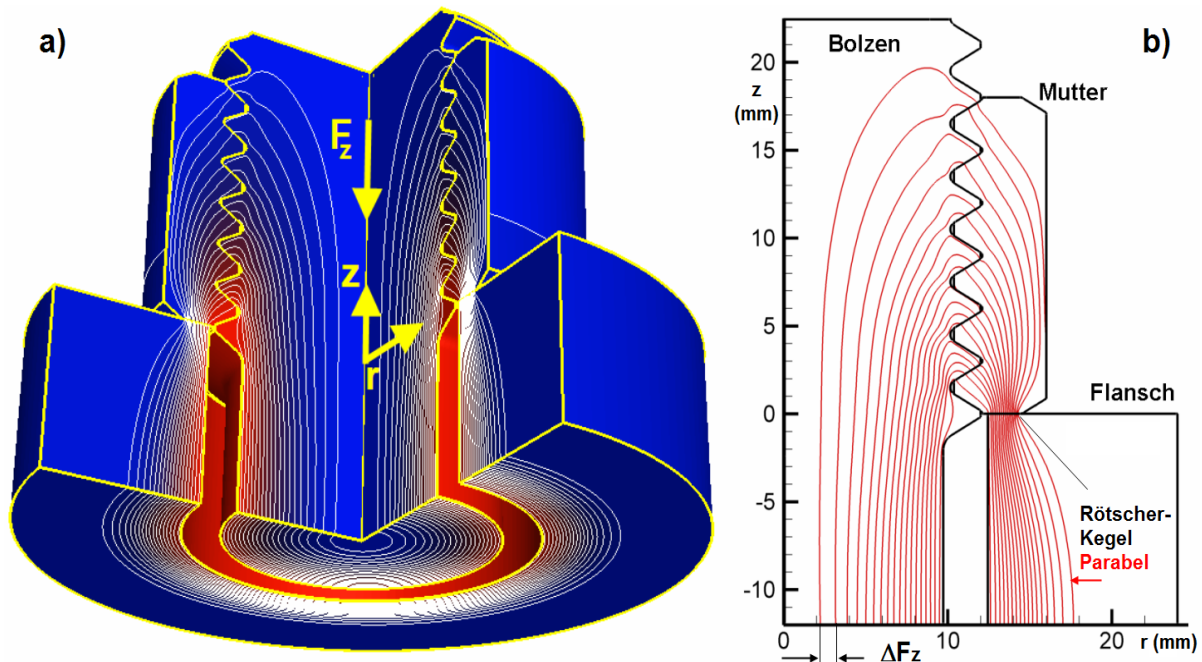
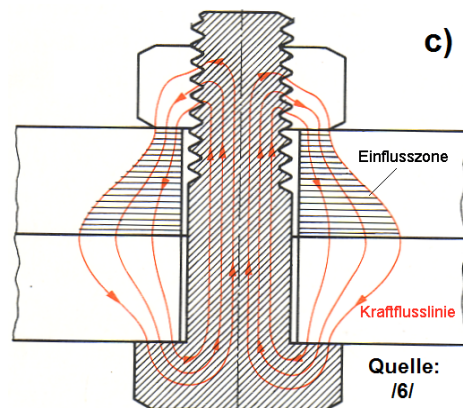


Bild 14.1. Kraftflusslinien in einem M24-Bolzen mit Druckmutter und verspanntem Flansch (Halbmodell bezüglich der Symmetrieebene $z = -12$ mm), nichtlineare Kontaktanalyse mit Abaqus. Dargestellt sind die Kraftflusslinien der z -Richtung. Zwischen jeweils 2 Kraftlinien (Kraftflächen) ist $\Delta F_z = \text{konstant}$. F_z resultiert aus den Beiträgen von σ_{zz} und τ_{zr} , s. Gl. (7.9). Der flanschnahe Gewindegang trägt am meisten.

a) In der 3D-Darstellung mutieren die Kraftflusslinien zu konzentrischen Kraftflussflächen.

b) 2D-Darstellung mit radial korrekt gewichteten Kraftflusslinien

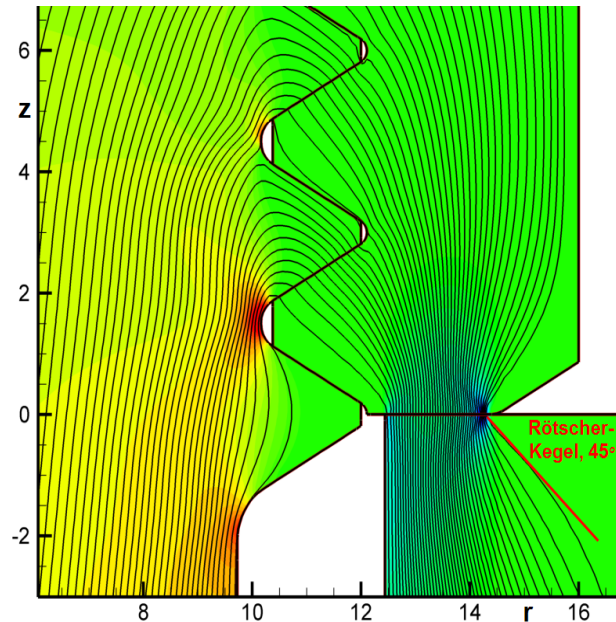
c) Intuitive Darstellung des Kraftflusses in einer Schraubenverbindung, zu finden in diversen Lehrbüchern, z.B. /6/.



Quelle:
/6/

Bei der Berechnung von Schraubenverbindungen spielt der sogenannte Rötischer-Kegel /30/ eine wichtige Rolle zur Abschätzung der Steifigkeit der zu verspannenden Teile. Der Vertikal-kraftfluss einer Schraubenverbindung zeigt, dass der Kegel durch eine Parabel (bzw. ein Rotationsparaboloid) besser approximiert werden kann. Der theoretische Rötischer-Kegelwinkel von 45° bestätigt sich jedoch erst bei einer hohen Dichte der integrierten Kraftflusslinien, s. Bild 14.2. Dieses spezielle Beispiel fügt sich nahtlos ein in die Kraftkegel-Methode nach C. Mattheck in /21/, die sich als geeignetes grafisches Hilfsmittel zur Formfindung von Leichtbaustrukturen erwiesen hat.

Bild 14.2. Details im 1. und 2. Gewindegang. Durch Auszählen der Kraftlinien können die Kraftflussbeiträge in den Gewindegängen ermittelt werden. Man beachte auch die Kraftflusskonzentration in den Abrundungen des Bolzengewindes. Die Dichte der Kraftflusslinien ist ein Maß für die Höhe der Beanspruchung. Die Kraftlinien werden korrekt über die tragenden Gewindeflanken integriert. Der Rötischer-Kegel erlaubt die Einführung eines kreiszylindrischen Ersatzkörpers, der für den Einsatz der Verspannungsdiagramme von Schraubenverbindungen benötigt wird.



14.2 Kraftfluss in Entlastungskerben

Die Positionierung von Entlastungskerben hilft, Spannungskonzentrationen zu reduzieren. Dieser Effekt wird bei gekerbten axialbelasteten Wellen ausgenutzt. Wird eine solche Welle jedoch auf Torsion belastet, ist der Effekt geringer. Die Visualisierung der Kraftflusslinien liefert indirekt die Begründung. Das Ergebnis gilt für die hier speziell gewählte Kerbe.

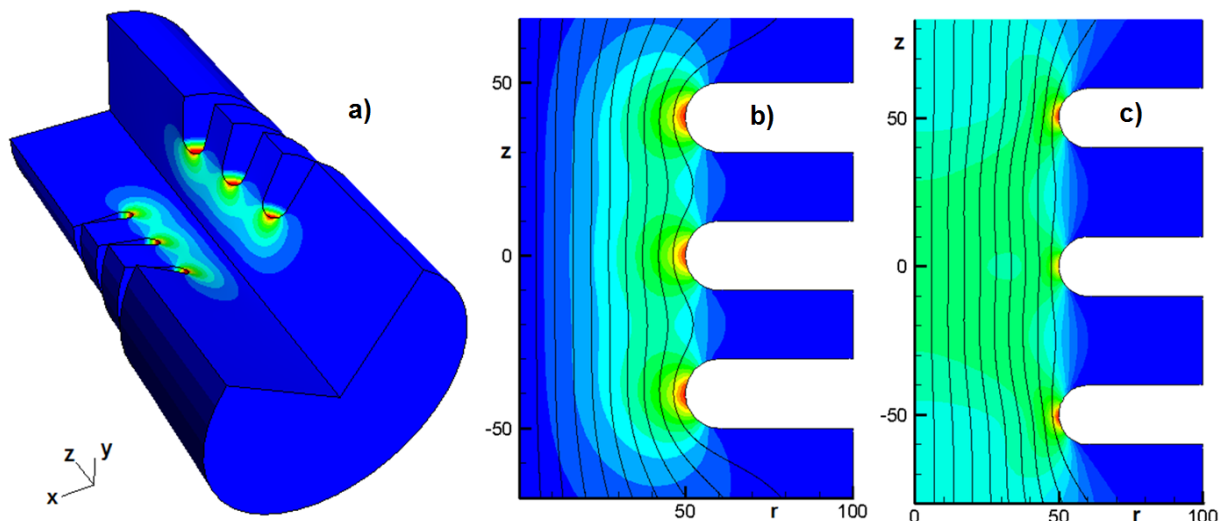


Bild 14.3. Welle mit 3 Kerben

a) Lastfall Torsion um die z-Achse. Gezeigt sind die Verdrehungen und die (qualitativen) Torsionsspannungen (Maxima: rot).

b) Lastfall Torsion (Detail). Die Spannungsüberhöhungen (K -Faktoren) für die 3 Kerben betragen: $K = 1.53 / 1.51 / 1.53$. Für die Einzelkerbe ist $K = 1.57$. Die Welligkeit der Kraftlinien ist ein Maß für die Spannungsumlenkung bzw. für den K -Faktor. Fazit: Es gibt keine nennenswerte Wirkung dieser Entlastungskerbe. Auch geänderte Kerbabstände ändern daran nichts.

c) Die links gezeigte Welle unter Axiallast. Gezeigt sind die Axialspannungen. $K = 2.47 / 2.07 / 2.47$. Für die Einzelkerbe ist $K = 2.71$. Die Welligkeit der Kraftlinien ist gering, die Wirkung der Entlastungskerben entsprechend groß. Die mittlere Kerbe ist gegenüber den 2 Außenkerben deutlich entlastet.

14.3 Das Knotenblech im Stahlbau

Die bisherigen Ausführungen lassen erkennen, dass die Visualisierung des Kraftflusses besonders dann von Wert ist, wenn einer der Kraftflussvektoren f_x , f_y oder f_z (Gln. 8.7 - 8.9) im Global- oder in einem rotierten Lokalsystem dominant ist. Das ist im Stahlbau-Fachwerk für jeden Stab, jeweils für sich betrachtet, der Fall. Um den Kraftfluss in einem komplexen Knotenblech zu demonstrieren, wurde aus /43/ ein entsprechendes Beispiel ausgewählt, das von Th. Wyss dort besonders ausführlich dokumentiert ist, s. auch Bild 14.4.

In dieser Konstruktion werden an zwei 15 mm starken **Laschen C** 20 t Last angehängt. Die Last wird über 4 Niete ($\phi = 21$ mm) in das 6 mm starke **Knotenblech B** eingeleitet, das zwischen den 2 Laschen eingebettet ist.

Th. Wyss selbst leitet aus den experimentell ermittelten Spannungen zwar nicht den Kraftfluss, sondern das System der Hauptspannungslinien ab, das einen ungefähren Eindruck der Lastpfade in der Konstruktion vermittelt. Dieses Ergebnis (hier nicht gezeigt) stimmt sehr gut überein mit den hier numerisch berechneten Hauptspannungslinien, (Bild 14.5a). Die σ_1 -Hauptspannungslinien (rot) umschließen die nicht dargestellten Niete. Die σ_2 -Hauptspannungslinien (blau) stützen sich über Lochleibung an den Nietschäften ab.

Der Kraftfluss kann über die Hauptspannungslinien erahnt werden, jedoch ist der Vergleich mit dem realen Kraftfluss interessant (Bilder 14.5a bis c).

Wegen der Doppelsymmetrie bezüglich Geometrie und Last ist in Bild 14.5b nur $\frac{1}{4}$ der Struktur dargestellt. Die Kraftlinien starten am Ort der Krafteinleitung in der Lasche, umfließen zunächst die Bohrungslöcher, um rückseitig in den Niet einzudringen. Dort begibt sich der Kraftfluss dann auf die Ebene des Knotenblechs, um dort weitergeleitet zu werden. Die Kraftfluss-Berechnung aus den Spannungskomponenten selbst ist einfach. Der Spannungstensor aus der FE-Analyse (hier Abaqus) wird in das Grafikprogramm (hier Tecplot) über eine Standard-Schnittstelle exportiert. Nach der Spezifikation der Spannungskomponenten des y -Kraftvektors $f_y = [\tau_{yx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{yz}]$ zeichnet Tecplot alle Kraftlinien mithilfe des „streamtracing“ Verfahrens automatisch. Da es sich hier um eine 3D-Darstellung der Kraftflusslinien handelt, kann die orthotrope Wärmeleitung nicht effizient eingesetzt werden, s. auch Kap. 11.

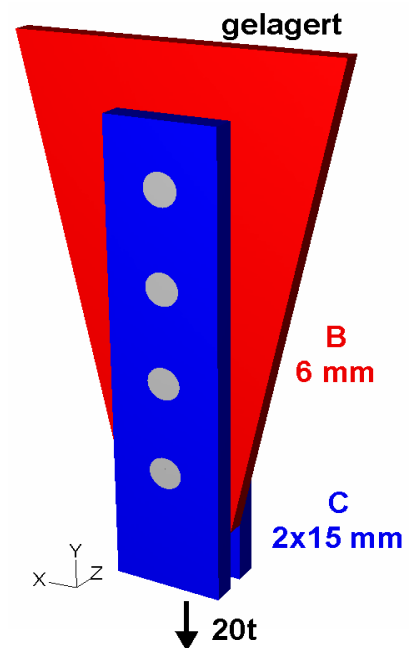


Bild 14.4. Probekörper (Stahl) aus /43/ unter einer Vertikallast von 20 t

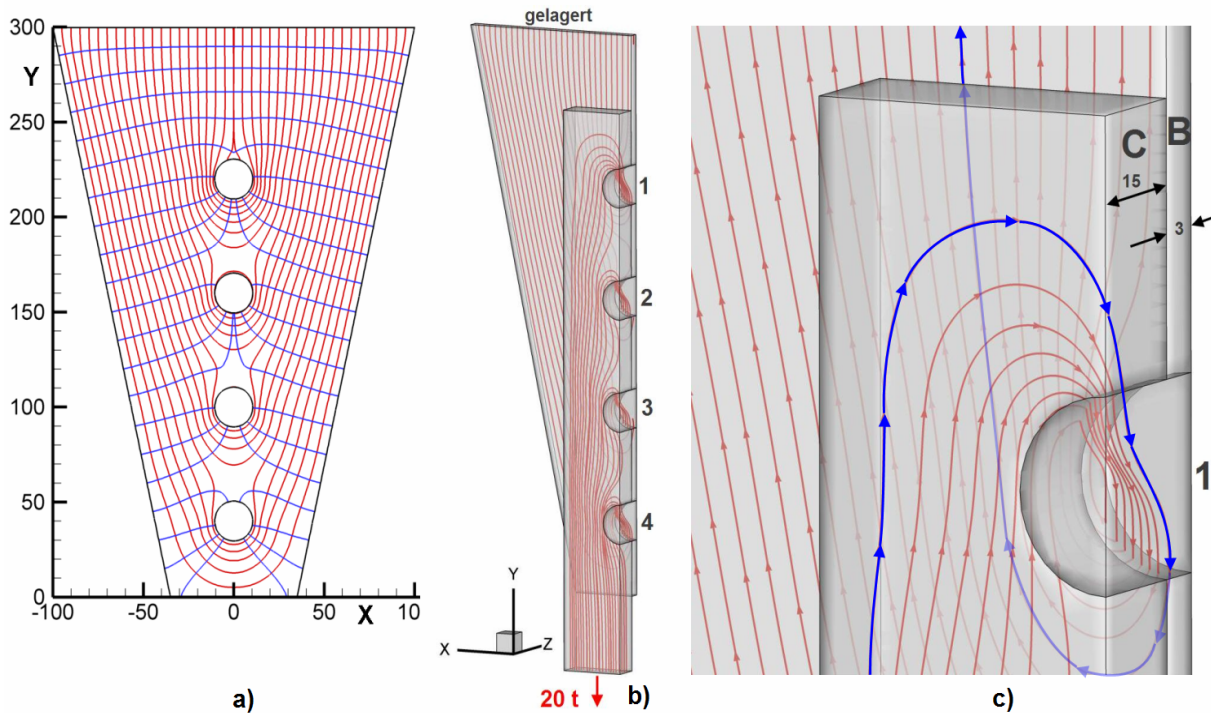


Bild 14.5. FE-Analyse des Probekörpers aus Bild 14.4 (nichtlineares Kontaktproblem).

a) Hauptspannungslinien im Knotenblech B ($\sigma_1 > \sigma_2$).

b) y-Kraftfluss

c) Detail an dem 1. Niet, Kraftfluss in C über den Niet nach B.

Bei der hier gezeigten Nietverbindung erfolgt der Kraftfluss von der Lasche zum Knotenblech ausschließlich über den Niet, man kann sie auch als SLP-Verbindung* (Scher-Lochleibungs-Passverbindung) auffassen. Würden die Niete durch Schrauben mit Vorspannung ersetzt werden, um als gleitfeste Verbindung* zu wirken, so würden die Reibkräfte zwischen Lasche und Knotenblech die Schraube entlasten.

Im Fall dieser SLP-Verbindung genügen jedoch einfachere 2D-FE-Modelle. Die 2 Laschen, 4 Niete und das Knotenblech werden durch Scheibenelemente in einer Ebene idealisiert, man ist dann am Membrananteil des Kraftflusses interessiert. Im Gegensatz zu 3D-Modellen lassen sich in 2D die Lastpfade effektiv mittels der orthotropen Wärmeleitung berechnen. Es wurden mehrere Varianten gerechnet, um den Einfluss auf den Kraftflussverlauf zu untersuchen, s. Tabelle 14.1.

Analyse	Tab. 14.1: Gerechnete Varianten zum Probekörper aus /43/	Bild
Wyss /43/	Referenz	14.4
A	3D, Niet N1 – N4 ohne Spiel	14.5
B	2D, analog Analyse A	14.6a
C	2D, Niet N3 mit Radialspiel 0.15 mm	14.6b
D	2D, Niet N3 mit Radialpressung (Übermaß 0.05 mm)	14.6c
E	2D, elastisch / perfekt plastisch, $\sigma_{fl} = 200 \text{ MPa} \rightarrow \epsilon_{max} = 1.2\%$	-
F	2D, analog Analyse E, $\sigma_{fl} = 170 \text{ MPa} \rightarrow \epsilon_{max} = 10\%$	14.7

*Stahl-Informations-Zentrum: Anwendungen von Schrauben im Stahlbau, Merkblatt 322, Düsseldorf 2001.

Bild 14.6a zeigt bei der spielfreien Nietpassung durch die verschiedenen Kraftflussdichten an den 4 Nietbohrungen N1 bis N4, dass trotz angeschrägtem Knotenblech keine gleichförmige Verteilung der Nietlasten erreicht wird.

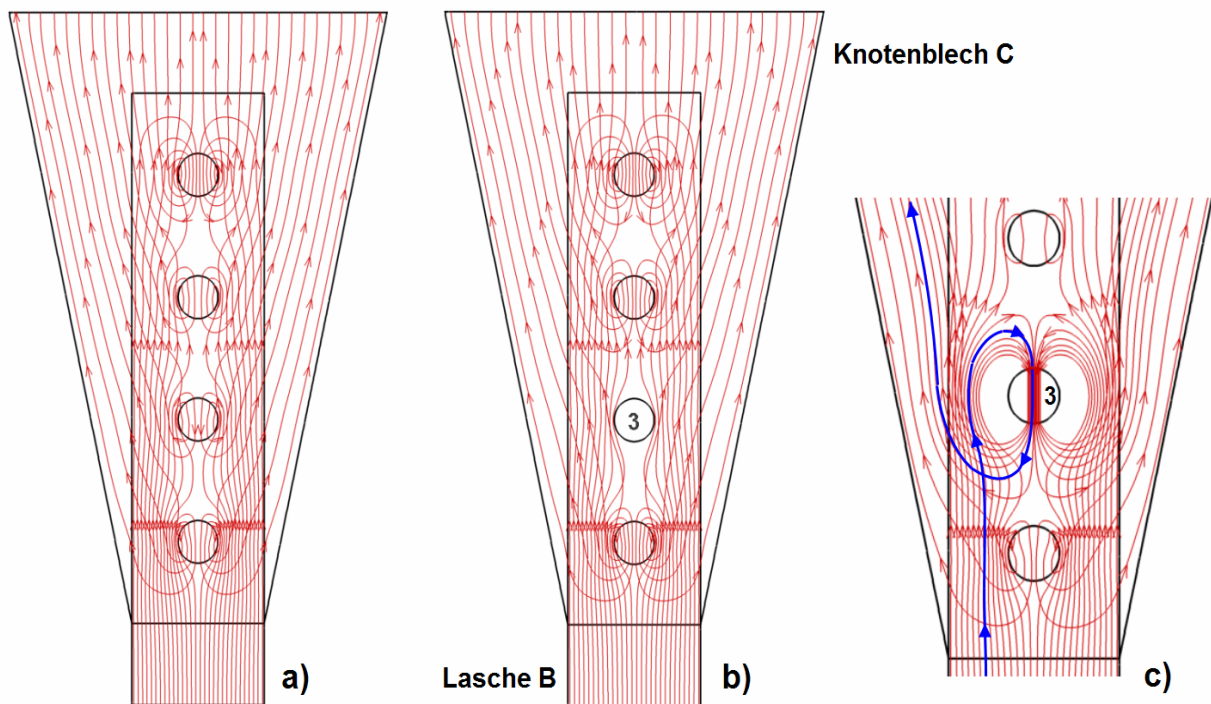


Bild 14.6. Einfluss von Toleranzen auf den y-Kraftfluss.

a) spielfreie Nietpassungen

b) Niet 3 mit radialem Spiel von 0.15 mm

c) Detail des 3. Niets mit Presspassung (0.05 mm radiales Übermaß). *Kraftlinie, s. Text.*

Die Ungleichförmigkeit wird erheblich vergrößert, wenn an den SLP-Verbindungen Spiel oder Pressung auftritt. Bild 14.6b zeigt ein willkürlich angenommenes Radialspiel von 0.15 mm bei dem 3. Niet, Teilbild c) ein radiales Übermaß von 0.05 mm ebenfalls bei dem 3. Niet. Im ersten Fall tangieren die Kraftflusslinien den 3. Niet, ohne in diese einzutreten. Im zweiten Fall bilden sich zusätzliche Pressspannungen, die für sich selbst im Gleichgewicht stehen. Die Kraftflusslinien (von der Lasche herkommend) werden dadurch zunächst abgedrängt, um dann von hinten sehr konzentriert in den Niet eingeleitet zu werden. Dieser Fall ist beim Nietvorgang infolge der Stauchung und guten Füllung des Nietlochs repräsentativ. Das ausgesparte Gebiet um das 3. Nietloch ist natürlich nicht kraftfrei, die von unten nach oben verlaufenden Kraftlinien lassen jedoch dort Platz für Kraftlinien aus der lokalen Verpressung, die mit dem y-Kraftfluss von der Lasteinleitung bis zur Lagerung nichts zu tun haben.

Die Gln. (7.4) stellen reine Gleichgewichtsbedingungen dar, sie gelten deshalb auch für elastoplastische Werkstoffe. Zu diesem Zweck wurde in der Analyse E die Fließgrenze willkürlich auf niedrige 200 MPa (ideal perfekt plastisch) festgelegt, dies führt zu einer maximalen plastischen Dehnung von 1.2% im Knotenblech. Jedoch erst bei einer Absenkung der Fließgrenze auf 170 MPa (maximale plastische Dehnung dann 10%) sind die Lasten auf die 4 Niete gleichförmig verteilt, s. Bild 14.7a. Dies wird durch die gleichförmige Dichte der Kraftflusslinien bestätigt und auch die rechts abgebildete v.Mises-Spannung (Teilbild b) zeigt durch die limitierte Fließspannung von 170 MPa die gleichförmige Lochleibung.

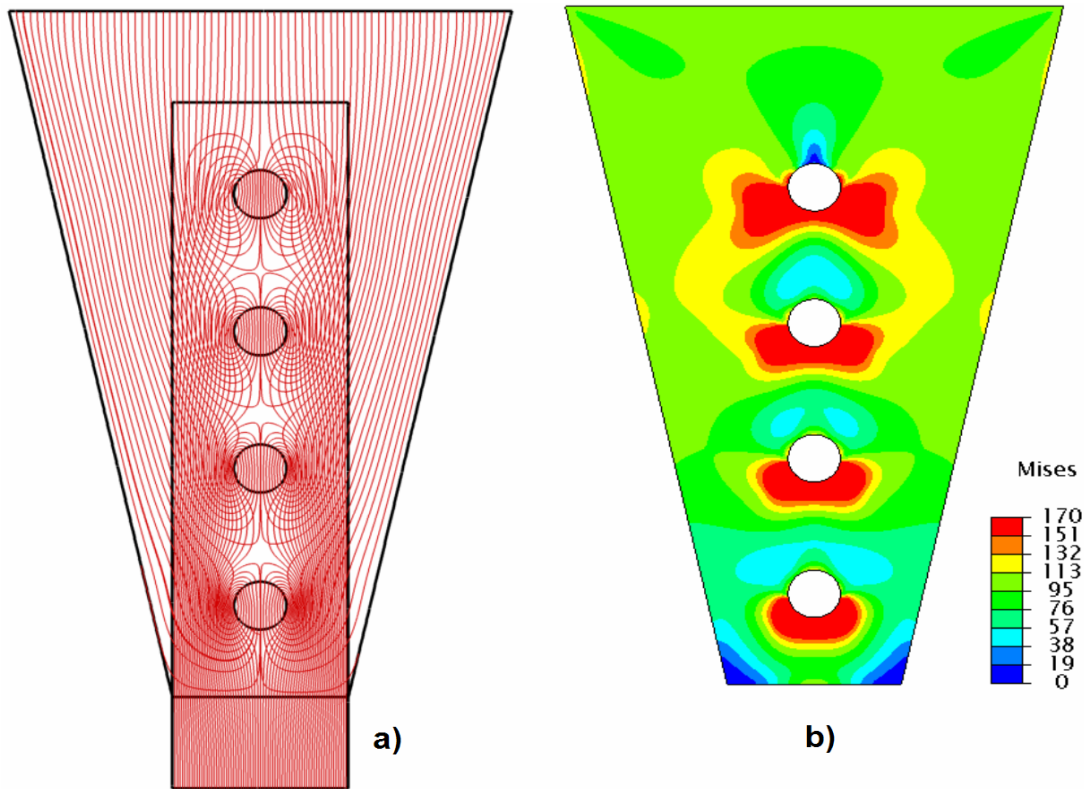


Bild 14.7. Stahl-Probekörper mit ideal perfekt plastischem Material.
a) y -Kraftfluss, das plastische Fließen belastet alle 4 Niete gleichförmig.
b) v.Mises Spannung (MPa), perfekt plastisch, willkürlich festgesetzte Fließspannung = 170 MPa.

Die Gesamtlast von 20 t in Bild 14.4 verteilt sich auf die 4 Niete N1-N4 nach den Messungen von Th. Wyss mit 7, 5, 3 und 4 t. Diese Angaben in /43/ haben jedoch nur eine gültige Ziffer und sind deshalb relativ ungenau im Vergleich zu den Nietlasten der Analysen A-F in Bild 14.8.

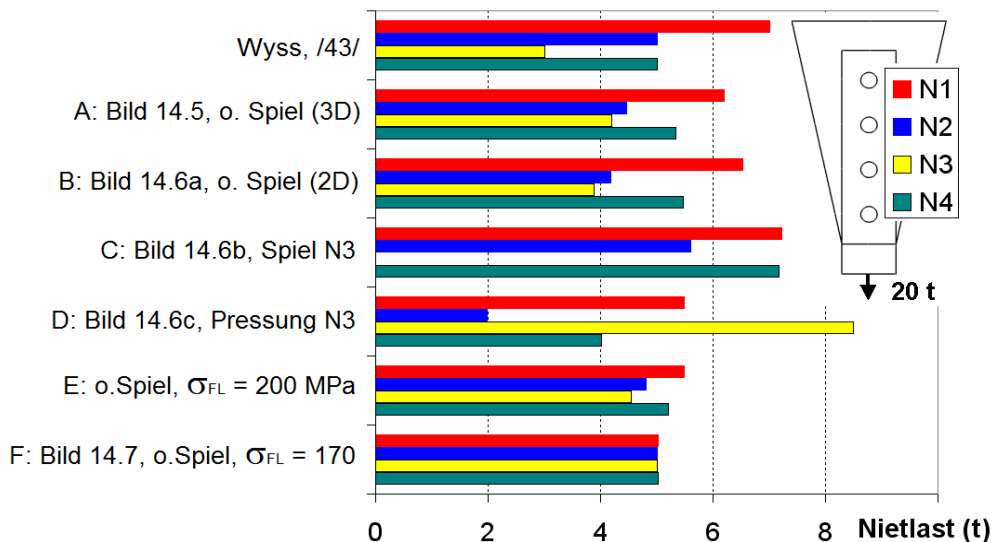


Bild 14.8. Nietlasten N1-N4 im Probekörper aus Bild 14.4. Varianten A-F, s. auch Tab. 14.1. Die Analysen E und F sind elastoplastisch durch die Einführung einer willkürlich niedrig gesetzten Fließspannung auf 170 MPa (in /43/ nicht untersucht).

Weitere Beispiele visualisierter Lastpfade finden sich in /25/.

15. Hinweise zur praktischen Arbeit mit CAIO_{OW}

Die vorliegende Arbeit befasst sich primär mit der Integration von Richtungsfeldern mithilfe der orthotropen Wärmeleitung. In den vorausgegangenen Kapiteln wurde der Einfachheit halber für diese Methodik das Kürzel CAIO verwendet. Da sich dieses Kapitel mit der praktischen Anwendung beschäftigt, wird zur Unterscheidung zu anderen CAIO-Methoden (CAIO_{Shell}, CAIO_{II}) jetzt explizit das Kürzel CAIO_{OW} verwendet, um auf die orthotrope Wärmeleitung hinzuweisen. Das Kürzel CAIO_{OW} schließt nun auch die LP-Methode mit ein, da Lastpfade effektiv mit der orthotropen Wärmeleitung visualisiert werden können.

Eine Hauptanwendung liegt im Bereitstellen eines Designvorschlags für ein FKV-Laminat mit variablem Faserverlauf, es soll jedoch keineswegs suggeriert werden, dass damit ein Optimum erzielt wird. In vielen Fällen lässt sich sicherlich eine Verbesserung gegenüber einem Standard-Laminat erreichen, ob jedoch eine LP- oder eine HS-AWV-Integration zu besseren Ergebnissen führt, ist per Rechnung und/oder Experiment nachzuweisen.

Unabhängig davon erfüllt CAIO_{OW} eine wichtige Aufgabe: Die orthotrope Wärmeleitung mit ihrem extrem orthotropen Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten, mit Lokalsystemen entsprechend dem zu integrierenden Richtungsfeld, ist ein numerisch stabiles Werkzeug.

Es wurde zwar vereinzelt versucht, *streamtracing* für die Integration von HS-Richtungen in 2D und 3D zu nutzen, dies kann jedoch nur für sehr einfache Strukturen gelingen, s. Kap. 1. Das Programm CAIO_{Shell} aus dem BMBF-Projekt *Biotex* für 2D und 3D-Schalen stellt einen gewissen Fortschritt dar, jedoch sind die Nachteile gegenüber CAIO_{OW} offensichtlich, siehe Kap. 2.

Im Kapitel 10 wurde eine Übersicht gegeben über den sinnvollen Einsatz der beiden konkurrierenden Systeme CAIO_{OW} und *streamtracing* mit den Schlussfolgerungen: Für tensorielle Richtungsfelder von Hauptspannungen ist *streamtracing* nicht empfehlenswert.

15.1 Die Randbedingungen der orthotropen Wärmeleitung für das CAIO_{OW}-Verfahren

In den Kap. 3 und 4 wurde mehrfach darauf hingewiesen, dass die Isothermen aus dem CAIO_{OW}-Verfahren tangential zu den Vektoren des Richtungsfeldes verlaufen, praktisch unabhängig von den Randbedingungen. Dies gilt umso mehr, je größer das Verhältnis der orthotropen Wärmeleitfähigkeiten angesetzt wird, s. Bild 3.5. Die Randbedingungen haben jedoch einen Einfluss auf die Gleichförmigkeit der Isothermen-Verteilung. Sofern das zu integrierende Richtungsfeld komplex und unübersichtlich ist, empfiehlt es sich, zunächst stets mit den einfachst möglichen Definitionen zu arbeiten. Dies bedeutet, die Struktur uniform aufzuheizen. In einer transienten Wärmeleitung ist darüber hinaus keine weitere Randbedingung erforderlich, eine stationäre Wärmeleitung ergibt jedoch eindeutige (zeitunabhängige) Resultate und ist deswegen vorzuziehen. Im letzteren Fall muss dann an einem beliebigen Knoten eine Referenztemperatur vorgegeben werden, um unendliche Temperaturen infolge der Aufheizung zu vermeiden.

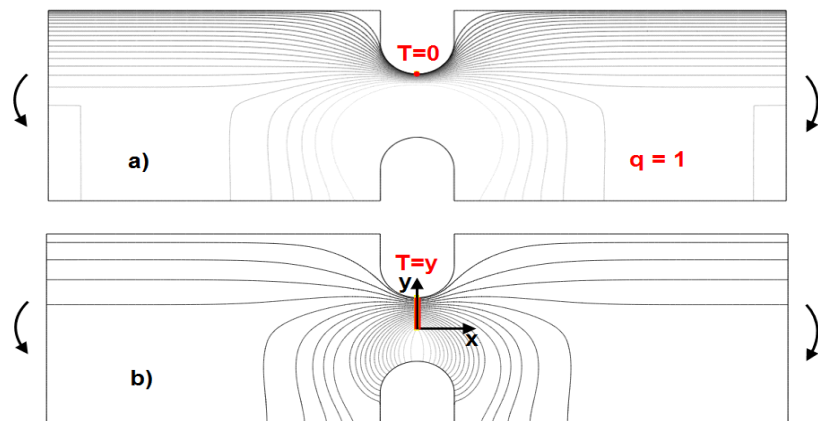
Das so entstehende Isothermenbild erfasst die ganze Struktur und gibt die bestmögliche Übersicht bei jedoch teilweise inakzeptabler Gleichförmigkeit der Isolinien. In einem 2. Schritt können dann die Randbedingungen mithilfe des zuvor gewonnenen Isothermenbildes angepasst werden. Denkbar ist die Vorgabe von Temperaturen an 2 Knoten, die möglichst weit auseinanderliegen, um die Isothermen auf die gesamte Struktur zu verteilen. Auch 3 oder 4 Knoten auf einem Polygonzug sind möglich, um die Wichtung der Isolinien zu optimieren. Für die Berechnung der Isolinien entsprechend der 1. und 2. Hauptspannung sind 2 unabhängige thermische Analysen notwendig, wobei die Orthotropie im ersten Fall z.B. durch das Verhältnis $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^6$, im 2. Fall durch $\lambda_1 / \lambda_2 = 10^{-6}$ gekennzeichnet ist.

Besonders bei Scheiben ist die Vorgabe der Temperaturen auf einem (Teil-)Rand oder auf einer Symmetrieachse empfehlenswert. Zu diesem Zweck wird nochmals die Biegung einer Scheibe mit Doppelnut (Bild 9.9) aufgegriffen.

Bild 15.1. Scheibe mit Doppelnut unter Biegung, s. auch Bild 9.9 bezüglich der Einleitung des Biegemoments. Gezeigt sind die HS1-Linien.

a) Allgemeine Randbedingungen: Referenztemperatur $T=0$ an einem Knoten, $q=1$ (Aufheizung aller Elemente)

b) Verbesserte Lösung: $T(x=0, y) = y$ für $y>0$.



Für die Symmetrie-Randbedingung im Bild 15.1b muss $x=0$ in 2 Teile unterteilt werden. Das 1. Teilstück mit der Temperaturvorgabe für $y>0$ ist für die HS1-Linien, das 2. Teilstück mit Temperaturvorgabe für $y<0$ ist für die HS2-Linien vorgesehen (hier jedoch nicht gezeigt). Ein ähnliches Beispiel findet sich in Kap. 3.6 (Bild 3.12).

Bei der Festlegung von Krafrandbedingungen ist eine punktförmige Spezifikation nicht real und im Grunde unzulässig. Wenn eine solche trotzdem aus Bequemlichkeitsgründen vorgenommen wird, sollte der Punkt von einem kleinen konzentrischen Starrbereich umgeben sein, wie dies in Kap. 4., Bild 4.2 gezeigt ist. In der nachfolgenden orthotropen Wärmeleitungsberechnung bleiben die Starrkörperelemente unberücksichtigt, sie sind zu eliminieren. Die Isothermen enden dann auf dem Starrkörpertrand, die Mehrdeutigkeit der Temperatur im singulären Einzelpunkt wird dadurch vermieden.

15.2 Zusammenhang zwischen Liniendichte und Schichtdicke

Die Isothermenberechnung mit CAIO_{OW} erfolgt im Kontinuum, d.h., die Isothermen liegen unendlich dicht vor. Zwangsläufig ergeben sich daraus 2 Vorteile:

- Es lassen sich aus dem Kontinuumsfeld der Temperatur beliebig viele Isothermen extrahieren. Das ständige Neuberechnen von Isolinien, je nach gewünschter Liniendichte, entfällt.
- Das kontinuierlich vorliegende **Temperaturfeld T** mit seinen Isolinien erlaubt eine Gradientenbildung.

$$\text{Grad } T \sim q \text{ [W/m}^2\text{]} \sim t \text{ [m]} \quad (15.1)$$

Ist die **Wärmeflussdichte q** hoch, so ist die damit verbundene Roving Dichte hoch und damit ein Maß für die lokale **Schichtdicke t**. Die Berechnung der Wärmeflussdichte erfolgt in FE-Programmen standardmäßig, ein Plot der Isolinien von $q = (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}$ ergibt die relative Dickenverteilung der dazugehörigen HS-Schicht.

Zu beachten ist jedoch, dass für eine solche Schichtdickenermittlung die Temperaturen aus CAIO_{OW} in eine separate stationäre isotrope Wärmeleitungsberechnung eingelesen werden müssen. Die zuvor orthotrop gerechneten Wärmeflussvektoren haben nichts mit Gl. (15.1) zu tun, da diese wegen der Orthotropie nicht senkrecht zu den Isothermen gerichtet sind, siehe Gl. (3.1). Diese zusätzliche isotrope Wärmeleitungsberechnung ist jedoch unproblematisch. Über die Randbedingungen sind dort *alle* Knoten mit den Temperaturen aus CAIO_{OW} zu beaufschlagen. Im Kap. 15.5 wird noch alternativ eine 2. Möglichkeit vorgeschlagen, um direkt die Schichtdickenverteilung zu bekommen.

15.3 Hinweise zum Einsatz von FE-Programmen

Die folgenden Hinweise, auch die speziellen für Abaqus und Ansys, sollen nur eine grobe Übersicht der Vorgehensweise aufzeigen, da gute Kenntnisse auf dem Gebiet der Finiten Elemente generell erforderlich sind. Es wird jedoch betont, dass der Anwender sich strikt in seiner FE-Umgebung bewegt, an keiner Stelle wird eine externe Software benötigt. Prinzipiell ist CAIO_{OW} für alle FE-Programme geeignet, die lineare Statik und die Berechnung orthotroper Temperaturfelder zulassen.

Unabhängig davon, ob ein zu integrierendes Richtungsfeld direkt vorgegeben wird oder sich erst aus einer FE-Analyse ergibt (z.B. aus dem Richtungsfeld der Hauptspannungen), gestaltet sich die orthotrope Wärmeleitungsberechnung einheitlich. Der letztere Fall ist bei weitem der wichtigere und soll im Folgenden vorausgesetzt werden. Es müssen demnach zuvor die HS-Richtungen in einem isotropen Statik-Lauf über die Auswertung des Spannungstensors ermittelt werden. Dies geschieht durch das FE-Programm oder bei einem ebenen Problem mit der Gl. (1.4).

Das statische 2D- bzw. 3D-Schalen-Element wird in der CAIO_{OW}-Analyse „1:1“ ersetzt durch ein äquivalentes thermisches Element. Es ist, wie das statische, ein Flächenelement und über 2 Wärmeleitfähigkeiten orthotrop definiert. Jede der beiden Wärmeleitungsberechnungen benötigt elementweise das entsprechende Lokalsystem. Falls diese Orientierung aus der 1. Hauptspannung stammt, sollte für die 2. Temperaturanalyse zur Generierung der HS2-Linien dasselbe Lokalsystem verwendet werden. **In der ersten Temperaturanalyse ist $\lambda_1 = 10^6$, $\lambda_2 = 1$, in der zweiten ist $\lambda_2 = 10^6$, $\lambda_1 = 1$.** Letztere Definition dreht die Isothermen um 90°.

Sofern es sich um ein AWW-Richtungsfeld $\pm\beta$ handelt, das das HS1-Richtungsfeld modifiziert, sind zwei Temperaturanalysen mit 2 entsprechenden Lokalsystemen durchzuführen. Beide Lokalsysteme schließen einen Winkel von 2β ein, sind also i.A. nicht orthogonal zueinander. Da es sich um getrennte Temperaturanalysen handelt, besagt die obige Festlegung der Wärmeleitfähigkeiten nur, dass in der ersten Analyse der relevante Wärmefluss in

Richtung $-\beta$, in der 2. Analyse in Richtung $+\beta$ erfolgt. Bild 9.8 zeigt für AWW beispielhaft die nicht orthogonalen Isothermen.

Bei der Auslegung von Platten und 3D-Schalen ist der Spannungszustand zwar weiterhin zweidimensional, jedoch sind die HS-Richtungen über die Dicke nicht konstant bei allgemeiner Belastung. Es empfiehlt sich daher, die über die Elementdicke integrierten Spannungen als Schnittkräfte **N** (Membrankraft) und **M** (Moment) auszugeben und deren Hauptrichtungen zu bestimmen, s. Kap. 12.1. Die CAIO_{OW} Methode ist dann auf zwei thermische Analysen bezüglich **N** und zwei Analysen bezüglich **M** anzuwenden.

CAIO_{OW} visualisiert HS- und LP-Verläufe. Die Evaluierung beider Systeme ist unabhängig von CAIO_{OW}. Die HS- bzw. LP-Richtungen, die in einem separaten Statiklauf schon zuvor ermittelt wurden, sind in den Evaluierungslauf einzulesen bei gleichzeitiger Festlegung der dazugehörigen Schichtdicken.

15.4 Hinweis zum Einsatz von Abaqus

Lokalsysteme lassen sich in Abaqus auf 2 Arten definieren:

- User Subroutine *Orient*
- **Distribution*

Im ersten Fall wird eine isotrope statische Berechnung durchgeführt, deren Ergebnisse mit **El File* (Spannungen S bzw. Schnittkräfte N und M) auf das sogenannte *fil-File* geschrieben werden. Ein eigens zu erstellendes Fortran Leseprogramm (mit *abqus make*) wertet den Spannungstensor aus und errechnet mit von Abaqus bereitgestellten Prozeduren (*SPRIND*) elementweise die Hauptrichtungen. Diese können dann binär oder als ASCII-File ausgegeben werden. In der dann folgenden Temperaturanalyse CAIO_{OW} wird dieses File über die User Subroutine *ORIENT* eingelesen, sodass jedes Element sein entsprechendes Lokalsystem, orientiert an den HS-Richtungen, bekommt. Dieses Verfahren erfordert zunächst einen nicht unerheblichen Aufwand, der dann jedoch in der Folgezeit bei ähnlichen Aufgabenstellungen einen gewissen Komfort bietet.

Im zweiten Fall steht der direkte Input über Datenkarten im Vordergrund und ist sicherlich der einfachere Einstieg. In dem isotropen Statiklauf werden Spannungen S auf das sogenannte *odb-File* geschrieben. Im Postprozessor Abaqus/Viewer werden interaktiv per *Result* → *Field Output* die Spannungen elementweise formatiert ausgelesen. Durch ein einfaches Fortran-Programm können die Komponenten des Spannungstensors auf die HS-Richtungen z.B. mit Gl. (1.4) umgerechnet und als ASCII-File ausgegeben werden. Die Formatierung sollte so erfolgen, dass sie der **Distribution* Syntax (Abaqus User Manual) entspricht. Per **Include* Statement kann dann das Einlesen der Richtungsdefinitionen erfolgen.

15.5 Hinweis zum Einsatz von Ansys

Vor der orthotropen Wärmeleitungsberechnung ist der isotrope Statiklauf durchzuführen und die Ergebnisse (Spannungstensor) im *db-File* zu retten. Nach einem *RESUME* können in */Post1* die Spannungskomponenten und Hauptspannungen in einer Tabelle (*ETABLE*) abgelegt werden. Danach werden die *ETABLE*-Werte in dimensionierte Arrays übertragen. Durch das APDL-Konzept (**A**nsys **P**arametric **D**esign **L**anguage) ist auf der Ansys-Input-Ebene eine Programmierung möglich. In diesem Fall werden mit der Prozedur **VFUN,,DIRCOS* die Richtungscosinusse der Hauptspannungen berechnet und daraus das HS-Richtungsfeld. Dieses Feld muss als ASCII-File gespeichert werden. Diese Schritte und die weiteren für die thermische Analyse sind als APDL-Script im Anhang von /10/ zu finden.

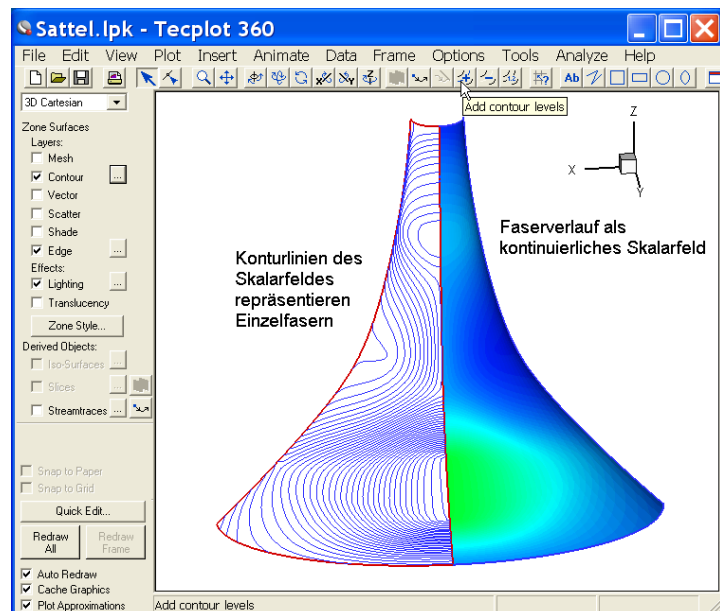
15.6 Hinweis zum Einsatz von Tecplot (Postprocessor)

Besonders der Einsatz des kommerziellen Programms Tecplot als Postprocessor für die Auswertung von CAIO_{OW} erspart dem Anwender viel Arbeit. Sofern die Isothermen als Faserverlauf einer FKV-Konstruktion genutzt werden, dient Tecplot als Fasermanagement-Programm. Damit sind u.a. folgende Manipulationen möglich:

- Extraktion einer frei wählbaren Anzahl von Isothermen (Fasern) durch Interpolation aus dem kontinuierlichen Temperaturfeld.
- Nachträgliches Hinzufügen/Wegnehmen von beliebigen Fasern aus dem Faserfeld, Bild 15.2.
- Nachträgliches Verschieben von Einzelfasern, wobei die Faser stets auf der 3D-Schalenstruktur verbleibt und aus dem ‚dichten‘ Faserfeld interpoliert wird.
- Ermittlung der relativen Schichtdicke aus der lokalen Dichte des Faserverlaufs, Bild 15.4.
- Beschneiden von einzelnen Fasern/Faserregionen, Bild 15.5.
- Abwickeln von gekrümmten Faserstrukturen in eine Ebene hinein, Bild 15.6.
- Extraktion der Faserpositionen (x,y,z- Koordinaten) im ASCII- und dxf-Format.

Bild 15.2. Fahrradsattel der Dicke t unter Eigengewicht des Radfahrers. Die Auswertung der Schalenmittelebene führt auf die Membranspannung $\sigma_1 (= N_1 / t)$. Nach der Berechnung der Isothermen mit CAIO_{OW} wird das Ergebnisfile in Tecplot eingelesen und präsentiert sich dem Betrachter entsprechend der rechten Sattelhälfte. Aus diesem kontinuierlichen Temperaturfeld können nun N_1 -Fasern extrahiert werden, deren Dichte sich allein aus der freien Wahl der Anzahl der Isolinien ergibt.

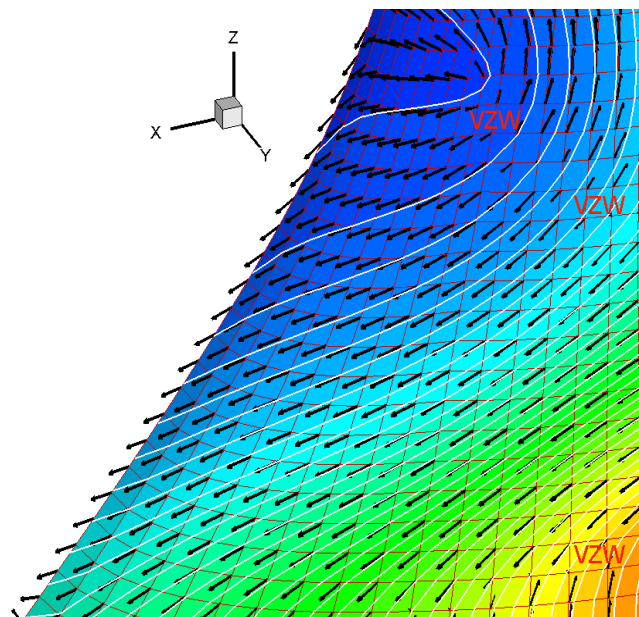
Einzelne Isothermen lassen sich interaktiv hinzufügen, wegnehmen oder verschieben.



Die Überprüfung auf Parallelität der HS-Richtungen mit den HS-Linien lässt sich schon in den Postprozessoren der FE-Programme vornehmen, dies kann auch nachträglich in Tecplot geschehen, s. Bild 15.3.

Bild 15.3. Ausschnitt aus Bild 15.2. Dem skalaren Faserfeld N_1 sind die extrahierten Einzelfasern und die Hauptmembranspannungsrichtungen überlagert. Man erkennt 3 Bereiche mit einem Vorzeichenwechsel (VZW) der HS-Richtungen.

Streamtracing-Verfahren lassen an der Stelle die Fasern in sich selbst zurücklaufen. CAIO_{OW} integriert korrekt über diese Bereiche hinweg.



Es besteht oft die Anforderung, die **Dickenverteilung von Faserverläufen** zu berechnen und gegebenenfalls zu beschneiden. Beide Techniken sind in Tecplot standardmäßig verfügbar. In Kapitel 15.2 wurde darauf hingewiesen, wie schon in den Postprozessoren der FE-Programme die relative Dickenverteilung aus den Isothermen (Fasern) ermittelt werden kann. Einfacher geht es direkt in Tecplot nach dem Einlesen des Temperaturfeldes, s. Bild 15.4.

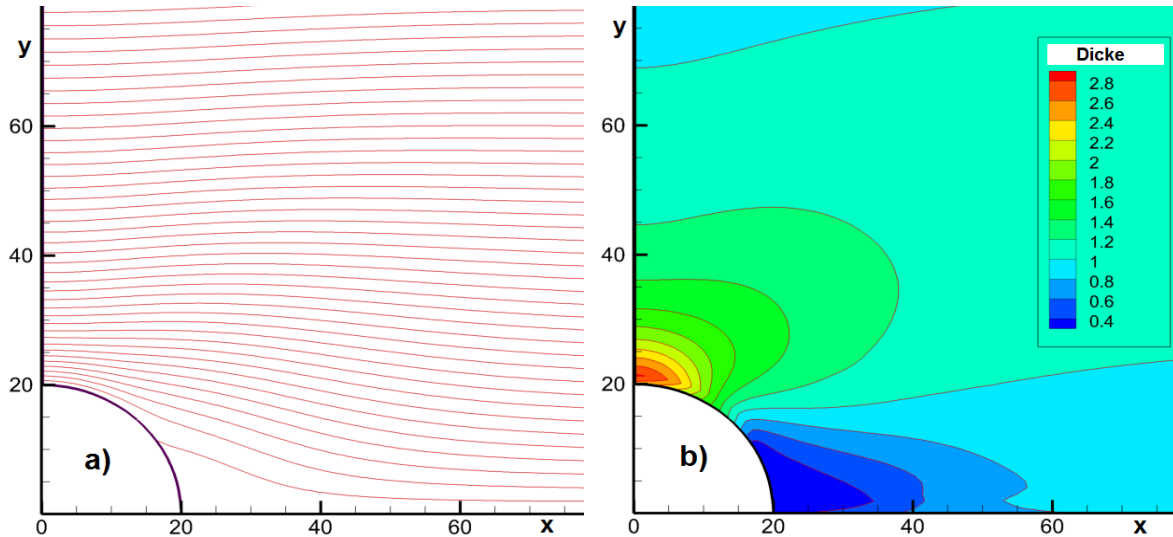


Bild 15.4. Ausschnitt aus Bild 12.2.

a) Temperaturfeld T : Isothermen entsprechend dem N_2 -Verlauf in Bild 12.2.

b) Grad $T \sim t$ (relative Dicke, s. Gl. (15.1)). Die Isolinien im Teilbild a) am Ort des **Spannungsmaximums** verlaufen ca. 7-fach dichter als am Ort des **Spannungsminimums**.

Die Option, aus den Isothermen den Gradienten zu bilden, erfolgt über die Tecplot Option:

Data → Alter → Specify Equations:

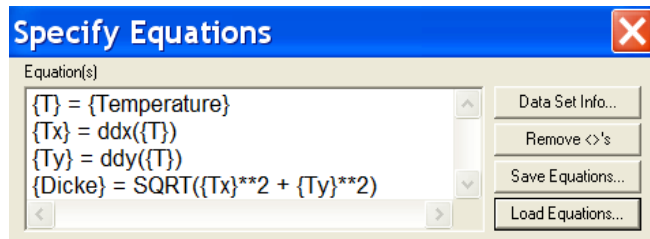
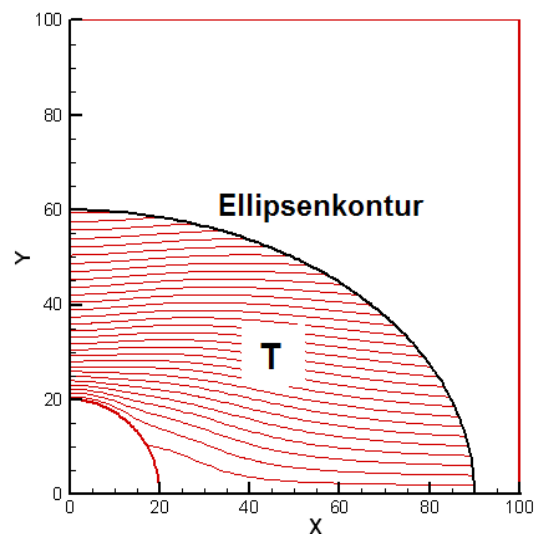
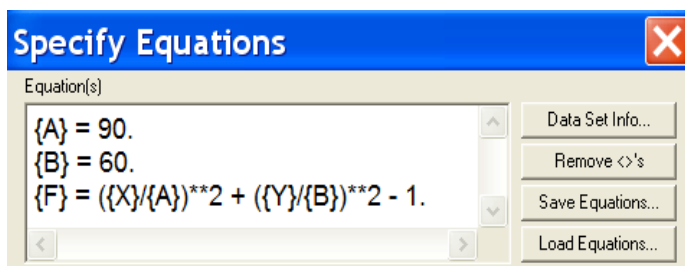


Bild 15.5. Beschneidung der extrahierten Fasern (T -Isothermen) aus Bild 15.4a zur Generierung eines elliptischen Pflasters (Halbachsen $A=90$ und $B=60$), das z.B. auf ein Standard-Laminat aufgeklebt wird.

Tecplot Option: Plot → Blanking → Value Blanking zusammen mit „Specify Equations“

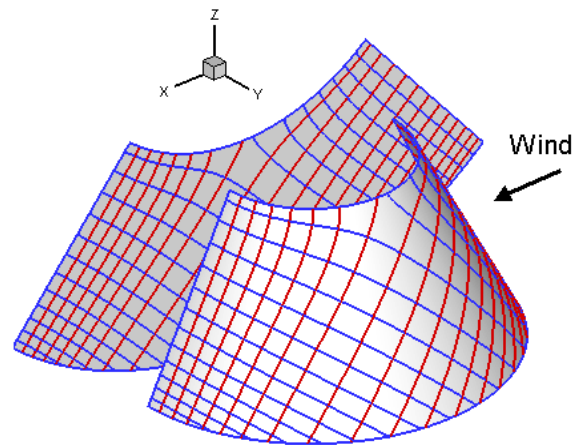


Abwicklung und Projektion von gekrümmten Faserverläufen in eine Ebene hinein

Eine weitere Tecplot-Option ist die Überführung einer einfach gekrümmten Schalenstruktur in eine Ebene, sofern die Struktur abwickelbar ist, s. Bild 15.6. Diese Technik ist wichtig, da 2D-Muster einfacher gestickt werden können.

15.6. Der Kegelmantel als Beispiel für eine abwickelbare Fläche. Die gezeigte Struktur unter Windbelastung führt im Wesentlichen zu Membranspannungen. Nach der CAIO_{OW}-Analyse kann das **N1-N2**-Muster abgewickelt werden. Alle Tecplot-Optionen (Änderung der Faserdichte, Manipulation von Einzelfasern etc.) sind sofort auf der abgewickelten Fläche wirksam. Eine Neuberechnung mit CAIO_{OW} erübrigt sich.

Die 3D→2D Transformationsgleichungen $(X, Y, Z) \rightarrow (x, z)$ sind über die Option „Specify Equations“ einzugeben.



Extraktion der Faserpositionen (x,y,z- Koordinaten) im ASCII- und dxf-Format

Um die Isothermen als Fasern zu extrahieren, d.h. um die Koordinaten zu bekommen, werden die Isolinien in Linienzüge (Tecplot-Terminus: Zones) umgewandelt:

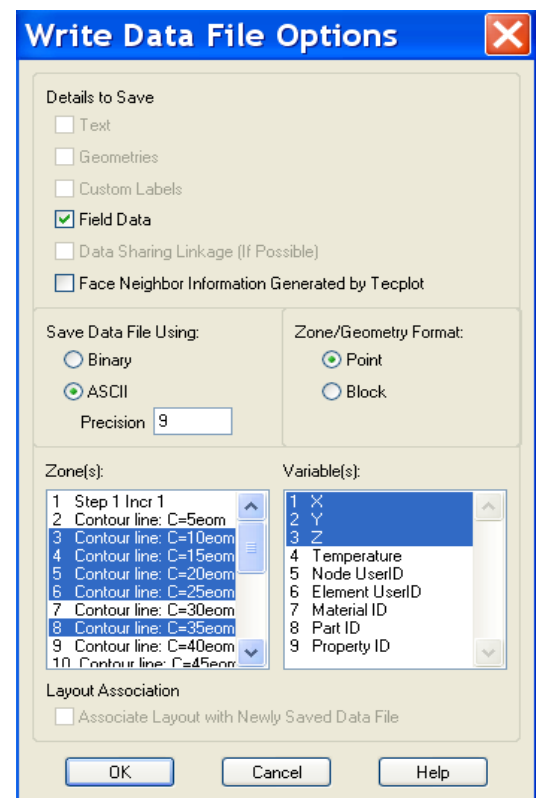
Data → *Extract* → *Contour Lines*

Das Herausschreiben der Koordinaten erfolgt über das Menü

File → *Write Data File (ASCII)*

Tools → *Export DXF*

Dabei kann jede gewünschte Faser (Roving) einzeln oder gruppenweise selektiert und ausgegeben werden.



16. Diskussion und Resumé

Vergleich älterer CAIO-Verfahren mit CAIO_{ow}

Nach den vorausgegangenen Kapiteln erhebt sich die Frage, inwieweit sich das vorgestellte Verfahren CAIO_{ow} von anderen Verfahren unterscheidet und ob ein signifikanter Vorteil zu jenen besteht. Zum Ausgangspunkt der Diskussion sollen zwei Punkte angeführt werden.

1. Das CAIO-Potenzial wird in den meisten Veröffentlichungen ohne die explizite Berechnung der HS-Linien aufgezeigt, da diese für einen Nachweis nicht gebraucht werden. Erst bei der Realisierung der Konstruktion werden die CAIO-Verläufe benötigt.
2. Bis zum heutigen Zeitpunkt ist keine *kommerzielle* Software zur Generierung der HS-Linien aus den Hauptspannungsrichtungen erhältlich.

Der erste Punkt ist nicht überraschend. Die Evaluierung des CAIO-Konzepts benötigt die CAIO-Linien nicht. Vielmehr reicht es aus, die orthotropen Eigenschaften eines Faser-Kunststoff-Verbundes über die HS-parallelen Element-Lokalsysteme zuzuweisen. Auch die erste CAIO-Dissertation /17/ beschränkt sich auf eine solche Vorgehensweise. Durch diese Vorgehensweise lassen sich Konstruktionen aus Laminaten mit variablem Faserverlauf und Standard-Laminaten quantitativ vergleichen.

Der zweite Punkt ist schon mehr überraschend. Die Software, mit denen die HS-Linien dargestellt werden, existiert (z.B. /2/ und /24/ CAIO_{Shell}) jedoch nicht kommerziell. CAIO_{Shell} bzw. ihr Konzept (s. Kap. 2) hat eine gewisse Verbreitung gefunden, so in /19/ und /28/. Nach Ansicht des Autors ist diese Software zwar ausreichend geeignet für Einzelprobleme, jedoch nicht robust genug für eine industrielle Nutzung. Dafür sind folgende Gründe maßgebend:

Zuerst soll Bild 2.1 in Kap. 2 näher untersucht werden. Wenn dort die HS-Richtung genau auf eine Elementecke zielt, so liefert der Algorithmus keinen Schnittpunkt aus zwei zu ver-schneidenden Geraden. Es existiert die Gerade aus der Punkt-Steigungsformel, nicht jedoch die Gerade aus der Elementberandung (2-Punkte-Formel, s. Kap. 2). Dies stellt eine Ausnahme dar und muss gesondert programmiert werden. Es zeigt sich, dass bei der Vielfalt möglicher FE-Netze diverse Ausnahmesituationen bestehen, die entsprechend programmiert werden müssen. Als Beispiel sei nur genannt, dass HS-Linien, die in der Struktur verbleiben, Bilder 2.3 und 4.1, unendliche Schleifen produzieren und nach möglichst sinnvollen Kriterien abgebrochen werden müssen. Während dies nur den Programmieraufwand erhöht, ergeben sich jedoch durch eine solche Integration auch fast unlösbare Situationen. Es sei wieder auf das Bild 2.3 verwiesen. Dort sind mehrere Startelemente (rot markiert) für die Integration gezeigt, jedes von ihnen liefert eine HS-Linie. In der Mitte des Fahrradsattels sind einige Startelemente auf der Symmetrieachse positioniert. Da diese gleichzeitig parallel zu einer HS-Richtung liegt, fallen hier verstärkt HS-Linien an mit einer irreführenden Dichte. Dies ist zwar eine vermeidbare Extremsituation, letztendlich können aber „optimale“ Startelemente nur durch vorherige Inspektion der HS-Richtungen ausreichend gut positioniert werden. Ein solches manuelles Vorgehen ist jedoch weit entfernt von einer robusten Handhabung der zu erstellenden Software, die möglichst gleichmäßig HS-Linien generieren soll. Diese Problematik ist auch in /2/ ausführlich behandelt.

Mangels geeigneter Software für die Berechnung der HS-Linien wurden ersatzweise kommerzielle Programme verwendet, die Stromlinien aus Geschwindigkeitsfeldern erzeugen, zum Beispiel in /29/ und /35/. Die dahinterstehende Technik nennt sich *streamtracing* und ist uneingeschränkt geeignet für die Integration von vektoriellen Richtungsfeldern. Solche Richtungsfelder, die aus Geschwindigkeitsvektoren bestehen, stellen jedoch Sonderfälle dar. Es lassen sich damit jedoch keine tensoriellen Richtungsfelder integrieren, da bei fast allen nichttrivialen Spannungsproblemen an bestimmten Stellen (abhängig vom lokalen Vorzeichen der Schubspannung, siehe Kap. 1) sich die HS-Richtung von einem Element zum Nachbarelement um 180° ändert. Streamtracing basierte Software generiert dann Stromli-

nien, die in sich zurücklaufen oder um 90° abdriften, sozusagen gemittelt aus den 2 HS-Richtungen, die sich um 180° unterscheiden.

Was bei den bisherigen CAIO-Softwarelösungen bisher noch gefehlt hat, ist die robuste Ermittlung der CAIO-Linien, die die oben genannten Nachteile vermeidet. Die Grundidee, die das CAIO-Konzept auf eine neue Basis stellt, ist in der orthotropen Wärmeleitung zu finden. Dahinter steht das Verhalten extrem orthotroper Wärmeleitungsprozesse, deren relevanter Wärmestrom (Kap. 3) in vorgegebener (HS-)Richtung fließt, quasi in einem Gerinne, flankiert durch Isothermen, die sich als CAIO-Linien erweisen. Diese Aussage ist korrekt, sofern die orthotrope Wärmeleitfähigkeit in der vorgegeben HS-Richtung um mehrere Größenordnungen die Wärmeleitfähigkeit in der dazu senkrecht stehenden Richtung übertrifft. Dieses Konzept ist nun in jedem FE-Programm anwendbar, mit dem lineare Statik und orthotrope Wärmeleitung gerechnet werden können. Das „Rezept“ ist schon in der Zusammenfassung am Anfang der Arbeit genannt.

Ist CAIO mit der Faserorientierung in den Hauptspannungsrichtungen optimal?

Das CAIO-Konzept beruht auf der nachvollziehbaren Annahme, dass Fasern mit ihrer hohen Steifigkeit und Festigkeit in HS-Richtung ihr maximales Potenzial entwickeln. Sofern unidirektionale Beanspruchungen vorliegen, gilt diese Aussage uneingeschränkt. Im Bereich von Spannungskonzentrationen wird jedoch auch die 2. Hauptspannung mehr und mehr aktiv. Dies erfordert i.A. eine weitere CAIO-Schicht in Richtung der 2. Hauptspannung. Es kommt nun jedoch sehr auf das Verhältnis der beiden Hauptspannungen an und auf deren Vorzeichen. Es zeigt sich, dass in Gebieten mit 2 Hauptspannungen gleichen Vorzeichens der Kreuzverbund (realisiert über die 2 HS-Richtungen) definitiv nicht optimal ist, da ein ausgeglichener Winkelverbund AWW die bessere Lösung darstellt. Das CAIO-Konzept muss jedoch nicht aufgegeben werden. CAIO_{OW} integriert Richtungsfelder, unabhängig davon, ob diese physikalisch eindeutig definiert vorliegen (z.B. in Form von HS-Richtungen) oder ob diese nach gewissen ingenieurmäßigen Erfahrungen (Bild 9.3) in modifizierter Form vorliegen.

Für den Fall vorzeichengleicher Hauptspannungen ist der ausgeglichene Winkelverbund AWW dem Kreuzverbund überlegen. Die AWW-Orientierung ist abhängig vom Verhältnis der beiden Hauptspannungen vorgegeben, $/23/$. Mit diesen Winkel-Korrekturen lässt sich nun ein modifiziertes HS-Richtungsfeld ableiten, das sich mit CAIO_{OW} problemlos integrieren lässt. Bild 9.4 dokumentiert das deutlich verbesserte Verhalten einer zugbelasteten Lochscheibe mit einer AWW-Auslegung gegenüber einer klassischen CAIO-Auslegung in Form eines Kreuzverbunds.

Die Handhabung von CAIO_{OW} im Zusammenhang mit FE-Programmen

Das hauptsächliche Anwendungsgebiet von CAIO_{OW} wird sich auf die Bestimmung der HS-Linien konzentrieren, obwohl mit dieser Methode andere Richtungsfelder ebenfalls analysiert werden können. Der Aufwand einer CAIO-Analyse ergibt sich im Wesentlichen aus der Bereitstellung der HS-Richtungen. Diese werden von den FE-Programmen standardmäßig geliefert, jedoch müssen schon bei der Evaluierung entsprechend dem 1. Punkt der Diskussion diese Werte in einen separaten FE-Input transferiert werden. Da problembedingt die HS-Richtungen von Element zu Element variieren, sind für jedes Element Lokalsysteme zu definieren. Dieser Aufwand ist generell CAIO geschuldet und wird auch durch CAIO_{OW} nicht verringert. In der Vergangenheit sind dafür von den Anwendern Prozeduren entwickelt worden, die einen einmaligen Aufwand darstellen und in der Folge ohne weiteren Aufwand genutzt werden können. Ob diese Lokalsysteme nun für einen Evaluierungslauf zum Nachweis einer verbesserten Konstruktion bereitgestellt werden oder dieselben Lokalsysteme für die orthotrope Wärmeleitung verwendet werden: Ein Mehraufwand ergibt sich nicht. Da der Evaluierungslauf in jeder CAIO-Analyse gemacht werden muss, dieser jedoch nicht die CAIO-Linien liefert, können diese bei Anwendung von CAIO_{OW} ohne nennenswerten weiteren Aufwand be-

rechnet werden. Gestützt wird diese Aussage durch die Empfehlung einfacher thermischer Randbedingungen in Kap. 3.6. In den meisten Fällen führt eine uniforme Aufheizung aller Elemente (Wärmestromquellen in allen Elementen) bei gleichzeitiger Fixierung eines Knotenpunkts auf eine Referenztemperatur (zur Vermeidung unendlicher Temperaturen) auf die gesuchten CAIO-Linien in Form von Isothermen. Sofern die Verteilung der Isothermen nicht gleichförmig genug sein sollte, hat man durch das vorliegende Isothermenbild ausreichend Hinweise, die thermischen Randbedingungen für einen zweiten CAIO_{OW}-Lauf zu verbessern.

Für die Umsetzung der CAIO-Linien (Isothermen) in CAD-Formate muss jedoch ein externes Programm wie Tecplot eingesetzt werden. Dieses Programm, zusammen mit den FE-Programmen Abaqus oder Ansys, sind in der Industrie weitverbreitet, sodass der Einsatz von CAIO_{OW} als Methode zur Berechnung von HS-Linien das Potenzial für eine FE-Standardanwendung werden könnte. Während die Beschränkung auf ein FE-Programm die CAIO-Linien nur visualisiert, bedeutet der Einsatz von Tecplot die Manipulationsfähigkeit der erzielten Ergebnisse: Generierung zusätzlicher oder Eliminierung bzw. Verschiebung gewisser HS-Linien. Kap. 15.6 nennt diverse weitere Möglichkeiten.

Die Genauigkeit der CAIO_{OW} Methode

Die Ausführungen in Kap. 3 stützen sich auf zwei theoretisch abgesicherte Beispiele der orthotropen Wärmeleitung, die den Einfluss des Orthotropiegrades der Wärmeleitungsfähigkeiten demonstrieren. Sofern das Verhältnis der Wärmeleitungsfähigkeiten extrem ist, wird der relevante Wärmestrom (Kap. 3.4) in einer vorgegebenen Richtung fließen, kanalisiert durch Isothermen, die sich als CAIO-Linien erweisen. Die vorgegebene Richtung ist frei, sie kann also auch eine Hauptspannungsrichtung sein.

Diese Aussage ist jederzeit überprüfbar. Die vorgegebenen HS-Richtungen stellen sich grafisch als Vektoren dar, die die Isothermen (CAIO-Linien) tangieren, siehe z.B. Bild 15.3. Gleichzeitig demonstriert dieses Bild die Unempfindlichkeit des Verfahrens bei einem Vorzeichenwechsel der HS-Richtung. Der Einsatz von Software mit einer *streamtracing* Technik versagt an dieser Stelle. Zudem ist diese Technik nicht einsetzbar auf Schalenstrukturen.

Bei allen CAIO-Verfahren, die auf direkter Integration der HS-Richtungen basieren, ist die HS-Linien-Verteilung methodenbedingt ungleichförmig, Kap. 1 und /2/. Es liegt in der Natur kontinuierlicher Temperaturfelder, dass Isothermen zwar konvergieren (sich verdichten) und divergieren, jedoch eben kontinuierlich ohne künstliche Anhäufung oder Ausdünnung. Letzteres ergibt sich aber bei sequenzieller Wahl der Startpunkte (CAIO_{Shell}) für jede einzeln zu integrierende HS-Richtung aus dem Anfangswertproblem der Differenzialgleichung $y' = f(x,y)$.

Eine wichtige Eigenschaft der Spannungsfelder ist das Vorhandensein von singulären Punkten, in denen die HS-Richtung unbestimmt bleibt, zum Beispiel unter einer Punktlast, siehe Kap. 4. Die Isothermen zeigen radial auf den Lastpunkt, dürfen diesen jedoch nicht treffen. Die unterschiedlichen Isothermen müssten in ihrem Schnittpunkt (=Lastpunkt) die gleiche Temperatur aufweisen: ein Widerspruch. Das „Abdriften“ der Isothermen in unmittelbarer Nähe zum singulären Punkt ist abhängig von der Netzfeinheit des FE-Modells, jedoch wird in diesem Einflussbereich die HS-Richtung die Isotherme nicht tangieren und stellt somit eine Ungenauigkeit dar. Singuläre Punkte sind im Isothermenbild leicht festzustellen durch den Radialcharakter der Isothermen. Wenn es auf hohe Genauigkeit ankommt, muss eine Modifikation des thermischen FE-Modells vorgenommen werden. (Normalerweise sind die Netze des statischen und thermischen FE-Modells identisch. Die Strukturelemente des statischen Modells werden durch thermische Elemente ersetzt, die Elementtopologie bleibt unverändert.) Das thermische Modell muss eine kleine Aussparung rund um den singulären Punkt erhalten, indem einige Elemente dort eliminiert werden. Bild 4.2 zeigt ein Beispiel. Es muss sich dabei nicht um ein speziell radiales Netz handeln. Es genügt, die Elemente zu eliminieren, die den singulären Punkt enthalten. Die Isothermen werden dann auf dem Rand der Aussparung enden und werden von den HS-Richtungen tangiert.

Streamtracing versus CAIO_{OW}

Die problemlose Anwendung von CAIO_{OW} wird in dieser Arbeit auf Richtungsfelder verschiedensten Ursprungs angewendet: Hauptspannungsrichtungen, auch modifiziert über AWW, Hauptschubspannungsrichtungen (Repräsentant für Gleitlinien im plastischen Bereich), Lastpfadrichtungen (Alternative zur CAIO-Linie in HS-Richtung), Geschwindigkeitsfelder der Hydromechanik, Differenzialgleichungen der Mathematik. Nur für den Fall vektorieller Richtungsfelder, also für Geschwindigkeitsfelder, ist die *streamtracing* Technik generell anwendbar und hat gegenüber CAIO_{OW} einen Vorteil. Der Grund dafür liegt allein in der knotenpunktsbezogenen Eigenschaft der Geschwindigkeitsfelder. CAIO_{OW} jedoch basiert auf elementbezogenen Eigenschaften, da die orthotropen Wärmeleitungsfähigkeiten nur elementweise definiert werden können. Geschwindigkeitsvektoren an den Knoten müssten also erst umständlich auf die Integrationspunkte der Elemente umgerechnet werden. Für tensorielle Richtungsfelder (z.B. Spannungen) ist streamtracing untauglich, wie dies in Kap. 1 nachgewiesen ist, aber auch in /2/ überzeugend demonstriert wird.

Resumé

Mit CAIO_{OW} steht eine Methode zur Verfügung, die nicht über einen Programmcode realisiert ist, sondern im Umfeld von FE-Programmen eine Anwendung darstellt, die Standard-Optionen wie *lineare Statik* und *orthotrope Wärmeleitung* nutzt. Somit ist eine Verwandtschaft zu CAO und SKO gegeben. Diese Anwendungen können prinzipiell von einem FE-Anwender ebenfalls ohne Zusatzsoftware eingesetzt werden.

Obwohl CAIO_{OW} beliebige Richtungsfelder aus der Physik und Mathematik integriert, wird der Schwerpunkt der praktischen Anwendung in der Berechnung von Hauptspannungslinien liegen. Fasern mit ihren ausgeprägten Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften in longitudinaler Richtung können hohe Lasten aufnehmen, sofern sie dem Krafffluss in der Struktur folgen. Es müssen jedoch nicht unbedingt Fasern sein. Konstruktionsmerkmale wie z.B. Blechsicken /19/ oder Stahlarmierungen (Kap. 12.8) im Beton sind wirkungsvoll eingesetzt, wenn sie sich an den Hauptspannungsrichtungen orientieren. Voraussetzung ist die Anwendung einer robusten Methode, die den Verlauf der HS- oder Lastpfadlinie visualisiert. Die vorausgehende Diskussion mit den Verweisen auf entsprechende Kapitel hat gezeigt, dass CAIO_{OW} für solche Aufgaben besonders geeignet ist.

Literaturverzeichnis

- /1/ Albring, W., Angewandte Strömungslehre, 4. Auflage, Dresden, 1970
- /1a/ H. Baier, C. Seeßelberg, B. Specht, Optimierung in der Strukturmechanik, Braunschweig, 1994.
- /2/ Beyer, F.R., Hauptspannungstrajektorien in der numerischen Festkörpermechanik- Ein Algorithmus zur Visualisierung der Bauteilbeanspruchung in zwei und drei Dimensionen, Dresden, Dissertation 2015
- /3/ Carslaw, H.S., Jaeger, J.C., Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, 1959
- /4/ Collatz, L., Differentialgleichungen, 4. Auflage, Stuttgart, 1966
- /5/ Chang, F.K., and Lessard, L.B., Damage Tolerance of Laminated Composites Containing an Open Hole and Subjected to Compressive Loadings:
Part I - Analysis, Journal of Composite Materials, Vol. 25, pp. 2 - 43, 1991
Part II -Experiment, Journal of Composite Materials, Vol. 25, pp. 44 - 64, 1991
- /6/ Decker, K.H., Maschinenelemente, 14. Auflage, München 1998
- /7/ Eckert, E., Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch, Springer Verlag Berlin, 1959
- /8/ Föppl, A., Föppl, L., Drang und Zwang, 1. Band, 2. Aufl., München 1924
- /9/ Frocht, M.M., Photoelasticity, Volume II, New York, 1948
- /10/ García, E.G., Double Experimental Procedure for Model-Specific Finite Element Analysis of the Human Femur and Trabecular Bone, Dissertation 2013, München
- /11/ Hahn, D.W, Heat conduction, John Wiley & Sons, 2012
- /12/ Hyer, M.W., Charette, R.F., Use of Curvilinear Fiber Format, in Composite Structure Design, AIAA Journal, Vol 29, No. 6, 1991, pp. 1011-1015
- /13/ Johnson, W., Sowerby, B., Venter, R.D., Plane-Strain Slip-Line Fields for Metal-Deformation Processes, Oxford, 1982
- /14/ Jonas, M., Optimierung der Faserstruktur von Schikanebauteilen mit Hilfe der CAIO Methode, Diplomarbeit, WS 2006, IFB Universität Stuttgart
- /15/ Kaufmann, W., Technische Hydro- und Aeromechanik, 3. Auflage, Berlin, 1963
- /16/ Kelly, D.W., Tosh, M.W., Interpreting Load Paths and Stress Trajectories in Elasticity, Engineering Computations, Vol. 17 (2000), pp. 117-135
- /17/ Kriechbaum, R., Ein Verfahren zur Optimierung der Faserverläufe in Verbundwerkstoffen durch Minimierung der Schubspannungen nach Vorbildern der Natur, Dissertation 1994, KfK-Bericht 5406, Karlsruhe
- /18/ Kloth, W., Atlas der Spannungsgelder in technischen Bauteilen, Düsseldorf, 1961
- /19/ Majić, N., Entwicklung einer FEM-basierten Methode zur fertigungsorientierten Sickenmustergestaltung für biegebeanspruchte Tragstrukturen, Institut für Produktentwicklung (IPEK), Dissertation, 2014
- /20/ Mattheck, C., Design in der Natur, Rombach Verlag, 3. Auflage, 1997
- /21/ Mattheck, M., Denkwerkzeuge nach der Natur, Karlsruhe, 2010
- /22/ Mattheck, C., Bethge, K., Weber, K., Die Körpersprache der Bäume, Enzyklopädie des Visual Tree Assessment, Karlsruhe, 2014
- /23/ Michaeli, W., Huybrechts, D., Wegener, M., Dimensionieren mit Faserverbundkunststoffen, München, 1994

- /24/ Moldenhauer, H., Beitrag zum BMBF-Projekt: Entwicklung der Software *CAIO_{Shell}* zur Auslegung optimierter Faserverläufe in Schalenstrukturen. Beitrag zum BMBF-Projekt BIOTEX: Bionische Gestaltung und textile Herstellungsverfahren zur kostengünstigen Herstellung optimierter Faserverbundstrukturen, Förderkennzeichen: 03X100L, 2009
- /25/ Moldenhauer, H., Beitrag zum BMBF-Projekt: Entwicklung von effizienten, einfach anzuwendenden Konstruktionsprinzipien für technische Bauteile nach dem Vorbild der Natur, Förderkennzeichen: 01RI0638C, 2010
- /26/ Moldenhauer, H., Berechnung variabler Faserverläufe zur Optimierung von Compositestrukturen, *Lightweightdesign*, Heft 1, 2011, S. 51-56
- /27/ Moldenhauer, H., Die Visualisierung des Kraftflusses in Stahlbaukonstruktionen, *Stahlbau* 81 (2012), Heft 1, S. 32-40
- /28/ Reinhart, G., Teufelhart, S., Optimization of mechanical loaded lattice structures by orientating their struts along the flux of forces, 8th CIRP Conference on Intelligent Computation in Manufacturing Engineering, *Procedia CIRP* 12 (2013) 175-180 (www.elsevier.com/locate/procedia).
- /29/ Reuschel, J.D., Untersuchung der Faseranordnung natürlicher Faserverbunde und Übertragung der Ergebnisse auf technische Bauteile mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode, Dissertation 1999, Wissenschaftliche Berichte FZKA 6276 des Forschungszentrums Karlsruhe
- /30/ Röscher, F., *Die Maschinenelemente*, 1. Band, Berlin, 1927
- /31/ Prandtl, L., Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden, *Zeitschrift für angew. Math. und Mech.*, Bd. I, 1921, S. 15-20
- /32/ Puck, A., Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten, München, 1994. (*Hoffmann-Gleichung in Puck auf S. 47 dokumentiert. Original: Hoffmann, O., The Brittle Strength of Orthotropic Materials. J. Comp. Mat. Vol. 1 (1967), S. 200-206.*)
- /32a/ B. Schläpfer, Optimal Design of Laminated Structures with Local Reinforcements, Zürich, Dissertation 2012.
- /33/ Schürmann, H., *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*, 1. Auflage, Berlin, 2005
- /34/ Spickenheuer, A., Zur fertigungsgerechten Auslegung von Faser-Kunststoff-Verbundbauteilen für den extremen Leichtbau auf Basis des variabelaxialen Fadenablageverfahrens Tailored Fiber Placement, Dresden, Dissertation 2014
- /35/ Temmen, H., Degenhardt, R., Raible, T., Tailored Fibre Placement Optimization Tool, 25th International Congress of the Aeronautical Sciences, 2006
- /36/ Tesch, G., Optimierung der Faserstruktur von Schikanebauteilen mit Hilfe der CAIO Methode, Studienarbeit, Mai 2006, IFB Universität Stuttgart
- /37/ Tesari, I., Moldenhauer, H., Beitrag zum BMWI-Projekt: Automatisierung, Validierung, Benchmarking und Standardisierung bionischer Optimierungsverfahren, Förderkennzeichen: 01FS13009, 2016
- /38/ Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3rd ed., Singapore, 1982
- /39/ Tosh, M.W., Kelly, D.W., On the design, manufacture and testing of trajectorial fibre steering for carbon fibre composite laminates, *Composites Part A* 31, (2000), 1047-1060
- /40/ Venkatraman, B., Patel, S., *Structural Mechanics with Introductions to Elasticity and Plasticity*. New York. 1970
- /41/ Vocke, W., *Räumliche Probleme der linearen Elastizität*, Leipzig, 1969
- /42/ Waldman, W., Heller, M., Kaye, R., Rose, F., Advances in Two-dimensional Structural Loadflow Visualisation. *Engineering Computations*, 19 (2002), pp. 305-326
- /43/ Wyss, Th., Beitrag zur Spannungsuntersuchung an Knotenblechen eiserner Fachwerke, *Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, VDI, Berlin 1923
- /44/ Wyss, Th., *Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern*, Berlin, 1926

Anhang: Eingesetzte Software

- /a/ Abaqus (Simulia), ab Version 5.8
- /b/ Ansys/Mechanical , ab Version 6.1
- /c/ Tecplot, Amtaec Engineering, ab Version 9
- /d/ Geogebra, Matematiksoftware, www.geogebra.at
- /e/ M. Lindell, The Laminator, Version 3.7, 2011, www.thelaminator.net