KITopen (2016), 3 pp.
DOI: 10.5445/IR/1000061837

Ein Vergleichssatz für Integralgleichungen

Peter Volkmann

In [2] wird ein Vergleichssatz bewiesen, in welchem (gleichzeitig) Differential- und Funktionaloperatoren auftreten. Wie hier gezeigt werden soll, können dort auch (Volterrasche) Integraloperatoren hinzugefügt werden. Die Grundlage dafür ist der unten gegebene Satz; er wurde vorgetragen auf der „Conference on Inequalities and Applications '14", Hajdúszoboszló (Ungarn), 7.-13.9.2014.

Wir verwenden die Terminologie aus [2]: E ist ein reeller topologischer Vektorraum (T_2-Axiom wird vorausgesetzt), und K ist ein Keil in E, also $\emptyset \neq K \subseteq E$ mit

$$\lambda \geq 0,\ \xi \in K,\ \eta \in K \Longrightarrow \lambda(\xi + \eta) \in K.$$

Es sei noch K abgeschlossen und $\mathrm{Int} K \neq \emptyset$. Für $\xi, \eta \in E$ setzen wir

$$\xi \leq \eta \Longleftrightarrow \eta - \xi \in K,\ \xi \ll \eta \Longleftrightarrow \eta - \xi \in \mathrm{Int} K.$$

Es bezeichne E^* den topologischen Dualraum von E, und es sei K^* der zu K duale Keil, d.h.

$$K^* = \{\varphi \mid \varphi \in E^*,\ \varphi(\xi) \geq 0 \quad (\xi \in K)\}.$$

Ist $D \subseteq E$, so wird $\Phi : D \to E$ *(schwach monoton) wachsend genannt*, wenn aus $\xi, \eta \in D,\ \xi \leq \eta$ stets $\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta)$ folgt. Gemäß [1] heißt die Funktion $\Phi : D \to E$ *quasimonoton wachsend*, wenn aus $\xi, \eta \in D,\ \xi \leq \eta,\ \varphi \in K^*,\ \varphi(\xi) = \varphi(\eta)$ stets $\varphi(\Phi(\xi)) \leq \varphi(\Phi(\eta))$ folgt.

Nachstehend werden für $t > 0$ Funktionen $g : [0, t] \to E$ integriert, wobei

$$\int\limits_0^t g(s) ds = \xi$$

folgende Bedeutung haben soll: Es ist $\xi \in E$, und für alle $\varphi \in E^*$ ist $\varphi \circ g : [0, t] \to I\!R$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar mit

$$\int\limits_0^t \varphi(g(s)) ds = \varphi(\xi).$$

Typoskript: Marion Ewald

Satz. Es sei $T > 0$, und es seien $v, w : [0,T] \to E$ stetige Funktionen mit

$$v(0) \ll w(0), \tag{1}$$

$$\int_0^t k(t,s,w(s))ds + f(t,w(t)) \ll \int_0^t k(t,s,v(s))ds + f(t,v(t)) \\ (0 < t \leq T). \tag{2}$$

Dabei seien $k(t,s,\xi), f(t,\xi) \in E$ für alle in (2) vorkommenden t, s, ξ definiert, es sei $k(t,s,\xi)$ in ξ wachsend und $f(t,\xi)$ in ξ quasimonoton wachsend.

Dann gilt

$$v(t) \ll w(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Beweis. Anderenfalls ist

$$w(t_0) - v(t_0) \in E \setminus \mathrm{Int}K$$

für ein $t_0 \in [0,T]$ möglich. Auf Grund der Stetigkeit von v und w kann t_0 minimal gewählt werden; wegen (1) ist dann

$$t_0 > 0,$$

und wir bekommen

$$w(t) - v(t) \in K \quad (0 \leq t \leq t_0), \tag{3}$$

$$w(t_0) - v(t_0) \in \partial K. \tag{4}$$

Wegen (4) liefert der Satz von Hahn und Banach ein

$$\varphi \in K^* \setminus \{0\} \tag{5}$$

mit

$$\varphi(w(t_0) - v(t_0)) = 0. \tag{6}$$

Nach (4), (5), (6) haben wir

$$v(t_0) \leq w(t_0),\ \varphi \in K^*,\ \varphi(v(t_0)) = \varphi(w(t_0)),$$

und da $f(t_0,\xi)$ in ξ quasimonoton wächst, folgt

$$\varphi(f(t_0,v(t_0))) \leq \varphi(f(t_0,w(t_0))). \tag{7}$$

Wegen (5) ergibt sich aus (2) für $t = t_0$ unter Beachtung von (7) die Ungleichung

$$\int_0^{t_0} \varphi(k(t_0,s,w(s)))ds < \int_0^{t_0} \varphi(k(t_0,s,v(s)))ds,$$

also

$$\int_0^{t_0} \varphi(k(t_0, s, w(s)) - k(t_0, s, v(s)))ds < 0. \tag{8}$$

Wegen (3) ist $v(s) \leq w(s)$ $(0 \leq s \leq t_0)$, und es folgt

$$k(t_0, s, v(s)) \leq k(t_0, s, w(s)) \quad (0 \leq s \leq t_0).$$

Da $\varphi \in K^*$ ist, hat somit die linke Seite von (8) einen nicht-negativen Wert, also kann (8) nicht gelten.

Literatur

1. Volkmann, *Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen.* Math. Z. **127**, 157-164 (1972).

2. —, *Quasimonotonicity as a tool for differential and functional inequalities.* Inequalities and Applications 2010, herausgegeben von Catherine Bandle et al., International Series of Numerical Mathematics 161, Springer Basel, 269-273 (2012).

Adresse des Autors: Institut für Analysis, KIT, 76128 Karlsruhe, Deutschland